



绪 论

光是我们最熟悉的现象之一。我们的周围是一个充满着光明的世界，没有光，人类就无法生存。那么，光是什么？光的本质是什么？这个问题很早就引起了人们的关注，并且为此已争论了若干个世纪。

早在我国春秋战国时期的墨翟及其弟子所著的《墨经》中，就已经记载了光的直线传播特性以及光在镜面上的反射现象。比《墨经》晚一百多年，古希腊数学家欧几里德(Euclid)所著的《光学》中，也研究了平面镜成像问题。经过漫长的光学发展时期，到了公元17世纪下半叶，对光的认识有两派针锋相对的观点：一派是以牛顿(Newton)为首的微粒说，另一派是以惠更斯(Huygens)为首的波动说。微粒说认为，光是由光源飞出来的微粒流。这种观点可以解释光的直线传播性质，光的反射定律和折射定律，并预言光在密度大的介质中的速度大于光在密度疏的介质中的传播速度。波动说则认为，光是类似于水波、声波在“以太”中传播的弹性波。这种观点成功地解释了光的反射定律、折射定律，以及光在方解石中的双折射现象，并且认为光在密度较密的介质中的速度小于光在密度较疏的介质中的传播速度。对于这两种截然不同的观点，由于受当时生产水平所限，同时由于牛顿已经具有很高的权威，因而从17世纪到整个18世纪，微粒说占了主导地位。

到了19世纪，人们进行了几个重要的实验：双缝干涉实验，光的衍射实验，测量光在水中传播速度的实验，并得到了光在水中的传播速度小于光在空气中的速度的结论。这些实验结果动摇了牛顿微粒说的基础，人们想起了惠更斯的波动说。但是，这种“弹性以太”理论也不能说明光的本质。19世纪中叶，麦克斯韦(Maxwell)在前人研究的基础上，建立了电磁理论，预言了电磁波的存在，特别是指出光也是一种电磁波。在80年代，赫兹(Hertz)用实验证实了电磁波的存在，并测定了电磁波的速度恰好等于光的速度。尽管这时关于“以太”的问题尚未解决，但麦克斯韦理论已为光波特性的研究奠定了理论基础。后来，迈克尔逊(Michelson)实验否定了“以太”的存在，也就否定了弹性波性质的波动说，更加确立了光的电磁理论学说。

随着科学技术的发展，特别是黑体辐射能量按波长分布的规律和光电效应的发现，光的微粒说向波动说提出了新的挑战。于是，光的波动说与微粒说又在一个新的层次上展开了争论。

20世纪初，由于爱因斯坦(Einstein)量子理论的提出和发展，人们对光的认识更加深化。由光的干涉、衍射和偏振等现象所证实的光的波动性，以及由黑体辐射、光电效应及康普顿(Compton)效应所证实的光的量子性——粒子性，都客观地反映了光的特性，光实际上具有波粒二重性。这两种看起来完全不同的属性的统一，实际上是一切微观粒子的共同特性，这个观点使人们对光的本质有了更深刻的认识。并且，正是在这个理论的推动下，60年代激光问世，一度沉寂的光学又焕发了青春，开始了一个新的发展时期，出现并发展了许多新兴光学学科，例如傅里叶光学、薄膜光学、集成光学、纤维光学、全息光学、非线性光学、统计光学，以及近场光学和衍射光学，等等。应当指出的是，人们对光的本性的认



识还远远没有完结,对光的本性、传播规律及光与物质相互作用的研究,仍然是一个不断探索、不断深入的研究课题。

光学是人们研究光的本性,光的产生、传播、接收,以及光与物质相互作用的科学。通常认为,基础光学由物理光学和几何光学两大部分组成,物理光学研究的是光物质的基本属性、传播规律和光物质与其它物质之间的相互作用。物理光学包含有波动光学和量子光学两部分内容,前者研究光的波动性,后者研究光的量子性。几何光学则是采用光的直线传播概念,研究光传播的基本规律和光通过光学系统成像的原理及应用,并不涉及光的波动性质。通常将利用光的直线传播概念,研究光在光学仪器中的传播和成像特性的内容称作应用光学。

根据全国高校光电子技术专业教学指导委员会的要求,本书仅限于讨论波动光学和应用光学的内容。



第 1 章 光在各向同性介质中的传输特性

19 世纪 60 年代, 麦克斯韦建立了经典电磁理论, 并把光学现象和电磁现象联系起来, 指出光也是一种电磁波, 是光频范围内的电磁波, 从而产生了光的电磁理论。光为电磁理论是描述光学现象的基本理论。

这一章基于光的电磁理论, 简单地综述光波的基本特性, 着重讨论光在各向同性介质中的传输特性, 光在介质界面上的反射和折射特性。这些内容是全书的基础。

1.1 光波的特性

1.1.1 光波与电磁波 麦克斯韦电磁方程

1. 电磁波谱

自从 19 世纪人们证实了光是一种电磁波后, 又经过大量的实验, 进一步证实了 X 射线、 γ 射线也都是电磁波。它们的电磁特性相同, 只是频率(或波长)不同而已。如果按其频率(或波长)的次序排列成谱, 则称为电磁波谱, 如图 1-1 所示。通常所说的光学区域(或光学频谱)包括红外线、可见光和紫外线。由于光的频率极高($10^{12} \sim 10^{16}$ Hz), 数值很大, 使用起来很不方便, 所以采用波长表征, 光谱区域的波长范围约从 1 mm 到 10 nm。人们习惯上将红外线、可见光和紫外线又细分为:

红外线(1 mm~0.76 μ m)	}	远红外	1 mm~20 μ m
		中红外	20 μ m~1.5 μ m
		近红外	1.5 μ m~0.76 μ m
可见光(760 nm~380 nm)	}	红 色	760 nm~650 nm
		橙 色	650 nm~590 nm
		黄 色	590 nm~570 nm
		绿 色	570 nm~490 nm
		青 色	490 nm~460 nm
		蓝 色	460 nm~430 nm
		紫 色	430 nm~380 nm
紫外线(400 nm~10 nm)	}	近紫外	380 nm~300 nm
		中紫外	300 nm~200 nm
		真空紫外	200 nm~10 nm

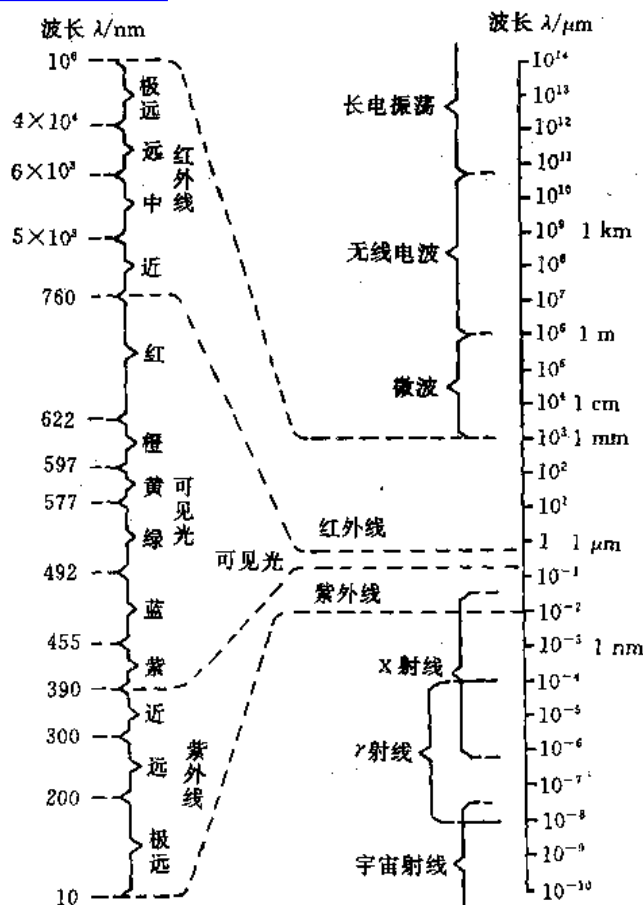


图 1-1 电磁波谱

2. 麦克斯韦电磁方程

根据光的电磁理论，光波具有电磁波的所有性质，这些性质都可以从电磁场的基本方程——麦克斯韦方程组推导出来。从麦克斯韦方程组出发，结合具体的边界条件及初始条件，可以定量地研究光的各种传输特性。

麦克斯韦方程组的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-4)$$

式中， \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{H} 分别表示电感应强度(电位移矢量)、电场强度、磁感应强度、磁场强度； ρ 是自由电荷体密度； \mathbf{J} 是传导电流密度。这种微分形式的方程组将空间任一点的电、磁场量联系在一起，可以确定空间任一点的电、磁场。

3. 物质方程

光波在各种介质中的传播过程实际上就是光与介质相互作用的过程。因此，在运用麦



Click to buy NOW!
 克斯韦方程组处理光的传播特性时，必须考虑介质的属性，以及介质对电磁场量的影响。描述介质特性对电磁场量影响的方程，即是物质方程：

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1-5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1-7)$$

式中， $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 为介电常数，描述介质的电学性质， ϵ_0 是真空中介电常数， ϵ_r 是相对介电常数； $\mu = \mu_0 \mu_r$ 为介质磁导率，描述介质的磁学性质， μ_0 是真空中磁导率， μ_r 是相对磁导率； σ 为电导率，描述介质的导电特性。

应当指出的是，在一般情况下，介质的光学特性具有不均匀性， ϵ 、 μ 和 σ 应是空间位置的坐标函数，即应当表示成 $\epsilon(x, y, z)$ 、 $\mu(x, y, z)$ 和 $\sigma(x, y, z)$ ；若介质的光学特性是各向异性的，则 ϵ 、 μ 和 σ 应当是张量，因而物质方程应为如下形式：

$$\mathbf{D} = \overset{\cdot\cdot}{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \overset{\cdot\cdot}{\mu} \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \overset{\cdot\cdot}{\sigma} \cdot \mathbf{E}$$

即 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 与 \mathbf{H} 、 \mathbf{J} 与 \mathbf{E} 一般不再同向；当光强度很强时，光与介质的相互作用过程会表现出非线性光学特性，因而描述介质光学特性的量不再是常数，而应是与光场强有关系的量，例如介电常数应为 $\epsilon(\mathbf{E})$ ，电导率应为 $\sigma(\mathbf{E})$ 。对于均匀的各向同性介质， ϵ 、 μ 和 σ 是与空间位置和方向无关的常数；在线性光学范畴内， ϵ 、 σ 与光场强无关；透明、无耗介质中， $\sigma=0$ ；非铁磁性材料的 μ 可视为 1。

本书前三章，限定讨论均匀、各向同性的非铁磁性介质；第 4、5 章，讨论光在各向异性介质中的传播规律；至于非线性光学内容，将在非线性光学课程中讨论。

4. 波动方程

麦克斯韦方程组描述了电磁现象的变化规律，指出任何随时间变化的电场，将在周围空间产生变化的磁场，任何随时间变化的磁场，将在周围空间产生变化的电场，变化的电场和磁场之间相互联系，相互激发，并且以一定速度向周围空间传播。因此，交变电磁场就是在空间以一定速度由近及远传播的电磁波，应当满足描述这种波传播规律的波动方程。

下面，我们从麦克斯韦方程组出发，推导出电磁波的波动方程，限定介质为各向同性的均匀介质，仅讨论远离辐射源、不存在自由电荷和传导电流的区域。此时，麦克斯韦方程组简化为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1-8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-11)$$

对(1-10)式两边取旋度，并将(1-11)式代入，可得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$



$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

并考虑到(1-8)式, 可得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

同理可得

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

若令

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1-12)$$

可将以上两式变化为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

此即为交变电磁场所满足的典型的波动方程, 它说明了交变电场和磁场是以速度 v 传播的电磁波动。由此可得光电磁波在真空中的传播速度为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.997\,92 \times 10^8 \text{ m/s}$$

根据我国的国家标准 GB3102.6-82, 真空中的光速为

$$c = (2.997\,934\,58 \pm 0.000\,000\,012) \times 10^8 \text{ m/s}$$

为表征光在介质中传播的快慢, 引入光折射率:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

除铁磁性介质外, 大多数介质的磁性都很弱, 可以认为 $\mu_r \approx 1$ 。因此, 折射率可表示为

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (1-14)$$

此式称为麦克斯韦关系。对于一般介质, ϵ_r 或 n 都是频率的函数, 具体的函数关系取决于介质的结构。

5. 光电磁场的能流密度

电磁场是一种特殊形式的物质, 既然是物质, 就必然有能量。此外, 因光电磁场是一种以速度 v 传播的电磁波, 所以它所具有的能量也一定向外传播。为了描述电磁能量的传播, 引入能流密度——坡印亭(Poynting)矢量 \mathbf{S} , 它定义为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1-15)$$

表示单位时间内, 通过垂直于传播方向上的单位面积的能量。

对于一种沿 z 方向传播的平面光波, 光场表示式为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}_y H_0 \cos(\omega t - kz)$$

式中的 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{h}_y 是电场、磁场振动方向上的单位矢量, 其能流密度 \mathbf{S} 为



$$S = s_z E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kz)$$

式中, s_z 是能流密度方向上的单位矢量。因为由(1-10)式有 $\sqrt{\epsilon} E_0 = \sqrt{\mu} H_0$, 所以 S 可写为

$$S = s_z \frac{n}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad (1-16)$$

该式表明, 这个平面光波的能量沿 z 方向以波动形式传播。由于光的频率很高, 例如可见光为 10^{14} 量级, 所以 S 的大小 S 随时间的变化很快。而目前光探测器的响应时间都较慢, 例如响应最快的光电二极管仅为 $10^{-8} \sim 10^{-9}$ 秒, 远远跟不上光能量的瞬时变化, 只能给出 S 的平均值。所以, 在实际上都利用能流密度的时间平均值 $\langle S \rangle$ 表征光电磁场的能量传播, 并称 $\langle S \rangle$ 为光强, 以 I 表示。假设光探测器的响应时间为 T , 则

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S dt$$

将(1-16)式代入, 进行积分可得

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} E_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E_0^2 = \alpha E_0^2 \quad (1-17)$$

式中, $\alpha = n / (2\mu_0 c) = \sqrt{\epsilon / \mu_0} / 2$ 是比例系数。由此可见, 在同一种介质中, 光强与电场强度振幅的平方成正比。一旦通过测量知道了光强, 便可计算出光波电场的振幅 E_0 。例如, 一束 $1 \times 10^5 \text{ W}$ 的激光, 用透镜聚焦到 $1 \times 10^{-10} \text{ m}^2$ 的面积上, 则在透镜焦平面上的光强度约为

$$I = \frac{10^5}{10^{-10}} = 10^{15} \text{ W/m}^2$$

相应的光电场强度振幅为

$$E_0 = \left(\frac{2\mu_0 c I}{n} \right)^{1/2} = 0.87 \times 10^9 \text{ V/m}$$

这样强的电场, 能够产生极高的温度, 足以将目标烧毁。

应当指出, 在有些应用场合, 由于只考虑某一种介质中的光强, 只关心光强的相对值, 因而往往省略比例系数, 把光强写成

$$I = \langle E^2 \rangle = E_0^2$$

如果考虑的是不同介质中的光强, 比例系数不能省略。

1.1.2 几种特殊形式的光波

上节得到的交变电场 E 和交变磁场 H 所满足的波动方程, 可以表示为如下的一般形式:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (1-18)$$

这是一个二阶偏微分方程, 根据边界条件的不同, 解的具体形式也不同, 例如, 可以是平面光波、球面光波、柱面光波或高斯光束。

1. 平面光波

首先说明, 光波中包含有电场矢量和磁场矢量, 从波的传播特性来看, 它们处于同样

的地位，但是从光与介质的相互作用来看，其作用不同。在通常应用的情况下，磁场的作用远比电场弱，甚至不起作用。例如，实验证明，使照相底片感光的是电场，不是磁场；对人视网膜起作用的也是电场，不是磁场。因此，通常把光波中的电场矢量 E 称为光矢量，把电场 E 的振动称为光振动，在讨论光的波动特性时，只考虑电场矢量 E 即可。

1) 波动方程的平面光波解

在直角坐标系中，拉普拉斯算符的表示式为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

为简单起见，假设 f 不含 x, y 变量，则波动方程为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{1-19}$$

为了求解波动方程，先将其改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0$$

令

$$p = z - vt$$

$$q = z + vt$$

可以证明

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

因而，上面的方程变为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} = 0$$

求解该方程， f 可表示为

$$f = f_1(p) + f_2(q) = f_1(z - vt) + f_2(z + vt) \tag{1-20}$$

对于式中的 $f_1(z - vt)$ ， $(z - vt)$ 为常数的点都处于相同的振动状态。如图 1-2(a) 所示， $t=0$ 时的波形为 I， $t=t_1$ 时的波形 I 相对于波形 I 平移了 vt_1 ，……。由此可见， $f_1(z - vt)$ 表示的是沿 z 方向、以速度 v 传播的波。类似地分析可知， $f_2(z + vt)$ 表示的是沿 $-z$ 方向、以速度 v 传播的波。将某一时刻振动相位相同的点连结起来，所组成的曲面叫波阵面。由于此时的波阵面是垂直于传播方向 z 的平面(图 1-2(b))，所以 f_1 和 f_2 是平面光

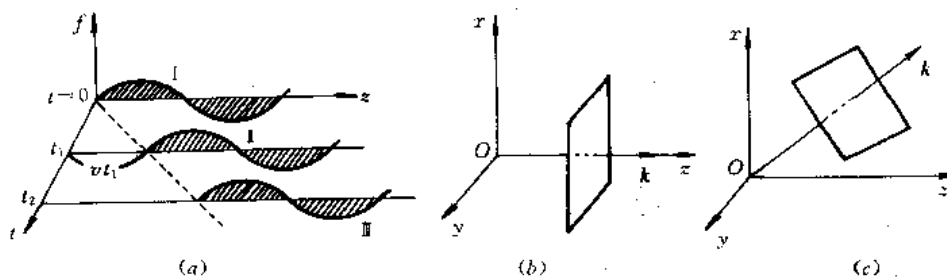


图 1-2 平面波图示



波. (1-20)式是平面光波情况下波动方程的一般解。在一般情况下，沿任一方向 k 、以速度 v 传播的平面波，如图 1-2(c) 所示。

2) 单色平面光波

(1) 单色平面光波的三角函数表示 (1-20)式是波动方程在平面光波情况下的一般解形式，根据具体条件的不同，可以采取不同的具体函数表示。最简单、最普遍采用的是三角函数形式，即

$$f = A \cos(\omega t - kz) + B \sin(\omega t + kz)$$

若只计沿 $+z$ 方向传播的平面光波，其电场表示式为

$$\begin{aligned} E &= eE_0 \cos(\omega t - kz) = eE_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \\ &= eE_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)\right] \end{aligned} \quad (1-21)$$

这就是我们非常熟悉的平面简谐光波的三角函数表示式。式中， e 是 E 振动方向上的单位矢量。

(1-21)式表示的平面简谐光波是一个单色平面光波。所谓单色，即指单频。一个单色平面光波是一个在时间上无限延续，空间上无限延伸的光波动，在时间、空间中均具有周期性。其时间周期性用周期(T)、频率(ν)、圆频率(ω)表征，而由(1-21)式形式的对称性，其空间周期性可用 λ 、 $1/\lambda$ 、 k 表征，并分别可以称为空间周期、空间频率和空间圆频率。单色平面光波的时间周期性与空间周期性密切相关，并由 $\nu = v/\lambda$ 相联系。

(2) 单色平面光波的复数表示 为便于运算，经常把平面简谐光波的波函数写成复数形式。例如，可以将沿 z 方向传播的平面光波写成

$$E = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \quad (1-22)$$

采用这种形式，就可以用简单的指数运算代替比较繁杂的三角函数运算。例如，在光学应用中，经常因为要确定光强而求振幅的平方 E_0^2 ，对此，只需将复数形式的场乘以它的共轭复数即可，

$$E \cdot E^* = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \cdot E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0^2$$

应强调的是，任意描述真实存在的物理量的参量都应当是实数，在这里采用复数形式只是数学上运算方便的需要。由于对(1-22)式取实部即为(1-21)式所示的函数，所以，对复数形式的量进行线性运算，只有取实部后才有物理意义，才能与利用三角函数形式进行同样运算得到相同的结果。此外，由于对复数函数 $\exp[-i(\omega t - kz)]$ 与 $\exp[i(\omega t - kz)]$ 两种形式取实部得到相同的函数，所以对于平面简谐光波，采用 $\exp[-i(\omega t - kz)]$ 和 $\exp[i(\omega t - kz)]$ 两种形式完全等效。因此，在不同的文献书籍中，根据作者的习惯不同，可以采取其中任意一种形式。

对于平面简谐光波的复数表示式，可以将时间相位因子与空间相位因子分开来写：

$$E = E_0 e^{ikz} e^{-i\omega t} = \tilde{E} e^{-i\omega t} \quad (1-23)$$

式中

$$\tilde{E} = E_0 e^{ikz} \quad (1-24)$$

称为复振幅。若考虑场强的初相位，复振幅为

$$\tilde{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (1-25)$$

复振幅表示场振动的振幅和相位随空间的变化。在许多应用中，由于 $\exp(-i\omega t)$ 因子在空间各处都相同，所以只考察场振动的空间分布时，可将其略去不计，仅讨论复振幅的变化。

进一步，若平面简谐光波沿着任一波矢 k 方向传播，则其三角函数形式和复数形式表示式分别为

$$E = E_0 \cos(\omega t - k \cdot r + \varphi_0) \quad (1-26)$$

和

$$E = E_0 e^{-i(\omega t - k \cdot r + \varphi_0)} \quad (1-27)$$

相应的复振幅为

$$\tilde{E} = E_0 e^{i(k \cdot r - \varphi_0)} \quad (1-28)$$

在信息光学中，经常遇到相位共轭光波的概念。所谓相位共轭光波，是指两列同频率的光波，它们的复振幅之间是复数共轭的关系。

假设有一个平面光波的波矢量 k 平行于 xOz 平面(图 1-3)，在 $x=0$ 平面上的复振幅为

$$\tilde{E} = E_0 e^{-i\varphi_0} e^{ikz \sin \gamma} \quad (1-29)$$

式中的 γ 为 k 与 z 轴的夹角，则相应的相位共轭光波复振幅为

$$\tilde{E}^* = E_0 e^{i\varphi_0} e^{-ikz \sin \gamma} = E_0 e^{i\varphi_0} e^{ikz \sin(-\gamma)} \quad (1-30)$$

该式表明，此相位共轭光波是与 \tilde{E} 波来自同一侧的平面光波，其波矢量平行于 xOz 平面、与 z 轴夹角为 $-\gamma$ 。如果对照(1-30)式，把(1-28)式的复数共轭写成

$$\tilde{E}^* = E e^{i\varphi_0} e^{-ik \cdot r} \quad (1-31)$$

则这个沿 $-k$ 方向，即与 \tilde{E} 波反向传播的平面光波也是其相位共轭光波。不过，一般情况下不讨论它。

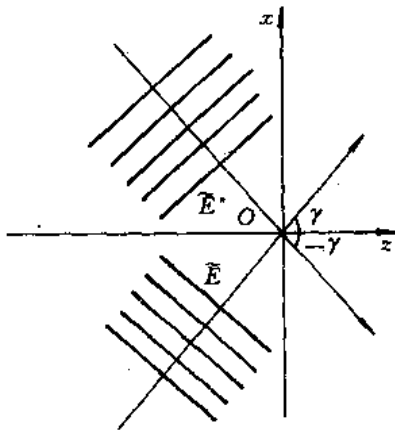


图 1-3 平面波及其相位共轭波

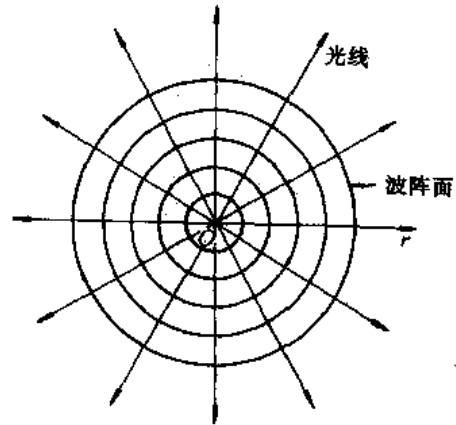


图 1-4 球面光波示意图

2. 球面光波

一个各向同性的点光源，它向外发射的光波是球面光波，等相位面是以点光源为中心、随着距离的增大而逐渐扩展的同心球面，如图 1-4 所示。

球面光波所满足的波动方程仍然是(1-18)式，只是由于球面光波的球对称性，其波动方程仅与 r 有关，与坐标 θ 、 φ 无关，所以球面光波的振幅只随距离 r 变化。若忽略场的

矢量性，采用标量场理论，可将波动方程表示为

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (1-32)$$

式中， $f=f(r, t)$ 。

对于球面光波，利用球坐标讨论比较方便。此时，(1-32)式可表示为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (1-33)$$

即

$$\frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial t^2} = 0$$

因而其解为

$$f = \frac{f_1(r- vt)}{r} + \frac{f_2(r+ vt)}{r} \quad (1-34)$$

其中， $f_1(r- vt)$ 代表从原点沿 r 正方向向外发散的球面光波； $f_2(r+ vt)$ 代表向原点传播的会聚球面光波。球面波的振幅随 r 成反比例变化。

最简单的简谐球面光波——单色球面光波的波函数为

$$E = \frac{A_1}{r} \cos(\omega t - kr) \quad (1-35)$$

其复数形式为

$$E = \frac{A_1}{r} e^{-i(\omega t - kr)} \quad (1-36)$$

复振幅为

$$\tilde{E} = \frac{A_1}{r} e^{ikr} \quad (1-37)$$

上面三式中的 A_1 为离开点光源单位距离处的振幅值。

3. 柱面光波

一个各向同性的无限长线光源，向外发射的波是柱面光波，其等相位面是以线光源为中心轴、随着距离的增大而逐渐展开的同轴圆柱面，如图 1-5 所示。

柱面光波所满足的波动方程可以采用以 z 轴为对称轴、不含 z 的圆柱坐标系形式描述：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (1-38)$$

式中， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。这个方程的解形式比较复杂，此处不详述。但可以证明，当 r 较大(远大于波长)时，其单色柱面光波的表示式为

$$E = \frac{A_1}{\sqrt{r}} e^{-i(\omega t - kr)} \quad (1-39)$$

复振幅为

$$\tilde{E} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} e^{ikr} \quad (1-40)$$

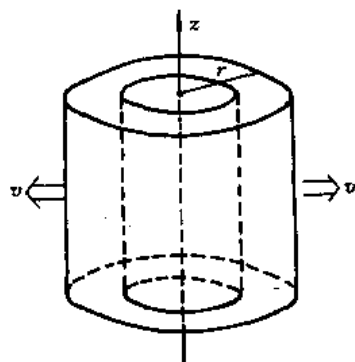


图 1-5 柱面光波示意图



可以看出,柱面光波的振幅与 \sqrt{r} 成反比。上面表示式中的 A_1 是离开线光源单位距离处光波的振幅值。

4. 高斯(Gauss)光束

由激光器产生的激光束既不是上面讨论的均匀平面光波,也不是均匀球面光波,而是一种振幅和等相位面都在变化的高斯球面光波,亦称为高斯光束。在由激光器产生的各种模式的激光中,最基本、应用最多的是基模(TEM₀₀)高斯光束,因此,在这里仅讨论基模高斯光束。有关这种高斯光束的产生、传输特性的详情,可参阅激光原理教科书。

从求解波动方程的观点看,基模高斯光束乃是波动方程(1-18)式在激光器谐振腔条件下的一种特解。它是以 z 轴为柱对称的波,其表达式内包含有 z ,且大体朝着 z 轴的方向传播。

考虑到高斯光束的柱对称性,可以采用圆柱坐标系中的波动方程形式:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E = 0 \quad (1-41)$$

其解的一般函数形式为

$$E = E(r, z, t)$$

可以证明,下面的表达式满足上述波动方程:

$$E_{00}(r, z, t) = \frac{E_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{i\left[k\left(z + \frac{r^2}{2R(z)}\right) - \arctan \frac{z}{f}\right]} e^{-i\omega t} \quad (1-42)$$

式中, E_0 为常数,其余符号的意义为

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{f}\right)^2} \\ R(z) &= z + \frac{f^2}{z} \\ f &= \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (1-43)$$

这里, $w_0 = w(z=0)$ 为基模高斯光束的束腰半径; f 为高斯光束的共焦参数或瑞利长度; $R(z)$ 为与传播轴线相交于 z 点的高斯光束等相位面的曲率半径; $w(z)$ 是与传播轴线相交于 z 点高斯光束等相位面上的光斑半径。(1-42)式的波场就是基模高斯光束的标量波形式。

由(1-42)式可以看出,基模高斯光束具有以下基本特征:

① 基模高斯光束在横截面内的光电场振幅分布按照高斯函数的规律从中心(即传播轴线)向外平滑地下降,如图1-6所示。由中心振幅值下降到 $1/e$ 点所对应的宽度,定义为光斑半径

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{f}\right)^2} \quad (1-44)$$

可见, 光斑半径随着坐标 z 按双曲线的规律扩展, 即

$$\frac{w^2(z)}{w_0^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1 \quad (1-45)$$

如图 1-7 所示。在 $z=0$ 处, $w(z)=w_0$, 达到极小值, 称为束腰半径。由(1-45)式可见, 只要知道高斯光束的束腰半径 w_0 , 即可确定任何 z 处的光斑半径。 w_0 是由激光器谐振腔决定的, 改变激光器谐振腔的结构设计, 即可改变 w_0 值。

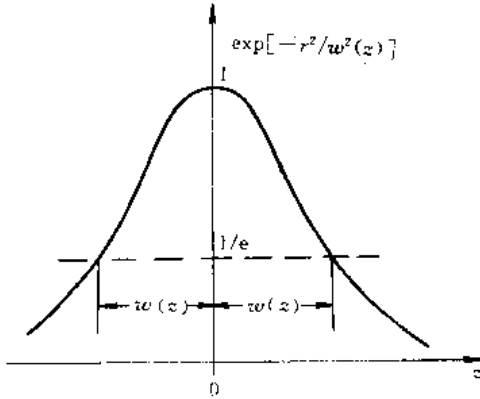


图 1-6 高斯分布与光斑尺寸

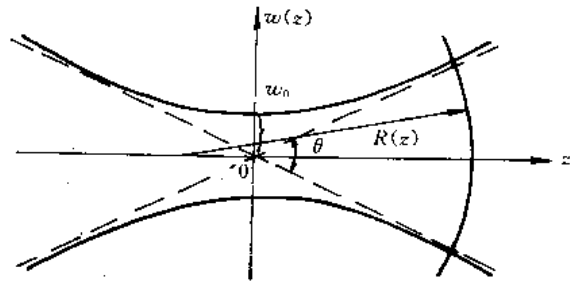


图 1-7 高斯光束的扩展

② 基模高斯光束场的相位因子

$$\varphi_{00}(r, z) = k\left(z + \frac{r^2}{2R(z)}\right) - \arctan \frac{z}{f} \quad (1-46)$$

决定了基模高斯光束的空间相移特性。其中, kz 描述了高斯光束的几何相移; $\arctan(z/f)$ 描述了高斯光束在空间行进距离 z 处、相对于几何相移的附加相移; 因子 $kr^2/(2R(z))$ 则表示与横向坐标 r 有关的相移, 它表明高斯光束的等相位面是以 $R(z)$ 为半径的球面。 $R(z)$ 随 z 的变化规律为

$$R(z) = z + \frac{f^2}{z} \quad (1-47)$$

可见:

当 $z=0$ 时, $R(z) \rightarrow \infty$, 表明束腰所在处的等相位面为平面;

当 $z \rightarrow \pm\infty$ 时, $|R(z)| \approx z \rightarrow \infty$, 表明离束腰无限远处的等相位面亦为平面, 且曲率中心就在束腰处;

当 $z = \pm f$ 时, $|R(z)| = 2f$, 达到极小值;

当 $0 < z < f$ 时, $R(z) > 2f$, 表明等相位面的曲率中心在 $(-\infty, -f)$ 区间上;

当 $z > f$ 时, $z < R(z) < z + f$, 表明等相位面的曲率中心在 $(-f, 0)$ 区间上。

③ 基模高斯光束既非平面波, 又非均匀球面波, 它的发散度采用远场发散角表征。远场发散角 θ_{1/e^2} 定义为 $z \rightarrow \infty$ 时, 强度为中心的 $1/e^2$ 点所夹角的全宽度, 即

$$\theta_{1/e^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2w(z)}{z} = \frac{2\lambda}{\pi w_0} \quad (4-48)$$

显然, 高斯光束的发散度由束腰半径 w_0 决定。

综上所述, 基模高斯光束在其传播轴线附近, 可以看作是一种非均匀的球面波, 其等



相位面是曲率中心不断变化的球面，振幅和强度在横截面内保持高斯分布。

1.1.3 光波场的时域频率谱

1. 复色波

前面，我们讨论了频率为 ω 的单色平面光波

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

实际上，严格的单色光波是不存在的，所能得到的各种光波均为复色波。所谓复色波，是指某光波由若干单色光波组合而成，或者说它包含有多种频率成分，它在时间上是有限的。因此，复色波的电场可以表示为各个单色光波电场的叠加，即

$$E = \sum_{i=1}^N E_{0i} \cos(\omega_i t - k_i x) \quad (1-49)$$

2. 频率谱

在一般情况下，若只考虑光波场在时间域内的变化，可以表示为时间的函数 $E(t)$ 。根据傅里叶变换，它可以展成如下形式：

$$E(t) = F^{-1}[E(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu \quad (1-50)$$

式中， $\exp(-i2\pi\nu t)$ 为傅氏空间（或频率域）中频率为 ν 的一个基元成分，取实部后得 $\cos(2\pi\nu t)$ 。因此，可将 $\exp(-i2\pi\nu t)$ 视为频率为 ν 的单位振幅简谐振荡。 $E(\nu)$ 随 ν 的变化称为 $E(t)$ 的频谱分布，或简称频谱。这样，(1-50) 式可理解为：一个随时间变化的光波场振动 $E(t)$ ，可以视为许多单频成分简谐振荡的叠加，各成分相应的振幅为 $E(\nu)$ ，并且 $E(\nu)$ 按下式计算：

$$E(\nu) = F[E(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i2\pi\nu t} dt \quad (1-51)$$

一般情况下，由上式计算出来的 $E(\nu)$ 为复数，它就是 ν 频率分量的复振幅，可表示为

$$E(\nu) = |E(\nu)| e^{i\varphi(\nu)} \quad (1-52)$$

式中， $|E(\nu)|$ 为模， $\varphi(\nu)$ 为辐角。因而， $|E(\nu)|^2$ 就表征了 ν 频率分量的功率，称 $|E(\nu)|^2$ 为光波场的功率谱。

由上所述，一个时域光波场 $E(t)$ 可以在频率域内通过它的频谱描述。下面，对于几种经常运用的光波场 $E(t)$ ，给出其频谱分布。

(1) 无限长时间的等幅振荡 其表达式为

$$E(t) = E_0 e^{-i2\pi\nu_0 t} \quad -\infty < t < \infty \quad (1-53)$$

式中， E_0 、 ν_0 为常数，且 E_0 可以取复数值。由(1-51)式，它的频谱为

$$\begin{aligned} E(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_0 e^{-i2\pi\nu_0 t} e^{i2\pi\nu t} dt \\ &= E_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(\nu-\nu_0)t} dt \\ &= E_0 \delta(\nu - \nu_0) \end{aligned} \quad (1-54)$$

该式说明，等幅振荡光场对应的频谱只含有一个频率成分 ν_0 ，我们称其为理想单色振动。其功率谱为 $|E(\nu)|^2$ ，如图 1-8 所示。

(2) 持续有限时间的等幅振荡 其表达式为（设振幅等于 1）

$$E(t) = \begin{cases} e^{-i2\pi\nu_0 t} & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1-55)$$

这时

$$\begin{aligned} E(\nu) &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi\nu_0 t} e^{i2\pi\nu t} dt \\ &= T \frac{\sin \pi T(\nu - \nu_0)}{\pi T(\nu - \nu_0)} \end{aligned} \quad (1-56)$$

或表示成

$$E(\nu) = T \text{sinc}[T(\nu - \nu_0)] \quad (1-57)$$

相应的功率谱为

$$|E(\nu)|^2 = T^2 \text{sinc}^2[T(\nu - \nu_0)] \quad (1-58)$$

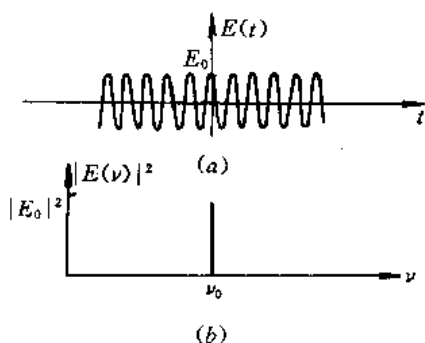


图 1-8 等幅振荡及其频谱图

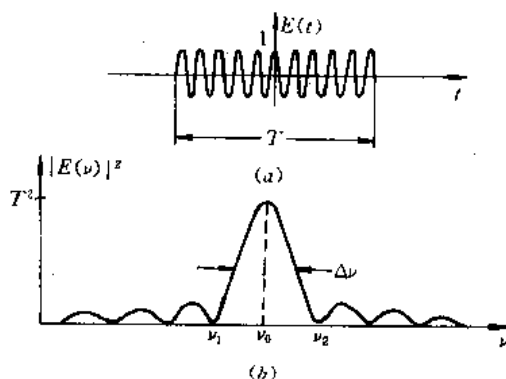


图 1-9 有限正弦波及其频谱图

如图 1-9 所示。可见，这种光场频谱的主要部分集中在从 ν_1 到 ν_2 的频率范围之内，主峰中心位于 ν_0 处， ν_0 是振荡的表观频率，或称为中心频率。

为表征频谱分布特性，定义最靠近 ν_0 的两个强度为零的点所对应的频率 ν_2 和 ν_1 之差的一半为这个有限正弦波的频谱宽度 $\Delta\nu$ 。由(1-58)式，当 $\nu = \nu_0$ 时， $|E(\nu_0)|^2 = T^2$ ；当 $\nu = \nu_0 \pm 1/T$ 时， $|E(\nu)| = 0$ ，所以有

$$\Delta\nu = \frac{1}{T} \quad (1-59)$$

因此，振荡持续的时间越长，频谱宽度愈窄。

(3) 衰减振荡 其表达式可写为

$$E(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} e^{-i2\pi\nu_0 t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-60)$$

相应的 $E(\nu)$ 为

$$\begin{aligned} E(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t} e^{-i2\pi\nu_0 t} e^{i2\pi\nu t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{i[2\pi(\nu - \nu_0) + i\beta]t} dt \\ &= \frac{i}{2\pi(\nu - \nu_0) + i\beta} \end{aligned} \quad (1-61)$$

$$|E(\nu)|^2 = E(\nu)E^*(\nu) = \frac{1}{4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 + \beta^2} \quad (1-62)$$

如图 1-10 所示。可见，这个衰减振荡也可视为无限多个振幅不同、频率连续变化的简谐振荡的叠加， ν_0 为其中心频率。这时，把最大强度一半所对应的两个频率 ν_2 和 ν_1 之差 $\Delta\nu$ ，定义为这个衰减振荡的频谱宽度。

由于 $\nu = \nu_2$ (或 ν_1) 时， $|E(\nu_2)|^2 = |E(\nu_0)|^2/2$ ，即

$$\frac{1}{4\pi^2(\nu_2 - \nu_0)^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2}$$

化简后得

$$(\nu_2 - \nu_0) = \frac{\beta}{2\pi}$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \nu_2 - \nu_1 = (\nu_2 - \nu_0) + (\nu_0 - \nu_1) \\ &= \frac{\beta}{\pi} \end{aligned} \quad (1-63)$$

最后，再次强调指出，在上面的有限正弦振荡和衰减振荡中，尽管表达式中含有 $\exp(-i2\pi\nu_0 t)$ 的因子，但 $E(t)$ 已不再是单频振荡了。换言之，我们只能说这种振荡的表观频率为 ν_0 ，而不能简单地说是振荡频率为 ν_0 。只有以某一频率作无限长时间的等幅振荡，才可以说是严格的单色光。

3. 准单色光

前面已经指出，理想的单色光是不存在的，实际上能够得到的只是接近于单色光。例如，上面讨论的持续有限时间的等幅振荡，如果其振荡持续时间很长，以致于 $1/T \ll \nu_0$ ，则 $E(\nu)$ 的主值区间 $(\nu_0 - 1/T) < \nu < (\nu_0 + 1/T)$ 很窄，可认为接近于单色光；对于衰减振荡，若 β 很小 (相当于振荡持续时间很长)，则频谱宽度很窄，也接近于单色光。对于一个实际的表观频率为 ν_0 的振荡，若其振幅随时间的变化比振荡本身缓慢得多，则这种振荡的频谱就集中于 ν_0 附近的一个很窄的频段内，可认为是中心频率为 ν_0 的准单色光，其场振动表达式为

$$E(t) = E_0(t)e^{-i2\pi\nu_0 t} \quad (1-64)$$

在光电子技术应用中，经常遇到的调制光波均可认为是准单色光波。

现在考察一个在空间某点以表观频率 ν_0 振动、振幅为高斯函数的准单色光波

$$E(t) = Ae^{-\frac{-(t-t_0)^2}{\Delta t^2}} e^{-i(2\pi\nu_0 t + \varphi_0)} \quad (1-65)$$

其振动曲线如图 1-11(a) 所示。在 $t = t_0$ 时，振幅最大，且为 A ；当 $|t - t_0| = \Delta t/2$ 时，振幅降为 A/e 。由此可见，参数 Δt 表征着振荡持续的有效时间。

对于这种高斯函数准单色光波的频谱分布，可由傅氏变换确定：

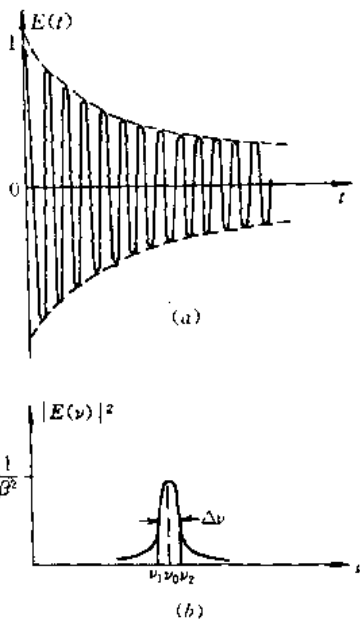


图 1-10 衰减振荡及其频谱图

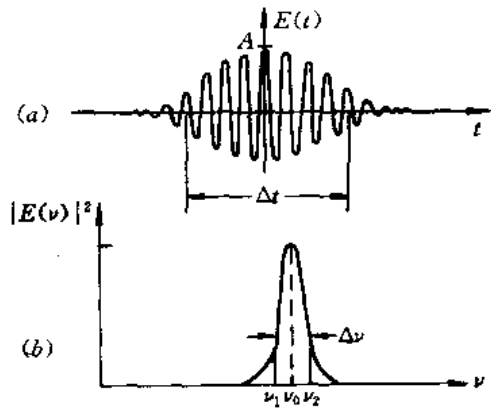
$$E(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\frac{\pi(t-t_0)^2}{\Delta t^2}} e^{-i(2\pi\nu_0 t - \varphi_0)} e^{i2\pi\nu t} dt$$

对该积分作自变量代换，将被积函数分为实部和虚部分别进行积分，得到

$$E(\nu) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Delta t A e^{-\pi^2 \Delta t^2 (\nu - \nu_0)^2 / 4} e^{-i[2\pi(\nu_0 - \nu)t_0 + \varphi_0]} \quad (1-66)$$

相应的功率谱为

$$|E(\nu)|^2 = \frac{1}{4} \pi \Delta t^2 A^2 e^{-\pi^2 \Delta t^2 (\nu - \nu_0)^2 / 2} \quad (1-67)$$



其频谱图如图 1-11(b)所示。由上式可见，高斯型准单色光的频谱也是高斯型，其中心频率为 ν_0 。这时，定义最大强度 $1/e$ 处所对应的两个频率 ν_2 和 ν_1 之差 $\Delta\nu$ 为这个波列的频谱宽度。

根据上述定义，有 $|E(\nu_2)|^2 = |E(\nu_0)|^2 / e$ ，计算可得 $(\nu_2 - \nu_0) = \sqrt{2} / \pi \Delta t$ 。因此

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \Delta t} \quad (1-68)$$

该频谱宽度 $\Delta\nu$ 表征了高斯型准单色光波的单色性程度。

1.1.4 相速度和群速度

在前面的讨论中，提到了光波速度 v 这个物理量，下面讨论它的具体含义。

1. 单色光波的速度

假设单色光波电场的表示式为

$$E = E(r) \cos[\omega t - \varphi(r)] \quad (1-69)$$

式中， $\varphi(r)$ 是随距离变化的相位项，相应于

$$\omega t - \varphi(r) = \text{常数}$$

的空间曲面为该单色光波的等相位面，满足该式的 r 是这个相位状态在不同时刻的位置。将上式两边对时间求导数，得

$$\omega dt - \nabla \varphi \cdot dr = 0$$

设 r_0 为 dr 方向上的单位矢量，并写成 $dr = r_0 ds$ ，则有

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{r_0 \cdot \nabla \varphi}$$

当 r_0 垂直于等相位面，即 $r_0 = \nabla \varphi / |\nabla \varphi|$ 时，上式值最小，其值为

$$v(r) = \frac{\omega}{|\nabla \varphi|} \quad (1-70)$$

该 $v(r)$ 就是等相位面的传播速度，简称为相速度。对于波矢量为 k 的平面单色光波，其空间相位项为

$$\varphi(r) = k \cdot r - \varphi_0$$

因此

$$\nabla \varphi = k$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (1-71)$$

应当注意，相速度是单色光波所特有的一种速度，由于它表示的不是光波能量的传播速度，所以当 $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} < 1$ 时，例如在色散介质的反常色散区，就有相速度 v 大于真空中光速 c 的情况，这并不违背相对论的结论。

2. 复色波的速度

如前所述，实际上的光波都不是严格的单色光波，而是复色波，它的光电场是所包含各个单色光波电场的叠加，即

$$E = \sum_{i=1}^N E_{0i} \cos(\omega_i t - k_i z) \quad (1-72)$$

为简单起见，以二色波为例进行说明。

二色波的光电场为

$$E = E_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 z) + E_{02} \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

若 $E_{01} = E_{02} = E_0$ ，且 $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$ ，则

$$E = E(z, t) \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} z) \quad (1-73)$$

式中

$$E(z, t) = 2E_0 \cos(\omega_m t - k_m z)$$

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{2}\Delta\omega$$

$$k_m = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) = \frac{1}{2}\Delta k$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

该式表明：这个二色波是如图 1-12(b) 所示的、频率为 $\bar{\omega}$ 、振幅随时间和空间在 0 到 $2E_0$ 之间缓慢变化的光波。这种复色波可以叫做波群或振幅调制波。

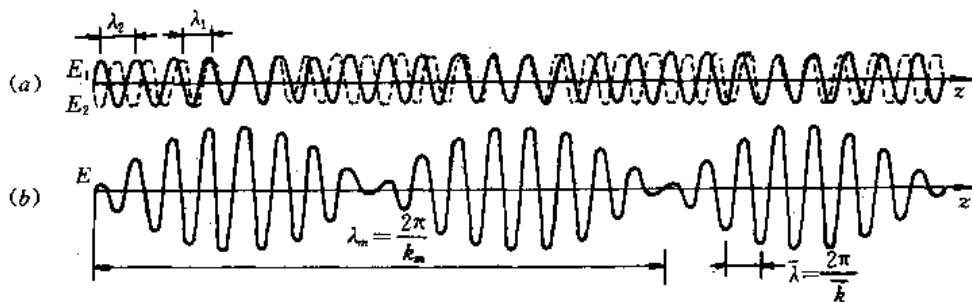


图 1-12 两个单色光波的叠加

对于上述复色波，其传播速度包含两种含义：等相位面的传播速度和等振幅面的传播速度，前者也称为相速度，后者称为群速度。

1) 复色波的相速度

若令(1-73)式的复色波相位为常数($\bar{\omega} t - \bar{k} z = \text{常数}$)，则某时刻等相位面的位置 z 对时



间的变化率即为等相位的传播速度——复色波的相速度，且

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \quad (1-74)$$

2) 复色波的群速度

由复色波表示式(1-73)可见，它的振幅是时间和空间的余弦函数，在任一时刻，满足 $(\omega_m t - k_m z) = \text{常数}$ 的 z 值，代表了某等振幅面的位置，该等振幅面位置对时间的变化率即为等振幅面的传播速度——复色波的群速度，且

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

当 $\Delta\omega$ 很小时，可以写成

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1-75)$$

由波数 $k = \omega/v$ ， v_g 可表示为

$$v_g = \frac{d(kv)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} \quad (1-76)$$

由 $k = 2\pi/\lambda$ ，有 $dk = -(2\pi/\lambda^2)d\lambda$ ，可将上式变为

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (1-77)$$

由 $v = c/n$ ，有 $dv = -(c/n^2)dn$ ，上式还可表示为

$$v_g = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (1-78)$$

该式表明，在折射率 n 随波长变化的色散介质中，复色波的相速度不等于群速度；对于正常色散介质($dn/d\lambda < 0$)， $v > v_g$ ；对于反常色散介质($dn/d\lambda > 0$)， $v < v_g$ ；在无色散介质($dn/d\lambda = 0$)中，复色波的相速度等于群速度，实际上，只有真空才属于这种情况。

应当指出：

① 复色波是由许多单色光波组成的，只有复色波的频谱宽度 $\Delta\omega$ 很窄，各个频率集中在某一“中心”频率附近时，才能构成(1-73)式所示的波群，上述关于复色波速度的讨论才有意义。如果 $\Delta\omega$ 较大，得不到稳定的波群，则复色波群速度的概念没有意义。

② 波群在介质中传播时，由于介质的色散效应，使得不同单色光波的传播速度不同。因此，随着传播的推移，波群发生“弥散”，严重时，其形状完全与初始不同。由于不存在不变的波群，其群速度的概念也就没有意义。所以，只有在色散很小的介质中传播时，群速度才可以视为一个波群的传播速度。

③ 由于光波的能量正比于电场振幅的平方，而群速度是波群等振幅点的传播速度，所以在群速度有意义的情况下，它即是光波能量的传播速度。

1.1.5 光波场的空间频率与空间频率谱

在光电子技术中，光学图像及光信息处理是非常重要的应用领域。在这些领域内，经常要将空间域问题转换为空间频率域问题处理。为此，下面讨论光波场的空间频率与空间频率谱的基本概念。

1. 空间频率

前面，我们给出了一个单色平面光波场的表示式

$$\begin{aligned}
 E &= E_0 e^{-i(\omega t - kx + \varphi_0)} \\
 &= E_0 e^{-i[2\pi(\frac{1}{T}t - \frac{1}{\lambda}x) + \varphi_0]}
 \end{aligned} \tag{1-79}$$

它是时间和空间的函数，表征了平面光波在某一时刻、空坐标下的状态。式中， ω 是时域内平面光波的圆频率，

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{1-80}$$

ν 是光波场的频率， T 是振动周期， k 是波数。从平面光波场时、空相位关系的对称性来看， k 可称为空间圆频率，波长 λ 可称为光波场的空间周期，相应波长的倒数可称为光波场在光传播方向上的空间频率，即

$$f = \frac{1}{\lambda} \tag{1-81}$$

它表示光波场沿波矢 k 方向每增加单位长度，光波场增加的周期数。

应当注意，光波的空间频率是观察方向的函数。例如，对于图 1-13 所示的、沿 z 轴方向传播的平面光波，在波传播方向 (z) 上，波长是 λ ，空间频率是 $f=1/\lambda$ ；在 θ 方向观察时，波的空间周期是 λ_x ，相应的空间频率为

$$f_x = \frac{1}{\lambda_x} = \frac{\cos \theta}{\lambda} \tag{1-82}$$

显然，当 $\theta = \pi/2$ 时，沿 x 方向的空间频率为零。

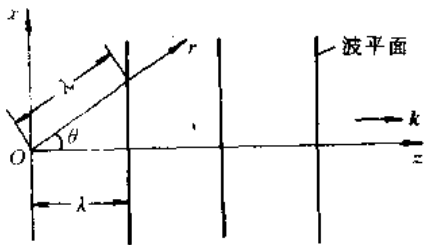


图 1-13 沿 z 轴传播的平面光波

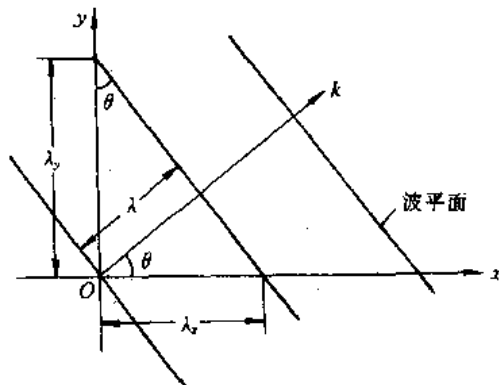


图 1-14 沿 xOy 面内 θ 方向传播的平面光波

对于如图 1-14 所示的、在 xOy 平面内沿 k 方向传播的平面光波，

$$\begin{aligned}
 E &= E_0 e^{-i(\omega t - k \cdot r + \varphi_0)} \\
 &= E_0 e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y + \varphi_0)}
 \end{aligned} \tag{1-83}$$

$$\left. \begin{aligned}
 k \text{ 方向的空间频率} & f = 1/\lambda \\
 x \text{ 方向的空间频率} & f_x = 1/\lambda_x = \cos \theta / \lambda \\
 y \text{ 方向的空间频率} & f_y = 1/\lambda_y = \sin \theta / \lambda \\
 z \text{ 方向的空间频率} & f_z = 1/\lambda_z = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{1-84}$$

因为

$$\begin{aligned}
 k^2 &= k_x^2 + k_y^2 \\
 &= \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_y}\right)^2
 \end{aligned} \tag{1-85}$$

$$f^2 = f_x^2 + f_y^2 \quad (1-86)$$

对于如图 1-15 所示的、沿任意空间方向传播的平面光波，

$$\begin{aligned}
 E &= E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)} \\
 &= E_0 e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z - \varphi_0)} \quad (1-87)
 \end{aligned}$$

因为

$$k_x = k \cos \alpha$$

$$k_y = k \cos \beta$$

$$k_z = k \cos \gamma$$

所以，空间频率为

$$\left. \begin{aligned}
 f_x &= \frac{\cos \alpha}{\lambda} \\
 f_y &= \frac{\cos \beta}{\lambda} \\
 f_z &= \frac{\cos \gamma}{\lambda}
 \end{aligned} \right\} \quad (1-88)$$

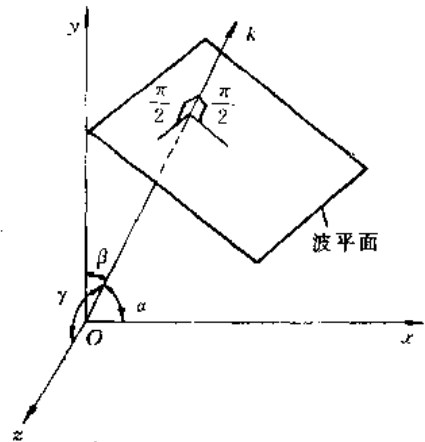


图 1-15 沿任意方向传播的平面光

因此，该平面光波可表示为

$$E = E_0 e^{-i[\omega t - 2\pi(f_x x + f_y y + f_z z) + \varphi_0]} \quad (1-89)$$

应当指出，对于一个沿任意方向传播的平面光波，因为波数 k 与频率 ν 有如下的关系：

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} \quad (1-90)$$

所以，在 k 的三个分量中只有两个是独立变量，只要知道了 k 在 xOy 平面上的两个分量 k_x 和 k_y ，即可由

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{2\pi\nu}{v}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

确定 k_z ，从而也就确定了 k 。因此，在任意 $z=z_0$ 的 xz_0y 平面上，平面光波的复振幅可以表示为

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} &= E_0 e^{ik_z z_0} e^{i(k_x x + k_y y)} \\
 &= \tilde{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y)} \\
 &= \tilde{E}_0 e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} \quad (1-91)
 \end{aligned}$$

式中， $\tilde{E}_0 = E_0 e^{ik_z z_0}$ 。

由上所述，一个平面光波的空间传播特性也可以用空间频率这个特征参量描述。当研究平面光波沿着传播方向的空间周期分布时，每一个空间频率对应于一定波长的单色波。当研究垂直于 z 轴的一个平面上单色光波的复振幅分布时，每一组空间频率 (f_x, f_y) 值对应于一个沿一定方向传播的单色平面光波。

2. 空间频率谱

上面讨论的是一个单色均匀平面光波的空间频率问题。实际上，在光学图像及光信息处理应用中，经常处理的是在一个平面（例如，入瞳平面或物平面）上的二维信息，即单色

光波场中任一 (x, y) 平面上的复振幅分布 $\tilde{E}(x, y)$ 。此时可以利用二维傅里叶变换, 将 $\tilde{E}(x, y)$ 这个二维空间坐标函数分解成无数个形式为 $\exp[i2\pi(f_x x + f_y y)]$ 的基元函数的线性组合, 即

$$\begin{aligned}\tilde{E}(x, y) &= F^{-1}[\tilde{E}(f_x, f_y)] \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(f_x, f_y) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y\end{aligned}\quad (1-92)$$

式中的基元函数 $\exp[i2\pi(f_x x + f_y y)]$ 可视为由空间频率 (f_x, f_y) 决定的、沿一定方向传播的平面光波, 其传播方向的方向余弦为 $\cos \alpha = f_x \lambda$, $\cos \beta = f_y \lambda$, 相应地, 该空间频率成分的基元函数所占比例的大小由 $\tilde{E}(f_x, f_y)$ 决定。通常称 $\tilde{E}(f_x, f_y)$ 随 (f_x, f_y) 的变化分布为 $\tilde{E}(x, y)$ 的空间频率谱, 简称为空间频谱。因此, 可以把一个平面上的单色光波场复振幅视为向空间不同方向传播的单色平面光波的叠加, 每一个平面光波分量与一组空间频率 (f_x, f_y) 相对应。这样一来, 就可以把对光波各种现象的分析, 转变为考察该光波场的平面光波成分的组成变化, 也就是通过考察其空间频率谱 $\tilde{E}(f_x, f_y)$ 在各种过程中的变化, 研究光波在传播、衍射及成像等过程中的规律。

1.1.6 光波的横波性、偏振态及其表示

这一节, 主要讨论无界、理想介质中平面光波的基本特性: 横波性和偏振性。

1. 平面光波的横波特性

假设平面光波的电场和磁场分别为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1-93)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1-94)$$

将其代入麦克斯韦方程(1-8)式和(1-9)式, 可得

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1-95)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-96)$$

对于各向同性介质, 因 $\mathbf{D} // \mathbf{E}$, 有

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1-97)$$

对于非铁磁性介质, 因 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, 有

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1-98)$$

这些关系说明, 平面光波的电场矢量和磁场矢量均垂直于波矢方向(波阵面法线方向)。因此, 平面光波是横电磁波。

如果将(1-93)式、(1-94)式代入(1-10)式, 可以得到

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (1-99)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (1-100)$$

由此可见, \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 、 \mathbf{H} 相互垂直, 因此, \mathbf{k} 、 $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ 三矢量构成右手螺旋直角坐标系。又因为 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, 所以 $\mathbf{k} // \mathbf{S}$, 即在各向同性介质中, 平面光波的波矢方向(\mathbf{k})与能流方向(\mathbf{S})相同。进一步, 根据上面的关系式, 还可以写出

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (1-101)$$

即 E 与 H 的数值之比为正实数，因此 E 与 H 同相位。

综上所述，可以将一个沿 z 方向传播、电场矢量限于 xOz 平面的电磁场矢量关系，绘如图 1-16 所示。

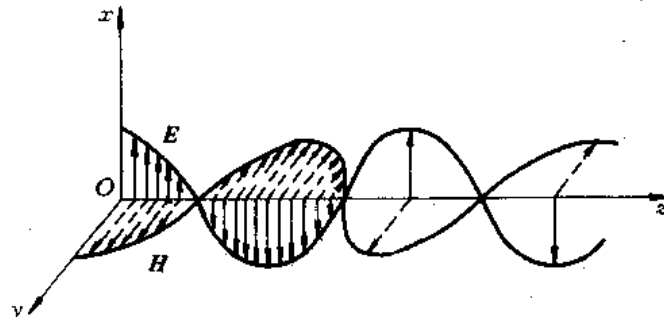


图 1-16 平面光波的横波特性

2. 平面光波的偏振特性

平面光波是横电磁波，其光矢量的振动方向与光波传播方向垂直。而在垂直传播方向的平面内，光振动方向相对光传播方向是不对称的，这种不对称性导致了光波性质随光振动方向的不同而发生变化。我们将这种光振动方向相对光传播方向不对称的性质，称为光波的偏振特性。它是横波区别于纵波的最明显标志。

1) 光波的偏振态

根据空间任一点光电场 E 的矢量末端在不同时刻的轨迹不同，其偏振态可分为线偏振、圆偏振和椭圆偏振。

设光波沿 z 方向传播，电场矢量为

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \quad (1-102)$$

为表征该光波的偏振特性，可将其表示为沿 x 、 y 方向振动的两个独立分量的线性组合，即

$$E = iE_x + jE_y \quad (1-103)$$

其中

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$$

将上二式中的变量 t 消去，经过运算可得

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi \quad (1-104)$$

式中， $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ 。这个二元二次方程在一般情况下表示的几何图形是椭圆，如图 1-17 所示。相位差 φ 和振幅比 E_y/E_x 的不同，决定了椭圆形状和空间取向的不同，从而也就决定了光的不同偏振态。图 1-18 画出了几种不同 φ 值相应的椭圆偏振态。实际上，线偏振态和圆偏振态都是椭圆偏振态的特殊情况。

(1) 线偏振光 当 E_x 、 E_y 二分量的相位差 $\varphi = m\pi (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时，椭圆退化为一条直线，称为线偏振光。此时有

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} e^{im\pi} \quad (1-105)$$

当 m 为零或偶数时, 光振动方向在 I、II 象限内;
 当 m 为奇数时, 光振动方向在 III、IV 象限内。

由于在同一时刻, 线偏振光传播方向上各点的光矢量都在同一平面内, 所以又叫做平面偏振光。通常将包含光矢量和传播方向的平面称为振动面。

(2) 圆偏振光 当 E_x 、 E_y 的振幅相等 ($E_{0x} = E_{0y} = E_0$), 相位差 $\varphi = m\pi/2$ ($m = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots$) 时, 椭圆方程退化为圆方程

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

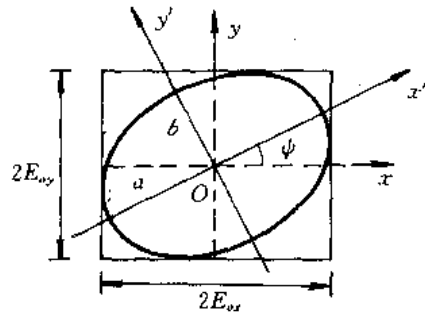


图 1-17 椭圆偏振诸参量

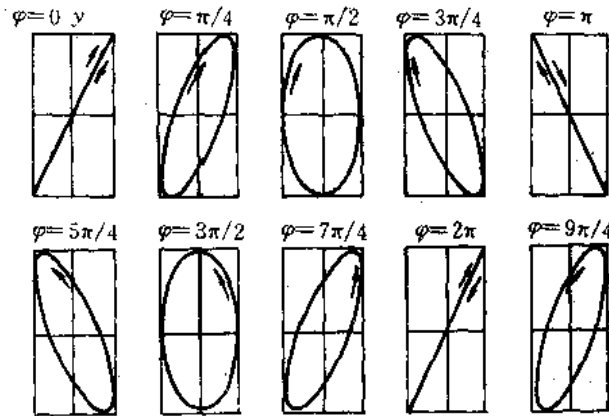


图 1-18 不同 φ 值相应的椭圆偏振

该光称为圆偏振光。用复数形式表示时, 有

$$\frac{E_y}{E_x} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i \tag{1-106}$$

式中, 正负号分别对应右旋和左旋圆偏振光。所谓右旋或左旋, 与观察的方向有关, 通常规定逆着光传播的方向看, E 顺时针方向旋转时, 称为右旋圆偏振光, 反之, 称为左旋圆偏振光。

(3) 椭圆偏振光 在一般情况下, 光矢量在垂直传播方向的平面内大小和方向都在改变, 它的末端轨迹是由 (1-104) 式决定的椭圆, 故称为椭圆偏振光。在某一时刻, 传播方向上各点对应的的光矢量末端分布在具有椭圆截面的螺线上 (图 1-19)。椭圆的长、短半轴和取向与

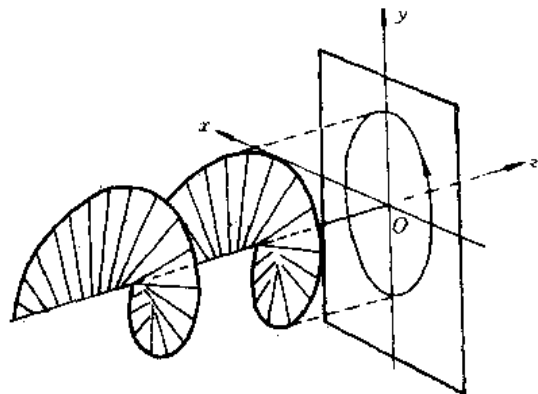


图 1-19 椭圆偏振光

二分量 E_x 、 E_y 的振幅和相位差有关。其旋向取决于相位差 φ : 当 $2m\pi < \varphi < (2m+1)\pi$ 时,



为右旋椭圆偏振光, 当 $(2m-1)\pi < \varphi < 2m\pi$ 时, 为左旋椭圆偏振光。

2) 偏振态的表示法

由以上讨论可知, 两个振动方向相互垂直的偏振光叠加时, 通常形成椭圆偏振光, 其电场矢端轨迹的椭圆长、短轴之比及空间取向, 随二偏振光振幅比 E_{0y}/E_{0x} 及其相位差 φ 变化, 它们决定了该光的偏振态。下面, 进一步讨论几种经常采用的偏振态表示法。

(1) 三角函数表示法 如前所述, 两个振动方向相互垂直的线偏振光 E_x 和 E_y 叠加后, 一般情况下将形成椭圆偏振光:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

E_{0x} 、 E_{0y} 和 φ 描述了该椭圆偏振光的特性。在实际应用中, 经常采用由长、短轴构成的新直角坐标系 $x'O'y'$ 中的两个正交电场分量 $E_{x'}$ 和 $E_{y'}$ 描述偏振态。如图 1-17 所示, 新旧坐标系之间电矢量的关系为

$$\left. \begin{aligned} E_{x'} &= E_x \cos\psi + E_y \sin\psi \\ E_{y'} &= -E_x \sin\psi + E_y \cos\psi \end{aligned} \right\} \quad (1-107)$$

式中, $\psi (0 \leq \psi < \pi)$ 是椭圆长轴与 x 轴间的夹角。设 $2a$ 和 $2b$ 分别为椭圆之长、短轴长度, 则新坐标系中的椭圆参量方程为

$$\left. \begin{aligned} E_{x'} &= a \cos(\tau + \varphi_0) \\ E_{y'} &= \pm b \sin(\tau + \varphi_0) \end{aligned} \right\} \quad (1-108)$$

式中的正、负号相应于两种旋向的椭圆偏振光, $\tau = \omega t - kx$ 。令

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_{0y}}{E_{0x}} &= \tan\alpha & 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \pm \frac{b}{a} &= \tan\chi & -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \quad (1-109)$$

则已知 E_{0x} 、 E_{0y} 和 φ , 即可由下面的关系式求出相应的 a 、 b 和 ψ :

$$\left. \begin{aligned} (\tan 2\alpha) \cos\varphi &= \tan 2\psi \\ (\sin 2\alpha) \sin\varphi &= \sin 2\chi \end{aligned} \right\} \quad (1-110)$$

$$E_{0x}^2 + E_{0y}^2 = a^2 + b^2 \quad (1-111)$$

反之, 如果已知 a 、 b 和 ψ , 也可由这些关系式求出 E_{0x} 、 E_{0y} 和 φ 。这里的 χ 和 ψ 表征了振动椭圆的形状和取向, 在实际应用中, 它们可以直接测量。

(2) 琼斯矩阵表示法 1941 年琼斯(Jones)利用一个列矩阵表示电矢量的 x 、 y 分量:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} \quad (1-112)$$

这个矩阵通常称为琼斯矢量。这种描述偏振光的方法是一种确定光波偏振态的简便方法。

对于在 I、II 象限中的线偏振光, 有 $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_0$, 琼斯矢量为

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix} e^{i\varphi_0} \quad (1-113)$$

对于左旋、右旋圆偏振光, 有 $\varphi_y - \varphi_x = \pm\pi/2$, $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, 其琼斯矢量为



$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} E_0 e^{i\omega t} \quad (1-114)$$

考虑到光强 $I = E_x^2 + E_y^2$, 有时将琼斯矢量的每一个分量除以 \sqrt{I} , 得到标准的归一化琼斯矢量。例如, x 方向振动的线偏振光、 y 方向振动的线偏振光、 45° 方向振动的线偏振光、振动方向与 x 轴成 θ 角的线偏振光、左旋圆偏振光、右旋圆偏振光的标准归一化琼斯矢量形式分别为:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

如果两个偏振光满足如下关系, 则称此二偏振光是正交偏振态:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* = [E_{1x} \ E_{1y}] \begin{bmatrix} E_{2x}^* \\ E_{2y}^* \end{bmatrix} = 0 \quad (1-115)$$

例如, x 、 y 方向振动的二线偏振光、右旋圆偏振光与左旋圆偏振光均互为正交的偏振光。

利用琼斯矢量可以很方便地计算二偏振光的叠加:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1x} + E_{2x} \\ E_{1y} + E_{2y} \end{bmatrix}$$

亦可很方便地计算偏振光 E_i 通过几个偏振元件后的偏振态:

$$\begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix}$$

式中, $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ 为表示光学元件偏振特性的琼斯矩阵, 可由光学手册查到。

(3) 斯托克斯参量表示法 如前所述, 为表征椭圆偏振, 必须有三个独立的量, 例如振幅 E_x 、 E_y 和相位差 φ , 或者椭圆的长、短半轴 a 、 b 和表示椭圆取向的 ψ 角。1852 年斯托克斯 (Stokes) 提出用四个参量 (斯托克斯参量) 来描述一光波的强度和偏振态, 在实用上更为方便。与琼斯矢量不同的是, 这种表示法描述的光可以是完全偏振光、部分偏振光和完全非偏振光, 也可以是单色光、非单色光。可以证明, 对于任意给定的光波, 这些参量都可由简单的实验加以测定。

一个平面单色光波的斯托克斯参量是:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= E_x^2 + E_y^2 \\ s_1 &= E_x^2 - E_y^2 \\ s_2 &= 2E_x E_y \cos \varphi \\ s_3 &= 2E_x E_y \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-116)$$

其中只有三个是独立的, 因为它们之间存在下面的恒等式关系:

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (1-117)$$

参量 s_0 显然正比于光波的强度, 参量 s_1 、 s_2 和 s_3 则与图 1-17 所示的表征椭圆取向的 ψ 角和表征椭圆率及椭圆转向的 χ 角有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \\ s_2 &= s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \\ s_3 &= s_0 \sin 2\chi \end{aligned} \right\} \quad (1-118)$$

(4) 邦加球表示法。邦加球是表示任一偏振态的图示法，是 1892 年由邦加(Poincare)提出的。邦加球在晶体光学中非常有用，可决定晶体对于所穿过光的偏振态的影响。

邦加球是一个半径为 s_0 的球 Σ ，其上任意点 P 的直角坐标为 s_1 、 s_2 和 s_3 ， 2χ 和 2ψ 是该点的相应球面角坐标(图 1-20)。一个平面单色波，当其强度给定时($s_0 = \text{常数}$)，对于它的每一个可能的偏振态， Σ 上都有一点与之对应，反之亦然。可以证明，赤道上($\chi = 0$)不同点代表不同振动方向的线偏振光，球面上赤道上半部分的点代表右旋椭圆偏振光，下半部分的点代表左旋椭圆偏振光，南、北极两点则分别代表左、右旋圆偏振光。

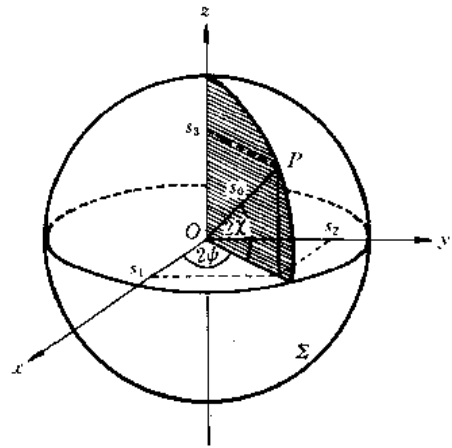


图 1-20 单色波偏振态的邦加球表示法

1.2 光波在各向同性介质界面上的反射和折射

由光的电磁理论可知，光在介质界面上的反射和折射，实质上是光与介质相互作用的结果，因而进行一般的理论分析非常复杂。在这里，采用简化的处理方法，不考虑光与介质的微观作用，只根据麦克斯韦方程组和电磁场的边界条件进行讨论。

1.2.1 反射定律和折射定律

光由一种介质入射到另一种介质，在界面上将产生反射和折射。现假设二介质为均匀、透明、各向同性，分界面为无穷大的平面，入射、反射和折射光均为平面光波，其电场表示式为

$$E_l = E_{0l} e^{-i(\omega_l t - \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r})} \quad l = i, r, t \quad (1-119)$$

式中，脚标 i, r, t 分别代表入射光、反射光和折射光； \mathbf{r} 是界面上任意点的矢径，在图 1-21 所示的坐标情况下，有

$$\mathbf{r} = ix + jy$$

根据电磁场的边界条件，可得

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \quad (1-120)$$

$$(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (1-121)$$

$$(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (1-122)$$

即有：

- ① 入射光、反射光和折射光具有相同的频率；
- ② 入射光、反射光和折射光均在入射面内， \mathbf{k}_i 、 \mathbf{k}_r 和 \mathbf{k}_t 波矢关系如图 1-22 所示。

进一步，根据图 1-21 所示的几何关系，可由(1-121)式和(1-122)式得到

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r \quad (1-123)$$

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \quad (1-124)$$

又因为 $k = n\omega/c$, 可将上二式改写为

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r \quad (1-125)$$

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (1-126)$$

这就是介质界面上的反射定律和折射定律, 折射定律又称为斯涅耳(Snell)定律。

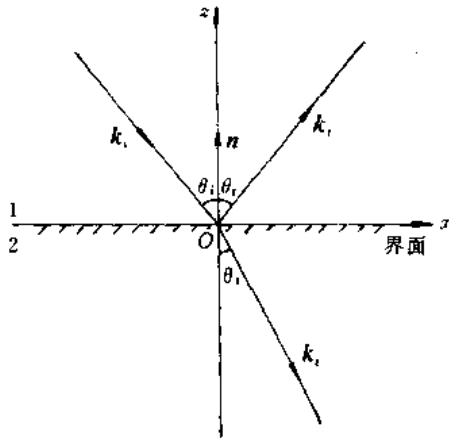


图 1-21 平面光波在界面上的反射和折射

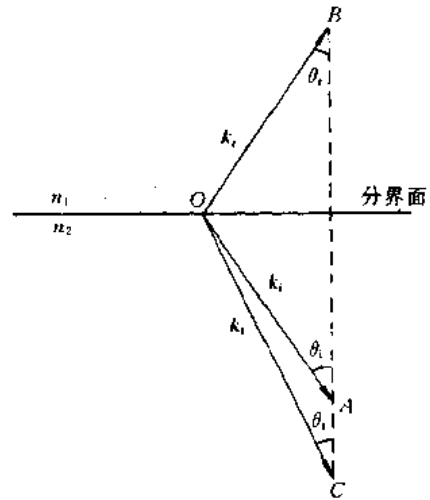


图 1-22 k_i 、 k_r 、 k_t 三波矢关系

1.2.2 菲涅耳公式

光的电磁理论除了给出描述光在界面上传播方向的反射定律和折射定律外, 还给出入射光、反射光和折射光之间的振幅、相位关系。

光在介质界面上的反射和折射特性与电矢量 E 的振动方向密切相关。由于平面光波的横波特性, 电矢量 E 可在垂直传播方向的平面内任意方向上振动, 而它总可以分解成垂直于入射面振动的分量和平行于入射面振动的分量, 一旦这两个分量的反射、折射特性确定, 则任意方向上振动的光的反射、折射特性也即确定。菲涅耳(Fresnel)公式就是确定这两个振动分量反射、折射特性的定量关系式。

1. s 分量和 p 分量

通常把垂直于入射面振动的分量叫做 s 分量, 把平行于入射面振动的分量叫做 p 分量。为讨论方便起见, 规定 s 分量和 p 分量的正方向如图 1-23 所示。

2. 反射系数和透射系数

假设介质中的电场矢量为

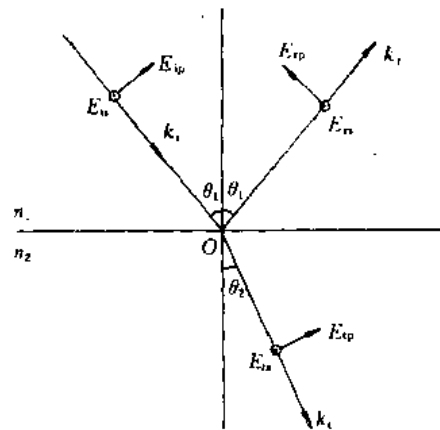


图 1-23 s 分量和 p 分量的正方向



其 s 分量和 p 分量表示式为

$$E_l = E_{0l} e^{-i(\omega t - k_l \cdot r)} \quad l = i, r, t \quad (1-127)$$

$$E_{lm} = E_{0lm} e^{-i(\omega t - k_l \cdot r)} \quad m = s, p \quad (1-128)$$

则定义 s 分量、p 分量的反射系数、透射系数分别为

$$r_m = \frac{E_{0rm}}{E_{0im}} \quad (1-129)$$

$$t_m = \frac{E_{0tm}}{E_{0im}} \quad (1-130)$$

3. 菲涅耳公式

假设界面上的入射光、反射光和折射光同相位，根据电磁场的边界条件及 s 分量、p 分量的正方向规定，可得

$$E_{is} + E_{rs} = E_{ts} \quad (1-131)$$

和

$$H_{ip} \cos \theta_1 - H_{rp} \cos \theta_1 = H_{tp} \cos \theta_2 \quad (1-132)$$

利用 $\sqrt{\mu} H = \sqrt{\epsilon} E$ ，上式变为

$$(E_{is} - E_{rs}) n_1 \cos \theta_1 = E_{ts} n_2 \cos \theta_2 \quad (1-133)$$

再利用折射定律，并由(1-131)式和(1-133)式消去 E_{ts} ，经整理可得

$$\frac{E_{rs}}{E_{is}} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$

将(1-128)式代入上式，利用(1-121)式关系，并根据反射系数定义，得到

$$r_s = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1-134)$$

再由(1-131)式和(1-133)式消去 E_{rs} ，经运算整理得

$$t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (1-135)$$

(1-134)式和(1-135)式就是 s 分量的反射系数和透射系数表示式。利用类似方法，可以推出 p 分量的反射系数和透射系数表示式。

将所得到的表示式(及相应的其它形式——读者可以自己证明)写成一个方程组，就是著名的菲涅耳公式：

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{E_{0rs}}{E_{0is}} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \\ &= -\frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{\tan \theta_1 + \tan \theta_2} \end{aligned} \quad (1-136)$$

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{E_{0rp}}{E_{0ip}} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \\ &= \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2} \end{aligned} \quad (1-137)$$

$$t_s = \frac{E_{0ts}}{E_{0is}} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (1-138)$$

$$t_p = \frac{E_{0tp}}{E_{0ip}} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (1-139)$$

由于这些系数首先是由菲涅耳用弹性波理论得到的，所以又叫做菲涅耳系数。

于是，如果已知界面两侧的折射率 n_1 、 n_2 和入射角 θ_1 ，就可由折射定律确定折射角 θ_2 ，进而可由上面的菲涅耳公式求出反射系数和透射系数。图 1-24 绘出了在 $n_1 < n_2$ (光由光疏介质射向光密介质) 和 $n_1 > n_2$ (光由光密介质射向光疏介质) 两种情况下，反射系数、透射系数随入射角 θ_1 的变化曲线。

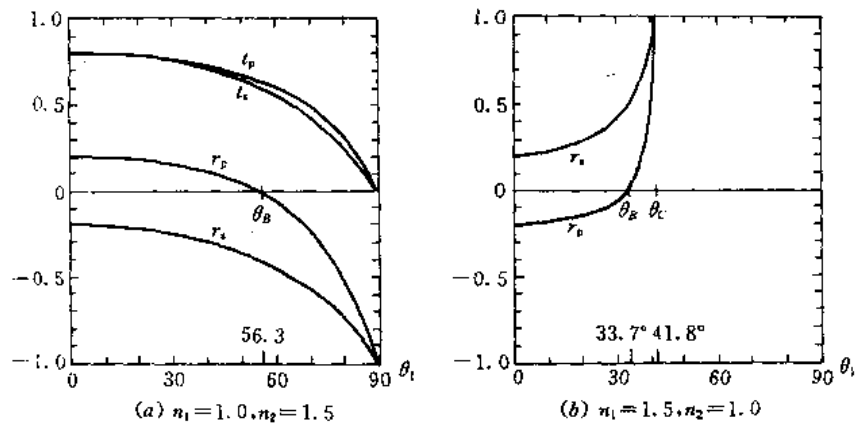


图 1-24 r_s, r_p, t_s, t_p 随入射角 θ_1 变化曲线

1.2.3 反射率和透射率

菲涅耳公式给出了入射光、反射光和折射光之间的场振幅和相位关系(有关相位关系在后面还将深入讨论)，现在，进一步讨论反映它们之间能量关系的反射率和透射率。在讨论过程中，不计吸收、散射等能量损耗，因此，入射光能量在反射光和折射光中重新分配，而总能量保持不变。

如图 1-25 所示，若有一个平面光波以入射角 θ_1 斜入射介质分界面，平面光波的强度为 I_1 ，则每秒入射到界面上单位面积的能量为

$$W_i = I_1 \cos \theta_1$$

考虑到光强表示式(1-17)，上式可写成

$$W_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} E_{0i}^2 \cos \theta_1 \quad (1-140)$$

类似地，反射光和折射光的能量表示式为

$$W_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} E_{0r}^2 \cos \theta_1 \quad (1-141)$$

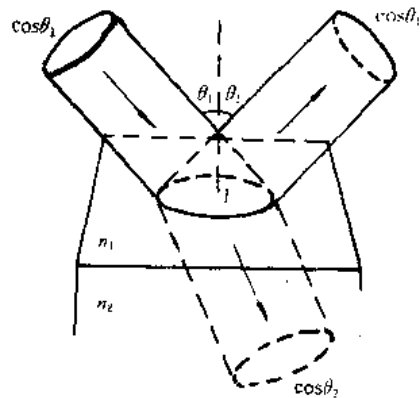


图 1-25 光束截面积在反射和折射时的变化 (在分界面上光束截面积为 1)

$$W_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} E_{ot}^2 \cos \theta_2 \quad (1-142)$$

由此可以得到反射率、透射率分别为

$$R = \frac{W_r}{W_i} = r^2 \quad (1-143)$$

$$T = \frac{W_t}{W_i} = \frac{n_2 \cos \theta_2 t^2}{n_1 \cos \theta_1} \quad (1-144)$$

将菲涅耳公式代入，即可得到入射光中 s 分量和 p 分量的反射率和透射率的表示式分别为

$$R_s = r_s^2 = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1-145)$$

$$R_p = r_p^2 = \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_2)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1-146)$$

$$T_s = \frac{n_2 \cos \theta_2 t_s^2}{n_1 \cos \theta_1} = \frac{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1-147)$$

$$T_p = \frac{n_2 \cos \theta_2 t_p^2}{n_1 \cos \theta_1} = \frac{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1-148)$$

由上述关系式，显然有

$$R_s + T_s = 1$$

$$R_p + T_p = 1$$

综上所述，光在界面上的反射、透射特性由三个因素决定：入射光的偏振态，入射角，界面两侧介质的折射率。图 1-26 给出了按光学玻璃($n=1.52$)和空气界面计算得到的反射率 R 随入射角 θ_1 变化的关系曲线。可以看出：

① 一般情况下， $R_s \neq R_p$ ，即反射率与偏振状态有关。在小角度(正入射)和大角度(掠入射)情况下， $R_s \approx R_p$ 。在正入射时，

$$R_s = R_p = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (1-149)$$

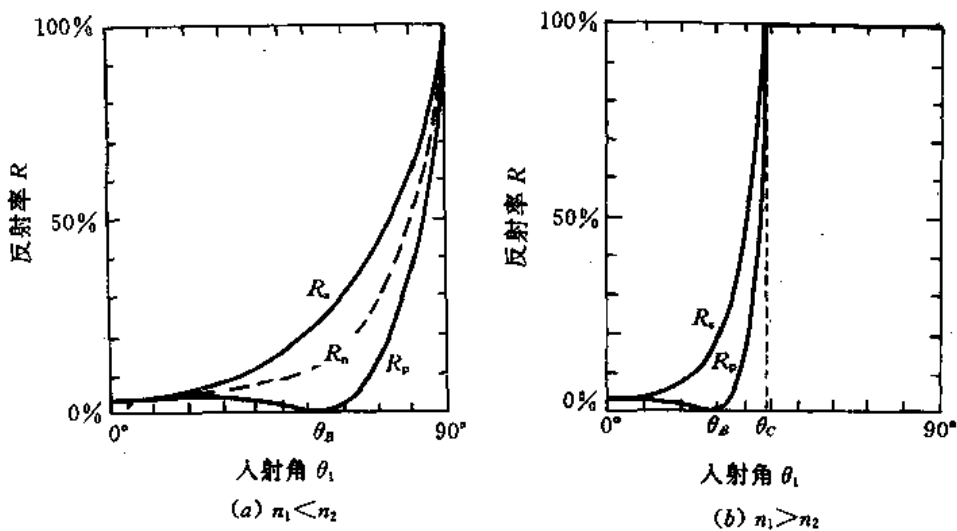


图 1-26 R 随入射角 θ_1 的变化关系



$$T_s = T_p = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (1-150)$$

在掠入射($\theta_1 \approx 90^\circ$)时, $R_s \approx R_p \approx 1$ 。

当光以某一特定角度 $\theta_1 = \theta_B$ 入射时, R_s 和 R_p 相差最大, 且 $R_p = 0$, 在反射光中不存在 p 分量。此时, 根据菲涅耳公式有 $\theta_B + \theta_2 = 90^\circ$, 即该入射角与相应的折射角互为余角。利用折射定律, 可得该特定角度满足

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (1-151)$$

该角 θ_B 称为布儒斯特(Brewster)角。例如, 当光由空气射向玻璃时, $n_1 = 1, n_2 = 1.52$, 布儒斯特角 $\theta_B = 56^\circ 40'$ 。

② 反射率 R 随入射角 θ_1 变化的趋势是: $\theta_1 < \theta_B$ 时, R 数值小, 由 $R_s = R_p = 4.3\%$ 缓慢地变化; $\theta_1 > \theta_B$ 时, R 随着 θ_1 的增大急剧上升, 到达 $R_s = R_p = 1$ 。

但是, 对于光由光密介质射向光疏介质($n_1 > n_2$)和光由光疏介质射向光密介质($n_1 < n_2$)两种不同情况的反射规律有一个重大差别: 当 $n_1 > n_2$ 时, 存在一个临界角 θ_c , 当 $\theta_1 > \theta_c$ 时, 光波发生全反射。由折射定律, 相应于临界角时的折射角 $\theta_2 = 90^\circ$, 因此有

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (1-152)$$

例如, 当光由玻璃射向空气时, 临界角 $\theta_c = 41^\circ 8'$ 。对于 $n_1 < n_2$ 的情况, 不存在全反射现象。

③ 反射率与界面两侧介质的折射率有关。图 1-27 给出了在 $n_1 = 1$ 的情况下, 光正入射介质时, 介质反射率 R 随其折射率 n 的变化曲线。可以看出, 在一定范围内, R 与 n 几乎是线性关系, 当 n 大到一定程度时, R 的上升就变得很缓慢了。在实际工作中, 一定要注意 n

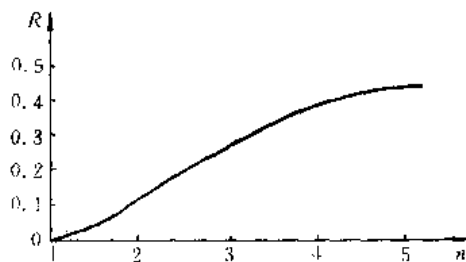


图 1-27 垂直入射时 R 随 n 变化的关系

对 R 的影响。例如, 正入射时, 普通玻璃($n = 1.5$)的反射率 $R \approx 4\%$, 红宝石($n = 1.769$)的反射率为 7.7% , 而对红外透明的锗片, $n = 4$, 其反射率高达 36% , 一次反射就几乎要损失近 40% 的光。

1.2.4 反射和折射的相位特性

前面已经指出, 菲涅耳公式描述了反射光、折射光与入射光之间的振幅和相位关系。现在, 我们从菲涅耳公式出发, 进一步讨论反射光和折射光的相位特性。

当平面光波在透明介质界面上反射和折射时, 由于折射率为实数, 菲涅耳公式中不会出现虚数项(全反射时, r_s 和 r_p 为复数, 这种情况后面讨论), 反射系数 r 和透射系数 t 只能取正、负值, 因此, 反射光和折射光电场的 s、p 分量不是与入射光同相就是反相。

1. 折射光与入射光的相位关系

由图 1-24 可以看出, 在入射角从 0° 到 90° 的变化范围内, 不论光波以什么角度入射

全界面，也不论界面两侧折射率的大小如何，s分量和p分量的透射系数 t 总是取正值，因此，折射光总是与入射光同相位。

2. 反射光与入射光的相位关系

反射光与入射光的相位关系比较复杂。下面，首先讨论反射和入射光中s、p分量的相位关系，然后讨论反射光和入射光的相位关系。

1) 反射光和入射光中s、p分量的相位关系

(1) 光波由光疏介质射向光密介质($n_1 < n_2$) 由图1-24(a)可见， $n_1 < n_2$ 时，反射系数 $r_s < 0$ ，说明反射光中的s分量与入射光中的s分量相位相反，或者说反射光中的s分量相对入射光中的s分量存在一个 π 相位突变，这即为图1-28(a)所表示的 $\varphi_s = \pi$ 。而p分量的反射系数 r_p 在 $\theta_1 < \theta_B$ 范围内， $r_p > 0$ ，说明反射光中的p分量与入射光中的p分量相位相同($\varphi_p = 0$)；在 $\theta_1 > \theta_B$ 范围内， $r_p < 0$ ，说明反射光中的p分量相对入射光中的p分量有 π 相位突变($\varphi_p = \pi$)，此相位特性如图1-28(b)所示。

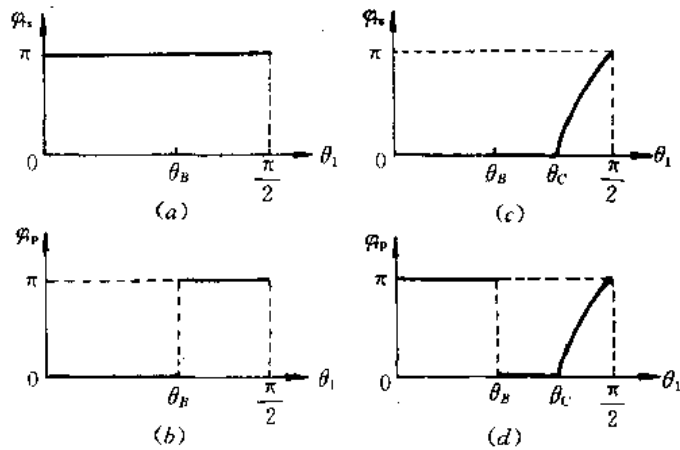


图1-28 φ_s 、 φ_p 随入射角 θ_1 的变化

(2) 光波由光密介质射向光疏介质($n_1 > n_2$) 由图1-24(b)可见，入射角 θ_1 在0到 θ_c 的范围内，s分量的反射系数 $r_s > 0$ ，说明反射光中的s分量与入射光中的s分量同相位，正如图1-28(c)所示的 $\varphi_s = 0$ 。p分量的反射系数 r_p 在 $\theta_1 < \theta_B$ 范围内， $r_p < 0$ ，说明反射光中的p分量相对入射光中的p分量有 π 相位突变($\varphi_p = \pi$)；而在 $\theta_B < \theta_1 < \theta_c$ 范围内， $r_p > 0$ ，说明反射光中的p分量与入射光中的p分量相位相同，如图1-28(d)所示。

2) 反射光和入射光的相位关系

为了正确确定在界面入射点处的反射光(合成)场与入射光(合成)场的相位关系，必须考虑图1-23所示的s、p分量光电场振动正方向的规定。下面，以几种特殊的反射情况说明反射光场与入射光场之间的相位关系。

(1) 小角度入射的反射特性

① $n_1 < n_2$ 。为明显起见，我们考察 $\theta_1 = 0$ 的正入射情况。由图1-24(a)，有

$$r_s < 0, r_p > 0$$

考虑到图1-23所示的光电场振动正方向的规定，入射光和反射光的s分量、p分量方向如图1-29所示。由于 $r_s < 0$ ，反射光中的s分量与规定方向相反(即为垂直纸面向内方向)；由于 $r_p > 0$ ，反射光中的p分量与规定正方向相同(逆着反射光线看，指向右侧)。所

以，在入射点处，合成的反射光矢量 E_r 相对入射光场 E_i 反向，相位发生 π 突变，或半波损失。对于 θ_1 非零、小角度入射时，都将近似产生 π 相位突变，或半波损失。

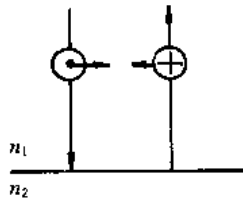


图 1-29 正入射时产生 π 相位突变

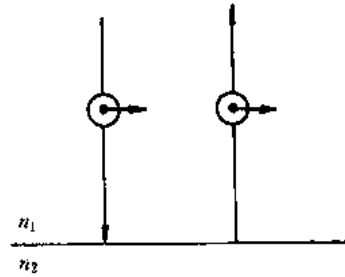


图 1-30 正入射无相位突变

② $n_1 > n_2$ 。正入射时，由图 1-24(b) 有

$$r_p < 0, r_s < 0.$$

考虑到图 1-23 所示的光电场振动正方向的规定，入射光和反射光的 s 分量、p 分量方向如图 1-30 所示。于是，在入射点处，入射光矢量 E_i 与反射光矢量 E_r 同方向，即二者同相位，反射光没有半波损失。

(2) 掠入射的反射特性 若 $n_1 < n_2$, $\theta_1 \approx 90^\circ$ ，由(1-136)式和(1-137)式得： $|r_s| = |r_p|$, $r_s < 0, r_p < 0$ 。考虑到图 1-23 的光电场振动正方向规定，其入射光和反射光的 s 分量、p 分量方向如图 1-31 所示。因此，在入射点处，入射光矢量 E_i 与反射光矢量 E_r 方向近似相反，即掠入射时的反射光在 $n_1 < n_2$ 时，将产生半波损失。



图 1-31 掠入射时的相位突变

3) 薄膜上下表面的反射

以上讨论了在一个界面上反射光的相位突变情况。对于从平行平面薄膜两表面反射的 1、2 两束光，有如图 1-32 所示的四种情形： $n_1 < n_2$, $\theta_1 < \theta_B$ 和 $\theta_1 > \theta_B$; $n_1 > n_2$, $\theta_1 < \theta_B$ 和 $\theta_1 > \theta_B$ 。由图可见，就 1、2 两束反射光而言，其 s、p 分量的方向总是相反。因此，薄膜上下两侧介质相同时，上下两表面反射光的光场相位差，除了有光程差的贡献外，还有 π 的附加相位差。

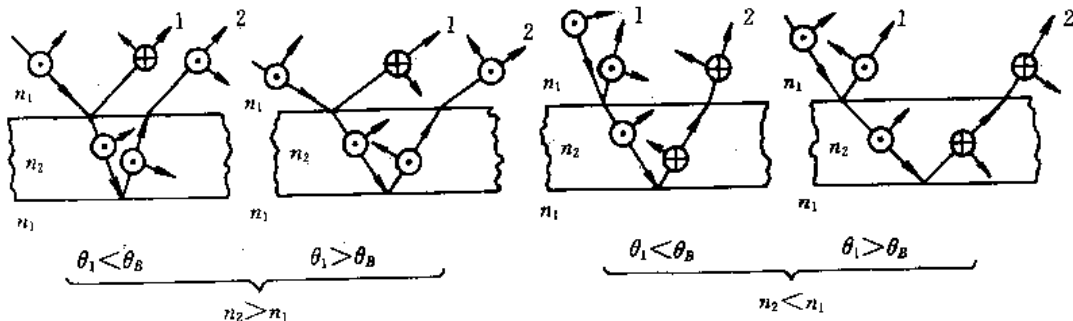


图 1-32 薄膜上下表面的反射



1.2.5 反射和折射的偏振特性

1. 偏振度

前面讨论了平面光波按其光矢量端点的变化轨迹定义的线偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光的偏振特性。实际上，由普通光源发出的光波都不是单一的平面波，而是许多光波的总和；它们具有一切可能的振动方向，在各个振动方向上振动的振幅在观察时间内的平均值相等，初相位完全无关，这种光称为完全非偏振光，或称自然光。如果由于外界的作用，使各个振动方向上的振动强度不相等，就变成部分偏振光。如果光矢量有确定不变的或有规则变化的振动方向，则称为完全偏振光。部分偏振光可以看作是完全偏振光和自然光的混合，而完全偏振光若不特别说明，都是指线偏振光。

为便于研究，可将任意光矢量视为两个正交分量（例如，s 分量和 p 分量）的组合，因此，任意光波能量都可表示为

$$W = W_s + W_p$$

在完全非偏振光中， $W_s = W_p$ ；在部分偏振光中， $W_s \neq W_p$ ；在完全偏振光中，或 $W_s = 0$ ，或 $W_p = 0$ 。

为表征光波的偏振特性，引入偏振度 P 。偏振度的定义是，在部分偏振光的总强度中，完全偏振光所占的比例，即

$$P = \frac{I_L}{I_{\Sigma}} \quad (1-153)$$

偏振度还可以表示为

$$P = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad (1-154)$$

式中， I_M 和 I_m 分别为两个特殊（正交）方向上所对应的最大和最小光强。

对于完全非偏振光， $P=0$ ；对于完全偏振光， $P=1$ 。一般的 P 值表示部分偏振光， P 值愈接近 1，光的偏振程度愈高。

2. 反射和折射的偏振特性

由菲涅耳公式可知，通常， $r_s \neq r_p$ ， $t_s \neq t_p$ ，因此，反射光和折射光的偏振状态相对入射光发生变化。即使入射光是线偏振光，其反射光和折射光的振动方向也会发生变化。

1) 自然光的反射、折射特性

自然光的反射率为

$$R_n = \frac{W_r}{W_{in}} \quad (1-155)$$

由于入射的自然光能量 $W_{in} = W_{is} + W_{ip}$ ，且 $W_{is} = W_{ip}$ ，因此

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{W_{rs} + W_{rp}}{W_{in}} = \frac{W_{rs}}{2W_{is}} + \frac{W_{rp}}{2W_{ip}} \\ &= \frac{1}{2}(R_s + R_p) \end{aligned} \quad (1-156)$$

相应的反射光偏振度为

$$P_r = \left| \frac{I_{rp} - I_{rs}}{I_{rp} + I_{rs}} \right| = \left| \frac{R_p - R_s}{R_p + R_s} \right| \quad (1-157)$$



$$P_t = \left| \frac{I_{tp} - I_{ts}}{I_{tp} + I_{ts}} \right| = \left| \frac{T_p - T_s}{T_p + T_s} \right| \quad (1-158)$$

根据前面有关反射率和折射率的讨论,在不同入射角的情况下,自然光的反射、折射和偏振特性如下:

① 自然光正入射($\theta_1 = 0^\circ$)和掠入射界面($\theta_1 \approx 90^\circ$)时, $R_s = P_p$, $T_s = T_p$, 因而 $P_r = P_t = 0$, 即反射光和折射光仍为自然光。

② 自然光斜入射界面时, 因 R_s 和 R_p 、 T_s 和 T_p 不相等, 所以反射光和折射光都变成了部分偏振光。

③ 自然光正入射界面时, 反射率为

$$R_n = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (1-159)$$

例如, 光由空气($n_1 = 1$)正入射至玻璃($n_2 = 1.52$)时, $R_n = 4.3\%$; 正入射至红宝石($n_2 = 1.769$)时, $R_n = 7.7\%$; 正入射至锗片($n_2 = 4$)时, $R_n = 36\%$ 。

④ 自然光斜入射至界面上时, 反射率为

$$R_n = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} + \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_2)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_2)} \right] \quad (1-160)$$

随着入射角的变化, 自然光反射率的变化规律为: (i) 光由光疏介质射向光密介质(例如, 由空气射向玻璃)时, 由图 1-26(a)可见, 在 $\theta_1 < 45^\circ$ 范围内, R_n 基本不变, 且近似等于 4.3%; 在 $\theta_1 > 45^\circ$ 时, 随 θ_1 的增大, R_n 较快地变大。(ii) 光由光密介质射向光疏介质时, 在入射角大于临界角范围内, 将发生全反射。(iii) 当 $\theta_1 = \theta_B$ 时, 由于 $R_p = 0$, $P_r = 1$, 所以反射光为完全偏振光。例如, 光由空气射向玻璃时, 布儒斯特角为

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} = 56^\circ 40'$$

由反射率公式可得 $R_s = 15\%$, 因此, 反射光强

$$I_r = R_n I_i = \frac{1}{2} (R_s + R_p) I_i = 0.075 I_i$$

这说明反射光为偏振光, 但反射光强很小。对于透射光, 因 $I_{rp} = 0$, 有 $I_{tp} = I_p$ 。又由于入射光是自然光, 有 $I_p = 0.5 I_i$, 因而 $I_{tp} = 0.5 I_i$ 。进一步, 因为

$$I_{ts} = I_s - I_{rs} = 0.5 I_i - 0.075 I_i = 0.425 I_i$$

所以透射光的偏振度为

$$P_t = \left| \frac{I_{tp} - I_{ts}}{I_{tp} + I_{ts}} \right| = 0.081$$

因此, 透射光的光强很大($I_t = 0.925 I_i$), 但偏振度很小。

由上所述可以看出, 要想通过单次反射的方法获得强反射的线偏振光、高偏振度的透射光是很困难的。在实际应用中, 经常采用“片堆”达到上述目的。“片堆”是由一组平行平面玻璃片(或其它透明的薄片, 如石英片等)叠在一起构成的, 如图 1-33 所示, 将这些玻璃片放在圆筒内, 使其表面法线与圆筒轴构成布儒斯特角(θ_B)。当自然光沿圆筒轴(以布儒斯特角)入射并通过“片堆”时, 因透过“片堆”的折射光连续不断地以相同的状态入射和折射, 每通过一次界面, 都从折射光中反射掉一部分垂直纸面振动的分量, 最后使通过“片

堆”的透射光接近为一个平行于入射面的线偏振光。

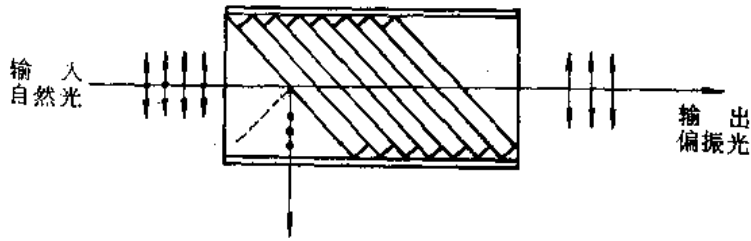


图 1-33 用片堆产生偏振光

在激光技术中，外腔式气体激光器放电管的布儒斯特窗口，就是上述“片堆”的实际应用。如图 1-34 所示，当平行入射面振动的光分量通过窗片时，没有反射损失，因而这种光分量在激光器中可以起振，形成激光。而垂直纸面振动的光分量通过窗片时，将产生高达 15% 的反射损耗，不可能形成激光。由于在激光产生的过程中，光在腔内往返运行，类似于光通过片堆的情况，所以输出的激光将是在平行于激光管轴和窗片法线组成的平面内振动的线偏振光。

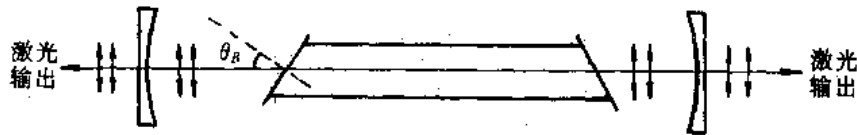


图 1-34 外腔式气体激光器

2) 线偏振光反射的振动面旋转

一束线偏振光入射至界面，由于垂直分量和平行分量的振幅反射系数不同，相对入射光而言，反射光的振动面将发生旋转。例如，一束入射的线偏振光振动方位角 $\alpha_i = 45^\circ$ ，则其平行分量和垂直分量相等，即 $E_{0s}^{(i)} = E_{0p}^{(i)}$ 。若如图 1-35 所示，该光的入射角 $\theta_1 = 40^\circ$ ，则 s 分量和 p 分量的振幅反射系数分别为 $r_s = -0.2845$ ， $r_p = 0.1245$ ，反射光中二分量的振幅分别为

$$E_{0s}^{(r)} = r_s E_{0s}^{(i)} = -0.2845 E_{0s}^{(i)}$$

$$E_{0p}^{(r)} = r_p E_{0p}^{(i)} = 0.1245 E_{0p}^{(i)}$$

因此，反射光的振动方位角为

$$\alpha_r = \arctan \frac{E_{0s}^{(r)}}{E_{0p}^{(r)}} = \arctan \left(-\frac{0.2845}{0.1245} \right) = -66^\circ 24'$$

相对入射光而言，振动面远离入射面。

对于折射光，由于其 s 分量和 p 分量均无相位突变，且 $E_{0p}^{(t)} > E_{0s}^{(t)}$ ，所以 $\alpha_t < 45^\circ$ ，即折射光的振动面转向入射面。

由此可见，线偏振光入射至界面，其反射光和折射光仍为线偏振光，但其振动方向要改变。一般情况下，反射光和折射光的振动方位角可由下式分别求出：

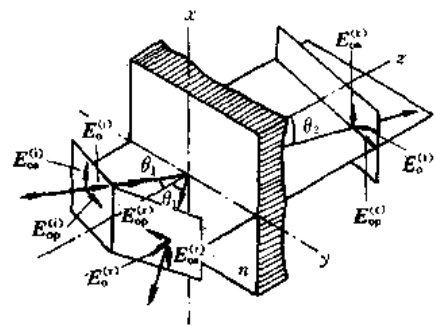


图 1-35 振动面的旋转



$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha_r &= \frac{E_{os}^{(r)}}{E_{op}^{(r)}} \\ \tan \alpha_t &= \frac{E_{os}^{(t)}}{E_{op}^{(t)}} \end{aligned} \right\} \quad (1-161)$$

并且, 假设方位角的变化范围是从 $-\pi/2$ 到 $\pi/2$ 。利用菲涅耳公式可以直接得到

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha_r &= -\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \tan \alpha_i \\ \tan \alpha_t &= \cos(\theta_1 - \theta_2) \tan \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (1-162)$$

由于 $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$, $0 \leq \theta_2 < \pi/2$, 所以有

$$|\tan \alpha_r| \geq |\tan \alpha_i| \quad (1-163)$$

$$|\tan \alpha_t| \leq |\tan \alpha_i| \quad (1-164)$$

对于反射光, 当 $\theta_1=0$ 或 $\theta_1=\pi/2$, 即正入射或掠入射时, (1-163)式中的等号成立, 在一般入射角时, 振动面远离入射面; 对于折射光, 当 $\theta_1=0$, 即正入射时, (1-164)式中的等号成立, 在一般入射角时, 振动面转向入射面。

1.2.6 全反射

由前面的分析已知, 当光由光密介质射向光疏介质时, 会产生全反射现象。在光电子技术应用中, 利用全反射现象的情况很多, 例如, 光在光纤中的传输原理, 就是基于全反射现象。下面, 进一步讨论全反射现象的基本特性。

1. 反射波

如前所述, 光由光密介质射向光疏介质 ($n_1 > n_2$) 时, 产生全反射的临界角 θ_c 满足下述关系:

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (1-165)$$

当 $\theta_1 > \theta_c$ 时, 必然会出现 $\sin \theta_1 > n_2/n_1$ 的现象, 这显然是不合理的。此时, 折射定律 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ 不再成立。但是, 为了能够将菲涅耳公式应用于全反射的情况, 在形式上仍然要利用关系式

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$$

为此, 应将 $\cos \theta_2$ 写成如下的虚数形式:

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = i \sqrt{\sin^2 \theta_2 - 1} \\ &= i \sqrt{\left(\frac{n_1 \sin \theta_1}{n_2}\right)^2 - 1} \end{aligned} \quad (1-166)$$

有关 $\cos \theta_2$ 取虚数的物理意义及其取正号的原因, 留在后面说明。

将(1-166)式代入菲涅耳公式, 得到复系数

$$\bar{r}_s = \frac{\cos \theta_1 - i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\cos \theta_1 + i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}} = |\bar{r}_s| e^{i\varphi_s} \quad (1-167)$$

$$\tilde{r}_p = \frac{\cos \theta_1 - i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{n^2 \cos \theta_1 + i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}} = |\tilde{r}_p| e^{i\varphi_p} \quad (1-168)$$

并且有

$$|\tilde{r}_s| = |\tilde{r}_p| = 1 \quad (1-169)$$

$$\tan \frac{\varphi_s}{2} = n^2 \tan \frac{\varphi_p}{2} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\cos \theta_1} \quad (1-170)$$

式中, $n = n_2/n_1$ 是二介质的相对折射率; $|\tilde{r}_s|$ 、 $|\tilde{r}_p|$ 为反射光与入射光的 s 分量、p 分量光场振幅大小之比。 φ_s 、 φ_p 为全反射时, 反射光中的 s 分量、p 分量光场相对入射光的相位变化。由上式可见, 发生全反射时, 反射光强等于入射光强, 而反射光的相位变化较复杂, 其大致规律如图 1-28(c)、(d) 所示。

应特别指出, 在全反射时, 反射光中的 s 分量和 p 分量的相位变化不同, 它们之间的相位差取决于入射角 θ_1 和二介质的相对折射率 n , 由下式决定:

$$\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_p = 2 \arctan \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\sin^2 \theta_1} \quad (1-171)$$

因此, 在 n 一定的情况下, 适当地控制入射角 θ_1 , 即可改变 $\Delta\varphi$, 从而改变反射光的偏振状态。例如, 图 1-36 所示的菲涅耳菱体就是利用这个原理将入射的线偏振光变为圆偏振光的。对于图示之玻璃菱体 ($n = 1.51$), 当 $\theta_1 = 54^\circ 37'$ (或 $48^\circ 37'$) 时, 有 $\Delta\varphi = 45^\circ$ 。因此, 垂直菱体入射的线偏振光, 若其振动方向与入射面的法线成 45° 角, 则在菱体内上下两个界面进行两次全反射后, s 分量和 p 分量的相位差为 90° , 因而输出光为圆偏振光。

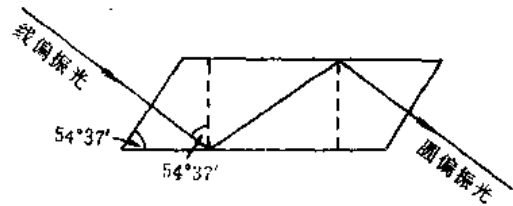


图 1-36 菲涅耳菱体

2. 消逝波

当光由光密介质射向光疏介质, 并在界面上发生全反射时, 透射光强为零。那么, 在光疏介质中是否有光场呢?

更深入地研究全反射现象表明: 在发生全反射时, 光波场将透入到第二个介质很薄的一层内 (约为光波波长), 并沿着界面传播一段距离, 再返回第一个介质。这个透入到第二个介质中表面层内的波叫消逝波 (倏逝波)。

现假设介质界面为 xOy 平面, 入射面为 xOz 平面, 则在一般情况下可将透射波场表示为

$$\begin{aligned} E_t &= E_{0t} e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y)} \\ &= E_{0t} e^{-i(\omega t - k_x x \sin \theta_2 - k_y x \cos \theta_2)} \end{aligned}$$

考虑到(1-166)式后, 上式可改写为

$$\begin{aligned} E_t &= E_{0t} e^{-i(\omega t - k_x x \sin \theta_2 - i k_x z \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_2/n})} \\ &= E_{0t} e^{-k_x z \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}/n} e^{-i(\omega t - k_x x \sin \theta_1/n)} \end{aligned} \quad (1-172)$$

这是一个沿着 z 方向振幅衰减, 沿着界面 x 方向传播的非均匀波 (图 1-37), 也就是全反

射时的衰逝波。由此可以说明，在前面的讨论中，只有 $\cos \theta_2$ 取虚数形式，(1-166)式取正号，才可以得到这个客观上存在的衰逝波。

由(1-172)式可见，衰逝波沿 x 方向的传播常数为 $(k_1 \sin \theta_1)/n$ ，因此，它沿 x 方向传播的波长为

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{(k_1 \sin \theta_1)/n} = \frac{\lambda}{\sin \theta_1} \quad (1-173)$$

沿 x 方向传播的速度为

$$v_x = \frac{v}{\sin \theta_1} \quad (1-174)$$

式中， λ 、 v 分别为光在第一个介质中的波长和速度。

由(1-172)式还可看出，衰逝波沿 x 方向传播，沿 z 方向衰减，且沿 z 方向的平均能流为零。那么，衰逝波在第二个介质内存在多大范围呢？为此，定义衰逝波沿 z 方向衰减到表面强度 $1/e$ 处的深度为衰逝波在第二个介质中的穿透深度。穿透深度 z_0 很容易由 $k_1 z_0 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}/n = 1$ 求得

$$z_0 = \frac{n}{k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}} \quad (1-175)$$

例如， $n_1 = 1.52$ ， $n_2 = 1$ ， $\theta_1 = 45^\circ$ 时， $z_0 = 0.4\lambda$ 。因此，衰逝波的穿透深度为波长的量级。

进一步的研究表明，发生全反射时，光由第一个介质进入第二个介质的能量入口处和返回能量的出口处，相隔约半个波长，即如图 1-38 所示，存在一个横向位移，此位移通常称为古斯—哈恩斯(Goos-Hänchen)位移。

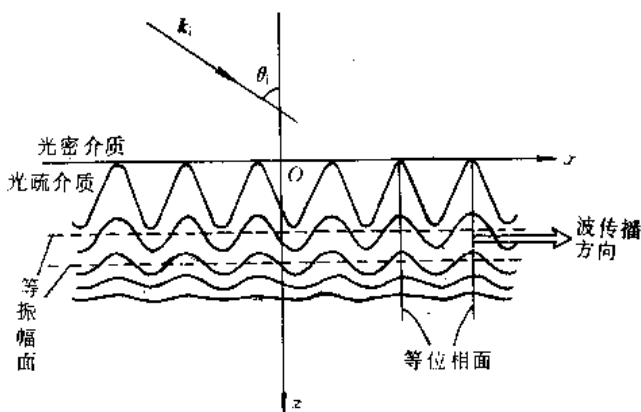


图 1-37 衰逝波

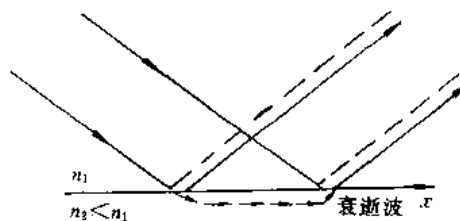


图 1-38 古斯—哈恩斯位移

3. 全反射现象应用举例

1) 光纤传光原理

在光电子技术中，光纤通信和光纤传感是非常重要的应用领域，而在光纤中的传光原理，正是基于全反射现象。

光纤是如图 1-39 所示的圆柱形光

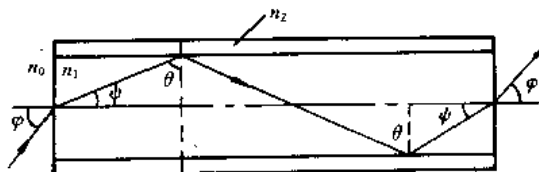


图 1-39 光纤传光原理

波导，由折射率为 n_1 的纤芯和折射率为 n_2 的包层组成，且有 $n_1 > n_2$ 。当光线在子午面内由光纤端面进入光纤纤芯，并以入射角 θ 射到纤芯和包层界面上时，如果入射角 θ 大于临界角 θ_c ，将全反射回到纤芯中，并在纤芯中继续不断地全反射，以锯齿形状在光纤内传输，直至从另一端折射输出。根据全反射的要求，对于光纤端面上光线的入射角 φ ，存在一个最大角 φ_m ，它可根据全反射条件，由临界角关系求出：

$$\sin \varphi_m = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (1-176)$$

当 $\varphi > \varphi_m$ 时，光线将透过界面进入包层，并向周围空间产生辐射损耗，因此，光纤不能有效地传递光能。通常将 $n_0 \sin \varphi_m$ 称为光纤的数值孔径(NA)，显然，数值孔径表示式为

$$\begin{aligned} \text{NA} &= \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \\ &\approx \sqrt{2n_1^2 \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1} \right)} \\ &= n_1 \sqrt{2\Delta} \end{aligned} \quad (1-177)$$

式中

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (1-178)$$

称为纤芯和包层的相对折射率差，一般光纤的 Δ 值为 0.01~0.05。

2) 光纤液面计

利用全反射现象可以制成测量液面高度的光纤液面计，其原理结构如图 1-40 所示。光源发出的光由光纤耦合进棱镜，经棱镜全反射后由另一根光纤输入光电探测器。当液面在图示 AA' 以下时，棱镜处在空气中，光在其底面上产生全反射，输入到光电探测器中的光很强；当液面上升到 AA' 以上时，全反射条件被破坏，进入探测器的光将大大减弱。于是，可以通过进入探测器光强的变化，测量出液面在 AA' 之上，还是在 AA' 以下。

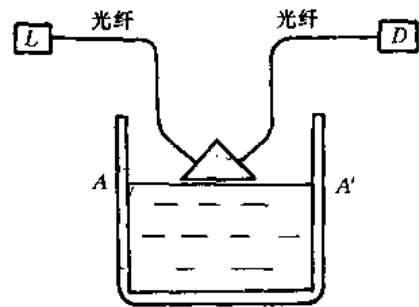


图 1-40 光纤液面计原理图

1.3 光波在金属表面上的反射和折射

前面讨论了光在非导电($\sigma=0$)的各向同性介质及其界面上的传播规律。对于金属而言，它与各向同性介质的主要差别是电导率(σ)不等于零，由于电导率与焦耳热损耗有关，所以将导致金属中光电磁波衰减，以致于几乎不透明。尽管这样，金属在光学中仍起着重要的作用，例如，金属表面可以作为很好的反射镜。

下面，首先简单介绍光波在金属中的传播特性，然后讨论光波在金属表面上的反射和折射特性。

1. 光波在金属中的传播

设金属是一种介电常数为 ϵ 、磁导率为 μ 、电导率为 σ 的均匀各向同性介质，则物质方



程中的 $J = \sigma E$ 必须予以考虑。麦克斯韦方程(1-4)式应为

$$\nabla \times \mathbf{H} - \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1-179)$$

对于频率为 ω 的单色波，上式变为

$$\nabla \times \mathbf{H} - \left(1 + i \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

若令复数 α 为

$$\alpha = 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \quad (1-180)$$

上式可改写为

$$\nabla \times \mathbf{H} - \alpha \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (1-181)$$

由于金属中的电导率 σ 很大，即使某时刻存在电荷密度 ρ ，也会很快地衰减为零。因此，可视金属中的电荷密度 $\rho = 0$ 。这样，采用类似 1.1 节中的推导过程，可得金属中光波所满足的波动方程为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-182)$$

这两个波动方程与(1-13)式的差别在于以复数值 $\mu \epsilon \alpha$ 代替了 $\mu \epsilon$ 。

对于金属中的单色平面光波，其电场表示式为

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})} \quad (1-183)$$

式中， \mathbf{k}_0 为波矢方向的单位矢量； \bar{k} 为“复波数”，且

$$\bar{k} = \omega \sqrt{\mu \epsilon \alpha} = \omega \sqrt{\mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right)} \quad (1-184)$$

若令

$$\bar{k} = \bar{n} k = \bar{n} \frac{\omega}{c} \quad (1-185)$$

则

$$\bar{n} = c \sqrt{\mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right)} \quad (1-186)$$

该 \bar{n} 是金属中的复折射率。如果将 \bar{n} 写成实、虚部形式：

$$\bar{n} = n' + i n''$$

则可解得

$$\begin{aligned} (n')^2 &= c^2 \left[\frac{\mu \epsilon + \sqrt{\mu^2 \epsilon^2 + \frac{\mu^2 \sigma^2}{\omega^2}}}{2} \right] \\ (n'')^2 &= \frac{\mu^2 \sigma^2 c^2}{2 \omega^2} \left[\frac{1}{\mu \epsilon + \sqrt{\mu^2 \epsilon^2 + \frac{\mu^2 \sigma^2}{\omega^2}}} \right] \end{aligned} \quad (1-187)$$

于是，金属中的单色平面光波电场表示式为

$$\begin{aligned}
 E &= E_0 e^{-i[\omega t - \frac{\omega}{c}(n' + in'')(k_0 \cdot r)]} \\
 &= E_0 e^{-\frac{\omega}{c} n''(k_0 \cdot r)} e^{-i[\omega t - \frac{\omega}{c} n'(k_0 \cdot r)]}
 \end{aligned} \tag{1-188}$$

这说明，金属中传播的单色平面光波是一个衰减的平面波， n' 是光在金属中传播时的折射率， n'' 是描述光在金属中传播时衰减特性的量，它们都是光频率 ω 的函数。

2. 光在金属表面上的反射和折射

对于光在金属表面上的反射和折射，其讨论方法与电介质界面的情况相同。

如图 1-41 所示，设 $z=0$ 平面为分界面，上半空间为空气，下半空间为金属。

首先讨论 s 分量的反射、折射特性。

设空气中入射光的电场表达式为

$$E_i = E_{0i} e^{-i[\omega t - (k \sin \theta_i)x + (k \cos \theta_i)z]} \quad z \geq 0 \tag{1-189}$$

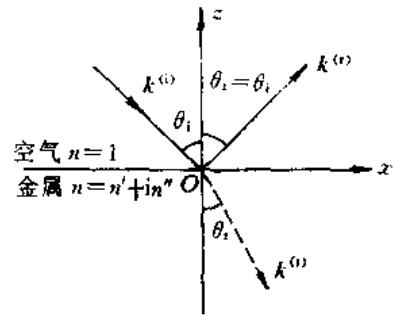


图 1-41 金属表面的反射和折射

相应的反射光和金属中折射光的电场形式为

$$\left. \begin{aligned}
 E_r &= E_{0r} e^{-i[\omega t - (k \sin \theta_r)x - (k \cos \theta_r)z]} & z > 0 \\
 E_t &= E_{0t} e^{-i[\omega t - (k \sin \theta_t)x + (k \cos \theta_t)z]} & z < 0
 \end{aligned} \right\} \tag{1-190}$$

按照与 1.2 节类似的步骤，可以得到反射光、折射光的方向关系：

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_r &= \theta_i \\
 \bar{k} \sin \theta_t &= k \sin \theta_i
 \end{aligned} \right\} \tag{1-191}$$

由于 \bar{k} 为复数，所以 θ_t 也为复数。

若设金属中折射光波矢分量的大小为

$$\left. \begin{aligned}
 k_x^{(t)} &= \bar{k} \sin \theta_t \\
 k_z^{(t)} &= \bar{k} \cos \theta_t
 \end{aligned} \right\} \tag{1-192}$$

则由(1-191)式， $k_x^{(t)}$ 应为实数，且有

$$\sin \theta_t = \frac{k}{\bar{k}} \sin \theta_i$$

所以

$$\begin{aligned}
 k_x^{(t)} &= \bar{k} \cos \theta_t = \bar{k} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} \\
 &= \sqrt{\bar{k}^2 - k^2 \sin^2 \theta_i} \\
 &= k \sqrt{\bar{n}^2 - \sin^2 \theta_i} \\
 &= k \sqrt{((n')^2 - (n'')^2 - \sin^2 \theta_i) + i2n'n''}
 \end{aligned}$$

为方便起见，将 $k_x^{(t)}$ 表示成如下复数形式：

$$k_x^{(t)} = k_x^{(t)'} + ik_x^{(t)''}$$

则金属中的折射光电场表示式可写为

$$\begin{aligned}
 E_t &= E_{0t} e^{-i[\omega t - (k \sin \theta_t)x + (k_x^{(t)'} + ik_x^{(t)'})z]} \\
 &= E_{0t} e^{k_x^{(t)''} z} e^{-i[\omega t - (k \sin \theta_t)x + k_x^{(t)'} z]}
 \end{aligned} \tag{1-193}$$

这时，菲涅耳公式仍然成立，只是 θ_i 为复数角度。由(1-138)式有

$$\begin{aligned}
 t_s &= \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\
 &= |t_s| e^{i\varphi_{ts}}
 \end{aligned} \tag{1-194}$$

于是，金属中的折射光电场表示式为

$$E_t = E_{0i} |t_s| e^{k_z^{(t)'}} e^{-i[\omega t - (k \sin \theta_i)x + k_z^{(t)'}z - \varphi_{ts}]} \tag{1-195}$$

上式说明，金属中的折射光是一个沿 $-z$ 方向衰减的非均匀波， $z = \text{常数}$ 的平面为等振幅面，满足

$$(k \sin \theta_i)x - k_z^{(t)'}z = \text{常数}$$

的平面为等相位面，如图 1-42 所示。

由(1-195)式还可以看出，在界面上的任意点、任意时刻，折射光与入射光都相差一个相位 φ_s 。

对于金属良导体 ($\sigma/\varepsilon\omega \gg 1$)，由上面有关的计算公式可得

$$\begin{aligned}
 k_z^{(t)'} &\approx k_z^{(t)''} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \\
 &\tag{1-196}
 \end{aligned}$$

定义光波振幅衰减到表面振幅 $1/e$ 的传

播距离为穿透深度，则由上式及(1-195)式，穿透深度为

$$z_0 = \frac{1}{k_z^{(t)'}} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{1-197}$$

例如，对于铜， $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ ， $\sigma \approx 5.9 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})$ ，如果光波频率 $\nu = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ (黄光)，可算得

$$z_0 \approx 3 \times 10^{-6} \text{ mm} = 3 \text{ nm}$$

可见，入射光只能透入金属表面很薄的一层内。所以，在通常情况下，金属是不透明的，只有把它做成很薄的薄膜(比如镀铝的半透膜)时，才可以变成半透明的。

至于由金属表面向空气中的反射波，由于波矢 $k^{(r)}$ 为实数值，所以它是按照反射定律 ($\theta_r = \theta_i$) 传播的均匀波(等振幅面与等相位面一致)。不过，由于 r_s 为复数值，

$$\begin{aligned}
 r_s &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\
 &= |r_s| e^{i\varphi_{rs}}
 \end{aligned} \tag{1-198}$$

所以，在界面上的反射波与入射波也相差一个相位 φ_{rs} 。

上面给出的 φ_{ts} 和 φ_{rs} 除与入射角 θ_i 有关外，还与 \bar{n} 有关，也即与金属的物质常数 ε 、 μ 、 σ 以及光的频率 ω 有关。

对于 p 分量的反射、折射特性，亦可作同样的讨论，反射系数也是复数值

$$\begin{aligned}
 r_p &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\
 &= |r_p| e^{i\varphi_{rp}}
 \end{aligned} \tag{1-199}$$

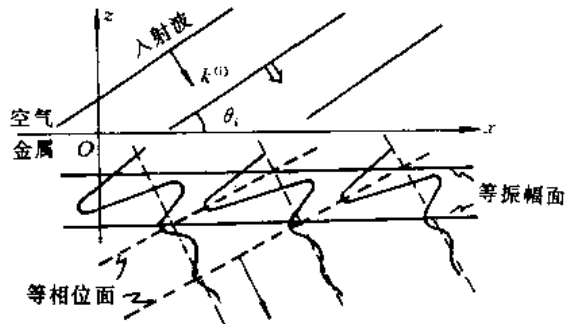


图 1-42 金属中的折射波

但是，由于 φ_p 与 φ_s 不同，因此金属表面的反射将改变入射光的偏振态。若入射光为线偏振光，其振动面与入射面间有一定的夹角，则由于反射光的s分量和p分量之间有一个相位差 $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_s$ ，而使反射光变成椭圆偏振光。对于椭圆偏振光的参数进行测量，可以确定出金属材料的复折射率 \bar{n} ，从而可求出 ϵ 、 μ 、 σ 等物质常数。

金属界面的反射率公式与介质情况相同，只是折射率应由复折射率替代。例如，光波垂直入射到空气—金属界面时，反射率公式为

$$R = |r|^2 = \left| \frac{\bar{n} - 1}{\bar{n} + 1} \right|^2 \quad (1-200)$$

若将 $\bar{n} = n' + in''$ 代入上式，则有

$$R = \frac{(n')^2 + (n'')^2 + 1 - 2n'}{((n')^2 + (n'')^2 + 1 + 2n')} \quad (1-201)$$

一些金属对于钠黄光($\lambda = 0.5893 \mu\text{m}$)的折射率和反射率数值，如表1-1所示。

表 1-1 金属的光学常数($\lambda = 0.5893 \mu\text{m}$)

金 属	n'	n''	R
银	0.20	3.44	0.94
铝	1.44	5.23	0.83
金(电解的)	0.47	2.83	0.82
铜	0.62	2.57	0.73
铁(蒸发的)	1.51	1.63	0.33

3. 金属表面反射的频率特性

上面指出，金属与各向同性介质的主要差别是有很大的电导率 σ ，根据电子理论的观点，这种电导率起因于金属中有密度很大的自由电子(约 $10^{23}/\text{cm}^3$)。当光照射到清洁磨光的金属表面时，自由电子将在光电磁场的作用下强迫振动，产生次波，这些次波构成了很强的反射波和较弱的透射波，并且这些透射波将很快地被吸收掉。

各种金属因其所包含的自由电子密度不同，反射光的能力不同。一般说来，自由电子密度越大(电导率越大)，反射本领就越大。对于同一种金属，由上面的

分析已经看出，入射光频率(波长)不同，反射率也不同。频率较低的红外线主要对金属中的自由电子发生作用，而频率较高的可见光和紫外光可对金属中的束缚电子发生作用。束缚电子本身的固有频率正处在可见光和紫外光区，它将使金属的反射能力降低，透射能力增大，呈现出非金属的光学性质。例如，如图1-43所示，银对红光和红外光的反射率很大，并有显著吸收；在紫外光区，反射率很低，在 $\lambda = 0.316 \mu\text{m}$ 附近，反射率降到4.2%，相当于玻璃的反射，而透射率则明显增大。铝的反射本领随波长的变化比较平缓，对于紫

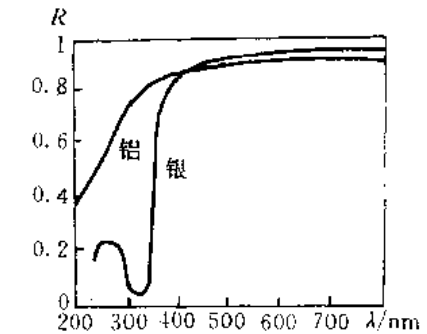


图 1-43 银和铝反射率与波长的关系

例 题

例 1-1 设一单色平面光波的频率为 $\nu=10^{14}$ Hz，振幅为 1。t=0 时，在 xOy 面(z=0)上的相位分布如图 1-44 所示：等相位线与 x 轴垂直， $\varphi=0$ 的等相位线坐标为 $x=-5 \mu\text{m}$ ， φ 随 x 线性增加，x 每增加 $4 \mu\text{m}$ ，相位增加 2π 。求此波场的三维空间表达式。

解：由于 x 每增加 $4 \mu\text{m}$ ，相位增加 2π ，所以沿 x 方向每增加单位长度，相位增加量为

$$k_x = \frac{2\pi}{4 \mu\text{m}} = 1.571 \times 10^3 \text{ mm}^{-1}$$

因沿 y 轴的相位不变化，故 $k_y=0$ ，于是

$$\begin{aligned}
 k_z &= \sqrt{\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2} \\
 &= 1.385 \times 10^3 \text{ mm}^{-1}
 \end{aligned}$$

由于 $k_y=0$ ，所以在 $z=0$ 面上、t=0 时刻的相位应为

$$\varphi = k_x x + \varphi_0$$

又由于在 $x=-5 \mu\text{m}$ 处， $\varphi=0$ ，故得

$$\varphi_0 = 2.5\pi$$

因此，光波电场空间相位因子为

$$E(x, y, z) = e^{i(1.57 \times 10^3 x + 1.385 \times 10^3 z + 2.5\pi)}$$

可见，沿 x 方向的空间频率和空间周期为

$$f_x = \frac{1}{2\pi} k_x = 250 \text{ mm}^{-1}$$

$$T_x = \frac{1}{f_x} = 4 \mu\text{m}$$

沿 z 方面的空间频率和空间周期为

$$f_z = \frac{1}{2\pi} k_z = 220 \text{ mm}^{-1}$$

$$T_z = \frac{1}{f_z} = 4.545 \mu\text{m}$$

因 $k_y=0$ ，所以波法线在 xOz 平面内，它与 z 轴的夹角 α (见图 1-45)为

$$\alpha = \arctan \frac{T_z}{T_x} = 48^\circ 36'$$

例 1-2 设有波长为 λ 的单色平面光波从 xOy 平面左侧沿 z 方向射来(图 1-46)，该平面光波的表达式为(省略 $\exp(-i\omega t)$ 因子)

$$E(x, y, z) = e^{ikz}$$

在 $z=0$ 平面上放置一个足够大的平面模板，其振幅透过率 t 在 0 与 1 之间随 x 如下变化：

$$t(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{3\lambda} x - 0.4\pi \right) \right]$$

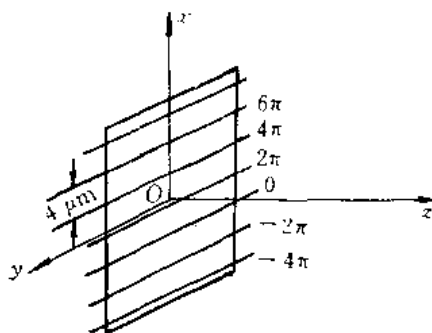


图 1-44 例 1-1 用图

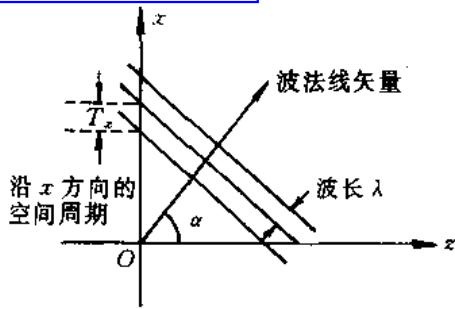


图 1-45 平面光波的空间特性

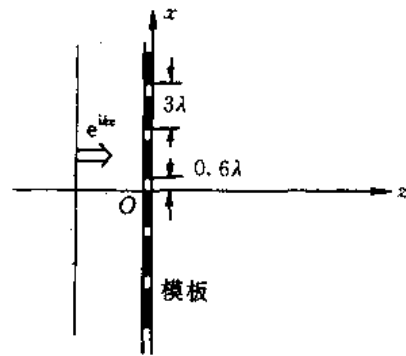


图 1-46 例 1-2 用图

求从模板右侧刚刚射出的波场的空间频谱 $E(f_x, f_y)$ 。

解：将紧贴模板右侧的平面取为 $z=+0$ ，则入射波经该模板后在平面 $z=+0$ 上的场分布为

$$\begin{aligned}
 E(x, y) &= [t(x)e^{ikx}]_{z=+0} \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3\lambda}x - 0.4\pi\right) \right]
 \end{aligned}$$

对 $E(x, y)$ 进行傅里叶变换，并利用 δ 函数公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu(x-x')} d\nu = \delta(x-x') = \delta(x'-x)$$

可得

$$\begin{aligned}
 E(f_x, f_y) &= \frac{1}{2} \delta(f_x) \delta(f_y) + \frac{1}{4} e^{-i0.4\pi} \delta\left(f_x - \frac{1}{3\lambda}\right) \delta(f_y) \\
 &\quad + \frac{1}{4} e^{i0.4\pi} \delta\left(f_x + \frac{1}{3\lambda}\right) \delta(f_y)
 \end{aligned}$$

由此可见，空间频谱 $E(f_x, f_y)$ 由三项 δ 函数构成。图 1-47 绘出了这三项 δ 函数在频谱平面上的位置：原点 P_0 对应 $\delta(f_x)\delta(f_y)$ 项，系数为 $\frac{1}{2}$ ；第二项对应 P_1 点 $(\frac{1}{3\lambda}, 0)$ ，系数是 $\frac{1}{4}e^{-i0.4\pi}$ ；第三项对应 P_{-1} 点 $(-\frac{1}{3\lambda}, 0)$ ，系数是 $\frac{1}{4}e^{i0.4\pi}$ 。于是，模板右方的空间传播着三个平面光波(见图 1-48)：

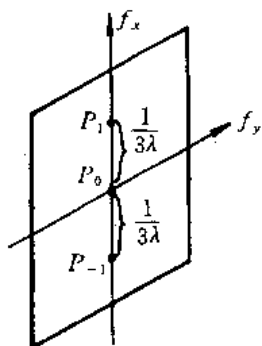


图 1-47 空间频谱分布

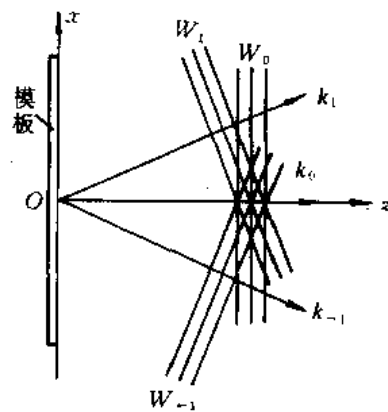


图 1-48 模板右方的光波

W_1 波矢为

$$k_1 = \frac{2\pi}{3\lambda}i + \frac{4\sqrt{2}}{3\lambda}\pi k$$

W_{-1} 波矢为

$$k_{-1} = -\frac{2\pi}{3\lambda}i + \frac{4\sqrt{2}}{3\lambda}\pi k$$

例 1-3 图 1-49 中的 M_1 、 M_2 是两块平行放置的玻璃片 ($n=1.50$), 背面涂黑。一束自然光以 θ_B 角入射到 M_1 上的 A 点, 反射至 M_2 上的 B 点, 再出射。试确定 M_2 以 AB 为轴旋转一周时, 出射光强的变化规律。

解: 由题设条件知, 当 M_2 绕 AB 轴旋转时, 二镜的入射角 θ_i 均为 θ_B , 且有

$$\theta_i = \theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} = 56.31^\circ$$

$$\theta_r = 90^\circ - \theta_i = 33.69^\circ$$

由于二镜背面涂黑, 所以不必考虑折射光。

对于 M_1 , 有

$$R_p = (r_p)^2 = 0$$

$$R_s = (r_s)^2 = \left[-\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \right]^2 = 0.1479$$

由于是自然光入射, p 、 s 分量无固定相位关系, 光强相等, 故

$$R = \frac{1}{2}(R_p + R_s) = 0.074 = \frac{I_1}{I_0}$$

式中, I_0 是入射自然光强; I_1 是沿 AB 的反射光强, 它是垂直于图面振动的线偏振光。

对于 M_2 , 假设在绕 AB 旋转的任一位置上, 入射面与图面的夹角为 θ , 则沿 AB 的入射光可以分解为 p 分量和 s 分量, 其振幅为

$$E_p = \sqrt{I_1} \sin \theta, E_s = \sqrt{I_1} \cos \theta$$

它们之间有一定的相位差。由于 $\theta_i = \theta_B$, 所以

$$r_p = 0$$

$$r_s = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} = -0.3846$$

因此, 出射光的振幅为

$$E'_p = 0$$

$$E'_s = r_s E_s = (-0.3846) \sqrt{I_1} \cos \theta$$

即最后的出射光强为

$$I_2 = (E'_s)^2 = 0.011 I_0 \cos^2 \theta$$

结论: 当 M_2 绕 AB 旋转时, 出射光强变化, 出射光强最大值 $I_M = 0.011 I_0$, 最小值

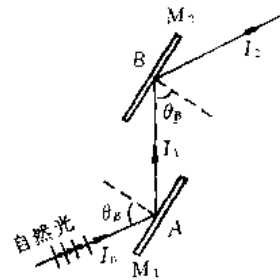


图 1-49 例 1-3 用图

$I_4 = 0$ 。出射光强依 M_1 相对于 M_2 的方位变化,符合马吕斯(Malus)定律。在本题的装置中, M_1 相当于起偏镜, M_2 相当于检偏镜,出射光相对于 M_2 的入射面来说,是垂直分量的线偏振光。

例 1-4 一束右旋圆偏振光(迎着光的传播方向看)从玻璃表面垂直反射出来,若迎着反射光的方向观察,是什么光?

解: 选取直角坐标系如图 1-50(a)所示,玻璃面为 xOy 面,右旋圆偏振光沿 $-z$ 方向入射,在 xOy 面上入射光电场矢量的分量为

$$E_{ix} = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_{iy} = A \sin(\omega t)$$

所观察到的入射光电场矢量的端点轨迹如图 1-50(b)所示。

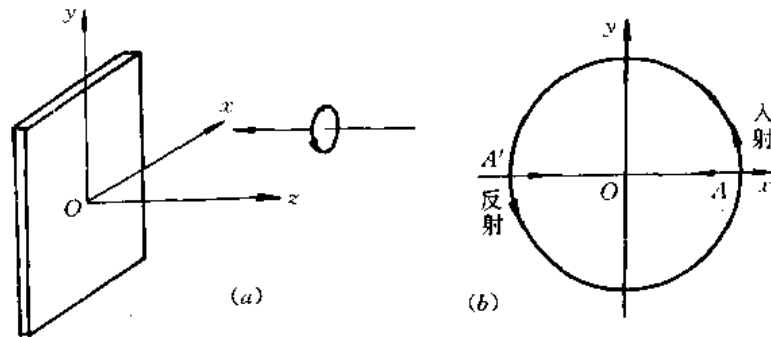


图 1-50 例 1-4 用图

根据菲涅耳公式,玻璃面上的反射光相对入射面而言有一个 π 相位突变,因而反射光的电场分量表示式为

$$E_{rx} = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_{ry} = A \sin(\omega t + \pi) = -A \sin(\omega t)$$

其旋向仍然是由 x 轴旋向 y 轴,所以,迎着反射光的传播方向看,是左旋圆偏振光。

结论:垂直入射光为右旋圆偏振光,经玻璃反射后变为左旋圆偏振光。

例 1-5 空气中有一薄膜($n=1.46$),两表面严格平行。今有一平面偏振光以 30° 角射入,其振动平面与入射面夹角为 45° ,如图 1-51 所示。问由表面反射的光①和经内部反射后的反射光④的光强各为多少?它们在空间的取向如何?它们之间的相位差是多少?

解: 如图 1-52(a)所示,将入射平面光分解成 s 、 p 分量,由于入射光振动面和入射面夹角是 45° ,所以 $E_s = E_p = E_i / \sqrt{2}$ 。

首先求反射光①的振幅及空间取向。

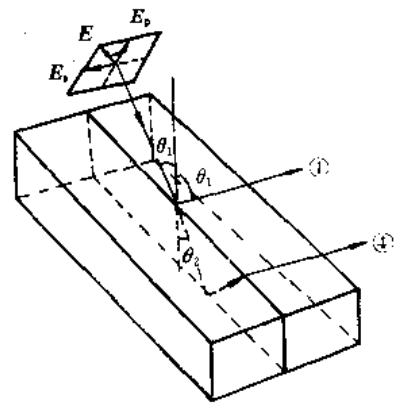


图 1-51 例题 1-5 用图

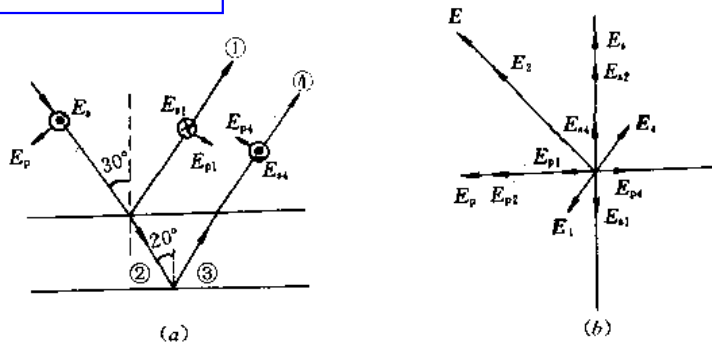


图 1-52 光路及振动方向示意

因入射角 $\theta_1 = 30^\circ$ ，故在 $n = 1.46$ 介质中的折射角 $\theta_2 = \arcsin(\sin \theta_1 / n) = 20^\circ$ ，所以，反射光①的 s、p 分量的振幅为

$$E_{s1} = \frac{E_i}{\sqrt{2}} \left[-\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \right] = -0.227 \frac{E_i}{\sqrt{2}}$$

$$E_{p1} = \frac{E_i}{\sqrt{2}} \left[\frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \right] = 0.148 \frac{E_i}{\sqrt{2}}$$

合振幅为

$$E_1 = \sqrt{E_{s1}^2 + E_{p1}^2} = 0.271 \frac{E_i}{\sqrt{2}}$$

振动面与入射面的夹角为

$$\alpha_1 = \arctan \left| \frac{E_{s1}}{E_{p1}} \right| = \arctan \frac{0.227}{0.148} = 56.86^\circ$$

光强为

$$I_1 = |E_1|^2 = 0.0366 I_i$$

为了计算反射光④的特性，必须先计算②和③。

对于②，其 s、p 分量的振幅为

$$E_{s2} = \frac{E_i}{\sqrt{2}} \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} = 0.773 \frac{E_i}{\sqrt{2}}$$

$$E_{p2} = \frac{E_i}{\sqrt{2}} \left[\frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \right] = 0.785 \frac{E_i}{\sqrt{2}}$$

E_2 、 E_{s2} 、 E_{p2} 的方向被标在图 1-52(b) 中。

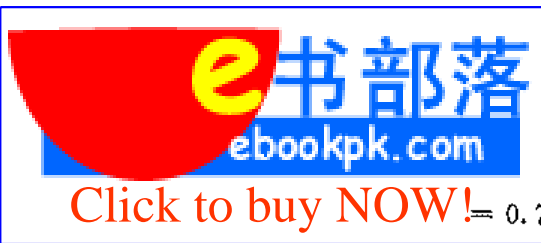
对于③，它是第二个界面的反射光，相应第二个界面的角度关系为 $\theta_1 = 20^\circ$ ， $\theta_2 = 30^\circ$ ，

其 s、p 分量的振幅为

$$E_{s3} = E_{s2} \left[-\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \right]$$

$$= 0.773 \frac{E_i}{\sqrt{2}} \frac{\sin 10^\circ}{\sin 50^\circ} = 0.175 \frac{E_i}{\sqrt{2}}$$

$$E_{p3} = E_{p2} \left[\frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \right]$$



$$= 0.785 \frac{E_i}{\sqrt{2}} \frac{\tan(-10^\circ)}{\tan 50^\circ} = -0.116 \frac{E_i}{\sqrt{2}}$$

因而, 光④的 s、p 分量振幅为

$$\begin{aligned} E_{s4} &= E_{s3} \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \\ &= 0.175 \frac{E_i}{\sqrt{2}} \frac{2 \sin 30^\circ \cos 20^\circ}{\sin 50^\circ} = 0.215 \frac{E_i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{p4} &= E_{p3} \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= -0.116 \frac{E_i}{\sqrt{2}} \frac{2 \sin 30^\circ \cos 20^\circ}{\sin 50^\circ \cos 10^\circ} = -0.145 \frac{E_i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

合振幅为

$$E_4 = \sqrt{E_{s4}^2 + E_{p4}^2} = 0.259 \frac{E_i}{\sqrt{2}}$$

振动面和入射面的夹角为

$$\alpha_4 = \arctan \left| \frac{E_{s4}}{E_{p4}} \right| = 56.19^\circ$$

其振动方向也被表示在图 1-52(b)中, 它的光强为

$$I_4 = |E_4|^2 = 0.0336 I_i$$

结论: 光线①和④的光强很接近, 而且, ①和④的振动在空间上的取向几乎一致, 但其相位相反。

例 1-6 一束自然光以 70° 角入射到空气—玻璃($n=1.5$)分界面上, 求反射率, 并确定反射光的偏振度。

解: 根据(1-156)式及(1-145)式、(1-146)式, 界面反射率为

$$R_n = \frac{1}{2} (r_s^2 + r_p^2)$$

因为

$$r_s = \frac{\cos \theta_1 - n \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + n \cos \theta_2} = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} = -0.55$$

$$r_p = \frac{n^2 \cos \theta_1 - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}{n^2 \cos \theta_1 + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} = -0.21$$

所以反射率为

$$R_n = 0.17$$

根据(1-157)式, 反射光的偏振度为

$$P_r = \left| \frac{I_{rp} - I_{rs}}{I_{rp} + I_{rs}} \right| = \left| \frac{R_p I_{ip} - R_s I_{is}}{R_p I_{ip} + R_s I_{is}} \right|$$

由于入射光是自然光, 因此, $I_{is} = I_{ip} = I_i/2$, 又由于 $R_s = r_s^2 = 0.303$, $R_p = r_p^2 = 0.044$, 所以

$$P_r = \frac{0.303 - 0.044}{0.303 + 0.044} = 74.6\%$$

Click to buy NOW!

例 1-7 欲使线偏振的激光通过红宝石棒时, 在棒的端面没有反射损失, 棒端面对棒轴倾角 α 应取何值? 光束入射角 φ_1 应为多大? 入射光的振动方向如何? 已知红宝石的折射率 $n=1.76$, 光束在棒内沿棒轴方向传播(图 1-53)。

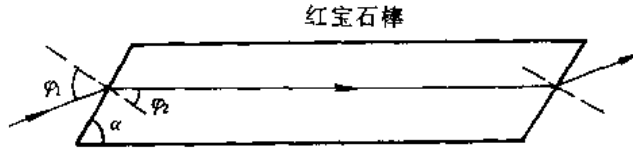


图 1-53 例 1-7 用图

解: 根据光在界面上的反射特性, 若没有反射损耗, 入射角应当为布儒斯特角, 入射光的振动方向应为 p 分量方向。因此, 入射角 φ_1 应为

$$\varphi_1 = \theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arctan(1.76) = 60.39^\circ$$

因为光沿布儒斯特角入射时, 其入射角和折射角互为余角, 所以折射角

$$\varphi_2 = 90^\circ - \theta_B = 29.61^\circ$$

由图 1-53 的几何关系, 若光在红宝石内沿棒轴方向传播, 则 α 与 φ_2 互成余角, 所以

$$\alpha = \varphi_1 = 60.39^\circ$$

入射光的振动方向在图面内、垂直于传播方向。

习 题

1-1 计算由下式表示的平面波电矢量的振动方向、传播方向、相位速度、振幅、频率、波长。

$$E = (-2i + 2\sqrt{3}j)e^{i(\sqrt{3}x + y + 6 \times 10^8 t)}$$

1-2 一个线偏振光在玻璃中传播时, 表示式为

$$E = 10^2 \cos\left[\pi \times 10^{15} \times \left(\frac{z}{0.65c} - t\right)\right]i$$

试求该光的频率、波长, 玻璃的折射率。

1-3 已知单色平面光波的频率为 $\nu=10^{14}$ Hz, 在 $z=0$ 平面上相位线性增加的情况如图 1-54 所示。求 f_x 、 f_y 、 f_z 。

1-4 设波长为 λ 的单色平面光波从 xOy 平面左侧沿 z 方向射来(图 1-46)。该平面波表达式为(省写 $\exp(-i2\pi\nu t)$)

$$E(x, y, z) = e^{ikx}$$

在 $z=0$ 平面上放置一个足够大的平面模板, 其振幅透过率 t 在 0 与 1 之间随 x 按如下余弦函数形式分布:

$$t(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{0.8\lambda}x\right) \right]$$

求从模板右侧刚刚射出的波场空间频谱 $E(f_x, f_y)$, 并分析其波的振幅变化。

1-5 试确定下列各组光波表示式所代表的偏振态:

(1) $E_x = E_0 \sin(\omega t - kz)$, $E_y = E_0 \cos(\omega t - kz)$

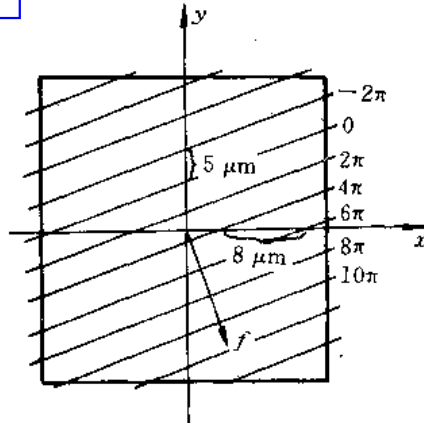


图 1-54 题 1-3 用图

(2) $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$, $E_y = E_0 \cos(\omega t - kz + \pi/4)$

(3) $E_x = E_0 \sin(\omega t - kz)$, $E_y = -E_0 \sin(\omega t - kz)$

1-6 在椭圆偏振光中, 设椭圆的长轴与 x 轴的夹角为 α , 椭圆的长、短轴各为 $2a_1$ 、 $2a_2$, E_x 、 E_y 的相位差为 φ . 求证

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_1 a_2 \cos \varphi}{a_1^2 - a_2^2}$$

1-7 已知冕牌玻璃对 $0.3988 \mu\text{m}$ 波长光的折射率为 $n=1.52546$, $dn/d\lambda = -1.26 \times 10^{-7}/\mu\text{m}$, 求光在该玻璃中的相速和群速。

1-8 试计算下面两种色散规律的群速度(表示式中的 v 是相速度):

(1) 电离层中的电磁波, $v = \sqrt{c^2 + b^2 \lambda^2}$, 其中 c 是真空中光速, λ 是介质中的电磁波长, b 是常数。

(2) 充满色散介质 ($\epsilon = \epsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$) 的直波导管中的电磁波, $v = c\omega / \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - c^2 a^2}$, 其中 c 是真空中光速, a 是与波导管截面有关的常数。

1-9 求从折射率 $n=1.52$ 的玻璃平板反射和折射的光的偏振度。入射光是自然光, 入射角分别为 0° , 20° , 45° , $56^\circ 40'$, 90° 。

1-10 一左旋圆偏振光以 50° 角入射到空气—玻璃分界面上(图 1-55), 试求反射光和透射光的偏振态。

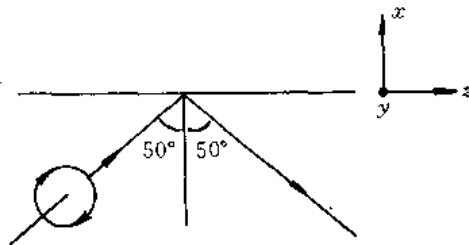


图 1-55 题 1-10 用图

1-11 若入射光是线偏振的, 在全反射的情况下, 入射角应为多大方能使得在入射面内振动和垂直入射面振动的两反射光间的相位差为极大? 这个极大值等于多少?

1-12 电矢量振动方向与入射面成 45° 的线偏振光, 入射到两种透明介质的分界面上, 若入射角 $\theta_1 = 50^\circ$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$, 则反射光的光矢量与入射面成多大角度? 若 $\theta_1 = 60^\circ$, 该角度又为多大?

1-13 产生圆偏振光的穆尼菱体如图 1-56 所示, 试证明: 如果菱体的折射率为 1.65, 则顶角 A 约为 60° 。

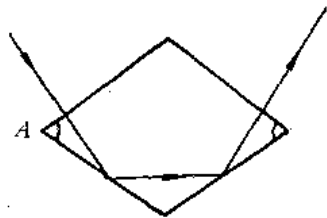


图 1-56 题 1-13 用图

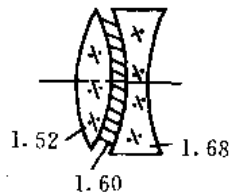


图 1-57 题 1-14 用图

1-14 望远镜之物镜为一双胶合透镜(图 1-57), 其单透镜的折射率分别为 1.52 和 1.68, 采用折射率为 1.60 的树脂胶胶合。问物镜胶合前后的反射光能损失分别为多少。

1-15 若要使光经红宝石($n=1.76$)表面反射后成为完全偏振光, 入射角应等于多少? 求在此入射角的情况下, 折射光的偏振度 P_1 。

1-16 如图 1-58 所示, 光线穿过平行平板, 由 n_1 进入 n_2 的界面振幅反射系数为 r , 透射系数为 t , 下表面的振幅反射系数为 r' , 透射系数为 t' 。试证明: 相应于平行和垂直于图面振动的光分量有: ① $r_{\perp} = -r'_{\perp}$, ② $r_{\parallel} = -r'_{\parallel}$, ③ $t_{\perp} \cdot t'_{\perp} + r_{\perp}^2 = 1$, ④ $t_{\parallel} \cdot t'_{\parallel} + r_{\parallel}^2 = 1$, ⑤ $1 + r'_{\parallel} = t_{\parallel} t'_{\parallel}$ 。

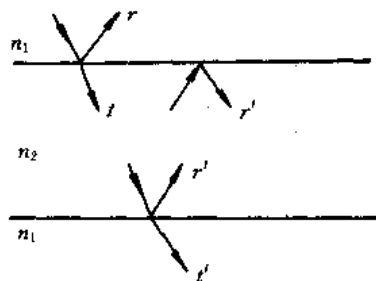


图 1-58 题 1-16 用图

1-17 一束自然光从空气垂直入射到玻璃表面, 试计算玻璃表面的反射率 $R_0 = ?$ 此反射率 R_0 与反射光波长是否有关? 为什么? 若光束以 45° 角入射, 其反射率 $R_{45} = ?$ 由此说明反射率与哪些因素有关(设玻璃折射率为 1.52)?

1-18 如图 1-59 所示, 用棱镜改变光束方向, 并使光束垂直棱镜表面射出, 入射光是平行于纸面振动的 He-Ne 激光($\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$)。问入射角 φ 等于多少时透射最强? 由此计算出该棱镜底角 α 应为多大($n = 1.52$)? 若入射光是垂直纸面振动的 He-Ne 激光, 能否满足反射损失小于 1% 的要求?

1-19 如图 1-60 所示, 玻璃块周围介质(水)的折射率为 1.33。若光束射向玻璃块的入射角为 45° , 问玻璃块的折射率至少应为多大才能使透入光束发生全反射。

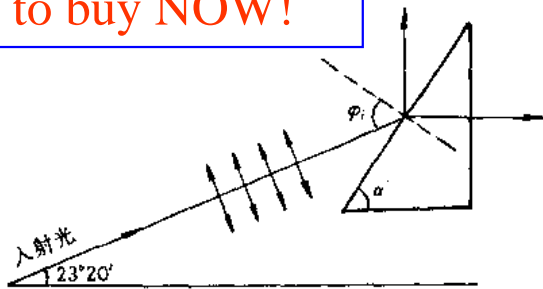


图 1-59 题 1-18 用图

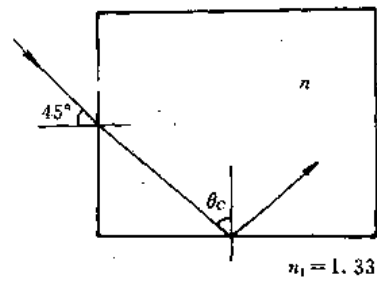


图 1-60 题 1-19 用图

1-20 如图 1-61, 当光从空气斜入射到平行平面玻璃片上时, 从上、下表面反射的光 R_1 和 R_2 之间相位关系如何? 它们之间是否有附加的“半波程差”? 对入射角大于和小于布儒斯特角的两种情况分别进行讨论。

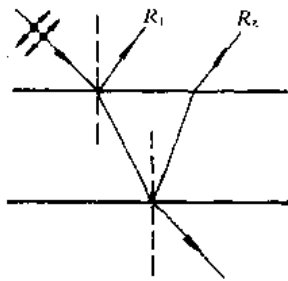


图 1-61 题 1-20 用图

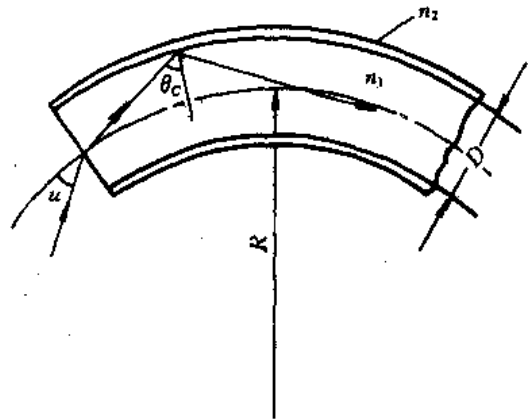


图 1-63 题 1-22 用图

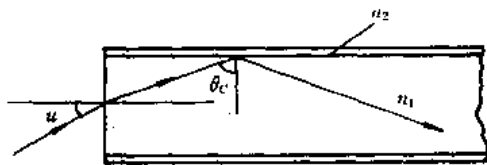


图 1-62 题 1-21 用图

1-21 图 1-62 所示的一根圆柱形光纤, 纤芯折射率为 n_1 , 包层折射率为 n_2 , 且 $n_1 > n_2$,

(1) 证明入射光的最大孔径角 $2u$ (保证光在纤芯和包层界面发生全反射) 满足关系式:

$$\sin u = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

(2) 若 $n_1 = 1.62$, $n_2 = 1.52$, 求最大孔径角 $2u = ?$

1-22 图 1-63 表示一弯曲圆柱形光纤, 纤芯直径为 D , 曲率半径为 R ,

(1) 证明入射光的最大孔径角 $2u$ 满足关系式:

$$\sin u = \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \left(1 + \frac{D}{2R}\right)^2}$$

(2) 若 $n_1 = 1.62$, $n_2 = 1.52$, $D = 70 \mu\text{m}$, $R = 12 \text{ mm}$, 求最大孔径角 $2u = ?$

1-23 铝在 $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ 时, $n' = 1.5$, $n'' = 3.2$, 求光正入射时的反射率。

第2章 光的干涉

光的干涉、衍射和偏振特性是光的波动性的主要特征，它们在许多光学仪器和测量技术的基础。本章研究光的干涉特性。首先介绍产生干涉的基本条件，典型的双光束干涉装置，双光束、多光束干涉特性及常用的干涉仪，薄膜技术；最后讨论光的相干性，简单介绍部分相干光理论。

2.1 双光束干涉

2.1.1 产生干涉的基本条件

1. 两束光的干涉现象

光的干涉是指两束或多束光在空间相遇时，在重叠区内形成稳定的强弱强度分布的现象。

例如，图 2-1 所示的两列单色线偏振光

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 \cdot r + \varphi_{01}) \quad (2-1)$$

$$E_2 = E_{02} \cos(\omega_2 t - k_2 \cdot r + \varphi_{02}) \quad (2-2)$$

在 P 点相遇， E_1 与 E_2 振动方向间的夹角为 θ ，则在 P 点处的总光强为

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta \cos \varphi \\
 &= I_1 + I_2 + 2I_{12}
 \end{aligned} \quad (2-3)$$

式中， I_1 、 I_2 是二光束的光强； φ 是二光束的相位差，且有

$$\varphi = k_2 \cdot r - k_1 \cdot r + \varphi_{01} - \varphi_{02} + \Delta \omega t$$

$$\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$I_{12} = \sqrt{I_1 I_2} \cos \theta \cos \varphi$$

由此可见，二光束叠加后的总强度并不等于这两列波的强度和，而是多了一项交叉项 I_{12} ，它反映了这两束光的干涉效应，通常称为干涉项。干涉现象就是指这两束光在重叠区内形成的稳定的光强分布。所谓稳定，是指用肉眼或记录仪器能观察到或记录到条纹分布，即在一定时间内存在着相对稳定的条纹分布。显然，如果干涉项 I_{12} 远小于两光束光强中较小的一个，就不易观察到干涉现象；如果两束光的相位差随时间变化，使光强度条纹图样产

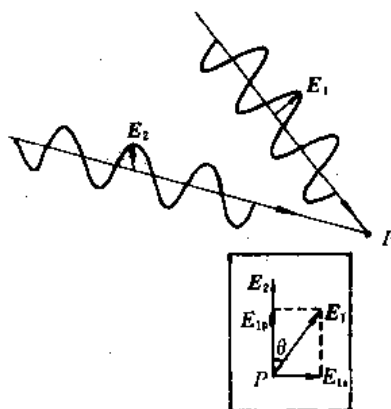


图 2-1 两列光波在空间重叠



生移动,且当条纹移动的速度快到肉眼或记录仪器分辨不出条纹图样时,就观察不到干涉现象了。

在能观察到稳定的光强分布的情况下,满足

$$\varphi = 2m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

的空间位置为光强极大值,且光强极大值 I_M 为

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta \quad (2-4)$$

满足

$$\varphi = (2m+1)\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

的空间位置为光强极小值,且光强极小值 I_m 为

$$I_m = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta \quad (2-5)$$

当两束光强相等, $I_1 = I_2 = I_0$, 相应的极大值和极小值分别为

$$I_M = 2I_0(1 + \cos \theta) \quad (2-6)$$

$$I_m = 2I_0(1 - \cos \theta) \quad (2-7)$$

2. 产生干涉的条件

首先引入一个表征干涉效应程度的参量——干涉条纹可见度,由此深入分析产生干涉的条件。

1) 干涉条纹可见度(对比度)

干涉条纹可见度定义为

$$V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad (2-8)$$

当干涉光强的极小值 $I_m = 0$ 时, $V = 1$, 二光束完全相干, 条纹最清晰; 当 $I_M = I_m$ 时, $V = 0$, 二光束完全不相干, 无干涉条纹; 当 $I_M \neq I_m \neq 0$ 时, $0 < V < 1$, 二光束部分相干, 条纹清晰度介于上面两种情况之间。

2) 产生干涉的条件

由上述二光束叠加的光强分布关系(2-3)式可见, 影响光强条纹稳定分布的主要因素是, 二光束频率以及二光束振动方向夹角和二光束的相位差。

(1) 对干涉光束的频率要求 由二干涉光束相位差的关系式可以看出, 当二光束频率相等, $\Delta\omega = 0$ 时, 干涉光强不随时间变化, 可以得到稳定的干涉条纹分布。当二光束的频率不相等, $\Delta\omega \neq 0$ 时, 干涉条纹将随着时间产生移动, 且 $\Delta\omega$ 愈大, 条纹移动速度愈快, 当 $\Delta\omega$ 大到一定程度时, 肉眼或探测仪器就将观察不到稳定的条纹分布。因此, 为了产生干涉现象, 要求二干涉光束的频率尽量相等。

(2) 对二干涉光束振动方向的要求 由(2-6)、(2-7)式可见, 若二光束光强相等, 则

$$V = \cos \theta \quad (2-9)$$

因此, 若 $\theta = 0$, 二光束的振动方向相同时, $V = 1$, 干涉条纹最清晰; 若 $\theta = \pi/2$, 二光束正交振动时, $V = 0$, 不发生干涉; 当 $0 < \theta < \pi/2$ 时, $0 < V < 1$, 干涉条纹清晰度介于上面两种情况之间。所以, 为了产生明显的干涉现象, 要求二光束的振动方向相同。

(3) 对二干涉光束相位差的要求 由(2-3)式可见, 为了获得稳定的干涉图形, 二千



涉光束的相位差必须固定不变，即要求二等频单色光波的初相位差恒定。实际上，考虑到光源的发光特点，这是最关键的要求。

可见，要获得稳定的干涉条纹，则：① 两束光波的频率应当相同；② 两束光波在相遇处的振动方向应当相同；③ 两束光波在相遇处应有固定不变的相位差。这三个条件就是两束光波发生干涉的必要条件，通常称为相干条件。

3. 实现光束干涉的基本方法

由上面的讨论可见，为了实现光束干涉，对于光波提出了严格的要求，因此也就对产生干涉光波的光源提出了严格要求。通常称满足相干条件的光波为相干光波，相应的光源叫相干光源。为了更深刻地理解干涉的特性，首先简单地介绍光源的发光性质。

1) 原子发光的特点

众所周知，一个光源包含有许多多个发光的原子、分子或电子，每个原子、分子都是一个发光中心，我们看到的每一束光都是从大量原子(发光中心)发射和汇集出来的。但是每个单个原子的发光都不是无休止的，每次发光动作只能持续一定的时间，这个时间很短(实验证明，原子发光时间一般都小于 10^{-8} 秒)，因而每次原子发光只能产生有限的一段波列。进一步，由光的辐射理论知道，普通光源的发光方式主要是自发辐射，即各原子都是一个独立的发光中心，其发光动作杂乱无章，彼此无关。因而，不同原子产生的各个波列之间、同一个原子先后产生的各个波列之间，都没有固定的相位关系，这样的光波叠加，当然不会产生干涉现象。或者说，在一极短的时间内，其叠加的结果可能是加强，而在另一极短的时间内，其叠加的结果可能是减弱，于是在一有限的观察时间 τ 内，二光束叠加的强度是时间 τ 内的平均，即为

$$\begin{aligned}\langle I \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} I \, d\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta \cos \varphi) \, d\tau \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos \varphi \, d\tau\end{aligned}$$

如果在 τ 内各时刻到达的波列相位差 φ 无规则地变化， φ 将在 τ 内多次(可能在 10^8 次以上)经历 0 与 2π 之间的一切数值，这样，上式的积分为

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos \varphi \, d\tau = 0$$

因此

$$\langle I \rangle = I_1 + I_2$$

即二光束叠加的平均光强，恒等于二光波的光强之和，不发生干涉。由此看来，不仅从两个普通光源发出的光不会产生干涉，就是从同一个光源的两个不同部分发出的光也是不相干的。因此，普通光源是一种非相干光源。

60 年代出现的一种新型光源——激光器所产生的激光有很好的相干性，它是一种相干光源。有关它的相干特性，将在后面专门讨论。

2) 获得相干光的方法

由上面关于相干条件的讨论可知，利用两个独立的普通光源是不可能产生干涉的，即使使用两个相干性很好的独立激光器发出的激光束来进行干涉，也是相当困难的事，其原因是它们的初相位关系不固定。

在光学中，获得相干光、产生明显可见干涉条纹的唯一方法就是把一个波列的光分成两束或几束光波，然后再令其重合而产生稳定的干涉效应。这种“一分为二”的方法，可以使二干涉光束的初相位差保持恒定。

一般获得相干光的方法有两类：分波面法和分振幅法。分波面法是将一个波列的波面分成两部分或几部分，由这每一部分发出的波再相遇时，必然是相干的，下面讨论的杨氏干涉就属于这种干涉方法。分振幅法通常是利用透明薄板的第一、二表面对入射光的依次反射，将入射光的振幅分解为若干部分，当这些部分的光波相遇时将产生干涉，这是一种很常见的获得相干光、产生干涉的方法，下面讨论的平行平板产生的干涉就属于这种干涉方法。

2.1.2 双光束干涉

1. 分波面法双光束干涉

在实验室中为了演示分波面法的双光束干涉，最常采用的是图 2-2 所示的双缝干涉实验。用一束 He-Ne 激光照射两个狭缝 S_1 、 S_2 ，就会在缝后的白色屏幕上出现明暗交替的双缝干涉条纹。

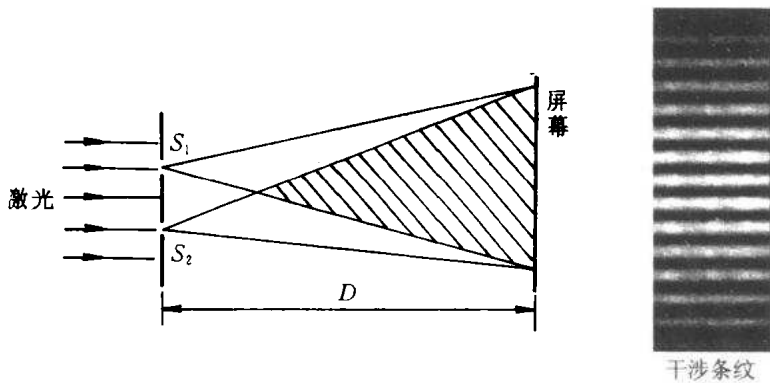


图 2-2 双缝干涉实验

为了研究分波面法双光束干涉现象的特性，下面进一步讨论杨氏双缝干涉实验。在图 2-3 实验原理图中， S_1 和 S_2 双缝来自狭缝 S 的光波波面上分割出很小的两部分作为相干光源，它们发出的两列光波在观察屏上叠加，形成干涉条纹。

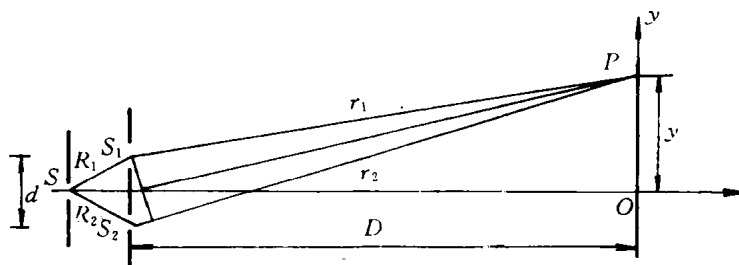


图 2-3 杨氏双缝干涉实验原理图

由于狭缝 S 和双缝 S_1 、 S_2 都很窄，均可视为次级线光源。从线光源 S 发出的光波经 SS_1P 和 SS_2P 两条不同路径，在观察屏 P 点上相交，其光程差为

$$\Delta = (R_2 - R_1) + (r_2 - r_1) = \Delta R + \Delta r$$

在 $d \ll D$ ，且在 y 很小的范围内考察时，相应二光的路径差为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \approx \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{yd}{D} + \Delta R \right) \quad (2-10)$$

① 如果 S_1 、 S_2 到 S 的距离相等， $\Delta R = 0$ ，则对应 $\varphi = 2m\pi (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的空间点

$$y = m \frac{D\lambda}{d} \quad (2-11)$$

为光强极大，呈现干涉亮条纹；对应 $\varphi = (2m+1)\pi$ 的空间点

$$y = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{D\lambda}{d} \quad (2-12)$$

为光强极小，呈现干涉暗条纹。

因此，干涉图样如图 2-2 所示，是与 y 轴垂直、明暗相间的直条纹。相邻两亮(暗)条纹间的距离是条纹间距 ϵ ，且

$$\epsilon = \Delta y = \frac{D\lambda}{d} = \frac{\lambda}{w} \quad (2-13)$$

其中 $w = d/D$ 叫光束会聚角。可见，条纹间距与会聚角成反比；与波长成正比，波长长的条纹较短波长的条纹疏。在实验中，可以通过测量 D 、 d 和 ϵ ，计算求得光波长 λ 。

② 如果 S_1 、 S_2 到 S 的距离不同， $\Delta R \neq 0$ ，则对应

$$y = \frac{m\lambda - \Delta R}{w} \quad (2-14)$$

的空间点是亮条纹；对应

$$y = \frac{(m + 1/2)\lambda - \Delta R}{w} \quad (2-15)$$

的空间点是暗条纹。即干涉图样相对于 $\Delta R = 0$ 的情况，沿着 y 方向发生了平移。

除了上述杨氏干涉实验外，菲涅耳双棱镜(图 2-4)、菲涅耳双面镜(图 2-5)和洛埃镜(图 2-6)都属于分波面法双光束干涉的实验装置。这些实验的共同点是：

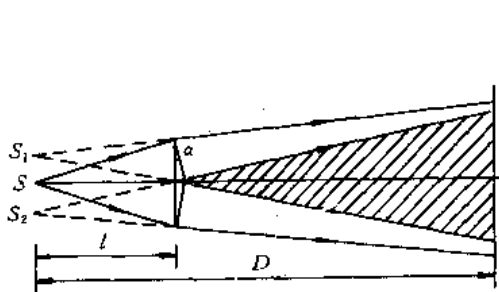


图 2-4 菲涅耳双棱镜干涉装置

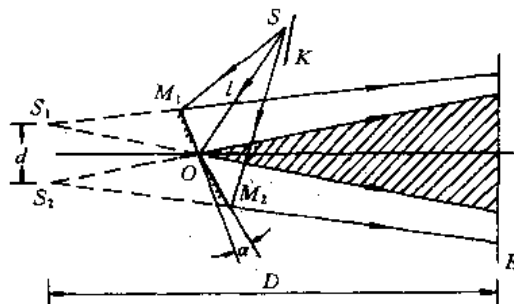


图 2-5 菲涅耳双面镜干涉装置

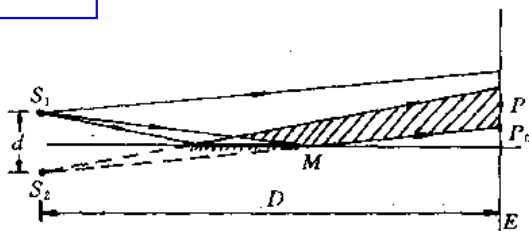


图 2-6 洛埃镜干涉装置

① 在两束光的叠加区内，到处都可以观察到干涉条纹，只是不同地方条纹的间距、形状不同而已。这种在整个光波叠加区内随处可见干涉条纹的干涉，称为非定域干涉。与非定域干涉相对应的是定域干涉，有关干涉的定域问题，将在 2.5 节中讨论。

② 在这些干涉装置中，都有限制光束的狭缝或小孔，因而干涉条纹的强度很弱，以致于在实际上难以应用。

③ 当用白光进行干涉实验时，由于干涉条纹的光强极值条件与波长有关，除了 $m=0$ 的条纹仍是白光以外，其它级次的干涉条纹均为不同颜色(对应着不同波长)分离的彩色条纹。

2. 分振幅法双光束干涉

与分波面法双光束干涉相比，分振幅法产生干涉的实验装置因其既可以使用扩展光源，又可以获得清晰的干涉条纹，而被广泛地应用。在干涉计量技术中，成为众多的重要干涉仪和干涉技术的基础。但也正是由于采用了扩展光源，其干涉条纹变成定域的。

在这里，我们只讨论薄板的分振幅干涉特性，有关干涉条纹定域性的问题，留在 2.5 节中讨论。

1) 平行平板产生的干涉——等倾干涉

平行平板产生干涉的装置如图 2-7 所示，由扩展光源发出的每一簇平行光线经平行平板反射后，都会聚在无穷远处，或者通过图示的透镜会聚在焦平面上，产生等倾干涉。

(1) 等倾干涉的强度分布 光由平行平板通过透镜在焦平面 F 上所产生的干涉强度分布(图样)，与无透镜时在无穷远处形成的干涉强度分布(图样)相同。其规律主要取决于经平板反射后所产生的两束光，到达焦平面 F 上 P 点的光程差。由图示光路可见，该光程差为

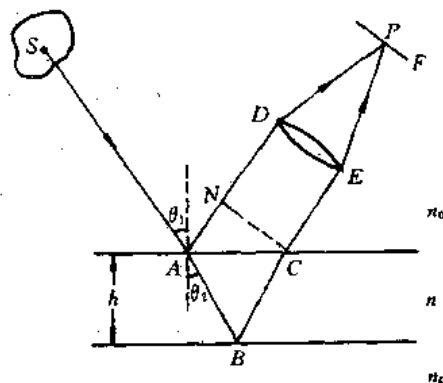


图 2-7 平行平板干涉的光程图示

$$\Delta = n(AB + BC) - n_0 AN$$

式中， n 和 n_0 分别为平板折射率和周围介质的折射率， N 是由 C 点向 AD 所引垂线的垂足，自 N 点和 C 点到透镜焦平面 P 点的光程相等。

假设平板的厚度为 h ，入射角和折射角分别为 θ_1 和 θ_2 ，则由几何关系有

$$AB = BC = \frac{h}{\cos \theta_2}$$



$$AN = AC \sin \theta_1 = 2h \tan \theta_2 \sin \theta_1$$

再利用折射定律

$$n \sin \theta_2 = n_0 \sin \theta_1$$

可得到光程差为

$$\Delta = 2nh \cos \theta_2 = 2h \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_1} \quad (2-16)$$

进一步，由于平板两侧的折射率与平板折射率不同，无论是 $n_0 > n$ ，还是 $n_0 < n$ ，从平板两表面反射的两支光中总有一支发生“半波损失”。所以，上面得到的光程差还应加上附加光程差 $\lambda/2$ ，故

$$\Delta = 2nh \cos \theta_2 + \frac{\lambda}{2} \quad (2-17)$$

如果平板两侧的介质折射率不同，并且平板折射率的大小介于两种介质折射率之间，则两支反射光间无“半波损失”贡献，此时的光程差仍采用(2-16)式。

由此可以得到焦平面上的光强分布：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta) \quad (2-18)$$

式中， I_1 和 I_2 分别为两支反射光的强度。显然，形成亮暗干涉条纹的位置，由下述条件决定：相应于光程差 $\Delta = m\lambda (m=0, 1, 2, \dots)$ 的位置为亮条纹；相应于光程差 $\Delta = (m+1/2)\lambda$ 的位置为暗条纹。

如果设想平板是绝对均匀的，折射率 n 和厚度 h 均为常数，则光程差只决定于入射光在平板上的入射角 θ_1 (或折射角 θ_2)。因此，具有相同入射角的光经平板两表面反射所形成的反射光，在其相遇点上有相同的光程差，也就是说，凡入射角相同的光，形成同一干涉条纹。正因如此，通常把这种干涉条纹称为等倾干涉。

(2) 等倾干涉条纹的特性 等倾干涉条纹的形状与观察透镜放置的方位有关，当如图 2-8 所示，透镜光轴与平行平板 G 垂直时，等倾干涉条纹是一组同心圆环，其中心对应 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 的干涉光线。

图 2-8(a) 是观察等倾圆环条纹的一个简便装置， S 为一扩展光源，它发出的光线经过半反射镜 M 后，以各种角度入射到平行平板 G 上，通过平板上、下表面反射的光经半反射镜 M ，被透镜 L 会聚在焦平面 F 上，形成了一组等倾干涉圆环。每一圆环与光源各点发出的具有相同入射角 (在不同入射面上) 的光线对应。由于光源上每一点都给出一组等倾圆环条纹，它们彼此准确重合，没有位移，所以光源的扩大，除了增加条纹的强度外，对条纹的可见度没有影响。例如，光源上的 S_1, S_2, S_3 (图 2.8(b)) 各点发出的平行光线 1、2、3，经 M 反射后垂直投射到 G 上，由 G 上、下表面反射的两支光通过 M 和 L 后，会聚于透镜焦点 P_0 ， P_0 就是焦平面上等倾干涉圆环的圆心。由 S_1, S_2, S_3 各点发出的另外的平行光线 1'、2'、3' (图中未绘出) 和 1'' (图中未绘出)、2''、3'' 通过该系统后，分别会聚于焦平面上的 P' 和 P'' 。可见，等倾条纹的位置只与形成条纹的光束入射角有关，而与光源上发光点的位置无关，所以光源的大小不会影响条纹的可见度。

① 等倾圆环的条纹级数。由(2-17)式可见，愈接近等倾圆环中心，其相应的入射光线的角度 θ_2 愈小，光程差愈大，干涉条纹级数愈高。偏离圆环中心愈远，干涉条纹级数愈小，是等倾圆环的重要特征。

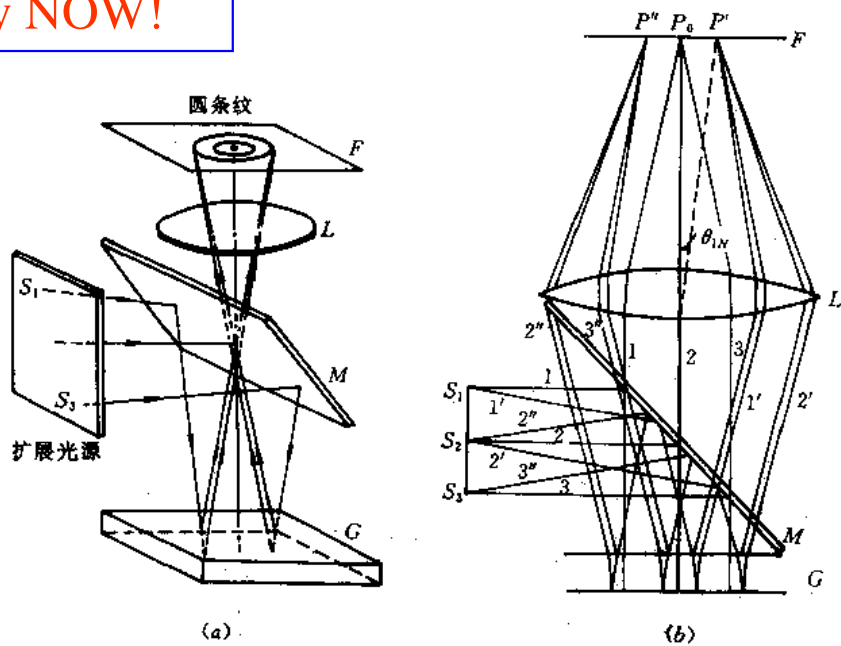


图 2-8 产生等倾圆条纹的装置

设中心点的干涉级数为 m_0 ，由(2-17)式有

$$\Delta_0 = 2nh + \frac{\lambda}{2} = m_0\lambda \quad (2-19)$$

因而

$$m_0 = \frac{\Delta_0}{\lambda} = \frac{2nh}{\lambda} + \frac{1}{2} \quad (2-20)$$

通常， m_0 不一定是整数，即中心未必是最亮点，故经常把 m_0 写成

$$m_0 = m_1 + \epsilon \quad (2-21)$$

其中， m_1 是靠中心最近的亮条纹的级数(整数)， $0 < \epsilon < 1$ 。

② 等倾亮圆环的半径。由中心向外计算，第 N 个亮环的干涉级数为 $[m_1 - (N-1)]$ ，该亮环的张角为 θ_{1N} ，它可由

$$2nh \cos \theta_{2N} + \frac{\lambda}{2} = [m_1 - (N-1)]\lambda \quad (2-22)$$

与折射定律 $n_0 \sin \theta_{1N} = n \sin \theta_{2N}$ 确定。将(2-19)式与(2-22)式相减，得到

$$2nh(1 - \cos \theta_{2N}) = (N-1 + \epsilon)\lambda$$

一般情况下， θ_{1N} 和 θ_{2N} 都很小，近似有 $n \approx n_0 \theta_{1N} / \theta_{2N}$ ， $1 - \cos \theta_{2N} \approx \theta_{2N}^2 / 2 \approx n_0^2 \theta_{1N}^2 / 2n^2$ ，因而由上式可得

$$\theta_{1N} \approx \frac{1}{n_0} \sqrt{\frac{n\lambda}{h}} \sqrt{N-1+\epsilon} \quad (2-23)$$

相应第 N 条亮纹的半径 r_N 为

$$r_N = f \tan \theta_{1N} \approx f\theta_{1N} \quad (2-24)$$

式中， f 为透镜焦距，所以

$$r_N = f \frac{1}{n_0} \sqrt{\frac{n\lambda}{h}} \sqrt{N-1+\epsilon} \quad (2-25)$$

由此可见，较厚的平行平板产生的等倾干涉圆环，其半径要比较薄的平板产生的圆环半径小。

③ 等倾圆环相邻条纹的间距为

$$e_N = r_{N+1} - r_N \approx \frac{f}{2n_0} \sqrt{\frac{n\lambda}{h(N-1+\epsilon)}} \quad (2-26)$$

该式说明，愈向边缘(N 愈大)，条纹愈密。

(3) 透射光的等倾干涉条纹 如图 2-9 所示，由光源 S 发出、透过平板和透镜到达焦平面上 P 点的两支光，没有附加半波光程差的贡献，光程差为

$$\Delta = 2nh \cos \theta_2 \quad (2-27)$$

它们在透镜焦平面上同样可以产生等倾干涉条纹。

由于对应于光源 S 发出的同一入射角的光束，经平板产生的两支透射光和两支反射光的光程差恰好相差 $\lambda/2$ ，相位差相差 π ，因此，透射光与反射光的等倾干涉条纹是互补的，即对应反射光干涉条纹的亮条纹，在透射光干涉条纹中恰是暗条纹，反之亦然。

应当指出，当平板表面的反射率很低时，两支透射光的强度相差很大，因此条纹的可见度很低，而与其相比，反射光的等倾干涉条纹可见度要大得多。图 2-10 绘出了对于空气-玻璃界面，接近正入射时所产生的反射光等倾条纹强度分布(图 2-10(b))和透射光等倾条纹的强度分布(图 2-10(d))。所以，在平行板表面反射率较低的情况下，通常应用的是反射光的等倾干涉。

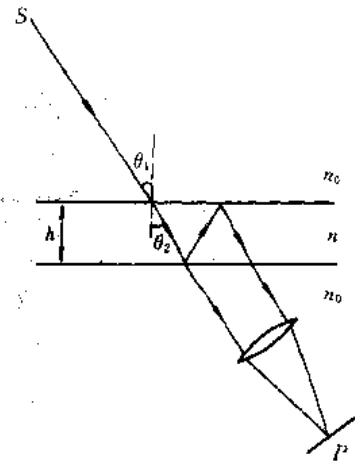


图 2-9 透射光等倾条纹的形成

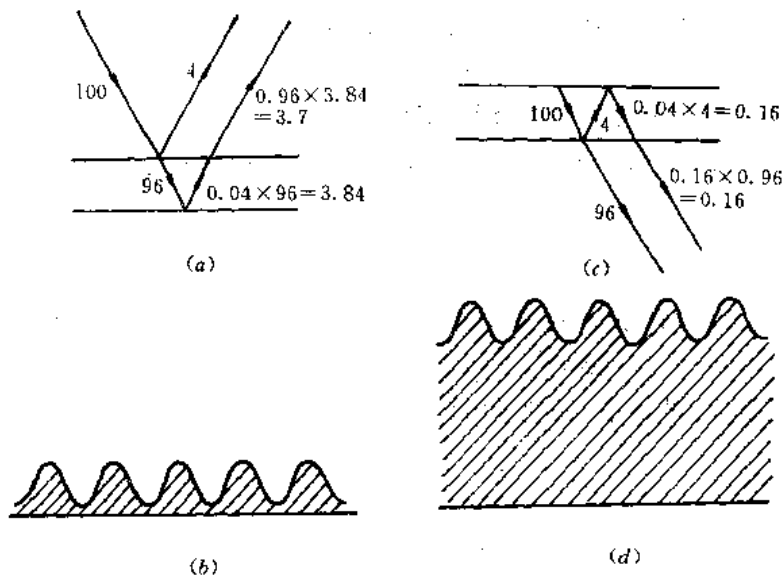


图 2-10 平板干涉的反射光条纹和透射光条纹比较

2) 楔形平板产生的干涉——等厚干涉

楔形平板产生干涉的原理如图 2-11 所示。扩展光源中的某点 S 发出一束光，经楔形板两表面反射的两支光相交于 P 点，产生干涉，其光程差为

Click to buy NOW!

$$\Delta = n(AB + BC) - n_0(AP - CP)$$

光程差的精确值一般很难计算。但由于在实用的干涉系统中，板的厚度通常都很小，楔角都不大，因此可以近似地利用平行平板的计算公式代替，即

$$\Delta = 2nh \cos \theta_2 \quad (2-28)$$

式中， h 是楔形板在 B 点的厚度； θ_2 是入射光在 A 点的折射角。考虑到光束在楔形板表面可能产生的“半波损失”，光程差应为

$$\Delta = 2nh \cos \theta_2 + \frac{\lambda}{2} \quad (2-29)$$

显然，对于一定的入射角(当光源距平板较远，或观察干涉条纹用的仪器孔径很小时，在整个视场内可视入射角为常数)，光程差只依赖于反射光处的平板厚度 h ，所以，干涉条纹与楔形板的厚度一一对应。因此，这种干涉称为等厚干涉，相应的干涉条纹称为等厚干涉条纹。

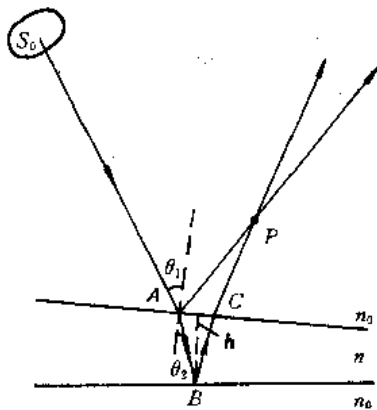


图 2-11 楔形平板的干涉

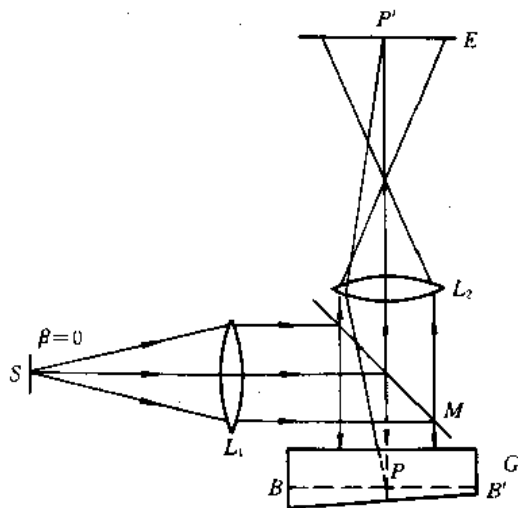


图 2-12 观察等厚干涉的系统

(1) 等厚干涉条纹图样 对于图 2-12 所示的垂直照射楔形板产生干涉的系统，位于垂直透镜 L_1 前焦面上的扩展光源发出的光束，经透镜 L_1 后被分束镜 M 反射，垂直投射到楔形板 G 上，由楔形板上、下表面反射的两束光通过分束镜 M 、透镜 L_2 投射到观察平面 E 上。不同形状的楔形板将得到不同形状的干涉条纹。图 2-13 给出了楔形平板(图(a))、柱形表面平板(图(b))、球形表面平板(图(c))、任意形状表面平板(图(d))的等厚干涉条纹。不管哪种形状的等厚干涉条纹，相邻两亮条纹或两暗条纹间对应的光程差均相差一个波长，所以从一个条纹过渡到另一个条纹，平板的厚度均改变 $\lambda/(2n)$ 。

(2) 劈尖的等厚干涉条纹 如图 2-14 所示，当光垂直照射劈尖时，会在上表面产生平行于棱线的等间距干涉条纹。相应亮线位置的厚度 h ，满足

$$2nh + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad m = 1, 2, \dots \quad (2-30)$$

相应暗线位置的厚度 h ，满足

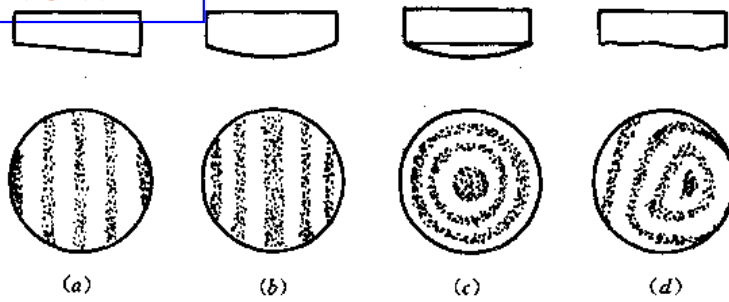


图 2-13 不同形状平板的等厚条纹

$$2nh + \frac{\lambda}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2-31)$$

显然，棱线总处于暗条纹的位置。如果考虑到光在上表面(或下表面)上会发生“半波损失”，在棱线处上、下表面的反射光总是抵消，则在棱线位置上总为光强极小值就是很自然的了。

若劈尖上表面共有 N 个条纹，则对应的总厚度为

$$d = N \frac{\lambda}{2n} \quad (2-32)$$

式中， N 可以是整数，亦可以是小数。

相邻亮条纹(或暗条纹)间的距离，即条纹间距为

$$\Delta L = \frac{\lambda}{2n \sin \alpha} \quad (2-33)$$

由此可见，劈角 α 小，条纹间距大；反之，劈角 α 大，条纹间距小。因此，当劈尖上表面绕棱线旋转时，随着 α 的增大，条纹间距变小，条纹将向棱线方向移动。

由(2-33)式还可看出，条纹间距与入射光波长有关，波长较长的光所形成的条纹间距较大，波长短的光所形成的条纹间距较小。这样，使用白光照射时，除光程差等于零的条纹仍为白光外，其附近的条纹均带有颜色，颜色的变化均为内侧波长短，外侧波长长。当劈尖厚度较大时，由于白光相干性差的影响，又呈现为均匀白光。由此可知，利用白光照射的这种特点，可以确定零光程差的位置，并按颜色来估计光程差的大小。

(3) 牛顿环 如图 2-15 所示，在一块平面玻璃上放置一曲率半径 R 很大的平凸透镜，在透镜凸表面和玻璃板的平面之间便形成一厚度由零逐渐增大的空气薄层。当以单色光垂直照射时，在空气层上会形成一组以接触点 O 为中心的中央疏、边缘密的圆环条纹，称为牛顿环。它的形状与等倾圆条纹相同，但牛顿环内圈的干涉级次小，外圈的干涉级次大，恰与等倾圆条纹相反。

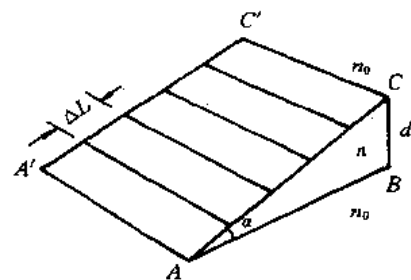


图 2-14 劈尖的干涉条纹

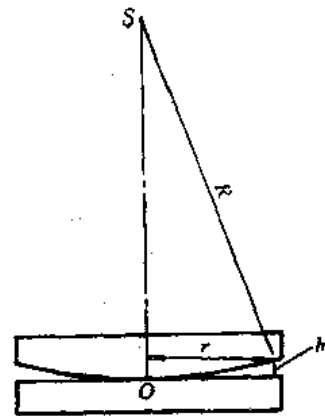


图 2-15 牛顿环的形成

若由中心向外数第 N 个暗环的半径为 r ，则由图 2-15 可知

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$$

由于透镜凸表面的曲率半径 R 远大于暗环对应的空气层厚度，所以上式可改写为

$$h = \frac{r^2}{2R} \quad (2-34)$$

因第 N 个暗环的干涉级次为 $(N+1/2)$ ，故可由暗环满足的光程差条件写出

$$2h + \frac{\lambda}{2} = \left(N + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

由此可得

$$h = N \frac{\lambda}{2} \quad (2-35)$$

$$R = \frac{r^2}{N\lambda} \quad (2-36)$$

由该式可见，若通过实验测出第 N 个暗环的半径为 r ，在已知所用单色光波长的情况下，即可算出透镜的曲率半径。

在牛顿环中心 ($h=0$) 处，由于两反射光的光程差 (计及“半波损失”) 为 $\Delta = \lambda/2$ ，所以是一个暗点，而在透射光方向上可以看到一个强度互补的干涉图样，这时的牛顿环中心是一个亮点。

牛顿环除了用于测量透镜曲率半径 R 外，还常用来检验光学零件的表面质量。常用的玻璃样板检验法就是利用与牛顿环类似的干涉条纹。这种条纹形成在样板和待测零件表面之间的空气层上，俗称为“光圈”。根据光圈的形状、数目以及用手加压后条纹的移动，就可以检验出零件的偏差。例如，当条纹是图 2-16 所示的同心圆环时，表示没有局部误差。假设零件表面的曲率半径为 R_1 ，样板的曲率半径为 R_2 ，则二表面曲率差 $\Delta C = 1/R_1 - 1/R_2$ 。由图 2-16 的几何关系有

$$h = \frac{D^2}{8} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{D^2}{8} \Delta C$$

如果零件直径 D 内含有 N 个光圈，则利用 (2-35) 式可得

$$N = \frac{D^2}{4\lambda} \Delta C \quad (2-37)$$

在光学设计中，可以按上式换算光圈数与曲率差之间的关系。

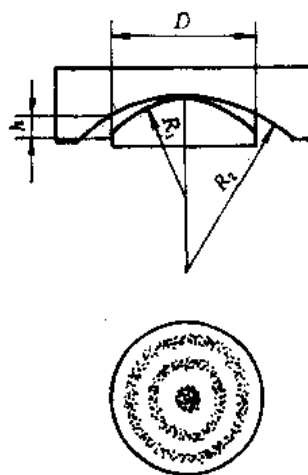


图 2-16 用样板检验光学零件表面质量

2.2 平行平板的多光束干涉

上一节讨论了平行平板的双光束干涉现象，实际上它只是在表面反射率较小情况下的一种近似处理。由于光束在平板内会如图 2-17 所示不断地反射和折射，而这种多次反射、折射对于反射光和透射光在无穷远或透镜焦平面上的干涉都有贡献，所以在讨论干涉

现象时, 必须考虑板内多次反射和折射的效应, 即应讨论多光束干涉。

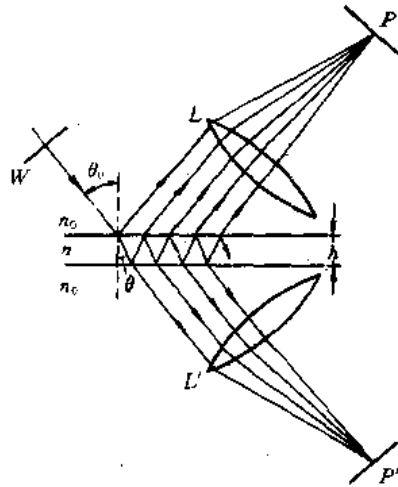
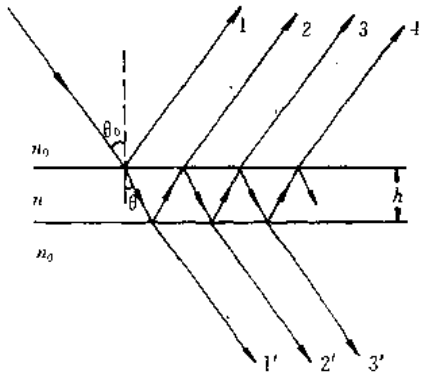


图 2-17 光束在平行平板内的多次反射和折射

图 2-18 在透镜焦平面上产生的多光束干涉

1. 平行平板多光束干涉的强度分布——爱里(Airy)公式

现在讨论如图 2-18 所示的、在透镜焦平面上产生的平行平板多光束干涉的强度分布。

假设 E_{oi} 为入射光电矢量的复振幅, 与 P 点(和 P' 点)对应的多光束的出射角为 θ_0 , 它们在平板内的入射角为 θ , 因而相邻两反射光或透射光之间的光程差为

$$\Delta = 2nh \cos \theta \quad (2-38)$$

相应的相位差为

$$\varphi = k\Delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh \cos \theta \quad (2-39)$$

若光从周围介质射入平板时的反射系数为 r , 透射系数为 t , 光从平板射出时的反射系数为 r' , 透射系数为 t' , 则从平板反射出的各个光束的复振幅为

$$\begin{aligned} E_{01r} &= rE_{oi} \\ E_{02r} &= r'tt'E_{oi}e^{i\varphi} \\ &\vdots \\ E_{0kr} &= tt'r'^{(2k-3)}E_{oi}e^{i(k-1)\varphi} \\ &\vdots \end{aligned}$$

所有反射光在 P 点叠加, 其合成场复振幅为

$$\begin{aligned} E_{0r} &= E_{01r} + \sum_{l=1}^{\infty} E_{0lr} \\ &= E_{01r} + \sum_{l=2}^{\infty} tt'r'^{(2l-3)}E_{oi}e^{i(l-1)\varphi} \\ &= E_{01r} + tt'r'E_{oi}e^{i\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} r'^{2n}e^{in\varphi} \end{aligned}$$

根据菲涅耳公式可以证明:

$$r = r'$$



$$tt' = 1 - r^2$$

由平板表面反射系数、透射系数与反射率、透射率的关系：

$$r^2 = r'^2 = R$$

$$tt' = 1 - R = T$$

并利用

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

可得

$$E_{0t} = \frac{(1 - e^{i\varphi}) \sqrt{R}}{1 - Re^{i\varphi}} E_{0i} \quad (2-40)$$

再由 $I = E \cdot E^*$ ，得到反射光强与入射光强的关系为

$$I_r = \frac{F \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\varphi}{2}} I_i \quad (2-41)$$

式中

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad (2-42)$$

类似地，也可得到透射光强与入射光强的关系式：

$$I_t = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\varphi}{2}} I_i \quad (2-43)$$

(2-41)式和(2-43)式即是反射光干涉场和透射光干涉场的强度分布公式，通常称为爱里公式。

2. 多光束干涉图样的特点

根据爱里公式，我们可以看出多光束干涉的干涉图样有如下特点：

(1) 互补性 由(2-41)式和(2-43)式可以得到

$$I_r + I_t = I_i$$

该式反映了能量守恒的普遍规律，即在不考虑吸收和其它损耗的情况下，反射光强与透射光强之和等于入射光强。若反射光因干涉加强，则透射光必因干涉而减弱，反之亦然。即是说，反射光强分布与透射光强分布互补。

(2) 等倾性 由爱里公式可以看出，干涉光强随 R 和 φ 变化。在特定的 R 条件下，干涉光强仅随 φ 变化，根据(2-39)关系式，也可以说干涉光强只与光束倾角有关，这正是等倾干涉条纹的特性。因此，平行平板在透镜焦平面上产生的多光束干涉条纹是等倾条纹。当实验装置中的透镜光轴垂直于平板(图2-19)时，所观察到的等倾条纹是一组同心圆环。

(3) 光强分布的极值条件 由爱里公式可以看出，在反射光方向上，当

$$\varphi = (2m + 1)\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2-44)$$

时，形成亮条纹，其反射光强为

$$I_{r,m} = \frac{F}{1 + F} I_i \quad (2-45)$$

当

Click to buy NOW! $\varphi = 2m\pi$ $m = 0, 1, 2, \dots$ (2-46)

时, 形成暗条纹, 其反射光强为

$$I_{\text{m}} = 0 \quad (2-47)$$

对于透射光, 形成亮条纹和暗条纹的条件分别是

$$\varphi = 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2-48)$$

和

$$\varphi = (2m + 1)\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2-49)$$

其相应的光强分别为

$$I_{\text{m}} = I_i \quad (2-50)$$

和

$$I_{\text{m}} = \frac{1}{1 + F} I_i \quad (2-51)$$

应当说明的是, 在前面讨论平行平板双光束干涉时, 二反射光的光程差计入了第一束反射光“半波损失”的贡献, 表示式为 $\Delta = 2nh \cos \theta_2 + \lambda/2$; 而在讨论平行平板多光束干涉时, 除了第一个反射光外, 其它相邻二反射光间的光程差均为 $\Delta = 2nh \cos \theta$, 对于第一束反射光的特殊性已由菲涅耳系数 $r = -r'$ 表征了。因此, 这里得到的光强分布极值条件, 与只计头两束反射光时的双光束干涉条件, 实际上是相同的, 自然干涉条纹的分布也完全相同。

3. 透射光的特点

这里, 仅详细讨论透射光的干涉条纹特点。在不同表面反射率 R 的情况下, 透射光强的分布如图 2-20 所示, 图中横坐标是相邻两透射光束间的相位差 φ , 纵坐标为相对光强。

由图可以得出如下规律:

(1) 光强分布与反射率 R 有关 R 很小时, 干涉光强的变化不大, 即干涉条纹的可见度很低。当 R 增大时, 透射光暗条纹的强度降低, 条纹可见度提高。控制 R 的大小, 可以改变光强的分布。

(2) 条纹锐度与反射率 R 有关 随着 R 增大, 极小值下降, 亮条纹宽度变窄。但因, 透射光强的极大值与 R 无关, 所以, 在 R 很大时, 透射光的干涉条纹是在暗背景上的细亮

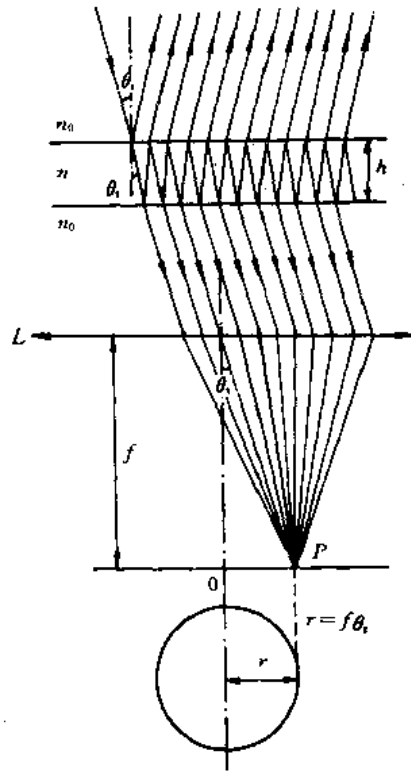


图 2-19 多光束干涉的实验装置

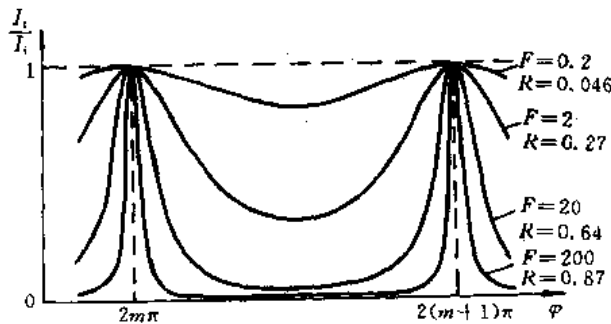


图 2-20 多光束干涉的透射光强分布曲线

条纹。与此相反，反射光的干涉条纹则是在亮背景上的细暗条纹，由于它不易辨别，故极少应用。能够产生极明锐的透射光干涉条纹，是多光束干涉的最显著和最重要的特点。

在 $I_t/I_i \sim \varphi$ 曲线上，若用条纹的半峰值全宽度 $\epsilon = \Delta\varphi$ 表征干涉条纹的锐度，则如图 2-21 所示，在

$$\varphi = 2m\pi \pm \frac{\Delta\varphi}{2}$$

时，

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \left(m\pi \pm \frac{\Delta\varphi}{4} \right)}$$

从而有

$$F \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{4} = F \sin^2 \frac{\epsilon}{4} = 1$$

若 F 很大(即 R 较大)， ϵ 必定很小，有 $\sin \epsilon/4 \approx \epsilon/4$ ， $F(\epsilon/4)^2 = 1$ ，因而可得

$$\epsilon = \frac{4}{\sqrt{F}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \tag{2-52}$$

显然， R 愈大， ϵ 愈小，条纹愈尖锐。

条纹锐度除了用 ϵ 表示外，还常用相邻两条纹间的相位差(2π)与条纹半宽度(ϵ)之比 N 表征，

$$N = \frac{2\pi}{\epsilon} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R} \tag{2-53}$$

此比值称为条纹精细度。 R 愈大，亮条纹愈细， N 值愈大。当 $R \rightarrow 1$ 时， $N \rightarrow \infty$ ，这对于利用这种条纹进行测量的应用，十分有利。

应当指出，上述 ϵ 是在单色光照射下产生的多光束干涉条纹的半宽度，它不同于准单色光的谱线宽度，故又称为“仪器宽度”。

(3) 频率特性 由图 2-20 所示的 $I_t/I_i \sim \varphi$ 分布曲线可见，只有相邻透射光相位差处在半宽度 $\Delta\varphi$ 内的光才能透过平行平板。而由(2-39)式，在平行板的结构(n, h)确定，入射光方向一定的情况下，相位差 φ 只与光波长有关，只有使 $\varphi = 2m\pi$ 的光波长才能最大地透过该平行平板。所以，平行平板具有滤波特性。若将 φ 改写为

$$\varphi = \frac{4\pi}{c} nh\nu \cos \theta \tag{2-54}$$

并以 ν 为横坐标，可绘出如图 2-22 所示的 $I_t/I_i \sim \nu$ 曲线，其滤波特性显而易见。

通常将相应于条纹半宽度 $\Delta\varphi$ 的频率范围 $\Delta\nu_{1/2}$ 称为滤波带宽，且

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\Delta\varphi}{\frac{4\pi}{c} nh \cos \theta}$$

利用(2-52)式，可以改写为

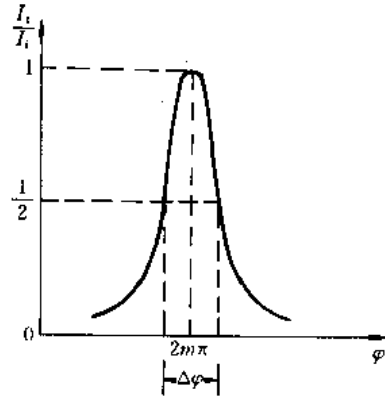


图 2-21 条纹的半宽度图示

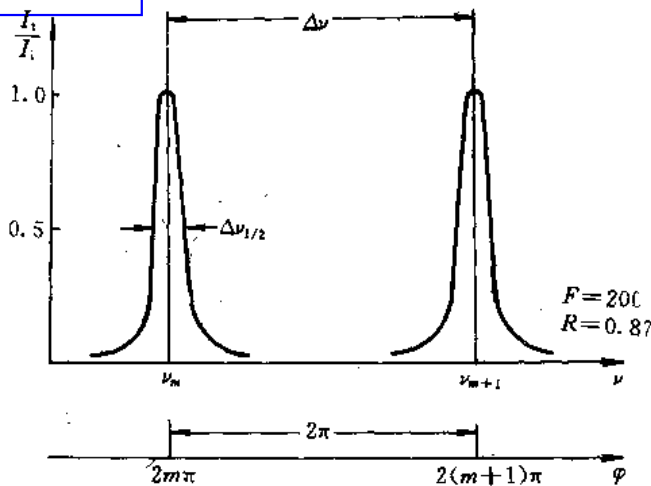


图 2-22 平行平板的滤波特性

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{c(1-R)}{2\pi nh \sqrt{R} \cos \theta} \quad (2-55)$$

进一步, 由 $\nu_m = c/\lambda_m$, 有

$$|\Delta\nu_m| = \frac{c}{\lambda_m^2} \Delta\lambda_m$$

相应于 $\varphi = 2m\pi$ 的光波长为

$$\lambda_m = \frac{2nh \cos \theta}{m}$$

所以, 透射带宽可用波长表示:

$$\begin{aligned} (\Delta\lambda_m)_{1/2} &= \frac{2(1-R)nh \cos \theta}{m^2\pi \sqrt{R}} \\ &= \frac{\Delta}{m^2 N} = \frac{\lambda_m}{mN} \end{aligned} \quad (2-56)$$

通常称 $(\Delta\lambda_m)_{1/2}$ 为透射带的波长半宽度。显然, R 愈大, N 愈大, 相应的 $(\Delta\lambda_m)_{1/2}$ 愈小。

2.3 光学薄膜

光学薄膜是多光束干涉的一个具体实例。所谓光学薄膜, 是指在一块透明的平整玻璃基片或金属光滑表面上, 用物理或化学的方法涂敷的透明介质薄膜。它的基本作用是满足不同光学系统对反射率和透射率的不同要求。各种薄膜在近代科学技术中有着广泛的应用, 并已制成了各种各样的薄膜器件, 研究这些薄膜系统的理论和技术已经形成了光学中的一个重要分支——薄膜光学。本节主要是应用多光束干涉原理, 讨论薄膜系统的光学性质。

1. 单层膜

在玻璃基片的光滑表面上镀一层折射率和厚度都均匀的透明介质薄膜, 当光束入射到薄膜上时, 将在膜内产生多次反射, 并且在薄膜的两表面上有一系列互相平行的光束射

出,如图 2-23 所示,计算这些光束的干涉,便可了解单层膜的光学性质。

假设薄膜的厚度为 h , 折射率为 n_1 , 基片折射率为 n_2 , 光由折射率为 n_0 的介质入射到薄膜上, 采用类似于平行平板多光束干涉的处理方法, 可以得到单层膜的反射系数为

$$r = \frac{E_{or}}{E_{oi}} = \frac{r_1 + r_2 e^{i\varphi}}{1 + r_1 r_2 e^{i\varphi}} = |r| e^{i\varphi} \quad (2-57)$$

式中 r_1 是薄膜上表面的反射系数, r_2 是薄膜下表面的反射系数, φ 是相邻两个出射光束间的相位差, 且有

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} n_1 h \cos \theta_1 \quad (2-58)$$

φ 是单层膜反射系数的相位因子, 由下式决定:

$$\tan \varphi = \frac{r_2(1 - r_1^2) \sin \varphi}{r_1(1 + r_2^2) + r_2(1 + r_1^2) \cos \varphi} \quad (2-59)$$

由此可得单层膜的反射率 R 为

$$R = \left| \frac{E_{or}}{E_{oi}} \right|^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \varphi}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \varphi} \quad (2-60)$$

当光束正入射到薄膜上时, 薄膜两表面的反射系数分别为

$$r_1 = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \quad (2-61)$$

和

$$r_2 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (2-62)$$

将其代入(2-60)式, 即可得到正入射时单层膜的反射率公式:

$$R = \frac{(n_0 - n_2)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \left(\frac{n_0 n_2}{n_1} - n_1 \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(n_0 + n_2)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \left(\frac{n_0 n_2}{n_1} + n_1 \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (2-63)$$

对于一定的基片和介质膜, n_0 、 n_2 为常数, 可由上式得到 R 随 φ 即随 $n_1 h$ 的变化规律。图 2-24 给出了 $n_0=1$, $n_2=1.5$, 对给定波长 λ_0 和不同折射率的介质膜, 按(2-63)式计算出的单层膜反射率 R 随膜层光学厚度 $n_1 h$ 的变化曲线。由此曲线可得如下结论:

① $n_1=n_0$ 或 $n_1=n_2$ 时, R 和未镀膜时的反射率 R_0 一样。

② $n_1 < n_2$ 时, $R < R_0$, 该单层膜的反射率较之未镀膜时减小, 透过率增大, 即该膜具有增透的作用, 称为增透膜。

进一步考察图 2-24 的变化曲线可以看出, 当 $n_1 < n_2$, $n_1 h = \lambda_0/4$ 时, 反射率最小, 且 $R=R_m$, 有最好的增透效果。这个最小反射率为

$$R_m = \left(\frac{n_0 n_2 - n_1^2}{n_0 n_2 + n_1^2} \right)^2 = \left(\frac{n_0 - n_1^2/n_2}{n_0 + n_1^2/n_2} \right)^2 \quad (2-64)$$

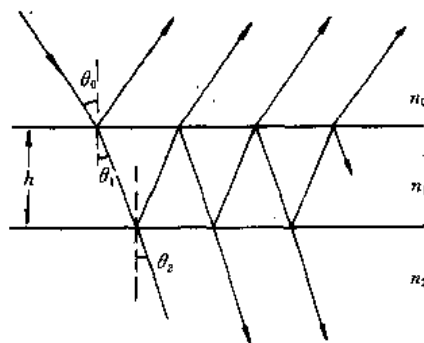


图 2-23 单层介质膜的反射与透射

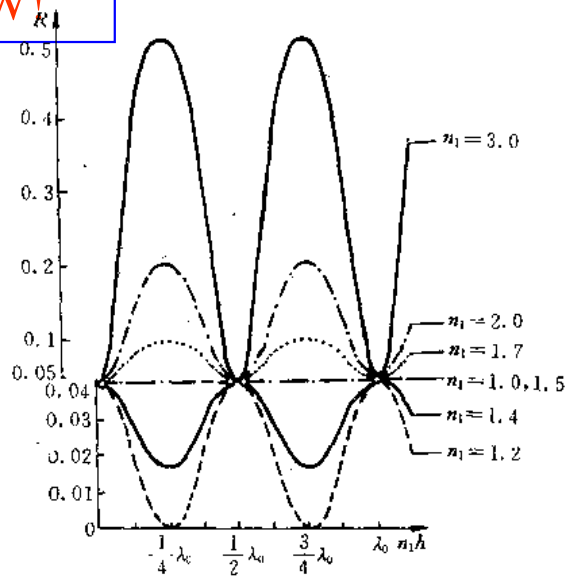


图 2-24 介质膜反射率随光学厚度的变化

由该式可见，当镀膜材料的折射率 $n_1 = \sqrt{n_0 n_2}$ 时， $R_m = 0$ ，此时达到完全增透的效果。例如，在 $n_0 = 1$ ， $n_2 = 1.5$ 的情况下，要实现 $R_m = 0$ ，就应选取 $n_1 = 1.22$ 的镀膜材料。可是实际上，折射率如此低的镀膜材料至少目前还未找到。现在多采用氟化镁 ($n = 1.38$) 材料镀制单层增透膜，其最小反射率 $R_m \approx 1.3\%$ 。

应当指出，(2-64)式表示的反射率是在光束正入射时针对给定波长 λ_0 得到的，亦即对一个给定的单层增透膜，仅对某一波长 λ_0 才为 R_m ，对于其它波长，由于该膜层厚度不是它们的 $1/4$ 或其奇数倍，增透效果要差一些。此时，只能按(2-63)式对这些波长的反射率进行计算。图 2-25 中的 E 曲线给出了在 $n_2 = 1.5$ 的玻璃基片上，涂敷光学厚度为 $\lambda_0/4$ ($\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$) 的氟化镁膜时，单层膜反射率随波长的变化特性。由该曲线可见，这个单层膜对红光和蓝光的反射率较大，所以，观察该膜系时就会看到它的表面呈紫红色。

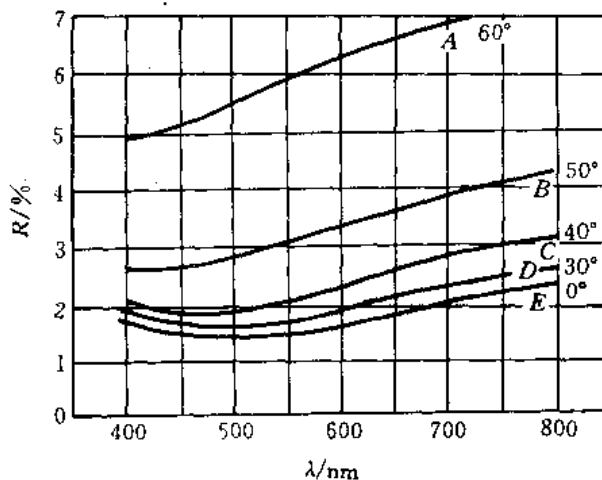


图 2-25 单层氟化镁膜的反射率随波长和入射角的变化



另外，(2-63)式是在光束正入射的情况下推导出来的，如果我们赋予 n_0 、 n_1 、 n_2 以稍微不同的意义，(2-63)式也适用于光束斜入射的情况。根据菲涅耳公式(1-136)式和(1-137)式，在折射率不同的两个介质界面上，例如对于薄膜上表面，光束斜入射时的反射系数为

$$r_{1s} = - \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_0 \cos \theta_0}{n_1 \cos \theta_1 + n_0 \cos \theta_0} \quad (2-65)$$

$$r_{1p} = \frac{\frac{n_1}{\cos \theta_1} - \frac{n_0}{\cos \theta_0}}{\frac{n_1}{\cos \theta_1} + \frac{n_0}{\cos \theta_0}} \quad (2-66)$$

显然，若对 s 分量以 \bar{n} 代替 $n \cos \theta$ ，对 p 分量以 \bar{n} 代替 $n/\cos \theta$ ，则上面两式在形式上与正入射时的表达式相同， \bar{n} 称为有效折射率。因此，若以相应的有效折射率替代实际折射率 n_0 、 n_1 、 n_2 ，则(2-63)式同样适用于斜入射情形。在(2-63)式中，对 s 分量和 p 分量分别用相应的有效折射率替代，就可分别求出 s 分量和 p 分量光斜入射时的反射率，取其平均值即可得到入射自然光的反射率。当然，此时的计算工作量是很大的，通常都由电子计算机来完成。图 2-25 给出了在几种不同入射角情况下，计算出的反射率随波长变化的曲线 A、B、C、D、E。可见，随入射角增大，反射率增加，同时反射率极小值位置向短波方向移动。

③ $n_1 > n_2$ 时， $R > R_0$ ，该单层膜的反射率较未镀膜时增大，即该膜具有增反的作用，称为增反膜。

进一步考察图 2-24 的变化曲线可以看出，当 $n_1 > n_2$ ，且 $n_1 h = \lambda_0/4$ 时，反射率最大，且 $R = R_M$ ，有最好的增反效果，其最大反射率为

$$R_M = \left(\frac{n_0 n_2 - n_1^2}{n_0 n_2 + n_1^2} \right)^2 = \left(\frac{n_0 - n_1^2/n_2}{n_0 + n_1^2/n_2} \right)^2 \quad (2-67)$$

尽管该式在形式上与(2-64)式相同，但因 n_1 值不同，对应的反射率 R ，一个是最大，一个是最小。对于经常采用的增反膜材料硫化锌，其折射率为 2.35，相应的单层增反膜的最大反射率为 33%。

④ 对于 $n_1 h = \lambda_0/2$ 的半波长膜，不管膜层折射率比基片折射率大还是小，单层膜对 λ_0 的反射率都和未镀膜时的基片反射率相同，即为

$$R = \left(\frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2$$

这说明，对于波长为 λ_0 的光，膜层厚度增加(或减小) $\lambda_0/2$ ，对反射率没有影响。

2. 多层膜

单层膜的功能有限，通常只用于增透、分束，实际上更多地采用多层膜系。下面介绍两种处理多层膜系光学特性的方法：等效界面法和矩阵法。

1) 等效界面法

现有如图 2-26 所示的双层薄膜，为确定其膜系反射率，首先考察与基片相邻的第二层膜(折射率和厚度分别为 n_2 和 h_2)与基片组成的单层膜系的反射系数。若设该反射系数为 \bar{r} ，则根据(2-57)式，有

$$\bar{r} = \frac{r_2 + r_3 e^{i\varphi_2}}{1 + r_2 r_3 e^{i\varphi_2}} \quad (2-68)$$

式中, r_2 和 r_3 分别为 n_0/n_1 界面和 n_2/n_G 界面的反射系数; φ_2 是由这两个界面反射的相邻两光束相位差, 且

$$\varphi_2 = \frac{4\pi}{\lambda} n_2 h_2 \cos \theta_2 \quad (2-69)$$

式中, θ_2 是光束在第二膜层中的折射角。

进一步, 我们可将上述单层膜系看成是具有折射率为 n_l 的一个“新基片”, 并称 n_l 为等效折射率。这个“新基片”与第一层膜的新界面称为等效界面(图 2-27), 其反射系数即为 \bar{r} , 由(2-68)式给出。对于第一层膜与“新基片”组成的单层膜系, 再一次利用(2-57)式, 就可得到光束在双层膜系上的反射系数

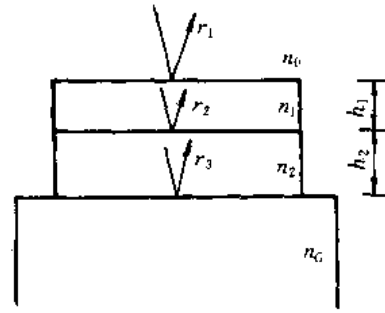


图 2-26 双层膜

$$r = \frac{r_1 + \bar{r}e^{i\varphi_2}}{1 + r_1\bar{r}e^{i\varphi_2}} \quad (2-70)$$

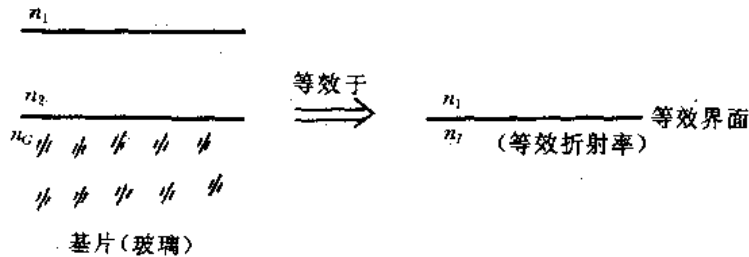


图 2-27 等效界面

式中, r_1 是 n_0/n_1 界面的反射系数;

$$\varphi_1 = \frac{4\pi}{\lambda} n_1 h_1 \cos \theta_1$$

θ_1 是光束在第一层膜中的折射角。将(2-68)式代入(2-70)式, 并求 r 与其共轭复数的乘积, 便可得到双层膜系的反射率

$$R = \frac{c^2 + d^2}{a^2 + b^2} \quad (2-71)$$

式中

$$a = (1 + r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - (1 - r_1 r_2 + r_2 r_3 - r_3 r_1) \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2}$$

$$b = (1 - r_1 r_2 - r_2 r_3 + r_3 r_1) \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} + (1 + r_1 r_2 - r_2 r_3 - r_3 r_1) \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2}$$

$$c = (r_1 + r_2 + r_3 + r_1 r_2 r_3) \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - (r_1 - r_2 + r_3 - r_1 r_2 r_3) \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2}$$

$$d = (r_1 - r_2 - r_3 + r_1 r_2 r_3) \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} + (r_1 + r_2 - r_3 - r_1 r_2 r_3) \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2}$$

以上讨论的是双层膜系, 对于两层以上的膜系, 计算将更加复杂。但是利用上述等效界面的概念, 原则上可以计算出任意多层膜的反射率。如图 2-28 所示, 有一个 K 层膜

系, 各膜层的折射率为 n_1, n_2, \dots, n_K , 厚度为 h_1, h_2, \dots, h_K , 界面反射系数为 r_1, r_2, \dots, r_{K+1} 。采用与处理双层膜相同的办法, 从与基片相邻的第 K 层开始, 构成一个等效界面, 其反射系数为

$$\bar{r}_K = \frac{r_K + r_{K+1}e^{i\varphi_K}}{1 + r_K r_{K+1}e^{i\varphi_K}} \quad (2-72)$$

式中

$$\varphi_K = \frac{4\pi}{\lambda} n_K h_K \cos \theta_K$$

再把第 $K-1$ 层膜加进去, 构成一个新的等效界面, 求出反射系数

$$\bar{r}_{K-1} = \frac{r_{K-1} + \bar{r}_K e^{i\varphi_{K-1}}}{1 + r_{K-1} \bar{r}_K e^{i\varphi_{K-1}}} \quad (2-73)$$

式中

$$\varphi_{K-1} = \frac{4\pi}{\lambda} n_{K-1} h_{K-1} \cos \theta_{K-1}$$

将此计算过程一直重复到与空气相邻的第一层膜, 最终可求得整个膜系的反射系数和反射率。显然, 如果多层膜的层数较多(目前有的多层膜的层数多达上百层), 反射率 R 的表达式将非常复杂。在实际计算中, 可不必写出表达式, 只需把上述递推公式排成程序, 由电子计算机进行计算。

2) 矩阵法

矩阵法是研究多层薄膜理论的现代方法, 对于基本研究和数值计数, 它均具有快捷和普遍的优点。在此, 仅介绍有关的基本概念和结论。

对于图 2-29 所示的多层膜系, 为了能全面地描述其光学特性, 对于沿 z 方向传输的光波, 定义介质光学导纳为磁场强度的切向分量与电场强度的切向分量之比:

$$Y = \frac{H_z}{E_z} \quad (2-74)$$

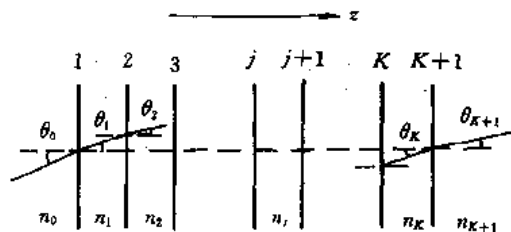


图 2-29 多层膜系示意

对于沿 $-z$ 方向传输的光波, 介质的光学导纳为

$$Y = -\frac{H_z}{E_z} \quad (2-75)$$

根据麦克斯韦电磁理论, 第 j 界面的边界条件可写成:

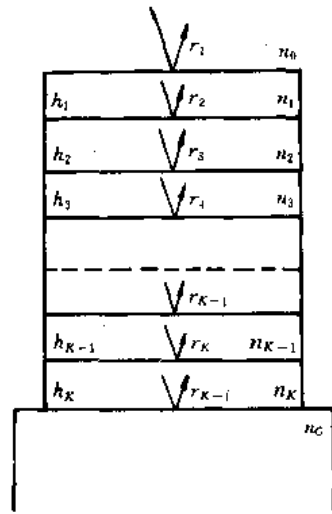


图 2-28 多层膜



Click to buy NOW!

$$\left. \begin{aligned} E_{jt}' &= E_{xjt} + E_{-xjt} = E'_{xjt} + E'_{-xjt} \\ H_{jt} &= Y_{j-1}(E_{xjt} - E_{-xjt}) = Y_j(E'_{xjt} - E'_{-xjt}) \end{aligned} \right\} \quad (2-76)$$

式中, E_{xjt} 、 E_{-xjt} 和 E'_{xjt} 、 E'_{-xjt} 分别为第 j 界面左侧和右侧、沿 z 方向和 $-z$ 方向传输的切向分量场。定义导纳矩阵 V_j 为

$$V_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_j & -Y_j \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

则(2-76)式可写成矩阵形式:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{xjt} \\ E_{-xjt} \end{bmatrix} &= V_{j-1}^{-1} V_j \begin{bmatrix} E'_{xjt} \\ E'_{-xjt} \end{bmatrix} \\ &= W_{(j-1),j} \begin{bmatrix} E'_{xjt} \\ E'_{-xjt} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-78)$$

该式描述了光从第 j 界面的右侧透射到左侧时电矢量矩阵的传递, 称 $W_{(j-1),j} = V_{j-1}^{-1} V_j$ 为第 j 界面的透射矩阵。

考虑到光在膜层中传输时的相移 φ_j , 有

$$\begin{bmatrix} E'_{xj} \\ E'_{-xj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi_j} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x(j+1)} \\ E_{-x(j+1)} \end{bmatrix} \quad (2-79)$$

若令

$$U_j = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi_j} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_j} \end{bmatrix}$$

为第 j 个膜层的相位矩阵, 则整个膜系的传递公式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{x0t} \\ E_{-x0t} \end{bmatrix} &= W_{0,1} U_1 W_{1,2} U_2 \cdots W_{(K-1),K} U_K W_{K,(K+1)} \begin{bmatrix} E'_{x(K+1)t} \\ E'_{-x(K+1)t} \end{bmatrix} \\ &= V_0^{-1} V_1 U_1 V_1^{-1} V_2 U_2 \cdots V_{K-1}^{-1} V_K U_K V_K^{-1} V_{K+1} \begin{bmatrix} E'_{x(K+1)t} \\ E'_{-x(K+1)t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-80)$$

进一步, 如果定义第 j 层膜的特征矩阵 M_j 为

$$M_j = V_j U_j V_j^{-1} \quad (2-81)$$

将导纳矩阵、透射矩阵的关系式代入, 可得

$$M_j = \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & -i \sin \varphi_j / Y_j \\ -i Y_j \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{bmatrix} \quad (2-82)$$

此时, 可将(2-80)式改写为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{x0t} \\ E_{-x0t} \end{bmatrix} &= V_0^{-1} M V_{K+1} \begin{bmatrix} E'_{x(K+1)t} \\ E'_{-x(K+1)t} \end{bmatrix} \\ &= S \begin{bmatrix} E'_{x(K+1)t} \\ E'_{-x(K+1)t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-83)$$

式中, $M = \prod_{j=1}^K M_j$ 为多层膜系的特征矩阵; $S = V_0^{-1} M V_{K+1}$ 为膜系的传递矩阵, 它描述了膜系将光波电场的切向分量从一端传到另一端的特性。若将 V_0^{-1} 移到(2-83)式的左边, 可



$$\begin{bmatrix} E_{1t} \\ H_{1t} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} E_{(K+1)t} \\ H_{(K+1)t} \end{bmatrix} \quad (2-84)$$

显然，多层膜系的特征矩阵传递了电磁场的切向分量。

如果多层膜基底材料的折射率为 n_{K+1} ，根据光的电磁理论，由(2-84)式可得

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 1 \\ n_{K+1} \end{bmatrix} \quad (2-85)$$

并且，多层膜系的光学导纳为

$$Y = \frac{C}{B} \quad (2-86)$$

根据光学导纳的概念，多层膜系的反射系数 r 和反射率 R 为

$$r = \frac{n_0 - Y}{n_0 + Y} \quad (2-87)$$

$$R = \left(\frac{n_0 - Y}{n_0 + Y} \right)^2 \quad (2-88)$$

于是，只要利用多层膜系的特征矩阵 M 求出该膜系的光学导纳 Y ，即可由上二式确定出它的反射系数 r 和反射率 R 。利用类似的处理方法，也可以确定出多层膜系的透射率。

(2-85)式在薄膜光学中具有特别重要的意义，它构成了几乎全部计算的基础。

3. 多层高反射膜

目前，经常采用的多层高反射膜是一种由光学厚度均为 $\lambda_0/4$ 的高折射率膜层和低折射率膜层交替镀制的膜系，如图 2-30 所示。这种膜系称为 $\lambda_0/4$ 膜系，通常采用下面的符号表示：

$$GHLHLH \cdots LHA = G(HL)^p HA \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

其中， G 和 A 分别代表玻璃基片和空气； H 和 L 分别代表高折射率膜层和低折射率膜层； p 表示一共有 p 组高低折射率交替层，总膜层数为 $(2p+1)$ 。半波长的光学厚度应写成 HH 或 LL 。

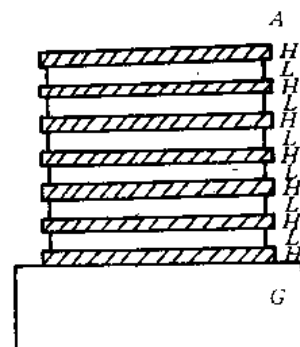


图 2-30 $\lambda_0/4$ 膜系的多层高反射膜示意图

这种膜系之所以能获得高反射率，从多光束干涉原理看是容易理解的；根据平板多光束干涉的讨论，当膜层两侧介质的折射率大于(或小于)膜层的折射率时，若膜层的诸反射光束中相继两光束的相位差等于 π ，则该波长的反射光获得最强烈的反射。而图 2-30 所示的膜系恰恰能使它包含的每一层膜都满足上述条件，所以入射光在每一膜层上都获得强烈的反射，经过若干层的反射之后，入射光就几乎全部被反射回去。

这种膜系的优点是计算和制备工艺简单，镀制时容易采用极值法进行监控；缺点是层数多， R 不能连续改变。目前发展了一种非 $\lambda_0/4$ 膜系，即每层膜的光学厚度不是 $\lambda_0/4$ ，具体厚度要由计算确定。其优点是只要较少的膜层就能达到所需要的反射率，缺点是计算和制备工艺较复杂。

根据上述等效界面的概念，对于多层 $\lambda_0/4$ 膜系，在正入射情况下的反射率可如下



由图 2-30, 若在基片 G 上镀一层 $\lambda/4$ 的高折射率光学膜, 其反射率为

$$R_1 = \left(\frac{n_A - n_1}{n_A + n_1} \right)^2$$

式中

$$n_1 = \frac{n_H^2}{n_G}$$

是镀第一层膜后的等效折射率。若在高折射率膜层上再镀一层低折射率膜层, 其反射率为

$$R_2 = \left(\frac{n_A - n_1}{n_A + n_1} \right)^2$$

式中

$$n_1 = \frac{n_L^2}{n_1} = \left(\frac{n_L}{n_H} \right)^2 n_G$$

是镀双层膜后的等效折射率。依此类推, 当膜层为偶数 ($2p$) 层时, $(HL)^p$ 膜系的等效折射率为

$$n_{2p} = \left(\frac{n_L}{n_H} \right)^{2p} n_G \quad (2-89)$$

相应的反射率为

$$R_{2p} = \left(\frac{n_A - n_{2p}}{n_A + n_{2p}} \right)^2 \quad (2-90)$$

当膜层为奇数 ($2p+1$) 层时, $(HL)^p H$ 膜系的等效折射率为

$$n_{2p+1} = \left(\frac{n_H}{n_L} \right)^{2p} \frac{n_H^2}{n_G} \quad (2-91)$$

相应的反射率为

$$R_{2p+1} = \left(\frac{n_A - n_{2p+1}}{n_A + n_{2p+1}} \right)^2 \quad (2-92)$$

表 2-1 列出了多层膜的等效折射率、反射率和透射率(不计吸收)的计算值。计算数据为: $n_A=1$, $n_G=1.52$, $n_H=2.3$ (ZnS), $n_L=1.38$ (MgF₂)。

表 2-1 多层膜的反射率和透射率

膜系	层数	等效折射率	反射率/%	透射率/%
GA	0		4.3	95.7
GHA	1	3.48	30.6	69.4
GHLA	2	0.547	8.6	91.4
GHLHA	3	9.665	66.2	33.8
G(HL) ² A	4	0.197	45.2	54.8
G(HL) ² HA	5	26.84	86.1	13.9
G(HL) ³ A	6	0.071	75.0	25.0
G(HL) ³ HA	7	74.53	94.8	5.2

续表

膜系	层数	等效折射率	反射率/%	透射率/%
$G(HL)^4A$	8	0.026	90.0	10.0
$G(HL)^4HA$	9	207	98.0	2.0
$G(HL)^5HA$	11	575	99.30	0.70
$G(HL)^6HA$	13	1596	99.75	0.25
$G(HL)^7HA$	15	4434	99.91	0.09
$G(HL)^8HA$	17	1.23×10^5	99.97	0.03
$G(HL)^9HA$	19	3.42×10^6	99.99	0.01

若采用矩阵法进行计算，则在正入射情况下，膜系为奇数($2p+1$)层时，膜系导纳由(2-85)式和(2-86)式得

$$Y = \left(\frac{n_H}{n_L} \right)^{2p} \frac{n_H^2}{n_G} \quad (2-93)$$

膜系反射率为

$$R = \left(\frac{n_A - (n_H/n_L)^{2p} (n_H^2/n_G)}{n_A + (n_H/n_L)^{2p} (n_H^2/n_G)} \right)^2 \quad (2-94)$$

与等效界面法所得结果相同。

由上述计算结果可见：

① 要获得高反射率，膜系的两侧最外层均应为高折射率层(H层)，因此，高反射率膜一定是奇数层。

② $\lambda_0/4$ 膜系为奇数层时，层数愈多，反射率 R 愈大。

③ 上述膜系的全部结果只对一种波长 λ_0 成立，这个波长称为该膜系的中心波长。当入射光偏离中心波长时，其反射率要相应地下降。因此，每一种 $\lambda_0/4$ 膜系只对一定波长范围的光才有高反射率，如图 2-31 所示。图中给出了几种不同层数的 ZnS-MgF₂ $\lambda_0/4$ ($\lambda_0 = 0.46 \mu\text{m}$) 膜系的反射特性曲线。可以看出，随着膜层层数的增加，高反射率的波长区趋于一个极限，所对应的波段称为该反射膜系的反射带宽。对于图示情况，带宽约为 200 nm。

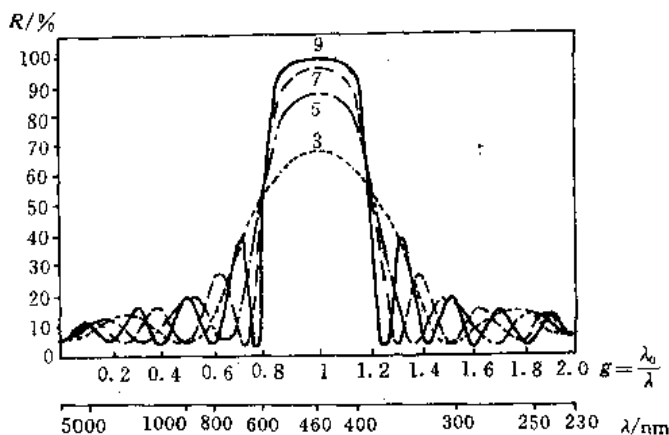


图 2-31 几种不同层数的 $\lambda_0/4$ 膜系的反射率曲线



$$2 \Delta g = \frac{4}{\pi} \arcsin \left(\frac{n_H - n_L}{n_H + n_L} \right) \quad (2-95)$$

式中, $g = \lambda_0 / \lambda$ 。由此可见, 反射带半宽度 Δg 只与 n_H / n_L 有关, n_H / n_L 愈大, 带宽就愈大。例如, 对于由 ZnS ($n_H = 2.34$) 和 MgF₂ ($n_L = 1.38$) 材料镀制的 $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$ 的反射膜, 其反射带半宽度为

$$\Delta g = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{2.34 - 1.38}{2.34 + 1.38} \right) \approx 0.17$$

相应反射带边缘的 g 值为

$$g_1 = 1 + \Delta g = 1.17$$

$$g_2 = 1 - \Delta g = 0.83$$

因此, 其反射带边缘波长为

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{g_1} = \frac{0.6328}{1.17} \approx 0.5409 \mu\text{m}$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{g_2} = \frac{0.6328}{0.83} \approx 0.7624 \mu\text{m}$$

所以这个膜系对 $0.55 \sim 0.76 \mu\text{m}$ 范围内的光均有高反射率。故在白光入射时, 这种膜系的反射光为橙黄色, 而透射光为青蓝色。

2.4 典型干涉仪及其应用

2.4.1 迈克尔逊干涉仪

迈克尔逊干涉仪是 1881 年迈克尔逊设计制作的, 它闻名于世是因为迈克尔逊曾用它作过三个重要的实验: 迈克尔逊—莫雷 (Morley) 以太漂移实验; 第一次系统地研究了光谱线的精细结构; 首次将光谱线的波长与标准米进行了比较, 建立了以光波长为基准的标准长度。

1. 迈克尔逊干涉仪的工作原理

迈克尔逊干涉仪的结构简图如图 2-32 所示, G_1 和 G_2 是两块折射率和厚度都相同的平行平面玻璃板, 分别称为分光板和补偿板, G_1 背面有镀银或镀铝的半反射面 A , G_1 和 G_2 互相平行。 M_1 和 M_2 是两块平面反射镜, 它们与 G_1 和 G_2 成 45° 设置。从扩展光源 S 来的光, 在 G_1 的半反射面 A 上反射和透射, 并被分为强度相等的两束光 I 和 II, 光束 I 射向 M_1 , 经 M_1 反射后折回, 并透过 A 进入观察系统 L (人眼或其它观察仪器); 光束 II 通过 G_2 并经 M_2 反射后折回到 A , 在 A 反射后也进入观察系统 L 。这两束光由于来自同一光束, 因而是相干光束, 可以产生干涉。

迈克尔逊干涉仪干涉图样的性质, 可以采用下面的方式讨论: 相对于半反射面 A , 作出平面反射镜 M_2 的虚像 M_2' , 它在 M_1 附近。于是, 可以认为观察系统 L 所观察到的干涉图样, 是由实反射面 M_1 和虚反射面 M_2' 构成的虚平板产生的, 虚平板的厚度和楔角可通过调节 M_1 和 M_2 反射镜控制。因此, 迈克尔逊干涉仪可以产生厚的或者薄的平行平板 (M_1

和 M_2 平行)和楔形平板(M_1 和 M_2 有一小的夹角)的干涉现象。扩展光源可以是单色性很好的激光,也可以是单色性很差的(白光)光源。

如果调节 M_2 , 使得 M_2 与 M_1 平行, 所观察到的干涉图样就是一组在无穷远处(或在 L 的焦平面上)的等倾干涉圆环。当 M_1 向 M_2 移动时(虚平板厚度减小), 圆环条纹向中心收缩, 并在中心一一消失。 M_1 每移动一个 $\lambda/2$ 的距离, 在中心就消失一个条纹。于是, 可以根据条纹消失的数目, 确定 M_1 移动的距离。根据(2-26)式, 此时条纹变粗(因为 h 变小, e_N 变大), 同一视场中的条纹数变少。当 M_1 与 M_2 完全重合时, 因为对于各个方向入射光的光程差均相等, 所以视场是均匀的。如果继续移动 M_1 , 使 M_1 逐渐离开 M_2 , 则条纹不断从中心冒出, 并且随虚平板厚度的增大, 条纹越来越细且变密。

如果调节 M_2 , 使 M_2 与 M_1 相互倾斜一个很小的角度, 且当 M_2 与 M_1 比较接近, 观察面积很小时, 所观察到的干涉图样近似是定域在楔表面上或楔表面附近的一组平行于楔边的等厚条纹。在扩展光源照明下, 如果 M_1 与 M_2 的距离增加, 则条纹将偏离等厚线, 发生弯曲, 弯曲的方向是凸向楔棱一边(图 2-33), 同时条纹可见度下降。干涉条纹弯曲的原因如下: 如前所述, 干涉条纹应当是等光程差线, 当入射光不是平行光时, 对于倾角较大的光束, 若要与倾角较小的入射光束等光程差, 其平板厚度应增大(这可由 $\Delta = 2nh \cos \theta_2$ 看出)。由图 2-33 可见, 靠近楔板边缘的点对应的入射角较大, 因此, 干涉条纹越靠近边缘, 越偏离到厚度更大的地方, 即弯曲方向是凸向楔棱一边。在楔板很薄的情况下, 光束入射角引起的光程差变化不明显, 干涉条纹仍可视作一些直线条纹。对于楔形板的条纹, 与平行平板条纹一样, M_1 每移动一个 $\lambda/2$ 距离, 条纹就相应地移动一个。

在干涉仪中, 补偿板 G_2 的作用是消除分光板分出的两束光 I 和 II 的不对称性。不加 G_2 时, 光束 I 经过 G_1 三次, 而光束 II 经过一次。由于 G_1 有一定厚度, 导致 I 与 II 有一附加光程差。加入 G_2 后, 光束 II 也三次经过同样的玻璃板, 因而得到了补偿。不过, 对于单色光照明, 这种补偿并非必要, 因为光束 I 经过 G_1 所增加的光程, 完全可以用光束 II 在空气中的行程补偿。但对于白光光源, 因为玻璃有色散, 不同波长的光有不同的折射率, 通过玻璃板时所增加的光程不同, 无法用空气中的行程补偿, 因而观察白光条纹时, 补偿板不可缺少。

白光条纹只有在楔形虚平板极薄(M_1 与 M_2 的距离仅为几个波长)时才能观察到, 这

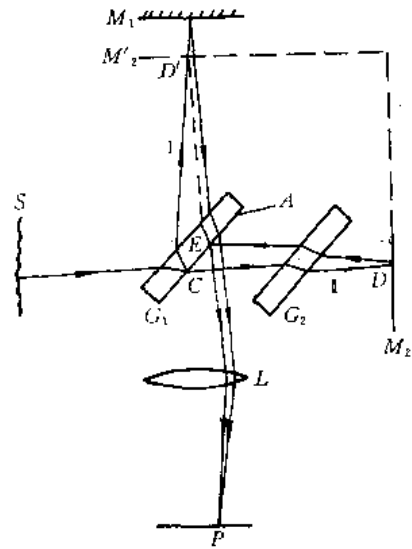


图 2-32 迈克尔逊干涉仪

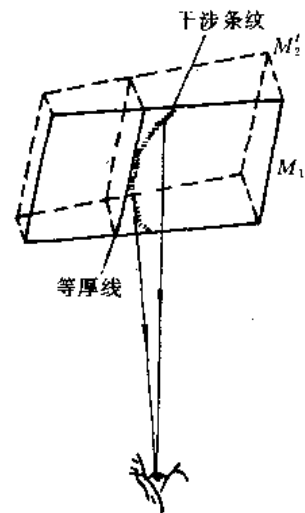


图 2-33 干涉条纹偏离等厚线

时的条纹是带彩色的。如果 M_1 和 M_2 相交错，交线上的条纹对应于虚平板的厚度 $h=0$ 。当 G_1 不镀半反射膜时，因在 G_1 中产生内反射的光线 I 和产生外反射的光线 II 之间有一附加光程差 $\lambda/2$ ，所以白色条纹是黑色的；镀上半反射膜后，附加程差与所镀金属及厚度有关，但通常均接近于零，所以白光条纹一般是白色的。交线条纹的两侧是彩色条纹。

迈克尔逊干涉仪的主要优点是两束光完全分开，并可由一个镜子的平移来改变它们的光程差，因此可以很方便地在光路中安置测量样品。这些优点使其有许多重要的应用，并且是许多干涉仪的基础。

2. 迈克尔逊干涉仪应用举例

1) 激光比长仪

应用迈克尔逊干涉仪和稳频 He-Ne 激光器可以进行长度的精密计量。在图 2-34 所示的装置中，光电计数器用来记录干涉条纹的数目，光电显微镜给出起始和终止信号。当光电显微镜对准待测物体的起始端时，它向记录仪发出一个信号，使记录仪开始记录干涉条纹数。当物体测量完时，光电显微镜对准物体的末端，发出一个终止信号，使记录仪停止工作。这样，利用

$$\Delta h = m \frac{\lambda}{2}$$

就可算出待测物体的长度。式中， m 是从物体起端到末端记录仪记录的条纹数。

在测量过程中，难免有机械振动的影响，它可能使 M_2 后退几个微米，会产生几十个干涉条纹数的误差。为此，应采用可逆计数器，不管 M_2 怎么移动，它只记录向一个方向移动所对应的干涉条纹数。

激光比长仪可用于大型工作的精密测量，米尺刻度的自动校正，丝杆精度的检验等。

2) 光纤迈克尔逊干涉仪

随着光纤技术的发展，光纤传感器已经获得了广泛的应用。在众多的光纤传感器中，有许多装置的工作原理，实际上是由光纤构成的迈克尔逊干涉仪。图 2-35 是一种光纤迈克尔逊测长干涉仪的原理图，其中 P 是光纤定向耦合器，它将来自激光器的光分成两束，分别经参考臂光纤和信号臂光纤射向固定反射镜 M_1 和移动反射镜 M_2 ，其反射光波经该二光纤由定向耦合器耦合到光电探测器 D 上，通过光电探测器记录干涉条纹的变化数，即可

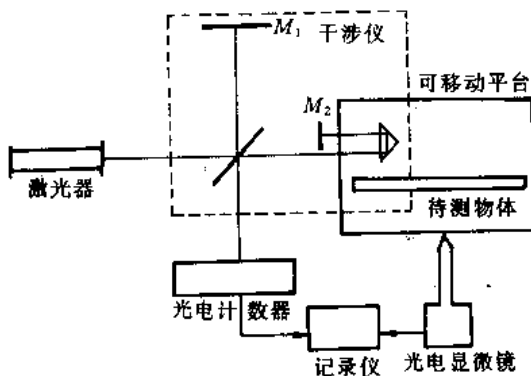


图 2-34 激光比长仪示意

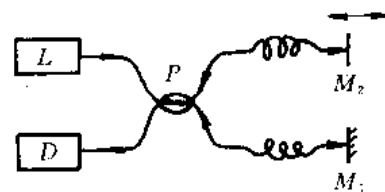


图 2-35 光纤迈克尔逊测长干涉仪原理图

确定出 M_2 移动的距离, 实现长度的测量。

2.4.2 马赫-泽德干涉仪

马赫-泽德(Mach-Zehnder)干涉仪是一种大型光学仪器, 它广泛应用于研究空气动力学中气体的折射率变化、可控热核反应中等离子体区的密度分布, 并且在测量光学零件、制备光信息处理中的空间滤波器等许多方面, 有着极其重要的应用。特别是, 它已在光纤传感技术中被广泛采用。

马赫-泽德干涉仪也是一种分振幅干涉仪, 与迈克尔逊干涉仪相比, 在光通量的利用率上, 大约要高一倍。这是因为在迈克尔逊干涉仪中, 有一半光通量将返回到光源方向, 而马赫-泽德干涉仪却没有这种返回光源的光。

马赫-泽德干涉仪的结构如图 2-36 所示。 G_1 、 G_2 是两块分别具有半反射面 A_1 、 A_2 的平行平面玻璃板, M_1 、 M_2 是两块平面反射镜, 四个反射面通常安排成近乎平行, 其中心分别位于一个平行四边形的四个角上, 平行四边形长边的典型尺寸是 1~2 m, 光源 S 置于透镜 L_1 的焦点上。 S 发出的光束经 L_1 准直后在 A_1 上分成两束, 它们分别由 M_1 、 A_2 反射和由 M_2 反射、 A_2 透射, 进入透镜 L_2 , 出射的两光相遇, 产生干涉。

假设 S 是一个单色点光源, 所发出的光波经 L_1 准直后入射到反射面 A_1 上, 经 A_1 透射和反射、并由 M_1 和 M_2 反射的平面光波的波面分别为 W_1 和 W_2 , 则在一般情况下, W_1 相对于 A_2 的虚像 W_1' 与 W_2 互相倾斜, 形成一个空气隙, 在 W_2 上将形成平行等距的直线干涉条纹(图中画出了两支出射光线在 W_2 的 P 点虚相交), 条纹的走向与 W_2 和 W_1' 所形成空气楔的楔棱平行。当有某种物理原因(例如, 使 W_2 通过被研究的气流)使 W_2 发生变形, 则干涉图形不再是平行等距的直线, 从而可以从干涉图样的变化测出相应物理量(例如, 所研究区域的折射率或密度)的变化。

在实际应用中, 为了提高干涉条纹的亮度, 通常都利用扩展光源, 此时干涉条纹是定域的, 定域面可根据 $\beta=0$ 作图法求出(详见 2.5 节)。当四个反射面严格平行时, 条纹定域在无穷远处, 或定域在 L_2 的焦平面上; 当 M_2 和 G_2 同时绕自身垂直轴转动时, 条纹虚定域于 M_2 和 G_2 之间(图 2-37)。即通过调节 M_2 和 G_2 , 可使条纹定域在 M_2 和 G_2 之间的任意位置上, 从而可以研究任意点处的状态。例如, 为了研究尺寸较大的风洞中任一平面附近的空气涡流, 将风洞置于 M_2 和 G_2 之间, 并在 M_1 和 G_1 之间的另一支光路上放置补偿, 调节 M_2 和 G_2 , 使定域面在风洞中选定的平面上, 由透镜 L_2 和照相机拍摄下这个平面上的干涉图样。只要比较有气流和无气流时的条纹图样, 就可确定出气流所引起空气密度的变化情况。

在光纤传感器中, 大量利用光纤马赫-泽德干涉仪进行工作。图 2-38 是一种用于温

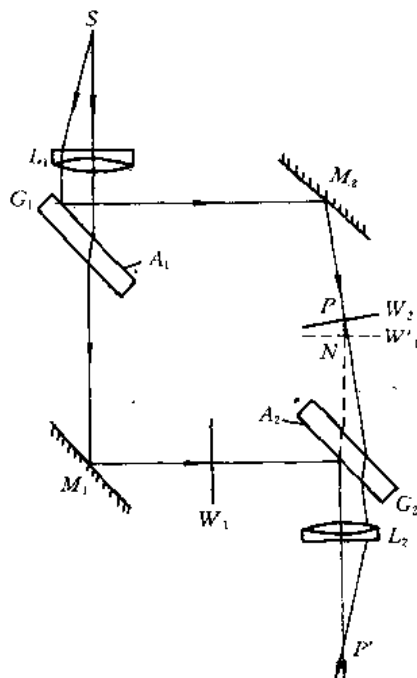


图 2-36 马赫-泽德干涉仪

度传感器的马赫-泽德干涉仪结构示意图。由激光器发出的相干光，经分束器分别送入两根长度相同的单模光纤，其中参考臂光纤不受外场作用，而信号臂放在需要探测的温度场中，由二光纤出射的两个激光束产生干涉。由于温度的变化引起信号臂光纤的长度、折射率变化，从而使信号臂传输光的相位发生变化，导致了由二光纤输出光的干涉效应变化，通过测量此干涉效应的变化，即可确定外界温度的变化。

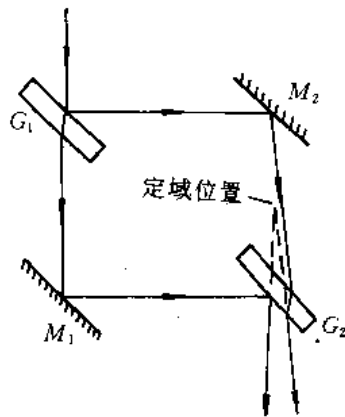


图 2-37 马赫-泽德干涉仪中条纹的定域

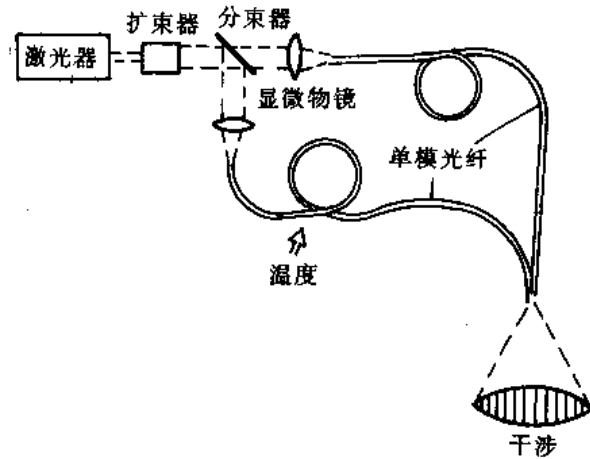


图 2-38 马赫-泽德光纤干涉仪温度传感器

2.4.3 法布里-珀罗干涉仪

法布里-珀罗(Fabry - Perot)干涉仪是一种应用非常广泛的干涉仪，其特殊价值在于，它除了是一种分辨本领极高的光谱仪器外，还可构成激光器的谐振腔。

1. 法布里-珀罗干涉仪的结构

法布里-珀罗干涉仪主要由两块平行放置的平面玻璃板或石英板 G_1 、 G_2 组成，如图 2-39 所示。两板的内表面镀银或铝膜，或多层介质膜以提高表面反射率。为了得到尖锐的条纹，两镀膜面应精确地保持平行，其平行度一般要求达到 $(1/20 \sim 1/100)\lambda$ 。干涉仪的两块玻璃板(或石英板)通常制成有一个小楔角 ($1' \sim 10'$)，以避免没有镀膜表面产生的反射光的干扰。如果两板之间的光程可以调节，这种干涉装置称为法布里-珀罗干涉仪；如果两板间放一间隔圈——一种殷钢制成的空心圆柱形间隔器，使两板间的距离固定不变，则称为法布里-珀罗标准具。

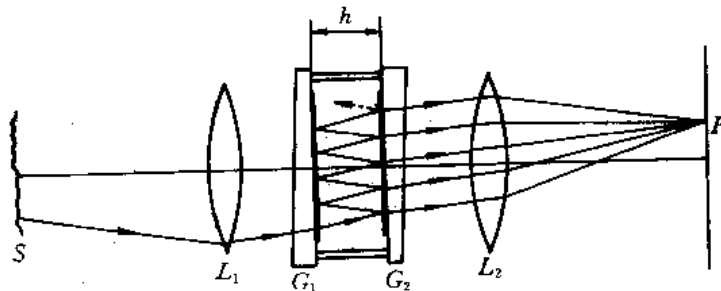


图 2-39 法布里-珀罗干涉仪简图

法布里—珀罗干涉仪采用扩展光源照明，其中一支光的光路如图 2-39 所示，在透镜 L_2 的焦平面上形成图 2-40(b) 所示的等倾同心圆条纹，将它与迈克尔逊干涉仪产生的等倾干涉条纹(图 2-40(a))比较可见，法布里—珀罗干涉仪产生的条纹要精细得多，但是两种条纹的角半径和角间距计算公式相同。条纹干涉级决定于空气平板的厚度 h ，通常法布里—珀罗干涉仪的使用范围是 1~200 mm，在一些特殊装置中， h 可大到 1 m。以 $h=5$ mm 计算，中央条纹的干涉级约为 20 000，可见其条纹干涉级很高，因而这种仪器只适用于单色性很好的光源。

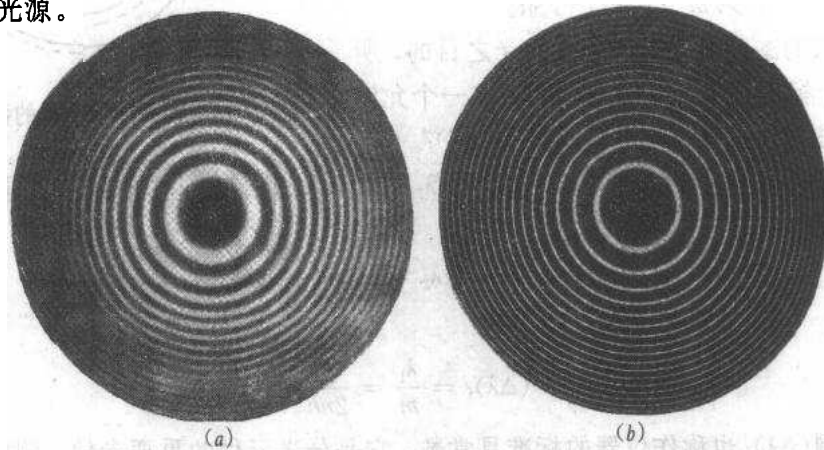


图 2-40 迈克尔逊干涉仪产生的干涉条纹(a)和法布里—珀罗干涉仪产生的干涉条纹(b)比较

应当指出，当干涉仪两板内表面镀金属膜时，由于金属膜对光产生强烈吸收，使得整个干涉图样的强度降低。假设金属膜的吸收率为 A ，则根据能量守恒关系有

$$R + T + A = 1 \quad (2-96)$$

当干涉仪两板的膜层相同时，由(2-43)式和上式可以得到考虑膜层吸收时的透射光干涉图样强度公式：

$$\frac{I_t}{I_i} = \left(1 - \frac{A}{1-R}\right)^2 \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (2-97)$$

其中

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} nh \cos \theta + 2\varphi' \quad (2-98)$$

这里， φ' 是光在金属内表面反射时的相位变化， R 应理解为金属膜内表面的反射率。可见，由于金属膜的吸收，干涉图样强度降低到原来的 $1/[1-A/(1-R)]^2$ ，严重时，峰值强度只有入射光强的几十分之一。

2. 法布里—珀罗干涉仪的应用举例

1) 研究光谱线的超精细结构

由于法布里—珀罗标准具能够产生十分细而亮的等倾干涉条纹，所以它的一个重要应用就是研究光谱线的精细结构，即将一束光中不同波长的光谱线分开——分光。作为一个分光元件来说，衡量其特性的好坏有三个技术指标：能够分光的最大波长间隔——自由光谱范围；能够分辨的最小波长差——分辨本领；使不同波长的光分开的程度——角色散。下面分别讨论。

(1) 自由光谱范围——标准具常数 由多光束干涉的讨论已经知道，有两个波长为 λ_1

和 λ_2 (且 $\lambda_2 > \lambda_1$) 的光入射至标准具, 由于两种波长的同级条纹角半径不同, 因而将得到如图 2-41 所示的两组干涉圆环, 且 λ_2 的干涉圆环直径比 λ_1 的干涉圆环直径小, 前者用实线表示, 后者用虚线表示。随着 λ_1 和 λ_2 的差别增大, 同级圆环半径相差也变大。当 λ_1 和 λ_2 相差很大, 以致于 λ_2 的第 m 级干涉条纹与 λ_1 的第 $m+1$ 级干涉条纹重叠, 就引起了不同级次的条纹混淆, 达不到分光之目的。所以, 对于一个标准具分光元件来说, 存在一个允许的最大分光波长差, 称为自由光谱范围 $(\Delta\lambda)_f$ 。

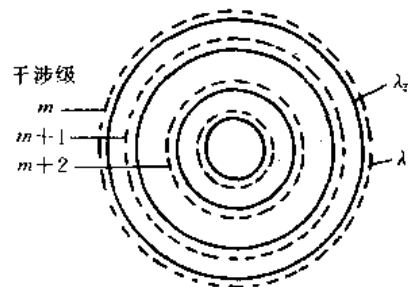


图 2-41 法-珀标准具的两套干涉环

对于靠近条纹中心的某一点 ($\theta \approx 0$) 处, λ_2 的第 m 级条纹与 λ_1 的第 $m+1$ 级条纹发生重叠时, 其光程差相等, 有

$$(m+1)\lambda_1 = m\lambda_2 = m[\lambda_1 + (\Delta\lambda)_f]$$

因此,

$$(\Delta\lambda)_f = \frac{\lambda_1}{m} = \frac{\lambda_1^2}{2nh} \quad (2-99)$$

自由光谱范围 $(\Delta\lambda)_f$ 也称作仪器的标准具常数, 它是分光元件的重要参数。例如, 对于 $h=5\text{ mm}$ 的标准具, 入射光波长 $\lambda=0.5461\ \mu\text{m}$, $n=1$ 时, 由上式可得 $(\Delta\lambda)_f=0.3 \times 10^{-4}\ \mu\text{m}$ 。

(2) 分辨本领 分光仪器所能分辨开的最小波长差 $(\Delta\lambda)_m$ 称为分辨极限, 并称

$$A = \frac{\lambda_1}{(\Delta\lambda)_m} \quad (2-100)$$

为分辨本领。

在这里, 首先遇到了一个问题: 什么是“能分辨开”? 显然, 对于不同的观察者, 这个“能分辨开”是不同的。为此, 必须要选择一个公认的标准。而在光学仪器中, 通常采用的标准是瑞利(Rayleigh)判据。

瑞利判据在这里指的是, 两个等强度波长的亮条纹只有当它们的合强度曲线中央极小值低于两边极大值的 81% 时, 才算被分开(图 2-42)。现在, 按照这个判据来计算标准具的分辨本领。

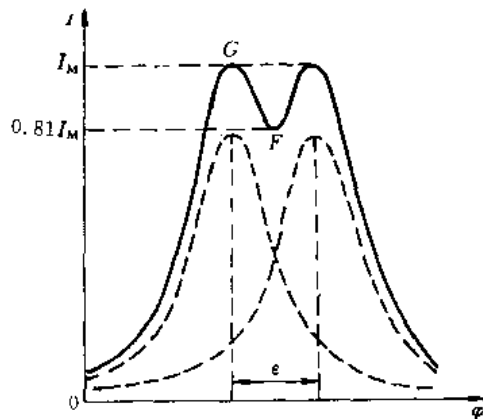


图 2-42 两个波长的亮条纹刚好被分辨开时的强度分布

如果不考虑标准具的吸收损耗, λ_1 和 λ_2 的透射光合强度为

$$I = \frac{I_{11}}{1 + F \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}} + \frac{I_{21}}{1 + F \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \quad (2-101)$$

式中, φ_1 和 φ_2 是在干涉场上同一点的两个波长条纹所对应的相位差。设 $I_{11}=I_{21}=I_i$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \epsilon$, 则在合强度极小值处(图 2-42 中的 F 点), $\varphi_1 = 2m\pi + \epsilon/2$, $\varphi_2 = 2m\pi - \epsilon/2$, 因此极小值强度为



$$\begin{aligned}
 & \frac{I_i}{1 + F \sin^2\left(m\pi + \frac{\epsilon}{4}\right)} + \frac{I_i}{1 + F \sin^2\left(m\pi - \frac{\epsilon}{4}\right)} \\
 &= \frac{2I_i}{1 + F \sin^2 \frac{\epsilon}{4}} \quad (2-102)
 \end{aligned}$$

在合强度极大值处(图 2-42 中的 G 点), $\varphi_1 = 2m\pi$, $\varphi_2 = 2m\pi - \epsilon$, 故极大值强度为

$$I_M = I_i + \frac{I_i}{1 + F \sin^2 \frac{\epsilon}{2}} \quad (1-103)$$

按照瑞利判据, 两个波长条纹恰能分辨的条件是

$$I_m = 0.81I_M \quad (2-104)$$

因此有

$$\frac{2I_i}{1 + F \sin^2 \frac{\epsilon}{4}} = 0.81 \left[I_i + \frac{I_i}{1 + F \sin^2 \frac{\epsilon}{2}} \right]$$

由于 ϵ 很小, $\sin \epsilon/2 \approx \epsilon/2$, 可解得

$$\epsilon = \frac{4.15}{\sqrt{F}} = \frac{2.07\pi}{N} \quad (2-105)$$

式中, N 是条纹的精细度。再由(2-98)式, 略去 φ 的影响, 有

$$|\Delta\varphi| = \frac{4\pi h \cos \theta}{\lambda^2} \Delta\lambda = 2m\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad (2-106)$$

由于此时两波长刚被分辨开, $\Delta\varphi = \epsilon$, 所以标准具的分辨本领为

$$A = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_m} = \frac{2mN}{2.07} = 0.97mN \quad (2-107)$$

可见, 分辨本领与条纹干涉级数和精细度成正比。由于法布里-珀罗标准具的 N 很大, 所以标准具的分辨本领极高。例如, 若 $h = 5 \text{ mm}$, $N \approx 30$ ($R \approx 0.9$), $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, 则在接近正入射时, 标准具的分辨本领为

$$A \approx 0.97 \frac{2h}{\lambda} N \approx 6 \times 10^5$$

这相当于在 $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ 上, 标准具能分辨的最小波长差 $(\Delta\lambda)_m$ 为 $0.0083 \times 10^{-4} \mu\text{m}$, 这样高的分辨本领是一般光谱仪所达不到的。应当指出, 上面的讨论是把 λ_1 和 λ_2 的谱线视为单色谱线, 由于任何实际谱线的本身都有一定的宽度, 所以标准具的分辨本领达不到这样高。

有时把(2-107)式中的 $0.97N$ 称为标准具的有效光束数 N' , 于是(2-107)式可以写成

$$A = mN' \quad (2-108)$$

(3) 角色散 角色散是用来表征分光仪器能够将不同波长的光分开程度的重要指标。它定义为单位波长间隔的光, 经分光仪所分开的角度, 用 $d\theta/d\lambda$ 表示。 $d\theta/d\lambda$ 愈大, 不同波长的光经分光仪分得愈开。

由法布里-珀罗干涉仪透射光极大值条件

$$\Delta = 2nh \cos \theta = m\lambda$$

不计平行板材料的色散，两边进行微分，可得

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \left| \frac{m}{2nh \sin \theta} \right| \quad (2-109)$$

或

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \left| \frac{\cot \theta}{\lambda} \right| \quad (2-110)$$

角度 θ 愈小，仪器的角色散愈大。因此，在法—珀干涉仪的干涉环中心处光谱最纯。

2) 用作激光器的谐振腔

如图 2-43(a) 所示，一台激光器主要由两个核心部件组成：激光工作物质(激活介质)和由 M_1 、 M_2 构成的谐振腔。激光工作物质在激励源的作用下，为激光的产生提供了增益，其增益曲线如图 2-43(b) 中的虚线所示。谐振腔为激光的产生提供了正反馈，并具有选模作用，它实际上可以看作是由 M_1 、 M_2 构成的法布里—珀罗干涉仪。激光器产生的激光振荡频率，实际上是一系列满足干涉条件的频率。由于激光输出还必须满足一定的阈值条件，所以激光输出频率只有如图 2-43(b) 所示的 A、B、C 等少数几个。

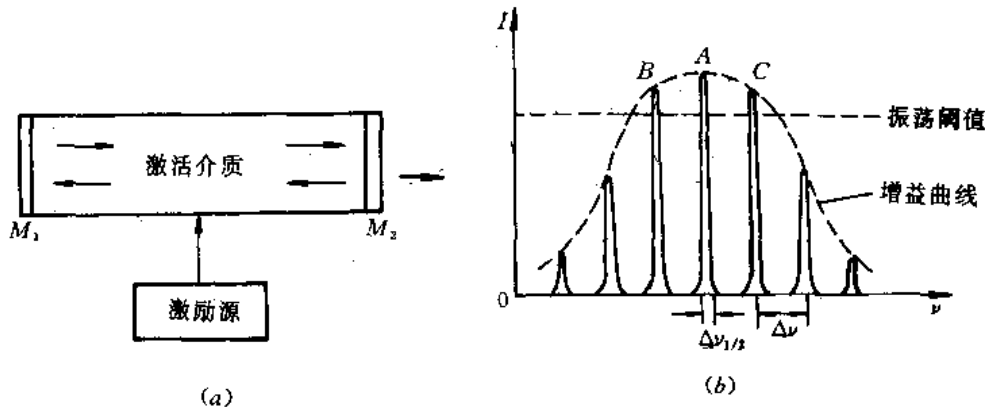


图 2-43 激光器及其纵模

由激光理论，激光器的每一种输出频率称为振荡纵模，每一种输出频率的频宽称为单模线宽，相邻两个纵模间的频率间隔称为纵模间隔。若不计激光工作物质对输出频率特性的影响，这些频率特性均可由法布里—珀罗干涉仪理论得出：

(1) 纵模频率 激光器输出的纵模频率实际上是满足法布里—珀罗干涉仪干涉亮条纹条件的一系列频率。在正入射情况下，满足下面的关系：

$$2nL = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2-111)$$

式中， n 和 L 分别是谐振腔内介质的折射率和谐振腔长度， m 是干涉级。由此可得纵模频率为

$$\nu_m = m \frac{c}{2nL} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2-112)$$

相应的波长为

$$\lambda_m = \frac{2nL}{m} \quad (2-113)$$

(2) 纵模间隔 根据(2-112)式，纵模间隔为



$$\Delta\nu = \nu_m - \nu_{m-1} = \frac{c}{2nL} \quad (2-114)$$

可见，它只与谐振腔长度和折射率有关。

(3) 单模线宽 由多光束干涉条纹锐度的分析，干涉条纹的相位差半宽度为

$$\Delta\varphi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \quad (2-115)$$

而由(2-39)式有

$$|\Delta\varphi| = 4\pi nL \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

因此，当光波包含有许多波长时，与相位差半宽度相应的波长差为

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{1/2} &= \frac{\lambda^2}{4\pi nL} |\Delta\varphi| = \frac{\lambda^2}{2\pi nL} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \\ &= \frac{2nL}{m^2} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \end{aligned} \quad (2-116)$$

或以频率表示，相应的谱线宽度为

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{c}{2\pi nL} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \quad (2-117)$$

由上式可见，谐振腔的反射率越高，或腔长越长，谱线宽度越小。例如，一支 He-Ne 激光器， $L=1\text{ m}$ ， $R=98\%$ ，可算出 $\Delta\nu_{1/2}=1\text{ MHz}$ 。实际上，由于激光工作物质对激光输出的单色性影响很大，就使得激光谱线宽度远小于该计算值。

2.4.4 干涉滤光片

滤光片的作用是只让某一波段范围的光通过，而其余波长的光不能通过。通常，滤光片的性能指标有三个：

- ① 中心波长 λ_0 ，它是指透光率最大(T_M)时的波长；
- ② 透射带的波长半宽度，它是透过率为最大值一半($T=T_M/2$)处的波长范围 $\Delta\lambda_{1/2}$ ， $\Delta\lambda_{1/2}$ 大者为宽带滤光片，小者为窄带滤光片；
- ③ 峰值透过率 T_M 。

滤光片按其结构可分为两类：

- ① 吸收滤光片，它是利用物质对光波的选择性吸收进行滤光的。例如，红、绿玻璃以及各种有色液体等，具体滤光性能可参看有关手册；
- ② 干涉滤光片，它是利用多光束干涉原理实现滤光的。

前者由于使用的物质有限，不能制造出在任意波长处、具有所希望带宽的滤光片，而后者从原理上讲，可以制成在任何中心波长处、有任意带宽的滤光片。

下面，介绍几种常用的干涉滤光片。

1. 法布里—珀罗型干涉滤光片

常用的干涉滤光片有两种：一种是全介质干涉滤光片，如图 2-44 所示，在平板玻璃 G 上镀两组膜系 $(HL)^p$ 和 $(LH)^p$ ，再加上保护玻璃 G' 制成；另一种是金属膜干涉滤光片，如图 2-45 所示，在平板玻璃 G 上镀一层高反射率的银膜 S ，银膜之上再镀一层介质薄膜

F. 然后再镀一层高反射率的银膜，最后加保护玻璃 G' 。全介质干涉滤光片的两组膜系实际上可以看作两组高反射膜 $H(LH)^{p-1}$ 和 $(HL)^{p-1}H$ 中间夹着一层间隔层 LL 。因此，这两种滤光片都可以看作是一种间隔很小的法布里-珀罗标准具。

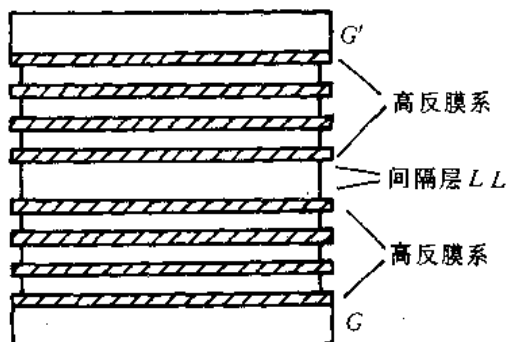


图 2-44 全介质干涉滤光片

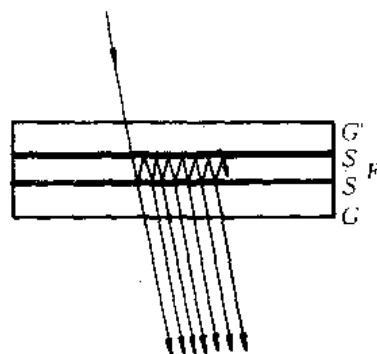


图 2-45 金属反射膜干涉滤光片

1) 滤光片的中心波长

在正入射时，透射光产生极大的条件为

$$2nh = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

由此可得滤光片的中心波长为

$$\lambda = \frac{2nh}{m} \quad (2-118)$$

对于一定的光学厚度 nh ， λ 的数值只取决于 m ，对应不同的 m 值，中心波长不同。例如，对于间隔层折射率为 $n=1.5$ ，厚度为 $h=6 \times 10^{-5} \text{ cm}$ 的干涉滤光片，在可见光区域内有 $\lambda=0.6 \mu\text{m} (m=3)$ 和 $0.45 \mu\text{m} (m=4)$ 两个中心波长。当间隔层厚度增大时，中心波长的数目就更多些。为了把不需要的中心波长滤去，可附加普通的有色玻璃片（兼作保护玻璃 G 和 G' ）。

由(2-118)式可以求得相邻干涉级 ($\Delta m=1$) 的中心波长差为

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2nh} \quad (2-119)$$

2) 透射带的波长半宽度

透射带的波长半宽度 $\Delta\lambda_{1/2}$ 由(2-56)式确定，

$$\Delta\lambda_{1/2} = \frac{2nh(1-R)}{m^2\pi\sqrt{R}} = \frac{\lambda^2}{2\pi nh} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \quad (2-120)$$

或表示为

$$\Delta\lambda_{1/2} = \frac{\lambda}{m} \frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{2\lambda}{m\pi\sqrt{F}} \quad (2-121)$$

上式表明， m 、 R 愈大， $\Delta\lambda_{1/2}$ 愈小，干涉滤光片的输出单色性愈好。

3) 峰值透射率

峰值透射率是指对应于透射率最大的中心波长的透射光强与入射光强之比，即

$$T_M = \left(\frac{I_t}{I_i} \right)_M$$

若不考虑滤光片的吸收和表面散射损失，则峰值透射率为 1。实际上，由于高反射膜的吸

收和散射会造成光能损失，峰值透射率不可能等于 1。特别是金属反射膜滤光片，吸收尤为严重，由(2-97)式可得对应于中心波长的峰值透射率为

$$T_M = \left(1 - \frac{A}{1-R}\right)^2 \quad (1-122)$$

由于吸收，峰值透射率一般在 30% 以下。表 2-2 列出了几种滤光片的三个主要参数，其中最后一种滤光片的透射率曲线如图 2-46 所示。

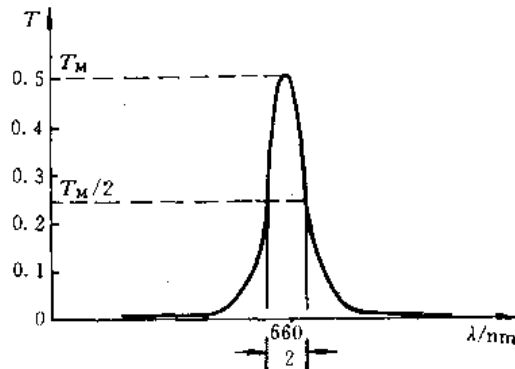


图 2-46 一种典型的多层介质膜干涉滤光片透射率曲线

表 2-2 几种干涉滤光片的特性

类 型	中心波长/nm	峰值透射率	波长半宽度/nm
<i>M-2L-M</i>	531	0.30	13
<i>M-4L-M</i>	535	0.26	7
<i>MLH-2L-HLM</i>	547	0.43	4.8
<i>M(LH)²-2L-(HL)²M</i>	605	0.38	2
<i>HLH-2L-HLH</i>	518.5	0.90	38
<i>(HL)³H-2L-H(LH)³</i>	520	0.70	4
<i>(HL)⁵-2H-(LH)⁵</i>	660	0.50	2

注：*M* 代表金属膜；*L* 代表光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的低折射率膜层，前四种，*L* 介质是氟化镁，后三种是冰晶石；*H* 代表光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的高折射率膜层，均为硫化锌。

2. 红外线滤光片

在 2.3 节中，已讨论了多层高反射膜的反射率光谱特性(见图 2-31)。图 2-47 给出了以波长 λ 为横坐标时的七层膜系透射率光谱曲线，可以看出，膜厚的变化将改变截止带的位置。若取 $nh=0.130 \mu\text{m}$ ，膜系反射可见光而透过红外光。如果在光源的反射镜上镀上这种膜系，就制成了冷光镜，它通常用于电影放映机，以减少电影胶片的受热和增强银幕上的亮度。理论和实践表明，采用两个高反射膜堆中间夹一个过渡层的膜系，可以制成很好的冷光膜，例如，结构为 $G(HL)_4^1 H_1 L_2 (HL)_3^2 H_3 A$ 的膜系。在该膜系结构符号中，下脚

Click to buy NOW!

标 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 表示 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 三个控制波长, 且有 $\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_3)/2$, 高折射率膜层用 ZnS, 低折射率膜层用 MgF_2 。当三个波长分别为 $\lambda_1 = 0.65 \mu m$, $\lambda_2 = 0.565 \mu m$, $\lambda_3 = 0.480 \mu m$ 时, 该膜系的反射带宽为 $0.3 \mu m$ 左右。

与上述情况相反, 如果采用 $nh = 0.22 \mu m$ 的膜层, 则反射红外线而透过可见光, 所以可以用作放映机的光源与胶片之间的红外截止滤光片, 称之为冷滤光片。

3. 偏振滤光片

利用多层膜的反射作用还可以作成偏振滤光片。由前面的讨论已知, 在玻璃上镀高折射率薄膜, 可以增大反射率, 在光束斜入射的情况下, 其反射率的大小因 p 分量和 s 分量而异, 并且在某个入射角上, 反射光中的 p 分量可以变为 0。所以, 与只有玻璃板时的情况相同, 这种高反膜也可以起偏振元件的作用, 这时的反射率如图 2-48 所示, 比没有薄膜时高得多。

如果镀上 ZnS+ MgF_2 +ZnS 三层膜, 则在膜的偏振角上, s 分量的剩余反射率可以达到 90%, 是一个很好的偏振元件。若如图 2-49(a) 所示, 将三层膜夹在棱镜中间(在斜面上镀上三层膜, 然后胶合起来), 并使光以接近全反射的角度入射, 则可得到图 2-49(b) 所示的带宽为几纳米的透射带, 构成一个单色滤光片, 并将 p 分量和 s 分量分离开来。由于光线斜入射照射至三层膜, p 分量和 s 分量在反射时的相位变化不同, 形成了图中的两个透射带。为了消除这种偏差, 可以用双折射材料作为胶合物质, 通过双折射将相位变化抵消, 这就是所谓的消双折射全反射滤光片。进一步, 若如图 2-50 所示, 把棱镜各面都镀上三层膜, 然后把它们用稍厚一些的香胶胶合起来而不发生干涉, 就可以得到偏振度高达 98% 的偏振滤光片。它的主要缺点是视场很窄。

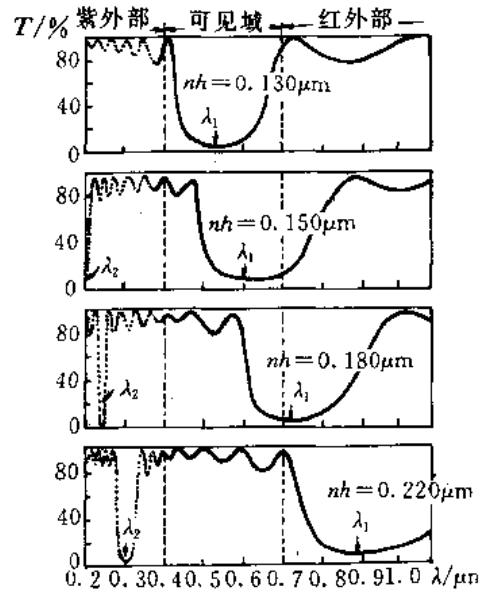


图 2-47 膜厚变化对截止带的影响

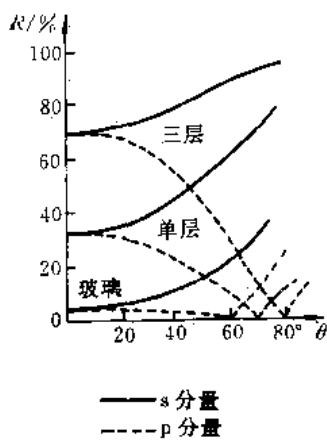


图 2-48 膜层偏振反射特性

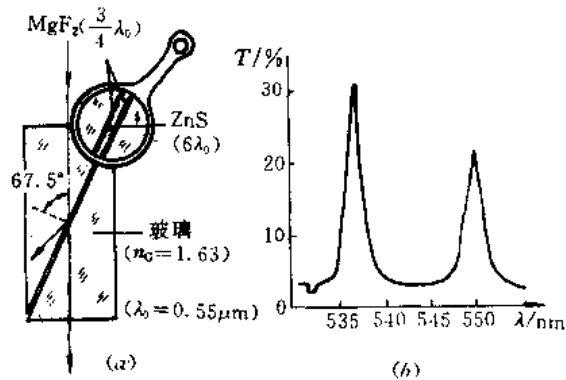


图 2-49 单色滤光片

前面讨论了光学薄膜用于控制光学元件的反射率和透射率，它的另外一种重要用途是可以制作成光波导。

对薄膜波导的研究，是伴随着集成光学的发展进行的。集成光学类似于半导体技术中的集成电路，把一些光学元件，如发光元件、光放大元件、光传输元件、光耦合元件和接收元件等，以薄膜形式集成在同一衬底上，构成了一个具有独立功能的微型光学系统。这种集成光路具有体积小、性能稳定可靠、效率高、功耗小等许多优点，自 60 年代末期以来，它作为一个崭新的光学领域，迅速发展起来。在此，只介绍薄膜波导传输光的基本工作原理及光耦合的概念。

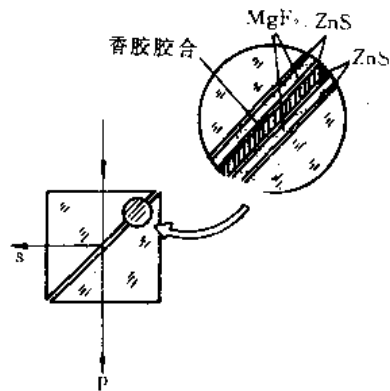


图 2-50 偏振滤光片

1. 薄膜波导传播光的基本原理

薄膜波导如图 2-51 所示。它实际上是沉积在衬底(n_c)上的一层折射率为 n 、厚度约为 $1\sim 10\ \mu\text{m}$ 的薄膜，其上层为覆盖层，可以是空气或其它介质，折射率为 n_0 ，且有 $n > n_0, n_c$ 。如果覆盖层和衬底的折射率相同，称为对称波导；若它们的折射率不同，则称为非对称波导。

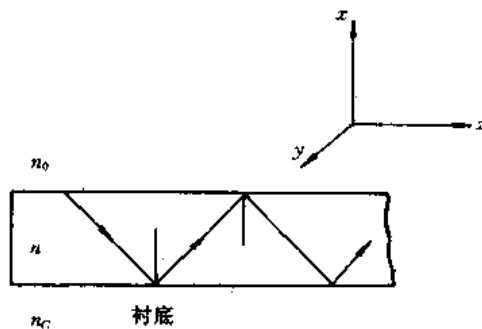


图 2-51 薄膜波导

假设在薄膜波导中传播的是平面光波，则可用光线描述它的传播规律。正如 1.2 节

所指出的那样，光在折射率不同的介质界面上将发生反射和折射，当 $n > n_0, n > n_c$ 时，会发生全反射现象，产生全反射的条件是入射角大于临界角。相应薄膜波导上、下表面的临界角分别为

$$\theta_{c,上} = \arcsin \frac{n_0}{n} \quad (2-123)$$

和

$$\theta_{c,下} = \arcsin \frac{n_c}{n} \quad (2-124)$$

光在薄膜波导中传播的基本原理就是这种界面全反射。从几何光学角度来看，光在薄膜内沿着“Z”字形路径，向着 z 方向传播。

2. 薄膜波导的模式特性

1) 模式方程

假设薄膜在 y, z 方向上无限延伸，光在薄膜中的入射面为 xOz 平面，则可认为薄膜中的光是一个在 y, z 方向上无限大的平面光波，在薄膜上、下表面之间来回反射，波矢量分别为 k_A 和 k_B (图 2-52)。这个平面光波可分解为沿波导方向(z 方向)和沿横向(x 方向)行

进的两个分量，相应的传播常数为 $\beta = k_0 n \sin \theta_1$ 和 $\gamma = k_0 n \cos \theta_1$ ，并且满足 $(k_0 n)^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ，式中 k_0 是光波在真空中的波数。于是，对于顺着传播常数为 β 、沿 z 方向行进的波运动的观察者来说，如果能观察到按“Z”字形来回反射行进的平面波，也就必然能观察到在横向来回反射的平面波，而这个波的存在必然满足横向往返干涉加强的条件，即在上、下界面间往返一周的相位变化为 2π 的整数倍，可表示为

$$2k_0 n h \cos \theta_1 + \varphi_1 + \varphi_2 = 2m\pi$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (2-125)$$

该式即为光能够在薄膜波导中传播所必须满足的条件，称为模式方程，它是波导光学中的基本方程。式中， θ_1 是光波在薄膜表面上的入射角， φ_1 和 φ_2 分别是光波在薄膜上、下表面全反射时的相位变化，对于 s 分量的光波（在波导理论中称为 TE 波）， φ_1 由下式决定（见 1-170）式：

$$\tan \frac{\varphi_1}{2} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2}}{\cos \theta_1} \quad (2-126)$$

对于 p 分量的波（在波导理论中称为 TM 波）， φ_1 满足下式关系：

$$\tan \frac{\varphi_1}{2} = - \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2}}{\cos \theta_1} \quad (2-127)$$

把上二式中的 n_0 改为 n_G ，即可写出相应的 φ_2 关系式。

由上所述，能够在薄膜波导中传播的光波，在横向（ x 方向）表现为驻波，在波导方向（ z 方向）上是具有传播常数 β 的行波，相应的波导波长为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2-128)$$

通常，将薄膜波导中能够传播的光波称为导模；将不满足全反射条件，不能在薄膜波导中传播的光波称为辐射模。由于辐射模在界面上不满足全反射条件，在上、下界面上只能部分反射，势必有一部分能量辐射出去，导致光能量不能沿波导有效传播。

由模式方程还可看出，对于一定的波导结构（ n 、 n_0 、 n_G 和 h 是常数），对应不同的 m 值，有不同的 θ_1 角，相应为不同的传播模式。图 2-53 给出了相应于

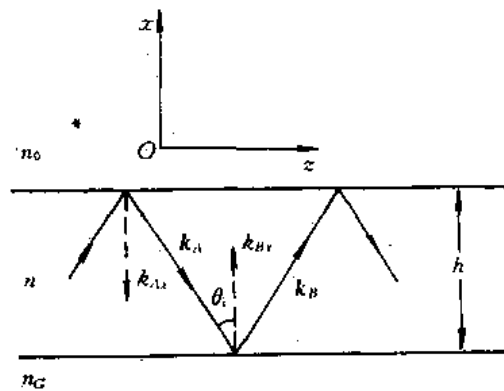


图 2-52 波导内平面波的分解

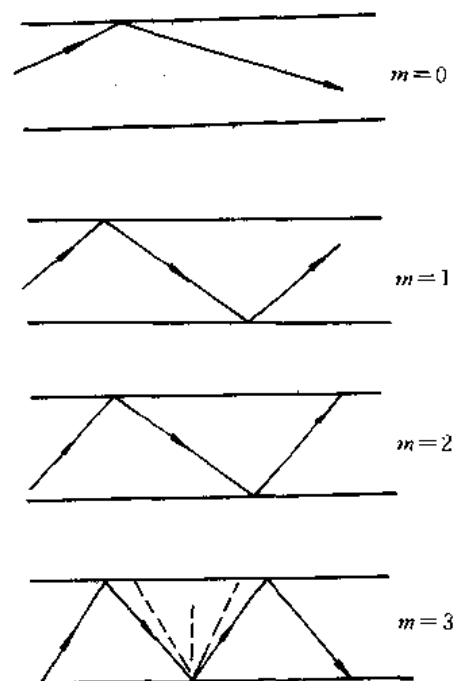


图 2-53 薄膜波导中与 m 值相应的不同光的“Z”形路径



$m=0, 1, 2, 3$ 的光波, 在波导中所走的“Z”字形路径, 与其对应的传播模式分别为 TE_0 、 TE_1 、 TE_2 、 TE_3 和 TM_0 、 TM_1 、 TM_2 、 TM_3 , m 是光波在波导中传播的模阶数。另外还可看出, 如果在波导中传播的波包含不同的波长, 则对应于某一个 m 值, 不同的波长有不同的 θ_1 角, 因此, 沿着传播方向的光波速度不同, 故(2-125)式也称为色散方程。

2) 单模传输条件

如上所述, (2-125)式实际上是光波能够在薄膜波导中传播所必须满足的条件。在一般情况下, 对于一定的薄膜波导, 相应于某种波长的光波可以有多种模式传播, 叫作多模光波传输。在一定条件下, 如果某种光波只能以单一模式(基模)在波导中传播, 就是单模光波传输。下面, 讨论单模光波的传输条件。

在这里, 仅讨论 TE 波传播的情况, 对于 TM 波的传播, 情况完全类似。

假定薄膜波导是非对称的, 并且 $n_G > n_0$ 。若入射角 $\theta_1 = \theta_{CT}$, 则光波在薄膜下表面处于全反射的临界状态, 在薄膜上表面为全反射, 因此

$$\varphi_2 = 0 \quad (2-129)$$

$$\varphi_1 = -2 \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2}}{\cos \theta_1} = -2 \arctan \sqrt{\frac{n_G^2 - n_0^2}{n^2 - n_G^2}} \quad (2-130)$$

上式中利用了关系 $\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = \sqrt{1 - (n_G/n)^2}$ 。于是, 模式方程变为

$$k_0 h \sqrt{n^2 - n_0^2} = m\pi + \arctan \sqrt{\frac{n_G^2 - n_0^2}{n^2 - n_G^2}} \quad (2-131)$$

由该式决定的波长 $f_c = 2\pi/k_0$ 叫截止波长。凡波长大于 λ_c 的光波均因不满足全反射条件, 不能在波导中传播。由(2-131)式可见, 不同模式(m)光波的截止波长不同, 对于基模 TE_0 ($m=0$), 截止波长最长, 且由下式决定:

$$(\lambda_c)_{m=0} = \frac{2\pi h \sqrt{(n^2 - n_0^2)}}{\arctan \sqrt{\frac{n_G^2 - n_0^2}{n^2 - n_G^2}}} \quad (2-132)$$

显然, 当光波长小于 $(\lambda_c)_{m=0}$ 时, 在波导中将产生多模传输; 当光波长小于基模截止波长, 但大于其它模式的截止波长时, 将单模传输。

对于对称波导($n_0 = n_G$), 由(2-131)式, 有 $(\lambda_c)_{m=0} = \infty$ 。这表明, 对称波导的基模没有截止波长, 任何波长都可传输。

如果波导尺寸大, 或者波长小, 光波导进行多模传输时, 能够传播模式的数目可由(2-131)式得到。对于对称波导情形, (2-131)式为

$$k_0 h \sqrt{n^2 - n_0^2} = m\pi \quad (2-133)$$

因此, 模式数 m 为

$$m = \frac{2h}{\lambda} \sqrt{n^2 - n_0^2} \quad (2-134)$$

对于非对称波导, 模式数目应由(2-131)式计算。但在 m 较大时, (2-131)式右边第二项可以忽略, 可近似用(2-134)式计算。

3. 薄膜波长的光耦合

在薄膜波导的应用中，一个非常重要的问题是如何将外来的光能量耦合到薄膜内，或者如何将薄膜内传播的光能量耦合输出。由于薄膜非常薄，要想把外来光直接射入薄膜（图 2-54），并使入射光波与薄膜波导中一定模式相匹配，是非常困难的。现在普遍采用的耦合方式有如下几种：

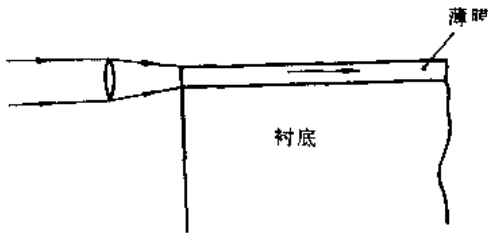


图 2-54 薄膜波导的横向光耦合

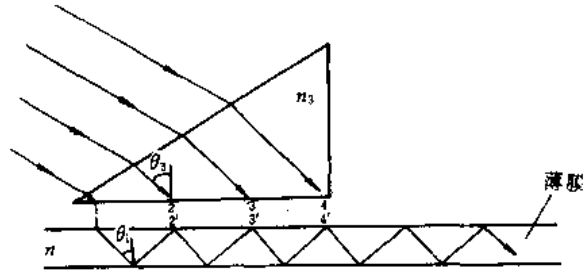


图 2-55 棱镜耦合

1) 棱镜耦合

如图 2-55 所示，将一个小棱镜放在薄膜上面，棱镜底面与薄膜上表面之间保持一个很小的空气隙，厚度约为 $\lambda/8 \sim \lambda/4$ ，适当地选择入射激光束的入射角，使之在棱镜底面发生全反射，将会有有一个消逝波场延伸到棱镜底面之下，通过这个场的作用，棱镜中的激光束能量可以转移到薄膜中，或者将薄膜中的光能量转移到棱镜中。

为了具体分析这种耦合器是怎样实现能量耦合的。在图 2-55 中画出了射入棱镜激光束的四条等间距光线，它们射到棱镜底面上的 1、2、3、4 点，这四点分别与薄膜波导中某模式光波“Z”字形路径的 1'、2'、3'、4' 点对应。当第一支光线到达点 1 时，在薄膜中正对着的点 1' 处激起一个可以在波导中传播的波，这个波沿 x 方向的传播速度为

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{n \sin \theta_1} \quad (1-135)$$

当第二支光线到达 2 时，也同样在薄膜中正对着的点 2' 位置激起一个波。如果由第一支光激起的波从点 1' 传播到点 2' 所需要的时间，恰与第二支光到达 2 点滞后第一支光到达 1 点的时间相等，则在薄膜内传播的波由于不断地有新的同相波加入而将得越来越强，因此，可以形成这种传播模式。设棱镜折射率为 n_3 ，激光束在棱镜底面上的入射角为 θ_3 ，点 1 和点 2 之间的距离为 d ，不难求出光波到达 2 点较到达 1 点的滞后时间是 $dn_3 \sin \theta_3 / c$ 。另外，波导内的波从点 1' 到点 2' 的时间是 $dn \sin \theta_1 / c$ 。当两个时间相等时，有

$$n \sin \theta_1 = n_3 \sin \theta_3 \quad (2-136)$$

称为同步条件，要使棱镜耦合器有效地工作必须满足这一条件。

对于任一波导模式， θ_1 是一定的，因此总可以通过调整入射到棱镜上的激光束方向，使 θ_3 满足同步条件，将棱镜内的光波耦合到这一波导模式中。对于均匀空气隙，耦合率可达 80% 以上。

2) 光栅耦合

图 2-56 是一个光栅耦合器。在薄膜表面用全息术或其它方法形成一个光栅层，当激光入射到该光栅上时，将发生衍射。如果某一级衍射光的波矢量沿波导方向的分量与薄膜

中的某个模式的传播常数 β 相等, 则这一级衍射波在薄膜中激起的波就满足同步条件, 此衍射波就与这个模式发生耦合, 光能量被输入薄膜。光栅耦合比较稳定可靠, 结构紧凑, 耦合效率可达 70% 以上。

3) 楔形薄膜耦合

这种耦合器的耦合是利用非对称波导的截止特性实现的。由(2-131)式不难看出, 对于每一种模式都存在一个截止膜厚, 如果膜厚小于这个值, 该模式便不能传输。这时由于该模式在下表面的入射角小于临界角, 光束将折射到衬底里。如图 2-57 所示, 膜厚从 x_a 到 x_b 逐渐减小到零, 在 x_c 处恰好等于截止膜厚, 从 x_a 到 x_b 的距离一般为 10~100 个波长。详细计算表明, 在 x_c 附近 8 个波长范围内, 能量逐渐地从薄膜耦合到衬底中。在衬底中有 80% 以上的能量集中在薄膜表面附近约 15° 角的范围内。利用相反的过程也可以把能量从衬底耦合到薄膜中。

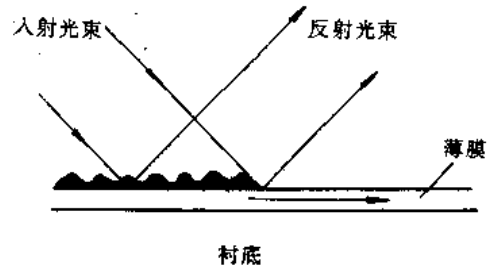


图 2-56 光栅耦合

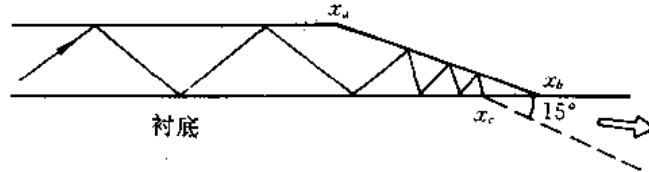


图 2-57 楔形薄膜耦合

2.5 光的相干性

前面讨论了光波的干涉现象及产生干涉的条件, 并指出, 在实验中为了获得相干光, 可采用分波面法或分振幅法, 并对光源 S 分别假设是单色点(线)光源或单色扩展光源。实际上, 任何一个光源都具有有限的尺寸, 所产生的光都不可能是单色光, 利用这种光源进行干涉实验, 其条纹可见度将下降, 甚至完全不产生干涉, 这就是光的相干性问题。对光的相干性的研究, 在光电子技术应用中, 特别是对有关信息处理的应用, 非常重要。

这一节将较详细地讨论光的相干性概念, 光的相干性的经典描述, 以及光波干涉中的定域问题。

2.5.1 光的相干性

在前面讨论光的干涉实验时, 引入了表征干涉程度的参量——条纹可见度 V 。当 $V=1$ 时, 条纹最清晰, 表示光束完全相干; 当 $V=0$ 时, 无干涉条纹, 表示光束完全不相干; 当 $0 < V < 1$ 时, 条纹清晰度介于上面两种情况之间, 表示光束部分相干。

影响条纹可见度的最主要因素是用于干涉实验的光源特性: 光源的大小和复色性, 它们决定了光的相干性。

Click to buy NOW!

1. 光源大小对条纹可见度的影响——光的空间相干性

在图 2-3 所示的杨氏干涉实验中, 如果采用点光源, 则通过干涉系统将产生清晰的干涉条纹, $V=1$ 。如果采用扩展光源, 其干涉条纹可见度将下降。这是因为, 在扩展光源中包含有许多点光源, 对于每个点光源都将通过干涉系统在干涉场中产生各自的一组干涉条纹, 由于各个点光源位置不同, 它们所产生的干涉条纹之间有位移 (图 2-58 中的下部曲线), 干涉场中的总光强分布为各条纹强度的总和 (图 2-58 中的上部曲线), 其暗条纹的强度不再为零, 因此可见度下降。当扩展光源大到一定程度时, 条纹可见度可能下降为零, 完全看不到干涉条纹。



图 2-58 多组条纹的叠加

下面, 我们具体讨论光源大小对条纹可见度的影响, 并引入光的空间相干性概念。

假设在杨氏干涉系统中, 光源如图 2-59(a) 所示, 是以 S 为中心的扩展光源 $S'S''$, 则可将其想象为由许多无穷小的元光源组成, 整个扩展光源所产生的光强度便是这些元光源所产生的光强度之和。若考察干涉场中的某一点 P , 则位于光源中点 S 的元光源 (宽度为 dx) 在 P 点产生的光强度为

$$dI_s = 2I_0 dx \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \right) \quad (2-137)$$

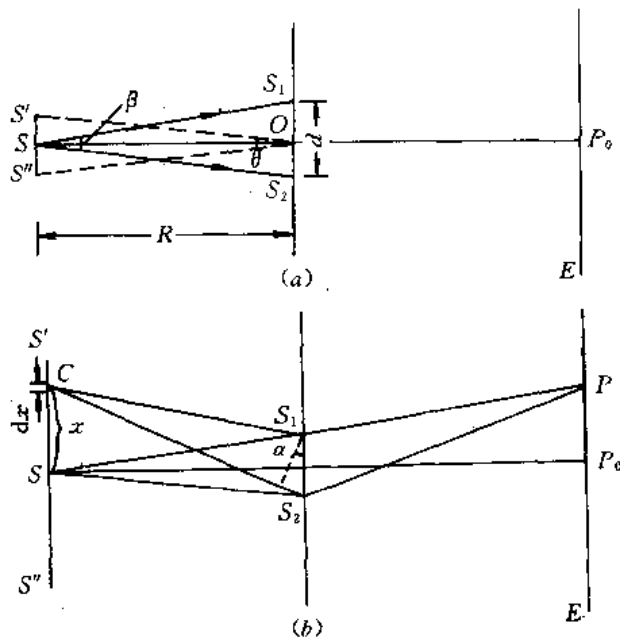


图 2-59 扩展光源的杨氏干涉

式中, $I_0 dx$ 是元光源通过 S_1 或 S_2 在干涉场上所产生的光强度; Δ 是元光源发出的光波经 S_1 和 S_2 到达 P 点的光程差。对于距离 S 为 x 的 C 点处的元光源 (图 2-59(b)), 它在 P 点产生的光强度为

$$dI = 2I_0 dx \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta' \right) \quad (2-138)$$

式中, Δ' 是由 C 处元光源发出的、经 S_1 和 S_2 到达 P 点的两支相干光的光程差。由图中几何关系可以得到如下近似结果:

$$\begin{aligned} CS_2 - CS_1 &\approx ad \approx \left[\frac{x + \frac{d}{2}}{R} \right] d \\ &\approx \frac{xd}{R} = x\beta \end{aligned}$$

式中, $\beta = d/R$ 是 S_1 和 S_2 对 S 的张角。因此

$$\Delta' = \Delta + x\beta$$

所以, (2-138) 式可写为

$$dI = 2I_0 dx \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta + x\beta) \right] \quad (2-139)$$

于是, 宽度为 b 的扩展光源在 P 点产生的光强度为

$$\begin{aligned} I &= \int_{-b/2}^{b/2} 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta + x\beta) \right] dx \\ &= 2I_0 b + 2I_0 \frac{\lambda}{\pi\beta} \sin \frac{\pi b\beta}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \end{aligned} \quad (2-140)$$

式中, 第一项与 P 点的位置无关, 表示干涉场的平均强度, 第二项表示干涉场光强度周期性地随 Δ 变化。由于第一项平均强度随着光源宽度的增大而增强, 而第二项不会超过 $2I_0 \lambda / \pi\beta$, 所以随着光源宽度的增大, 条纹可见度将下降。根据 (2-140) 式, 可求得条纹可见度为

$$V = \left| \frac{\lambda}{\pi b\beta} \sin \frac{\pi b\beta}{\lambda} \right| \quad (2-141)$$

图 2-60 绘出了 V 随光源宽度 b 变化的曲线。可见, 随着 b 的增大, 可见度 V 将通过一系列极大值和零值后逐渐趋于零。当 $b=0$ 、光源为点光源时, $V=1$; 当 $0 < b < \lambda/\beta$ 时, $0 < V < 1$; 当 $b = \lambda/\beta$ 时, $V=0$ 。

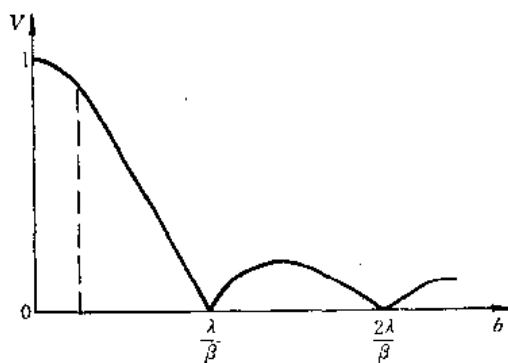


图 2-60 条纹可见度随光源宽度的变化

上述讨论实际上是考察了光源的大小对扩展光源 $S'S''$ 照射与之相距 R 的平面, 并通过其上二点 S_1 和 S_2 的光在空间再度会合时产生干涉的影响, 它反映了光源在这两点产生光场的空间相干特性。当光源是点光源时, 所考察的任意两点 S_1 和 S_2

的光场都是空间相干的; 当光源是扩展光源时, 光场平面上具有空间相干性的各点的范围与光源的大小成反比。对于一定的光波长和干涉装置, 当光源宽度 b 较大, 且满足

$$b \geq \frac{\lambda R}{d} \quad \text{或} \quad b \geq \frac{\lambda}{\beta}$$

时, 通过 S_1 和 S_2 两点的光将不发生干涉, 因而这两点的光场没有空间相干性。通常称

$$b_c = \frac{\lambda}{\beta} \quad (2-142)$$

为光源的临界宽度，式中， $\beta=d/R$ 是干涉装置中的两小孔 S_1 和 S_2 对 S 的张角。当光源宽度不超过临界宽度的 $1/4$ 时，由(2-141)式可计算出这时的可见度 $V \geq 0.9$ 。此光源宽度称为许可宽度 b_p ，

$$b_p = \frac{b_c}{4} = \frac{\lambda}{4\beta} \quad (2-143)$$

通常，可以用这个许可宽度来确定干涉仪应用中的光源宽度容许值。

我们亦可从另一个角度考察光的空间相干性范围。对一定的光源宽度 b ，通常称光通过 S_1 和 S_2 恰好不发生干涉时所对应的这两点的距离为横向相干宽度，以 d_t 表示，

$$d_t = \frac{\lambda R}{b} \quad (2-144)$$

或以扩展光源对 O 点(S_1S_2 连线的中点)的张角 θ (图 2-59)表示，

$$d_t = \frac{\lambda}{\theta} \quad (2-145)$$

如果扩展光源是方形的，则由它照明平面上的相干范围的面积(相干面积)为

$$A_c = d_t^2 = \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2 \quad (2-146)$$

理论上可以证明，对于圆形光源，其照明平面上横向相干宽度为

$$d_t = \frac{1.22\lambda}{\theta} \quad (2-147)$$

相干面积为

$$A_c = \pi \left(\frac{1.22\lambda}{2\theta}\right)^2 = \pi \left(\frac{0.61\lambda}{\theta}\right)^2 \quad (2-148)$$

例如，直径为 1 mm 的圆形光源，若 $\lambda=0.6 \mu\text{m}$ ，在距光源 1 m 的地方，由(2-147)式算出的横向相干宽度约为 0.7 mm。因此，干涉装置中小孔 S_1 和 S_2 的距离，必须小于 0.7 mm 才能产生干涉条纹。而与此相应的相干面积 $A_c \approx 0.38 \text{ mm}^2$ 。又如，从地面上看太阳是一个角直径 $2\theta=0^\circ 32' = 0.018$ 弧度的非相干光源，若认为太阳是一个亮度均匀的圆盘面，且只考虑 $\lambda=0.55 \mu\text{m}$ 的可见光，则太阳光直射地面时，它在地面上的相干面积是直径约为 0.04 mm 的圆面积。

有时用相干孔径角 β_c 表征相干范围会更直观方便。当 b 和 λ 给定时，凡是在该孔径角以外的两点(如 S'_1 和 S'_2)都是不相干的，在孔径角以内的两点(如 S_1 和 S_2)都具有一定程度的相干性(图 2-61)，公式

$$b\beta_c = \lambda \quad (2-149)$$

表示相干孔径角 β_c 与光源宽度 b 成反比，并称该式为空间相干性的反比公式。

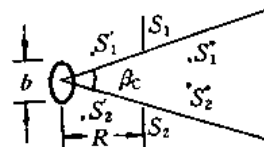


图 2-61 光源的相干孔径角

2. 光源非单色性对条纹可见度的影响——光的时间相干性

光源的非单色性(复色性)直接影响着条纹的可见度。因为实际光源都包含有一定的光谱宽度 $\Delta\lambda$ ，在干涉实验中， $\Delta\lambda$ 范围内的每一种波长的光都生成各自的一组干涉条纹，并且

各组条纹除零干涉级外，相互间均有位移(图 2-62(a)的下部曲线)，其相对位移量随着干涉光束间光程差 Δ 的增大而增大，所以干涉场总强度分布(图 2-62(a)的上部曲线)的条纹可见度随着光程差的增大而下降，最后降为零(图 2-62(b))。因此，光源的光谱宽度限制了干涉条纹的可见度。

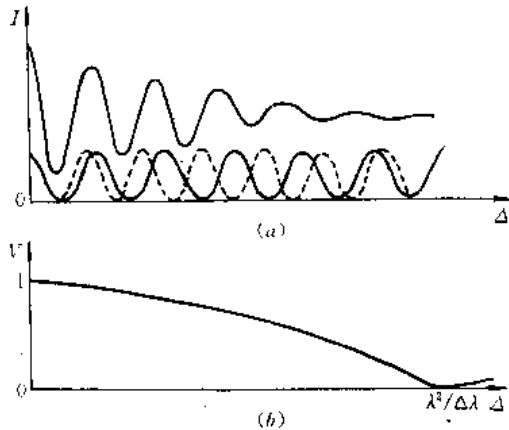


图 2-62 光源非单色性对条纹的影响
(a) 强度曲线；(b) 条纹可见度曲线

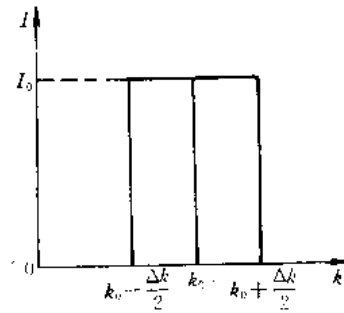


图 2-63 Δk 范围内光谱分量的强度相等

为讨论光源非单色性对条纹可见度的影响，假设光源在 $\Delta\lambda$ 范围内产生的各个波长的强度相等，或以波数 $k(=2\pi/\lambda)$ 表示，在 Δk 宽度内不同波数的光谱分量强度相等(图 2-63)，则元波数宽度 dk 的光谱分量在干涉场产生的强度为

$$dI = 2I_0 dk(1 + \cos k\Delta)$$

式中， I_0 表示光强度的光谱分布(谱密度)，按假设条件，它是常数； $I_0 dk$ 是在 dk 元宽度的光强度。在 Δk 宽度内各光谱分量产生的总光强度为

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} 2I_0(1 + \cos k\Delta) dk \\
 &= 2I_0 \Delta k \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\Delta k}{2} \Delta\right)}{\Delta k \frac{\Delta}{2}} \cos(k_0 \Delta) \right] \quad (2-150)
 \end{aligned}$$

上式中的第一项是常数，表示干涉场的平均光强度；第二项随光程差 Δ 的大小变化，但变化的幅度越来越小。由上式可得条纹可见度为

$$V = \left| \frac{\sin\left(\frac{\Delta k}{2} \Delta\right)}{\Delta k \frac{\Delta}{2}} \right| \quad (2-151)$$

V 随 Δ 的变化曲线如图 2-62(b)所示。或者说，对一定的 Δ ， V 随着 Δk 变化， Δk 增大，可见度 V 下降；当 $\Delta k=0$ 、光源为单色光源时， $V=1$ ；当 $0 < \Delta k < 2\pi/\Delta$ 时， $0 < V < 1$ ；当 $\Delta k = 2\pi/\Delta$ 时， $V=0$ 。

应指出，上面的讨论假设了在 $\Delta\lambda$ (或 Δk) 内的光谱强度是等强度分布的。实际上，光源并非等强度分布，但根据实际光谱分布求得的可见度曲线与图 2-62(b)所示的曲线相差不

Click to buy NOW!
大,故与 $V=0$ 相应的最大光程差的数量级,仍可由(2-151)式决定。

上述讨论实际上是考察了光源复色性对该光源通过干涉系统产生的二光,经过光程差为 Δ 的不同路径再度会合时产生干涉的影响。对于单色光源, $\Delta\lambda=0$,此二光经不同路径到达干涉场总是相干的,即无论 Δ 为多大,干涉条纹的可见度恒等于1。对于复色光源 $\Delta\lambda\neq 0$,只有 $\Delta=0$,即二光的光程相等时,才能保证 $V=1$,一旦 $\Delta\neq 0$,其可见度就要下降。当

$$\Delta = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (2-152)$$

时, $V=0$,完全不相干。能够发生干涉的最大光程差叫相干长度,用 Δ_c 表示。显然,光源的光谱宽度愈宽, $\Delta\lambda$ 愈大,相干长度 Δ_c 愈小。

在实际应用中,除了利用相干长度考察复色性的影响外,还经常采用另外一个参量——相干时间 τ_c 来度量。 τ_c 定义为

$$\tau_c = \frac{\Delta_c}{c} \quad (1-153)$$

式中, c 是光的速度。相干时间 τ_c 反映了同一光源在不同时刻发出光的干涉特性,凡是在相干时间 τ_c 内不同时刻发出的光,均可以产生干涉,而在大于 τ_c 期间发出的光不能干涉。所以,这种光的相干性叫光的时间相干性。由(2-152)式,再利用波长宽度 $\Delta\lambda$ 与频率宽度 $\Delta\nu$ 的如下关系:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu}$$

相干时间 τ_c 可以表示为

$$\tau_c = \frac{\nu}{\Delta\nu} \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (2-154)$$

即

$$\tau_c \Delta\nu = 1 \quad (1-155)$$

该式说明, $\Delta\nu$ 愈小(单色性愈好), τ_c 愈大,光的时间相干性愈好。

综上所述,光的相干长度 Δ_c 和相干时间 τ_c 的物理意义是:任意一个实际光源所发出的光波都是一段段有限波列的组合,若这些波列的持续时间为 τ ,则相应的空间长度为 $L=c\tau$,它们的初相位是无关的,因而它们之间不相干。但由同一波列分出的两个子波列,只要经过不同路径到达某点能够相遇,就会产生干涉。所以,实际上相干时间 τ_c 就是波列的持续时间 τ ,相干长度 Δ_c 就是波列的空间长度 L 。因此可以说,光源复色性对干涉的影响,实际上反映了时域中不同二时刻光场的相关程度,因而是光的时间相干性问题。

2.5.2 相干性的定量描述

上面,从条纹可见度出发引入了描述光场相干性的相干面积和相干长度,并指出,在相干面积和相干长度内的光波进行干涉实验时,能观察到稳定的干涉条纹。实际上,由于这种“稳定的干涉条纹”本身就是一种定性的相干性判据,所以相干面积和相干长度的概念只是相干性的一种粗略描述。在相干性的经典理论中,通常利用复相干函数和复相干度对相干性进行定量描述,它们与干涉条纹的可见度有直接联系,通过实验测量干涉条纹可见度,即可由它们很方便地确定出光的相干性。

下面,我们首先从经典相干理论出发,引入复相干函数和复相干度。

作为一般情况，考察采用扩展的非单色光源照明的杨氏干涉实验。如图 2-64 所示，扩展的非单色光源 S 照明光屏 A 上的两个小孔 S_1 和 S_2 ，由 S_1 和 S_2 发出的二光在观察屏 E 上叠加，产生干涉条纹。

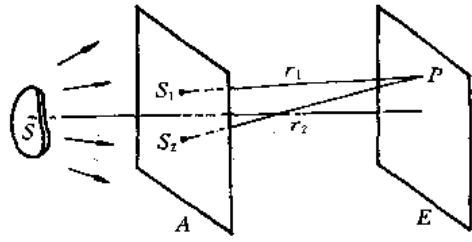


图 2-64 用扩展非单色光源照明的杨氏干涉

假设在 t 时刻，由于扩展的非单色光源照明， S_1 和 S_2 两点的复数光场分别为 $E_1(t)$ 和 $E_2(t)$ ，在屏幕 E 的某点 P 上，来自 S_1 和 S_2 的光场分别为 $E_1(t-t_1)$ 和 $E_2(t-t_2)$ （在这里，不计小孔的衍射效应，并且忽略光场由 S_1 和 S_2 到 P 点的变化），其中， $t_1=r_1/c$ 和 $t_2=r_2/c$ 分别是光波由 S_1 和 S_2 传播到 P 点的时间，则在 t 时刻 P 点的总光场为

$$E_P(t) = E_1(t-t_1) + E_2(t-t_2) \quad (2-156)$$

由于实际光场的振幅和相位都随时间极迅速地变化，考虑某点的瞬时光强度没有多大的实际意义。我们只能观测到某一时间间隔内的平均值，所以应把 P 点的光强度取为

$$I_P(t) = \langle E_P(t)E_P^*(t) \rangle \quad (2-157)$$

将(2-156)式代入后，得到

$$I_P = \langle E_1(t-t_1)E_1^*(t-t_1) \rangle + \langle E_2(t-t_2)E_2^*(t-t_2) \rangle + \langle E_1(t-t_1)E_2^*(t-t_2) \rangle + \langle E_1^*(t-t_1)E_2(t-t_2) \rangle \quad (2-158)$$

考虑到实际情况，可以假设光场是稳定的，即它们的统计性质不随时间变化，或者说上式中各个量的时间平均值与时间原点的选择无关，可令 $t=t_1$ 。因此，(2-158)式可改写为

$$I_P = \langle E_1(0)E_1^*(0) \rangle + \langle E_2(\tau)E_2^*(\tau) \rangle + \langle E_1(0)E_2^*(\tau) \rangle + \langle E_1^*(0)E_2(\tau) \rangle \quad (2-159)$$

式中， $\tau=t_1-t_2$ ， $\langle E_1(0)E_1^*(0) \rangle$ 和 $\langle E_2(\tau)E_2^*(\tau) \rangle$ 分别为 S_1 和 S_2 在 P 点产生的光强 I_1 和 I_2 ，而

$$\langle E_1(0)E_2^*(\tau) \rangle + \langle E_1^*(0)E_2(\tau) \rangle = 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}(\tau) \quad (2-160)$$

这里的 $\operatorname{Re} \Gamma_{12}(\tau)$ 是函数

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(0)E_2^*(\tau) \rangle \quad (2-161)$$

的实部。函数 $\Gamma_{12}(\tau)$ 在数学上是求 $\langle E_1(0)E_2^*(\tau) \rangle$ 的时间平均值，它是两个光场 E_1 和 E_2 的互相干函数，是相干理论中的一个基本量，表征了 S_1 和 S_2 两点光场的互相关程度。于是，(2-159)式可表示为

$$I_P = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}(\tau) \quad (2-162)$$

其中， $2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}(\tau)$ 称为干涉项，由于它的存在， P 点的总光强 I_P 可以大于、小于或等于 $(I_1 + I_2)$ 。

当 S_1 和 S_2 两点重合时，互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)$ 变成自相干函数

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle E_1(0)E_1^*(\tau) \rangle \quad (2-163)$$

或

$$\Gamma_{22}(\tau) = \langle E_2(0)E_2^*(\tau) \rangle \quad (2-164)$$

并且，当 $\tau=0$ 时，有

Click to buy NOW!

$$\Gamma_{11}(0) = I_1, \quad \Gamma_{22}(0) = I_2 \quad (2-165)$$

它们也即是 S_1 和 S_2 点的光强度。若将互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)$ 归一化, 可以得到归一化的互相干函数 $\gamma_{12}(\tau)$

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2-166)$$

通常称 $\gamma_{12}(\tau)$ 为复相干度。复相干度一般是 τ 的复数周期函数, 它的模值满足 $0 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$, 用它来描述光场的相干性更为方便。 $|\gamma_{12}| = 1$ 时, 表示光场完全相干; $0 < |\gamma_{12}| < 1$ 时, 表示光场部分相干; $|\gamma_{12}| = 0$ 时, 表示光场不相干。利用复相干度, 可以将(2-162)式表示为

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau) \quad (2-167)$$

该式就是稳定光场的普遍干涉定律。

考察(2-167)式可以得到, 屏幕上干涉条纹的可见度为

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}| \quad (2-168)$$

当 $I_1 = I_2$ 时, 得到

$$V = |\gamma_{12}| \quad (2-169)$$

由此可见, S_1 和 S_2 的光强度相等时, 复相干度的模就是屏幕上干涉条纹的可见度。在光场完全相干($|\gamma_{12}| = 1$)时, 条纹可见度 $V = 1$; 光场完全不相干($|\gamma_{12}| = 0$)时, 条纹可见度 $V = 0$; 光场部分相干($0 < |\gamma_{12}| < 1$)时, 条纹可见度 $0 < V < 1$ 。

2. 光的相干性

1) 光的时间相干性

在图 2-64 所示的干涉装置中, 如果 S 是一个非单色的点光源, 并且 S 到 S_1 和 S_2 的距离相等, 因而 S_1 和 S_2 处的光场相同, 均为 $E(t)$, 则所考察的光的相干性仅为光的时间相干性。 P 点的干涉效应由取决于光场的互相干函数, 变为取决于光场的自相干函数, 相应的光场归一化自相干函数为

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E(0)E^*(\tau) \rangle}{I} \quad (2-170)$$

通常称该 $\gamma(\tau)$ 为时间相干度, 它是经历不同时间、从 S_1 和 S_2 传播到 P 点的两个光场之间时间相干性的定量描述。

如果 S 是一个单色点光源, 其时间相干度的模 $|\gamma(\tau)| = 1$, 它产生的是一个完全相干光, 所得到的干涉条纹可见度 $V = 1$ 。

对于高斯分布型准单色光波, 其光场表示式为

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\beta^2(\nu-\nu_0)^2} e^{-i[2\pi\nu t - \varphi(\nu)]} d\nu \quad (2-171)$$

它可以看作是各种频率成分的组合, 不同频率成分的振幅按 $A e^{-\beta^2(\nu-\nu_0)^2}$ 函数形式分布, 相位 $\varphi(\nu)$ 则为典型的随机分布。于是,

$$\begin{aligned} I &= \langle E(0)E^*(0) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2\beta^2(\nu-\nu_0)^2} d\nu = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A^2}{\beta} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \langle E(0)E^*(\tau) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2\beta^2(v-v_0)^2} e^{i2\pi\nu\tau} dv \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A^2}{\beta} e^{-\frac{\pi^2\tau^2}{2\beta^2}} e^{i2\pi\nu_0\tau} \end{aligned}$$

由此可得

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E(0)E^*(\tau) \rangle}{I} = e^{-\frac{\pi^2\tau^2}{2\beta^2}} e^{i2\pi\nu_0\tau} \quad (2-172)$$

$$|\gamma(\tau)| = e^{-\frac{\pi^2\tau^2}{2\beta^2}} \quad (2-173)$$

故高斯分布型准单色光的时间相干度的模，也呈高斯函数形式，它即是高斯分布型准单色光进行上述干涉实验时的干涉条纹可见度。

2) 光的空间相干性

在图 2-64 所示的干涉装置中，如果 S 是一个单色扩展光源，并且仅考察观察屏中距 S_1 和 S_2 等距离 P_0 点附近的干涉条纹，则光的空间相干性将起主要作用。此时，复相干度为

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\langle E_1(0)E_2^*(0) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2-174)$$

它实际上是 S_1 和 S_2 两点光场空间相干性的量度，称为这两点的空间相干度。

由于单色扩展光源 S 可以看作是大量同频率的单色点光源的集合，所以在 S_1 和 S_2 点处的光场分别为

$$\left. \begin{aligned} E_1(t) &= \int \frac{a(s)}{\rho_1(s)} e^{-i[\omega_0 t - k\rho_1(s) + \varphi(s)]} ds \\ E_2(t) &= \int \frac{a(s)}{\rho_2(s)} e^{-i[\omega_0 t - k\rho_2(s) + \varphi(s)]} ds \end{aligned} \right\} \quad (2-175)$$

式中， s 是扩展光源上各点的坐标； $a(s)$ 是各点的振幅； $\rho_1(s)$ 和 $\rho_2(s)$ 分别是各点到 S_1 和 S_2 的距离； $\varphi(s)$ 是典型的随机相位；积分域是全部扩展光源。于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{a^2(s)}{\rho_1^2(s)} ds \\ I_2 &= \int \frac{a^2(s)}{\rho_2^2(s)} ds \\ \langle E_1(0)E_2^*(0) \rangle &= \int \frac{a^2(s)}{\rho_1(s)\rho_2(s)} e^{ik[\rho_1(s) - \rho_2(s)]} ds \end{aligned}$$

复相干度 $\gamma_{12}(0)$ 为

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\int \frac{a^2(s)}{\rho_1(s)\rho_2(s)} e^{ik[\rho_1(s) - \rho_2(s)]} ds}{\sqrt{\int \frac{a^2(s)}{\rho_1^2(s)} ds} \sqrt{\int \frac{a^2(s)}{\rho_2^2(s)} ds}} \quad (2-176)$$

3) 光的时、空相干性

当光源既是扩展光源，光源上各点又发出非单色光时，光场的时、空相干性的贡献都存在。这时，既要描述空间任意两点光场的相干性，又要描述这两点光场各在不同时刻的相干性，即需要考察 S_1 点在 t_1 时刻的光场与 S_2 点在 $t_2 = t_1 + \tau$ 时刻光场之间的相关程度，



$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\langle E_1(0)E_2^*(\tau) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2-177)$$

通常, $\gamma_{12}(\tau)$ 是 7 个自变量的函数:

$$\gamma_{12}(\tau) = f(\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{S_1 \text{ 坐标}}, \underbrace{x_2, y_2, z_2}_{S_2 \text{ 坐标}}, \tau)$$

当 7 个维度都取遍 $(-\infty, \infty)$ 区间时, 就对一个光波的时、空相干性作了全面的描述。对于单纯的空间相干度 $\gamma_{12}(0)$, 具有 6 个自变量: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$; 对于单纯的时间相干度 $\gamma(\tau)$, 只与时间差 τ 有关。

2.5.3 激光的相干性

前面, 从一般概念上讨论了光的相干性, 即光场空间中任意两点光振动间的相互关联程度。如果这两点的光振动相位差是恒定的, 则在传播中相遇时, 会产生稳定的干涉条纹, 该光是完全相干的。如果这两点的光振动相位差完全任意, 并随着时间无规则变化, 则在传播中相遇, 不能产生干涉条纹, 该光是完全非相干光。

实际上, 光的相干性主要取决于光源的相干性。对于普通光源, 其发光机制是发光中心(原子、分子或电子)的自发辐射过程, 不同发光中心发出的波列, 或同一发光中心在不同时刻发出的波列相位都是随机的, 因此光的相干性极差, 或者说是非相干光。当然, 对普通光源采用单色仪分光, 通过狭缝后得到光的单色性会很好, 其时间相干性也就很好。在杨氏干涉实验中, 如果遮住大部分光源的发光表面, 只留下极小的针孔让光通过, 也可以获得清晰的干涉条纹。但是, 这样获得的相干光强度弱得实际上无法应用, 因此普通光源几乎无法开展相干光信息处理的应用。

1960 年, 梅曼(Maiman)制出了第一台红宝石激光器, 这是一种与普通光源完全不同的新型光源。它的发光机制是发光中心的受激辐射过程, 通过受激辐射过程产生的光与激励光同频率、同传播方向、同偏振和同相位, 因此其相干性很好, 即激光器是一种很好的相干光源, 并已成为光电子技术应用中的基本光源。

下面, 简单地介绍激光的相干性。

1. 激光的空间相干性

激光的空间相干性主要取决于它的横模特性。所谓横模, 是指由于激光器谐振腔的作用所形成的横向场结构分布。图 2-65 示出了几种常见的激光横模强度分布图样。对于每种横模都是优良的相干光, 在其整个横截面内都是空间相干的, 即截面上各点光场振动都相关联。但是, 对于多模激光器而言, 可将其看作是多个光源的组合, 它们的频率、偏振及位置各不相同, 因而彼此不相干, 导致多模激光器的相干性变差。因此, 在光信息处理和计量中都应采用选模技术, 以使激光运转在单横模状态。

激光的空间相干性与其方向性(用光束发散角描述)紧密相关。对于普通光源, 其空间相干性很差, 发散角很大。而对于激光器, 当它工作于单横模 TEM_{00} 上时, 有最好的空间方向性, 光束发散角很小。例如, 输出孔径($2a$)为 3 mm 的 He-Ne 气体激光器($\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$), 受衍射效应的限制, 最小发散角(衍射极限 θ_m)仅为 2×10^{-4} rad。激光器的这

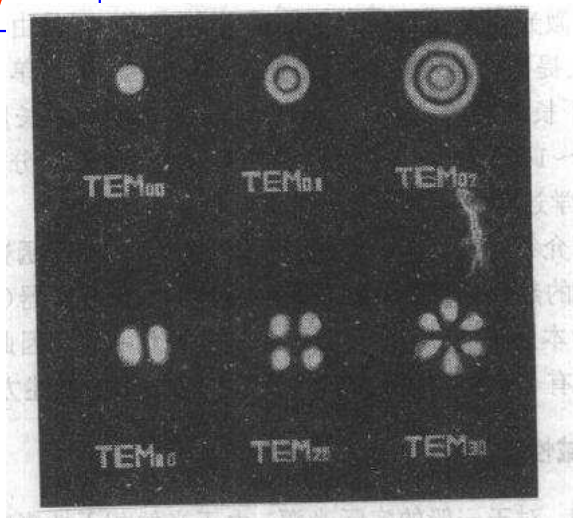


图 2-65 圆形镜腔横模的强度图样

种优良的空间相干性和方向性，对其聚焦性能有重要影响。可以证明，一束发散角为 θ 的单色光被焦距为 f 的透镜聚焦时，焦平面上的光斑直径 D 为

$$D = f\theta$$

在衍射极限 θ_m 的情况下，有

$$D_m \approx \frac{f}{2a}\lambda$$

这说明，在理想情况下，可将激光巨大的能量聚焦在直径为光波长量级的范围内，形成极高的能量密度。

2. 激光的时间相干性

由(2-155)式，光的相干时间与光的单色性(频谱宽度) $\Delta\nu$ 有如下简单的关系：

$$\tau_c \Delta\nu = 1$$

可见，光的单色性愈好，其相干时间愈长，时间相干性愈好。

对于普通光源，由于其自发辐射的发光机制，单色性很差，因而时间相干性很差。在激光出现前，单色性最好的光源是 Kr^{86} 灯的 $0.6057 \mu\text{m}$ 谱线， $\Delta\lambda = 0.47 \times 10^{-6} \mu\text{m}$ ，其单色性为 $\Delta\lambda/\lambda = 7.6 \times 10^{-7}$ ，由相干长度关系式

$$\Delta_c = \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right) \lambda$$

可估算出它的相干长度约为 1 m 量级。这就是说， Kr^{86} 灯若用于干涉测长技术，能实现的最大测长量程会不超过 1 m 。

对于单横模(TEM_{00})激光器，其单色性取决于它的纵模结构和模式的频谱宽度。所谓纵模，是指由于激光器谐振腔的作用所形成的纵向场结构分布。对于单纵模气体激光器，其理想的谱线宽度很小，单色性极好。例如，一个 1 mW 的 He-Ne 激光器，若其长度 $L = 1 \text{ m}$ ，损耗为 0.01 ，则谱线宽度极限为 $\Delta\nu_s \approx 5 \times 10^{-4} \text{ Hz}$ 。实际中，激光器经常工作于多纵模状态，并且由于各种因素(如温度、振动、气流、激励等)的影响，其实际的单色谱线宽度会大大超过谱线极限 $\Delta\nu_s$ 。因此，为了提高激光的单色性，需要采用各种选频措施。例如，

支经过选频的单支稳频气体激光器，其单色谱宽可以达到 $10^6 \sim 10^3$ Hz，采用非常严格的稳频措施，在 He—Ne 激光器中已观察到 2 Hz 的谱线宽度。正是由于激光器的这种高单色性，使其相干长度大大提高。例如，经过稳频的气体激光器，其单色性 $\Delta\nu/\nu$ 可达 $10^{-10} \sim 10^{-13}$ 量级，相应的相干长度约为 1~1000 km。如此之长的相干长度，用于精密干涉测长中，可将量程提高到 1~1000 km，并且因此建立起一系列全新的分析测量技术，有可能对各种物理、化学、生物学过程进行深入的研究和控制。

最后应说明，前面介绍的从经典相干性理论出发，引入相干函数和相干度概念对相干性的描述，是针对普通的热辐射光源的相干性而言的。由于激光器(受激辐射振荡光源)和热光源(自发辐射光源)本质不同，其辐射具有不同的统计特性，因此利用经典相干性理论描述激光器的相干性，有一定的局限性，或者说是一种近似的描述方法。

2.5.4 干涉的定域性

由前面的讨论已知，对于一般的实际光源，由于光的相干性影响，在进行双光束干涉实验时，所观察到的干涉条纹可见度随着观察地点不同而变化。于是，干涉实验存在干涉定域性的问题。对于干涉条纹可见度尚佳的区域，称为干涉条纹的定域区。

1. 点光源产生干涉的非定域性

在关于分波面法杨氏干涉实验的讨论中曾经指出，当 S 为单色点光源时，通过 S_1 和 S_2 两个小孔在空间任一点处均可观察到清晰的干涉条纹，即干涉是非定域的。

对于图 2-66 所示的分振幅法平行平板干涉实验，当用点光源 S 照射平行平板时，在与 S 同侧的空间任意点 P 上，总会有从 S 发出、由平行板上、下表面反射产生的两支光相交。由于这两支光来自同一点光源，它们是相干的，无论 P 点在空间什么位置，总可以观察到干涉条纹，因此，干涉是非定域的。

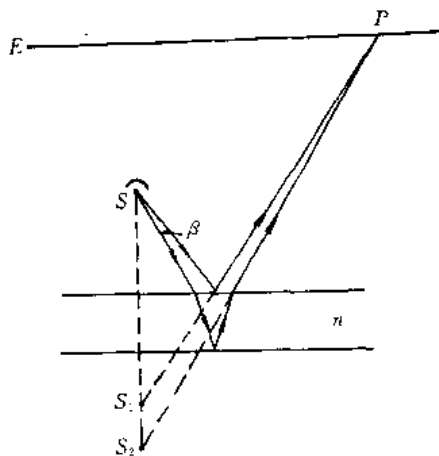


图 2-66 点光源照射平行平板

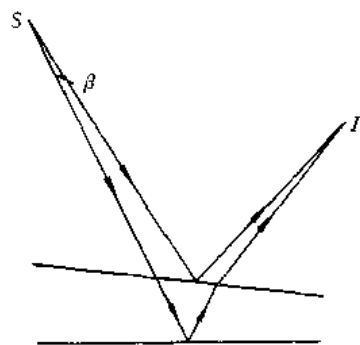


图 2-67 点光源照射楔形平板

类似地，如图 2-67 所示，由点光源照射楔形板所产生的干涉，也是非定域的。

2. 扩展光源产生干涉的定域性

当利用扩展光源进行干涉实验时，将得到定域干涉，也可以说，定域干涉是扩展光源的特征。

1) 杨氏干涉的定域性

如图 2-64 所示, 当用扩展光源照射双孔实验装置时, 由于扩展光源可视为大量互不相干的点光源集合, 其干涉图样为各点光源在观察点处所产生的相互错位的条纹强度和, 条纹可见度将降低。当观察点处的条纹可见度降低到干涉条纹不可分辨时, 视为该处不发生干涉。由图 2-58 可见, 扩展光源引起空间某处干涉条纹可见度的降低, 取决于扩展光源上各点源在该处产生条纹错开的程度, 而条纹错开的相对距离, 又取决于相应点源到该处的光程差。通常认为, 光源上两个点源通过干涉系统到达空间 P 点的光程差小于 $\lambda/4$ 时, 所引起条纹可见度的下降仍能保证较清晰地观察到干涉条纹。所以, 干涉条纹的定域区可视为满足如下条件的空间点 P 的集合: 对于这些 P 点, 光源上任意两点 S_m 和 S_n 所对应的光程差均不大于 $\lambda/4$ 。若该区域中有一曲面上的点所对应的光程差等于零, 或取最小值, 称其为条纹定域的中心。

2) 平行平板和楔形平板的干涉定域性

由上所述, 决定干涉条纹定域性的主要因素是照明光源的尺寸, 其实质是光的空间相干性作用。根据前面光的空间相干性的讨论, 如果光源的横向宽度为 b , 观察点 P 对应的干涉孔径为 β_c , 则要在 P 点附近观察到干涉条纹, 必须满足条件:

$$\beta < \beta_c = \frac{\lambda}{b}$$

或者说, 满足这一关系的 P 点所在区域, 即是干涉条纹定域的区域。随着扩展光源尺寸的增大, β_c 将减小, 相应的条纹定域区也要减小。

那么, 如何确定干涉条纹的定域区? 由上述讨论可知, 干涉条纹定域区随扩展光源尺寸 b 变化。但是, 无论扩展光源的尺寸 b 多大, 其干涉条纹定域区都必然包含对应 $\beta=0$ 的那些点, 所以定域区域可以通过 $\beta=0$ 的作图法确定。

如图 2-68 所示, 对于点光源 S_1 (或 S_2), $\beta=0$ 即是由 S_1 发出一条光线, 该光线经平行平板上下表面反射, 所产生的两条光线, 在无穷远处相交, 或如图所示, 通过透镜在其焦平面上相交于 P 点。对于扩展光源上所有点源发出的一组平行光线 ($\beta=0$), 经平行平板反射后, 都将在无穷远处相交, 或通过透镜会聚于焦平面上的一点。由此说明, 使用扩展光源时, 平行平板的干涉条纹定域在无穷远处, 或者通过透镜定域在其焦平面上。

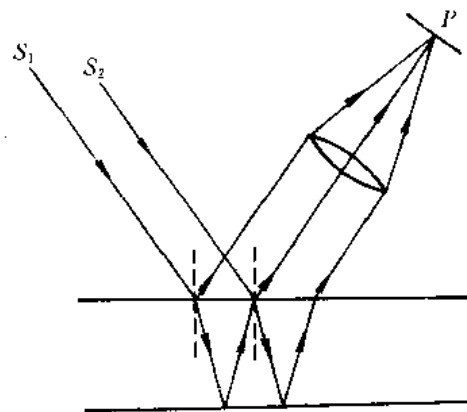


图 2-68 定域在无穷远处(或透镜焦平面)的图示

对于楔形平板情况, 如图 2-69(a)所示, 主截面(垂直于楔形板棱线的平面)内的入射光线 SA_1 和 SA_2 ($\beta=0$), 分别由楔形板两表面反射, 其

反射光线交于 P_1 和 P_2 点。同样, 还可以作图得到相应于另外入射光线的 P_3 、 P_4 、……交点(图中未画出), 这些点的轨迹一般是一个空间曲面, 这个曲面就是楔形板(相应于 $\beta=0$) 的干涉定域面。在这种情况下, 光源与楔形平板的棱线各在一方, 定域面在楔形板的上方。对于图 2-69(b)所示的情况, 光源和楔形平板的棱线在同一方, 其定域面在楔形板的下

方, 该定域面是由反射光反向延长相交得到的, 故称为虚定域面。而与之相对应的(a)情况的定域面, 叫实定域面。

实验证明, 楔形平板两表面间的楔角愈小, 定域面离平板愈远, 楔形板变成平行平板时, 定域面就过渡到无穷远处。在楔形平板两表面间的楔角不是太小, 或者在厚度不规则变化的薄膜情况下, 厚度足够小, 其定域面实际上很接近楔形平板和薄膜表面。因此, 观察薄板产生的定域干涉条纹, 通常都是把眼睛、放大镜或显微镜调节在薄板的表面上。如果用照相机拍摄条纹, 则要将物镜对薄板表面调焦, 使之成像于底片平面。在日常生活中, 我们注视水面上的油膜或肥皂泡等薄膜的表面时, 看到薄膜在日光照射下显现出五彩缤纷的色彩, 就是复色光在薄膜表面形成的彩色条纹。

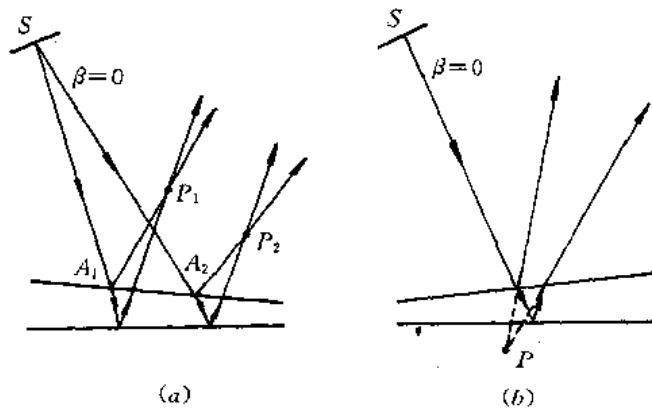


图 2 - 69 楔形平板干涉条纹的定域

上面, 我们利用 $\beta=0$ 作图法得到了干涉条纹的定域面。实际上, 干涉条纹不只发生在 $\beta=0$ 所确定的定域面上, 在定域面附近, 凡是满足 $\beta < \lambda/b$ 的区域, 均应能看到干涉条纹。例如, 光源尺寸为 5 cm, 对于单色光 $\lambda=0.5 \mu\text{m}$, 在 $\beta < 2''$ 所确定的区域内都可以看到干涉条纹, 只是条纹可见度随着离开定域面的距离增大, 逐渐下降而已。因此, 干涉定域是有一定深度的。显然, 定域深度的大小与光源尺寸成反比。光源尺寸愈大, 干涉定域的深度愈小; 反之, 光源尺寸愈小, 定域深度愈大; 光源为点光源时, 定域深度为无限大, 干涉变为非定域的了。此外, 定域深度也与干涉装置本身有关, 例如对于非常薄的平板或薄膜, 则不论考察点 P 在何处, 它对应的 β 角实际上都很小, 因此, 干涉定域的深度很大。这样, 即使使用尺寸很大的光源, 定域区域也包含薄板或薄膜的表面, 所以当我们把眼睛或观察仪器调节在薄板或薄膜表面时, 能够看到清晰的干涉条纹。

在寻找干涉条纹时, 通常用眼睛直接观察比通过物镜成像更容易进行。这是由于人的眼睛能自动调节, 使最清晰的干涉条纹成像在视网膜上, 而且因为眼睛的瞳孔比透镜的瞳孔小得多, 它限制了进入瞳孔的光束。如图 2 - 70 所示, 扩展光源中只有其中一部分 S_2S_3 发出的光能反射进瞳孔, 故用眼睛直接观察时, 扩展光源的实际宽度要小一些, 使得定域深度增大, 更便于找到干涉条纹。

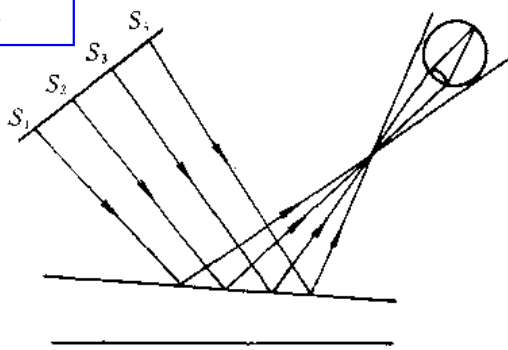


图 2-70 眼睛瞳孔对光束的限制

例 题

例 2-1 讨论平面光波和球面光波的干涉。

解: 如图 2-71 所示, 有一球面光波 \bar{O} 和一平面光波 \bar{R} 在空间相遇, 产生干涉。在正入射时, 球面光波的复振幅(近轴情形)为

$$\tilde{E}_O(x, y) = E_O e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2z_0}}$$

平面光波的复振幅为

$$\tilde{E}_R(x, y) = E_R e^{iC}$$

式中, 初相位 C 是一个常数, 可取为零。

在干涉场(xOy 平面)中任一点, 两束光的合振幅为

$$\tilde{E}(x, y) = \tilde{E}_O(x, y) + \tilde{E}_R(x, y)$$

合光强度为

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \tilde{E}(x, y) \cdot \tilde{E}^*(x, y) \\ &= E_O^2 + E_R^2 + 2E_O E_R \cos\left(k \frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right) \end{aligned}$$

当满足

$$k \frac{x^2 + y^2}{2z_0} = 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

时, 光强度为极大(亮条纹)。因此, 干涉场中亮条纹方程为

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{及} \quad R = \sqrt{2\lambda z_0 m} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

该式表明, 此时干涉条纹是一组半径 R 与干涉级 m 的平方根成正比的同心圆。

如果平面光波是斜入射, 与 z 轴夹角为 θ_R , 则有

$$\tilde{E}_R(x, y) = E_R e^{ikx \sin \theta_R}$$

此时干涉场中的光强度为

$$I(x, y) = E_O^2 + E_R^2 + 2E_O E_R \cos\left[k\left(\frac{x^2 + y^2}{2z_0} - x \sin \theta_R\right)\right]$$

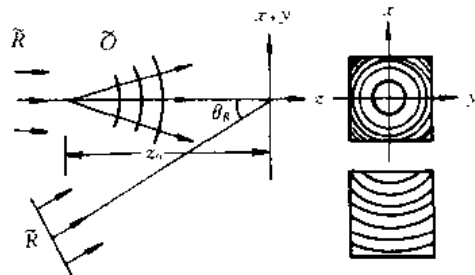


图 2-71 平面波和球面波的相干叠加

$$y^2 + (x - z_0 \sin \theta_R)^2 = R^2 \quad \text{及} \quad R = \sqrt{z_0^2 \sin^2 \theta_R + 2\lambda z_0 m}$$

可见, 条纹仍然是同心圆环, 但圆心已离开坐标原点。如果 z_0 很大, 在近轴处只能看到圆弧状条纹。

例 2-2 图 2-72 表示一双缝实验, 波长为 λ 的单色平行光入射到缝宽均为 b ($b \gg \lambda$) 的双缝上, 因而在远处的屏幕上观察到干涉图样。将一块厚度为 t 、折射率为 n 的薄玻璃片放在缝和屏幕之间。

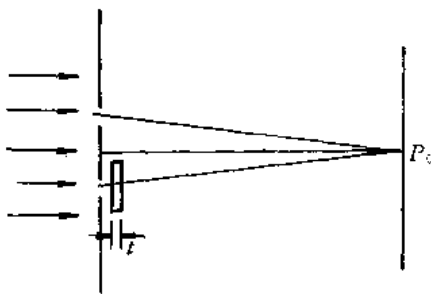


图 2-72 例 2-2 用图

- (1) 讨论 P_0 点的光强度特性。
- (2) 如果将一个缝的厚度增加到 $2b$, 而另一个缝的宽度保持不变, P_0 点的光强发生怎样的变化? (假设薄片不吸收光。)

解: (1) 由图 2-72 可见, 从两个缝发出的光, 到达 P_0 点时的相位差为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} nt - \frac{2\pi}{\lambda} t = (n-1) \frac{2\pi t}{\lambda}$$

因而 P_0 点的光强为

$$I = 4I_0 \cos^2 \left[(n-1) \frac{\pi t}{\lambda} \right]$$

由上式可知, 当相位差满足

$$\frac{\varphi}{2} = (n-1) \frac{\pi t}{\lambda} = m\pi \quad m = 1, 2, \dots$$

或者说, 薄片厚度满足

$$t = \frac{m\lambda}{n-1}$$

时, P_0 点的光强最大; 当相位差满足

$$\frac{\varphi}{2} = (n-1) \frac{\pi t}{\lambda} = (2m+1) \frac{\pi}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

或者说, 薄片厚度满足

$$t = \frac{(2m+1)\lambda}{2(n-1)}$$

时, P_0 点的光强最小。

(2) 当上面的缝宽度增加到 $2b$ 时, P_0 点的光场复振幅为

$$E = (2E_0 + E_0 e^{i\varphi}) e^{i\delta r} = E_0 e^{i\delta r} (2 + e^{i\varphi})$$

由此求出 P_0 点的光强度为

$$\begin{aligned} I &= EE^* = [(E_0 e^{i\delta r} (2 + e^{i\varphi})][E_0 e^{-i\delta r} (2 + e^{-i\varphi})] \\ &= E_0^2 [4 + 1 + 2(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})] \\ &= E_0^2 (5 + 4 \cos \varphi) \\ &= E_0^2 \left[5 + 4 \cos \frac{2\pi t}{\lambda} (n-1) \right] \\ &= I_0 \left[5 + 4 \cos \frac{2\pi t}{\lambda} (n-1) \right] \end{aligned}$$

Click to buy NOW!

例 2-3 用 $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ 的绿光照射肥皂膜, 若沿着与肥皂膜平面成 30° 角的方向观察, 看到膜最亮。假设此时的干涉级次最低, 并已知肥皂水的折射率为 1.33, 求此膜的厚度。当垂直观察时, 应改用多大波长的光照射才能看到膜最亮?

解: 已知由平行平板两表面反射的两支光的光程差表示式为

$$\Delta = 2h \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_1} + \frac{\lambda}{2}$$

在观察到膜最亮时, 应满足干涉加强的条件

$$\Delta = 2h \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_1} + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad m = 1, 2, \dots$$

由此可得膜厚 h 为

$$h = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2 \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_1}}$$

按题意, $m=1$, 可求得肥皂膜厚度

$$h = 1.24 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

若垂直观察时看到膜最亮, 设 $m=1$, 应有

$$2nh = \frac{1}{2}\lambda$$

由此得

$$\lambda = 4nh$$

将 $n=1.33$ 和 $h=1.24 \times 10^{-5} \text{ cm}$ 代入上式, 求得波长为

$$\lambda = 0.66 \mu\text{m}$$

例 2-4 单色光源 S 照射平行平板 G , 经反射后, 通过透镜 L 在其焦平面 E 上产生等倾干涉条纹(图 2-73)。光源不直接照射透镜。光波长 $\lambda=0.6 \mu\text{m}$, 板厚 $d=1.6 \text{ mm}$, 折射率 $n=1.5$, 透镜焦距 $f=40 \text{ mm}$ 。若屏 E 上的干涉环中心是暗的, 那么屏上所看到的第一个暗环半径 r 是多少? 为了在给定的系统参数下看到干涉环, 照射在板上的谱线最大允许宽度 $\Delta\lambda$ 又是多少?

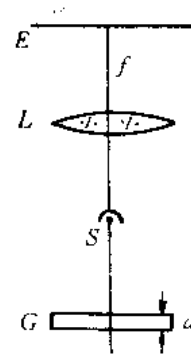


图 2-73 例 2-4 用图

解: 设干涉环中心的干涉级次为 m_0 (不一定为整数), 则由平板上、下表面反射出来的两支光的光程差

$$\Delta = 2nd \cos \theta_{2N} + \frac{\lambda}{2}$$

可以得到如下关系:

$$\Delta_0 = 2nd + \frac{\lambda}{2} = m_0\lambda$$

由此,

$$m_0 = \frac{2nd}{\lambda} + \frac{1}{2} = 8000 + \frac{1}{2}$$

若将 m_0 写成



$$m_0 = m_1 + \epsilon$$

则 m_1 是最靠近中心的亮条纹的干涉级次。因在本题条件下, $m_1=8000$, $\epsilon=1/2$, 中心是暗点, 所以 m_1 也即是中心暗点的干涉级次。因此, 对应第 N 个暗环的干涉级次为

$$m_N = m_1 - N$$

且有

$$2nd \cos 2\theta_{2N} + \frac{\lambda}{2} = m_N \lambda + \frac{\lambda}{2} = m_1 \lambda - N\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

整理可得

$$2nd(1 - \cos \theta_{2N}) = N\lambda$$

在一般情况下, θ_{1N} 和 θ_{2N} 都很小, 由折射定律有 $n \approx n_0 \theta_{1N} / \theta_{2N}$, 而 $1 - \cos \theta_{2N} \approx \theta_{2N}^2 / 2 \approx (n_0 \theta_{1N} / n)^2 / 2$, 代入上式可得

$$\theta_{1N} = \frac{1}{n_0} \sqrt{\frac{n\lambda}{d}} \sqrt{N}$$

因而第 N 个暗环半径的表示式为

$$r_N = f \tan \theta_{1N} \approx f \theta_{1N} = \frac{f}{n_0} \sqrt{\frac{n\lambda}{d}} \sqrt{N}$$

第一个暗环的半径为

$$r_1 = \frac{f}{n_0} \sqrt{\frac{n\lambda}{d}} = 0.95 \text{ cm}$$

为能看到干涉环, 最大允许谱线宽度 $\Delta\lambda$ 应满足

$$m_1(\lambda + \Delta\lambda) = (m_1 + 1)\lambda$$

由此可求得最大允许的谱线宽度为

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_1} = 0.75 \times 10^{-4} \mu\text{m}$$

例 2-5 观察迈克尔逊干涉仪, 我们看到一个由同心明、暗环所包围的圆形中心暗斑。该干涉仪的一个臂比另一个臂长 2 cm, 且 $\lambda=0.5 \mu\text{m}$ 。试求中心暗斑的级数, 以及第 6 个暗环的级数。

解: 对于由虚平板产生的等倾干涉条纹, 最小值满足如下干涉条件:

$$2nh \cos \theta_N + \frac{\lambda}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

按题意, 中心为暗斑, 应有

$$2nh = m_0 \lambda$$

相应的干涉级数 m_0 为

$$m_0 = \frac{2nh}{\lambda} = 80\,000$$

因为每两个相邻最小值之间的光程差相差一个波长, 所以第 N 个暗环(注意, 不是从中心暗点算起)的干涉级次为 $m_N = m_0 - N$, 于是

$$m_6 = m_0 - 6 = 79\,994$$

例 2-6 F-P 干涉仪的反射振幅比 $r=0.9$, 试计算



(1) 最小分辨本领!

(2) 要能分辨开氢红线 H_{α} ($0.6563 \mu\text{m}$) 的双线 ($\Delta\lambda = 0.1360 \times 10^{-4} \mu\text{m}$), F-P 干涉仪的最小间隔为多大?

解: (1) F-P 干涉仪的分辨本领为

$$A = mN' = 0.97m \frac{\pi r}{1-r^2}$$

当 $r=0.9$ 时, 最小分辨本领为

$$A_{\min} = 0.97 \times 1 \times \frac{\pi \times 0.9}{1-0.9^2} = 14.43$$

(2) 要分辨 H_{α} 的双线, 即要求分辨本领为

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{0.6563}{0.136 \times 10^{-4}} = 48\,257.35$$

由于 A 正比于 m , 所以相应的级次为

$$m = \frac{48\,257.35}{14.43} = 3344$$

F-P 干涉仪的间距应为

$$d = m \frac{\lambda}{2} = 3344 \times \frac{0.6563}{2} \mu\text{m} = 1.097 \text{ mm}$$

例 2-7 设计一块 F-P 干涉滤光片, 使其中心波长 $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$, 波长半宽度 $\Delta\lambda_{1/2} \leq 0.1\lambda_0$, 并求它在反射光损失为 10% 时的最大透过率。

解: 根据波长半宽度关系式

$$\Delta\lambda_{1/2} = \frac{\lambda_0^2}{2nh} \cdot \frac{1}{N} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0} \frac{1}{N} = \frac{\lambda_0}{N} \leq 0.1\lambda_0$$

应有 $N \geq 10$ 。又由精细度 N 的表示式, 有

$$\frac{\pi \sqrt{R}}{1-R} \geq 10$$

求解该方程得到

$$R \geq 73.14\%$$

若该干涉滤光片通过镀介质膜制造, 并选 $n_H = 2.34$, $n_L = 1.38$, 经查表 2-1, 得到镀 5 层反射膜时的 $R = 86.1\%$, 满足题意要求, 所以干涉滤光片的膜系结构为 $(HL)^2H - 2L - H(LH)^2$ 。

当考虑光损失时, 最大透过率

$$T_M = 1 - \frac{A}{1-R} = 1 - \frac{0.1}{1-0.7314} = 63\%$$

由上面的讨论可以看出, 提高光的透过率与压缩 $\Delta\lambda_{1/2}$ 是相互制约的, 需要根据实际要求折衷考虑。

习 题

2-1 平行光线以 θ 角通过一厚度为 d 、折射率为 n 的平行平板, 其相位改变多少?

2-2 如图 2-74 所示, 两相干平行光夹角为 α , 在垂直于角平分线的方位上放置一观察屏, 试证明屏上的干涉亮条纹间的宽度为

$$l = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

2-3 如图 2-75 所示, 两相干平面光波的传播方向与干涉场法线的夹角分别为 θ_0 和 θ_R , 试求干涉场上的干涉条纹间距。

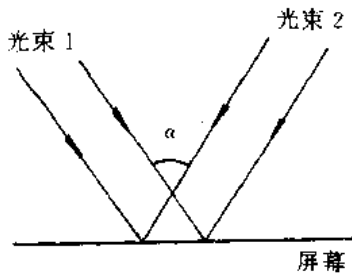


图 2-74 题 2-2 用图

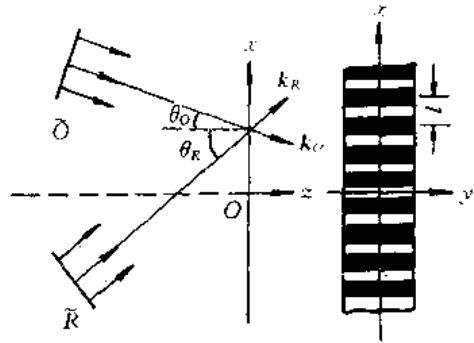


图 2-75 题 2-3 用图

2-4 在杨氏实验装置中, 光源波长为 $0.64 \mu\text{m}$, 两缝间距为 0.4 mm , 光屏离缝的距离为 50 cm 。

- (1) 试求光屏上第一亮条纹与中央亮条纹之间的距离;
- (2) 若 P 点离中央亮条纹为 0.1 mm , 则两束光在 P 点的相位差是多少?
- (3) 求 P 点的光强度和中央点的光强度之比。

2-5 在杨氏实验装置中, 两小孔的间距为 0.5 mm , 光屏离小孔的距离为 50 cm 。当以折射率为 1.60 的透明薄片贴住小孔 S_2 时(图 2-76), 发现屏上的条纹移动了 1 cm , 试确定该薄片的厚度。

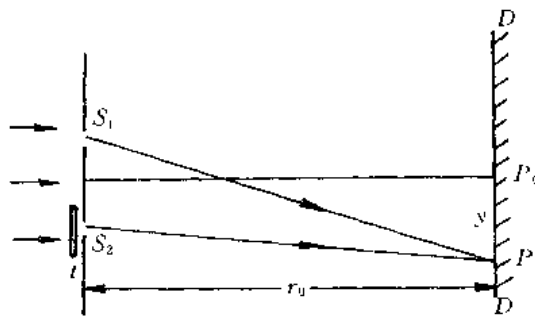


图 2-76 题 2-5 用图

2-6 在双缝实验中, 缝间距为 0.45 mm , 观察屏离缝 115 cm , 现用读数显微镜测得 10 个干涉条纹(准确说是 11 个亮条或暗条)之间的距离为 15 mm , 试求所用波长。用白光实验时, 干涉条纹有什么变化?

2-7 一波长为 $0.55 \mu\text{m}$ 的绿光入射到间距为 0.2 mm 的双缝上, 求离双缝 2 m 远处的观察屏上干涉条纹的间距。若双缝间距增加到 2 mm , 条纹间距又是多少?

2-8 在菲涅耳双面镜干涉实验中, 光波长为 $0.5 \mu\text{m}$ 。光源和观察屏到双面镜交线的距离分别为 0.5 m 和 1.5 m , 双面镜夹角为 10^{-3} rad ,

- (1) 求观察屏上条纹间距;
 (2) 屏上最多可以看到多少条亮条纹?

2-9 试求能产生红光($\lambda=0.7\ \mu\text{m}$)的二级反射干涉条纹的肥皂薄膜厚度。已知肥皂膜的折射率为 1.33, 且平行光与法向成 30° 角入射。

2-10 波长为 $0.40\sim 0.76\ \mu\text{m}$ 的可见光正入射在一块厚度为 $1.2\times 10^{-6}\ \text{m}$ 、折射率为 1.5 的薄玻璃片上, 试问从玻璃片反射的光中哪些波长的光最强?

2-11 图 2-77 绘出了测量铝箔厚度 D 的干涉装置结构, 两块薄玻璃板尺寸为 $75\ \text{mm}\times 25\ \text{mm}$ 。在钠黄光($\lambda=0.5893\ \mu\text{m}$)照明下, 从劈尖开始数出 60 个条纹(准确说应为 61 个亮条纹或暗条纹), 相应的距离是 $30\ \text{mm}$, 试求铝箔的厚度 $D=?$ 若改用绿光照明, 从劈尖开始数出 100 个条纹, 其间距为 $46.6\ \text{mm}$, 试求这绿光波长。

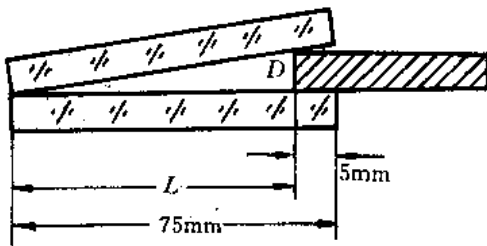


图 2-77 题 2-11 用图

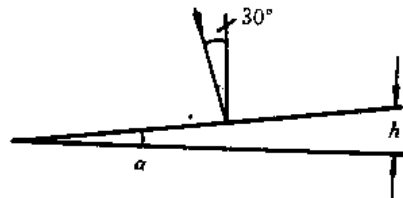


图 2-78 题 2-12 用图

2-12 如图 2-78 所示的尖劈形薄膜, 右端厚度 h 为 $0.005\ \text{cm}$, 折射率 $n=1.5$, 波长为 $0.707\ \mu\text{m}$ 的光以 30° 角入射到上表面, 求在这个面上产生的条纹数。若以两块玻璃片形成的空气尖劈代替, 产生多少条条纹?

2-13 如图 2-79 所示, 平板玻璃由两部分组成(冕牌玻璃 $n=1.50$, 火石玻璃 $n=1.75$), 平凸透镜用冕牌玻璃制成, 其间隙充满二氧化碳($n=1.62$), 这时牛顿环是何形状?

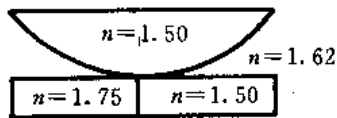


图 2-79 题 2-13 用图

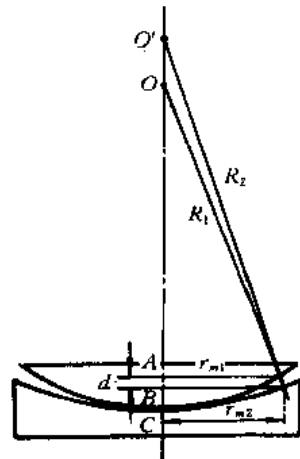


图 2-80 题 2-14 用图

2-14 利用牛顿环干涉条纹可以测定凹曲面的曲率半径, 结构如图 2-80 所示。试证明第 m 个暗环的半径 r_m 与凹面半径 R_2 、凸面半径 R_1 、光波长 λ_0 之间的关系为

$$r_m^2 = m\lambda_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

2-15 在观察牛顿环时,用 $\lambda_1=0.5 \mu\text{m}$ 的第 6 个亮环与用 λ_2 的第 7 个亮环重合,求波长 $\lambda_2=?$

2-16 平行平面玻璃板的厚度 h_0 为 0.1 cm, 折射率为 1.5, 在 λ 为 $0.6328 \mu\text{m}$ 的单色光中观察干涉条纹。当温度升高 1°C 时,在垂直方向观察,发现有两个新的干涉条纹向外移动,计算该玻璃的膨胀系数。

2-17 如图 2-81,当迈克尔逊干涉仪中的 M_2 反射镜移动距离为 0.233 mm 时,数得移动条纹数为 792 条,求光波长。

2-18 在迈克尔逊干涉仪的一个臂中引入 100.0 mm 长、充一个大气压空气的玻璃管,用 $\lambda=0.5850 \mu\text{m}$ 的光照射。如果将玻璃管内逐渐抽成真空,发现有 100 条干涉条纹移动,求空气的折射率。

2-19 在观察迈克尔逊干涉仪中的等倾条纹时,已知光源波长 $\lambda=0.59 \mu\text{m}$,聚光透镜焦距为 0.5 m,如图 2-82 所示。求当空气层厚度为 0.5 mm 时,第 5、20 序条纹的角半径、半径和干涉级。

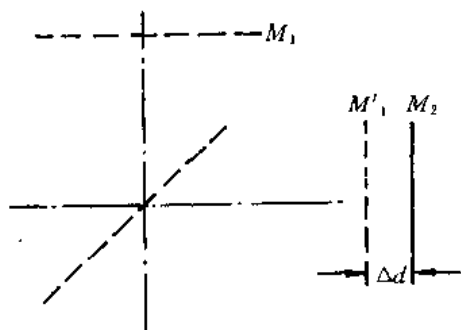


图 2-81 题 2-17 用图

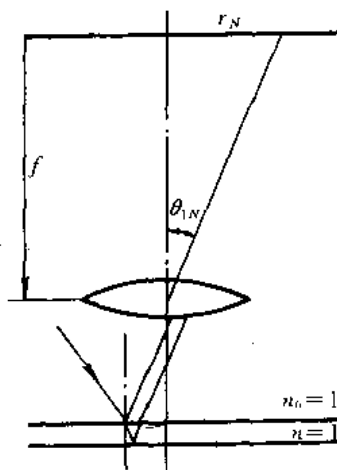


图 2-82 题 2-19 用图

2-20 设一玻璃片两面的反射系数(反射振幅与入射振幅之比)均为 $r=90\%$, 并且没有吸收,试计算第 1 至第 5 次反射光及透射光的相对强度,并用公式表示第 n 次反射光及透射光的相对强度。

2-21 已知一组 F-P 标准具的间距为 1 mm, 10 mm, 60 mm 和 120 mm, 对于 $\lambda=0.55 \mu\text{m}$ 的入射光来说,其相应的标准具常数为多少? 为测量 $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$ 、波长宽度为 $0.01 \times 10^{-4} \mu\text{m}$ 的激光,应选用多大间距的 F-P 标准具?

2-22 某光源发出波长很接近的二单色光,平均波长为 600 nm。通过间隔 $d=10 \text{ mm}$ 的 F-P 干涉仪观察时,看到波长为 λ_1 的光所产生的干涉条纹正好在波长为 λ_2 的光所产生的干涉条纹的中间,问二光波长相差多少。

2-23 已知 F-P 标准具反射面的反射系数为 $r=0.8944$, 求:

(1) 条纹半宽度;

2-24 红外波段的光通过锗片($n=4$)窗口时,其光能至少损失多少?若在锗片两表面镀上硫化锌($n=2.35$)膜层,其光学厚度为 $1.25\ \mu\text{m}$,则波长为 $5\ \mu\text{m}$ 的红外光垂直入射该窗口时(图 2-83),光能损失多少?

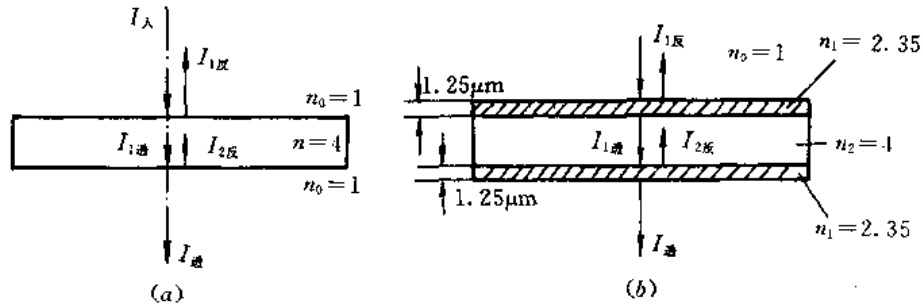


图 2-83 题 2-24 用图

2-25 在光学玻璃基片($n_G=1.52$)上镀制硫化锌膜层($n=2.35$),入射光波长 $\lambda=0.5\ \mu\text{m}$,求正入射时给出最大反射率和最小反射率的膜厚及相应的反射率。

2-26 在某种玻璃基片($n_G=1.6$)上镀制单层增透膜,膜材料为氟化镁($n=1.38$),控制膜厚,对波长 $\lambda_0=0.5\ \mu\text{m}$ 的光在正入射时给出最小反射率。试求这个单层膜在下列条件下的反射率:

- (1) 波长 $\lambda_0=0.5\ \mu\text{m}$, 入射角 $\theta_0=0^\circ$;
- (2) 波长 $\lambda=0.6\ \mu\text{m}$, 入射角 $\theta_0=0^\circ$;
- (3) 波长 $\lambda_0=0.5\ \mu\text{m}$, 入射角 $\theta_0=30^\circ$;
- (4) 波长 $\lambda=0.6\ \mu\text{m}$, 入射角 $\theta_0=30^\circ$ 。

2-27 在照相物镜上镀一层光学厚度为 $5\lambda_0/4$ ($\lambda_0=0.55\ \mu\text{m}$) 的低折射率膜,试求在可见光区内反射率最大的波长。薄膜呈什么颜色?

2-28 在玻璃基片上镀两层光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的介质薄膜,如果第一层的折射率为 1.35,问:为了达到在正入射时膜系对波长为 λ_0 的光全增透的目的,第二层薄膜的折射率应为多少。(玻璃基片折射率 $n_G=1.6$ 。)

2-29 计算比较下述两个 7 层 $\lambda/4$ 膜系(图 2-84)的等效折射率和反射率:

- (1) $n_G=1.50$, $n_H=2.40$, $n_L=1.38$;
- (2) $n_G=1.50$, $n_H=2.20$, $n_L=1.38$ 。

由此说明膜层折射率对膜系反射率的影响。

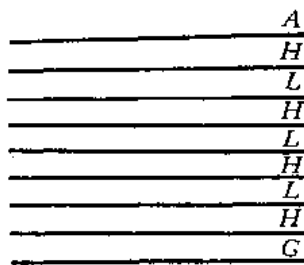


图 2-84 题 2-29 用图

Click to buy NOW

2-30 有一干涉滤光片间隔层厚度为 2×10^{-4} mm, 折射率 $n=1.5$, 试求:

- (1) 正入射情况下, 滤光片在可见光区内的中心波长;
- (2) 透射带的波长半宽度(设高反膜的反射率 $R=0.9$);
- (3) 倾斜入射时, 入射角分别为 10° 和 30° 时的透射光波长。

2-31 在薄膜波导中传输一个 $\beta=0.8nk_0$ 的模式, 波导的 $n=2.0$, $h=3$ mm, 光波波长 $\lambda=0.9$ μm 。问光波沿 z 方向每传输 1 cm, 在波导的一个表面上反射多少次。

2-32 对于实用波导, $n+n_G \approx 2n$, 试证明厚度为 h 的对称波导, 传输 m 阶模的必要条件为

$$\Delta n = n - n_G \geq \frac{m^2 \lambda^2}{8nh^2}$$

式中, λ 是光波在真空中的波长。

2-33 太阳直径对地球表面的张角 2θ 约为 $0^\circ 32'$, 如图 2-85 所示。在暗室中若直接用太阳光作光源进行双缝干涉实验(不用限制光源尺寸的单缝), 则双缝间距不能超过多大?(设太阳光的波长为 $\lambda=0.55$ μm , 日盘上各点的亮度差可以忽略。)

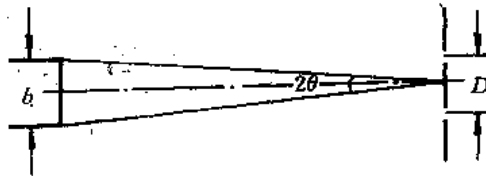


图 2-85 题 2-33 用图

2-34 在杨氏干涉实验中, 照明两小孔的光源是一个直径为 2 mm 的圆形光源。光源发射光的波长为 0.5 μm , 它到小孔的距离为 1.5 m。问两小孔能够发生干涉的最大距离是多少?

2-35 菲涅耳双棱镜实验中, 光源到双棱镜和观察屏的距离分别为 25 cm 和 1 m。光的波长为 0.546 μm 。问要观察到清晰的干涉条纹, 光源的最大横向宽度是多少。(双棱镜的折射率 $n=1.52$, 折射角 $\alpha=30^\circ$ 。)

2-36 在洛埃镜实验中, 光源 S_1 到观察屏的垂直距离为 1.5 m, 到洛埃镜面的垂直距离为 2 mm, 洛埃镜长 40 cm, 置于光源和屏之间的中央,

- (1) 确定屏上可以看到条纹的区域大小;
- (2) 若光波波长 $\lambda=0.5$ μm , 条纹间距是多少? 在屏上可以看见几个条纹?
- (3) 写出屏上光强分布的表达式。

2-37 若光波的波长宽度为 $\Delta\lambda$, 频率宽度为 $\Delta\nu$, 试证明 $|\Delta\nu/\nu| = |\Delta\lambda/\lambda|$ 。式中 ν 和 λ 分别为该光波的频率和波长。对于波长为 632.8 nm 的 He-Ne 激光, 波长宽度 $\Delta\lambda=2 \times 10^{-8}$ nm, 试计算它的频率宽度和相干长度。

2-38 假定用发射真空波长为 λ_1 和 λ_2 的双线光源照明迈克尔逊干涉仪, 当移动一面镜子时, 条纹周期性地出现与消失。如果平面镜的位移 Δd 引起条纹可见度有一个周期的变化, 试用 $\Delta\lambda=\lambda_1-\lambda_2$, λ_1 和 λ_2 写出 Δd 的表达式。

第3章 光的衍射

光的衍射现象是光波动性的另一个主要标志，也是光波在传播过程中的最重要属性之一。光的衍射在近代科学技术中已获得了极其重要的应用。

这一章将在基尔霍夫(Kirchhoff)标量衍射理论的基础上，研究两种最基本的衍射现象和应用：菲涅耳衍射(近场衍射)和夫琅和费(Fraunhofer)衍射(远场衍射)，并介绍傅里叶光学基础及80年代发展起来的近场光学原理。

3.1 衍射的基本理论

3.1.1 光的衍射现象

光的衍射是指光波在传播过程中遇到障碍物时，所发生的偏离直线传播的现象。光的衍射，也可以叫光的绕射，即光可绕过障碍物，传播到障碍物的几何阴影区域中，并在障碍物后的观察屏上呈现出光强的不均匀分布。通常将观察屏上的不均匀光强分布称为衍射图样。

如图3-1所示，让一个足够亮的点光源 S 发出的光透过一个圆孔 Σ ，照射到屏幕 K 上，并且逐渐改变圆孔的大小，就会发现：当圆孔足够大时，在屏幕上看到一个均匀光斑，光斑的大小就是圆孔的几何投影(图3-1(a))；随着圆孔逐渐减小，起初光斑也相应地变小，而后光斑开始模糊，并且在圆斑外面产生若干围绕圆斑的同心圆环(图3-1(b))，当使用单色光源时，这是一组明暗相间的同心环带，当使用白色光源时，这是一组色彩相间的彩色环带；此后再使圆孔变小，光斑及圆环不但不跟着变小，反而会增大起来。这就是光的衍射现象。

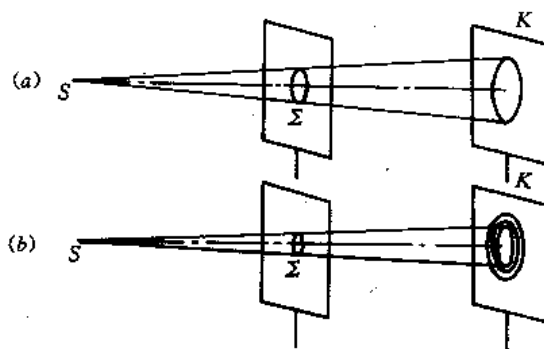


图3-1 光的衍射现象

光的衍射现象与光的干涉现象就其实质来讲，都是相干光波叠加引起的光强的重新分布，所不同之处在于，干涉现象是有限个相干光波的叠加，而衍射现象则是无限多个相干光波的叠加结果。因此，对衍射现象的理论处理，从本质上来说与干涉现象相同，但是由

于衍射现象的特殊性，在数学上遇到了很大的困难，以至许多有实际意义的问题得不到严格的解，因而，实际的衍射理论都是一些近似解法。下面介绍的基尔霍夫衍射理论就是一种适用于标量波的衍射，是能够处理大多数衍射问题的基本理论。

3.1.2 惠更斯—菲涅耳原理

最早成功地用波动理论解释衍射现象的是菲涅耳，他将惠更斯原理用光的干涉理论加以补充，并予以发展。

惠更斯原理是描述波动传播过程的一个重要原理，其主要内容是：如图 3-2 所示的波源 S ，在某一时刻所产生波的波阵面为 Σ ，则 Σ 面上的每一点都可以看作是一个次波源，它们发出球面次波，其后某一时刻的波阵面 Σ' ，即是该时刻这些球面次波的包迹面，波阵面的法线方向就是该波的传播方向。惠更斯原理能够很好地解释光的直线传播，光的反射和折射方向，但不能说明衍射过程及其强度分布。

菲涅耳在研究了光的干涉现象后，考虑到次波来自于同一光源，应该相干，因而波阵面 Σ' 上每一点的光振动应该是在光源和该点之间任一波面（例如 Σ 面）上的各点发出的次波场叠加的结果。这就是惠更斯—菲涅耳原理。

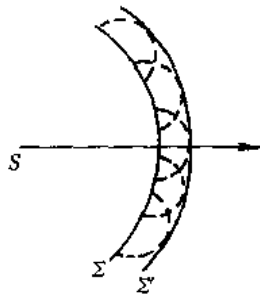


图 3-2 惠更斯原理

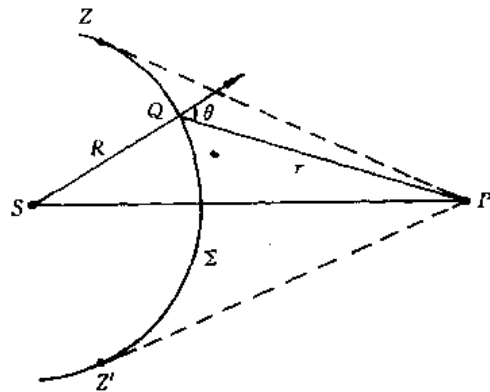


图 3-3 单色点光源 S 对 P 点的光作用

利用惠更斯—菲涅耳原理可以解释衍射现象：在任意给定的时刻，任一波面上的点都起着次波波源的作用，它们各自发出球面次波，障碍物以外任意点上的光强分布，即是没有被阻挡的各个次波源发出的次波在该点相干叠加的结果。

根据惠更斯—菲涅耳原理，图 3-3 所示的一个单色光源 S 对于空间任意点 P 的作用，可以看作是 S 和 P 之间任一波面 Σ 上各点发出的次波在 P 点相干叠加的结果。假设 Σ 波面上任意点 Q 的光场复振幅为 $\tilde{E}(Q)$ ，在 Q 点取一个面元 $d\sigma$ ，则 $d\sigma$ 面元上的次波源对 P 点光场的贡献为

$$d\tilde{E}(P) = CK(\theta)\tilde{E}(Q)\frac{e^{ikr}}{r}d\sigma$$

式中， C 是比例系数； $r = \overline{QP}$ ， $K(\theta)$ 称为倾斜因子，它是与元波面法线和 \overline{QP} 的夹角 θ （称为衍射角）有关的量，按照菲涅耳的假设：当 $\theta = 0$ 时， K 有最大值；随着 θ 的增大， K 迅速减小；当 $\theta \geq \pi/2$ 时， $K = 0$ 。因此，图中波面 Σ 上只有 ZZ' 范围内的部分对 P 点光振动有贡献。所以 P 点的光场复振幅为

$$\tilde{E}(P) = C \iint_{\Sigma} \tilde{E}(Q) \frac{e^{ikr}}{r} K(\theta) d\sigma \quad (3-1)$$

这就是惠更斯—菲涅耳原理的数学表达式，称为惠更斯—菲涅耳公式。

当 S 是点光源时， Q 点的光场复振幅为

$$\tilde{E}(Q) = \frac{A}{R} e^{ikR} \quad (3-2)$$

式中， R 是光源到 Q 点的距离。在这种情况下， $\tilde{E}(Q)$ 可以从积分号中提出来，但是由于 $K(\theta)$ 的具体形式未知，不可能由 (3-1) 式确切地确定 $\tilde{E}(P)$ 值。因此，从理论上讲，这个原理是不够完善的。

3.1.3 基尔霍夫衍射公式

基尔霍夫的研究弥补了菲涅耳理论的不足，他从微分波动方程出发，利用场论中的格林(Green)定理，给出了惠更斯—菲涅耳原理较完善的数学表达式，将空间 P 点的光场与其周围任一封闭曲面上的各点光场建立起了联系，得到了菲涅耳理论中没有确定的倾斜因子 $K(\theta)$ 的具体表达式，建立起了光的衍射理论。这个理论将光场当作标量来处理，只考虑电场或磁场的某一个横向分量的标量振幅，而假定其它有关分量也可以用同样方法独立处理，完全忽略了电磁场矢量分量间的耦合特性，因此称为标量衍射理论。尽管这是一种近似处理，但在一定条件下，仍与实验结果很好地符合。不过在处理诸如高分辨率衍射光栅理论等问题中，为了得到精确的结果，必须要进一步考虑场的矢量属性。

1. 基尔霍夫积分定理

假设有一个单色光波通过闭合曲面 Σ 传播(图 3-4)，在 t 时刻、空间 P 点处的光电场为

$$E(P, t) = \tilde{E}(P) e^{-i\omega t} \quad (3-3)$$

若 P 是无源点，该光场应满足如下的标量波动方程：

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (3-4)$$

将 (3-3) 式代入，可得

$$\nabla^2 \tilde{E}(P) + k^2 \tilde{E}(P) = 0 \quad (3-5)$$

式中， $k = \omega/c$ ，该式即为亥姆霍兹(Helmholtz)方程。

现在假设有另一个任意复函数 \tilde{G} ，它也满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \tilde{G} + k^2 \tilde{G} = 0$$

且在 Σ 面内和 Σ 面上有连续的一、二阶偏微商(个别点除外)。如果作积分

$$Q = \iint_{\Sigma} \left(\tilde{G} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} - \tilde{E} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} \right) d\sigma \quad (3-6)$$

其中， $\partial/\partial n$ 表示在 Σ 上每一点沿向外法线方向的偏微商，则由格林定理，有

$$\iiint_V (\tilde{G} \nabla^2 \tilde{E} - \tilde{E} \nabla^2 \tilde{G}) dV = \iint_{\Sigma} \left(\tilde{G} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} - \tilde{E} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} \right) d\sigma$$

式中， V 是 Σ 面包围的体积。利用亥姆霍兹方程关系，左边的被积函数在 V 内处处为零，

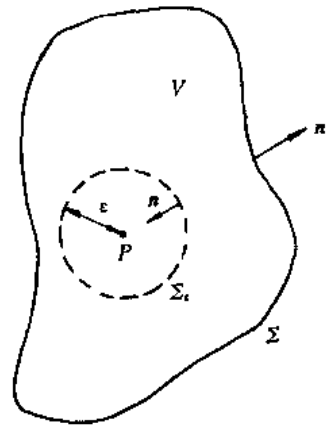


图 3-4 积分曲面

$$\iiint_V (\tilde{G} \nabla^2 \tilde{E} - \tilde{E} \nabla^2 \tilde{G}) dV = 0$$

根据 \tilde{G} 所满足的条件, 可以选取 \tilde{G} 为球面波的波函数:

$$\tilde{G} = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3-7)$$

这个函数除了在 $r=0$ 点外, 处处解析。因此, (3-6) 式中的 Σ 应选取图 3-4 所示的复合曲面 $\Sigma + \Sigma_\epsilon$, 其中 Σ_ϵ 是包围 P 点、半径为小量 ϵ 的球面, 该积分为

$$\iint_{\Sigma + \Sigma_\epsilon} \left(\tilde{G} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} - \tilde{E} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} \right) d\sigma = 0 \quad (3-8)$$

由 (3-7) 式, 有

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r} = -\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3-9)$$

对于 Σ_ϵ 面上的点, $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = -1$, $r = \epsilon$, 所以,

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} = \left(\frac{1}{\epsilon} - ik \right) \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon}$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_\epsilon} \left(\tilde{G} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} - \tilde{E} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} \right) d\sigma &= 4\pi\epsilon^2 \left[\frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} - \tilde{E} \left(\frac{1}{\epsilon} - ik \right) \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \right] \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \tilde{E}(P) \end{aligned}$$

故有

$$\tilde{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \tilde{E} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] d\sigma \quad (3-10)$$

这就是亥姆霍兹—基尔霍夫积分定理。它将 P 点的光场与周围任一闭合曲面 Σ 上的光场联系起来, 实际上可以看作是惠更斯—菲涅耳原理的一种较为完善的数学表达式。

2. 基尔霍夫衍射公式

现在将基尔霍夫积分定理应用于小孔衍射问题, 在某些近似条件下, 可以化为与菲涅耳表达式基本相同的形式。

如图 3-5 所示, 有一个无限大的不透明平面屏, 其上有一开孔 Σ , 用点光源 S 照明, 并设 Σ 的线度 δ 满足

$$\lambda < \delta \ll \text{Min}(r, l)$$

其中 $\text{Min}(r, l)$ 表示 r, l 中较小的一个。为了应用基尔霍夫积分定理求 P 点的光场, 围绕 P 点作一闭合曲面。该闭合曲面由三部分组成: 开孔 Σ , 不透明屏的部分背面 Σ_1 , 以 P 点为中心、 R 为半径的大球的部分球面 Σ_2 。在这种情况下, P 点的光场复振幅为

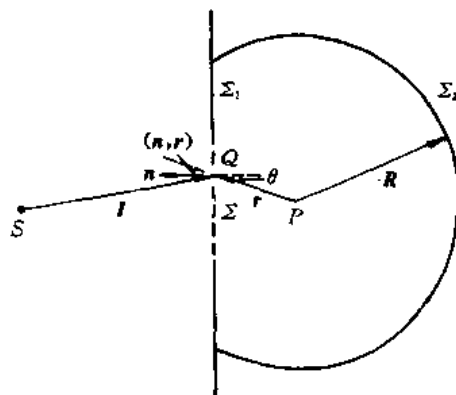


图 3-5 球面波在孔径 Σ 上的衍射



$$\tilde{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma + \Sigma_1 - \Sigma_2} \left[\frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \tilde{E} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] d\sigma \quad (3-11)$$

下面确定这三个面上的 \tilde{E} 和 $\partial \tilde{E}/\partial n$ 。

对于 Σ 和 Σ_1 面, 基尔霍夫假定:

① 在 Σ 上, \tilde{E} 和 $\partial \tilde{E}/\partial n$ 的值由入射波决定, 与不存在屏时的值完全相同。因此

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \frac{A}{l} e^{ikl} \\ \frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} &= \cos(n, l) \left(ik - \frac{1}{l} \right) \frac{A}{l} e^{ikl} \end{aligned} \quad (3-12)$$

式中, A 是离点光源单位距离处的振幅, $\cos(n, l)$ 表示外向法线 n 与从 S 到 Σ 上某点 Q 的矢量 l 之间夹角的余弦。

② 在不透明屏的背照面 Σ_1 上, $\tilde{E}=0, \partial \tilde{E}/\partial n=0$ 。

通常称这两个假定为基尔霍夫边界条件。应当指出, 这两个假定都是近似的, 因为屏的存在必然会干扰 Σ 处的场, 特别是开孔边缘附近的场。在 Σ_1 上, 光场值也并非处处绝对为零。但是严格的衍射理论表明, 在上述开孔线度的限制下, 误差并不大, 作为近似理论处理, 仍然可以采用这种假定。

对于 Σ_2 面, $r=R, \cos(n, R)=1$, 且有

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \xrightarrow{R \gg 1} ik \frac{e^{ikR}}{R}$$

因此, 在 Σ_2 上的积分为

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_2} \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} - ik\tilde{E} \right) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} - ik\tilde{E} \right) R^2 d\omega$$

式中, Ω 是 Σ_2 对 P 点所张的立体角, $d\omega$ 是立体角元。索末菲(Sommerfeld)指出, 在辐射场中,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} - ik\tilde{E} \right) R = 0$$

(索末菲辐射条件), 而当 $R \rightarrow \infty$ 时, $(e^{ikR}/R)R$ 是有界的, 所以上面的积分在 $R \rightarrow \infty$ 时(球面半径 R 取得足够大)为零。

通过上述讨论可知, 在(3-11)式中, 只需要考虑对孔径面 Σ 的积分, 即

$$\tilde{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial \tilde{E}}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \tilde{E} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] d\sigma \quad (3-13)$$

将(3-9)式和(3-12)式代入上式, 略去法线微商中的 $1/r$ 和 $1/l$ (它们比 k 要小得多)项, 得到

$$\tilde{E}(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(l) \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{\cos(n, r) - \cos(n, l)}{2} \right] d\sigma \quad (3-14)$$

此式称为菲涅耳—基尔霍夫衍射公式。与(3-1)式进行比较, 可得

$$\tilde{E}(Q) = \tilde{E}(l) = \frac{A}{l} e^{ikl}$$

$$K(\theta) = \frac{\cos(n, r) - \cos(n, l)}{2}$$

$$C = -\frac{i}{\lambda}$$

因此，如果将积分面元 $d\sigma$ 视为次波源的话，(3-14)式可解释为：① P 点的光场是 Σ 上无穷多次波源产生的，次波源的复振幅与入射波在该点的复振幅 $\tilde{E}(Q)$ 成正比，与波长 λ 成反比；② 因子 $(-i)$ 表明，次波源的振动相位超前于入射波 $\pi/2$ ；③ 倾斜因子 $K(\theta)$ 表示了次波的振幅在各个方向上是不同的，其值在 0 与 1 之间。如果一平行光垂直入射到 Σ 上，则 $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) = -1$ ， $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = \cos \theta$ ，因而

$$K(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

当 $\theta=0$ 时， $K(\theta)=1$ ，这表明在波面法线方向上的次波贡献最大；当 $\theta=\pi$ 时， $K(\theta)=0$ 。这一结论说明，菲涅耳在关于次波贡献的研究中假设 $K(\pi/2)=0$ 是不正确的。

进一步考察(3-14)式可以看出，该式对于光源和观察点是对称的，这意味着 S 点在 P 点产生的效果和 P 点放置同样强度的点源在 S 点产生的效果相同。有时称这个结果为亥姆霍兹互易定理(或可逆定理)。

3. 基尔霍夫衍射公式的近似

前面已经指出，确定一个特定衍射问题的严格解是很困难的，即便是在一定条件下得到的菲涅耳—基尔霍夫衍射公式，对于一些极简单的衍射问题，也因被积函数形式复杂而得不到解析形式的积分结果。为此，必须根据实际条件进一步作近似处理。

1) 傍轴近似

在一般的光学系统中，对成像起主要作用的是那些与光学系统光轴夹角极小的傍轴光线。对于傍轴光线，图 3-6 所示的开孔 Σ 的线度和观察屏上的考察范围都远小于开孔到观察屏的距离，因此，下面的两个近似条件通常都成立：

- ① $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \approx 1$ ，于是 $K(\theta) \approx 1$ ；
- ② $r \approx z_1$ 。

这样，(3-14)可以简化为

$$\tilde{E}(P) = -\frac{i}{\lambda z_1} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(Q) e^{ikr} d\sigma \quad (3-15)$$

在这里，指数中的 r 未用 z_1 代替，这是因为指数中 r 所影响的是次波场的相位， r 的微小变化都会引起相位的很大变化，因而会对干涉效应产生显著的影响，所以不可用常数 z_1 替代。

2) 距离近似——菲涅耳近似和夫朗和费近似

为了对距离的影响有一明确的概念，再进一步考察单色光经过衍射小孔后的衍射现象。图 3-7 表示一个单色平面光波垂直照射圆孔 Σ 的衍射情况。若在离 Σ 很近的 K_1 处观察透过的光，将看到边缘比较清晰的光斑，其形状、大小和圆孔基本相同，可以看作是圆孔的投影，这时光的传播大致可以看作是直线传播。若距离再远些，例如在 K_2 面上观察时，将看到一个边缘模糊的稍微大些的圆光斑，光斑内有一圈圈的亮暗环，这时已不能看

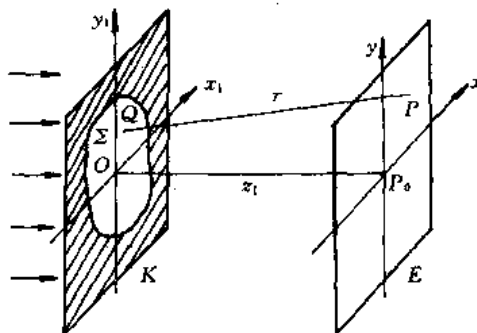


图 3-6 孔径 Σ 的衍射

作为圆孔的投影了。随着观察平面距离的增大，光斑范围不断扩大，但光斑中圆环数逐渐减少，而且环纹中心表现出从亮到暗，又从暗到亮的变化。当观察平面距离很远时，如在 K_4 位置，将看到一个较大的中间亮、边缘暗，且在边缘外有较弱的亮、暗圆环的光斑。此后，观察距离再增大，只是光斑扩大，但光斑形状不变。

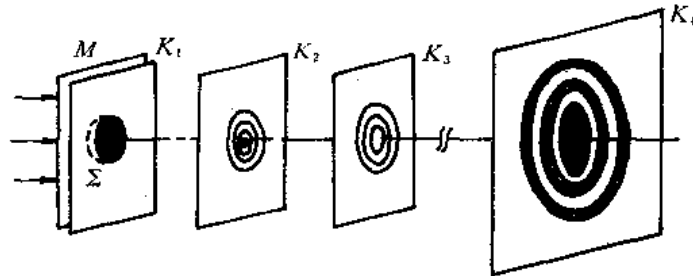


图 3-7 衍射现象的演变

从上述衍射现象的演变可以看出，离衍射孔不同距离处，衍射图样是不同的。在 K_2 、 K_3 及其前后的范围内的衍射现象称为近场衍射或非涅耳衍射，而在很远处（如 K_4 面上）的衍射现象称为远场衍射或夫朗和费衍射。当然，近场、远场的划分是相对的，对一定波长的光来说，衍射孔径愈大，相应的近场与远场的距离也愈远。此外，如果入射光波不是平面波而是发散的球面波，则近场图样将移到更远的距离范围，而远场图样可能不再出现。

用基尔霍夫衍射公式计算近场和远场衍射时，可以按照离衍射孔的距离将衍射公式进行简化。下面求出这两种衍射的近似计算公式。

(1) 非涅耳近似 如图 3-6，设 $\overline{QP} = r$ ，则由几何关系有

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z_1^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = z_1 \sqrt{1 + \left(\frac{x - x_1}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{y - y_1}{z_1}\right)^2} \\ &= z_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{z_1^2} \right] - \frac{1}{8} \left[\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{z_1^2} \right]^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

当 z_1 大到满足

$$\frac{k}{8} \frac{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]_{\max}^2}{z_1^3} \ll \pi \quad (3-16)$$

时，上式第三项及以后的各项都可略去，简化为

$$\begin{aligned} r &= z_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{z_1^2} \right] \right\} \\ &= z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_1} - \frac{xx_1 + yy_1}{z_1} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_1} \end{aligned} \quad (3-17)$$

这一近似称为非涅耳近似，在这个区域内观察到的衍射现象叫非涅耳衍射（或近场衍射）。

在非涅耳近似下， P 点的光场复振幅为

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda z_1} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x_1, y_1) e^{ikz_1 \left[1 + \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2z_1^2} \right]} dx_1 dy_1 \quad (3-18)$$

(2) 夫朗和费近似 当观察屏离孔的距离很大，满足

$$k \frac{(x_1^2 + y_1^2)_{\max}}{2z_1} \ll \pi \quad (3-19)$$



$$r = z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_1} - \frac{xx_1 + yy_1}{z_1} \quad (3-20)$$

这一近似称为夫朗和费近似，在这个区域内观察到的衍射现象叫夫朗和费衍射(或远场衍射)。

在夫朗和费近似下， P 点的光场复振幅为

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{ie^{ikz_1}}{\lambda z_1} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z_1}} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x_1, y_1) e^{-ik\frac{xx_1+yy_1}{z_1}} dx_1 dy_1 \quad (3-21)$$

由以上讨论可知，菲涅耳衍射和夫朗和费衍射是傍轴近似下的两种衍射情况，二者的区别条件是观察屏到衍射屏的距离 z_1 与衍射孔的线度 (x_1, y_1) 之间的相对大小。例如，当 $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ ，孔径线度为 2 mm ，观察距离 $z_1 \gg 1 \text{ cm}$ 时为非涅耳衍射， $z_1 \gg 3 \text{ m}$ 时为夫朗和费衍射。

下面将分别讨论菲涅耳衍射和夫朗和费衍射。由于在所讨论的实际问题中，夫朗和费衍射问题可以得到解析解，并且它是光学仪器中最常见的衍射现象，而非涅耳衍射问题则需近似求解，所以首先讨论夫朗和费衍射现象。

3.2 夫朗和费衍射

3.2.1 夫朗和费衍射装置

由上节的讨论可知，对于夫朗和费衍射，观察屏必须放置在远离衍射屏的地方。如图 3-8(a)所示，设 xOy 平面是远离开孔平面的观察平面，按照惠更斯—菲涅耳原理， xOy 平面上任一点 P 的光场，可以看作是开孔处入射波面 Σ 上各点次波波源发出的球面次波在 P 点产生光场的叠加。由于 P 点很远，从波面上各点到 P 点的光线近似平行，所以 P 点的光场也就是由 Σ 面上各点沿 θ 方向发射光场的叠加。如果在孔后面(紧靠孔面)放置一个焦距为 f 的透镜 L (图 3-8(b))，则由于透镜的作用，与光轴夹角为 θ 的入射平行光线将会聚在后焦平面上的 P' 点。因此，图 3-8(b)中的 P' 点与图 3-8(a)中的 P 点对应。所以，当利用透镜时，在它焦平面上得到的衍射图样就是不用透镜时的远场衍射图样，只是空间范围缩小，光能集中罢了。因此，实际上讨论夫朗和费衍射问题都是在透镜的焦平面上进行。

如果只考虑单色平行光垂直入射到开孔平面上的夫朗和费衍射，则通常都采用图 3-9 所示的夫朗和费衍射装置。

单色点光源 S 放置在透镜 L_1 的前焦平面上，所产生的平行光垂直入射开孔 Σ ，由于开孔的衍射，在透镜 L_2 的后焦平面上可以观察到开孔 Σ 的夫朗和费衍射图样，后焦平面上各点的光场复振幅由(3-21)式给出。若开孔面上有均匀的光场分布，可令 $\tilde{E}(x_1, y_1) = A = \text{常数}$ 。又因为透镜紧贴孔径， $z_1 \approx f$ 。所以，后焦平面上的光场复振幅可写为

$$\tilde{E}(x, y) = C \iint_{\Sigma} e^{-ik(xx_1+yy_1)/f} dx_1 dy_1 \quad (3-22)$$

式中

$$C = -\frac{iA}{\lambda f} e^{ik(f + \frac{x^2 + y^2}{2f})} \quad (3-23)$$

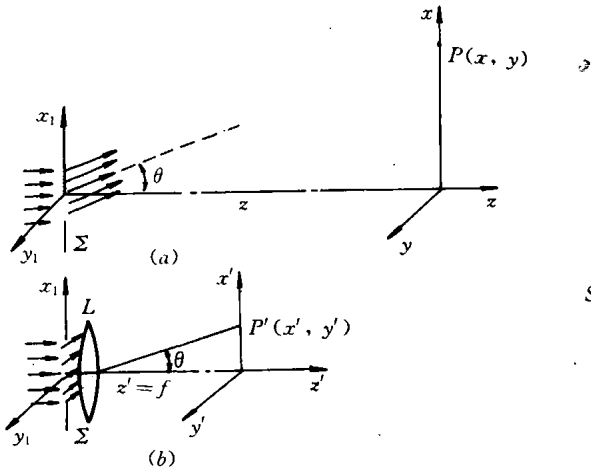


图 3-8 远场与透镜后焦面对应

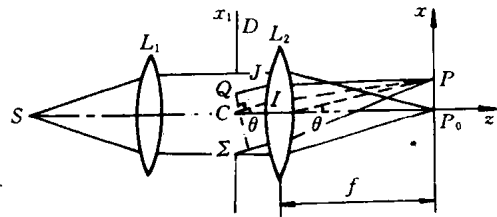


图 3-9 夫朗和费衍射装置

3.2.2 夫朗和费矩形孔和圆孔衍射

1. 夫朗和费矩形孔衍射

对于图 3-9 所示的夫朗和费衍射装置，若衍射孔是矩形孔，则在透镜焦平面上观察到的衍射图样如图 3-10 所示。这个衍射图样的主要特征是衍射亮斑集中分布在两相互垂直的方向上(x 轴和 y 轴)，并且 x 轴上的亮斑宽度与 y 轴上亮斑宽度之比，恰与矩形孔在两个轴上的宽度关系相反。

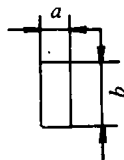
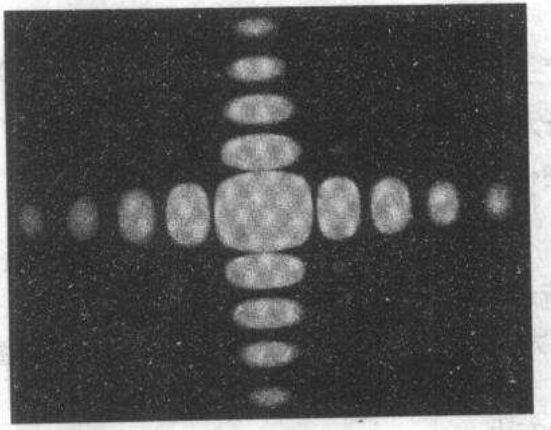


图 3-10 夫朗和费矩形孔衍射图样

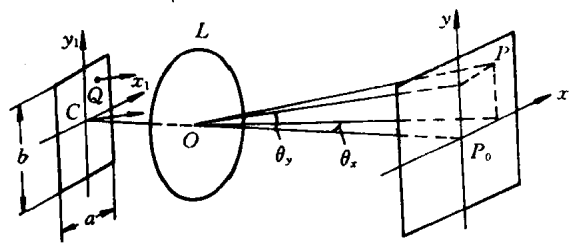


图 3-11 夫朗和费矩形孔衍射光路



图 3-11 是夫朗和费矩形孔衍射装置的光路图。根据(3-22)式, 透镜焦平面上 $P(x, y)$ 点的光场复振幅为

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x, y) &= C \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik(ax_1 + yy_1)/f} dx_1 dy_1 \\ &= \tilde{E}_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \end{aligned} \quad (3-24)$$

式中, $\tilde{E}_0 = \tilde{E}_0(0, 0) = Cab$ 是观察屏中心点 P_0 处的光场复振幅; a, b 分别是矩形孔沿 x_1, y_1 轴方向的宽度; α, β 分别为

$$\alpha = \frac{kax}{2f} \quad (3-25)$$

$$\beta = \frac{kby}{2f} \quad (3-26)$$

则在 $P(x, y)$ 点的光强度为

$$I(x, y) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (3-27)$$

式中, I_0 是 P_0 点的光强度, 且有 $I_0 = |Cab|^2$ 。

下面, 我们对衍射图样进行讨论。

(1) 衍射光强分布 对于沿 x 轴的光强度分布, 因 $y=0$, 有

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (3-28)$$

当 $\alpha=0$ 时(对应于 P_0 点), 有主极大, $I_M/I_0=1$ 。在 $\alpha=m\pi (m=\pm 1, \pm 2, \dots)$ 处, 有极小值, $I_M=0$, 与这些 α 值相应的点是暗点, 暗点的位置为

$$x = m \frac{2\pi f}{ka} = m \frac{f\lambda}{a} \quad (3-29)$$

相邻两暗点之间的间隔为

$$\Delta x = \frac{f\lambda}{a} \quad (3-30)$$

在相邻两个暗点之间有一个强度次极大, 次极大的位置由下式决定:

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \right] = 0$$

即

$$\tan \alpha = \alpha \quad (3-31)$$

这一方程可以利用图解法求解。如图 3-12 所示, 在同一坐标系中分别作出曲线 $F=\tan \alpha$ 和 $F=\alpha$, 其交点即为方程的解。头几个次极大所对应的 α 值, 已列于表 3-1 中。在图 3-12 中还给出了沿 x 方向的光强度分布。

夫朗和费矩形孔衍射在 y 轴上的光强度分布由

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (3-32)$$

决定, 其分布特性与 x 轴类似。

在 x, y 轴以外各点的光强度, 可按(3-27)式进行计算, 图 3-13 给出了一些特征点的光强度相对值。显然, 尽管在 xOy 面内存在一些次极大点, 但它们的光强度极弱。

表 3-1 矩形孔衍射沿 x 轴的光强度分布

α	$\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$	
0	1	主极大
π	0	极小
$1.430\pi=4.493$	0.047 18	次极大
2π	0	极小
$2.459\pi=7.725$	0.016 94	次极大
3π	0	极小
$3.470\pi=10.90$	0.008 34	次极大
4π	0	极小
$4.479\pi=14.07$	0.005 03	次极大
5π	0	极小

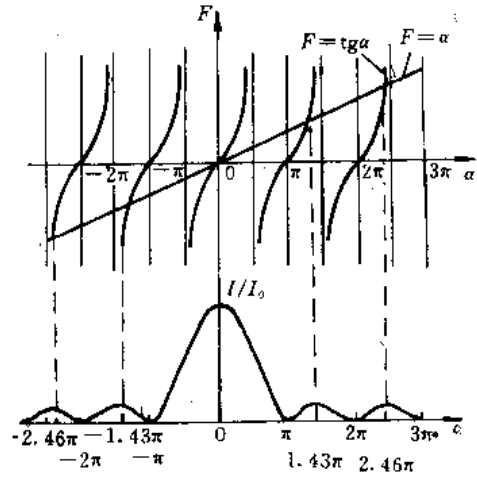


图 3-12 用作图法求衍射次极大

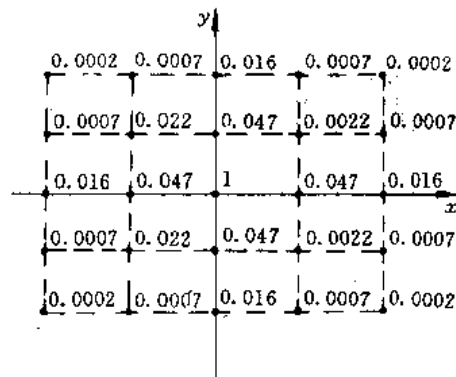


图 3-13 夫朗和费矩形孔衍射图样中一些特征点的相对强度

(2) 中央亮斑 矩形孔衍射的光能量主要集中在中央亮斑处, 其边缘在 x 、 y 轴上的位置是

$$x = \pm \frac{f\lambda}{a} \quad \text{和} \quad y = \pm \frac{f\lambda}{b} \quad (3-33)$$

中央亮斑面积为

$$S_0 = \frac{4f^2\lambda^2}{ab} \quad (3-34)$$

该式说明, 中央亮斑面积与矩形孔面积成反比, 在相同波长和装置下, 衍射孔愈小, 中央亮斑愈大, 但是, 由

$$I_0 = |Cab|^2 = \frac{A^2 a^2 b^2}{f^2 \lambda^2} \quad (3-35)$$

可见, 相应的 P_0 点光强度愈小。

(3) 衍射图形状 当孔径尺寸 $a=b$, 即为方形孔径时, 沿 x 、 y 方向有相同的衍射图样。当 $a \neq b$, 即对于矩形孔径, 其衍射图样沿 x 、 y 方向的形状虽然一样, 但线度不同。例

如, $a < b$ 时, 衍射图样沿 x 轴亮斑宽度比沿 y 轴的亮斑宽度大, 如图 3-10 所示。

2. 夫朗和费圆孔衍射

由于光学仪器的光瞳通常是圆形的, 所以讨论圆孔衍射现象对光学仪器的应用, 具有重要的实际意义。

夫朗和费圆孔衍射的讨论方法与矩形孔衍射的讨论方法相同, 只是由于圆孔结构的几何对称性, 采用极坐标处理更加方便。

如图 3-14 所示, 设圆孔半径为 a , 圆孔中心 O_1 位于光轴上, 则圆孔上任一点 Q 的位置坐标为 ρ_1, φ_1 , 与相应的直角坐标 x_1, y_1 的关系为

$$x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1$$

$$y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1$$

类似地, 观察屏上任一点 P 的位置坐标 ρ, φ 与相应的直角坐标的关系为

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

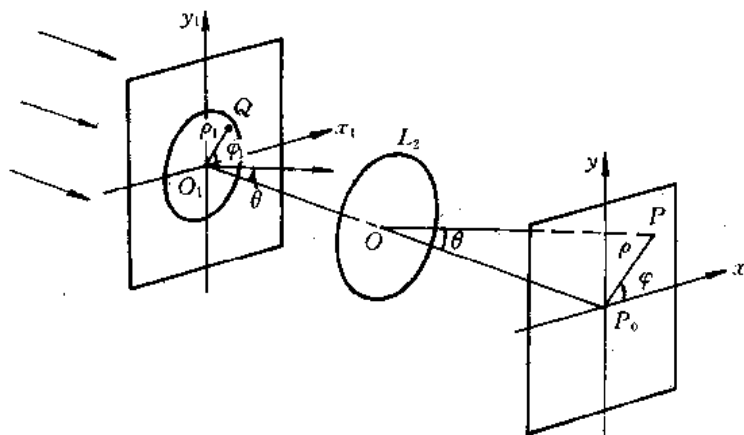


图 3-14 夫朗和费圆孔衍射光路

由此, P 点的光场复振幅按照(3-22)式, 在经过坐标变换后为

$$\vec{E}(\rho, \varphi) = C \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho_1 \theta \cos(\varphi_1 - \varphi)} \rho_1 d\rho_1 d\varphi_1 \quad (3-36)$$

式中

$$\theta = \frac{\rho}{f}$$

是衍射方向与光轴的夹角, 称为衍射角。在这里, 已利用了 $\sin \theta \approx \theta$ 的近似关系。

根据零阶贝塞尔函数的积分表示式

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \alpha} d\alpha$$

可将(3-36)式变换为

$$\vec{E}(\rho, \varphi) = C \int_0^a 2\pi J_0(k\rho_1 \theta) \rho_1 d\rho_1$$

这里已利用了 $J_0(k\rho_1 \theta)$ 为偶函数的性质。再由贝塞尔函数的性质

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$$

式中, $J_1(x)$ 为一阶贝塞尔函数, 可得

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\rho, \varphi) &= \frac{2\pi C}{(k\theta)^2} \int_0^{ka\theta} (k\rho_1\theta) J_0(k\rho_1\theta) d(k\rho_1\theta) \\ &= \frac{2\pi a^2 C}{ka\theta} J_1(ka\theta) \end{aligned} \quad (3-37)$$

因此, P 点的光强度为

$$\begin{aligned} I(\rho, \varphi) &= (\pi a^2)^2 |C|^2 \left[\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta} \right]^2 \\ &= I_0 \left[\frac{2J_1(\Phi)}{\Phi} \right]^2 \end{aligned} \quad (3-38)$$

式中, $I_0 = S^2(A/\lambda f)^2$ 是光轴上 P_0 点的光强; $S = \pi a^2$ 是圆孔面积; $\Phi = ka\theta$ 是圆孔边缘与中心点在同一 θ 方向上光线间的相位差。(3-38) 式就是夫朗和费圆孔衍射的光强度分布公式, 它是光学仪器理论中的一个十分重要的公式。

由(3-38)式, 可以得到夫朗和费圆孔衍射的如下特点:

(1) 衍射图样 由 $\Phi = ka\theta$ 及(3-38)式可见, 夫朗和费圆孔衍射的光强度分布仅与衍射角 θ 有关(或者, 由 $\theta = \rho/f$, 仅与 ρ 有关), 而与方位角 φ 坐标无关。这说明, 夫朗和费圆孔衍射图样是圆形条纹(图 3-15)。

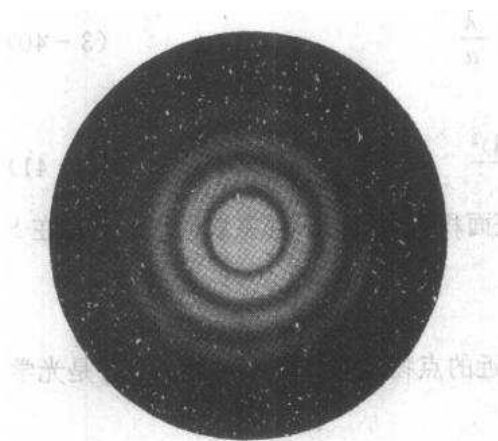


图 3-15 圆孔夫朗和费衍射图样

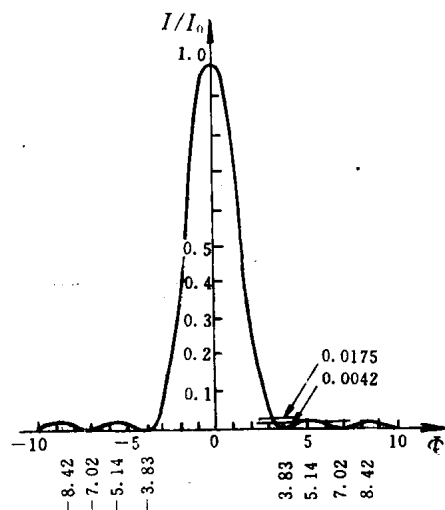


图 3-16 夫朗和费圆孔衍射光强度分布

(2) 衍射图样的极值特性 由贝塞尔函数的级数定义, 可将(3-38)式表示为

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{2J_1(\Phi)}{\Phi} \right]^2 = \left[1 - \frac{\Phi^2}{2!2^2} + \frac{\Phi^4}{2!3!2^4} - \dots \right]^2$$

该强度分布曲线如图 3-16 所示。当 $\Phi = 0$ 时, 即对应光轴上的 P_0 点, 有 $I = I_0$, 它是衍射光强的主极大值。当 Φ 满足 $J_1(\Phi) = 0$ 时, $I = 0$, 这些 Φ 值决定了衍射暗环的位置。在相邻两个暗环之间存在一个衍射次极大值, 其位置由满足下式的 Φ 值决定:

$$\frac{d}{d\Phi} \left[\frac{J_1(\Phi)}{\Phi} \right] = -\frac{J_2(\Phi)}{\Phi} = 0$$

Click to buy NOW!
这些次极大值位置即为衍射亮环的位置。上式中, $J_2(\Phi)$ 为二阶贝塞尔函数。表 3-2 列出了中央的几个亮环和暗环的 Φ 值及相对光强大小。

表 3-2 圆孔衍射的光强分布

条纹序数	Φ	$[2J_1(\Phi)/\Phi]^2$	光能分布
中央亮纹	0	1	83.78%
第一暗纹	$1.220\pi=3.832$	0	0
第一亮纹	$1.635\pi=5.136$	0.0175	7.22%
第二暗纹	$2.233\pi=7.016$	0	0
第二亮纹	$2.679\pi=8.417$	0.00415	2.77%
第三暗纹	$3.238\pi=10.174$	0	0
第三亮纹	$3.699\pi=11.620$	0.0016	1.46%

由上面的讨论可知, 衍射图样中两相邻暗环的间距不相等, 距离中心愈远, 间距愈小。这一点与矩形孔的衍射图样有别。

(3) 爱里斑 由表 3-2 可见, 中央亮斑集中了入射在圆孔上能量的 83.78%, 这个亮斑叫爱里斑。爱里斑的半径 ρ_0 由第一光强极小值处的 Φ 值决定, 即

$$\Phi_{10} = \frac{ka\rho_0}{f} = 1.22\pi$$

因此

$$\rho_0 = 1.22f \frac{\lambda}{2a} = 0.61f \frac{\lambda}{a} \quad (3-39)$$

或以角半径 θ_0 表示

$$\theta_0 = \frac{\rho_0}{f} = 0.61 \frac{\lambda}{a} \quad (3-40)$$

爱里斑的面积为

$$S_0 = \frac{(0.61\pi f \lambda)^2}{S} \quad (3-41)$$

式中, S 为圆孔面积。可见, 圆孔面积愈小, 爱里斑面积愈大, 衍射现象愈明显。只有在 $S = 0.61\pi f \lambda$ 时, $S_0 = S$ 。

3. 光学成像系统的分辨本领(分辨率)

光学成像系统的分辨本领是指能分辨开两个靠近的点物或物体细节的能力, 它是光学成像系统的重要性能指标。

1) 瑞利判据

从几何光学的观点看, 每个像点应该是一个几何点, 因此, 对于一个无像差的理想光学成像系统, 其分辨本领应当是无限的, 即两个点物无论靠得多近, 像点总可分辨开。但实际上, 光波通过光学成像系统时, 总会因光学孔径的有限性产生衍射, 这就限制了光学成像系统的分辨本领。通常, 由于光学成像系统具有光阑、透镜外框等圆形孔径, 所以讨论它们的分辨本领时, 都是以夫朗和费圆孔衍射为理论基础。

如图 3-17 所示, 设有 S_1 和 S_2 两个非相干点光源, 间距为 ϵ , 它们到直径为 D 的圆孔距离为 R , 则 S_1 和 S_2 对圆孔的张角 α 为

$$\alpha = \frac{\epsilon}{R}$$

由于圆孔的衍射效应， S_1 和 S_2 将分别在观察屏上形成各自的衍射图样。假设其爱里斑关于圆孔的张角为 θ_0 ，则由(3-40)式有

$$\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (3-42)$$

当 $\alpha > \theta_0$ 时，两个爱里斑能完全分开，即 S_1 和 S_2 可以分辨；当 $\alpha < \theta_0$ 时，两个爱里斑分不开， S_1 和 S_2 不可分辨；当 $\alpha \approx \theta_0$ 时，情况比较复杂，不同的人或仪器对爱里斑重叠之分辨有不同的感觉。为了定量地表征分辨本领，需要给出一个简单、公认的标准，目前常采用的仍是 2.4.3 中讨论的瑞利判据。

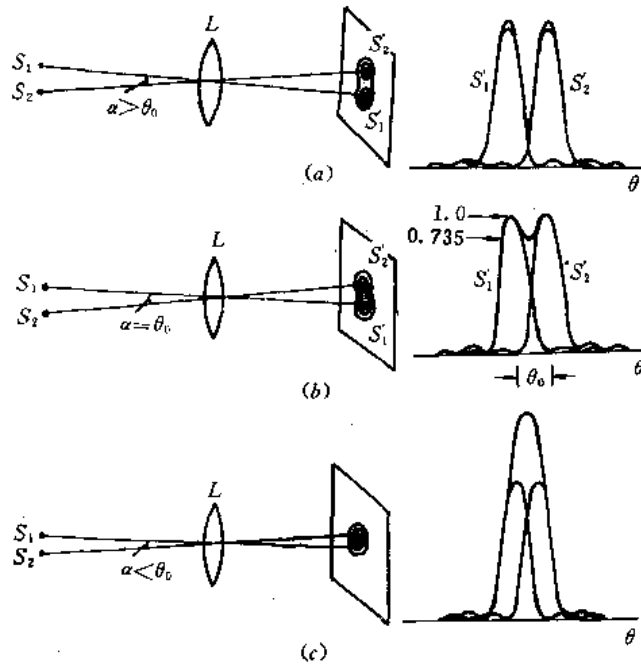


图 3-17 两个点物的衍射像的分辨

根据瑞利判据，将一个点物衍射图样的中央极大位置与另一个点物衍射图样的第一个极小位置重合的状态作为光学成像系统的分辨极限，认为此时光学系统恰好可分辨开这两个点物。这时，两点物衍射图样的重叠区中点光强度约为每个衍射图样中心最亮处光强度的 73.5% (对于缝隙形光阑，约为 81%)。

于是，由于衍射效应，一个光学成像系统对点物成像的爱里斑角半径 θ_0 决定了该系统的分辨极限。

2) 几种光学成像系统的分辨本领

(1) 人眼睛的分辨本领 人眼的成像作用可以等价于一个单凸透镜。通常人眼睛的瞳孔直径约为 1.5~6 mm (视入射光强的大小而定)。当人眼瞳孔直径为 2 mm 时，对于最敏感的光波波长 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ ，按(3-42)式可以算得人眼的最小分辨角 α_c 为

$$\alpha_c = 1.22 \frac{\lambda}{D_c} = 3.3 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

通常由实验测得的人眼最小分辨角约为 $1'$ ($= 2.9 \times 10^{-4} \text{ rad}$)，与上面计算的结果基本相符。

(2) 望远镜的分辨本领 望远镜的作用相当于增大人眼睛的瞳孔。设望远镜物镜的圆形通光孔径直径为 D ，若有两个物点恰好能为望远镜所分辨开，则根据瑞利判据，这两个物点对望远镜的张角 α 为

$$\alpha = \theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (3-43)$$

这也就是望远镜的最小分辨角公式。该式表明，望远镜物镜的直径 D 愈大，分辨本领愈高，并且，这时像的光强也增加了。例如，天文望远镜物镜的直径做得很大(可达 6 m)，原因之一就是为了提高分辨本领。对于 $\lambda=0.55 \mu\text{m}$ 的单色光来说，其最小分辨角 $\alpha=0.023' = 1.12 \times 10^{-7} \text{ rad}$ ，比人眼的分辨本领要大三千倍左右。通常在设计望远镜时，为了充分利用望远镜物镜的分辨本领，应使望远镜的放大率保证物镜的最小分辨角经望远镜放大后等于眼睛的最小分辨角，即放大率应为

$$M = \frac{\alpha_e}{\alpha} = \frac{D}{D_e}$$

(3) 照相物镜的分辨本领 照相物镜一般都是用于对较远物体的成像，感光底片的位置大致与照相物镜的焦平面重合。若照相物镜的孔径为 D ，相应第一极小的衍射角为 θ_0 ，则底片上恰能分辨的两条直线之间的距离 ϵ' 为

$$\epsilon' = f\theta_0 = 1.22f \frac{\lambda}{D} \quad (3-44)$$

习惯上，照相物镜的分辨本领用底片上每毫米内能成多少条恰能分开的线条数 N 表示， N 为

$$N = \frac{1}{\epsilon'} = \frac{1}{1.22\lambda} \frac{D}{f} \quad (3-45)$$

式中， D/f 是照相物镜的相对孔径。可见，照相物镜的相对孔径愈大，分辨本领愈高。例如，对于 $D/f=1:3.5$ 的常用照相物镜，若 $\lambda=0.55 \mu\text{m}$ ，则 $N=1490 \times 1/3.5=425$ (条/mm)。作为照相系统总分辨本领的要求来说，感光底片的分辨本领应大于或等于物镜的分辨本领。例如，对于上面的例子，应选择分辨本领大于 425 条/mm 的底片。

(4) 显微镜的分辨本领 显微镜由物镜和目镜组成，在一般情况下系统成像的孔径为物镜框，因此，限制显微镜分辨本领的是物镜框(即孔径光阑)。

显微镜物镜的成像如图 3-18 所示。点物 S_1 和 S_2 位于物镜前焦点外附近，由于物镜的焦距很短，所以 S_1 和 S_2 发出的光波以很大的孔径角入射到物镜，其像 S'_1 和 S'_2 离物镜较

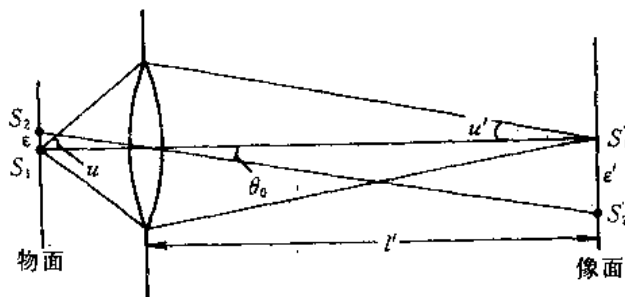


图 3-18 显微镜的分辨本领



远。虽然 S_1 和 S_2 离物镜很近，它们的像也是物镜边缘(孔径光阑)的夫朗和费衍射图样，其爱里斑的半径为

$$\rho_0 = l' \theta_0 = 1.22 \frac{l' \lambda}{D} \quad (3-46)$$

式中， l' 是像距； D 是物镜直径。如果两衍射图样中心 S_1' 和 S_2' 之间距离 $\epsilon' = \rho_0$ ，则按照瑞利判据，两衍射图样刚好可以分辨，此时的二点物间距 ϵ 就是物镜的最小分辨距离。

由于显微镜物镜的成像满足阿贝(Abbe)正弦条件

$$n \epsilon \sin u = n' \epsilon' \sin u' \quad (3-47)$$

式中， n 和 n' 分别是物方和像方折射率，在 $n'=1$ 时，因 $l' \gg D$ ，有

$$\sin u' \approx u' = \frac{D/2}{l'}$$

所以，能分辨两点物的最小距离为

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\epsilon' \sin u'}{n \sin u} = 1.22 \frac{l' \lambda}{D} \frac{D/2l'}{n \sin u} \\ &= \frac{0.61 \lambda}{n \sin u} = \frac{0.61 \lambda}{NA} \end{aligned} \quad (3-48)$$

式中， $NA = n \sin u$ 称为物镜的数值孔径。由此可见，提高显微镜分辨本领的途径是：
① 增大物镜的数值孔径；② 减小波长，例如，电子显微镜利用电子束的波动性成像，由于其波长可达 10^{-3} nm，因而分辨本领将比可见光显微镜提高几十万倍，只是由于电子显微镜的数值孔径较小，其分辨本领实际上仅提高千倍以上。

3.2.3 夫朗和费单缝和多缝衍射

1. 夫朗和费单缝衍射

对于上面讨论的夫朗和费矩形孔衍射，如果矩形孔一个方向的尺寸比另一个方向大得多，如 $b \gg a$ ，则该矩形孔的衍射就变成一个单(狭)缝衍射(图 3-19(a))。这时，沿 y 方向的衍射效应不明显，只在 x 方向有亮暗变化的衍射图样(图 3-19(b))。按照(3-22)式，衍射屏上 P 点的光场复振幅为

$$\tilde{E}(P) = C \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx_1/f} dx_1 = \tilde{E}_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (3-49)$$

式中， $\tilde{E}_0 = Ca$ 是观察屏中心点 P_0 处的光场复振幅。相应 P 点的光强度为

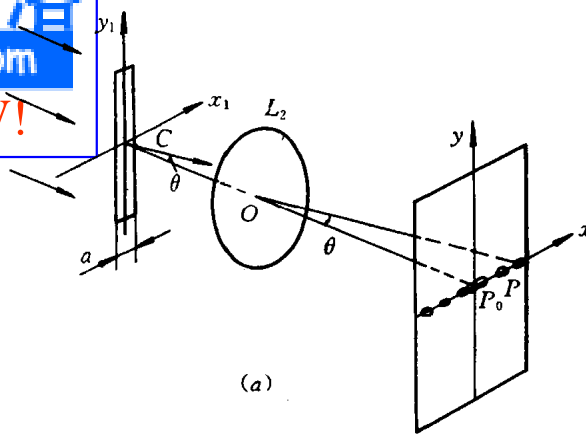
$$I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (3-50)$$

式中， $I_0 = |\tilde{E}_0|^2$ ， $\alpha = kax/(2f) = (\pi a/\lambda)(x/f) \approx (\pi a \sin \theta)/\lambda$ ， θ 为衍射角。在衍射理论中，通常称 $(\sin \alpha/\alpha)^2$ 为单缝衍射因子。因此，矩形孔衍射的相对强度分布是两个单缝衍射因子的乘积。

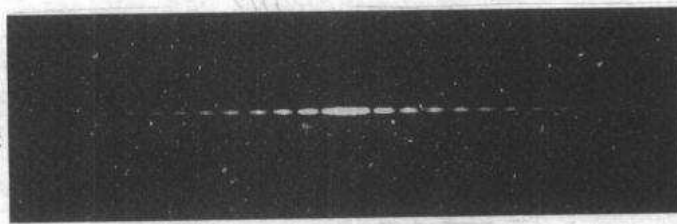
在单缝衍射实验中，常采用与单缝平行的线光源代替点光源，这时，在观察屏上将得到一些与单缝平行的直线衍射条纹(图 3-20)。

单缝衍射图样的主要特征是：

(1) 单色光照明的衍射光强分布 单色光照明时，当 $\alpha=0$ ，对应于 $\theta=0$ 的衍射位置是光强中央主极大值(亮条纹)；当 $\alpha=m\pi$ ，对应于满足

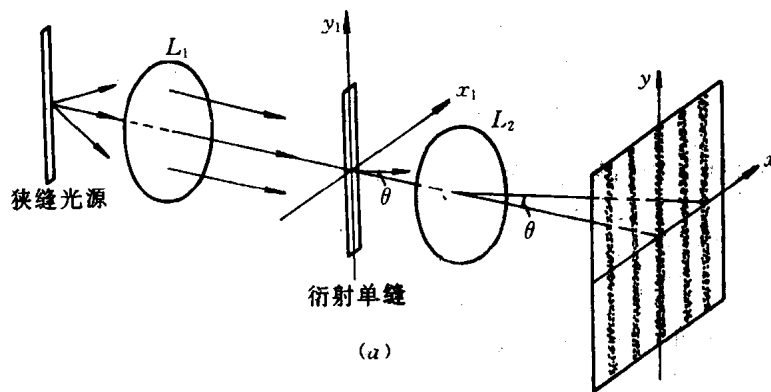


(a)

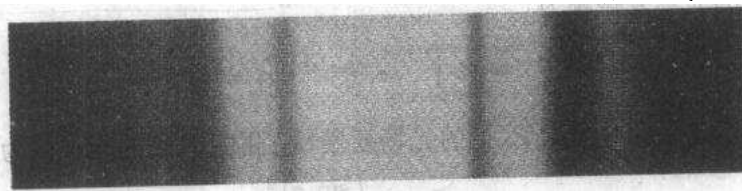


(b)

图 3-19 单缝夫朗和费衍射装置



(a)



(b)

图 3-20 用线光源照明的单缝夫朗和费衍射装置

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-51)$$

的衍射角方向为光强极小值(暗条纹)。对(3-51)式两边取微分,有

$$\cos \theta \Delta \theta = \Delta m \frac{\lambda}{a}$$

由此可得相邻暗条纹的角宽度 $\Delta \theta$ 为

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{a \cos \theta} \quad (3-52)$$

在衍射角很小时, 相邻暗条纹的角宽度为

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a}$$

对于中央亮条纹, 其角宽度 $\Delta\theta_0$ 为 $\Delta\theta$ 的两倍, 即

$$\Delta\theta_0 = 2\Delta\theta = \frac{2\lambda}{a} \quad (3-53)$$

上式说明, 当 λ 一定时, a 小, 则 $\Delta\theta$ 大, 衍射现象显著。例如, $a=100\lambda$ 时, $\Delta\theta=0.573^\circ$, 即第一极小偏离入射光方向仅 0.573° , 光能量的大部分沿 $\theta=0^\circ$ 方向传播, 衍射不明显, 可视为直线传播; 当 $a=10\lambda$ 时, 第一极小偏离入射光方向达 5.7° , 衍射效应显著; 当 $a\approx\lambda$ 时, $\Delta\theta\sim 90^\circ$, 中央主极大已扩大到整个开孔的几何阴影区。

(2) 白光照明 白光照明时, 衍射条纹呈现彩色, 中央是白色, 向外依次是由紫到红变化。

2. 夫朗和费多缝衍射

所谓多缝是指在一块不透光的屏上, 刻有 N 条等间距、等宽度的通光狭缝。夫朗和费多缝衍射的装置如图 3-21 所示。其每条狭缝均平行于 y_1 方向, 沿 x_1 方向的缝宽为 a , 相邻狭缝的间距为 d 。在研究多缝衍射时, 必须注意缝后透镜 L_2 的作用。由于 L_2 的存在, 使得衍射屏上每个单缝的衍射条纹位置与缝的位置无关, 即缝垂直于光轴方向平移时, 其衍射条纹的位置不变。所以, 利用平行光照射多缝时, 其每一个单缝都要产生自己的衍射, 形成各自的一套衍射条纹。当每个单缝等宽时, 各套衍射条纹在透镜焦平面上完全重叠, 其总光强分布为它们的干涉叠加。

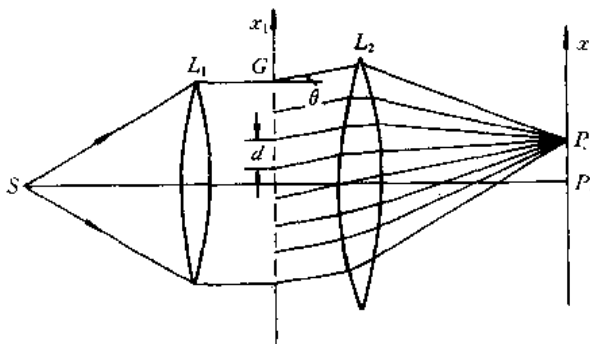


图 3-21 夫朗和费多缝衍射装置

1) 多缝衍射的光强分布

假设图 3-21 中的 S 是线光源, 则 N 个狭缝受到平面光波的垂直照射。如果选取最下面的狭缝中心作为 x_1 的坐标原点, 并只计 x 方向的衍射, 则按照(3-22)式, 观察屏上 P 点的光场复振幅为

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}(P) &= C \int_l e^{-ikx_1/f} dx_1 \\
 &= C \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikx_1/f} dx_1 + \int_{d-\frac{a}{2}}^{d+\frac{a}{2}} e^{-ikx_1/f} dx_1 + \dots + \int_{(N-1)d-\frac{a}{2}}^{(N-1)d+\frac{a}{2}} e^{-ikx_1/f} dx_1 \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= Cae^{-i(N-1)\frac{\varphi}{2}} [1 + e^{-i\varphi} + e^{-i2\varphi} + \dots + e^{-i(N-1)\varphi}] \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikx_1/f} dx_1 \\
 &= Cae^{-i(N-1)\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \quad (3-54)
 \end{aligned}$$

式中

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (3-55)$$

它表示在 x_1 方向上相邻的两个间距为 d 的平行等宽狭缝，在 P 点产生光场的相位差。相应于 P 点的光强度为

$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left[\frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right]^2 \quad (3-56)$$

式中， $I_0 = [Aab/(\lambda f)]^2$ 是单缝衍射情况下 P_0 点的光强。

由上述讨论可以看出，平行光照射多缝时，其每个狭缝都将在 P 点产生衍射场，由于这些光场均来自同一光源，彼此相干，将因干涉效应，使观察屏上的光强度重新分布。因此，多缝衍射现象包含有衍射和干涉双重效应。

由(3-56)式可见， N 个狭缝的衍射光强关系式中包含有两个因子：一个是单缝衍射因子 $(\sin \alpha/\alpha)^2$ ；另外一个因子是 $[\sin(N\varphi/2)/\sin(\varphi/2)]^2$ ，根据以上公式的推导过程可以看出，它是 N 个等振幅，等相位差的光束干涉因子。因此，多缝衍射图样具有等振幅，等相位差多光束干涉和单缝衍射的特征。为简单起见，我们以双缝衍射情况予以说明。此时， $N=2$ ， P 点的光强为

$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left[\frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right]^2 = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3-57)$$

显然，式中的因子 $[\sin \varphi/\sin(\varphi/2)]^2$ 正是前面讨论过的等振幅双光束干涉因子。根据这个式子，绘出了如图 3-22 所示的、 $d=3a$ 情况下的双缝衍射强度分布曲线，其中，(a) 是等振幅双光束干涉强度分布 $\cos^2(\varphi/2)$ 曲线，(b) 是单缝衍射强度分布 $(\sin \alpha/\alpha)^2$ 曲线，(c) 是双缝衍射强度分布曲线。由该图可见，双缝衍射强度分布是等振幅双光束干涉和单缝衍射的共同作用结果，实际上也可看作是等振幅双光束干涉受到单缝衍射的调制。

综上所述，多缝衍射是干涉和衍射的共同效应，它可看作是等振幅、等相位差多光束干涉受到单缝衍射的调制。需要指出的是，单缝衍射因子只与单缝本身的性质有关，而多光束干涉因子则因源于狭缝的周期性排列，与单缝本身的性质无关。因此，如果有 N 个性质相同，但形状与上述狭缝有异的孔径周期排列，则在其衍射强度分布公式中，仍将有所述的多光束干涉因子。此时，只要把单个衍射孔径的衍射因子求出来，乘以多光束干涉因子，即是这种周期性孔径衍射的光强度分布。

为了清楚起见，图 3-23 给出了夫朗和费单缝和五种多缝的衍射图样照片。

2) 多缝衍射图样特性

多缝衍射图样特性可以由多光束干涉和单缝衍射特性确定。

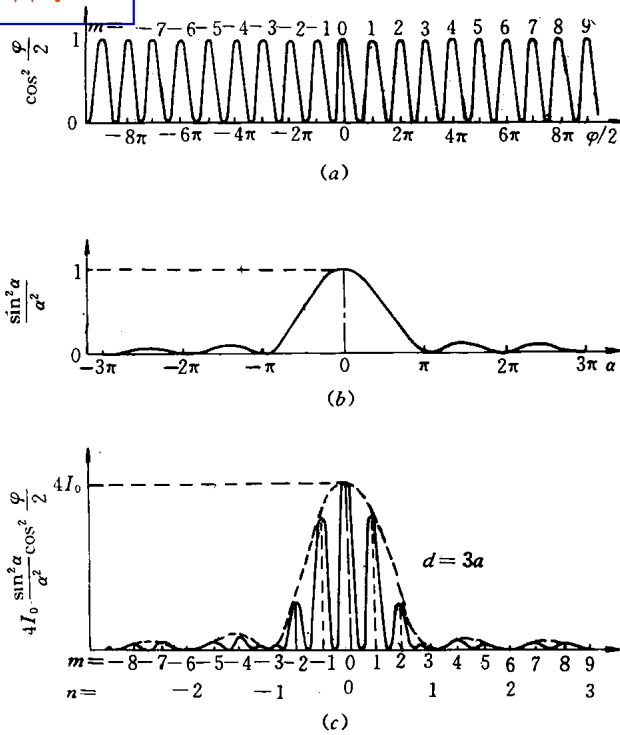


图 3-22 双缝衍射强度分布曲线

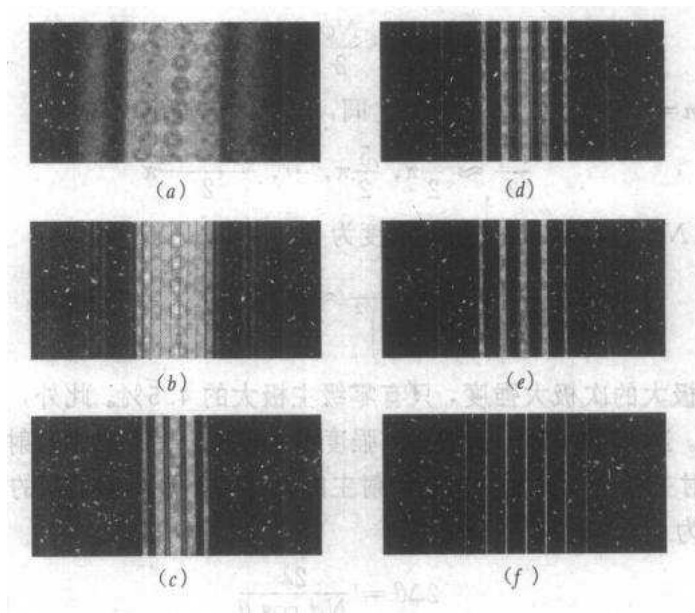


图 3-23 夫朗和费单缝、双缝、多缝衍射的衍射图样照片
 (a) 单缝; (b) 双缝; (c) 3 缝; (d) 5 缝; (e) 6 缝; (f) 20 缝

(1) 多缝衍射的强度极值

① 多缝衍射主极大。由多光束干涉因子可以看出, 当

$$\varphi = 2m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



$$d \sin \theta = m\lambda \quad (3-58)$$

时，多光束干涉因子为极大值，称此时的多缝衍射为主极大。由于 $\lim_{\varphi \rightarrow 2m\pi} [\sin(N\varphi/2)/\sin(\varphi/2)] = N$ ，所以多缝衍射主极大强度为

$$I_M = N^2 I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (3-59)$$

它们是单缝衍射在各级主极大位置上所产生强度的 N^2 倍，其中，零级主极大的强度最大，等于 $N^2 I_0$ 。

② 多缝衍射极小。当 $N\varphi/2$ 等于 π 的整数倍，而 $\varphi/2$ 不是 π 的整数倍，即

$$\frac{N\varphi}{2} = (Nm + m')\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad m' = 1, 2, \dots, N-1$$

或

$$d \sin \varphi = \left(m + \frac{m'}{N} \right) \lambda \quad (3-60)$$

时，多缝衍射强度最小，为零。比较(3-58)式和(3-60)式可见，在两个主极大之间，有 $(N-1)$ 个极小。由(3-60)式，相邻两个极小(零值)之间($\Delta m' = 1$)的角距离 $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \quad (3-61)$$

③ 多缝衍射次极大。由多光束干涉因子可见，在相邻两个极小值之间，除了主极大外，还可能是强度极弱的次极大。在两个主极大之间，有 $(N-2)$ 个次极大，次极大的位置可以通过对(3-57)式求极值确定，近似由

$$\sin^2 \frac{N\varphi}{2} = 1$$

求得。例如，在 $m=0$ 和 $m=1$ 级主极大之间，次极大位置出现在

$$\frac{N\varphi}{2} \approx \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots, \frac{2N-3}{2}\pi$$

共 $(N-2)$ 个。在 $N\varphi/2 \approx 3\pi/2$ 时，衍射强度为

$$I \approx \frac{I_0}{\left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2} \approx \frac{I_0}{\left(\frac{\varphi}{2} \right)^2} \approx N^2 I_0 \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 = 0.045 I_M$$

即最靠近零级主极大的次极大强度，只有零级主极大的 4.5%。此外，次极大的宽度随着 N 的增大而减小。当 N 很大时，它们将与强度零点混成一片，成为衍射图样的背景。

(2) 多缝衍射主极大角宽度 多缝衍射主极大与相邻极小值之间的角距离是 $\Delta\theta$ ，主极大的条纹角宽度为

$$2\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd \cos \theta} \quad (3-62)$$

该式表明，狭缝数 N 愈大，主极大的角宽度愈小。

(3) 缺级 由于多缝衍射是干涉和衍射的共同效应，所以存在缺级现象。对于某一级干涉主极大的位置，如果恰有 $\sin \alpha/\alpha = 0$ ，即相应的衍射角 θ 同时满足

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= m\lambda & m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ a \sin \theta &= n\lambda & n &= \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

$$m = \frac{d}{a}n \quad (3-63)$$

则该级主极大将消失，多缝衍射强度变为零，成为缺级。

从以上讨论可以看出，在多缝衍射中，随着狭缝数目的增加，衍射图样有两个显著的变化：一是光的能量向主极大的位置集中（为单缝衍射的 N^2 倍）；二是亮条纹变得更加细而亮（约为双光束干涉线宽的 $1/N$ ）。对于一个 $N=10^4$ 的多缝来说，这将使主极大光强增大 10^8 倍，条纹宽度缩为万分之一。

另外，由(3-58)式可知，干涉主极大位置随入射光的波长变化，同一级次的主极大方向（衍射角 θ ），将随着波长的增加而增大，并且，当衍射角 θ 不大时，这种变化近于线性关系。

3.2.4 巴俾涅(Babinet)原理

前面讨论了圆孔、单缝的衍射现象，如果在光路中的障碍物改换为圆盘、细丝(窄带)，其衍射特性如何呢？当然，我们可以利用菲涅耳—基尔霍夫衍射公式重新求解，但是如果根据巴俾涅原理，就可使问题的处理大大简化。

若两个衍射屏 Σ_1 和 Σ_2 中，一个屏的开孔部分正好与另一个屏的不透明部分对应，反之亦然，这样一对衍射屏称为互补屏，如图 3-24 所示。设 $\tilde{E}_1(P)$ 和 $\tilde{E}_2(P)$ 分别表示 Σ_1 和 Σ_2 单独放在光源和观察屏之间时，观察屏上 P 点的光场复振幅， $\tilde{E}_0(P)$ 表示无衍射屏时 P 点的光场复振幅。根据惠更斯—菲涅耳原理， $\tilde{E}_1(P)$ 和 $\tilde{E}_2(P)$ 可表示成对

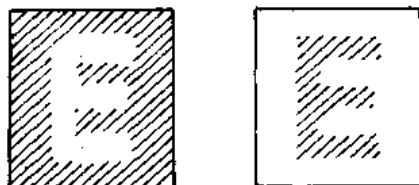


图 3-24 互补衍射屏

Σ_1 和 Σ_2 开孔部分的积分。而两个屏的开孔部分加起来就相当于屏不存在，因此，

$$\tilde{E}_0(P) = \tilde{E}_1(P) + \tilde{E}_2(P) \quad (3-64)$$

该式说明，两个互补屏在衍射场中某点单独产生的光场复振幅之和等于无衍射屏、光波自由传播时在该点产生的光场复振幅。这就是巴俾涅原理。因为光波自由传播时，光场复振幅容易计算，所以利用巴俾涅原理可以方便地由一种衍射屏的衍射光场，求出其互补衍射屏产生的衍射光场。

由巴俾涅原理可得到如下两个结论：第一，若 $\tilde{E}_1(P)=0$ ，则 $\tilde{E}_2(P)=\tilde{E}_0(P)$ 。因此，放置一个屏时，相应于光场为零的那些点，在换上它的互补屏时，光场与没有屏时一样；第二，若 $\tilde{E}_0(P)=0$ ，则 $\tilde{E}_1(P)=-\tilde{E}_2(P)$ 。这就意味着在 $\tilde{E}_0(P)=0$ 的那些点， $\tilde{E}_1(P)$ 和 $\tilde{E}_2(P)$ 的相位差为 π ，而光强度 $I_1(P)=|\tilde{E}_1(P)|^2$ 和 $I_2(P)=|\tilde{E}_2(P)|^2$ 相等。这就是说，两个互补屏不存在时光场为零的那些点，互补屏产生完全相同的光强度分布。

利用巴俾涅原理很容易由圆孔、单缝的夫朗和费衍射特性得到圆盘、窄带的夫朗和费衍射图样。例如，对于图 3-20 所示的用线光源照明单缝的夫朗和费衍射装置，如果将单缝衍射屏换成同样宽度的不透光窄带，则在偏离衍射图样中央的地方，将有与单缝衍射类似的衍射图样。这是因为单缝和窄带是一对互补屏，在观察屏上，除中央点外，均有 $\tilde{E}_0(P)=0$ ，所以根据巴俾涅原理，除中央点外，单缝和窄带衍射图样相同。因此，可以直接将单

缝衍射特性应用于窄带衍射中。例如，窄带衍射的暗条纹间距公式为

$$e = \Delta x = f \frac{\lambda}{a}$$

在窄带(细丝)衍射的实验中，如果测出了衍射暗条纹的间距 e ，就可以计算出窄带(细丝)的宽度(直径)。近年来研制出的激光细丝测径仪，就是利用这个原理测量细丝(例如金属或纤维丝)直径的。

3.3 菲涅耳衍射

菲涅耳衍射是在菲涅耳近似条件成立的距离范围内所观察的衍射现象。相对于夫朗和费衍射而言，观察屏距衍射屏不太远。此时，照射到衍射屏上的光波波面和离开衍射孔到达观察屏上的波面都不能作为平面处理。因此，直接运用菲涅耳—基尔霍夫衍射公式定量计算菲涅耳衍射，数学处理非常复杂。通常在半定量处理菲涅耳衍射现象时，均采用比较简单、物理概念很清晰的菲涅耳波带法(代数加法)或图解法(振幅矢量加法)。

3.3.1 菲涅耳圆孔衍射——菲涅耳波带法

1. 菲涅耳波带法

图 3-25 绘出了一个单色点光源 S 照射圆孔衍射屏的情况， P_0 是圆孔中垂线上的一点，在某时刻通过圆孔的波面为 MOM' ，半径为 R 。

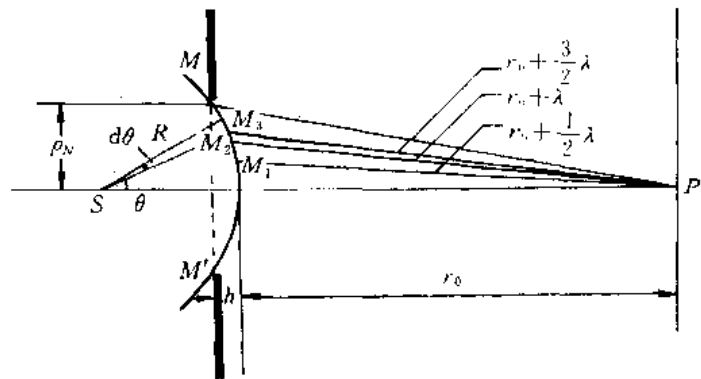


图 3-25 圆孔衍射的波带法示意图

现在以 P_0 为中心，以 r_1^* , r_2 , ..., r_N 为半径，在波面上作圆，把 MOM' 分成 N 个环带，所选取的半径为

$$\begin{aligned}
 r_1 &= r_0 + \frac{\lambda}{2} \\
 r_2 &= r_0 + \frac{2\lambda}{2} \\
 &\vdots \\
 r_N &= r_0 + \frac{N\lambda}{2}
 \end{aligned}$$

因此，相邻两个环带上的相应两点到 P_0 点的光程差为半个波长，这样的环带叫菲涅耳半

波带(或非涅耳波带)。设 a_1, a_2, \dots, a_N 分别为第 1、第 2、……、第 N 个波带在 P_0 点产生光场振幅的绝对值, 则由惠更斯—菲涅耳原理, P_0 点的光场振幅应为各波带在 P_0 点产生光场振幅的叠加, 近似为

$$A_N = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \pm a_N \quad (3-65)$$

当 N 为奇数时, a_N 前面取十号, N 为偶数时, a_N 前面取一号。这种取法是由于相邻的波带在 P_0 点引起的振动相位相反决定的。因此, 为利用菲涅耳波带法求 P_0 点的光强, 首先应求出各个波带在 P_0 点振动的振幅。

由惠更斯—菲涅耳原理可知, 各波带在 P_0 点产生的振幅 a_N 主要由三个因素决定: 波带的面积大小 ΔS_N ; 波带到 P_0 点的距离 \bar{r}_N ; 波带对 P_0 点连线的倾斜因子 $K(\theta)$, 且

$$a_N \propto \frac{\Delta S_N}{\bar{r}_N} K(\theta) \quad (3-66)$$

(1) 波带面积 ΔS_N 在图 3-26 中, 设圆孔对 P_0 点共露出 N 个波带, 这 N 个波带相应的波面面积是

$$S_N = 2\pi R h \quad (3-67)$$

式中, h 为 $\overline{OO'}$ 长度。因为

$$\rho_N^2 = R^2 - (R - h)^2 = r_N^2 - (r_0 + h)^2$$

所以

$$h = \frac{r_N^2 - r_0^2}{2(R + r_0)} \quad (3-68)$$

又由于 $r_N = r_0 + N\lambda/2$, 故有

$$r_N^2 = r_0^2 + Nr_0\lambda + N^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \quad (3-69)$$

将(3-68)式、(3-69)式代入(3-67)式中, 得

$$S_N = \frac{\pi R}{R + r_0} \left(Nr_0\lambda + N^2 \frac{\lambda^2}{4} \right) \quad (3-70)$$

同样也可以求得 $(N-1)$ 个波带所对应的波面面积为

$$S_{N-1} = \frac{\pi R}{R + r_0} \left[(N-1)r_0\lambda + (N-1)^2 \frac{\lambda^2}{4} \right] \quad (3-71)$$

两式相减, 即得第 N 个波带的面积为

$$\Delta S_N = S_N - S_{N-1} = \frac{\pi R \lambda}{R + r_0} \left[r_0 + \left(N - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \right] \quad (3-72)$$

由此可见, 波带面积随着序数 N 的增大而增加。但由于通常波长 λ 相对于 R 和 r_0 很小, λ^2 项可以略去, 因此可视各波带面积近似相等。

(2) 各波带到 P_0 点的距离 \bar{r}_N 因为 r_N 和 r_{N-1} 是第 N 个波带的两个边缘到 P_0 点的距离, 所以第 N 个波带到 P_0 点的距离可取两者的平均值, 即

$$\bar{r}_N = \frac{r_N + r_{N-1}}{2} = r_0 + \left(N - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (3-73)$$

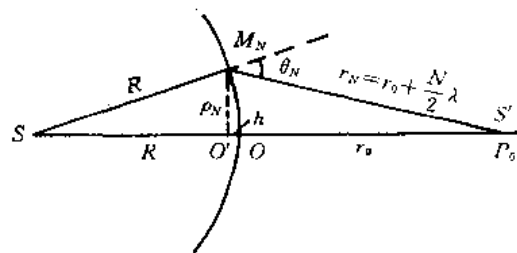


图 3-26 求波带面积



这说明第 N 个波带到 P_0 点的距离随着序数 N 的增大而增加。

(3) 倾斜因子 $K(\theta)$ 由图 3-26 可见, 倾斜因子为

$$K(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad (3-74)$$

将(3-72)式、(3-73)式和(3-74)式代入(3-66)式, 可以得到各个波带在 P_0 点产生的光振动振幅

$$a_N \propto \frac{\pi R \lambda}{R + r_0} \frac{1 + \cos \theta_N}{2} \quad (3-75)$$

可见, 各个波带产生的振幅 a_N 的差别只取决于倾角 θ_N 。由于随着 N 增大, θ_N 也相应增大, 所以各波带在 P_0 点所产生的光场振幅将随之单调减小,

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_N$$

又由于这种变化比较缓慢, 所以近似有下列关系:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1 + a_3}{2} \\ a_4 &= \frac{a_3 + a_5}{2} \\ &\vdots \\ a_{2m} &= \frac{a_{2m-1} + a_{2m+1}}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

于是, 在 N 为奇数时

$$A_N = \frac{a_1}{2} + \frac{a_N}{2}$$

N 为偶数时,

$$A_N = \frac{a_1}{2} + \frac{a_{N-1}}{2} - a_N$$

当 N 较大时, $a_{N-1} \approx a_N$, 故有

$$A_N = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_N}{2} \quad (3-76)$$

其中, N 为奇数时, 取十号; N 为偶数时, 取一号。由此得出结论: 圆孔对 P_0 点露出的波带数 N 决定了 P_0 点衍射光的强弱。

下面给出波带数 N 和圆孔半径 ρ_N 之间的关系。

由图 3-26 可以看出:

$$\rho_N^2 = r_N^2 - (r_0 + h)^2 \approx r_N^2 - r_0^2 - 2r_0h$$

因为

$$r_N^2 = \left(r_0 + \frac{N\lambda}{2} \right)^2 = r_0^2 + Nr_0\lambda + \frac{N^2\lambda^2}{4}$$

将其代入(3-78)式, 可得

$$h = \frac{Nr_0\lambda + \frac{N^2\lambda^2}{4}}{2(R + r_0)}$$



$$\begin{aligned} \rho_N^2 &= Nr_0\lambda + \frac{N^2\lambda^2}{4} - 2r_0 \frac{Nr_0\lambda + \frac{N^2\lambda^2}{4}}{2(R+r_0)} \\ &= \frac{NR\lambda}{R+r_0} \left(r_0 + \frac{N\lambda}{4} \right) \end{aligned}$$

一般情况下, 均有 $r_0 \gg N\lambda$, 故

$$\rho_N^2 = Nr_0 \frac{R\lambda}{R+r_0} \quad (3-77)$$

这就是圆孔半径 ρ_N 和露出的波带数 N 之间的关系。该式也可表示成露出的波带数 N 与圆孔半径 ρ_N 的关系,

$$N = \frac{\rho_N^2}{\lambda R} \left(1 + \frac{R}{r_0} \right) \quad (3-78)$$

2. 菲涅耳圆孔衍射

由以上对菲涅耳波带法的讨论可知, 菲涅耳圆孔衍射有如下特点:

(1) r_0 对衍射现象的影响 由(3-78)式可见, 对于一定的 ρ_N 和 R , 露出的波带数 N 随 r_0 变化。 r_0 不同, N 也不同, 从而 P_0 点的光强度也不同。由(3-76)式, 当 N 为奇数时, 对应是亮点; N 为偶数时, 对应是暗点。所以, 当观察屏前后移动(r_0 变化)时, P_0 点的光强将明暗交替地变化, 这是典型的菲涅耳衍射现象。

在 ρ_N 和 R 一定时, 随着 r_0 的增大, N 减小, 菲涅耳衍射效应很显著。当 r_0 大到一定程度时, 可视 $r_0 \rightarrow \infty$, 露出的波带数 N 不再变化, 且为

$$N = N_m = \frac{\rho_N^2}{\lambda R} \quad (3-79)$$

该波带数称为菲涅耳数, 它是一个描述圆孔衍射效应的很重要的参量。此后, 随着 r_0 的增大, P_0 点光强不再出现明暗交替的变化, 逐渐进入夫朗和费衍射区。而当 r_0 很小时, N 很大, 衍射效应不明显。当 r_0 小到一定程度时, 可视光为直线传播。

(2) N 对衍射现象的影响 在 R 和 r_0 一定时, 圆孔对 P_0 露出的波带数 N 与圆孔半径有关, $N \propto \rho_N^2$ 。于是, 孔大, 露出的波带数多, 衍射效应不显著; 孔小, 露出的波带数少, 衍射效应显著。当孔趋于无限大时, $a_N \rightarrow 0$,

$$A_\infty = \frac{a_1}{2} \quad (3-80)$$

这说明孔很大时, P_0 点的光强不再变化, 这正是光直线传播的特点。因此, 光的直线传播, 实际是透光孔径较大情况下的一种特殊情况。光波波前完全不被遮挡时的 P_0 点光场振幅 A_0 , 只是有圆孔时第一个波带在 P_0 点产生光场振幅 a_1 的一半。这说明, 当孔小到只露出一个波带时, P_0 点的光强度由于衍射效应, 增为无遮挡时 P_0 点光强度的四倍。

(3) 波长对衍射现象的影响 当波长增大时, N 减少。这说明在 ρ_N 、 R 、 r_0 一定的情况下, 长波长光波的衍射效应更为显著, 更能显示出其波动性。

(4) 轴外点的衍射 对于轴外任意点 P 的光强度, 原则上也可以用同样的方法进行讨论。

如图 3-27 所示, 为了确定不在轴上的任意点 P 的光强, 可先设想衍射屏不存在, 以

Click to buy NOW!

以 P_0 为中心对于 P 点作半波带,然后再放上圆孔衍射屏,圆孔中心为 O 。这时由于圆孔和波面对 P 点的波带不同心,波带的露出部分如图 3-28 所示,图中为了清楚起见,把偶数带画上了斜线。于是,这些波带在 P 点引起振动的振幅大小,不仅取决于波带的数目,还取决于每个波带露出部分的大小。精确计算 P 点的合成振动振幅是很复杂的,但可以预计,当 P 点逐渐偏离 P_0 点时,有的地方衍射光会强些,有些地方会弱些。

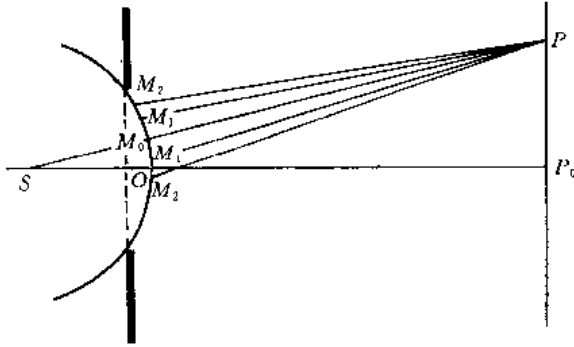


图 3-27 轴外点波带的分法

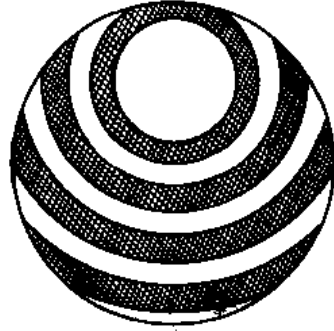


图 3-28 轴外点波带的分布

由于整个装置是轴对称的,在观察屏上离 P_0 点距离相同的 P 点都应有同样的光强,因此菲涅耳圆孔衍射图样是一组亮暗相间的同心圆环条纹,中心可能是亮点,也可能是暗点。

应当指出,上述的讨论仅对点光源才成立,如果不是点光源,将因有限大小光源中的每一个点源都产生自己的一套衍射图样,导致干涉图形变得模糊。

3. 菲涅耳圆屏衍射

与上面的情况不同,如果用一个不透明的圆形板(或一切具有圆形投影的不透明障碍物)替代圆孔衍射屏,将会产生怎样的衍射图样?

如图 3-29 所示, S 为单色点光源, MM' 为圆屏, P_0 为观察点。分析方法与前相同,仍然由 P_0 对波面作波带,只是在圆屏的情况下,开头的 N 个波带被挡住,第 $(N+1)$ 个以外的波带全部透光。因此, P_0 点的合振幅为

$$\begin{aligned}
 A_{\infty} &= a_{N+1} - a_{N+2} + \cdots + a_{\infty} \\
 &= \frac{a_{N+1}}{2} + \left(\frac{a_{N+1}}{2} - a_{N+2} + \frac{a_{N+3}}{2} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{a_{N+3}}{2} - a_{N+4} + \frac{a_{N+5}}{2} \right) + \cdots \\
 &= \frac{a_{N+1}}{2}
 \end{aligned} \tag{3-81}$$

这就是说,只要屏不十分大, $(N+1)$ 为不大的有限值,则 P_0 点的振幅总是刚露出的第一个波带在 P_0 点所产生的光场振幅的一半,即 P_0 点永远是亮点,所不同的只是光的强弱有差别而已。如果圆屏较大, P_0 点离圆屏较近, N 是一个很大的数目,则被挡住的波带就很多, P_0 点的光强近似为零,基本上是几何光学的结论:几何阴影处光强为零。

对于不在轴上的 P 点,圆屏位置与波带不同心,其合振动振幅随 P 点位置的不同而有起伏。考虑到圆屏的对称性,可以预计:圆屏衍射是以 P_0 点为中心,在其周围有一组明暗

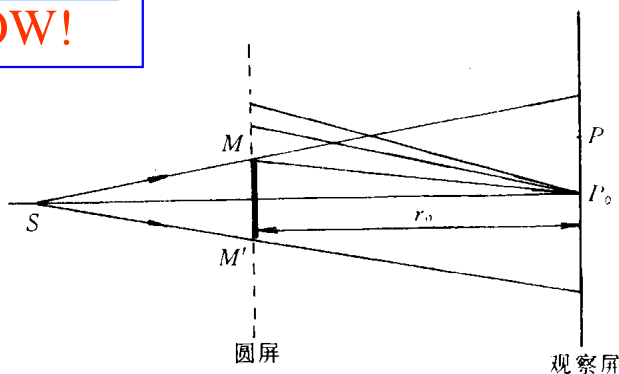


图 3 - 29 菲涅耳圆屏衍射

交替的衍射环。而在远离 P_0 的点，由于圆屏只挡住波带的很小一部分，衍射效应可忽略，其情况与几何光学的结论一致。

最后应当指出，如果我们把圆屏和同样大小的圆孔作为互补屏来考虑，并不存在在夫朗和费衍射条件下得出的除轴上点外，两个互补屏的衍射图样相同的结论。这是因为对于菲涅耳衍射，无穷大的波面将在观察屏上产生一个非零的均匀振幅分布，而不像夫朗和费情形，除轴上点以外处处振幅为零。

3.3.2 菲涅耳直边衍射——振幅矢量加法

一个平面光波或柱面光波通过与其传播方向垂直的不透明直边（例如，刮脸刀片直边）后，将在观察屏幕上呈现出图 3 - 30 所示的衍射图样：在几何阴影区的一定范围内，光强度不为零，而在阴影区外的明亮区内，光强度出现有规律的不均匀分布。

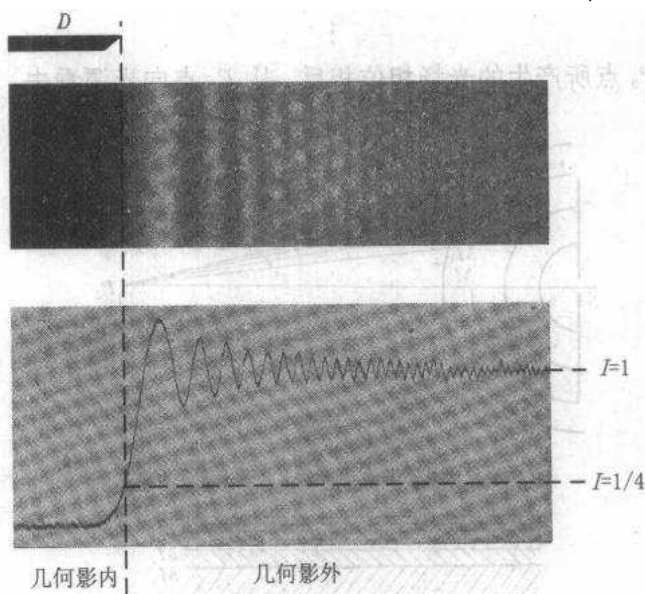


图 3 - 30 菲涅耳直边衍射图样及光强分布

1. 振幅矢量加法

如图 3 - 31 所示， S 为一个垂直于图面的线光源，其波面 AB 是以光源为中心的柱面， MM' 是垂直于图面有一直边的不透明屏，并且直边与线光源平行。显然，观察屏上各点的

光强度取决于波阵面上露出部分在该点产生的光场，并且，在与线光源 S 平行方向上的各观察点具有相同的振幅。这个振幅可以用基尔霍夫衍射公式(3-18)式计算求得，也可以采用振幅矢量加法处理。为了使物理意义清晰，在这里采用振幅矢量加法讨论。振幅矢量加法的基本思想是先把直边外的波面相对 P 点分成若干直条状波带，然后将露出直边的各个条状波带在 P 点产生的光场复振幅进行矢量相加。

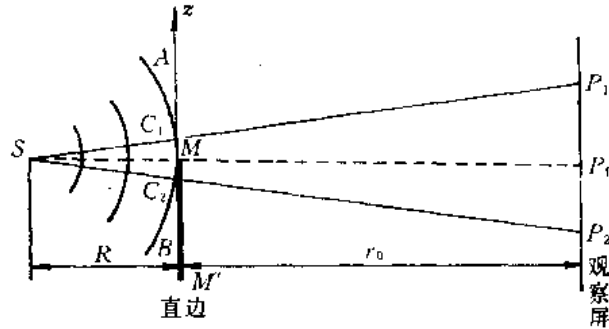


图 3-31 非涅耳直边衍射

假定先将直边屏 MM' 拿掉，如图 3-32(a)所示，以 SM_0P_0 为中线，将柱面波的波面分成许多直条状半波带：

$$\begin{aligned} P_0M_0 &= r_0 \\ P_0M_1 &= r_0 + \frac{\lambda}{2} \\ P_0M_2 &= r_0 + \frac{2\lambda}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

相邻带的相应点在 P_0 点所产生的光场相位相反。从 P_0 点向光源看去，其半波带形状如图 3-32(b)所示。

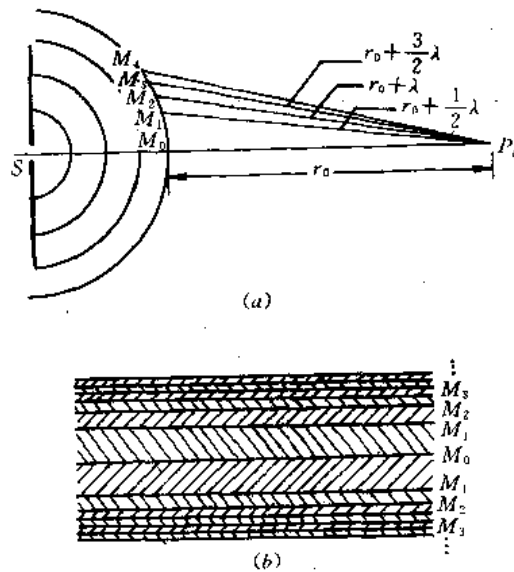


图 3-32 柱面波的半波带

在前面讨论圆孔衍射时已经证明，在球面波波面上划分的同心环状波带的面积近似相等，但对于图 3-32(b) 所示的条状波带面积，却随着波带序数 N 的增大而很快地减小。这样，当波带序数增大时，将同时因波带面积的减小，以及到 P_0 点距离的增大和倾角 θ 的加大，而使 P_0 点的振幅迅速下降，这种下降的程度较之环形波带明显得多。因此，就不能直接利用环形波带的有关公式进行讨论。为此，可以将每一个直条半波带按相邻带间相位差相等的原则，再分成多条波带元。例如，自 M_0 点向上把第一个半波带分成 9 条波带元，各波带元在 P_0 点产生的光场振幅矢量分别为 $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_9$ ，通过矢量加法，就可得到第一个半波带在 P_0 点产生的光场振幅矢量，如图 3-33(a) 中的 A_1 。同样，可以得到第二个直条半波带在 P_0 点产生的光场振幅矢量 A_2 。此二半波带在 P_0 点产生的合光场振幅如图中的矢量 A 所示。显然，这个结果与前面的环形半波带的情况不同，在那里其合振幅接近于零。如果我们继续重复上述作法，把 M_0 以上的各半波带都分成无限多直条波带元，并进行矢量作图，就将得到图 3-33(b) 所示的光滑的曲线，此曲线趋近于 Z ，矢量 $A = \vec{OZ}$ 表示上半个波面所有波带在 P_0 点产生的光场振幅。显然，对于下半个波面对 P_0 点光场的作用，也可以在同一坐标面的第三象限内画出一条对应的曲线。因此，上下两部分波面对 P_0 点的作用就画成图 3-34 所示的曲线，称为科纽 (Cornu) 螺线。螺线中两终点的连线 $\vec{Z'Z}$ 表示整个波面在 P_0 点所产生的光场振幅的大小。

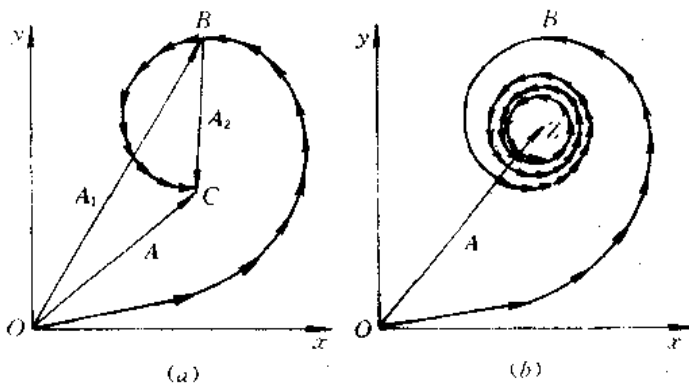


图 3-33 振幅矢量加法

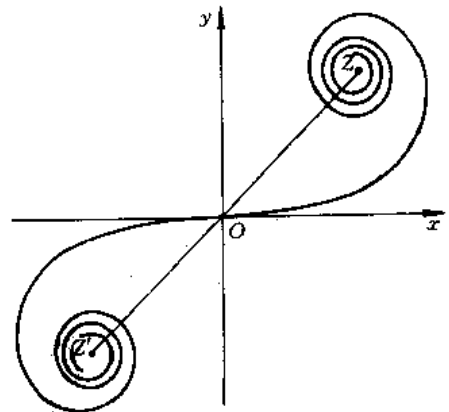


图 3-34 科纽螺线

2. 菲涅耳直边衍射

根据振幅矢量法，可以很方便地讨论菲涅耳直边衍射图样。

① 对于图 3-31 中光源与直边边缘连线上的观察点 P_0 ，由于直边屏把下半部分波面全部遮住，只有上半部分波面对 P_0 点产生作用，所以， P_0 点的光场振幅大小 \vec{OZ} 为波面无任何遮挡时的振幅大小 $\vec{Z'Z}$ 的一半，而光强为其 $1/4$ 。

② 对于直边屏几何阴影界上方的 P_1 点，由它向光源 S 作的直线与波面交于 C_1 。现由 C_1 开始，重新对波面分成许多半波带，与 P_0 点情况相比较，相当于 M_0 点移到了 C_1 ， C_1 以上的半个波面完全不受遮挡，因而它在 P_1 点产生的光场振幅由科纽螺线上的 \vec{OZ} 表示。对于 C_1 以下的半个波面，有一部分被直边屏遮挡，只露出一小部分对 P_1 有作用，在图 3-35 所示的科纽螺线中，以 $\vec{M_1O}$ 表示。这样，整个露出的波面对 P_1 点产生的光场振幅，在科纽螺线中以 \vec{OZ} 和 $\vec{M_1O}$ 的矢量和，即 $\vec{M_1Z}$ 表示。 M_1 在科纽螺线中的位置取决于 P_1

Click to buy NOW!

点到 P_0 点的距离 P_1 点离 P_0 愈远, M_1' 点沿螺线愈接近 Z' 。这就是说, 随着 P_1 点位置的改变, P_1 点的振幅或光强是改变的, 并且与 M_2, M_4, \dots 相应的点有最大光强度, 而与 M_3, M_5, \dots 相应的点有最小的光强度。因此, 在几何阴影界上方靠近 P_0 处的光强分布不均匀, 有亮暗相间的衍射条纹, 对于离 P_0 足够远的地方, 光强度基本上正比于 $(\overline{Z'Z})^2$, 有均匀的光强分布。

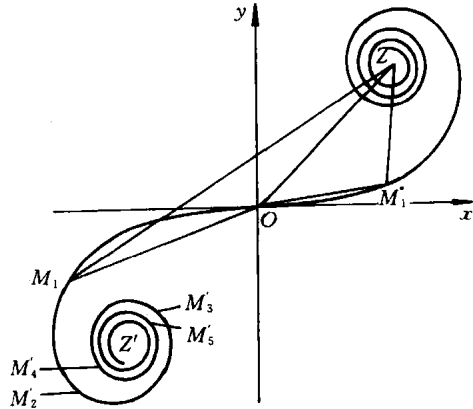


图 3-35 用科纽螺线讨论直边衍射

③ 对于 P_0 点以下的 P_2 点, 它与 S 的连线交波面于 C_2 点。 C_2 以下的半个波面被直边屏遮挡, C_2 以上的半个波面也有一部分被遮挡。因此, P_2 点的合光场振幅矢量的一端为 Z , 另一端为 M_1' , 即为 $\overline{M_1'Z}$, P_2 点的光强度正比于 $(\overline{M_1'Z})^2$ 。 M_1' 随 P_2 点的位置不同, 沿着螺线移动, P_2 离 P_0 愈远, 其上光强愈小, 当 P_2 离 P_0 足够远时, 光强度趋于零。

根据上面的讨论, 可以得到图 3-30 所示的直边衍射图样和光强分布。

3. 菲涅耳单缝衍射

利用振幅矢量加法可以很方便地讨论菲涅耳单缝衍射现象。

如图 3-36(a) 所示, 单缝的每一边犹如一个直边, 遮去了大部分的波面, 而单缝露出的波面对观察点的作用, 可以通过科纽螺线作图得到, 在菲涅耳单缝衍射中, 条纹强度分布与缝的宽度有关。图 3-36(b) 给出了一些宽度不同的单缝菲涅耳衍射图样的照片。每一组的三张照片是由三种不同曝光时间得出的。在它们旁边画出了相应的强度曲线(横轴的粗实线代表缝宽)。

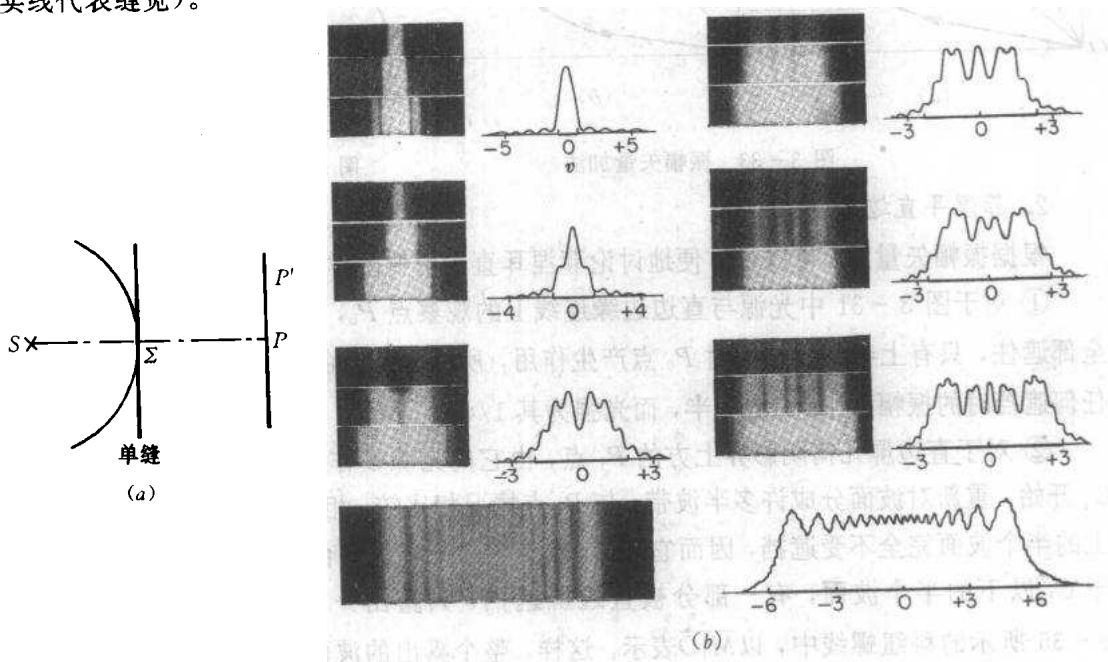


图 3-36 菲涅耳单缝衍射



3.4 衍射的应用

3.4.1 衍射光栅——光谱仪

1. 衍射光栅

1) 光栅概述

衍射光栅是一种应用非常广泛、非常重要的光学元件，通常讲的衍射光栅都是基于夫朗和费多缝衍射效应进行工作的。

所谓光栅就是由大量等宽、等间隔的狭缝构成的光学元件。世界上最早的光栅是夫朗和费在 1819 年制成的金属丝栅网，现在的一般光栅是通过在平板玻璃或金属板上刻划出一道道等宽、等间距的刻痕制成的。随着光栅理论和技术的发展，光栅的衍射单元已不再只是通常意义下的狭缝了，广义上可以把光栅定义为：凡是能使入射光的振幅或相位，或者两者同时产生周期性空间调制的光学元件。正是从这个意义上来说，出现了所谓的晶体光栅、超声光栅、晶体折射率光栅等新型光栅。

光栅根据其工作方式分为两类，一类是透射光栅，另一类是反射光栅。如果按其射光的调制作用来分类，又可分为振幅光栅和相位光栅。现在通用的透射光栅是在平板玻璃上刻划出一道道等宽、等间距的刻痕，刻痕处不透光，无刻痕处是透光的狭缝。反射式光栅是在金属反射镜面上刻划出一道道刻痕，刻痕处发生漫反射，未刻痕处在反射方向上发生衍射。这两种光栅只对入射光的振幅进行调制，改变了入射光的振幅透射系数或反射系数的分布，所以是振幅光栅。一块光栅的刻痕通常很密，在光学光谱区采用的光栅刻痕密度为 0.2~2400 条/mm，目前在实验室研究工作中常用的是 600 条/mm 和 1200 条/mm，总数为 5×10^4 条。因此，制作光栅是一项非常精密的工作。一块光栅刻划完成后，可作为母光栅进行复制，实际上大量使用的是这种复制光栅。

光栅最重要的应用是作为分光元件，即把复色光分成单色光，它可以应用于由远红外到真空紫外的全部波段。此外，它还可以用于长度和角度的精密、自动化测量，以及作为调制元件等。在此，主要讨论光栅的分光作用。

2) 光栅方程

由多缝衍射理论知道，衍射图样中亮线位置的方向由下式决定：

$$d \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-82)$$

式中，间距 d 通常称为光栅常数； θ 为衍射角。在光栅理论中，(3-82)式称为光栅方程。该式仅适于光波垂直入射光栅的情况，对于更一般的斜入射情况，光栅方程的普遍表示式为

$$d(\sin \varphi \pm \sin \theta) = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-83)$$

式中， φ 为入射角(入射光与光栅平面法线的夹角)； θ 为衍射角(相应于第 m 级衍射光与光栅平面法线的夹角)。

下面以平面透射光栅为例，导出(3-83)式光栅方程。

如图 3-37(a)所示，当平行光以入射角 φ 斜入射到透射光栅上时，光线 R_1 比相邻的光线 R_2 超前 $d \sin \varphi$ ，在离开光栅时， R_2 比 R_1 超前 $d \sin \theta$ ，所以这两支光的光程差为

$\Delta = d \sin \varphi - d \sin \theta$
 对于图 3-37(b) 的情况, 光线 R_1 总比 R_2 超前, 故光程差为

$$\Delta = d \sin \varphi + d \sin \theta$$

将上面二式合并于一式表示, 即得产生极大值的条件为

$$d(\sin \varphi \pm \sin \theta) = m\lambda$$

对于图 3-38 所示的反射光栅, 同样也可以证明(3-83)式的光栅方程。当入射光与衍射光在光栅法线一侧时, (3-83)式取+号; 异侧时, 取-号。

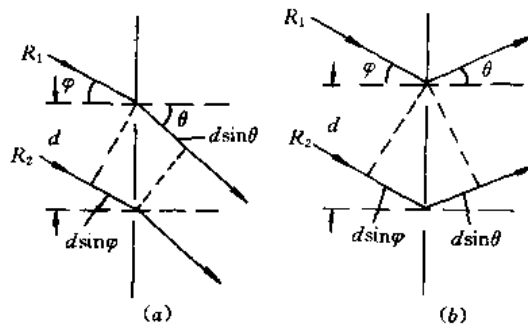


图 3-37 透射光栅的衍射

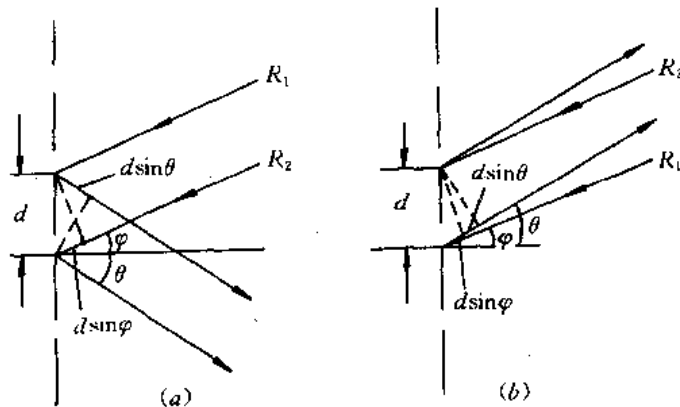


图 3-38 反射光栅的衍射

3) 衍射光栅的分光原理

由光栅方程可见, 对于给定光栅常数 d 的光栅, 当用复色光照射时, 除零级衍射光外, 不同波长的同一级衍射光不重合, 即发生“色散”现象, 这就是衍射光栅的分光原理。对应于不同波长的各级亮线称为光栅谱线, 不同波长光谱线的分开程度随着衍射级次的增大而增大, 对于同一衍射级次而言, 波长长者, θ 大, 波长小者, θ 小。

当白光按给定的入射角 φ 入射至光栅时, 对于每个 m 级衍射光都有一系列按波长排列的光谱, 该光谱称为第 m 级光谱。当 $m=0$ 时, $\sin \varphi = \sin \theta$, 即 $\varphi = \theta$, 这时所有波长的光都混在一起, 仍为白光, 这就是零级谱的特点。对于透射光栅, 零级谱在相应的入射光方向上; 对于反射光栅, 零级谱在相应的反射光方向上。零级谱的两边均有 $m \neq 0$ 的光谱, 当 $m > 0$ 时, 称为正级光谱; $m < 0$ 时, 称为负级光谱。每块光栅在给定 φ 时, 其最大光谱级数为

$$|m_M| = \frac{(1 \pm \sin \varphi)d}{\lambda} \quad (3-84)$$

可见, $\varphi \neq 0$ 时, 正级光谱与负级光谱的级数是不相等的。

2. 闪耀光栅

闪耀光栅又叫炫耀光栅、定向光栅, 它是一种相位型光栅, 它弥补了平面光栅的不足。

1) 闪耀光栅的结构

由光栅的分光原理可见，光栅衍射的零级主极大，因无色散作用，不能用于分光，光栅分光必须利用高级主极大。但是，由多缝衍射的强度分布已知，多缝衍射的零级主极大占有很大的一部分光能量，因此可用于分光的高级主极大的光能量较少，大部分能量将被浪费。所以，在实际应用中必须改变通常光栅的衍射光强度分布，使光强度集中到有用的那一光谱级上去。

瑞利在 1888 年首先指出，理论上有可能把能量从(对分光)无用的零级主极大转移到高级谱上去，伍德(Wood)则在 1910 年首先成功地刻制出了形状可以控制的沟槽，制成了所谓的闪耀光栅。

首先应指出，平面衍射光栅之所以零级主极大占有很大的一部分光能量，是由于干涉零级主极大与单缝衍射主极大重合，而这种重合起因于干涉和衍射的光程差均由同一衍射角决定。如图 3-37(a)所示，光沿任一角度 φ 入射时，衍射单缝的缝两边缘点之间的光程差为

$$\Delta_{\text{衍}} = a(\sin \theta - \sin \varphi)$$

多缝干涉的相邻缝之间的光程差为

$$\Delta_{\text{干}} = d(\sin \theta - \sin \varphi)$$

显然， $\theta = \varphi$ 时，两个极大(单缝衍射主极大与干涉零级主极大)的方向一致。因此，要想将这两个极大方向分开，必须使衍射和干涉的光程差分别由不同的因素决定。

如果采用图 3-39(a)所示的、在平面玻璃上刻出锯齿形细槽构成的透射式闪耀光栅和图 3-39(b)所示的、在金属平板表面刻出锯齿槽构成的反射式闪耀光栅，就可以通过折射和反射的方法，将干涉零级与衍射中央主极大位置分开。在这种结构中，光栅面和锯齿槽面方向不同，光栅干涉主极大方向是以光栅面法线方向为其零级方向，而衍射的中央主极大方向则是由刻槽面法线方向及其它因素决定。

2) 闪耀光栅的闪耀原理

下面，我们以图 3-40 所示的反射式闪耀光栅为例，说明如何实现干涉零级和衍射中

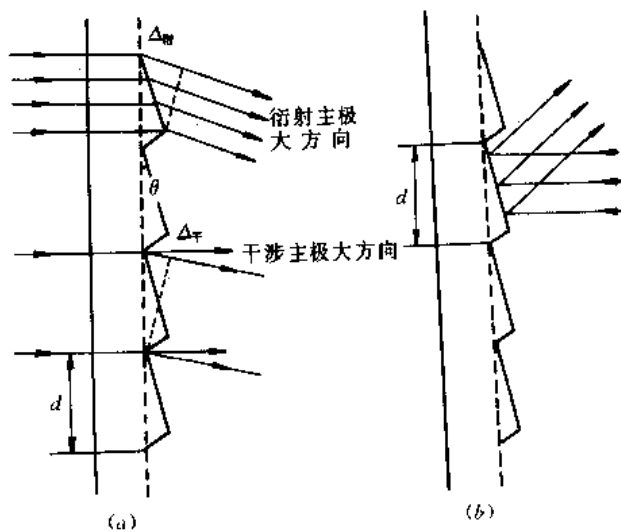


图 3-39 闪耀光栅的结构

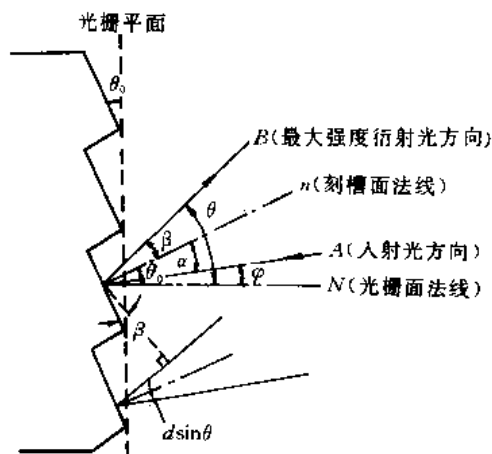


图 3-40 反射式闪耀光栅的角度关系

央主极大方向的分离。

假设锯齿形槽面与光栅平面的夹角为 θ_0 (该角称为闪耀角), 锯齿形槽宽度 (也即刻槽周期) 为 d , 则对于按 φ 角入射的平行光束 A 来说, 其单槽衍射中央主极大方向为其槽面的镜反射方向 B 。因干涉主极大方向由光栅方程

$$d(\sin \theta + \sin \varphi) = m\lambda$$

决定, 若希望 B 方向是第 m 级干涉主极大方向, 则变换上面的光栅方程形式, B 方向的衍射角应满足

$$2d \sin \frac{\varphi + \theta}{2} \cos \frac{\varphi - \theta}{2} = m\lambda$$

考察图 3-40 所示的角度关系, 有

$$\alpha = \theta_0 - \varphi \quad \text{和} \quad \beta = \theta - \theta_0$$

又因 B 方向是单槽衍射中央主极大方向, 所以必有 $\alpha = \beta$, 即

$$\theta_0 - \varphi = \theta - \theta_0$$

或

$$\varphi + \theta = 2\theta_0 \quad \text{和} \quad \theta - \varphi = 2\alpha$$

因而有

$$2d \sin \theta_0 \cos \alpha = m\lambda \quad (3-85)$$

这就是单槽衍射中央主极大方向同时为第 m 级干涉主极大方向所应满足的关系式。故, 若 m 、 λ 、 d 和入射角 φ 已知, 即可确定角度 θ_0 。此时的 B 方向光很强, 就如同物体光滑表面反射的耀眼的光一样, 所以称该光栅为闪耀光栅。

若光沿槽面法线方向入射, 则 $\alpha = \beta = 0$, 因而 $\varphi = \theta = \theta_0$ 。在这种情况下, (3-85) 式简化为

$$2d \sin \theta_0 = m\lambda_m \quad (3-86)$$

该式称为主闪耀条件, 波长 λ_m 称为该光栅的闪耀波长, m 是相应的闪耀级次, 这时的闪耀方向即为光栅的闪耀角 θ_0 的方向。因此, 对于一定结构 (θ_0) 的闪耀光栅, 其闪耀波长 λ_m , 闪耀级次和闪耀方向均已确定。

现在假设一块闪耀光栅对波长 λ_0 的一级光谱闪耀, 则 (3-86) 式变为

$$2d \sin \theta_0 = \lambda_0 \quad (3-87)$$

此时, 单槽衍射中央主极大方向正好落在 λ_0 的一级谱线上, 又因为反射光栅的单槽面宽度近似等于刻槽周期, 所以 λ_0 的其它级光谱 (包括零级), 均成为缺级, 如图 3-41 所示。现在的优质光栅可以把近 80% 的能量集中到所需要的 λ_0 的一级光谱上去, 使其强度变强、闪耀, λ_0 称为一级闪耀波长。由 (3-87) 式还可以

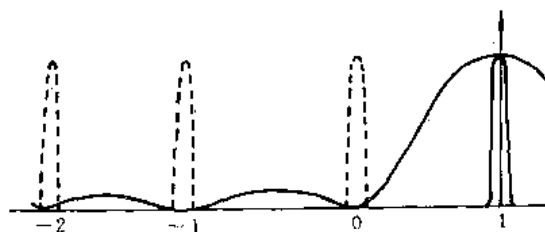


图 3-41 一级闪耀光栅光强分布

看出, 对 λ_0 的一级光谱闪耀的光栅, 也分别对 $\lambda_0/2$ 、 $\lambda_0/3$ 、……的二级、三级、……光谱闪耀。不过通常所称的某光栅的闪耀波长, 是指光垂直槽面入射时 (称为里特罗 (Littrow) 自准直系统) 的一级闪耀波长 λ_0 。比如, 600 条/mm 刻痕的闪耀光栅, 当闪耀角为 9.5° 时, 它

的闪耀波长为 $\lambda = 0.5461 \mu\text{m}$ 。

最后还应指出, 尽管严格说来闪耀光栅在同一级光谱中只对闪耀波长产生极大的光强, 而对其它波长则不能, 但由于单槽衍射的中央主极大到极小有一定的宽度, 所以闪耀波长附近一定波长范围内的谱线也会得到相当程度的闪耀。

在现代光栅光谱仪中, 很少利用透射式光栅, 大量使用的是反射式光栅, 尤其是闪耀光栅。随着现代光栅制造工艺的进步, 它们已能运用于很宽的光谱范围, 并逐渐取代过去的分光元件——三棱镜。

3. 光谱仪

1) 光谱仪概述

光谱仪是一种利用光学色散原理设计制作的光学仪器, 主要用于研究物质的辐射, 光与物质的相互作用, 物质结构, 物质含量分析, 探测星体和太阳的大小、质量、运动速度和方向等。从应用范围分类, 有发射光谱分析用和吸收光谱分析用光谱仪, 前者包括看谱仪, 摄谱仪和光电直读光谱仪, 后者包括各种分光光度计。从光谱仪的出射狭缝分类有单色仪(一个出射狭缝), 多色仪(两个以上出射狭缝), 摄谱仪(没有出射狭缝)。按其应用的光谱范围分有真空紫外光谱仪, 近紫外和可见、近红外光谱仪, 红外和远红外光谱仪。最近问世的微型光纤光谱仪属于光电直读式光谱仪。

光谱仪主要由三部分组成: 光源和照明系统; 分光系统; 接收系统。光源在发射光谱学中是研究的对象, 在吸收光谱学中则是照明工具。分光系统是光谱仪的核心, 由准直管, 分光单元和暗箱组成。如图 3-42

所示, 通过狭缝 S 发出的光经准直光管后, 变成平行光, 照射分光元件 G , 将单束复色光分解为多束单色光, 并在出射透镜焦平面上按波长顺序形成一系列的单色狭缝像。整个分光系统置于暗箱中, 以消除杂散光的干扰。分光单元有三类:

一类是棱镜分光, 这类光谱仪称为棱镜光谱仪, 现已很少使用; 另一类用衍射光栅分光, 称为光栅光谱仪, 目前广泛使用; 第三类是频率调制的傅里叶变换光谱仪, 这是新一代的光谱仪。光谱仪的接收系统是用于测量光谱成分的波长和强度, 从而获得被研究物质的相应参数。目前有三类接收系统: 基于光化学作用的乳胶底片摄像系统; 基于光电作用的 CCD 等光电接收系统; 基于人眼的目视系统, 它也被称为看谱仪。

2) 光栅光谱仪的特性

利用光栅作为分光单元的光谱仪叫做光栅光谱仪。在现代光栅光谱仪中, 已很少利用透射光栅作为分光元件, 大量使用的是反射光栅, 尤其是闪耀光栅。图 3-43 示出了经常采用的里特罗自准直光谱仪, 其中, 图(a)中的透镜 L 起着准直和会聚双重作用, 光栅 G 的槽面受准直平行光垂直照明; 图(b)中采用了凹面反射镜, 可用于红外光区和紫外光区。

作为一个分光仪器, 正象前面对法布里-珀罗标准具分光元件讨论中所指出的, 其主要性能指标是色散本领、分辨本领和自由光谱范围。

(1) 色散本领 色散本领是指光谱仪将不同波长的同级主极大光分开的程度, 通常用角色散和线色散表示。

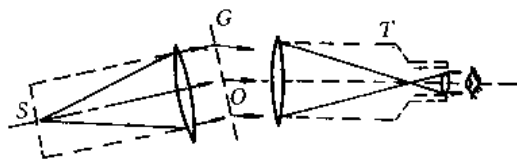


图 3-42 透射光栅光谱仪

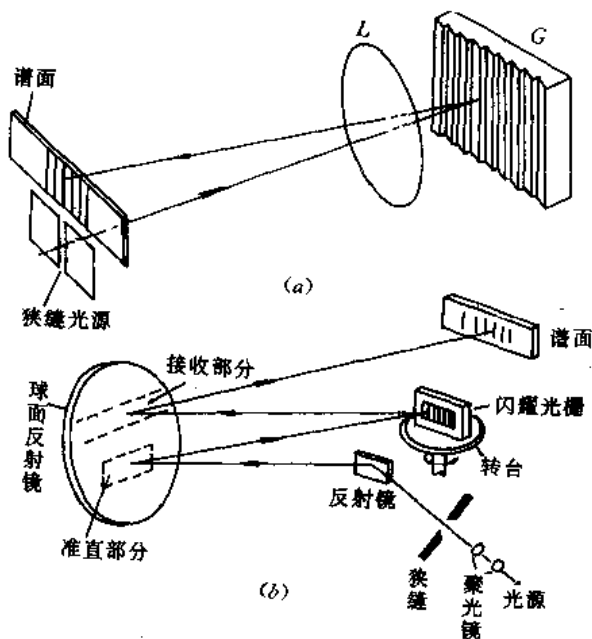


图 3-43 里特罗自准直光谱仪

① 角色散 $d\theta/d\lambda$ 。波长相差 1 \AA (0.1 nm) 的两条谱线分开的角距离称为角色散。光栅的角色散可由光栅方程(3-83)式对波长取微分求得

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} \quad (3-88)$$

此值愈大，角色散愈大，表示不同波长的光被分得愈开。由该式可见，光栅的角色散与光谱级次 m 成正比，级次愈高，角色散就愈大；与光栅刻痕密度 $1/d$ 成正比，刻痕密度愈大（光栅常数 d 愈小），角色散愈大。

② 线色散 $dl/d\lambda$ 。光栅的线色散是指在聚焦物镜的焦平面上，波长相差 1 \AA 的两条谱线间分开的距离。因为 θ 较小，其表示式为

$$\frac{dl}{d\lambda} = f \frac{d\theta}{d\lambda} = f \frac{m}{d \cos \theta} \quad (3-89)$$

式中， f 是物镜的焦距。显然，为了使不同波长的光分得开一些，一般都采用长焦距物镜。

由于实用衍射光栅的光栅常数 d 通常都很小，亦即光栅的刻痕密度 $1/d$ 很大，所以光栅光谱仪的色散本领很大。

如果我们在 θ 不大的位置记录光栅光谱， $\cos \theta$ 几乎不随 θ 变化，则色散是均匀的。对于某一确定的级次 m ， $d\theta/d\lambda = m/d = \text{常数}$ ，即光栅的角色散与波长无关，衍射角与波长变化成线性关系，这种光谱称为匀排光谱，这对于光谱仪的波长标定来说，十分方便。

(2) 分辨本领 色散本领表示了不同波长的两个主极大分开的程度。由于衍射，每一条谱线都具有一定宽度。当两谱线靠得较近时，尽管主极大分开了，它们还可能因彼此部分重叠而分辨不出是两条谱线。分辨本领是表征光谱仪分辨开两条波长相差很小的谱线能力的参量。



根据瑞利判据, 当 $\lambda + \Delta\lambda$ 的第 m 级主极大刚好落在 λ 的第 m 级主极大旁的第一极小值处时, 这两条谱线恰好可以分辨开。如果光栅所能分辨的最小波长差为 $\Delta\lambda$, 则分辨本领定义为

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (3-90)$$

根据(3-88)式, 与角距离 $\Delta\theta$ 对应的 $\Delta\lambda$ 为

$$\Delta\lambda = \frac{d\lambda}{d\theta} \Delta\theta = \frac{d \cos \theta}{m} \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} = \frac{\lambda}{mN}$$

所以, 光栅的分辨本领为

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad (3-91)$$

式中, m 是光谱级次; N 是光栅的总刻痕数。该式说明, 光栅分辨本领与光栅常数无关, 只与 m 和 N 有关。

通常光栅所使用的光谱级次并不高 ($m=1\sim 3$), 但是光栅的刻痕数很大, 所以光栅光谱仪的分辨本领仍然很高。例如, 一块宽度为 60 mm, 每毫米刻有 1200 条线的光栅, 在其产生的一级光谱中, 分辨本领为

$$A = mN = 72\ 000$$

对于 $\lambda=0.6\ \mu\text{m}$ 的红光,

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{A} = 0.83 \times 10^{-5}\ \mu\text{m}$$

即在 $0.6\ \mu\text{m}$ 附近, 相差 $0.83 \times 10^{-5}\ \mu\text{m}$ 的两种波长的光, 是该光栅光谱仪的分辨极限。

将(3-91)式与法布里-珀罗标准具的分辨本领公式(2-108)式进行比较可以发现, 二式的形式完全一样, 而且分辨本领都很高。但是, 它们的高分辨本领来自不同的途径: 光栅来自于刻痕线数很大, 而法布里-珀罗标准具来源于高干涉级次 m 。因为法布里-珀罗标准具加工困难, 它们的有效光束数 N' (也可理解为精细度 N) 不大, 一般约为 30, 但却可很容易在高级次上工作。

(3) 自由光谱范围 光谱仪的自由光谱范围(或称为色散范围)是指它的光谱不重叠区。

根据光栅方程, 光谱不重叠区 $\Delta\lambda$ 应满足

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$$

即
$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \quad (3-92)$$

其意义是, 波长为 λ 的入射光的第 m 级衍射, 只要它的谱线宽度小于 $\Delta\lambda = \lambda/m$, 就不会发生与 λ 的 $(m-1)$ 或 $(m+1)$ 级衍射光重叠的现象。

由于光栅都是在低级次下使用, 故其自由光谱范围很大, 在可见光范围内为几百 nm, 所以它可在宽阔的光谱区内使用。而法布里-珀罗标准具在使用时的干涉级次均较高(一般为 10^5 量级), 只能在很窄的光谱区内使用。

3.4.2 波导光栅

波导光栅是通过波导上的折射率周期分布构成的光栅。按其结构的不同, 可分为两大

类：平面波导光栅和圆形波导光栅(光纤光栅)。

1. 平面波导光栅

1) 平面波导光栅的衍射

平面波导光栅是集成光学中的一个重要的功能器件，它实际上是光波导结构受到一种周期性微扰，其结构形式如图 3-44 所示，可以是表面几何形状的周期变化(如同传统光学中的光栅)，也可以是波导表面层内折射率的周期变化，或者是二者的结合。

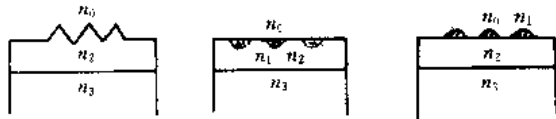


图 3-44 波导光栅的各种形式

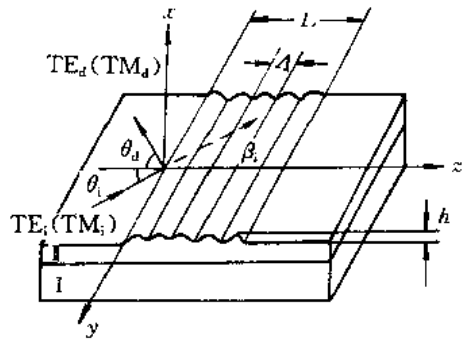


图 3-45 反射式波导光栅

图 3-45 为反射式波导光栅示意图，一束光 \vec{E}_i 入射其上，产生衍射光 \vec{E}_d 。假设 K_A 为波导光栅矢量， $K_A = 2\pi/\Lambda$ ， Λ 是光栅常数， θ_i 、 θ_d 和 β_i 、 β_d 分别为入射光、衍射光与光栅在同一平面内法线的夹角和传播常数， K 为入射光与衍射光之间的耦合系数，则根据耦合波理论，在一般情况下的光栅衍射(偏转)系数 R 为

$$R = \frac{|\vec{E}_d(0)|^2}{|\vec{E}_i(0)|^2} = \frac{K^2 \text{sh}(\tilde{\gamma}L)}{\left| i\left(\frac{\Delta k}{2}\right) \text{sh}(\tilde{\gamma}L) + \tilde{\gamma} \text{ch}(\tilde{\gamma}L) \right|^2} \quad (3-93)$$

式中， $\tilde{\gamma}$ 是复传播常数，且有

$$\tilde{\gamma}^2 = K^2 + \left(i \frac{\Delta k}{2} \right)^2 \quad (3-94)$$

$$\Delta k = K_A - (\beta_i \cos \theta_i + \beta_d \cos \theta_d) \quad (3-95)$$

当满足条件

$$k_i + K_A = k_d \quad (3-96)$$

时， $\Delta k = 0$ ，衍射(偏转)系数为

$$R = \text{th}^2(KL) \quad (3-97)$$

(3-96)式称为相位匹配条件或布拉格(Bragg)条件。满足相位匹配条件的衍射系数最大，入射光偏离相位匹配条件时，光栅衍射系数减小。

2) 波导光栅的应用

利用波导光栅的衍射特性，可以制作成许多集成光学器件，且其新的应用还在不断地出现。下面，只介绍其中两种应用：

(1) 光输入、输出耦合器 图 3-46 是一种刻蚀式光栅耦合器的原理图，图中间是一平面波导，下为衬底，上为包层，两侧是在波导薄膜上刻蚀出的波导光栅， Λ 是光栅周期， a 和 δ 分别是沟槽宽度和深度。激光束以入射角 θ_i 入射到波导光栅上，因光栅作用产生若

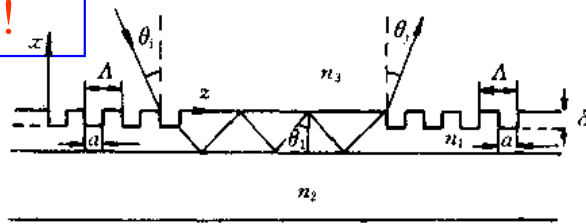


图 3-46 刻蚀式光栅耦合器

干衍射光束。如果其中某一级衍射光的衍射角和波导中导模的模角相等，则入射光将通过这个衍射光束把能量有效地耦合到平面波导中，使光在波导中有效地传输。此时波导光栅为输入耦合器。反之，已在波导中传输的光波可通过波导光栅耦合出波导，此时波导光栅为输出耦合器。对于单光束耦合器，在一定条件下(光栅长度 L 足够长或耦合系数足够大)，输出耦合效率可达 100%。

图 3-47 给出的是近年来研制出的利用变周期光栅制作的输出光束会聚耦合器。根据相位匹配条件，其输出光束的方向在光束区域内随传播距离变化，因此，输出光束可以聚焦到一点上，且焦点的坐标随波长而变。这种耦合器可用于光盘、激光打印等，并因其有很好的分光性能，可构成小型光纤光谱仪。

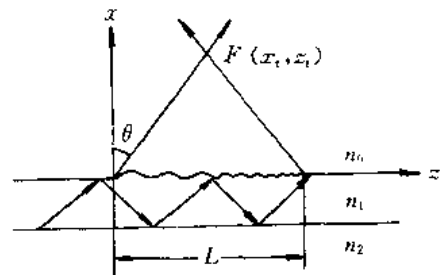


图 3-47 变周期光栅会聚耦合器(FGC)

(2) 滤波器 前面已经指出，波导光栅的衍射(偏转)系数直接由布拉格条件决定，其频率特性如图 3-48 所示，在满足布拉格条件的波长 λ_0 附近衍射系数最大。因此，在 λ_0 附近具有一定谱宽的输入光经过偏转光栅后，透射光将滤去 λ_0 附近的光谱成分。相反，若仅考虑偏转波，则该器件可看成是选频器，从输入光中选出所需要的波长(λ_0)。图 3-49 是一种透射式波导光栅用作分波器的原理图。具有最小波长间隔 $\Delta\lambda_m$ 的 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 分量的输入光波，经波导光栅偏转后被一一分离出来。利用相反的过程，可以将 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 进行合波。利用波导光栅制作的波分复用器具有体积小、稳定、复用数高以及插入损耗小等优点，特别适用于单模光纤通信系统。

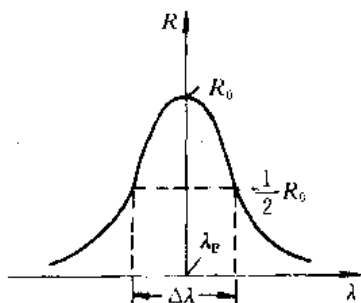


图 3-48 偏转光栅的频率特性

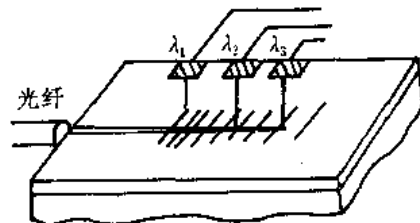


图 3-49 波导光栅式波分复用器

光纤光栅是在1978年制作成功的。它是利用紫外光照射光纤，使纤芯产生永久性的折射率变化(紫外光敏效应)，形成相位光栅。目前广泛采用的制作方法是相位光栅衍射相干法。如图3-50所示，将预先做好的相位光栅作为掩模板放在光纤附近，入射光束经掩模板后产生±1级衍射光，这两束衍射光在重叠区(纤芯)内形成干涉条纹，经过曝光后就形成折射率周期分布的体光栅。这种制作方法的优点是工艺简单，便于大规模生产。

对于均匀正弦分布的光纤光栅，其光栅方程为

$$\lambda_B = 2n_{\text{eff}}\Delta \quad (3-98)$$

式中， λ_B 是光栅的中心波长(布拉格中心波长)； n_{eff} 是有效折射率； Δ 是光栅周期。光通过光栅的反射率 R 为

$$R = \text{th}^2\left(\frac{\pi \Delta n_M L}{\lambda_B}\right) \quad (3-99)$$

式中， Δn_M 是光栅折射率的最大变化量； L 是光栅长度。相应的反射谱宽近似为

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_B}\right)^2 = \left(\frac{\Delta n_M}{2n_{\text{eff}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{L}\right)^2 \quad (3-100)$$

目前制作的光纤光栅反射率 R 可达98%，反射谱宽为1 nm。

光纤光栅是发展极为迅速的一种光纤器件，在光纤通信中可作为光纤波分复用器；与稀土掺杂光纤结合可构成光纤激光器，并且在一定范围内可实现输出波长调谐；变周期光纤光栅可用作光纤的色散补偿等；在光纤传感技术中可用于温度、压力传感器，并可构成分布或多点测量系统。

3.4.3 全息光栅

随着光栅理论和制作工艺的发展，光栅的衍射单元已不再只是刻痕槽了。全息光栅是伴随着全息术的发展而出现的一种新型光栅，它最早于1967年提出，到了70年代已用于可见光、紫外和X射线区，其性能已与刻痕光栅相当。

全息光栅是依据全息照相原理制作的。图3-51是一种分波面法干涉系统，由该系统产生的两束相干平行光，以 2θ 夹角在全息底片 H 上相交，形成明暗交替的等间距、平行直干涉条纹，条纹间距为

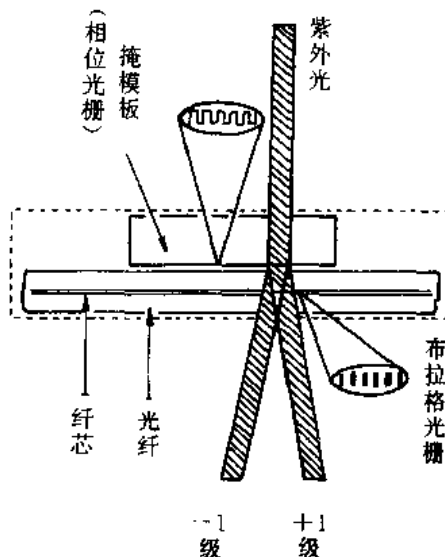


图3-50 制作光纤光栅示意图

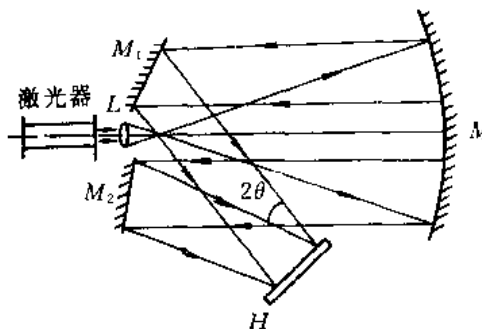


图3-51 全息光栅制作系统

$$d = \frac{\lambda}{2n \sin \theta} \quad (3-101)$$

式中, λ 是激光束波长; n 是折射率。全息底片经过曝光、冲洗处理后, 得到全息光栅。 d 即是全息光栅的光栅栅距。如果用氩离子激光器作为光源 ($\lambda=488 \text{ nm}$), 在空气中记录干涉条纹 ($n=1$), 则可得干涉最小栅距为 $d=244 \text{ nm}$, 也就是说, 可以制作成 4098 条/mm 的全息光栅。目前, 利用这种方法已制成 10 000 条/mm 的全息光栅。如果全息底片为平面, 可制成平面全息光栅, 如果全息底片是球面, 则可制成凹面全息光栅。全息光栅可以是振幅光栅, 也可制成相位光栅。

图 3-52 示出了一种平面振幅全息光栅的透射系数变化曲线, 该光栅为正弦光栅, 包

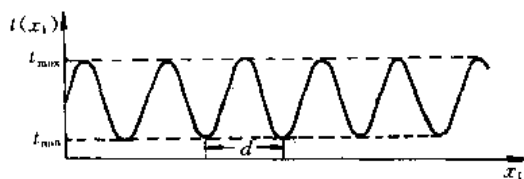


图 3-52 正弦光栅的透射系数

含有 N 个干涉条纹, 其透射系数表示式为

$$t(x_1) = t_0 + t_1 \cos \frac{2\pi}{d} x_1 \quad (3-102)$$

根据欧拉公式, 上式可改写为

$$t(x_1) = t_0 + \frac{t_1}{2} e^{i\frac{2\pi}{d} x_1} + \frac{t_1}{2} e^{-i\frac{2\pi}{d} x_1} \quad (3-103)$$

采用与多缝衍射相似的方法进行讨论, 则宽度为 a 的全息光栅(正弦光栅)所产生的衍射场为

$$\tilde{E}(P) = C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(t_0 + \frac{t_1}{2} e^{i\frac{2\pi}{d} x_1} + \frac{t_1}{2} e^{-i\frac{2\pi}{d} x_1} \right) e^{-i\alpha x_1 / f} dx_1$$

经过运算可得

$$\tilde{E}(P) \propto \left[t_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{t_1}{2} \frac{\sin(\alpha + \pi)}{(\alpha + \pi)} + \frac{t_1}{2} \frac{\sin(\alpha - \pi)}{(\alpha - \pi)} \right] \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}$$

相应, 衍射的光强度分布为

$$I = I_0 \left[t_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{t_1}{2} \frac{\sin(\alpha + \pi)}{(\alpha + \pi)} + \frac{t_1}{2} \frac{\sin(\alpha - \pi)}{(\alpha - \pi)} \right]^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (3-104)$$

式中

$$\alpha = \frac{kdx}{2f} = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (3-105)$$

θ 为相应于场点 P 的衍射角。由场分布表示式可见: 当 $\alpha=0, \pm\pi$ 时, 式中三项均分别为主极大值; 当 $\alpha=m\pi (m=\pm 2, \pm 3, \dots)$ 时, 其干涉因子为极大, 但衍射因子为零, 因此形成缺级。即正弦(振幅)光栅的衍射图样只包含零级和 ± 1 级条纹, 其主极大方向为

$$d \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1 \quad (3-106)$$

因此, 如图 3-53 所示, 当平行光正入射时, 正弦(振幅)光栅将产生三束衍射光, 由于正

兹振幅周期性结构的特点，导致了±1级以上的衍射光消失。

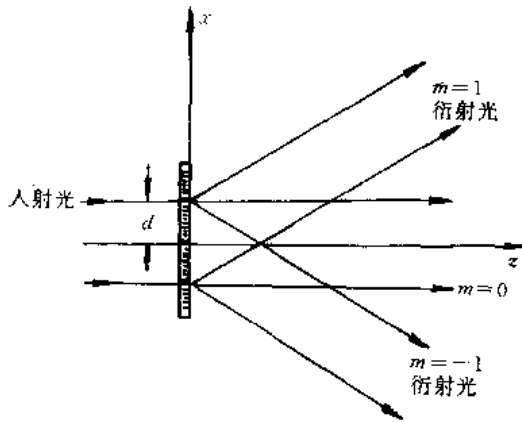


图 3-53 正弦光栅的衍射

3.4.4 波带片

1. 菲涅耳波带片

在利用菲涅耳波带法讨论菲涅耳圆孔衍射时已经知道，由于相邻波带的相位相反，它们对于观察点的作用相互抵消。因此，当只露出一个波带时，光轴上 \$P_0\$ 点的光强是波前未被阻挡时的四倍。对于一个露出 20 个波带的衍射孔，其作用结果是彼此抵消，\$P_0\$ 为暗点。现在如果让其中的 1、3、5、……、19 等 10 个奇数波带通光，而使 2、4、6、……、20 等 10 个偶数波带不通光，则 \$P_0\$ 点的合振幅为

$$A_N = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} \approx 10a_1$$

因波前完全不被遮住时 \$P_0\$ 点的合振幅为

$$A_\infty = \frac{a_1}{2}$$

所以，挡住偶数带(或奇数带)后，\$P_0\$ 点光强约为波前完全不被遮住时的 400 倍。

这种将奇数波带或偶数波带挡住所制成的特殊光阑叫菲涅耳波带片。由于它类似于透镜，具有聚光作用，又称为菲涅耳透镜。图 3-54 给出了奇数波带和偶数波带被挡住(涂黑)的两种菲涅耳波带片。

2. 波带片对轴上物点的成像规律

设有一个距离波带面为 \$R\$ 的轴上点光源 \$S\$ 照明波带片，由(3-77)式有

$$\frac{N\lambda}{\rho_N^2} = \frac{R + r_0}{Rr_0}$$

经过变换可得

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} = \frac{N\lambda}{\rho_N^2} \quad (3-107)$$

这个关系式与薄透镜成像公式很相似，可视为波带片对轴上物点的成像公式。\$R\$ 相应于物距(物点与波带片之间的距离)，\$r_0\$ 相应于像距(观察点与波带片之间的距离)，而焦距为

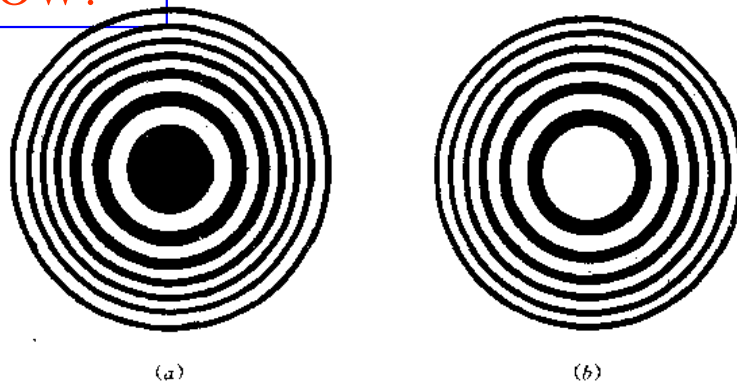


图 3-54 菲涅耳波带片

$$f_N = \frac{\rho_N^2}{N\lambda} \quad (3-108)$$

相应的 P_0 点为焦点。

3. 波带片的焦距

从聚光作用看，波带片与普通透镜相似。但是，普通透镜是利用光的折射原理实现聚光的，从物点发出的各光线到像点的光程相等，而波带片则是利用光的衍射原理实现聚光的，从物点发出的光波经波带片的各波带衍射，到达像点的相位差为 2π 的整数倍，产生相干叠加，所以它们之间有实质性的差别。这种差别表现在普通透镜中只有一个焦距，而波带片中则有多多个焦距，即用一束平行光照射这种波带片时，除了上述 P_0 点(主焦点)为亮点外，还有一系列光强较小的(次焦点)亮点。相应各亮点(焦点)的焦距为

$$f_m = \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_N^2}{N\lambda} \right) \quad m \text{ 取奇数} \quad (3-109)$$

该焦距表示式可以利用图 3-55 说明：若 F_1 为上述的 P_0 点，因为半波带是以 F_1 为中心划分的，相邻两波带的振动到达 F_1 点的光程差为 $\lambda/2$ ，而对于轴上的点 F_3 来说，相邻两波带的振动到达 F_3 点的光程差是 $3\lambda/2$ ，由于奇数(或偶数)带已被挡去，因此入射光波通过波带片的透光带后到达 F_3 时，相邻两透光带所引起的振动同相(光程差为 3λ)，所以 F_3 也是一个焦点。同理， F_5, F_7, \dots 也是焦点。由图可见，分别有

$$\begin{aligned} \rho_N^2 + f_1^2 &= \left(f_1 + N \frac{\lambda}{2} \right)^2 \\ \rho_N^2 + f_3^2 &= \left(f_3 + N \frac{3\lambda}{2} \right)^2 \\ &\vdots \\ \rho_N^2 + f_m^2 &= \left(f_m + N \frac{m\lambda}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

将上式展开，略去高次项，即得

$$f_m = \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_N^2}{N\lambda} \right)$$

由图 3-55 还可以看出,除了实焦点外,波带片还有一系列的虚焦点,它们位于波带片的另一侧,其焦距仍由(3-109)式计算。

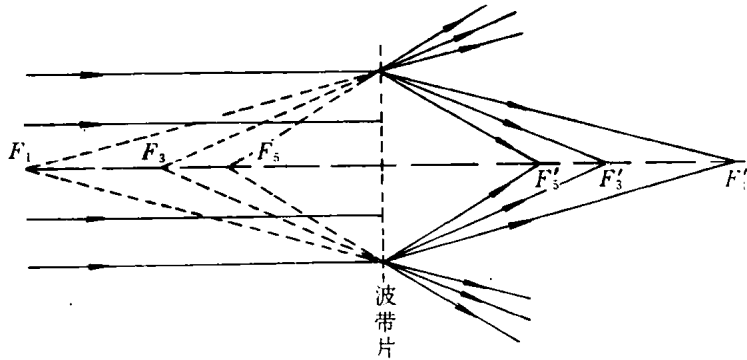


图 3-55 波带片的焦点

菲涅耳波带片与普通透镜相比,还有另外一个差别:波带片的焦距与波长密切相关,其数值与波长成反比,这就使得波带片的色差比普通透镜大得多,色差较大是波带片的主要缺点。它的优点是,适应波段范围广。比如用金属薄片制作的波带片,由于透明环带没有任何材料,可以在从紫外到软 X 射线的波段内作透镜用,而普通的玻璃透镜只能在可见光区内使用。此外,还可制作成声波和微波的波带片。

4. 波带片的制作和应用

若入射到波带片上的光是平行光,则波带的分法不仅可以是圆形,也可以是长条形或方形。由于方形波带片的衍射图是十字亮线,很适合于准直应用,所以目前使用较多(图 3-56(b))。对于长条形波带片(图 3-56(a)),其特点是在焦点处会聚成一条方向平行于波带片条带的明亮直线。

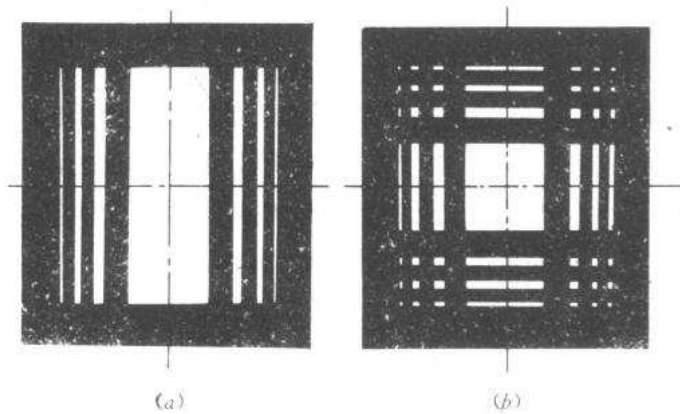


图 3-56 条形和方形波带片

波带片的制作方法是:对已选定的入射光波长和波带片的焦距,先由下式求出各带的半径:

$$\rho_N = \sqrt{N\lambda f_N} \quad (3-110)$$

对于方形波带则先求出各带边缘的位置:

$$x_N = \pm \sqrt{N\lambda f_N} \quad (3-111)$$

$$y_N = \pm \sqrt{N\lambda f_N}$$

然后，按上式的计算值画出波带图，并按比例放大画在一张白纸上，将奇数带(或偶数带)涂黑，再用照相方法按原比例精缩，得到底片后，可翻印在胶片或玻璃感光板上，亦可在金属薄片上蚀刻出空心环带，即可制成所需要的波带片。

在实际应用中，将激光的高亮度和纯单色性与波带片相结合，可使激光束的定位精度大大提高。图 3-57 是一种衍射式激光准直仪的原理图，方形波带片固定于激光准直仪的可调焦望远镜物镜外侧，与激光准直仪成为一体。由望远镜射出的平行光，经波带片后，在其焦点处形成一亮十字。若微调望远镜使射出的光是收敛的，则在光轴上波带片的焦距内形成一个亮十字的实像。目前，装有波带片的激光准直仪主要用于几十米至几百米、甚至几千米范围内的准直调节。由于在几十米范围内十字亮线的宽度可窄到 0.2 mm，所以对中误差可降到 10^{-5} 以下，而未装波带片的对中误差只能达到 10^{-4} 。



图 3-57 衍射式激光准直仪原理图

3.4.5 微光学透镜

1. 衍射光学

随着科学技术向高深发展，由于对超大信息量和超高速处理的迫切需要，微系统的发展成了必然趋势。对于微系统科学来说，微光学是重要的基础之一。

微光学是研究微米量级尺寸光学元件的微加工技术及光信息在这类元件间传输、变换、成像的基本理论和应用的学科。其中，最重要的领域之一是衍射光学。

衍射光学是 80 年代后期发展起来的一门新兴光学分支学科。众所周知，传统光学中的基本元件是透镜、棱镜和反射镜，所有这些元件设计和工作的理论基础都是光的反射、折射原理。在这些光学应用中，衍射效应使得光学系统的空间分辨率受到限制。因此，除了光波的色散特性可用于光谱学之外，传统光学总是尽量避免衍射效应造成的不利影响。但是，对于衍射光学来说，它正是基于光的衍射效应进行工作的。在进入微细领域中，由于一般的光学透镜、光学元件难以做得很小，所以，光学系统面临的一个重要问题就是如何制作微透镜之类的光学元件。随着微电子技术、激光技术、全息术、计算全息、相息图和新材料的发展，已较好地解决了这个问题。人们可以根据光的衍射原理，利用计算机设计出所希望的波前，通过各种微细加工技术制作可大规模复制的高质量、低价格、具有多功能的微小衍射光学器件。这种衍射光学器件是一种同轴、相位型的衍射器件，具有极高的衍射效率，理论上可达 100%。并且，可产生出任意形式的光波波前，例如圆环形、方框形等。显然，这样一些应用，对于传统光学元件来说是极难实现的，甚至是不可能实现的。人们对于这种衍射光学器件的研究，已使衍射光学成为 90 年代光学的前沿研究领域之一。

2. 微光学透镜

微光学透镜是光学和微电子学相结合的一种浮雕型光栅器件，它利用由计算机辅助设计和微电子学工艺技术制造的微型相位光栅，通过光的衍射来控制光的传播方向，达到光束聚焦和分束等目的。

实际上，前面讨论的非涅耳波带片就是最早出现的一种利用衍射效应的聚焦、成像器件。而和一般波带片不同的是，在微光学透镜中的波带片是利用微电子技术中的光刻办法制成的相位型光栅，光栅栅距为微米量级，相邻的起伏(从而引起光程差)则为纳米，因而这是一种尺寸极小的相位型波带片。

由于微光学透镜具有尺寸小，便于大规模制造，传输损耗小，可制成阵列形式，有特殊功能等优点，因而应用极为广泛。如微光学系统中的微型元件，光学及神经网络计算，光学平行处理系统中的互连元件，宽场和红外成像系统中的元件，光学滤波和材料加工系统中的衍射元件，以及用于抗反射和偏振态控制的亚波长光栅结构等等。下面只介绍三种应用。

1) 光束整形元件

在实际应用中，经常对光束的光强分布提出要求，例如在激光表面热处理应用中，为了使材料表面上各点受热均匀，希望能将高斯型强度分布的激光束转换成平台型强度分布。此时，可以利用衍射光学元件同时对入射高斯型激光束的相位调制、强度变换和聚焦。利用这种光束整形元件处理后的 CO_2 激光束，可以进行高效、均匀的工件表面热处理。

2) 激光聚焦校正器

在激光应用中，例如用于外科手术的 CO_2 “激光刀”，经常需要调整，使激光束聚焦在某一点上。由于 CO_2 激光($\lambda=10.6 \mu\text{m}$)不可见，通常采用 He-Ne 激光($\lambda=0.6328 \mu\text{m}$)导引。但是，由于 CO_2 和 He-Ne 激光束的波长不相同，使得两束光的焦点不在一起。为此，可以利用微光学透镜进行色差补偿，使二光束聚焦于同一点。其原理如图 3-58 所示：由于衍射光栅的衍射角与波长成正比，所以红外光比红光衍射效应强，而由光学玻璃制作的透镜，红光比红外光的偏射角大(此即是透镜的色差)，因此，如果在聚焦透镜表面刻蚀出起负透镜作用的衍射图案(微光学透镜)，就可以补偿透镜的色差。

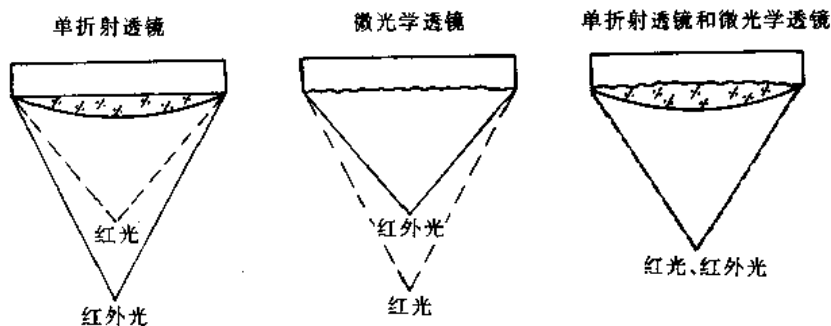


图 3-58 微光学透镜对色差的补偿

图 3-59 是一种为解决温度场变化或不稳定情况下不能精确聚焦的难题，设计的消热

差混合衍透镜的结构。

3) 坐标变换

利用特殊设计的微光学透镜可以实现坐标变换。例如，图 3-60(b) 所示的微光学透镜可以把圆对称的图形(图 3-60(a))变成长方形(图 3-60(c))，它实际上完成了极坐标和直角坐标的变换。显然这是其它光学元件难以作到的。

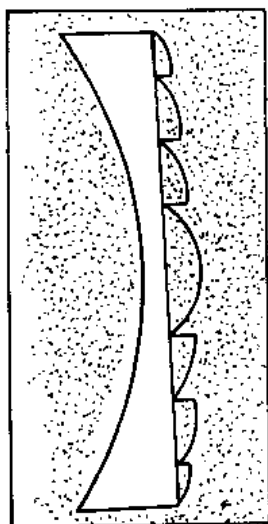


图 3-59 消热差混合衍透镜的结构

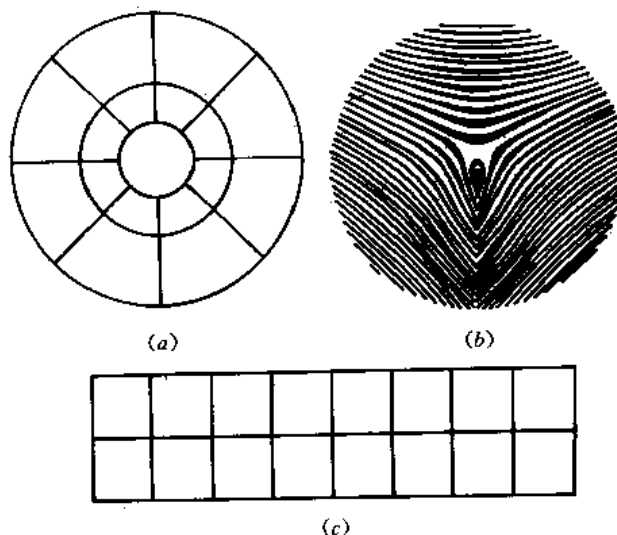


图 3-60 微光学透镜用于坐标变换

3.5 傅里叶光学基础

本世纪 40 年代末，人们将通讯理论中的一些观点、概念和方法移植到光学中，二者的结合产生了傅里叶光学。傅里叶光学的数学基础是傅里叶积分变换，其物理基础是光的标量衍射理论，它以与传统物理光学不同的描述和分析方法，讨论光的衍射、成像、滤波和光学信息处理等问题。1960 年激光的诞生，使傅里叶光学获得迅速的发展和应，形成了现代光学的一个重要分支。

在这里，仅介绍傅里叶光学的一些基本概念，作为深入学习傅里叶光学的基础。

3.5.1 薄透镜对衍射的影响

1. 薄透镜的相位变换作用

众所周知，一个平面波经过正透镜后将变成会聚的球面波(图 3-61)。通常将透镜两个球面顶点上的切平面叫作它的输入面和输出面。若一条光线在输入面上的 (x, y) 点入射，在对着的输出面上从近似相同的坐标处射出，即忽略光线在透镜内因折射而产生

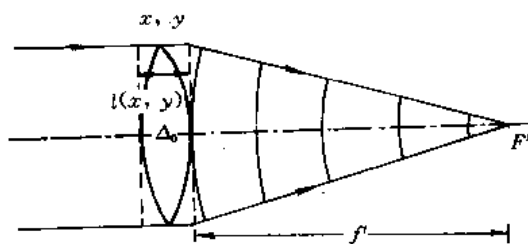


图 3-61 薄透镜的相位变换作用



生的垂轴平移,则该透镜称为薄透镜。实际上,如果透镜的厚度远小于两个球面的曲率半径,都可以近似地看作薄透镜。

当光线通过薄透镜时,由于中心区域厚,光程长,相位延迟大;边缘区域薄,光程短,相位延迟小,使光波的等相位面形状改变。因此,一个薄透镜的作用,是使入射光波的相位空间分布发生改变,是一种相位变换(调制)器。薄透镜的相位变换作用可以用它的透射函数 $\tilde{t}(x,y)$ 表示。

令透镜中心的厚度为 Δ_0 , 焦距为 f , 透镜材料的折射率为 n 。如果在坐标 (x,y) 点处由透镜输入面到输出面之间的光程为 $l(x,y)$, 则透镜的透射函数可以写成如下形式

$$\tilde{t}(x,y) = e^{ikl(x,y)} \quad (3-112)$$

其中, k 为光在自由空间中的波数。这里,我们略去了因两个球面上的反射和透镜材料的吸收所引起的光振幅的衰减。由费马原理,从输入面上各点到达后焦点 F' 的光程都相等,即有

$$n\Delta_0 + f = l(x,y) + \sqrt{f^2 + (x^2 + y^2)}$$

可得光程函数为

$$l(x,y) = n\Delta_0 + f - \sqrt{f^2 + (x^2 + y^2)} \quad (3-113)$$

考虑傍轴光线近似条件

$$\sqrt{x^2 + y^2} \ll f \quad (3-114)$$

(3-113)式变成

$$l(x,y) = n\Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2f} \quad (3-115)$$

将它代入(3-112)式,得到透镜的透射函数为

$$\tilde{t}(x,y) = e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \quad (3-116)$$

这个关系表示了薄透镜对入射光振动的作用。

若考虑透镜有限孔径的效应,可以引入光瞳函数 $P(x,y)$, 其定义为

$$P(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{透镜孔径内} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (3-117)$$

在考虑透镜的孔径影响后,透镜的透射函数为

$$\tilde{t}(x,y) = P(x,y) e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \quad (3-118)$$

该透射函数表示式中, $\exp(ikn\Delta_0)$ 为常数相位延迟,一般可以略去不计;第二个指数因子是一个球面波的二次抛物曲面相位近似。若透镜焦距 f 为正,则球面波是向透镜右方的焦点会聚。若 f 为负,则球面波是由透镜的左方焦点发散出来,实际光线的延长都通过左方焦点。这就是我们常见的透镜聚光现象。

最后需要强调指出,经过像差精心校正的任一实际透镜的相位变换作用,都可以用(3-118)式表示,透镜的这种二次抛物面相位变换作用是在近轴区获得的。这种变换作用在光学傅里叶变换和成像中起着极其重要的作用。

2. 薄透镜对衍射的影响

在前面关于小孔衍射的讨论中已知,当观察屏远离衍射孔满足夫朗和费近似时,观察屏上将呈现出夫朗和费衍射图样。实际中,为了方便地观察夫朗和费衍射,都是在衍射孔

的透镜后焦平面上进行观察。下面，具体讨论紧靠衍射屏放置的薄透镜对衍射的影响。

如图 3-62 所示，假设光波透过衍射屏后的光场为 $\tilde{E}(x_1, y_1)$ ，则透镜后的场分布为

$$\tilde{E}'(x_1, y_1) = \tilde{E}(x_1, y_1) \tilde{t}(x_1, y_1)$$

式中， $\tilde{t}(x_1, y_1)$ 是透镜的透射函数。在不考虑透镜有限孔径影响的情况下，由 (3-118) 式得

$$\tilde{E}'(x_1, y_1) = \tilde{E}(x_1, y_1) e^{-i k \frac{x_1^2 + y_1^2}{2f}} \quad (3-119)$$

由于透镜焦距通常较小，光波传到后焦平面上的场分布应是 $\tilde{E}'(x_1, y_1)$ 的非涅耳衍射，由 (3-18) 式得

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x, y) &= -\frac{i}{\lambda f} e^{ikf} e^{i k \frac{x^2 + y^2}{2f}} \iint_{\Sigma} \tilde{E}'(x_1, y_1) e^{i k \frac{x_1^2 + y_1^2}{2f}} e^{-i k \frac{xx_1 + yy_1}{f}} dx_1 dy_1 \\ &= -\frac{i}{\lambda f} e^{ikf} e^{i k \frac{x^2 + y^2}{2f}} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x_1, y_1) e^{-i k \frac{xx_1 + yy_1}{f}} dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (3-120)$$

将该式与夫朗和费衍射光场复振幅的表示式 (3-21) 比较可见，除了以 f 代替了远场距离 z_1 以外，形式完全相同。相应的光强分布表示式为

$$I(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \left| \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x_1, y_1) e^{-i k \frac{xx_1 + yy_1}{f}} dx_1 dy_1 \right|^2 \quad (3-121)$$

由此可见，紧靠衍射屏的薄透镜后焦平面上所观察到的衍射图样，与衍射屏的远场夫朗和费衍射图样相同，只是由于透镜的聚光作用，空间范围缩小，光能集中罢了。

3.5.2 光学傅里叶变换

在 1.1 节中已经指出，一个平面内的单色光场复振幅可以在空间频率域内分解为许多不同的空间频率分量。因此，对于传统物理光学中所讨论的各种光波现象，都可以在空间频率域内进行讨论。也就是说，在空间频率域内研究各空间频率分量在这些现象中的变化，与在空间域内直接研究光场复振幅或光强度空间变化的分析完全等效。在实际应用中，究竟是在空间域中还是在空间频率域中进行分析，完全视方便而定。而在空间频率域内的分析方法，正是傅里叶光学的基本分析方法。

1. 夫朗和费近似下行射场与孔径场的傅里叶变换关系

由前面的讨论，在夫朗和费近似下，观察平面上的衍射场复振幅为 (见 (3-21) 式)

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda z_1} e^{ikz_1} e^{i k \frac{x^2 + y^2}{2z_1}} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x_1, y_1) e^{-i k \left(\frac{x}{z_1} x_1 + \frac{y}{z_1} y_1 \right)} dx_1 dy_1$$

式中， $\tilde{E}(x_1, y_1)$ 为孔径面上的复振幅分布 (紧靠孔径平面后方的透射光场分布)， Σ 代表衍射孔径面。

如果限定衍射屏上孔径外的 $\tilde{E}(x_1, y_1)$ 为零，上式的积分域可以扩大到整个 x_1, y_1 平面。

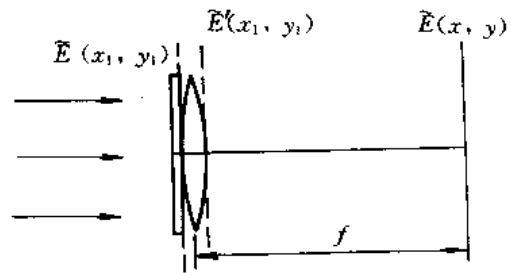


图 3-62 紧靠衍射屏透镜的衍射光路



因此,可以把上式表示为

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda z_1} e^{ikz_1} e^{i\frac{x^2+y^2}{2z_1}} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x_1, y_1) e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda z_1}x_1 + \frac{y}{\lambda z_1}y_1\right)} dx_1 dy_1$$

如果令

$$f_x = \frac{x}{\lambda z_1}, \quad f_y = \frac{y}{\lambda z_1}$$

则有

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda z_1} e^{ikz_1} e^{i\frac{x^2+y^2}{2z_1}} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x_1, y_1) e^{-i2\pi(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \quad (3-122)$$

可见,式中的积分就是孔径平面上复振幅分布的傅里叶变换,其变换在空间频率($f_x = x/(\lambda z_1)$, $f_y = y/(\lambda z_1)$)上取值。由于积分号外的因子是一个与 x 、 y 无关的量和空间相位因子的乘积,它们对于衍射场的相对光强度分布不起作用,因此,夫朗和费衍射图样的光强度分布可直接由 $\tilde{E}(x_1, y_1)$ 的傅里叶变换求出

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |\tilde{E}(x, y)|^2 = |F[\tilde{E}(x_1, y_1)]|_{f_x = \frac{x}{\lambda z_1}, f_y = \frac{y}{\lambda z_1}}^2 \\ &= |\tilde{E}(f_x, f_y)|_{f_x = \frac{x}{\lambda z_1}, f_y = \frac{y}{\lambda z_1}}^2 \end{aligned} \quad (3-123)$$

式中, $\tilde{E}(f_x, f_y)$ 表示孔径平面复振幅的空间频率谱。

2. 透镜的傅里叶变换特性

由上面的讨论可见,由于透镜在其后焦平面上可实现夫朗和费衍射,而夫朗和费衍射场分布与孔径场存在傅里叶变换关系,所以在一定条件下,透镜可以实现傅里叶变换,或者说透镜具有傅里叶变换特性。下面具体讨论。

1) 透镜紧靠衍射屏的傅里叶变换特性

首先需要说明,这里所说的衍射屏或衍射物体是指透射型的平面物体,凡是能改变透射光波振幅和相位分布的物体均属所指,而不一定是衍射开孔。

当如图 3-62 所示,将透镜紧靠衍射屏放置,则其后焦平面上的复振幅分布由(3-120)式表示。如果限定衍射屏上孔径外的 $\tilde{E}(x_1, y_1)$ 为零,可将积分域扩大到整个 (x_1, y_1) 平面,变为

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda f} e^{ikf} e^{i\frac{x^2+y^2}{2f}} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x_1, y_1) e^{-i\frac{x x_1 + y y_1}{f}} dx_1 dy_1 \quad (3-124)$$

若令

$$f_x = \frac{x}{\lambda f}, \quad f_y = \frac{y}{\lambda f}$$

则有

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda f} e^{ikf} e^{i\frac{x^2+y^2}{2f}} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x_1, y_1) e^{-i2\pi(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1$$

或表示成

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda f} e^{ikf} e^{i\frac{x^2+y^2}{2f}} F[\tilde{E}(x_1, y_1)]_{f_x = \frac{x}{\lambda f}, f_y = \frac{y}{\lambda f}} \quad (3-125)$$

该式表明,除了一个振幅和相位因子外,透镜后焦平面上的复振幅分布是衍射平面上复振

幅的傅里叶变换, 透镜后焦平面上 (x, y) 点的光场振幅和相位分布, 由衍射屏所透过光的空间频率为 (f_x, f_y) 的傅里叶分量决定。

2) 置于衍射屏后一定距离透镜的傅里叶变换特性

图 3-63 所示的傅里叶变换光路是更一般的光路: 衍射屏置于透镜前 d_0 处, 由单色平面光波垂直照明。此时, 只需求出衍射屏通过菲涅耳衍射在透镜输入面上产生的光场分布 $\tilde{E}(x_2, y_2)$ 及其频谱 $F[\tilde{E}(x_2, y_2)]$, 即可由(3-125)式求得透镜后焦平面上的光场分布 $\tilde{E}(x, y)$ 。

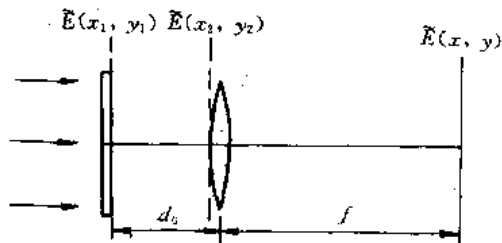


图 3-63 衍射屏置于透镜前方的傅里叶变换光路

我们知道, 空间频率为 (f_x, f_y) 的平面光波分量从衍射屏平面传至透镜输入面上, 将有一个与频率和距离 d_0 有关的相移:

$$e^{ikd_0 \cos \gamma} = e^{ikd_0 \sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}} \quad (3-126)$$

式中, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是平面光波的传播方向余弦, 且有 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 。由于 $f_x = \cos \alpha / \lambda, f_y = \cos \beta / \lambda$, 所以, 上式又可写为

$$e^{ikd_0 \cos \gamma} = e^{ikd_0 \sqrt{1 - \lambda^2 (f_x^2 + f_y^2)}}$$

假设光波从衍射屏平面传到透镜输入面上满足菲涅耳近似条件, 可将上式指数因子作二项式展开, 并只取前两项, 变为

$$\begin{aligned} e^{ikd_0 \cos \gamma} &= e^{ikd_0 [1 - \frac{\lambda^2}{2} (f_x^2 + f_y^2)]} \\ &= e^{ikd_0} e^{-i\pi d_0 \lambda (f_x^2 + f_y^2)} \end{aligned} \quad (3-127)$$

其中, 第一个指数与 f_x, f_y 无关, 可以略去不计。因此, 衍射屏平面上和透镜输入面上光场的傅里叶分量间有一个相位因子 $\exp[-i\pi \lambda d_0 (f_x^2 + f_y^2)]$ 。于是, 这两个平面上光场分布的频谱间有如下关系:

$$F[\tilde{E}(x_2, y_2)] = F[\tilde{E}(x_1, y_1)] e^{-i\pi d_0 \lambda (f_x^2 + f_y^2)} \quad (3-128)$$

将这一结果代入(3-125)式, 即可得透镜后焦平面上的光场分布

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x, y) &= -\frac{i}{\lambda f} e^{ikf} e^{i\frac{x^2 + y^2}{2f}} F[\tilde{E}(x_2, y_2)]_{f_x = \frac{x}{\lambda f}, f_y = \frac{y}{\lambda f}} \\ &= -\frac{i}{\lambda f} e^{ikf} e^{i\pi(1 - \frac{d_0}{f}) \frac{x^2 + y^2}{2f}} F[\tilde{E}(x_1, y_1)]_{f_x = \frac{x}{\lambda f}, f_y = \frac{y}{\lambda f}} \end{aligned}$$

若舍去与 x, y 无关的指数因子 e^{ikf} , 上式变为

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda f} e^{i\pi(1 - \frac{d_0}{f}) \frac{x^2 + y^2}{2f}} F[\tilde{E}(x_1, y_1)]_{f_x = \frac{x}{\lambda f}, f_y = \frac{y}{\lambda f}} \quad (3-129)$$

该式表明, 透镜后焦平面上的光场复振幅与衍射屏平面上光场复振幅的傅里叶变换之间, 有一个相位因子, 这个相位因子的存在, 使衍射屏平面和透镜后焦平面上的光场复振幅间并非严格的傅里叶变换。但是, 对于一次衍射的强度分布, 这个相位因子不起作用, 而在涉及二次衍射的相干光学处理系统中, 它将使问题变得复杂。

由(3-129)式很容易看出, 当如图 3-64 所示, 将衍射屏置于透镜的前焦平面上, 即 $d_0=f$ 时, 有

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda f} F[\tilde{E}(x_1, y_1)]_{f_x = \frac{x}{f}, f_y = \frac{y}{f}} \quad (3-130)$$

这时, 变换式前的相位因子消失, 透镜后焦平面上的光场复振幅分布准确地是衍射屏平面上光场复振幅分布的傅里叶变换。

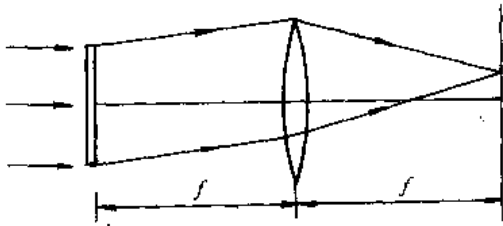


图 3-64 衍射屏置于透镜的前焦平面

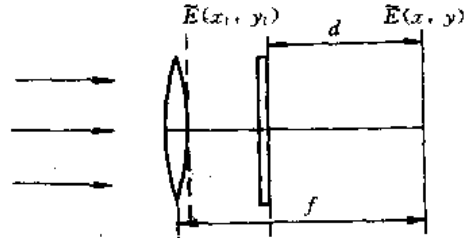


图 3-65 衍射屏置于透镜后方的傅里叶变换光路

3) 位于衍射屏前方透镜的傅里叶变换时性

图 3-65 是又一种傅里叶变换光路: 衍射屏放在透镜后 $(f-d)$ 处。振幅为 A 的单色平面光波入射到透镜上, 变成会聚球面波 $A \exp[-ik(x^2+y^2)/2f]$, 该波经衍射屏后, 其球面波的曲率半径由 f 变成 d , 相位分布变为 $\exp[-ik(x^2+y^2)/2d]$; 球面波的振幅变大, 由 A 变成 $A f/d$; 球面波的口径变小: 若透镜是直径为 l 的圆透镜, 则衍射屏上被照明(透光)区域的直径为 l_1 , 且

$$l_1 = \frac{d}{f} l$$

可将这个照明区域称为有效光瞳函数, 写成 $P(x_1 f/d, y_1 f/d)$ 。在这种情况下, 假设衍射屏的透射函数为 $\tilde{i}(x_1, y_1)$, 则衍射屏所透射的光场复振幅为

$$\tilde{E}(x_1, y_1) = \frac{A f}{d} P\left(x_1 \frac{f}{d}, y_1 \frac{f}{d}\right) e^{-i k \frac{x_1^2 + y_1^2}{2d}} \tilde{i}(x_1, y_1) \quad (3-131)$$

因衍射屏到透镜后焦平面一般应为菲涅耳衍射, 故将(3-131)式代入(3-18)式, 得

$$\tilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda d} \frac{A f}{d} e^{i k d} e^{i k \frac{x^2 + y^2}{2d}} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{i}(x_1, y_1) P\left(x_1 \frac{f}{d}, y_1 \frac{f}{d}\right) e^{-i k \frac{x_1^2 + y_1^2}{2d}} dx_1 dy_1 \quad (3-132)$$

由此可见, 透镜后焦平面上的光场复振幅与由有效光瞳函数所包围的那部分衍射屏所透射光场复振幅的傅里叶变换之间, 有一个二次相位畸变因子。当 $d=f$ 、紧贴透镜放置衍射屏时, (3-132)式变为(3-125)式。

应当指出, 这样一种傅里叶变换光路带来了改变空间频标的灵活性: d 增大时, 频标 $f_x = x/(\lambda d)$, $f_y = y/(\lambda d)$ 变小, 傅里叶变换式的空间分布范围变大; d 变小时, 傅里叶变换式的空间分布范围变小。

3.5.3 傅里叶变换定理的光学模拟

上面, 简要地介绍了透镜的光学傅里叶变换特性, 正是这种变换特性构成了傅里叶光

学及其应用的基础。特别要强调的是，在光学信息处理中，如果采用计算机进行光学图像的傅里叶变换，需将三维图像格点化，对每个格点的光场复振幅取离散值，然后，顺序进入计算机运算。由于二维光学图像的信息量很大，完成这样的傅里叶变换必须要用高速、大容量、昂贵的计算机。而如果采用光学透镜，则可以比较简单地完成这种变换。正因如此，利用傅里叶光学的光学信息处理应用获得了迅速的发展。

作为一种数学运算，傅里叶变换有许多重要的性质。下面，根据图 3-64 所示光路得到的傅里叶变换关系，将傅里叶变换性质与光学现象联系起来，说明傅里叶变换的这些性质在光学上所对应的含义。在讨论中，将使用定理的形式表达傅里叶变换性质。为了叙述的方便，称衍射屏平面上的光场为物函数 $\tilde{E}(x, y)$ ，称透镜后焦平面上的光场为频谱函数 $\tilde{E}(f_x, f_y)$ ，并假定透镜很大。这样，透镜的光学傅里叶变换为

$$\tilde{E}(f_x, f_y) = F[\tilde{E}(x, y)]$$

如果用单色光波沿着光轴反方向照明，其光场分布为 $\tilde{E}(f_x, f_y)$ ，则在透镜前焦平面上得到光场

$$\tilde{E}(x, y) = F^{-1}[\tilde{E}(f_x, f_y)]$$

该式即为光学逆傅里叶变换。在上面的关系中，都省略了常数因子。

1. 线性定理

光学傅里叶变换具有线性性质，即同时作用的几个输入所产生的输出，恒等于每个输入单独产生的输出之和。若 $\tilde{E}_1(x, y)$ 和 $\tilde{E}_2(x, y)$ 为两个物函数，则其线性组合的频谱等于各自频谱的线性组合：

$$\begin{aligned} \tilde{E}(f_x, f_y) &= F[a\tilde{E}_1(x, y) + b\tilde{E}_2(x, y)] \\ &= aF[\tilde{E}_1(x, y)] + bF[\tilde{E}_2(x, y)] \end{aligned} \quad (3-133)$$

其中， a, b 为任意复常数。该式为光学傅里叶变换的线性定理。

上述线性定理可以通过图 3-66 所示的马赫-泽德干涉仪光路实现。若将透过率分别正比于 $\tilde{E}_1(x, y)$ 和 $\tilde{E}_2(x, y)$ 的透明片置于图中 L_2 的前焦平面上，则在其后焦平面上可得此二物函数之和的傅里叶变换(频谱)。

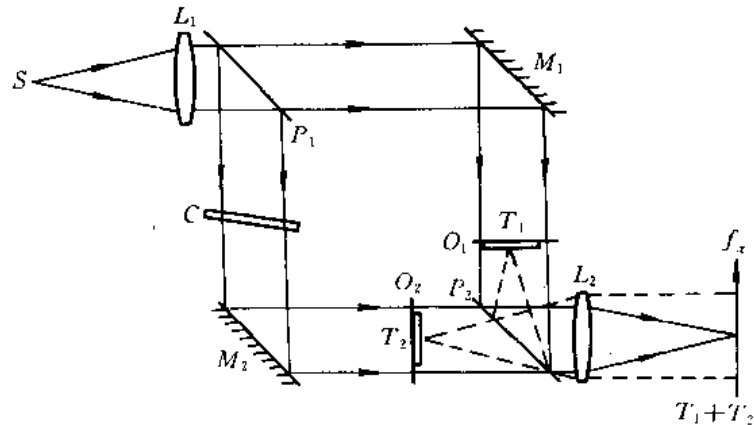


图 3-66 线性定理的光学模拟

2. 相移定理

当空域坐标平移, 物函数变成 $\tilde{E}(x-a, y-b)$ 时, 其相应的频谱函数为

$$F[\tilde{E}(x-a, y-b)] = \tilde{E}(f_x, f_y) e^{-i2\pi(f_x a + f_y b)} \quad (3-134)$$

即物函数在空间域内平移, 仅使频谱函数在频率域内产生一个线性相移, 称为相移定理。

在图 3-67 所示的光路中, 光透镜前焦平面上的点光源 $\delta(x-a)$ 移到 $(a, 0)$ 点时, 并不改变频谱面上的光振幅分布, 但因出射平面光的倾斜, 使其频谱函数产生一附加相移 $\exp(-i2\pi f_x a)$ 。当透镜前焦平面上的物函数为 $\tilde{E}(x, y)$ 时, 其谱函数为 $\tilde{E}(f_x, f_y)$ 。如果物函数由 (x, y) 平移到 $(x-a, y-b)$, 则其频谱函数增加一附加相移, 变为 $\tilde{E}(f_x, f_y) \cdot \exp[-i2\pi(f_x a + f_y b)]$, 实现了(3-134)式变换。

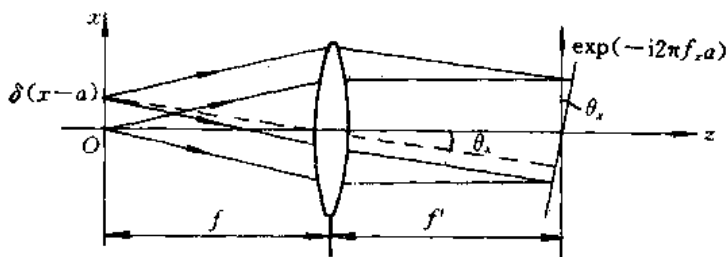


图 3-67 相移定理的光学模拟

3. 相似性定理

若物函数的空间域放大, 变成 $\tilde{E}(ax, by)$ 时, 其频谱函数变为

$$F[\tilde{E}(ax, by)] = \frac{1}{|ab|} \tilde{E}\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right) \quad (3-135)$$

即频谱函数的形式不变, 只是空间频率域相应地缩小, 幅度整体下降。这就是相似性定理。

图 3-68 是单缝衍射的实验装置。光源 S 经 L_1 照射单缝 1, 经 L_2 、 L_3 后成像在 L_3 的焦平面上。如果在 L_2 、 L_3 之间放置单缝 2, 将在 L_3 焦平面上产生单缝 2 的衍射条纹。在此, 单缝 1 起了限制光源尺寸的作用。当单缝 2 变窄, 其衍射谱相应地展宽, 实现了(3-135)式的变换。

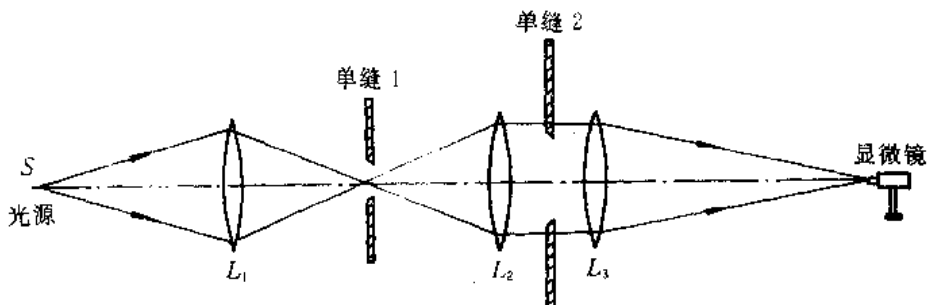


图 3-68 单缝衍射实验装置

4. 帕塞瓦尔(Parseval)定理

如已知物函数 $\tilde{E}(x, y)$ 的频谱为 $\tilde{E}(f_x, f_y)$, 则有



$$\iint_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(f_x, f_y)|^2 df_x df_y \quad (3-136)$$

该式称为光学傅里叶变换的帕塞瓦尔定理。这个关系可理解为光学傅里叶变换中的能量守恒定理，对于不计能量损失的光学传输、变换，均应满足该定理。

5. 卷积定理

如果输入物函数是两个空间域函数 $\tilde{E}_1(x, y)$ 和 $\tilde{E}_2(x, y)$ 的卷积，

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x, y) &= \tilde{E}_1(x, y) * \tilde{E}_2(x, y) \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_1(x', y') \tilde{E}_2(x - x', y - y') dx' dy' \end{aligned} \quad (3-137)$$

则其频谱函数为

$$\begin{aligned} \tilde{E}(f_x, f_y) &= F[\tilde{E}_1(x, y) * \tilde{E}_2(x, y)] \\ &= \tilde{E}_1(f_x, f_y) \tilde{E}_2(f_x, f_y) \end{aligned} \quad (3-138)$$

即两个卷积函数的频谱，等于两个函数频谱的乘积。

当输入物函数是两个空间域函数的乘积，

$$\tilde{E}(x, y) = \tilde{E}_1(x, y) \tilde{E}_2(x, y)$$

则其频谱函数为

$$\begin{aligned} \tilde{E}(f_x, f_y) &= F[\tilde{E}_1(x, y) \tilde{E}_2(x, y)] \\ &= \tilde{E}_1(f_x, f_y) * \tilde{E}_2(f_x, f_y) \end{aligned} \quad (3-139)$$

即两个函数乘积的频谱，等于两个函数频谱的卷积。

(3-138)式和(3-139)式称为卷积定理，该定理可以将两个函数较繁的卷积运算简化为较简单的相乘运算。在描述光学系统的物像关系中，卷积是经常运用的一种运算。

6. 自相关定理

如果输入物函数 $\tilde{E}(x, y)$ 是某一物函数 $\tilde{E}_1(x, y)$ 的自相关函数，即

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x, y) &= \tilde{E}_1(x, y) \otimes \tilde{E}_1(x, y) \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_1(x', y') \tilde{E}_1^*(x' - x, y' - y) dx' dy' \end{aligned} \quad (3-140)$$

其频谱函数为

$$\begin{aligned} \tilde{E}(f_x, f_y) &= F[\tilde{E}_1(x, y) \otimes \tilde{E}_1(x, y)] \\ &= |\tilde{E}_1(f_x, f_y)|^2 \end{aligned} \quad (3-141)$$

同样，一个空间域函数的绝对值平方的频谱函数等于该函数频谱的自相关函数，即

$$\begin{aligned} \tilde{E}(f_x, f_y) &= F[|\tilde{E}_1(x, y)|^2] \\ &= \tilde{E}_1(f_x, f_y) \otimes \tilde{E}_1(f_x, f_y) \end{aligned} \quad (3-142)$$

(3-141)式和(3-142)式称为光学傅里叶变换的自相关定理，它们是光学系统中物像频谱关系及光学图像识别中的主要运算。

7. 傅里叶积分定理

如果对输入物函数 $\tilde{E}(x, y)$ 相继进行两次光学傅里叶变换，其结果为原函数，即

$$FF[\tilde{E}(x, y)] = F[\tilde{E}(f_x, f_y)] = \tilde{E}(-x, -y) \quad (3-143)$$

或者

$$FF^{-1}[\tilde{E}(x, y)] = F[\tilde{E}(-f_x, -f_y)] = \tilde{E}(x, y) \quad (3-144)$$

下面，以 $4f$ 光学系统为例说明卷积定理、自相关定理和积分定理的光学运算。

如图 3-69 所示，两个焦距都为 f 的薄透镜 L_1 和 L_2 相距 $2f$ ， L_1 的前焦平面为输入面 (x_1, y_1) ，后焦平面（也为 L_2 的前焦平面）为频谱平面，频标为 $(f_x = x_2/(\lambda f), f_y = y_2/(\lambda f))$ ， L_2 的后焦平面为输出面 (x_3, y_3) ，这个系统通常称为 $4f$ 系统。如果在输入面内放置物函数 $\tilde{E}_1(x_1, y_1)$ ，则 L_1 进行一次光学傅里叶变换，在其后焦平面上得到它的频谱函数 $\tilde{E}_1(f_x, f_y)$ 。该频谱经过 L_2 ，又进行一次光学傅里叶变换，根据积分定理可得，输出函数为

$$\tilde{E}_1(x_3, y_3) = F[\tilde{E}_1(f_x, f_y)] = FF[\tilde{E}_1(x_1, y_1)] = \tilde{E}_1(-x_1, -y_1)$$

即输出为原函数，只是坐标发生了反转，或者说是输入的倒像。为了更清楚起见，假设物函数 $\tilde{E}_1(x_1, y_1)$ 代表振幅型正弦光栅，当平行光照射此光栅时，将发生衍射，并在 L_1 后焦平面上形成三个亮点，它们分别相应于零级和 ± 1 级衍射，是正弦光栅的频谱。在此，光栅的光场分布与该频谱互为傅里叶变换。由于这三个衍射光是相干的，它们在 L_2 的后焦平面上叠加，并得到正弦型的干涉条纹，它即是原光栅的倒像，该像与 L_2 前焦平面上的频谱也互为傅里叶变换。

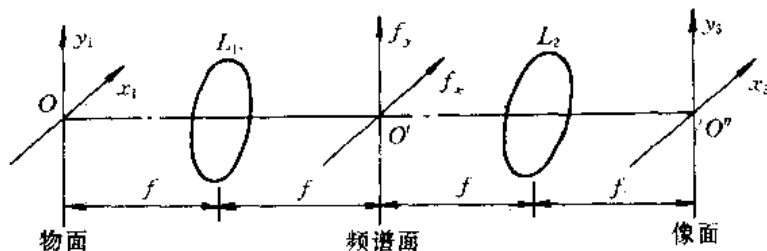


图 3-69 $4f$ 系统

如果在频谱面 (f_x, f_y) 上放置一块透明片，其透过率正比于另一物函数 $\tilde{E}_2(x, y)$ 的频谱函数 $\tilde{E}_2(f_x, f_y)$ ，则在透明片后面的总光场为二频谱函数的乘积 $\tilde{E}_1(f_x, f_y)\tilde{E}_2(f_x, f_y)$ 。这时，由于 L_2 的光学傅里叶变换，系统的输出为

$$F[\tilde{E}_1(f_x, f_y)\tilde{E}_2(f_x, f_y)] = \tilde{E}_1(-x_3, -y_3) * \tilde{E}_2(-x_3, -y_3)$$

此即二物函数的卷积运算。

如果频谱平面 (f_x, f_y) 所设置透明片的透过率正比于 $\tilde{E}_1^*(f_x, f_y)$ ，则输出为输入物函数的自相关值：

$$F[\tilde{E}_1(f_x, f_y)\tilde{E}_1^*(f_x, f_y)] = \tilde{E}_1(-x_3, -y_3) \otimes \tilde{E}_1(-x_3, -y_3)$$

由于上述 $4f$ 系统在卷积、相关及傅里叶变换对的运算中的能力，使之成为光学信息处理中很重要的一种光学系统。

3.6 近场光学简介

前面讨论了光通过孔隙产生的衍射现象，这些讨论都是在孔隙线度大于光波长、远小于光源和观察点到孔隙距离的条件下进行的。在讨论中，特别指出了在通常所遇到的光学成像系统中，衍射极限是一个基本的效应，它限制了光学成像系统的空间分辨率。例如，光学显微镜由于衍射效应造成的最小可分辨距离为

$$\epsilon = \frac{0.61\lambda}{NA}$$

当使用高数值孔径($NA=1.3\sim 1.5$)的光学镜头时,其空间分辨率上限约为光波长的一半。由于这个限制,使用常规显微镜不可能分辨比 $\lambda/2$ 更小的物体。

1928年,E·H·Synge提出了突破这一衍射极限的设想:用一个小于半波长的微探测器,在物体表面上扫描,就可以获得亚微米波长的分辨率。实际上,这就是近场探测的概念。但由于当时的工艺条件无法解决小孔的制作、小孔的精确定位和扫描等技术问题,因而这个设想未能实现。直到1972年,E·A·Ash等人应用近场的概念,在微波波段($\lambda=3\text{ cm}$)上实现了 $\lambda/60$ 的分辨率。

80年代以来,随着科学和技术向小尺寸与低维空间的推进,以及扫描探针显微技术的发展,在光学领域中出现了一个新型交叉学科——近场光学。它对传统光学成像系统的分辨极限产生了革命性的突破,可将显微术的空间分辨率开拓到光波长的几十分之一。尤其是随之发展起来的无孔方式近场扫描光学显微术,已达到小于 1 nm 的极高分辨率,使得显微术在材料科学、凝聚态物理、化学、生命科学、地学等领域内有了重大的、开拓性的应用前景。

下面,简单地介绍近场光学原理。

1. 近场光学原理

由发光体发光过程的电磁理论知道,物体内的电子流或电子密度分布与物体外的电磁场分布密切相关,因此,可以通过探测物体外的电磁场分布获取物体表面的结构信息。

物体表面外的电磁场分布可以划分为两个区域:一个是距离物体表面仅几个波长范围的区域,称为近场区域;另一个是从近场区域外至无穷远处的区域,称为远场区域。通常的观察仪器如显微镜、望远镜及各种光学镜头,都处在远场范围内工作。传统的波动光学已对远场中传播的光波特性和进行了详尽的研究,但对近场区的光场,特别是其中的非传播光场的特性,因受技术发展的限制,研究甚少。实际上,近场区内的光场结构相当复杂,在这区域内的光场除了有可以向远处传播的辐射场(相应于低空间频率分量)外,还有仅仅局限于物体表面一个波长范围内的非辐射场成分,它们相应于物体发光能量中的高空间频率分量,因而包含物体表面的微细结构信息。由于这部分光场随着离开物体距离的增大而迅速衰减,称为消逝波(倏逝波、隐失波、迅消波)。它们仅存在于物体表面附近,不能向远场传播,因而物体表面的细微结构信息不能传到远场,被限制在近场区域。为了能够研究物体表面的细微结构,必须要探测限制在近场区的消逝场,进行近场探测。

近场探测的原理如图3-70所示。当一个孔径为亚微米的微小光源在近场范围内照明物体(样品)时,其照明光斑面积只与孔径大小有关,与波长无关。这时,在其反射光或透射光中有很强的消逝光场,它们携带着物体亚微米尺寸结构的信息,通过扫描采集样品各点的近场光,即可得到分辨率小于半个波长的样品近场图像。因此,近场光学研究的是距离物体表面一个波长范围内的光学现象,或者说,近场光学研究的现象是对微小光源发出的光场,在微

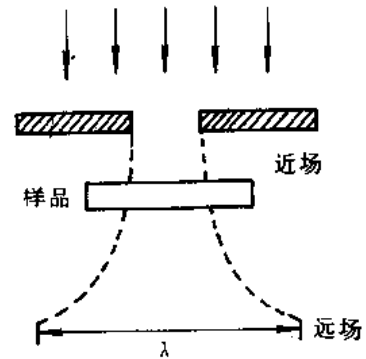


图3-70 近场探测原理示意图

2. 近场光学探测技术

作为近场光学研究的一个例子，简单介绍近场光学探测技术。

在进行近场光学探测时，必须要把合适的介质探针放在距离样品一个波长以内的范围，或者说“浸入”到消逝场中。由于光学边界的连续性，探针会将近场区的消逝场转换为传播场，然后将这种传播场由适当远距离的探测器进行记录。当这种探针进行平面扫描时，即可得到分辨率极高的二维图像。

自 80 年代以来，人们已研制出了多种类型的近场光学扫描显微镜(SNOM)。SNOM 与多种光谱技术结合，正成为一种探测介质微观结构特性的有力工具。其主要应用前景是：单分子观测、生物结构的荧光观测、对量子结构的荧光谱进行诊断等。图 3-71 是一种典型的 SNOM 总体结构示意图，其主要结构包括：光学探针 T_A 、探针扫描控制器 C(包括探针一样品间距控制、 $x-y$ 扫描驱动器)、光输入系统 L、信号采集及处理系统、平台 B。与现有的扫描显微镜相比，其关键技术是：

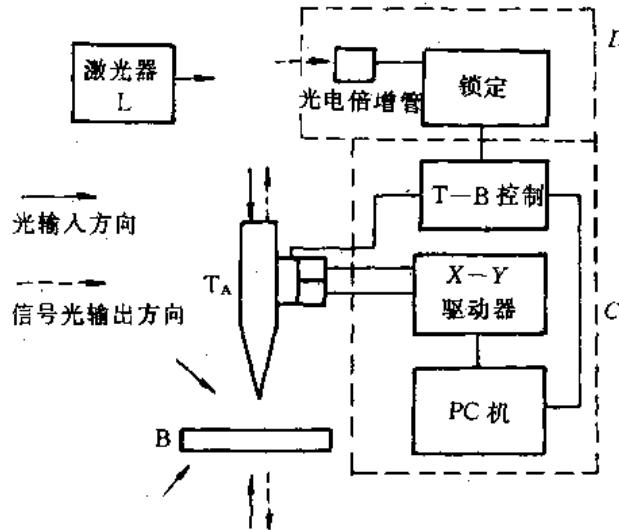


图 3-71 SNOM 总体结构示意图

(1) 探针 T_A 它是 SNOM 的关键元件，被用作微光源或信号接收器。因为探针的孔径愈小，SNOM 的分辨率愈高；愈亮，才可能有足够的信噪比，这两者往往是矛盾的，需视用途全面考虑。通常，制作探针的核心问题是小尺度和高的光透过率。与现有的扫描隧道显微镜(STM)中的金属探针和原子力显微镜(AFM)中的悬臂探针不同的是，SNOM 的探针一般采用介质材料，可以发射或接收光子，其尖端尺度为 $1\sim 100\text{ nm}$ ，以能将收集到的光子传送到探测器。探针可以用拉细的锥形光纤、四方玻璃尖端、石英晶体等制作。目前最常用的光纤探针如图 3-72 所示，主要包括光导、连接和光针三部分，为

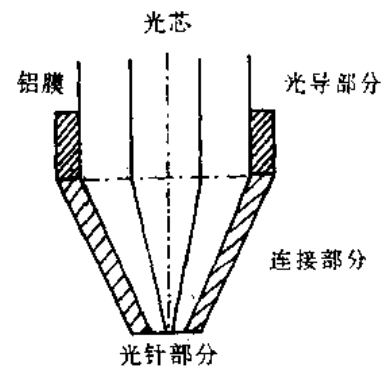


图 3-72 光纤探针示意图

了增大光输出,可在针尖外围镀金属膜。

(2) 信息探测 由于光子信息均来自纳米尺度区域,信号强度一般都很低(nW/cm^2),因而经光电倍增管、光电二极管、光子计数器或电荷耦合器件(CCD)将光信号转换为电信号后,需进行放大,经常利用调制—锁相放大技术抑制噪声,提高信噪比。

(3) 探针—样品间距控制 理想的调控方法应当是与光信号探测完全独立的机制,以使待测信号不受干扰,避免引入复杂性。

最后应当指出,伴随着人们对近场光学探测技术的研究,也采用了诸如在近场光学条件下求解边界处的消逝波场分布、利用惠更斯原理给出的衍射积分、求解亥姆霍兹方程等方法进行了近场光学理论的研究。尽管这些研究已解决了一些传统的远场光学方法无法解决的问题,但对于近场区的干涉、衍射及成像等诸方面,仍有许多新的理论问题尚待解决。例如,消逝场中所携带的细微结构的信息,有没有可能在远场或中场获得?近场光学扫描显微镜的分辨率是否有上限?甚至更为基础的问题是:近场光的本质是什么?但是可以相信,随着科学和技术的发展,近场光场理论将会愈来愈完善,SNOM技术的应用也将会愈来愈广泛。

例 题

例 3-1 一天文望远镜的物镜直径 $D=100\text{ mm}$,人眼瞳孔的直径 $d=2\text{ mm}$,求对于发射波长为 $\lambda=0.5\text{ }\mu\text{m}$ 光的物体的角分辨极限。为充分利用物镜的分辨本领,该望远镜的放大率 M 应选多大为宜?

解: 望远镜的角分辨率为

$$\theta_i = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 6.1 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

人眼的角分辨限度为

$$\theta_e = 1.22 \frac{\lambda}{d} = 3.05 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

为充分利用物镜的分辨本领,望远镜的角分辨极限经望远镜放大后,至少应等于眼睛的角分辨极限,即 M 应保证

$$\theta_e = M\theta_i$$

由此可得

$$M = \frac{\theta_e}{\theta_i} = \frac{D}{d} = 50$$

此 M 称为望远镜的正常放大率。若望远镜的放大率小于正常放大率,则物镜的分辨本领不能充分利用;若望远镜的放大率大于正常放大率,虽然像可以放得更大,但不会提高整个系统的分辨本领。故过分追求放大率,并非完全必要。

例 3-2 经准直的光束垂直投射到一光屏上,屏上开有两个直径均为 d 、中心间距为 D 的圆孔,且满足 $D>d$,分析其夫朗和费衍射图样。

解: 图 3-73(a)给出了该实验装置的示意图。

根据多缝衍射的分析可知,该双圆孔的夫朗和费衍射图样由单圆孔衍射和双光束干涉决定,即可视为是由单圆孔衍射调制的双光束干涉条纹。

由几何光学，凡平行于光轴的任何光线，经透镜后，都将会聚于主焦点，因此，圆孔衍射图样与圆孔的位置是否偏离透镜光轴无关。所以，单圆孔衍射图样是中心在 F' 的同心圆环。又由于通过两个圆孔的光波所产生的干涉可视为杨氏干涉，所以观察屏上所看到的衍射图样如图 3-73(b) 所示。

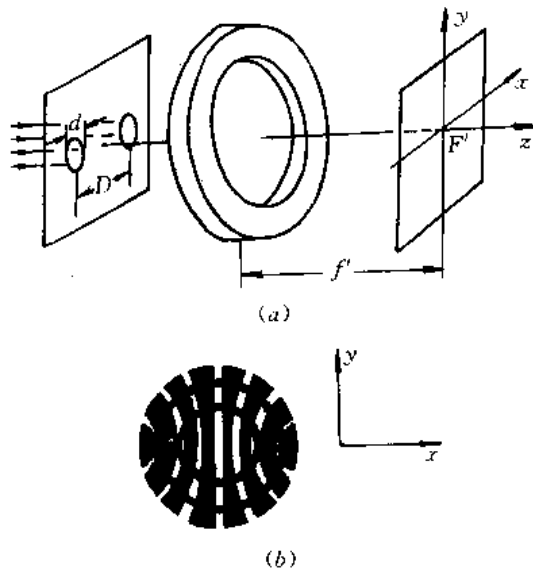


图 3-73 例 3-2 用图

例 3-3 钠黄光垂直照射一光栅，它的第二级光谱恰好分辨开钠双线 ($\lambda_1 = 0.5890 \mu\text{m}$, $\lambda_2 = 0.5896 \mu\text{m}$)，并测得 $0.5890 \mu\text{m}$ 的第二级光谱线所对应的衍射角为 2.5° ，第三级缺级，试求该光栅的总缝数 N ，光栅常数 d 和缝宽。

解：由光栅分辨本领 $A = \lambda / \Delta\lambda = mN$ 得

$$N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda m}$$

将钠双线的平均波长 $\bar{\lambda} = 0.5893 \mu\text{m}$ ， $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.6 \times 10^{-3} \mu\text{m}$ ， $m = 2$ 代入上式，可得光栅总缝数为

$$N = 491$$

用 θ_2 表示第二级光谱线的衍射角，则由光栅方程

$$d \sin \theta_2 = 2\lambda$$

可得光栅常数 d 为

$$d = \frac{2\lambda}{\sin \theta_2} = 0.027 \text{ mm}$$

又由于光栅第三级缺级，故有 $d/b = 3$ ，所以缝宽为

$$b = \frac{d}{3} = 0.009 \text{ mm}$$

例 3-4 用一个每毫米 500 条缝的衍射光栅观察钠光谱线 ($\lambda = 0.589 \mu\text{m}$)，问平行光垂直入射和 30° 角斜入射时，分别最多能观察到几级谱线？

解：当平行光垂直入射时，光栅方程为

$$d \sin \theta = m\lambda$$

对应于 $\sin \theta = 1$ 的 m 为最大谱线级。根据已知条件，光栅常数为 $d = 1/500 \text{ mm}$ ，所以有

$$m = \frac{d}{\lambda} = 3.4$$

因为 m 是衍射级次，对于小数无实际意义，故取 $m = 3$ ，即只能观察到第三级谱线。

当平行光斜入射时，光栅方程为

$$d(\sin \varphi + \sin \theta) = m\lambda$$

取 $\sin \theta = 1$ ，代入已知条件得

$$m = \frac{d(\sin \varphi + 1)}{\lambda} = 5.09$$

即最多能观察到第五级谱线。

斜入射时，尽管可以得到高级次的光谱，从而得到大的色散率和分辨率，但需要注意缺级和因光谱线落在中央衍射最大包线之外，导致光能甚小的问题。

例 3-5 对于 600 条/mm 的光栅，求可见光 ($0.40 \sim 0.76 \mu\text{m}$) 一级光谱散开的角度，一级红光 ($0.76 \mu\text{m}$) 的角色散率，以及对于 $f = 1 \text{ m}$ 物镜的线色散率。

解：欲求可见光一级光谱散开的角度，只需分别求出 $0.40 \mu\text{m}$ 和 $0.76 \mu\text{m}$ 光的衍射角即可。由光栅方程有

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$$

考察一级光谱，对于紫光 $\lambda = 0.40 \mu\text{m}$ ，可求得

$$\sin \theta_v = 0.24$$

所以

$$\theta_v = 13.9^\circ$$

同理，可求得红光 $\lambda = 0.76 \mu\text{m}$ 的衍射角为

$$\theta_r = 27.1^\circ$$

因此，一级光谱散开的角度是 $13.9^\circ \sim 27.1^\circ$ (图 3-74)。

由角色散率表示式

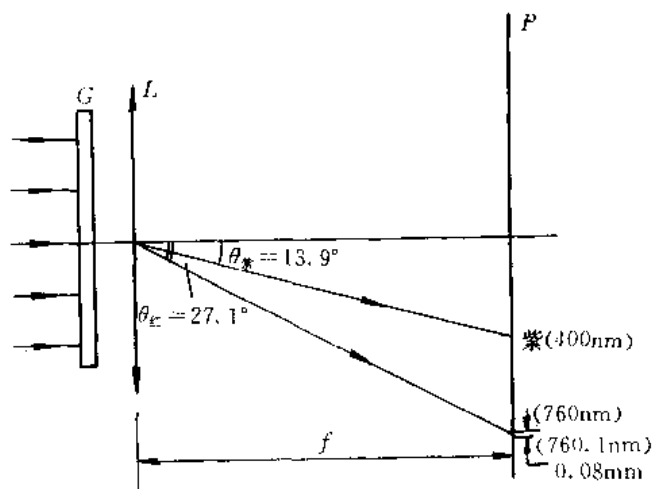


图 3-74 例 3-5 用图



$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$$

一级红光的角色散率为

$$\left. \frac{d\theta}{d\lambda} \right|_r = 6.74 \times 10^{-4} \text{ rad/nm}$$

相应的线色散是

$$\left. \frac{dL}{d\lambda} \right|_r = \frac{f}{\cos \theta_r} \frac{d\theta}{d\lambda} = 7.56 \times 10^{-4} \text{ cm/nm}$$

即,当物镜焦距为 1 m 时,在 $0.76 \mu\text{m}$ 附近,相隔 0.1 nm 的两种红光的一级干涉极大值间距为 $7.56 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 。在计算线色散的式中, $f/\cos \theta_r$ 代表了相应于 $0.76 \mu\text{m}$ 的红光,从透镜中心到观察屏该谱线位置点的距离, θ_r 是焦平面(观察屏)相对于与该谱线垂直平面的倾斜角。

例 3-6 在进行菲涅耳衍射实验中,圆孔半径 $\rho=1 \text{ mm}$,光源离圆孔 0.2 m , $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$,当接收屏由很远的地方向圆孔靠近时,求前两次出现光强最大和最小的位置。

解: 对于该圆孔的菲涅耳数为

$$N_m = \frac{\rho^2}{\lambda R} = 7.9$$

这说明当接收屏从远处向圆孔靠近时,半波带最少是 8 个。又因为 N 为偶数,对应于第一个光强最小值,这时离圆孔的距离为

$$r_{m1} = \frac{R}{\frac{N}{N_m} - 1} = 15.8 \text{ m}$$

对应于第二个光强最小值的半波带数 $N=10$, 出现在

$$r_{m2} = \frac{R}{\frac{N}{N_m} - 1} = 0.75 \text{ m}$$

对应于第一个光强最大值的半波带数 $N=9$, 其位置在

$$r_{M1} = \frac{R}{\frac{N}{N_m} - 1} = 1.44 \text{ m}$$

对应于第二个光强最大值的半波带数 $N=11$, 出现在

$$r_{M2} = \frac{R}{\frac{N}{N_m} - 1} = 0.51 \text{ m}$$

应用类似方法可以计算得到如下结论: ① 其它条件不变,光源离圆孔越远,在轴上观察到明暗交替变化的范围越小; ② 其它条件不变,减小圆孔半径(减小菲涅耳数),在轴上明暗交替变化的范围也越小。

例 3-7 波长为 $0.45 \mu\text{m}$ 的单色平面波入射到不透明的屏 A 上,屏上有半径 $\rho=0.6 \text{ mm}$ 的小孔和一与小孔同心的环形缝,其内外半径为 $0.6\sqrt{2} \text{ mm}$ 和 $0.6\sqrt{3} \text{ mm}$,求距离 A 为 80 cm 的屏 B 上出现的衍射图样中央亮点的强度,比无屏 A 时光强大多少倍?

解: 首先应当明确该同心环形缝的作用。

若屏 A 上只有一个半径 $\rho=0.6 \text{ mm}$ 的小孔,相对于衍射图中心亮点,波面上露出的半

$$N = \frac{\rho^2}{\lambda r_0} = 1$$

如果屏上小孔半径为 $0.6\sqrt{3}$ mm, 则

$$N = 3$$

同样, 如果屏上小孔半径为 $0.6\sqrt{2}$ mm, 则 $N=2$ 。

所以, 同心环形缝的存在, 说明第二个半波带被挡住。这时 $A_3 = a_1 + a_3$ 。如果 $a_1 \approx a_3$, 则 $A_3 \approx 2a_1$ 。

如果不存在屏 A, 则 $A_0 = a_1/2$ 。所以在这两种情况下, 屏 B 上中央亮点强度之比为

$$\frac{I_3}{I_0} = \frac{(2a_1)^2}{(a_1/2)^2} = 16$$

即屏 A 存在时, 中央亮点光强是不存在屏 A 时光强的 16 倍。

例 3-8 波长为 $\lambda=0.55 \mu\text{m}$ 的单色平行光正入射到一直径 $d=1.1$ mm 的圆孔上, 试求在过圆孔中心的轴线上、与孔相距 33 cm 处 P 点的光强与光波自由传播时该点光强之比。

解: 圆孔对 P 点露出的半波带数为

$$N = \frac{\rho^2}{\lambda r_0} = 1 \frac{2}{3}$$

即圆孔对 P 点露出第一个半波带和第二个半波带的 $2/3$ 。利用振幅矢量加法, P 点的振幅矢量为 \vec{OM}_2 (图 3-75), 由图可知,

$$|\vec{OM}_2| = |\vec{OM}_1| \sin 30^\circ = \frac{a_1}{2}$$

即 P 点的振幅是第一个半波带所产生的振幅的一半, 其光强与光波自由传播时的该点光强相等。

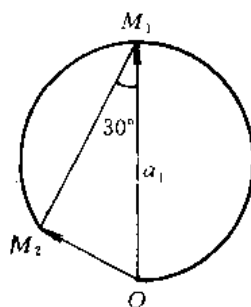


图 3-75 例 3-8 用图

习 题

3-1 试确定(至少是近似地)最接近夫朗和费矩形孔衍射图样中央峰值的四个对顶点次极大(离开轴)的相对光强度。将这些值与轴上的第六个次峰值相比较, 有何结果?

3-2 由氩离子激光器发出波长 $\lambda=488$ nm 的蓝色平面光, 垂直照射在不透明屏的水平矩形孔上, 此矩形孔尺寸为 $0.75 \text{ mm} \times 0.25 \text{ mm}$ 。在位于矩形孔附近正透镜 ($f=2.5$ m) 焦平面处的屏上观察衍射图样。试描绘所形成的中央最大值。

3-3 由于衍射效应的限制, 人眼能分辨某汽车的两前灯时, 人离汽车的最远距离 $l = ?$ (假定两车灯相距 1.22 m。)

3-4 借助于直径为 2 m 的反射式望远镜, 将地球上的一束激光 ($\lambda=600$ nm) 聚焦在月球上某处。如果月球距地球 4×10^5 km, 忽略地球大气层的影响, 试计算激光在月球上的光斑直径。

3-5 一准直的单色光束 ($\lambda=600$ nm) 垂直入射在直径为 1.2 cm、焦距为 50 cm 的会聚透镜上, 试计算在该透镜焦平面上的衍射图样中心斑的角宽度和线宽度。

3-6 (1) 显微镜用紫外光 ($\lambda=275$ nm) 照明比用可见光 ($\lambda=550$ nm) 照明的分辨本领约大多少倍?

(2) 它的物镜在空气中的数值孔径为 0.9, 用紫外光照明时能分辨的两条线之间的距离是多少?

(3) 用油浸系统($n=1.6$)时, 这最小距离又是多少?

3-7 一照相物镜的相对孔径为 $1:3.5$, 用 $\lambda=546 \text{ nm}$ 的汞绿光照明。问用分辨本领为 500 线/mm 的底片来记录物镜的像是否合适?

3-8 用图 3-76 的装置观察白光, 在屏上将出现一条连续光谱。若在棱镜和物镜 L_2 之间放一单缝, 缝的细长方向与光谱展开方向一致, 则在屏上将出现几条如图所示的弯曲彩色条纹。试解释这一现象。

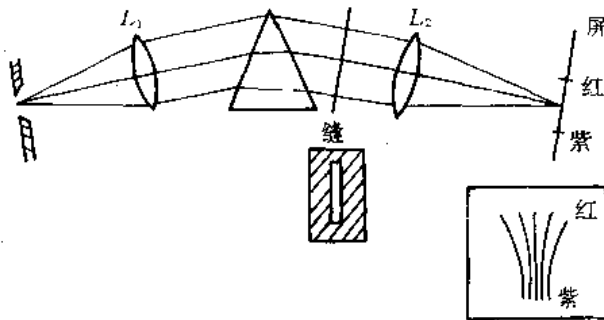


图 3-76 题 3-8 用图

3-9 用波长 $\lambda=0.63 \mu\text{m}$ 的激光粗测一单缝缝宽。若观察屏上衍射条纹左右两个第五级极小的距离是 6.3 cm, 屏和缝的距离是 5 m, 求缝宽。

3-10 今测得一细丝的夫朗和费零级衍射条纹的宽度为 1 cm, 已知入射光波长为 $0.63 \mu\text{m}$, 透镜焦距为 50 cm, 求细丝的直径。

3-11 考察缝宽 $b=8.8 \times 10^{-3} \text{ cm}$, 双缝间隔 $d=7.0 \times 10^{-2} \text{ cm}$ 、波长为 $0.6328 \mu\text{m}$ 时的双缝衍射, 在中央极大值两侧的两个衍射极小值间, 将出现多少个干涉极小值? 若屏离开双缝 457.2 cm, 计算条纹宽度。

3-12 在双缝夫朗和费衍射实验中, 所用波长 $\lambda=632.8 \text{ nm}$, 透镜焦距 $f=50 \text{ cm}$, 观察到两相邻亮条纹之间的距离 $e=1.5 \text{ mm}$, 并且第 4 级亮纹缺级。试求: (1) 双缝的缝距和缝宽; (2) 第 1、2、3 级亮纹的相对强度。

3-13 有一多缝衍射屏如图 3-77 所示, 总缝数为 $2N$, 缝宽为 a , 缝间不透明部分的宽度依次为 a 和 $3a$ 。试求正入射情况下, 遮住偶数缝和全开放时的夫朗和费衍射强度分布公式。

3-14 用波长为 624 nm 的单色光照射一光栅, 已知该光栅的缝宽 $a=0.012 \text{ mm}$, 不透明部分宽度 $b=0.029 \text{ mm}$, 缝数 $N=1000$ 条, 试求: (1) 中央峰的角宽度; (2) 中央峰内干涉主极大的数目; (3) 谱线的半角宽度。

3-15 一平行单色光垂直入射到光栅上, 在满足 $d \sin \theta=3\lambda$ 时, 经光栅相邻两缝沿 θ 方向衍射的两束光的光程差是多少? 经第 1 缝和第 n 缝衍射的两束光的光程差又是多少? 这时通过任意两缝的光叠加是否都会加强?

3-16 在唱片中心 O_1 上方 $h_1=1 \text{ cm}$ 处放置一单色点光源, 观察者眼睛与唱片轴线的距离 $a=110 \text{ cm}$, 高度 $h_2=10 \text{ cm}$, 除光源的几何像外, 眼睛在唱片表面上看到衍射条纹系

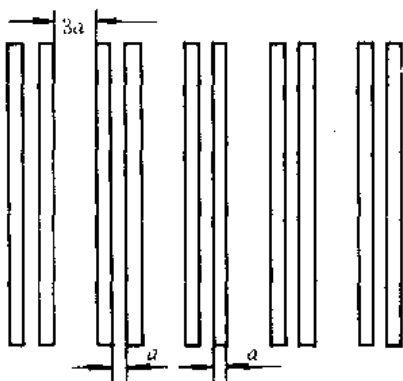


图 3-77. 题 3-13 用图

列。若唱片条痕之间的距离 $d=0.5\text{ mm}$ ，求条纹之间的距离 Δx 等于多少？已知光波长 $\lambda=0.55\ \mu\text{m}$ 。

3-17 已知一光栅的光栅常数 $d=2.5\ \mu\text{m}$ ，缝数为 $N=20\ 000$ 条。求此光栅的一、二、三级光谱的分辨本领，并求波长 $\lambda=0.69\ \mu\text{m}$ 红光的二级、三级光谱的位置(角度)，以及光谱对此波长的最大干涉级。

3-18 已知 F-P 标准具有空气间隔 $h=4\text{ cm}$ ，两镜面的反射率均为 $R=89.1\%$ 。另有一反射光栅的刻线面积为 $3\text{ cm}\times 3\text{ cm}$ ，光栅常数为 $1\ 200\text{ 条}/\text{mm}$ ，取其一级光谱，试比较这两个分光元件对 $\lambda=0.632\ 8\ \mu\text{m}$ 红光的分光特性。

3-19 在一透射光栅上必须刻多少条线，才能使它刚好分辨第一级光谱中的钠双线 (589.592 nm 和 588.995 nm)。

3-20 可见光 ($\lambda=400\text{ nm}\sim 700\text{ nm}$) 垂直入射到一块每毫米 $1\ 000$ 刻痕的光栅上，在 30° 的衍射角方向附近看到两条光谱线，相隔的角度为 $(18/5\pi\sqrt{3})^\circ$ ，求这两条光谱线的波长差 $\Delta\lambda$ 和平均波长 λ 。如果要用这块光栅分辨 $\delta\lambda=\Delta\lambda/100$ 的波长差，光栅的宽度至少应该是多少？

3-21 一光栅宽为 5 cm ，每毫米内有 400 条刻线。当波长为 500 nm 的平行光垂直入射时，第 4 级衍射光谱处在单缝衍射的第一极小位置。试求：

- (1) 每缝(透光部分)的宽度。
- (2) 第二级衍射光谱的半角宽度。
- (3) 第二级可分辨的最小波长差。

(4) 若入射光改为光与栅平面法线成 30° 角方向斜入射时，光栅能分辨的谱线最小波长差又为多少？

3-22 一块闪耀波长为第一级 $0.5\ \mu\text{m}$ 、每毫米刻痕为 $1\ 200$ 的反射光栅，在里特罗自准直装置中能看到 $0.5\ \mu\text{m}$ 的哪几级光谱？

3-23 一闪耀光栅刻线数为 $100\text{ 条}/\text{mm}$ ，用 $\lambda=600\text{ nm}$ 的单色平行光垂直入射到光栅平面，若第 2 级光谱闪耀，闪耀角应为多大？

3-24 在菲涅耳圆孔衍射中，衍射孔半径 ρ 固定，光源位置固定，连续地增大屏幕与圆孔的距离 r_0 ，试以距离为横轴，屏上中心点 P_0 的光强为纵轴，画出光强的大致变化曲线。

3-25 波长 589 nm 的单色平行光照明一直径为 $D=2.6\text{ mm}$ 的小圆孔，接收屏距孔

1.5 m。问轴线与屏的交点是亮点还是暗点？当孔的直径改变为多大时，该点的光强发生相反的变化。

3-26 波长 $\lambda=563.3 \text{ nm}$ 的单色光，从远处的光源发出，穿过一个直径为 $D=2.6 \text{ mm}$ 的小圆孔，照射与孔相距 $r_0=1 \text{ m}$ 的屏幕。问屏幕正对孔中心的点 P_0 处，是亮点还是暗点？要使 P_0 点的情况与上述情况相反，至少要把屏幕移动多少距离？

3-27 有一波带片，它的各个环的半径为 $r_m=0.1\sqrt{m} \text{ cm}$ ($m=1, 2, \dots$)。当 $\lambda=0.5 \mu\text{m}$ 时，计算其焦点的位置。

3-28 如图 3-78 所示，单色点光源 ($\lambda=500 \text{ nm}$) 安装在离光阑 1 m 远的地方，光阑上有一个内外半径分别为 0.5 mm 和 1 mm 的通光圆环，考察点 P 离光阑 1 m (SP 连线通过圆环中心并垂直于圆环平面)。问在 P 点的光强和没有光阑时的光强度之比是多少。

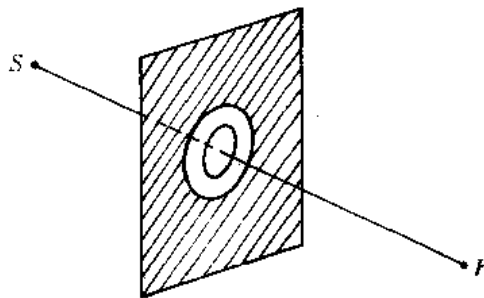


图 3-78 题 3-28 用图

3-29 单色平面光入射到小圆孔上，在孔的对称轴上的 P_0 点进行观察，圆孔正好露出 $1/2$ 个半波带，试问 P_0 点的光强是光波自由传播时光强的几倍。

3-30 波长 632.8 nm 的单色平行光垂直入射到一圆孔屏上，在孔后中心轴上距圆孔 $r_0=1 \text{ m}$ 处的 P_0 点出现一个亮点，假定这时小圆孔对 P_0 点恰好露出第一个半波带。试求：

- (1) 小圆孔的半径 ρ 。
- (2) 由 P_0 点沿中心轴从远处向小圆孔移动时，第一个暗点至圆孔的距离。

3-31 试计算一波带片前 10 个透光波带的内外半径的值。这波带片对 $0.63 \mu\text{m}$ 红光的焦距为 20 m，并假设中心是一个透光带。

3-32 一波带片主焦点的强度约为入射光强度的 10^3 倍，在 400 nm 的紫光照明下的主焦距为 80 cm。问：

- (1) 波带片应有几个开带。
- (2) 波带片半径是多少。

3-33 一块菲涅耳波带片对波长 $0.50 \mu\text{m}$ 的衍射光的焦距是 10 m，假定它的中心为开带，

- (1) 求波带片上第 4 个开带外圆的半径。
- (2) 将一点光源置于距波带片中心 2 m 处，求它的 +1 级像。

3-34 图 3-79 是制作全息光栅的装置图，试推导其全息光栅的条纹间距公式。今要在干板处获得 1 200 条/mm 的光栅，问两反射镜间的夹角是多少。

3-35 求出图 3-80 所示衍射屏的夫朗和费衍射图样的强度分布。设衍射屏由单位振幅的单色平面波垂直照明。

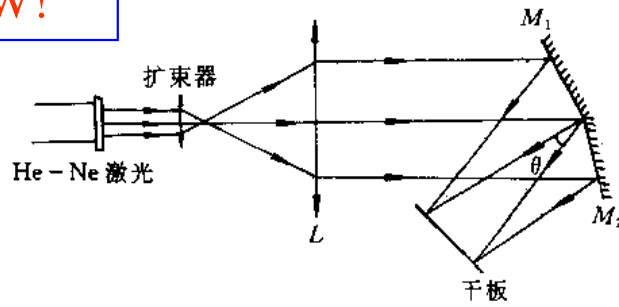


图 3-79 题 3-34 用图

3-36 求出图 3-81 所示衍射屏的夫朗和费衍射图样的强度分布。设衍射屏由单位振幅的单色平面波垂直照明。

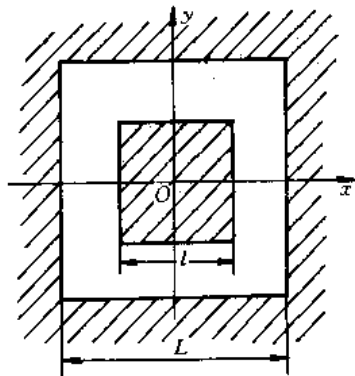


图 3-80 题 3-35 用图

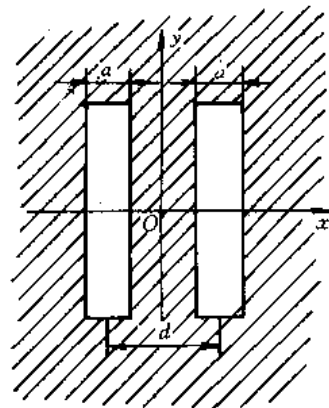


图 3-81 题 3-36 用图

3-37 今有宽度为 a 的单狭缝夫朗和费衍射装置，在缝的宽度方向上 (x 由 $(-a/2)$ 到 $(a/2)$) 覆盖着振幅透射系数 $t(x) = \cos(\pi x/a)$ 的膜片。试求夫朗和费衍射场的振幅分布，并和无膜片时的衍射场振幅分布作比较。

3-38 一块透明片的振幅透过系数 $t(x) = \exp(-\pi x^2)$ ，将其置于透镜的前焦平面上，并用单位振幅的单色光垂直照明，求透镜后焦平面上的振幅分布。



第 4 章 光在各向异性介质中的传输特性

前面几章我们由光的电磁理论出发,讨论了光在各向同性介质中的传播规律。现在,仍然从光的电磁理论出发,讨论光在各向异性介质中的传播规律。实际上,光在各向同性介质中的传播规律只是光在各向异性介质中传播规律的特殊情况。光学各向异性介质的典型代表是晶体,光在晶体中与光在各向同性介质中传播特性的主要差别是,光在晶体中不同方向传播时,其光学性质不同,能够产生双折射、双反射和偏振效应,即一束单色光在各向同性介质界面上折射、反射时,只有一束折射光、反射光,而在晶体界面上折射、反射时,一般将产生两束折射光、反射光,而且它们是偏振方向互相垂直的线偏振光。

4.1 晶体的光学各向异性

众所周知,晶体结构的主要特点是组成晶体的各基元(原子、分子、离子或其集团)在空间排列组合时,表现出一定的空间周期性和对称性。这种结构特点导致了晶体宏观性质的各向异性,自然,其光学特性也就表现出各向异性。

在晶体中,描述光学特性的参量与方向有关,因方向而异,它们是一些张量。下面,首先简单介绍有关张量的基础知识,然后讨论描述晶体光学特性的参量。

4.1.1 张量的基础知识

1. 张量的概念

张量是使一个矢量与一个或多个其它矢量相关联的量。例如,矢量 p 与矢量 q 有关,则其一般关系应为

$$p = \bar{T} \cdot q \quad (4-1)$$

式中, \bar{T} 是关联 p 和 q 的二阶张量。在直角坐标系 $O-x_1x_2x_3$ 中,上式可表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

式中,三个矩阵分别表示矢量 p 、二阶张量 \bar{T} 和矢量 q 。二阶张量有九个分量,每个分量都与一对坐标(按一定顺序)相关。(4-1)式的分量表示式为



$$\left. \begin{aligned} p_1 &= T_{11}q_1 + T_{12}q_2 + T_{13}q_3 \\ p_2 &= T_{21}q_1 + T_{22}q_2 + T_{23}q_3 \\ p_3 &= T_{31}q_1 + T_{32}q_2 + T_{33}q_3 \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

其一般分量形式为

$$p_i = \sum_j T_{ij}q_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4-4)$$

按照爱因斯坦求和规则：若在同一项中下标重复两次，则可自动地按该下标求和，将上式简化为

$$p_i = T_{ij}q_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4-5)$$

由上述讨论可以看出，如果 \vec{T} 是张量，则 p 矢量的某坐标分量不仅与 q 矢量的同一坐标分量有关，还与其另外两个分量有关。

如果矢量 p 与两个矢量 u 和 v 相关，其一般关系式为

$$p = \vec{T} : uv \quad (4-6)$$

分量表示式为

$$p_i = T_{ijk}u_jv_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (4-7)$$

式中， \vec{T} 为三阶张量，包含 27 个分量，其矩阵形式为

$$[T_{ijk}] = \begin{bmatrix} T_{111} & T_{122} & T_{133} & T_{123} & T_{132} & T_{131} & T_{113} & T_{112} & T_{121} \\ T_{211} & T_{222} & T_{233} & T_{223} & T_{232} & T_{231} & T_{213} & T_{212} & T_{221} \\ T_{311} & T_{322} & T_{333} & T_{323} & T_{332} & T_{331} & T_{313} & T_{312} & T_{321} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

实际上，一个标量可以看作是一个零阶张量，一个矢量可以看作是一个一阶张量。从分量的标记方法看，标量无下标，矢量有一个下标，二阶张量有两个下标，三阶张量有三个下标。因此，下标的数目等于张量的阶数。

2. 张量的变换

如上所述，由于张量的分量与坐标有关，所以当坐标系发生变化时，张量的表示式也将发生变化。假若在原坐标系 $O-x_1x_2x_3$ 中，某张量表示式为 $[T_{ij}]$ ，在新坐标系 $O-x'_1x'_2x'_3$ 中，该张量的表示式为 $[T'_{ij}]$ ，则当原坐标系 $O-x_1x_2x_3$ 与新坐标系 $O-x'_1x'_2x'_3$ 的坐标变换矩阵为 $[a_{ij}]$ 时， $[T'_{ij}]$ 与 $[T_{ij}]$ 的关系为

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

其分量表示形式为

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (4-10)$$

这就是张量变换定律。如果用张量的新坐标分量表示原坐标分量，可通过逆变换得到

$$T_{ij} = a_{ki}a_{lj}T'_{kl} \quad (4-11)$$

如果考虑的是矢量，则新坐标系中的矢量表示式 A' 与原坐标系中的表示式 A 间的矩阵变换关系为

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (4-12)$$



$$A'_i = a_{ij}A_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4-13)$$

3. 对称张量

一个二阶张量 $[T_{ij}]$, 如果有 $T_{ij}=T_{ji}$, 称为对称张量, 它只有六个独立分量。与任何二次曲面一样, 二阶对称张量存在着一个主轴坐标系, 在该主轴坐标系中, 张量只有三个对角分量非零, 为对角化张量。于是, 当坐标系进行主轴变换时, 二阶对称张量即可对角化。例如, 某一对称张量

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

经上述主轴变换后, $T'_{11}=T_1, T'_{22}=T_2, T'_{33}=T_3, T'_{12}=T'_{21}=T'_{13}=T'_{31}=T'_{23}=T'_{32}=0$, 可表示为

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

最后应指出, 张量与矩阵是有区别的, 张量代表一种物理量, 因此在坐标变换时, 改变的只是表示方式, 其物理量本身并不变化, 而矩阵则只有数学意义。因此, 有时把张量写在方括号内, 把矩阵写在圆括号内, 以示区别。

4.1.2 晶体的介电张量

由电磁场理论已知, 介电常数 ϵ 是表征介质电学特性的参量。在各向同性介质中, 电位移矢量 D 与电场矢量 E 满足如下关系:

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

在此, 介电常数 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 是标量, 电位移矢量 D 与电场矢量 E 的方向相同, 即 D 矢量的每个分量只与 E 矢量的相应分量线性相关。对于各向异性介质(例如晶体), D 和 E 间的关系为

$$D = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r \cdot E \quad (4-14)$$

介电常数 $\vec{\epsilon} = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r$ 是二阶张量。(4-14)式的分量形式为

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4-15)$$

即电位移矢量 D 的每个分量均与电场矢量 E 的各个分量线性相关。在一般情况下, D 与 E 的方向不相同。

又由光的电磁理论, 晶体的介电张量 $\vec{\epsilon}_r$ 是一个对称张量, 因此它有六个独立分量。经主轴变换后的介电张量是对角张量, 只有三个非零的对角分量, 为

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 称为主介电系数。由麦克斯韦关系式

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

还可以相应地定义三个主折射率 n_1, n_2, n_3 。在主轴坐标系中, (4-15)式可表示为



$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_i E_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (4-16)$$

此外，由固体物理学知道，不同晶体的结构具有不同的空间对称性，自然界中存在的晶体按其空间对称性的不同，分为七大晶系：立方晶系；四方晶系；六方晶系；三方晶系；正方晶系；单斜晶系；三斜晶系。由于它们的对称性不同，所以在主轴坐标系中介电张量的独立分量数目不同，各晶系的介电张量矩阵形式如表 4-1 所示。由该表可见，三斜、单斜和正交晶系中，主介电系数 $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ ，这几类晶体在光学上称为双轴晶体；三方、四方、六方晶系中，主介电系数 $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ ，这几类晶体在光学上称为单轴晶体；立方晶系在光学上是各向同性的， $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ 。

表 4-1 各晶系的介电张量矩阵

晶系	在主轴坐标系中	在非主轴坐标系中	光学分类
三斜		$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$	双轴
单斜	$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{31} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{31} & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$	
正交		$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$	
三方 四方 六方	$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$	单轴
立方	$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{11} \end{bmatrix}$	各向同性

4.2 理想单色平面光波在晶体中的传播

4.2.1 光在晶体中传播的解析法描述

根据光的电磁理论，光在晶体中的传播特性仍然由麦克斯韦方程组描述。

1. 麦克斯韦方程组

在均匀、不导电、非磁性的各向异性介质(晶体)中，若没有自由电荷存在，麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4-17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4-18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4-19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4-20)$$

物质方程为

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (4-21)$$

$$\mathbf{D} = \vec{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (4-22)$$

为简单起见，我们只讨论单色平面光波在晶体中的传播特性。这样处理，可不考虑介质的色散特性，同时，对于任意复杂的光波，因为光场可以通过傅里叶变换分解为许多不同频率的单色平面光波的叠加，所以也不失其普遍性。

2. 光波在晶体中传播特性的一般描述

1) 单色平面光波在晶体中的传播特性

(1) 晶体中光电磁波的结构 设晶体中传播的单色平面光波为

$$\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{D}_0, \mathbf{H}_0) e^{-i\omega(t - \frac{n}{c} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

式中， $n = \sqrt{\epsilon_r}$ ； $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 是真空中光速； \mathbf{k} 是波法线方向的单位矢量； $c/n = v$ 是介质中单色平面光波的相速度。对于这样一种光波，在进行公式运算时，可以以 $-i\omega$ 代替 $\partial/\partial t$ ，以 $(i\omega n/c)\mathbf{k}$ 代换算符 ∇ 。经过运算，(4-17)式~(4-20)式变为

$$\mathbf{H} \times \mathbf{k} = \frac{c}{n} \mathbf{D} \quad (4-23)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{k} = -\frac{\mu_0 c}{n} \mathbf{H} \quad (4-24)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4-25)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4-26)$$

由这些关系式可以看出：

① \mathbf{D} 垂直于 \mathbf{H} 和 \mathbf{k} ， \mathbf{H} 垂直于 \mathbf{E} 和 \mathbf{k} ，所以 \mathbf{H} 垂直于 \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{k} ，因此， \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{k} 在垂直于 \mathbf{H} 的同一平面内。并且，在一般情况下， \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 不在同一方向上。

② 由能流密度的定义

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

可见， \mathbf{H} 垂直于 \mathbf{E} 和 \mathbf{s} (能流方向上的单位矢量)，故 \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{s} 、 \mathbf{k} 同在一个平面上，并且在一般情况下， \mathbf{s} 和 \mathbf{k} 的方向不同，其间夹角与 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 之间的夹角相同(图4-1)。

由此，我们可以得到一个重要结论：在晶体中，光的能量传播方向通常与光波法线方向不同。

(2) 能量密度 根据电磁能量密度公式及(4-23)式、(4-24)式，有

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{n}{2c} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{k}) = \frac{n}{2c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{k}$$

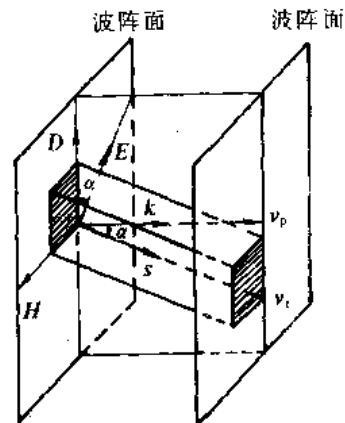


图 4-1 平面光波的电磁结构

于是, 总电磁能量密度为

$$\omega = \omega_e + \omega_m = \frac{n}{c} |S| s \cdot k \quad (4-27)$$

对于各向同性介质, 因 s 与 k 同方向, 所以有

$$\omega = \frac{n}{c} |S| \quad (4-28)$$

(3) 相速度和光线速度 相速度 v_p 是光波等相位面的传播速度, 其表示式为

$$v_p = v_p k = \frac{c}{n} k \quad (4-29)$$

光线速度 v_r 是单色光波能量的传播速度, 其方向为能流密度(玻印亭矢量)的方向 s , 大小等于单位时间内流过垂直于能流方向上的一个单位面积的能量除以能量密度, 即

$$v_r = v_r s = \frac{|S|}{\omega} s \quad (4-30)$$

由(4-27)式~(4-30)式可以得到

$$v_p = v_r s \cdot k = v_r \cos \alpha \quad (4-31)$$

即如图 4-2 所示, 单色平面光波的相速度是其光线速度在波阵面法线方向上的投影。

由此, 我们又得到晶体光学中的一个基本特性: 在一般情况下, 光在晶体中的相速度和光线速度分离, 其大小和方向均不相同。对于各向同性介质, 单色平面光波的相速度也即是其能量传播速度(光线速度), 这正是我们在 1.1 节中所给出的结论。

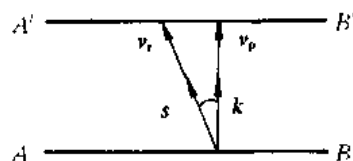


图 4-2 v_p 与 v_r 的关系
(AB 表示波阵面)

2) 光波在晶体中传播特性的描述

(1) 晶体光学的基本方程 由麦克斯韦方程组出发, 将(4-23)式和(4-24)式的 H 消去, 可以得到

$$D = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} (E \times k) \times k = -\epsilon_0 n^2 (E \times k) \times k$$

再利用矢量恒等式

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

变换为

$$D = \epsilon_0 n^2 [E - k(k \cdot E)] \quad (4-32)$$

式中, 方括号 $[E - k(k \cdot E)]$ 实际上表示 E 在垂直于 k (即平行于 D) 方向上的分量, 记为 E_{\perp} (图 4-3)。由此, (4-32)式可以写成

$$D = \epsilon_0 n^2 E_{\perp} \quad (4-33)$$

我们还可以将(4-32)式、(4-33)式写成另外一种形式。

因为

$$E_{\perp} = E \cos \alpha$$

所以

Click to buy NOW

$$E = \frac{E_{\perp}}{\cos \alpha} = \frac{D}{\epsilon_0 n^2 \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 (n \cos \alpha)^2} D \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 (n \cos \alpha)^2} D_{\perp} \quad (4-34)$$

根据折射率的定义

$$n = \frac{c}{v_p}$$

可以在形式上定义“光线折射率”(或射线折射率、能流折射率) n_r :

$$n_r = \frac{c}{v_r} = \frac{c}{v_p} \cos \alpha = n \cos \alpha \quad (4-35)$$

由此可将(4-34)式表示为

$$E = \frac{c}{\epsilon_0 n_r^2} D_{\perp} \quad (4-36)$$

或

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 n_r^2} [D - s(s \cdot D)] \quad (4-37)$$

(4-32)式、(4-33)式和(4-36)式、(4-37)式是麦克斯韦方程组的直接推论，它们决定了在晶体中传播的光电磁波的结构，给出了沿某一 $k(s)$ 方向传播的光波电场 $E(D)$ 与晶体特性 $n(n_r)$ 的关系，因而是描述晶体光学性质的基本方程。

(2) 菲涅耳方程 为了考察晶体的光学特性，我们选取主轴坐标系，因而物质方程为

$$D_i = \epsilon_i \epsilon_0 E_i, \quad i = 1, 2, 3$$

① 波法线菲涅耳方程(波法线方程)。将基本方程(4-32)式写成分量形式

$$D_i = \epsilon_0 n^2 [E_i - k_i (k \cdot E)] \quad i = 1, 2, 3 \quad (4-38)$$

并代入 $D_i \sim E_i$ 关系，经过整理可得

$$D_i = \frac{\epsilon_0 k_i (k \cdot E)}{\frac{1}{\epsilon_i} - \frac{1}{n^2}} \quad (4-39)$$

由于 $D \cdot k = 0$ ，所以有

$$D_1 k_1 + D_2 k_2 + D_3 k_3 = 0$$

将(4-39)式代入后，得到

$$\frac{k_1^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_1}} + \frac{k_2^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_2}} + \frac{k_3^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_3}} = 0 \quad (4-40)$$

该式描述了在晶体中传播的光波法线方向 k 与相应的折射率 n 和晶体光学参量(主介电张量) $\vec{\epsilon}$ 之间的关系。

(4-40)式还可表示为另外一种形式。根据 $v_p = c/n$ ，可以定义三个描述晶体光学性质的主速度：

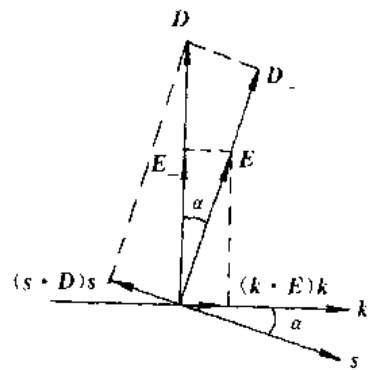


图 4-3 E_{\perp} 和 D_{\perp} 的定义



它们实际上分别是光波场沿三个主轴方向 x_1, x_2, x_3 的相速度。由此可将(4-40)式变换为

$$\frac{k_1^2}{v_p^2 - v_1^2} + \frac{k_2^2}{v_p^2 - v_2^2} + \frac{k_3^2}{v_p^2 - v_3^2} = 0 \quad (4-41)$$

上式描述了在晶体中传播的光波法线方向 \mathbf{k} 与相应的相速度 v_p 和晶体的光学参量(主速度) v_1, v_2, v_3 之间的关系。通常将(4-40)式和(4-41)式称为波法线菲涅耳方程。

由波法线菲涅耳方程可见,对于一定的晶体,光的折射率(或相速度)随光波方向 \mathbf{k} 变化。这种沿不同方向传播的光波具有不同的折射率(或相速度)的特性,即是晶体的光学各向异性。

进一步考察(4-40)式或(4-41)式可以看出,它们是 n^2 或 v_p^2 的二次方程,一般有两个独立的实根 n', n'' 或 v_p', v_p'' , 因而,对应每一个波法线方向 \mathbf{k} , 有两个具有不同的折射率或不同的相速度的光波。

在由(4-40)式、(4-41)式得到与每一个波法线方向 \mathbf{k} 相应的折射率或相速度后,为了确定与波法线方向 \mathbf{k} 相应的光波 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的振动方向,可将(4-39)式展开

$$\left. \begin{aligned} [\epsilon_1 - n^2(1 - k_1^2)]E_1 + n^2 k_1 k_2 E_2 + n^2 k_1 k_3 E_3 &= 0 \\ n^2 k_2 k_1 E_1 + [\epsilon_2 - n^2(1 - k_2^2)]E_2 + n^2 k_2 k_3 E_3 &= 0 \\ n^2 k_3 k_1 E_1 + n^2 k_3 k_2 E_2 + [\epsilon_3 - n^2(1 - k_3^2)]E_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-42)$$

将由(4-40)式解出的两个折射率值 n' 和 n'' 分别代入(4-42)式,即可求出相应的两组比值 $(E_1' : E_2' : E_3')$ 和 $(E_1'' : E_2'' : E_3'')$, 从而可以定出与 n' 和 n'' 分别对应的 \mathbf{E}' 和 \mathbf{E}'' 的方向。再由物质方程的分量关系,求出相应的两组比值 $(D_1' : D_2' : D_3')$ 和 $(D_1'' : D_2'' : D_3'')$, 从而可以定出与 n' 和 n'' 分别对应的 \mathbf{D}' 和 \mathbf{D}'' 的方向。由于相应于 $\mathbf{E}', \mathbf{E}''$ 及 $\mathbf{D}', \mathbf{D}''$ 的比值均为实数,所以 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 都是线偏振的。

进而可以证明,相应于每一个波法线方向 \mathbf{k} 的两个独立折射率 n' 和 n'' 的电位移矢量 \mathbf{D}' 和 \mathbf{D}'' 相互垂直。证明过程如下:

利用(4-39)式,建立 \mathbf{D}' 和 \mathbf{D}'' 的标量积:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}'' &= \epsilon_0^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}'') \left\{ \frac{k_1^2}{\left[\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right] \left[\frac{1}{(n'')^2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2^2}{\left[\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{\epsilon_2} \right] \left[\frac{1}{(n'')^2} - \frac{1}{\epsilon_2} \right]} + \frac{k_3^2}{\left[\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{\epsilon_3} \right] \left[\frac{1}{(n'')^2} - \frac{1}{\epsilon_3} \right]} \right\} \\ &= \epsilon_0^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}'') \frac{(n' n'')^2}{(n')^2 - (n'')^2} \left\{ \frac{k_1^2}{\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{\epsilon_1}} - \frac{k_1^2}{\frac{1}{(n'')^2} - \frac{1}{\epsilon_1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2^2}{\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{\epsilon_2}} - \frac{k_2^2}{\frac{1}{(n'')^2} - \frac{1}{\epsilon_2}} + \frac{k_3^2}{\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{\epsilon_3}} - \frac{k_3^2}{\frac{1}{(n'')^2} - \frac{1}{\epsilon_3}} \right\} \end{aligned}$$

由于 $(n')^2$ 和 $(n'')^2$ 都是(4-40)式的解,所以上式方括号中的第一、三、五项之和为零,第二、四、六项之和也为零。因此,

$$D' \cdot D'' = 0$$

由此，可以得到晶体光学性质的又一重要结论：一般情况下，对应于晶体中每一给定的波法线方向 k ，只允许有两个特定振动方向的线偏振光传播，它们的 D 矢量相互垂直（因而振动面相互垂直），具有不同的折射率或相速度。由于 E 、 D 、 s 、 k 四矢量共面，以及 $E \perp s$ ，所以这两个线偏振光有不同的光线方向 (s' 和 s'') 和光线速度 (v_1' 和 v_1'')。通常称这两个线偏振光为相应于给定 k 方向的两个本征模式，其方向关系如图 4-4 所示。

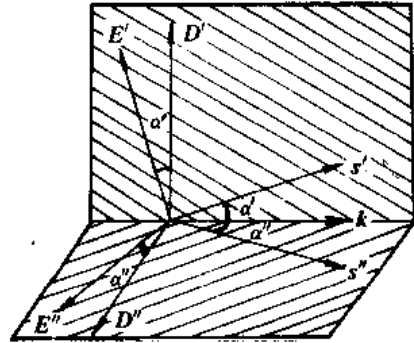


图 4-4 与给定的 k 相应的 D 、 E 和 s

② 光线菲涅耳方程(光线方程)。上面讨论的波法线菲涅耳方程确定了在给定的某个波法线方向 k 上，特许的两个线偏振光(本征模式)的折射率(或相速度)和偏振态。类似地，也可以得到确定相应于光线方向为 s 的两个特许线偏振光的光线速度和偏振态的方程——光线菲涅耳方程(射线菲涅耳方程、光线方程)。该方程是由(4-37)式出发推导出的，推导过程从略，下面只给出具体结果：

$$\frac{s_1^2}{n_r^2 - \epsilon_1} + \frac{s_2^2}{n_r^2 - \epsilon_2} + \frac{s_3^2}{n_r^2 - \epsilon_3} = 0 \quad (4-43)$$

或

$$\frac{s_1^2}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_1^2}} + \frac{s_2^2}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_2^2}} + \frac{s_3^2}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_3^2}} = 0 \quad (4-44)$$

(4-43)式和(4-44)式描述了在晶体中传播的光线方向 s 与相应的光线折射率 n_r 、光线速度 v_r 和晶体的光学参量 $\vec{\epsilon}$ 、主速度 v_1 、 v_2 、 v_3 之间的关系。

类似前面的讨论可以得出如下结论：在给定的晶体中，相应于每一个光线方向 s ，只允许有两个特定振动方向的线偏振光(两个本征模式)传播，这两个光的 E 矢量相互垂直(因而振动面相互垂直)，并且，在一般情况下，有不同的光线速度，不同的波法线方向和不同的折射率。

最后，注意到(4-32)式和(4-37)式在形式上的相似性，可以得到如下两行对应的变量：

$$\begin{aligned}
 & E, D, \quad k, \quad s, \quad c, \quad \epsilon_0, \quad v_p, \quad n, \quad \epsilon_1, \dots, \quad v_1, \dots \\
 & D, E, \quad -s, \quad -k, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{\epsilon_0}, \quad \frac{1}{v_r}, \quad \frac{1}{n_r}, \quad \frac{1}{\epsilon_1}, \dots, \quad \frac{1}{v_1}, \dots
 \end{aligned} \quad (4-45)$$

如果任何一个关系式在(4-45)关系中某一行的诸量间成立，则将式中的各量用(4-45)关系中另一行对应的量代替，就可以得到相应的另一个有效的关系式。应用这一规则，(4-43)式和(4-44)式可以由(4-40)式和(4-41)式直接通过变量代换得出。并且，无论是根据波法线方程(4-40)式、(4-41)式，还是根据光线方程(4-43)式、(4-44)式，都可以同样地完成光在晶体中传播规律的研究。

3. 光在几类特殊晶体中的传播规律

上面从麦克斯韦方程组出发，直接推出了光波在晶体中传播的各向异性特性，并未涉及具体晶体的光学性质。下面，结合几类特殊晶体的具体光学特性，从晶体光学的基本方程出发，讨论光波在其中传播的具体规律。

1) 各向同性介质或立方晶体

各向同性介质或立方晶体的主介电系数 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = n_0^2$ 。

根据前面讨论的有关确定晶体中光波传播特性的思路，将波法线菲涅耳方程(4-40)式通分、整理，得到

$$n^4(\epsilon_1 k_1^2 + \epsilon_2 k_2^2 + \epsilon_3 k_3^2) - n^2[\epsilon_1 \epsilon_2 (k_1^2 + k_2^2) + \epsilon_2 \epsilon_3 (k_2^2 + k_3^2) + \epsilon_3 \epsilon_1 (k_3^2 + k_1^2)] + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 0$$

代入 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = n_0^2$ ，并注意到 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$ ，该式简化为

$$(n^2 - n_0^2)^2 = 0 \quad (4-46)$$

由此得到重根 $n' = n'' = n_0$ 。这就是说，在各向同性介质或立方晶体中，沿任意方向传播的光波折射率都等于主折射率 n_0 ，或者说，光波折射率与传播方向无关。

进一步，把 $n' = n'' = n_0$ 的结果代入(4-42)式，可以得到三个完全相同的关系式

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 = 0 \quad (4-47)$$

此式即为 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ 。它表明，光电场矢量 \mathbf{E} 与波法线方向垂直。因此， \mathbf{E} 平行于 \mathbf{D} ， \mathbf{s} 平行于 \mathbf{k} 。所以，在各向同性介质或立方晶体中传播的光波电场结构，如图 4-5 所示。由于(4-47)式只限定了 \mathbf{E} 垂直于 \mathbf{k} ，而对 \mathbf{E} 的方向没有约束，所以在各向同性介质或立方晶体中，沿任意方向传播的光波，允许有两个传播速度相同的线性不相关的偏振态(二偏振方向正交)，相应的振动方向不受限制，并不局限于某一特定的方向上。

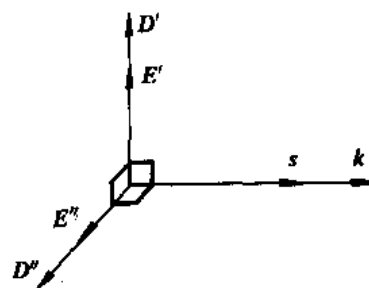


图 4-5 各向同性介质中 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{k} 、 \mathbf{s} 的关系

2) 单轴晶体

单轴晶体的主介电系数为

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = n_o^2, \quad \epsilon_3 = n_e^2 \neq n_o^2 \quad (4-48)$$

其中， $n_e > n_o$ 的晶体，称为正单轴晶体； $n_e < n_o$ 时，称为负单轴晶体。

(1) 两种特许线偏振光波(本征模式) 为讨论方便起见，取 \mathbf{k} 在 $x_2 O x_3$ 平面内，并与 x_3 轴夹角为 θ ，则

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \sin \theta, \quad k_3 = \cos \theta \quad (4-49)$$

将(4-48)式和(4-49)式的关系代入(4-40)式，得到

$$n^4(n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta) - n^2 n_o^2 [n_o^2 + (n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta)] + n_o^4 n_e^2 = 0$$

即

$$(n^2 - n_o^2)[n^2(n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta) - n_o^2 n_e^2] = 0 \quad (4-50)$$

该方程有两个解

$$n' = n_o \quad (4-51)$$

$$n'' = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} \quad (4-52)$$

第一个解 n' 与光的传播方向无关，与之相应的光波称为寻常光波，简称 o 光。第二个解 n'' 与光的传播方向有关，随 θ 变化，相应的光波称为异常光波（非寻常光波、非常光波），简称 e 光。对于 e 光，当 $\theta = \pi/2$ 时， $n'' = n_e$ ；当 $\theta = 0$ 时， $n'' = n_o$ 。可见，当 k 与 x_3 轴方向一致时，光的传播特性如同在各向同性介质中一样， $n' = n'' = n_o$ ，因此，把 x_3 轴这个特殊方向称为光轴。因为在这种晶体中只有 x_3 轴一个方向是光轴，所以称之为单轴晶体。

下面确定两种光波的偏振态。

① 寻常光波。将 $n = n' = n_o$ 及 $k_1 = 0, k_2 = \sin \theta, k_3 = \cos \theta$ 代入 (4-42) 式，得到

$$\left. \begin{aligned} (n_o^2 - n_o^2)E_1 &= 0 \\ (n_o^2 - n_o^2 \cos^2 \theta)E_2 + n_o^2 \sin \theta \cos \theta E_3 &= 0 \\ n_o^2 \sin \theta \cos \theta E_2 + (n_o^2 - n_o^2 \sin^2 \theta)E_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-53)$$

第一式因系数为零，所以 E_1 有非零解。第二、三式因系数行列式不等于零，所以是一对不相容的齐次方程，此时，只可能是 $E_2 = E_3 = 0$ 。因此， $E = E_1 i$ 。可见，o 光的 E 平行于 x_1 轴，从一般意义上讲，即垂直于 k 与 x_3 轴决定的平面。又由于 $D = \epsilon_o n_o^2 E$ ，所以 o 光的 D 矢量与 E 矢量平行。

② 异常光波。将 $n = n''$ 及 $k_1 = 0, k_2 = \sin \theta, k_3 = \cos \theta$ 代入 (4-42) 式，得到

$$\left. \begin{aligned} (n_o^2 - (n'')^2)E_1 &= 0 \\ (n_o^2 - (n'')^2 \cos^2 \theta)E_2 + (n'')^2 \sin \theta \cos \theta E_3 &= 0 \\ (n'')^2 \sin \theta \cos \theta E_2 + (n_o^2 - (n'')^2 \sin^2 \theta)E_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-54)$$

在第一式中，因系数不为零，只可能是 $E_1 = 0$ 。而第二、三式中，因系数行列式为零， E_2 和 E_3 有非零解。可见，e 光的 E 矢量位于 $x_2 O x_3$ 平面内，从一般意义上讲，即位于 k 矢量与光轴 (x_3) 所确定的平面内。同时，由于 $D_1 = \epsilon_o \epsilon_1 E_1 = 0$ ，所以 D 矢量也在 $x_2 O x_3$ 平面内，但不与 E 矢量平行。另外，e 光的 s 矢量、 k 矢量和光轴共面，但 s 与 k 不平行。仅当 $\theta = \pi/2$ 时， $E_2 = 0$ ， E 矢量与光轴平行，此时， $D // E, k // s$ ，相应的折射率为 n_e 。

综上所述，在单轴晶体中，存在着两种特许偏振方向的光波（本征模式）：o 光和 e 光。对应于某一波法线方向 k 有两条光线：o 光的光线 s_o 和 e 光的光线 s_e ，如图 4-6 所示。这两种光波的 E 矢量（和 D 矢量）彼此垂直。对于 o 光， E 矢量和 D 矢量总是平行，并且垂直于波法线 k 与光轴所确定的平面；折射率不依赖于 k 的方向；光线方向 s_o 与波法线方向重合。这种特性与光在各向同性介质中的传播特性一样，所以称为寻常光波。对于 e 光，其折射率随 k 矢量的方向改变； E 矢量与 D 矢量一般不平行，并且都在波法线 k 与光轴所确定的平面内，它们与光轴的夹角随着 k 的方向改变；它的光线方向 s_e 与波法线方向不重合。这种特性

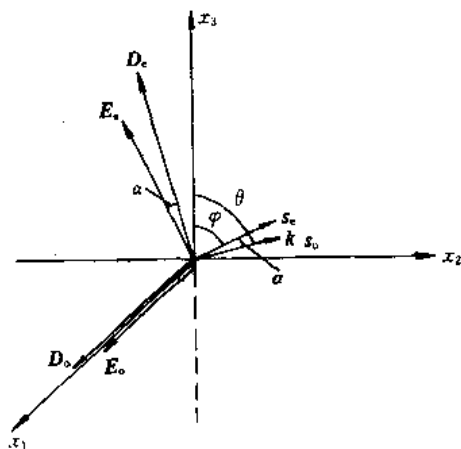


图 4-6 单轴晶体中的 o 光和 e 光



与光在各向同性介质中传播的特性不一样, 所以称为异常光波或非常光波。

(2) e光的波法线方向和光线方向 由上分析已知, 单轴晶体中e光波法线方向与光线方向之间存在着一个夹角, 通常称为离散角。确定这个角度, 对于晶体光学元件的制作和许多应用非常重要。因此, 下面对该角度问题进行较详细的讨论。

由光的电磁理论, 相应于同一e光光波的 E 、 D 、 s 、 k 均在垂直于 H 的同一平面内。现取 x_3 轴为光轴, E 、 D 、 s 、 k 均在主截面(光轴与晶面法线所决定的平面) x_2Ox_3 平面内, k 与 x_3 轴的夹角为 θ , s 与 z 轴的夹角为 φ 。若如图 4-6 所示的坐标系为单轴晶体的主轴坐标系, 则

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

因而有

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= \epsilon_0 \epsilon_1 E_2 = \epsilon_0 n_o^2 E_2 \\ D_3 &= \epsilon_0 \epsilon_3 E_3 = \epsilon_0 n_e^2 E_3 \end{aligned} \right\} \quad (4-55)$$

由图 4-6 所示的几何关系有

$$\tan \theta = \frac{D_3}{D_2}, \quad \tan \varphi = \frac{E_3}{E_2} \quad (4-56)$$

将(4-55)式中的两个式子相除, 并利用(4-56)式, 可得

$$\tan \varphi = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta \quad (4-57)$$

所以离散角 α 满足下面的关系:

$$\tan \alpha = \tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan \theta - \tan \varphi}{1 + \tan \theta \tan \varphi} \quad (4-58)$$

将(4-57)式代入, 整理可得

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \right)^{-1} \quad (4-59)$$

由该式可见:

① 当 $\theta=0^\circ$ 或 90° , 即光波法线方向 k 平行或垂直于光轴时, $\alpha=0$ 。这时, s 与 k 、 E 与 D 方向重合。

② 对于正单轴晶体, $n_e > n_o$, $\alpha > 0$, e光的光线较其波法线靠近光轴。对于负单轴晶体, $n_e < n_o$, $\alpha < 0$, e光的光线较其波法线远离光轴。

③ 可以证明, 当 k 与光轴间的夹角 θ 满足

$$\tan \theta = \frac{n_e}{n_o} \quad (4-60)$$

时, 有最大离散角

$$\alpha_M = \arctan \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_o n_e} \quad (4-61)$$

证明如下:

由 $\alpha = \theta - \varphi$ 对 θ 求导, 得

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 - \frac{d\varphi}{d\theta}$$

由(4-57)式

$$\varphi = \arctan\left(\frac{n_o^2 \tan \theta}{n_e^2}\right)$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{1 + \frac{n_o^4 \tan^2 \theta}{n_e^4}} \cdot \frac{n_o^2}{n_e^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{n_o^2 n_e^2}{n_e^4 + n_o^4 \tan^2 \theta} (1 + \tan^2 \theta)$$

令

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 - \frac{d\varphi}{d\theta} \approx 1 - \frac{n_o^2 n_e^2}{n_e^4 + n_o^4 \tan^2 \theta} (1 + \tan^2 \theta) = 0$$

得

$$n_e^4 + n_o^4 \tan^2 \theta - n_o^2 n_e^2 (1 + \tan^2 \theta) = 0$$

最后,

$$\tan \theta = \frac{n_e}{n_o}$$

将该式代入(4-57)式,并由(4-58)式求出最大离散角为

$$\alpha_M = \arctan \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_o n_e}$$

在实际应用中,经常要求晶体元件工作在最大离散角的情况下,同时满足正入射条件,这就应当如图4-7所示,使通光面(晶面)与光轴的夹角 $\beta = 90^\circ - \theta$ 满足

$$\tan \beta = \frac{n_o}{n_e} \tag{4-62}$$

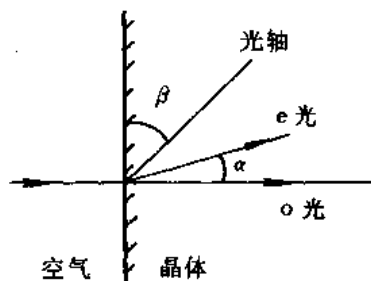


图 4-7 实际的晶体元件方向

3) 双轴晶体

双轴晶体的三个主介电系数都不相等,即 $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$, 因而 $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ 。通常主介电系数按

$$\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$$

取值。这类晶体之所以叫双轴晶体,是因为它有两个光轴,当光沿该二光轴方向传播时,其相应的二特许线偏振光波的传播速度(或折射率)相等。由波法线菲涅耳方程(4-40)式可以证明,双轴晶体的两个光轴都在 $x_1 O x_3$ 平面内,并且与 x_3 轴的夹角分别为 β 和 $-\beta$,如图4-8所示。 β 值由

$$\tan \beta = \frac{n_3}{n_1} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_3^2 - n_2^2}} \tag{4-63}$$

给出。对于 β 小于 45° 的晶体,叫正双轴晶体; β 大于 45° 的晶体,叫负双轴晶体。由这两个光轴构成的平面叫光轴面。

由(4-40)式出发可以证明,若光波法线方向 k 与二光轴方向的夹角为 θ_1 和 θ_2 (图4-9)时,相应的二特许线偏振光的折射率满足下面关系:

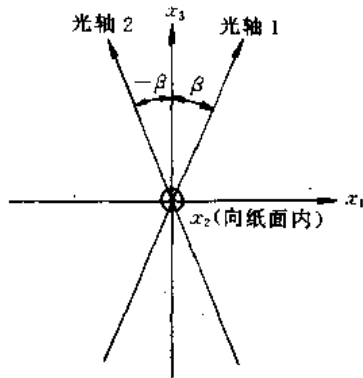


图 4-8 双轴晶体中光轴的取向

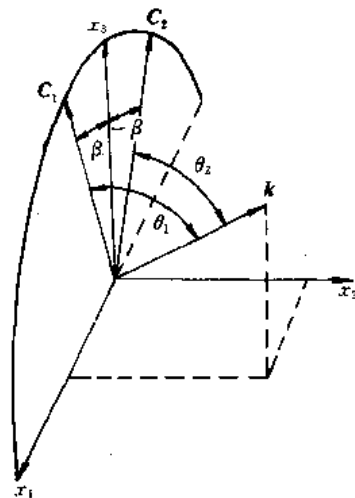


图 4-9 双轴晶体中 k 方向关系

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2[(\theta_1 \pm \theta_2)/2]}{n_1^2} + \frac{\sin^2[(\theta_1 \pm \theta_2)/2]}{n_3^2} \quad (4-64)$$

当 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, 即当波法线方向 k 沿二光轴角平分面时, 相应的二特许线偏振光的折射率为

$$n' = n_1 \quad (4-65)$$

$$n'' = \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_3^2} \right)^{-1/2} \quad (4-66)$$

对于某个给定的光波法线方向 k , 其相应的二特许线偏振光的光矢量 (E, D) 振动方向, 光线传播方向 s , 如图 4-4 所示。

4.2.2 光在晶体中传播的几何法描述

光在晶体中的传播规律除了利用上述解析方法进行严格的讨论外, 还可以利用一些几何图形描述。这些几何图形能使我们直观地看出晶体中光波的各个矢量场间的方向关系, 以及与各传播方向相应的光速或折射率的空间取值分布。当然, 几何方法仅仅是一种表示方法, 它的基础仍然是上面所给出的光的电磁理论基本方程和基本关系。

在传统的晶体光学中, 人们引入了折射率椭球、折射率曲面、波法线曲面、菲涅耳椭球、射线曲面、相速卵形面等六种三维曲面。限于篇幅和实际的应用需要, 这里只着重介绍折射率椭球、折射率曲面以及菲涅耳椭球和射线曲面。

1. 折射率椭球(光率体)

1) 折射率椭球方程

由光的电磁理论知道, 在主轴坐标系中, 晶体中的电场储能密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{D_1^2}{\epsilon_1} + \frac{D_2^2}{\epsilon_2} + \frac{D_3^2}{\epsilon_3} \right) \quad (4-67)$$

故有

$$\frac{D_1^2}{\epsilon_1} + \frac{D_2^2}{\epsilon_2} + \frac{D_3^2}{\epsilon_3} = 2\epsilon_0 w_e \quad (4-68)$$

在给定能量密度 w_e 的情况下, 该方程为 $D(D_1, D_2, D_3)$ 空间的椭球面。

$$x_1 = \frac{D_1}{\sqrt{2\epsilon_0\omega_0}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{\sqrt{2\epsilon_0\omega_0}}, \quad x_3 = \frac{D_3}{\sqrt{2\epsilon_0\omega_0}}$$

则有

$$\frac{x_1^2}{\epsilon_1} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2} + \frac{x_3^2}{\epsilon_3} = 1 \quad (4-69)$$

或

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (4-70)$$

这是一个在归一化 D 空间中的椭球(图 4-10), 它的三个主轴方向就是介电主轴方向, 它就是在主轴坐标系中的折射率椭球(光率体)方程。对于任一特定的晶体, 折射率椭球由其光学性质(主介电常数或主折射率)唯一地确定。

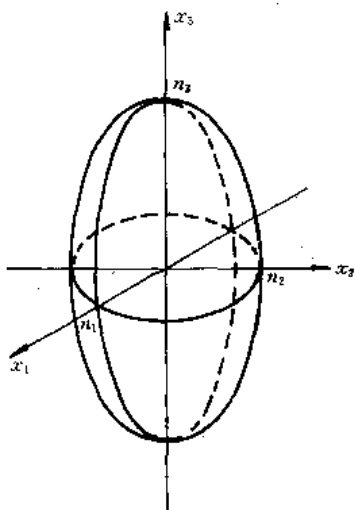


图 4-10 折射率椭球(光率体)

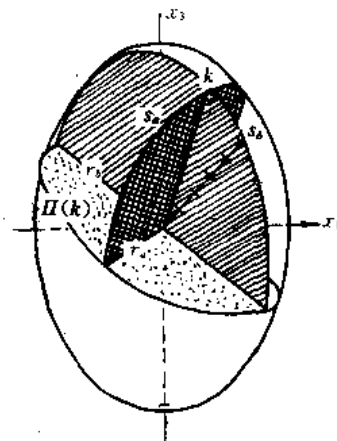


图 4-11 确定折射率和 D 振动方向的图示

2) 折射率椭球的性质

若从主轴坐标系的原点出发作波法线矢量 k , 再过坐标原点作一平面(称为中心截面) $\Pi(k)$ 与 k 垂直(图 4-11), $\Pi(k)$ 与椭球的截线为一椭圆, 椭圆的半长轴和半短轴的矢径分别记作 $r_a(k)$ 和 $r_b(k)$, 则可以证明折射率椭球具有下面两个重要的性质:

① 与波法线方向 k 相应的两个特许线偏振光的折射率 n' 和 n'' , 分别等于这个椭圆的两个主轴的半轴长, 即

$$\left. \begin{aligned} n'(k) &= |r_a(k)| \\ n''(k) &= |r_b(k)| \end{aligned} \right\} \quad (4-71)$$

② 与波法线方向 k 相应的两个特许线偏振光 D 的振动方向 d' 和 d'' , 分别平行于 r_a 和 r_b , 即



$$\left. \begin{aligned} d'(k) &= \frac{r_a(k)}{|r_a(k)|} \\ d''(k) &= \frac{r_b(k)}{|r_b(k)|} \end{aligned} \right\} \quad (4-72)$$

这里, d 是 D 矢量方向上的单位矢量。

这样, 只要给定了晶体, 知道了晶体的主介电张量, 就可以作出相应的折射率椭球, 从而就可以通过上述的几何作图法定出与波法线矢量 k 相应的两个特许线偏振光的折射率和 D 的振动方向(图 4-11)。

现在证明上述结论。

由空间解析几何理论, 与波法线 k 垂直的中心截面 $\Pi(k)$ 上的椭圆, 应满足下面两个方程:

$$x_1 k_1 + x_2 k_2 + x_3 k_3 = 0 \quad (4-73)$$

$$\frac{x_1^2}{\epsilon_1} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2} + \frac{x_3^2}{\epsilon_3} = 1 \quad (4-74)$$

由于椭圆的长半轴和短半轴是椭圆矢量的两个极值, 所以, 可以通过对满足(4-73)式、(4-74)式的 $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 求极值来确定 $r_a(k)$ 和 $r_b(k)$ 。为此, 根据拉格朗日(Lagrange)待定系数法, 引入两个乘数 $2\lambda_1$ 和 λ_2 , 构成一个函数:

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda_1(x_1 k_1 + x_2 k_2 + x_3 k_3) + \lambda_2 \left(\frac{x_1^2}{\epsilon_1} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2} + \frac{x_3^2}{\epsilon_3} \right) \quad (4-75)$$

于是, 求解 $r_a(k)$ 和 $r_b(k)$ 的问题就变成了对 F 求极值的问题。而 F 取极值的必要条件是它对 x_1 、 x_2 、 x_3 的一阶导数为零, 即

$$x_i + \lambda_1 k_i + \frac{\lambda_2 x_i}{\epsilon_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4-76)$$

将(4-76)式的三个式子分别乘以 x_1 、 x_2 、 x_3 , 然后相加, 利用(4-73)式和(4-74)式关系, 得

$$r^2 + \lambda_2 = 0 \quad (4-77)$$

再将(4-76)式的三个式子分别乘以 k_1 、 k_2 、 k_3 , 然后相加, 并再次利用(4-73)式关系, 得到

$$\lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{x_1 k_1}{\epsilon_1} + \frac{x_2 k_2}{\epsilon_2} + \frac{x_3 k_3}{\epsilon_3} \right) = 0 \quad (4-78)$$

将(4-77)式、(4-78)式得出的 λ_1 和 λ_2 关系代入(4-76)式, 可得

$$x_i \left(1 - \frac{r^2}{\epsilon_i} \right) + k_i r^2 \left(\frac{x_1 k_1}{\epsilon_1} + \frac{x_2 k_2}{\epsilon_2} + \frac{x_3 k_3}{\epsilon_3} \right) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4-79)$$

这三个方程就是与 k 垂直的椭圆截线矢径 r 为极值时所满足的条件, 也就是椭圆两个主轴方向的矢径 r_a 和 r_b 所满足的条件。将(4-79)式与(4-38)式进行比较可见, 二式的差别只是符号不同。如果我们进行如下的代换:

$$x_i = \frac{D_i}{D} n \quad i = 1, 2, 3$$

并注意到 $D_i/\epsilon_0 \epsilon_i = E_i$, 则(4-79)式可以写成

$$D_i = \epsilon_0 n^2 [E_i - k_i (k \cdot E)] \quad i = 1, 2, 3 \quad (4-80)$$

这组关系式就是晶体中与 k 相应的两个特许线偏振光的 D 矢量和折射率所遵从的关系 (4-38) 式。考虑到 $x_1 : x_2 : x_3 = D_1 : D_2 : D_3$ 和 $r = n$, r 的方向就是满足 (4-80) 式的 D 方向, r 的长度就是满足 (4-80) 式的 n 。因此, 就证明了在折射率椭球中, 通过中心与 k 垂直的椭圆截面两个主轴矢径 r_a 和 r_b 的方向, 就是波法线矢量为 k 的两个特许偏振光 D 矢量的振动方向, 两个半轴长 $|r_a|$ 和 $|r_b|$ 就是分别与这两个线偏振光相应的折射率。

通过上面的讨论可以看出, (4-70) 式折射率椭球的物理意义是: 它表征了晶体折射率 (对应某一确定的光波长) 在晶体空间的各个方向上全部取值分布的几何图形。椭球的三个半轴长分别等于三个主介电系数的平方根, 其方向分别与介电主轴方向一致。通过椭球中心的每一个矢径方向, 代表 D 的一个振动方向, 其长度为 D 在此方向振动的光波折射率, 故矢径可表示为 $r = nd$ 。所以, 折射率椭球有时也称为 (d, n) 曲面。

3) 利用折射率椭球确定 D 、 E 、 k 、 s 方向的几何方法

利用折射率椭球除了确定相应于 k 的两个特许线偏振光 D 矢量的振动方向和折射率外, 还可以借助于下述几何方法, 确定 D 、 E 、 k 、 s 各矢量的方向。

如前所述, D 、 E 、 k 、 s 矢量都与 H 矢量垂直, 因而同处于一个平面内, 这个平面与折射率椭球的交线是一个椭圆, 如图 4-12 所示。

如果相应于波法线方向 k 的一个电位移矢量 D 确定了, 与该 D 平行的矢径端点为 B , 则椭球在 B 点的法线方向平行于与该 D 矢量相应的 E 矢量方向。现证明如下:

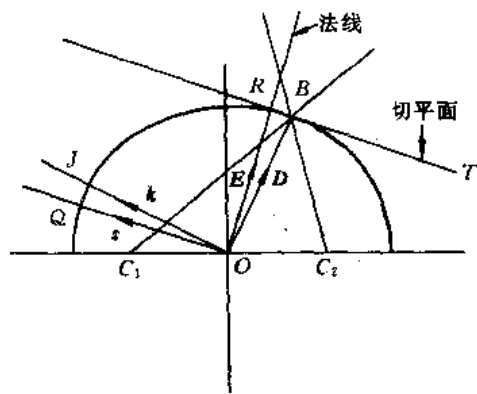


图 4-12 由给定的 D 确定 E 、 k 、 s 方向图示

已知, 曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = C$ 上某点处的法线方向平行于函数 f 在该点处的梯度矢量 ∇f 。由 (4-69) 式, 折射率椭球方程可写成

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{\epsilon_1} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2} + \frac{x_3^2}{\epsilon_3} = 1$$

所以,

$$(\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{\epsilon_i} \quad i = 1, 2, 3$$

若将 $x_i = D_i n / D$ 和 $\epsilon_i = D_i / \epsilon_0 E_i$ 代入, 上式变为

$$(\nabla f)_i = \frac{2n\epsilon_0 E_i}{D}$$

因而

$$(\nabla f)_1 : (\nabla f)_2 : (\nabla f)_3 = E_1 : E_2 : E_3$$

这说明, 与折射率椭球上某点所确定的 D 矢量相应的 E 矢量方向, 平行于椭球在该点处的法线方向, 也就是由坐标原点向过该点的切平面所作的垂线方向。

于是, 给定了 D 矢量的方向, 相应的 E 矢量方向可用几何方法作出: 先过 B 点作椭圆的切线 (或椭球的切平面) BT , 再由 O 点向 BT 作垂线 OR , 则 OR 的方向即是 B 点的法线

方向,也就是与 D 相应的 E 的方向。另外,过 O 点作 BT 的平行线 OQ ,则 OQ 的方向就是 s 的方向,而垂直于 OB 的方向(OJ)就是 k 的方向。这个几何作图法如图 4-12 所示。

4) 应用折射率椭球讨论晶体的光学性质

(1) 各向同性介质或立方晶体 在各向同性介质或立方晶体中,主介电系数 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$, 主折射率 $n_1 = n_2 = n_3 = n_0$, 折射率椭球方程为

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n_0^2 \quad (4-81)$$

这就是说,各向同性介质或立方晶体的折射率椭球是一个半径为 n_0 的球。因此,不论 k 在什么方向,垂直于 k 的中心截面与球的交线均是半径为 n_0 的圆,不存在特定的长、短轴,因而光学性质是各向同性的。

(2) 单轴晶体 在单轴晶体中, $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$, 或 $n_1 = n_2 = n_0, n_3 = n_e \neq n_0$, 因此折射率椭球方程为

$$\frac{x_1^2}{n_0^2} + \frac{x_2^2}{n_0^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1 \quad (4-82)$$

显然这是一个旋转椭球面,旋转轴为 x_3 轴。若 $n_e > n_0$ 称为正单轴晶体(如石英晶体),折射率椭球是沿着 x_3 轴拉长了的旋转椭球;若 $n_e < n_0$, 称为负单轴晶体(如方解石晶体),折射率椭球是沿着 x_3 轴压扁了的旋转椭球。

下面讨论波法线方向为 k 的光波传播特性。

设晶体内一平面光波的 k 与 x_3 轴夹角为 θ , 则过椭球中心作垂直于 k 的平面 $\Pi(k)$ 与椭球的交线必定是一个椭圆(图 4-13)。其截线方程可用下述方法得到: 由于旋转椭球的 $x_1(x_2)$ 轴的任意性,可以假设 (k, x_3) 面为 x_2Ox_3 平面。若建立新的坐标系 $O-x'_1x'_2x'_3$, 使 x'_3 轴与 k 重合, x'_1 轴与 x_1 轴重合, 则 x'_2 轴在 x_2Ox_3 平面内。这时, $\Pi(k)$ 截面即为 $x'_1Ox'_2$ 面, 其方程为

$$x'_3 = 0 \quad (4-83)$$

新旧坐标系的变换关系为(图 4-14)

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \\ x_2 &= x'_2 \cos \theta - x'_3 \sin \theta \\ x_3 &= x'_2 \sin \theta + x'_3 \cos \theta \end{aligned}$$

将上面关系代入(4-82)式, 再与(4-83)式联立, 就有

$$\frac{x_1'^2}{n_0^2} + \frac{x_2'^2 \cos^2 \theta}{n_0^2} + \frac{x_2'^2 \sin^2 \theta}{n_e^2} = 1$$

经过整理, 可得出截线方程为

$$\frac{x_1'^2}{n_0^2} + \frac{x_2'^2}{n_e^2} = 1 \quad (4-84)$$

其中

$$n_e = \frac{n_0 n_e}{\sqrt{n_0^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} \quad (4-85)$$

或表示为

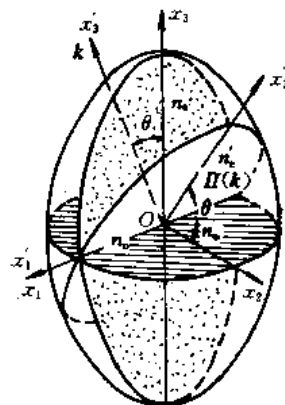
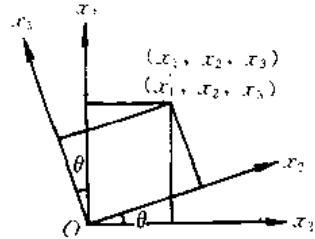


图 4-13 单轴晶体折射率椭球作图法

$$\frac{1}{n_e^2} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} \quad (4-86)$$

根据折射率椭球的性质，椭圆截线的长半轴和短半轴方向就是相应于波法线方向 k 的两个特准线偏振光的 D 矢量振动方向 d' 和 d'' ，两个半轴的长度等于这两个特准线偏振光的折射率 n' 和 n'' 。由(4-84)式可见，这个椭圆有一个半轴的长度为 n_o ，方向为 x_1 轴方向。这就是说，如果 k 在 x_2Ox_3 平面内，不论 k 的方向如何，它总有一个特准线偏振光的折射率不变(等于 n_o)，相应的 D 方向垂直于 k 与 x_3 轴所构成的平面，这就是 o 光(寻常光)。通过图 4-13 所示的作图法，即可确定 o 光的 $E \parallel D, s \parallel k$ 。



对于椭圆的另一个半轴，其长度为 n_e ，且在 x_2Ox_3 平面上。图 4-14 两个坐标系的关系即，相应于波法线方向 k 的另一个特准的线偏振光的 D 矢量在 (k, x_3) 面内，相应的折射率 n_e 随 k 的方向变化，这就是 e 光(非常光)。通过作图法可以看出， e 光的 D 方向不在主轴方向，因而 E 与 D 不平行， s 与 k 也不平行。这些结果与解析法得到的结论完全一致。

下面讨论两种特殊情况：

① $\theta=0$ 时， k 与 x_3 轴重合，这时， $n_e=n_o$ ，中心截面与椭球的截线方程为

$$x_1^2 + x_2^2 = n_o^2$$

这是一个半径为 n_o 的圆。可见，沿 x_3 轴方向传播的光波折射率为 n_o ， D 矢量的振动方向除与 x_3 轴垂直外，没有其它约束，即沿 x_3 轴方向传播的光可以允许任意偏振方向，且折射率均为 n_o ，故 x_3 轴为光轴。因为这类晶体只有一个光轴，所以称为单轴晶体。

② $\theta=\pi/2$ 时， k 与 x_3 轴垂直，这时， $n_e=n_e$ ， e 光的 D 与 x_3 轴平行。中心截面与椭球的截线方程为

$$\frac{x_1^2}{n_o^2} + \frac{x_2^2}{n_e^2} = 1 \quad (4-87)$$

由于折射率椭球是旋转椭球， x_1, x_2 坐标轴可任意选取，所以包含 x_3 轴的中心截面都可选作 x_3Ox_1 平面(或 x_3Ox_2 平面)。对于正单轴晶体， e 光有最大折射率；而对于负单轴晶体， e 光有最小折射率。运用图 4-12 所示的几何作图法，可以得到 $D \parallel E, k \parallel s$ 。

(3) 双轴晶体

① 双轴晶体中的光轴。对于双轴晶体，介电张量的三个主介电系数不相等，即 $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ ，因而 $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ ，所以折射率椭球方程为

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (4-88)$$

若约定 $n_1 < n_2 < n_3$ ，则折射率椭球与 x_2Ox_3 平面的交线是椭圆(图 4-15)，它的方程为

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (4-89)$$

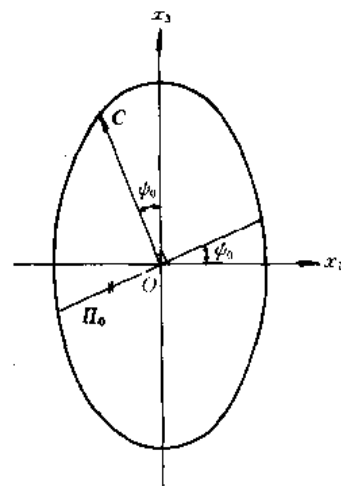


图 4-15 双轴晶体折射率椭球在 x_2Ox_3 面上的截线

Click to buy NOW!
式中, n_1 和 n_3 分别是最短、最长的主半轴。若椭圆上任意一点的矢径 r 与 x_1 轴的夹角为 ψ , 长度为 n , 则(4-89)式可以写成

$$\frac{(n \cos \psi)^2}{n_1^2} + \frac{(n \sin \psi)^2}{n_3^2} = 1$$

或

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \psi}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \psi}{n_3^2} \quad (4-90)$$

n 的大小随着 ψ 在 n_1 和 n_3 之间变化。由于 $n_1 < n_2 < n_3$, 所以总是可以找到某一矢径 r_0 , 其长度为 $n = n_2$ 。设这个 r_0 矢径与 x_1 轴的夹角为 ψ_0 , 则 ψ_0 应满足:

$$\frac{1}{n_2^2} = \frac{\cos^2 \psi_0}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \psi_0}{n_3^2} \quad (4-91)$$

所以

$$\tan \psi_0 = \pm \frac{n_3}{n_1} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_3^2 - n_2^2}} \quad (4-92)$$

显然, 矢径 r_0 与 x_2 轴组成的平面与折射率椭球的截面是一个半径为 n_2 的圆。若以 Π_0 表示该圆截面, 则与垂直于 Π_0 面的波法线方向 k 相应的 D 矢量在 Π_0 面内振动, 且振动方向没有限制, 折射率均为 n_2 。如果用 C 表示 Π_0 面法线方向的单位矢量, 则 C 的方向即是光轴方向。由于(4-92)式右边有正负两个值, 相应的 Π_0 面及其法向单位矢量 C 也有两个, 因此, 有两个光轴方向 C_1 和 C_2 , 这就是双轴晶体名称的由来。实际上, C_1 和 C_2 对称地分布在 x_3 轴两侧, 如图 4-16 所示。由 C_1 和 C_2 构成的平面叫做光轴面, 显然, 光轴面就是 x_3Ox_1 平面。设 C_1 、 C_2 与 x_3 轴的夹角为 β 、 $-\beta$, 则

$$\tan \beta = \frac{n_3}{n_1} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_3^2 - n_2^2}} \quad (4-93)$$

当 β 角小于 45° 时, 称为正双轴晶体; β 角大于 45° 时, 称为负双轴晶体。

② 光在双轴晶体中的传播特性。与单轴晶体一样, 利用双轴晶体的折射率椭球可以确定相应于 k 方向两束特许线偏振光的折射率和振动方向, 只是具体计算比单轴晶体复杂得多。下面只讨论几种特殊情况:

(i) 当 k 方向沿着主轴方向, 比如 x_1 轴时, 相应的两个特许线偏振光的折射率分别为 n_2 和 n_3 , D 矢量的振动方向分别沿 x_2 轴和 x_3 轴方向; 当 k 沿 x_2 轴时, 相应的两个特许线偏振光的折射率分别为 n_1 和 n_3 , D 矢量的振动方向分别沿 x_1 轴和 x_3 轴方向。

(ii) 当 k 方向沿着光轴方向时, 二正交线偏振光的折射率为 n_2 , 其 D 矢量的振动方向没有限制。

(iii) 当 k 在主截面内, 但不包括上面两种情况时, 二特许线偏振光的折射率不等, 其

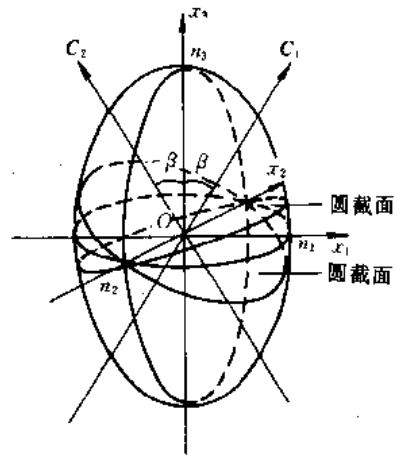


图 4-16 双轴晶体双光轴示意图

中一个等于主折射率,另一个介于其余二主折射率之间。

例如, k 在 x_1Ox_3 主截面内, 与 x_3 轴的夹角为 θ , 确定与其相应的二特许线偏振光的折射率和 D 矢量振动方向。

根据折射率椭球的性质, 考虑到 k 不在坐标轴上, 为了简化运算, 可如图 4-17 所示, 将坐标系 $O-x_1x_2x_3$ 绕 x_2 轴旋转 θ 角, 建立一个新坐标系 $O-x'_1x'_2x'_3$, 使 k 沿 x'_3 轴方向。此时二坐标系之间的关系为

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \theta + x'_3 \sin \theta \\ x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= -x'_1 \sin \theta + x'_3 \cos \theta \end{aligned} \quad (4-94)$$

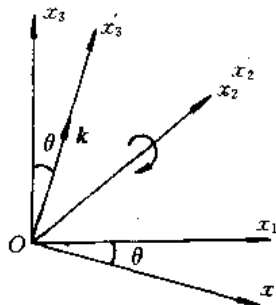


图 4-17 坐标系的变换

将上面关系代入折射率椭球方程, 并与 $x'_3=0$ 联立

$$\begin{cases} \frac{(x'_1 \cos \theta + x'_3 \sin \theta)^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{(-x'_1 \sin \theta + x'_3 \cos \theta)^2}{n_3^2} = 1 \\ x'_3 = 0 \end{cases}$$

可得与 k 垂直的截线方程为

$$\left(\frac{\cos^2 \theta}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_3^2} \right) x_1'^2 + \frac{x_2^2}{n_2^2} = 1 \quad (4-95)$$

所以, 与 k 相应的二特许线偏振光的折射率为

$$\left. \begin{aligned} n' &= n_2 \\ n'' &= \frac{n_1 n_3}{\sqrt{n_3^2 \cos^2 \theta + n_1^2 \sin^2 \theta}} \end{aligned} \right\} \quad (4-96)$$

D 矢量的振动方向分别为 x'_2 、 x'_1 方向。

(iv) 当 k 与折射率椭球的三个主轴既不平行又不垂直时, 相应的两个折射率都不等于主折射率, 其中一个介于 n_1 、 n_2 之间, 另一个介于 n_2 、 n_3 之间。如果用波法线与两个光轴的夹角 θ_1 和 θ_2 来表示波法线方向 k (见图 4-9), 则可以利用折射率椭球的关系, 得到与 k 相应的二折射率十分简单的表达式:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2[(\theta_1 \pm \theta_2)/2]}{n_1^2} + \frac{\sin^2[(\theta_1 \pm \theta_2)/2]}{n_3^2} \quad (4-97)$$

(v) 已知两个光轴方向和 k 方向时, 可以很方便地确定与 k 相应的 D 矢量的两个振动方向。

如图 4-18 所示, 给定 k 方向后, 通过双轴晶体折射率椭球的中心作垂直于 k 的中心截面 Π , 则其截线椭圆的长、短轴方向就是与 k 相应的两个 D 矢量的振动方向 d' 和 d'' , 其半轴长度就是相应的折射率 n' 和 n'' 。设双轴晶体的光轴方向为 C_1 和 C_2 , 垂直光轴的两个圆截面为 $\Pi_0^{(1)}$ 和 $\Pi_0^{(2)}$, 这两个圆截面与 Π 面分别在 r_1 和 r_2 处相交, r_1 和 r_2 有相等的长度, 它们与 Π 椭圆的主轴有相等的夹角 (参看图 4-18、图 4-19), 所以 d' 和 d'' 方向必是 r_1 和 r_2 两个方向的等分角线的方向。但因 r_1 垂直于 C_1 和 k , 所以垂直于 C_1 和 k 组成的平面; 同样, r_2 垂直于 C_2 和 k 组成的平面。设 (C_1, k) 平面和 (C_2, k) 平面与 Π 椭圆分别交于矢径 r'_1 和 r'_2 , 则 $r_1 \perp r'_1$, $r_2 \perp r'_2$ 。所以, 椭圆的主轴也等分 r'_1 , r'_2 方向。由此可以得到如下结论: D 矢量的两个振动面 (d', k) 和 (d'', k) 分别是 (C_1, k) 和 (C_2, k) 两个平面的内等分面和外等

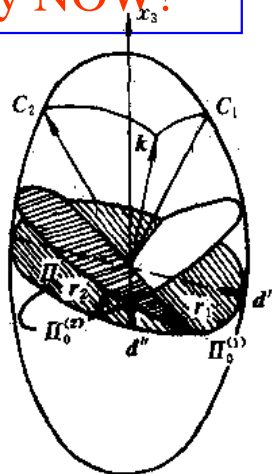


图 4-18 D 矢量振动面的确定

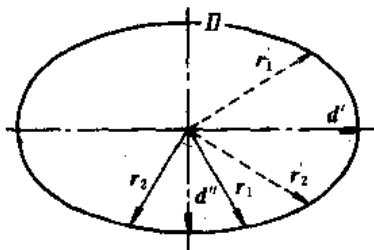


图 4-19 图 4-18 中的 Π 平面

分面。

最后应当指出，在双轴晶体中，除两个光轴方向外，沿其余方向传播的平面光波，在折射率椭球中心所作的垂直于 k 的平面与折射率椭球的截线都是椭圆。而且，由于折射率椭球没有旋转对称性，相应的两个正交线偏振光的折射率都与 k 的方向有关，因此这两个光都是非常光。故在双轴晶体中，不能采用 o 光与 e 光的称呼来区分这两种偏振光。

2. 折射率曲面和波矢曲面

折射率椭球可以确定与波法线方向 k 相应的两个特许线偏振光的折射率，但它需要通过一定的作图过程才能得到。为了更直接地表示出与每一个波法线方向 k 相应的两个折射率，人们引入了折射率曲面。折射率曲面上的矢径 $r = nk$ ，其方向平行于给定的波法线方向 k ，长度则等于与该 k 相应的两个波的折射率。因此，折射率曲面必定是一个双壳层的曲面，记作 (k, n) 曲面。

实际上，根据 (k, n) 曲面的意义，(4-40)式就是折射率曲面在主轴坐标系中的极坐标方程，现重写如下：

$$\frac{k_1^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1^2}} + \frac{k_2^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_2^2}} + \frac{k_3^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_3^2}} = 0 \quad (4-98)$$

若以 $n^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n^2 k_1^2 + n^2 k_2^2 + n^2 k_3^2$ 代入上式，即得到它的直角坐标方程：

$$(n_1^2 x_1^2 + n_2^2 x_2^2 + n_3^2 x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - [n_1^2(n_2^2 + n_3^2)x_1^2 + n_2^2(n_3^2 + n_1^2)x_2^2 + n_3^2(n_1^2 + n_2^2)x_3^2] + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \quad (4-99)$$

这是一个四次曲面方程。利用这个曲面可以很直观地得到与 k 相应的二折射率。

对于立方晶体， $n_1 = n_2 = n_3 = n_0$ ，代入(4-99)式得

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n_0^2 \quad (4-100)$$

显然，这个折射率曲面是一个半径为 n_0 的球面，在所有的 k 方向上，折射率都等于 n_0 ，在光学上是各向同性的。

对于单轴晶体， $n_1 = n_2 = n_o, n_3 = n_e$ ，代入(4-99)式得

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - n_o^2)[n_o^2(x_1^2 + x_2^2) + n_e^2 x_3^2 - n_o^2 n_e^2] = 0 \quad (4-101)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= n_o^2 \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{n_e^2} + \frac{x_3^2}{n_o^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4-102)$$

可见，单轴晶体的折射率曲面是一个双层曲面，它是由一个半径为 n_o 的球面和一个以 x_3 轴为旋转轴的旋转椭球构成的。球面对应于 o 光的折射率曲面，旋转椭球表示的是 e 光的折射率曲面。单轴晶体的折射率曲面在主轴截面上的截线如图 4-20 所示；对于正单轴晶体， $n_e > n_o$ ，球面内切于椭球；对于负单轴晶体， $n_e < n_o$ ，球面外切于椭球。两种情况的切点均在 x_3 轴上，故 x_3 轴为光轴。当与 x_3 轴夹角为 θ 的波法线方向 k 与折射率曲面相交时，得到长度为 n_o 和 $n_e(\theta)$ 的矢径，它们分别是相应于 k 方向的两个特许线偏振光的折射率，其中 $n_e(\theta)$ 可由(4-102)式求出：

$$n_e(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}$$

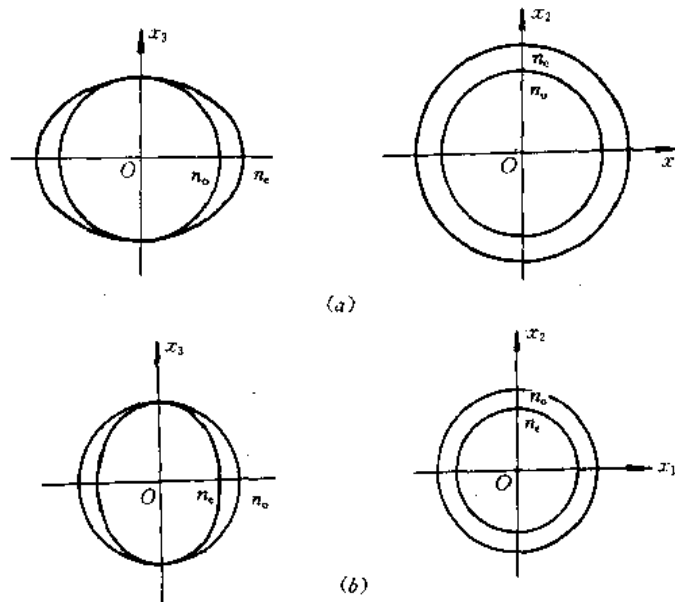


图 4-20 单轴晶体折射率曲面
(a) 正单轴晶体；(b) 负单轴晶体

对于双轴晶体， $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ ，(4-99)式所示的四次曲面在三个主轴截面上的截线都是一个圆加上一个同心椭圆，它们的方程分别是：

$$\left. \begin{aligned} x_2 O x_3 \text{ 面} & \quad (x_2^2 + x_3^2 - n_1^2) \left(\frac{x_2^2}{n_3^2} + \frac{x_3^2}{n_2^2} - 1 \right) = 0 \\ x_3 O x_1 \text{ 面} & \quad (x_3^2 + x_1^2 - n_2^2) \left(\frac{x_3^2}{n_1^2} + \frac{x_1^2}{n_3^2} - 1 \right) = 0 \\ x_1 O x_2 \text{ 面} & \quad (x_1^2 + x_2^2 - n_3^2) \left(\frac{x_1^2}{n_2^2} + \frac{x_2^2}{n_1^2} - 1 \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-103)$$

按约定， $n_1 < n_2 < n_3$ ，则三个主轴截面上的截线可以表示如图 4-21 所示。折射率曲面的两个壳层仅有四个交点，就是 $x_3 O x_1$ 截面上的四个交点，在三维示意图中可以看出四个“脐

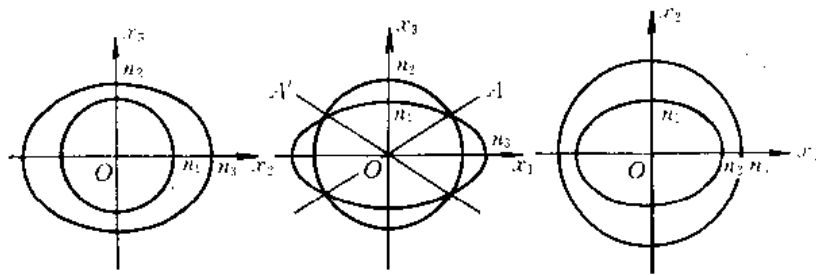


图 4-21 双轴晶体的折射率曲面在三个主轴截面上的截线

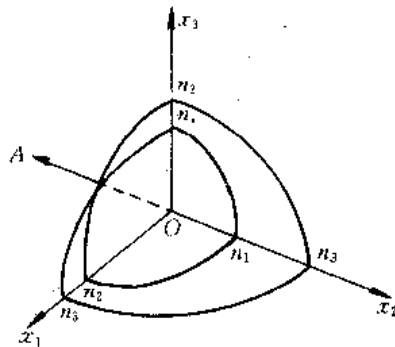


图 4-22 双轴晶体的折射率曲面在第一卦限中的示意图

根据光轴方向为二特许线偏振光折射率相等的 k 方向的定义，双轴晶体的光轴在 x_3Ox_1 面内，如图 4-21 所示，为两个壳层的交点与原点的连线 OA 和 OA' 方向。

可以证明，折射率曲面在任一矢径末端处的法线方向，即为与该矢径所代表的波法线方向 k 相应的光线方向 s 。

应注意，折射率曲面虽然可以将任一给定 k 方向所对应的两个折射率直接表示出来，但它表示不出相应的两个光的偏振方向。因此，与折射率椭球相比，折射率曲面对于光在界面上的折射、反射问题讨论比较方便，而折射率椭球用于处理偏振效应的问题比较方便。

对于折射率曲面，如果将其矢径长度乘以 ω/c ，则构成一个新曲面的矢径 $r = (\omega n/c)k$ ，这个曲面称为波矢曲面，通常记为 (k, k) 曲面。

3. 菲涅耳椭球

上面讨论的折射率椭球和折射率曲面都是相对波法线方向 k 而言的。由于晶体中的 k 与 s 可能分离，而在有些应用中给定的是 s 方向，所以利用相对 s 而言的曲面讨论光的传播规律比较方便。菲涅耳椭球就是相对光线方向 s 引入的几何曲面。

由折射率椭球方程式(4-70)出发，利用(4-45)式的矢量对应关系，可得

$$\frac{x_1^2}{v_{r1}^2} + \frac{x_2^2}{v_{r2}^2} + \frac{x_3^2}{v_{r3}^2} = 1 \quad (4-104)$$

式中， v_{r1} 、 v_{r2} 、 v_{r3} 表示三个主轴方向上的光线主速度。这个方程就是用来描述光在晶体中传播特性的菲涅耳椭球。在描述光的传播特性时，它与折射率椭球的作图方法完全相同，

只是以光线方向 s 取代波法线方向 k 。对于任一给定的光线方向 s ，过菲涅耳椭球中心作垂直于 s 的平面，它与菲涅耳椭球相交，其截线为椭圆，该椭圆的长、短轴方向表示与 s 方向相应的二特许线偏振光电场强度 E 的振动方向，半轴长度表示该二光的光线速度。如果把长、短半轴矢径记作 $r_a(s)$ 和 $r_b(s)$ ，则

$$\left. \begin{aligned} v'_i(s) &= |r_a(s)| \\ v''_i(s) &= |r_b(s)| \end{aligned} \right\} \quad (4-105)$$

$$\left. \begin{aligned} e'(s) &= \frac{r_a(s)}{|r_a(s)|} \\ e''(s) &= \frac{r_b(s)}{|r_b(s)|} \end{aligned} \right\} \quad (4-106)$$

(4-106)式中， e 表示与光线方向 s 相应的 E 矢量振动方向上的单位矢量。

菲涅耳椭球可记为 (e, v_i) 曲面。

4. 射线曲面

射线曲面是和折射率曲面相对应的几何图形，它描述与晶体中光线方向 s 相应的两个光线速度的分布。射线曲面上的矢径方向平行于给定的 s 方向，矢径的长度等于相应的两个光线速度 v_i ，因此可简记为 (s, v_i) 曲面。实际上，射线曲面就是在晶体中完全包住一个单色点光源的波面。

射线曲面在主轴坐标系中的极坐标方程就是(4-44)式，现重写如下：

$$\frac{s_1^2}{\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_i^2}} + \frac{s_2^2}{\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_i^2}} + \frac{s_3^2}{\frac{1}{v_3^2} - \frac{1}{v_i^2}} = 0 \quad (4-107)$$

在形式上，它与折射率曲面方程(4-98)式相仿，因此曲面形状相似，也是一个双壳层曲面。不过由于波速与折射率成反比，两壳层的里外顺序与折射率曲面正好颠倒。

图 4-23 表示的是单轴晶体的射线曲面，图 4-24 表示的是双轴晶体射线曲面在三个主轴截面上的截线。图 4-25 为双轴晶体的射线曲面在第一卦限中的示意图。

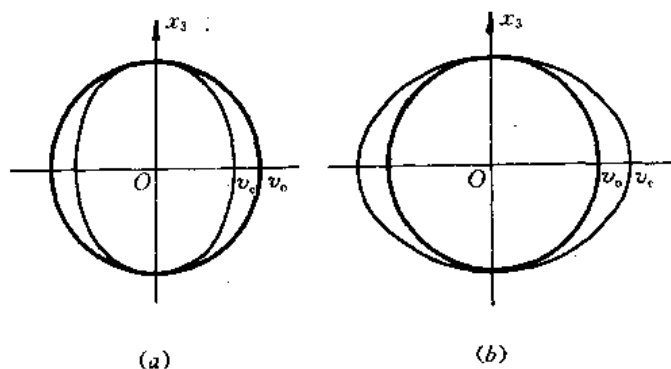


图 4-23 单轴晶体的射线曲面
(a) 正单轴晶体；(b) 负单轴晶体

射线曲面上的矢径方向平行于 s 方向，其矢径末端处的法线方向就是与该 s 方向相应的波法线方向 k 。图 4-24 所示的双轴晶体射线曲面在 x_3Ox_1 面上的截线也有四个交点，

相应的方向 OB, OB' 是两个射线速度相等的射线方向，称为射线轴，它们不同于双轴晶体的光轴(图 4-21 中的 OA, OA')。其它具体讨论可参照折射率曲面的方法进行。射线曲面将在后面利用惠更斯作图法讨论光在晶体界面上的折射、反射方向时用到。

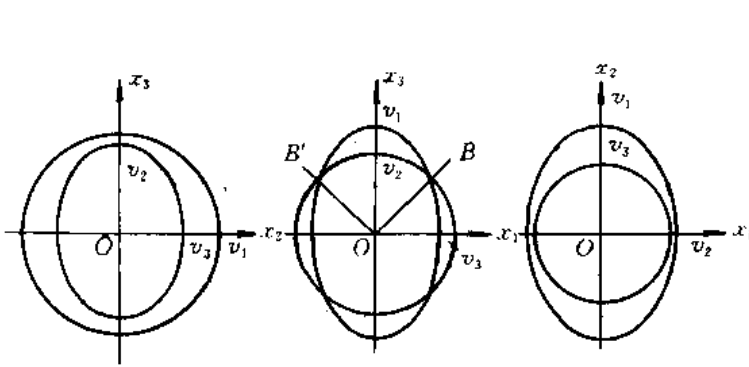


图 4-24 双轴晶体射线曲面在三个主轴截面上的截线

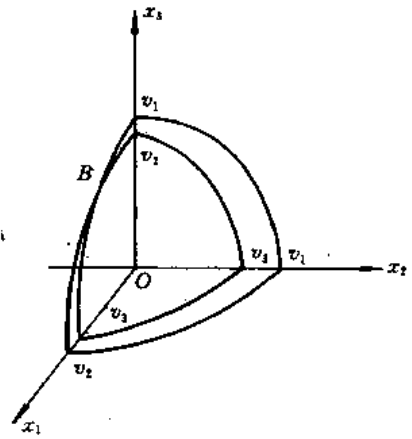


图 4-25 双轴晶体射线曲面在第一卦限中的示意图

至此，我们介绍了四种描述晶体光学性质的几何图形：折射率椭球—— (d, n) 曲面；折射率曲面—— (k, n) 曲面，菲涅耳椭球—— (e, v_r) 曲面；射线曲面—— (s, v_r) 曲面。这几种曲面的作用，实质上是等效的，只是某种场合应用其中某一种曲面处理问题较为方便而已。

4.3 平面光波在晶体界面上的反射和折射

前面讨论了光在晶体内部的传播规律。实际上，在使用晶体制作的光学元件时，都会涉及到光在晶体表面上的入射和出射问题，因此应考虑光从空气射向晶体表面，或由晶体内部射向晶体界面时的反射和折射特性。这一节将采用与各向同性介质相同的方法，简单地讨论光在晶体表面上的反射和折射，但只限于讨论光波的传播方向特性。

4.3.1 光在晶体界面上的双反射和双折射

众所周知，一束单色光入射到各向同性介质的界面上时，将分别产生一束反射光和一束折射光，并且遵从熟知的反射定律((1-125)式)和折射定律((1-126)式)。人们在实验中发现，一束单色光从空气入射到晶体表面(例如方解石晶体)上时，会产生两束同频率的折射光(图 4-26)，这就是双折射现象；当一束单色光从晶体内部(例如方解石晶体)射向界面上时，会产生两束同频率的反射光(图 4-27)，这就是双反射现象。并且，在界面上所产生的两束折射光或两束反射光都是线偏振光，它们的振动方向相互垂直。显然，这种双折射

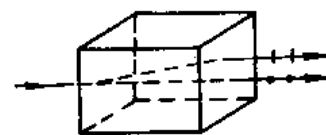


图 4-26 方解石晶体的双折射现象

和双反射现象都是晶体中光学各向异性特性的直接结果。

假设一束单色平面光波自空气射向晶体， k_i 、 k_r 、 k_t 分别为入射光、反射光、折射光的波矢，则由光的电磁场理论可得

$$(k_r - k_i) \cdot r = 0 \quad (4-108)$$

$$(k_t - k_i) \cdot r = 0 \quad (4-109)$$

(4-108)式是反射定律的矢量形式，可表述为：反射光与入射光的波矢差与界面垂直。(4-109)式是折射定律的矢量形式，可表述为：折射光与入射光的波矢差与界面垂直。由该二式可见， k_i 、 k_r 、 k_t 和界面法线都在入射面内。

若设 θ_i 、 θ_r 、 θ_t 分别为入射角、反射角、折射角，则有

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t \quad (4-110)$$

或

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r \quad (4-111)$$

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (4-112)$$

(4-111)式和(4-112)式就是光在晶体界面上的反射定律和折射定律。在形式上，它们与各向同性介质的反射、折射定律相同，但是，

① 式中的 θ_i 、 θ_r 、 θ_t 都是对波法线方向而言的，尽管反射光、折射光的波法线均在入射面内，但它们的光线有可能不在入射面内。

② 在晶体中，光的折射率因传播方向、电场振动方向而异。如果光从空气射至晶体，则因折射光的折射率 n_t 不同，其折射角 θ_t 也不同；如果光从晶体内部射出，相应的入射光和反射光的折射率 n_r 和 n_i 不相等，所以在一般情况下入射角不等于反射角。

③ 由于双折射和双反射现象的存在，满足(4-111)式的 n_r 和 θ_r 以及满足(4-112)式的 n_t 和 θ_t 都有两个可能的值。

4.3.2 光在晶体界面上反射和折射方向的几何作图法描述

因为晶体中非常光的折射率大小与波法线方向有关，所以要写出晶体界面上反射光和折射光方向的显函数关系比较困难。为此，经常采用几何作图法确定反射光、折射光的方向。

1. 惠更斯作图法

惠更斯作图法是利用射线曲面(即波面)确定反射光、折射光方向的几何作图法。

对于各向同性介质，惠更斯原理曾以次波的包迹是新的波阵面的观点，说明了光波由一种介质进入另一种介质时为什么会折射，并通过作图法利用次波面的单层球面特性，确定了次波的包迹——波阵面，从而确定了折射光的传播方向。

对于各向异性介质(晶体)，情况就复杂多了。由上一节的讨论已知，晶体空间对于光

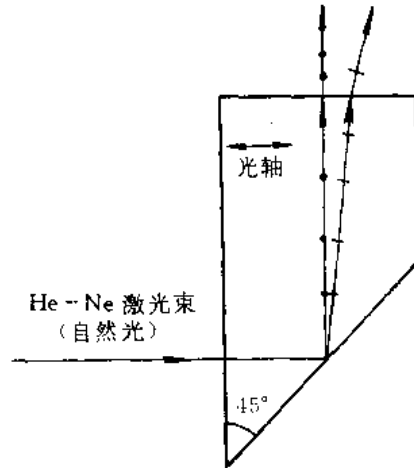


图 4-27 方解石晶体中的双反射现象

的传播来说,是一个偏振化的空间,一束入射光不管其偏振性质如何,它一进入晶体,就要按晶体所规定的方式分成取向不同的两种特许的线偏振态,并且这两种振动所产生的次波沿任一方向都以不同的速度传播。因此,在晶体界面上的次波源向晶体内发射的次波波面是双壳层曲面,每一壳层对应一种振动方式,这就是上节介绍的射线曲面。这样,对于两种不同振动方式的次波的包迹,就是各自的波阵面,它们按不同的方向传播,从而形成两束折射光。

下面,以单轴晶体为例,说明惠更斯作图法。

假设有一束平行光由各向同性介质(n_1)斜入射到正单轴晶体的表面 Σ 上,晶体光轴为一般取向,即光轴与入射面不平行,也不垂直。当入射波波面上的 B 到达 A' 点时, A 点发出的次波波面如图4-28所示,其中半径为 $AR=v_1$ 的球面是在入射介质(各向同性)中的波面,晶体中的 o 光波面是半径为 $AR_0=v_0$ 的球面,这两个球面与入射面的截线都是圆。由于晶体光轴为一般取向,所以晶体中 e 光的波面与入射面的截线是一个如图所示的椭圆,但它并不以入射面(图平面)为对称面,其一个半轴长为 v_0 ,另一个半轴长介于 v_0 和 v_1 之间。

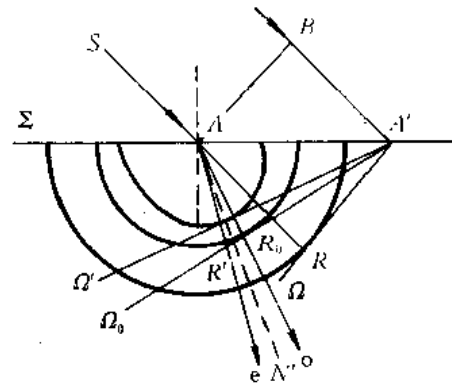


图4-28 惠更斯作图法

将 SA 延长与入射光波面相交于 R ,过 R 作切平面 $A'R$,它就是入射光次波面的包迹——入射光波的波阵面。由于入射介质是各向同性介质,所以入射光的光线方向和波法线方向均为 AR 方向。在晶体中,折射光的方向可以通过 A' 向折射光波面作切平面确定:过 A' 作 o 光波面的切平面 $A'\Omega_0$, R_0 为切点,该平面就是寻常折射光的波阵面, AR_0 方向是寻常折射光能流(光线)方向。由于 o 光波面是球面,所以 AR_0 垂直于 $A'\Omega_0$ 切平面,并且 AR_0 在入射面内,因此,它既是寻常折射光的光线方向,又是其波法线方向;过 A' 作 e 光波面的切平面 $A'\Omega$,它就是非常折射光的波阵面。因为在一般情况下, e 光波面与 $A'\Omega$ 面的切点不在图面内,所以非常光线一般不在入射面上,但过 A 作 $A'\Omega$ 面的法线 AN' 却在图面上,它就是非常折射光的波法线方向。

由上述惠更斯原理和惠更斯作图法说明了单轴晶体中两个折射光的性质: o 光折射光的波法线方向与光线方向一致,并在入射面内; e 光折射光的波法线方向在入射面内,但 e 光光线方向一般不在入射面内。

在使用惠更斯原理和惠更斯作图法说明晶体中折射光方向时,有两种很有实际意义的双折射现象:图4-29(a)表示晶体表面垂直于光轴方向切割,光线沿光轴方向传播,不发生双折射现象;图4-29(b)和(c)表示晶体表面平行于光轴方向切割,当光线垂直表面入射时,折射光方向也只有一个,但沿该方向传播的 o 光和 e 光的速度不同,因此通过晶片后,它们之间将产生一定的相位差。利用这种晶片制作的光学元件,在光电子技术中有重要的用途。

对于晶体内表面上产生的双反射现象,也可以类似地进行讨论。读者可以自己分析。

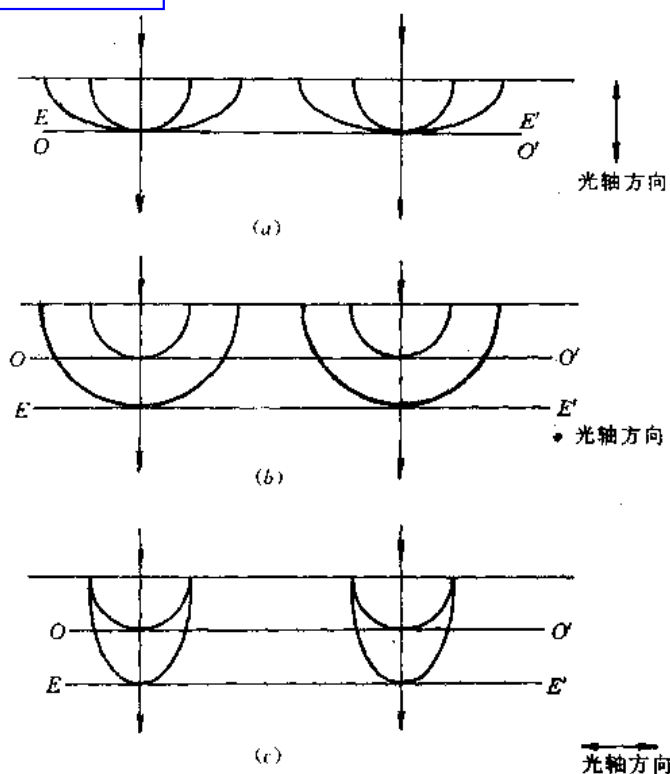


图 4 - 29 正入射时晶体中的折射现象
(负单轴晶体)

2. 斯涅耳作图法

利用折射率曲面也可以确定与入射光相应的反射光、折射光的传播方向。但为了简明起见，通常是采用波矢曲面进行。斯涅耳作图法就是利用波矢曲面确定反射光、折射光传播方向的几何作图法。

图 4 - 30 给出了以界面 Σ 上任一点 A 为原点，在晶体一侧按同一比例画出的入射光所在介质中的波矢面和晶体中的波矢面(双壳层曲面)。自 A 点引一直线平行于入射光波法线方向，与入射光所在介质的波矢面交于 N_i ，该 AN_i 即为入射光波 k_i 。以 N_i 点作 Σ 面的垂线交晶体中的波矢面于 N_r 和 N_t ， AN_r 和 AN_t 就是与入射光 k_i 相应的两个折射光波矢 k_r 和 k_t 。每一个折射光对应着一个光线方向和一个光线速度，这就是双折射现象。

对于晶体内部的双反射现象，可以类似处理：以界面上任一点为原点，在界面 Σ 两侧画出晶体的波矢面，其中入射光的波矢面画在晶体外侧，自原点引出与入射光波法线方向平行的直线，确定出入射波矢 k_i ，过 k_i 末端作 Σ 的垂线，在晶体内侧交反射光波矢面于两点，从而可定出符合(4 - 108)式的两个反射波矢 k_r 和 k_t 。

应当指出的是，由这个作图法所确定的两个反射波矢和两个折射波矢只是允许的或可能的两个波矢，至于实际上两个波矢是否同时存在，要看入射光是否包含有各反射光或各折射光的场矢量方向上的分量。

下面，利用斯涅耳作图法讨论经常遇到的单轴晶体双折射的几个特例。

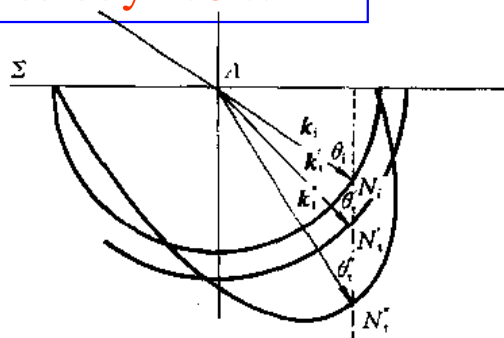


图 4-30 斯涅耳作图

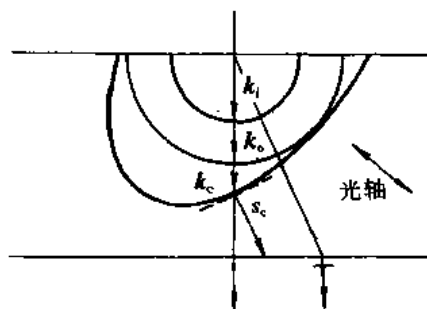


图 4-31 平面波正入射，光轴与晶面斜交

1) 平面光波正入射

图 4-31 表示一正单轴晶体，其光轴位于入射面内，与晶面斜交。当一束平面光波正入射时，其折射光的波矢、光线方向可如下确定：首先在入射界面上任取一点作为原点，按比例在晶体一侧画出入射光所在介质的波矢面和晶体的波矢面。光波垂直射入晶体后，分为 o 光和 e 光。o 光垂直于主截面振动，e 光在主截面内振动。o 光、e 光的波法线方向相同，均垂直于界面，但光线方向不同。过 k_e 矢量末端所作的椭圆切线是 e 光的 E 矢量振动方向，其法线方向即为该 e 光的光线方向 s_e ，它仍在主截面内，而 o 光的光线方向 s_o 则平行于 k_o 方向。在一般情况下，如果晶体足够厚，从晶体平行的下通光表面出射的是两束光，其振动方向互相垂直，其中相应于 e 光的透射光，相对入射光的位置在主截面内有一个平移。

图 4-32 给出了平面光波正入射、光轴平行于晶体表面时的折射光方向。在晶体内产生的 o 光和 e 光的波法线方向、光线方向均相同，但其传播速度不同。因此，当入射光为线偏振光时，从晶体下表面出射的光在一般情况下将是随晶体厚度变化的椭圆偏振光。

图 4-33 给出了平面光波正入射，光轴垂直于晶体表面时的折射光方向。由于此时晶体内光的波法线方向平行于光轴方向，所以不发生双折射现象。从晶体下表面出射光的偏振状态，与入射光相同。

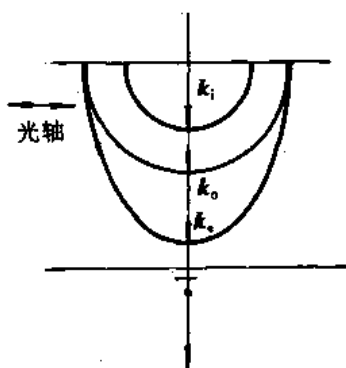


图 4-32 平面波正入射，光轴平行于表面

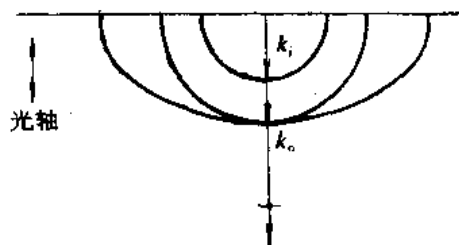


图 4-33 平面波正入射，光轴垂直于晶体表面

2) 平面光波在主截面内斜入射

如图 4-34 所示, 平面光波在主截面内斜入射时, 在晶体内将分为 o 光和 e 光, e 光的波法线方向、光线方向一般与 o 光不相同, 但都在主截面内。当晶体足够厚时, 从晶体下表面射出的是两束振动方向互相垂直的线偏振光, 传播方向与入射光相同。

3) 光轴平行于晶面, 入射面垂直于主截面

图 4-35 绘出了晶体光轴平行于晶面(垂直于图面), 平行光波的入射面垂直于主截面时的折射光传播方向。此时, 光进入晶体后分为 o、e 两束光。对于 o 光, 其波法线方向与光线方向一致; 而 e 光因其折射率是常数 n_e , 与入射角的大小无关, 所以它的波法线方向与光线方向也相同。

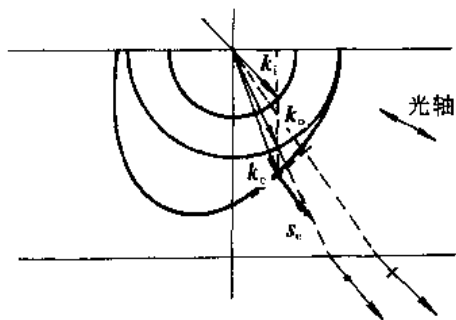


图 4-34 平面波在主截面内斜入射

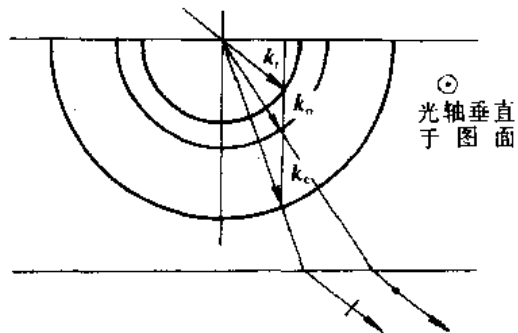


图 4-35 光轴平行于晶面, 入射面与主截面垂直

4.4 晶体光学元件

作为晶体双折射特性和偏振效应的实际应用, 下面讨论光学和光电子技术中的重要光学元件——偏振器、波片和补偿器。

4.4.1 偏振器

在光电子技术应用中, 经常需要偏振度很高的线偏振光。除了某些激光器本身即可产生线偏振光外, 大部分都是通过通过对入射光进行分解和选择获得线偏振光的。通常将能够产生线偏振光的元件叫做偏振器。

根据偏振器的工作原理不同, 可以分为双折射型、反射型、吸收型和散射型偏振器。后三种偏振器因其存在消光比差, 抗损伤能力低, 有选择性的吸收等缺点, 应用受到限制; 在光电子技术中, 广泛地采用双折射型偏振器。

由晶体双折射特性的讨论已知, 一块晶体本身就是一个偏振器, 从晶体中射出的两束光都是线偏振光。但是, 由于由晶体射出的两束光通常靠得很近, 不便于分离应用, 所以实际的双折射偏振器, 或者是利用两束偏振光折射的差别, 使其中一束在偏振器内发生全反射(或散射), 而让另一束光顺利通过; 或者利用某些各向异性介质的二向色性, 吸收掉一束线偏振光, 而使另一束线偏振光顺利通过。

偏振棱镜

偏振棱镜是利用晶体的双折射特性制成的偏振器，它通常是由两块晶体按一定的取向组合而成的。下面介绍几种常用的偏振棱镜。

1) 格兰—汤普森(Glan-Thompson)棱镜

格兰—汤普森棱镜是由著名的尼科尔(Nicol)棱镜改进而成的。如图 4-36 所示，它由两块方解石直角棱镜沿斜面相对胶合制成，两块晶体的光轴与通光的直角面平行，并且或者与 AB 棱平行，或者与 AB 棱垂直。

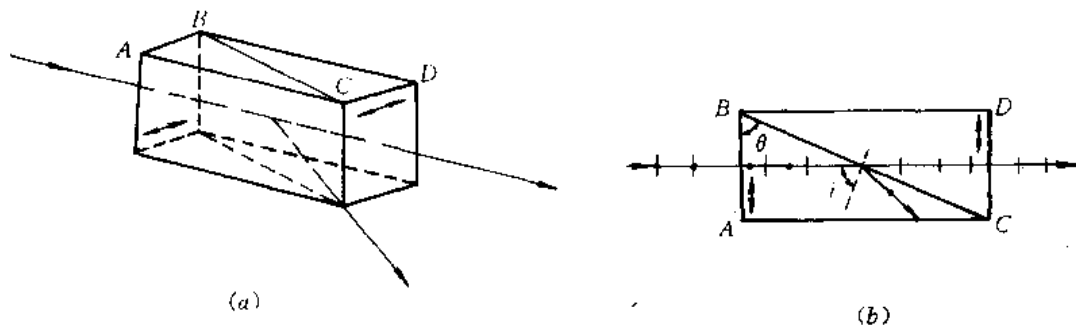


图 4-36 格兰—汤普森棱镜

(a) 立体图, (b) 顶视图

格兰—汤普森棱镜输出偏振光的原理如下：当一束自然光垂直射入棱镜时，o 光和 e 光均无偏折地射向胶合面，在 BC 面上，入射角 i 等于棱镜底角 θ 。制作棱镜时，选择胶合剂（例如加拿大树胶）的折射率 n 介于 n_o 和 n_e 之间，并且尽量和 n_e 接近。因为方解石是负单轴晶体， $n_e < n_o$ ，所以 o 光在胶合面上相当于从光密介质射向光疏介质，当 $i > \arcsin(n/n_o)$ 时，o 光产生全反射，而 e 光照常通过，因此，输出光中只有一种偏振分量。通常将这种偏振分光棱镜叫作单像偏光棱镜。

在上述结构中，o 光在 BC 面上全反射至 AC 面时，如果 AC 面吸收不好，必然有一部分 o 光经 AC 面反射回 BC 面，并因入射角小于临界角而混到出射光中，从而降低了出射光的偏振度。所以在要求偏振度很高的场合，都是把格兰—汤普森棱镜制成图 4-37 所示的改进型。

2) 渥拉斯顿(Wollaston)棱镜

渥拉斯顿棱镜是加大了两种线偏振光的离散角，且同时出射两束线偏振光的双像棱镜。它的结构如图 4-38 所示，是由光轴互相垂直的两块直角棱镜沿斜面用胶合剂胶合而成的，一般都是由方解石或石英等透明单轴晶体制作。

正入射的平行光束在第一块棱镜内垂直光轴传播，o 光和 e 光以不同的相速度同向传播。它们进入第二块棱镜时，因光轴方向旋转 90° ，使得第一块棱镜中的 o 光变为 e 光，且由于方解石为负单轴晶体 ($n_e < n_o$)，将远离界面法线偏折；第一块晶体中的 e 光，现在变为 o 光，靠近法线偏折。这两束光在射出棱镜时，将再偏折一次。这样，它们对称地分开一个角度，此角的大小与棱镜的材料及底角 θ 有关。对于负单轴晶体近似为

$$\Phi \approx 2 \arcsin[(n_o - n_e) \tan \theta] \quad (4-113)$$

对于方解石棱镜， Φ 角一般为 $10^\circ \sim 40^\circ$ 。例如，当 $\theta = 45^\circ$ 时， $\Phi \approx 20^\circ 40'$ 。

偏振棱镜的主要特性参量是：通光面积、孔径角、消光比、抗损伤能力。

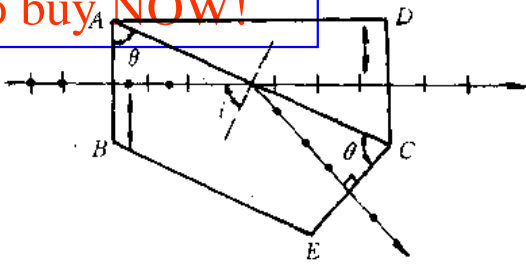


图 4-37 改进型格兰—汤普森棱镜

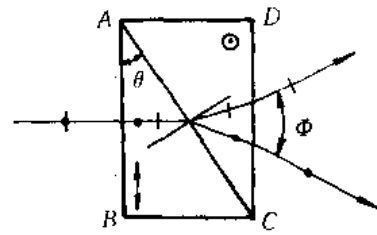


图 4-38 渥拉斯顿棱镜

(1) 通光面积 偏振棱镜所用的材料通常都是稀缺贵重晶体，其通光面积都不大，直径约为 5~20 mm。

(2) 孔径角 对于利用全反射原理制成的偏振棱镜，存在着入射光束锥角限制。

上面讨论格兰—汤普森棱镜的工作原理时，假设了入射光是垂直入射。当光斜入射(图 4-39)时，若入射角过大，则对于光束 1 中的 o 光，在 BC 面上的入射角可能小于临界角，致使不能发生全反射，而部分地透过棱镜；对于光束 2 中的 e 光，在 BC 面上的入射角可能大于临界角，使 e 光在胶合面上发生全反射，这将降低出射光的偏振度。因此，这种棱镜不适合于发散角(或会聚角)过大的光路。或者说，这种棱镜对入射光锥角有一定的限制，并且称入射光束锥角的限制范围 $2\delta_m$ (δ_m 是 δ 和 δ' 中较小的一个)为偏振棱镜的有效孔径角。有效孔径角的大小与棱镜材料、结构、使用波段和胶合剂的折射率诸因素有关。

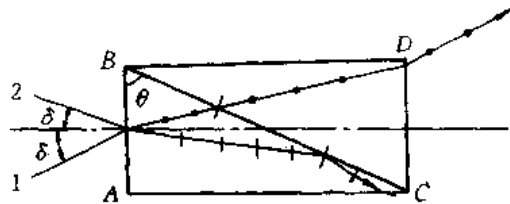


图 4-39 孔径角的限制

例如，由方解石晶体制成的格兰—汤普森棱镜，对于 $\lambda=0.5893 \mu\text{m}$ 的黄光来说，其主折射率 $n_o=1.6584$ ， $n_e=1.4864$ ，加拿大树胶的折射率 $n=1.55$ 。可以计算得到，在方解石—树胶界面上的 o 光临界角约为 69° 。因此，棱镜的底角 θ 应大于 69° 。若选 $\theta=71.5^\circ$ ，则由 $\tan \theta=AC/AB$ 可定出棱镜的长度比为 3:1，有效孔径角约为 7° ；若选 $\theta=81^\circ$ ，则棱镜的长宽比为 6.31:1，有效孔径角接近 40° 。显然，增大有效孔径角，将要求其棱镜长宽比增大，会耗费很多的晶体材料，提高成本。这在制作棱镜时，应特别注意。

(3) 消光比 消光比是指通过偏振器后两正交偏振光的强度比，一般偏振棱镜的消光比为 $10^{-6} \sim 10^{-4}$ 。

(4) 抗损伤能力 在激光技术中使用利用胶合剂的偏振棱镜时，由于激光束功率密度极高，会损坏胶合层，因此偏振棱镜对入射光能密度有限制。一般来说，抗损伤能力对于连续激光约为 10 W/cm^2 ，对于脉冲激光约为 10^4 W/cm^2 。为了提高偏振棱镜的抗损伤能力，可以把格兰—汤普森棱镜的胶合层改为空气层，制成如图 4-40 所示的格兰—傅科(Foucault)棱镜。这种棱镜的底角 θ 应满足

$$\arcsin \frac{1}{n_e} > \theta > \arcsin \frac{1}{n_o} \quad (4-114)$$

例如，由方解石制成的格兰—傅科棱镜，对于 $\lambda=1.06 \mu\text{m}$ 的红外光，主折射率 $n_o=$

1.6408, $n_e = 1.4790$, 在方解石—空气界面上, o光的临界角约为 37.5° , e光的临界角约为 42.6° , 因此可选择 $\theta = 40^\circ$, 由此可定出有效孔径角约为 7° . 这种偏振棱镜的抗损伤能力, 对于连续激光为 100 W/cm^2 , 对于脉冲激光为 $2 \times 10^8 \text{ W/cm}^2$. 但是, 由于e光是在接近临界角的情况下通过方解石—空气界面的, 所以反射损耗较大, 透过率较低.

2. 偏振片

由于偏振棱镜的通光面积不大, 存在孔径角限制, 造价昂贵, 所以在许多要求不高的场合, 都采用偏振片产生线偏振光.

1) 散射型偏振片

这种偏振片是利用双折射晶体的散射起偏的, 其结构如图 4-41 所示: 两片具有特定折射率的光学玻璃(ZK₂)夹着一层双折射性很强的硝酸钠(NaNO₃)晶体. 制作过程大致是: 把两片光学玻璃的相对面打毛, 竖立在云母片上, 将硝酸钠溶液倒入两毛面形成的缝隙中, 压紧二毛玻璃, 挤出气泡, 使得很窄的缝隙为硝酸钠填满, 并使溶液从云母片一边缓慢冷却, 形成单晶, 其光轴恰好垂直云母片, 进行退火处理后, 即可截成所需要的尺寸.

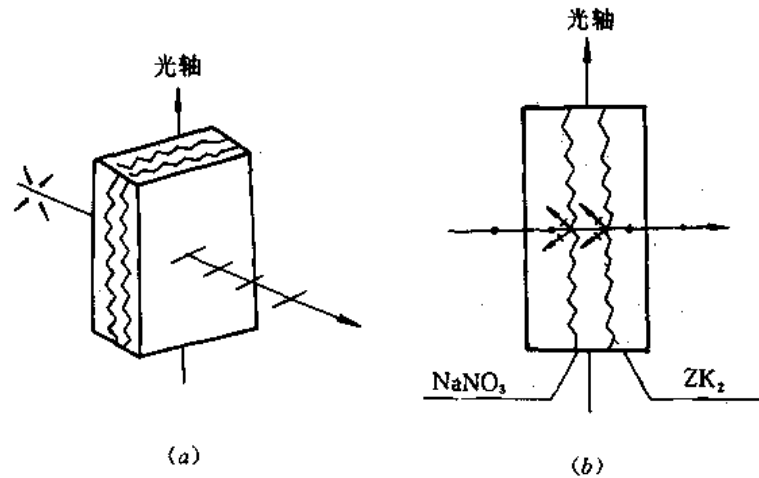


图 4-41 散射型偏振片

由于硝酸钠晶体对于垂直其光轴入射的黄绿光主折射率为 $n_o = 1.5854$, $n_e = 1.3369$, 而光学玻璃(ZK₂)对这一段光的折射率为 $n = 1.5831$, 与 n_o 非常接近, 而与 n_e 相差很大, 所以, 当光通过玻璃与晶体间的粗糙界面时, o光将无阻地通过, 而e光则因受到界面强烈散射以致无法通过.

散射型偏振片本身是无色的, 而且它对可见光范围的各种色光的透过率几乎相同, 又能做成较大的通光面积, 因此, 特别适用于需要真实地反映自然光中各种色光成分的彩色电影、彩色电视中.

2) 二向色型偏振片

二向色型偏振片是利用某些物质的二向色性制作成的偏振片. 所谓二向色性, 就是有

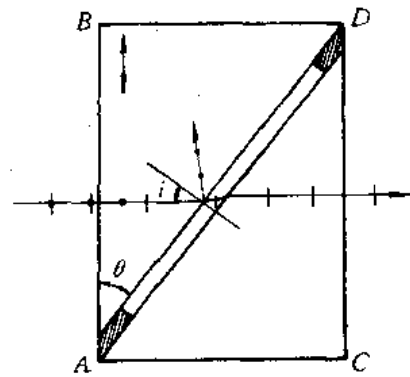


图 4-40 格兰—傅科棱镜

些晶体(电气石、硫酸碘奎宁等)对传输光中两个相互垂直的振动分量具有选择吸收的性能。例如电气石对传输光中垂直光轴的寻常光矢量分量吸收很强烈,吸收量与晶体厚度成正比,而对非常光矢量分量只吸收某些波长成分。但是因它略带颜色,且大小有限,所以用的不多。

目前使用较多的二向色型偏振片是人造偏振片。例如,广泛应用的 H 偏振片就是一种带有墨绿色的塑料偏振片,它是把一片聚乙烯醇薄膜加热后,沿一个方向拉伸 3~4 倍,再放入碘溶液浸泡制成的。浸泡后的聚乙烯膜具有强烈的二向色性。碘附着在直线的长链聚合分子上,形成一条碘链,碘中所含的传导电子能沿着链运动。自然光射入后,光矢量平行于链的分量对电子做功,被强烈吸收,只有光矢量垂直于薄膜拉伸方向的分量可以透过(图 4-42)。这种偏振片的优点是薄,面积可以做得大,有效孔径角几乎是 180° ,工艺简单,成本低。其缺点是有颜色,透过率低,对黄色自然光的透过率仅约 30%。

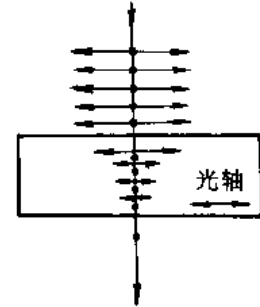


图 4-42 二向色型偏振片

4.4.2 波片和补偿器

在有关光的偏振特性讨论中已知,一束偏振光的任意两个相互垂直振动的分量相位是相关的,其相位差决定了该光的偏振状态。显然,如果能控制这两个分量的相位差关系,就可以控制光的偏振状态。波片和补偿器就是能对偏振光的两个垂直振动分量的相位差给予补偿,从而改变光偏振状态的元件,这种元件在光电子技术应用中非常重要。

1. 波片

波片是一种对二垂直振动分量提供固定相位差的元件。它通常是从单轴晶体上按一定方式切割的、有一定厚度的平行平面薄片,其光轴平行于晶片表面,设为 x_3 方向,如图 4-43 所示。一束正入射的光波进入波片后,将沿原方向传播两束偏振光—— o 光和 e 光,它们的 D 矢量分别平行于 x_1 和 x_3 方向,其折射率分别为 n_o 和 n_e 。由于二光的折射率不同,它们通过厚度为 d 的波片后,将产生一定的相位差 φ ,且

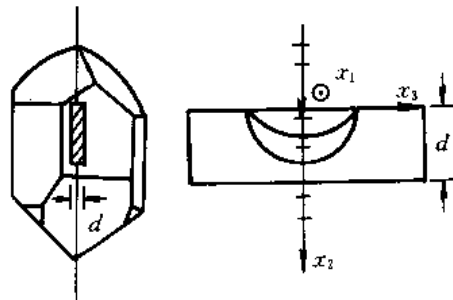


图 4-43 波片

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d \quad (4-115)$$

式中, λ 是光在真空中的波长。于是,入射的偏振光通过波片后,由于其二垂直分量之间附加了一个相位差,将会改变偏振状态。

现有一束线偏振光垂直射入波片,在入射表面上所产生的 o 光和 e 光分量同相位,振幅分别为 A_o 和 A_e 。该二光穿过波片射出时,附加了一个相位延迟差 φ ,因而其合成光矢量端点的轨迹方程为

$$\left(\frac{E_1}{A_o}\right)^2 + \left(\frac{E_3}{A_e}\right)^2 - 2\frac{E_1 E_3}{A_o A_e} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (4-116)$$

该式为一椭圆方程。它说明，输出光的偏振态发生了变化，为椭圆偏振光。
 在光电子技术中，经常应用的是全波片、半波片和 1/4 波片。

1) 全波片

这种波片的附加相位延迟差为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = 2m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-117)$$

将其代入(4-116)式，得

$$\left(\frac{E_1}{A_o} - \frac{E_3}{A_e}\right)^2 = 0$$

即

$$E_1 = \frac{A_o}{A_e}E_3 = \tan \theta E_3 \quad (4-118)$$

显然，该式为一直线方程，即线偏振光通过全波片后，其偏振状态不变(图 4-44)。因此，将全波片放入光路中，不改变光路的偏振状态。

全波片的厚度为

$$d = \left| \frac{m}{n_o - n_e} \right| \lambda \quad (4-119)$$

2) 半波片

半波片的附加相位延迟差为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = (2m + 1)\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-120)$$

将其代入(4-116)式，得

$$\left(\frac{E_1}{A_o} + \frac{E_3}{A_e}\right)^2 = 0$$

即

$$E_1 = -\frac{A_o}{A_e}E_3 = \tan(-\theta)E_3 \quad (4-121)$$

该式也为一直线方程，即出射光仍为线偏振光，只是振动面的方位较入射光转过了 2θ 角(图 4-45)，当 $\theta=45^\circ$ 时，振动面转过 90° 。

半波片的厚度为

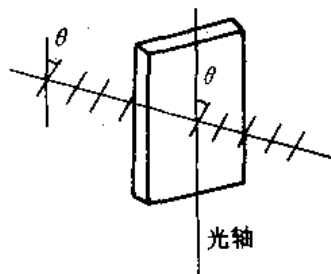


图 4-44 全波片

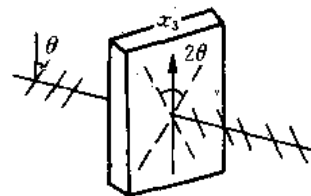


图 4-45 半波片

$$d = \left| \frac{2m+1}{n_o - n_e} \right| \frac{\lambda}{2} \quad (4-122)$$

3) 1/4 波片

1/4 波片的附加相位延迟差为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = (2m+1) \frac{\pi}{2} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-123)$$

将其代入(4-116)式, 得

$$\frac{E_1^2}{A_o^2} + \frac{E_3^2}{A_e^2} = 1 \quad (4-124)$$

该式是一个标准椭圆方程, 其长、短半轴长分别为 A_e 和 A_o 。这说明, 线偏振光通过 1/4 波片后, 出射光将变为长、短半轴等于 A_e 、 A_o 的椭圆偏振光(如图 4-46(a)所示)。当 $\theta=45^\circ$ 时, $A_e=A_o=A/\sqrt{2}$, 出射光为一圆偏振光(如图 4-46(b)所示), 其方程为

$$E_1^2 + E_3^2 = \frac{1}{2}A^2 \quad (4-125)$$

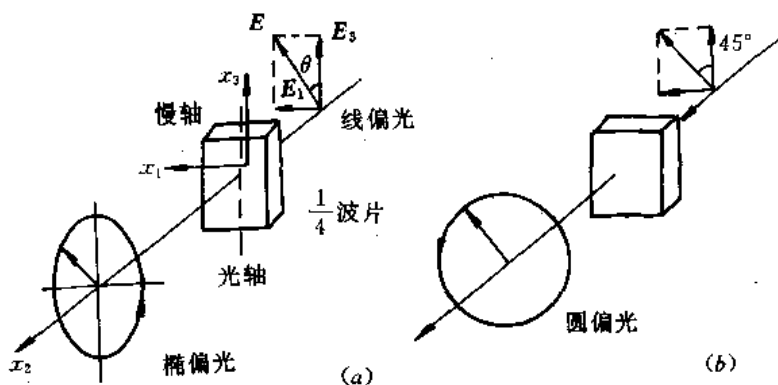


图 4-46 1/4 波片

1/4 波片的厚度为

$$d = \left| \frac{2m+1}{n_o - n_e} \right| \frac{\lambda}{4} \quad (4-126)$$

应当说明的是, 晶体的双折射率($n_o - n_e$)数值是很小的, 所以, 对应于 $m=1$ 的波片厚度非常小。例如, 石英晶体的双折射率($n_o - n_e$)为 -0.009 , 当波长是 $0.5 \mu\text{m}$ 时, 半波片仅为 $28 \mu\text{m}$ 厚, 制作和使用都很困难。虽然可以加大 m 值, 增加厚度, 但将导致波片对波长、温度和自身方位的变化很敏感。比较可行的办法是把两片石英粘在一起, 使它们的厚度差为一个波片的厚度(对应 $m=1$ 的厚度), 而光轴方向相互垂直。

在使用波片时, 有两个问题必须注意:

① 波长问题。任何波片都是对特定波长而言, 例如, 对于波长为 $0.5 \mu\text{m}$ 的半波片, 对于 $0.6328 \mu\text{m}$ 的光波长就不再是半波片了; 对于波长为 $1.06 \mu\text{m}$ 的 1/4 波片, 对 $0.53 \mu\text{m}$ 来说恰好是半波片。所以, 在使用波片前, 一定要弄清这个波片是对哪个波长而言的。

② 波片的主轴方向问题。使用波片时应当知道波片所允许的两个振动方向(即两个主轴方向)及相应波速的快慢。这通常在制作波片时已经指出, 并已标在波片边缘的框架上了, 波速快的那个主轴方向叫快轴, 与之垂直的主轴叫慢轴。

最后还需指出，波片虽然给入射光的两个分量增加了一个相位差 φ ，但在不考虑波片表面反射的情况下，因为振动方向相互垂直的两光束不发生干涉，总光强 $I = I_o + I_e$ 与 φ 无关，保持不变。所以，波片只能改变入射光的偏振态，不改变其光强。

2. 补偿器

上述波片只能对振动方向相互垂直的两束光产生固定的相位差，补偿器则是能对振动方向相互垂直的二线偏振光产生可控制相位差的光学器件。

最简单的一种补偿器叫巴俾涅补偿器，它的结构如图 4-47 所示，由两个方解石或石英劈组成，这两个劈的光轴相互垂直。当线偏振光射入补偿器后，产生传播方向相同、振动方向相互垂直的 o 光和 e 光，并且，在上劈中的 o 光(或 e 光)，进入下劈时就成了 e 光(或 o 光)。由于劈尖顶角很小(约 $2^\circ \sim 3^\circ$)，在两个劈界面上，e 光和 o 光可认为不分离。

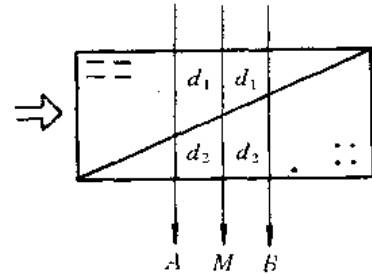


图 4-47 巴俾涅补偿器

在图 4-47 所示的三束光 A、M、B 中，相应于通过两劈厚度相同处($d_1 = d_2$)的光线 M，从补偿器出射的振动方向相互垂直的两束光之间的相位差为零；相应于通过两劈厚度不相等处($d_1 > d_2$)的光线 A 和($d_1 < d_2$)光线 B，从补偿器出射的振动方向相互垂直的两束光间，有一定的相位差。因为上劈中的 e 光在下劈中变为 o 光，它通过上、下劈的总光程为($n_e d_1 + n_o d_2$)；上劈中的 o 光在下劈中变为 e 光，它通过上、下劈的总光程为($n_o d_1 + n_e d_2$)，所以，从补偿器出来时，这两束振动方向相互垂直的线偏振光间的相位差为

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} [(n_e d_1 + n_o d_2) - (n_o d_1 + n_e d_2)] \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)(d_2 - d_1) \end{aligned} \quad (4-127)$$

当入射光从补偿器上方不同位置射入时，相应的($d_2 - d_1$)值不同， φ 值也就不同。或者，当上劈沿图(4-47)中所示箭头方向移动时，对于同一条入射光线，($d_2 - d_1$)值也随上劈移动而变化，故 φ 值也随之改变。因此，调整($d_2 - d_1$)值，便可得到任意的 φ 值。

巴俾涅补偿器的缺点是必须使用极细的入射光束，因为宽光束的不同部分会产生不同的相位差。采用图 4-48 所示的索累(Soleil)补偿器可以弥补这个不足。这种补偿器是由两个光轴平行的石英劈和一个石英平行平面薄板组成的。石英板的光轴与两劈的光轴垂直。上劈可由微调螺丝使之平行移动，从而改变光线通过两劈的总厚度 d_1 。对于某个确定的 d_1 ，可以在相当宽的区域内(如图 4-48 中的 AB 宽度内)获得相同的 φ 值。

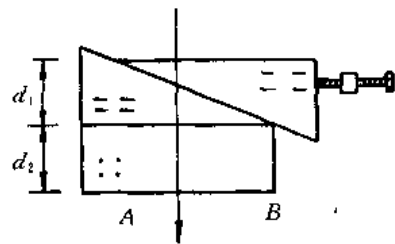


图 4-48 索累补偿器

显然，利用上述补偿器可以在任何波长上产生所需要的波片；可以补偿及抵消一个元件的自然双折射；可以在一个光学器件中引入一个固定的延迟偏置；或经校准定标后，可以用来测量待求波片的相位延迟。

4.5 晶体的偏光干涉

上一节讨论了振动方向相互垂直的两束线偏振光的叠加现象，在一般情况下，它们叠加形成椭圆偏振光。现在讨论两束振动方向平行的相干线偏振光的叠加，这种叠加会产生干涉现象。从干涉现象来说，这种偏振光的干涉与第2章讨论的自然光的干涉现象相同，但实验装置不同：自然光干涉是通过分振幅法或分波面法获得两束相干光，进行干涉；而偏光干涉则是利用晶体的双折射效应，将同一束光分成振动方向相互垂直的两束线偏振光，再经检偏器将其振动方向引到同一方向上进行干涉，也就是说，通过晶片和一个检偏器即可观察到偏光干涉现象。

下面讨论偏光干涉的基本规律，这些规律是光电子技术中应用非常广泛的光调制技术的基础。

4.5.1 平行光的偏光干涉

1. 单色平行光正入射的干涉

如图4-49所示的平行偏振光干涉装置中，晶片的厚度为 d ，起偏器 P_1 将入射的自然光变成线偏振光，检偏器 P_2 则是将有一定相位差、振动方向互相垂直的线偏振光引到同一振动方向上，使其产生干涉。如果起偏器与检偏器的偏振轴相互垂直，称这对偏振器为正交偏振器，如果互相平行，就叫平行偏振器，其中以正交偏振器最为常用。

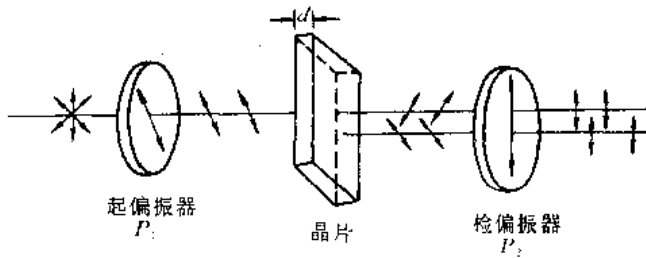


图 4-49 平行偏振光的干涉光路

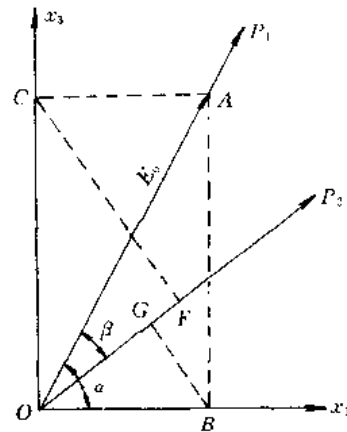


图 4-50 通过起偏器和检偏器的振动分量

一束单色平行光通过 P_1 变成振幅为 E_0 的线偏振光，然后垂直投射到晶片上，并被分解为振动方向互相垂直的两束线偏振光。若如图4-50所示， P_1 的偏振轴与其中一个振动方向的夹角为 α ，则这两束线偏振光的振幅分别为

$$\left. \begin{aligned} E' &= OB = E_0 \cos \alpha \\ E'' &= OC = E_0 \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4-128)$$



E' 和 E'' 从晶片射出时的相位差为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n' - n'')d \quad (4-129)$$

如果 P_1 和 P_2 偏振轴的夹角为 β ，则由晶片射出的两束线偏振光通过检偏器后的振幅分别为

$$\left. \begin{aligned} OG &= OB \cos(\alpha - \beta) = E_0 \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) \\ OF &= OC \sin(\alpha - \beta) = E_0 \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (4-130)$$

这时它们的频率相同，振动方向相同，相位差恒定，满足干涉条件。它们相干叠加的光强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi \quad (4-131)$$

将(4-130)式代入，可得

$$\begin{aligned} I &= I_0 [\cos^2 \alpha \cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2 \alpha \sin^2(\alpha - \beta) \\ &\quad + 2\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) \cos \varphi] \\ &= I_0 \left[\cos^2 \beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] \end{aligned} \quad (4-132)$$

式中， $I_0 \propto E_0^2$ 。如果在两个偏振器之间没有晶片，则 $\varphi=0$ ，此时

$$I = I_0 \cos^2 \beta \quad (4-133)$$

即出射光强与入射光强之比等于两偏振轴夹角余弦的平方，这就是熟知的马吕斯定律。

现在讨论两种重要的特殊情况：

1) P_1 和 P_2 的偏振轴正交 ($\beta=\pi/2$)

在这种条件下，(4-132)式变为

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (4-134)$$

该式说明，输出光强 I_{\perp} 除了与入射光强 I_0 有关外，还与晶片产生的二正交偏振光的相位差 φ 、偏振光振动方向与偏振器的偏振轴夹角 α 有关。

(1) 晶片取向 α 对输出光强的影响 当 $\alpha=0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 时， $\sin 2\alpha=0$ ，相应 $I_{\perp}=0$ 。就是说，在 P_1 和 P_2 偏振轴正交条件下，当晶片中的偏振光振动方向与起偏器的偏振轴方向一致时，出射光强为零，视场全暗，这一现象叫消光现象，此时的晶片位置为消光位置。当将晶片旋转 360° 角时，将依次出现四个消光位置，它们与 φ 无关。

当 $\alpha=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ 时， $\sin 2\alpha=\pm 1$ ，即当晶片中的偏振光振动方向位于二偏振器偏振轴的中间位置时，光强度极大，有

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (4-135)$$

把晶片转动一周，同样有四个最亮的位置。在实际应用中，经常使晶片处于这样的位置。

(2) 晶片相位差 φ 对输出光强的影响 当 $\varphi=0, 2\pi, \dots, 2m\pi$ (m 为整数) 时， $\sin^2(\varphi/2)=0$ ，即当晶片所产生的相位差为 2π 的整数倍时，输出强度为零。此时如果改变 α ，则不论晶片是处于消光位置还是处于最亮位置，输出强度均为零。

当 $\varphi=\pi, 3\pi, \dots, (2m+1)\pi$ (m 为整数) 时， $\sin^2(\varphi/2)=1$ ，即当晶片所产生的相位差为 π 的奇数倍时，输出强度得到加强， $I_{\perp}=I_0 \sin^2 2\alpha$ 。如果此时晶片处于最亮位置 ($\alpha=\pi/4$)， α



和 φ 的贡献都使得输出光强干涉极大, 可得最大的输出光强

$$I_{\perp\text{最大}} = I_0 \quad (4-136)$$

即等于入射光的光强。

上面讨论的晶片情况, 实际上分别相应于全波片和半波片情况。因为全波片对光路中的偏振状态无任何影响, 在正交偏振器中加入一个全波片, 其效果和没有加入全波片一样, 所以出射光强必然等于零。而加入半波片时, 如 $\alpha = \pi/4$, 则半波片使入射偏振光的偏振方向旋转 $\theta = 2\alpha = \pi/2$, 恰为检偏器的偏振轴方向, 所以输出光强必然最大。

2) P_1 和 P_2 的偏振轴平行 ($\beta = 0$)

这时, (4-132)式变为

$$I_{//} = I_0 \left(1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4-137)$$

与(4-134)式比较可见, $I_{//}$ 和 I_{\perp} 的极值条件正好相反。

(1) 晶片取向 α 对输出光强的影响 当 $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 时, $\sin 2\alpha = 0, I_{//} = I_0$, 光强度最大。即当偏振器的偏振轴与晶体中的一个偏振光振动方向重合时, 通过起偏器所产生的线偏振光在晶片不发生双折射, 按原状态通过检偏器, 因此出射光强最大。

当 $\alpha = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ 时, $\sin 2\alpha = \pm 1$, 此时光强极小, 为

$$I_{//} = I_0 \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4-138)$$

(2) 晶片相位差 φ 对输出光强的影响 当 $\varphi = 0, 2\pi, \dots, 2m\pi$ (m 为整数) 时, $\sin(\varphi/2) = 0$, 相应 $I_{//} = I_0$ 。

当 $\varphi = \pi, 3\pi, \dots, (2m+1)\pi$ (m 为整数) 时, $\sin(\varphi/2) = \pm 1$, 相应光强极小, 为

$$I_{//} = I_0 (1 - \sin^2 2\alpha) \quad (4-139)$$

此时若 $\alpha = \pi/4$, 则有

$$I_{//\text{最小}} = 0$$

综上所述:

① 在正交情况下, 只有同时满足 $\alpha = \pi/4, \varphi = \pi$ 的奇数倍时, 输出光强才是最大, $I_{\perp\text{最大}} = I_0$ 。输出光强最小的条件是 $\alpha = 0, \pi/2$ 的整数倍, 或者 $\varphi = 2\pi$ 的整数倍, 只要满足这两个条件之一, 即可输出最小光强, $I_{\perp\text{最小}} = 0$ 。

② 正交和平行两种情况的干涉输出光强正好互补。在实验中, 处于正交情况下的干涉亮条纹, 在偏振器旋转 $\pi/2$ 后, 变成了暗条纹, 而原来的暗条纹变成了亮条纹。

③ 输出光强度随 φ 变化, 因为 $\varphi = 2\pi(n' - n'')d/\lambda$, 所以, 当晶片中各点的双折射、晶片厚度 d 均匀时, 干涉视场的光强也是均匀的。实际上, 晶片各处的 $(n' - n'')$ 和晶片厚度 d 不可能完全均匀, 这就使各点的干涉强度不同, 会出现与等厚(光学厚度)线形状一致的等厚干涉条纹。工程上经常根据这个原理来检查透明材料的光学均匀性。

2. 单色平行光斜入射的干涉

当平行光斜入射至平行晶片时, 其干涉原理与前相同。在这种情况下, 上面导出的各个公式仍然成立, 其差别是相位差的具体形式稍有不同。为此, 下面只推导平行光斜入射时, 晶片中二折射光的相位差公式。

当平行光斜入射时, 根据双折射定律, 将产生图 4-51 所示的方向分离的两个折射光, 它们在晶体中所产生的相位差为

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{AB''}{\lambda''} + \frac{B''C}{\lambda} - \frac{AB'}{\lambda'} \right) \quad (4-140)$$

式中, λ' 、 λ'' 分别为二折射光在晶片中的波长; λ 是入射光在空气中的波长,

$$AB' = \frac{d}{\cos \theta'_i}$$

$$AB'' = \frac{d}{\cos \theta''_i}$$

$$B''C = B''B' \sin \theta_i = d \sin \theta_i (\tan \theta_i - \tan \theta'_i)$$

将上面关系代入(4-140)式, 得

$$\varphi = 2\pi d \left[\frac{1}{\cos \theta''_i} \left(\frac{1}{\lambda''} - \frac{\sin \theta_i \sin \theta''_i}{\lambda} \right) - \frac{1}{\cos \theta'_i} \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{\sin \theta_i \sin \theta'_i}{\lambda} \right) \right] \quad (4-141)$$

根据折射定律, 我们用 $\sin \theta''_i/\lambda''$ 和 $\sin \theta'_i/\lambda'$ 代替上式中的 $\sin \theta_i/\lambda$, 得到

$$\varphi = 2\pi d \left[\frac{\cos \theta''_i}{\lambda''} - \frac{\cos \theta'_i}{\lambda'} \right] = \frac{2\pi}{\lambda} d (n'' \cos \theta''_i - n' \cos \theta'_i) \quad (4-142)$$

因为 $|n'' - n'| \ll n''$ 、 n' ; $|\theta''_i - \theta'_i| \ll \theta''_i$ 、 θ'_i , 取一级近似有

$$\begin{aligned} n'' \cos \theta''_i - n' \cos \theta'_i &= d(n \cos \theta_i) \\ &= (n'' - n') \left(\cos \theta_i - n \sin \theta_i \frac{d\theta_i}{dn} \right) \end{aligned} \quad (4-143)$$

其中, n 是 n' 和 n'' 的平均值; θ_i 是 θ'_i 和 θ''_i 相应的平均值。在保持入射角 θ_i 不变的条件下, 对折射定律 $\sin \theta_i = n \sin \theta_i$ 微分, 并代入(4-143)式, 得

$$n'' \cos \theta''_i - n' \cos \theta'_i = \frac{1}{\cos \theta_i} (n'' - n')$$

于是, (4-142)式变为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{\cos \theta_i} (n'' - n') \quad (4-144)$$

将(4-144)式与(4-129)式进行比较可以看出, 斜入射时的相位差只需用晶片二中波法线的平均几何路程 $d/\cos \theta_i$ 代替正入射时的几何路程 d , 即可由(4-129)式得到。

3. 白光干涉

上面讨论的是单色平行光的干涉。如果光源是包含各种波长成分的白光, 则输出光应当是其中每种单色光干涉强度的非相干叠加。在此, 仅讨论正入射情况。

1) 两个偏振器偏振轴垂直的情况

对各种单色光分别应用(4-134)式, 然后将其相加

$$I_{\perp(\text{总})} = \sum_i I_{0i} \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi_i}{2} \quad (4-145)$$

显然, 由于不同波长的单色光通过晶片时, 相应的二振动方向互相垂直的线偏振光之间的相位差不同, 所以对出射总光强的贡献不同。可以看出, 凡是波长为

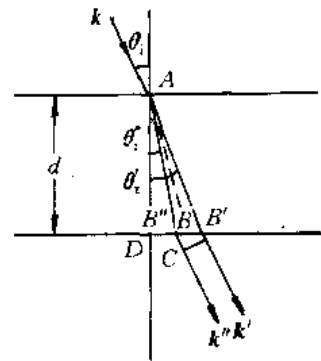


图 4-51 平行光斜入射情况

$$\lambda_1 = \left| \frac{n' - n''}{m} \right| d \quad m \text{ 为整数} \quad (4-146)$$

的单色光，干涉强度为零，即 $I_{\perp(\text{色})}$ 中不包含这种波长成分的单色光。凡是波长为

$$\lambda_2 = \left| \frac{2(n' - n'')}{m + 1} \right| d \quad m \text{ 为整数} \quad (4-147)$$

的单色光，干涉强度为极大。因此，对于白光入射，由于输出光 $I_{\perp(\text{色})}$ 中不含有某些波长成分，其透射光将不再是白光，而呈现出美丽的色彩。

2) 两个偏振器偏振轴平行的情况

同样分析，对于白光入射，其透射光强为

$$I_{\parallel(\text{色})} = \sum_i I_{0i} \left(1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\delta_i}{2} \right) \quad (4-148)$$

式中，第一项代表透射的白光光强；第二项与(4-145)式相同，但符号相反，因此，(4-148)式可简写为

$$I_{\parallel(\text{色})} = I_{0(\text{白})} - I_{\perp(\text{色})} \quad (4-149)$$

这表明，在 $I_{\perp(\text{色})}$ 中最强的色光，在 $I_{\parallel(\text{色})}$ 中恰被消掉；反之亦然，在 $I_{\perp(\text{色})}$ 中消失的色光，在 $I_{\parallel(\text{色})}$ 中恰恰最强。通常将(4-145)式和(4-148)式决定的色光称为互补色光，也就是说，若将这两种色光叠加在一起，即得到白光。

由于晶片中的振动方向与 P_1 的夹角 α 影响着干涉光强，所以对于图 4-49 所示的干涉装置，如果在起偏器和检偏器之间转动晶片，可以看到晶片在连续变幻着绚丽的颜色。或者，如果我们转动 P_2 ，使之与 P_1 由垂直转向平行，出射的色光突然变为与之互补的色光。这种现象称为“色偏振”，它是检验双折射性的最灵敏的方法。

4.5.2 会聚光的偏光干涉

上面讨论的是平行光的偏光干涉现象，实际上经常遇到的是会聚光(或发散光)的情况。当一束会聚光(或发散光)通过起偏器射到晶片上时，入射光线的方向就不是单一的了，不同的入射光线有不同的入射角，甚至还有不同的入射面。因此，会聚光(或发散光)的偏光干涉现象比较复杂。在此，仅讨论最基本的情况。

会聚光偏光干涉装置如图 4-52 所示， P_1 、 P_2 是起偏器和检偏器， S 是光源， K 是晶片， O_1 、 O_2 是聚光镜，观察屏放在 BB 面上。

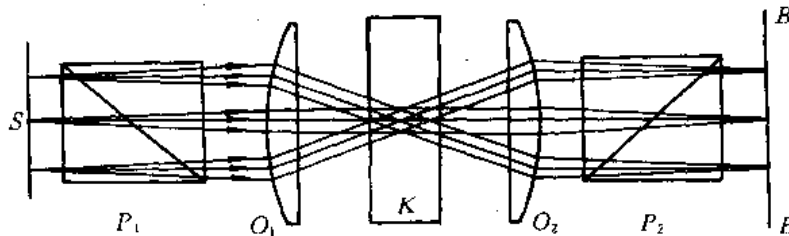


图 4-52 会聚光偏光干涉装置示意图

由图可见，会聚在观察屏上同一点的诸偏振光，均来自物平面上的同一点。由于物面 S 是 O_1 的焦平面，所以物面上的一点发出的诸光束，经 O_1 后必成为一束平行光通过晶片。



故观察屏上各点的光强可利用平行光斜入射的光强公式计算，即观察屏上的光强公式仍然采用(4-132)式表示，只是其中的相位差采用(4-144)式，具体可写成：

$$I = I_0 \left[\cos^2 \beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\pi d(n'' - n')}{\lambda \cos \theta_1} \right] \quad (4-150)$$

显然，会聚光的干涉光强分布(干涉条纹)，既决定于干涉装置中 P_1 、 P_2 的相对位置，又与晶片的双折射($n'' - n'$)特性有关。因为($n'' - n'$)与晶片中折射光相对光轴的方位有关，所以干涉条纹与晶体的光学性质及晶片的切割方式有关。

1. 通过晶片的两束透射光的相位差

对于斜入射晶片的光线，将在晶片内产生振动方向相互垂直的两束线偏振光，它们的折射率不同，因而在通过晶片后将产生一定的相位差。

1) 单轴晶体中的相位差

在单轴晶体中，当波法线方向 k 与光轴的夹角为 θ 时，相应的两个振动方向互相垂直的线偏振光的折射率 n' 和 n'' 满足如下关系：

$$\frac{1}{n'^2} = \frac{1}{n_o^2}$$

$$\frac{1}{n''^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$$

因而有

$$\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2} = \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) \sin^2 \theta \quad (4-151)$$

或

$$\frac{(n'' + n')(n'' - n')}{n'^2 n''^2} = \frac{(n_e + n_o)(n_e - n_o)}{n_o^2 n_e^2} \sin^2 \theta$$

由于这些折射率之间的差别与它们的值相比较是很小的，所以上式可近似地写成

$$n'' - n' = (n_e - n_o) \sin \theta \quad (4-152)$$

将(4-152)式代入(4-144)式，同时令 $\rho = d / \cos \theta_1$ ，有

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \rho (n_e - n_o) \sin^2 \theta \quad (4-153)$$

2) 双轴晶体中的相位差

在双轴晶体中，设折射光的波法线方向 k 与两个光轴的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 ，则根据(4-64)式有

$$\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2} = \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_3^2} \right) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (4-154)$$

近似有

$$n'' - n' = (n_3 - n_1) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (4-155)$$

代入(4-144)式，同时令 $\rho = d / \cos \theta_1$ ，有

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \rho (n_3 - n_1) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (4-156)$$

2. 等色面和等色线

如图 4-53 所示，假设入射至晶片的会聚光中所有光线都通过 A 点，则不同的入射光

线 SA 在晶片中的折射光有不同的波法线方向 AB (它为 AB' 和 AB'' 的折中), 并从晶片下表面不同的 B 点射出, 其相应的两支透射光与入射光 SA 平行, 会聚在透镜焦平面的 F 点上, F 点与 B 点一一对应。

当如图 4-52 所示, 在晶片和透镜焦平面间放置检偏器时, 各对透射光就会在各 F 点处发生干涉, 干涉条纹的形状由相应 $\varphi = \text{常数}$ 的 F 点的轨迹——等色线所确定。由上所述, 透镜焦平面上的等色线与晶片下表面上 $\varphi = \text{常数}$ 的各 B 点的轨迹一一对应, 形状基本相同。而 $\varphi = \text{常数}$ 的 B 点轨迹实际上是晶片中围绕 A 点的等相位差 φ 的曲面——等色面与出射表面的交线。因此, 如果知道了晶片中的等相位差 φ 曲面——等色面, 便可通过确定等色面与晶片出射表面的交线确定出干涉条纹的形状。

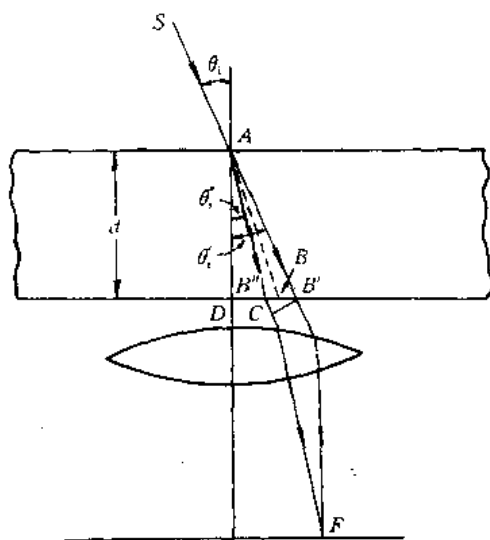


图 4-53 会聚光通过晶片示意图

回过头来考察(4-153)式和(4-156)式, 式中 θ (或 θ_1, θ_2) 表示晶体中两束折射光的传播方向, ρ 表示传播距离, 可以设想, 若 ρ 和 θ (或 θ_1, θ_2) 同时变化, 但只要

$$\rho \sin^2 \theta = \text{常数} (\text{单轴晶体}) \quad (4-157)$$

$$\rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \text{常数} (\text{双轴晶体}) \quad (4-158)$$

就保持 φ 不变。因此, 我们可以通过晶体中的某一点引一矢径, 该矢径的长短随其方向按(4-157)式或(4-158)式规律变化, 矢径末端在空间描出一个曲面, 这个面上的 φ 值处处相等, 它即是等相位差曲面或等色面。显然, 等色面不是只有一个, 而是对应不同 φ 值的一族。

单轴晶体的等色面方程为(4-157)式, 它是以光轴 (x_3 轴) 为旋转轴的回转曲面, 如图 4-54 所示。

双轴晶体的等色面方程为(4-158)式, 如图 4-55 所示。在该图中还画出了几个垂直于 x_3 轴的平面上的截线, 图中的 C_1 和 C_2 为双轴晶体的两个光轴方向。

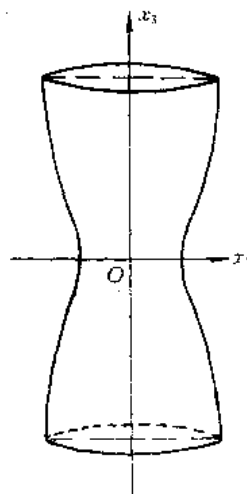


图 4-54 单轴晶体中的等色面

当知道了晶体中的等色面后, 即可大致确定出各种切割方式的晶片所产生的会聚光干涉条纹(等色线)的形状。例如, 如图 4-56 所示, 以晶片第一个表面上的 A 点为中心, 根据晶片切割方式确定的光轴(或主轴)方位, 画出相位差为 φ 的等色面, 则晶片的第二个表面与该等色面的截线即为相位差为 φ 的等色线(干涉条纹的形状)。

对于单轴晶体, 当晶体光轴与晶片表面垂直时, 等色线是同心圆形; 当光轴与晶片表面有一小的夹角时, 等色线是卵圆形; 当光轴与晶片表面平行时, 等色线是一对双曲线。

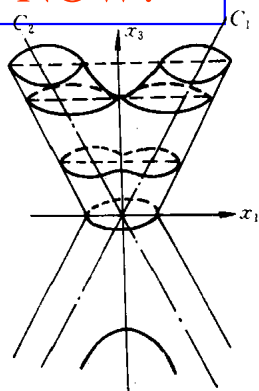


图 4-55 双轴晶体中的等色面

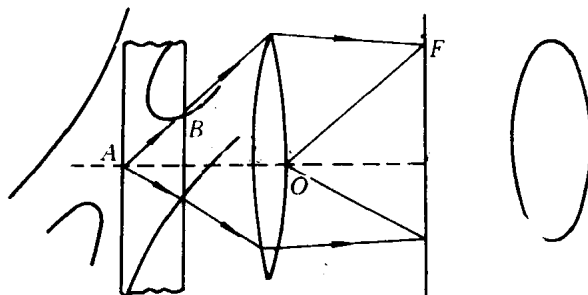


图 4-56 由等色面确定等色线的形状

3. 单轴晶体会聚光的干涉图

当晶片表面垂直于光轴、 P_1 垂直于 P_2 时，会聚光干涉图如图 4-57 所示。干涉条纹是同心圆环，中心为通过光轴的光线所到达的位置，并且有一个暗十字贯穿整个干涉图。对于 P_1 平行于 P_2 的情况，干涉图与正交时互补，此时有一个亮十字贯穿整个干涉图。当使用扩展光源时，该干涉图定域在透镜的焦平面上；当使用点光源时，条纹是非定域的。下面以 P_1 垂直于 P_2 的情况进行说明。

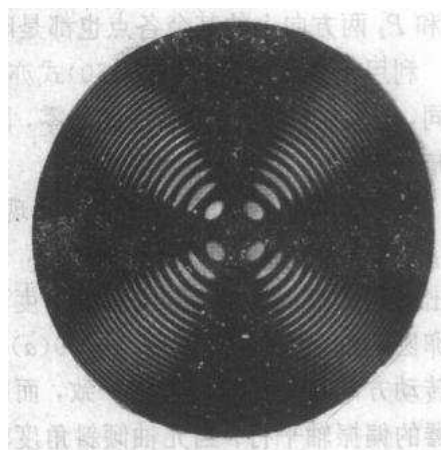


图 4-57 单轴晶体的会聚光干涉图

1) 同心圆环干涉条纹

由上述分析，当晶片表面垂直于光轴时，其等色线是同心圆，中心是通过光轴的光线所到达的位置(有时称为光轴露头)。

根据(4-153)式可以很容易理解干涉条纹为什么是以光轴为中心的同心圆。由于晶片垂直于晶体光轴切割，晶体光轴与晶片法线一致，在晶片中折射光波法线与光轴的夹角就是折射角，在这种情况下，相位差 φ 仅是折射角 θ 的函数。于是，沿着图 4-53 中的 A 为顶点、界面法线(即光轴)为轴的圆锥面入射的光，其相应的透射光在透镜焦平面上的同一圆环上会聚。由于圆环上各点所对应光的入射角(或折射角)是常数，所以相应的相位差相等，因而有相同的干涉光强，所以这个圆环就是一个干涉条纹。

由(4-153)式可知，干涉条纹的中心(光轴露头)处对应的 $\theta=0$ ，因而干涉级为零，从中心向外，干涉级逐渐增高。当使用白光时，干涉条纹是彩色，并且每级的色序是里蓝外红。

2) 暗十字的形成

由于 P_1 与 P_2 垂直情况下的暗十字，在 P_1 平行于 P_2 时变为亮十字(使用白光时，它是白色的)，所以常称这个暗十字为消色线。其十字中心恰为圆环中心，十字方向恰与起偏器的偏振轴方向平行和垂直。由此可以看出，消色线的起因是(4-132)式中的 α 所产生的效应。

首先，由于晶片表面的法线方向平行于光轴方向，所以会聚光中央的光线与光轴方向一致，因此进入晶体后不产生双折射，在正交偏振器的情况下，中心点始终是消光的，形成一个黑中心点。

对于与光轴有一定夹角的其它光线，进入晶体后均要产生双折射。由于 o 光振动方向垂直于主截面， e 光振动方向在主截面内，所以在垂直于光轴的截面(图4-58)上，干涉圆条纹上任一 G 点的光振动方向及相应的 o 光和 e 光振动方向如图所示。对于 E 点，只有 e 光分量，对于 D 点，只有 o 光分量。又因为 P_2 垂直于 P_1 ，所以 E 点和 D 点的光场不能通过 P_2 ，因此， D 和 E 两点在检偏器后都是暗的。同理可知，沿 P_1 和 P_2 两方向上的其余各点也都是暗的，这样就构成了暗十字线。

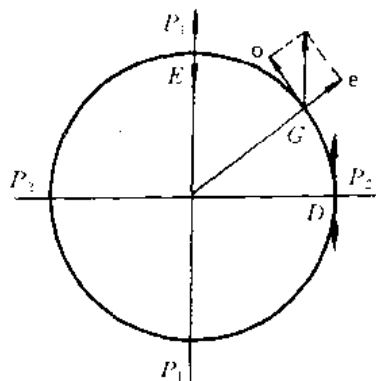


图4-58 干涉图暗十字线的成因

利用干涉强度公式(4-150)式亦可得出同样的结论：对于晶片上各点所对应的 α 角不相同，当 $\alpha=0$ 或 $\pi/2$ 时，强度为零，因此在 0 和 $\pi/2$ 方向(也即沿 P_1 、 P_2 两方向)上，构成了暗十字。

同理也可解释 P_1 、 P_2 平行时出现的亮十字。

当晶片的光轴与表面不垂直时，干涉图往往是不对称的。由于光轴是倾斜的，所以光轴出露点不在视场中心，当倾斜角度不大时，光轴出露点仍在视场之内，这时黑十字与干涉卵圆环都不是完整的(图4-59(a))。转动晶片时，光轴出露点绕视场中心作圆周运动，其转动方向与晶片旋转方向一致，而两十字臂也随之移动，但始终分别保持与起偏器和检偏器的偏振轴平行。当光轴倾斜角度较大时，光轴出露点就会落到视场之外，这时视场中只能看见一条黑臂及部分干涉卵圆环(图4-59(b))。如果光轴接近和晶片表面平行时，黑臂就变得宽大而模糊，转动晶片时，黑十字即分成双曲线迅速离开视场，这种干涉图称为闪图。根据干涉图的形状，可以初步判断光轴的大致方向。

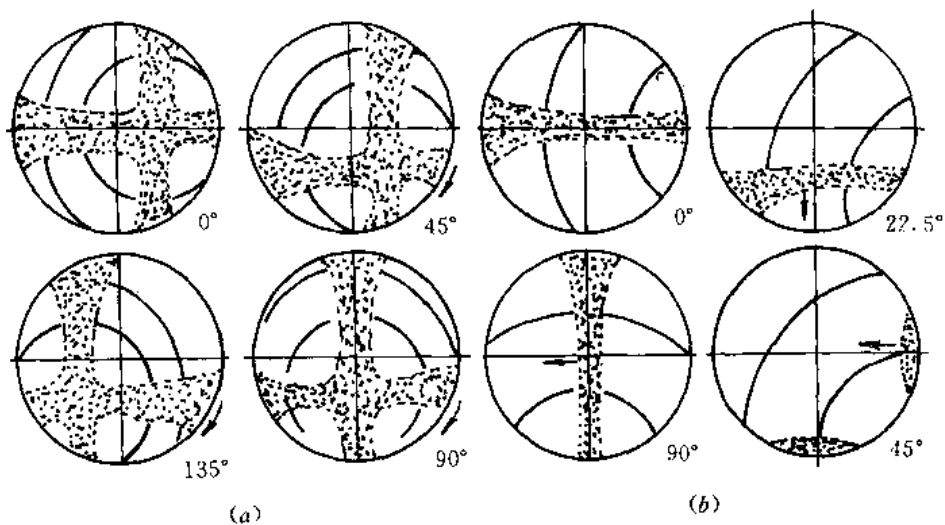


图4-59 斜交光轴晶片干涉图

4. 双轴晶体会聚光的干涉图

双轴晶体会聚光干涉图较单轴晶体复杂，其干涉条纹形状可由晶体等色面与晶片的第二个表面的截线确定。对于晶片表面垂直光轴锐角等分线的会聚光干涉示意图，如图 4-60 所示。

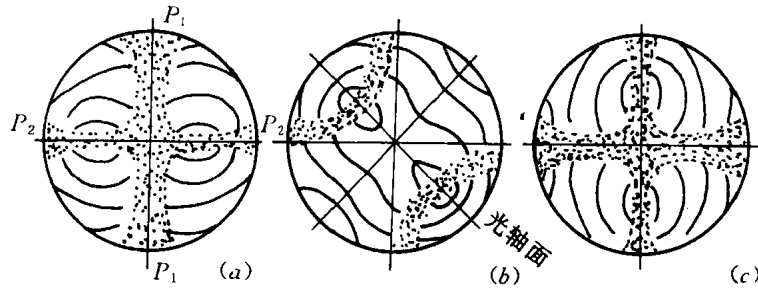


图 4-60 垂直锐角等分线的晶片会聚光干涉图

当光轴面与起偏器或检偏器之一的偏振轴平行时，干涉图由一黑十字及“∞”字形干涉条纹组成(图 4-60(a))，黑十字的两臂分别与 P_1 、 P_2 平行，两臂的粗细不等，沿光轴面方向的臂较细，两光轴出露点位置处最细，垂直光轴面方向的黑臂较宽，黑十字中心为锐角分角线的出露点，位于视场中心，卵圆形干涉条纹以两个光轴出露点为中心，在靠近光轴处为卵圆形，向外合并成“∞”字形，再向外侧则成凹形椭圆。

当转动晶片时，光轴面偏离 P_1 或 P_2 方向，黑十字从中心分裂，形成一组弯曲的黑带。当光轴面与 P_1 、 P_2 成 45° 时，两个弯曲黑带顶点间距最远(图 4-60(b))，二弯曲黑带顶点为两光轴出露点，它们之间距离与光轴角成正比。当继续转动晶片时，弯曲黑带顶点逐渐向视场中心移动，至 90° 时，又合成黑十字，但两臂的粗细位置已经更换，继续转动晶片，黑十字又分裂。在转动晶片时，卵形干涉条纹随光轴出露点移动，但形状不变。

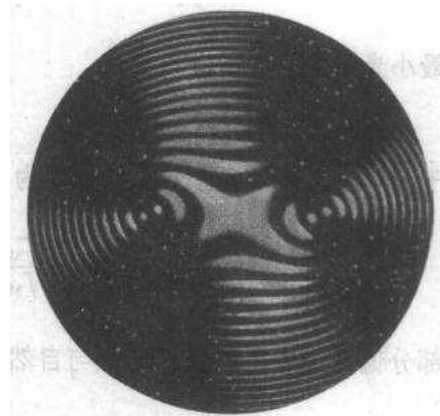


图 4-61 双轴晶体会聚光干涉图

图 4-61 是双轴晶体会聚光干涉图($P_1 \perp P_2$)的照片。

例 题

例 4-1 KDP 晶体的两个主折射率为 $n_o=1.512$ ， $n_e=1.470$ 。一束单色光在空气中以 60° 角入射到晶体表面，若晶体光轴与晶面平行，且垂直入射面，求晶体中双折射光线的夹角。

解：根据题意及光在晶体表面折射的性质，在晶体内折射的 o 光和 e 光波矢面与入射面截线为同心圆(如图 4-35 所示)。o 光和 e 光均服从折射定律

$$\sin \theta_i = n_o \sin \theta_{io}$$

$$\sin \theta_i = n_e \sin \theta_{ie}$$

因此有

$$\theta_{io} = \arcsin\left(\frac{\sin 60^\circ}{1.512}\right) = 34^\circ 56'$$

$$\theta_{ie} = \arcsin\left(\frac{\sin 60^\circ}{1.470}\right) = 36^\circ 6'$$

由于光在垂直于光轴的平面内传播，o光和e光的光线与波法线方向不分离，所以二折射光线夹角为

$$\Delta\theta = \theta_{ie} - \theta_{io} = 36^\circ 6' - 34^\circ 56' = 1^\circ 10'$$

例 4-2 通过偏振片观察部分偏振光时，当偏振片绕入射光方向旋转到某一位置上，透射光强为极大，然后再将偏振片旋转 30° ，发现透射光强为极大值的 $4/5$ 。试求该入射部分偏振光的偏振度 P 及该光内自然光与线偏振光强之比。

解：设 I_L 和 I_n 分别表示部分偏振光中的线偏振光强和自然光强。偏振片处于第一个位置时，透射光强为极大，应等于 $(I_L + I_n/2)$ 。根据题意，偏振片处于第二个位置时，透射光强为 $I_L \cos^2 30^\circ + I_n/2 = 4(I_L + I_n/2)/5$ 。因此

$$I_L = 2I_n$$

所以最大光强为

$$I_M = I_L + \frac{1}{2}I_n = \frac{5}{4}I_L$$

最小光强为

$$I_m = \frac{1}{2}I_n = \frac{1}{4}I_L$$

于是，入射部分偏振光的偏振度为

$$P = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \frac{\frac{5}{4}I_L - \frac{1}{4}I_L}{\frac{5}{4}I_L + \frac{1}{4}I_L} = \frac{2}{3}$$

部分偏振光中的线偏振光强与自然光强之比为

$$\frac{I_L}{I_n} = 2$$

例 4-3 用 KDP 晶体制成顶角为 60° 的棱镜，光轴平行于折射棱（如图 4-62 所示）。KDP 晶体对于 $\lambda = 0.546 \mu\text{m}$ 光的主折射率为 $n_o = 1.512$ ， $n_e = 1.470$ 。若入射光以最小偏向角的方向在棱镜内折射，用焦距为 0.1 m 的透镜对出射的 o 光、e 光聚焦，在潜面上形成的潜线间距为多少？

解：由于棱镜的光轴平行于折射棱，亦即光轴垂直于入射面，因此晶体内的 o 光、e 光满足通常的折射定律。根据第 7 章给出的最小偏向角公式 (7-62) 式，

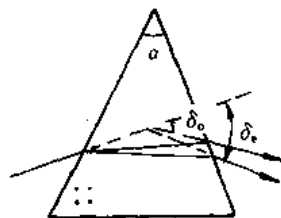


图 4-62 例 4-3 用图



$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta_m)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

对于 o 光, 有

$$n_o = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta_{mo})}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 1.512$$

对于 e 光, 有

$$n_e = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta_{me})}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 1.470$$

将 $\alpha = 60^\circ$ 代入上二式, 解得 o 光和 e 光的偏向角为

$$\delta_{mo} = 38.2^\circ$$

$$\delta_{me} = 34.6^\circ$$

因此,

$$\Delta\delta = \delta_{mo} - \delta_{me} = 38.2^\circ - 34.6^\circ = 3.6^\circ = 0.0628 \text{ rad}$$

又因透镜焦距 $f = 100 \text{ mm}$, 所以谱面上 o、e 光两谱线间距为

$$\Delta l = f\Delta\delta = 100 \times 0.0628 = 6.28 \text{ mm}$$

例 4-4 一束波长为 $\lambda_2 = 0.7065 \mu\text{m}$ 的左旋正椭圆偏振光入射到相应于 $\lambda_1 = 0.4046 \mu\text{m}$ 的方解石 1/4 波片上, 试求出射光束的偏振态。已知方解石对 λ_1 光的主折射率为 $n_o = 1.6813$, $n_e = 1.4969$; 对 λ_2 光的主折射率为 $n'_o = 1.6521$, $n'_e = 1.4836$ 。

解: 由题意, 给定波片对于 $\lambda_1 = 0.4046 \mu\text{m}$ 光为 1/4 波片, 波长为 λ_1 的单色光通过该波片时, 二正交偏振光分量的相位差为

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}(n_o - n_e)d = \frac{\pi}{2}$$

该波片的厚度为

$$d = \frac{\lambda_1}{4(n_o - n_e)} = \frac{\varphi_1 \lambda_1}{2\pi(n_o - n_e)}$$

波长为 $\lambda_2 = 0.7065 \mu\text{m}$ 的单色光通过这个波片时, 所产生的相位差为

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}(n'_o - n'_e)d = \frac{2\pi}{\lambda_2}(n'_o - n'_e) \frac{\lambda_1}{4(n_o - n_e)} = 0.26\pi \approx \frac{\pi}{4}$$

因此, 对于 $\lambda_2 = 0.7065 \mu\text{m}$ 的单色光, 该波片为 1/8 波片。

由于入射光为左旋正椭圆偏振光, 相应的二正交振动分量相位差 $\varphi_0 = -\pi/2$, 通过波片后, 该二分量又产生了附加相位差 $\varphi_2 = \pi/4$, 所以出射二光的总相位差为

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$$

因此, 出射光是左旋椭圆偏振光, 其主轴之一位于 I、III 象限内。

例 4-5 厚为 0.025 mm 的方解石晶片, 其表面平行于光轴, 置于正交偏振器之间, 晶片的主截面与它们成 45° , 试问:



(1) 在可见光范围内, 哪些波长的光不能通过。

(2) 若转动第二个偏振器, 使其透振方向与第一个偏振器相平行, 哪些波长的光不能通过。

解: 这是一个由偏光干涉引起的显色问题。因为 $(n_o - n_e)$ 随波长的变化很小, 可以不考虑其色散影响。

(1) 正交偏振器情况:

对于偏光干涉装置, 在晶片表面上的 o 光和 e 光分量相位相同, 它们通过晶片和检偏器后, 在检偏器透振方向上分量的相位差取决于两个因素:

① o 光和 e 光通过晶片后产生的相位差:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$$

② 入射偏振光经两次分解投影后产生的附加相位差 ϕ 。由图 4-50 可见, 当晶片光轴在两偏振器透振方向 P_1 、 P_2 的外侧, 经两次投影后, 在检偏器透振方向上二分量的振动方向相同, 即 $\phi = 0$; 当晶片光轴在 P_1 、 P_2 之间, $\phi = \pi$ 。

于是, 在正交偏振器情况下, 在检偏器透振方向上的二分振动相位差为

$$\varphi' = \varphi + \phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + \pi$$

当 $\varphi' = (2m+1)\pi$ ($m=0, 1, 2, \dots$) 时, 二分振动干涉相消, 又因晶片主截面与透振方向成 45° , 所以无光通过检偏器。由此得到

$$\lambda_m = \frac{(n_o - n_e)d}{m}$$

对于方解石晶体, (在钠黄光时的) 主折射率 $n_o = 1.6548$, $n_e = 1.4864$, 相应该晶片的 o、e 光的光程差为

$$(n_o - n_e)d = 4.2988 \mu\text{m}$$

由此得到满足上述条件的可见光波长为

$$\lambda_{11} = 0.3908 \mu\text{m}, \quad \lambda_{10} = 0.4299 \mu\text{m}, \quad \lambda_9 = 0.4776 \mu\text{m}$$

$$\lambda_8 = 0.5373 \mu\text{m}, \quad \lambda_7 = 0.6141 \mu\text{m}, \quad \lambda_6 = 0.7165 \mu\text{m}$$

(2) 平行偏振器情况:

此时, 在检偏器透振方向上的二分振动相位差为

$$\varphi' = \varphi$$

要使此二分振动满足干涉相消, 则

$$\varphi' = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = (2m+1)\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

即

$$\lambda_m = \frac{(n_o - n_e)d}{\left(m + \frac{1}{2}\right)} = \frac{4.2988 \mu\text{m}}{m + \frac{1}{2}}$$

在可见光范围内, 下列波长的光不能通过:

$$\lambda_{10} = 0.4094 \mu\text{m}, \quad \lambda_9 = 0.4525 \mu\text{m}, \quad \lambda_8 = 0.5057 \mu\text{m}$$

$$\lambda_7 = 0.5732 \mu\text{m}, \quad \lambda_6 = 0.6613 \mu\text{m}, \quad \lambda_5 = 0.7816 \mu\text{m}$$

(习) (题)

- 4-1 在各向异性介质中,沿同一波法线方向传播的光波有几种偏振态?它们的 D 、 E 、 k 、 s 矢量间有什么关系?
- 4-2 在各向异性介质中,沿同一光线方向传播的光波有几种偏振态?它们的 D 、 E 、 k 、 s 矢量间有什么关系?
- 4-3 设 d 为 D 矢量方向的单位矢量,试求 d 的分量表示式,即求出与给定波法线方向 k 相应的 D 的方向。
- 4-4 设 e 为 E 矢量方向的单位矢量,试求 e 的分量表示式,即求出与给定波法线方向 k 相应的 E 的方向。
- 4-5 一束钠黄光以 50° 角方向入射到方解石晶体上,设光轴与晶体表面平行,并垂直于入射面。问在晶体中 o 光和 e 光夹角为多少(对于钠黄光,方解石的主折射率 $n_o = 1.6584$, $n_e = 1.4864$)。
- 4-6 设有主折射率 $n_o = 1.5246$, $n_e = 1.4792$ 的晶体,光轴方向与通光面法线成 45° ,如图 4-63 所示。现有一自然光垂直入射晶体,求在晶体中传播的 o 、 e 光光线方向,二光夹角 α 以及它们从晶体后表面出射时的相位差。($\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, 晶体厚度 $d = 2 \text{ cm}$ 。)

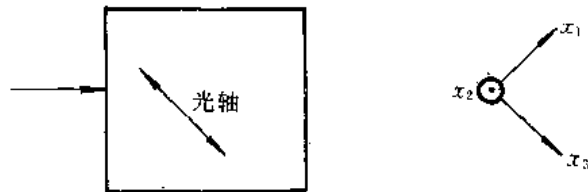


图 4-63 题 4-6 用图

- 4-7 一细光束掠入射单轴晶体,晶体的光轴与入射面垂直,晶体的另一面与折射表面平行。实验测得 o 、 e 光在第二个面上分开的距离是 $2.5 \mu\text{m}$,若 $n_o = 1.525$, $n_e = 1.479$,计算晶体的厚度。

- 4-8 一单轴晶体的光轴与界面垂直,试说明折射光线在入射面内,并证明

$$\tan \theta_e = \frac{n_o \sin \theta_i}{n_e \sqrt{n_e^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

其中, θ_i 是入射角; θ_e 是 e 折射光线与界面法线的夹角。

- 4-9 为使单轴晶体中的 o 、 e 折射光线的分离角度最大,在正入射的情况下,晶体应如何切割?

- 4-10 两块方解石晶体平行薄板,按相同方式切割(图中斜线代表光轴),并平行放置,一细单色自然光束垂直入射,通过两块晶体后射至一屏幕上,设晶体的厚度足以使双折射的两束光分开,试分别说明当晶体板 2 在:① 如图 4-64 所示;② 绕入射光方向转过 π 角;③ 转过 $\pi/2$ 角;④ 转过 $\pi/4$ 角的几种情况下,屏幕上光点的数目和位置。

- 4-11 一块负单轴晶体按图 4-65 方式切割。一束单色自然光从左方通光面正入射,经两个 45° 斜面全内反射后从右方通光面射出。设晶体主折射率为 n_o 、 n_e ,试计算 o 、 e 光线经第一个 45° 反射面反射后与光轴的夹角。画出光路并标上振动方向。

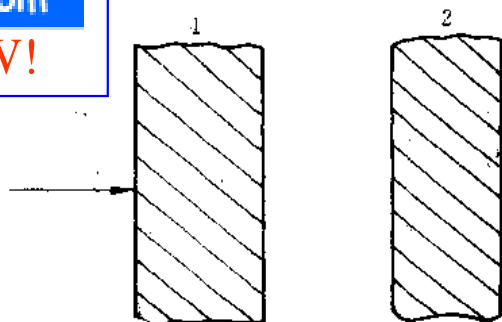


图 4-64 题 4-10 用图

4-12 如图 4-66, 渥拉斯顿棱镜的顶角 $\alpha=15^\circ$ 时, 两出射光的夹角 γ 为多少?

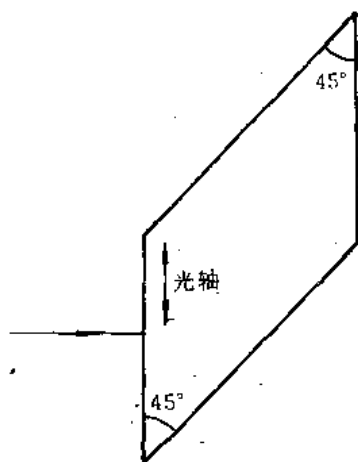


图 4-65 题 4-11 用图

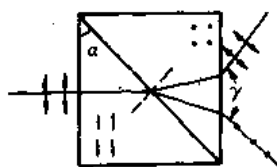


图 4-66 题 4-12 用图

4-13 若将一线偏振光入射到以光束为轴、以角速度 ω_0 转动的半波片上, 出射光的偏振态如何? 其光矢量如何变化?

4-14 设正入射的线偏振光振动方向与半波片的快、慢轴成 45° 角, 分别画出在半波片中距离入射表面为: ① 0; ② $d/4$; ③ $d/2$; ④ $3d/4$; ⑤ d 的各点处两偏振光叠加后的振动形式。按迎着光射来的方向观察画出。

4-15 用一石英薄片产生一束椭圆偏振光, 要使椭圆的长轴或短轴在光轴方向, 长短轴之比为 2:1, 而且是左旋的。问石英片应多厚? 如何放置? ($\lambda=0.5893 \mu\text{m}$, $n_o=1.5442$, $n_e=1.5533$ 。)

4-16 两块偏振片透振方向夹角为 60° , 中央插入一块 $1/4$ 波片, 波片主截面平分上述夹角。今有一光强为 I_0 的自然光入射, 求通过第二个偏振片后的光强。

4-17 一块厚度为 0.04 mm 的方解石晶片, 其光轴平行于表面, 将它插入正交偏振片之间, 且使主截面与第一个偏振片的透振方向成 θ ($\theta \neq 0^\circ, 90^\circ$) 角。试问哪些光不能透过该装置。

4-18 在两个偏振面正交放置的偏振器之间, 平行放一厚 0.913 mm 的石膏片。当 $\lambda_1=0.583 \mu\text{m}$ 时, 视场全暗, 然后改变光的波长, 当 $\lambda_2=0.554 \mu\text{m}$ 时, 视场又一次全暗。假设沿快、慢轴方向的折射率差在这个波段范围内与波长无关, 试求这个折射率差。



第 5 章 晶体的感应双折射

上一章讨论了光在各向异性介质(晶体)中的传播规律,以及光通过晶体时产生的双折射现象。这种双折射现象是由于晶体结构自身的各向异性决定的,通常称其为自然双折射或固有双折射。不难想象,当晶体受到应力、电场、磁场等外界作用,其结构发生变化时,将会使光在其中的传播规律发生变化,即当光通过这种有外加电场、超声场或磁场的晶体时,将产生与外场作用有关的双折射现象。通常,将这种外场作用引起介质光学性质的变化,叫作感应双折射或感应各向异性。由于这种感应双折射可以根据人们的意志加以控制,所以在光电子技术中获得了广泛的应用。

这一章将讨论光在电场、超声场和磁场作用下的晶体中的传播规律。

5.1 电光效应

当加到介质上的电场较大,足以将原子内场($\approx 3 \times 10^8$ V/cm)扰乱到有效程度,就可以使本来是各向同性的介质产生双折射,本来是光学各向异性的晶体其双折射特性发生变化。这种因外加电场使介质光学性质发生变化的效应,叫电光效应。

5.1.1 电光效应的描述

由前面的讨论已知,光在晶体中的传播规律遵从光的电磁理论,利用折射率椭球可以完整而方便地描述出表征晶体光学特性的折射率在空间各个方向的取值分布。显然,外加电场对晶体光学特性的影响,必然会通过折射率椭球的变化反映出来。因此,可以通过晶体折射率椭球的大小、形状和取向的变化,来研究外电场对晶体光学特性的影响。

由空间解析几何理论,描述晶体光学各向异性的折射率椭球在直角坐标系($O-x_1x_2x_3$)中的一般形式为

$$\frac{x_i x_j}{n_{ij}^2} = 1 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5-1)$$

若令

$$\frac{1}{n_{ij}^2} = B_{ij} \quad (5-2)$$

则折射率椭球的表示式为

$$B_{ij} x_i x_j = 1 \quad (5-3)$$



如果将没有外加电场的晶体折射率椭球记为

$$B_{ij}^0 x_i x_j = 1 \quad (5-4)$$

外加电场后, 晶体的感应折射率椭球记为

$$B_{ij} x_i x_j = 1$$

则折射率椭球的变化可以很方便地用系数的变化 ΔB_{ij} 描述, 上式可写成

$$(B_{ij}^0 + \Delta B_{ij}) x_i x_j = 1 \quad (5-5)$$

在这里, 仅考虑 ΔB_{ij} 是由外加电场引起的, 它应与外加电场有关系。一般情况下, ΔB_{ij} 可以表示成

$$\Delta B_{ij} = \gamma_{ijk} E_k + h_{ijpq} E_p E_q + \dots \quad i, j, k, p, q = 1, 2, 3 \quad (5-6)$$

上式中, 等号右边第一项描述了 ΔB_{ij} 与 E_k 的线性关系, $[\gamma_{ijk}]$ 是三阶张量, 称为线性电光系数, 由这一项所描述的电光效应叫做线性电光效应, 或普克尔 (Pockels) 效应; 等号右边第二项描述了 ΔB_{ij} 与外加电场的二次关系, $[h_{ijpq}]$ 是四阶张量, 称为二次非线性电光系数, 由这一项所描述的电光效应叫作二次电光效应, 或克尔 (Kerr) 效应。在实际应用中, 由于大量采用的是线性电光效应, 因此, 我们将重点讨论线性电光效应。

5.1.2 晶体的线性电光效应

1. 线性电光系数

如上所述, 在主轴坐标系中, 无外加电场晶体的折射率椭球为

$$B_1^0 x_1^2 + B_2^0 x_2^2 + B_3^0 x_3^2 = 1 \quad (5-7)$$

外加电场后, 由于线性电光效应, 折射率椭球发生了变化, 它应表示为一般折射率椭球的形式

$$\begin{aligned} B_{11} x_1^2 + B_{12} x_1 x_2 + B_{13} x_1 x_3 + B_{21} x_2 x_1 + B_{22} x_2^2 \\ + B_{23} x_2 x_3 + B_{31} x_3 x_1 + B_{32} x_3 x_2 + B_{33} x_3^2 = 1 \end{aligned} \quad (5-8)$$

根据前面的讨论, 折射率椭球的系数 $[B_{ij}]$ 实际上是晶体的相对介电常数 $[\epsilon_{ij}]$ 的逆张量, 故 $[B_{ij}]$ 也是二阶对称张量, 有 $B_{ij} = B_{ji}$ 。因而 $[B_{ij}]$ 只有六个独立分量, (5-8) 式可简化为

$$B_{11} x_1^2 + B_{22} x_2^2 + B_{33} x_3^2 + 2B_{23} x_2 x_3 + 2B_{31} x_3 x_1 + 2B_{12} x_1 x_2 = 1 \quad (5-9)$$

将(5-9)式与(5-7)式进行比较可见, 外加电场后, 晶体折射率椭球系数 $[B_{ij}]$ 的变化为

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_{11} &= B_{11} - B_1^0 \\ \Delta B_{22} &= B_{22} - B_2^0 \\ \Delta B_{33} &= B_{33} - B_3^0 \\ \Delta B_{23} &= B_{23} \\ \Delta B_{31} &= B_{31} \\ \Delta B_{12} &= B_{12} \end{aligned} \right\} \quad (5-10)$$

考虑到 $[B_{ij}]$ 是二阶对称张量, 将下标 i 和 j 交换其值不变, 所以可将它的二重下标简化成单个下标, 其对应关系为

$$\begin{array}{cccccc} B_{11} & B_{22} & B_{33} & B_{23} & B_{31} & B_{12} \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \quad (5-11)$$

相应的 $[\Delta B_{ij}]$ 也可简化为有六个分量的矩阵

$$\begin{bmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta B_{11} \\ \Delta B_{22} \\ \Delta B_{33} \\ \Delta B_{23} \\ \Delta B_{31} \\ \Delta B_{12} \end{bmatrix}$$

对于线性电光系数 $[\gamma_{ijk}]$ ，因其前面两个下标 i, j 互换时，对 $[\Delta B_{ij}]$ 没有影响，所以也可将这两个下标简化为单个下标。经过这些简化后，只计线性电光效应的(5-6)式，可以写成如下形式：

$$\Delta B_i = \gamma_{ij} E_j \quad i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3 \quad (5-12)$$

相应的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} \\ \gamma_{61} & \gamma_{62} & \gamma_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (5-13)$$

式中的 $(6 \times 3)\gamma$ 矩阵就是线性电光系数矩阵，它描述了外加电场对晶体光学特性的线性效应。

由非线性光学理论可知，线性电光效应只存在于自然界中无对称中心的 20 类压电晶体中。一般情况下，电光系数矩阵有 18 个独立元素，但是由于晶体结构对称性的限制，其独立元素数目将减少。这些晶体的电光系数矩阵的具体形式，可以查阅有关手册和文献。

2. 几种晶体的线性电光效应

1) KDP 型晶体的线性电光效应

KDP(KH_2PO_4 ，磷酸二氢钾)晶体是水溶液培养的一种人工晶体，由于它很容易生长成大块均匀晶体，在 $0.2 \sim 1.5 \mu\text{m}$ 波长范围内透明度很高，且抗激光破坏阈值很高，所以在光电子技术中有广泛的应用。它的主要缺点是易潮解。

KDP 晶体是单轴晶体，属四方晶系。属于这一类型的晶体还有 ADP(磷酸二氢氨)、 KD^*P (磷酸二氘钾)等，它们同为 $\bar{4}2m$ 晶体点群，其外形如图 5-1 所示，光轴方向为 x_3 轴方向。

(1) KDP 型晶体的感应折射率椭球 KDP 型晶体无外加电场时，折射率椭球为旋转椭球，在主轴坐标系(折射率椭球主轴与晶轴重合)中，折射率椭球方程为

$$B_1^0(x_1^2 + x_2^2) + B_3^0 x_3^2 = 1 \quad (5-14)$$

式中， $B_1^0 = 1/n_1^2 = 1/n_2^2 = B_2^0$ ； $B_3^0 = 1/n_3^2 = 1/n_c^2$ ； n_o, n_c 分别

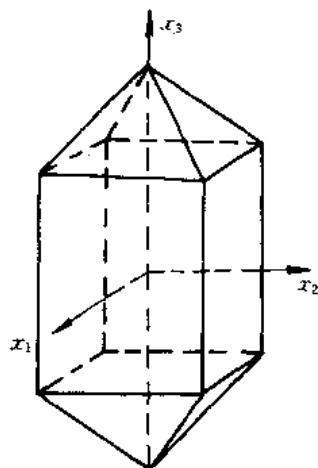


图 5-1 KDP 型晶体外型图



为单轴晶体的寻常光和非常光的主折射率。

当晶体外加电场时，折射率椭球发生形变。通过查阅手册，可以得到 KDP ($\bar{4}2m$ 晶类) 型晶体的线性电光系数矩阵，由 (5-13) 式，其 $[\Delta B_i]$ 为

$$\begin{bmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{41} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

因此

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_1 &= 0 \\ \Delta B_2 &= 0 \\ \Delta B_3 &= 0 \\ \Delta B_4 &= \gamma_{41} E_1 \\ \Delta B_5 &= \gamma_{41} E_2 \\ \Delta B_6 &= \gamma_{63} E_3 \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

再由 (5-10) 式、(5-9) 式可得 KDP 型晶体的感应折射率椭球表示式：

$$B_1^0 x_1^2 + B_2^0 x_2^2 + B_3^0 x_3^2 + 2\gamma_{41}(E_1 x_2 x_3 + E_2 x_3 x_1) + 2\gamma_{63} E_3 x_1 x_2 = 1 \quad (5-17)$$

将 (5-17) 式与 (5-14) 式比较可见，KDP 型晶体外加电场后，感应折射率椭球方程中出现了交叉项，这说明感应折射率椭球的三个主轴不再与晶轴重合，三个主折射率也随之变化。同时，由 (5-17) 式还可以看出，垂直于光轴方向的电场分量所产生的电光效应只与 γ_{41} 有关，平行于光轴方向的电场分量所产生的电光效应只与 γ_{63} 有关。显然，为了充分地运用晶体的电光效应，外加电场并非沿任意方向加到晶体上，通常不是取垂直于光轴方向，就是取平行于光轴方向。考虑到 KDP 型晶体电光效应的实际应用情况，下面仅讨论电场平行于光轴的工作方式。

(2) 外加电场平行于光轴的电光效应 相应于这种工作方式的晶片是从 KDP 型晶体上垂直于光轴方向 (x_3 轴) 切割下来的，通常称为 x_3 -切割晶片。在未加电场时，光沿着 x_3 方向传播不发生双折射。当平行于 x_3 方向加电场时，感应折射率椭球的表示式为

$$B_1^0(x_1^2 + x_2^2) + B_3^0 x_3^2 + 2\gamma_{63} E_3 x_1 x_2 = 1 \quad (5-18)$$

或

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} + 2\gamma_{63} E_3 x_1 x_2 = 1 \quad (5-19)$$

为了讨论晶体的电光效应，首先应确定感应折射率椭球的形状，也就是找出感应折射率椭球的三个主轴方向及相应的长度。为此，我们进一步考察感应折射率椭球的方程式。由 (5-19) 式可以看出，这个方程的 x_3^2 项相对无外加电场时的折射率椭球没有变化，说明感应折射率椭球的一个主轴与原折射率椭球的 x_3 轴重合，另外两个主轴方向可绕 x_3 轴旋转得到。

假设感应折射率椭球的新主轴方向为 x'_1 、 x'_2 、 x'_3 ，则由 x'_1 、 x'_2 、 x'_3 构成的坐标系可由原

坐标系 $(O-x_1x_2x_3)$ 绕 x_3 轴旋转 α 角得到, 相应的坐标变换关系为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha \\ x_2 &= x'_1 \sin \alpha + x'_2 \cos \alpha \\ x_3 &= x'_3 \end{aligned} \right\} \quad (5-20)$$

将上式代入(5-19)式, 经过整理可得:

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + 2\gamma_{63}E_3 \sin \alpha \cos \alpha \right) x_1'^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} - 2\gamma_{63}E_3 \sin \alpha \cos \alpha \right) x_2'^2 + \frac{1}{n_e^2} x_3'^2 + 2\gamma_{63}E_3(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)x_1'x_2' = 1 \quad (5-21)$$

由于 x'_1, x'_2, x'_3 为感应折射率椭球的三个主轴方向, 所以上式中的交叉项为零, 即应有

$$2\gamma_{63}E_3(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)x_1'x_2' = 0$$

因为 γ_{63}, E_3 不为零, 只能是

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$$

所以

$$\alpha = \pm 45^\circ$$

故 x_3 -切割晶片沿光轴方向外加电场后, 感应折射率椭球的三个主轴方向为原折射率椭球的三个主轴绕 x_3 轴旋转 45° 得到, 该转角与外加电场的大小无关, 但转动方向与电场方向有关。若取 $\alpha=45^\circ$, 折射率椭球方程为

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + \gamma_{63}E_3 \right) x_1'^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} - \gamma_{63}E_3 \right) x_2'^2 + \frac{1}{n_e^2} x_3'^2 = 1 \quad (5-22)$$

或写成

$$(B_1^0 + \gamma_{63}E_3)x_1'^2 + (B_1^0 - \gamma_{63}E_3)x_2'^2 + B_3^0x_3'^2 = 1 \quad (5-23)$$

或

$$B_1x_1'^2 + B_2x_2'^2 + B_3x_3'^2 = 1 \quad (5-24)$$

该方程是双轴晶体折射率椭球的方程式。这说明, KDP 型晶体的 x_3 -切割晶片在外加电场 E_3 后, 由原来的单轴晶体变成了双轴晶体。其折射率椭球与 x_1Ox_2 面的交线由原来的 $r=n_o$ 的圆, 变成现在的主轴在 45° 方向上的椭圆, 如图 5-2 所示。

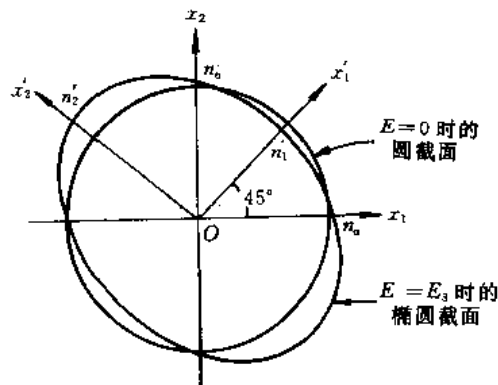


图 5-2 折射率椭球与 x_1Ox_2 面的交线



现在进一步确定感应折射率椭球的三个主折射率。

首先, 将(5-22)式变换为

$$\frac{1}{n_o^2}(1 + n_o^2\gamma_{63}E_3)x_1'^2 + \frac{1}{n_o^2}(1 - n_o^2\gamma_{63}E_3)x_2'^2 + \frac{1}{n_e^2}x_3'^2 = 1$$

因为 γ_{63} 的数量级是 10^{-10} cm/V, E_3 的数量级是 10^4 V/cm, 所以 $\gamma_{63}E_3 \ll 1$, 故可利用幂级数展开, 并只取前两项的关系, 将上式变换成

$$\frac{x_1'^2}{n_o^2\left(1 - \frac{1}{2}n_o^2\gamma_{63}E_3\right)^2} + \frac{x_2'^2}{n_o^2\left(1 + \frac{1}{2}n_o^2\gamma_{63}E_3\right)^2} + \frac{x_3'^2}{n_e^2} = 1 \quad (5-25)$$

由此得到感应折射率椭球的三个主折射率为

$$\left. \begin{aligned} n_1' &= n_o - \frac{1}{2}n_o^3\gamma_{63}E_3 \\ n_2' &= n_o + \frac{1}{2}n_o^3\gamma_{63}E_3 \\ n_3' &= n_e \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

以上讨论了 x_3 -切割晶片在外加电场 E_3 后, 光学特性(折射率)的变化情况。下面, 具体讨论两种通光方向上光传播的双折射特性。

① 光沿 x_3' 方向传播。在外加电场平行于 x_3 轴(光轴), 而光也沿 $x_3(x_3')$ 轴方向传播时, 由 γ_{63} 贡献的电光效应, 叫 γ_{63} 的纵向运用。

由第 4 章的讨论知道, 在这种情况下, 相应的两个特许偏振分量的振动方向分别平行于感应折射率椭球的两个主轴方向(x_1' 和 x_2'), 它们的折射率由(5-26)式中的 n_1' 和 n_2' 给出, 这两个偏振光在晶体中以不同的折射率(不同的速度)沿 x_3' 轴传播, 当它们通过长度为 d 的晶体后, 其间相位差由折射率差

$$\Delta n_3' = n_2' - n_1' = n_o^3\gamma_{63}E \quad (5-27)$$

决定, 为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_2' - n_1')d = \frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma_{63}Ed \quad (5-28)$$

式中, Ed 恰为晶片上的外加电压 U , 故上式可表示为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma_{63}U \quad (5-29)$$

通常把这种由外加电压引起的二偏振分量间的相位差叫做“电光延迟”。

由上式可见, γ_{63} 纵向运用所引起的电光延迟正比于外加电压, 与晶片厚度 d 无关。当电光延迟 $\varphi = \pi$ 时, 相应于两个偏振光分量的光程差为半个波长, 相应的外加电压叫半波电压, 以 U_π 或 $U_{\lambda/2}$ 表示。由(5-29)式可以求得半波电压为

$$U_{\lambda/2} = \frac{\lambda}{2n_o^3\gamma_{63}} \quad (5-30)$$

它只与材料特性和波长有关, 在实际应用中, 它是表征晶体电光效应特性的一个很重要的物理参量。例如, 在 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ 的情况下, KDP 晶体的 $n_o = 1.512$, $\gamma_{63} = 10.6 \times 10^{-10}$ cm/V, $U_{\lambda/2} = 7.45$ kV; KD*P 晶体的 $n_o = 1.508$, $\gamma_{63} = 20.8 \times 10^{-10}$ cm/V, $U_{\lambda/2} = 3.8$ kV。

② 光沿 x_2' (或 x_1') 方向传播。当外加电压平行于 x_3' 轴方向, 光沿 x_2' (或 x_1') 轴方向传播时, γ_{63} 贡献的电光效应叫 γ_{63} 的横向运用。这种工作方式通常对晶体采取 $45^\circ - x_3$ 切割, 即

如图 5-3 所示,晶片的长和宽与 x_1 、 x_2 轴成 45° 方向。光沿晶体的 $[110]$ 方向传播,晶体在电场方向上的厚度为 d ,在传播方向上的长度为 l 。

如前所述,当沿 x_3 方向外加电压时,晶体的感应折射率椭球的主轴方向系由原折射率椭球主轴绕 x_3 轴旋转 45° 得到,因此,光沿感应折射率椭球的主轴方向 x'_2 传播时,相应的两个特许线偏振光的折射率为 n'_1 和 n'_3 ,该二光由晶片射出时的相位差(“电光延迟”)为

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda}(n'_1 - n'_3)l \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda}l \left[(n_o - n_e) - \frac{1}{2}n_o^3\gamma_{63}E_3 \right] \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)l - \frac{\pi}{\lambda} \frac{l}{d} n_o^3 \gamma_{63} U
 \end{aligned} \tag{5-31}$$

上式中,等号右边第一项表示由自然双折射造成的相位差;第二项表示由线性电光效应引起的相位差。

与 γ_{63} 纵向运用相比, γ_{63} 横向运用有两个特点: i) 电光延迟与晶体的长厚比 l/d 有关,因此可以通过控制晶体的长厚比来降低半波电压,这是它的一个优点; ii) 横向运用中存在着自然双折射作用。由于自然双折射(晶体的主折射率 n_o 、 n_e)受温度的影响严重,所以对相位差的稳定性影响很大。实验表明, KDP 晶体的 $\Delta(n_o - n_e)/\Delta T \sim 1.1 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$,对于 $0.6328 \mu\text{m}$ 的激光通过 30 mm 的 KDP 晶体,在温度变化 1°C 时,将产生约 1.1π 的附加相位差。为了克服这个缺点,在横向运用时,一般均需采取补偿措施。经常采用两种办法:其一,用两块制作完全相同的晶体,使之 90° 排列,即使一块晶体的 x'_1 和 x'_3 轴方向分别与另一块晶体的 x_3 和 x_1 轴平行,如图 5-4(a) 所示;其二,使一块晶体的 x'_1 和 x'_3 轴分别与另一种晶体的 x_1 和 x_3 轴反向平行排列,在中间放置一块 $1/2$ 波片,如图 5-4(b) 所示。就补

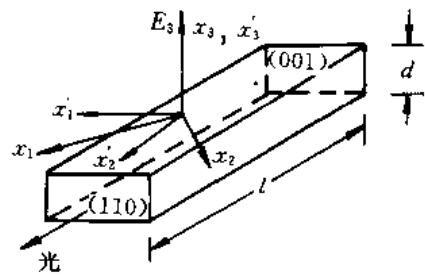


图 5-3 用于 γ_{63} 横向运用的 KDP 晶片

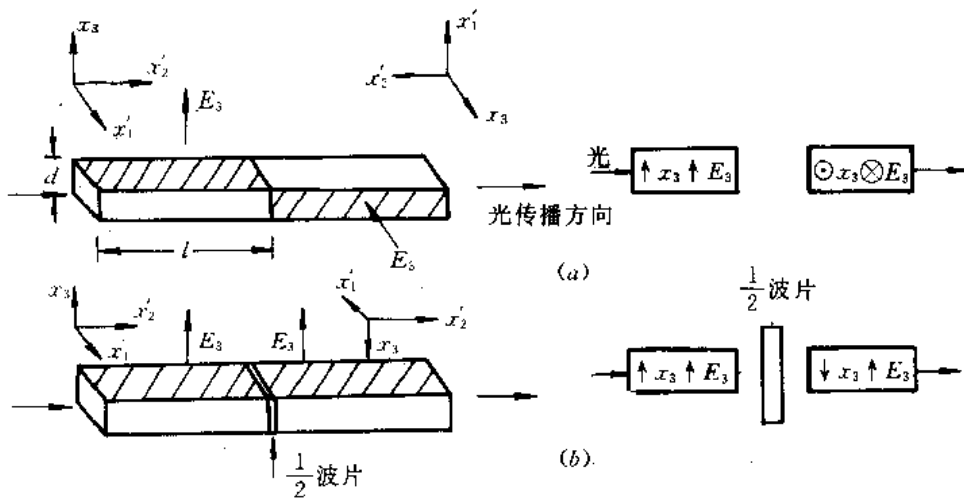


图 5-4 补偿自然双折射的两种晶体配置



原理而言，这两种方法相同，都是使第一块晶体中的 o 光进入第二块晶体变成 e 光，第一块晶体中的 e 光进入第二块晶体变为 o 光，而且二晶体长度和温度环境相同，所以，由自然双折射和温度变化引起的相位差相互抵消。因此，由第二块晶体射出的两光束间，只存在由电光效应引起的相位差：

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 \gamma_{63} U \frac{l}{d} \quad (5-32)$$

相应的半波电压为

$$U_{\lambda/2} = \left(\frac{\lambda}{2n_o^3 \gamma_{63}} \right) \frac{d}{l} \quad (5-33)$$

与(5-30)式进行比较有

$$(U_{\lambda/2})_{横} = (U_{\lambda/2})_{纵} \cdot \frac{d}{l} \quad (5-34)$$

显然，横向运用时的半波电压一般均比纵向运用时低，通过改变晶体的长厚比，可以降低横向运用的半波电压。但由于横向运用必须采取补偿措施，结构复杂，对两块晶体的加工精度要求很高，所以，一般只有在特别需要较低半波电压的场合才采用。

2) LiNbO₃ 型晶体的线性电光效应

LiNbO₃ (铌酸锂) 以及与之同类型的 LiTaO₃ (钽酸锂)、BaTaO₃ (钽酸钡) 等晶体，属于 3m 晶体点群，为单轴晶体。它们在 0.4~5 μm 波长范围内的透过率高达 98%，光学均匀性好，不潮解，因此在光电子技术中经常采用。其主要缺点是光损伤阈值较低。

LiNbO₃ 型晶体未加电场时的折射率椭球为旋转椭球，即

$$B_1^0(x_1^2 + x_2^2) + B_3^0 x_3^2 = 1 \quad (5-35)$$

式中， $B_1^0 = 1/n_1^2 = 1/n_o^2 = B_2^0$ ； $B_3^0 = 1/n_3^2 = 1/n_e^2$ ； n_o 和 n_e 分别为单轴晶体的寻常光和非常光的主折射率。

当晶体外加电场时，由(5-13)式及 LiNbO₃ (3m 晶类) 型晶体的线性电光系数矩阵，有

$$\begin{bmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_{22} & \gamma_{13} \\ 0 & \gamma_{22} & \gamma_{13} \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \\ 0 & \gamma_{51} & 0 \\ \gamma_{51} & 0 & 0 \\ -\gamma_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (5-36)$$

由此得到

$$\Delta B_1 = -\gamma_{22} E_2 + \gamma_{13} E_3$$

$$\Delta B_2 = \gamma_{22} E_2 + \gamma_{13} E_3$$

$$\Delta B_3 = \gamma_{33} E_3$$

$$\Delta B_4 = \gamma_{51} E_2$$

$$\Delta B_5 = \gamma_{51} E_1$$

$$\Delta B_6 = -\gamma_{22} E_1$$

将这些分量通过(5-10)式代入(5-9)式，即得 LiNbO₃ 型晶体外加电场后的感应折射率椭



$$\left(\frac{1}{n_o^2} - \gamma_{22}E_2 + \gamma_{13}E_3\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + \gamma_{22}E_2 + \gamma_{13}E_3\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} + \gamma_{33}E_3\right)x_3^2 + 2\gamma_{51}E_2x_2x_3 + 2\gamma_{51}E_1x_3x_1 - 2\gamma_{22}E_1x_1x_2 = 1 \quad (5-37)$$

下面分两种情况进行讨论:

① 电场平行于 x_3 轴的横向运用。当外加电场平行于 x_3 轴时, $E_1 = E_2 = 0$, (5-37)式变为

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + \gamma_{13}E_3\right)(x_1^2 + x_2^2) + \left(\frac{1}{n_e^2} + \gamma_{33}E_3\right)x_3^2 = 1 \quad (5-38)$$

类似前面的处理方法, (5-38)式可表示为

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_o^2 \left(1 - \frac{1}{2}n_o^2\gamma_{13}E_3\right)^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2 \left(1 - \frac{1}{2}n_e^2\gamma_{33}E_3\right)^2} = 1 \quad (5-39)$$

该式中没有交叉项, 因此在 E_3 电场中, LiNbO_3 型晶体的三个主轴方向不变, 仍为单轴晶体, 只是主折射率的大小发生了变化, 近似为

$$\left. \begin{aligned} n'_1 &= n'_o = n_o - \frac{1}{2}n_o^3\gamma_{13}E_3 \\ n'_2 &= n'_o = n_o - \frac{1}{2}n_o^3\gamma_{13}E_3 \\ n'_3 &= n'_e = n_e - \frac{1}{2}n_e^3\gamma_{33}E_3 \end{aligned} \right\} \quad (5-40)$$

n'_o 和 n'_e 为在 x_3 方向外加电场后, 晶体的寻常光和非常光的主折射率, 其主折射率之差为

$$n'_o - n'_e = (n_o - n_e) + \frac{1}{2}(n_e^3\gamma_{33} - n_o^3\gamma_{13})E_3 \quad (5-41)$$

上式等号右边第一项是自然双折射; 第二项是外加电场 E_3 后的感应双折射, 其中 $(n_e^3\gamma_{33} - n_o^3\gamma_{13})$ 是由晶体材料决定的常数, 为方便起见, 常将其写成 $n_o^3\gamma^*$, $\gamma^* = (n_e/n_o)^3\gamma_{33} - \gamma_{13}$ 称为有效电光系数。

LiNbO_3 型晶体加上电场 E_3 后, 由于 x_3 轴仍为光轴, 所以其纵向运用没有电光延迟。但可以横向运用, 即光波沿垂直 x_3 轴的方向传播。

当光波沿 x_1 轴(或 x_2 轴)方向传播时, 出射沿 x_2 轴和 x_3 轴(或沿 x_1 轴和 x_3 轴)方向振动的二线偏振光之间, 将产生受电场控制的相位差:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda}(n'_o - n'_e)l \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)l + \frac{\pi l U_3}{\lambda d}(n_e^3\gamma_{33} - n_o^3\gamma_{13}) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)l + \frac{\pi n_o^3\gamma^* U_3}{\lambda} \frac{l}{d} \end{aligned} \quad (5-42)$$

其中, l 为光传播方向上的晶体长度; d 为电场方向上的晶体厚度; U_3 为沿 x_3 方向的外加电压。该式表明, LiNbO_3 型晶体 x_3 轴方向上外加电压的横向运用, 与 KDP 型晶体 $45^\circ - x_3$ 切片的 γ_{63} 横向运用类似, 有自然双折射的影响。

② 电场在 x_1Ox_2 平面内的横向运用。这种工作方式是电场加在 x_1Ox_2 平面内的任意方



向上, 而光沿着 x_3 方向传播。此时, $E_1, E_2 \neq 0, E_3 = 0$, 代入(5-37)式, 可得感应折射率椭球为

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - \gamma_{22}E_2\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + \gamma_{22}E_2\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{n_e^2}\right)x_3^2 + 2\gamma_{51}E_2x_2x_3 + 2\gamma_{51}E_1x_3x_1 - 2\gamma_{22}E_1x_1x_2 = 1 \quad (5-43)$$

显然, 外加电场后, 晶体由单轴晶体变成了双轴晶体。

为了求出相应于沿 x_3 方向传播的光波折射率, 根据折射率椭球的性质, 需要确定垂直于 x_3 轴的平面与折射率椭球的截线。这只需在(5-43)式中令 $x_3 = 0$ 即可。由此可得截线方程为

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - \gamma_{22}E_2\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + \gamma_{22}E_2\right)x_2^2 - 2\gamma_{22}E_1x_1x_2 = 1 \quad (5-44)$$

这是一个椭圆方程。为了方便地求出这个椭圆的主轴方向和主轴值, 可将(5-44)式主轴化, 使 $(O-x_1x_2x_3)$ 坐标系统 x_3 轴旋转 θ 角, 变为 $(O-x'_1x'_2x'_3)$ 坐标系, 其变换关系为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \theta - x'_2 \sin \theta \\ x_2 &= x'_1 \sin \theta + x'_2 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (5-45)$$

由此, (5-44)式变为

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - \gamma_{22}E_2\right)(x'_1 \cos \theta - x'_2 \sin \theta)^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + \gamma_{22}E_2\right)(x'_1 \sin \theta + x'_2 \cos \theta)^2 - 2\gamma_{22}E_1(x'_1 \cos \theta - x'_2 \sin \theta)(x'_1 \sin \theta + x'_2 \cos \theta) = 1$$

经整理后得

$$\left[\frac{1}{n_o^2} - \gamma_{22}(E_2 \cos 2\theta + E_1 \sin 2\theta)\right]x_1'^2 + \left[\frac{1}{n_o^2} + \gamma_{22}(E_2 \cos 2\theta + E_1 \sin 2\theta)\right]x_2'^2 + 2\gamma_{22}(E_2 \sin 2\theta - E_1 \cos 2\theta)x_1'x_2' = 1$$

若 x'_1, x'_2 为主轴方向, 则上式中的交叉项应等于零, 有

$$E_2 \sin 2\theta - E_1 \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{E_1}{E_2} \quad (5-46)$$

因为 E_1, E_2 是外加电场 E 在 x_1, x_2 方向上的分量, E 的取向不同, 则 E_1, E_2 不同, 因而截线椭圆的主轴取向也不同。当电场 E 沿 x_1 方向时, $E_1 = E, E_2 = 0$, 则相应的 $\theta = 45^\circ$, 即截线椭圆的主轴相对原方向 x_1, x_2 旋转了 45° ; 当电场 E 沿 x_2 方向时, $E_1 = 0, E_2 = E, \theta = 0^\circ$, 即截线椭圆主轴方向不变。实际上, 当 $E = E_1$ 时, 感应折射率椭球的主轴除绕 x_3 轴旋转 45° 外, 还再绕 x'_1 轴旋转一个小角度 α , 其 α 角大小满足

$$\tan 2\alpha = \frac{\sqrt{2}\gamma_{51}E_1}{\left[\left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2}\right) - \gamma_{22}E_1\right]}$$

当 $E = E_2$ 时, 感应折射率椭球的主轴绕 x_1 轴旋转一个小角度 β , β 角大小满足

$$\tan 2\beta = \frac{2\gamma_{51}E_2}{\left[\gamma_{22}E_2 - \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2}\right)\right]}$$

由于 α 和 β 都很小, 通常均略去不计。于是, 在感应主轴坐标系中, 截线椭圆方程为



$$\frac{1}{n_0^2} \gamma_{22} (E_2 \cos 2\theta + E_1 \sin 2\theta) \left] x_1'^2 + \left[\frac{1}{n_0^2} + \gamma_{22} (E_2 \cos 2\theta + E_1 \sin 2\theta) \right] x_2'^2 = 1 \quad (5-47)$$

利用 $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$ 的关系, 上式可写成

$$\frac{x_1'^2}{n_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} n_0^2 \gamma_{22} (E_2 \cos 2\theta + E_1 \sin 2\theta) \right]^2} + \frac{x_2'^2}{n_0^2 \left[1 - \frac{1}{2} n_0^2 \gamma_{22} (E_2 \cos 2\theta + E_1 \sin 2\theta) \right]^2} = 1 \quad (5-48)$$

因此

$$\left. \begin{aligned} n_1' &= n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{22} (E_2 \cos 2\theta + E_1 \sin 2\theta) \\ n_2' &= n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{22} (E_2 \cos 2\theta + E_1 \sin 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (5-49)$$

若外加电场 E 与 x_1 轴的夹角为 γ , 则

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E \cos \gamma \\ E_2 &= E \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (5-50)$$

$$\cot \gamma = \frac{E_1}{E_2} \quad (5-51)$$

将(5-51)式与(5-46)式进行比较可见

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \cot \gamma \\ \gamma &= 90^\circ - 2\theta \end{aligned} \quad (5-52)$$

因此, 将(5-52)式代入(5-50)式, 再将 E_1 、 E_2 关系式代入(5-49)式得

$$\begin{aligned} n_1' &= n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{22} (E \cos^2 2\theta + E \sin^2 2\theta) \\ &= n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{22} E \end{aligned} \quad (5-53)$$

$$\begin{aligned} n_2' &= n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{22} (E \cos^2 2\theta + E \sin^2 2\theta) \\ &= n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{22} E \end{aligned} \quad (5-54)$$

当光沿 x_3 方向传过 l 距离后, 由于线性电光效应引起电光延迟为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_1' - n_2') l = \frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 \gamma_{22} E l \quad (5-55)$$

相应的半波电压为

$$U_{\lambda/2} = \frac{\lambda}{2n_0^3 \gamma_{22}} \frac{d}{l} \quad (5-56)$$

式中, l 是光传播方向上晶体的长度; d 为外加电场方向上晶体的厚度。由此可见, 在 LiNbO_3 型晶体 x_1Ox_2 平面内外加电场, 光沿 x_3 方向传播时, 可以避免自然双折射的影响, 同时半波电压较低。因此, 一般情况下, 若用 LiNbO_3 晶体作电光元件, 多采用这种工作方式。在实际应用中应注意, 外加电场的方向不同(例如, 沿 x_1 方向或 x_2 方向), 其感应主轴的方向也不相同。

3) GaAs、BGO 型晶体的线性电光效应

GaAs(砷化镓)晶体属于 $\bar{4}3m$ 晶体点群,这一类晶体还有 InAs(砷化铟)、CuCl(氯化铜)、ZnS(硫化锌)、CdTe(碲化镉)等;BGO(锆酸铋)晶体属于 23 晶体点群,这一类晶体还有 BSO(硅酸铋)等,它们都是立方晶体,在电光调制、光信息处理等领域内,有着重要的应用。

这类晶体未加电场时,光学性质是各向同性的,其折射率椭球为旋转球面,方程式为

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n_0^2 \quad (5-57)$$

式中, x_1 、 x_2 、 x_3 坐标取晶轴方向。它们的线性电光系数矩阵为

$$[\gamma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{41} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{41} \end{bmatrix} \quad (5-58)$$

因此,在外加电场后,感应折射率椭球变为

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{n_0^2} + 2\gamma_{41}(E_1x_2x_3 + E_2x_3x_1 + E_3x_1x_2) = 1 \quad (5-59)$$

在实际应用中,外加电场的方向通常有三种情况:电场垂直于(001)面(即沿 x_3 轴方向),垂直于(110)面和垂直于(111)面。

(1) 电场垂直于(001)面的情况 当外加电场垂直于(001)面时,其情况与 KDP 型晶体沿 x_3 轴方向加电场相似,用类似的处理方法可以得到如下结论:晶体的光学性质由各向同性变为双轴晶体,感应折射率椭球的三个主轴方向由原折射率椭球的三个主轴绕 x_3 轴旋转 45° 得到,如图 5-5 所示。感应主折射率分别为

$$\left. \begin{aligned} n_1' &= n_0 + \frac{1}{2}n_0^3\gamma_{41}E_3 \\ n_2' &= n_0 - \frac{1}{2}n_0^3\gamma_{41}E_3 \\ n_3' &= n_0 \end{aligned} \right\} \quad (5-60)$$

当光沿 x_3 轴方向传播时,电光延迟为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}n_0^3\gamma_{41}U_3 \quad (5-61)$$

式中, U_3 是沿 x_3 轴方向的外加电压。当光沿 x_1 轴方向(或 x_2 轴方向)传播时,电光延迟为

$$\varphi = \frac{\pi}{\lambda} \frac{l}{d} n_0^3 \gamma_{41} U \quad (5-62)$$

式中, l 是沿光传播方向上晶体的长度; d 是沿外加电压方向上晶体的厚度。

(2) 电场垂直于(110)面的情况 当外加电场方向垂直于(110)面时,如图 5-6 所示,感应主轴 x_3' 垂直于(110)

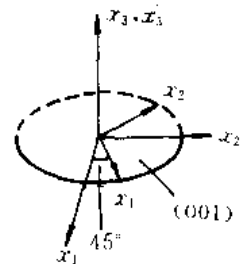


图 5-5 E 垂直(001)面的感应主轴

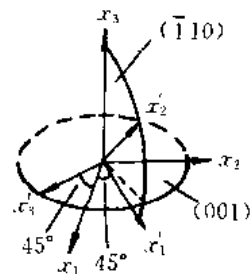


图 5-6 E 垂直于(110)面的感应主轴

面, x_1 和 x_2 的夹角为 (001) 面所等分, 三个感应主折射率分别为

$$\left. \begin{aligned} n_1' &= n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{41} E \\ n_2' &= n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{41} E \\ n_3' &= n_0 \end{aligned} \right\} \quad (5-63)$$

这时晶体由各向同性变为双轴晶体, 当光沿 x_3' 方向传播时, 电光延迟为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l}{d} n_0^3 \gamma_{41} U \quad (5-64)$$

式中, l 是晶体沿 x_3' 轴方向的长度; d 是晶体沿垂直于 (110) 面的厚度。

(3) 电场垂直于 (111) 面的情况 当外加电场方向垂直于 (111) 面时, 晶体由各向同性变为单轴晶体, 光轴方向 (x_3') 就是外加电场的方向, 另外两个感应主轴 x_1' 和 x_2' 的方向可以在垂直于 x_3' 轴的 (111) 面内任意选取, 如图 5-7 所示。相应的三个主折射率为

$$\left. \begin{aligned} n_1' &= n_2' = n_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} n_0^3 \gamma_{41} E = n_o' \\ n_3' &= n_0 - \frac{1}{\sqrt{3}} n_0^3 \gamma_{41} E = n_e' \end{aligned} \right\} \quad (5-65)$$

当光沿 x_3' 轴方向传播时, 没有电光延迟。当光沿垂直于 x_3' 轴方向传播时, 电光延迟为

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}\pi}{\lambda} \frac{l}{d} n_0^3 \gamma_{41} U \quad (5-66)$$

式中, l 为晶体沿光传播方向的长度; d 为晶体沿外加电场方向的厚度。

5.1.3 晶体的二次电光效应

实验证明, 自然界有许多光学各向同性的固体、液体和气体在强电场(电场方向与光传播方向垂直)作用下会变成各向异性, 而且电场引起的双折射和电场强度的平方成正比, 这就是众所周知的克尔效应, 或称为二次电光效应。克尔效应可以存在于所有电介质中, 某些极性液体(如硝基苯)和铁电晶体的克尔效应很大。在此, 只讨论晶体的二次电光效应。

所有晶体都具有二次电光效应。但是在没有对称中心的 20 类晶体中, 它们的线性电光效应远较二次电光效应显著, 所以对于这类晶体的二次电光效应一般不予考虑。在具有对称中心的晶体中, 它们最低阶的电光效应就是二次电光效应, 但我们感兴趣的只是属于立方晶系的那些晶体的二次电光效应。因为这些晶体在未加电场时, 在光学上是各向同性的, 这一点在应用上很重要。

如前所述, 克尔效应的一般表达式为

$$\Delta B_{ij} = h_{ijpq} E_p E_q \quad i, j, p, q = 1, 2, 3 \quad (5-67)$$

式中, E_p 、 E_q 是外加电场分量; $[h_{ijpq}]$ 是晶体的二次电光系数(或克尔系数), 它是一个四阶张量。

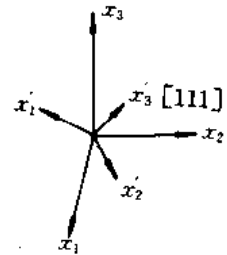


图 5-7 E 垂直于 (111) 面的感应主轴



在二次电光效应中，人们习惯于将 $[\Delta B_{ij}]$ 与晶体的极化强度联系起来，用下式表示：

$$\Delta B_{ij} = g_{ijpq} P_p P_q \quad i, j, p, q = 1, 2, 3 \quad (5-68)$$

其中， P_p 、 P_q 是晶体上外加电场后的极化强度分量， $[g_{ijpq}]$ 也叫二次电光系数，一般手册给出的是 $[g_{ijpq}]$ 。可以证明， $[h_{ijpq}]$ 和 $[g_{ijpq}]$ 都是对称的四阶张量，均可采用简化下标表示，即 $ij \rightarrow m$ ， $pq \rightarrow n$ ， m 、 n 的取值范围是从1到6。于是，四阶张量的克尔系数可以从九行九列的方阵简化成六行六列的方阵，相应地，(5-67)式和(5-68)式可以写成：

$$\Delta B_m = h_{mn} E_n^2 \quad m, n = 1, 2, \dots, 6 \quad (5-69)$$

$$\Delta B_m = g_{mn} P_n^2 \quad m, n = 1, 2, \dots, 6 \quad (5-70)$$

其中， $E_1^2 = E_1 E_1$ ； $E_2^2 = E_2 E_2$ ； $E_3^2 = E_3 E_3$ ； $E_4^2 = E_2 E_3$ ； $E_5^2 = E_3 E_2$ ； $E_6^2 = E_1 E_2$ ； $P_1^2 = P_1 P_1$ ； $P_2^2 = P_2 P_2$ ； $P_3^2 = P_3 P_3$ ； $P_4^2 = P_2 P_3$ ； $P_5^2 = P_3 P_2$ ； $P_6^2 = P_1 P_2$ 。并且，当 $n=1, 2, 3$ 时，有

$$\left. \begin{aligned} h_{mn} &= h_{ijpq} \\ g_{mn} &= g_{ijpq} \end{aligned} \right\} \quad (5-71)$$

当 $n=4, 5, 6$ 时，有

$$\left. \begin{aligned} h_{mn} &= 2h_{ijpq} \\ g_{mn} &= 2g_{ijpq} \end{aligned} \right\} \quad (5-72)$$

进一步还可以证明， $h_{mn} = h_{nm}$ ， $g_{mn} = g_{nm}$ ，因此矩阵 $[h_{mn}]$ 和 $[g_{mn}]$ 都是对称的，其独立分量从36个减少到21个。由于晶体中存在的结构对称性，它们的独立分量还要进一步减少。各类晶体矩阵 $[h_{mn}]$ 和 $[g_{mn}]$ 的具体形式，可查阅手册和有关文献。

下面，具体考察一下 $m3m$ 晶类的二次电光效应。属于这类晶体的有KTN(钽酸铌钾)，KTaO₃(钽酸钾)，BaTiO₃(钛酸钡)，NaCl(氯化钠)，LiCl(氯化锂)，LiF(氟化锂)，NaF(氟化钠)等。

未加电场时，这些晶体在光学上是各向同性的，折射率椭球为旋转球面：

$$\frac{x_1^2}{n_0^2} + \frac{x_2^2}{n_0^2} + \frac{x_3^2}{n_0^2} = 1 \quad (5-73)$$

当晶体外加电场时，折射率椭球发生变化，根据(5-70)式和 $m3m$ 晶类的二次电光系数矩阵，其二次电光效应矩阵关系为

$$\begin{bmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{12} & 0 & 0 & 0 \\ g_{12} & g_{11} & g_{12} & 0 & 0 & 0 \\ g_{12} & g_{12} & g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_4^2 \\ P_5^2 \\ P_6^2 \end{bmatrix} \quad (5-74)$$

由此得出

$$\Delta B_1 = g_{11} P_1^2 + g_{12} P_2^2 + g_{12} P_3^2$$

$$\Delta B_2 = g_{12} P_1^2 + g_{11} P_2^2 + g_{12} P_3^2$$

$$\Delta B_3 = g_{12} P_1^2 + g_{12} P_2^2 + g_{11} P_3^2$$

$$\Delta B_4 = g_{44} P_4^2$$

$$\Delta B_5 = g_{44} P_5^2$$



$$\Delta B_6 = g_{44}P_6^2$$

将上面分量代入折射率椭球的一般形式(5-8)式,得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n_0^2} + g_{11}P_1^2 + g_{12}P_2^2 + g_{12}P_3^2 \right) x_1^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} + g_{12}P_1^2 + g_{11}P_2^2 + g_{12}P_3^2 \right) x_2^2 \\ & + \left(\frac{1}{n_0^2} + g_{12}P_1^2 + g_{12}P_2^2 + g_{11}P_3^2 \right) x_3^2 + 2g_{44}P_4^2x_2x_3 + 2g_{44}P_5^2x_1x_3 \\ & + 2g_{44}P_6^2x_1x_2 = 1 \end{aligned} \quad (5-75)$$

现在讨论一种简单的情况:外电场沿着[001]方向(x_3 轴方向)作用于晶体,即 $E_1 = E_2 = 0, E_3 = E$ 。

因为立方晶体的电场 E 和极化强度有如下关系:

$$P_i = \epsilon_0 \chi E_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5-76)$$

所以极化强度为 $P_1 = P_2 = 0, P_3 = \epsilon_0 \chi E$, 代入(5-75)式,得

$$\left(\frac{1}{n_0^2} + g_{12}\epsilon_0^2\chi^2 E^2 \right) x_1^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} + g_{12}\epsilon_0^2\chi^2 E^2 \right) x_2^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} + g_{11}\epsilon_0^2\chi^2 E^2 \right) x_3^2 = 1 \quad (5-77)$$

显然,当沿 x_3 方向外加电场时,由于二次电光效应,折射率椭球由球变成一个旋转椭球,其主折射率为

$$\left. \begin{aligned} n'_1 &= n_0 - \frac{1}{2}n_0^3g_{12}\epsilon_0^2\chi^2 E^2 \\ n'_2 &= n_0 - \frac{1}{2}n_0^3g_{12}\epsilon_0^2\chi^2 E^2 \\ n'_3 &= n_0 - \frac{1}{2}n_0^3g_{11}\epsilon_0^2\chi^2 E^2 \end{aligned} \right\} \quad (5-78)$$

当光沿 x_3 方向传播时,无双折射现象发生;当光沿[100]方向(x_1 方向)传播时,通过晶体产生的电光延迟为

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda}(n'_2 - n'_3)l = \frac{\pi n_0^3\epsilon_0^2\chi^2 E^2 l}{\lambda}(g_{11} - g_{12}) \\ &= \frac{\pi n_0^3\epsilon_0^2\chi^2 U^2 l}{\lambda d^2}(g_{11} - g_{12}) \end{aligned} \quad (5-79)$$

相应的半波电压为

$$U_{\lambda/2} = \sqrt{\frac{\lambda d^2}{n_0^3\epsilon_0^2\chi^2 l(g_{11} - g_{12})}} \quad (5-80)$$

5.1.4 晶体电光效应的应用举例

由上面对电光效应的分析可见,无论哪种运用方式,在外加电场作用下的电光晶体都相当于一个受电压控制的波片,改变外加电场,便可改变相应的二特许线偏振光的电光延迟,从而改变输出光的偏振状态。正是由于这种偏振状态的可控性,使其在光电子技术中获得了广泛的应用。作为应用示例,下面简单介绍电光调制和电光偏转技术。

1. 电光调制

将信息电压(调制电压)加载到光波上的技术叫光调制技术。利用电光效应实现的调制叫电光调制。图 5-8 是一种典型的电光强度调制器示意图,电光晶体(例如 KDP 晶体)放

在一对正交偏振器之间，对晶体实行纵向运用，则加电场后的晶体感应主轴 x_1 、 x_2 方向，相对晶轴 x_1 、 x_2 方向旋转 45° ，并与起偏器的偏振轴 P_1 成 45° 夹角。

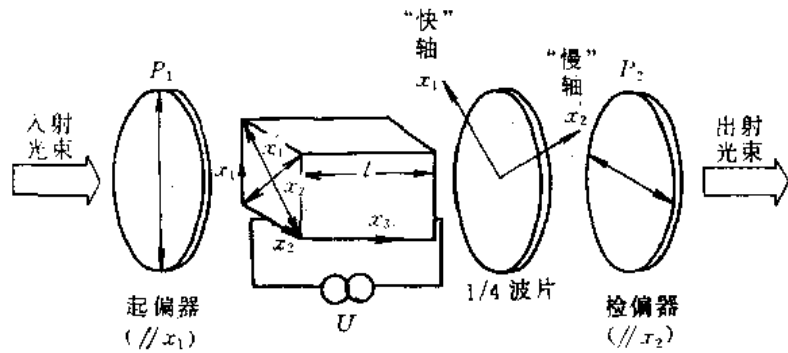


图 5-8 电光强度调制器

根据(4-135)式，通过检偏器输出的光强 I 与通过起偏器输入的光强 I_0 之比为

$$\frac{I}{I_0} = \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (5-81)$$

当光路中未插入 $1/4$ 波片时，上式的 φ 即是电光晶体的电光延迟。由(5-29)式、(5-30)式，有

$$\varphi = \pi \frac{U}{U_{\lambda/2}}$$

所以(5-81)式变为

$$\frac{I}{I_0} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{U}{U_{\lambda/2}} \right) \quad (5-82)$$

称 I/I_0 为光强透过率(%)，它随外加电压的变化如图 5-9 所示。

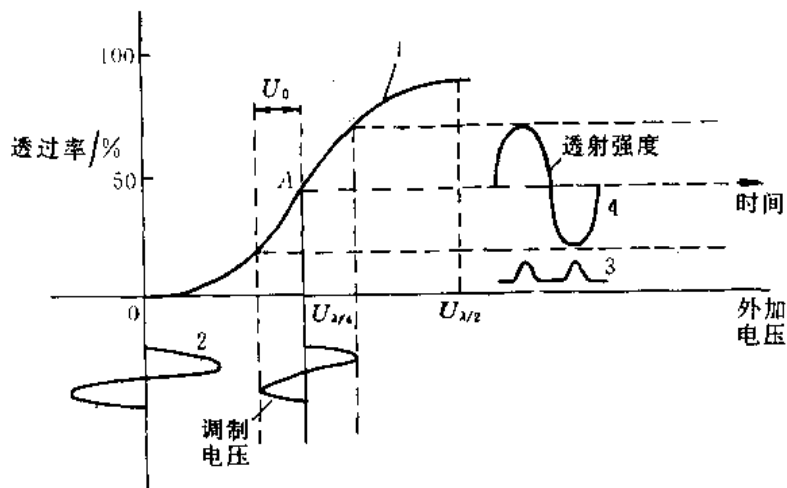


图 5-9 透过率与外加电压关系图

如果外加电压是正弦信号

$$U = U_0 \sin(\omega_m t)$$

则透过率为

$$\frac{I}{I_0} = \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \frac{U}{U_{\lambda/2}} \sin(\omega_m t) \right] \quad (5-83)$$

该式说明，一般的输出调制信号不是正弦信号，它们发生了畸变，如图 5-9 中曲线 3 所示。

如果在光路中插入 1/4 波片，则光通过调制器后的总相位差是 $(\pi/2 + \varphi)$ ，因此 (5-81) 式变为

$$\frac{I}{I_0} = \sin^2 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \frac{U_0}{U_{\lambda/2}} \sin(\omega_m t) \right] \quad (5-84)$$

工作点由 O 移到 A 点。在弱信号调制时， $U \ll U_{\lambda/2}$ ，上式可近似表示为

$$\frac{I}{I_0} \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{U_0}{U_{\lambda/2}} \sin(\omega_m t) \quad (5-85)$$

可见，当插入 1/4 波片后，一个小的正弦调制电压将引起透射光强在 50% 透射点附近作正弦变化，如图 5-9 中的曲线 4 所示。

2. 电光偏转

光束偏转技术是应用非常广泛的技术。与通常采用的机械转镜式光束偏转技术相比，电光偏转技术具有高速、高稳定性的特点，因此在光束扫描、光计算等应用中，倍受重视。

为了说明电光偏转原理，首先看一下光束通过玻璃光楔的偏转原理。如图 5-10 所示，设入射波前与光楔 ABB' 的 AB 面平行，由于光楔的折射率 $n > 1$ ，所以 AB 面上各点的振动传到 $A'B'$ ($\parallel AB$) 面上时，通过了不同的光程：由 A 到 A' ，整个路程完全在空气中，光程为 l ；由 B 到 B' ，整个路程完全在玻璃中，光程为 nl ； A 和 B 之间的其它各点都通过一段玻璃，例如，由 C 到 C' ，光程为 $nl' + (l-l') = l + (n-1)l'$ 。从上到下，光在玻璃中的路程 l' 线性增加，所以整个光程是线性增加的。因此，透射波的波阵面发生倾斜，偏角为 θ ，由

$$\theta \approx (n-1) \frac{l}{D} = \frac{\Delta n l}{D} \quad (5-86)$$

决定。

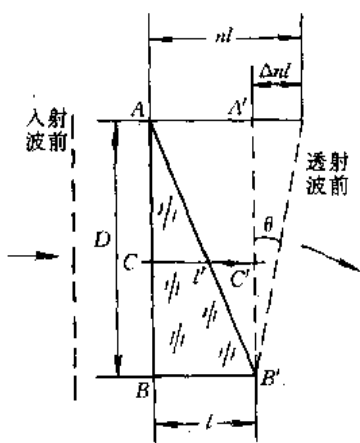


图 5-10 光束通过光楔的偏转

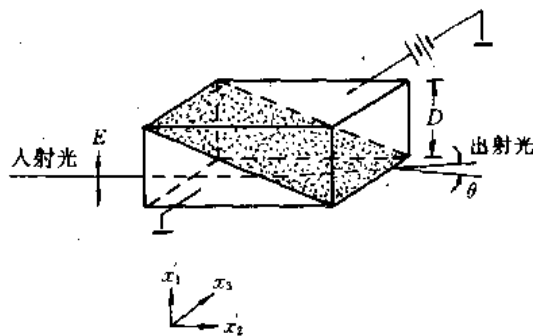


图 5-11 双 KDP 楔形棱镜偏转器

电光偏转器就是根据上述原理制成的。图 5-11 是一种由两块 KDP 楔形棱镜组成的



双KDP楔形棱镜偏转器, 棱镜外加电压沿着图示 x_3 方向, 两块棱镜的光轴方向 (x_3) 相反, x_1 、 x_2 为感应主轴方向。现若光线沿 x_2 轴方向入射, 振动方向为 x_1 轴方向, 则根据前面的分析可知: 光在下面棱镜中的折射率为 $n_{1F} = n_o + \frac{1}{2} n_o^3 \gamma_{63} E_3$; 在上面棱镜中, 由于电场与该棱镜的 x_3 方向相反, 所以折射率为 $n_{1L} = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \gamma_{63} E_3$ 。因此, 上下光的折射率之差为 $\Delta n = n_{1L} - n_{1F} = -n_o^3 \gamma_{63} E_3$, 光束穿过偏振器后的偏转角为

$$\theta = \frac{l}{D} n_o^3 \gamma_{63} E_3 = \frac{l}{Dh} n_o^3 \gamma_{63} U_3 \quad (5-87)$$

式中, h 为 x_3 方向上的晶体宽度, l 为沿传播方向晶体的长度。由此可见, 当外加电压变化时, 偏转角就成比例地随着变化, 从而可以控制光线的传播方向。

5.2 声光效应

介质中存在弹性应力或应变时, 介质的光学性质(折射率)将发生变化, 这就是弹光效应。当超声波在介质中传播时, 由于超声波是一种弹性波, 将引起介质的疏密交替变化, 或者说引起弹性形变, 由于弹光效应, 将导致介质光学性质发生变化, 从而影响光在其中的传播特性。通常, 我们把超声波引起的弹光效应叫声光效应。

5.2.1 弹光效应和弹光系数

弹光效应可以按照电光效应的方法进行处理, 即应力或应变对介质光学性质(介质折射率)的影响, 可以通过介质折射率椭球的形状和取向的改变来描述。

假设介质未受外力作用时的折射率椭球为

$$B_{ij}^0 x_i x_j = 1 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5-88)$$

介质受到应力 σ 作用后的折射率椭球变为

$$B_{ij} x_i x_j = 1 \quad (5-89)$$

或

$$(B_{ij}^0 + \Delta B_{ij}) x_i x_j = 1 \quad (5-90)$$

式中, ΔB_{ij} 为介质受应力作用后, 折射率椭球各系数的变化量, 它是应力的函数, $\Delta B_{ij} = f(\sigma)$ 。

若考虑线性效应, 略去所有的高次项, ΔB_{ij} 可表示为

$$\Delta B_{ij} = \Pi_{ijkl} \sigma_k \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (5-91)$$

在此, 考虑了介质光学性质的各向异性, 认为应力 $[\sigma_k]$ 和折射率椭球的系数增量 $[\Delta B_{ij}]$ 都是二阶张量, $[\Pi_{ijkl}]$ 是压光系数, 它是一个四阶张量, 有 81 个分量。

根据虎克(Hooke)定律, 应力和应变有如下关系:

$$\sigma_k = C_{klrs} s_r \quad k, l, r, s = 1, 2, 3 \quad (5-92)$$

式中, $[s_r]$ 是弹性应变; $[C_{klrs}]$ 是倔强系数。将(5-92)式代入(5-91)式, ΔB_{ij} 可用应变参量描述:

$$\Delta B_{ij} = \Pi_{ijkl} C_{klrs} s_r = P_{ijrs} s_r \quad (5-93)$$

式中, $P_{ijrs} = \Pi_{ijkl} C_{klrs}$ $[P_{ijrs}]$ 叫弹光系数, 它也是四阶张量, 有 81 个分量。

Click to buy NOW! 由于 $[\Delta B_{ij}]$ 和 $[\sigma_{kl}]$ 都是对称二阶张量, 有 $\Delta B_{ij} = \Delta B_{ji}$, $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$, 所以有 $\Pi_{ijk} = \Pi_{jik}$, 故可将前后两对下标 ij 和 kl 分别替换成单下标, 将张量用矩阵表示。相应的下标关系为

张量表示	(ij) (kl) (rs)	11	22	33	23, 32	31, 13	12, 21
矩阵表示	(m) (n)	1	2	3	4	5	6

且有

$$n = 1, 2, 3 \text{ 时, } \Pi_{mn} = \Pi_{ijk}, \text{ 如 } \Pi_{21} = \Pi_{2211}$$

$$n = 4, 5, 6 \text{ 时, } \Pi_{mn} = 2\Pi_{ijk}, \text{ 如 } \Pi_{24} = 2\Pi_{2223}$$

采用矩阵形式后, (5-91)式变换为

$$\Delta B_m = \Pi_{mn} \sigma_n \quad m, n = 1, 2, \dots, 6 \quad (5-94)$$

这样, 压光系数的分量数由张量表示时的 81 个减少为 36 个。应指出, 在(5-94)式中, $[\Pi_{mn}]$ 在分量形式上与二阶张量分量相似, 但它不是二阶张量, 而是一个 6×6 矩阵。

类似地, 对弹光系数 $[P_{ijk}]$ 的下标也可以进行简化, 将(5-93)式变为矩阵(分量)形式:

$$\Delta B_m = P_{mn} \sigma_n \quad m, n = 1, 2, \dots, 6 \quad (5-95)$$

与 $[\Pi_{mn}]$ 的差别是, $[P_{mn}]$ 的所有分量均有 $P_{mn} = P_{ijk}$, 并且有 $P_{mn} = \Pi_{mr} C_r(m, n, r = 1, 2, \dots, 6)$ 。

进一步, 考虑到介质材料结构的对称性, 压光系数和弹光系数的非零矩阵分量会由 36 个大大减少。对于各类晶体的压光系数、弹光系数的具体矩阵形式, 可以查阅手册或有关参考文献。

作为弹光效应的计算示例, 下面讨论在某些特殊情况下立方晶体的弹光效应。

(1) $2m$ 和 $m3$ 立方晶体受到平行于立方体轴的单向应力作用 假设立方晶体的三个主轴为 x_1, x_2, x_3 , 应力平行于 x_1 方向, 则施加应力前的折射率椭球为旋转球面, 方程式为

$$B^0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1 \quad (5-96)$$

式中, $B^0 = 1/n_0^2$ 。在应力作用下, 折射率椭球发生了变化, 在一般情况下, 方程式可表示如下:

$$B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 + B_3 x_3^2 + 2B_4 x_2 x_3 + 2B_5 x_3 x_1 + 2B_6 x_1 x_2 = 1 \quad (5-97)$$

根据(5-94)式及立方晶体的 $[\Pi_{mn}]$ 矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{13} & \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} \sigma \\ \Pi_{13} \sigma \\ \Pi_{12} \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-98)$$

由此可得

$$B_1 = B^0 + \Delta B_1 = \frac{1}{n_0^2} + \Pi_{11} \sigma$$



$$B_2 = B^0 + \Delta B_2 = \frac{1}{n_0^2} + \Pi_{13}\sigma$$

$$B_3 = B^0 + \Delta B_3 = \frac{1}{n_0^2} + \Pi_{12}\sigma$$

$$B_4 = B_5 = B_6 = 0$$

将其代入(5-97)式, 得到

$$\left(\frac{1}{n_0^2} + \Pi_{11}\sigma\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} + \Pi_{13}\sigma\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} + \Pi_{12}\sigma\right)x_3^2 = 1 \quad (5-99)$$

可见, 当晶体沿 x_1 方向加单向应力时, 折射率椭球由旋转球变成了椭球, 主轴仍为 x_1 、 x_2 、 x_3 , 立方晶体变成双轴晶体, 相应的三个主折射率为

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= n_0 - \frac{1}{2}n_0^3\Pi_{11}\sigma \\ n_2 &= n_0 - \frac{1}{2}n_0^3\Pi_{13}\sigma \\ n_3 &= n_0 - \frac{1}{2}n_0^3\Pi_{12}\sigma \end{aligned} \right\} \quad (5-100)$$

(2) $\bar{4}3m$ 、 432 和 $m3m$ 立方晶体受到平行于立方体轴(例如 x_1 方向)的单向应力作用这种情况与上述情况基本相同, 只是由于这类晶体的 $\Pi_{12} = \Pi_{13}$, 所以

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= n_0 - \frac{1}{2}n_0^3\Pi_{11}\sigma \\ n_2 &= n_0 - \frac{1}{2}n_0^3\Pi_{12}\sigma \\ n_3 &= n_0 - \frac{1}{2}n_0^3\Pi_{12}\sigma \end{aligned} \right\} \quad (5-101)$$

即晶体由光学各向同性变成了单轴晶体。

5.2.2 声光衍射

超声波是一种弹性波, 当它通过介质时, 介质中的各点将出现随时间和空间周期性变化的弹性应变。由于弹光效应, 介质中各点的折射率也会产生相应的周期性变化。当光通过有超声波作用的介质时, 相位就要受到调制, 其结果如同它通过一个衍射光栅, 光栅间距等于声波波长, 光束通过这个光栅时就要产生衍射, 这就是通常观察到的声光效应。

按照超声波频率的高低和介质中声光相互作用长度的不同, 由声光效应产生的衍射有两种常用的极端情况: 喇曼-乃斯(Raman-Nath)衍射和布拉格衍射。衡量这两类衍射的参量是

$$Q = 2\pi L \frac{\lambda}{\lambda_s^2} \quad (5-102)$$

式中, L 是声光相互作用长度; λ 是通过声光介质的光波长; λ_s 是超声波长。当 $Q \ll 1$ (实践证明, 当 $Q \leq 0.3$) 时, 为喇曼-乃斯衍射。当 $Q \gg 1$ (实际上, 当 $Q \geq 4\pi$) 时, 为布拉格衍射。而在 $0.3 < Q < 4\pi$ 的中间区内, 衍射现象较为复杂, 通常的声光器件均不工作在这个范围内, 故不讨论。

1. 喇曼-乃斯衍射

1) 超声行波的情况

假设频率为 Ω 的超声波是沿 x_1 方向传播的平面纵波，波矢为 K_s ，则如图 5-12 所示，在介质中将引起正弦形式的弹性应变

$$S_{11} = S \sin(K_s x_1 - \Omega t) \quad (5-103)$$

相应地将引起折射率椭球的变化，其折射率椭球系数的变化为

$$\Delta B_{11} = \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{11} = P_{1111} S_{11} \quad (5-104)$$

写成标量形式为

$$\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right) = PS \sin(K_s x_1 - \Omega t) \quad (5-105)$$

$$\begin{aligned} \Delta n &= -\frac{1}{2} n_0^3 PS \sin(K_s x_1 - \Omega t) \\ &= -(\Delta n)_M \sin(K_s x_1 - \Omega t) \end{aligned} \quad (5-106)$$

式中， $(\Delta n)_M = n_0^3 PS/2$ 表示折射率变化的最大幅值。该式表明，声光介质在超声波作用下，折射率沿 x_1 方向出现了正弦形式的增量，因而声光介质沿 x_1 方向的折射率分布为

$$n(x_1, t) = n_0 - (\Delta n)_M \sin(K_s x_1 - \Omega t) \quad (5-107)$$

如果光通过这种折射率发生了变化的介质，就会产生衍射。

当超声波频率较低，声光作用区的长度较短，光线平行于超声波波面入射（即垂直于超声波传播的方向入射）时，超声行波的作用可视为与普通平面光栅相同的折射率光栅，频率为 ω 的平行光通过它时，将产生图 5-13 所示的多级光衍射。

根据理论分析，各级衍射光的衍射角 θ 满足如下关系：

$$\lambda_s \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (5-108)$$

相应于第 m 级衍射的极值光强为

$$I_m = I_i J_m^2(V) \quad (5-109)$$

式中， I_i 是入射光强； $V = 2\pi(\Delta n)_M L/\lambda$ 表示光通过声光介质后，由于折射率变化引起的附加相移； $J_m(V)$ 是第 m 阶贝塞尔函数，由于

$$J_m^2(V) = J_{-m}^2(V)$$

所以，在零级透射光两边，同级衍射光强相等，这种各级衍射光强的对称分布是喇曼—乃斯型衍射的主要特征之一。相应各级衍射光的频率为 $\omega + m\Omega$ ，即衍射光相对入射光有一个多普勒频移。

2) 超声驻波的情况

在光电子技术的实际应用中，声光介质中的超声波可能是一个声驻波，在这种情况下

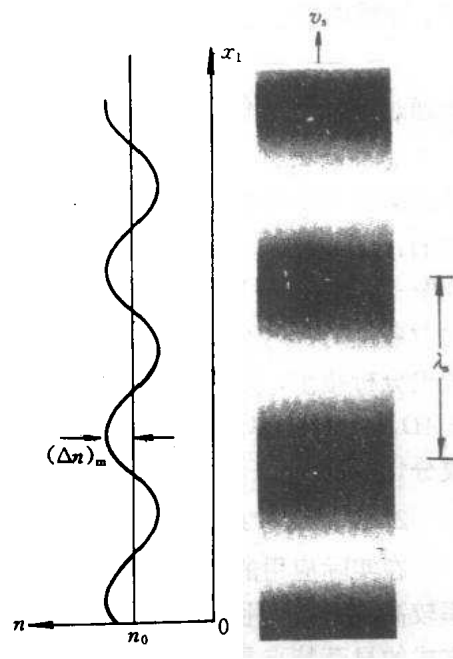


图 5-12 超声行波

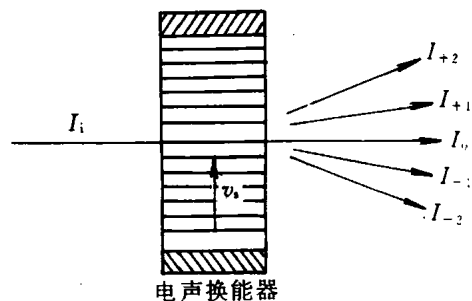


图 5-13 喇曼—乃斯声光衍射

$$n(x_1, t) = n_0 + (\Delta n)_M \sin \Omega t \sin K_1 x_1 \quad (5-110)$$

光通过这种声光介质时, 其衍射极大的方位角 θ 仍满足

$$\lambda \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (5-111)$$

各级衍射光强将随时间变化, 正比于 $J_m^2(V \sin \Omega t)$, 以 2Ω 的频率被调制。这一点是容易理解的: 因为声驻波使得声光介质内各点折射率增量在半个声波周期内均要同步地由“+”变到“-”, 或由“-”变到“+”一次, 故在其越过零点的一瞬间, 各点的折射率增量均为零, 此时各点的折射率相等, 介质变为无声场作用情况, 相应的非零级衍射光强必为零。此外, 理论分析指出, 在声驻波的情况下, 零级和偶数级衍射光束中, 同时有频率为 $\omega, \omega \pm 2\Omega, \omega \pm 4\Omega, \dots$ 的频率成分; 在奇数级衍射光束中, 则同时有频率为 $\omega \pm \Omega, \omega \pm 3\Omega, \dots$ 的频率成分。

2. 布拉格衍射

在实际应用的声光器件中, 经常采用布拉格衍射方式工作。布拉格衍射是在超声波频率较高, 声光作用区较长, 光线与超声波波面有一定角度斜入射时发生的。这种衍射工作方式的显著特点是衍射光强分布不对称, 而且只有零级和 $+1$ 或 -1 级衍射光, 如果恰当地选择参量, 并且超声功率足够强, 可以使入射光的能量几乎全部转移到零级或 1 级衍射极值方向上。因此, 利用这种衍射方式制作的声光器件, 工作效率很高。

1) 布拉格方程

由于布拉格衍射工作方式的超声波频率较高, 声光相互作用区较长, 所以必须考虑介质厚度的影响, 其超声光栅应视为体光栅。下面, 我们讨论这种体光栅的衍射极值方向。

假设超声波面是如图 5-14 所示的部分反射、部分透射的镜面, 各镜面间的距离为 λ 。现有一平面光波 $A_1B_1C_1$ 相对声波面以 θ_1 角入射, 在声波面上的 A_2, B_2, C_2 和 A_2' 等点产生部分反射, 在相应于它们之间光程差为光波长的整数倍、或者说它们之间是同相位的衍射方向 θ_0 上, 其光束相干增强。下面循此思路确定衍射光干涉增强的入射条件, 并导出布拉格方程。

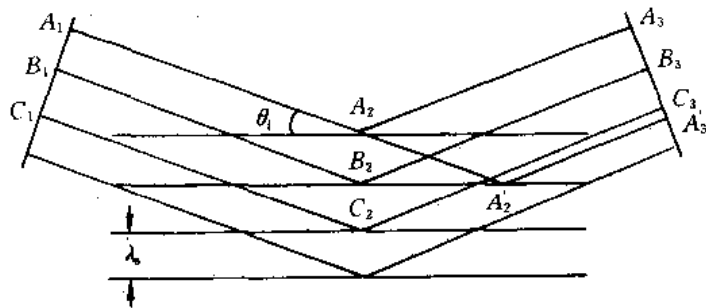


图 5-14 平面波在超声波面上的反射

(1) 不同光线在同一声波面上形成同相位衍射光束的条件 如图 5-15 所示, 若入射光束 A_1B_1 在 A_2B_2 声波面上被衍射, 入射角为 θ_1 , 衍射角为 θ_0 。由图可见, 衍射光同相位的条件是其光程差为波长的整数倍, 即

$$A_2C - DB_2 = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (5-112)$$

其中, $A_2C = x_1 \cos \theta_i$; $DB_2 = x_1 \cos \theta_d$ 。于是(5-112)式可表示为

$$x_1(\cos \theta_i - \cos \theta_d) = m\lambda \quad (5-113)$$

欲使(5-113)式对任意 x_1 值均成立, 只能是

$$m = 0, \theta_i = \theta_d \quad (5-114)$$

(2) 同一入射光线在不同超声波面上形成同相位衍射光束的条件 如图 5-16 所示, 在此情况下, 不同衍射光的光程差为

$$\begin{aligned} \Delta &= A_1A_2A_3 - A_1A_2A_3 = A_2A_2' - A_2A \\ &= A_2A_2' - A_2A_2' \cos(\theta_i + \theta_d) \end{aligned}$$

如果 $\theta_i = \theta_d = \theta$, $A_2A_2' = \lambda / \sin \theta$, 则

$$\Delta = \frac{\lambda}{\sin \theta} (1 - \cos 2\theta) = 2\lambda \sin \theta$$

当 $\Delta = m\lambda$ 时, 可出现衍射极大, 即

$$2\lambda \sin \theta = m\lambda \quad (5-115)$$

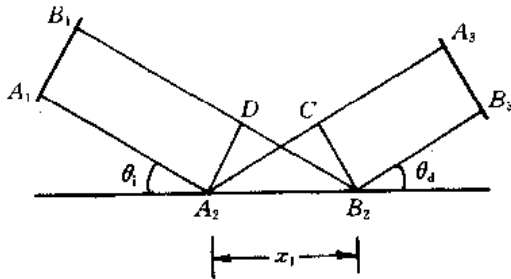


图 5-15 不同光线在同一声波面上反射

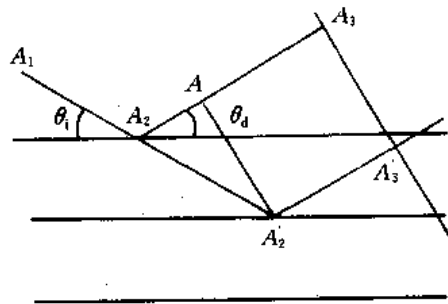


图 5-16 同一光束在不同声波面上反射

(3) 不同光线在不同超声波面上的衍射 可以证明, 在这种情况下, 衍射极大的方向仍然需要满足(5-115)式所表示的条件。

应当注意的是, 上面推导满足衍射极大条件时, 是把各声波面看作是折射率突变的镜面, 实际上, 声光介质在声波矢 K_s 方向上, 折射率的增量是按正弦规律连续渐变的, 其间并不存在镜面。可以证明, 当考虑这个因素后, (5-115)式中 m 的取值范围只能是 +1 或 -1, 即布拉格型衍射只能出现零级和 +1 级或 -1 级的衍射光束。

综上所述, 以 θ_i 入射的平面光波, 由超声波面上各点产生同相位衍射光的条件是

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \theta_d = \theta_B \\ \sin \theta_B &= \frac{\lambda}{2\lambda_s} \end{aligned} \right\} \quad (5-116)$$

通常将这个条件称为布拉格衍射条件, 将(5-116)式称为布拉格方程, 入射角 θ_B 叫布拉格角, 满足该条件的声光衍射叫布拉格衍射。其衍射光路如图 5-17 所示, 零级和 1 级衍射光之间的夹角为 $2\theta_B$ 。

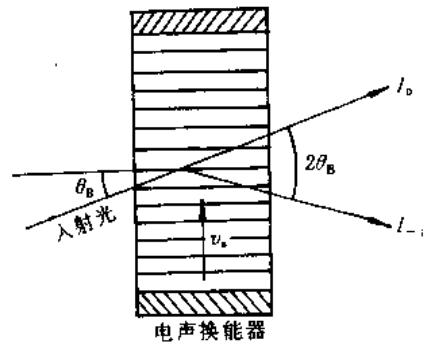


图 5-17 布拉格声光衍射

对于频率为 ω 的入射光, 其布拉格衍射的 ± 1 级衍射光的频率为 $\omega \pm \Omega$, 相应的零级和 1 级衍射光强分别为

$$\begin{aligned} I_0 &= I_i \cos^2\left(\frac{V}{2}\right) \\ I_1 &= I_i \sin^2\left(\frac{V}{2}\right) \end{aligned} \quad (5-117)$$

式中, V 是光通过声光介质后, 由折射率变化引起的附加相移。可见, 当 $V/2 = \pi/2$ 时, $I_0 = 0$, $I_1 = I_i$ 。这表明, 通过适当地控制入射超声功率(因而控制介质折射率变化的幅值 $(\Delta n)_M$), 可以将入射光功率全部转变为 1 级衍射光功率。根据这一突出特点, 可以制作出转换效率很高的声光器件。

5.3 法拉第效应

5.3.1 晶体的旋光效应

1. 旋光现象

1811 年, 阿喇果(Arago)在研究石英晶体的双折射特性时发现: 一束线偏振光沿石英晶体的光轴方向传播时, 其振动平面会相对原方向转过一个角度, 如图 5-18 所示。由于石英晶体是单轴晶体, 光沿着光轴方向传播不会发生双折射, 因而阿喇果发现的现象应属另外一种新现象, 这就是旋光现象。稍后, 比奥(Biot)在一些蒸汽和液态物质中也观察到了同样的旋光现象。

实验证明, 一定波长的线偏振光通过旋光介质时, 光振动方向转过的角度 θ 与在该介质中通过的距离 l 成正比,

$$\theta = \alpha l \quad (5-118)$$

比例系数 α 表征了该介质的旋光本领, 称为旋光率, 它与光波长、介质的性质及温度有关。介质的旋光本领因波长而异的现象称为旋光色散, 石英晶体的旋光率 α 随光波长的变化规律如图 5-19 所示。例如, 石英晶体的 α 在光波长为 $0.4 \mu\text{m}$ 时, 为 $49^\circ/\text{mm}$; 在 $0.5 \mu\text{m}$ 时, 为 $31^\circ/\text{mm}$; 在 $0.65 \mu\text{m}$ 时, 为 $16^\circ/\text{mm}$; 而胆甾相液晶的 α 约为 $18\ 000^\circ/\text{mm}$ 。

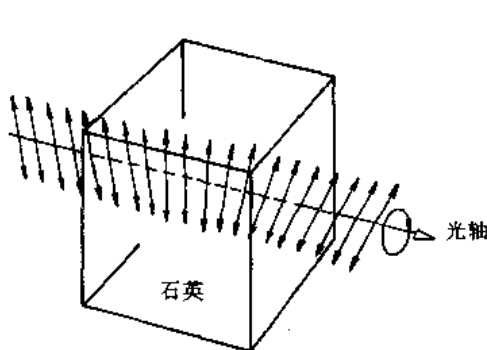


图 5-18 旋光现象

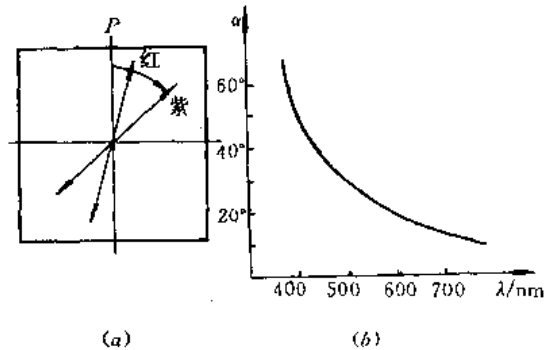


图 5-19 石英晶体的旋光色散

对于具有旋光特性的溶液，光振动方向旋转的角度还与溶液的浓度成正比，

$$\theta = \alpha cl \quad (5-119)$$

式中， α 称为溶液的比旋光率； c 为溶液浓度。在实际应用中，可以根据光振动方向转过的角度，确定该溶液的浓度。

实验还发现，不同旋光介质光振动矢量的旋转方向可能不同，并因此将旋光介质分为左旋和右旋。当对着光线观察时，使光振动矢量顺时针旋转的介质叫右旋光介质，逆时针旋转的介质叫左旋光介质。例如，葡萄糖溶液是右旋光介质，果糖是左旋光介质。自然界存在的石英晶体既有右旋的，也有左旋的，它们的旋光本领在数值上相等，但方向相反。之所以有这种左、右旋之分，是由于其结构不同造成的，右旋石英与左旋石英的分子组成相同，都是 SiO_2 ，但分子的排列结构是镜像对称的，反映在晶体外形上即是图 5-20 所示的镜像对称。

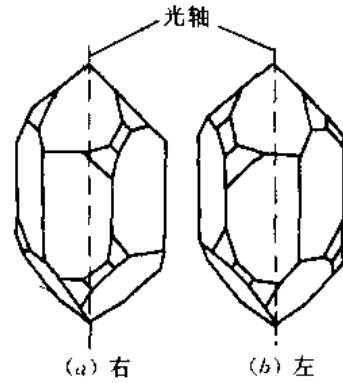


图 5-20 右旋石英与左旋石英

正是由于旋光性的存在，当将石英晶片（光轴与表面垂直）置于正交的两个偏振器之间观察其会聚光照射下的干涉图样时，图样的中心不是暗点，而几乎总是亮的。

2. 旋光现象的解释

1825 年，菲涅耳对旋光现象提出了一种唯象的解释。按照他的假设，可以把进入旋光介质的线偏振光看作是右旋圆偏振光和左旋圆偏振光的组合。菲涅耳认为：在各向同性介质中，线偏振光的右、左旋圆偏振光分量的传播速度 v_R 和 v_L 相等，因而其相应的折射率 $n_R = c/v_R$ 和 $n_L = c/v_L$ 相等；在旋光介质中，右、左旋圆偏振光的传播速度不同，其相应的折射率也不相等。在右旋晶体中，右旋圆偏振光的传播速度较快， $v_R > v_L$ ($n_R < n_L$)；左旋晶体中，左旋圆偏振光的传播速度较快， $v_L > v_R$ ($n_L < n_R$)。根据这一种假设，可以解释旋光现象。

假设入射到旋光介质上的光是沿水平方向振动的线偏振光，按照归一化琼斯矩阵方法，可以把菲涅耳假设表示为：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

如果右旋和左旋圆偏振光通过厚度为 l 的旋光介质后，相位滞后分别为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_R &= k_R l = \frac{2\pi}{\lambda} n_R l \\ \varphi_L &= k_L l = \frac{2\pi}{\lambda} n_L l \end{aligned} \right\} \quad (5-120)$$

则其合成波的琼斯矢量为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i\varphi_R} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{i\varphi_L} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i k_R l} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{i k_L l} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} e^{i(k_R + k_L) \frac{l}{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i(k_R - k_L) \frac{l}{2}} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-i(k_R - k_L) \frac{l}{2}} \right)$$

引入

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= (k_R + k_L) \frac{l}{2} \\ \theta &= (k_R - k_L) \frac{l}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5-121)$$

合成波的琼斯矢量可以写为

$$E = e^{i\varphi} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ -\frac{i}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{bmatrix} = e^{i\varphi} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (5-122)$$

它代表了光振动方向与水平方向成 θ 角的线偏振光。这说明，入射的线偏振光光矢量通过旋光介质后，转过了 θ 角。由(5-120)式和(5-121)式可以得到

$$\theta = \frac{\pi}{\lambda} (n_R - n_L) l \quad (5-123)$$

如果左旋圆偏振光传播得快， $n_L < n_R$ ，则 $\theta > 0$ ，即光矢量是向逆时针方向旋转的；如果右旋圆偏振光传播得快， $n_R < n_L$ ，则 $\theta < 0$ ，即光矢量是向顺时针方向旋转的，这就说明了左、右旋光介质的区别。而且，(5-123)式还指出，旋转角度 θ 与 l 成正比，与波长有关(旋光色散)，这些都是与实验相符的。

为了验证旋光介质中左旋圆偏振光和右旋圆偏振光的传播速度不同，菲涅耳设计、制成了图 5-21 所示的、由左旋石英和右旋石英交替胶合的三棱镜组，这些棱镜的光轴均与入射面 AB 垂直。一束单色线偏振光射入 AB 面，在棱镜 1 中沿光轴方向传播，相应的左、右旋圆偏振光的速度不同， $v_R > v_L$ ，即 $n_R < n_L$ ；在

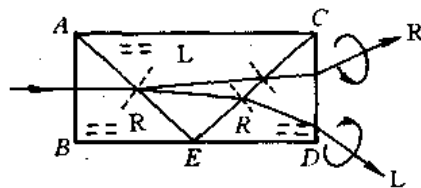


图 5-21 菲涅耳棱镜组

棱镜 2 中， $v_L > v_R$ ，即 $n_L < n_R$ ；在棱镜 3 中， $v_R > v_L$ ，即 $n_R < n_L$ 。所以，在界面 AE 上，左旋光远离法线方向折射，右旋光靠近法线方向折射，于是左、右旋光分开了。在第二个界面 CE 上，左旋光靠近法线方向折射，右旋光远离法线方向折射，于是两束光更加分开了。在界面 CD 上，两束光经折射后进一步分开。这个实验结果，证实了左、右旋圆偏振光传播速度不同的假设。

当然，菲涅耳的解释只是唯象理论，它不能说明旋光现象的根本原因，不能回答为什么在旋光介质中二圆偏振光的速度不同。这个问题必须从分子结构去考虑，即光在物质中传播时，不仅受分子的电矩作用，还要受到诸如分子的大小和磁矩等次要因素的作用，考虑到这些因素后，入射光波的光矢量振动方向旋转就是必然的了。

进一步，如果我们将旋光现象与前面讨论的双折射现象进行对比，就可以看出它们在形式上的相似性，只不过一个是指在各向异性介质中的二正交线偏振光的传播速度不同，一个是指旋光介质中的二反向旋转的圆偏振光的传播速度不同。因此，可将旋光现象视为一种特殊的双折射现象——圆双折射，而将前面讨论的双折射现象称为线双折射。

5.3.2 法拉第(Faraday)效应

上述旋光现象是旋光介质固有的性质，因此可以叫作自然圆双折射。与感应双折射类似，也可以通过人工的方法产生旋光现象。介质在强磁场作用下产生旋光现象的效应叫磁致旋光效应，或法拉第效应。

1846年，法拉第发现，在磁场的作用下，本来不具有旋光性的介质也产生了旋光性，能够使线偏振光的振动面发生旋转，这就是法拉第效应。观察法拉第效应的装置结构如图5-22所示：将一根玻璃棒的两端抛光，放进螺线管的磁场中，再加上起偏器 P_1 和检偏器 P_2 ，让光束通过起偏器后顺着磁场方向通过玻璃棒，光矢量的方向就会旋转，旋转的角度可以用检偏器测量。

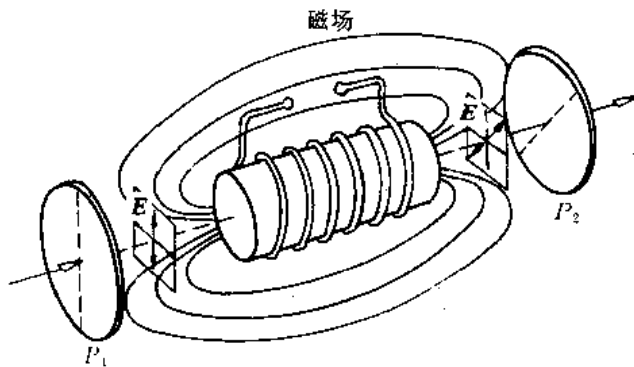


图 5-22 法拉第效应

后来，维尔德(Verdet)对法拉第效应进行了仔细的研究，发现光振动平面转过的角度与光在物质中通过的长度 l 和磁感应强度 B 成正比，即

$$\theta = VB l \quad (5-124)$$

式中， V 是与物质性质有关的常数，叫维尔德常数。一些常用物质的维尔德常数列于表5-1。

表 5-1 几种物质的维尔德常数

(用 $\lambda=0.5893 \mu\text{m}$ 的偏振光照明)

物 质	温 度 / $^{\circ}\text{C}$	V /[弧度/(特·米)]
磷冕玻璃	18	4.86
轻火石玻璃	18	9.22
水晶(垂直光轴)	20	4.83
食盐	16	10.44
水	20	3.81
磷	33	38.57
二氧化碳	20	12.30

实验表明，法拉第效应的旋光方向决定于外加磁场方向，与光的传播方向无关，即法拉第效应具有不可逆性，这与具有可逆性的自然旋光效应不同。例如，线偏振光通过天然右旋介质时，迎着光看去，振动面总是向右旋转，所以，当从天然右旋介质出来的透射光沿原路返回时，振动面将回到初始位置。但线偏振光通过磁光介质时，如果沿磁场方向传

播,迎着光线看,振动面向右旋转角度 θ ,而当光束沿反方向传播时,振动面仍沿原方向旋转,即迎着光线看振动面向左旋转角度 θ ,所以光束沿原路返回,一来一去两次通过磁光介质,振动面与初始位置相比,转过了角度 2θ 。

由于法拉第效应的这种不可逆性,使得它在光电子技术中有着重要的应用。例如,在激光系统中,为了避免光路中各光学界面的反射光对激光源产生干扰,可以利用法拉第效应制成光隔离器,只允许光从一个方向通过,而不允许反向通过。这种器件的结构示意图如图 5-23 所示,让偏振片 P_1 与 P_2 的透振方向成 45° 角,调整磁感应强度 B ,使从法拉第盒出来的光振动面相对 P_1 转过 45° ,于是,刚好能通过 P_2 ;但对于从后面光学系统(例如激光放大器 2 等)各界面反射回来的光,经 P_2 和法拉第盒后,其光矢量与 P_1 垂直,因此被隔离而不能返回到光源。

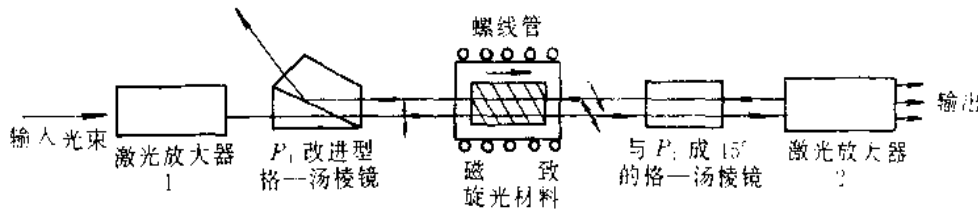


图 5-23 法拉第光隔离器应用示意图

例 题

例 5-1 LiNbO_3 晶体在 $\lambda=0.55 \mu\text{m}$ 时, $n_o=2.29$,电光系数 $\gamma_{22}=3.4 \times 10^{-12} \text{ m/V}$,试讨论其沿 x_2 方向外加电压、光沿 x_3 方向传播时的电光延迟和相应的半波电压特性。

解:如图 5-24,当 LiNbO_3 晶体沿 x_2 方向外加电压时,折射率椭球的三个主轴方向基本不变,只是主折射率大小变化为

$$n_1 = n_o + \frac{1}{2} n_o^3 \gamma_{22} E_2$$

$$n_2 = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \gamma_{22} E_2$$

$$n_3 = n_e$$

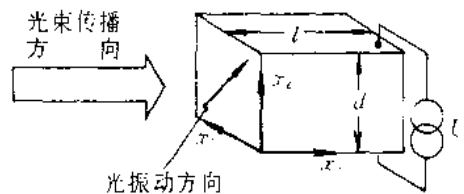


图 5-24 电场平行于 x_2 轴

光沿着 x_3 方向传播时,由线性电光效应引起的电光延迟为

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 \gamma_{22} U_2 \frac{l}{d} = 0.466 \times 10^{-3} U_2 \frac{l}{d}$$

半波电压为

$$U_{\lambda/2} = \frac{\lambda}{2n_o^3 \gamma_{22}} \frac{d}{l} = 6.74 \times 10^3 \frac{d}{l} \text{ V}$$

当 $d/l=1$ 时, $U_{\lambda/2}=6.74 \text{ kV}$; $d/l=1/2$ 时, $U_{\lambda/2}=3.37 \text{ kV}$ 。

由于这种运用方式,既可避免自然双折射的影响,结构又简单,并且可以通过控制长厚比降低半波电压,因此在实际应用中经常采用。

例 5-2 由 KDP 晶体制成的双楔形棱镜偏转器, $l=D=h=1\text{ cm}$, 电光系数 $\gamma_{63} = 10.6 \times 10^{-12}\text{ m/V}$, $n_o = 1.51$, 当 $U=1\text{ kV}$ 时, 偏转角 $\theta=?$ 为增大偏转角度, 可采用图 5-25 所示的多级棱镜偏转器, 当 $m=12$ 时, 偏转角为多大?

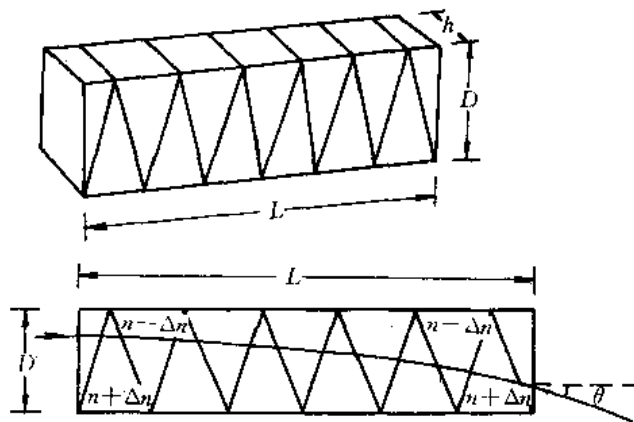


图 5-25 多级棱镜偏转器

解: 根据(5-87)式, KDP 晶体的双楔形棱镜偏转器的偏转角 θ 为

$$\theta = \frac{l}{Dh} n_o^3 \gamma_{63} U_3 = 3.65 \times 10^{-6}\text{ rad}$$

这个数值很小, 所以利用单个双楔形棱镜作模拟偏转, 很难满足实际应用的要求。

为了使偏转角增大, 而电压又不致太高, 常用图 5-25 所示的多级棱镜偏转器。棱镜的厚度方向平行于 x_3 轴, 前后相邻的二棱镜 x_3 轴方向相反, 振动方向平行于 D , 则各棱镜的折射率交替为 $(n_o - \Delta n)$ 和 $(n_o + \Delta n)$ 。故光束通过 $L=ml$ 后的总偏转角为一个单元偏转角的 m 倍。今若 $m=12$, 则

$$\theta_{\text{总}} = m\theta = m \frac{l}{Dh} n_o^3 \gamma_{63} U_3 = 4.38 \times 10^{-5}\text{ rad}$$

由于激光束的宽度不可能无限小, 晶体的尺寸有限, 而且光束最后不能偏出棱镜侧面, 所以 m 不能太大, $\theta_{\text{总}}$ 也不会太大, 约为几分。

例 5-3 一钼酸铅(PbMoO_4)声光调制器对 He-Ne 激光进行声光调制。已知声功率 $P_s=1\text{ W}$, 超声柱截面为 $L \times H=1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$, 钼酸铅的品质因素 $M_2=35.8 \times 10^{-15}$ (MKS 单位), 求这个声光调制器的布拉格衍射效率。

解: 根据光的电磁理论, 布拉格衍射光强为

$$I_1 = I_0 \sin^2\left(\frac{V}{2}\right)$$

式中, $V=2\pi(\Delta n)_M L/\lambda$ 表示光通过声光介质后, 由于折射率变化引起的附加相移, $(\Delta n)_M$ 是沿超声波方向折射率变化的幅值, $(\Delta n)_M = n_o^3 P S/2$ 。

由物理学知道, 介质的弹性应变与声功率有关, 其关系为

$$P_s = \frac{1}{2} S^2 \rho v_s^3 L H$$

式中, (LH) 为超声柱截面; ρ 为声光介质密度; v_s 为声速。因此, 折射率幅值为

$$(\Delta n)_M = \frac{1}{2} n_o^3 P \sqrt{\frac{2P_s}{\rho v_s^3 L H}}$$

$$V = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{n_0^6 P^2}{\rho v_s^3}} \sqrt{\frac{2P_s L}{H}} = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{M_2} \sqrt{\frac{2P_s L}{H}}$$

式中, $M_2 = n_0^6 P^2 / \rho v_s^3$ 是声光介质的品质因素。

由上所述, 布拉格衍射效率为

$$\eta = \frac{I_1}{I_i} = \sin^2\left(\frac{V}{2}\right) = \sin^2\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}\lambda} \sqrt{M_2} \sqrt{\frac{P_s L}{H}}\right] = 37.9\%$$

(习) (题)

5-1 一 KDP 晶体, $l=3\text{ cm}$, $d=1\text{ cm}$ 。在波长 $\lambda=0.5\text{ }\mu\text{m}$ 时, $n_o=1.51$, $n_e=1.47$, $\gamma_{63}=10.5 \times 10^{-12}\text{ m} \cdot \text{V}^{-1}$ 。试比较该晶体分别纵向运用和横向运用、相位延迟为 $\varphi=\pi/2$ 时, 外加电压的大小。

5-2 一 CdTe 电光晶体, 外加电场垂直于(110)面, 尺寸为 $33 \times 4.5 \times 4.5\text{ mm}^3$, 对于光波长 $\lambda=10.6\text{ }\mu\text{m}$, 它的折射率 $n_o=2.67$, 电光系数 $\gamma_{41}=6.8 \times 10^{-12}\text{ m} \cdot \text{V}^{-1}$ 。为保证相位延迟 $\varphi=0.056\text{ rad}$, 外加电场为多大?

5-3 为什么 KDP 晶体沿 x_3 方向加电场的横向运用, 通光方向不能是 x_1 方向或 x_2 方向?

5-4 图 5-26 为一横向运用 KDP 晶体的 γ_{41} 组合调制器, 求光线通过该组合调制器后的相位延迟。

5-5 试述图 5-27 所示的、由电光晶体和双折射晶体组合而成的二进制数字式偏转器的工作原理。

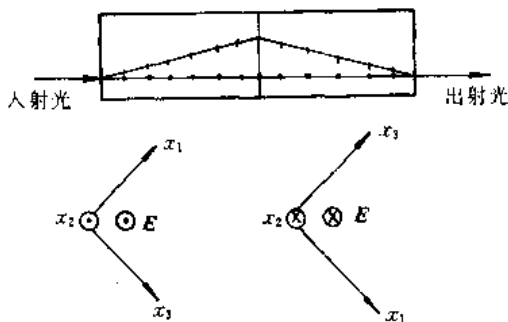


图 5-26 题 5-4 用图

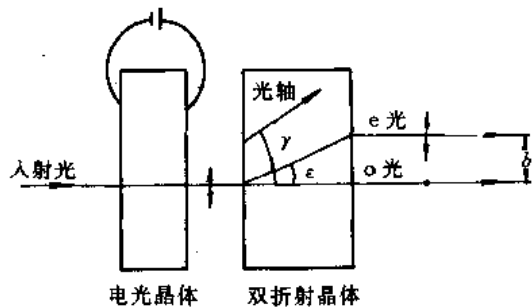


图 5-27 题 5-5 用图

5-6 图 5-28 为一电光开关示意图, P_1 、 P_2 是透振方向正交的偏振片, 电光晶体是纵向运用的 KDP 晶体, 试述其工作原理。

5-7 在声光介质中, 激励超声波的频率为 500 MHz , 声速为 $3 \times 10^5\text{ cm}$, 求波长为 $0.5\text{ }\mu\text{m}$ 的光波由该声光介质产生布拉格衍射时的入射角 $\theta_b=?$

5-8 一钼酸铅声光调制器, 对 He-Ne 激光进行声光调制。已知声功率 $P_s=1\text{ W}$ 。声光作用长度 $L=1.8\text{ mm}$, 压电换能器宽度 $H=0.8\text{ mm}$, 品质因素 $M_2=36.3 \times 10^{-15}\text{ s}^3\text{kg}^{-1}$, 求这种声光调制器的布拉格衍射效率。

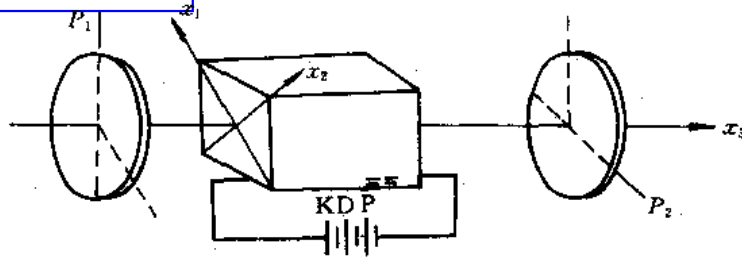


图 5-28 题 5-6 用图

5-9 对波长为 $\lambda=0.5893 \mu\text{m}$ 的钠黄光, 石英旋光率为 $21.7^\circ/\text{mm}$ 。若将一石英晶片垂直其光轴切割, 置于两平行偏振片之间, 问石英片多厚时, 无光透过偏振片 P_2 。

5-10 一个长 10 cm 的磷冕玻璃放在磁感应强度为 0.1 特斯拉的磁场内, 一束线偏振光通过时, 偏振面转过多少度? 若要使偏振面转过 45° , 外加磁场需要多大? 为了减小法拉第工作物质的尺寸或者磁场强度, 可以采取什么措施?



第 6 章 光的吸收、色散和散射

前面几章讨论了光在均匀介质中传播时，因光的波动性所产生的一系列现象和规律。实际上，由于光在传播过程中与介质的相互作用，还会使光的特性发生某些变化。例如，因介质对光波的吸收，会使光强度减弱；不同波长的光在介质中传播速度不同，并按不同的折射角散开，会发生光的色散；光在介质中传播时，会产生散射。光的吸收、色散和散射是光在介质中传播时所发生的普遍现象。这一章将对这些现象进行简单的讨论。

为了对光与介质的相互作用有较为直观的了解，本章只介绍光与介质相互作用的经典理论，对于处理光与介质相互作用的严格理论——量子理论，因超出本教材的要求，不予讨论。

6.1 光与介质相互作用的经典理论

众所周知，光在介质中的传播过程，就是光与介质相互作用的过程。光在介质中的吸收、色散和散射现象，实际上就是光与介质相互作用的结果。因此，要正确地认识光的吸收、色散和散射现象，就应深入地研究光与介质的相互作用。

正如第 1 章所指出的，麦克斯韦电磁理论的最重要成就之一就是将其电磁现象与光现象联系起来，利用这个理论正确地说明了光在介质中传播时的许多重要性质。例如光的干涉、衍射，以及光与介质相互作用的一些重要现象：法拉第效应、克尔效应等。但是，麦克斯韦电磁理论在说明光的传播现象时，对介质的本性作了过于粗略的假设，即把介质看成是连续的结构，得出了介质中光速不随光波频率变化的错误结论，因此，在解释光的色散现象时遇到了困难。为了克服这种困难，必须要考虑组成介质的原子、分子的电结构，而要正确地描述介质中原子和分子的运动规律，必须利用量子理论。在此，为了简单起见，只介绍洛伦兹(Lorentz)提出的电子论，利用这种建立在经典理论基础上的电子论来解释光的吸收、色散和散射，虽然比较粗浅，却能定性地说明问题。

1. 经典理论的基本方程

洛伦兹的电子论假定：组成介质的原子或分子内的带电粒子(电子、离子)被准弹性力保持在它们的平衡位置附近，并且具有一定的固有振动频率。在入射光的作用下，介质发生极化，带电粒子依入射光频率作强迫振动。由于带正电荷的原子核质量比电子大许多倍，可视正电荷中心不动，而负电荷相对于正电荷作振动，正、负电荷电量的绝对值相同，构成了一个电偶极子，其电偶极矩为



$$p = qr$$

式中, q 是电荷电量, r 是从负电荷中心指向正电荷中心的矢径。同时, 这个电偶极子将辐射次波。利用这种极化和辐射过程, 可以描述光的吸收、色散和散射。

为简单起见, 假设在所研究的均匀色散介质中, 只有一种分子, 并且不计分子间的相互作用, 每个分子内只有一个电子作强迫振动, 所构成电偶极子的电偶极矩为

$$p = -er \quad (6-1)$$

式中, e 是电子电荷, r 是电子离开平衡位置的距离(位移)。如果单位体积中有 N 个分子, 则单位体积中的平均电偶极矩(极化强度)为

$$P = Np = -Ner \quad (6-2)$$

根据牛顿定律, 作强迫振动的电子的运动方程为

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -eE - fr - g \frac{dr}{dt} \quad (6-3)$$

式中, 等号右边的三项分别为电子受到的入射光电场强迫力、准弹性力和阻尼力; E 是入射光场, 且

$$E = \tilde{E}(z)e^{-i\omega t} \quad (6-4)$$

引入衰减系数 $\gamma = g/m$ 、电子的固有振动频率 $\omega_0 = \sqrt{f/m}$ 后, (6-3) 式变为

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \gamma \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = -\frac{eE}{m} \quad (6-5)$$

求解这个方程, 可以得到电子在入射光作用下的位移, 从而求出极化强度, 描述次波辐射及光的吸收、色散和散射特性。因此, 该方程是描述光与介质相互作用经典理论的基本方程。

2. 介质的光学特性

求解基本方程, 可以得到电子在光场作用下的位移 r 为

$$r = \frac{-\frac{e}{m} \tilde{E}(z)e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

将该位移表示式代入(6-2)式中, 可得极化强度的表示式

$$P = \frac{Ne^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \tilde{E}(z)e^{-i\omega t} \quad (6-6)$$

由电磁场理论, 极化强度与电场的关系为

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (6-7)$$

将该式与(6-6)式进行比较, 可以得到描述介质极化特性的电极化率 χ 的表达式, 它是复数, 可表示为 $\chi = \chi' + i\chi''$, 其实部和虚部分别为

$$\chi' = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (6-8)$$

$$\chi'' = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (6-9)$$

由折射率与电极化率 χ 的关系可知, 折射率也应为复数, 若用 \tilde{n} 表示复折射率, 则有

Click to buy NOW!

$$\tilde{n}^2 = \epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \quad (6-10)$$

如果将 \tilde{n} 表示成实部和虚部形式, $\tilde{n} = n + i\eta$, 则

$$\tilde{n}^2 = (n + i\eta)^2 = (n^2 - \eta^2) + i2n\eta \quad (6-11)$$

将(6-11)式代入(6-10)式, 并使等式两边的实部和虚部分别相等, 得

$$\left. \begin{aligned} n^2 - \eta^2 &= 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ 2n\eta &= \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-12)$$

为了更明确地看出复折射率(电极化率、介电常数)实部和虚部的意义, 我们考察在介质中沿 z 方向传播的光电场复振幅的表示式

$$\tilde{E}(z) = E_0 e^{ikz}$$

式中, k 是光在真空中的波数。将复折射率表示式代入, 得

$$\tilde{E}(z) = E_0 e^{-k\gamma z} e^{iknz} \quad (6-13)$$

相应的光强度为

$$I = |\tilde{E}(z)|^2 = I_0 e^{-2k\gamma z} \quad (6-14)$$

由(6-13)式和(6-14)式可见, 复折射率描述了介质对光传播特性(振幅和相位)的作用, 其中的实部 n (或 χ') 是表征介质影响光传播相位特性的量, 即为通常所说的折射率; 虚部 η (或 χ'') 是表征介质影响光传播振幅特性的量, 通常称为消光系数, 通过它们即可描述光在介质中传播的吸收和色散特性。

由以上讨论可以看出, 描述介质光学性质的复折射率 \tilde{n} 是光频率的函数。例如, 对于稀薄气体有

$$\tilde{n} = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 + \chi} \stackrel{|\chi| \ll 1}{\approx} 1 + \frac{1}{2}\chi = 1 + \frac{1}{2}\chi' + \frac{i}{2}\chi'' = n + i\eta$$

因此

$$\left. \begin{aligned} n &= 1 + \frac{\chi'}{2} = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ \eta &= \frac{\chi''}{2} = \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-15)$$

$n(\omega)$ 和 $\eta(\omega)$ 随 ω 的变化规律如图 6-1 所示。其中, $\eta \sim \omega$ 曲线为光吸收曲线, 在固有频率 ω_0 附近, 介质对光有强烈的吸收; $n \sim \omega$ 曲线为色散曲线, 在 ω_0 附近区域为反常色散区, 而在远离 ω_0 的区域为正常色散区。

6.2 光的吸收

所谓光的吸收, 就是指光波通过介质后, 光强度减弱的现象。由上节的讨论可知, 光的吸收可以通过介质的消光系数 η 描述。

光吸收是介质的普遍性质, 除了真空, 没有一种介质能对任何波长的光波都是完全透明的, 只能是对某些波长范围内的光透明, 对另一些范围的光不透明。例如石英介质, 它

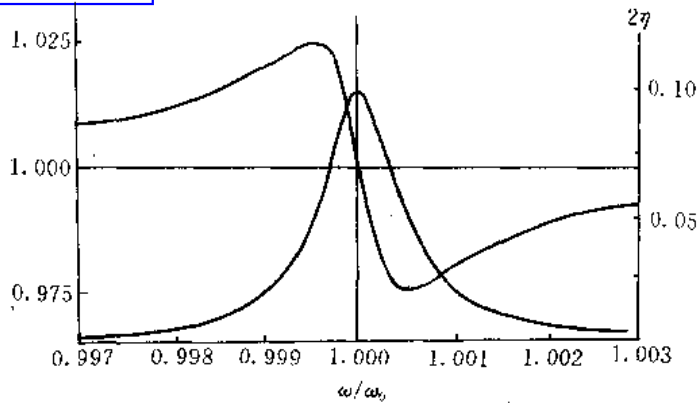


图 6-1 共振频率附近的色散曲线和吸收曲线

对可见光几乎是完全透明的，而对波长自 $3.5 \mu\text{m}$ 到 $5.0 \mu\text{m}$ 的红外光却是不透明的。所谓透明，并非没有吸收，只是吸收较少。所以确切地说，石英对可见光吸收很少，而对 $(3.5 \sim 5.0) \mu\text{m}$ 的红外光有强烈的吸收。

6.2.1 光吸收定律

设平行光在均匀介质中传播，经过薄层 dl 后，由于介质的吸收，光强从 I 减少到 $(I - dI)$ (图 6-2)。朗伯(Lambert)总结了大量的实验结果指出， dI/I 应与吸收层厚度 dl 成正比，即有

$$\frac{dI}{I} = -K dl \quad (6-16)$$

式中， K 为吸收系数；负号表示光强减少。求解该微分方程可得：

$$I = I_0 e^{-Kl} \quad (6-17)$$

其中， I_0 是 $l=0$ 处的光强，这个关系式就是著名的朗伯定律或吸收定律。实验证明，这个定律是相当精确的，并且也符合金属介质的吸收规律。

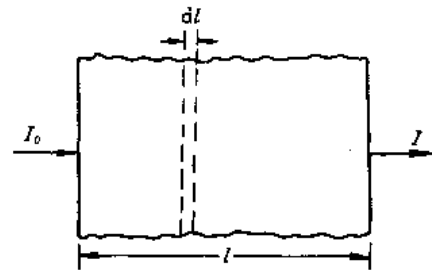


图 6-2 介质对光的吸收

吸收系数 K 愈大，光波吸收得愈强烈，当 $l=1/K$ 时，光强减少为原来的 $1/e$ 。若引入消光系数 η 描述光强的衰减，则吸收系数 K 与消光系数 η 有如下关系：

$$K = \frac{4\pi}{\lambda} \eta \quad (6-18)$$

由此，朗伯定律可表示为

$$I = I_0 e^{-\frac{4\pi}{\lambda} \eta l} \quad (6-19)$$

各种介质的吸收系数差别很大，对于可见光，金属的 $K \approx 10^6 \text{ cm}^{-1}$ ，玻璃的 $K \approx 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ ，而一个大气压下空气的 $K \approx 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$ 。这就表明，非常薄的金属片就能吸收掉通过它的全部光能，因此金属片是不透明的，而光在空气中传播时，很少被吸收，透明度很高。

吸收系数 K 是波长的函数, 根据 K 随波长变化规律的不同, 将吸收分为一般性吸收和选择性吸收。在一定波长范围内, 若吸收系数 K 很少, 并且近似为常数, 这种吸收叫一般性吸收; 反之, 如果吸收较大, 且随波长有显著变化, 称为选择性吸收。图 6-1 所示的 $\eta \sim \omega$ 曲线, 在 ω_0 附近是选择性吸收带, 而远离 ω_0 区域为一般性吸收。例如, 在可见光范围内, 一般的光学玻璃吸收都较小, 且不随波长变化, 属一般性吸收, 而有色玻璃则具有选择性吸收, 红玻璃对红光和橙光吸收少, 而对绿光、蓝光和紫光几乎全部吸收。所以当白光射到红玻璃上时, 只有红光能够透过, 我们看到它呈红色。如果红玻璃用绿光照射, 玻璃看起来将是黑色。

应当指出的是, 普通光学材料在可见光区都是相当透明的, 它们对各种波长的可见光都吸收很少。但是在紫外和红外光区, 它们则表现出不同的选择性吸收, 它们的透明区可能很不相同(见表 6-1), 在制造光学仪器时, 必须考虑光学材料的吸收特性, 选用对所研究的波长范围是透明的光学材料制作零件。例如, 紫外光谱仪中的棱镜、透镜需用石英制作, 而红外光谱仪中的棱镜、透镜则需用萤石等晶体制作。

表 6-1 几种光学材料的透光波段

光学材料	波长范围/nm	光学材料	波长范围/nm
冕牌玻璃	350~2 000	萤石(CaF_2)	125~9 500
火石玻璃	380~2 500	岩盐(NaCl)	175~14 500
石英玻璃	180~4 000	氯化钾(KCl)	180~23 000

实验表明, 溶液的吸收系数与浓度有关, 比尔(Beer)在 1852 年指出, 溶液的吸收系数 K 与其浓度 c 成正比, $K=ac$, 此处的 a 是与浓度无关的常数, 它只取决于吸收物质的分子特性。由此, 在溶液中的光强衰减规律为

$$I = I_0 e^{-\alpha l} \quad (6-20)$$

该式即为比尔定律。应当指出, 尽管朗伯定律总是成立的, 但比尔定律的成立却是有条件的: 只有在物质分子的吸收本领不受它周围邻近分子的影响时, 比尔定律才正确。当浓度很大, 分子间的相互作用不可忽略时, 比尔定律不成立。

6.2.2 吸收光谱

介质的吸收系数 K 随光波长的变化关系曲线称为该介质的吸收光谱。如果使一束连续光谱的光通过有选择性吸收的介质, 再通过分光仪, 即可测出在某些波段上或某些波长上的光被吸收, 形成吸收光谱。

不同介质吸收光谱的特点不同。气体吸收光谱的主要特点是: 吸收光谱是清晰、狭窄的吸收线, 吸收线的位置正好是该气体发射光谱线的位置。对于低气压的单原子气体, 这种狭窄吸收线的特点更为明显。例如氦、氖等惰性气体及钠等碱金属蒸气的吸收光谱就是这种情况, 如图 6-3 所示。如果气体是由二原子或多原子分子组成的, 这些狭窄的吸收线就会扩展为吸收带。由于这种吸收带特征决定于组成气体的分子, 它反映了分子的特性, 所以可由吸收光谱研究气体分子的结构。气体吸收的另一个主要特点是吸收和气体的压力、温度、密度有关, 一般是气体密度愈大, 它对光的吸收愈严重。对于固体和液体, 它们对光吸收的特点主要是具有很宽的吸收带。固体材料的吸收系数主要是随入射光波长变

化,其它因素的影响较小。图 6-4 是激光工作物质钇铝石榴石(YAG)的吸收光谱。在实际工作中,为了提高激光器的能量转换效率,选择泵浦光源的发射谱与激光工作物质的吸收谱匹配,是非常重要的问题。

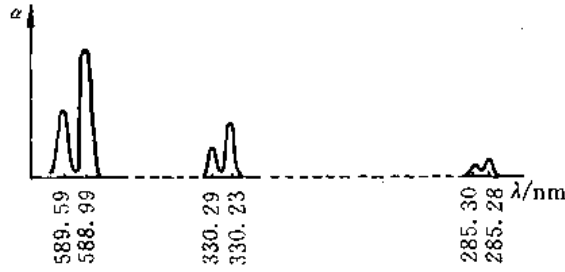


图 6-3 钠蒸气的几个二重吸收光谱

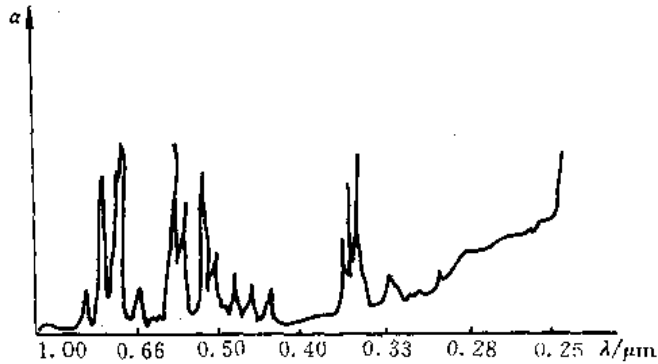


图 6-4 室温下 YAG 晶体的吸收光谱

对一种材料吸收光谱的测量,是了解该材料特性的重要手段。例如,地球大气对可见光、紫外光是透明的,但对红外光的某些波段有吸收,而对另外一些波段比较透明。透明的波段称为“大气窗口”,如图 6-5 所示,波段从 $1\ \mu\text{m}$ 到 $15\ \mu\text{m}$ 有七个“窗口”。充分地研究大气的光学性质与“窗口”的关系,有助于红外导航、跟踪等工作的进行。又如,太阳内

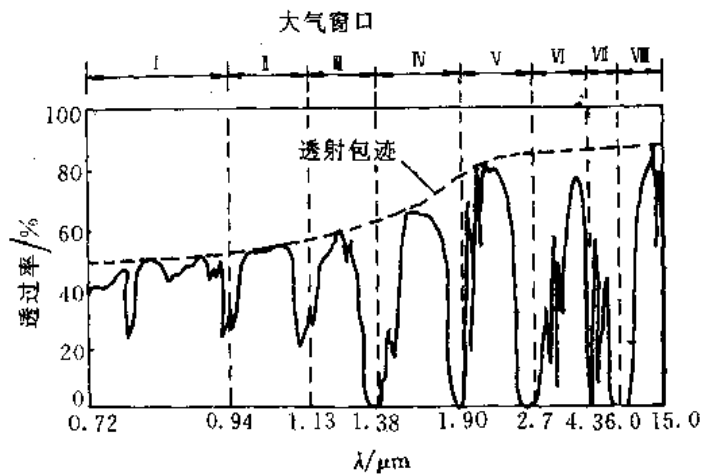


图 6-5 大气透过率及大气窗口

部发射连续光谱，由于太阳四周大气中的不同元素吸收不同波长的辐射，因而在连续光谱的背景上呈现出一条条黑的吸收线，如图 6-6 所示。夫朗和费首先发现，并以字母标志了这些主要的吸收线，它们的波长及太阳大气中存在的相应吸收元素，如表 6-2 所示。

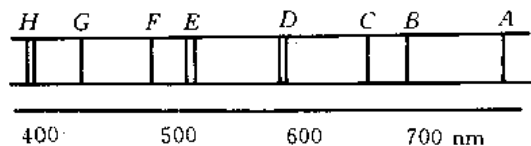


图 6-6 大气吸收线

表 6-2 大气吸收线的波长及相应的吸收元素

符号	波长/nm	吸收元素	符号	波长/nm	吸收元素
A	759.4~762.1	O	E ₁	518.362	Mg
B	636.8~688.4	O	F	486.133	H
C	656.282	H	G	430.791	Fe
D ₁	589.592	Na	G	430.774	Ca
D ₂	588.995	Na		466.273	Ca
D ₃	587.552	He	H	396.849	Ca
E ₂	526.954	Fe	K	393.368	Ca

6.3 光的色散

介质中的光速(或折射率)随光波波长变化的现象叫光的色散现象。由理论分析，光的色散可以通过介质折射率的频率特性描述。

观察色散现象的最简单方法是利用棱镜的折射。图 6-7 示出了观察色散的交叉棱镜法实验装置：三棱镜 P_1 、 P_2 的折射棱互相垂直，狭缝 M 平行于 P_1 的折射棱。通过狭缝 M

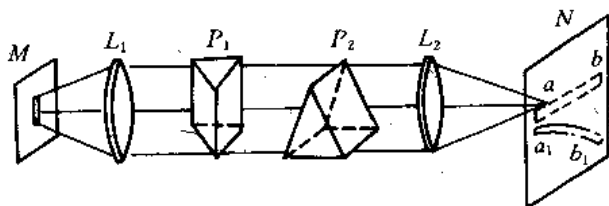


图 6-7 观察色散的交叉棱镜法

的白光经透镜 L_1 后，成为平行光，该平行光经 P_1 、 P_2 及 L_2 ，会聚于屏 N 上。如果没有棱镜 P_2 ，由于 P_1 棱镜的色散所引起的分光作用，在光屏上将得到水平方向的连续光谱 ab 。如果放置棱镜 P_2 ，则由 P_2 的分光作用，使得通过 P_1 的每一条谱线都向下移动。若两个棱镜的材料相同，它们对于任一给定的波长谱线产生相同的偏向。因棱镜分光作用对长波长



光的偏向较小，使红光一端 a_1 下移最小，紫光一端 b_1 下移最大，结果整个光谱 a_1b_1 仍为一直线，但已与 ab 成倾斜角。如果两个棱镜的材料不同，则连续光谱 a_1b_1 将构成一条弯曲的彩色光带。

6.3.1 色散率

色散率 ν 是用来表征介质色散程度，即量度介质折射率随波长变化快慢的物理量。它定义为：波长差为 1 个单位的两种光折射率差，即

$$\nu = \frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} \quad (6-21)$$

对于透明区工作的介质，由于 n 随波长 λ 的变化很慢，可以用(6-21)式表示。对于 n 变化较快的区域，色散率定义为

$$\nu = \frac{dn}{d\lambda} \quad (6-22)$$

在实际工作中，选用光学材料时，应特别注意其色散的大小。例如，同样一块三棱镜，若用作分光元件，应采用色散大的材料(例如火石玻璃)，若用来改变光路方向，则需采用色散小的材料(例如冕玻璃)。表 6-3 列出了几种常用光学材料的折射率和色散率。

表 6-3 几种常用的光学材料的折射率和色散率

波长/nm	冕玻璃		钡火石		熔石英	
	n	$-dn/d\lambda$	n	$-dn/d\lambda$	n	$-dn/d\lambda$
656.3	1.524 41	35	1.588 48	38	1.456 40	27
643.9	1.524 90	36	1.588 96	39	1.456 74	28
589.0	1.527 04	43	1.591 44	50	1.458 45	35
533.8	1.529 89	58	1.594 63	68	1.460 67	45
508.6	1.531 46	66	1.596 44	78	1.461 91	52
486.1	1.533 03	78	1.598 25	89	1.463 18	60
434.0	1.537 90	112	1.603 67	123	1.466 90	84
398.8	1.542 45	139	1.608 70	172	1.470 30	112

在图 6-1 中，已经给出了色散曲线 $n \sim \omega$ 的变化形式。实际上，这种变化关系比较复杂，无法用一个简单的函数表示出来，而且这种变化关系因材料而异。因此，一般都是通过实验测定折射率 n 随波长的变化，并作成曲线，这种曲线就是色散曲线。其方法是，把待测材料作成三棱镜，放在分光计上，对不同波长的单色光测出其相应的偏向角，再算出折射率 n ，即可作出色散曲线。

下面详细介绍介质的色散特性：正常色散和反常色散。

6.3.2 正常色散与反常色散

1. 正常色散

折射率随着波长增加(或光频率的减少)而减小的色散叫正常色散。正如 6.1 节所指出

的，远离固有频率 ω_0 的区域为正常色散区。所有不带颜色的透明介质，在可见光区域内都表现为正常色散。图 6-8 给出了几种常用光学材料在可见光范围内的正常色散曲线，这些色散曲线的特点是：

- ① 波长愈短，折射率愈大；
- ② 波长愈短，折射率随波长的变化率愈大，即色散率 $|\nu|$ 愈大；
- ③ 波长一定时，折射率愈大的材料，其色散率也愈大。

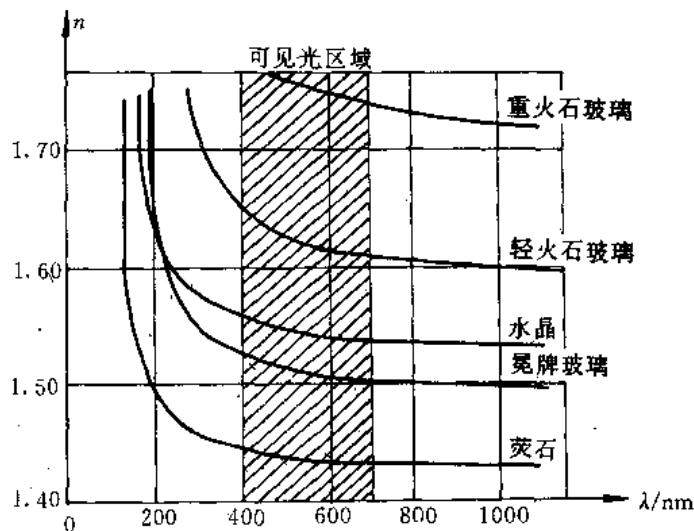


图 6-8 几种常用光学材料的正常色散曲线

描述介质的色散特性，除了采用色散曲线外，经常利用实验总结出来的经验公式。对于正常色散的经验公式是 1836 年由科希(Cauchy)提出来的：

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \quad (6-23)$$

式中， A 、 B 和 C 是由所研究的介质特性决定的常数。对于通常的光学材料，这些常数值可由手册查到。在实验上，可以利用三种不同波长测出三个 n 值，代入(6-23)式，然后联立求解三个方程，即可得到这三个常数值。当波长间隔不太大时，可只取(6-23)式的前两项，

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (6-24)$$

并且，根据色散率定义可得

$$\nu = \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} \quad (6-25)$$

由于 A 、 B 都为正值，所以当 λ 增加时，折射率 n 和色散率 ν 都减小。

2. 反常色散

1862 年，勒鲁(Le Roux)用充满碘蒸气的三棱镜观察到了紫光的折射率比红光的折射率小，由于这个现象与当时已观察到的正常色散现象相反，勒鲁称它为反常色散，该名字一直沿用至今。以后孔脱(Kundt)系统地研究了反常色散现象，发现反常色散与介质对光的选择吸收有密切联系。实际上，反常色散并不“反常”，它也是介质的一种普遍现象。正

如 6.1 节所指出的, 在固有频率 ω_0 附近的区域, 也即光的吸收区是反常色散区。

如果把色散曲线的测量向光吸收区延伸, 就会观察到这种“反常”色散。例如, 在石英色散曲线测量中, 如图 6-9 所示, 在可见光区域内, 测得曲线 PQR 段, 其结果与由科希公式计算的结果一致。当从 R 开始向红外波段延伸时, n 值的测量结果比计算结果下降要快得多。图中实线是测量结果, 虚线是计算结果。在吸收区, 由于光无法通过, n 值也就测不出来了。当

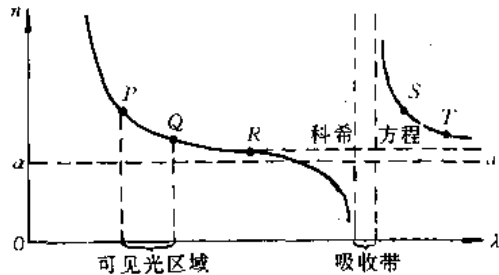


图 6-9 石英的色散曲线

入射光波长越过吸收区后, 光又可通过石英介质, 这时折射率数值很大, 而且随着波长的增加急剧下降。在远离吸收区时, n 值变化减慢, 这时又进入了另一个正常色散区, 即曲线中的 ST 段, 这时科希公式又适用了, 不过其常数 A 、 B 值要相应地变化。显然, 上述吸收区所对应的即是所谓的“反常”色散区。

介质的色散特性可以由 6.1 节介绍的电子论解释, 这个电子论既能说明正常色散, 又能说明反常色散, 而且还说明了反常色散的起因就是介质的吸收。

需要说明的是, 对于任何介质, 在一个较大的波段范围内都不只有一个吸收带, 而是有几个吸收带, 这一点已由它的吸收光谱所证实。从电子论的观点看, 就应该用电荷与质量分别为 e_j 和 m_j 的不同带电粒子谐振子与每个频率 ω_{0j} 相对应, 这时的复折射率 \bar{n} 的表达式应写为

$$\bar{n}^2 = 1 + \sum_j \frac{N_j e_j^2}{\epsilon_0 m_j} \frac{1}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) + i\gamma_j \omega} \quad (6-26)$$

其相应的色散曲线如图 6-10 所示, 它表示了介质在整个波段内的色散特性。

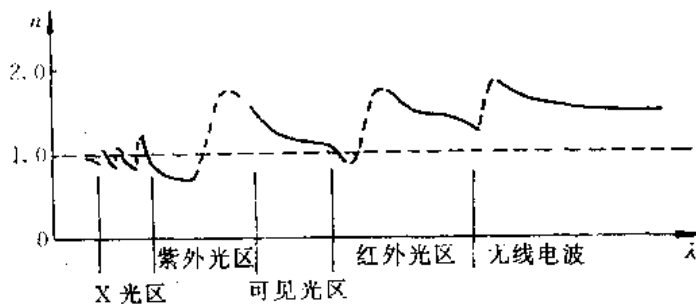


图 6-10 全波段的色散曲线

最后, 由图 6-10 可以看出, 在反常色散区的短波部分, 介质的折射率出现 $n < 1$ 的情况, 即介质中的光速大于真空光速, 这似乎是与相对论完全对立的结果, 因为根据相对论, 任何速度都不可能超过真空中的光速。实际上, 只要考虑到这里讨论的光速是光波的相速度, 就能够解释这种现象了。相对论中指出的任何速度都不可能超过真空中的光速, 是针对能量传播速度而言的, 而光的相速度是指光的等相位面的传播速度, 光在介质中的群速度才表征其能量传播速度。并且严格来说, 只有真空中(或色散小的区域)群速度才可能与能量传播速度视为一致, 在反常色散区内, 由于色散严重, 能量传播速度与群速度显著不同,



它永远小于真空中的光速。实际上，由于反常色散区的严重色散，不同波长的单色光在传播中弥散严重，群速度已不再具有实际意义了。

6.4 光的散射

6.4.1 光的散射现象

当光束通过均匀的透明介质时，除传播方向外，是看不到光的。而当光束通过混浊的液体或穿过灰尘弥漫的空间时，就可以在侧面看到光束的轨迹，即在光线传播方向以外能够接收到光能。这种光束通过不均匀介质所产生的偏离原来传播方向，向四周散射的现象，就是光的散射。所谓介质不均匀，指的是气体中有随机运动的分子、原子或烟雾、尘埃，液体中混入小微粒，晶体中存在缺陷等。

由于光的散射是将光能散射到其它方向上，而光的吸收则是将光能转化为其它形式的能量，所以从本质上说二者不同，但是在实际测量时，很难区分它们对透射光强的影响。因此，在实际工作上通常都将这两个因素的影响考虑在一起，将透射光强表示为

$$I = I_0 e^{-(K+\alpha)L} = I_0 e^{-\alpha L} \quad (6-27)$$

式中， h 为散射系数， K 为吸收系数， α 为衰减系数，并且，在实际测量中得到的都是 α 。

通常，根据散射光的波矢 k 和波长的变化与否，将散射分为两大类：一类散射是散射光波矢 k 变化，但波长不变化，属于这种散射的有瑞利散射，米氏(Mie)散射和分子散射；另一类是散射光波矢 k 和波长均变化，属于这种散射的有喇曼(Raman)散射，布里渊(Brillouin)散射等。

由于光的散射现象涉及面广，理论分析复杂，许多现象必须采用量子理论分析，所以在这里仅简单介绍瑞利散射、米氏散射、分子散射和喇曼散射的基本特性和结论。

6.4.2 瑞利散射

有些光学不均匀性十分显著的介质能够产生强烈的散射现象，这类介质一般称为“浑浊介质”，它是指在一种介质中悬浮有另一种介质，例如含有烟、雾、水滴的大气，乳状胶液、胶状溶液等。

亨达尔(Tyndell)等人最早对浑浊介质的散射进行了大量的实验研究，尤其是微粒线度比光波长小，即不大于 $(1/5 \sim 1/10)\lambda$ 的浑浊介质，并且从实验上总结出了一些规律，因此，这一类现象叫亨达尔效应。这些规律其后为瑞利在理论上说明，所以又叫瑞利散射。

通过大量的实验研究表明，瑞利散射的主要特点是：

① 散射光强度与入射光波长的四次方成反比，即

$$I(\theta) \propto \frac{1}{\lambda^4} \quad (6-28)$$

式中， $I(\theta)$ 为相应于某一观察方向(与入射光方向成 θ 角)的散射光强度。该式说明，光波长愈短，其散射光强度愈大，由此可以说明许多自然现象。

众所周知，整个天空之所以呈现光亮，是由于大气对太阳光的散射，如果没有大气层，白昼的天空也将是一片漆黑。那么，天空为什么呈现蓝色呢？由瑞利散射定律可以看出，

在由大气散射的太阳光中，短波光占优势，例如，红光波长($\lambda=0.72\ \mu\text{m}$)为紫光波长($\lambda=0.4\ \mu\text{m}$)的1.8倍，因此紫光散射强度约为红光的 $(1.8)^4\approx 10$ 倍。所以，太阳散射光在大气层内层，蓝色的成分比红色多，使天空呈蔚蓝色。另外，为什么正午的太阳基本上呈白色，而旭日和夕阳却呈红色？如图6-11所示，正午太阳直射，穿过大气层厚度最小，阳光中被散射掉的短波成分不太多，因此垂直透过大气层后的太阳光基本上呈白色或略带黄橙色。早晚的阳光斜射，穿过大气层的厚度比正午时厚得多，被大气散射掉的短波成分也多得多，仅剩下长波成分透过大气到达观察者，所以旭日和夕阳呈红色。

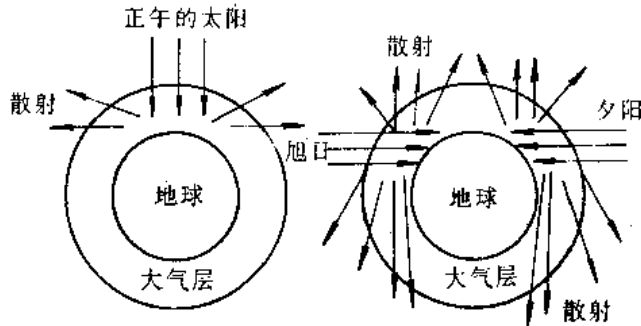


图 6-11 太阳的颜色

因为红光透过散射物的穿透力比蓝光强，所以在拍摄薄雾景色时，可在照相机物镜前加上红色滤光片以获得更清晰的照片。红外线穿透力比可见光强，常被用于远距离照相或遥感技术。

② 散射光强度随观察方向变化。自然光入射时，散射光强 $I(\theta)$ 与 $(1 + \cos^2\theta)$ 成正比。散射光强的角分布如图 6-12 所示。

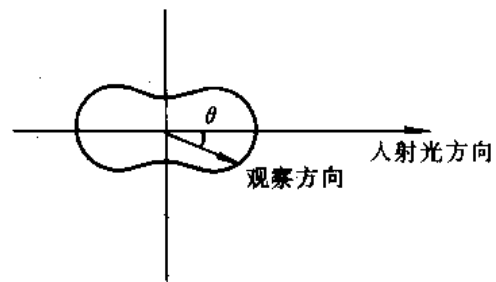


图 6-12 散射光强度随 θ 角的变化关系

③ 散射光是偏振光，不论入射光是自然光还是偏振光都是这样，该偏振光的偏振度与观察方向有关。

瑞利散射光的光强度角分布和偏振特性起因于散射光是横电磁波，可简单分析如下：

如图 6-13 所示，自然光沿 x 方向入射到介质的带电微粒 e 上，使其作受迫振动。由于自然光可以分解为两个振幅相等、振动方向互相垂直、无固定相位关系的光振动，所以图中的入射光可分解为沿 y 方向和 z 方向的两个光振动，其振幅相等， $A_y = A_z = A_0$ 。因此，带电微粒 e 的受迫振动方向以及因受迫振动在 e 点辐射的球面波光振动方向，都沿着 y 、 z 方向。由于光波是横电磁波，光振动方向总是垂直于传播方向，所以，任意散射光的光振动方向都与其传播方向垂直，而振幅则是 e 点处振幅在该散射光振动方向上的投影。假设考察位于 xey 面内的 P 点，散射光方向 eP 与入射光方向(x)成 θ 角，则其两个光振动分量(见图 6-13、图 6-14)的振幅分别为 $A'_z = A_z = A_0$ 和 $A'_y = A_y \cos\theta = A_0 \cos\theta$ ，散射光强度 $I(\theta)$ 为

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I'_z + I'_y = A_0^2(1 + \cos^2\theta) \\ &= I_0(1 + \cos^2\theta) \end{aligned} \quad (6-29)$$

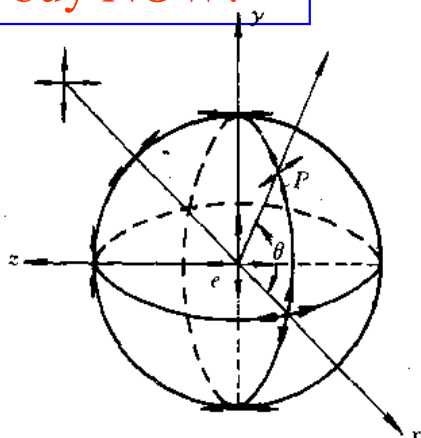


图 6-13 散射光的偏振态

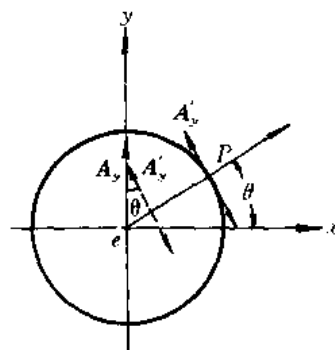


图 6-14 散射光的振幅

由于体系是以入射光方向为轴旋转对称的，所以散射光强度的角分布是图 6-12 所示的、以入射光方向为轴的旋转面。

进一步，由于散射光两个振动分量的大小与散射方向有关，所以散射光的偏振态随散射方向不同而异。如图 6-13 所示，沿着入射光方向($\theta=0$)或逆着入射光方向($\theta=\pi$)，散射光为自然光；在垂直入射光方向的 y 轴和 z 轴上，散射光为线偏振光；其余方向上的散射光，均为部分偏振光。

如果介质的散射分子是各向异性的，由于电极化矢量一般与入射光电场矢量方向不相同，使情况变得很复杂。例如，当线偏振光照射某些气体或液体，从侧向观察时，散射光变成部分偏振光，这种现象称为退偏振。若以 I_x 和 I_y 表示散射光沿 x 轴和 y 轴方向振动的光强度，则沿 z 向观察到的部分偏振光的偏振度为

$$P = \left| \frac{I_y - I_x}{I_y + I_x} \right| \quad (6-30)$$

为了表征各向异性分子退化侧向散射光偏振度的程度，定义退偏振度 Δ 为

$$\Delta = 1 - P \quad (6-31)$$

退偏振度与分子的性质有关，例如 H_2 ， $\Delta=1\%$ ； N_2 ， $\Delta=4\%$ ； CS_2 蒸气， $\Delta=14\%$ ； CO_2 ： $\Delta=7\%$ 。因此，可以通过测量退偏振度，判断分子各向异性程度及分子结构。

瑞利对上述散射现象进行了理论分析。按照电子论的观点，在入射光的作用下，原子、分子作受迫振动，并辐射次波，这些次波与入射波叠加后的合成波就是介质中传播的折射波。对于光学均匀介质，这些次波是相干的，其干涉的结果，只有沿折射光方向的合成波才加强，其余方向皆因干涉而抵消，这就是光的折射。如果介质出现不均匀性，这些次波间的固定相位关系就会被破坏，因而也就破坏了合成波沿折射方向因干涉而加强的效果，在其它方向上也会有光传播，这就是散射。瑞利提出，如果浑浊介质的悬浮微粒线度为波长的十分之一，不吸收光能，呈各向同性，则在入射光传播方向成 θ 角的方向上，单位介质中的散射光强度为

$$I(\theta) = \alpha \frac{N_0 V^2}{r^2 \lambda^4} I_i (1 + \cos^2 \theta) \quad (6-32)$$

式中, α 是表征浑浊介质光学性质非均匀程度的因子, 与悬浮微粒的折射率 n_2 和均匀介质的折射率 n_1 有关; 若 $n_1 = n_2$, 则 $\alpha = 0$, 否则, $\alpha \neq 0$; N_0 为单位体积介质中悬浮微粒的数目; V 为一个悬浮微粒的体积; r 为散射微粒到观察点的距离; λ 为光的波长; I_i 为入射光强度。由该式可见, 在其它条件固定的情况下, 散射光强与波长的四次方成反比:

$$I(\theta) \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

这就是瑞利散射定律, 其瑞利散射光强的百分比与 $(1 + \cos^2\theta)$ 成正比。这些结论与实验结果完全一致。

6.4.3 米氏散射

当散射粒子的尺寸接近或大于波长时, 其散射规律与瑞利散射不同。这种大粒子散射的理论, 目前还很不完善, 只是对球形导电粒子(金属的胶体溶液)所引起的光散射, 米氏进行了较全面的研究, 并在 1908 年提出了悬浮微粒线度可与入射光波长相比拟时的散射理论。因此, 目前关于大粒子的散射, 称为米氏散射。

米氏散射的主要特点是:

- ① 散射光强与偏振特性随散射粒子的尺寸变化。
- ② 散射光强随波长的变化规律是与波长 λ 的较低幂次成反比, 即

$$I(\theta) \propto \frac{1}{\lambda^n} \quad (6-33)$$

其中, $n=1, 2, 3$ 。 n 的具体取值取决于微粒尺寸。

③ 散射光的偏振度随 r/λ 的增加而减小, 这里 r 是散射粒子的线度, λ 是入射光波长。

④ 当散射粒子的线度与光波长相近时, 散射光强度对于光矢量振动平面的对称性被破坏, 随着悬浮微粒线度的增大, 沿入射光方向的散射光强将大于逆入射光方向的散射光强。当微粒线度约为 $1/4$ 波长时, 散射光强角分布如图 6-15(a)所示, 此时 $I(\theta)$ 在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处的差别尚不很明显。当微粒线度继续增大时, 在 $\theta=0$ 方向的散射光强明显占优势, 并产生一系列次极大值, 如图 6-15(b)所示。

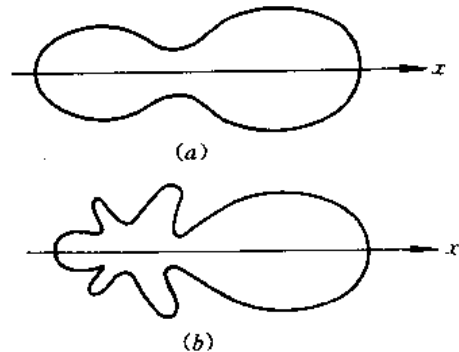


图 6-15 米氏散射光强的角分布

利用米氏散射也可以解释许多自然现象。例如, 蓝天中飘浮着白云, 是因为组成白云的小水滴线度接近或大于可见光波长, 可见光在小水滴上产生的散射属于米氏散射, 其散射光强与光波长关系不大, 所以云雾呈现白色。

6.4.4 分子散射

如前所述, 光在浑浊介质中传播时, 由于介质光学性质的不均匀性, 将产生散射, 这就是悬浮微粒的散射。其中, 当悬浮微粒的线度小于 $1/10$ 波长时, 称为瑞利散射; 当悬浮微粒的线度接近或大于波长时, 称为米氏散射。实际上, 还有另一类散射, 这就是在纯净

介质中，或因分子热运动引起密度起伏，或因分子各向异性引起分子取向起伏，或因溶液中浓度起伏引起介质光学性质的非均匀所产生光的散射，称为分子散射。在临界点时，气体密度起伏很大，可以观察到明显的分子散射，这种现象称为临界乳光。

通常，纯净介质中由于分子热运动产生的密度起伏所引起折射率不均匀区域的线度比可见光波长小得多，所以分子散射中，散射光强与散射角的关系与瑞利散射相同。例如，理想气体对自然光的分子散射光强为

$$I(\theta) = \frac{2\pi^2(n-1)^2}{r^2 N_0 \lambda^4} I_i (1 + \cos^2 \theta) \quad (6-34)$$

式中， n 为气体折射率， N_0 为单位体积气体中的分子数目， r 为散射点到观察点的距离， I_i 为入射光强度。由上式可见，对于分子散射仍有

$$I(\theta) \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

关系。由分子各向异性起伏产生的分子散射光强度，比密度起伏产生的分子散射光强度还要弱得多。

6.4.5 喇曼散射

一般情况下，一束准单色光被介质散射时，散射光和入射光是同一频率。但是，当入射光足够强时，就能够观察到很弱的附加分量旁带，即出现新频率分量的散射光。喇曼散射就是散射光的方向和波长相对入射光均发生变化的一种散射。

1928年，印度科学家喇曼和苏联科学家曼杰利斯塔姆(Мандельштам)几乎同时分别在研究液体和晶体散射时，发现了散射光中除有与入射光频率 ν_0 相同的瑞利散射线外，在其两侧还伴有频率为 $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ 的散射线存在。如果如图 6-16(a) 所示，当用单色性较高的准单色光源照射某种气体、液体或透明晶体，在入射光的垂直方向上用光谱仪摄取散射光，就会观察到上述散射，这种散射现象就是喇曼散射。

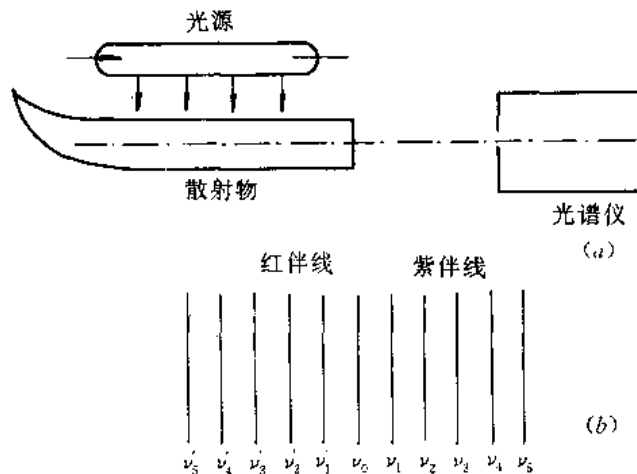


图 6-16 观察喇曼散射的装置示意图

喇曼散射的特点是：

- ① 在每一条原始的入射光谱线旁边都伴有散射线(图 6-16(b))，在原始光谱线的长



波长方向的散射谱线称为红伴线或斯托克斯(Stokes)线,在短波长方向上的散射线称为紫伴线或反斯托克斯线,它们各自和原始光的频率差相同,只是反斯托克斯线相对斯托克斯线出现得少而弱。

② 这些频率差的数值与入射光波长无关,只与散射介质有关。

③ 每种散射介质有它自己的一套频率差 $\Delta\nu_1 = \nu_0 - \nu_1$, $\Delta\nu_2 = \nu_0 - \nu_2$, $\Delta\nu_3 = \nu_0 - \nu_3 \dots$, 其中有些和红外吸收的频率相等,它们表征了散射介质的分子振动频率。

从经典电磁理论的观点看,分子在光的作用下发生极化,极化率的大小因分子热运动产生变化,引起介质折射率的起伏,使光学均匀性受到破坏,从而产生光的散射。由于散射光的频率是入射光频率 ν_0 和分子振动固有频率的联合,所以喇曼散射又叫联合散射。

设入射光电场为

$$E = E_0 \cos 2\pi\nu_0 t \quad (6-35)$$

分子因电场作用产生的感应电偶极矩为

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (6-36)$$

式中, χ 为分子极化率。若 χ 为不随时间变化的常数,则 P 以入射光频率 ν_0 作周期性变化,由此得到的散射光频率也为 ν_0 , 这就是瑞利散射。若分子以固有频率 ν 振动,则分子极化率不再为常数,也随 ν 作周期变化,可表示为

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 \cos 2\pi\nu t \quad (6-37)$$

式中, χ_0 为分子静止时的极化率; χ_1 为相应于分子振动所引起的变化极化率的振幅。将此式代入(6-36)式,得

$$\begin{aligned} P &= \epsilon_0 \chi_0 E_0 \cos 2\pi\nu_0 t + \epsilon_0 \chi_1 E_0 \cos 2\pi\nu_0 t \cos 2\pi\nu t \\ &= \epsilon_0 \chi_0 E_0 \cos 2\pi\nu_0 t + \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_1 E_0 [\cos 2\pi(\nu_0 + \nu)t + \cos 2\pi(\nu_0 - \nu)t] \end{aligned} \quad (6-38)$$

上式表明,感应电偶极矩 P 的频率有三种: ν_0 , $\nu_0 \pm \nu$, 所以散射光的频率也有三种。频率为 ν_0 的谱线为瑞利散射线;频率为 $\nu_0 - \nu$ 的谱线称为喇曼红伴线,又称为斯托克斯线;频率为 $\nu_0 + \nu$ 的谱线称为喇曼紫伴线,又称反斯托克斯线。

若分子的固有频率不只一个,有 ν_1, ν_2, \dots , 则喇曼散射线中也将产生频率为 $\nu_0 \pm \nu_1, \nu_0 \pm \nu_2, \nu_0 \pm \nu_3$ 等谱线。实验发现,反斯托克斯线出现得少,且强度很弱,利用经典电子理论无法解释这种现象,这也正是喇曼散射经典理论的不完善之处,只有量子理论能对喇曼散射作出圆满的解释。

由于喇曼散射光的频率与分子的振动频率有关,所以喇曼散射是研究分子结构的重要手段,利用这种方法可以确定分子的固有频率,研究分子对称性及分子动力学等问题。分子光谱属于红外波段,一般都采用红外吸收法进行研究。而利用喇曼散射法的优点是将分子光谱转移到可见光范围进行观察、研究,可与红外吸收法互相补充。

随着激光的出现,利用激光器作光源进行的喇曼散射光谱研究,由于其喇曼散射谱中的瑞利线很细,其两侧频率差很小的喇曼散射线也清晰可见,因此,使得分子光谱的研究更加精密。特别是当激光强度增大到一定程度时,出现受激喇曼散射效应,而由于受激喇曼散射光具有很高的空间相干性和时间相干性,强度也大得多,所以在研究生物分子结构,测量大气污染等领域内获得了广泛的应用。相对于这种受激喇曼散射而言,通常将上述的喇曼散射叫自发喇曼散射。

例 题

例 6-1 某种玻璃的吸收系数为 10^{-2}cm^{-1} ，空气的吸收系数为 10^{-5}cm^{-1} 。问 1 cm 厚的玻璃所吸收的光，相当于多厚的空气层所吸收的光。

解：由朗伯定律知道，经过长度为 l 的介质所吸收的光强为

$$I_0 - I = I_0(1 - e^{-Kl})$$

同样强度的光通过不同的介质，要产生相同的吸收，应满足条件

$$I - e^{-Kl} = 1 - e^{-K'l'}$$

或

$$Kl = K'l'$$

式中， K 、 K' 、 l 、 l' 分别为玻璃和空气的吸收系数和厚度。故有

$$l' = \frac{Kl}{K'} = \frac{10^{-2} \times 1}{10^{-5}} = 10^3 \text{ cm} = 10 \text{ m}$$

即 1 cm 厚的玻璃所吸收的光能，相当于 10 m 厚的空气层所吸收的光能。

例 6-2 某种玻璃对 $\lambda=0.4 \mu\text{m}$ 的光折射率 $n=1.63$ ，对 $\lambda=0.5 \mu\text{m}$ 的光折射率 $n=1.58$ 。假定科希公式为 $n=A+B/\lambda^2$ ，试求这种玻璃对 $\lambda=0.6 \mu\text{m}$ 光的色散。

解：首先将题中所给数值代入科希公式，可得

$$1.63 = A + \frac{B}{(4 \times 10^{-5})^2}$$

$$1.58 = A + \frac{B}{(5 \times 10^{-5})^2}$$

求解该二式，得

$$B = 2.22 \times 10^{-10} \text{ cm}^2$$

因此，在 $\lambda=0.6 \mu\text{m}$ 处的色散为

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} = -\frac{2 \times 2.22 \times 10^{-10}}{(6 \times 10^{-5})^3} = -2.06 \times 10^3 \text{ cm}^{-1}$$

例 6-3 由 $A=1.53974$ 、 $B=0.45628 \times 10^{-10} \text{ cm}^2$ 的玻璃构成的折射棱角为 50° 的棱镜，当棱镜的放置使它对 $0.55 \mu\text{m}$ 的波长处于最小偏向角时，计算它的角色散率。

解：第 7 章将给出顶角为 α 的棱镜，最小偏向角 δ_m 满足(7-62)式，即

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta_m)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

假设波长为 λ 与 $\lambda+\Delta\lambda$ 两条谱线的偏向角分别为 δ 与 $\delta+\Delta\delta$ ，则其角距离可用角色散率 D 表示，

$$D = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta\lambda} = \frac{d\delta}{d\lambda}$$

在最小偏向角附近的角色散率为

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{d\delta_m}{dn} \frac{dn}{d\lambda}$$



$$= \frac{1}{\frac{dn}{d\delta_m}} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}$$

由科希公式得折射率为

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} = 1.55482$$

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} = -5.4849 \times 10^2 \text{ cm}^{-1}$$

将 n 和 $dn/d\lambda$ 的数值代入前式, 得

$$D = \frac{2 \sin \frac{50^\circ}{2}}{\sqrt{1 - (1.55482)^2 \sin^2(\frac{50^\circ}{2})}} \times (-5.4849 \times 10^2)$$

$$= -6.1502 \times 10^2 \text{ rad/cm}$$

例 6-4 假定在白光中, 波长为 $\lambda_1 = 0.6 \mu\text{m}$ 的红光和波长为 $\lambda_2 = 0.45 \mu\text{m}$ 的蓝光的强度相等, 问散射光中两者比例是多少。

解: 按瑞利定律, 散射光强度与波长的四次方成反比, 故

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4} = \frac{(0.45)^4}{(0.6)^4} = 0.32$$

因此观察白光散射时, 可看到蓝青色。

(习) (题)

6-1 有一均匀介质, 其吸收系数 $K = 0.32 \text{ cm}^{-1}$, 求出射光强为入射光强的 0.1、0.2、0.5 时的介质厚度。

6-2 一长为 3.50 m 的玻璃管, 内盛标准状态下的某种气体。若其吸收系数为 0.1650 m^{-1} , 求激光透过此玻璃管后的相对强度。

6-3 一个 60° 的棱镜由某种玻璃制成, 其色散特性可用科希公式中的常数 $A = 1.416$, $B = 1.72 \times 10^{-10} \text{ cm}^2$ 表示, 棱镜的放置使它对 $0.6 \mu\text{m}$ 波长的光产生最小偏向角, 这个棱镜的角色散率 ($\text{rad}/\mu\text{m}$) 为多大?

6-4 光学玻璃对水银蓝光 $0.4358 \mu\text{m}$ 和水银绿光 $0.5461 \mu\text{m}$ 的折射率分别为 $n = 1.65250$ 和 1.62450 。用科希公式计算:

- (1) 此玻璃的 A 和 B ;
- (2) 它对钠黄光 $0.5890 \mu\text{m}$ 的折射率;
- (3) 在此黄光处的色散。

6-5 已知熔石英的色散公式为

$$n = A + BL + CL^2 + DL^3 + EL^4$$

其中, $L = 1/(\lambda^2 - 0.028)$, $A = 1.44902$, $B = 0.004604$, $C = -0.000381$, $D = -0.0025268$, $E = -0.00007722$, 波长的单位是微米。试计算 $\lambda_1 = 0.5893 \mu\text{m}$ 和 $\lambda_2 = 1 \mu\text{m}$ 两种波长的折射率。



6-6 同时考虑吸收和散射损耗时,透射光强表示式为 $I = I_0 \exp[-(K+h)l]$ 。若某介质的散射系数等于吸收系数的 $1/2$,光通过一定厚度的这种介质,只透过 20% 的光强。现若不考虑散射,其透射光强可增加多少?

6-7 一长为 35 cm 的玻璃管,由于管内细微烟粒的散射作用,使透过光强只为入射光强的 65% 。待烟粒沉淀后,透过光强增为入射光强的 88% 。试求该管对光的散射系数和吸收系数(假设烟粒对光只有散射而无吸收)。

6-8 太阳光束由小孔射入暗室,室内的人沿着与光束垂直及成 45° 的方向观察此光束时,见到由于瑞利散射所形成的光强之比等于多少?

6-9 一束光通过液体,用尼科尔检偏器正对这束光进行观察。当偏振轴竖直时,光强达到最大值;当偏振轴水平时,光强为零。再从侧面观察散射光,当偏振轴为竖直和水平两个位置时,光强之比为 $20:1$,计算散射光的退偏程度。

6-10 苯(C_6H_6)的喇曼散射中较强的谱线与入射光的波数差为 $607, 992, 1178, 1568, 3047, 3062\text{ cm}^{-1}$ 。今以氩离子激光 $\lambda = 0.4880\text{ }\mu\text{m}$ 为入射光,计算各斯托克斯及反斯托克斯线的波长。



第 7 章 几何光学基础

前面我们指出了光是一种光频电磁波，并且从光的电磁理论出发，讨论了光在介质中的传输特性，光与物质的相互作用等特性。

在许多实际的光学工程应用中，由于光的频率很高(达 10^{14} Hz)，波长很短(达 10^{-7} m)，光的传输特性完全可以利用波长趋于零的极限情况来近似，这就是几何光学处理光传输特性的基本思想。因此，可以认为几何光学是波动光学在光波长趋于零时的极限。

从历史上看，几何光学是根据人们在实践中总结出来的基本定律建立和发展起来的，其基本处理方法是把光在均匀介质中的传播用几何上的直线表示，并称之为“光线”，撇开光的本性，不考虑光与物质的相互作用，用光线概念描述诸如在光学系统中的传播和成像规律。这种方法处理问题简单明了，对于大多数光学工程技术问题，应用几何光学理论都可以得到较满意的近似结果。当然，在波长的效应不能忽略的情况下，几何光学可以看作是波动光学的一级近似，然后根据波动理论进行修正。

这一章主要介绍几何光学的基础知识，有关利用几何光学理论研究光学仪器成像的原理，将在其后两章讨论。

7.1 几何光学的基本定律

7.1.1 波面、光线和光束

如前所述，光是一种电磁波，任何一个发光体都是一个波源。光的传播过程也正是电磁波的传播过程。光波是横波，在各向同性介质中，其电场的振动方向与传播方向垂直，振动相位相同的各点在某时刻所形成的曲面称为波面。波面可以是平面，球面或其它曲面。

当发光体(光源)的大小和其辐射能的作用距离相比可略去不计时，该发光体称为发光点或称点光源。在几何光学中，发光点被抽象为一个既无体积又无大小的几何点，任何被成像的物体都是由无数个这样的发光点所组成。几何光学中的发光点只是一种假设，在自然界中是不存在的。

在几何光学中，光线被抽象为既无直径又无体积的几何线。它的方向代表光线的传播方向即光能的传播方向。同样，光线实际上是不存在的，因为它的能量密度为无穷大。但

是，利用它可以把光学中复杂的能量传输和光学成像问题归结为简单的几何运算问题，从而使所要处理的问题大为简化。

在各向同性介质中，光沿着波面的法线方向传播，可以认为光波波面法线就是几何光学中的光线，与波面对应的法线束称为光束。平面波对应于平行光束，球面波对应于会聚或发散光束，其光线既不相交于一点，又不平行所对应的光束称为像散光束，如图 7-1 所示。

几何光学中的传播规律和成像原理，是用光线的传播途径加以直观表示的，光线的这种传播途径称为光路。实际上，一个点光源发出的光线为无数条，不可能对每一条光线都求出其光路。几何光学的做法是从光束中取出一个适当的截面，求出其上的几条光线的光路，这种截面通常称为光束截面。

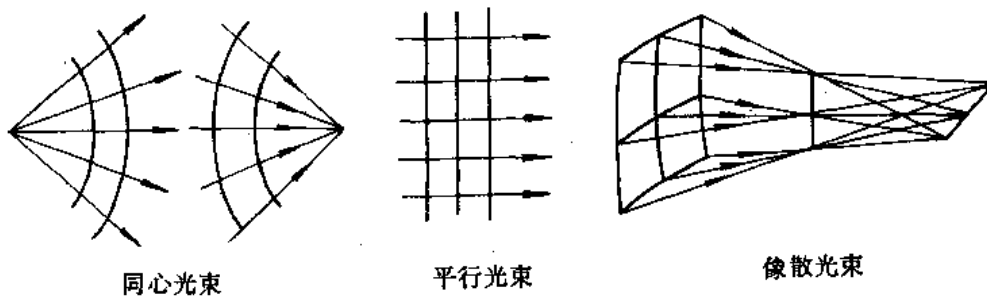


图 7-1 各种光束

7.1.2 几何光学的基本定律

几何光学理论以光的直线传播定律，光的独立传播定律，折射定律和反射定律为基础。

1. 光的直线传播定律

在各向同性的均匀介质中，光线按直线传播，这就是光的直线传播定律。这是一种常见的普遍规律。可用以很好地解释影子的形成、日蚀、月蚀等现象，当光路中放置很小的不透明的障碍物或小孔时，光的传播将偏离直线，这就是物理光学中所描述的光的衍射现象。可见，光的直线传播定律只有光在均匀介质中无阻拦地传播时才成立。

2. 光的独立传播定律

从不同光源发出的光线，以不同的方向通过介质某点时，各光线彼此互不影响，好像其它光线不存在似地独立传播，这就是光的独立传播定律。利用这条定律，可使我们对光线传播情况的研究大为简化，因为研究某一光线传播时，可不考虑其它光线的影响。

3. 光的折射定律和反射定律

当光在传播中遇到两种不同介质的光滑界面时，光线将发生折射和反射，其继续传播的规律遵循折射定律和反射定律。有关折射定律和反射定律的内容，已在第 1 章中详细讨论过，需要说明的是在几何光学应用中，必须要考虑角量的符号规定。

如图 7-2 所示， PQ 表示两种折射率分别为 n 和 n' 的光滑界面， AO 为入射光线， OC 为对应的折射光线， NN' 为界面上 O 点处的法线。按照角度符号法则的规定，入射角

$\angle AON$ 和折射角 $\angle CON$ 均应以锐角来量度, 由光线沿锐角转向法线, 顺时针转成的角为正, 反之为负。因此, 习惯上入射角和折射角分别以 I 和 I' 表示, 折射定律为

$$n \sin I = n' \sin I' \quad (7-1)$$

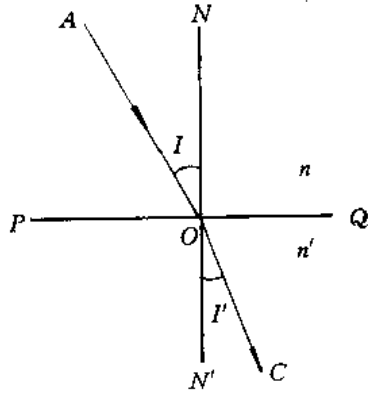


图 7-2 光的折射

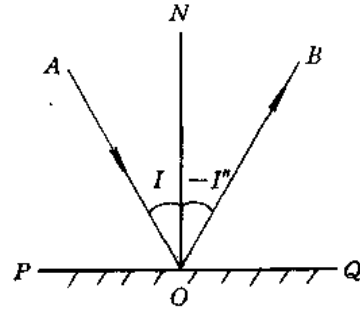


图 7-3 光的反射

如图 7-3 所示, PQ 为一光滑的反射界面, ON 是界面 O 点的法线, 入射光线为 AO , 相应的反射光线为 OB 。根据角度符号法则的规定, 入射角为 I , 反射角为 $-I'$, 反射定律为

$$I = -I' \quad (7-2)$$

如果在(7-1)式中, 令 $n' = -n$, 则得 $I' = -I$, 此即反射定律的形式。这表明, 反射定律可以看作是折射定律的特殊情况, 凡是由折射定律导得的所有适合于折射情况的公式, 只要令 $n' = -n$, 便可应用于反射的场合, 直接导出其相应的公式, 这在处理反射系统时有重要应用。

根据折射定律和反射定律, 可以说明光线的传播是可逆的。在上二图中, 当光线自 C 点或 B 点投射到界面 O 点时, 光线必沿 OA 方向射出, 这就是所谓“光路的可逆性”。

7.1.3 全反射现象

正如第 1 章的讨论, 当光线由光密介质进入光疏介质时, 在两种介质的光滑界面上会出现所谓的全反射现象。当入射角大于由两种介质折射率所决定的临界角时, 光线将完全被界面反射回来, 这就是全反射, 或称为完全内反射。

全反射优于一切镜面反射, 因为镜面的金属镀层对光有吸收作用, 而全反射在理论上可使入射光的全部能量反射回原介质, 所以全反射在光学仪器中有广泛的应用。例如, 在光学系统中, 经常利用全反射棱镜代替平面反射镜, 以减少光能的反射损失。

7.1.4 费马原理

光在均匀介质中传播, 遵循前述的几何光学的基本定律, 而研究光在非均匀介质中的传播问题, 更有普遍意义。光从一种介质的一点传播到另一种介质的一点所遵循的规律, 是由费马(Fermat)首先提出的, 称为费马原理。费马原理是从“光程”的角度来阐述光的传播规律的。

设在均匀介质中光的传播速度为 v ，若把 Δt 时间间隔内在该介质中所走过的几何路程记为 S ，则有

$$S = v \Delta t$$

若把这段时间间隔内光在真空中所走过的路程记为 L ，则有

$$L = c \Delta t = \frac{c}{v} v \Delta t = nS \quad (7-3)$$

其中， c 为真空中的光速； n 为介质的折射率。

光程定义为光在介质中经过的几何路程 S 和该介质折射率 n 的乘积，用字母 L 表示。可见，光在介质中的光程，即为光在该时间间隔内在真空中所传播的路程。

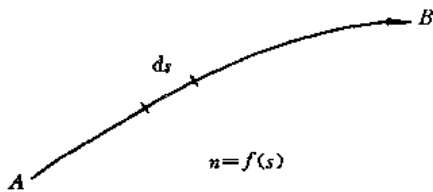


图 7-4 光在非均匀介质中的几何路程

如果介质是非均匀的，即介质的折射率 n 是几何路程 S 的函数，则光在该介质中所经过的几何路程不是直线而是曲线，如图 7-4 所示。这时，光程可用下式表示：

$$L = \int_A^B n(s) ds$$

式中， s 为路径的坐标参量； $n(s)$ 为路径 AB 上 s 点处的折射率。

费马原理指出：光线从 A 点到 B 点，是沿着光程为极值的路径传播的。也就是说，光由 A 点到 B 点的传播在几何方面存在着无数条可能的路径，每条路径都对应着一个光程值，光由 A 点传播到 B 点的实际光路包含在这些可能的路径之中。任何一条实际的光路，其光程都有一个共同的特点，即它均满足极值条件。亦即实际光路所对应的光程，或者是所有光程可能值中的极小值，或者是所有光程可能值中的极大值，或者是某一稳定值。若把任意一条几何上可能的路径记为 l ，则与 l 对应的光程 $L(l)$ 可用下列方程表示：

$$L(l) = \int_l n dl \quad (7-4)$$

对应不同的路径 l ，光程 $L(l)$ 可能取不同的值。如果广义地把路径 l 看作是自变量，则光程 $L(l)$ 可以视为是 l 的函数。这种形式函数取极值的条件为

$$\delta L(l) = \delta \int_l n dl = 0 \quad (7-5)$$

这就是费马原理的数学表达式。

利用费马原理可直接导出光的直线传播定律。这是因为两点间的路径以直线的长度为最短，故在均匀介质中直线所对应的光程为最小光程。

当光通过两种不同介质的分界面时，利用费马原理也可导出光的反射定律。为此只须证明图 7-5 中由 A 点经界面再回到 B 点的任何一条路径满足反射定律时光程为最小。

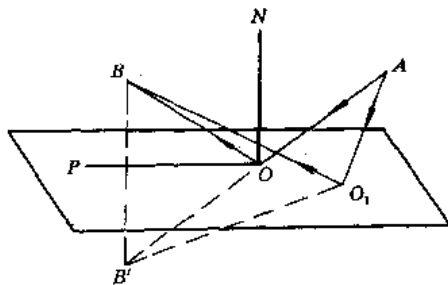


图 7-5 满足反射定律的路径之光程为最短

在图中，设 AOB 是满足反射定律的路径，若把 B 点关于反射面 PO 之对称点记为 B' ，则易证 A 、 O 、 B' 三点共线，且有

$$AO + OB = AO + OB' = AB'$$

又设 O_1 为界面上的任意点, 则有

$$AO_1 + O_1B = AO_1 + O_1B' > AB'$$

所以

$$AO_1 + O_1B > AO + BO$$

这就证明了在一切可能的经界面的折线路径中, 满足反射定律的路径之光程为最短。根据费马原理, 这条路径就是光由 A 点经界面再传播到 B 点的实际光路。

光的折射定律也可以直接从费马原理推导出来。为此只须证明图 7-6 中一切从 A 点穿过界面到 B 点的几何路径满足折射定律时光程为最小。

设任一条路径 AOB 之光程为 L_{AOB} , 则由图 7-6 得

$$L_{AOB} = nAO + n'OB = n\sqrt{y_1^2 + x^2} + n'\sqrt{y_2^2 + (z-x)^2}$$

如果 AOB 是光由 A 点传播到 B 点的实际光路, 则根据费马原理, 光程 L_{AOB} 必满足极值条件, 即有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}L_{AOB} &= n \frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} - n' \frac{z-x}{\sqrt{y_2^2 + (z-x)^2}} \\ &= n \sin I - n' \sin I' = 0 \end{aligned}$$

由此得

$$n \sin I = n' \sin I'$$

可见由费马原理决定的光路与由折射定律所决定的光路是一致的。

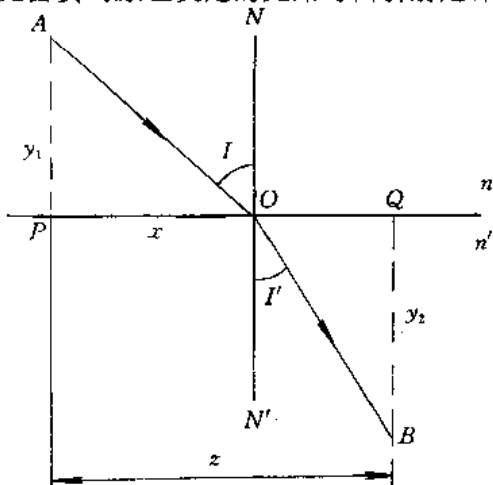


图 7-6 满足折射定律的路径之光程为最短

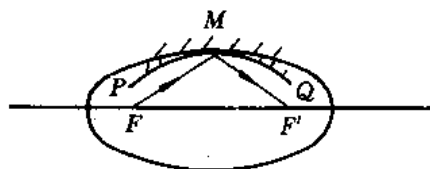


图 7-7 光程为稳定值和极大值例

上述讨论的光在均匀介质中的直线传播及在平面分界面上的反射和折射, 都是光程最短的例子。其实光线也可能按光程极大的路程传播, 或按某一稳定值的路程传播。如图 7-7 所示, 一个以 F 和 F' 为焦点的椭球反射面, 按其性质可知, 由 F 点发出的光线都被反射到 F' 点, 其光程都相等, 因为 $FMF' = FM + MF' = \text{常数}$ 。这是光程为稳定值的一个例子。

如有另一反射镜 PQ 和椭球面相切于 M 点, 镜上其余各点均在椭球内, 则对椭球的两个焦点 F 和 F' 来说, $(FM + MF')$ 对应于最大光程, 即光按光程极大的路程传播。

使用光学仪器，离不开物像的基本概念，物体通过光学系统成像，所成的像由人眼接收，这就是人们使用光学仪器的一般过程。

光学系统由一系列的光学零件所组成，常见的光学零件有：透镜、棱镜，平行平板和反射镜等，其截面如图 7-8 所示。

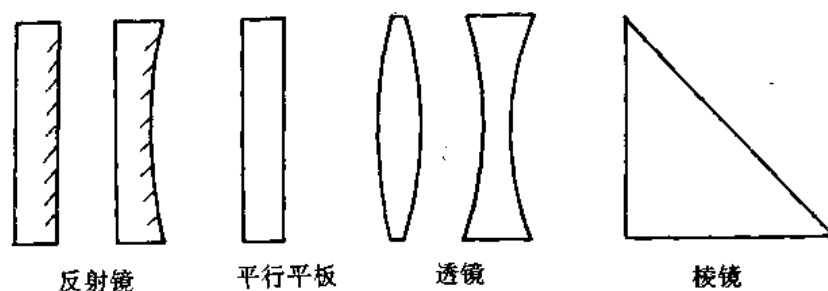


图 7-8 光学零件

光学系统一般是轴对称的，即有一条公共的轴线通过系统各表面的曲率中心，该轴线通常叫做光轴，这样的系统通常称为共轴光学系统。

透镜是光学仪器中最常用的光学零件，它是由两个曲面或一个曲面、一个平面所围成的透明体。由于非球面的加工和检验很困难，目前实际应用的透镜绝大多数是球面透镜。经过两球面中心的直线称为透镜的光轴。在由一个球面和一个平面组成的透镜中，其光轴是通过球面中心并垂直于平面的直线。光轴与透镜面的交点称为顶点。

透镜可分为正的和负的两大类。正透镜具有正的像方焦距，对光束起会聚作用。负透镜具有负的像方焦距，对光束起发散作用。各种正负透镜的形状如图 7-9 所示。忽略厚度的透镜称为薄透镜。



图 7-9 透镜

在几何光学中，物和像的概念是这样规定的：把光学系统之入射线会聚点的集合或入射线之延长线会聚点的集合，称为该系统的物；把相应之出射线会聚点的集合或出射线之延长线会聚点的集合，称为物对该系统所成的像。物可分为实物和虚物，若入射线真正地会交于一点则称为实物；若入射线不真正地会交于一点，只是其延长线交于同一点，则称之为虚物。像也可分为实像和虚像，若出射线真正地会交于一点则称为实像；若出射线不真正地会交于一点，只是其延长线交于同一点，则称之为虚像。

物和像的概念具有相对性，在图 7-10 所示的光学系统中， A' 点既是物点又是像点。对光组 I 来说， A 是物点 A' 是像点；对光组 II 来说， A' 是物点 A 是像点。通常，对某一光组来说，当物体的位置固定后，总可以在一个相应的位置上找到物体所成的像。这种物像

之间的对应关系在光学上称之为共轭。共轭的概念反映了物像之间的对应关系。

在阐明了物像概念后，引入物像空间的概念。物体所在的空间称为物空间，像所在的空间称为像空间。在某些情况下，物空间和像空间分居于光组的两侧；在另外一些情况下，物空间和像空间的一部分重合，如图 7-11 所示，物点 A 和像点 A' 同在透镜的左侧。

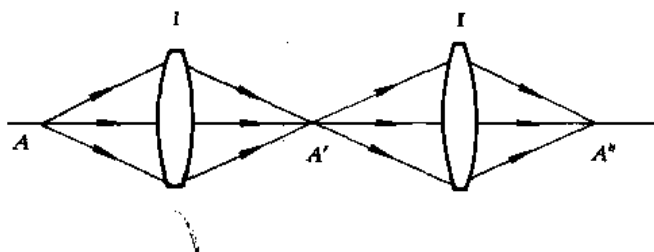


图 7-10 物像的相对性

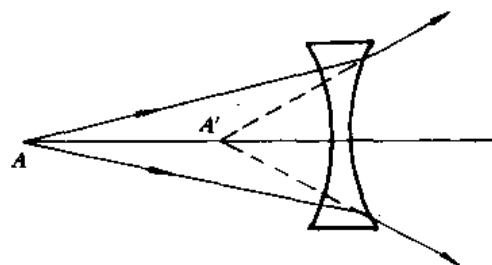


图 7-11 物像空间的重合

7.1.6 单个折射球面的折射

如果光学系统的所有界面均为球面，则称为球面系统。各球面球心位于一条直线上的球面系统，称为共轴球面系统。连接各球心的直线称为光轴。光轴与球面的交点称为顶点。

光线经过光学系统时是逐面进行折射的，光线光路计算也应是逐面进行。因此，首先对单个折射球面进行讨论，然后过渡到整个系统。单个折射球面不仅是一个简单的光学系统，而且是组成光学系统的基本元件。所以研究光线经单个球面的折射，是一般光学系统成像的基础。

1. 符号法则

如图 7-12 所示，球形折射面是折射率为 n 和 n' 两种介质的分界面， C 为球心， OC 为球面曲率半径，以 r 表示。顶点以 O 表示。

在包含光轴的平面（常称为子午面）内，入射到球面的光线，其位置可由两个参量来决定：一个是顶点 O 到光线与光轴的交点 A 的距离，以 L 表示，称为截距；另一个是入射光线与光轴的夹角 $\angle EAO$ ，以 U 表示，称为孔径角。光线 AE 经过球面折射以后，交光轴于 A' 点。光线 EA' 的确定也和 AE 相似，以相同字母表示两个参量，仅在字母右上角加“撇”以示区别，即 $L' = AO'$ 和 $U' = \angle EA'O$ ，也称为截距和孔径角。为了区别， L 和 U 称为物方截距和孔径角， L' 和 U' 称为像方截距和孔径角。

为了确切地描述光路的各种量值和光组的结构参量，并使以后导出的公式具有普遍适用性，必须对各种量值作符号上的规定。这就是几何光学中的符号法则。

1) 光路方向

规定光线从左到右的传播方向为正方向，即正向光路，反之为反向光路。

2) 线量

沿轴线量 凡由规定的原点（计算起点）到终点的方向与光线的传播方向相同者，取为正，反之为负。因此，沿轴线段以原点为起始点，向右为正，向左为负。规定曲率半径 r 和物方截距 L 、像方截距 L' 均以球面顶点为原点，球折射面之间的间隔以字母 d 表示，规定以前一球面顶点为原点。

垂轴线量 以光轴为准，在光轴之上为正，光轴之下为负。

3) 角量

一律以锐角来衡量，由规定的起始边沿顺时针转成者为正，逆时针转成者为负。

对光线与光轴的夹角 U 和 U' ，规定光轴为起始边，由光轴转向光线，顺时针为正，逆时针为负。

对光线和法线的夹角即入射角 I 和折射角 I' ，规定光线为起始边，由光线顺时针转到法线为正，反之为负。

对法线与光轴的夹角球心角 φ ，规定光轴为起始边，由光轴顺时针转到法线为正，反之为负。

图 7-12 中所示有关量均按上述规定标出。图中 L 、 y' 和 U 为负值，其余为正值。必须注意，几何图形上各量一律标注其绝对值，因此，对图中负量，必须在该量的字母前加一负号。

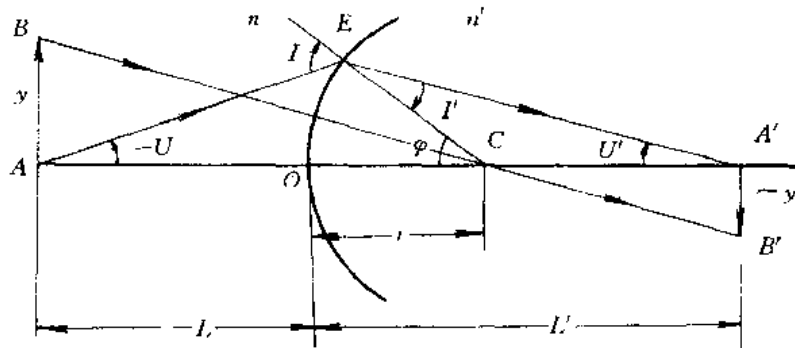


图 7-12 单个球面折射

还应指出，符号法则是人为规定的，不同的书上可能有所不同，对同一种情况只能使用同一规则，否则是不能得到正确计算结果的。

2. 单个折射球面的光路计算公式

光线的单个折射球面的光路计算，是指在给定单个折射球面的结构参量 n 、 n' 和 r ，由已知入射光线坐标 L 和 U ，计算折射后出射光线的坐标 L' 和 U' 。

如图 7-12 所示，在 $\triangle AEC$ 中，应用正弦定理有

$$\frac{\sin(-U)}{r} = \frac{\sin(180^\circ - I)}{r - L} = \frac{\sin I}{r - L}$$

或

$$\sin I = \frac{L - r}{r} \sin U \tag{7-6}$$

由折射定律得

$$\sin I' = \frac{n}{n'} \sin I \tag{7-7}$$

由图可知

$$\varphi = I + U = I' + U'$$

所以

$$U = I + U - I' \tag{7-8}$$

同样，在 $\triangle A'EC$ 中应用正弦定理有

$$\frac{\sin U}{r} = \frac{\sin I}{L' - r}$$

化简后得

$$L' = r + r \frac{\sin I}{\sin U} \quad (7-9)$$

(7-6)式~(7-9)式就是计算含轴面(子午面)内光线光路的基本公式,可由已知的 L 和 U 通过上列四式依次求出 U' 和 L' 。由于折射面对称于光轴,对于轴上点 A 发出的任一条光线,可以表示该光线绕轴一周所形成的锥面上全部光线的光路,显然这些光线在像方应交光轴于同一点。

由公式可知,当 L 为定值时, L' 是角 U 的函数。在图 7-13 中,若 A 为轴上物点,发出同心光束,由于各光线具有不同的 U 角值,所以光束经球面折射后,将有不同的 L' 值,也就是说,在像方的光束不和光轴交于一点,即失去了同心性。因此,当轴上点以宽光束经球面成像时,其像是不完善的,这种成像缺陷称为像差。

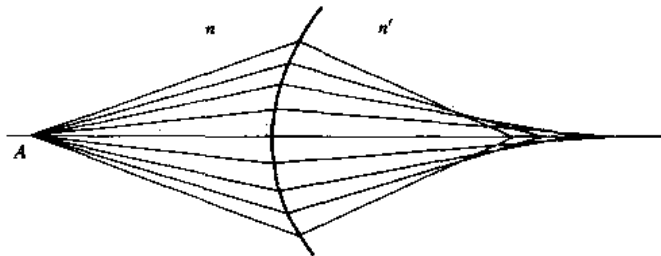


图 7-13 单个折射球面成不完善像

在利用上式对光路进行计算时,若物体位于物方光轴上无限远处,这时可认为由物体发出的光束是平行于光轴的平行光束,即 $L = -\infty, U = 0$,如图 7-14 所示。此时,不能

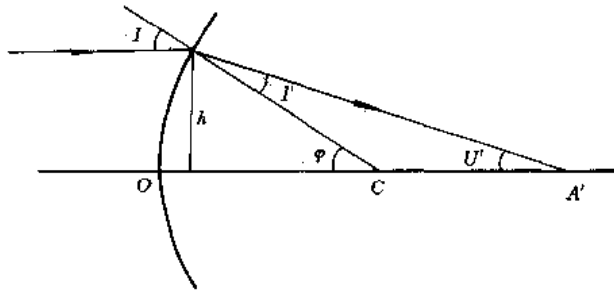


图 7-14 轴上无穷远点入射角的计算

用(7-6)式计算入射角 I ,而入射角应按下式计算

$$\sin I = \frac{h}{r} \quad (7-10)$$

h 为光线的入射高度。

为保证光路计算的准确性,下面导出计算大 L 公式的校对公式。

如图 7-15 所示,自顶点 O 作入射光线 AE 的垂线 OQ ,由直角三角形 OEQ 和 OAQ 得

$$OE = \frac{OQ}{\cos \angle QOE} = \frac{L \sin U}{\cos \angle QOE}$$

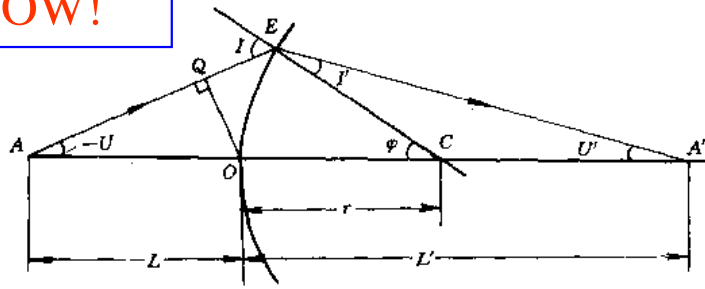


图 7-15 L 计算的校对公式用图

由于

$$\begin{aligned}
 \angle QOE &= \angle QOC - \angle EOC \\
 &= (90^\circ - U) - \left(90^\circ - \frac{I+U}{2} \right) \\
 &= \frac{I-U}{2}
 \end{aligned}$$

故得

$$OE = \frac{L \sin U}{\cos \frac{I-U}{2}}$$

同理, 在像方可得

$$OE = \frac{L' \sin U'}{\cos \frac{I'-U'}{2}}$$

因此有

$$L' = OE \frac{\cos \frac{I-U}{2}}{\sin U'} = \frac{L \sin U \cos \frac{I-U}{2}}{\sin U' \cos \frac{I'-U'}{2}} \quad (7-11)$$

上式即为校对公式。

3. 近轴光的光路计算公式

在图 7-12 中, 如果限制 U 角在一个很小的范围内, 即从 A 点发出的光线都离光轴很近, 这样的光线称为近轴光。由于 U 角很小, 其相应的 I 、 I' 、 U' 等也很小, 这时这些角的正弦值可以用弧度来代替, 用小写字母 u 、 i 、 i' 、 u' 来表示。近轴光的光路计算公式可直接由 (7-6) 式~(7-9) 式得到

$$\left. \begin{aligned}
 i &= \frac{l-r}{r} u \\
 i' &= \frac{n}{n'} i \\
 u' &= i + u - i' \\
 l' &= r + r \frac{i'}{u}
 \end{aligned} \right\} \quad (7-12)$$



当光线平行于光轴时, (7-10)式变为

$$i = \frac{h}{r} \quad (7-13)$$

由(7-12)式中可以看出, 当 u 角改变 k 倍时, i, i', u' 亦相应改变 k 倍, 而 l 表示式中的 i/u' 保持不变, 即 l 不随 u 角的改变而改变。即表明由物点发出的一束细光束经折射后仍交于一点, 其像是完善像, 称为高斯像。高斯像的位置由 l 决定, 通过高斯像点垂直于光轴的像面, 称为高斯像面。构成物像关系的这一对点, 称为共轭点。

显然, 对于近轴光, 如下关系成立:

$$h = lu = l'u' \quad (7-14)$$

上式即为近轴光线光路计算的校对公式。

近轴光的光路计算公式又称为小 l 计算公式, 利用大 L 和小 l 计算公式及其它有关的公式来计算光线光路的过程通常称为光线的光路追迹。由于近轴光的成像与 u 角无关, 因此, 在近轴光的光路计算中 u 角可任意选取。

7.2 单个折射球面近轴区成像

将(7-12)式中的第一、第四式 i 和 i' 代入第二式, 并利用(7-14)式, 可以导出以下三个重要公式:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l'}\right) = Q \quad (7-15)$$

$$n'u' - nu = \frac{n' - n}{r}h \quad (7-16)$$

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r} \quad (7-17)$$

(7-15)式表明, 单个折射球面, 物方和像方的一些参量具有不变量形式, 称为阿贝 (Abbe) 不变量, 用字母 Q 表示, Q 值的大小只与共轭点的位置有关。

(7-16)式表示近轴光经球面折射前后的孔径角 u 和 u' 的关系。

(7-17)式表示折射球面成像时, 物像位置 l 和 l' 之间的关系。已知物或像的位置 l 或 l' 和 r, n, n' , 可方便地求出其相共轭的像或物的位置 l' 和 l 。

7.2.1 物像公式

(7-17)式称为折射球面的物像关系公式, 通常, l 称为物距, l' 称为像距, 两者均以折射面顶点为起始点。

若物点位于轴上左方无限远处, 即物距 $l = -\infty$, 此时入射光线平行于光轴, 经球面折射后交光轴于 F' 点, 如图 7-16 所示。这个特殊点是轴上无限远物点的像点, 称为球面的像方主焦点或第二主焦点。从顶点 O 到 F' 的距离称为第二主焦距, 用 f' 表示。将 $l = -\infty$ 代入(7-17)式可得

$$l' = f' = \frac{n}{n' - n}r \quad (7-18)$$

同理有球面的第一主焦点 F 及第一主焦距 f , 且

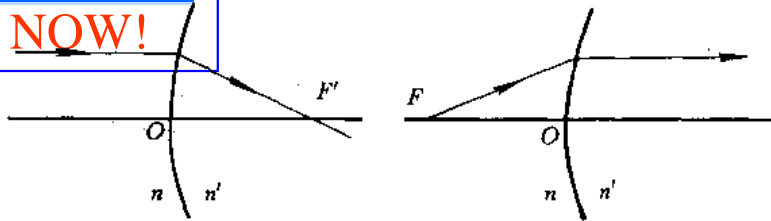


图 7-16 单个折射球面的焦点

$$f = -\frac{n}{n-n'}r \quad (7-19)$$

由(7-18)式和(7-19)式可得

$$\frac{f'}{f} = \frac{-n'}{n} \quad (7-20)$$

该式表明单个球面像方焦距 f' 与物方焦距 f 的比等于相应介质的折射率之比。由于 n 和 n' 永不相等，故 $|f| \neq |f'|$ 。式中，负号表示物方和像方焦点永远位于球面界面的左右两侧。

7.2.2 高斯公式和牛顿公式

将 $r/(n'-n)$ 乘以物像公式(7-17)得

$$\frac{f'}{l} + \frac{f}{l'} = 1 \quad (7-21)$$

该式称为球面折射的高斯公式。

如果物距和像距不以球折射面的顶点为原点，而分别从物方焦点 F 和像方焦点 F' 算起，并用 x 和 x' 表示，分别称为焦物距和焦像距，如图 7-17 所示。由图可得如下关系：

$$-l = -f - x$$

$$l' = f' + x'$$

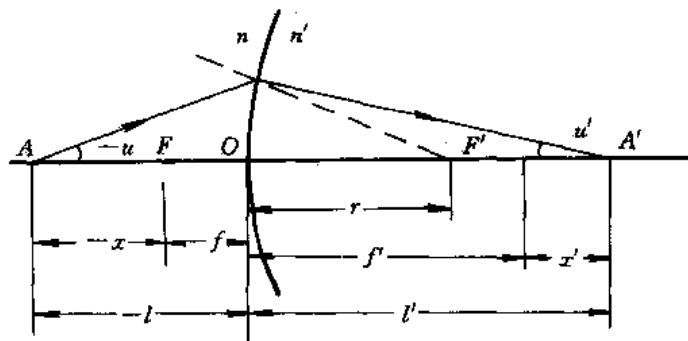


图 7-17 牛顿公式导出用图

将此二式代入高斯公式(7-21)并化简得

$$xx' = ff' \quad (7-22)$$

此式称为牛顿公式。该式表明，从焦点计起的物距和像距之积等于第一和第二焦距之积。牛顿公式的形式较高斯公式简单，对称性显著，有时运用更为方便。

公式(7-17)、(7-21)和(7-22)具有相同的含义，彼此完全相等，适用于球面折射的



7.2.3 光焦度

(7-17)式右端仅与介质的折射率及球面曲率半径有关,因而对于一定的介质及一定形状的表面来说是一个不变量,它表征球面的光学特征,称之为该面的光焦度,以 φ 表示:

$$\varphi = \frac{n' - n}{r} \quad (7-23)$$

当 r 以米为单位时, φ 的单位称为折光度,以字母 D 表示。例如, $n' = 1.5$, $n = 1.0$, $r = 100$ mm的球面, $\varphi = 5D$ 。

根据光焦度公式(7-23)及焦距公式(7-18)和(7-19),单折射球面两焦距和光焦度之间的关系为

$$\varphi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \quad (7-24)$$

所以,焦距 f 和 f' 也是折射面的特征量。

7.2.4 垂轴放大率 β

物体经球面折射成像后,通常不仅需要知道像的位置,而且还希望知道像的大小、虚实和倒正。由此引入垂轴放大率。图7-18表示垂轴小物体 AB 被球面折射成像的情况。令物高和像高分别以 y 和 y' 表示, $AB = y$, $A'B' = -y'$ 。

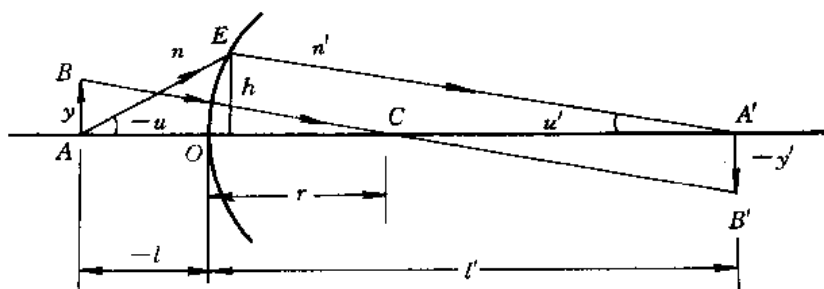


图 7-18 垂轴放大率公式导出用图

像的大小和物的大小的比值称为垂轴放大率或横向放大率,以希腊字母 β 表示:

$$\beta = \frac{y'}{y} \quad (7-25)$$

由图中 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C$ 相似可得

$$\frac{-y'}{y} = \frac{l' - r}{-l + r} \quad \text{或} \quad \frac{y'}{y} = \beta = \frac{l' - r}{l - r}$$

由(7-15)式可改写为

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n'l'}{nl} \quad (7-26)$$

当求得一对共轭点的截距 l 和 l' 后,可按上式求得通过该共轭点的一对共轭面上的垂轴放大率。由(7-26)式可知,垂轴放大率仅决定于共轭面的位置,在同一共轭面上,放大率为常数,故像必和物相似。

当 $\beta < 0$, y 和 y' 异号, 表示 β 成倒像; 当 $\beta > 0$, y 和 y' 同号, 表示 β 成正像。
 当 $\beta < 0$, l 和 l' 异号, 表示物和像处于球面的两侧, 实物成实像, 虚物成虚像。当 $\beta > 0$, l 和 l' 同号, 表示物和像处于球面的同侧, 实物成虚像, 虚物成实像。
 当 $|\beta| > 1$, 为放大像; 当 $|\beta| < 1$, 为缩小像。

7.2.5 轴向放大率 α

对于有一定体积的物体, 除垂轴放大率外, 其轴向也有尺寸, 故还有一个轴向放大率。轴向放大率是指光轴上一对共轭点沿轴移动量之间的关系。如果物点沿轴移动一微小量 dl , 相应地像移动 dl' , 轴向放大率用希腊字母 α 表示, 定义为

$$\alpha = \frac{dl'}{dl} \quad (7-27)$$

单个折射球面的轴向放大率 α 由对(7-17)式微分得到:

$$-\frac{n' dl'}{l'^2} + \frac{n dl}{l^2} = 0$$

则有
或

$$\alpha = \frac{dl'}{dl} = \frac{nl'^2}{n'l^2}$$

$$\alpha = \frac{n'}{n} \beta^2 \quad (7-28)$$

由此式可见, 如果物体是一个沿轴放置的正方形, 因垂轴放大率和轴向放大率不一致, 则其像不再是正方形。还可以看出, 折射球面的轴向放大率恒为正值, 这表示物点沿轴移动, 其像点以同样方向沿轴移动。

公式(7-28)只有当 dl 很小时才适用, 如果物点沿轴移动有限距离, 如图 7-19 所示, 此距离显然可以用物点移动的始末两点 A_1 和 A_2 的截距差 $l_2 - l_1$ 来表示, 相应于像点移动

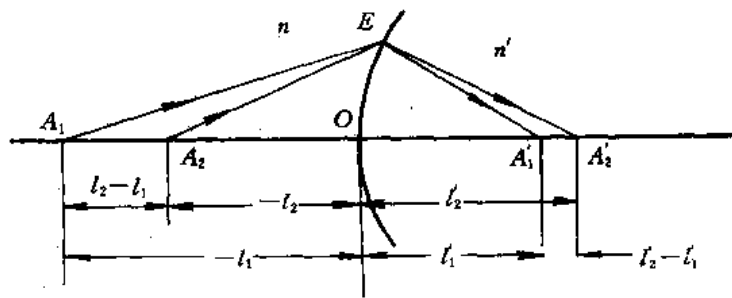


图 7-19 轴向放大率 $\bar{\alpha}$

的距离应为 $l'_2 - l'_1$, 这时的轴向放大率以 $\bar{\alpha}$ 表示

$$\bar{\alpha} = \frac{l'_2 - l'_1}{l_2 - l_1}$$

对 A_1 和 A_2 点分别用(7-17)式可得

$$\frac{n'}{l'_2} - \frac{n}{l_2} = \frac{n' - n}{r} = \frac{n}{l'_1} - \frac{n}{l_1}$$



$$\begin{aligned} \frac{l_2' - l_1'}{l_2' - l_1} &= \frac{n}{n'} \cdot \frac{l_2' l_1'}{l_2' l_1} \\ &= \frac{n'}{n} \cdot \frac{n^2 l_2' l_1'}{n^2 l_2 l_1} = \frac{n'}{n} \beta_1 \beta_2 \end{aligned}$$

即
$$\bar{\alpha} = \frac{n'}{n} \beta_1 \beta_2 \quad (7-29)$$

其中 β_1 和 β_2 分别为物在 A_1 和 A_2 两点的垂轴放大率。

7.2.6 角放大率 γ

在近轴区域内, 通过物点的光线经过光学系统后, 必然通过相应的像点, 这样一对共轭光线与光轴夹角 u 和 u' 的比值, 称为角放大率, 以希腊字母 γ 表示:

$$\gamma = \frac{u'}{u} \quad (7-30)$$

利用关系式 $lu = l'u'$, 上式可写为

$$\gamma = \frac{l}{l'} \quad (7-31)$$

与(7-26)式比较, 可得

$$\gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta} \quad (7-32)$$

利用(7-28)式和(7-32)式, 可得三个放大率之间的关系:

$$\alpha\gamma = \frac{n'}{n} \beta^2 \cdot \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta} = \beta \quad (7-33)$$

7.2.7 拉亥不变量 J

由公式 $\beta = y'/y = nl'/n'l$ 和公式 $\gamma = l/l' = u'/u$, 可得

$$nuy = n'u'y' = J \quad (7-34)$$

此式称为拉格朗日-亥姆霍兹恒等式, 简称拉亥公式。其表示为不变量形式, 表明在一对共轭平面内, 成像的物高 y , 成像光束的孔径角 u 和所在介质的折射率 n 三者的乘积是一个常数, 用 J 表示, 称为拉格朗日-亥姆霍兹不变量, 简称拉亥不变量。

7.3 共轴球面系统

前述单个折射球面不能成为一个基本成像元件(反射镜作为折射面的特例, 可以由单个面构成一个基本成像元件), 基本成像元件至少是由两个折射球面或非球面所构成的透镜。为了加工方便, 绝大多数透镜是由球面构成的。本节讨论共轴球面系统的成像问题。为解决球面系统的成像问题, 只须重复应用前述的单个折射球面的公式于球面系统的每一个面即可。因此, 首先应解决如何由一个面过渡到下一个面的转面计算问题。

7.3.1 转面(过渡)公式

一个共轴球面系统由下列数据所确定: 各折射球面的曲率半径 r_1, r_2, \dots, r_i ; 各个球

面顶点之间的间隔 $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}, d_1$ 是第一面顶点到第二面顶点之间间隔, d_2 是第二面顶点到第三面顶点之间间隔, 依次类推; 各球面间介质的折射率 $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_1$ 是第一面之前的介质折射率, n_{k+1} 是第 k 面之后的介质折射率, 依次类推。

在上列结构参量给定后, 即可进行共轴球面系统的光路计算和其它有关量的计算。

图 7-20 表示了一个在近轴区内物体被光学系统前三个面成像的情况。显然, 第一个面的像方空间就是第二个面的物方空间, 就是说, 高度为 y_1 的物体 A_1B_1 用孔径角为 u_1 的光束经第一面折射成像后, 其像 $A'_1B'_1$ 就是第二面的物 A_2B_2 , 其像方孔径角 u'_1 就是第二面的物方孔径角 u_2 , 其像方折射率 n'_1 就是第二面的物方折射率 n_2 。同样, 第二面和第三面之

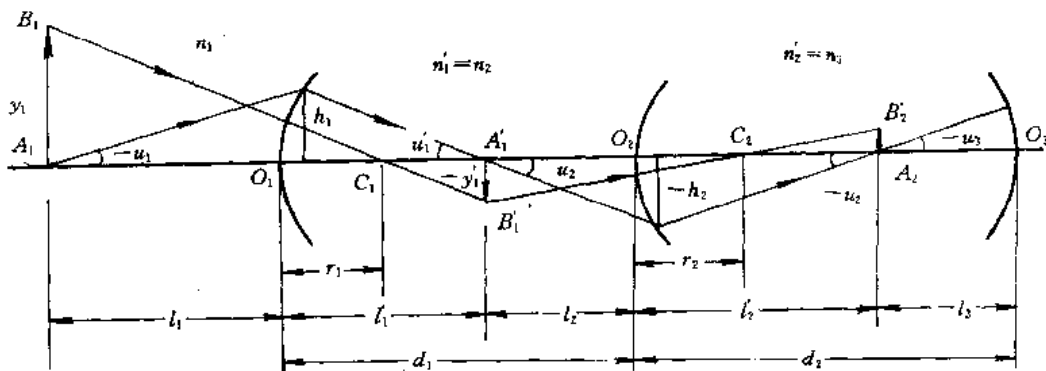


图 7-20 共轴球面系统

间, 第三面和第四面之间, 都有这样的关系, 依次类推, 故有

$$\left. \begin{aligned} n_2 &= n'_1, n_3 = n'_2, \dots, n_k = n'_{k-1} \\ u_2 &= u'_1, u_3 = u'_2, \dots, u_k = u'_{k-1} \\ y_2 &= y'_1, y_3 = y'_2, \dots, y_k = y'_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (7-35)$$

由图 7-20 可以直接求出截距的过渡公式

$$l_2 = l'_1 - d_1, l_3 = l'_2 - d_2, \dots, l_k = l'_{k-1} - d_{k-1} \quad (7-36)$$

必须指出, 上述转面公式(7-35)和(7-36)对近轴光适用, 对远轴光也同样适用, 即

$$\left. \begin{aligned} n_2 &= n'_1, n_3 = n'_2, \dots, n_k = n'_{k-1} \\ U_2 &= U'_1, U_3 = U'_2, \dots, U_k = U'_{k-1} \\ L_2 &= L'_1 - d_1, L_3 = L'_2 - d_2, \dots, L_k = L'_{k-1} - d_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (7-37)$$

这就是(7-6)式~(7-9)式光路计算公式的转面公式。

当用(7-16)式进行光路计算时, 还必须求出光线在折射面上入射高度 h 的过渡公式。

利用(7-35)式的第二式和(7-36)式的对应项相乘, 可得

$$\begin{aligned} l_2 u_2 &= l'_1 u'_1 - d_1 u'_1 \\ l_3 u_3 &= l'_2 u'_2 - d_2 u'_2 \\ &\vdots \\ l_k u_k &= l'_{k-1} u'_{k-1} - d_{k-1} u'_{k-1} \end{aligned}$$

故

$$h_k = h_{k-1} - d_{k-1} u'_{k-1} \quad (7-38)$$



利用公式(7-34), 对共轴球面系统的每一个折射面都可以写出各个面的拉亥公式

$$\begin{aligned} n_1 u_1 y_1 &= n_1' u_1' y_1' \\ n_2 u_2 y_2 &= n_2' u_2' y_2' \\ &\vdots \\ n_k u_k y_k &= n_k' u_k' y_k' \end{aligned}$$

利用(7-35)式可得

$$\begin{aligned} n_1 u_1 y_1 &= n_2 u_2 y_2 = n_3 u_3 y_3 = \dots \\ &= n_k u_k y_k = n_k' u_k' y_k' = J \end{aligned} \quad (7-39)$$

此式表明, 拉亥不变量不仅对一个折射球面的两个空间是不变量, 而且对整个光学系统的每一个面的每一个空间都是不变量。

7.3.3 放大率公式

对于整个共轴球面系统的各个放大率, 很容易证明等于各个折射面相应放大率之乘积:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{y_k}{y_1} = \frac{y_1'}{y_1} \cdot \frac{y_2'}{y_2} \cdot \dots \cdot \frac{y_k'}{y_k} = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_k \\ \alpha &= \frac{dl_k'}{dl_1} = \frac{dl_1'}{dl_1} \cdot \frac{dl_2'}{dl_2} \cdot \dots \cdot \frac{dl_k'}{dl_k} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k \\ \gamma &= \frac{u_k}{u_1} = \frac{u_1'}{u_1} \cdot \frac{u_2'}{u_2} \cdot \dots \cdot \frac{u_k'}{u_k} = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_k \end{aligned} \right\} \quad (7-40)$$

将单折射球面的放大率表示式代入上式, 即可求得

$$\beta = \frac{n_1 l_1'}{n_1 l_1} \cdot \frac{n_2 l_2'}{n_2 l_2} \cdot \dots \cdot \frac{n_k l_k'}{n_k l_k} = \frac{n_1}{n_k} \cdot \frac{l_1 l_2' \dots l_k'}{l_1 l_2 \dots l_k} \quad (7-41)$$

及

$$\beta = \frac{y_k}{y_1} = \frac{n_1 u_1}{n_k u_k} \quad (4-42)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{n_1}{n_1} \beta_1^2 \cdot \frac{n_2}{n_2} \beta_2^2 \cdot \dots \cdot \frac{n_k}{n_k} \beta_k^2 \\ &= \frac{n_k}{n_1} \beta_1^2 \beta_2^2 \dots \beta_k^2 = \frac{n_k}{n_1} \beta^2 \end{aligned} \quad (7-43)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{n_1}{n_1} \frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{n_2}{n_2} \frac{1}{\beta_2} \cdot \dots \cdot \frac{n_k}{n_k} \frac{1}{\beta_k} \\ &= \frac{n_1}{n_k} \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k} = \frac{n_1}{n_k} \frac{1}{\beta} \end{aligned} \quad (7-44)$$

且

$$\alpha \gamma = \frac{n_k}{n_1} \beta^2 \cdot \frac{n_1}{n_k} \frac{1}{\beta} = \beta \quad (7-45)$$

由此可见, 共轴球面系统的总放大率为各折射球面放大率的乘积, 三种放大率之间的关系与单个折射球的完全一样。

7.4 球面反射镜

在 7.1 节中曾经指出, 反射定律可由折射定律在 $n' = -n$ 时导出。因此, 在折射面的公式中, 只要使 $n = -n$, 便可直接得到反射球面的相应公式。

1. 球面反射镜的物像位置公式

将 $n' = -n$ 代入(7-17)式, 可得球面反射镜的物像位置公式为

$$\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = \frac{2}{r} \quad (7-46)$$

2. 球面反射镜的焦距

将 $n' = -n$ 代入(7-18)式和(7-19)式, 可得球面反射镜的焦距

$$f' = f = \frac{r}{2} \quad (7-47)$$

该式表明球面反射镜的二焦点重合。对凸球面反射镜, $r > 0$, 则 $f' > 0$; 对凹球面反射镜, $r < 0$, 则 $f' < 0$ 。

3. 球面反射镜的高斯公式

将(7-47)式代入(7-21)式, 可得球面反射镜的高斯公式:

$$\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \quad (7-48)$$

4. 球面反射镜的放大率公式

同样, 可以得到球面反射镜的三种放大率公式:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= -\frac{l'}{l} \\ \alpha &= -\beta^2 \\ \gamma &= -\frac{1}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (7-49)$$

上式表明, 球面反射镜的轴向放大率永为负值, 当物体沿光轴移动时, 像总以相反的方向沿轴移动。当物体经偶数次反射时, 轴向放大率为正。

5. 球面反射情况下的拉亥不变量

将 $n' = -n$ 代入(7-34)式, 得球面反射时的拉亥不变量

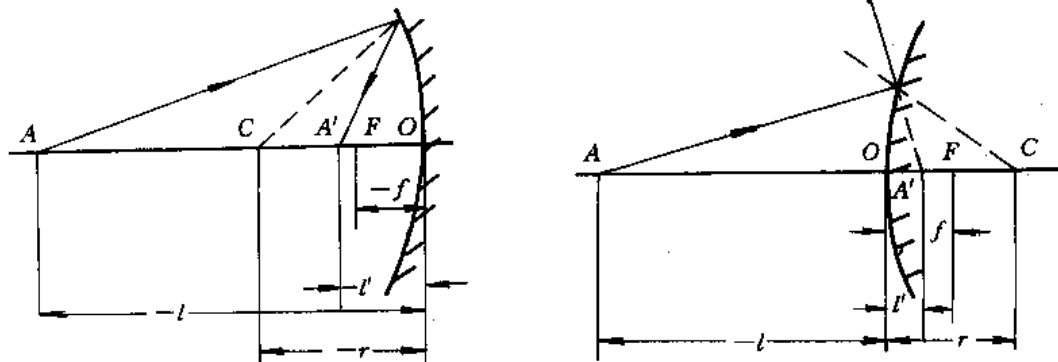


图 7-21 球面反射镜

$$J = uy = -u'y' \quad (7-50)$$

球面反射镜的物像关系如图 7-21 所示。当物体处于球面反射镜的球心时，由 (7-46) 式得 $l=l=r$ ，并由 (7-49) 式得球心处的放大率为 $\beta=1$ ， $\alpha=-1$ ， $\gamma=1$ 。

7.5 平面镜、棱镜系统

光学系统中，除了广泛应用共轴球面系统外，还广泛使用平面镜、棱镜系统。它们在光学系统中的主要作用是缩小仪器的体积、减轻仪器的重量，改变光路方向，变倒像为正像等。下面简要讨论平面镜、棱镜系统的成像特性。

7.5.1 平面反射镜

平面反射镜又称为平面镜，是光学系统中最简单而且也是唯一能成完善像的光学零件。

1. 单平面镜的成像特性

如图 7-22 所示， PP' 为一平面反射镜，由物点 A 发出的同心光束被平面镜反射，其中任意一条光线 AO 经反射后沿 OB 方向射出，另一条光线 AP 垂直于镜面入射，并由原路反射。显然，反射光线 PA 和 BO 延长线的交点 A' 就是物点 A 经平面反射镜所成的虚像。根据反射定律 $\angle AON = \angle BON$ ，可得 $AP = A'P$ 。像点 A' 对平面镜 PP' 而言和物点 A 对称。因光线 AO 是任意的，所以由 A 点发出的同心光束，经平面镜反射后，成为一个以 A' 点为顶点的同心光束。这就是说，平面镜能对物体成完善像。

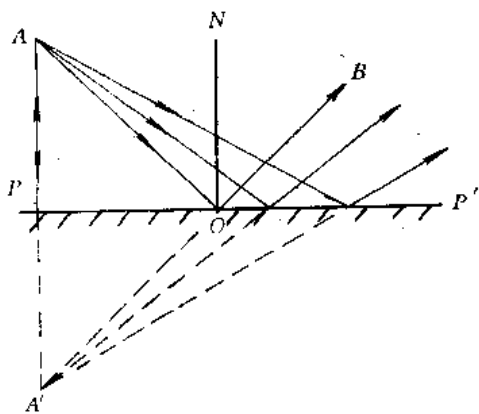


图 7-22 单个平面镜成像(实物成虚像)

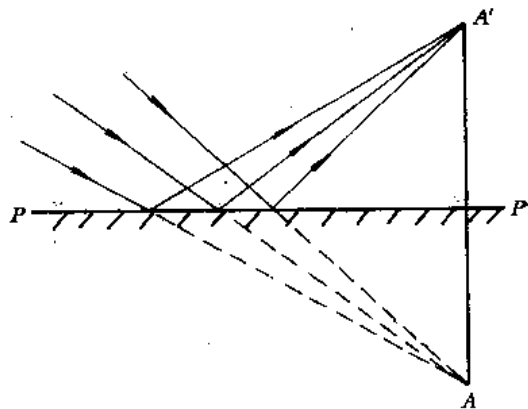


图 7-23 单个平面镜成像(虚物成实像)

如果射向平面反射镜的是一会聚同心光束，即物点是一个虚物点，如图 7-23 所示，则当光束经平面镜反射后成一实像点。

不管物和像是虚还是实，相对于平面反射镜来说，物和像始终是对称的。由于其对称性，如果物体为左手坐标系 $O-xyz$ ，其像的大小与物相同，但却是右手坐标系 $O'-x'y'z'$ ，如图 7-24 所示，这种物像不一致的像，叫做“镜像”或“非一致像”。如果物体为左手坐标系，而像仍为左手坐标系，则这样的像称为“一致像”。容易想到，物体经奇数个平面镜成像，则为镜像，而经偶数个平面镜成像，则为一致像。

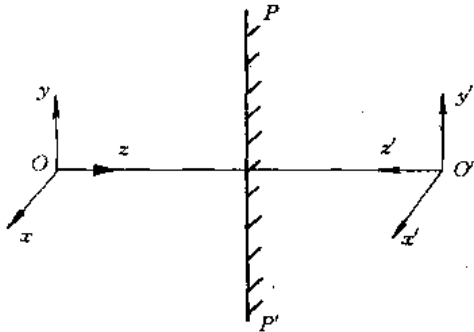


图 7-24 单个平面镜成镜像

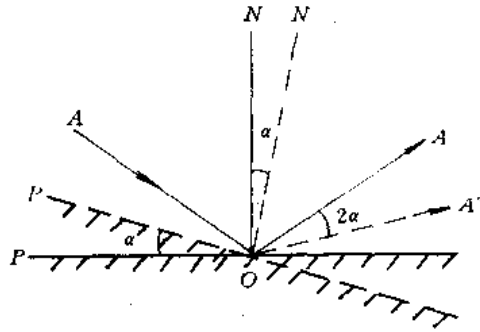


图 7-25 平面镜绕垂直入射面轴的转动

平面镜还有一个性质，即当保持入射光线的方向不变，而使平面镜转动一个 α 角，则反射光线将转动 2α 角。现证明如下：如图 7-25 所示， \bar{p} 是表示平面镜 p 转过 α 角以后的位置， AO 为入射光线， NO 为平面镜转动前入射点的法线， $A'O$ 为平面镜转动前的反射光线。当平面镜绕入射点 O 顺时针转动 α 角时，其入射点法线为 $\bar{N}O$ ，反射光线为 $A''O$ 。 $A'O$ 和 $A''O$ 之间有下列关系：

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle POP' = \angle NON' = \angle AON' - \angle AON \\ &= \frac{1}{2}(\angle AOA'' - \angle AOA') = \frac{1}{2}\angle A'OA'' \\ \angle A'OA'' &= 2\alpha \end{aligned}$$

在光点式灵敏电流计中，在红外系统的光机扫描元件及其它光学仪器中，都应用了平面反射镜的这个特性。

平面反射镜在光学仪器中常用来改变光路方向，如图 7-26 所示，由于平面镜是“理想光学系统”，对成像质量没有影响，所以在光路计算中可以不计算在内。但是，必须根据它在系统中的位置和光束通过情况，计算出它的大小尺寸，并在绘制光路图时将其绘出。

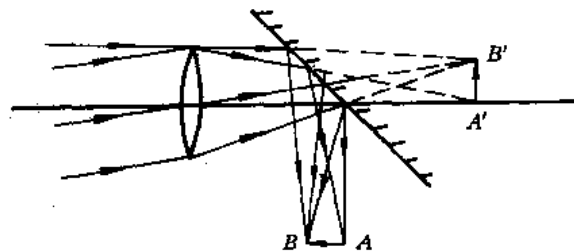


图 7-26 平面镜改变光路方向

综上所述，单个平面镜的成像特性可归纳为：

- ① 点物成点像。
- ② 物和像以平面镜对称，成非一致像。
- ③ 实物成虚像，虚物成实像。
- ④ 平面镜的转动具有“光放大作用”。

2. 双平面镜的成像特性

将两个平面反射镜组合在一起，使两个反射面构成一个二面角，这就是通常所谓的双平面镜系统。物体经双平面镜的成像特性可分为光线经双平面镜多次反射和两次反射的情况进行讨论。

如图 7-27 所示, 两平面反射镜 RP 和 QP 相交于 P 棱, 图面为垂直于棱线 P 的任意平面, 该平面称为主截面。设双面镜的二面角为 α , A 为镜间的一个发光点, 经双面镜多次成像后, 可得到一系列的虚像点 A_1' 、 A_2' 、 A_3' 、 A_1'' 、 A_2'' 、 A_3'' 。它们分别是发光点 A 先被反射镜 RP 反射, 然后被反射镜 QP 反射, 再被反射镜 RP 反射后形成的像点及先被反射镜 QP 反射, 后又被反射镜 RP 反射, 再被反射镜 QP 反射后形成的像点。像点数目的多少与双面镜间的夹角 α 有关, α 愈小, 数目愈多, 直到像点位于两反射镜的背后不能再被反射镜反射为止。

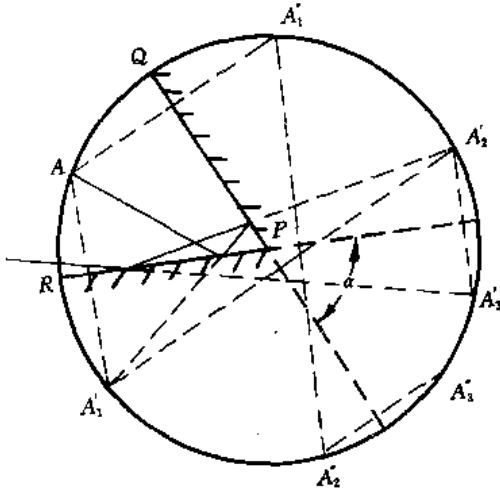


图 7-27 双平面镜成像

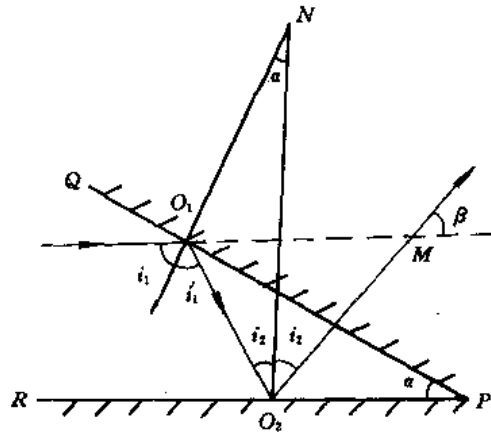


图 7-28 在双平面镜上各反射一次的成像

下面讨论物体被双平面镜相继反射一次时的成像情况。如图 7-28 所示, 两平面镜间夹角为 α , 主截面内任意一条光线经两平面镜依次反射后, 入射线和出射线的夹角为 β , 则 β 和 α 间有下列关系:

由 $\triangle O_1O_2M$ 得

$$2i_1 = 2i_2 + \beta$$

或

$$\beta = 2(i_1 - i_2)$$

因两平面镜在 O_1, O_2 点的法线交于一点 N , 故由 $\triangle O_1O_2N$ 得

$$i_1 = \alpha + i_2$$

或

$$\alpha = i_1 - i_2$$

所以

$$\beta = 2\alpha$$

该式表明, 出射光线和入射光线之间的夹角与入射角无关, 只决定于反射镜间夹角 α 。因此, 光线方向的改变可以根据实际需要选择适当的 α 角来实现。如果保持两反射镜间的夹角 α 不变, 在入射光线方向不变的情况下, 当两平面镜绕垂直于图平面的轴旋转时, 它的出射光线方向始终不会改变。

双平面反射镜的成像特性可归纳为:

- ① 二次反射像的坐标系统与原物坐标系统相同, 成一一致像。
- ② 位于主截面内的光线, 不论其入射方向如何, 出射线的转角永远等于两平面镜夹角的二倍, 其转向与光线在反射面的反射次序所形成的转向一致。

7.5.2 平面折射

1. 平面折射的基本公式

在光学系统中经常遇到一些平面光学零件，如平凸、平凹透镜及全反射棱镜等，因此需要导出光线入射于平面时折射成像的公式。如图 7-29 所示，一光线 AO 入射到平面界面上将产生折射，由图可见，

$$I = -U \quad (7-51)$$

$$\sin I' = \frac{n}{n'} \sin I \quad (7-52)$$

$$U' = -I' \quad (7-53)$$

$$L \tan U = L' \tan U'$$

即
$$L' = L \frac{\tan U}{\tan U'} \quad (7-54)$$

可将(7-54)式改写为

$$L' = L \frac{\sin U / \cos U}{\sin U' / \cos U'}$$

将(7-51)式和(7-53)式代入(7-52)式得

$$\frac{\sin U}{\sin U'} = \frac{n'}{n}$$

所以有

$$L' = L \frac{n' \cos U'}{n \cos U} \quad (7-55)$$

(7-51)、(7-52)、(7-53)和(7-55)式即为平面折射的基本公式，由此就能够确定任意一条光线经过平面折射后的光路。由公式可见，对于一个折射平面来说， L' 也是 U 角的函数，亦即由光轴上同一物点发出的具有不同 U 角的光线，经过平面折射之后，并不能都相交于一点，也就是说不能成完善像。

如果入射光线为近轴光线，则上述平面折射的基本公式可表示为如下形式：

$$\left. \begin{aligned} i &= -u \\ i &= \frac{n}{n'} i \\ u' &= -i' \\ l' &= \frac{u}{u'} l \end{aligned} \right\} \quad (7-56)$$

可以看出，近轴光线经过平面折射，可以成完善像，并 $\beta=+1$ ，即为正像，像的大小与物一样。

2. 光线经平行平板时的折射

光学仪器中常用到由两个折射平面构成的玻璃平板，或者由一些特定材料构成的平行平板，如红外探测器的窗口等。图 7-30 给出了一个厚度为 d 的平行平板，设它处于空气中，即两边的折射率都等于 1，平行平板玻璃的折射率为 n 。从轴上点 A 发出的与光轴成

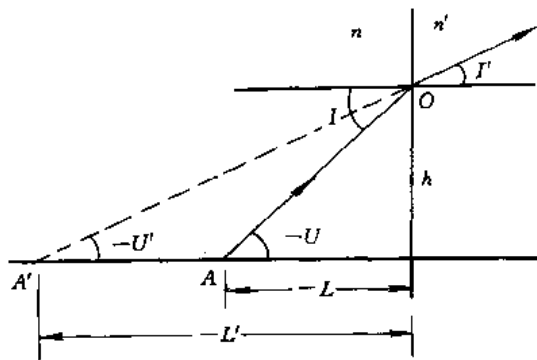


图 7-29 平面折射

U_1 的光线射向平行平板, 经第一面折射后, 射向第二面, 经折射后沿 EB 方向射出。出射光线的延长线与光轴交于点 A_2' , 此即为物点 A 经平行平板折射后的虚像点。光线在第一、第二两面上的入射角和折射角分别为 I_1 、 I_1' 和 I_2 、 I_2' , 按折射定律有

$$\begin{aligned}\sin I_1 &= n \sin I_1' \\ n \sin I_2 &= \sin I_2'\end{aligned}$$

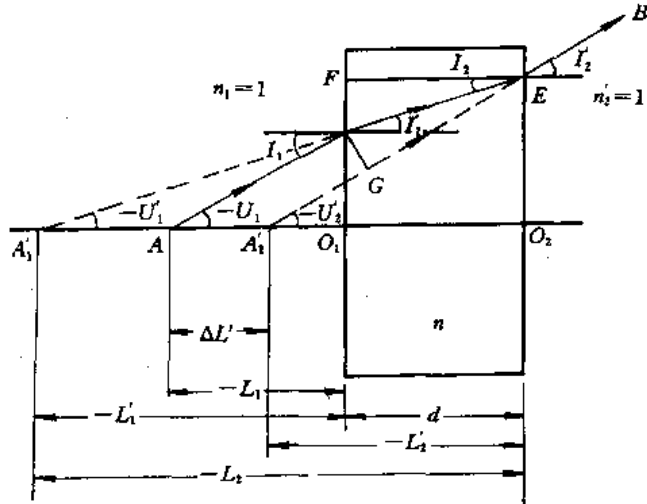


图 7-30 平行平板的折射

因两个折射面平行, 有 $I_2 = I_1'$, $I_2' = I_1$ 。故 $U_1 = U_2'$, 可见出射光线 EB 和入射光线 AD 相互平行。即光线经平行平板折射后方向不变。按放大率一般定义公式可得

$$\gamma = \frac{\tan U'}{\tan U} = 1, \beta = \frac{1}{\gamma} = 1, \alpha = \beta^2 = 1$$

所以平行平板不使物体放大或缩小。

光线经平行平板折射后, 虽然方向不变, 但要产生位移。由图中的 $\triangle DGE$ 知

$$DG = DE \sin(I_1 - I_1')$$

$$DE = \frac{d}{\cos I_1'}$$

可得侧向位移或平行位移

$$DG = \frac{d}{\cos I_1'} \sin(I_1 - I_1')$$

将 $\sin(I_1 - I_1')$ 展开并利用 $\sin I_1 = n \sin I_1'$ 得

$$DG = d \sin I_1 \left(1 - \frac{\cos I_1}{n \cos I_1'} \right) \quad (7-57)$$

若位移沿平行平板垂线方向计算, 得到从像点 A_2' 到物点 A 的距离, 称为轴向位移, 以 $\Delta L'$ 表示, 有

$$\Delta L' = \frac{DG}{\sin I_1}$$

代入(7-57)式, 得

$$\Delta L' = d \left(1 - \frac{\cos I_1}{n \cos I_1'} \right) \quad (7-58)$$

因 $(\sin I_1 / \sin I_1') = n$, 所以

$$\Delta L' = d \left(1 - \frac{\tan I}{\tan I'} \right) \quad (7-59)$$

该式表明, $\Delta L'$ 因不同的 I_1 值而不同, 即物点 A 发出的具有不同入射角的各种光线, 经过平行平板折射后, 具有不同的轴向位移量。这就说明从物点 A 发出的同心光束经过平行平板后, 就不再是同心光束, 成像是完善的。同时可以看出厚度 d 越大, 轴向位移越大, 成像不完善程度也越大。

如果入射光束以近于无限细的近轴光束通过平行平板成像, 因为 I_1 角很小, 余弦可用 1 替代, 这样(7-58)式变为

$$\Delta L' = d \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad (7-60)$$

式中, 用 $\Delta L'$ 代替 $\Delta L'$, 以表示该式仅是对近轴光线的轴向位移。该式表明, 近轴光线的轴向位移只与平行平板厚度 d 及折射率 n 有关, 而与入射角 i_1 无关。因此物点以近轴光经平行平板成像是完善的。

7.5.3 反射棱镜

如果把图 7-28 的双平面镜做在同一块玻璃上来代替双反射镜, 就形成了通常所谓的反射棱镜, 如图 7-31 所示。如果入射光束的所有光线在反射面上的入射角大于临界角, 光线就会发生全反射, 若入射角小于临界角, 则应在反射面上镀以反射膜。

由于反射棱镜在发生全反射时几乎没有能量损失, 以及不易变形和便于装调等优点, 故在光学仪器中, 对于尺寸不大的反射面常用反射棱镜来代替平面反射镜。

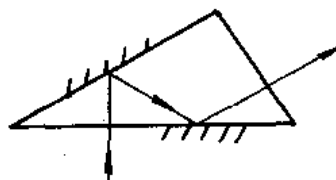


图 7-31 反射棱镜

1. 反射棱镜的分类及作用

根据不同的需要, 反射棱镜有很多类型。按难易程度分, 反射棱镜可分为普通棱镜和复合棱镜两大类。普通棱镜就是单个的简单棱镜, 如等腰直角棱镜, 五角棱镜等等。其主截面如图 7-32(a) 所示。复合棱镜是由两个或两个以上的普通棱镜组成的棱镜, 如阿贝棱镜等等。其主截面如图 7-32(b) 所示。

反射棱镜一般有两个折射面和若干个反射面, 统称为工作面。两个工作面之交线称为棱, 垂直于棱的截面称为主截面。

反射棱镜的主要作用是完成预定的光路转折和作为转像系统。使光轴转角为 90° 的情况见图 7-32(a)。由两个等腰直角棱镜所组成的转像系统原理将在后面讲述。

2. 屋脊棱镜

在光学系统中有奇数个反射面时, 物体成镜像。为了获得和物相似的像, 在不增加反射面的情况下, 可以利用两个互相垂直的反射面代替其中的一个反射面, 这两个互相垂直的反射面叫做屋脊面。带有屋脊面的棱镜叫做屋脊棱镜。

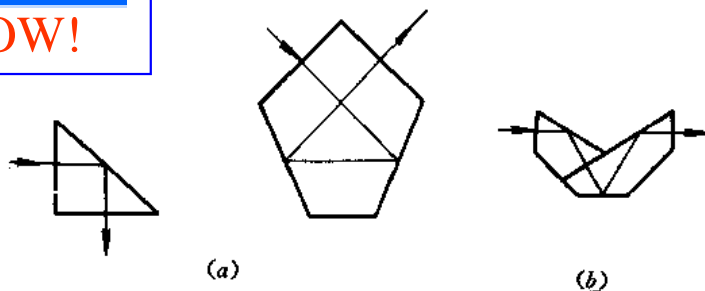


图 7-32 简单棱镜和复合棱镜

现以直角棱镜为例加以说明。图 7-33 为一顶角为 90° 的直角棱镜和一直角屋脊棱镜。屋脊棱镜中由两个互相垂直的反射面 $A_2B_2C_2D_2$ 和 $B_2C_2E_2F_2$ 代替了直角棱镜的反射面 $A_1B_1C_1D_1$ 。图 7-34 给出了直角棱镜和屋脊棱镜反射面的成像情况。由反射面的成像特性知，物体 xyz (左手直角坐标系) 经平面 $A_1B_1C_1D_1$ 反射后，其像为镜像 $x'y'z'$ (即右手直角坐标系)。对于物体经屋脊面的成像情况，可由下面的分析得到。设物体 xyz 为一左手直角坐标系，光轴是 Oz 轴，正投射在 B_2C_2 棱上，经反射后其光轴方向 O_1z_1' 应和 Ox' 轴相同。又设 yOz 面通过 B_2C_2 棱，则由 y 点发出的平行于光轴的光线 yO_1 ，也同样在屋脊棱 B_2C_2 上反射，反射后的像 O_1y_1' 的方向也应和 Oy 方向相同，所以， Oz 和 Oy 两轴通过屋脊面棱镜成像的情况，与平面反射镜相同。至于 Ox 轴，由 x 点发出的与光轴平行的光线，首先投射在反射面 $A_2B_2C_2D_2$ 上，再反射到反射面 $B_2C_2E_2F_2$ 上，最后平行于光轴射出。这样， O_1x_1' 的方向就和一个反射面时相应的 Ox' 的方向相反。因此，用屋脊面代替一个反射面后，其成像特性可概括为：位于棱镜主截面内的物体，经屋脊面后，其像与无屋脊面时所成像一样；垂直于主截面方向的物体，经屋脊面后，与无屋脊面时所成像方向相反。

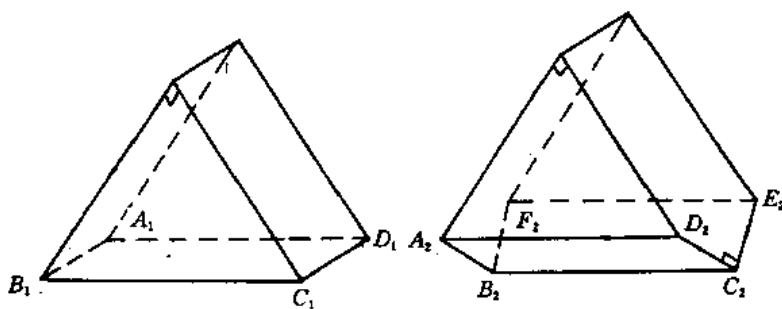


图 7-33 直角棱镜和直角屋脊棱镜

3. 反射棱镜成像方向的确定

反射棱镜主要作用是改变光轴和像的方向。光轴方向的改变直接按反射定律确定。这里主要研究确定反射棱镜成像方向的方法。

第一类，具有单一主截面的棱镜和棱镜组。

具有单一主截面的直角棱镜如图 7-35 所示。设物体为左手直角坐标系， yOz 平面与主截面重合， Oz 与光轴重合，因 Ox 垂直于 yOz 平面，所以 Ox 与反射面平行。 Oz 经棱镜反射后沿光轴出射，方向为 Oz' 。 Ox 因和反射面平行，故反射后方向不变，即 Ox' 方向与 Ox 方向相同。根据平面镜成镜像特性，即物为一左手坐标系，像应为一右手坐标系

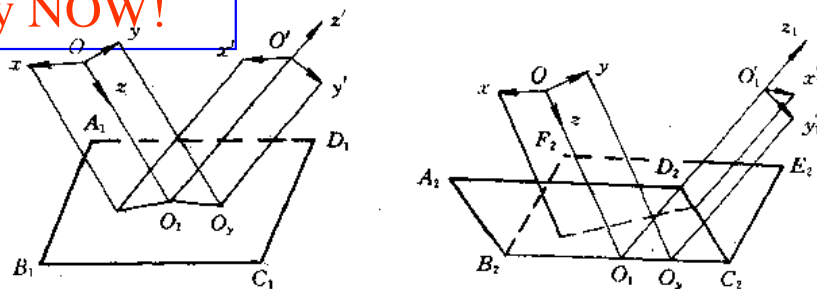


图 7-34 直角棱镜和直角屋脊棱镜反射成像

统，在 Ox' 和 Oz' 方向已知的条件下，利用右手坐标系即可画出 $O'y'$ 的方向。

直角屋脊棱镜如图 7-36 所示，物仍为一左手坐标系，因为 z 和 y 坐标的反射条件不变(均在光轴截面内)，所以反射后的方向与图 7-35 相同。但 x 坐标垂直于主截面，在屋脊面上反射两次，出射后的方向与原方向相反，因此，物体经直角屋脊棱镜反射一次后，仍为一左手坐标系，与原物相同，成一一致像。

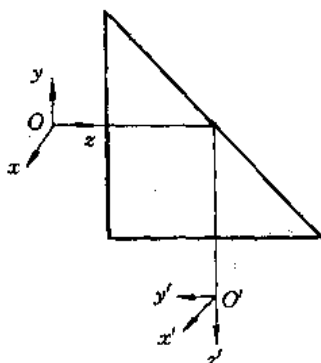


图 7-35 直角棱镜成像方向

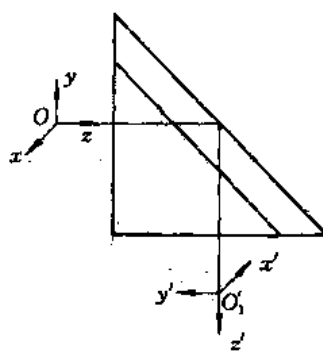


图 7-36 直角屋脊棱镜成像方向

易于推论，若系统中有偶数对屋脊面，则 Ox 轴方向不变，有奇数对屋脊面，则 Ox 轴方向相反。

由此可得出具有单一主截面的棱镜和棱镜组的成像方向规律： Oz 坐标，经棱镜或棱镜组反射后，其光轴出射方向即是 Oz' 的方向； Ox 坐标，其反射后的方向由屋脊面的对数而定，当无屋脊面或屋脊面对数为偶数时， Ox' 与 Ox 同向，当屋脊面对数为奇数时， Ox' 与 Ox 反向； Oy 坐标，其反射后的方向由光轴反射次数而定。光轴同向——光轴反射次数为偶数时， Oy' 与 Oy 同向，光轴反射次数为奇数时， Oy' 与 Oy 反向。光轴反向——光轴反射次数为偶数时， Oy' 与 Oy 反向，光轴反射次数为奇数时， Oy' 与 Oy 同向。

这里的光轴“同向”和“反向”的意思是：“同向”指入射光轴和出射光轴平行，或光轴偏转角小于 90° 的情况；“反向”指光轴偏转角大于 90° 的情况。当光轴正好偏转 90° 时，可认为是同向的，也可认为是反向的，所得结果相同。另外，根据屋脊面的成像性质，它不影响主截面内像的方向，因此在系统中有屋脊面时，光轴看作是在屋脊棱上反射，光轴反射次数只计算一次，而计算系统的总反射次数时屋脊面计算两次。

下面举例说明上述规律的应用。如图 7-37(a)所示的棱镜系统，由于系统中无屋脊

面，故 $O'x$ 与 Ox 同向； $O'z$ 为光轴的出射方向；由于光轴同向，光轴反射次数为七次，故 $O'y$ 与 Oy 反向。再如图 7-37(b) 所示的有一对屋脊面的棱镜系统。因有一对屋脊面，故 $O'x$ 与 Ox 反向； $O'z$ 为光轴出射方向；由于光轴同向，光轴反射次数为七次，故 $O'y$ 与 Oy 反向。

第二类，具有两个互相垂直的主截面的平面棱镜系统。

如图 7-38 所示，上述成像方向的规律仍然适用，只是需分两步进行讨论。对棱镜 I，因无屋脊面，故 $O'x'$ 与 Ox 同向； $O'z'$ 为光轴的出射方向；光轴反向，光轴反射次数为二次，故 $O'y'$ 与 Oy 反向。对棱镜 II， $O'y'$ 与棱镜 I 主截面相垂直。因无屋脊面，故 $O''y''$ 与 $O'y'$ 同向； $O''z''$ 为光轴的出射方向；光轴反向，光轴反射次数为二次，故 $O''x''$ 与 $O'x'$ 反向。由图可见， $O''x''$ 和 $O''y''$ 相对 Ox 和 Oy 均转了 180° ，即在垂轴平面内，像的上下和左右相对于物均颠倒过来。这种转像系统应用于双筒望远镜，它能将望远镜所成物体的倒像颠倒过来，使观察者看到与原物方位完全一致的像。

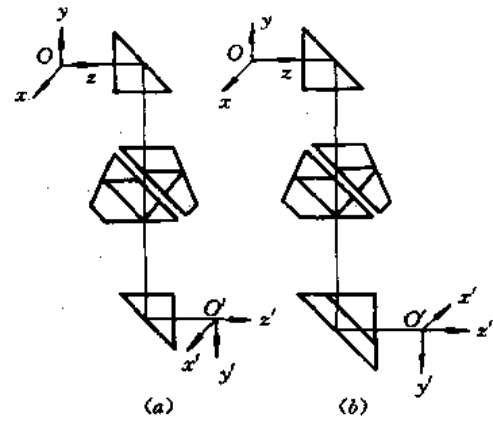


图 7-37 棱镜成像方向举例

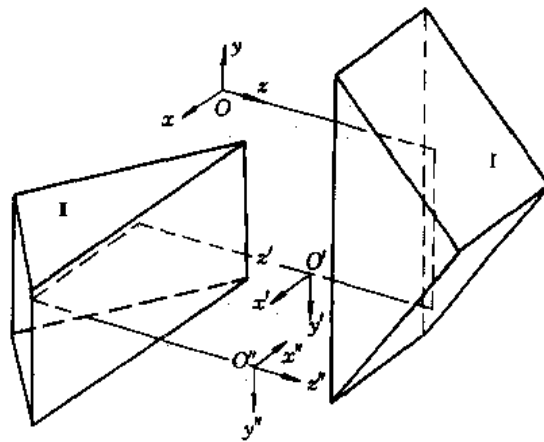


图 7-38 主截面互相垂直的棱镜系统

7.5.4 折射棱镜

折射棱镜如图 7-39 所示，两个工作面(折射面)不同轴，其交线称为折射棱，两工作面的夹角称为棱镜的顶角。设棱镜位于空气中，其折射率为 n ，顶角为 α ，入射角为 i_1 ，折射光线相对于入射光线的偏角为 δ ，其正负号以入射光线为起始边来确定，当入射光线以锐角方向顺时针转向折射光线时为正，反之为负，图中 $\delta > 0$ 。

由图 7-39 有

$$\alpha = i_1' - i_2$$

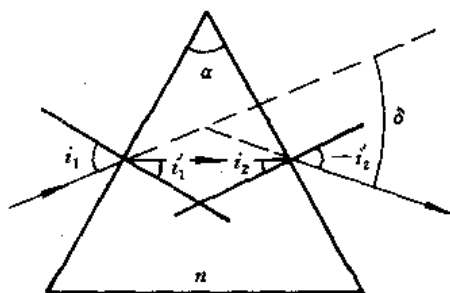


图 7-39 折射棱镜

由折射定律有

$$\alpha + \delta = i_1 - i_2'$$

由折射定律有

$$\sin i_1 = n \sin i_1'$$

$$\sin i_2' = n \sin i_2$$

将以上两式相减并进行变换可得

$$\begin{aligned} & \sin \frac{1}{2}(i_1 - i_2') \cos \frac{1}{2}(i_1 + i_2') \\ &= n \sin \frac{1}{2}(i_1' - i_2) \cos \frac{1}{2}(i_1' + i_2) \end{aligned}$$

则有

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = \frac{n \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}(i_1' + i_2)}{\cos \frac{1}{2}(i_1 + i_2')} \quad (7-61)$$

对于给定的棱镜， α 和 n 为定值，所以由上式可知，偏向角 δ 只与 i_1 有关。可以证明，当 $i_1 = -i_2'$ 或 $i_1' = -i_2$ 时，其偏向角 δ 最小。上式可写为

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta_m) = n \sin \frac{\alpha}{2}$$

或

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta_m)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (7-62)$$

式中， δ_m 为最小偏向角。

此式常被用来求玻璃的折射率 n 。为此需将被测玻璃作成棱镜，顶角 α 取 60° 左右，然后用测角仪测出 α 角的精确值。当测得最小偏向角后，即可用上式求得被测棱镜的折射率。

7.5.5 光楔

当折射棱镜两折射面间的夹角 α 很小时，这种折射棱镜称为光楔。

因为 α 角很小，光楔可近似地认为是平行平板，则有 $i_1' \approx i_2$ ， $i_2' \approx i_1$ ，代入式(7-61)得

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = \frac{n \sin \frac{1}{2}\alpha \cos i_1'}{\cos i_1}$$

注意到当 α 很小时， δ 也很小，所以上式中的正弦值可以用弧度值来代替，解出 δ ，得

$$\delta = \alpha \left(n \frac{\cos i_1'}{\cos i_1} - 1 \right)$$

当 i_1 和 i_1' 也很小时，上式可写为

$$\delta = \alpha(n - 1) \quad (7-63)$$

此式表明，当光线垂直或近于垂直射入光楔时，其所产生的偏向角 δ 仅取决于光楔的

折射率 n 和两折射面间夹角 α 。

在光学仪器中，常把两块相同的光楔组合在一起相对转动，用以产生不同的偏向角。如图 7-40 所示，两光楔中间有一空气间隔，使相邻工作面平行，并可绕光轴相对转动。图 (a) 的情况表示两光楔主截面平行，两楔角朝向一方，将产生最大的总偏向角。图 (b) 的情况是两光楔相对转动 180° ，两主截面仍然平行，但楔角的方向相反，这时相当于一个平行平板，偏向角为零。图 (c) 表示光楔相对转动 360° ，产生和图 (a) 情况相反的最大偏向角。

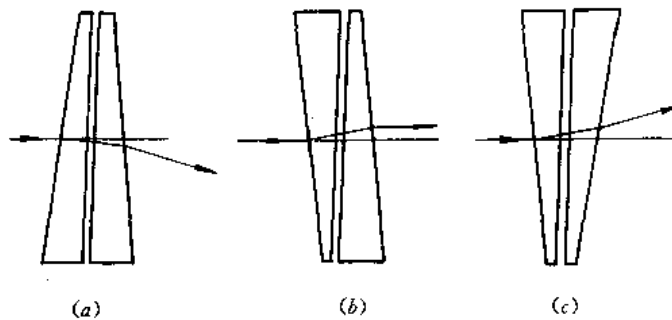


图 7-40 光楔

当两主截面不平行，即两光楔相对转动了任意角度 φ 时，则组合光楔的总偏向角为

$$\delta = 2(n - 1)\alpha \cos \frac{\varphi}{2} \quad (7-64)$$

这种双光楔可以把光线的小偏向角转换为两个光楔的相对转角。因此在光学仪器中常用它来补偿或测量光线的小角度偏差。另外，当两光楔以不同角速度 (ω_1, ω_2)、不同方向旋转时，可以产生玫瑰式、螺旋式、线条式、圆式以及其它形式的扫描花样，如图 7-41 所示，是一种灵活的扫描器，可以实现某些红外系统中的物面扫描。

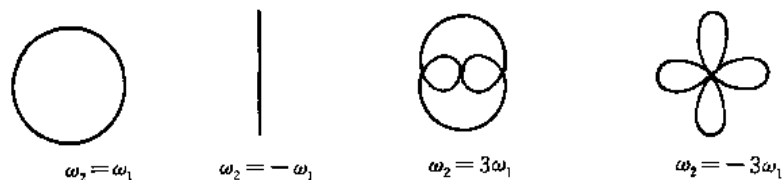


图 7-41 旋转光楔的扫描图形

例 题

例 7-1 一根被空气包围着的玻璃棒，折射率为 1.5163，其左端研磨成一个半径为 20 mm 的凸的半球，如在距半球顶点左侧 60 mm 处放置一点光源，其像位于何处 (设从点光源发出的边缘光线与光轴夹角的正弦 $\sin U = -0.025$)?

解：按 (7-6) 式得

$$\begin{aligned} \sin I &= \frac{L-r}{r} \sin U = \frac{-60-20}{20} \times 0.025 \\ &= 0.100\ 000 (I = 5.739\ 17^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin I &= \frac{n}{n'} \sin I' \frac{1}{1.5163} \times 0.100\ 000 \\ &= 0.065\ 950\ 0 (I' = 3.781\ 40^\circ) \end{aligned}$$

由(7-8)式得

$$\begin{aligned} U' &= I + U - I' = 5.739\ 17 - 1.432\ 54 - 3.781\ 40 = 0.525\ 230^\circ \\ (\sin U' &= 0.009\ 166\ 86) \end{aligned}$$

由(7-9)式得

$$L' = r + r \frac{\sin I'}{\sin U'} = 20 + 20 \times \frac{0.065\ 950\ 0}{0.009\ 166\ 86} = 163.888\ \text{mm}$$

即该点光源的像位于半球顶点之右 163.888 mm 处, 如图 7-42 所示。

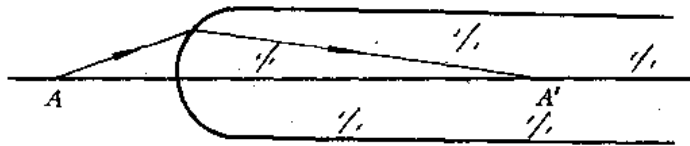


图 7-42 例 7-1 用图

利用(7-11)式对上述结果进行校对:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{L \sin U \cdot \cos \frac{I' - U'}{2}}{\sin U' \cdot \cos \frac{I - U}{2}} \\ &= \frac{-60 \times (-0.025) \cos \frac{3.781\ 40 - 0.525\ 230}{2}}{0.009\ 166\ 86 \cos \frac{5.739\ 17 - 1.432\ 54}{2}} \\ &= 163.888\ \text{mm} \end{aligned}$$

光路计算一般取六位数, 允许第六位数差 5。

例 7-2 在上例中, 若光组结构参量不变, 即 $r=200\ \text{mm}$, $n=1$, $n'=1.5163$, 且 L 仍为 $-60\ \text{mm}$, 则由点光源发出的一同心光束。当取 U 为 -1° 、 -2° 、 -3° 三条光线进行计算时, 折射后的结果如何?

解: 在光学中, 为了计算和分析方便, 常将计算结果按步骤列成一表格。本例所要计算的三条光线的计算过程和结果列于表 7-1。

表 7-1 例 7-2 计算结果

	$U=-1^\circ$	$U=-2^\circ$	$U=-3^\circ$
L	-60	-60	-60
$-r$	20	20	20
$L-r$	-80	-80	-80

续表

	$U = -1^\circ$	$U = -2^\circ$	$U = -3^\circ$
$\times \sin U$	-0.017 452 4	0.034 899 5	-0.052 336 0
$\div r$	20	20	20
$\sin I$	0.069 809 6	0.139 598	0.209 344
$\times n/n'$	1/1.5163	1/1.5163	1/1.5163
$\sin I'$	0.046 039 4	0.092 064 9	0.138 062
$\times r$	20	20	20
$\div \sin U'$	0.006 357 32	0.012 952 9	0.020 038 2
$L' - r$	144.839	142.153	137.799
$+ r$	20	20	20
L'	164.849	162.153	157.799
U	-1°	-2°	-3°
$+ I$	4.003 05°	8.024 58°	12.083 9°
$U + I$	3.003 05°	6.024 58°	9.083 90°
$- I'$	2.638 80°	5.282 41°	7.935 72°
U'	0.364 25°	0.742 17°	1.148 18°
$\frac{1}{2}(I - U)$	2.501 53	5.012 29	7.541 95
$\frac{1}{2}(I' - U')$	1.137 28	2.270 12	3.393 77
$L \sin U$	1.047 14	2.093 97	3.140 16
$\div \cos \frac{1}{2}(I - U)$	0.999 047	0.996 176	0.991 349
EO	1.048 14	2.102 01	3.167 56
$\times \cos \frac{1}{2}(I' - U')$	0.999 803	0.999 215	0.998 246
$\div \sin U'$	0.006 357 32	0.012 952 9	0.020 038 2
L'	164.839	162.153	157.799

例 7-3 已知一透镜的结构参数如下(单位是毫米): $r_1 = 10$, $n_1 = 1.0$, $d_1 = 5$, $n_2 = n_1' = 1.5163$, $r_2 = -50$, $n_2' = 1.0$ 。高度 $y_1 = 10$ mm 的物体位于透镜前 $l_1 = -100$ mm 处, 求像的位置和大小。

解: 本题可用物像公式(7-17)进行逐面计算。

计算第一面:

利用公式



$$\frac{n_1'}{l_1'} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{n_1' - n_1}{r_1}$$

代入数据

$$\frac{1.5163}{l_1'} - \frac{1}{-100} = \frac{1.5163}{10}$$

求得

$$l_1' = 36.4233$$

而

$$\beta_1 = \frac{n_1 l_1'}{n_1' l_1} = \frac{1 \times 36.4233}{1.5163 \times (-100)} = -0.240212$$

计算第二面:

利用公式

$$\frac{n_2'}{l_2'} - \frac{n_2}{l_2} = \frac{n_2' - n_2}{r_2}$$

其中

$$l_2 = l_1' - d_1 = 36.4233 - 5 = 31.4233$$

代入数据

$$\frac{1}{l_2'} - \frac{1.5163}{31.4233} = \frac{1 - 1.5163}{-50}$$

求得

$$l_2' = 17.0707$$

而

$$\beta_2 = \frac{n_2 l_2'}{n_2' l_2} = \frac{1.5163 \times 17.0707}{1 \times 31.4233} = 0.82373$$

整个透镜的垂轴放大率为 $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$, 像的大小为

$$\begin{aligned} y_2' &= \beta y_1 = (-0.240212) \times (0.82373) \times 10 \\ &= 1.97870 \end{aligned}$$

本题也可用公式(7-12)进行逐面计算, 计算结果应完全一样。

例 7-4 一凹球面反射镜, 半径 $r = -12$ cm, 当物距分别为 -2 、 -4 、 -9 和 -24 cm 时, 求像的位置和垂轴放大率。

解: 由(7-46)式和(7-49)式, 可求出

$$l = -2 \text{ cm}, \quad l' = 3 \text{ cm}, \quad \beta = \frac{3}{2}$$

$$l = -4 \text{ cm}, \quad l' = 12 \text{ cm}, \quad \beta = 3$$

$$l = -9 \text{ cm}, \quad l' = -18 \text{ cm}, \quad \beta = -2$$

$$l = -24 \text{ cm}, \quad l' = -8 \text{ cm}, \quad \beta = -\frac{1}{3}$$

由计算结果可以看出, 当实物处于球面反射镜焦点以内时, 成正立、放大的虚像; 当实物处于焦点和球心之间时, 成倒立、放大的实像; 当实物处于球心以外时, 成倒立、缩小的实像。也可看出, 当物体移动前后, 其像处于反射球面同侧者, $\bar{a} < 0$, 即物体左移, 其像右移; 当物体移动前后, 其像分别处于反射球面两侧者, $\bar{a} > 0$, 即物体左移, 其像也左移, 这是因为物体移动前后, 像的虚实发生的变化。



习 题

7-1 有一玻璃球, 折射率为 $\sqrt{3}$, 今有一光线射到球面上, 入射角为 60° , 求反射线和折射线间的夹角。

7-2 水槽有水 20 cm 深, 槽底有一点光源, 水的折射率为 1.33, 水面上浮一不透光的纸片, 使人从水面上以任意角度观察都看不到光, 则这纸片最小面积是多少?

7-3 证明光线通过二表面平行的玻璃板时, 出射线和入射线的方向平行。

7-4 空气中的玻璃棒, $n=1.5163$, 左端为一半球形, $r=20\text{ mm}$, 轴上一点源, $L=-60\text{ mm}$, 求 $U=-2^\circ$ 的像点位置。

7-5 一透镜的结构参数为: $r_1=10$, $r_2=-50$, $d=5\text{ mm}$, $n_1=1.0$, $n_2=1.5163$, $n_3=1.0$, 计算 $L_1=-100\text{ mm}$, $U_1=-2^\circ$ 光线的像方截距。

7-6 简化眼把人眼的成像归结为只有一个曲率半径为 5.7 mm, 介质折射率为 1.333 的单球面折射, 求这种简化眼的焦点位置和光焦度。

7-7 有一玻璃球, 折射率为 $n=1.5$, 半径为 R , 放在空气中。

(1) 物在无限远时, 经过球成像在何处?

(2) 物在球前 $2R$ 处时像在何处? 像的大小如何?

7-8 一个半径为 100 mm 的玻璃球, 折射率为 1.53, 球内有两个小气泡, 看来一个恰好在球心, 另一个在球表面和球心之间, 求两个气泡的实在位置。

7-9 一玻璃球直径为 60 mm, 折射率为 1.5, 一束平行光入射在玻璃球上, 其会聚点应在什么位置?

7-10 一球面反射镜, $r=-100\text{ mm}$, 求 $\beta=0$, $-0.1\times$, $-1\times$, $5\times$, $10\times$ 情况下的物距和像距。(注: “ \times ”表示倍数)

7-11 一球面镜对其前面 200 mm 处的物体成一缩小一倍的虚像, 求该球面镜的曲率半径。

7-12 长 $2/3\text{ m}$ 的平面镜挂在墙上, 镜的上边离地 $4/3\text{ m}$, 一人立于镜前, 其眼离地 $5/3\text{ m}$, 离墙 1 m, 求地面上能使此人在镜内所看到的离墙最近及最远之点。

7-13 夹角为 35° 的双平面镜系统, 当光线以多大的入射角入射于一平面镜时, 其反射光线再经另一平面镜反射后, 将沿原光路反向射出。

7-14 有一双平面镜系统, 光线与其中的一个镜面平行入射, 经两次反射后, 出射光线与另一镜面平行, 问两平面镜的夹角为多少?

7-15 垂直下望池塘水底之物时, 若其视见深度为 1 m, 求实际水深, 已知水的折射率为 $4/3$ 。

7-16 有一等边折射三棱镜, 其折射率为 1.65, 求光线经该棱镜的两个折射面折射后产生最小偏向角时的入射角和最小偏向角值。



第 8 章 理想光学系统

由上所述,当物体通过折射球面成像时,除位于近轴区内的物体外,均不能成完善像。由于近轴区的成像范围和光束宽度均很小,因此没有多大实用意义。如果把近轴光学系统成完善像的范围扩大到任意空间,即空间任意大的物体以任意宽的光束通过光学系统时均能成完善像,则这样的光学系统称为理想光学系统。

8.1 理想光学系统的基本特性、基点和基面

8.1.1 理想光学系统的基本特性

理想光学系统具有以下基本特性:

- ① 点成点像。即物空间的每一点,在像空间必有一个点与之对应,且只有一个点与之对应,这两个对应点称为物像空间的共轭点。
- ② 线成线像。即物空间的每一条直线在像空间必有一条直线与之对应,且只有一条直线与之对应,这两条对应直线称为物像空间的共轭线。
- ③ 平面成平面像。即物空间的每一个平面,在像空间必有一个平面与之对应,且只有一个平面与之对应。这两个对应平面称为物像空间的共轭面。
- ④ 对称轴共轭。即物空间和像空间存在着唯一的一对共轭对称轴。当物点 A 绕物空间的对称轴旋转一个任意角 α 时,它的共轭像点 A' 也绕像空间的对称轴旋转同样的角度 α ,这样的一对共轭轴称为光轴。

由此推广到:物空间的任一个同心光束必对应于像空间中的一个同心光束;若物空间中的两点与像空间中的两点共轭,则物空间两点的连线与像空间两点的连线也一定共轭;若物空间任意一点位于一直线上,则该点在像空间的共轭点必位于该直线的共轭线上。

上述定义只是理想光学系统的基本假设。在均匀透明介质中,除平面反射镜具有上述理想光学系统的性质外,任何实际的光学系统都不能绝对完善成像。

研究理想光学系统成像规律的实际意义是用作衡量实际光学系统成像质量的标准。通常把理想光学系统计算公式(近轴光学公式)计算出来的像,称为实际光学系统的理想像。另外,在设计实际光学系统时,用它近似表示实际光学系统所成像的位置和大小,即实际光学系统设计的初始计算。

8.1.2 理想光学系统的基点和基面

理想光学系统的基点和基面是指表征理想光学系统特性的焦点、焦平面、主点、主平面。利用这些特殊的点和面来讨论光学系统的成像特性，可使讨论的问题大为简化。

图 8-1 所示为一理想光学系统， O_1 和 O_2 是其第一面和最后一面的顶点， FF' 为光轴。如果在物空间有一条平行于光轴的光线 AE_1 ，经光组各面折射后，其折射光线 G_2F' 交光轴 F' 点。另一条物方光线 FO_1 与光轴重合，其折射光线 O_2F' 仍沿光轴方向射出。由于物方两平行入射线 AE_1 和 FO_1 的交点(于左方无穷远的光轴上)与像方共轭光线 G_2F' 和 O_2F' 的交点 F' 共轭，所以 F' 是物方无穷远轴上点的像， F' 点称为理想光学系统的像方焦点(或后焦点、第二焦点)。由此，任一条平行于光轴的入射线经理想光学系统后，出射线必过 F' 点。

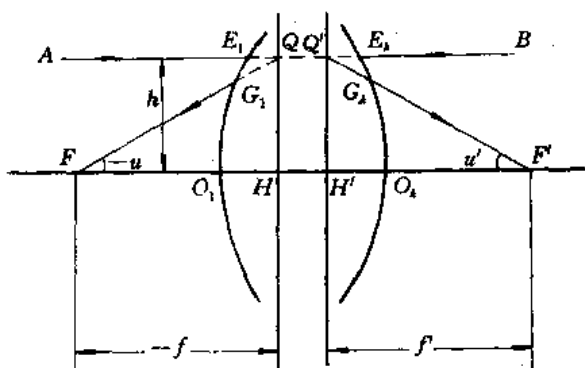


图 8-1 理想光学系统

同理有一物方焦点 F (或前焦点、第一焦点)，它与像方无穷远轴上点共轭。任一条过 F 的入射线经理想光学系统后，出射线必平行于光轴。

通过物方焦点 F 且垂直于光轴的平面称为物方焦平面。通过像方焦点 F' 且垂直于光轴的平面称为像方焦平面。显然，物方焦平面的共轭像面在无穷远处，物方焦平面上任何一点发出的光束，经理想光学系统后必为一平行光束。同样，像方焦平面的共轭物面也在无穷远处，任何一束入射的平行光，经理想光学系统后必会聚于像方焦平面的某一点。

必须指出，焦点和焦平面是理想光学系统的一对特殊的点和面。焦点 F 和 F' 彼此之间不共轭，两焦平面彼此之间也不共轭。

延长入射光线 AE_1 和出射光线 G_2F' 得到交点 Q ；同样延长光线 BE_2 和 G_1F ，可得交点 Q' 。若设光线 AE_1 和 BE_2 入射高度相同，且都在子午面内，则由于光线 AE_1 与 G_2F' 共轭， BE_2 与 G_1F 共轭，共轭线的交点 Q 与 Q' 必共轭。并由此推得，过 Q 和 Q' 点作垂直于光轴的平面 QH 和 $Q'H$ 也互相共轭。位于这两个平面内的共轭线段 QH 和 $Q'H$ 具有同样的高度 h ，且位于光轴的同一侧，故这两面的垂轴放大率 $\beta = +1$ ，称这对垂轴放大率为 $+1$ 的共轭面为主平面。其中， QH 称为物方主平面， $Q'H$ 称为像方主平面。物方主平面与光轴的交点 H 称为物方主点，像方主平面与光轴的交点 H' 称为像方主点。主点和主平面也是理想光学系统的一对特殊的点和面。

根据主平面的定义可知，当物空间任意一条光线和物方主平面的交点为 Q 时，则它的

共轭光线和像方主平面的交点为 Q' ， Q 点和 Q' 点距光轴的距离相等。

自物方主点 H 到物方焦点 F 的距离称为物方焦距(或前焦距、第一焦距)，以 f 表示。自像方主点 H' 到像方焦点 F' 的距离称为像方焦距(或后焦距、第二焦距)，以 f' 表示。焦距的正负是以相应的主点为原点来确定的，如果由主点到相应的焦点的方向与光线传播方向一致，则焦距为正，反之为负。图中， $f < 0$ ， $f' > 0$ 。由三角形 $Q'H'F'$ 可以得到像方焦距 f' 的表示式

$$f' = \frac{h}{\tan u} \quad (8-1)$$

同理，物方焦距的表示式为

$$f = -\frac{h}{\tan u} \quad (8-2)$$

8.2 理想光学系统的物像关系

对于理想光学系统，不管其结构如何，只要知道基点的位置，其成像性质就确定了，就可方便地用图解法或解析法求得任意位置和大小物体经光学系统所成的像。

8.2.1 图解法求像

当理想光学系统的主点和焦点位置已知时，欲求一垂轴物体 AB 经光学系统的像，只需过 B 点作两条入射光线，如图 8-2 所示，其中一条光线平行于光轴，出射光线必过像方焦点 F' ；另一条光线过物方焦点 F ，出射光线必平行于光轴。两出射光线的交点 B' 就是物点 B 的像。因 AB 垂直于光轴，故过像点 B' 作垂轴线段 $A'B'$ 就是物体 AB 经系统后所成的像。

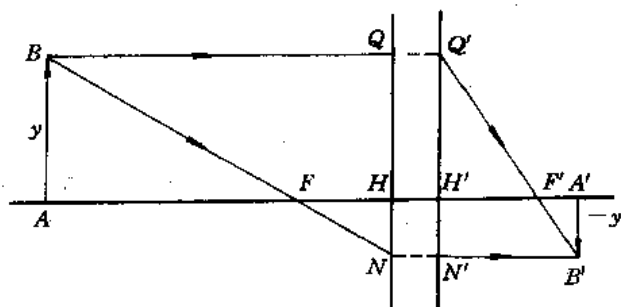


图 8-2 理想光学系统图解法求像

为了作图方便，有时需要知道任意光线经过光学系统后的出射方向。此时，根据焦平面的性质有两种常用的方法。

一种方法是过物方焦点作一条与任意光线平行的辅助光线，任意光线与辅助光线所构成的斜平行光束经光学系统折射后应会聚于像方焦平面上一点，这一点可由辅助光线的出射线平行于光轴而确定，从而求得任意光线的出射线的方向，如图 8-3(a)所示。另一种方法是认为任意光线是由物方焦平面上一点发出光束中的一条。为此，过任意光线与物方焦平面交点作一条平行于光轴的辅助线，其出射线必过像方焦点。则由于任意光线的出射

线平行于辅助光线的出射线，即可求得任意光线的出射线方向。如图 8-3(b) 所示。

用图解求像简单、直观，便于判断像的位置和虚实，但精度较低，为了更全面地讨论物体经光学系统的成像规律，还常采用解析求像的方法。

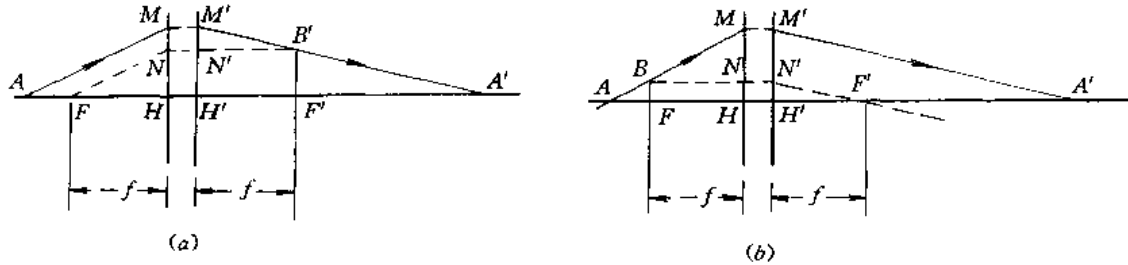


图 8-3 任意入射线的出射线的作图

8.2.2 解析法求像

1. 牛顿公式

以焦点为坐标原点计算物距和像距的物像公式，叫牛顿公式。如图 8-4 所示，有一垂轴物体 AB ，其高度为 y ，经理想光学系统后成一倒像 $A'B'$ ，像高为 y' 。由相似三角形 BAF 和 FHN ， $H'M'F'$ 和 $F'A'B'$ 可得

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-f}{-x}, \quad \frac{-y'}{y} = \frac{x'}{f}$$

由此可得 -

$$xx' = ff \quad (8-3)$$

这就是牛顿公式。

2. 高斯公式

以主点为坐标原点计算物距和像距的物像公式，叫高斯公式。 l 和 l' 分别表示以物方主点为原点的物距和以像方主点为原点的像距，由图可知

$$\begin{aligned} -l &= -x - f \\ l' &= x' + f \end{aligned}$$

代入牛顿公式，整理后可得

$$\frac{f}{l} + \frac{f}{l'} = 1 \quad (8-4)$$

这就是高斯公式。

3. 焦距间的关系

如图 8-5 所示， $A'B'$ 是物体 AB 经理想光学系统后所成的像，由轴上点 A 发出的任意一条成像光线 AQ ，其共轭光线为 $Q'A$ 。 AQ 和 $Q'A$ 的孔径角分别为 u 和 u' 。 HQ 和 $H'Q'$ 的高度均为 h 。由图得

$$(x + f)\tan u = h = (x' + f)\tan u'$$

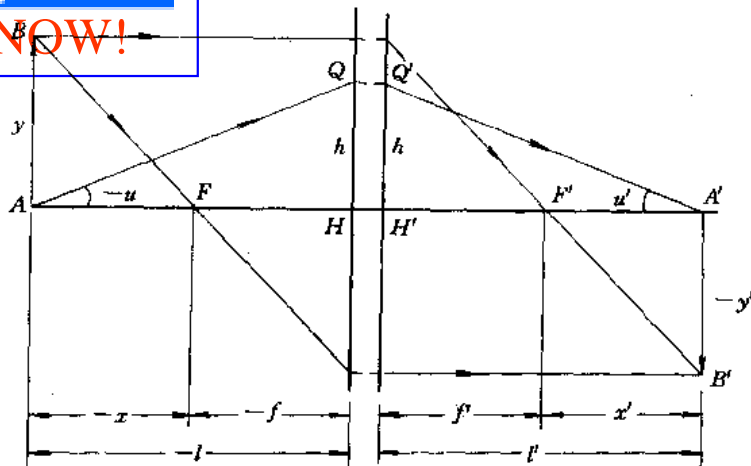


图 8-5 理想光学系统导出两焦距关系用图

因

$$x = -\frac{y}{y'}f, \quad x' = -\frac{y'}{y}f'$$

代入上式得

$$yf \tan u = -y'f' \tan u' \quad (8-5)$$

对于理想光学系统, 不管 u 和 u' 角有多大, 上式均能成立。因此, 当 QA 和 $Q'A'$ 是近轴光线时, 上式也能成立。将 $\tan u = u$, $\tan u' = u'$ 代入得

$$yfu = -y'f'u'$$

和拉亥不变量 $ny = n'y'$ 相比较, 可得表征光学系统物方和像方两焦距之间关系的重要公式

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n'}{n} \quad (8-6)$$

当光学系统处于同一介质中时, 即 $n' = n$, 则两焦距绝对值相等, 符号相反:

$$f' = -f \quad (8-7)$$

此时, 牛顿公式可以写成

$$xx' = -f'^2 \quad (8-8)$$

高斯公式可以写成

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \quad (8-9)$$

4. 拉亥不变量

将(8-6)式代入(8-5)式得理想光学系统的拉亥不变量公式

$$ny \tan u = n'y' \tan u' \quad (8-10)$$

此式对任何能成完善像的光学系统均成立。

5. 垂轴放大率

理想光学系统的垂轴放大率 β 定义为像高 y' 与物高 y 之比。由图 8-4 得

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f} \quad (8-11)$$



对于以主点为坐标原点的物像距的放大率公式，可由牛顿公式导出。将牛顿公式 $x' = ff/x$ 两边各加上 f ，得

$$x' + f = \frac{ff}{x} + f = \frac{f}{x}(f + x)$$

因为 $l = x' + f$ ， $l = f + x$ ，故有

$$l = \frac{f}{x}l$$

将两焦距的关系式(8-6)代入，得

$$\beta = -\frac{f}{x} = \frac{nl'}{nl}$$

此式与单个折射球面近轴区成像的垂轴放大率公式完全相同，表明理想光学系统的成像性质可以在实际光学系统的近轴区得到实现。

如果光学系统处于同一介质中， $f' = -f$ ，则垂轴放大率可写成

$$\beta = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f} = \frac{l'}{l} \quad (8-12)$$

可见，放大率随物体的位置而异，某一放大率只对应于一个物体位置，在不同共轭面上，放大率是不相同的。

6. 轴向放大率

理想光学系统的轴向放大率 α 定义为

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = \frac{dl'}{dl} \quad (8-13)$$

式中， dx (或 dl) 为轴上物点 A 沿光轴移动一微小距离； dx' (或 dl') 为像 A' 相应移动距离。微分牛顿公式或高斯公式，可以求得

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} \quad (8-14)$$

上式右边乘以和除以 ff' ，并用垂轴放大率公式，可得

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{x'}{x} = -\frac{x'}{f} \cdot \frac{f}{x} \cdot \frac{f}{f} = -\beta^2 \frac{f}{f} \\ &= \frac{n'}{n} \beta^2 \end{aligned} \quad (8-15)$$

如果光学系统处于同一介质中，则 $\alpha = \beta^2$ 。

7. 角放大率

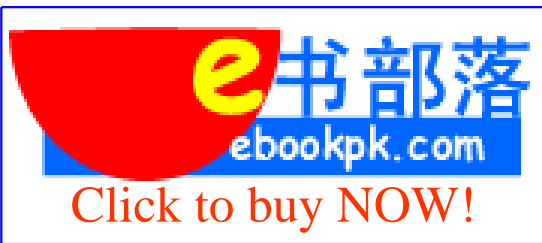
理想光学系统的角放大率 γ 定义为像方孔径角 u' 的正切与物方孔径角 u 的正切之比，即

$$\gamma = \frac{\tan u'}{\tan u}$$

由图 8-5， $l \tan u = h = l' \tan u'$ ，故

$$\gamma = \frac{\tan u'}{\tan u} = \frac{l}{l'} \quad (8-16)$$

将(8-10)式代入上式得



$$\gamma = \frac{\tan u'}{\tan u} = \frac{ny'}{n'y} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{1}{\beta} \quad (8-17)$$

如果光学系统处于同一介质中，则

$$\gamma = \frac{1}{\beta}$$

将(8-6)式代入(8-17)式得

$$\gamma = -\frac{1}{\beta} \frac{f}{f'} = \frac{x}{f'} = \frac{f}{x'} \quad (8-18)$$

可见，理想光学系统的角放大率只和物体的位置有关，而与孔径角无关。在同一对共轭点上，所有像方孔径角的正切和与之相应的物方孔径角的正切之比恒为常数。

将(8-15)式和(8-17)式相乘，得三种放大率之间的关系：

$$\alpha\gamma = \beta \quad (8-19)$$

8. 光焦度

光焦度是光学系统会聚本领或发散本领的数值表示，它与光学系统的焦距有关。

利用(8-6)式，将高斯公式写成如下形式：

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

式中， n'/f' 定义为光学系统的光焦度，用字母 φ 表示：

$$\varphi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \quad (8-20)$$

8.3 节点和节平面

在理想光学系统中有一对角放大率为+1的共轭点，叫做节点。在物空间的节点称为物方节点，像空间的称为像方节点。分别用字母 J 和 J' 表示。过物方节点并垂直于光轴的平面称为物方节平面，过像方节点并垂直于光轴的平面称为像方节平面。节点和节平面是理想光学系统的又一对特殊的点和面，与焦点和焦平面、主点和主平面统称为理想光学系统的基点和基面。

按(8-18)式， $\gamma = x/f' = f/x'$ 。当 $\gamma = +1$ 时，得这一对共轭点相对于相应焦点的位置由如下坐标决定：

$$\left. \begin{aligned} x_J &= f \\ x_{J'} &= f \end{aligned} \right\} \quad (8-21)$$

如果光学系统处于同一介质中，由于 $f = -f'$ ，因而 $x_J = x_H$ ， $x_{J'} = x_H$ ，即节点和主点重合。

因节点的 $\gamma = +1$ ，故有 $u = u'$ 。这表示通过节点的共轭光线方向不变，因而可方便地用于图解法求像，如图 8-6 所示。

由于节点具有入射和出射光线彼此平行的特性，时常用它来测定光学系统的基点位置。如图 8-7 所示，将一束平行光入射于光学系统，并使光学系统绕通过像方节点 J' 的轴线左右摆动，由于入射光线方向不变，而且彼引平行，根据节点的性质，通过像方节点 J'

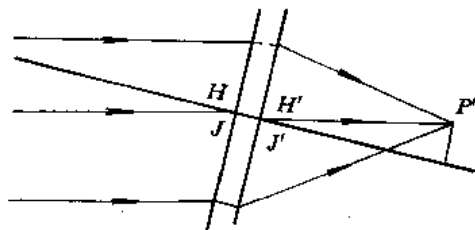
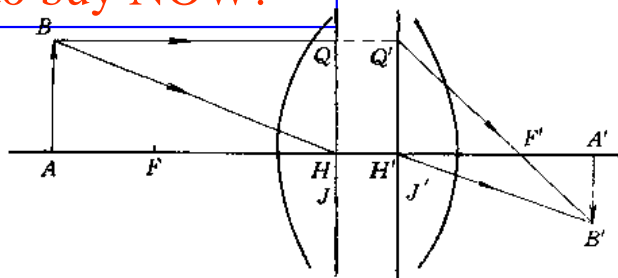


图 8-6 理想光学系统过节点的入射线和出射线彼此平行 图 8-7 节点位置的测定

的出射光线一定平行于入射光线。同时由于转轴通过 J' ，所以出射光线 $J'P$ 的方向和位置都不会因光学系统的摆动而发生改变。与入射平行光束相对应的像点，一定位于 $J'P$ 上，因此，像点也不会因光学系统的摆动而产生左右移动。如果转轴不通过 J' ，则光学系统摆动时， J' 及 $J'P$ 光线的位置也发生摆动，因而像点位置就发生摆动。利用这种性质，一边摆动光学系统，同时连续改变转轴位置，并观察像点，当像点不动时，转轴的位置便是像方节点的位置。颠倒光学系统，重复上述操作，便可得到物方节点位置。对绝大多数光学系统来说都放在空气中，节点的位置就是主点的位置。

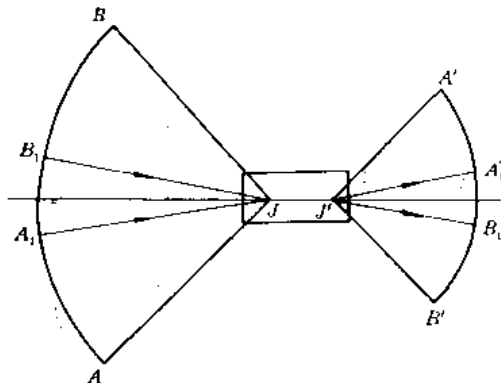


图 8-8 周视照相机过像方节点轴转动

通常用于拍摄大型团体照片使用的周视照相机也是利用节点的性质构成的。如图 8-8 所示，拍摄的对象排列在一个圆弧 AB 上，照相物镜并不能使全部物体同时成像，而只能使小范围的物体 A_1B_1 成像于底片上的 $A_1'B_1'$ 上。当物镜绕像方节点 J' 转动时，就可以把整个拍摄对象 AB 成像在底片 AB' 上。如果物镜的转轴和像方节点不重合，当物镜转动时， A 点的像 A_1' 将在底片上移动，因而使照片模糊不清。现在使物镜的转轴通过像方节点 J' ，根据节点的性质，当物镜转动时， A_1 点的像点 A_1' 就不会移动。因此整幅照片 AB' 上就可以获得整个物体 AB 的清晰的像。

8.4 理想光学系统的组合

一个光学系统可以由一个部件或几个部件组成，每个部件可以是一个透镜或几个透镜组成，这些光学部件常称为光组。光组可单独看作是一个理想光学系统，由焦距、焦点和主点来描述。本节讨论如何由已知主点和焦点位置的几个光组求得组合系统的主点和焦点位置。

8.4.1 双光组组合

双光组组合是光组组合中常遇到的组合，也是最基本的组合。如图 8-9 所示，有两个

理想光组它们的焦距分别为 f_1 、 f_1' 和 f_2 、 f_2' ，其基点位置如图中所示，两光组间的相对位置由第一光组的像方焦点 F_1' 距第二光组的物方焦点 F_2 的距离 Δ 表示， Δ 称为该系统的光学间隔。 Δ 以 F_1' 为起点，计算到 F_2 ，由左向右为正，反之为负。 d 为两光组间的距离，等于 H_1H_2 。

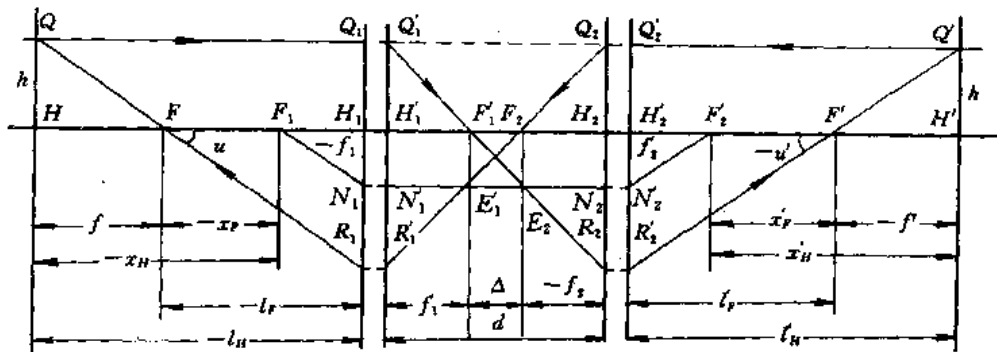


图 8-9 双光组组合

在物空间作一条平行于光轴的光线 QQ_1 ，经第一光组折射后过焦点 F_1' 射入第二个光组，交第二个光组的物方主平面之 R_2 点。利用物方焦平面的特性作出经第二个光组的出射线 R_2F' 。 R_2F' 与光轴交点 F' 就是合成光组的像方焦点。入射光线 QQ_1 的延长线与其共轭光线 R_2F' 的交点 Q' 必位于合成光组的像方主平面上。过 Q' 作垂直于光轴的平面 $Q'H'$ ，即为合成光组的像方主平面，它和光轴的交点 H' 为合成光组的像方主点。线段 $H'F'$ 为合成光组的像方焦距 f' ，图中 $f' < 0$ 。

同理，在像方空间作一条平行于光轴的光线 $Q'Q_2'$ ，自右向左重复上述步骤即可求出合成光组的物方焦点 F 和物方主点 H ， HF 为物方焦距 f ，图中 $f > 0$ 。

合成光组的像方焦点 F' 和像方主点 H' 的位置以第二个光组的像方焦点 F_2' 或像方主点 H_2' 为原点来确定。由图可见， $x_{F'} = F_2'F' > 0$ ， $x_{H'} = F_2'H' > 0$ ，或 $l_{F'} = H_2'F' > 0$ ， $l_{H'} = H_2'H' > 0$ 。

同样，合成光组的物方焦点 F 和物方主点 H 的位置以第一光组的物方焦点 F_1 或物方主点 H_1 为原点来确定。由图可见， $x_F = F_1F < 0$ ， $x_H = F_1H < 0$ ，或 $l_F = H_1F < 0$ ， $l_H = H_1H < 0$ 。

有了以上图解法的基础以后，就可导出合成光组的基点位置和焦距公式。

1. 焦点位置公式

由图 8-9 可见，合成光组的像方焦点 F' 和第一光组的像方焦点 F_1' 对第二光组来说是一对共轭点。 F' 的位置 $x_{F'} = F_2'F'$ 可用牛顿公式求得。公式中的 $x = -\Delta$ ， $x' = x_{F'}$ ，即

$$x_{F'} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta} \quad (8-22)$$

同理，合成光组的物方焦点 F 和第二光组的物方焦点 F_2 对第一光组来说是一对共轭点。故有

$$x_F = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} \quad (8-23)$$



$$l'_F = x'_F + f_2$$

$$l_F = x_F + f_1$$

所以, 将(8-22)式和(8-23)式代入可得相对于主点 H_2 和 H_1 确定的合成光组焦点位置公式

$$\left. \begin{aligned} l'_F &= f_2 \left(1 - \frac{f_2}{\Delta}\right) \\ l_F &= f_1 \left(1 + \frac{f_1}{\Delta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (8-24)$$

2. 焦距公式

由图 8-9, $\triangle Q'H'F_1$ 与 $\triangle N_2'H_2F_2$ 相似, $\triangle Q_1'H_1F_1$ 与 $\triangle F_1'F_2E_2$ 相似, 所以有

$$\frac{f}{f_2} = \frac{QH'}{H_2'N_2'}, \quad \frac{f_1}{\Delta} = \frac{Q_1'H_1}{F_2'E_2}$$

因为 $QH' = Q_1'H_1$, $H_2'N_2' = F_2'E_2$, 故得

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad (8-25)$$

同理, $\triangle QHF$ 与 $\triangle F_1'H_1N_1$ 相似, $\triangle Q_2'H_2F_2$ 与 $\triangle F_1'E_1F_2$ 相似, 有

$$\frac{f}{-f_1} = \frac{QH}{H_1N_1}, \quad \frac{-f_2}{\Delta} = \frac{Q_2'H_2}{F_1'E_1}$$

上两式等号右边部分相等, 故得

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad (8-26)$$

由于光学间隔 $\Delta = d - f_1 + f_2$, 所以代入(8-25)式可得

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 - f_2 - d} \quad (8-27)$$

如果光组处于同一介质中, 则上式可写为

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad (8-28)$$

或用光焦度表示为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2 \quad (8-29)$$

利用(8-25)式和(8-26)式, 可将(8-24)式改写为

$$\left. \begin{aligned} l'_F &= f \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) \\ l_F &= f \left(1 + \frac{d}{f_2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (8-30)$$

3. 主点位置公式

由图 8-9 可见

$$\left. \begin{aligned} x'_H &= x'_F - f \\ x_H &= x_F - f \end{aligned} \right\} \quad (8-31)$$

$$\left. \begin{aligned} l_H' &= x_H' + f_2 = l_F' - f' \\ l_H &= x_H + f_1 = l_F - f \end{aligned} \right\} \quad (8-32)$$

将有关公式代入，整理后得

$$\left. \begin{aligned} x_H' &= \frac{f_2(f_1 - f_2)}{\Delta} \\ x_H &= \frac{f_1(f_1 - f_2)}{\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (8-33)$$

$$\left. \begin{aligned} l_H &= -f \frac{d}{f_1} \\ l_H &= f \frac{d}{f_2} \end{aligned} \right\} \quad (8-34)$$

4. 合成光组的垂轴放大率

由于合成光组仍然是一个理想光组，因此其垂轴放大率仍为

$$\beta = -\frac{f'}{x} = -\frac{x'}{f}$$

此时，式中的 f 和 f' 是合成光组的焦距； x 表示物点 A 到合成光组前焦点 F 的距离。由图 8-10 可见， $x = x_1 - x_f = x_1 - f_1 f_1' / \Delta$ ，与 (8-26) 式一起代入垂轴放大率公式，得

$$\beta = -\frac{f'}{x} = -\frac{\frac{f_1 f_2}{\Delta}}{x_1 - \frac{f_1 f_1'}{\Delta}} = \frac{f_1 f_2}{f_1 f_1' - x_1 \Delta} \quad (8-35)$$

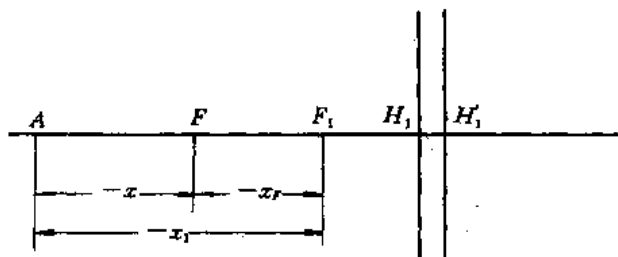


图 8-10 合成光组的垂轴放大率

上式表明，对于由两个光组组合的系统，其垂轴放大率亦可由物点相对于第一光组物方焦点的距离 x_1 直接求得。至于合成光组的其它放大率及与垂轴放大率的关系，和前面所述相同。

8.4.2 多光组组合

对于多个理想光组的组合，可利用上述双光组的组合方法，先对第一和第二个光组进行组合，求出其等效光组，然后再与第三个光组进行组合，直至求得最后的等效光组。但是，这个过程较为复杂，容易出错，故多用其它方法。下面介绍两种一般的方法。

1. 正切计算法

如图 8-11 所示，已知三个光组的基点位置及各光组之间的间隔，作任意一条平行于

光轴的光线通过三个光组的光路。光线在每个光组上的入射高度分别为 h_1 、 h_2 、 h_3 ，出射光

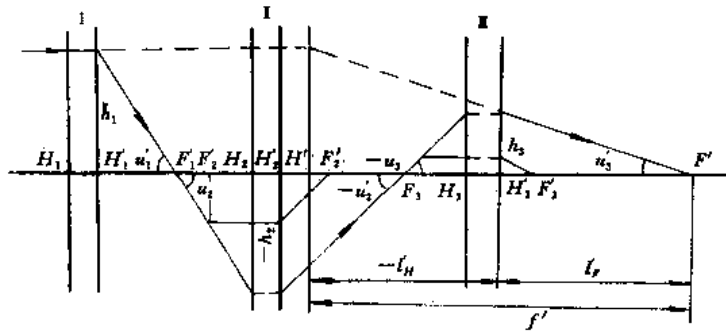


图 8-11 正切计算法

线与光轴的夹角为 u_3 。由图可知

$$l'_r = \frac{h_3}{\tan u_3}, \quad f = \frac{h_1}{\tan u_3}$$

对于由 k 个光组组成的系统，应有

$$\left. \begin{aligned} l'_r &= \frac{h_k}{\tan u_k} \\ f &= \frac{h_1}{\tan u_k} \end{aligned} \right\} \quad (8-36)$$

式中， h_k 和 u_k 可由以下方法求得。

将高斯公式两边乘以 h_1 得

$$\frac{h_1}{l'_1} - \frac{h_1}{l_1} = \frac{h_1}{f_1}$$

由于

$$\frac{h_1}{l'_1} = \tan u'_1, \quad \frac{h_1}{l_1} = \tan u_1$$

所以有

$$\tan u'_1 = \tan u_1 + \frac{h_1}{f_1}$$

再将过渡公式 $l_2 = l'_1 - d_1$ 两边乘以 $\tan u'_1$ ，得

$$l_2 \tan u'_1 = l'_1 \tan u'_1 - d_1 \tan u'_1$$

由于 $u'_1 = u_2$ ， $l_2 \tan u_2 = h_2$ ， $l'_1 \tan u'_1 = h_1$ ，所以有

$$h_2 = h_1 - d_1 \tan u'_1$$

只要给定 $\tan u_1$ 和 h_1 ，便可将以上 $\tan u'_1$ 和 h_2 表示式逐个运用于各光组，最后求出 h_k 和 $\tan u_k$ 。 h_k 和 $\tan u_k$ 的一般表示式为

$$\left. \begin{aligned} \tan u_k &= \tan u_1 + \frac{h_1}{f_k} \\ h_k &= h_1 - d_{k-1} \tan u_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (8-37)$$

通常取 $\tan u_1 = 0$ ， $h_1 = f'_1$ (计算方便)，求出的 l'_r 和 f 是组合系统的像方焦点位置和像

Click to Buy NOW!

方焦距。当求物方焦点位置和物方焦距时，可将整个光学系统倒转，按上述方法计算出结果后，改变正负号即可。

2. 截距计算法

将(8-36)式改写为

$$f = \frac{h_1}{\tan u_k} = \frac{h_1}{\tan u_k} \cdot \frac{\tan u_2}{\tan u_1} \cdot \frac{\tan u_3}{\tan u_2} \cdot \dots \cdot \frac{\tan u_k}{\tan u_{k-1}}$$

由于 $\frac{h_1}{\tan u_1} = l_1$, $l_2 \tan u_2 = h_2 = l_2' \tan u_2'$, ..., $l_k \tan u_k = h_k = l_k' \tan u_k'$, 故

$$f = \frac{l_1 l_2' \dots l_k'}{l_2 l_3' \dots l_k} \quad (8-38)$$

当应用高斯公式依次求出每个光组的物距和像距后，便可应用此式求出组合光组的焦距。

8.4.3 光组组合形式讨论

根据(8-22)式、(8-23)式和(8-25)式、(8-26)式，在给定各分光组参数的条件下，组合光组的性质将由分光组之间的光学间隔 Δ 决定。根据 Δ 的不同，可将一切光组的组合形式分为有焦系统和无焦系统两大类。 Δ 不等于零时，其组合光组为有焦系统， Δ 等于零时，其组合光组为无焦系统(或称望远镜系统)，这类组合光组的光路如图 8-12 所示。将

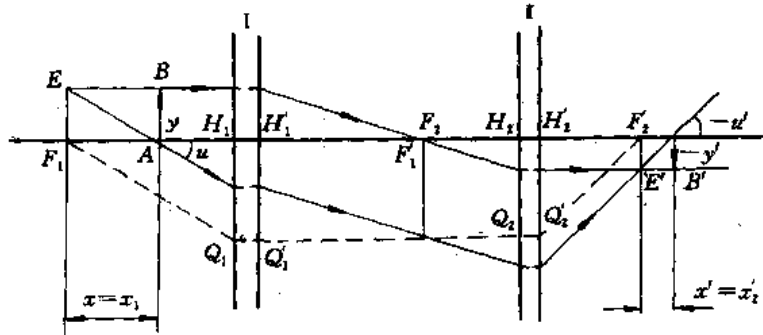


图 8-12 无焦系统光路

图中两分光组分别应用牛顿公式和放大率公式，有

$$x_1' = \frac{f_1 f_1'}{x_1}, \quad x_2' = \frac{f_2 f_2'}{x_2}$$

$$\beta_1 = -\frac{x_1'}{f_1}, \quad \beta_2 = -\frac{f_2'}{x_2}$$

由于 $\Delta=0$, $x_2=x_1$, 代入上式得

$$x_2' = \frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'} x_1$$

$$\beta = \beta_1 \beta_2 = \frac{f_2'}{f_1'}$$

这就是望远镜系统的物像公式和放大率公式。对上式微分，即可得到望远镜系统的轴向放



$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = \frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}$$

由图可知，在直角三角形 $F_1 H_1 Q_1$ 和 $H_2' F_2' Q_2'$ 中有

$$\tan u = \frac{H_1 Q_1}{f_1}, \quad \tan u' = \frac{H_2' Q_2'}{f_2'}$$

由 $H_1 Q_1 = H_2' Q_2'$ ，可得望远镜系统的角放大率

$$\gamma = \frac{\tan u'}{\tan u} = \frac{f_1}{f_2'}$$

如果望远镜系统处于空气中，有 $f_1' = -f_1$ ， $f_2 = -f_2'$ ，则放大率公式可表示为

$$\left. \begin{aligned} \beta &= -\frac{f_2}{f_1'} \\ \alpha &= \left(\frac{f_2}{f_1'}\right)^2 \\ \gamma &= -\frac{f_1}{f_2'} \end{aligned} \right\} \quad (8-39)$$

由此可见，望远镜系统的放大率与物像位置无关，仅取决于两分光组焦距的大小，当两分光组确定以后，其放大率为一常数。

当两个望远镜光组组合时，依旧可以得到一个望远镜光组；当一个望远镜光组和一个有限焦距的光组组合时，可以得到一个有限焦距的光组。当用望远系统观察远处物体时，由于无穷远射来的平行光线经望远系统后仍为平行光，此时在置于出射光束光路的屏上，我们不能看到任何像。若要获得像就必须在望远镜光组后面放一个有限焦距的光组，如前面所述的复合光组一样。这里有限焦距光组可以是摄影物镜，也可以是观察者的眼睛。

8.5 透 镜

8.5.1 单个折射球面的基点、基面

在近轴区内，单个折射球面成完善像。在这种情况下，可以把它看成为单独的理想光组，它也具有基点、基面。

对主平面而言，其轴向放大率 $\beta = +1$ ，故有

$$\beta = \frac{n l_H'}{n' l_H} = +1$$

即

$$n l_H' = n' l_H$$

将单个折射球面的物像位置公式(7-14)两边同乘以 $l_H l_H'$ 得

$$n' l_H - n l_H' = \frac{n' - n}{r} l_H l_H'$$

因 $n' l_H = n l_H'$ ，上式左边为零，故有

$$\frac{n' - n}{r} l_H l'_H = 0$$

由于 $(n' - n)/r \neq 0$, 只有在 $l_H = l'_H = 0$ 时, 上式才能成立。因此, 对单个折射球面而言, 物方主点 H , 像方主点 H' 和球面顶点 O 相重合, 而且物方和像方主平面相切于球面顶点 O , 如图 8-13 所示。

由于主点已知, 焦距由 $f = n'r/(n' - n)$, $f = -nr/(n' - n)$ 确定, 焦点和焦平面的位置也就确定了。

由节点的定义和角放大率公式有

$$\gamma = \frac{l_J}{l'_J} = 1$$

即

$$l_J = l'_J$$

代入单个折射球面公式(7-14)得

$$l_J = l'_J = r$$

即单个折射球面的一对节点(J, J')均位于球心 C 处。过节点垂直于光轴的平面即节平面。由于物方折射率和像方折射率不相等, 因此两焦距大小不等, 主点和节点也不重合, 如图 8-13。

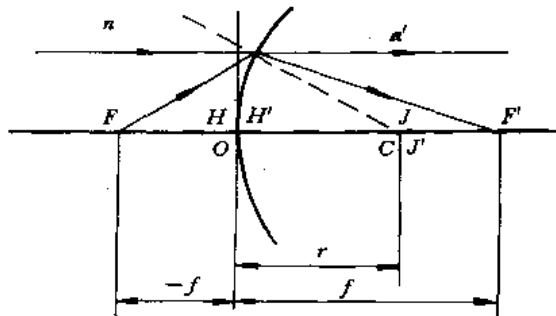


图 8-13 单个折射球面的基点和基面

8.5.2 透镜

由两个折射面包围一种透明介质形成的光学零件叫做透镜。单透镜可以作为一个最简单的光组。由于加工和检验较为简便的原因, 透镜多以球面为主。

透镜中光焦度为正者称为正透镜, 因能对光束起会聚作用, 故又称会聚透镜。相应地对光束起发散作用, 光焦度为负的负透镜或发散透镜。

按形状不同, 正透镜又分双凸、平凸和月凸三种类型; 负透镜又分双凹、平凹和月凹三种类型。正透镜的中心厚度大于边缘厚度, 负透镜的边缘厚度大于中心厚度。

当考虑近轴区成像时, 单个透镜的每一个折射球面可以看成是一个理想光组, 因此它就是两个光组的组合。应用前述光组组合公式, 可以确定透镜的基点和基面。

如图 8-14 所示的透镜, 两个折射面的半径分别为 r_1 ($r_1 > 0$) 和 r_2 ($r_2 < 0$), 厚度为 d , 透镜玻璃的折射率为 n 。设透镜在空气中, 则有 $n_1 = 1, n_1 = n_2 = n, n_2 = 1$ 。由单个折射面的焦距公式可得透镜两个折射面的焦距

$$f_1 = -\frac{r_1}{n-1}, \quad f'_1 = \frac{nr_1}{n-1}$$

$$f_2 = \frac{nr_2}{n-1}, \quad f'_2 = -\frac{r_2}{n-1}$$

或

$$\varphi_1 = \frac{n}{f_1} = -\frac{1}{f_1} = \frac{n-1}{r_1}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{f_2} = -\frac{n}{f_2} = \frac{1-n}{r_2}$$

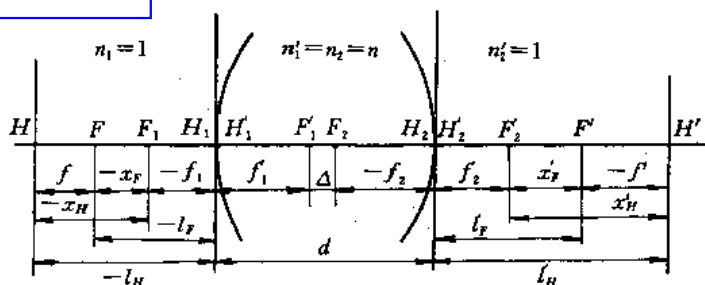


图 8-14 透镜

φ_1 和 φ_2 为第一和第二折射球面的光焦度。透镜的光学间隔 Δ 为

$$\Delta = d - f_1 + f_2 = \frac{n(r_2 - r_1) + (n - 1)d}{n - 1}$$

于是透镜的焦距为

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{nr_1 r_2}{(n - 1)[n(r_2 - r_1) + (n - 1)d]} = -f \quad (8-40)$$

设 $\rho_1 = 1/r_1$, $\rho_2 = 1/r_2$, 把上式写成光焦度的形式

$$\begin{aligned} \varphi &= (n - 1)(\rho_1 - \rho_2) + \frac{(n - 1)^2}{n} d \rho_1 \rho_2 \\ &= \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{d}{n} \varphi_1 \varphi_2 \end{aligned} \quad (8-41)$$

根据(8-30)式可得决定焦点位置的 l'_F 和 l_F 的公式

$$\left. \begin{aligned} l'_F &= f \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) = f \left(1 - \frac{n-1}{n} d \rho_1\right) \\ l_F &= -f \left(1 + \frac{d}{f_2}\right) = -f \left(1 + \frac{n-1}{n} d \rho_2\right) \end{aligned} \right\} \quad (8-42)$$

再按(8-34)式可得决定主平面位置的公式

$$\left. \begin{aligned} l_H &= -f \frac{d}{f_1} = -f \frac{n-1}{n} d \rho_1 \\ l_H &= -f \frac{d}{f_2} = -f \frac{n-1}{n} d \rho_2 \end{aligned} \right\} \quad (8-43)$$

将(8-40)式代入上式, 可得主平面位置的另一种表示式

$$\left. \begin{aligned} l_H &= \frac{-dr_2}{n(r_2 - r_1) + (n - 1)d} \\ l_H &= \frac{-dr_1}{n(r_2 - r_1) + (n - 1)d} \end{aligned} \right\} \quad (8-44)$$

由于透镜处于同一介质中, 因此, 节点和主点是重合的。

根据上述公式, 可对各种透镜的基点位置进行具体分析, 以利于对透镜光学性质的了解。

1. 双凸透镜

因双凸透镜的 $r_1 > 0$, $r_2 < 0$, 故有 $nr_1 r_2 / (n - 1) < 0$ 。由(8-40)式可知, 其像方焦距与

号, 因此有:

当 $d < n(r_1 - r_2)/(n - 1)$ 时, $f > 0$ 。由 (8-43) 式可知, 当 $f > 0$ 、 $r_1 > 0$ 、 $r_2 < 0$ 时, $l_H < 0$, $l_H > 0$, 即此时两主平面位于透镜内部, 如图 8-15 所示。若使 d 增大到 $d > n(r_1 - r_2)/(n - 1)$ 时, 则 $f < 0$, 双凸透镜成了一发散透镜。由于双凸透镜的厚度 d 一般均能满足 $d < n(r_1 - r_2)/(n - 1)$ 的条件, 故双凸透镜一般是正透镜。

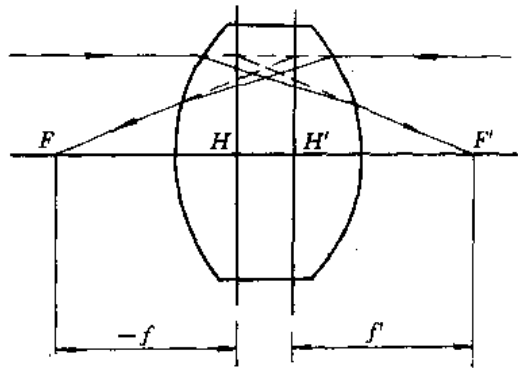


图 8-15 双凸透镜

2. 双凹透镜

因双凹透镜的 $r_1 < 0$, $r_2 > 0$, 所以不管 r_1 、 r_2 、 d 为何值, 恒有 $f < 0$ 。由 (8-43) 式可知, 此时 $l_H < 0$, $l_H > 0$, 即双凹透镜的二主平面均位于透镜的内部, 如图 8-16 所示。

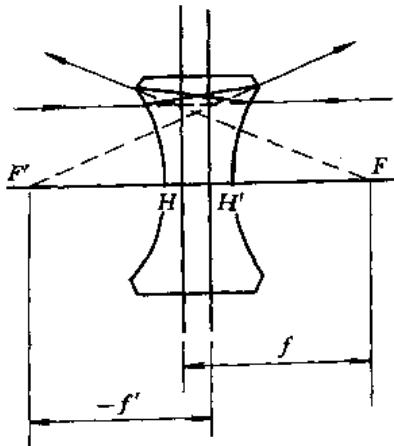


图 8-16 双凹透镜

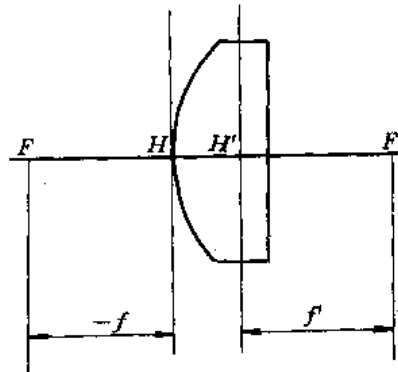


图 8-17 平凸透镜

3. 平凸透镜

对于平凸透镜, 有 $r_1 > 0$, $r_2 = \infty$, 所以, 其焦距公式为

$$f = \frac{r_1}{n - 1} > 0$$

由 (8-43) 式可知, 此时

$$l_H = -\frac{d}{n}, \quad l_H = 0$$

即平凸透镜的像方主平面位于透镜内部, 其物方主平面和球面顶点相切, 如图 8-17 所示。

4. 平凹透镜

对于平凹透镜, 有 $r_1 < 0$, $r_2 = \infty$, 由 (8-40) 式和 (8-43) 式得

$$f = \frac{r_1}{n - 1}, \quad l_H = -\frac{d}{n}, \quad l_H = 0$$

即平凹透镜总为负透镜，其像方主平面位于透镜内部，物方主平面和球面顶点相切。如图 8-18 所示。

5. 正弯月形透镜

对正弯月形透镜，有 $r_1 > 0, r_2 > 0, |r_1| < |r_2|$ ；或 $r_1 < 0, r_2 < 0, |r_1| > |r_2|$ 。由(8-40)式和(8-43)式得： $f > 0, l_H < 0, l_H' < 0$ ，即正弯月形透镜的像方焦距 f 恒为正值，物方主平面位于凸面或凹面之前，像方主平面也位于凹面或凸面之前，如图 8-19 所示。

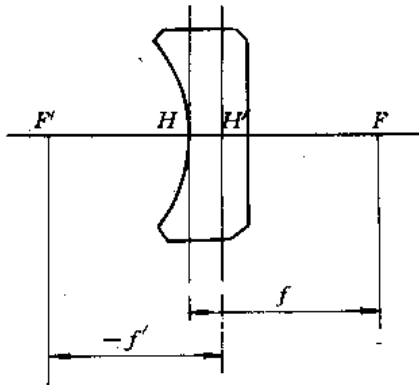


图 8-18 平凹透镜

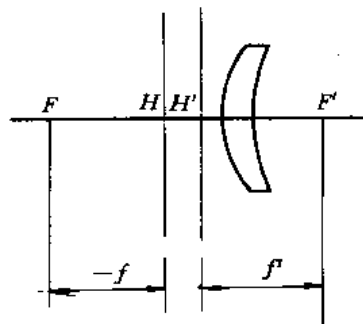


图 8-19 正弯月形透镜

6. 负弯月形透镜

对负弯月形透镜，有 $r_1 > 0, r_2 > 0, |r_1| > |r_2|$ ；或 $r_1 < 0, r_2 < 0, |r_1| < |r_2|$ 。与双凸透镜相似，负弯月形透镜的焦距也随厚度不同而可正可负。

当 $d < n(r_1 - r_2)/(n-1)$ 时(设 $r_1 > 0, r_2 > 0, |r_1| > |r_2|$)， $f < 0, l_H > 0, l_H' > 0$ ，即此时的透镜为一发散光组，两主平面均位于各个折射面的球心方向，如图 8-20 所示。若增大 d 到 $d > n(r_1 - r_2)/(n-1)$ 时，则 $f > 0$ ，即弯月形透镜变成了一会聚光组。因负弯月形透镜的厚度一般都比较小，故负弯月形透镜的像方焦距总是负值。

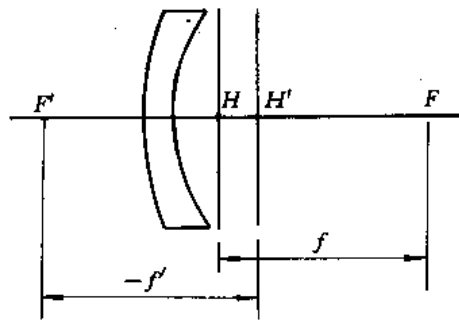


图 8-20 负弯月形透镜

8.5.3 薄透镜和薄透镜组

透镜厚度为零的透镜称为薄透镜。若实际光学系统中的透镜，其厚度与其焦距或球面曲率半径相比是一个很小的数值，则这样的透镜也可作为薄透镜看待。当光组为薄透镜时，则由(8-44)式有

$$l_H = l_H' = 0$$

即薄透镜的主平面和球面顶点重合在一起，而且两主平面彼此重合。所以，薄透镜的光学性质仅由焦距或光焦度所决定。

由(8-40)式得薄透镜的焦距为

$$f' = -f = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad (8-45)$$

由(8-41)式得薄透镜的光焦度为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

该式表明，薄透镜的光焦度为两个折射球面光焦度之和。

由两个或两个以上的共轴薄透镜组合而成的光学系统，称为薄透镜组。在实际应用中，常把实际的透镜组看作薄透镜组，以便近似地研究其成像问题。薄透镜的组合也可用上节中的各个公式。

当两个薄透镜相接触时， $d=0$ ，此时(8-29)式可写为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

式中， φ_1 、 φ_2 分别为两薄透镜的光焦度。

若两个薄透镜间有间隔 d 时，其光焦度为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2$$

当两薄透镜之间的间隔 d 变化时，由上式可知，其组合光焦度 φ 可为正(会聚系统)，可以等于零(望远镜系统)，也可以为负(发散系统)。

组合薄透镜系统的主点位置仍由(8-34)式确定

$$l_H = -f \frac{d}{f_1}, \quad l_H' = f \frac{d}{f_2}$$

不同薄透镜组不仅各基点的位置不同，而且其排列次序也大有差别。巧妙地安排基点的位置，会给光学系统带来很多好处。现以几例常见的薄透镜组予以简要说明。

1. 惠更斯目镜

惠更斯目镜由两个平凸透镜组成，图 8-21 是这种目镜的示意图。图中靠近物镜一方的透镜 L_1 称为场镜，另一透镜 L_2 接近眼睛，称为接目镜。如果各透镜的焦距为 $f_1 = 3a$ ， $f_2 = a$ ，两透镜间隔 $d = (f_1 + f_2)/2 = 2a$ 。则由上述公式可得到此目镜的光焦度 φ 为

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2 \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} - \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a} \end{aligned}$$

由此得出目镜的焦距为

$$f' = -f = \frac{1}{\varphi} = \frac{3a}{2}$$

主点的位置为

$$l_H = -f \frac{d}{f_1} = -\frac{3a}{2} \cdot \frac{2a}{3a} = -a$$

$$l_H' = f \frac{d}{f_2} = -\frac{3a}{2} \cdot \frac{2a}{-a} = 3a$$

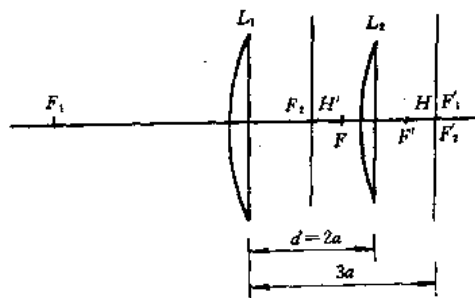


图 8-21 惠更斯目镜

目镜的四个基点 F 、 F' 和 H 、 H' 已标在

图中。可见，惠更斯目镜的第一焦点在两透镜之间并靠近第二透镜 L_2 。如果由此目镜出射的为平行光束，则其物必在镜内 F 点，即此目镜只能用来观察像。此外，两透镜间隔 $d = (f_1 + f_2)/2$ ，使得目镜色差很小。

2. 摄远物镜

摄远物镜由一个正的薄透镜和一个负的薄透镜组成，如图 8-22 所示。两透镜的间隔 d 比正透镜的焦距小，例如 $f_1 = 18.8 \text{ cm}$, $d = 15.0 \text{ cm}$, $f_2 = -6.0 \text{ cm}$ ，则此组合系统的焦距和主平面位置为 $f' = 51.3 \text{ cm}$, $l_H' = -40.9 \text{ cm}$ 。这种物镜的特点是筒长 $L = (51.3 - 40.9) + 15 = 25.4 \text{ cm}$ ，比焦距 f' 小得多，故称摄远物镜。用它可使仪器的长度在保持较小尺寸的情况下，获得长焦距的光学系统。在现代大地测量仪器及长焦距照相机中，常被采用。

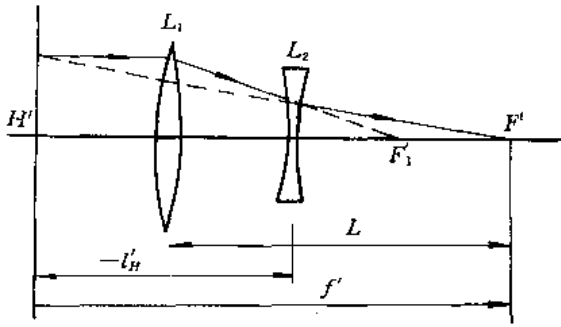


图 8-22 摄远物镜

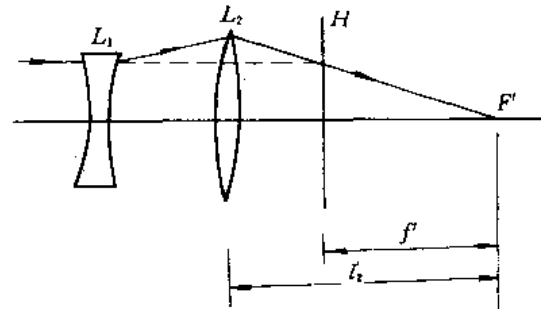


图 8-23 反远距系统

3. 反远距系统

与摄远系统相反，把负透镜放在靠近物的一方，如图 8-23 所示，形成反远距系统，它的特点是能提供较长的后工作距离。一些投影仪物镜和某些特殊物镜常采用这种系统。

4. 无焦系统

两个薄透镜，焦距分别为 f_1 和 f_2 ，相距为 $f_1 + f_2$ 时，组合系统的焦距为无限大并且主面也在无限远处，这样的系统称为无焦系统(望远镜系统)。

从图 8-24 所示的无焦系统可见，出射光束的宽度较入射光束小得多；反过来，若细光束由 L_2 入射，则从 L_1 出射的光束宽度将增大很多。利用这个原理可将激光器发出的细光束扩展为较宽的激光束，这样的系统称为折束系统，它在激光技术中有广泛应用。

5. 折反系统

由透镜和反射镜组成的系统称为折反系统，它广泛应用于望远物镜和一些导弹头的光学系统中，图 8-25 是一个共心负透镜和一半径为 R 的球面镜组成的共心折反系统，称为包沃斯—马克苏托夫(Bouwers - Maksutov)共心物镜。

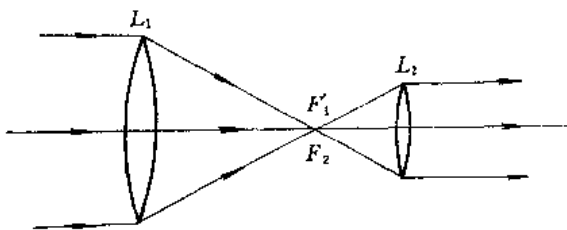


图 8-24 无焦系统

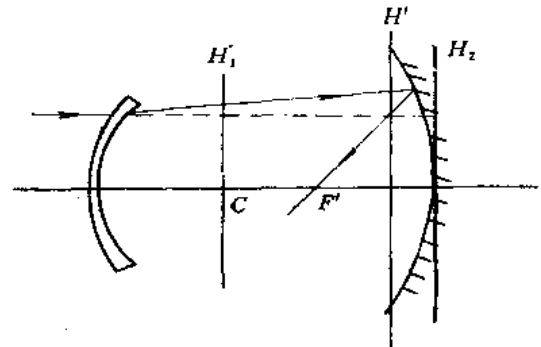


图 8-25 折反系统



8.6 光学系统中的光束限制

光学系统作为一个成像系统，除了应满足前述的物像共轭位置和成像放大率的要求外，对于成像的范围和成像光束的粗细等也有一定的要求，所以在设计光学系统时，应按其用途、要求和成像范围，对通过光学系统的成像光束提出合理的要求，这实际上也就是光学系统中的光束限制问题。

8.6.1 光阑及其作用

在光学系统中把可以限制光束的透镜边框、或者特别设计的一些带孔的金属薄片，通称为光阑。光阑的内孔边缘就是限制光束的光孔，这个光孔对光学零件来说称为通光孔径。光阑的通光孔一般是圆形的，其中心和光轴重合，光阑平面和光轴垂直。

在实际光学系统中的光阑，按其作用可分为以下几种：

① 孔径光阑。它是限制轴上物点成像光束立体角的光阑。如果在过光轴的平面上来考察，这种光阑决定了轴上点发出光束的孔径角，孔径光阑有时也称为有效光阑。照相机中的光阑（俗称光圈）就是这种光阑。

孔径光阑的位置在有些光学系统中是有特定要求的。例如放大镜、望远镜等这些目视光学系统，光阑或光阑的像一定要在光学系统的外边，使之与眼睛的瞳孔相重合，以达到良好的观察效果。又如在光学计量仪器中，通常把光阑放在物镜的焦平面上，达到精确测量的目的。除此以外，光学系统中光阑的位置是可以任意选择的，但是，合理地选取光阑的位置可以改善轴外点的成像质量。因为对于轴外点发出的宽光束而言，不同的光阑位置，就等于在该光束中选择不同部分的光束参与成像，即可选择成像质量较好的那部分光束，把成像质量较差的那部分光束拦掉。

作为观察用的目视光学系统，一定要把眼睛的瞳孔作为整个系统的一个光阑来考虑。

② 视场光阑。它是限制物平面上或物空间中成像范围的光阑。如照相机中的底片框就是视场光阑。

孔径光阑和视场光阑是光学系统中的主要光阑，任何光学系统都有这两种光阑。

③ 消杂光光阑。这种光阑不限制通过光学系统的成像光束，只限制那些非成像物体射来的光、光学系统各折射面反射的光和仪器内壁反射的光等，这些光称为杂光。利用消杂光光阑可以拦掉一部分杂光。杂光进入光学系统，将使像面产生明亮背景，使像的对比度降低，有损于成像质量。一些光学系统，如天文望远镜、长焦距平行光管等，都专门设置消杂光光阑，而且在一个光学系统中可以有几个。而在一般光学系统中，常把镜管内壁加工成内螺纹，并涂以黑色无光漆或煮黑来达到消杂光的目的。

8.6.2 孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳

在实际光学系统中，无论有多少光阑，一般来说，其中只有一个为孔径光阑，它能控制进入光学系统光束的大小，或者说它能控制进入光学系统光能量的强弱。

如图 8-26 所示的系统中，为了确定孔径光阑，就要看光阑 Q_1Q_2 和透镜框 M_1M_2 究竟是哪一个起限制成像光束的作用。为此只需比较两者对轴上已知物点 A 所发出的光线的

张角大小即可。因为光阑 Q_1Q_2 前面有透镜存在，光阑处在透镜的像空间，物体在透镜的物空间，所以物体与光阑不直接发生关系，不能直接从轴上物点 A 引一条到光阑边缘 Q_1 的光线来确定光阑 Q_1Q_2 对 A 点的张角。但可根据光阑的位置和大小，求出其被它前面的光组所成像的位置和大小，因该像位于透镜的物空间，这就可与物体直接发生关系。如图所示， P_1P_2 是光阑 Q_1Q_2 被其前面的透镜 M_1M_2 在物空间所成的像，若从轴上 A 引一条到 P_1 的光线，则经过透镜折射后，正好沿光阑边缘 Q_1 通过。而透镜框 M_1M_2 前面再没有透镜，本身位于物空间，可直接由物点 A 到框边缘 M_1 引光线 AM_1 。由图可以看出 $\angle P_1AP$ 小于 $\angle M_1AP$ ，即光阑的像对轴上物点 A 的张角最小，或者说光阑 Q_1Q_2 限制了 A 点成像光束的粗细。因此，该例中光阑 Q_1Q_2 就是孔径光阑。

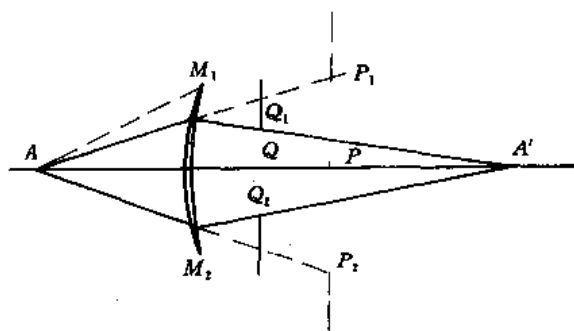


图 8-26 孔径光阑的确定

由此可知，要在光学系统中的多个光阑中找出哪个是限制光束的孔径光阑，只要求出所有光阑被它前面的光组在系统物空间所成像的位置和大小，求出它们对轴上物点 A 的张角，其中张角最小的光阑像所对应的光阑，就是孔径光阑。

再如图 8-27 所示的有三个光阑的系统，各光阑在系统物空间的像如图 8-28 所示。透镜 L_1 成像到物空间，就是本身；光阑 Q_1Q_2 的像为 P_1P_2 ；透镜 L_2 的像为 L'_2 。由物点 A 对各个像的边缘引连线，可以看出张角 P_1AP 最小。所以 P_1P_2 对应的光阑 Q_1Q_2 实际起着限制光束的作用，即为孔径光阑。孔径光阑在物空间的像 P_1P_2 ，称为入射光瞳，简称入瞳。孔径光阑在物空间的像所决定的与轴上物点 A 的张角 P_1AP ，称为光学系统的物方孔径角 U ，此角即为轴上点作边缘光线光路计算所取的孔径角。同理，把所有光阑通过其后面的光组成像到系统的像空间去，如图 8-29 所示。 L'_1 是透镜 L_1 的像； $P'_1P'_2$ 是孔

出瞳

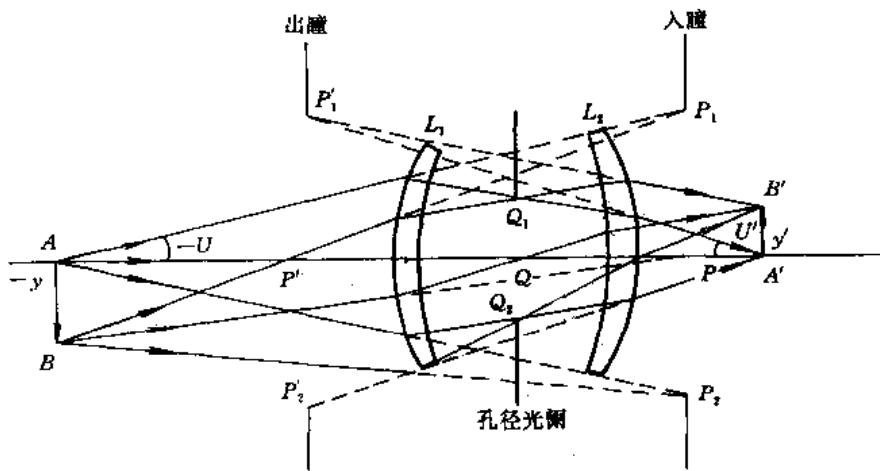


图 8-27 三阑系统

孔径光阑 Q, Q_2 的像，透镜 L_2 在像空间的像就是它本身。孔径光阑在系统像空间的像 P_1, P_2 称为出射光瞳，简称出瞳。轴上物点 A 的共轭像点为 A' 点。显然，出瞳对像面中心点 A' 所张的角为最小，此角即为像方孔径角 U' 。

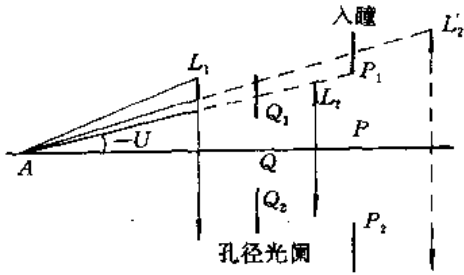


图 8-28 三阑系统中各阑在物空间的像

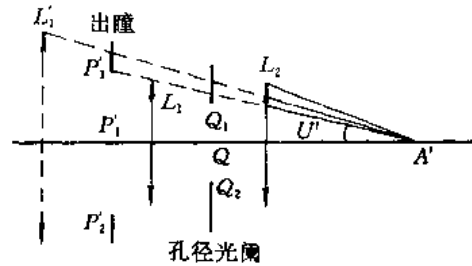


图 8-29 三阑系统中各阑在像空间的像

很显然，对一定位置的物体，入射光瞳决定了能进入系统成像的最大光束孔径，并且是物面上各点发出并进入系统成像光束的公共入口。出射光瞳是物面上各点的成像光束经过系统后射出系统的公共出口。入射光瞳通过整个光学系统所成的像就是出射光瞳，二者对整个光学系统是共轭的。如果孔径光阑在整个光学系统的像空间，它本身也就是出射光瞳。反之，在物空间，就是入射光瞳。

通过入瞳中心的光线称为主光线。由于共轭的关系，对于理想光学系统，主光线也必然通过孔径光阑中心和出瞳中心。显然，主光线是各个物点发出的成像光束的光束轴线。当物体位于物方无限远时，只须比较各光阑通过其前面光组在整个系统的物空间所成像的大小，以直径最小者为入射光瞳。

入射光瞳的大小是由光学系统对成像光能量的要求或者对物体细节的分辨能力的要求来确定的。常以入射光瞳直径和焦距之比 D/f' 来表示，称为相对孔径，它是光学系统的一个重要性能指标。相对孔径的倒数称为 F 数。对照相物镜来说，有时称 F 数为光圈数。

应该指出，光学系统的孔径光阑是对一定位置的物体而言的，如果物体位置发生变化，原来限制光束的孔径光阑将会失去限制光束的作用，光束被其它光阑所限制。如图 8-30 所示，该系统对无限远的物体成像时，限制光束将是透镜 L_1 ，因为平行于光轴入射的边缘光线并没有受光孔 Q, Q_2 的阻拦。对于无限远的物体而言，光学系统的所有光阑被其前方光组在物空间所成的像中，直径最小的一个光阑的像就是系统的入射光瞳，能进入系统成像的光束直径就等于入射光瞳的直径，所以图 8-30 所示的系统，对于无限远物体而言，透镜 L_1 是孔径光阑，也是入射光瞳，它被 L_2 所成的像是出射光瞳(图中未画出)。

在大多数情况下，轴外点发出并充满入瞳的光束，会被某些透镜所遮拦。在图 8-30 中，由轴外点 B 发出充满入瞳的光束，其下面有一部分被透镜 L_1 拦掉，其上面有一部分被透镜 L_2 拦掉，只有中间一部分(画有阴影线者)可以通过光学系统成像，这样轴外点的成像光束小于轴上点的成像光束，使像面边缘的光照度有所下降。这种轴外点光束被部分地拦掉的现象称为轴外点光束的渐晕。显然物点离光轴愈远，渐晕愈大，其成像光束的孔径角较轴上点成像光束的孔径角小得愈多。轴外点成像光束与轴上点成像光束在光瞳面上线度之比称为渐晕系数。一般照相物镜视场边缘点允许渐晕系数为 50%，即可以拦掉光束的一半。

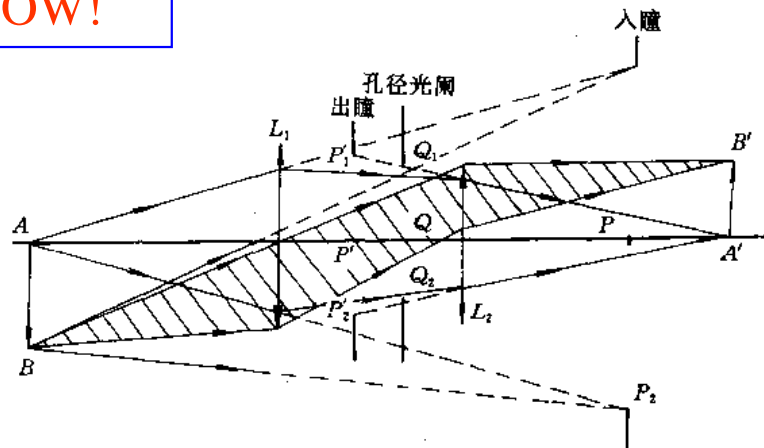


图 8-30 孔径光阑随轴上点位置改变而改变

8.6.3 视场光阑、入射窗和出射窗

在一个实际的光学系统中，除孔径光阑外，还有视场光阑，它是决定物平面上或物空间中成像范围的光阑，即是限制视场范围大小的光阑。

先讨论孔径光阑或入射光瞳为无限小的情况。此时只有主光线附近的一束无限细的光束能通过光学系统。因此，光学系统的成像范围，便由对主光线发生限制的光孔所决定。在图 8-31 中，孔径光阑、入瞳和出瞳均为无限小，过物平面上不同高度的两点 B 和 C 作主光线 BP 和 CP ，它们与光轴的夹角不同，并分别经过光组 L_1 的下边缘和 L_2 的上边缘。由图可见，主光线 CP 虽能通过光组 L_1 ，但被光组 L_2 的镜框拦掉，主光线 BP 能通过 L_1 ，也恰好能通过 L_2 。也就是说，此时物面上 AB 范围以内的物点，都可以被系统成像，而 B 点以外的点，如 C 点，已不能通过系统成像，因为这些点发出的光线受到光组 L_2 镜框的阻拦。因此，光组 L_2 的框子是决定物面上成像范围的光孔，是视场光阑。

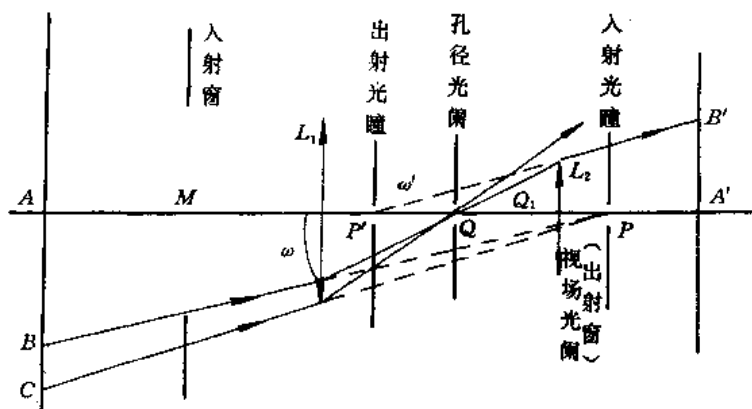


图 8-31 孔径光阑为无限小时视场光阑的确定

视场光阑通过它前面的光学系统在整个光学系统的物空间的像称为入射窗，通过后面的光学系统在整个光学系统的像空间的像称为出射窗。

如果把系统中除孔径光阑以外的所有光阑通过其前面的光组成像，由于入射窗限制着整个系统物空间的成像范围，所以入瞳中心对入射窗的张角为最小。据此，可以找出系统中哪一个光阑是视场光阑。同样，出瞳中心对出射窗的张角最小，出射窗限制了像方视场。

入射窗和出射窗简称为入窗和出窗，它们对整个系统共轭。在物空间，边缘物点的主光线与光轴夹角，即是入瞳中心对入射窗的张角的一半，称为物方半视场角，以 ω 表示。在像空间，边缘像点的主光线与光轴夹角，即是出瞳中心对出射窗张角的一半，称为像方半视场角，以 ω' 表示。

视场光阑是对一定位置的孔径光阑而言的，当孔径光阑位置改变时，原来的视场光阑将可能被另外的光阑所代替，如图 8-31 中若将孔径光阑 Q 向后移到 Q_1 的位置，那么光组 L_1 将成为限制成像范围的视场光阑。

以上讨论了入射光瞳为无限小时的情况，实际上，光学系统的入射光瞳总有一定大小。此时，入射窗不能完全决定光学系统的成像范围。为了便于说明问题，如图 8-32 所示，仅画出物平面、入瞳平面和入射窗平面，来分析物空间的光束被限制的情况。当入瞳为无限小时，物面上能成像的范围应该是由入射光瞳中心与入射窗边缘连线所决定的 AB_2 区域。但是当入瞳有一定大小时， B_2 点以外的一些点，虽然其主光线不能通过入射窗，但光束中还有主光线以上一小部分光线可以通过入射窗被系统成像，因而成像范围是扩大了。图中 B_3 点才是被系统成像的最边缘点，因为 B_3 点发出并充满入瞳的光束中还有最上面的一条光线能通过入射窗。

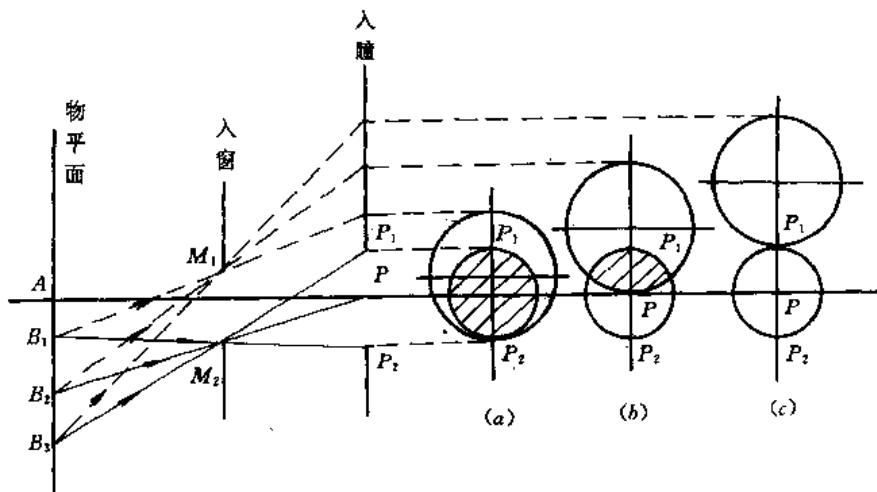


图 8-32 孔径光阑为有限大小时视场光阑的确定

在物面上按其成像光束孔径角的不同，可分为三个区域。

① 以 B_1A 为半径的圆形区，其中每个点均以充满入瞳的全部光束成像。此区域之边缘点 B_1 由入射光瞳下边缘 P_2 和入射窗下边缘点 M_2 的连线所确定。在入射光瞳平面上的成像光束截面如图 8-32(a) 所示。

② 以 B_1B_2 绕光轴旋转一周所形成的环形区域。在此区域内，每一点已不能用充满入瞳的光束成像。在含轴面内看光束，由 B_1 点到 B_2 点，其能通过入射光瞳的光束，由 100% 到 50% 渐变，这就是轴外点渐晕。此区域的边缘点 B_2 由入射光瞳中心 P 和入射窗下边缘

M_2 的连线确定。 B_2 点发出的光束在入射光瞳面上的截面如图 8-32(b) 所示。

③ 以 B_2B_3 绕光轴旋转一周所得到的环形区域。在此区域内各点的光束渐晕更严重，由 B_2 点到 B_3 点，其渐晕系数由 50% 降低到零。 B_3 点是可见视场最边缘点，它由入射光瞳上边缘点 P_1 和入射窗下边缘点 M_2 的连线决定。 B_3 点发出的光束在入射光瞳面上的截面如图 8-32(c) 所示。

以上三个区域只是大致的划分，实际在物平面上，由 B_1 到 B_3 点的渐晕系数由 100% 到 0 是渐变的，并没有明显的界限。由于光束是光能量的载体，通过的光束越宽，其所携带的光能就越多。因此，物平面上第一个区域所成的像，光照度最大，并且均匀，从第二个区域开始，像的光照度逐渐下降一直到零，整个视场并无明显界限。

光学系统的入瞳具有一定大小时，也可以不存在渐晕，如图 8-33 所示，令入射光瞳直径为 $2a$ ，用 p 表示入瞳到物平面的距离， q 表示入瞳到入射窗的距离，均以入射光瞳中心为原点，故 p 、 q 均为负值。由图可得

$$B_1B_3 = 2a \frac{q-p}{q}$$

由上式可见，欲使渐晕区 $B_1B_3 = 0$ ，需使 $p=q$ ，即入射窗和物平面重合，或者像平面和出射窗重合，此时就不存在渐晕了。在投影仪器的光学系统中，视场光阑就设置在物平面上，此时其出射窗恰好落在像平面上，像平面内视场边缘清晰，没有渐晕。在照相机中，显然不便于把视场光阑放在物平面上，这时可把视场光阑放在像平面上，其入射窗恰好落在物平面上，也没有渐晕。

应该指出的是，并不是所有情况下物平面与入射窗重合时，都可使渐晕为零。当光学系统中透镜较多且孔径都不太大时，虽然视场光阑不起拦光作用，其它透镜的框子仍可能拦光而造成渐晕。

8.6.4 光学系统的景深

前面我们所讨论的只是在垂直于光轴的平面上点的成像问题，属于这一类成像的光学仪器有生物显微镜、照相制版物镜和电影放映物镜等。实际上还有很多光学仪器要求对整个空间或部分空间的物点成像在一个像平面上，例如，普通的照相机物镜和望远镜就是这一类。对一定深度的空间在同一像平面上要求所成的像足够清晰，这就是光学系统的景深问题。能够在像平面上获得足够清晰像的空间深度，称为成像空间的深度，或称景深。

位于空间中的物点 B_1 、 B_2 分别在距光学系统入射光瞳不同的距离处，如图 8-34 所示， P 为入射光瞳中心， P' 为出射光瞳中心， A' 为像平面，称为景像平面。在物空间与景像平面共轭的平面 A 称为对准平面。

当入射光瞳有一定大小时，由不在对准平面上的空间物点 B_1 和 B_2 发出并充满入瞳的

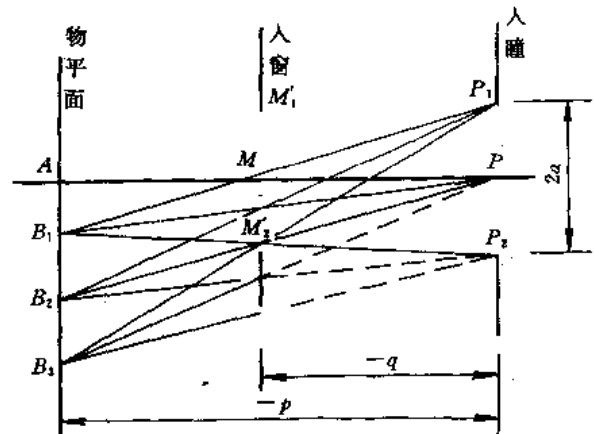


图 8-33 入瞳为有限大小时不存在渐晕的条件

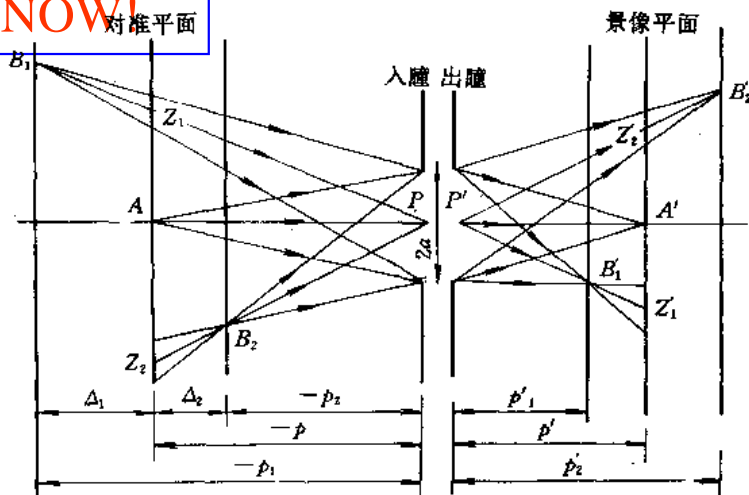


图 8-34 光学系统的景深

光束，将与对准平面相交为弥散斑 z_1 和 z_2 ，它们在景像平面上的共轭像为弥散斑 z'_1 和 z'_2 。显然像平面上的弥散斑的大小与光学系统入射光瞳的大小和空间点距对准平面的距离有关。如果弥散斑足够小，例如，它对入眼的张角小于眼睛的最小分辨角(约为 1 分)，那么眼睛看起来并无不清晰的感觉，这时，弥散斑可认为是空间点在平面上成的像。何况任何光能接收器都不是完善的，并不要求像平面上所有像点均为一几何点，只要光能接受器所接受的影像认为是清晰的就可以了。

这样能成足够清晰像的最远平面(如物点 B_1 所在的平面)称为远景，能成清晰像的最近平面(如物点 B_2 所在的平面)称为近景。它们离对准平面的距离以 Δ_1 和 Δ_2 表示，称为远景深度和近景深度。显然景深就是远景深度与近景深度之和 $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ 。

设对准平面、远景和近景离入射光瞳的距离分别以 p 、 p_1 和 p_2 表示，并以入瞳中心为坐标原点，则上述各量为负值，在像空间对应的共轭面离出射光瞳距离以 p' 、 p'_1 和 p'_2 表示，并以出瞳中心为坐标原点，所以这些量是正值。并设入射光瞳和出射光瞳的直径分别为 $2a$ 和 $2a'$ 。

因为景像平面上的弥散斑 z'_1 和 z'_2 与对准平面上的弥散斑 z_1 和 z_2 是物像关系，所以

$$z'_1 = \beta z_1, \quad z'_2 = \beta z_2$$

式中， β 为共轭平面 A 和 A' 间的垂轴放大率。

从图 8-34 中相似三角形关系可得

$$\frac{z_1}{2a} = \frac{p_1 - p}{p_1}, \quad \frac{z_2}{2a} = \frac{p - p_2}{p_2}$$

由此

$$z_1 = 2a \frac{p_1 - p}{p_1}, \quad z_2 = 2a \cdot \frac{p - p_2}{p_2} \quad (8-46)$$

则

$$z'_1 = 2a\beta \frac{p_1 - p}{p_1}, \quad z'_2 = 2a\beta \frac{p - p_2}{p_2} \quad (8-47)$$

可见,景像平面上的弥散斑大小除与入瞳直径有关外,还与距离 p 、 p_1 和 p_2 有关。至于弥散斑直径 z_1 和 z_2 的允许值为多少,要视光学系统的用途而定。

例如,一个普通的照相物镜,当照片上各点的弥散斑对人眼的张角小于人眼的最小分辨角(1分)时,则看起来好像是点像,可认为图像是清晰的,用 ϵ 表示弥散斑对人眼的极限分辨角。

当极限角度值 ϵ 确定之后,允许的弥散斑大小还与眼睛到照片的观察距离有关,因此还需确定这一距离。

为了得到正确的空间感觉而不发生景像弯曲,必须要以适当的距离来观察照片,就是应该使照片上图像各点对眼睛的张角与直接观察空间时各对应点对眼睛的张角相等。符合这一条件的距离,称为正确透视距离,用 D 表示。如图 8-35 所示,眼睛在 R 处,为了得到正确的透视,景像平面上的像 $A'B'$ (即 $-y'$)对 R 的张角应与物空间的共轭线段 AB (即

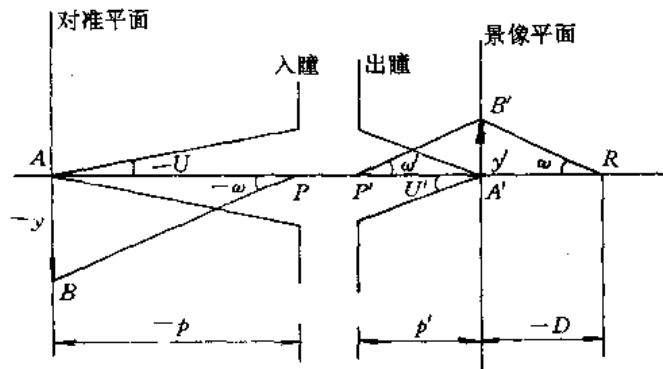


图 8-35 正确透视距离

y')对入瞳中心 p 的张角 ω 相等,由此得

$$\frac{-y'}{-D} = \tan \omega = \frac{y}{-p}$$

可写为

$$D = -\frac{y'}{y}p = -\beta p$$

所以景像平面上或照片上弥散斑直径的允许值(为方便起见,以下不再考虑符号)为

$$z' = z_1' = z_2' = D\epsilon = \beta p\epsilon$$

对应于对准平面上弥散斑的允许值为

$$z = z_1 = z_2 = \frac{z'}{\beta} = p\epsilon$$

当 z_1 和 z_2 确定之后,便可代入公式(8-46)求得近景和远景到入射光瞳的距离 p_1 和 p_2 :

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{2ap}{2a - z_1} \\ p_2 &= \frac{2ap}{2a + z_2} \end{aligned} \right\} \quad (8-48)$$



由此可得远景和近景到对准平面的距离，即远景深度 Δ_1 和近景深度 Δ_2 为

$$\Delta_1 = p_1 - p = \frac{pz_1}{2a - z_1}, \quad \Delta_2 = p - p_2 = \frac{pz_2}{2a + z_2}$$

将 $z_1 = z_2 = p\epsilon$ 代入上式，则得

$$\Delta_1 = \frac{p^2\epsilon}{2a - p\epsilon}, \quad \Delta_2 = \frac{p^2\epsilon}{2a + p\epsilon} \quad (8-49)$$

由上式可知，当光学系统的入瞳大小 $2a$ 和对准平面的位置 p 以及极限角 ϵ 一定时，远景深度 Δ_1 较近景深度 Δ_2 为大。

总的成像空间深度即景深 Δ 为

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{4ap^2\epsilon}{4a^2 - p^2\epsilon^2} \quad (8-50)$$

如果用孔径角 U 代替入瞳直径，由图 8-35 可见它们有以下关系：

$$2a = 2p \tan U$$

这样，光学系统的景深式(8-50)变为

$$\Delta = \frac{4p\epsilon \tan U}{4 \tan^2 U - \epsilon^2} \quad (8-51)$$

由以上二式可知，入瞳直径愈小，即孔径角愈小，景深就愈大。在拍照时，把光圈缩小，可以获得大的空间深度的清晰像就是这个道理。

下面讨论两种具体情况。

① 如果要使对准平面以后的整个物空间都能在景像平面上成清晰像，即远景深度 $\Delta_1 = \infty$ ，对准平面应位于何处？

由公式(8-49)可知，当 $\Delta_1 = \infty$ 时，分母 $(2a - p\epsilon)$ 应等于零。故

$$p = \frac{2a}{\epsilon}$$

即从对准平面中心看入射光瞳时，其对眼睛的张角应等于极限角 ϵ 。当 $p = 2a/\epsilon$ 时，近景位置 p_2 为

$$p_2 = p - \Delta_2 = p - \frac{p^2\epsilon}{2a + p\epsilon} = \frac{p}{2} = \frac{a}{\epsilon}$$

因此，把照相机物镜调焦于 $p = 2a/\epsilon$ 的距离时，在景像平面上可以得到自入射光瞳前距离为 a/ϵ 的平面起到无限远的整个空间 ϵ 内物体的清晰像。

② 如果把照相机物镜调焦于无限远，即 $p = \infty$ 时，近景位于何处？

以 $z_2 = p\epsilon$ 代入(8-46)式的第二式中，并对 $p = \infty$ 求极限，则可求得近景位置

$$p_2 = \frac{2a}{\epsilon}$$

就是说，这时的景深等于自物镜前距离为 $p = 2a/\epsilon$ 的平面开始到无限远。

显然，第二种情况下近景距离较第一种情况大一倍。所以，把对准平面调在无限远时，景深要小一些。

前面的讨论，是假定在正确透视距离来看照片，此时景深与物镜的放大率无关，即与物镜的焦距无关。

有时规定景像平面上的弥散斑不能超过某一数值，此时景深就与物镜的焦距有关，因

为 $\sigma = \lambda / (2 \Delta z)$ 。当 $\Delta z'$ 一定时, 对一定的对准平面位置, f' 愈大, σ 就愈小, 即在对准平面上的弥散斑愈小, 因此景深就小了。所以景深随着焦距的增大而减小。

8.6.5 远心光路

在光学仪器中, 有很大一部分仪器是用来测量长度的。它通常分为两种情况: 一种情况是光学系统有一定的放大率, 使被测物之像和一刻尺相比, 以求知被测物体的长度, 如工具显微镜等计量仪器; 另一种是把一标尺放在不同位置, 通过改变光学系统的放大率, 使标尺像等于一个已知值, 以求仪器到标尺间的距离, 如大地测量仪器中的视距测量等。

第一种情况在仪器的光学系统的实像平面上, 放置有已知刻值的透明刻尺(分划板), 分划板上的刻尺格值已考虑了物镜的放大率, 因此按刻度读得的像高即为物体的长度。按此方法作物体的长度测量, 刻尺与物镜之间的距离应保持不变, 以使物镜的放大率保持常数, 这种测量方法的测量精度在很大程度上取决于像平面与刻尺平面的重合程度。这一般是通过对整个光学系统(连目镜)相对于被测物体进行调焦来达到的。但是, 由于景深及调焦误差的存在, 不可能做到使像平面和刻尺平面完全重合, 这就难免要产生一些误差。像平面与刻尺平面不重合的现象称为视差。由于视差而引起的测量误差可由图 8-36 来说明。图中, $P_1P_1'P_2'$ 是物镜的出射光瞳, B_1B_2 是被测量物体的像, M_1M_2 是刻尺平面, 由于二者不重合, 像点 B_1 和 B_2 在刻尺平面上反映成弥散斑 M_1 和 M_2 , 实际量得的长度为 M_1M_2 , 显然这比真实像 B_1B_2 要长一些。视差越大, 光束对光轴的倾角越大, 其测量的误差也越大。

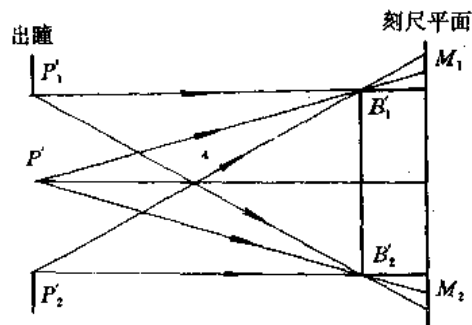


图 8-36 视差

如果适当地控制主光线的方向, 就可以消除或大为减少视差对测量精度的影响。这只要把孔径光阑设在物镜的像方焦平面上即可。如图 8-37 所示, 光阑也是物镜的出射光瞳, 此时, 由物镜射出的每一光束的主光线都通过光阑中心所在的像方焦点, 而在物方主光线都是平行于光轴的。如果物体 B_1B_2 正确地处于与刻尺平面 M 共轭的位置 A_1 上, 那么它成像在刻尺平面上的长度为 M_1M_2 ; 如果由于调焦不准, 物体 B_1B_2 不在位置 A_1 而在位置 A_2 上, 则它的像 B_1B_2 将偏离刻尺, 在刻尺平面上得到的将是由弥散斑所构成的 B_1B_2 的投影像。但是, 由于物体上同一点发出的光束的主光线并不随物体的位置移动而发生变化, 因此通过刻尺平面上投影像两端的两个弥散中心的主光线仍通过 M_1 和 M_2 点, 按此投影像读出的长度仍为 M_1M_2 。这就是说, 上述调焦不准并不影响测量结果。因为这种光

光学系统的物方主光线平行于光轴，主光线的会聚中心位于物方无穷远处，故称之为物方远心光路。

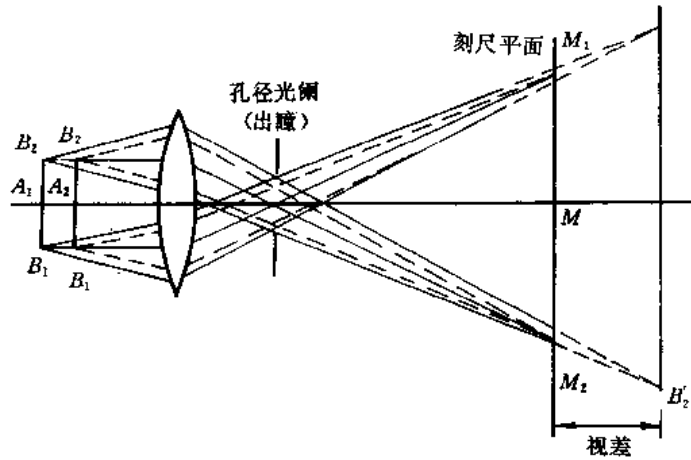


图 8-37 设置光阑消除视差——测长

第二种情况是物体的长度已知(一般是带有分划的标尺)，位于望远物镜前要测定其距离的地方，物镜后的分划板平面上刻有一对间隔为已知的测距丝。欲测量标尺所在处的距离时，调焦物镜或连同分划板一起调焦目镜，以使标尺的像和分划板的刻线平面重合，读出与固定间隔的测距丝所对应的标尺上的长度，即可求出标尺到仪器距离。同样，由于调焦不准，标尺的像和分划板的刻线平面不重合，使读数产生误差而影响测距精度。为消除或减小这种误差，可以在望远镜的物方焦平面上设置一个孔径光阑，如图 8-38 所示，光阑也是物镜的入瞳，此时进入物镜光束的主光线都通过光阑中心所在的物方焦点，在像方这些主光线都平行于光轴。如果物体 B_1B_2 (标尺) 的像 $B'_1B'_2$ 不与分划板的刻线平面 M 重合，则在刻线平面 M 上得到的是 $B'_1B'_2$ 的投影像，即弥散斑 M_1 和 M_2 。但由于在像方的主光线平行于光轴，因此按分划板上弥散斑中心所读出的距离 M_1M_2 与实际的像长 $B'_1B'_2$ 相等。 M_1M_2 是分划板上所刻的一对测距丝，不管它是否和 $B'_1B'_2$ 相重合，它与标尺所对应的长度总是 B_1B_2 ，显然，这不会产生误差。这种光学系统，因为像方的主光线平行于光轴，其会聚中心在像方无穷远处，故称之为像方远心光路。

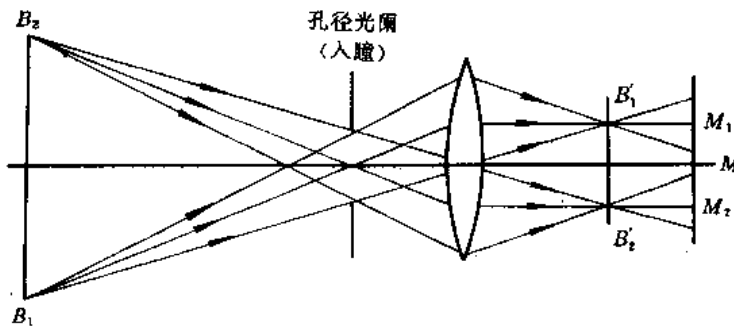


图 8-38 设置光阑消除视差——测距

8.7 像差概念

由前所述，只有理想光学系统所成的像才是理想像。实际光学系统所成的像，都不可能完全理想，而具有一系列缺陷，这种实际像的位置和形状与理想光学系统成像的偏差，称为像差。

用高斯公式、牛顿公式或近轴光路计算公式所求得的像的位置和大小，应认为是理想像的位置和大小。而用实际光线计算公式求得的像的位置和大小相对于理想像的偏离，可作为像差的量度。像差的大小反映了光学系统成像质量的优劣。

光学系统以单色光成像时产生的单色像差有球差、彗差、像散、像面弯曲(场曲)和畸变。光学系统对复色光成像时有轴向色差(位置色差)和横向色差(倍率色差)。

8.7.1 轴上点球差

在 7.1 中曾指出，自光轴上一点发出与光轴成 U 角的光线，经球面折射后所得的截距 L' 是角 U (或入射高度 h) 的函数。因此，轴上点发出的同心光束经光学系统各个球面折射以后，不再是同心光束，入射光线的孔径角 U 不同，其出射光线与光轴交点的位置就不同，相对于理想像点有不同的偏离，这就是球差。其值由轴上点发出的不同孔径的光线经系统后的像方截距和其近轴光的像方截距之差来表示，即

$$\delta L' = L' - l' \quad (8-52)$$

式中， $\delta L'$ 为球差值，如图 8-39 所示。

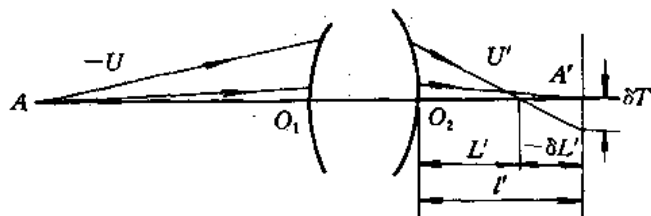


图 8-39 轴上点球差

显然，与光轴成不同孔径角 U 的光线具有不同的球差。如果式中的 L' 是对边缘光线 ($U_1=U$) 求得的，则称之为边缘光球差；如果是对 0.707 带光线 ($U_1=0.707U$) 求得的，则称之为带光球差。

由于球差的存在，使得在高斯像面(理想像面)上得到的不是点像，而是一个圆形弥散斑，其半径为

$$\delta T' = \delta L' \tan U' \quad (8-53)$$

可见，球差越大，像方孔径角越大，高斯像面上的弥散斑也越大。这将使像模糊不清。所以为使光学系统成像清晰，必须校正球差。

利用正负透镜的组合，可以校正球差。大部分光学系统只能做到对一条光线校正球差，一般是对边缘光线校正的，若边缘光球差为零，则称该系统为消球差系统。

彗差是轴外点宽光束成像所产生的像差，为了解轴外物点所发出的光束结构，一般在整个光束中通过主光线取出两个互相垂直的截面，其中一个主光线和光轴决定的平面，称为子午面；另一个是通过主光线和子午面垂直的截面，称为弧矢面。

下面先以单折射球面为例说明彗差的形成原因。如图 8-40 所示。轴外点 B 发出的子午光束，对辅轴来说就相当于轴上点光束。其中上光线，主光线和下光线与辅轴的夹角不同，故有不同的球差值，所以三条光线不能交于一点。即在折射前主光线是子午光束的轴线，而折射后不再是光束的轴线，光束失去了对称性。用上、下光线的交点到主光线的垂直于光轴方向的偏离来表示这种光束的不对称，称为子午彗差，以 K_T 表示。它是在垂轴方向量度的，故是垂轴像差的一种。

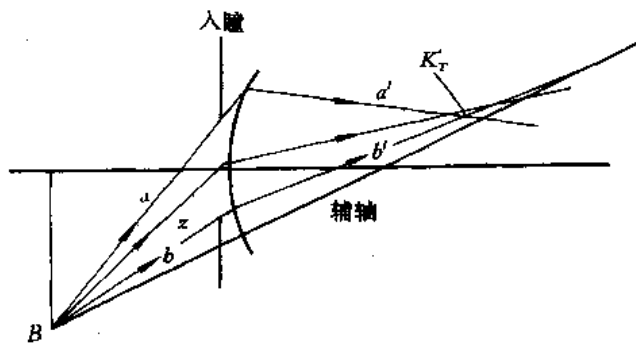


图 8-40 彗差形成

图 8-41 为子午面内轴外点宽光束对一光学系统成像的光路图，折射后的上、下光线 a' 和 b' 的交点 B'_T 既不在主光线上也不在高斯像面上。 B'_T 离开主光线的距离 K'_T 为子午彗差。

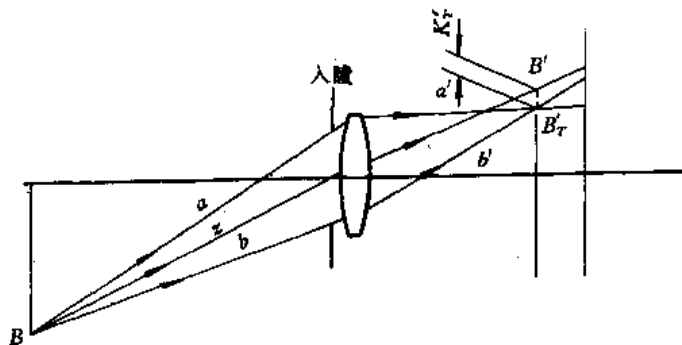


图 8-41 子午彗差

弧矢面上的弧矢光束的彗差如图 8-42 所示。由轴外点 B 发出的弧矢光束前光线 c 和后光线 d 折射后为光线 c' 和 d' ，它们相交于 B'_s 点。由于二光线对称于子午面，故点 B'_s 应在子午面内。点 B'_s 到主光线的垂直于光轴方向的距离为弧矢彗差，以 K'_s 表示。

图 8-43 为轴外物点发出的宽光束形成彗星状光斑的示意图，由物点 B 发出的到达透镜一个环带上的光线，经折射后在像面上形成一个圆。环带的 a 、 b 两点在物点 B 的子午面

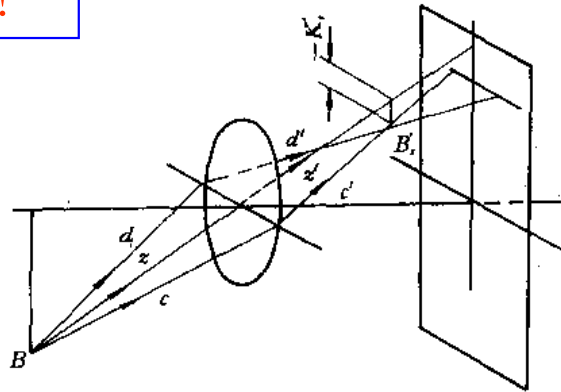


图 8-42 弧矢彗差

上，经过这两点的光线交像面于 ab 点。经过 c, d 两点的弧矢光线交像面于 cd 点，该点仍在子午面上。依此类推，经过环带上其它点的光线 e, f 交像面于 ef 点，光线 g, h 交像面于 gh 点等等。在像面上形成一个圆形分布。经过透镜不同环带(图 8-43(b))的光线在像面上交成一系列大小不同相互重叠的圆，圆心在一直线上，与主轴有不同的距离，形成一个以主光线在像面上的交点 B'_s 为顶点的彗星状光斑，如图 8-43(c)所示。

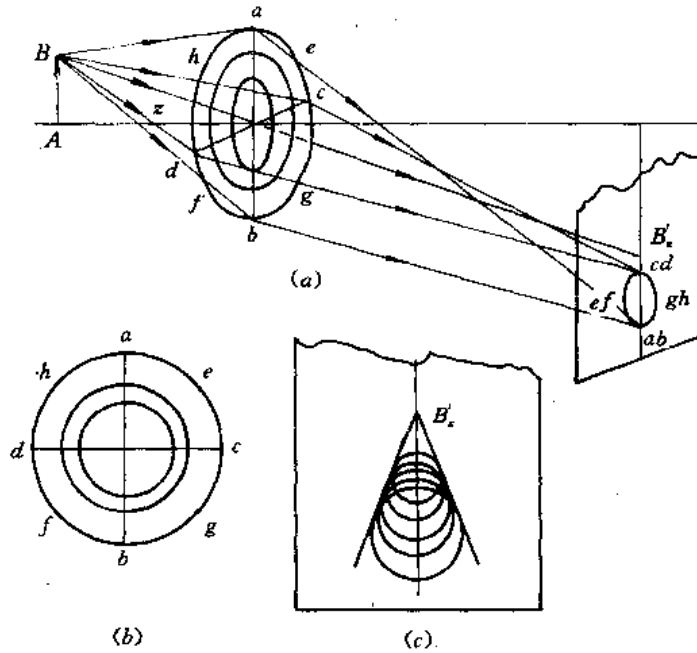


图 8-43 彗差

以上都是在系统没有其它像差的假设下的结果。当其它像差同时存在时，很难观察到纯粹的彗差。

8.7.3 像散

当轴外物点 B 发出一束沿主光线周围的细光束成像时，由于细光束的光束轴与投射点

法线不重合，其出射光束不再存在对称轴，而只存在一个对称面(子午面)。与此细光束所对应的微小波面并非旋转对称，在不同方向上有不同曲率。因此形成像散光束。当用一垂直于光轴的屏沿轴移动时，就会发现屏在不同位置时，点 B 发出的成像细光束的截面形状有很大变化。如图 8-44 所示。在子午像点 T' 处得到的是一垂直于子午平面的短线(子午焦线)，在弧矢像点 S' 处得到的是一位于子午平面上的铅垂短线(弧矢焦线)，两焦线互相垂直。在两条短线之间光束的截面形状由长轴与子午面垂直的椭圆变到圆，变到长轴在子午平面的椭圆，如图 8-44(b) 所示。两条短线之间沿光束轴(主光线)方向的距离称为光学系统的像散。

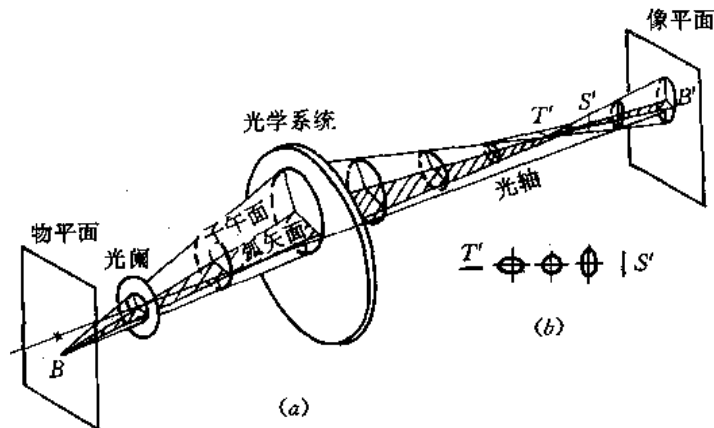


图 8-44 像散

存在有像散的光学系统，不能使物面上的所有物点形成清晰的像点群。如图 8-45(a) 所示，平面物是一组同心圆和沿半径的直线组成，圆心在主轴上，环面垂直于主光轴，则在子午焦线面上和弧矢焦线面上将分别得到如图 8-45(b)、(c) 所示的图像。前者各圆环的像很清晰，但半径模糊；而后者半径的像清晰，圆环的像模糊。

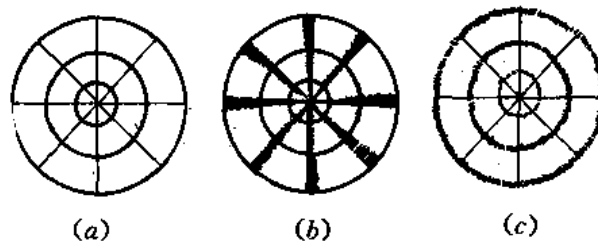


图 8-45 存在像散光学系统的像

8.7.4 像面弯曲

即使像散得到校正的系统，也只是对某一视场角的像散值为零，而其它视场仍有剩余像散，且像散的大小随视场而变，即物面上离光轴不同远近的各点在成像时，像散值各不相同。因此，一个平面物必然形成两个曲面像，如图 8-46 所示，即子午像面和弧矢像面。因轴上点无像散，所以两个像面均相切于高斯像面与光轴的交点，显然是以光轴为对称轴的旋转曲面。

轴外点成像，无论是宽光束还是细光束都有像差存在，即使只有主光线通过光学系统，由于球差的影响，它仍不能和理想的近轴光相一致。因此，主光线和高斯像面交点的高度不等于理想像高。这种差别就是系统的畸变。随着视场改变，畸变值也改变。例如，一垂直于光轴的平面物体，其图案如图 8-47(a)所示，它由成像质量良好的光学系统所成的像应该是一个和原来物体完全相似的方格。但是在有些光学系统中也会出现如图中(b)或(c)那样的成像情况。这种成像发生变形的缺陷，称为畸变。图(b)表示枕形畸变(正畸变)，图(c)表示桶形畸变(负畸变)。

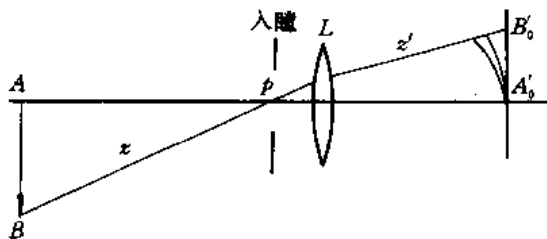


图 8-46 像面弯曲

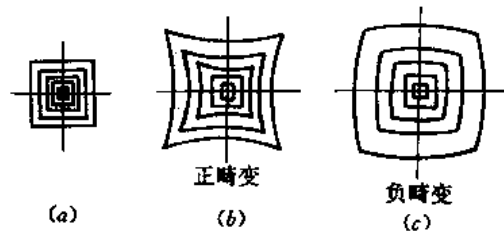


图 8-47 畸变

光学系统产生畸变的原因是在一对物、像共轭平面上，垂轴放大率 β 随视场角大小而改变，不再保持常数，使像相对于物失去了相似性。对于枕形畸变，其主光线和高斯像面交点的高度随视场增大而大于理想像高，即为正畸变。对于桶形畸变，主光线和高斯像面交点的高度随视场增大而小于理想像高，故为负畸变。

8.7.6 轴向色差

绝大部分光学仪器用白光成像。白光是各种不同波长(或颜色)单色光的组合，所以白光经光学系统成像可看成是同时对各种单色光的成像。各单色光各具有前面所述的各种单色像差，而且其数值也不相同。这是因为透明介质对不同波长的单色光具有不同的折射率，这样白光经过光学系统第一个表面折射以后，各种色光就被分开，随后就在光学系统内以各自的光路传播，造成了各种色光之间成像位置和大小差异，也造成了各种单色像差之间的差异。

描述轴上物点用不同色光成像时成像位置差异的像差称为轴向色差，也称为位置色差。

光学材料对不同波长的色光折射率不同，波长愈短折射率愈高。因此，同一透镜对不同色光有不同焦距。当透镜对于一定物距 l 处的物点成像时，由于各色光焦距不同，按高斯公式可求得不同的 l' 值。结果，按色光的波长由短到长，它们的像点离开透镜由近到远地排列在光轴上，如图 8-48 所示，这就是位置色差。

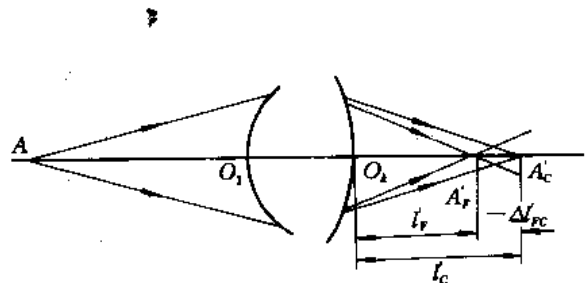


图 8-48 轴向色差

若 A 点发出白光, 经透镜后, 不同色光在像方空间光轴上形成位置不同的像点。红光 (C) 因折射率低, 其像点 A_C 离光学系统最后一面最远。同理, 蓝光 (F) 像点 A_F 最近。如果用一屏置于位置 A_F 处, 将会在屏上看到红色在外蓝色在内的弥散斑; 如果屏置于 A_C 处, 将会看到蓝色在外红色在内的弥散斑, 这样就使得轴上点物不能形成一白色点像, 而成为彩色弥散斑。

8.7.7 倍率色差

光学系统校正了位置色差以后, 轴上点发出的两种单色光通过系统后交于光轴同一点, 即可认为两种色光的像面重合在一起。但对轴外点来说, 两种色光的垂轴放大率不一定相等。由 $\beta = -x'/f$ 可知, 不同色光的焦距不等时, 放大率也不等, 因而有不同像高。光学系统对不同色光的放大率的差异称为倍率色差, 亦称放大率色差或垂轴色差。设系统对无限远物体成像, 如果是薄透镜光组, 当两种色光的焦点重合时, 则焦距相等, 而有相同的放大率。如为复杂光学系统, 两种色光的焦点重合, 因主面不重合而有不同的焦距, 即有不同的放大率, 则系统存在倍率色差。以目视光学系统为例, 若被观察面是黄绿光 (D) 的高斯像面, 则所看到的 F 、 C 光像高是它们的主光线和 D 光高斯像面交点的高度, 如图 8-49 所示。故倍率色差定义为轴外点发出两种色光的主光线在消单色光像差的高斯像面上交点高度之差。

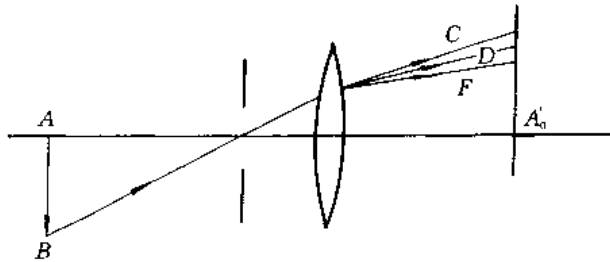


图 8-49 倍率色差

倍率色差是在高斯像面上量度的, 故是垂轴(横向)像差的一种。倍率色差严重时, 物体的像有彩色边缘, 即各种色光的轴外点不重合。因此, 倍率色差破坏轴外点像的清晰度, 造成白色像的模糊。大视场光学系统必须校正倍率色差。所谓倍率色差校正, 是指对所规定的两种色光, 在某一视场使倍率色差为零。

例 题

例 8-1 有一理想光学系统位于空气中, 其光焦度为 $\varphi = 10D$ 。当焦物距 $x = -100$ mm, 物高 $y = 40$ mm 时, 试分别用牛顿公式和高斯公式求像的位置和大小, 以及轴向放大率和角放大率。

解: 由已知条件, 系统的焦距和物距分别为

$$f = \frac{1}{\varphi} = 100 \text{ mm}$$

$$l = x + f = -100 - 100 = -200 \text{ mm}$$

由牛顿公式得焦像距和垂轴放大率分别为

$$x' = \frac{ff'}{x} = \frac{-100 \times 100}{-100} = 100 \text{ mm}$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{-x'}{f} = \frac{-100}{100} = -1$$

由高斯公式得像距、垂轴放大率和像高分别为

$$l' = \frac{lf}{l+f} = \frac{-200 \times 100}{-200+100} = 200 \text{ mm}$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{l'}{l} = \frac{200}{-200} = -1$$

$$y' = \beta y = -1 \times 40 = -40 \text{ mm}$$

因 $\beta = -1$ ，所以轴向放大率和角放大率分别为

$$\alpha = \frac{n'}{n} \beta^2 = 1$$

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$$

例 8-2 已知三个共轴薄光组的参数分别为 $f_1 = -f_1 = 100 \text{ mm}$, $d_1 = 10 \text{ mm}$, $f_2 = -f_2 = -50 \text{ mm}$, $d_2 = 20 \text{ mm}$, $f_3 = -f_3 = 50 \text{ mm}$, 求组合光组的基点位置和焦距大小。

解: 像方基点位置和像方焦距的确定。

设 $h_1 = 100 \text{ mm}$, $u_1 = 0$, 由(8-37)式得

$$\tan u_1' = \frac{h_1}{f_1} = \frac{100}{100} = 1 = \tan u_2$$

$$h_2 = h_1 - d_1 \tan u_1' = 100 - 10 \times 1 = 90 \text{ mm}$$

$$\tan u_2' = \tan u_2 + \frac{h_2}{f_2} = 1 + \frac{90}{-50} = -0.8 = \tan u_3$$

$$h_3 = h_2 - d_2 \tan u_2' = 90 - 20 \times (-0.8) = 106 \text{ mm}$$

$$\tan u_3' = \tan u_3 + \frac{h_3}{f_3} = -0.8 + \frac{106}{50} = 1.32$$

于是, 组合光组的主点和焦点由以下计算而确定:

$$l_F' = \frac{h_3}{\tan u_3'} = \frac{106}{1.32} = 80.3 \text{ mm}$$

$$f' = \frac{h_3}{\tan u_3} = \frac{100}{1.32} = 75.76 \text{ mm}$$

$$l_H = l_F' - f' = 80.3 - 75.76 = 4.54 \text{ mm}$$

物方基点位置和物方焦距的确定。

将整个光组颠倒 180° , 此时 $f_1' = 50 \text{ mm}$, $f_2' = -50 \text{ mm}$, $f_3' = 100 \text{ mm}$, $d_1 = 20 \text{ mm}$, $d_2 = 10 \text{ mm}$, 设 $h_1 = 50 \text{ mm}$, $u_1 = 0$, 由(8-37)式得

$$\tan u_1' = \frac{h_1}{f_1'} = \frac{50}{50} = 1 = \tan u_2$$

$$h_2 = h_1 - d_1 \tan u_1' = 50 - 20 \times 1 = 30 \text{ mm}$$



$$\tan u_2' = \tan u_2 + \frac{h_2}{f_2} = 1 + \frac{30}{-50} = 0.4 = \tan u_3$$

$$h_3 = h_2 - d_2 \tan u_2' = 30 - 10 \times 0.4 = 26 \text{ mm}$$

$$\tan u_3' = \tan u_3 + \frac{h_3}{f_3} = 0.4 + \frac{26}{100} = 0.66$$

$$l_F' = \frac{h_3}{\tan u_3'} = \frac{26}{0.66} = 39.39 \text{ mm}$$

$$f = \frac{h_1}{\tan u_3'} = \frac{50}{0.66} = 75.76 \text{ mm}$$

$$l_H = l_F' - f = -36.37 \text{ mm}$$

将以上计算结果变号, 即得

$$l_F = -39.39 \text{ mm}$$

$$f = -75.76 \text{ mm}$$

$$l_H = 36.37 \text{ mm}$$

例 8-3 位于空气中的两个薄透镜(即两主平面重合), 其参数为 $f_1=90 \text{ mm}$, $f_2=60 \text{ mm}$, $d=50 \text{ mm}$, 求组合系统的焦距和基点位置。

解: 像方焦距和基点位置的计算:

令 $l_1 = -\infty$, 按高斯公式和过渡公式有

$$l_1 = f_1 = 90 \text{ mm}$$

$$l_2 = l_1 - d_1 = 90 - 50 = 40 \text{ mm}$$

$$l_2 = l_F' = \frac{l_2 f_2}{l_2 + f_2} = \frac{40 \times 60}{40 + 60} = 24 \text{ mm}$$

由(8-38)式得

$$f = \frac{l_1 l_2'}{l} = \frac{90 \times 24}{40} = 54 \text{ mm}$$

对双光组的组合, 便可由求出的 f , 应用(8-30)式和(8-32)式求得 l_F' 和 l_H

$$l_F' = f \left(1 - \frac{d_1}{f_1}\right) = 54 \times \left(1 - \frac{50}{90}\right) = 24 \text{ mm}$$

$$l_H = l_F' - f = 24 - 54 = -30 \text{ mm}$$

由于光组处于空气中, 故有

$$f = -f' = -54 \text{ mm}$$

而

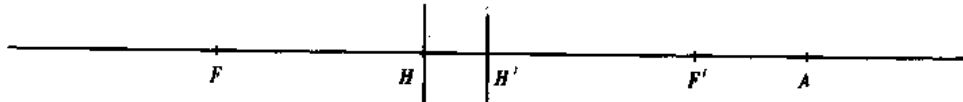
$$l_F = f \left(1 + \frac{d_1}{f_2}\right) = -54 \left(1 + \frac{50}{60}\right) = -9 \text{ mm}$$

$$l_H = l_F - f = -9 - (-54) = 45 \text{ mm}$$

(习) (题)

8-1 作图:

(1) 作轴上虚物点 A 的像 A'



(2) 作轴上实物点 A 的像 A'



(3) 作垂轴虚物 AB 的像 $A'B'$



(4) 作垂轴实物 AB 的像 $A'B'$



(5) 画出焦点 F, F' 的位置



(6) 画出焦点 F, F' 的位置



8-2 身高为 1.8 m 的人站在照相机前 3.6 m 处拍照, 若拟拍成 100 mm 高的像, 照相机镜头焦距为多少?

8-3 单薄透镜成像时, 若共轭距(物与像之间距离)为 250 mm, 求下列情况下透镜焦距:

- (1) 实物, $\beta = -4$;
- (2) 实物, $\beta = -\frac{1}{4}$;
- (3) 虚物, $\beta = -4$ 。

8-4 设一光学系统处于空气中, $\beta = -10$, 由物面到像面的距离为 7 200 mm, 物镜两焦点间距离为 1 140 mm。求该物镜的焦距。

8-5 一个薄透镜对某一物体成实像, 放大率为 -1 ; 今以另一薄透镜紧贴在第一透镜上, 则见像向透镜方向移动 20 mm, 放大率为原先的 $\frac{3}{4}$ 倍。求两块透镜的焦距。

8-6 一透镜对无限远处和物方焦点前 5 m 处的物体成像时, 二像的轴向间距为 3 mm。求透镜的焦距。



8-7 位于光学系统前的一个 20 mm 高的物体被成一 12 mm 的倒立实像, 当物向系统方向移动 100 mm 时, 其像成于无穷远, 求系统的焦距。

8-8 一薄透镜 $f_1=100$ mm 和另一薄透镜 $f_2=50$ mm 组合。组合焦距仍为 100 mm。求二者的相对位置和组合的主点位置。

8-9 用焦距同为 60 mm 的两个薄透镜组成目镜, 两者间距为 40 mm。求目镜的焦距和主点位置。

8-10 一薄透镜系统由 $6D$ 和 $-8D$ 的两个薄透镜组成。两者间距为 30 mm。求组合系统的光焦度和主点位置, 若把两透镜顺序颠倒, 再求其光焦度和主点位置。

8-11 有三个薄透镜: $f_1=100$ mm, $f_2=50$ mm, $f_3=-50$ mm, 其间隔 $d_1=10$ mm, $d_2=10$ mm, 设该系统处于空气中, 求组合系统的像方焦距。

8-12 一球形透镜, 直径为 40 mm, 折射率为 1.5。求其焦距和主点位置。

8-13 已知一透镜 $r_1=-200$ mm, $r_2=-300$ mm, $d=50$ mm, $n=1.5$ 。求其焦距和主点位置。

8-14 有一双薄透镜系统, $f_1=100$ mm, $f_2=50$ mm, 要求总长度(第一透镜至系统像方焦点的距离)为系统焦距的 0.7 倍。求二透镜的间隔和系统的焦距。

8-15 灯丝与光屏相距 L , 其间的一个正薄透镜有两个不同的位置使灯丝成像于屏上。设透镜的这两个位置的间距为 d 。试证透镜的焦距 $f=(L^2-d^2)/4L$ 。

8-16 两个相同的双凸厚透镜位于同一直线上, 相距 26 mm。透镜的半径分别为 60 mm 和 40 mm, 厚度为 20 mm, 折射率为 1.5163。试求透镜组的焦距和基点位置。设透镜位于空气中。

8-17 由两个同心的反射球面(两球面的球心重合)构成的光学系统, 按照光线的反射顺序第一个反射球面是凹面, 第二个反射球面是凸面, 要求系统的像方焦点恰好位于第一个反射球面的顶点, 若两球面间隔为 d , 求两球面的半径 r_1 和 r_2 以及组合焦距。

8-18 焦距 $f=100$ mm 的薄透镜, 直径 $D_0=40$ mm。在透镜前 50 mm 处有一光孔, 直径 $D_p=35$ mm。问物体在 $-\infty$ 和 -300 mm 时, 孔径光阑、入瞳和出瞳的位置和大小。

8-19 有两个正薄透镜 L_1 和 L_2 , 焦距分别为 90 mm 和 60 mm, 孔径分别为 60 mm 和 40 mm, 两镜之间隔为 50 mm。在 L_2 之前 18 mm 处有一直径为 30 mm 的光阑 p 。当物于无穷远时, 孔径光阑是哪个?



第 9 章 光学仪器的基本原理

为了改善和扩展视觉，人们很早就利用透镜、反射镜和棱镜等制成各种仪器，这些仪器总称为光学仪器。能够直接帮助人眼观察近处微小物体或观察远处物体的光学仪器，比如放大镜、显微镜和望远镜等，叫做助视光学仪器或目视光学仪器。有的光学仪器是为了在屏上得到一个缩小的或放大的像。比如照相机和幻灯机等，这种光学仪器叫做摄影及投影光学仪器。还有的光学仪器能起分光作用，如分光镜、摄谱仪和单色仪等，这类光学仪器叫做分光仪器。随着科学技术的发展，光学仪器的种类越来越多，应用越来越广，其理论基础也涉及到各个方面，但光学仍是其中的根本。借助于几何光学，可近似描写光学仪器的主要性能，对于一般的应用，这种近似描述已足够准确。因而在这个意义上说，光学仪器的基础理论主要是几何光学。本章将用近轴光学理论，重点讨论助视光学仪器的基本原理。

9.1 眼 睛

许多光学仪器都要用眼睛来观察，人眼则做为这类目视光学仪器的光能接收器。因此，在目视仪器的设计和使用中，都必然要涉及到眼睛，应当对它的特性有所了解，以便合理地观察，提高眼睛的效率。

9.1.1 眼睛的构造

人眼本身就是一个光学系统，外表大体呈球形，直径约为 25 毫米，其内部结构如图 9-1 所示。

巩膜和角膜 眼的最外层是一层白色坚韧的巩膜，将眼球包围起来。而巩膜的正前方曲率较大的一部分是角膜，是由角质构成的透明球面，厚度约 0.55 mm，折射率为 1.377 1，外界光线首先通过角膜而进入眼睛。

前室 角膜后面的一部分空间称为前室。前室中充满了折射率为 1.337 4 的透明水状液。

虹膜和瞳孔 前室之后是中心带有圆孔的虹膜，眼睛的彩色由虹膜显示出来。虹膜中心的圆孔称为瞳孔，它能限制进入眼睛的光束口径。瞳孔的直径可随物体的明暗而自动改变，以调节进入眼睛的光能量。

水晶体 虹膜后面是由多层薄膜组成的呈双凸透镜形的水晶体，各层折射率不同，而且前表面曲率半径可以改变，以改变水晶体的焦距，使不同距离的物体都能成像在网

后室 水晶体后面的空间称为后室，里面充满透明液体玻璃液，折射率为1.336。

网膜 后室的内壁与玻璃液紧贴的为网膜，它是眼睛的感光部分，其上布满了神经细胞和神经纤维。

黄斑和盲斑 位于网膜中部的椭圆形区域称为黄斑，其凹部密集了大量的感光细胞，是网膜上视觉最灵敏的区域。而盲斑则是神经纤维的出口，没有感光细胞，不产生视觉。

脉络膜 网膜的外面包围着一层黑色膜即是脉络网膜，它的作用是吸收透过网膜的光线，把后室变成一个暗室。

黄斑的中心凹和眼睛光学系统像方节点的连线称为视轴。眼睛的视场虽然很大，可达到150°，但只在视轴周围6°~8°范围内能清晰识别，其它部分就比较模糊。所以，观察周围景物时，眼睛就自动地在眼窝内不停地转动。

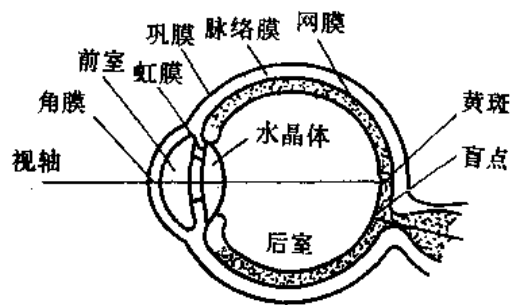


图 9-1 眼睛的构造

9.1.2 眼睛的调节和适应

正常的眼睛，既能看清远处的物体，也能看很近的物体。其原因是随着物体距离的改变，借助于肌肉使水晶体的曲率发生改变，相应地水晶体的焦距发生改变，使远近不同物体的像都能成在网膜上。眼睛的这种本能地改变光焦度(或焦距)以看清远近不同物体的过程，称为眼睛的调节。

当肌肉完全松弛时，眼睛能看清楚的最远的点称为远点；当肌肉在最紧张时，眼睛能看清楚的最近的点称为近点。

正常的眼睛在正常照明下最方便和最习惯的工作距离，称为明视距离。常规定明视距离为25厘米。

以 p 表示近点到眼睛物方主点的距离(m)，以 r 表示远点到眼睛物方主点的距离(m)，则其倒数，即

$$\frac{1}{p} = P, \quad \frac{1}{r} = R$$

分别是近点和远点的折光度数，它们的差值以字母 \bar{A} 表示，即

$$\bar{A} = R - P \quad (9-1)$$

就是眼睛的调节范围或调节能力。对每个人来说，远点距离和近点距离随年龄而变化。随着年龄的增大，肌肉调节能力衰退，近点逐渐变远，而使调节范围变小。青少年时期，近点距眼睛很近，调节范围很大。可达十几个折光度，45岁以后，近点已在明视距离以外，调节能力仅几个折光度。

人眼除了能随物体距离改变而调节水晶体的曲率以外，还能在不同明暗条件下工作。眼睛所能感受的光亮度的变化范围是非常大的，其比值可达 $10^{12} : 1$ 。这是因为眼睛对不同的亮度条件有适应的能力，这种能力称为眼睛的适应。

在黑暗处，眼睛适应于感受十分微弱的光能。此时，眼睛的灵敏度大为提高，瞳孔增大(约 6 mm)，使进入眼睛的光能增加，看清周围的景物。能被眼睛感受的最低光照度值约为 10^{-6} 勒克斯，相当于一支蜡烛在 30 公里远处所产生的照度。

同样，由暗处到光亮处也要产生眩目现象，表明对光适应也有一过程。此时，眼睛灵敏度大大降低，瞳孔也随之缩小(约 1.5 mm)。在光照度 10^5 勒克斯下，并不影响眼睛的工作能力，这相当于太阳直照地面时的情况。

9.1.3 眼睛的缺陷和校正

正常眼在肌肉完全放松的自然状态下，能够看清无限远处的物体，即其远点应在无限远($R=0$)，像方焦点正好和网膜重合，如图 9-2(a)所示。若不符合这一条件就是非正常眼，或称视力不正常。

非正常眼有好几种，最常见的有近视眼和远视眼。

所谓近视眼，就是其远点在眼睛前方有限距离处($R<0$)，无限远处物成像在视网膜之前所致。因此眼前有限距离的物体才能成像在网膜上，见图 9-2(b)。

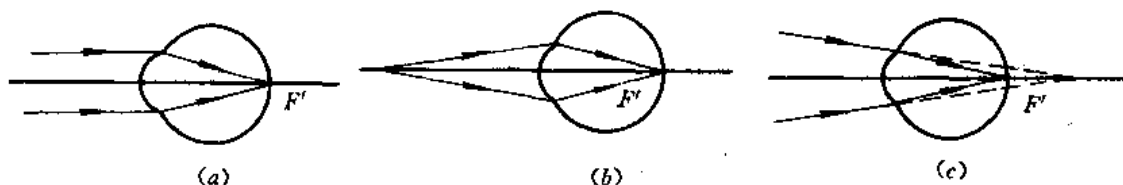


图 9-2 正常眼和非正常眼

所谓远视眼，就是其近点变得很远，当眼睛放松时，无限远物成像在网膜之后，即使肌肉最紧张，250 mm 以内的物点也成像于网膜之后。因此，射入眼睛的光束只有是会聚时，才能正好聚焦在网膜上，见图 9-2(c)。

弥补眼睛缺陷常用的方法是戴眼镜。显然，近视眼应配上一块负透镜，远视眼应配上一块正透镜，以使它们的像方焦点正好与近视眼或远视眼的远点重合，如图 9-3 所示。

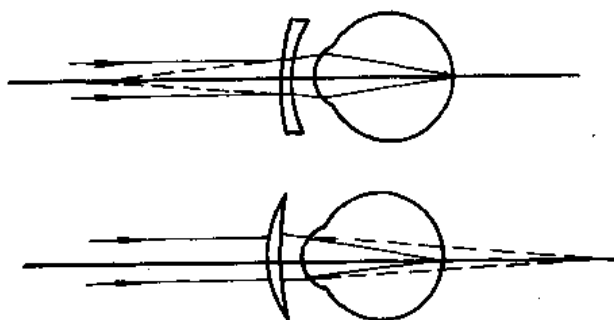


图 9-3 近视眼和远视眼的校正

通过眼镜，把近视眼的远点校正到无限远，把远视眼的近点校正到明视距离上。从而可以求得所需要加的透镜的焦距，得到眼镜的光焦度。如远点为 2 m 的近视眼，所需眼镜的光焦度为 $-0.5D$ 。又如近点为 125 cm 的远视眼，所需眼镜的光焦度为 $3.2D$ 。



医院和商店通常把 1 折光度称为 100 度。所以， $-0.5D$ 叫做近视 50 度， $3.2D$ 叫做远视 320 度。

9.1.4 眼睛的分辨率

眼睛能分辨开两个很靠近的点的本领，称为眼睛的分辨率。刚刚能分辨开的两点对眼睛物方节点所张的角度，称为极限分辨角。由物理光学可知，极限分辨角为

$$\alpha_c = \frac{1.22\lambda}{D}$$

对眼睛而言，上式中的 D 就是瞳孔直径。根据大量的统计，对波长 5500\AA 的光线而言，在良好的照明条件下， α_c 在 $50''\sim 120''$ 之间，一般可认为 $\alpha_c = 60'' = 1'$ 。

设计光学仪器时，必须考虑眼睛的分辨率。

9.2 放 大 镜

由于眼睛的分辨率有一定限制，要很好地辨别出所观察物体的细节，就必须使该细节对眼睛的张角大于眼睛的极限分辨率。

物体对眼睛的张角取决于物体到眼睛的距离。距离越近，张角就越大。但物体不能距眼睛太近，须位于眼睛的近点以外，才能被眼睛看清。所以，当细小物体位于最近距离，其张角仍小于极限分辨角时，就需要借助于放大镜或显微镜将其放大，使放大后的像对眼的张角大于极限分辨角，这样才能分辨出物体的细微结构。

9.2.1 放大镜的放大率

放大镜是帮助眼睛观察细小物体或细节的光学仪器。凸透镜是一个最简单的放大镜。

与眼睛一起使用的目视光学仪器，其放大作用不能单由前面所讲的光学系统本身的放大率来表征。因为眼睛通过目视光学仪器观察物体时，有意义的是在眼睛网膜上的像的大小。所以，放大镜的放大率应该为：通过放大镜观察物体时，其像对眼睛所张角的正切 ($\tan \omega'$)，与眼睛直接观察物体时，物体对眼睛所张角度的正切 ($\tan \omega$) 之比，通常称之为视 (角) 放大率，并用 Γ 表示。即

$$\Gamma = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} \quad (9-2)$$

图 9-4 是放大镜成像的光路图。为了得到放大的像，物体应置于放大镜第一焦点 F 附近并且靠近透镜的一侧。物为 AB ，大小为 y ，它被放大成一大小为 y' 的虚像 $A'B'$ 。这一放大的虚像对眼睛所张角度的正切为

$$\tan \omega' = y' / (-x' + x_e')$$

而当眼睛直接观察物体时，一般是将物置于明视距离，即相距人眼 250 mm 处。此时物体对眼睛的张角正切为

$$\tan \omega = \frac{y}{250}$$

则放大镜的放大率 Γ 为

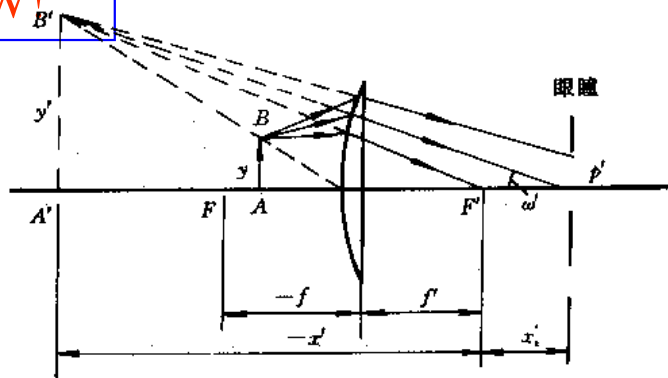


图 9-4 放大镜

$$\Gamma = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = \frac{\frac{y'}{-x + x_e}}{\frac{y}{250}} = \frac{250y'}{(-x + x_e)y}$$

将 $\beta = y'/y = -x'/f$ 代入上式得

$$\Gamma = \frac{250}{f} \cdot \frac{x'}{x - x_e}$$

由此可见，放大镜的放大率，除了和焦距有关外，还和眼睛离开放大镜的距离有关。

在实际使用过程中，眼瞳大致位于放大镜像方焦点 F' 的附近，则上式中的 x_e 相对于 x' 而言，是一个很小的值，可以略去。所以，放大镜的放大率公式，通常采用以下形式：

$$\Gamma = \frac{250}{f} \tag{9-3}$$

式中，焦距 f 以 mm 为单位。例如， $f = 100$ mm，则放大镜的放大率为 2.5 倍，写为 $2.5\times$ 。

由上式可见，放大镜的放大率仅由其焦距所决定，焦距越大则放大率越小。由于单透镜有像差存在，不能期望以减小凸透镜的焦距来获得大的放大率。简单放大镜放大率都在 $3\times$ 以下。如能用组合透镜减小像差，则放大率可达 $20\times$ 。

9.2.2 放大镜的光束限制和视场

放大镜总是与眼睛一起使用，所以整个系统有两个光阑：放大镜镜框和眼瞳，如图 9-5 所示。眼瞳是系统的出射光瞳，也是孔径光阑。而镜框为视场光阑，也是入射窗和出射窗。因此，物平面上能够被成像的范围，就被镜框直径 $2h$ 、眼瞳直径 $2a'$ 及它们之间的距离 d 所决定。

由图 9-5 可见， $2\omega'_2$ 决定了放大镜可能成像的最大视场，且有

$$\left. \begin{aligned} \tan \omega'_1 &= \frac{h - a}{d} \\ \tan \omega' &= \frac{h}{d} \\ \tan \omega'_2 &= \frac{h + a}{d} \end{aligned} \right\} \tag{9-4}$$

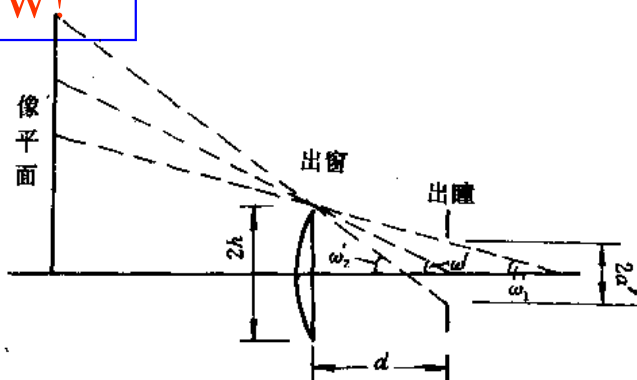


图 9-5 放大镜的光束限制和视场

由此可见，放大镜镜框越大，眼睛越靠近放大镜，则视场就越大。

通常，放大镜的视场用通过它所能看到的物平面上的圆直径或线视场 $2y$ 来表示。当物平面位于放大镜物方焦点上时，像平面在无限远，则

$$2y = 2f \tan \omega'$$

利用公式(9-3)和(9-4)，上式变为

$$2y = \frac{500h}{\Gamma d}$$

可见，放大镜的放大率越大，视场越小。

9.3 显 微 镜

为了观察近处物体的微小细节，用 $20\times$ 的放大镜也是远远不够的。而放大镜的放大倍数越大，其焦距应越短， $20\times$ 的放大镜，其焦距不过 12.5 mm 左右。这样短的距离对许多工作是不方便的，甚至在实际上是不允许的。为了在提高放大率的同时，也能获得合适的工作条件，必须采用组合放大镜，即采用两个光学系统组成的复合光学系统来代替单一的放大镜。这种组合的放大镜，称为显微镜。

显微镜是一种极为重要的目视光学仪器，大量地应用于各个科学技术领域中。

9.3.1 显微镜的成像原理

显微镜的光学系统由物镜和目镜两个部分组成。显微镜成像的原理如图 9-6 所示。为方便起见，图中把物镜 L_1 和目镜 L_2 均以单块透镜表示。人眼在目镜后面的一定位置上，物体 AB 位于物镜前方、离开物镜的距离大于物镜的焦距但小于两倍物镜焦距处。所以，它经物镜以后，形成一个放大的倒立实像 $A'B'$ 。使 $A'B'$ 恰位于目镜的物方焦点 F_2 上，或者在靠近 F_2 的位置上。再经过目镜放大为虚像 $A''B''$ 后供眼睛观察。虚像 $A''B''$ 的位置取决于 F_2 和 $A'B'$ 之间的距离，可以在无限处，也可以在观察者的明视距离处。目镜的作用和放大镜一样，所不同的只是眼睛通过目镜看到的不是物体本身，而是物体被物镜所成的、已经放大了一次的像。

物体经过两次放大，所以显微镜总的放大率 Γ 应该是物镜放大率 β 和目镜视放大率

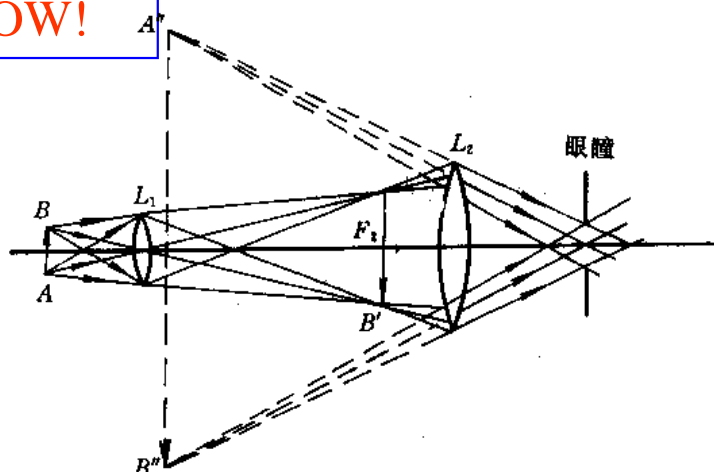


图 9-6 显微镜

Γ_2 的乘积。和放大镜相比，显然，显微镜可以具有高得多的放大率，并且通过调换不同放大率的物镜和目镜，能够方便地改变显微镜的放大率。由于显微镜中存在着中间实像，故可以在物镜的实像平面上放置分划板，从而可以对被观察物体进行测量，并且在该处还可以设置视场光阑，消除渐晕现象。

因为物体被物镜成的像 $A'B'$ 位于目镜的物方焦点上或者附近，所以此像相对于物镜像方焦点的距离 $x' = \Delta$ 。这里， Δ 为物镜和目镜的焦点间隔，在显微镜中称它为光学筒长。

设物镜的焦距为 f_1 ，则物镜的放大率为

$$\beta = -\frac{x'}{f_1} = -\frac{\Delta}{f_1}$$

物镜的像再被目镜放大，其放大率为

$$\Gamma_2 = \frac{250}{f_2}$$

式中， f_2 为目镜的焦距。由此，显微镜的总放大率为

$$\Gamma = \beta\Gamma_2 = -\frac{250\Delta}{f_1f_2} \quad (9-5)$$

由此可见，显微镜的放大率和光学筒长 Δ 成正比，和物镜及目镜的焦距成反比。负号表示当显微镜具有正物镜和正目镜时（一般如此），则整个显微镜给出倒像。

根据几何光学中合成光组的焦距公式可知，整个显微镜的总焦距 f 和物镜及目镜焦距之间有如下关系

$$f = -\frac{f_1f_2}{\Delta}$$

代入(9-5)式中则

$$\Gamma = \frac{250}{f}$$

它与放大镜的放大率公式具有完全相同的形式。可见，显微镜实质上就是一个比放大镜具有更高放大率的复杂化了的放大镜。当物镜和目镜都是组合系统时，则在放大率很高的情况下，仍能获得清晰的像。



9.3.2 显微镜的分辨率

由于放大的目的最终还是为了分辨物体的细节，所以显微镜除应有足够的放大率外，还要有相应的分辨本领。

显微镜的分辨率以它所能分辨的两点间最小距离来表示。由光的衍射的讨论可知，两个自发光亮点的分辨率表示式为

$$\sigma_1 = \frac{0.61 \lambda}{NA}$$

式中， λ 为测量时所用光线的波长； NA 为物镜的数值孔径。

对于不能自发光的物点，根据照明情况不同，分辨率是不相同的。阿贝在这方面作了很多研究工作。当被观察物体不发光，而被其它光源照明时，分辨率为

$$\sigma_0 = \frac{\lambda}{NA}$$

在斜照明时，分辨率为

$$\sigma_0 = \frac{0.5 \lambda}{NA}$$

从以上公式可见，显微镜对于一定波长的光线的分辨率，在像差校正良好时，完全由物镜的数值孔径所决定，数值孔径越大，分辨率越高。这就是希望显微镜要有尽可能大的数值孔径的原因。

通常在显微镜的物镜上除刻有表示放大率的数字外，还刻有表示数值孔径的数字。例如物镜上刻有 $N.A. 0.65$ 字样，即表示该物镜的数值孔径 $n \sin u = 0.65$ 。

当显微镜的物方介质为空气时，物镜可能具有的最大数值孔径为 1，一般只能达到 0.9 左右。而当在物体与物镜第一片之间浸以液体，一般是浸以 $n = 1.5 \sim 1.6$ 甚至 1.7 的油或高折射率的液体，数值孔径可达 1.5~1.6。

为了充分利用物镜的分辨率，使已被显微镜物镜分辨出来的细节能同时被眼睛看清，显微镜必须有恰当的放大率，以便把它放大到足以被人眼所分辨的程度。

便于眼睛分辨的角距离为 $2' \sim 4'$ ，则在明视距离 250 mm 处能分辨两点之间的距离 σ' 为

$$250 \times 2 \times 0.00029 \leq \sigma' \leq 250 \times 4 \times 0.00029$$

换算到显微镜的物方，相当于分辨率要乘以视放大率，取 $\sigma_0 = 0.5 \lambda / NA$ ，则得

$$250 \times 2 \times 0.00029 < \frac{0.5 \lambda}{NA} \Gamma < 250 \times 4 \times 0.00029$$

设所用光线的波长为 0.00055 mm，上式成为

$$527 NA < \Gamma < 1054 NA$$

或近似写成

$$500 NA < \Gamma < 1000 NA \quad (9-6)$$

满足(9-6)式的放大率，称为显微镜的有效放大率。

一般浸液物镜最大数值孔径为 1.5，所以光学显微镜能够达到的有效放大率不超过 $1500\times$ 。

由以上公式可见，显微镜可能有多大的放大率，取决于物镜的分辨率或数值孔径。当

使用比有效放大率下限更小的放大率时，不能看清物镜已经分辨出的某些细节。如果盲目取用高倍目镜得到比有效放大率上限更大的放大率，是无效的。

9.3.3 显微镜的物镜

由于显微镜主要是用来观察或测量近处微小物体的，所以如何把物体放大到足够大，并且分辨清楚细节，这是显微镜的主要任务。

从前面讨论看到，放大率与物镜的数值孔径有关。显微镜物镜倍数越高，其数值孔径也越大。这样就要求物镜的焦距短和相对孔径大。但是，在这样的光学系统中球差、彗差、色差及色像差等都是很严重的。结构简单的物镜无法克服这一困难。因此，物镜的结构随数值孔径的增大而趋向复杂。显微物镜根据它们校正像差的情况不同，通常分为消色差物镜、复消色差物镜和平视场物镜三大类。

1. 消色差物镜

这是应用最广泛的一类显微物镜。为了提高分辨率，它的数值孔径比较大。因此，它至少应校正轴上点的色差和球差。由于它的视场很小，所以，即使对轴外像差不作重点考虑，也还能满足一般的使用要求。这种显微物镜称为消色差物镜。不同放大率和数值孔径的消色差显微物镜的结构型式，很早就已定型，至今未作太大的改变。

低倍物镜($3\times\sim 6\times$)本身是一个简单的双胶合透镜，如图 9-7(a)所示。

中倍物镜($6\times\sim 10\times$)由两组双胶合透镜组成，如图 9-7(b)所示。两组单独消轴向色差，整个系统的垂轴色差自动校正，而球差由前组和后组互相配合校正。这种物镜即通常所谓的里斯特(Leister)显微物镜。

高倍物镜($40\times$ 以上)可认为是在里斯特物镜后加了一个接近半球型的透镜而得，如图 9-7(c)所示。这种结构的物镜也称阿米西(Amici)物镜。

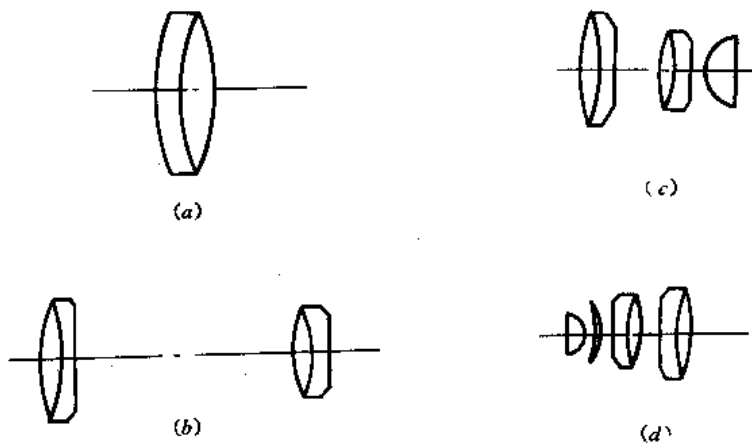


图 9-7 消色差物镜

浸液物镜的放大率很高($90\times\sim 100\times$)，其结构如图 9-7(d)所示，也叫做阿贝浸液物镜。应用浸液，主要是为了提高物镜数值孔径，此外，还可使第一面近于不产生像差，光能损失也可减少。

复消色差物镜主要用于研究用显微镜及显微照相中，它要求严格地校正轴上点的像差，同时要校正二级光谱。这种物镜的结构很复杂。

3. 平视场物镜

平视场物镜主要用于显微照相和显微投影，它要严格地校正像面弯曲。这种物镜的结构非常复杂。

9.3.4 显微镜中的光束限制

在一般情况下，显微系统中成像光束的口径是由物镜框限制的，物镜框就是孔径光阑。物镜框经目镜所成的像，就是显微镜的出瞳，如图 9-8 所示。

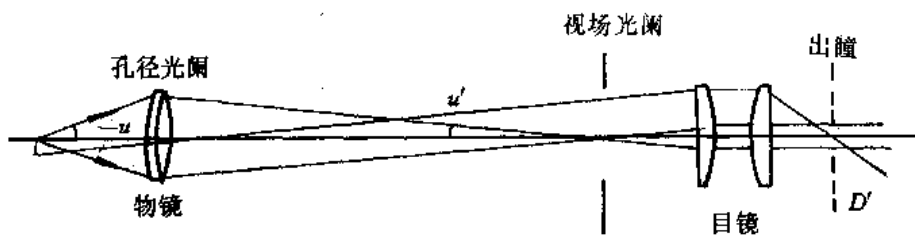


图 9-8 显微镜的光束限制

复杂的显微物镜是以最后一组透镜的框作为孔径光阑的，测量用显微镜中往往在物镜的像方焦平面上专门设置孔径光阑，在这种情况下显微系统的入瞳位于物方无限远处，出瞳则在整个显微镜的像方焦平面上。

图中目镜物方焦平面上的圆孔光阑(或分划板框)限制了系统的成像范围，即为显微系统的视场光阑。显微系统的视场用成像物体的最大尺寸表示(即线视场)。一般显微镜视场光阑的直径大约为 20 mm，即当 $y = 20 \text{ mm}$ 时，由垂轴放大率公式得显微镜的最大线视场为

$$y_{\max} = \frac{y}{\beta}$$

由图 9-8 知， $u' = D' / 2f_2$ ， D' 为出瞳直径。而 $\beta = y' / y = nu / n'u'$ ，将 $n' = 1$ 代入，得

$$nu = \beta \frac{D'}{2f_2}$$

因为 $\beta = \Delta / f_1$ ， $\Gamma = 250 / f'$

所以
$$nu = D \frac{\Gamma}{500} \tag{9-7}$$

在显微系统中，显微镜的物方孔径角和折射率的乘积 nu 可称为数值孔径。(9-7)式表明，当显微镜数值孔径一定时，显微镜放大倍率 Γ 越高，出射光瞳的直径 D' 就越小。实际上，因显微镜的放大倍率都比较高，所以出射光瞳直径 D' 一般都很小，都小于眼睛的瞳孔直径，只有显微镜为低倍率时才能达到眼睛瞳孔的直径。

9.4 望 远 镜

为了观察远处物体的细节，所用的光学仪器是望远镜。由于望远镜所成的像对眼睛张角大于物体本身对眼睛的直观张角。所以通过望远镜观察时，远处的物体似乎被移近了，使人们可以清楚地看清远处物体的细节，扩大了人眼观测远距离物体的能力。

9.4.1 望远镜的一般特性

望远镜的光学系统简称望远系统，是由物镜和目镜组成。当用在观测无限远物体时，物镜的像方焦点和目镜的物方焦点重合，光学间隔 $\Delta=0$ 。当用在观测有限距离的物体时，两系统的光学间隔是一个不为零的小数量。作为一般的研究，可以认为望远镜是由光学间隔为零的物镜和目镜组成的无焦系统。这样平行光射入望远系统后，仍以平行光射出。图 9-9 表示了一种常见的望远系统的光路图。为了方便，图中的物镜和目镜均用单透镜表示。这种望远系统没有专门设置孔径光阑，物镜框就是孔径光阑，也是入射光瞳，出射光瞳位于目镜像方焦点之外，观察者就在此处观察物体的成像情况。系统的视场光阑设在物镜的像平面处，入射窗和出射窗分别位于系统的物方和像方的无限远处，各与物平面和像平面重合。

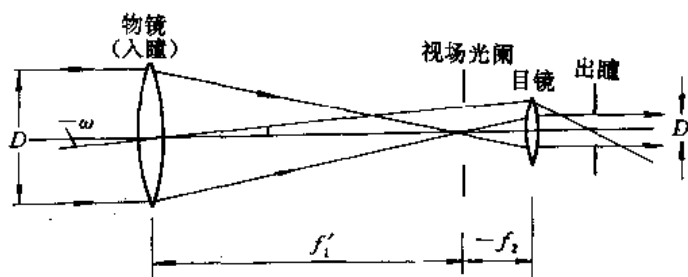


图 9-9 望远镜

可以求出望远系统的各放大率为：

$$\left. \begin{aligned} \beta &= -\frac{f_2}{f_1} \\ \gamma &= -\frac{f_1}{f_2} \\ \alpha &= \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (9-8)$$

式中， f_1' 、 f_2 分别是物镜和目镜的焦距。由式可见，望远系统的放大率仅仅取决于望远系统的结构参数。

对于目视光学仪器来说，更有意义的特性是它的视放大率。对无限远的物体来说，物体对人眼所张的角 $\bar{\omega}$ 和物体对望远系统的张角 ω 是相等的，因为仪器长度相对于无限大只是一个微小量。于是 $\tan \bar{\omega} = \tan \omega$ 。由图 9-10 可见：

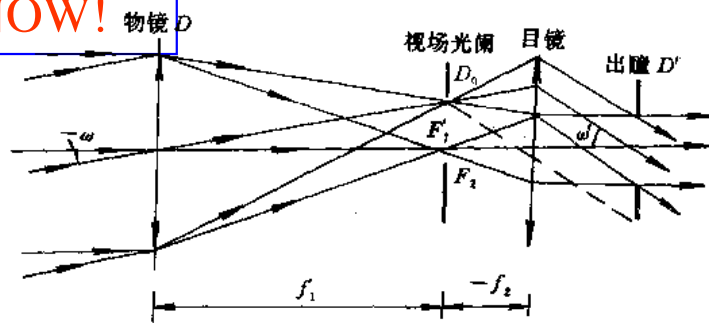


图 9-10 望远镜的光束限制

$$\tan \bar{\omega} = \tan \omega = -\frac{(D_0/2)}{f_1} = -\frac{D_0}{2f_1}$$

以及

$$\tan \omega' = \frac{D_0/2}{-f_2} = \frac{D_0}{2f_2}$$

其中, D_0 为视场光阑的孔径。这样, 望远系统的视放大率 Γ 为

$$\Gamma = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = -\frac{f_1}{f_2} \quad (9-9)$$

由图 9-10 还可知

$$\frac{D}{2f_1} = \frac{D'}{2f_2}$$

则

$$\Gamma = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{D}{D'} \quad (9-10)$$

由望远镜视放大率公式可见, 视放大率仅仅取决于望远系统的结构参数, 其值等于物镜和目镜的焦距之比。

当物镜和目镜都为正焦距($f_1 > 0, f_2 > 0$)的光学系统时, 如开普勒(Keppler)望远镜, 则放大率 Γ 为负值, 系统成倒立的像; 而物镜的焦距为正($f_1 > 0$), 目镜焦距为负($f_2 < 0$)时, 如伽利略(Galileo)望远镜, 则放大率 Γ 为正值, 系统成正立的像。

确定望远镜的视放大率, 需要考虑许多因素, 如仪器的精度要求、目镜的结构型式、望远镜的视场角、仪器的结构尺寸等等。

表示观测仪器精度的指标是极限分辨角。若以 $60''$ 作为人眼的分辨率极限, 为使望远镜所能分辨的细节也能被人眼分辨, 则望远镜的视放大率和它的极限分辨角 ψ 应满足

$$\psi \Gamma = 60'' \quad (9-11)$$

所以, 若要求分辨角减小, 视放大率应该增大。或者说望远镜的视放大率越大, 它的精度就越高。

若望远镜极限分辨角 ψ 以秒表示, 入瞳 D 用 mm 表示, 对波长为 0.00055 mm 的光线而言, 人眼极限分辨角为

$$\alpha_s = \frac{1.22 \lambda}{D} \approx \left(\frac{140}{D} \right)$$

代入(9-11)式,得到望远镜应具备的最小视放大率

$$\Gamma = \frac{60''}{\left(\frac{140}{D}\right)''} \approx \frac{D}{2.3} \approx 0.5 D \quad (9-12)$$

由此式求出的视放大率称为正常放大率。按此设计的望远镜观测时易于疲劳,所以设计望远镜时宜用大于正常放大率的值,即工作放大率作为望远镜的视放大率。工作放大率常为正常放大率的1.5~2倍。

望远镜的视放大率与视场角的关系可由(9-9)式看出。当目镜的类型确定时,它所对应的像方视场角 ω' 就一定,增大视放大率必然引起视场角 ω 的减小。因此,视放大率总是和望远镜的视场角一起考虑的。例如军用望远镜,为易于找到目标,希望有尽可能大的视场角,这使望远镜倍率不宜过大。

望远系统的视放大率和仪器结构尺寸的关系可由(9-9)式看出,当目镜的焦距确定时,物镜的焦距随视放大率增大而加大。若望远镜镜筒长度以 $L=f_1+f_2$ 表示,则随 f_1 的增大镜筒变长。当目镜所要求的出瞳直径确定时,物镜的直径随视放大率增大而加大。这种关系在某些应用中,是增大视放大率的障碍。

9.4.2 伽利略望远镜和开普勒望远镜

伽利略望远镜的物镜是一块正透镜,目镜是一块负透镜,如图9-11所示。

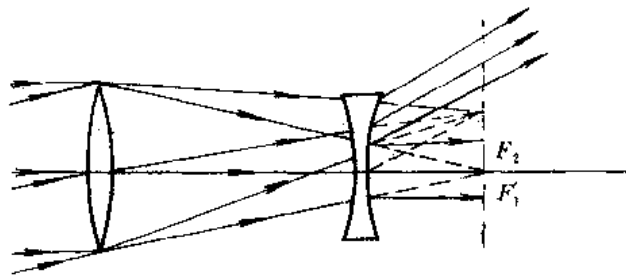


图9-11 伽利略望远镜

伽利略望远镜的优点是结构简单,筒长短,较为轻便,光能损失少。并且使物体成正立的像,这是作为普通观察仪器时所必须的。

但是伽利略望远镜没有中间实像,不能安装分划板,因而不能用来瞄准和定位。所以,应用很少。

开普勒望远镜的物镜和目镜都是正透镜。图9-9所示的就是开普勒望远镜。

由于开普勒望远镜在物镜和目镜中间构成物体的实像,可以在实像位置上安装一块分划板,它是一块平板玻璃,上面刻有瞄准丝或标尺,以作测量瞄准用。同时,在分划板边缘,镀成不透明的圆环形区域,以此兼作视场光阑。

在开普勒望远镜中,目镜的口径足够大时,光束没有渐晕现象。这是因为视场光阑与实像平面重合的缘故,系统的入射窗和物平面重合。

开普勒望远镜成像为倒立的像,这在天文观察和远距离目标的观测中无关紧要,但在一般观察用望远镜中,总是希望出现正立的像。为此,应该在系统中加入转像系统。

大多数望远镜，其光学特性都用相对孔径 D/f ，焦距 f 和视场角 2ω 来表示。

物镜的焦距由系统的视放大率决定，通常都要先确定目镜的焦距，再由(9-10)式确定物镜的焦距。

根据使用要求确定了出瞳的直径，就可由(9-10)式确定物镜的孔径。

多数望远镜都有较大的相对孔径 D/f ，这样可以获得较高的分辨率和较强的亮度。但大孔径物镜轴上点像差难于校正，因而其结构型式比较复杂。

望远镜的视场比较小，通常不超过 $10^\circ \sim 15^\circ$ 。由于视场小，像差的校正偏重于轴上点像差。

望远物镜可分为三种结构型式：折射式、反射式和折反式望远物镜。

1. 折射式望远物镜

双胶合物镜 这是一种常用的望远物镜，它结构简单，制造方便，光能损失小。当合理选择玻璃时，可同时校正球差和色差。因为这种物镜不能校正轴外像差，所以视场角不得超过 $8^\circ \sim 10^\circ$ 。

双分离物镜 与双胶合物镜相比，双分离物镜可以在更大的范围内选择玻璃时，可以使球差、色差同时得到校正。双分离物镜能够适应的相对孔径比双胶合物镜大。当双胶合物镜因孔径过大而难于胶合时，使用双分离物镜特别合适，只是装配校正比较困难。

2. 反射式望远物镜

天文望远镜常用反射式物镜。为了提高分辨率和增大接收光能量的能力，天文望远镜的孔径相当大，有的直径达几米。这么大的物镜若用透射式，会给工艺制造带来极大的困难，又很难保证面型的精度。采用反射式物镜，不但可设计得很轻巧，还能降低对材料的要求。另外，反射式物镜无色差，易于作成大孔径，并且当反射面形状合适时，又可校正球差。

单个抛物面反射镜，能很好校正球差，但彗差严重，因而可用的视场很小。反射式物镜多采用双反射式系统。著名的有卡塞格伦(Cassegrain)系统和格里高利(Gregory)系统。

卡塞格伦系统由两个反射面组成，如图 9-12(a)所示。主镜是抛物面，次镜是双曲面，所成的像为倒像。这种结构的筒长比较短。

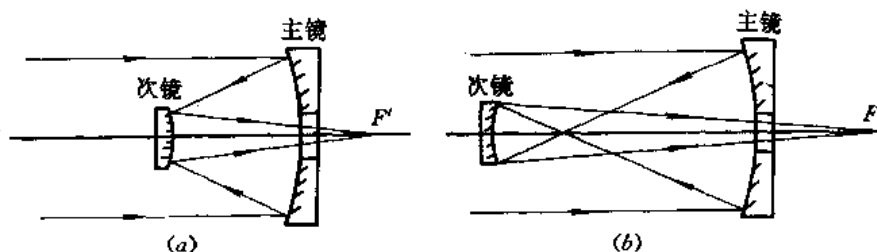


图 9-12 双反式望远物镜

格里高利系统也是由两个反射面组成，如图 9-12(b)所示。主镜仍为抛物面，次镜是椭球面，所成的像为正像。这种结构的筒长比较长。

3. 折反式系统

反射系统对轴外像差的校正是很困难的, 于是一种新型的折反式系统逐渐发展起来了。它以球面反射镜为基础, 加入适当的折射元件, 用来校正球差, 得到良好的效果。典型的折反式系统有施密特(Schmidt)物镜和马克苏托夫物镜。

施密特物镜由球面主反射镜和施密特校正板组成, 如图 9-13(a)所示。校正板为透射元件, 一面为平面, 另一面为非球面, 位于主镜球心上。该系统球差得到很好校正, 色差极小, 又不产生彗差、像散和畸变, 仅有场曲。

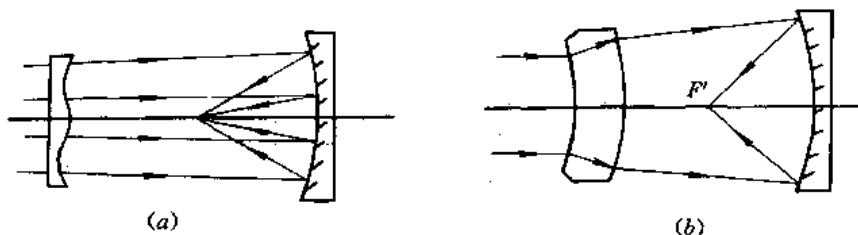


图 9-13 折反式望远物镜

马克苏托夫物镜由球面主反射镜和弯月型厚透镜组成, 如图 9-13(b)所示。弯月型透镜满足一定条件可不产生色差, 用它可以补偿主镜的球差。当光阑和厚透镜位置接近于主镜球心时, 产生的轴外像差很小。适当改变透镜和主镜参数, 利用间隔的变化还可校正正弦差。

此外, 还有一些折反式望远物镜, 成像质量也是很好的。

9.4.4 内调焦望远系统

望远系统的工作范围应是无穷远起点以外, 当用望远系统观察有限远的目标时, 产生了调焦望远系统。调焦望远系统是用光学零件位置上的变化实现调焦作用的。调焦望远系统分为外调焦和内调焦系统。

外调焦望远系统如图 9-14(a)所示。有限远的目标 A 通过物镜成像于焦平面后 A' 处, 故目镜应对 A' 调焦后才能看到清晰的像。为此, 应把目镜和分划板相对于物镜的间隔增大, 使望远系统的光学间隔由 $\Delta d=0$ 变到 $\Delta d=F'A'$ 。即外调焦望远系统是以目镜相对于物镜位置上的变化实现调焦作用的。

内调焦望远系统如图 9-14(b)所示。当目标在有限远时, 移动调焦镜, 使目标经物镜所成的像仍然在固定的分划板处。内调焦系统的调焦镜可以是负透镜, 也可以是正透镜。内调焦系统是物镜到分划板的距离固定不变, 通过改变物镜和调焦镜的总焦距来实现调焦的目的。即物体由无穷远向物镜方向移动时, 物镜和调焦镜的组合焦距随之改变。

设内调焦系统的物镜光焦度为 φ_1 , 调焦镜的光焦度为 φ_2 , 物镜和调焦镜的总光焦度为 φ , 则有

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d_0 \varphi_1 \varphi_2$$

式中, d_0 为调焦无穷远时物镜与调焦镜之间的距离。由图可得物镜的筒长 L 为

$$L = d_0 + f \left(1 - \frac{d_0}{f_1} \right)$$

式中, f 为内调焦望远系统物镜和调焦镜的总焦距; f_1 为物镜的焦距。

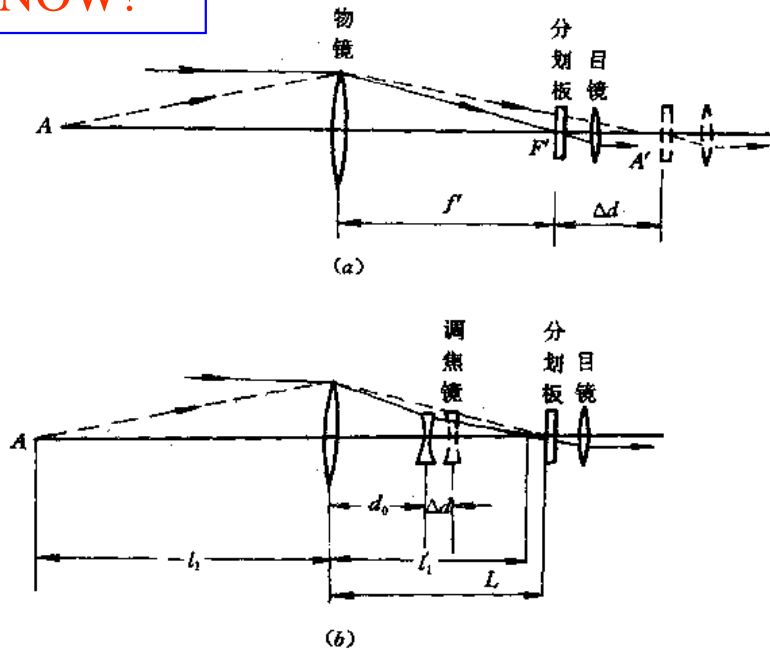


图 9-14 望远镜的调焦

物距为 $-l_1$ 的物体，经物镜成像于 l_1' 处，此像再经过调焦镜成像于分划板的刻线面处，此时，物镜与调焦镜的距离为 $d = d_0 + \Delta d$ 。对调焦镜应用高斯公式可得

$$d = \frac{1}{2} \left[l_1 + L - \sqrt{(l_1 - L)(l_1 - L + 4f_2)} \right]$$

式中， f_2 为调焦镜的焦距。

内调焦望远系统与外调焦望远系统相比，外调焦系统结构简单，像质也比较好，但外形尺寸较大，密封性能很差，多用于实验室中的调焦系统。内调焦望远系统尺寸小，携带方便，密封性能好，多用于大地测量的仪器中。

9.4.5 目镜

目镜也是放大视角用的仪器。目镜是望远镜和显微镜的重要组成部分，它的作用相当于一个放大镜。目镜把物镜的像进一步放大后，使成像于人眼的明视距离或无限处。若目镜焦距为 f_2 ，则目镜的放大率为

$$\Gamma_2 = \frac{250}{f_2}$$

1. 目镜的光学特性

目镜的光学特性由它的视场角 $2\omega'$ 、焦距 f' 、相对目距 p'/f' 和工作距 l_2 来决定。

目镜的视场大小取决于望远系统的视放大率 Γ 和视场 2ω ，即

$$\tan \omega' = \Gamma \tan \omega$$

无论是提高望远镜的放大率，还是增大望远系统的视场角，都会引起目镜视场角的增大。但是，增大目镜视场的困难在于轴外像差的校正。因此，望远系统视放大率和视场的增大要受目镜视场的限制。一般目镜视场角 $2\omega'$ 为 $40^\circ \sim 50^\circ$ 。

由于在观测时，人眼的瞳孔须与出瞳重合，以便使不同视场的出射光束都能进入眼瞳中，故要求镜目距 p 有一定大小(参见图 9-15)。当望远系统的视放大率较大时，物镜的焦距与目镜焦距之比加大，即物镜框到目镜的距离相对于目镜焦距增大。物镜框经目镜所成的像，即出瞳更加接近目镜的像方焦点。因此，目镜的镜目距 p' 近似等于焦点到目镜最后一面的距离。对于一定型式的目镜，相对镜目距即镜目距对焦距的比值 p'/f' 近似地等于一个常数。一般目镜的相对镜目距 p'/f' 为 0.5~0.8。

目镜的第一面顶点到物方焦平面的轴向距离 l_2 称为目镜的工作距。为了使目镜适应于近视眼和远视眼的需要，目镜应有视度调节的能力。每调节一个折光度，目镜相对于物体(即分划板)应移动的距离为

$$x = \frac{f^2}{1000}$$

通常视度调节范围为 ± 5 折光度，则目镜的调节范围应为 $\pm 5x$ 。为了保证视度调节时不使目镜表面与分划板相碰，目镜的工作距应大于视度调节的最大的轴向位移 $5x$ 。

由上面的讨论可知，目镜是一种小孔径，大视场，焦距短，而且光阑在外面的光学系统。目镜的这些光学特性决定了目镜的像差特性。它的轴上点像差不大，无需特别注意，即可使球差和色差满足要求。而轴外像差很严重，校正较为困难。五种轴外像差中，以彗差、像散、场曲和垂轴色差对目镜的成像质量影响最大。但是，总的来说，目镜对轴外像差要求不是非常严格的。一般大视场目镜在使用中，多以扩大视场来搜索目标。然后把目标转移到视场中心来进行观察和瞄准。因此，在搜索目标时，不一定要求十分清晰。所以对目镜边缘视场的像差可以放宽。

2. 惠更斯目镜

惠更斯目镜由两块平凸透镜组成，其间隔为 d 。图 9-15 是这种目镜的结构示意图。图中透镜 L_1 为场镜，透镜 L_2 为接目镜。两者的焦距分别是 f_1 和 f_2 。场镜把物镜成的像再一次成像在两透镜中间，该处是接目镜的物方焦面，中间像经过接目镜成像在无限远处。

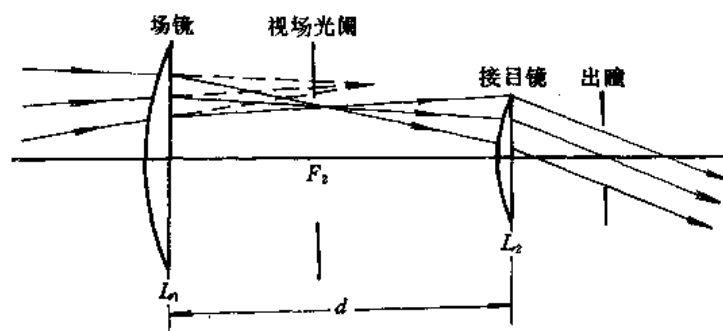


图 9-15 惠更斯目镜

惠更斯目镜的场镜和接目镜都选用同一种玻璃材料时，若间隔 $d = (f_1 + f_2)/2$ ，可满足校正垂轴色差的条件。为此，可把焦距和间隔设计成如下关系：

$$f_1 : d : f_2 = (x - 1) : x : (x + 1)$$

为消除渐晕现象，在接目镜的物方焦面上设置视场光阑。此时，场镜产生的轴外像差很大，很难予以补偿。所以惠更斯目镜不宜在视场光阑平面上设置分划板。否则，从目镜

里观察到的物体和分划板的像不可能都是清晰的。所以惠更斯目镜不宜用在测量仪器中，而常用于观察不测量的仪器中。其光学特性为 $2\omega' = 40^\circ \sim 50^\circ$, $p'/f = 1/3$ 。

3. 冉斯登目镜

冉斯登(Ramsden)目镜由两块凸面相对的平凸透镜组成，其间隔 d 小于惠更斯目镜两透镜的间隔。

当目镜两块透镜的焦距和间隔相等时，可满足校正垂轴色差的条件。但是整个目镜的两个焦点分别位于两块透镜上，目镜的工作距为零。这种情况下不适宜安装分划板。而且出瞳直径小，也不利于观察。一般将两块透镜的间隔适当缩短，焦距也略有差异。如图 9-16 所示。

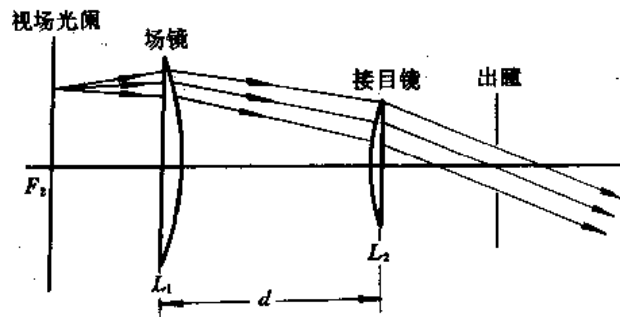


图 9-16 冉斯登目镜

在成像质量上，由于间隔小，所以场曲比惠更斯目镜小。冉斯登的场镜平面朝向物镜，由物镜射出的主光线近似垂直该平面，这有利于校正彗差和像散。

冉斯登目镜用在出瞳直径和镜目距都不大，且要求放置分划板的测试仪器中。它的光学特性为 $2\omega' = 30^\circ \sim 40^\circ$, $p'/f = 1/4$ 。

4. 凯涅尔目镜

凯涅尔(Kellner)目镜可认为是冉斯登目镜的接目镜改成双胶合镜组而得到。实际上，冉斯登目镜中接目镜和场镜之间隔 $d \leq (f_1 + f_2)/2$ ，所以垂轴色差没有校正好。把接目镜改成一组双胶合透镜，就能在校正彗差和像散的同时，校正好垂轴色差。成像质量比冉斯登目镜好，视场也扩大了，出瞳距有所增长。其光学特性为 $2\omega' = 40^\circ \sim 50^\circ$, $p'/f = 1/2$ 。

5. 对称式目镜

对称式目镜是应用非常广泛的中等视场目镜。它由两个双胶合镜组构成，如图 9-17 所示。为加工方便，这两个透镜组采用相同的结构。对称式目镜要求各组自行校正色差，这样垂轴色差也随之校正。根据像差理论可知，它还能校正两种像差，首先是彗差和像散。

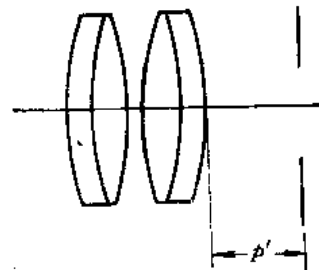


图 9-17 对称式目镜

和上述几种目镜比较，对称目镜的结构更紧凑。因此场曲更小。但由于胶合面半径比较小，产生的高级像差大，限制了这种目镜的视场。它的光学特性为 $2\omega' = 40^\circ \sim 42^\circ$, $p'/f = 1/1.3$ 。

9.5 望远系统外形尺寸的计算

设计一个光学系统，一般可以分为两个阶段：第一阶段为初步设计阶段，通常叫做外形尺寸计算；第二阶段为像差设计阶段。

光学系统外形尺寸计算的任务是根据对仪器提出的要求，如光学特性，外形，重量以及有关技术条件等，确定系统的组成，各组元的焦距，各组元的相对位置和横向尺寸等。外形尺寸计算的主要依据是高斯光学理论，为了保证设计顺利进行，用像差理论对计算结果作一些粗略地估计和分析也是必要的。

像差计算的任务是按照第一阶段设计计算结果，确定各组元的结构参数，如曲率半径，厚度以及所用材料等等，并保证满足成像质量的要求。

本节仅以简单望远系统为例，说明光学系统外形尺寸设计计算的一般方法。

计算一个简单开普勒望远系统的外形尺寸。该系统只包括物镜和目镜，要求镜筒长度 $L=250\text{ mm}$ ，放大率 $\Gamma=-24\times$ ，视场角 $2\omega=1^\circ40'$ 。

图 9-18 为开普勒望远镜的光路示意图。

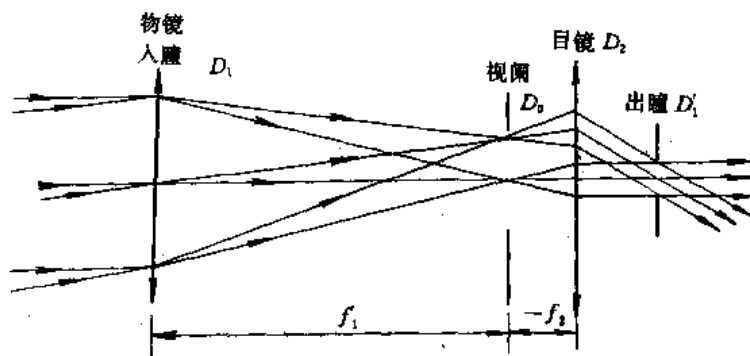


图 9-18 开普勒望远镜光路

计算步骤如下：(单位均用 mm)

① 求物镜和目镜的焦距。联立求解方程组

$$L = f_1 + f_2 = 250$$

$$\Gamma = -\frac{f_1}{f_2} = -24$$

得

$$f_1 = 240\text{ mm}, \quad f_2 = 10\text{ mm}$$

② 求物镜的通光口径。物镜的口径取决于分辨率的要求，若使物镜的分辨率与放大率相适应，可根据望远镜的口径与放大率关系式 $\Gamma \geq D_1/2.3$ 求出 D_1 。为了减轻眼睛的负担，可取 $\Gamma = (0.5 \sim 1)D_1$ 关系。如此， $D_1 = (1 \sim 2)\Gamma$ 。取系数为 1.5，则

$$D_1 = 1.5 \Gamma = 36\text{ mm}$$

③ 求出瞳直径。

$$D_1' = \frac{D_1}{\Gamma} = 1.5\text{ mm}$$



④ 求视场光阑的直径 D_2 。

$$D_2 = 2f_1 \tan \omega = 2 \times 240 \times 0.01455 = 6.98$$

取 $D_2 = 7 \text{ mm}$

⑤ 求目镜的视场角 $2\omega'$ 。

$$\tan \omega' = \Gamma \tan \omega = 24 \times 0.01455 = 0.3492$$

$$\omega' = 19^\circ 15'$$

$$2\omega' = 38^\circ 30'$$

⑥ 求出瞳距 l'_x 。利用牛顿公式可求得瞳距 l'_x 为

$$l'_x = f_2 + \frac{f_2 f_2'}{-f_1} = -\frac{L}{\Gamma}$$

所以
$$l'_x = -\frac{L}{\Gamma} = \frac{250}{24} = 10.42 \text{ mm}$$

⑦ 求目镜的口径 D_2 。

$$\begin{aligned} D_2 &= D_1 + 2l'_x \tan \omega \\ &= 1.5 + 2 \times 10.42 \times 0.3492 = 8.78 \end{aligned}$$

取 $D_2 = 9 \text{ mm}$

⑧ 求目镜的视度调节。

$$x = \pm 5 \times \frac{f_2^2}{1000} = \pm 5 \times \frac{10^2}{1000} = \pm 0.5$$

⑨ 选取物镜和目镜的结构。由于物镜的相对孔径 $D/f = 36/240 = 1/6.67$ ，焦距 $f = 240 \text{ mm}$ ，选用双胶合物镜即可。由于目镜的视场只有 $38^\circ 30'$ ，又没有其它特殊要求，则选用凯涅尔目镜或对称目镜即可。

9.6 双反射式望远物镜

如 9.4 节所述，双反射式望远物镜常采用卡塞格伦系统和格里高利系统。本节对这两种系统进行进一步的讨论。

9.6.1 卡塞格伦系统

卡塞格伦系统(见图 9-12(a))的第一个反射镜叫主镜，是抛物面镜，第二个反射镜叫次镜，是双曲面镜。双曲面的一个焦点与抛物面主镜的焦点重合，另一个焦点便是整个物镜系统的焦点。此时，系统对无限远轴上物点成像是没有像差的。

卡塞格伦系统的次镜位于主镜的焦点以内，次镜的横向放大率 $\beta > 0$ ；由于系统的后主平面在后焦点之左，整个系统的焦距 f' 是正的，因而整个系统所成的像是倒像。

卡塞格伦系统的优点是像质好，镜筒短，焦距长，而且焦点在主镜后面，便于在焦面上放置红外探测器。因此，卡塞格伦系统被广泛用于红外系统中。

9.6.2 格里高利系统

典型的格里高利系统是由一个抛物面主镜和一个凹椭球面次镜组成(见图 9-12(b))。

这种系统的次镜放在主镜焦点之外，它的一个焦点与主镜焦点重合，则椭球面镜另一个焦点便是整个系统的焦点。这种情况下次镜的横向放大率 $\beta < 0$ ，由于系统的后主平面在后焦点之右，系统的焦距 f 是负的，因而整个系统所成的像是正像。这种系统对轴上无限远点没有像差。和卡塞格伦系统相比，格里高利系统的缺点是长度较长。

9.6.3 遮拦比和有效 F 数

双反射系统的最大缺点是次镜把中间一部分光挡掉，并且随着视场和相对孔径变大，像质迅速下降。因此，双反射系统往往用在物面扫描或小视场的红外装置中，很少用在像面扫描的红外装置中。

在双反射系统中，由于次镜的存在，发生对中间一部分光的遮拦现象，为描述遮拦的程度，引入遮拦比 α 这一参数。它的定义是

$$\alpha = \frac{D_2}{D_1} \quad (9-13)$$

式中， D_1 、 D_2 分别为主镜和次镜的直径。

当发生遮拦现象时，系统的 F 数应为系统的焦距 f 和有效的通光孔径 D_e 之比，称为有效 F 数，用 F_e 表示，即

$$F_e = \frac{f}{D_e} \quad (9-14)$$

由于有效通光面积为

$$\frac{1}{4}\pi D_e^2 = \frac{1}{4}\pi D_1^2 - \frac{1}{4}\pi D_2^2$$

由此可得

$$D_e = D_1 \sqrt{1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2} = D_1 \sqrt{1 - \alpha^2}$$

于是

$$F_e = \frac{f}{D_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (9-15)$$

9.6.4 双反射系统的近轴光学计算

由于二次曲面的近轴区域可视为球面，所以可应用球面系统理论加以讨论。下面对卡塞格伦系统由已知系统的焦距 f 、次镜的横向放大率 β_2 和遮拦比 α ，来确定主镜和次镜的顶点曲率半径 r_{o1} 和 r_{o2} 及两镜之间的距离 d 。

多数红外系统都属望远系统，因此假设物体在无限远 ($l_1 = \infty$, $u_1 = 0$)，系统在空气上使用 ($n_1 = n_2 = 1$, $n_1' = n_2' = -1$)，且光阑位于主镜上，各量如图 9-19 所示。

由牛顿公式，次镜的放大率可表示为

$$\beta_2 = -\frac{f_2'}{x_2} = -\frac{x_2'}{f_2}$$

因为 $f_2' = f_2$, $x_2 = -\Delta$ ，所以

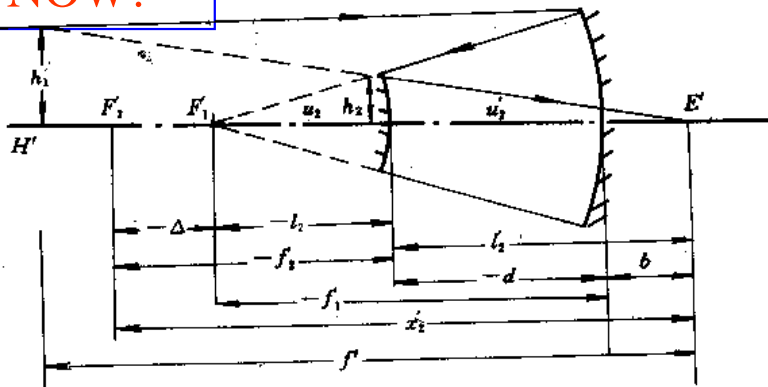


图 9-19 卡塞格伦系统光路计算

$$\beta_2 = -\frac{f_2}{x_2} = \frac{f_2}{\Delta}$$

于是，得 $x_2' = -\frac{f_2^2}{\Delta}$

系统的遮拦比为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{D_2}{D_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{l_2 u_2'}{f u_1} = \frac{x_2' - (-f_2)}{f} \\ &= \frac{-\frac{f_2^2}{\Delta} + f_2}{f} = \frac{f_2(1 - \frac{f_2}{\Delta})}{f} = \frac{f_2}{f}(1 - \beta_2) \end{aligned}$$

因此，得 $f_2 = \frac{f\alpha}{1 - \beta_2}$

又因为 $r_{02} = 2f_2$ ，则得次镜的顶点曲率半径

$$r_{02} = \frac{2f\alpha}{1 - \beta_2} \quad (9-16)$$

根据组合系统的焦距公式

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = -f_1 \beta_2$$

得 $f_1 = -f/\beta_2$ ，由 $r_{01} = 2f_1$ ，得主镜的顶点曲率半径

$$r_{01} = -\frac{2f}{\beta_2} \quad (9-17)$$

由图，两反射镜之间的距离 d 为

$$d = f_1 - f_2 + \Delta$$

将 $f_1 = -f/\beta_2$ ， $f_2 = f\alpha/(1 - \beta_2)$ ， $\Delta = f_2/\beta_2$ 代入，得

$$d = -f \frac{(1 - \alpha)}{\beta_2} \quad (9-18)$$

如果已知 f ， β_2 和主镜顶点到系统焦点的距离 b (称为主镜后截距或后工作距离)，则可用类似的方法求得



$$\left. \begin{aligned} r_{01} &= -\frac{2f}{\beta_2} \\ r_{02} &= -\frac{2(b\beta_2 + f)}{\beta_2^2 - 1} \\ d &= -\frac{(f - b)}{1 + \beta_2} \\ \alpha &= \frac{f + b\beta_2}{f(1 + \beta_2)} \end{aligned} \right\} \quad (9-19)$$

例如一卡塞格伦系统，主镜口径 $D_1=100$ mm，系统焦距 $f=900$ mm，后工作距离 $b=60$ mm，次镜横向放大率 $\beta_2=3$ ，则由(9-19)和(9-15)式得主镜的顶点曲率半径 $r_{01}=-600$ mm，次镜的顶点曲率半径 $r_{02}=-270$ mm，两镜间距 $d=-210$ mm，遮拦比 $\alpha=0.3$ ，有效 F 数 $F_s=9.43$ 。

(习) (题)

9-1 对正常人来说，观察前方 1 m 远的物体，眼睛需调节多少视度？

9-2 某人在其眼前 2.5 m 远的物看不清，问需要配怎样光焦度的眼镜才能使眼恢复正常。另一个人对在其眼前 1 m 以内的物看不清，问需要配上怎样光焦度的眼镜才能使眼恢复正常。

9-3 有一焦距为 50 mm，口径为 50 mm 的放大镜，眼睛到它的距离为 125 mm，求放大镜的视放大率和视场。

9-4 已知显微镜目镜 $\Gamma=15\times$ ，问焦距为多少？物镜 $\beta=-2.5\times$ ，共轭距 $L=180$ mm，求其焦距及物、像方截距。问显微镜总放大率为多少，总焦距为多少。

9-5 一架显微镜，物镜焦距为 4 mm，中间像成在第二焦点后 160 mm 处，如果目镜为 20 倍，则显微镜的总放大率为多少？

9-6 一望远物镜焦距为 1 m，相对孔径为 1:12，测得出瞳直径为 4 mm，试求望远镜的放大率 Γ 和目镜的焦距。

9-7 一伽利略望远镜，物镜和目镜相距 120 mm。若望远镜放大率为 $4\times$ ，问物镜和目镜的焦距各为多少。

9-8 拟制一架 $6\times$ 望远镜，已有一焦距为 150 mm 的物镜，问组成开普勒型和伽利略型望远镜时，目镜的焦距应为多少，筒长各为多少。

9-9 拟制一个 $10\times$ 的惠更斯目镜，若两片都用 $n=1.5163$ 的 K9 玻璃，且 $f_1':f_2'=2:1$ ，满足校正倍率色差，试求目镜两片各面的曲率半径和间隔。

9-10 拟制一个 $10\times$ 的冉斯登目镜，若两片都选用 $n=1.5163$ 的 K9 玻璃， $f_1=f_2$ ， $d=(f_1+f_2)/2$ ，求目镜两片各面的曲率半径和间隔。

9-11 试根据以下数据完成开普勒望远镜外形尺寸的计算： $\Gamma=-6\times$ ， $2\omega=7^\circ$ ， $L=175$ mm， $D_1=4$ mm。



习题参考答案

第 1 章

- 1-1 $-i + \sqrt{3}j$; $k = -(\sqrt{3}i + j)$; $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$; 4 V/m ; $\frac{3}{\pi} \times 10^8 \text{ Hz}$; $\pi \text{ m}$
- 1-2 $5 \times 10^{14} \text{ Hz}$; $0.6 \mu\text{m}$; 1.538
- 1-3 $f_x = 125/\text{mm}$, $f_y = -200/\text{mm}$, $f_z = 236/\text{mm}$
- 1-4 $E(f_x, f_y) = \frac{1}{2} \delta(f_x) \delta(f_y) + \frac{1}{4} [\delta(f_x - \frac{1}{0.8\lambda}) + \delta(f_x + \frac{1}{0.8\lambda})] \delta(f_y)$
- 1-5 右旋圆偏振光; 右旋椭圆偏振光, 椭圆长主轴沿 $y=x$; 线偏振光, 振动方向沿 $y=-x$
- 1-7 $v = 1.96662 \times 10^8 \text{ m/s}$; $v_g = 1.90052 \times 10^8 \text{ m/s}$
- 1-8 c^2/v ; $\frac{1}{\epsilon\mu} c^2/v [1 + \frac{\omega}{2\epsilon\mu} \frac{d(\epsilon\mu)}{d\omega}]$
- 1-9
- | | | | | | |
|--------|----|--------|--------|--------|-------|
| 入射角 | 0° | 20° | 45° | 56°40' | 90° |
| 折射角 | 0° | 13° | 27°43' | 33°20' | 41°8' |
| 反射光偏振度 | 0 | 0.167 | 0.823 | 1 | 0 |
| 折射光偏振度 | 0 | 0.0074 | 0.046 | 0.085 | |
- 1-10 右旋椭圆偏振; 左旋椭圆偏振
- 1-11 $\arcsin \left[\sqrt{\frac{2n^2}{1+n^2}} \right]$; $2\arctan \left(\frac{1-n^2}{2n} \right)$
- 1-12 99.68° ; 264.32°
- 1-14 20.1% ; 10.8%
- 1-15 60.39° ; 15%
- 1-17 $R_0 = 4.4\%$; $R_{45} = 5.3\%$
- 1-18 $\varphi = \alpha = 56^\circ 40'$; $R_{\perp} = 15.7\%$
- 1-19 $n = 1.63$
- 1-21 $2u = 68.16^\circ$
- 1-22 $2u = 66.48^\circ$
- 1-23 $R = 0.636$

第 2 章

- 2-1 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d [(n^2 - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} - \cos\theta]$
- 2-3 $e = \Delta x = \frac{\lambda}{\sin\theta_0 + \sin\theta_r}$
- 2-4 $\Delta y = 0.08 \text{ cm}$; $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\frac{I_p}{I_0} = 0.854$
- 2-5 $t = 1.67 \times 10^{-2} \text{ mm}$
- 2-6 $\lambda = 0.588 \mu\text{m}$



2-7 $\Delta x = 5.5 \text{ mm}, 0.55 \text{ mm}$

2-8 1 mm; 3 条

2-9 $d = 0.426 \mu\text{m}$

2-10 $\lambda = 0.4235 \mu\text{m}, 0.4800 \mu\text{m}, 0.5538 \mu\text{m}, 0.6545 \mu\text{m}$

2-11 $d = 41.2 \mu\text{m}; \lambda = 0.55 \mu\text{m}$

2-12 200 条; 122 条

2-15 $\lambda_2 = 0.4231 \mu\text{m}$

2-16 $0.000422/^\circ\text{C}$

2-17 $0.5880 \mu\text{m}$

2-18 $n = 1.0002925$

2-19 $\alpha_5 = 4.36^\circ; \alpha_{20} = 8.8^\circ; r_5 = 3.81 \text{ cm}; r_{20} = 7.67 \text{ cm}; m_1 = 1694; m_5 = 1690;$

$m_{20} = 1675$

2-20 反射光: 81.0, 2.93, 1.92, 1.26, 0.825, $R^{(2n-3)}T^2I_0;$

透射光: 3.61, 2.37, 1.55, 1.02, 0.669, $T^2R^{(2n-2)}I_0$

2-21 200 mm

2-22 $\Delta\lambda = 9 \times 10^{-3} \text{ nm}$

2-23 0.448; $\frac{2\pi}{0.448}$

2-24 59.1%; 5.02%

2-25 $h = 52.52 \text{ nm}, R_M = 0.33; h = 105 \text{ nm}, R_m = 0.04$

2-26 (2) 0.01; (3) 0.009

2-27 0.458 nm; 0.687 nm

2-28 $n_2 = 1.7$

2-29 106, 0.963; 53, 0.927

2-30 (1) 600 nm; (2) 20 nm; (3) 591 nm, 519.6 nm

2-31 1 250

2-33 $59.2 \mu\text{m}$

2-34 0.46 mm

2-35 0.02 mm

2-36 (1) 条纹区在 x 方向宽度 2.29 mm

(2) 12 个暗纹

2-37 $\Delta\nu = 1.5 \times 10^4 \text{ Hz}; \Delta c = 2 \times 10^4 \text{ m}$

2-38 $\Delta d = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\Delta\lambda}$

第 3 章

3-1 0.0020; 0.0024

3-2 3.26 mm \times 9.76 mm 的竖直矩形

3-3 10 km

3-4 146 m



3-5 6.69×10^{-3} 度; 6.1×10^{-6} m

3-6 2 倍; $0.19 \mu\text{m}$; $0.12 \mu\text{m}$

3-7 物镜分辨本领 429 mm^{-1}

3-9 0.5 mm

3-10 $63 \mu\text{m}$

3-11 16; 0.0413 cm

3-12 (1) $d=0.21 \text{ mm}$, $b=0.05 \text{ mm}$

(2) 分别为零级条纹的 0.81, 0.4, 0.09

$$3-13 \quad I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha} \right)^2,$$

$$I = 4I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos 2\alpha \right)^2 \left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$$

3-14 $2\theta = 0.104 \text{ rad}$; 7; $1.52 \times 10^{-5} \text{ rad}$

3-15 3λ ; $3(n-1)\lambda$

3-16 1 cm

3-17 $A = 2 \times 10^4$, 4×10^4 , 6×10^4 ; $\theta = 33.5$, 55.9 ; $m = 4, 7$

3-18 标准具: $A = 3.14 \times 10^8$, $\delta\lambda = 0.0002 \text{ nm}$; $\Delta\lambda = 0.005 \text{ nm}$

光栅: $A = 3.6 \times 10^4$, $\delta\lambda = 0.0176 \text{ nm}$; $\Delta\lambda = 632.8 \text{ nm}$

3-19 987.09

3-20 10^{-8} m ; 500 nm ; 5 mm

3-21 $0.625 \times 10^{-3} \text{ mm}$; 10^{-5} rad ; $1.25 \times 10^{-2} \text{ nm}$; $0.36 \times 10^{-2} \text{ nm}$

3-22 $-1, 0, +1, +2$

3-23 $3^\circ 27'$

3-25 3.26 mm 或 1.88 mm

3-26 亮; 移近 250 mm , 移远 500 mm

3-27 200 cm , $\frac{200}{3} \text{ cm}$, $\frac{200}{5} \text{ cm}$, ...

3-28 ~ 4 倍

3-29 2 倍

3-30 0.795 mm ; 50 mm

3-31 $3.55 \sqrt{2(n-1)} \text{ mm}$; $3.55 \sqrt{2n-1} \text{ mm}$

3-32 16; $\sim 3.2 \text{ mm}$

3-33 5.92 mm ; 2.5 m

3-34 $22^\circ 19'$

$$3-35 \quad I(x, y) = \left(\frac{1}{\lambda z_1} \right)^2 \left[L^2 \operatorname{sinc} \left(\frac{Lx}{\lambda z_1} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{Ly}{\lambda z_1} \right) - l^2 \operatorname{sinc} \left(\frac{lx}{\lambda z_1} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{ly}{\lambda z_1} \right) \right]^2$$

$$3-36 \quad I(x, y) = \left(\frac{2ab}{\lambda z_1} \right)^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{ax}{\lambda z_1} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{by}{\lambda z_1} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi dx}{\lambda z_1} \right)$$

$$3-37 \quad E(P) = c \left(\frac{a}{2} \right) \left[\operatorname{sinc} \left(u + \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{sinc} \left(u - \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

$$3-38 \quad E(P) = e^{-\kappa \left(\frac{x}{\lambda} \right)^2}$$

第 4 章

$$4-3 \quad d_i = \frac{k_i}{\frac{1}{\epsilon_{ii}} - \frac{1}{n^2}} \left[\sum_i \left(\frac{k_i}{\frac{1}{\epsilon_{ii}} - \frac{1}{n^2}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$4-4 \quad e_i = \frac{k_i}{1 - \frac{\epsilon_{ii}}{n^2}} \left[\sum_i \left(\frac{k_i}{1 - \frac{\epsilon_{ii}}{n^2}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

4-5 $3^\circ 31'$

4-6 o 光线沿界面法线方向, e 光线比 o 光线远离光轴, $\alpha = 1^\circ 43'$; $\varphi = 184\pi$

4-7 5.1 cm

4-12 2.28°

4-13 透射光仍为线偏振光, 振动方向以 $2\omega_0$ 的角速度变化

4-15 $d = 0.061 \text{ mm}$; $\theta = 26.565^\circ$

4-16 $\frac{5}{16} I_0$

4-17 $\lambda_9 = 764.4 \text{ nm}$, $\lambda_{10} = 688.0 \text{ nm}$, $\lambda_{11} = 625.5 \text{ nm}$

$\lambda_{15} = 458.7 \text{ nm}$, $\lambda_{16} = 430.0 \text{ nm}$, $\lambda_{17} = 404.7 \text{ nm}$

4-18 0.012

第 5 章

5-1 $U_{\text{外}} = 3.46 \text{ kV}$; $U_{\text{内}} = 2.3 \text{ kV}$

5-2 $U \approx 100 \text{ V}$

5-7 $\theta_B \approx 3.5^\circ$

5-8 $\eta = 71\%$

5-9 4.15 mm

5-10 2.78° ; $B = 1.62T$

第 6 章

6-1 7.1960 cm; 5.0295 cm; 2.1661 cm

6-2 56.1%

6-3 $-2.34 \times 10^{-2} \text{ rad}/\mu\text{m}$

6-4 (1) $A = 1.57540$, $B = 1.46432 \times 10^4 (\text{nm})^2$

(2) 1.61761

(3) $-1.4332 \times 10^{-5} / \text{nm}$

6-5 1.45883; 1.45075

6-6 14%

6-7 0.866/m; 0.365/m

6-8 $\frac{2}{3}$



$\lambda_1=502.90 \text{ nm}$, $\lambda_2=512.83 \text{ nm}$, $\lambda_3=517.76 \text{ nm}$

$\lambda_4=528.94 \text{ nm}$, $\lambda_5=573.24 \text{ nm}$, $\lambda_6=573.73 \text{ nm}$

反斯托克斯光波长:

$\lambda_1=473.96 \text{ nm}$, $\lambda_2=465.47 \text{ nm}$, $\lambda_3=461.47 \text{ nm}$

$\lambda_4=452.94 \text{ nm}$, $\lambda_5=424.83 \text{ nm}$, $\lambda_6=424.56 \text{ nm}$

第 7 章

7-1 90°

7-2 $1.63 \times 10^3 \text{ cm}^2$

7-4 162.153 mm

7-5 15.9128 mm

7-6 $22.82, -17.12 \text{ mm}, 58.4D$

7-7 $\frac{R}{2}, 2R, \beta=-1$

7-8 $-100, -60.5 \text{ mm}$

7-9 15 mm

7-10 $l: -\infty, -550, -100, -40, -45 \text{ mm}$

$l': -50, -55, -100, 200, 450 \text{ mm}$

7-11 400 mm

7-12 $\frac{2}{3}, 4 \text{ m}$

7-13 35°

7-14 60°

7-15 $\frac{4}{3} \text{ m}$

7-16 $51.2^\circ, 55.6^\circ$

第 8 章

8-2 0.19 m

8-3 $40, 40, -40 \text{ mm}$

8-4 600 mm

8-5 $40, 240 \text{ mm}$

8-6 122.5 mm

8-7 60 mm

8-8 $100, -100, 200 \text{ mm}$

8-9 $45, -30, 30 \text{ mm}$

8-10 $-0.56D, 321.4, 428.6 \text{ mm}$

$-0.56D, -428.6, -321.4 \text{ mm}$



8-11 64.1 mm

8-12 30, -20, 20 mm

8-13 -144 0, -120, -80 mm

8-14 81.62, 158.1 mm

8-16 41.747, -33.601, 33.601 mm

8-17 $3d, 2d, -3d$

第9章

9-2 $-0.4(D), 3(D)$

9-3 $5^\times, 22.62^\circ$

9-4 16.67, 36.73, -51.43, 128.57, -37.5^\times , -6.67 mm

9-5 -800^\times

9-6 $-20.83^\times, 48$ mm

9-7 160, -40 mm

9-8 25, 175; -25, 125 mm

9-9 19.36, ∞ , 9.68, ∞ ; 28.13 mm

9-10 ∞ , -12.91, 12.91, ∞ ; 25 mm

9-11 150, 25 mm; 12 mm; 18.3 mm; 40.3° ; 29.17 mm; 25.4 mm.



主要参考书目

- 1 玻恩 M, 沃耳夫 E. 光学原理. 杨葭荪等译. 北京: 科学出版社, 1978
- 2 母国光, 战无龄. 光学. 北京: 人民教育出版社, 1979
- 3 曲林杰等. 物理光学. 北京: 国防工业出版社, 1980
- 4 赫克特 E, 费斯 A. 光学. 秦克诚等译. 北京: 人民教育出版社, 1980
- 5 梁铨廷. 物理光学. 北京: 机械工业出版社, 1987
- 6 久保田 广. 波动光学. 刘瑞祥译. 北京: 科学出版社, 1983
- 7 郭永康, 鲍培谛. 光学教程. 成都: 四川大学出版社, 1989
- 8 程路. 光学原理及发展. 北京: 科学出版社, 1990
- 9 杨振寰. 光学信息处理. 天津: 南开大学出版社, 1986
- 10 卞松玲等. 傅里叶光学. 北京: 兵器工业出版社, 1989
- 11 谢建平, 明海. 近代光学基础. 合肥: 中国科技大学出版社, 1990
- 12 蔡伯荣. 集成光学. 成都: 电子科技大学出版社, 1990
- 13 秦秉坤, 孙雨南. 介质光波导及其应用. 北京: 北京理工大学出版社, 1991
- 14 李志能. 现代光学系统原理. 北京: 北京理工大学出版社, 1994
- 15 石顺祥. 物理光学(内部讲义). 西安: 西安电子科技大学, 1993
- 16 周炳琨等. 激光原理. 北京: 国防工业出版社, 1995
- 17 Yariv A. Introduction to Optical Electronics. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976
- 18 Nelson D F. Electric, Optic, & Acoustic Interactions in Dielectrics. New York: John Wiley & Sons, 1979
- 19 张以谟. 应用光学. 北京: 机械工业出版社, 1982
- 20 浙江大学. 应用光学. 北京: 中国工业出版社, 1961
- 21 北京工业学院光学教研室. 应用光学. 北京: 国防工业出版社, 1979
- 22 高凤武, 李继祥. 应用光学. 北京: 解放军出版社, 1986
- 23 王万兴, 张海兴. 应用光学(内部讲义). 西安: 西安电子科技大学, 1992
- 24 Meyer-Arendt J R. Introduction to Classical and Modern Optics. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1989
- 25 Jenkins F A, White H E. Fundamentals of Optics. 4th ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 1976
- 26 Born M, Wolf E. Principles of Optics. 6th ed. Oxford: Pergamon Press, 1980

