

Klassiker der Technik

Die „Klassiker der Technik“ sind unveränderte Neuauflagen traditionsreicher ingenieurwissenschaftlicher Werke. Wegen ihrer didaktischen Einzigartigkeit und der Zeitlosigkeit ihrer Inhalte gehören Sie zur Standardliteratur des Ingenieurs, wenn sie auch die Darstellung modernster Methoden neueren Büchern überlassen. So erschließen sich die Hintergründe vieler computergestützter Verfahren dem Verständnis nur durch das Studium des klassischen, fundamentaleren Wissens. Oft bietet ein „Klassiker“ einen Fundus an wichtigen Berechnungs- oder Konstruktionsbeispielen, die auch für viele moderne Problemstellungen als Musterlösungen dienen können.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Walter Traupel

Thermische Turbomaschinen

Zweiter Band

Geänderte Betriebsbedingungen, Regelung,
Mechanische Probleme, Temperaturprobleme

4. Auflage

Mit 433 Abbildungen



Springer

Professor Dr.-Ing. Walter Traupel

ehem. o. Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich
Vorstand des Instituts für Thermische Turbomaschinen

ISBN 978-3-642-62103-1 ISBN 978-3-642-17465-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-17465-0

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme
Traupel, Walter: Thermische Turbomaschinen / Walter Traupel. -
Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Hongkong ; London ; Mailand ; Paris ; Singapur ; Tokio : Springer, 2001
(Klassiker der Technik)

Bd.2. Geänderte Betriebsbedingungen, Regelung, mechanische Probleme, Temperaturprobleme. - 4. Aufl.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001
Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2001
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 2001

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Einbandgestaltung: Steinen, Barcelona
Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN: 10767010 62/3020hu - 5 4 3 2 1 0 -

Vorwort zur Neuauflage

Dieses Buch stellt das Lebenswerk des Ingenieurs und Hochschullehrers Prof. Dr. sc. techn. Dr. h. c. Walter Traupel (1914 – 1998) dar. Es ist vom Springer-Verlag als erstes Glied der neuen Reihe "Klassiker der Technik" bestimmt worden. Ihm sollen weitere Werke von zeitlosem didaktischem und wissenschaftlichem Wert folgen. Über die hohe Ehre, die damit Walter Traupel erwiesen wird, freuen sich die Unterzeichneten – ehemalige Schüler und Doktoranden von Traupel an der ETH in Zürich – sehr.

Walter Traupel war in den ersten 16 Jahren seines Berufslebens in der Industrie tätig und wirkte an der Entwicklung der ersten Gasturbine der Fa. Gebrüder Sulzer in Winterthur (Schweiz) massgeblich mit. 1954 erhielt er den Ruf an die ETH nach Zürich. Dort wirkte er als Ordinarius für Thermische Turbomaschinen bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1983. Als Vorsteher der Abteilung für Maschinenbau und später als Rektor der ETH nahm er als weitsichtiger Zeitgenosse an den Auseinandersetzungen mit den Strömungen des damaligen Zeitgeistes regen Anteil.

Bereits zu Beginn seiner Industrietätigkeit wandte er sich der grundlegenden Theorie der Strömungsmaschinen zu, weil er die damals übliche, sehr unterschiedliche Behandlung von Turbinen und Verdichtern als höchst unbefriedigend empfand. Seine Dissertation "Neue allgemeine Theorie der mehrstufigen axialen Turbomaschine", 1942 veröffentlicht, behandelte erstmals diese Maschinen auf formal einheitliche, dimensionslose, allgemein gültige Art.

Als Vierzigjähriger an die ETH berufen, nahm er sich das Verfassen eines umfassenden Lehrbuches über thermische Turbomaschinen vor. Schon 1958 erschien Band I (Thermodynamisch–strömungstechnische Berechnung), dem 1962 Band II (Regelverhalten, Festigkeit und dynamische Probleme) folgte. Acht Jahre später (1966 bzw. 1968) wurden beide Bände in einer zweiten Auflage veröffentlicht, mit überarbeitetem, dem technischen Fortschritt angepasstem Inhalt. Die rasante Entwicklung des Elektronenrechners und der Einzug immer detaillierterer numerischer Rechenverfahren in die technische Wissenschaft prägten die nächste, tiefgreifende Überarbeitung. Die 3. Auflage erschien 1977 bzw. 1982, also kurz vor seiner Emeritierung. Sie wird als "Klassiker" in unveränderter Neuauflage vorgelegt.

Was erklärt das Interesse des heutigen Lesers an diesem über 20 Jahre alten Werk in einem Gebiet, wo doch der technologische Fortschritt weltweit intensiv vorangetrieben wird?

Traupels berufliches Credo lässt sich im Vorwort zur ersten Auflage nachlesen: "Der Ingenieur sollte [...] stets bestrebt sein, die Zusammenhänge aus den grundlegenden Naturgesetzen zu verstehen, also in jedem einzelnen Fall ein Beispiel eines Allgemeinen zu erkennen." – Diesem Vorsatz ist Traupel durch alle drei Auflagen treu geblieben.

Dieses Lehrbuch verknüpft praktische Fragestellungen mit einem streng wissenschaftlichen Vorgehen; es schafft eine klare Verbindung zwischen physikalischer Anschauung und mathematischer Formulierung; es macht die Theorien durch ihre konsequent dimensionslose Darstellung in weiten Grenzen auch quantitativ übertragbar; es besticht durch die hohe Kunst, theoretische Modelle auf das jeweils Wesentliche zu vereinfachen, überschaubare Lösungen zu gewinnen und deren Bedeutung und Vertrauenswürdigkeit klarzumachen. Traupel appelliert dabei auch an die Intuition, vermittelt ein Gefühl für die Grössenordnungen und regt dadurch zum kreativen Denken an. Mit der gleichwertigen Behandlung der thermodynamisch–strömungstechnischen und der mechanisch–konstruktiven Fragen öffnet er den Blick für Zusammenhänge, die im Zuge der zunehmenden Spezialisierung oft übersehen werden.

Einzigartig ist die didaktische Fähigkeit Walter Traupels, den Leser gleichsam in einen Dialog einzubeziehen. Die Fragen, die sich beim mitdenkenden Leser laufend einstellen, werden im Text sofort beantwortet, zugleich werden Hinweise auf mögliche Fehlschlüsse und gedankliche

Sackgassen angefügt. So ist das Buch ein didaktisches Meisterwerk, das am Beispiel der thermischen Turbomaschinen die kreative ingenieurwissenschaftliche Denkweise schlechthin demonstriert.

Es war für Traupel übrigens ein wichtiges Anliegen, das Ästhetische auch im beruflichen Streben zur Geltung kommen zu lassen. Die innere Schönheit einer Theorie oder eines mächtigen technischen Werkes gab ihm höchste Genugtuung. So sagte er in einer Rede im Jahr 1980 über "Weg und Sinn der Technik": "Nie hätte ich mich der Mühe unterzogen, ein Buch zu schreiben, in dem ich versuchte, die Theorie der thermischen Turbomaschinen (...) in einem einzigen logisch einheitlichen Zusammenhang darzustellen, wenn man aus dieser Theorie nicht eine Art Kunstwerk machen könnte". Und in seiner Abschiedsvorlesung präziserte er: "Souveräne Freiheit in strengster Bindung, das ist das Grossartige, das uns in der Wissenschaft begegnet; es macht ihre Schönheit aus."

Natürlich hat die Forschung der letzten 25 Jahre in einigen Gebieten wesentliche Fortschritte ermöglicht, die bei Traupel erst ansatzweise behandelt werden. Solche Gebiete sind zum Beispiel

- die Beherrschung von Überschallströmungen, insbesondere im Verdichterbau,
- die Schwingungsdynamik, speziell die Aeroelastizität,
- die Schaufelkühlung von Gasturbinen, oder
- generell die neuen numerischen Methoden der Strömungslehre und der Mechanik, die – nicht zuletzt dank der Entwicklung leistungsfähiger Computer – auch dreidimensionale und zeitabhängige Phänomene in Raumgebieten höchst komplizierter Gestalt, zum Beispiel in der mehrstufigen Beschaukelung eines Verdichters oder einer Turbine, einer detaillierten Berechnung zugänglich machen.

Grundsätzlich ausgeklammert wurden in Traupels Werk die Fragen der Fertigung, der Materialtechnik (wie z. B. die Korrosion), der Lärmentstehung, ebenso wie der gesamte Fragenkomplex der Verbrennung.

Über spezielle Probleme hat er separate Bücher verfasst. So erschienen 1962 ein Buch "Die Theorie der Strömung durch Radialmaschinen", in dem er frühere, inkohärente Theorien zu einem Ganzen zusammenfügte, und 1970 ein zweites, die "Grundlagen der Thermodynamik", in dessen Nachwort er auch weltanschauliche und erkenntnistheoretische Aspekte anspricht.

Das vorliegende Buch lässt auch die Faszination der ganzen Lehrtätigkeit von Traupel aufleben. Die Vorlesungen Professor Traupels waren für uns Studenten immer neu ein Erlebnis. Von den Grundlagen der Thermodynamik und der Strömungsmechanik über die Regelungstechnik zur Schwingungs- und Festigkeitslehre spannte sich der Bogen. Oft erfassten wir erst hier richtig – am Beispiel der Turbomaschinen – was in den propädeutischen Fächern nur ungenügend verstanden wurde. Hier wurden, wie nirgends vorher, die Zusammenhänge auf die grundlegenden Naturgesetze zurückgeführt, hier wurde in begrifflich strenger Weise erklärt, ohne das technische Werk aus den Augen zu verlieren. Traupel erläuterte seinen Stoff in vollkommener sprachlicher Formulierung, begleitet von einer meisterhaften graphischen Darstellung an der Wandtafel, auf eine Art, wie wir es bisher nicht gehört oder gesehen hatten. Dies war aber nicht alles. Bei ihm spürten wir etwas von dem grossen Ernst, mit dem er seine Lehrverpflichtung wahrnahm, etwas auch von der ungeheuren Konzentration, die eine Voraussetzung für erfolgreiches wissenschaftliches Arbeiten ist, und wir erlebten, "dass wir einen herrlichen Beruf" gewählt hatten, – wie er es selber einmal ausgedrückt hat.

Vom Temperament her Wissenschaftler, formal streng und deduktiv, wies er uns immer wieder auf die Bedeutung des Konstruierens hin. Er erkannte früh die Gefahr einer durch die Möglichkeiten des Computers geförderten Verwissenschaftlichung der Ingenieurausbildung und -tätigkeit, die Gefahr, welche – nach seinen eigenen Worten – darin besteht, "die Bedeutung der formschaffenden Einbildungskraft, der grossartigen schöpferischen Synthese, die uns bei einer wohlgeordneten Konstruktion so anspricht, völlig zu übersehen".

Die geistige Ausstrahlung der Persönlichkeit Traupels, weit über das Wissenschaftliche hinaus, hat seine Studenten in hohem Masse beeinflusst. Wie es in der Widmung des Buches zum Ausdruck kommt, sind Ehrfurcht und Schöpfung Schlüsselworte, zentrale Anliegen Traupels, was nicht etwa heisst, dass er sie bei jeder Gelegenheit im Munde geführt hätte – ganz im Gegenteil. Er weiss, dass der Ingenieur als Techniker, aber auch als Manager, hier besonders gefährdet ist. Das unverantwortliche Eingreifen in die Natur, die nicht mehr als Schöpfung, als das unergründliche Wunder verstanden wird, ihre zerstörerische Ausbeutung stellen die eine Seite dieser Gefährdung dar. Ehrfurcht soll uns aber auch davor bewahren, zur Sinnentleerung der menschlichen Arbeit oder zur Manipulation des Individuums beizutragen. Wo diese Ehrfurcht fehlt, wird die Welt eng, bedrückend

und gnadenlos. "Von uns ist gefordert, vor dieser unverständlichen Schöpfung Ehrfurcht zu haben als Nichtwissende", hat er in einer Rede anlässlich des 125-jährigen Jubiläums der ETH gesagt. Ehrfurcht hat das Geheimnis zur Voraussetzung; sie ist insbesondere unvereinbar mit einer Auffassung, die glaubt, die ganze Wirklichkeit mit dem Verstand, mit naturwissenschaftlichen Methoden erfassen zu können. "Die Wirklichkeit ist abgründig. Nur ganz an der Oberfläche erkennen wir; das Tiefere können wir kaum erahnen", schreibt er in der Schlussbetrachtung seines Thermodynamikbuches.

Und in seiner Rektoratsrede "Hochschule und Spezialistentum" (1962) hat er die Zusammenhänge zwischen Vertiefung und Beschränkung erläutert und dazu aufgerufen – trotz der durch den Beruf geforderten Spezialisierung – Offenheit und Weite des Geistes anzustreben. Als Pflicht des Hochschullehrers bezeichnete er, "durch die Weise und den Geist unseres Lehrens" in den jungen Menschen das Streben nach menschlicher Ganzheit zu fördern, denn "sie allein können verhindern, dass all unser kompliziertes Wissen und Können in die Sinnlosigkeit absinkt".

Wir können zurückblickend in Dankbarkeit feststellen, dass er diese seine hohen Ansprüche an den Hochschullehrer in exemplarischer Weise erfüllt hat.

Dr. sc. techn. ETH Viktor Beglinger

Prof. em. ETH Dr. Georg Gyarmathy

Prof. em. ETH Dr. Peter Suter

Vorwort zur dritten Auflage

Aus gleichen Gründen wie beim ersten Band, mußte auch der zweite Band dieses Buches fast vollständig neu geschrieben werden.

Das Kapitel über das Verhalten der Turbomaschinen unter geänderten Betriebsbedingungen, das früher zum ersten Band gehörte, ist in den zweiten Band verlegt und sehr stark erweitert worden (namentlich die Ausführungen über Stabilitätsgrenze und rotierendes Abreißen). Demgegenüber war bei den Kapiteln über die Regelung eine wesentliche Straffung möglich. Die Regelsysteme und ihre Dynamik sind heute weitgehend die Domäne des Elektronikers, weshalb es genügt, die dynamischen Eigenschaften der Maschinen selbst anzugeben.

Die Behandlung der Festigkeitsprobleme hat in der Praxis eine besonders tiefgreifende Umgestaltung erfahren. Dem konnte in befriedigender Weise nur Rechnung getragen werden durch Einführung eines Kapitels über die allgemeinen Grundlagen der Festigkeitsrechnung. Dieses enthält eine knappe, anschauliche Darstellung des Verfahrens der finiten Elemente und einen Überblick über die Methoden zur Beurteilung von Beanspruchungszuständen einschließlich der Bruchmechanik. Naturgemäß sind die Akzente entsprechend den typischen Festigkeitsproblemen des Turbomaschinenbaues gesetzt, doch kann diese zusammenfassende Darstellung wohl auch über das Gebiet der Turbomaschinen hinaus nützliche Dienste leisten, denn meines Wissens existiert eine solche bisher in der Literatur nicht. Es soll damit der Entwicklung entgegengewirkt werden, daß der Ingenieur, der sich nicht auf Festigkeitsprobleme spezialisiert, die moderne Betrachtungsweise dieses Gebietes nicht mehr versteht. Überhaupt reicht die Anwendung der dargestellten Methoden an vielen Stellen über das Gebiet des Turbomaschinenbaues hinaus. — Die spezifischen Ausführungen über die Beanspruchung der Schaufeln, Rotoren und Gehäuseteile konnten stark gekürzt werden, da die Rechnung mit finiten Elementen an vielen Stellen ältere Näherungsverfahren ersetzt. Auch wurde auf die Beifügung von Werkstoffunterlagen verzichtet, da diese an anderen Stellen viel umfassender zu finden sind.

Schließlich erfuhren die Kapitel über die Berechnung der Temperaturfelder sowie über Schaufelschwingungen und Rotordynamik eine weitgehende Umgestaltung, einerseits infolge der Einführung moderner numerischer Methoden, andererseits weil auch neueres empirisches Material mitberücksichtigt wurde.

Das Buch wurde aber nicht nur durchgehend dem derzeitigen Stande der Technik angepaßt, sondern es enthält auch an vielen Stellen bis heute unveröffentlichte Information. Die Forderungen einer klaren und hinreichend umfassenden Darstellung einerseits und der Beschränkung des Umfanges andererseits waren nicht leicht gleichzeitig zu erfüllen; ich hoffe, daß es in optimaler Weise gelungen sei. — Wie im ersten Band beschränkt sich die Beschreibung numerischer Methoden auf die Wiedergabe der zugrunde liegenden Beziehungen, da die Numerik selbst zu einem umfangreichen Sondergebiet geworden ist. Da es in allen Fällen gelang, den Gang der Rechnung im Text genügend zu beschreiben, wurde auf die Beifügung von Flußdiagrammen verzichtet, die Umfang und Kosten des Buches vergrößert hätten.

Es ist mir ein Bedürfnis, all denen meinen Dank auszusprechen, die zum Zustandekommen dieses Werkes beigetragen haben. Das sind zum einen die schon im Vorwort des

ersten Bandes erwähnten Firmen, durch deren Engagement es möglich wurde, auch jetzt wieder die Kosten der technischen Buchherstellung teilweise aufzufangen. Zum anderen sind es vor allem meine Sekretärin, Frau *Brigitte Dufour-Späni*, die die Reinschrift des Manuskriptes besorgte, und meine Assistenten, die Herren *J. Bütikofer*, *H. R. Denzler*, *L. Gastaldi*, *K. Heiniger*, *E. Rikli*, *P. Ruffli* und *A. Vogel*, die durch Lesen der Korrekturen und in anderer Weise mitgeholfen haben. Erneut möchte ich auch den Mitarbeitern des Springer-Verlages für ihre sorgfältige Arbeit und ihr Verständnis danken.

Zürich, im August 1981

W. TRAUPEL

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen	XIII
11. Das Verhalten unter geänderten Betriebsbedingungen	1
11.1 Das Verhalten des Gitters und der Stufe	1
11.2 Die Charakteristik der Turbinenstufe	3
11.3 Das Kegelgesetz	6
11.4 Gesamtcharakteristik einer Turbinenschaufelung	12
11.5 Nachrechnung von Betriebszuständen von Turbinen	16
a) Eindimensionale Verfahren	16
b) Zweidimensionale Verfahren	22
11.6 Die Charakteristik der Verdichterstufe	24
11.7 Die Charakteristik des mehrstufigen Verdichters	29
11.8 Der Vorgang des Pumpens, die Pumpgrenze	32
11.9 Rotierende Abreißströmung	35
11.10 Berechnung von Kennfeldern mehrstufiger Verdichter	39
11.11 Abschätzung der Stabilitätsgrenze	41
Literatur	47
12. Regelung der Dampfturbinen	49
12.1 Regeleingriffe	49
12.2 Berechnung der Beharrungszustände	59
12.3 Wirkungsgrad in Funktion der Leistung	66
12.4 Energetischer Vergleich der Regelungsarten	72
12.5 Ausbildung und Bemessung der Regelventile	80
12.6 Zur Dynamik der Dampfturbinenregelung	88
12.7 Berechnung der Überdrehzahlen	91
Literatur	96
13. Regelung der Turbokompressoren	98
13.1 Regeleingriffe	98
13.2 Darstellungsweisen von Kennfeldern	103
13.3 Berechnung typischer Fälle der Verdichterregelung	107
a) Drehzahlregelung	107
b) Drosselregelung	107
c) Abblaseregelung	108
d) Umblaseregelung	109
e) Zwischenabblasen und Zwischenumblasen	110
f) Verdichter mit Zwischenkühlung	111
13.4 Regelung mit verstellbaren Leitschaufeln	111
13.5 Pumpverhütungsregelung	114
Literatur	121

14. Regelung der Gasturbinen	122
14.1 Regeleinriffe	122
14.2 Berechnung der Beharrungszustände	126
a) Allgemeines	126
b) Einwellige Anlage	131
c) Zweiwellige Anlage	133
14.3 Regelung mit verstellbarem Turbinenleitrad	137
14.4 Pumpverhütungsregelung	142
14.5 Zur Dynamik der Gasturbinenregelung	144
Literatur	148
15. Grundlagen der Festigkeitsrechnung	150
15.1 Einleitung	150
15.2 Beschreibung des Spannungszustandes, Vergleichsspannung	150
15.3 Elastisches Verhalten	152
15.4 Plastisches Verhalten	154
15.5 Viskoplastisches Verhalten (Kriechen)	156
15.6 Verfahren der finiten Elemente bei Elastizität	159
a) Allgemeines	159
b) Dreieckselement bei ebenem Spannungszustand	161
c) Dreieckselement bei ebenem Verformungszustand	166
d) Ringelement dreieckigen Querschnittes	167
e) Zusammenfügung der Elemente, Lösung	169
15.7 Verfahren der finiten Elemente bei Plastizität	172
15.8 Kriechen unter variablen Bedingungen	176
15.9 Zyklische Beanspruchung ohne Kriechen	180
15.10 Zyklische Beanspruchung mit Kriechen	186
15.11 Kerbeffekte	190
15.12 Bruchmechanik	194
15.13 Beurteilungskriterien, Sicherheitsfaktoren	199
a) Allgemeines	199
b) Statische Tragfähigkeitsgrenze	199
c) Zyklische Beanspruchung ohne Kriechen	201
d) Quasizyklische Beanspruchung mit Kriechen	203
Literatur	204
16. Festigkeit der Schaufelungen	206
16.1 Schaufelbeanspruchung durch Fliehkraft	206
16.2 Torsionsbeanspruchung von Laufschaufeln	211
16.3 Biegebeanspruchung der Schaufeln durch Strömungskräfte	213
16.4 Rückwirkung der Fliehkraft auf die Beanspruchung der freistehenden Schaufel durch Strömungskräfte	219
16.5 Beanspruchung des Schaufelpaketes durch Strömungskräfte	224
16.6 Wärmespannungen in Schaufeln	229
16.7 Viskoplastischer Spannungszustand in Schaufeln	232
16.8 Die Gestaltung der Schaufelbefestigung	234
16.9 Die Berechnung der Schaufelbefestigung	241
16.10 Die Gesamtbeanspruchung	246
Literatur	247

17. Festigkeit der Rotoren	248
17.1 Freitragender Ring	248
17.2 Radkranz mit Schaufeln, an Scheibe	249
17.3 Differentialgleichungen der rotierenden Scheibe bei elastischer Verformung	253
17.4 Scheibe gleicher Festigkeit	255
17.5 Scheibe konstanter Dicke	257
17.6 Scheibe hyperbolischen Profils	260
17.7 Scheibe beliebigen Profils	261
17.8 Die zylindrische Trommel	266
17.9 Die Berechnung der Schrumpfverbindungen	269
17.10 Ergänzendes zur Spannungsberechnung	272
17.11 Die Beurteilung des Spannungszustandes in Rotoren	276
17.12 Gestaltung von Rotoren	281
Literatur	290
18. Festigkeitsprobleme an stillstehenden Teilen	291
18.1 Allgemeines	291
18.2 Theorie dünner Rotationsschalen	291
18.3 Rotationssymmetrische dickwandige Bauteile	295
18.4 Horizontalflansch und Bolzen	300
18.5 Leitradzwischenböden	306
18.6 Heißgasführende Einsätze	307
Literatur	314
19. Temperatur- und Kühlungsprobleme	315
19.1 Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges	315
19.2 Empirische Unterlagen über Wärmeübergang	318
19.3 Wärmeübergang an Schaufeln	324
19.4 Strenge Lösungen der Wärmeleitungsgleichung	327
a) Stationäre Temperaturfelder	327
b) Instationäre Elementarlösungen	327
c) Allgemeinere instationäre Lösungen	329
19.5 Quasistationäre Berechnung instationärer Temperaturverteilungen	331
19.6 Eindimensionale Wärmeleitung in Stäben, Scheiben und Schalen	336
19.7 Eindimensionale Temperaturverteilung in Schaufeln und Laufradscheiben	340
19.8 Zweidimensionale Temperaturverteilung	347
19.9 Verfahren der finiten Elemente	352
19.10 Gekühlte Gasturbinen	356
19.11 Berechnung gekühlter Systeme	361
19.12 Temperaturkenngrößen gekühlter Schaufeln	364
19.13 Wärmedehnungen	366
19.14 Die Brennkammer	368
Literatur	373
20. Schwingungen von Schaufeln und Scheiben	375
20.1 Der einfache Schwinger	375
20.2 Rückführung des allgemeinen Falles des schwingenden Körpers auf den einfachen Schwinger	378
20.3 Gekoppelte Schwingungen	382

20.4	Differentialgleichungen des schwingenden Stabes	383
20.5	Lösung des Eigenwertproblems des schwingenden Stabes	385
20.6	Drehschwingungen eines geraden Stabes	389
20.7	Bestimmung von Eigenfrequenzen nach der Energiemethode	391
20.8	Zusätzliche Effekte bei gedruckten Stäben	395
20.9	Eigenfrequenzen von Schaufelpaketen und verjüngten Schaufeln	399
20.10	Der Einfluß der Fliehkraft auf die Eigenfrequenzen	405
20.11	Schwingungen stark verwundener Schaufeln	409
20.12	Berechnung von Scheibenschwingungen mit Übertragungsmatrizen	416
20.13	Koppelschwingungen von Schaufeln und Scheibe	421
20.14	Schwingungsberechnung nach dem Verfahren der finiten Elemente	426
20.15	Experimentelle Untersuchung von Schaufelschwingungen	429
20.16	Schwingungsanregung und Spannungsamplitude bei einzeln schwingenden Schaufeln	434
20.17	Schwingungsanregung und Spannungsamplitude bei Paketschwingungen ..	440
20.18	Größe der Erregungskräfte (der Stimulus)	443
20.19	Selbsterregung, stochastische Erregung, Stoßerregung.....	448
20.20	Die Dämpfung	452
20.21	Ergänzendes zur schwingungstechnischen Auslegung	455
	Literatur	458
12.	Dynamik des Läufers	461
21.1	Allgemeines	461
21.2	Laval-Rotor, elementare Theorie	462
21.3	Laval-Rotor in anisotrop elastischen Lagern	466
21.4	Laval-Rotor mit nicht drehsymmetrischer Welle	468
21.5	Mechanismen der Selbsterregung	471
	a) Allgemeines	471
	b) Innere Dämpfung	471
	c) Selbsterregung durch den Ölfilm	473
	d) Spalterregung	474
	e) Künstliche Dämpfung	476
21.6	Laval-Rotor bei beliebiger Lagerung und Spalterregung, Stabilitätsuntersuchung	477
21.7	Die kritischen Drehzahlen eines beliebigen drehsymmetrischen Läufers...	482
21.8	Die Kreiselwirkung	485
21.9	Bestimmung kritischer Drehzahlen nach dem Verfahren von Stodola	488
21.10	Berechnung kritischer Drehzahlen nach dem Verfahren der finiten Elemente	492
21.11	Theorie der Stabilität und der Ausschläge schwingender Läufer	498
21.12	Die Spalterregung	503
21.13	Grundlagen der Lagertheorie	509
21.14	Rechenverfahren und Ergebnisse der Lagertheorie	513
21.15	Unterlagen über Axiallager	519
	Literatur	524
	Namen- und Sachverzeichnis	526

Inhaltsübersicht**Band I: Thermodynamisch-strömungstechnische Berechnung**

1. Thermodynamische Grundlagen
2. Theorie der Arbeitsprozesse
3. Strömungstheoretische Grundlagen
4. Arbeitsverfahren thermischer Turbomaschinen
5. Elementare Theorien der Stufe
6. Das Schaufelgitter
7. Räumliche Strömung durch Turbomaschinen
8. Berechnungsunterlagen
9. Auslegung von Turbomaschinen
10. Wellendichtungen und Schubausgleich

Formelzeichen

Nachfolgend werden die häufig gebrauchten Buchstabensymbole angegeben. Wo Buchstaben in anderer Bedeutung gebraucht werden, geht dies aus dem Text hervor. Die Bezeichnungen in den strömungstechnisch-thermodynamischen und in den mechanischen Teilgebieten unterscheiden sich naturgemäß und werden daher getrennt aufgeführt.

a) Strömungstechnisch-thermodynamische Gebiete

a	spezifische Arbeit	K	Koeffizient
A	Arbeit	l	Länge
b	axiale Breite, meridionale Breite	$l_0 \dots l_3$	Schaufellänge (Kanalhöhe) in durch Index angegebener Kontrollfläche
B	Biot-Zahl $\alpha l / \lambda_{\text{Werkstoff}}$		Massenstrom, Bezugswert eines Massenstromes
c	Absolutgeschwindigkeit	\dot{m}, \dot{m}_0	Mach-Zahl
c_0, c_1, c_2, c_3	Absolutgeschwindigkeit am Eintritt eines vorgeschalteten Leitrades, am Eintritt eines Laufrades, am Austritt eines nachgeschalteten Leitapparates	M M^*	mit kritischer Geschwindigkeit gebildete Mach-Zahl (Laval-Zahl)
$c_{n0} \dots c_{n3}$	Normalkomponenten (meridional) von $c_0 \dots c_3$	n n_s	Polytropenexponent, Drehzahl sekundliche Drehzahl
$c_{r0} \dots c_{r3}$	Radialkomponenten von $c_0 \dots c_3$	n^*	Drehzahlvariable $(n/n_0) \sqrt{j_{x0}/j_x}$
$c_{u0} \dots c_{u3}$	Umfangskomponenten von $c_0 \dots c_3$	Nu	Nusselt-Zahl $\alpha l / \lambda_{\text{fluid}}$
$c_{20} \dots c_{23}$	Axialkomponenten von $c_0 \dots c_3$	p	Druck, Index verweist auf Stelle
c_p, c_v	spezifische Wärmekapazitäten	q	Wärmemenge pro Masseneinheit bezogene Geschwindigkeit c/u^* , wo u^* eine feste für alle Stufenelemente gleiche Umfangsgeschwindigkeit ist; Index verweist auf Ort
c^*	kritische Geschwindigkeit	q	
c_{\max}	Grenzgeschwindigkeit bei Expansion ins Vakuum		Radius allgemein, in Mittelkreis, Nabe, Spitzenkreis
Δc_u	Differenz $ c_{u1} - c_{u2} $	r, r_m, r_N, r_S	Reaktionsgrad
C	bezogene Absolutgeschwindigkeit c/u_2 , Index verweist auf Ort	R	Gaskonstante
C	Crocco-Zahl c/c_{\max} , Index verweist auf Ort	Re	Reynolds-Zahl
D_m, D_N, D_S, D_h	Durchmesser Mittelkreis, Nabenkreis, Spitzenkreis, hydraul. Durchmesser	s s	Profilhöhenlänge spezifische Entropie
e	Funktion Gl. 11.3(14) und (20)	St	Stanton-Zahl $\alpha / \rho c_p w$
E	Ellipsenfaktor, Gl. 11.3(15) und (20)	t	Zeit
f, F	Funktionalzeichen	t	Schaufelteilung
Fo	Fourier-Zahl	T	Temperatur
g	Funktionalzeichen	Tu	Turbulenz
Gr	Grashof-Zahl	u	Umfangsgeschwindigkeit, Index verweist auf Stelle
h	spezifische Enthalpie, Index bezeichnet Ort	U	u/u_2
$\Delta h, \Delta h', \Delta h''$	Enthalpiedifferenz allgemein, im Leitrad, im Laufrad	U	Umfang
$\Delta h_s, \Delta h'_s, \Delta h''_s$	isentropie Enthalpiedifferenz allgemein, im Leitrad, im Laufrad	U	Crocco-Zahl u/c_{\max}
j	Ausdruck $\kappa p v / (\kappa - 1)$	v	spezifisches Volumen
k	Koeffizient	V	Volumen
$k_0 \dots k_3$	Durchflußfaktor, Index verweist auf Kontrollfläche	w, w_1, w_2	Relativgeschwindigkeit allgemein, Eintritt Laufrad, Austritt Laufrad, Indices wie c
		W	bezogene Relativgeschwindigkeit
		W	Crocco-Zahl w/c_{\max}

x	Variable, Koordinate	μ	Schluck-Zahl $\dot{m}v_2/\Omega_2\sqrt{2\Delta h_s}$
y	Größe $\int v dp$	ν	Laufzahl $u_2/\sqrt{2\Delta h_s}$
Y	Verhältnis D_S/D_N	π	Druckverhältnis < 1
z	axiale Koordinate	Π	Druckverhältnis > 1
z	Stufenzahl	ρ	Dichte
		φ	Durchsatzzahl (Lieferzahl) $\dot{m}v_2/\Omega_2u_2$
α	absoluter Strömungswinkel	Φ	charakteristische Durchflußgröße, Gl.
$\alpha_0 \dots \alpha_3$	Winkel der Geschwindigkeiten $c_0 \dots c_3$	χ	Ausdruck $(\chi - 1)/\chi$
α	Wärmeübergangszahl	ψ, ψ_s, ψ_p	Druckzahl allgemein, auf Isentrope bezogen $\Delta h_s/u_2^2$, auf Polytrope bezogen $\int v dp/u_2^2$
β	relativer Strömungswinkel		
β_1, β_2	Winkel der Geschwindigkeit w_1, w_2		
γ_m	Staffelungswinkel	Ψ	Stokessche Stromfunktion
δ	Spaltweite	Ψ_e	Ausdruck $1 - \pi^2$
ε	Beaufschlagungsverhältnis	Ψ_k	Ausdruck $\Pi^2 - 1$
ε	Neigungswinkel der Meridianstromlinie	ω	Winkelgeschwindigkeit
		Ω	Ringquerschnitt
ζ	Verlustzahl		
$\zeta_D, \zeta_{sp}, \zeta_R, \zeta_V$	Diffusorverlustzahl, Verlustzahlen für Spaltverlust, Radreibung, Ventilation		Indices werden vorwiegend in folgender Bedeutung gebraucht:
η	Zähigkeit, Wirkungsgrad	0	Bezugszustand, Auslegungszustand
η_D	Diffusorwirkungsgrad	0, 1, 2, 3	Eintritt vorgeschaltetes Leitrad, vor Lafrad, nach Lafrad, hinter nachgeschaltetem Leitrad
η', η''	Leitradwirkungsgrad, Laufradwirkungsgrad		
η_p, η_s	polytroper und isentroper Wirkungsgrad	m, N, S	Mittelkreis, Nabe, Spitzenkreis
		p	auf Polytrope bezogen
η_{th}	thermischer Wirkungsgrad	s	auf Isentrope bezogen
ϑ	Temperaturverhältnis	α, ω	vor und nach Schaufelung
Θ	Massenträgheitsmoment eines Läufersystems	E, A	Eintritt und Austritt Maschine
\varkappa	Isentropenexponent		Hochgestellter Index 0 verweist auf Totalzustand. Zeichen ' und '' verweisen auf Leit- und Lafrad.
λ	Leistungszahl \bar{u}_a/u_2^2		Hochgestellter Index (ts): von Totalzustand Eintritt auf statischen Zustand Austritt.
λ_D	Diffusorumsetzungsgrad		

b) Festigkeitsprobleme, dynamische Probleme

a	halbe Rißlänge, Koeffizient	K_{Ic}	Rißzähigkeit
A	Fläche, Koeffizient, Arbeit	l	Länge, insbes. Schaufellänge
b	Breite, Koeffizient	m	Masse, Exponent
B	Biot-Zahl	M, M_b, M_t	Moment, Biegemoment, Torsionsmoment
c, C	Koeffizient		
d, D	Durchmesser, D auch Duktilität	n	Drehzahl, Ordnungszahl einer Schwingung, Exponent
D_m, D_N, D_S	Durchmesser Mittelkreis, Nabenkreis, Spitzenkreis	P	Kraft, Leistung
e	Exzentrizität	q	Wärmestromdichte, Koeffizient der Spaltanregung
E	Elastizitätsmodul	Q	Querkraft, Wärmemenge
f	Querschnitt von Stab, Schaufel, Welle	r	Radius, Ausschlag einer zirkular polarisierten Schwingung
f_m, f_N, f_S	Schaufelquerschnitt Mittelkreis, Nabenkreis, Spitzenkreis	r_a, r_i	Außenradius, Innenradius
G	Gleitmodul	r_m, r_N, r_S	Radien von Mittelkreis, Nabenkreis, Spitzenkreis
h	Dicke einer Platte, Schmierpaltweite	r_k, r_{ik}	Schwerpunktradius und Innenradius eines Radkranzes
H_n, H_{tn}	Formfaktor der Schwingungsanregung für n -te Ordnung, Biegung und Torsion	Δr	radiales Lagerspiel
J	Flächenträgheitsmoment	S, S_t	Stimulus für Biegung und Torsion
J_p	polares Trägheitsmoment	S_b, S_t	Sicherheitsfaktor der Beanspruchung und der Lebensdauer
k	Federkonstante	So	Sommerfeld-Zahl
k_f	Verhältnis f/s^2	t	Schaufelteilung, Zeit
k_J	Verhältnis J/s^4	T	Temperatur, kinetische Energie
k_W	Verhältnis W/s^3	u	Umfangsgeschwindigkeit, Index gibt an in welchem Radius
k_{ij}	Lagerkoeffizient		
K	Kerbwirkungsfaktor, Koeffizient		

u	Maß für die örtliche Amplitude eines schwingenden Körpers	ϑ	Verhältnis J/J_0 (0 Bezugsort), Azimuth
v	Radialverschiebung, Geschwindigkeit einer Schwingungsbewegung	Θ	Massenträgheitsmoment
V	Vergrößerungsfaktor der Schwingungsamplitude	$\varkappa_n, \varkappa'_n$	Eigenwerte Ordnung n
W	Arbeit	μ	Reibungsbeiwert
x	Koordinate	ν, ν_e, ν_{en}	Frequenz, Eigenfrequenz, Eigenfrequenz Ordnung n
X	Kraftkomponente, Radienverhältnis einer Scheibe	ξ	Koordinate
y	Koordinate, Radienverhältnis r/r_N	ϱ	Dichte
y	örtlicher Momentanwert des Ausschlages	σ	Normalspannung
Y	Radienverhältnis r_S/r_N oder r_a/r_i	σ_m	zeitlicher Spannungsmittelwert
Y	örtliche Schwingungsamplitude	σ_A	Spannungsamplitude
z	Koordinate, Axialkoordinate	σ_b	Biegespannung
z	Schaufelzahl des Rades	$\sigma_\vartheta, \sigma_r, \sigma_a$	tangentiale, radiale, axiale Spannung
z_p	Anzahl Schaufeln eines Paketes	$\sigma_B, \sigma_F, \sigma_W$	Bruchgrenze, Fließgrenze, Dauerwechselfestigkeit
Z	Fliehkraft, Ordnungszahl der Erregung	σ_v	Vergleichsspannung
α	Wärmeübergangszahl, Formfaktor	σ_z	Fliehkraftspannung
β	Wärmeausdehnungszahl, effektiver Formfaktor	τ	Schubspannung
γ	Verdrillungswinkel, Winkeldeformation	τ	dimensionslose Zeitvariable
δ	logarithmisches Dekrement	τ_L	relative Lebensdauer
$\varepsilon, \varepsilon_\vartheta, \varepsilon_r, \varepsilon_a$	relative Dehnung allgemein, tangential, radial, axial	φ	Phasenwinkel, Verhältnis f/f_0 (0 Bezugsort)
$\varepsilon_e, \varepsilon_\ell, \varepsilon_p$	Kriechdehnung, elastische Dehnung, plastische Dehnung	ψ	Phasenwinkel, Faktor zur Berücksichtigung von Querschnittsverwölbung
$\Delta\varepsilon$	Dehnungsbereich	Ψ	potentielle Energie
η	Zähigkeit	ω	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz ¹⁷
		ω_e, ω_{en}	Kreisfrequenz der Eigenschwingung, Ordnung n
		ω_r	Winkelgeschwindigkeit des Rotors
		Ω	dimensionslose Eigenfrequenz

11 Das Verhalten unter geänderten Betriebsbedingungen

11.1 Das Verhalten des Gitters und der Stufe

Die Betrachtung des Verhaltens eines Gitters gegebener Geometrie ist der naheliegende Ausgangspunkt zur Untersuchung des Verhaltens einer Turbomaschinenstufe unter geänderten Betriebsbedingungen. Es seien h_1, p_1, c_1, α_1 bzw. h_2, p_2, c_2, α_2 Enthalpie, Druck, Strömungsgeschwindigkeit und Strömungswinkel (gegen Gitterfront) in einer Kontrollfläche vor dem Gitter (Index 1) und nach dem Gitter (Index 2). Stets lassen sich die *Verluste* im Gitter kennzeichnen durch einen Wirkungsgrad η , dessen genauere Definition an dieser Stelle offengelassen werden kann, da die grundlegenden Zusammenhänge davon nicht berührt werden. — Die Überlegungen können übrigens auch ebensogut übertragen werden auf andere Verlustcharakteristika, wie Gleitzahlen und dgl. — Außer den Verlusten sind die *Ablenkungseigenschaften* eines Gitters maßgebend, also der Abströmwinkel α_2 . Um die Anzahl der Variablen auf ein Mindestmaß zu bringen, zieht man die dimensionslose Darstellung heran. Nach den Ausführungen Bd. I, Abschn. 3.9 sind die maßgebenden Variablen Mach-Zahl M , Reynolds-Zahl Re und Turbulenzgrad Tu . Da im Falle des Gitters die Zuströmrichtung willkürlich eingestellt werden kann, läßt sich sein Verhalten erschöpfend beschreiben durch zwei Relationen der Art

$$\eta = \eta(\alpha_1, M, Re, Tu), \quad \alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1, M, Re, Tu). \quad 11.1(1)$$

Dabei kann offengelassen werden, nach welcher Konvention M und Re gebildet werden.

Diese Relationen können in mannigfacher Weise anders dargestellt werden. Mit den Definitionen der Normalenthalpie j und der kritischen Geschwindigkeit c^*

$$j \equiv \frac{\kappa}{\kappa - 1} pv, \quad c^* \equiv \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} p^0 v^0} = \sqrt{2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} j^0}, \quad 11.1(2)$$

vgl. auch Gl. 1.6(5) und 3.6(11) in Bd. I, läßt sich eine Mach-Zahl

$$M^* \equiv c/c^* \quad 11.1(3)$$

bilden, und es gilt auch für die beiden Kontrollebenen

$$j_1 = j^0 - \frac{c_1^2}{2}, \quad j_2 = j^0 - \frac{c_2^2}{2}. \quad 11.1(4)$$

Damit ergibt sich z. B. für ein Beschleunigungsgitter die Energiegleichung

$$\frac{c_2^2}{2} = \eta \left[\frac{c_1^2}{2} + \Delta h_s \right] = \eta \left\{ \frac{c_1^2}{2} + \left(j^0 - \frac{c_1^2}{2} \right) \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \right\}, \quad 11.1(5)$$

was mit Hilfe der Definitionen Gl. 11.1(2) und (3) auch in die Form

$$M_2^{*2} = \eta \left\{ M_1^{*2} + \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - M_1^{*2} \right) \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \right\} \quad 11.1(6)$$

übergeführt werden kann. Mit Gl. 11.1(5) ist η implizite definiert; M_1^* und M_2^* sind die mit c_1 und c_2 gebildeten M^* . — Wenn mit l_1 und l_2 die Schaufelhöhen in den beiden

Kontrollflächen bezeichnet werden, lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{c_2 l_2 \sin \alpha_2}{v_2} = \frac{c_1 l_1 \sin \alpha_1}{v_1}, \quad 11.1(7)$$

woraus

$$c_2 = c_1 \frac{v_2 l_1 \sin \alpha_1}{v_1 l_2 \sin \alpha_2} = c_1 \frac{j_2 p_1 l_1 \sin \alpha_1}{j_1 p_2 l_2 \sin \alpha_2} = c_1 \frac{\left(j^0 - \frac{c_2^2}{2}\right) p_1 l_1 \sin \alpha_1}{\left(j^0 - \frac{c_1^2}{2}\right) p_2 l_2 \sin \alpha_2}. \quad 11.1(8)$$

Dies wiederum geht mit den gegebenen Definitionen über in

$$M_2^* = M_1^* \frac{(\kappa + 1) - (\kappa - 1) \frac{M_2^{*2}}{M_1^{*2}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right) \frac{l_1 \sin \alpha_1}{l_2 \sin \alpha_2}}{(\kappa + 1) - (\kappa - 1) \frac{M_1^{*2}}{M_2^{*2}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \frac{l_2 \sin \alpha_2}{l_1 \sin \alpha_1}}. \quad 11.1(9)$$

In den Gln. 11.1(1) wähle man nun als maßgebende Mach-Zahl M_2^* (beim Beschleunigungsgitter also von allfälligen lokalen Spitzenwerten abgesehen der größte Wert). Für eine gegebene Wertegruppe α_1, M_2^*, Re, Tu liefern die genannten Beziehungen η und α_2 . Die Gln. 11.1(6) und (9) stellen dann ein System von Bestimmungsgleichungen für p_2/p_1 und M_1^* dar. Daraus folgt, daß man anstatt M_2^* ebensogut p_2/p_1 als unabhängige Variable wählen kann. Im Unterschallbereich ist auch M_1^* als unabhängige Variable brauchbar, während bei $M_2^* > 1$ und sperrendem Gitter einem ganzen Bereich von Werten M_2^* oder p_2/p_1 ein festes M_1^* entspricht. Es ist somit anstelle der Gln. 11.1(1) auch die Darstellung

$$\eta = \eta(\alpha_1, p_2/p_1, Re, Tu), \quad \alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1, p_2/p_1, Re, Tu) \quad 11.1(10)$$

möglich.

Wie aus den Ausführungen Bd. I, Abschn. 3.6 hervorgeht, können anstatt Mach-Zahlen stets auch Crocco-Zahlen verwendet werden, die gegeben sind durch

$$C = c/c_{\max}, \quad c_{\max} = \sqrt{2j^0}. \quad 11.1(11)$$

Das führt auf die Darstellungsweise

$$\eta = \eta(\alpha_1, C, Re, Tu), \quad \alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1, C, Re, Tu). \quad 11.1(12)$$

Obwohl hier von der Vorstellung des Beschleunigungsgitters ausgegangen wurde, gelten diese Überlegungen allgemein.

In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle liegen in thermischen Turbomaschinen die Reynolds-Zahlen so hoch, daß ihr Einfluß gering wird oder überhaupt verschwindet. Das gleiche gilt vom Turbulenzgrad. Somit bleibt dann praktisch für ein gegebenes Gitter noch eine zweiparametrische Schar ähnlichkeits-theoretisch unterscheidbarer Strömungszustände übrig, wobei der eine Parameter α_1 ist, während für den anderen je nach Darstellungsweise eine Mach-Zahl, eine Crocco-Zahl oder das Druckverhältnis gewählt werden kann. Die in Bd. I gemachten Angaben entsprechen der hier angegebenen Struktur der Gesetzmäßigkeit. Für die Turbinengitter ist das in Abschn. 8.4e aufgezeigt. Die für Axialverdichter gültigen Setzungen Gl. 8.5(32)–(34) mit den zugehörigen Diagrammen implizieren ebenfalls einen solchen Zusammenhang. Das gleiche gilt für die Gln. 8.6(23) und (64) und die zugehörigen Diagramme, die für den Radialverdichter gelten. — Alle diese Angaben sind aber nicht streng und allgemeingültig. Sehr genaue Unterlagen dieser Art können im Einzelfall nur empirisch für die jeweils vorliegende besondere Geometrie beschafft werden.

Aus diesen Überlegungen läßt sich eine allgemeine Schlußfolgerung über das Verhalten einer Turbomaschinenstufe ziehen. Die Effekte von Reynolds-Zahl und Turbulenz mögen als vernachlässigbar betrachtet werden. Dann existieren für Leit- und Laufrad je eine zweiparametrische Schar ähnlichkeits-theoretisch unterscheidbarer Strömungszustände. Weiter kann die Umfangsgeschwindigkeit gewählt werden, genauer gesagt ein aus ihr gebildetes dimensionsloses Charakteristikum wie eine Mach-Zahl oder eine Crocco-Zahl.

Die damit gegebenen 5 Variablen sind aber nicht alle voneinander unabhängig. Aus dem Abströmwinkel des ersten Schaufelkranzes und der (dimensionslosen) Umfangsgeschwindigkeit ist kinematisch der Zuströmwinkel zum zweiten Rad gegeben, und außerdem besteht die Bedingung, daß beide Räder den gleichen Massenstrom verarbeiten. Diese beiden Beziehungen bewirken, daß nur noch 3 Variable willkürlich wählbar sind, woraus folgt:

Bei verschwindendem Einfluß von Reynolds-Zahl und Turbulenzgrad ist die Schar der Ähnlichkeitstheoretisch unterscheidbaren Betriebszustände einer Turbomaschinenstufe dreiparametrig.

Diese vollständige dreiparametrische Stufencharakteristik¹ wird aber in der Praxis selten benötigt. Geht nämlich der betrachteten Stufe keine weitere voraus, so wird der Zuströmwinkel normalerweise unveränderlich sein, womit ein Parameter bereits festliegt. Wenn aber der Stufe eine vorausgeht, so sind die Strömungszustände in beiden einander zugeordnet. Der Abströmwinkel der vorausgehenden Stufe variiert gesetzmäßig mit dem in ihr herrschenden Strömungszustand. Er ist zugleich der Zuströmwinkel zur nächsten Stufe, womit dieser dem Strömungszustand so zugeordnet ist, daß er nicht mehr frei gewählt werden kann (man denke an den Grenzfall der Repetierbedingungen). In beiden Fällen scheidet also der Zuströmwinkel als unabhängige Variable aus, so daß praktisch nur noch eine *zweiparametrische* Schar Ähnlichkeitstheoretisch unterscheidbarer Betriebszustände übrigbleibt. Eine Ausnahme bilden z. B. Radialverdichterstufen mit beliebig einstellbarem Vordrall.

11.2 Die Charakteristik der Turbinenstufe

Die dimensionslose Darstellung der Gleichungen, die das Verhalten einer Turbinenstufe beschreiben, wird am einfachsten mit Hilfe der *Crocco-Zahlen*

$$C \equiv \frac{c}{\sqrt{2j^0}}, \quad W \equiv \frac{w}{\sqrt{2j^0}}, \quad U \equiv \frac{u}{\sqrt{2j^0}}, \quad 11.2(1)$$

wobei

$$j^0 \equiv j_0 + \frac{c_0^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_0 v_0 + \frac{c_0^2}{2}. \quad 11.2(2)$$

Die Indices 0, 1, 2 verweisen stets auf die Kontrollflächen vor Leitrad, vor Laufrad und nach Laufrad. Wenn alsdann die Ringquerschnitte mit Ω bezeichnet werden, gehen Energiegleichung 11.1(5) und Kontinuitätsgleichung 11.1(8) für das Leitrad sinngemäß in die folgende Form über:

$$C_1^2 = \eta' \left\{ (1 - C_0^2) \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] + C_0^2 \right\}, \quad 11.2(3)$$

$$\frac{C_0}{C_1} = \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \left(\frac{1 - C_0^2}{1 - C_1^2} \right) \frac{k_1 \Omega_1 \sin \alpha_1}{k_0 \Omega_0 \sin \alpha_0}. \quad 11.2(4)$$

Die kinematischen Relationen, welche die relative Zuströmgeschwindigkeit zum Laufrad nach Betrag und Richtung festlegen, lauten

$$W_1^2 = C_1^2 + U_1^2 - 2C_1 U_1 \cos \alpha_1, \quad 11.2(5)$$

$$\sin \beta_1 = \frac{C_1}{W_1} \sin \alpha_1. \quad 11.2(6)$$

¹ Hier ist stets die Stufencharakteristik vom ersten der zwei unter 9.2 unterschiedenen Typen gemeint, also die Beschreibung des Verhaltens einer Stufe vollständig gegebener Geometrie.

Bei der Aufstellung der Laufradgleichungen ist zu beachten, daß die Crocco-Zahlen sämtlich mit der Totalenthalpie vor der Stufe gebildet werden und nicht etwa mit derjenigen der Relativströmung vor dem Laufrad, was eine gewisse formale Änderung nach sich zieht. Es ist

$$\frac{j_0 + \frac{c_0^2}{2}}{j_1 + \frac{w_1^2}{2}} = \frac{j_0 + \frac{c_0^2}{2}}{j_0 + \frac{c_0^2 - c_1^2 + w_1^2}{2}} = \frac{1}{1 - C_1^2 + W_1^2} \equiv A. \quad 11.2(7)$$

Damit lassen sich Energiegleichung und Kontinuitätsgleichung für das Laufrad schreiben

$$W_2^2 = \frac{\eta''}{A} \left\{ (1 - A W_1^2) \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] + A(W_1^2 + U_2^2 - U_1^2) \right\}, \quad 11.2(8)$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left[\frac{1 - A W_1^2}{1 - A(W_2^2 - U_2^2 + U_1^2)} \right] \frac{k_2 \Omega_2 \sin \beta_2}{k_1 \Omega_1 \sin \beta_1}. \quad 11.2(9)$$

Die Absolutströmung am Laufradaustritt ist gegeben durch

$$C_2^2 = W_2^2 + U_2^2 - 2W_2U_2 \cos \beta_2, \quad 11.2(10)$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{W_2}{C_2} \sin \beta_2. \quad 11.2(11)$$

Dazu sind die folgenden Beziehungen beizufügen:

$$\eta' = f'_\eta(\alpha_0, p_1/p_0), \quad \alpha_1 = f_\alpha(\alpha_0, p_1/p_0), \quad k_1 = f'_k(\alpha_0, p_1/p_0), \quad 11.2(12)$$

$$\eta'' = f''_\eta(\beta_1, p_2/p_1), \quad \beta_2 = f_\beta(\beta_1, p_2/p_1), \quad k_2 = f''_k(\beta_1, p_2/p_1). \quad 11.2(13)$$

Die Funktionalzusammenhänge f_η ergeben sich, wo keine besonderen Meßergebnisse vorliegen, aus den Angaben Bd. I, 8.4e. Die Funktionen f_α und f_β folgen aus gittertheoretischen Untersuchungen. Bei Mach-Zahlen am Gitteraustritt bis etwa 0,5 ist für Turbinengitter der Abströmwinkel in der Regel konstant, also insbesondere auch vom Zuströmwinkel fast unabhängig. Diese Unabhängigkeit vom Zuströmwinkel bleibt auch bei höheren Mach-Zahlen erhalten, doch wird dann der Einfluß des Druckverhältnisses deutlich, vor allem im Überschallgebiet, wo die Strahlableitung auftritt. Die Funktionen f_α und f_β lassen sich also gemäß den Ausführungen in den Abschn. 6.9, 10 und 13 gewinnen. — Über die Faktoren k in der Kontinuitätsgleichung gibt Abschn. 8.4c Aufschluß. Es folgt daraus, daß sie im allgemeinen in komplizierter Weise mit dem Strömungszustand zusammenhängen, doch dürfte es in der Regel genügend genau sein, sie konstant zu setzen, mindestens solange nicht Querschnittsversperrungen durch Ablösungen eintreten, die nur empirisch ermittelt werden könnten. An sich wäre noch eine Beziehung über k_0 anzugeben, die aber bei der ersten Stufe zur Angabe einer Konstanten degeneriert und bei den nachfolgenden jeweils die k_2 -Beziehung der vorausgehenden Stufe ist.

Ein Betriebszustand einer Stufe kann nun gegeben werden durch α_0 , p_2/p_0 und U_2 , womit auch U_1 bekannt ist. Mit einem versuchsweise gewählten Wert p_1/p_0 liefern alsdann die Gln. 11.2(3) und (4) iterativ C_0 und C_1 und hierauf 11.2(5), (6) und (7) W_1 , β_1 und A . Da auch p_2/p_1 mit p_1/p_0 gewählt ist, hat man somit aus 11.2(8) W_2 . Nun ist 11.2(9) als Kontrollgleichung heranzuziehen und die Rechnung mit geändertem p_1/p_0 zu wiederholen bis 11.2(9) erfüllt ist. Schließlich liefern 11.2(10) und (11) die Strömungsbedingungen am Austritt. — Das vollständige Feld der möglichen Betriebszustände entsteht durch systematische Variation von α_0 , p_2/p_0 und U_2 . Aus den im vorangehenden Abschnitt erwähnten Gründen, wird dies aber höchst selten von Interesse sein, sondern man wird

sich entweder ein festes α_0 geben (erste Stufe), oder α_0 ist durch

$$\cot \alpha_0 = \frac{U_2^+}{C_1} \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \left(\frac{1 - C_1^2}{1 - C_0^2} \right) \frac{k_0 \Omega_0}{k_1 \Omega_1 \sin \alpha_1} - \cot \beta_2^+ \quad 11.2(14)$$

festgelegt. Diese Gleichung folgt aus der Kontinuitätsbedingung 11.2(4) und den kinematischen Bedingungen am Austritt der vorhergehenden Stufe, auf die durch das Zeichen + verwiesen wird. U_2^+ wird mit dem j^0 der betrachteten Stufe gebildet.

Die zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse solcher Berechnungen erfolgt in der Regel zweckmäßig unter Verwendung üblicher dimensionsloser Kenngrößen, also

$$\psi \equiv \frac{\Delta h_s}{u_2^2} = \frac{(j^0 - c_0^2/2) \left[1 - (p_2/p_0)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}{u_2^2} = \frac{(1 - C_0^2) \left[1 - (p_2/p_0)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}{2U_2^2}, \quad 11.2(15)$$

$$\varphi = \frac{k_2 C_2 \sin \alpha_2}{U_2}. \quad 11.2(16)$$

Damit können auch

$$\nu = 1/\sqrt{2\psi}, \quad \mu = \varphi/\sqrt{2\psi} \quad 11.2(17)$$

berechnet werden. Die Leistungszahl ist gegeben durch

$$\lambda = \frac{1}{2U_2^2} [C_1^2 - C_2^2 + W_2^2 - W_1^2 + U_1^2 - U_2^2], \quad 11.2(18)$$

der isentrope aerodynamische Wirkungsgrad durch

$$\eta_{sa} = \frac{\Delta h}{\Delta h_s} = \frac{c_1^2 - c_0^2 + w_2^2 - w_1^2 + u_1^2 - u_2^2}{2\Delta h_s} = \frac{C_1^2 - C_0^2 + W_2^2 - W_1^2 + U_1^2 - U_2^2}{(1 - C_0^2) \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}. \quad 11.2(19)$$

Wenn die Spaltverluste nicht in die Radwirkungsgrade eingeschlossen werden und ein allfälliger Radreibungsverlust einen merklichen Betrag annimmt, ist er noch nicht identisch mit dem alle Verluste umfassenden isentropen Stufenwirkungsgrad η_s , sondern dieser ergibt sich aus

$$\eta_s = \eta_{sa} - \zeta'_{sp} - \zeta''_{sp} - \zeta_R, \quad 11.2(20)$$

wobei die Spaltverluste ζ'_{sp} und ζ''_{sp} und der Radreibungsverlust ζ_R nach den Unterlagen Abschn. 8.4c bestimmt werden können. — Schließlich läßt sich auch der Reaktionsgrad angeben, der aus

$$r = \frac{(1 - C_1^2) \left[1 - (p_2/p_1)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}{(1 - C_0^2) \left[1 - (p_2/p_0)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad 11.2(21)$$

zu berechnen ist.

Abb. 11.2.1 zeigt ein Beispiel einer solchen Charakteristik einer Turbinenstufe mit kleinem Reaktionsgrad für einen festen Zuströmwinkel von $\alpha = 90^\circ$, und zwar in zwei Darstellungsarten, nämlich unter Verwendung der Variablen φ und ψ einerseits und der Variablen μ und ν andererseits. Der Vorteil, der damit verbunden ist, auf solche Kennzahlen zurückzugehen anstatt, was naheliegend scheinen könnte, unmittelbar p_2/p_0 anzugeben besteht darin, daß so Scharen von verhältnismäßig dicht beieinanderliegenden Kurven erhalten werden. Oft ist der Bereich der praktisch interessierenden U_2 so klein, daß man die Kurvenscharen durch je eine Kurve ersetzen kann. Man hat dann eine *einparametrische Darstellung* der Stufencharakteristik vor sich, die in vielen Fällen genügt.

Daß eine eindimensionale Theorie, wie sie hier durchgeführt wurde, die Zusammenhänge hinreichend genau wiedergibt zeigt Borel [1]. Man muß nur die Geschwindigkeitsdreiecke im Euler-Radius bilden (vgl. Abschn. 5.4); dieser ist genügend genau der Radius des Kreises, der die Ringfläche halbiert.

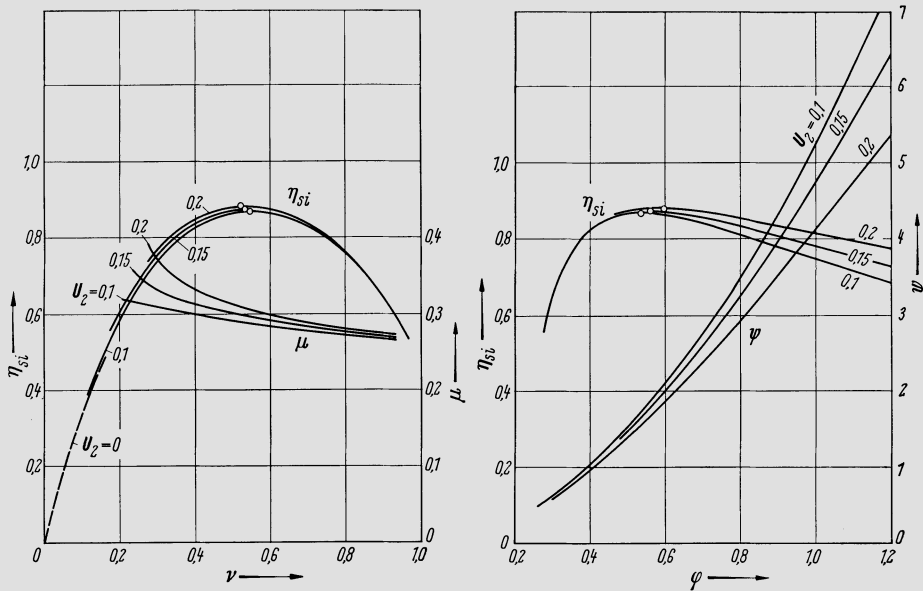


Abb. 11.2.1. Beispiel einer zweiparametrischen Turbinenstufencharakteristik. Zuströmwinkel $\alpha_0 = 90^\circ$. Zwei Darstellungsformen, links unter Verwendung von μ und v , rechts unter Verwendung von φ und ψ

11.3 Das Kegelgesetz

Bei einer mehrstufigen Schaufelung hängt der Massenstrom \dot{m} in bestimmter Weise ab vom Eintrittszustand p_α, v_α , vom Gegendruck p_w (vgl. Abb. 11.3.1), wie übrigens auch von der Drehzahl. Dieser Zusammenhang kann näherungsweise beschrieben werden durch das nachfolgend hergeleitete „Kegelgesetz“.

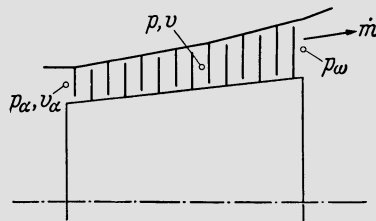


Abb. 11.3.1. Zur Festlegung der Bezeichnungen

Mit der Definition $\mu = k_2 c_{n2} / \sqrt{2\Delta h_s}$ der Schluck-Zahl der Stufe (Stufengefälle Δh_s) nimmt für eine beliebige Stufe die Kontinuitätsgleichung die Form

$$\dot{m} = \Omega_2 \varepsilon \rho_2 \mu \sqrt{2\Delta h_s} = \frac{\Omega_2 \varepsilon \mu \sqrt{2\Delta h_s}}{v_2} \quad 11.3(1)$$

an, wobei durch Einführung des Beaufschlagungsverhältnisses ε selbst die Teilbeaufschlagung mitumfaßt ist. Die Quadrierung dieser Gleichung liefert

$$\frac{\dot{m}^2}{2\mu^2 \Omega_2^2 \varepsilon^2} = \frac{\Delta h_s}{v_2^2}. \quad 11.3(2)$$

Wenn Δp die Druckabsenkung in der Stufe ist, gilt auch $\Delta h_s \approx v \Delta p$. Dies wird in Gl. 11.3(2) eingesetzt, womit vorausgesetzt ist, daß die relative Druckänderung pro Stufe

klein sei; damit ist auch die Vereinfachung $v_2 \approx v$ zulässig, und die Gleichung geht über in

$$\frac{\dot{m}^2}{2\mu^2\Omega_2^2\varepsilon^2} = \frac{\Delta p}{v}. \quad 11.3(3)$$

Wenn weiter die Zustandsänderung durch die ganze Schaufelung durch eine Polytrope angenähert wird, folgt

$$v = v_\alpha \left(\frac{p_\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad 11.3(4)$$

somit

$$\frac{\dot{m}^2}{2\mu^2\Omega_2^2\varepsilon^2} = \frac{1}{v_\alpha} \left(\frac{p}{p_\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} \Delta p = \frac{p_\alpha}{v_\alpha} \pi^{\frac{1}{n}} \Delta \pi, \quad 11.3(5)$$

wobei abkürzend $\pi = p/p_\alpha$, $\Delta \pi = \Delta p/p_\alpha$ gesetzt ist.

Für jede Stufe gilt eine Gleichung der Art 11.3(5), womit aus der Summation aller dieser Gleichungen folgt

$$\frac{\dot{m}^2}{2} \sum \frac{1}{\mu^2\Omega_2^2\varepsilon^2} = \frac{p_\alpha}{v_\alpha} \sum \pi^{\frac{1}{n}} \Delta \pi. \quad 11.3(6)$$

Da kleine Druckänderungen vorausgesetzt sind, kann die rechts stehende Summe durch ein Integral ersetzt werden, d. h. man setzt

$$\sum \pi^{\frac{1}{n}} \Delta \pi \approx \int_{\pi_\omega}^1 \pi^{\frac{1}{n}} d\pi = \frac{n}{n+1} \left[1 - \pi_\omega^{\frac{n+1}{n}}\right], \quad 11.3(7)$$

wo $\pi_\omega = p_\omega/p_\alpha$. Damit schreibt sich 11.3(6)

$$\frac{\dot{m}^2}{2} \sum \frac{1}{\mu^2\Omega_2^2\varepsilon^2} = \frac{n}{n+1} \frac{p_\alpha}{v_\alpha} \left[1 - \pi_\omega^{\frac{n+1}{n}}\right]. \quad 11.3(8)$$

Stets läßt sich ein Mittelwert $\bar{\mu}$ finden derart, daß diese Gleichung in der Form

$$\frac{\dot{m}^2}{2\bar{\mu}^2} \sum \frac{1}{\Omega_2^2\varepsilon^2} = \frac{n}{n+1} \frac{p_\alpha}{v_\alpha} \left[1 - \left(\frac{p_\omega}{p_\alpha}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right] \quad 11.3(9)$$

dargestellt werden kann. Nun ist μ eine sehr wenig variable Größe, besonders wenn kleine relative Druckänderung in den Stufen vorausgesetzt wird, d. h. auch kleines U_2 . Abb. 11.3.2 zeigt typische Verläufe von μ/μ_0 in Funktion von v/v_0 (Index 0 der Auslegungswert) nach [2–4]. Daher ist die Unsicherheit in der Schätzung von $\bar{\mu}$ nicht sehr groß.

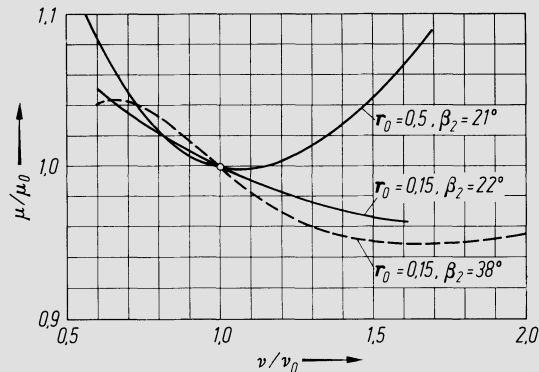


Abb. 11.3.2. Typischer Verlauf der Schluckzahl μ in Funktion der Laufzahl v . Index 0 bezeichnet Auslegungspunkt. Es ist $v_0 = 0,5$ für Reaktionsgrad 0,15 und $v_0 = 0,65$ für Reaktionsgrad 0,5. Kurvenverlauf hängt etwas von Winkelgebung ab, vgl. die beiden Beispiele mit Reaktion 0,15. Abfall der Kurve $\beta_2 = 38^\circ$ gegen linkes Ende bedingt durch Strömungsablösung an Laufschaufel-Saugseite

Eine Gleichung der Art 11.3(9) gilt offenbar für jeden Betriebszustand. Greift man irgendeinen ausgezeichneten Betriebszustand heraus — z.B. den Auslegungszustand — und charakterisiert ihn durch Index 0, so kann man Gl. 11.3(9) durch die entsprechende, für Zustand 0 formulierte Gleichung dividieren, wobei der links stehende Summenausdruck sich herauskürzt, da er ja nur Konstruktionsdaten der Schaufelung enthält. So folgt

$$\left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0}\right)^2 = \frac{\bar{\mu}^2 p_\alpha v_{\alpha 0}}{\mu_0^2 p_{\alpha 0} v_\alpha} \left[\frac{1 - (p_w/p_\alpha)^{\frac{n+1}{n}}}{1 - (p_{w0}/p_{\alpha 0})^{\frac{n+1}{n}}} \right], \quad 11.3(10)$$

wobei vorausgesetzt ist, daß für beide Betriebszustände der gleiche Polytropenexponent gesetzt werden dürfe. Diese Gleichung läßt auch die Darstellung

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} \frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}} \sqrt{\frac{p_{\alpha 0} v_{\alpha 0}}{p_\alpha v_\alpha}} \sqrt{\frac{1 - (p_w/p_\alpha)^{\frac{n+1}{n}}}{1 - (p_{w0}/p_{\alpha 0})^{\frac{n+1}{n}}}} \quad 11.3(11)$$

zu, wobei beachtenswert ist, daß

$$\frac{p_{\alpha 0} v_{\alpha 0}}{p_\alpha v_\alpha} = \frac{j_{\alpha 0}}{j_\alpha} \quad \text{beim idealen Dampf,} \quad 11.3(12)$$

$$\frac{p_{\alpha 0} v_{\alpha 0}}{p_\alpha v_\alpha} = \frac{T_{\alpha 0}}{T_\alpha} \quad \text{beim idealen Gas.} \quad 11.3(13)$$

Gl. 11.3(11) formuliert das „Kegelgesetz“, was nachfolgend noch genauer analysiert werde. Zunächst stellt Abb. 11.3.3 die Funktion

$$e = \sqrt{1 - (p_w/p_\alpha)^{\frac{n+1}{n}}} \quad 11.3(14)$$

für verschiedene n dar und ebenso die Ableitung $de/d(p_w/p_\alpha)$. Für $n = 1$ wird ein Kreis erhalten. Der in Gl. 11.3(11) erscheinende Wurzelausdruck

$$E = \sqrt{\frac{1 - (p_w/p_\alpha)^{\frac{n+1}{n}}}{1 - (p_{w0}/p_{\alpha 0})^{\frac{n+1}{n}}}} = \frac{e}{\sqrt{1 - (p_{w0}/p_{\alpha 0})^{\frac{n+1}{n}}}} \quad 11.3(15)$$

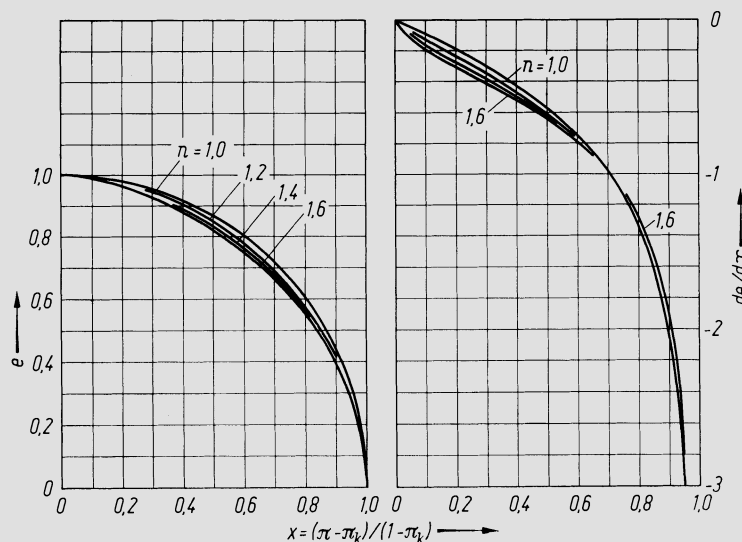


Abb. 11.3.3. Ellipsenfunktion $e(x)$ und ihre Ableitung de/dx . Mit $\pi_k = 0$ wird $x = \pi$

geht aus e durch eine Verzerrung der Abszisse hervor, wobei im Falle $n = 1$ aus dem Kreis eine Ellipse wird. E heißt deshalb auch *Ellipsenfaktor*, denn es ist weithin üblich, den tatsächlichen Verlauf durch die Ellipse anzunähern.

Wenn man in Gl. 11.3(11) das $p_\alpha v_\alpha$ festhält — also z. B. beim Gas die Eintrittstemperatur — und von der in der Regel geringfügigen Korrektur $\bar{\mu}/\bar{\mu}_0$ absieht, bleibt ein Gesetz der Form

$$\dot{m} = \dot{m}_0 \frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}} E \quad 11.3(16)$$

übrig, das graphisch gemäß Abb. 11.3.4 dargestellt werden kann. Die Fläche, die den Zusammenhang des Massenstromes mit Ein- und Austrittsdruck veranschaulicht, ist demgemäß ein *Kegel*.

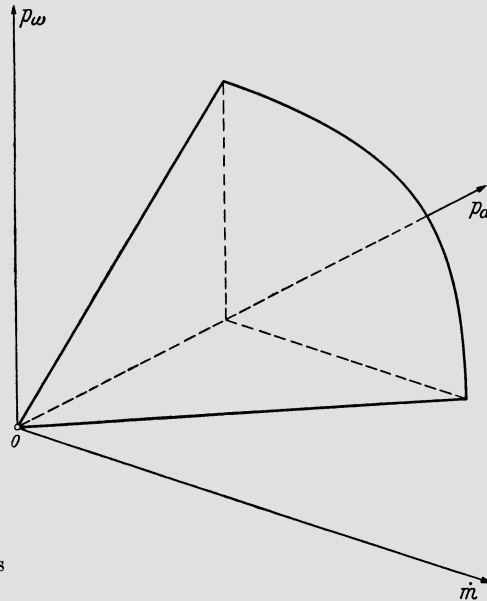


Abb. 11.3.4. Darstellung des Kegelgesetzes für große Stufenzahl

In der angegebenen Form gilt das Kegelgesetz herleitungsgemäß nur für sehr große — streng genommen unendlich große — Stufenzahl. Für einen anderen Extremfall, nämlich eine einzelne Mündung, läßt sich das Durchflußgesetz gasdynamisch leicht angeben. Wenn die Zuströmgeschwindigkeit vor der Mündung vernachlässigbar klein ist, gilt mit f als Mündungsquerschnitt und mit den Druckwerten p_α und p_ω vor und nach Mündung

$$\dot{m} = f \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p_\alpha}{v_\alpha}\right)} \sqrt{\left(\frac{p_\omega}{p_\alpha}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_\omega}{p_\alpha}\right)^{\frac{n+1}{n}}}. \quad 11.3(17)$$

Denken wir uns diese Gleichung noch für den durch Index 0 gekennzeichneten Auslegungspunkt angeschrieben, so ergibt sich durch Division

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}} \sqrt{\frac{p_{\alpha 0} v_{\alpha 0}}{p_\alpha v_\alpha}} \sqrt{\frac{\left(\frac{p_\omega}{p_\alpha}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_\omega}{p_\alpha}\right)^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\frac{p_{\omega 0}}{p_{\alpha 0}}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_{\omega 0}}{p_{\alpha 0}}\right)^{\frac{n+1}{n}}}}. \quad 11.3(18)$$

Dieses Gesetz gilt nur bis zur Erreichung der kritischen Geschwindigkeit, also nur für

$$\frac{p_\omega}{p_\alpha} \geq \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad 11.3(19)$$

Bei einer Absenkung von p_ω/p_α unter diesen Wert nimmt der Massenstrom nicht weiter zu. Der Aufbau der Gl. 11.3(18) ist offensichtlich dem der Gl. 11.3(11) analog, der zweite

Wurzelausdruck, der aus den Druckverhältnissen p_ω/p_α gebildet ist, kann wieder als Ellipsenfaktor E bezeichnet werden, denn er beschreibt eine Kurve, die gelegentlich *Bendemann-Ellipse* genannt wird, obwohl sie keine genaue Ellipse ist. Für einen Festwert des Produktes $p_\alpha v_\alpha$ gibt Gl. 11.3(18) einen Zusammenhang zwischen dem Massenstrom \dot{m} und den Drücken p_α und p_ω , wie er durch Abb. 11.3.5a veranschaulicht wird.

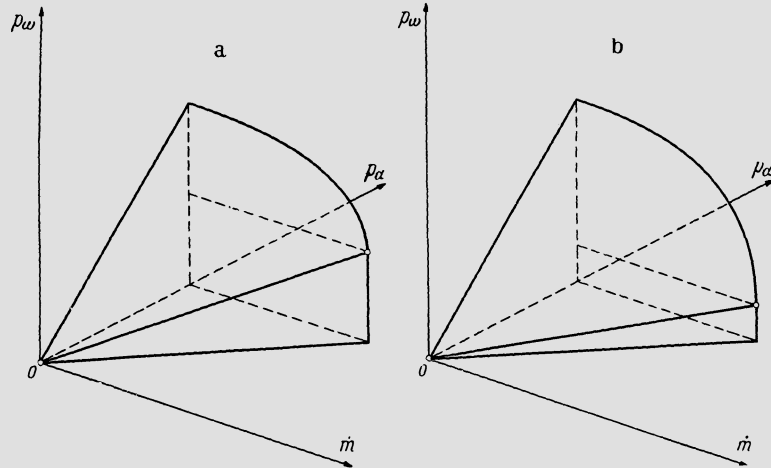


Abb. 11.3.5. Darstellung des Kegelgesetzes. a) Einzelne Mündung; b) kleine Zahl von Mündungen hintereinandergeschaltet, auch Turbine mit wenigen Stufen

Damit läßt sich sogleich auch qualitativ angeben, welche Struktur ein berechtigtes Kegelgesetz für eine endliche Stufenzahl aufweisen muß. In diesem Fall liegt ja eine Hintereinanderschaltung einer endlichen Zahl von Durchflußquerschnitten vor. Deshalb ist ein Verhalten zu erwarten, das zwischen dem nach Abb. 11.3.4 und nach Abb. 11.3.5a liegt, also etwa der Abb. 11.3.5b entspricht. Es existiert also ein von Null verschiedener Wert des kritischen Druckverhältnisses p_ω/p_α , der stets unter dem nach Gl. 11.3(19) liegt und sich mit zunehmender Stufenzahl immer mehr dem Wert Null nähert. Sinkt p_ω bei festem p_α so weit ab, daß $\pi = p_\omega/p_\alpha$ unter den kritischen Wert π_k fällt, so steigt der Massenstrom nicht mehr weiter an. Die Vorausbestimmung von π_k ist schon mehrfach versucht worden, vgl. etwa [5, 6], doch ist sie nicht in strenger und allgemeiner Weise möglich, da π_k von den Besonderheiten der Schaufelung abhängt. Abb. 11.3.6 gibt indessen eine gute Näherung für π_k , die auf der Durchrechnung einer größeren Anzahl von Fällen beruht. Maßgebend war dabei die Abstufung der Querschnitte der aufeinanderfolgenden Schaufelkränze, die aus der Annahme hervorging, daß im Auslegungspunkt alle Stufen mit identischen Geschwindigkeitsdreiecken arbeiten. Die Kurven für $\kappa = 1,333$ können bei Gas oder Heißdampf verarbeitenden Maschinen verwendet werden, die Kurven $\kappa = 1,1$ bei Naßdampfturbinen. Deutlich ist der Einfluß des Reaktionsgrades (exakt im Euler-Radius), für den 0, 0,1 und 0,5 als typische Werte angegeben wurden. Im Diagramm ist z die Stufenzahl und \hat{M} die höchste Mach-Zahl in der letzten Stufe im Auslegungszustand, also bei kleiner Reaktion Austritt Leitrad, bei 50% Reaktion Austritt Laufrad. Der Parameter \hat{M} erweist sich offensichtlich als sehr wesentlich, was früher anscheinend unbeachtet geblieben ist.

Aus dem kritischen Druckverhältnis π_k ergibt sich die folgende Verallgemeinerung der Relationen 11.3(14) und (15):

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi - \pi_k}{1 - \pi_k}\right)^{\frac{n+1}{n}}}, \quad E = \sqrt{\frac{(1 - \pi_k)^{\frac{n+1}{n}} - (\pi - \pi_k)^{\frac{n+1}{n}}}{(1 - \pi_k)^{\frac{n+1}{n}} - (\pi_0 - \pi_k)^{\frac{n+1}{n}}}} \quad 11.3(20)$$

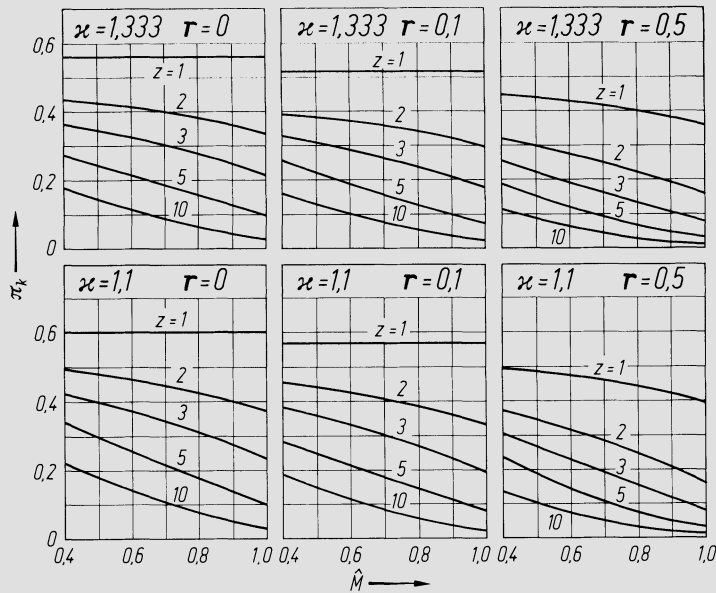


Abb. 11.3.6. Kritisches Druckverhältnis π_k in Funktion des Reaktionsgrades r , der Stufenzahl z und der maßgebenden größten Mach-Zahl \hat{M}

Diese Gleichungen gelten für $\pi \geq \pi_k$, während für $\pi < \pi_k$ die Funktion e den Wert 1 beibehält und die Funktion E den in π_k erreichten Wert. Es tritt also offensichtlich lediglich die Größe $(\pi - \pi_k)/(1 - \pi_k)$ an die Stelle von π , weshalb in Abb. 11.3.3 auch dieser verallgemeinerte Ausdruck als Abszisse angegeben ist; mit $\pi_k = 0$ wird er wieder mit π identisch.

Die Verallgemeinerung der Gl. 11.3(11) lautet also

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} \frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}} \sqrt{\frac{p_{\alpha 0} v_{\alpha 0}}{p_\alpha v_\alpha}} E \tag{11.3(21)}$$

mit E nach Gl. 11.3(20), während 11.3(12), (13) und bei entsprechenden Vereinfachungen 11.3(16) unverändert bleiben.

Wenn eine Maschine mit konstantem Gegendruck p_w betrieben wird, ergibt sich ihr Durchflußverhalten bei konstantgehaltenem Eintrittswert $p_\alpha v_\alpha$ (d.h. praktisch bei konstanter Eintrittsenthalpie) aus der Schnittkurve der Ebene $p_w = \text{const}$ mit der Kegelfläche. So ergibt sich ein Zusammenhang, der in Abb. 11.3.7 dargestellten Art. Diagramm a

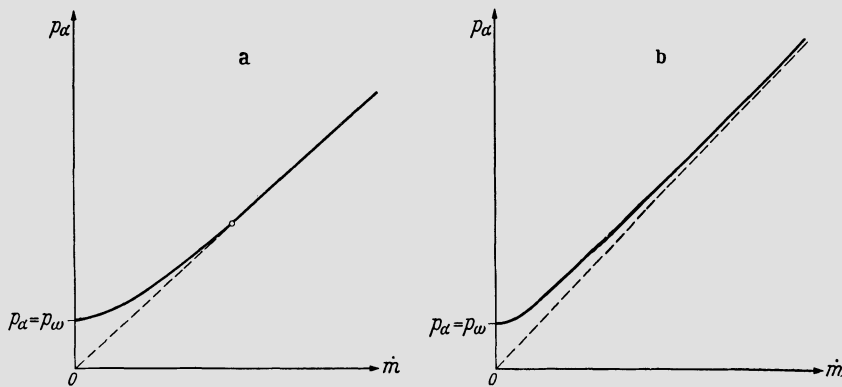


Abb. 11.3.7. Durchflußgesetz bei konstantem Gegendruck. a) Kegelgesetz nach Abb. 11.3.5b; b) Kegelgesetz nach Abb. 11.3.4.

entspricht dem allgemeinen Fall, während im Grenzfall verschwindend kleinen Druckverhältnissen π_k eine Kurve der Form b entsteht, die eine Hyperbel ist, wenn die e -Funktion durch einen Kreis approximiert wird. Sehr häufig kann also der Massenstrom einfach proportional dem Eintrittsdruck gesetzt werden, ohne daß ein Einfluß des Gegendruckes spürbar wird. — Im Sonderfall des idealen Gases lautet Gl. 11.3(21) auch

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_0} \frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}} \sqrt{\frac{T_{\alpha 0}}{T_\alpha}} E, \quad 11.3(22)$$

d.h. also, der Massenstrom ist unter sonst unveränderten Bedingungen umgekehrt proportional der Wurzel aus der absoluten Eintrittstemperatur.

Die Diagramme Abb. 11.3.4, 5 und 7 vernachlässigen alle den Einfluß des Korrekturfaktors $\bar{\mu}/\bar{\mu}_0$. Wenn man Eintrittszustand und Austrittsdruck unverändert läßt, kann der Massenstrom grundsätzlich noch durch die Drehzahl n beeinflusst werden. Dies findet seinen Ausdruck in der genannten Korrektur, die außerordentlich kompliziert, wenn auch meist nicht sehr groß ist. Nimmt man aber z.B. den Grenzfall $p_\omega = p_\alpha$, so liefert das Gesetz $\dot{m} = 0$, während in Wirklichkeit durch eine Ventilatorwirkung der Schaufelung ein Massendurchfluß zustandekommt. Die Ventilatorwirkung ist naturgemäß stark abhängig von der Gestalt der Schaufelung. Wenn auch dieser Grenzfall selten interessiert, so werden starke Abweichungen vom einfachen Kegelgesetz schon erscheinen, wenn man sich ihm nähert. Hier ist die Grenze der Gültigkeit eines universellen Durchflußgesetzes zu sehen. Über gemessene Abweichungen vgl. etwa [7].

In die Bildung von $\bar{\mu}$ geht an sich die ganze Kompliziertheit des Problems ein. Folgende Überlegung liefert indessen eine Näherung, die wohl immer dann genügt, wenn überhaupt die Bedingungen gegeben sind, die eine Anwendung eines universellen Durchflußgesetzes erlauben. Wie der Übergang von Gl. 11.3(8) zu (9) zeigt, handelt es sich um die Bildung der Summe der Größen $1/\mu^2 \Omega_2^2 \varepsilon^2$. Da aber die ersten Stufen die kleinsten Durchflußquerschnitte aufweisen, tragen sie zu dieser Summe weitaus am meisten bei, vorab die erste Stufe. Zudem ändert sich μ am Eintrittsende von Stufe zu Stufe nur wenig. Daher ist es hinreichend genau, für $\bar{\mu}$ den μ -Wert der ersten Stufe einzusetzen. Wenn Index 1 auf diese verweist, ist

$$v_1 = v_{01} \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{p_{\alpha 0} v_{\alpha 0}}{p_\alpha v_\alpha}} \quad 11.3(23)$$

die Laufzahl in einem vom Auslegungszustand 0 abweichenden Betriebszustand. Für diese liefert die Stufencharakteristik das zugehörige μ , das als Näherung für $\bar{\mu}$ verwendet wird.

Das Kegelgesetz wurde auf empirischem Wege durch *Stodola* [8] gefunden. Später folgte seine theoretische Begründung durch *Flügel* [9], der bei seiner Herleitung allerdings noch das ideale Gas voraussetzte.

11.4 Gesamtcharakteristik einer Turbinenschaufelung

Während in die Herleitung des Kegelgesetzes vereinfachende Annahmen eingehen, kommen die nachfolgenden Ausführungen mit einem Minimum an einschränkenden Voraussetzungen aus. Eine umfassende Darstellung des Betriebsverhaltens einer Turbinenschaufelung gegebener Geometrie muß dimensionslose Variable verwenden, damit deren Anzahl möglichst klein wird. Um die maßgebenden Variablen aufzufinden, wird zunächst untersucht, unter welchen Bedingungen zwei Betriebszustände in einer gegebenen Schaufelung ähnlich sind.

Ähnlichkeit zweier Strömungsfelder ist definitionsgemäß dann gegeben, wenn sich die beiden Geschwindigkeitsfelder nur um einen ortsunabhängigen Faktor unterscheiden. Bei einem bestimmten gas- oder dampfförmigen Fluid gehen dann (unter Voraussetzung eines

konstanten Isentropenexponenten) auch die beiden Druckfelder durch einen konstanten Faktor ineinander über, denn wäre es nicht so, dann wäre die Kontinuitätsgleichung verletzt. Daraus folgt aber bereits, daß Gleichheit des Druckverhältnisses $II = p_\alpha/p_\omega$ eine Bedingung dafür ist, daß zwei Betriebszustände in einer Schaufelung gegebener Geometrie ähnlich sind. Damit ist auch Gleichheit der Mach-Zahlen beider Strömungszustände für jeden herausgegriffenen Raumpunkt gesichert. Wenn I und II zwei ähnliche Betriebszustände sind, gilt also

$$II_I = II_{II}. \quad 11.4(1)$$

Ähnlichkeitstheoretisch wäre weiter die Gleichheit der Reynolds-Zahlen zu fordern. Da ihr Einfluß aber meist klein ist oder überhaupt verschwindet, möge von dieser Bedingung abgesehen werden. Gegebenenfalls wäre also nachträglich eine Korrektur beizufügen zur Berücksichtigung des Einflusses der Reynolds-Zahl.

Um eine weitere Ähnlichkeitsbedingung zu finden, mögen die Verhältnisse im ersten Leitrad untersucht werden. Dort gilt

$$\frac{c_1^2}{2} = \eta' \left[\Delta h'_s + \frac{c_0^2}{2} \right], \quad 11.4(2)$$

oder mit $c_0 = Ac_1$ auch

$$\frac{c_1^2}{2} (1 - A^2 \eta') = \eta' \Delta h'_s.$$

Nun sind aber A und η' für ähnliche Betriebszustände sicher gleich, so daß man auch setzen kann

$$c_1 = B \sqrt{\Delta h'_s}, \quad 11.4(3)$$

mit einem für beide Zustände gleichen B .

Weiter gilt

$$\Delta h'_s = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] = j_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right], \quad 11.4(4)$$

und da p_1/p_0 für ähnliche Betriebszustände gleich ist, folgt

$$c_1 = C \sqrt{j_0} = C \sqrt{j_\alpha} \quad 11.4(5)$$

mit gleichem C für die Zustände I und II . Es ist daher auch

$$\frac{c_{1I}}{c_{1II}} = \sqrt{\frac{j_{\alpha I}}{j_{\alpha II}}}. \quad 11.4(6)$$

Nun muß aber auch gefordert werden

$$w_{1I}/w_{1II} = c_{1I}/c_{1II}, \quad 11.4(7)$$

was aus kinematischen Gründen (Geschwindigkeitsdreiecke) nur möglich ist mit

$$\frac{u_{1I}}{u_{1II}} = \frac{c_{1I}}{c_{1II}} = \sqrt{\frac{j_{\alpha I}}{j_{\alpha II}}}, \quad 11.4(8)$$

für eine gegebene Maschine also

$$\frac{n_I}{n_{II}} = \sqrt{\frac{j_{\alpha I}}{j_{\alpha II}}}, \quad 11.4(9)$$

wenn n die Drehzahl bedeutet.

Die Normalenthalpie j_1 ist gegeben durch

$$j_1 = j_\alpha - \Delta h' = j_\alpha - \eta'_s \Delta h'_s = j_\alpha (1 - \eta'_s \Psi_e), \quad 11.4(10)$$

wo Ψ_e der Ausdruck in der eckigen Klammer der Gl. 11.4(4) ist und η'_s für ähnliche Betriebszustände gleich sind. Somit folgt

$$\frac{j_{\text{II}}}{j_{\text{III}}} = \frac{j_{\alpha\text{I}}(1 - \eta'_s \Psi_e)}{j_{\alpha\text{II}}(1 - \eta'_s \Psi_e)} = \frac{j_{\alpha\text{I}}}{j_{\alpha\text{II}}}. \quad 11.4(11)$$

Nun kann für das erste Laufrad die gleiche Untersuchung durchgeführt werden, wie für das erste Leitrad. Man findet, daß die Drehzahlen im Verhältnis $\sqrt{j_{\text{II}}/j_{\text{III}}}$ stehen müssen. Wegen 11.4(11) führt das wieder auf die Bedingung 11.4(9) zurück, und das gleiche findet man, wenn man von Schaufelkranz zu Schaufelkranz weiterschreitet. Demnach ist 11.4(9) die einzige Bedingung, die neben 11.4(1) noch gestellt werden muß. Man kann diese Bedingung auch schreiben

$$\frac{n_{\text{I}}}{\sqrt{j_{\alpha\text{I}}}} = \frac{n_{\text{II}}}{\sqrt{j_{\alpha\text{II}}}} \quad 11.4(12)$$

und hat mit $n/\sqrt{j_\alpha}$ die zweite maßgebende Variable neben II aufgefunden. Es mag überraschen, daß sie nicht dimensionslos ist. Das beruht darauf, daß eine Schaufelung mit festen Absolutabmessungen vorausgesetzt wurde, wie ja auch im Übergang von Gl. 11.4(8) auf (9) zum Ausdruck kommt. In konsequenter Durchführung muß eine Ähnlichkeitstheorie aber alle geometrisch ähnlichen Schaufelungen zugleich mitumfassen. Das läßt sich leicht dadurch erreichen, daß man die Variable $n/\sqrt{j_\alpha}$ noch durch ihren Wert im Auslegungspunkt dividiert, der durch Index 0 gekennzeichnet werde. So ergibt sich

$$n^* \equiv \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{j_{\alpha 0}}{j_\alpha}} \quad 11.4(13)$$

als zweite maßgebende Variable.

Von II und n^* müssen also Schaufelungswirkungsgrad und Massendurchfluß abhängen, wobei allerdings für den letzteren noch ein dimensionsloses Maß gefunden werden muß. Ähnlichkeitstheoretisch wäre z. B. das Verhältnis von \dot{m} zum kritischen Massenstrom im Eintrittsquerschnitt Ω_α beim statischen Zustand p_α, v_α ein Charakteristikum dieser Art. Dieses Verhältnis wäre mit a_α als Schallgeschwindigkeit

$$\frac{\dot{m}}{\Omega_\alpha \rho_\alpha a_\alpha} = \frac{\dot{m}}{\Omega_\alpha \rho_\alpha \sqrt{\kappa p_\alpha v_\alpha}} = \frac{\dot{m}}{\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_\alpha}{j_\alpha} \Omega_\alpha \sqrt{(\kappa - 1) j_\alpha}}.$$

Anschaulicher und zweckmäßiger ist es, diese Variable noch durch ihren Wert im Auslegungspunkt zu dividieren, was auf die Durchflußgröße

$$\Phi \equiv \frac{\dot{m} p_{\alpha 0}}{\dot{m}_0 p_\alpha} \sqrt{\frac{j_\alpha}{j_{\alpha 0}}} \quad 11.4(14)$$

führt.

So kann schließlich das Verhalten einer Turbinenschaufelung gekennzeichnet werden durch zwei Relationen der Form

$$\underline{\eta = f(II, n^*)}, \quad \underline{\Phi = F(II, n^*)}. \quad 11.4(15), (16)$$

Der Wirkungsgrad η kann dabei nach *irgendeiner* Konvention gebildet werden; er kann z. B. Stutzenverluste mitumfassen oder nicht. Die Struktur der durch diese beiden Gleichungen gegebenen Zusammenhänge wird dadurch nicht berührt. Selbstverständlich muß die genaue Definition des Wirkungsgrades im Einzelfalle angegeben werden.

Gl. 11.4(16) kann offensichtlich auch in der Form

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}} \sqrt{\frac{j_{\alpha 0}}{j_\alpha}} F(II, n^*) \quad 11.4(17)$$

geschrieben werden. Der Vergleich mit dem Kegelgesetz in seiner verallgemeinerten Form Gl. 11.3(21) zeigt, daß unter den Bedingungen der Gültigkeit jenes Gesetzes gilt

$$\Phi = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} E. \tag{11.4(18)}$$

Der Ellipsenfaktor E ist von Π abhängig, während die Abhängigkeit von n^* in $\bar{\mu}$ steckt. Hier werden Bedeutung und Charakter der Φ -Funktion deutlich. Φ ist der — gegebenenfalls unter Wegfall der einschränkenden Voraussetzungen des Kegelgesetzes verallgemeinerte — Ellipsenfaktor, einschließlich der Drehzahlkorrektur.

Gl. 11.4(15) stellt einen Zusammenhang dar, wie er etwa durch die Kurvenschar Abb. 11.4.1 gegeben ist. Anstelle der Variablen Π können auch davon abgeleitete Größen verwendet werden, wie etwa

$$x = \frac{\Pi - 1}{\Pi_0 - 1}. \tag{11.4(19)}$$

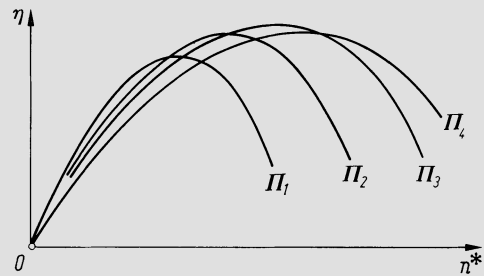


Abb. 11.4.1. Gesamte Wirkungsgradcharakteristik einer Turbinenschaufelung.

Im durch 0 gekennzeichneten Auslegungspunkt hat x stets den Wert 1. Für drei aus Stufen des gleichen Typs gebildete Schaufelungen, die für $\Pi_0 = 4, 8$ und 20 ausgelegt sind, zeigt Abb. 11.4.2 den inneren isentropen Stufenwirkungsgrad in Funktion von n^* und x . Die Verwendung von x statt Π hat hier offensichtlich den Vorteil, daß die Interpolation zwischen den drei Fällen erleichtert ist

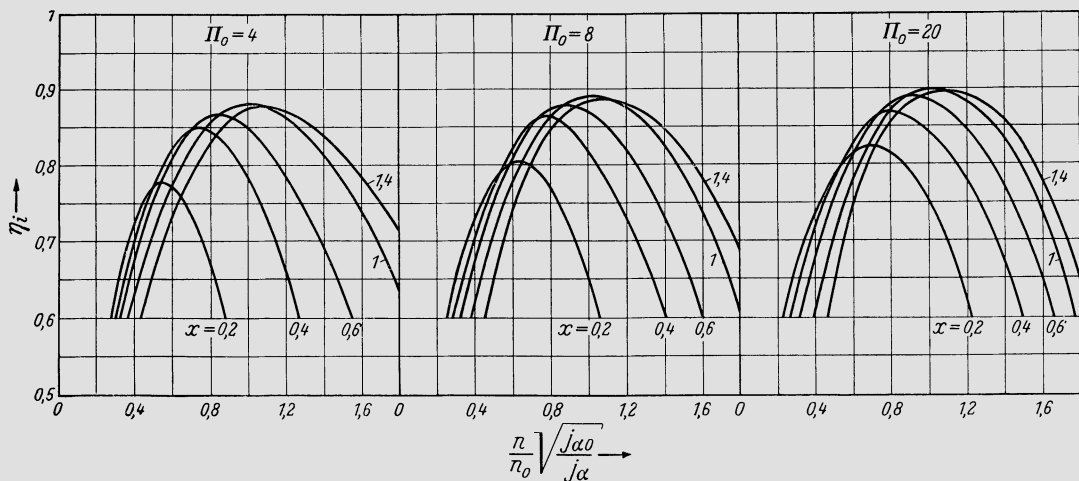


Abb. 11.4.2. Beispiel von Gesamtcharakteristiken von drei Turbinenschaufelungen, die aufgrund derselben Stufencharakteristik für drei verschiedene Druckverhältnisse Π_0 ausgelegt sind; η_i umfaßt Stutzenverluste

Abschließend sei bemerkt, daß im Falle des idealen Gases

$$n^* = \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{T_{\alpha 0}}{T_\alpha}}, \quad \Phi = \frac{\dot{m} p_{\alpha 0}}{m_0 p_\alpha} \sqrt{\frac{T_\alpha}{T_{\alpha 0}}}. \quad 11.4(20), (21)$$

Bei der Herleitung ist der ideale Dampf vorausgesetzt. Da sich die Zustandsänderungen aber von der Isentrope nicht allzuweit entfernen, gelten die Gleichungen mit hinreichender Näherung auch für allgemeinere Fälle, z. B. Naßdampf.

11.5 Nachrechnung von Betriebszuständen von Turbinen

a) Eindimensionale Verfahren

Es sei hier zunächst eine Untersuchung vorausgeschickt, die für das Verständnis des Vorgehens bei der Nachrechnung von Betriebszuständen in Turbinenschaufelungen wesentlich ist. Das Durchflußverhalten der in Abb. 11.5.1 schematisch wiedergegebenen Schaufe-

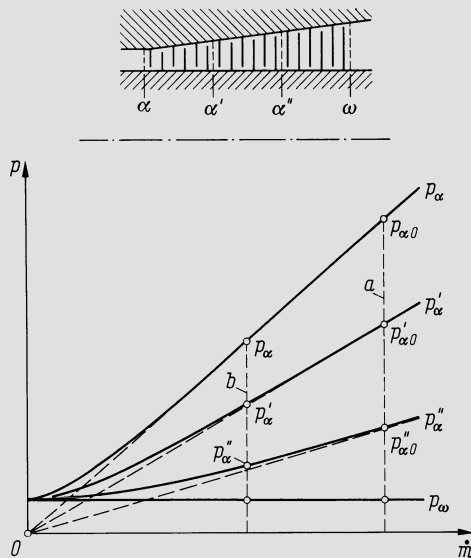


Abb. 11.5.1. Zur Veranschaulichung der Verschiebung des Druckes in Funktion des Massenstromes an den verschiedenen Stellen einer Schaufelung

lung wird wenigstens angenähert durch das Kegelgesetz beschrieben. Das gilt für die gesamte von Querschnitt α bis Querschnitt ω reichende Schaufelung, aber ebenso natürlich auch z. B. für das Teilstück zwischen α' und ω oder jenes zwischen α'' und ω . Bleiben etwa Eintrittsenthalpie und Gegendruck unverändert, so ergibt sich das Durchflußverhalten der drei Schaufelungen $\alpha\omega$, $\alpha'\omega$ und $\alpha''\omega$ durch Schnitt ihrer jeweiligen Kegel mit der Ebene $p_\omega = \text{const}$, also durch die drei in Abb. 11.5.1 angegebenen hyperbelartigen Kurven. Wenn nun die Gerade a dem Auslegungszustand entspricht, die Gerade b einem verminderten Massenstrom, so lehrt das Diagramm, daß

$$\frac{p_\alpha}{p_\alpha'} \approx \frac{p_{\alpha 0}}{p_{\alpha' 0}}, \quad \frac{p_\alpha'}{p_\alpha''} \approx \frac{p_{\alpha' 0}}{p_{\alpha'' 0}}, \quad \frac{p_\alpha''}{p_\omega} \neq \frac{p_{\alpha'' 0}}{p_\omega}.$$

Das bedeutet, daß die ersten Stufen mit fast unveränderten Druckverhältnissen und Geschwindigkeitsdreiecken arbeiten, während sich die ganzen Veränderungen auf die letzten Stufen konzentrieren.

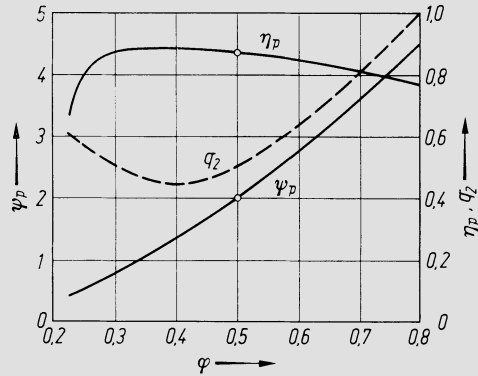
Die Nachrechnung eines geänderten Betriebszustandes läuft nun darauf hinaus, daß eine große Anzahl von Unbekannten — Geschwindigkeiten und Zustandsgrößen — aus

einem System von der entsprechenden Anzahl Gleichungen zu bestimmen ist. Da dieses hochgradig nichtlinear ist, läßt es sich nur iterativ lösen. Soll diese Rechnung stabil sein und mit kleinem Aufwand auskommen, so muß sie nach der oben angeführten Überlegung mit der letzten Stufe beginnen, da ja die Gesamtlösung auf kleinste Verschiebungen der Variablen der ersten Stufen äußerst empfindlich reagiert. Bedingungen, die man sich für die erste Stufe geben würde, könnten auch leicht physikalisch inkompatibel sein, ohne daß dies von vornherein erkennbar wäre. Die Rechnung kann basierend auf Stufencharakteristiken, Stufe für Stufe erfolgen oder aber Rad für Rad, was das universeller anwendbare, wenn auch aufwendigere Verfahren ist.

Die Nachrechnung eines Betriebszustandes anhand von *Stufencharakteristiken* basiert auf den gleichen Grundlagen, die in Bd. I, Abschn. 9.2—4 bereits für die Auslegungsrechnung gegeben wurden. Die Stufencharakteristik gibt die polytrope Druckzahl ψ_p , den polytropen Stufenwirkungsgrad η_p und die charakteristische Austrittsgeschwindigkeit q_2 in Funktion der Durchsatzzahl φ wieder und zwar für *Repetierbedingungen*, d. h. sie ist eine einparametrische Charakteristik, vgl. Abb. 11.5.2. Die Definitionen sind

$$\psi_p \equiv \frac{1}{u^2} \int_{p_2}^{p_0} v dp = \frac{y}{u^2}, \quad \varphi \equiv \frac{\dot{m}v_2}{\Omega_2 u}, \quad q_2 \equiv \frac{c_2}{u}, \quad 11.5(1)$$

Abb. 11.5.2. Beispiel einer Repetierstufencharakteristik für Stufe kleinen Reaktionsgrades. Wenn Stufenbelastung unter den Wert im Auslegungspunkt ($\psi_p = 2$) absinkt, steigt Wirkungsgrad zunächst noch an, um erst bei ganz kleiner Stufenbelastung wieder kleiner zu werden



wobei hier offengelassen werden kann, auf welchen Radius u bezogen wird. In Abschn. 9.2 wurde der Nabenradius gewählt, weil man diesen aus baulichen Gründen entweder konstanthalten oder in einfacher Weise variieren wird. Für die Nachrechnungsaufgabe ist aber auch der Euler-Radius (Definition Gl. 5.4(12), annähernd der Radius des Kreises, der die Ringfläche halbiert) praktisch, da sich bei dieser Darstellung die Charakteristiken der Stufen eines Typs für verschiedene Schauffellängenverhältnisse nur wenig unterscheiden.

Da nun eine Stufe im allgemeinen nicht unter Repetierbedingungen arbeiten wird, ist eine näherungsweise Berichtigung der Charakteristiken nötig. Die betrachtete Stufe möge mit Index i , die vorausgehende mit $i - 1$ gekennzeichnet werden. Dann lauten die maßgebenden Gleichungen:

$$\varphi_i = \frac{\dot{m}v_i}{\Omega_{2i}u_i}, \quad \bar{\varphi} = \varphi_i - \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{2} r, \quad 11.5(2), (3)$$

$$\psi_p = f_\psi(\bar{\varphi}), \quad \eta_p = f_\eta(\bar{\varphi}), \quad q_{2i} = f_q(\varphi_i), \quad 11.5(4), (5), (6)$$

$$\frac{n}{n-1} = \frac{1}{\eta_p} \frac{\kappa}{\kappa-1}, \quad y = \psi_p u_i^2 + \frac{q_{2i}^2 u_i^2 - q_{2(i-1)}^2 u_{i-1}^2}{2\eta_p}, \quad 11.5(7), (8)$$

$$j_{i-1} = j_i + \eta_p y, \quad \pi = \left[1 - \frac{\eta_p y}{j_{i-1}} \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad 11.5(9), (10)$$

$$p_{i-1} = \frac{p_i}{\pi}, \quad v_{i-1} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{j_{i-1}}{p_{i-1}}, \quad 11.5(11), (12)$$

$$\varphi_{i-1} = \frac{\dot{m}v_{i-1}}{\Omega_{2(i-1)}u_{i-1}}. \quad 11.5(13)$$

Die p_i , p_{i-1} , v_1 , v_{i-1} sind jeweils Werte am Austritt der durch den Index benannten Stufe, n ist der Polytropenexponent, r der Reaktionsgrad, π das Stufendruckverhältnis, während

$$j \equiv \frac{\kappa}{\kappa - 1} pv, \quad 11.5(14)$$

die Normalenthalpie bedeutet, die für das ideale Gas mit $c_p T$ identisch wird. — Das durch Gl. 11.5(3) bestimmte $\bar{\varphi}$ kennzeichnet einen maßgebenden mittleren φ -Wert, der etwa mittleren Bedingungen zwischen Leit- und Laufradaustrittsebene entspricht. Das Zusatzglied in Gl. 11.5(8) zur Berechnung von y berücksichtigt die Veränderung des Stufengefälles durch den Unterschied der Austrittsgeschwindigkeiten der Stufen i und $i - 1$. Mit Gl. 11.5(3) und (8) ist die oben genannte Berichtigung gegenüber dem Repetierverhalten gegeben. Die Funktionen f_ψ , f_η , f_q stellen die Stufencharakteristik dar, wie sie etwa durch Abb. 11.5.2 veranschaulicht wird; im allgemeinen unterscheidet sie sich etwas von Stufe zu Stufe. — Der Austrittszustand, der Massenstrom und die sämtlichen u_i sind gegeben. Das Rechenverfahren verwendet die angegebenen Gleichungen in der Reihenfolge der Numerierung, wobei aus jeder Gleichung die links stehende Größe bestimmt wird. Bei der ersten Durchrechnung der Stufe i wird dabei $\varphi_{i-1} = \varphi_i$ gesetzt. Am Ende des Rechnungsganges wird aus 11.5(13) ein verbessertes φ_{i-1} gefunden, womit die Rechnung wiederholt wird usw. bis genügende Übereinstimmung erzielt ist. So kann ausgehend vom Zustand am Austrittsende die Rechnung von Stufe zu Stufe weiterschreiten, bis sie schließlich den Zustand vor der ersten Stufe liefert.

Wo die durch Gl. 11.5(3) und (8) gegebenen Näherungen nicht mehr genügen — Stufen uneinheitlicher Geometrie, höhere Mach-Zahlen — muß zur *radweisen Nachrechnung* übergegangen werden. Nachfolgend wird der Satz der dann zu benutzenden Gleichungen angegeben, wiederum in der Reihenfolge ihrer Verwendung mit der aus jeder Gleichung zu bestimmenden Größe auf der linken Seite. Des besseren Verständnisses wegen sind die drei Kontrollebenen der betrachteten Stufe wie üblich mit 0, 1, 2 numeriert; bei der Durchrechnung einer mehrstufigen Schaufelung wäre eine durchlaufende Numerierung der Kontrollebenen sämtlicher Stufen notwendig.

$$w_2 = \frac{\dot{m}v_2}{k_2 \Omega_2 \sin \beta_2}, \quad 11.5(15)$$

$$\Delta h'_s = \frac{1}{2} \left[\frac{w_2^2}{\eta''} - w_1^2 + u_1^2 - u_2^2 \right], \quad \Delta h'' = \frac{1}{2} [w_2^2 - w_1^2 + u_1^2 - u_2^2], \quad 11.5(16), (17)$$

$$j_1 = j_2 + \Delta h'', \quad \pi'' = \left[1 - \frac{\Delta h'_s}{j_1} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 11.5(18), (19)$$

$$p_1 = \frac{p_2}{\pi''}, \quad v_1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{j_1}{p_1}, \quad 11.5(20), (21)$$

$$c_1 = \frac{\dot{m}v_1}{k_1 \Omega_1 \sin \alpha_1}, \quad 11.5(22)$$

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2u_1 c_1 \cos \alpha_1, \quad \sin \beta_1 = \frac{c_1}{w_1} \sin \alpha_1, \quad 11.5(23), (24)$$

$$\eta'' = f'_\eta(\beta_1, \pi''), \quad \beta_2 = f_\beta(\beta_1, \pi''), \quad k_2 = f'_k(\beta_1, \pi''), \quad 11.5(25), (26), (27)$$

$$\Delta h'_s = \frac{1}{2} \left[\frac{c_1^2}{\eta'} - c_0^2 \right], \quad \Delta h' = \frac{1}{2} (c_1^2 - c_0^2), \quad 11.5(28), (29)$$

$$j_0 = j_1 + \Delta h', \quad \pi' = \left[1 - \frac{\Delta h'_s}{j_0} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 11.5(30), (31)$$

$$p_0 = \frac{p_1}{\pi'}, \quad v_0 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{j_0}{p_0}, \quad 11.5(32), (33)$$

$$w_0 = \frac{\dot{m} v_0}{k_0 \Omega_0 \sin \beta_0}, \quad 11.5(34)$$

$$c_0^2 = w_0^2 + u_0^2 - 2u_0 w_0 \cos \beta_0, \quad \sin \alpha_0 = \frac{w_0}{c_0} \sin \beta_0, \quad 11.5(35), (36)$$

$$\eta' = f'_\eta(\alpha_0, \pi'), \quad \alpha_1 = f_\alpha(\alpha_0, \pi'), \quad k_1 = f'_k(\alpha_0, \pi'). \quad 11.5(37), (38), (39)$$

Über die Iterationsrechnung ist im einzelnen folgendes zu bemerken. Sie beginnt damit, daß in Gl. 11.5(15) ungefähre Werte von k_2 und β_2 eingesetzt werden, und auch η'' und w_1 müssen in 11.5(16) und (17) zunächst geschätzt werden. Dann läuft die Rechnung bis Gl. 11.5(27), womit diese Größen genauer bestimmt werden. Unterwegs werden in 11.5(22) k_1 und α_1 gebraucht. Dafür werden ebenfalls Näherungswerte eingesetzt, die während der ganzen Laufradrechnung unverändert gelassen werden. Ist diese abgeschlossen, so schließt die Leitradrechnung an, für die c_0 , η' , k_0 und β_0 (der relative Abströmwinkel des vorausgehenden Laufrades) angenommen werden. Erst wenn die Rechnung bei 11.5(39) angelangt ist und nun insbesondere genauere α_1 und k_1 liefert, wird auf 11.5(22) zurückgegangen, ohne daß jedoch nochmals auf die Laufradrechnung gegriffen wird. Wiederum bleiben k_0 und β_0 in 11.5(34) während der Leitraditeration fest und werden erst bei der Berechnung des vorausgehenden Laufrades verbessert. Alle diese erst nachträglich verbesserten Werte werden gespeichert. Alsdann wird die ganze Rechnung vom letzten Rade aus beginnend erneut durchgeführt unter Verwendung dieser gespeicherten Werte.

Bei der Darstellung des Rechenverfahrens sind zunächst frei endigende Schaufeln vorausgesetzt worden, wobei die Spaltverluste in die Radwirkungsgrade η' und η'' einzuschließen sind. Bei Schaufelkränzen mit Labyrinthdichtungen wäre dies nicht sinnvoll, so daß noch eine Korrektur der Zustandsänderung beizufügen ist, die folgendermaßen geschehen kann. Es ist

$$\Delta h_s = j_0 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad 11.5(40)$$

das isentrope Stufengefälle. Mit den Spaltverlustzahlen ζ'_{sp} , ζ''_{sp} und der Verlustzahl ζ_R für die Radreibung sind dann

$$j_{1*} = j_1 - \left(\zeta'_{sp} + \frac{\zeta_R}{2} \right) \Delta h_s, \quad 11.5(41)$$

$$j_{2*} = j_2 - \left(\zeta''_{sp} + \frac{\zeta_R}{2} \right) \Delta h_s \quad 11.5(42)$$

die korrigierten Werte der Enthalpien. Die spezifischen Volumina werden

$$v_{2*} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{j_{2*}}{p_2}, \quad v_{1*} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{j_{1*}}{p_1}. \quad 11.5(43), (44)$$

Gl. 11.5(44) tritt an die Stelle von 11.5(21), während 11.5(33) ersetzt wird durch die für die vorausgehende Stufe formulierte Gl. 11.5(43). In 11.5(18) ist das korrigierte j_{2*} zu verwenden, in 11.5(19) das so entstehende j_1 , aus dem erst *nach* der Berechnung von π'' das korrigierte j_{1*} nach 11.5(41) zu bilden ist; analog ist das Vorgehen für das Leitrad. Bei der ersten Durchrechnung sind die Δh_s noch nicht bekannt, so daß für die Korrekturen erste Näherungen einzuführen sind. Schon bei der zweiten Durchrechnung liegen

aber die Δh_s so genau vor, daß auch die Korrekturen als völlig genau gelten können. — Die sämtlichen empirischen Eingaben können etwa nach den Unterlagen Bd. I, Abschn. 8.4 beschafft werden, sofern nicht für die gegebene Schaufelung empirische Daten vorliegen. Verwendet man etwa diese Unterlagen nach 8.4, dann sind die Relationen 11.5(25) und (37) zu ersetzen durch

$$\eta'' = 1 - \zeta_0''(\beta_1) - z(\beta_1) \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2, \quad 11.5(25')$$

$$\eta' = 1 - \zeta_0'(\alpha_0) - z(\alpha_0) \left(\frac{c_0}{c_1} \right)^2, \quad 11.5(39')$$

wobei die ζ_0 die Verluste kennzeichnen, wie sie bei Gittern auftreten würden, die den Zuströmwinkeln angepaßt wären, während das Zusatzglied (z z. B. nach Abb. 8.4.21) den Verlust durch Falschanströmung wiedergibt. Diese Setzungen implizieren in der Tat Zusammenhänge der mit 11.5(25) und (39) angedeuteten Art, da ja (w_1/w_2) und (c_0/c_1) von π'' und π' abhängen.

Selbstverständlich lassen sich die in diesem Abschnitt angegebenen Berechnungsverfahren auch so abwandeln, daß nur mit dimensionslosen Größen gearbeitet wird, vgl. etwa [1]. Man gewinnt aber auch so nicht unmittelbar jene Darstellungsform, die interessieren wird, da die Rechnungen mit dem Austrittszustand beginnen, während die maßgebenden dimensionslosen Charakteristika wie n^* und Φ , Gl. 11.4(13) und (14), mit dem Eintrittszustand gebildet werden. Die gewünschte dimensionslose Endform läßt sich indessen auch aus den angegebenen, mit dimensionsbehafteten Größen arbeitenden Verfahren gewinnen, selbst wenn nicht nur einzelne Betriebszustände bestimmt werden sollen, sondern die Gesamtcharakteristik der Schaufelung. Die zweiparametrische Schar der Ähnlichkeitstheoretisch unterscheidbaren Betriebszustände, die diese Gesamtcharakteristik bildet, wird erhalten, wenn man z. B. bei festgehaltenem Austrittszustand \dot{m} und u_ω (Umfangsgeschwindigkeit am Austritt) unabhängig voneinander variiert. Für jedes Wertepaar u_ω, \dot{m} hat man sogleich auch die dimensionslosen Werte $U \equiv u_\omega/\sqrt{j_\omega}$, φ_ω und die Rechnung liefert die j_x/j_ω , $\Pi = p_x/p_\omega$, η . Davon ausgehend lassen sich die durch 11.4(13) und (14) definierten n^* und Φ berechnen, und zwar gilt, wie leicht zu verifizieren

$$n^* = \frac{u_\omega}{u_{\omega 0}} \sqrt{\frac{j_{\omega 0}}{j_\omega}} \sqrt{\frac{j_\omega j_{x 0}}{j_x j_{\omega 0}}}, \quad 11.5(45)$$

$$\Phi = \frac{\varphi_\omega u_\omega \Pi_0}{\varphi_{\omega 0} u_{\omega 0} \Pi} \sqrt{\frac{j_{\omega 0}}{j_\omega}} \sqrt{\frac{j_x j_{\omega 0}}{j_\omega j_{x 0}}}. \quad 11.5(46)$$

Da die mit Index 0 versehenen Auslegungsgrößen sämtlich bekannt sind, erhält man aus der Rechnung die n^* und Φ und hat damit faktisch schon die ganze Information, was man sich anhand der Abb. 11.5.3 vergegenwärtigen kann. Dort sind über φ_ω aufgetragen die Größen Π , η , Φ und n^* , wobei U Kurvenparameter ist; dem höheren Index von U entspricht der größere Wert. Einem Festwert von n^* entsprechen die Schnittpunkte A, B, C . Unter diesen findet man im Diagramm die zugehörigen Π , η und Φ , so daß man also für das fest gewählte n^* die η und Φ in Funktion von Π auftragen kann. Wiederholt man dies für mehrere n^* , so findet man die Gesamtcharakteristik, wie sie durch Gl. 11.4(15) und (16) wiedergegeben ist. Aus solchen Rechnungen läßt sich stets nur ein begrenzter Ausschnitt aus einer Gesamtcharakteristik bestimmen, da bei Betriebszuständen, die sehr weit vom Normalpunkt entfernt sind, vor allem in der letzten Stufe Strömungsbedingungen herrschen, für die man keine Unterlagen besitzt (Gitterunterlagen oder Stufencharakteristik). Es gibt Betriebszustände, wo die letzte Stufe als Gebläse arbeitet. Beispiele von Φ -Funktionen, die von *Borel* [1] für eine 50%-Reaktionsschaufelung durch reihenweise Rechnung bestimmt wurde, zeigt Abb. 11.5.4. Als Abszisse ist

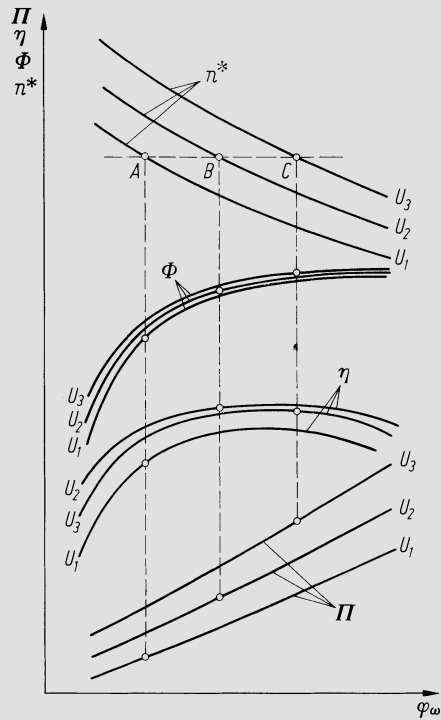


Abb. 11.5.3. Zur Übertragung der Ergebnisse einer mit der letzten Stufe beginnenden Durchrechnung einer Schaukelung in die endgültige Darstellung

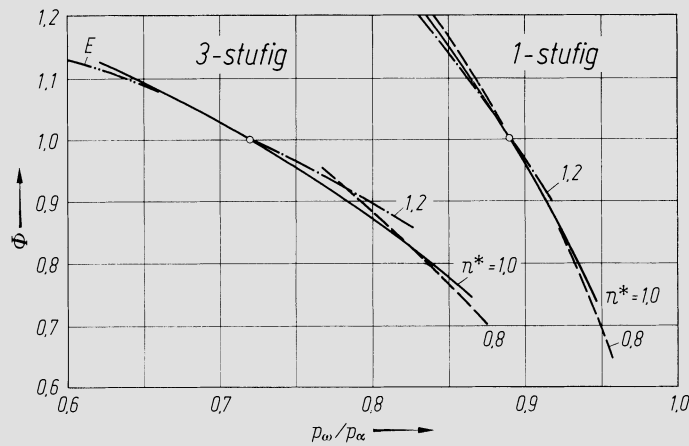


Abb. 11.5.4. Durch radweise Nachrechnung nach [1] berechnete Durchflußfunktion Φ für einstufige und dreistufige Schaukelung

dort $\Pi^{-1} = p_\omega/p_\alpha$ aufgetragen, um den Vergleich mit dem Kegelgesetz zu erleichtern. Es zeigt sich, daß die E -Funktion nach Gl. 11.3(20) von den beiden Linien $n^* = 1$ so wenig abweicht, daß der Unterschied zeichnerisch kaum darstellbar ist. Lediglich an einem Ende ist er immerhin erkennbar, vgl. die Eintragung E in Abb. 11.5.4. Die Schaukelung hat Repetierstufencharakter. — Rechnerisch bestimmte Gesamtcharakteristiken sind mehrfach angegeben worden, vgl. etwa [6, 10]. Leider wurde aber in der Regel mit Ansätzen über die Gittereigenschaften unter geänderten Betriebsbedingungen gearbeitet, die nicht voll befriedigen konnten (Berechnung eines sog. Stoßverlustes aus einer Stoßkomponente der Zuströmgeschwindigkeit).

b) Zweidimensionale Verfahren

Es kann sich als wünschenswert erweisen, die Nachrechnung von Betriebszuständen zu verfeinern, indem man zur zweidimensionalen Rechnung übergeht. Theorien der rotationssymmetrischen Strömung, die dies erlauben, existieren in großer Zahl. Da das Ziel der Untersuchung hier nur die Bestimmung integraler Größen — Wirkungsgrad und Massenstrom — ist, genügt es praktisch immer, sich auf relativ einfache Rechenverfahren zu stützen, z. B. wie nachfolgend skizziert.

Abb. 11.5.5 zeigt die Disposition mit den eingetragenen Kontrollebenen. Es ist angenommen, daß ein Diffusor vorgesehen sei. Es sei Ψ die Stokessche Stromfunktion, die so normiert wird, daß sie von 0 bis 1 läuft. Man nimmt die Ψ -Linien vorerst so an, daß

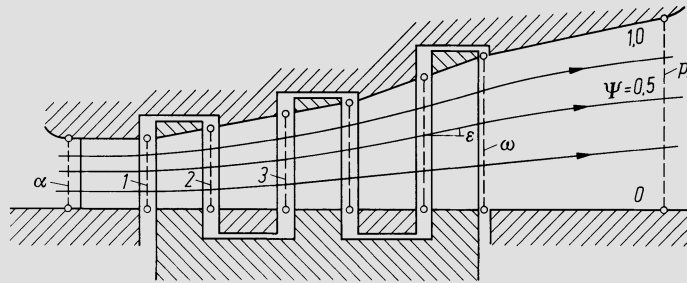


Abb. 11.5.5. Disposition und Kontrollflächen zur Durchführung der zweidimensionalen Nachrechnung einer Turbinenschaufelung

alle Kontrollflächen in Ringquerschnitte gleicher Größe eingeteilt werden. Für die mittlere Fläche $\Psi = 0,5$ wird der Betriebszustand zunächst eindimensional nachgerechnet, wie oben dargelegt. In der Ebene α ist der Totalzustand p_α^0, h_α^0 in Funktion von Ψ gegeben, und ebenso ist in der Austrittsebene des Diffusors ein konstanter statischer Druck p_A vorgeschrieben. Die Schaufelung ist dadurch gegeben, daß in den Kontrollflächen am Leitradaustritt der absolute Strömungswinkel und am Laufradaustritt der relative Strömungswinkel in Funktion von r vorgegeben sind. Die Strömungswinkel seien hier als Winkel in der radialen Projektion aufgefaßt; sie liegen also nicht in den Stromflächen. Weiter seien ε die Neigungswinkel wie in Abb. 11.5.5 dargestellt, und es wird angenommen, daß ε vom Innen- zum Außenrand stetig wächst in einer Weise, die hinreichend genau ein für allemal festgehalten werden kann.

In den Kontrollebenen am Leitradaustritt, die durch Index i gekennzeichnet seien, wird die radiale Gleichgewichtsbedingung zweckmäßig in der durch Gl. 7.3(9'') gegebenen Form benutzt und lautet dann mit c_u, c_r, c_z als Umfangskomponente, Radialkomponente und Axialkomponente

$$\frac{c_{ui}^2}{r} - c_{zi} \left[\frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} \right]_i + c_{ui} \left(\frac{\partial c_u}{\partial r} \right)_i = \left(\frac{\partial h^0}{\partial r} \right)_i - T_i \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right)_i. \quad 11.5(47)$$

Wenn man beachtet, daß

$$c_u = c_z \cot \alpha, \quad c_r = c_z \tan \varepsilon, \quad 11.5(48)$$

die in 11.5(47) auftretenden Ableitungen $\partial c_u / \partial r$ und $\partial c_r / \partial z$ bildet und einsetzt, erhält man

$$c_{zi} \frac{dc_{zi}}{dr} [1 + \cot^2 \alpha_i] + \frac{c_{zi}^2 \cot^2 \alpha_i}{r} - c_{zi} \left[\left(\frac{\partial c_z}{\partial z} \right)_i \tan \varepsilon_i + c_{zi} \left(\frac{\partial \tan \varepsilon}{\partial z} \right)_i \right] + c_{zi}^2 \cot \alpha_i \frac{d \cot \alpha_i}{dr} = \frac{dh_i^0}{dr} - T_i \frac{ds_i}{dr}. \quad 11.5(49)$$

In den durch j gekennzeichneten Kontrollebenen am Laufradaustritt benutzt man die radiale Bewegungsgleichung zweckmäßig in der Form

$$\frac{c_{ui}^2}{r} - c_{zi} \left(\frac{\partial c_r}{\partial z} \right)_i - c_{ri} \left(\frac{\partial c_r}{\partial r} \right)_i = \frac{1}{\varrho_i} \frac{dp_i}{dr}, \quad 11.5(50)$$

oder mit Einführung von 11.5(48)

$$\frac{c_{ui}^2}{r} - c_{zi} \left[\left(\frac{\partial c_z}{\partial z} \right)_i \tan \varepsilon_j + c_{zi} \left(\frac{\partial \tan \varepsilon}{\partial z} \right)_i \right] - c_{zi} \tan \varepsilon_j \left[\frac{dc_{zi}}{dr} \tan \varepsilon_j + c_{zi} \frac{d \tan \varepsilon_j}{dr} \right] = \frac{1}{\varrho_j} \frac{dp_j}{dr}. \quad 11.5(51)$$

Die wesentliche Schwierigkeit des Problems besteht darin, daß in den beiden Differentialgleichungen 11.5(49) und (51) die Ableitungen $\partial c_z / \partial z$ und $\partial \tan \varepsilon / \partial z$ auftreten. In Gl. 11.5(49) ist dies deshalb nicht von entscheidender Bedeutung, weil diese Glieder am Leitradaustritt stark zurücktreten gegen $c_{ui}^2 / r = c_z^2 \cot^2 \alpha / r$. Deshalb genügt es hier, den ganzen Ausdruck, der Ableitungen nach z enthält, als Nebenglied summarisch zu behandeln und z.B. einfach den Wert einzusetzen, der sich aus der eindimensionalen Lösung in $\Psi = 0,5$ ergibt. Am Laufradaustritt liegen die Bedingungen ungünstiger, da hier links gerade das Glied mit den Ableitungen nach z dominieren kann. Ein mögliches Vorgehen ist z.B. das folgende.

Man nimmt in erster Näherung in allen Laufradaustrittsebenen $p = \text{const}$ an. Aus Gl. 11.5(49) berechnet man für die Kontrollebene 1 den Verlauf $c_{z1}(r)$ durch numerische Integration, ausgehend vom Wert c_{zi}^* in $\Psi = 0,5$. Dabei ist dh_1^0 / dr durch die Bedingungen in Ebene α gegeben, während ds_i / dr zunächst geschätzt wird. Mit $c_{z1}(r)$ sind die Eintrittsdreiecke des ersten Rades gegeben, ebenso vermöge der Energiegleichung des Leitrades auch $p_1(r)$, so daß mit dem bekannten Austrittsdruck auch die Austrittsdreiecke und der Verlauf der Totalenthalpie $h_2^0(r)$ gerechnet werden können. Von hier aus kann in gleicher Weise weitergeschritten werden zur Ebene 3 usw. bis zur Austrittsebene ω . Der Druckumsatz im Diffusor wird beschrieben durch

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} p_\omega v_\omega \left[\left(\frac{p_A}{p_\omega} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \lambda_D \frac{c_\omega^2}{2}, \quad 11.5(52)$$

und es ist zu prüfen, ob dies mit sinnvollen Werten des Umsetzungsgrades λ_D erfüllbar ist.

Bei der nunmehr vorliegenden Näherungslösung wurde die Kontinuitätsbedingung noch nicht herangezogen. Wäre die eindimensionale Ausgangslösung streng richtig, so würde die Kontrolle erweisen, daß Kontinuität erfüllt ist. Im allgemeinen sind hier geringfügige Korrekturen notwendig. Aus den Geschwindigkeitsdreiecken ergeben sich auch die genaueren Verluste und damit die Entropieverteilung $s(r)$, die beim nächsten Rechnungsgang zu verwenden sind. Weiter liefern die Verteilungen $c_z(r)$ ein neues Meridianstromlinienbild, das stückweise z.B. durch Polynomansätze dargestellt werden kann. Damit können nun die Ableitungen nach z , insbesondere die $\partial \tan \varepsilon / \partial z$ in den Laufradaustrittsebenen bestimmt werden. Hierauf liefert die numerische Integration von 11.5(51), ausgehend von der Linie $\Psi = 0,5$ neue Verteilungen des statischen Druckes in diesen Ebenen; mit diesen wird die ganze Rechnung wiederholt usw.

Kovertenschwierigkeiten können sich einstellen infolge der iterativen Bestimmung der $p(r)$ in den Laufradaustrittsebenen. Man kann dies in folgender Weise vermeiden. Beim rechnerischen Übergang von Ebene 1 zur Ebene 3 wird in Ebene 2 gesetzt

$$\frac{p_2(r) - p_2^*}{p_2^*} = K \frac{r - r^*}{r^*}, \quad 11.5(53)$$

wo Zeichen * die Werte in $\Psi = 0,5$ kennzeichnet. Man läßt K einige Werte durchlaufen, führt die Rechnung durch wie angegeben, berechnet aus 11.5(51) $p_2(r)$ und bildet den mittleren quadratischen Fehler gegenüber 11.5(53). Das K , das diesen zu einem Minimum

macht, liefert die beste Näherung. So kann von Stufe zu Stufe weitergeschritten werden, und man ersetzt an diesem kritischen Punkt das Iterieren durch Interpolieren.

Im allgemeinen werden Ein- und Austrittsdruck am Ende dieser Rechnung nicht genau den ursprünglichen Werten entsprechen, doch kann man z. B. p_A auf den Sollwert bringen und alle anderen Druckwerte wie auch den Massenstrom proportional umrechnen.

11.6 Die Charakteristik der Verdichterstufe

Das dimensionslose Charakteristikum des Arbeitsumsatzes in einer Verdichterstufe ist nach der Eulerschen Momentengleichung gegeben durch

$$\lambda \equiv \frac{a_a}{u_2^2} = C_{u2} - U_1 C_{u1} = 1 - C_{n2} \cot \beta_2 - U_1 C_{n1} \cot \alpha_1. \tag{11.6(1)}$$

Da $\varphi = k_2 C_{n2}$, hat dieser Zusammenhang die Form

$$\lambda = 1 - \frac{\varphi}{k_2} \left[\cot \beta_2 + \frac{U_1 C_{n1}}{C_{n2}} \cot \alpha_1 \right] = 1 - A\varphi, \tag{11.6(2)}$$

wobei offensichtlich A vom Betriebszustand nur wenig abhängen wird, da aus Kontinuitätsgründen C_{n1}/C_{n2} nicht allzustark variieren kann und auch die Abströmwinkel β_2 bzw. α_1 der betreffenden Schaufelkränze sich nur wenig ändern. Je flacher die Winkel α_1 und β_2 , vgl. Abb. 11.6.1, desto größer $\cot \alpha_1$ und $\cot \beta_2$, somit der Abfall von λ mit wachsendem φ . Im Grenzfall $\beta_2 = \alpha_1 = 90^\circ$ wäre $\lambda = \text{const} = 1$. Da Druckerzeugung und spezifischer Arbeitsumsatz durch den Stufenwirkungsgrad miteinander verknüpft sind und dieser bei Entfernung vom Auslegungspunkt abnimmt, fällt der Druck bei wachsendem φ stets von einem bestimmten Wert an ab. So entstehen die Kennlinien, wie sie z. B. im Bd. I, Abb. 8.6.20, 9.12.1 und 9.16.1 und 2 dargestellt sind.

Um einen qualitativen Überblick zu gewinnen, sei der Einfachheit halber $k_2 = 1$ gesetzt. Außerdem sei beim Axialverdichter $C_{n1} = C_{n2}$ angenommen und beim Radialverdichter $\alpha_1 = 90^\circ$, d. h. Zuströmung ohne Vordrall. Dann gibt die Formel

$$\lambda = 1 - \varphi (\cot \beta_2 + \cot \alpha_1) \tag{11.6(3)}$$

beide Fälle richtig wieder, da ja beim Radialverdichter $\cot \alpha_1 = 0$. Somit ist auch

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = - (\cot \beta_2 + \cot \alpha_1) = - \frac{1 - \lambda}{\varphi}, \tag{11.6(4)}$$

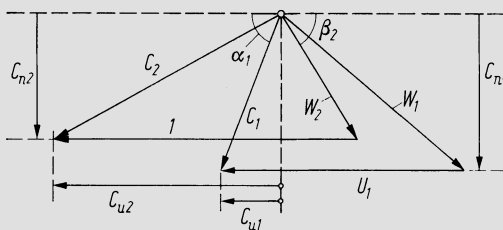


Abb. 11.6.1. Geschwindigkeitsdreiecke einer Verdichterstufe

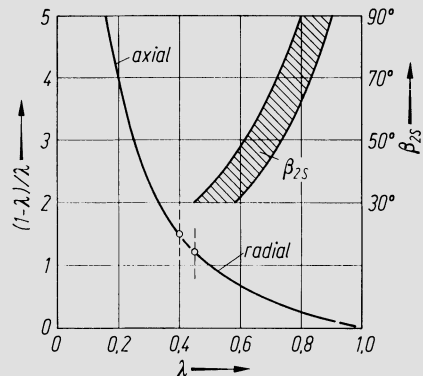


Abb. 11.6.2. Für die Steilheit der Kennlinien maßgebende Größe $(1 - \lambda)/\lambda$

wenn wir die Abströmwinkel als praktisch fest betrachten. Ein Maß für die *Steilheit* der Kennlinie ist offenbar die Größe

$$\frac{\varphi}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\varphi} = - \frac{1 - \lambda}{\lambda}, \quad 11.6(5)$$

die im *Auslegungspunkt* gebildet sei. Was in der Tat interessiert, ist die *relative* Abhängigkeit des spezifischen Arbeitsumsatzes (als Maß für die Druckerzeugung) vom Durchfluß, d.h. man muß mit φ/λ multiplizieren um eine Maßzahl zu bekommen, die den Vergleich verschiedener Fälle erlaubt. In Abb. 11.6.2 ist die Größe $(1 - \lambda)/\lambda$ dargestellt und für den Radialverdichter noch der Bereich von Laufschaufelaustrittswinkeln β_{2S} der den λ -Werten etwa zugeordnet ist. Beim Axialverdichter ist unter λ der Wert im Euler-Radius (ungefähr mittlerer Radius) zu verstehen. Das Diagramm zeigt, daß aus rein kinematischen Gründen die Kennlinien beim Axialverdichter steiler verlaufen als beim radialen. Den Zusammenhang zwischen spezifischem Arbeitsumsatz und Druckerzeugung vermittelt der Stufenwirkungsgrad. Fällt also dieser mit zunehmender Entfernung vom Auslegungspunkt rasch ab, — wie dies vor allem bei höheren Mach-Zahlen der Fall ist — so trägt dies zu einem steilen Verlauf der Kennlinie bei. So erhalten selbst Radialverdichterstufen mit 90°-Rädern bei sehr hohen Mach-Zahlen steile Charakteristiken, obwohl $(1 - \lambda)/\lambda$ dort sehr klein ist.

Zur dimensionslosen Darstellung der Gleichungen, die das Verhalten einer Stufe beschreiben, dienen zweckmäßig wieder *Crocco-Zahlen*

$$C \equiv \frac{c}{\sqrt{2j_1}}, \quad W \equiv \frac{w}{\sqrt{2j_1}}, \quad U \equiv \frac{u}{\sqrt{2j_1}}, \quad 11.6(6)$$

wobei

$$j_1 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 v_1. \quad 11.6(7)$$

Die Indices 1, 2, 3 beziehen sich auf Eintritt Laufrad, Austritt Laufrad, Austritt Diffusor (Leitrad) und die Ω sind die Ringquerschnitte, gegebenenfalls noch multipliziert mit den Cosinus der Neigungen der Meridianstromflächen gegen die Lote auf die Kontrollflächen. Die Gleichungen lauten dann

$$W_1^2 = C_1^2 + U_1^2 - 2C_1U_1 \cos \alpha_1, \quad 11.6(8)$$

$$\sin \beta_1 = \frac{C_1}{W_1} \sin \alpha_1, \quad 11.6(9)$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 = \eta_D'(W_1^2 + U_2^2 - U_1^2) - W_2^2, \quad 11.6(10)$$

$$\frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right) (1 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2) \frac{k_1 \Omega_1 \sin \beta_1}{k_2 \Omega_2 \sin \beta_2}, \quad 11.6(11)$$

$$C_2^2 = W_2^2 + U_2^2 - 2W_2U_2 \cos \beta_2, \quad 11.6(12)$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{W_2}{C_2} \sin \beta_2, \quad 11.6(13)$$

$$(1 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2) \left[\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \eta_D' C_2^2 - C_3^2, \quad 11.6(14)$$

$$\frac{C_3}{C_2} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right) \left[1 + \frac{C_2^2 + C_3^2}{1 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2} \right] \frac{k_2 \Omega_2 \sin \alpha_2}{k_3 \Omega_3 \sin \alpha_3}. \quad 11.6(15)$$

Die Gleichungen 11.6(8), (9), (12), (13) sind kinematische Beziehungen, 11.6(10) und (14) sind die Energiegleichungen von Laufrad und Diffusor, 11.6(11) und (15) die entsprechen-

den Kontinuitätsgleichungen. Die Diffusorwirkungsgrade η'_D und η''_D entsprechen den Definitionen Bd. I, Gl. 5.3(5) und (10). Die empirischen Eingaben werden durch die folgenden symbolischen Beziehungen wiedergegeben:

$$\eta''_D = f''_{\eta}(\beta_1, M_1), \quad \beta_2 = f_{\beta}(\beta_1, M_1), \quad k_2 = f''_k(\beta_1, M_1), \quad 11.6(16)$$

$$\eta'_D = f'_{\eta}(\alpha_2, M_2), \quad \alpha_3 = f_{\alpha}(\alpha_2, M_2), \quad k_3 = f'_k(\alpha_2, M_2). \quad 11.6(17)$$

Die Versperrungsgröße k_1 ist entweder identisch mit k_3 einer vorausgehenden Stufe oder kann, wenn eine solche fehlt, in Funktion von α_1 und M_1 dargestellt werden; oft ist aber dann $k_1 = 1$ genügend. M_1 und M_2 sind die mit den lokalen Schallgeschwindigkeiten gebildeten Mach-Zahlen, also

$$M_1 = \frac{w_1}{a_1} = W_1 \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}}, \quad 11.6(18)$$

$$M_2 = \frac{c_2}{a_2} = C_2 \sqrt{\frac{2}{(\kappa - 1)(1 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2)}}. \quad 11.6(19)$$

Die durch Gl. 11.6(16) und (17) dargestellten Zusammenhänge können z. B. aus Gitteruntersuchungen gewonnen werden, gegebenenfalls auch aus allgemeinen Unterlagen, wie sie in Bd. I, Abschn. 8.5 und 6 angegeben sind. Beim Radialrad repräsentiert die β_2 -Gleichung die Angabe über den Minderleistungsfaktor.

Als Charakteristika von Betriebszuständen sind *Mach-Zahlen* anschaulicher als Crocco-Zahlen. Insbesondere ist

$$M_u = \frac{u_2}{a_1} = \frac{u_2}{\sqrt{(\kappa - 1)j_1}} \quad 11.6(20)$$

eine zweckmäßige Angabe; es ist

$$U_2 = M_u \sqrt{\frac{\kappa - 1}{2}}. \quad 11.6(21)$$

Mit

$$C_1 = \frac{C_{n1}U_2}{\sin \alpha_1} \quad 11.6(22)$$

können also M_u , C_{n1} , α_1 als die unabhängigen Variablen betrachtet werden, die einen Betriebszustand einer Stufe ähnlichkeiththeoretisch definieren. Sind sie gewählt, so bestimmen die Gln. 11.6(8) und (9) W_1 und β_1 , hierauf 11.6(16) und (18) η''_D , β_2 , k_2 und schließlich 11.6(10) und (11) iterativ W_2 und (p_2/p_1) . Alsdann liefern in gleicher Weise 11.6(12) und (13) C_2 und α_2 , 11.6(17) und (19) η_D , α_3 , k_3 und 11.6(14) und (15) iterativ C_3 und (p_3/p_2) . Damit sind auch das Stufendruckverhältnis (p_3/p_1) und ebenso solche Größen wie der isentrope aerodynamische Stufenwirkungsgrad

$$\eta_{sa} = \frac{(p_3/p_1)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2 + C_2^2 - C_3^2}, \quad 11.6(23)$$

oder die isentrope Druckzahl

$$\psi_s = \frac{\Delta h_s}{u_2^2} = \frac{1}{2U_2^2} \left[\left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \quad 11.6(24)$$

bekannt. Wo die Spaltverluste nicht in die Radwirkungsgrade eingeschlossen werden (Radialverdichter mit Deckscheiben) und Radreibungsverluste einen nennenswerten Betrag haben, ist η_{sa} noch nicht identisch mit dem alle Verluste umfassenden isentropen Stufenwirkungsgrad η_s . Jener ist vielmehr gegeben durch

$$\frac{1}{\eta_s} = \frac{1}{\eta_{sa}} + \zeta'_{sp} + \zeta''_{sp} + \zeta_R + \zeta_r, \quad 11.6(25)$$

wo ζ_R der Radreibungsverlust ist und ζ_r der beim Radialverdichter auftretende Verlust durch Rückströmung aus dem Diffusorraum ins Laufrad, der in Bd. I, Abschn. 8.6d erwähnt ist. Auch die charakteristischen Geschwindigkeiten

$$C_1 = C_1/U_2, \quad C_3 = C_3/U_2, \quad 11.6(26)$$

die allenfalls bei der Benutzung einer Stufencharakteristik gebraucht werden, sind bekannt. — Die Einführung der zusätzlichen Verluste als nachträgliche Korrektur nach Gl. 11.6(25) ist an sich nur eine Näherung, da ja eigentlich schon die Zustände in den Punkten 1 und 2 berichtet werden müßten, doch ist diese Feinheit im Rahmen der Genauigkeitsgrenzen einer solchen Untersuchung wohl stets vernachlässigbar.

Die systematische Variation der Parameter M_u , C_{n1} und α_1 liefert schließlich die vollständige dreiparametrische Stufencharakteristik. In der Regel ist aber α_1 fest, oder es variiert gesetzmäßig, z. B. mit C_{n1} , so daß eine zweiparametrische Charakteristik übrigbleibt. Als Variable, die den Durchfluß kennzeichnen, können auch Größen wie

$$\varphi \equiv \frac{k_2 W_2 \sin \beta_2}{U_2}, \quad \varphi_e \equiv k_1 C_{n1}, \quad 11.6(27), (28)$$

$$\varphi_1 \equiv \frac{\dot{m} v_1}{\Omega_2 u_2} = \varphi \frac{v_1}{v_2} = \varphi \frac{(p_2/p_1)}{1 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2} \quad 11.6(29)$$

eingeführt werden. Abb. 11.6.3 zeigt zwei Darstellungsformen einer Stufencharakteristik. Die Verwendung solcher Durchsatzzahlen wie φ_1 und φ_e als Abszisse hat den Vorteil, daß keine Iteration notwendig ist, da man den Eintrittszustand kennen wird. Die zunächst wenig naheliegend scheinende Definition 11.6(29) ist bei der Radialverdichterstufe zweckmäßig, weil dort vor allem die Radaustrittsbreite und damit Ω_2 eine typische Konstruktionsgröße ist. Häufig werden solche Kennliniendiagramme auch dimensionsbehaftet dargestellt, wobei als Abszisse der Massenstrom erscheint und als Kurvenparameter die Drehzahl, doch müssen solche Angaben auf einen normierten Eintrittszustand bezogen werden.

Selbstverständlich können je nach den gegebenen Bedingungen auch anders definierte Größen herangezogen werden. Für einstufige Radialverdichter bevorzugt vor allem das amerikanische Schrifttum Werte, die mit dem Totalzustand am Eintritt und dem statischen

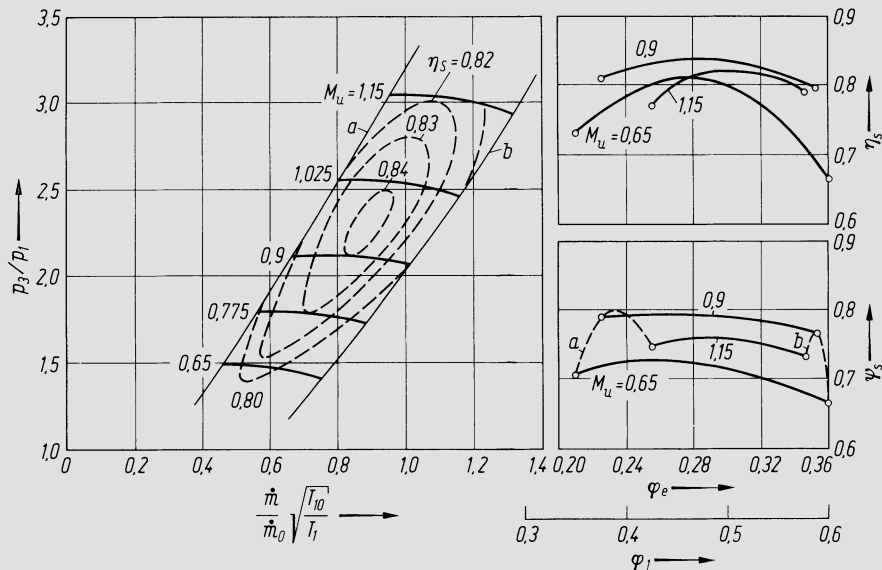


Abb. 11.6.3. Beispiel einer Charakteristik einer Radialverdichterstufe mit 90° Laufschaufelaustrittswinkel. Links: Druckverhältnis. Rechts: Druckzahl in Funktion des Durchflusses und der Mach-Zahl. a Stabilitätsgrenze, b Sperrgrenze

Austrittsdruck gebildet sind, d. h. es wird z. B. p_3/p_1^0 angegeben und entsprechend

$$\psi^{(ts)} \equiv \frac{\Delta h_s^{(ts)}}{u_2^2} = \frac{j_1^0}{u_2^2} \left[\left(\frac{p_3}{p_1^0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right], \quad 11.6(30)$$

$$\eta_s^{(ts)} \equiv \frac{\Delta h_s^{(ts)}}{h_3^0 - h_1^0} = \frac{\Delta h_s^{(ts)}}{a} = \frac{j_1^0}{a} \left[\left(\frac{p_3}{p_1^0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]. \quad 11.6(31)$$

Alle diese Größen, wie übrigens auch solche, die auf die Polytrope bezogen sind, lassen sich aus den Ergebnissen der angegebenen Rechnung leicht gewinnen.

Typisch für Verdichterstufencharakteristiken ist die Tatsache, daß gewisse Grenzen auftreten, so vor allem die *Stabilitätsgrenze*. Zwei Effekte sind in diesem Zusammenhang zu beachten. Das *Pumpen* (surge) ist ein Betriebszustand, bei dem Förderstrom und Druckerzeugung periodisch pulsieren. Bei der *rotierenden Abreißströmung* (rotating stall) wird hingegen der quasirotationssymmetrische Charakter der Strömung gestört: In einem Rad oder Schaufelkranz treten an einer oder mehreren Stellen des Umfangs Ablösungsgebiete auf, die ihre Lage stetig verändern, indem sie (vom ruhenden Beobachter aus gesehen) etwa mit der halben Umfangsgeschwindigkeit der Maschine umlaufen, und zwar im gleichen Drehsinn wie diese. — Beide Erscheinungen treten bei verminderter Durchflußmenge auf, und zwar sind folgende Arten des Verhaltens einer Verdichterstufe möglich:

1. Wird bei konstanter Drehzahl der Massenstrom immer mehr vermindert, so wird schließlich eine Grenze erreicht, wo das Pumpen einsetzt. Rotierende Abreißströmung tritt nicht auf.
2. Wird der Massenstrom wie oben vermindert, so erscheint bei Unterschreitung eines bestimmten Wertes die rotierende Abreißströmung, während die Maschine noch stetig arbeitet. Bei noch weiterer Absenkung des Massenstromes wird eine zweite Grenze erreicht, wo die Pulsation, also das Pumpen anfängt.
3. Wird der Massenstrom bei konstanter Drehzahl vermindert, so setzen bei einem gewissen Grenzwert die rotierende Abreißströmung und das Pumpen gleichzeitig ein.

Der Begriff der Stabilitätsgrenze soll hier so definiert werden, daß sie bei fester Drehzahl die kleinste Durchflußmenge kennzeichnet, bei der die nicht pulsierende, quasirotationssymmetrische Strömung noch aufrechterhalten bleibt. Sie ist die technisch wichtige Grenze, da beide Vorgänge die Betriebssicherheit gefährden und daher im Dauerbetrieb nicht zugelassen werden können. In der dimensionslosen Darstellung einer Stufencharakteristik erscheint die Stabilitätsgrenze a (Abb. 11.6.3) bei jedem M_u bei einem bestimmten Wert der Durchsatzzahl, also z. B. φ_1 .

Daneben existiert bei Verdichterstufen, die mit hoher Mach-Zahl arbeiten, auch eine *obere* Grenze für den Durchfluß, die *Sperrgrenze* oder *Stopfsgrenze* b (Abb. 11.6.3). Sie liegt dort, wo im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit erreicht wird oder allgemein gasdynamisch eine Steigerung des Massenstromes nicht mehr möglich ist (bei supersonischer Zuströmung ist die Grenze nicht die Schallgeschwindigkeit). Die maßgebende Engstelle ist beim Axialverdichter üblicherweise der Laufradeintritt, beim Radialverdichter der Diffusoreintritt mit Ausnahme des Falles des schaufellosen Diffusors.

Während die Bestimmung der Stabilitätsgrenze auf rein empirischen Angaben beruht (vgl. Abschn. 11.11), läßt sich die Sperrgrenze gasdynamisch exakt berechnen. Sie geht aus der Untersuchung der Bedingungen am Eintritt in den betreffenden Schaufelkranz bzw. in den Diffusorkanal beim Radialverdichter hervor. In die oben angegebenen Rechnungen geht sie durch die Beziehung ein, die durch Gln. 11.6(16) und (17) angedeutet sind. Für Wertepaare M_1, β_1 und M_2, β_2 , die gasdynamisch unmöglich sind, liefern jene Relationen keine Lösung, womit auch die Rechnung nicht mehr durchführbar ist.

Das Verfahren zur Nachrechnung einer Verdichterstufe ist hier in *eindimensionaler* Form angegeben worden. Wo nötig, kann man daran eine Berechnung der rotations-symmetrischen Strömung anschließen, wozu es viele Verfahren gibt. Beim Axialverdichter kann es zweckmäßig sein, im interessierenden Bereich die rotationssymmetrische Strö-

mung in der Repetierstufe nachzurechnen wie unter 7.8 gezeigt. Aus den so erhaltenen Zuströmwinkelverteilungen längs r lassen sich für die Radwirkungsgrade integrale Mittelwerte bilden, die zusammen mit den Geschwindigkeitsdreiecken in einem Bezugsradius die korrekten Verluste liefern. Diese Mittelwerte lassen sich oft mit guter Näherung auch verwenden, wenn keine Repetierbedingungen gegeben sind. — Solche Untersuchungen zeigen übrigens in der Regel, daß die Stabilitätsgrenze um so weiter vom Auslegungspunkt entfernt liegt, je höher der Reaktionsgrad und je kleiner $Y \equiv D_s/D_N$.

11.7 Die Charakteristik des mehrstufigen Verdichters

Die dimensionslosen Variablen, die den Betriebszustand eines Verdichters ähnlichkeits-theoretisch beschreiben, müssen offenbar die gleichen sein, wie für die Turbine, denn die unter 11.4 durchgeführten Überlegungen lassen sich in sinngemäßer Weise ohne weiteres auf den Verdichter übertragen. Es sind dies das *Druckverhältnis*, das hier zweckmäßig durch $\Pi = p_\omega/p_\alpha$ festgelegt wird, die durch Gl. 11.4(13) definierte *Drehzahlvariable* n^* und die durch 11.4(14) definierte *Durchflußvariable* Φ . — Beim idealen Gas, das bei der Mehrzahl der Verdichter vorliegt, nehmen die Definitionsgleichungen von n^* und Φ die Formen 11.4(20) und (21) an. —

Das Gesamtverhalten eines Verdichters könnte also in der durch die Gln. 11.4(15) und (16) angedeuteten Weise wiedergegeben werden, nur wäre diese Darstellung im Hinblick auf seine Zweckbestimmung nicht naheliegend. Anschaulich ist es, die Druck-erzeugung in Funktion von Durchfluß und Drehzahl anzugeben; die übliche Darstellungsweise ist also

$$\Pi = F(\Phi, n^*), \quad \eta = f(\Phi, n^*). \quad 11.7(1), (2)$$

Im Einzelfalle muß hier natürlich angegeben werden, wie der Wirkungsgrad η definiert ist. Auch das Druckverhältnis Π kann an sich noch verschieden festgelegt werden; es kann z. B. Druckänderungen in den Stutzen mitumfassen oder nicht. An der Struktur der Zusammenhänge ändern solche Festlegungen nichts.

Die so entstehende Gesamtcharakteristik hat die gleiche Gestalt wie die Stufencharakteristik. Abb. 11.7.1 und 2 zeigen typische Beispiele solcher Kennliniendiagramme. Insbesondere erscheinen in ihnen wieder die Grenzen, Stabilitätsgrenze und Sperrgrenze, die letztere allerdings nicht in allen Fällen, wie ja auch nicht in allen Stufencharakteristiken. Um zu einem Verständnis der Lage dieser Grenzen zu gelangen und auch zu erkennen, wo innerhalb des Stufenverbandes sie erreicht werden, sei anhand Abb. 11.7.3 eine grundsätzliche Überlegung angestellt. Vorausgesetzt wird der Übersichtlichkeit halber ein Axialverdichter, dessen Stufen so genau unter Repetierbedingungen arbeiten mögen, daß ihre Stufencharakteristiken als identisch betrachtet werden dürfen. Die maßgebende Umfangsgeschwindigkeit sei für alle Stufen gleich. Im Diagramm oben rechts ist das Verhältnis des örtlichen Ringquerschnittes Ω zum Eintrittsquerschnitt Ω_α in Funktion des axialen Strömungsweges angegeben. Aus Kontinuitätsgründen ist dies im Auslegungspunkt offenbar gleich dem Verhältnis der spezifischen Volumina v und v_α an den betreffenden Stellen. Die Durchsatzzahl im Auslegungspunkt sei φ_0 , diejenige an der Stabilitätsgrenze der einzelnen Stufe φ_s . Die zugehörigen Druckzahlen seien ψ_0 und ψ_s .

Die Diagramme stellen den Verlauf der Durchsatzzahl φ in Funktion des Strömungsweges dar, wobei insbesondere der Anfangspunkt jeder Kurve links dem Wert φ_α am Eintritt entspricht, der Punkt am anderen Ende dem Austrittswert φ_ω . Wenn nun das Druckverhältnis Π kleiner ist als im Auslegungspunkt, nimmt v längs des Weges weniger ab, d. h. φ wird zunehmen müssen, da die Abnahme des Ringquerschnittes dem Auslegungspunkt angepaßt ist. Das Umgekehrte tritt ein, wenn Π über dem Auslegungswert Π_0 liegt. Der Fall $\Pi < \Pi_0$ ist also gekennzeichnet durch eine *ansteigende*, der Fall $\Pi > \Pi_0$ durch eine *abfallende* φ -Kurve, während bei $\Pi = \Pi_0$ und nur dann $\varphi = \text{const}$

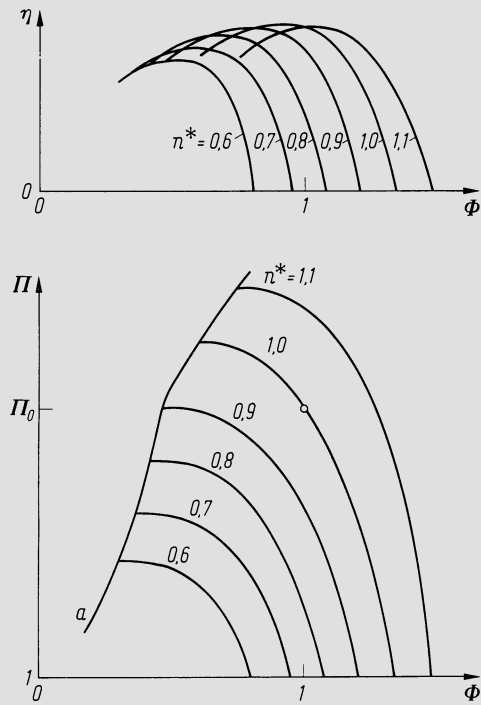


Abb. 11.7.1. Typische Gesamtcharakteristik eines mehrstufigen industriellen Radialverdichters mit rückwärtsgekrümmten Schaufeln

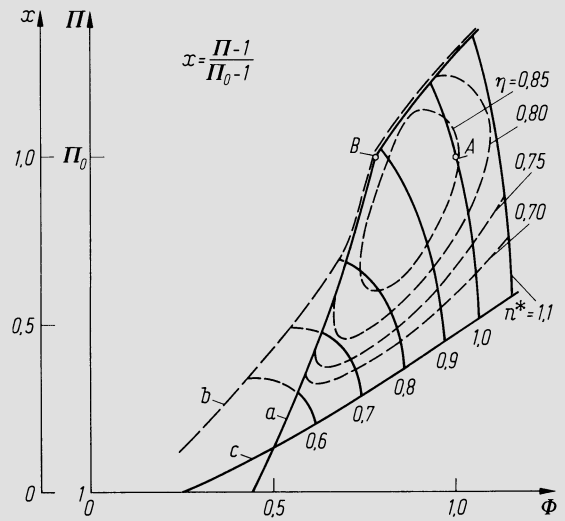


Abb. 11.7.2. Typische Gesamtcharakteristik eines mehrstufigen Axialverdichters. *a* Stabilitätsgrenze, *b* Pumpgrenze, *c* Sperrgrenze

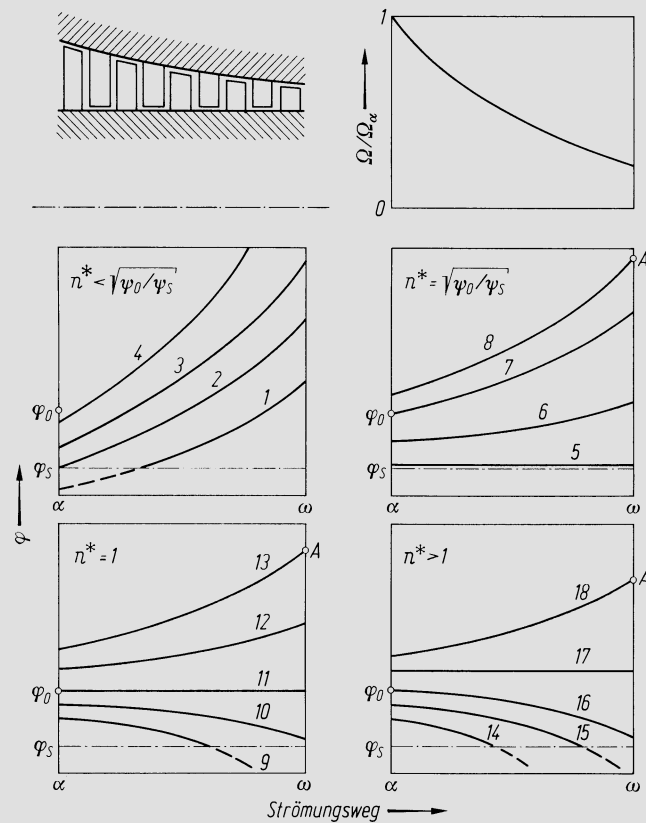


Abb. 11.7.3. Zur Veranschaulichung der Lage der Betriebszustände in den verschiedenen Stufen eines Axialverdichters unter geänderten Betriebsbedingungen. φ_S Durchsatzzahl an Stabilitätsgrenze der Einzelstufe

wird. — Der kleinste Wert der Drehzahlvariablen n^* , bei dem das Auslegungsdruckverhältnis Π_0 eben noch erreichbar ist, beträgt offenbar

$$n^* = \sqrt{\psi_0/\psi_S}, \quad 11.7(3)$$

denn wenn alle Stufen mit der Durchsatzzahl φ_S durchströmt werden, arbeiten sie alle mit ψ_S und erzeugen somit bei der angegebenen Drehzahl gerade das Druckverhältnis Π_0 . — Davon ausgehend können nun die verschiedenen Strömungszustände diskutiert werden.

Fall $n^ < \sqrt{\psi_0/\psi_S}$:* Alle φ -Kurven steigen an, da stets $\Pi < \Pi_0$. Kurve 1 entspricht $\varphi_x < \varphi_S$, d.h. die ersten Stufen arbeiten im instabilen Bereich. Mit $\varphi_x = \varphi_S$, Kurve 2, wird die Instabilität eben vermieden. Die Kurve läuft steiler, weil die Druckerzeugung kleiner ist als bei Kurve 1. Noch steiler laufen die Kurven 3 und 4, bei denen $\varphi_x > \varphi_S$. Bei hinreichend großem Durchsatz kann φ_ω derart groß werden, daß in der letzten Stufe Schallgeschwindigkeit erreicht wird (Sperrgrenze!). Oder die letzten Stufen können auch in einem Bereich arbeiten, wo ihre ψ negativ werden, d.h. sie arbeiten mit Expansion. Das kann so weit gehen, daß $p_\omega = p_x$, d.h. es resultiert keine Druckerzeugung mehr. In beiden Fällen ist eine weitere Steigerung des Durchflusses nicht mehr möglich. Dieser Fall kann z.B. bei Kurve 4 vorliegen, obwohl dort immer noch $\varphi_x < \varphi_0$.

Fall $n^ = \sqrt{\psi_0/\psi_S}$:* Ist $\varphi_x = \varphi_S$, Kurve 5, so wird dieser Wert in allen Stufen eingehalten, also sind alle Stufen an der Stabilitätsgrenze, und es entsteht $\Pi = \Pi_0$. Mit $\varphi_x > \varphi_S$ wird Π kleiner, so daß ansteigende φ -Kurven 6, 7, 8 entstehen. Kurve 7 entspricht $\varphi_x = \varphi_0$. Bei $\varphi_x > \varphi_0$ erreicht man schließlich einen Fall — z.B. Kurve 8 — wo φ_ω so groß wird, daß dort Schallgeschwindigkeit (Punkt A) erreicht wird, d.h. man stößt an die Sperrgrenze.

Fall $n^ = 1$:* Mit $\varphi_x = \varphi_0$ entsteht $\varphi = \text{const}$, $\Pi = \Pi_0$, d.h. es liegt der Normalpunkt vor, Kurve 11. Senkt man φ_x ab, so wird $\Pi > \Pi_0$, womit man abfallende φ -Kurven erhält. Kurve 10 liegt noch ganz im stabilen Bereich, wogegen bei Kurve 9 die letzten Stufen bereits im instabilen Gebiet arbeiten. Mit $\varphi_x > \varphi_0$ wird $\Pi < \Pi_0$, d.h. die φ -Kurven steigen an, Kurven 12 und 13. Bei der letzteren sei am Ende die Schallgeschwindigkeit erreicht (Punkt A) und damit die Sperrgrenze.

Fall $n^ > 1$:* Mit $\varphi_x = \varphi_0$ wird $\Pi > \Pi_0$, womit eine abfallende φ -Kurve entsteht, die aber im gezeigten Beispiel (Kurve 16) noch im stabilen Bereich bleibt. Sobald man aber φ_x absenkt, also noch größeres Π erzeugt, fallen die φ -Kurven so stark ab, daß sie mit der letzten Stufe beginnend ins instabile Gebiet reichen (Kurven 14 und 15). Weiter existiert ein Wert $\varphi_x > \varphi_0$, dessen zugeordnetes ψ die Bedingung $\psi = \psi_0/n^{*2}$ erfüllt. Dann entsteht gerade wieder $\Pi = \Pi_0$, also die Kurve 17. Bei noch größerem φ_x wird $\Pi < \Pi_0$, womit man eine ansteigende Kurve erhält. Bei Kurve 18 ist angenommen, daß am Ende — Punkt A — gerade wieder die Schallgeschwindigkeit erreicht sei. — Die φ -Werte, die dem Grenzpunkt A (Sperrgrenze) entsprechen, liegen mit zunehmenden n^* immer tiefer, da ja der ganze Geschwindigkeitspegel ansteigt.

Als Gesamtergebnis dieser Untersuchung ergibt sich also das Folgende:

$$\begin{aligned} n^* < \sqrt{\psi_0/\psi_S} & \quad \text{Instabilität geht von erster Stufe aus,} \\ n^* = \sqrt{\psi_0/\psi_S} & \quad \text{alle Stufen gleichzeitig an Stabilitätsgrenze,} \\ n^* > \sqrt{\psi_0/\psi_S} & \quad \text{Instabilität geht von letzter Stufe aus.} \end{aligned}$$

Aus diesem Grunde hat die Stabilitätsgrenze a (Abb. 11.7.2) einen Knickpunkt bei B . Dort kommen alle Stufen gleichzeitig an die Stabilitätsgrenze; darüber ist es die letzte, darunter die erste Stufe, welche die Instabilität einleitet.

Exakt gelten diese Zusammenhänge nur unter den einfachen Voraussetzungen, die ihnen zugrundeliegen. Unter allgemeinen Bedingungen werden die Erscheinungen einfach etwas

verwischter, ohne ihren Charakter aber zu verändern. Insbesondere gibt es keinen scharf ausgeprägten Eckpunkt B . Die Drehzahl, bei der etwa alle Stufen gleichzeitig an die Stabilitätsgrenze kommen, ist die tiefste Drehzahl, bei der das Auslegungsdruckverhältnis Π_0 eben noch erreicht werden kann. Abb. 11.7.4 veranschaulicht die besonderen Bedin-

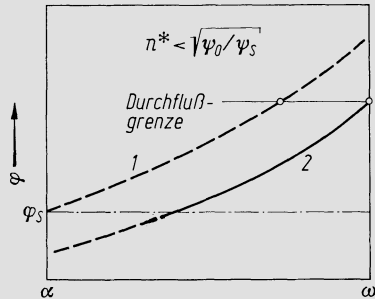


Abb. 11.7.4. Situation bei Axialverdichtern großen Druckverhältnisses, wo bei stark verminderter Drehzahl innerhalb der durch das Durchflußgesetz gegebenen Grenzen kein stabiler Betriebszustand mehr möglich ist

gungen, die eintreten, wenn ein für hohes Druckverhältnis ausgelegter Axialverdichter mit stark reduzierter Drehzahl betrieben wird. Kurve 1 entspricht dem kleinsten Durchfluß, bei dem Instabilität eben noch vermieden wird. Sie schneidet aber weiter hinten die Durchflußgrenze. Diese kann identisch sein mit der Sperrgrenze der Schaufelung oder sie kann auch dadurch bedingt sein, daß das anschließende Verbrauchssystem beim erzeugten Druck keinen höheren Durchfluß zuläßt. In beiden Fällen ist der Betriebszustand unmöglich. Der größte mögliche Durchfluß entspricht der Kurve 2, die aber die strichpunktierte angegebene Stabilitätsgrenze schneidet. Demnach ist unter diesen Bedingungen überhaupt kein regulärer Betriebszustand (weder Pumpen noch rotierendes Abreißen) möglich. — In Abb. 11.7.2 schneidet die Sperrgrenze c die Stabilitätsgrenze a , was den geschilderten Bedingungen entspricht. — In der Tat stellt das Anfahren von Axialverdichtern solche Probleme. Bei Maschinen, die für nicht allzuhohe Druckverhältnisse ausgelegt sind (Größenordnung 5) und diese Erscheinung sich auf sehr niedrige Drehzahlen beschränkt, kann man beim Anfahren die rotierende Abreibströmung zulassen, weil der Beanspruchungspegel niedrig ist. Die für hohe Druckverhältnisse ausgelegten Verdichter moderner Gasturbinen lassen sich indessen so nicht betreiben, sondern es sind Regeleinriffe notwendig, die solche Betriebszustände vermeiden, nämlich Leitschaufelverstellung und Abblasung zwischen einzelnen Stufen.

In Abb. 11.7.2 ist noch die Pumpgrenze b eingetragen, die im oberen Teil mit der Stabilitätsgrenze identisch ist, unten aber nach links von ihr abweicht. Zwischen den Kurven a und b liegt das Gebiet des rotierenden Abreißen bei stetiger Förderung. Nach unten verliert sich die Pumpgrenze schließlich, da der Strömungszustand allgemein so unruhig wird, daß ein deutliches Einsetzen des Pumpens nicht mehr beobachtet werden kann.

Die grundlegenden Zusammenhänge, die hier aus dem Verlauf der Durchflußquerschnitte Ω und der spezifischen Volumina hergeleitet wurden, gelten an sich in genau gleicher Weise auch für den *Radialverdichter*. Dort liegen aber, vor allem bei industriellen Maschinen, Stabilitätsgrenze und Sperrgrenze einzelner Stufen dank der flachen Charakteristik so viel günstiger, daß ein wesentlich weiterer Betriebsbereich entsteht. Oft liegt die Sperrgrenze außerhalb des betrieblich überhaupt in Frage kommenden Gebietes. So entstehen Gesamtcharakteristiken von dem in Abb. 11.7.1 dargestellten Typ. Häufig sind Pumpgrenze und Stabilitätsgrenze im ganzen Bereich identisch, wie dargestellt.

11.8 Der Vorgang des Pumpens, die Pumpgrenze

In Abb. 11.8.1 möge die stark ausgezogene Kurve die Kennlinie eines Verdichters für einen gegebenen Eintrittszustand des Fluides darstellen, und zwar dimensionsbehaftet, so daß die Abszisse der Massenstrom \dot{m} , die Ordinate der Austrittsdruck p ist. Die Kenn-

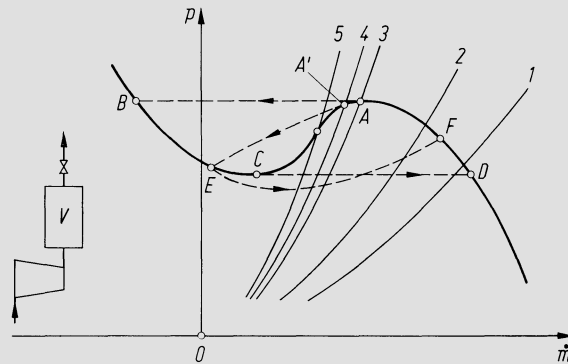


Abb. 11.8.1. Im ganzen Bereiche stetige Verdichterkennlinie (industrielle Radialverdichter mit rückwärts gekrümmten Schaufeln)

linie ist nach links fortgesetzt in das Gebiet, wo die stetige, quasirotationssymmetrische Strömung in der Maschine normalerweise gestört ist, wobei selbst negativer Massenstrom, d. h. Rückströmung mit einbezogen ist. Es ist ein stetiger Verlauf dieser Kennlinie vorausgesetzt, wie er typisch ist für gewisse industrielle Radialverdichter, vor allem solche mit schaufellosen Diffusoren. — Das Verbrauchersystem kann man sich stets ersetzt denken durch ein Volumen V und ein diesem nachgeschaltetes Drosselorgan, wie im Schema links veranschaulicht. Einer festen Stellung dieses Drosselorgans entspricht dann ein bestimmter Zusammenhang zwischen dem Druck p im Verbrauchersystem und dem Durchfluß \dot{m} durch das Drosselorgan. Die Kurven 1—5 stellen solche Verbrauchercharakteristiken (Drosselkurven) dar, sind also verschiedenen Drosselstellungen zugeordnet. Stationäre Betriebszustände werden stets durch Schnittpunkte zwischen der Verdichterkennlinie und einer Drosselkurve wiedergegeben.

Nun werde zunächst von der Voraussetzung ausgegangen, das Volumen V sei sehr groß. Die Schnittpunkte der Drosselkurven 1 und 2 entsprechen unabhängig von V Betriebszuständen mit stetigem Durchfluß, was indessen für den Schnittpunkt A zwischen Kennlinie und Drosselkurve 3 nicht mehr gilt. Denn fällt durch eine zufällige kleine Störung der Massenstrom etwas unter den Beharrungswert, so vermag der Verdichter den Druck nicht mehr zu erzeugen, der aber im Verbrauchersystem des großen Volumens wegen immer noch herrscht. Die Förderung bricht daher zusammen und der Betriebszustand springt momentan auf den durch Punkt B dargestellten (Rückströmung!). Nun entleert sich das Verbrauchersystem, womit sich der Betriebszustand allmählich von B nach C verschiebt. Da dort der Druck augenblicklich immer noch die Tendenz hat, abzufallen, springt der Betriebszustand erneut und zwar in den Punkt D . Nun wird mehr gefördert als durch das Drosselorgan abströmt, womit der Druck steigt, bis Punkt A erreicht ist und der Zyklus von neuem beginnt.

Die andere Extremannahme besteht darin, ein vernachlässigbar kleines Volumen V vorzusetzen. Dann stellt sich jederzeit verzögerungsfrei der Beharrungszustand ein. Jeder Schnittpunkt zwischen der Verdichterkennlinie und einer Drosselkurve entspricht darum einem möglichen stetigen Förderzustand, sofern nur die Steigung der Drosselkurve im Schnittpunkt steiler ist, als die der Kennlinie. Denn dann wird jede vorübergehende kleine Abweichung vom Beharrungszustand sogleich wieder rückgängig gemacht. Also auch Betriebszustände wie der Schnitt der Drosselkurve 5 mit Kennlinie sind dann möglich. Das sind übrigens die typischen Bedingungen in hydraulischen Anlagen, sofern dort alle windkesselartigen Elemente fehlen und somit praktisch keine Volumenelastizität besteht.

Weitaus am kompliziertesten ist der Fall eines Volumens V von mäßiger Größe, wo eine solche quasistatische Betrachtungsweise nicht mehr genügt. Der Vorgang muß dann

durch eine Differentialgleichung beschrieben werden. Dies ist mehrfach durchgeführt worden, sehr früh schon von *Bidard* [10], später z. B. von *Taylor* [11] und in sehr allgemeiner und strenger Form von *Horvath* [12]. Es ergibt sich, daß mit technisch sinnvollen Annahmen über V der Grenzpunkt der stetigen Förderung ganz wenig links von A zu liegen kommt, z. B. nach A' (übrigens spielt dabei nicht nur das Volumen eine Rolle, sondern auch die Struktur des Systems, das als akustischer Resonator wirken kann). Es stellt sich dann ein Pumpzyklus wie etwa $A'EFA'$ ein, eine Darstellung, die hier allerdings nur halbschematischen Charakter hat, weil zufolge der dynamischen Effekte der zeitliche Verlauf der Drucke an verschiedenen Stellen stark unterschiedlich ist.

Eine Untersuchung von *Greitzer* [34] läßt die Voraussetzung fallen, daß die stationäre Kennlinie auch dem instationären Vorgang zugrundegelegt werden dürfe und kann theoretisch Aussagen darüber machen, ob Pumpen oder rotierendes Abreißen eintritt.

Das für die Praxis wichtige Ergebnis ist aber, daß solche Grenzpunkte wie A' stets sehr nahe bei A liegen, so daß einfach das relative Maximum der Kennlinie als Pumpgrenze betrachtet werden kann mit einer ganz kleinen Sicherheitsreserve. Die Pumpgrenze ist hier also nicht durch ein besonderes Strömungsphänomen gekennzeichnet. Vielmehr liegt sie dort, wo die Verluste mit abnehmendem Förderstrom so stark zunehmen, daß die Kennlinie waagrecht wird.

Während bei [10–12] nur eine Kennlinie eingeführt wird, die das Verhalten des gesamten Verdichters kennzeichnet, führt *Yamaguchi* [35] eine verfeinerte Untersuchung durch, bei der die Kennlinie jeder Stufe eingeführt wird. Die Stufen werden dabei durch Trennflächen angenähert, und die Dynamik der Zwischenräume wird in die Rechnung einbezogen, d. h. der Verdichter selbst wird als ein akustisches System betrachtet. Dabei ergibt sich, daß bei erhöhter Drehzahl — d. h. in dem Gebiet, wo nach der Untersuchung in 11.7 die Stabilitätsgrenze in den letzten Stufen überschritten wird — das Gesamtsystem instabil werden kann, obwohl es nach der einfachen Überlegung noch stabil sein sollte, d. h. in Punkten rechts von A in Abb. 11.8.1.

Abb. 11.8.2 zeigt eine *gebrochene Kennlinie*, bestehend aus zwei nicht ineinander übergehenden Kurvenästen a und b , wobei a den regulären Betriebszuständen entspricht. Solche Kennlinien sind typisch für Axialverdichter oder auch für Radialverdichter mit geschaukelten (oder sonstwie in Einzelkanäle unterteilten) Diffusoren, bei denen die Zuströmgeschwindigkeiten zum Diffusor die Größenordnung der Schallgeschwindigkeit erreichen. Das Abbrechen des regulären Kurvenastes bei A ist beim Radialverdichter verursacht durch den Zusammenbruch des Druckumsatzes im Diffusor. Beim Axialverdichter entsteht es durch ein rotierendes Abreißen, das sich über die volle Schaufelhöhe erstreckt.

Kurven 1 und 2 sind wiederum zwei Drosselkurven. Bei Kurve 2 wird offensichtlich das Pumpen eingeleitet und zwar unabhängig vom Volumen des Verbrauchersystems. Bei sehr großem Volumen entsteht ein Pumpzyklus der Art $ABCD A$, bei kleinem etwa

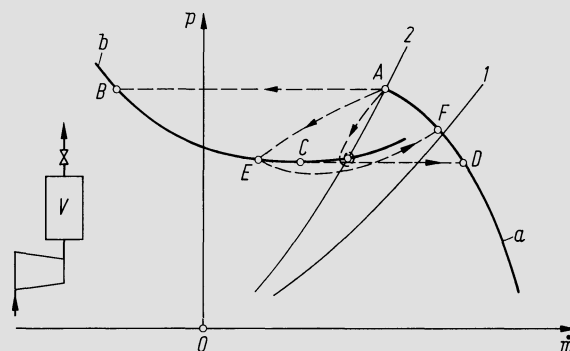


Abb. 11.8.2. Aus zwei nicht zusammenhängenden Ästen bestehende Verdichterkennlinie (z. B. Axialverdichter)

AEFA. An der Pumpgrenze ändert sich nichts, doch wird die Pumpfrequenz um so höher, je kleiner das Volumen. Nur bei verschwindend kleinem Volumen V springt der Betriebszustand auf einen neuen Beharrungspunkt, den Schnittpunkt der Drossellinie 2 mit dem Kurvenast b .

In [13] und [14] wird über Versuche an einem einstufigen Radialverdichter berichtet, bei denen auch im regulären Bereich unabhängig vom Betriebszustand eine ständige Oszillation des Förderstromes beobachtet wurde, die etwa $\pm 8\%$ betrug und eine Frequenz von rd. 10 s^{-1} aufwies. Die Autoren führen dies auf eine akustische Schwingung des Systems zurück, äußern aber die Vermutung, daß solche Schwingungen in der Praxis die Regel seien. Allerdings gelang es nicht, eine solche selbsterregte Schwingung aus der gemessenen Kennlinie theoretisch zu erklären. Es wird gefolgert, daß die effektive Pumpgrenze um den Amplitudenwert des Förderstromes weiter links liege als allgemein angenommen wird; wird sie bei dieser Pendelung einmal zufällig leicht überschritten, so setzt das Pumpen ein. Demnach würde eine genaue Voraussage der Pumpgrenze eine Berechnung dieser akustischen Schwingung verlangen. Allerdings scheint ihre Amplitude vor allem von der Drosselcharakteristik abzuhängen. Trifft dies aber zu, so läßt sich empirisch ebensogut eine Aussage über den Mittelwert des Massenstromes an der Pumpgrenze machen, wie über den effektiven Minimalwert. Dieser Mittelwert ist es, der technisch interessiert. — Über Stabilitätskriterien vgl. die Ausführungen unter 11.11.

11.9 Rotierende Abreißströmung

Das rotierende Abreißen ist anscheinend durch *Whittle* erstmals an Vorsatzläufern von Radialverdichtern entdeckt worden, ist aber vor allem beim Axialverdichter von Bedeutung. Die naheliegendste Erklärung, die für das Phänomen gegeben werden kann, ist die folgende (vgl. auch [15]). Steigert man den Anstellwinkel, mit dem man ein gegebenes Verzögerungsgitter anströmt, so setzt irgendwo die Ablösung ein. Die Querschnittsversperrung durch die so entstehenden Totwassergebiete hat zur Folge, daß die Strömung schon vor dem Gitter ausweicht. Im Beispiel Abb. 11.9.1 wird also das Profil 1 durch dieses Ausweichen noch ungünstiger angeströmt, während die Zuströmrichtung zum Profil 2 wieder günstiger wird. Folglich wird jetzt Profil 1 ablösen, während Profil 2 wieder regulär zu arbeiten beginnt. So wandert die Ablösung, indem sie von Schaufel zu Schaufel fortschreitet. — Theoretische Ansätze zur Vorausberechnung einer solchen Strömung an einem einzelnen Schaufelkranz sind mehrfach versucht worden, vgl. [15–18]. Sie zeigen, daß mehrere Mechanismen existieren, die auf solche umlaufende Störungen führen, so daß also die Erklärung nach Abb. 11.9.1 weder zwingend noch erschöpfend ist. Keine der Theorien befriedigt aber quantitativ. Sie vermögen auch die Umlaufgeschwindigkeit nicht korrekt vorauszuberechnen, die etwa die Hälfte der Umfangsgeschwindigkeit beträgt. Die Betrachtung eines einzelnen Schaufelkranzes, an den zwei unendliche Halbräume anschließen, idealisiert den Vorgang offenbar zu sehr.

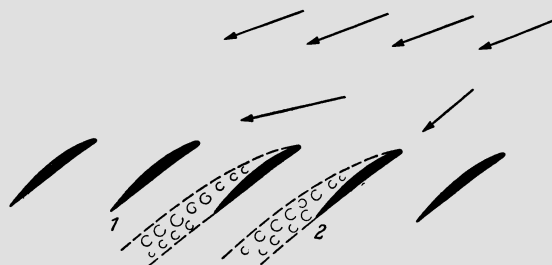


Abb. 11.9.1. Zur Erklärung des rotierenden Abreißens

Praktisch tritt das rotierende Abreißen in zwei Formen auf. In einem Falle bilden sich gleichabständig am Umfang mehrere Ablösezellen, die sich nur über einen Teil der Schaufelhöhe erstrecken, die *Teilablösung* (Abb. 11.9.2a). Bei ihrem Einsetzen fällt der Förderdruck nur wenig oder gar nicht ab. Meist liegen die Zellen außen, wie dargestellt, selten innen. Bei der zweiten Form entsteht nur eine Ablösezelle, die sich über die volle Schaufelhöhe erstreckt, die *Vollablösung* (Abb. 11.9.2b). Dabei fällt der Förderdruck stark ab. —

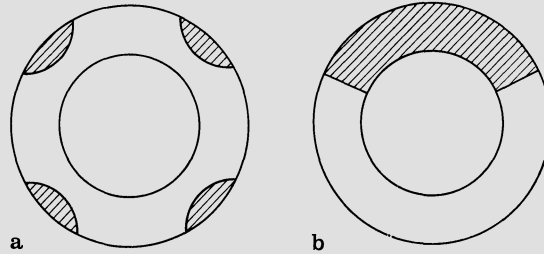


Abb. 11.9.2. Konfiguration der Zellen beim rotierenden Abreißen: a) Mehrere Zellen, Teilablösung; b) eine Zelle, Vollablösung

Abb. 11.9.3 zeigt mögliche Arten des Verhaltens. Im Falle a tritt an der Stabilitätsgrenze *A* die Teilablösung auf, verbunden mit einem leichten Druckabfall auf *B*. Vermindert man den Massenstrom \dot{m} weiter und gelangt so nach *C*, so erfolgt der Umschlag zur Vollablösung mit Druckabfall auf *D*. Steigt \dot{m} wieder an, so bewegt man sich zunächst weiterhin auf Kurvenast *c* (Vollablösung). Erst in *E* springt der Zustand zurück zur Teilablösung, d. h. Kurve *b*. — Bei der Situation nach Abb. 11.9.3b tritt an der Stabilitätsgrenze *A* sogleich die Vollablösung auf, verbunden mit starkem Druckabfall auf *B*. Wird \dot{m} wieder erhöht, so verschwindet das rotierende Abreißen im Punkt *C*, wobei der Betriebszustand wieder regulär wird (Kurve *a*). — Diese Diagramme haben stets zur Voraussetzung, daß ein verschwindend kleines Verbrauchervolumen anschließe, oder andere, regulär arbeitende Stufen.

Durch Day et al. [19] ist ein einfaches Gedankenmodell vorgeschlagen worden, das zu einem besseren Verständnis dieser Zusammenhänge führen soll². Vereinfachend wird *Inkompressibilität* des Fluids vorausgesetzt und angenommen, daß sich eine in der ersten Stufe bildende Ablösungszelle unverändert durch alle Stufen fortsetze. Abb. 11.9.4 veranschaulicht die Verhältnisse in einer vierstufigen Schaufelung, oben in schematischer Abwicklung die Stufen 1–4 und die Abreißzelle *a* in einer augenblicklichen Lage, unten den Verlauf der Drücke. Da in der Abreißzelle ein sehr kleiner Durchsatz auftritt, staut sich an ihrem Anfang praktisch verlustfrei ein statischer Druck p_x auf, der nahezu gleich dem Totaldruck p_E^0 vor der Schaufelung ist. Innerhalb der Abreißzelle steigt der Druck bis zum Austritt auf p_ω . Mit u_m als Umfangsgeschwindigkeit im Mittelkreis und z als Stufenzahl wird nun die folgende Druckzahl definiert:

$$\psi' = \frac{p_\omega - p_x}{z \rho u_m^2} = \frac{p_\omega - p_E^0}{z \rho u_m^2}. \quad 11.9(1)$$

Dabei ist u_m für alle Stufen gleich angenommen. Ist Δp der statische Druckanstieg pro Stufe in der Ablösungszelle, so ist offenbar $\psi' = \Delta p / \rho u_m^2$. Die grundlegende Hypothese der Modellvorstellung besteht nun darin, unabhängig vom Typ der Schaufelung im Falle der Teilablösung den Festwert $\psi' = 0,17$, bei Vollablösung $\psi' = 0,11$ zu setzen. Das wird durch die von den Verfassern analysierten Versuche mit hinreichend geringer Streuung bestätigt.

² Unsere Darstellung weicht von der in der Originalarbeit etwas ab, was die Substanz der Theorie nicht verändert.

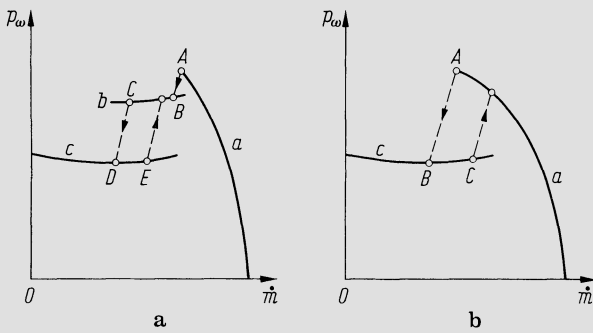


Abb. 11.9.3

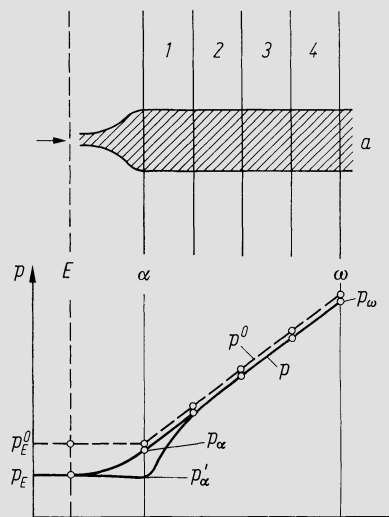


Abb. 11.9.4

Abb. 11.9.3. Instabilitätsverhalten bei rotierendem Abreißen. a) Zuerst Teilablösung, dann Übergang zur Vollablösung; b) sogleich Vollablösung

Abb. 11.9.4. Schematische Darstellung einer durch alle Stufen hindurchgehenden Ablösezone und zugehöriger Verlauf der maßgebenden Drucke

Der Druck p' im regulär durchströmten Schaufelungsteil wird einen Verlauf nehmen, wie in Abb. 11.9.4 ebenfalls dargestellt, vgl. die Eintragung p'_α am Eintritt. Er wird sich stromabwärts sehr rasch dem Totwasserdruck p angleichen (gemeint sind immer über den Umfang gemittelte Drücke). Die Ablösezellen diktieren also den Druckverlauf, und die Durchsatzgeschwindigkeit im regulär durchströmten Teil stellt sich so ein, daß dort eben die Druckerzeugung entsteht, die dem Wert ψ' entspricht. Ist Ω der Ringquerschnitt, $\Delta\Omega$ der durch die Ablösezellen versperrte Anteil, so ergibt sich aus der Durchsatzgeschwindigkeit, die durch die Druckerzeugung gegeben ist mit der Kontinuitätsgleichung der regulär durchströmte Querschnitt $\Omega - \Delta\Omega$. — Wird bei Vollablösung der Massenstrom immer weiter vermindert, so wird $\Delta\Omega$ immer größer, bis schließlich bei Nulldurchsatz der ganze Querschnitt zum Ablösungsgebiet geworden ist. Der Vorgang ist dann dem Ventilationsvorgang in einer nicht beaufschlagten Turbinenschaufelung vergleichbar. Daraus wird übrigens auch plausibel, daß ψ' von der Geometrie der Schaufelung einigermaßen unabhängig ist, denn das trifft ja auch näherungsweise zu für die Ventilationsverluste.

Weiter führt die Theorie die Versperrungsgröße

$$\lambda = \Delta\Omega/\Omega \tag{11.9(2)}$$

ein und bestimmt aus den Versuchsergebnissen einen kritischen Wert $\lambda = 0,3$. Steigt λ über diesen Wert, so tritt Vollablösung ein, fällt es unter ihn, so springt der Zustand zurück auf Teilablösung oder gar auf reguläre Strömung.

Damit lassen sich nun die Vorgänge im Verdichter verfolgen, vgl. Abb. 11.9.5. Wird im Falle a bei der Drosselkurve 1 die Stabilitätsgrenze A erreicht, so tritt rotierendes Abreißen auf und ψ' fällt mindestens auf den Wert 0,17. Ist dort $BD/CD < 0,3$, so bleibt es zunächst bei Teilablösung mit mehreren Zellen. Erst wenn $\varphi = \dot{m}v/\Omega u_m$ weiter absinkt und der Punkt E erreicht wird, wo $ED = 0,3 CD$, erfolgt der Umschlag zur Vollablösung. Der Druck fällt längs der Drosselkurve 2 zum Punkt F. Wird der Durchfluß wieder erhöht, so verschwindet die Vollablösung im Punkte G, wo $GI = 0,3 HI$. Der Betriebszustand springt im angegebenen Beispiel auf den Punkt K der regulären Kennlinie zurück, doch ist auch der Fall möglich, wo man wieder auf die Teilablösung zurückkommt.

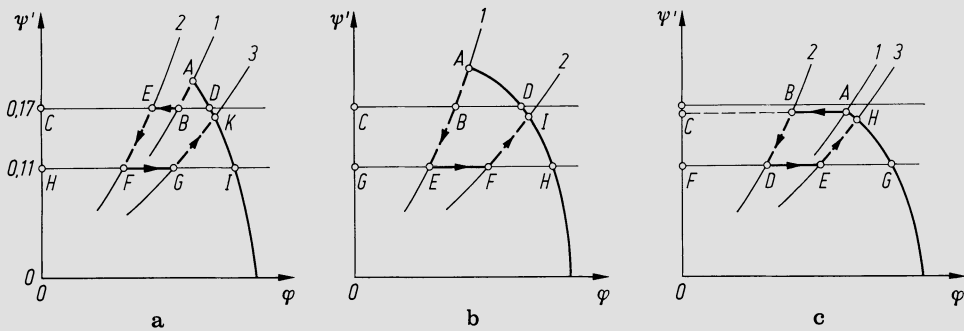


Abb. 11.9.5. Zur theoretischen Voraussage des zu erwartenden Ablösungsverhaltens

Wird im Falle b die Stabilitätsgrenze A auf der Drosselkurve 1 erreicht, so tritt sofort Vollablösung ein, d. h. der Betriebszustand springt nach E , da $BD/CD > 0,3$ und der teilabgelöste Zustand sich daher nicht halten kann. Wenn der Durchfluß wieder erhöht wird, verschwindet die Ablösung im Punkte F , wo $FH = 0,3 GH$ und man gelangt längs der Drosselkurve 2 auf Punkt I zurück.

Im Falle c schließlich hat die regulär durchströmte Schaufelung an der Stabilitätsgrenze $\psi \leq 0,17$. Dann erscheint dort die Teilablösung ohne Druckabfall, und dieser Zustand bleibt bei weiterer Mengenreduktion erhalten bis Punkt B , wo $BA = 0,3 CA$. Hier tritt die Vollablösung auf, womit der Druck auf Punkt D fällt. Bei anschließender Erhöhung des Massenstromes bleibt dieser Zustand bestehen bis E , wo $EG = 0,3 FG$. Von dort gelangt man zurück zum Punkt H , der im gezeigten Beispiel auf der regulären Kennlinie liegt, aber auch links von A liegen kann, wo man im Gebiet rotierender Teilablösung ist.

Das einfache Gedankenmodell liefert nicht nur zwanglos die Erklärung der für den Vorgang des rotierenden Abreißen so typischen Hysterese, sondern ist ganz allgemein mit den experimentellen Beobachtungen der Verfasser in guter Übereinstimmung. Die Experimente wurden indessen ausschließlich an Versuchseinheiten mit maximal 4 Stufen durchgeführt, in denen die Bedingung der Inkompressibilität praktisch erfüllt war. Der Vergleich mit den Erfahrungen an ausgeführten Maschinen läßt doch deutliche Unterschiede des Verhaltens in Erscheinung treten. Diese werden verständlich, wenn man den Einfluß der *Kompressibilität* beachtet. Läuft eine Maschine mit verminderter Drehzahl und treten nun Ablösezellen auf, so diktieren diese der ungestörten Strömung eine Druckerzeugung, die nicht genügt, um eine Volumenabnahme zu bewirken, die der Abnahme des Ringquerschnittes stromabwärts entspricht. Da aber die Durchtrittsgeschwindigkeit in der ungestörten Strömung festliegt, muß diese einen immer größeren Anteil des Ringquerschnittes in Anspruch nehmen. So entsteht eine Situation, wie sie in Abb. 11.9.6 schematisch dargestellt ist. Das Ablösegebiet wird stromabwärts zunehmend verdrängt und verschwindet im gezeigten Beispiel von Stufe 5 ab ganz. Dieses Verhalten entspricht genau der Beobachtung, z. B. *Simon* [20].

Es leuchtet ein, daß in einer Abreißzelle, die in solcher Weise stromabwärts allmählich zum Verschwinden gebracht wird, mindestens im Mittel nicht der gleiche ψ' -Wert auftritt wie im einfachen Grundfall, auf den sich das Gedankenmodell stützt; ψ' könnte wesentlich größer sein. Dann wäre im von der Ablösung betroffenen Schaufelungsteil die Situation nach Abb. 11.9.5c auch bei größerem ψ' möglich oder auch ein Fall, der ein Mittelding von c und a darstellt, nämlich eine von A nach links stetig abfallende Kurve, wie ebenfalls beobachtet. — Wenn man nun beachtet, daß noch ein regulär arbeitender Schaufelungsteil nachfolgt (in Abb. 11.9.6 von Stufe 5 an), so kann für die ganze Schaufelung eine Kennlinie entstehen, die trotz rotierenden Abreißen in den ersten Stufen immer noch nach links ansteigt.

An dem Gedankenmodell mag zunächst auch stören, daß es die sprunghaften Übergänge stets längs Drossellinien annimmt, was verschwindendes Volumen des Verbrauchers voraussetzen scheint. Es ist aber zu berücksichtigen, daß etwa im Beispiel Abb. 11.9.6 die Druck-Mengenstrom-Relation am Eintritt in Stufe 5 für die Stufen­gruppe 1–4 die Rolle der Drosselkurve übernimmt. An jener Stelle reagiert der Druck verzögerungsfrei auf Änderungen des Durchflusses.

Beachtet man diese Ergänzungen, so ist das vorgeschlagene Gedankenmodell durchaus mit einem Verhalten kompatibel, wie es bei genügend stark verminderter Drehzahl beobachtet wird, vgl. Abb. 11.9.7. An der Drosselkurve 1 wird die Stabilitätsgrenze A erreicht und es setzt rotierende Teilablösung mit z. B. 3 Zellen ein. Bei weiterer Mengenreduktion steigt die Zellenzahl bei B auf 4, bei C auf 5, alles bei einer nach links ansteigenden Gesamtkennlinie. Bei D erfolgt der Umbruch zur Vollablösung mit einer einzigen Zelle, womit die Druckerzeugung zusammenbricht. Bei verschwindend kleinem Verbrauchervolumen ist E der neue Betriebspunkt. Unter technischen Bedingungen jedoch wird in D der Pumpzyklus einsetzen.

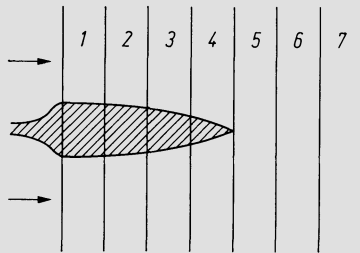


Abb. 11.9.6. Ablösezelle, die stromabwärts von der regulären Strömung zunehmend verdrängt wird

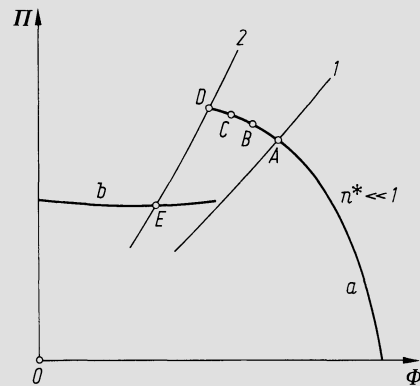


Abb. 11.9.7. Typischer Verlauf einer Kennlinie eines mehrstufigen Axialverdichters bei stark verminderter Drehzahl

11.10 Berechnung von Kennfeldern mehrstufiger Verdichter

Die Berechnung einzelner Betriebszustände und damit gegebenenfalls auch eines ganzen Kennfeldes eines mehrstufigen Verdichters kann aufgrund von *Stufencharakteristiken* erfolgen. Beim Radialverdichter kann das unter 9.17 angegebene Rechenverfahren ebensogut für die Nachrechnung eines geänderten Betriebszustandes benutzt werden, wie für die Auslegung. Beim Axialverdichter ist ein analoges Verfahren möglich, wie nachfolgend aufgezeigt. Es möge sogleich das ideale Gas vorausgesetzt werden, da dies fast allen praktischen Anwendungsfällen entspricht.

Die grundlegenden Definitionen der Kenngröße einer Stufe sind

$$\psi_p = \frac{1}{u^2} \int_{p_1}^{p_2} v dp = \frac{y}{u^2}, \quad \varphi_i = \frac{\dot{m}v_i}{\Omega_i u}, \quad q_i = \frac{c_i}{u}, \quad 11.10(1)$$

wobei Index i auf die Kontrollebenen 1–3 verweist.

Die Umfangsgeschwindigkeit u kann nach irgendeiner Konvention gebildet werden. Die c_i sind Geschwindigkeiten im Euler-Radius, auf den sich auch die Strömungswinkel beziehen. Abb. 11.10.1 veranschaulicht die Stufencharakteristik, die Repetierbedingungen vorausgesetzt, was die einparametrische Darstellung ermöglicht. Dementsprechend ist im Rechenverfahren eine Ergänzung notwendig, welche die Abweichung gegenüber den

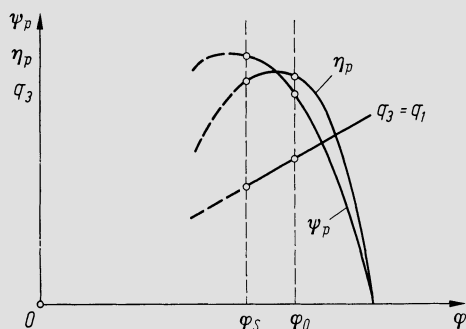


Abb. 11.10.1. Repetierstufencharakteristik eines Axialverdichters

Repetierbedingungen kennzeichnet. Die Zustandsänderung in einer Stufe wird durch die folgenden Gleichungen bestimmt, wobei Zeichen + auf die vorhergehende Stufe verweist:

$$\varphi_1 = \frac{\dot{m} R T_1}{p_1 u \Omega_1} = \frac{u^+ \varphi_3^+}{u}, \quad 11.10(2)$$

$$y = u^2 \left[\psi_p(\bar{\varphi}) + \eta_p(\bar{\varphi}) \frac{q_1^2(\varphi_1) - q_3^2(\varphi_3)}{2} \right], \quad 11.10(3)$$

$$\frac{n}{n-1} = \eta_p(\bar{\varphi}) \frac{\kappa}{\kappa-1}, \quad 11.10(4)$$

$$p_3 = p_1 \left[\frac{y}{\eta_p(\bar{\varphi}) c_p T_1} + 1 \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad 11.10(5)$$

$$T_3 = T_1 + \frac{y}{\eta_p(\bar{\varphi}) c_p}, \quad 11.10(6)$$

$$\varphi_3 = \frac{\dot{m} R T_3}{p_3 u \Omega_3}, \quad 11.10(7)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{[r \varphi_3 + (1-r) \varphi_1] \cot \beta_2 + \varphi_1 \cot \alpha_1}{\cot \beta_2 + \cot \alpha_1}. \quad 11.10(8)$$

Gln. 11.10(2) und (7) sind die Kontinuitätsbedingungen. In 11.10(3) und (4) sind die y und η_p aus der Charakteristik für den durch 11.10(8) gegebenen Wert $\bar{\varphi}$ der Durchsatzzahl einzusetzen. Damit und mit dem aus q_1 und q_3 gebildeten Zusatzglied in 11.10(3) ist die Abweichung gegenüber den Repetierbedingungen berücksichtigt. Gln. 11.10(4)–(6) schließlich legen die Zustandsänderung fest. Die Berechnung der verschiedenen Größen erfolgt in der angegebenen Reihenfolge, wobei für die erste Durchrechnung zunächst mit $\bar{\varphi} = \varphi_3 = \varphi_1$ begonnen wird, worauf iterativ genauere Werte erhalten werden, ψ_p und η_p sind für $\varphi = \bar{\varphi}$ der Stufencharakteristik zu entnehmen.

Zu diesen Relationen sind noch diejenigen beizufügen, welche die Zustandsänderungen in den Stützen festlegen. Wenn p_E, T_E die Zustandsgrößen vor Eintrittsstützen bezeichnen, p_A den Austrittsdruck, η_e und λ_D Einlaufwirkungsgrad und Diffusorumsetzungsgrad und wenn schließlich Index I und z auf die erste und letzte Stufe verweisen, so lauten die Gleichungen

$$p_{I1} = p_E \left[1 - \frac{q_{I1}^2 u_I^2}{2 c_p T_E \eta_e} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 11.10(9)$$

$$T_{I1} = T_E - \frac{q_{I1}^2 u_I^2}{2 c_p}, \quad 11.10(10)$$

$$p_A = p_{3z} \left[\lambda_D \frac{q_{3z}^2 u_z^2}{2 c_p T_{3z}} + 1 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad 11.10(11)$$

Gln. 11.10(9) und (10) legen, zusammen mit 11.10(2) und der Stufencharakteristik die Bedingungen vor dem ersten Laufrad bei gegebenen \dot{m} , p_E , T_E iterativ fest. Die Charakteristiken der einzelnen Stufen werden im allgemeinen nicht identisch sein, selbst wenn diese bis auf die Schaufelhöhe gleichartig ausgebildet sind, denn ψ_p und η_p werden durch das Schaufellängenverhältnis beeinflußt. Dies kann berücksichtigt werden, indem man z.B. die Koeffizienten der Polynome, durch die man ψ_p und η_p wiedergibt, vom Schaufellängenverhältnis abhängig läßt. In weiterer Ausgestaltung des Verfahrens können so auch weitere Effekte berücksichtigt werden wie etwa derjenige der Mach-Zahl. Auch die Behandlung von Schaufelungen, die sich aus verschiedenartigen Stufen aufbauen, bereitet keine Schwierigkeiten.

In Abb. 11.10.1 mag auffallen, daß die Kurven links von der Stabilitätsgrenze φ_S gestrichelt weitergeführt sind. Solche Fortsetzungen sind aus numerischen Gründen notwendig, damit die Rechnung nicht versagt, wenn im Laufe von Iterationen der Wert φ_S zufällig unterschritten werden sollte.

Eine detaillierte Nachrechnung eines Betriebszustandes in einem Axialverdichter entsteht durch ein *radweises Vorgehen*, wobei mit der ersten Stufe beginnend die ganze Schaufelung nach dem unter 11.6 angegebenen Verfahren nachgerechnet wird. Noch weiter gehen Methoden, die für jeden Betriebszustand die räumliche Strömung bestimmen. Ein weniger aufwendiges Verfahren besteht darin, wie unter 11.6 erwähnt, aus einer Untersuchung der rotationssymmetrischen Strömung in der Repetierstufe verbesserte Unterlagen über die mittleren Radwirkungsgrade zu gewinnen und diese in einer eindimensionalen Rechnung zu verwenden. Sehr komplizierte Rechnungen rechtfertigen sich nur, wo die empirischen Eingaben über die Verluste die hohe Genauigkeit wirklich erwarten lassen.

Systematische Durchrechnungen ganzer Kennfelder für verschiedene Varianten von Schaufelungen (z.B. verschiedene Reaktionsgrade) sind schon mehrfach durchgeführt worden, z.B. *Dittié* et al. [21]. Solche Untersuchungen zeigen, welche Auslegungsarten in den verschiedenen Anwendungen zweckmäßig sind.

11.11 Abschätzung der Stabilitätsgrenze

Unter der Stabilitätsgrenze wird die Grenze verstanden, von der an abwärts die reguläre quasirotationssymmetrische Strömung nicht mehr erhalten bleibt. Exakte Kriterien zur Bestimmung dieser Grenze besitzen wir nicht, weshalb es sich stets nur um eine Abschätzung handelt.

Bei der *Axialverdichterstufe* hat man ursprünglich, beeinflußt durch die Tragflügeltheorie, vor allem den Auftriebsbeiwert als Kriterium benutzt. Später wurden andere Kriterien in größerer Zahl vorgeschlagen, von denen sich die beiden nachfolgenden am ehesten bewährt haben:

- a) Ablösung an einem Schaufelgitter tritt ein von dem Zuströmwinkel ab, bei dem der Profilverlust das Doppelte seines Optimalwertes erreicht.
- b) Ablösung tritt bei einem kritischen Wert des Diffusionsfaktors ein, der für Lauf- und Leitrad definiert ist durch

$$D'' = \left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) + \frac{\Delta w_u}{2 \frac{s''}{t'} w_1}, \quad D' = \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right) + \frac{\Delta c_u}{2 \frac{s'}{t'} c_2}, \quad 11.11(1)$$

wobei Δw_u und Δc_u die Änderungen der Umfangskomponenten, s die Sehnenlänge, t die Teilung bedeuten. Als äußerster erreichbarer Wert von D wird 0,6 angegeben, außer an der Laufschaufelspitze, wo die Grenze etwa bei 0,4 liegt, vgl. [22].

Die Beurteilung der Stabilität verlangt indessen, daß die Stufe als Ganzes betrachtet werde. In Abb. 11.11.1 sind in den Diagrammen links die Kennlinien dargestellt für ein-

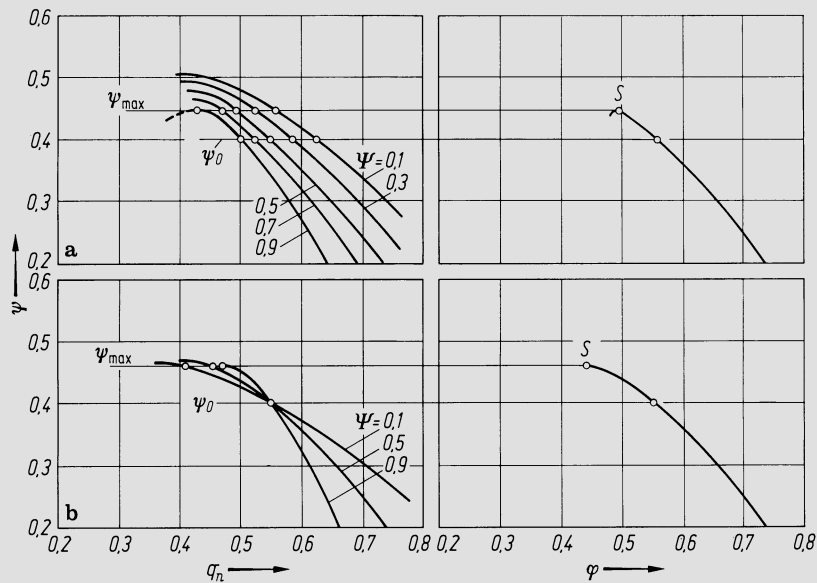


Abb. 11.11.1. Kennlinien der einzelnen Stufelemente und gesamte Stufencharakteristik von Axialverdichterstufen

zelle Stufelemente, die den Werten $\Psi = 0,1 \dots 0,9$ der Stokes'schen Stromfunktion entsprechen. Es entspricht $\Psi = 0$ der Innenwand, $\Psi = 1$ der Außenwand; $\Psi = 0,1$ und $0,9$ sind hier gewählt, um die unmittelbar wandnahen Schichten auszuschließen. Die Stufelemente können dann näherungsweise für sich betrachtet werden, d. h. gegenseitige Impuls- und Energieübertragung wird nicht berücksichtigt. Aufgetragen ist für jedes Stufelement $\psi = \Delta h_s / u^{*2}$ in Funktion von $q_n = c_{2n} / u^*$, wobei u^* die Umfangsgeschwindigkeit in einem ausgezeichneten Radius ist, z. B. im mittleren. Für jedes Stufelement läßt sich aufgrund der Gitterdaten (bei den äußeren auch der Randverluste) die entsprechende Kennlinie rechnen, wobei jeweils bei irgendeinem q_n ein Maximum erreicht wird, d. h. die Kurve hat eine waagrechte Tangente. Bei irgendeiner der Kurven liegt dieses Maximum am tiefsten, in den beiden gezeigten Beispielen für $\Psi = 0,9$, also für das äußerste Stufelement. Das ist in der Tat der häufigste Fall, da außen die Verluste bei Falschströmung besonders stark ansteigen, einerseits der höheren Mach-Zahl wegen, andererseits weil auch der Grenzwert D'' tiefer liegt. Es sei ψ_0 die Druckzahl für den Auslegungszustand, ψ_{\max} der Höchstwert, der im ‚kritischen‘ Stufelement erreicht werden kann. — Vereinfachend ist hier ψ für alle Stufelemente gleich angenommen. Das wird nahezu zutreffen müssen, wenn auch nicht genau; das wesentliche Ergebnis der Überlegungen wird dadurch nicht berührt. — Aus der Schar der Kennlinien der einzelnen Stufelemente läßt sich auch die in Abb. 11.11.1 rechts dargestellte Stufencharakteristik $\psi = f(\varphi)$ gewinnen, denn aus den q_n , die den einzelnen Ψ entsprechen, ergibt sich das integrale φ .

Ein höheres ψ als das ψ_{\max} des ungünstigsten Stufelementes läßt sich unter den gegebenen Voraussetzungen nicht erreichen, und dies legt praktisch die Stabilitätsgrenze fest. Versucht man im Falle Abb. 11.11.1a, φ unter den Wert abzusenken, der dem Punkt S entspricht, so ist dies nur in ganz geringem Ausmaß möglich, indem man sich auf dem gestrichelten Ast der Kurve $\psi = 0,9$ nach links bewegt. Auf den anderen Kurven bewegt man sich dabei wegen des abfallenden ψ nach rechts und kommt so sehr rasch an die Grenze, wo eine weitere Absenkung von φ unmöglich wird. Dies ist angedeutet durch das ganz kleine Kurvenstück links von S in Abb. 11.11.1a. — Im Beispiel Abb. 11.11.1b liegen die Verhältnisse qualitativ gleich, während quantitative Unterschiede bestehen, die sich aus dem anderen Verlauf der Kennlinien der einzelnen Stufelemente

ergeben. Im Auslegungspunkt ist hier übrigens q_n für alle Stufenelemente gleich angenommen, wie es der Wirbelflußströmung entspricht. — Stets erhält man so eine Stufenkennlinie, die im höchsten Punkt S noch eine nach rechts abfallende Tangente besitzt, was auch durch die Messung in der Regel bestätigt wird. Alle bei [19] angegebenen gemessenen Kennlinien zeigen dies, aber auch die Meßergebnisse von *Smith* [36], die zu den maßgebendsten gehören dürften, haben zumeist diesen Charakter. Daß auch andere Fälle möglich sind, wird verständlich aus der Tatsache, daß vereinfachende Annahmen gemacht wurden (Stufenelemente voneinander unabhängig, alle ψ gleich), wenn man noch beachtet, daß schon im Falle b eine sehr flache Tangente entsteht. Bei ausgeführten Maschinen scheint die Tangente im Punkt S so gut wie immer nach rechts abzufallen.

Wenn man nun aber ein φ erzwingt, das kleiner ist als es mit den gegebenen Kennlinien kompatibel wäre, dann ist keine reguläre Lösung mehr möglich, und dies ist das Einsetzen der Instabilität. Die Stufenelemente, die noch nicht an ihrer Grenze angelangt sind, haben die Tendenz, dem kritischen Stufenelement eine Druckerhöhung aufzuzwingen, die größer ist als dort erzeugt werden kann. Deshalb bricht dort die Strömung zusammen. In einem Teil des Querschnittes geht der Durchfluß praktisch auf Null, und der in diesem Teil sich einstellende Druckanstieg wird der Durchflußströmung aufgezwungen. Die Durchtrittsgeschwindigkeit stellt sich so ein, wie es gemäß der Kennlinie dem Druckanstieg entspricht. Das ist aber genau der Mechanismus, der nach [19] für das rotierende Abreißen kennzeichnend ist, und der unter 11.9 beschrieben wurde. — Tritt die Instabilität in den letzten Stufen ein, so ist das Auftreten des rotierenden Abreißens dadurch behindert, daß die vorausgehenden Stufen das tangentiale Ausweichen der Strömung nur begrenzt zulassen. Dann werden die Seitenwandgrenzschichten sehr dick, so daß sie eigentlich Ablösungsgebiete sind, während in der Mitte das Fluid mit großer Axialgeschwindigkeit und dementsprechend reduzierter Druckerzeugung durchströmt.

Die *rechnerische Abschätzung einer Stabilitätsgrenze* kann demnach etwa wie folgt geschehen. Man hat für verschiedene Werte des Durchflusses die Geschwindigkeitsdreiecke längs des Radius zu bestimmen. Dafür existieren bekanntlich Verfahren in größerer Zahl. Das einfache Vorgehen nach Abschn. 7.7 dürfte in vielen Fällen schon genügen, da ja auch die Genauigkeit der empirischen Unterlagen begrenzt ist. Die wandnächsten Geschwindigkeitsdreiecke, die verwendbar sind, müssen Stellen reichlich außerhalb der Verdünnungsdicken der Seitenwandgrenzschichten (vgl. Angaben unter 8.5) zugeordnet sein. Die durch die Anstellwinkelfehler Δi vergrößerten Verluste sind zu berechnen wie unter 8.5. angegeben, d. h. es ist nach 8.5(33)

$$\zeta_{Dp} = \left[1 + \left(\frac{\Delta i}{\Delta i_a} \right)^n \right] \chi_R \chi_M \zeta_0 \quad 11.11(2)$$

mit $n \approx 3,0$ für $\Delta i > 0$ (Bruststoß) und $n \approx 2,6$ für $\Delta i < 0$ (Rückenstoß). Hier ist Δi_a der Anstellwinkelfehler, bei dem der Verlust das Doppelte seines Optimalwertes erreicht. Angaben darüber finden sich in Abschn. 8.5; sie entstammen allerdings Gitterversuchen, so daß ihre Übertragung besonders auf wandnahe Stufenelemente unsicher ist. Mit geeigneten Δi_a läßt sich die Empirie in die Theorie einführen. — Für das kritische Stufenelement (das äußerste oder das innerste) erhält man so die Kennlinie $\psi = f(q_n)$. Wo ihre Tangente waagrecht ist, liegt die Stabilitätsgrenze. Rechenverfahren der räumlichen Strömung, in die Verlustunterlagen integriert sind, müssen übrigens bei Unterschreitung der Stabilitätsgrenze von selbst versagen, da eine rotationssymmetrische Lösung nicht mehr existiert.

Grundsätzlich dürfte diese Abschätzung der Stabilitätsgrenze auf der sicheren Seite liegen. Das gilt auch in dem Gebiet, wo die Grenze in den letzten Stufen überschritten wird und eher die verdickten Seitenwandgrenzschichten als das rotierende Abreißen zu erwarten ist; die Stabilitätsgrenze ist dann zugleich die Pumpgrenze. In [35] wird sie durch eine akustische Untersuchung bestimmt. Das dort erhaltene Ergebnis kann man sich anhand der Abb. 11.11.2 plausibel machen. Es ist hier ein 6stufiger Verdichter an-

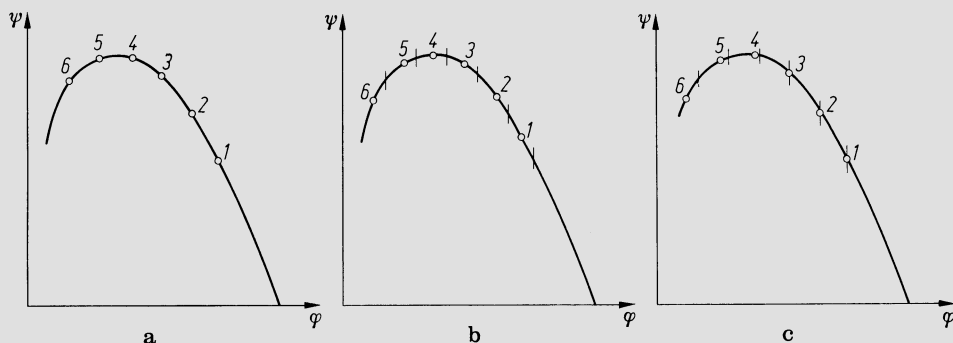


Abb. 11.11.2. Lage der Betriebspunkte der verschiedenen Stufen eines 6-stufigen Axialverdichters auf der Stufenkennlinie. a) Beharrungspunkt; b) gleiche Abweichung in allen Stufen (statisch); c) ungleiche Abweichungen (akustisch)

genommen, dessen Stufen sämtlich die gleichen Kennlinien $\psi = f(\varphi)$ haben mögen. Die Betriebspunkte der einzelnen Stufen sind durch die Nummern 1–6 angegeben. Ausgehend vom Betriebszustand a mögen, wie unter b dargestellt, alle Punkte um den gleichen Betrag nach links verschoben werden, wie es der üblichen statischen Betrachtungsweise entspricht. Dabei wird offensichtlich $\Sigma\psi$ größer als im Zustand a, was Stabilität bedeutet. Anders bei einer dynamischen (akustischen) Betrachtungsweise. Nimmt man etwa an, daß die Störung bei Stufe 6 beginnt und sich nur mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzt, so daß z. B. wie unter c gezeigt, in einem Zeitpunkt erst die Betriebszustände der Stufen 6, 5, 4 verschoben sind, so ist augenblicklich $\Sigma\psi$ kleiner als im Falle a, womit das Pumpen eingeleitet werden kann (in einem Fall der statisch noch stabil wäre). Schließt man aber nach dem angegebenen Verfahren Punkte links des Gipfels der Stufenkennlinie aus, so sind solche Fälle ohnehin vermieden.

Da im Bereich, wo die letzten Stufen an die Stabilitätsgrenze kommen Instabilität zugleich das Pumpen bedeutet, kann man dort mit Vorteil von einem empirischen Befund von *Suter* und *Späti* [23] Gebrauch machen, der nur für die Pumpgrenze gilt. Man bestimmt für eine Drehzahl nahe der Normaldrehzahl eine mittlere polytrope Druckzahl gemäß

$$\bar{\psi}_p = \frac{1}{\Sigma u^{*2}} \int_{p_x}^{p_\omega} v dp, \quad 11.11(3)$$

für denjenigen Zustand, wo die Stabilitätsgrenze erreicht wird. Dann liegt die Pumpgrenze bei allen Drehzahlen dort, wo $\bar{\psi}_p$ diesen gleichen Wert erreicht.

Das Problem der Berechnung der Stabilitätsgrenze wird dadurch zusätzlich erschwert, daß bei vielen Verdichtern schon im Auslegungspunkt die Seitenwandgrenzschichten sich gegen den Austritt hin stark verdicken, was man indessen wie unter 7.14 beschrieben vermeiden kann. Diese unzuweckmäßige Auslegung macht ganz allgemein jede rechnerische Untersuchung fragwürdig, und man liegt daher auch mit der angegebenen Methode nicht notwendig auf der sicheren Seite.

Es sei hier noch erwähnt, daß eine Überschreitung des doppelten Profilverlustes nach der negativen Seite (große φ) zwar keine Instabilität, aber Ablösung an der Druckseite hervorruft. Tritt dies in starkem Maße auf, vor allem an der Schaufelspitze oder längs des ganzen Schaufelblattes, so kann ein Flattern der Schaufeln hervorgerufen werden, was zu Ermüdungsbrüchen führt.

Bei der *Radialverdichterstufe* ist das Problem der Stabilitätsgrenze besonders kompliziert gelagert. Zunächst stellt sich die Frage, wo innerhalb der Stufe die kritischen Strömungsbedingungen herrschen. Bei Rädern mit 45° Schaufelaustrittswinkel haben w_1 und c_2 die gleiche Größenordnung. Bei 90° -Rädern ist c_2 wesentlich größer als w_1 , besonders wenn w_1 im Euler-Radius bestimmt wird. Umgekehrt ist bei Rädern mit extrem kleinem

Austrittswinkel $w_1 > c_2$. Ferner ist folgender Zusammenhang zu beachten. Wenn ein Rad mit stark verminderter Drehzahl läuft, ist die Volumenabnahme nicht annähernd so groß wie im Rechnungspunkt. Liegt dabei α_2 noch im normalen Bereich, so ist folglich β_1 schon sehr stark vermindert, d.h. man hat noch günstige Anströmung des Diffusors, während der Anströmwinkelfehler beim Laufrad schon groß ist. Umgekehrt liegen die Verhältnisse bei stark erhöhter Drehzahl. Nun ist der labilisierende Einfluß eines Strömungselementes um so größer, je größer der Anströmwinkelfehler und die umzusetzende kinetische Energie, woraus sich folgende Situation ergibt.

Bei Rädern mit extrem kleinem Schaufelaustrittswinkel (z.B. 30°) ist normalerweise das Laufrad maßgebend, bei 90° -Rädern der Diffusor. Weiter tritt bei verminderter Drehzahl der Einfluß des Laufrades stärker in Erscheinung, bei erhöhter derjenige des Diffusors.

Leider ist nun über das Stabilitätsverhalten eines Laufrades nur sehr wenig Gesichertes bekannt. Nach *Rodgers* [28] liefert am ehesten das Verhältnis \bar{w}_2/w_1 ein brauchbares Kriterium, was allerdings nur aus der Beobachtung ganzer Stufen erschlossen worden ist. Hierbei ist w_1 im Radius des Kreises zu bilden, der die Ringfläche halbiert (also praktisch Euler-Radius) während \bar{w}_2 den ausgemischten Zustand kennzeichnet. Abb. 11.11.3 zeigt die Größenordnung des Grenzwertes, der offensichtlich stark streut. — Wenn *nur* das Laufrad in den kritischen Bereich kommt, ist ein Zusammenbruch der Druckerzeugung nicht zu erwarten. Vielmehr wird das ohnehin vorhandene Totwasser mit weiter Durchflußverminderung rasch anwachsen, so daß effektiv gar nicht mehr stärker verzögert wird. Das führt zu einer Ausflachung der Kennlinie, was im Zusammenwirken mit dem Verbrauchersystem das Pumpen zur Folge hat. Es ist anzunehmen, daß die stetigen Kennlinien ohne sprunghafte Übergänge, die für viele Industrieverdichter typisch sind, dann entstehen, wenn das Laufrad der dominierende Teil ist, denn das Zentrifugalfeld hat die Tendenz, selbst die stark abgelöste Laufradströmung zu stabilisieren.

Das Stabilitätsproblem des *schaufellosen Diffusors* ist schon mehrfach untersucht worden. Der Zuströmwinkel $\alpha_2 \approx 14^\circ$ (ausgemischter Zustand) wird etwa als unterste Grenze angegeben, vgl. *Dean* [26]. Eine grenzschichttheoretische Behandlung des Problems geben *Senoo et al.* [30, 31]. Dabei wird berücksichtigt, daß am Eintritt in den Diffusor im allgemeinen asymmetrische Strömungsbedingungen (relativ zur Mittelebene) herrschen. Der radiale Druckgradient bewirkt, daß sich in den Grenzschichten eine Scherströmung einstellt. Bei genügend kleinem Strömungswinkel entsteht so ein Rückströmen in den wandnahen Zonen. Damit ist die Stabilitätsgrenze gegeben, denn das Rückströmen führt zum rotierenden Abreißen. Abb. 11.11.4 stellt auszugsweise Rechenergebnisse aus [31] dar. Es ist α_{2S} der absolute Laufrad-Abströmwinkel der ausgemischten Strömung an der Stabilitätsgrenze, M_2 die auf diese Strömung bezogene Mach-Zahl. Weiter ist c_{n2} der Mittelwert der Radialkomponente am Radaustritt und Δc_{n2} der Unterschied der Radialkomponente an beiden Diffusorwänden. Die Größe $\Delta c_{n2}/c_{n2}$ kennzeichnet also die Verzerrung des

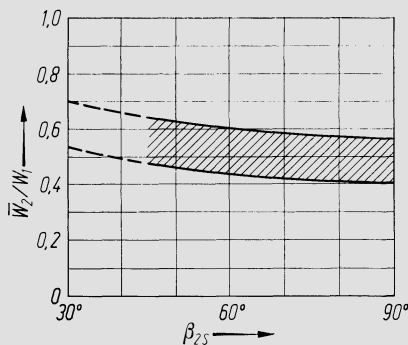


Abb. 11.11.3. Ungefähre Grenze des Verzögerungsverhältnisses w_2/w_1 in Funktion des Schaufelaustrittswinkels β_{2S} . Nach [28]

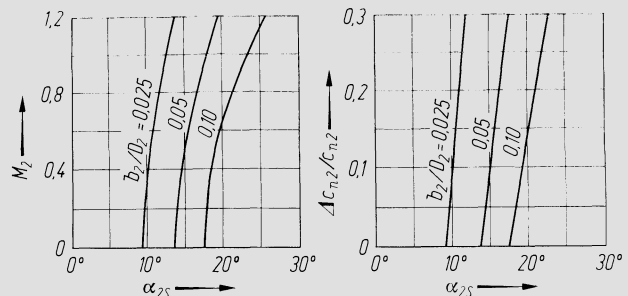


Abb. 11.11.4. Zuströmwinkel α_{2S} an der Stabilitätsgrenze eines ungeschaukelten parallelwandigen Diffusors. Nach [31]

Geschwindigkeitsprofil an Diffusoreintritt und ist offensichtlich ein wesentlicher Parameter. Das linke Diagramm gilt für $\Delta c_{n2}/c_{n2} = 0$, das rechte für $M_2 = 0$. Ein einfaches Addieren der Effekte ist übrigens bei der komplizierten Struktur der Grenzschichtgleichungen nicht streng richtig. Man erkennt, daß die Angabe 14° für nicht extrem gelagerte Fälle etwa die richtige Größenordnung trifft. Es handelt sich hier zwar um theoretische Ergebnisse, die nicht aus Maschinenversuchen stammen, doch zeigen Stichproben eine gute Übereinstimmung mit der Beobachtung; die Werte liegen eher etwas zu ungünstig. Die Angaben nach [28] hingegen sind zu optimistisch und in ihrer Tendenz unplausibel.

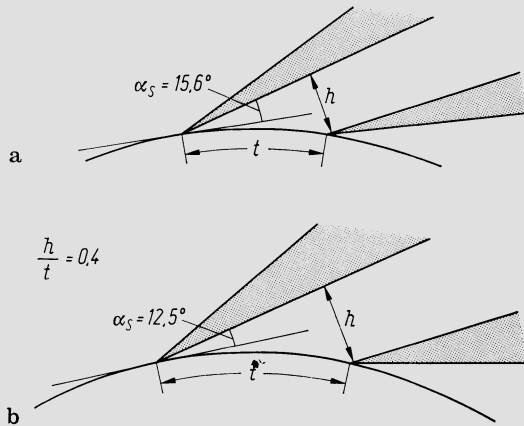


Abb. 11.11.5. Zur Wahl des Saugseiten-Flankenwinkels α_s bei geschaufelten Diffusoren

Beim *Kanaldiffusor* (geschaufelt oder anders gebildete Kanäle) ist die Druckerhöhung zwischen Radaustritt und Stelle h (Abb. 11.11.5) der begrenzende Faktor. Als kennzeichnende Größe wird im angelsächsischen Schrittm der Rückgewinnfaktor benutzt, der durch

$$C_{p2h} = \frac{p_h - p_2}{p_2^0 - p_2} \quad 11.11(4)$$

definiert ist. Dabei sind p_h und p_2 die statischen Drücke in h und am Radaustritt, p_2^0 ist der zugehörige Totaldruck. Thermodynamisch sinnvoller ist der Umsetzungsgrad

$$\lambda_{D2h} = \frac{\Delta h_{s2h}}{\bar{c}_2^2/2} = \frac{2c_p T_2 \left[\left(\frac{p_h}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]}{\bar{c}_2^2} \quad 11.11(5)$$

Dabei bezieht sich \bar{c}_2 auf den ausgemischten Zustand. Beide Größen unterscheiden sich nur wenig, vgl. die Ausführungen in Bd. I, 8.6. Nach [13] bricht die Druckerzeugung im Diffusor zusammen, wenn im Laufe der Schwankungen der Strömung C_{p2h} momentan den Wert 0,4–0,45 erreicht, denn das führt im Querschnitt h auf einen Versperrungsfaktor von etwa 0,85, was den Diffusor zum Versagen bringt. Bei Mach-Zahlen von der Größenordnung 1 bedeutet dies $\lambda_{D2h} \approx 0,45$ –0,5. Im zeitlichen Mittel kann man als *kritischen Wert*, bei dem die Stabilitätsgrenze erreicht wird, etwa $\lambda_{D2h} \approx 0,3$ –0,35 setzen, was in guter Übereinstimmung ist mit den Angaben in [26].

Diese Betrachtungsweise geht von der Vorstellung aus, daß es gleichgültig sei wie die Druckerhöhung von p_2 auf p_h zustandekommt, was indessen nach den Ergebnissen von Reeves [29] nicht zutrifft. Aus diesen geht ein maßgebender Einfluß des Saugseitenflankenwinkels α_s (Abb. 11.11.5) hervor. Daß dieser Winkel bei fest gewählten Querschnittsverhältnissen noch beeinflußt werden kann, zeigt die Gegenüberstellung von Abb. 11.11.5 a und b. In beiden Fällen ist $h/t = 0,4$, so daß beide Anordnungen insbesondere die gleiche *Sperrgrenze* aufweisen, trotzdem hat Anordnung b dank der kleinen Schaufelzahl den

kleineren Flankenwinkel. Nun sei \dot{m}_{\max} der Massenstrom an der Sperrgrenze, \dot{m}_S derjenige an der Stabilitätsgrenze, α_2 der absolute Laufradabströmwinkel der ausgemischten Strömung³ im Auslegungspunkt, M_2 die zugehörige Mach-Zahl an Diffusorscheufel-Vorderkante. Dann kann nach [29] die Größe

$$\frac{\dot{m}_{\max} - \dot{m}_S}{\dot{m}_{\max}},$$

die für eine gegebene Konfiguration direkt die Stabilitätsgrenze liefert und ein Maß für den verfügbaren Regelbereich ist, gemäß Abb. 11.11.6 in Funktion von $\alpha_s - \alpha_2$ und M_2 dargestellt werden. Das Diagramm faßt Meßergebnisse an einer Anzahl durchaus verschieden konzipierter Maschinen zusammen, deckt allerdings nicht den Mach-Zahlbereich üblicher industrieller Verdichter. Man erkennt, daß die günstigste Winkeldifferenz $\alpha_s - \alpha_2$ durchwegs etwa bei -3° liegt.

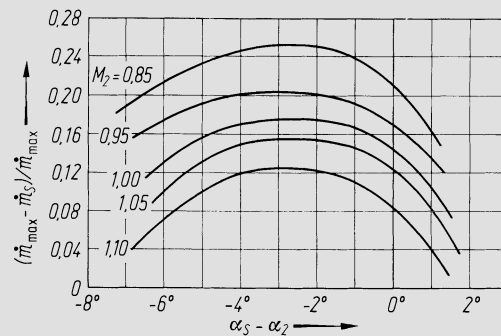


Abb. 11.11.6. Fördermengenbereich $(\dot{m}_{\max} - \dot{m}_S)/\dot{m}_{\max}$ in Funktion des Flankenwinkels α_s und der Mach-Zahl. Nach [29]

Das bedeutet, daß C_{p2h} oder λ_{D2h} allein als Stabilitätskriterium nicht ausreichen. Dean [26] bemerkt ja auch, daß bei einzelnen Kompressoren kritische C_{p2h} -Werte bis herab auf 0,2 festgestellt wurden. Das wird verständlich, wenn dort α_s unzuweckmäßig gewählt war. Der angegebene Richtwert $\lambda_{D2h} \approx 0,3-0,35$ setzt also zweckmäßiges α_s voraus.

Eine Erweiterung des stabilen Betriebszustandes läßt sich nach Pampreen [32] bei geeigneter Anordnung erreichen, wenn der Diffusor als Tandem-Kreisgitter ausgebildet wird. Das dürfte darauf beruhen, daß eine Verschlechterung der Grenzschichtbedingungen am Eintritt sich nur auf die erste Schaufelreihe auswirkt, nicht auf den ganzen Diffusor.

Literatur zu Kap. 11

1. Borel, J. P.: Untersuchung über das Durchflußverhalten von Turbinen. Diss. ETH Zürich 1975.
2. Roeder, A.: Experimentelle Bestimmung der Einzelverluste einer einstufigen Versuchsturbine. Mitt. Inst. f. Therm. Turbomasch. Nr. 15, Zürich 1969.
3. Utz, C.: Experimentelle Untersuchung der Strömungsverluste in einer mehrstufigen Axialturbine. Mitt. Inst. f. Therm. Turbomasch. Nr. 19, Zürich 1972.
4. Spengler, P.: Experimentelle Bestimmung der Strömungsverluste an einer einstufigen Axialturbine kleinen Reaktionsgrades. Diss. ETH Zürich 1977.
5. Linnecken, H.: Die Mengendruckgleichung für eine Turbinen-Stufengruppe. Brennst. Wärme Kraft 9 (1957) 53.
6. Cordes, G.: Strömungstechnik der gasbeaufschlagten Axialturbine. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1963.
7. Isogai, M.; Fujisawa, M.; Yoshii, H.: Experimental Gas Turbine of Mitsubishi Nippon Heavy-Industries Ltd. Congrès International des Machines à Combustion, Colloque 1957, Zürich.

³ Eigentlich genau an der Leitschaufeleintrittskante.

8. *Stodola, A.*: Dampf- und Gasturbinen, 5. Aufl. Berlin: Springer 1922.
9. *Flügel, G.*: Das Gesetz der Ellipse bei Dampfturbinen. Stodola-Festschrift, Zürich 1929.
10. *Bidard, R.*: La stabilité de régime des compresseurs. Ass. Tech. Marit. et. Aeron. Bulletin, Juin 1946.
11. *Taylor, E. S.*: The Centrifugal Compressor: Aerodynamics of Turbines and Compressors, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Princeton: Univ. Press 1960.
12. *Horváth, A. J. T.*: Der Pumpvorgang von Verdichtern und Kreiselpumpen als nichtlineare Schwingung. Zürich: Juris-Verlag 1976.
13. *Toyama, K.*; *Rundstadler, P. W.*; *Dean, R. C.*: An Experimental Study of Surge in Centrifugal Compressors: Centrifugal Compressor and Pump Stability, Stall and Surge. ASME, New York 1976.
14. *Dean, R. C.*; *Young, L. R.*: The Time Domain in Centrifugal Compressor and Pump Stability and Surge: Centrifugal Compressor and Pump Stability, Stall and Surge. ASME, New York 1976.
15. *Emmons, H. W.*; *Pearson, C. E.*; *Grant, H. P.*: Compressor Surge and Stall Propagation. Trans ASME 77 (1955) 455—467.
16. *Stenning, A. H.*; *Kriebel, A. R.*; *Montgomery, S. R.*: Stall Propagation in Axial Flow Compressors. NACA-TN 3580, 1956.
17. *Sears, W. R.*: On Asymmetric Flow in an Axial-Flow Compressor Stage. J. Appl. Mech. 20 (1953) 442—443.
18. *Marble, F. E.*: Propagation of Stall in a Compressor Blade Row. J. Aeronaut. Sci. 22 (1955) 541—554.
19. *Day, I. J.*; *Greitzer, E. M.*; *Cumpsty, N. A.*: Prediction of Compressor Performance in Rotating Stall. Univ. of Cambridge, CUED/A-Turbo/TR 78, 1976.
20. *Simon, M.*: Untersuchungen über das Teillastverhalten mehrstufiger Axialverdichter. Fortschr. Ber. VDI-Z, Reihe 7, Nr. 3 (1966).
21. *Dittié, B.*; *Schubert, J.*; *Simon, H.*: Ein Beitrag zur Kennfeldoptimierung mehrstufiger Axialverdichter bezüglich Wirkungsgrad und Regelbereich. VDI Ber. 264 (1976) 129—140.
22. *Johansen, I. A.*; *Bullock, R. A.*: Aerodynamic Design of Axial-Flow Compressors. NASA, Washington 1965.
23. *Suter, P.*; *Späti, H.*: Die Abreißgrenze mehrstufiger Axialverdichter. Turboforum Nr. 2 (1972) 85—93.
24. *Sovran, G.*: The Measured and Visualized Behaviour of Rotating Stall in an Axial-Flow Compressor and in Two Dimensional Cascade. Trans. ASME, Ser. A, J. Eng. Power 81 (1959) 24—34.
25. *Lakhawani, C.*: The Effects of Grooved Casings on the Performance of Axial Flow Compressors, in 'Improvements in Fluid Machines and Systems for Energy Conversion'. Mailand: Hoepli 1976.
26. *Dean, R. C.*: The Fluid Dynamic Design of Advanced Centrifugal Compressors. Creare-TN-185, Hannover, New Hampshire 1974.
27. *Tramm, P. C.*; *Dean, R. C.* (Hrsg.): Centrifugal Compressor and Pump Stability, Stall and Surge. New York: ASME 1976.
28. *Rodgers, C.*: Impeller Stalling as Influenced by Diffusion Limitations. In [27], S. 37—67.
29. *Reevers, G. B.*: Estimation of Centrifugal Compressor Stability with Diffuser Loss-Range System. In [27], S. 107—120.
30. *Senoo, Y.*; *Kinoshita, Y.*; *Ishida, M.*: Asymmetric Flow in Vaneless Diffusers of Centrifugal Blowers. In [27], S. 139—156.
31. *Senoo, Y.*; *Kinoshita, Y.*: Influence of Inlet Flow Conditions and Geometries of Centrifugal Vaneless Diffusers on Critical Flow Angle for Reverse Flow. In [27], S. 157—166.
32. *Pampreen, R. C.*: A Cascade Analogy of Vaned Diffuser Influence on Centrifugal Compressor Stability and a Comparison Between Quasi-Static and Transient Stabilities. In [27], S. 167—178.
33. *Hausenblas, H.*: Vorausberechnung des Teillastverhaltens von Gasturbinen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1962.
34. *Greitzer, E. M.*: Surge and Rotating Stall in Axial Flow Compressors. Trans. ASME 98 (1976) Ser. A, J. Eng. Power, S. 190—217.
35. *Yamaguchi, N.*: Prediction of Surge-Point in Multi-Stage Axial Compressors. Mitsubishi Technical Review, June 1979.
36. *Smith, L. H.*: Casing Boundary Layers in Multistage Axial-Flow Compressors. In L. S. Dzung: Flow Research on Blading. Amsterdam, London, New York: Elsevier 1970.

12 Regelung der Dampfturbinen

12.1 Regeleinriffe

Die naheliegendste und einfachste Art, eine Dampfturbine zu regeln, ist die *Drosselregelung*. Durch ein Drosselventil am Eintritt in die Maschine kann der Druck vor der Schaufelung mehr oder weniger stark herabgesetzt werden, womit man gleichzeitig Massenstrom und Gefälle und dementsprechend die Leistung vermindert. Abb. 12.1.1 zeigt die Anordnung schematisch und gibt gleichzeitig die Zustandsänderung im Entropiediagramm wieder. Es bezeichnet 1 das Hauptabsperrenteil oder Schnellschlußventil, das im Betriebe stets voll offen ist und nur geschlossen wird bei Stilllegung der Maschine oder bei Lastabwurf und gleichzeitigem Versagen der normalen Regelung. Mit 2 ist das Regelventil bezeichnet, das in beliebiger Lage den Druck vor der Schaufelung auf p_α herabsetzt, während er bei voller Ventilöffnung $p_{\alpha 0}$ beträgt. Dementsprechend vermindert sich der Massenstrom, und zwar ist nach dem Kegelgesetz $\dot{m}/\dot{m}_0 \approx p_\alpha/p_{\alpha 0}$, während gleichzeitig das Totalenthalpiegefälle Δh_{EA}^0 kleiner ist als sein Wert Δh_{EA0}^0 im Auslegungspunkt. Bildet man nun den isentropen Wirkungsgrad

$$\eta_{sEA} = \frac{\Delta h_{EA}^0}{\Delta h_{sEA}}, \quad 12.1(1)$$

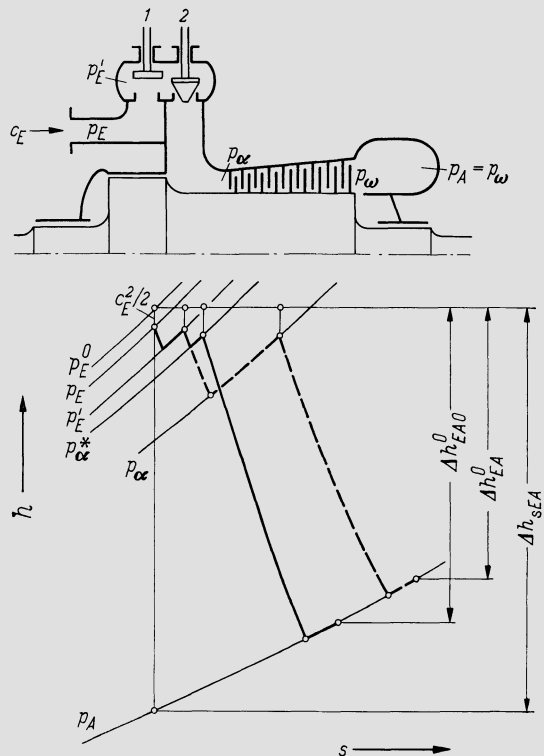


Abb. 12.1.1. Arbeitsschema der Drosselregelung und Zustandsänderung im Entropiediagramm. 1 Hauptabsperrenteil oder Schnellschlußventil, 2 Regelventil

so ist er bei Teillast offensichtlich kleiner als im Auslegungspunkt (Ventil voll geöffnet), worin der Nachteil dieses einfachen Regelungsverfahrens zu erblicken ist.

Eine gewisse Verbesserung gibt demgegenüber die bei großen Anlagen verwendete *Gleitdruckregelung*, bei welcher der Verdampfungsdruck mit abnehmender Leistung herabgesetzt wird. Die Ventile der Turbine bleiben (abgesehen von extrem kleiner Last) bei Beharrung voll offen. Die Speisepumpe wird durch eine besondere kleine Hilfsdampfturbine angetrieben, an welcher der Regeleingriff vorgenommen wird. Wo bei Drosselregelung im Ventil eine Energiedissipation erfolgt, geschieht hier bei verminderter Last die Wärmezufuhr zum Prozeß im Mittel bei tieferer Temperatur, also ungünstiger. In dieser Beziehung sind bei gleichen Zuständen vor Turbinenschaufelung beide Verfahren thermodynamisch genau gleichwertig. Ihren Gewinn erzielt die Gleitdruckregelung lediglich durch die Verminderung der Antriebsleistung der Speisepumpe, was bei dem sehr hohen Maximaldruck fossil gefeuerter Dampfkraftanlagen immerhin in Betracht fällt.

Den Nachteil des schlechten Teillastwirkungsgrades vermeidet die weit verbreitete *Düsengruppenregelung* (Abb. 12.1.2). Die mit Gleichdruck- oder Curtis-Schaufelung versehene erste Stufe, die sog. *Regelstufe*, weist einige Beaufschlagungssektoren auf. Der Dampfzufluß zu jedem Sektor wird durch ein besonderes Ventil eingestellt. Mit zunehmender Belastung wird in stetiger Weise ein Ventil nach dem anderen geöffnet, vgl. die schematische Darstellung Abb. 12.1.2. Wie dort zu erkennen, weisen die Öffnungsperioden der einzelnen Ventile meist eine geringfügige Überdeckung auf. Diese muß so gewählt sein, daß zwischen der maßgebenden Stellgröße des Regelsystems und der Maschinenleistung überall ein monotoner Zusammenhang besteht, dessen Steigung die Stabilität gewährleistet. Ohne jede Überdeckung bestünde die Gefahr, daß infolge von Ungenauigkeiten eine gewisse „Lücke“ in diesem Zusammenhang entstünde, was zu Pendelungen Anlaß gäbe. — In einem beliebigen Belastungszustand werden im allgemeinen einige Ventile voll geöffnet sein, also keine zusätzlichen Drosselverluste hervorrufen, während nur eines teilweise geöffnet ist. Der dort entstehende Drosselverlust betrifft aber nur eine Teilmenge. Daraus ergibt sich der bessere Teillastwirkungsgrad, der besonders günstig wird in den mit *A, B, C* angegebenen Betriebszuständen, da dort bis auf den kleinen

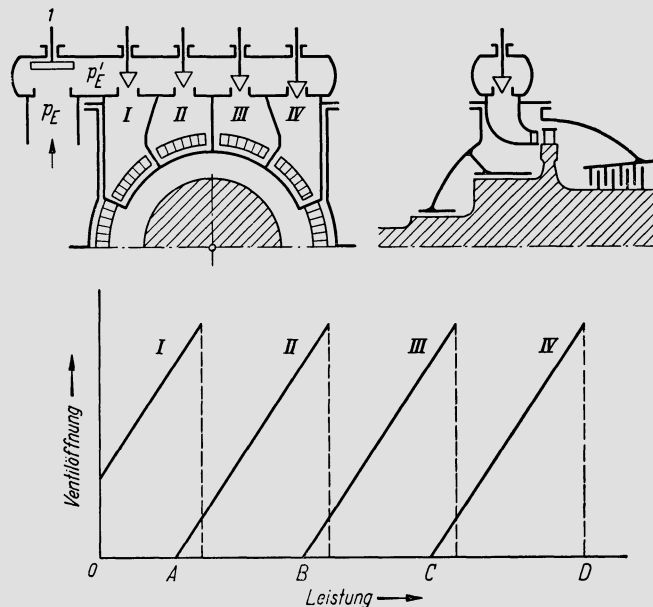


Abb. 12.1.2. Arbeitsschema der Düsengruppenregelung und Ventilöffnungsgesetz. 1 Hauptabschließ- oder Schnellschlußventil, I, II, III, IV Düsengruppenventile

Überdeckungseffekt überhaupt kein durch die Regelung bedingter Drosselverlust entsteht. Offenbar arbeitet diese Regelung um so vollkommener, je größer die Zahl der Beaufschlagungssektoren (Düsengruppen genannt, weil namentlich früher die Leitkanäle oft als Düsen bezeichnet wurden). Sehr verbreitet ist die Anordnung von vier Sektoren, manchmal sind es aber mehr, vereinzelt bis 10. — Diesem Vorteil stehen neben der größeren Kompliziertheit aber auch weitere Nachteile der Düsengruppenregelung gegenüber. Bei großen Maschinen hat der Schaufelungsteil, der die Regelstufe z. B. im Falle von Gleitdruckregelung ersetzt, einen besseren Wirkungsgrad als diese, so daß der Vollastwirkungsgrad der Anlage etwas höher wird. Da Großmaschinen vor allem Grundlast fahren, kann dies von entscheidender Bedeutung sein. Außerdem bedingt die Düsengruppenregelung Störungen der Kreissymmetrie der Temperaturverteilung am Maschineneintritt, was besonders bei hoher Dampftemperatur das Problem der Wärmespannungen und Wärmedehnungen erschwert, vor allem beim Anfahren. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, wird gelegentlich so vorgegangen, daß man beim Anfahren die sämtlichen Düsengruppenventile voll öffnet, das Hauptabsperrentil geschlossen hält und durch ein kleines Drosselventil unter Umgehung des Hauptabsperrentils den Dampf den sämtlichen Beaufschlagungssektoren — die dann ungefähr den ganzen Umfang umfassen — zuführt, vgl. [1].

Ein Verfahren, das vor allem in Frage kommt zur kurzzeitigen Steigerung der Leistung über die Normallast hinaus, ist die *Regelung durch Überspringung von Stufen*, vgl. Abb. 12.1.3. Durch Öffnen eines Überbrückungsventils wird Dampf unmittelbar vor einer weiter hinten folgenden Stufe zugeführt. Dort staut sich infolgedessen gemäß dem Kegengesetz ein so viel höherer Druck auf, wie es dem größeren Dampfdruck entspricht. Es läßt sich so eine beträchtliche Leistungserhöhung erzielen, jedoch auf Kosten des Wirkungsgrades, da ja stets die Teilmenge, die den ersten Schaufelungsteil umgeht, einen Drosselverlust erleidet.

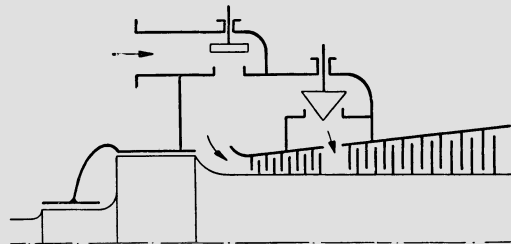


Abb. 12.1.3. Schema der Regelung durch Überspringen von Stufen

Parsons, der ausschließlich die 50%-Reaktionsschaufelung verwenden wollte und damit die Regelstufe ausschloß, hat schon früh ausgiebig von diesem Verfahren Gebrauch gemacht, indem er mehrere Überbrückungsventile benutzte, die an verschiedenen Stellen der Schaufelung Dampf zwischen die Stufen einführten. Ein Vorschlag, dies zu tun, ist sehr viel später von *Seippel* [2] wiederum gemacht worden, um sehr hohe Überlast erreichen und so Spitzenmaschinen vermeiden zu können, vgl. das Schema Abb. 12.1.4. Dort sind *a* und *b* Düsengruppenventile, *c* und *d* Überbrückungsventile des HD-Teils, *e* und *f* Überbrückungsventile des MD-Teils. Diese letzteren sind vorgesehen, um bei Überlast den Druck im Zwischenüberhitzer nicht ansteigen zu lassen, was verteuernde konstruktive Maßnahmen erforderte. — An solchen Lösungen scheint attraktiv, daß die Höchstleistung sehr weit über die wirtschaftlichste Leistung hinaus gesteigert werden kann (selbst 50% Überlast sind möglich), doch muß beachtet werden, daß die Kosten der Turbogruppe selbst nur etwa 18% der gesamten Anlagekosten einer Kraftzentrale darstellen. Ein wesentlicher Teil der übrigen Komponenten, vor allem Dampferzeuger,

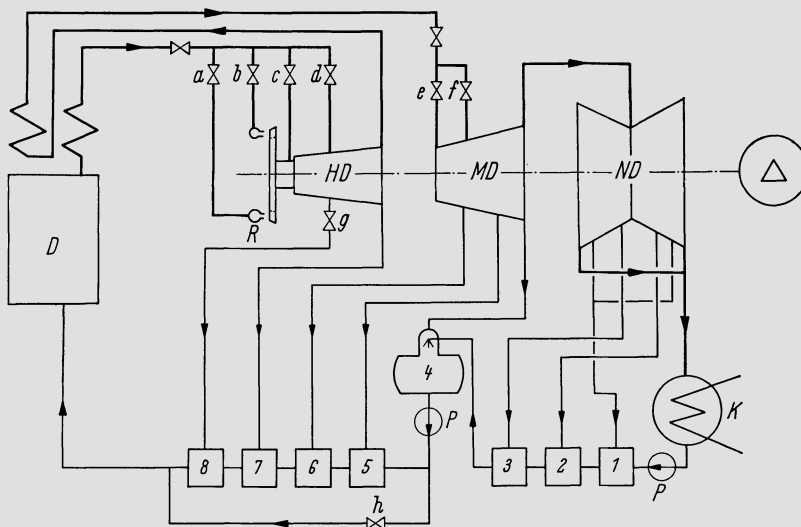


Abb. 12.1.4. Schema einer Dampfkraftanlage mit Überlastregelung, nach Seippel [2]. *D* Dampferzeuger, HD Hochdruckturbine, MD Mitteldruckturbine, ND Niederdruckturbine, *K* Kondensator, *P* Pumpen, *R* Regelstufe, *a*, *b*, Düsengruppenventile, *c*–*f* Stufenüberbrückungsventile, *g* Absperrventil, *h* Umgehungsventil, 1–8 Speisewasservorwärmer

Leitungen und elektrischer Teil, müssen doch für die Maximalleistung bemessen werden, was das wirtschaftliche Gesamtergebnis stark beeinträchtigt.

Abb. 12.1.4 zeigt weiter noch im Schema die Möglichkeit der *Überlastregelung durch Verminderung der Speisewasservorwärmung*. Es kann z. B. durch Schließen des Ventils *g* die höchste Vorwärmstufe abgeschaltet und so die Maschinenleistung geringfügig erhöht werden. Ebenso kann man das Ventil *h* öffnen, worauf ein Teil des Speisewassers die Vorwärmer 5–8 umgeht, was eine Verminderung der Anzapfmengen nach sich zieht. Solche Eingriffe bringen aber stets nur sehr kleine Leistungsgewinne und sind mit einer Absenkung des thermischen Wirkungsgrades verbunden.

Abb. 12.1.5 zeigt ein typisches Beispiel einer Industriedampfturbine mit Regelstufe. Die Betätigung der Düsengruppenventile geschieht in einfacher Weise durch einen gemeinsamen Servomotor. Dieser verschiebt einen Querbalken senkrecht, wodurch die Ventile sukzessive nacheinander angehoben werden. Das mittlere der fünf Ventile ist ein Überlastventil, das die Regelstufe überbrückt und sich als letztes öffnet. Die Dampfzufuhrkanäle der einzelnen Beaufschlagungssektoren sind in einem besonderen Stahlgußkörper zusammengefaßt, der völlig frei dehnbar ins Gehäuse eingehängt ist, eine Anordnung, die in sehr vielen Varianten im Gebrauch ist. Daneben gibt es Bauarten, bei denen jeder Sektor einzeln ein frei dehnbarer Körper ist. Diese Sektorkörper verlangen eine Halterung, welche die Reaktionskräfte aufnimmt. Die Konstruktion hat den Vorteil geringer Wärmespannungen und den Nachteil, daß zwischen den Beaufschlagungssektoren verhältnismäßig große Lücken entstehen.

In Abb. 12.1.6 ist eine andere Anordnung dargestellt, in der drei Regelventile von einem gemeinsamen Servomotor gesteuert werden. Das Ventil ganz rechts wird unmittelbar vom Servomotor bewegt und schiebt von einer gewissen Lage an das federbelastete mittlere Ventil vor sich her. Dieses wiederum stößt auf gleiche Weise das Ventil links auf, sobald es sich hinreichend weit nach links bewegt hat. Sehr verbreitet ist die Lösung, bei der von einem gemeinsamen Servomotor aus mehrere Ventile über eine Nockenwelle gesteuert werden wie bei der Anordnung nach Abb. 12.1.7.

Bei großen Maschinen wird meist jedes Ventil durch einen eigenen Servomotor bewegt, weil die Größe der Stellkräfte dies nahelegt. Die Ventile werden dann neben der Maschine

angeordnet und über Zwischenleitungen mit der Maschine verbunden. Abb. 12.1.8 zeigt eine Konstruktion, bei der 4 Beaufschlagungssektoren in einem zweiteiligen quasi-zentral-symmetrischen Körper untergebracht sind, der frei dehnbar gelagert ist, günstige Strömungsverhältnisse bietet und dem der Dampf durch 4 Stutzen von außenliegenden Regelventilen her zugeleitet wird.

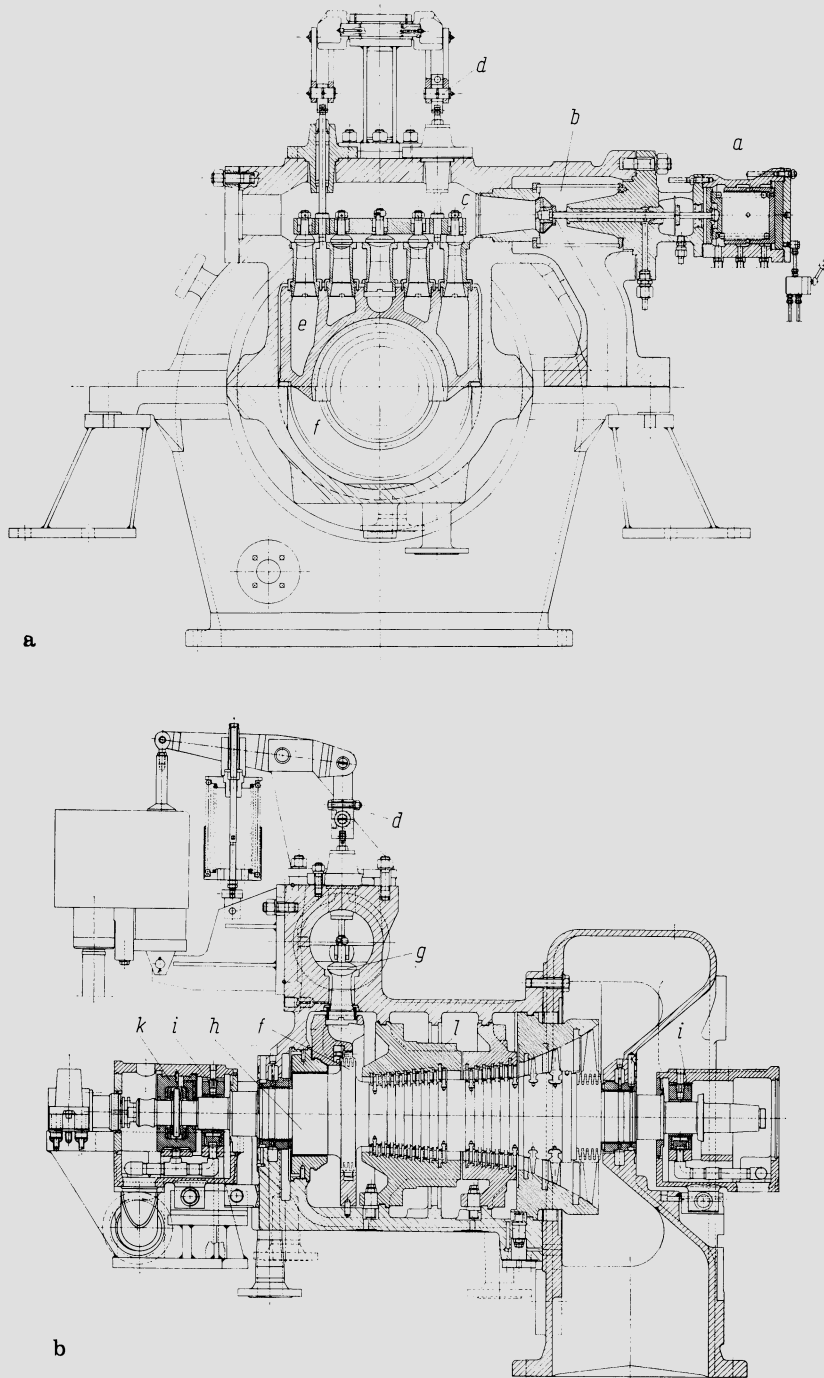


Abb. 12.1.5. Industrie-Dampfturbine mit Düsengruppenregelung und Stufenüberbrückungsventil für Höchstlast (Siemens) a) Querschnitt; b) Längsschnitt, a) Stellmotor, b) Schnellschlußventil, c) Regelventile, d) Regelventilantrieb, e) Dampfzufuhrkanäle zu Düsengruppen, f) Regelrad, g) Überlastventil

Viele Heizkraftwerke und industrielle Betriebe benötigen Turbinen, bei denen auf einer Zwischendruckstufe größere Dampfmengen entnommen werden (Entnahme-Gegen-druckturbinen und Entnahme-Kondensationsturbinen). Die Einstellung des Entnahme-druckes verlangt einen entsprechenden Regeleinriff an dem Turbinenteil, der nach der Entnahmestelle folgt. Abb. 12.1.9 zeigt eine Entnahme-Kondensationsturbine mit je einer Regelstufe am Eintritt in den HD- und ND-Teil. Ihres großen Volumendurchsatzes wegen hat diejenige des ND-Teils nur zwei Beaufschlagungssektoren, da die Ventile sehr große Durchmesser aufweisen, vgl. Abb. 12.1.10.

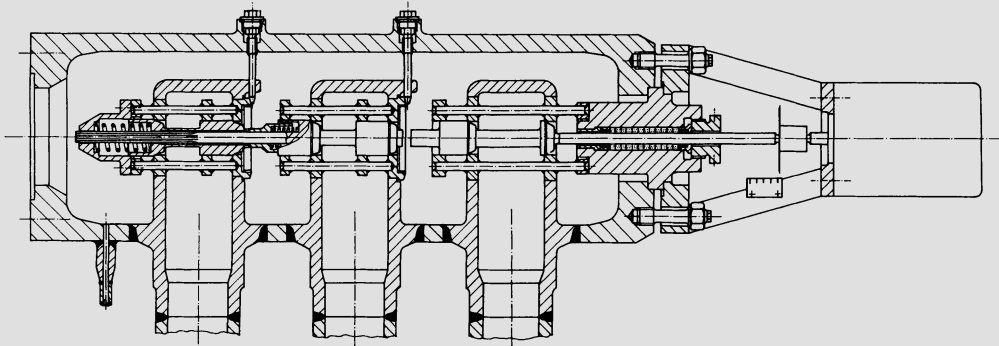


Abb. 12.1.6. Als Doppelsitzventile ausgebildete Düsengruppenregelventile in coaxialer Anordnung an einer Industrieturbine (AEG-Kanis)

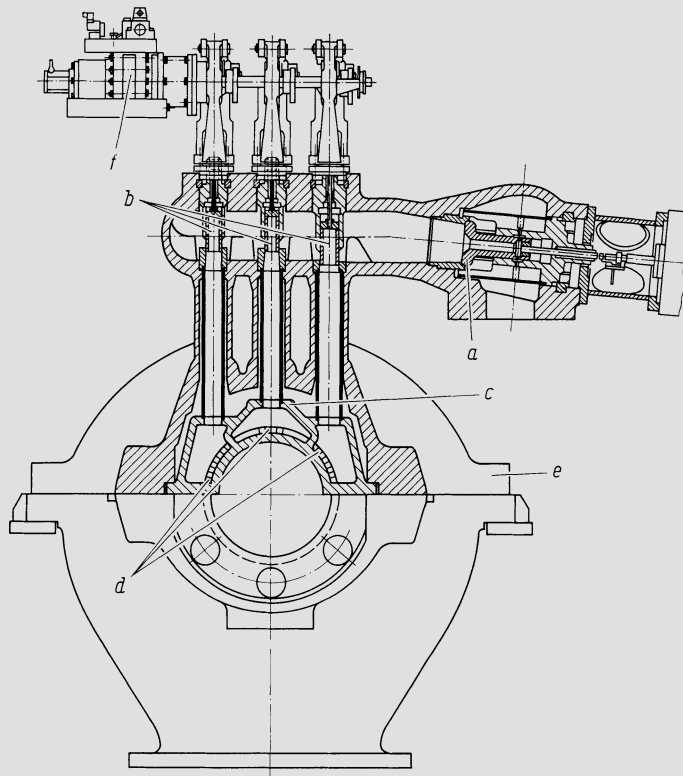


Abb. 12.1.7. Düsengruppenregelung einer Industrieturbine (BBC); *a* Schnellschlußventil, *b* als Rohrventile ausgebildete Regelventile, *c* eingesetztes Düsengruppengehäuse, *d* Düsengruppen, *e* Gehäuseoberteil, *f* Dreh-servomotor

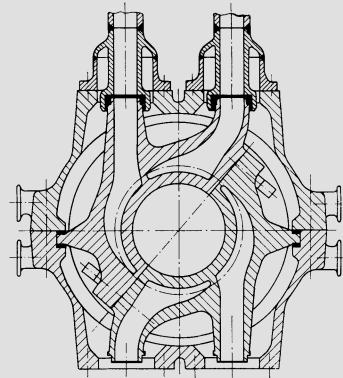


Abb. 12.1.8. Eingesetztes, frei dehnbares Einströmgehäuse einer Großdampfturbine mit Düsengruppenregelung (BBC); beachte die spiralartige Gestaltung der Düsengruppen-Zuströmkanäle

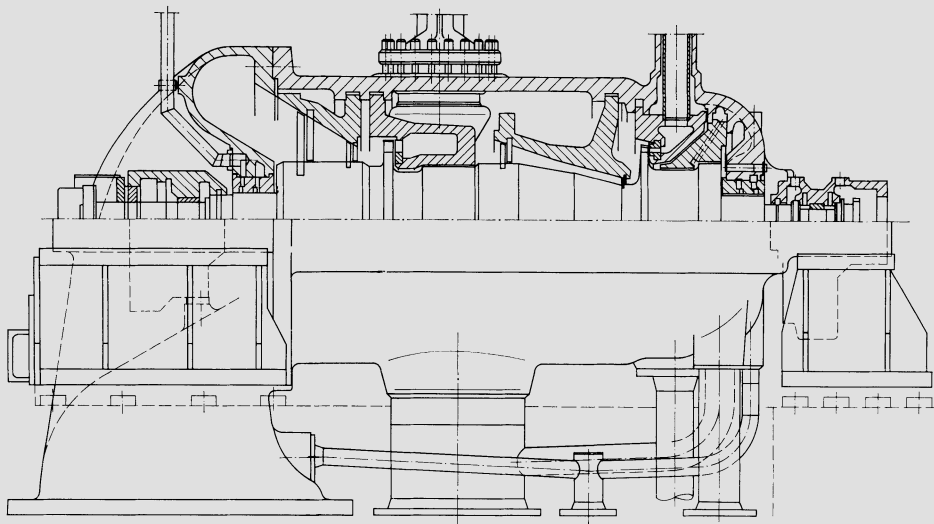


Abb. 12.1.9. Entnahmeturbine mit Regelstufen vor HD- und ND-Teil (BBC)

Besondere Maßnahmen erfordert der *Schutz der Maschine vor unzulässiger Überdrehzahl* bei plötzlicher Entlastung des Generators. Vor allem müssen in allen Anzapfleitungen Rückschlagventile angeordnet sein, damit bei einem plötzlichen Schließen der Regelventile sich der Wasserinhalt der Vorwärmer nicht ausdampfen und durch die Turbine hindurch in den Kondensator expandieren kann. Dies könnte die Turbine zum Durchbrennen bringen. Deshalb sind sogar stets je zwei Rückschlagventile hintereinander angeordnet, damit diese Gefahr unbedingt beseitigt ist. Bei Anlagen mit Zwischenüberhitzung muß aus dem gleichen Grunde auch am Wiedereintritt des zwischenüberhitzten Dampfes in die Turbine ein sog. *Abfangventil* angeordnet werden, das bei Lastabwurf geschlossen wird und so verhindert, daß der Dampfinhalt des Zwischenüberhitzers sich durch die Turbine hindurch in den Kondensator entlädt. Das gleiche Abfangventil wird auch dazu benutzt, bei normaler Lastverminderung vorübergehend den Zutritt des zwischenüberhitzten Dampfes zur Turbine zu drosseln, um dann allmählich wieder in die voll offene Lage zurückzukehren. Damit wird vermieden, daß die Leistungsabnahme infolge des Dampfes des Zwischenüberhitzers nur verzögert erfolgt, was kein stabiles Regelverhalten erlauben würde. Im Beharrungszustand ist das Ventil stets voll offen, abgesehen von Leistungen unter etwa 30%, wo es ständig drosselt. Aus Sicherheitsgründen müssen

auch zwei Abfangventile hintereinander angeordnet sein, wobei das eine aber nicht regelnd eingreift, sondern nur als Schnellschlußventil wirkt, also nur schließt, wenn die normale Regelung versagt.

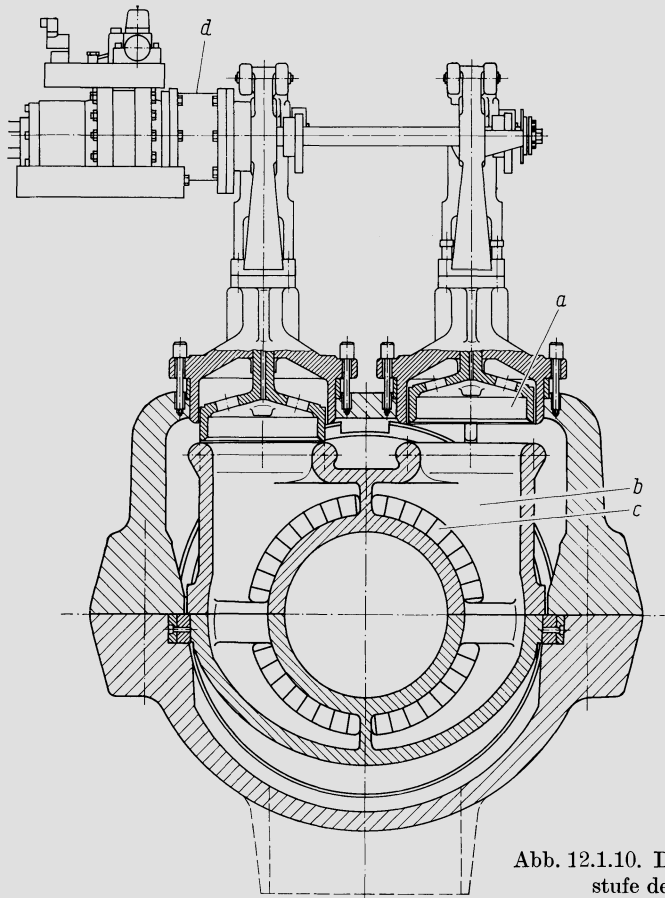


Abb. 12.1.10. Düsengruppenventile der ND-Regelstufe der Turbine nach Abb. 12.1.9

Abb. 12.1.11 zeigt ein Schema einer Dampfkraftanlage mit Zwischenüberhitzung, aus dem noch weitere Hilfseinrichtungen zu erkennen sind, die bei Lastabschaltung in Funktion treten. Bei plötzlicher Absperrung des Dampfdurchflusses durch die Turbine muß der Dampfstrom durch Überhitzer und Zwischenüberhitzer aufrechterhalten werden, damit diese Teile nicht verbrennen. Dazu sind die Umgehungsventile 11 und 12 vorgesehen. Damit aber weder der Zwischenüberhitzer noch die Kondensatoranlage zu hohe Temperaturen annehmen, muß der sonst in den Turbinen auftretende Temperaturabfall künstlich erzeugt werden durch Wassereinspritzung in die sog. Dampfkühler 13 und 14. Diese Vorrichtung dient auch zur *Inbetriebsetzung* der Anlage. Der Dampferzeuger wird so bei stillstehender Turbine angefahren, und die Turbine erst in Gang gesetzt, wenn die Dampferzeugung schon ein genügendes Maß erreicht hat, um ein einwandfreies Anfahrmanöver zu ermöglichen.

Bei großen Anlagen sind solche Organe wie Schnellschlußventile und Abfangventile stets in mindestens zwei parallelgeschalteten Einheiten vorhanden, hinter denen eine Querverbindung besteht. Dann können die Ventile ohne Unterbrechung des Betriebes regelmäßig ausprobiert werden, um sicherzustellen, daß sie funktionieren.

Abb. 12.1.12–14 zeigen in sehr stark vereinfachter Weise das Wirkungsprinzip typischer *Regelsysteme* von Dampfturbinenanlagen. Abb. 12.1.12 stellt die Urform der

Dampfturbinenregelung dar. Es bezeichnet 1 die Turbine, 2 den Kondensator, 3 den Generator, 4 einen Fliehkraftregler, der über eine Drehzahlverstellvorrichtung 5 und ein Hebelwerk das Stellglied — also den Servomotor 6 — so steuert, daß er das Regelventil 7 mit zunehmender Drehzahl immer mehr schließt. — In Abb. 12.1.13 ist der Fall einer Dampfturbine mit Zwischenüberhitzung dargestellt. Dabei ist 1 der Überhitzer, 2 die HD-Turbine, 3 der Zwischenüberhitzer, 4 der restliche Turbinenteil, 5 der Kondensator und 6 der Generator. Der Fliehkraftregler 7 steuert wieder über die Drehzahlverstell-

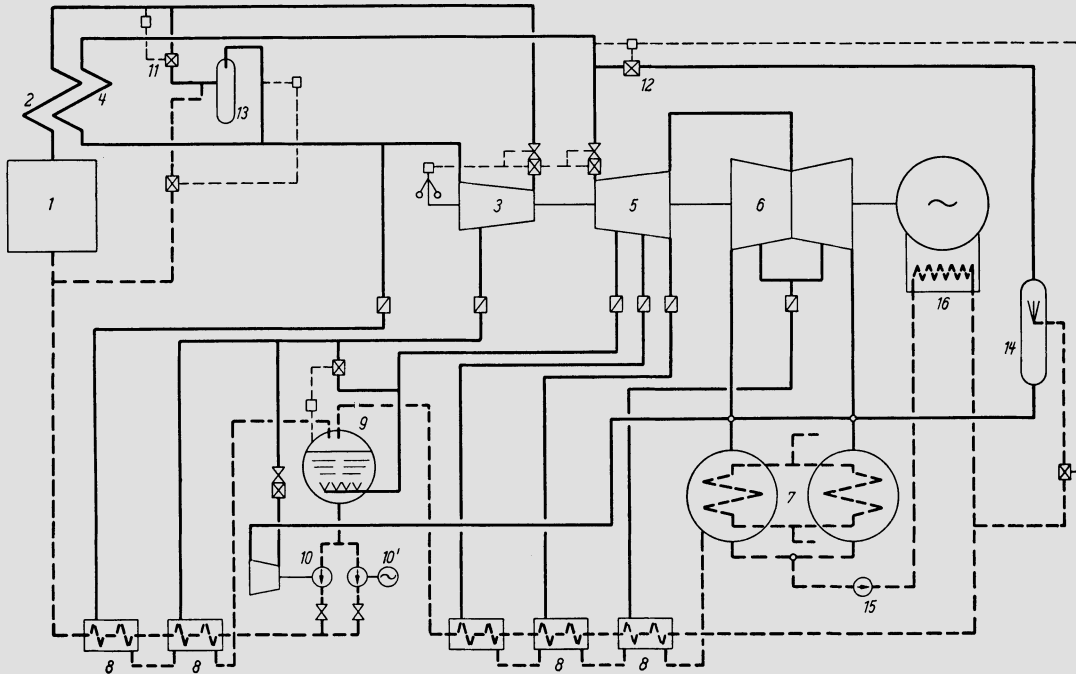


Abb. 12.1.11. Schema einer Zwischenüberhitzungsanlage mit Hilfseinrichtungen für Lastabschaltung und Leerlauf. 1 Dampferzeuger, 2 Überhitzer, 3 HD-Turbine, 4 Zwischenüberhitzer, 5 MD-Turbine, 6 ND-Turbine, 7 Kondensatoren, 8 Speisewasservorwärmer, 9 Speisewasserbehälter, 10, 10' Speisepumpen mit Antrieb durch Dampfturbine und Elektromotor, 11 Umgehungsventil der HD-Turbine, 12 Umgehungsventil der MD-ND-Turbine, 13 Dampfkühler für HD-Umgehung, 14 Dampfkühler für MD-ND-Umgehung, 15 Kondensatpumpe, 16 Generatorkühler

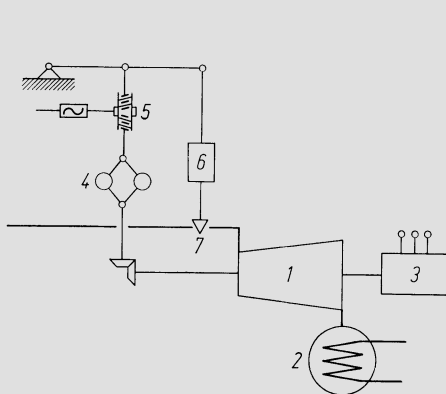


Abb. 12.1.12. Vereinfachtes Regelschema einer Dampfturbine ohne Zwischenüberhitzung

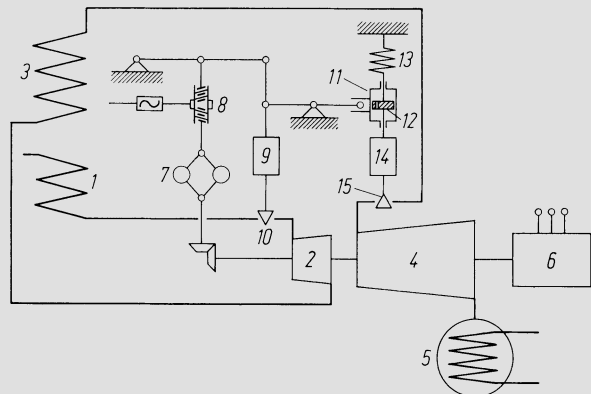


Abb. 12.1.13. Vereinfachtes Regelschema einer Dampfturbine mit Zwischenüberhitzung

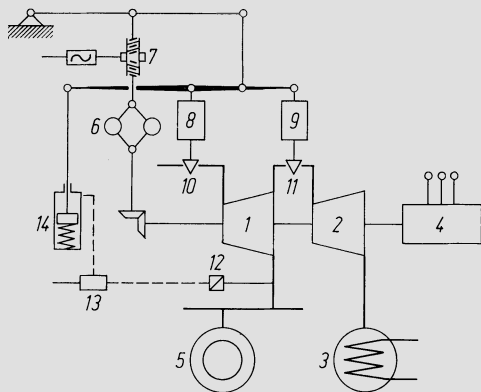


Abb. 12.1.14. Vereinfachtes Regelschema einer Entnahme-Kondensationsturbine

vorrichtung 8 den Servomotor 9 des Regelventils 10. Zugleich wird z. B. beim Ansteigen der Drehzahl der Ölzyylinder 11 gehoben, womit sich der mit einer kleinen Durchflußöffnung versehene Kolben 12 zunächst ebenfalls hebt unter Kompression der Feder 13. Diese entspannt sich aber allmählich wieder, so daß 12 in seine Ausgangslage zurückkehrt. Damit wird über den Servomotor 14 das Abfangventil (Zwischendruckregelventil) 15 so verschoben, daß es zuerst drosselt, dann sich aber wieder voll öffnet.

Abb. 12.1.14 zeigt das typische Regelschema einer Entnahme-Kondensationsturbine, wobei 1 die HD-Turbine, 2 die ND-Turbine, 3 der Kondensator, 4 der Generator, 5 ein Verbraucher am Entnahme-Dampfsystem ist. Der Fliehkraftregler 6 steuert über die Drehzahlstellvorrichtung 7 und die Servomotoren 8 und 9 die Regelventile 10 und 11 im gleichen Sinne. Der Druck im Entnahmedampfsystem beeinflusst über den Transmitter 12 und den Entnahmedruckregler 13 die Stellung des federbelasteten Kolbens im Zylinder 14 so, daß dieser bei steigendem Entnahmedruck absinkt und damit die Ventile 10 und 11 gegensinnig bewegt, Ventil 10 im Sinne des Schließens, Ventil 11 im Sinne des Öffnens, was den Entnahmedruck zurückbringt.

Was nun in den Schemata durch Hebelwerke veranschaulicht ist, wurde lange Zeit technisch durch hydraulische Systeme verwirklicht, die auch heute noch im Gebrauch sind. In diese Hydrauliksysteme wurden auch die sämtlichen Sicherungen integriert, so vor allem die gegen Überdrehzahl, aber auch andere Sicherungen, welche die Anlage bei anderen Betriebsstörungen (Ausfall des Schmieröldruckes usw.) schützen. Die neuere Entwicklung hat aber dazu geführt, daß an die Stelle dieser hydraulischen Regelsysteme in immer größerem Umfang elektronische getreten sind, vgl. [3–6]. Lediglich die Servomotoren der Ventile, die große Stellkräfte ausüben müssen, arbeiten stets hydraulisch, werden aber elektronisch gesteuert. Um die Abmessungen und damit die Trägheit der Servomotoren möglichst klein zu halten, arbeitet man heute teilweise mit einem Öldruck bis 120 bar, also sehr viel mehr als früher üblich. Auch die primären Regelimpulsgeber sind meist elektronisch. So sind vor allem die mechanischen Fliehkraftregler durch elektronische Aufnehmer ersetzt worden, die ohne Reibung und Trägheit arbeiten.

Die Gründe für diesen Übergang zur Elektronik sind einerseits dadurch gegeben, daß bei kleinem baulichem Aufwand große Anpassungsfähigkeit möglich ist. Es lassen sich aus standardisierten Elementen beliebige Systeme kombinieren, wobei die regeltechnischen Charakteristika (Statik, Zeitkonstanten usw.) in weiten Grenzen angepaßt und auch im Betrieb verändert werden können. Dazu kommt aber noch, daß die regeltechnischen Aufgaben selbst immer verwickelter geworden sind. Die Abb. 12.1.12–14 geben nur Grundschemata, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die Turbinenregelsysteme fast völlig autonom sind. Lediglich durch die Drehzahlstellvorrichtungen ist eine Koppelung mit anderen Regelsystemen möglich. Bei modernen Kraftwerksanlagen bilden aber die Regelsysteme von Turbine und Dampferzeuger bzw. Reaktor eine Einheit, die ihrerseits

wieder vermascht ist mit den Regelsystemen des elektrischen Netzes. Außerdem sind die Systeme so ausgestaltet, daß sie ein automatisches Anfahren und Abstellen ermöglichen. Das erfordert ihre Erweiterung zu regelrechten Computern. Solche Aufgaben lassen sich nur noch elektronisch lösen.

12.2 Berechnung der Beharrungszustände

Nachfolgend möge stets

$$E \equiv \frac{e(\pi)}{e(\pi_0)} = \sqrt{\frac{(1 - \pi_k)^{\frac{n+1}{n}} - (\pi - \pi_k)^{\frac{n+1}{n}}}{(1 - \pi_k)^{\frac{n+1}{n}} - (\pi_0 - \pi_k)^{\frac{n+1}{n}}}} \quad 12.2(1)$$

den Ellipsenfaktor des betrachteten Schaufelungsteils bezeichnen, wobei $\pi = p_\omega/p_\alpha$, π_0 der Wert im Auslegungspunkt und π_k das kritische Druckverhältnis sind, von dem ab abwärts E seinen Wert unverändert beibehält, vgl. die Ausführungen unter 11.3. Die Grundlage der Berechnung der Beharrungszustände ist die allgemeine Durchflußgleichung in ihrer Form 11.3(21).

Bei konstanter Drehzahl und *Drosselregelung* oder *Gleitdruckregelung* ändern sich die Geschwindigkeitsdreiecke in den ersten Stufen so wenig, daß die Durchflußgleichung in der vereinfachten Form

$$\dot{m} = \dot{m}_0 E(\pi) \frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}} \sqrt{\frac{p_{\alpha 0} v_{\alpha 0}}{p_\alpha v_\alpha}} \quad 12.2(2)$$

geschrieben werden kann. Der Wurzelausdruck ist im Falle der Drosselregelung mit sehr guter Näherung 1 (beim idealen Dampf streng), nicht aber bei Gleitdruckregelung, da man ja den Dampferzeuger auf konstante Temperatur und nicht etwa konstante Enthalpie regeln wird. Hier wie in allen nachfolgenden Überlegungen werden stets Leckströme, etwa durch Schubausgleichkolben, auch in \dot{m} eingeschlossen, da sie wesentlich den gleichen Durchflußgesetzen gehorchen. — Ausgehend von dieser Gleichung und dem gegebenen Auslegungszustand kann man \dot{m} in Funktion des Druckes p_α vor der Schaufelung angeben, sobald noch eine Vorschrift über den Enddruck p_ω gemacht wird. Diese hängt vom Anlagentyp ab.

Bei Kondensationsturbinen ohne Zwischenüberhitzung ist p_ω durch den Kondensationsdruck gegeben und liegt damit so tief, daß praktisch durchweg $E = 1$ gilt. Das trifft auch zu für Maschinen mit Zwischenüberhitzung in dem Lastbereich, wo mit voll offenem Zwischendruckregelventil gefahren wird, d. h. etwa bis herab auf $\dot{m}/\dot{m}_0 = 0,3$.

Eine genauere Behandlung dieses Falles kann folgendermaßen geschehen. Für die HD-Turbine und den Turbinenteil nach der Zwischenüberhitzung gilt je Gl. 12.2(2), wobei für den letztgenannten Teil wieder $E = 1$ gesetzt werden kann. Wenn mit einfachem Akzent auf die HD-Turbine, mit doppeltem auf den restlichen Teil verwiesen wird, ist zu fordern

$$\frac{\dot{m}'}{\dot{m}_0'} = \frac{\dot{m}''}{\dot{m}_0''}. \quad 12.2(3)$$

Dieser Zusammenhang könnte höchstens infolge einer kleinen Verschiebung der relativen Anzapfmengen geringfügig verändert werden, doch ist dies üblicherweise ein äußerst kleiner Fehler. Es folgt damit

$$E(\pi') \frac{p'_\alpha}{p'_{\alpha 0}} \sqrt{\frac{p'_{\alpha 0} v'_{\alpha 0}}{p'_\alpha v'_\alpha}} = \frac{p''_\alpha}{p''_{\alpha 0}} \sqrt{\frac{p''_{\alpha 0} v''_{\alpha 0}}{p''_\alpha v''_\alpha}} \quad 12.2(4)$$

mit $\pi' = p'_\omega/p'_\alpha$. Weiter ist

$$p''_\alpha = (1 - \varepsilon) p'_\omega, \quad 12.2(5)$$

wobei ε den Druckabfall kennzeichnet und konstant ist. Die Gln. 12.2(4) und (5) ordnen jedem p'_α eindeutig ein p'_ω und ein p''_α zu, wobei π' so wenig variiert, daß sogar meist $E(\pi') = 1$ gesetzt werden darf. — Im Bereich, wo das Zwischendruckregelventil drosselt, kommt 12.2(5) in Wegfall, und es wird p'_ω in Funktion von p'_α fest vorgeschrieben, z. B. sogar konstant. Im ganzen Belastungsbereich kann dann der Zusammenhang zwischen \dot{m}' und p'_α aus der für den HD-Teil angeschriebenen Gl. 12.2(2) bestimmt werden.

Der durch die Ventile vor HD-Turbine im Falle der Drosselregelung in Funktion des Massenstromes einzustellende Druckabfall ergibt sich aus dem Totaldruck p_E^0 vor Maschine und dem jeweiligen p'_α . Der Totaldruck $p_E^{0''}$ vor dem restlichen Turbinenteil folgt hinreichend genau dem Gesetz

$$\frac{p'_\omega - p_E^{0''}}{p'_\omega} = \frac{p_{\omega 0} - p_E^{0''}}{p_{\omega 0}} \left(\frac{\dot{m}' p_{\omega 0}}{\dot{m}'_0 p'_\omega} \right)^2. \quad 12.2(6)$$

Damit und mit dem bekannten p''_α ergibt sich im unteren Lastbereich auch der Druckabfall, der mit den Zwischendruckregelventilen einzustellen ist.

Analog ist das Vorgehen bei einer drossel- oder gleitdruckgeregelten Gegendruckturbine. Der zur Berechnung von π in 12.2(2) benötigte Gegendruck p_ω wird in der Regel als Konstante vorgeschrieben sein. Er kann aber auch in Funktion von p_α oder von \dot{m} gegeben werden. Abb. 12.2.1 stellt dar, wie sich bei vorgeschriebenem $p_\omega(\dot{m})$ der Eintrittsdruck $p_\alpha(\dot{m})$ ergibt, wenn in 12.2(2) der Wurzelausdruck 1 gesetzt werden darf. Die Kurvenschar repräsentiert den Kegel, d. h. den Ausdruck $E p_\alpha / p_{\alpha 0}$. Dabei ist p_α Kurvenparameter, und zwar ist — wie aus den Ausführungen unter 11.3 ersichtlich — der Parameterwert gerade der p -Wert, bei dem die jeweilige Kurve die Ordinatenachse trifft. So entsteht

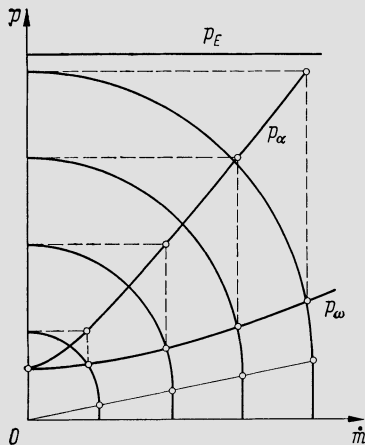


Abb. 12.2.1. Bestimmung des Eintrittsdruckes p_α in Funktion des Massenstromes \dot{m} aus dem bekannten Verlauf des Gegendruckes $p_\omega(\dot{m})$ mit Hilfe des Kegelgesetzes bei drossel- oder gleitdruckgeregelten Turbinen

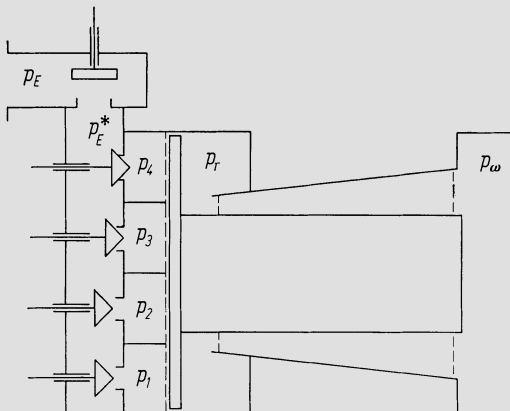


Abb. 12.2.2. Schema einer Turbine mit Düsengruppenregelung

in der dargestellten Weise die Kurve $p_\alpha(\dot{m})$. Das gleiche Vorgehen läßt sich übertragen auf die Entnahmeturbine, wo der Enddruck des HD-Teils der vorgeschriebene Entnahmedruck ist.

Zur Behandlung des Falles der *Düsengruppenregelung* beachte man Abb. 12.2.2, aus der die Bezeichnungen der Drucke hervorgehen. Die schematisch dargestellte Turbine kann eine Kondensationsturbine ohne Zwischenüberhitzung sein oder der HD-Teil einer Maschine mit Zwischenüberhitzung, eine Gegendruckturbine oder der HD-Teil einer Entnahmeturbine. Es gelten dann sinngemäß wieder die für Drossel- und Gleitdruckregelung angegebenen Überlegungen. Es sei \dot{m} der gesamte die Regelstufe durchsetzende Massenstrom, \dot{m}_i der Massenstrom des Sektors mit Nummer i . Weiter sei π_{r_k} das kritische Druckverhältnis der Regelstufe, π_k der kritische Wert des Druckverhältnisses p_ω/p_r , der praktisch verschwindet, wenn p_ω der Kondensationsdruck ist. Wenn v_i und μ_i Laufzahl und Schluckzahl des Sektors i der Regelstufe bedeuten und Index 0 allgemein auf den Ausgangszustand verweist, lassen sich bei konstanter Drehzahl folgende Gleichungen angeben:

$$p_E^* = p_E - (p_E - p_{E0}^*) (\dot{m}/\dot{m}_0)^2, \quad 12.2(7)$$

$$p_i = p_{i0} \frac{p_E^* - (p_{E0}^* - p_{i0}) (\dot{m}_i/\dot{m}_{i0})^2}{p_E^* - (p_{E0}^* - p_{i0})}, \quad 12.2(8)$$

$$\pi_i \equiv p_r/p_i, \quad \pi \equiv p_\omega/p_r, \quad 12.2(9)$$

$$\frac{v_i}{v_{i0}} = \sqrt{\frac{1 - \pi_{i0}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{1 - \pi_i^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}}, \quad 12.2(10)$$

$$\frac{\mu_i}{\mu_{i0}} = f\left(\frac{v_i}{v_{i0}}\right), \quad 12.2(11)$$

$$\dot{m}_i = \dot{m}_{i0} \frac{\mu_i}{\mu_{i0}} \frac{p_i}{p_{i0}} E(\pi_i), \quad 12.2(12)$$

$$\dot{m} = \dot{m}_0 \frac{p_r}{p_{r0}} \left(\frac{p_{r0}}{p_r}\right)^{\frac{n-1}{2n}} E(\pi), \quad 12.2(13)$$

$$\dot{m} = \sum_1^j \dot{m}_i. \quad 12.2(14)$$

Gl. 12.2(7) ist die Druckabfallrelation für das Schnellschlußventil, Gl. 12.2(8) diejenige des Regelventils i , sofern dieses voll geöffnet ist, Gl. 12.2(10) folgt aus der Abhängigkeit des Regelstufengefälles vom Druckverhältnis, Gl. 12.2(11) repräsentiert den durch die Regelstufencharakteristik Abb. 12.2.3 gegebenen Zusammenhang, die Gln. 12.2(12) und (13) sind die Durchflußgleichungen der Regelstufensektoren und der anschließenden Schaufelung, und Gl. 12.2(14) endlich ist die Mengenbilanz. Von z Beaufschlagungsspektoren seien diejenigen mit Nummern 1 bis j geöffnet. In 12.2(12) ist E mit π_{r_k} zu bilden, in 12.2(13) mit π_k . Unterlagen über dieses kritische Druckverhältnis s. Abschn. 11.3. — Der Wurzelausdruck von Gl. 12.2(2) ist in 12.2(13) durch einen Polytropenansatz ausgedrückt. Dabei ist n der Exponent einer Polytrope, die den Zustand p_E, v_E mit dem Zustand p_r, v_r verbindet; er müßte streng genommen mit dem Betriebszustand variiert werden. Da aber $(n-1)/2n$ höchstens die Größenordnung 0,1 erreicht, erübrigt sich diese Verfeinerung.

Der Gang der Rechnung ist der folgende. Man gibt sich den Radkammerdruck p_r und gegebenenfalls den Gegendruck p_ω , hat damit aus 12.2(9) π und aus 12.2(13) \dot{m} . Hier ist

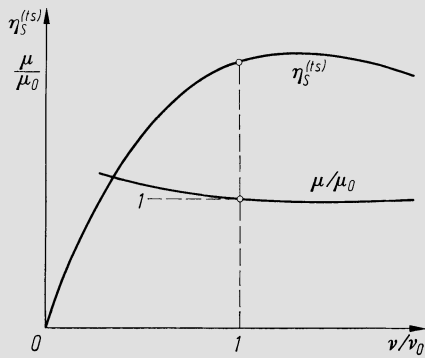


Abb. 12.2.3. Typische Form der Regelstufencharakteristik

auf p_w zurückzugreifen, wenn der Gegendruck in Funktion von \dot{m} vorgegeben ist. Mit dem nun bekannten \dot{m} kann man angeben, wieviele Sektoren geöffnet sind, d. h. man hat j . Weiter liefert 12.2(7) p_E^* . Für die Sektoren mit Nummern $i = 1$ bis $j - 1$ werden mit angenommenem p_i aus 12.2(9) bis (12) in dieser Reihenfolge $\pi_i, v_i/v_{i0}, \mu_i/\mu_{i0}, \dot{m}_i$ berechnet, hierauf mit 12.2(8) p_i berichtigt usw. Für Sektor j kommt 12.2(8) in Wegfall, weil das Ventil nur teilgeöffnet ist. Wenn man hier \dot{m}_j mit angenommenem p_j erhalten hat, prüft man die Bedingung 12.2(14) und verändert p_j bis Übereinstimmung hergestellt ist.

Eine besondere Behandlung verlangt die Überdeckung der Öffnungsperioden, wie sie durch Abb. 12.1.2 veranschaulicht ist. Man schreibt sich den Druck p_i vor, bei dessen Erreichen der Beginn der Öffnung des Ventils des Sektors $i + 1$ liegen soll. Für den unmittelbar anschließenden Bereich gibt man sich p_i in Funktion von p_r , und zwar so, daß dp_i/dp_r kleiner ist als unmittelbar vor dem Öffnen des Ventils $i + 1$. Sektor $i + 1$ übernimmt jetzt die Rolle des oben genannten Sektors j . Bei weiter steigendem p_r erreicht schließlich p_i den Wert nach Gl. 12.2(8). Hier ist Ventil i voll geöffnet und der Überdeckungsbereich beendet.

Bei Regelstufen, die als Curtis-Stufen ausgebildet sind, ist das Leitradgefälle oft derart groß, daß die Leitkanäle konvergent-divergent, d. h. als Laval-Düsen auszubilden sind. Dort ist das kritische Druckverhältnis durch den Leitapparat allein bestimmt, wie Abb. 12.2.4 veranschaulicht. Bei konstantem Eintrittsdruck und steigendem Austrittsdruck geht der Massenstrom erst zurück bei Überschreiten jenes Druckes p_k , der sich im Austrittsquerschnitt einstellt, wenn im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit herrscht und der divergente Kanalteil vollständig als Diffusor arbeitet. In der Regel wird dieser Zustand im Betriebe nicht erreicht und E ist konstant gleich 1.

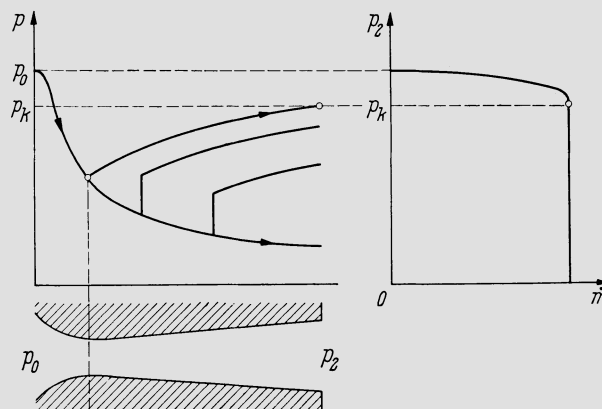


Abb. 12.2.4. Durchflußverhalten einer konvergent-divergenten Düse

In analoger Weise läßt sich die *Regelung durch Stufenüberbrückung* behandeln. Abb. 12.2.5 zeigt die Anordnung und die Bezeichnungen. Die maßgebenden Gleichungen lauten:

$$p_E^* = p_E \left[1 - \frac{p_{E0} - p_{E0}^*}{p_{E0}} \left(\frac{\dot{m}'' p_{E0}}{\dot{m}_0 p_E} \right)^2 \right], \quad 12.2(15)$$

$$p_\alpha = p_E^* \left[1 - \frac{p_{E0}^* - p_{\alpha 0}}{p_{E0}^*} \left(\frac{\dot{m}' p_{E0}^*}{\dot{m}_0 p_E^*} \right)^2 \right], \quad 12.2(16)$$

$$\pi' \equiv p_z/p_\alpha, \quad \pi'' \equiv p_\omega/p_z, \quad 12.2(17)$$

$$\frac{\bar{v}'}{\bar{v}'_0} = \sqrt{\frac{1 - \pi_0'^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{1 - \pi'^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}}, \quad 12.2(18)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = f' \left(\frac{\bar{v}'}{\bar{v}'_0} \right), \quad 12.2(19)$$

$$\dot{m}' = \dot{m}_0 E(\pi') \frac{\mu}{\mu_0} \frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}} \sqrt{\frac{p_{E0} v_{E0}}{p_E v_E}}, \quad 12.2(20)$$

$$\dot{m}'' = \dot{m}_0 E(\pi'') \frac{p_z}{p_{z0}} \sqrt{\frac{\dot{m}'' \pi_0''^{\frac{n-1}{n}}}{\dot{m}' \pi'^{\frac{n-1}{n}} + (\dot{m}'' - \dot{m}')} \frac{p_{E0} v_{E0}}{p_E v_E}}. \quad 12.2(21)$$

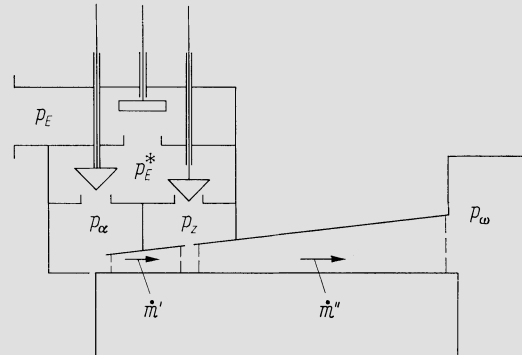


Abb. 12.2.5. Schema einer Turbine mit Regelung durch Stufenüberbrückung

An diesen Gleichungen mag auffallen, daß unterschieden wird zwischen einem beliebigen Eintrittsdruck p_E und einem Auslegungswert p_{E0} , während man doch gerade bei Überlast den Eintrittsdruck auf seinem Auslegungswert halten wird. Dieser Regeleinriff wird aber auch bei Gleitdruckregelung benutzt, um bei Teillast einen Belastungsstoß aufzunehmen, dem der Druck des Dampferzeugers nicht rasch genug folgen könnte. Bei diesem vorübergehenden Betriebszustand ist das Überbrückungsventil bei $p_E < p_{E0}$ geöffnet; dieser Betriebszustand wird also durch die Gleichungen mitumfaßt. — Die Funktion f' stellt das Schluckverhalten des ersten Schaufelungsteiles dar, der nur wenige Stufen umfaßt und mit mäßiger Dichteänderung arbeitet, so daß es genügt, von mittleren Laufzahlen auszugehen. — Der Wurzelausdruck in 12.2(21) entsteht aus der Berechnung der Mischenthalpie vor dem zweiten Schaufelungsteil, wobei die Zustandsänderung im ersten wiederum durch eine Polytrope mit festem Exponenten n angenähert wird.

Die Rechnung geht aus von vorgeschriebenen Werten p_E , p_z und einem gegebenenfalls später noch anzupassenden p_ω . Mit angenommenem p_α liefert 12.2(17) π' und π'' , während aus 12.2(18)–(21) der Reihe nach die links stehenden Größen bestimmt werden (Gl. 12.2(21)).

ist iterativ zu lösen). Dann liefern 12.2(15) und (16) p_α genauer, womit die Rechnung zu wiederholen ist. Wo p_ω in Funktion von \dot{m}' bekannt ist, kann dies auch berichtigt werden.

Der Schaufelungsteil vor der Zwischeneinführungsstelle kann auch eine Regelstufe enthalten. Dabei ist p_E fest gleich dem Auslegungswert. Dann gilt für diesen Schaufelungsteil das Gleichungssystem 12.2(7)–(14), wobei jetzt p_z die Rolle von p_ω übernimmt und Gl. 12.2(13) zu der Form

$$\dot{m}' = \dot{m}'_0 \frac{p_r}{p_{r0}} \left(\frac{p_{r0}}{p_r} \right)^{\frac{n-1}{2n}} \frac{\mu}{\mu_0} E(\pi_r') \quad 12.2(13')$$

abzuwandeln ist; dabei ist $\pi_r' = p_z/p_r$ und μ/μ_0 ist gegeben durch Relationen, die 12.2(18) und (19) analog sind. In 12.2(14) steht dann links \dot{m}' . Für gegebene p_z und p_ω muß nun der Radkammerdruck p_r zunächst angenommen werden, worauf die Gln. 12.2(8)–(12) die sämtlichen \dot{m}_i liefern (alle Sektoren sind voll geöffnet, also 12.2(8) gültig). Mit \dot{m}' aus 12.2(13') ist

$$\dot{m}' = \sum_1^z \dot{m}_i \quad 12.2(14')$$

zu kontrollieren und p_r zu berichtigen, bis Übereinstimmung hergestellt ist. Hierauf liefert 12.2(21) \dot{m}'' .

Bei der ganzen theoretischen Entwicklung ist hier stets der weitaus häufigste Fall der konstanten Drehzahl vorausgesetzt. Bei stark variabler Drehzahl treten Glieder μ/μ_0 in allen Durchflußgleichungen als Faktoren auf, in deren Bestimmung die Drehzahlen eingehen, die ihrerseits von der Leistung und somit vom Massenstrom abhängen. Das führt auf eine zusätzliche Iteration, die allerdings meist schon nach der zweiten Rechnung abgeschlossen werden kann. — In allen Fällen liefern die hier angegebenen Rechnungen den Zusammenhang zwischen den Massenströmen und den Werten des Druckes an den verschiedenen maßgebenden Punkten der Maschine und damit den Ausgangspunkt zur Bestimmung der Öffnungsquerschnitte der Ventile in Funktion des Betriebszustandes.

Die *Variation des Kondensationsdruckes* beeinflusst den Dampfdurchfluß nicht wesentlich, wohl aber die Leistung. Sind \dot{m}_w , c_w , T_{w1} , T_{w2} Massenstrom, spezifische Wärmekapazität, Eintrittstemperatur und Austrittstemperatur des Kühlwassers, T_c die Kondensationstemperatur, F die Oberfläche und k die Wärmedurchgangszahl des Kondensators, so gilt

$$F = \frac{\dot{m}_w c_w (T_{w2} - T_{w1})}{k \overline{\Delta T}}, \quad 12.2(22)$$

wo

$$\overline{\Delta T} = \frac{(T_c - T_{w1}) - (T_c - T_{w2})}{\ln \left(\frac{T_c - T_{w1}}{T_c - T_{w2}} \right)} = \frac{T_{w2} - T_{w1}}{\ln \left(\frac{T_c - T_{w1}}{T_c - T_{w2}} \right)}. \quad 12.2(23)$$

Gl. 12.2(22) nach $\overline{\Delta T}$ aufgelöst, liefert

$$\overline{\Delta T} = \frac{\dot{m}_w c_w}{k F} (T_{w2} - T_{w1}). \quad 12.2(24)$$

Wenn die Ausdrücke 12.2(23) und (24) einander gleichgesetzt werden, fällt $(T_{w2} - T_{w1})$ heraus und wenn zudem noch k und \dot{m}_w als konstant vorausgesetzt werden, bleibt

$$\frac{T_c - T_{w1}}{T_c - T_{w2}} = \text{const.} \quad 12.2(25)$$

Nun ist unter diesen Voraussetzungen $\overline{\Delta T}$ proportional der übertragenen Wärmeleistung und diese mit guter Näherung proportional dem kondensierenden Massenstrom \dot{m} . Mithin ergibt sich, daß alle Temperaturdifferenzen im Kondensator proportional \dot{m} sind, insbesondere auch die Differenz $T_c - T_{w1}$. Da der Kondensationsdruck p_c mit T_c gegeben

ist, hat man somit p_c in Funktion von \dot{m} für festes T_{w1} . In Abb. 12.2.6 sind gestrichelt so erhaltene Kurven dargestellt. Sie liefern bei Nullmassenstrom einen Kondensationsdruck, welcher der Kühlwassereintrittstemperatur entspricht. Dieser Zustand tritt aber praktisch nicht ein, da der Luftgehalt des Dampfes nie restlos verschwindet. Der Druck im Kondensator liegt daher stets um den Partialdruck der Luft über dem theoretischen Wert, ein Effekt der im normalen Lastbereich verschwindend klein ist, bei stark reduziertem Durchfluß aber deutlich in Erscheinung tritt. Strebt der Massenstrom gegen Null, so strebt der Druck nach einem Wert entsprechend einer Temperatur, die etwa 2°C über der Kühlwassereintrittstemperatur liegt (gegeben durch die Leistungsfähigkeit der Strahlapparate), vgl. [7]. So entstanden die ausgezogenen Kurven Abb. 12.2.6.

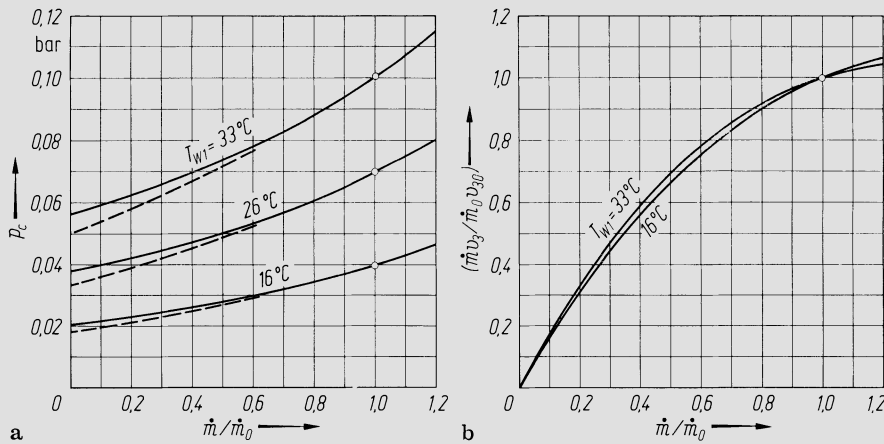


Abb. 12.2.6. a) Verlauf des Kondensationsdruckes in Funktion des relativen Massenstromes; b) relativer Volumenstrom hinter dem Diffusor der Endstufe in Funktion des relativen Massenstromes

Weiter bleibt noch die *Verschiebung der Anzapfdrucke* zu bestimmen. Ist \dot{m}_i der Massenstrom, der die Schaufelung zwischen der i -ten und der $(i + 1)$ -ten Anzapfstelle durchströmt, so gilt mit $\pi_i = p_{i+1}/p_i$ das Durchflußgesetz

$$\dot{m}_i = \dot{m}_{i0} E(\pi_i) \frac{p_i}{p_{i0}} \sqrt{\frac{p_{i0} v_{i0}}{p_i v_i}}. \quad 12.2(26)$$

Da alle Zwischendrucke gleichsinnig sich ändern und zwar ungefähr im gleichen Verhältnis, kann praktisch $E = 1$ gesetzt werden, woraus sich folgendes Verfahren ergibt. Man nimmt in erster Näherung an, daß sich alle p_i proportional p_x des betreffenden Maschinenabschnittes ändern. Bei Saugdrossel- oder Gleitdruckregelung ist p_x der Druck Eintritt Schaufelung, bei Düsengruppenregelung der Radkammerdruck p_r , bei Regelung durch Überspringen von Stufen ist es p_z . Bei Anzapfungen nach Zwischenüberhitzern ist es der Druck vor der ersten Stufe nach diesem. Mit den so bestimmten p_i berechnet man nach dem Verfahren Bd. I, Abschn. 2.2 die Anzapfmengen, hat damit die \dot{m}_i und gewinnt aus Gl. 12.2(26) berichtigte p_i . Dabei ist in der Regel bei allen bis auf den letzten Entspannungsabschnitt $E = 1$. — Die Verschiebung der Anzapfdrucke wirkt auch auf die Vorwärmtemperatur des Speisewassers zurück, worüber Abb. 12.2.7 orientiert.

Sind so die Werte von Druck und Massenstrom für alle maßgebenden Punkte des Entspannungs Vorganges bestimmt, so können nach den Ausführungen unter 11.5 Zustandsänderung und Energieumsatz in der Turbine berechnet werden. Dabei bleiben allerdings die Betriebszustände fast aller Stufen mindestens bei konstanter Drehzahl im praktisch wichtigen Lastbereich sehr nahe an dem Punkt der Stufencharakteristik, den sie im Auslegungszustand einnehmen. Es sind im wesentlichen die Regelstufe, die über-

sprungenen Stufen und die Endstufe (gegebenenfalls auch noch die zweitletzte), in denen wesentliche Änderungen auftreten, was die Rechnungen sehr stark vereinfacht, weil die Wirkungsgrade der anderen Stufen konstant gesetzt werden können.

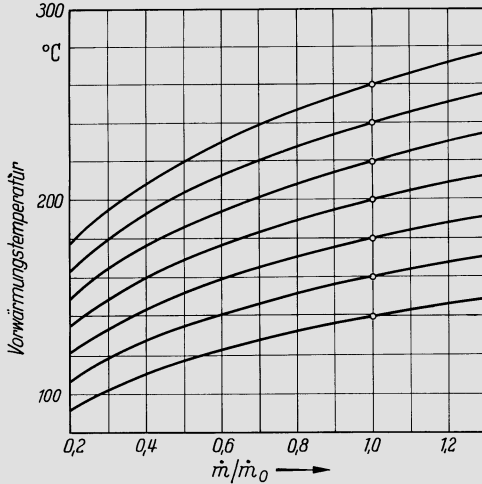


Abb. 12.2.7. Abhängigkeit der Vorwärmtemperatur des Speisewassers vom relativen Massenstrom am Turbineneintritt

12.3 Wirkungsgrad in Funktion der Leistung

Nachdem gemäß den Ausführungen des vorangehenden Abschnittes in Funktion des Frischdampfmassenstromes die Teilmassenströme und die Druckwerte in den maßgebenden Prozeßpunkten festgelegt sind, kann auch die vollständige Zustandsänderung nachgerechnet werden mit dem Ziel, schließlich die Abhängigkeit des thermischen Anlagewirkungsgrades (oder Wärmeverbrauches) von der Nutzleistung zu gewinnen. Unter thermischen Wirkungsgraden und Differenzen von solchen mögen in diesem Abschnitt stets *innere* Wirkungsgrade verstanden werden, also reine Prozeßwirkungsgrade ohne mechanische und elektrische Verluste und insbesondere ohne diejenigen des Dampf-erzeugers. Stets gehen in solche Untersuchungen empirische Unterlagen ein.

Bei der *Bestimmung des Endzustandes der Regelstufe* ist folgendes zu beachten. Den einzelnen Beaufschlagungssektoren i entsprechen isentrope Gefälle $\Delta h_{si}^{(ts)}$, von denen im allgemeinen mindestens eines (dasjenige des gedrosselten Sektors) von den anderen verschieden ist. Dementsprechend sind es auch die charakteristischen Werte φ_i , ψ_i , μ_i , ν_i und die gemäß der Kennlinie zugeordneten Wirkungsgrade $\eta_{si}^{(ts)}$:

$$\varphi_i = \frac{\dot{m}_i v_{2i}}{\pi D_2 l_2 \varepsilon_i u_2}, \quad \psi_i = \frac{\Delta h_{si}^{(ts)}}{u_2^2}, \quad 12.3(1)$$

$$\mu_i = \frac{\dot{m}_i v_{2i}}{\pi D_2 l_2 \varepsilon_i \sqrt{2 \Delta h_{si}^{(ts)}}} = \frac{\varphi_i}{\sqrt{2 \psi_i}}, \quad \nu_i = \frac{u_2}{\sqrt{2 \Delta h_{si}^{(ts)}}} = \frac{1}{\sqrt{2 \psi_i}}. \quad 12.3(2)$$

Die $\eta_{si}^{(ts)}$, die sich daraus gemäß der Stufencharakteristik ergeben, sind aufzufassen als Wirkungsgrade, welche die Verluste durch Radreibung und Ventilation *nicht* mitenthalten. Diese sind vielmehr in folgender Weise gesondert in Rechnung zu setzen. Die Radreibungsleistung ist

$$P_R = 4 \rho u_N^3 D_N^2 C_M = 4 \rho u_2^3 D_2^2 (D_N/D_2)^5 C_M, \quad 12.3(3)$$

wobei C_M der Momentbeiwert nach Bd. I, Abb. 8.4.6 ist. Daraus läßt sich eine Verlustzahl bilden gemäß

$$\zeta_R \equiv \frac{P_R}{\dot{m} \Delta h_{sE}} = \frac{P_R}{(\pi D_2 l_2 \rho u_2 \sum_i \varphi_i \varepsilon_i) \psi_E u_2^2}. \quad 12.3(4)$$

Hier sind ε_i die Beaufschlagungsverhältnisse der einzelnen Sektoren, Δh_{sE} die in Abb.12.3.1 dargestellte Enthalpiedifferenz und ψ_E die mit Δh_{sE} gebildete Druckzahl. Damit folgt

$$\zeta_R = \frac{1,27C_M(D_N/D_2)^4 (D_N/l_2)}{\psi_E \sum_i \varphi_i \varepsilon_i}. \quad 12.3(5)$$

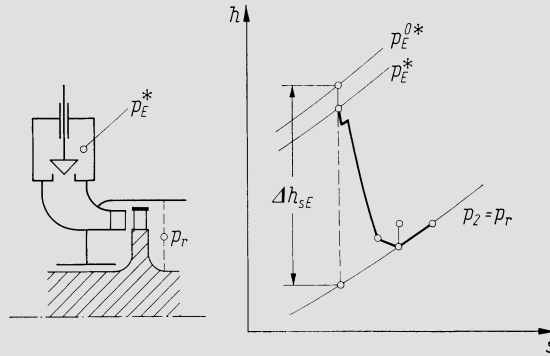


Abb. 12.3.1. Zustandsänderung in einer Regelstufe

In gleicher Weise erhält man aus der Ventilationsleistung

$$P_V = \pi C \left(1 - \sum_i \varepsilon_i\right) \rho D_2 l_2 u_2^3 + 0,21 \pi l_2 b u_2^3 \rho \sum_i \varphi_i \sqrt{\psi_i}, \quad 12.3(6)$$

die Verlustzahl

$$\zeta_V = C \frac{1 - \sum_i \varepsilon_i}{\psi_E \sum_i \varphi_i \varepsilon_i} + 0,21 \frac{b}{D_2} \frac{\sum_i \varphi_i \sqrt{\psi_i}}{\psi_E \sum_i \varphi_i \varepsilon_i}, \quad 12.3(7)$$

wobei C aus Bd. I, Gl. 8.4(33) gegeben ist. Die Gln. 12.3(5) und (7) sind die Verallgemeinerung der Gln. 8.4(31) und (34). — Damit ergibt sich nun die Enthalpie h_r des Mischzustandes in der Radkammer aus

$$h_r = h_E^0 - \frac{1}{\dot{m}} \sum_i \dot{m}_i \eta_{si}^{(s)} \Delta h_{si}^{(s)} + (\zeta_R + \zeta_V) \Delta h_{sE}. \quad 12.3(8)$$

Ein Wirkungsgrad der Regelstufe, der auch die Ventilverluste mit einschließt, läßt sich definieren durch

$$\eta_r = \frac{h_E^0 - h_r}{\Delta h_{sE}}. \quad 12.3(9)$$

Abb. 12.4.3 und 4 im nächstfolgenden Abschnitt geben typische Rechenergebnisse von Čižmár [8] wieder.

Bei *Regelung mit Stufenüberbrückung* ergibt sich die Totalenthalpie des Zustandes an der Zwischeneinführungsstelle (Druck p_z , Abb. 12.2.5) aus der Mischgleichung

$$h_z^0 = \frac{\dot{m}'}{\dot{m}''} \left[h_E^0 - \Delta h_{x\omega} - \frac{c_x^2 - c_z^2}{2} \right] + \frac{\dot{m}'' - \dot{m}'}{\dot{m}''} h_E^0. \quad 12.3(10)$$

Die Enthalpiedifferenz Δh_{xz} des Schaufelungsteils zwischen p_x und p_z wird bestimmt durch seinen isentropen oder polytropen Wirkungsgrad. Dieser wiederum kann oft hinreichend genau aus der Stufencharakteristik gewonnen werden mit Hilfe der mittleren Laufzahl nach Gl. 12.2(18). Genauer aber sehr viel aufwendiger ist die stufenweise Nachrechnung nach 11.5. Die Geschwindigkeiten c_x und c_z am Ein- und Austritt aus diesem Schaufelungsteil sind durch die Kontinuitätsgleichung bestimmt.

Ausgehend vom Zustand in der Radkammer bzw. an der Zwischeneinführungsstelle verläuft nun die restliche Expansion mindestens bei konstanter Drehzahl mit gleichen Stufenwirkungsgraden wie im Auslegungspunkt. Abweichungen hiervon ergeben sich im Naßdampfgebiet, wenn sich der Feuchtigkeitsgehalt wesentlich verschiebt und in den letzten Stufen. Bei Kondensationsturbinen ist das Gefälle der Endstufe derart groß, daß sie allein eine Gefälleänderung erfährt, die sich im Wirkungsgrad bemerkbar macht. Die *Wirkungsgradänderung der Endstufe* kann in diesem Falle wie folgt bestimmt werden.

Sind p_0 und p_2 Ein- und Austrittsdruck der Endstufe, p_{00} und p_{20} die Werte im Auslegungspunkt und $\pi = p_2/p_0$, so ergibt sich aus dem Durchflußgesetz

$$p_0 = p_{00} \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0 E(\pi)} \sqrt{\frac{p_0 v_0}{p_{00} v_{00}}}, \quad 12.3(11)$$

was die Berechnung von p_0 auf iterativem Wege erlaubt, sobald p_2 bekannt ist. Die Bestimmung von p_2 bedarf noch einer besonderen Untersuchung, besonders da moderne Abdampfstutzen als Diffusoren ausgebildet sind. Abb. 12.3.2 zeigt die vorausgesetzte

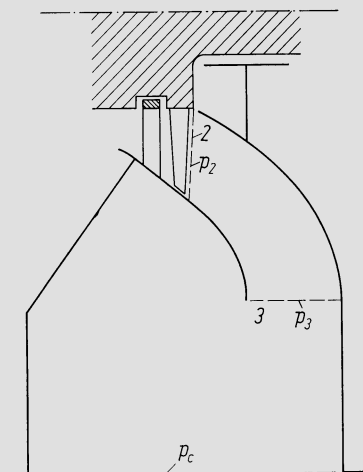


Abb. 12.3.2. Austrittsstufe mit Diffusor (Kondensationsturbine)

Anordnung. Es findet zunächst ein Druckrückgewinn von p_2 auf p_3 statt, dann ein Druckabfall bis zum Kondensationsdruck p_c . Dieser Vorgang möge gedanklich durch einen einfacheren ersetzt werden. Zwischen Querschnitt 2 und 3 erfolge eine isentrope Verdichtung auf einen Druck p_3 , der gleich dem tatsächlichen Kondensationsdruck p_c ist. Die dann im Querschnitt 3 noch verbleibende Geschwindigkeitsenergie werde restlos dissipiert. Man rechnet also mit einem reibungsfreien Diffusor, der so wenig erweitert ist, daß sein Umsetzungsgrad λ_D gerade auf das korrekte p_c führt; in dieses ideale λ_D gehen also alle auftretenden Verluste ein.

Wenn wiederum Index 0 auf den Auslegungspunkt verweist, liefert die Kontinuitätsgleichung für Querschnitt 2

$$W_2 = \frac{\dot{m} v_2}{\dot{m}_0 v_{20}} W_{20}, \quad 12.3(12)$$

während aus der Geometrie des Austrittsdreieckes folgt

$$C_2^2 = W_2^2 + 1 - 2W_2 \cos \beta_2, \quad 12.3(13)$$

$$\cot \alpha_2 = \frac{1 - W_2 \cos \beta_2}{W_2 \sin \beta_2}. \quad 12.3(14)$$

Der wie angegeben definierte Diffusorumsetzungsgrad wird eine Funktion des Abströmwinkels α_2 sein, eine empirische Relation, die durch

$$\lambda_D = f(\alpha_2) \quad 12.3(15)$$

wiedergegeben sei. Der nachfolgenden Energiedissipation entspricht eine Enthalpiezunahme Δh_{dD} von

$$\Delta h_{dD} = (1 - \lambda_D) \frac{c_2^2}{2}. \quad 12.3(16)$$

Die entsprechende Verlustzahl, die den eigentlichen Austrittsverlust der Maschine kennzeichnet, ist

$$\zeta_D \equiv \frac{\Delta h_{dD}}{u_2^2} = (1 - \lambda_D) \frac{C_2^2}{2}. \quad 12.3(17)$$

Die für den ideellen Diffusor gültige Isentropenbeziehung

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} p_3 v_3 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] = \lambda_D \frac{c_2^2}{2}$$

liefert

$$\frac{p_2}{p_3} = \left[1 - \lambda_D \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{u_2^2}{p_3 v_3} C_2^2 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad 12.3(18)$$

$$\frac{v_3}{v_2} = \left[1 - \lambda_D \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{u_2^2}{p_3 v_3} C_2^2 \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad 12.3(19)$$

Damit läßt sich für den in 12.3(12) stehenden Faktor folgender Ausdruck angeben:

$$\frac{\dot{m} v_2}{\dot{m}_0 v_{20}} = \frac{\dot{m} v_3}{\dot{m}_0 v_{30}} \left[\frac{1 - \lambda_{D0} \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{u_2^2}{p_{30} v_{30}} C_{20}^2}{1 - \lambda_D \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{u_2^2}{p_3 v_3} C_2^2} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad 12.3(20)$$

Wenn noch vereinfachend angenommen wird, daß die Expansionsendpunkte verschiedener Betriebszustände auf ein und derselben Isentrope liegen, geht diese Gleichung über in

$$\frac{\dot{m} v_2}{\dot{m}_0 v_{20}} \approx \frac{\dot{m} v_3}{\dot{m}_0 v_{30}} \left[\frac{1 - \lambda_{D0} \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{u_2^2}{p_{30} v_{30}} C_{20}^2}{1 - \lambda_D \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{u_2^2}{p_3 v_{30}} \left(\frac{p_3}{p_{30}} \right)^{\frac{1}{\kappa}} C_2^2} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad 12.3(21)$$

Aus dem in Abb. 12.2.6 links dargestelltem Zusammenhang zwischen \dot{m}/\dot{m}_0 und p_c läßt sich — wieder unter der Voraussetzung, daß die Expansionsendpunkte auf einer festen Isentropen liegen — auch der Zusammenhang zwischen \dot{m}/\dot{m}_0 und der Größe

$$\frac{\dot{m} v_3}{\dot{m}_0 v_{30}}$$

gewinnen, der in Abb. 12.2.6 rechts dargestellt ist und offensichtlich von der Kühlwassertemperatur sehr wenig abhängt. Damit ergibt sich folgendes Iterationsverfahren zur Bestimmung von p_2 für feste Kühlwassertemperatur und geänderten Massenstrom. Mit dem gegebenen \dot{m}/\dot{m}_0 und vorerst geschätzten λ_D und C_2 berechnet man aus 12.3(21) die links stehende Größe, worauf 12.3(12)–(15) in der angegebenen Reihenfolge W_2 , C_2 , α_2 , λ_D liefern und die Rechnung wiederholt werden kann, bis Übereinstimmung hergestellt ist. Hierauf liefern 12.3(17) und (18) ζ_D und p_2 . Stets ist bei dieser Rechnung $p_3 = p_c$ aus Abb. 12.2.6 gegeben.

Ähnlich kann man vorgehen, wenn bei festem Dampfstrom \dot{m}_0 der Kondensationsdruck $p_c = p_3$ infolge Änderung der Kühlwassertemperatur variiert. Ist n der Exponent der Expansionspolytrope, so gilt

$$W_2 = \left(\frac{p_{20}}{p_2} \right)^{\frac{1}{n}} W_{20}, \quad 12.3(12')$$

was an die Stelle von 12.3(12) tritt, während 12.3(13)–(17) unverändert bleiben. Die Isentropenbeziehung des Diffusors schreibt sich hier zweckmäßig in der Form

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} p_2 v_2 \left[\left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \lambda_D \frac{c_2^2}{2},$$

woraus

$$\frac{p_3}{p_2} = \left[1 + \lambda_D \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{u_2^2}{p_2 v_2} C_2^2 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad 12.3(22)$$

Wenn man nun p_2 wählt, liefern die Gln. 12.3(12'), (13)–(15) und (22) in dieser Reihenfolge p_3 , womit man die Möglichkeit hat, das p_2 aufzufinden, bei dem p_3 gleich dem vorgegebenen Kondensationsdruck ist. Auch die Verlustgröße ζ_D läßt sich aus 12.3(17) finden. — Es sei noch beigelegt, daß alle Geschwindigkeiten und Strömungswinkel zweckmäßig in dem Radius des Kreises gebildet werden, der den Austrittsringquerschnitt des Laufrades halbiert.

Sind so für den betrachteten Betriebszustand p_0 und p_2 der Endstufe bekannt, so kennt man ihr Gefälle Δh_s und damit die Laufzahl $v = u_2 / \sqrt{2\Delta h_s}$, die ihrerseits auf den isentropen Wirkungsgrad η_s der Stufe führt. Allerdings bestehen gerade über diesen Zusammenhang unter den komplizierten Bedingungen der Endstufe wenig gute Unterlagen. Abb. 12.3.3 gibt darüber einen Anhaltspunkt. Gemessene Punkte scheinen nie unter der Parabel zu liegen, die daher gestrichelt als Grenzfall angegeben ist. Die ausgezogene Kurve dürfte typisch sein. Sie entspricht etwa dem bei *Dejc* und *Trojanovskij* [9, Bild 8.7.1, S. 563] dargestellten Fall.

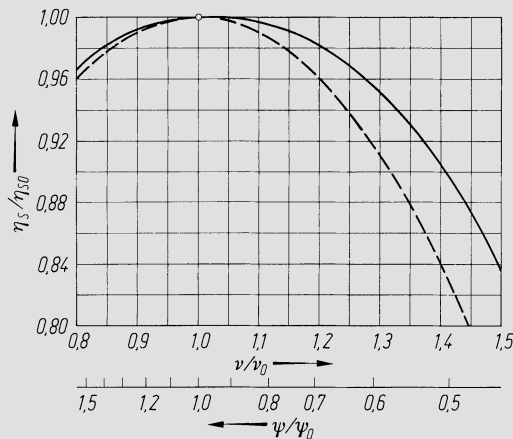


Abb. 12.3.3. Typischer Wirkungsgradverlauf für Dampfturbinenendstufe

Wenn nun die Expansionslinie von der Radkammer oder der Zwischeneinführungsstelle an mit unveränderten Stufenwirkungsgraden gerechnet wird — die lediglich im Naßdampfgebiet entsprechend der Verschiebung des Feuchtigkeitsgehaltes nach den Angaben Bd. I, Abschn. 9.10 korrigiert werden — und der Wirkungsgrad der Endstufe in der angegebenen Weise bestimmt wird, findet man schließlich den statischen Endzustand der Expansion. Mit dem wie angegeben berechneten ζ_D und $\Delta h_{dD} = \zeta_D u_2^2$ liegt damit auch der Dampfzustand zu Beginn der Kondensation fest. Somit hat man alle Unterlagen zur Berechnung des Prozeßwirkungsgrades. — Der nun genauer bekannte statische Endzustand erlaubt an sich eine nochmalige Iteration, da nun erneut W_2 aus 12.3(12) und so schließlich p_2 aus 12.3(18) bestimmt werden können. Das ist aber nur sinnvoll, wenn wirklich eine beträchtliche Abweichung entsteht und vor allem sehr gute Unterlagen über λ_D verfügbar sind. Gerade das letztere wird selten der Fall sein.

Abb. 12.3.4–7 zeigen Rechenergebnisse, wie sie sich nach dem Verfahren Gl. 12.3(12) bis (22) ergeben. Das zugrundeliegende Gesetz $\lambda_D = f(\alpha_2)$ wurde folgendermaßen ermittelt.

Ausgehend von einem Umsetzungsgrad 0,35, wie er bei senkrechtem Eintritt für den Diffusorkanal allein typisch ist, würde man nach [10], vgl. auch [11], einen Verlauf erwarten, der durch Kurve *a* (Abb. 12.3.4) dargestellt ist. Da der Stutzenquerschnitt etwa das 2,5fache des Stufenaustrittsquerschnittes ist und die Widerstandszahl des Stutzens mit 1 abgeschätzt werden kann, ergibt sich im Auslegungsfall ein weiterer Verlust von 15 % von $c_2^2/2$, so daß resultierend $\lambda_D = 0,2$ verbleibt. Die asymmetrische Strömung im Stutzen, die bei $\alpha_2 \neq 90^\circ$ entsteht, läßt eine merkliche Verbesserung von λ_D , wie sie der Diffusorkanal allein erreichen würde, nicht erwarten, weshalb der als Kurve *b* angegebene Verlauf zugrundegelegt wurde.

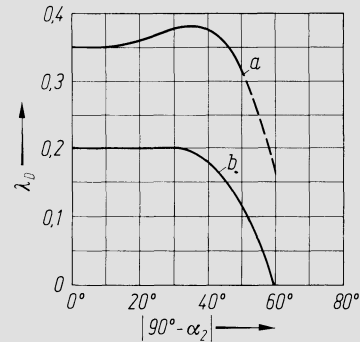


Abb. 12.3.4. Resultierender Diffusorumsetzungsgrad eines Abdampfstutzens. Kurve *a* Basiswert, Kurve *b* Wert nach Abzug der zusätzlichen Druckverluste im Stutzen

Abb. 12.3.5 stellt C_2^2 , α_2 und das sich so ergebende ζ_D dar, und zwar in Funktion von $\dot{m}v_2/\dot{m}_0v_{20}$. Für feste Kühlwassertemperatur gibt ferner Abb. 12.3.6 C_2^2 und ζ_D in Funktion vom \dot{m}/\dot{m}_0 wieder. Das Diagramm gilt genau für die Auslegungskondensationstemperatur $T_{c0} = 39^\circ\text{C}$ und mit einem Fehler von höchstens 1 % im Bereich $T_{c0} = 29$ bis 46°C . Für festen Massenstrom \dot{m}_0 und Auslegungskondensationstemperatur von 29, 39 und 46°C liefert Abb. 12.3.7 die Größen C_2^2 und ζ_D in Funktion des Kondensationsdruckes, wie Abb. 12.3.6 für $\beta_2 = 35^\circ$. — Schließlich zeigt Abb. 12.3.8 einen typischen Verlauf des thermischen Prozeßwirkungsgrades in Funktion der Belastung. Umfassende Unterlagen über das Teillastverhalten von Dampfturbinen sind bereits von *Hegetschweiler* und *Bartelett* [12] gegeben worden, doch entsprechen sie nicht mehr völlig den modernen Ausführungen.

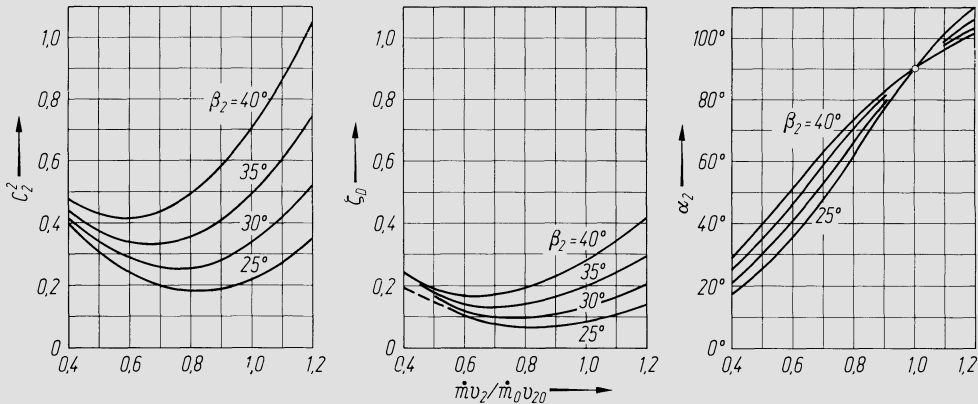


Abb. 12.3.5. Die Größen C_2^2 , ζ_D und α_2 in Funktion des reduzierten Volumenstromes $\dot{m}v_2/\dot{m}_0v_{20}$ mit Austrittswinkel β_2 (im Euler-Radius) als Parameter

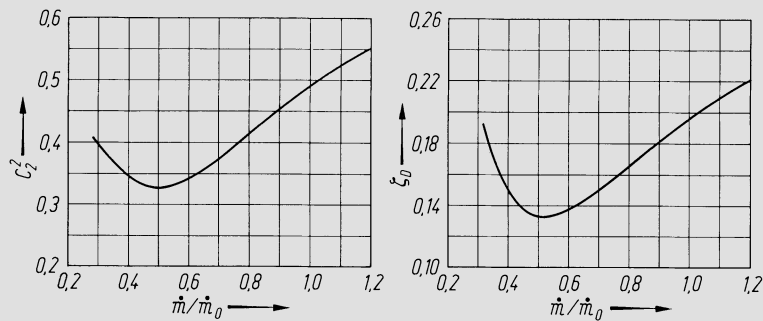


Abb. 12.3.6. Typischer Verlauf von C_2^2 und ζ_D in Funktion des relativen Massenstromes \dot{m}/\dot{m}_0 für $\beta_2 = 35^\circ$ und feste Kühlwassertemperatur

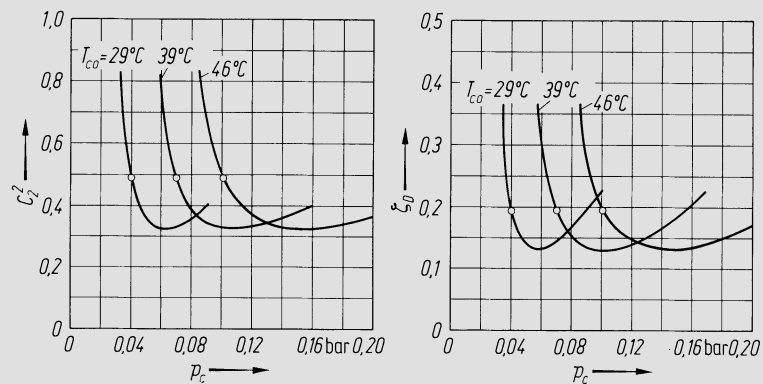


Abb. 12.3.7. Typischer Verlauf von C_2^2 und ζ_D für den Auslegungsmassenstrom \dot{m}_0 in Funktion des Kondensationsdruckes p_c für verschiedene Werte der Kondensationstemperatur im Auslegungspunkt

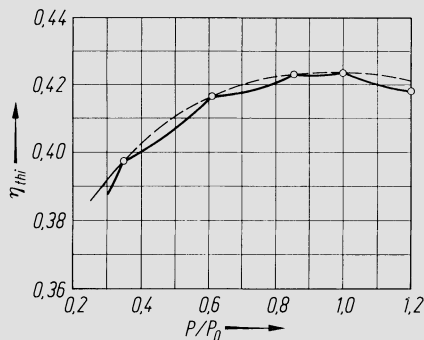


Abb. 12.3.8. Typischer Verlauf des inneren thermischen Anlagewirkungsgrades einer Dampfkraftanlage mit Zwischenüberhitzung und Düsengruppenregelung in Funktion der bezogenen Leistung P/P_0

12.4 Energetischer Vergleich der Regelungsarten

In diesem Abschnitt werden die verschiedenen Regelungsverfahren *rein energetisch* miteinander verglichen. Ein gesamtwirtschaftlicher Vergleich ist damit noch nicht gegeben. Ein solcher dürfte aus verschiedenen Gründen in allgemeiner Form nicht möglich sein, wie folgende Überlegungen zeigen. Bei einer großen Maschine wird z. B. eine Konstruktion ohne Regelstufe einfacher und billiger sein als eine mit dieser. Läuft also die Maschine fast stets mit Vollast, so ist die Lösung mit Drossel- oder Gleitdruckregelung klar überlegen. Je größer der Anteil des Teillastbetriebes wird, desto mehr tritt der Vor-

teil der Regelstufe in Erscheinung, so daß von einem gewissen Punkt an diese Lösung wirtschaftlicher wird. Bei einer kleinen Maschine kann jedoch der Volumenstrom am Eintritt so klein sein, daß ein teilbeaufschlagtes Gleichdruck- oder gar Curtis-Rad als erste Stufe notwendig wird, wenn die Stufenzahl in angemessenen Grenzen bleiben soll. Die Lösung mit Regelstufe ist dann billiger und sogar wirtschaftlich einzig vertretbar. — Die nachfolgenden Angaben stützen sich vor allem auf die Untersuchungen von Čizmar [8].

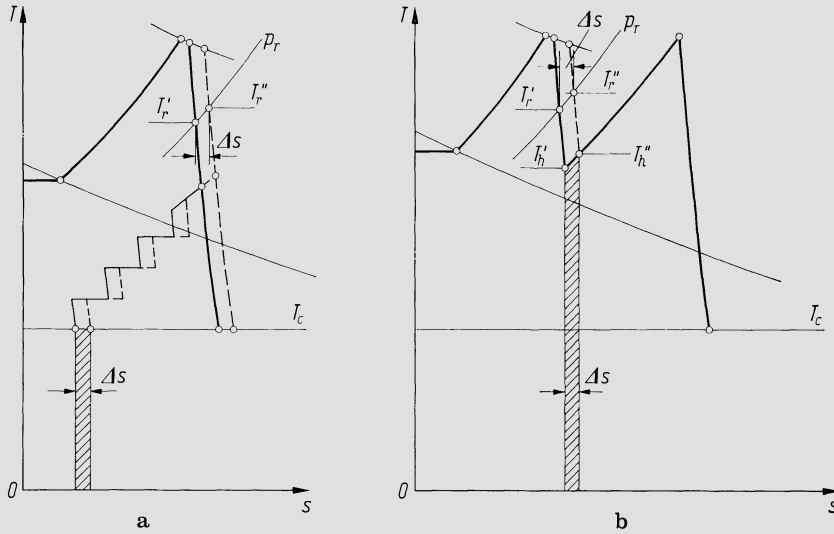


Abb. 12.4.1. Ts -Diagramme zur Bestimmung des Unterschiedes der thermischen Wirkungsgrade, die bei verschiedenen Regelungsverfahren entstehen. a) Ohne Zwischenüberhitzung; b) mit Zwischenüberhitzung

Ein genauer energetischer Vergleich zweier Lösungen verlangt die vollständige Durchrechnung der beiden Prozesse. Es lassen sich indessen einfache Näherungsrechnungen durchführen, die hinreichende Genauigkeit erreichen. — Im Falle *ohne Zwischenüberhitzung* stellt z. B. Abb. 12.4.1a einen Ausschnitt aus einem Ts -Diagramm dar. Die ausgezogene Expansionslinie möge etwa der Düsengruppenregelung, die gestrichelte dem entsprechenden Betriebszustand bei Drosselregelung zugeordnet sein. Von der Drucklinie p_r an (Radkammerdruck der Regelstufe) sind beide Schaufelungen identisch. Die Erschwerung der Überlegung, die aus der Speisewasservorwärmung durch Anzapfung entsteht, kann man umgehen, indem man den Prozeß ersetzt denkt durch einen solchen, bei dem kein Dampf der Turbine entnommen würde, wogegen die Speisewasservorwärmung durch Wärmenentzug aus der Turbine erfolgte. Die Zustandsänderung würde dann durch einen stufenförmigen Linienzug dargestellt, wie im Diagramm angegeben. Nun fallen aber diese Linienzüge für die beiden Vergleichsfälle annähernd gleich aus. Deshalb erhält sich der Entropieunterschied Δs , der bei p_r die beiden Fälle unterscheidet, praktisch etwa unverändert bis zur Kondensationstemperatur T_c . Der Unterschied der Kondensationswärme für beide Regelungsarten ist also $T_c \Delta s$, mithin auch der Unterschied der Arbeitsausbeute beider Prozesse, da die zugeführte Wärme gleich groß ist.

Es sei Δh_{sEr} das isentrope Enthalpiegefälle vom Totalzustand vor Maschine bis auf den Druck p_r und Δh_{Er} die effektive Enthalpiedifferenz für den gleichen Abschnitt. Dann können für die beiden Vergleichsfälle (z. B. Düsengruppenregelung, gekennzeichnet durch Zeichen ', und Drosselregelung, Zeichen '') die isentropen Wirkungsgrade

$$\eta'_s \equiv \frac{\Delta h'_{Er}}{\Delta h_{sEr}}, \quad \eta''_s \equiv \frac{\Delta h''_{Er}}{\Delta h_{sEr}} \tag{12.4(1)}$$

definiert werden. Wenn weiter T'_r und T''_r die Temperaturen beim Druck- p_r in den beiden Fällen sind, dann ist die in Abb. 12.4.1 angegebene Entropiedifferenz

$$\Delta s = \frac{2(\Delta h'_{Er} - \Delta h''_{Er})}{T'_r + T''_r} = \frac{2\Delta h_{sEr}}{T'_r + T''_r} (\eta'_s - \eta''_s). \quad 12.4(2)$$

Weiter ist der Unterschied der thermischen Wirkungsgrade der beiden Varianten

$$\Delta \eta_{th} = \eta'_{th} - \eta''_{th} = \frac{\Delta a}{q}, \quad 12.4(3)$$

wo $\Delta a = T_c \Delta s$ der Unterschied der Arbeitsausbeute beider Prozesse ist und q die für beide gleiche Wärmezufuhr. Somit folgt schließlich

$$\Delta \eta_{th} = \frac{2T_c \Delta h_{sEr} (\eta'_s - \eta''_s)}{q(T'_r + T''_r)}. \quad 12.4(4)$$

Man beachte, daß diese Betrachtungsweise identisch ist mit der exergetischen, sofern man die Kondensationstemperatur als Umgebungstemperatur betrachtet. Sie ist eine Näherung. Eine exakte exergetische Rechnung müßte alle Nebeneffekte, die insbesondere durch die Vorwärmanlage bedingt sind, mitberücksichtigen, hätte dann aber keine Vorteile mehr gegenüber der direkten energetischen Durchrechnung. — In analoger Weise kann bei der Gegendruckturbinenanlage die Abhängigkeit der Leistungsausbeute vom Regelungsverfahren bestimmt werden, wobei die Temperatur im Gegendrucknetz an die Stelle der Kondensationstemperatur tritt.

Im Falle der *Zwischenüberhitzung*, Abb. 12.4.1b, werden die Zusammenhänge etwas verwickelter. Der Arbeitsgewinn der Düsengruppenregelung gegenüber der Drosselregelung beschränkt sich hier, von Nebeneffekten abgesehen, auf die HD-Turbine. Sind T'_h und T''_h für die beiden Fälle die absoluten Austrittstemperaturen aus der HD-Turbine, so ist der Arbeitsgewinn

$$\Delta a = \frac{(T'_h + T''_h) \Delta s}{2}. \quad 12.4(5)$$

Dem steht die zusätzliche Wärmezufuhr im Zwischenüberhitzer gegenüber. Ist $\gamma_z = \dot{m}_z / \dot{m}$ das Verhältnis des Massenstromes im Zwischenüberhitzer zum Massenstrom Eintritt HD-Turbine, so ist diese

$$\Delta q = \gamma_z \Delta a. \quad 12.4(6)$$

Demnach wird der thermische Wirkungsgrad der Anlage mit Düsengruppenregelung

$$\eta'_{th} = \frac{a'' + \Delta a}{q'' + \gamma_z \Delta a} = \eta''_{th} \left[\frac{1 + \Delta a/a''}{1 + \gamma_z \Delta a/q''} \right] \approx \eta''_{th} \left[1 + \frac{\Delta a}{a''} - \gamma_z \frac{\Delta a}{q''} \right],$$

folglich

$$\Delta \eta_{th} = \eta'_{th} - \eta''_{th} = \eta''_{th} \left[\frac{\Delta a}{a''} - \gamma_z \frac{\Delta a}{q''} \right] = \frac{\Delta a}{q''} (1 - \gamma_z \eta''_{th}). \quad 12.4(7)$$

Wenn hier für Δa der Ausdruck 12.4(5) eingesetzt wird und für Δs Gl. 12.4(2), folgt

$$\Delta \eta_{th} = \frac{T'_h + T''_h}{T'_r + T''_r} \frac{\Delta h_{sEr} (\eta'_s - \eta''_s)}{q''} (1 - \gamma_z \eta''_{th}), \quad 12.4(8)$$

womit der zu 12.4(4) analoge Ausdruck gefunden ist.

Wirkungsgradunterschiede zwischen Prozessen mit Gleitdruck- und Drosselregelung sind einzig bedingt durch die Unterschiede der Pumpenleistungen. Wenn also p_d und p_g die höchsten Prozeßdrücke für Drossel- und Gleitdruckregelung sind, so ist mit η_P als Pumpenwirkungsgrad und v als spezifischem Wasservolumen der Unterschied der thermischen

Wirkungsgrade zugunsten der Gleitdruckregelung

$$\Delta\eta_{th} = \frac{v(p_d - p_a)}{q\eta_P} \tag{12.4(9)}$$

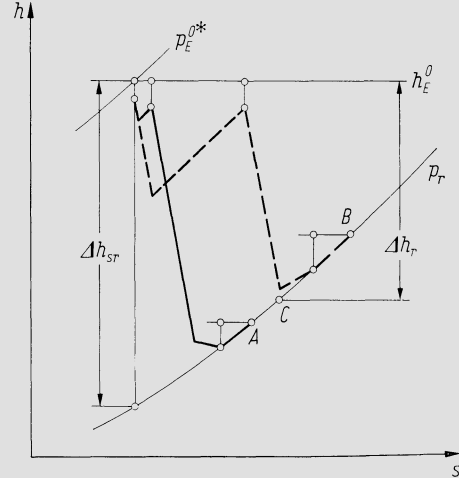


Abb. 12.4.2. Darstellung der Zustandsänderungen in den verschiedenen Sektoren einer Regelstufe im Entropiediagramm

Abb. 12.4.2–4 geben Unterlagen über die Wirkungsgrade von Regelstufen in Funktion des Lastzustandes. Gemäß Abb. 12.4.2 ist p_E^{0*} , h_E^0 der Totalzustand im Raum unmittelbar vor den Regelventilen, p_r der Radkammerdruck und Δh_{sr} die damit gegebene isentrope Enthalpiedifferenz. Im allgemeinen erfolgt nun in einzelnen Sektoren die Entspannung bei voll offenem Ventil, im Diagramm angegeben durch den ausgezogenen Linienzug, der bei A endet. Ein Sektor arbeitet mit starker Drosselung, vgl. den gestrichelten, bei B endenden Linienzug. Daraus ergibt sich in der Radkammer der Mischzustand C , mit dem die effektive Enthalpiedifferenz Δh_r zu bilden ist. Der Regelstufenwirkungsgrad wird definiert durch

$$\eta_r \equiv \frac{\Delta h_r}{\Delta h_{sr}} \tag{12.4(10)}$$

Der Wert bei voller Öffnung aller Sektoren sei η_{r0} und ist in Abb. 12.4.3 in Funktion der geometrischen Stufenparameter dargestellt. Abb. 12.4.4 schließlich zeigt η_r/η_{r0} in Funktion des relativen Massenstromes \dot{m}/\dot{m}_0 für verschiedene Werte des Auslegungsdruckverhältnisses $\pi_0 \equiv p_r/p_E^{0*}$. Vorausgesetzt ist eine Anordnung mit 4 Beaufschlagungssektoren und einem größten Beaufschlagungsverhältnis $\varepsilon_0 = 0,8$. Für andere Beaufschlagungsverhältnisse wird

$$\frac{\eta_r}{\eta_{r0}} = k \left(\frac{\eta_r}{\eta_{r0}} \right)_{\varepsilon_0=0,8} \tag{12.4(11)}$$

wobei k ebenfalls der Abb. 12.4.4 zu entnehmen ist. Das Diagramm zeigt noch als anschauliche Information die Abhängigkeit der Regelstufenleistung P vom relativen Massenstrom.

In Abb. 12.4.5 sind auszugsweise aus diesen Regelstufenunterlagen folgende Ergebnisse nach [8] zusammengestellt. Die ausgezogenen Kurven geben den Wirkungsgradgewinn $\Delta\eta_{th}$ der Anordnung mit Regelstufe gegenüber der Drosselregelung in Funktion von \dot{m}/\dot{m}_0 wieder. Wo also $\Delta\eta_{th}$ negativ wird, ist die Regelstufe unterlegen. Stets sind vier Beaufschlagungssektoren vorausgesetzt. Maßgebende geometrische Parameter sind ε_0 , das Schauffellängenverhältnis $(l/D)_r$ der Regelstufe und das Verhältnis des Durchmessers D_α der unmittelbar anschließenden Schauffelung zum Durchmesser D_r der Regelstufe. Es

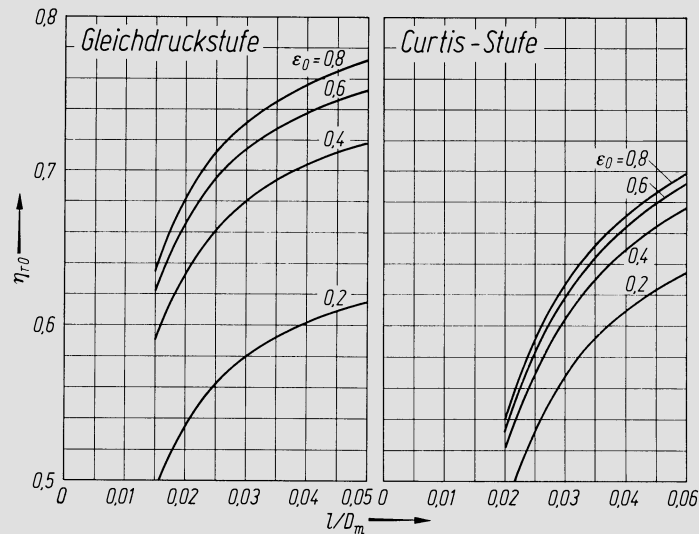


Abb. 12.4.3. Basiswert η_{r0} des isentropen Wirkungsgrades von Regelstufen, die als Gleichdruck- bzw. Curtis-Stufen ausgebildet sind. Nach Čižmár [8]. ε_0 = Beaufschlagung im Auslegungspunkt

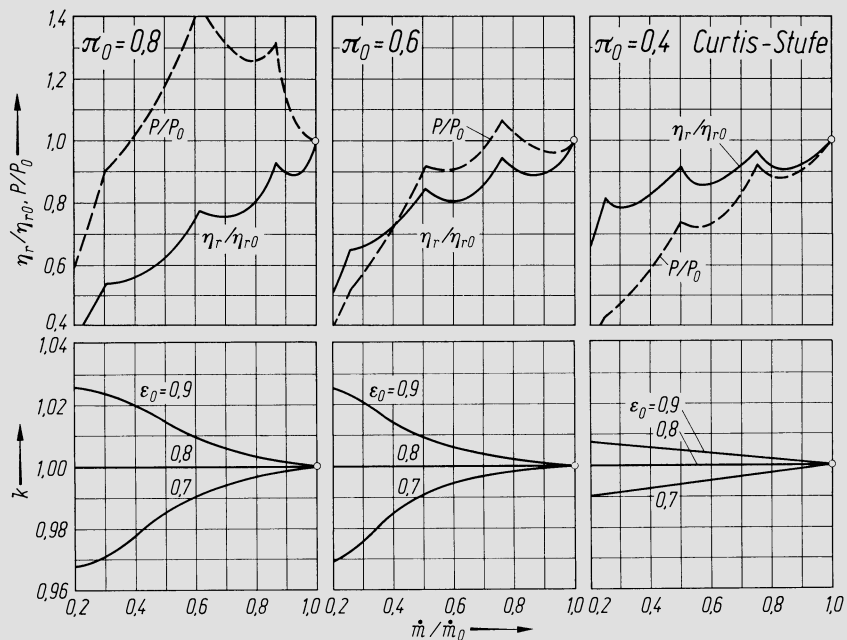


Abb. 12.4.4. Wirkungsgradverhältnis η_r/η_{r0} , Leistungsverhältnis P/P_0 und Korrekturfaktor k von Regelstufen mit 4 Beaufschlagungssektoren in Funktion des relativen Massenstromes \dot{m}/\dot{m}_0 , für Auslegungsdruckverhältnisse $\pi_0 = 0,8$ und $0,6$ bei einkränziger Gleichdruckstufe und $\pi_0 = 0,4$ bei zweikränziger Curtis-Stufe. Nach Čižmár [8]

ist angenommen, daß der durch die Regelstufe ersetzte Schaufelungsteil der Vergleichsvariante ebenfalls den Durchmesser D_α hat. Die Dampfdaten sind 80 bar, 530°C ohne Zwischenüberhitzung, 160 bar, 530°C mit Zwischenüberhitzung, der Kondensationsdruck einheitlich 0,04 bar. Das Ergebnis hängt aber von diesen Daten sehr wenig ab, so daß die Angaben näherungsweise auch für andere Verhältnisse benutzt werden können. — Offensichtlich sind die Zusammenhänge recht verwickelt. So mag etwa überraschen, daß

im Vollastpunkt die Regelstufen mit $\varepsilon_0 = 0,9$ der Drosselregelung stärker unterlegen sind als die mit $\varepsilon_0 = 0,5$. Das rührt daher, daß unter sonst gleichen Bedingungen der (voll beaufschlagte) Schaufelungsteil, der an die Stelle der Regelstufe tritt, bei $\varepsilon_0 = 0,9$ längere Schaufeln erhält als bei $\varepsilon_0 = 0,5$. Damit wird der Wirkungsgradunterschied zu Ungunsten der Regelstufe größer. Allgemein zeigt sich, daß die Anordnung mit einer Regelstufe kleinen Gefälles und Durchmessers alles in allem die energetisch günstigste Lösung ist. Das entgegengesetzte Extrem wäre die Curtis-Stufe, die rein energetisch stets unterlegen ist und nur dadurch gerechtfertigt sein kann, daß sie auf eine wesentlich kompaktere Bauweise führt.

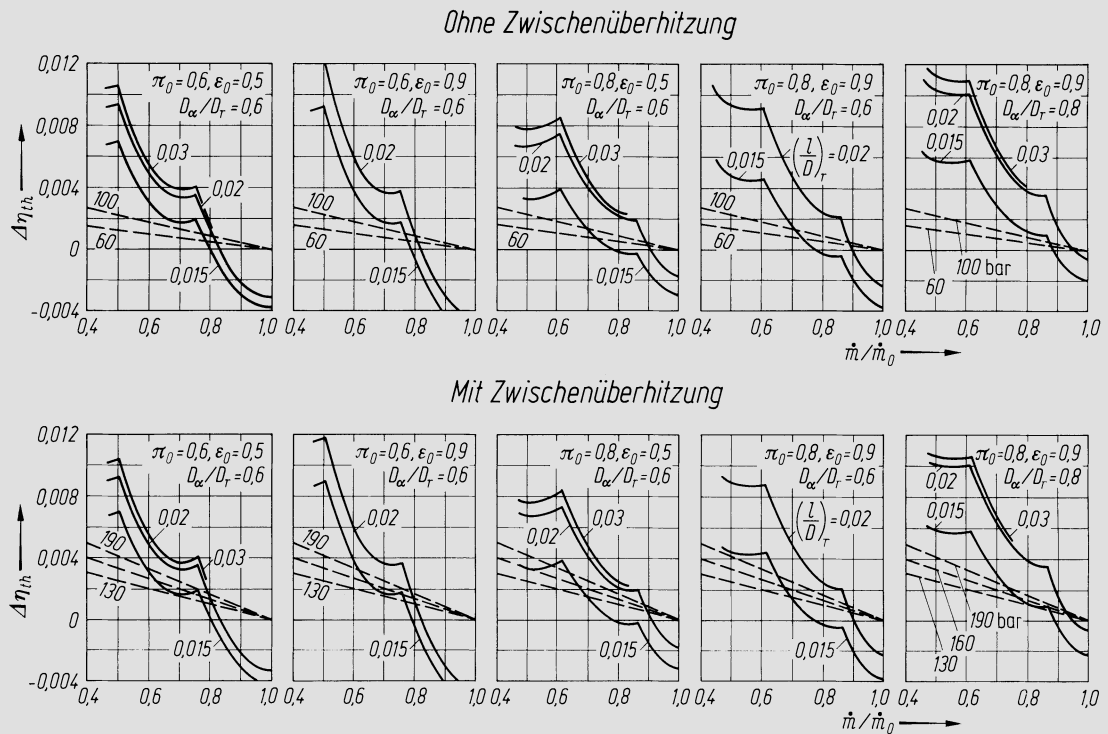


Abb. 12.4.5. Gewinn an thermischem Wirkungsgrad $\Delta\eta_{th}$ der Lösung mit Regelstufe (ausgezogen) bzw. mit Gleitdruck (gestrichelt) gegenüber der Drosselregelung (Festdruckregelung) in Funktion des relativen Massenstromes \dot{m}/\dot{m}_0 für verschiedene Auslegungsparameter. Nach Čížmár [8]. π_0 Druckverhältnis der Regelstufe im Auslegungspunkt, ε_0 Beaufschlagungsverhältnis im Auslegungspunkt, D_α/D_r Verhältnis des Mittleren Durchmessers der nachfolgenden Schaufelung zu dem der Regelstufe, (l/D_r) Schauffellängenverhältnis der Regelstufe

Gestrichelt ist in Abb. 12.4.5 noch der Wirkungsgradgewinn der Gleitdruckregelung gegenüber der Drosselregelung nach Gl. 12.4(4) eingetragen. Die Differenzen zwischen den ausgezogenen und den gestrichelten Kurven geben damit gerade den Vergleich zwischen Düsengruppenregelung und Gleitdruckregelung. Dieser Vergleich, der für Schiffsanlagen von Geisler [20] gemacht worden ist, hängt sehr stark ab von den Gegebenheiten des jeweiligen Falles. — Abb. 12.4.6 zeigt noch für einen Fall den Vergleich zwischen dem Ergebnis der vereinfachten exergetischen und der exakten Rechnung (exakte Kurve ausgezogen).

In Abb. 12.4.7 schließlich sind die Werte des Wirkungsgradabfalles, der sich aus der Stufenüberbrückung ergibt, in Funktion von \dot{m}/\dot{m}_0 dargestellt. Es ist η_{th0} der thermische

Wirkungsgrad im Normalpunkt bei geschlossenem Überlastventil, η_{th} der Wert bei Überlast, ferner $\pi' = p_z/p_E^*$ (im Normalpunkt), vgl. auch Abb. 12.2.5. Hier sind die Prozeßdaten variiert worden, und man erkennt den sehr geringen Einfluß.

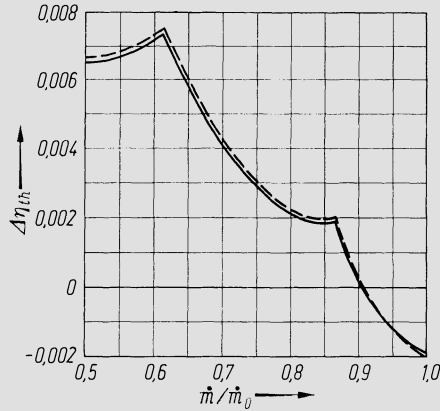


Abb. 12.4.6. Vergleich der Wirkungsgraddifferenz $\Delta\eta_{th}$ nach verschiedenen Berechnungsverfahren, ausgezogen exakt, gestrichelt Näherungsformel. Nach Čížmár [8]. Kurven gelten für das Beispiel mit Zwischenüberhitzung $\pi_0 = 0,8 = 0,8$, $\varepsilon_0 = 0,5$, $D_\alpha/D_r = 0,6$, $(l/D)_r = 0,02$. Ohne Zwischenüberhitzung noch bessere Übereinstimmung

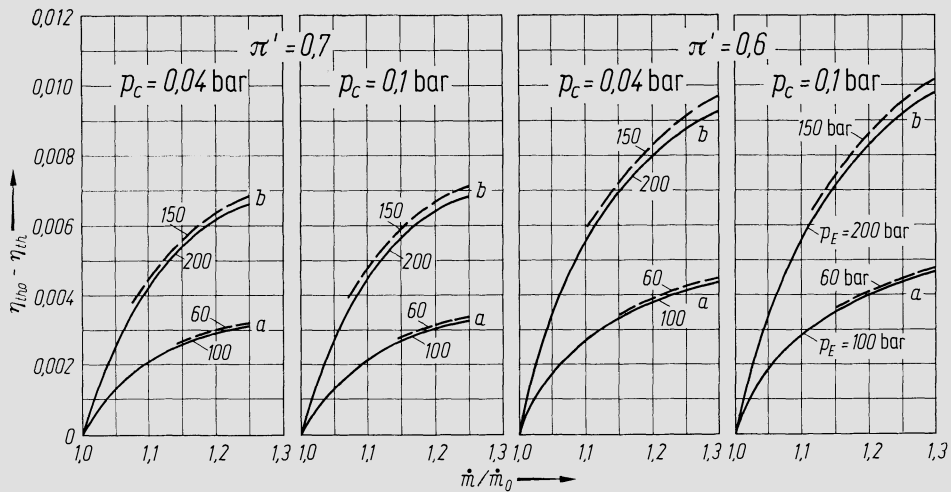
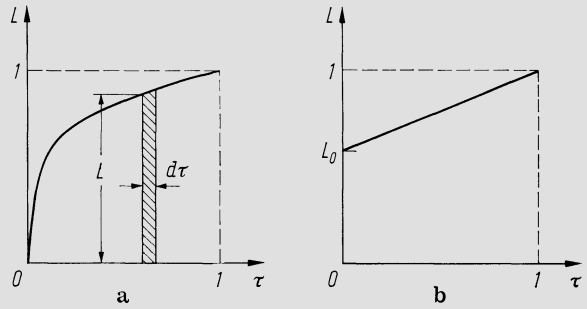


Abb. 12.4.7. Wirkungsgraddifferenz $\eta_{th0} - \eta_{th}$ bei Überlastregelung durch Stufenüberbrückung in Funktion des relativen Massenstromes \dot{m}/\dot{m}_0 , Kurven *a* ohne Zwischenüberhitzung, Kurven *b* mit Zwischenüberhitzung und Stufenüberbrückung an HD- und MD-Turbine, π' Verhältnis des Druckes an Zwischeneinführungsstelle zu dem am Eintritt der betreffenden Maschine, p_c Kondensationsdruck, p_E höchster Prozeßdruck. Kurven geben nur Einfluß der Stufenüberbrückung, nicht den des vergrößerten Austrittsverlustes

Unterlagen der hier angegebenen Art erlauben es, für ganze Betriebsperioden mit variierender Last verschiedene Regelungsverfahren miteinander energetisch zu vergleichen. Es sei $L = P/P_{max}$ der Lastfaktor, wo P_{max} die Maximalleistung der Anlage ist. Die Betriebsweise der Anlage läßt sich alsdann kennzeichnen durch die Angabe, daß während der ganzen Betriebsperiode t der Anteil $d\tau = dt/t$ mit Lastfaktoren zwischen L und $L + dL$ gefahren wird. Die Funktion $L(\tau)$, Abb. 12.4.8a, definiert die Betriebsweise. — Es sei \dot{m}^* der maximale Massenstrom, der nicht notwendig identisch ist mit dem Auslegungswert \dot{m}_0 . Dann ist, wenn das Zeichen * stets auf den Betriebszustand größten Massenstromes verweist

$$L = \frac{\dot{m}q\eta_{th}}{\dot{m}^*q^*\eta_{th}^*}, \tag{12.4.12}$$

Abb. 12.4.8. Lastfaktor L in Funktion des Zeitparameters τ . a) Typischer Verlauf $L(\tau)$; b) vereinfachte Darstellung, gekennzeichnet durch Parameter L_0



wo q die Wärmezufuhr pro Masseneinheit ist. Sind nun q und η_{th} in Funktion von \dot{m}/\dot{m}_0 bekannt, so kennt man sie auch in Funktion von \dot{m}/\dot{m}^* , vermöge Gl. 12.4(12) also auch in Funktion von L . Da weiter die während der Periode t zuzuführende Wärmemenge Q gegeben ist durch

$$dQ = \frac{P}{\eta_{th}} dt = \frac{P_{\max} t L}{\eta_{th}} d\tau, \quad Q = P_{\max} t \int_0^1 \frac{L}{\eta_{th}} d\tau \quad 12.4(13)$$

und die Arbeitsausbeute durch

$$A = \int_0^t P dt = P_{\max} t \int_0^1 L d\tau, \quad 12.4(14)$$

wird der Mittelwert des spezifischen Wärmeverbrauches

$$W = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^1 (L/\eta_{th}) d\tau}{\int_0^1 L d\tau}. \quad 12.4(15)$$

Davon ausgehend ergibt sich der energetische Vergleich verschiedener Regelungsarten. Sind etwa W'' , η''_{th} die Werte bei Drosselregelung und W' , η'_{th} diejenigen bei Düsengruppenregelung, so gibt

$$\frac{W'' - W'}{W'} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{\eta''_{th}} - \frac{1}{\eta'_{th}} \right) L d\tau}{\int_0^1 (L/\eta'_{th}) d\tau} \quad 12.4(16)$$

unmittelbar den relativen Mehrverbrauch der ersteren.

Um nun einen allgemeinen Überblick zu erhalten, können einfache normierte Funktionen $L(\tau)$ verwendet werden, z. B. ein linearer Verlauf nach Abb. 12.4.8b, der durch einen einzigen Parameter L_0 definiert wird. Abb. 12.4.9 zeigt einen Vergleich zwischen Düsengruppenregelung einerseits und Drosselregelung bzw. Gleitdruckregelung andererseits, der auf dieser Basis durchgeführt ist.

W' bezieht sich dabei auf die Düsengruppenregelung, W'' auf den anderen Regelungsartyp. Bei negativen Ordinatenwerten ist die Düsengruppenregelung unterlegen. Man versteht aufgrund dieser Gegenüberstellung, daß man bei großen Grundlastmaschinen sehr häufig der einfacheren Gleitdruck- oder Drosselregelung den Vorzug vor der Düsengruppenregelung gibt.

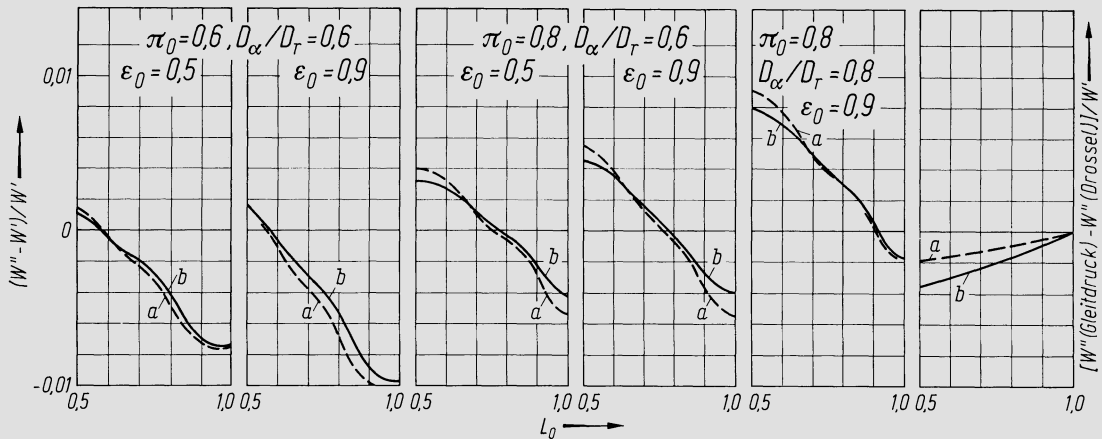


Abb. 12.4.9. Relative Unterschiede des integralen Wärmeverbrauches von Anlagen mit Drosselregelung und Düsengruppenregelung, Bedeutung der Parameter wie Abb. 12.4.5, Kurven gültig für $(l/D)_r = 0,02$, Kurven *a* ohne Zwischenüberhitzung, Kurven *b* mit Zwischenüberhitzung. Rechts Unterschied zwischen Gleitdruck- und Düsengruppenregelung. Ohne Zwischenüberhitzung 80 bar, mit Zwischenüberhitzung 160 bar; bei anderem Prozeßdruck proportional umzurechnen

12.5 Ausbildung und Bemessung der Regelventile

Um mit kleinen Stellkräften auszukommen, hat der Dampfturbinenbau ursprünglich eine Bauart aus dem Dampfmaschinenbau übernommen, das *entlastete Doppelsitzventil* (Abb. 12.5.1). Wird es als Regelventil benutzt, so wird es meist profiliert, derart, daß sich der gewünschte Zusammenhang zwischen Ventilhub y und Durchflußquerschnitt f ergibt, Abb. 12.5.1. Soll trotz des komplizierten Strömungsweges und der unvermeidlich ungünstigen Strömungsform des Ventils der Druckabfall bei voller Öffnung klein bleiben, so darf die (über den Querschnitt gemittelte) Durchflußgeschwindigkeit höchstens etwa 100 m/s betragen. Das Problem, an beiden Dichtflächen gleichzeitig zu dichten, ist in Anbetracht der Wärmedehnungen bei großen Abmessungen schwer zu lösen, weshalb die Konstruktion bei großen Maschinen nicht mehr angewandt wird.

Das *nicht entlastete Diffusorventil* (Abb. 12.5.2) weist demgegenüber eine günstige Strömungsform auf. Selbst im voll offenen Ventil können dabei hohe Durchflußgeschwindigkeiten zugelassen werden, da der anschließende Diffusor einen wesentlichen Teil des

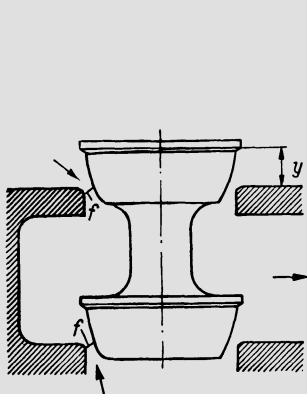


Abb. 12.5.1. Profiliertes Doppelsitzventil, f = Summe der Ringflächen

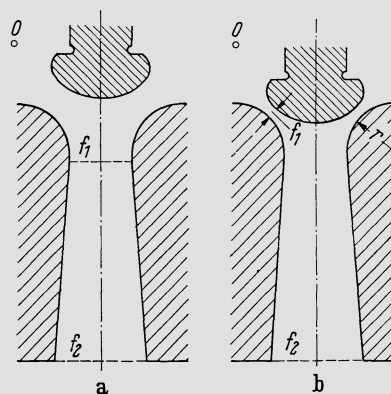


Abb. 12.5.2. Diffusorventil. a) Vollgeöffnet; b) teilgeöffnet

Druckabfalles rückgewinnt. Die kleinen Ventilabmessungen mildern den Nachteil der großen Stellkraft, die aber trotzdem sehr viel größer ist als beim entlasteten Ventil. Da nur ein Sitz vorhanden ist, läßt sich vollkommenes Dichthalten gut erreichen. Diese Form wurde für Regelventile lange Zeit weitaus am meisten benutzt.

Der Übergang zu größeren Maschinenleistungen hat indessen auch zu einer Weiterentwicklung der Ventilkonstruktionen geführt, vor allem weil vermehrt Schwierigkeiten durch *Ventilschwingungen* aufgetreten sind. Verschiedene Mechanismen können zu ihrer Entstehung führen, z. B. akustische Schwingungen in den unmittelbar benachbarten Hohlräumen. Vor allem aber kommen die Vorgänge in Betracht, die in Abb. 12.5.3 veranschaulicht sind. Eine mögliche Schwingung ist die Längsschwingung nach Abb. 12.5.3a. Die Nachgiebigkeit des Ventilschaftes und seiner Aufhängung ist dort durch eine Feder symbolisiert. Bewegt sich der Ventilkörper nach unten, so vermindert sich der Druck zwischen ihm und dem Sitz, was die Tendenz hat, die eingetretene Verschiebung zu verstärken. So kann ein Selbsterregungsmechanismus entstehen. Abb. 12.5.3b veranschaulicht eine

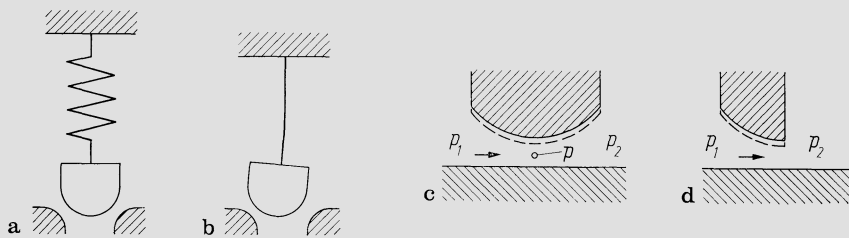


Abb. 12.5.3. Zur Veranschaulichung der Ventilschwingungen. a) Längsschwingung; b) zirkular polarisierte Schwingung; c) Anordnung ohne Abreißkante, d) Anordnung mit Abreißkante

zirkular polarisierte Schwingung, d. h. der Ventilkörper taumelt auf einem Kreis. Ist diese Bewegung einmal eingeleitet, so ist der Druck nicht nur dort tiefer, wo der Abstand zwischen Ventilkörper und Sitz kleiner ist, sondern aus den Grundgleichungen der instationären Strömung geht hervor, daß das Druckminimum am Umfang in Bewegungsrichtung des Ventils etwas vor der Engstelle liegt. Dadurch kommt eine Selbsterregung zustande.

Eine theoretische Behandlung des Problems der Ventilschwingungen scheint bis heute nicht möglich zu sein, doch zeigen qualitative Überlegungen, wie ihnen begegnet werden kann. — Bei der Anordnung nach Abb. 12.5.3c tritt Fluid aus einem Raum mit Druck p_1 in einen solchen mit Druck p_2 über. Wenn der obere Körper nach unten verschoben wird, etwa in die gestrichelt eingezeichnete Lage, wird der Druck p an der Engstelle tiefer, was im Sinne einer Vergrößerung der Verschiebung wirkt. Bei der Anordnung nach Abb. 12.5.3d hingegen herrscht in der Engstelle stets p_2 , weshalb eine Verschiebung des oberen Körpers in die gestrichelt angegebenen Lage dort nur den Massenstrom vermindert. — Daraus folgt, daß gerade die strömungstechnisch günstigen, glatten Konturen nach Abb. 12.5.2 die Schwingungsgefahr erhöhen. Das gilt besonders auch, wenn etwa in einer Ventilstellung gemäß Abb. 12.5.2b nach der Engstelle auf Überschall expandiert wird, worauf Verdichtungsstöße entstehen. Die Lage solcher Stöße kann oszillieren und akustische Schwingungen auslösen.

Abb. 12.5.4 zeigt halbschematisch einige Ventilformen, die sämtlich als Diffusorventile ausgebildet sind. Variante a ist das nicht entlastete Ventil, im Prinzip also wie dasjenige nach Abb. 12.5.2, doch weist der Ventilkörper an der Engstelle eine Abreißkante l auf. Außerdem ist ein Kranz von Störkörpern 2 angeordnet, der den Strahl ‚aufraut‘. Beides dient der Stabilisierung. Strömungstechnisch sind solche Formen weniger günstig, weshalb die Durchflußgeschwindigkeiten tiefer bleiben müssen. Ging man bei den früheren Formen im Querschnitt f_1 bei voller Öffnung teilweise bis 300 m/s, so bleibt

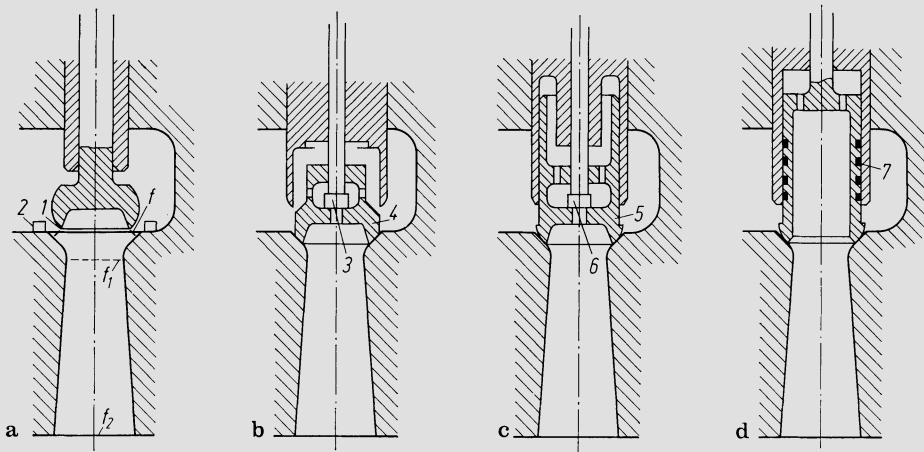


Abb. 12.5.4. Darstellung typischer Formen von Diffusorventilen: a) Nichtentlastetes Ventil; b) Schnellschlußventil mit Vorhubventil, wird geöffnet solange nachfolgendes Regelventil noch geschlossen; c) Regelventil mit Vorhubventil; d) entlastetes Rohrventil mit Zusatzdichtung und Dämpfung durch Kolbenringe

man bei modernen Ausführungen etwa bei Werten bis 180 m/s. Das Flächenverhältnis des Diffusors erreicht etwa den Wert $f_2/f_1 = 2$.

Wo die Stellkräfte zu groß werden, verwendet man schon seit langem das *Vorhubventil*. Variante b eignet sich als Schnellschlußventil, das geöffnet wird während die nachfolgenden Regelventile noch geschlossen sind. Durch Heben des Vorhubventiles 3 wird der Druckausgleich zwischen den Räumen vor und nach Ventilkörper 4 hergestellt, worauf 4 mit geringer Kraft hochgezogen werden kann bis zum Anschlag. In der Endlage besteht keine Schwingungsgefahr, da der Ventilkörper am Anschlag festgehalten ist; in einer Mittellage verbleibt das Ventil nicht.

Variante c ist ein Regelventil mit Vorhubventil. In geschlossener Lage herrscht über dem Ventilkörper 5 der volle Dampfdruck, da der enge Spalt zwischen diesem Körper und seiner Führung bei fehlendem Durchfluß den Druckausgleich herstellt. Wird das Vorhubventil 6 angehoben, so kommunizieren die Räume über und unter dem Ventilkörper miteinander, so daß dieser jetzt hochgezogen werden kann, und zwar kann er dank seiner guten Führung in jeder Lage stehen bleiben. — Daß der Ventilkörper mit dem Schaft nicht fest verbunden ist, ist allerdings vom Standpunkt der Stabilität ein gewisser Nachteil. Er läßt sich umgehen durch eine allerdings umständlichere Konstruktion, bei der das Vorhubventil neben dem Hauptventil angeordnet ist.

Das *Rohrventil*, Variante d, vermeidet diesen Nachteil ebenfalls und ist sehr einfach. Es ist auch im geschlossenen Zustand entlastet. Im gezeigten Beispiel ist der Spalt zwischen dem Ventilkörper und seiner Führung noch mit Kolbenringen 7 abgedichtet, was aber keine funktionelle Notwendigkeit ist und umgekehrt auch bei Anordnungen wie c möglich ist. Eine vollständige Abdichtung erreicht das Rohrventil auch mit Kolbenringen nicht, im Gegensatz zu den drei anderen Varianten. Als Regelventil kann es trotzdem ohne Nachteil verwendet werden, nicht aber als Schnellschlußventil. Ein Vorteil der Kolbenringe besteht darin, daß sie Dämpfung schaffen und damit die Schwingungsgefahr vermindern.

Abb. 12.5.5 zeigt ein profiliertes Doppelsitzventil, das bei der Düsengruppenregelung nach Abb. 12.1.6 bei kleineren Industrieturbinen verwendet wird. Abb. 12.5.6 gibt ein Beispiel eines HD-Schnellschlußventiles wieder, das nach dem in Abb. 12.5.4b dargestellten Prinzip arbeitet. Das Ventil ist mit einem Dampfsieb umgeben, das Fremdkörper aus der Turbine fernhält. In Abb. 12.5.7 ist die Kombination eines HD-Schnellschluß- und eines Regelventiles dargestellt. Die beiden Ventile arbeiten nach den in

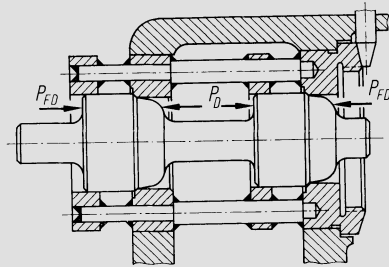


Abb. 12.5.5. Entlastetes Doppelsitzventil (AEG-Kanis)

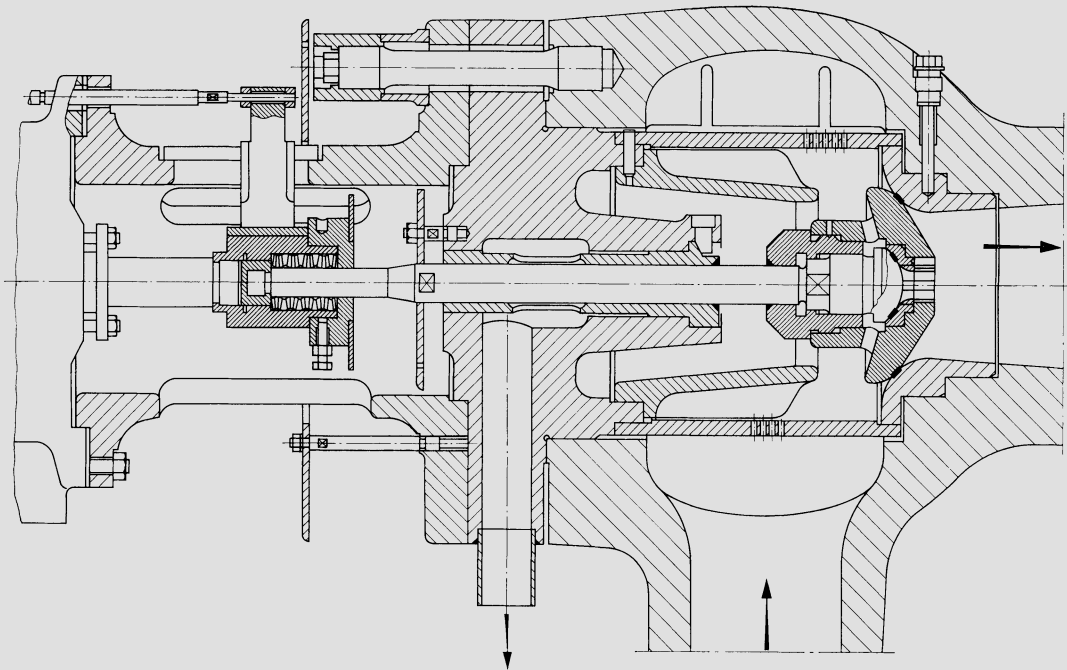


Abb. 12.5.6. HD-Schnellschlußventil (MAN)

Abb. 12.5.4b und d dargestellten Prinzipien. Abb. 12.5.8 schließlich zeigt eine zu einer einzigen Einheit vereinigte Gruppe eines Zwischendruckschnellschluß- und Abfangventiles. Solche Ventile nehmen des großen Volumenstromes wegen außerordentlich große Abmessungen an. Bemerkenswerterweise folgen hier im Strömungsweg nacheinander zuerst das Abfangventil (das regelnde Funktionen hat), in der Zeichnung links, dann das Schnellschlußventil, in der Zeichnung rechts. Beide besitzen Vorhubventile. Bei noch geschlossenem Abfangventil wird zuerst das Schnellschlußventil, das analog Abb. 12.5.4b arbeitet, nach links in den dafür vorgesehenen Hohlraum geschoben. Dann öffnet sich das Abfangventil, das nach dem Prinzip Abb. 12.5.4c arbeitet.

Allgemein werden die Ventile so ausgebildet, daß das Element, das bei voller Öffnung zum Anschlag kommt, hierbei den Dampfzutritt zum Spalt zwischen dem Ventilschaft und seiner Führung absperrt und so den Leckverlust unterbindet. Aufeinander gleitende Oberflächen müssen aus eisenarmen Sonderwerkstoffen bestehen, die im Bereich hoher Temperaturen dem Verschleiß widerstehen. Ventilkörper und Ventilsitze weisen an ihrer Berührungsstelle in der Regel eine Stellitepanzerung auf.

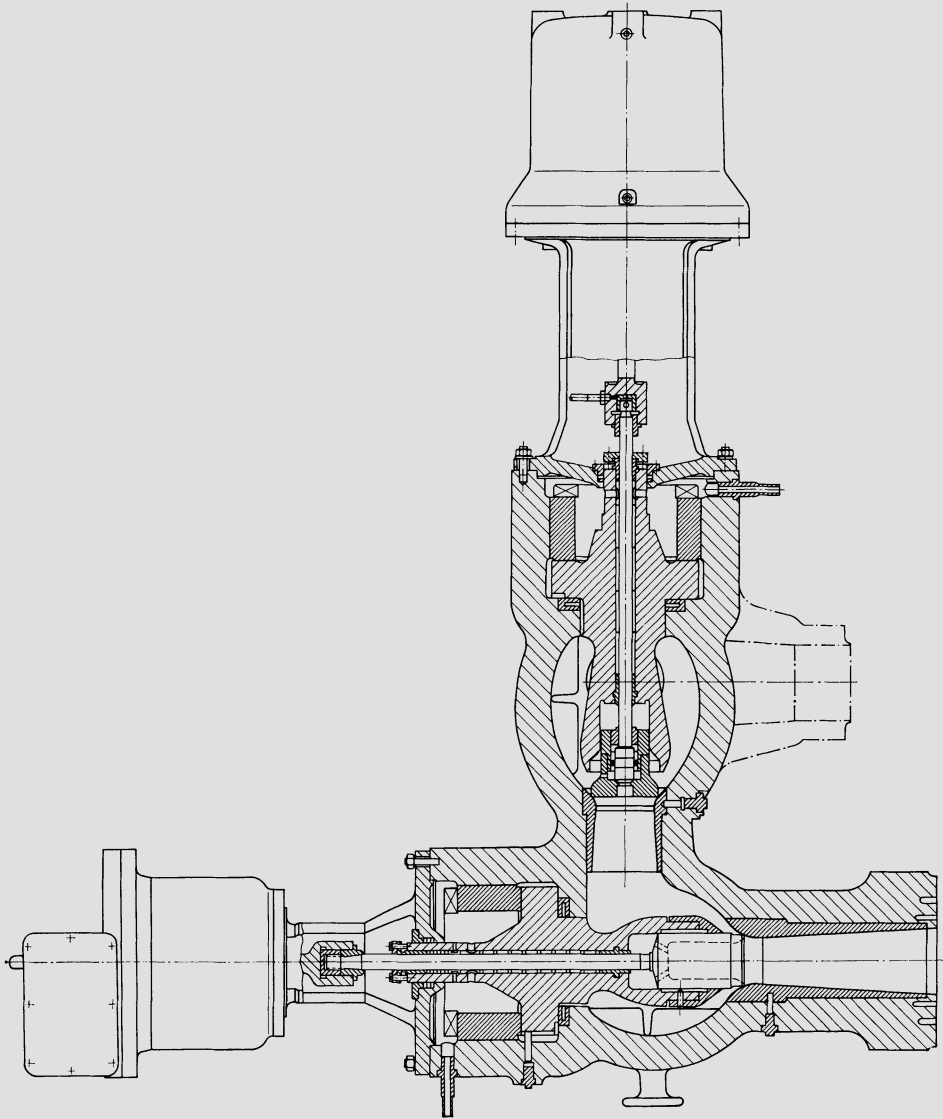


Abb. 12.5.7. Kombination HD-Schnellschluß- und Regelventil, Schnellschlußventil mit Vorhubventil dichtend, Regelventil nicht dichtendes entlastetes Rohrventil (KWU)

Ausgangspunkt für die Bemessung und Nachrechnung der Ventile sind die Untersuchungen nach 12.2, aus denen man für gegebene Werte des Druckes vor und nach Ventil den durchzusetzenden Massenstrom kennt. Beim Diffusorventil ist unter dem Druck nach Ventil derjenige nach dem Diffusor zu verstehen. Nachfolgend wird für das Diffusorventil aufgezeigt, wie sich aus diesen Angaben der Ventilquerschnitt in Funktion des Betriebszustandes berechnet. Für das diffusorlose Ventil reduziert sich diese Untersuchung auf die bekannte gasdynamische Durchflußgleichung. Es sei p_0, v_0 der Zustand vor Ventil, p, v derjenige im engsten Querschnitt f (Abb. 12.5.4a), p_1, v_1 derjenige im Halsquerschnitt f_1 und p_2 der Druck im Austrittsquerschnitt f_2 . Grundsätzlich ist p_0, v_0 als Totalzustand aufzufassen; doch genügt es im Rahmen der hier erforderlichen Genauigkeit, den statischen Druck einzusetzen; meist kann er auch konstantgesetzt werden. Dann ist also der Massenstrom in Funktion von p_2 vorgeschrieben.

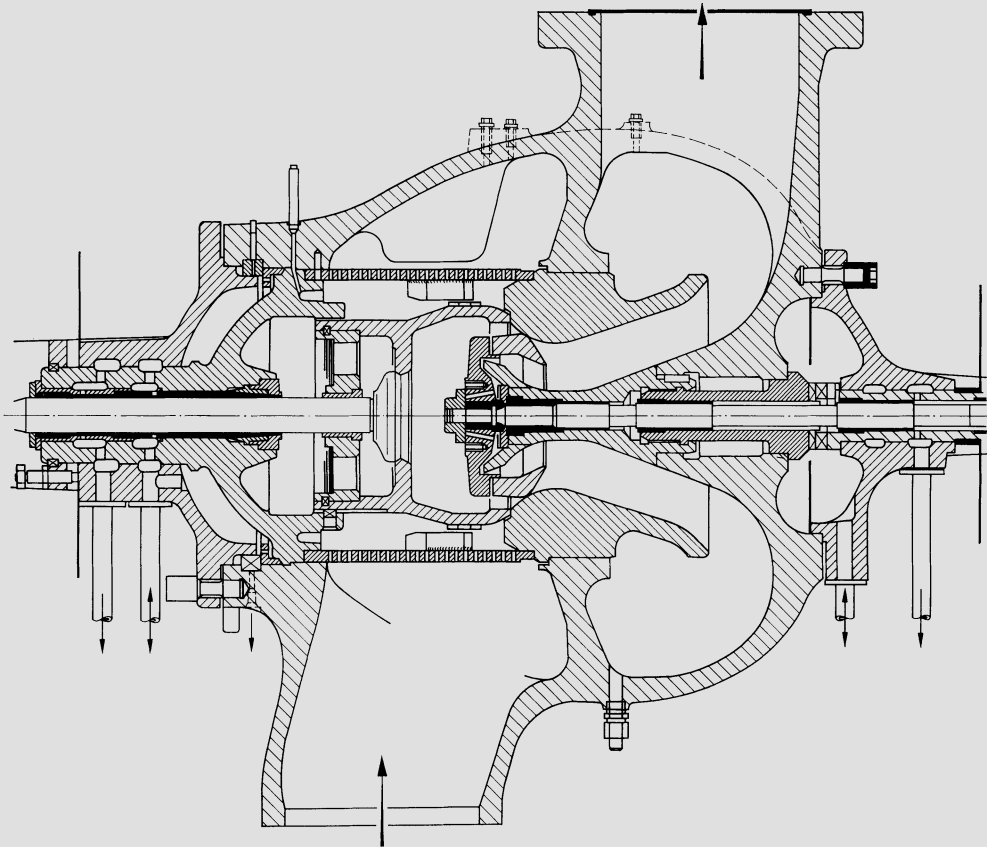


Abb. 12.5.8. Kombination MD-Schnellschluß- und Regelventil, beide mit Vorhubventilen (BBC)

Das Berechnungsverfahren geht aus von der Annahme, daß sobald $f < f_1$ der Druck im Raume zwischen f und f_1 konstant sei. Bei der Bauform mit Abreißkante ist dies sinnvoll. Die maßgebenden Gleichungen sind alsdann die folgenden:

$$\frac{c^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right], \quad 12.5(1)$$

$$pv = p_0 v_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad 12.5(2)$$

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} (pv_1 - pv) = \frac{c^2 - c_1^2}{2}, \quad 12.5(3)$$

$$pv_1 = pv \frac{f_1 c_1}{f c}, \quad 12.5(4)$$

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} pv_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \lambda_D \frac{c_1^2}{2}. \quad 12.5(5)$$

Gl. 12.5(1) ist die Energiegleichung der Strömung bis zum Querschnitt f , wo die Geschwindigkeit c herrscht. 12.5(2) ist die Polytropengleichung für den gleichen Abschnitt. Gl. 12.5(3) und (4) sind Energiegleichung und Kontinuitätsgleichung für den Raum zwischen f und f_1 , wo die Geschwindigkeit c_1 auftritt. Gl. 12.5(5) schließlich beschreibt den Druckumsatz im Diffusor mit λ_D als Diffusorumsetzungsgrad. Die Bedingung $p_1 = p$ ist in den Gleichungen bereits berücksichtigt. — Wenn in 12.5(3) pv_1 durch den Ausdruck 12.5(4) ersetzt und dann

zudem noch 12.5(2) eingeführt wird, entsteht eine quadratische Gleichung für c_1 . Zweckmäßig wird noch eine Dimensionsbefreiung vorgenommen durch folgende Setzungen:

$$\pi = \frac{p}{p_0}, \quad \pi_2 = \frac{p_2}{p_0}, \quad \Pi = \frac{p_2}{p_1}, \quad \varphi = \frac{f_{\min}}{f_1}, \quad 12.5(6)$$

$$C = \frac{c}{\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_0 v_0}}, \quad C_1 = \frac{c_1}{\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_0 v_0}}. \quad 12.5(7)$$

Hier ist f_{\min} der kleinste Querschnitt, also meist der Querschnitt f (Abb. 12.5.4a).

Dann reduziert sich das Gleichungssystem auf die Form

$$C^2 = 1 - \frac{\pi^{n-1}}{\pi^n}, \quad 12.5(8)$$

$$C_1 = -\frac{\pi^{n-1}}{2\varphi C} + \sqrt{\left[\frac{\pi^{n-1}}{2\varphi C}\right]^2 + 1}, \quad 12.5(9)$$

$$\Pi = \left[1 + \lambda_D \frac{\varphi C C_1}{\pi^{n-1}}\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 12.5(10)$$

$$\pi_2 = \Pi \pi. \quad 12.5(11)$$

Wenn das Zeichen * auf den Zustand des voll geöffneten Ventils verweist, hat die gegebene Durchflußvorschrift die Form

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} = F(\pi_2). \quad 12.5(12)$$

Dem ist noch das gasdynamische Durchflußgesetz des Ventils beizufügen. Es wird angenommen, daß bei voller Öffnung $f > f_1$, so daß also f_1 der engste Querschnitt ist. Wenn nun n und n^* die Polytropenexponenten für beliebigen Zustand und volle Öffnung sind und man setzt

$$\xi = \frac{2}{n}, \quad \eta = \frac{n+1}{n}, \quad x = \frac{2}{n^*}, \quad y = \frac{n^*+1}{n^*}, \quad 12.5(13)$$

kann das Durchflußgesetz in der Form

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} = \varphi \sqrt{\frac{\pi^\xi - \pi^\eta}{\pi^{*x} - \pi^{*y}}} \quad 12.5(14)$$

geschrieben werden. Dies gilt für

$$\pi \geq \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad 12.5(15)$$

Darunter ist

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} = \varphi \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}} - \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}}{\pi^{*x} - \pi^{*y}}}. \quad 12.5(16)$$

Von dem Punkt an aufwärts, wo $f = f_1$ erreicht ist, bleibt $\varphi = 1$, da ja nun f_1 die Engstelle ist. Ein weiteres Hochziehen des Ventils hat nur noch die Folge, daß die Strömungsbedingungen verbessert werden, was sich im Polytropenexponenten äußert, der schließlich den Wert n^* erreicht. Dieser Übergang ist mit einer geringfügigen Vergrößerung von \dot{m}/\dot{m}^* verbunden, was 12.5(14) korrekt berücksichtigt.

Rechnerisch wird so vorgegangen, daß ein π über dem kritischen Wert nach 12.5(15) gewählt und ein zugehöriges φ versuchsweise angenommen wird. Dann liefern 12.5(8) bis (12) in dieser Reihenfolge die links stehenden Größen. Schließlich ist 12.5(14) zu kontrollieren und φ zu verändern, bis Übereinstimmung mit 12.5(12) hergestellt ist. In diese Rechnung gehen empirische Unterlagen über λ_D ein, das in Funktion von C_1/C angegeben werden kann. Wo solche nicht vorliegen, kann für orientierende Rechnungen angenommen werden, daß λ_D zwischen $C_1/C = 1$ und 0,6 linear vom Auslegungswert auf Null abfällt. Darunter beschränkt sich die Rechnung auf die Gln. 12.5(14)–(16); meist ist dies der weitaus größte Teil des Regelbereiches. In ihrer Gesamtheit liefert diese Rechnung schließlich den Zusammenhang zwischen φ und \dot{m}/\dot{m}^* , somit zwischen Ventilstellung und Durchfluß. Abb. 12.5.9 zeigt ein solches Rechenergebnis.

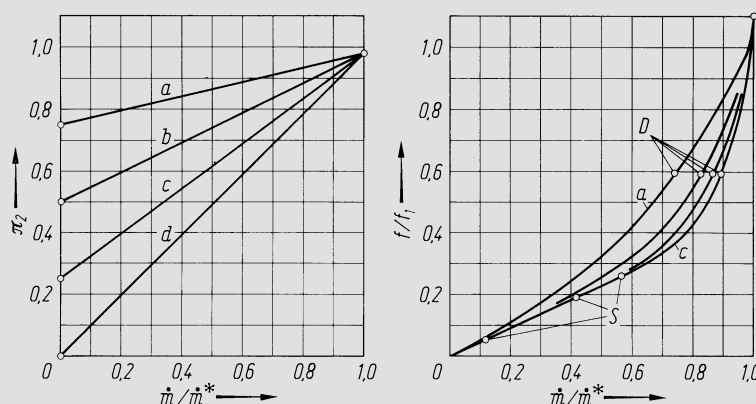


Abb. 12.5.9. Beispiel eines Rechenergebnisses für Diffusorventil. Links: Kurven $a-d$ verschiedene Zusammenhänge zwischen Druckverhältnis π_2 und Massenstromverhältnis \dot{m}/\dot{m}^* ; rechts: f/f_1 in Funktion von \dot{m}/\dot{m}^* für die Fälle $a-d$

Die Ventilbemessung im Auslegungspunkt ergibt sich in der folgenden Weise. Mit $C = C_1$ und der Abkürzung $N = (n^* - 1)/n^*$ liefern 12.5(8), (10) und (11)

$$\pi_2^* = \pi^* \left[1 + \lambda_D^* \frac{1 - \pi^{*N}}{\pi^{*N}} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad 12.5(17)$$

woraus π^* bei vorgeschriebenem π_2^* zu bestimmen ist. Dann ist

$$\frac{c_1^{*2}}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_0 v_0 (1 - \pi^{*N}), \quad 12.5(18)$$

$$f_1 = \frac{\dot{m}^* v_0}{c_1^*} \pi^{* - \frac{1}{n^*}}. \quad 12.5(19)$$

Durch diesen Querschnitt sind im Verein mit der vorausgesetzten Bauart (insbes. f_2/f_1) die maßgebenden Abmessungen festgelegt.

Den Zusammenhang zwischen der Stellung des Servomotors und dem Massenstrom kann man sich aus der Zuordnung von φ und \dot{m}/\dot{m}^* vorschreiben — zweckmäßig linear — wenn das Ventil dementsprechend profiliert wird oder wenn seine Verstellung über eine Nockenwelle erfolgt. Wo beides nicht der Fall ist, kann eine solche Bedingung nicht erfüllt werden und eine Vorschrift über den Zusammenhang zwischen primärem Regelimpuls (z. B. Drehzahlabweichung) und Massenstrom muß durch die Ausgestaltung des Regelsystems erfüllt werden, das den Servomotor steuert.

12.6 Zur Dynamik der Dampfturbinenregelung

Nachfolgend werden diejenigen Gleichungen angegeben, die das dynamische Verhalten der Dampfturbogruppe selbst beschreiben. Das betrachtete System reicht also vom Hauptabsperrentventil bis zum Kondensator, schließt das Volumen des allfällig vorhandenen Zwischenüberhitzers ein und ebenso natürlich den Generator. Nicht eingeschlossen ist das — heute oft elektronisch arbeitende — Regelsystem selbst samt den hydraulischen Stellmotoren. Die Gleichungen repräsentieren vielmehr die Angabe über das Verhalten der Turbogruppe, die der Regelungsfachmann zur Konzeption des Regelsystems und zur dynamischen Untersuchung der gesamten Anlageregelung braucht.

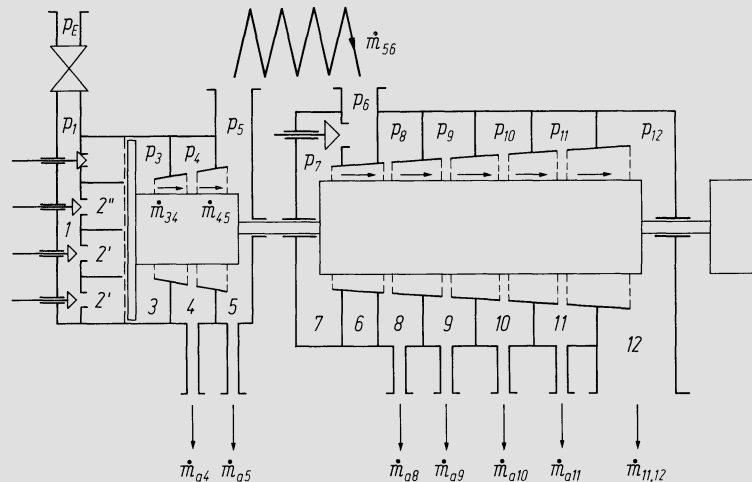


Abb. 12.6.1. Schema einer Dampfturbine mit Zwischenüberhitzung, Anzapfungen und Regelstufe; zur Aufstellung des regeldynamischen Gleichungssystems

Bei der Verfolgung der Herleitung beachte man Abb. 12.6.1, aus der auch die Bezeichnungen z. T. hervorgehen. Ist P_T die augenblickliche Turbinenleistung, P_G die Generatorleistung, Θ das Massenträgheitsmoment der ganzen Turbo-Generatorgruppe und ω die Winkelgeschwindigkeit, so lautet die Energiegleichung des Läufersystems

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Theta}{2} \omega^2 \right) = P_T - P_G. \quad 12.6(1)$$

Wenn weiter P_0 und ω_0 Turbinenleistung und Winkelgeschwindigkeit im Auslegungszustand sind, mögen die Abkürzungen

$$\Omega \equiv \frac{\omega}{\omega_0}, \quad t_T \equiv \frac{\Theta \omega_0^2}{2P_0} \quad 12.6(2)$$

eingeführt werden; hier ist t_T die *Trägheitszeit*, d. h. die Zeit, die man mit der vollen Anlageleistung multiplizieren muß, um die Bewegungsenergie des mit ω_0 rotierenden Läufer-systems zu erhalten. Da ω von ω_0 nur sehr wenig abweichen wird, ist

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Theta}{2} \omega^2 \right) = \Theta \omega \frac{d\omega}{dt} \approx \Theta \omega_0 \frac{d\omega}{dt}, \quad 12.6(3)$$

womit 12.6(1) übergeht in

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2t_T} \frac{P_T - P_G}{P_0}. \quad 12.6(4)$$

Für einen *durchströmten Schaufelungsteil* zwischen den Punkten i und j kann die Durchflußgleichung in der Form

$$\dot{m}_{ij} = \dot{m}_{ij0} \frac{p_i}{p_{i0}} E_{ij} \quad 12.6(5)$$

geschrieben werden. Hier verweist Index 0 auf den Auslegungspunkt und E_{ij} ist die mit $\pi = p_j/p_i$ gemäß den Ausführungen unter 11.3 gebildete Ellipsenfunktion des Schaufelungsteils. Der Faktor $(\mu/\mu_0) \sqrt{j_{i0}/j_i}$, der in der Durchflußgleichung strenggenommen noch stehen sollte, kann bei den Genauigkeitsanforderungen einer regeldynamischen Rechnung entfallen. Die Durchflußgleichung eines *Ventils* zwischen den Punkten i und j kann folgendermaßen formuliert werden. Es sei f der Durchflußquerschnitt des Ventils, f_{\max} sein Höchstwert und $\Phi \equiv f/f_{\max}$. Dann ist

$$\dot{m}_{ij} = \dot{m}_{ij0} \frac{p_i}{p_{i0}} \Phi_{ij} E_{ij}. \quad 12.6(6)$$

Die Durchflußfunktion E_{ij} hängt hier in dem Bereich, wo der Diffusor des Ventils wirksam ist, nicht nur von π , sondern auch von Φ_{ij} selbst ab. Die Funktion E_{ij} kann aufgefunden werden nach der im vorangehenden Abschnitt angegebenen Theorie, wobei man aber Gl. 12.5(12) wegläßt und vielmehr φ unabhängig vom Druckverhältnis variiert, so daß man die gesamte Mannigfaltigkeit der möglichen Betriebszustände des Ventils erhält.

An den Trennstellen der verschiedenen durchströmten Elemente findet oft eine Verzweigung statt (Anzapfungen) und es schließen an sie Volumina V_j mit Masseninhalten m_j an. Ist also \dot{m}_{ij} der eintretende, \dot{m}_{jk} der austretende und \dot{m}_{aj} der abgezweigte (angezapfte) Massenstrom, so ist

$$\frac{dm_j}{dt} = \dot{m}_{ij} - \dot{m}_{jk} - \dot{m}_{aj}. \quad 12.6(7)$$

Für \dot{m}_{aj} gilt an sich ein sehr kompliziertes Gesetz, das gegeben ist durch das dynamische Verhalten des anschließenden Vorwärmersystems. Da die angezapften Mengen aber verhältnismäßig klein sind, genügt es in der Regel, eine funktionale Abhängigkeit $\dot{m}_{aj}(p_j)$ in die Rechnung einzuführen, die dem als bekannt vorausgesetzten stationären Verhalten entspricht. Man beachte, daß das Volumen des Vorwärmers selbst in V_j eingeht, so daß \dot{m}_{aj} der wirklich kondensierende und nicht der durch den Anzapfquerschnitt der Turbinenschaufelung strömende Massenstrom ist.

Es werde angenommen, daß die zeitliche Zustandsänderung im Raume V_j durch ein Polytropengesetz der Form

$$\frac{\varrho_i}{\varrho_{j0}} = \left(\frac{p_j}{p_{j0}} \right)^{\frac{1}{n}} \quad 12.6(8)$$

beschrieben werden kann. Dann ist mit $m_j = \varrho_j V_j$

$$\frac{dm_j}{dt} = \frac{\varrho_{j0} V_j}{n} \left(\frac{p_j}{p_{j0}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{p_j} \frac{dp_j}{dt} = \frac{m_{j0}}{n p_j} \left(\frac{p_j}{p_{j0}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_j}{dt}. \quad 12.6(9)$$

Der Masseninhalt von V_j im Auslegungspunkt kann gekennzeichnet werden durch die *Füllzeit*

$$t_j \equiv m_{j0} / \dot{m}_{ij0}, \quad 12.6(10)$$

womit sich 12.6(9) in der Form

$$\frac{dm_j}{dt} = \frac{\dot{m}_{ij0} t_j}{n p_j} \left(\frac{p_j}{p_{j0}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_j}{dt} \quad 12.6(11)$$

schreibt.

Wenn man nun in der Bilanzgleichung 12.6(7) die links stehende Ableitung durch 12.6(11), die rechts stehenden Massenströme durch 12.6(5) ersetzt, entsteht die Differential-

gleichung

$$\frac{t_j}{np_j} \left(\frac{p_j}{p_{j0}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_j}{dt} = \frac{p_i E_{ij}}{p_{i0}} - \gamma_i \frac{p_j E_{jk}}{p_{j0}} - \frac{\dot{m}_{aj}(p_j)}{\dot{m}_{ij0}}. \quad 12.6(12)$$

Hier ist $\gamma_j = \dot{m}_{jk0}/\dot{m}_{ij0}$. Schließt ein Ventil an den betrachteten ‚Knotenpunkt‘ an, so ist das betreffende E durch ΦE zu ersetzen. Das System dieser Differentialgleichungen, für alle maßgebenden Punkte j einer Maschinengruppe formuliert, beschreibt die thermodynamische Seite des regeldynamischen Verhaltens.

Zur Illustration werde das Gleichungssystem für die in Abb. 12.6.1 veranschaulichte Anordnung angegeben.

$$\frac{t_2''}{np_2''} \left(\frac{p_2''}{p_{20}''} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_2''}{dt} = \Phi_2'' E_{12}'' - \frac{p_2'' E_{23}''}{p_{20}''}, \quad 12.6(13)$$

$$\frac{t_3}{np_3} \left(\frac{p_3}{p_{30}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_3}{dt} = \Sigma \mu' E_{13}' + \mu'' \frac{p_2'' E_{23}''}{p_{20}''} - \frac{p_3}{p_{30}}, \quad 12.6(14)$$

$$\frac{t_4}{np_4} \left(\frac{p_4}{p_{40}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_4}{dt} = \frac{p_3}{p_{30}} - \gamma_4 \frac{p_4 E_{45}}{p_{40}} - \frac{\dot{m}_{a4}(p_4)}{\dot{m}_{34,0}}, \quad 12.6(15)$$

$$\frac{t_5}{np_{50}} \frac{dp_5}{dt} = \frac{p_4 E_{45}}{p_{40}} - \gamma_5 \frac{p_6 \Phi_{67} E_{67}}{p_{60}} - \frac{\dot{m}_{a5}(p_5)}{\dot{m}_{45,0}}, \quad 12.6(16)$$

$$p_6 = (1 - \varepsilon) p_5, \quad 12.6(17)$$

$$\frac{t_7}{np_{70}} \left(\frac{p_7}{p_{70}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_7}{dt} = \frac{p_6 \Phi_{67} E_{67}}{p_{60}} - \frac{p_7}{p_{70}}, \quad 12.6(18)$$

$$\frac{t_8}{np_{8,0}} \left(\frac{p_8}{p_{8,0}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_8}{dt} = \frac{p_7}{p_{7,0}} - \gamma_8 \frac{p_8}{p_{8,0}} - \frac{\dot{m}_{a8}(p_8)}{\dot{m}_{78,0}}, \quad 12.6(19)$$

$$\frac{t_9}{np_{9,0}} \left(\frac{p_9}{p_{9,0}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_9}{dt} = \frac{p_8}{p_{8,0}} - \gamma_9 \frac{p_9}{p_{9,0}} - \frac{\dot{m}_{a9}(p_9)}{\dot{m}_{89,0}}, \quad 12.6(20)$$

$$\frac{t_{10}}{np_{10,0}} \left(\frac{p_{10}}{p_{10,0}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_{10}}{dt} = \frac{p_9}{p_{9,0}} - \gamma_{10} \frac{p_{10}}{p_{10,0}} - \frac{\dot{m}_{a10}(p_{10})}{\dot{m}_{9,10}}, \quad 12.6(21)$$

$$\frac{t_{11}}{np_{11,0}} \left(\frac{p_{11}}{p_{11,0}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{dp_{11}}{dt} = \frac{p_{10}}{p_{10,0}} - \gamma_{11} \frac{p_{11} E_{11,12}}{p_{11,0}} - \frac{\dot{m}_{a11}(p_{11})}{\dot{m}_{10,11,0}}, \quad 12.6(22)$$

$$p_{12} = f \left\{ \frac{p_{11} E_{11,12}}{p_{11,0}} \right\}. \quad 12.6(23)$$

Gl. 12.6(17) führt den Druckabfall im Zwischenüberhitzer ein, während 12.6(23) die Abhängigkeit des Kondensationsdruckes vom Massenstrom darstellt. Im Falle des Zwischenüberhitzers, Gl. 12.6(16), ist der Exponent der Zustandsänderung 1 gesetzt. Die μ' und μ'' sind für die verschiedenen Beaufschlagungssektoren die im Auslegungspunkt geltenden Verhältnisse der Massenströme zum Gesamtmassenstrom. Für alle Schaufelungsteile mit Ausnahme der Regelstufe und der Stufengruppen 4–5 und 11–12 sind die E -Funktionen von vornherein 1 gesetzt, da sich Anfangs- und Enddruck in ungefähr gleichem Verhältnis verschieben. Wo die Füllzeiten vernachlässigbar klein werden, degenerieren die betreffenden Differentialgleichungen zu algebraischen Gleichungen.

Das damit vorliegende Gleichungssystem besteht aus 11 Gleichungen für ebensoviele unbekannte Druckwerte. Sie enthalten ferner als Einflußgrößen die Ventilöffnungsparameter Φ_2'' und Φ_{67} . Sind für einen Zeitpunkt alle Druckwerte bekannt, so ergeben sich für

die einzelnen Entspannungsabschnitte die Zustandsänderungen und Leistungen aus

$$h_i - h_j = \eta_{ij} \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_i v_i \left[1 - \left(\frac{p_j}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right], \quad 12.6(24)$$

$$P_{ij} \approx \dot{m}_{ij0} \frac{p_i}{p_{i0}} E_{ij} (h_i - h_j). \quad 12.6(25)$$

Hier ist η_{ij} der isentrope Wirkungsgrad des Entspannungsabschnittes. Die zweite Gleichung ist nur eine Näherung, da eigentlich Totalenthalpien eingesetzt werden sollten. Der Fehler ist aber bei dem hier verlangten Genauigkeitsgrad höchstens im letzten Abschnitt vor dem Kondensator von Belang und kann dadurch ausgeglichen werden, daß man den Funktionalzusammenhang Gl. 12.6(23) so festlegt, daß er einen entsprechend größeren Druck p_{12} liefert. — Damit kann schließlich Gl. 12.6(4) in der Form

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2t_T} \frac{\Sigma P_{ij} - P_G}{P_0} \quad 12.6(26)$$

dargestellt werden.

Die Gln. 12.6(13)—(26) beschreiben das regeldynamische Verhalten der Turbogruppe vollständig. Dazu sind die Gleichungen des Regelsystems selber beizufügen. Diese verknüpfen die Φ mit Ω und im allgemeinen auch mit anderen Größen, die in das Gesamtregelsystem einbezogen sind. Erst diese Formulierung des Gesamtproblems erlaubt auch die Beurteilung der *Stabilität* der Regelung nach den Kriterien der Regelungstheorie, vgl. darüber etwa *Oppelt* [13], wo auch umfassende Literaturhinweise über dieses Fachgebiet zu finden sind, *Leonhart* [14] und speziell für die Dampfturbine auch *Kleinau* [15].

Hier ist das Beispiel einer Dampfturbine mit Zwischenüberhitzung und Regelstufe genauer behandelt worden. Andere Anordnungen ergeben sich in naheliegender Abwandlung des hier Dargestellten. Das gilt insbesondere auch für den Fall des Stufenüberbrückungsventiles, wo an der betreffenden Knotenstelle zwei zuströmende und ein abströmender Massenstrom auftreten.

12.7 Berechnung der Überdrehzahlen

Wenn infolge einer Störung im elektrischen Netz von Vollast aus die Leistungsaufnahme des Generators plötzlich auf Null sinkt, so muß verlangt werden, daß das Regelungssystem genügend rasch reagiert, um einen unzulässig großen Drehzahlanstieg zu vermeiden. Nach einer unvermeidlichen vorübergehenden Überdrehzahl, die in engen Grenzen bleibt, führt die Regelung die Drehzahl sogleich wieder auf den Normalwert zurück. Die Maschine ist dann im Leerlauf und kann wieder synchronisiert und auf das Netz geschaltet werden, sobald dies von der elektrischen Seite aus möglich ist. Bei Abnahmeversuchen muß aus Sicherheitsgründen nachgewiesen werden, daß die Regelung diese Bedingung wirklich erfüllt, was bei den Anlagen mit Zwischenüberhitzung zunächst nur nach einigen Anstrengungen zu verwirklichen war. Im Schrifttum finden sich daher auch mehrfach Beispiele von Abschaltversuchen beschrieben, durch welche die Erfüllung dieser Bedingungen nachgewiesen wurde, vgl. etwa *Oberle* [16], *Raab* [17], *Tröscher* [18]. Abb. 12.7.1 zeigt ein Beispiel eines solchen Versuchsergebnisses, wobei auch die Ventilhubkurven dargestellt sind. Man erkennt, daß etwa 0,6 s nach Eintritt der Abschaltung die HD-Regelventile vollständig geschlossen sind. Die Totzeit, nach der das Schließen der Ventile beginnt, beträgt etwa 0,2 s. Bei diesem ganzen Vorgang treten die Schnellschlußventile nicht in Aktion, denn die normale Regelung soll ja die Vollastabschaltung abfangen.

Die *Berechnung* des Vorganges der normalen Lastabschaltung erfolgt auf der gleichen Grundlage wie die Berechnung irgendwelcher Regelvorgänge. Im Beispiel Abb. 12.6.1 beschreibt also das Gleichungssystem 12.6(13)—(26) das Verhalten der Turbogruppe. Die

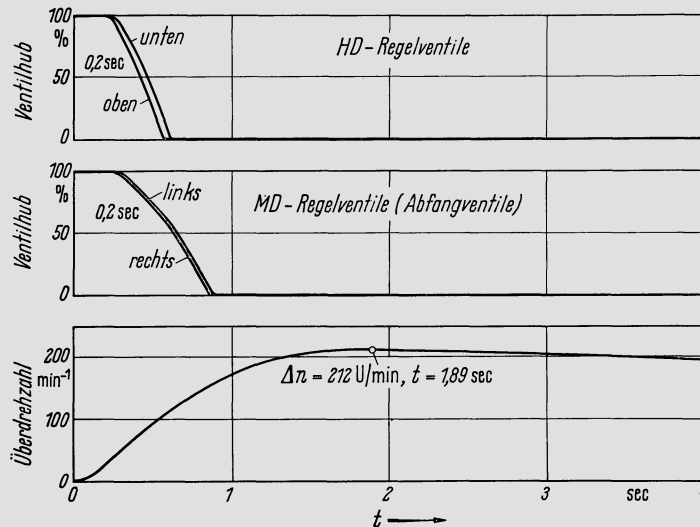


Abb. 12.7.1. Drehzahlverlauf beim Abschaltversuch an einer Turbine mit Zwischenüberhitzer.
Nach Tröscher [18] (KWU)

Gleichungen sind zu ergänzen durch diejenigen, die das Verhalten des Regelsystems selbst wiedergeben und damit insbesondere den Zusammenhang zwischen den Ventilöffnungsgrößen Φ und dem Drehzahlverhältnis Ω festlegen. Immerhin ergeben sich gewisse Unterschiede dadurch, daß bei diesem besonderen Regelvorgang die einzelnen Größen in kurzer Zeit sehr große Änderungen erfahren. Das beeinflusst insbesondere die angezapften Dampfströme. Der Wasserinhalt der Vorwärmer verhindert, daß dort in quasistationärer Weise sich stets der Zustand einstellt, der dem augenblicklichen Anzapfdruck entspricht. Würde nichts besonderes vorgekehrt, so würde sich der Wasserinhalt eines Vorwärmers bei sehr raschem Abfallen des Druckes ausdampfen und der entsprechende Dampf würde rückwärts durch die Anzapfleitung zur Turbine strömen und dort bis auf Kondensationsdruck expandieren. Die so freiwerdende Expansionsenergie würde das Läufer-system beschleunigen und die Turbogruppe gefährden.

Deshalb müssen in die Anzapfleitungen Rückschlagventile eingebaut sein — und zwar zur Sicherheit in jede Leitung zwei voneinander unabhängige in Serie — die dieses Rückströmen verhindern. In der Rechnung läßt sich das wie folgt berücksichtigen. Es sei p_{i0} der Druck an der Anzapfstelle im Beharrungszustand und $(1 - \varepsilon_i) p_{i0}$ der entsprechende Druck im Vorwärmer. Wenn nun p_i sehr rasch abfällt, müßte die Strömung umkehren, sobald

$$p_i < (1 - \varepsilon_i) p_{i0}. \quad 12.7(1)$$

Dies verhindern die Rückschlagventile, weshalb in der entsprechenden Gleichung $\dot{m}_{ai} = 0$ zu setzen ist, sobald $p_i = (1 - \varepsilon_i) p_{i0}$ erreicht ist. Zwischen dem Beharrungszustand und dem eben genannten Grenzzustand kann hinreichend genau eine lineare Abhängigkeit zwischen \dot{m}_{ai} und p_i angenommen werden. Ferner sind bei so raschen Vorgängen die den einzelnen Verzweigungsstellen zugeordneten Füllzeiten t_i im allgemeinen kleiner als für normale Regelvorgänge, da wiederum die Dampfhalte der Vorwärmer nicht einzurechnen sind. Bei vielen Anzapfstellen werden dann die t_i vernachlässigbar klein, womit die entsprechenden Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen übergehen. — Die Durchrechnung des Vorganges hat die Gestalt einer Differenzenrechnung, wobei die Zeitintervalle zu Beginn des Vorganges sehr kurz zu wählen sind. Die Rechnung kann abgebrochen werden, sobald die Drehzahl wieder anfängt zu fallen, was nach wenigen Sekunden der Fall ist. Die höchste Drehzahl liegt im Beispiel Abb. 12.7.1 etwa 7,1% über der Normaldrehzahl, was eine typische Größenordnung ist.

Erst wenn die normale Regelung versagt, treten die *Schnellschlußventile* in Aktion, was ein Abstellen der Anlage bedeutet. Der Schnellschluß muß daher so eingestellt sein, daß er erst ausgelöst wird bei einer Drehzahl, die wenig über der Höchstdrehzahl des regulären Vollastabschaltvorganges (im oben genannten Beispiel also über 7,1%) liegt. Aus Gründen der Betriebssicherheit erfolgt die Auslösung des Schnellschlußvorganges auch heute noch durch mechanische Drehzahlwächter (Fliehkraft), die unmittelbar die Hydraulik der Stellmotoren drucklos machen und so das sofortige Schließen der Ventile herbeiführen. Die rechnerische Behandlung hat hier davon auszugehen, daß diese Auslösedrehzahl bereits erreicht ist und sie untersucht nun die weitere Drehzahlsteigerung. Das kann grundsätzlich gleich geschehen wie im regulären Falle, nur daß jetzt im Gleichungssystem die Φ -Größen der Schnellschlußventile auftreten. Diese werden nun unmittelbar in Funktion der Zeit gegeben (die Schlußzeiten sind nur durch die Trägheit der Ventile und ihrer Stellmotoren bestimmt), während die Gleichungen des Regelsystems selber nicht mehr heranzuziehen sind, weil der Regelkreis aufgeschnitten ist. Im Falle der Anordnung mit Regelstufe tritt an die Stelle der Gl. 12.6(13) eine ihr analoge, die jetzt aber nicht für den einzelnen Sektor gilt, sondern für die ganze Regelstufe, da ja das Schnellschlußventil allen Sektoren gemeinsam vorgeschaltet ist.

Zur raschen angenäherten Ermittlung von Überdrehzahlen kann auch folgendes Verfahren dienen. Sobald die Ventile an einer Turbine vollständig geschlossen sind, kann diese vereinfachend aufgefaßt werden als ein System der in Abb. 12.7.2 dargestellten Art.

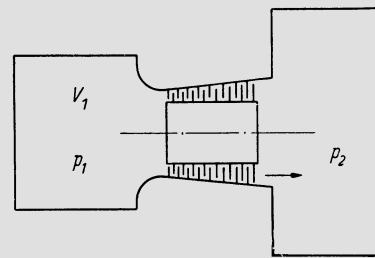


Abb. 12.7.2. Ersatzsystem, bestehend aus geschlossenem Raum V_1 und anschließender arbeitenaufnehmender Schaufelung

Aus einem Raum vom Volumen V_1 , in dem der Druck p_1 herrscht, strömt der Dampf durch eine Schaufelung hindurch ab in einen Raum vom Druck p_2 . Am einfachsten läßt sich der Vorgang behandeln, ausgehend von der Vorstellung, die in V_1 zu Beginn vorhandene Dampfmasse m expandiere als Ganzes gemäß einer in allen Teilen gleichen Zustandsänderung. Sie leistet dabei einerseits Arbeit an der Schaufelung und schiebt sich quasi wie ein Kolben in den Raum vom Druck p_2 hinein. Sind u_1 und u_2 die spezifischen Werte der inneren Energie zu Anfang und zu Ende des Vorganges und A die an die Turbinenschaufelung abgebende Arbeit, so lautet die Energiebilanz des Vorganges

$$A + p_2 m(v_2 - v_1) = m(u_1 - u_2). \quad 12.7(2)$$

Das zweite Glied links ist die Verschiebungsarbeit gegen den Druck p_2 . Nimmt man es nach rechts und führt die Enthalpien h_1 und h_2 ein, so findet man

$$A = m[h_1 - h_2 - (p_1 - p_2)v_1]. \quad 12.7(3)$$

Eine Turbogruppe kann nun nach Abschluß sämtlicher Ventile im allgemeinen aus mehreren Systemen der in Abb. 12.7.2 dargestellten Art zusammengesetzt gedacht werden. Bei einer Maschine mit Zwischenüberhitzung bildet z.B. die HD-Turbine für sich ein solches System. Der Ausströmraum ist der Zwischenüberhitzer, in dem der Druck während des kurzen Ausgleichvorganges sich nur unwesentlich ändert. Der nach der Zwischenüberhitzung folgende Teil ist das zweite der Systeme, wobei der Kondensatordruck die Rolle von p_2 übernimmt. Wenn etwa zwischen einem MD- und einem ND-Teil ein größeres

Volumen in Form von Überführungsleitungen angeordnet ist, vgl. die schematische Darstellung Abb. 12.7.3, kann mit hinreichender Näherung folgendermaßen vorgegangen werden. Man denkt sich den Inhalt der dort dargestellten Räume 4 und 5 durch getrennte Schaufelungen in den Kondensator expandierend. Dann hat man parallelgeschaltete Systeme der Art Abb. 12.7.2, wobei insgesamt die gleiche Energie freigesetzt wird wie bei der wirklichen Anordnung. Praktisch läuft es also darauf hinaus, daß mehrere Ausdrücke der Art Gl. 12.7(3) zu addieren sind, d. h.

$$A = \sum_i m_i [h_{1i} - h_{2i} - (p_{1i} - p_{2i}) v_{1i}]. \quad 12.7(4)$$

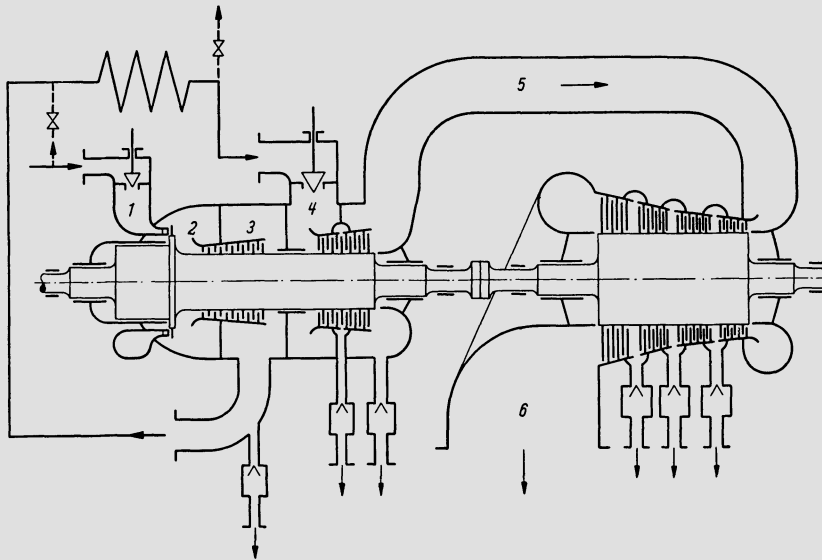


Abb. 12.7.3. Schema der Dampfzweige einer Anlage mit Zwischenüberhitzung

Es sei t_0 die Totzeit, die verstreicht vom Augenblick des Auslösens der Schnellschlußvorrichtung bis zum Beginn des Schließens der Ventile und t_s die Schlußzeit der letzteren. Dann kann man den Vorgang näherungsweise ersetzen durch einen, bei dem während des Zeitintervalles $t_0 + 2t_s/3$ die Ventile voll offen bleiben und somit auch die Turbinenleistung ihren Wert P_0 unverändert beibehält. Am Ende dieses Zeitintervalles schließen die Ventile plötzlich vollständig; von hier an gilt die Betrachtungsweise, die auf die Relation 12.7(4) führt. Ist ω_1 die Winkelgeschwindigkeit beim Auslösen des Schnellschlusses, ω_{\max} der Maximalwert der Winkelgeschwindigkeit, so lautet bei dieser vereinfachten Betrachtungsweise die Energiebilanz

$$\frac{\Theta}{2} (\omega_{\max}^2 - \omega_1^2) = P_0 \left(t_0 + \frac{2t_s}{3} \right) + \sum_i m_i [h_{1i} - h_{2i} - (p_{1i} - p_{2i}) v_{1i}]. \quad 12.7(5)$$

Mit ω_0 als Winkelgeschwindigkeit im Normalbetrieb und mit der Definition der Trägheitszeit nach Gl. 12.6(2) ergibt sich schließlich

$$\omega_{\max}^2 = \omega_1^2 + \omega_0^2 \left\{ \frac{t_0 + 0,67t_s}{t_T} + \frac{1}{P_0 t_T} \sum_i m_i [h_{1i} - h_{2i} - (p_{1i} - p_{2i}) v_{1i}] \right\}. \quad 12.7(6)$$

In dieser Gleichung sind noch die h_{2i} unbestimmt, da sie abhängen vom Charakter der Zustandsänderung, die den Expansionsvorgang kennzeichnet. Die ungünstigste Annahme besteht darin, daß man isentrope Zustandsänderung, also Reibungsfreiheit voraussetzt, denn dies führt sicher auf ein etwas zu großes ω_{\max} . Praktisch wird man die h_{2i} aus einem

geschätzten Mittelwert des Wirkungsgrades der Entspannung bestimmen, der etwas tiefer liegt als der Wirkungsgrad im Normalbetriebszustand.

Bei den Satttdampfturbinen der Nuklearkraftwerke mit Leichtwasserreaktoren ergibt sich noch ein besonderes Problem dadurch, daß nicht nur an den Wandungsflächen der mit Naßdampf durchströmten Turbinen Wasserfilme entstehen, sondern vor allem auch größere Wasseransammlungen in den Wasserabscheidern zwischen HD- und ND-Turbine unvermeidlich sind. Bei einer plötzlichen Druckabsenkung infolge Lastabschaltung entwickelt sich also Dampf, der durch den ND-Teil in den Kondensator strömt und so die Turbine weiter beschleunigt. Allerdings verdampft nicht die ganze Wassermenge, wie folgende Überlegung zeigt.

Eine bei p_1 und bei Siedetemperatur vorliegende Wassermenge möge adiabatisch auf p_2 gebracht werden und es sollten mit h' und h'' die Enthalpien des Wassers und des gesättigten Dampfes bezeichnet werden und mit x der verdampfende Anteil. Dann gilt

$$xh''(p_2) + (1 - x)h'(p_2) = h'(p_1),$$

mithin

$$x = \frac{h'(p_1) - h'(p_2)}{h''(p_2) - h'(p_2)}. \quad 12.7(7)$$

Für $p_1 = 8$ bar, $p_2 = 0,05$ bar liefert dies z.B. $x = 0,24$. Das Ausdampfen dieser Teilmenge benötigt allerdings eine gewisse Zeit, um so mehr als der Druck auch nicht spontan auf p_2 absinkt. Andererseits kühlt sich das Wasser bei diesem Prozeß ab, so daß Wärme durch Leitung aus den Wandungen ins Wasser übertragen wird und so die Verdampfung einer zusätzlichen Wassermenge bewirkt. Alles in allem entsteht ein Vorgang, der während eines Zeitintervalles von der Größenordnung einer halben Minute eine weitere schlei-

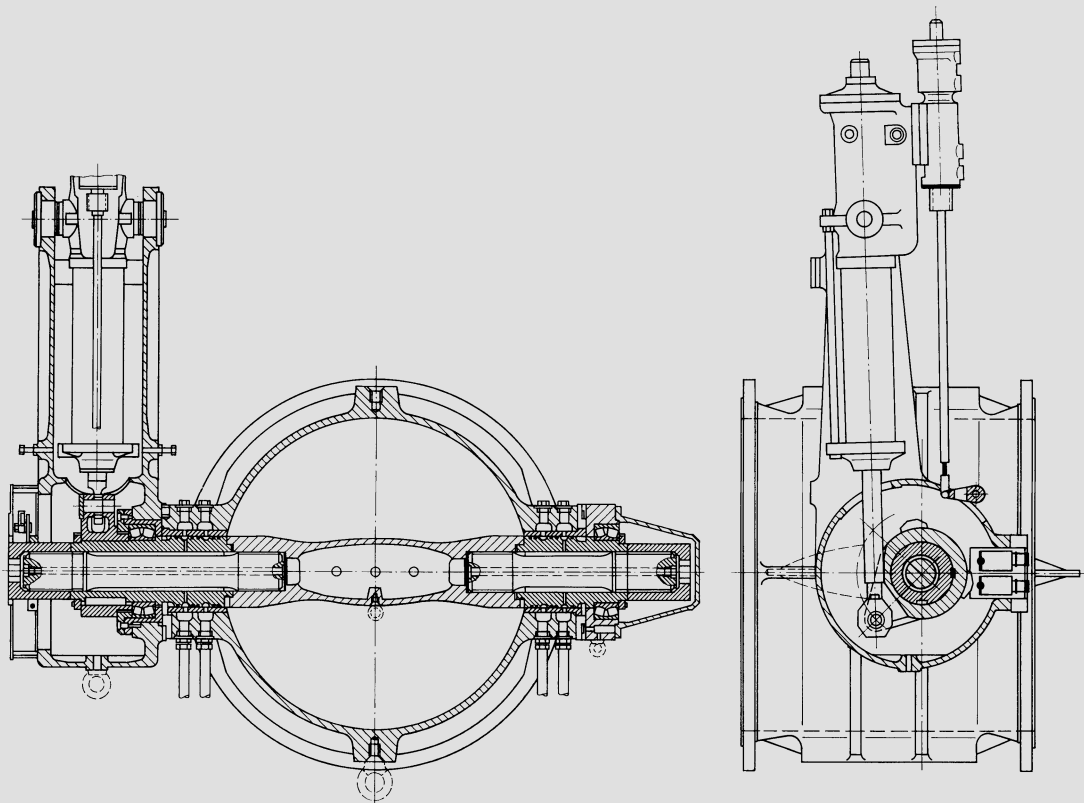


Abb. 12.7.4. Abfangklappe zur Begrenzung des Drehzahlanstieges bei Lastabschaltung an der Dampfturbine eines Nuklearkraftwerkes (BBC)

chende Zunahme der Drehzahl bewirkt, wenn nichts weiteres vorgekehrt wird, vgl. darüber *Hosslí* [19].

Man vermeidet diesen Drehzahlanstieg, indem man, ähnlich den Abfangventilen, fossil gefeuerter Zwischenüberhitzungsanlagen, Drosselorgane vor der ND-Turbogruppe einbaut, die bei Entlastung den Dampfzutritt vom Wasserabscheider-Zwischenüberhitzer zur Turbogruppe zunächst absperrt und dann allmählich mit großer Verzögerung freigibt. Die Energie wird dann in diesem Drosselorgan dissipiert. Die großen Volumenströme am Eintritt in die ND-Turbine führen dazu, solche Abfangorgane nicht als Ventile, sondern als Klappen auszubilden, vgl. Abb. 12.7.4. Damit gelingt es, den Drehzahlanstieg in sehr engen Grenzen zu halten, wie Abb. 12.7.5 zeigt. Die Vorausschätzung dieser verwickelten Vorgänge ist derzeit auf rein theoretischem Wege kaum möglich. Man rechnet mit stark vereinfachenden Annahmen und eicht die Rechnung an Versuchsergebnissen. So erreicht man beachtlich günstige Ergebnisse; im Falle nach Abb. 12.7.5 bleibt die höchste Überdrehzahl bei Vollastabschaltung unter 5%.

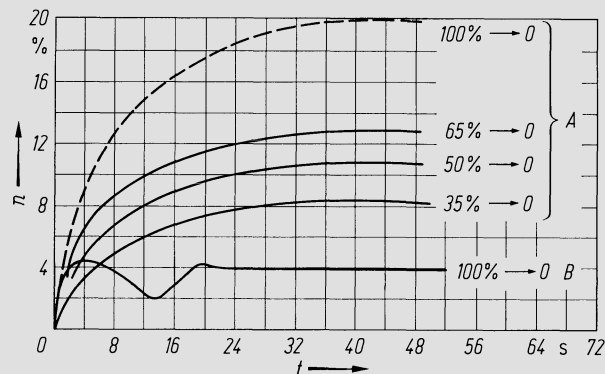


Abb. 12.7.5. Ergebnisse von Lastabschaltversuchen an einer nuklearen Dampfkraftanlage von BBC. (Nach *Hosslí* [19]). n relative Drehzahlerhöhung, t Zeit, A Abfangklappen in verschiedenen Stellungen blockiert (gestrichelte Kurve extrapoliert), B Abfangklappe im Betrieb

Literatur zu Kap. 12

1. *Walsh, E. F.; Jackson, R. L.*: The New England Electric System Tests Effectiveness of Stop-Valve Bypass in Reducing Thermal Stress Gradients in Steam Turbines. Trans. ASME, J. Eng. Power 84 (1962) Ser. A, Nr. 4, S. 365–388.
2. *Seippel, C.*: Turbines à vapeur sous charges variables et sous fortes surcharges. Bericht 104, II B-1 der Weltkraftkonferenz, Lausanne 1964.
3. *Krochmann, E.*: Elektrische und mechanische Gerätetechnik im Wettstreit bei der Automatisierung technischer Prozesse. Fortschr. Ber. VDI-Z, Reihe 10, Nr. 4 (1966).
4. *Andres, W.; Schaible, W.; Schatzmann, G.*: Elektronisches Turbinenregelsystem Turbotrol 4 und Gerätebaureihe PC 200. Brown Boveri Mitt. 62 (1975) 377–386.
5. *Wirz, K.*: Regelaufgaben an Industrie-Dampfturbinen, Brown Boveri Mitt. 63 (1976) 347–353.
6. *Wirz, K.*: Die Regelung der Industrie-Dampfturbine. Brown Boveri Mitt. 63 (1976) 354–359.
7. *Schröder, K.*: Große Dampfkraftwerke, Bd. III, Teil B. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1968.
8. *Čížmár, J.*: Energetischer Vergleich verschiedener Regelungsarten von Dampfturbinen. Diss. ETH Zürich 1979.
9. *Dejc, M. E.; Trojanovskiy, B. M.*: Untersuchung und Berechnung axialer Turbinenstufen. Berlin: VEB-Verlag Technik 1973.
10. *Deich, M. Y.; Zaryankin, A. Y.*: Gas Dynamics of Diffusers and Exhaust Ducts of Turbomachines. Moskau 1970; übersetzt N.T.I.S., US.-Department of Commerce, FTD-MT-24-1450-71.
11. *Suter, P.; Girsberger, R.*: Strömungstechnische Gestaltung des Austrittsstützens von Axialmaschinen. Traupel-Festschrift, Zürich 1974, S. 303–350.
12. *Hegetschweiler, H.; Bartlett, R. L.*: Predicting Performance of Large Steam Turbine-Generator Units for Central Stations. ASME-Paper No. 56-SA-52, 1956.
13. *Opplet, W.*: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge, 5. Aufl. Weinheim: Verlag Chemie 1972.

14. *Leonhard, A.*: Die selbsttätige Regelung, 3. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1962.
15. *Kleinau, W.*: Regeldynamik von Dampfturbinen mit Zwischenüberhitzer. Diss. TH Darmstadt, Auszug in Wärme 71 (1965) Nr. 2 u. 3.
16. *Oberle, A.*: Vollastabschaltung an einer Dampfturbine mit Zwischenüberhitzung. Brown Boveri Mitt. 47 (1960) 17.
17. *Raab, A.*: Regelung von Dampfturbosätzen, AEG-Dampfturbinen, Turbogeneratoren. Berlin 1963, S. 95 bis 100.
18. *Tröscher, H.*: Lastabschaltversuche an Kraftwerksblocks. Siemens Z. 37 (1963) 712—720.
19. *Hosli, W.*: Die 1160-MW-Turbine für das Kraftwerk „Donald C. Cook“ der AEP. Brown Boveri Mitt. 59 (1972) 4—20.
20. *Geisler, O. J.*: Throttle Controlled Steam Propulsion Turbines. Soc. of Naval Architects and Marine Engineers, New York 1971.

13 Regelung der Turbokompressoren

13.1 Regeleingriffe

Aufgabe jeder Verdichterregelung ist es, Druck und Fördermenge an die variierenden Bedürfnisse eines Verbrauchersystems anzupassen. Das Verhalten dieses letzteren ist in gewissen Fällen gekennzeichnet durch einen festen Zusammenhang zwischen Druck und Massenstrom, also eine feste *Verbrauchercharakteristik* (oder *Kennlinie*). Abb. 13.1.1 zeigt links typische Beispiele solcher Verbrauchercharakteristiken, wobei p_A den vom Verbraucher vorgeschriebenen Verdichter-Austrittsdruck, p_E den Verdichter-Eintrittsdruck und \dot{m} den Massenstrom bezeichnen. Kurve 1 entspricht einem Verbraucher, dessen Verhalten dem einer festen Durchflußöffnung ähnlich ist, Kurve 2 zeigt ein allgemeineres Gesetz, während Kurve 3 z. B. den Fall eines Druckluftnetzes darstellt, in dem unabhängig vom Durchsatz ein konstanter Druck aufrechterhalten werden soll. Oft hängen aber die Bedingungen im Verbrauchersystem noch von einem weiteren Parameter ab, wobei an die Stelle einer einzigen Kurve $p_A = f(\dot{m})$ eine Schar von solchen tritt. Viele Verbraucher verlangen einfach, daß ein gewisses Feld von Betriebszuständen — in Abb. 13.1.1 rechts schraffiert angedeutet — in wirtschaftlicher Weise möglich sein soll. — Um solchen Forderungen zu entsprechen, sind folgende Regeleingriffe ausführbar:

Regelung durch Drehzahlvariation. Wenn eine Verbrauchercharakteristik nach Kurve 1 (Abb. 13.1.1) vorliegt oder auch ein Büschel von solchen Kurven und die Antriebsmaschine eine Variation der Drehzahl erlaubt, genügt diese Drehzahlvariation zur Anpassung des Verdichters an den Verbraucher, sofern nur die Stabilitätsgrenze des Verdichters überall über der Verbrauchercharakteristik liegt. In mehr oder weniger beschränktem Betriebsbereich kann man sich mit Drehzahlregelung auch anderen Formen der Verbrauchercharakteristik anpassen. In Abb. 13.1.2a ist diese Regelung schematisch dargestellt, wobei der Antrieb durch eine Turbine T erfolgt, an deren Regelorganen R der Regeleingriff allein vorgenommen wird. Dort wo sie anwendbar ist, ist diese Regelung wirtschaftlich.

Saugdrosselregelung. Wo der Antrieb mit konstanter Drehzahl erfolgt, besteht die Möglichkeit, durch ein einstellbares Drosselorgan D in der Saugleitung zu regeln, vgl. Abb. 13.1.2b. Eine solche Regelung kann sich besonders einer Verbrauchercharakteristik gemäß Kurve 2 oder 3 anpassen, allerdings mit Rücksicht auf die Pumpgrenze nicht bis zur Nullförderung hinab. Als Regelorgane kommen des großen Volumenstromes wegen

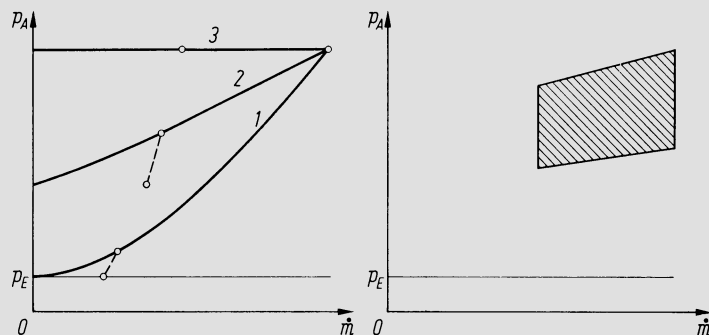


Abb. 13.1.1. Beispiele von Verbrauchercharakteristiken

Abb. 13.1.2. a) Regelung durch Drehzahlvariation, Antrieb des Verdichters V durch Dampfturbine T ; b) Saugdrosselregelung: E Elektromotor, V Verdichter, D Drosselorgan

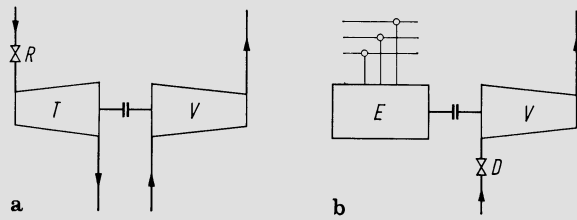
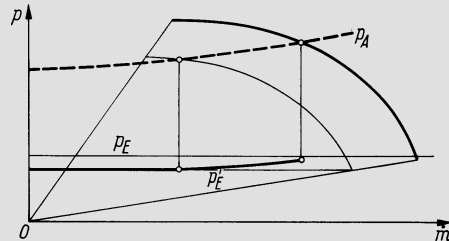


Abb. 13.1.3. Flache Charakteristik von Verdichter und Verbraucher. Günstige Voraussetzung für Drosselregelung



Klappen oder jalousieartige Konstruktionen in Frage. Da gedrosselt wird, ist das Verfahren grundsätzlich verlustbehaftet. Ob dieser Nachteil stark in Erscheinung tritt, hängt von der Gestalt der Kennlinien von Verdichter und Verbraucher ab. In Abb. 13.1.3 sind beide — die ausgezogene Kennlinie des Verdichters und die gestrichelte des Verbrauchers — sehr flach. Es bedeuten im Diagramm p_E den Druck vor Drosselorgan, p'_E den Druck nach diesem und p_A den Austrittsdruck. Da nun unabhängig vom Absolutwert des Druckes gleiche Volumenströme am Eintritt in die Schaufelung auf gleiche Druckverhältnisse p_A/p'_E führen, werden die Verdichterkennlinien für gedrosselten Eintrittsdruck geometrisch ähnlich derjenigen für ungedrosselten mit dem Verhältnis der beiden Drucke als Ähnlichkeitsverhältnis. So entsteht die Konstruktion Abb. 13.1.3, wo die dünn gezeichnete Kennlinie der dicken ähnlich ist. Ihr Schnittpunkt mit der gestrichelten Verbraucherkenlinie kennzeichnet den gedrosselten Betriebszustand. Da er schon nahe der Pumpgrenze liegt, ist eine wesentlich stärkere Verminderung des Massenstromes durch Drosselung nicht mehr möglich. Der flache Verlauf der Kurven bewirkt offensichtlich, daß einer geringfügigen Verminderung von p'_E eine starke Reduktion des Massenstromes \dot{m} entspricht, d.h. die Drosselverluste bleiben verhältnismäßig gering. Flache Kennlinien sind also Voraussetzung für eine wirtschaftliche Anwendung der Drosselregelung. Für den Axialverdichter scheidet sie deshalb aus. Das Regeln durch Drosselung nach dem Verdichter wäre demgegenüber wenig zweckmäßig und nur sehr beschränkt anwendbar im Hinblick auf die Pumpgrenze.

Regelung durch Abblasen und Umblasen. Bei konstanter Drehzahl kann man sich beliebigen Bedingungen eines Verbrauchersystems anpassen, indem man den Verdichter stets voll fördern läßt und durch ein Abblaseventil A (Abb. 13.1.4 a), die vom Verbraucher nicht benötigte Menge ins Freie läßt. Handelt es sich um ein Gas, so tritt an die Stelle dieses Abblasens das Umblasen, d.h. das Fluid wird nach dem Ventil A wieder in die Ansaugleitung zurückgeführt (Abb. 13.1.4 b). Wenn es im Rahmen der gegebenen Betriebsverhältnisse vorkommt, daß eine sehr große Teilmenge oder gar die volle Menge so zurückgeleitet werden muß, ist ein Kühler im Rückführweg anzuordnen, um die Temperatur des Systems zu stabilisieren.

Offensichtlich ist diese Art des Regels äußerst verlustbehaftet und daher nur als kurzzeitiger Regeleingriff wirtschaftlich vertretbar. Wo längere Zeit mit Abblasung oder Umblasung gefahren werden muß, wird eine *Rekuperationsturbine* T angeordnet, die in den abzweigenden Teilstrom eingeschaltet wird, vgl. Abb. 13.1.4 c und d. Damit wird ein

Teil der Verdichtungsarbeit zurückgewonnen. Auch diese Regelung ist aber seltener geworden und beim Axialverdichter, wo sie früher auch verwendet wurde, verschwunden.

Gelegentlich wird auch eine Abblasung oder Umblasung nach einer Zwischenstufe eines Verdichters vorgenommen, was weniger verlustbehaftet ist, aber auch eine weniger weitgehende Anpassung erlaubt.

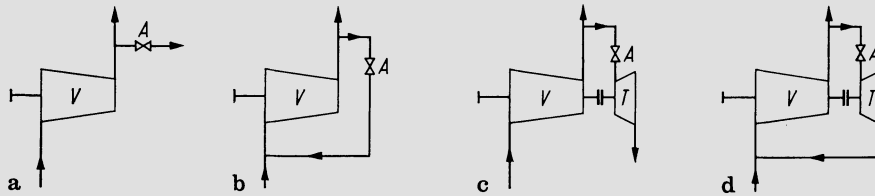


Abb. 13.1.4. Regelverfahren bei Turboverdichtern.

a) Abblaseregelung; b) Umblaseregelung; c) Abblaseregelung mit Rekuperationsturbine; d) Umblaseregelung mit Rekuperationsturbine. *A* Abblaseventil, *V* Verdichter, *T* Rekuperationsturbine

Regelung durch Leitradverstellung. Sowohl beim Axialverdichter als auch beim Radialverdichter läßt sich eine Verschiebung der Stufencharakteristik und damit eine verlustfreie Anpassung an den vorgeschriebenen Förderstrom durch Verstellung von Leit-schaufeln erreichen, vgl. [1–3]. Die früher vereinzelt angewandte Laufschaufelverstellung hat sich als unnötig erwiesen. Abb. 13.1.5 zeigt für eine Axialverdichterstufe drei Stellungen des Leitrades und rechts die zugehörigen Geschwindigkeitsdreiecke. Offensichtlich gelingt es so, unter Einhaltung günstiger Zuströmwinkel zu beiden Schaufelkränzen, die Durchtrittskomponente C_n in weiten Grenzen zu verändern. Dabei wird der spezifische Arbeitsumsatz und damit auch die Druckerzeugung der Stufe mit abnehmendem C_n etwas kleiner, was den meisten Verbrauchercharakteristiken entgegenkommt. Es können alle oder auch nur ein Teil der Stufen einer Maschine mit verstellbaren Leit-schaufeln versehen sein. Abb. 13.1.6 zeigt ein Beispiel.

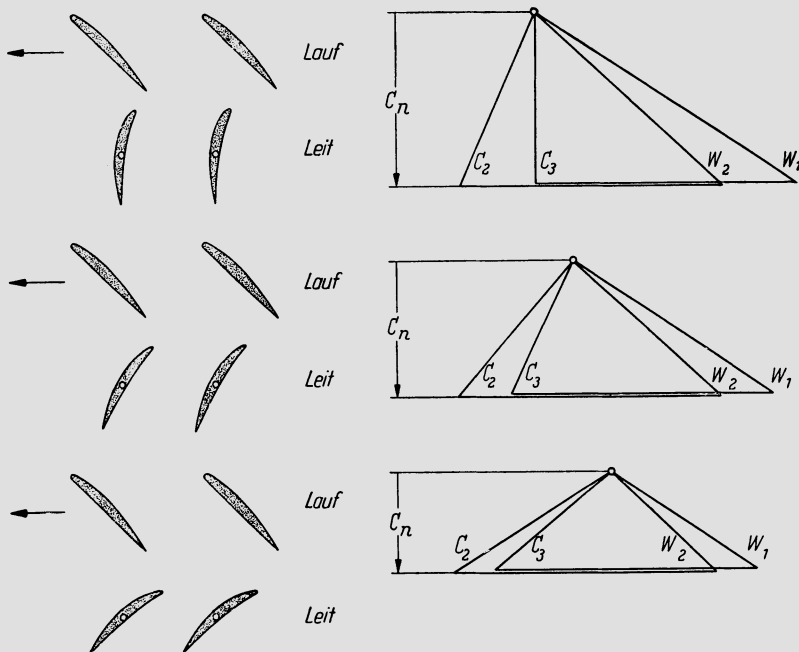


Abb. 13.1.5. Schaufelschnitte und Geschwindigkeitsdreiecke für feste Laufradstellung und verschiedene Leitradstellungen bei Axialverdichter

Beim Radialverdichter gibt es zwei Anordnungen von verstellbaren Leitapparaten. Bei der einen wird dem Laufrad ein einstellbares Vorleitrad vorgeschaltet. Abb. 13.1.7 zeigt einen zweistufigen Radialverdichter, bei dem beide Stufen mit verstellbaren Vorleiträdern versehen sind. Welcher Effekt damit erzielt werden kann, veranschaulicht Abb. 13.1.8a, wo die ausgezogenen Geschwindigkeitsdreiecke dem Auslegungszustand entsprechen, die gestrichelten einer verminderten Durchflußmenge. Bei reduziertem Massenstrom wird durch Verstellung des Vorleitrades ein Vordrall in Richtung der Raddrehung erzeugt, entsprechend dem Winkel α_1 , der kleiner ist als $\alpha_1^* = 90^\circ$ beim Auslegungszustand. Dadurch wird erreicht, daß der relative Zuströmwinkel β_1 vom Auslegungswert β_1^* nur wenig abweicht, und auch die Laufradverzögerung bleibt in normalen Grenzen. Beides wäre nicht der Fall, wenn beim gleichen verminderten Massenstrom kein Vordrall gegeben würde. Wo die Laufradströmung die Stabilitätsgrenze bestimmt — vor allem bei Stufen mit rückwärts gekrümmten Laufschaufeln und schaufellosem Diffusor, wie im Beispiel Abb. 13.1.7 — wird damit der stabile Betriebsbereich wesentlich erweitert und gleich-

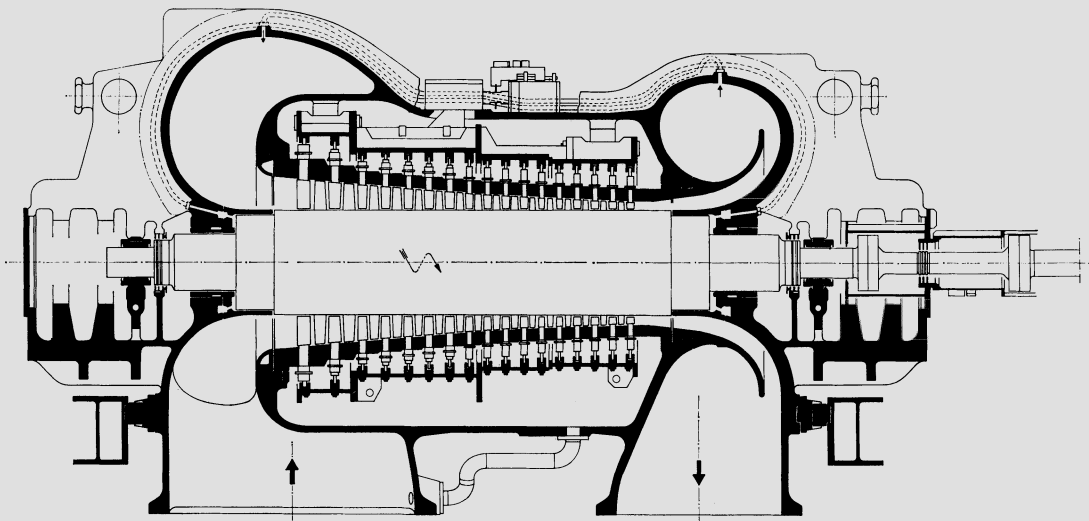


Abb. 13.1.6. Axialverdichter mit verstellbaren Leitschaufeln (Sulzer)

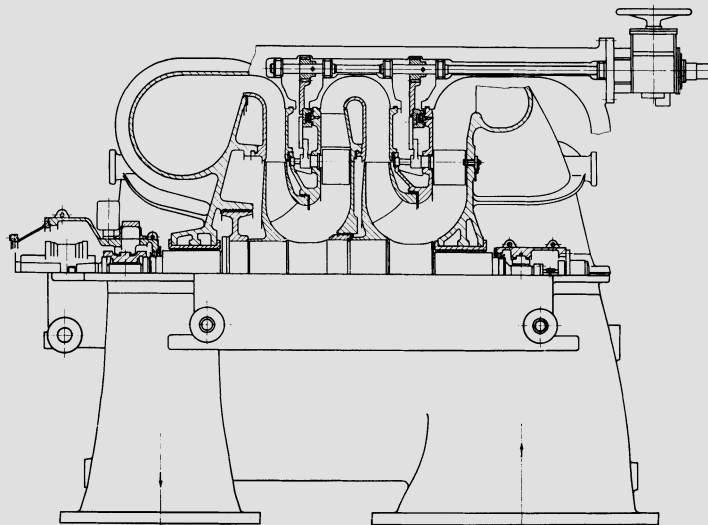


Abb. 13.1.7. Zweistufiger Radialverdichter mit verstellbaren Vorleiträdern (Sulzer)

zeitig die Kennlinie stark abgeflacht. Die Winkelabweichung am Diffusoreintritt ist beim schaufellofen Diffusor belanglos, solange dort die Stabilitätsgrenze nicht unterschritten wird.

Bei der anderen Anordnung werden die dem Laufrad nachfolgenden Diffusorleitschaufeln verstellbar. Abb. 13.1.8b zeigt die entsprechenden Geschwindigkeitsdreiecke, wiederum ausgezogen den Auslegungsfall, gestrichelt den Fall verminderten Massenstromes. Es ist großer Laufschaufelaustrittswinkel vorausgesetzt, wobei C_2 bedeutend größer ausfällt als W_1 und damit der Diffusoreintritt für die Stabilitätsgrenze bestimmend wird. Wenn nun die Diffusorschaukelstellung dem gegenüber α_2^* geänderten Zuströmwinkel α_2 angepaßt wird, kann die Stabilitätsgrenze verschoben und der stabile Arbeitsbereich erweitert werden.

In allen Fällen von verstellbaren Leitschaufeln erhält man bei festen Werten von Drehzahl und Eintrittstemperatur für jede Leitschaufelstellung eine Kennlinie, vgl. Abb. 13.1.9. Die Schar dieser Kennlinien überdeckt einen Bereich von Betriebszuständen und erlaubt damit die Anpassung an die Bedingungen des Verbrauchers.

Pumpverhütungsregelung. In jedem Falle — auch bei verstellbaren Leitschaufeln — existiert eine Stabilitätsgrenze, unter die der Förderstrom nicht abgesenkt werden kann ohne Gefährdung der Anlage. Wenn der Verbraucher vorübergehend nur einen unter dieser Grenze liegenden Förderstrom verarbeitet, muß zur Abblase- oder Umblaseregulung gegriffen werden, die damit zusätzlich zu allfälligen anderen Regelungen als normale Pumpverhütungsregelung vorgesehen wird.

Verdichter, die für sehr hohes Druckverhältnis ausgelegt sind (vor allem Axialverdichter), lassen sich nach den Ausführungen in Abschn. 11.7 ohne besondere Hilfsmittel nicht anfahren, denn der instabile Betriebsbereich ließe sich selbst unter Voraussetzungen einer Verbraucherkennlinie wie Kurve 1, Abb. 13.1.1, nicht vermeiden. Dies zeigt z. B. auch das Beispiel einer Axialverdichtercharakteristik Abb. 11.7.1. Manchmal gelingt es, durch Verstellen der Leiträder einer ersten Stufengruppe, diese Schwierigkeit zu umgehen. Sie sind hierbei flach einzustellen, wie Abb. 13.1.5 unten, so daß sie mit kleiner Durchsatzzahl φ noch eine reguläre Strömung ermöglichen. Wo dies nicht genügt, ist als zusätzliches oder alleiniges Hilfsmittel die Zwischenabblassung vorzusehen, vgl. Abb. 13.1.10. Dort ist ein Verdichter schematisch dargestellt, bei dem durch Abblaseventile A_1 und A_2 zwischen einzelnen Stufen Teilmengen der Luft abblasen werden können. Beim Anfahren sind

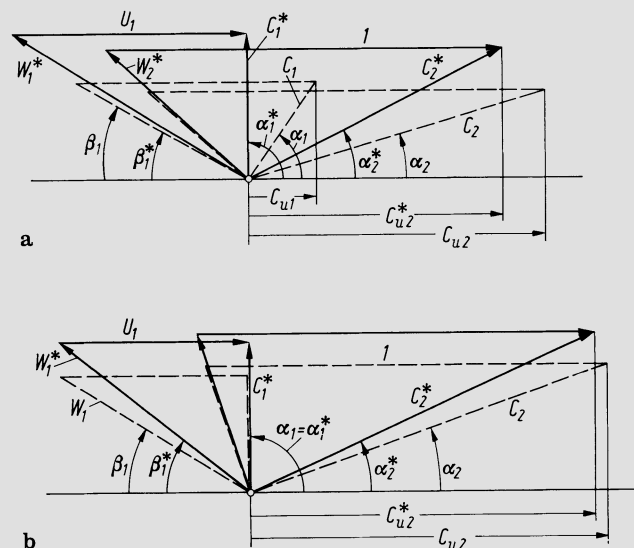


Abb. 13.1.8. Geschwindigkeitspläne für Verdichter mit verstellbaren Leitschaufeln. a) Radialverdichter; b) Axialverdichter

die Ventile geöffnet, so daß der Massenstrom \dot{m} längs des Strömungsweges einen Verlauf nimmt, wie durch die Treppenkurve dargestellt. Dabei entspricht der Verlauf von φ einer Zickzackkurve, wobei die Werte am Eintritt in die Teilabschnitte den Wert φ_s der Stabilitätsgrenze nirgends unterschreiten.

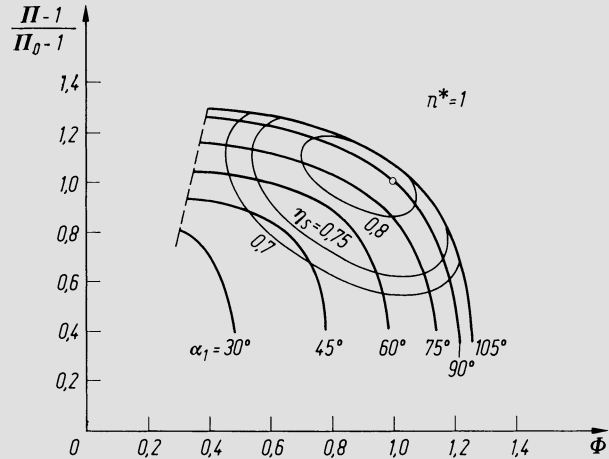


Abb. 13.1.9. Charakteristik eines zweistufigen Radialverdichters mit schaufellosen Diffusoren und verstellbaren Vorleiträdern, mit denen Zuströmwinkel α_1 eingestellt werden kann

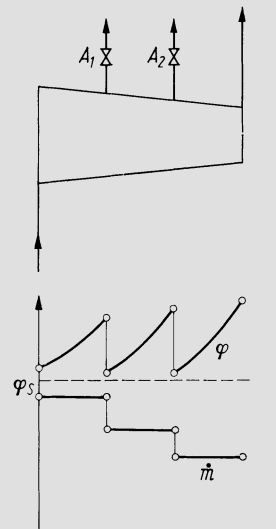


Abb. 13.1.10. Pumpverhütungsregelung durch zweimaliges Zwischenabblasen. φ_s entspricht der Stabilitätsgrenze

13.2 Darstellungsweisen von Kennfeldern

Gemäß den Ausführungen unter 11.7 kann die Gesamtcharakteristik oder das Kennfeld eines Verdichters in der Form

$$\Pi = F(\Phi, n^*), \quad \eta = f(\Phi, n^*) \tag{13.2(1)}$$

dargestellt werden, was einen Zusammenhang repräsentiert, wie er etwa durch Abb. 13.2.1 wiedergegeben wird. Bei steilem Verlauf der Kennlinien kann mathematisch auch die Form

$$\Phi = G(\Pi, n^*), \quad \eta = g(\Pi, n^*) \tag{13.2(1')}$$

zweckmäßiger sein. Im Diagramm ist a die Stabilitätsgrenze, b die Pumpgrenze, c die Sperrgrenze, d die Abblaselinie, d.h. die in einem gewissen Abstand von a verlaufende

Linie, wo die Pumpverhütungsregelung eingreift. Diese letztere schützt den Verdichter im unteren Betriebsbereich auch vor dem rotierenden Abreißen, das vor dem Pumpen einsetzt. Im Diagramm mag auffallen, daß die Linien ins Gebiet links der Pumpgrenze fortgesetzt sind, vgl. die gestrichelten Eintragungen. Solche Fortsetzungen ergeben sich praktisch ohne weiteres aus den Ansätzen, durch die man die Kurven wiedergibt, vgl. z.B. [4]. Obwohl ihnen keine physikalische Realität zukommt, sind sie notwendig, damit bei der Durchführung der Iterationen die Rechenprogramme nicht versagen. Findet man rechnerisch einen Betriebspunkt in diesem Gebiet, so weiß man, daß er nicht möglich ist.

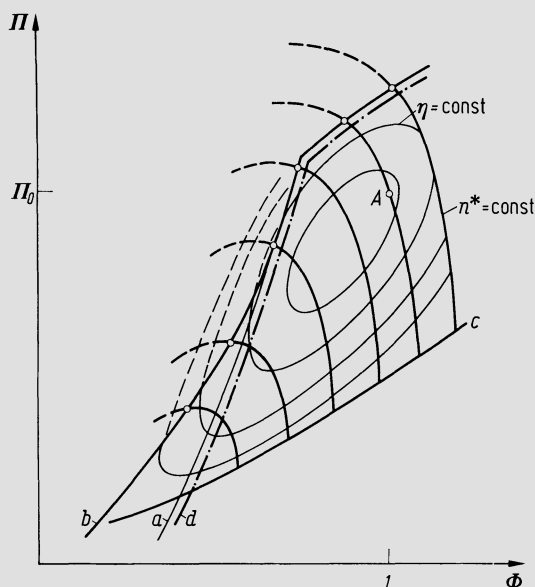


Abb. 13.2.1. Kennfeld eines Verdichters in dimensionsloser Darstellung. *a* Stabilitätsgrenze, *b* Pumpgrenze, *c* Sperrgrenze, *d* Abblaselinie

Es wurde bereits unter 11.7 darauf hingewiesen, daß alle in den Gln. 13.2(1) und (1') auftretenden Größen nach verschiedener Konvention gebildet werden können, ohne daß ähnlichkeiththeoretisch die Struktur der Gesetze eine andere würde. Die nachfolgend aufgeführten Definitionen, in denen der tiefgestellte Index 0 auf den Auslegungspunkt verweist, sind durch die Bezeichnungsweise auseinandergehalten. Zum Verständnis vgl. Abb. 13.2.2.

$$\Phi = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} \frac{p_{\alpha 0}}{p_{\alpha}} \sqrt{\frac{j_{\alpha}}{j_{\alpha 0}}}, \quad \Phi_E \equiv \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} \frac{p_{E0}}{p_E} \sqrt{\frac{j_E}{j_{E0}}}, \quad \Phi^0 \equiv \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} \frac{p_{0\alpha}^0}{p_{\alpha}^0} \sqrt{\frac{j_{\alpha}^0}{j_{0\alpha}^0}}, \quad 13.2(2)$$

$$n^* \equiv \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{j_{\alpha 0}}{j_{\alpha}}}, \quad n_E^* \equiv \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{j_{E0}}{j_E}}, \quad 13.2(3)$$

$$\Pi \equiv \frac{p_{\omega}}{p_{\alpha}}, \quad \Pi^0 \equiv \frac{p_{\omega}^0}{p_{\alpha}^0}, \quad \Pi^{(ts)} \equiv \frac{p_A}{p_{\alpha}^0}, \quad \Pi_{EA} \equiv \frac{p_A}{p_E}, \quad 13.2(4)$$

$$\eta_s \equiv \frac{\Delta h_s}{\Delta h}, \quad \eta_s^0 \equiv \frac{\Delta h_s^0}{\Delta h^0}, \quad \eta_s^{(ts)} \equiv \frac{\Delta h_s^{(ts)}}{\Delta h^0}, \quad \eta_{sEA} \equiv \frac{\Delta h_{sEA}}{\Delta h^0}. \quad 13.2(5)$$

Die Normalenthalpie $j \equiv \kappa p v / (\kappa - 1)$ kann beim idealen Gas stets durch $c_p T$ ersetzt werden. Es sind Δh und Δh_s die effektive und die isentrope statische Enthalpiedifferenz zwischen p_{α} und p_{ω} , Δh^0 und Δh_s^0 die entsprechenden mit p_{α}^0 und p_{ω}^0 gebildeten Größen, während $\Delta h_s^{(ts)}$ und Δh_{sEA} aus Abb. 13.2.2. hervorgehen. Alle diese Größen sind ineinander umrechenbar, und zwar gelten die folgenden Relationen. Setzt man

$$\pi_E \equiv \frac{p_{\alpha}}{p_E}, \quad \pi_{\alpha}^0 \equiv \frac{p_{\alpha}}{p_{\alpha}^0}, \quad \Pi_A \equiv \frac{p_A}{p_{\omega}}, \quad \Pi_{\omega}^0 \equiv \frac{p_{\omega}^0}{p_{\omega}}, \quad \chi \equiv \frac{\kappa - 1}{\kappa}, \quad 13.2(6)$$

so ist mit η_e als Einlaufwirkungsgrad und λ_D als Umsetzungsgrad des Austrittsdiffusors

$$\frac{c_\alpha^2}{2} = \eta_e j_E (1 - \pi_E^\chi), \quad \frac{j_\alpha}{j_E} = 1 - \eta_e (1 - \pi_E^\chi), \quad 13.2(7)$$

$$\frac{c_\omega^2}{2} = \frac{j_\omega}{\lambda_D} (\Pi_A^\chi - 1), \quad \frac{j_A}{j_\omega} = 1 + \frac{1}{\lambda_D} (\Pi_A^\chi - 1), \quad 13.2(8)$$

$$\frac{j_\omega}{j_\alpha} = 1 + \frac{1}{\eta_s} (\Pi^\chi - 1). \quad 13.2(9)$$

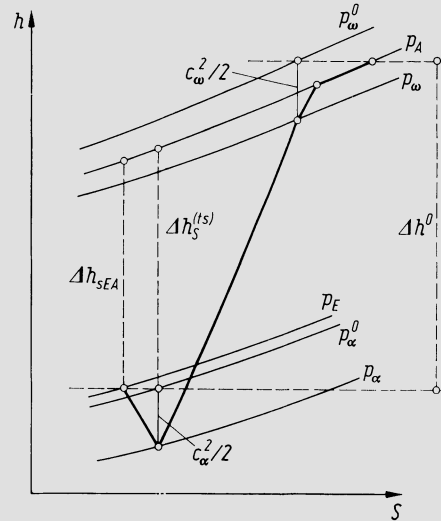


Abb. 13.2.2. Entropiediagramm der Zustandsänderung in einem Verdichter

Wenn man \dot{m} mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung aus c_α ausdrückt und so die Größen Φ und Φ_E bildet, findet man

$$\Phi = \sqrt{\frac{[1 - \eta_e(1 - \pi_{E0}^\chi)] (1 - \pi_E^\chi)}{[1 - \eta_e(1 - \pi_E^\chi)] (1 - \pi_{E0}^\chi)}}, \quad 13.2(10)$$

$$\Phi_E = \frac{\pi_E [1 - \eta_e(1 - \pi_{E0}^\chi)]}{\pi_{E0} [1 - \eta_e(1 - \pi_E^\chi)]} \sqrt{\frac{1 - \pi_E^\chi}{1 - \pi_{E0}^\chi}}. \quad 13.2(11)$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Größen wird demnach hergestellt durch

$$\Phi = \Phi_E \frac{\pi_{E0}}{\pi_E} \sqrt{\frac{1 - \eta_e(1 - \pi_E^\chi)}{1 - \eta_e(1 - \pi_{E0}^\chi)}}. \quad 13.2(12)$$

Wird \dot{m} vermöge c_ω aus der Kontinuitätsgleichung ausgedrückt und so Φ ausgerechnet, so findet man eine Relation, die in die Form

$$\Pi_A^\chi - 1 = \left(\frac{\Phi \Pi_0}{\Pi} \right)^2 \frac{1 + \frac{1}{\eta_s} (\Pi^\chi - 1)}{1 + \frac{1}{\eta_{s0}} (\Pi_0^\chi - 1)} (\Pi_{A0}^\chi - 1) \quad 13.2(13)$$

gebracht werden kann. Ferner besteht der Zusammenhang

$$n^* = n_E^* \sqrt{\frac{1 - \eta_e(1 - \pi_{E0}^\chi)}{1 - \eta_e(1 - \pi_E^\chi)}}. \quad 13.2(14)$$

Zwischen η_s und η_{sEA} kann ein Zusammenhang in folgender Weise hergestellt werden:

$$\eta_{sEA} = \frac{\Delta h_{sEA}}{\frac{\Delta h_s}{\eta_s} + \frac{c_\omega^2 - c_\alpha^2}{2}} = \frac{j_E (\Pi_{EA}^\lambda - 1)}{\frac{j_\alpha}{\eta_s} (\Pi^\lambda - 1) + \frac{j_\omega}{\lambda_D} (\Pi_A^\lambda - 1) - \eta_e j_E (1 - \pi_E^\lambda)}.$$

Wenn hier die Verhältnisse der j aus 13.2(7) und (8) ausgedrückt werden, folgt

$$\eta_{sEA} = \frac{\Pi_{EA}^\lambda - 1}{[1 - \eta_e(1 - \pi_E^\lambda)] \left[\frac{\Pi^\lambda - 1}{\eta_s} + \left(1 + \frac{\Pi^\lambda - 1}{\eta_s}\right) \frac{\Pi_A^\lambda - 1}{\lambda_D} - \eta_e(1 - \pi_E^\lambda) \right]}. \quad 13.2(15)$$

Schließlich gelten folgende Relationen über die Druckverhältnisse:

$$\Pi_{EA} = \Pi \Pi_A \pi_E, \quad \Pi^{(ts)} = \Pi \Pi_A \pi_\alpha^0, \quad \Pi^0 = \Pi \Pi_\omega^0 \pi_\alpha^0. \quad 13.2(16)$$

In gleicher Weise lassen sich auch Beziehungen für andere der unter 13.2(2)–(5) definierten Größen angeben

$$\Phi^0 = \left(\frac{\pi_\alpha^0}{\pi_{\alpha 0}^0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt[1 - \pi_\alpha^{0\lambda}}{1 - \pi_{\alpha 0}^{0\lambda}} = \Phi \left(\frac{\pi_\alpha^0}{\pi_{\alpha 0}^0} \right)^{\frac{\kappa+1}{2\kappa}}. \quad 13.2(17)$$

$$\Phi = \sqrt[1 - \pi_\alpha^{0\lambda}}{\pi_{\alpha 0}^{0\lambda} (1 - \pi_\alpha^{0\lambda})} \cdot \pi_\alpha^{0\lambda} (1 - \pi_{\alpha 0}^{0\lambda}). \quad 13.2(18)$$

Ein mit den Enthalpien j_α^0 gebildetes n^* wird mit n_E^* identisch, weil $j_\alpha^0 = j_E$.

Die Formeln für η_s^0 und $\eta_s^{(ts)}$ lauten in Analogie zu 13.2(15)

$$\eta_s^0 = \frac{\Pi^{0\lambda} - 1}{\pi_\alpha^{0\lambda} \left[\frac{\Pi^\lambda - 1}{\eta_s} + \left(1 + \frac{\Pi^\lambda - 1}{\eta_s}\right) (\Pi_\omega^{0\lambda} - 1) - (1 - \pi_\alpha^{0\lambda}) \right]}, \quad 13.2(19)$$

$$\eta_s^{(ts)} = \frac{\Pi^{(ts)\lambda} - 1}{\pi_\alpha^{0\lambda} \left[\frac{\Pi^\lambda - 1}{\eta_s} + \left(1 + \frac{\Pi^\lambda - 1}{\eta_s}\right) \frac{\Pi_A^\lambda - 1}{\lambda_D} - (1 - \pi_\alpha^{0\lambda}) \right]}. \quad 13.2(20)$$

Damit liegen die sämtlichen Relationen vor, die es gestatten, die verschiedenen Darstellungsweisen von Kennfeldern ineinander überzuführen. Sofern nur der Auslegungszustand vollständig bekannt ist, liefern die Gln. 13.2(10), (11), (17), (18) feste Zusammenhänge zwischen den π_E und π_α^0 einerseits und den Φ , Φ_E , Φ^0 andererseits, womit auch diese Φ -Größen ineinander überführbar sind. Ebenso liefert 13.2(13) Π_A für jeden Betriebszustand. Die Gleichung für Π_ω^0 lautet genau gleich, da ja $\Pi_\omega^{0\lambda} - 1 = (\Pi_A^\lambda - 1)/\lambda_D$ und λ_D wie auch η_e für alle Betriebszustände gleich gesetzt werden kann. Die Umrechnung der n^* folgt aus 13.2(14), während die Π aus 13.2(16) gegeben sind. Schließlich liefern 13.2(15), (19), (20) die Wirkungsgrade. Aus jeder Darstellungsart des Typs 13.2(1) läßt sich durch diese Umrechnungen jede andere gewinnen, also z. B. etwa diejenige, die Π^0 und η_s^0 in Funktion von Φ^0 und n_E^* angibt.

Praktisch werden Charakteristiken sehr oft so dargestellt, daß die Abszisse ein auf einen Normzustand (z. B. 15°C, 760 mm Hg) umgerechneter Massenstrom ist. Dividiert man diesen durch seinen Wert im Auslegungspunkt, so erhält man Φ_E . In gleicher Weise wird die Drehzahl auf den Normzustand bezogen, d. h. man gibt

$$n_{\text{red}} = n \sqrt{\frac{T_{E0}}{T_E}} \quad 13.2(21)$$

an, wo die absolute Temperatur T_{E0} dem Normzustand entspricht. Diese Reduktion hat das ideale Gas zur Voraussetzung. Die Division von n_{red} durch seinen Auslegungswert führt wiederum auf n^* . Eine andere Drehzahlangabe ist $n/\sqrt{T_E}$, eine Größe, die unanschauliche Werte annimmt und daher nicht empfohlen werden kann.

13.3 Berechnung typischer Fälle der Verdichterregelung

Nachfolgend wird der prinzipielle Gang der Rechnung für einige typische Fälle der Verdichterregelung aufgezeigt. Kompliziertere Fälle ergeben sich durch Kombination und Abwandlung der hier angegebenen Verfahren. Stets sind die durch Gl. 13.2(1) repräsentierten Kennfelder die Grundlage der Rechnung, womit übrigens der Fall der Schaufelverstellung ausgeschlossen ist, da dann ja ein weiterer Parameter dazukäme. Wie im Einzelfalle Φ , n^* , Π , η definiert sind, wird jeweils angegeben. Es werden die Bezeichnungen aus Abschn. 13.2 verwendet.

a) Drehzahlregelung

Vorgeschrieben seien \dot{m} , p_E , T_E (somit j_E), p_A . Zur Darstellung des Kennfeldes werden Φ_E , n_E^* , Π_{EA} , η_{sEA} verwendet. Φ_E und Π_{EA} sind aus den Ausgangsdaten bestimmbar. Damit liefert der Funktionalzusammenhang F , Gl. 13.1(1) die Drehzahlvariable n_E^* , der Funktionalzusammenhang f den Wirkungsgrad η_{sEA} . Alsdann sind mit

$$n = n_0 n_E^* \sqrt{j_E/j_{E0}}, \quad 13.3(1)$$

$$P_i = \frac{\dot{m} j_E}{\eta_{sEA}} (\Pi_{EA}^* - 1) \quad 13.3(2)$$

Drehzahl und innerer Leistungsaufwand P_i für den vorgeschriebenen Betriebspunkt bekannt.

Wenn diese Rechnung auf einen Betriebszustand links der Abblaselinie d , Abb. 13.2.1 führt, muß die Pumpverhütungsregelung eingreifen, wobei wie folgt vorzugehen ist. Auf der Abblaselinie liefert das vorgeschriebene Π_{EA} eindeutig einen Punkt, womit dann auch Φ_E , n_E^* , η_{sEA} festliegen. Aus Φ_E bestimmt sich dann der Massenstrom \dot{m}_v , der den Verdichter durchströmt, gemäß

$$\dot{m}_v = \dot{m}_0 \Phi_E \frac{p_E}{p_{E0}} \sqrt{\frac{j_{E0}}{j_E}}, \quad 13.3(3)$$

und es ist $\dot{m}_a = \dot{m}_v - \dot{m}$ die abzublasende Teilmenge. Daraus und aus dem bekannten Verdichtungs-Endzustand ergibt sich der Querschnitt des Abblaseventils. Die Drehzahl ergibt sich wiederum aus 13.3(1), während die Leistung aus 13.3(2) folgt, wenn dort als Massenstrom \dot{m}_v eingesetzt wird.

b) Drosselregelung

Vorgeschrieben seien \dot{m} , p_E , T_E (somit j_E) p_A , n . Die Größen mit Index E beziehen sich hier auf den Zustand vor Drosselorgan. Die Kennfelddarstellung verwendet Φ^0 , n_E^* , $\Pi^{(ts)}$, $\eta_s^{(ts)}$. Mit

$$\Phi' \equiv \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} \sqrt{\frac{j_E}{j_{E0}}} \quad 13.3(4)$$

ist

$$\Phi^0 = \Phi' \frac{p_{\alpha 0}^0}{p_{\alpha}^0}, \quad \Pi^{(ts)} = \Pi_{EA} \frac{p_E}{p_{\alpha}^0}. \quad 13.3(5)$$

Folglich gilt

$$\Pi_{EA} \frac{p_E}{p_{\alpha}^0} = F \left(\Phi' \frac{p_{\alpha 0}^0}{p_{\alpha}^0}, n_E^* \right), \quad \Pi_{EA} = \frac{p_{\alpha}^0}{p_E} F \left(\Phi' \frac{p_{\alpha 0}^0}{p_{\alpha}^0}, n_E^* \right). \quad 13.3(6)$$

Da Π_{EA} , Φ' und n_E^* aus den Ausgangsdaten bestimmbar sind, ist die zuletzt geschriebene Gleichung nur mit einem Wert p_{α}^0 erfüllbar, wodurch der Totaldruck an der Stelle α (Läufereintritt) bestimmt ist. Das gibt die Bedingung für die Öffnung des Drosselorgans.

Da hiermit auch Φ^0 bestimmt ist, liefert der Funktionalzusammenhang f den Wirkungsgrad $\eta_s^{(ts)}$, womit der innere Leistungsaufwand aus

$$P_i = \frac{\dot{m} j_E}{\eta_s^{(ts)}} (\Pi^{(ts)\chi} - 1) \quad 13.3(7)$$

bekannt ist.

Ergibt diese Rechnung einen Betriebspunkt links der Abblaselinie d (Abb. 13.2.1), so ist davon auszugehen, daß auf der Linie d dem fest vorgeschriebenen n_E^* ein bestimmter Punkt entspricht, für den Φ^0 , $\Pi^{(ts)}$ und $\eta_s^{(ts)}$ vorliegen. Aus der zweiten der Gln. 13.3(5) ergibt sich daraus sogleich der Totaldruck p_α^0 auf den gedrosselt werden muß. Ferner ist mit

$$\dot{m}_v = \dot{m}_0 \Phi^0 \frac{p_\alpha^0}{p_{\alpha 0}^0} \sqrt{\frac{j_{E0}}{j_E}} \quad 13.3(8)$$

den Verdichter effektiv durchsetzende Massenstrom \dot{m}_v gegeben und mit $\dot{m}_a = \dot{m}_v - \dot{m}$ der abzublasende Massenstrom. Schließlich erhält man aus 13.3(7) die Leistung, wenn man dort den Massenstrom \dot{m}_v einsetzt. Wenn bei dieser Rechnung $p_\alpha^0 > p_{\alpha 0}^0$ gefunden wird, ist der Betriebszustand nicht möglich, d. h. der Verdichter kann dann der Forderung des Verbrauchers unter den gegebenen Bedingungen nicht entsprechen.

c) Abblaseregelung

Vorgeschrieben seien \dot{m} , p_E , T_E (somit j_E), p_A , n . Zur Darstellung des Kennfeldes werden Φ_E , n_E^* , Π_{EA} , η_{sEA} benutzt. Aus den Ausgangsdaten sind n_E^* und Π_{EA} unmittelbar gegeben. Der Funktionalzusammenhang F liefert damit Φ_E , womit auch bereits η_{sEA} bekannt ist. — Hierbei kann es allerdings vorkommen, daß man ein Φ_E links der Abblaselinie d (Abb. 13.2.1) oder selbst überhaupt kein Φ_E findet. Dann kann der Verdichter bei der gegebenen Drehzahl den geforderten Druck nicht erzeugen. — Liegt ein möglicher Punkt im Kennfeld vor, so sind mit

$$\dot{m}_v = \dot{m}_0 \Phi_E \frac{p_E}{p_{E0}} \sqrt{\frac{j_{E0}}{j_E}}, \quad 13.3(9)$$

$$\dot{m}_a = \dot{m}_v - \dot{m}, \quad 13.3(10)$$

$$P_i = \frac{\dot{m}_v j_E}{\eta_{sEA}} (\Pi_{EA}^\chi - 1) \quad 13.3(11)$$

die vom Verdichter zu fördernde Menge \dot{m}_v , die abzublasende Menge \dot{m}_a und die innere Leistung P_i bestimmt. — Wenn die Abblasung über eine Rekuperationsturbine erfolgt, ist deren innere Leistung P_{iT} abzuziehen. Sie beträgt

$$P_{iT} = \eta_{sT} \dot{m}_a \Delta h_{sT} = \eta_{sT} \dot{m}_a j_E \left[1 + \frac{1}{\eta_{sEA}} (\Pi_{EA}^\chi - 1) \right] (1 - \Pi_{EA}^{-\chi}), \quad 13.3(12)$$

wo η_{sT} der innere Turbinenwirkungsgrad ist, in den alle zusätzlichen Verluste (Druckabfälle in Leitungen, Regelventilen, Schalldämpfern) einzuschließen sind. Es sind hier also zusätzliche Unterlagen über η_{sT} in Funktion der maßgebenden Kenngrößen des Betriebszustandes nötig. Diese Kenngrößen sind (da die Rekuperationsturbine üblicherweise einstufig ist, z. B. Curtis-Turbine)

$$v = \frac{u}{\sqrt{2\Delta h_{sT}}}, \quad \Phi_T = \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_a^*} \frac{p_A^*}{p_A} \sqrt{\frac{j_A}{j_A^*}}, \quad 13.3(13)$$

wobei der tiefgestellte Stern auf den Auslegungszustand der Turbine verweist. Von Φ_T hängt insbesondere die Stellung der Regelventile ab.

d) Umblasregelung

Vorgeschrieben sind \dot{m} , p_E , T_E (somit j_E), p_A , n . Die Darstellung des Verdichterkennfeldes stützt sich zweckmäßig auf Φ_E , n_E^* , Π_{EA} , η_{sEA} . Die Größen Φ_E und n_E^* sind allerdings nicht unmittelbar mit dem vorgegebenen j_E zu bilden, sondern mit dem j'_E , das sich aus der Mischung des angesaugten Massenstromes \dot{m} mit dem durch die Turbine zurückströmenden \dot{m}_a ergibt, vgl. Abb. 13.3.1. Ist \dot{m}_v der den Verdichter durchsetzende Massenstrom, so lautet die Mischgleichung

$$\dot{m}_v j'_E = \dot{m} j_E + \dot{m}_a j_{\omega T}^0 \quad 13.3(14)$$

mit $j_{\omega T}^0$ als Totalenthalpie am Turbinenaustritt. Diese letztere ist gegeben durch (vgl. Abb. 13.3.1)

$$j_{\omega T}^0 = j_A [1 - \eta_{sT} (1 - \pi_T^x)] = j'_E \left[1 + \frac{\Pi_{EA}^x - 1}{\eta_{sEA}} \right] [1 - \eta_{sT} (1 - \pi_T^x)]. \quad 13.3(15)$$

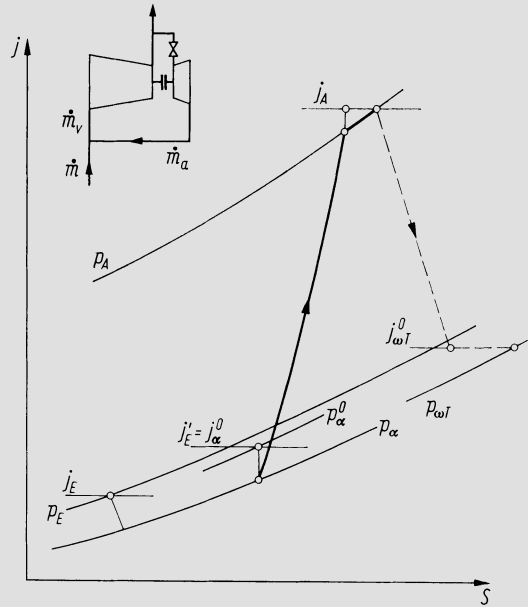


Abb. 13.3.1. Entropiediagramm der Zustandsänderung in einem Verdichter mit Rekuperationsturbine

Hier ist $\pi_T = p_{\omega T}/p_A$ das Druckverhältnis der Turbine, dessen genaue Festlegung nach irgendeiner zweckmäßigen Konvention erfolgen kann, sofern nur der isentrope Turbinenwirkungsgrad dementsprechend definiert wird. Gl. 13.3(15) in (14) eingesetzt, führt auf

$$j'_E = \frac{j_E}{1 - \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}} \left\{ \left[1 + \frac{\Pi_{EA}^x - 1}{\eta_{sEA}} \right] [1 - \eta_{sT} (1 - \pi_T^x)] - 1 \right\}}. \quad 13.3(16)$$

Die Rechnung muß iterativ vorgehen und beginnt mit einer Annahme über j'_E , worauf

$$n_E^* = \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{j'_{E0}}{j'_E}} \quad 13.3(17)$$

zusammen mit dem vorgeschriebenen Π_{EA} den Punkt im Kennfeld, mithin Φ_E und η_{sEA} festlegt. Damit wird

$$\dot{m}_v = \dot{m}_{v0} \Phi_E \frac{p_E}{p_{E0}} \sqrt{\frac{j'_{E0}}{j'_E}}, \quad \dot{m}_a = \dot{m}_v - \dot{m}. \quad 13.3(18)$$

Nach Gl. 13.3(13) liegen nun die Kenngrößen der Turbine fest, da ja

$$j_A = j'_E \left[1 + \frac{\Pi_{EA}^\chi - 1}{\eta_{sEA}} \right]. \quad 13.3(19)$$

Man kennt also η_{sT} und kann aus Gl. 13.3(16) ein genaueres j'_E bestimmen usw. — Ist hinreichende Übereinstimmung hergestellt, so liefert

$$P_i = \frac{\dot{m}_v j'_E}{\eta_{sEA}} (\Pi_{EA}^\chi - 1) - \dot{m}_a j_A \eta_{sT} (1 - \pi_T^\chi) \quad 13.3(20)$$

die innere Leistungsaufnahme, und die Regelventilquerschnitte sind aus Φ_T bestimmt. Wo dieses Verfahren auf keine Lösung führt, ist der geforderte Druck unter den gegebenen Bedingungen nicht erzeugbar.

Der Fall ohne Rekuperationsturbine ergibt sich hieraus als Sonderfall mit $\eta_{sT} = 0$, wobei Gl. 13.3(16) zur Form

$$j'_E = \frac{j_E}{1 - \frac{\dot{m}_a}{\dot{m} \eta_{sEA}} (\Pi_{EA}^\chi - 1)} \quad 13.3(16')$$

degeneriert und die Rechnung sich entsprechend vereinfacht.

e) Zwischenabblasen und Zwischenumblasen

Wenn eine Abblasung oder Umblasung nach einer Zwischenstufe vorgesehen ist, wird das Gesamtverhalten des Systems beschrieben durch die Kennfelder der beiden Teilkompressoren, die in Abb. 13.3.2 mit 1 und 2 bezeichnet sind. Kompressor 1 verdichtet von p_E auf den Zwischendruck p_z und fördert den Massenstrom \dot{m}_1 , Kompressor 2 von p_z auf p_A und fördert den Massenstrom \dot{m} . Zwischen beiden wird der Massenstrom \dot{m}_a abgezweigt und entweder abgeblasen oder, wie gestrichelt angedeutet, in die Ansaugleitung zurückgeführt. Die Darstellung der Kennfelder stützt sich zweckmäßig auf die folgendermaßen definierten Größen.

$$\Phi_1 \equiv \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_{10}} \frac{p_{E0}}{p_E} \sqrt{\frac{j_E}{j_{E0}}}, \quad n_1^* \equiv \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{j_{E0}}{j_E}}, \quad \Pi_1 \equiv \frac{p_z^0}{p_E}, \quad \eta_{s1} \equiv \frac{\Delta h_{s1}}{\Delta h_1}, \quad 13.3(21)$$

$$\Phi_2 \equiv \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} \frac{p_{z0}^0}{p_z^0} \sqrt{\frac{j_z^0}{j_z}}, \quad n_2^* \equiv \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{j_{z0}^0}{j_z}}, \quad \Pi_2 \equiv \frac{p_A}{p_z^0}, \quad \eta_{s2} \equiv \frac{\Delta h_{s2}}{\Delta h_2}. \quad 13.3(22)$$

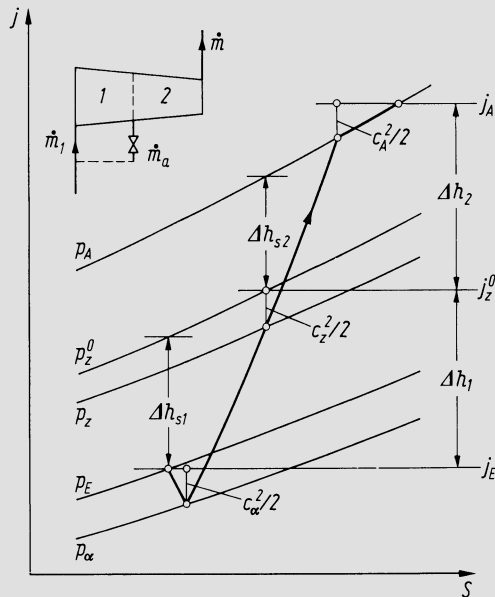


Abb. 13.3.2. Entropiediagramm der Zustandsänderung in einem Verdichter mit Zwischenabblasung

Die beiden Kennfelder werden repräsentiert durch

$$\Pi_1 = F_1(\Phi_1, n_1^*), \quad \eta_{s1} = f_1(\Phi_1, n_1^*), \quad \Pi_2 = F_2(\Phi_2, n_2^*), \quad \eta_{s2} = f_2(\Phi_2, n_2^*). \quad 13.3(23)$$

Nun seien \dot{m} , p_E , T_E (somit j_E), p_A und n vorgeschrieben, und es werde zunächst einfache *Zwischenabblaseung* vorausgesetzt, wie dies auch dem Diagramm Abb. 13.3.2 entspricht. Die Rechnung ist eine Iteration und beginnt mit der Annahme von p_z^0 , womit Π_1 bekannt ist, während n^* aus den Ausgangsdaten folgt. Das Kennfeld liefert damit Φ_1 und η_{s1} , mithin

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_{10} \Phi_1 \frac{p_E}{p_{E0}} \sqrt{\frac{j_{E0}}{j_E}}, \quad j_z^0 = j_E \left[1 + \frac{1}{\eta_{s1}} (\Pi_1^z - 1) \right]. \quad 13.3(24)$$

Aus j_z^0 ergeben sich sogleich auch Φ_2 und n_2^* , mit Hilfe des Kennfeldes des Teilverdichters 2 also auch Π_2 . Somit wird $p_A = p_E \Pi_1 \Pi_2$ berechenbar. Stimmt dies nicht mit dem Sollwert überein, so ist p_z^0 zu berichtigen usw. Wenn Übereinstimmung hergestellt ist, folgen Leistungsaufwand und Abblasemenge aus

$$P_i = \frac{\dot{m}_1 j_E}{\eta_{s1}} (\Pi_1^z - 1) + \frac{\dot{m} j_z^0}{\eta_{s2}} (\Pi_2^z - 1), \quad 13.3(25)$$

$$\dot{m}_a = \dot{m}_1 - \dot{m}. \quad 13.3(26)$$

Wenn die abgezweigte Menge zum Eintritt zurückgeführt wird und somit *Zwischenumblasung* vorliegt, ist das Verfahren insofern abzuwandeln, als in den Gleichungen, wie auch in Abb. 13.3.2, die in Abschnitt d) eingeführte Mischenthalpie j'_E an die Stelle von j_E tritt. Wiederum beginnt die Rechnung mit der Annahme von p_z^0 . Dann aber folgt die unter d) angegebene Iterationsrechnung zur Bestimmung des Betriebszustandes im Teilverdichter 1. Ist er gefunden, so liefert wieder $p_A = p_E \Pi_1 \Pi_2$ den Austrittsdruck, worauf die Rechnung mit geändertem p_z^0 zu wiederholen ist, wenn er nicht stimmt. Es liegt also eine Doppeliteration vor, da p_z^0 iterativ anzupassen und für jedes p_z^0 die Berechnung der Umblasung iterativ vorzunehmen ist.

f) Verdichter mit Zwischenkühlung

Wo ein Verdichter mit Zwischenkühlern versehen ist, können die einzelnen durch Kühler voneinander getrennten Teile sinngemäß so behandelt werden, wie in diesem Abschnitt angegeben. Im allgemeinsten Falle müßten also für jeden dieser Teile Druckverhältnis und Wirkungsgrad in Funktion der jeweiligen Variablen n^* und Φ vorliegen, eine Angabe, die mit der Stufencharakteristik identisch wird, wo zwischen je zwei Stufen zwischengekühlt wird. Die Fluidtemperaturen nach den Kühlern kommen dabei als maßgebende Parameter zusätzlich in die Rechnung hinein, und zwar können sie unabhängige Variable sein, da sie ja durch die Kühlwassertemperatur beeinflusst werden. Bei festen Kühlwasserbedingungen sind diese Austrittstemperaturen in gesetzmäßiger Weise vom Betriebszustand abhängig. Man muß also die Unterlagen über das wärmeübertragungstechnische Verhalten der Zwischenkühler in die Rechnung einführen.

13.4 Regelung mit verstellbaren Leitschaukeln

Die Charakteristik einer Verdichterstufe mit verstellbarem Leitapparat ist in dimensionsloser Darstellung dreiparametrig, wobei z. B. eine Durchsatzzahl φ , eine mit der Umfangsgeschwindigkeit gebildete Mach-Zahl M_u und der Einstellwinkel des Leitrades die maßgebenden Variablen sind. — Von einem allfälligen Einfluß der Reynolds-Zahl ist dabei abgesehen. — Theoretisch wie experimentell wird man sich daher auf einen verhältnismäßig engen Bereich von Parameterkombinationen beschränken müssen, was um so

eher gelingt, als praktisch auch bei weitem nicht alle denkbaren Parameterkombinationen von Interesse sind.

Abb. 13.4.1 zeigt beispielsweise die Charakteristik einer *Axialverdichterstufe* mit verstellbarem Leitrad. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Stufe unter Repetierbedingungen arbeitet. Die Definitionen sind

$$\psi = \frac{1}{u_N^2} \int_{p_1}^{p_3} v dp, \quad \varphi_N = \frac{\dot{m}v}{\Omega u_N}, \quad q_3 = \frac{c_3}{u_N}, \quad 13.4(1)$$

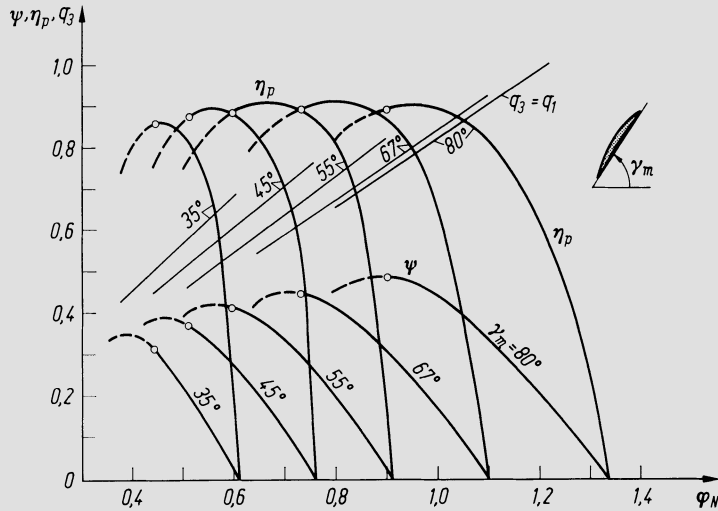


Abb. 13.4.1. Axialverdichter-Repetierstufencharakteristiken für verschiedene Leitradstellwinkel γ_m

und da $c_1 = c_3$, ist auch $q_1 = q_3$; die c_i sind im Euler-Radius zu bilden. Mit γ_m ist der Leitradstellwinkel an einer ausgezeichneten Stelle (z. B. im Außenradius) bezeichnet, vgl. Abb. 13.4.1. Das Diagramm gilt für feste geometrische Proportionen (Durchmesser-Verhältnis $Y = D_S/D_N$, Erststreckungsverhältnisse l'/s' , l''/s'' der Schaufeln, Schaufelspiele) und für eine bestimmte Mach-Zahl. In der Regel wird als Mach-Zahl derjenige Wert gewählt, von dem an abwärts der Mach-Zahl-Einfluß verschwindend klein wird. Dann genügt es, für höhere Mach-Zahlen Korrekturen $\Delta\eta_p$ und $\Delta\psi$ anzugeben, die zu den Werten gemäß den Kurven zu addieren sind.

Die Charakteristik einer Repetierstufe, an der eine Mach-Zahl-Korrektur angebracht wird, gehört von vornherein dem zweiten der beiden Typen an, die in Bd. I, Abschn. 9.2 auseinandergelassen sind. Sie beschreibt also das Verhalten einer Schar geometrisch verwandter Stufen, denn bei variierender Mach-Zahl sind Repetierbedingungen nur einzuhalten, wenn man die Meridianbegrenzungen entsprechend anpaßt. Gegebenermaßen wird man eine solche Charakteristik auch ausdehnen auf andere geometrische Proportionen, also vor allem andere Y . Man erhält dann also einen Satz von Diagrammen der Art Abb. 13.4.1, eines für jedes Durchmesser-Verhältnis Y . Im Computerprogramm werden also z. B. die Koeffizienten der Polynome, durch die man die ψ - und η_p -Kurven darstellt, selbst Funktionen von Y . Außerdem kann man noch Korrekturen $\Delta\psi$ und $\Delta\eta_p$ beifügen für geänderte l'/s' , l''/s'' und Schaufelspiele.

Aufgrund solcher Unterlagen kann nach dem unter 11.10 angegebenen Verfahren irgendein Betriebszustand nachgerechnet werden, denn gibt man sich etwa den Eintrittszustand, den Massenstrom, die Drehzahl und schreibt zudem die γ_m der sämtlichen verstellbaren Leitradreihen vor (nicht notwendig sind alle Leiträder verstellbar), so ist man eindeutig auf einen Endzustand geführt. Wird ein bestimmter Enddruck vorgeschrieben, so sind die γ_m zu verändern, bis er erreicht wird. Diese Untersuchung ist im allgemeinen auszuführen für eine Anzahl von Betriebszuständen, die das verlangte Gebiet der Betriebs-

bedingungen umspannen. Offensichtlich hat man dabei eine gewisse Freiheit, denn man kann die Folge der einander zugeordneten γ_m der einzelnen Stufen noch wählen, vgl. [7, 8]. Das einfachste Gesetz besteht darin, die Einstellung aller Leiträder gleich zu wählen, aber es ist nicht notwendig das zweckmäßigste. Durch die Gestaltung des Verstellmechanismus kann man bis zu einem gewissen Grade beliebige Zuordnungen der γ_m der einzelnen Stufen erreichen. Bei der Anordnung nach Abb. 13.4.2 ergibt sich z. B. für eine gegebene Verschiebung des Stellkörpers S die größte Leitradverstellung in der ersten, die kleinste in der vierten Stufe. Es besteht aber noch eine zusätzliche Freiheit, denn die Kinematik des Mechanismus ordnet ja nur die γ_m -Verschiebungen einander zu. Einer festen Lage von S können immer noch verschiedene — allerdings *einmal* gewählte — γ_m zugeordnet sein. Welches die zweckmäßigste Lösung ist, kann nicht in allgemeiner Weise angegeben werden. Man muß vielmehr die maßgebenden Betriebspunkte untersuchen, die der Verbraucher fordert und so durch versuchsweises Nachrechnen und Ändern die optimale Lösung finden. Dabei wird stets auch die Lage der Stabilitätsgrenze, die etwa nach Abschn. 11.11 abgeschätzt werden kann, eine maßgebende Rolle spielen.

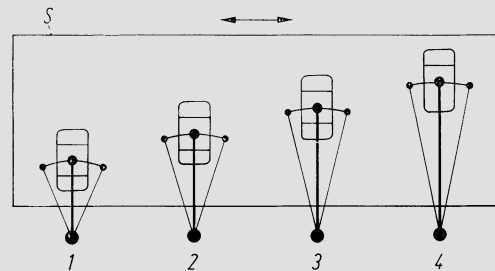


Abb. 13.4.2. Schematische Darstellung eines Verstellmechanismus für Leiträder

Es mag überraschen, daß hier die Stufencharakteristik des zweiten Typs (die also nicht feste geometrische Proportionen voraussetzt) benutzt wird zur Nachrechnung eines Betriebszustandes in einer gegebenen Maschine. Es liegt dies daran, daß man sich auf Berechnungsunterlagen abstützen will, die für den betreffenden Stufentyp und nicht nur für den jeweils vorliegenden Einzelfall Gültigkeit haben. Den Fehler, der durch die Voraussetzung der Repetierbedingungen entsteht, gleicht das Rechenverfahren nach 11.10 näherungsweise aus durch Einführung der Geschwindigkeitskorrektur nach Gl. 11.10(3) und des äquivalenten $\bar{\varphi}$ nach Gl. 11.10(8).

Grundsätzlich genauer, aber auch aufwendiger ist eine radweise Nachrechnung eines Betriebszustandes nach 11.6. In den durch Gl. 11.6(7) symbolisierten Funktionalzusammenhängen tritt dann als zusätzliche unabhängige Variable noch der Leitradstellwinkel γ_m auf. Wiederum sind solche Nachrechnungen gegebenenfalls mit geänderten γ_m zu wiederholen, bis der geforderte Enddruck erreicht wird. Noch weiter gehen Rechenprogramme, die für den jeweils zu untersuchenden Betriebszustand die räumliche Strömung nachrechnen, vgl. [5, 6].

Das Verfahren der radweisen Nachrechnung nach 11.6 ist ohne weiteres auch anwendbar auf den *Radialverdichter*. Wird ein einstellbares Vorleitrad verwendet, so bestimmt dessen Stellung den in die Rechnung eingehenden Winkel α_1 und mit den übrigen Gegebenheiten zusammen auch den mit 1 bezeichneten Eintrittszustand. Wenn Ω_1 der Ringquerschnitt vor dem Laufrad und η_e der Einlaufwirkungsgrad ist (der die Verluste im Vorleitrad umfaßt) und der hochgestellte Index 0 den Totalzustand vor Stufe kennzeichnet, sind die maßgebenden Gleichungen

$$c_{n1} = \frac{\dot{m}}{\Omega_1 \varrho_1} = \frac{(\alpha - 1) j_1 \dot{m}}{\alpha p_1 \Omega_1}, \quad c_1 = \frac{c_{n1}}{\sin \alpha_1}, \quad 13.4(2)$$

$$j_1 = j^0 - \frac{c_1^2}{2}, \quad \frac{p_1}{p_0} = \left[1 - \frac{c_1^2}{2\eta_e} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \quad 13.4(3)$$

Aus der Geometrie des Eintrittsdreieckes folgt auch

$$\cot \alpha_1 = \frac{u_1 - c_{n1} \cot \beta_1}{c_{n1}} = \frac{1 - (c_{n1}/u_1) \cot \beta_1}{(c_{n1}/u_1)}. \quad 13.4(4)$$

Will man also das Vorleitrad gerade so verstellen, daß der relative Zuströmwinkel β_1 zum Laufrad unverändert bleibt, so gibt diese Gleichung den Zusammenhang zwischen (c_{n1}/u_1) und α_1 .

Die Nachrechnung irgendeines Betriebszustandes eines mehrstufigen Radialverdichters mit verstellbaren Vorleiträndern oder Diffusorschaukeln kann auch mit Hilfe von Stufencharakteristiken erfolgen. Auch diese haben den Charakter von Kurvenscharen mit einem Einstellwinkel als Parameter, ähnlich wie Abb. 13.4.1, nur setzen sie nicht Repetierbedingungen voraus, sondern feste geometrische Proportionen. Der Mach-Zahl-Einfluß ist dabei in der Regel erheblich und wird z. B. so berücksichtigt, daß die Koeffizienten der Polynome, die die Kurven darstellen, Funktionen der Mach-Zahl sind. Das Nachrechnungsverfahren für die mehrstufige Maschine ist darum gegebenenmaßen das in Bd. I, Abschn. 9.17 dargestellte.

13.5 Pumpverhütungsregelung

Regeleingriffe zur Verhütung des Pumpens sind das Abblasen, das Zwischenabblasen und gegebenenfalls auch die Leitschaufelverstellung. Ob solche Mittel in einem gegebenen Fall notwendig sind und wie die Disposition zu treffen ist, würde letztlich eine genaue Nachrechnung der kritischen Betriebszustände zeigen, die radweise oder mit Stufencharakteristiken erfolgen könnte. Da solche Rechnungen aber äußerst aufwendig sind und oft für mehrere Varianten und Parameterwerte durchgeführt werden müßten, besteht das Bedürfnis nach einem einfacheren Verfahren, das die wesentlichen Zusammenhänge richtig erfaßt. Damit kann im Einzelfalle die zu treffende Lösung festgelegt werden, und die genauere Durchrechnung kann sich auf die Einzelheiten der definitiven Ausführung beschränken. Nachfolgend wird ein solches Verfahren entwickelt.

Für die Enthalpiezunahme $\Delta h_{\alpha\omega}$ von Eintritt erste Stufe bis Austritt letzte Stufe lassen sich die beiden folgenden Beziehungen angeben:

$$\Delta h_{\alpha\omega} = \frac{z \bar{\psi} \bar{u}^2}{\bar{\eta}_p}, \quad \Delta h_{\alpha\omega} = j_\alpha \left(\Pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right). \quad 13.5(1)$$

Hier sind z die Stufenzahl, $\bar{\psi}$, $\bar{\eta}_p$ und \bar{u} Mittelwerte der polytropen Druckzahl, des polytropen Wirkungsgrades und der Umfangsgeschwindigkeit (der Polytropenexponent ist entsprechend dem Wert von $\bar{\eta}_p$ einzusetzen). Wenn Index E den Zustand vor Eintrittsstutzen, A denjenigen nach Austrittsstutzen und 0 den Auslegungszustand kennzeichnen, mögen folgende Größen eingeführt werden:

$$\Pi \equiv \frac{p_\omega}{p_\alpha}, \quad \Pi_{EA} \equiv \frac{p_A}{p_E}, \quad \Pi_{\alpha A} \equiv \frac{p_A}{p_\alpha}, \quad 13.5(2)$$

$$n^* = \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{j_{\alpha 0}}{j_\alpha}}, \quad n_E^* = \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{j_{E0}}{j_E}}, \quad 13.5(3)$$

$$\varphi' \equiv \varphi/\varphi_0, \quad \psi' \equiv \psi/\psi_0. \quad 13.5(4)$$

Nun sollen zunächst die beiden Ausdrücke 13.5(1) einander gleichgesetzt und die so entstehende Gleichung durch die entsprechende, für den Auslegungspunkt angeschriebene dividiert werden. Daraus erhält man

$$\Pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 = \bar{\psi}' n^{*2} \left(\Pi_0^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right). \quad 13.5(5)$$

Vereinfachend sind hier die Unterschiede der polytropen Wirkungsgrade und mithin der Polytropenexponenten vernachlässigt.

Die Enthalpieabsenkung im Einlaufstutzen ist gegeben durch:

$$\frac{j_\alpha}{j_E} = 1 - \frac{c_\alpha^2}{2j_E} = 1 - \frac{\varphi_\alpha^2 u_\alpha^2}{2j_E \sin^2 \alpha_1} = 1 - \frac{\varphi_{\alpha 0}^2 u_{\alpha 0}^2}{2j_{E0} \sin^2 \alpha_1} \left(\frac{\varphi_\alpha}{\varphi_{\alpha 0}} \right)^2 \left(\frac{u_\alpha}{u_{\alpha 0}} \right)^2 \left(\frac{j_{E0}}{j_E} \right).$$

Mit

$$k_\alpha \equiv \frac{\varphi_{\alpha 0}^2 u_{\alpha 0}^2}{2j_{E0} \sin^2 \alpha_1} \quad 13.5(6)$$

geht dies über in

$$\frac{j_\alpha}{j_E} = 1 - k_\alpha \varphi_\alpha'^2 n^{*2}. \quad 13.5(7)$$

Ebenso kann der Ausdruck, der die im Diffusor umgesetzte Energie darstellt, nämlich

$$\frac{\lambda_D c_\omega^2}{2j_\omega} = \frac{\lambda_D \varphi_{\omega 0}^2 u_{\omega 0}^2}{2j_{\omega 0} \sin^2 \alpha_3} \left(\frac{\varphi_\omega}{\varphi_{\omega 0}} \right)^2 \left(\frac{u_\omega}{u_{\omega 0}} \right)^2 \left(\frac{j_{\omega 0}}{j_\omega} \right),$$

mit der Abkürzung

$$k_\omega \equiv \frac{\lambda_D \varphi_{\omega 0}^2 u_{\omega 0}^2}{2j_{\omega 0} \sin^2 \alpha_3} \quad 13.5(8)$$

durch die Form

$$\frac{\lambda_D c_\omega^2}{2j_\omega} = k_\omega \left(\frac{\Pi_0}{\Pi} \right)^{n-1} \varphi'^2 n^{*2} \quad 13.5(9)$$

wiedergegeben werden, wobei λ_D der Diffusorumsetzungsgrad ist. Der Ausdruck, der die Druckverhältnisse Π enthält, rührt daher, daß n^* mit dem j_α gebildet ist, während hier die j_ω maßgebend sind.

Die φ'_α und φ'_ω , die hier auftreten, sind über Kontinuitätsgleichung und Polytropengesetz miteinander verknüpft. Es ist

$$\Omega_\omega \varphi_\omega u_\omega \varrho_\omega = \Omega_\alpha \varphi_\alpha u_\alpha \varrho_\alpha,$$

mit dem Polytropengesetz also

$$\Omega_\omega \varphi_\omega u_\omega \Pi^{\frac{1}{n}} = \Omega_\alpha \varphi_\alpha u_\alpha.$$

Wenn diese Gleichungen durch die ihr gleiche im Auslegungspunkt dividiert werden, folgt

$$\varphi'_\omega = \varphi'_\alpha \left(\frac{\Pi_0}{\Pi} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad 13.5(10)$$

Weiter ist noch eine Angabe zu machen über den in 13.5(5) einzuführenden Mittelwert $\bar{\varphi}'$. Hier macht die Theorie ihre wesentliche vereinfachende Setzung. Es wird angenommen, daß für die betrachtete Schaufelung die Stufencharakteristik im Mittel durch eine Funktion $\psi' = f(\varphi')$ wiedergegeben werden kann. Alsdann wird der maßgebende Mittelwert durch

$$\bar{\varphi}' \approx \frac{1}{\varphi'_\omega - \varphi'_\alpha} \int_{\varphi'_\alpha}^{\varphi'_\omega} \psi' d\varphi' \quad 13.5(11)$$

angenähert.

Als charakteristische Durchflußgröße des Verbrauchersystems werde

$$\Phi = \frac{\dot{m} p_{A0}}{m_0 p_A} \sqrt{\frac{j_v}{j_{v0}}} \quad 13.5(12)$$

eingeführt. Dabei ist j_v die für das Durchflußverhalten des Verbrauchers maßgebende Normalenthalpie, also z.B. bei einer Gasturbine $c_p T$, wo T die Turbinen-Eintrittstemperatur ist. Bei Verbrauchern, wo das Fluid ohne weitere Veränderung einem druckaufzehrenden Prozeß zugeführt wird, ist j_v mit j_A identisch. Allgemein werde gesetzt

$$j_v = \lambda j_A, \quad j_{v0} = \lambda_0 j_{A0}. \quad 13.5(13)$$

Wenn man noch beachtet, daß

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{\varphi_\alpha u_\alpha p_\alpha j_{\alpha 0}}{\varphi_{\alpha 0} u_{\alpha 0} p_{\alpha 0} j_\alpha} = \varphi'_\alpha \frac{n p_\alpha j_{\alpha 0}}{n_0 p_{\alpha 0} j_\alpha}, \quad 13.5(14)$$

in 13.5(12) die p_A durch p_α und $\Pi_{\alpha A}$ ausdrückt und j_A aus dem Polytropengesetz, folgt schließlich die nachstehende Gleichung 13.5(22).

Damit können nun die sämtlichen Relationen angegeben werden, in der Reihenfolge ihrer Benutzung im Rahmen des Berechnungsverfahrens:

$$n^{*2} = \frac{(1 - k_\alpha) n_E^{*2}}{1 - k_\alpha \varphi'_\alpha{}^2 n_E^{*2}}, \quad 13.5(15)$$

$$\frac{p_\alpha}{p_E} = \left[1 - \frac{k_\alpha \varphi'_\alpha{}^2 n_E^{*2}}{\eta_e} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 13.5(16)$$

$$\Pi = \left[\bar{\psi}' n^{*2} \left(\Pi_0^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad 13.5(17)$$

$$\varphi'_\omega = \varphi'_\alpha \left(\frac{\Pi_0}{\Pi} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad 13.5(18)$$

$$\bar{\psi}' = \frac{\Delta J_{\alpha\omega}}{\varphi'_\omega - \varphi'_\alpha}, \quad 13.5(19)$$

$$\frac{p_A}{p_\omega} = \left[1 + k_\omega \left(\frac{\Pi_0}{\Pi} \right)^{\frac{n-1}{n}} \varphi'_\omega{}^2 n^{*2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 13.5(20)$$

$$\Pi_{\alpha A} = \Pi \frac{p_A}{p_\omega}, \quad \Pi_{EA} = \Pi \frac{p_\alpha}{p_E} \frac{p_A}{p_\omega}, \quad 13.5(21)$$

$$\Phi = \varphi'_\alpha n^{*2} \left(\frac{\Pi_{\alpha A 0}}{\Pi_{\alpha A}} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_0}}. \quad 13.5(22)$$

Dabei ist η_e der Einlaufwirkungsgrad und $\Delta J_{\alpha\omega}$ der in Gl. 13.5(11) auftretende Integralausdruck. In Abb. 13.5.1 ist eine normierte Stufencharakteristik der Form $\psi' = f(\varphi')$ dargestellt, wie sie für Axialverdichter typisch ist. Das Bild zeigt weiter die Integralfunktion J . Für gegebene φ'_α und φ'_ω läßt sich aus dieser Kurve $\Delta J_{\alpha\omega}$ wie angegeben entnehmen. — Die Rechnung geht aus von einem gegebenen n_E^* und einem gewählten Wert φ'_α . Als dann liefern die Gleichungen der Reihe nach je die links stehende Größe, wobei die Gruppe 13.5(17)–(19) durch Iteration oder Interpolation zu lösen ist, da ja $\bar{\psi}'$ erst durch die letzte dieser Gleichungen bestimmt wird.

Ist die Rechnung so durchgeführt, so ist zu prüfen, ob das gefundene Φ tatsächlich den Durchflußeigenschaften des Verbrauchers entspricht. Diese Eigenschaften müssen für den jeweiligen Verbraucher gegeben werden. Häufig läßt sich das Verhalten des Verbrauchers durch eine der beiden nachfolgenden Idealisierungen beschreiben. In einem Fall zeigt der Verbraucher das Verhalten einer *einzelnen Düse*. Dann gilt, wenn Π_{EA0} über dem kritischen Wert (Schalldruckverhältnis) liegt,

$$\Phi = \sqrt{\frac{\Pi_{EA}^{\frac{-2}{\kappa}} - \Pi_{EA}^{\frac{-\kappa+1}{\kappa}}}{\left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{2}{\kappa-1}} - \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}}, \quad \text{wenn } \Pi_{EA} \leq \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 13.5(23)$$

$$\Phi = 1, \quad \text{wenn } \Pi_{EA} \geq \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 13.5(24)$$

Im anderen Falle hat der Verbraucher das Durchflußverhalten einer *großen Zahl aufeinanderfolgender Querschnitte*, d. h. er befolgt das Kegelgesetz der vielstufigen Turbine. Dann gilt

$$\Phi = \sqrt{\frac{1 - \Pi_{EA}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{1 - \Pi_{EA0}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}} \quad 13.5(25)$$

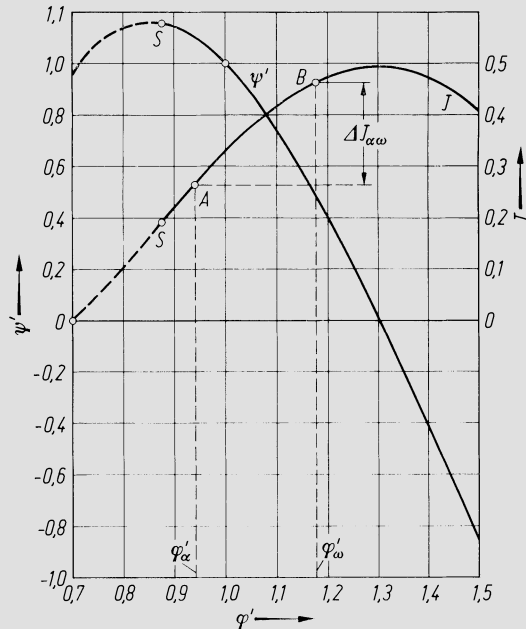


Abb. 13.5.1. Normierte Axialverdichter-Stufencharakteristik $\psi' = f(\varphi')$ und zugehörige Integralfunktion

Falls nun das aus 13.5(22) berechnete Φ nicht mit dem durch die Verbrauchereigenschaften gegebenen Wert übereinstimmt, so ist auf φ'_α zurückzugreifen und die Rechnung zu wiederholen, wenn der Betriebszustand wirklich berechnet werden soll. Handelt es sich aber nur darum, festzustellen, bei welchem n_E^* die Stabilitätsgrenze erreicht wird, so ist folgendes Vorgehen möglich. Man führt die Rechnung für immer kleinere n_E^* durch und wählt jedesmal das kleinste φ'_α , bei dem die Stabilitätsgrenze gerade erreicht ist. Nach vorsichtiger Annahme ist dies der φ' -Wert der Stabilitätsgrenze S der Einzelstufe (vgl. Abb. 13.5.1). So liefert Gl. 13.5(22) schließlich für jedes n_E^* ein Φ . Solange dieser Wert kleiner bleibt als der vom Verbraucher geforderte, ist der Betrieb noch stabil, denn man müßte ja φ'_α vergrößern, um Übereinstimmung herzustellen. Bei dem n_E^* , wo Φ den Sollwert annimmt, ist die Stabilitätsgrenze erreicht. Das Ergebnis hängt offensichtlich ab von der Annahme über $\sqrt{\lambda/\lambda_0}$, was aus dem Betriebsverhalten des Verbrauchers zu schließen ist. Gegebenenfalls kann der Ausdruck auch ersetzt werden durch einen Faktor, der den Widerstand des Verbrauchers kennzeichnet und vom Betriebszustand abhängt (z. B. Charge eines Hochofens).

Wenn nun n_E^* unter den Wert abgesenkt wird, bei dem die Stabilitätsgrenze erreicht wird, erhält man aus Gl. 13.5(22) ein größeres Φ als es dem Verbrauchergesetz entspricht, obwohl für φ'_α der kleinstmögliche Wert eingesetzt wird. Das bedeutet, daß abgeblasen werden muß, um den stabilen Betrieb des Kompressors zu sichern. Wenn Φ' der Wert ist, den man aus Gl. 13.5(22) berechnet, Φ'' derjenige, der dem Verbrauchersystem entspricht — z. B. nach Gl. 13.5(25) — so ist das Verhältnis des abzublasenden Massenstromes \dot{m}_a zum Gesamtmassenstrom \dot{m}

$$\frac{\dot{m}_a}{\dot{m}} = \frac{\Phi' - \Phi''}{\Phi'} \quad 13.5(26)$$

womit der nötige Ventilquerschnitt berechnet werden kann. Man wird solche Ventile im allgemeinen nur öffnen oder schließen, nicht aber regeln. Ist der Querschnitt größer als notwendig, so läuft die Maschine mit einem größeren φ'_α als der Stabilitätsgrenze entspricht.

Bei vermindertem n_E^* kann die Rechnung dadurch versagen, daß die Gleichungsgruppe 13.5(17)–(19) überhaupt keine Lösung mehr zuläßt. Dann ist die Instabilität nur durch Zwischenabblasen oder Leitradverstellung zu vermeiden.

Der Fall der *Zwischenabbläsung* kann folgendermaßen behandelt werden. Der Verdichter wird in zwei Stufengruppen eingeteilt. Die erste, durch Index 1 gekennzeichnet, reicht bis zur Abblasestelle, die zweite — Index 2 — von der Abblasestelle bis zum Verdichtende. Der Satz der Gleichungen, aus denen in der angegebenen Reihenfolge jeweils die links stehende Größe bestimmt wird, lautet:

$$n_1^{*2} = \frac{(1 - k_\alpha) n_E^{*2}}{1 - k_\alpha \varphi'_{\alpha 1} n_E^{*2}}, \quad 13.5(27)$$

$$\frac{p_{\alpha 1}}{p_E} = \left[1 - \frac{k_\alpha \varphi'_{\alpha 1} n_E^{*2}}{\eta_e} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 13.5(28)$$

$$\Pi_1 = \left[\bar{\psi}'_1 n_1^{*2} \left(\Pi_{01}^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad 13.5(29)$$

$$\varphi'_{\omega 1} = \varphi'_{\alpha 1} \left(\frac{\Pi_{01}}{\Pi_1} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad 13.5(30)$$

$$\bar{\psi}'_1 = \frac{\Delta J_{a\omega 1}}{\varphi'_{\omega 1} - \varphi'_{\alpha 1}}, \quad 13.5(31)$$

$$\frac{\dot{m}_a}{\dot{m}} = \frac{\varphi'_{\omega 1} - \varphi'_{\alpha 2}}{\varphi'_{\omega 1}}, \quad 13.5(32)$$

$$n_2^{*2} = n_1^{*2} \left(\frac{\Pi_{01}}{\Pi_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad 13.5(33)$$

$$\Pi_2 = \left[\bar{\psi}'_2 n_2^{*2} \left(\Pi_{02}^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad 13.5(34)$$

$$\varphi'_{\omega 2} = \varphi'_{\alpha 2} \left(\frac{\Pi_{02}}{\Pi_2} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad 13.5(35)$$

$$\bar{\psi}'_2 = \frac{\Delta J_{\alpha\omega 2}}{\varphi'_{\omega 2} - \varphi'_{\alpha 2}}, \quad 13.5(36)$$

$$\frac{p_A}{p_{\omega 2}} = \left[1 + k_\omega \left(\frac{\Pi_{02}}{\Pi_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} \varphi'_{\omega 2} n_2^{*2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 13.5(37)$$

$$\Pi_{\alpha A} = \Pi_1 \Pi_2 \frac{p_A}{p_{\omega 2}}, \quad \Pi_{EA} = \Pi_1 \Pi_2 \frac{p_{\alpha 1}}{p_E} \frac{p_A}{p_{\omega 2}}, \quad 13.5(38)$$

$$\Phi = \varphi'_{\alpha 1} n_1^* \left(1 - \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}} \right) \left(\frac{\Pi_{\alpha A 0}}{\Pi_{\alpha A}} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_0}}. \quad 13.5(39)$$

Die Rechnung verläuft so, daß man sich n_E^* , $\varphi'_{\alpha 1}$ und $\varphi'_{\alpha 2}$ gibt und so durch die Gleichungen hindurchgeht wie im vorherigen Falle, wobei am Schluß Φ erhalten wird. Ist dieses größer als der vom Verbraucher gegebene Wert, so muß auch noch nach dem Verdichter abgeblasen werden, vgl. Gl. 13.5(26).

Man wird diese Rechnung vor allem für einen kleinsten Wert der Drehzahlvariablen n_E^* von etwa 0,5—0,6 durchführen, denn bei noch kleineren Werten werden die Beanspruchungen so niedrig, daß selbst rotierendes Abreißen zugelassen werden kann, um so mehr als solche Betriebszustände nur kurze Zeit andauern. Messungen geben dann übrigens keine scharfen Signale mehr, sondern nur noch eine gewisse Unruhe des Betriebszustandes. Führt man die Rechnung für dieses kleinste n_E^* durch mit den Minimalwerten von $\varphi'_{\alpha 1}$ und $\varphi'_{\alpha 2}$, die der Stabilitätsgrenze entsprechen, so erhält man den Betriebszustand, der die Querschnitte der Abblaseventile festlegt, denn für jedes höhere n_E^* entstehen günstigere Verhältnisse. Die Drehzahl n_E^* von der an aufwärts ohne Abblasung gearbeitet werden kann, bestimmt sich wiederum wie im zuvor behandelten Falle. — In sinngemäßer Erweiterung sind auch Anordnungen mit mehrfacher Zwischenabblasung berechenbar.

Das Verfahren kann auch die *Leitradverstellung* mitberücksichtigen. In diesem Falle ist lediglich die normierte Stufencharakteristik zu ersetzen durch die erweiterte Form

$$\psi' = f(\varphi', \gamma_m). \quad 13.5(40)$$

Hier ist γ_m ein charakteristischer Leitradstellwinkel, z. B. derjenige der ersten Stufe, dem die anderen in gesetzmäßiger Weise zugeordnet sind. Die Charakteristik repräsentiert dann mittlere Verhältnisse über die sämtlichen Stufen. Sie ist eine Kurvenschar der in Abb. 13.5.2 dargestellten Art. Indem man die so erweiterte Charakteristik in die angegebenen Berechnungsgänge einführt, hat man γ_m als frei wählbaren Parameter zur Verfügung und kann Berechnungen mit verschiedener Parameterwahl ausführen, um günstige Lösungen aufzufinden. So kann z. B. auch der Fall behandelt werden, wo eine erste Stufen­gruppe verstellbare Leiträder besitzt, eine zweite feste. Es ist dabei die Gleichungsgruppe 13.5(27)—(39) heranzuziehen, wobei Index 1 jetzt auf die Gruppe mit verstellbaren Leit­rädern verweist. Ohne Abblasung ist dabei einfach zu setzen $\varphi'_{\alpha 2} = \varphi'_{\omega 1}$.

Die Einfachheit dieses Verfahrens, das in naheliegender Weise den jeweiligen Besonderheiten angepaßt werden kann, erlaubt mit mäßigem Rechenaufwand die Variation solcher Parameter wie die Lage einer Zwischenabblasestelle oder die Leitschau­feileinstellung und läßt die maßgebenden Zusammenhänge unmittelbar in Erscheinung treten.

Abb. 13.5.3 gibt einige Resultate so durchgeführter Rechnungen wieder, bei denen die Stufencharakteristik nach Abb. 13.5.1 zugrundegelegt ist. Dargestellt ist in Funktion des Auslegungsdruckverhältnisses Π_{EA0} die relative Drehzahl n_E^* , bei welcher der Verdichter

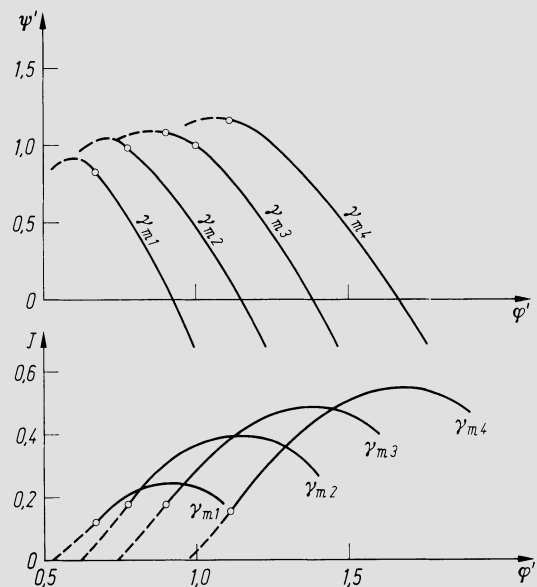


Abb. 13.5.2. Normierte Stufencharakteristik und Integralfunktion J für Stufe mit verstellbarem Leitrad.
 γ_m = Leitradstellwinkel

an die Stabilitätsgrenze kommt, wenn die Verbrauchercharakteristik dem Kegelgesetz entspricht und wenn der für die Stabilitätsgrenze kennzeichnende Wert $\varphi'_\alpha = 0,7$; $0,8$ oder $0,9$ beträgt. Wie der Vergleich mit Abb. 13.5.1 zeigt, werden mit $\varphi'_\alpha = 0,9$ in keiner Stufe die Bedingungen erreicht, bei denen sie für sich allein genommen instabil würde. Die Annahmen $\varphi'_\alpha = 0,7$ oder $0,8$ setzen hingegen bei der zugrundegelegten Kennlinie Abb. 13.5.1 voraus, daß einzelne Stufen links des Punktes S arbeiten, also durch die anderen stabilisiert werden müssen.

Aus Abb. 13.5.3 ist weiter noch das Druckverhältnis Π_{EA} zu entnehmen, das der Verdichter erzeugt, wenn er mit dem Grenzwert von n_E^* (also an der Stabilitätsgrenze) läuft.

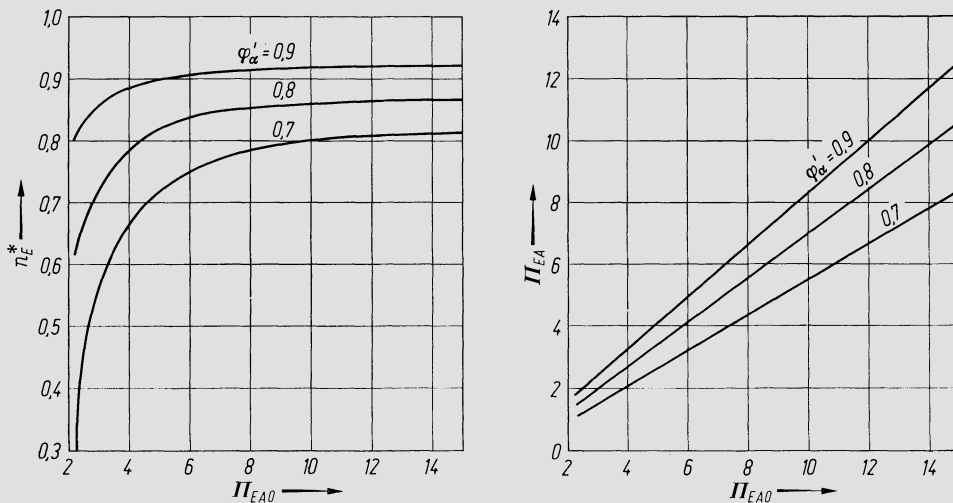


Abb. 13.5.3. Grenzdrehzahlparameter n_E^* , von dem an abwärts die Pumpverhütungsregelung einsetzen muß und Druckverhältnis Π_{EA}^* , das bei diesem n_E^* erreicht wird. Vorausgesetzt ist die Φ -Funktion nach Gl. 13.5(25) und $\lambda/\lambda_0 = 1$

Wie das Diagramm zeigt, müssen bei allen einigermaßen großen Auslegungsdruckverhältnissen Mittel zur Pumpverhütung (Zwischenabblasen und/oder Schaufelverstellung) vorgesehen werden, die bis zu verhältnismäßig hohen Drehzahlen in Aktion bleiben müssen. Wenn man nun annimmt, daß etwa $n^* = 0,6$ der Grenzwert sei, unterhalb dessen eine Gefährdung der Maschine nicht mehr zu befürchten ist, so geht aus der Untersuchung hervor, daß bei den vorausgesetzten Charakteristiken von Stufe und Verbraucher Konstruktionsdruckverhältnisse von 2,5 bis höchstens etwa 3,3 ohne besondere Pumpverhütungsmittel beherrschbar sind.

Wenn verstellbare Leiträder nur zur Verhütung des Pumpens beim Anfahren vorgesehen werden, so ist das Verstellgesetz so zu wählen, daß bei verminderter Drehzahl das Leitrad der ersten Stufe stark zuge dreht wird, während die Verstellung der nachfolgenden Leiträder von Stufe zu Stufe schwächer sein muß. Von einer gewissen Stufe an sind feste Leiträder anzuordnen, da ja die letzten Stufen beim Anfahren meist sogar mit $\varphi' > 1$ arbeiten.

Man beachte, von welchen Primärimpulsen eine Pumpverhütungsregelung ausgehen muß. Nach den Ausführungen unter 13.2 hängt Φ eindeutig zusammen mit $\pi_E = p_\alpha/p_E$. Dieses Druckverhältnis und $\Pi_{EA} = p_A/p_E$ müssen also gemessen werden. Da die Pumpgrenze durch $\Pi_{EA} = f(\Phi)$ dargestellt werden kann, genügen grundsätzlich diese beiden Messungen.

Literatur zu Kap. 13

1. *Baumann, H.; Schmidt-Theuner, P.*: Der Axialverdichter mit verstellbaren Leitschaufeln. Brown Boveri Mitt. 10 (1963).
2. *Hoppe, H.*: Die Leitradverstellung in Axialverdichtern. Jahrb. der Wiss. Ges. f. Luft- und Raumfahrt 1962.
3. *Niedermann, E.*: Luftversorgung von Kläranlagen. Turboforum (BST) Nr. 2 (1972) 59–68.
4. *Hourmouziadis, J.; Herbig, H.*: Numerische Simulation der Kennfelder von Strömungsmaschinen. Konstruktion 26 (1974) 182–186.
5. *Grahl, K.*: Teillastberechnung für Axialverdichterstufen. Z. Flugwiss. 20 (1972) 42–51.
6. *Davis, W. R.; Millar, D. A. J.*: Axial Compressor Analysis using a Streamline Curvature Method. Carlton University Tech. Rep. ME/A 76-3, 1976.
7. *Dittlé, B.*: Über ein zweckmäßiges Verstellgesetz für Leitschaufeln von stationären Axialverdichtern. VDI-Ber. 193 (1973) 129–138.
8. *Dittlé, B.; Schuber, J.; Simon, H.*: Ein Beitrag zur Kennfeldoptimierung mehrstufiger Axialverdichter bezüglich Wirkungsgrad und Regelbereich. VDI-Ber. 264 (1976) 129–140.

14 Regelung der Gasturbinen

14.1 Regeleingriffe

Bei sehr vielen Gasturbinen ist der einzige Regeleingriff die *Einstellung der Brennstoffzufuhr* zur Brennkammer. Vor allem bei einwelligen Anlagen besteht im Normalbetrieb üblicherweise keine Notwendigkeit, irgendwelche weiteren Eingriffe vorzunehmen. Zweiwellige Anlagen sind heute stets so geschaltet wie in Abb. 14.1.1 angedeutet, d. h. es sind zwei hintereinandergeschaltete Turbinen vorgesehen (baulich zu einer Einheit vereinigt), wobei die HD-Turbine den Verdichter, die ND-Turbine den Nutzleistungsempfänger antreibt. Dabei kann es sich als wünschenswert erweisen, den Zwischendruck zwischen HD- und ND-Turbine zu beeinflussen, was durch ein *verstellbares Leitrad* am Eintritt in die ND-Turbine geschehen kann, vgl. Abb. 14.1.2. Durch Öffnen des Leitrades wird die Schluckfähigkeit der ND-Turbine erhöht, ihr Eintrittsdruck also unter sonst gleichen Bedingungen herabgesetzt. Die damit gegebene Vergrößerung des Gefälles der HD-Turbine bewirkt, daß sich die Drehzahl der Verdichtergruppe auf einen höheren Wert einstellt. Es werden daher Luftdurchsatz und Höchstdruck vergrößert und im Verein mit der entsprechenden Erhöhung der Brennstoffzufuhr die Leistung. — Oft genügt es auch, das erste Leitrad der ND-Turbine so auszubilden, daß es im Stillstand eingestellt werden kann. Man kann sich so den mittleren klimatischen Bedingungen anpassen, in denen eine Anlage arbeiten soll, und der Ausgleich von Fertigungsfehlern ist möglich.

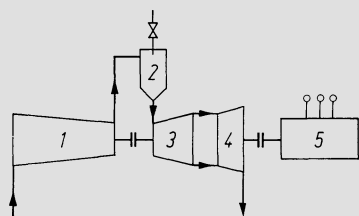


Abb. 14.1.1. Schaltung einer zweiwelligen Gasturbine, 1 Verdichter, 2 Brennkammer, 3 HD-Turbine, 4 ND-Turbine, 5 Nutzleistungsempfänger

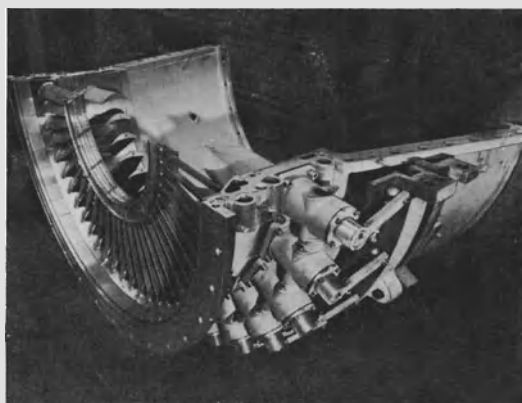


Abb. 14.1.2. Verstellbares Leitrad an einer Gasturbine von Sulzer

Moderne Gasturbinen arbeiten mit so hohen Druckverhältnissen, daß die Axialverdichter ohne *Pumpverhütungsregelungen* nicht angelassen werden könnten, vgl. die Ausführungen in den Abschn. 11.7, 13.1 und 5. Zur Vermeidung des Pumpens sieht man das *Zwischenabblasen* zwischen einzelnen Stufen vor und/oder die *Verstellung der Leiträder* einiger Stufen am ND-Ende des Verdichters. Abb. 14.1.3 zeigt eine Gasturbine, bei der beide Mittel angewandt sind. Bei Leitradverstellung kommt man naturgemäß mit

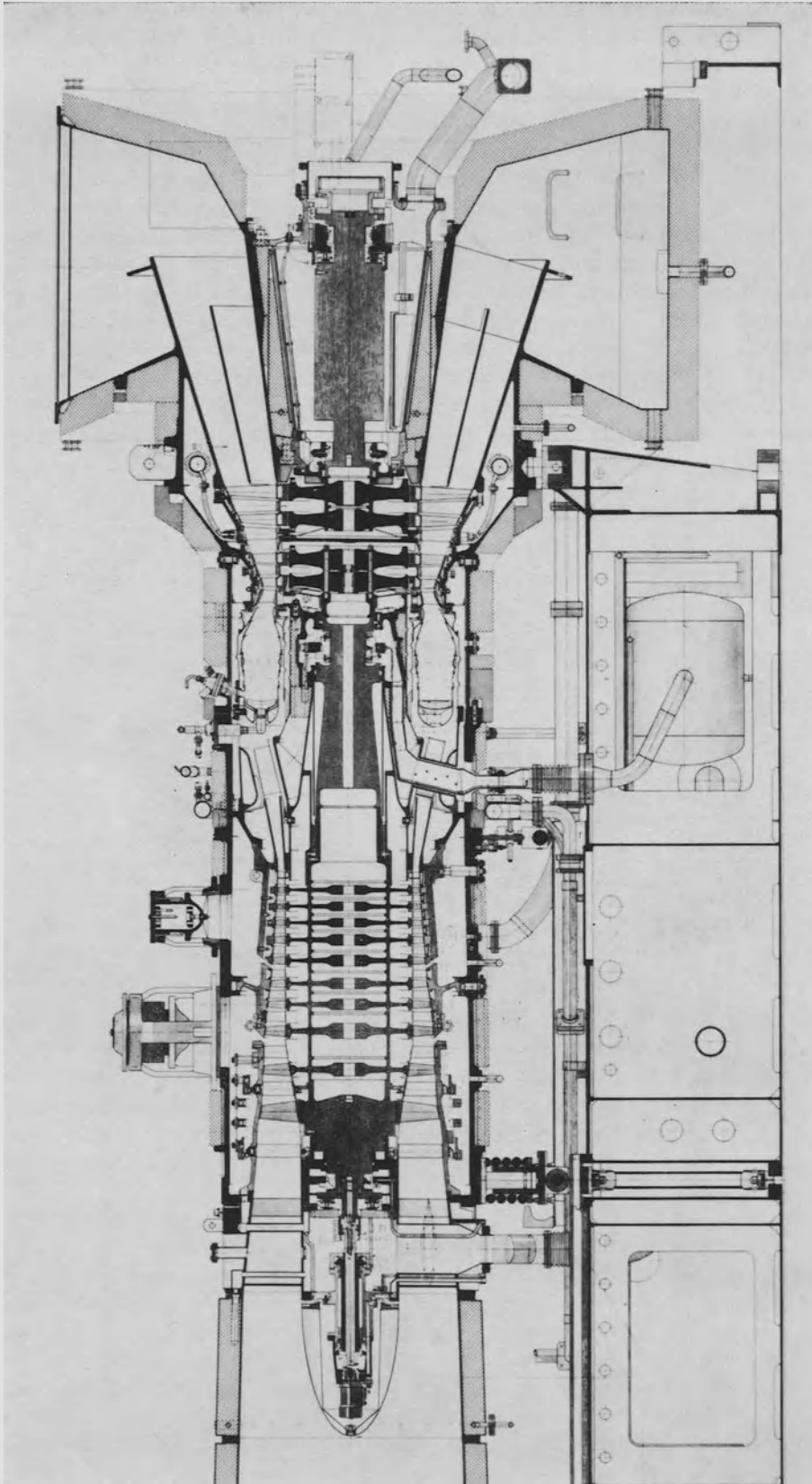


Abb. 14.1.3. Gasturbine für 20 MW Leistung in Zweiwellenanordnung (Sulzer). Sehr kompakte Konzeption mit Ringbrennkammer verlangt Vermeidung der Horizontalteilung im Turbinenteil. Daher dort Rotorscheiben durch Anker zusammengezogen. Verdichtertorator geschweißt (Elektronenstrahlschweißung). Die ersten Verdichtertreiber haben verstellbare Schaufeln. Nachfolgend noch Abblasung an zwei Stellen zur Vermeidung des Pumpens

einer kleineren Leistung der Anlaßmaschine aus, als wenn man das gleiche durch Zwischenabblasen zu erreichen sucht. Zweiwellenanlagen arbeiten bei Teillast mit verminderter Verdichterdrehzahl. Dabei kann von einem gewissen Betriebszustand an abwärts Leitschaufelverstellung notwendig werden.

Besonders günstige Verhältnisse ergeben sich bei der im Flugtriebwerkbau üblichen Anordnung mit zwei konzentrischen Wellen, bei der je die HD- und ND-Läufer von Turbine und Verdichter ein Läufer-system bilden. Abb. 14.1.4 gibt ein solches Zweistromtriebwerk schematisch wieder. Der aus ND-Turbine und ND-Verdichter bestehende Läufer trägt an seinem vorderen Ende die Gebläsestufe („fan“), die den Zusatzluftstrom fördert. Der aus HD-Verdichtern und HD-Turbine aufgebaute Läufer umgibt den ND-Läufer konzentrisch und hat höhere Drehzahl als dieser. Damit wird es möglich, Druckverhältnisse von etwa 35 zu erreichen. Nur der HD-Läufer muß angelassen werden, was auch den Vorteil hat, daß sehr wenig Anlaßleistung gebraucht wird. Der ND-Läufer folgt beim Anfahren mit so viel niedrigerer Drehzahl, daß seine Verdichterstufen nicht ins Pumpen kommen. Hingegen kann das Auslegungsdruckverhältnis des HD-Verdichters allein so hoch sein, daß dort die ersten Stufen verstellbare Leiträder erhalten müssen, wie in Abb. 14.1.4 angedeutet.

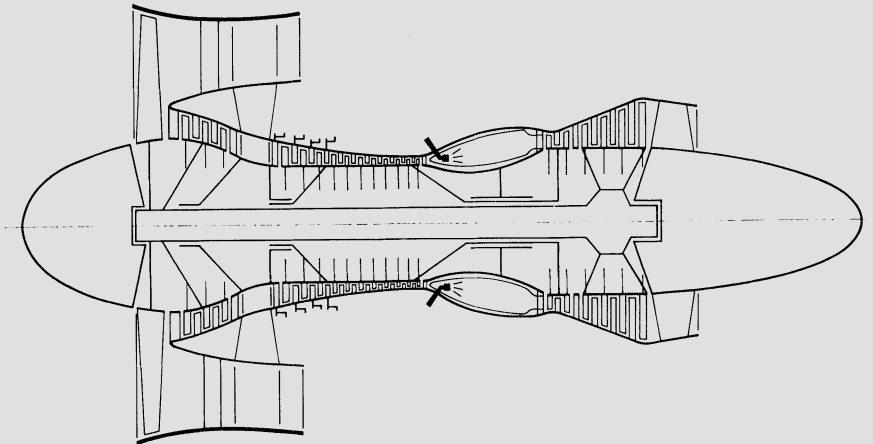


Abb. 14.1.4. Zweistrom-Strahltriebwerk. Rotorsystem besteht aus zwei mechanisch unabhängigen Teilen. HD-Teil des Verdichters hat vier Stufen mit verstellbaren Leitschaufeln

Solche Zweiwellentriebwerke werden in abgewandelter Form auch als industrielle Druckgaserzeuger verwendet, denen eine für Generatorantrieb vorgesehene Gasturbine nachgeschaltet wird. Es entsteht so eine Dreiwellenanlage. Abb. 14.1.5 stellt einen solchen Druckgaserzeuger dar. Gestrichelt ist die Luftfahrtversion angedeutet, aus der die Konstruktion abgeleitet ist. Das gesamte Druckverhältnis ist etwa 16, so daß ohne verstellbare Verdichterschaufeln auszukommen ist, da der Verdichterroter aus zwei mechanisch unabhängigen Teilen besteht.

Das Anlassen der Gasturbinen erfolgt oft direkt elektrisch, was allerdings den Nachteil eines großen Leistungsverbrauches hat, da der Elektromotor während des Anlaßvorganges mit großem Schlupf und dementsprechend schlechtem Wirkungsgrad arbeitet. Man kann daher auch einen hydraulischen Drehmomentwandler zwischenschalten oder einen volumetrisch arbeitenden Hydraulikmotor als Anlasser verwenden, der den Verdichter über ein Getriebe antreibt, vgl. [6]. Der Elektromotor kann dabei konstant mit seiner Normaldrehzahl durchlaufen. Um vom Netz unabhängig zu sein, kann der Elektromotor auch durch einen schnellaufenden Dieselmotor ersetzt werden. Flugtriebwerke werden über Winkelgetriebe von Luftturbinen aus angelassen, die ihrerseits die Druckluft von Kleingasturboaggregaten erhalten.

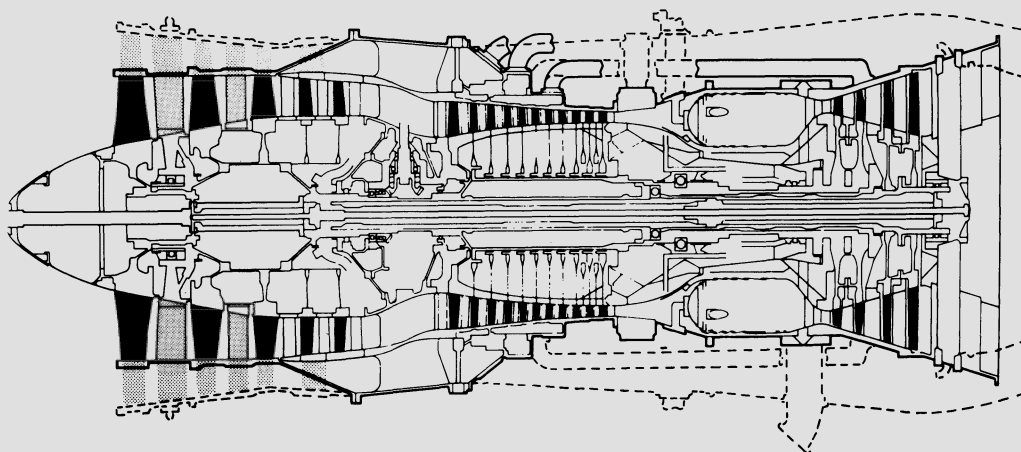


Abb. 14.1.5. Vom Strahltriebwerk „Spey“ abgeleiteter Druckgaserzeuger (Luftfahrtvariante gestrichelt eingetragen). Rotorsystem besteht aus zwei mechanisch unabhängigen Teilsystemen. Diesem Aggregat wird die Nutzleistung erzeugende Gasturbine nachgeschaltet, so daß insgesamt eine Dreiwellenanordnung entsteht

Besondere Maßnahmen sind u. U. erforderlich, wenn die Möglichkeit eines plötzlichen *Lastabwurfs* durch den Nutzleistungsempfänger gegeben ist, wie vor allem beim elektrischen Generator. Nur die einwellige Anlage zeigt hierbei ein günstiges Verhalten, denn eine sofortige Verminderung der Brennstoffzufuhr genügt, um das Durchbrennen zu verhindern. Sobald jedoch die Nutzleistungsturbine mechanisch unabhängig vom Verdichter läuft, muß dafür gesorgt werden, daß beim Lastabwurf nicht nur die Temperatur, sondern vor allem auch der Druck vor dieser Turbine so rasch abfällt, daß eine unzulässige Drehzahlerhöhung vermieden wird. Dazu kann es notwendig sein, Abblaseventile vorzusehen, die eine rasche Absenkung des Höchstdruckes ermöglichen. Besonders kritisch ist der Fall, wenn auf dem höchsten Druckniveau des Prozesses Apparate großen Volumens vorgesehen sind. Diese Situation ist gegeben bei Anlagen mit Wärmeaustauschern (einer der Nachteile dieser Prozeßverbesserung!), aber auch z. B. bei solchen, bei denen der Brennstoff unter Druck vergast wird in einem in den Gasturbinenprozeß integrierten Gaserzeuger. In solchen Fällen ist eine mechanisch unabhängig laufende Nutzleistungsturbine nicht zu empfehlen, da eine Sicherung gegen Durchbrennen bei Lastabschaltung nur mit großen baulichen Komplikationen erreichbar wäre.

Einen Sonderfall stellt die *geschlossene Gasturbine* dar. Sie ist bis heute nur in wenigen Fällen mit fossiler Feuerung eingesetzt worden, doch beabsichtigt man vor allem, sie zusammen mit gasgekühlten Hochtemperaturreaktoren im Direktkreislauf zu verwenden, wobei das Arbeitsgas Helium ist, vgl. z. B. [1–4]. Abb. 14.1.6 stellt Arbeitsschema und Entropiediagramm dar. Die Leistungsregelung erfolgt primär durch Einstellung der Wärmeproduktion im Reaktor. Zugleich wird der *Druckpegel* im Kreislauf angepaßt. Der Höchstdruck wird proportional der Wärmeproduktion eingestellt. Da alle Maschinen mit konstanter Drehzahl laufen, bleiben damit alle Temperaturen und alle *Druckverhältnisse* praktisch unverändert. Im Entropiediagramm stellt sich das so dar wie angedeutet; das gestrichelte Diagramm entspricht einem Teillastzustand.

Zur Durchführung dieser Pegelregelung sind ein HD-Reservebehälter 1 und ein ND-Reservebehälter 2 vorgesehen. Bei Laststeigerung wird über das Ventil 3 Gas in den Kreislauf eingeführt, während bei Entlastung durch das Ventil 4 Gas in den Behälter 2 abgelassen wird. Da das Kreislaufdruckverhältnis solcher Anlagen etwa 2–3 beträgt, sind Pumpverhütungsvorrichtungen überflüssig. Hingegen müssen bei der Auslegung die besonderen Sicherheitsbedingungen der Kernkraftwerke beachtet werden, vgl. etwa [5]

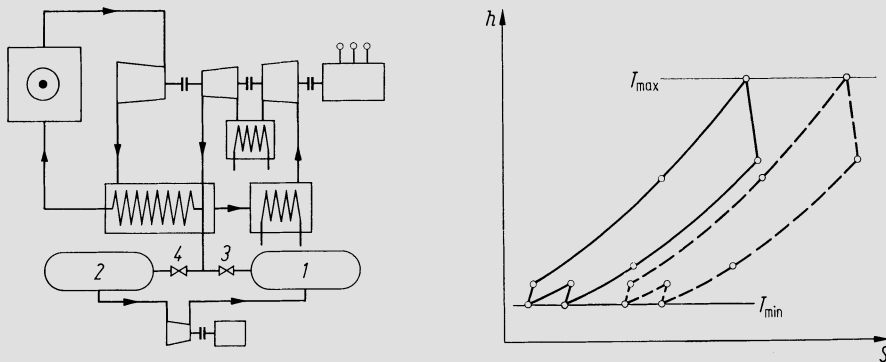


Abb. 14.1.6. Schaltschema und Entropiediagramm einer geschlossenen Helium-Gasturbine zur direkten Ausnutzung der Wärmeproduktion eines Hochtemperatur-Kernreaktors

14.2 Berechnung der Beharrungszustände

a) Allgemeines

Jeder mögliche Beharrungszustand muß die folgenden Bedingungen erfüllen: Der Massenstrom der Turbine muß gleich dem des Verdichters sein, unter Einrechnung der Korrekturen für Brennstoffmenge und Leckmengen und gegebenenfalls der durch Abblaseventile abgezweigten Teilmengen. Weiter gehorchen alle Maschinen denjenigen Gesetzmäßigkeiten, die durch ihre Charakteristiken (Kennlinienfelder) dargestellt werden. Schließlich muß die Bedingung des Leistungsgleichgewichtes an mechanisch unabhängig vom Nutzleistungsempfänger laufenden Turbogruppen eingehalten sein. Die mathematische Formulierung dieser Forderungen liefert ein System von Beziehungen, das die sämtlichen möglichen Beharrungszustände festlegt.

Da heute alle Gasturbinen mit Kühlung arbeiten, ist hier vorgängig zu präzisieren, was unter Turbineneintrittstemperatur und Turbinenwirkungsgrad verstanden wird. Die Eintrittstemperatur ist die ideale Temperatur, die entsteht, wenn man sich den Heißgasstrom vor der Turbine mit dem gesamten Kühlluftstrom gemischt denkt, also im Sinne der Ausführungen in Bd. I, Abschn. 2.5. Die dieser Temperatur entsprechende Mischenthalpie tritt implizite auch in Gl. 9.8 (18) auf. Der Turbinenwirkungsgrad bestimmt sich aus diesem ideellen Mischzustand am Eintritt und dem effektiven Austrittszustand, wie unter 2.5 definiert. — Es erhebt sich noch die Frage, ob der so bestimmte ideale Eintrittszustand auch bei der Formulierung der Durchflußgesetze nach Abschn. 11 verwendet werden darf. Das ist mit großer Genauigkeit der Fall. Die absolute Mischtemperatur ist in der Tat nahezu proportional der absoluten Heißgastemperatur, und da der Massenstrom umgekehrt proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur ist, entsteht kein fühlbarer Fehler, wenn man in das Durchflußgesetz die Mischtemperatur einsetzt.

Nachfolgend werden die wichtigsten, z. T. früher schon angegebenen allgemeinen Relationen und Definitionen zusammengestellt, wobei die Indices α und ω für die Nummern der jeweiligen Zustandspunkte am Ein- und Austritt des betreffenden Aggregates stehen. Für Verdichtungs- und Entspannungsvorgänge ist

$$\bar{T} \equiv (T_\alpha^0 + T_\omega^0)/2, \quad \gamma \equiv c_p(\bar{T})/c_{pE}. \quad 14.2(1)$$

Hier entspricht c_{pE} der Umgebungstemperatur T_E der Luft (zugleich Totaltemperatur am Verdichtereintritt). Ein ähnlicher γ -Wert wird für die Brennkammer definiert durch

$$\bar{\gamma} \equiv \frac{(1 + \beta) h(T_\omega, x) - h(T_\alpha, 0)}{(1 + \beta) c_{pE}(T_\omega - T_\alpha)}, \quad 14.2(2)$$

wobei x der Gehalt des Verbrennungsgasgemisches an stöchiometrischem Verbrennungsgas ist und β das zugehörige Brennstoff-Luft-Massenverhältnis, vgl. Abschn. 2.3 ($x = 0$ entspricht reiner Luft). — Weiter ist

$$\chi \equiv \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \frac{R}{c_p(T)}, \quad \chi_E \equiv \frac{R}{c_p(T_E)}, \quad \chi = \frac{\chi_E}{\gamma}. \quad 14.2(3)$$

Mit T_T^0 als totaler Mischtemperatur Eintritt Turbine sei ferner

$$\vartheta \equiv T_T^0/T_E \quad 14.2(4)$$

das Temperaturverhältnis des Prozesses.

Für den *Verdichter* werde gesetzt

$$\Pi \equiv p_\omega^0/p_\alpha^0, \quad 14.2(5)$$

$$\Omega_V \equiv \frac{1}{\eta_V} [\Pi^\kappa - 1] = \Pi^{\kappa/\eta_{pV}} - 1, \quad 14.2(6)$$

wobei η_V der isentrope, η_{pV} der polytrope Verdichterwirkungsgrad ist (mit Totalzuständen gebildet). Damit ergibt sich die Differenz der Totalenthalpien (spezifische Arbeit) zu

$$\Delta h_{\alpha\omega}^0 \equiv h_\omega^0 - h_\alpha^0 = \gamma c_{pE} T_\alpha^0 \Omega_V, \quad 14.2(7)$$

während das Temperaturverhältnis der Verdichtung

$$T_\omega^0/T_\alpha^0 = \Omega_V + 1 \quad 14.2(8)$$

beträgt. Das Durchflußgesetz kann in der Form

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \Phi \frac{p_\alpha^0}{p_{\alpha 0}^0} \sqrt{\frac{R_0 T_{\alpha 0}^0}{R T_\alpha^0}} \quad 14.2(9)$$

geschrieben werden, wobei Index 0 auf den Auslegungspunkt verweist. Das Kennfeld wird dabei in dimensionsloser Form wiedergegeben durch

$$\Phi = F(\Pi, n^*), \quad \eta_{pV} = f(\Pi, \Phi), \quad 14.2(10)$$

wobei

$$n^* \equiv \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{R_0 T_{\alpha 0}^0}{R T_\alpha^0}} \quad 14.2(11)$$

die Drehzahlvariable ist. Die zweite der Gln. 14.2(10) kann ebensogut auch für η_V angegeben werden, wenn man diese Darstellung vorzieht. Es schiene naheliegender, den Wirkungsgrad wie Φ in Funktion von Π und n^* anzugeben, doch hat die hier gewählte Form den Vorteil, auch bei sehr steiler Kennlinie nicht auf numerische Schwierigkeiten zu führen.

Damit daß in Gl. 14.2(9) und (11) unter der Wurzel noch die Gaskonstanten als Faktoren erscheinen, kann auch der Einfluß der Luftfeuchtigkeit miteinbezogen werden. Es ist R_0 die Gaskonstante im Normalzustand, für den man üblicherweise trockene Luft voraussetzt. Eine genaue Analyse des Einflusses der Feuchtigkeit gibt Heil [7]. Es geht daraus hervor, daß hinreichende Genauigkeit erreicht wird, wenn man in der angegebenen Weise die Gaskonstante in die Bildung der dimensionslosen Größen einführt.

Bei der *Turbine* sei

$$\pi = p_\omega^0/p_\alpha^0 \quad 14.2(12)$$

$$\Omega_T \equiv \eta_T [1 - \pi^\kappa] = 1 - \pi^{\eta_{pT}}, \quad 14.2(13)$$

wobei wieder η_T der isentrope, η_{pT} der polytrope Turbinenwirkungsgrad ist. Totalenthalpiedifferenz und Temperaturverhältnis sind

$$\Delta h_{\alpha\omega}^0 \equiv h_{\alpha}^0 - h_{\omega}^0 = \gamma c_{pE} T_{\alpha}^0 \Omega_T, \quad 14.2(14)$$

$$T_{\omega}^0 / T_{\alpha}^0 = 1 - \Omega_T. \quad 14.2(15)$$

Das Durchflußverhalten läßt sich ebenfalls durch

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \Phi_T \frac{p_{\alpha}^0}{p_{\alpha 0}^0} \sqrt{\frac{R_0 T_{\alpha 0}^0}{R T_{\alpha}^0}} \quad 14.2(16)$$

wiedergeben, wobei nach den Ausführungen unter 11.3 und 4 $\Phi_T(\pi, n_T^*)$ oft folgende Darstellung erlaubt:

$$\Phi_T = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} E(\pi) = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} \sqrt{\frac{(1 - \pi_k)^N - (\pi - \pi_k)^N}{(1 - \pi_k)^N - (\pi_0 - \pi_k)^N}} \quad 14.2(17)$$

Hier ist π_k das kritische Druckverhältnis (Abb. 11.3.6), N der aus dem Polytropenexponenten gebildete Ausdruck $(n + 1)/n$, für den genügend genau ein Festwert eingesetzt werden darf. Die maßgebende mittlere Schluckzahl $\bar{\mu}$ ist nach 11.3 näherungsweise die Schluckzahl der ersten Stufe (Index 1), d. h. es gilt

$$\bar{\mu} \approx \mu(\nu_1) \quad 14.2(18)$$

wo ν_1 die Laufzahl dieser Stufe ist. Nach Gl. 11.3(23) ist auch

$$\nu_1 = \nu_{10} n_T^*, \quad 14.2(19)$$

$$n_T^* = \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{R_0 T_{\alpha 0}^0}{R T_{\alpha}^0}}, \quad 14.2(20)$$

womit Φ_T in der Tat von dieser Drehzahlvariablen der Turbine abhängt. Nicht immer ist allerdings die Darstellung nach Gl. 14.2(17) möglich, sondern $\Phi(\pi, n_T^*)$ muß empirisch oder durch direkte Nachrechnung einer großen Zahl von Betriebszuständen gewonnen werden, was für das Wirkungsgradgesetz

$$\eta_{pT} = f(\pi, n_T^*) \quad 14.2(21)$$

(gegebenenfalls für η_T anzugeben) stets zutrifft.

Über die Faktoren γ nach Gl. 14.2(1) und (2), die einzuführen sind, um eine dimensionslose Behandlung des Gasturbinenprozesses zu ermöglichen (siehe auch Bd. I, Abschn. 2.4), orientieren Abb. 14.2.1–3. Abb. 14.2.1 zeigt γ_V für die Verdichtung in Funktion des Druckverhältnisses Π für die Anfangstemperaturen $-10, +15, +40^\circ\text{C}$. Sollte eine dimensionslose Behandlung streng möglich sein, so müßten die drei Kurven zusammenfallen. Das trifft zwar nicht zu, doch sind die Fehler klein. Verwendet man etwa einheitlich die für 15°C gültige Kurve, so wird bei 40°C und einem Druckverhältnis 16 der Fehler in γ_V 0,45%, und die Rechnung zeigt, daß dem eine Fälschung der Enthalpiedifferenz

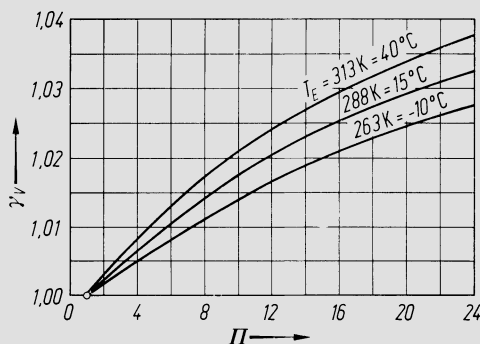


Abb. 14.2.1. Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität bei Verdichtung γ_V in Funktion des Druckverhältnisses Π

von 0,22% entspricht. — Aus Abb. 14.2.2 ist γ_T für die Turbine zu entnehmen in Funktion des Druckverhältnisses π , der Eintrittstemperatur und der Gaszusammensetzung x , wobei stets auf $T_E = 288$ K Bezug genommen ist. Die Verhältnisse sind hier noch günstiger, denn bei $\pi = 0,0667$ führt z. B. 1% Fehler in γ_T auf 0,25% Fehler der Enthalpiedifferenz, sofern χ nach Gl. 14.2(3) dem γ_T korrekt angepaßt wird. Mit korrekten γ_T haben die Fehler gegenüber der exakten Rechnung, die keinen konstanten Isentropenexponenten verwendet, bei $\pi = 0,0667$ die Größenordnung 0,1%. Da die γ nur wenig variabel sind — das gilt nach Abb. 14.2.3 auch für $\bar{\gamma}$ — und kleine Abweichungen von den wahren Werten die Prozeßrechnung nur sehr wenig fälschen, genügt es im praktischen Falle, einfache Näherungsansätze für die γ in die Rechnung einzusetzen oder sie gar konstant zu setzen.

Rechnerisch lassen sich auch diese kleinen Ungenauigkeiten in folgender Weise vermeiden, vgl. etwa Münzberg und Kurzke [8]. Nach der Hauptgleichung der Thermodynamik wird für die Isentrope und für das ideale Gas

$$dh = v dp, \quad c_p dT = RT \frac{dp}{p}. \quad 14.2(22)$$

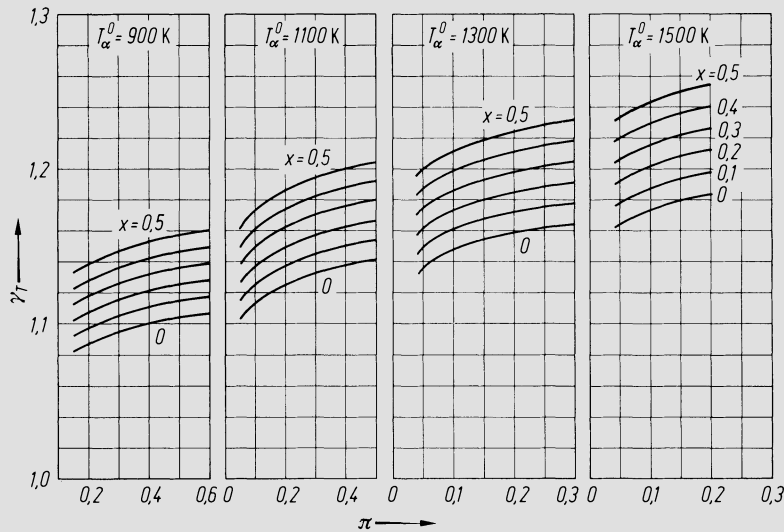


Abb. 14.2.2. Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei Expansion γ_T in Funktion der Anfangstemperatur T_α^0 , des Druckverhältnisses π und der Verbrennungsgasgehaltes x , bezogen auf $T_E = 288$ K

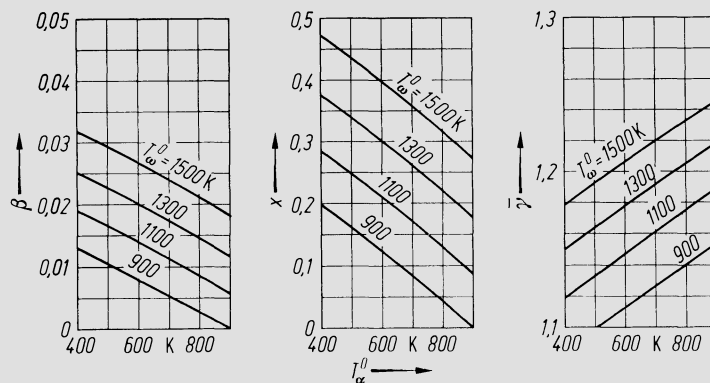


Abb. 14.2.3. Faktor $\bar{\gamma}$ nach Gl. 14.2(2) und zugehörige Werte β und x in Funktion von T_α^0 und T_w^0 , bezogen auf $T_E = 288$ K

Von hier aus kann man sogleich zur Polytrope übergehen. Nachfolgend wird jeweils links die Gleichung für die Verdichtung, rechts für die Entspannung geschrieben.

$$\frac{c_p dT}{RT} = \frac{1}{\eta_{pV}} \frac{dp}{p}, \quad \frac{c_p dT}{RT} = \eta_{pT} \frac{dp}{p} \quad 14.2(23)$$

Mit der Einführung der Hilfsfunktion

$$\psi \equiv \frac{1}{R} \int_{T_0}^T \frac{c_p(T)}{T} dT, \quad 14.2(24)$$

die, nicht sehr treffend, auch ‚Entropiefunktion‘ genannt wird, ergibt sich damit die Integraldarstellung

$$\psi(T_\omega) = \psi(T_\alpha) + \frac{1}{\eta_{pV}} \ln\left(\frac{p_\omega}{p_\alpha}\right), \quad \psi(T_\omega) = \psi(T_\alpha) - \eta_{pT} \ln\left(\frac{p_\alpha}{p_\omega}\right). \quad 14.2(25)$$

Da mit einmal gewählter Nullpunkttemperatur T_0 die Funktion $\psi(T)$, wie auch die Enthalpie $h(T)$ ein für allemal berechnet und als Polynome dargestellt werden können, ergibt sich daraus folgendes Verfahren. Ausgehend vom Anfangszustand p_α , T_α und vom Enddruck p_ω liefert 14.2(25) $\psi(T_\omega)$, mithin T_ω und die zugehörige Enthalpie h_ω . Ebenso gut kann auch der umgekehrte Weg eingeschlagen werden, und selbstverständlich gelten die Relationen auch für die Zustandsgrößen der Totalzustände. Bei Anwendung auf die Gasturbine müssen die ψ und h nicht nur in Funktion von T , sondern auch des Gasgehaltes x vorliegen.

Das Verfahren hat den Vorteil, die kleinen Ungenauigkeiten zu vermeiden, die mit der Annäherung der Zustandsgesetze durch Potenzansätze gegeben sind. Hingegen erlaubt es nicht die Angabe geschlossener Formeln und — eben weil es keine Vereinfachungen macht — auch nicht die dimensionslose Darstellung. Diese letztere ist aber gerade bei der Behandlung des Verhaltens unter geänderten Betriebsbedingungen dringend erwünscht, weil sie die Anzahl der unabhängigen Variablen auf ein Mindestmaß reduziert bei hinreichender Genauigkeit. Auch die höhere Genauigkeit kann verlorengehen, wenn ein starker Feuchtigkeitseinfluß hinzukommt.

In die Prozeßrechnung sind außer dem Verhalten der Maschine auch die *Druckabfälle* in den Leitungssystemen, Brennkammern und gegebenenfalls im Wärmeaustauscher einzuführen. Maßgebend ist die Summe der relativen *Totaldruckabfälle*

$$\varepsilon \equiv \sum \Delta p^0 / p^0. \quad 14.2(26)$$

Die Druckabfälle treten z. T. beim höchsten Druckniveau auf. Da ungefähre Proportionalität zwischen dem Höchstdruck und dem Massenstrom besteht, bleiben in jenem Teil des Systems die Strömungsgeschwindigkeiten fast unverändert und damit auch die relativen Druckabfälle. Umgekehrt ändern sich auf dem Niveau des Umgebungsdruckes die Geschwindigkeiten etwa proportional dem Massenstrom, die Druckabfälle also proportional dem Quadrat dieses letzteren. Das führt auf folgende Setzung. Es sei ε_0 die Summe der relativen Druckabfälle im Auslegungspunkt und zwar sei ε_0 der Anteil, der bei Umgebungsdruck auftritt, ε_0'' der Anteil beim Höchstdruck. Wenn man alsdann setzt

$$\varepsilon_0' = f \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0'' = (1 - f) \varepsilon_0, \quad 14.2(27)$$

womit f definiert ist, so gilt für abweichende Betriebszustände

$$\varepsilon \approx \left[\left(\frac{II}{II_0} \right)^2 f + 1 - f \right] \varepsilon_0. \quad 14.2(28)$$

Hier ist vereinfachend der Massenstrom proportional II gesetzt. — Im Gegensatz zum Vorgehen bei systematischen Prozeßrechnungen, ist es hier *nicht* zweckmäßig, die Verluste in den Stutzen der Maschinen in die ε einzuschließen. Insbesondere die Austritts-

diffusoren zeigen ein so kompliziertes Verhalten, daß es nicht durch die Formel 14.2(28) wiedergegeben werden könnte und folglich in die Maschinenwirkungsgrade einzuführen ist.

Bei Gasturbinen mit Wärmeaustauschern wird ferner der *Rekuperatorwirkungsgrad* η_r vom Betriebszustand abhängen. Allgemein können Wärmedurchgangszahlen proportional Re^{1-m} gesetzt werden, wobei der Exponent m meist zwischen 0,2 und 0,3 liegt. Da weiter die Reynolds-Zahlen proportional \dot{m} sind, entsteht ein Gesetz der Form

$$\frac{\eta_r}{1 - \eta_r} \sim \left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0}\right)^{-m},$$

was mit $\dot{m}/\dot{m}_0 \approx \Pi/\Pi_0$ auf

$$\eta_r = \frac{\eta_{r0}(\Pi_0/\Pi)^m}{1 + [(\Pi_0/\Pi)^m - 1] \eta_{r0}} \quad 14.2(29)$$

führt.

b) *Einwellige Anlage*

Abb. 14.2.4 zeigt schematisch die Schaltung und die Numerierung der Zustandspunkte. Es ist

$$\pi = 1/(1 - \varepsilon) \Pi, \quad 14.2(30)$$

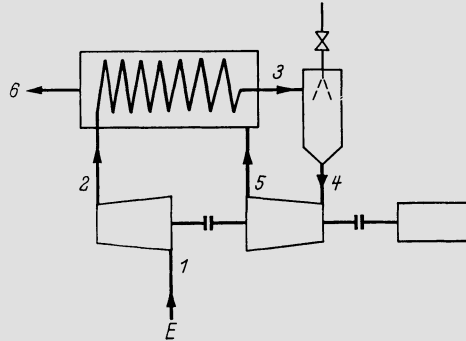


Abb. 14.2.4. Schema und Numerierung der Zustandspunkte für die einwellige Gasturbine

und da die Turbineneintrittstemperatur ϑT_E beträgt, sind die charakteristischen Drehzahlvariablen von Turbine und Verdichter

$$n^* = \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{R_0 T_{E0}}{R T_E}}, \quad n_T^* = n^* \sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta}}. \quad 14.2(31)$$

Die Massenstrombedingung verlangt gleiches \dot{m}/\dot{m}_0 für Turbine und Verdichter, was so formuliert werden kann, daß \dot{m}/\dot{m}_0 nach Gl. 14.2(9) in (16) eingesetzt wird. Dies führt auf

$$\Phi = \frac{p_{E0}}{p_E} \sqrt{\frac{T_E}{T_{E0}}} \Phi_T \frac{p_4^0}{p_{40}^0} \sqrt{\frac{T_{40}^0}{T_4^0}} = \left(\frac{p_{E0}}{p_{40}^0}\right) \left(\frac{p_4^0}{p_E}\right) \sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta}} \Phi_T.$$

Mit

$$\left(\frac{p_{E0}}{p_{40}^0}\right) \left(\frac{p_4^0}{p_E}\right) = \left(\frac{p_4^0}{p_5^0}\right) \left(\frac{p_5^0}{p_E}\right) \left(\frac{p_{E0}}{p_{50}^0}\right) \left(\frac{p_{50}^0}{p_{40}^0}\right) = \frac{\pi_0}{\pi} \frac{1 + \varepsilon'}{1 + \varepsilon_0}$$

und da $\varepsilon' = \varepsilon_0'(\Pi/\Pi_0)^2$, geht dies über in

$$\Phi(\Pi, n^*) = \frac{1 + \varepsilon_0'(\Pi/\Pi_0)^2}{1 + \varepsilon_0'} \frac{\pi_0}{\pi} \sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta}} \Phi_T(\pi, n_T^*). \quad 14.2(32)$$

Für die Durchführung der Rechnung wird dies am besten in die Form

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \left[\frac{1 + \varepsilon'_0 (\Pi/\Pi_0)^2}{1 + \varepsilon'_0} \frac{\pi_0 \Phi_T(\pi, n_T^*)}{\pi \Phi(\Pi, n^*)} \right]^2 \quad 14.2(33)$$

gebracht. — Damit läßt sich ein Betriebszustand wie folgt bestimmen. Man gibt sich Π und n^* . Damit liefern die Gln. 14.2(28) und (30) ε und π . Aus den dimensionslosen Verdichter- und Turbinencharakteristiken folgen die Φ und Φ_T , womit schließlich 14.2(33) ϑ liefert. Die Rechnung erfolgt iterativ, da n_T^* erst mit ϑ aus 14.2(31) bestimmt werden kann, doch ist der Einfluß von n_T^* auf Φ_T so klein, daß sich Konvergenz sofort einstellt. Das ältere graphische Verfahren, bei dem die Schlucklinien der Turbine über das Verdichterkennfeld gezeichnet wurden (Abb. 14.2.5), vernachlässigt diesen Effekt überhaupt. Über die numerische Wiedergabe der Maschinencharakteristiken vgl. etwa [8, 9]. Φ_T kann häufig durch die Gln. 14.2(17)–(19) wiedergegeben werden.

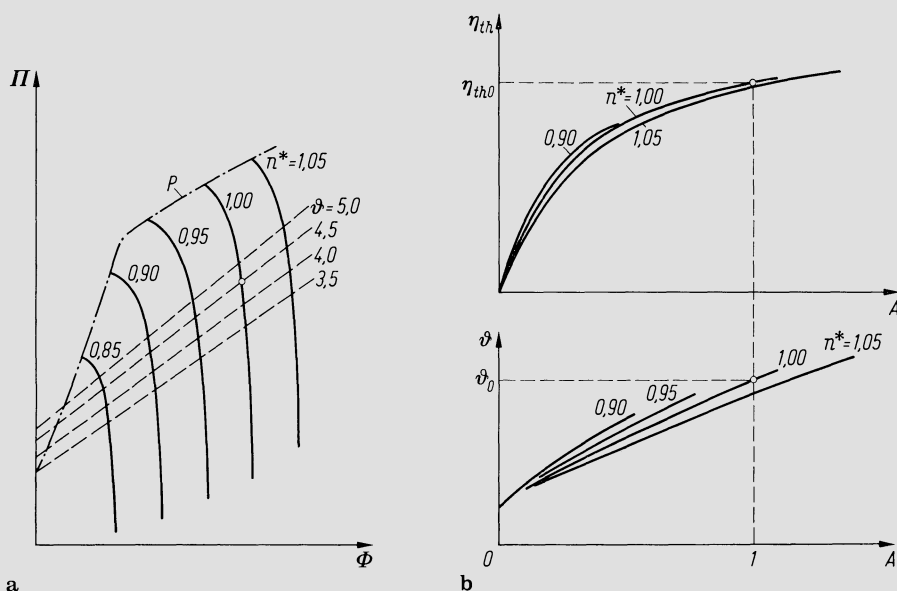


Abb. 14.2.5. a) Schlucklinien der Turbine (Linien $\vartheta = \text{const}$) eingetragen in Verdichterkennlinienfeld, P Pumpgrenze; b) Gesamtcharakteristik einer einwelligen Gasturbine in dimensionsloser Darstellung

Ist so der Betriebszustand gefunden, so folgt der thermische Wirkungsgrad aus (vgl. Bd. I, Abschn. 2.4)

$$\eta_{th} = \frac{\eta_m(1 + \beta)(1 - \delta) \vartheta \gamma_T \Omega_T - \gamma_V \Omega_V}{(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 - \delta) \bar{\gamma} \{ \vartheta [1 - \eta_r(1 - \Omega_T)] - (1 - \eta_r)(1 + \Omega_V) \}}, \quad 14.2(34)$$

wobei die Maschinenwirkungsgrade zur Berechnung der Ω aus den Charakteristiken bekannt sind und η_r aus 14.2(29). Die Größen α und β berücksichtigen Abstrahlung und Leckverluste und sind oft vernachlässigbar. Der mechanische Wirkungsgrad η_m ist so definiert, daß der mechanische Verlust das $(1 - \eta_m)$ fache der inneren *Turbinenleistung* (nicht Nutzleistung!) ist. Mit $\eta_r = 0$ erhält man den Fall ohne Wärmeaustauscher. Die Nutzleistung ist

$$P = \dot{m} c_{pE} T_E [\eta_m(1 + \beta)(1 - \delta) \vartheta \gamma_T \Omega_T - \gamma_V \Omega_V]. \quad 14.2(35)$$

Wenn man diese Gleichung dividiert durch die entsprechende, für den Auslegungspunkt angeschriebene und das dann auftretende \dot{m}/\dot{m}_0 noch durch den Ausdruck Gl. 14.2(9)

ersetzt, erhält man

$$\frac{P}{P_0} = A \frac{p_E}{p_{E0}} \sqrt{\frac{RT_E}{R_0 T_{E0}}} \frac{\chi_{E0}}{\chi_E}, \quad 14.2(36)$$

$$A = \Phi \frac{\eta_m(1 + \beta)(1 - \delta) \vartheta \gamma_T \Omega_T - \gamma_V \Omega_V}{\eta_{m0}(1 + \beta_0)(1 - \delta_0) \vartheta_0 \gamma_{T0} \Omega_{T0} - \gamma_{V0} \Omega_{V0}}. \quad 14.2(37)$$

A ist offensichtlich nichts anderes als das Leistungsverhältnis beim festen (dem Normalpunkt zugrundegelegtem) Umgebungszustand.

Wenn diese Rechnung für eine große Zahl von Variablenpaaren Π und n^* durchgeführt wird, erhält man das Feld der Betriebszustände, und da zu jedem Betriebszustand auch ϑ bestimmt ist, kann man η_{th} und A auch in Funktion von ϑ und n^* darstellen. Eine besonders anschauliche Darstellung entsteht, wenn man A und n^* als unabhängige Variablen wählt und η_{th} und ϑ in Funktion von diesen aufträgt. Man erhält ein Diagramm des in Abb. 14.2.5 veranschaulichten Typs, das die vollständige Information über das Verhalten unter geänderten Betriebsbedingungen enthält. — Gibt man sich etwa den Umgebungszustand, die Drehzahl (z. B. feste Synchrondrehzahl) und die geforderte Leistung, so hat man aus der ersten der Gln. 14.2(31) n^* , aus 14.2(36) A , somit also aus dem Diagramm η_{th} und ϑ und kann auch aus 14.2(4) die Turbineneintrittstemperatur berechnen, bei der die geforderte Leistung erreicht wird. — Auch die Frage des *Klimaeinflusses* auf Leistung und Wirkungsgrad läßt sich damit beantworten, denn schreibt man sich die dauernd zulässige Höchsttemperatur vor, so erhält man in Funktion des Umgebungszustandes die erzeugbare Leistung und das zugehörige η_{th} . Abb. 14.2.6 zeigt links einen typischen Verlauf des thermischen Wirkungsgrades über der Leistung bei festem Umgebungszustand, rechts bei fester Höchsttemperatur die Leistung über der Umgebungstemperatur.

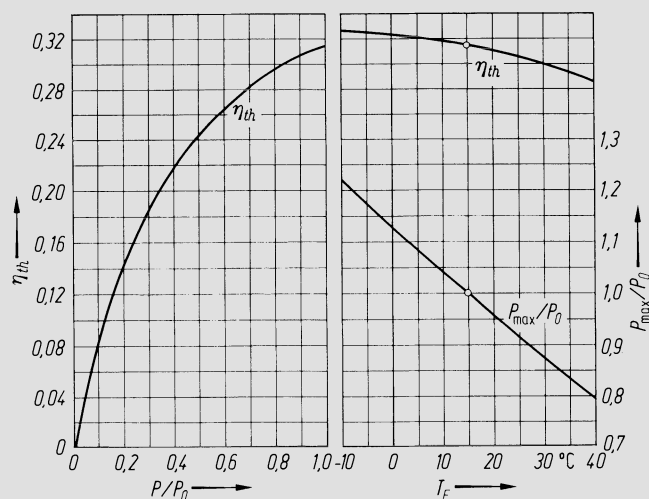


Abb. 14.2.6. Einwellige Gasturbine (ohne Wärmeaustauscher). Links: Verlauf des thermischen Wirkungsgrades über dem Leistungsverhältnis P/P_0 bei fester Umgebungstemperatur; rechts: bezogene Maximalleistung P_{max}/P_0 und dabei erreichbarer thermischer Wirkungsgrad in Funktion der Umgebungstemperatur

c) Zweiwellige Anlage

Die Schaltung der Turbomaschinen geht aus Abb. 14.1.1 hervor, während Abb. 14.2.7 die Numerierung der Zustandspunkte im Entropiediagramm zeigt (um Allgemeingültigkeit zu gewährleisten, ist ein Wärmeaustauscher vorausgesetzt). Nachfolgend sollen Größen, die sich auf den HD-Teil der Turbine beziehen mit Index H , auf den ND-Teil

bezogene mit Index N gekennzeichnet werden. Dann sei

$$\pi_H = \frac{p_5^0}{p_4^0}, \quad \pi_N = \frac{p_6^0}{p_5^0}, \quad \pi_H \pi_N = \frac{1}{(1 - \varepsilon) \Pi}, \quad 14.2(38)$$

$$n_H^* = \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{R_0 T_{40}^0}{R T_4^0}} = n^* \sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta}}, \quad 14.2(39)$$

$$n_N^* = \frac{n_N}{n_{N0}} \sqrt{\frac{R_0 T_{50}^0}{R T_5^0}} = \frac{n_N}{n_{N0}} \sqrt{\frac{R_0 T_{E0} \vartheta_0 (1 - \Omega_{H0})}{R T_E \vartheta (1 - \Omega_H)}}. \quad 14.2(40)$$

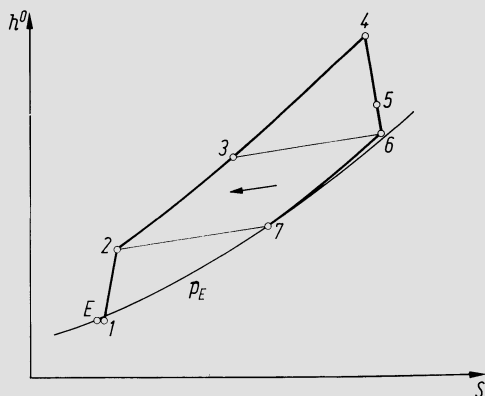


Abb. 14.2.7. Zweiwellige Gasturbine, Darstellung der Zustandsänderung im Entropiediagramm und Numerierung der Zustandspunkte

Gleichheit der Massenströme durch HD- und ND-Teil der Turbine wird ausgesprochen durch

$$\frac{p_5^0}{p_{50}^0} \sqrt{\frac{R_0 T_{50}^0}{R T_5^0}} \Phi_N(\pi_N, n_N^*) = \frac{p_4^0}{p_{40}^0} \sqrt{\frac{R_0 T_{40}^0}{R T_4^0}} \Phi_H(\pi_H, n_H^*), \quad 14.2(41)$$

wobei die Durchflußgesetze Φ_H und Φ_N gegebenenfalls in der durch 14.2(17)–(20) wiedergegebenen Form verwendet werden können. Nach Einführung des Polytropengesetzes geht dies über in

$$\Phi_N(\pi_N, n_N^*) = \Phi_H(\pi_H, n_H^*) \left(\frac{\pi_{H0}}{\pi_H} \right)^{1 - \eta_{pH} \chi / 2}. \quad 14.2(42)$$

Dabei ist für den polytropen Wirkungsgrad des HD-Turbinenteils ein Festwert eingeführt worden, was an dieser Stelle genügt.

Das Leistungsgleichgewicht an der frei laufenden Turbogruppe sagt aus, daß die Differenz zwischen Turbinen- und Verdichterleistung gleich der Lagerreibungsleistung P_r sein muß. Im Rahmen dieses Rechnungsverfahrens führt man zweckmäßig den dimensionslosen Wert

$$\lambda = P_r / \dot{m} c_{pE} T_E \quad 14.2(43)$$

ein. Wenn P_r proportional einer Potenz r der Drehzahl gesetzt wird (r hat die Größenordnung 2), kann der Näherungsansatz

$$\lambda \approx \lambda_0 n^{*r-1} \quad 14.2(44)$$

verwendet werden, der genügt, weil λ ohnehin sehr klein ist. Damit schreibt sich die Bedingung für das Leistungsgleichgewicht

$$(1 + \beta) (1 - \delta) \gamma_H \vartheta \Omega_H - \gamma_V \Omega_V = \lambda_0 n^{*r-1}. \quad 14.2(45)$$

Dem ist noch die Bedingung gleichen Durchflusses durch Turbine und Verdichter beizufügen, also Gl. 14.2(32), die in entsprechend abgewandelter Form lautet

$$\Phi(II, n^*) = \frac{1 + \varepsilon'_0(II/II_0)^2}{1 + \varepsilon'_0} \frac{\pi_{H0}\pi_{N0}}{\pi_H\pi_N} \sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta}} \Phi_H(\pi_H, n_H^*). \quad 14.2(46)$$

Für das Leistungsverhältnis P/P_0 läßt sich wiederum Gl. 14.2(36) schreiben, wobei jetzt

$$A = \Phi \frac{\eta_m(1 + \beta)(1 - \delta)\gamma_N\vartheta(1 - \Omega_H)\Omega_N}{\eta_{m0}(1 + \beta_0)(1 - \delta_0)\gamma_{N0}\vartheta_0(1 - \Omega_{H0})\Omega_{N0}}, \quad 14.2(47)$$

während der thermische Wirkungsgrad durch

$$\eta_{th} = \frac{\eta_m\gamma_N\vartheta(1 - \Omega_H)\Omega_N}{(1 + \alpha)\bar{\gamma}\{\vartheta[1 - \eta_r(1 - \Omega_H)(1 - \Omega_N)] - (1 - \eta_r)(1 + \Omega_V)\}} \quad 14.2(48)$$

gegeben ist.

Der *Rechnungsgang* kann nun in seinen wesentlichen Schritten wie folgt beschrieben werden. Man gibt sich II und n_N^* . Die zweite dieser Variablen muß grundsätzlich vorgeschrieben werden, da die Drehzahl der Nutzleistungsturbine ihr Schluckvermögen beeinflusst und so auf den Betriebszustand der frei laufenden Turbogruppe zurückwirkt. Dieser Einfluß ist allerdings sehr klein und manchmal vernachlässigbar. Ein erster Teil der Rechnung bestimmt das Feld der Betriebszustände der frei laufenden Turbogruppe und beginnt damit, daß aus der dritten der Gln. 14.2(38) und Gl. 14.2(42) unter Berücksichtigung von 14.2(28) π_H und π_N iterativ bestimmt werden, wobei zunächst $n_H^* = 1$ eingesetzt werden darf. Mit geschätzten η_{pV} und η_{pH} liefern Gl. 14.2(6) und die für den HD-Teil angeschriebene Gl. 14.2(13) die Ω_V und Ω_H und hierauf 14.2(45) (mit $n^* \approx 1$) eine erste Näherung für ϑ . Diese in 14.2(46) eingeführt, ergibt mit der bekannten Verdichtercharakteristik $\Phi(II, n^*)$ die Drehzahlvariable n^* und vermöge 14.2(39) auch n_H^* , was iterativ berichtigt werden kann, da n_H^* auch in 14.2(46) rechts steht. Hat man so n^* und n_H^* , so bestimmt man erneut π_H und π_N aus 14.2(42), kann nun aus den Verdichter- und Turbinencharakteristiken 14.2(10) und (21) η_{pV} und η_{pH} gewinnen und damit auch genauere Ω_V und Ω_H , womit schließlich 14.2(45) ein berichtigtes ϑ liefert usw., bis genügende Übereinstimmung hergestellt ist. Indem man II und n_N^* systematisch variiert, erhält man so das Feld der Betriebszustände der unabhängig laufenden Turbogruppe.

Für jeden so ermittelten Betriebszustand kann nun noch aus 14.2(47) A , aus 14.2(48) η_{th} berechnet werden. Schließlich sind dann also ϑ , n^* , A und η_{th} in Funktion von II und n_N^* bekannt. Somit wird es möglich, η_{th} , ϑ und n^* in Funktion von A darzustellen mit n_N^* als Parameter. Man erhält also ein Diagramm nach Abb. 14.2.8, das der Darstellung Abb. 14.2.5 analog ist.

Irgendein Betriebszustand der Anlage kann anhand dieses Diagrammes ausgehend vom Umgebungszustand und der geforderten Leistung bestimmt werden. P gibt mit dem Leistungs-Drehzahlgesetz des Nutzleistungsempfängers n_N , wonach auf iterativem Weg aus 14.2(40) n_N^* , aus 14.2(36) A und aus dem Diagramm η_{th} und ϑ bestimmt werden können (Iteration, weil 14.2(40) ϑ enthält). Mit 14.2(4) hat man alsdann die Turbineneintrittstemperatur, bei der die geforderte Leistung erreicht wird. Abb. 14.2.9 gibt ein Beispiel eines Verlaufes von η_{th} über P für festen Umgebungszustand bei einer zweiwelligen Anlage und ebenso die erzeugbare Leistung in Funktion von T_E bei fester Höchsttemperatur.

Anders als bei der einwelligen Anordnung, ist es hier nicht möglich, einzig durch Verminderung der Brennstoffzufuhr die Nutzleistung auf Null herabzusetzen, weil dabei der Verdichter, beginnend mit der ersten Stufe an die Stabilitätsgrenze anstößt. Der reguläre Betriebsbereich läßt sich nach unten erweitern durch verstellbare Leiträder in den ersten Verdichterstufen. Diese werden von einem bestimmten Betriebspunkt an mit weiter abnehmender Leistung zgedreht, womit sich die Stabilitätsgrenze nach links verschiebt.

Für die Berechnung ist es zweckmäßig, das Verstellgesetz so zu wählen, daß man die Leitradeneinstellung der Drehzahlvariablen n^* fest zuordnet. Das Gesamtverhalten des Verdichters wird dann wiederum durch einen Zusammenhang der Form Gl. 14.2(10) beschrieben, und am Rechenverfahren ändert sich weiter nichts. Da die Berechnung der Gleichgewichtszustände bis auf einen ganz kleinen Effekt von n_N^* auf einen festen Zusammenhang zwischen n^* und Π führt, kann das Druckverhältnis des Verdichters als Steuerimpuls für die Leitradeneinstellung benutzt werden. Verwendet man hingegen die Verdichterdrehzahl als Steuerimpuls, so tritt eine Komplikation hinzu, da einem festen n je nach Umgebungstemperatur verschiedene n^* entsprechen. Die Rechnung kann dann nicht mehr in dimensionsloser Form durchgeführt werden, sondern man erhält gesonderte Verdichtercharakteristiken für verschiedene Werte RT_E und muß dementsprechend die Untersuchung wiederholen.

Der ND-Teil der Turbine fängt schon während des Anlaßvorganges an, sich zu drehen und Leistung abzugeben. Die Berechnung solcher Betriebszustände geschieht gleich wie

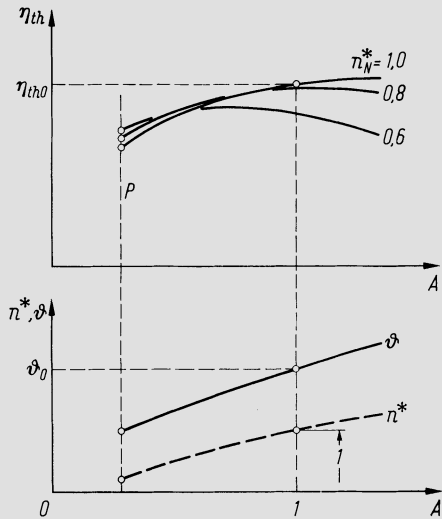


Abb. 14.2.8. Gesamtcharakteristik einer zweiwelligen Gasturbine in dimensionsloser Darstellung. Kurven $\vartheta(A)$ und $n^*(A)$ sind eigentlich Kurvenscharen mit n_N^* als Parameter, doch ist dessen Einfluß meist so gering, daß die Scharen zu Einzelkurven degenerieren

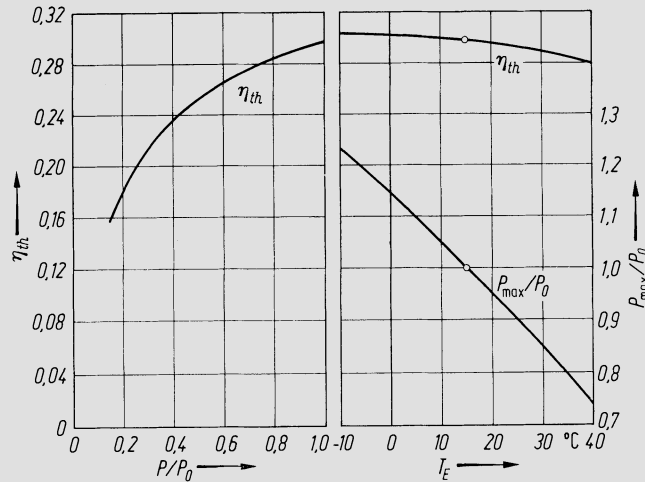


Abb. 14.2.9. Zweiwellige Gasturbine. Links: Verlauf des thermischen Wirkungsgrades über dem Leistungsverhältnis P/P_0 bei fester Umgebungstemperatur; rechts: bezogene Maximalleistung P_{\max}/P_0 und dabei erreichbarer thermischer Wirkungsgrad in Funktion der Umgebungstemperatur

oben beschrieben, nur muß man die Gleichung des Leistungsgleichgewichtes durch die Anlaßmaschinenleistung ergänzen und gegebenenfalls die Abblasung aus dem Verdichter berücksichtigen.

Anlagen mit mehr als zwei mechanisch unabhängigen Turboaggregaten lassen sich nach den gleichen Prinzipien analog behandeln, wobei die Rechenverfahren entsprechend verwickelter werden. Beim Flugtriebwerk tritt an die Stelle des statischen Zustandes der Umgebungsluft deren Totalzustand, der sich aus der relativen Zuströmgeschwindigkeit (Fluggeschwindigkeit) ergibt. Allerdings variiert dieser Zustand in so weiten Grenzen, daß die hier dargestellte dimensionslose Berechnungsweise nicht mehr ohne weiteres genau genug ist, um so mehr als der Einfluß der Reynolds-Zahl deutlich spürbar werden kann.

Ergänzend möge noch eine Bemerkung über die Abhängigkeit der Leistung von der Umgebungstemperatur beigefügt werden. Aus Gl. 14.2(36) könnte der Eindruck entstehen, P nehme mit T_E zu. Man muß aber beachten, daß bei gegebener Höchsttemperatur und zunehmendem T_E das Temperaturverhältnis ϑ abnimmt, was eine starke Verminderung von A bedeutet, deren Einfluß überwiegt.

14.3 Regelung mit verstellbarem Turbinenleitrad

Bei zweiwelligen Anlagen kann die ND-Turbine mit einem verstellbaren Leitrad versehen werden. Man beeinflusst so den Zwischendruck zwischen den beiden Teilturbinen und damit den Betriebszustand der frei laufenden Gruppe HD-Turbine-Verdichter. Theoretische Analysen dieser Vorgänge finden sich bei *Jaggi* und *Iten* [9–11]. Ausgangspunkt solcher Untersuchungen ist der Einfluß der Leitradöffnung auf die Schluckfähigkeit der ND-Turbine. Abb. 14.3.1 stellt schematisch die ND-Turbine und die Zustandsänderung im Entropiediagramm dar. Für die hier durchzuführende Untersuchung kann die Zustandsänderung hinreichend genau durch die einzige Polytrope mit festem Exponenten n ersetzt werden.

Um die Zusammenhänge zu erfassen, müssen die Durchflußgesetze des ersten (verstellbaren) Leitrades einerseits und des restlichen Systems (Schaufelung und Austrittsdiffusor) andererseits angesetzt werden. Es sei

$$\pi \equiv \frac{p_A}{p_\alpha^0}, \quad \pi_1 \equiv \frac{p_1}{p_\alpha^0}, \quad \pi_2 \equiv \frac{p_A}{p_1}. \quad 14.3(1)$$

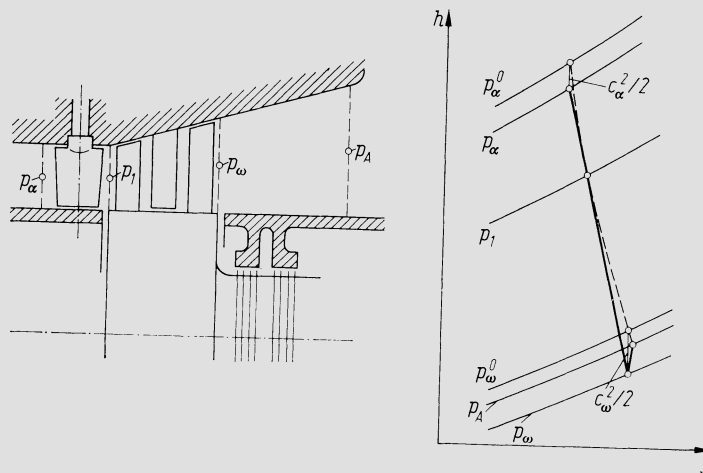


Abb. 14.3.1. ND-Turbine mit verstellbarem erstem Leitrad und Darstellung der Zustandsänderung im Entropiediagramm

Weiter sei π_{2k} der kritische Wert von π_2 , bei dessen Unterschreitung keine weitere Rückwirkung auf den Durchfluß mehr erfolgt. Er läßt sich abschätzen aufgrund von Abb. 11.3.6, doch ist π_{2k} nicht identisch mit dem dort angegebenen Wert, denn dem betrachteten Teilsystem fehlt ja das erste Leitrad. Ist π_k der Wert der ganzen Schaufelung, so kann man π_{2k} näherungsweise wie folgt gewinnen

$$\begin{aligned}\pi_k &= \left(\frac{p_\omega}{p_\alpha}\right)_k \approx \left(\frac{p_\omega^0}{p_\alpha^0}\right)_k \approx \left(\frac{p_A}{p_\alpha^0}\right)_k, \\ \pi_{2k} &\equiv \left(\frac{p_A}{p_1}\right)_k = \pi_k \frac{p_\alpha^0}{p_1} = \frac{\pi_k}{\pi_1}.\end{aligned}\quad 14.3(2)$$

Wenn hier für π_1 der Auslegungswert eingesetzt wird, hat man einen Näherungswert für π_{2k} . — Für die nachfolgende Herleitung wird zunächst angenommen, daß in keinem durchströmten Element die Schallgeschwindigkeit überschritten wird. Es läßt sich anschließend leicht überblicken, welche Änderungen sich ergeben, wenn dies doch zutrifft.

Wenn Ω_1 der Austritts-Ringquerschnitt des ersten Leitrades ist, mithin

$$f_1 = \Omega_1 \sin \alpha_1 \quad 14.3(3)$$

sein wirksamer Querschnitt, lautet sein Durchflußgesetz

$$\dot{m} = f_1 p_\alpha^0 \sqrt{\frac{2\kappa}{(\kappa-1) RT_\alpha^0} \left[\pi_1^{\frac{2}{n}} - \pi_1^{\frac{n+1}{n}} \right]}. \quad 14.3(4)$$

Wenn bei konstantem Eintrittszustand und Gegendruck p_A der Leitradquerschnitt um df_1 verändert wird, verschiebt sich auch π_1 und $d\pi_1$, womit sich die Veränderung des Massenstromes um $d\dot{m}$ ergibt. Es sei

$$dM \equiv \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}, \quad d\varphi \equiv \frac{df_1}{f_1}. \quad 14.3(5)$$

Durch Ableiten von Gl. 14.3(4) ergibt sich dann

$$dM = d\varphi + \frac{2\pi_1^{\frac{2-n}{n}} - (n+1)\pi_1^{\frac{1}{n}}}{2n\sqrt{\pi_1^{\frac{2}{n}} - \pi_1^{\frac{n+1}{n}}}} d\pi_1. \quad 14.3(6)$$

Das Durchflußgesetz des restlichen Teiles der Maschine schreibt sich unter Verwendung der Beziehungen nach 11.3

$$\dot{m} = \dot{m}_0 \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} \frac{p_1}{p_{10}} \sqrt{\frac{T_{10}}{T_1}} \frac{e(x_2)}{e(x_{20})}, \quad x_2 \equiv \frac{\pi_2 - \pi_{2k}}{1 - \pi_{2k}}. \quad 14.3(7)$$

Es ist $e(x_2)$ die durch Gl. 11.3(20) gegebene und in Abb. 11.3.3 dargestellte Funktion. Nach dem Polytropengesetz ergibt sich bei konstantem Totalzustand vor Maschine

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{T_{10}} &= \left(\frac{p_1}{p_{10}}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{\pi_1}{\pi_{10}}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \\ \frac{p_1}{p_{10}} \sqrt{\frac{T_{10}}{T_1}} &= \left(\frac{\pi_1}{\pi_{10}}\right)^{\frac{n+1}{2n}}.\end{aligned}\quad 14.3(8)$$

Wenn man dies in 14.3(7) einsetzt und die Veränderlichkeit der Schluckzahl μ vernachlässigt, folgt

$$\dot{m} = \dot{m}_0 \frac{e(x_2)}{e(x_{20})} \left(\frac{\pi_1}{\pi_{10}}\right)^{\frac{n+1}{2n}}. \quad 14.3(9)$$

Eine Änderung von π_1 ändert \dot{m} um den Betrag

$$d\dot{m} = \dot{m}_0 \frac{d}{d\pi_1} \left[\frac{e(x_2)}{e(x_{20})} \left(\frac{\pi_1}{\pi_{10}}\right)^{\frac{n+1}{2n}} \right] d\pi_1. \quad 14.3(10)$$

Da

$$\frac{de}{d\pi_1} = \frac{de}{dx_2} \frac{dx_2}{d\pi_2} \frac{d\pi_2}{d\pi_1} = \frac{-\pi}{(1 - \pi_{2k})\pi_1^2} \frac{de}{dx_2}, \quad 14.3(11)$$

folgt aus 14.3(10) auch

$$dM = \left[\frac{n+1}{2n\pi_1} - \frac{\pi}{(1 - \pi_{2k})\pi_1^2} \frac{de}{dx_2} \right] d\pi_1. \quad 14.3(12)$$

Wenn man dies nach $d\pi_1$ auflöst, den so gefundenen Ausdruck in 14.3(6) einsetzt und nochmals nach dM auflöst, findet man

$$dM = d\varphi \left\{ 1 + \frac{(n+1)\pi_1^{\frac{1}{n}} - 2\pi_1^{\frac{2-n}{n}}}{\left[\frac{n+1}{\pi_1} - \frac{2n\pi}{(1 - \pi_{2k})\pi_1^2} \frac{de}{dx_2} \right] \sqrt{\pi_1^{\frac{2}{n}} - \pi_1^{\frac{n+1}{n}}}} \right\}^{-1},$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_\pi = \left\{ 1 + \frac{(n+1)\pi_1^{\frac{1}{n}} - 2\pi_1^{\frac{2-n}{n}}}{\left[\frac{n+1}{\pi_1} - \frac{2n\pi}{(1 - \pi_{2k})\pi_1^2} \frac{de}{dx_2} \right] \sqrt{\pi_1^{\frac{2}{n}} - \pi_1^{\frac{n+1}{n}}}} \right\}^{-1}. \quad 14.3(13)$$

Durch den Index π wird angedeutet, daß die Ableitung bei konstantem π gebildet ist. de/dx_2 läßt sich aus dem Diagramm, Abb. 11.3.3 gewinnen.

Das Durchflußgesetz der ganzen Schaufelung bei fester Leitradstellung liefert die Abhängigkeit des Massenstromes vom Druckverhältnis π . Es ist bei Vernachlässigung der Variation der Schluckzahl

$$\dot{m} = \dot{m}_0 \frac{p_\alpha^0}{p_{\alpha 0}^0} \sqrt{\frac{T_{\alpha 0}^0}{T_\alpha^0}} \frac{e(x)}{e(x_0)}, \quad x \equiv \frac{\pi - \pi_k}{1 - \pi_k}. \quad 14.3(14)$$

Wenn man alle festen Größen in die Konstante K zusammenfaßt, läßt sich auch schreiben

$$\dot{m} = \frac{K p_\alpha^0 e(x)}{\sqrt{T_\alpha^0}} = \frac{K p_A e(x)}{\pi \sqrt{T_A}} \sqrt{\frac{T_A}{T_\alpha^0}} = \frac{K p_A}{\sqrt{T_A}} \frac{e(x)}{\pi} \sqrt{\frac{n-1}{\pi^{\frac{n-1}{n}}}}, \quad 14.3(15)$$

was auch in der Form

$$\dot{m} = K' e(x) \pi^{-\frac{n+1}{2n}} \quad 14.3(16)$$

geschrieben werden kann. Somit ist

$$d\dot{m} = K' \left[\frac{\pi^{-\frac{n+1}{2n}}}{(1 - \pi_k)} \frac{de}{dx} - e \frac{n+1}{2n} \pi^{-\frac{3n+1}{2n}} \right] d\pi. \quad 14.3(17)$$

Die Division dieser beiden Gleichungen führt auf

$$dM = \left[\frac{1}{(1 - \pi_k) e} \frac{de}{dx} - \frac{n+1}{2n\pi} \right] d\pi,$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \pi} \right)_\varphi = \frac{1}{(1 - \pi_k) e(x)} \frac{de}{dx} - \frac{n+1}{2n\pi}. \quad 14.3(18)$$

Bei gleichzeitiger Veränderung des Druckverhältnisses und des Durchflußquerschnittes ist die dimensionslose Massenstromänderung

$$dM = \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_\pi d\varphi + \left(\frac{\partial M}{\partial \pi} \right)_\varphi d\pi. \quad 14.3(19)$$

Was durch die Leitradverstellung erreicht werden soll, ist die Verschiebung des Gegendruckes der HD-Turbine — also von p_A/π — bei festem Massenstrom. Der entsprechende

Differentialquotient $(\partial\pi/\partial\varphi)_M$ kann aus 14.3(19) berechnet werden, indem man $dM = 0$ setzt. Was unmittelbar interessiert, ist die *relative* Druckverschiebung, d. h. man hat diesen Differentialquotienten noch durch π zu dividieren. Die für die Wirksamkeit des Regelingriffes kennzeichnende Größe ist also

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} \right) = - \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial\varphi} \right)_\pi}{\pi \left(\frac{\partial M}{\partial\pi} \right)_\varphi}, \tag{14.3(20)}$$

die aus Gln. 14.3(13) und (18) zusammen mit Abb. 11.3.3 gebildet werden kann. Abb. 14.3.2 und 3 zeigen typische Verläufe der maßgebenden Differentialquotienten. Man erkennt daraus auch, welchen Charakter die Zusammenhänge annehmen, wenn kritische Bedingungen erreicht werden. Wird

$$\pi_1 = \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{14.3(21)}$$

so erreicht $(\partial M/\partial\varphi)_\pi$ den Wert 1 und behält diesen bei für kleinere π_1 . Weiter ist in $\pi = \pi_k$, also $x = 0$, in Gl. 14.3(18) $de/dx = 0$, somit $\pi(\partial M/\partial\pi)_\varphi = -(n+1)/2n$. Dieser Wert bleibt unverändert für $\pi < \pi_k$. Offensichtlich ist die Leitradverstellung am wirksamsten, wenn am Leitradaustritt Schallgeschwindigkeit erreicht oder überschritten wird.

Durch die Möglichkeit der Leitradverstellung kommt in die Berechnung der möglichen Beharrungszustände ein zusätzlicher unabhängiger Parameter hinein. Er möge als *Öffnungsparameter* α definiert werden durch

$$\alpha \equiv \int_{f_{10}}^{f_1} \left(\frac{\partial M}{\partial\varphi} \right)_\pi \frac{df_1}{f_1}, \tag{14.3(22)}$$

wobei f_{10} den Auslegungswert bezeichnet. Wenn man alsdann in Gl. 14.2(42) die Durchflußgröße des ND-Teiles der Turbine bei normaler Leitradstellung mit Φ_N bezeichnet, lautet die Gleichung

$$(1 + \alpha) \Phi_N(\pi_N, n_N^*) = \Phi_H(\pi_H, n_H^*) \left(\frac{\pi_{H0}}{\pi_H} \right)^{1 - \eta_{pH} z/2}. \tag{14.3(23)}$$

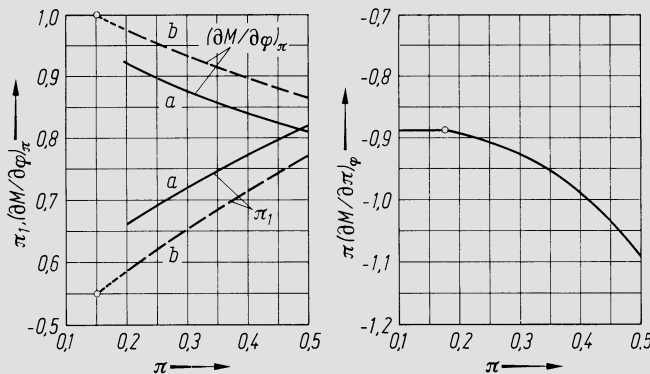


Abb. 14.3.2. Links: $(\partial M/\partial\varphi)_\pi$ in Funktion von π für zweistufige ND-Turbine, Kurve *a* für gleichmäßige Gefälleaufteilung auf die Schaufelkränze, Kurve *b* für vergrößertes Gefälle des ersten Leitrades, vgl. die Kurven der Druckverhältnisse π_1 ; rechts: Größe $\pi(\partial M/\partial\pi)_\varphi$ in Funktion von π

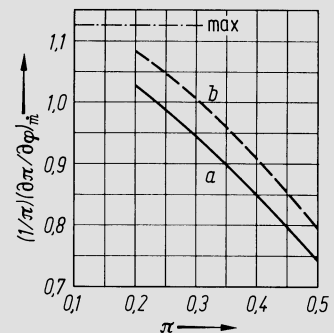


Abb. 14.3.3. Für Wirksamkeit der Leitschaufelverstellung kennzeichnende Größe

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial M}{\partial\varphi} \right)_m$$

in Funktion von π für die Fälle *a* und *b* nach Abb. 14.3.2. Angabe „max“ gibt den Maximalwert, der bei einstufiger Ausführung erreichbar

Das unter 14.2c beschriebene Berechnungsverfahren ist also grundsätzlich so zu erweitern, daß die Bestimmung der Betriebszustände der HD-Gruppe für eine Anzahl von α -Werten durchzuführen ist. Von den beiden Parametern α und n_N^* ist allerdings der Einfluß des letzteren abgesehen von ganz abnormalen Betriebszuständen normalerweise so klein, daß nur α übrigbleibt. Wo also ohne verstellbares Turbinenleitrad das Feld der Betriebszustände der HD-Gruppe zu einer einparametrischen Mannigfaltigkeit degeneriert (alles kann in Funktion einer einzigen Variablen, etwa n_H^* , dargestellt werden), da entsteht mit verstellbarem Leitrad ein regelrechtes zweiparametrisches Feld. Das gibt die Möglichkeit, Teillastpunkte aufzufinden, die besseren thermischen Wirkungsgrad aufweisen, als mit festem Eintrittsleitrad der ND-Turbine erreicht werden könnte. Jaggi [9] zeigt, daß unter der Idealannahme konstanter Maschinenwirkungsgrade bei der rekuperatorlosen Maschine optimale Verhältnisse dann entstehen, wenn ausgehend vom Auslegungspunkt bei konstantem Verdichtungsdruckverhältnis und abnehmender Temperatur heruntergeregelt wird, bis das Temperaturverhältnis ϑ erreicht ist, bei dem nach üblicher Prozeßrechnung Π gerade optimal ist. Bei der Anlage mit Wärmeaustauscher müßte umgekehrt bei konstanter Höchsttemperatur das Druckverhältnis abgesenkt werden. In Wirklichkeit sind diese Zusammenhänge stark beeinflußt durch die Variation der Maschinenwirkungsgrade, weshalb effektiv nur die Berechnung des Feldes der möglichen Betriebszustände die Möglichkeit gibt, optimale Zustände auszuwählen und das Verstellgesetz des Leitrades dementsprechend festzulegen.

Abb. 14.3.4 zeigt ein typisches Verhalten der unabhängig laufenden Turbogruppe in Funktion ihrer Drehzahlvariablen n^* für verschiedene Abströmwinkel α_1 des ersten ND-Turbinenleitrades (dadurch ist ja die Leitradöffnung unmittelbar gekennzeichnet), vgl. Iten [11]. Aufgetragen ist das Prozeßtemperaturverhältnis ϑ und die Leistungsgröße A_s . Diese ist definiert als die Größe A nach Gl. 14.2(47), aber gerechnet mit dem ND-Turbinenwirkungsgrad 1, d.h. A_s kennzeichnet die im Druckgasstrom verfügbare isentrope Leistung. Diese Angabe kennzeichnet nur den frei laufenden Druckgaserzeuger und ist unabhängig vom Leistungs-Drehzahlgesetz des Nutzleistungsempfängers. Links ist das Feld begrenzt durch die Stabilitätsgrenze des Verdichters. Man erkennt, daß man sich durch Öffnen des Turbinenleitrades von der Stabilitätsgrenze entfernen kann und daß man kleinere Teillast erreichen kann, bevor man an die Pumpgrenze anstößt.

Das verstellbare Leitrad kann in gewissen Fällen dazu herangezogen werden, bei erhöhter Außenlufttemperatur mindestens vorübergehend dem Leistungsabfall entgegenzuwirken. In Abb. 14.3.5 zeigt Kurve *a* den Zusammenhang zwischen A_s und der Umgebungstemperatur T_E bei fester (maximaler) Höchsttemperatur und Normalstellung des Leitrades. Kurve *b* entspricht einer größeren Leitradöffnung. Regelt man nun gemäß Kurve *c*, so kann man im vorliegenden Beispiel etwa zwischen 15 und 35 °C den Leistungs-

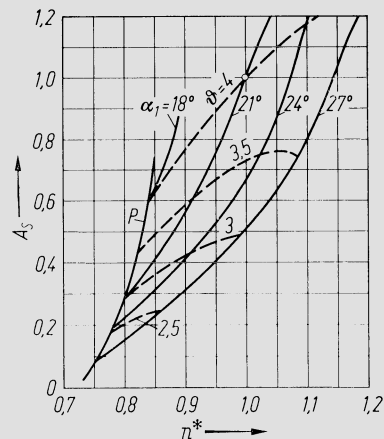


Abb. 14.3.4. Isentrope Leistungskennzahl A_s und Temperaturverhältnis ϑ in Funktion der Drehzahlvariablen n^* bei verschiedenen Abströmwinkeln α_1 des verstellbaren Leitrades. Nach Iten [11]

abfall vermeiden. Allerdings steigt dabei die Drehzahl der Druckgaserzeugergruppe wesentlich an, vgl. das Diagramm rechts, aus dem das Drehzahlverhältnis n/n_0 zu entnehmen ist. Die damit gegebene höhere Beanspruchung vermindert die Lebensdauer der rotierenden Hochtemperaturteile, aber nicht in gleichem Maße, wie wenn man das gleiche durch Erhöhung der Maximaltemperatur erreichen wollte. — Ein verstellbares Leitrad gibt weiter die Möglichkeit, Überdrehzahlen der Nutzleistungsturbine bei Lastabwurf in engen Grenzen zu halten. Bei plötzlicher Entlastung wird hierbei außer der starken Verminderung der Brennstoffzufuhr auch das Leitrad auf weiteste Öffnung gestellt. Dann fallen Druck und Temperatur vor ND-Turbine so stark ab, daß das verbleibende Gefälle die Maschine nicht mehr zum Durchbrennen bringen kann.

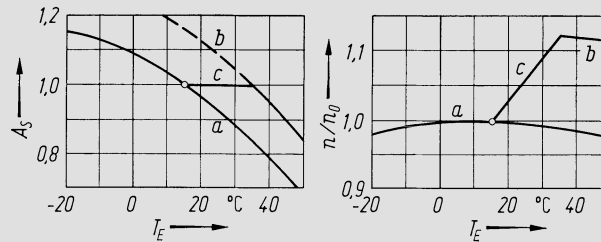


Abb. 14.3.5. Isentrope Leistungskennzahl A_S und Drehzahlverhältnis n/n_0 der Verdichtergruppe in Funktion der Umgebungstemperatur T_E : Kurve a für feste normale Leitradstellung, b für vergrößerten Leitrad-Durchflußquerschnitt, c Übergang von a nach b zum Ausgleich des Einflusses der Umgebungstemperatur. Nach *Iten* [11]

14.4 Pumpverhütungsregelung

Bei Gasturbinen nähert sich der Betriebszustand des Verdichters der Pumpgrenze bei kleiner Teillast. Die Eingriffe zur Verhütung des Pumpens treten also vor allem beim Anlassen und Abstellen in Aktion. Eine vereinfachte Berechnung solcher Betriebszustände kann nach dem in Abschn. 13.5 angegebenen Verfahren erfolgen, das insbesondere auch auf die mehrfache Zwischenabblase nach Abb. 13.1.10 angewandt werden kann. Nachfolgend werden für diesen Fall die maßgebenden Gleichungen zusammengestellt. Verfahren und Bezeichnungen entsprechen genau dem Abschn. 13.5. Index 1 bezieht sich auf den ersten Teilkompressor und die Abblaseventile nach diesem, Index 2 auf den zweiten usw. In der Reihenfolge ihrer Verwendung lauten die Gleichungen:

$$\varphi_{\alpha 1} = \frac{\dot{m} R T_{\alpha 1}}{p_{\alpha 1} u_{\alpha 1} \Omega_{\alpha 1}}, \quad 14.4(1)$$

$$T_{\alpha 1} = T_E \left[1 - \frac{\varphi_{\alpha 1}^2 u_{\alpha 1}^2}{2c_p T_E \sin^2 \alpha_{1\alpha}} \right], \quad 14.4(2)$$

$$p_{\alpha 1} = p_E \left[1 - \frac{\varphi_{\alpha 1}^2 u_{\alpha 1}^2}{2c_p T_E \eta_e \sin^2 \alpha_{1\alpha}} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 14.4(3)$$

$$\varphi'_{\alpha 1} = \varphi_{\alpha 1} / \varphi_{\alpha 01}, \quad 14.4(4)$$

$$\Pi_1 = \left[\bar{\psi}'_1 n_1^{*2} \left(\Pi_{01}^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad 14.4(5)$$

$$\varphi'_{\omega 1} = \varphi'_{\alpha 1} \left(\frac{\Pi_{01}}{\Pi_1} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad 14.4(6)$$

$$\bar{\psi}'_1 = \frac{\Delta J_{\alpha\omega 1}}{\varphi'_{\omega 1} - \varphi'_{\alpha 1}}, \quad 14.4(7)$$

$$p_{\omega 1} = p_{\alpha 2} = II_1 p_{\alpha 1}, \quad T_{\omega 1} = T_{\alpha 2} = T_{\alpha 1} II_1^{\frac{n-1}{n}}, \quad 14.4(8)$$

$$\dot{m}_{a1} = f_{a1} p_{\omega 1} W(p_{\omega 1}, T_{\omega 1}), \quad 14.4(9)$$

$$\varphi'_{\alpha 2} = \varphi'_{\omega 1} \frac{\dot{m} - \dot{m}_{a1}}{\dot{m}}, \quad 14.4(10)$$

$$n_2^{*2} = n_1^{*2} \left(\frac{II_{01}}{II_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad 14.4(11)$$

$$II_2 = \left[\bar{\psi}'_2 n_2^{*2} \left(II_{02}^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad 14.4(12)$$

$$\varphi'_{\omega 2} = \varphi'_{\alpha 2} \left(\frac{II_{02}}{II_2} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad 14.4(13)$$

$$\bar{\psi}'_2 = \frac{\Delta J_{\alpha\omega 2}}{\varphi'_{\omega 2} - \varphi'_{\alpha 2}} \quad 14.4(14)$$

$$p_{\omega 2} = p_{\alpha 3} = II_2 p_{\alpha 2}, \quad T_{\omega 2} = T_{\alpha 3} = T_{\alpha 2} II_2^{\frac{n-1}{n}}, \quad 14.4(15)$$

$$\dot{m}_{a2} = f_{a2} p_{\omega 2} W(p_{\omega 2}, T_{\omega 2}), \quad 14.4(16)$$

$$\varphi'_{\alpha 3} = \varphi'_{\omega 2} \frac{\dot{m} - \dot{m}_{a1} - \dot{m}_{a2}}{\dot{m} - \dot{m}_{a1}} \dots \text{ usw.} \quad 14.4(17)$$

.....

$$p_A = p_{\omega z} \left[1 + \frac{\lambda_D \varphi_{\omega z}^2 u_{\omega z}^2}{2c_p T_{\omega z} \sin^2 \alpha_{3\omega}} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad 14.4(18)$$

$$\dot{m} - \sum_i \dot{m}_{ai} = E \frac{p_A}{p_{A0}} \sqrt{\frac{T_{\max 0}}{T_{\max}}}. \quad 14.4(19)$$

Index 0 verweist auf den Auslegungspunkt, Index z auf die letzte Stufengruppe. Die f_a sind die effektiven (Kontraktionsfaktoren mit einschließenden) Durchflußquerschnitte der Abblaseventile, \dot{m}_{ai} die entsprechenden abgehenden Massenströme, $\alpha_{1\alpha}$ ist der Zuströmwinkel der ersten Gruppe, $\alpha_{3\omega}$ der Abströmwinkel der letzten, $\Omega_{1\alpha}$ der Ringquerschnitt am Eintritt, η_e der Einlaufwirkungsgrad, λ_D der Diffusorumsetzungsgrad, p_A der Austrittsdruck, T_{\max} die absolute Turbineneintrittstemperatur, E der Ellipsenfaktor, der in der Regel hinreichend genau 1 gesetzt werden darf. Die Funktion W hat die Bedeutung

$$\left. \begin{aligned} W(p_{\omega i}, T_{\omega i}) &= \sqrt{\frac{2\kappa}{(\kappa-1)RT_{\omega i}} \left[\left(\frac{p_E}{p_{\omega i}} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_E}{p_{\omega i}} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]} \\ W(p_{\omega i}, T_{\omega i}) &= \sqrt{\frac{2\kappa}{(\kappa-1)RT_{\omega i}} \left[\left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{2}{\kappa-1}} - \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \right]}, \end{aligned} \right\} \quad 14.4(20)$$

wobei die erste Gleichung für unterkritisches Druckverhältnis

$$\frac{p_{\omega i}}{p_E} \leq \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad 14.4(21)$$

gilt, die zweite für überkritisches.

Man gibt sich Drehzahl, Umgebungstemperatur, Temperatur vor Turbine und die Ventildurchflußquerschnitte f_{ai} . Die Rechnung beginnt mit einem angenommenen Massenstrom. Die Gln. 14.4(1)–(3) beschreiben die Einlaufströmung und gestatten, auf iterativem Wege $p_{\alpha 1}$, $T_{\alpha 1}$, $\varphi_{\alpha 1}$ zu bestimmen, womit 14.4(4) auch $\varphi'_{\alpha 1}$ liefert und n_1^* ermittelt werden kann. Anschließend liefern 14.4(5)–(7) mit den Unterlagen über die Stufe iterativ Π_1 und $\varphi_{\omega i}$, worauf 14.4(8)–(11) die jeweils links stehenden Größen zu berechnen gestatten. In gleicher Weise schreitet die Rechnung für die zweite Stufengruppe fort, siehe die Gln. 14.4(12) bis (17) usw. bis ans Ende der Schaufelung, worauf 14.4(18) noch den Austrittsdruck p_A liefert. Unter der Annahme, daß die Eintrittsdrucke der Turbine sich verhalten wie die Austrittsdrucke des Verdichters formuliert 14.4(19) das Durchflußgesetz der Turbine, das nun als Kontrollbedingung heranzuziehen ist. Ist sie nicht erfüllt, so ist die Rechnung mit einer geänderten Annahme über den Massenstrom zu wiederholen.

Diese Rechnung kann versagen, was bedeutet, daß unzulässige oder unzulässige Ausgangsannahmen getroffen wurden, was besonders auch die Annahmen über die Ventilquerschnitte betreffen kann. Empfehlenswert ist es daher, zuerst für einen Betriebszustand (für sehr kleine Drehzahl) den Rechnungsweg nach Abschn. 13.5 einzuschlagen, hieraus die f_{ai} zu bestimmen und alsdann für andere Punkte die Rechnung durchzuführen, wie hier angegeben. Aufgrund solcher Rechnungen kann schließlich auch der Leistungsaufwand für den Anlaßvorgang bestimmt werden. — Grundsätzlich genauer ist es, den Rechnungsgang so abzuwandeln, daß jeweils zur Bestimmung der Π_i und $T_{\omega i}$ die Kennlinienfelder der einzelnen Stufengruppen herangezogen werden, doch wird diese umfassende Information nur selten vorliegen. — Das Verfahren kann auch Leitradverstellung mitberücksichtigen, wie in Abschn. 13.5 angegeben. Meist wird dann nur eine Abblaseung notwendig sein, womit sich die Untersuchung entsprechend vereinfacht.

Werden die Abblaseventile plötzlich geschlossen, so herrscht im Brennkammersystem im ersten Augenblick noch der gleiche Druck wie bei geöffneten Ventilen. Da nun aber der volle Massenstrom durch die Endstufe des Verdichters strömen muß, kann sich vor dieser ein Druck aufstauen, der zu einer Expansion in der Endstufe führt, die im Extremfall zur Schallgeschwindigkeit im engsten Querschnitt führen kann. Selbst Nachexpansion nach dem engsten Querschnitt kann auftreten. Solche Betriebszustände können die Schaufelung gefährden, da die effektiven Durchflußquerschnitte von Ablösungen beeinflusst sind und somit fluktuieren. Dies kann akustische Schwingungen großer Amplitude auslösen, die zu großen dynamischen Beanspruchungen führen. Man vermeidet dies, indem man die Ventile allmählich schließt, womit das Brennkammersystem Zeit hat, sich aufzufüllen.

14.5 Zur Dynamik der Gasturbinenregelung

Es werden hier diejenigen dynamischen Zusammenhänge dargestellt, die für das Verhalten der Gasturbinen typisch sind, nicht aber das Regelsystem in seiner Gesamtheit behandelt. Diejenigen Komponenten des Regelsystems, die sein eigentliches Funktionieren bestimmen, sind heute weitgehend elektronisch ausgebildet, und die Regelung wird daher auch von den einschlägigen Spezialisten behandelt, denen aber die Unterlagen über das Verhalten der Maschinen gegeben werden müssen.

Untersuchungen des zeitabhängigen Regelungsverhaltens basieren üblicherweise auf der Annahme, daß die Maschinencharakteristiken auch für instationäre Vorgänge übernommen werden dürfen, daß also die Strömungsbedingungen in den Maschinen auch bei zeitlichen Veränderungen von stationären Bedingungen nur unmerklich abweichen. Die mittleren Verweilzeiten der Fluidteilchen in den Schaufelungen sind derart kurz, daß während dieser Zeitintervalle die Veränderungen meist nur wenig weiterschreiten. Immerhin gibt es Ausnahmen, vgl. etwa [12]; über allgemeingültige Unterlagen, die das Verhalten der Maschinen dann beschreiben, verfügen wir gegenwärtig nicht.

Um die allgemeinen Zusammenhänge aufzuzeigen, möge hier die *zweiwellige Anlage* wie unter 14.2c behandelt werden unter Verwendung der gleichen Bezeichnungen. Es seien ferner Θ_H und Θ_N die Trägheitsmomente der HD- und ND-Läufer und ω_H und ω_N ihre Winkelgeschwindigkeiten. Θ_N umfaßt auch das Trägheitsmoment des Nutzleistungsempfängers, gegebenenfalls auf die Turbinendrehzahl reduziert, wenn er über ein Getriebe angetrieben werden sollte. Die Bewegungsenergien der beiden Läufersysteme sind also

$$\frac{\Theta_H}{2} \omega_H^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Theta_N}{2} \omega_N^2.$$

Wenn man setzt $n'_H = n_H/n_{H0}$, $n'_N = n_N/n_{N0}$, sind die zeitlichen Ableitungen dieser Bewegungsenergien

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\Theta_H}{2} \omega_H^2 \right] = \Theta_H \omega_{H0}^2 n'_H \frac{dn'_H}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\Theta_N}{2} \omega_N^2 \right] = \Theta_N \omega_{N0}^2 n'_N \frac{dn'_N}{dt}. \quad 14.5(1)$$

Für den Regelvorgang maßgebend ist auch die im Raume zwischen Verdichteraustritt und dem HD-Turbineneintritt enthaltene Fluidmasse m . Es ist in diesem Zusammenhang genügend genau, den Druck im ganzen Raum gleich dem Verdichteraustrittsdruck p_2^0 zu setzen, ein Wert, der wenig zu hoch ist, was aber zu einem kleinen Fehler auf der sicheren Seite führt. Ist V das gesamte betrachtete Volumen, dV ein Raumelement davon, in dem die Temperatur T herrscht, so ist

$$m = \frac{p_2^0}{R} \int \frac{dV}{T}. \quad 14.5(2)$$

Bei jedem Druck p_2^0 herrscht bei Beharrung im System eine bestimmte Temperaturverteilung, die wir im Sinne der oben genannten Näherung ebenfalls allgemein übernehmen. Dann ist m eine bekannte Funktion von p_2^0 . Die zeitliche Veränderung von m bei einem Regelungsvorgang ist

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dp_2^0} \frac{dp_2^0}{dt} = F(p_2^0) \frac{dp_2^0}{dt}, \quad 14.5(3)$$

wobei offenbar auch $F(p_2^0)$ eine bekannte Funktion ist.

Die Gleichung, welche die Gefälleaufteilung zwischen HD- und ND-Teil der Turbine beschreibt, kann ohne Änderung aus der Theorie der Beharrungszustände übernommen werden, und zwar möge sogleich das verstellbare Eintrittsleitrad am ND-Teil vorausgesetzt werden, womit die Gleichung die Form 14.3(23) annimmt, also

$$(1 + \alpha) \Phi_N(\pi_N, n_N^*) = \Phi_H(\pi_H, n_H^*) \left(\frac{\pi_{H0}}{\pi_H} \right)^{1 - \eta_{pH} \lambda / 2}. \quad 14.5(4)$$

Die Durchflußgleichungen der Maschinen behalten ebenfalls ihre Form bei. Die Massenbilanz vereinfacht sich etwas, wenn man auf Turbinenseite mit einem Massenstrom \dot{m}' rechnet, der die Brennstoffmenge und die allfälligen Leckmengen nicht umfaßt. Die Massenstromgleichungen lauten dann

$$\dot{m}_V = \dot{m}_0 \Phi(\Pi, n^*) \frac{p_E}{p_{E0}} \sqrt{\frac{T_{E0}}{T_E}}, \quad 14.5(5)$$

$$\dot{m}'_T = \dot{m}_0 \Phi_H(\pi_H, n_H^*) \frac{p_4^0}{p_{40}^0} \sqrt{\frac{T_{40}^0}{T_4^0}}. \quad 14.5(6)$$

Die Massenbilanzgleichung des bereits erwähnten Raumes vom Volumen V ist

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_V - \dot{m}'_T,$$

also unter Verwendung von 14.5(3)

$$\frac{dp_2^0}{dt} = \frac{\dot{m}_V - \dot{m}_T}{F(p_2^0)}. \quad 14.5(7)$$

Die Energiegleichung der HD-Gruppe lautet mit P_r als Reibungsleistung (Lager und allfällige Hilfsantriebe)

$$\Theta_H \omega_{H0}^2 n'_H \frac{dn'_H}{dt} = \dot{m}_T (1 + \beta) (1 - \delta) (h_4^0 - h_5^0) - \dot{m}_V (h_2^0 - h_1^0) - P_r,$$

was in der Form

$$\frac{dn'_H}{dt} = \frac{\dot{m}_T c_{pE} \gamma_H (1 + \beta) (1 - \delta) T_4^0 \Omega_H - \dot{m}_V c_{pE} T_E \Omega_V - P_r}{\Theta_H \omega_{H0}^2 n'_H} \quad 14.5(8)$$

geschrieben werden kann. Analog lautet die Energiegleichung der Nutzleistungsgruppe

$$\frac{dn'_N}{dt} = \frac{\dot{m}_T c_{pE} \gamma_N (1 + \beta) (1 - \delta) T_4^0 (1 - \Omega_H) \Omega_N - P}{\Theta_N \omega_{N0}^2 n'_N}. \quad 14.5(9)$$

Damit ergibt sich der Gang der Berechnung. Von außen kann der Betriebszustand in grundsätzlich willkürlicher Weise beeinflusst werden durch die Leistungsaufnahme P des Nutzleistungsempfängers, die Brennstoffzufuhr, mithin also die Temperatur T_4^0 , die durch sie festgelegt wird und durch die Leitradeneinstellung, die α bestimmt. Ausgehend von einem Beharrungszustand können nun den Größen P , T_4^0 , α Werte erteilt werden, die von den Beharrungswerten abweichen, worauf die Gln. 14.5(7), (8) und (9) die zeitlichen Ableitungen von p_2^0 , n'_H , n'_N liefern und somit aus

$$\Delta p_2^0 = \frac{dp_2^0}{dt} \Delta t, \quad \Delta n'_H = \frac{dn'_H}{dt} \Delta t, \quad \Delta n'_N = \frac{dn'_N}{dt} \Delta t \quad 14.5(10)$$

die p_2^0 , n'_H , n'_N in einem um Δt späteren Zeitpunkt. In der nachfolgenden Aufstellung sind die Nummern der weiteren Gleichungen in der Reihenfolge ihrer Verwendung angegeben. Die durch eine Klammer zusammengefaßten Beziehungen legen die rechts geschriebenen, Größen gemeinsam fest und verlangen eine Auflösung auf iterativem Wege (z. B. Newton-Raphson-Verfahren, vgl. etwa [8]).

$$\left. \begin{array}{ll} 14.2(5) & II \\ (31) & n^* \\ (39) & n_H^* \\ (40) & n_N^* \\ (10) & \Phi, \eta_{pV} \\ (6) & \Omega_V \end{array} \right\} \begin{array}{l} 14.2(17) \\ (21) \\ (28) \\ (38) \\ 14.5(4) \\ 14.2(13) \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \pi_H, \pi_N, \eta_{pH}, \eta_{pN}, \Phi_H, \Phi_N \\ \Omega_H, \Omega_N. \end{array}$$

Damit ist der Betriebszustand am Ende der Zeitspanne Δt vollständig bekannt, und wenn man sich erneut P , T_4^0 und α gibt, kann die Rechnung um ein weiteres Δt weiterschreiten usw.

Daß P , T_4^0 und α wirklich frei und unabhängig voneinander vorgeschrieben werden können, entspricht nicht den wirklichen Verhältnissen. So kann z. B. der Nutzleistungsempfänger einen festen Zusammenhang zwischen n'_N und P vorschreiben, so daß dieses Gesetz in Gl. 14.5(9) einzuführen ist. Handelt es sich um einen Generator, der auf ein großes Netz arbeitet, so ist $dn'_N/dt = 0$, und Gl. 14.5(9) dient dazu, in jedem Zeitpunkt die Leistung zu bestimmen. Vor allem aber sind im praktischen Falle die äußeren Eingriffe — also die Brennstoffzufuhr und damit über die Energiebilanz der Brennkammer die Temperatur T_4^0 und die Leitradeneinstellung, somit α — vom Funktionieren des Regelsystems abhängig. Es sind also die Gleichungen des Regelsystems, die zusammen mit den hier angegebenen Maschinengleichungen erst den ganzen Regelvorgang beschreiben. Erst

dieses vollständige Gleichungssystem erlaubt auch die Behandlung der Frage der Stabilität der Regelung. Über dieses umfangreiche Sondergebiet vgl. etwa [10, 12–14]. Untersuchungen, bei denen die äußeren Eingriffsgrößen direkt vorgegeben werden, wie oben beschrieben, haben aber ein Interesse im Projektstadium. Man kann so durch Variation der Annahmen günstige Fälle des Regelungsablaufes auffinden und anschließend das Regelsystem so auslegen, daß es möglichst den gewollten Regelungsablauf erzeugt. So kann man z. B. durch Öffnen des ND-Turbinenleitrades die Beschleunigung des HD-Läufers ohne zu große Übertemperaturen erreichen. *Münzberg* [8] schlägt z. B. vor, sich für die Lastaufnahme direkt im Verdichterkennfeld die Bahnkurve vorzuschreiben, längs der sich der Betriebspunkt bewegen soll, um so von vornherein die Gefahr des Pumpens zu vermeiden. Das ist aber in direkter Weise nur möglich, wenn das HD-seitige Volumen V so klein ist, daß Gl. 14.5(7) praktisch zur Form $\dot{m}_V = \dot{m}_T'$ degeneriert, was auf die Gleichsetzung der Ausdrücke 14.5(5) und (6) führt. Mit einer willkürlichen Vorgabe von Π schreibt man sich dann in der Tat T_4^0 vor und umgekehrt.

Der Fall der *einwelligen Gasturbine* ergibt sich durch entsprechende Vereinfachung. Gl. 14.5(6) ist zu ersetzen durch

$$\dot{m}_T' = \dot{m}_0 \Phi_T(\pi, n_T^*) \frac{p_4^0}{p_{40}^0} \sqrt{\frac{T_{40}^0}{T_4^0}}, \quad 14.5(11)$$

Gl. 14.5(5) und (7) bleiben unverändert, während an die Stelle von 14.5(8)

$$\frac{dn'}{dt} = \frac{\dot{m}_T' c_{pE} \gamma_T (1 + \beta) (1 - \gamma) T_{40}^0 \Omega_T - \dot{m}_V c_{pE} T_E \Omega_V - P}{\Theta \omega_0^2 n'} \quad 14.5(12)$$

tritt, wo Θ das Trägheitsmoment des ganzen Rotorsystems ist. Die Differenzgleichungen lauten

$$\Delta p_2^0 = \frac{dp_2^0}{dt} \Delta t, \quad \Delta n' = \frac{dn'}{dt} \Delta t, \quad 14.5(13)$$

während der weitere Gang der Rechnung der Reihe nach folgende Gleichungen benutzt:

$$\left. \begin{array}{ll} 14.2(5) & \Pi \\ (31) & n^*, n_T^* \\ (10) & \Phi, \eta_{pV} \\ (6) & \Omega_V \end{array} \right\} \begin{array}{l} 14.2(17) \\ (21) \\ (28) \\ (30) \\ (13) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Pi \\ n^*, n_T^* \\ \Phi, \eta_{pV} \\ \Omega_V \end{array}} \right\} \pi, \eta_{pT}, \Phi_T, \Omega_T.$$

Wenn die Maschine auf ein großes Netz arbeitet, das n' konstant hält, bestimmt 14.5(12) lediglich die Leistung (die dann nicht unabhängig von T_4^0 gegeben werden kann) und 14.5(7) ist die einzige verbleibende Differentialbeziehung. Wird zudem das Volumen V vernachlässigbar klein, so verschwindet auch diese. Das Problem degeneriert dann so weit, daß in jedem Augenblick einfach derjenige Betriebszustand erhalten wird, der bei gleicher Brennstoffzufuhr sich stationär einstellen würde.

Die hier gegebenen Grundlagen gestatten auch die Beurteilung des Verhaltens bei *Volllastabschaltung*. Fällt bei der zweiwelligen Anlage die Leistung von ihrem Volllastwert unvermittelt auf Null ab, so wird nach einer geringen zeitlichen Verzögerung die Brennstoffzufuhr auf einen Leerlaufwert zurückgestellt, ein Vorgang, der nur Bruchteile einer Sekunde in Anspruch nimmt. Hat die ND-Turbine ein verstellbares Leitrad, so wird dieses gleichzeitig auf größte Öffnung gestellt. Dies ist eine Stellung, die das Leitrad sonst im Betriebe nie einnimmt, bei welcher der Durchflußquerschnitt ein Mehrfaches seines normalen Wertes ist und der absolute Zuströmwinkel zum ersten Laufrad derart groß wird, daß dieses sogar ein bremsendes Moment empfängt. Die Berechnung des Vorganges erfolgt wie angegeben unter Vorgabe von $T_4^0(t)$, $\alpha(t)$, $P = 0$, was hier eine strenge Behandlung des Problems ist, da der Regelkreis ja unterbrochen ist. Bei der Bestimmung von

η_{pN} muß natürlich die Leitradstellung berücksichtigt werden. Die Rechnung liefert die ND-Turbinendrehzahl in Funktion der Zeit und zeigt, ob sie in zulässigen Grenzen bleibt. Abb. 14.5.1 zeigt zwei Beispiele von solchen Drehzahlkurven für Vollastabschaltung nach Iten [11], mit und ohne Leitradverstellung. Man erkennt, wie wirksam die Leitradverstellung die Überdrehzahl begrenzt, was auch damit zusammenhängt, daß damit der Druck vor der ND-Turbine stark herabgesetzt wird.

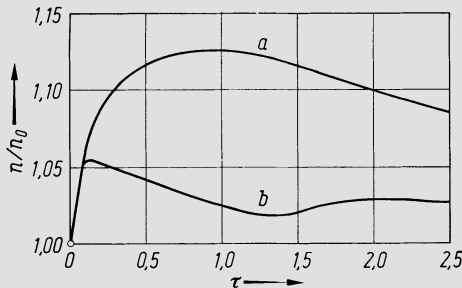


Abb. 14.5.1. Zeitlicher Verlauf der Drehzahl der Nutzleistungsturbine bei Vollastabschaltung, *a* mit festem Leitrad, *b* mit verstellbarem Leitrad (wird hierbei extrem geöffnet). Dimensionslose Zeitvariable $\tau = t/t_T$, wobei

$$t_T = \frac{\Theta_T \omega_0^2}{\dot{m}_0 c_{p0} T_E}$$

die Trägheit des ND-Rotorsystems kennzeichnet

Ungünstige Verhältnisse entstehen bei der zweiwelligen Anlage, wenn im HD-Teil ein sehr großes Volumen angeordnet ist (Wärmeaustauscher, unter Druck arbeitender Gasgenerator). Dann bewirkt der große Druckluftinhalt, daß der Höchstdruck nur sehr langsam abfallen kann. Selbst bei Leitradverstellung bleibt dann noch über geraume Zeit ein erhebliches Druckgefälle an der ND-Turbine übrig, und ihre Drehzahl stellt sich so hoch ein, daß ihr Wirkungsgrad auf Null zurückfällt. Damit wird sie in der Regel unzulässig hoch. Zur Verminderung dieser Schwierigkeit sind zusätzliche Regeleingriffe nötig, z. B. Abblasen auf dem höchsten Druckniveau oder auch zwischen HD- und ND-Turbine. Solche Anordnungen stellen äußerst unerwünschte Komplikationen dar, da die Abblaseventile große Querschnitte aufweisen und sehr rasch und zuverlässig arbeiten müssen. Für die Praxis ergibt sich daraus die Konsequenz, diesen schwierigen Fall zu vermeiden und Anlagen für Generatorantrieb (wo mit Lastabwurf zu rechnen ist) nur dann zweiwellig auszuführen, wenn große Volumen im HD-Teil vermieden werden können. Zweiwellige Anlagen für Generatorantrieb werden daher üblicherweise nur vorgesehen, wo die HD-Gruppe eine sehr kleine Trägheit besitzt, wie das vor allem bei angepaßten Düsentriebwerken der Fall ist.

Günstige Verhältnisse bestehen bei der einwelligen Anlage. Die angegebenen Gleichungen beschreiben auch dort den Vorgang, wenn man $P = 0$ und den Verlauf $T_4^0(t)$ einführt, der die rasche Verminderung der Brennstoffzufuhr wiedergibt. In Gl. 14.5(12) wird dann sehr rasch der Zähler negativ, womit der unzulässige Drehzahlanstieg vermieden ist, selbst bei beliebig großem Druckluftvolumen auf der HD-Seite. Deshalb ist die einwellige Anordnung für Stromerzeugerantrieb allgemein gebräuchlich, obwohl ihr Teillastwirkungsgrad etwas ungünstiger ist als bei zweiwelliger Bauweise.

Literatur zu Kap. 14

1. *Taygun, F.; Schmidt, D.*: Erfahrungen mit konventionellen geschlossenen Gasturbinen und ihre Zukunft in der Nukleartechnik. Turboforum (BST) 1 (1972) 48–56.
2. *Bammert, K.; Bünde, R.*: Comparison of Nuclear Power Plants with Closed Cycle Helium Turbine and with Steam Turbine Cycle for Combined Power and Steam Generation. Trans. ASME, J. Eng. Power 95 (1973) 11–18.
3. *Bammert, K.*: A General Review of Closed Cycle Gas Turbines using Fossil, Nuclear and Solar Energy. Thiemig-Taschenbücher, München 1975.
4. *Keller, C.*: Kleine und mittlere Kraftwerke für Strom- und Wärmeerzeugung. Kerntechnik 18 (1976) 321–322.

5. *Tiberini, A.*: Das dynamische Verhalten eines gasgekühlten schnellen Brutreaktors mit direktem Gasturbinen-Kreislauf. Diss. ETH Zürich 1974.
6. *Beglinger, V.*; *Zerlauth, F.*: Typ 3 — eine neue 5-MW-Gasturbine. Sulzer-Rundschau 58 (1976) 51–59.
7. *Heil, G.*: Zur Klimaempfindlichkeit der Gasturbinen. Maschinenbautechnik 12 (1963) H. 9.
8. *Münzberg, H. G.*; *Kurzke, J.*: Gasturbinen-Betriebsverhalten und Optimierung. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977.
9. *Jaggi, H.*: Stationäres Betriebsverhalten von Gasturbinen mit verstellbaren Leitapparaten. Diss. ETH Zürich: Juris-Verlag 1964.
10. *Iten, O.*: Regeldynamik von Gasturbinen mit verstellbaren Leitapparaten. Diss. ETH Zürich: Juris-Verlag 1968.
11. *Iten, O.*: Zweiwellige Gasturbinen mit verstellbarem Leitapparat. Turboforum (BST) 3 (1973) 123–128.
12. *Oppelt, W.*: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge, 5. Aufl. Weinheim: Verlag Chemie 1972.
13. *Leonhard, A.*: Die selbsttätige Regelung, 3. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1962.
14. *Pestel, E.*; *Kollmann, E.*: Grundlagen der Regelungstechnik, 2. Aufl. Braunschweig 1968.

15 Grundlagen der Festigkeitsrechnung

15.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden jene Grundlagen zusammengefaßt, die den Festigkeitsuntersuchungen an den verschiedenen Konstruktionsteilen (Schaufeln, Läufer usw.) gemeinsam sind. Besonderes Gewicht wird dabei auf die für Turbomaschinen typischen Beanspruchungsarten gelegt, also dynamische Beanspruchung, hohe Temperatur, Wärmespannungen.

Wo nicht besonders einfache (d.h. statisch bestimmte) Beanspruchungsverhältnisse vorliegen, entsteht die Bestimmung des Spannungs- und Verformungszustandes eines Bauteils durch die Zusammenfassung der folgenden Teilüberlegungen:

1. Formulierung der *Gleichgewichtsbedingungen* am Volumenelement.
2. Einführung der *kinematischen Bedingungen*, d.h. der Forderung, daß bei der Deformation der Zusammenhang der Volumenelemente erhalten bleibt.
3. Einführung des *Spannungs-Verformungsgesetzes* des Werkstoffes, gegebenenfalls auch der *Wärmedehnung*.

Damit und mit den Grenzbedingungen des Problems (d.h. mit der geometrischen Gestalt des Körpers, den gegebenen Temperaturen und äußeren Kräften) ist seine vollständige mathematische Formulierung gegeben. Die Punkte 1 und 2 lassen sich in strenger Weise behandeln, nicht aber Punkt 3, denn dort muß stets mit gewissen Idealisierungen gearbeitet werden.

An die Berechnung des Spannungs- und/oder Verformungszustandes schließt sich dessen *Beurteilung* an, d.h. man muß prüfen, ob bzw. wie lange der Bauteil den gegebenen Beanspruchungen standhält. Leider ist dies der theoretisch am wenigsten sicher fundierte Teil der Untersuchung, weshalb der Ingenieur im Einzelfalle nach seinem Ermessen Sicherheitsfaktoren einführen muß. Der Frage der Beurteilungskriterien ist in diesem Kapitel besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

15.2 Beschreibung des Spannungszustandes, Vergleichsspannung

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y, z läßt sich der Spannungszustand in einem Volumenelement $dx dy dz$ beschreiben durch die Angabe von 6 Spannungen. Diese sind die Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (positiv wenn Zugspannung) und die Schubspannungen $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Die Schubspannung τ_{xy} weist in die Richtung y und greift an dem Flächenelement an, dessen äußere Flächennormale in die positive x -Richtung weist, vgl. Abb. 15.2.1. Es ist aus Gleichgewichtsgründen $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, so daß tatsächlich nur 3 verschiedene Schubspannungen auftreten. In jedem Raumpunkt läßt sich stets ein rechtwinkliges Koordinatensystem 1, 2, 3 finden, derart, daß für ein ihm entsprechend orientiertes elementares Parallelepipid die Schubspannungen auf allen Grenzflächen verschwinden; die zugehörigen Normalspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind die *Hauptspannungen*. Die Beziehungen zwischen den Richtungen der Flächenelemente und den in ihnen angreifenden Spannungen werden graphisch veranschaulicht durch den *Mohrschen Spannungskreis* (Abb. 15.2.1), vgl. auch die ausführliche Darstellung in *Biezeno/Grammel* [1]. Es ist z.B. τ (Abb. 15.2.1) die Schubspannung in einer Ebene, deren Flächennormale in der durch die Richtungen σ_1

und σ_2 aufgespannten Ebene liegt und mit σ_1 den Winkel α bildet. Dementsprechend existieren 3 solche, je unter 45° liegende Ebenen, in denen die *Hauptschubspannungen* τ_1 , τ_2 , τ_3 auftreten.

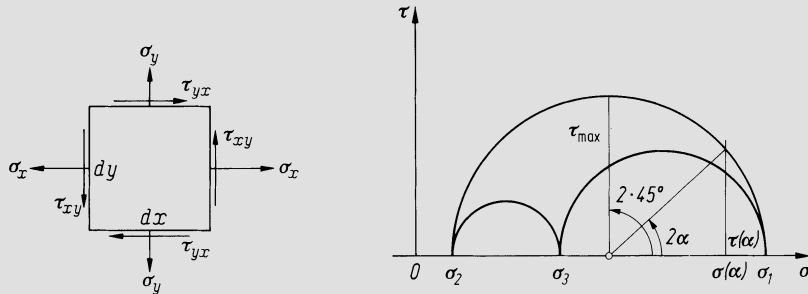


Abb. 15.2.1. Links: Volumenelement mit Normal- und Schubspannungen; rechts: Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Orientierung α eines Flächenelementes und den in ihm angreifenden Spannungen durch den Mohrschen Spannungskreis.

Da Werkstoffeigenschaften bevorzugt durch Versuche an Probestäben bei einachsigen Spannungszustand gewonnen werden, besteht das Bedürfnis, beliebige mehrachsige Spannungszustände auf einen hinsichtlich Werkstoffbeanspruchung gleichwertigen einachsigen Spannungszustand zurückführen zu können. Was unter dieser Gleichwertigkeit konkret zu verstehen ist, mögen folgende Beispiele zeigen.

Ein Werkstoff zeige im einachsigen Versuch bis zu einem Wert ε^* der Dehnung $\varepsilon \equiv \Delta l/l$ (Δl die Längenänderung, l die ursprüngliche Länge) elastisches Verhalten, d. h. es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen ε und σ und die Deformation ist reversibel. Über ε^* trete Plastizität auf, so daß bei Entlastung eine bleibende Dehnung beobachtet wird. Beim gleichen Werkstoff gibt es mehrachsige Spannungszustände, die ebenfalls den Charakter von Grenzzuständen haben, bei deren Überschreiten die Plastizität erscheint. Diese sind dem einachsigen Zustand ε^* , σ^* gleichwertig. — Bei hoher Temperatur *kriechen* die Werkstoffe: Unter zeitlich konstanter einachsiger Spannung wird die Dehnung ε langsam immer größer, wobei der Werkstoff so geschädigt wird, daß er nach einer gewissen Zeit t_B bricht. Ein mehrachsiger Spannungszustand, der den Werkstoff im Zeitintervall dt gleich viel schädigt wie der genannte einachsige, so daß ebenfalls nach t_B der Bruch eintritt, ist dem einachsigen gleichwertig.

Über die Berechnung der sog. *Vergleichsspannung* σ_v eines einachsigen Spannungszustandes, der einem gegebenen mehrachsigen gleichwertig ist, gibt es verschiedene Hypothesen, die oft *Bruchhypothesen*, richtiger aber *Anstrengungshypothesen* genannt werden. Nicht nur läßt sich der gesuchte Zusammenhang nicht zwingend herleiten, sondern er ist auch nicht für alle Werkstofftypen gleich. Für zähe Werkstoffe, wie sie im Turbomaschinenbau gebräuchlich sind, stimmen die beiden folgenden Hypothesen mit der Erfahrung gut überein.

Kriterium der Gestaltänderungsarbeit. Diese durch *v. Mises* angegebene Hypothese nimmt an, daß zwei Spannungszustände dann gleichwertig seien, wenn die auf die Volumeneinheit bezogene Gestaltänderungsarbeit für beide gleich ist. Das liefert den Ausdruck

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad 15.2(1)$$

für die Vergleichsspannung, durch die Hauptspannungen ausgedrückt also

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad 15.2(2)$$

Schubspannungshypothese. Ausgehend von der Vorstellung, daß die Zerstörung eines Werkstoffes durch Gleitvorgänge eingeleitet werde, hat *Tresca* die größte auftretende Schubspannung τ_{\max} als maßgebendes Kriterium angegeben. Nach Abb. 15.2.1 ist

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad 15.2(3)$$

mithin die Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_2, \quad 15.2(4)$$

wenn σ_1 die größte, σ_2 die kleinste Hauptspannung ist, stets im algebraischen Sinne verstanden.

Praktisch ergeben sich zwischen den Aussagen der beiden Hypothesen nur sehr geringe Unterschiede, wie Abb. 15.2.2 zeigt, die für ebenen Spannungszustand je die Gesamtheit Hauptspannungspaare σ_1, σ_2 darstellt, die einer festen Vergleichsspannung σ_v entsprechen.

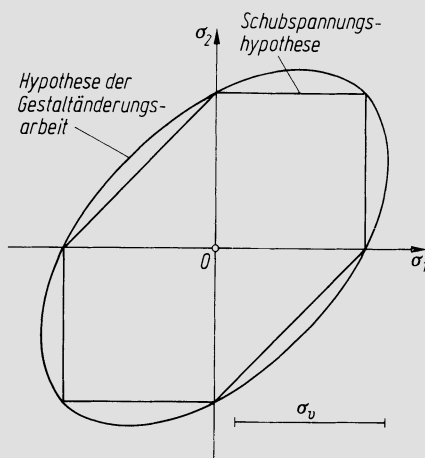


Abb. 15.2.2. Linien gleicher Vergleichsspannung σ_v bei ebenem Spannungszustand in Funktion der Hauptspannungen σ_1 und σ_2 . Sechseck im Falle der Schubspannungshypothese, Ellipse im Falle der Hypothese der Gestaltänderungsarbeit

Für einen gegebenen Spannungszustand führt die Schubspannungshypothese auf ein σ_v , das im Extremfall 15% größer und in keinem Falle kleiner als das der v. Mises-Hypothese ist. Diese letztere scheint mit den experimentellen Ergebnissen etwas besser übereinzustimmen. Demgegenüber hat die Schubspannungshypothese den Vorteil, daß die Einfachheit der Beziehung 5.2(4) — die Vergleichsspannung ist das Doppelte der größten Schubspannung — die Überlegungen sehr erleichtert, wobei allfällige geringe Fehler auf der sicheren Seite liegen. Warum man ihr heute die v. Mises-Hypothese meist vorzieht, hängt damit zusammen, daß der Nachteil der komplizierteren Rechnung infolge des Computers nicht mehr ins Gewicht fällt, während die größere Stetigkeit der Zusammenhänge (in Abb. 15.2.2 Ellipse statt Sechseck) gewisse Untersuchungen auch erleichtert. Nachfolgend wird daher überall, wo nichts anderes gesagt ist, das v. Mises-Kriterium benutzt.

15.3 Elastisches Verhalten

Elastisches Verhalten ist gegeben, wenn der Verformungsvorgang *reversibel* ist. Fast immer setzt man zudem *lineare Elastizität*, d.h. das *Hookesche Gesetz* voraus. Der allgemeinere Fall wurde zwar auch untersucht, vgl. etwa *Kauderer* [2], doch sind für zähe Werkstoffe die Abweichungen nicht sehr bedeutsam, abgesehen von Extremfällen, wie Spannungsspitzen in Kerben, vgl. *Neuber* [3]. Bei *einachsigen Spannungszustand* ergibt

sich dann, wenn in ε sogleich noch die Wärmedehnung eingeschlossen wird

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \beta T. \quad 15.3(1)$$

Hier ist E der Elastizitätsmodul, β die lineare Wärmeausdehnungszahl und T die Über-temperatur gegenüber dem Ausgangszustand. Der Nullpunkt der Temperaturangabe ist übrigens unwesentlich, da in der Anwendung des Gesetzes nur Ableitungen oder Differenzen von Temperaturen vorkommen.

Beim *dreiachsigen Spannungszustand* lauten die Gleichungen, wenn ν die Poissonsche Querkontraktionszahl ist

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \beta T, \quad 15.3(2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \beta T, \quad 15.3(3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \beta T, \quad 15.3(4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}. \quad 15.3(5)$$

Die γ sind die Verzerrungswinkel, wie in Abb. 15.3.1 für eine Ebene dargestellt. Diese Gleichungen können auch so aufgelöst werden, daß umgekehrt die Spannungen durch die Verformungsgrößen ausgedrückt werden. Sie lauten dann:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] - \frac{E\beta}{1-2\nu} T, \quad 15.3(2')$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)] - \frac{E\beta}{1-2\nu} T, \quad 15.3(3')$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] - \frac{E\beta}{1-2\nu} T, \quad 15.3(4')$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}, \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx}. \quad 15.3(5')$$

Die Gln. 15.3(2)–(5) lassen sich ohne weiteres auf den *ebenen Spannungszustand* übertragen, indem dort $\sigma_z = 0$ und $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ gesetzt wird. Löst man die so entstehenden

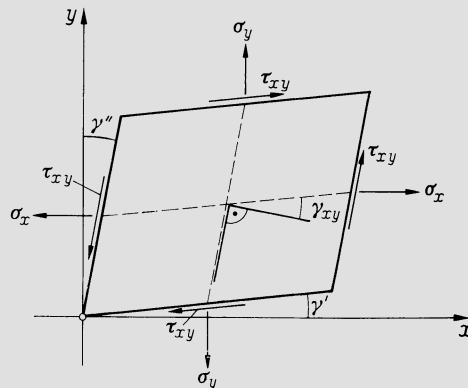


Abb. 15.3.1. Deformiertes Volumenelement und an ihm angreifende Spannungen

Gleichungen nach den Spannungen auf, so erhält man

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] - \frac{E\beta}{1 - \nu} T, \tag{15.3(2'')}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] - \frac{E\beta}{1 - \nu} T, \tag{15.3(3'')}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}. \tag{15.3(5'')}$$

Die Poissonsche Querkontraktionszahl wird üblicherweise $\nu = 0,3$ gesetzt, doch ist sie effektiv einigen Streuungen unterworfen.

15.4 Plastisches Verhalten

In diesem Abschnitt wird *zeitunabhängiges* plastisches Verhalten behandelt, nicht aber das viskoplastische („Kriechen“), das erst bei hoher Temperatur auftritt. Wenn bei einem gezogenen Probestab die Last stetig erhöht wird, entsteht im Spannungs-Dehnungs-Diagramm Abb. 15.4.1a bei den zähen im Turbomaschinenbau gebräuchlichen Werkstoffen eine Kurve der Art *OABCDE*. Die Kurve gibt allerdings eigentlich eine ideelle Spannung wieder, die definiert ist als P/f_0 , wo f_0 der ursprüngliche Querschnitt des spannungslosen Stabes ist. Infolge der Verminderung des Stabquerschnittes verändert sich die wirkliche Spannung gemäß der strichpunktiert eingetragenen Kurve, die sich indessen im praktisch wichtigen Dehnungsbereich von der theoretischen (ausgezogenen) nicht merklich unterscheidet. Bis *A* gilt die Deformation als rein elastisch. Da man heute annimmt, daß die Ermüdung eines Werkstoffes unter Wechselbeanspruchung durch die Wiederholung plastischer Deformationen entsteht, ist die Spannung σ_W im Punkt *A* zugleich die Dauerwechselfestigkeit. Bei weiterer Steigerung der Spannung entstehen — zunächst sehr kleine — bleibende, d. h. plastische Dehnungen, im Punkt *B* schließlich 0,2%, wie durch

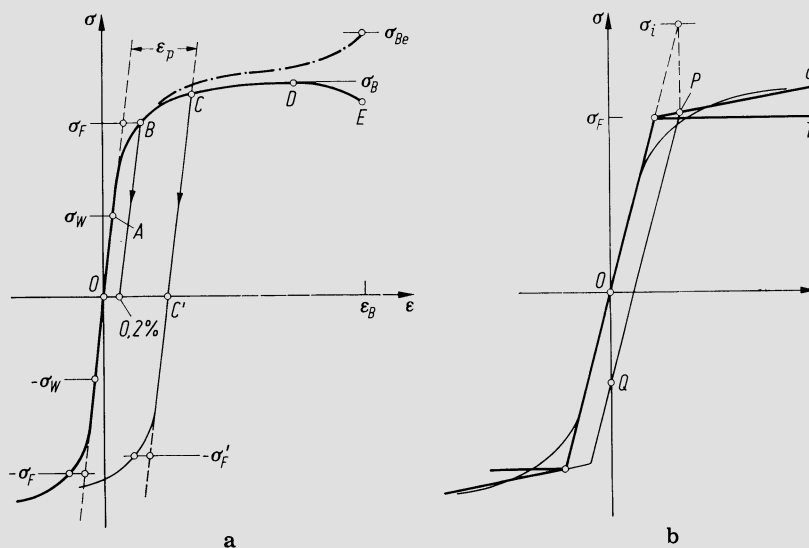


Abb. 15.4.1. a) Effektives Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines zähen Werkstoffes; b) idealisiertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines zähen Werkstoffes; bis σ_F linearelastisches Verhalten, für größere ε nach Kurve *a* Plastizität mit Verfestigung oder nach Kurve *b* Idealplastizität

die von B zur Abszisse zurückführende Linie gezeigt ist, die einer von B aus erfolgenden Entlastung entspricht. Die Spannung, die diese bleibende Dehnung $0,2\%$ erzeugt, heißt nach Konvention die *Fließgrenze* σ_F oder *Streckgrenze*. Für viele Untersuchungen wird vereinfachend angenommen, der Werkstoff verhalte sich bis zum Spannungswert σ_F elastisch. — Von hier ab nehmen die plastischen Verformungen sehr rasch zu. Im Punkt D erreicht die Kraft ihren Höchstwert P_{\max} und es ist nach Übereinkunft $\sigma_B = P_{\max}/f_0$ die *Zugfestigkeit*. Die *effektive Bruchspannung* σ_{Be} liegt noch höher, da beim Bruch, d. h. bei der Bruchdehnung ε_B , der Querschnitt stark eingeschnürt ist. — Im Bereich der Druckspannungen nimmt die Kurve bei zähen Werkstoffen mindestens im praktisch wichtigen Bereich einen sehr ähnlichen Verlauf. — Man beachte, daß die Darstellung Abb. 15.4.1a der Deutlichkeit halber verzeichnet ist: Die Gesamtdehnungen an der Fließgrenze liegen in der Größenordnung $0,35-0,7\%$, während die Bruchdehnung $8-25\%$ erreicht.

An sich liefert die Kurve Abb. 15.4.1a den Zusammenhang zwischen der plastischen Dehnung ε_p und σ , siehe etwa Punkt C . Was aber das Problem der Plastizität kompliziert, ist ihr irreversibler Charakter. Nicht nur führt eine von C ausgehende Entlastung zu C' statt zum Ursprung, sondern eine erneute Belastung längs $C'C$ liefert nicht mehr die Fließgrenze σ_F . Setzt man umgekehrt den Stab von C' ausgehend einer Druckbeanspruchung aus, so stellt sich die Fließgrenze bei einem etwas verschobenen Wert $-\sigma'_F$ ein, der sog. *Bauschinger-Effekt*. Wiederholte plastische Verformungen führen eine fortschreitende Veränderung der Werkstoffeigenschaften herbei. Trotzdem gibt es viele technische Probleme, wo die vereinfachende Annahme einer einmaligen Plastifikation sinnvoll ist, vor allem dann, wenn nur ein kleiner Teilbereich innerhalb eines größeren Bauteiles plastifiziert wird. Man pflegt dann meist der Rechnung ein vereinfachtes Stoffgesetz zugrunde zu legen, wie etwa in Abb. 15.4.1b veranschaulicht. Man setzt bis σ_F elastisches Verhalten voraus und von dort an ein Plastizitätsgesetz gemäß einer Geraden a (entsprechend einer Dehnungsverfestigung des Werkstoffes) oder gemäß einer horizontalen Geraden b , die dem *idealplastischen Körper* entspricht. Wenn nun eine rein elastizitätstheoretische Rechnung eine ideelle lokale Spannungsspitze σ_i liefert (die weit über der Bruchgrenze liegen kann), so entspricht dem effektiv ein Spannungs-Dehnungs-Zustand, der z. B. durch den Punkt P gekennzeichnet ist. Bei Entlastung erzwingt der Rest des Körpers, daß die Dehnung wieder verschwindet, womit man zum Punkt Q gelangt. Von da an spielen sich die Vorgänge in reversibler Weise zwischen P und Q ab.

Wie beim elastischen Spannungszustand stellt sich auch hier die Frage des Überganges vom einachsigen auf den mehrachsigen Spannungszustand. Das Problem der Vergleichsspannung wurde bereits behandelt, und es möge das v. Mises-Kriterium zugrunde gelegt werden. Die Frage aber nach dem Zusammenhang zwischen einem Hauptspannungstriplett $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und den zugehörigen plastischen Dehnungen $\varepsilon_{p1}, \varepsilon_{p2}, \varepsilon_{p3}$ erfordert die Einführung eines zusätzlichen Gesetzes, das als *Fließregel* bezeichnet wird. Bereits v. Mises [4] hat darüber eine Hypothese gemacht. In einem Koordinatensystem $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ist der geometrische Ort aller Punkte, die mit einem Wertetripel die Vergleichsspannung σ_v gemein hat eine Fläche; der Vektor mit den Komponenten $\varepsilon_{p1}, \varepsilon_{p2}, \varepsilon_{p3}$ steht auf dieser Fläche senkrecht. Dies gilt für jede Anstrengungshypothese, so daß also Fließregel und Anstrengungshypothese einander zugeordnet sind. Ziegler [5] gelang es, diese Aussage aufgrund thermodynamischer Prinzipien zwingend zu begründen.

Um den Zusammenhang für die zugrundegelegte Anstrengungshypothese aufzufinden, kann man mit Manson [6] folgendermaßen vorgehen. Die plastischen Schubdeformationen stehen sicher in einem festen Verhältnis zu den Schubspannungen, d. h. es ist

$$\frac{\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2}}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3}}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_{p3} - \varepsilon_{p1}}{\sigma_3 - \sigma_1}. \quad 15.4(1)$$

Ferner bleibt das Volumen eines Raumelementes bei plastischer Deformation stets konstant, also

$$\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p3} = 0. \quad 15.4(2)$$

Schließlich wird ausgesagt, daß eine *plastische Vergleichsdehnung* ε_{pv} existiert, für die eine zu 5.2(2) analoge Formel gilt, nämlich

$$\varepsilon_{pv} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})^2 + (\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3})^2 + (\varepsilon_{p3} - \varepsilon_{p1})^2}. \quad 15.4(3)$$

Diese Aussage impliziert die Fließregel, und zwar läßt sich verifizieren, daß sie mit der oben angegebenen übereinstimmt. Diese direkte Analogie der Formeln 15.2(2) und 15.4(3) ist der mathematische Vorteil der benutzten Anstrengungshypothese. Für den einachsigen Fall gilt

$$\varepsilon_{p2} = \varepsilon_{p3} = -\frac{\varepsilon_{p1}}{2}, \quad 15.4(4)$$

womit 15.4(3) auf $\varepsilon_{pv} = \varepsilon_{p1}$ zurückführt. Aus 15.4(1)–(3) ergibt sich zusammen mit 15.2(2)

$$\varepsilon_{p1} = \frac{\varepsilon_{pv}}{\sigma_v} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \quad 15.4(5)$$

$$\varepsilon_{p2} = \frac{\varepsilon_{pv}}{\sigma_v} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right], \quad 15.4(6)$$

$$\varepsilon_{p3} = \frac{\varepsilon_{pv}}{\sigma_v} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \quad 15.4(7)$$

Da man aus dem einachsigen Versuch die Zuordnung von ε_p und σ kennt, ist $\varepsilon_{pv}/\sigma_v$ bekannt.

Hier sind Koordinatenachsen verwendet, die in die Richtungen der Hauptspannungen weisen. In einem beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystem läßt sich der Zusammenhang in Tensorschreibweise folgendermaßen darstellen. Es sei

$$\bar{\sigma} \equiv \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad 15.4(8)$$

der „hydrostatische Anteil“ des Spannungszustandes. Dann ist

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{px} & \frac{1}{2} \gamma_{pxy} & \frac{1}{2} \gamma_{pxz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{pyx} & \varepsilon_{py} & \frac{1}{2} \gamma_{pyz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{pzx} & \frac{1}{2} \gamma_{pzy} & \varepsilon_{pz} \end{pmatrix} = \frac{3\varepsilon_{pv}}{\sigma_v} \begin{pmatrix} (\sigma_x - \bar{\sigma}) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \bar{\sigma}) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \bar{\sigma}) \end{pmatrix} \quad 15.4(9)$$

wobei $\gamma_{pji} = \gamma_{pji}$, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Der rechts stehende Tensor wird *Deviator* genannt. — Die hier eingeführten Verformungsgrößen kennzeichnen nur den plastischen Anteil. Für eine Gesamtdehnung gilt z. B.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ei} + \varepsilon_{pi} + \beta T, \quad 15.4(10)$$

wo ε_{ei} der elastische Anteil ist, $\varepsilon_{ei} + \beta T$ also z. B. der Ausdruck nach Gl. 15.3(2)–(4).

15.5 Viskoplastisches Verhalten (Kriechen)

Bei höherer Temperatur — d. h. bei absoluten Temperaturen, die etwa die halbe Schmelztemperatur erreichen oder überschreiten — zeigen die Werkstoffe die Eigenschaft des *Kriechens*: Unter konstanter äußerer Last dehnt sich ein Stab stetig und sehr langsam aus, bis er schließlich bricht. Im üblichen sog. *Dauerstandversuch* wird dieser Vorgang an Probestäben, also im einachsigen Spannungszustand untersucht. Eine Anzahl von Stäben

wird unter einheitlicher, zeitlich konstanter Temperatur verschiedenen ebenfalls zeitlich konstanten Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ unterworfen. Dabei zeigen die Stäbe ein Verhalten, wie es durch die Kurven Abb. 15.5.1 dargestellt wird. Für die Kurve, die einer Spannung σ_2 entspricht, sind dort die Einzelheiten genauer angegeben.

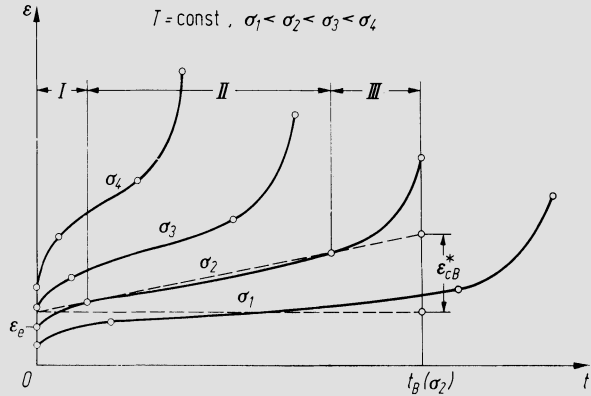


Abb. 15.5.1. Dehnungsverhalten (Kriechen) eines Zugstabes bei konstanter hoher Temperatur und verschiedenen Spannungen $\sigma_1 \dots \sigma_4$ in Funktion der Zeit t

Beim Aufbringen der Last stellt sich sogleich die elastische Dehnung ϵ_e ein. Während einer relativ kurzen ersten Zeitspanne I erfolgt das *Primärkriechen*, wobei die Kriechgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_c = d\epsilon_c/dt$ (Index c von engl. „creep“) von einem Anfangswert ausgehend abnimmt, bis sie sich bei einem wesentlich kleineren Wert stabilisiert. Daran schließt sich das *Sekundärkriechen* an, — Periode II — wobei sich die Kriechgeschwindigkeit nur wenig verändert. In einer dritten Phase — dem *Tertiärkriechen*, Periode III — nimmt $\dot{\epsilon}_c$ wieder zu, bis schließlich nach einer Zeit t_B der Bruch erfolgt. — Wird dieser Versuch mit einer Anzahl von Stäben bei verschiedenen Spannungen durchgeführt, so erhält man für jede Spannung eine Bruchzeit t_B und kann das Ergebnis in einem Diagramm der Art von Abb. 15.5.2 darstellen. Dieses ist die wichtigste Unterlage zur festigkeitstechnischen Bemessung von in hoher Temperatur arbeitenden Bauteilen. Diese müssen stets für eine gewisse *Lebensdauer* ausgelegt werden, da der Werkstoff unter der Bedingung des Kriechens nicht unbegrenzt standhält.

Das Primärkriechen interpretiert man als einen Setzvorgang innerhalb der anisotropen, ungeordneten kristallinen Struktur des Werkstoffes. Dabei gibt dieser zunächst mehr nach, bis eine Umlagerung der mikroskopischen Spannungsverteilungen an den Kristal-

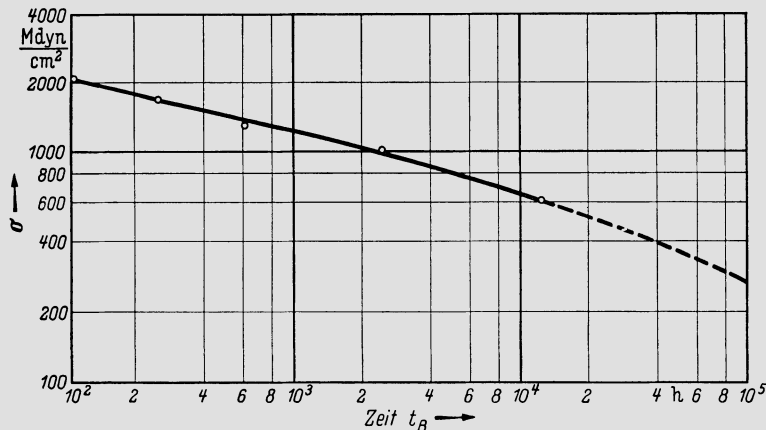


Abb. 15.5.2. Zeitbruchlinie (Zeitstandfestigkeitsdiagramm) für einen austenitischen Chrom-Nickel-Stahl (1 Mdyn/cm² = 10 N/mm²)

liten stattgefunden hat, bei welcher die widerstandsfähigeren Teile bevorzugt zum Tragen kommen und damit das Nachgeben zurückgedämmt ist, was auf das langsamere Sekundärkriechen führt. Das Tertiärkriechen, bei dem die Zerstörung des Werkstoffes rasch fortschreitet, ist kaum von praktischem Interesse, da man keinen Bauteil solchen Bedingungen aussetzen dürfte, daß dieser Vorgang schon einsetzt. — Für das *Kriechgesetz*, das man, einen bestimmten Werkstoff und konstante Spannung und Temperatur vorausgesetzt, in der Form

$$\dot{\varepsilon}_c = F(\sigma, T, t) \quad 15.5(1)$$

schreiben kann, sind verschiedene Ansätze vorgeschlagen worden, vgl. etwa [7–9]. Die Praxis bevorzugt meist denjenigen von *Norton* [7], der in dem Spannungsbereich, der auf genügend lange t_B führt, hinreichend genau ist:

$$\dot{\varepsilon}_c = \dot{\varepsilon}_6 \left\{ \left[\frac{\sigma}{\sigma_{b1}(T)} \right]^{n_1(T)} \exp \left[-\frac{t}{t_R(T)} \right] + \left[\frac{\sigma}{\sigma_b(T)} \right]^{n(T)} \right\}. \quad 15.5(2)$$

Hier ist $\dot{\varepsilon}_6 = 10^{-6} \text{ h}^{-1}$ ein normierter Wert (ein Promille in 1000 h), während σ_{b1} , σ_b , n_1 , n , t_R empirisch zu bestimmende Konstanten sind, die aus dimensionsanalytischen Gründen in der angegebenen Weise eingeführt werden. Das erste Glied beschreibt, zum zweiten addiert, das Primärkriechen und verschwindet mit zunehmendem t exponentiell. Dann bleibt nur das zweite Glied übrig, welches das Sekundärkriechen wiedergibt. Das Tertiärkriechen wird nicht wiedergegeben. Da das Primärkriechen einen kleinen Bruchteil der Benützungsdauer eines Bauteiles einnimmt, genügt es in der Regel, nur das Sekundärkriechen zu berücksichtigen, also zu setzen

$$\varepsilon_c = \dot{\varepsilon}_6 \left[\frac{\sigma}{\sigma_b(T)} \right]^{n(T)}. \quad 15.5(3)$$

In dieser einfachen Form fehlt die Zeit t , d. h. man ersetzt im Bereich II die Kurve $\varepsilon_c(t)$ (Abb. 15.5.1) durch eine Gerade.

Die Dauerstandfestigkeitskurve (Abb. 15.5.2) kann angenähert werden durch den Ansatz

$$\sigma = \sigma_{B3}(T) \left(\frac{t_B}{t_n} \right)^{-\frac{1}{m(T)}}, \quad 15.5(4)$$

wobei wiederum σ_{B3} und m empirisch zu bestimmende Werte sind und t_n eine Normierungszeit, zweckmäßig $t_n = 10^3 \text{ h}$, wobei σ_{B3} dem Bruch nach dieser Zeit entspricht. Die Gln. 15.5(3) und (4) enthalten die wesentliche Information über Kriechverhalten und Beanspruchbarkeit eines Werkstoffes für vorgeschriebene feste Bedingungen. Abb. 15.5.3 gibt ein typisches Beispiel des Kriechverhaltens, woraus auch die Exponenten als Kurvenneigungen erhalten werden können. Eine gedrängte Darstellung von Festigkeitswerten moderner Werkstoffe findet sich z. B. bei *Thomas* [44].

Der Übergang von diesen Daten auf den *mehrachsig*en Spannungszustand geschieht wie beim unter 15.4 behandelten plastischen Verhalten. Unter Zugrundelegung der v. Mises-Hypothese ist in 15.5(4) als Spannung die durch 15.2(1) gegebene Vergleichsspannung σ_v einzusetzen. Das Spannungs-Verformungs-Gesetz schreibt sich in Tensorform analog zu 15.4(9)

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{cx} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{cxy} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{cxz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{cyx} & \dot{\varepsilon}_{cy} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{cyz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{czx} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{czy} & \dot{\varepsilon}_{cz} \end{pmatrix} = \frac{3\dot{\varepsilon}_6}{2\sigma_v} \left[\frac{\sigma_v}{\sigma_b} \right]^n \begin{pmatrix} (\sigma_x - \bar{\sigma}) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \bar{\sigma}) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \bar{\sigma}) \end{pmatrix} \quad 15.5(5)$$

mit $\bar{\sigma}$ nach 15.4(8). Die Vergleichsdehnungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_{cv}$ ergibt sich durch Einsetzen von σ_v in 15.5(3).

Auf einen Umstand sei hier abschließend hingewiesen. Trotz des Tertiärkriechens ist die Bruchdehnung eines kriechenden Stabes von der Größenordnung 1% und auch weniger, also sehr viel kleiner als beim Zugversuch bei Raumtemperatur. Der Werkstoff vermag also nicht viel Arbeit aufzunehmen und bricht quasi spröde.

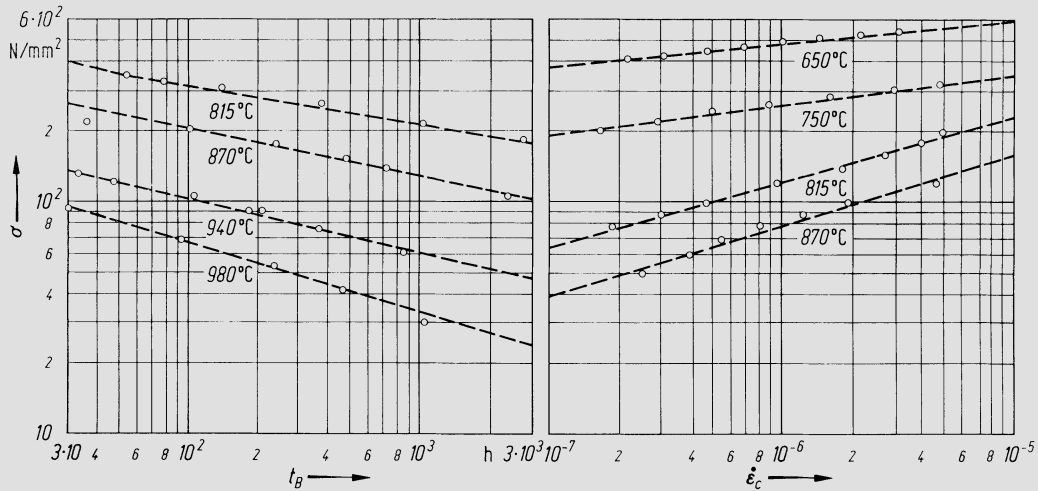


Abb. 15.5.3. Beispiel für Werkstoffverhalten bei hoher Temperatur (Werkstoff „Nimonic 105“): Links: Zusammenhang zwischen Spannung und Bruchzeit; rechts: Zusammenhang zwischen Spannung und mittlerer Kriechgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_c$. Der Ordinatenwert bei $t_B = 10^3$ h ist σ_{B3} ; die Neigungen der Geraden im doppelt-logarithmischen Maßstab liefern die Exponenten m und n

15.6 Verfahren der finiten Elemente bei Elastizität

a) Allgemeines

Grundgedanke der Festigkeitsrechnung nach dem Verfahren der finiten Elemente ist es, den gegebenen Körper einzuteilen in eine größere Zahl von Teilkörpern einfacher Geometrie — die finiten Elemente — deren Spannungs- und Verformungszustand unter einfachen Annahmen in allgemeiner Form angegeben werden kann; die Zusammenfügung dieser Elemente unter Beachtung ihrer gegenseitigen Rückwirkungen ergibt den Gesamtzustand des Körpers. Für die Festigkeitsprobleme des Maschinenbaues benutzt man bevorzugt dreieckige Scheiben-, Platten- und Schalenelemente, sowie Prismen und Ringe dreieckigen Querschnittes, je nach dem Typus des gestellten Problems. Der Vorteil des Dreiecks besteht darin, daß man sich damit beliebigen geometrischen Konturen gut anpassen kann.

Abb. 15.6.1 zeigt als Beispiel einen Schaufelfuß und seine Einteilung in Dreieckselemente. Die Kräfte, denen dieser Körper ausgesetzt ist, sind der Schaufelzug, die Pressung auf die beiden Tragflanken und die an seiner eigenen Masse angreifende Fliehkraft. Diese äußeren Kräfte denkt man sich in die Knotenpunkte des Netzwerkes konzentriert; dies ist ein vorbereitender Schritt der Rechnung. Infolge des Fliehkraftfeldes greifen im vorliegenden Beispiel in allen Knotenpunkten äußere Kräfte an. Wo keine Kraftfelder auftreten, sind nur Punkte der äußeren Kontur Kraftangriffspunkte. — Die gedankliche Struktur des Verfahrens erhellt aus der nachfolgenden Aufstellung der aufeinanderfolgenden Gedankenschritte.

1. Einteilung des Körpers in eine genügende Zahl von Elementen.
2. Konzentration der äußeren Kräfte in die Knotenpunkte.

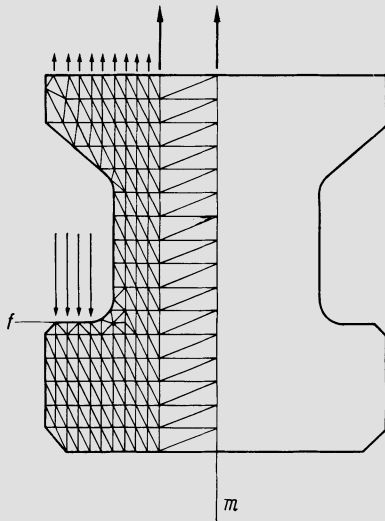


Abb. 15.6.1. Beispiel der Einteilung eines Schaufelfußes in finite Elemente

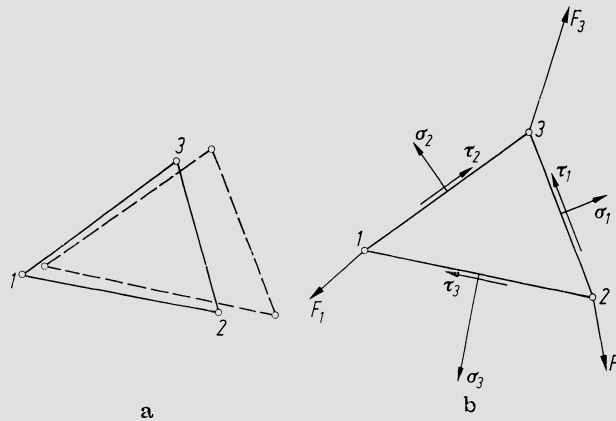


Abb. 15.6.2. a) Dreieckselement, ausgezogen in entspannter, gestrichelt in verschobener und deformierter Lage; b) an den Dreiecksflanken angreifende Spannungen σ_i und τ_i und Ersatz derselben durch äquivalente Eckenkräfte F_i

3. Für den gewählten Elementtyp kennt man die Beziehung zwischen den Dehnungen — d.h. den Verschiebungen der Eckpunkte, Abb. 15.6.2a — und den Spannungen, wobei Wärmedehnung sogleich mitberücksichtigt werden kann.
4. Einem bestimmten Spannungszustand des Elementes entsprechen bestimmte Flankenspannungen $\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2, \sigma_3, \tau_3$, Abb. 15.6.2b.
Diese Spannungen werden ersetzt durch ihnen statisch äquivalente Kräfte $F_i \dots$ in den Eckpunkten. Nach dem unter 3. Gesagten sind also diese Eckenkräfte in Funktion der Eckenverschiebungen ausdrückbar und zwar bei Linearelastizität durch lineare Beziehungen.
5. Formulieren, daß in jedem Knotenpunkt die Summe der Eckenkräfte der in ihm zusammenstoßenden Elemente gleich der dort tatsächlich angreifenden äußeren Kraft sein muß. Dies liefert ein System von ebensovielen Gleichungen wie Knotenpunktverschiebungen.
6. Knotenverschiebungen durch Lösen des Gleichungssystems bestimmen.
7. Nach unter 3. erwähnter Beziehung die Spannungen in sämtlichen Elementen aus den Knotenverschiebungen berechnen.

Man beachte, wie die *Grenzbedingungen* in diese Rechnung eingehen: Die Vertikalverschiebungen der Knotenpunkte der Flankenfläche f sind Null. Ferner muß die Rechnung aus Symmetriegründen nur für eine Hälfte des Schaufelfußes durchgeführt werden. Von den Punkten der Mittelfläche m weiß man, daß ihre Horizontalverschiebungen verschwinden.

Nachfolgend wird diese Rechnung genauer dargestellt für diejenigen Elemente, die für die Festigkeitsrechnungen des Turbomaschinenbaues weitaus am häufigsten Anwendung finden. Sie zeichnen sich zugleich dadurch aus, daß für sie die Zusammenhänge besonders übersichtlich werden, da sie pro Knoten nur zwei Freiheitsgrade aufweisen. Bei Platten ist man auf drei, bei Schalen auf bis zu sechs Freiheitsgrade pro Knoten geführt, was den Formalismus kompliziert, ohne daß indessen die gedankliche Struktur des Verfahrens eine andere wird. Bei der Herleitung wird von der direkten Betrachtung der Steifigkeitseigenschaften der Elemente ausgegangen, während man sich bei der völlig allgemeinen Entwicklung der Theorie auf Variationsprinzipien zu stützen pflegt, wobei dann auch die über die Festigkeitsrechnung hinausreichende Anwendungsmöglichkeit des Verfahrens sichtbar wird. Für eine umfassendere Darstellung muß auf die Spezialliteratur verwiesen werden, z. B. [10–12].

b) Dreieckselement bei ebenem Spannungszustand

Vorbereitend möge zuerst das in Abb. 15.3.1 dargestellte Volumenelement betrachtet werden, das den Spannungen σ_x , σ_y , τ_{xy} unterworfen ist. Aus dem Bild folgt sogleich, daß der totale Verzerrungswinkel

$$\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma'' \quad 15.6(1)$$

beträgt. Abb. 15.6.3 zeigt das Dreieckselement, in einem xy -Koordinatensystem, ausgezogen in ursprünglicher, gestrichelt in verzerrter Lage. Seine Fläche läßt sich aus den

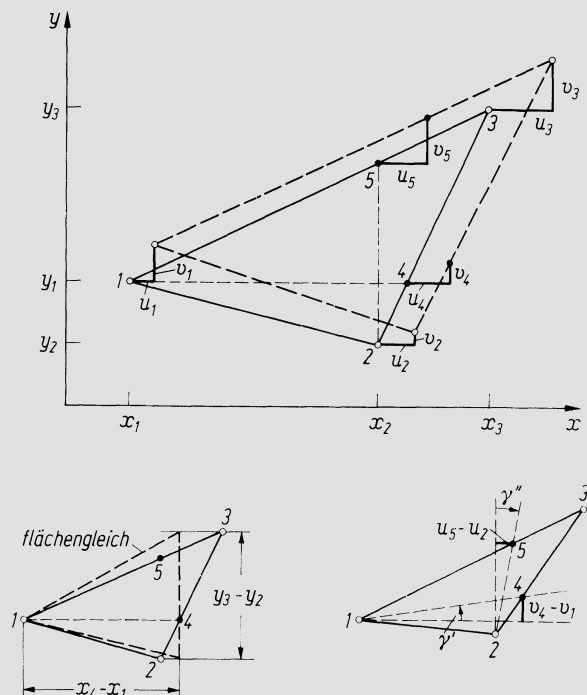


Abb. 15.6.3. Zur Bestimmung der Dehnungen und Verzerrungswinkel aus den Eckenverschiebungen

Eckpunktkoordinaten gemäß

$$A = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad 15.6(2)$$

bestimmen, seine Tiefe senkrecht zur Bildebene sei h . Es wird vereinfachend vorausgesetzt, daß der Spannungszustand innerhalb des Elementes konstant sei. Die Elemente müssen so klein gewählt werden, daß diese Annahme genau genug ist. Mit den Bezeichnungen nach Abb. 15.6.3 ergibt sich z. B. die Dehnung in x -Richtung zu

$$\varepsilon_x = \frac{u_4 - u_1}{x_4 - x_1}. \quad 15.6(3)$$

Nun geht aber aus der Figur unten links in Abb. 15.6.3 hervor, daß

$$(x_4 - x_1)(y_3 - y_2) = 2A, \quad 15.6(4)$$

womit 15.6(3) übergeht in

$$\varepsilon_x = \frac{(y_3 - y_2)(u_4 - u_1)}{2A}, \quad 15.6(5)$$

und da aus geometrischen Gründen

$$u_4 = u_2 \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} + u_3 \frac{y_1 - y_2}{y_3 - y_2}, \quad 15.6(6)$$

erhält man durch Einsetzen in 15.6(5) die erste der beiden folgenden Gleichungen; die zweite folgt in Analogie für die andere Koordinatenrichtung.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3)u_1 + (y_3 - y_1)u_2 + (y_1 - y_2)u_3], \quad 15.6(7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2A} [(x_3 - x_2)v_1 + (x_1 - x_3)v_2 + (x_2 - x_1)v_3]. \quad 15.6(8)$$

Gemäß der Figur in Abb. 15.6.3 unten rechts ist unter Beachtung von 15.6(1)

$$\gamma_{xy} = \frac{v_4 - v_1}{x_4 - x_1} + \frac{u_5 - u_2}{y_5 - y_2}. \quad 15.6(9)$$

Die Nenner $x_4 - x_1$ und $y_5 - y_2$ können wie oben aus der Dreiecksfläche A ausgedrückt werden und die v_4 und u_5 analog zu 15.6(6) aus den Verschiebungen der Eckpunkte. Damit geht 15.6(9) über in

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \frac{1}{2A} [(x_3 - x_2)u_1 + (x_1 - x_3)u_2 + (x_2 - x_1)u_3 \\ + (y_2 - y_3)v_1 + (y_3 - y_1)v_2 + (y_1 - y_2)v_3]. \end{aligned} \quad 15.6(10)$$

Durch die Gln. 15.6(7), (8), (10) sind die Deformationsgrößen durch die Eckenverschiebungen ausgedrückt.

Die Spannungen ihrerseits ergeben sich aus den Deformationen nach 15.3(2'')–(5''):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] - \frac{E\beta T}{1 - \nu}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] - \frac{E\beta T}{1 - \nu}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad 15.6(11)$$

Nun muß schließlich noch vom Spannungszustand auf die Eckenkräfte geschlossen werden. Zur Überlegung ist es zweckmäßig, dem gegebenen Dreieck ein Rechteck zu umschreiben (Abb. 15.6.4), in dem der gleiche Spannungszustand herrsche wie im Dreieck. Die Ecken-

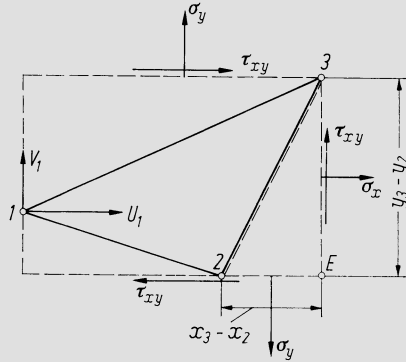


Abb. 15.6.4. Zur Bestimmung der äquivalenten Eckenkräfte aus den Spannungen im Dreieckselement

kräfte werden bestimmt durch die Annahme, daß man die Kräfte auf jede Flanke zu gleichen Teilen auf die beiden sie begrenzenden Ecken verteilen dürfte. Die x -Komponente U_1 der Eckenkraft in 1 ist also die halbe Summe der x -Komponenten der Kräfte auf die Flanken $\bar{12}$ und $\bar{13}$. Diese Flankenkräfte ihrerseits müssen aber der Kraft an der Flanke $\bar{23}$ das Gleichgewicht halten. Die x -Komponente der Kraft auf die Flanke $\bar{23}$ ist aber zugleich die x -Komponente der Summe der Kräfte auf die $\bar{E3}$ und $\bar{2E}$, und diese beträgt

$$h(y_3 - y_2) \sigma_x - h(x_3 - x_2) \tau_{xy}.$$

Demnach ist U_1 die Hälfte dieses Wertes, und zwar mit umgekehrtem Vorzeichen, da U_1 ja mit dieser Kraft im Gleichgewicht sein muß. — In gleicher Weise überlegt man für die y -Komponente V_1 der Eckenkraft in 1. Sie muß der halben y -Komponente der Flankenkraft $\bar{23}$ das Gleichgewicht halten, und diese letztere ergibt sich zu

$$-h(x_3 - x_2) \sigma_y + h(y_3 - y_2) \tau_{xy}.$$

So entstehen die ersten beiden Gleichungen des nachfolgenden Gleichungssystems. Die restlichen erhält man in gleicher Weise durch Betrachtung der Verhältnisse für die Ecken 2 und 3.

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{h}{2} [(y_2 - y_3) \sigma_x + (x_3 - x_2) \tau_{xy}], \\ V_1 &= \frac{h}{2} [(x_3 - x_2) \sigma_y + (y_2 - y_3) \tau_{xy}], \\ U_2 &= \frac{h}{2} [(y_3 - y_1) \sigma_x + (x_1 - x_3) \tau_{xy}], \\ V_2 &= \frac{h}{2} [(x_1 - x_3) \sigma_y + (y_3 - y_1) \tau_{xy}], \\ U_3 &= \frac{h}{2} [(y_1 - y_2) \sigma_x + (x_2 - x_1) \tau_{xy}], \\ V_3 &= \frac{h}{2} [(x_2 - x_1) \sigma_y + (y_1 - y_2) \tau_{xy}]. \end{aligned} \right\} \quad 15.6(12)$$

Da nun durch 15.6(7), (8) und (10) die Deformationen durch die Eckenverschiebungen, durch 15.6(11) die Spannungen durch die Deformationen und durch 15.6(12) die Eckenkräfte durch die Spannungen ausgedrückt sind, liegt der vollständige Zusammenhang zwischen Eckenverschiebungen und Eckenkräften vor. An dieser Stelle ist es zweckmäßig, zur *Matrixschreibweise* überzugehen. Mit den Abkürzungen

$$a_i \equiv \frac{y_j - y_k}{2A}, \quad b_i \equiv \frac{x_k - x_j}{2A}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch} \quad 15.6(13)$$

und den Definitionen der Matrizen

$$\{\varepsilon\} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \{q\} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad 15.6(14)$$

$$[a] \equiv \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}, \quad 15.6(15)$$

läßt sich das Gleichungssystem 15.6(7), (8), (10), in der Form

$$\{\varepsilon\} = [a] \{q\} \quad 15.6(16)$$

schreiben, denn setzt man hier die angegebenen Definitionen ein und führt die Matrizenmultiplikation aus, so hat man das genannte Gleichungssystem vor sich. Ebenso wird mit

$$\{\sigma\} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \{T\} \equiv \begin{bmatrix} T \\ T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [E] \equiv \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad 15.6(17)$$

durch die Matrixgleichung

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} - \frac{E\beta}{1 - \nu} \{T\} \quad 16.6(18)$$

das Gleichungssystem 15.6(11) wiedergegeben. Schließlich läßt sich mit

$$\{F\} \equiv \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{bmatrix}, \quad [a]^T = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & b_1 & a_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_2 \\ a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \quad 15.6(19)$$

das Gleichungssystem 15.6(12) in der Form

$$\{F\} = Ah [a]^T \{\sigma\} \quad 15.6(20)$$

schreiben. In der Tat ist $[a]^T$ die Transponierte der Matrix $[a]$, und diese Merkwürdigkeit erscheint nicht nur etwa in diesem Beispiel, sondern kehrt in der Struktur der Theorie stets wieder. — Die Gln. 15.6(16), (18) und (20) lassen sich durch Einsetzen in eine einzige Matrixgleichung überführen:

$$\{F\} = Ah [a]^T \left([E] [a] \{q\} - \frac{E\beta}{1 - \nu} \{T\} \right). \quad 15.6(21)$$

Damit ist der lineare Zusammenhang zwischen den Eckenkräften $\{F\}$ und den Eckenverschiebungen $\{q\}$ ausgedrückt. Man beachte, daß als Temperatur des Elementes der Wert

$$T = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3} \tag{15.6(22)}$$

einzusetzen ist, wo T_1, T_2, T_3 die Temperaturen in den Eckpunkten sind.

Das Dreieckselement ist hier in cartesischen Koordinaten behandelt worden. Vielen Bauteilen ist aber ein polares *Koordinatensystem* r, ϑ besser angepaßt, vgl. Abb. 15.6.5. Die Radialverschiebungen sind hier die v_i , die Tangentialverschiebungen die $r_i \delta_i$. An die Stelle von 15.6(13) treten die Definitionen

$$a_i \equiv \frac{r_k - r_j}{2A}, \quad b_i \equiv \frac{r_j \vartheta - r_k \vartheta}{2A}, \quad c \equiv \frac{1}{r_1 + r_2 + r_3}, \tag{15.6(13')}$$

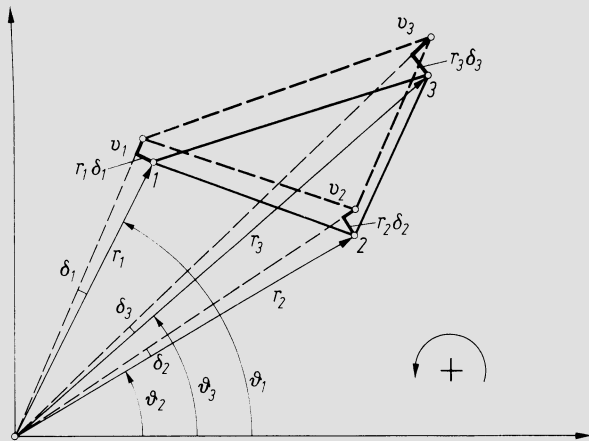


Abb. 15.6.5. Dreieckselement in entspannter und verzerrter Lage, in Polarkoordinaten

während die Matrizen 15.6(14) und (15) zu ersetzen sind durch

$$\{\varepsilon\} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_\vartheta \\ \varepsilon_r \\ \gamma_{\vartheta r} \end{bmatrix}, \quad \{q\} \equiv \begin{bmatrix} r_1 \delta_1 \\ v_1 \\ r_2 \delta_2 \\ v_2 \\ r_3 \delta_3 \\ v_3 \end{bmatrix}, \tag{15.6(14')}$$

$$a \equiv \begin{bmatrix} a_1 & c & a_2 & c & a_3 & c \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ (b_1 + c) & a_1 & (b_2 + c) & a_2 & (b_3 + c) & a_3 \end{bmatrix}. \tag{15.6(15')}$$

An die Stelle der Definitionsgleichungen für $\{\sigma\}$ tritt

$$\{\sigma\} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_\vartheta \\ \sigma_r \\ \tau_{\vartheta r} \end{bmatrix}, \tag{15.6(17')}$$

während die Definitionen von $\{T\}$, $[E]$ und $\{F\}$ unverändert übernommen werden können, wenn in $\{F\}$ die U_i Tangentialkomponenten, die V_i Radialkomponenten bedeuten; $[a]^T$ ist wieder die Transponierte von $[a]$. Dann bleiben die Matrixgleichungen 15.6(16), (18), (20), mithin aber auch 15.6(21) unverändert erhalten. — Alle diese Gleichungen setzen

hinreichend kleine Abmessungen des Dreieckselementes voraus, da sonst ε_δ und σ_δ nicht mit hinreichender Näherung konstant vorausgesetzt werden dürften. Wegen der gegenüber dem cartesischen Koordinatensystem geänderten Vorzeichen beachte man, daß hier einheitlich der Gegenuhrzeigersinn positiv gerechnet wird.

Ebener Spannungszustand ist möglich bei Körpern, die eine Symmetrieebene besitzen und deren Abmessungen senkrecht zu dieser Ebene (h in unserer Bezeichnungsweise) klein sind im Vergleich zu den übrigen Körperabmessungen. Hingegen muß h nicht konstant sein. Es stört das Rechenverfahren nicht, wenn die h der einzelnen Dreieckselemente, aus denen man den Körper zusammensetzt, ungleich sind.

c) *Dreieckselement bei ebenem Verformungszustand*

Ist die Abmessung h nicht klein gegen die übrigen Körperabmessungen, liegt also ein prismatischer Körper vor, dann ist kein ebener Spannungszustand mehr möglich. Vielmehr treten dann stets Spannungen auf in der Richtung von h , die z -Koordinatenrichtung genannt werde. Hingegen kann in genügendem Abstand von den Endflächen, die den Körper in z -Richtung begrenzen, ein ebener *Verformungszustand* herrschen, d. h. $\varepsilon_z = \text{const.}$ Es ist wesentlich zu bemerken, daß man sich in diesem Falle bei der Rechnung einen beliebigen Festwert ε_z vorschreiben kann, ohne dadurch σ_x , σ_y , τ_{xy} zu beeinflussen, denn stets kann man den Körper in z -Richtung einer beliebigen Kraft unterwerfen, ohne daß die genannten Spannungen dadurch berührt würden; nur σ_z wird dadurch bestimmt. Um dies einzusehen, schreiben wir die Spannungs-Dehnungs-Gleichungen in folgender Form:

$$\varepsilon_x + \Delta\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z + \Delta\sigma_z)], \quad 15.6(23)$$

$$\varepsilon_y + \Delta\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z + \Delta\sigma_z)], \quad 15.6(24)$$

$$\varepsilon_z + \Delta\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z + \Delta\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \quad 15.6(25)$$

Nun denke man sich zunächst alle mit Δ geschriebenen Größen weg. Der dann vorliegende Spannungs- und Verformungszustand sei eine korrekte Lösung des Problems des ebenen Vorformungszustandes. Alle Größen sind dann Funktionen des Ortes, bis auf ε_z , das konstant ist. Nun fügt man durch Aufbringen einer Zusatzkraft in z -Richtung ein über den Körper konstantes $\Delta\sigma_z$ bei. Nach 15.6(25) ändert sich dann ε_z , um den ebenfalls konstanten Betrag $\Delta\varepsilon_z$, d. h. es herrscht wieder ebener Verformungszustand. Daß $\Delta\sigma_z$ auch in 15.6(23) und (24) auftritt, bewirkt Veränderungen der ε_x und ε_y um

$$\Delta\varepsilon_x = \Delta\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \Delta\sigma_z = \text{const.} \quad 15.6(26)$$

Werden aber alle ε_x und ε_y um den gleichen Betrag verändert, so bedeutet dies, daß die kinematischen Bedingungen nicht verletzt werden, d. h. der Zusammenhang der Volumenelemente bleibt erhalten. Außerdem bleiben die Verzerrungswinkel unverändert, so daß keine Rückwirkung auf τ_{xy} entsteht. Da die Gleichgewichtsbedingungen in der xy -Ebene durch die Beifügung von $\Delta\sigma_z$ ohnehin nicht berührt werden, liegt in der Tat wiederum eine korrekte Lösung des elastizitätstheoretischen Problems vor mit gleichen σ_x , σ_y , τ_{xy} wie zuvor. — In den Gleichungen wurde das Temperaturglied weggelassen, das keine Veränderung der Situation bringen würde. — Das bedeutet, daß man sich bei der Rechnung ein beliebiges ε_z vorschreiben kann, zweckmäßig $\varepsilon_z = 0$. Nach Durchführung der Rechnung kann stets ein konstantes $\Delta\sigma_z$ überlagert werden derart, daß die vorgeschriebene Kraftbedingung in z -Richtung erfüllt ist.

Im Falle des ebenen Verformungszustandes können die Gln. 15.6(7), (8) und (10) unverändert übernommen werden, da sie nur durch die Kinematik der Verzerrung des Dreiecks gegeben sind. Hingegen setzen die Gln. 15.6(11) den ebenen Spannungszustand vor-

aus. Sie müssen ersetzt werden durch die Gleichungen des dreiachsigen Spannungszustandes, also 15.3(2')–(5'), in denen jedoch $\varepsilon_z = 0$ gesetzt wird. Dann lauten sie

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] - \frac{E\beta}{1-2\nu} T. \quad 15.6(27)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] - \frac{E\beta}{1-2\nu} T, \quad 15.6(28)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{E\beta}{1-2\nu} T, \quad 15.6(29)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}. \quad 15.6(30)$$

Die Gleichung für σ_z wird bei der Behandlung des Dreieckselementes nicht benötigt. Damit läuft die Änderung des Rechenverfahrens darauf hinaus, daß an die Stelle der Matrix $[E]$ nach Gl. 15.6(17) die Form

$$[E] \equiv \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad 15.6(31)$$

tritt, während der Faktor vor der Matrix $\{T\}$ gleichzeitig in

$$\frac{E\beta}{1-2\nu}$$

abzuändern ist. An der Gleichgewichtsbetrachtung, die auf die Gl. 15.6(12) führt, ändert sich wiederum nichts. So ergibt sich schließlich, daß die zusammenfassende Gl. 15.6(21) jetzt die Form

$$\{F\} = Ah [a]^T \left([E] [a] \{q\} - \frac{E\beta}{1-2\nu} \{T\} \right) \quad 15.6(32)$$

annimmt, wobei unter $[E]$ nun die durch 15.6(31) definierte Matrix zu verstehen ist.

d) Ringelement dreieckigen Querschnittes

Abb. 15.6.6 stellt das Ringelement dar in einem Koordinatensystem z, r, ϑ . Für die Durchführung der Überlegungen werden auch die Schwerpunktskoordinaten \bar{z}, \bar{r} und die Schwerpunktverschiebungen \bar{u}, \bar{v} gebraucht. Sie sind gegeben durch

$$\bar{z} = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3), \quad \bar{r} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3), \quad 15.6(33)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3), \quad \bar{v} = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3). \quad 15.6(34)$$

Die Kinematik der Verzerrung des Dreiecks kann wiederum von früher übernommen werden, wobei lediglich die folgenden Bezeichnungsänderungen gegenüber den Formeln für den ebenen Spannungszustand vorzunehmen sind: $\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_z$, $\varepsilon_y \rightarrow \varepsilon_r$, $\gamma_{xy} \rightarrow \gamma_{zr}$. Neu kommt hinzu ε_ϑ . Da die Elementabmessungen als klein vorausgesetzt werden, rechnen wir ebenfalls mit konstantem Spannungszustand und haben somit insbesondere

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{\bar{v}}{\bar{r}} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{r_1 + r_2 + r_3}. \quad 15.6(35)$$

Mit den Definitionen

$$a_i \equiv \frac{r_j - r_k}{2A}, \quad b_i \equiv \frac{z_k - z_j}{2A}, \quad c = \frac{1}{r_1 + r_2 + r_3} \quad 15.6(36)$$

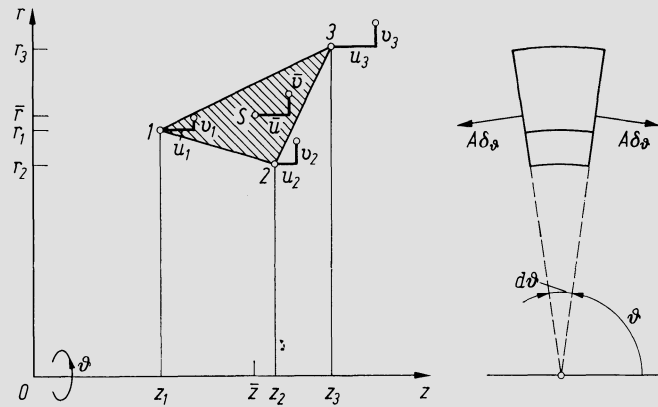


Abb. 15.6.6. Ringelement dreieckigen Querschnittes

schreiben sich dann die Deformationsgleichungen folgendermaßen, wovon man sich durch Vergleich mit 15.6(7), (8) und (10) überzeugen kann:

$$\epsilon_z = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \quad \text{entspricht 15.6(7)}$$

$$\epsilon_r = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \quad \text{entspricht 15.6(8)}$$

$$\epsilon_\phi = c(v_1 + v_2 + v_3) \quad \text{entspricht 15.6(35)}$$

$$\gamma_{zr} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 \quad \text{entspricht 15.6(10)}$$

Dies wiederum läßt sich als Matrixgleichung schreiben. Man definiert

$$\{\epsilon\} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\phi \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix} \quad \{q\} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad 15.6(37)$$

$$[a] \equiv \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c & 0 & c & 0 & c \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}. \quad 15.6(38)$$

Dann ist der Satz der obigen vier Gleichungen gegeben durch

$$\{\epsilon\} = [a] \{q\}. \quad 15.6(39)$$

Die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen sind, da räumlicher Spannungszustand herrscht, durch die Gln. 15.6(2')–(5') gegeben, wobei die Bezeichnungen sinngemäß abzuändern sind. Mit den Definitionen

$$\{\sigma\} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\phi \\ \tau_{zr} \end{bmatrix}, \quad \{\epsilon\} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\phi \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix}, \quad \{T\} \equiv \begin{bmatrix} T \\ T \\ T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 15.6(40)$$

$$[E] \equiv \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1 - \nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad 15.6(41)$$

schreibt sich dann der Satz der Gleichungen in der Form

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} - \frac{E\beta}{1-2\nu} \{T\}. \quad 15.6(42)$$

Beim Übergang zu den Eckenkräften ist zu beachten, daß jetzt ein unendlich kleiner, durch den Winkel $d\vartheta$ (Abb. 15.6.6) gegebener Ausschnitt aus dem Ring herauszugreifen ist. Die Kraftkomponenten sind also $U_i r_i d\vartheta$, $V_i r_i d\vartheta$, U_i und V_i mithin Kräfte pro Längeneinheit des Umfangs. Mit dieser Festlegung möge gesetzt werden:

$$\{F\} \equiv \begin{bmatrix} U_1 r_1 \\ V_1 r_1 \\ U_2 r_2 \\ V_2 r_2 \\ U_3 r_3 \\ V_3 r_3 \end{bmatrix}. \quad 15.6(43)$$

Dann schreibt sich die Gleichungsgruppe, die der Gruppe 15.6(12) entspricht

$$\{F\} = A\bar{r} [a]^T \{\sigma\}, \quad 15.6(44)$$

wo $[a]^T$ wieder die Transponierte der durch 15.6(38) definierten Matrix ist. Um sich von der Richtigkeit dieser Beziehung zu überzeugen, mögen die ersten beiden Gleichungen ausgeschrieben werden, die durch 15.6(44) repräsentiert werden; dabei wird noch beidseitig mit $d\vartheta$ multipliziert.

$$\begin{aligned} U_1 r_1 d\vartheta &= A\bar{r} d\vartheta \left[\frac{r_2 - r_3}{2A} \sigma_z + \frac{z_3 - z_2}{2A} \tau_{rz} \right] \\ &= \frac{\bar{r} d\vartheta}{2} [(r_2 - r_3) \sigma_z + (z_3 - z_2) \tau], \end{aligned} \quad 15.6(45)$$

$$\begin{aligned} V_1 r_1 d\vartheta &= A\bar{r} d\vartheta \left[\frac{z_3 - z_2}{2A} \sigma_r + \frac{\sigma_\vartheta}{r_1 + r_2 + r_3} + \frac{r_2 - r_3}{2A} \tau_{rz} \right] \\ &= \frac{\bar{r} d\vartheta}{2} [(z_3 - z_2) \sigma_r + (r_2 - r_3) \tau_{rz}] + \frac{A\sigma_\vartheta}{3} d\vartheta. \end{aligned} \quad 15.6(46)$$

Wenn man beachtet, daß links jeweils die Eckenkraft des Abschnittes $d\vartheta$ steht und rechts der Faktor $\bar{r} d\vartheta$ genau der Dicke h im ebenen Falle entspricht, erkennt man folgendes. Gl. 15.6(45) ist ihrer Aussage nach identisch mit der ersten der Gln. 15.6(12). Bei 15.6(46) hingegen kommt im Vergleich mit der zweiten der Gln. 15.6(12) noch das Zusatzglied mit σ_ϑ hinzu. Dies ist richtig, denn wie Abb. 15.6.6 rechts zeigt, entsteht aus der Spannung σ_ϑ auf das dargestellte Segment eine radial nach innen weisende Kraft vom Betrag $A\sigma_\vartheta d\vartheta$. Diese ist in die statische Überlegung mit einzubeziehen, und auf eine Ecke entfällt ein Drittel dieser Kraft. Die Gln. 15.6(39), (42) und (44) zusammengenommen, liefern

$$\{F\} = A\bar{r} [a]^T \left([E] [a] \{q\} - \frac{E\beta}{1-2\nu} \{T\} \right), \quad 15.6(47')$$

womit man auch für das Ringelement auf die gleiche Form des Zusammenhanges zwischen Eckenkräften und Eckenverschiebungen zurückgekommen ist.

e) Zusammenfügung der Elemente, Lösung

Da jeder Knoten des Netzes den sämtlichen angrenzenden Dreiecken gleichzeitig angehört und die Dreiecksseiten beim vorausgesetzten Zustand konstanter Spannungen in jedem einzelnen Dreieck gerade bleiben, schließen die verformten Elemente korrekt anein-

ander an, d.h. die kinematische Bedingung ist von vornherein erfüllt. Allerdings wird hier auch gerade die Genauigkeitsgrenze des Verfahrens (in seiner angegebenen Form) sichtbar. Denkt man sich das Netz auf den unverformten Körper aufgezeichnet und unterwirft ihn anschließend der Verformung, so werden sich die Linien krümmen. Anstattdessen rechnet man mit einem polygonalen Verlauf, der nur dann die Wirklichkeit genau genug wiedergibt, wenn das Netz genügend feinmaschig ist.

Die Gln. 15.6(21), (32) und (47'), die je für verschiedene Fälle die Relation zwischen den Eckenverschiebungen und den Eckenkräften herstellen, lassen sich sämtlich in der Form

$$\{F\} = [K] \{q\} - [Q] \{T\} \quad 15.6(47)$$

darstellen. $[K]$ ist die Steifigkeitsmatrix des Elementes. Die Bedeutung von $[K]$ und $[Q]$ ergibt sich ohne weiteres durch Vergleich mit den angegebenen Gleichungen; die K_{ij} und Q_{ij} erhält man, indem man die dort angegebenen Matrizenmultiplikationen ausführt.

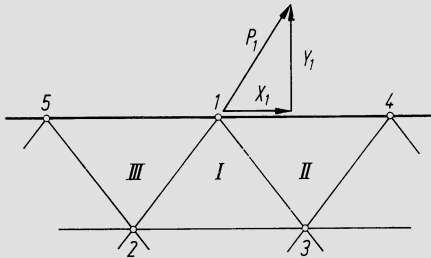


Abb. 15.6.7. Zur Zusammensetzung der Kräfte in einem Knotenpunkt 1

Dabei ist beachtenswert, daß nur die Stoffwerte E , ν , β und die Geometrie des Elementes in die Berechnung dieser Größen eingehen. Ist also einmal die Einteilung des Körpers in Elemente vorgenommen, so lassen sich die Matrizen $[K]$ und $[Q]$ für jedes Element bestimmen. Nun muß formuliert werden, daß in jedem Knotenpunkt die Summe der dort auftretenden Eckenkräfte gleich ist der gegebenen äußeren Kraft. Das möge aufgezeigt werden am Fall des ebenen Dreieckselementes. Bei der in Abb. 15.6.7 dargestellten Situation stoßen im Knoten 1 drei Dreiecke I, II und III zusammen. Es ist hier ein Knoten an der äußeren Körperberandung gezeigt, in dem eine Kraft P_1 mit den Komponenten X_1 und Y_1 angreife. An einem inneren Knoten stoßen meist mehr als 3 Elemente zusammen, doch sind die Überlegungen genau gleich. Die auf die 3 Elemente bezogenen Größen werden durch Akzente gekennzeichnet, z.B. U'_1 , U''_1 , U'''_1 . Die zu stellende Bedingung ist offenbar

$$U'_1 + U''_1 + U'''_1 = X_1, \quad V'_1 + V''_1 + V'''_1 = Y_1. \quad 15.6(48)$$

Die Matrixgleichung 15.6(47) liefert für diese beiden Beziehungen folgendes:

$$\begin{aligned} & K'_{11}u_1 + K'_{12}v_1 + K'_{13}u_2 + K'_{14}v_2 + K'_{15}u_3 + K'_{16}v_3 - Q'_{11}T' + \\ & + K''_{11}u_1 + K''_{12}v_1 + K''_{13}u_3 + K''_{14}v_3 + K''_{15}u_4 + K''_{16}v_4 - Q''_{11}T'' + \\ & + K'''_{11}u_1 + K'''_{12}v_1 + K'''_{13}u_5 + K'''_{14}v_5 + K'''_{15}u_2 + K'''_{16}v_2 - Q'''_{11}T''' = X_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & K'_{21}u_1 + K'_{22}v_1 + K'_{23}u_2 + K'_{24}v_2 + K'_{25}u_3 + K'_{26}v_3 - Q'_{22}T' + \\ & + K''_{21}u_1 + K''_{22}v_1 + K''_{23}u_3 + K''_{24}v_3 + K''_{25}u_4 + K''_{26}v_4 - Q''_{22}T'' + \\ & + K'''_{21}u_1 + K'''_{22}v_1 + K'''_{23}u_5 + K'''_{24}v_5 + K'''_{25}u_2 + K'''_{26}v_2 - Q'''_{22}T''' = Y_1. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können noch geordnet werden nach Verschiebungen u_1 , v_1 usw. Wenn

man noch setzt

$$\left. \begin{aligned} B_{x1} &\equiv X_1 + Q'_{11}T' + Q''_{11}T'' + Q'''_{11}T''' \\ B_{y1} &\equiv Y_1 + Q'_{22}T' + Q''_{22}T'' + Q'''_{22}T''' \end{aligned} \right\} \quad 15.6(49)$$

entsteht die Form

$$\left. \begin{aligned} S_{11}u_1 + S_{12}v_1 + S_{13}u_2 + S_{14}v_2 + \dots + S_{1,10}v_5 &= B_{x1} \\ S_{21}u_1 + S_{22}v_1 + S_{23}u_2 + S_{24}v_2 + \dots + S_{2,10}v_5 &= B_{y1} \end{aligned} \right\} \quad 15.6(50)$$

Ein solches Gleichungspaar existiert für jeden Knoten. Faßt man sie alle zusammen, so entsteht ein Gleichungssystem, wie es in Abb. 15.6.8 schematisch wiedergegeben ist. Die schraffierten Felder mögen dabei die Gleichungen für Knoten l repräsentieren, die anderen diejenigen für alle übrigen Knoten. Dieses System läßt sich wiedergeben durch die Matrixgleichung

$$[S] \{\tilde{q}\} = \{B\}. \quad 15.6(51)$$

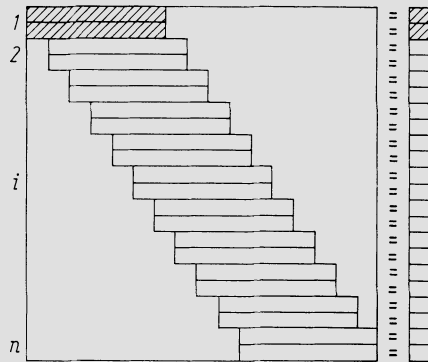


Abb. 15.6.8. Struktur des Gleichungssystems für die sämtlichen Knotenverschiebungen. Je zwei Gleichungen entsprechen einem Knoten

Hier ist $[S]$ die Steifigkeitsmatrix des ganzen Körpers, die sich zusammensetzt aus den sämtlichen Koeffizienten S_{ij} , die im Gleichungssystem links erscheinen. Weiter ist $\{\tilde{q}\}$ gebildet aus den u_i und v_i der sämtlichen Knotenpunkte und $\{B\}$ aus den B_{xi} und B_{yi} . Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die sämtlichen Verschiebungen. Sie erfolgt meist nach der Iterationsmethode von *Gauß/Seidel*: Man beginnt mit einer ersten Schätzung der Unbekannten und rechnet dann aus der ersten Gleichung etwa u_1 aus, indem man für alle anderen Unbekannten die geschätzten Werte verwendet. Ebenso verfährt man mit der zweiten Gleichung, aus der man v_1 berechnet, dabei aber schon das oben berechnete u_1 mitverwendet usw. Ist man so durch das ganze Gleichungssystem hindurchgegangen, so hat man eine bessere Näherung für $\{\tilde{q}\}$ und wiederholt das Verfahren mit dieser.

Mit den Verschiebungen hat man auch die Dehnungen, mithin die *Spannungen*. Für alle Elemente zusammengefaßt, lauten die Gleichungen

$$\{\tilde{\sigma}\} = [\tilde{E}] [\tilde{\alpha}] [\tilde{q}] - \frac{E\beta}{1-\nu} \{\tilde{T}\}, \quad 15.6(52)$$

$$\{\tilde{\sigma}\} = [\tilde{E}] [\tilde{\alpha}] [\tilde{q}] - \frac{E\beta}{1-2\nu} \{\tilde{T}\}, \quad 15.6(53)$$

die erste für den ebenen Spannungszustand, die zweite für den ebenen Verformungszustand. Das Zeichen $\tilde{}$ deutet stets an, daß in der betreffenden Matrix die Größen aller Elemente zusammengefaßt sind. — Die *Grenzbedingungen* gehen in diese ganze Rechnung so ein, daß in gewissen Knotenpunkten an der Kontur des Körpers gewisse Verschiebungen vorgeschrieben sind, meist Null.

Hier ist von der Vorstellung des ebenen Dreieckselementes ausgegangen worden, doch sind die Überlegungen beim Ringelement genau gleich. In $\{F\}$ sind hier Produkte $U_i r_i$ und $V_i r_i$ zusammengefaßt, weshalb dann z. B. die erste der Gln. 15.6(48) die Form

$$U_1' r_1 + U_1'' r_1 + U_1''' r_1 = Z_1 r_1 \quad 15.6(54)$$

annehmen würde, wo Z_1 die z -Komponente der Kraft pro Längeneinheit ist. Die weitere Entwicklung verläuft aber genau gleich, und für die Spannungen gilt Gl. 15.6(53). Für Punkte auf der Achse $r = 0$ versagt das Verfahren übrigens nicht, da es für die Produkte U_r, V_r eindeutige Werte liefert. Allerdings ist die gleichmäßige Verteilung der Flankenkräfte auf die Ecken im Falle des Ringes eigentlich nicht ganz korrekt. Liegt eine Ecke in r_1 , die zweite in r_2 , so müßte eine über die Flankenfläche gleichmäßig verteilte Kraft F eigentlich folgendermaßen aufgeteilt werden:

$$F_1 = \frac{F}{2} \left[1 - \frac{r_2 - r_1}{3(r_2 + r_1)} \right], \quad F_2 = \frac{F}{2} \left[1 + \frac{r_2 - r_1}{3(r_2 + r_1)} \right].$$

Diese Korrektur ist aber offensichtlich normalerweise sehr klein und um so eher vernachlässigbar, als ja die Annahme konstanten Spannungszustandes in einem Element ohnehin eine Näherung ist. Ist allerdings etwa $r_1 = 0$, so folgt $F_1 = F/3, F_2 = 2F/3$. Die Annahme gleicher Kraftaufteilung auf die Ecken beeinflußt aber die Gesamtlösung nur sehr wenig und führt höchstens im Bereiche des Zentrums zu kleinen lokalen Fehlern.

Da im Falle des Ringelementes oft die Fliehkraft als äußere Kraft auftritt, möge hier noch der Ausdruck für die Radialkomponente R_i der Knotenkraft pro Längeneinheit angegeben werden. Stoßen am Knoten i insgesamt n Dreiecke mit Flächen A_v und Schwerpunktradien \bar{r}_v zusammen, so ist

$$R_i = \frac{\rho \omega^2}{3} \sum_1^n A_v \bar{r}_v. \quad 15.6(55)$$

Die hier behandelten Typen von finiten Elementen erlauben die Behandlung einer sehr großen Zahl von Problemen. Ebene Dreieckselemente und ebener Spannungszustand kommen in Frage für Körper mit einer Symmetrieebene und mäßigen Abmessungen h senkrecht zu dieser. Im polaren Koordinatensystem können z. B. solche Probleme behandelt werden wie Spannungsverteilungen an Scheibenrädern mit axial eingesetzten Schaufelfüßen. Bei großem h ist der ebene Verformungszustand vorauszusetzen. Schaufelbefestigungen aller Art sind meist mit Dreieckselementen berechenbar. Ringelemente werden gegebenenmaßen für Rotoren, rotationssymmetrische Platten und Schalen benutzt, die auch beliebig dickwandig sein dürfen. Für allgemeinste Körpergeometrie oder auch ganz willkürliche räumliche Temperaturverteilung kommen *tetraederförmige finite Elemente* in Frage. Die Struktur der Theorie bleibt dabei grundsätzlich gleich, nur ist der mathematische Aufwand zur Beschreibung von Verformung und Steifigkeit des einzelnen Elementes sehr viel größer. Dementsprechend nähert man sich rasch den Grenzen der Leistungsfähigkeit der Computer.

15.7 Verfahren der finiten Elemente bei Plastizität

Sobald plastische Verformung auftritt, kann das Verfahren der finiten Elemente den Spannungs- und Verformungszustand nicht mehr in einem Schritt bestimmen, da es ja von der linearen Algebra Gebrauch macht und das Werkstoffverhalten nichtlinear ist. Ein naheliegendes Vorgehen besteht dann darin, von der Vorstellung auszugehen, daß die Belastung allmählich in kleinen Schritten aufgebracht wird, jeden Teilschritt linear in sinngemäßer Abwandlung der im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Methode zu behandeln und so Schritt für Schritt an die gesuchte Endlösung heranzukommen. Die Rechnung ist naturgemäß aufwendig.

Bei *zeitunabhängiger Plastizität* (also mäßiger Temperatur) genügen für die Bedürfnisse des Turbomaschinenbaues in der Regel einfachere Methoden. Sehr häufig ist die plastifizierte Zone innerhalb eines Bauteiles derart klein, daß die dort auftretende Spannungsverminderungen gegenüber dem theoretischen Idealfall des vollständig elastischen Verhaltens die Spannungsverteilung im übrigen Bereich nicht merklich beeinflußt. In diesem Falle genügt es, die Rechnung unter Voraussetzung der Elastizität durchzuführen und ihr lediglich noch folgende Untersuchungen beizufügen. Man wird ohnehin aus der rechnerisch erhaltenen Verteilung der Spannungskomponenten auch die Verteilung der Vergleichsspannung σ_v nach Gl. 15.2(1) bestimmen. Wo σ_v die Fließgrenze überschreitet, werden aus den Spannungen die ohne Wärmedehnung entstehenden elastischen Dehnungen und daraus gemäß der Definition

$$\varepsilon_v \equiv \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad 15.7(1)$$

eine totale Vergleichsdehnung ε_v berechnet. Zu diesem ε_v bestimmt man aus dem tatsächlichen Spannungs-Dehnungs-Diagramm, Abb. 15.7.1 (oder aus einer Idealisierung desselben gemäß gestrichelter Eintragung), das effektive zugehörige σ_{veff} . Nun läßt sich aber leicht zeigen, daß für die plastische Vergleichsdehnung ε_{pv} gilt

$$\varepsilon_{pv} = \varepsilon_v - \frac{2(1 + \nu)}{3} \frac{\sigma_{veff}}{E}, \quad 15.7(1')$$

vgl. [13]. Damit kann im ganzen plastifizierten Bereich ε_{pv} berechnet werden und dies ist alles, was zur Beurteilung des Beanspruchungszustandes benötigt wird. — Diese Rechnung beruht auf der Voraussetzung, daß die totalen Dehnungen durch eine lokale Plastifikation nicht verändert werden.

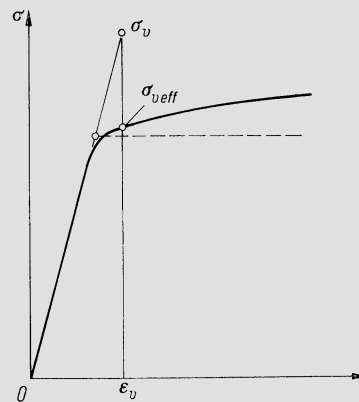


Abb. 15.7.1. Reduktion der lokalen Spannungsspitze durch örtliches Fließen; nur kleiner Bereich der Plastifikation vorausgesetzt

Wo größere Bereiche innerhalb eines Bauteiles plastifiziert werden, darf die Rückwirkung auf die Verteilung der Dehnungen nicht mehr vernachlässigt werden. — In diesem Abschnitt mögen die Koordinatenrichtungen mit i, j, k bezeichnet werden, und es wird von Gleichungsgruppen immer nur die erste geschrieben, da sich die weiteren durch zyklische Vertauschung ergeben. — Da die gesamte Dehnung sich aus elastischer, plastischer und Wärmedehnung zusammensetzt, gilt

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E} [\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)] + \frac{\varepsilon_{pv}}{\sigma_{veff}} \left[\sigma_i - \frac{1}{2} (\sigma_j + \sigma_k) \right] + \beta T, \quad 15.7(2)$$

$$\gamma_{ij} = \left[\frac{2(1 + \nu)}{E} + \frac{3\varepsilon_{pv}}{\sigma_{veff}} \right] \tau_{ij}. \quad 15.7(3)$$

Mit der Abkürzung

$$e = \frac{E \varepsilon_{pv}}{\sigma_{\text{veff}}} \quad 15.7(4)$$

führt die Auflösung dieser Gleichungsgruppen nach σ_i und τ_{ij} auf

$$\begin{aligned} \sigma_i = \frac{E}{(1+e)^2 - 2\left(\nu + \frac{e}{2}\right)^2 - (1+e)\left(\nu + \frac{e}{2}\right)} & \left[\left(1 - \nu + \frac{e}{2}\right) \varepsilon_i + \right. \\ & \left. + \left(\nu + \frac{e}{2}\right) (\varepsilon_j + \varepsilon_k) - \left(1 + \nu + \frac{3e}{2}\right) \beta T \right], \end{aligned} \quad 15.7(5)$$

$$\tau_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu) + 3e} \gamma_{ij}. \quad 15.7(6)$$

Bei ebenem Spannungszustand tritt an die Stelle von Gl. 15.7(5)

$$\sigma_i = \frac{E}{(1+e)^2 - \left(\nu + \frac{e}{2}\right)^2} \left[(1+e) \varepsilon_i + \left(\nu + \frac{e}{2}\right) \varepsilon_j - \left(1 + \nu + \frac{3e}{2}\right) \beta T \right]. \quad 15.7(5')$$

Nach einer ersten Durchrechnung, die Elastizität voraussetzt, lassen sich also die ε_v , aus diesen in plastifizierten Bereich ($\varepsilon_v > \varepsilon_F$) wie oben die σ_{veff} , aus 15.7(1') ε_{pv} und 15.7(4) e berechnen. Dann liefern 15.7(5) (bzw. (5')) und (6) berichtigte Spannungen im plastifizierten Bereich. Die Spannungen in den sämtlichen finiten Elementen nach erster Durchrechnung mögen in $\{\tilde{\sigma}_I\}$ zusammengefaßt werden (Zeichen $\tilde{}$ bedeutet die Zusammenfassung aller Elemente), diejenigen nach der eben angegebenen Korrekturrechnung in $\{\tilde{\sigma}'\}$. Dann sei

$$\{\tilde{\sigma}'\} = \{\tilde{\sigma}_I\} - \{\tilde{\sigma}\}. \quad 15.7(7)$$

Diesen Differenzspannungen entsprechen am einzelnen Element Differenzeckenkräfte, deren Betrag nach 15.6(20) oder (44)

$$\{F'\} = Ah[a]^T \{\sigma'\}, \quad \{F'\} = A\bar{r}[a]^T \{\sigma'\} \quad 15.7(8)$$

ist, die linke Gleichung für das ebene, die rechte für das ringförmige Element. In allen Knotenpunkten im plastifizierten Bereich sind nun von den dort angreifenden äußeren Kräften, die durch $\{B\}$ wiedergegeben werden, diese Differenzeckenkräfte zu *subtrahieren*. Das führt auf einen Vektor $\{B^*\}$, mit dem nun erneut das Gleichungssystem

$$[S] \{\tilde{q}\} = \{B^*\} \quad 15.7(9)$$

zu lösen ist, worauf 15.6(52) oder (53) neue Spannungen $\{\tilde{\sigma}_{II}\}$ liefert. Daß dieses Verfahren zum Ziele führt, erkennt man folgendermaßen. Durch $\{\sigma'\}$ und damit durch $\{F'\}$ ist der Ausfall an Tragkraft gekennzeichnet, der dadurch entsteht, daß im plastifizierten Bereich die effektiven Spannungen kleiner sind als bei elastischem Verhalten. Rechnet man gleichwohl elastisch, so kann man den Fehler dadurch ausgleichen, daß man ein am Körper angreifendes Kraftfeld einführt, das der Differenz entspricht und die entgegengesetzte Richtung hat.

Von dem so berechneten $\{\tilde{\sigma}_{II}\}$ ausgehend, kann erneut mit 15.7(4)–(6) der korrigierte Spannungszustand im plastifizierten Bereich bestimmt werden. Eigentlich wäre nun die Rechnung zu wiederholen, doch wird diese Iteration in Anbetracht der geforderten Genauigkeit selten nötig sein. Ist $\{\tilde{\sigma}''\}$ der zweite korrigierte Spannungszustand, so ist

$$\{\tilde{\sigma}_0\} = \{\tilde{\sigma}''\} - \{\tilde{\sigma}_I\} \quad 15.7(10)$$

der Restspannungszustand, der im Körper nach der Plastifikation übrigbleibt, wenn die äußere Belastung auf Null reduziert und der ausgeglichene Temperaturzustand wieder-

hergestellt ist. — Das größte aus der zweiten Spannungsrechnung sich ergebende ε_{pv} ist die maßgebende Größe zur Beurteilung des Beanspruchungszustandes.

Bei *viskoplastischem Zustand (Kriechen)* geht man üblicherweise von der Vorstellung aus, daß im Zeitpunkt $t = 0$ Belastung und Temperaturzustand hergestellt werden. Daraus ergibt sich unter Voraussetzung der Elastizität ein Spannungszustand $\{\tilde{\sigma}_I\}$. Bei zeitlich konstanter äußerer Beanspruchung und Temperaturverteilung strebt der Spannungszustand, ausgehend von $\{\tilde{\sigma}_I\}$ asymptotisch einem Grenzzustand zu, welcher der gesuchte viskose Spannungszustand ist. Er wird aufgefunden, indem man um Zeitintervalle Δt weiterschreitet und jeweils die Veränderung des Spannungszustandes berechnet.

Da der Spannungszustand in $t = 0$ in jedem Element bekannt ist, kennt man aus 15.5(5) auch die sämtlichen Kriechdeformationsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}_{ci}$ und $\dot{\gamma}_{cij}$. Wenn Index e den elastischen Anteil der Verformung kennzeichnet, sind die totalen Deformationsgeschwindigkeiten (Wärmedehnung ist zeitlich konstant)

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_{ei} + \dot{\varepsilon}_{ci}, \quad \dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{eij} + \dot{\gamma}_{cij}. \quad 15.7(11)$$

Leitet man nun die Gln. 15.3(2') und (5') nach t ab, so folgt

$$\dot{\sigma}_i = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)(\dot{\varepsilon}_i - \dot{\varepsilon}_{ci}) + \nu(\dot{\varepsilon}_j + \dot{\varepsilon}_k - \dot{\varepsilon}_{cj} - \dot{\varepsilon}_{ck})], \quad 15.7(12)$$

$$\dot{\tau}_{ij} = \frac{E}{2(1 + \nu)} [\dot{\gamma}_{ij} - \dot{\gamma}_{cij}]. \quad 15.7(13)$$

Gl. 15.7(12) ist gegebenenfalls durch die entsprechende Form für den ebenen Spannungszustand zu ersetzen. In Matrixschreibweise erhält man also in jedem Falle

$$\{\dot{\sigma}\} = [E](\{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}_c\}). \quad 15.7(14)$$

Hier ist $[E]$ gegeben durch 15.6(17), (31) oder (41), während die $\{\dot{\varepsilon}\}$ und $\{\dot{\varepsilon}_c\}$ genau wie die $\{\varepsilon\}$ gebildet sind und ebenso $\{\dot{\sigma}\}$ wie $\{\sigma\}$. Da nun aber

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [a] \{\dot{q}\}, \quad 15.7(15)$$

ist auch

$$\{\dot{\sigma}\} = [E] ([a] \{\dot{q}\} - \{\dot{\varepsilon}_c\}). \quad 15.7(16)$$

Von hier aus gewinnt man die zeitlichen Ableitungen der Eckenkräfte analog 15.6(21) oder (47) aus

$$\{\dot{F}\} = R[a]^T [E] ([a] \{\dot{q}\} - \{\dot{\varepsilon}_c\}), \quad 15.7(17)$$

wobei $R = Ah$ für das ebene, $R = A\bar{r}$ für das ringförmige Element. Wie unter 15.6e beschrieben, sind diese $\{\dot{F}\}$ in allen Knoten zusammzusetzen und gleichzusetzen den Ableitungen der dort wirklich angreifenden Kräfte, die aber verschwinden. Trotzdem wird das so entstehende Gleichungssystem inhomogen, denn es enthält ja die von den bekannten $\{\dot{\varepsilon}_c\}$ herrührenden Konstanten. Das Vorgehen nach Abschn. 15.6e führt also auf ein Gleichungssystem der Form

$$[S] \{\tilde{q}\} = \{C\}, \quad 15.7(18)$$

wobei die Kolonnenmatrix $\{C\}$ aus den $\{\dot{\varepsilon}_c\}$ hervorgeht. Die Lösung $\{\tilde{q}\}$ dieses Gleichungssystems liefert vermöge der Gl. 15.7(16), die für die Gesamtheit der Elemente die Form

$$\{\tilde{\sigma}\} = [\tilde{E}] ([\tilde{a}] \{\tilde{q}\} - \{\tilde{\varepsilon}_c\}) \quad 15.7(19)$$

annimmt, die zeitlichen Ableitungen der Spannungen in allen Elementen, die in $\{\tilde{\sigma}\}$ zusammengefaßt sind. Damit findet sich aber der Spannungszustand $\{\tilde{\sigma}_{II}\}$, der sich nach einem Zeitintervall Δt einstellt, aus

$$\{\tilde{\sigma}_{II}\} = \{\tilde{\sigma}_I\} + \{\tilde{\sigma}\} \Delta t. \quad 15.7(20)$$

Ausgehend von $\{\tilde{\sigma}_{II}\}$ wird das gleiche Verfahren wiederholt, woraus der Spannungszustand nach einem weiteren Zeitintervall folgt, bis schließlich der asymptotische Zustand praktisch erreicht ist. Ist dieser $\{\tilde{\sigma}_{\infty}\}$, so ist

$$\{\tilde{\sigma}_0\} = \{\tilde{\sigma}_{\infty}\} - \{\tilde{\sigma}_I\} \quad 15.7(21)$$

der Restspannungszustand, wenn die Beanspruchung des Bauteiles verschwindet und er wieder auf Umgebungstemperatur gebracht wird.

15.8 Kriechen unter variablen Bedingungen

Unter 15.5 wurden die Gesetze des viskoplastischen Verhaltens unter der Voraussetzung zeitlich konstanter Bedingungen angegeben. Im praktischen Betriebe werden sich aber Temperatur und Spannungszustand zeitlich verändern. Daraus entsteht das Problem, wie die Lebensdauer eines Bauteiles in diesem Falle vorausgesagt werden kann, indem man sich auf Versuchsergebnisse stützt, die bei konstanten T und σ gewonnen wurden. Diese Frage kann nur aufgrund einer *Hypothese* beantwortet werden, deren es mehrere gibt, vgl. etwa [14–17]. Von Extremfällen abgesehen, liefern sie ähnliche Ergebnisse, und da man ohnehin große Sicherheitsfaktoren einrechnen muß, ist es zweckmäßig, mit der „strain hardening“-Hypothese zu arbeiten, die aussagt, daß die Werkstoffschädigung wesentlich von der Kriechdehnung abhängt. Die Hypothese ist plausibel und scheint mit der Beobachtung gut übereinzustimmen, kann allerdings Relaxationsvorgänge bei Entlastung (Rückkriechen) nicht wiedergeben. Dieser Fehler liegt auf der sicheren Seite; würde man dies in die Betrachtung einschließen, so müßte man auch bei Wiederbelastung bis zu einem gewissen Grade ein erneutes Primärkriechen einführen, was unvermeidbare Komplikationen ergäbe. — Nachfolgend sollen unter den Spannungen und Dehnungen immer sogleich die Vergleichswerte verstanden werden.

Ist der Werkstoff im Zeitpunkt t einer Temperatur T und einer Spannung σ unterworfen, so kriecht er im Zeitintervall dt um

$$d\varepsilon_c = \dot{\varepsilon}_c(\sigma, T) dt. \quad 15.8(1)$$

Ist nun ε_{cB}^* die in Abb. 15.5.1 angegebene ideelle Kriechbruchdehnung, und setzt man die Werkstoffschädigung der Kriechdehnung proportional, so ist die durch folgende Beziehung definierte Größe D ein unmittelbares Maß für die Werkstoffschädigung:

$$dD \equiv \frac{d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cB}^*} = \frac{\dot{\varepsilon}_c dt}{\dot{\varepsilon}_c t_B(\sigma, T)} = \frac{dt}{t_B(\sigma, T)}. \quad 15.8(2)$$

Offenbar ist die Lebensdauer aufgebraucht wenn die so definierte Größe den Wert 1 erreicht. Wenn man t_B aus dem Ansatz 15.5(4) berechnet, folgt

$$t_B = t_n \left[\frac{\sigma_{B3}(T)}{\sigma} \right]^{m(T)}, \quad 15.8(3)$$

mithin

$$dD = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{B3}} \right)^m \frac{dt}{t_n}, \quad D = \int_0^t \left(\frac{\sigma}{\sigma_{B3}} \right)^m \frac{dt}{t_n}. \quad 15.8(4)$$

Mit bekanntem zeitlichem Verlauf von σ und T , somit auch σ_{B3} und m , läßt sich dieses Integral berechnen, und die Lebensdauer t_L ist gegeben durch die Bedingung

$$\int_0^{t_L} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{B3}} \right)^m \frac{dt}{t_n} = 1. \quad 15.8(5)$$

Es werde ein von 0 bis 1 variierender Zeitparameter x eingeführt und angegeben, daß während eines anteiligen Zeitintervalles dx die Temperatur T und die Spannung σ betrage. Die Kurven $T(x)$ und $\sigma(x)$ (Abb. 15.8.1) können also aufgefaßt werden als die *durchschnittlichen* Verteilungen von T und σ über der Zeit bei der vorgesehenen Betriebsweise. Dann ist 15.8(4) auch in folgender Form darstellbar:

$$J \equiv \int_0^1 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{B3}} \right)^m dx, \quad D = \frac{t}{t_n} J. \quad 15.8(6)$$

Da σ_{B3} und m von T abhängen, ist der Integrand berechenbar, sobald die Funktionen $T(x)$, $\sigma(x)$ gegeben sind, mithin also auch J . Damit läßt sich angeben, wie über längere Betriebsperioden D mit t zunimmt.

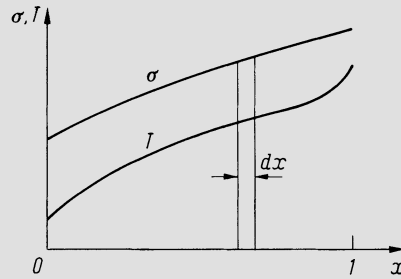


Abb. 15.8.1. Darstellung der Häufigkeit des Auftretens von Spannungen σ und Temperaturen T während des Betriebes; dx ist die Zeitdauer, während der σ und T herrschen, wenn die gesamte Betriebszeit durch $x = 1$ gekennzeichnet wird

Ein besonderes Problem ist das der Verkürzung der Lebensdauer eines Bauteiles durch die Spannungsspitze an einer Kerbe. Abb. 15.8.2 zeigt die Situation. Es wird angenommen, daß die Zonen erhöhter Spannung derart klein seien, daß die Kriechgeschwindigkeit praktisch allein durch die konstante Spannung σ_0 diktiert werde. Es seien ϵ_{e0} und $\epsilon_{e\max}$ die elastischen Dehnungen, die sich entsprechend den Spannungen σ_0 und σ_{\max} sofort einstellen. Dann setzt das Kriechen ein und zwar steigt nach Voraussetzung die Gesamtdehnung in Funktion der Zeit für alle Fasern gleich rasch an und wird daher im Diagramm durch zwei parallele Geraden dargestellt. Die Kriechgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_c$ der ursprünglich mit σ_{\max} belasteten Faser ist

$$\dot{\epsilon}_c = \frac{\epsilon_{cB}^*}{t_{B0}} - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad 15.8(7)$$

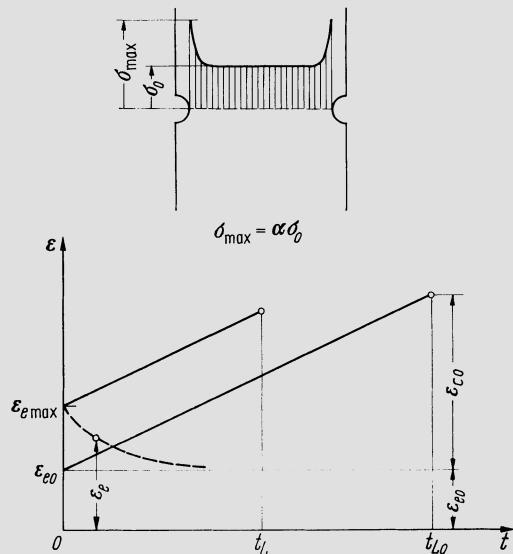


Abb. 15.8.2. Schematische Darstellung der Verhältnisse beim viskosen Abbau einer Spannungsspitze

Das erste Glied ist die Kriechgeschwindigkeit im Gesamtquerschnitt, das zweite — das positiv ist, weil $d\sigma/dt < 0$ — die zusätzliche Kriechgeschwindigkeit durch allmähliches Zurückgehen des elastischen Anteils ε_e . Es möge gesetzt werden

$$S \equiv \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \varphi \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\varepsilon_{c0}}, \quad \tau \equiv \frac{t}{t_{B0}}, \quad 15.8(8)$$

wo t_{B0} die Lebensdauer entsprechend σ_0 ist. Wenn man beachtet, daß $\dot{\varepsilon}_{c0} = \varepsilon_{cB} t_{B0}$, läßt sich Gl. 15.8(7) auch schreiben

$$\varphi = 1 - \frac{t_{B0}}{E\varepsilon_{cB}^*} \frac{d\sigma}{dt} = 1 - \frac{\sigma_0 t_{B0}}{E\varepsilon_{cB}^*} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) = 1 - \frac{\varepsilon_{e0}}{\varepsilon_{cB}^*} \frac{dS}{d\tau}. \quad 15.8(9)$$

Andererseits führt das Gesetz Gl. 15.5(3) auf

$$\varphi = S^n. \quad 15.8(10)$$

Aus der Gleichsetzung von 15.8(9) und (10) entsteht

$$\frac{dS}{d\tau} + \frac{\varepsilon_{cB}^*}{\varepsilon_{e0}} S^n - \frac{\varepsilon_{cB}^*}{\varepsilon_{e0}} = 0. \quad 15.8(11)$$

Es sei weiter

$$\frac{\varepsilon_{cB}^*}{\varepsilon_{e0}} \equiv f, \quad \vartheta \equiv f\tau. \quad 15.8(12)$$

Dann geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{dS}{d\vartheta} + S^n - 1 = 0 \quad 15.8(13)$$

mit der Anfangsbedingung

$$S(0) = \alpha, \quad 15.8(14)$$

wo $\alpha = \sigma_{\max}/\sigma_0$ der Formfaktor der Kerbe ist. Ihre Lösung ist in implizierter Form gegeben durch

$$\vartheta = \int_S^\alpha \frac{d\vartheta}{S^n - 1}, \quad 15.8(15)$$

denn dann wird in der Tat $\vartheta = 0$ wenn $S = \alpha$.

Nun ist weiter unter Verwendung von 15.8(3)

$$\frac{t_B}{t_{B0}} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^m = S^{-m}, \quad 15.8(16)$$

so daß 15.8(2) auch geschrieben werden kann

$$dD = \frac{S^m}{t_{B0}} dt = S^m d\tau. \quad 15.8(17)$$

Den Wert $D = 1$ erhält man bei einem Wert $\tau = \tau_L$, der gegeben ist durch

$$\int_0^{\tau_L} S^m d\tau = 1. \quad 15.8(18)$$

Die Größe $\tau_L = t_L/t_{B0}$ ist nichts anderes als die relative Verkürzung der Lebensdauer, die dadurch eintritt, daß ursprünglich eine Spannungsspitze vorhanden war, die erst allmählich abgebaut wurde; $\tau_L = 0,7$ bedeutet also z.B., daß die Lebensdauer auf 70% vermindert wird. Gl. 15.8(15) liefert den Zusammenhang $S(\vartheta)$, über 15.8(12) also auch $S(\tau)$ und damit 15.8(18) τ_L . Die in die Rechnung eingehenden Parameter sind α , m , n und f . Abb. 15.8.3 stellt so erhaltene Ergebnisse dar.

Man beachte, daß eine Spannungskonzentration in eng begrenztem Bereich vorausgesetzt wurde. *Beglinger* [18] führt eine allgemeinere Untersuchung aus über den Abbau von Spannungsspitzen in stabförmigen Körpern bei Biegebeanspruchung, die diese Voraussetzung fallenläßt.

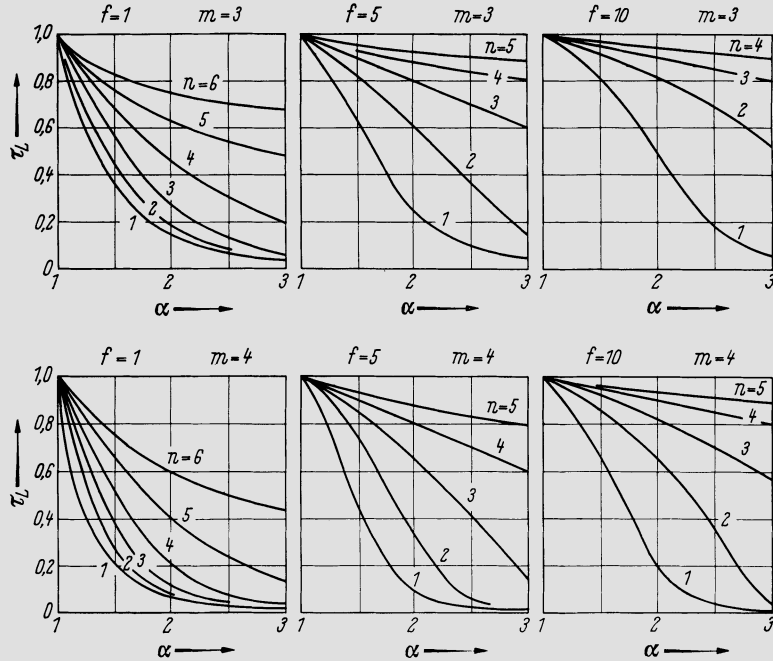


Abb. 15.8.3. Faktor τ_c , der die Verminderung der Lebensdauer durch asymptotischen Abbau einer Spannungsspitze kennzeichnet

Ein verwandtes Problem ist das der *Relaxation*, wie sie insbesondere bei vorgespannten Bolzen in erhöhter Temperatur auftritt. Der Körper verändert dabei seine Länge nicht, doch sinkt die Vorspannung infolge des Kriechens allmählich ab. Es gilt wiederum Gl. 15.8(7), doch ist $\dot{\epsilon} = 0$, folglich

$$\dot{\epsilon}_c + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = 0. \tag{15.8(19)}$$

Für $\dot{\epsilon}_c$ benutzen *Odqvist* und *Hult* [19] eine gegenüber dem einfachen Potenzansatz erweiterte Formel. Es ist in diesem Zusammenhang notwendig, das Primärkriechen zu berücksichtigen, denn die Spannung fällt infolge dieses Effektes rascher ab. Die Formel lautet daher

$$\dot{\epsilon}_c = K\sigma^n \epsilon_c^{-\mu}. \tag{15.8(20)}$$

Dieser Ansatz entspricht der Dehnungsverfestigungshypothese. Mit μ ist ein zusätzlicher Exponent eingeführt, der die Anpassung an die Versuchsergebnisse erlaubt. — Nun ist die Gesamtdehnung die Summe aus elastischer und Kriechdehnung, diese letztere also

$$\epsilon_c = \epsilon - \frac{\sigma}{E}. \tag{15.8(21)}$$

Da aber ϵ konstant gleich der Anfangsdehnung σ_0/E ist, schreibt sich 15.8(21) auch

$$\epsilon_c = \frac{1}{E} (\sigma_0 - \sigma). \tag{15.8(22)}$$

Wenn man dies in Gl.15.8(20) einsetzt und die so entstehende Beziehung wieder in 15.8(19), erhält man

$$\frac{d\sigma}{dt} = -KE^{\mu+1}\sigma^n(\sigma_0 - \sigma)^{-\mu}. \quad 15.8(23)$$

Dies führt auf die Integralform

$$\int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{(\sigma_0 - \sigma)^\mu}{\sigma^n} d\sigma = KE^{\mu+1}t. \quad 15.8(24)$$

Links steht ein in Funktion von σ berechenbarer Ausdruck, die rechte Seite ist proportional t . Damit ist der gesuchte Zusammenhang zwischen σ und t aufgefunden.

15.9 Zyklische Beanspruchung ohne Kriechen

Bei zyklischer Beanspruchung tritt eine Ermüdung des Werkstoffes ein, die man heute zurückführt auf wiederholte plastische Verformungen. Im Gebiet mäßiger Temperatur, wo das Material noch nicht kriecht, besitzt man besonders nach den grundlegenden Arbeiten von *Manson* und seinen Mitarbeitern einen verhältnismäßig guten Überblick über die Erscheinungen, vgl. darüber die zusammenfassende Darstellung in [6], an die wir uns im wesentlichen halten.

Es werde zunächst *einachsiger Spannungszustand* vorausgesetzt und eine zyklische Beanspruchung betrachtet, bei der plastische Verformung auftritt. Abb. 15.9.1a veranschaulicht den Beginn des Vorganges im Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Der Vorgang kann zunächst nicht streng zyklisch sein, selbst wenn die von außen aufgeprägten Bedingungen es sind, was schon dadurch gegeben ist, daß die Charakteristika des Werkstoffes — insbesondere seine Fließgrenze — unter dem Einfluß der plastischen Verformungen sich verändern. Geglühte Stähle und auch austenitische Werkstoffe haben im allgemeinen die Eigenschaft, sich bei wiederholter plastischer Verformung zu verfestigen, d. h. σ_F wird größer. Kaltgereckte Stähle zeigen ein gegenteiliges Verhalten. — Wird der Beanspruchungszyklus sehr oft wiederholt, so stellt sich asymptotisch auch ein bestimmter Spannungs-Verformungs-Zyklus ein (Abb. 15.9.1 b). Er hat bei zähen Werkstoffen (gleiches σ_F für Zug und Druck) stets den in der Figur dargestellten Charakter, d. h. die Spannung bewegt sich zwischen $-\sigma_A$ und $+\sigma_A$ (Amplitudenwert), denn die plastische Verformung

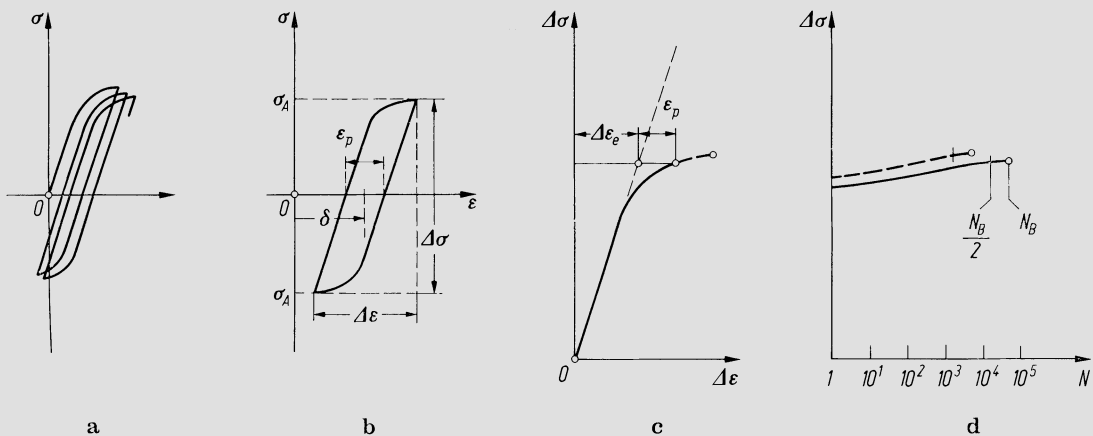


Abb. 15.9.1. a) Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Anfangsphase bei zyklischer, überelastischer Beanspruchung; b) Spannungs-Dehnungs-Diagramm im asymptotischen Grenzfall; c) Spannungsbereich $\Delta\sigma$ in Funktion des Dehnungsbereiches $\Delta\epsilon$ für den asymptotischen Zyklus; d) $\Delta\sigma$ für festes $\Delta\epsilon$ während des Überganges zum asymptotischen Zustand

muß ja bei Stauchung und Streckung gleich groß sein. Bevor dies erreicht ist, ist der asymptotische Übergang nicht abgeschlossen, in dessen Verlauf sich im allgemeinen plastische Verformungen aufsummieren, derart, daß der Mittelpunkt des Zyklus schließlich nach $\varepsilon = \delta$ zu liegen kommt.

Der sich einstellende Zyklus ist gekennzeichnet durch einen *Spannungsbereich* $\Delta\sigma = 2\sigma_A$ und einen *Dehnungsbereich* $\Delta\varepsilon$. Dieser letztere zerfällt in einen elastischen Anteil $\Delta\varepsilon_e$ und einen plastischen Anteil ε_p gemäß

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_e + \varepsilon_p, \quad 15.9(1)$$

wo

$$\Delta\varepsilon_e = \frac{\Delta\sigma}{E}. \quad 15.9(2)$$

Man beachte, daß bei Plastizität Dehnung und Dehnungsbereich identisch werden, so daß nur ε_p geschrieben werden muß.

Abb. 15.9.1c stellt $\Delta\sigma$ in Funktion von $\Delta\varepsilon$ dar. Das Diagramm ist folgendermaßen aufzufassen. Führt man Versuche mit verschieden starker zyklischer Verformung $\Delta\varepsilon$ durch und trägt einander zugeordnete $\Delta\varepsilon$ und $\Delta\sigma$ auf, so erhält man das dargestellte Diagramm, das nicht identisch ist mit einem üblichen Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Dabei ist zunächst vorausgesetzt, der Versuch werde so durchgeführt, daß eine Variation der Dehnung zwischen $-\Delta\varepsilon/2$ und $+\Delta\varepsilon/2$ erzwungen werde, so daß also $\delta = 0$ ($\Delta\varepsilon$ ist konstant).

Abb. 15.9.1d veranschaulicht den Übergang, d. h. sie gibt $\Delta\sigma$ in Funktion der Anzahl N der Zyklen. Der Anstieg der Kurven kennzeichnet die Verfestigung. N_B ist die Zyklenzahl bis zum Bruch. Bei $N = N_B/2$ und oft schon sehr viel früher ist der asymptotische Endwert $\Delta\sigma$ praktisch erreicht.

Wichtig ist nun offensichtlich die Kenntnis der Zyklenzahl N_B . Darüber konnten aufgrund umfangreicher systematischer Messungen Unterlagen beschafft werden. Für jeden Versuch sind gemäß Abb. 15.9.2 links $\Delta\varepsilon_e$ und ε_p mit dem gesamten $\Delta\varepsilon$ bekannt und ebenso

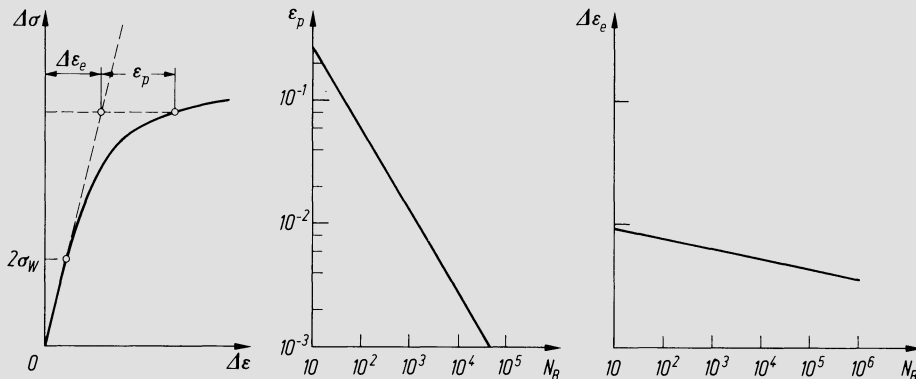


Abb. 15.9.2. Elastischer Dehnungsbereich $\Delta\varepsilon_e$ und plastische Dehnung ε_p in Funktion der Zyklenzahl N_B bis zum Bruch. Nach Manson [6]

das zugehörige N_B . Trägt man nun für sich die ε_p und $\Delta\varepsilon_e$ in Funktion von N_B in doppelt-logarithmischem Maßstab auf, so ordnen sich die Punkte auf Geraden, wie in Abb. 15.9.2 dargestellt. Das bedeutet, daß man Potenzansätze der Form

$$\varepsilon_p = MN_B^z, \quad \Delta\varepsilon_e = \frac{G}{E} N_B^\gamma \quad 15.9(3)$$

machen kann mit M und G als Koeffizienten und z und γ als Exponenten, die aus den Versuchen folgen. Zwischen der Lage dieser Geraden und konventionellen statischen

Festigkeitswerten eines Werkstoffes konnte eine Korrelation gefunden werden. Es seien σ_B und σ_{B0} die Zugfestigkeit und die effektive Bruchspannung gemäß Abb. 15.4.1 und σ_W die *Dauerwechselfestigkeit*, d. h. die Spannungsamplitude, die der Werkstoff bei reiner Wechselbeanspruchung unbeschränkt aufnehmen kann. Diese Grenze wird etwa bei einer Zyklenzahl von $N_B = 10^7$ erreicht. Schließlich sei D die *Duktilität* des Werkstoffes, definiert durch

$$D \equiv \ln(f_0/f_B), \quad 15.9(4)$$

wo f_0 der ursprüngliche Stabquerschnitt, f_B derjenige beim Bruch im elementaren Zugversuch ist. Dann gelten folgende Korrelationsgleichungen:

$$\Delta\varepsilon_e(N_B = 0,25) = 2,5\sigma_{B0}/E, \quad 15.9(5)$$

$$\Delta\varepsilon_e(N_B = 10^6) = 0,9\sigma_B/E, \quad 15.9(6)$$

oder

$$\Delta\varepsilon_e(N_B = 10^7) = 2\sigma_W/E. \quad 15.9(6')$$

Durch 15.9(5) und (6) oder (5) und (6') ist die Gerade $\Delta\varepsilon_e(N_B)$ (doppeltlogarithmisch) festgelegt. Die Verwendung von 15.9(6') ist vorzuziehen, wenn man gute Unterlagen über σ_W hat. Wo nicht, implizieren die Gln. 15.9(6) und (6') eine Relation, die zusammen mit den nachfolgenden Angaben über ε_p die Dauerwechselfestigkeit σ_W abzuschätzen gestattet. Die Korrelationsgleichungen für ε_p lauten

$$\varepsilon_p(N_B = 10) = 0,25D^{0,75}, \quad 15.9(7)$$

$$\varepsilon_p(N_B = 10^4) = \frac{0,0132 - \Delta\varepsilon_e(10^4)}{1,91}. \quad 15.9(8)$$

Dieses Verfahren läßt sich auch gleichungsmäßig ausdrücken. Bei Verwendung von 15.9(5) bis (8) erhält man

$$G = \frac{9}{4} \sigma_B \left(\frac{\sigma_{B0}}{\sigma_B} \right)^{0,9}, \quad 15.9(9)$$

$$\gamma = -0,083 - 0,166 \log \left(\frac{\sigma_{B0}}{\sigma_B} \right), \quad 15.9(10)$$

$$M = 0,827D \left[1 - 82 \left(\frac{\sigma_B}{E} \right) \left(\frac{\sigma_{B0}}{\sigma_B} \right)^{0,179} \right]^{-1/3}, \quad 15.9(11)$$

$$z = -0,52 - \frac{1}{4} \log D + \frac{1}{3} \log \left[1 - 82 \left(\frac{\sigma_B}{E} \right) \left(\frac{\sigma_{B0}}{\sigma_B} \right)^{0,179} \right], \quad 15.9(12)$$

während die Verwendung von 15.9(5), (6'), (7), (8) auf

$$G = 2,5 \sigma_W \left(\frac{\sigma_{B0}}{\sigma_W} \right)^{0,92}, \quad 15.9(13)$$

$$\gamma = -0,013 - 0,13 \log \left(\frac{\sigma_{B0}}{\sigma_W} \right), \quad 15.9(14)$$

$$M = 0,827D \left[1 - 166 \left(\frac{\sigma_W}{E} \right) \left(\frac{\sigma_{B0}}{\sigma_W} \right)^{0,394} \right]^{-1/3}, \quad 15.9(15)$$

$$z = -0,52 - \frac{1}{4} \log D + \frac{1}{3} \log \left[1 - 166 \left(\frac{\sigma_W}{E} \right) \left(\frac{\sigma_{B0}}{\sigma_W} \right)^{0,394} \right] \quad 15.9(16)$$

führt. Stets folgt dann aus

$$\Delta\varepsilon = MN_B^z + \frac{G}{E} N_B^{\gamma} \quad 15.9(17)$$

der gesuchte Zusammenhang $\Delta\varepsilon(N_B)$, der in $N_B = 10^7$ übergeht in $\Delta\varepsilon_W = 2\sigma_W/E$. Für größeres N_B hält $\Delta\varepsilon$ diesen Wert konstant bei. Als Größenordnungen findet man $z \approx -0,6$, $\gamma \approx -(0,06 \div 0,16)$. Ein Anhaltspunkt ist auch $\Delta\varepsilon(N_B = 10^4) \approx 0,01$. Abb. 15.9.3 zeigt ein Beispiel einer so gefundenen Kurve. — Über die Genauigkeit der Korrelation mag Zahlentafel 15.9.1 eine Vorstellung geben. Es sei $\Delta\varepsilon_r$ das nach dieser Rechnung N_B zugeordnete $\Delta\varepsilon$ und $\Delta\varepsilon_m$ der Wert nach Messung. Dann ergibt sich folgendes Bild:

Zahlentafel 15.9.1

N_B	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\Delta\varepsilon_r/\Delta\varepsilon_m$	0,63–1,4	0,87–1,3	1,0–1,3	0,9–1,4	0,8–1,5

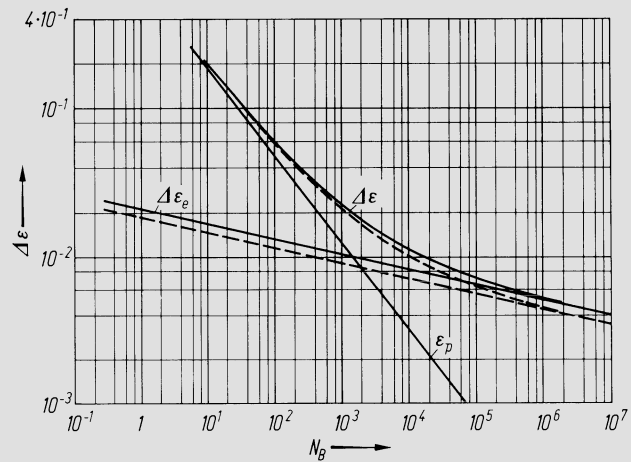


Abb. 15.9.3. Elastischer Dehnungsbereich $\Delta\varepsilon_e$, plastische Dehnung ε_p und Gesamtdehnungsbereich $\Delta\varepsilon$ in Funktion der Zyklenzahl N_B bis zum Bruch; ausgezogen einachsiger, gestrichelt dreiachsiger Spannungszustand. Nach Manson [6]

Diese Unterlagen setzen an sich die Mitteldehnung $\delta = 0$ voraus. Die Messungen zeigen aber, daß für $N_B \geq 10^2$ der Einfluß dieser Größe verschwindet, d. h. er ist im ganzen praktisch interessierenden Bereich unwesentlich.

Bemerkenswert ist, daß diese Korrelation auch erlaubt, die Kurve $\Delta\sigma = f(\Delta\varepsilon)$ zu rekonstruieren. Aus 15.9(3) folgt durch Elimination von N_B

$$\varepsilon_p = M \left(\Delta\varepsilon_e \frac{E}{G} \right)^{z/\gamma} \tag{15.9(18)}$$

Wenn man beachtet, daß $\Delta\varepsilon_e = \Delta\sigma/E$ und einsetzt in 15.9(1), folgt

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + M \left(\frac{\Delta\sigma}{G} \right)^{z/\gamma} \tag{15.9(19)}$$

Zur Übertragung dieser Ergebnisse auf den *mehrachsig*en Spannungszustand gibt Manson [6] das folgende Verfahren an, das zwar begründet wird, aber nicht ohne hypothetische Annahme auskommt. Während einachsigt gilt $\Delta\varepsilon_e = \Delta\sigma/E$, ist mehrachsigt

$$\Delta\varepsilon_e = \frac{2}{3} (1 + \nu) \frac{\Delta\sigma}{E} = 0,867 \frac{\Delta\sigma}{E} \tag{15.9(20)}$$

Die Kurve $\Delta\varepsilon_e(N_B)$ ist also zu ersetzen durch eine, die um den Faktor 0,876 tiefer liegt, und demgemäß korrigiert sich auch die Kurve $\Delta\varepsilon(N_B)$, vgl. die gestrichelte Eintragung in Abb. 15.9.3. Die maßgebende Vergleichsdehnung, auf die diese berichtigte $\Delta\varepsilon$ -Kurve anzuwenden ist, beträgt

$$\Delta\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{[\Delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]^2 + [\Delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)]^2 + [\Delta(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)]^2} \tag{15.9(21)}$$

Die unter der Wurzel in eckiger Klammer erscheinenden Größen sind die größten während eines Zyklus auftretenden Hauptdehnungsdifferenzen, von denen vorausgesetzt werden muß, daß sie alle gleichzeitig auftreten.

Häufig tritt auch der Fall einer zyklischen Beanspruchung auf, die zwar die Dauerwechselfestigkeit überschreitet, aber doch im elastischen Bereich bleibt. — Strenggenommen müßte man von einem *quasielastischen Bereich* reden, denn die reine Tatsache des Bruches nach einer endlichen Zyklenzahl beweist schon das Vorhandensein von wenn auch sehr kleinen plastischen Verformungen. — Abb. 15.9.4 stellt den allgemeinen Fall dieser Art dar. Der Mittelspannung σ_m überlagert sich eine Spannungsamplitude σ_A .

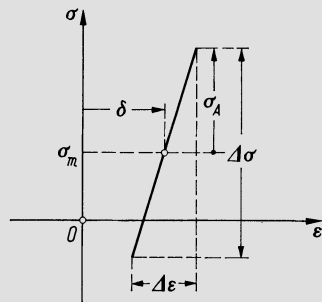


Abb. 15.9.4. Spannungs-Dehnungs-Diagramm für zyklische Beanspruchung im elastischen Bereich

Außerdem kann eine einmalige anfängliche Plastifikation auftreten, wie die mittlere Dehnung δ zeigt. Ausgangspunkt für die Behandlung dieses Falles ist das Dauerwechselfestigkeitsdiagramm, auch Goodman-Diagramm genannt (Abb. 15.9.5). In der Darstellungsweise links zeigt es in Funktion von σ_m diejenigen Grenzwerte der Oberspannung $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_A$ und der Unterspannung $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_A$, die eben noch während einer beliebig großen Zyklenzahl auftreten können. Die dünn eingetragenen Kurven entsprechen den Versuchsergebnissen. Üblicherweise schneidet man aber den praktisch ohnehin nicht verwendbaren Bereich über σ_F ab und ersetzt die Linien durch einen entsprechenden Polygonzug, wie mit dickem Strich angegeben. Oft bevorzugt man heute die rechts angegebene Darstellungsart, die unmittelbar σ_A in Funktion von σ_m wiedergibt. Die dick durchgezogene Linie entspricht dem Polygonzug links. Auf der Ordinatenachse erscheint

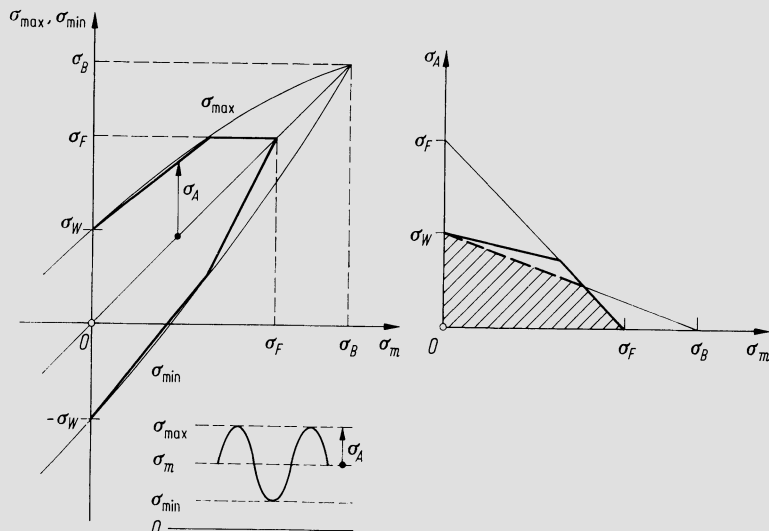


Abb. 15.9.5. Dauerwechselfestigkeitsdiagramm (Goodman-Diagramm) in zwei verschiedenen Darstellungsarten

die Dauerwechselfestigkeit σ_W . Verbindet man diesen Punkt gradlinig mit σ_B auf der Abszisse, so entsteht die gestrichelte Grenzlinie, durch die man oft die wirkliche ersetzt, eine Vereinfachung, die auf der sicheren Seite liegt. In dieser Näherung kennzeichnet dann für positive σ_m die schraffierte Fläche den Bereich von Beanspruchungsfällen, bei denen unbegrenzte Lebensdauer gewährleistet ist.

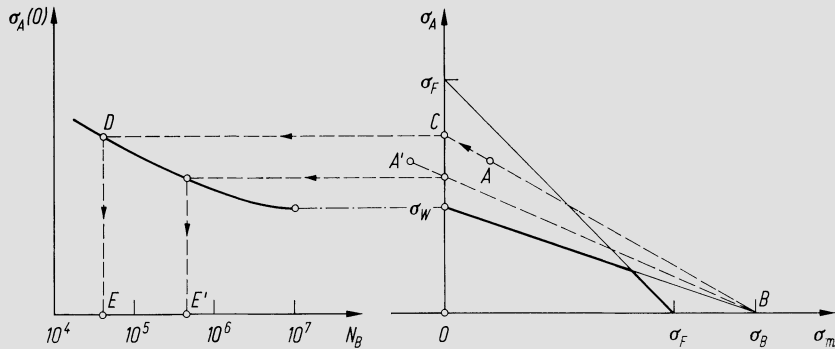


Abb. 15.9.6. Diagramm zur Bestimmung der Zeitwechselfestigkeit nach Manson [6]

Dieses Diagramm benutzt Manson [6] als Ausgangspunkt, um daraus auf intuitivem Wege ein Verfahren zur Behandlung von Fällen höherer Beanspruchung zu gewinnen. Abb. 15.9.6 zeigt rechts ein solches Diagramm, in dem Punkt A einen Beanspruchungsfall σ_m, σ_A representiert, der über der Grenzkurve liegt. Der Strahl BAC liefert dann in C einen Spannungswert, der offensichtlich das Analogon zu σ_W ist und interpretiert wird als die äquivalente Spannungsamplitude $\sigma_A(0)$, die bei $\sigma_m = 0$ die gleiche Werkstoffanstrengung liefert wie der wirkliche Beanspruchungszustand σ_m, σ_A . Trägt man also links die Spannungsamplitude $\sigma_A(0)$ in Funktion der Zyklenzahl N_B bis zum Bruch auf, so liefert der Linienzug CDE in E das gesuchte N_B . — Die Kurve $\sigma_A(0)$ in Funktion von N_B ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung $\Delta\varepsilon_e(N_B)$ nach Abb. 15.9.3, denn es ist

$$\sigma_A(0) = \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{E \Delta\varepsilon_e(N_B)}{2}. \quad 15.9(22)$$

Man beachte, wie die gleiche Konstruktion im Falle $\sigma_m < 0$ verläuft; von Punkt A' kommt man so auf Punkt E' , und es ergibt sich in Übereinstimmung mit der Erfahrung, daß die Lebensdauer hierbei wesentlich größer wird als bei positiver Mittelspannung. Bei mehrachsigen Spannungszustand sind in dieser Konstruktion die Vergleichsspannungen zu verwenden. — Liegt der gegebene Punkt A unterhalb der Grenzlinie des Dauerwechselfestigkeitsdiagrammes, so hat man den Fall unbegrenzter Lebensdauer vor sich. Liegt er über der Verbindungsgeraden der σ_F auf Abszisse und Ordinate, so wird die Plastifikation so groß, daß die Ausgangsvoraussetzungen zerstört sind. Die Dehnung δ (Abb. 15.9.4) ist nur insofern von Belang, daß die Werkstoffgrößen σ_F und σ_W im allgemeinen durch eine vorgängige Plastifizierung beeinflußt werden.

Alles dies setzt voraus, daß der Werkstoff nicht zusätzlich durch *korrosive Einwirkungen* versprödet. Das ist z. B. der Fall bei Naßdampfturbinen unter dem Einfluß der Korrosion durch das Kondensat. In Abb. 15.9.7 gilt etwa der Linienzug a für den ungeschädigten Werkstoff, das Kurvenband b für den Werkstoff unter Betriebsbedingungen im Naßdampf, vgl. Haas [20]. Man erkennt, daß σ_W um den Faktor 0,31–0,41 abnimmt. Allerdings bezieht sich a auf die *Biegewechselfestigkeit* bei kleinen Probenabmessungen, was etwas höhere Werte liefert, vgl. die Ausführungen unter 15.11. Trotzdem wird man für den reinen Korrosionseinfluß vorsichtigerweise einen Faktor 0,35 einsetzen müssen.

Zweckmäßig wird man in einem solchen Falle die ganze Kurve $\varepsilon(N_B)$ (z. B. Abb. 15.9.3) um diesen Faktor herabsetzen, was im doppeltlogarithmischen Maßstab auf eine Parallelverschiebung hinausläuft.

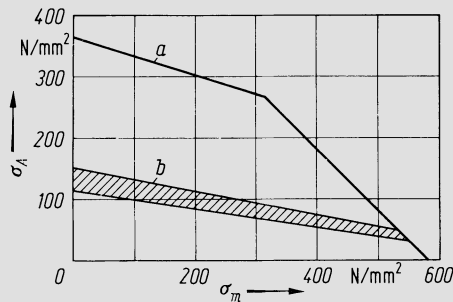


Abb. 15.9.7. Dauerwechselfestigkeitsdiagramm für Biegespannung eines Stahles für ND-Dampfturbinenläufer, *a* neuerwertiger Werkstoff, *b* bei korrosivem Einfluß von Naßdampf

Abschließend sei noch eine grundsätzliche Bemerkung beigefügt. Da Ermüdung auf wiederholte plastische Verformung zurückgeführt wird, wäre die Annahme naheliegend, daß unterhalb σ_W keinerlei Plastizität mehr auftritt. Indessen beweist die Erscheinung der *Werkstoffdämpfung*, die zwar sehr klein ist aber doch eindeutig beobachtet wird, daß auch im Bereich sehr kleiner Spannungen eine *Hysteresis* auftritt, die bei reiner Elastizität nicht vorhanden sein könnte. Man muß sich also vorstellen, daß auch in diesem Gebiet kleinste plastische Verformungen stattfinden, die mikroskopische Werkstoffschädigungen herbeiführen. Diese verschwinden aber allmählich wieder durch einen intermolekularen Ausheilungsprozeß. Die Dauerwechselfestigkeit wird dann überschritten, wenn der Ausheilungsprozeß mit der Neuentstehung von Fehlstellen nicht mehr schrittzuhalten vermag.

15.10 Zyklische Beanspruchung mit Kriechen

Im Bereich höherer Temperatur, wo das Kriechen auftritt, sind die Unterlagen zur Beurteilung der Lebensdauer unter zyklischer Beanspruchung unsicherer. Abschn. 15.4 behandelt das zeitunabhängige plastische Verhalten, Abschn. 15.5 das zeitabhängige viskoplastische, und es geht aus diesen Ausführungen hervor, daß die beiden Erscheinungen eine völlig verschiedene theoretische Struktur aufweisen. Trotzdem ist z. B. von *Tilly* [17] vorgeschlagen worden, auch im Bereich hoher Temperatur nur eine Art anelastischer Verformung einzuführen und diese als Kriechen zu bezeichnen. *Franklin* [21] übernimmt diese Betrachtungsweise, unterscheidet aber zwei Typen, nämlich *natürliches Kriechen* (wie unter 15.5 besprochen) und *Zwangskriechen* (forced creep). Letzteres betrachtet er als eine dem Primärkriechen verwandte Erscheinung, wobei die Spannungsumlagerungen innerhalb der mikroskopischen Werkstoffstruktur zu einer höheren Kriechgeschwindigkeit führen als beim stationären normalen Kriechen. Diese Interpretation ist insofern fragwürdig, als die Geschwindigkeit des Zwangskriechens um Zehnerpotenzen höher liegen kann als die des normalen, was mit dieser Vorstellung kaum vereinbar ist. Die praktische Verwendbarkeit dieses Konzeptes wird indessen durch diese Interpretationsfrage nicht berührt.

Der theoretisch richtigste Weg besteht wohl darin, anelastisches Verhalten aufzufassen als ein sehr komplexes Phänomen, das in *Grenzfällen* übergeht in die zeitunabhängige Plastizität einerseits, die reine Viskoplastizität andererseits. Bei mäßiger Temperatur hat man den Grenzfall der zeitunabhängigen Plastizität vor sich, während bei höherer der allgemeine Fall vorliegt, der mit dem Zwangskriechen zu identifizieren ist und unter quasistatischen Verhältnissen in die gewöhnliche Viskoplastizität übergeht. Nun kann aber der allgemeine Fall sicher näherungsweise aufgefaßt werden als eine Überlagerung der beiden Grenzfälle, die theoretisch übersichtlicher sind.

Zur Vorbestimmung der Zyklenzahl N_B bei hoher Temperatur hat *Manson* [22] zunächst die 10%-Regel angegeben, die darauf hinausläuft, die für tiefe Temperatur gültige Relation $\epsilon_p = f(N_B)$ (z. B. Abb. 15.9.2 und 3) zu übernehmen, die Kurve aber um eine Zehnerpotenz nach links zu schieben, so daß also ein gegebenes ϵ_p einem N_B entspricht, das nur 10% des Wertes bei tiefer Temperatur beträgt. Dieses Verfahren hat sich aber doch als etwas zu grob erwiesen.

Einfach die unter 15.8 angegebene Methode zur Lebensdauerberechnung auf den einzelnen Zyklus anzuwenden, ist deshalb ungenügend, weil diese Betrachtungsweise quasi-statisch ist. *Spera* [23—25] hat sie daher entsprechend zu ergänzen versucht. Eine entscheidende Verbesserung brachte die von *Manson* und seinen Mitarbeitern stammende *Methode der Unterteilung des Dehnungsbereiches* (strain range partitioning method) vgl. [26—29]. Zu ihrem Verständnis betrachte man die in Abb. 15.10.1 dargestellten Zyklen (stets ist ϵ die Abszisse, σ die Ordinate). Der Einfachheit halber stelle man sich einen Probestab vor, welcher der jeweils dargestellten zyklischen Beanspruchung unterworfen wird. Die Dehnungsbereiche $\Delta\epsilon$ sind durch zwei Indices gekennzeichnet; dabei verweist p auf zeitunabhängige Plastizität, c auf Viskoplastizität (creep). Der erste Index charakterisiert die anelastische Verformung bei Zug, der zweite bei Druck. In den Diagrammen sind die viskoplastischen Vorgänge stets durch gestrichelte Linien angegeben.

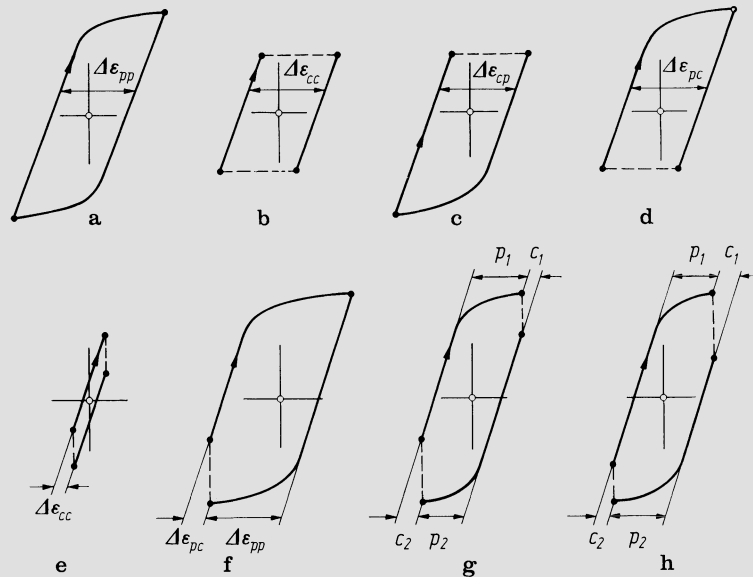


Abb. 15.10.1. Spannungs-Dehnungs-Diagramme verschiedener Zyklen a)–h), bestehend aus elastischen, plastischen und viskoplastischen Anteilen

Im Falle a wird dem Stab ein dehnungskontrollierter Zyklus ohne Haltezeiten aufgezwungen, derart schnell, daß kein merkliches Kriechen auftritt, d. h. die Verformung ist in beiden Richtungen vom Typus p , daher Bezeichnung $\Delta\epsilon_{pp}$.

Fall b ist ein spannungskontrollierter Zyklus mit Haltezeiten auf der höchsten und tiefsten Spannung, derart, daß gleich große Kriechdehnung und Kriechstauchung auftritt, ohne Verformung vom Typus p ; so entsteht $\Delta\epsilon_{cc}$.

Beim Zyklus c findet eine Kriechdehnung bei konstanter Spannung statt, die dann rasch durch eine Verformung des Typus p wieder rückgängig gemacht wird, daher $\Delta\epsilon_{cp}$.

Umgekehrt wird beim Zyklus d rasch eine plastische Dehnung aufgezwungen, die man durch Kriechen unter Druck langsam wieder rückgängig macht, daher $\Delta\epsilon_{pc}$.

Zyklus e ist rein dehnungskontrolliert und hat Haltezeiten bei der größten positiven und negativen Dehnung. Letztere sind so klein, daß keine p -Vorgänge auftreten. Während der Haltezeiten tritt dann Relaxation durch Kriechen auf. Es entsteht $\Delta\epsilon_{cc}$.

Zyklus f entspricht einem technisch häufigen Fall: Ein Körper (z. B. Trommelläufer) werde an seiner Oberfläche rasch erhitzt. Da die Wärmedehnung der äußeren Fasern aber durch den noch kalten Innenteil praktisch verhindert wird, werden diese Fasern plastisch gestaucht. Wenn der Innenteil auch im stationären Zustand wesentlich kälter bleibt, findet jetzt in den Außenfasern ein allmählicher Spannungsabbau durch Kriechen statt (Relaxation). Beim Abstellen und Wiedererkalten werden die äußeren Fasern plastisch gestreckt, ohne Kriechen, da die Temperatur tief ist. Der ganze Dehnungsbereich $\Delta\epsilon$ zerfällt damit in zwei Anteile $\Delta\epsilon_{pc}$ und $\Delta\epsilon_{pp}$, wie dargestellt. Damit ist die Unterteilung des Dehnungsbereiches gewonnen, der für die Methode typisch ist.

Die Zyklen g und h stellen allgemeine Fälle dar, bei denen die Vorgänge c und p je in beiden Richtungen auftreten. Der Unterschied besteht nur darin, daß bei g das Druckkriechen stärker als das Zugkriechen ist, bei h umgekehrt. Es ist im Falle g

$$\Delta\epsilon_{pp} = p_2, \quad \Delta\epsilon_{cc} = c_1, \quad \Delta\epsilon_{pc} = c_2 - c_1,$$

in Falle h

$$\Delta\epsilon_{pp} = p_1, \quad \Delta\epsilon_{cc} = c_2, \quad \Delta\epsilon_{cp} = c_1 - c_2.$$

Zum Verständnis dieser Relationen beachte man, daß die Werkstoffschädigung während eines Zyklus stets aus einer Integration über alle Teilvorgänge folgen muß, wobei ihre Reihenfolge unmaßgeblich ist. Die $\Delta\epsilon_{pc}$ oder $\Delta\epsilon_{cp}$ ergeben sich also daraus, daß man die beiden Kriechdehnungsanteile voneinander subtrahiert und zwar stets den kleineren vom größeren. Ist der größere der Zuganteil, so muß er teilweise durch plastischen Druck rückgängig gemacht werden, und man erhält $\Delta\epsilon_{cp}$ und umgekehrt im entgegengesetzten Falle. Die $\Delta\epsilon_{cc}$ und $\Delta\epsilon_{pp}$ ergeben sich stets als die kleinere der beiden Verformungen vom gleichen Typ.

Die grundlegende Hypothese des Verfahrens, die durch Messungen hinreichend bestätigt wird, ist nun, daß für die ‚reinen Fälle‘ $\Delta\epsilon_{pp}$, $\Delta\epsilon_{cc}$, $\Delta\epsilon_{pc}$, $\Delta\epsilon_{cp}$, je ein einfaches Potenzgesetz $\Delta\epsilon = f(N_B)$ angegeben werden kann. In grober Näherung kann dies sogar in universeller Weise geschehen, entsprechend

$$\frac{\Delta\epsilon_{pp}}{D_p} \approx 0,75N_{pp}^{-0,6}, \quad \frac{\Delta\epsilon_{cc}}{D_c} \approx 0,75N_{cc}^{-0,8}, \tag{15.10(1)}$$

$$\frac{\Delta\epsilon_{pc}}{D_p} \approx 1,25N_{pc}^{-0,8}, \quad \frac{\Delta\epsilon_{cp}}{D_c} \approx 0,25N_{cp}^{-0,8}, \tag{15.10(2)}$$

vgl. Abb. 15.10.2. Dabei ist D_p die aus dem konventionellen Zugversuch nach Gl. 15.9(4) berechnete Duktilität, D_c die aus dem Kriech-Bruch-Versuch bei der maßgebenden

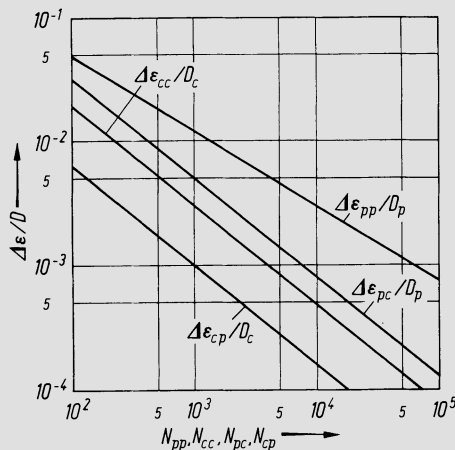


Abb. 15.10.2. Die Größen $\Delta\epsilon_{cc}/D_c$, $\Delta\epsilon_{cp}/D_c$, $\Delta\epsilon_{pc}/D_p$ und $\Delta\epsilon_{pp}/D_p$ in Funktion der ihnen zugeordneten Zyklenzahlen bis zum Bruch, zur Anwendung der Methode der Unterteilung des Dehnungsbereiches

Temperatur berechnete. Das einem gegebenen $\Delta\varepsilon_{pp}$ zugeordnete N_B wird hier mit N_{pp} bezeichnet und analog für die anderen $\Delta\varepsilon$.

Hat nun ein gegebener Zyklus einen gesamten *anelastischen* Dehnungsbereich $\Delta\varepsilon_a$, so läßt sich setzen

$$F_{pp} \equiv \frac{\Delta\varepsilon_{pp}}{\Delta\varepsilon_a}, \quad F_{cc} \equiv \frac{\Delta\varepsilon_{cc}}{\Delta\varepsilon_a}, \quad F_{pc} \equiv \frac{\Delta\varepsilon_{pc}}{\Delta\varepsilon_a}, \quad F_{cp} \equiv \frac{\Delta\varepsilon_{cp}}{\Delta\varepsilon_a}. \quad 15.10(3)$$

Diese F sind offenbar typisch für die Art des Zyklus. Die Zyklenzahl N_B bis zum Bruch ist dann je nach Fall durch eine der folgenden Gleichungen gegeben:

$$\frac{1}{N_B} = \frac{F_{pp}}{N_{pp}} + \frac{F_{cc}}{N_{cc}} + \frac{F_{pc}}{N_{pc}}, \quad \frac{1}{N_B} = \frac{F_{pp}}{N_{pp}} + \frac{F_{cc}}{N_{cc}} + \frac{F_{cp}}{N_{cp}}. \quad 15.10(4)$$

Die N_{pp} , N_{cc} usw. sind aus den Gln. 15.10(1) und (2) bzw. den entsprechenden Kurven zu bestimmen, indem man dort stets die *gesamte* anelastische Dehnung $\Delta\varepsilon_a$ einsetzt, denn die Unterteilung ist mit den F bereits durchgeführt.

Der gesamte Dehnungsbereich $\Delta\varepsilon$, dem dieses N_B zugeordnet ist, beträgt

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_a + \Delta\varepsilon_e, \quad 15.10(5)$$

wo $\Delta\varepsilon_e = \Delta\sigma/E$ im einachsigen Fall, bzw. der Ausdruck Gl. 15.9(20) bei mehrachsigen Spannungszustand, wobei dann auch $\Delta\varepsilon_a$ und seine Komponenten als Vergleichsdehnungen aufzufassen sind.

In dieser Untersuchung tritt die Temperatur nicht explizite in Erscheinung, doch beeinflußt sie einerseits D_c , andererseits aber in hohem Maße den Charakter des Zyklus und damit die F . Die Linie $\Delta\varepsilon_{pp}(N)$ ist grundsätzlich identisch mit der Linie $\varepsilon_p(N)$ des vorangehenden Abschnittes, wird also eigentlich richtiger so bestimmt wie dort angegeben, anstatt nach Gl. 15.10(1), doch sind die Unterschiede meist nur gering. Es ist ein wesentlicher Vorteil des Verfahrens, daß es bei abnehmender Temperatur ganz von selbst in dasjenige übergeht, das unter 15.9 dargestellt wurde, da F_{pp} gegen 1 strebt, alle anderen F gegen Null. — Wenn der anelastische Dehnungsbereich $\Delta\varepsilon_a$ sehr klein wird — etwa unter 10^{-4} — stützt man sich zweckmäßig auf $\Delta\varepsilon_e(N_B)$, d. h. auf die zweite der Gln. 15.9(3). Dabei ist G am besten aus 15.9(13) zu bestimmen mit $\gamma \approx -0,12$ und dem reduzierten Wert σ_W , welcher der hohen Temperatur entspricht; σ_W sinkt mit zunehmender Temperatur ähnlich ab wie σ_F , vgl. etwa die Beispiele bei [30] und [31].

Franklin [21] schlägt ein grundsätzlich anderes Verfahren vor, das auf dem schon erwähnten Begriff des *Zwangskriechens* beruht. Es sei $\dot{\varepsilon}_{NC}$ die Geschwindigkeit des normalen Kriechens, $\dot{\varepsilon}_{FC}$ diejenige des Zwangskriechens (d. h. der allgemeinen anelastischen Dehnung), $\dot{\varepsilon}_T$ die totale Dehnungsgeschwindigkeit. Dann ist

$$\dot{\varepsilon}_T = \dot{\varepsilon}_{FC} + \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad 15.10(6)$$

oder in normierter Schreibweise

$$\frac{\dot{\varepsilon}_T}{\dot{\varepsilon}_{NC}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{FC}}{\dot{\varepsilon}_{NC}} + \frac{\dot{\sigma}}{E\dot{\varepsilon}_{NC}}. \quad 15.10(7)$$

$\dot{\varepsilon}_T/\dot{\varepsilon}_{NC}$ ist das *Dehnungsgeschwindigkeitsverhältnis*, $\dot{\varepsilon}_{FC}/\dot{\varepsilon}_{NC}$ das *Kriechgeschwindigkeitsverhältnis*. Es wird nun postuliert, daß zwischen diesen beiden Geschwindigkeitsverhältnissen ein Funktionalzusammenhang bestehe:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{FC}}{\dot{\varepsilon}_{NC}} = f\left(\frac{\dot{\varepsilon}_T}{\dot{\varepsilon}_{NC}}\right). \quad 15.10(8)$$

Kennt man also längs des Verlaufes eines Zyklus $\dot{\varepsilon}_T$ und $\dot{\varepsilon}_{NC}$, so ist das links stehende Verhältnis berechenbar. Die Auswertung umfangreichen Versuchsmaterials ergab weiter

die empirische Relation

$$\frac{\text{Lebensdauer Normalkriechen}}{\text{Lebensdauer Zwangskriechen}} = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{FC}}{\dot{\epsilon}_{NC}} \right)^{0,777} . \quad 15.10(9)$$

Aufgrund dieser Unterlagen kann nun die Werkstoffschädigung pro Zyklus berechnet werden durch einen Integrationsprozeß, der die sinngemäße Abwandlung des unter 15.8 angegebenen ist. Leider hat aber die Funktion f einen äußerst komplizierten Aufbau und läßt sich derzeit nicht universell angeben, so daß das Verfahren noch nicht praktisch einsatzfähig ist.

Gegenwärtig dürfte die Methode der Unterteilung des Dehnungsbereiches die für die praktische Verwendung geeignetste sein. Sie setzt zwar streng geschlossene Zyklen voraus, wobei die Zerlegung in Verformungskomponenten entweder durch Schematisierung (wie Abb. 15.10.1) erfolgt oder durch verfeinerte Methoden, vgl. [29]. Ein entscheidender Nachteil ist dies aber aus folgendem Grunde kaum. Man wird einen Maschinentyp nicht für eine ganz bestimmte Betriebsweise auslegen können, sondern muß vielmehr voraussetzen, daß er in sehr verschiedener Weise betrieben wird. Daher muß man bei der Abschätzung der Lebensdauer der Bauteile ohnehin vereinfachende Annahmen treffen, welche die tatsächliche Betriebsweise nur schematisch wiedergeben. Im Rahmen einer solchen Untersuchung sind also Vereinfachungen ohnehin unvermeidlich. Die Gewährleistung der Betriebssicherheit gestattet auch nicht, zu nahe an die Grenzen heranzugehen, so daß eine allzu große Perfektionierung der Theorie nicht sinnvoll ist. Hingegen könnte z. B. die Methode von *Franklin* gut dazu verwendet werden, an einzelnen typischen Beispielen quasi eine bessere Eichung der Methode der Unterteilung des Dehnungsbereiches vorzunehmen. Ein Verfahren, das von der Vorstellung der Bruchmechanik ausgeht, ist unter 15.12 beschrieben.

15.11 Kerbeffekte

Berechnet man die Spannungsverteilung in Konstruktionsteilen, so erhält man regelmäßig an den Rändern von Nuten, Löchern usw., kurz an *Kerben*, mehr oder weniger ausgeprägte Spannungsspitzen, denen hohe lokale Dehnungen entsprechen. Für eine große Zahl häufig wiederkehrender Konstruktionselemente wie gelochte und gekerbte Stäbe, abgesetzte Wellen usw., vgl. Abb. 15.11.1, ist es aber nicht nötig, die Spannungsverteilung im Einzelfalle auszurechnen. Man rechnet vielmehr mit den Gleichungen der elementaren Festigkeitslehre und multipliziert mit einem *Formfaktor* α , d. h. man setzt z. B. für Zug, Biegung und Torsion

$$\hat{\sigma} = \alpha \frac{P}{f}, \quad \hat{\sigma} = \alpha \frac{M}{W}, \quad \hat{\tau} = \alpha \frac{M_d}{W_d} . \quad 15.11(1)$$

Das Zeichen $\hat{}$ weist hier stets darauf hin, daß es sich um die Spannungsspitze handelt. Die α wurden durch elastizitätstheoretische Berechnung oder spannungsoptische Versuche ein für allemal bestimmt; es bestehen darüber umfassende Unterlagen in den einschlägigen

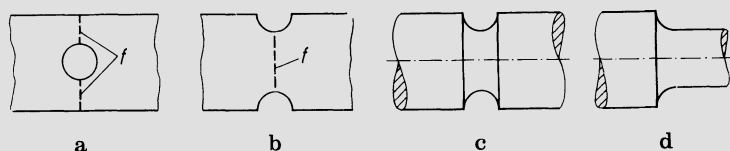


Abb. 15.11.1. Typische Fälle von Kerben an Bauteilen, bei denen Spannungsspitzen durch Formfaktoren berücksichtigt werden. a) Loch in Flachstab; b) Kreiskerbe in Flachstab; c) Hohlkehle; d) abgesetzte Welle

Handbüchern oder Spezialwerken, z. B. [3, 31–33]. — Während die Bestimmung solcher Spannungsspitzen im allgemeinen hinreichend genau möglich ist, vollends mit den modernen Rechenhilfsmitteln, erweist sich ihre *Beurteilung* als ein äußerst komplexes Problem.

Bei *rein statischer Belastung* und zähem Werkstoff sind die Spannungsspitzen für die Tragfähigkeit des Bauteiles keineswegs maßgebend, denn bevor der Bruch eintritt, muß ja der Werkstoff über den gesamten tragenden Querschnitt plastifiziert sein, wobei sich ein Ausgleich der Spannungsverteilung ergibt. Betrachtet man etwa die elastische Spannungsverteilung im engsten Querschnitt eines Rundstabes mit einer Kerbe, so erhält man das in Abb. 15.11.2 dargestellte Bild für die Axialspannung σ_z , die Umfangsspannung σ_ϑ und die Radialspannung σ_r . Sie sind alle positiv, weshalb die Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_\vartheta)^2 + (\sigma_\vartheta - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2}$$

überall kleiner ausfällt als σ_z . Die vollständige Plastifizierung führt zwar auf eine andere Verteilung dieser Spannungen, doch bleiben sie positiv, so daß also ein Volumenelement unter allseitigem Zug steht und σ_v kleiner wird als der Mittelwert von σ_z . Das bedeutet umgekehrt, daß einer gegebenen Werkstoffanstrengung ein größerer Mittelwert von σ_z entspricht, mithin also ein gekerbter Stab eine höhere Tragfähigkeit besitzt als ein glatter Stab mit dem Querschnitt der Engstelle des gekerbten (vgl. darüber etwa [31]). Dieser Effekt dürfte zwar selten technisch ausnützbar sein, ist aber jedenfalls theoretisch verständlich.

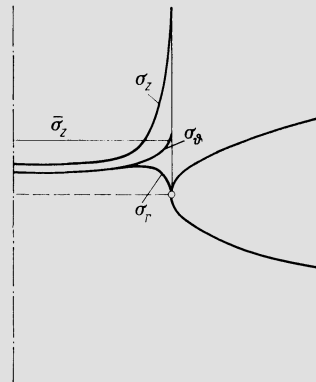


Abb. 15.11.2. Verteilung der Axialspannung, Radialspannung und Umfangsspannung im engsten Querschnitt bei einer Kerbe hyperbolischer Form in einem Rundstab

Sehr viel undurchsichtiger ist das Problem der *Wechselbeanspruchung*. Theoretisch wäre zu erwarten, daß die Amplitude der (zeitlich variierenden) Spannungsspitze unmittelbar mit der z. B. in Abb. 15.9.5 angegebenen Grenze verglichen werden müsse. Wird diese Spannungsspitze von vornherein als Vergleichsspannung definiert, dann dürfte also ihr Amplitudenwert höchstens die dort angegebene Grenze erreichen. Indessen ist seit langem bekannt, daß je nach Spannungsverteilung in unmittelbarer Nähe der Spitze Dauerwechselfestigkeit noch gewährleistet ist bei einem Rechnungswert der Spitze, der über jener Grenze liegt. Dieser Effekt hängt ab von den *Absolutabmessungen* des Bauteiles und verschwindet mit der Zunahme der Abmessungen asymptotisch. Ein solches Verhalten ist mit der Grundvoraussetzung einer Mechanik des isotropen Kontinuums unvereinbar und läßt sich nur erklären aus der kristallinen und letztlich molekularen Struktur des Werkstoffes.

Neuber [3] berichtigt daher die Theorie durch die Annahme, daß die theoretische Spannungsspitze nicht wirklich auftritt. Vielmehr stellt er sich am Kerbgrund einen kleinen Raumteil vor, innerhalb dessen die Spannung konstant bleibt (gewissermaßen ein Kristallit). Rechnerisch läuft das darauf hinaus, mit einem ideellen Ausrundungs-

radius der Kerbe zu rechnen, der um einen Betrag ε größer ist als der wirkliche. Die Größe ε , welche die Dimension einer Länge hat, ist eine Werkstoffkonstante. *Neuber* gibt dafür die Größenordnung 0,3 mm an. Es sei daher empfohlen, den wirklichen Kerbradius ϱ rechnerisch stets zu ersetzen durch den ideellen Radius

$$\varrho' = \varrho + \varepsilon. \quad 15.11(2)$$

Man vermeidet damit von vornherein die physikalisch nicht reelle unendliche Spannungsspitze bei scharfer Kerbe, also $\varrho = 0$.

Das genügt aber allein noch nicht zur Erklärung der beobachteten Effekte. Als maßgebender Parameter wurde insbesondere der bezogene Spannungsgradient χ erkannt. Bedeutet n die an der betrachteten Stelle nach außen gerichtete Oberflächennormale, so ist

$$\chi \equiv \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial n}. \quad 15.11(3)$$

Der Ausdruck ist mit dem Spannungsverlauf am Ort der Spannungsspitze zu bilden. Er hat die Dimension L^{-1} , wird also um so größer je kleiner die Absolutabmessungen. Für einen glatten Biegestab vom Durchmesser d wird $\chi = 2/d$, für einen gekerbten Stab mit Kerbradius ϱ wird $\chi \approx 2/\varrho'$ bei reinem Zug, $\chi \approx 2/d + 2/\varrho'$ bei Biegung, $\chi \approx 2/d + 1/\varrho'$ bei Torsion, wo ϱ' stets durch Gl. 15.11(2) gegeben ist. — Von den vielen Berechnungsverfahren, die vorgeschlagen wurden, vgl. z.B. [31], werde nachfolgend dasjenige von *Petersen* [34] angegeben, das einen einfachen Aufbau hat und Werte liefert, die auf der sicheren Seite liegen. Ist am Ort der Spannungsspitze — also im Kerbgrund — $\hat{\sigma}_m$ die Mittelspannung, $\hat{\sigma}_A$ die Spannungsamplitude, so berechnet man eine ideelle Spannungsamplitude

$$\hat{\sigma}_{Ai} = \frac{\hat{\sigma}_A}{1 + \sqrt{\varrho^* \chi}}. \quad 15.11(4)$$

Hier ist ϱ^* ein für den Werkstoff typischer Längenparameter, vgl. auch *Sigwart* [35] und Abb. 15.11.3. Im Dauerfestigkeitsdiagramm Abb. 15.11.4 ist alsdann der Punkt P mit den Koordinaten $\hat{\sigma}_m$, $\hat{\sigma}_{Ai}$ einzutragen. Liegt er unter der dick gezeichneten Grenzkurve, die der dynamischen Grenzbeanspruchung Zug—Druck (nicht Biegung!) entspricht, so ist Dauerfestigkeit gewährleistet.

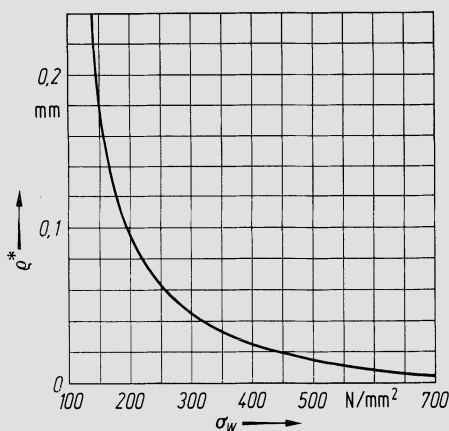


Abb. 15.11.3. Werkstoffabhängiger Längenparameter ϱ^* zur Abschätzung des Einflusses des Spannungsgradienten am Ort der Spannungsspitze auf die höchstzulässige Spannungsamplitude, in Funktion der Dauerwechselfestigkeit σ_W (Zug—Druck)

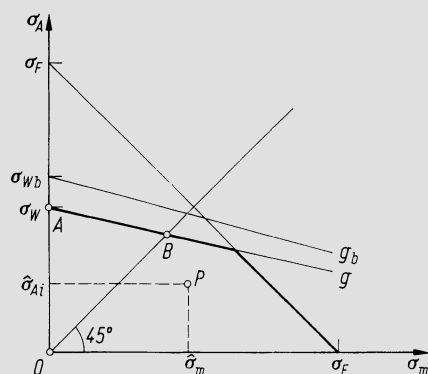


Abb. 15.11.4. Zur Reduktion der Dauerbiegefestigkeit auf die Dauerfestigkeit Zug—Druck.

Die Größe ρ^* wird oft als Radius einer ideellen Ersatzkerbe bezeichnet, welche die gleiche Wirkung hat, wie die Gefüge-Inhomogenitäten, vgl. [35], was aber begrifflich nicht sehr befriedigend ist; besser redet man einfach von einem werkstofftypischen Längenparameter, der in der kristallinen Struktur begründet ist. Die *Bruchmechanik* (vgl. 15.12) bringt übrigens eine bessere Klärung dieses ganzen Problemkomplexes. Dort wird gezeigt, daß bei gegebener geometrischer Situation und Spannung unabhängig von den Absolutabmessungen des Körpers eine kritische Rißlänge a existiert, von der ab sich ein Riß instabil ausbreitet. Dringt nun ein Riß von der Länge a von der Oberfläche aus in den Körper ein, so ist die lokale Spannung an seinem Ende offenbar

$$\sigma \approx \hat{\sigma}(1 - \alpha\chi), \tag{15.11(5)}$$

was für kleine Abmessungen, also großes χ , günstiger wird als für große, womit der überraschende Größeneffekt eine Erklärung findet.

Liegt für den gegebenen Werkstoff das Dauer-Biegefestigkeitsdiagramm vor, so besteht das konsequenteste Verfahren darin, dieses zuerst in das Zug-Druck-Diagramm umzurechnen. Mit σ_{wb} als Wechselbiegefestigkeit ist

$$\sigma_w = \frac{\sigma_{wb}}{1 + \sqrt{2\rho^*/d}}, \tag{15.11(6)}$$

wo d der bei der Bestimmung des Diagramms verwendete Probendurchmesser ist. Im gleichen Verhältnis ist die ganze Grenzlinie g_b des Diagramms herabzusetzen, so daß sie nach g kommt, vgl. Abb. 15.11.4. — Wenn mit Nennspannungen (Index n) und Formfaktoren gerechnet wird, so ist

$$\hat{\sigma}_m = \alpha\sigma_{mn}, \quad \hat{\sigma}_{Ai} = \beta\sigma_{An}, \quad \beta = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{\rho^*\chi}}. \tag{15.11(7)}$$

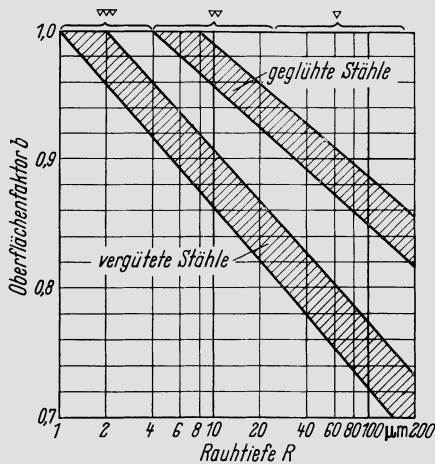


Abb. 15.11.5. Oberflächenfaktor b für Zug-Druck-Wechselbeanspruchung (auch Wechselbiegung). Nach Siebel und Gaier [36]

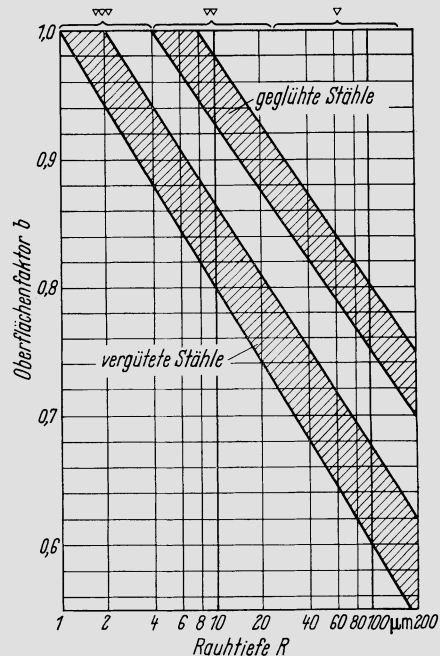


Abb. 15.11.6. Oberflächenfaktor b für Zug-Schwell-Beanspruchung. Nach Siebel und Gaier [36]

Hierbei ist vorausgesetzt, daß das Zug-Druck-Dauerfestigkeitsdiagramm benutzt wird. Will man direkt das Biege-Dauerfestigkeitsdiagramm benutzen, so ist mit

$$\hat{\sigma}'_{Ai} = \beta' \sigma_{An}, \quad \beta' = \frac{1 + \sqrt{2\varrho^*/\bar{d}}}{1 + \sqrt{\varrho^*\chi}} \alpha \quad 15.11(7')$$

zu rechnen; das so bestimmte $\hat{\sigma}'_{Ai}$ ist dann mit der Grenzkurve zu vergleichen. Die β und β' werden auch als Kerbwirkungszahlen bezeichnet.

Die Unterlagen über die Dauerfestigkeit werden in der Regel für glatte Oberflächen angegeben. Bei *rauh*en Oberflächen sind die höchstzulässigen Amplitudenwerte um Faktoren b zu vermindern, die für Zug-Druck-Beanspruchung bzw. für Zug-Schwell-Beanspruchung aus Abb. 15.11.5 und 6 entnommen werden können (nach *Siebel* und *Gaier* [36]). Der Zug-Druck-Beanspruchung entspricht in Abb. 15.11.4 Punkt *A*, der Zug-Schwell-Beanspruchung Punkt *B*. Durch Verschiebung dieser Punkte entsprechend den zugehörigen b erhält man die berichtigte Grenzkurve. Eine sehr starke Herabsetzung der Dauerfestigkeit ergibt sich unter dem Einfluß der *Korrosion*, wie schon unter 15.9 erwähnt. Sehr oft existiert dann überhaupt keine Wechselbeanspruchung mehr, welcher der Werkstoff unbeschränkt lange standhalten könnte.

15.12 Bruchmechanik

Die Bruchmechanik ist ein neuer Zweig der Festigkeitslehre. Sie geht davon aus, daß in einem Bauteil Risse oder allgemeiner Fehlstellen vorhanden seien und behandelt die Frage, unter welchen Bedingungen sich ein solcher Riß weiter ausbreitet. Für genauere Darstellungen sei auf [37—40] verwiesen, eine knappe Zusammenfassung findet sich auch in [31].

Abb. 15.12.1 veranschaulicht einen Riß von der Länge $2a$, dessen Ebene senkrecht auf der Richtung der Spannung σ steht. Das Vorhandensein eines solchen Risses verkleinert offenbar die im Körper aufgespeicherte Verformungsenergie gegenüber dem Falle

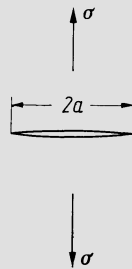


Abb. 15.12.1. Rißförmige Fehlstelle, Rißlänge $2a$

des unbeschädigten Körpers. Das wird sogleich klar, wenn man beachtet, daß man Arbeit aufwenden müßte, um die leicht klaffenden Rißufer wieder zusammenzubringen. Diese Verminderung der Verformungsenergie ist offenbar proportional a^2 , denn je größer a , desto größer der Flächenbereich, innerhalb dessen der Spannungszustand gegenüber dem ungestörten merklich verändert ist.

Nun stelle man sich vor, der Riß werde beidseits um δa verlängert. Es wird postuliert, daß hierzu eine Arbeit δA notwendig sei, die δa proportional ist. — Damit verläßt die Theorie die Grundvorstellungen der Mechanik der Kontinua, denn diese liefert keine Grundlage zur Berechnung einer Arbeit, die nur gerade zur Rißverlängerung notwendig wäre. Eine solche kann nur bedingt sein durch intermolekulare Feldkräfte kleiner Reichweite (Kohäsionskräfte), die beim Trennvorgang, der sich über einen mikroskopischen

Weg erstreckt, überwunden werden müssen. — Der Rißverlängerung δa entspricht eine Verminderung der Verformungsenergie um δE . Diese Energie wird bei dem Vorgang freigesetzt. Ist $\delta E < \delta A$, so genügt die Energie nicht, um den Arbeitsaufwand zur Rißverlängerung zu decken; der Riß ist *stabil*. Bei $\delta E > \delta A$ steht sogar mehr Energie zur Verfügung, als die Rißverlängerung benötigt; der Riß wird sich *instabil ausbreiten*. Bei $\delta E = \delta A$ liegt offenbar die *Stabilitätsgrenze*.

Es läßt sich zeigen, daß eine Größe vom Aufbau

$$K = Y\sigma\sqrt{a} \tag{15.12(1)}$$

für das Verhältnis $\delta E/\delta A$ maßgebend ist. Hier ist Y ein von der Geometrie der Anordnung abhängiger Faktor. Die Stabilitätsgrenze ist erreicht, wenn diese Größe einen kritischen Wert K_{Ic} erreicht. Index c steht für ‚critical‘, Index I besagt, daß ebener Verformungszustand vorausgesetzt wurde, was der ungünstigere Fall ist als ebener Spannungszustand und deshalb stets als Basis genommen wird. K_{Ic} wird als *Rißzähigkeit* bezeichnet. Sie ist eine *Werkstoffeigenschaft*, zu deren Bestimmung eine besondere Versuchstechnik entwickelt werden mußte, vgl. die angegebenen Literaturstellen. Es läuft also alles wieder darauf hinaus, daß aus makroskopischen Versuchen ein phänomenologischer Werkstoffkennwert bestimmt wird, nur ist er so gebildet, daß er theoretisch tiefer begründet ist.

In Abb. 15.12.2 ist der Geometriefaktor Y für einige typische Situationen angegeben. Stets ist die Rißfläche in der Bildebene, die Spannung senkrecht dazu; der tragende Querschnitt ist schraffiert, die Rißfläche leergelassen. Die Abmessung B ist groß gegenüber a . Die in den Formeln auftretende Größe Q kann der Abb. 15.12.3 entnommen werden. Setzt man also

$$K_{Ic} = Y\sigma\sqrt{a}, \tag{15.12(2)}$$

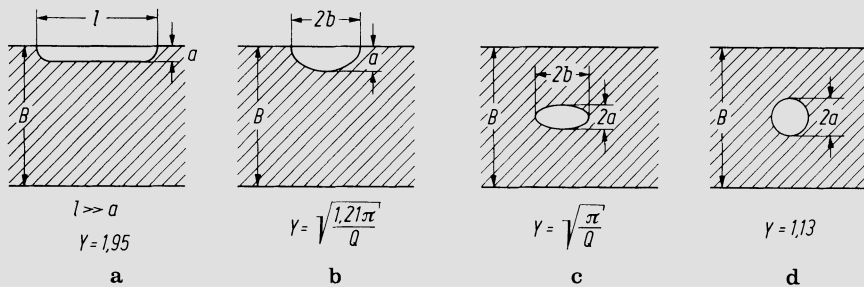


Abb. 15.12.2. Typische Formen von Fehlstellen. a) Ausgedehnter Längsriß an Oberfläche; b) halbelliptischer Riß an Oberfläche; c) elliptischer Riß im Inneren; d) kreisförmiger Riß im Inneren

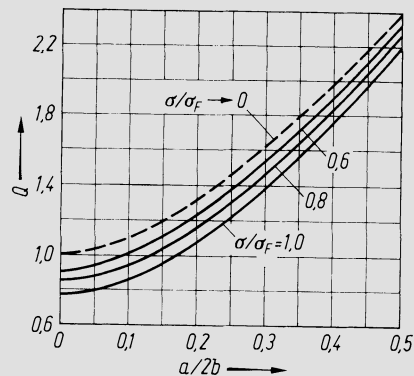


Abb. 15.12.3. Größe Q zur Berechnung des Geometriefaktors Y

so sind damit diejenigen Wertekombinationen a , σ gegeben, bei denen der Riß instabil wird. Es ist demgemäß

$$a < \left(\frac{K_{Ic}}{Y\sigma} \right)^2 \quad 15.12(3)$$

die Bedingung, der bei gegebenem σ die Rißlänge zu genügen hat, damit instabiles Anwachsen vermieden wird. Umgekehrt muß die Spannung die Bedingung

$$\sigma < \frac{K_{Ic}}{Y\sqrt{a}} \quad 15.12(4)$$

erfüllen, wenn die Rißlänge gegeben ist.

Typische Werte der Rißzähigkeit einiger für Dampfturbinenrotoren gebräuchlicher Stähle zeigt Abb. 15.12.4, vgl. Diskussionsbeitrag zu Haas [20]. Typisch ist die starke Temperaturabhängigkeit von K_{Ic} , die übrigens zusammenhängt mit der Lage der Übergangstemperatur, wo der Steilabfall der Kerbzähigkeit auftritt. Die Streuung ist übrigens groß, vgl. etwa [41]; die Kurven Abb. 15.12.4 geben Untergrenzen des Streubereiches. Bei großen Schmiedestücken können die Werte stark abhängen vom Ort, wo die Probe entnommen wird. K_{Ic} ist ein sehr aussagekräftiges Werkstoffcharakteristikum, das zu den klassischen Größen, wie Fließgrenze usw. hinzukommt und durch sie allein noch nicht bestimmt ist. So sind die im Diagramm mit 2, 3 und 4 angegebenen Werkstoffe dem älteren Rotorwerkstoff 1 deutlich überlegen.

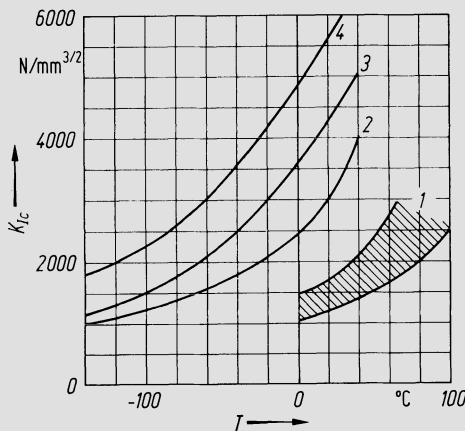


Abb. 15.12.4. Rißzähigkeit K_{Ic} einiger typischer Stähle für Dampfturbinenrotoren: 1 Stahl 35 CrMo 13 5; 2 Stahl 26 Ni Cr Mo V 8 5; 3 Stahl 26 Ni Cr Mo V 11 5; 4 Stahl 26 Ni Cr Mo V 14 5. Kurven 2–4 untere Grenzen des Streubereiches

Die Tatsache, daß die Bruchmechanik auf eine kritische Rißlänge führt, unabhängig von den Körperabmessungen, hängt damit zusammen, daß $\delta E \sim \delta a^2$, $\delta A \sim \delta a$. Sie läßt verstehen, daß die Dauerwechselfestigkeit gekerbter Bauteile von ihren Absolutabmessungen abhängt.

Bruchmechanische Untersuchungen können u.U. auch herangezogen werden, um die Lebensdauer zyklisch beanspruchter Teile zu bestimmen. Aus der Schwingbreite $\Delta\sigma = 2\sigma_A$ und der Größe K Gl. 15.12(1), die auch *Spannungsintensitätsfaktor* bezeichnet wird, läßt sich

$$\Delta K = Y \Delta\sigma \sqrt{a} \quad 15.12(5)$$

berechnen. Dann setzt man mit N als Zyklenzahl

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^n, \quad 15.12(6)$$

wo C und n Materialkennwerte sind. Nach [41] ist z.B. bei den für Dampfturbinenrotoren gebräuchlichen Werkstoffen $C = 2 \cdot 10^{-13}$, $n = 3$, wobei K in $\text{N/mm}^{3/2}$ einzusetzen ist.

Ist a der Anfangswert der Rißlänge, a_c der kritische Wert, so lautet die Integraldarstellung von 15.12(6)

$$\int_a^{a_c} da = C \int_0^{N_B} \Delta K^n(N) dN, \quad 15.12(6')$$

was auf folgendes Ergebnis führt:

$$N_B = \frac{2}{C(Y \Delta \sigma)^n (n-2)} \left[a^{-\frac{n-2}{2}} - a_c^{-\frac{n-2}{2}} \right] \quad \text{wenn } n \neq 2, \quad 15.12(7)$$

$$N_B = \frac{1}{C(Y \Delta \sigma)^2} \ln \left(\frac{a_c}{a} \right) \quad \text{wenn } n = 2. \quad 15.12(8)$$

Hier wie ganz allgemein treten die inhärenten Schwierigkeiten der bruchmechanischen Betrachtungsweise in Erscheinung: Es muß schon von einer vorhandenen Rißlänge ausgegangen werden, und die Beschaffung der empirischen Unterlagen erfordert eine umständliche, schwierige Versuchstechnik. Auch erfordert die Berücksichtigung komplizierter Geometrien und Spannungsfelder Schätzungen, da solche Angaben, wie in Abb. 15.12.2 und 3 dargestellt, praktische Fälle meist nur in grober Näherung wiedergeben. Demgegenüber ist festzuhalten, daß die Bruchmechanik insbesondere folgendes leisten kann:

1. Sie bietet mit K_{Ic} ein zusätzliches Kriterium bei der Auswahl geeigneter Werkstoffe.
2. Sie gestattet zu beurteilen, ob durch Prüfverfahren aufgedeckte Fehlstellen an ausgeführten (neuen) Bauteilen toleriert werden können.
3. Werden bei Inspektionen Risse entdeckt, so läßt sich beurteilen, ob bzw. wie lange der betreffende Konstruktionsteil noch weiter verwendet werden kann.
4. Sie gestattet u. U. mindestens qualitativ eine bessere physikalische Interpretation von Versuchsergebnissen, die mit anderen Mitteln gewonnen wurden.

Werden zusätzliche Annahmen herangezogen, so lassen sich u. U. Beanspruchungskriterien auffinden, die physikalisch besser begründet sind als solche, denen keine solche Modellvorstellung zugrundeliegt. Auf dieser Grundlage haben *Majumdar* und *Maiya* [42, 43] das unter 15.10 besprochene Problem der Ermüdung beim Kriechen behandelt. Es sei ε_a die gesamte *anelastische* Dehnung, die also Kriechen und sonstige Plastizität umfaßt. Dann wird für das Anwachsen der Rißlänge a folgender Ansatz gemacht:

$$\frac{da}{dt} = aT |\varepsilon_a|^m |\dot{\varepsilon}_a|^k, \quad \frac{da}{dt} = aC |\varepsilon_a|^m |\dot{\varepsilon}_a|^k. \quad 15.12(9)$$

Hier ist T ein werkstoffabhängiger Parameter, der im Falle plastischer Streckung gilt, während bei plastischer Stauchung der Parameter C zu verwenden ist. Weiter sind k und m empirische Exponenten. Hier wird also nicht zwischen zeitunabhängiger und Viskoplastizität unterschieden, wohl aber gehen Verformung und Verformungsgeschwindigkeit gesondert in den Ansatz ein. Wenn man nun setzt

$$G \equiv \frac{2T/C}{(T/C) + 1} \quad \text{für Zug,} \quad G \equiv \frac{2}{(T/C) + 1} \quad \text{für Druck,} \quad 15.12(10)$$

kann man den Ansatz 15.12(9) in der Form

$$\frac{2}{T+C} \frac{da}{a} = G |\varepsilon_a|^m |\dot{\varepsilon}_a|^k dt \quad 15.12(11)$$

schreiben, denn löst man dies auf nach da/dt , so hat man offensichtlich wieder die Form 15.12(9). — Nun sei a_0 die durchschnittliche Rißlänge der Fehlstellen des neuen Bauteiles, a_c die kritische Rißlänge, bei der infolge Instabilität der Bruch stattfindet. Alsdann läßt sich die linke Seite von 15.12(11) integrieren, und zwar werde gesetzt

$$\frac{2}{T+C} \ln \left(\frac{a_c}{a_0} \right) \equiv \frac{1}{A}. \quad 15.12(12)$$

T und C sind als Festwerte betrachtet, und die maßgebende zusätzliche Annahme der Theorie ist nun, daß A ein empirisch bestimmbares Werkstoffcharakteristikum sei (damit wird die Kenntnis von α_0 überflüssig!). Somit kann 15.12(11) in die Integralform

$$\int_0^{t_B} G |\varepsilon_a|^m |\dot{\varepsilon}_a|^k dt = \frac{1}{A} \tag{15.12(13)}$$

gebracht werden; die obere Integrationsgrenze ist in der Tat die Zeit bis zum Bruch, die durch diese Gleichung für einen gegebenen Verformungsverlauf $\varepsilon_a(t)$ bestimmt ist, sobald man die nötigen Unterlagen über A , G , m , k besitzt. Über diese, bei deren Beschaffung man starke Vereinfachungen machen muß, liegt noch nicht viel vor. Abb. 15.12.5 zeigt Angaben aus [43], und die Verfasser geben auch an, auf welche Weise man sich praktisch solche Unterlagen beschaffen kann.

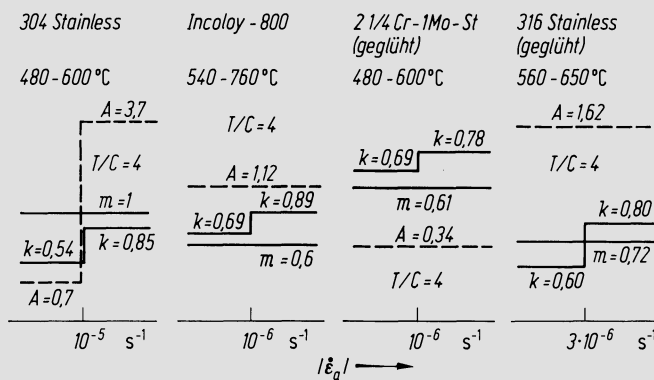


Abb. 15.12.5. Werkstoffparameter zum Verfahren nach [42] und [43] für vier typische Werkstoffe

Für den Fall einer zyklischen Beanspruchung mit gleichem, je konstantem $|\dot{\varepsilon}_a|$ auf Zug und Druck, kann 15.12(13) geschlossen integriert werden, und aus t_B ergibt sich dann sogleich auch die Zyklenzahl bis zum Bruch zu

$$N_B = \frac{m + 1}{4A} \left(\frac{\Delta \varepsilon_a}{2} \right)^{-(m+1)} |\dot{\varepsilon}_a|^{1-k}, \tag{15.12(14)}$$

wo $\Delta \varepsilon_a$ der anelastische Dehnungsbereich ist. — Wie aus der Darstellung Abb. 15.12.5 hervorgeht, ist A allerdings, über $|\dot{\varepsilon}_a|$ aufgetragen, u.U. nur bereichsweise hinreichend genau als konstant zu betrachten. Deshalb entsteht bei der Anwendung von 15.12(13) eine Schwierigkeit, sobald $\dot{\varepsilon}_a$ in einem Bereich variiert, der die Sprungstelle von A überschreitet. Wenn nun A' und A'' die A -Werte zu beiden Seiten der Sprungstelle sind und $\Delta t'$ bzw. $\Delta t''$ die aufsummierten Zeitintervalle, während denen $|\dot{\varepsilon}_a|$ auf der einen oder anderen Seite der Sprungstelle ist, muß man die Integration in die beiden Anteile aufspalten und setzen

$$\int_0^{\Delta t'} G |\varepsilon_a|^m |\dot{\varepsilon}_a|^k dt' + \int_0^{\Delta t''} G |\varepsilon_a|^m |\dot{\varepsilon}_a|^k dt'' \leq \frac{1}{\Delta t' + \Delta t''} \left[\frac{\Delta t'}{A'} + \frac{\Delta t''}{A''} \right], \tag{15.12(15)}$$

wobei die dt' und dt'' die Zeitdifferentiale sind, während denen der eine oder andere Zustand herrscht. Gilt Zeichen $<$, so tritt kein Bruch ein, während bei Erreichen der Gleichheit mit dem Bruch zu rechnen ist. Die Autoren bemerken noch, daß bei rein monotonem Zug, die Konstante T nicht den gleichen Wert hat wie bei wechselnder Beanspruchung. — Es scheint jedenfalls, daß damit ein Formalismus gegeben ist, der bei Vorliegen genügender Unterlagen sich als leistungsfähig erweisen könnte, insbesondere, da er nicht notwendig zyklische Vorgänge voraussetzt.

15.13 Beurteilungskriterien, Sicherheitsfaktoren

a) Allgemeines

Aufgrund der unter 15.8—11 dargestellten Zusammenhänge mögen hier festigkeits-technische Beurteilungskriterien in Form von praktischen Anweisungen zusammengefaßt werden. Diese sind stets so formuliert, daß der Weg zur Bestimmung eines *Sicherheitsfaktors* angegeben wird. Wie groß dieser im Einzelfalle sein muß, kann nicht in allgemeinverbindlicher Weise angegeben werden, denn dies hängt ab von der Genauigkeit der Werkstoffunterlagen, auch fertigungsbedingten Streuungen derselben, von der Genauigkeit der Voraussrechnung des Spannungs- und Verformungszustandes und der Schätzungen über die zu erwartenden Betriebszustände und gegebenenfalls auch von korrosiven Einwirkungen, die in den Werkstoffcharakteristika (wie Wechselfestigkeit) stets von vornherein zu berücksichtigen sind. In den nachfolgenden Anweisungen ist vorausgesetzt, daß diese Korrektur der Werkstoffdaten bereits vorgenommen sei; sie ist aber naturgemäß oft sehr unsicher. Auch müssen die Maximalspannungen und Verformungen, auf die Bezug genommen wird, die effektiven Maximalwerte sein, die nicht etwa örtlich durch Nuten, Löcher oder dgl. noch zusätzlich erhöht werden.

Es sind zwei Arten von Sicherheitsfaktoren angegeben, nämlich Faktoren S_b , welche die tatsächliche Beanspruchung mit derjenigen vergleichen, bei der das Versagen des Bauteiles zu erwarten wäre und Faktoren S_t , welche die bei der gegebenen Beanspruchung theoretisch zu erwartende Lebensdauer zur verlangten ins Verhältnis setzen. Nun sei y eine Beanspruchungsgröße (Spannung, Dehnung), x ein Maß für die Dauer der Beanspruchung (Zeit, Zyklenzahl). Dann lassen sich die Gesetze, die Beanspruchung und Lebensdauer miteinander verknüpfen, mindestens bereichsweise durch die Form

$$y = Ax^{-k} \quad 15.13(1)$$

wiedergegeben. Es läßt sich nun leicht verifizieren, daß in diesem Falle S_b und S_t gemäß

$$S_t = S_b^{\frac{1}{k}} \quad 15.13(2)$$

miteinander zusammenhängen. Ist etwa $k = 0,3$ (ein typischer Wert für $\sigma_B(t)$ bei Kriechen) und verlangt man $S_b = 2$, so führt dies auf $S_t = 10$. Die S_t müssen also meist sehr groß sein. Bei nicht zeitabhängigen Vorgängen strebt S_t gegen Unendlich.

b) Statische Tragfähigkeitsgrenze

Um auf einfache Weise die äußerste Grenze der statischen Tragfähigkeit eines Bauteiles zu bestimmen, legt man meist das vereinfachte Spannungs-Dehnungs-Diagramm nach Abb. 15.13.1 zugrunde, d. h. man nimmt an, daß der Werkstoff bis zur Fließgrenze σ_F linearelastisches Verhalten zeige, von dort an idealplastisches. Diese Vereinfachung liegt auf der sicheren Seite, da ja effektiv höhere Spannungen als σ_F auftreten können. — Die Tragfähigkeit eines Bauteiles ist dann erschöpft, wenn die Plastifizierung den ganzen tragenden Querschnitt erfaßt hat. Diese Betrachtungsweise ist allerdings nur zulässig, wenn der Werkstoff das nötige Verformungsvermögen wirklich besitzt. Man wird daher versuchen, durch geeignete Wahl und Behandlung des Werkstoffes die Übergangstemperatur, wo der Steilabfall der Kerbzähigkeit eintritt, nach Möglichkeit tief zu legen, da unter dieser die Gefahr des Sprödbruches rasch zunimmt.

Im allgemeinen dreiachsigen Fall und unter Zugrundelegung der v. Mises-Hypothese ist die Bestimmung dieses Grenzzustandes vollständiger Plastifizierung eine komplizierte Aufgabe. Das ist schon an dem unter 15.11 erwähnten Problem der Tragfähigkeit eines gekerbten Rundstabes zu erkennen. Einfach wird das Problem beim ebenen Spannungszustand und unter Zugrundelegung der Schubspannungshypothese, denn nach dieser ist

für die Werkstoffanstrengung nur die größte Hauptspannungsdifferenz maßgebend. Da die Schubspannungshypothese in Extremfällen eine um 13% kleinere Tragfähigkeit liefert als die v. Mises-Hypothese, in keinem Falle eine höhere, ist es oft zweckmäßig, von dieser Vereinfachung Gebrauch zu machen.

Abb. 15.13.2a zeigt als Beispiel einen gezogenen gelochten Flachstab und eine Folge von Spannungsverteilungen im engsten Querschnitt, die einer immer weitergehenden Steigerung der Kraft P entsprechen. Im Grenzfall herrscht im ganzen Querschnitt σ_F , wobei der Stab die höchstmögliche Kraft P_{\max} überträgt. Ist P die tatsächlich auftretende Kraft, so ergibt sich der Sicherheitsfaktor S_b aus

$$P_{\max} = f\sigma_F, \quad S_b = \frac{P_{\max}}{P} = \frac{f\sigma_F}{P}. \quad 15.13(3)$$

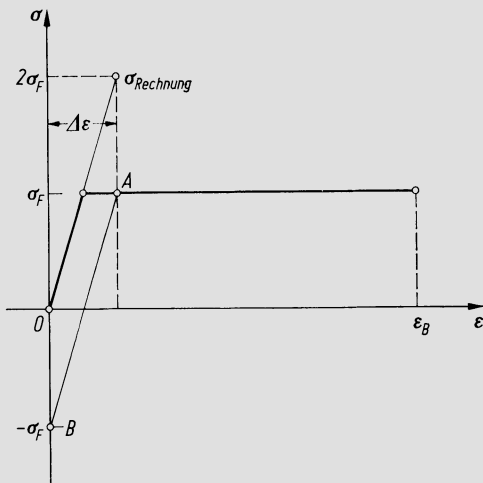


Abb. 15.13.1. Idealisiertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm

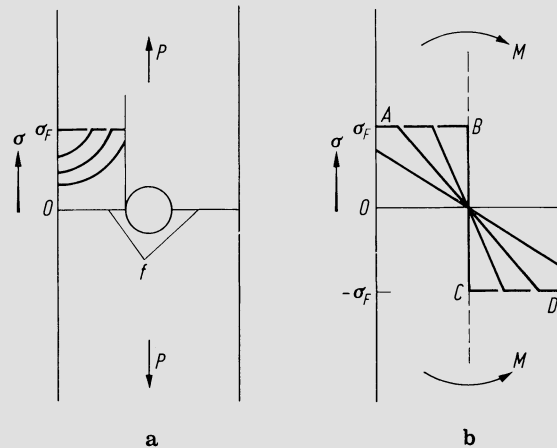


Abb. 15.13.2. Spannungsverteilungen bei ansteigender Belastung bis zur vollen Plastifizierung. a) Gelochter Flachstab; b) gebogener Stab

Ähnlich verhält es sich beim gebogenen Stab nach Abb. 15.13.2b, wo bei immer weiterer Steigerung des Biegemomentes schließlich ein Spannungsverlauf gemäß $ABCD$ erreicht wird, womit die Tragfähigkeit des Elementes erschöpft ist. — Dies ist zwar insofern vereinfacht, als dieser Verlauf ja eigentlich eine unendliche Krümmung voraussetzen würde. Da aber die Fasern in der Nähe der Mittelebene zum Moment wenig beitragen und das zugrundegelegte Spannungs-Dehnungs-Diagramm Abb. 15.13.1 die Spannungen in den wirksamen äußeren Fasern etwas unterschätzt, ist die Näherung trotzdem gut brauchbar, denn das so berechnete M_{\max} kann mit mäßiger Krümmung effektiv aufgenommen werden. Ist M das wirklich aufzunehmende Biegemoment, so ist

$$S_b = \frac{M_{\max}}{M}. \quad 15.13(4)$$

M_{\max} ist aus einer Integration des Spannungsverlaufes über den Querschnitt zu gewinnen. Es ist z. B. mit W als Widerstandsmoment

$$M_{\max} = 1,5 \sigma_F W \quad \text{für rechteckigen Querschnitt,} \quad 15.13(5)$$

$$M_{\max} = 1,7 \sigma_F W \quad \text{für kreisrunden Querschnitt.} \quad 15.13(6)$$

Für andere Querschnittsformen, wie überhaupt für andere elementare Festigkeitsprobleme finden sich die entsprechenden Angaben in der einschlägigen Handbuchliteratur. — In Abschn. 17.11 ist angegeben, wie sich die Grenzdrehzahl berechnen läßt, bei der eine

rotierende Läuferseibe vollständig plastifiziert wird und infolgedessen die Rotorexpllosion zu erwarten ist. Da die Fliehkräfte dem Quadrat der Drehzahl proportional sind, gilt in diesem Falle

$$S_b = \left(\frac{n_p}{n}\right)^2, \tag{15.13(7)}$$

wo n_p die genannte Grenzdrehzahl, n die höchste im Betriebe auftretende Drehzahl ist.

Bei hoher Temperatur, wo *Kriechen* auftritt, ist auch rein statisch mit dem spröden Bruch zu rechnen, so daß also nicht die gleiche Überlegung zugrundegelegt werden kann. Ist hier σ_{\max} die größte lokale Spannung, $\sigma_B(t)$ für die gegebene Temperatur und die geforderte Lebensdauer t die Bruchspannung gemäß dem Dauerstandversuch, so ist

$$S_b = \frac{\sigma_B(t)}{\sigma_{\max}}, \quad S_t = S_b^m, \tag{15.13(8)}$$

wo m der Exponent im Ansatz 15.5(4) ist.

c) Zyklische Beanspruchung ohne Kriechen

Zyklische Beanspruchung möge hier in einem verallgemeinerten Sinne verstanden werden und bedeutet einfach die übliche Beanspruchungsart fast aller Maschinenteile. Diese ist mindestens durch das Anfahren und Abstellen, oft auch durch regelmäßig wiederkehrende schroffe Belastungsänderungen gekennzeichnet. Diese transienten Vorgänge sind für die Festigkeit der Bauteile von entscheidender Bedeutung. Sie haben zwar nicht im strengen Sinne zyklischen, also periodischen Charakter, werden aber doch bei der Vorausberechnung durch gedachte zyklische Vorgänge approximiert. So sind die nachfolgend als vorgeschrieben betrachteten Zyklenzahlen N zu verstehen. — Zur Beurteilung der Beanspruchung müssen in diesem Falle für den verwendeten Werkstoff bekannt sein das Diagramm $\Delta\varepsilon = f(N_B)$ (Beispiel Abb. 15.9.3) und das Dauerwechselfestigkeitsdiagramm, am besten in der Form Abb. 15.9.6 mit dem Diagramm $\sigma_A(0) = f(N_B)$ links beigefügt.

Vorgehen bei *lokaler überelastischer Beanspruchung*. Die Rechnung liefert lokal ein elastisch gerechnetes $\sigma_v > \sigma_F$ und daraus auch das $\Delta\varepsilon_v$, vgl. z. B. die Ausführungen unter 15.7. Wenn der lokale Verformungsgradient groß ist, kann daraus in Analogie zu 15.11(4) der ideelle ‚wirksame‘ Wert

$$\Delta\varepsilon_{vi} = \Delta\varepsilon_v / (1 + \sqrt{\rho^* \chi}) \tag{15.13(9)}$$

gebildet werden, eine meist nur kleine Korrektur. Dieses $\Delta\varepsilon_{vi}$ wird beim vorgeschriebenen N ins Diagramm $\Delta\varepsilon_v = f(N_B)$, Abb. 15.13.3, eingetragen, siehe Punkt P . Dann ist

$$S_b = \frac{\Delta\varepsilon_{vB}}{\Delta\varepsilon_{vi}}, \quad S_t = \frac{N_B(\Delta\varepsilon_{vi})}{N}, \tag{15.13(10)}$$

Bezeichnungen siehe Figur.

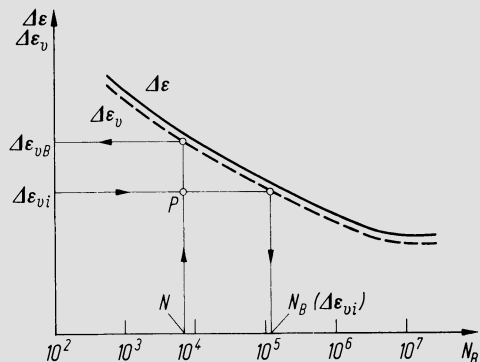


Abb. 15.13.3. Diagramm zur Bestimmung von S_b und S_t bei überelastischer Beanspruchung

Vorgehen bei *quasielastischer Beanspruchung über der Dauerschwingfestigkeit*: Die Rechnung liefert für die kritische Stelle eine Mittelspannung σ'_m und eine Spannungsamplitude σ'_A , wobei $\sigma' = \sigma'_m + \sigma'_A$ die Spannungsspitze ist, alle als Vergleichsspannungen aufgefaßt. Man trägt den Punkt A' mit den Koordinaten σ'_m ,

$$\sigma'_{Ai} = \sigma'_A / (1 + \sqrt{\varrho^* \chi}) \quad 15.13(11)$$

ins Diagramm Abb. 15.13.4 ein und findet mit der angegebenen Konstruktion $BA'CD$ mit dem vorgeschriebenen N

$$S_b = \frac{\sigma_A^*(0)}{\sigma'_{Ai}(0)}, \quad S_t = \frac{N'_B}{N}, \quad 15.13(12)$$

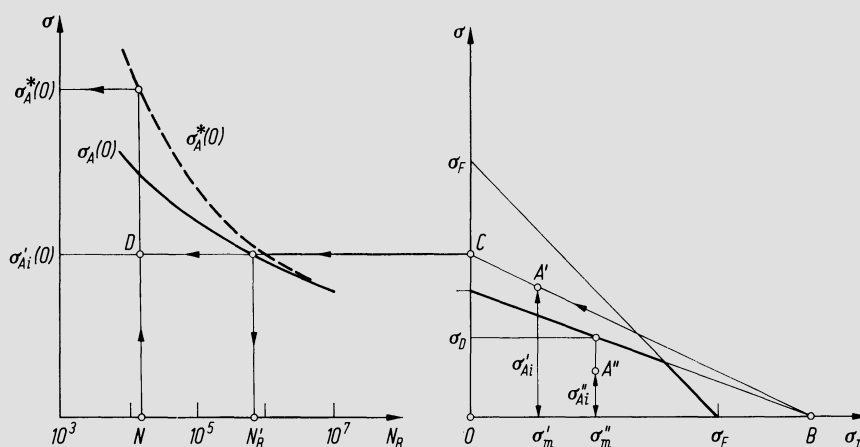


Abb. 15.13.4. Diagramm zur Bestimmung von S_b und S_t bei quasielastischer zyklischer Beanspruchung oberhalb der dynamischen Dauerfestigkeit

Bezeichnungen siehe Figur. Die gestrichelte Spannungskurve hat ideellen Charakter, denn jene Spannung ist definiert durch

$$\sigma_A^*(0) = \frac{\Delta \sigma^*}{2} = \frac{E \Delta \varepsilon(N_B)}{2} \quad 15.13(13)$$

(vgl. den Unterschied gegenüber 15.9(22)), ist also ein Maß für die Dehnung. Sie muß verwendet werden, weil sonst der Wert S_b nicht mehr in allen Fällen sinnvoll wäre (S_b sagt z.B. aus: Beim gegebenen N dürfte man ohne Gefahr stark plastisch verformen). Punkt B muß nicht notwendig an die Stelle σ_B gelegt werden, wie im Diagramm Abb. 15.9.6, sondern einfach so, daß die Kontur des effektiven Dauerschwingungsfestigkeits-Schaubildes richtig erhalten wird. — Diese Kriterien sind allerdings nicht anwendbar im Inneren sehr großer Werkstücke (z.B. einteiliger Rotoren), die herstellungsbedingt praktisch stets makroskopische Fehlstellen aufweisen. Dort stützt man sich zweckmäßig auf die Bruchmechanik. Man berechnet ausgehend von der Abmessung a der Fehlstelle und ihrer nach Gl. 15.12(2) zu bestimmenden kritischen Größe a_c nach Gl. 15.12(7) die Zyklenzahl N_B bis zum Bruch. Bei Vorausberechnungen ist a aufgrund der Erfahrung zu schätzen. Am ausgeführten Werkstück ist a aus der Ultraschallprüfung näherungsweise auffindbar, vgl. etwa [41]. Bei großen Werkstücken ist man so meist auf wesentlich tiefere Beanspruchungsgrenzen geführt, als sie die klassischen Zeitfestigkeitsuntersuchungen ergeben.

Vorgehen bei *schwingender Beanspruchung*, wobei $N = \infty$ verlangt ist: Spannungszustand ist gekennzeichnet durch Mittelspannung σ''_m und Amplitude σ''_A mit Spitze $\sigma'' = \sigma''_m + \sigma''_A$ (stets Vergleichsspannungen). Man trägt im Diagramm Abb. 15.13.4 den Punkt A'' mit Koordinaten σ''_m ,

$$\sigma''_{Ai} = \sigma''_A / (1 + \sqrt{\varrho^* \chi}) \quad 15.13(14)$$

ein. Dann ist $S_b = \sigma_D / \sigma''_{Ai}$, siehe Abbildung.

Eine ältere Anweisung besagt, daß bei nicht schwingender Belastung rechnerische Spannungsspitzen bis $2\sigma_F$ zugelassen werden dürfen. Dem liegt das vereinfachte Spannungs-Dehnungs-Diagramm Abb. 15.13.1 zugrunde. Wie dort gezeigt, führt die entsprechende Dehnung $\Delta\varepsilon$ bei Entlastung auf eine Druckspannung $-\sigma_F$. Bei erneuter Belastung gelangt man von Punkt B zum Punkt A zurück. Nach dieser vereinfachten Theorie würden also weitere plastische Verformungen eben noch vermieden. Prüft man diese Regel im Lichte der neuen Ergebnisse, so ergibt sich folgendes Bild. In einem typischen Beispiel liefert die Kurve $\Delta\varepsilon(N_B)$ für dieses $\Delta\varepsilon$ ein $N_B = 10^5$. Verlangt man aber $S_b = 2$, setzt also das doppelte $\Delta\varepsilon$ ein, so ist man auf $N = 4000$ geführt. Für eine Maschine, bei der täglich ein Zyklus auftritt, entspricht dies einer Lebensdauer von 11 Jahren. Man versteht also, daß diese Regel in vielen Fällen eine brauchbare Richtlinie sein konnte.

d) Quasizyklische Beanspruchung mit Kriechen

Als Werkstoffunterlagen müssen bekannt sein die Dauerstandfestigkeit des Werkstoffes, also σ_B in Funktion von t und T , d. h. in Gl. 15.5(4) $\sigma_{B3}(t)$ und $m(T)$, ferner der Exponent $n(T)$ des Nortonschen Gesetzes, Gl. 15.5(3), und im maßgebenden Temperaturbereich das Goodman-Diagramm (Abb. 15.9.5). Diese letztgenannte Unterlage wird häufig fehlen. Als Schätzung kann man dann setzen $\sigma_W \approx 0,4\sigma_F$ und das Diagramm von dieser Angabe aus rekonstruieren. Im obersten Temperaturbereich, in dem der Werkstoff einsetzbar ist, liegt man damit meist auf der sicheren Seite. Ferner werden die Zusammenhänge $\Delta\varepsilon_{ij} = f(N_B)$ für die verschiedenen Typen von Zyklen benötigt. Wo sie nicht vorliegen, kann man sich an die quasiuniversellen Zusammenhänge nach Abb. 15.10.2 halten. Bei den relativ spröden Sonderlegierungen für extrem hohe Temperaturen ist die Genauigkeit dieser Unterlagen allerdings unbefriedigend; die Zusammenhänge werden dann auch deutlich temperaturabhängig.

Das *Vorgehen* ist dadurch gekennzeichnet, daß man den Ablauf der Vorgänge gedanklich zerlegt. Die im Laufe der Zeit sehr kompliziert variierende Beanspruchung bewirkt ständige Veränderungen im Werkstoff, und der ganze Prozeß hat an sich nicht periodischen Charakter. Man zerlegt ihn nun in Zeitintervalle quasistatischer Beanspruchung, in denen nur ‚natürliches Kriechen‘ auftritt und Zyklen, — beim Anfahren und Abstellen und allfälligen sonstigen schroffen Änderungen — die durch zwangsweise plastische Verformung charakterisiert sind. Die quasistatische Beanspruchung wird behandelt nach Abschn. 15.8, d. h. man führt den dort angegebenen Zeitparameter x ein und kennzeichnet durch $T(x)$ und $\sigma(x)$ die relative Häufigkeit des Auftretens der Temperaturen und Spannungen (alle σ und ε sind die Vergleichswerte nach der v. Mises-Hypothese) über der Zeit. Die Zyklen führt man durch rechnerische Abschätzungen auf einfache, idealisierte Fälle zurück wie in Abb. 15.10.1 dargestellt. Schließlich ist im allgemeinen noch zu berücksichtigen, daß an der betrachteten Stelle eine zunächst auftretende Spannungsspitze durch Kriechen asymptotisch verschwindet, wodurch die Lebensdauer um den Faktor τ_L vermindert wird.

Wenn man sich die Lebensdauer t und die Zyklenzahl N vorschreibt, kann man so vorgehen, daß man nach 15.8 zunächst τ_L bestimmt und dann folgendes berechnet:

$$J = \int_0^1 \left[\frac{\sigma(x)}{\sigma_{B3}(T)} \right]^{m(T)} dx, \quad D_s = \frac{t}{t_n} J. \quad 15.13(15)$$

Da $T(x)$ bekannt ist, kann dieses Integral berechnet werden. Nach unserer Normierung ist $t_n = 10^3$ h und σ_{B3} bezieht sich auf diese Zeitdauer. — Der gegebene Zyklus wird unterteilt, wie unter 15.10 beschrieben, worauf die N_{pp} , N_{cc} , N_{pc} , N_{rp} bestimmt und aus 15.10(4) N_B berechnet werden kann. — Bei sehr kleinem anelastischem Dehnungsbereich (Größenordnung 10^{-4}) kann N_B aus der Relation $\Delta\varepsilon_a = f(N_B)$ bestimmt werden, wie unter

15.10 erwähnt. — Dann setzt man

$$D_z = \frac{N}{N_B}. \quad 15.13(16)$$

Daraus ergibt sich sogleich der Zeit-Sicherheits-Faktor

$$S_t = \frac{\tau_L}{D_s + D_z}. \quad 15.13(17)$$

Die Bestimmung von S_b ist umständlicher. Man muß diese Größe zunächst annehmen, einen ideellen Spannungsverlauf $\sigma'(x) = S_b \sigma(x)$ bestimmen und mit diesen die angegebene Untersuchung ausführen. Man erhält so D'_s und D'_z und muß nun fordern

$$D'_s + D'_z = \tau_L. \quad 15.13(18)$$

Dasjenige S_b , das diese Gleichung erfüllt, ist der wahre Wert.

Kommt noch *schwingende Beanspruchung* mit der Schwingungsamplitude σ_A hinzu, so sind noch zwei ergänzende Schritte nötig. Erstens ist der Punkt mit den Koordinaten σ_m ,

$$\sigma_{Ai} = \sigma_A / (1 + \sqrt{\varrho^* \chi}) \quad 15.13(19)$$

ins Goodman-Diagramm einzutragen (wie Punkt A'' , Abb. 15.13.4), und es ist der Sicherheitsfaktor gegen oszillierende Beanspruchung

$$S_{b,osz} = \frac{\sigma_D}{\sigma_{Ai}}. \quad 15.13(20)$$

Zweitens ist bei der Bildung von J die Spannung σ zu ersetzen durch

$$\sigma = \sigma_m \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{Ai}}{\sigma_m} \right)^2 \right]. \quad 15.13(21)$$

Dieser Ausdruck entsteht durch Integration über die Schwingungsperiode mit $m = 3$, was die typische Größenordnung ist.

Das hier angegebene Verfahren geht bei abnehmender Temperatur, also immer mehr verschwindendem Kriechen, von selbst in das über, das ohne Kriechen gilt. Bei ausgesprochenen Hochtemperaturteilen, wie Gasturbinenschaufeln, muß man sich oft mit relativ kleinen S_b -Werten begnügen, z.B. $S_b = 1,4$. Dem sind die Inspektionsintervalle anzupassen. Außerdem gehören zu den Überwachungsgeräten der Gasturbinen solche, die durch Integration der Temperatur über der Betriebszeit ein Maß dafür geben, wie weit die Werkstoffschädigung fortgeschritten ist. Sehr häufig ist es allerdings die Korrosion, welche die Schaufeln unbrauchbar macht, lange bevor sie mechanisch nicht mehr die nötige Sicherheit bieten.

Will man sich auf die Theorie nach [42] und [43] stützen, die durch die Gln. 15.12(9) bis (15) wiedergegeben ist, so hat man, wenn J' und J'' die beiden Integralausdrücke in 15.12(15) sind

$$S_t = \frac{1}{(J' + J'') (\Delta t' + \Delta t'')} \left[\frac{\Delta t'}{A'} + \frac{\Delta t''}{A''} \right]. \quad 15.13(22)$$

Für S_b läßt sich etwa setzen $S_b \approx S_t^{0,3}$, da 0,3 ein typischer Wert des Exponenten ist, der S_b und S_t miteinander verknüpft.

Literatur zu Kap. 15

1. Biezeno, C. B.; Grammel, R.: Technische Dynamik, 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1953.
2. Kauderer, H.: Nichtlineare Mechanik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1958.
3. Neuber, H.: Kerbspannungslehre, 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1958.
4. v. Mises, R.: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. ZAMM 8 (1928) 161.

5. *Ziegler, H.*: An Introduction to Thermomechanics. Amsterdam, New York, Oxford: North Holland 1977.
6. *Manson, S. S.*: Thermal Stress and Low Cycle Fatigue. New York: McGraw-Hill 1966.
7. *Norton, F. H.*: The Creep of Steels at High Temperatures. London: McGraw-Hill 1929.
8. *Garofalo, F.*: Déformation et rupture par fluage. Paris: Dunod 1970.
9. *Penny, R. K.; Marriott, D. L.*: Design for Creep. London: McGraw-Hill 1971.
10. *Desai, C. S.; Abel, J. F.*: Introduction to the Finite Element Method. New York: van Nostrand 1972.
11. *Hahn, H. G.*: Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre. Frankfurt: Akadem. Verlagsanstalt 1975.
12. *Gallagher, G. H.*: Finite-Element-Analysis. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976.
13. *Mendelson, A.; Manson, S. S.*: Practical Solution of Plastic Deformation Problems in Elastic-Plastic Range. NACA Tech. Note 4088, (1957).
14. *Cockcroft, R. D. H.*: Creep in Materials Subjected to Variable Loading of an Initially Isentropic Material. Phil. D. Diss. Cambridge 1969.
15. *Odqvist, F. K. G.*: Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture. Oxford: Clarendon Press 1966.
16. *Rabotnow, Y. N.*: On the Equation of State for Creep. Progr. in Appl. Mech. (Prager Anniversary Volume), London 1963.
17. *Tilly, G. P.*: Relationships for Tensile Creep under Transient Stresses. J. Strain Anal. 7 (1972) Nr. 1.
18. *Beglünger, V.*: Der Einfluß elastischer Spannungsspitzen auf die Lebensdauer biegebeanspruchter Balken im Kriechgebiet. Turboforum 3 (1973) 155–167.
19. *Odqvist, F. K. G.; Hult, J.*: Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1962.
20. *Haas, H.*: Großschäden durch Turbinen- oder Generatorläufer, entstanden im Bereich bis zur Schleuderdrehzahl. Maschinenschaden 50 (1977) 195–200.
21. *Franklin, C. J.*: Cyclic Creep and Fatigue Life Time Prediction. Bericht an der COST-Tagung, Lüttich 1978.
22. *Manson, S. S.*: Interfaces between Fatigue, Creep and Fracture, Int. J. Fract. Mech. 2 (1966) 327.
23. *Spera, D. A.*: A Linear Creep Damage Theory of Materials. Ph. D. Thesis, Univ. of Wisconsin 1968.
24. *Spera, D. A.*: The Calculation of Elevated Temperature Cyclic Life Considering Low-Cyclic Fatigue and Creep. NASA TN D-5317, (1969).
25. *Spera, D. A.*: Calculation of Thermal Fatigue Life Based on Accumulated Creep Damage. NASA TN D-5489 (1969).
26. *Manson, S. S.; Halford, G. R.; Hirschberg, M. H.*: Creep-Fatigue Analysis by Strain-Range Partitioning. ASME Congr. on Pressure Vessels and Piping, May 1971. NASA TMX-67838.
27. *Halford, G. R.; Hirschberg, M. H.; Manson, S. S.*: Temperature Effects on the Strain Range Partitioning Approach for Creep Fatigue Analysis. ASTM, STP 520 (1973) 658–669.
28. *Manson, S. S.*: A Challenge to Unify Treatment of High Temperature Fatigue — A Partisan Proposal Based on Strain Range Partitioning Fatigue at Elevated Temperatures. ASTM, STP 520 (1973) 744–782.
29. *Manson, S. S., et al.*: Separation of the Strain Components for Use in Strain Range Partitioning, NASA TMX-71737, June 1975.
30. *Forrest, P. G.*: Fatigue of Metals. Oxford, London, New York, Paris: Pergamon Press 1962.
31. *Wellinger, K.; Dietmann, H.*: Festigkeitsberechnung, 3. Aufl. Stuttgart: Körner 1976.
32. *Peterson, R. E.*: Stress Concentration Design Factors. New York, London: Wiley, Chapman and Hall 1953.
33. *Sass, F.; Bouché, Ch.; Leitner, A.* (Hrsg.): Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, 13. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, Neudruck 1974.
34. *Petersen, C.*: Die Vorgänge in zügig und wechselnd beanspruchtem Metallgefüge, Teil 3 u. 4, Z. Metallkunde 42 (1951) 161–170 u. 43 (1952) 429–433.
35. *Sigwart, H.*: Werkstoffkunde. In Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau, 13. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, Neudruck 1974.
36. *Siebel, E.; Gaier, M.*: Untersuchung über den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf die Dauerschwingfestigkeit metallischer Bauteile. VDI-Z. 98 (1956) 1715–1723.
37. *Irwin, G. R.*: Fracture. Handb. d. Physik Bd. VI, Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1958.
38. *Liebowitz, H.* (Hrsg.): Fracture: An Advanced Treatise. Vol. I–VII. New York, London: Academic Press 1968–72.
39. *Sih, G. C.*: Mechanics of Fracture I. Leyden: Nordhoff International Publishing 1973.
40. *Heckel, K.*: Einführung in die technische Anwendung der Bruchmechanik. München: Hauser 1970.
41. *Mayer, K. H.; Meyer, H. J.; Riess, W.*: Betriebsbeanspruchungen der Wellen moderner Dampfturbinen bestimmen die Anforderungen an die Schmiedestücke. VGB Kraftwerkstechnik 58 (1978) 529–541.
42. *Majumdar, S.; Maiya, P. S.*: A Unified and Mechanistic Approach to Creep-Fatigue Damag. Argonne National Laboratory Report ANL — 76-58 (1976).
43. *Majumdar, S.; Maiya, P. S.*: A Damage Equation for Creep-Fatigue Interaction. 1976 ASME-MPC Symp. on Creep-Fatigue Interaction MPC-3, ASME United Engineering Center, New York NY, 10017, S. 323 to 335.
44. *Thomas, H. J.*: Thermische Kraftanlagen Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1975.

16 Festigkeit der Schaufelungen

16.1 Schaufelbeanspruchung durch Fliehkraft

Bei den Laufrädern der Axialmaschinen kann der Schaufelquerschnitt f (Abb. 16.1.1) längs des Radius variieren, und zwar nimmt er dann praktisch stets nach außen ab. Die radiale Zugbeanspruchung σ_z infolge Fliehkraft kann durch eine einfache Gleichgewichtsbetrachtung gefunden werden, denn das Massenelement $dm = \rho f dr$ übt die Fliehkraft

$$dZ = r\omega^2 \rho f dr \quad 16.1(1)$$

aus. Daher sind die Zugspannungen im Nabenradius r_N und im laufenden Radius r^*

$$\sigma_{zN} = \rho\omega^2 \int_{r_N}^{r_S} \frac{f}{f_N} r dr, \quad \sigma_z(r^*) = \rho\omega^2 \int_{r^*}^{r_S} \frac{f}{f^*} r dr, \quad 16.1(2)$$

vgl. Abb. 16.1.1 (es ist die frei endende Schaufel vorausgesetzt). Wo die Schaufel mit einer Ausrundung in den Fuß übergeht, ist unter f_N der ideelle Querschnitt zu verstehen, wie in Abb. 16.1.1 angedeutet. Mit

$$y \equiv \frac{r}{r_N}, \quad Y \equiv \frac{r_S}{r_N} \quad 16.1(3)$$

erlauben diese Gleichungen auch die Darstellung

$$\underline{\sigma_{zN} = \rho u_N^2 \int_1^Y \frac{f}{f_N} y dy}, \quad \underline{\sigma_z(y^*) = \rho u_N^2 \int_{y^*}^Y \frac{f}{f^*} y dy}, \quad 16.1(4)$$

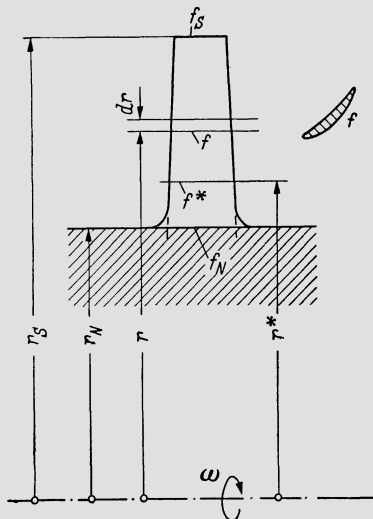


Abb. 16.1.1. Zur Berechnung der Fliehkraftspannungen in einer verjüngten Schaufel

bei der stets die Integralausdrücke dimensionslos sind, also nur von der geometrischen Gestalt, nicht von den Absolutabmessungen abhängen. *Geometrisch ähnliche Schaufelungen aus Werkstoffen gleicher Dichte erfahren bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit gleiche Fliehkraftbeanspruchungen.*

Bei Schaufeln konstanten Querschnittes lassen sich die Integrale in allgemeiner Form auswerten. Man erhält

$$\sigma_{zN} = \rho u_N^2 \frac{Y^2 - 1}{2}, \quad \sigma_z(y^*) = \rho u_N^2 \frac{Y^2 - y^{*2}}{2}. \quad 16.1(5)$$

Für σ_{zN} wird in diesem Falle auch häufig eine formal andere Darstellung gegeben. Der Schaufelschwerpunkt liegt dann im Mittelkreisradius r_m , so daß mit l als Schaufellänge und m als Schaufelmasse die Fliehkraft

$$Z = \frac{m u_m^2}{r_m} = \frac{\rho l f u_m^2}{r_m}$$

wird, somit nach Division durch f

$$\sigma_{zN} = 2 \rho u_m^2 \frac{l}{D_m}. \quad 16.1(6)$$

Somit ist die Fliehkraftspannung ausgedrückt durch die auch sonst viel benutzten Parameter mittlere Umfangsgeschwindigkeit u_m und Schaufellängenverhältnis l/D_m . — Beachtenswert ist noch folgender Zusammenhang. Ist φ die Durchsatzzahl im Mittelkreis, so wird der Volumenstrom \dot{V} durch den Schaufelkranz

$$\dot{V} = \pi D_m l \varphi u_m = \pi D_m^2 \left(\frac{l}{D_m} \right) \varphi u_m = \frac{4 \pi \varphi u_m^3}{\omega^2} \left(\frac{l}{D_m} \right).$$

Wenn man dies nach l/D_m auflöst und einsetzt in 16.1(6), folgt

$$\sigma_{zN} = \frac{\rho \dot{V} \omega^2}{2 \pi u_m \varphi}. \quad 16.1(7)$$

Liegen nun Volumenstrom, Winkelgeschwindigkeit und Schaufelungstyp (also φ) fest, so bewirkt offensichtlich eine Erhöhung der Umfangsgeschwindigkeit u_m überraschenderweise eine Herabsetzung der Spannung, weil die Schaufeln kürzer werden.

Als theoretischer Grenzfall interessiert auch die *Schaufel konstanter Fliehkraftspannung*. Für ein Element von der Ausdehnung dr (Abb. 16.1.1) gilt ja auch die Gleichgewichtsbedingung

$$r \omega^2 \rho f dr = -d(\sigma_z f),$$

somit

$$\frac{d(\sigma_z f)}{dr} = -\rho f r \omega^2 \dots f \frac{d\sigma_z}{dr} + \sigma_z \frac{df}{dr} = -\rho f r \omega^2. \quad 16.1(8)$$

Nach Voraussetzung ist aber $d\sigma_z/dr = 0$. Also bleibt die Differentialgleichung

$$\frac{df}{f} = -\frac{\rho \omega^2}{\sigma_z} r dr$$

mit der Lösung

$$\ln \frac{f}{f_N} = -\frac{\rho \omega^2}{\sigma_z} \int_{r_N}^r r dr = -\frac{\rho \omega^2}{2 \sigma_z} (r^2 - r_N^2)$$

oder

$$\underline{\underline{\frac{f}{f_N} = \exp \left[-\frac{\rho u_N^2}{2 \sigma_z} (y^2 - 1) \right]}}. \quad 16.1(9)$$

Der Querschnitt nimmt also mit dem Radius exponentiell ab. Theoretisch könnte sich die Schaufel ins Unendliche erstrecken, doch kann man sie an irgendeiner Stelle y enden lassen, wenn man dort eine Masse anbringt, die durch ihre Fliehkraft im örtlichen Querschnitt gerade die Spannung σ_z erzeugt. Bemerkenswert ist, daß das Problem grundsätzlich für beliebige Werte von u_N und σ_z eine Lösung hat, nur würde z. B. bei extrem klein angenommenem σ_z eine Querschnittsabnahme mit zunehmendem Radius resultieren, der kein stabförmiger Körper mehr entspricht. — Abb. 16.1.2 zeigt ein Beispiel eines Querschnitts- und Spannungsverlaufes in einer Dampfturbinen-Endstufenschaufel, vgl. Rieß [1]. Man erkennt, wie gut man sich in einem erheblichen Bereich der Schaufelhöhe dem Stab konstanter Spannung nähert.

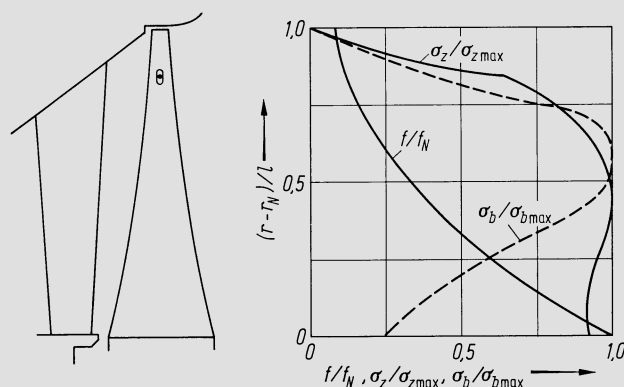


Abb. 16.1.2. Beispiel der Verteilung von Querschnitt und Spannungen in der Laufschaufel einer Dampfturbinen-Endstufe, Schaufellänge 1044 mm. Nach Rieß [1]. Knick im Verlauf von σ_z ist bedingt durch die „Arkaden“ nach Abb. 16.8.11

Es ist weithin üblich geworden, die Laufschaufelreihen am äußeren Umfang mit Labyrinthdichtungen zu versehen. Die früher oft verwendeten aufgenieteten Deckbänder sind heute bei Laufschaufeln selten, man verwendet bevorzugt Deckplatten, die mit der Schaufel ein Stück bilden (vgl. Abb. 16.1.3). Diese sind mechanisch meist nicht miteinander verbunden. Sind f_d , r_d , t_d , u_d Querschnitt, Radius, Teilung und Umfangsgeschwindigkeit im mittleren Deckplattenkreis und z die Schaufelzahl, so ist die Fliehkraft der Deckplatte

$$Z_d = \frac{\rho f_d t_d u_d^2}{r_d} = \frac{2\pi f_d}{z} \rho u_d^2. \quad (16.1(10))$$

Das erzeugt im Spitzenquerschnitt f_s der Schaufel die Zugspannung

$$\sigma_{zS} = \frac{2\pi}{z} \left(\frac{f_d}{f_s} \right) \rho u_d^2. \quad (16.1(11))$$

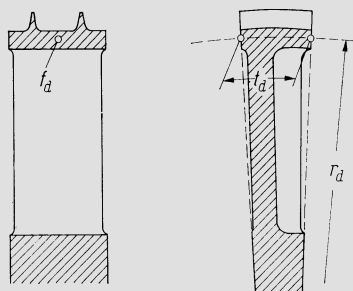


Abb. 16.1.3. Laufschaufel mit Deckplatte

Im Nabenquerschnitt kommt zur Spannung nach Gl. 16.1(4) ein Zuschlag, der Z_d/f_N beträgt, womit folgt ($y_d = r_d/r_N$)

$$\sigma_{zN} = \rho u_N^2 \left[\int_1^Y \frac{f}{f_N} y dy + \frac{2\pi}{z} \left(\frac{f_d}{f_N} \right) y_d \right]. \quad 16.1(12)$$

Im allgemeinen entsteht dadurch aber auch eine Biegespannung σ_b^* im Schaufelblatt, dann nämlich, wenn der Schwerpunkt S_d der Deckplatte und der Schwerpunkt S des Schaufelprofils (es kann *irgendeines* der Profile sein, nicht etwa nur das an der Spitze) nicht auf einem Radius liegen (vgl. Abb. 16.1.4). Sind J_1 und J_2 die beiden Hauptträgheitsmomente, so ist mit den Bezeichnungen in jenem Bild die im Punkt A entstehende Biegespannung mit Gl. 16.1(10)

$$\sigma_b^*(A) = \frac{2\pi f_d}{z} \left[\frac{l_1 a}{J_1} + \frac{l_2 b}{J_2} \right] \rho u_d^2. \quad 16.1(13)$$

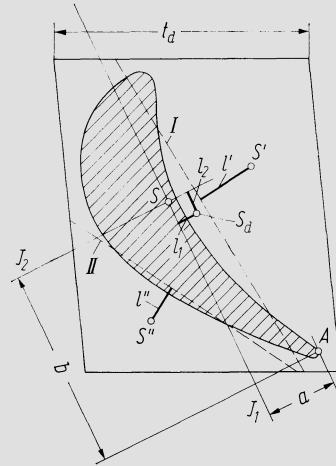


Abb. 16.1.4. Zur Berechnung der Beanspruchung einer Deckplatte

Bei der im Bild gezeigten Situation wird diese Zusatzspannung in A am größten und addiert sich zur reinen Zugspannung durch Fliehkraft, doch sind auch andere Verhältnisse denkbar, wobei die Formel entsprechend abzuwandeln ist. Die Abstände l_1 und l_2 sind im Profilschnitt zu bilden und zwar ausgehend vom Durchstoßpunkt des Radius von S_d aus durch diesen Schnitt.

Auch die Deckplatte selbst erfährt unter dem Einfluß der Fliehkraft eine Biegebeanspruchung. In einigermaßen exakter Weise ist dieses äußerst komplizierte Problem nur nach dem Verfahren der finiten Elemente zu lösen, doch genügt oft die nachfolgende einfache Näherungsrechnung. Man grenzt einzelne Lappen ab, vgl. die gestrichelten Linien I und II in Abb. 16.1.4. Die vereinfachende Vorstellung ist nun die, daß diese Lappen durch die in I und II liegenden Querschnitte an einen starren Schaufelkörper anschließen und die Spannungen in diesen Querschnitten einfach nach der elementaren Biegungstheorie berechnet werden können. Sind W' und W'' die Widerstandsmomente dieser beiden Querschnitte, m' und m'' die Massen der beiden Lappen, deren Schwerpunkte S' und S'' die Abstände l' und l'' von den Querschnitten haben, so sind die Biegespannungen

$$\sigma_b' = \alpha' \frac{m' u_d^2 l'}{r_d W'}, \quad \sigma_b'' = \alpha'' \frac{m'' u_d^2 l''}{r_d W''}. \quad 16.1(14)$$

Die Formfaktoren α' und α'' berücksichtigen Spannungskonzentrationen beim Übergang der Deckplatte in die Schaufel und können bei engen Krümmungsradien dieses Überganges die Größenordnung 1,5 annehmen. Bei der Bildung der Widerstandsmomente ist zu beachten, daß die Deckplatte Labyrinthkämme aufweisen kann, die unter einem spitzen Winkel geschnitten werden, vor allem bei Schnittebene II. Senkrecht zu dieser kann ein solcher Kamm praktisch keine Biegespannungen übertragen, weshalb der entsprechende Querschnittsanteil bei der Berechnung des Widerstandsmomentes wegzulassen ist.

Die zusätzlichen Spannungen in der Schaufel und diejenige in der Deckplatte selbst können bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten die Anwendung der Deckplatte und damit der Labyrinthdichtung am Laufrad ausschließen. Allerdings ist dann meist die Schaufellänge so groß, daß die Spaltverluste ohnehin zurücktreten.

Sind zur Bekämpfung von Schwingungen Verbindungselemente wie Bindedrähte oder lose eingelegte Dämpferdrähte vorgesehen, so muß auch deren Biegebeanspruchung beachtet werden. Mit den Bezeichnungen nach Abb. 16.1.5 ergibt sich

$$\sigma_{bd} = \frac{\pi^2 \beta^2 \bar{D} f_d}{6z^2 W_d} \rho \bar{w}^2, \quad 16.1(15)$$

wo f_d und W_d Querschnitt und Widerstandsmoment des Elementes sind. Bei der Situation nach Abb. 16.1.5b ergibt sich an einem überhängenden Ende die gleiche Biegespannung, sofern $a = 0,408 t$. Bei $a = 0,5 t$ wird die Spannung um den Faktor 1,5 größer.

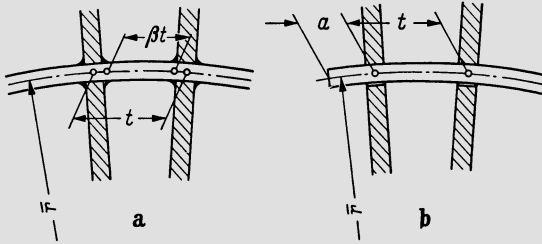


Abb. 16.1.5

Abb. 16.1.5. Anordnung mit Bindedrähten (a) und Dämpferdrähten (b)

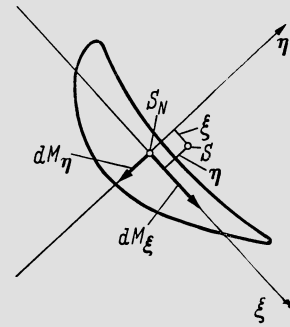


Abb. 16.1.6

Abb. 16.1.6. Zur Berechnung der Biegebeanspruchung einer Schaufel durch Fliehkräfte; ξ und η die Hauptträgheitsachsen (dM_η negativ)

Zusätzliche Biegebeanspruchungen erfährt eine Schaufel unter dem Einfluß der Fliehkraft, wenn ihre Schwerlinie (Verbindungsline der Schwerpunkte ihrer Profile) nicht einen Radius bildet. Zum Beispiel im Nabenschnitt ergeben sich die Biegemomente bezüglich der Hauptträgheitsachsen ξ und η desselben (Abb. 16.1.6) wie folgt. Ein Element mit der Radialerstreckung dr , dessen Schwerpunktsprojektion gegenüber dem Schwerpunkt S_N des Nabenschnittes die Koordinaten ξ und η aufweist, übt die Biegemomente

$$dM_\xi = \eta \rho \omega^2 f r dr, \quad dM_\eta = -\xi \rho \omega^2 f r dr$$

aus, so daß also insgesamt die Momente

$$M_\xi = \rho \omega^2 \int_{r_N}^{r_S} \eta f r dr, \quad M_\eta = -\rho \omega^2 \int_{r_N}^{r_S} \xi f r dr \quad 16.1(16)$$

entstehen. Daraus ergeben sich in üblicher Weise die Biegespannungen.

16.2 Torsionsbeanspruchung von Laufschaufeln

Verwundene Laufschaufeln erfahren unter dem Einfluß der Fliehkraft eine Torsionsbeanspruchung, welche die Tendenz hat, die Verwindung zu verkleinern. In den meisten Fällen sind die so entstehenden Spannungen und Verformungen (die ‚Entwindung‘) sehr gering. Sie werden aber beträchtlich bei Schaufeln, die gleichzeitig sehr schlank und stark verwunden sind, also bei den Endstufen von Dampfturbinen (gegebenenfalls auch großer Gasturbinen) und bei den ersten Stufen von Axialverdichtern, insbes. von Zweistromtriebwerken. Eine neuere Theorie darüber gibt *Ohtsuka* [2]; sie wird nachfolgend zusammengefaßt.

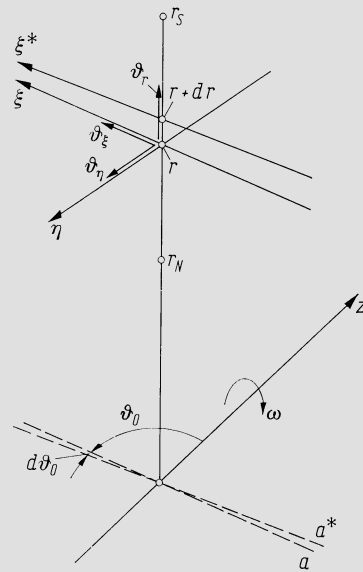


Abb. 16.2.1. Koordinatensystem zur Berechnung der Torsionsbeanspruchung einer verdrehten Schaufel

Abb. 16.2.1 zeigt die Situation. Es ist z die Drehachse, ω die Winkelgeschwindigkeit. Das Schaufelblatt reicht von r_N bis r_S , und es ist angenommen, daß seine Schwerlinie gerade und radial sei. Der in r liegende Schaufelschnitt hat die Hauptträgheitsachsen ξ und η mit den zugehörigen Trägheitsmomenten J_ξ , J_η . Die Lage dieser Achsen ist dadurch definiert, daß man die ξ -Achse nach $r = 0$ projiziert — die gestrichelt angegebene Gerade a — und dort den Winkel ϑ_0 gegenüber der Drehachse angibt. Ein um dr weiter außen liegendes Profil besitzt eine Hauptträgheitsachse ξ^* , deren Projektion a^* eine um $d\vartheta_0$ verschiedene Richtung aufweist. Es ist $\varkappa = d\vartheta_0/dr$ die örtliche Verwindungsgröße. Gegenüber der entspannten Lage dreht sich der Profilschnitt in r um einen Winkel ϑ_r und neigt sich um Winkelbeträge ϑ_ξ , ϑ_η . Dies ist im Bild durch Vektoren angedeutet, die nach der Rechtsschraubenregel diesen Winkeln zugeordnet sind.

Nun möge ein Profilschnitt in r herausgegriffen werden. Ein beliebiger seiner Punkte verschiebt sich infolge der Deformation in den Richtungen ξ , η , r um Beträge u , v , w . Wenn u_0 , v_0 , w_0 diese Verschiebungen im Koordinatenursprung, d.h. im Schwerpunkt sind, gilt mit hinreichender Genauigkeit folgender Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(r) - \eta \vartheta_r(r), \\ v &= v_0(r) + \xi \vartheta_r(r), \\ w &= w_0(r) + \eta \vartheta_\xi(r) - \xi \vartheta_\eta(r) + \alpha(r) \psi(\xi, \eta, r). \end{aligned} \right\} 16.2(1)$$

In der letzten dieser Gleichungen berücksichtigt das Zusatzglied $\alpha\psi$ die Verwölbung des Schnittes unter dem Einfluß der Torsionsbeanspruchung. In der Theorie der Torsion ist

es bekanntlich nicht zulässig, diese Verwölbung unberücksichtigt zu lassen, worin ja die Schwierigkeit des Problems schon immer bestanden hat. In obiger Darstellung ist α diese Auswölbung im Koordinatenursprung, während das dimensionslose ψ die Verteilung über den Querschnitt beschreibt. In jedem r wird ein anderes α angetroffen, während $\psi(\xi, \eta)$ von der Gestalt des Profils abhängt. Da aber in jedem Radius ein anderes Profil erscheint, wurde geschrieben $\psi(\xi, \eta, r)$. Ausgehend von den Verschiebungen u, v, w erhält man die sämtlichen Dehnungen und Verzerrungen, von denen für die weitere Rechnung die folgenden benötigt werden:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial w}{\partial r} + \kappa \left[\eta \frac{\partial w}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial w}{\partial \eta} \right], \\ \gamma_{\xi r} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \xi} + \kappa \left[\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial u}{\partial \eta} - v \right], \\ \gamma_{\eta r} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \kappa \left[\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial v}{\partial \eta} + u \right]. \end{aligned} \right\} 16.2(2)$$

Zum Verständnis der Zusatzglieder mit dem Faktor κ beachte man folgendes. Man denke sich längs der Schaufel alle Punkte, die einem festen Koordinatenpaar ξ, η entsprechen (in den verschiedenen Schnitten) miteinander verbunden. Diese Verbindungslinie ist keine Gerade und durchstößt die einzelnen Schnitte *nicht* senkrecht, eben weil die Schaufel verwunden ist. Ableitungen $\partial/\partial r$ sind bei festem ξ und η zu bilden, d.h. längs solcher Verbindungslinien, nicht etwa längs Radien. Daher rühren die angegebenen Korrekturglieder. — Die Normal- und Schubspannungen im Schaufelschnitt werden mit E als Elastizitätsmodul und G als Schubmodul

$$\sigma_r = E\varepsilon_r, \quad \tau_{\xi r} = G\gamma_{\xi r}, \quad \tau_{\eta r} = G\gamma_{\eta r}. \quad 16.2(3)$$

Damit lassen sich die folgenden Integralgrößen bilden, bei denen stets die Doppelintegrale über die ganze Fläche des betreffenden Querschnittes zu bilden sind.

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \iint \sigma_r d\xi d\eta, & Q_\xi &= \iint \tau_{\xi r} d\xi d\eta, & Q_\eta &= \iint \tau_{\eta r} d\xi d\eta, \\ M_r &= \iint (\tau_{\eta r} \xi - \tau_{\xi r} \eta) d\xi d\eta, \\ M_\xi &= \iint \sigma_r \eta d\xi d\eta, & M_\eta &= - \iint \sigma_r \xi d\xi d\eta, \\ N &= \iint \sigma_r \psi d\xi d\eta. \end{aligned} \right\} 16.2(4)$$

Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit kann man alsdann die Gleichgewichtsbedingungen gewinnen:

$$\left. \begin{aligned} Q'_r + \varrho r \omega^2 f &= 0, & Q'_\xi - \kappa Q_\eta &= 0, & Q'_\eta + \kappa Q_\xi &= 0, \\ M'_r + \frac{\varrho \omega^2}{2} (J_\eta - J_\xi) \sin 2\vartheta_0 &= 0, \\ M'_\xi - \kappa M_\eta - Q_\eta &= 0, & M'_\eta + \kappa M_\xi + Q_\xi &= 0, \\ N' - \kappa \iint \left[\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \eta - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \xi \right] \sigma_r d\xi d\eta - \iint \left[\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \tau_{\xi r} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \tau_{\eta r} \right] d\xi d\eta &= 0. \end{aligned} \right\} 16.2(5)$$

Die Akzente bedeuten hier Ableitungen nach r , während mit f der lokale Querschnitt benannt ist. Diesen Gleichungen sind noch die Grenzbedingungen beizufügen, nämlich

$$\begin{aligned} u = v = w = \vartheta_\xi = \vartheta_\eta = \vartheta_r = \alpha = 0 & \quad \text{in} \quad r = r_N, \\ Q_\xi = Q_\eta = Q_r = M_\xi = M_\eta = M_r = N = 0 & \quad \text{in} \quad r = r_S. \end{aligned} \quad 16.2(6)$$

Nun denke man sich die u, v, w in 16.2(2) ausgedrückt durch die Beziehungen 16.2(1), die so entstehenden Gln. in 16.2(3) eingesetzt, diese wiederum in 16.2(4) und das so Ent-

stehende schließlich in die Gleichgewichtsbedingungen 16.2(5) und die Grenzbedingungen 16.2(6). Der so entstehende Satz von Gleichungen enthält als unbekannte Funktionen $u, v, w, \vartheta_\xi, \vartheta_\eta, \vartheta_r, \alpha$.

Das rechnerische Vorgehen besteht nun darin, den ganzen Schaufelkörper zu diskretisieren und zur Differenzenrechnung überzugehen. Man teilt also den Radienbereich in eine Anzahl von Intervallen ein, und in jedem der so ausgezeichneten Radien werden die Profilschnitte durch Netzpunkte mit endlichen ξ - und η -Schritten diskretisiert. Die sämtlichen auftretenden Ableitungen werden in bekannter Weise durch Differenzen der Funktionswerte in den verschiedenen Raumpunkten ausgedrückt. Schließlich werden die Integrale durch entsprechende Summen dargestellt. Dann gehen die Gleichgewichtsbedingungen 16.2(5) zusammen mit den Grenzbedingungen 16.2(6) über in ein Gleichungssystem von ebensoviele Gleichungen wie unbekannt diskreten Funktionswerten $u, v, w, \vartheta_\xi, \vartheta_\eta, \vartheta_r, \alpha$. Diese sind dadurch also bestimmt. Mit den sämtlichen ϑ_r (längs r) ist gerade die gesuchte ‚Entwindung‘ der Schaufel gefunden. Die u, v und w liefern vermöge der Gln. 16.2(2) und (3) die Spannungen, also mit den τ -Werten insbesondere die Torsionsbeanspruchung.

Die Funktion ψ figuriert nicht unter den unbekannt Funktionen, denn hier handelt es sich ja um das allgemeine Problem, für einen Querschnitt gegebener Geometrie die Torsionsverwölbung zu finden. Dieses ist von *Herimann* [3] nach dem Verfahren der finiten Elemente gelöst worden. Als vorbereitender Schritt der Rechnung ist also die ψ -Funktion für die gegebenen Profilschnitte in dieser Weise zu bestimmen. — In der Originalarbeit sind die Ansätze zunächst für den Fall einer beliebig gestalteten Schaufelachse angegeben; die Durchführung der Theorie erfolgt aber nur für die gerade, radiale Schaufelachse. Der Vergleich mit Messungen zeigt gute Übereinstimmung für die Entwindung. Für die Spannungen ist die Übereinstimmung gut in größerer Entfernung von der Einspannung, weniger aber in ihrer unmittelbaren Nähe. Das hängt wohl damit zusammen, daß die technisch realisierbare Einspannung niemals so vollkommen sein kann, daß die Grenzbedingungen in $r = r_N$ exakt erfüllt sind.

16.3 Biegebeanspruchung der Schaufeln durch Strömungskräfte

Das Problem der Biegebeanspruchung durch Strömungskräfte sei hier am Beispiel einer Turbinenlaufschaufel behandelt (vgl. Abb. 16.3.1a und b), doch lassen sich die Überlegungen sinngemäß auf andere Fälle, wie die Leitschaufelung nach Abb. 16.3.1c oder auf Axialverdichterschaufelungen übertragen. Zur Behandlung des Problems müssen geeignete Kontrollflächen um die Schaufelreihe gelegt werden, also die Flächen 1 und 2 Abb. 16.3.1a und eine obere Abschlußfläche, welche die dort vorhandene Labyrinthdichtung umgibt. Diese letztere kann ersetzt werden durch eine einfachere Fläche BC , die ihr insofern äquivalent ist, als sie aus der stetig angenommenen äußeren Druckverteilung die gleiche Kraft erfährt. Die Kontrollfläche hat damit die gleiche Gestalt wie bei der frei endigenden Schaufel, Abb. 16.3.1b.

Nun sei die Aufgabe gestellt, im Schnitt, der durch die Stromfläche Ψ gekennzeichnet ist, die Biegespannungen im Schaufelprofil zu bestimmen. Die größten Biegespannungen treten in der Regel im Nabenschnitt auf (bei konstantem Schaufelprofil immer), wobei die Stromfläche mit der Nabe zusammenfällt. Bei sehr stark verjüngten Schaufeln kann aber auch eine andere Stelle die höchste Biegebeanspruchung erleiden, vgl. die entsprechende Kurve im Beispiel Abb. 16.1.2. Um die Biegebeanspruchung in dem in der Fläche Ψ erscheinenden Schaufelprofil, dessen Schwerpunkt S sei, zu bestimmen, hat man das gemäß $ABCD$ umgrenzte Kontrollgebiet zu betrachten. Es ist zu formulieren, daß das Moment bezüglich S der an der Kontrollfläche angreifenden Druckkräfte und der sie durchsetzenden Impulsströme gleich dem im Profil angreifenden Moment ist. Dies gilt für die beiden Komponenten, nämlich die Umfangskomponente $M_u(r')$ senkrecht zur

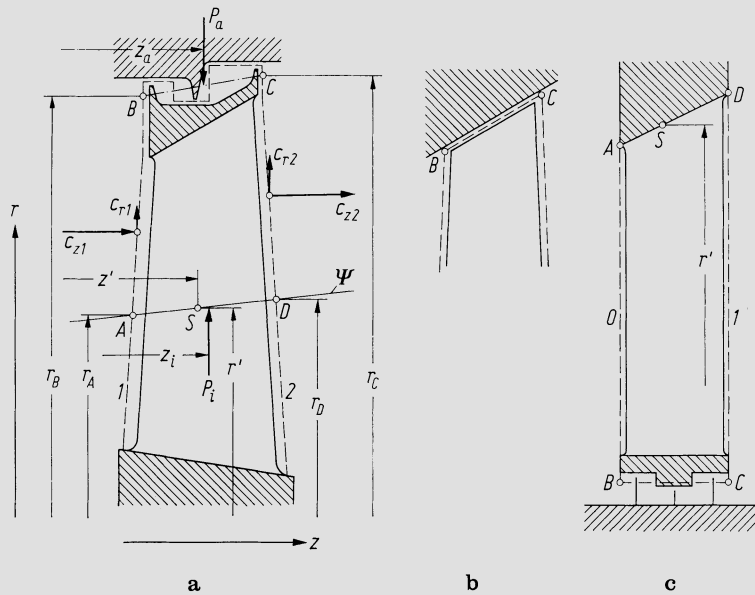


Abb. 16.3.1. Zur Berechnung der Biegebeanspruchung von Schaufeln durch Strömungskräfte. a) Laufschaufel mit Deckplatte; b) frei endigende Laufschaufel; c) Leitschaufel

Bildebene und die Axialkomponente $M_z(r')$ in Richtung der Drehachse. Bei M_z kommen nur die Impulsströme in Betracht, da die Druckverteilungen keinen Beitrag liefern. Die Angabe $M(r')$ weist darauf hin, daß die Momente gebildet werden für den Schnitt, dessen Schwerpunkt in r' liegt (vgl. Abb. 16.3.1a). Für das Moment $M_u(r')$ entsteht auf diese Weise folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 M_u(r') = & \frac{2\pi}{z_s} \left\{ \int_{r_A}^{r_B} [p_1(r - r') + \rho_1 c_{z1}^2 (r - r') + \rho_1 c_{z1} c_{r1} (z' - z_1)] r dr - \right. \\
 & - \int_{r_D}^{r_C} [p_2(r - r') + \rho_2 c_{z2}^2 (r - r') - \rho_2 c_{z2} c_{r2} (z_2 - z')] r dr + \\
 & + \bar{p}_a \frac{r_C^2 - r_B^2}{2} \left(\frac{r_C + r_B}{2} - r' \right) - \bar{p}_a \frac{r_C + r_B}{2} (z_C - z_B) (z_a - z') - \\
 & \left. - \bar{p}_i \frac{r_D^2 - r_A^2}{2} \left(\frac{r_A + r_D}{2} - r' \right) - \bar{p}_i \frac{r_A + r_D}{2} (z_D - z_A) (z_i - z') \right\}. \quad 16.3(1)
 \end{aligned}$$

Hier bedeuten p_1, ρ_1, p_2, ρ_2 Druck und Dichte in den Kontrollflächen 1 und 2, \bar{p}_a und \bar{p}_i die Druckmittelwerte an den Flächen BC und AD , z_a und z_i die z -Koordinaten der resultierenden Radialkomponenten P_i, P_a der Druckkräfte auf diese Flächen, $z_A \dots z_D$ die z -Koordinaten der Punkte $A \dots D$, z_s die Schaufelzahl. Die übrigen Bezeichnungen gehen aus der Abbildung hervor. — In den Integralausdrücken sind fast stets die von den Impulsströmen herrührenden Glieder sehr viel kleiner als die durch die Druckverteilungen gegebenen. Insbesondere ist praktisch immer

$$c_{r1}(z' - z_1) \ll c_{z1}(r - r'), \quad c_{r2}(z_2 - z') \ll c_{z2}(r - r'),$$

so daß mindestens die Glieder mit c_r als Faktor vernachlässigt werden können. Die nicht unter den Integralen stehenden Ausdrücke sind die Momente der Kräfte an den Flächen BC und AD . Da aber die Kräfte an AD mit sehr kleinen Hebelarmen angreifen, sind diese Glieder vernachlässigbar, und das gleiche gilt für das Moment der Radialkraft an

BC. So läßt sich schließlich mit hinreichender Genauigkeit setzen

$$M_u(r') = \frac{2\pi}{z_s} \left\{ \int_{r_A}^{r_B} (p_1 + \varrho_1 c_{z1}^2) (r - r') r dr - \int_{r_D}^{r_C} (p_2 + \varrho_2 c_{z2}^2) (r - r') r dr + \bar{p}_a \frac{r_C^2 - r_B^2}{2} \left(\frac{r_C + r_B}{2} - r' \right) \right\}. \quad 16.3(2)$$

Für die z -Komponente des Momentes findet man, wie unmittelbar einleuchtet,

$$M_z(r') = \frac{2\pi}{z_s} \left\{ \int_{r_A}^{r_B} \varrho_1 c_{z1} c_{u1} (r - r') r dr - \int_{r_D}^{r_C} \varrho_2 c_{z2} c_{u2} (r - r') r dr \right\}. \quad 16.3(3)$$

Hierbei sind c_{u1} und c_{u2} die Umfangskomponenten der Geschwindigkeiten in den Flächen 1 und 2. Man beachte, daß diese Gleichungen auch Gültigkeit haben für den Fall der frei endigenden Schaufel nach Abb. 16.3.1b. Der einzige Unterschied zwischen den beiden Fällen besteht darin, daß bei Anordnung einer Deckplatte c_{z1} und c_{z2} im Integranden über einen Teil des Integrationsweges verschwindet.

In sinngemäßer Weise läßt sich z.B. das Leitrad nach Abb. 16.3.1c behandeln. Es sind dort wie auch beim Laufrad untereinander nicht verbundene Deckplatten vorausgesetzt. In diesem Falle, wie auch bei frei endigenden Schaufeln treten bei der Leit-schaukel stets die größten Biegespannungen im Einspannquerschnitt auf, weil die all-fällige Verjüngung nie so stark ist wie bei gewissen Laufschaufeln. Die Gleichungen lauten hier

$$M_u(r') = \frac{2\pi}{z_s} \left\{ \int_{r_B}^{r_A} (p_0 + \varrho_0 c_{z0}^2) (r' - r) r dr - \int_{r_C}^{r_D} (p_1 + \varrho_1 c_{z1}^2) (r' - r) r dr \right\}, \quad 16.3(4)$$

$$M_z(r') = \frac{2\pi}{z_s} \left\{ \int_{r_C}^{r_D} \varrho_1 c_{z1} c_{u1} (r' - r) r dr - \int_{r_B}^{r_A} \varrho_0 c_{z0} c_{u0} (r' - r) r dr \right\}. \quad 16.3(5)$$

Die Vorzeichenkonvention ist hier stets so getroffen, daß die M -Komponenten positiv werden. Die Gln. 16.3(2)–(5) lassen sich auch ohne weiteres auf den Fall des Axialverdichters übertragen, wobei man lediglich, um positive M -Komponenten zu erhalten, eine Vorzeichenumkehr vornehmen wird. Hingegen gelten sie nicht mehr, wenn eine steife Querverbindung der Schaufeln vorhanden ist, also durchgehende Deckbänder oder gar Leitradzwischenböden. In diesem Falle liegen Schaufelpakete vor, vgl. darüber Abschn. 16.5.

Aus M_u und M_z ergibt sich der Betrag des gesamten Biegemomentvektors M und sein Winkel β gegenüber der Drehachsenrichtung aus

$$M(r') = \sqrt{M_u^2(r') + M_z^2(r')}, \quad \arctan \beta = \frac{M_u(r')}{M_z(r')}. \quad 16.3(6)$$

Exakt ist dies das Moment in dem Schaufelschnitt, der in der betrachteten Ψ -Fläche erscheint. Das Moment im Schnitt senkrecht zur Schaufelachse durch S unterscheidet sich von diesem aber so wenig, daß man M auch als in jenem Schnitt angreifendes Biegemoment auffassen darf. Hiervon ausgehend sind nun auch die Komponenten von M in Richtung der beiden Hauptträgheitsachsen 1 und 2 des Profils (Abb. 16.3.2) gegeben, und die Biegespannung in einem Profilverpunkt mit Koordinaten a_1, a_2 ist

$$\sigma_b(a_1, a_2) = M \left[\frac{a_1 \cos \gamma}{J_1} - \frac{a_2 \sin \gamma}{J_2} \right]. \quad 16.3(7)$$

Im Beispiel Abb. 16.3.2 ist als Profilverpunkt die Austrittskante gewählt, die oft die höchstbeanspruchte Stelle ist, um so mehr als dort durch Biegung stets eine Zugspannung entsteht. Es kann aber ebensogut jeder andere interessierende Punkt herausgegriffen werden.

Zweckmäßig können nun die folgenden dimensionslosen Größen gebildet werden:

$$k_f \equiv \frac{f}{s^2}, \quad k_{J1} \equiv \frac{J_1}{s^4}, \quad k_{J2} \equiv \frac{J_2}{s^4}, \quad x_1 \equiv \frac{a_1}{s}, \quad x_2 \equiv \frac{a_2}{s}. \quad 16.3(8)$$

Sie kennzeichnen offenbar ein Profil gegebener Gestalt und sind unabhängig von seinen Absolutabmessungen. Gl. 16.3(7) schreibt sich dann

$$\sigma_b(x_1, x_2) = \frac{M}{s^3} \left[\frac{x_1 \cos \gamma}{k_{J1}} - \frac{x_2 \sin \gamma}{k_{J2}} \right]. \quad 16.3(9)$$

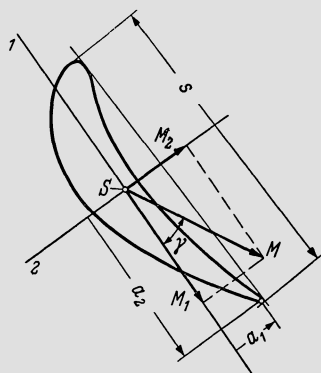


Abb. 16.3.2. Hauptträgheitsachsen und Biegemomente in einem Schaufelschnitt

Weiter können die Gln. 16.3(2)–(5) in folgender Weise umgeformt werden. Man ersetzt alle Radien durch bezogene Radien $R \equiv r/r'$ und dividiert alle Druckwerte und die Größen des Aufbaues $\rho c_i c_j$ durch einen charakteristischen Druck p^* . Diesen kann man nach irgendeiner Konvention wählen, z. B. kann es ein Totaldruck vor dem Rad sein. Die so entstehenden $\rho c_i c_j / p^*$ sind dimensionslos und charakteristisch für die gegebene Strömung, denn sie sind proportional dem Produkt von Mach-Zahlen, die mit c_i und c_j gebildet sind. So schreibt sich z. B. Gl. 16.8(2)

$$M_u(r') = p^* r'^3 \frac{2\pi}{z_s} \left\{ \int_{R_A}^{R_B} \left[\frac{p}{p^*} + \frac{\rho_1 c_{z1}^2}{p^*} \right] (R-1) R dR - \int_{R_D}^{R_C} \left[\frac{p}{p^*} + \frac{\rho_2 c_{z2}^2}{p^*} \right] (R-1) R dR + \frac{\bar{p}_a}{p^*} \frac{R_C^2 - R_B^2}{2} \left(\frac{R_C + R_B}{2} - 1 \right) \right\}. \quad 16.3(10)$$

Man kann also setzen

$$M_u(r') = \frac{p^* r'^3}{z_s} F, \quad M_z(r') = \frac{p^* r'^3}{z_s} G, \quad 16.3(11)$$

wobei die dimensionslose Größe F durch den Vergleich mit 16.3(10) definiert ist und G in analoger Weise durch die Umformung von 16.3(3) folgt. Selbstverständlich erlauben auch 16.3(4) und (5) die gleiche Darstellung. Damit folgt allgemein

$$M = \frac{p^* r'^3}{z_s} H, \quad H = \sqrt{F^2 + G^2}, \quad \arctan \beta = \frac{F}{G}, \quad 16.3(12)$$

und Gl. 16.3(9) geht über in

$$\sigma_b(x_1, x_2) = \frac{p^* r'^3}{z_s s^3} H \left[\frac{x_1 \cos \gamma}{k_{J1}} - \frac{x_2 \sin \gamma}{k_{J2}} \right]. \quad 16.3(13)$$

Nun ist $t = 2\pi r' / z_s$ die Schaufelteilung im Radius r' , womit dieser Ausdruck in die Form

$$\sigma_b(x_1, x_2) = p^* \left(\frac{t}{2\pi s} \right)^3 z_s^2 H \left[\frac{x_1 \cos \gamma}{k_{J1}} - \frac{x_2 \cos \gamma}{k_{J2}} \right] \quad 16.3(14)$$

übergeht. Diese Gleichung zeigt folgendes. Für den betrachteten Schaufelkranz liege die Gestalt der Gitter längs des Radius fest (also auch t/s , k_{J1} , k_{J2} , x_1 , x_2 , γ), ferner seien die Strömungsbedingungen gegeben, insbesondere also die Mach-Zahlen (somit alle Druckverhältnisse und Geschwindigkeitsverhältnisse, mithin auch H). Dann ist die Biegespannung proportional p^* , also dem Druckpegel und proportional dem Quadrat der Schaufelzahl. Die letztere Aussage ist die entscheidende. Sie sagt gleichzeitig, daß bei gegebener thermodynamisch-strömungstechnischer Auslegung die Biegespannungen umgekehrt proportional dem Quadrat der Sehnenlänge und damit auch der axialen Radbreite sind. Geometrisch ähnliche Räder sind gleich stark beansprucht.

Eine einfachere Rechnung ist möglich bei frei endigenden Schaufeln, wenn zudem die folgenden vereinfachenden Annahmen genügen: Inkompressibilität, konstanter spezifischer Arbeitsumsatz längs des Radius, konstante Durchtrittsgeschwindigkeit. Die nachfolgende Gleichung drückt links die Leistung eines Stufenelementes von der Ausdehnung dr durch die differentielle Tangentialkraft dT einer Laufschaufel aus, rechts vermöge der Euler-Beziehung aus dem spezifischen Arbeitsumsatz:

$$r\omega z_s dT = 2\pi r dr \rho c_n u \Delta c_u,$$

mithin

$$dT = \frac{2\pi \rho c_n u \Delta c_u}{z_s \omega} dr. \quad 16.3(15)$$

Daß der Faktor vor dr nach Voraussetzung konstant ist, bedeutet, daß die gesamte Tangentialkraft T gleichmäßig über der Schaufelhöhe verteilt ist, also für die Stufenleistung geschrieben werden kann

$$u_m z_s T = \pi D_m l \rho u_m^3 \varphi \lambda,$$

wobei c_n und Δc_u im Mittelkreis sogleich durch die Durchsatzzahl φ und die Leistungszahl λ an dieser Stelle ausgedrückt sind. Mit $\pi D_m / z_s = t_m$, die Teilung im Mittelkreis, folgt also

$$T = t_m \rho u_m^2 \varphi \lambda. \quad 16.3(16)$$

Diese Gleichung gilt unter Repetierverhältnissen, die wir voraussetzen, auch für das Leitrad. Weiter ist die z -Komponente des Momentes für Leit- und Laufrad

$$M_z = T \frac{l}{2}. \quad 16.3(17)$$

Zudem wird davon Gebrauch gemacht, daß unter den gegebenen Voraussetzungen in reibungsfreier Näherung, die hier genügt, die Richtung der Schaufelkraft senkrecht steht auf der geometrischen Mittelgeschwindigkeit, im Falle des Laufrades also auf w_∞ , wie in Abb. 16.3.3 am Beispiel des Axialverdichters gezeigt. Die Axialkomponente dA in einem Stufenelement ist also

$$dA = \frac{T dr}{l} \cot \beta_\infty. \quad 16.3(18)$$

Daraus ergibt sich sogleich auch durch Integration das Moment M_u an der Einspannstelle. Nachfolgend wird nun stets links die Gleichung für das Leitrad (Zeichen ') rechts die für das Laufrad (Zeichen '') angeben:

$$M'_u = \frac{T}{l} \int_{r_N}^{r_S} (r_S - r) \cot \alpha_\infty dr, \quad M''_u = \frac{T}{l} \int_{r_N}^{r_S} (r - r_N) \cot \beta_\infty dr.$$

Wenn man hier T aus Gl. 16.3(16) entnimmt und setzt $r = yr_N$, $r_S = Yr_N$, folgt

$$M'_u = \frac{2M_z r_N^2}{l^2} \int_1^Y (Y - y) \cot \alpha_\infty dy, \quad M''_u = \frac{2M_z r_N^2}{l^2} \int_1^Y (y - 1) \cot \beta_\infty dy. \quad 16.3(19)$$

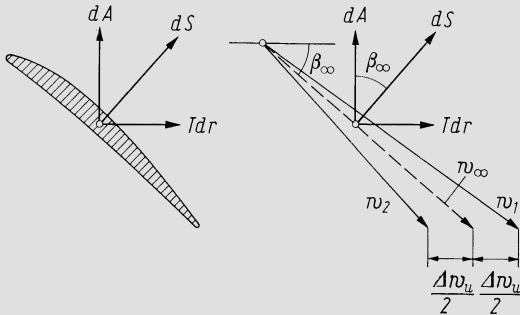


Abb. 16.3.3. Tangentiale, axiale und resultierende Kräfte in einem Schaufelschnitt eines Axialverdichters

Da nun der Winkel β , den der gesamte Momentvektor mit der Drehachsenrichtung bildet gegeben ist durch $\tan \beta = M_u/M_z$, findet man aus 16.3(19)

$$\tan \beta' = \frac{2}{(Y - 1)^2} \int_1^Y (Y - y) \cot \beta_\infty dy, \quad \tan \beta'' = \frac{2}{(Y - 1)^2} \int_1^Y (y - 1) \cot \beta_\infty dy. \quad 16.3(20)$$

Anstatt des Betrages des Momentvektors selbst, geben wir sogleich die in 16.3(9) auftretende Größe $\mu' \equiv M'/s_S^3$, $\mu'' \equiv M''/s_N^3$ an. Mit 16.3(16) und (17) wird sie

$$\mu' = \frac{l^2 t_m^2}{2s_S^3} \rho u_m^2 \varphi \lambda \sqrt{1 + \tan^2 \beta'}, \quad \mu'' = \frac{l^2 t_m^2}{2s_N^3} \rho u_m^2 \varphi \lambda \sqrt{1 + \tan^2 \beta''}. \quad 16.3(21)$$

Damit wird schließlich nach 16.3(9)

$$\sigma_b(x'_1, x'_2) = \mu' \left[\frac{x'_1 \cos \gamma'}{k'_{J1}} - \frac{x'_2 \sin \gamma'}{k'_{J2}} \right], \quad \sigma_b(x''_1, x''_2) = \mu'' \left[\frac{x''_1 \cos \gamma''}{k''_{J1}} - \frac{x''_2 \sin \gamma''}{k''_{J2}} \right], \quad 16.3(22)$$

womit die Biegespannungen in den Einspannquerschnitten der Leit- und Laufschaufeln gefunden sind. Beachtet man, daß die Sehnenlängen und Teilungen umgekehrt proportional den Schaufelzahlen sind, so werden die μ proportional dem Quadrat der Schaufelzahlen,

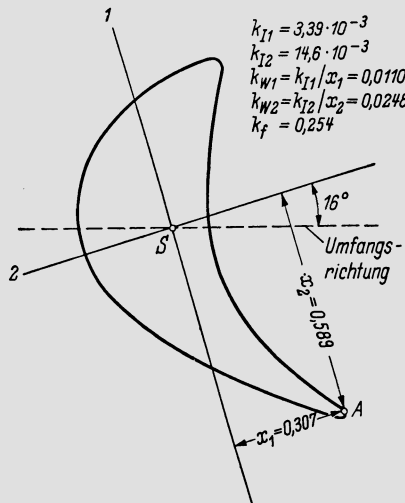


Abb. 16.3.4. Turbinen-Laufschaufelprofil für kleinen Reaktionsgrad mit zugehörigen Daten k_J , k_W , k_f

womit sich das frühere Ergebnis bestätigt. In einfachster Näherung kann — vor allem bei kurzen Schaufeln — gesetzt werden $\beta' \approx 90^\circ - \alpha_{\infty m}$, $\beta'' \approx 90^\circ - \beta_{\infty m}$, wo $\alpha_{\infty m}$, $\beta_{\infty m}$ die Winkel im Mittelkreis sind.

Werte der k_f , k_{J1} , k_{J2} für typische Turbinenprofile und für Axialverdichter — Doppelkreisbogenprofile für eine systematische Variation der geometrischen Parameter zeigen Abb. 16.3.4—7.

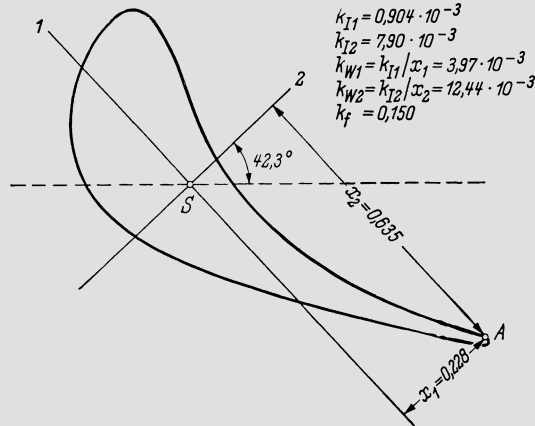


Abb. 16.3.5. Turbinenschaufelprofil (z. B. Überdruckturbine) mit zugehörigen Daten k_J , k_W , k_f

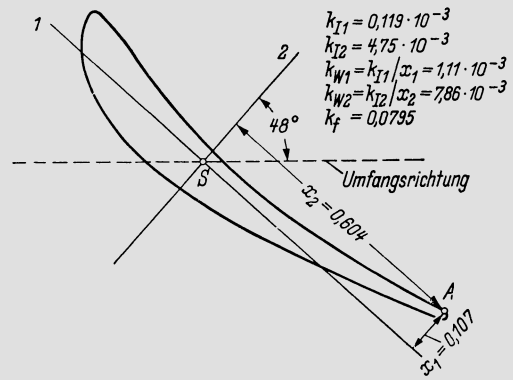


Abb. 16.3.6. Flaches Turbinenschaufelprofil (z. B. Laufradspitze) mit zugehörige Daten, k_J , k_W , k_f

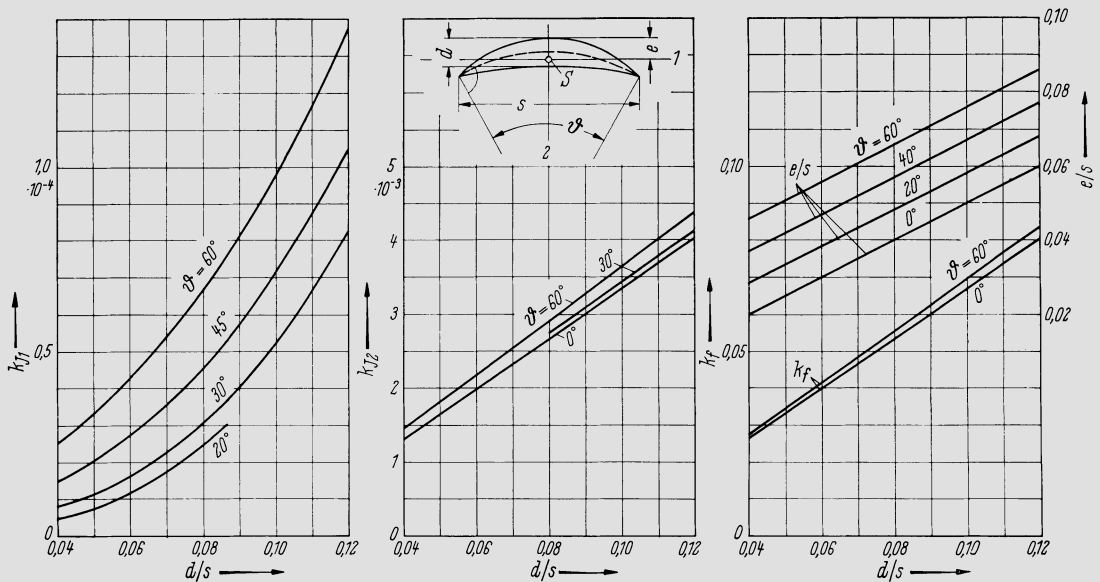


Abb. 16.3.7. Charakteristische Werte für Festigkeitsrechnungen bei Doppelkreisbogenprofilen. Nach Beglinger [9]

16.4 Rückwirkung der Fliehkraft auf die Beanspruchung der freistehenden Schaufel durch Strömungskräfte

Im vorhergehenden Abschnitt wurde angenommen, die Schaufel verbiege sich unter dem Einfluß der Strömungskräfte so wenig, daß dadurch keine Rückwirkung auf die Beanspruchungsverhältnisse entstehe. Das ist aber bei Laufschaufeln, die einem starken

Fliehkraftfeld unterworfen sind, nicht ohne weiteres immer der Fall. Abb. 16.4.1 möge eine Laufschaufel im ausgebogenen Zustand veranschaulichen. Dabei sei vorerst angenommen, daß die Ausbiegung in einer achsnormalen Ebene erfolge. Ein im Radius $r = r_N + x$ gelegenes Schaufelelement von der Länge dx und dem Querschnitt f erfährt eine Fliehkraft von der Größe

$$r\omega^2 dm = (r_N + x)\omega^2 \rho f dx.$$

Da ihre Angriffslinie nicht durch den Schwerpunkt des Wurzelprofils geht, sondern einen Abstand y^* von diesem hat (Abb. 16.4.1), entsteht im Wurzelquerschnitt ein Biegemoment von der Größe

$$dM = y^*(r_N + x)\omega^2 \rho f dx.$$

Dieses steht offenbar dem von den Strömungskräften herrührenden Moment entgegen und bewirkt somit eine Verminderung der Biegespannungen.

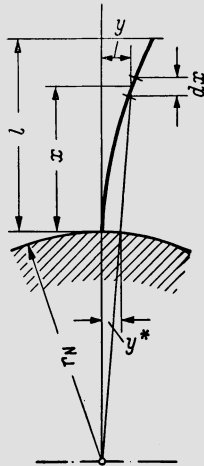


Abb. 16.4.1. Rückwirkung der Fliehkkräfte auf die Biegebeanspruchung einer Laufschaufel

An sich ist die elastische Linie der Schaufel im allgemeinen sogar eine räumliche Kurve. Man hat also zwei Ebenen senkrecht zu den Hauptträgheitsachsen des Profils der Schaufelwurzel zu legen und die Projektionen der elastischen Linie auf diese beiden Ebenen zu betrachten. Die Konfiguration Abb. 16.4.1 ist als eine solche Projektion aufzufassen. Die betreffende Hauptträgheitsachse verläuft hier parallel zur Drehachse. Da die Fliehkraft immer längs eines Radius angreift, wird dann $y^* = yr_N/(r_N + x)$ und somit

$$dM = yr_N\omega^2 \rho f dx.$$

Würde umgekehrt die Hauptträgheitsachse senkrecht zur Richtung der Drehachse stehen, so daß die Ebene eine Meridianebene wäre, so wäre offenbar $y^* = y$ und somit

$$dM = y(r_N + x)\omega^2 \rho f dx.$$

Daraus folgt, daß für eine Hauptträgheitsachse, die mit der Richtung der Drehachse den Winkel β bildet,

$$dM = y[r_N + x(1 - \cos \beta)]\omega^2 \rho f dx$$

gilt. Es sei M_0 das der betreffenden Hauptträgheitsachse zugeordnete Biegemoment an der Schaufelwurzel, wie es sich aus den Untersuchungen des vorhergehenden Abschnittes ergibt. Dann ist das tatsächlich auftretende Moment offenbar

$$M = M_0 - \rho\omega^2 \int_0^1 y [r_N + x(1 - \cos \beta)] f dx. \quad 16.4(1)$$

Für den Verlauf des Querschnittes längs x sei vereinfachend ein linearer Ansatz gemacht, nämlich

$$f = f_N \left(1 - b \frac{x}{l}\right). \quad 16.4(2)$$

Zur Durchführung der Integration in Gl. 16.4(1) muß noch die Funktion $y(x)$ bekannt sein, d. h. wir müßten bereits die elastische Linie unter dem vereinigten Einfluß von Strömungskräften und Fliehkäften kennen. Da dies nicht der Fall ist, wäre das korrekte Vorgehen eigentlich folgendes. Unter Verwendung der allgemeinen Gleichung der elastischen Linie, die

$$y'' = \frac{M}{JE} \quad 16.4(3)$$

lautet, müßte von Gl. 16.4(1) aus zur Differentialgleichung für y übergegangen werden [Gl. 16.4(1) wäre dabei für einen beliebigen, also nicht den Wurzelquerschnitt zu formulieren]. Mit der Lösung dieser Differentialgleichung wäre die Lösung unseres Problems gegeben. Diese Untersuchung ist durchgeführt bei *Biezeno/Grammel* [4]. Wir begnügen uns statt dessen hier mit einer groben Näherung, auf deren Zulässigkeit wir später zurückkommen. Diese Näherung besteht darin, die elastische Linie durch folgende Gleichung zu beschreiben;

$$y = A \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12l^2} \right], \quad 16.4(4)$$

wo A eine vorerst unbekannte Konstante ist. Es folgt daraus

$$y'' = A \left[1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right], \quad 16.4(5)$$

womit man sogleich erkennt, daß der Ansatz 16.4(4) sinnvoll ist. In der Tat ist die Krümmung an der Schaufelspitze Null und an der Schaufelwurzel ein Maximum — nämlich gleich A — wie es dem tatsächlichen Charakter der elastischen Linie entspricht. Aus dem Vergleich von Gln. 16.4(3) und (5) folgt auch, daß $A = M/JE$ (an der Schaufelwurzel gebildet), weshalb die Gleichung der elastischen Linie genauer

$$y = \frac{M}{JE} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12l^2} \right] \quad 16.4(6)$$

lautet.

Nun können Gln. 16.4(2) und (6) eingesetzt werden in Gl. 16.4(1), womit

$$M = M_0 - M \frac{\rho \omega^2 f_N}{JE} \int_0^l \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12l^2} \right] \left(l - b \frac{x}{l} \right) [r_N + x(1 - \cos \beta)] dx. \quad 16.4(7)$$

Wenn man diese Integration durchführt und alle Glieder mit dem Faktor M auf die linke Seite nimmt, erhält man

$$M \left\{ 1 + \frac{\rho(\omega r_N)^2 f_N l^2}{JE} \left[\left(\frac{l}{r_N}\right) \left(\frac{3}{20} - \frac{b}{9}\right) + \left(\frac{l}{r_N}\right)^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{37b}{420}\right) (1 - \cos \beta) \right] \right\} = M_0. \quad 16.4(8)$$

Mit $\omega r_N = u_N$, $f_N = k_f s^2$, $J = k_J s^4$ und mit Einführung des Schaufellängenverhältnisses $Y = r_S/r_N = (r_N + l)/r_N$ kann Gl. 16.4(8) auch in die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{M}{M_0} = \frac{1}{1 + \frac{k_f \rho u_N^2}{k_J E} \left(\frac{l}{s}\right)^2 \left[(Y - 1) \left(\frac{3}{20} - \frac{b}{9}\right) + (Y - 1)^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{37b}{420}\right) (1 - \cos \beta) \right]}. \quad 16.4(9)$$

Die Größen

$$K' \equiv (Y - 1) \left(\frac{3}{20} - \frac{b}{9} \right) \quad \text{und} \quad K'' \equiv (Y - 1)^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{37b}{420} \right)$$

sind in Abb. 16.4.2 dargestellt.

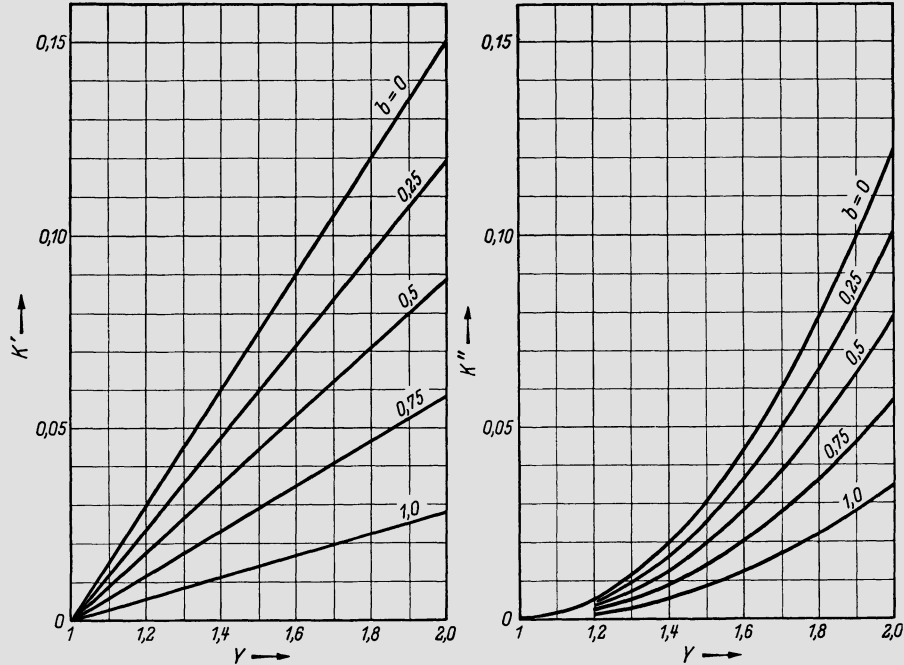


Abb. 16.4.2. Die Größen K' und K'' in Funktion des Schaufellängenverhältnisses Y

Damit ist nun die Berechnung der Biegungsspannungen unter Berücksichtigung des Fliehkrafteinflusses in folgender Weise möglich. Nach Gl. 16.3(9) kann die Spannung σ_{b0} in irgendeinem Punkte x_1, x_2 des Fußprofils [x_i sind dimensionslose Werte gemäß Gleichung 16.3(8)] ohne Fliehkrafteinfluß berechnet werden aus

$$\sigma_{b0} = \sigma_{b10} + \sigma_{b20}, \quad 16.4(10)$$

$$\sigma_{b10} = \mu \frac{x_1 \cos \gamma}{k_{J1}}, \quad \sigma_{b20} = -\mu \frac{x_2 \sin \gamma}{k_{J2}}, \quad 16.4(11)$$

wobei $\mu = M_0/s^3$. Hier deutet Index 0 an, daß ohne Fliehkrafteinfluß gerechnet ist. Mit diesem wird nach der oben durchgeführten Untersuchung

$$\sigma_b = \chi_1 \sigma_{b10} + \chi_2 \sigma_{b20}, \quad 16.4(12)$$

$$\chi_i = \frac{1}{1 + \frac{k_f}{k_{Ji}} \left(\frac{l}{s} \right)^2 \frac{\rho u_N^2}{E} [K' + K'' (1 - \cos \beta)]}. \quad 16.4(13)$$

Die k_{Ji} ($i = 1, 2$) sind dabei für den Wurzelquerschnitt zu nehmen, für welchen auch s einzusetzen ist. Meistens ist für die Achse mit dem größeren Trägheitsmoment praktisch $\chi \approx 1$.

Die Verminderung der Biegespannungen wird noch ausgesprochener, wenn die Schaufel an ihrer Spitze eine Deckplatte trägt (der Fall des Deckbandes, das eine Versteifung bewirkt, ist nicht Gegenstand dieses Abschnittes). Es sei t die Teilung im Spitzenradius. Der Querschnitt der Deckplatte sei das c -fache des Wurzelquerschnittes f_N . Dann ist die Fliehkraft der Deckplatte

$$\rho c f_N t y r_N \omega^2.$$

Die Auslenkung y hat an jener Stelle gemäß Gl. 16.4(6) den Wert

$$\frac{5}{12} \frac{Ml^2}{JE}$$

Daher wird der maßgebende Hebelarm nach derselben Überlegung wie oben

$$\frac{5}{12} \frac{Ml^2}{JE} \frac{1 + Y(1 - \cos \beta)}{1 + Y}$$

Das Produkt aus Fliehkraft und Hebelarm ist das zusätzliche Moment, das in Gl. 16.4(7) rechts noch abzuziehen ist.

Die weitere Überlegung ist dieselbe wie oben und liefert an Stelle der Gl. 16.4(13) die Beziehung

$$\chi_i \equiv \frac{1}{1 + \frac{k_f}{k_{Ji}} \left(\frac{l}{s}\right)^2 \frac{\rho u_N^2}{E} \left[K' + K'' (1 - \cos \beta) + \frac{5\pi c Y^2}{6z} \frac{1 + Y(1 - \cos \beta)}{1 + Y} \right]}, \quad 16.4(14)$$

wo z die Schaufelzahl ist.

Es bleibt noch zu überprüfen, ob die mit Gl. 16.4(6) ausgesprochene vereinfachende Annahme über den Verlauf der elastischen Linie die zu fordernde Genauigkeit sichert. Die Gestalt der elastischen Linie äußert sich in der Funktion K' und K'' . Daher wurde vergleichsweise auch eine von Gl. 16.4(6) abweichende Annahme getroffen, nämlich

$$y = \frac{M}{2JE} x^2, \quad 16.4(15)$$

d. h. ein parabolischer Verlauf, bei dem die Krümmung praktisch den konstanten Betrag $y'' = M/JE$ hat. Diese Annäherung ist offenbar sehr grob, denn an der Schaufelspitze müßte richtigerweise y'' auf Null zurückgehen. Wenn man diese sicher sehr schlechte Annahme zugrunde legt anstatt Gl. 16.4(6), so erhält man für die in Gl. 16.4(13) in eckiger Klammer geschriebene Größe Werte, die in praktischen Fällen etwa zwischen 10 und 20% von denen abweichen, die nach Gl. 16.4(6) erhalten werden. Die Abweichung der χ_i wird damit noch etwas kleiner. Wenn wir nun annehmen, daß die χ_i nach unserer Methode gegebenenfalls nur auf 25% genau werden, — ein so großer Fehler ist von vornherein nur bei $\chi_i \ll 1$ denkbar — so haben wir die möglichen Fehler, die von der Abweichung der wirklichen elastischen Linie gegenüber der nach Gl. 16.4(6) herrühren, sehr reichlich eingeschätzt. Was dies praktisch bedeutet, mögen folgende Beispiele zeigen. Es sind in der Zahlentafel 16.4.1 für einige Laufschaufeln angegeben die reinen Zugspannungen durch Fliehkraft σ_{zN} , die Biegungsspannung σ_{b0} ohne Korrektur, die gemäß der vorliegenden Methode korrigierte Biegespannung σ_b , der Unterschied $\Delta\sigma = \sigma_b - \sigma_{b0}$ und die Summe $\sigma = \sigma_{zN} + \sigma_b$.

Zahlentafel 16.4.1

	Dampf- turbine HD-Stufe	Dampf- turbine ND-Stufe	Gasturbine Endstufe	Axial- verdichter 1. Stufe
Y	1,2	2,0	1,8	1,8
u_N m/s	100	200	200	180
u_S m/s	120	400	360	324
σ_{zN} N/mm ²	17,3	275	220	207
σ_{b0} N/mm ²	41,0	66	74,0	202,5
σ_b N/mm ²	40,9	41	50,7	65,0
$\Delta\sigma$ N/mm ²	0,1	25	23,3	137,5
σ N/mm ²	58,2	316	270,7	272,0

Wie man aus dieser Gegenüberstellung erkennt, wird $\Delta\sigma$ hier nur beim Axialverdichter derart groß, daß ein beträchtlicher Fehler im Endergebnis σ möglich wäre. Dieser Sachverhalt ist nicht zufällig, sondern er ist für lange Axialverdichterschaukeln typisch. Der Grund dafür ist die schwache Krümmung der Schaufelprofile, die den Quotienten k_f/k_J , der in Gl. 16.4(13) im Nenner erscheint, weit größer werden läßt als bei Turbinenschaukelungen. Namentlich wird auch der in Gl. 16.4(11) auftretende Quotient x/k_J für die Achse mit dem kleinen k_J ausnehmend groß. — Gesetzt nun der Fall, σ_b sei für die oben aufgeführte Axialverdichterschaukel in Wirklichkeit 25% größer als nach der Rechnung. Es wäre dann $\sigma_b = 81,2$, $\Delta\sigma = 121,3$, $\sigma = 288,2$. Das resultierende σ wäre also 6% größer als nach der Rechnung. Das ist ein Fehler, wie er gerade bei Schaufeln selbst durch Herstellungstoleranzen zustandekommen kann. Auch in diesem Falle dürfte also das vereinfachte Verfahren noch durchaus genügen.

16.5 Beanspruchung des Schaufelpaketes durch Strömungskräfte

Sobald eine feste Querverbindung zwischen zwei oder mehreren Schaufeln besteht, bilden sie ein Schaufelpaket. Das mechanische Verhalten einer Schaufel innerhalb eines Paketes ist ein anderes als für die betreffende freistehende Schaufel. Dies gilt zwar nicht für die reine Zugbeanspruchung, wohl aber für die Biegebeanspruchung, sobald die Querverbindung eine nennenswerte Biegesteifigkeit aufweist. Wenn die Schaufeln nicht verdreht sind, die Richtungen der Hauptträgheitsachsen also vom Radius unabhängig sind, ist eine näherungsweise Behandlung des Problems nach *Biezeno/Grammel* [4] möglich.

Abb. 16.5.1 zeigt zwei Schaufeln und das sie verbindende Deckband in deformiertem Zustand. Man erkennt daraus sogleich die eigentliche grundlegende Schwierigkeit des Problems. Damit die Lösung mit angemessenem Rechenaufwand möglich sei, muß das Deckband als eingespannter gebogener Balken behandelt werden, während es in Wirklichkeit ein plattenförmiger Körper ist, der sich in äußerst komplizierter Weise verformt. Man beachte besonders, wie kompliziert die Randbedingungen infolge der Gestalt des Schaufelprofils sind. Dazu ist noch zu bemerken, daß die Einspannung am Übergang in die Schaufel keine vollkommene ist, da ja auch das Schaufelende eine gewisse Nachgiebigkeit besitzt. Wie in Abb. 16.5.1 gezeigt wird, grenzen wir vom Deckband einen Bereich ab durch die parallel zur Hauptträgheitsachse 1 verlaufenden gestrichelten Geraden. Das zwischen diesen verbleibende Band von der senkrecht zur Achse 1 gemessenen Breite l^* betrachten wir als gebogenen Balken. Wie diese Breite etwa zu wählen ist, zeigt Abb. 16.5.1 für den Fall des mit der Schaufel „verwachsenen“ Deckbandes, während Abb. 16.5.2 veranschaulicht, wie die Annahme z.B. für ein vernietetes Deckband getroffen werden könnte. Wesentlich ist hierbei gerade auch die Annahme, daß der Einspannquerschnitt des Balkens parallel zur einen Hauptträgheitsachse gelegt werden dürfe.

Das in dieser vereinfachten Form gegebene Problem ist statisch unbestimmt. Der wesentliche Schritt bei seiner Lösung ist die Bestimmung des Momentes M' , welches vom Deckband auf die Schaufel ausgeübt wird. Für die Einzelheiten der Überlegung verweisen wir auf das genannte Werk von *Biezeno* und *Grammel* [4] und geben sogleich das dort zu findende Ergebnis für M' an:

$$M' = \frac{\kappa_1 l^2 q_{10} \frac{J'E'}{J_{10}E} \cos \beta}{\frac{l^{*3}}{12} + 12\lambda_1 \frac{J'E'}{J_{10}E} \cos \beta}. \quad 16.5(1)$$

Hierin bedeuten: β der Winkel (Abb. 16.5.1), $J_{10}E$ die Biegesteifigkeit der Schaufel an der Stelle ihrer Einspannung (Nabe bei Laufschaufel, Gehäuse bei Leitschaufel), $J'E'$ die

Biegesteifigkeit des Deckbandes¹, q_{10} die senkrecht zur Hauptträgheitsachse I einwirkende Strömungskraft je Längeneinheit der Schaufel, und zwar an ihrer Einspannstelle, κ_1 ein Faktor, der die Veränderlichkeit der Belastung q_1 und des Trägheitsmomentes J_1 längs der Schaufel berücksichtigt und λ_1 ein Faktor, der nur der Variation von J_1 Rechnung trägt. Für zylindrische Schaufeln und $q_1 = q_{10} = \text{const}$ wird $\kappa_1 = \lambda_1 = 1$. Die Annahme eines konstanten q_1 ist bei dieser Untersuchung wohl immer zulässig, womit dann auch κ_1 nur noch durch die Veränderlichkeit von J_1 gegeben ist. Trotzdem sind auch dann noch im allgemeinen κ_1 und λ_1 verschieden. κ_1 vergleicht die Neigung am freien Ende eines einseitig eingespannten und durch eine stetig verteilte Last gebogenen Stabes mit derjenigen Neigung, die ein Stab konstanten Querschnitts bei konstanter Belastung q_{10} aufweisen würde. λ_1 hingegen vergleicht die Neigung am freien Ende eines einseitig eingespannten Stabes, der an diesem Ende durch ein Biegemoment beansprucht ist mit der entsprechenden Neigung des Stabes mit konstantem J_1 .

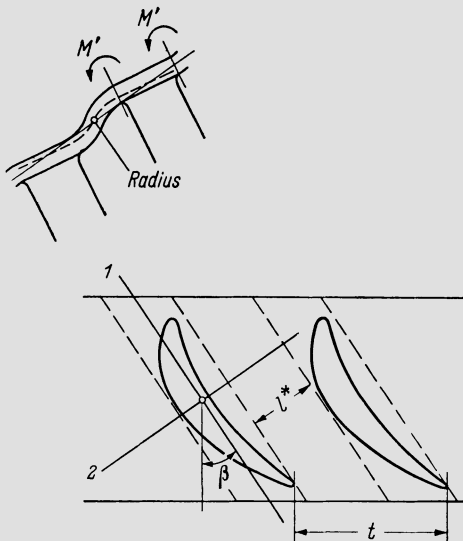


Abb. 16.5.1. Durch die Verbiegung der Schaufel bedingte Verformung des Deckbandes. Wären die Schaufeln bezüglich der Hauptträgheitsachse 2 völlig steif, so ergäbe sich die Deckbandverformung gemäß gestrichelter Eintragung

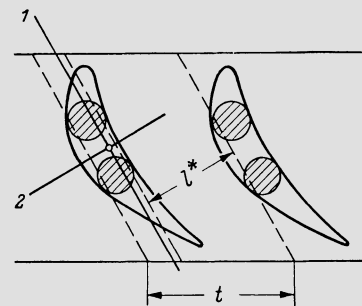


Abb. 16.5.2. Festlegung von l^* für angenietetes Deckband

Um die Berechnung zu erleichtern, kann man vereinfachend setzen

$$J_1 = \frac{J_{10}}{1 + a \frac{x}{l}} \tag{16.5(2)}$$

Durch geeignete Wahl des Parameters a läßt sich mindestens in vielen Fällen der tatsächliche Verlauf von J_1 längs der Schaufel hinreichend genau annähern. Mit $a = 0$ ist damit zugleich der Fall unveränderlichen Querschnittes umfaßt. Wenn $q_1 = \text{const}$ gesetzt wird, ist leicht aufzufinden, daß mit dem Ansatz Gl. 16.5(2)

$$\kappa_1 = 1 + \frac{a}{4}, \quad \lambda_1 = 1 + \frac{a}{2} \tag{16.5(3)}$$

erhalten werden.

¹ J' ist in der üblichen Weise für den Schnitt senkrecht zum Deckband einzusetzen, nicht etwa parallel zur Achse I .

Nun ist mit $q_1 = q_{10} = \text{const}$

$$M_{1f} = \frac{q_{10} l^3}{2} \quad 16.5(4)$$

das Biegemoment um die Trägheitsachse 1, welches der Schaufelwurzelquerschnitt bei frei endigender Schaufel erhalten würde. Demnach kann man für Gl. 16.5(1) auch setzen

$$M' = \frac{2\kappa_1 \frac{J'E'}{J_{10}E} \cos \beta}{\frac{l^{*3}}{l^2} + 12\lambda_1 \frac{J'E'}{J_{10}E} \cos \beta} M_{1f}. \quad 16.5(5)$$

Für eine nicht am Ende des Paketes stehende Schaufel ist aber das tatsächliche Moment im Wurzelquerschnitt

$$M_1 = M_{1f} - 2M'. \quad 16.5(6)$$

Der Faktor 2 vor M' rührt daher, daß auf beiden Seiten der Schaufel ein Deckbandstück vorhanden ist, welches das Moment M' ausübt. Wenn hier M' noch durch Gl. 16.5(5) ausgedrückt und dabei der Faktor vor M_{1f} noch etwas übersichtlicher geschrieben wird, folgt

$$M_1 = \left[1 - \frac{4\kappa_1}{\frac{J_{10}E l^{*3}}{J'E' l^2} \frac{1}{\cos \beta} + 12\lambda_1} \right] M_{1f}. \quad 16.5(7)$$

Dies gilt, wie oben bemerkt, für eine nicht am Ende des Paketes stehende Schaufel, weil nur dort in Gl. 16.5(6) der Faktor 2 auftritt. Daraus ist gelegentlich der Schluß gezogen worden, für die Endschaufeln des Paketes sei der Faktor 2 wegzulassen. Dies ist aber ein Irrtum, wie man aus folgender Überlegung erkennt. Würde an der Endschaufel wirklich nur das Gegenmoment M' auftreten, so würde sie sich entsprechend stärker verbiegen, vgl. gestrichelte Eintragung in Abb. 16.5.3. Das Deckband verhindert dies aber, und es entstehen in ihm Längsspannungen, derart, daß die Spitze der letzten Schaufel wieder den Abstand t von der nächstfolgenden einnimmt. Ein aus einer größeren Anzahl Schaufeln bestehendes Paket zwingt daher den Endschaufeln annähernd dieselbe Verformung auf, wie sie die zwischenliegenden Schaufeln erleiden, weshalb Gl. 16.5(7) praktisch auch für die Endschaufeln gilt. Dies trifft allerdings um so weniger zu, je kleiner die Schaufelzahl des Paketes ist und wird im Grenzfall, wo nur zwei Schaufeln miteinander verbunden sind (die heute oft verwendeten „Schaufelzwillinge“), völlig falsch. Dann fällt in Gl. 16.5(6) der Faktor 2 tatsächlich weg, aber auch schon Gl. 16.5(1) ist dann so zu ändern, daß der Faktor 12 im Nenner durch 6 zu ersetzen ist. Für Schaufelzwillinge tritt also an die Stelle von Gl. 16.5(7) die Beziehung

$$M_1 = \left[1 - \frac{2\kappa_1}{\frac{J_{10}E l^{*3}}{J'E' l^2} \frac{1}{\cos \beta} + 6\lambda_1} \right] M_{1f}. \quad 16.5(8)$$

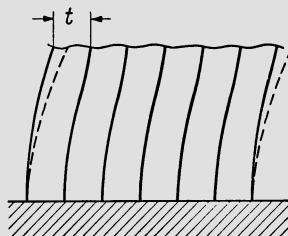


Abb. 16.5.3. Verformungszustand eines Schaufelpaketes

Damit ergibt sich nun das folgende einfache Verfahren zur Berechnung der Biegungsspannungen im Wurzelprofil bei Schaufelpaketeten. Gemäß Abschn. 16.3 erhält man die Biegungsspannung in einem Punkt x_1, x_2 (dimensionslose Koordinaten nach Gl. 16.3(8)) des Wurzelprofils einer freien Schaufel durch Addition der beiden Spannungen

$$\sigma_{b1f} = \mu \frac{x_1 \cos \gamma}{k_{J1}}, \quad \sigma_{b2f} = -\mu \frac{x_2 \sin \gamma}{k_{J2}}. \quad 16.5(9)$$

Ist ein Deckband vorhanden, so wird die Biegungsspannung

$$\sigma_b = (1 - C) \sigma_{b1f} + \sigma_{b2f}, \quad 16.5(10)$$

wobei für ein Paket aus einer größeren Anzahl Schaufeln

$$C = \frac{4\kappa_1}{\frac{J_{10} l^{*3}}{J' l^2} \frac{1}{\cos \beta} + 12\lambda_1}, \quad 16.5(11)$$

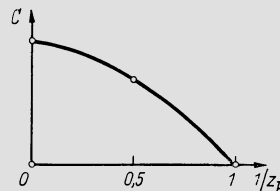
während dann, wenn nur je zwei Schaufeln durch ein Deckband verbunden werden

$$C = \frac{2\kappa_1}{\frac{J_{10} l^{*3}}{J' l^2} \frac{1}{\cos \beta} + 6\lambda_1}. \quad 16.5(12)$$

κ_1 und λ_1 können meist hinreichend genau nach Gl. 16.5(3) bestimmt werden.

In Gl. 16.5(10) ist ferner angenommen, daß die Biegung um die Trägheitsachse 2 vom Deckband nicht beeinflußt werde, was berechtigt ist, da die Steifigkeit der Schaufel selbst in dieser Richtung sehr viel größer ist. Werden z. B. nur drei Schaufeln zusammengebunden, so ist an sich weder Gl. 16.5(11) noch Gl. 16.5(12) anwendbar. In diesem Falle kann man sich folgendermaßen helfen. Es sei z_p die Schaufelzahl des Paketes. Dann trägt man gemäß Abb. 16.5.4 die Größe C auf, nämlich $C = 0$ für die freie Schaufel ($z_p = 1$), C nach Gl. 16.5(12) für $1/z_p = 0,5$ und C nach Gl. 16.5(11) für $1/z_p = 1/\infty = 0$. Mit der so erhaltenen Kurve läßt sich für jedes z_p der C -Wert angenähert angeben.

Abb. 16.5.4. Bestimmung des C -Wertes für ein Schaufelpaket mit z_p Schaufeln



Interessant ist auch der Grenzfall des völlig steifen Deckbandes, für welchen nach Gl. 16.5(11) und (12) übereinstimmend $C = \kappa_1/3\lambda_1$ gefunden wird. Da für verjüngte Schaufeln stets $\kappa_1 < \lambda_1$, erreicht C offenbar den absolut größtmöglichen Wert $1/3$ für die zylindrische Schaufel mit starrem Deckband. Es ist in diesem Grenzfall

$$\sigma_b = \frac{2}{3} \sigma_{b1f} + \sigma_{b2f}. \quad 16.5(13)$$

Die mögliche Herabsetzung der statischen Biegungsspannungen durch Deckbänder bleibt daher praktisch immer relativ gering.

Nicht zu übersehen ist andererseits die Beanspruchung des Deckbandes selbst und der Verbindung zwischen Schaufel und Deckband, die durch das Biegemoment M' gegeben ist. Im Deckband entsteht damit eine Biegungsspannung

$$\sigma'_{bd} = \alpha \frac{M'}{W_d}, \quad 16.5(14)$$

wo W_d das Widerstandsmoment des Deckbandes ist. Weiter ist α ein allfälliger Formfaktor, der von der geometrischen Gestalt der Verbindung zwischen Deckband und Schaufel abhängt. Hier läßt sich M' vermöge Gl. 16.5(5) durch M_{1f} ausdrücken und dieses wiederum durch σ_{b1f} , worauf Gl. 16.5(14) übergeht in

$$\sigma'_{ba} = \alpha \frac{C^* J_{10}}{W_d a_1} \sigma_{b1f}. \quad 16.5(15)$$

Dabei ist $C^* = C/2$ für das Paket mit vielen Schaufeln und $C^* = C$ für Schaufelzwillinge; a_1 ist der Abstand des Punktes, in dem σ_{b1f} auftritt, von der Hauptträgheitsachse I . Der ganze Ausdruck $C^* J_{10} / W_d a_1$ hängt offensichtlich nur von der geometrischen Gestalt der Anordnung ab und nicht von den absoluten Abmessungen. Das so bestimmte σ'_{ba} ist dem σ_{ab} zu überlagern, das von der Fliehkraftbeanspruchung herrührt.

Während die Übertragung des Momentes M' bzw. $2M'$ durch das Spitzenprofil der Schaufel im allgemeinen keine Schwierigkeiten bereitet, können an Nietverbindungen außerordentlich hohe Spannungen entstehen. Sie lassen sich in gleicher Weise berechnen wie die Biegebeanspruchungen im Deckband, d. h. es ist

$$\sigma_{bv} = \alpha \frac{C J_{10}}{W_v a_1} \sigma_{b1f}. \quad 16.5(16)$$

Hier ist wieder α der betreffende Formfaktor, der die Spannungskonzentration berücksichtigt und W_v das Widerstandsmoment des Verbindungselementes, also z. B. dasjenige des Nietschaftes oder bei Vorhandensein mehrerer Nieten das gesamte Widerstandsmoment aller ihrer Querschnitte. Zu diesem σ_{bv} ist noch die reine Zugspannung zu addieren, die durch die Fliehkraft des Deckbandes gegeben ist. Der Krümmungsradius r am Übergang des Nietschaftes in das Schaufelblatt (vgl. Abb. 16.5.5) sollte allermindestens 10% des Durchmessers d des Schaftes sein, wobei α die Größenordnung 1,6 hat; besser ist ein wesentlich größerer Krümmungsradius ($r/d = 0,25$ gibt $\alpha \approx 1,3$). — Eigentlich gilt Gl. 16.5(16) nur, wenn zwischen Deckband und Schaufelende ein kleiner Spalt besteht, denn nur dann muß der Nietschaftquerschnitt das ganze Biegemoment übertragen. Es kann aber jederzeit durch herstellungsbedingte Ungenauigkeiten eine solche Konfiguration entstehen, weshalb vorsichtigerweise nach Gl. 16.5(16) zu rechnen ist. Die Nietverbindung zwischen Schaufel und Deckband ist oftmals die eigentliche Schwachstelle der Konstruktion, besonders wenn infolge des Nietverfahrens noch eine örtliche Versprödung des Werkstoffes auftritt. Dies ist um so gefährlicher, als zu der vorerst behandelten rein statischen Beanspruchung noch eine wesentliche Schwingungsbeanspruchung treten kann.

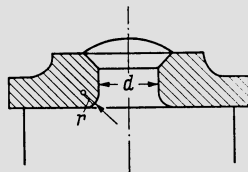


Abb. 16.5.5. Ausrundung der Wurzel des Nietschaftes am Deckband

Bei schlanken Laufschaufeln und hohen Umfangsgeschwindigkeiten ist auch im Falle des Schaufelpaketes die Rückwirkung des Fliehkraftfeldes auf die Verformung und damit den Spannungszustand zu berücksichtigen. Dies kann in grundsätzlich gleicher Weise geschehen wie in Abschn. 16.4 beschrieben, nur daß ein anderer Ansatz für die elastische Linie gemacht werden muß. Diese muß einen Wendepunkt besitzen, da ja das Biegemoment an der Schaufelspitze dem an der Schaufelwurzel entgegengesetzt ist. Wir setzen anstelle der Gl. 16.4(6)

$$y = \frac{M_1}{J_{10} E} \left(\frac{l}{p} \right)^2 \left(1 - \cos \frac{px}{l} \right). \quad 16.5(17)$$

Dabei wird in der Tat

$$y''(0) = \frac{M_1}{J_{10}E},$$

und außerdem wird das Verhältnis der Momente an Schaufelspitze und Schaufelwurzel offenbar richtig, wenn

$$p = \arccos\left(-\frac{C}{1-C}\right), \quad 16.5(18)$$

und zwar gleichgültig, ob es sich um ein Paket mit vielen oder nur mit zwei Schaufeln handelt; man hat nur das jeweils gültige C einzusetzen. Ausgehend vom Ansatz Gl. 16.5(17) erhält man nach einer Rechnung, die derjenigen im vorangegangenen Abschnitt völlig analog ist, folgendes:

$$\sigma_b = (1-C)\chi_1\sigma_{b1f} + \chi_2\sigma_{b2f}. \quad 16.5(19)$$

Hier sind σ_{b1f} und σ_{b2f} die Biegungsspannungen an der Schaufelwurzel der freien Schaufel, ohne Berücksichtigung der Fliehkraft, d. h. die Spannungen nach Gl. 16.5(9). C ist zu bestimmen nach Gl. 16.5(11) oder (12) und χ_1 und χ_2 nach Gl. 16.4(14). Im Falle von χ_2 können dabei K' und K'' aus Abb. 16.4.2 entnommen werden, während im Falle von χ_1 gilt

$$K' = \frac{Y-1}{p^2} \left[1 - \frac{b}{2} - \frac{\sin p}{p} - \frac{b}{p^2} (1 - \cos p - p \sin p) \right]. \quad 16.5(20)$$

$$K'' = \left(\frac{Y-1}{p} \right)^2 \times \\ \times \left[\frac{1}{2} - \frac{b}{3} + \frac{1 - \cos p - p \sin p}{p^2} + \frac{b}{p^3} (3[p^2 - 2] \cos p + p[p^2 - 6] \sin p + 6) \right]. \quad 16.5(21)$$

Im Grenzfall der deckbandlosen Schaufel wird $C = 0$ und somit $p = \pi/2$. Dann müßten die K' und K'' eigentlich mit den früher angegebenen Werten übereinstimmen, was natürlich zufolge der anderen Struktur der Gleichung der elastischen Linie nicht exakt zutrifft, wohl aber mit außerordentlich guter Näherung.

Die Biegungsspannungen im Deckband selbst und in der Verbindung können analog zu früher aus

$$\sigma_{bd} = \alpha \frac{C^* \chi_1 J_{10}}{W'_d a_1} \sigma_{b1f}, \quad \sigma_{bv} = \alpha \frac{C \chi_1 J_{10}}{W_v a_1} \sigma_{b1f} \quad 16.5(22)$$

berechnet werden. Man beachte, daß die theoretische Behandlung der Nachgiebigkeit des Deckbandes an sich nur bei $\beta = 0$ richtig ist und um so mehr den Charakter einer rohen Näherung annimmt, je größer β wird. Damit hängt es auch zusammen, daß bei den Entwicklungen dieses Abschnittes die Biegung in Richtung der Hauptträgheitsachse 2 so behandelt wird, als ob die versteifende Wirkung des Deckbandes nicht bestände. Dies erhält seine Berechtigung vor allem dadurch, daß J_2 stets sehr viel größer ist als J_1 . Der sehr komplizierte Fall des Leitrades der Kammerturbine, dessen Schaufeln den Zwischenboden tragen, kann nur nach der Methode der finiten Elemente behandelt werden.

16.6 Wärmespannungen in Schaufeln

Erhebliche Wärmespannungen treten vor allem in Gasturbinenschaufeln auf, sei es bei raschen Temperaturänderungen des Gases, die zu transienten ungleichmäßigen Temperaturverteilungen über die Schaufelprofile führen, sei es im Falle der Schaufelkühlung. Stets wird man bei der Bestimmung dieser Spannungszustände mindestens in einem ersten

Schritt den durch die Temperaturverteilung allein hervorgerufenen *elastischen Spannungszustand* bestimmen. Transiente Vorgänge erfolgen derart schnell, daß in der verfügbaren Zeit sich keine viskoplastischen Vorgänge abspielen können, wohl aber erzwungene plastische Verformungen (Überschreitung der Fließgrenze), für deren Bestimmung ein elastischer Spannungszustand den Ausgangspunkt bildet (vgl. auch unter 15.7). Bei gekühlten Schaufeln, wo ungleichmäßige Temperaturverteilungen auch stationär erhalten bleiben, setzt ein viskoplastischer Ausgleichvorgang ein, dessen Berechnung sich an die des elastischen Zustandes anschließt.

Da elastische Spannungszustände überlagert werden können, mögen nachfolgend die thermisch bedingten Spannungen für sich allein betrachtet werden. Dabei wird im Sinne der Theorie des Stabes vorausgesetzt, daß der Spannungszustand eindimensional sei und ursprünglich ebene Querschnitte auch nach der Verformung eben bleiben. Abb. 16.6.1 veranschaulicht das gegebene Schaufelprofil. Das Koordinatensystem x, y hat seinen Ursprung im Schwerpunkt S , kann aber sonst zunächst beliebig gelegt werden. Die Temperatur sei in Funktion von x und y gegeben und sei von der Koordinate senkrecht zur Bildebene so wenig abhängig, daß die Temperaturverteilung in jedem Schaufelschnitt als quasi zweidimensional betrachtet werden darf. Bedeuten dann T die lokale Temperatur und T_0 die Temperatur der kalten Schaufel, so ist die örtliche Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{T_0}^T \beta(T') dT'. \quad 16.6(1)$$

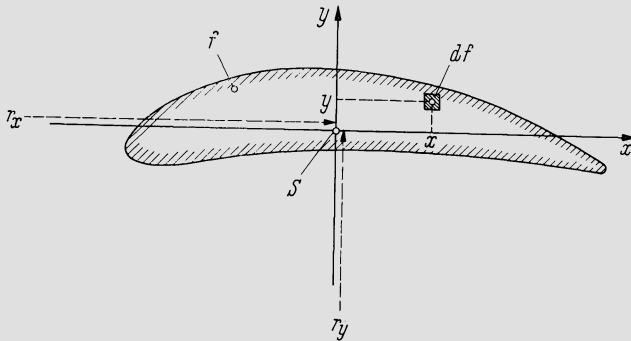


Abb. 16.6.1. Schaufelprofil zur Herleitung der Beziehungen über die Wärmespannungen

Hier ist β der zwischen T_0 und T laufenden Temperatur T' zugeordnet, E der Temperatur T . Da sich die Schaufelachse unter dem Einfluß der Temperaturverteilung verkrümmen wird, läßt sich setzen

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{x}{r_x} + \frac{y}{r_y} = \varepsilon_0 + \kappa_x x + \kappa_y y. \quad 16.6(2)$$

Hier sind ε_0 die Dehnung in der Schaufelachse, r_x und r_y die Krümmungsradien in Richtung x und y , κ_x und κ_y ihre Kehrwerte. Setzt man dies in 16.6(1) ein, so folgt

$$\sigma = E \left[\varepsilon_0 + \kappa_x x + \kappa_y y - \int_{T_0}^T \beta(T') dT' \right]. \quad 16.6(3)$$

Da durch die Temperaturverteilung allein keine resultierenden Kräfte und Momente im Schaufelschnitt entstehen, ist mit $df = dx dy$

$$P \equiv \int_f \sigma df = 0, \quad M_x \equiv \int_f \sigma y df = 0, \quad M_y \equiv \int_f \sigma x df = 0. \quad 16.6(4)$$

Wenn man hier für σ Gl. 16.6(3) einsetzt, folgt

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 \int_f E df + \kappa_x \int_f Ex df + \kappa_y \int_f Ey df &= \int_f E \int_{T_0}^T \beta(T') dT' df, \\ \varepsilon_0 \int_f Ey df + \kappa_x \int_f Exy df + \kappa_y \int_f Ey^2 df &= \int_f Ey \int_{T_0}^T \beta(T') dT' df, \\ \varepsilon_0 \int_f Ex df + \kappa_x \int_f Ex^2 df + \kappa_y \int_f Exy df &= \int_f Ex \int_{T_0}^T \beta(T') dT' df. \end{aligned} \right\} 16.6(5)$$

Da nun T in jedem Punkt des Profils als bekannt vorausgesetzt ist, kennt man auch das von T abhängige E , womit alle Integralausdrücke in diesem Gleichungssystem berechenbare Konstanten sind. Mithin lassen sich aus dem Gleichungssystem $\varepsilon_0, \kappa_x, \kappa_y$ berechnen und somit aus 16.6(3) σ in jedem Punkt.

Meist genügt es, für E und β konstante Mittelwerte \bar{E} und $\bar{\beta}$ einzusetzen. Es ist in diesem Falle zweckmäßig, die Koordinatenachsen x und y so zu legen, daß sie mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen. Dann ist

$$\int_f x df = \int_f y df = \int_f xy df = 0, \quad \int_f y^2 df = J_x, \quad \int_f x^2 df = J_y. \quad 16.6(6)$$

Die Lösung des Gleichungssystems liefert

$$\varepsilon_0 = \frac{\bar{\beta}}{f} \int_f (T - T_0) df, \quad \kappa_x = \frac{\bar{\beta}}{J_y} \int_f (T - T_0) x df, \quad \kappa_y = \frac{\bar{\beta}}{J_x} \int_f (T - T_0) y df \quad 16.6(7)$$

und die Spannungsgleichung lautet

$$\sigma = \bar{E}[\varepsilon_0 + \kappa_x x + \kappa_y y - \bar{\beta}(T - T_0)]. \quad 16.6(8)$$

Abb. 16.6.2 zeigt das Ergebnis einer solchen Rechnung.² Es handelt sich um die gekühlte

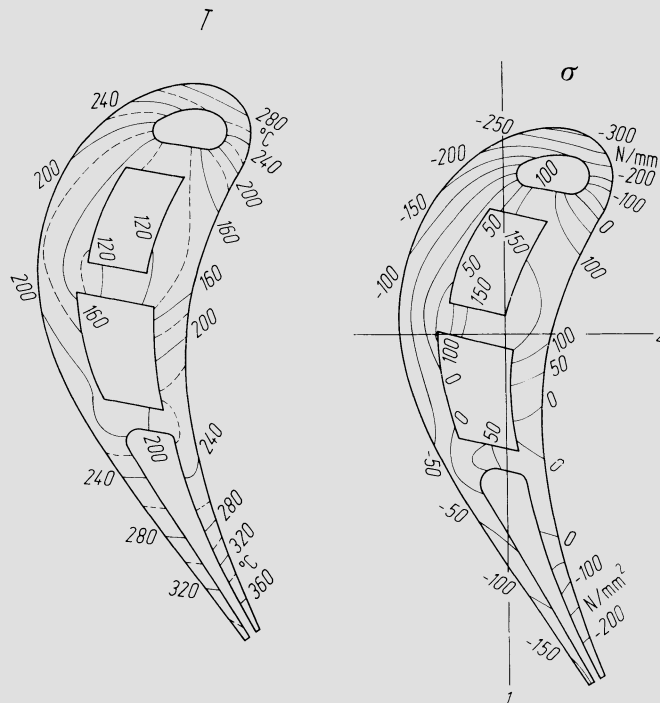


Abb. 16.6.2. Beispiel von transienten Temperatur- und Spannungsverteilungen in einer gekühlten Gasturbinenlaufschaukel 6 s nach Zünden der Brennkammer. Temperatur springt bei Zündung auf 600°C

² Diese Unterlagen sind dem Verfasser freundlicherweise von Gebr. Sulzer AG, Winterthur, zur Verfügung gestellt worden.

Laufschaufel einer Gasturbine. Gezeigt sind die Verteilungen von Temperatur und Spannung 6 s nach dem Zünden der Brennkammer, wobei die Gastemperatur schlagartig auf 600°C springt; anschließend steigt die Gastemperatur im Verlauf von 60 s um weitere 70°C an. Die größte Spannung ist eine Druckspannung von etwa 3000 bar an der Profilhase.

Die Verbiegung der Schaufelachse durch die Temperaturverteilung beeinflusst grundsätzlich auch die fliehkraftbedingte Biegebeanspruchung. Die Auslenkungen δx und δy im Radius r ergeben sich aus

$$\delta x = \int_{r_N}^r \left[\int_{r_N}^s \kappa_x(t) dt \right] ds, \quad \delta y = \int_{r_N}^r \left[\int_{r_N}^s \kappa_y(t) dt \right] ds, \quad 16.6(9)$$

wobei t der von r_N bis s laufende, s der von r_N bis r laufende Radius ist. Dementsprechend wären die ξ und η in Gl. 16.1(16) zu verändern. Dieser Einfluß ist aber in der Regel neben den Wärmespannungen vernachlässigbar klein.

Die Vereinfachungen, die dieser Theorie zugrunde liegen, führen dazu, daß die Spannungen eher etwas überschätzt werden. Bei komplizierten gekühlten Schaufeln kann die Genauigkeit unbefriedigend werden. Dann muß auf das Verfahren der finiten Elemente zurückgegriffen werden.

16.7 Viskoplastischer Spannungszustand in Schaufeln

Beim einachsigen viskoplastischen Spannungszustand (Kriechen in hoher Temperatur), wie er hier vorausgesetzt werden möge, ist die Kriechdehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_0$ nach den Ausführungen unter 15.5 gegeben durch einen Zusammenhang der Art

$$\dot{\epsilon}_0 = F(\sigma, T, t). \quad 16.7(1)$$

Für den Funktionszusammenhang kann z. B. das Nortonsche Gesetz in der Form 15.5(3) herangezogen werden, doch möge hier die allgemeine Form 16.7(1) beibehalten werden. Da sich die gesamte Dehnung ϵ aus elastischer Dehnung, Wärmedehnung und Kriechdehnung zusammensetzt, ist die Dehnungsgeschwindigkeit gegeben durch

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \beta \frac{dT}{dt} + F(\sigma, T, t). \quad 16.7(2)$$

Das Verhalten der Schaufel soll nun wiederum unter den gleichen vereinfachenden Voraussetzungen behandelt werden wie in Abschn. 16.6, d. h. es wird von der Theorie des Stabes ausgegangen. Dann kann Gl. 16.6(2) übernommen und nach der Zeit abgeleitet werden, woraus

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 + \dot{\kappa}_x x + \dot{\kappa}_y y \quad 16.7(3)$$

folgt. Wenn zur Abkürzung geschrieben wird

$$\Phi \equiv \beta \frac{dT}{dt} + F(\sigma, T, t), \quad 16.7(4)$$

folgt aus 16.7(2) und (3)

$$\frac{d\sigma}{dt} = E(\dot{\epsilon}_0 + \dot{\kappa}_x x + \dot{\kappa}_y y - \Phi). \quad 16.7(5)$$

Die Koordinatenachsen x, y (Abb. 16.6.1), sollen die Hauptträgheitsachsen des Profils sein, so daß die Relationen 16.6(6) gelten, und es soll vereinfachend $E = \text{const}$ gesetzt werden. Die vom betrachteten Schnitt übertragene Zugkraft (Zentrifugalkraft) Z und die Momente M_x, M_y sind

$$Z = \int_f \sigma df, \quad M_x = \int_f \sigma y df, \quad M_y = \int_f \sigma x df. \quad 16.7(6)$$

Wenn man die erste dieser Gleichungen nach t ableitet, Gl. 16.7(5) einsetzt und noch die Relationen 16.6(6) beachtet, findet man

$$\dot{Z} = E \int_f (\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_x x + \dot{\varepsilon}_y y - \Phi) df = E \left[\dot{\varepsilon}_0 f - \int_f \Phi df \right], \quad \dot{\varepsilon}_0 = \frac{1}{f} \int_f \Phi df + \frac{\dot{Z}}{E f}. \quad 16.7(7)$$

Auf dem gleichen Wege erhält man durch Ableiten der dritten der Gln. 16.7(6)

$$\dot{M}_y = E \int_f (\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_x x + \dot{\varepsilon}_y y - \Phi) x df = E \left[\dot{\varepsilon}_x J_y - \int_f \Phi x df \right],$$

woraus die erste der beiden nachfolgenden Gleichungen gewonnen wird; die zweite folgt in analoger Weise.

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{1}{J_y} \left[\int_f \Phi x df + \frac{\dot{M}_y}{E} \right], \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{1}{J_x} \left[\int_f \Phi y df + \frac{\dot{M}_x}{E} \right]. \quad 16.7(8)$$

Aus 16.7(7) und (8) sind $\dot{\varepsilon}_0$, $\dot{\varepsilon}_x$, $\dot{\varepsilon}_y$ bekannt, wenn man sich $Z(t)$, $M_x(t)$, $M_y(t)$ gibt und zudem in jedem Zeitpunkt die Temperaturverteilung im Profil kennt, mithin auch $\Phi(x, y)$. Damit liefert 16.7(5) $d\sigma/dt$. Es ist indessen zu beachten, daß Φ auch von σ abhängt, also erst laufend mit dem Fortschreiten der Rechnung bestimmt werden kann. Es ist also zur Differenzrechnung überzugehen, d. h. man schreibt 16.7(5) in der Form

$$\Delta\sigma = E(\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_x x + \dot{\varepsilon}_y y - \Phi) \Delta t. \quad 16.7(9)$$

Gln. 16.7(7)–(9) enthalten das vollständige Rechenverfahren. Von einem bekannten Spannungszustand in $t = 0$ ausgehend, berechnet man aus 16.7(7) und (8) $\dot{\varepsilon}_0$, $\dot{\varepsilon}_x$, $\dot{\varepsilon}_y$, alsdann aus 16.7(9) $\Delta\sigma$ für ein gewähltes Zeitintervall Δt . Damit hat man den Spannungszustand in Δt und schreitet von hier aus um ein neues Zeitintervall fort usw.

Bei einer ersten Inbetriebnahme, bevor also das Kriechen eingesetzt hat, stellt sich zunächst der elastische Spannungszustand ein, der dann als Zustand in $t = 0$ zu betrachten ist, von dem die Rechnung ausgeht. Nun sei am Ende einer ersten Epoche der Spannungszustand $\sigma(x, y)$ erreicht und die Temperaturverteilung sei $T(x, y)$. Dann stellt sich nach Abkühlung der Schaufel ein elastischer Restspannungszustand $\sigma_r(x, y)$ ein, der wie folgt zu bestimmen ist. Es sei $\sigma_e(x, y)$ der elastische Spannungszustand, welcher aus der Temperaturverteilung $T(x, y)$ und der gleichzeitig auftretenden mechanischen Beanspruchung folgt. Dann ist

$$\sigma_r(x, y) = \sigma(x, y) - \sigma_e(x, y). \quad 16.7(10)$$

Wird erneut angefahren, und ist $T'(x, y)$ die Temperaturverteilung, die aufgebracht wird, $\sigma_e'(x, y)$ die dieser Temperaturverteilung und der mechanischen Beanspruchung entsprechende elastische Spannungsverteilung, so ist

$$\sigma'(x, y) = \sigma_e'(x, y) + \sigma_r(x, y) \quad 16.7(11)$$

der neue Anfangswert für die Berechnung des viskoplastischen Spannungsverlaufes.

Die Verhältnisse werden noch komplizierter, wenn die Berechnung des elastischen Spannungszustandes in $t = 0$ oder der Restspannung σ_r auf Spannungsspitzen führt, deren Beträge die Fließgrenze überschreiten. Dann tritt plastische Verformung ein. Da es sich dabei normalerweise nur um eng begrenzte Gebiete handelt (namentlich Austrittskante), genügt es in der Regel, diese Spannungsspitzen bei der Fließgrenze σ_F abzuschneiden und die so entstehenden Spannungsverteilungen als reell zu betrachten. — Erfasst die Plastifikation größere Gebiete, so daß durch das einfache Abschneiden der Spannungsspitzen die Gleichgewichtsbedingungen fühlbar gestört werden, so ist ein neuer elastischer Spannungszustand zu berechnen unter Einführung ideeller zusätzlicher äußerer Kräfte und Momente, die eben diesem Fehlbetrag entsprechen. Von diesem elastischen Spannungszustand sind erneut die Spannungsspitzen bei σ_F abzuschneiden. Dieses Verfahren führt iterativ zu einem Spannungszustand, der mit der tatsächlichen äußeren Beanspruchung im Gleichgewicht steht.

16.8 Die Gestaltung der Schaufelbefestigung

Gegenstand dieses Abschnittes ist die Befestigung der *Laufschaufel* am Rotor. Die Befestigung der *Leitschaufel* ist viel weniger beansprucht und stellt daher im allgemeinen keine besonderen Probleme. — Günstige Verhältnisse liegen vor, wenn Laufschaufeln und Rotor ein Stück bilden, was indessen eine verhältnismäßig seltene Ausführungsform ist.

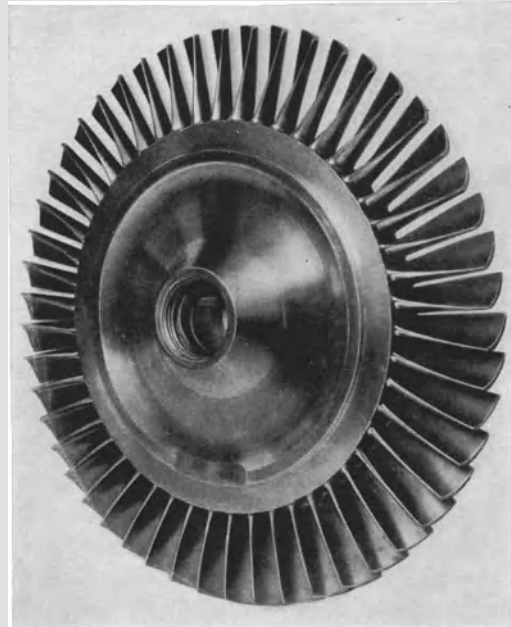


Abb. 16.8.1. Laufrad einer Kleingasturbine, Schaufeln und Rad aus einem Stück gegossen

Kleine Räder werden gelegentlich mit den Schaufeln zusammen in Präzisionsguß hergestellt (vgl. Abb. 16.8.1). Nicht sehr große Läufer mehrstufiger Maschinen lassen sich auch so herstellen, daß die Laufradkanäle durch Elektroerosion erzeugt werden, während die freistehenden, mit dem Läufer ein Stück bildenden Schaufeln einfach zwischen den auserodierten Kanälen stehenbleiben. Gelegentlich werden auch Laufschaufeln auf Scheiben aufgeschweißt (Abb. 16.8.2). Bei allen diesen Lösungen ist der Kraftfluß von der Schaufel in den Läufer ideal, doch sind sie in der Mehrzahl der Fälle fertigungstechnisch nicht möglich oder unwirtschaftlich. In der Regel muß daher zur mechanischen Schaufelbefestigung gegriffen werden.

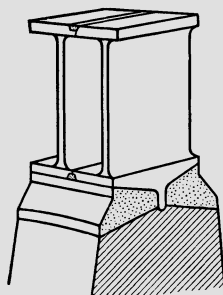


Abb. 16.8.2. Auf Scheibe aufgeschweißte Laufschaufeln

Jede mechanische Befestigung muß einander übergreifende Bauelemente aufweisen, wie in Abb. 16.8.3 schematisch dargestellt. Aus der Gegenüberstellung der Fälle a, b, c geht hervor, daß man mit einem kleineren Werkstoffaufwand auskommt, wenn man

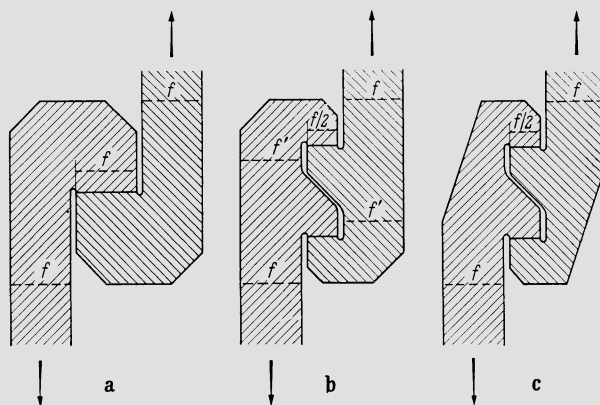


Abb. 16.8.3. Schematische Darstellung der mechanischen Schaufelbefestigung mit einander übergreifenden Elementen

mehrere „parallelgeschaltete“ Übertragungselemente vorsieht anstelle eines einzigen (die Darstellung ist rein schematisch zu verstehen und bildet nicht die tatsächliche Konstruktion ab, weshalb von Biegemomenten abzusehen ist). Während im Falle a der tragende Querschnitt 3mal vorzusehen ist, braucht er bei b nur 2,5mal vorhanden zu sein, während bei c eine weitere Massenreduktion dadurch zustandekommt, daß eine Verjüngung vorgesehen wird entsprechend dem verminderten Kraftfluß. Im Falle b sind in der Tat die Querschnitte f' unnötig groß, weil sie nur die halbe Kraft zu übertragen haben. Geht man mit der Aufteilung auf mehrere Übertragungselemente immer weiter und wendet dabei konsequent die Verjüngung an, so nähert man sich asymptotisch dem minimalen Werkstoffaufwand des direkten, nicht umgelenkten Kraftflusses. Bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten ist aber kleine Masse des Befestigungselementes entscheidend, da diese Masse selbst Fliehkraft ausübt und dadurch den Läufer zusätzlich belastet. Praktisch darf die Anzahl der tragenden Flächen allerdings nicht zu groß werden, da infolge von Herstellungstoleranzen und gegebenenfalls auch Wärmedehnungen nicht alle gleichmäßig tragen; gerade bei einer großen Zahl von Tragelementen wird dann die Überlastung des einzelnen groß. Abb. 16.8.4 stellt einige Varianten der *Hammerkopfbefestigung* dar. Der Schaufelfuß wird dabei in einer Umfangsnut gehalten. Form a ist vor allem für Trommelläufer geeignet, während für Scheibenrotoren die Form b vorteilhaft ist, die übergreifende Fortsätze 1 aufweist. Ohne diese würde der Querschnitt 2 eine erhebliche Biegebeanspruchung erleiden, die aber vermieden wird, wenn durch den Fortsatz 1 das seitliche Ausweichen des Kranzes verhindert wird. Form c ist ein doppelter Hammerkopffuß, der aus den oben erläuterten Gründen höhere Beanspruchungen mit besserer Werkstoffausnutzung zu übertragen gestattet als der einfache. — Um den Hammerkopf in die Umfangsnut einführen zu können, muß an einer Stelle des Umfanges eine Öffnung vorgesehen werden. Damit stellt sich das Problem des *Schaufelschlusses*, d. h. des letzten, dort einzuführenden Stückes. Eine Lösung dieses Problems, die von Escher-Wyss stammt, ist in Abb. 16.8.4d dargestellt. Die Füllstücke 1 und 2 werden zunächst nicht eingelegt, so daß die Schaufeln 3, 4 weiter nach links, 5, 6 weiter nach rechts geschoben und die Schloßschaufel 7 eingebracht werden können. Dann folgt das Zurückschieben der Schaufeln 3 bis 6, womit die Schaufel 7 „gefangen“ ist. Jetzt können die Füllstücke 1 und 2 eingeschoben und in der dargestellten Weise verstemmt werden. Schaufel 7 wird durch die Schaufeln 4 und 5 getragen, die normal in der Nut gehalten sind, gleichzeitig aber noch in die Schaufeln 3

und 6 eingreifen, die so noch zum Tragen herangezogen werden. Trotz dieser Verteilung der Kraftübertragung sind die Spannungen in der Schloßpartie natürlich größer als im übrigen Teil. Man hat daher auch schon gemäß Abb. 16.8.4e die Schloßpartie so ausgebildet, daß eine Schaufel weggelassen wurde. Die Stücke 1 und 2 werden dabei durch die beiden benachbarten Schaufeln getragen. Zwischen die beiden Stücke wird der Keil 3 eingetrieben, und durch verstemmen der Stücke 1 und 2 in der gezeigten Weise wird sein Austreten verhindert. Das Weglassen einer Schaufel vermindert aber den Wirkungsgrad und kann infolge der periodischen Störung zu Schwingungsanregung bei den Leitschaufeln führen.

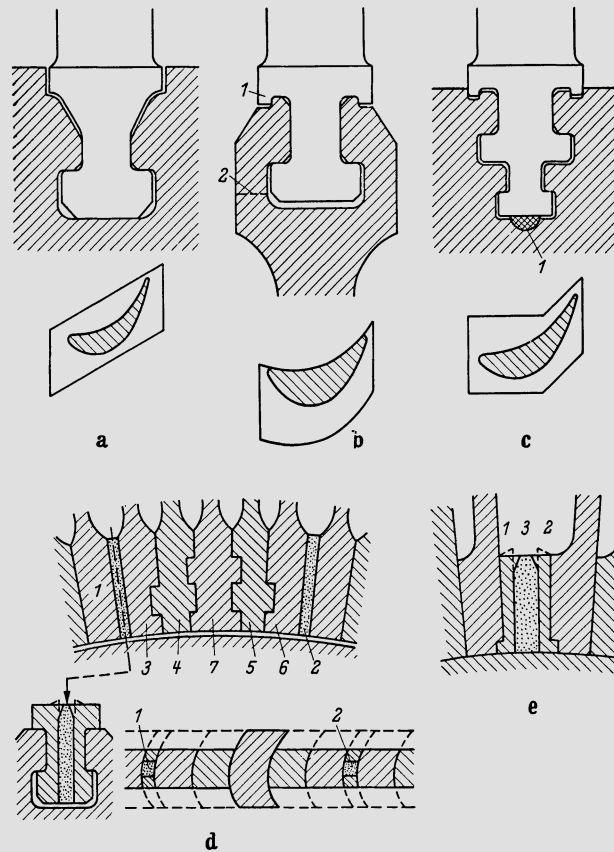


Abb. 16.8.4. Beispiele von Schaufelbefestigungen durch Hammerkopf. a) Für Trommelrotor; b) für Scheibenrotor; c) Doppelhammerkopf; d) Schaufelschloß; e) Schaufelschloß mit „Zahnücke“

Bei Trommelläufern ist die sehr einfache Schloßkonstruktion nach Abb. 16.8.5 möglich, die bei KWU verwendet wird. Der Fuß der Schloßschaufel wird in die Schloßöffnung eingeführt, worauf zu beiden Seiten je ein Gewinde eingeschnitten wird, das auf der ganzen Länge teils im Schaufelfuß, teil im Rotor verläuft. Alsdann werden Gewindebolzen eingeschraubt, womit die Schaufel gehalten ist. Es ist zu beachten, daß nicht etwa der Querschnitt dieser Schrauben die Schaufel trägt, sondern sie übertragen auf ihrer ganzen Länge durch Schub die Kraft vom Schaufelfuß auf den Läufer. Die hierfür verfügbare Fläche ist etwa das Doppelte der tragenden Flankenfläche des Hammerkopffußes.

Zur Übertragung großer Fliehkräfte eignet sich der *Sägezahnfuß*, auch *Tannenbaumfuß* genannt. Abb. 16.8.6 stellt einen solchen dar, der in eine Umfangsnut eingesetzt wird.

Dabei zeigen die Bilder a den normalen Fuß, b und c die Schloßpartie. Zwischen dem Fuß 1 und der Ausweitung 2 der Nut sind einzelne schmale beidseitig gezackte Füllstücke 3 eingeschoben. Zum Einführen dient die schmale Öffnung 4, welche die einzige Unterbrechung der Tragrillen darstellt. Die Öffnung 4 wird schließlich gefüllt durch ein einseitig gezahntes Stück 5 und einen Füllkeil 6, der verstemmt oder verschweißt wird.

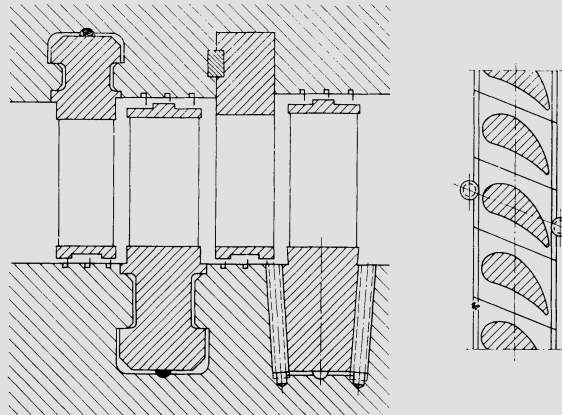


Abb. 16.8.5. Schaufelschloß bei Trommelturbinen der KWU

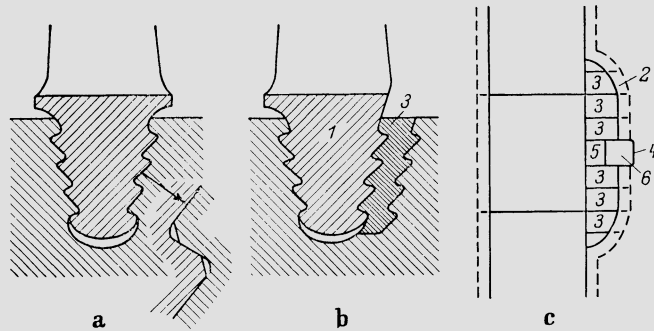


Abb. 16.8.6. In Umfangsnuten eingesetzter Sägezahnfuß und zugehöriges Schaufelschloß

Abb. 16.8.7 stellt eine Schaufelbefestigung von BBC dar, die den Vorteil hat, daß die Umfangsnut keine Unterbrechung aufweist. Es folgen abwechselnd eine Schaufel mit Fuß 1 und ein Zwischenstück 2. Obwohl die Tragrillen keine Unterbrechung aufweisen, gelingt das Einsetzen der Schaufeln durch Drehen, wie in der Abbildung angedeutet. Bei den letzten Schaufeln, ist dies allerdings nur möglich, indem die Zwischenstücke zunächst weggelassen werden, um genügend Platz zu schaffen. Diese Zwischenstücke werden nachträglich eingesetzt und bestehen zu diesem Zweck aus zwei Teilen 3 und 4, zwischen die ein Keil 5 eingeschoben wird, der schließlich durch Aufspreizen wie gezeigt gehalten wird.

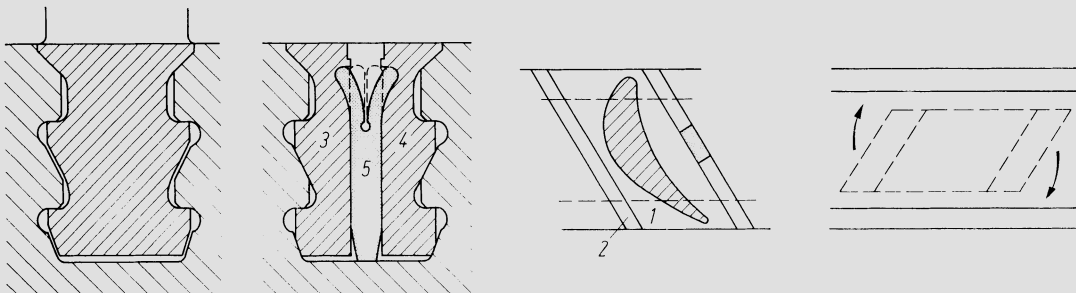


Abb. 18.8.7. Schaufelbefestigung von BBC

— Bei Schaufeln die nur geringe Fliehkräfte ausüben, z.B. Axialverdichterschaufeln mäßiger Länge, wird auch die Lösung gewählt, die Schaufel indirekt durch die Zwischenstücke zu tragen (vgl. Abb. 16.8.8). Die Schaufel weist an ihrem unteren Ende eine Verdickung auf, die unter die Zwischenstücke greift. — Bei wenig beanspruchten Axialverdichterschaufeln kann auch der einfache Schwalbenschwanzfuß an die Stelle des Hammerkopffußes treten.

Bei Maschinen mit Scheibenrotoren wird auch oft die *reitende Schaufel* verwendet (vgl. Abb. 16.8.9). Diese Konstruktion wird etwas leichter als diejenige mit Füßen, die in Umfangsnuten eingesetzt sind. Hingegen tritt auch hier das Schloßproblem auf. Es wird in der Regel so gelöst, daß man die Schloßschaufel durch Bolzen hält, wie in Abb. 16.8.9b dargestellt.

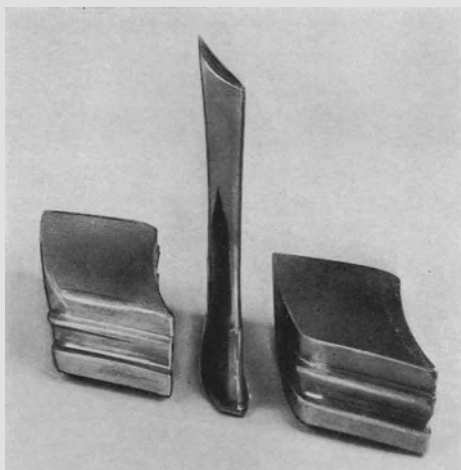


Abb. 16.8.8. Durch Zwischenstücke getragene Laufschaufel eines Axialverdichters (BBC)

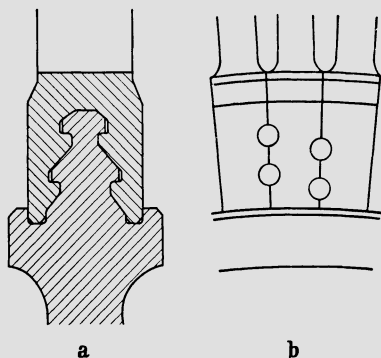


Abb. 16.8.9

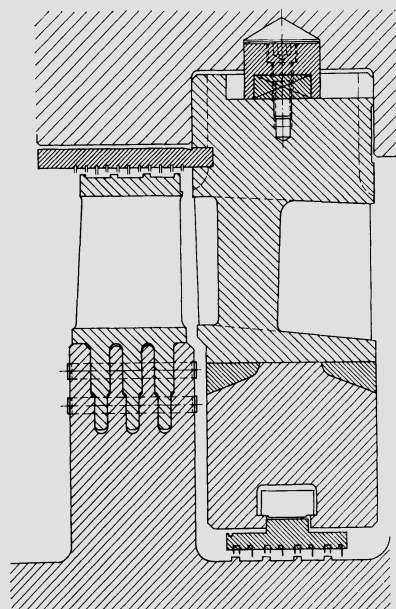


Abb. 16.8.10

Abb. 16.8.9. Reitende Schaufel (z.B. GE). a) Normale Fußausführung; b) Befestigung der Schloßschaufel durch Nietung

Abb. 16.8.10. Befestigung einer Laufschaufel durch Axialbolzen (MAN), sog. Steckfuß

Eine grundsätzlich andere Art der Schaufelbefestigung ist der *Steckfuß*, der in seiner ursprünglichen Form zuerst von *Rateau* angewandt worden ist. Im Beispiel Abb. 16.8.10 weist der Fuß drei Stege auf, und die Scheibe ist entsprechend als Gegenstück ausgebildet.

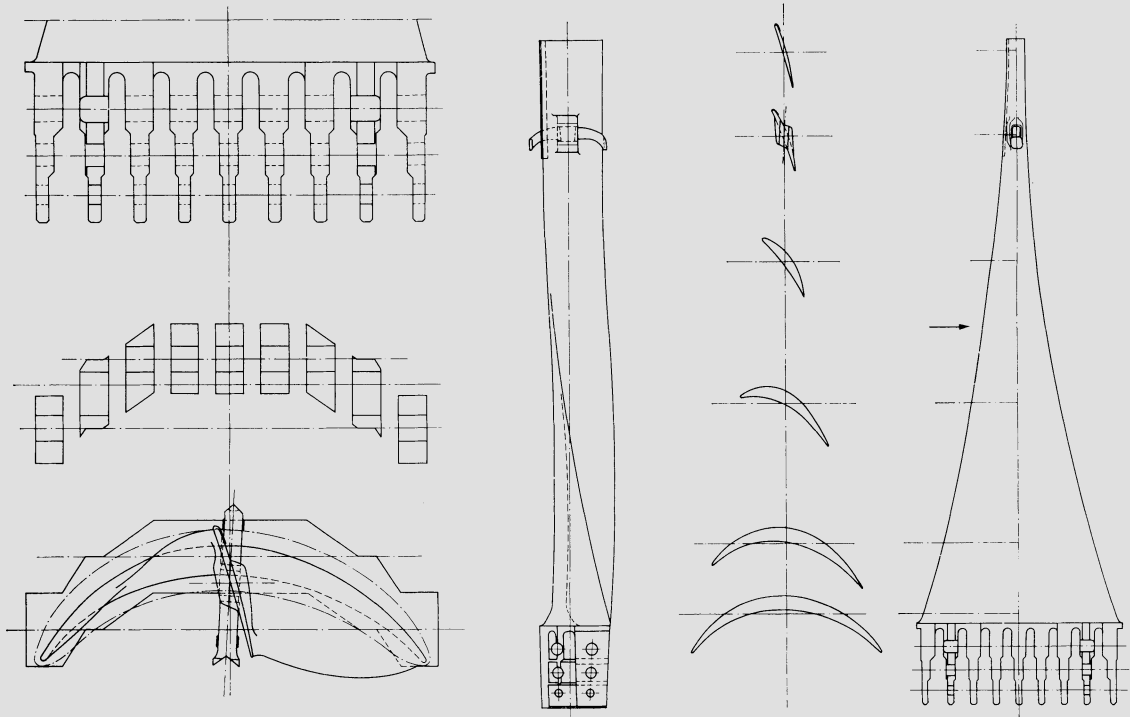


Abb. 16.8.11. Endstufenschaufel von 1044 mm Länge einer Turbine von MAN. Befestigung durch Steckfuß, mit neun Stegen und drei Bolzenreihen. „Arkaden“, die Querverbindung zwischen den Schaufeln herstellen, dienen der Unterdrückung von Schaufelschwingungen

Es sind zwei Reihen von Bolzen vorgesehen, die den Scheibenrand und die Stege so durchdringen, daß ihr Querschnitt mehrfach zum Tragen herangezogen wird, im vorliegenden Beispiel 6 mal pro Bolzen, so daß also insgesamt 12 tragende Querschnitte pro Schaufel entstehen. Die Querschnitte der Stege und Scheibenränder sind entsprechend dem Kraftfluß abgestuft. Ein Schloßproblem gibt es beim Steckfuß offensichtlich nicht. Abb. 16.8.11 zeigt eine Endstufenschaufel mit 1044 mm Blattlänge von MAN, die durch einen Steckfuß mit neun Stegen und drei Bolzenreihen befestigt wird. Der Grundriß des Fußes bringt es mit sich, daß jeder Bolzen je zwei benachbarte Schaufelfüße durchdringt. Pro Schaufel stehen 54 tragende Bolzenquerschnitte zur Verfügung. Jede Schaufel übt eine Kraft von $3,59 \text{ MN} = 366 \cdot 10^3 \text{ kp}$ aus (vgl. *Rieß* [1]), so daß ein Bolzenquerschnitt im Durchschnitt mit $66,5 \cdot 10^3 \text{ N}$ auf Abscherung beansprucht ist. — Sehr wichtig ist beim Steckfuß, daß durch zweckmäßige Wahl der Herstellungstoleranzen klare Einspannungsverhältnisse geschaffen werden. Wird die Einspannung durch Zufälligkeiten der Fertigung beeinflusst, so ergeben sich Streuungen in den Eigenfrequenzen der Schaufeln, die zu unerwarteten Resonanzen Anlaß geben können. Wird aber dies beachtet, so gehört der Steckfuß zu den hochwertigsten Schaufelbefestigungen, die wir kennen.

Bei den Axialverdichtern der Flugtriebwerke sind gelegentlich auch gelenkige Schaufelbefestigungen angewandt worden (vgl. Abb. 16.8.12). Das Ziel ist dabei, im Falle des Auftretens von Schaufelschwingungen für Dämpfung zu sorgen.

Sehr hochwertig ist die Schaufelbefestigung durch *Axialnuten*, bei der das Schloßproblem ebenfalls entfällt. Bereits *de Laval* benutzte eine solche Konstruktion, die in Abb. 16.8.13 in zwei Varianten dargestellt ist. Die einfache Form a wird bei den STALLAVAL-Gleichdruckturbinen bei mäßigen Umfangsgeschwindigkeiten benutzt und ist leichter als Konstruktionen mit Umfangsnuten. Die Form b, die sich für höhere Fliehkräfte eignet, wurde früher weithin für hochbeanspruchte einstufige Turbinen (z. B. Turbo-lader) verwendet. Allerdings erwies sich dabei der in der Abbildung angegebene Querschnitt 1 oft als schwindungsgefährdet. Deshalb ist die Konstruktion zunehmend durch

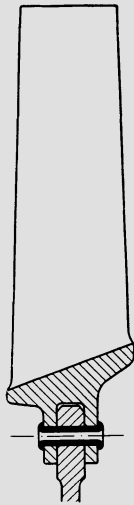


Abb. 16.8.12

Abb. 16.8.12. Gelenkig befestigte Axialverdichter-Laufschaukel eines Flugtriebwerkes

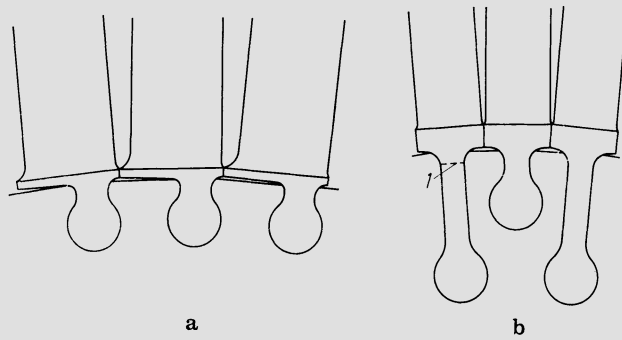


Abb. 16.8.13

Abb. 16.8.13. Lavalbefestigung. a) Einfache Form; b) versetzte Anordnung

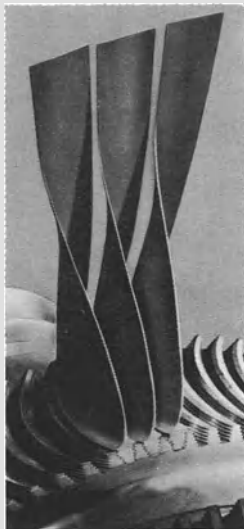


Abb. 16.8.15

Abb. 16.8.15. Endstufenschaukeln von BBC mit Sägezahnfüßen und kreisförmig gekrümmten Axialnuten

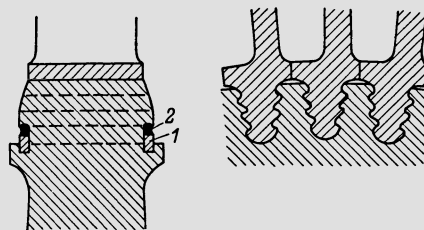


Abb. 16.8.14

Abb. 16.8.16. Schaufelbefestigung bei einer Dampfturbinen-Regelstufe von KWU. Je ein Schaufelzwilling besitzt einen gemeinsamen Sägezahnfuß

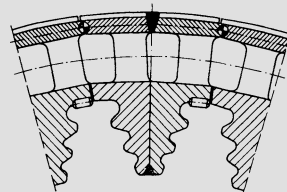


Abb. 16.8.16

den axial eingesetzten Sägezahnfuß (Abb. 16.8.14) verdrängt worden, der insbesondere bei den Gasturbinen zur normalen Schaufelbefestigung geworden ist. Oft bedingt die Gestalt des Schaufelprofils, daß der Fuß nicht rein axial eingeschoben werden kann, sondern unter einem gewissen Winkel gegen die Meridianebene. Bei den Endstufen der Dampfturbinen ist man sogar darauf geführt, einen kreisförmigen Grundriß für Fuß und Nut zu wählen, wie im Beispiel Abb. 16.8.15. Eine Ausführung einer Regelstufe, bei der je ein Schaufelzwilling einen gemeinsamen Fuß besitzt, zeigt Abb. 16.8.16. — Die axiale (oder quasiaxiale) Sägezahnfußbefestigung verlangt eine sehr genaue Fertigung. Vor allem ist die Herstellung der Nuten (durch Räumen oder Fräsen) nicht billig, doch wird diese Ausführungsform höchsten Anforderungen gerecht.

16.9 Die Berechnung der Schaufelbefestigung

Wie es im Maschinenbau weithin üblich war, hat man die Spannungen in den Befestigungselementen ursprünglich so zu berechnen versucht, daß man das Problem näherungsweise auf die Grundaufgaben der elementaren Festigkeitslehre zurückführte. Damit konnte keine hohe Genauigkeit erreicht werden, so daß entsprechend große Sicherheitsfaktoren eingerechnet werden mußten. Einen wesentlichen Fortschritt brachte der *spannungsoptische Versuch*. Wurde bei solchen Untersuchungen mit einer gewissen Systematik vorgegangen, so konnten für typische Konstruktionselemente verlässliche Grundlagen gewonnen werden, vgl. etwa *Peterson* [5] und *Hetényi* [6]. Nur bei einfachen Formen gelang die elastizitätstheoretische Berechnung, vgl. *Neuber* [7]. Bei der Übertragung auf abweichende Formen war man aber wiederum auf Näherungsüberlegungen angewiesen. Mit dem *Verfahren der finiten Elemente* ist indessen heute grundsätzlich die Möglichkeit gegeben, beliebige Formen nachzurechnen, allerdings oft mit sehr großem Rechenaufwand. Eine Darstellung dieser Entwicklung gibt *Hohn* [8]. Nachdem dies die allgemein übliche Methode geworden ist, können wir uns hier damit begnügen, Unterlagen über den Hammerkopffuß anzugeben, die in strenger und allgemeiner Form aus spannungsoptischen Versuchen gewonnen werden konnten, vgl. [5] und [6].

Abb. 16.9.1 zeigt ein typisches spannungsoptisches Bild eines Hammerkopffußes. Die höchste Spannung σ_{\max} tritt naturgemäß auf in der Ausrundung, d. h. im Punkt *A* bei der Darstellung nach Abb. 16.9.2. Diese Abbildung gibt auch die nachfolgend benutzten Bezeichnungen. Es sei *t* die Teilung im Radius der Auflagefläche. Dann sind Mittelspannung $\bar{\sigma}$ und Maximalspannung σ_{\max} gegeben durch

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{at}, \quad \sigma_{\max} = \alpha \bar{\sigma} = \alpha \frac{P}{at}. \quad 16.9(1)$$



Abb. 16.9.1. Spannungsoptisches Bild der Spannungsverteilung in einem Hammerkopffuß

Der Formfaktor α ist der Abb. 16.9.3 zu entnehmen, welche die in [5] gegebene Zusammenfassung von [6] auszugsweise wiedergibt. Beim Vergleich mit der Originalliteratur ist zu beachten, daß dort die Abszisse mit der Gesamtbreite des Fußes gebildet ist, also in der Bezeichnungweise der Abb. 16.9.3 mit der Größe $B + 2d$. Bei den Versuchen von *Hetényi* war $d = c$, was aber in praktischen Anwendungen nicht ohne weiteres der Fall ist. Deshalb wurde als zweckmäßig erachtet, B/a als Abszisse anzugeben. Das impliziert die Annahme, daß Füße, die in allen Abmessungen bis auf d miteinander übereinstimmen, mechanisch gleichwertig seien. In dem engen Bereich, in dem d praktisch variieren kann, trifft das mit großer Genauigkeit zu.

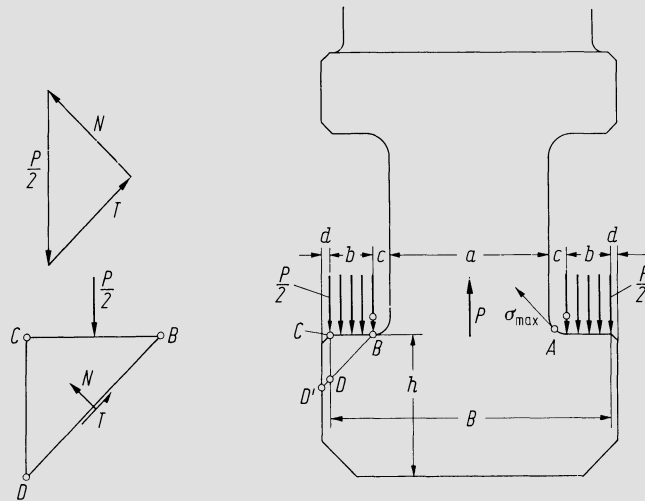


Abb. 16.9.2. Zur Spannungsberechnung in Hammerkopffüßen

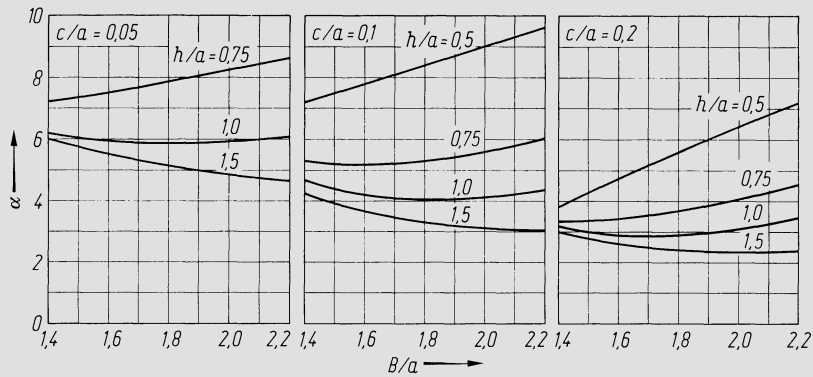


Abb. 16.9.3. Formfaktor α für Hammerkopf in Funktion der geometrischen Proportionen. Nach [5] und [6]

Naheliegenderweise werden die α -Werte um so günstiger, je größer der relative Ausrundungsradius c/a . Unter praktisch gegebenen konstruktiven Beschränkungen kann aber eine Vergrößerung von c eine Verkleinerung der Flankenbreite b notwendig machen, woraus sich die Frage ergibt, welche Flächenpressung dort zugelassen werden kann. Um dies zu beurteilen, möge die ungünstigste Annahme getroffen werden, daß $d = 0$ sei. Alsdann werde eine Gleichgewichtsbetrachtung an dem Dreieck BCD durchgeführt, das links noch größer herausgezeichnet ist. Die Seite CD gehört unter der getroffenen Annahme der Außenkontur des Körpers an. Auf die Seite BC wirkt die Kraft $P/2$ ein,

während die Seite BD durch die Schubspannungen eine Kraft T und durch die Normalspannungen eine Kraft N erfährt. Diese Kräfte bilden ein geschlossenes Kräfte-dreieck, so daß

$$N = T = \frac{P}{2\sqrt{2}}. \quad 16.9(2)$$

Ist \bar{p} die mittlere Flächenpressung auf BC und sind $\bar{\sigma}_n$ und $\bar{\tau}$ die Mittelwerte der Normalspannung und der Schubspannung auf BD , deren Beträge offenbar gleich sein müssen, damit sich das Kräfte-dreieck schließt, so gilt

$$\frac{P}{2} = \bar{p}bt, \quad T = \bar{\tau}bt\sqrt{2}, \quad \bar{\sigma}_n = \bar{\tau} = \frac{\bar{p}}{2}. \quad 16.9(3)$$

Man kann daher eine mittlere Vergleichsspannung berechnen nach

$$\bar{\sigma}_v = \sqrt{\bar{\sigma}_n^2 + 3\bar{\tau}^2} = \bar{p}, \quad 16.9(4)$$

d.h. vollständige Plastifizierung wäre erreicht, wenn \bar{p} den Betrag der Fließgrenze σ_F hätte. Die wirkliche Geometrie ist wegen $d \neq 0$ etwas günstiger, so daß die Bedingung effektiv lautet

$$\bar{p} < \sigma_F \frac{\overline{BD'}}{\overline{BD}}, \quad 16.9(5)$$

da die Tragfähigkeit erschöpft ist, wenn \bar{p} den Wert des rechts stehenden Ausdruckes erreicht. Auf diesen letzteren ist also der Sicherheitsfaktor zu beziehen, wenn weder Temperaturbedingungen herrschen, bei denen der Werkstoff kriecht, noch dynamische Beanspruchung vorliegt. In diesen letzteren Fällen ist anstatt σ_F die entsprechende Grenzspannung einzusetzen.

Ein Beispiel eines nach dem Verfahren der finiten Elemente berechneten Schaufel-fußes zeigt Abb. 16.9.4. Es ist die Vergleichsspannung σ_V angegeben und zwar sowohl für den Fuß selbst als auch für die zugehörige Nut.

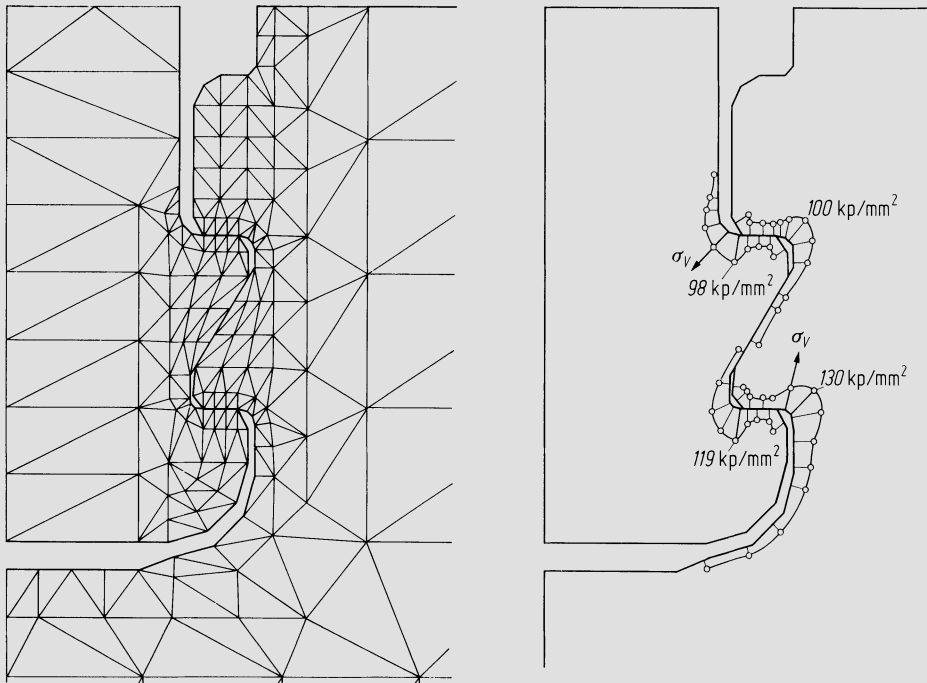


Abb. 16.9.4. Bestimmung der Spannungen in einem Zweizackenfuß nach dem Verfahren der finiten Elemente, links Elementeinteilung, rechts Verteilung der Vergleichsspannung σ_V im Fuß selbst und im Gegenstück (1 $\text{kp/mm}^2 = 9,81 \text{ N/mm}^2$)

Bei diesen Ausführungen ist nur die reine fliehkraftbedingte Zugbeanspruchung des Fußes betrachtet worden. Oft haben aber auch die Biegebeanspruchungen eine wesentliche Bedeutung. Bei ihrer Behandlung ist es zweckmäßig, die Biegebeanspruchung durch Fliehkräfte und durch fluiddynamische Kräfte auseinanderzuhalten, weil den letzteren ein zeitlich oszillierender Anteil überlagert sein kann, der den Konstruktionsteil in besonders hohem Maße gefährdet. Abb. 16.9.5 zeigt zwei Beispiele von auf Biegung beanspruchten Fußquerschnitten; Bild a ist ein in eine Umfangsnut eingesetzter Fuß, b ein axial eingesetzter Sägezahnfuß. Der zu untersuchende Querschnitt liege in einem Radius r^* , wie im Beispiel b unten angegeben. Im allgemeinen haben nicht nur die Hauptträgheitsachsen ξ', η' des Schaufelwurzelschnittes nicht die gleichen Richtungen wie die Hauptträgheitsachsen ξ'', η'' des betrachteten Fußquerschnittes, sondern die Schwerpunkte der beiden Querschnitte liegen auch nicht auf dem gleichen Radius. Vielmehr hat die Projektion des Schwerpunktes des Schaufelprofils im Koordinatensystem ξ'', η'' die Koordinaten a_1, a_2 (im Beispiel b sind a_1 und a_2 negativ), und das System ξ'', η'' bildet mit dem System ξ', η' den Winkel μ . Die Orientierung des Systems ξ'', η'' ist gekennzeichnet durch den Winkel ν gegen die axiale Richtung, der im Fall b Null ist. J_1' und J_2' sind die den Achsen ξ'' und η'' zugeordneten Trägheitsmomente. Beim Steckfuß sind darunter die Trägheitsmomente jener Figur zu verstehen, die als Schnittfigur der Stege im Radius r^* erscheint und z. B. in Abb. 16.8.11 dargestellt ist.

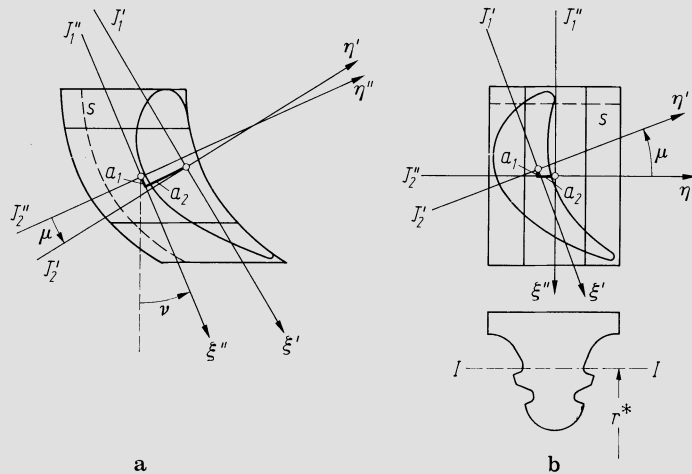


Abb. 16.9.5. Durch Biegung beanspruchte Fußquerschnitte. a) In Umfangsnut eingesetzter Fuß; b) axial eingesetzter Sägezahnfuß

Durch die *Zentrifugalkraft* entsteht im betrachteten Fußquerschnitt eine Biegebeanspruchung, die einerseits durch die Abstände a_1 und a_2 bedingt ist, andererseits durch die schon im Schaufelwurzelschnitt auftretenden Momente M_ξ, M_η , die durch Gl. 16.1(16) gegeben sind, und in die übrigens auch die allfälligen Beiträge der Deckplatten mit einzuschließen sind. Die Fliehkraft im Schaufelwurzelschnitt ist $\sigma_{zN}f_N$. Somit ergibt sich für die beiden von der Zentrifugalkraft herrührenden Momente M'_{z1} und M'_{z2} in Richtung der Trägheitsachsen ξ'' und η''

$$M'_{z1} = a_2 \sigma_{zN} f_N + M_\xi \cos \mu - M_\eta \sin \mu, \quad 16.9(6)$$

$$M'_{z2} = -a_1 \sigma_{zN} f_N + M_\xi \sin \mu + M_\eta \cos \mu. \quad 16.9(7)$$

Die dadurch in einem beliebigen Punkt ξ'', η'' des Querschnittes hervorgerufene Biegespannung σ_{bZ} ist unter den Voraussetzungen der elementaren Balkentheorie

$$\sigma_{bZ}(\xi'', \eta'') = \frac{M'_{z1} \eta''}{J_1''} - \frac{M'_{z2} \xi''}{J_2''}. \quad 16.9(8)$$

Die durch die *fluidodynamischen Kräfte* bedingten Momente — d.h. ihre Komponenten in Umfangsrichtung und in axialer Richtung — können aus den Gln. 16.3(2) und (3) berechnet werden, wenn man dort r' durch den Radius r^* ersetzt, in dem der betrachtete Querschnitt liegt. Dabei werden in den Integranden im Bereiche des Fußes selbst einfach die Geschwindigkeiten Null, und dort wo sich der Fuß nicht über die volle Teilung erstreckt, sind entsprechende Reduktionsfaktoren in Gl. 16.3(2) einzusetzen. Aus den so bestimmten $M_u(r^*)$ und $M_z(r^*)$ erhält man die fluidodynamischen Momentkomponenten bezüglich ξ'' und η'' :

$$M''_{F1} = M_z(r^*) \cos \nu + M_u(r^*) \sin \nu, \quad M''_{F2} = M_u(r^*) \cos \nu - M_z(r^*) \sin \nu. \quad 16.9(9)$$

Damit wiederum ergeben sich die Biegespannungen in ξ'' , η''

$$\sigma_{bF}(\xi'', \eta'') = \frac{M''_{F1} \eta''}{J''_1} - \frac{M''_{F2} \xi''}{J''_2}. \quad 16.9(10)$$

Diese σ_{bZ} und σ_{bF} wird man nun für die gefährdetsten Punkte der Kontur des betrachteten Fußquerschnittes bestimmen. Als effektive Spannungsspitzen z.B. in den Ausrundungen von Hammerkopffüßen oder Sägezahnfüßen kann man alsdann näherungsweise setzen

$$\sigma_{\max} = \alpha(\bar{\sigma} + \sigma_{bZ} + \sigma_{bF}), \quad 16.9(11)$$

d.h. man nimmt an, daß der Formfaktor α für die reine Zugspannung und für die Biegespannungen den gleichen Wert habe. Dabei ist α entweder aus spannungsoptischen Versuchen bekannt oder läßt sich bestimmen aus einer für reinen Zug durchgeführten Rechnung mit finiten Elementen, etwa nach Art des in Abb. 16.9.4 dargestellten Beispiels.

Eine noch etwas genauere Behandlung läßt sich in folgender Weise gewinnen. Man denkt sich vom wirklichen Fuß einen schmalen Streifen abgeschnitten, wie durch die Linie s (Abb. 16.9.5b) angedeutet. In diesem wird das Problem als ein ebenes aufgefaßt.

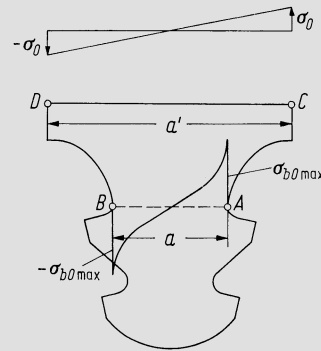


Abb. 16.9.6. Biegespannungsverteilung in Sägezahnfuß

In den gefährdetsten Punkten A und B (Abb. 16.9.6) liefern die Gln. 16.9(8) und (10) gewisse Spannungen σ_{bZ} und σ_{bF} . Nun denkt man sich in CD Spannungsverteilungen angreifend, derart, daß in AB die Biegemomente entstehen, die dort durch die Spannungsverteilungen nach 16.9(8) und (10) gegeben sind. Dies sind in CD lineare Spannungsverteilungen, die in C und D die Spannungswerte

$$\pm \sigma_{bZ} \left(\frac{a}{a'} \right)^2, \quad \pm \sigma_{bF} \left(\frac{a}{a'} \right)^2$$

aufweisen. Nach dem Verfahren der finiten Elemente wird nun die Spannungsverteilung im Sägezahnfuß berechnet, die entsteht, wenn in CD ein lineare Spannungsverteilung mit den Spannungswerten $\pm \sigma_0$ in C und D angreift (σ_0 ist eine beliebig angenommener Spannungswert). In einem beliebigen Punkt des Fußes entsteht so irgendeine Spannung σ_{b0} , die in den Punkten A und B insbesondere die Werte $\pm \sigma_{b0\max}$ annimmt. Damit er-

geben sich in A und B die effektiven Biegespannungsspitzen

$$\sigma_{bZ,eff} = \sigma_{b0max} \frac{\sigma_{bZ}}{\sigma_0} \left(\frac{a}{a'}\right)^2, \quad \sigma_{bF,eff} = \sigma_{b0max} \frac{\sigma_{bF}}{\sigma_0} \left(\frac{a}{a'}\right)^2. \quad 16.9(12)$$

Wenn $\sigma_Z(A)$ und die Spannung ist, die in A nach der Methode der finiten Elemente durch reinen Zug erhalten wird, also $\alpha\bar{\sigma}$, so folgt schließlich

$$\sigma_{max}(A) = \sigma_Z(A) + \sigma_{bZ,eff} + \sigma_{bF,eff}. \quad 16.9(13)$$

Eine solche Untersuchung kann in jedem Schnitt durchgeführt werden, der interessieren mag, und die Methode ist gegebenenfalls gemäß der jeweiligen Fußgeometrie abzuwandeln. — Bei der Leitradbefestigung fällt naturgemäß die Fliehkraft weg, und es ist nur die Biegebeanspruchung durch die Strömungskräfte zu betrachten, wobei die Gln. 16.3(4) und (5) der Ausgangspunkt sind.

Auch die genauere Betrachtung, die auf Gl. 16.9(13) führt, setzt immer noch ebenen Spannungszustand (oder gegebenenfalls ebenen Verformungszustand) voraus. Die genaue Behandlung des räumlichen Spannungszustandes ist mit finiten Elementen grundsätzlich möglich, führt aber auf einen sehr großen Rechenaufwand.

16.10 Die Gesamtbeanspruchung

In einem beliebigen Punkt eines Schaufelblattes, eines Schaufelfußes oder gegebenenfalls einer Deckplatte oder eines Deckbandes treten im allgemeinen die folgenden Spannungen auf (von denen im Einzelfall einige wegfallen können); sie sind stets aufzufassen als effektive Spannungen, die also allfällige Formfaktoren schon enthalten wie Gln. 16.9(1), (11) oder (12):

- σ_z reine zentrifugalkraftbedingte Zugspannung, vgl. Abschn. 16.1, 16.9;
- σ_{bZ} zentrifugalkraftbedingte Biegespannung, Abschn. 16.1, 16.4, 16.9;
- σ_{bF} fluiddynamisch bedingte Biegespannung, Abschn. 16.3, 16.5, 16.9;
- σ_T thermisch bedingte Spannung, Abschn. 16.6;
- τ fliehkraftbedingte Torsionsspannung (Schubspannung) Abschn. 16.2.

Die gefährdeten Punkte liegen stets an der Oberfläche, wo die Bedingungen eines einachsigen Spannungszustandes selbst bei solchen Bauteilen wie Schaufelfüßen lokal hinreichend erfüllt sind. Setzt man nun

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_{bZ} + \sigma_{bF} + \sigma_T, \quad 16.10(1)$$

so ist gemäß Gl. 5.2(1)

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad 16.10(2)$$

die lokale *statische Vergleichsspannung*. Grundsätzlich käme zu τ noch ein durch Strömungskräfte bedingter Anteil hinzu, der aber in der Regel sehr klein ist. Hat das Schaufelblatt eine Temperatur, bei der Kriechen auftritt, so können die einzelnen Spannungsanteile nicht mehr getrennt werden, da das Prinzip der Überlagerung nicht gilt. Die Rechnung liefert dann direkt σ , vgl. die Ausführungen unter 16.7.

Der statischen Spannung überlagert sich ein *dynamischer Anteil*, der davon herrührt, daß die fluiddynamischen Kräfte zeitlich oszillieren. Für die so entstehenden Amplituden der Wechselspannungen werde gesetzt

$$\sigma_A = D\sigma_{bF}, \quad \tau_A = D_\tau\tau_i. \quad 16.10(3)$$

Hier ist τ_i eine nach einer zweckmäßigen Normierung festgelegte Schubspannung, die den Strömungskräften proportional ist. D ist der „dynamische Faktor“ für Biegebeanspruchung, D_τ derjenige für Torsionsbeanspruchung. Diese dynamischen Faktoren werden groß in unmittelbarer Nähe von Resonanzen, vgl. darüber die Ausführungen in Kapitel 20.

Mit

$$\sigma_{vA} = \sqrt{\sigma_A^2 + 3\tau_A^2} \quad 16.10(4)$$

ist dann die Vergleichsspannungsamplitude gegeben.

Die Vergleichsspannungen σ_v und σ_{vA} sind die Unterlage zur *Beurteilung des Spannungszustandes* nach den unter 15.8—13 ausgeführten Kriterien. Welches die gefährdetste Stelle ist, läßt sich im allgemeinen nicht a priori sagen. Oft ist es ein Punkt des Profils an der Schaufelwurzel. Es kann aber ebensogut ein weiter außen liegender Punkt sein, wie im Beispiel Abb. 16.1.2, besonders wenn dort gleichzeitig noch hohe Torsionsbeanspruchungen durch Entwindung auftreten. Auch ein Punkt des Schaufelfußes kann die Schwachstelle sein. — Die größte Unsicherheit in der Vorausrchnung des Spannungszustandes in Schaufeln liegt in der Regel in den dynamischen Faktoren, weshalb Schwingungsbrüche an Schaufeln bis heute die häufigste Störungsursache bei Turbomaschinen geblieben sind.

Literatur zu Kap. 16

1. Rieß, W.: Entwicklung großer Endschaufeln für Dampfturbinen. M.A.N. forschen, planen, bauen, Heft 7, 1976 S. 3—10.
2. Ohtsuka, M.: Untwist of Rotating Blades, ASME Paper No. 74-GT-2 (1974).
3. Herrmann, L. R.: Elastic Torsional Analysis of Irregular Shapes. Proc. Am. Soc. Civ. Eng. J. Eng. Mech. Div. 91, No. EM 6 (1965) 11—19.
4. Biezeno, C. B.; Grammel, R.: Technische Dynamik, 2. Aufl. Bd. 2. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1953.
5. Peterson, R. E.: Stress Concentration Design Factors, New York, London: Wiley, Chapman and Hall 1953.
6. Hetényi, M.: Some Applications of Photoelasticity in Turbine-Generator Design. J. Appl. Mech. 61 (1939) 151—155.
7. Neuber, H.: Kerbspannungslehre, 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1958.
8. Hohn, H.: Die mechanische Auslegung von Dampfturbinen. Brown Boveri Mitt. 63 (1976) 379—390.
9. Beglinger, V.: Festigkeitstechnische Kenngrößen von Doppelkreisbogenprofilen, Konstruktion 18 (1966) 467—469.

17 Festigkeit der Rotoren

17.1 Freitragender Ring

Wir betrachten einen rotierenden Ring, dessen Querschnittsabmessungen klein sind im Vergleich zum Radius r , welcher der Abstand des Querschnittsschwerpunktes von der Drehachse ist. Die Winkelgeschwindigkeit sei ω . Ein Ringelement, das sich über einen Winkel $d\varphi$ erstreckt (vgl. Abb. 17.1.1) hat die Masse $frd\varphi\rho$, wo f der Ringquerschnitt und ρ die Dichte ist und übt daher die Fliehkraft

$$dZ = frd\varphi\rho r\omega^2 \quad 17.1(1)$$

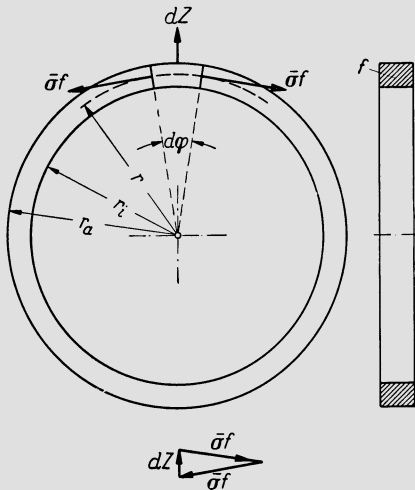


Abb. 17.1.1. Gleichgewichtsbetrachtung am freitragenden Ring

aus. Ihr wird das Gleichgewicht gehalten, durch die in den beiden Endflächen des Ringelementes angreifenden Umfangskräfte; sie haben den Betrag $\bar{\sigma}f$, wobei $\bar{\sigma}$ der über den Querschnitt erstreckte Mittelwert der Ringspannung ist. Wie aus dem Kräfteplan, Abb. 17.1.1, zu erkennen ist, muß daher gelten

$$dZ = f d\varphi \rho (r\omega)^2 = \bar{\sigma} f d\varphi,$$

folglich

$$\bar{\sigma} = \underline{\rho (r\omega)^2 = \rho u^2}. \quad 17.1(2)$$

Die Spannung ρu^2 , die schon in den Gleichungen des Kap. 16 auftrat, ist also nichts anderes als die Spannung in einem freitragenden rotierenden Ring, der sich mit einer im Schwerpunkt des Querschnittes gemessenen Geschwindigkeit u bewegt.

Genaugenommen handelt es sich dabei um einen Mittelwert der Spannung, wobei die örtlichen Werte innerhalb des Querschnittes um so weniger von diesem Mittelwert abweichen, je mehr sich das Verhältnis des äußersten zum innersten Radius des Querschnittes, r_a/r_i , dem Wert 1 nähert. Der genauere Verlauf der Ringspannung innerhalb des Querschnittes läßt sich aus folgender Überlegung gewinnen. Es sei v die radiale Aus-

weitung des Ringes. Wenn die Abmessungen eines Querschnittes wie vorausgesetzt klein sind verglichen mit dem Radius, ist v praktisch für alle Fasern des Ringes gleich groß, da die Kontraktion des Ringquerschnittes, die strenggenommen zu einer Verschiedenheit der v in verschiedenen Radien führt, von verschwindend kleinem Einfluß ist. Die Dehnung ε in einem beliebigen Radius r ist also $\varepsilon = v/r$. Da der Spannungszustand praktisch einachsig ist und die Spannung im Schwerpunktradius hinreichend genau gleich $\bar{\sigma}$ gesetzt werden darf, lautet das Hookesche Gesetz

$$\frac{v}{r} = \frac{\bar{\sigma}}{E}, \tag{17.1(3)}$$

womit aber auch

$$\frac{v}{r_i} = \frac{\sigma_i}{E}, \quad \frac{v}{r_i} = \frac{r\bar{\sigma}}{r_i E}, \quad \sigma_i = \frac{r}{r_i} \bar{\sigma} \tag{17.1(4)}$$

und entsprechend für r_a , so daß schließlich

$$\sigma_i = \frac{r}{r_i} \varrho u^2, \quad \sigma_a = \frac{r}{r_a} \sigma u^2. \tag{17.1(5)}$$

Mit diesen Gleichungen ist der Spannungszustand im Ring selbst auch dann hinreichend genau beschrieben, wenn die radiale Erstreckung des Ringquerschnittes nicht ganz unbedeutend ist, z. B. $r_a/r_i = 1,2$.

17.2 Radkranz mit Schaufeln, an Scheibe

Abb. 17.2.1 zeigt einen Radkranz, der eine Schaufelung trägt und seinerseits von einer Scheibe getragen wird. Es ist für die Untersuchung am übersichtlichsten, in den Querschnitt f außer demjenigen des eigentlichen Kranzes auch den der Schaufelfüße einzuschließen, d. h. f ist der ganze schraffierte Querschnitt oberhalb r_{ik} (Abb. 17.2.1). Allerdings kann dann nur ein gewisser Anteil von f Umfangsspannungen übertragen. Der durch die Schaufelfüße beanspruchte Anteil fällt aus. Außerdem weist oft der Kranz beim Schaufelschloß noch besondere Einschnitte auf, so daß dort ein noch kleinerer Teil von f zur Übertragung der Umfangsspannungen verfügbar bleibt, vgl. gestrichelte Eintragung.

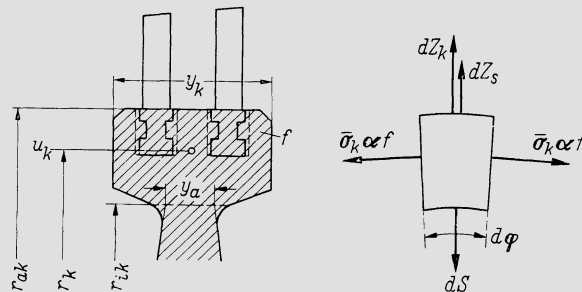


Abb. 17.2.1. Gleichgewichtsbetrachtung an einem Radkranz mit Schaufelung, an Scheibe

Es sei αf dieser kleinste für die Übertragung der Umfangsspannungen verfügbare Kranzquerschnitt ($0 < \alpha < 1$). Wenn wir annehmen, daß längs des ganzen Umfanges die Tangentialspannungen nur durch den Querschnitt αf aufgenommen werden, so machen wir damit im allgemeinen einen Fehler, der auf der sicheren Seite liegt.

Es sei z die Gesamtzahl der auf dem Kranz befestigten Schaufeln, f_N der Querschnitt des Nabenprofils der Schaufel und σ_z die dort auftretende Fliehkraftspannung (gegebenenfalls der Mittelwert, wenn mehrere Schaufelreihen mit verschiedenen σ_z auf dem Kranz

angeordnet sind). Dann ist die Summe der Schaufelfliehkkräfte

$$Z_s = z f_N \sigma_z. \quad 17.2(1)$$

Auf einen Kranzausschnitt, dem ein Zentriwinkel $d\varphi$ entspricht (Abb. 17.2.1), entfällt also der Schaufelzug

$$dZ_s = z f_N \sigma_z \frac{d\varphi}{2\pi}. \quad 17.2(2)$$

Hier ist vorausgesetzt, daß die Schaufelkräfte hinreichend genau als gleichmäßig längs des Umfanges verteilt gedacht werden dürfen. Bei den stets großen Schaufelzahlen der Laufräder thermischer Turbomaschinen ist dies zulässig.

Die Fliehkraft des Kranzstückes selbst ist in Analogie zu Gl. 17.1(1)

$$dZ_k = f_Q (r_k \omega)^2 d\varphi = f_Q u_k^2 d\varphi, \quad 17.2(3)$$

wo r_k bzw. u_k der Radius bzw. die Umfangsgeschwindigkeit im Schwerpunkt des Kranzquerschnittes sind.

Die Scheibe übt auf das Kranzstück eine nach innen gerichtete Kraft

$$dS = y_a \sigma_{ra} r_{ik} d\varphi \quad 17.2(4)$$

aus, wo r_{ik} der Innenradius des Kranzes (beim Übergang in die Scheibe) ist. Ferner ist y_a die Dicke der Scheibe an ihrem Außenrand und σ_{ra} die Radialspannung in der Scheibe an derselben Stelle. Wegen der Bezeichnungen beachte man, daß stets der Innenradius r_{ik} des Kranzes zugleich den Außenrand der Scheibe kennzeichnet.

Schließlich sind die Umfangskräfte in den gedachten Schnittflächen, die das Kranzelement begrenzen, gleich $\bar{\sigma}_k \alpha f$, wo $\bar{\sigma}_k$ die mittlere Umfangsspannung im Kranz ist. Daraus ergibt sich eine radial nach innen gerichtete Kraft vom Betrag

$$\bar{\sigma}_k \alpha f d\varphi.$$

Somit lautet schließlich die Gleichgewichtsbedingung am Kranzelement

$$\bar{\sigma}_k \alpha f d\varphi + dS = dZ_s + dZ_k \quad 17.2(5)$$

oder mit Gl. 17.2(2) bis (4)

$$\bar{\sigma}_k \alpha f + y_a \sigma_{ra} r_{ik} = \frac{z f_N \sigma_z}{2\pi} + f_Q u_k^2, \quad 17.2(6)$$

woraus

$$\bar{\sigma}_k = \frac{\frac{z}{2\pi} f_N \sigma_z + f_Q u_k^2 - r_{ik} y_a \sigma_{ra}}{\alpha f}. \quad 17.2(7)$$

In Analogie zu Gl. 17.1(4) können wir wiederum für die Spannung am Innenrad des Kranzes setzen $\sigma_{ik} \approx (r_k/r_{ik}) \bar{\sigma}_k$, somit also

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{r}{r_{ik}} \right) \frac{\frac{z}{2\pi} f_N \sigma_z + f_Q u_k^2 - r_{ik} y_a \sigma_{ra}}{\alpha f}. \quad 17.2(8)$$

Der Korrekturfaktor r_k/r_{ik} ist allerdings nur bei eindimensionalem Spannungszustand streng richtig, doch ist die Korrektur ohnehin klein, so daß sie im Rahmen der hier durchgeführten vereinfachten Betrachtung genügt.

Für die Radialverschiebung (Ausweitung) v des Ringes gilt

$$\frac{v}{r_k} = \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_k - \nu \bar{\sigma}_{rk}) + \beta \bar{T}_k. \quad 17.2(9)$$

Hier ist nun bereits zweidimensionaler Spannungszustand vorausgesetzt, da der Mittelwert $\bar{\sigma}_{rk}$ der Radialspannung im Kranz im allgemeinen gegen $\bar{\sigma}_k$ nicht vernachlässigbar sein wird. Das Glied $\nu\bar{\sigma}_{rk}$ bleibt allerdings verhältnismäßig klein, weil $\nu = 0,3$, so daß ein grober Näherungswert genügt. Weiter ist in dieser Gleichung sogleich die Wärme-dehnung berücksichtigt. Es ist \bar{T}_k die mittlere Übertemperatur des Kranzes, β die lineare Wärmeausdehnungszahl. Abb. 17.2.2 zeigt den Temperaturverlauf und die Temperatur \bar{T}_k .

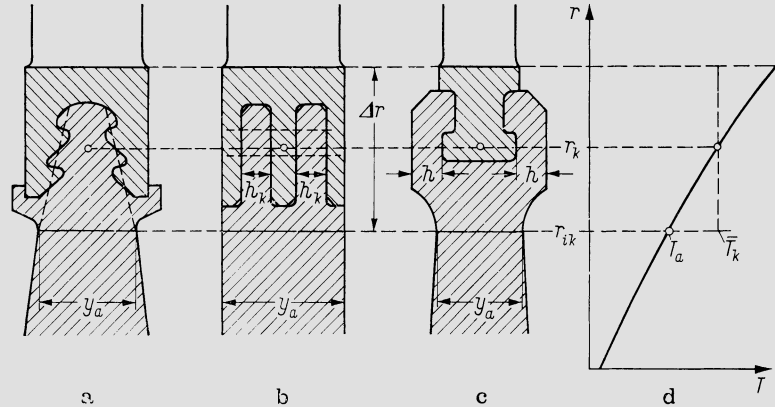


Abb. 17.2.2. Beispiele von Radkränzen. a) Anordnung mit reitender Schaufel; b) Anordnung mit Steckfuß; c) Anordnung mit Hammerkopfbefestigung; d) Temperaturverteilung

Aus 17.2(9) folgt sogleich

$$\frac{v_i}{r_{ik}} = \frac{r_k}{r_{ik}} \left[\frac{1}{E} (\bar{\sigma}_k - \nu\bar{\sigma}_{rk}) \right] + \beta\bar{T}_k = \frac{1}{E} \left[\sigma_{ik} - \frac{r_k}{r_{ik}} \nu\bar{\sigma}_{rk} \right] + \beta\bar{T}_k. \quad 17.2(10)$$

Nun ist r_{ik} zugleich der Radius am Außenrand der Scheibe. Wenn σ_{ra} , $\sigma_{\theta a}$, T_a Radialspannung, Tangentialspannung und Temperatur am Scheibenaußenrand sind, gilt dort

$$\frac{v_i}{r_{ik}} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta a} - \nu\sigma_{ra}) + \beta T_a. \quad 17.2(11)$$

Die Gleichsetzung der Ausdrücke 17.2(10) und (11) ergibt

$$\frac{1}{E} (\sigma_{\theta a} - \nu\sigma_{ra}) + \beta T_a = \frac{1}{E} \left[\sigma_{ik} - \frac{r_k}{r_{ik}} \nu\bar{\sigma}_{rk} \right] + \beta\bar{T}_k. \quad 17.2(12)$$

In dieser Gleichung ist $\bar{\sigma}_{rk}$ eine verhältnismäßig unsichere Größe, deren Einfluß allerdings wie schon bemerkt, gering ist. Sie ist sicher proportional σ_{ra} , weshalb gesetzt werde

$$\frac{r_k}{r_{ik}} \bar{\sigma}_{rk} = K\sigma_{ra}. \quad 17.2(13)$$

Den Faktor K gewinnt man aus dem Verhältnis der Querschnitte, die Radialkräfte übertragen, einerseits im Kranz, andererseits am Außenrand der Scheibe. So wäre etwa bei der Anordnung nach Abb. 17.2.2a $K \approx 1$. Beim Steckfuß nach Abb. 17.2.2b kann etwa gesetzt werden

$$K \approx \frac{y_a}{\Sigma h_k}, \quad 17.2(14)$$

wobei Σh_k die Summe der Breiten der Tragkämme ist.

Am unübersichtlichsten werden die Verhältnisse bei solchen Formen wie Abb. 17.2.2c. Würde man nur die Querschnitte h einsetzen, so würde $\bar{\sigma}_{rk}$ sicher überschätzt. Einen einigermaßen repräsentativen Mittelwert erhält man etwa, wenn man den wirksamen

Kranzquerschnitt αf durch die Radialerstreckung Δr des Kranzes dividiert. Das führt auf

$$K \approx \frac{y_a \Delta r}{\alpha f}. \quad 17.2(15)$$

Wenn man nun Gl. 17.2(13) in 17.2(12) einsetzt, σ_{ik} durch 17.2(8) ausdrückt und ordnet, erhält man

$$\left| \sigma_{\theta a} = \left(\frac{r_k}{r_{ik}} \right) \frac{\frac{z}{2\pi} f_N \sigma_z + f \varrho u_k^2}{\alpha f} + E\beta [\bar{T}_k - T_a] - \left[\frac{r_{ik} y_a}{\alpha f} + \nu (K - 1) \right] \sigma_{ra}. \quad 17.2(16) \right.$$

Für β ist hier der Mittelwert zwischen den Temperaturen T_a und \bar{T}_k einzusetzen. Diese Gleichung, welche die Form

$$\sigma_{\theta a} = A + B\sigma_{ra} \quad 17.2(16')$$

hat, stellt den Anschluß zwischen Kranz und Scheibe her und wird daher als *Anschlußgleichung* bezeichnet. Sie tritt bei der Spannungsberechnung in der Scheibe als *Grenzbedingung am Außenrand* auf, da in ihr A und B bekannte Größen sind. Erst wenn die Spannungsverteilung in der Scheibe berechnet, mithin σ_{ra} bekannt ist, liefert Gl. 17.2(8) die Kranzspannung.

Bei Konstruktionen mit axial eingeschobenen Schaufelfüßen (Abb. 17.2.3), kann der Kranz — wenn man diese Benennung noch gebrauchen will — keine Umfangsspannungen mehr übertragen. Es ist also $\alpha = 0$, und Gl. 17.2(6) führt unmittelbar auf

$$\sigma_{ra} = \frac{\frac{z}{2\pi} f_N \sigma_z + f \varrho u_k^2}{r_{ik} y_a}. \quad 17.2(17)$$

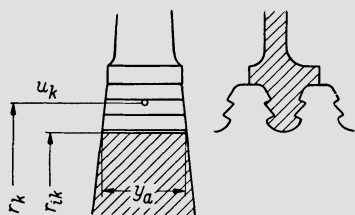


Abb. 17.2.3. Kranzpartie bei axial eingeschobenen Schaufelfüßen

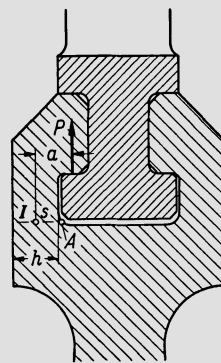


Abb. 17.2.4. Zur Beanspruchung von Radkränzen

Die Berechnung eines Kranzes verlangt im allgemeinen auch die Kontrolle weiterer Spannungen, die mit der Art der Schaufelbefestigung zusammenhängen. So muß bei der Anordnung nach Abb. 17.2.4 die Beanspruchung des Querschnittes I überprüft werden. Ist P die Flankenkraft je Längeneinheit Umfang, r der Radius, in dem P angreift, r_I derjenige des Querschnittes I , f' der außerhalb r_I liegende Anteil des Kranzquerschnittes (einseitig), u die Umfangsgeschwindigkeit im Schwerpunkt dieses Kranzteiles und σ_I die mittlere Radialspannung im Querschnitt I , so lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$Pr d\varphi + \varrho f' u^2 d\varphi = \bar{\sigma}_k f' d\varphi + \sigma_I h r_I d\varphi.$$

Hier kann im allgemeinen der Unterschied zwischen r und r_I vernachlässigt werden, worauf diese Gleichung auf die folgende Form führt:

$$\sigma_I \approx \frac{P}{h} + \frac{f'}{hr_I} (\rho u^2 - \bar{\sigma}_k). \tag{17.2(18)}$$

Zu dieser Spannung tritt noch eine Biegespannung hinzu, die im Punkt A ihr Maximum hat und durch

$$\sigma_b = \frac{Pa}{h^2/6} \tag{17.2(19)}$$

gegeben ist. Der Beitrag des Kranzstückes selber zur Biegespannung ist hier vernachlässigt, weil der Hebelarm dieser Kraft viel kleiner ist und auch das zweite Glied in 17.2(18) üblicherweise nur ein Bruchteil des ersten ist. Wenn man noch den im Punkt A gültigen Formfaktor α einführt, wird man schließlich auf die Spannungsspitze

$$\sigma_{\max} \approx \alpha \left[\frac{P}{h} \left(1 + \frac{6a}{h} \right) + \frac{f'}{hr_I} (\rho \bar{u}^2 - \bar{\sigma}_k) \right] \tag{17.2(20)}$$

geführt. Über α gibt Abb. 16.9.3 einen Anhaltspunkt. Er liegt in der Größenordnung 2 bis 3 und könnte durch Vergrößerung des Ausrundungsradius stark vermindert werden, was jedoch weiter außen beim Übergang zur Tragflanke nicht möglich ist. Wird die Spannung zu groß, so hilft eine Vergrößerung von h , was aber leicht auf undiskutable Abmessungen führt. In diesem Falle muß auf die Ausführungsform nach Abb. 16.8.4b ge Griffen werden, durch die das Biegemoment vermieden werden kann.

Analoge Untersuchungen sind auch nötig, wo die Schaufelbefestigung durch Steckfüße erfolgt. Dort weisen die Tragstege an der Scheibe Löcher auf, an deren Rändern Spannungsspitzen auftreten, die ein Mehrfaches der Mittelspannung sind, vgl. etwa [1, 2]. Sobald aber die Spannungen sehr hoch werden, so, daß ihre Vorausrechnung sehr genau sein muß, wird man die Spannungsverteilungen in Radkränzen heute nach dem Verfahren der finiten Elemente berechnen.

17.3 Differentialgleichungen der rotierenden Scheibe bei elastischer Verformung

Wir betrachten eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Scheibe, deren Dicke y im Verhältnis zu den übrigen Abmessungen überall so gering sei, daß die Normalspannungen in axialer Richtung vernachlässigt werden dürfen. Ein Raumelement zwischen r und $r + dr$ (Abb. 17.3.1), das sich über einen Zentriwinkel $d\varphi$ erstreckt, hat die Masse

$$dm = \rho(r d\varphi) y dr$$

und erfährt daher die Fliehkraft

$$dZ = \rho(r\omega)^2 y dr d\varphi. \tag{17.3(1)}$$

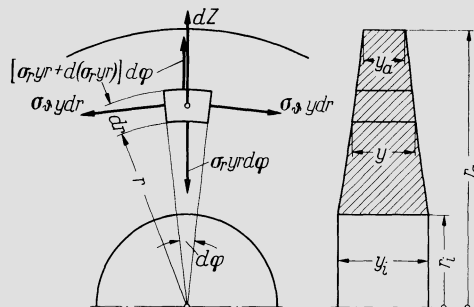


Abb. 17.3.1. Gleichgewichtsbetrachtung am Element einer Scheibe

Mit den übrigen in Abb. 17.3.1 eingetragenen Kräften erhält man daher die Gleichgewichtsbedingung (im d'Alembertschen Sinne)

$$\varrho(r\omega)^2 y dr d\varphi + d(\sigma_r y r) d\varphi = \sigma_\vartheta y dr d\varphi$$

oder

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dr} (\sigma_r y r) - \sigma_\vartheta + \varrho(r\omega)^2 = 0. \quad 17.3(2)$$

Dies kann durch weitere Ausführung der Differentiation auch in die Form

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \frac{r}{y} \frac{dy}{dr} + \sigma_r - \sigma_\vartheta + \varrho(r\omega)^2 = 0 \quad 17.3(3)$$

gebracht werden. Diese Gleichung enthält noch keine besondere Voraussetzung über den Zusammenhang zwischen Spannungszustand und Verformung. Sie ist daher völlig allgemein und gilt auch bei nichtelastischem Verhalten der Scheibe.

Wir führen nun das Hookesche Gesetz ein, womit nicht nur elastisches Verhalten, sondern darüber hinaus ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Verformung angenommen ist. — Eine Behandlung des nichtlinearen elastischen Verhaltens der Scheibe findet sich bei *Kauderer* [3]; seine Untersuchungen zeigen, daß sich die Abweichungen gegenüber dem linearen Verformungsgesetz in engen Grenzen halten. — Für den ebenen Spannungszustand lauten somit die Verformungsgleichungen mit Einbezug einer beliebigen Temperaturverteilung $T(r)$, wenn v die örtliche Radialverschiebung ist

$$\varepsilon_r = \frac{dv}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta) + \beta T, \quad 17.3(4)$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{v}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r) + \beta T. \quad 17.3(5)$$

ε_r und ε_ϑ sind die relativen Dehnungen in radialer und tangentialer Richtung. Indem hier ε_r und ε_ϑ durch die Radialverschiebung v ausgedrückt sind, ist die kinematische Bedingung (die Forderung, daß der Zusammenhang der Volumenelemente erhalten bleibe) von vornherein erfüllt. Durch Differentiation von Gl. 17.3(5) läßt sich auch gewinnen

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{E} (\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r) + \beta r T \right] = r \left[\frac{1}{E} \left(\frac{d\sigma_\vartheta}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right) + \beta \frac{dT}{dr} \right] + \frac{1}{E} (\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r) + \beta T. \quad 17.3(6)$$

Die Gleichsetzung dieses Ausdruckes mit dem aus Gl. 17.3(4) gegebenen führt auf

$$\frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta) = \frac{r}{E} \left(\frac{d\sigma_\vartheta}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right) + \beta r \frac{dT}{dr} + \frac{1}{E} (\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r)$$

oder

$$r \left(\frac{d\sigma_\vartheta}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right) + (1 + \nu) (\sigma_\vartheta - \sigma_r) + E\beta r \frac{dT}{dr} = 0. \quad 17.3(7)$$

Wenn die Gestalt der Scheibe (d.h. die Funktion $y(r)$) und die Temperaturverteilung (d.h. $T(r)$) gegeben sind, ebenso die Stoffwerte und die Winkelgeschwindigkeit, stellen die Gln. 17.3(3) und (7) ein System von zwei linearen Differentialgleichungen für die beiden Funktionen $\sigma_r(r)$ und $\sigma_\vartheta(r)$ dar. Ihnen sind beizufügen die beiden Grenzbedingungen für den Innenradius r_i und den Außenradius r_a , womit das Problem mathematisch vollständig formuliert ist und nach klassischen Verfahren gelöst werden kann. Bei der Scheibe ohne zentrales Loch tritt an die Stelle der Grenzbedingung am Innenrand die Bedingung $\sigma_\vartheta = \sigma_r$ in $r = 0$, da im Zentrum zwischen tangentialer und radialer Richtung nicht unterschieden werden kann.

Die Lösung erfolgt oft zweckmäßig in der Weise, daß zunächst aus dem System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung gewonnen wird. Dies erreicht man, indem man Gl. 17.3(3) nach σ_ϑ auflöst und den so erhaltenen Ausdruck in Gl. 17.3(7) einsetzt. Wenn wir die Ableitung nach r in üblicher Weise durch einen Akzent andeuten, so wird also

$$\sigma_\vartheta = r\sigma'_r + \left(1 + \frac{r}{y}y'\right)\sigma_r + \varrho(r\omega)^2, \quad 17.3(8)$$

worauf man durch Einsetzen dieser Beziehung in Gl. 17.3(7) die Gleichung

$$\sigma'_r + \left(\frac{3}{r} + \frac{y'}{y}\right)\sigma'_r + \left(\frac{(2+\nu)y'}{ry} + \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2}\right)\sigma_r + (3+\nu)\varrho\omega^2 + E\beta\frac{T'}{r} = 0 \quad 17.3(9)$$

erhält. Nach Lösung der Gl. 17.3(9) kann durch Einführung des so gefundenen Verlaufes $\sigma_r(r)$ in Gl. 17.3(8) auch $\sigma_\vartheta(r)$ gefunden werden.

Der lineare Charakter aller dieser Differentialgleichungen bringt es mit sich, daß man den Spannungszustand stets auffassen kann als Überlagerung eines Spannungszustandes, der von der Rotation allein herrührt und eines weiteren, der nur durch die Temperaturverteilung bedingt ist. Es seien etwa $\sigma_{r\omega}$ und $\sigma_{\vartheta\omega}$ die von der Drehung herrührenden Spannungen und σ_{rT} und $\sigma_{\vartheta T}$ die reinen Wärmespannungen. Dann lauten die Gln. 17.3(3) und (7) für die ersteren

$$r\sigma'_{r\omega} + \left(r\frac{y'}{y} + 1\right)\sigma_{r\omega} - \sigma_{\vartheta\omega} + \varrho(r\omega)^2 = 0, \quad 17.3(10)$$

$$r(\sigma'_{\vartheta\omega} - \nu\sigma'_{r\omega}) + (1+\nu)(\sigma_{\vartheta\omega} - \sigma_{r\omega}) = 0, \quad 17.3(11)$$

während sie für die Wärmespannungen die Form

$$r\sigma'_{rT} + \left(r\frac{y'}{y} + 1\right)\sigma_{rT} - \sigma_{\vartheta T} = 0, \quad 17.3(12)$$

$$r(\sigma'_{\vartheta T} - \nu\sigma'_{rT}) + (1+\nu)(\sigma_{\vartheta T} - \sigma_{rT}) + E\beta rT' = 0 \quad 17.3(13)$$

annehmen. Addiert man einerseits die Gln. 17.3(10) und (12), andererseits die Gln. 17.3(11) und (13), so entstehen zwei Differentialgleichungen für die Funktionen $\sigma_r = \sigma_{r\omega} + \sigma_{rT}$ und $\sigma_\vartheta = \sigma_{\vartheta\omega} + \sigma_{\vartheta T}$, die mit den Gln. 17.3(3) und (7) identisch sind, womit die Gültigkeit des Superpositionsprinzips bewiesen ist.

Diese Gleichungen zeigen auch den Ähnlichkeitstheoretischen Charakter der Gesetze der Spannungen in Scheiben. In 17.3(10) und (11) lassen sich alle Spannungen ersetzen durch Werte $\sigma^* = \sigma/\varrho(r_a\omega)^2$ und die Längen dimensionslos machen durch Division durch r_a . Wenn man alsdann mit dem Akzent Ableitungen nach r/r_a bezeichnet, werden die Gleichungen dimensionslos. Das zeigt, daß geometrisch ähnliche Anordnungen bei gleichem $\varrho(r_a\omega)^2$ auf gleiche Spannungsverteilung führen. Bei Wärmespannungen müßte man $\sigma^* = \sigma/E\beta \Delta T$ als dimensionslose Spannungsvariable einführen, wo ΔT eine charakteristische Temperaturdifferenz ist — z. B. die größte im Körper auftretende. Mit den analogen Schritten wie oben werden dann die Gln. 17.3(12) und (13) dimensionslos.

17.4 Scheibe gleicher Festigkeit

Anstatt sich die Form der Scheibe vorzuschreiben und den Verlauf der Spannungen zu berechnen, kann man auch umgekehrt von einer Vorschrift über die Spannungsverteilung ausgehen und daraus auf die Gestalt der Scheibe zurückschließen. Eine Lösung dieser Art ist schon seit den Anfängen des Dampfturbinenbaues bekannt, da sie bereits von

de Laval angewandt wurde. Es handelt sich um die sog. Scheibe gleicher Festigkeit, d. h. eine Scheibe, bei der in jedem Punkt Tangential- und Radialspannung einander gleich und konstant sind über die ganze Scheibe. — Dabei wird von Wärmespannungen von vornherein abgesehen. — Bei dieser Scheibenform entsteht offenbar die bestmögliche Ausnutzung der Festigkeitseigenschaften des Werkstoffes und somit auch die kleinstmögliche Scheibenmasse.

Mit der Vorschrift

$$\sigma_\theta = \sigma_r = \sigma = \text{const} \quad 17.4(1)$$

ist offensichtlich die Verformungsgleichung 17.3(7) identisch erfüllt, wenn das Temperaturglied weggelassen wird. Von Gl. 17.3(3) bleibt übrig

$$\sigma \frac{r}{y} \frac{dy}{dr} + \rho(r\omega)^2 = 0, \quad 17.4(2)$$

folglich

$$\frac{dy}{y} + \frac{\rho\omega^2}{\sigma} r dr = 0$$

oder

$$y = y_0 \exp\left(-\frac{\rho(r\omega)^2}{2\sigma}\right), \quad 17.4(3)$$

wo y_0 die Scheibendicke im Zentrum ist. Abb. 17.4.1 zeigt die Gestalt einer solchen Scheibe.

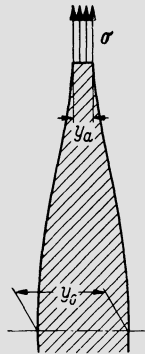


Abb. 17.4.1. Scheibe gleicher Festigkeit

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Kranz eine Scheibe gleicher Festigkeit mit vorgeschriebener Spannung σ aufzufinden, kann nun in folgender Weise gelöst werden. Ausgangspunkt ist die Anschlußgleichung 17.2(16). Mit $\sigma_{\theta a} = \sigma_{ra} = \sigma$ und ohne Temperaturglied lautet sie, nach y_a aufgelöst

$$y_a = \left(\frac{r_k}{r_{ik}}\right) \frac{(z/2\pi) f_N \sigma_z + f \rho u_k^2}{\sigma r_{ik}} - \frac{\alpha f \nu K}{r_{ik}}. \quad 17.4(4)$$

Damit ist die Dicke der Scheibe an ihrem Außenrand (beim Übergang in den Kranz) gefunden, und zwar für den Fall eines Kranzes, der Tangentialspannungen überträgt. Die größte Tangentialspannung im Kranz ist gegeben durch Gl. 17.2(8). Wenn y_a und r_a in Gl. 17.4(3) eingesetzt werden, wird daraus eine Gleichung für y_0 erhalten, die

$$y_0 = y_a \exp\left(\frac{\rho(r_a\omega)^2}{2\sigma}\right) \quad 17.4(5)$$

lautet. Somit ist die Gestalt der Scheibe völlig bestimmt, da jetzt y für jedes r nach Gl. 17.4(3) berechnet werden kann.

Wenn keine Tangentialkräfte im Kranz übertragen werden können, ist $\sigma_{ra} = \sigma$ in Gl. 17.2(17) einzusetzen, womit eine Gleichung für y_a entsteht, die an die Stelle von Gl. 17.4(4) tritt.

Biezeno und Grammel [4] haben gezeigt, wie man für einen beliebig vorgegebenen Verlauf der Radialspannung die zugehörige Scheibenform bestimmen kann. Im Rahmen der neueren Entwicklung hat aber diese Art der Problemstellung seine Bedeutung verloren.

17.5 Scheibe konstanter Dicke

Das direkte Problem der Berechnung des Spannungsverlaufes in einer Scheibe gegebener Geometrie ist in geschlossener Form nur lösbar für bestimmte Scheiben mit besonders einfachem Dickenverlauf. Der einfachste Fall ist die Scheibe konstanter Dicke, für die sich das System der Differentialgleichungen 17.3(3) und (7) ohne Temperaturglied schreibt

$$r\sigma'_{r\omega} + \sigma_{r\omega} - \sigma_{\vartheta\omega} + \varrho(r\omega)^2 = 0, \quad 17.5(1)$$

$$r(\sigma'_{\vartheta\omega} - \nu\sigma'_{r\omega}) + (1 + \nu)(\sigma_{\vartheta\omega} - \sigma_{r\omega}) = 0. \quad 17.5(2)$$

Hier deutet wiederum der Index ω an, daß die Spannungen nur vom Fliehkrafteinfluß herrühren, während der Akzent die Ableitung nach r angibt. Es ist leicht zu übersehen, daß die Lösung dieses Gleichungssystems in allgemeinsten Form durch den Ansatz

$$\sigma_{r\omega} = a + \frac{b}{r^2} + c(r\omega)^2, \quad 17.5(3)$$

$$\sigma_{\vartheta\omega} = A + \frac{B}{r^2} + C(r\omega)^2 \quad 17.5(4)$$

gelingt, und zwar ergibt sich aus der Identifikation der Koeffizienten gleicher Potenzen

$$\sigma_{r\omega} = a + \frac{b}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \varrho(r\omega)^2, \quad 17.5(5)$$

$$\sigma_{\vartheta\omega} = a - \frac{b}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{8} \varrho(r\omega)^2. \quad 17.5(6)$$

Die a und b sind hierin willkürlich und ergeben sich aus den zwei Grenzbedingungen des jeweiligen Falles.

Wenn wir den Fall der Scheibe mit zentralem Loch betrachten, können wir z. B. in Gl. 17.5(5) das eine Mal r_i einsetzen und erhalten links $\sigma_{r\omega i}$, das andere Mal r_a und erhalten links $\sigma_{r\omega a}$. Damit liegen aber zwei Gleichungen vor, die in allgemeiner Form die a und b durch $\sigma_{r\omega i}$ und $\sigma_{r\omega a}$ auszudrücken gestatten. Dies erlaubt die nachfolgende Darstellung der Gln. 17.5(5) und (6). Es sei

$$x \equiv \frac{r}{r_a}, \quad X \equiv \frac{r_i}{r_a}, \quad 17.5(7)$$

(vgl. Abb. 17.5.1). Mit $\nu = 0,3$ ist ferner

$$\frac{3 + \nu}{8} = 0,412, \quad \frac{1 + 3\nu}{8} = 0,237. \quad 17.5(8)$$

Dann gilt

$$\sigma_{r\omega} = \sigma_{r\omega a} - \frac{X^2}{x^2} \left(\frac{1 - x^2}{1 - X^2} \right) (\sigma_{r\omega a} - \sigma_{r\omega i}) + 0,412 (1 - x^2) \left(1 - \frac{X^2}{x^2} \right) \varrho u_a^2. \quad 17.5(9)$$

Das Maximum von σ_r tritt auf in

$$x_m = \left(1 + \frac{\sigma_{r\omega a} - \sigma_{r\omega i}}{0,412 \varrho u_a^2 (1 - X^2)} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{X}. \quad 17.5(10)$$

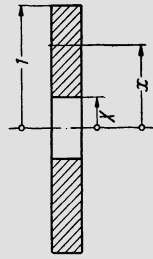


Abb. 17.5.1. Scheibe konstanter Dicke

Für die Tangentialspannung wird erhalten

$$\sigma_{\vartheta\omega} = \sigma_{r\omega a} + \frac{X^2}{x^2} \left(\frac{1+x^2}{1-X^2} \right) (\sigma_{r\omega a} - \sigma_{r\omega i}) + \left[0,412 \left(1 + X^2 + \frac{X^2}{x^2} \right) - 0,237x^2 \right] \rho u_a^2, \quad 17.5(11)$$

wobei in $x = X$ der Höchstwert auftritt (Lochrandspannung). Die durch die Fliehkraftspannungen bedingten radialen Ausweitungen $v_{\omega i}$ und $v_{\omega a}$ am Innen- und Außenradius sind

$$\frac{v_{\omega i}}{r_i} = \frac{\sigma_{\vartheta\omega i} - \nu\sigma_{r\omega i}}{E}, \quad \frac{v_{\omega a}}{r_a} = \frac{\sigma_{\vartheta\omega a} - \nu\sigma_{r\omega a}}{E}. \quad 17.5(12)$$

Nun sei ein gegebener geschauflerter Kranz zu tragen durch eine Scheibe mit vorgeschriebenen Werten der Dicke y , des Radienverhältnisses $X = r_i/r_a$ und der in r_i auftretenden Radialspannung $\sigma_{r\omega i}$ (z.B. $\sigma_{r\omega i} = 0$, wenn es sich um ein freies Loch handelt oder die vorzusehende Schrumpfspannung, wenn die Scheibe auf eine Welle aufgeschraubt wird). Der Lösungsweg besteht darin, daß zunächst die Anschlußgleichung 17.2(16) formuliert wird, womit eine lineare Verknüpfung zwischen $\sigma_{\vartheta\omega a}$ und $\sigma_{r\omega a}$ gegeben ist. Als zweites wird Gl. 17.5(11) für $r = r_a$, d.h. $x = 1$ angeschrieben, womit eine zweite Relation zwischen $\sigma_{\vartheta\omega a}$ und $\sigma_{r\omega a}$ gewonnen ist. Somit sind diese beiden Spannungen bestimmbar. Sind sie bekannt, so sind aus Gl. 17.5(9) und (11) $\sigma_{r\omega}$ und $\sigma_{\vartheta\omega}$ in jedem Punkt der Scheibe berechenbar.

Für die ungelochte Scheibe lassen die Gln. 17.5(5) und (6) sogleich erkennen, daß $b = 0$ sein muß, da ja sonst im Zentrum eine unendliche Spannung entstünde. Mit $b = 0$ wird aber im Zentrum $\sigma_{r\omega} = \sigma_{\vartheta\omega} = a$, wie dies zu fordern ist. Die Konstante a können wir z.B. durch $\sigma_{r\omega a}$ ausdrücken, indem wir Gl. 17.5(5) für $r = r_a$ anschreiben. Damit erhält man schließlich

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\omega} &= \sigma_{r\omega a} + 0,412 (1 - x^2) \rho u_a^2, & 17.5(13) \\ \sigma_{\vartheta\omega} &= \sigma_{r\omega a} + (0,412 - 0,237x^2) \rho u_a^2. & 17.5(14) \end{aligned} \right\}$$

Den größten Wert erreichen Tangential- und Radialspannung zugleich im Zentrum. Am Rande wird nach Gl. 17.5(14)

$$\sigma_{\vartheta\omega a} = \sigma_{r\omega a} + 0,175 \rho u_a^2. \quad 17.5(15)$$

Diese Beziehung wird zweckmäßig herangezogen bei der Berechnung des Spannungsverlaufes in einer ungelochten Scheibe, die einen Kranz trägt. Sie bildet mit der Anschlußgleichung 17.2(16) zusammen ein System von zwei Bestimmungsgleichungen für $\sigma_{\vartheta\omega a}$ und $\sigma_{r\omega a}$. Sobald diese beiden Spannungen gefunden sind, geben Gln. 17.5(13) und (14) den Spannungszustand in jedem Radius.

Man beachte, daß die Lösung für die Scheibe mit Loch nicht in diejenige der ungelochten Scheibe übergeht, wenn r_i nach Null strebt, denn am Rande eines noch so kleinen Loches verschwindet die Radialspannung (keine Schrumpfspannung vorausgesetzt), während die Tangentialspannung eine Spitze aufweist.

Zur Berechnung der Wärmespannungen in der Scheibe konstanter Dicke geht man am besten von der Differentialgleichung 17.3(9) aus, die ohne Fliehkraft und mit $y' = y'' = 0$ sich zur Form

$$\sigma_{rT}'' + \frac{3}{r} \sigma_{rT}' + E\beta \frac{T'}{r} = 0 \quad 17.5(16)$$

vereinfacht. Diese Gleichung erlaubt auch die Darstellung

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{d\sigma_{rT}}{dr} \right) = - \frac{E\beta}{r} \frac{dT}{dr}, \quad 17.5(17)$$

woraus

$$r^3 \frac{d\sigma_{rT}}{dr} = - E\beta \int r^2 \frac{dT}{dr} dr + C_1, \quad 17.5(18)$$

$$\sigma_{rT} = - \int \left[\frac{E\beta}{r^3} \int r^2 \frac{dT}{dr} dr - \frac{C_1}{r^3} \right] dr + C_2. \quad 17.5(19)$$

Für die Scheibe mit zentralem Loch stellt sich die Lösung des Problems folgendermaßen dar. Wir können setzen $\sigma_{rT_i} = 0$, denn wenn eine Schrumpfspannung vorhanden ist, so ist diese mit $\sigma_{r\omega_i}$ voll in Rechnung gesetzt. Da wir aber Gl. 17.5(19) in die Form

$$\sigma_{rT} = - \int_{r_i}^r \left[\frac{E\beta}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr + \frac{C_1}{2} \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r^2} \right) + C_2 \quad 17.5(20)$$

bringen können und hierbei die Integrale in $r = r_i$ verschwinden, folgt $C_2 = 0$. Die Spannung σ_{rT_a} wird hingegen im allgemeinen einen von Null verschiedenen Wert besitzen, d. h. es ist

$$\sigma_{rT_a} = - \int_{r_i}^{r_a} \left[\frac{E\beta}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr + \frac{C_1}{2} \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_a^2} \right) \quad 17.5(21)$$

oder

$$C_1 = \frac{2r_i^2}{1 - X^2} \left[\sigma_{rT_a} + E\beta \int_{r_i}^{r_a} \left[\frac{1}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr \right]. \quad 17.5(22)$$

Wenn man dies in Gl. 17.5(20) einsetzt, sogleich noch die Ableitung σ_{rT}' bildet und Gl. 17.3(8) beifügt (formuliert für $y' = 0$, $\omega = 0$), erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{rT} &= - \int_{r_i}^r \left[\frac{E\beta}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}{1 - X^2} \left\{ \sigma_{rT_a} + \int_{r_i}^{r_a} \left[\frac{E\beta}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr \right\}, \end{aligned} \right. \quad 17.5(23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{rT}' &= - \frac{E\beta}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr + \frac{2r_i^2}{r^3(1 - X^2)} \left\{ \sigma_{rT_a} + \int_{r_i}^{r_a} \left[\frac{E\beta}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr \right\}, \end{aligned} \right. \quad 17.5(24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\vartheta T} &= r\sigma_{rT}' + \sigma_{rT}. \end{aligned} \right. \quad 17.5(25)$$

Diesen ist noch die Anschlußgleichung 17.2(16) beizufügen, welche nur für die Wärmespannungen allein formuliert, die Form

$$\sigma_{\vartheta T_a} = E\beta \left[\frac{r_k}{r_{ik}} \bar{T}_k - T_a \right] - \left[\frac{r_k y}{\alpha f} \nu(K - 1) \right] \sigma_{rT_a} \quad 17.5(26)$$

annimmt. Mit den Gln. 17.5(23)–(26) ist der Spannungsverlauf vollständig bestimmt, denn man kann aus dem gegebenen $T(r)$ mit 17.5(23) und (24) zunächst für $r = r_a$ Ausdrücke berechnen, in denen σ_{rT_a} noch als Unbekannte auftritt, diese Ausdrücke in 17.5(25)

einsetzen und erhält so eine Gleichung der Form $\sigma_{\vartheta Ta} = a + b\sigma_{rTa}$. Zusammen mit 17.5(26) sind daraus $\sigma_{\vartheta Ta}$ und σ_{rTa} berechenbar, womit nun σ_{rT} und $\sigma_{\vartheta T}$ vollständig bekannt sind.

Im Falle der *ungelochten Scheibe* führt Gl. 17.5(19) mit der Bedingung endlicher Spannung im Zentrum auf $C_1 = 0$, während C_2 dann von Null verschieden und gleich der Spannung σ_{T0} im Zentrum ist. Die Lösung lautet dann

$$\sigma_{rT} = \sigma_{rT0} - E\beta \int_0^r \frac{1}{r^3} \left[\int_0^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr, \quad \sigma'_{rT} = -\frac{E\beta}{r^3} \int_0^r r^2 \frac{dT}{dr} dr, \quad 17.5(27)$$

während 17.5(25) und (26) unverändert bleiben. Wenn diese Gleichungen für $r = r_a$ ausgerechnet und noch in 17.5(25) eingesetzt, erhält man Ausdrücke für σ_{rTa} und $\sigma_{\vartheta Ta}$, die noch σ_{rT0} als Unbekannte enthalten. Setzt man sie weiter in 17.5(26) ein, so entsteht eine Bestimmungsgleichung für σ_{rT0} , womit das Problem vollständig gelöst ist.

Bei der Behandlung der Scheibe konstanter Dicke wurde stets der Kranz vorausgesetzt, der Umfangskräfte überträgt. Bei axial eingeschobenen Schaufelfüßen vereinfacht sich das Vorgehen, denn bei der Berechnung der Fliehkraftspannungen liefert Gl. 17.2(17) unmittelbar $\sigma_{r\omega a}$, während bei der Berechnung der Wärmespannungen $\sigma_{rTa} = 0$ zu setzen ist.

17.6 Scheibe hyperbolischen Profils

Durch den Ansatz

$$y = y_a \left(\frac{r_a}{r} \right)^n, \quad 17.6(1)$$

wo n eine beliebige positive Zahl ist, wird eine Dickenverteilung beschrieben, die einer Hyperbel beliebiger Ordnung entspricht (vgl. Abb. 17.6.1). Scheibenformen, die wenigstens annähernd diesem Gesetz entsprechen, können konstruktiv sehr wohl benutzt werden. *Stodola* [5], auf den übrigens die Differentialgleichungen der rotierenden Scheibe zurückgehen, hat angegeben, wie die fliehkraftbedingten Spannungen in solchen Scheiben in geschlossener Form berechnet werden können, vgl. auch *Biezeno|Grammel* [4].

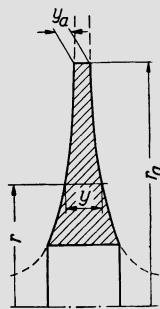


Abb. 17.6.1. Hyperbolische Scheibe

Die Differentialgleichungen 17.3(3) und (7) gehen in diesem Fall über in

$$r\sigma'_{r\omega} + (1 - n)\sigma_{r\omega} - \sigma_{\vartheta\omega} + \varrho(r\omega)^2 = 0, \quad 17.6(2)$$

$$r\sigma'_{\vartheta\omega} - nr\sigma'_{r\omega} + (1 + \nu)(\sigma_{\vartheta\omega} - \sigma_{r\omega}) = 0. \quad 17.6(3)$$

Mit $x = r/r_a$ und $X = r_i/r_a$ läßt sich die Lösung dieses Gleichungssystems in der Form

$$\sigma_{r\omega} = A_1 x^{p_1} + A_2 x^{p_2} - q_1 \varrho u_a^2 x^2, \quad 17.6(4)$$

$$\sigma_{\vartheta\omega} = (p_1 + 1 - n) A_1 x^{p_1} + (p_2 + 1 - n) A_2 x^{p_2} - q_2 \varrho u_a^2 x^2 \quad 17.6(5)$$

darstellen, wobei

$$p_{1,2} = \frac{n}{2} - 1 \mp \sqrt{1 + \nu n + \frac{n^2}{4}}, \quad 17.6(6)$$

$$q_1 = \frac{3 + \nu}{8 - (3 + \nu)n}, \quad q_2 = \frac{1 + 3\nu}{8 - (3 + \nu)n}, \quad 17.6(7)$$

$$A_1 = \frac{\sigma_{r\omega a} X^{p_2} - \sigma_{r\omega i} + q_1 \rho u_a^2 (X^{p_2} - X^2)}{X^{p_2} - X^{p_1}}, \quad 17.6(8)$$

$$A_2 = \frac{\sigma_{r\omega a} X^{p_1} - \sigma_{r\omega i} + q_1 \rho u_a^2 (X^{p_1} - X^2)}{X^{p_1} - X^{p_2}}. \quad 17.6(9)$$

Diese Lösung wird erhalten durch Einsetzen des entsprechenden Lösungsansatzes in die Differentialgleichungen 17.6(2) und (3) und Identifikation der Koeffizienten gleicher Potenzen. Indem Gl. 17.6(4) für den Innen- und Außenrand formuliert wird, lassen sich zudem A_1 und A_2 durch $\sigma_{r\omega a}$ und $\sigma_{\theta\omega i}$ ausdrücken, wie dies in Gl. 17.6(8) und (9) geschehen ist.

Das Vorgehen bei der Berechnung einer hyperbolischen Scheibe mit geschaukeltem Kranz ist nun folgendes. Gegeben sind die Daten von Kranz und Schaufelung, die Scheibendicke y_a und die Radialspannung $\sigma_{r\omega i}$ am Innenrand (Null oder Schrumpfspannung). Dann berechnet man vorerst A_1 und A_2 noch mit unbestimmt gelassenem $\sigma_{r\omega a}$, d.h. man erhält lineare Ausdrücke in $\sigma_{r\omega a}$ für diese beiden Koeffizienten. Gl. 17.6(5), für $r = r_a$ formuliert, liefert

$$\sigma_{\theta\omega a} = (p_1 + 1 - n) A_1 + (p_2 + 1 - n) A_2 - q_2 \rho u_a^2. \quad 17.6(10)$$

Drückt man hier noch $\sigma_{\theta\omega a}$ durch die Anschlußgleichung 17.2(16) aus, so entsteht eine lineare Bestimmungsgleichung für $\sigma_{r\omega a}$. Sobald der Wert dieser Spannung festliegt, sind auch A_1 und A_2 bekannt, womit nun Gln. 17.6(4) und (5) den Spannungszustand eindeutig beschreiben.

17.7 Scheibe beliebigen Profils

Zur Spannungsberechnung in beliebig gestalteten Scheiben sind im Laufe der Zeit Verfahren in größerer Zahl bekannt geworden. *Donath* [6] und *Grammel* [7] ersetzen die Scheibe durch eine Folge von Ringen konstanter Dicke. *Honegger* [8] hat als erster die Spannungsverteilung in kegligen Scheiben berechnet und *Keller, Salzmann, Kissel* und *Strub* [9–12] haben darauf basierend Methoden angegeben, die eine Berechnung beliebiger Scheiben durch Unterteilung in konische Ringe gestatten. *Manson* [13] gibt ein Differenzenverfahren an, vgl. auch *Löffler* [14], wo auch ein von *Jäger* vorgeschlagenes Matrizenverfahren angegeben ist. *Beglinger* [15] gibt eine sehr allgemeine Methode, die auch den Einfluß temperaturabhängiger Werkstoffeigenschaften zu berücksichtigen gestattet. Heute sind für die Praxis nur noch Differenzenmethoden bedeutsam, da solche Rechnungen mit Tischrechnern sehr rasch erledigt werden können.

Abb. 17.7.1 zeigt zwei Beispiele von Scheiben, a eine gelochte, b eine ungelochte. Zur Durchführung der Differenzenrechnung werden sie eingeteilt in eine hinreichende Zahl von Radienintervallen Δr . Die Berechnung der Ableitungen geschieht im Rahmen der Differenzenrechnung wie folgt. Es sei f eine Funktion des Radius r , die in den Radien r_{i-1} , r_i , r_{i+1} die Werte f_{i-1} , f_i , f_{i+1} annehme (Abb. 17.7.1c). Dann sind die Ableitungen df/dr und d^2f/dr^2 in r_i unter den üblichen Stetigkeitsvoraussetzungen

$$\frac{df}{dr} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta r}, \quad \frac{d^2f}{dr^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta r^2}. \quad 17.7(1)$$

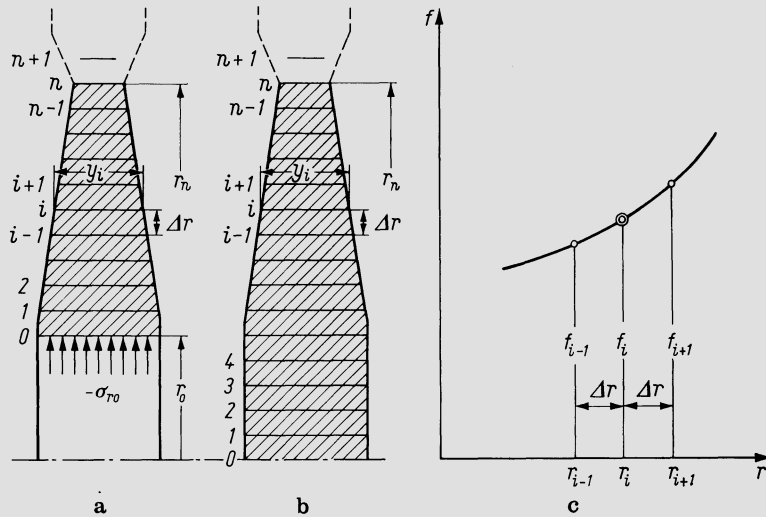


Abb. 17.7.1. Scheibe beliebigen Profils. a) Mit zentralem Loch; b) ohne zentrales Loch; c) Bestimmung der Ableitungen von $f(r)$

Hierbei sind Glieder höherer Ordnung vernachlässigt, was bei der Wahl eines hinreichend kleinen Δr zulässig ist.

Ausgangspunkt für die Differenzenrechnung sind die Differentialgleichungen der rotierenden Scheibe in ihrer Form 17.3(8) und (9). Die erste dieser Gleichungen lautet, angeschrieben als Differenzengleichung für den Aufpunkt i (Abb. 17.7.1)

$$\sigma_{\vartheta i} = r_i \frac{\sigma_{r(i+1)} - \sigma_{r(i-1)}}{2\Delta r} + \left(1 + \frac{r_i}{y_i} y_i'\right) \sigma_{ri} + \rho(r_i \omega)^2, \quad 17.7(2)$$

während die zweite folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\frac{\sigma_{r(i+1)} - 2\sigma_{ri} + \sigma_{r(i-1)}}{\Delta r^2} + P_i \frac{\sigma_{r(i+1)} - \sigma_{r(i-1)}}{2\Delta r} + Q_i \sigma_{ri} + R_i = 0, \quad 17.7(3)$$

$$P_i \equiv \frac{3}{r_i} + \frac{y_i'}{y_i}, \quad 17.7(4)$$

$$Q_i \equiv \frac{(2 + \nu) y_i'}{r_i y_i} + \frac{y_i'}{y_i} - \frac{y_i'^2}{y_i^2}, \quad 17.7(5)$$

$$R_i \equiv (3 + \nu) \rho \omega^3 + E\beta \frac{T_i'}{r_i}. \quad 17.7(6)$$

Akzente bedeuten hier stets Ableitungen nach r , Index i verweist auf den Aufpunkt, so daß also z. B. y_i' die Ableitung dy/dr im Punkt i ist. Solche Ableitungen können ebenfalls nach Gl. 17.7(1) gebildet werden, wenn Scheibengestalt und Temperaturverlauf gegeben sind. Durch Umgruppieren geht diese Differenzengleichung in die folgende Form über:

$$U_i \sigma_{r(i-1)} + V_i \sigma_{ri} + W_i \sigma_{r(i+1)} = -R_i, \quad 17.7(7)$$

$$U_i \equiv \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{P_i}{2\Delta r}, \quad V_i \equiv Q_i - \frac{2}{\Delta r^2}, \quad W_i \equiv \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{P_i}{2\Delta r}. \quad 17.7(8)$$

Eine solche Gleichung läßt sich nun für jeden Punkt von 1 bis n angeben (man beachte die Art der Punktnummerierung in Abb. 17.7.1!).

Rekursionsformeln sind) hindurchgehend alle σ_{ri} berechnen. Hat man sie, so liefert 17.7(2) die Tangentialspannungen $\sigma_{\theta i}$, lediglich $\sigma_{\theta 0}$ ist durch Extrapolation zu gewinnen.

Liegt die *ungelochte Scheibe* vor, so muß $d\sigma_r/dr$ im Scheibenzentrum verschwinden. Dies bedeutet aber $\sigma_{r0} = \sigma_{r1}$, was eingesetzt in die erste der Gln. 17.7(9) wieder auf eine Gleichung der Form führt, wie sie als erste der Gln. 17.7(11) angegeben ist. Die weitere Rechnung verläuft genau gleich. Auch hier ergeben sich die Tangentialspannungen aus 17.7(2), wobei in $r = 0$ gilt $\sigma_{\theta 0} = \sigma_{r0}$.

Wenn kein Kranz vorhanden ist, der Umfangskräfte überträgt, tritt an die Stelle der Anschlußgleichung die Gl. 17.2(17), unabhängig davon, ob die Scheibe ein zentrales Loch aufweist oder nicht. Das bedeutet aber lediglich, daß in der zweitletzten der Gln. 17.7(11) σ_{rm} bekannt ist. Es kann also sofort die Berechnung der sämtlichen σ_{ri} nach den Rekursionsformeln erfolgen.

Somit ist es in jedem Falle möglich, mit diesem Verfahren die vollständigen Spannungsverteilungen aufzufinden. In der Herleitung ist angenommen, daß die Scheibe gleichzeitig mechanisch und thermisch beansprucht sei und beides zugleich berechnet werde. Oft ist es aber zweckmäßig, die beiden Beanspruchungsarten getrennt zu behandeln, also z. B. die rein fliehkraftbedingte Beanspruchung für sich zu berechnen und ebenso Spannungsverteilungen, die z. B. durch verschiedene zeitlich aufeinanderfolgende Temperaturverteilungen hervorgerufen sein können. Bei der Berechnung dieser reinen Temperaturspannungen ist $\omega = 0$ zu setzen, und auch die Grenzbedingungen sind anzupassen, also bei der gelochten Scheibe $\sigma_{r0} = 0$. Bei einem Kranz, der Umfangskräfte überträgt, ist die Anschlußgleichung 17.2(16) zu reduzieren auf die reinen Temperaturglieder (d. h. es ist $\sigma_z = 0$, $u_k = 0$). Bei axial eingeschobenen Schaufelfüßen wird für die reinen Temperaturspannungen einfach $\sigma_{rm} = 0$. — So berechnete thermische Spannungsverteilungen können dann beliebig den Fliehkraftspannungen überlagert werden.

Bei der Herleitung der grundlegenden Differentialgleichungen ist vorausgesetzt worden, daß die Stoffwerte E , β , ν konstant seien. *Beglinger* [15] hat indessen die Theorie an diesem Punkt verallgemeinert, indem er *temperaturabhängige Stoffwerte* einführt. Kennt man dann $T(r)$, so hat man auch die Stoffwerte in Funktion von r und kann die Ableitungen E' , β' , ν' bestimmen. Die Herleitung der Differentialgleichung der Verformung erfolgt so, daß in Gl. 17.3(6) bei der Differentiation E , β und ν als variabel betrachtet werden, woraus sich die entsprechende Verallgemeinerung von 17.3(7) ergibt. Das überträgt sich auch auf Gl. 17.3(9), die in diesem Abschnitt als Differenzgleichung 17.7(3) auftritt. Es ist leicht zu verifizieren, daß man nur setzen muß

$$P_i \equiv \frac{3}{r_i} + \frac{y'_i}{y_i} - \frac{E'_i}{E_i}, \quad 17.7(4')$$

$$Q_i \equiv \frac{(2 + \nu_i) y'_i}{r_i y_i} + \frac{y''_i}{y_i} - \frac{y_i'^2}{y_i^2} - \frac{E'_i}{E_i} \left[\frac{1 - \nu_i}{r_i} + \frac{y'_i}{y_i} \right] - \frac{\nu'_i}{r_i}, \quad 17.7(5')$$

$$R_i \equiv \rho \omega^2 \left[3 + \nu_i - r_i \frac{E'_i}{E_i} \right] + \frac{E_i \beta_i T'_i}{r_i} \left[\frac{T'_i}{T_i} + \frac{\beta'_i}{\beta_i} \right]. \quad 17.7(6')$$

Diese Gleichungen treten an die Stelle der Gln. 17.7(4)–(6). Dann repräsentiert 17.7(3) nach wie vor die maßgebende Differentialgleichung, und die Rechnung verläuft genau gleich wie beschrieben. Abb. 17.7.2 zeigt ein Beispiel von Spannungsverteilungen, die mit konstanten und variablen E und β berechnet wurden nach [15]. Der Einfluß einer variablen Poisson-Zahl ν erweist sich als sehr gering.

Das beschriebene Verfahren kann zu Schwierigkeiten führen, wenn die Scheibenkontur starke Unstetigkeiten aufweist, wie im Beispiel Abb. 17.7.3. In diesem Falle verwendet man die Differentialgleichungen zweckmäßig in ihrer ursprünglichen Form 17.3(3) und (7)

und schreibt sie in folgender Weise als Differenzgleichungen.

$$\Delta\sigma_r = [\sigma_\vartheta - \sigma_r - \rho(r\omega)^2] \frac{\Delta r}{r} - \sigma_r \frac{\Delta y}{\bar{y}}, \tag{17.7(13)}$$

$$\Delta\sigma_\vartheta = \nu \Delta\sigma_r - (1 + \nu) (\sigma_\vartheta - \sigma_r) \frac{\Delta r}{r} - E\beta \Delta T. \tag{17.7(14)}$$

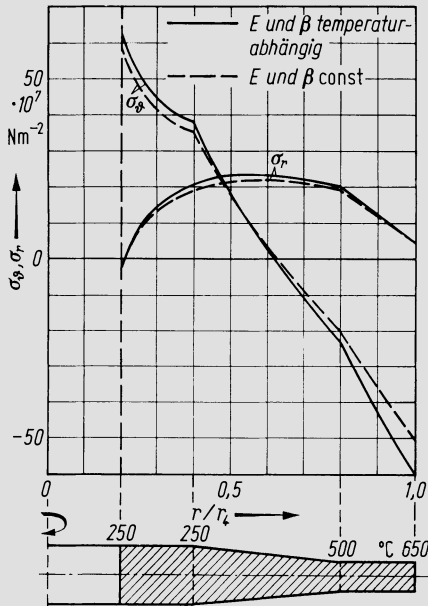


Abb. 17.7.2

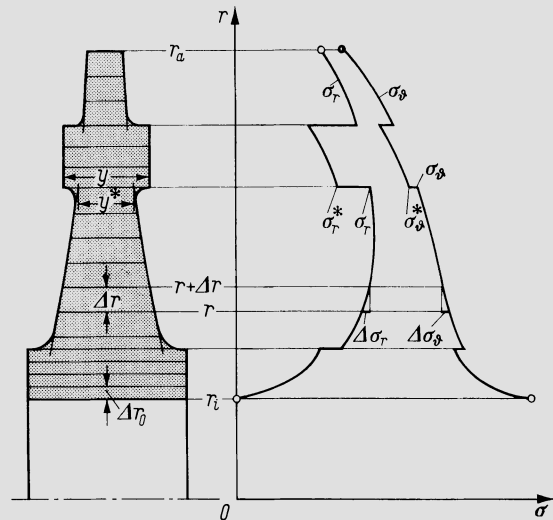


Abb. 17.7.3

Abb. 17.7.2. Spannungsverteilungen in einer rotierenden Scheibe nach *Beglinger* [15]. Ausgezogen mit temperaturabhängigen E und β , gestrichelt mit konstanten E und β

Abb. 17.7.3. Scheibenkontur mit Unstetigkeiten

$\Delta\sigma_r$, $\Delta\sigma_\vartheta$, Δy und ΔT sind die Änderungen der betreffenden Größen, die einem kleinen Radienintervall Δr entsprechen. Kennt man in einem Radius r alle Größen, so liefert 17.7(13) $\Delta\sigma_r$. Dies kann in 17.7(14) eingesetzt werden, worauf diese Gleichung $\Delta\sigma_\vartheta$ ergibt. Im Radius $r + \Delta r$ ist also

$$\sigma_r(r + \Delta r) = \sigma_r(r) + \Delta\sigma_r, \quad \sigma_\vartheta(r + \Delta r) = \sigma_\vartheta(r) + \Delta\sigma_\vartheta. \tag{17.7(15)}$$

So kann von Radius zu Radius um Intervalle Δr weitergeschritten werden. Das Auftreten einer Unstetigkeit der Scheibendicke stört dabei nicht. Betrachten wir etwa die Sprungstelle von y auf y^* (Abb. 17.7.3). Aus Gleichgewichtsgründen muß dort sein

$$\sigma_r^* y^* = \sigma_r y.$$

Ferner muß aber die Tangentialdehnung ε_ϑ an der Sprungstelle stetig bleiben, was auf die Bedingung

$$\sigma_\vartheta^* - \nu\sigma_r^* = \sigma_\vartheta - \nu\sigma_r$$

führt. Die Spannungen nach der Sprungstelle sind also gegeben durch

$$\sigma_r^* = \sigma_r \frac{y}{y^*}, \quad \sigma_\vartheta^* = \sigma_\vartheta - \nu(\sigma_r - \sigma_r^*). \tag{17.7(16)}$$

Von diesen Werten ausgehend, kann die Differenzenrechnung regulär weitergeführt werden. Von Vorteil ist bei diesem Verfahren auch, daß die Intervalle Δr untereinander nicht gleich sein müssen, sondern der geometrischen Situation angepaßt werden können, wie in der Figur angedeutet.

Wie die Grenzbedingungen erfüllt werden können, werde zunächst am Beispiel der gelochten Scheibe erläutert. Gegeben ist am Innenradius die Radialspannung σ_{ri} (Null oder gleich dem negativen Schrumpfdruck), am Außenradius die Anschlußgleichung in ihrer Form 17.2(16'). Man bestimmt eine durch Index I gekennzeichnete erste Partikulärlösung, indem man in r_i die Radialspannung σ_{ri} und eine willkürlich gewählte Tangentialspannung $\sigma_{\theta i}^*$ setzt. Von hier aus kann die Differenzenrechnung in der angegebenen Weise durchgeführt werden und liefert Spannungen $\sigma_{rI}(r)$, $\sigma_{\theta I}(r)$, insbesondere in $r = r_a$ auch σ_{raI} , $\sigma_{\theta aI}$, die aber die Anschlußgleichung nicht erfüllen werden. Deshalb wird noch eine zweite Teillösung II berechnet, indem man in den Differenzgleichungen $\omega = 0$ und alle $\Delta T = 0$ und in r_i die Werte $\sigma_{riII} = 0$, $\sigma_{\theta iII} = \sigma_{\theta i}^*$ setzt. So erhält man $\sigma_{rII}(r)$, $\sigma_{\theta II}(r)$ und in $r = r_a$ insbesondere σ_{raII} , $\sigma_{\theta aII}$. Die korrekte, alle Grenzbedingungen erfüllende Lösung ist

$$\sigma_r(r) = \sigma_{rI}(r) + C\sigma_{rII}(r), \quad \sigma_{\theta}(r) = \sigma_{\theta I}(r) + C\sigma_{\theta II}(r). \quad 17.7(17)$$

C bestimmt sich, indem man dies in die Anschlußgleichung einsetzt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta aI} + C\sigma_{\theta aII} &= A + B(\sigma_{raI} + C\sigma_{raII}) \\ C &= \frac{A + B\sigma_{raI} - \sigma_{\theta aI}}{\sigma_{\theta aII} - B\sigma_{raII}}. \end{aligned} \quad 17.7(18)$$

Damit ist in 17.7(17) alles bekannt, womit die vollständige Lösung vorliegt. Wo kein Kranz vorliegt, ist σ_{ra} unmittelbar aus Gl. 17.2(17) gegeben, womit

$$C = \frac{\sigma_{ra} - \sigma_{raI}}{\sigma_{raII}}. \quad 17.7(18')$$

Besitzt die Scheibe kein zentrales Loch, so wird eine erste Partikulärlösung I gerechnet, ausgehend von frei gewählten Spannungen im Zentrum $\sigma_{rI}(0) = \sigma_{\theta I}(0) = \sigma_0$, eine zweite II mit der gleichen Ausgangsannahme, aber mit $\omega = 0$, alle $\Delta T = 0$. Wiederum liefert dann 17.7(17) mit C nach 17.7(18) oder (18') die korrekte, alle Bedingungen erfüllende Lösung. — Bei diesem Vorgehen ergibt sich zwar in 17.7(13) und (14) in $r = 0$ eine scheinbare Schwierigkeit, weil ja r im Nenner steht. Da aber im Zentrum sicher $d\sigma/dr = 0$, kann man für das erste Intervall setzen $\Delta\sigma_r = 0$, $\Delta\sigma_{\theta} = 0$, d.h. man setzt faktisch $\sigma_r = \sigma_{\theta} = \sigma_0$ in $r = \Delta r_0$, womit die Schwierigkeit umgangen ist. — Selbstverständlich kann man auch hier Lösungen für Fliehkraftbeanspruchung und thermische Beanspruchung getrennt berechnen und überlagern. Gegenüber der ersten hier wiedergegebenen Differenzenmethode hat diese zweite den Vorteil, daß Unstetigkeiten leicht zu bewältigen sind, während ihr Nachteil darin besteht, daß jede Integration zweimal ausgeführt werden muß, nämlich für die Partikulärlösungen I und II .

17.8 Die zylindrische Trommel

Bei der Aufstellung der Differentialgleichungen der Scheibe wurden die Axialspannungen von vornherein als vernachlässigbar klein angenommen. Dies ist berechtigt bei einem Körper, dessen axiale Abmessungen klein sind im Vergleich mit seinem Durchmesser. Bei einem trommelförmigen Körper hingegen darf dies nicht mehr ohne weiteres vorausgesetzt werden. An die Stelle der Dehnungsgleichungen 17.3(4) und (5) müssen dann viel-

mehr die für räumlichen Spannungszustand gültigen Beziehungen

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\vartheta + \sigma_a)] + \beta T, \quad 17.8(1)$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E} [\sigma_\vartheta - \nu(\sigma_r + \sigma_a)] + \beta T, \quad 17.8(2)$$

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E} [\sigma_a - \nu(\sigma_r + \sigma_\vartheta)] + \beta T \quad 17.8(3)$$

treten. Hier kennzeichnet Index a die axiale Richtung. Eine geschlossene Lösung läßt sich angeben, wenn äußere Belastung und Temperaturverteilung längs der axialen Erstreckung unveränderlich sind, denn dann bleiben im spannungsfreien Zustand achsnormale Ebenen auch im beanspruchten Zustand achsnormal, d. h. es ist $\varepsilon_a = \text{const.}$

Zur Vorbereitung führen wir nun die folgende Überlegung durch. Wir denken uns, es sei eine Lösung $\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_a$ bekannt, die das Gleichungssystem 17.8(1) bis (3) erfüllt. Nun werde das konstante ε_a um einen Betrag $\Delta\varepsilon_a$ vergrößert. Dann bleibt Gl. 17.8(3) erfüllt, wenn man σ_a an jeder Stelle um den konstanten Betrag $\Delta\sigma_a = E \Delta\varepsilon_a$ erhöht. Die Einführung von $\sigma_a + \Delta\sigma_a$ in Gl. 17.8(1) und (2) führt auch dort auf geänderte Werte der Dehnungen, nämlich auf $\varepsilon_r - \nu \Delta\varepsilon_a$ und $\varepsilon_\vartheta - \nu \Delta\varepsilon_a$. Nun hängen aber die ε_r und ε_ϑ gemäß den Gln. 17.3(4) und (5) mit der Radialverschiebung v zusammen, woraus sich sogleich die Kompatibilitätsbedingung

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr} (r\varepsilon_\vartheta) = \varepsilon_\vartheta + r \frac{d\varepsilon_\vartheta}{dr} \quad 17.8(4)$$

ergibt. Diese muß auch für unsere geänderten Dehnungen gültig bleiben, d. h. es muß sein

$$\varepsilon_r - \nu \Delta\varepsilon_a = \varepsilon_\vartheta - \nu \Delta\varepsilon_a + r \frac{d}{dr} (\varepsilon_\vartheta - \nu \Delta\varepsilon_a) = \varepsilon_\vartheta - \nu \Delta\varepsilon_a + r \frac{d\varepsilon_\vartheta}{dr},$$

was offenbar für jedes beliebige konstante $\Delta\varepsilon_a$ zutrifft. Wenn man also die Axialdehnung und somit auch die Axialspannungen um einen beliebigen konstanten Betrag verändert, die übrigen Spannungen aber unverändert läßt, so entsteht wieder ein möglicher Spannungszustand. Demnach spielt es für die Berechnung von σ_r und σ_ϑ keine Rolle, wie groß ε_a ist, wenn es nur konstant ist. Deshalb dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon_a = 0$ setzen, worauf Gl. 17.8(3) übergeht in

$$\sigma_a = \nu(\sigma_\vartheta + \sigma_r) - E\beta T. \quad 17.8(5)$$

Dies kann in Gl. 17.8(1) und (2) eingesetzt werden, worauf erhalten wird:

$$\varepsilon_r = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[\sigma_r - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_\vartheta \right] + (1 + \nu) \beta T; \quad 17.8(6)$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[\sigma_\vartheta - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_r \right] + (1 + \nu) \beta T. \quad 17.8(7)$$

Diese Verformungsgleichungen haben genau dieselbe mathematische Struktur wie die für den zweiachsigen Spannungszustand geltenden Gln. 17.3(4) und (5). Ferner kann die unter 17.3 durchgeführte Gleichgewichtsbetrachtung am Volumenelement unmittelbar auf den Fall der Trommel übertragen werden, denn in achsnormalen Ebenen treten keine Schubspannungen auf. Wenn man also ein Raumelement wie in Abb. 17.3.1 herausgreift und es seitlich durch zwei um den Abstand y voneinander entfernliegende achsnormale Ebenen begrenzt, so gilt die früher durchgeführte Überlegung mit der zusätzlichen Vereinfachung, daß nun y als konstante Größe herausfällt. Damit erhält man anstelle von

Gl. 17.3(3)

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\vartheta + \rho(r\omega)^2 = 0. \quad 17.8(8)$$

Wenn die Gln. 17.8(6) und (7) in die Kompatibilitätsbedingung Gl. 17.8(4) eingeführt werden, entsteht eine zweite Differentialgleichung in σ_r und σ_ϑ , welche der Gl. 17.3(7) analog ist. Wiederum kann man Gl. 17.8(8) nach σ_ϑ auflösen, also setzen

$$\sigma_\vartheta = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r + \rho(r\omega)^2 \quad 17.8(9)$$

und diese Gleichung in die eben genannte zweite Differentialgleichung einsetzen und erhält so

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} + \left(3 + \frac{\nu}{1-\nu}\right) \rho\omega^2 + \frac{E\beta}{(1-\nu)r} \frac{dT}{dr} = 0. \quad 17.8(10)$$

Diese Gleichung entspricht völlig der Gl. 17.3(9), für konstantes y angeschrieben. Deshalb stimmt auch die Lösung mit derjenigen für die Scheibe konstanter Dicke überein bis auf die folgenden Abweichungen:

Wo im Falle der Scheibe ν steht, ist jetzt $\nu/(1-\nu)$ zu setzen.

Wo im Falle der Scheibe E steht, ist jetzt $E/(1-\nu)$ zu setzen.

Damit können die Lösungen sofort hingeschrieben werden. Es sind

$$\frac{1}{8} \left(3 + \frac{\nu}{1-\nu}\right) = 0,429, \quad \frac{1}{8} \left(1 + \frac{3\nu}{1-\nu}\right) = 0,286$$

die in den nachfolgenden Gleichungen auftretenden Zahlenfaktoren. Man beachte ferner, daß $0,429 - 0,286 = 0,143$. Wenn wir wieder mit r_i , r_a und r den inneren, äußeren und laufenden Radius bezeichnen und setzen $x = r/r_a$, $X = r_i/r_a$, gilt folgendes:

Hohlzylinder:

$$\sigma_{r\omega} = \sigma_{r\omega a} - \frac{X^2}{x^2} \left(\frac{1-x^2}{1-X^2}\right) (\sigma_{r\omega a} - \sigma_{r\omega i}) + 0,429 (1-x^2) \left(1 - \frac{X^2}{x^2}\right) \rho u_a^2. \quad 17.8(11)$$

Maximum von $\sigma_{r\omega}$ in

$$x_m = \left(1 + \frac{\sigma_{r\omega a} - \sigma_{r\omega i}}{0,429 \rho u_a^2 (1-X^2)}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{X}; \quad 17.8(12)$$

$$\sigma_{\vartheta\omega} = \sigma_{r\omega a} + \frac{X^2}{x^2} \left(\frac{1+x^2}{1-X^2}\right) (\sigma_{r\omega a} - \sigma_{r\omega i}) + \left[0,429 \left(1 + X^2 + \frac{X^2}{x^2}\right) - 0,286x^2\right] \rho u_a^2. \quad 17.8(13)$$

Die Radialkomponente der Wärmespannung verschwindet in r_i und r_a , womit

$$\sigma_{rT} = \frac{E\beta}{1-\nu} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}{1-X^2} \int_{r_i}^{r_a} \left[\frac{1}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr - \int_{r_i}^r \left[\frac{1}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr \right\} \quad 17.8(14)$$

$$\sigma'_{rT} = \frac{E\beta}{1-\nu} \left\{ \frac{2r_i^2}{r^3(1-X^2)} \int_{r_i}^{r_a} \left[\frac{1}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr - \frac{1}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right\} \quad 17.8(15)$$

$$\sigma_{\vartheta T} = r\sigma'_{rT} + \sigma_{rT}. \quad 17.8(16)$$

Vollzylinder:

$$\sigma_{r\omega} = \sigma_{r\omega a} + 0,429 (1 - x^2) \rho u_a^2; \quad 17.8(17)$$

$$\sigma_{\vartheta\omega} = \sigma_{r\omega a} + (0,429 - 0,286x^2) \rho u_a^2; \quad 17.8(18)$$

$$\sigma_{\vartheta\omega a} = \sigma_{r\omega a} + 0,143\rho u_a^2; \quad 17.8(19)$$

$$\sigma_{rT} = \frac{E\beta}{1-\nu} \int_r^{r_a} \frac{1}{r^3} \left(\int_0^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right) dr; \quad 17.8(20)$$

$$\sigma'_{rT} = - \frac{E\beta}{(1-\nu)r^3} \int_0^r r^2 \frac{dT}{dr} dr; \quad 17.8(21)$$

$$\sigma_{\vartheta T} = r\sigma'_{rT} + \sigma_{rT}. \quad 17.8(22)$$

Sowohl beim hohlen als auch vollen Zylinder könnte nun die Axialspannung in jedem Punkt aus Gl. 17.8(5) ermittelt werden. Damit erhielte man den Spannungszustand, für den $\varepsilon_a = 0$. Dies ist aber nicht der wirkliche Spannungszustand. Wie aus der einleitenden Überlegung hervorgeht, darf man aber der Axialspannung einen beliebigen konstanten Betrag überlagern, ohne daß dadurch die übrigen Spannungen verändert werden. Wir dürfen also anstelle von Gl. 17.8(5) setzen

$$\sigma_a = K + \nu(\sigma_{\vartheta} + \sigma_r) - E\beta T. \quad 17.8(23)$$

Der Wert von K ergibt sich aus der Tatsache, daß der wirkliche Rotor im allgemeinen keine nennenswerte Axialkraft übertragen wird, d. h., es gilt

$$\int_{r_i}^{r_a} \sigma_a r dr = 0. \quad 17.8(24)$$

Durch Einsetzen von Gl. 17.8(23) in diese Bedingung entsteht eine Bestimmungsgleichung für K , womit für σ_a schließlich erhalten wird

$$\sigma_a = \nu(\sigma_{\vartheta} + \sigma_r) - E\beta T - \frac{2}{r_a^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_a} [\nu(\sigma_{\vartheta} + \sigma_r) - E\beta T] r dr. \quad 17.8(25)$$

Der volle Zylinder ergibt sich hier einfach mit $r_i = 0$.

Die Berechnung des Spannungszustandes in einem Trommelrotor ist durch die Gln. 17.8(11) bis (22) und (25) vollständig gegeben. Das Verfahren ist dabei insofern einfacher als bei der Scheibe, als von einem Kranz hier nicht gesprochen werden kann. Es ist vielmehr die gesamte Fliehkraft der Schaufeln und ihrer Füße als ideelle Radialspannung $\sigma_{r\omega a}$ am äußeren Umfang angreifend zu denken. Der Vergleich der Spannungen in der Trommel mit denjenigen, die unter sonst gleichen Bedingungen in der Scheibe konstanter Dicke entstehen, zeigt nur geringe Unterschiede der Fliehkraftspannungen, wogegen die Wärmespannungen bei der Trommel um den Faktor $1/(1-\nu) = 1,43$ höher sind.

17.9 Die Berechnung der Schrumpfverbindungen

Die nachfolgende Theorie setzt ebenen Spannungs- bzw. Verformungszustand in den Teilen voraus, die durch Schrumpfverbindung zusammengefügt werden. Bei einer Anordnung nach Abb. 17.9.1a kann diese Annahme als gut erfüllt gelten, sofern mehrere Scheiben dicht nebeneinander auf der Welle sitzen und man nicht die Scheiben an beiden Enden betrachtet. Aber schon bei den Endscheiben wird der Spannungszustand, vollends

in der Welle, räumlich. Die Anordnung nach Abb. 17.9.1 b ist stets durch einen räumlichen Spannungszustand gekennzeichnet und das gilt ganz offensichtlich in hohem Maße für die Form nach Abb. 17.9.1 c. Aber auch schon im einfachsten Fall erweist sich das Problem bei genauerem Zusehen als komplexer als man anzunehmen geneigt ist. Das sei durch folgende einfache Überlegung aufgezeigt. Man stelle sich vor, daß Scheiben konstanter Dicke mit Lochradienverhältnis $X = 0,5$ in dichter Folge mit dem Schrumpfdruck p auf eine Welle gesetzt seien; die ganze Anordnung sei ruhend. Die Rechnung zeigt, daß dann am Lochrand der Scheibe eine Tangentialspannung $\sigma_{\theta i} = 1,667p$ entsteht, während in der Welle durchweg $\sigma_r = \sigma_{\theta} = -p$. Untersucht man die Verformungen, die sich in Welle (Körper I) und Scheibe (Körper II) einstellen, wenn sie getrennt dem Druck p ausgesetzt werden, so erhält man u. a. Axialdehnungen, die gegeben sind durch

$$\varepsilon_{aI} = \frac{2\nu}{E} p, \quad \varepsilon_{aII} = -\frac{0,667\nu}{E} p.$$

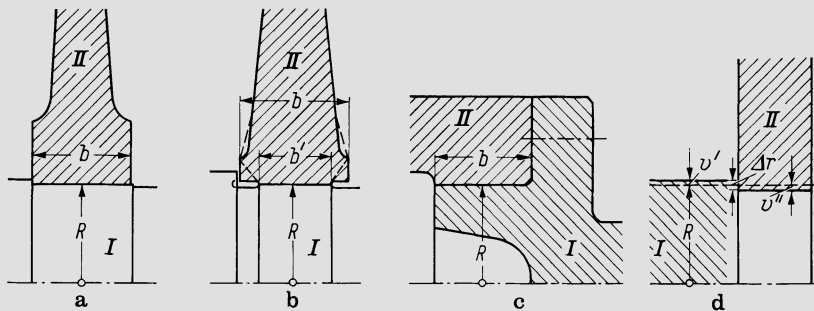


Abb. 17.9.1. Schrumpfv Verbindung, a) Scheibe sitzt mit voller Nabenbreite auf Welle; b) Nabe sitzt nur mit einem Teil ihrer Breite auf Welle; c) Schrumpfv Verbindung zwischen Hohltrummel und Wellenstummel; d) Verschiebungen und Schrumpfmäß

Die beiden Dehnungen haben sogar verschiedenes Vorzeichen. Sollen beide Körper aneinander haften, also gleiche Dehnung aufweisen, so ist der vorausgesetzte Spannungszustand unmöglich. Nimmt man vereinfachend an, daß sich eine gemeinsame mittlere Dehnung

$$\bar{\varepsilon}_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_{aI} + \varepsilon_{aII}) = \frac{0,667\nu}{E} p = \frac{0,2p}{E}$$

einstelle und daß die Verformung der Welle eben bleibe, so muß diese axial komprimiert werden, und es entsteht in ihr eine Axialspannung, die gegeben ist durch

$$\bar{\varepsilon}_a = \frac{1}{E}(\sigma_a + 2\nu p) \quad \therefore \sigma_a = -0,4p.$$

Der Druckkraft, die so in der Welle entsteht, muß das Gleichgewicht gehalten werden durch an der Oberfläche angreifende Schubspannungen τ , die je über die halbe Scheibenbreite b gegen die Scheibenmittelebene zu gerichtet sind, d. h. es muß gelten

$$\pi R b |\tau| = \pi R^2 \sigma_a = 0,4\pi R^2 p$$

mit R als Wellenradius. Drückt man noch τ vermöge des Reibungsbeiwertes μ durch $|\tau| \leq \mu p$ aus, so läßt sich die Relation schließlich in die Form

$$\mu \geq 0,4 \frac{R}{b} \quad 17.9(1)$$

bringen. Nun entspricht $R/b = 1$ schon einer breiten Nabe. In diesem Falle müßte also μ mindestens die Größenordnung 0,4 besitzen, damit kein Gleiten auftritt. Das deckt sich beachtlich gut mit der umfassenderen Untersuchung nach Häusler [16]. Es werden Werte $\mu = 0,15-0,65$ angegeben und als Ergebnis von Auspreßversuchen $\mu = 0,45$. Da praktisch auch weit größere Verhältnisse R/b vorkommen, wird man axiales Gleiten nicht ausschließen können. In Fällen, wo das unbedingt vermieden werden muß, wie bei der Anordnung nach Abb.17.9.1c, pflegt man Bolzen zur axialen Lagesicherung vorzusehen und sollte überdies $R/b \approx 1$ nicht überschreiten.

Nachfolgend wird stets durch einen Akzent auf den Innenkörper I , durch zwei Akzente auf den Außenkörper II verwiesen. Wenn ebener Spannungszustand vorausgesetzt wird und man beachtet, daß die Radialverschiebung v stets die mit R multiplizierte Tangentialdehnung ε_θ ist, gilt für den Außenrand des Innenkörpers I mit $\sigma'_{ra} = -p$

$$v' = R \left[\frac{1}{E'} (\sigma'_{\theta a} + \nu p) + \beta' T(R) \right], \quad 17.9(2)$$

wobei die Temperatur $T(R)$ von der Umgebungstemperatur aus zu rechnen ist. Für konstantes T' ergibt sich nach den Ausführungen unter 17.5 das folgende:

Körper I ohne Loch: $\sigma'_{\theta a} = -p + 0,175\varrho(R\omega)^2$,

$$v' = -R \left\{ \frac{1}{E'} [(1 - \nu)p - 0,175\varrho(R\omega)^2] + \beta' T(R) \right\}. \quad 17.9(3)$$

Körper II mit Loch von Radienverhältnis $X = r_i / R$:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\theta a} &= - \left[1 + \frac{2X^2}{1 - X^2} \right] p + [0,175 + 0,824X^2] \varrho(R\omega)^2, \\ v' &= - \frac{R}{E'} \left\{ \left[1 - \nu + \frac{2X^2}{1 - X^2} \right] p - [0,175 + 0,824X^2] \varrho(R\omega)^2 \right\} + R\beta' T(R). \end{aligned} \quad 17.9(4)$$

Die Formeln lassen sich notfalls nach den Angaben unter 17.5 verallgemeinern, um einen beliebigen Temperaturverlauf zu berücksichtigen. Es können auch stattdessen die für den ebenen Verformungszustand gültigen Beziehungen von 17.8 herangezogen werden. In diesen treten aber die Axialspannungen auf, und da diese nach dem eingangs Gesagten ohnehin nicht genau bekannt sind, wird sich die Komplikation meist nicht lohnen, um so mehr als die Unterschiede nur klein sind.

Die Radialverschiebung am Innenrand des Außenkörpers II ist

$$v'' = R \left[\frac{1}{E''} (\sigma''_{\theta i} + \nu p) + \beta'' T(R) \right]. \quad 17.9(5)$$

In dieser Gleichung sind aus der Scheibenrechnung rechts alle Größen bekannt. Das vorzusehende Schrumpfmaß Δr ergibt sich zu

$$\Delta r = v'' - v', \quad 17.9(6)$$

wobei v' mindestens ohne Temperatureinfluß negativ wird (vgl. auch Abb. 17.9.1d).

Im Stillstand und bei ausgeglichener Temperatur entsteht mit dem so gegebenen Schrumpfmaß Δr ein Schrumpfdruck p_0 , der größer ist als das für den Betrieb zugrundegelegte p und folgendermaßen bestimmt wird. Man berechnet für $\omega = 0$ und ohne Temperaturglieder die Spannungsverteilung in der Scheibe, die entsteht durch einen beliebig gewählten Schrumpfdruck \bar{p} bei einer Radialspannung $\sigma_{ra} = 0$ am Außenrand. Damit erhält man insbesondere die Radialverschiebung \bar{v}'' . Ebenso erhält man nach den Gln. 17.9(3) oder (4) \bar{v}' . Damit findet sich der wahre Schrumpfdruck aus

$$p_0 = \frac{\Delta r}{\bar{v}'' + |\bar{v}'|} \bar{p}, \quad 17.9(7)$$

und die Spannungen sind im gleichen Verhältnis umzurechnen.

Allgemein nimmt der Schrumpfdruck mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit ab, und es existiert eine Winkelgeschwindigkeit $\hat{\omega}$, bei der er verschwindet, wenn die gleiche Temperaturverteilung vorausgesetzt wird wie im Normalbetrieb. Diese Winkelgeschwindigkeit darf niemals erreicht werden, da sonst die Zentrierung nicht mehr gewährleistet wäre. Sie bestimmt sich wie folgt. Man berechnet für den inneren und äußeren Körper die Spannungsverteilung mit einem Schrumpfdruck $p = 0$ und mit einem offengelassenen Wert ω der Winkelgeschwindigkeit. Insbesondere findet man so am Außenrand von I und am Innenrand von II

$$\sigma'_{\vartheta a} = a\omega^2 + b, \quad \sigma''_{\vartheta i} = c\omega^2 + d. \quad 17.9(8)$$

Die Werte a, b, c, d gehen aus eben dieser Rechnung hervor; b und d rühren von der Temperaturverteilung her und verschwinden für ausgeglichene Temperatur. Die Radialverschiebungen v' und v'' für diese Spannungszustände sind

$$v' = R \left[\frac{\sigma'_{\vartheta a}}{E'} + \beta' T(R) \right], \quad v'' = R \left[\frac{\sigma''_{\vartheta i}}{E''} + \beta'' T(R) \right]. \quad 17.9(9)$$

Im gesuchten Laufzustand $\omega = \hat{\omega}$ ist Gl. 17.9(6) eben noch erfüllt, da ja noch kein Spiel zwischen den beiden Teilen besteht. Wenn man also in 17.9(6) die v' und v'' noch durch 17.9(9) ersetzt und dort für die Spannungen noch die Ausdrücke 17.9(8) einsetzt, erhält man

$$\frac{\Delta r}{R} = \frac{c\hat{\omega}^2 + d}{E''} + \beta'' T(R) - \frac{a\hat{\omega}^2 + b}{E'} - \beta' T(R). \quad 17.9(10)$$

Hier ist ω sogleich durch $\hat{\omega}$ ersetzt, denn nur bei dieser Winkelgeschwindigkeit gelten die Gln. 17.9(6) und (8) gleichzeitig. Durch Umgruppieren findet man

$$\hat{\omega}^2 \left[\frac{c}{E''} - \frac{a}{E'} \right] = \frac{\Delta r}{R} - \frac{d}{E''} + \frac{b}{E'} - (\beta'' - \beta') T(R). \quad 17.9(11)$$

Dadurch ist $\hat{\omega}$ bestimmt.

Die Genauigkeit solcher Rechnungen, die ebenen Spannungszustand voraussetzen, ist naturgemäß begrenzt. In Fällen wie Abb. 17.9.1b kann man entweder mit einem ideellen verminderten Schrumpfdruck rechnen, der auf die volle Breite b einwirkt, oder man kann mit dem effektiven b' und dem wahren Schrumpfdruck rechnen, dafür aber mit einer ideellen Scheibenkontur gemäß der gestrichelten Eintragung. Nur noch ganz überschlägig sind solche Rechnungen bei Bauformen wie Abb. 17.9.1c. Sobald hohe Genauigkeit gefordert ist, wird man heute zur Rechnung mit finiten Elementen greifen.

17.10 Ergänzendes zur Spannungsberechnung

In den vorangehenden Abschnitten sind stets einfache Formen — Ring, Scheibe, Zylinder — zugrunde gelegt, die auf ebenen Spannungs- oder Verformungszustand führen, der selbstverständlich rotationssymmetrisch ist. In der Nähe der Schaufelbefestigung herrscht zwar oft nicht Rotationssymmetrie, doch wird dieser Teil ohnehin für sich behandelt. Eine Störung der Rotationssymmetrie tritt auch ein, wenn eine Scheibe Löcher aufweist (zum Druckausgleich oder bei gewissen Bauformen auch zur Durchführung von Zugankern). Die an solchen Lochrändern auftretenden Spannungsspitzen lassen sich aber leicht ermitteln, vgl. [1, 17, 18]. Hat das Zentrum des Loches den Abstand r von der Drehachse und sind σ_{ϑ} und σ_r die Tangential- und Radialspannungen, die in r ohne Gegenwart der Löcher auftreten würden, so sind die Spannungen in den Punkten A und B (Abb. 17.10.1) mit guter Näherung gegeben durch

$$\sigma(A) = K_t \sigma_{\vartheta} - \sigma_r, \quad \sigma(B) = K_r \sigma_r - \sigma_{\vartheta}, \quad 17.10(1)$$

wobei K_t und K_r aus [18] erschlossen werden können und in Abb. 17.10.1 dargestellt sind in Funktion des Verhältnisses t/d (Lochteilung/Durchmesser). Für sehr weit auseinanderliegende Löcher, also $t/d \rightarrow \infty$, wird $K_t = K_r = 3$, vgl. [17]. Häufig wird die Scheibe im Bereich der Löcher etwas verdickt, um die Grundspannungen herabzusetzen.

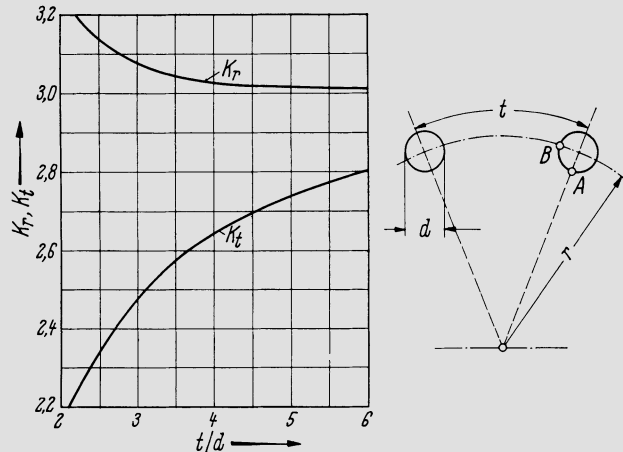


Abb. 17.10.1. Faktoren K_r und K_t zur Berechnung der Lochrandspannungen an gelochten Scheiben

In den meisten Fällen entsteht eine Komplikation dadurch, daß Scheiben untereinander oder mit anderen Elementen verbunden sind. Erfolgt diese Verbindung am Außenrand oder in einem mittlenen Radius, so haben die Verbindungselemente in der Regel die Gestalt zylindrischer oder keglicher Schalen. Die Behandlung nach den klassischen Methoden der Elastizitätstheorie erfolgt derart, daß man die Differentialgleichungen der einzelnen scheiben- und schalenförmigen Elemente heranzieht und Grenzbedingungen einführt, welche die gegenseitige Verbindung beschreiben. Eine umfassende Darstellung dieser Art der Berechnung gibt *Löffler* [14].

Soweit nur die Beanspruchung der Scheibe selbst interessiert, gibt *Löffler* vereinfachte Unterlagen, die auf Untersuchungen von *Burkhardt* beruhen. Die für die Beanspruchung der Scheiben maßgebenden Integraleffekte von ringförmigen Elementen und Wellen lassen sich danach wie folgt zusammenfassen. Abb. 17.10.2 zeigt einige Beispiele solcher

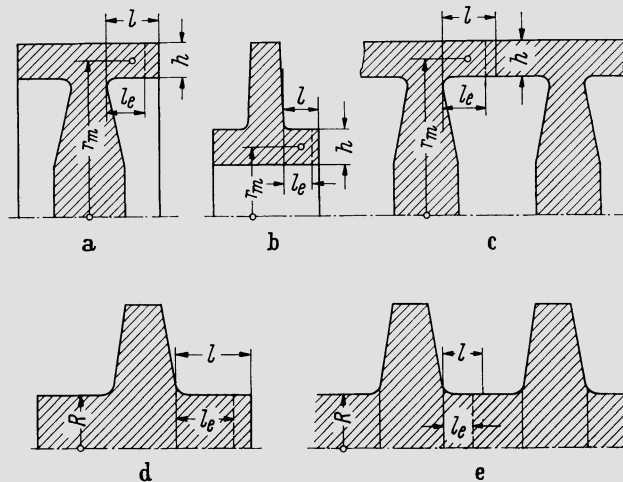


Abb. 17.10.2. Beispiele effektiver Längen l_e von Kränzen, Nabenkörpern und Wellen. a) Scheibe mit Kranz; b) Scheibe mit Nabe; c) aus Scheiben gebildete Trommel; d) einzelne Scheibe mit Wellenstummeln; e) mehrere Scheiben, mit Welle ein Stück bildend

Elemente, nämlich a einen ausladenden Kranz, b eine auskragende Nabe, c eine verbindende Zylinderschale, d zwei Wellenstummel und e eine mit den Scheiben einteilige verbindende Welle. Solche Elemente komplizieren das Problem dadurch, daß sie in der Meridianebene eine Verformung erleiden. So wird sich z. B. der Kranz a nach seinen Außenrändern hin ausweiten, also in der Meridianebene verbiegen. Sein Effekt auf die Scheibe ist der gleiche, wie der eines gedachten, völlig biegesteifen Kranzes, der aber anstelle der axialen Länge l des wirklichen Kranzes eine Länge l_e („effektive Länge“) hätte (vgl. Abb. 17.10.2). Ebenso lassen sich auch für die anderen Konfigurationen effektive Längen l_e angeben. Stets hat der gedachte Ersatzkörper von der Länge l_e die Eigenschaft, daß er über die ganze axiale Breite die Radialverschiebungen der Scheibe mitmacht. Man braucht also z. B. bei den Anordnungen b, d und e in der in Betracht kommenden Zone nur die Scheibendicke beidseitig um l_e zu vergrößern. Zur Berechnung von l_e ist zunächst eine Hilfsgröße ζ einzuführen, und zwar ist

für frei ausladende Ringe a und b:	$\zeta = l/\sqrt{r_m h}$
für beidseitig eingespannte Ringe c:	$\zeta \approx 0,7l/\sqrt{r_m h}$
für herausragende Wellenstummel d:	$\zeta = l/R$
für Wellen zwischen Scheiben:	$\zeta \approx 0,7l/R$

Alsdann gibt Abb. 17.10.3 l_e/l in Funktion von ζ , und zwar die gestrichelte Kurve für den Ring, die ausgezogene für die Welle. Man erkennt, daß etwa für $\zeta \leq 0,6$ ein Kranz nach der elementaren Theorie (Abschn. 17.2) berechnet werden kann. Ebenso kann eine Nabe, die nur so weit vorsteht, daß diese Bedingung erfüllt ist, als ein auf voller Breite mittragender Teil der Scheibe betrachtet werden. — Etwa für $\zeta \geq 2,5$ verhalten sich die von den Scheiben entsprechend weit entfernten Teile so, als ob die Scheibe nicht da wäre, d. h. also sie müssen wie ein freitragender Ring betrachtet werden. Für $\zeta \rightarrow \infty$, also für eine unendlich lange Welle oder einen unendlich langen Zylinder sind die effektiven Längen $l_e \approx 0,9R$ (Welle) bzw. $l_e \approx 0,8\sqrt{r_m h}$ (Zylinderschale).

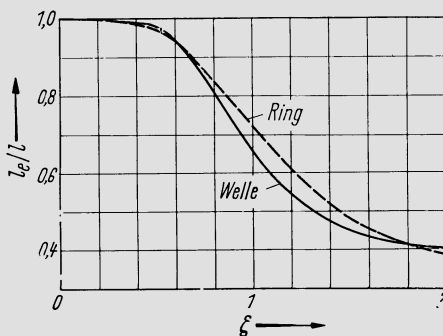


Abb. 17.10.3. Verhältnis l_e/l in Funktion des maßgebenden Parameters ζ . Nach Löffler [14]

Ein äußerst kompliziertes Festigkeitsproblem stellen die *Laufräder der Radialverdichter* dar. Die endliche Schaufelzahl beeinflusst hier das Spannungsfeld so stark, daß die Rotationssymmetrie im ganzen Bereich fühlbar gestört ist. Deshalb sind alle klassischen Methoden von vornherein nur einfache Näherungen. *Schilhansl* [19] behandelt das Problem des halboffenen Rades mit radialstehenden Schaufeln, und eine formal etwas anders ausgestaltete Version dieser Theorie findet sich in der 2. Aufl. dieses Buches. *Schlachter* [20] erweitert die Theorie auf den Fall des Rades mit Deckscheibe. Voraussetzung ist dabei rotationssymmetrischer Verformungszustand, der die Eigenschaft hat, daß ursprünglich zylindrische Schnitte (Zylinderachse ist die Drehachse) bei der Verformung in Kegel übergehen. Das ermöglicht die Berechnung nach den Methoden der klassischen Elastizitäts-

theorie. Es setzt aber voraus, daß die Schaufelblätter in Meridianebenen liegen. Nur schon der gekrümmte Eintrittsteil der halboffenen Räder („inducer“) läßt sich so nicht berechnen und vollends nicht die komplizierteren Schaufelformen der geschlossenen Räder. In solchen Fällen muß man mit mehr oder weniger groben Schätzungen in die Rechnung eingehen, damit sie überhaupt durchführbar wird.

Die Methoden der klassischen Elastizitätstheorie versagen aber auch oft bei Rotoren, deren Geometrie ihre Anwendung eigentlich noch zulassen würde, nämlich dann, wenn kompliziertere Temperaturfelder mitberücksichtigt werden müssen. Sowohl bei der Scheibe als auch bei der zylindrischen Trommel war eine nur vom Radius abhängige Temperatur vorausgesetzt worden, was oft keine genügende Näherung für die wirklichen Verhältnisse darstellt.

In allen Fällen, wo die Möglichkeiten der klassischen Elastizitätstheorie überschritten werden — und das trifft fast immer zu, sobald die Spannungen sehr genau ermittelt werden müssen — greift man heute zur Methode der *finiten Elemente*, vgl. die Darstellung unter 15.6 oder etwa *Gallagher* [21]. Anwendungen dieser Methode auf Rotoren beschreiben z.B. *Hohn* [22, 23] und *Fister* und *Heiderich* [24]. Man hat so nicht nur die Möglichkeit, weitgehend beliebige Formen und Temperaturverteilungen behandeln zu können, sondern

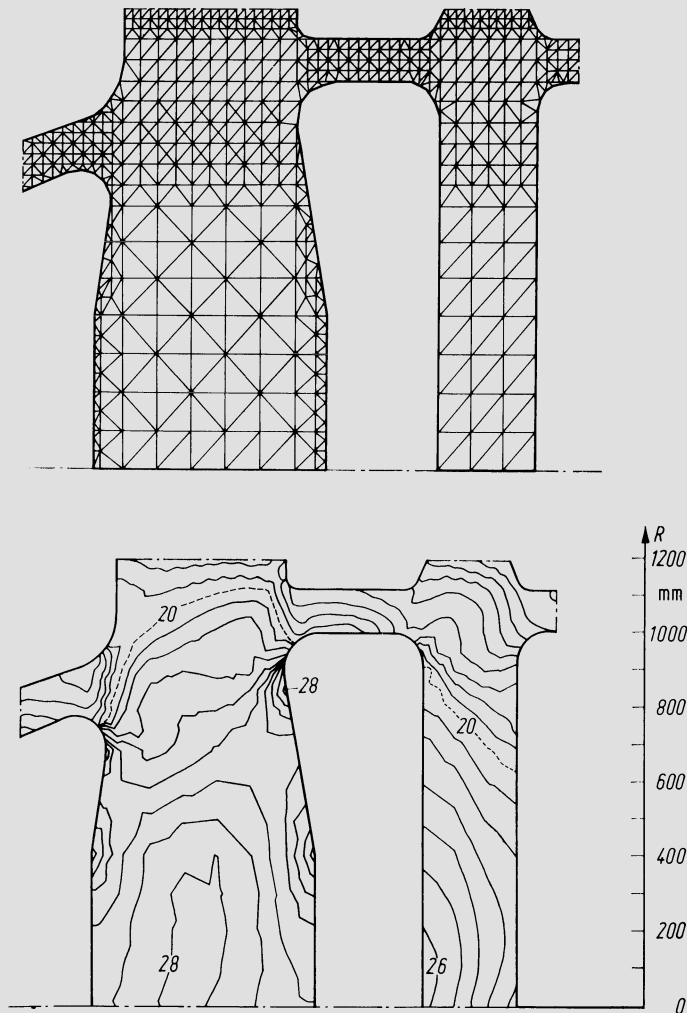


Abb. 17.10.4. Mit finiten Elementen berechnete Verteilung der Vergleichsspannung im Rotor einer halbtourigen ND-Turbine, der durch Schweißung aus Scheiben aufgebaut ist. Oben Raster der finiten Elemente, unten Linien gleicher Vergleichsspannung (BBC)

erhält rechnerisch auch solche Effekte wie Spannungsspitzen an Ausrundungen und dgl. Auch Spannungsverteilungen in Kupplungen, die bei modernen Großdampfturbinen sehr hoch beanspruchte Elemente sind, werden so berechnet. Abb. 17.10.4 gibt ein Beispiel einer so berechneten Spannungsverteilung.

Ein weiteres Problem entsteht, wenn die Temperatur Werte erreicht bei denen der Werkstoff *kriecht*. Für Scheiben und Zylinder hat *Wahl* [25, 26] in mehreren Veröffentlichungen einfache Berechnungsmethoden angegeben, die auf einem Produktansatz für das Kriechgesetz beruhen und in den früheren Auflagen dieses Buches angegeben waren. Allgemeiner, aber auch wesentlich komplizierter ist die Theorie, wie sie bei *Odqvist* und *Hult* [27] zu finden ist. Alle diese Theorien, soweit sie Rotoren zum Gegenstand haben, sind im Zusammenhang mit dem Aufkommen der Gasturbine entstanden. Moderne Gasturbinenrotoren sind aber stets so stark gekühlt, daß praktisch das Kriechen nicht mehr auftritt. Es sind vielmehr die HD- und MD-Läufer der Dampfturbinen, die bereichsweise Temperaturen annehmen, bei denen viskoplastisches Verhalten vorliegt. Hierbei handelt es sich aber stets nur um einen Teil des Körpers, und Geometrie und Temperaturbedingungen sind so, daß die Voraussetzungen jener älteren Theorien nicht mehr gegeben sind. Rechnet man rein elastisch — was die Regel ist — so überschätzt man die Spannungsspitzen, ein Fehler, der auf der sicheren Seite liegt. Wird eine genauere Untersuchung notwendig, dann steht heute wiederum das Verfahren der finiten Elemente zur Verfügung, und zwar in der unter 15.7 beschriebenen Form. Dabei wird die zeitliche Entwicklung des Spannungszustandes berechnet, nicht nur ein asymptotischer Endzustand wie etwa bei *Wahl*. Dies ist für die Beurteilung der Lebensdauer wesentlich. Allerdings ist der rechnerische Aufwand sehr groß.

17.11 Die Beurteilung des Spannungszustandes in Rotoren

Auf einfache Weise läßt sich mindestens in guter Näherung berechnen, bei welcher Drehzahl der Bruch des Rotors durch Erschöpfung der Tragfähigkeit des Werkstoffes zu erwarten wäre. Betrachtet man für eine Läuferscheibe (Abb. 17.11.1) das Gleichgewicht an einem Sektor vom Zentriwinkel $d\varphi$, so ist offenbar

$$T d\varphi = (y_a r_a \sigma_{ra} + y_i r_i p) d\varphi + \rho \omega^2 \int_{r_i}^{r_a} r^2 y dr d\varphi, \tag{17.11(1)}$$

wo p der (positiv gerechnete) Betrag des allfälligen Schrumpfdruckes in r_i ist und T die gesamte in einem Meridianschnitt der Scheibe auftretende Normalkraft. Sie ist

$$T = \int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\vartheta} y dr. \tag{17.11(2)}$$

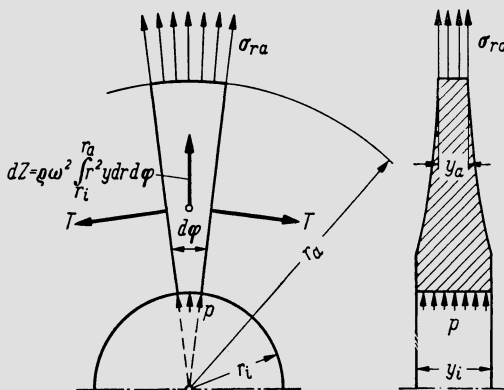


Abb. 17.11.1. Gleichgewichtsbetrachtung an einem Sektor einer Läuferscheibe

Daher erfüllt jeder in der Scheibe mögliche Spannungszustand die Gleichung

$$\int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\vartheta} y dr = (y_a r_a \sigma_{r_a} + y_i r_i p) + \rho \omega^2 \int_{r_i}^{r_a} r^2 y dr, \quad 17.11(3)$$

wobei im Falle der ungelochten Scheibe ($r_i = 0$) oder fehlender Schrumpfspannung das zweite Glied des Klammerausdruckes wegfällt.

Wenn die Drehzahl immer weiter gesteigert wird, so wird vom Zentrum ausgehend ein immer weiterer Bereich der Scheibe plastisch verformt, bis die Plastifizierung schließlich die ganze Scheibe erfaßt hat. Der Betrachtung möge das vereinfachte Spannungs-Dehnungs-Diagramm nach Abb. 15.13.1 zugrunde gelegt werden, das eine Abweichung gegenüber dem wirklichen Werkstoffverhalten ergibt, die auf der sicheren Seite liegt. Praktisch ist stets σ_{ϑ} die größte Spannungskomponente. Trotzdem tritt Plastifizierung im allgemeinen nicht dann ein, wenn sie den Wert der Fließgrenze σ_F erreicht, denn das gilt nur im einachsigen Spannungszustand. Im mehrachsigen Falle muß die größte Hauptspannung einen Wert

$$\sigma'_F = \eta \sigma_F \quad 17.11(4)$$

erreichen. Dabei hängt η vom Verhältnis der Hauptspannungen ab, und zwar in einer Weise, die durch die Anstrengungshypothese bestimmt wird. Es seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ allgemein die drei Hauptspannungen, σ_1 die größte. Dann ist η eine Funktion von σ_2/σ_1 und σ_3/σ_1 , die in Abb. 17.11.2 dargestellt ist, und zwar a für die Gleitarbeitshypothese (v. Mises), b für die Schubspannungshypothese (Tresca). Bei ebenem Spannungszustand, der angenommen werden darf, liegt demnach für die Hypothese a der Wert η zwischen 1 und 1,15, für die Hypothese b ist er genau 1. Dieser letztere Wert möge zunächst zugrunde gelegt werden, wobei am Schluß gegebenenfalls noch eine Berichtigung vorgenommen werden kann, wenn man die genauere Hypothese zugrunde legen will. Man beachte, daß die genannten η -Werte nur dann zutreffen, wenn keine negativen Radialspannungen auftreten. Das darf auch in dem Falle vorausgesetzt werden, wo eine Schrumpfungsvorrichtung vorgesehen ist, denn in dem zu untersuchenden Zustand der vollständigen Plastifizierung ist der Schrumpfdruck stets verschwunden.

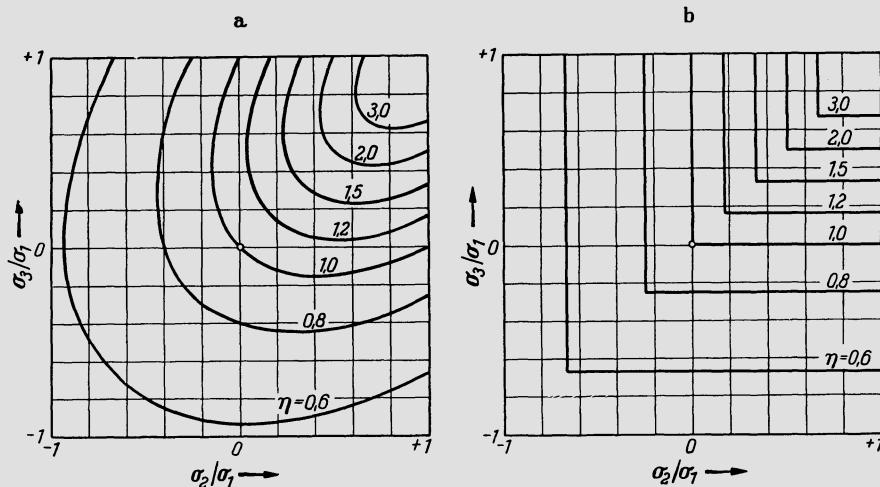


Abb. 17.11.2. a) Faktor η nach der Gleitarbeitshypothese; b) Faktor η nach der Schubspannungshypothese

Unter diesen vereinfachenden Voraussetzungen ist die gesuchte Bruchdrehzahl dann erreicht, wenn im ganzen tragenden Querschnitt die Tangentialspannung σ_F herrscht, denn eine größere ist nicht möglich. Wenn man mit Index 0 die Größen kennzeichnet,

die auftreten bei der Winkelgeschwindigkeit ω_0 , für welche die Scheibe gerechnet ist und beachtet, daß σ_{ra} proportional ω^2 ist, geht Gl. 17.11(3) für die gesuchte Winkelgeschwindigkeit ω_p (vollständige Plastifikation) über in

$$\sigma_F \int_{r_i}^{r_a} y dr = \left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2 \left[y_a r_a \sigma_{ra0} + \rho \omega_0^2 \int_{r_i}^{r_a} r^2 y dr \right]. \quad 17.11(5)$$

In dieser Form ist die Gleichung direkt benutzbar, wenn kein Kranz vorhanden ist, der Umfangskräfte überträgt. Ist ein solcher vorhanden und ist f sein Querschnitt, αf der Umfangskräfte übertragende Anteil desselben, u_k seine Umfangsgeschwindigkeit im Schwerpunkt, so ist Gl. 17.11(5) in folgender Weise zu verallgemeinern. Da die Plastifikation erst abgeschlossen ist, wenn auch der Kranz plastifiziert ist, muß man zum links stehenden Integral noch αf beifügen. Sind z , f_N , σ_z die Schaufelzahl, der Schaufelwurzelquerschnitt und die Fliehkraftspannung in diesem, dann übt ein geschaukeltes Kranzstück von der Bogenlänge $d\varphi$ die Fliehkraft

$$\left[\frac{z f_N \sigma_z}{2\pi} + f \rho u_k^2 \right] d\varphi$$

aus. Demgemäß ist $y_a r_a \sigma_{ra}$ zu ersetzen durch den Ausdruck, der hier in eckiger Klammer steht. So geht schließlich Gl. 17.11(5) über in

$$\sigma_F \left[\int_{r_i}^{r_a} y dr + \alpha f \right] = \left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2 \left[\frac{z f_N \sigma_{z0}}{2\pi} + f \rho u_{k0}^2 + \rho \omega_0^2 \int_{r_i}^{r_a} r^2 y dr \right]. \quad 17.11(6)$$

In dieser Gleichung, oder wenn kein Kranz vorhanden ist in Gl. 17.11(5), ist alles bekannt außer ω_p , womit diese gesuchte Größe berechenbar ist.

Wenn man die Untersuchung noch verfeinern will durch Einführung der Gleitarbeits-hypothese, also $\eta \neq 1$, so kann dies wie folgt geschehen. Nach Gl. 17.3(2) ist

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r yr) = y(\sigma_\theta - \rho r^2 \omega^2) \cdot \cdot \cdot \sigma_r = \frac{1}{yr} \int_{r_i}^r y(\sigma_\theta - \rho r^2 \omega^2) dr. \quad 17.11(7)$$

Nun berechnet man zunächst ω_p wie angegeben, setzt dieses und $\sigma_\theta = \sigma_F$ in 17.11(7) ein, erhält so $\sigma_r(r)$ und kann somit in jedem Radius $\sigma/\sigma_\theta = \sigma_r/\sigma_F$ berechnen. Damit hat man aber auch $\eta(r)$, mithin $\sigma'_F(r)$. Alsdann ersetzt man in 17.11(5) oder (6) das links stehende Integral mit dem vorausgehenden Faktor σ_F durch

$$\int_{r_i}^{r_a} \sigma'_F y dr$$

und berechnet ω_p neu. Grundsätzlich ist zu iterieren, indem man jetzt in 17.11(7) σ_θ durch σ'_F ersetzt.

Hat man ω_p bestimmt, so ist $S_b = (\omega_p/\omega)^2$ der rein statische Sicherheitsfaktor gegen Bersten des Rotors, wenn dieser mit der Winkelgeschwindigkeit ω läuft. Er muß im Extremfall, also beim Ausschleudern, mindestens noch etwa 1,5 betragen. Die Drehzahl des Ausschleuderns liegt üblicherweise etwa 25% über der Betriebsdrehzahl. Selbstverständlich versucht man, hier möglichst viel Reserve zu haben. Abb. 17.11.3 zeigt das Ergebnis einer Spannungsrechnung (rein elastisch), für den ND-Rotor einer halbtourigen Dampfturbine eines Kernkraftwerkes, und zwar für das Doppelte der Normaldrehzahl. Man erkennt, daß die Fließgrenze nur bereichsweise wenig überschritten wird. Es würde also noch keine volle Plastifikation stattfinden. Somit würde also der Rotor selbst dann nicht explodieren, wenn die Maschine infolge Versagens auch der Sicherheitsregelung durchbrennen würde.

Mit ω_p ist erst eine äußerste Grenze gegeben, und selbstverständlich sind weitere Kontrollen notwendig im Hinblick auf die Sprödbruchgefahr durch Werkstoffermüdung. Die Festigkeitsrechnung liefert Maximalwerte der Vergleichsspannung in irgendwelchen ausgezeichneten Punkten, vor allem am Umfang der Zentralbohrung, wo eine solche vorhanden ist, an allfälligen sonstigen Lochrändern und allgemein an Ausrundungen, Querschnittsübergängen und dgl. Zu diesen Höchstspannungen liefert die thermische Beanspruchung bei transienten Vorgängen (Inbetriebsetzung usw.) im allgemeinen einen wesentlichen Beitrag. Die Beanspruchungen haben daher quasizyklischen Charakter, sind oft sehr hoch, — nicht selten örtlich überelastisch — und es muß daher die Frage der *Lebensdauer* (d. h. der sicher beherrschbaren Zyklenzahl) überprüft werden. Wo solche Spannungsbzw. Verformungsspitzen auftreten an der Oberfläche des Bauteiles, und zwar an solchen Orten, wo leicht geprüft werden kann, ob keine Fehlstellen vorhanden sind, können die Kriterien zur Anwendung gebracht werden, die bei nicht kriechenden Werkstoffen unter 15.9 und 15.11 erläutert und unter 15.13c) zusammengefaßt sind. Die einfache Regel, an solchen Stellen rechnerische Spannungsspitzen bis $2\sigma_F$ zuzulassen, gewährleistet dabei mit einem Sicherheitsfaktor $S_b^I = 2$ meist noch eine Lebensdauer von einigen 1000 Zyklen.

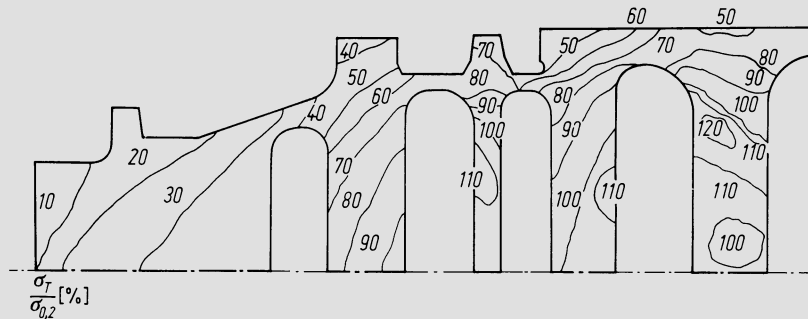


Abb. 17.11.3. Verteilung der Vergleichsspannung im Rotor einer halbtourigen ND-Turbine bei der Durchbrenndrehzahl, die gleich dem Doppelten der Normaldrehzahl ist. Angegeben ist das Verhältnis der Vergleichsspannung zur Fließgrenze

In hoher Temperatur, wo viskoplastisches Verhalten auftritt, sind die Untersuchungen unter 15.8, 15.10 und die Zusammenfassung unter 15.13d heranzuziehen. Wo man die nötigen Werkstoffunterlagen hat, ist besonders die auf bruchmechanischen Überlegungen beruhende Methode von *Majumdar* und *Mariya* vorteilhaft, vgl. 15.12 und 15.13. Bei den im Dampfturbinenbau üblichen Werkstofftypen (bei Dampfturbinen kann diese Temperatursituation vor allem auftreten) führt auch das Verhalten der Unterteilung des Dehnungsbereiches zu befriedigenden Ergebnissen.

Diese Kontrollen können genügen bei verhältnismäßig kleinen Schmiedestücken, bei denen eine sehr gute Durchschmiedung und damit Homogenität vorausgesetzt werden darf und die sehr gut geprüft werden können. Bei großen Schmiedestücken, in deren Innerem herstellungsbedingte makroskopische Fehlstellen kaum ganz auszuschließen sind, sind zusätzlich die Kriterien der Bruchmechanik heranzuziehen. Hier handelt es sich also nicht um eigentliche Spannungsspitzen an der Oberfläche, sondern um die höchsten Spannungen im Inneren. Nach den Ausführungen unter 15.12 ist die Zyklenzahl bis zum Bruch abzuschätzen, wobei die ursprüngliche Rißlänge a nach Erfahrung einzusetzen und am ausgeführten Werkstück durch Ultraschallprüfung zu verifizieren ist, vgl. [23, 28]. Damit ist man in der Regel auf wesentlich tiefere zulässige Spannungswerte geführt als nach anderen Kriterien. Zentralbohrungen in großen Schmiedestücken sollten in dieser Weise untersucht werden, da in ihrer unmittelbaren Nähe Fehlstellen vorhanden sein können, die nicht sichtbar sind.

Dauerwechselbeanspruchungen sind Rotoren normalerweise höchstens in unmittelbarer Nähe der Schaufelbefestigung ausgesetzt, und diese sind zu behandeln wie die Fußpartie der Schaufeln selbst. Hohe Dauerwechselbeanspruchungen ganzer Scheiben können entstehen bei Scheibenschwingungen. Resonanzschwingungen dieser Art sind aber hochgradig gefährlich und müssen unbedingt vermieden werden. Hingegen können die für die Werkstoffermüdung maßgebenden Daten durch Korrosion drastisch herabgesetzt werden, was vor allem bei Naßdampfturbinen zu beachten ist, vgl. [29]. In diesem Zusammenhang hat sich auch die Dauerwechselfestigkeit schon als bedeutsam erwiesen, nämlich bei halbtourigen ND-Turbinen mit auf die Welle aufgeschrumpften Scheiben, vgl. [29, 30]. Im Stillstand ist der Schrumpfdruck am größten. Dieser großen Druckspannung überlagert sich nun eine durch das große Läufergewicht bedingte Wechselspannung, sobald die Drehvorrichtung in Betrieb ist. Es entstand in dem in [29, 30] beschriebenen Fall eine Amplitude der Vergleichsspannung, welche die durch Korrosion stark herabgesetzte Dauerwechselfestigkeit überschritt und so zu Rissen in der Welle führte.

Alle Untersuchungen über die Lebensdauer führen unmittelbar auf einen Zeitsicherheitsfaktor S_t . Welchen Wert dieser mindestens haben muß, hängt ab von der Zuverlässigkeit der empirischen Unterlagen und der Genauigkeit der Rechnung. Man wird aber unter günstigsten Bedingungen kaum unter $S_t = 3$ gehen dürfen. Der Beanspruchungs-Sicherheitsfaktor liegt dann in der Größenordnung $S_b = 1,4$.

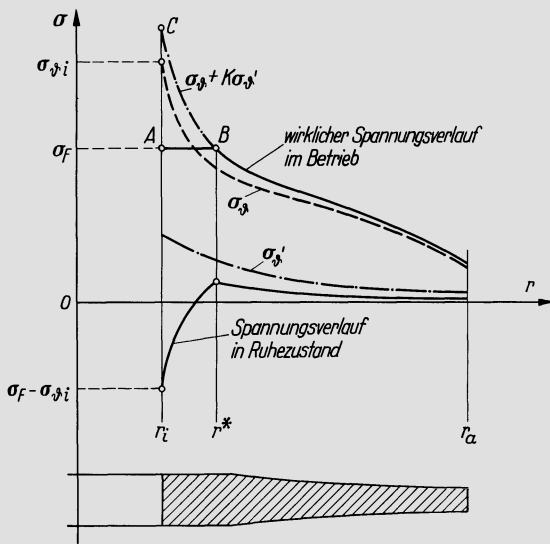


Abb. 17.11.4. Verlauf der Tangentialspannungen in einer Scheibe unter Berücksichtigung des Fließens in der Nähe der Ränder des zentralen Loches, für rotierenden und ruhenden Zustand

Ergänzend sei noch darauf hingewiesen, wie der Spannungsverlauf einer Scheibe mit zentralem Loch bestimmt werden kann, wenn in einem erheblichen Bereich um dieses herum eine Plastifikation stattgefunden hat (was bei aufgeschrumpften Scheiben zu vermeiden ist, damit ein genügender Schrumpfdruck erhalten bleibt). Es möge das Spannungs-Dehnungs-Diagramm Abb. 15.13.1 vorausgesetzt werden und der Einfachheit halber die Schubspannungshypothese, weil dann im plastifizierten Bereich $\sigma_{\phi} = \sigma_F$. In Abb. 17.11.4 ist der elastisch gerechnete Spannungsverlauf gestrichelt eingetragen. Durch die Plastifikation wird die Spannungsspitze bei σ_F abgeschnitten. Der nun so veränderte Spannungsverlauf würde aber die Gleichgewichtsbedingung Gl. 17.11(3) nicht mehr erfüllen, weshalb sich eine zusätzliche Verschiebung gemäß der ausgezogenen Kurve ergibt. Dieser Spannungsverlauf kann folgendermaßen aufgefunden werden.

Man berechnet den Spannungsverlauf in der ruhenden Scheibe ohne Temperaturunterschiede, der sich ergibt, wenn man einzig am Lochrand einen beliebigen Druck p (z. B. gleich der Spannungseinheit) einwirkend denkt. Am Außenrand ist die Radial-

spannung Null. So findet man Spannungsverläufe $\sigma'_r, \sigma'_\vartheta$. Im elastisch bleibenden Bereich außerhalb B ist dann der korrigierte Spannungsverlauf $\sigma_r + K\sigma'_r, \sigma_\vartheta + K\sigma'_\vartheta$ mit noch unbekanntem K . In Analogie zu Gl. 17.11(3) ist nun zu setzen:

$$\int_{r_i}^{r_a} (\sigma_\vartheta + K\sigma'_\vartheta) y dr - \int_{r_i}^{r^{*(K)}} [(\sigma_\vartheta + K\sigma'_\vartheta) - \sigma_F] y dr = y a r_a \sigma_{ra} + \varrho \omega^2 \int_{r_i}^{r_a} r^2 y dr.$$

Das zweite Integral links entspricht dem abgeschnittenen Dreieck ABC , Abb. 17.11.4; r^* ist der Radius, in dem die Spannung den Wert σ_F erreicht und hängt von K ab. Nimmt man noch Gl. 17.11(3) mit $p = 0$ hinzu, so läßt sich obige Gleichung schreiben

$$\int_{r_i}^{r_a} (\sigma_\vartheta + K\sigma'_\vartheta) y dr - \int_{r_i}^{r^{*(K)}} [(\sigma_\vartheta + K\sigma'_\vartheta) - \sigma_F] y dr = \int_{r_i}^{r_a} \sigma_\vartheta y dr$$

oder

$$K \int_{r_i}^{r_a} \sigma'_\vartheta y dr - \int_{r_i}^{r^{*(K)}} [(\sigma_\vartheta + K\sigma'_\vartheta) - \sigma_F] y dr = 0. \quad 17.11(8)$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für K , die durch probeweises Einsetzen zu lösen ist. Damit hat man den gesuchten Spannungsverlauf. Nach Stillsetzen der Maschine und Temperatúrausgleich bleibt eine Spannung übrig, die in $r > r^*$ den Wert $K\sigma'_\vartheta$ hat, während sie am Lochrand selbst, also in r_i einen Wert annimmt, der durch

$$K\sigma'_{\vartheta i} - (\sigma'_{\vartheta i} + K\sigma'_{\vartheta i} - \sigma_F) = \sigma_F - \sigma'_{\vartheta i} \quad 17.11(9)$$

gegeben ist (vgl. Abb. 17.11.4).

17.12 Gestaltung von Rotoren

Grundsätzlich die einfachste Bauform ist der *einteilig geschmiedete Rotor*. Er hat sich in dem Maße eingeführt als die Schmiedetechnik in der Lage war, große Schmiedestücke herzustellen, die den nötigen Qualitätsanforderungen genügen und ist heute die meistverbreitete Ausführung bei Dampfturbinen. Beispiele zeigen Abb. 17.12.1 und 2. Die bei Gleichdruckturbinen übliche Form, bei der durch Eindrehungen Scheiben gebildet werden, hat den Vorteil, daß Rotormasse und Anwärmzeiten vermindert werden. — Es ist eine alte Streitfrage, ob es zweckmäßig sei, solche Rotoren zum Zwecke der Werkstoffkontrolle längs ihrer Achse zu durchbohren. Man verspricht sich davon die Entfernung von Fehlstellen, die im Schmiedestück vor allem dort auftreten, ferner die Möglichkeit, magnetische Reißprüfungen durchzuführen und aus jener Zone Probenmaterial zu gewinnen. Dem steht der Nachteil gegenüber, daß die Spannungsspitze am Lochrand das Doppelte der Spannung ist, die sonst vorhanden wäre. Selbst kleine Fehler in der Nähe des Lochrandes, die durch die Magnetprüfung nicht entdeckt werden, wirken sich, weil sie im Gebiet erhöhter Spannung liegen, ungleich stärker aus, als dies ohne Loch der Fall wäre. Andererseits hat die Ultraschallprüfung einen solchen Stand erreicht, daß sie auch relativ kleine Fehler zuverlässig feststellen kann. Die bruchmechanische Nachrechnung gibt dann die Möglichkeit der Beurteilung und zeigt regelmäßig, daß ohne Loch ein höheres Maß von Sicherheit gewährleistet ist. Bei der heutigen Lage der Dinge dürfte es also richtiger sein, auf die Bohrung zu verzichten.

Wo man den einteilig geschmiedeten Rotor nicht anwenden kann oder will, ist der *gebaute Rotor* häufig im Gebrauch. Die älteste Art der Verbindung zwischen den einzelnen Rotorteilen ist dabei die Schrupfverbindung. Auf eine Welle aufgeschrunpfte Scheiben waren ursprünglich kennzeichnend für alle Gleichdruckturbinen und sind allmählich verschwunden, als die Schmiedetechnik den Übergang zum einteiligen Rotor ermöglichte.

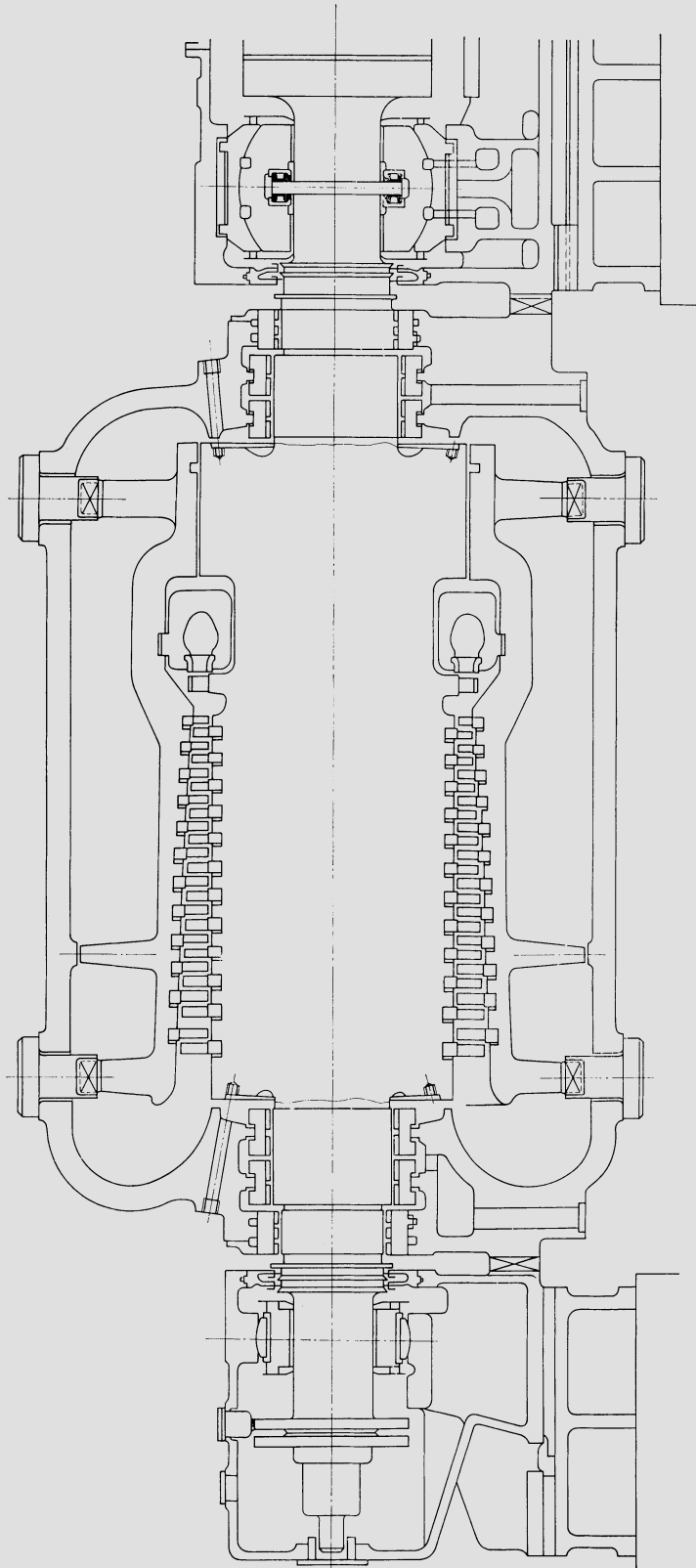


Abb. 17.12.1. HD-Dampfturbine mit geschmiedetem Trommelläufer (Parsons)

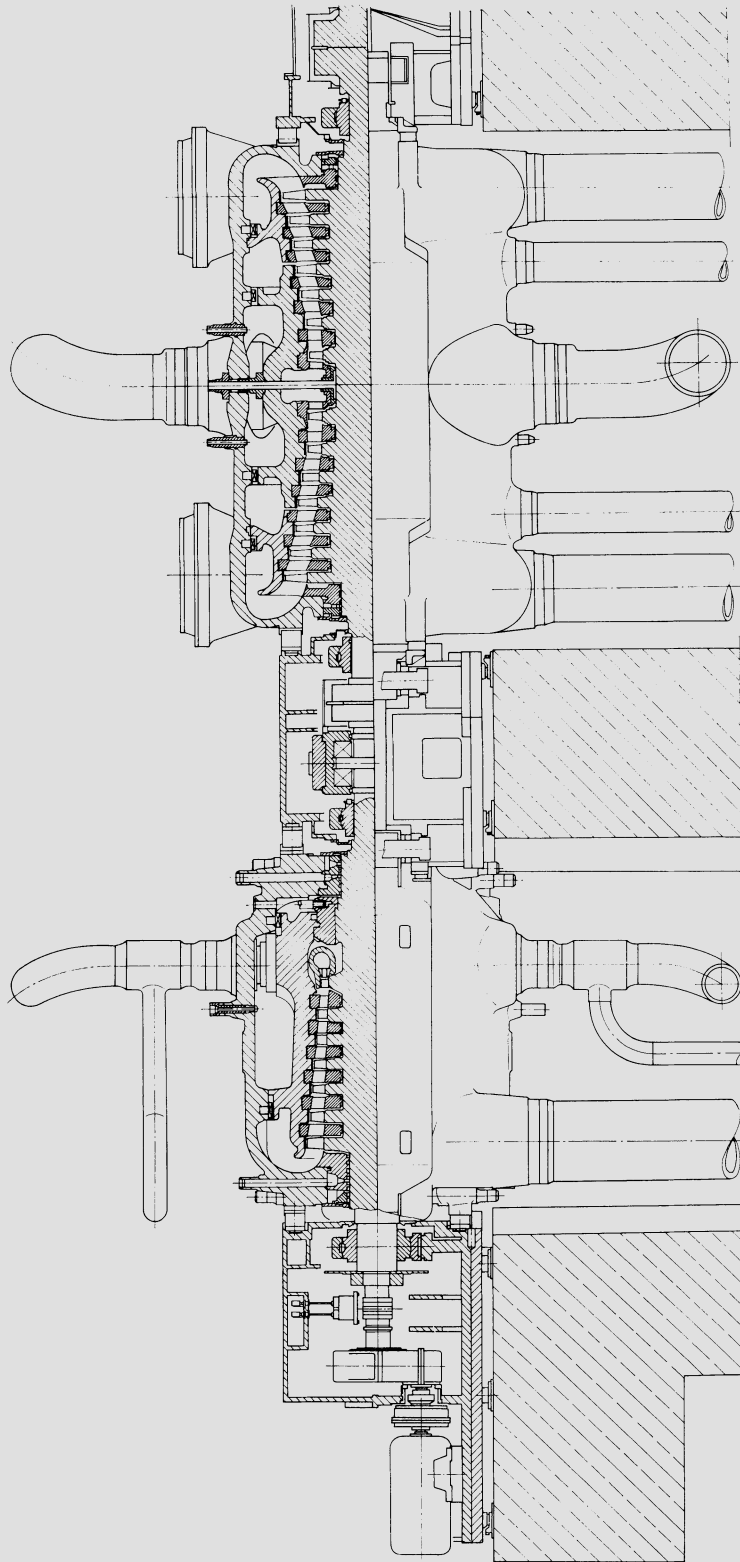


Abb. 17.12.2. Dampfturbogruppe in Kammerbauart mit geschmiedeten Läufern und eingestochenen Radscheiben (MAN)

Die außerordentlich großen Rotoren der ND-Turbinen halbtouriger Maschinen lassen sich aber nicht einteilig herstellen, weshalb hier wieder auf die Konstruktion mit aufgeschrumpften Scheiben zurückgegriffen wurde (vgl. Abb. 17.12.3). Bei mehrstufigen Radialverdichtern sind auf die Welle aufgeschrumpfte Räder stets die normale Ausführungsform gewesen, z. B. Abb. 17.12.4.

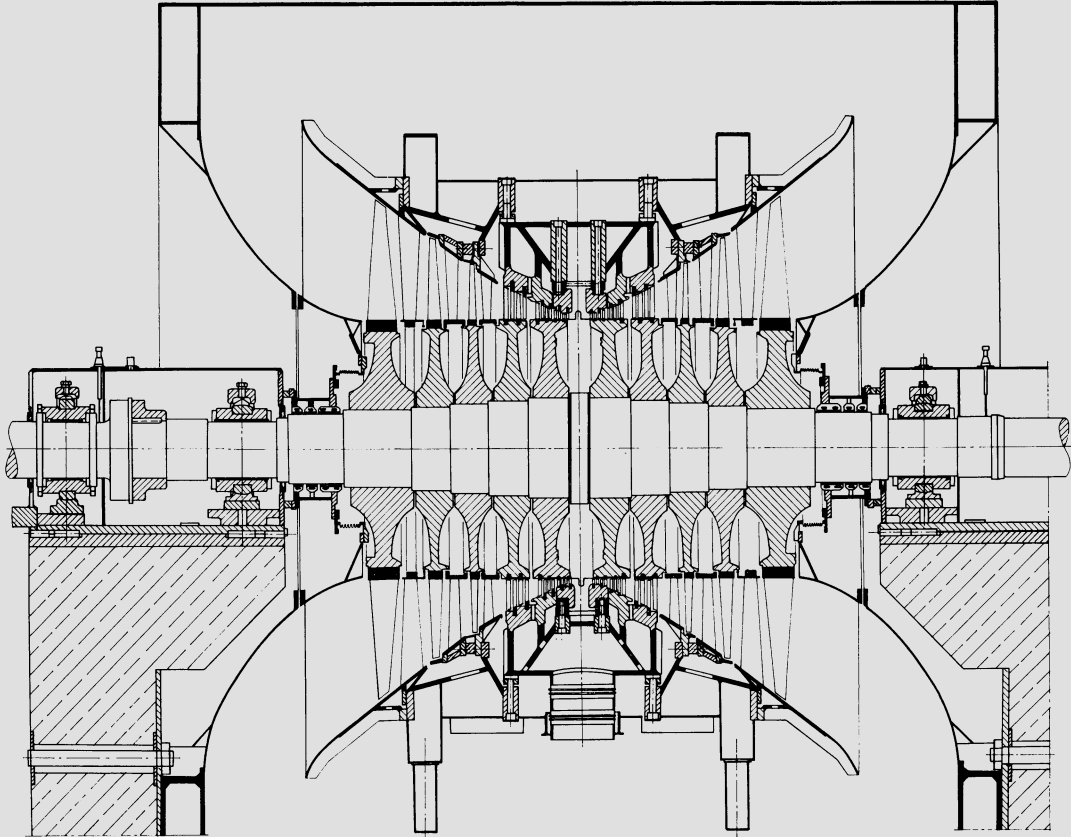


Abb. 17.12.3. Halbtourige ND-Turbine, Läuferscheiben auf Welle aufgeschrumpft (KWU)

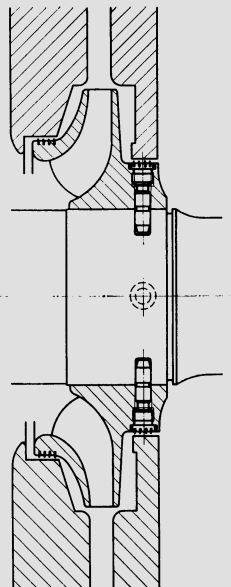


Abb. 17.12.4. Radialverdichterlaufrad, auf Welle aufgeschrumpft, Lagesicherung durch Zapfen (Sulzer)

Um die Scheiben auf der Welle gegen Verdrehen zu sichern, war es allgemein üblich, Keile vorzusehen. Die Spannungsspitzen an den Keilbahnen in der Zone, wo die Spannungen ohnehin ihre höchsten Werte aufnehmen, können aber zu einer ernstesten Gefährdung führen, besonders in ND-Dampfturbinen, wo die Ermüdungsgrenzen des Werkstoffes durch Korrosion stark herabgesetzt werden können. Es sind daher schon Rotorexplosionen aufgetreten, die von der Keilbahn ihren Ausgang nahmen, vgl. [31, 32]. Die Untersuchung zeigt indessen, daß es bei den halbtourigen ND-Dampfturbinen möglich ist, die Auslegung so zu wählen, daß die Reibung genügt, um nicht nur das Vollastdrehmoment zu übertragen, sondern sogar das Kurzschlußmoment, das bis zum Fünffachen des Vollastdrehmomentes ansteigen kann. Man beachte, daß Reibungskoeffizienten von 0,45 durchaus erreichbar sind, aber selbst mit 0,2 ist das Problem lösbar. Will man Keile zur Lagefixierung anordnen, so sollten diese die Kontaktfläche zwischen Welle und Scheibe nicht durchqueren, sondern in überstehende Ränder der Nabe eingreifen, die keine Schrumpfspannung erfahren und weniger hoch beansprucht sind.

Abb. 17.12.4 zeigt eine Lösung, die bei Radialverdichtern von Sulzer angewandt wird. Die Sicherung gegen Drehung des Rades auf der Welle wird durch radiale Zapfen gewährleistet. Diese sichern die Zentrierung auch bei beliebiger Ausdehnung des Rades, ein Gedanke, der schon bei der Ljungström-Radialturbine konsequent zur Anwendung kam. Bei dieser Anordnung darf also der Schrumpfdruck im Betriebe verschwinden. — Abb. 17.12.5 zeigt den Rotor einer ND-Turbine von Westinghouse mit aufgeschrumpften Scheiben der Endstufen, die durch Schweißung an dünnen Rändern noch zusätzlich gesichert sind. Diese Scheiben sind kleine Schmiedestücke, können also aus hochwertigem Werkstoff sehr fehlerfrei geliefert werden.

Hohle Trommelrotoren für mäßige Umfangsgeschwindigkeiten können durch Schrumpfung mit dem Wellenende verbunden werden (Abb. 17.12.6). Sie sind etwas leichter als volle Trommelrotoren und rascher durchgewärmt als diese. Auch ist die Werkstoff-

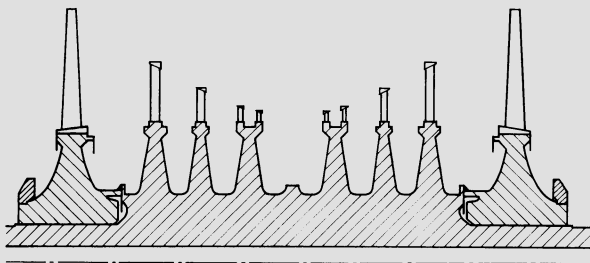


Abb. 17.12.5. Läufer einer ND-Turbine mit aufgeschrumpften Scheiben der Endstufen, Lagesicherung durch Schweißung an dünnen Rändern (Westinghouse)

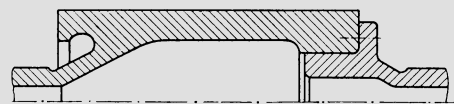
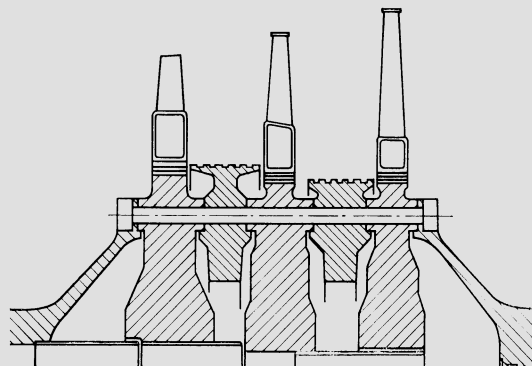


Abb. 17.12.6. Schrumpfverbindung zwischen Trommelrotor und Wellenende

Abb. 17.12.7. Gasturbinenrotor von General Electric. Rotor besteht aus Scheiben und Zwischenringen, die durch 12 Anker am Umfang zusammengezogen werden. Im Zentrum Kühlluftzufuhr



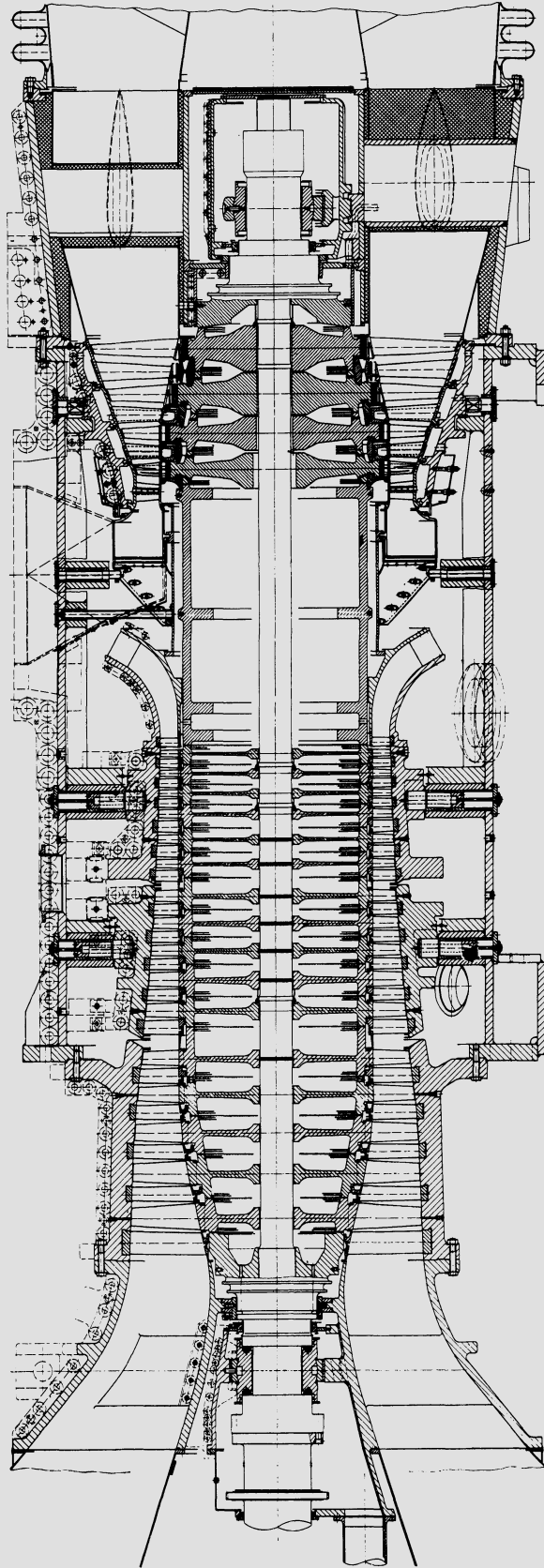


Abb. 17.12.8. Gasturbine der KWU. Scheibenrotor mit zentralem Zuganker

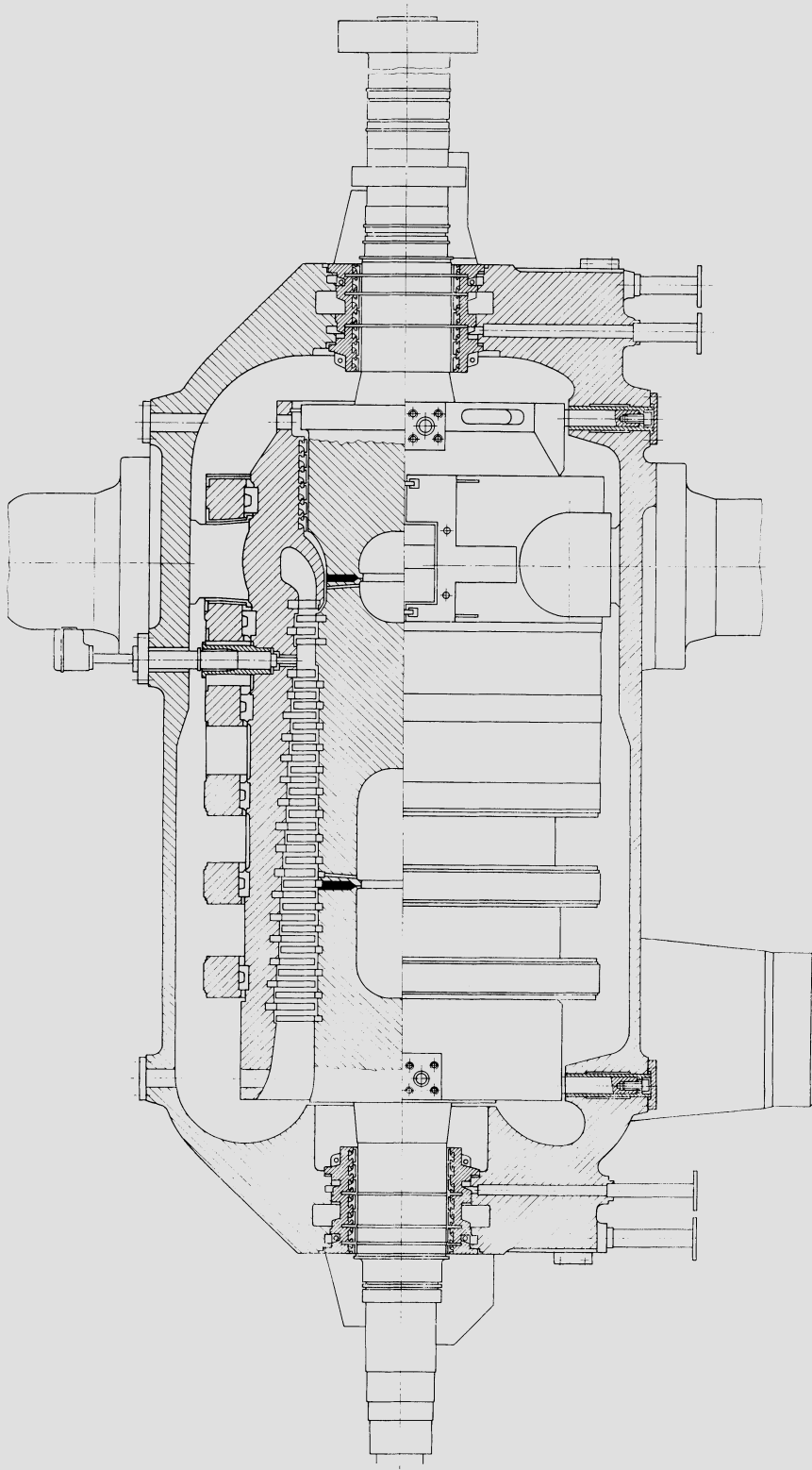


Abb. 17.12.9. HD-Dampfmaschine von BBC. Geschweißter Trommelrotor. Zweiteiliger flanschloser Leitschaufelträger durch Schrumpfringe zusammengehalten, wärmedämmende Zwischenringe zwischen Leitschaufelträger und Schrumpfringen

kontrolle erleichtert und die Wahrscheinlichkeit von Fehlstellen in dem tatsächlich benutzten Teil des Schmiedestückes gering. Die Spannungen liegen aber naturgemäß verhältnismäßig hoch.

Der Gasturbinenbau hat ebenfalls einteilig geschmiedete Turbinenläufer verwendet. Da sie im Hinblick auf die Wärmespannungen für sehr raschen und häufigen Start aber wenig geeignet sind, hat man sie mehr und mehr verlassen. Die Beherrschung hoher Umfangsgeschwindigkeiten und die Anordnung der nötigen Kühlluftführungen gelingt zudem mit Scheibenbauarten leichter. Die Schrumpfung verbindet aber aus, vor allem der raschen Temperaturänderungen wegen. Das führt auf Bauarten, bei denen Scheiben durch Zuganker zusammengezogen werden. Bei der Konstruktion nach Abb. 17.12.7 (General Electric Co.) sind mehrere Zuganker am Umfang angeordnet, während bei derjenigen nach Abb. 17.12.8 (KWU) ein zentraler Zuganker vorgesehen ist. Die Drehmomentübertragung bedarf bei Konstruktionen mit mehreren Ankern am Umfang keiner besonderen Vorkehrungen. Bei der Konstruktion mit Zentralanker sind die zylindrischen Ränder, mit denen die Scheibenkörper aneinanderstoßen mit Hirth-Stirnverzahnungen versehen, die ineinandergreifen und so gleichzeitig für Zentrierung und Drehmomentübertragung sorgen. Der Zuganker wird torsionsfrei vorgespannt und ist in den Scheiben mehrfach abgestützt, damit seine Eigenschwingungszahl so hoch zu liegen kommt, daß sie nicht stört.

Man ist in der Regel darauf geführt, den Läufer aus einzelnen Scheiben zusammenzusetzen, sobald die Schaufeln axial eingesetzt werden sollen, und zwar mit verschiedenen Schaufelzahlen der einzelnen Stufen, weil dann die einzelnen Scheiben getrennt gefertigt werden können. Darum hat im Beispiel Abb. 17.12.8 auch der Axialverdichter diesen Aufbau, was eine leichte Konstruktion ergibt. Die Rotoren industrieller Axialverdichter sind oft einteilige Schmiedestücke.

Die dritte Lösung neben dem einteiligen und dem gebauten Rotor ist der *geschweißte Rotor*, der von BBC entwickelt und lange Zeit einzig von dieser Firma verwendet wurde. In seiner Form kann er weitgehend den jeweiligen Erfordernissen angepaßt werden, z. B. hohle Trommel im HD-Teil, Scheiben im ND-Teil (vgl. Abb. 17.12.9 und 10). Die tiefe

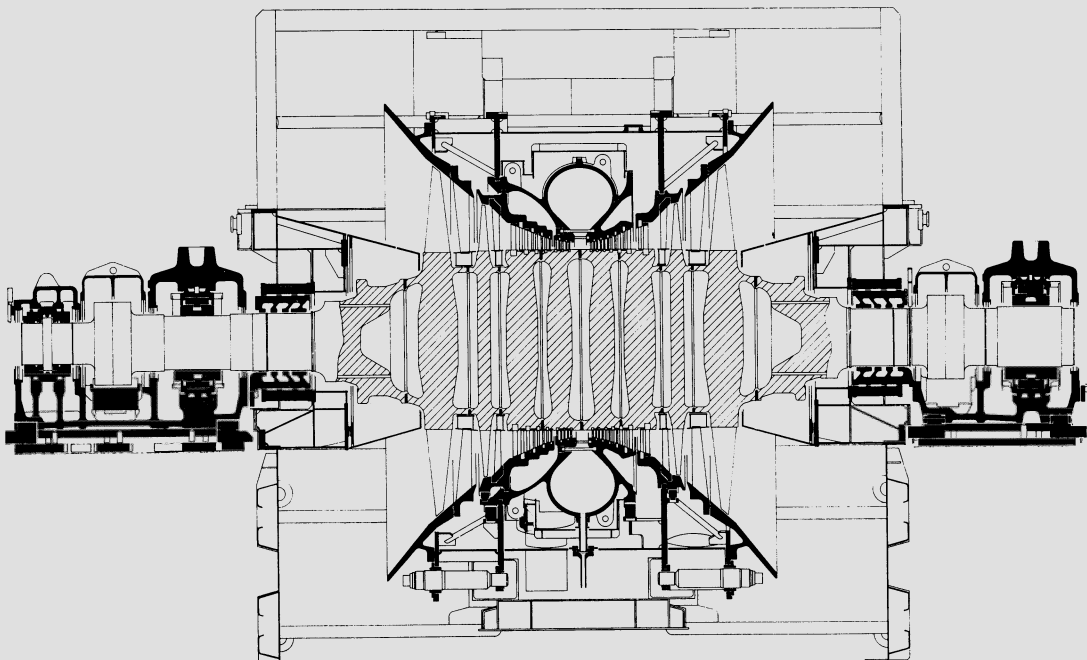


Abb. 17.12.10. ND-Dampfturbine von BBC. Geschweißter Rotor aus Scheiben gebildet

Tulpennut (Abb. 17.12.11), in die später das Schweißgut eingebracht wird, schließt unten mit einer zentrierenden Versatzung, die zunächst mit einer Wolframelektrode durchgeschmolzen wird. Sind die Teile bereits so verbunden, so wird die Nut mit Schweißmaterial ausgefüllt, worauf der Rotor spannungsfrei gegläht wird. Man kommt so mit

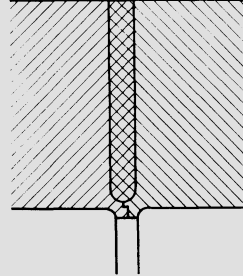


Abb. 17.12.11. Tulpennut der geschweißten BBC-Rotoren

kleineren Schmiedestücken aus, die sehr gut durchgeschmiedet werden können und läuft kaum Gefahr, daß sich der Rotor infolge Asymmetrien der Werkstoffstruktur in Funktion der Temperatur verkrümmt, was bei einteiligen Rotoren gelegentlich auftritt. Die Konstruktion ist selbst bei halbtourigen ND-Läufern anwendbar und zeichnet sich dort durch besonders günstige Spannungen aus. Die Fertigbearbeitung kann allerdings erst nach dem Ausglühen erfolgen, weshalb der Rotor in dieser Beziehung den gleichen Beschränkungen unterworfen ist wie ein einteiliger. — Dieser Nachteil entfällt, wenn man die Pulverschweißung durch Elektronenstrahlschweißung ersetzt, da dann nicht ausgeglüht werden muß, so daß fertigbearbeitete Teile zusammenschweißt werden können. Abb. 17.12.12 zeigt einen Gasturbinenrotor von Sulzer, dessen Scheiben miteinander und mit der Welle durch Elektronenstrahlschweißung verbunden sind.

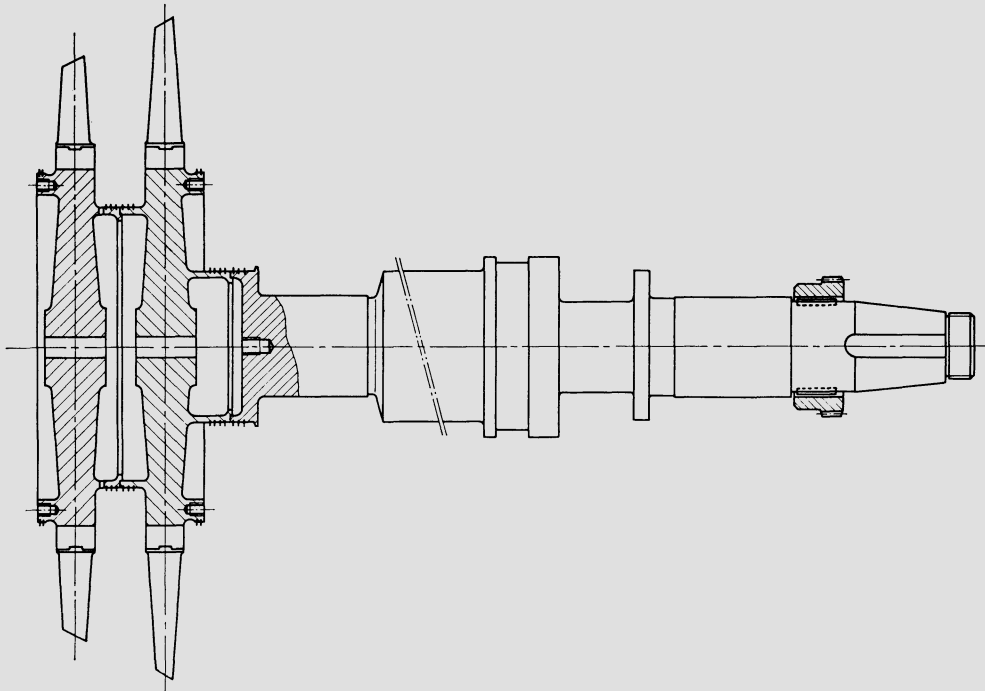


Abb. 17.12.12. Gasturbine von Sulzer, Scheiben miteinander und mit der Welle durch Elektronenstrahlschweißung verbunden

Literatur zu Kap. 17

1. *Peterson, R. E.*: Stress Concentration Design Factors. New York, London: Wiley, Chapman and Hall 1953.
2. *Rühl, K. H.*: Die Tragfähigkeit metallischer Baukörper. Berlin: Ernst & Sohn 1952.
3. *Kauderer, H.*: Nichtlineare Mechanik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1958.
4. *Biezeno, C. B.*; *Grammel, R.*: Technische Dynamik, 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1953.
5. *Stodola, A.*: Dampf- und Gasturbinen, 6. Aufl. Berlin: Springer 1924.
6. *Donath, M.*: Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe nach einem neuen Verfahren. Berlin 1929.
7. *Grammel, R.*: Ein neues Verfahren zur Berechnung rotierender Scheiben. Dingers Polytech. J. 338 (1923) 217.
8. *Honegger, E.*: Festigkeitsberechnung von rotierenden konischen Scheiben. ZAMM 7 (1927) 210.
9. *Keller, C.*: Beitrag zur analytischen Berechnung rotierender Radscheiben. Stodola-Festschrift, Zürich 1929, S. 342.
10. *Keller, C.*: Die Berechnung rotierender Scheiben mit Hilfe von konischen Ringen. Escher-Wyss Mitt. Nr. 1/2 (1932) 22.
11. *Salzmann, F.*; *Kissel, W.*: Kurvenscharen zur Berechnung der Spannungen in rotierenden und ungleichmäßig erwärmten Scheiben nach dem Verfahren von Keller. Escher-Wyss Mitt. Sonderheft 'Dampfturbinen' (1950/51) 69.
12. *Strub, R.*: Méthode générale de calcul des tensions mécaniques et thermiques dans les disques de profil quelconque. Bull. Tech. Suisse Rom. 80 (1954) 97.
13. *Manson, S. S.*: Determination of Elastic Stresses in Gas Turbine Disks. NACA-Rep. 871 u. NACA-TN 1279.
14. *Löffler, K.*: Die Berechnung von rotierenden Scheiben und Schalen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1961.
15. *Beglinger, V.*: Die Berechnung der elastischen Spannungsverteilung in rotierenden Scheiben bei beliebig temperaturabhängigen Werkstoffeigenschaften. Mitt. a. d. Inst. f. Therm. Turbomasch. ETH, Nr. 13. Zürich: Juris-Verlag 1969.
16. *Häusler, N.*: Zum Mechanismus der Biegemomentübertragung in Schrumpferverbindungen. Konstruktion 28 (1976) 103–108.
17. *Durelli, A. J.*; *Murray, W. M.*: Stress Distribution around an Elliptical Discontinuity in any Two-Dimensional Uniform and Axial System of Combined Stress. Proc. SASA 1 (1943) 19.
18. *Schultz, K. I.*: Over den Spannungstoestand in doorborde Platen. Diss. TH Delft 1941.
19. *Schilhansl, M. J.*: Stress Analysis of a Radial-Flow Rotor. Trans. ASME, J. Eng. Power 84 (1962) 124–130.
20. *Schlachter, W.*: Vereinfachte Spannungsberechnung in Radialrädern mit Deckscheibe. Traupel Festschrift. Zürich: Juris-Verlag 1974, S. 273–301.
21. *Gallagher, G. H.*: Finite-Element-Analysis. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976.
22. *Hohn, A.*: Die Rotoren großer Dampfturbinen. Brown Boveri Mitt. 60 (1973) 404–416.
23. *Hohn, A.*: Die mechanische Auslegung von Dampfturbogruppen. Brown Boveri Mitt. 63 (1976) 379–391.
24. *Fister, W.*; *Heiderich, H.*: Untersuchungen über den Einfluß von einigen geometrischen Parametern auf den Verformungs- und Spannungszustand von Radialverdichterlaufrädern. VDI-Ber. 264 (1976).
25. *Wahl, A. M.*: Stress Distribution in Rotating Disks Subjected to Creep Including Effects of Variable Thickness and Temperature. J. Appl. Mech. Trans. ASME 79 (1957) 299–305.
26. *Wahl, A. M.*: Further Studies of Stress Distribution in Rotating Disks and Cylinders Under Elevated Temperature Creep Conditions. J. Appl. Mech. Trans. ASME 80 (1958) 243–250.
27. *Odqvist, K. G.*; *Hult, J.*: Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1962.
28. *Mayer, K. H.*; *Meyer, H. J.*; *Rieß, W.*: Betriebsbeanspruchungen der Wellen moderner Dampfturbinen bestimmen die Anforderungen an die Schmiedestücke. VGB Kraftwerkstechnik 58 (1978) 529–541.
29. *Schieferstein, U.*; *Schmitz, F.*: Korrosions-Zeitschwingfestigkeit von Turbinenwerkstoffen unter betriebsähnlichen Beanspruchungen. VGB Kraftwerkstechnik 58 (1978) 193–200.
30. *Haas, H.*: Großschäden durch Turbinen- oder Generatorläufer, entstanden im Bereich bis zur Schleuder-drehzahl. Der Maschinenschaden 50 (1977) 195–200.
31. *Kalderon, D.*: Steam Turbine Failure at Hinkley Point 'A'. Proc. Inst. Mech. Eng. 186 (1972) 341–375.
32. *Gray, J. L.*: Investigation into the Consequences of the Failure of a Turbine-Generator at Hinkley Point 'A' Power Station. Proc. Inst. Mech. Eng. 186 (1972) 379–390.

18 Festigkeitsprobleme an stillstehenden Teilen

18.1 Allgemeines

Stillstehende Teile, d.h. vor allem Gehäuseteile, gehören zu den Konstruktionselementen, die infolge ihrer komplizierten Geometrie den klassischen Berechnungsmethoden nur wenig zugänglich waren. Man mußte starke Idealisierungen vornehmen, so daß die Festigkeitsrechnungen nur rohe Abschätzungen waren. Messungen mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen an ausgeführten Teilen lieferten wertvolle Informationen, auf die man sich in ähnlich gelagerten Fällen stützen konnte.

Heute wird man dort, wo hohe Beanspruchungen vorliegen und daher eine genauere Rechnung wünschenswert ist, zur Methode der finiten Elemente greifen. Auch dann noch sind Kontrollversuche notwendig. So sind z.B. die Gehäuse der ND-Dampfturbinen auf Außendruck beansprucht, so daß die Gefahr des Einknickens besteht, bei so komplizierten Bauformen ein äußerst verwickeltes Problem, das man in einem Falle [1] mit Hilfe eines Modells experimentell untersucht hat.

Klassische Berechnungsmethoden haben aber trotzdem eine gewisse Bedeutung behalten. Oft gestatten sie immerhin eine rasche Abschätzung der Größenordnungen und geben insbesondere einen Hinweis auf günstige Formgebung, noch bevor eine aufwendige Rechnung angestellt wird.

18.2 Theorie dünner Rotationsschalen

Da Gehäuse oft aus einer rotationssymmetrischen Grundform abgeleitet sind, ist die Theorie der rotationssymmetrischen dünnen Schale in vielen Fällen ein zweckmäßiger Ausgangspunkt zur Wahl ihrer Gestaltung. Die grundlegende Annahme dieser Theorie besagt, daß Schnittflächen, die senkrecht zur Schalenmittelfläche stehen, nur Normalspannungen zu übertragen vermögen. Diese werden außerdem über die Schalendicke als konstant angenommen, so daß insbesondere auch keine Biegemomente übertragen werden können. Die Schale verhält sich also wie eine Membran.

Die Geometrie der drehsymmetrischen Schale (Abb. 18.2.1) ist gegeben durch den Meridian der Mittelfläche — beschrieben durch die Funktion $y = f(x)$ — und die Dickenverteilung $h(s)$. Werden in x_0 und x normale Ringschnitte S_0 und S gelegt, so kann für den so abgegrenzten Schalenteil sogleich die Gleichgewichtsbedingung angegeben werden:

$$2\pi x h \sigma_s \sin \varphi = 2\pi x_0 h_0 \sigma_{s_0} \sin \varphi_0 + \pi(x^2 - x_0^2) p,$$
$$\sigma_s = \frac{x_0 h_0 \sin \varphi_0}{x h \sin \varphi} \sigma_{s_0} + \frac{x^2 - x_0^2}{2x h \sin \varphi} p. \quad 18.2(1)$$

Hier ist p der innere Überdruck, dem die Schale ausgesetzt ist, σ_s die tangential zur Meridiankurve gerichtete Spannung. Für das in Abb. 18.2.1 dargestellte infinitesimale Schalenelement lautet ferner die Gleichgewichtsbedingung in Richtung senkrecht zur Mittelfläche mit σ_t als Tangentialspannung

$$\frac{\sigma_t h}{r_1} + \frac{\sigma_s h}{r_2} = p, \quad 18.2(2)$$

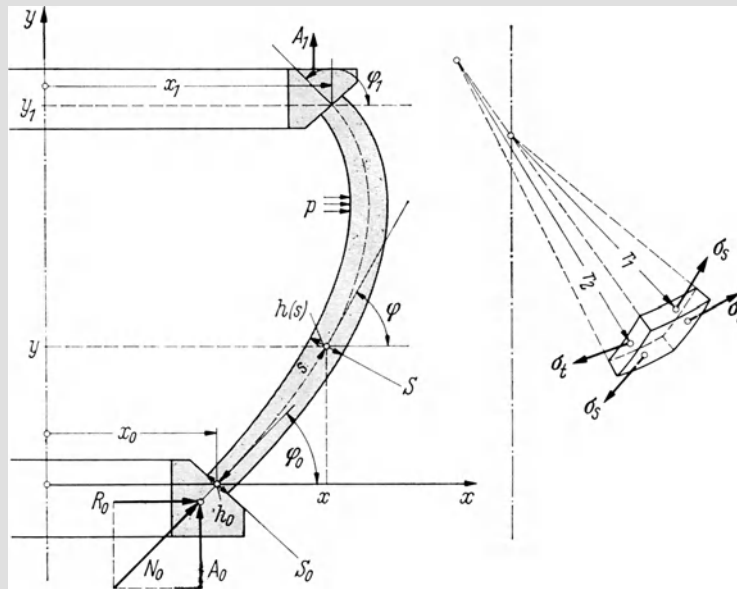


Abb. 18.2.1. Zur Herleitung der Spannungsgleichungen für die dünne dreh-symmetrische Schale

wo r_1 und r_2 die in der Abbildung angegebenen Krümmungsradien sind. Sie sind gegeben durch

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\sin \varphi}{x}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad 18.2(3)$$

woraus durch Einsetzen in 18.2(2) folgt

$$\sigma_t = \frac{x}{h \sin \varphi} \left[p - \frac{y'' h \sigma_s}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right]. \quad 18.2(4)$$

Für eine gegebene Schalen-geometrie liefern die Gln. 18.2(1) und (4) die Spannungsverteilungen, wenn man sich σ_{s0} gibt.

Für die praktische Lösung des Problems ist es zweckmäßig, sich an den beiden Schalenrändern in $y = 0$ und $y = y_1$ völlig starre Ringe vorzustellen (vgl. Abb. 18.2.1). Wenn der untere Ring eine Axialkraft A_0 erfährt, übt er auf die Schale die Normalkraft

$$N_0 = \frac{A_0}{\sin \varphi_0} \quad 18.2(5)$$

aus. Er wird durch die Radialkraft $R_0 = A_0 / \tan \varphi_0$ beansprucht, und N_0 ist die Resultierende aus A_0 und der in Abb. 18.2.1 eingetragenen Reaktion von R_0 . Nun ist aber

$$2\pi x_0 h_0 \sigma_{s0} = -N_0 = -A_0 / \sin \varphi_0, \quad 18.2(6)$$

somit durch Einsetzen in 18.2(1)

$$\sigma_s = \frac{1}{2xh \sin \varphi} \left[(x^2 - x_0^2) p - \frac{A_0}{\pi} \right]. \quad 18.2(7)$$

Für die Axialkraft A_1 am anderen Schalenrand gilt

$$A_1 = 2\pi x_1 h_1 \sigma_{s1} \sin \varphi_1, \quad 18.2(8)$$

oder mit dem Ausdruck für σ_{s1}

$$A_1 = \pi(x_1^2 - x_0^2) p - A_0. \quad 18.2(9)$$

Damit kann nun eine Gehäuseform der in Abb. 18.2.2 dargestellten Art berechnet werden.

Es ist

$$A_0 = -\pi(r_a^2 - r_i^2) p. \quad 18.2(10)$$

Hierauf liefert Gl. 18.2(7) σ_s und Gl. 18.2(4) σ_t an jeder Stelle.

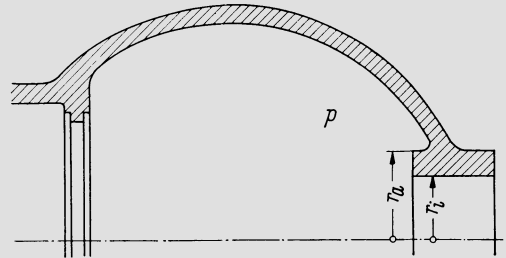
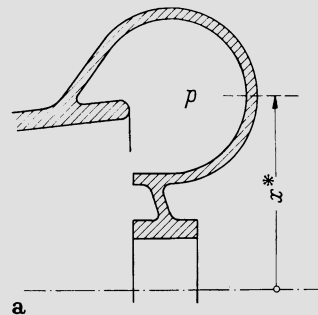


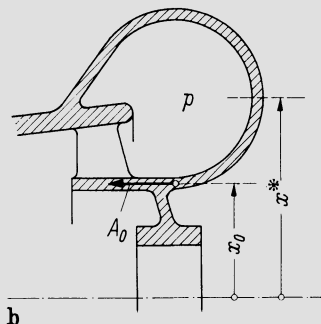
Abb. 18.2.2. Beispiel einer nach der Theorie dünner Schalen berechenbaren Gehäuseform

Hier ist allerdings zu beachten, daß strenggenommen nur eine Näherungslösung vorliegt. Bei der ganzen Untersuchung wurden ja nur Gleichgewichtsbetrachtungen durchgeführt. Es wurde nicht beachtet, ob an den Rändern die radialen Ausweitungen von Schale und Ring miteinander übereinstimmen. Man müßte dies durch geeignete Bemessung der Ringquerschnitte sicherstellen. Ist dies nicht möglich, so werden örtlich die Voraussetzungen der Rechnung gestört. Einerseits treten dann doch Schubspannungen in der Schale auf, andererseits deformiert sie sich so, daß in Randnähe y' und y'' von den vorausgesetzten Werten so abweichen, daß ein geändertes σ_t entsteht, womit alles in allem Gleichheit der Ausweitungen von Schale und Ring hergestellt wird.

Bei Stutzen von Turbomaschinen kommt die in Abb. 18.2.3 dargestellte Form häufig vor. Die Variante a läßt sich indessen nicht nach der Theorie der dünnen Schale behandeln, da der Ringquerschnitt in x^* die Kraft nur durch Schubspannungen übertragen kann. Die Form ist daher ungünstig und kann bei kleiner Wandstärke nur äußerst geringe Druckdifferenzen aufnehmen. Die Berechnung solcher Konfigurationen muß nach der Theorie der biegesteifen Schale erfolgen, vgl. das zusammenfassende Werk von *Gravina* [2]. — Sobald jedoch der eingestülpte Rand axial gehalten werden kann, wie im Beispiel Abb. 18.2.3 b, liegen die Verhältnisse ungleich günstiger und bei mäßiger Wandstärke kann



a



b

Abb. 18.2.3. Beispiele von Gehäuseformen.
a) Gehäuse nicht nach der Theorie dünner Schalen berechenbar, weil Schub- und Biegespannungen; b) Gehäuseform nach der Theorie dünner Schalen berechenbar

die Theorie dünner Schalen benutzt werden. Der Innenrand erfährt eine Kraft A_0 , die sich so einstellt, daß der Schalenteil zwischen x_0 und x^* im Gleichgewicht ist, ohne daß in x^* eine Axialkraft angreift, d. h. es ist

$$A_0 = \pi(x^{*2} - x_0^2) p, \quad 18.2(11)$$

womit 18.2(7) übergeht in

$$\sigma_s = \frac{(x^2 - x^{*2}) p}{2xh \sin \varphi}. \quad 18.2(12)$$

Dieser Ausdruck nimmt für $x \rightarrow x^*$ einen wohldefinierten Wert an.

Die Theorie wurde hier so durchgeführt, daß die Geometrie der Schale gegeben ist. Man kann aber auch umgekehrt von einer Bedingung über den Spannungsverlauf ausgehen. Der Idealfall ist offenbar die ‚Schale gleicher Festigkeit‘, d. h. eine solche, die der Bedingung $\sigma_s = \sigma_t = \sigma_0 = \text{const}$ entspricht. *Tölke* [3] hat gezeigt, daß solche Schalen nicht nur möglich sind, sondern daß sie sogar mit konstanter Wandstärke $h = h_0$ verwirklicht werden können. Unter diesen besonderen Voraussetzungen kann Gl. 18.2(1) in der Form

$$x \sin \varphi - x_0 \sin \varphi_0 = \frac{p(x^2 - x_0^2)}{2\sigma_0 h} \quad 18.2(13)$$

geschrieben werden, während Gl. 18.2(2) mit der ersten der Gln. 18.2(3) auf

$$\sin \varphi + \frac{x}{r_2} = \frac{px}{\sigma_0 h} \quad 18.2(14)$$

führt. Die Differentiation von 18.2(13) nach x liefert

$$\frac{d}{dx}(x \sin \varphi) = \sin \varphi + x \cos \varphi \frac{d\varphi}{dx} = \sin \varphi + x \frac{d\varphi}{ds} = \sin \varphi + \frac{x}{r_2} = \frac{px}{\sigma_0 h}.$$

Damit ist aber Gl. 18.2(14) wiedergewonnen, d. h. diese ist von selbst erfüllt, wenn nur 18.2(13) erfüllt ist. Darin kommt zum Ausdruck, daß die getroffenen Annahmen keinen Widerspruch in sich schließen. Mit den dimensionslosen Variablen

$$\xi \equiv \frac{x}{x_0}, \quad \eta \equiv \frac{y}{x_0}, \quad \omega \equiv \frac{2\sigma_0 h_0}{px_0} - 1 \quad 18.2(15)$$

schreibt sich 18.2(13) in der Form

$$\sin \varphi = \frac{1}{\xi} \sin \varphi_0 + \frac{\xi^2 - 1}{\xi(\omega + 1)}. \quad 18.2(16)$$

Da nun aber

$$\tan \varphi = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}, \quad \eta = \int_1^\xi \frac{\sin \varphi d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}, \quad 18.2(17)$$

folgt durch Einsetzen von 18.2(16)

$$\eta = \int_1^\xi \frac{\xi^2 - 1 + (\omega + 1) \sin \varphi_0}{\sqrt{(\omega + 1)^2 \xi^2 - [\xi^2 - 1 + (\omega + 1) \sin \varphi_0]^2}} d\xi. \quad 18.2(18)$$

Damit ist die Gestalt der Rotationsfläche gegeben. *Tölke* [3] hat diesen Integralausdruck für $\varphi_0 = \pi/2$ und einige Werte des Parameters ω berechnet. Abb. 18.2.4 zeigt das Ergebnis. Der damit gegebene Anhaltspunkt ist auch für Schalen größerer Dicke bedeutsam, da so gestaltete Schalen naturgemäß keine wesentlichen Biegespannungen erleiden (bei eingestülptem Rand natürlich nur, wenn dieser axial gehalten wird). Die Höchstspannung verhält sich zum rechnermäßigen Mittelwert etwa wie die Spannungsspitze in der Zylinderschale zum Mittelwert nach der Kesselformel.

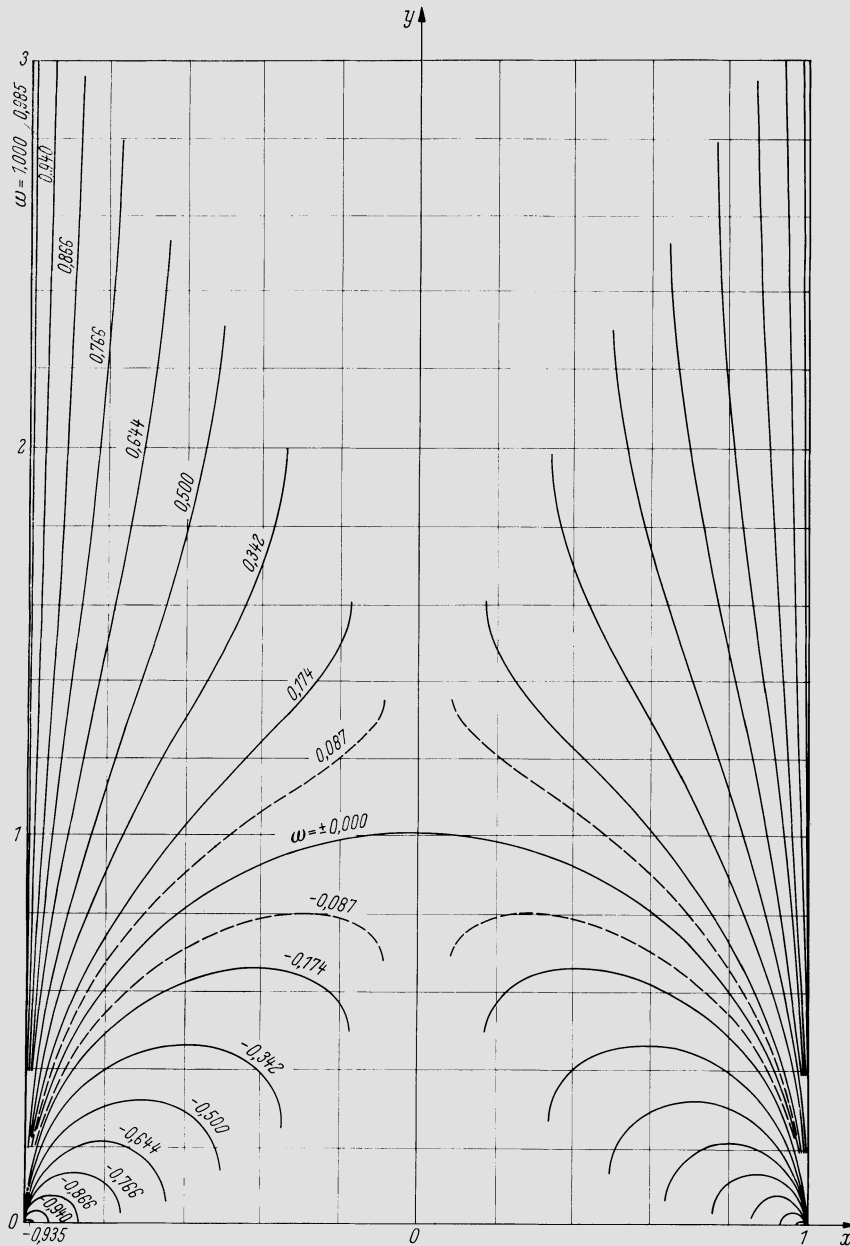


Abb. 18.2.4. Formen von „Schalen gleicher Festigkeit“. Nach Tölke [3]

18.3 Rotationssymmetrische dickwandige Bauteile

Aus naheliegenden montage-technischen Gründen weisen Gehäuse und Leitschaufelträger in der Regel eine horizontale Trennung auf. Die entsprechenden Trennflanschen stören indessen naturgemäß die Kreissymmetrie. Bei Gehäusen für sehr hohen Druck kann dies nachteilig werden, da die Flanschen sehr große Abmessungen annehmen. Daher sind andersartige Lösungen versucht worden, von denen die beiden nachfolgenden größere Verbreitung gefunden haben.

Bei der *Topfbauart* (Abb. 18.3.1) besteht der Grundgedanke darin, ein druckhaltendes Außengehäuse anzuordnen, das keinen Horizontalflansch aufweist und in welches ein in einer Meridianebene (im gezeigten Beispiel vertikal, vgl. Abb. 18.3.2) geteilter Innenteil

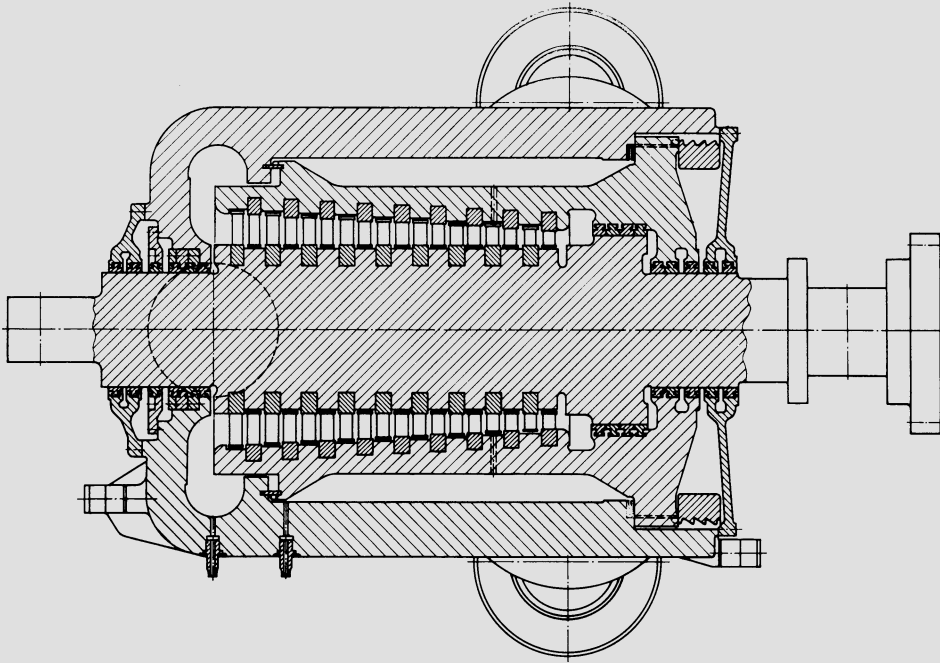


Abb. 18.3.1. Topfgehäuse einer HD-Dampfturbine der KWU

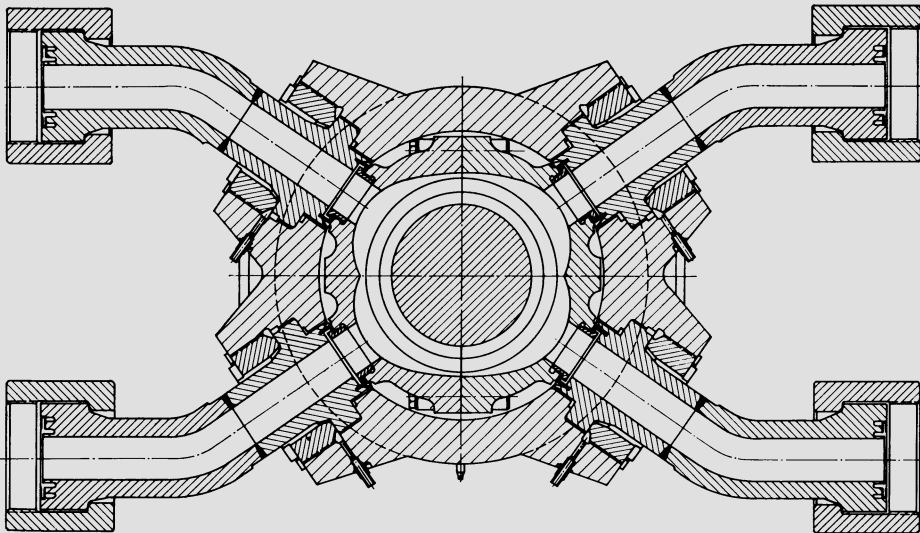


Abb. 18.3.2. Querschnitt durch Topfgehäuse mit Dampfanschlüssen und zweiteiligem Innengehäuse (KWU)

eingesetzt wird, der die Leitschaufeln trägt. Dieser Innenteil ist hier zugleich der Deckel des Außengehäuses, auf das er die Kraft durch einen Gewindingring überträgt. Weitere Einzelheiten dieser bei den HD-Turbinen der KWU üblichen Konstruktion zeigen Abb. 18.3.2–4. Aus Abb. 18.3.3 ist zu erkennen, in welcher Weise der Innenteil im Topfgehäuse wärmebeweglich zentriert ist und läßt die Abdichtung durch einen elastischen Ring U-förmigen Querschnittes erkennen. Abb. 18.3.2 zeigt die Einführung des Dampfes in den Innenteil. Die vier Dampfanschlüsse erhalten L-förmige Dichtungsringe wie in Abb. 18.3.4 dargestellt. Diese sichern die Dichtung bei freier Wärmebeweglichkeit der

Teile. Die Rohrverbindungen der Frischdampfleitungen sind nach den gleichen Prinzipien gestaltet und weisen U-förmige elastische Dichtungsringe auf. Der Druck im Raum zwischen Topfgehäuse und Innenteil wird dadurch bestimmt, daß dieser Raum durch Bohrungen mit einer geeigneten Stufe (im gezeigten Beispiel mit der zweiten) verbunden wird. Bei Frischdampfdrucken über 190 bar wird so dafür gesorgt, daß Druck und Temperatur im Zwischenraum etwa 40 bar bzw. 20 °C unter den Werten des Frischdampfes bleiben, vgl. *Engelke* und *Scheffczyk* [4]. Für niedrigeren Frischdampfdruck und Temperaturen bis 535 °C können die Dichtungselemente an den Dampfanschlüssen weggelassen werden, so daß der Zwischenraum und somit das Topfgehäuse unter dem vollen Frischdampfdruck stehen. — Stets nimmt also das Topfgehäuse mindestens den größten Teil des gesamten Überdruckes auf, wozu es vermöge seiner flanschlosen Bauart hervorragend geeignet ist.

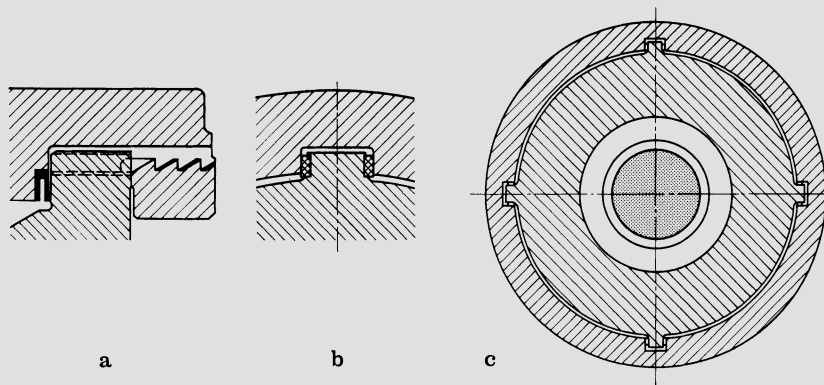


Abb. 18.3.3. Konstruktionsdetails zu Topfgehäuse der KWU. a) Fixierung des Innengehäuses und Abdichtung durch U-Ring; b) Detail der Fixierung; c) Fixierung durch vier radial verschiebbare Elemente, die freie Wärme-
dehnung und Zentrierung gewährleisten

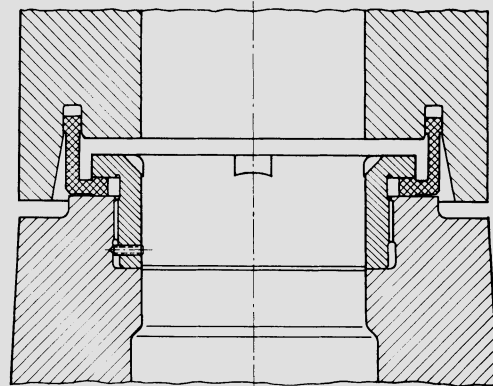


Abb. 18.3.4. Übergang des Dampfanschlusses vom Außengehäuse zum Innengehäuse. Beide Stützen können sich frei gegeneinander verschieben. Ein elastischer Ring mit L-Querschnitt besorgt die Abdichtung (KWU)

Der Innenteil hat höchstens über einen Teil seiner Längserstreckung einen mäßigen inneren Überdruck aufzunehmen, wozu die verhältnismäßig leichte Flanschverbindung genügt, die vor allem ein Unrundwerden verhindern soll. — Die Montage verlangt selbstverständlich besondere Vorkehrungen, vgl. [4]. Innenteil und Läufer werden zuerst für sich montiert und durch Hilfselemente gegeneinander zentriert. Dann wird das Ganze in das senkrecht stehende Topfgehäuse von oben eingefahren, die HD-Turbine in dieser Lage fertig zusammengebaut und schließlich das Ganze in die horizontale Lage gekippt.

Gehäuse ohne horizontalen Trennflansch werden auch bei Radialverdichtern verwendet, die extrem hohen Druck erzeugen müssen, so vor allem bei der Ammoniaksynthese, vgl. das Beispiel Abb. 18.3.5.

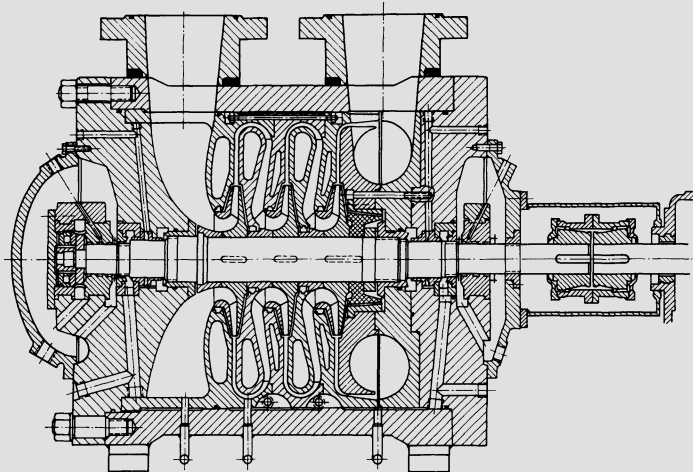


Abb. 18.3.5. Radialverdichter für Ammoniaksynthese mit Topfgehäuse (Nuovo Pignone)

Die andere Sonderform, die größere Verbreitung gefunden hat, ist diejenige von BBC mit einer *Schrumpfringverbindung am Innengehäuse* (Abb. 17.12.9). Das Außengehäuse steht hier unter dem Druck, der am Austritt des HD-Teiles oder an einer Anzapfstelle herrscht. Es ist in üblicher Weise horizontal getrennt und sein Flansch stellt keine außergewöhnlichen Probleme. Das Innengehäuse ist ebenfalls zweiteilig, wobei die Trennebene mit Rücksicht auf die Frischdampfanschlüsse oft etwa um 45° gegen die Horizontalebene geneigt ist. Diese beiden Gehäusehälften werden durch Schrumpfringe zusammengehalten, wodurch eine kreissymmetrische Anordnung entsteht, die mit günstigem Werkstoffaufwand auch sehr hohen Innendruck zu beherrschen gestattet. Damit die Kreissymmetrie der Spannungsverteilung durch die Trennebene nicht gestört wird, muß dafür gesorgt werden, daß die Umfangsspannungen in den beiden Gehäuseschalen überall Druckspannungen sind. Damit, daß man den Innenteil kreissymmetrisch macht, gewinnt man den Vorteil, daß ein Unrundwerden bei transienten Temperaturänderungen nicht zu befürchten ist, was im Hinblick auf die Radialspele bedeutsam ist. Die Ringe sind mit Dampf umgeben, der kälter ist als derjenige, mit dem das Innengehäuse innen in Berührung steht. Außerdem sind zwischen die Schrumpfringe und die Gehäuseschalen Zwischenringe eingefügt, welche die Wärmeübertragung behindern, und am heißen Ende sind Bleche vorgesehen, welche die Wärmeabstrahlung vom Innengehäuse nach außen dämmen. Alles dies bewirkt, daß die Schrumpfringe im Betrieb kälter sind als das Innengehäuse, was die Schrumpfspannung erhöht. Außerdem wird das Kriechen der Ringe in diesem Temperaturbereich praktisch vermieden. — Die Konstruktion erlaubt sehr gut die Anpassung an die jeweiligen besonderen Gegebenheiten. Andererseits sind auch hier besondere montage-technische Maßnahmen notwendig, da ja die Gruppe bestehend aus Läufer, Innengehäuse und Ringen für sich montiert werden muß, bevor sie als Ganzes ins Außengehäuse eingesetzt werden kann. Bevor die Ringe aufgebracht werden, müssen sie erwärmt werden, und auf gleiche Weise lassen sie sich später wieder entfernen, wenn die Einheit demontiert werden soll.

Auch die hier beschriebenen Konstruktionen können nicht in allen Teilen völlig dreh-symmetrisch gestaltet werden, da Stützen stets gewisse Durchbrechungen erfordern. Die-jenigen Partien, die praktisch zylindrische Gestalt haben, können aber in gleicher Weise

berechnet werden wie unter 17.8 angegeben (die Zylinderschalen werden dabei als unendlich lang vorausgesetzt, über die Berücksichtigung der endlichen Länge vgl. etwa *Eberle* [5] und *Grgić* [6]). Abb. 18.3.6 zeigt eine Zylinderschale mit Innenradius r_i , Außenradius r_a

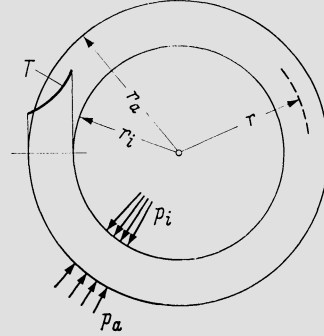


Abb. 18.3.6. Zur Festigkeitsberechnung dickwandiger zylindrischer Gehäuse

und einer Temperaturverteilung $T(r)$, wobei ein Innendruck p_i und ein Außendruck p_a einwirken. Es treten infolge der Druckbeanspruchung die tangentialen, radialen und axialen Spannungen $\sigma_{\theta p}$, σ_{rp} , σ_{ap} auf, während die entsprechenden durch die Temperatur bedingten Spannungen $\sigma_{\theta T}$, σ_{rT} , σ_{aT} sind. Unter Voraussetzung von Linear elastizität sind diese Spannungen:

$$\sigma_{\theta p} = \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \left(\frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\right) (p_i - p_a) - p_a, \quad 18.3(1)$$

$$\sigma_{rp} = -\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \left(\frac{r_a^2 - r^2}{r_a^2 - r_i^2}\right) (p_i - p_a) - p_a, \quad 18.3(2)$$

$$\sigma_{ap} = \frac{r_i^2 p_i - r_a^2 p_a}{r_a^2 - r_i^2}, \quad 18.3(3)$$

$$\sigma_{rT} = \frac{E\beta}{1-\nu} \left\{ \frac{1 - (r_i/r)^2}{1 - (r_i/r_a)^2} \int_{r_i}^a \left[\frac{1}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr - \int_{r_i}^r \left[\frac{1}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr \right\} \quad 18.3(4)$$

$$\sigma'_{rT} = \frac{E\beta}{1-\nu} \left\{ \frac{2r_i^2}{r^3 [1 - (r_i/r_a)^2]} \int_{r_i}^a \left[\frac{1}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right] dr - \frac{1}{r^3} \int_{r_i}^r r^2 \frac{dT}{dr} dr \right\}, \quad 18.3(5)$$

$$\sigma_{\theta T} = r\sigma'_{rT} + \sigma_{rT}, \quad 18.3(6)$$

$$\sigma_{aT} = \nu(\sigma_{\theta T} + \sigma_{rT}) - E\beta T - \frac{2}{r_a^2 - r_i^2} \int_{r_i}^a [\nu(\sigma_{\theta T} - \sigma_{rT}) - E\beta T] r dr. \quad 18.3(7)$$

Die Integrale in den Formeln für die Wärmespannungen lassen sich z. B. ausrechnen für diejenige Temperaturverteilung $T(r)$, die sich im stationären Betriebszustand einstellt und die gegeben ist durch

$$T = T_a + \Delta T \frac{\ln(r_a/r)}{\ln(r_a/r_i)}, \quad 18.3(8)$$

wo $\Delta T = T_i - T_a$ die Temperaturdifferenz zwischen r_i und r_a ist. Damit ergibt sich

$$\sigma_{\theta T} = -\frac{\beta E \Delta T}{2(1-\nu)} \left[\frac{\ln(r_a/r) - 1}{\ln(r_a/r_i)} + \frac{(r_a/r)^2 + 1}{(r_a/r_i)^2 - 1} \right], \quad 18.3(9)$$

$$\sigma_{rT} = -\frac{\beta E \Delta T}{2(1-\nu)} \left[\frac{\ln(r_a/r)}{\ln(r_a/r_i)} - \frac{(r_a/r)^2 - 1}{(r_a/r_i)^2 - 1} \right], \quad 18.3(10)$$

$$\sigma_{aT} = -\frac{\beta E \Delta T}{2(1-\nu)} \left[\frac{2 \ln(r_a/r) - 1}{\ln(r_a/r_i)} + \frac{2}{(r_a/r_i)^2 - 1} \right]. \quad 18.3(11)$$

Bei der Lösung mit Schrumpfringen muß man sich den Schrumpfdruck gleichmäßig über die Länge verteilt denken, diesen Wert zum äußeren Dampfdruck addieren und mit dem so entstehenden ideellen Außendruck p_a rechnen. Dieser muß so viel größer sein als p_i , daß auch unter Berücksichtigung der Wärmespannungen σ_{θ} überall negativ bleibt. Das Schrumpfmaß der Ringe ergibt sich daraus in Analogie zu den Ausführungen unter 17.9. Die Beanspruchung der Ringe selbst läßt sich nach der Theorie der Scheibe konstanter Dicke berechnen, d. h. nach Abschn. 17.5, denn außer dem hydrostatischen Druck erhalten die Endflächen der Ringe keine Axialspannungen, womit $\sigma_a = 0$ im ganzen Ring eine gute Näherung ist.

Schalen, die so hoher Temperatur ausgesetzt sind, daß das Kriechen zu erwarten ist, können nach *Odqvist* und *Hult* [7] behandelt werden. Mit dem Nortonschen Kriechgesetz

$$\dot{\epsilon} = K\sigma^n \quad 18.3(12)$$

findet man für die dickwandige Zylinderschale, die einem Innendruck p ausgesetzt ist

$$\sigma_{\theta} = p \frac{1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(\frac{r}{r_a}\right)^{-\frac{2}{n}}}{\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^{-\frac{2}{n}} - 1}, \quad 18.3(13)$$

$$\sigma_a = p \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{r}{r_a}\right)^{-\frac{2}{n}}}{\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^{-\frac{2}{n}} - 1}, \quad 18.3(14)$$

$$\sigma_r = -p \frac{\left(\frac{r}{r_a}\right)^{-\frac{2}{n}} - 1}{\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^{-\frac{2}{n}} - 1}. \quad 18.3(15)$$

Diese Beziehungen sind vor allem anwendbar auf Leitungen, die den vollen Werten von Dampfdruck und Dampftemperatur ausgesetzt sind.

18.4 Horizontalflansch und Bolzen

Bei Gehäusen und Schaufelträgern mit horizontalem Trennflansch ist es häufig mit hinreichender Näherung möglich, eine vereinfachte Berechnung in folgender Weise vorzunehmen. Es möge zunächst ein Flansch mit schmalen Auflageflächen betrachtet werden, wie in Abb. 18.4.1 dargestellt. Diese Form wird bevorzugt, da auf diese Weise hohe Flächenpressungen q_1 und q_2 entstehen, die oft für eine genügende Dichtung erforderlich sind. Es sei S die Kraft einer Schraube, t die Schraubenteilung. Die übrigen Bezeichnungen sind aus der Abbildung ersichtlich. Es wird eine Gleichgewichtsbetrachtung durchgeführt

an dem schraffiert gezeichneten Gehäusestück, und zwar sei die Ausdehnung senkrecht zur Bildebene gleich der Längeneinheit. Das Gleichgewicht der Kräfte in vertikaler Richtung wird ausgedrückt durch

$$pr_i + q_1 b_1 + q_2 b_2 = \frac{S}{t}, \quad 18.4(1)$$

wo p der innere Überdruck im Gehäuse ist. Das Gleichgewicht der Momente bezüglich des Zentrums O liefert die Beziehung

$$q_1 b_1 (a_1 + r_i) + q_2 b_2 (a_2 + r_i) + pr_i^2 + M = \frac{S}{t} (a_s + r_i). \quad 18.4(2)$$

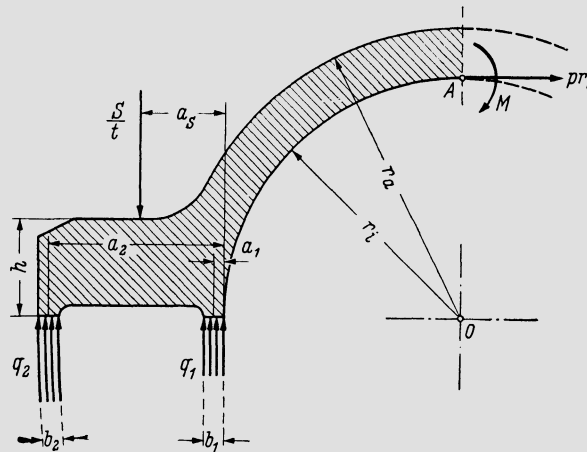


Abb. 18.4.1. Gleichgewichtsbetrachtung an zylindrischem Gehäuse mit horizontalem Trennflansch

Wegen des Gliedes $pr_i^2 + M$ beachte man folgendes. Die Umfangskraft in der Wand hat pro Breitereinheit den Wert pr_i . Reduziert man sie in den Punkt A , so muß man noch das Moment

$$M = \int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\vartheta} (r - r_i) dr \quad 18.4(3)$$

beifügen. — Wenn man Gl. 18.4(1) mit r_i multipliziert und von Gl. 18.4(2) abzieht, erhält man

$$q_1 b_1 a_1 + q_2 b_2 a_2 + M = \frac{S}{t} a_s. \quad 18.4(4)$$

Mit $y = r/r_i$, $Y = r_a/r_i$ wird weiter die Gleichung für M

$$M = \int_{r_i}^{r_a} (\sigma_{\vartheta p} + \sigma_{\vartheta T}) (r - r_i) dr = r_i^2 \int_1^Y (\sigma_{\vartheta p} + \sigma_{\vartheta T}) (y - 1) dy. \quad 18.4(5)$$

Es möge nun angenommen werden, daß in dem durch A gehenden Vertikalschnitt die gleichen Spannungen herrschen wie in einer Zylinderschale mit den Radien r_i und r_a , die einem Innendruck $p_i = p$, einem Außendruck $p_a = 0$ ausgesetzt ist, und in der die durch Gl. 18.3(8) beschriebene Temperaturverteilung herrscht. Dann liefern die Gln. 18.3(1) und (9) die in das Integral Gl. 18.4(5) einzusetzenden Spannungen, und das Moment wird damit

$$M = r_i^2 [p F_p(Y) + \beta E \Delta T F_T(Y)], \quad 18.4(6)$$

wobei $F_p(Y)$ und $F_T(Y)$ folgende Funktionen sind:

$$F_p(Y) = \int_1^Y \left(\frac{Y^2 + y^2}{Y^2 - 1} \right) \frac{y-1}{y^2} dy = \frac{Y^2 \ln Y}{Y^2 - 1} - \frac{1}{2}, \quad 18.4(7)$$

$$\begin{aligned} F_T(Y) &= \frac{-1}{2(1-\nu)} \int_1^Y \left[\frac{\ln(Y/y) - 1}{\ln Y} + \frac{(Y/y)^2 + 1}{Y^2 - 1} \right] (y-1) dy \\ &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{Y^2 \ln Y}{Y^2 - 1} - \frac{Y^2 - 1}{4 \ln Y} \right]. \end{aligned} \quad 18.4(8)$$

Man kann nun Gl. 18.4(6) in 18.4(4) einsetzen und alsdann die Gln. 18.4(1) und (4) nach S/t und q_2 auflösen. So erhält man

$$\frac{S}{t} = \frac{1}{a_2 - a_s} \{ q_1(a_2 - a_1) b_1 + pr_i a_2 - r_i^2 [pF_p(Y) + \beta E \Delta T F_T(Y)] \} \quad 18.4(9)$$

$$q_2 = \frac{1}{b_2} \left[\frac{S}{t} - q_1 b_1 - pr_i \right]. \quad 18.4(10)$$

Man wählt q_1 größer als p , damit Dichtigkeit am inneren Tragrand gewährleistet ist, erhält aus 18.4(9) S/t und aus 18.4(10) q_2 . Man beachte, daß q_2 positiv sein muß; andernfalls wäre q_1 zu vergrößern, bis diese Bedingung erfüllt ist.

Damit lassen sich nun auch die Biegespannungen in den Stegen zwischen den Schraubenlöchern nach der elementaren Balkentheorie berechnen. Sollen sie nicht zu groß werden, so muß eine genügende Flanschhöhe h vorgesehen werden, woraus sich ergibt, daß die Flansche oft sehr groß werden müssen. Das Moment M tritt auch beim Übergang vom Flansch in die Gehäusewand auf (vgl. Abb. 18.4.2), was zu beachten ist, da die Schraubenlöcher oft in diesen Übergangsquerschnitt hineinschneiden. Die Biegebeanspruchung der Stege zwischen den Schraubenlöchern durch die Schraubenkraft S kann herabgesetzt werden durch girlandenförmige Ausbildung der Dichtleiste (vgl. Abb. 18.4.3). Die Rechnung erfolgt dann analog, wird aber etwas unsicherer. Allgemein sind die Gleichgewichtsbedingungen in naheliegender Weise zu ergänzen, wenn in den Zwischenraum zwischen den Dichtleisten Dampf von nennenswertem Überdruck eingeführt wird, um die Durchwärmung des Flansches zu beschleunigen. Bei dieser Anordnung ergibt sich zugleich die Möglichkeit, auch den Bolzen beim Anfahren unmittelbar durch Dampf zusätzlich zu erwärmen.

Bei mäßigem Druck genügt der auf ganzer Fläche dichtende Flansch nach Abb. 18.4.4. Es kann dabei für die Flächenpressung der Ansatz

$$q = \bar{q} + \frac{2x - b}{b} \Delta q \quad 18.4(11)$$

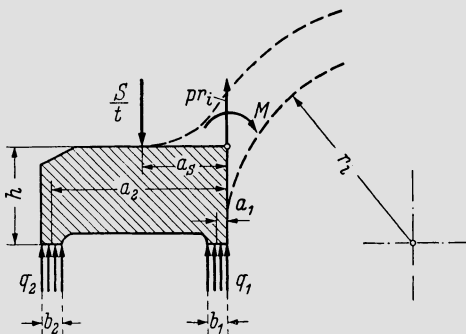


Abb. 18.4.2. Gleichgewichtsbetrachtung am horizontalen Trennflansch allein

gemacht werden, wobei die Extremwerte $\bar{q} + \Delta q$ und $\bar{q} - \Delta q$ werden. Dabei wird das Moment pro Breitereinheit bezüglich des rechten unteren Eckpunktes des Flansches

$$\int_0^b xq \, dx = b^2 \left[\frac{\bar{q}}{2} + \frac{\Delta q}{6} \right].$$

Somit lautet die Bedingung des Gleichgewichtes der Momente mit gleichen Bezeichnungen wie in Abb. 18.4.2

$$b^2 \left[\frac{\bar{q}}{2} + \frac{\Delta q}{6} \right] + M = \frac{S}{t} a_s \tag{18.4(12)}$$

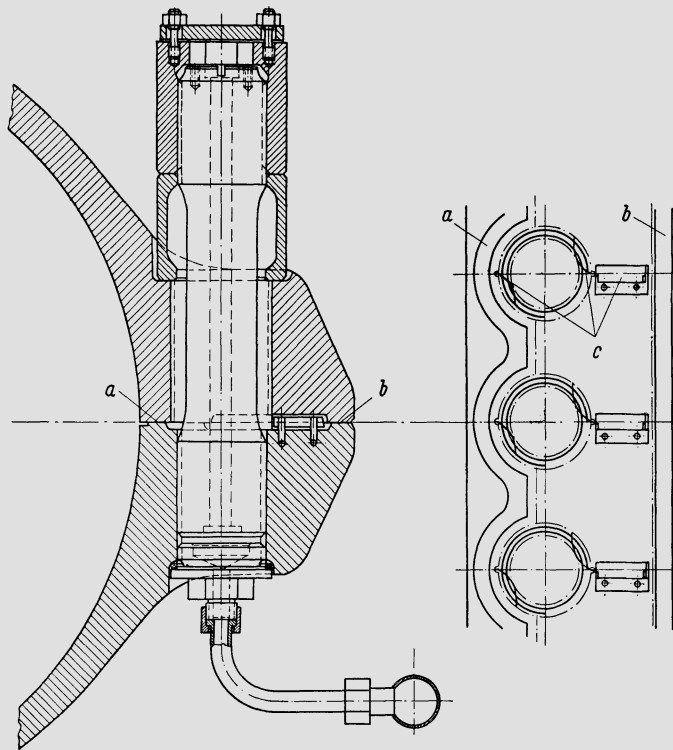


Abb. 18.4.3. Beispiel einer Flanschverschraubung. Flansch wird im Zwischenraum zwischen den Tragflanken *a* und *b* mit Dampf durchströmt, der den Stopfbüchsen entnommen wird. Umlenkbleche *c* zwingen den Dampf, den ganzen Bolzen zu umströmen

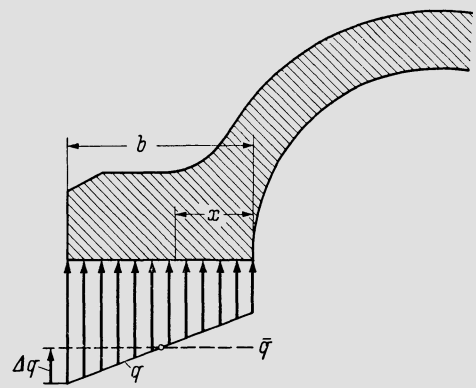


Abb. 18.4.4. Verteilung der Flächenpressung an einem Trennflansch eines zylindrischen Gehäuses

oder wenn man Gl. 18.4(6) einführt und nach Δq auflöst

$$\Delta q = 3\bar{q} + 6 \frac{(S/t) a_s - r_i^2 [p F_p(Y) + \beta E \Delta T F_T(Y)]}{b^2}. \quad 18.4(13)$$

Hierzu kommt noch das Gleichgewicht der Kräfte:

$$\frac{S}{t} = pr_i + \bar{q}b. \quad 18.4(14)$$

Mit einem angenommenen \bar{q} ergibt sich aus 18.4(14) S/t und hierauf aus 18.4(13) Δq , wobei die Bedingungen $|\Delta q| < \bar{q}$ und $\bar{q} - \Delta q > p$ erfüllt sein müssen.

Alle diese Verfahren vernachlässigen die endliche Länge der Gehäuseteile. Daß diese nicht ohne Einfluß ist, erkennt man leicht daraus, daß die Endflächen keine Axialspannungen und folglich auch keine Krimpimente übertragen können. Sind nun etwa die inneren Fasern eines Schaufelträgers heißer als die äußeren, so hat er das Bestreben, sich an den Enden auszuweiten, was auch auf die Flanschverbindung rückwirkt. Grundlegende Überlegungen darüber gibt Reuter [8]. Man wird daher die Vorspannung der Schrauben reichlich wählen müssen. Über Biegungeeffekte an Zylinderschalen vgl. auch [5, 6].

Rundflansche an achsnormalen Trennebenen sind nur halb so stark beansprucht wie diejenigen in Meridianebenen bei zylindrischem Gehäuse. Sie sind ein an sehr vielen Maschinen auftretendes Element und müssen daher hier nicht weiter behandelt werden.

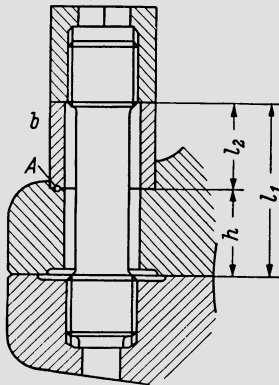


Abb. 18.4.5. Anordnung einer Flanschverschraubung mit Stützhülse

Die Bolzen der Flanschverbindungen müssen überall, wo große Kräfte aufgenommen werden müssen und vor allem große transiente Temperaturänderungen zu erwarten sind, als *Dehnschrauben* ausgeführt werden, damit ihre Vorspannung erhalten bleibt. Typisch ist dabei die Konstruktion nach Abb. 18.4.5, bei der durch Anordnung einer Stützhülse b die Elastizität wesentlich vergrößert wird. Der Dampfturbinenbau bevorzugt für die Flanschverschraubung Stiftschrauben gegenüber den Durchgangsschrauben, weil sie eine bessere Wärmeübertragung vom Flansch auf den Bolzen gewährleisten. — Wenn die Temperatur des Flansches im Mittel um den Betrag Δt höher ist als die des Bolzens und der Stützhülse, verschiebt sich der Punkt A um die Strecke $\beta \Delta T h$ nach oben. Dementsprechend müssen sich Bolzen und Hülse verformen, und zwar ist die Dehnung $\Delta \varepsilon$ bei gleichem Querschnitt beider Elemente

$$\Delta \varepsilon = \frac{\beta \Delta T h}{l_1 + l_2} = \frac{\beta \Delta T h}{h + 2l_2}, \quad 18.4(15)$$

die zusätzliche Spannung also

$$\Delta\sigma = \beta E \Delta T \frac{h}{h + 2l_2}. \quad 18.4(16)$$

Ohne Stützhülse wäre also einfach $\Delta\sigma = \beta E \Delta T$. Wenn etwa $l_2 = h$ gewählt wird, ist die Überspannung $\Delta\sigma$ offenbar dreimal kleiner als ohne Stützhülse. Ist σ_0 die Vorspannung bei ausgeglichener Temperatur, so ist zu verlangen

$$\sigma_0 + \Delta\sigma < \sigma_F, \quad 18.4(17)$$

und zwar muß man hinreichend weit unter der Gießgrenze σ_F bleiben. Bei dieser Betrachtung ist die Nachgiebigkeit des Flansches vernachlässigt. Sie kann in folgender Weise berücksichtigt werden. Es sei k die vorerst unbekannte Federkonstante des Flansches, d.h. die Verschiebung, die der Punkt A unter dem Einfluß der Einheitskraft erfährt. Ferner werde die Elastizität des Systems aus Bolzen, Mutter und Stützhülse dadurch gekennzeichnet, daß für die Vertikalverschiebung Δy des Punktes A , die auch einer Schraubkraft S entspricht gesetzt wird

$$\Delta y = \frac{2l_2 + h + \Delta l}{fE} S. \quad 18.4(18)$$

Hier ist f der Querschnitt von Bolzen und Hülse, Δl eine ideelle zusätzliche Länge, welche die Elastizität der beiden Gewindepertien berücksichtigt. Nun sei S_0 die Vorspannkraft des Bolzens, die ohne Druckbelastung und bei ausgeglichener Temperatur auftritt. Weiter sei S die Schraubkraft, wenn das Gehäuse den Überdruck p aufnimmt, in unserem Falle also $P = r_i p$. Dann verschiebt sich A offenbar beim Übergang von S_0 auf S um

$$\delta y = \frac{2l_2 + h + \Delta l}{fE} (S - S_0). \quad 18.4(19)$$

Die Kraft, die der Flansch erfährt ist bei diesem Übergang zuerst S_0 , dann $S - P$. Somit ergibt sich für den Flansch

$$\delta y = k[S_0 - (S - P)]. \quad 18.4(19')$$

Die beiden δy müssen einander gleich sein, woraus

$$k[S_0 - (S - P)] = \frac{2l_2 + h + \Delta l}{fE} (S - S_0) \quad 18.4(20)$$

oder

$$\left[k + \frac{2l_2 + h + \Delta l}{fE} \right] S_0 = \frac{2l_2 + h + \Delta l}{fE} S + k(S - P). \quad 18.4(21)$$

Hat man den Flansch für den Betriebsfall (d.h. für P) gerechnet, so liefert 18.4(21) S_0 , also auch die Vorspannung $\sigma_0 = S_0/f$. Die Federkonstante k muß man sich empirisch beschaffen. Man kann zu diesem Zwecke in einer Versuchsanordnung mit Dehnungsmeßstreifen einmal ohne und einmal mit P die Dehnungen des Bolzens messen, daraus auf S_0 und S schließen und gewinnt aus 18.4(20) k . Dabei wird allerdings der Wert der ideellen Länge Δl gebraucht. Jedes Gewinde liefert zu Δl einen Betrag von etwa der halben Gewindelänge. Ein Fehler in Δl ist nicht kritisch, das sich einfach k entsprechend etwas verschiebt, ohne daß die Gesamtelastizität gefälscht würde. An die Stelle von 18.4(16) tritt bei Berücksichtigung dieser zusätzlichen Elastizitäten.

$$\Delta\sigma = \beta E \Delta T \frac{h}{h + 2l_2 + \Delta l + kfE}. \quad 18.4(22)$$

Bei Bolzen, die so hohe Temperaturen annehmen, daß das Kriechen bereits in Erscheinung tritt, tritt *Relaxation* ein, d.h. die Vorspannung geht mit der Zeit zurück. Unter 15.8 ist die Theorie dieses Vorganges angegeben. Es ergibt sich aus einer solchen Untersuchung, wie oft die Schraube nachgezogen werden muß und wann ihre Lebensdauer erschöpft ist.

18.5 Leitradzwischenböden

Die Leitradzwischenböden der Turbinen der Kammerbauart stellen festigkeitstechnisch ein äußerst kompliziertes Problem dar, da sie in der Trennebene des Gehäuses geteilt sind, wobei die beiden Hälften nicht miteinander verschraubt werden können. Deshalb besteht keine Kreissymmetrie der Spannungsverteilung. Die Aufgabe kann heute gelöst werden, indem man den Zwischenboden in Plattenelemente einteilt, die Leitschaufeln oder gegebenenfalls die Tragstege durch Stäbe ersetzt und das ganze so entstehende System nach dem Verfahren der finiten Elemente behandelt. Um aber vorgängig einer solchen genaueren Rechnung die Größenordnungen abzuschätzen, greift man zweckmäßig auf ältere einfachere Untersuchungen zurück.

Nachdem schon *Stodola* [9] eine geteilte Kreisplatte ohne zentrales Loch experimentell untersucht hatte, untersuchte *Wahl* [10] die am Rande starr aufliegende zweigeteilte Kreisplatte mit zentralem Loch theoretisch und experimentell. *Taylor* [11] gibt Versuchsergebnisse an Leitradzwischenböden samt Schaufelung. In einem Diskussionsbeitrag zu diesem Artikel geht *Jackson* auf die Theorie von *Wahl* ein und faßt ihre Ergebnisse in folgender Weise zusammen. Die größte Beanspruchung der durch den Überdruck p belasteten Platte herrscht im Schnitt AB (Abb. 18.5.1). Mit den dort angegebenen Bezeichnungen wird die mittlere Biegespannung in AB

$$\bar{\sigma}_b = \frac{\bar{K} p r_a^2}{h^2}, \quad 18.5(1)$$

wo \bar{K} ein von r_i/r_a abhängiger Faktor ist, der in Abb. 18.5.2 dargestellt ist. Die absolut größte Spannung tritt in A auf und beträgt

$$\sigma_{\max} = \frac{K p r_a^2}{h^2}. \quad 18.5(2)$$

K ist ebenfalls der Abb. 18.5.2 zu entnehmen.

Kritischer als diese Spannungen, die kaum je gefährlich werden, ist die *Durchbiegung*, die im Punkt C (Abb. 18.5.1) ihren höchsten Wert erreicht. Sie ist im Hinblick auf die Labyrinthdichtungen am Zwischenboden wichtig. Die Verschiebung v senkrecht zur

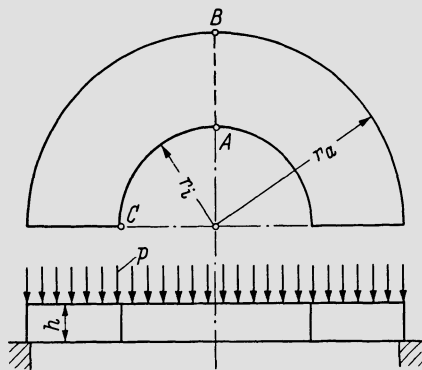


Abb. 18.5.1. Durch Überdruck p belastete Halbringplatte

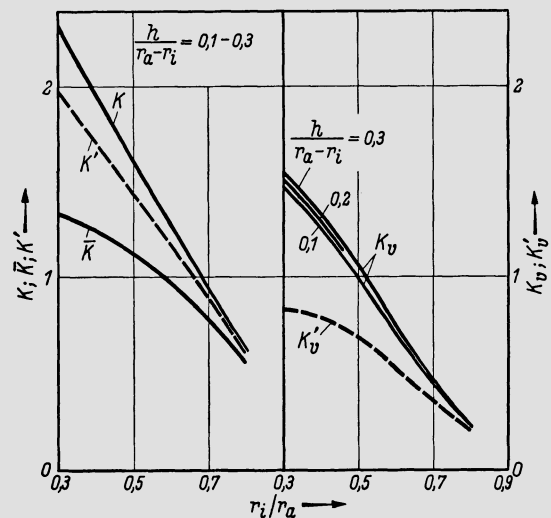


Abb. 18.5.2. Die Faktoren \bar{K} , K , K_v , K' , K'_v . Gestrichelte Linien gültig für ungeteilte Ringplatte

Plattenebene ist im Punkt C

$$v = \frac{K_v p r_a^4}{E h^3}, \quad 18.5(3)$$

wobei wiederum K_v in Abb. 18.5.2 aufgetragen ist. Gestrichelt sind noch Kurven für die Koeffizienten K' und K'_v eingetragen, welche in 18.5(2) und (3) eingesetzt die größte Spannung und die größte Durchbiegung der ungeteilten Kreisringplatte liefern.

In Wirklichkeit liegt die Platte nicht auf einer starren Unterlage, sondern ist durch Schaufeln gehalten, die ihrerseits dadurch in komplizierter Weise beansprucht sind. In einem weiteren Diskussionsbeitrag zum Aufsatz von *Taylor* [11] zeigt *Nolan* das folgende. Man stelle sich zunächst die totale Kraft, die der Zwischenboden auf die Schaufeln ausübt, auf die Schaufeln gleichmäßig verteilt vor. Die wirkliche Beanspruchung der Schaufeln ist ungleichmäßig, und zwar am höchsten in unmittelbarer Nähe der Trennfuge, am schwächsten unter 90° dazu. Wenn man nun die Belastung so weit steigert, daß sich die Leitschaufeln plastisch deformieren, stellt sich eine Belastungsverteilung ein, die an der Trennfuge das Doppelte des Mittelwertes, unter 90° dazu das 0,4fache ist. Wenn also die Leitschaufeln so bemessen werden, daß sie mindestens dem Doppelten der mittleren Belastung standhalten, besteht keine Bruchgefahr, sofern nur der Werkstoff zäh genug ist um eine geringfügige plastische Verformung zuzulassen. Wesentlich übersichtlichere Verhältnisse entstehen, wenn man den Zwischenboden etwa in sechs Sektoren unterteilt, was im Gasturbinenbau gelegentlich geschieht. Der einzelne Sektor kann dann betrachtet werden als Platte, die von einigen einseitig eingespannten Stäben getragen wird.

18.6 Heißgasführende Einsätze

Die Brennkammern der Gasturbinen bestehen aus einem druckhaltenden Außenmantel, innerhalb dessen ein Einsatzteil angeordnet ist, der den eigentlichen Brennraum umgibt. An diesen Einsatz schließt sich ein weiterer an, der das Heißgas zur ersten Leitschaufelreihe führt. Zwischen diesen Einsätzen und dem Brennkammer-Außenmantel bzw. dem Turbinengehäuse strömt Kühlluft, die einerseits das druckhaltende Außengehäuse auf tiefer Temperatur hält, andererseits die Einsatzwandungen so weit kühlt, daß sie eine genügende Lebensdauer besitzen. Gerade diese letztere Bedingung ist nicht immer ganz einfach zu erfüllen. Die Einsätze sind naturgemäß dünnwandige Körper. Da der Druck des Verbrennungsgases wenig unter dem der Kühlluft liegt, sind sie auf Außendruck beansprucht, womit die Gefahr des Einbeulens entsteht. Zwar ist der äußere Überdruck nur gering, aber die Einsatzwandungen nehmen oft Temperaturen an, bei denen der Werkstoff viskoplastisch ist, womit langsame Verformungen unvermeidlich werden.

Abb. 18.6.1 zeigt eine Brennkammeranordnung von BBC. Die vom Verdichter kommende Luft strömt im äußeren Ringraum hoch und tritt oben in den zentralen Raum ein, dessen oberer Teil der eigentliche Brennraum ist. Dieser ist ausgekleidet mit Elementen, wie sie in Abb. 18.6.2 dargestellt sind, sog. ‚Ziegeln‘, die außen Kühlrippen tragen, weil sie von innen der Flammenstrahlung ausgesetzt sind. Sie sind in den Blecheinsatz eingehängt, der völlig von Kühlluft umgeben ist und somit bei Temperaturen bleibt, wo der Werkstoff nicht kriecht. Der an den Brennraum anschließende innere Einsatzteil ist gewellt. Er steht außen mit der Kühlluft, innen mit dem Heißgas in Berührung und erreicht eine Temperatur, wo das Kriechen auftritt. Hier stellt sich das oben erwähnte Problem des Einbeulens, und die Wellung hat eben den Zweck, die Steifigkeit zu erhöhen. Die gleichen Bedingungen bestehen in dem weiter unten folgenden gasführenden Einsatzteil des Turbinengehäuses.

In Abb. 18.6.3 ist eine Anordnung der KWU wiedergegeben. Hier ist der obere Teil, der eigentliche Brennraum, mit keramischen Platten ausgekleidet, so daß der von Kühlluft bestrichene Blecheinsatz auf mäßiger Temperatur bleibt und nicht kriecht. Der an-

schließende gekrümmte gasführende Einsatz ist innen mit Heißgas, außen mit Kühlluft in Berührung und besteht aus mehreren kegligen Schüssen, die zusammen einen nicht abwickelbaren, steifen Körper bilden. Er nimmt ebenso wie der nachfolgende gasführende Einsatz des Turbinengehäuses selbst eine Temperatur an, bei welcher der Werkstoff kriecht. Zu beiden Seiten der Maschine ist je eine solche Brennkammer angeordnet, die in der Mittelebene in das Gehäuse der Turbogruppe einmündet.

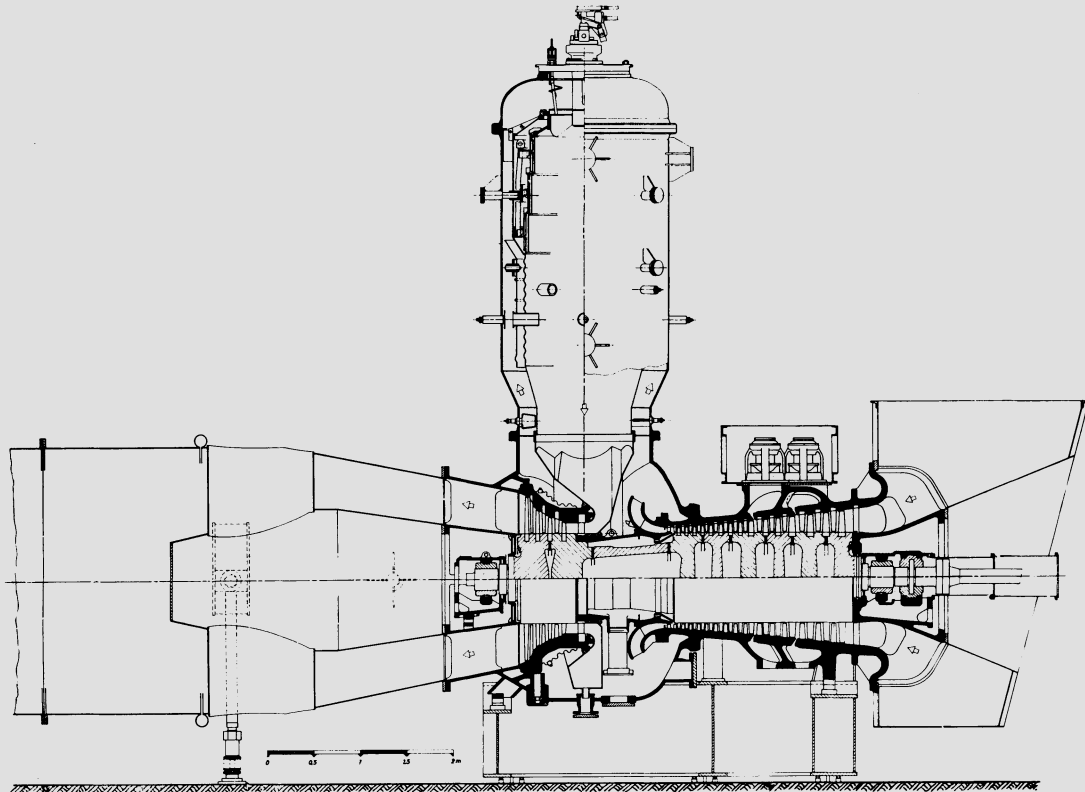


Abb. 18.6.1. Gasturbine mit senkrecht auf dem Gehäuse stehender Brennkammer (BBC)

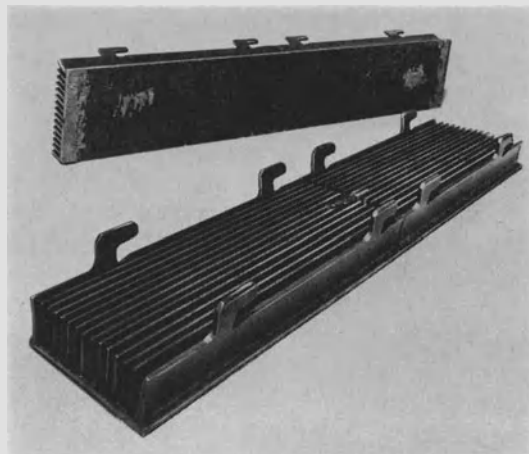


Abb. 18.6.2. Auskleidungselement („Ziegel“) für den Brennraum einer Gasturbinenbrennkammer (BBC)

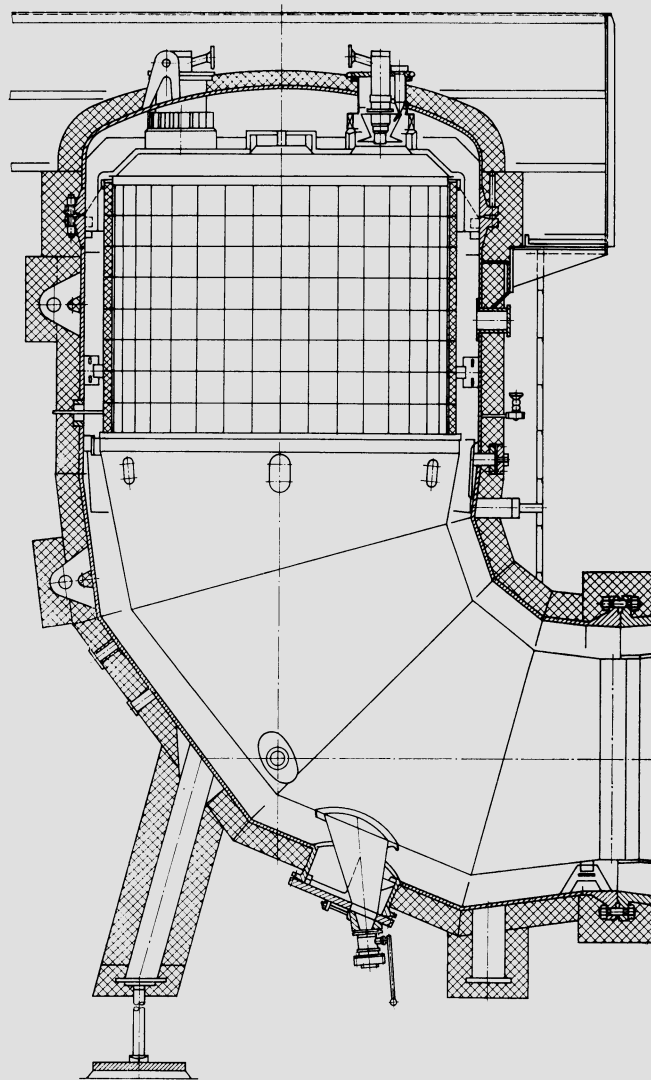


Abb. 18.6.3. Brennkammeranordnung der KWU. Brennraum mit keramischen Platten ausgekleidet, mehrere Brenner münden in gemeinsamen Brennraum. Links und rechts der Maschinengruppe ist eine solche Brennkammer angeordnet. Heißgas wird in Richtung der Mittelebene beidseitig ins Gehäuse eingeführt. Luft strömt im Ringraum zwischen Außenmantel und Einsatz nach oben

Die Brennkammerbauart von General Electric ist in Abb. 18.6.4 dargestellt. Eine größere Anzahl solcher Brennkammern (bis 12) ist kreisförmig um die Maschine herum angeordnet, wobei die einzelne Brennkammer nur kleine Abmessungen erhält. Das erleichtert die Sicherung der notwendigen Formbeständigkeit, da der einzelne zylindrische Brennkammereinsatz im Vergleich zu seinem Durchmesser relativ dickwandig wird. Außerdem ist die Flammenstrahlung bei dem kleinen Flammendurchmesser weniger intensiv. Überführungskanäle führen das Heißgas zum ersten Leitrad.

Eine Brennkammer, welche die Maschinenachse ringförmig umgibt, ist beim Strahltriebwerk nach Abb. 18.6.5 vorgesehen. Diese Anordnung ist die raumsparendste und daher bei Flugtriebwerken jetzt weithin in Anwendung. Sie führt sich aber auch im industriellen Gasturbinenbau ein. Allerdings erlaubt sie keine Horizontaltrennung des Gehäuses, was für Montage und Unterhalt gewisse Erschwerungen mit sich bringt, andererseits aber auf sehr günstige Konstruktionen führt.

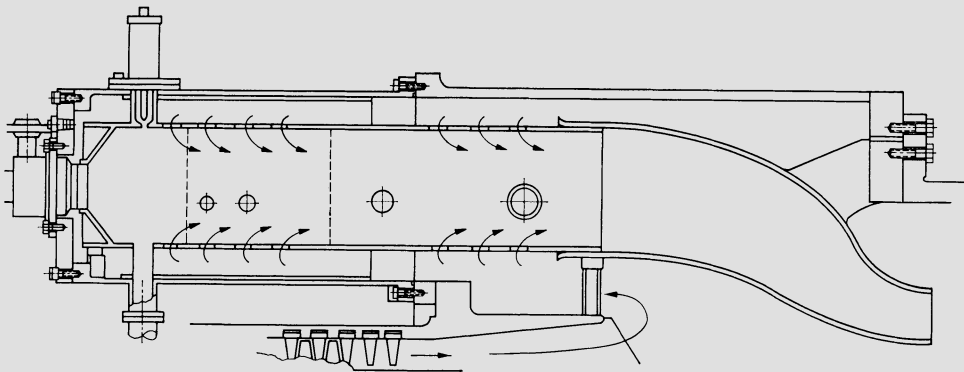


Abb. 18.6.4. Brennkammer von General Electric. Bis zu 12 dieser Brennkammern sind ringförmig um die Maschinenachse angeordnet

Offensichtlich kann man in keinem Falle dem Problem ganz ausweichen, daß solche Einsätze kriechen und auf Außendruck beansprucht sind, womit die Gefahr des Einbeulens gegeben ist. Unter Voraussetzung der Rotationssymmetrie und genügend einfacher Annahmen, läßt dieses Problem eine einfache theoretische Behandlung zu. Abb. 18.6.6 stellt eine solche rotationssymmetrische Schale dar, die unter dem äußeren Überdruck p stehe. Es seien ξ und η die Hauptträgheitsachsen des Querschnittes und es wird vorausgesetzt, daß die Neigung der ξ -Achse gegen die Symmetrieachse klein sei und daß überhaupt die Unterschiede der Radien gegenüber dem Radius, in dem der Schwerpunkt S liegt, sich in engen Grenzen halten. Dann ist es genügend genau, anzunehmen, daß bei strenger Rotationssymmetrie die Tangentialspannung im ganzen Querschnitt f konstant sei. Wird nun die Schale unrund, so möge angenommen werden, daß ursprünglich meridionale Schnitte bei der Verformung eben bleiben, d.h. die Schale wird aufgefaßt als ein Ring, der die Eigenschaften eines Balkens besitzt.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 18.6.6 möge nun die Deformation der Schale beschrieben werden, durch die Auslenkung $y(\varphi)$ in Richtung η , die gegeben sei durch

$$y = Y \sin \varphi \quad 18.6(1)$$

und die gerechnet wird ausgehend von einem Kreise vom Radius $r - \delta r$. Hier ist r der Radius bei undeformierter Schale. Man muß in der Tat δr einführen, denn bei gegebenem Umfang hat der Kreis den größten Flächeninhalt. Geht man also zur nicht kreisförmigen Kontur über, so muß der Radius des Basiskreises, dem man y überlagert, kleiner sein als der des ursprünglichen Kreises. Der Ansatz 18.6(1) ist der einfachstmögliche und kennzeichnet zugleich einen besonders ungünstigen Fall, da der Querschnitt einer Verformung mit nur einer Periode pro Umfang den geringsten Widerstand entgegengesetzt. Beschränkt man sich auf kleine Deformationen, so läßt sich für das Bogenelement setzen

$$\begin{aligned} ds &= (r - \delta r + y \sin \nu) d\varphi \sqrt{1 + \left[\frac{1}{r} \frac{d(y \sin \nu)}{d\varphi} \right]^2} \\ &\approx (r - \delta r + y \sin \nu) \left[1 + \frac{\sin^2 \nu}{2r^2} \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^2 \right] d\varphi. \end{aligned} \quad 18.6(2)$$

Wenn man hier den Ansatz 18.6(1) einführt und über φ von 0 bis 2π integriert, erhält man den gesamten Umfang S

$$S = 2\pi r + \frac{\pi Y^2 \sin^2 \nu}{2r} - 2\pi \delta r - \frac{\pi \delta r Y^2 \sin^2 \nu}{2r^2}. \quad 18.6(3)$$

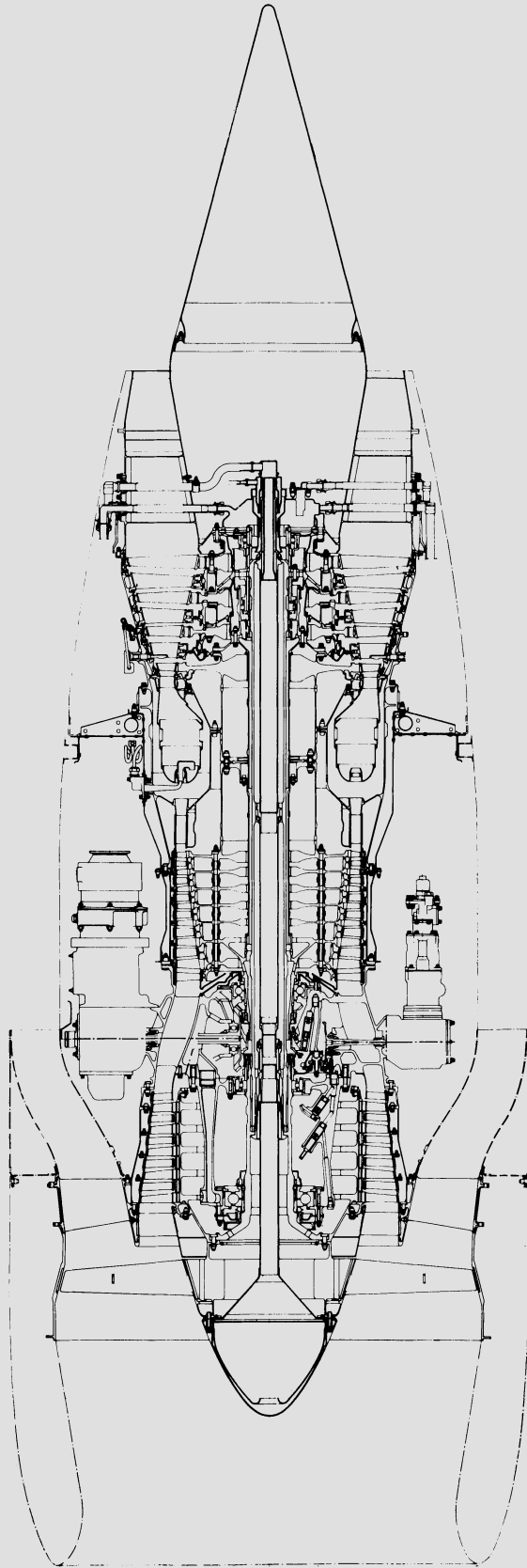


Abb. 18.6.5. Zweistrom-Flugtriebwerk M45H (Rolls-Royce, SNECMA) mit Ringbrennkammer (beachte die äußerst kleinen Brennkammerabmessungen)

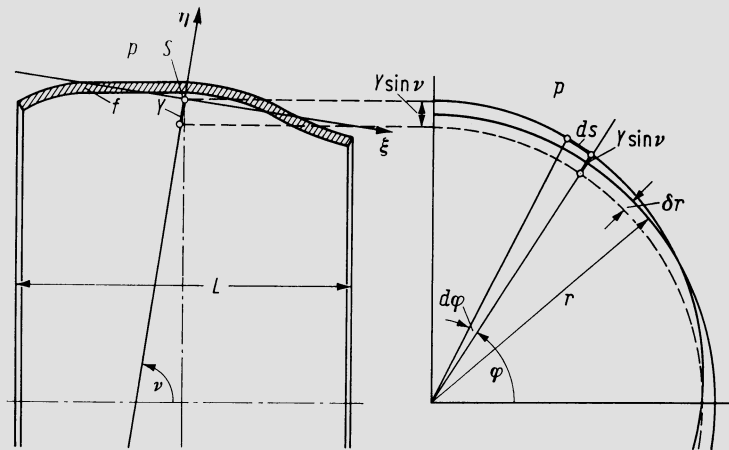


Abb. 18.6.6. Rotationsschale, die sich unter dem Einfluß eines äußeren Überdruckes deformiert und unrund wird

Da aber der Umfang der Schale sich durch das Unrundwerden nicht verändern soll, ist zu fordern $S = 2\pi r$, was auf

$$\delta r \left[2\pi + \frac{\pi Y^2 \sin^2 \nu}{2r^2} \right] = \frac{\pi Y^2 \sin^2 \nu}{2r}$$

führt. Bei kleiner Deformation ist das zweite Glied in eckiger Klammer vernachlässigbar, so daß

$$\delta r = \frac{Y^2 \sin^2 \nu}{4r}. \quad 18.6(4)$$

Da nun die Deformation im Rahmen des Kriechvorganges weiterschreitet, ist diese Gleichung nach der Zeit abzuleiten und liefert

$$\frac{d(\delta r)}{dt} = \frac{Y \sin^2 \nu}{2r} \dot{Y}. \quad 18.6(5)$$

Nun leistet aber der äußere Überdruck p bei einer Radienverschiebung δr die Arbeit

$$A = 2\pi r L p \delta r \quad 18.6(6)$$

am Körper, woraus sich die zeitliche Ableitung dieser Arbeit zu

$$\dot{A} = 2\pi r L p \frac{d(\delta r)}{dt} = \pi L p \sin^2 \nu Y \dot{Y} \quad 18.6(7)$$

ergibt. In diesen Ausdrücken ist der Beitrag des aus $\dot{y}(\varphi)$ hervorgehenden Integrals vernachlässigt, der aber sehr klein würde.

Das Fortschreiten des Unrundwerdens erfordert eine Deformationsarbeit, die offenbar durch \dot{A} gedeckt werden muß. Zur Berechnung dieser Deformationsarbeit muß das Spannungs-Verformungs-Gesetz bekannt sein, das in Form des Nortonschen Gesetzes $\dot{\epsilon} = K\sigma^n$ eingeführt werde. Zweckmäßig geht man in diesem Zusammenhang von der inversen Darstellung

$$\sigma = B\dot{\epsilon}^m \quad 18.6(8)$$

aus, wo $m = 1/n$. Nun sei σ_0 die Spannung, die in der runden Schale herrscht, $\delta\sigma$ die Zusatzspannung (Biegespannung) infolge des Unrundwerdens. Da nun σ bereichsweise positiv und negativ sein kann und m eine beliebige gebrochene Zahl ist, muß man das Spannungsgesetz in der Form

$$\sigma_0 + \delta\sigma = B(\dot{\epsilon}_0 + \delta\dot{\epsilon}) |\dot{\epsilon}_0 + \delta\dot{\epsilon}|^{m-1} \quad 18.6(9)$$

schreiben. Dabei sind $\dot{\varepsilon}_0$ und $\delta\dot{\varepsilon}$ die Deformationsgeschwindigkeiten, die dem Kriechen der kreissymmetrischen Schale und dem Biegekriechen entsprechen. Die Form 18.6(9) sichert das richtige Vorzeichen der resultierenden Spannung. Nun ist aber

$$\delta\varepsilon = -\eta \frac{d^2y}{ds^2} \approx -\frac{\eta}{r^2} \frac{d^2y}{d\varphi^2} = \frac{\eta Y}{r^2} \sin \varphi. \quad 18.6(10)$$

Diese Gleichung ist nach t abzuleiten, wobei die Ableitung von r in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden darf. Dann folgt nach Einsetzen in 18.6(9)

$$\delta\sigma = B \left(\dot{\varepsilon}_0 + \frac{\eta \dot{Y}}{r^2} \sin \varphi \right) \left| \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\eta \dot{Y}}{r^2} \sin \varphi \right|^{m-1} - \sigma_0. \quad 18.6(11)$$

Mit M als Biegemoment im Schalenquerschnitt an der Stelle φ ist die zeitliche Ableitung der Biegearbeit

$$d\dot{A} = -M \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right) ds \approx -\frac{M}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2y}{d\varphi^2} \right) d\varphi = \frac{M \dot{Y}}{r} \sin \varphi d\varphi. \quad 18.6(12)$$

Weiter ist

$$M = \int_f \eta \delta\sigma df, \quad 18.6(13)$$

wo f der Meridianquerschnitt der Schale ist. Hier kann $\delta\sigma$ nach 18.6(11) eingesetzt werden, wobei aber σ_0 weggelassen werden kann, da $\eta\sigma_0$ über den Querschnitt integriert verschwindet (η wird ja von der Hauptträgheitsachse ξ aus gerechnet):

$$M = B \int_f \eta \left(\dot{\varepsilon}_0 + \frac{\eta \dot{Y}}{r^2} \sin \varphi \right) \left| \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\eta \dot{Y}}{r^2} \sin \varphi \right|^{m-1} df. \quad 18.6(14)$$

Dies wiederum eingesetzt in 18.6(12) und integriert über φ liefert

$$\dot{A} = \frac{B \dot{Y}}{r} \int_0^{2\pi} \left[\int_f \eta \left(\dot{\varepsilon}_0 + \frac{\eta \dot{Y}}{r^2} \sin \varphi \right) \left| \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\eta \dot{Y}}{r^2} \sin \varphi \right|^{m-1} df \right] \sin \varphi d\varphi. \quad 18.6(15)$$

Dieser Ausdruck \dot{A} muß nun demjenigen nach Gl. 18.6(7) gleichgesetzt werden, und da $Y = 0$ ausgeschlossen werden darf, folgt daraus

$$Y = \frac{B}{\pi L r p \sin^2 \nu_0} \int_f \left[\int_f \eta \left(\dot{\varepsilon}_0 + \frac{\eta \dot{Y}}{r^2} \sin \varphi \right) \left| \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\eta \dot{Y}}{r^2} \sin \varphi \right|^{m-1} df \right] \sin \varphi d\varphi. \quad 18.6(16)$$

Dem ist noch die aus dem Nortonschen Gesetz folgende Beziehung

$$\varepsilon_0 \approx - \left(-\frac{\sigma_0}{B} \right)^{\frac{1}{m}} \approx - \left(\frac{L r p}{B f} \right)^{\frac{1}{m}} \quad 18.6(17)$$

beizufügen, womit nun das Differentialgesetz des Vorganges vorliegt.

In der Tat liefert 18.6(16) zu jedem beliebig gewählten \dot{Y} das zugehörige Y , so daß man also die Funktion $Y = F(\dot{Y})$ kennt. Damit ist aber auch die inverse Funktion $\dot{Y} = G(Y)$ bekannt. Ist nun Y_0 der Anfangswert, Y^* der größte Wert, den man zulassen kann, dann ist die Lebensdauer t gegeben durch

$$t = \int_{Y_0}^{Y^*} \frac{dY}{G(Y)}. \quad 18.6(18)$$

Es geht aus der Struktur von 18.6(16) hervor, daß für $\dot{Y} = 0$ auch $Y = 0$ wird. Das bedeutet, daß man mit $Y_0 = 0$ kein endliches t erhält, was aus der mathematischen Struktur der Theorie verständlich ist. Durch Fertigungsfehler und übrigens auch durch Unregelmäßigkeiten der Temperaturverteilung wird aber stets ein $Y_0 \neq 0$ auftreten.

Wo kompliziertere Bedingungen vorliegen, ist heute die Lösung des Problems nach der Methode der finiten Elemente möglich, allerdings mit außerordentlich großem Rechenaufwand, denn es muß das unter 15.7 beschriebene Verfahren zur Berechnung viskoplastischer Zustände zur Anwendung kommen, wobei indessen noch zwei Komplikationen hinzukommen. Erstens müssen die Elemente Schalenelemente sein und haben demgemäß eine höhere Zahl von Freiheitsgraden, vgl. die in Kapitel 15 angegebene Literatur. Das ändert die Struktur des Verfahrens nicht. Zweitens aber muß die Voraussetzung fallengelassen werden, daß die Verschiebungen der Knotenpunkte so klein bleiben, daß die Geometrie des Körpers als unveränderlich gelten kann. Dies erfordert für jedes Zeitintervall einen zusätzlichen Rechenschritt, denn es müssen jedesmal die unter 15.6 und 15.7 mit $[a]$ bezeichneten Matrizen neu gebildet werden. Das Rechenverfahren läßt sich dann folgendermaßen zusammenfassen, vgl. die Ausführungen unter 15.7:

1. Bestimmung des elastischen Spannungszustandes $[\tilde{\sigma}_I]$.
2. Daraus ergibt sich der Vektor der Kriechdehnungen $[\tilde{\epsilon}_c]$.
3. Bestimmung der gesamten Verschiebungsgeschwindigkeiten $\{\dot{q}\}$ aus 15.7(18).
4. Bestimmung der $\{\tilde{\sigma}\}$ aus 15.7(19).
5. Daraus Spannungsverteilung nach Zeitintervall Δt aus 15.7(20).
6. Die Verschiebungen $\{\tilde{q}\} = \{\dot{q}\} \Delta t$ legen neue Körpergeometrie fest; für diese die $[a]$ -Matrizen neu bestimmen.

Von hier ab wiederholt sich das Verfahren von Schritt 2 an für ein weiteres Zeitintervall usw. Die Rechnung führt nicht zu einem asymptotischen Endzustand, sondern im allgemeinen zu einem exponentiellen Ansteigen der Deformation. Eine exakte kritische Belastung, unterhalb welcher Stabilität auf unbeschränkte Zeit gesichert wäre, existiert bei einem unter Außendruck stehenden Gefäß bei viskoplastischem Verhalten nicht.

Literatur zu Kap. 18

1. Hohn, A.: Die mechanische Auslegung von Dampfturbogruppen. Brown Boveri Mitt. 63 (1976) 379—391.
2. Gravina, P. B. J.: Theorie und Berechnung der Rotationsschalen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1961.
3. Tölke, F.: Über Rotationsschalen gleicher Festigkeit für konstanten Innen- und Außendruck. ZAMM 19 (1939) 338.
4. Engelke, W.; Scheffczyk, H.: Baureihen der KWU-Dampfturbinen. KWU-Dampfturbinen, Fachbeiträge, KWU Mühlheim (Ruhr) 1976.
5. Eberle, E.: Spannungen in Zylinderschalen endlicher Länge. Tech. Rundsch. Sulzer H. 1 (1959) 71—80.
6. Grgić, A.: Spannungen in einem dünnwandigen biegesteifen Kreiszyylinder bei rotationssymmetrischer Belastung. Brown Boveri Mitt. 53 (1966) 546—560.
7. Odqvist, F. K. G.; Hult, J.: Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1962.
8. Reuter, H.: Die Flanschverbindung im Dampfturbinenbau. Brown Boveri Nachr. 40 (1958) 355.
9. Stodola, A.: Dampf- und Gasturbinen, 6. Aufl. Berlin: Springer 1924.
10. Wahl, A. M.: Strength of Semicircular Plates and Rings Under Uniform Pressure. Trans. ASME 54 (1932) 311.
11. Taylor, V. C.: Stress and Deflection Tests of Steam Turbine Diaphragm. Trans. ASME 73 (1951) 877.

19 Temperatur- und Kühlungsprobleme

19.1 Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges

Wenn in einem festen Körper eine beliebige Temperaturverteilung herrscht, findet eine Wärmeleitung statt, die in jedem Punkt gekennzeichnet ist durch einen *Wärme­stromdichtevektor* (pro Zeiteinheit durch die Einheit der Fläche geleitete Wärmemenge) mit den drei Komponenten q_1, q_2, q_3 , für die allgemein q_i geschrieben werde. Nach dem *Fourierschen Wärmeleitungsgesetz* ist

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad 19.1(1)$$

wo λ die Wärmeleitfähigkeit ist und x_i für die drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 steht. Mit ρ als Dichte und c als spezifischer Wärmekapazität ist die innere Energie eines Raumelementes $dx_1 dx_2 dx_3$ gegeben durch $\rho c T dx_1 dx_2 dx_3$, womit die Energiebilanz des Elementes

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx_1 dx_2 dx_3 = - \sum_i - \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dx_i \right] - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} dx_i dx_k$$

wird. Hierbei ist jeweils $j \neq i, k \neq i$. Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right), \quad 19.1(2)$$

womit die allgemeine Wärmeleitungsgleichung für den wärmequellenfreien isotropen Körper gefunden ist. Wenn λ mit hinreichender Näherung unabhängig von der Temperatur ist und wenn die als *Temperaturleitzahl* bezeichnete Gruppe $a \equiv \lambda/\rho c$ eingeführt wird, geht Gl. 19.1(2) über in

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = a \nabla^2 T. \quad 19.1(3)$$

Bei *stationärem* Temperaturfeld und konstantem λ gilt also insbesondere

$$\sum \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad \text{oder} \quad \nabla^2 T = 0, \quad 19.1(4)$$

woran bemerkenswert ist, daß hier kein Stoffwert mehr auftritt.

Das Temperaturfeld in einem Körper wird daher aufgefunden durch Lösen der partiellen Differentialgleichungen 19.1(2), (3) oder (4) mit den Grenzbedingungen und gegebenenfalls Anfangsbedingungen des jeweiligen Falles. Als Grenzbedingung wird entweder die Oberflächentemperatur des Körpers gegeben oder aber — häufiger — eine *Wärme­übergangsbedingung* an der Oberfläche. Ist T' die Fluidtemperatur, α die Wärmeübergangszahl und n die nach innen gerichtete Flächennormale (Abb. 19.1.1), so ist die in den Körper eindringende Wärmestromdichte q

$$q = \alpha(T' - T). \quad 19.1(5)$$

Da ferner nach dem Wärmeleitungsansatz

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad 19.1(6)$$

folgt

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\lambda} (T' - T). \quad 19.1(7)$$

Dies ist die Grenzbedingung, die in allen Punkten der Oberfläche erfüllt sein muß.

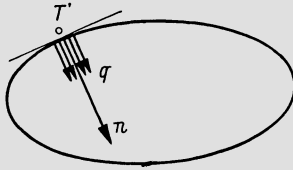


Abb. 19.1.1. Wärmestromdichte q an der Oberfläche eines Körpers

Ausgehend von der Differentialgleichung 19.1(3) und der Grenzbedingung 19.1(7) ergibt sich durch Dimensionsbefreiung auch das *Ähnlichkeitsgesetz der Wärmeleitung* bei konstanten Stoffwerten. Es sei l eine charakteristische Länge des Systems, T_0 eine charakteristische Temperaturdifferenz. Dann werde gesetzt

$$\vartheta \equiv \frac{T}{T_0}, \quad \vartheta' \equiv \frac{T'}{T_0}, \quad X_i \equiv \frac{x_i}{l},$$

folglich

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial X_i}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial N}. \quad 19.1(8)$$

Mit den Definitionen

$$B \equiv \frac{\alpha l}{\lambda}, \quad \tau \equiv \frac{\lambda}{\rho c l^2} t = \frac{a}{l^2} t \quad 19.1(9)$$

können dann die Gln. 19.1(3) und (7) folgendermaßen dargestellt werden:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \sum_i \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X_i^2}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = -B(\vartheta' - \vartheta). \quad 19.1(3'), (7')$$

Damit ist die dimensionslose Formulierung des Problems gewonnen. Als maßgebender Parameter tritt B auf, die sog. *Biot-Zahl*. Sollen zwei Wärmeleitungsvorgänge ähnlich sein, so ist außer geometrischer Ähnlichkeit und Ähnlichkeit der Anfangsbedingungen Gleichheit der Biot-Zahlen erforderlich. Außerdem muß die allfällige zeitliche Variation äußerer Bedingungen ähnlich verlaufen, d.h. ϑ und B müssen in Funktion von τ den gleichen Verlauf nehmen. Wenn man also die zeitliche Änderung äußerer Bedingungen durch eine charakteristische Zeit t_0 kennzeichnet (z.B. Periode bei periodischen Vorgängen oder Zeit des Anstieges von T' bei einem Anheizvorgang), so muß der mit t_0 gebildete Zeitparameter

$$Fo \equiv \frac{\lambda}{\rho c l^2} t_0 = \frac{a t_0}{l^2}, \quad 19.1(10)$$

die sog. *Fourier-Zahl*, für beide Fälle gleich sein. Daraus folgt insbesondere, daß die Durchwärmzeiten geometrisch ähnlicher Körper aus gleichem Werkstoff proportional dem Quadrat der Abmessungen sind.

In der Theorie des Wärmeüberganges wird gezeigt, daß sich aus der Wärmeübergangszahl ähnlichkeits-theoretisch die folgenden dimensionslosen Kenngrößen bilden lassen:

$$Nu \equiv \frac{\alpha l}{\lambda'}, \quad St \equiv \frac{\alpha}{\rho' c_p' w}. \quad 19.1(11)$$

Nu wird als *Nusselt-Zahl*, St als *Stanton-Zahl* bezeichnet. Der Akzent verweist auf die Eigenschaften des *Fluids* (nicht des Körpers) woraus auch der Unterschied zwischen B

und Nu deutlich wird. Die Bezugsgeschwindigkeit w ist die gleiche, mit der Reynolds-Zahl $Re \equiv wl/\nu'$ gebildet wird. Wenn noch die Prandtl-Zahl $Pr \equiv \eta c'_p/\lambda'$ eingeführt wird, läßt sich das Gesetz des Wärmeüberganges bei *erzwungener Strömung* für einen Körper gegebener Geometrie in einer der folgenden Formen schreiben:

$$Nu = \varphi(Re, Pr), \quad St = \psi(Re, Pr). \quad 19.1(12)$$

Hier kennzeichnen φ und ψ die betreffenden Funktionalzusammenhänge. Praktisch kommen zu Re und Pr oft noch zusätzliche Parameter hinzu, wie Rauigkeit, Vorturbulenzgrad, Einfluß temperaturabhängiger Stoffwerte. Die beiden Formen Gl. 19.1(12) sind einander äquivalent. Die Verwendung der Stanton-Zahl führt meist auf den übersichtlicheren theoretischen Formalismus.

Bei *freier Konvektion* ist nur die Nusselt-Zahl brauchbar. Unabhängige Variable ist dann anstelle der Reynolds-Zahl die *Grashof-Zahl* Gr , deren Definition

$$Gr \equiv \frac{fl^3\beta(T' - T)}{\nu^2} \quad 19.1(13)$$

lautet. Hier ist f die Feldkraft pro Masseneinheit, im Schwerfeld also g , im Zentrifugalfeld die Zentrifugalbeschleunigung. Beim idealen Gase wird die Wärmeausdehnungszahl $\beta = 1/T$. Das Wärmeübergangsgesetz lautet hier

$$Nu = \Phi(Gr, Pr) \quad 19.1(14)$$

mit Φ als Funktionalzeichen.

Bemerkenswerterweise hat schon *Helmholtz* [1] erkannt, daß der allgemeinere Fall der temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit (Gl. 19.1(2)) mathematisch auf den einfacheren Formalismus zurückgeführt werden kann, der bei konstantem λ gilt. Es werde gesetzt

$$\lambda(T) = \lambda_0\varphi(T), \quad 19.1(15)$$

wo λ_0 der Temperatur T_0 zugeordnet ist. Weiter wird die Temperaturfunktion

$$\tilde{T} = \int_{T_0}^T \varphi(T) dT \quad 19.1(16)$$

eingeführt. Dann ist

$$q_i = -\lambda_0\varphi(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\lambda_0 \frac{d\tilde{T}}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\lambda_0 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i}. \quad 19.1(17)$$

Da ferner

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} = \varrho c \frac{dT}{d\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\varrho c}{\varphi} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}, \quad 19.1(18)$$

folgt

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad \frac{\varrho c}{\varphi} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \lambda_0 \sum_i \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_i^2},$$

also

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\lambda}{\varrho c} \sum_i \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_i^2} \quad 19.1(19)$$

in genauer Analogie zu 19.1(3). Ebenso ist

$$q_n = -\lambda_0 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n}. \quad 19.1(20)$$

An die Stelle der Wärmeübergangszahl α tritt der umgerechnete Wert

$$\tilde{\alpha} = \alpha \frac{T' - T}{\tilde{T}' - \tilde{T}}. \quad 19.1(21)$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = -\frac{\dot{\alpha}}{\lambda_0} (\tilde{T}' - \tilde{T}). \quad 19.1(22)$$

Die Gln. 19.1(19) und (22) entsprechen genau den Formen 19.1(3) und (7). Die Dimensionsbefreiung führt auf

$$\tilde{B} \equiv \frac{\dot{\alpha} l}{\lambda_0}, \quad \tau \equiv \frac{\lambda_0}{\rho c l^2} t, \quad \tilde{\vartheta} \equiv \frac{\tilde{T}}{T_0}, \quad 19.1(23)$$

$$\frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial \tau} = \varphi \sum_i \frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial X_i^2}, \quad \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial N} = -\tilde{B} (\tilde{\vartheta}' - \tilde{\vartheta}). \quad 19.1(24)$$

In dem (in Funktion von $\tilde{\vartheta}$ anzugebenden) Faktor φ in der Differentialgleichung tritt der Unterschied gegenüber dem Fall konstanter Wärmeleitfähigkeit in Erscheinung.

19.2 Empirische Unterlagen über Wärmeübergang¹

Empirische Unterlagen über den Wärmeübergang an Schaufeln und meridionalen Begrenzungswänden wurden bereits in Bd. I unter Abschn. 8.4 angegeben. Für einige andere Konfigurationen mögen anschließend die experimentell gefundenen Werte zusammengefaßt werden.

Der *gerade Kanal* (Abb. 19.2.1 a) kann in der Regel hinreichend genau auf das Rohr kreisförmigen Querschnittes zurückgeführt werden durch den Begriff des hydraulischen Durchmessers, der definiert ist durch

$$D_h = \frac{4f}{U}, \quad 19.2(1)$$

wo f der Kanalquerschnitt, U sein Umfang ist. Das gilt insbesondere auch für den *Spaltkanal*, der durch zwei Ebenen im Abstand h begrenzt ist (Abb. 19.2.1 b); die Ausdehnung senkrecht zur Bildebene ist praktisch unendlich. Unter diesen Bedingungen ist $D_h = 2h$. Mit der Kanallänge L , der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ und der Rohrwiderstandszahl ψ (oft auch mit λ bezeichnet) wird dann der Druckabfall

$$\Delta p = \psi \frac{L}{D_h} \frac{\bar{\rho}}{2} c^2. \quad 19.2(2)$$

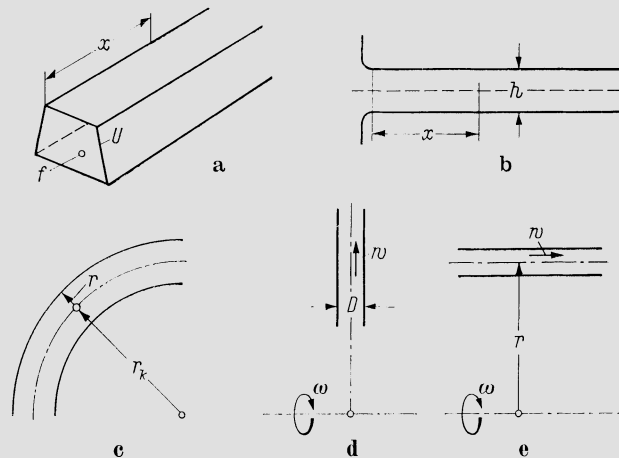


Abb. 19.2.1. Durchströmte Kanäle verschiedener Anordnung

¹ Die Angaben dieses Abschnittes entstammen großteils einer umfassenden Übersicht, die O. Frei anlässlich eines Kurses über „Temperatur und Festigkeit in Strömungsmaschinen“ an der ETH Zürich 1975 gegeben hat.

Das ψ des hydraulisch glatten Rohres in ausgebildeter turbulenter Strömung, das ψ_0 benannt werde, ist der Abb. 19.2.2 zu entnehmen. Die Stanton-Zahl kann daraus vermöge der Reynoldsschen Analogie bestimmt werden durch die Gleichung

$$St_0 = \frac{\psi_0/8}{1 + f(Pr) \sqrt{\psi_0/8}}. \quad 19.2(3)$$

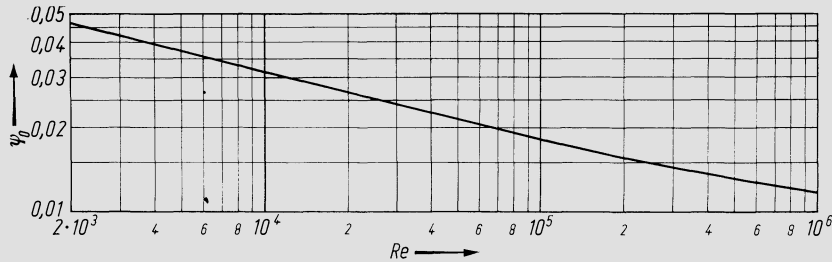


Abb. 19.2.2. Reibungsbeiwert ψ_0 des glatten Rohres in Funktion der Reynolds-Zahl

Die Funktion $f(Pr)$ ist nach *Deissler* [2] durch Abb. 8.4.23, Bd. I, gegeben. Für $Pr = 0,7$ wird $f(Pr) = -2,78$. Beziehungen, die St_0 direkt, also ohne Bezugnahme auf ψ_0 angeben, existieren in großer Zahl. Sehr bekannt ist diejenige von *Kraussold* [3], die im Ergebnis mit Gl. 19.2(3) recht gut übereinstimmt und

$$St_0 = 0,024 Re^{-0,2} Pr^{-0,67} \quad 19.2(4)$$

geschrieben werden kann.

Diese Relationen berücksichtigen nicht den Einfluß der Anlaufstrecke. Er kann nach *Hausen* [4] näherungsweise erfaßt werden durch

$$St(x) \approx St_0 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{D_h}{x} \right)^{3/2} \right], \quad 19.2(5)$$

wobei x der laufende Weg ist (Abb. 19.2.1). Ebenso kann der Einfluß der Rauigkeit näherungsweise berücksichtigt werden durch

$$St \approx St_0 (\psi/\psi_0)^{0,5}, \quad 19.2(6)$$

wo ψ der effektive Wert ψ_0 der für hydraulisch glatte Wand ist, vgl. [5–8].

Für *gekrümmte Kanäle* kreisförmigen Querschnittes (Abb. 19.2.1c) lassen sich Widerstandszahlen gemäß [9–11] angeben zu

$$\psi = 0,95 \psi_0 Y^{0,05} [1 + 0,112 Y^{-0,2}], \quad Y \equiv Re \left(\frac{r}{r_k} \right)^2, \quad 19.2(7)$$

$$St = 0,958 St_0 Pr^{0,07} Re^{0,05} (r/r_k)^{0,1}, \quad 19.2(8)$$

wo Index 0 auf den Wert des geraden Kanals verweist.

Beim *rotierenden Kanal* lassen sich folgende Angaben machen, die auf [9–11] beruhen. Bildet die Kanalachse mit der Drehachse einen rechten Winkel (Abb. 16.2.1d), so liegt vor allem die kritische Reynolds-Zahl Re_k höher als beim ruhenden Kanal. Es ist etwa

$$Re_k \approx 8674 (\omega D/w)^{0,3} \text{ bei kreisförmigem Querschnitt,}$$

$$Re_k \approx 63200 (\omega a/w) + 2000 \text{ bei quadratischem Querschnitt von Seitenlänge } a.$$

Stets ist hier w die Relativgeschwindigkeit. Im turbulenten Bereich ist dann

$$\psi = \left\{ 0,942 + 0,058 \left[\left(\frac{\omega D_h}{w} \right)^2 Re \right]^{0,282} \right\} \psi_0, \quad 19.2(9)$$

$$St = 1,045 St_0 Y^{0,05} [1 + 0,0607 Y^{-0,2}], \quad Y \equiv Re \left(\frac{D_h \omega}{w} \right)^2, \quad 19.2(10)$$

wo stets Index 0 auf den ruhenden geraden Kanal verweist. Liegt die Kanalachse parallel zur Drehachse (Abb. 16.2.1e), so liegt St ebenfalls über dem Grundwert St_0 , im Extremfall bis um einen Faktor 2.

Über den Wärmeübergang an *umströmten Körpern* geben in einfachen Fällen die für die ebene Platte gültigen Unterlagen einen genügenden Anhaltspunkt, vgl. darüber die Angaben in Bd. I, Abschn. 8.4. Maßgebende Fluidtemperatur ist dabei stets die adiabate Wandtemperatur

$$T_{ad} = T + Pr^{1/3} \frac{w^2}{2c_p}, \quad 19.2(11)$$

wobei w stets die Geschwindigkeit relativ zum angeströmten Hindernis ist. T_{ad} ist also nahezu gleich der Totaltemperatur. An gerundeten angeströmten Kanten (z.B. Schaufel-eintrittskante) können die Ergebnisse für den querangeströmten Zylinder verwendet werden. Die Grenzschicht strömt dort laminar. Unter Verwendung der Angaben Abb. 19.2.3 läßt sich im Bereich $\varphi = \pm 60^\circ$ setzen, vgl. [12, 13]

$$Nu \equiv \frac{\alpha D}{\lambda}, \quad Re \equiv \frac{w_1 D}{\nu}, \quad Nu = f(\varphi) g(Pr) h \sqrt{Re}, \quad 19.2(12)$$

wobei die Funktionen f, g, h in Abb. 19.2.3 dargestellt sind. h hängt von der Variablen $Tu \sqrt{Re}$ ab, wobei Tu der Turbulenzgrad der Zuströmung ist.

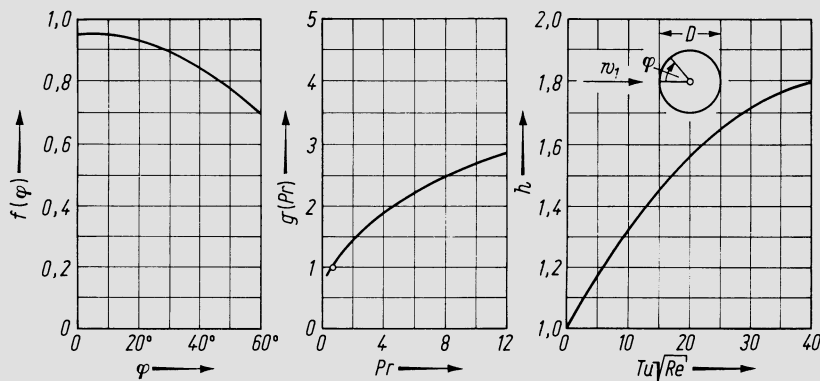


Abb. 19.2.3. Zur Berechnung des Wärmeüberganges am quer angeströmten Zylinder

Für den Turbomaschinenbau ist der Wärmeübergang an *rotierenden Scheiben*, die in ein Gehäuse eingeschlossen sind, naturgemäß bedeutsam. Darüber existiert eine größere Zahl von Veröffentlichungen. Die nachfolgenden Angaben stützen sich auf [14], was den praktischen Gegebenheiten etwa am besten entsprechen dürfte. Abb. 19.2.4 zeigt die vorausgesetzte Anordnung. Es ist $Re = wr/\nu$ der örtliche Wert der Reynolds-Zahl. Im Radius r_0 , wo der Kühlluftstrom senkrecht auf die Scheibe auftrifft, ist

$$St = 0,2 Re^{-0,33} Pr^{-0,6}, \quad 19.2(13)$$

wobei vorausgesetzt ist, daß die Kühlluft durch einen Ringspalt zugeführt wird. Höhere Werte erzielt man, wenn man die Luft durch einzelne Löcher einbläst. Wo die Luft längs

der Stirnfläche nach außen strömt, ist

$$St = 0,1 Re^{-0,25} Pr^{-0,6} \left[\frac{2 \frac{d}{r_0} \frac{r}{r_0}}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1} \right]^{0,3} \quad 19.2(14)$$

(Bezeichnungen vgl. Abb. 19.2.4). Diese Formel liefert für $r \rightarrow r_0$ unendliche Werte, ist also dort ungültig und durch Formel 19.2(13) zu ersetzen. Der Übergang zwischen beiden Formeln liegt dort, wo beide den gleichen Wert ergeben. — Strömt die Luft längs der Stirnfläche nach innen, so ist

$$St = 4,2 \cdot 10^{-6} Re^{0,3} Pr^{-0,6} \left[\frac{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}{2 \frac{d}{r_0} \frac{r}{r_0}} \right]^{0,6} \quad 19.2(15)$$

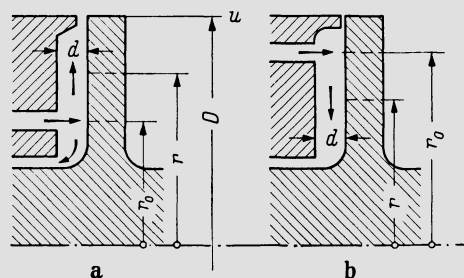


Abb. 19.2.4. Anordnung einer gekühlten Scheibe.
a) Strömung von innen nach außen; b) Strömung von außen nach innen

Der gegenüber Gl. 19.2(14) stark veränderte, eigentümliche Charakter dieses Gesetzes (positiver Exponent von Re) hängt damit zusammen, daß unter dem Einfluß der Fliehkraft kalte Luftteilchen in unmittelbarer Nähe der Scheibenoberfläche nach außen zentrifugiert werden (entgegen der allgemeinen Strömungsrichtung) und die Scheibe wegen der so entstehenden Luftumwälzung vor allem mit wärmerer Luft in Berührung kommt. Die Wirksamkeit der Kühlung wird damit beeinträchtigt.

Die Abschätzung von w , mit dem auch die Stanton-Zahl gemäß $St = \alpha / \rho c_p \bar{w}$ gebildet ist, bereitet insofern eine gewisse Schwierigkeit, als die Kühlluft in Umfangsrichtung von der Scheibe mitgeschleppt wird, was die Relativgeschwindigkeit beeinflusst. Unter praktischen Bedingungen ist aber hinreichend genau $w \approx r\omega$, um so mehr als die Meßwerte stark streuen. An der Einblasestelle ist w die Resultierende aus ωr und der Austrittsgeschwindigkeit aus der Lufteinblaseöffnung. Die Stoffwerte sind für die mittlere Kühllufttemperatur im Radius r einzusetzen.

Über den Wärmeübergang in *Labyrinthdichtungen* finden sich in [15—18] umfangreiche Meßergebnisse. Es zeigt sich dabei, daß der Wärmeübergang fast nur durch die Spaltströmung bestimmt wird, während die Umfangsgeschwindigkeit ohne wesentlichen Einfluß ist. Abb. 19.2.5 zeigt die verschiedenen Anordnungen und gibt die Bezeichnungen. Wenn w die Durchflußgeschwindigkeit im Spalt ist, lauten die Definitionen

$$Re \equiv 2ws/\nu, \quad Nu \equiv 2\alpha s/\lambda. \quad 19.2(16)$$

Die Stoffwerte beziehen sich auf die Kammermitte. Unter α wird der Mittelwert über die Teilung verstanden. Nachstehend werden für die verschiedenen Konfigurationen und Bedingungen die empirischen Formeln angegeben:

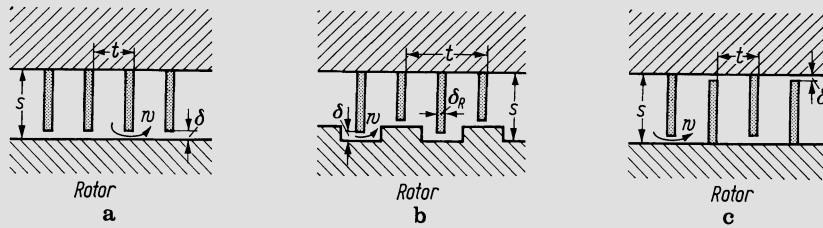


Abb. 19.2.5. Labyrinthanordnungen. a) Halblabyrinth, Kämme auf Statorseite; b) Kammnut-Labyrinth, Kämme auf Statorseite; c) Doppellabyrinth

Halblabyrinth (Abb. 19.2.5 a)

Spaltseitig, $1,53 \leq t/\delta \leq 10$

$$Nu = 0,041 Re^{0,8} (s/\delta)^{-0,05}$$

Spaltseitig, $t/\delta > 10$

$$Nu = 0,041 Re^{0,8} \left(\frac{s}{\delta}\right)^{-0,05} \exp\left[-0,004\left(\frac{t}{\delta} - 10\right)\right]$$

Kammerwand:

$$Nu = 0,043 Re^{0,8} (s/\delta)^{-0,1} (t/\delta)^{-0,2}$$

Kammnut-Labyrinth, Kämme statorseitig (Abb. 19.2.5 b)

Rotorseitig:

$$5000 < Re < 6000 s/\delta, \quad \delta/s \leq 0,17$$

$$Nu = 0,98 Re^{0,6} (\delta/s)^{0,16}$$

$$5000 < Re < 6000 s/\delta, \quad 0,17 < \delta/s < 0,24$$

$$Nu = 0,74 Re^{0,6}$$

$$6000 s/\delta < Re < 5 \cdot 10^5, \quad \delta/s \leq 0,17$$

$$Nu = 0,41 Re^{0,7} (\delta/s)^{0,26}$$

$$6000 s/\delta < Re < 5 \cdot 10^5, \quad 0,17 < \delta/s < 0,24$$

$$Nu = 0,26 Re^{0,7}$$

Kammerwand:

$$Nu = 1,125 Re^{0,65} (\delta/s)^{0,35} (s/t)^{0,1} (\delta_R/t)^{0,32}$$

Doppellabyrinth (Abb. 19.2.5 c)

$$Nu = 0,135 Re^{0,8} (s/\delta)^{0,05} (t/\delta)^{-0,5}$$

Alles dies gilt für $Pr = 0,7$.

Wärmeübergang bei *freier Konvektion* hat bei Gasturbinen in folgendem Zusammenhang eine gewisse Bedeutung. Gemäß Abb. 19.2.6 ist eine Schaufel gebildet aus Schaufelblatt 1, Fußplatte 2, Zwischensteg 3 und Fuß 4. Bei gekühlter Läuferzscheibe fällt die Temperatur im Zwischensteg von außen nach innen stark ab, so daß die Fußbefestigung im Gebiet mäßiger Temperatur liegt und dementsprechend hoch beansprucht werden kann. Wenn nun die Zwischenräume zwischen den Stegen geschlossene Toträume sind, stellt sich dort unter dem Einfluß des Fliehkraftfeldes eine intensive freie Konvektion ein. Nun existiert zwar über freie Konvektion ein umfangreiches Versuchsmaterial, doch reichen

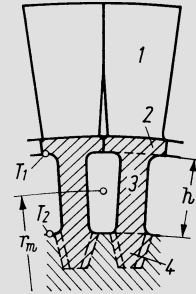


Abb. 19.2.6. Laufschaufelbefestigung mit Zwischensteg zur Herabsetzung der Temperatur in der Fußpartie

die Messungen auch nicht annähernd in den Bereich der hohen Grashof-Zahlen hinauf, die hier der großen Zentrifugalbeschleunigung wegen auftreten. Man muß daher um zwei bis drei Zehnerpotenzen extrapolieren, was die Ergebnisse recht unsicher macht. Mit den Bezeichnungen nach Abb. 19.2.6 mögen folgende Definitionen eingeführt werden. Es sei q die mittlere Wärmestromdichte, die den Totraum radial nach innen durchquert. Dann wird eine Wärmeübergangszahl definiert durch

$$\alpha \equiv \frac{q}{T_1 - T_2}. \quad 19.2(17)$$

Mit $T_m = (T_1 + T_2)/2$ und der Feldbeschleunigung $r_m \omega^2$ ergeben sich dann für Nu und Gr die Ausdrücke

$$Nu \equiv \frac{\alpha h}{\lambda}, \quad Gr \equiv \frac{\omega^2 r_m h^3 (T_1 - T_2)}{\nu^2 T_m}. \quad 19.2(18)$$

Unter Verwendung von [19] läßt sich dann setzen

$$Nu \approx 0,069 Gr^{0,333} Pr^{0,407}, \quad 19.2(19)$$

also mit $Pr = 0,7$ insbesondere

$$Nu \approx 0,060 Gr^{0,333}, \quad 19.2(20)$$

wobei von der Tatsache Gebrauch gemacht ist, daß bei hohem Gr (und damit starker Turbulenz) Nu von den geometrischen Proportionen des Hohlraumes kaum mehr abhängt. Die Stoffwerte beziehen sich auf T_m . — Der gleiche Wärmetransport würde auftreten, wenn der Hohlraum durch einen festen Körper mit einer Wärmeleitfähigkeit λ_u erfüllt wäre. Diese äquivalente Wärmeleitfähigkeit ist offenbar

$$\lambda_u = \alpha h. \quad 19.2(21)$$

Man findet eine Größenordnung, die etwa die Hälfte des λ des Schaufelwerkstoffes ist.

Aus allen Korrelationsbeziehungen dieses Abschnittes lassen sich die *Wärmeübergangszahlen* gewinnen gemäß

$$\alpha = \rho c_p w St \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\lambda}{l} Nu, \quad 19.2(22)$$

wobei als Bezugsgeschwindigkeit w und Bezugslänge l stets die gleichen Werte zu verwenden sind, mit denen die Reynolds-Zahl gebildet wird.

Ergänzend sei hier noch kurz der *Kontaktwiderstand* erwähnt, der sich an der Berührungsfläche zwischen zwei Körpern einstellt, wenn Wärme von einem auf den andern übertragen wird. Es seien T_{f1} und T_{f2} die Temperaturen der beiden einander berührenden Oberflächen ($T_{f1} > T_{f2}$) und q die auf der Berührungsfläche senkrecht stehende Komponente der Wärmestromdichte. Dann ist

$$q = (T_{f1} - T_{f2})/R_c, \quad 19.2(23)$$

womit eine Kontaktwiderstandszahl R_c definiert ist. Es seien λ_1 und λ_2 die Wärmeleitfähigkeiten der beiden Werkstoffe, λ die Wärmeleitung des umgebenden Fluids (z. B. Gas), k_1 und k_2 die mittleren Rauigkeitshöhen der beiden Oberflächen, σ_B die Bruchfestigkeit des duktileren der beiden Werkstoffe und p die Flächenpressung. Nach [20] läßt sich alsdann der Kontaktwiderstand durch folgende Formel bestimmen. Man setze

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad 19.2(24)$$

Dann ist

$$\frac{1}{R_c} = 0,7 \cdot 10^4 \frac{p\bar{\lambda}}{\sigma_B} + \frac{\lambda}{\bar{k}}. \quad 19.2(25)$$

Hier sind die k in m, die λ in W/mC einzusetzen und R_c wird in Cm²/W erhalten. Diese Formel beruht auf der Vorstellung, daß die Wärmeübertragung einerseits durch den Kontakt der Rauigkeitserhebungen, andererseits durch das in den mikroskopischen Zwischenräumen eingeschlossene Fluid erfolgt.

19.3 Wärmeübergang an Schaufeln

In Bd. I, Abschn. 8.4, finden sich bereits Angaben über den globalen Wärmeübergang an einem Schaufelblatt. Bei der Bestimmung der Temperaturverteilung in einer gekühlten Schaufel wird aber die Verteilung der Wärmeübergangszahl an der Berandung des Schaufelprofils benötigt. Diese läßt sich grundsätzlich grenzschichttheoretisch berechnen, wobei allerdings die im gegenwärtigen Stande der Theorie erreichbare Genauigkeit noch nicht voll befriedigt. Nachfolgend geben wir die Theorie von *Muy* [21] an, die sich auf die grundlegende Arbeit von *Eckert* [22] stützt. Dabei beschränken wir uns auf die Beschreibung des Rechenverfahrens und verweisen für die Herleitung auf die Originalliteratur.

Die Bezeichnungen sind die folgenden (vgl. Abb. 19.3.1). Wie in der Grenzschichttheorie üblich, bezeichne U die Geschwindigkeit am Rande der Grenzschicht beim Übergang in die ungestörte Strömung. U_1 und U_2 sind die über die Teilung gemittelten Geschwindigkeiten vor und nach dem Gitter. Mit s als Sehnenlänge führen wir die folgenden Reynolds-Zahlen ein:

$$Re_1 \equiv \frac{U_1 s}{\nu_1}, \quad Re_2 \equiv \frac{U_2 s}{\nu_2}. \quad 19.3(1)$$

Aus der laufenden Bogenkoordinate x , die vom vorderen Staupunkt E aus für Saug- und Druckseite getrennt positiv gerechnet wird, bilden wir die dimensionslose Koordinate $\xi = x/s$ und ebenso aus der Impulsmangeldicke δ und der Temperaturmangeldicke δ_t die dimensionslosen Größen

$$\Theta \equiv \delta/s, \quad \Theta_t \equiv \delta_t/s. \quad 19.3(2)$$

Weiter sei

$$W \equiv U/U_1, \quad 19.3(3)$$

$$t \equiv T - T_\infty, \quad 19.3(4)$$

wobei an der betrachteten Stelle ξ die Temperatur in beliebigem Wandabstand T , diejenige an der Grenze der Temperaturgrenzschicht T_∞ ist.

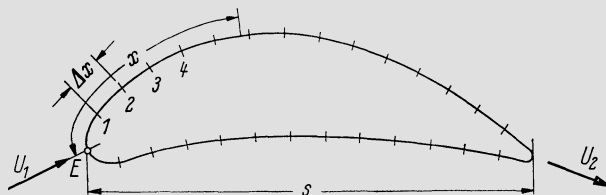


Abb. 19.3.1. Schaufelprofil, zur Theorie des Wärmeüberganges an Schaufeln

Die Berechnung der Wärmeübergangszahl geht aus von der als bekannt voraussetzenden Geschwindigkeitsverteilung am Profil, da hiervon die Grenzschichtentwicklung abhängt. Es ist also $W(\xi)$ und damit $dW/d\xi$ an jeder Stelle gegeben. Saug- und Druckseite teilt man je in eine Anzahl von Abschnitten Δx ein, womit auch die $\Delta\xi$ und die ξ -Werte ξ_1, ξ_2, \dots in den Punkten 1, 2, ... festliegen (vgl. Abb. 19.3.1). Zuerst wird der *laminare Teil* der Grenzschicht bestimmt. Im Staupunkt E ist die relative Impulsverlustdicke

$$\Theta = \frac{0,2923}{\sqrt{Re_1 \frac{dW}{d\xi} \Big|_0}} \tag{19.3(5)}$$

Für $\xi = \xi_1$ wählt man versuchsweise einige $\Theta(\xi_1)$, berechnet zu jedem den Wert

$$K = \Theta^2(\xi_1) Re_1 \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\xi_1}, \tag{19.3(6)}$$

entnimmt der Abb. 19.3.2 β^* und z_i^2 und gewinnt hieraus

$$\frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi_1} = \frac{(1 - \beta^*) z_i^2}{\Theta(\xi_1) W Re_1}. \tag{19.3(7)}$$

Damit geht man ins Diagramm Abb. 19.3.3 und trägt ausgehend von $\Theta(\xi_1)$ eine Gerade mit der Neigung nach Gl. 19.3(7) ein. Kommt der Schnittpunkt A in die Mitte des Intervalls von 0 bis ξ_1 zu liegen, so war $\Theta(\xi_1)$ richtig gewählt. In gleicher Weise wird weitergeschritten, indem man $\Theta(\xi_2)$ annimmt, die Gln. 19.3(6) und (7) für $\xi = \xi_2$ formuliert und die Annahme $\Theta(\xi_2)$ so lange verändert, bis der Schnittpunkt B in die Mitte zwischen ξ_1 und ξ_2 zu liegen kommt. So kann Schritt für Schritt weitergefahren werden, äußersten-

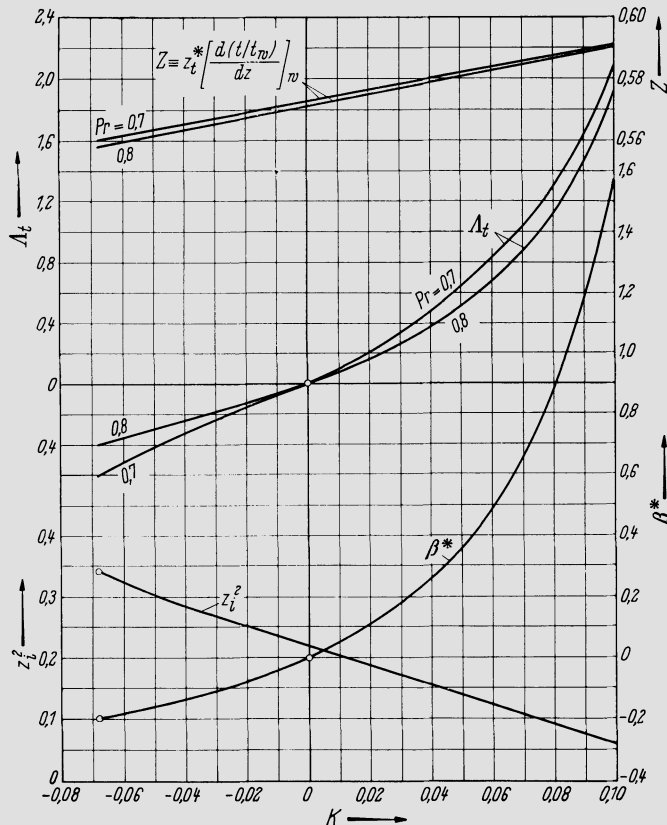


Abb. 19.3.2. Maßgebende Funktionen zur Berechnung des lokalen Wärmeüberganges an Schaufeln

falls bis dort, wo die Laminarablösung zu erwarten ist, was gekennzeichnet ist durch die Werte $K = -0,0681$, $\beta^* = 0,1988$. Bei der in Turbinen vorhandenen hohen Vorturbulenz erfolgt aber der Übergang zur turbulenten Grenzschichtströmung regelmäßig schon früher, nach *Hodge* [23] etwa bei $U\delta/\nu \approx 250$, vgl. die Ausführungen in Bd. I, Abschn. 3.13. Demnach ist mit dem Umschlag zu rechnen, wo

$$\Theta = 250 \frac{\nu}{U_s} \quad 19.3(8)$$

erreicht ist. — Ist diese Rechnung für den laminaren Teil der Grenzschicht durchgeführt, so kennt man an jeder Stelle ξ gemäß Abb. 19.3.2 die Größen Z und A_t und hat damit auch

$$\Theta_t(\xi) = \sqrt{\frac{A_t}{Re_1 \frac{dW}{d\xi}}}, \quad St(\xi) \equiv \frac{\alpha(\xi)}{\varrho_2 c_p U_2} = \frac{Z}{\Theta_t(\xi) Re_2 Pr}. \quad 19.3(9)$$

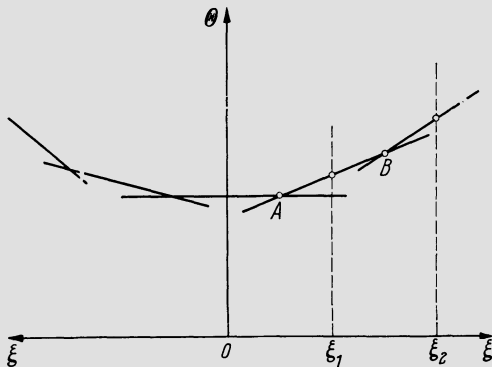


Abb. 19.3.3. Zur Integration der Grenzschichtgleichung durch Differenzenrechnung und Anwendung der Sekantenmethode

Im vorderen Staupunkt E , also in $\xi = 0$ ist

$$St(0) = \frac{0,4956}{Re_2 Pr} \sqrt{Re_1 \frac{dW}{d\xi} \Big|_0}. \quad 19.3(10)$$

Die Stanton-Zahl im *turbulenten Teil* der Grenzschicht läßt sich näherungsweise berechnen, indem man den Wert bestimmt, der für eine ebene Platte gelten würde an der Stelle, an der die entsprechenden Verhältnisse herrschen. So findet man

$$St(\xi) = 0,0296 \left(\frac{W}{W_2} \right)^{0,8} (Re_2 \xi)^{-0,2} Pr^{-0,67}. \quad 19.3(11)$$

Damit wird die Wärmeübergangszahl an jeder Stelle der Schaufelkontur

$$\alpha = \varrho_2 c_p U_2 St(\xi), \quad 19.3(12)$$

wo $St(\xi)$ je nach Ort gegeben ist durch die Gln. 19.3(9), (10) und (11).

Abb. 19.3.4 zeigt ein Rechnergebnisse. Leider ist die Genauigkeit solcher Rechnungen bis heute nicht völlig befriedigend. Das gilt nicht etwa nur dann, wenn man sich im turbulenten Teil mit der Näherung begnügt, die für die ebene Platte gültige Relation zu verwenden, sondern auch verfeinerte Theorien vermögen nicht voll zu befriedigen. Die Theorie von *Patankar* und *Spalding* [24] bietet ihrer Struktur nach die Möglichkeit, höhere Genauigkeit zu erreichen, doch erfordert dies die Eingabe empirischer Unterlagen, die noch nicht vorliegen. Bei dieser Lage der Dinge sei etwa folgendes Vorgehen empfohlen. In unmittelbarer Nähe des vorderen Staupunktes ist das Resultat zur Berücksichtigung der starken Vorturbulenz nach Gl. 19.2(12) und Abb. 19.2.3 zu berichtigen. Weiter vergleiche man das Integralmittel von St mit den Angaben in Bd. I, Abschn. 8.4;

liegt es wesentlich unter dem dort angegebenen Mittelwert, so ist der gefundene Verlauf $St(\xi)$ entsprechend umzurechnen, weil sonst die Gefahr besteht, daß der Wärmeübergang unterschätzt wird.

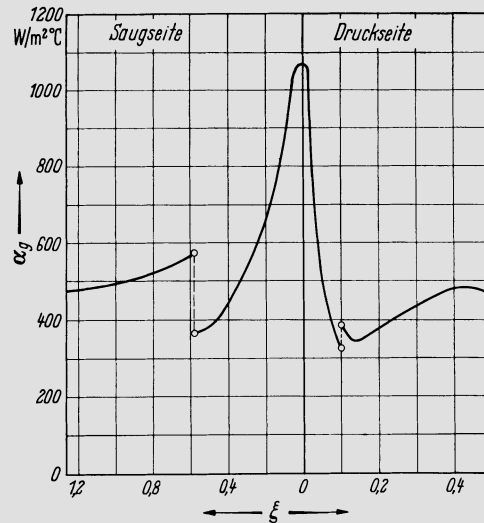


Abb. 19.3.4. Beispiel eines gerechneten Verlaufes der Wärmeübergangszahl α . Nach *May* [21]

19.4 Strenge Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Strenge Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind naturgemäß nur für Körper einfacher Geometrie möglich. Sie sind in großer Zahl bekannt, vgl. insbesondere das umfassende Werk von *Carslaw* und *Jaeger* [25]. Die nachfolgenden Angaben beziehen sich sämtlich auf *eindimensionale Fälle*, d. h. auf solche, bei denen die Temperatur nur von einer Koordinate abhängt.

a) Stationäre Temperaturfelder

Das einfachste stationäre Temperaturfeld entsteht in der *ebenen Platte*, deren beide Grenzflächen auf den Temperaturen T_1 und T_2 gehalten werden; der Temperaturverlauf über der Plattendicke ist dabei naheliegenderweise linear. Beim *Hohlzylinder*, der an seinem Innenradius r_i die Temperatur T_i und an seinem Außenradius r_a die Temperatur T_a aufweist, ist der Temperaturverlauf längs des Radius gegeben durch

$$T = T_a + (T_i - T_a) \frac{\ln(r_a/r)}{\ln(r_a/r_i)}. \quad 19.4(1)$$

Bei der Hohlkugel lautet die entsprechende Formel

$$T = T_a + (T_i - T_a) \frac{r_a - r_i}{\left(\frac{r_a}{r_i} - 1\right) r}. \quad 19.4(2)$$

b) Instationäre Elementarlösungen

Zunächst sei hier eine Funktion $\Gamma(t)$ eingeführt, die folgendermaßen definiert werde: Der Funktionswert ist 0 für $t < 0$ und 1 für $t > 0$, springt also in $t = 0$ um den Betrag 1 (vgl. Abb. 19.4.1). — Nun sei ein einfacher Körper (Platte, Zylinder oder Kugel) mit einem Fluid in Berührung, dessen zeitlicher Temperaturverlauf gegeben sei durch

$T' = T^* \Gamma(t)$, wobei die Wärmeübergangszahl α sei. Bis $t = 0$ herrsche auch im Körper die Temperatur Null. Alsdann stellt sich im Körper eine raum-zeitliche Temperaturverteilung ein, die nachfolgend angegeben wird.

Bei der *Platte* von der Dicke h (Abb. 19.4.2), die wir uns unendlich ausgedehnt denken, lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad 19.4(3)$$

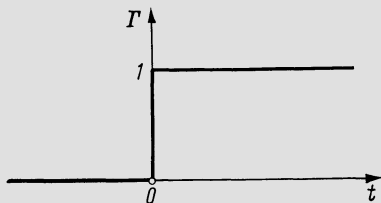
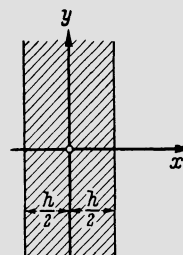
Abb. 19.4.1. Verlauf der Funktion $T(t)$ 

Abb. 19.4.2. Ebene Platte, Bezeichnungen

Mit

$$X = \frac{2x}{h}, \quad B = \frac{\alpha h}{2\lambda}, \quad \tau = \frac{4\lambda}{\rho c h^2} t \quad 19.4(4)$$

lautet dann die Lösung

$$T = T^* \Theta(X, B, \tau), \quad 19.4(5)$$

$$\Theta = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_i}{\mu_i + \sin \mu_i \cos \mu_i} \exp(-\mu_i^2 \tau) \cos(\mu_i X). \quad 19.4(6)$$

Die Eigenwerte μ_i sind die Lösungen der Gleichung

$$\cot \mu = \frac{\mu}{B}. \quad 19.4(7)$$

Für $\tau < 0$ wird $\Theta = 0$. — In der Mittelebene ($X = 0$) ist bei den gegebenen Annahmen die Wärmestromdichte stets Null. Daher gibt die Lösung auch zugleich den Temperaturverlauf wieder für den Fall der Platte von der Dicke $h/2$, die auf der einen Seite wärmeisoliert ist. Das ist oft eine gute Näherung für die Verhältnisse an einer Gehäusewand.

Beim *Zylinder* unendlicher axialer Ausdehnung lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad 19.4(8)$$

Es sei mit R als Zylinderradius

$$X = \frac{r}{R}, \quad B = \frac{\alpha R}{\lambda}, \quad \tau = \frac{\lambda}{\rho c R^2} t. \quad 19.4(9)$$

Dann lautet die Lösung für $\tau > 0$

$$T = T^* \Theta(X, B, \tau), \quad 19.4(10)$$

$$\Theta = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\nu_i^2} \frac{J_1(\nu_i)}{J_0^2(\nu_i) + J_1^2(\nu_i)} \exp(-\nu_i^2 \tau) J_0(\nu_i X). \quad 19.4(11)$$

Die Eigenwerte ν_i sind die Wurzeln der Gleichung

$$\nu J_1(\nu) = B J_0(\nu), \quad 19.4(12)$$

wobei mit J die Bessel-Funktionen bezeichnet sind.

Bei der *Kugel* lautet die Differentialgleichung, wenn T nur von r abhängt,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad 19.4(13)$$

Die Lösung kann wiederum durch die Gln. 19.4(9) und (10) dargestellt werden, wobei aber hier

$$\Theta = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} 2 \frac{\sin \omega_i - \omega_i \cos \omega_i}{\omega_i - \sin \omega_i \cos \omega_i} \exp(-\omega_i^2 \tau) \frac{\sin(\omega_i X)}{\omega_i X}. \quad 19.4(14)$$

Die Eigenwerte ω_i sind die Lösungen der Gleichung

$$\cot \omega = \frac{1 - B}{\omega}. \quad 19.4(15)$$

Kurvenmäßige oder tabellarische Angaben über die hier auftretenden Funktionen Θ finden sich an vielen Stellen der Literatur, z. B. [26–28].

c) Allgemeinere instationäre Lösungen

Ausgehend von den angegebenen Elementarlösungen, die einen zeitlichen Verlauf der Fluidtemperatur gemäß der Sprungfunktion $\Gamma(t)$ voraussetzen, kann auch jeweils die Lösung für beliebigen Verlauf der Fluidtemperatur aufgefunden werden. Es sei

$$T' = f(\tau), \quad 19.4(16)$$

d. h. wir führen sogleich die dimensionslose Zeitvariable τ ein. Denken wir uns in irgendeinem Zeitpunkt τ_0 einen unendlich kleinen Sprung dT' der Fluidtemperatur, so wird dadurch im Körper ein raum-zeitlicher Temperaturverlauf erzeugt, der durch

$$dT = dT' \Theta(X, B, \tau - \tau_0) \quad 19.4(17)$$

beschrieben wird. Hierbei ist zu beachten, daß $\Theta = 0$ für $\tau < \tau_0$.

Wegen des linearen Charakters der Wärmeleitungsgleichung ist aber jede beliebige Überlagerung von Lösungen wieder eine Lösung. Deshalb kann aus Gl. 19.4(17) sogleich die Lösung für den allgemeinen, durch Gl. 19.4(16) gegebenen Temperaturverlauf erhalten werden, wenn man diesen gemäß Abb. 19.4.3 durch eine Treppenkurve ersetzt denkt und zum Differentiellen übergeht. Für den einzelnen Schritt läßt sich dann setzen

$$dT' = \dot{f}(\tau_0) d\tau_0, \quad 19.4(18)$$

wobei der Punkt die Ableitung nach τ bedeutet. Die Überlagerung aller Elementarlösungen liefert damit offensichtlich

$$T = \int_0^{\tau} \Theta(X, B, \tau - \tau_0) \dot{f}(\tau_0) d\tau_0. \quad 19.4(19)$$

Mit den angegebenen Funktionen Θ ist damit die Temperaturverteilung im Körper für das allgemeine Gesetz 19.4(16) in jedem Zeitpunkt bekannt. Den Ausdruck 19.4(19) nennt man *Duhamelsches Integral*.

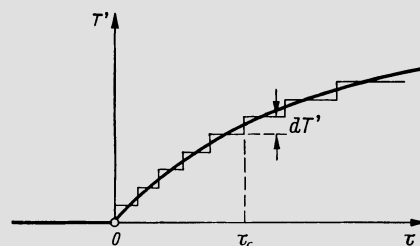


Abb. 19.4.3. Zur Bildung des Duhamelschen Integrals

Abb. 19.4.4–6 zeigen drei Beispiele von so bestimmten Temperaturverläufen für einen Zylinder von 0,5 m Durchmesser mit folgenden Daten: $\rho = 7,86 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $c = 500 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$, $\lambda = 29 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, $\alpha = 1160 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$. Damit wird $B = 10$. Der zeitliche

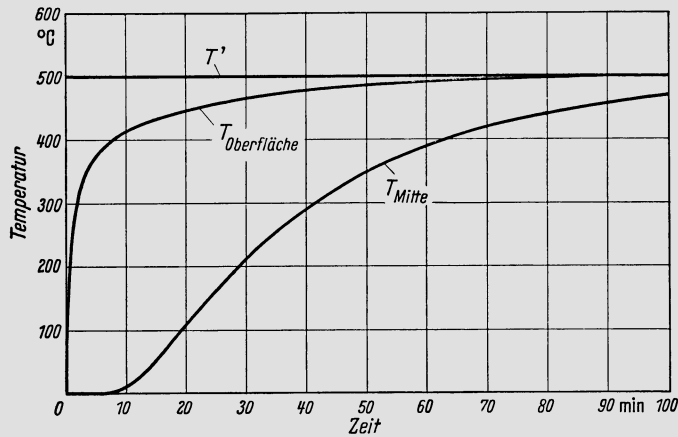


Abb. 19.4.4. Temperaturverlauf in der Mitte und an der Oberfläche eines zylindrischen Rotors, wenn im Zeitpunkt 0 die Gastemperatur plötzlich um 500°C springt

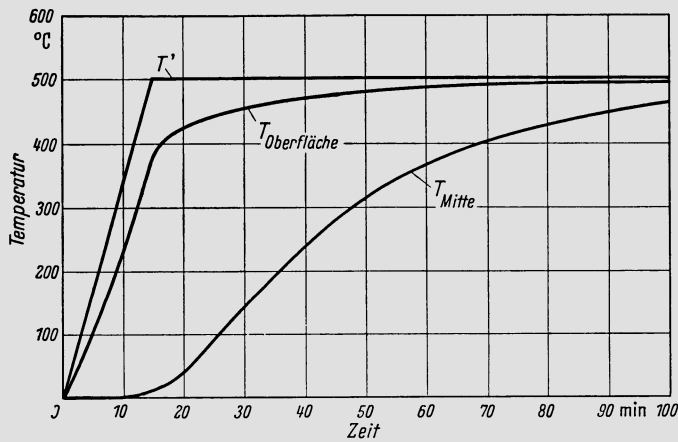


Abb. 19.4.5. Temperaturverlauf in der Mitte und an der Oberfläche eines zylindrischen Rotors, wenn die Gastemperatur im Verlauf von 15 min linear um 500°C steigt

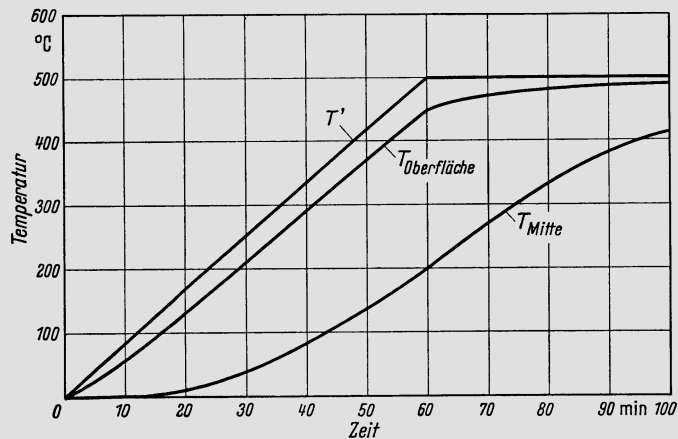


Abb. 19.4.6. Temperaturverlauf in der Mitte und an der Oberfläche eines zylindrischen Rotors, wenn die Gastemperatur im Verlauf von 60 min linear um 500°C steigt

Verlauf der Fluidtemperatur T' ist aus den drei Diagrammen zu erkennen, ebenso die Temperatur T_f an der Oberfläche und die Temperatur T_0 in der Achse. Der für die Wärmespannungen maßgebende größte Unterschied $T_f - T_0$ ist offensichtlich nicht sehr stark verschieden, ob man nun T' schlagartig oder im Verlauf von 15 min von 0 auf 500°C steigert. Erst im Falle von Abb. 19.4.6, wo diese Temperatursteigerung sich über 60 min erstreckt, wird der größte Temperaturunterschied im Körper wesentlich kleiner. Im Hinblick auf Rotoren ist aber 0,5 m noch ein kleiner Durchmesser. Bei größeren Rotoren wären die entsprechenden Zeiten im Verhältnis der Quadrate der Durchmesser umzurechnen, woraus man sieht, daß sehr lange Anfahrzeiten notwendig werden, wenn die Wärmespannungen wirksam reduziert werden sollen.

19.5 Quasistationäre Berechnung instationärer Temperaturverteilungen

Gegeben sei ein Körper in dem eindimensionale Temperaturverteilung angenommen werden darf. Seine beiden Oberflächen F_1 und F_2 mögen in einem gegebenen Zeitpunkt t Temperaturen T_{f1} und T_{f2} aufweisen und mit Medien in Berührung stehen, deren Temperaturen T'_1 und T'_2 seien. Die Wärmeübergangszahlen seien α_1 und α_2 , was auf Wärmestromdichten q_1 und q_2 an den beiden Oberflächen führt. Nun möge folgender Vorgang betrachtet werden. Die Gestalt der Temperaturkurve im Körper (Abb. 19.5.1) sei zeitlich konstant; mithin sind auch q_1 und q_2 unveränderlich, da sie ja durch die Neigungen der Temperaturkurve an den beiden Oberflächen gegeben sind. Die Temperaturkurve muß sich aber im allgemeinen als Ganzes mit der Zeit verschieben, da ja Wärme zugeführt oder entzogen wird. Damit ein solcher quasistationärer Vorgang überhaupt möglich sei, muß die Temperaturverteilung offenbar die Bedingung

$$a\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} = \text{const} \quad 19.5(1)$$

erfüllen. Nun sei \bar{T} die mittlere Temperatur des Körpers. Dann läßt sich für den quasistationären Vorgang setzen

$$\left. \begin{aligned} T_{f1} - \bar{T} &= k_{11}q_1 + k_{12}q_2, \\ T_{f2} - \bar{T} &= k_{21}q_1 + k_{22}q_2. \end{aligned} \right\} \quad 19.5(2)$$

Die k_{ij} sind dabei durch Körpergeometrie und Leitfähigkeit gegeben, denn gibt man sich die q , dann sind die Neigungen Abb. 19.5.1 festgelegt, folglich wegen Gl. 19.5(1) aber auch die Kurvengestalt und damit auch die in 19.5(2) links stehenden Temperaturdifferenzen.

Der Grundgedanke der Theorie besteht nun darin, einen beliebigen instationären Vorgang durch eine Aufeinanderfolge solcher quasistationärer Vorgänge anzunähern. In jedem Zeitpunkt gelten dann die Gln. 19.5(2) mit nunmehr zeitlich variablen q_1 und q_2 .

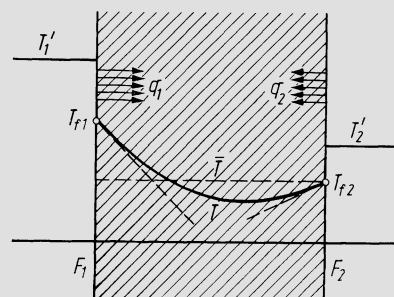


Abb. 19.5.1. Zur Herleitung der Theorie der quasistationären Berechnung instationärer Temperaturverteilungen

Diese Annäherung ist in erstaunlich weitem Bereich brauchbar und hat gegenüber der unter 19.4 gezeigten Methode des Duhamelschen Integrals den Vorteil, zeitlich variable Wärmeübergangszahlen zuzulassen. — Da nun

$$q_1 = \alpha_1(T'_1 - T_{f1}) = \alpha_1[T'_1 - \bar{T} - (T_{f1} - \bar{T})],$$

erhält man unter Verwendung von 19.5(2) die erste der folgenden Gleichungen; die zweite folgt in Analogie dazu.

$$q_1 = \alpha_1(T'_1 - \bar{T} - k_{11}q_1 - k_{12}q_2),$$

$$q_2 = \alpha_2(T'_2 - \bar{T} - k_{21}q_1 - k_{22}q_2).$$

Diese Gleichungen, nach q_1 und q_2 aufgelöst, liefern

$$q_1 = \frac{\alpha_1(T'_1 - \bar{T})(1 + \alpha_2 k_{22}) - \alpha_1 \alpha_2 k_{12}(T'_2 - \bar{T})}{(1 + \alpha_1 k_{11})(1 + \alpha_2 k_{22}) - \alpha_1 \alpha_2 k_{12} k_{21}}, \quad 19.5(3)$$

$$q_2 = \frac{\alpha_2(T'_2 - \bar{T})(1 + \alpha_1 k_{11}) - \alpha_1 \alpha_2 k_{21}(T'_1 - \bar{T})}{(1 + \alpha_1 k_{11})(1 + \alpha_2 k_{22}) - \alpha_1 \alpha_2 k_{12} k_{21}}. \quad 19.5(4)$$

Damit sind für q_1 und q_2 Ausdrücke gefunden, welche die Oberflächentemperaturen nicht mehr enthalten.

Die Energiebilanzgleichung des Vorganges lautet mit m als Körpermasse

$$mc \frac{d\bar{T}}{dt} = F_1 q_1 + F_2 q_2. \quad 19.5(5)$$

Mit $\tau = \lambda t / \rho c l^2$ läßt sich dies in der Form

$$\frac{d\bar{T}}{d\tau} - \frac{\rho l^2}{\lambda m} (F_1 q_1 + F_2 q_2) = 0 \quad 19.5(6)$$

schreiben. Wenn man hier noch q_1 und q_2 nach 19.5(3) und (4) einsetzt, erhält man folgendes. Man setzt

$$u = \frac{\rho l^2}{\lambda m} \frac{[\alpha_1(1 + \alpha_2 k_{22}) - \alpha_1 \alpha_2 k_{12}] F_1 + [\alpha_2(1 + \alpha_1 k_{11}) - \alpha_1 \alpha_2 k_{21}] F_2}{(1 + \alpha_1 k_{11})(1 + \alpha_2 k_{22}) - \alpha_1 \alpha_2 k_{12} k_{21}}, \quad 19.5(7)$$

$$v = \frac{\rho l^2}{\lambda m} \frac{[\alpha_1(1 + \alpha_2 k_{22}) T'_1 - \alpha_1 \alpha_2 k_{12} T'_2] F_1 + [\alpha_2(1 + \alpha_1 k_{11}) T'_2 - \alpha_1 \alpha_2 k_{21} T'_1] F_2}{(1 + \alpha_1 k_{11})(1 + \alpha_2 k_{22}) - \alpha_1 \alpha_2 k_{12} k_{21}}. \quad 19.5(8)$$

Dann ist

$$\frac{d\bar{T}}{d\tau} + u(\tau) \bar{T} - v(\tau) = 0 \quad 19.5(9)$$

die Differentialgleichung des Vorganges, deren Lösung

$$\bar{T} = \exp \left[- \int_0^\tau u(\tau') d\tau' \right] \left\{ \bar{T}(0) + \int_0^\tau v(\tau') \exp \left[\int_0^{\tau'} u(\tau'') d\tau'' \right] d\tau' \right\} \quad 19.5(10)$$

lautet. Es ist τ'' der von 0 bis τ' laufende, τ' der von 0 bis τ laufende Wert des dimensionslosen Zeitparameters, $\bar{T}(0)$ die mittlere Temperatur in $\tau = 0$. Man beachte, daß die Rechnung mit beliebig zeitlich variablen α_1 , α_2 , T'_1 , T'_2 möglich ist.

Wenn die Gln. 19.5(2) noch in der Form

$$\left. \begin{aligned} T_{f1} &= \bar{T} + k_{11}q_1 + k_{12}q_2, \\ T_{f2} &= \bar{T} + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 \end{aligned} \right\} \quad 19.5(11)$$

dargestellt werden, läßt sich der Rechnungsgang überblicken: Aus Geometrie und Wärmeleitfähigkeit des Körpers bestimmen sich die k_{ij} ; diese Ausdrücke werden nachfolgend für die in Frage kommenden Fälle angegeben. Gegeben sind $\alpha_1, \alpha_2, T'_1, T'_2$ in Funktion der Zeit. Alsdann berechnet man aus 19.5(7) und (8) $u(\tau)$ und $v(\tau)$, aus (10) \bar{T} , aus 19.5(3) und (4) q_1 und q_2 , aus 19.5(11) T_{f1} und T_{f2} , alles in Funktion von τ . — Anschließend folgen die ergänzenden Angaben für die Körper, für welche die Methode bevorzugt anzuwenden ist.

Beim *Vollzylinder* ist dessen Radius R gegebenenmaßen die Bezugslänge l . Es ist hier nur eine Oberfläche vorhanden und der Körper ist nur mit einem Fluid in Berührung. Dementsprechend fallen alle Größen mit Index 2 aus der Theorie weg, und der Index 1 kann fallengelassen werden. Es ist also $k_{11} = k, k_{12} = k_{21} = k_{22} = 0, \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0, F_1 = F, F_2 = 0$. Weiter ist

$$\tau = \frac{\lambda}{\rho c R^2} t, \quad 19.5(12)$$

$$\frac{\rho l^2}{\lambda m} F = \frac{2R}{\lambda}. \quad 19.5(13)$$

Die Lösung der Gl. 19.5(1) lautet für die gegebene Geometrie

$$T_f - T = \frac{q}{2\lambda r} (R^2 - r^2), \quad 19.5(14)$$

woraus durch Mittelung

$$T_f - \bar{T} = \frac{qR}{4\lambda}. \quad 19.5(15)$$

Somit ist

$$k = \frac{R}{4\lambda}. \quad 19.5(16)$$

Bei der *ebenen Platte* mit Dicke h ist $l = h$ und $F_1 = F_2 = F$. Das Koordinatensystem werde so gelegt, daß $x = 0$ an der Oberfläche 1 und $x = h$ an der Oberfläche 2. Es ist dann

$$\tau = \frac{\lambda}{\rho c h^2} t, \quad 19.5(17)$$

$$\frac{\rho l^2}{\lambda m} F = \frac{h}{\lambda}. \quad 19.5(18)$$

Die Lösung der Gl. 19.5(1) führt auf

$$T_{f1} - T = \frac{q_1}{\lambda} x - \frac{q_1 - q_2}{2\lambda h} x^2, \quad T_{f1} - T_{f2} = (q_1 - q_2) \frac{h}{2\lambda}. \quad 19.5(19)$$

Für das Integralmittel ergeben sich folgende Darstellungen:

$$T_{f1} - \bar{T} = \frac{h}{\lambda} \left(\frac{q_1}{3} - \frac{q_2}{6} \right), \quad T_{f2} - \bar{T} = \frac{h}{\lambda} \left(\frac{q_2}{3} - \frac{q_1}{6} \right). \quad 19.5(20)$$

Somit ist

$$k_{11} = k_{22} = \frac{h}{3\lambda}, \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{h}{6\lambda}. \quad 19.5(21)$$

Beim *Hohlzylinder* mit Innenradius r_1 und Außenradius r_2 werden die Relationen naturgemäß etwas komplizierter. Die Bezugslänge sei $l = (r_2 - r_1)$. Demgemäß ist

$$\tau = \frac{\lambda}{\rho c (r_2 - r_1)^2} t. \quad 19.5(22)$$

Ferner werde gesetzt

$$Y \equiv r_2/r_1, \quad y \equiv r/r_1. \quad 19.5(23)$$

Dann ist

$$\frac{\rho l^2}{\lambda m} F_1 = \frac{2(Y-1)^2}{Y^2-1} \frac{r_1}{\lambda}, \quad \frac{\rho l^2}{\lambda m} F_2 = \frac{2Y(Y-1)^2}{Y^2-1} \frac{r_1}{\lambda}. \quad 19.5(24)$$

Als Lösung von 19.5(1) erhält man

$$T_{r1} - T = \frac{r_1}{\lambda} \left[\frac{Y^2 q_1 + Y q_2}{Y^2 - 1} \ln y - \frac{1}{2} \frac{q_1 + Y q_2}{Y^2 - 1} (y^2 - 1) \right]. \quad 19.5(25)$$

Die Gln. 19.5(2) geben damit die korrekten Temperaturdifferenzen, wenn man setzt

$$k_{11} = \frac{r_1}{\lambda} \left[\frac{Y^4 \ln Y}{(Y^2 - 1)^2} - \frac{Y^2}{2(Y^2 - 1)} - \frac{1}{4} \right], \quad 19.5(26)$$

$$k_{12} = \frac{r_1}{\lambda} \left[\frac{Y^3 \ln Y}{(Y^2 - 1)^2} - \frac{Y^2}{2(Y^2 - 1)} - \frac{Y}{4} \right], \quad 19.5(27)$$

$$k_{21} = \frac{r_1}{\lambda} \left[\frac{Y^2 \ln Y}{(Y^2 - 1)^2} - \frac{Y^2}{2(Y^2 - 1)} + \frac{1}{4} \right], \quad 19.5(28)$$

$$k_{22} = \frac{r_1}{\lambda} \left[\frac{Y \ln Y}{(Y^2 - 1)^2} - \frac{Y^2}{2(Y^2 - 1)} + \frac{Y}{4} \right]. \quad 19.5(29)$$

Damit sind für diese drei Fälle die sämtlichen benötigten Beziehungen zusammengestellt. Für jeden Zeitpunkt erhält man außer \bar{T} und der Oberflächentemperatur auch den Temperaturverlauf. Die einseitig isolierte Platte oder der innen oder außen isolierte Hohlzylinder sind eingeschlossen, denn man hat nur an der isolierten Fläche $\alpha = 0$ zu setzen. — Man beachte, daß die Produkte αk stets dimensionslos sind und den Aufbau von Biot-Zahlen haben. Auch u hat die Struktur einer Biot-Zahl, während bei v noch die Temperatur als Faktor hinzukommt.

Um die Genauigkeit dieses Näherungsverfahrens zu prüfen, sei hier ein Vergleich vorgenommen mit den strengen Lösungen, die man für Platte und Zylinder erhält, wenn die Fluidtemperatur gemäß der Sprungfunktion T variiert, vgl. Abschn. 19.4. Im Augenblick des Sprunges ist man von quasistationären Verhältnissen sehr weit entfernt, so daß ein großer Fehler entstehen muß. Das Verfahren wird also an einem Beispiel kontrolliert, das für seine Anwendung ungünstige Voraussetzungen bietet. Trotzdem zeigt Abb. 19.5.2, daß, abgesehen vom Sprung der Oberflächentemperatur in $t = 0$, eine durchaus brauchbare Näherung entsteht. Die ausgezogenen Kurven zeigen die Ergebnisse nach vorliegender Theorie, die gestrichelten die exakten Temperaturverläufe. Um eine bessere Vorstellung zu geben, sei folgendes erwähnt. Eine Wandung von 100 mm Dicke aus Stahlguß mit $\lambda = 35 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ hat bei einer Wärmeübergangszahl $\alpha = 2000 \text{ W/m}^2\text{C}$ eine Biot-Zahl $B = 5,71$. Ein voller zylindrischer Trommelläufer von 1000 mm Durchmesser und gleichem λ -Wert hat bei $\alpha = 1000 \text{ W/m}^2\text{C}$ eine Biot-Zahl $B = 14,3$. — Bei sehr großen Biot-Zahlen wachsen die Fehler, während sie andererseits geringer werden, wenn sich die Fluidtemperaturen nur stetig und verhältnismäßig langsam ändern. Der Vergleich mit exakten Rechnungen hat z. B. gezeigt, daß diese einfache Methode (die zeitlich variierende α zuläßt!) bei Anfahrvorgängen von Dampfturbinen erstaunlich genaue Resultate liefert.

Werden solche Berechnungen für Rotor und Stator durchgeführt, um die Veränderungen der Wärmedehnungen und damit der Spiele zu untersuchen, dann muß man natürlich beachten, daß die Zeitvariablen τ für verschiedene Teile nicht direkt vergleichbar sind. Es ist dann zweckmäßig, auf die „echte“ Zeit zurückzugehen.

Endres und *Salm* [29] haben qualitative Überlegungen angestellt über die optimale Weise des Anfahrens von Dampfturbinen. Sie gehen dabei von einer sehr vereinfachten Modellvorstellung aus, indem sie nur die Wärmekapazität der Bauteile berücksichtigen,

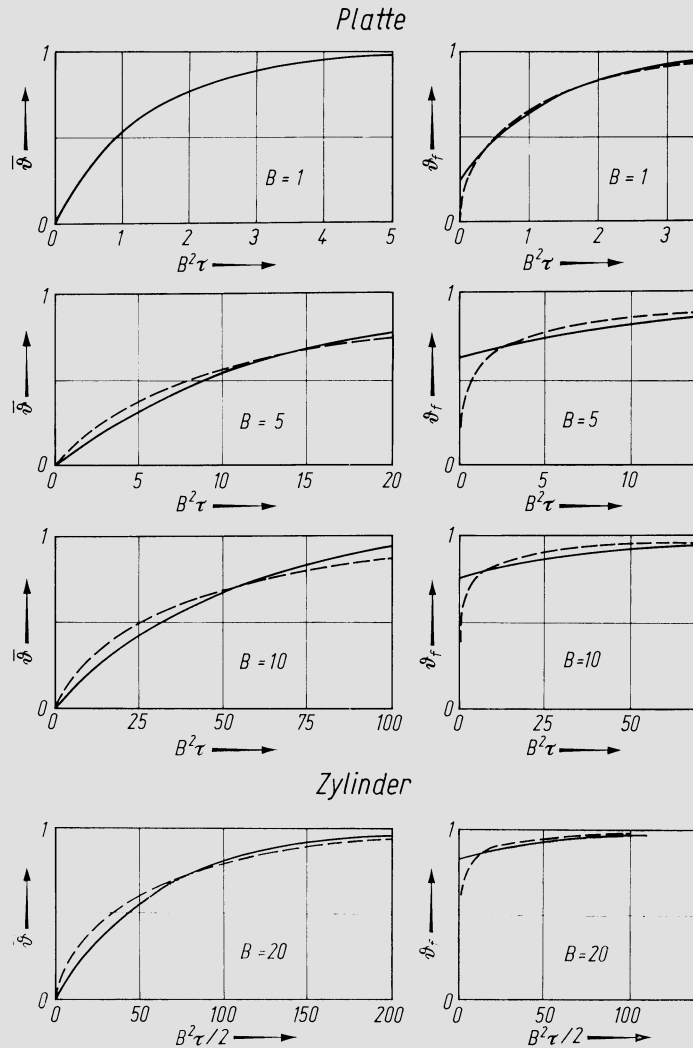


Abb. 19.5.2. Beispiele quasistationär berechneter Temperaturkurven (ausgezogen) und Vergleich mit exakter Lösung (gestrichelt). Zeitlicher Verlauf von Fluidtemperatur entspricht der Funktion $I(t)$ mit Temperatursprung ΔT in $t = 0$. Es ist $\bar{\vartheta} = T/\Delta T$. $\bar{\vartheta}$ Mittelwert, ϑ_f Wert an Oberfläche. Bei $B = 1$ ist der exakte Verlauf ϑ vom angenäherten zeichnerisch nicht unterscheidbar

also nur mit mittleren Temperaturen derselben rechnen, ohne auf die Wärmeleitvorgänge einzugehen. Die Ausführungen dieses Abschnittes erlauben es indessen, genauere Aussagen zu machen und den Anwendungsbereich jener älteren Untersuchungen zu erweitern, denn die Differentialgleichung 19.5(9) hat die gleiche mathematische Struktur wie diejenige, die dort verwendet wird. Man hat nur konstante α und damit konstantes u voraussetzen und anzunehmen, daß der Körper nur mit einem Fluid in Berührung sei. Ändert dieses seine Temperatur gemäß der Sprungfunktion, d.h. springt die Fluidtemperatur in $\tau = 0$ um T^* (vgl. Abb. 19.5.3a), so lautet die Lösung

$$\bar{T} = T^* [1 - \exp(-u\tau)]. \tag{19.5(30)}$$

Variiert T' proportional gemäß $T' = T^{**}\tau$ (Abb. 19.5.3b), so wird die Lösung

$$\bar{T} = T^{**} \left\{ \tau - \frac{1}{u} [1 - \exp(-u\tau)] \right\}. \tag{19.5(31)}$$

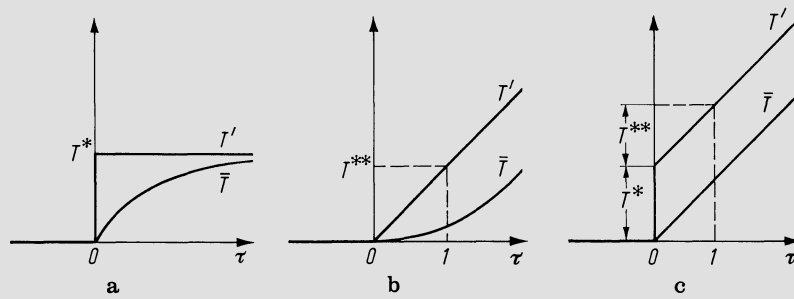


Abb. 19.5.3. Anstieg der Mitteltemperatur \bar{T} in einem Körper bei Veränderung der Fluidtemperatur. a) Plötzlicher Sprung der Fluidtemperatur; b) Fluidtemperatur mit Zeit linear ansteigend; c) Fluidtemperatur springt zunächst um T^* und steigt dann weiter linear an

Die Temperaturdifferenz $T' - \bar{T}$ ist offenbar maßgebend für den auf den Körper übertragenen Wärmestrom, mithin aber auch für die im Körper auftretenden Temperaturdifferenzen und Wärmespannungen. Ein optimaler Anfahrvorgang ist dann gegeben, wenn diese Größe zeitlich konstant ist. Das ist durch geeignete Überlagerung der Lösungen Gln. 19.5(30) und (31) erreichbar (vgl. Abb. 19.5.3c). Man braucht nur die Temperaturparameter T^* und T^{**} gemäß

$$T^* = T^{**}/u \quad 19.5(32)$$

aufeinander abzustimmen. Dann bleibt übrig

$$\bar{T} = T^{**}\tau. \quad 19.5(33)$$

Demnach ist es zweckmäßig, die Fluidtemperatur sofort sprunghaft zu erhöhen und anschließend weiter allmählich ansteigen zu lassen, und zwar gemäß der Abstimmung, die durch 19.5(32) gegeben ist.

Die hier gegebene Methode liefert auch die asymptotisch sich einstellende *stationäre Temperaturverteilung*, und zwar in strenger Weise, wenn die Geometrie des Körpers den einfachen Voraussetzungen entspricht. Das ist bedeutsam für gekühlte Konstruktionsteile von Gasturbinen, die mit zwei Fluidströmen verschiedener Temperatur in Berührung stehen. Es genügt in diesem Falle, in der Differentialgleichung zu setzen $d\bar{T}/d\tau = 0$. Dann bleibt $\bar{T} = v/u$, worauf 19.5(3) und (4) q_1 und q_2 , 19.5(11) T_{f1} und T_{f2} und 19.5(19) bzw. (25) die Temperaturverteilungen liefern.

19.6 Eindimensionale Wärmeleitung in Stäben, Scheiben und Schalen

Die in diesem Abschnitt angegebene Theorie dient vor allem der Berechnung der Temperaturverteilung in Schaufeln ohne Innenkühlung und in Radscheiben. Dabei ist vereinfachend vorausgesetzt, daß die Temperaturunterschiede innerhalb eines Querschnittes (also in einem Schaufelschnitt bzw. in einem Zylinderschnitt im Falle der Scheibe) vernachlässigbar seien. Der Unterschied gegenüber den in den vorausgehenden Abschnitten behandelten eindimensionalen Problemen besteht darin, daß der Körper längs der Erstreckung längs der die Temperaturverteilung zu rechnen ist, im Wärmekontakt mit einem Fluid steht.

Abb. 19.6.1 zeigt die Disposition. Der schraffiert angedeutete Körper steht auf beiden Seiten mit je einem Fluid in Berührung, deren Temperaturen T' , T'' und Wärmeübergangszahlen α' und α'' im allgemeinen Funktionen des Ortes x und der Zeit t sein können. Ein Element dx in x bietet zu beiden Seiten Flächen $U' dx$ und $U'' dx$ dar, die nicht notwendig gleich sein müssen; sie sind es z. B. nicht, wenn der Körper eine Rotations-

schale ist. Der Fall der Schaufel ergibt sich in naheliegender Vereinfachung, denn dort gibt es nur ein Fluid, das den stabförmigen Körper am ganzen Umfang umgibt. Körper, die mit mehr als zwei Fluidströmen in Berührung stehen, lassen sich genau gleich behandeln, doch dürfte der Fall selten sein.

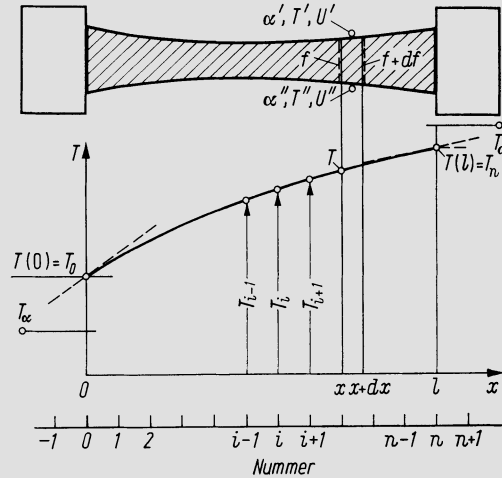


Abb. 19.6.1. Zur Herleitung der Differentialgleichung der eindimensionalen Wärmeleitung

Die Energiebilanz eines Abschnittes zwischen x und $x + dx$ lautet

$$\lambda \left[f \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x+dx} - \lambda \left[f \frac{\partial T}{\partial x} \right]_x + \alpha'(T' - T) U' dx + \alpha''(T'' - T) U'' dx = \rho c f dx \frac{\partial T}{\partial t},$$

was nach Division durch λdx und nach Einführung der Abkürzungen

$$\beta' \equiv \frac{\alpha' U'}{\lambda}, \quad \beta'' \equiv \frac{\alpha'' U''}{\lambda}, \quad a \equiv \frac{\lambda}{\rho c} \tag{19.6(1)}$$

in die folgende Form gebracht werden kann:

$$f \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{df}{dx} \frac{\partial T}{\partial x} - (\beta' + \beta'') T + \beta' T' + \beta'' T'' = \frac{f}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{19.6(2)}$$

Die β haben den Aufbau von Biot-Zahlen und alle Glieder der Gleichung haben offensichtlich die Dimension einer Temperatur. — Dieser Differentialgleichung sind für die beiden Enden noch *Grenzbedingungen* beizufügen. Zu diesem Zweck sei angenommen, daß der Körper beidseitig mit wärmeübertragenden Systemen in Verbindung stehe, die in Abb. 19.6.1 durch Rechtecke angedeutet sind und zur Herleitung eines allgemeinen Formalismus nicht genauer spezifiziert werden müssen. Es genügt, daß die beiden für die Wärmeströme maßgebenden Temperaturgradienten in der Form

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{T(0) - T_\alpha}{L_\alpha}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{T_\omega - T(l)}{L_\omega} \tag{19.6(3)}$$

dargestellt werden können. Hier sind T_α und T_ω gegebene (u.U. zeitlich variierende) Temperaturen, die in den Anschlußsystemen hergestellt werden, während die L_α und L_ω Konstanten von der Dimension einer Länge sind. Ist etwa der Endquerschnitt in $x = l$ mit einem Fluid mit Temperatur T_ω und Wärmeübergangszahl α_ω in Berührung, so ist $L_\omega = \lambda/\alpha_\omega$. Komplizierter wird die Bestimmung der L bei wärmeleitenden Anschlußsystemen, vgl. die Ausführungen unter 19.7. Die Gln. 19.6(3) erlauben die Darstellung

$$T(0) = T_\alpha + L_\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad T(l) = T_\omega - L_\omega \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l}. \tag{19.6(4)}$$

Daraus ist zu erkennen, daß die angegebene Form fast immer anwendbar ist, denn wird etwa die Temperatur in einem Endquerschnitt direkt vorgeschrieben, so bedeutet dies lediglich, daß die betreffende Konstante L Null ist. Nur der Fall, wo man direkt den Gradienten vorschreiben würde, ist so nicht darstellbar, doch kommt er in unseren Anwendungsfällen kaum vor. — Fügt man zu der Differentialgleichung 19.6(2) und den Grenzbedingungen 19.6(4) noch eine *Anfangsbedingung* bei, so ist das instationäre Problem mathematisch eindeutig formuliert. Im stationären Falle ist lediglich in Gl. 19.6(2) rechts Null zu setzen, und die Anfangsbedingung entfällt.

Die *Lösung* kann nur in einfachen Sonderfällen geschlossen erfolgen. Sonst wird man sich heute der Differenzenrechnung bedienen, wozu man den Körper einteilt in n gleiche Koordinatenintervalle Δx (vgl. Abb. 19.6.1). Die Ableitungen im Aufpunkt i sind dann gegeben durch

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad 19.6(5)$$

Weiter möge die zeitliche Ableitung im gleichen Aufpunkt ersetzt werden durch

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Delta T_i}{\Delta t}, \quad 19.6(6)$$

wo ΔT_i die Änderung von T_i im kleinen Zeitintervall Δt ist. Wenn man die Ausdrücke 19.6(5) und (6) in 19.6(2) einführt und ordnet, erhält man folgende Differenzgleichung, die für jeden Punkt von $i = 0$ bis n gilt:

$$\left. \begin{aligned} P_i T_{i-1} - Q_i T_i + R_i T_{i+1} + S_i &= \frac{f_i}{a} \frac{\Delta T_i}{\Delta t}, \\ P_i &= \frac{f_i}{\Delta x^2} - \frac{1}{2\Delta x} \left. \frac{df}{dx} \right|_i, \\ Q_i &= \frac{2f_i}{\Delta x^2} + \beta'_i + \beta''_i, \\ R_i &= \frac{f_i}{\Delta x^2} + \frac{1}{2\Delta x} \left. \frac{df}{dx} \right|_i, \\ S_i &= \beta'_i T'_i + \beta''_i T''_i. \end{aligned} \right\} \quad 19.6(7)$$

Stellt man diese Gleichung für die beiden Endpunkte $i = 0$ und $i = n$ auf, so erscheinen darin auch ideelle Temperaturen T_{-1} und T_{n+1} in den Punkten $i = -1$ und $i = n + 1$, die dem Körper nicht angehören (vgl. Abb. 19.6.1). Diese treten aber auch in den Gln. 19.6(4) auf, wenn man diese wie folgt als Differenzgleichungen schreibt:

$$T_0 = T_\alpha + L_\alpha \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta x}, \quad T_n = T_\omega - L_\omega \frac{T_{n+1} - T_{n-1}}{2\Delta x}. \quad 19.6(8)$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach T_{-1} und T_{n+1} erhält man für diese ideellen Temperaturen Ausdrücke, die nur reelle Temperaturen enthalten. — Nun denke man sich die Gleichungen der Form 19.6(7) angeschrieben für alle i von 0 bis n . In den Gleichungen für $i = 0$ und $i = n$ ersetze man die T_{-1} und T_{n+1} durch die Ausdrücke nach 19.6(8). Die Gleichung für $i = 0$ enthält dann von den T_i nur T_0 und T_1 , während in der Gleichung für $i = n$ nur T_{n-1} und T_n auftreten. Mithin entsteht insgesamt ein Gleichungssystem, dessen Struktur schematisch in Abb. 19.6.2a dargestellt ist. Damit läßt sich das Lösungsverfahren erkennen.

Im *instationären Falle* hat man lediglich ausgehend von einem gegebenen Temperaturverlauf aus jeder der Gleichungen ΔT_i zu berechnen, erhält damit die geänderten T_i nach dem Zeitintervall Δt , rechnet erneut die Temperaturänderungen ΔT_i usw. Im Hinblick auf die numerische Stabilität des Verfahrens darf Δt nicht zu groß gewählt werden,

sondern muß der Bedingung

$$\frac{\lambda}{\rho c \Delta x^2} \Delta t < 0,5$$

genügen.

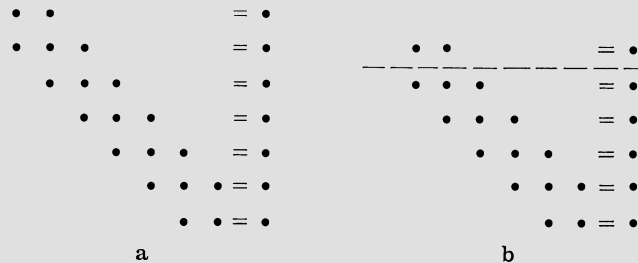


Abb. 19.6.2. Struktur des Gleichungssystems für eindimensionale Wärmeleitung

Im *stationären Falle* sind alle $\Delta T_i = 0$. Zweckmäßig werden die sämtlichen S_i in 19.6(7) auf die rechte Seite genommen. Man hat dann ein simultanes System von Bestimmungsgleichungen für die T_i in üblicher Darstellung vor sich, und zwar hat es wiederum den in Abb. 19.6.2a angegebenen Aufbau. Aus der ersten Gleichung des Systems kann man T_0 ausdrücken und in die zweite einsetzen, worauf dort als Unbekannte nur noch T_1 und T_2 auftreten. Das Gleichungssystem gewinnt damit die Form nach Abb. 19.6.2b, wobei bemerkenswert ist, daß die unter der gestrichelten Linie angedeuteten Gleichungen noch nicht herangezogen werden mußten. Von hier aus kann das gleiche Eliminationsverfahren weitergeführt werden, bis schließlich nur noch ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten übrigbleibt, das leicht gelöst werden kann. Ausgehend von den nun bekannten T_{n-1} und T_n geht man durch die Eliminationsgleichungen zurück und erhält so schließlich alle T_i . Es ist das gleiche Rechenverfahren, das bereits unter 17.7 zur Berechnung der Spannungsverteilung in Scheiben angegeben wurde. Es kommt ohne Iterationen aus und hat den Vorteil daß der Rechenaufwand nur proportional der Zahl der Aufpunkte ansteigt, nicht etwa progressiv.

Es kann wünschenswert sein, in verschiedenen Bereichen des Körpers verschiedene Koordinatendifferenzen Δx zu verwenden, was einen gewissen Kunstgriff erfordert. Der gleiche Kunstgriff kann angewandt werden, wenn etwa der Querschnitt örtlich so stark variiert, daß man mit einer Unstetigkeit des Querschnittes rechnen kann, oder wenn zwei Teile mit verschiedener Wärmeleitfähigkeit aneinanderstoßen (z.B. Verschweißung). In Abb. 19.6.3 ist dies schematisch dargestellt. Es stoßen zwei Teile *a* und *b* mit den Wärme-

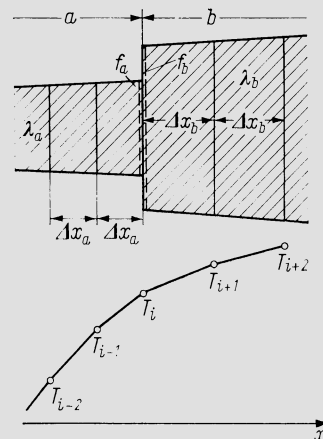


Abb. 19.6.3. Übergang bei einer Diskontinuität des Querschnittes und der Wärmeleitfähigkeit

leitfähigkeiten λ_a und λ_b zusammen. Die Koordinatenintervalle sind Δx_a und Δx_b , und an der Sprungstelle haben die beiden Teile die Querschnitte f_a und f_b . Die Stetigkeit des Wärmestromes an der Übergangsstelle kann hinreichend genau ausgesprochen werden durch

$$\frac{\lambda_a f_a}{\Delta x_a} (T_i - T_{i-1}) = \frac{\lambda_b f_b}{\Delta x_b} (T_{i+1} - T_i),$$

was auch in der Form

$$\frac{\lambda_a f_a}{\Delta x_a} T_{i-1} - \left[\frac{\lambda_a f_a}{\Delta x_a} + \frac{\lambda_b f_b}{\Delta x_b} \right] T_i + \frac{\lambda_b f_b}{\Delta x_b} T_{i+1} = 0 \quad 19.6(9)$$

dargestellt werden kann. Die Gl. 19.6(7), für den Punkt $i - 1$ formuliert, enthält die Unbekannten T_{i-2}, T_{i-1}, T_i . Für Punkt i formuliert man nur 19.6(9) mit den Unbekannten T_{i-1}, T_i, T_{i+1} . Für Punkt $i + 1$ enthält Gl. 19.6(7) T_i, T_{i+1} und T_{i+2} . Somit behält das Gleichungssystem auch bei diesem Übergang die durch Abb. 19.6.2 veranschaulichte Struktur bei, und seine Auflösung begegnet keiner Schwierigkeit.

Sollte etwa an einem Ende direkt die Temperatur gegeben sein anstatt einer Bedingung der Form 19.6(4), dann fällt einfach die Gleichung für diesen Aufpunkt weg, ohne daß sich an der Struktur des Gleichungssystems etwas ändert.

19.7 Eindimensionale Temperaturverteilung in Schaufeln und Laufradscheiben

Die in Abschn. 19.6 gegebenen Grundlagen mögen hier angewandt werden auf Schaufeln und die sie tragenden Radscheiben. Als Ausgangspunkt diene der einfachste Fall, die Schaufel konstanten Querschnittes, die einer konstanten wirksamen Gastemperatur T' ausgesetzt sei und an der Schaufelwurzel (Nabe) auf einer tieferen Temperatur T_N gehalten werde (vgl. Abb. 19.7.1). Die allgemeine Differentialgleichung 19.6(2) schreibt sich dabei im stationären Falle

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{\alpha U}{\lambda f} T + \frac{\alpha U}{\lambda f} T' = 0. \quad 19.7(1)$$

Die Grenzbedingungen sind

$$T(0) = T_N, \quad T(\infty) = T'. \quad 19.7(2)$$

Die zweite dieser Gleichungen besagt, daß sich T asymptotisch dem Wert T' nähert, was mit großer Genauigkeit zutrifft und auf die einfachste Lösung führt. Sie lautet

$$T = T' - (T' - T_N) \exp\left(-x \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda f}}\right). \quad 19.7(3)$$

Abb. 19.7.2 zeigt einen so ermittelten Temperaturverlauf in einer Schaufel von 5 cm

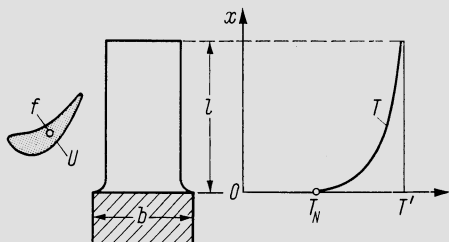


Abb. 19.7.1. Schaufel konstanten Querschnittes

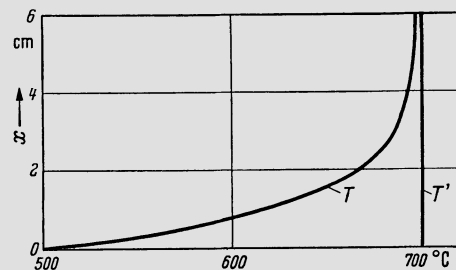


Abb. 19.7.2. Beispiel für den Verlauf der Schaufeltemperatur T bei konstanter Gastemperatur T' . Schaufelhöhenlänge 5 cm

Sehnenlänge, wobei die Temperatur an der Schaufelwurzel zu 500 °C, diejenige des Gases zu 700 °C angenommen ist. Wie man erkennt, hat sich bereits 3 cm über dem Schaufelfuß die Schaufeltemperatur der Gastemperatur auf 7 °C genähert. Eine wirksame Kühlung des Schaufelblattes vom Fuß her ist also unmöglich; hierzu müßte der Exponent in 19.7(3) klein, d. h. die Schaufel müßte kurz und von gedrungener Gestalt sein, was höchstens bei ausgesprochenen Kleingasturbinen erreichbar wäre.

Der Temperaturgradient am Schaufelfuß, also in $x = 0$, ergibt sich aus 19.7(3) zu

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_0 = (T' - T_N) \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda f}}. \quad 19.7(4)$$

Der Wärmestrom \dot{Q} , der in die Fußplatte insgesamt eintritt, ist

$$\dot{Q} = f\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_0 + (f_p - f) \alpha_p (T' - T_N). \quad 19.7(5)$$

Hier ist α_p die Wärmeübergangszahl an der Fußplatte, f_p die gesamte Fußplattenfläche (also $f_p = bt$, wenn t die Teilung an der Fußplatte ist). Wenn man in dieser Gleichung die Temperaturdifferenz $T' - T_N$ aus 19.7(4) ausdrückt, erhält sie die Form

$$\dot{Q} = f\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_0 \left[1 + \frac{\alpha_p (f_p - f)}{\sqrt{\alpha \lambda f U}} \right]. \quad 19.7(6)$$

Der Faktor vor der eckigen Klammer ist offenbar der Wärmestrom, der aus dem Schaufelblatt allein stammt; der dimensionslose Klammersausdruck gibt also die Vergrößerung des Wärmestromes durch die konvektive Wärmeübertragung an die Fußplatte. Die Formel 19.7(6) gilt streng nur für konstanten Schaufelquerschnitt und konstante Gastemperatur, kann aber auch unter allgemeineren Voraussetzungen näherungsweise übernommen werden, da die lokalen Bedingungen an der Schaufelwurzel von denen in größerer Entfernung nur wenig beeinflußt werden. Wenn $(dT/dx)_p$ der Mittelwert des Temperaturgradienten an der Fußplatte selbst ist, gilt auch

$$\dot{Q} = \lambda f_p \left(\frac{dT}{dx} \right)_p. \quad 19.7(7)$$

Die Gleichsetzung der Ausdrücke 19.7(6) und (7) liefert

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_p = \frac{f}{f_p} \left[1 + \frac{\alpha_p (f_p - f)}{\sqrt{\alpha \lambda f U}} \right] \left. \frac{dT}{dx} \right|_0. \quad 19.7(8)$$

Von hier aus kann auch die Grenzbedingung an Schaufelfüßen gewonnen werden. Abb. 19.7.3a und b zeigen Beispiele von Anordnungen. Im Beispiel a ist ein Trommelrotor vorausgesetzt, der an den Flächen zwischen den Schaufelkränzen mit Kühlluft in Berührung steht. Der Wärmestrom verläuft dann wie durch die Pfeile angedeutet, und das Innere des Rotors nimmt am Wärmeleitungsvorgang praktisch nicht teil. Sind T_A und T_B die Temperaturen in A und B, so ist

$$\bar{T} = \frac{T_A + T_B}{2} \quad 19.7(9)$$

die für die Wärmeableitung maßgebende Temperatur. Im Beispiel Abb. 19.7.3b wird die Wärme radial in die Scheibe eingeleitet. Es sei \bar{r} der Radius, in dem die Temperatur längs des Umfanges als ausgeglichen betrachtet werden darf, und zwar soll der Wert mit \bar{T} bezeichnet werden. Wie die Anordnung im einzelnen auch aussehe, so kann stets gesetzt werden

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_p = \frac{T_N - \bar{T}}{K \Delta r}, \quad 19.7(10)$$

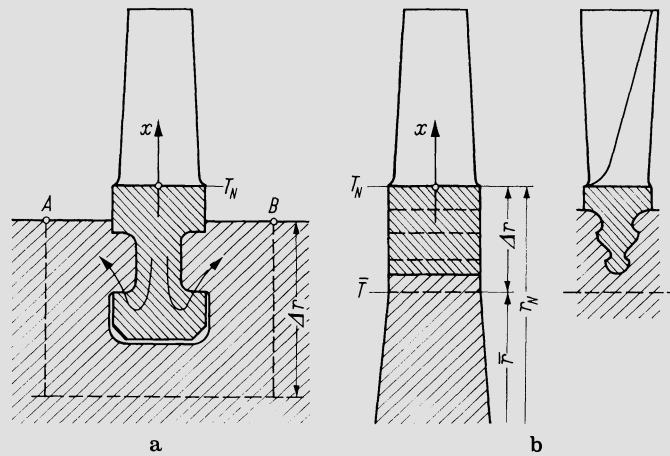


Abb. 19.7.3. Zur Formulierung der Grenzbedingungen am Schaufelfuß. a) Hammerkopfbefestigung; b) axial eingeschobener Fuß

vgl. die Abbildung. Der Koeffizient K bestimmt sich dabei wie folgt. Für die gegebene geometrische Konfiguration ermittelt man das zweidimensionale stationäre Temperaturfeld für beliebig gewählte T_N und \bar{T} nach den unter 19.8 und 19.9 beschriebenen Verfahren oder auch nach dem Verfahren der elektrischen Analogie, vgl. etwa [30]. Damit kennt man auch $(dT/dx)_p$ und kann folglich K aus 19.7(10) berechnen. Aus 19.7(10) und (8) folgt

$$\frac{T_N - \bar{T}}{K \Delta r} = \frac{f_N}{f_p} \left[1 + \frac{\alpha_p (f_p - f_N)}{\sqrt{\alpha \lambda f_N U_N}} \right] \frac{dT}{dx} \Big|_0. \quad 19.7(11)$$

Die Größen f und U wurden hier noch mit dem Index N versehen, um anzudeuten, daß bei variablem Schaufelquerschnitt die Werte an der Nabe einzusetzen sind. Wenn man nun mit der ersten der Gln. 19.6(3) vergleicht und beachtet, daß $T(0)$ hier T_N ist und \bar{T} die Rolle von T_x übernimmt, folgt sogleich

$$L_\alpha = K \Delta r \frac{f_N}{f_p} \left[1 + \frac{\alpha_p (f_p - f_N)}{\sqrt{\alpha \lambda f_N U_N}} \right], \quad 19.7(12)$$

womit die Grenzbedingung an der Schaufelwurzel so formulierbar ist, wie unter 19.6 angegeben. Man beachte, daß die genaue Wahl von Δr nicht maßgebend ist, da bei gegebenen Absolutmessungen des Fußes $K \Delta r$ praktisch von Δr nicht abhängt. Ist aber einmal K bestimmt, so muß Δr stets im gleichen Verhältnis zu den Fußabmessungen stehen wie in der Konfiguration, die zur Berechnung von K diente.

Eine Partie zwischen r_N und \bar{r} wie in Abb. 19.7.3b kann auch ersetzt werden durch einen gedachten zusammenhängenden Ring, der eine verminderte Wärmeleitfähigkeit λ^* hätte. Die Temperaturverteilung in einem solchen wäre gegeben durch

$$T = T_N - (T_N - \bar{T}) \frac{\ln(r_N/r)}{\ln(r_N/\bar{r})}, \quad 19.7(13)$$

so daß der Gradient in r_N den Wert

$$\frac{dT}{dr} \Big|_N = \frac{T_N - \bar{T}}{r_N \ln(r_N/\bar{r})} \quad 19.7(14)$$

hätte. Aus der Bedingung

$$\lambda^* \frac{dT}{dr} \Big|_N = \lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_p \quad 19.7(15)$$

folgt durch Einsetzen der Ausdrücke 19.7(10) und (14)

$$\lambda^* = \lambda \frac{r_N \ln(r_N/\bar{r})}{K \Delta r}. \tag{19.7(16)}$$

Diese Darstellungsweise wird zweckmäßig herangezogen, wenn die seitlichen Begrenzungsflächen dieser Zone mit Kühlluft in Berührung stehen, denn dann kann die eindimensionale Berechnung der Temperatur genau gleich erfolgen wie in der übrigen Scheibe, nur mit geänderter Leitfähigkeit.

Obwohl die Theorie gemäß ihren Grundvoraussetzungen zunächst eindimensional ist, kann sie im Falle der Scheibe doch so ergänzt werden, daß sie ohne Komplikation ihrer mathematischen Struktur auch die Temperaturverteilung über der Scheibendicke näherungsweise erfaßt. Es wird angenommen, diese Temperaturverteilung sei stets diejenige, die sich einstellen würde in einer ebenen Platte, die beidseitig gleichen Fluidtemperaturen und Wärmeübergangszahlen ausgesetzt ist und auch die gleiche Dicke h besitzt wie die Scheibe (lokal). Wenn wir die Wärmestromdichte q positiv rechnen in Richtung der z -Achse (Abb. 19.7.4), wird sie

$$q = q' + (q'' - q') \left[\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right]. \tag{19.7(17)}$$

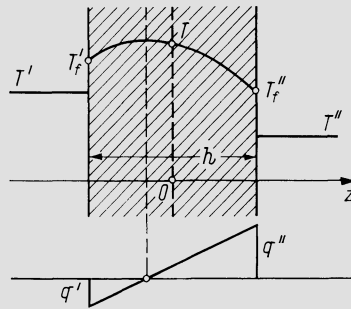


Abb. 19.7.4. Zur Herleitung der quasizweidimensionalen Wärmeleitung in einer Scheibe

Wenn im Rahmen dieser Theorie T die Temperatur in der Mittelebene bedeutet und T^* die lokale Temperatur, folgt hieraus

$$T^* = T - \frac{1}{\lambda_a} \left[\frac{q' + q''}{2} z + \frac{q'' - q'}{2h} z^2 \right], \tag{19.7(18)}$$

mithin für die Oberflächentemperaturen

$$T'_j = T + \frac{h}{8\lambda_a} (3q' + q''), \quad T''_j = T - \frac{h}{8\lambda_a} (q' + 3q''). \tag{19.7(19)}$$

Hier ist λ_a die Wärmeleitfähigkeit in axialer Richtung, die sich in Kranzpartien, wo man mit einer ideellen Leitfähigkeit λ^* rechnet, von dieser letzteren unterscheiden wird. Bei axial eingeschobenen Schaufelfüßen ist sie gleich der ‚reellen‘ Leitfähigkeit. — Mit den Wärmeübergangszahlen α' und α'' zu beiden Seiten ist auch

$$T'_j = T' - \frac{q'}{\alpha'}, \quad T''_j = T'' + \frac{q''}{\alpha''}. \tag{19.7(20)}$$

Die Gleichsetzung liefert

$$T' - \frac{q'}{\alpha'} = T + \frac{h}{8\lambda_a} (3q' + q'')$$

$$T'' + \frac{q''}{\alpha''} = T - \frac{h}{8\lambda_a} (q' + 3q'').$$

Punkt p :

$$\lambda_R \frac{T_p - T_{p-1}}{\Delta x_1} = \lambda^* \frac{T_{p+1} - T_p}{\Delta x_2}. \quad 19.7(25)$$

Punkt q :

$$\lambda^* \frac{T_q - T_{q-1}}{\Delta x_2} = \frac{f_F}{\bar{f}} \left[1 + \frac{\alpha_p(\bar{f} - f_F)}{\sqrt{\alpha \lambda f_F U}} \right] \frac{T_{q+1} - T_q}{\Delta x_3}. \quad 19.7(26)$$

Punkt r :

$$f_F \lambda \frac{T_r - T_{r-1}}{\Delta x_2} + \alpha_p(\bar{f} - f_F)(T_r - T'_k) = \bar{f} \lambda \frac{T_{r+1} - T_r}{h_N} - \frac{\rho c \bar{f} h_N}{2} \frac{\Delta T_r}{\Delta t}. \quad 19.7(27)$$

Punkt $r + 1$:

$$f_N \lambda \frac{T_{r+2} - T_{r+1}}{\Delta x_4} + \alpha_p(\bar{f} - f_N)(T'_g - T_{r+1}) = \bar{f} \lambda \frac{T_{r+1} - T_r}{h_N} + \frac{\rho c \bar{f} h_N}{2} \frac{\Delta T_{r+1}}{\Delta t}. \quad 19.7(28)$$

Punkt s :

$$-f_S \lambda \frac{T_s - T_{s-1}}{\Delta x_4} + \alpha_p(\bar{f} - f_S)(T'_g - T_s) = \bar{f} \lambda \frac{T_s - T_{s+1}}{h_S} + \frac{\rho c \bar{f} h_N}{2} \frac{\Delta T_s}{\Delta t}. \quad 19.7(29)$$

Punkt $s + 1$:

$$\lambda \frac{T_s - T_{s+1}}{h_S} = \alpha_p(T_{s+1} - T'_k). \quad 19.7(30)$$

Dabei gelten folgende Bezeichnungen:

- \bar{f} gesamter Querschnitt (Teilung \times Breite);
- f_F, f_N, f_S Querschnitt des FuSteiles F , des Schaufelblattes an Nabe und Spitze;
- T'_g, T'_k Temperaturen von Gas und Kühlluft;
- α, α_p Wärmeübergangszahlen an radialen Flächen bzw. an ‚Platten‘ (wie in Gl. 19.7(5));
- $\lambda, \lambda_R, \lambda^*$ Wärmeleitfähigkeit der Schaufel, des Rotors, ideale Wärmeleitzahl.

Alle Größen, bei denen nichts weiteres angegeben ist, gelten stets für den Punkt, für den die betreffende Gleichung angeschrieben ist.

Von der Richtigkeit der Gln. 19.7(27) und (28) überzeugt man sich, indem man (27) von (28) subtrahiert. Alle Gleichungen für die ‚normalen‘ Aufpunkte haben die Form 19.6(7) und sind nicht weiter angegeben. Die quasizweidimensionale Behandlung unter Verwendung der Beziehungen 19.7(18)–(23) entspricht im instationären Falle genau der Theorie nach Abschn. 19.5 und ist mit gleicher Näherung brauchbar wie jene. — Der stationäre Fall ergibt sich, indem man die ΔT Null setzt. Von dem so entstehenden Gleichungssystem enthält die erste Gleichung, d. h. 19.7(24) zwei Unbekannte, die letzte, Gl. 19.7(30) ebenfalls, alle anderen drei. Man hat also wiederum ein Gleichungssystem der in Abb. 19.6.2 veranschaulichten Art vor sich und kann die gleiche Lösungsmethode benutzen. Dabei ist T_0 als bekannt vorausgesetzt. Die Genauigkeit dieser Eingabe ist übrigens nicht kritisch, da das Rechenergebnis nicht sehr empfindlich darauf reagiert. Nötigenfalls kann aber diese Temperatur freigegeben und eine Grenzbedingung des Typs Gl. 19.6(8) gesetzt werden, ohne daß die Struktur des Gleichungssystems sich verändert.

Es ist beachtlich, daß eine so komplizierte Anordnung nach einem Verfahren nachgerechnet werden kann, das ohne Iteration auskommt. Das gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, daß der Verlauf der Kühllufttemperatur *gegeben* werden kann, was höchstens näherungsweise zutrifft. Genauer müßte man diesen zugleich mit der Temperaturverteilung in den Bauteilen berechnen. Ist \dot{m} der Kühlluftmassenstrom, so lautet die Bilanzgleichung z. B. für ein Wegstück dx , wenn nur von der Scheibe aus Wärme auf die Luft übertragen wird

$$\dot{m} c_p dT'_k = \alpha U (T_f - T'_k) dx \cdot \cdot \cdot \frac{dT'_k}{dx} = \frac{\alpha U}{\dot{m} c_p} (T_f - T'_k). \quad 19.7(31)$$

Solche Beziehungen wären also als Differenzgleichungen dem Gleichungssystem beizufügen, das dann aber seine einfache Struktur verliert. Man kann daher so vorgehen, daß man mit angenommenen Kühllufttemperaturen die Temperaturverteilung im Rotor-system bestimmt, damit neue Kühllufttemperaturen berechnet usw.

Häufig findet man auch die Anordnung, bei der die Zwischenräume zwischen den verlängerten Halsstücken F (Abb. 19.7.5) Toträume sind, also nicht von Kühlluft durchströmt. Der konvektive Wärmeübergang in den Toträumen kann dann berücksichtigt werden, indem man den Halsstücken eine ideelle Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda^* = \lambda + \alpha l_F \frac{\bar{f} - f_F}{\bar{f}} \quad 19.7(32)$$

zuordnet. Hier ist l_F die Länge des Halsstückes und α die gemäß Gl. 19.2(17) definierte Wärmeübergangszahl. Abb. 19.7.6 zeigt eine Konstruktion der Firma Sulzer, bei der die Schaufelfüße verlängerte Halsstücke aufweisen. In der ersten Stufe sind die Zwischenräume von der Kühlluft durchströmt, die in die gekühlten Schaufeln eintritt, in der zweiten Stufe sind sie Toträume.



Abb. 19.7.6. Gasturbinenläufer von Sulzer. Schaufelfüße besitzen verlängerte Halsstücke zur Verminderung der Wärmeübertragung

Bei Trommelrotoren ist es oft zweckmäßig, die gesamte Erhöhung der Wärmeübertragung durch die Schaufeln zu berücksichtigen, indem man an einer glatt gedachten Trommeloberfläche mit einer erhöhten, ideellen Wärmeübergangszahl α^* rechnet. Ist f_N der Nabenquerschnitt der Schaufel, f_R die Oberfläche des gedachten glatten Rotors pro eine Schaufel, $\bar{\alpha}$ die Wärmeübergangszahl an der Rotoroberfläche, T_R die Rotortemperatur und T' die wirksame Fluidtemperatur, so wird unter Verwendung von 19.7(4) mit $T_R \approx T_N$

$$\dot{Q} = (f_R - f_N) \bar{\alpha} (T' - T_R) + f_N \lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_0 = \left[(f_R - f_N) \bar{\alpha} + f_N \lambda \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda f_N}} \right] (T' - T_R).$$

Da andererseits α^* definiert ist durch

$$\dot{Q} = f_R \alpha^* (T' - T_R),$$

folgt durch Gleichsetzung

$$\alpha^* = \left(1 - \frac{f_N}{f_R} \right) \bar{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha \lambda f_N U}}{f_R}. \quad 19.7(33)$$

Man beachte, daß α hier die Wärmeübergangszahl an der Schaufeloberfläche ist.

19.8 Zweidimensionale Temperaturverteilung

Der Fall, wo eine zweidimensionale Näherung der Temperaturverteilung genügt, ist sehr häufig. Die grundlegende Differentialgleichung lautet dann in den verschiedenen Koordinatensystemen wie folgt:

Cartesische Koordinaten x, y :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]. \quad 19.8(1)$$

Polarkoordinaten r, ϑ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2} \right]. \quad 19.8(2)$$

Zylinderkoordinaten z, r, ϑ , *Temperatur nur von z und r abhängig*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right]. \quad 19.8(3)$$

Ist ξ irgendeine Koordinate, so ist im Rahmen der Differenzenrechnung

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta\xi}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta\xi^2}. \quad 19.8(4)$$

Wenn man die sämtlichen Ableitungen 19.8(1)–(3) in dieser Weise ausdrückt und ordnet nach den diskreten Temperaturen, erhält man für die drei Koordinatensysteme (vgl. Abb. 19.8.1 und 2):

Cartesische Koordinaten:

$$\frac{dT_{ij}}{dt} = \frac{a}{\Delta x^2} \left\{ T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 T_{i,j-1} - 2 \left[1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \right] T_{ij} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 T_{i,j+1} + T_{i+1,j} \right\}. \quad 19.8(5)$$

Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{dT_{ij}}{dt} = \frac{a}{\Delta r^2} & \left\{ \left[1 - \frac{\Delta r}{2r_i} \right] T_{i-1,j} + \frac{\Delta r^2}{r_i^2 \Delta \vartheta^2} T_{i,j-1} - 2 \left[1 + \frac{\Delta r^2}{r_i^2 \Delta \vartheta^2} \right] T_{ij} + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta r^2}{r_i^2 \Delta \vartheta^2} T_{i,j+1} + \left[1 + \frac{\Delta r}{2r_i} \right] T_{i+1,j} \right\}. \end{aligned} \quad 19.8(6)$$

Zylinderkoordinaten, $T = f(z, r)$:

$$\begin{aligned} \frac{dT_{ij}}{dt} = \frac{a}{\Delta r^2} & \left\{ \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} T_{i-1,j} + \left[1 - \frac{\Delta r}{2r_i} \right] T_{i,j-1} - 2 \left[1 + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} \right] T_{ij} + \right. \\ & \left. + \left[1 + \frac{\Delta r}{2r_i} \right] T_{i,j+1} + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} T_{i+1,j} \right\}. \end{aligned} \quad 19.8(7)$$

Zu diesen Gleichungen sind die jeweiligen *Grenzbedingungen an den Körperoberflächen* beizufügen. Es sei ξ irgendeine Koordinate, auf deren Richtung die Körperoberfläche im Punkt n senkrecht steht (Abb. 19.8.3a). Dann lautet die Grenzbedingung in diesem Punkt

$$\alpha(T_n - T'_n) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_n = -\lambda \frac{T_{n+1} - T_{n-1}}{2\Delta\xi}, \quad 19.8(8)$$

wo T_{n+1} die ideale Temperatur im Aufpunkt $n + 1$ außerhalb des Körpers ist und T'_n die Fluidtemperatur in n . Nach T_{n+1} aufgelöst, lautet 19.8(8)

$$T_{n+1} = T_{n-1} - \frac{2\alpha \Delta\xi}{\lambda} (T_n - T'_n). \quad 19.8(9)$$

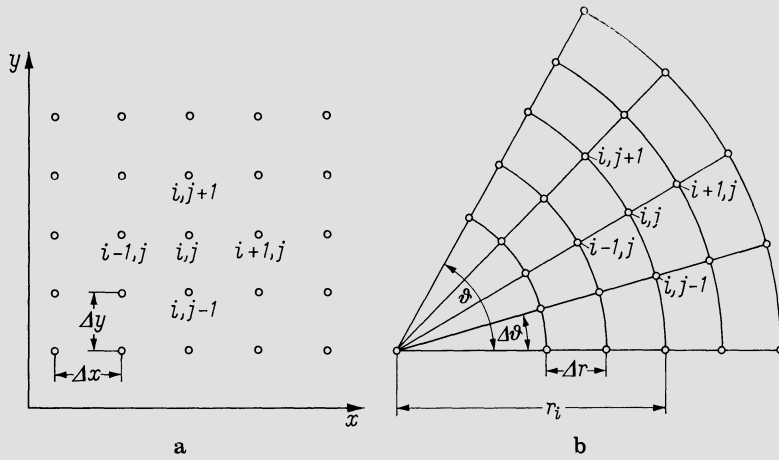


Abb. 19.8.1. Koordinatenraster zur zweidimensionalen Berechnung von Temperaturverteilungen. a) Cartesische Koordinaten; b) Polarkoordinaten

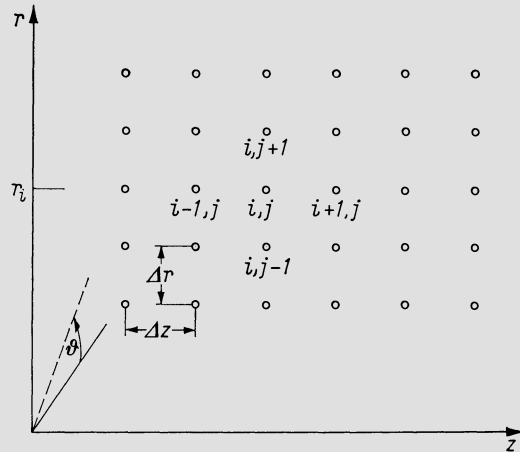


Abb. 19.8.2. Punkteraster bei Zylinderkoordinaten, wenn T nicht vom Azimuthwinkel θ abhängig

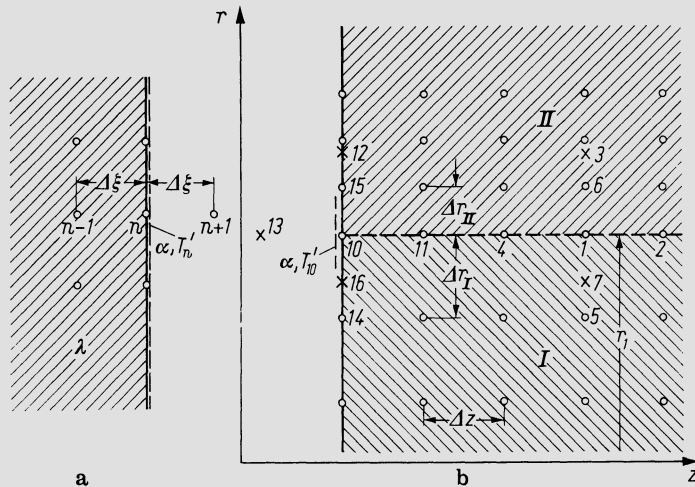


Abb. 19.8.3. a) Zur Formulierung der Grenzbedingungen; b) Übergang zwischen zwei Gebieten verschiedener Maschenweite

In den beiden Grenzfällen der isolierten Oberfläche und der unendlichen Wärmeübergangszahl erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Isoliert: } \alpha = 0, \quad \text{somit } T_{n+1} &= T_{n-1}, \\ \alpha = \infty, \quad \text{hierbei } T_n &= T'_n. \end{aligned}$$

Im letzteren Falle muß T_{n+1} nicht eingeführt werden, da für T_n keine Gleichung benötigt wird.

Wenn man nun die Differenzgleichungen — also je nach Fall 19.8(5), (6) oder (7) — für alle Aufpunkte aufstellt und in den Gleichungen der Randpunkte (sofern dort T nicht vorgeschrieben ist) die T_{n+1} durch 19.8(9) ausdrückt, erhält man ein Gleichungssystem, das nur noch reelle Temperaturen enthält und die Grenzbedingungen einschließt. Im *instationären Fall* gewinnt man ausgehend von einem bekannten Anfangszustand die dT_{ij}/dt in allen Aufpunkten und hat gemäß

$$T_{ij}(t + \Delta t) = T_{ij}(t) + \frac{dT_{ij}}{dt} \Delta t \quad 19.8(10)$$

die Temperaturen in einem um Δt späteren Zeitpunkt. Von hier aus kann in gleicher Weise weitergefahren werden. Die Bedingung dafür, daß diese Rechnung stabil ist, lautet

$$\Delta t < \frac{0,5}{a} \frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}. \quad 19.8(11)$$

Die Koordinatendifferenzen $\Delta x, \Delta y$ sind gegebenenfalls durch $\Delta z, \Delta r, r\Delta\vartheta$ zu ersetzen.

Im *stationären Falle* läuft die Rechnung darauf hinaus, in den Differenzgleichungen 19.8(5), (6) oder (7) den in geschweifeter Klammer geschriebenen Ausdruck Null zu setzen. Wenn hierbei die Grenzbedingungen eingeführt werden wie angegeben, entsteht ein inhomogenes Gleichungssystem mit ebensovielen Gleichungen wie Unbekannten. Es hat diagonale Bandstruktur, da in der Gleichung jedes Punktes nur Werte in den unmittelbar benachbarten Punkten auftreten. Die Lösung erfolgt im allgemeinen zweckmäßig nach der Gauß-Seidel-Methode, vgl. etwa [31, 32].

Auch bei der Berechnung zweidimensionaler Temperaturfelder kann es zweckmäßig sein, wie unter 19.7 erklärt, Bereiche mit lokal komplizierter Temperaturverteilung (z. B. Zonen mit Schaufelfüßen) vereinfacht zu behandeln, indem man dort mit ideellen verminderten Wärmeleitfähigkeiten rechnet. So seien z. B. bei einem Rotor im Bereich der Schaufelfüße die ideellen Wärmeleitfähigkeiten in z -Richtung und r -Richtung λ_z und λ_r . Dann sei

$$A_z \equiv \lambda_z/\lambda, \quad A_r \equiv \lambda_r/\lambda. \quad 19.8(12)$$

Es ist leicht zu prüfen, daß dann die Differenzgleichung 19.8(7) übergeht in

$$\begin{aligned} \frac{dT_{ij}}{dt} = \frac{a}{\Delta r^2} \left\{ A_z \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} T_{i-1,j} + A_r \left[1 - \frac{\Delta r}{2r_i} \right] T_{i,j-1} - 2 \left[A_r + A_z \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} \right] T_{ij} + \right. \\ \left. + A_r \left[1 + \frac{\Delta r}{2r_i} \right] T_{i,j+1} + A_z \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} T_{i+1,j} \right\}. \quad 19.8(13) \end{aligned}$$

Ein besonderes Problem entsteht noch, wo eine solche Zone mit ideellen Wärmeleitfähigkeiten an den übrigen Körper anschließt oder ganz allgemein auch dort, wo Zonen mit verschiedener Maschenweite aneinander angrenzen. Abb. 19.8.3b veranschaulicht eine solche Situation. Die Bereiche I und II mögen mit Radienintervallen Δr_I und Δr_{II} behandelt werden; außerdem soll in II mit ideellen Wärmeleitfähigkeiten gerechnet werden. Außer den mit Kreisen angegebenen Aufpunkten sind noch weitere mit Kreuzen gekennzeichnet. In diesen werden ideelle Temperaturen eingeführt, genau wie bei der Behandlung von Grenzbedingungen an Oberflächen. Dann schreibt sich z. B. die Bedingung der Kontinuität der

radialen Wärmestromdichte im Punkt I

$$\frac{T_3 - T_5}{\Delta r_I} = \frac{T_6 - T_7}{\Delta r_{II}}, \quad 19.8(14)$$

wobei T_3 und T_7 ideale Temperaturen sind. Für den gleichen Punkt I muß nun die Differenzgleichung zweimal formuliert werden, nämlich je für die Körper I und II , da der Punkt ja beiden angehört. Mit der Numerierung der Zustandspunkte nach Abb. 19.8.3b lauten diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} = \frac{a}{\Delta r_I^2} \left\{ \frac{\Delta r_I^2}{\Delta z^2} T_4 + \left[1 - \frac{\Delta r_I}{2r_1} \right] T_5 - 2 \left[1 + \frac{\Delta r_I^2}{\Delta z^2} \right] T_1 + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{\Delta r_I}{2r_1} \right] T_3 + \frac{\Delta r_I^2}{\Delta z^2} T_2 \right\}. \end{aligned} \quad 19.8(15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} = \frac{a}{\Delta r_{II}^2} \left\{ \Delta z \frac{\Delta r_{II}^2}{\Delta z^2} T_4 + \Delta r \left[1 - \frac{\Delta r_{II}}{2r_1} \right] T_7 - 2 \left[\Delta r + \Delta z \frac{\Delta r_{II}^2}{\Delta z^2} \right] T_1 + \right. \\ \left. + \Delta r \left[1 + \frac{\Delta r_{II}}{2r_1} \right] T_6 + \Delta z \frac{\Delta r_{II}^2}{\Delta z^2} T_2 \right\}. \end{aligned} \quad 19.8(16)$$

Wenn man diese beiden Gleichungen je nach den ideellen Temperaturen T_3 und T_7 auflöst, die so erhaltenen Ausdrücke in 19.8(14) einsetzt und die so entstehende Relation wiederum nach dT_1/dt auflöst, findet man eine Gleichung, die dT_1/dt durch T_1, T_2, T_4, T_5, T_6 ausgedrückt, also keine ideellen Temperaturen mehr enthält. Im stationären Fall ist $dT_1/dt = 0$ zu setzen, womit die dem Punkte I zugeordnete Bestimmungsgleichung innerhalb des gesamten Gleichungssystems vorliegt. Stets ist man wieder in der gleichen Situation wie in „regulären“ Punkten, und das Problem des Anschlusses der Zonen aneinander ist somit gelöst.

Bei einem Randpunkt wie Punkt 10 (Abb. 19.8.3b), kann gleich vorgegangen werden, nur enthält die entstehende Gleichung zunächst noch die ideale Temperatur T_{13} . Diese aber kann eliminiert werden durch die zu 19.8(9) analoge Gleichung

$$T_{13} = T_{11} + \frac{4\alpha \Delta z}{\lambda(1 + \Delta z)} (T_{10} - T'_{10}). \quad 19.8(17)$$

Hier ist λ durch den Mittelwert $\lambda(1 + \Delta z)/2$ ersetzt, eine Vereinfachung, die zulässig ist, da je effektiv ohnehin nicht zwei getrennte Zonen vorliegen.

Somit läßt sich also das für die Wärmeleitungsrechnung benötigte Maschennetz in erheblichem Maße den besonderen Bedingungen des jeweiligen Problems anpassen, da die Maschenweiten variiert und gegebenenfalls auch unterschiedliche Wärmeleitahlen berücksichtigt werden können. Abb. 19.8.4 veranschaulicht dies am Beispiel eines keglichen Trommelrotors. Die gestrichelte Linie grenzt die Zone ab, innerhalb welcher mit ideellen Wärmeleitahlen gerechnet wird zur Berücksichtigung der Schaufelfüße. Die Begrenzung des Körpers muß durch eine gestufte Kontur angenähert werden, eine Situation, die sehr

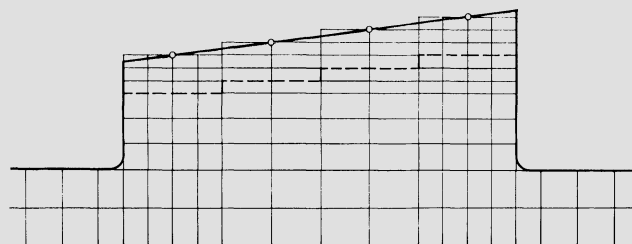


Abb. 19.8.4. Keglicher Trommelrotor mit Mascheneinteilung

häufig ist. Da die Oberfläche eines solchen Stufenkörpers stets etwas größer ist als die des wirklichen, muß man in der Regel die Wärmeübergangszahlen etwas anpassen. Im Beispiel Abb. 19.8.4 entsteht dieses Problem an der Mantelfläche. Man kann z. B. nur die zylindrischen Ersatzflächen für die Wärmeübertragung in Rechnung setzen oder aber — wohl richtiger — auch die ringförmigen Stirnflächenstücke, dann aber mit einer reduzierten Wärmeübergangszahl; ihre Verkleinerung müßte umgekehrt proportional der Flächenvergrößerung sein. — An geschaukelten Oberflächen ist wiederum eine ideelle Wärmeübergangszahl α^* gemäß Gl. 19.7.(33) einzusetzen.

In diesem Abschnitt wurde angenommen, daß die Fluidtemperaturen, denen der Körper ausgesetzt ist, gegeben seien. Das ist z. B. nicht ohne weiteres der Fall bei kleinen Kühl- oder Sperrluftströmen, da der Verlauf der Fluidtemperatur dann selbst von den Temperaturverteilungen in den Körpern abhängt, mit denen das Fluid in Berührung ist. Es sei \dot{m} der Massenstrom des Fluids, das zwischen zwei Körpern a und b strömt. Beim Weiterschreiten um ein kleines Wegintervall ändere sich die Fluid-Totaltemperatur von T'_i auf T'_{i+1} . Es überstreiche dabei an beiden Körpern die Flächenstücke ΔF_a und ΔF_b , wobei α_a und α_b die zugehörigen Wärmeübergangszahlen seien. Abb. 19.8.5 zeigt die Disposition. Dann gilt offenbar

$$T'_{i+1} - T'_i = \frac{\Delta F_a \alpha_a}{2\dot{m}c_p} (T_{ai} - T'_i + T_{a,i+1} - T'_{i+1}) + \frac{\Delta F_b \alpha_b}{2\dot{m}c_p} (T_{bi} - T'_i - T_{b,i+1} - T'_{i+1}). \quad 19.8(18)$$

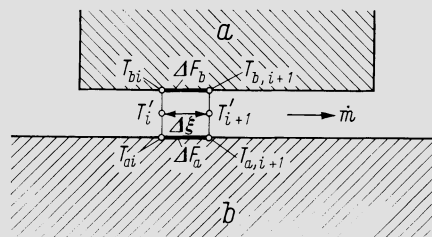


Abb. 19.8.5. Zur Bestimmung der gegenseitigen Wechselwirkung zwischen Fluidtemperatur und Temperaturverteilungen in den angrenzenden Körpern

Für jedes Wegstück $\Delta\xi$ des betreffenden Fluidstromes gilt eine derartige Gleichung. Diese sind den Gleichungssystemen der Körper a und b beizufügen. So entsteht schließlich ein Gesamtgleichungssystem, das den Vorgang beschreibt. Die Körper a und b können also nicht mehr getrennt behandelt werden, sondern sie sind über die Gleichungen des Typs 19.8(18) miteinander gekoppelt.

Ein Verfahren, das die Wechselwirkungen zwischen den Temperaturverteilungen im Körper und im Fluid von vornherein mit umfaßt, gibt *Bermi* [33]. Nicht nur der Körper, sondern auch der vom Fluid durchströmte Raum wird dabei in Zellen eingeteilt, die durch Maschen getrennt sind. Für jede Zelle wird die Wärmebilanz aufgestellt, wobei die Wärmeübertragung durch die Maschen hindurch erfolgen kann durch Wärmeleitung, Wärmeübergang und direkten Übertritt von Fluid. Das Verfahren ist damit außerordentlich anpassungsfähig. Allerdings ist auch hier die geometrische Gestalt der Zellen gegeben durch das Koordinatensystem, womit Körper beliebiger Geometrie nur durch Stufenkörper angenähert werden können wie im Beispiel Abb. 19.8.4.

Abb. 19.8.6 zeigt Temperaturverteilungen in einem zweiflutigen MD-Dampfturbinenläufer, oben 2 h nach Kaltstartbeginn, unten im stationären Zustand. Im ersten Falle sind die Temperaturgradienten vorwiegend radial, im stationären Zustand axial. In Läufermitte wird ein kleiner Strom nicht zwischenüberhitzten Dampfes zugeführt, um die Temperatur örtlich abzusenken.

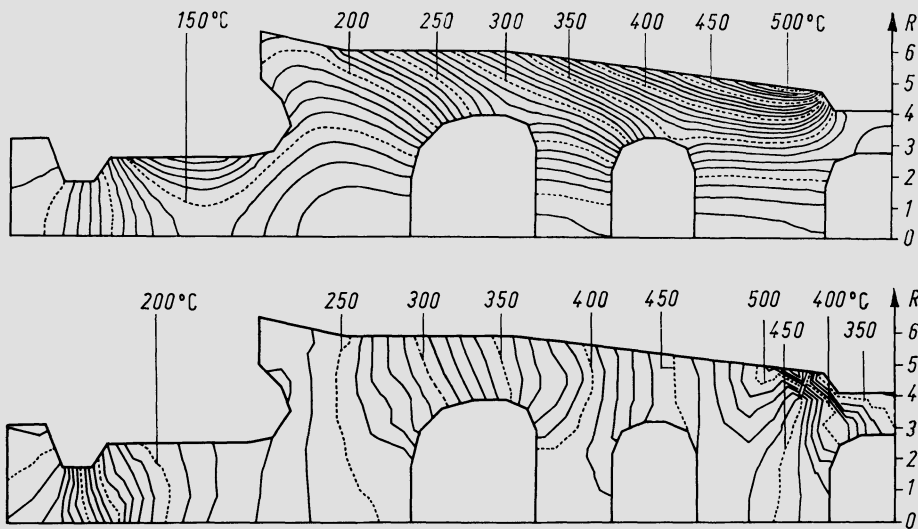


Abb. 19.8.6. Beispiel gerechneter Temperaturverteilungen im Rotor einer MD-Dampfturbine; oben 2 h nach Kaltstartbeginn, unten im stationären Zustand

19.9 Verfahren der finiten Elemente

In der Regel ist die Geometrie der Bauteile so kompliziert, daß einfache Koordinatensysteme sich ihnen nur unvollkommen anpassen. Deshalb muß die Außenkontur meist teilweise durch Stufenformen angenähert werden wie im Beispiel Abb. 19.8.4. Das hat dazu geführt, auch für Wärmeleitungsrechnungen auf das Verfahren der finiten Elemente zurückzugreifen, vgl. [31,34]. Gibt man diesen dreieckige Gestalt, wie auch bei Festigkeitsuntersuchungen, dann läßt sich die Elementeinteilung auch einer komplizierten Körpergeometrie gut anpassen. Die Theorie sei hier am Beispiel der ebenen Wärmeleitung durchgeführt. Das Problem werde zunächst stationär behandelt, wobei aber eine im Körper stetig verteilte Wärmequellstärke e (Wärmeentwicklung pro Zeit- und Volumeneinheit) eingeführt werde, weil davon ausgehend der Übergang zum instationären Fall leicht möglich ist. Die Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + e = 0, \quad 19.9(1)$$

während die Grenzbedingung an der Außenkontur in der Form

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T') = 0 \quad 19.9(2)$$

geschrieben werden kann mit $\partial/\partial n$ als Ableitung nach der äußeren Normalen.

In der Variationsrechnung wird gezeigt, daß die Aufgabe, Gl. 19.9(1) mit der Grenzbedingung 19.9(2) zu lösen, mit der folgenden äquivalent ist. Das Funktionale χ sei definiert durch

$$\chi \equiv \frac{1}{2} \iint_G \lambda \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_G e T dx dy + \int_C \alpha \left[\frac{T^2}{2} - T T' \right] ds. \quad 19.9(3)$$

Die Doppelintegrale sind über das ganze Flächengebiet G des Körpers zu erstrecken, das Einfachintegral über die Begrenzungskurve C , Abb. 19.9.1. Sucht man nun diejenige Verteilung $T(x, y)$, die χ zu einem Minimum macht, so erfüllt diese, wie aus der Eulerschen Bedingung der Variationsrechnung hervorgeht 19.9(1) und (2), vgl. etwa [35]. Anschaulich

bedeutet dies, daß sich der Wärmestrom so verteilt, wie er den geringsten Widerstand findet.

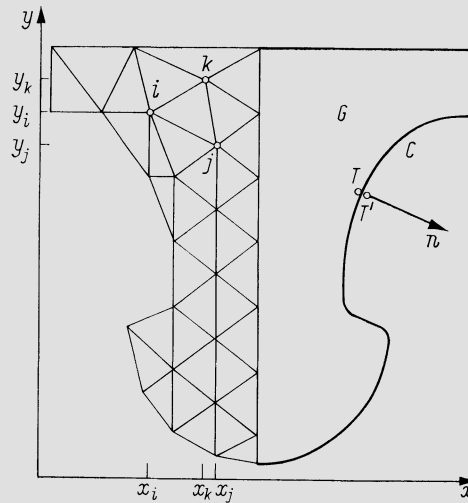


Abb. 19.9.1. Einteilung eines Körpers in dreieckige Felder

Wird nun der Körper gemäß Abb. 19.9.1 in dreieckige Felder eingeteilt, so wird das Temperaturfeld repräsentiert durch die sämtlichen Temperaturen T_i in den Knotenpunkten dieses Netzes. χ ist dann Funktion aller dieser T_i . Die Variationsbedingung $\delta\chi = 0$, welche die Lösung des Problems festlegt, lautet daher

$$\frac{\partial\chi}{\partial T_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, i \dots N, \tag{19.9(4)}$$

wo N die Zahl der Knotenpunkte sei. Um diese Gleichungen explizite zu erhalten, möge ein Element i, j, k herausgegriffen werden, Abb. 19.9.1. Innerhalb dieses Elementes darf die Temperaturverteilung als linear betrachtet werden, d. h. es ist

$$T = \frac{1}{2A} [(a_i + b_i x + c_i y) T_i + (a_j + b_j x + c_j y) T_j + (a_k + b_k x + c_k y) T_k], \tag{19.9(5)}$$

wo

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \tag{19.9(6)}$$

das Doppelte der Dreiecksfläche ist. Für die Koeffizienten findet man

$$a_i = x_k y_j - x_j y_k, \quad b_i = y_k - y_j, \quad c_i = x_j - x_k, \tag{19.9(7)}$$

a_j, b_j etc. durch zyklische Vertauschung. Nun sei χ^e der Anteil von χ , der auf das betrachtete Element entfällt, dessen Eckpunkte sämtlich im Inneren des Körpers (nicht auf C) liegen mögen. Für $\partial\chi^e/\partial T_i$ erhält man den Ausdruck

$$\frac{\partial\chi^e}{\partial T_i} = \iint \lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy + \iint e \frac{\partial T}{\partial T_i} dx dy, \tag{19.9(8)}$$

wobei die Doppelintegrale über die Dreiecksfläche zu erstrecken sind. Hier sind alle

Ableitungen bis auf $\partial T/\partial T_i$ konstant, womit sich mit 19.9(5) ergibt

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial T_i} = \frac{\lambda b_i}{(2\Delta)^2} (b_i T_i + b_j T_j + b_k T_k) \iint dx dy + \frac{\lambda c_i}{(2\Delta)^2} (c_i T_i + c_j T_j + c_k T_k) \iint dx dy + \frac{e}{2\Delta} \iint (a_i + b_i x + c_i y) dx dy. \quad 19.9(9)$$

Nun ist aber

$$\iint dx dy = \Delta, \quad 19.9(10)$$

und aus der Bedeutung von a_i, b_i, c_i läßt sich verifizieren, daß

$$\iint (a_i + b_i x + c_i y) \frac{dx dy}{2\Delta} = \frac{\Delta}{3}. \quad 19.9(11)$$

Damit kann 19.9(9) in die folgende Form übergeführt werden. Setzt man

$$S_{ij} \equiv \frac{\lambda}{4\Delta} (b_i b_j - c_i c_j), \quad 19.9(12)$$

so ist

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial T_i} = S_{ii} T_i + S_{ij} T_j + S_{ik} T_k + \frac{e\Delta}{3}. \quad 19.9(13)$$

Nun werde ein Punkt i herausgegriffen, und es soll $\partial \chi/\partial T_i$ gebildet werden, weil dieser Ausdruck nach Gl. 19.9(4) gleich Null zu setzen ist. Es ist

$$\frac{\partial \chi}{\partial T_i} = \sum_{\varepsilon} \frac{\partial \chi^{\varepsilon}}{\partial T_i}. \quad 19.9(14)$$

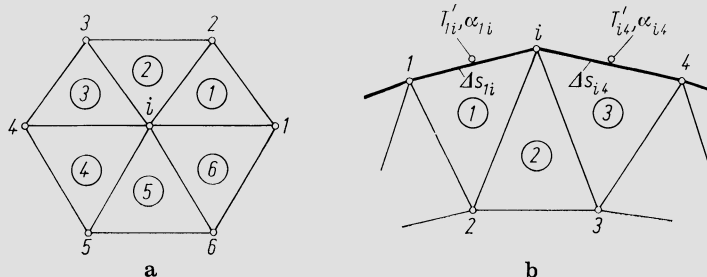


Abb. 19.9.2. Zur Berechnung von Temperaturfeldern mit finiten Elementen. a) Aufpunkt im Innern; b) Aufpunkt am Rande

Die χ^{ε} sind die χ^e der sämtlichen Dreieckselemente, die den Punkt i umgeben, d. h. also derjenigen, die in Abb. 19.9.2a dargestellt sind. Die dort in Kreisen geschriebenen Nummern sind die ε und es seien $\lambda^{\varepsilon}, e^{\varepsilon}, \Delta^{\varepsilon}$ die auf das jeweilige finite Element bezogenen Werte. Eine Verschiebung von T_i allein ändert nur die Verhältnisse in diesen unmittelbar anschließenden Dreiecksflächen, so daß diese den einzigen Beitrag zu $\partial \chi/\partial T_i$ liefern, wie durch Gl. 19.9(14) ausgesagt wird. Nun muß nur 19.9(13) in (14) eingesetzt werden, worauf mit 19.9(4)

$$\frac{\partial \chi}{\partial T_i} = \sum_{\varepsilon} \left[S_{ii}^{\varepsilon} T_i + S_{ij}^{\varepsilon} T_j + S_{ik}^{\varepsilon} T_k + \frac{e^{\varepsilon} \Delta^{\varepsilon}}{3} \right] = 0. \quad 19.9(15)$$

Bei der Situation nach Abb. 19.9.2a mit 6 angrenzenden Elementen und der angegebenen Punktnummerierung lautet diese Gleichung z. B.:

$$(S_{ii}^1 + S_{ii}^2 + \dots + S_{ii}^6) T_i + (S_{i1}^6 + S_{i1}^1) T_1 + (S_{i2}^1 + S_{i2}^2) T_2 + \dots \\ \dots + (S_{i6}^5 + S_{i6}^6) T_6 + \frac{1}{3} (e^1 \Delta^1 + e^2 \Delta^2 + \dots + e^6 \Delta^6) = 0. \quad 19.9(16)$$

Hier ist angenommen worden, daß Punkt i im Inneren des Körpers liege. Liegt er auf dessen Berandung, so ist bei der Bildung von χ^e und seiner Ableitung noch der Beitrag des Integrals über C beizufügen, vgl. Gl. 19.9(3). Für den Streckenzug 1– i –4 (Abb. 19.9.2b), ist dieser Beitrag

$$\alpha_{1i} \Delta s_{1i} \left[\frac{(T_1 + T_i)^2}{8} - \frac{T'_{1i}(T_1 + T_i)}{2} \right] + \alpha_{i4} \Delta s_{i4} \left[\frac{(T_i + T_4)^2}{8} - \frac{T'_{i4}(T_i + T_4)}{2} \right],$$

wobei α_{1i} , α_{i4} , T'_{1i} , T'_{i4} Mittelwerte über die betreffenden Strecken sind. Dies ist nach T abzuleiten, womit

$$\frac{\partial}{\partial T_i} \left\{ \int_C \alpha \left[\frac{T^2}{2} - T'T \right] ds \right\} = \frac{\alpha_{1i} \Delta s_{1i}}{2} \left[\frac{T_1 + T_i}{2} - T'_{1i} \right] + \frac{\alpha_{i4} \Delta s_{i4}}{2} \left[\frac{T_i + T_4}{2} - T'_{i4} \right]. \quad 19.9(17)$$

Dies ist in der für Punkt i aufgestellten Gleichung des Typs 19.9(16) noch beizufügen. Bei der Situation nach Abb. 19.9.2b ergibt sich mit der angegebenen Numerierung auf diese Weise

$$\left[S_{ii}^1 + S_{ii}^2 + S_{ii}^3 + \frac{\alpha_{1i} \Delta s_{1i}}{4} + \frac{\alpha_{i4} \Delta s_{i4}}{4} \right] T_i + \left[S_{i1}^1 + \frac{\alpha_{1i} \Delta s_{1i}}{4} \right] T_1 + \\ + [S_{i2}^1 + S_{i2}^2] T_2 + [S_{i3}^2 + S_{i3}^3] T_3 + \left[S_{i4}^3 + \frac{\alpha_{i4} \Delta s_{i4}}{4} \right] T_4 + \\ + \frac{1}{3} (e^1 \Delta^1 + e^2 \Delta^2 + e^3 \Delta^3) - \frac{1}{2} (\alpha_{1i} \Delta s_{1i} T'_{1i} + \alpha_{i4} \Delta s_{i4} T'_{i4}) = 0. \quad 19.9(18)$$

So erhält man also für jeden Knotenpunkt eine lineare Gleichung, welche die Temperaturen im betrachteten Punkt selbst und in allen direkt umliegenden Knotenpunkten enthält. Sie hat für Punkte im Körperinneren den Aufbau Gl. 19.9(16) für solche auf der Berandung den Aufbau Gl. 19.9(18), enthält dann also in einem Störungsglied auch Fluidtemperaturen. Im *stationären, quellenfreien Falle* fallen in diesen Gleichungen die Glieder

$$\frac{1}{3} \sum_{\epsilon} e^{\epsilon} \Delta^{\epsilon}$$

weg. Das Gleichungssystem ist trotzdem inhomogen, da es ja Störungsglieder mit den Fluidtemperaturen enthält. Seine Auflösung liefert die stationäre Temperaturverteilung.

Den *instationären Fall* gewinnt man ausgehend von den Quellgliedern, denn man kann in jedem Augenblick das Temperaturfeld auffassen als ein gedachtes stationäres Feld, das bestimmt wäre durch eine Wärmequellenverteilung, die mit dem wirklichen instationären Feld durch

$$e = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad 19.9(19)$$

zusammenhängt. In der Tat ist der rechts stehende Ausdruck die Wärme, die pro Zeit- und Raumeinheit aus dem Volumenelement austritt. Mit $\dot{T} \equiv \partial T / \partial t$ wird für ein finites Element mit den Ecken i, j, k

$$e = -\frac{\rho c}{3} (\dot{T}_i + \dot{T}_j + \dot{T}_k). \quad 19.9(20)$$

Bei der Situation nach Abb. 19.9.2a würde also z. B. in 19.9(16) der Ausdruck

$$-\frac{\rho c}{9} [(\dot{T}_i + \dot{T}_1 + \dot{T}_2) \Delta^1 + (\dot{T}_i + \dot{T}_2 + \dot{T}_3) \Delta^2 + \dots + (\dot{T}_i + \dot{T}_6 + \dot{T}_1) \Delta^6]$$

an die Stelle des Quellgliedes treten. Man kann dies auch auf die andere Seite der Gleichung nehmen und schreiben

$$\frac{\rho c}{9} [\dot{T}_i(\Delta^1 + \Delta^2 + \dots + \Delta^6) + \dot{T}_1(\Delta^6 + \Delta^1) + \dot{T}_2(\Delta^1 + \Delta^2) + \dots + \dot{T}_6(\Delta^5 + \Delta^6)].$$

Führt man diesen Schritt mit den für sämtliche Knoten gültigen Gleichungen durch und sind in einem Zeitpunkt t alle Knotentemperaturen T_j bekannt, so hat man ein System von linearen Gleichungen für alle \dot{T}_j vor sich. Nach seiner Auflösung liefert

$$T_j(t + \Delta t) = T_j(t) + \dot{T}_j \Delta t \quad 19.9(21)$$

alle Temperaturen für den Zeitpunkt $t + \Delta t$, und so kann weitergeschritten werden. Es lassen sich also nach dem Verfahren der finiten Elemente auch instationäre Temperaturverteilungen berechnen, doch ist die Rechnung ungleich aufwendiger als bei den unter 19.8 beschriebenen Verfahren, da bei jedem Zeitschritt ein System simultaner Gleichungen gelöst werden muß.

19.10 Gekühlte Gasturbinen

Der Gasturbinenbau war von Anfang an bestrebt, durch geeignete konstruktive Maßnahmen zu vermeiden, daß die großen Bauteile — also die Rotoren und Gehäuseteile — die volle Temperatur des Heißgases annehmen. Das war nicht nur dadurch geboten, daß große Teile aus hochlegierten Werkstoffen unverhältnismäßig teuer sind, sondern die warmfestesten Werkstoffe erlauben die Herstellung großer Stücke überhaupt nicht. Man erkannte auch sogleich, daß folgendes Grundprinzip beachtet werden muß. Wenn möglich, sollte ein Bauteil nicht einerseits mit dem Heißgas, andererseits mit dem Kühlmittel in Berührung sein, denn so entstehen große Wärmespannungen; außerdem gelingt es bei großen Abmessungen so oft nicht, die Temperatur der gasberührten Oberfläche genügend tief zu halten. Man muß vielmehr die Berührung mit dem Heißgas überhaupt vermeiden. Solche Bauteile wie Rotoren und Leitschaufelträger müssen also vollständig in Kühlluft eingehüllt werden, d. h. sie sind nicht eigentlich gekühlt, sondern *geschützt*. — Allerdings ist dieses Prinzip nicht durchweg anwendbar, denn man braucht zur Gasführung stets auch Bauteile, die mit dem Gasstrom direkt in Berührung stehen. Diese sind aber dünnwandig und leicht, können also aus hochlegiertem Werkstoff gefertigt werden, und dank der kleinen Wandstärken bleiben auch die Temperaturen der gasberührten Oberflächen genügend tief.

Von ausschlaggebender Bedeutung waren naturgemäß von Anfang an die *Schaufeln*. Sie waren zunächst ungekühlt, obwohl schon in ganz frühen Studien über Gasturbinen die Schaufelkühlung vorgeschlagen wird. Die Gründe dafür waren hauptsächlich die folgenden. Es standen keine rationellen Verfahren zur Fertigung gekühlter Schaufeln zur Verfügung und ebensowenig besaß man Unterlagen über den Wärmeübergang, die eine zuverlässige Auslegung solcher Schaufeln ermöglicht hätten. Auch für die Gesamtauslegung solcher Turbinen hatte man noch keine Grundlage. Außerdem schien gegen die Schaufelkühlung zu sprechen, daß die Erhöhung des thermischen Wirkungsgrades nur verhältnismäßig klein bleibt. Erst die Notwendigkeit einer drastischen Steigerung der Leistungsausbeute des Gasturbinenprozesses ließ die Schaufelkühlung dringend werden. So wurde sie zunächst bei Flugtriebwerken eingeführt, später auch bei industriellen Gasturbinen. Der entscheidende Durchbruch kam zustande durch die Entwicklung der Technik

des *Präzisionsgusses*, die es erlaubt, die äußerst komplizierten Kanalsysteme innerhalb einer gekühlten Schaufel rationell herzustellen und die sich auch für die in Frage kommenden Werkstofftypen eignet.

Die heute übliche Technik der Schaufelkühlung ist die *Innenkühlung durch Luft*. Sie entspricht also nicht dem eingangs erwähnten Prinzip, den Körper vor der Einwirkung des Heißgases zu schützen.

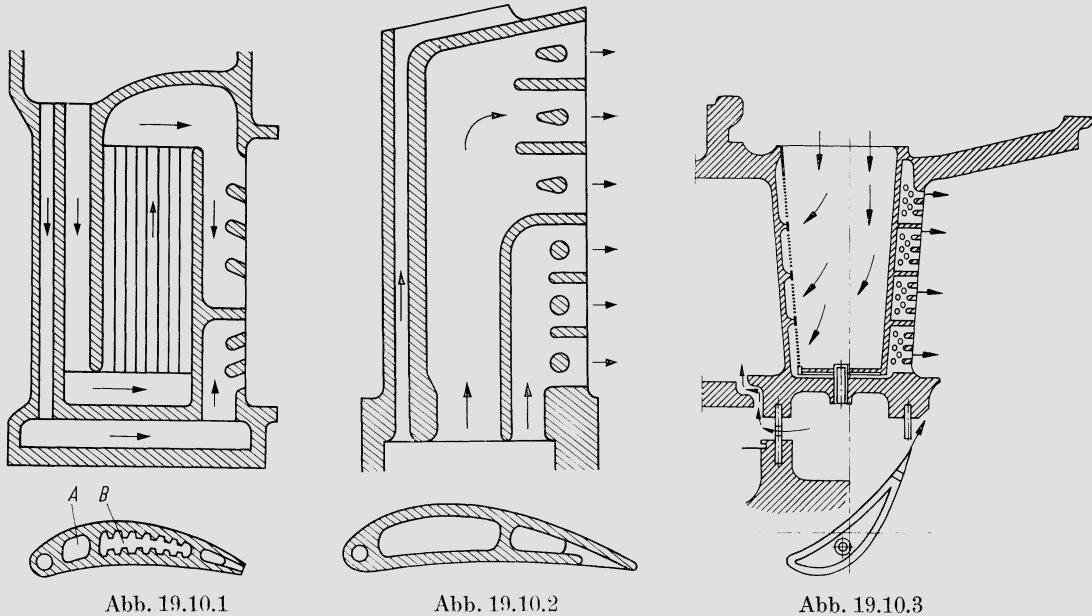


Abb. 19.10.1. Gekühlte Leitschaufel (Sulzer). Rippen in Kühlkanal erhöhen Wärmeübergang

Abb. 19.10.2. Gekühlte Laufschaufel (BBC). Schlanke Schaufel ermöglicht hohen Wärmeübergang bei einfacher Durchströmung

Abb. 19.10.3. Gekühlte Leitschaufel (KWU). Aus innerem Hohlkörper gelangt Luft zunächst zur Profilnase und von dort durch enge Spalträume zur Hinterkante

Abb. 19.10.1–3 stellen typische Beispiele gekühlter Schaufeln dar. Beim Leitrad Abb. 19.10.1 strömt ein Teilstrom der Luft durch einen engen Kanal in der Eintrittskante, um diese intensiv zu kühlen. Alsdann tritt dieser Strom durch eine innere Partie der geschlitzten Austrittskante in das Gas über. Ein zweiter Strom wird durch den Kanal *A* nach innen, durch den Kanal *B* (dessen Wände zu Vergrößerung des Wärmeüberganges Rippen aufweisen) wieder nach außen geleitet und tritt schließlich durch die äußere Partie der geschlitzten Austrittskante ins Gas über. Diese komplizierten Strömungswege sind deshalb gewählt, damit die Strömungsquerschnitte klein, die Geschwindigkeiten und mithin die Wärmeübergangszahlen also groß ausfallen. — Im Beispiel der Laufschaufel Abb. 19.10.2 strömt ebenfalls ein Teilstrom durch die Eintrittskante und verläßt die frei endigende Schaufel an ihrer Spitze. Auch der Rest strömt nach außen und verläßt die Schaufel längs der ganzen Austrittskante. Die Strömungsführung kann hier einfacher sein, weil die Schaufel schlank ist, was auf kleine Kühlluftquerschnitte führt. — Bei der Leitschaufel Abb. 19.10.3 gelangt die Luft zuerst in einen zentralen Raum, von dem aus sie durch Löcher gegen die Innenseite der Profilnase geblasen wird, was einen äußerst intensiven Wärmeübergang ergibt. Alsdann strömt die Kühlluft durch den engen Spaltraum zwischen der Schaufelfläche und der Wandung des Innenraumes zur geschlitzten Hinterkante. Wiederum werden so große Strömungsgeschwindigkeiten erzielt.

Manchmal ist die Schaufelkühlung auch bereichsweise als Filmkühlung ausgebildet, so im Beispiel der Laufschaufel von Sulzer, Abb. 19.10.4, wo der Luftaustritt druckseitig etwas vor der Austrittskante liegt (damit diese dünn gehalten werden kann), so daß über das kurze Stück ein kühlender Film besteht. Über die Filmkühlung besteht eine umfangreiche Literatur, vgl. etwa [36—42].

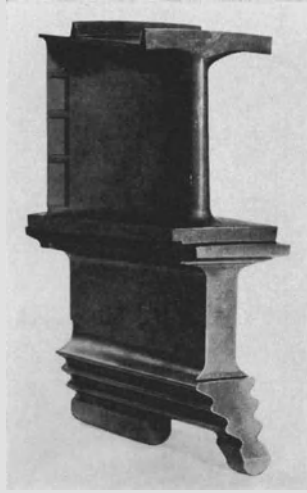


Abb. 19.10.4. Gekühlte Laufschaufel mit Deckplatte und verlängertem Fuß (Sulzer)

Eine Gesamtanordnung im Falle einer Gasturbine mit Trommelrotor (BBC) zeigt Abb. 19.10.5. Vom Verdichter kommend, gelangt die Kühlluft durch Bohrungen 1 und eine eingedrehte Nut 2 an die Peripherie der Läufertrommel 3, um alsdann im Spaltraum zwischen den Wärmestausegmenten 4 und der Läufertrommel 3 gegen das Austrittsende zu strömen. Ein Teil wird abgezweigt und dem ersten Laufschaufelkranz 5 zugeführt. Die Schaufelfüße weisen Durchbrechungen auf, wodurch zugleich die eigentliche Befestigungs-

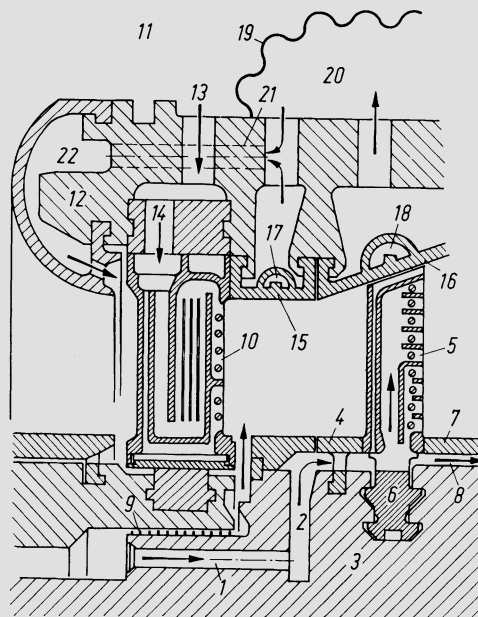


Abb. 19.10.5. Kühlluftführung bei einer Gasturbine mit Trommelrotor (BBC)

partie 6 auf verhältnismäßig tiefer Temperatur bleibt. Die restliche Kühlluft strömt unter den Wärmestausegmenten 7 durch den Spaltraum 8 weiter, kühlt die Schaufelfußpartien der weiteren Stufen und tritt durch enge Spalte zwischen den einzelnen Segmenten 7 unterwegs in den Gasstrom über, bis zum Schluß die ganze Rotorkühlluft dem Gasstrom beigemischt ist. Ein weiterer kleiner Kühlluftstrom durchquert die Labyrinthdichtung 9, schützt die Rotorstirnfläche vor dem Heißgas, dem er anschließend beigemischt wird. Die Rotortrommel ist also vollständig in Kühlluft eingehüllt, weshalb ihre Temperatur 500°C nirgends überschreitet.

Die Kühlluft für die erste Leitschaufel 10 stammt unmittelbar aus dem Raum 11, der den Leitschaufelträger 12 umgibt. Sie gelangt durch die Öffnungen 13 und 14 in die Leitschaufeln, um aus deren Hinterkanten in den Gasstrom überzutreten. Der Leitschaufelträger ist seinerseits durch Wärmestausegmente 15 und 16 gegen den Heißgasstrom geschützt. Diese weisen Kanäle 17 und 18 auf, die in Umfangsrichtung durchströmt werden und zu diesem Zweck am Umfang Ein- und Austrittsöffnungen besitzen, die mit entsprechenden Kühlluftströmen in Verbindung stehen. Der durch einen Blechmantel 19 begrenzte Raum 20 nimmt die austretende Kühlluft auf, worauf sie durch die Bohrungen 21 in den Raum 22 und von hier aus in den Gasstrom vor dem ersten Leitrad gelangt, also an der Expansion in der Turbine teilnimmt.

Abb. 19.10.6 veranschaulicht die Kühlluftführung in einer Gasturbine mit Scheibenläufer (Sulzer). Die durch Bohrungen 1 eingeführte Kühlluft gelangt durch den Spalt-raum zwischen Radscheibe 2 und Deckscheibe 3 nach außen und von hier teilweise in die Laufschaufeln 4. Die Deckscheibe 3 wird auf ihrer Außenseite noch von Kühlluft überstrichen, die durch die Labyrinthdichtung 5 tritt. Ein weiterer Teil der Kühlluft strömt unter den Schaufelfüßen des ersten Laufrades in den Spaltraum 6 und gelangt hier teilweise radial nach außen, teilweise durch die Labyrinthdichtung 7 des Zwischenbodens vor das zweite Laufrad, um dort dem Gasstrom beigemischt zu werden. Die Hinterseite des zweiten Laufrades wird durch einen besonderen, von hinten zugeführten Kühlluftstrom bestrichen. — Der Schaufelträger 8 wird durch die Leitradringe 9 und 10 und die Zwischenringe 11 und 12 gegen den Gasstrom abgeschirmt. Den Leitschaufeln wird durch

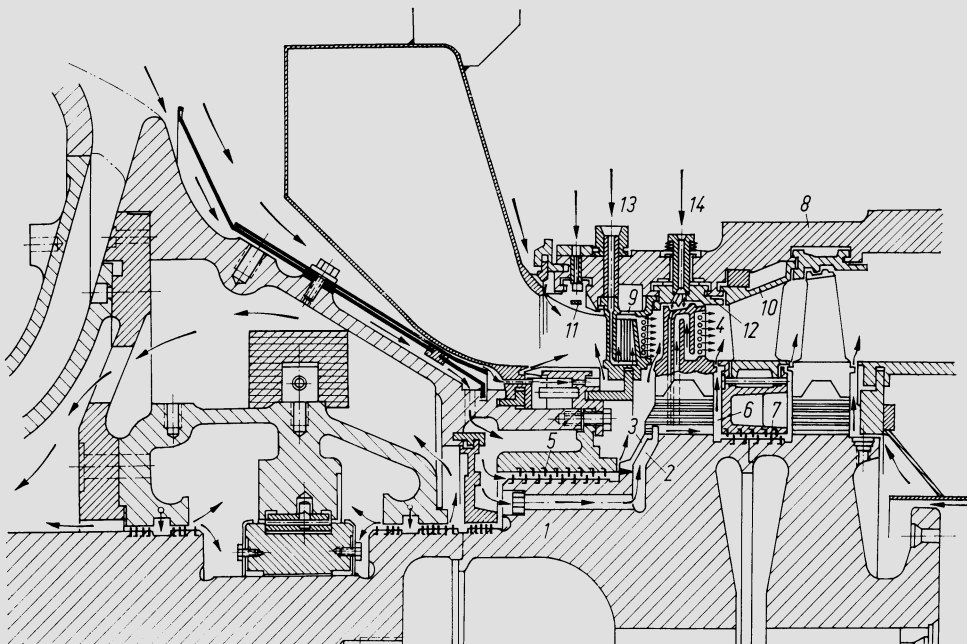


Abb. 19.10.6. Kühlluftführung bei einer Gasturbine mit Scheibenrotor (Sulzer)

die Bohrungen 13 und 14 Kühlluft zugeführt. Durch die Labyrinthdichtung an der Laufschaufelspitze tritt Kühlluft, die teils aus der Schaufelspitze austritt, teils durch die Kanäle 14 zugeführt wird.

Der Gedanke, auch die Schaufflächen vor der Berührung mit dem Heißgas zu schützen, führt zur *Effusionskühlung*, bei der Kühlluft durch eine poröse Mantelfläche aus der Schaufel austritt und diese somit einhüllt (Abb. 19.10.7). Eines der Probleme ist dabei die Dosierung der Kühlluft-Massenstromdichte längs des Umfanges, die naturgemäß empfindlich von der Druckverteilung am Profil abhängt, vgl. etwa [43].

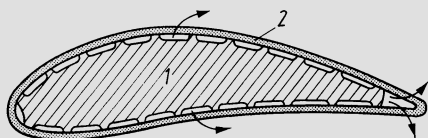


Abb. 19.10.7. Grundsätzlicher Aufbau einer Schaufel mit Effusionskühlung. 1 Tragkörper, 2 poröse Haut

Schon früh ist auch die *Fremdkühlung* der Schaufeln vorgeschlagen worden, an sich mit beliebigen Kühlflüssigkeiten, vor allem aber mit Wasser, vgl. [21, 44]. Friedrich [44] berichtet über eine wassergekühlte Versuchsmaschine. Nachdem die Luftkühlung so verbessert werden konnte, daß selbst Gastemperaturen über 1000 °C beherrscht werden können, ist das Interesse an der Wasserkühlung zunächst in den Hintergrund getreten, doch wurde der Gedanke neuerdings wieder aufgegriffen, da man beabsichtigt, mit der Gastemperatur auf 1600—1800 °C zu gehen (im Zusammenhang mit Gas-Dampfturbinenanlagen), vgl. [45].

Ein Hauptproblem der mit hoher Temperatur arbeitenden Gasturbine ist das der *Korrosion* der Schaufeln, vor allem durch die im Brennstoff enthaltene Asche, die als besonders schädliche Bestandteile Verbindungen von Natrium und Vanadium enthält. Die Technik der Plattierung der Schaufeln mit geeigneten Überzügen wie auch die der Behandlung des Brennstoffes (Auswaschung der Natriumsalze, Zusätze zur Bekämpfung der Vanadiumkorrosion) hat in neuerer Zeit wesentliche Fortschritte gemacht. Deshalb werden heute Gasturbinen auch bei aschereicheren Brennstoffen mit Höchsttemperaturen betrieben, die zunächst nur bei Verbrennung hinreichend sauberer Brennstoffe beherrscht werden konnten. Allerdings ist dann eine stärkere Verschmutzung in Kauf zu nehmen. Klassifiziert man die hauptsächlichsten Brennstoffe gemäß ihrer Eignung für die Gasturbine, so ergibt sich folgende absteigende Reihenfolge: Erdgas, destilliertes Öl, Rohöl, Schweröl. Andere gasförmige Brennstoffe als Erdgas haben gegenwärtig noch keine große Bedeutung, dürften aber in Zukunft im Rahmen der Kohleveredelung als Gasturbinenbrennstoffe mehr und mehr Anwendung finden. — Sollte es gelingen, bei sehr hoher Gastemperatur durch Fremdkühlung der Schaufeln (z.B. Wasserkühlung) deren Oberflächentemperatur relativ tief zu halten (z.B. etwa auf 550 °C) dann wäre das Korrosionsproblem weitgehend eliminiert.

Bei den Untersuchungen über die Wasserkühlung wird aber namentlich auch an die Verbrennung von Kohle gedacht. Eine Möglichkeit würde darin bestehen, die Kohle im Fließbettverfahren zu verbrennen, das entstehende Verbrennungsgas in einem Elektrofilter vom Flugstaub zu reinigen und dann der Gasturbine zuzuführen.

Bei der Gestaltung der Hochtemperaturturbinen sind naturgemäß die Eigenschaften der Werkstoffe von entscheidender Bedeutung. Dieses Wissensgebiet ist so weitläufig geworden, daß der Konstrukteur stets den Spezialisten konsultieren muß. Eine einführende Übersicht gibt Hornbogen [46], während in dem Sammelwerk [47] die Entwicklungen auf dem Gebiet der Hochtemperaturwerkstoffe dargestellt sind.

19.11 Berechnung gekühlter Systeme

Die gekühlten Systeme, auf die sich die nachfolgenden Ausführungen beziehen, sind vor allem die *Schaufeln*, aber auch die von Kühlkanälen durchsetzten Partien von rotierenden und stillstehenden Konstruktionsgruppen. Stets dringt also an gewissen Oberflächen Wärme ein, die abgeführt werden muß durch den Kühlluftstrom.

Zur Herleitung des Rechenverfahrens möge die Zustandsänderung längs eines unendlich kleinen Wegstückes eines Kühlkanals betrachtet werden. An der betrachteten Stelle sei \dot{m} der Kühlluftmassenstrom, f der Kanalquerschnitt, p der Druck, T die Temperatur, ρ die Dichte, w die Geschwindigkeit der Kühlluft, T_w die Kanalwandtemperatur. Das Kanalstück habe die Oberfläche dF , erstrecke sich von einem Radius r zum Radius $r + dr$ und rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Pro Zeiteinheit wird dem Kühlluftstrom die Wärmemenge

$$d\dot{Q} = \alpha \left[T_w - T - \frac{w^2}{2c_p} \right] dF = \frac{\dot{m}c_p}{f} St \left[T_w - T - \frac{w^2}{2c_p} \right] dF \quad 19.11(1)$$

zugeführt, wobei die Wärmeübergangszahl α , die mit ihr gebildete Stanton-Zahl St und die Wandtemperatur T_w Mittelwerte über den Umfang sind. — Gegebenenfalls ist diese Formel zu verallgemeinern, wo etwa ein Kanal durch Flächen dF_1 und dF_2 begrenzt ist, die Temperaturen T_{w1} und T_{w2} besitzen und wobei St_1 und St_2 die zugehörigen Stanton-Zahlen sind. — Als maßgebende Kühllufttemperatur ist die Totaltemperatur eingesetzt. Aus 19.11(1) ergibt sich sogleich die pro Masseneinheit zugeführte Wärmemenge

$$dq = c_p St \left[T_w - T - \frac{w^2}{2c_p} \right] \frac{dF}{f}, \quad 19.11(2)$$

während die spezifische Arbeit des Fliehkraftfeldes

$$da = \omega^2 r dr \quad 19.11(3)$$

ist. Die durch Reibung dissipierte Energie sei $(w^2/2) d\zeta$, wobei $d\zeta$ der dadurch definierte Verlustkoeffizient des Kanalstückes ist.

Maßgebend für die Zustandsänderung sind die nachfolgenden vier Gleichungen, von denen die erste die Energiegleichung, die zweite die Hauptgleichung der Thermodynamik, die dritte die Kontinuitätsgleichung, die vierte die thermische Zustandsgleichung darstellt, während die kalorische Zustandsgleichung mit der Setzung $dh = c_p dT$ eingeführt ist.

$$c_p dT + w dw = c_p St \left[T_w - T - \frac{w^2}{2c_p} \right] \frac{dF}{f} + \omega^2 r dr, \quad 19.11(4)$$

$$c_p St \left[T_w - T - \frac{w^2}{2c_p} \right] \frac{dF}{f} + \frac{w^2}{2} d\zeta = c_p dT - \frac{dp}{\rho}, \quad 19.11(5)$$

$$w = \frac{\dot{m}}{\rho f}, \quad \rho = \frac{p}{RT}. \quad 19.11(6), (7)$$

Im allgemeinen wird nun f längs des Weges variieren, und es kann auch eine Teilmenge $d\dot{m}$ abzweigt und in den Gasstrom übergeführt werden ($d\dot{m}$ ist also negativ). Deshalb läßt sich aus der Kontinuitätsgleichung 19.11(6) unter Beachtung der Gasgleichung 19.11(7) auch die differentielle Form

$$\frac{dw}{w} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{df}{f} - \frac{dp}{p} + \frac{dT}{T} \quad 19.11(8)$$

bringen. Damit geht der Satz der maßgebenden Gleichungen, geordnet nach den Differen-

tialen dT und dp über in

$$\left[c_p + \frac{w^2}{T} \right] dT - \frac{w^2}{p} dp = c_p St \left[T_w - T - \frac{w^2}{2c_p} \right] \frac{dF}{f} + \omega^2 r dr - w^2 \left[\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{df}{f} \right], \quad 19.11(9)$$

$$c_p dT - \frac{RT}{p} dp = c_p St \left[T_w - T - \frac{w^2}{2c_p} \right] \frac{dF}{f} + \frac{w^2}{2} d\zeta \quad 19.11(10)$$

$$w = \frac{\dot{m} RT}{p f}. \quad 19.11(11)$$

Anhand des Konstruktionsentwurfes ist nun ein Kühlluftströmungsplan aufzustellen, wie in Abb. 19.11.1a angegeben. Die einzelnen Strömungswege werden dabei in Teilstücke eingeteilt. Auf diese wird das obige Gleichungssystem angewandt, indem man zu endlichen Differenzen übergeht. Zweckmäßig wählt man dabei die dimensionslose Darstellung, indem man wie folgt vorgeht. Druck und Temperatur können dimensionslos gemacht werden durch geeignete Bezugswerte p_0 , T_0 (z. B. die Werte der Kühlluft vor Eintritt in den Rotor; bezüglich des Überganges auf T_1 , Abb. 19.11.1a vgl. die Ausführungen in Bd. I, Abschn. 9.8), d. h. man setzt

$$\vartheta \equiv \frac{T}{T_0}, \quad \vartheta_w \equiv \frac{T_w}{T_0}, \quad \pi \equiv \frac{p}{p_0}. \quad 19.11(12)$$

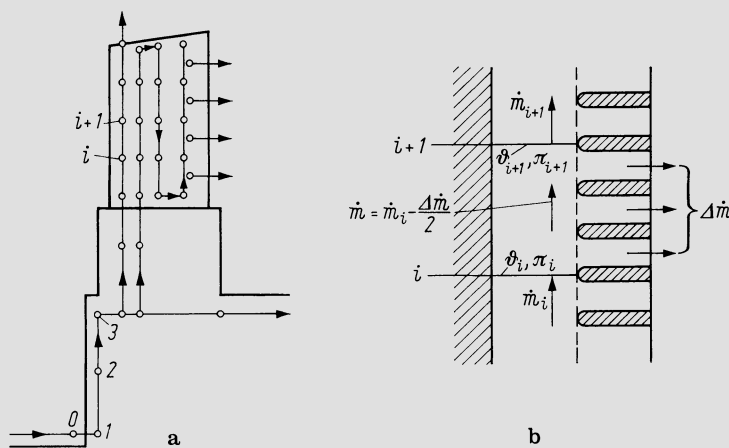


Abb. 19.11.1. a) Kühlluftströmungsplan; b) Verhältnisse bei gleichzeitiger Abzweigung von Kühlluft

Ferner sei

$$W^2 \equiv \frac{w^2}{c_p T_0} = \frac{1}{c_p T_0} \left[\frac{\dot{m} R T_0 \vartheta}{f p_0 \pi} \right]^2. \quad 19.11(13)$$

Wenn man nun 19.11(9) und (10) durch $c_p T_0$ dividiert, ist man auf folgendes geführt. Mit

$$a_{11} \equiv 1 + \frac{W^2}{\vartheta}, \quad a_{12} \equiv \frac{W^2}{\pi}, \quad a_{22} \equiv \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\vartheta}{\pi}, \quad 19.11(14)$$

$$b_1 \equiv St \left[\vartheta_w - \vartheta - \frac{W^2}{2} \right] \frac{\Delta F}{f} + \frac{\omega^2 r \Delta r}{c_p T_0} + W^2 \left[\frac{\Delta \dot{m}}{\dot{m}} + \frac{\Delta f}{f} \right], \quad 19.11(15)$$

$$b_2 \equiv St \left[\vartheta_w - \vartheta - \frac{W^2}{2} \right] \frac{\Delta F}{f} + \frac{W^2}{2} \zeta \quad 19.11(16)$$

erhält man

$$a_{11} \Delta \vartheta - a_{12} \Delta \pi = b_1, \quad 19.11(17)$$

$$\Delta \vartheta - a_{22} \Delta \pi = b_2. \quad 19.11(18)$$

Die Differentiale sind hier sogleich durch endliche Differenzen ersetzt. Dementsprechend beziehen sich die ΔF , Δf , Δm und Δr auf den ganzen Abschnitt zwischen den Punkten i und $i + 1$, Abb. 19.11.1b und ζ ist die Widerstandszahl dieses Abschnittes. Das Gleichungssystem 19.11(17), (18) hat die Lösungen

$$\Delta \vartheta = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{12} - a_{11}a_{22}}, \quad \Delta \pi = \frac{a_{11}b_2 - b_1}{a_{12} - a_{11}a_{22}}. \quad 19.11(19)$$

Bei der Bildung der a und b sind Mittelwerte der Temperatur- und Druckvariablen zu verwenden, nämlich

$$\vartheta = \vartheta_i + \frac{\Delta \vartheta}{2}, \quad \pi = \pi_i + \frac{\Delta \pi}{2}, \quad 19.11(20)$$

und mit diesen ist auch W^2 zu bilden. — Die Differenzenrechnung, die in Richtung der Strömung von Abschnitt zu Abschnitt fortschreitet, beginnt mit $\vartheta \approx \vartheta_i$, $\pi \approx \pi_i$, berechnet aus 19.11(13) W^2 , aus 19.11(14)–(16) die a und b , aus 19.11(19) $\Delta \vartheta$ und $\Delta \pi$ und schließlich aus 19.11(20) verbesserte ϑ und π , mit denen die Rechnung wiederholt wird. Mehr als eine Iteration dürfte in Anbetracht der Genauigkeit der Kenntnis von St und ζ kaum sinnvoll sein. Damit erhält man schließlich

$$\vartheta_{i+1} = \vartheta_i + \Delta \vartheta, \quad \pi_{i+1} = \pi_i + \Delta \pi, \quad 19.11(21)$$

womit der Ausgangspunkt für den folgenden Abschnitt gefunden ist. — Der gesamte Gang der Rechnung läßt sich nun wie folgt beschreiben:

1. Festlegung des Kühlluftströmungsplanes und seiner Diskretisierung. — Wo längs eines Strömungsweges stetig Kühlluft abgezweigt wird, ist es zweckmäßig, die ideellen Abzweigungspunkte in die Mitte der Abschnitte zu legen, wie in Abb. 19.11.1 angedeutet.
2. Abschätzung der ϑ_w und der Kühlluftmassenströme der einzelnen Abschnitte durch vorbereitende Rechnung.
3. Abschnittweise Berechnung der Zustandsänderung der Kühlluft wie angegeben, fortschreitend in Richtung der Strömung. Diese Rechnung liefert die ϑ und π beim Übertritt in die Gasströmung. Die dort erhaltenen π sollten den tatsächlichen Druckwerten im Gasstrom entsprechen. Ist dies nicht der Fall, so ist auf die Massenströme zurückzugreifen und die Rechnung zu wiederholen, bis Übereinstimmung hergestellt ist.
4. Damit stehen die Unterlagen bereit zur Berechnung der Temperaturverteilung in den Konstruktionsteilen gemäß den Abschn. 19.6–9. Daraus ergeben sich genauere ϑ_w , mit denen die Rechnung zu wiederholen ist.

Die Empirie geht in diese Rechnung ein in Form der St - und ζ -Werte. Unterlagen darüber finden sich unter 19.2. — Für ein Kanalstück von der Länge L und dem hydraulischen Durchmesser D_h wäre z. B. $\zeta = \psi L/D_h$. — Insbesondere bei der komplizierten Geometrie der Kanalsysteme gekühlter Schaufeln wird man aber auf den Versuch zurückgreifen müssen. — Selbstverständlich ist das Rechenverfahren je nach den besonderen Gegebenheiten abzuwandeln, insbesondere ist $\omega = 0$ bei stillstehenden Teilen. — Abb. 19.11.2 gibt ein Beispiel einer Temperaturverteilung in einem Schnitt einer gekühlten Gasturbinenschaufel.

Es ist üblich, bei solchen Rechnungen die Bestimmung der Temperaturverteilung in einem Schnitt als ebenes Problem aufzufassen, d. h. man vernachlässigt den Einfluß der über den Querschnitt ungleichmäßigen Längsleitung auf die Temperaturverteilung. Dieser Effekt hat die Tendenz, die Temperaturen auszugleichen. Seine Vernachlässigung ist also ein Fehler, der auf der sicheren Seite liegt. — Oft ist es wünschenswert, für eine gekühlte Schaufel die ideale Wärmeübergangszahl α_i zu kennen, welche den gleichen Wärmestrom in die Rotoroberfläche gibt wie die Schaufel. Sind T_g und T_N die wirksame (adiabatische) Gastemperatur und die Nabentemperatur, f_N der Schaufelquerschnitt an der Nabe, so

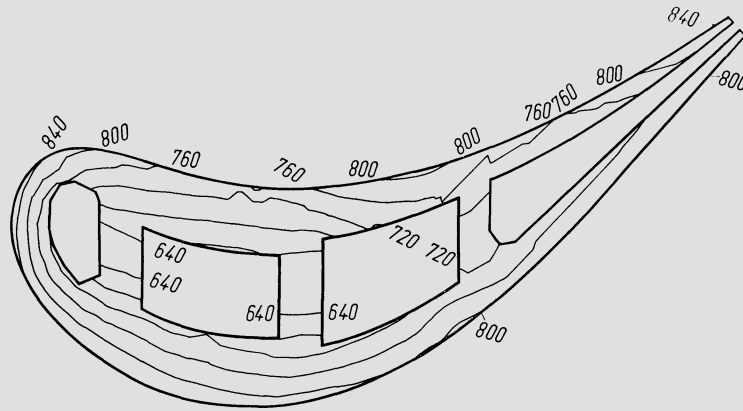


Abb. 19.11.2. Isothermen (Temperaturen in °C) in einer gekühlten Gasturbinenlaufschaukel von Sulzer

ist dieser Wärmestrom

$$\dot{Q} = \alpha_i f_N (T_g - T_N). \quad 19.11(22)$$

Es seien weiter α_g, α_k die Wärmeübergangszahlen von Gas und Kühlluft, U_g, U_k die Umfänge, an denen diese Wärmeübergangszahlen wirksam sind, \bar{T} die mittlere Temperatur des Schaufelschnittes, dann ist

$$\alpha_i \approx \frac{\bar{T} - T_N}{T_g - T_N} \sqrt{\frac{(\alpha_g U_g + \alpha_k U_k) \lambda}{f_N}}. \quad 19.11(23)$$

Alle diese Größen sind in der Nähe des Nabenschnittes, d. h. etwa eine halbe Sehnenlänge von diesem entfernt, zu bilden.

19.12 Temperaturkenngrößen gekühlter Schaufeln

Die Wirksamkeit der Kühlung einer Schaufel kann gekennzeichnet werden durch gewisse Temperaturkenngrößen. Es sei T_g die Gastemperatur, \bar{T}_f die mittlere Temperatur der Schaufeloberfläche, T_f die höchste Temperatur der Schaufeloberfläche, T_{0k} die Kühlluft-Eintrittstemperatur, \bar{T}_{ak} der kalorimetrische Mittelwert der Kühlluft-Austrittstemperatur, T_{ak} die höchste Kühlluft-Austrittstemperatur. Alle Fluidtemperaturen sind adiabatische Werte, praktisch also mit hinreichender Näherung Totaltemperaturen. T_g ist ein Mittelwert über die Schaufelhöhe. Dann sind die folgenden Verhältnisse sinnvolle Charakteristika:

$$\bar{\eta} \equiv \frac{T_g - \bar{T}_f}{T_g - T_{0k}}, \quad \eta \equiv \frac{T_g - T_f}{T_g - T_{0k}}, \quad \tau \equiv \frac{\bar{T}_f - \bar{T}_{ak}}{T_g - \bar{T}_f}. \quad 19.12(1)$$

Die $\bar{\eta}$ und η können als *Effektivitäten der Kühlung* bezeichnet werden, denn sie wären 1 im idealen Grenzfall, wo die Schaufeloberflächentemperatur gleich der Temperatur der verfügbaren Kühlluft wäre. Zweckmäßig werden noch die folgenden dimensionslosen Temperaturvariablen eingeführt

$$\bar{\vartheta}_f \equiv \frac{\bar{T}_f - T_{0k}}{T_g - T_{0k}}, \quad \vartheta_f \equiv \frac{T_f - T_{0k}}{T_g - T_{0k}}, \quad \bar{\vartheta}_{ak} \equiv \frac{\bar{T}_{ak} - T_{0k}}{T_g - T_{0k}}, \quad 19.12(2)$$

d. h. die Temperaturen werden dimensionslos gemacht, indem man die Übertemperaturen über Kühllufteneintritt dividiert durch die gesamte Temperaturspanne zwischen Gas und Kühlluft (also anders als in Abschn. 19.11). Mit diesen Setzungen gehen die Gln. 19.12(1)

über in

$$\bar{\eta} = 1 - \bar{\vartheta}_f, \quad \eta = 1 - \vartheta_f, \quad \tau = \frac{\bar{\vartheta}_f - \bar{\vartheta}_{ak}}{1 - \bar{\vartheta}_f}. \quad 19.12(3)$$

Daraus ergibt sich sofort der Zusammenhang zwischen τ und $\bar{\eta}$, der in den Formen

$$\tau = \frac{1 - \bar{\eta} - \bar{\vartheta}_{ak}}{\bar{\eta}}, \quad \bar{\eta} = \frac{1 - \bar{\vartheta}_{ak}}{1 + \tau} \quad 19.12(4)$$

geschrieben werden kann.

Wesentliche Zusammenhänge erkennt man nun ausgehend von der Tatsache, daß der in die Schaufeloberfläche eindringende Wärmestrom gleich der pro Zeiteinheit von der Kühlluft aufgenommenen Wärmemenge ist. Es seien l die Schaufelhöhe, t die mittlere Schaufelteilung, w_1 die relative Zuströmgeschwindigkeit des Gases zur Schaufel, \dot{m}_g der Gasmassenstrom pro Schaufelkanal, \dot{m} der Kühlluftmassenstrom pro Schaufel, U der über die Höhe gemittelte Umfang des Schaufelprofils, c_{pg} , c_{pk} die spezifischen Wärmekapazitäten von Gas und Kühlluft, $\bar{\alpha}$ die mittlere Wärmeübergangszahl an der Schaufeloberfläche und \bar{St} die mit ihr gebildete Stanton-Zahl. Mit

$$\bar{\alpha} = c_{pg} w_1 \bar{St} = \frac{c_{pg} \dot{m}_g}{t l \sin \beta_1} \bar{St} \quad 19.12(5)$$

wird dann die in die Schaufel pro Zeiteinheit eindringende Wärme

$$\dot{Q} = \frac{c_{pg} \dot{m}_g}{t l \sin \beta_1} \bar{St} U l (T_g - \bar{T}_f), \quad 19.12(6)$$

und die Gleichsetzung mit der Wärmeaufnahme der Kühlluft liefert

$$\dot{m}_k c_{pk} (\bar{T}_{ak} - T_{0k}) = \dot{m}_g c_{pg} \frac{U \bar{St}}{t \sin \beta_1} (T_g - \bar{T}_f). \quad 19.12(7)$$

Wenn man hier noch $\dot{m}_k / \dot{m}_g = \mu$ und $c_{pg} / c_{pk} = \gamma$ setzt und die Temperaturvariablen nach Gl. 19.12(2) einsetzt, erhält man

$$\mu = \frac{\gamma U \bar{St}}{t \sin \beta_1} \frac{1 - \bar{\vartheta}_f}{\bar{\vartheta}_{ak}} = \frac{\gamma U \bar{St}}{t \sin \beta_1} \frac{1 - \bar{\vartheta}_{ak}}{(1 + \tau) \bar{\vartheta}_{ak}}, \quad 19.12(8)$$

was auch in die Form

$$\bar{\vartheta}_{ak} = \frac{1}{\frac{t \sin \beta_1 (1 + \tau)}{\gamma U \bar{St}} \mu + 1} \quad 19.12(9)$$

aufgelöst werden kann.

Diese Gleichung erlaubt es, auf einfache Weise einen Überblick darüber zu gewinnen, wie sich die Wirksamkeit der Schaufelkühlung verändert, wenn man die Kühlluftmenge variiert. Wenn $\bar{\alpha}_g$, $\bar{\alpha}_k$, F_g , F_k die mittleren Wärmeübergangszahlen und Oberflächen auf der Gas- und Kühlluftseite sind, so ist das Temperaturverhältnis τ offenbar proportional $\bar{\alpha}_g F_g / \bar{\alpha}_k F_k$. Nun sei τ_0 der Wert von τ für eine bestimmte relative Kühlluftmenge μ_0 , für welche die Verhältnisse vollständig bekannt seien; man kennt also insbesondere auch $\bar{\vartheta}_{ak0}$ und $\bar{\eta}_0$. Dann ist offenbar für eine geänderte Kühlluftmenge μ

$$\tau = \tau_0 \frac{\bar{\alpha}_{k0}}{\bar{\alpha}_k}, \quad 19.12(10)$$

und da die Wärmeübergangszahl luftseitig praktisch proportional dem Kühlluftmassenstrom ist, auch

$$\tau = \tau_0 \frac{\mu_0}{\mu}. \quad 19.12(11)$$

Damit hat man aber aus 19.12(9) $\bar{\vartheta}_{ak}$ für den geänderten Massenstrom und mit 19.12(4) $\bar{\eta}$. Abb. 19.12.1a zeigt ein Beispiel so erhaltener Rechenergebnisse. In Abb. 19.12.1b sind durch Kurvenbänder die typischen Größenordnungen von $\bar{\eta}$ für Innenkühlung und Effusionskühlung dargestellt, wie sie aus Messungen hervorgehen. Die Effusionskühlung erweist sich als bedeutend wirksamer, doch stehen ihr größere technische Schwierigkeiten entgegen.

Aus der Überlegung, daß die Temperaturdifferenzen innerhalb der Schaufel proportional dem Wärmestrom sind, ergibt sich, wie leicht zu verifizieren

$$\eta = \bar{\eta} - \frac{\bar{\eta}}{\eta_0} (\bar{\eta}_0 - \eta_0). \tag{19.12(12)}$$

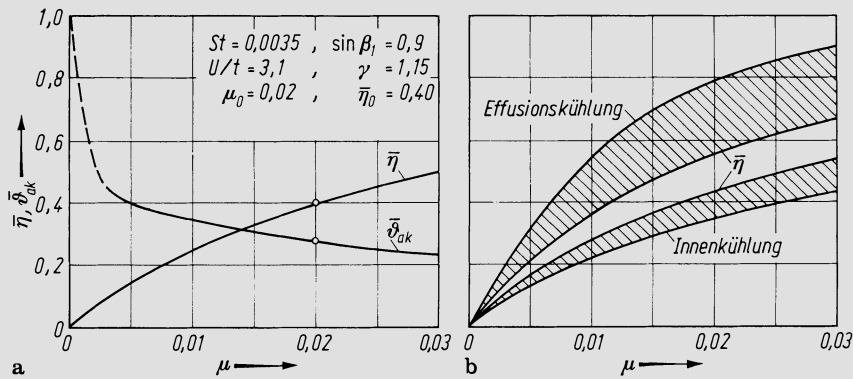


Abb. 19.12.1. Effektivität $\bar{\eta}$ und Temperaturverhältnis $\bar{\vartheta}_{ak}$ von gekühlten Schaufeln in Funktion der relativen Kühlluftmenge μ . a) Rechnungswerte; b) Bereich der empirischen Werte

19.13 Wärmedehnungen

Die Wärmedehnungen sind vor allem deshalb bedeutsam, weil ihre Unterschiede maßgebend sind für die vorzusehenden Spiele. Bei hochbeanspruchten Teilen wie Rotoren und Schaufeln sind auch die Dehnungen durch mechanische Beanspruchungen nicht vernachlässigbar, so daß man es praktisch stets mit Gesamtdehnungen zu tun hat. Erfolgt die Festigkeitsrechnung nach dem Verfahren der finiten Elemente, so liefert die Rechnung sogleich die Verschiebung der verschiedenen Knotenpunkte, so daß keine weitere Untersuchung nötig ist. Werden nach klassischen Methoden Spannungen berechnet, so ergeben sich die Wärmedehnungen wie folgt. Allgemein sei T die Übertemperatur über der Umgebungstemperatur, bei welcher der Bauteil dehnungsfrei ist und β der Mittelwert der linearen Wärmeausdehnungszahl zwischen 0 und T .

Die Radialdehnungen δr_a und δr_i am Außenradius r_a und Innenradius r_i eines Rotationskörpers sind dann

$$\delta r_a = r_a \left[\frac{\sigma_{\vartheta a} - \nu(\sigma_{r a} + \sigma_{a a})}{E} + \beta T_a \right] \approx r_a \left[\frac{\sigma_{\vartheta a}}{E} + \beta T_a \right], \tag{19.13(1)}$$

$$\delta r_i = r_i \left[\frac{\sigma_{\vartheta i} - \nu(\sigma_{r i} + \sigma_{a i})}{E} + \beta T_i \right] \approx r_i \left[\frac{\sigma_{\vartheta i}}{E} + \beta T_i \right]. \tag{19.13(2)}$$

Die vereinfachte Näherung ist sehr oft genügend, da meist die Tangentialspannung gegenüber den anderen Spannungen weit überwiegt. Nach diesen Formeln können praktisch auch die Radialdehnungen von Leitschaufelträgern berechnet werden, auch wo deren Kreissymmetrie durch einen Trennflansch gestört ist.

Zur Berechnung der *Längsdehnung von Schaufeln* ist eine Koordinate x einzuführen, die vom Fixpunkt (Auflagefläche) an der Schaufelbefestigung bis zum Schaufelende läuft und dabei von 0 bis l variiert (l ist im allgemeinen nicht identisch mit der Schaufelblattlänge, da ein Teil des Schaufelfußes mit dazugehören kann). Es sei $T(x)$ die Mitteltemperatur des Querschnittes an der Stelle x . Dann ist die Verschiebung δl des Schaufelendes gegenüber dem Fixpunkt

$$\delta l = \int_0^l \beta T(x) dx. \tag{19.13(3)}$$

Die *Axialverschiebung* δz einer ursprünglich im Abstand z von Fixpunkt A (Abb. 19.13.1) liegenden achsnormalen Schnittfläche S eines Rotationskörpers ist

$$\delta z = \int_0^z \overline{\beta T}(\zeta) d\zeta, \tag{19.13(4)}$$

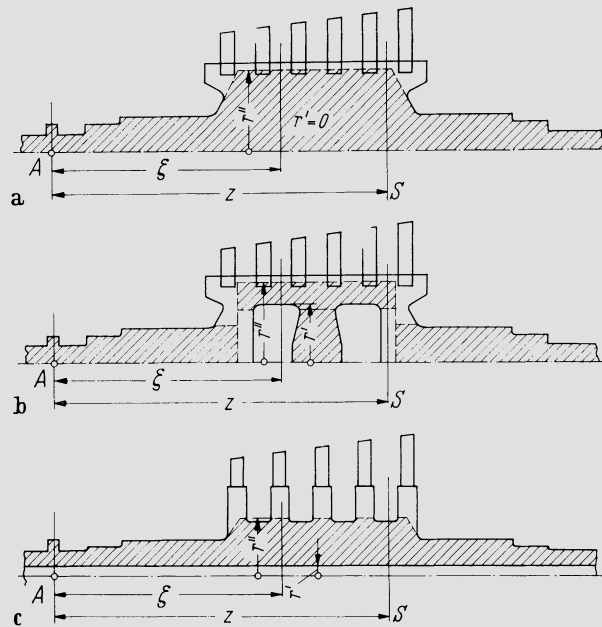


Abb. 19.13.1. Beispiele von Rotorformen. a) Volle Trommel; b) aus Scheiben gebildete Trommel; c) Scheibenrotor

wo ζ die von 0 bis z laufende Koordinate ist. Der Mittelwert $\overline{\beta T}$ ist gegeben durch den im Querschnitt ζ gebildeten Ausdruck

$$\overline{\beta T} = \frac{2 \int_{r'}^{r''} \beta T r dr}{r''^2 - r'^2}. \tag{19.13(5)}$$

Hier sind r' und r'' der innere und äußere Radius des ‚wirksamen Teiles‘ des Querschnittes in ζ . Wie dieser zu bestimmen ist, geht aus den Beispielen Abb. 19.13.1 hervor. Dort ist in die Konturen der drei gezeigten Läufer schraffiert jener Teilkörper eingetragen, der für die Längsdehnung des Ganzen maßgebend ist. Die strenge Lösung dieses Problems würde die vollständige Berechnung der Verformung erfordern, doch ist die Festlegung solcher Teilkörper auf Grund der Anschauung hinreichend genau möglich.

In analoger Weise läßt sich die Längsdehnung quasikreissymmetrischer Gehäuseteile berechnen. Für die im Schnitt S' erscheinende Schnittfläche f (Abb. 19.13.2) läßt sich

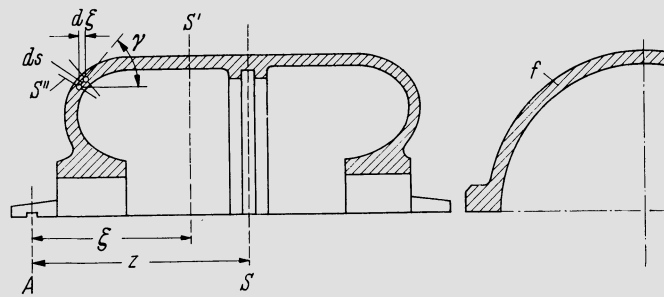


Abb. 19.13.2. Zur Berechnung der Wärmedehnung von Gehäuseteilen

definieren

$$\overline{\beta T} = \frac{1}{f} \int_i \beta T df, \quad 19.13(6)$$

d. h. βT ist über die ganze Fläche f zu mitteln. Die gleiche Definition läßt sich übernehmen für einen nicht ebenen Schnitt S'' . Das Element ds erfährt dann die Längsänderung $\overline{\beta T} ds$, die zur Verschiebung in z -Richtung den Beitrag $\overline{\beta T} \cos \gamma ds = \overline{\beta T} d\xi$ liefert. Daher kann auch in diesem Falle die Verschiebung einer Ebene S nach Gl. 19.13(4) berechnet werden.

19.14 Die Brennkammer

Die Brennkammern der Gasturbinen gehören naturgemäß zu denjenigen Bauelementen, die besonders schwierigen Temperaturbedingungen unterworfen sind. Leider ist es nicht möglich, die Proportionen von Brennkammern auf Grund einfacher naturgesetzlicher Zusammenhänge zu bestimmen. Es war von Anfang an naheliegend, ein *Belastungskriterium* einzuführen. Ist \dot{Q} die pro Zeiteinheit freigesetzte Wärmemenge, p der Druck, V das Brennkammervolumen, so ist

$$B = \dot{Q}/pV \quad 19.14(1)$$

ein Maß für die Brennkammernbelastung. B hat die Dimension s^{-1} . In der Tat hängt diese Größe unmittelbar zusammen mit der Verweilzeit eines Luftteilchens im Brennraum und wird um so größer, je kürzer diese Verweilzeit ist. Rein chemisch sind aber die Reaktionszeiten derart kurz, daß man auf B -Werte käme, die um Zehnerpotenzen über den Werten liegen, die tatsächlich vorzusehen sind. Der Ablauf der Verbrennung wird also durch andere Vorgänge bestimmt. Vor allem muß der Brennstoff in der Luft so verteilt werden, daß jedes Brennstoffteilchen in seiner Umgebung den notwendigen Sauerstoff findet, d. h. der Vorgang der *Mischung* wird von maßgebender Bedeutung sein. Handelt es sich um einen flüssigen Brennstoff, so wird an der Oberfläche des einzelnen Tropfens die Verdampfung einsetzen, und der Brennstoffdampf muß in die Luft hinausdiffundieren, um den Sauerstoff zu finden. Oft wird ein Teil des Kohlenstoffes schließlich als Kohlepartikel übrigbleiben und verhältnismäßig langsam wegbrennen, da der Sauerstoff durch die entstehenden Verbrennungsprodukte hindurch an die Partikeloberfläche diffundieren muß. Die Feinheit der Zerstäubung wird also wesentlich sein.

Daraus geht hervor, daß der Ablauf der Verbrennung maßgebend bestimmt wird durch Strömungsvorgänge, die sich einer Berechnung entziehen. Deshalb verfügen wir nicht über theoretische Grundlagen, die uns die Bemessung einer Brennkammer erlauben würden, sondern wir sind auf die Empirie angewiesen. Alle Brennkammerberechnungen haben daher den Charakter grober Näherungen, die Größenordnungen liefern und Grenzen abstecken sollen.

In Abschn. 18.6 sind bereits einige typische Beispiele von Brennkammern gezeigt. Hinsichtlich der *Strömungsführung* lassen sich zwei Grundformen unterscheiden, die in Abb. 19.14.1a und b einander gegenübergestellt sind. Variante a ist die *Gleichstrombrennkammer*, bei der Luft und Verbrennungsgas in gleicher Richtung strömen. Sie ist bei Flugtriebwerken allgemein im Gebrauch, z.T. aber auch bei stationären Anlagen. Bei Variante b, der *Gegenstrombrennkammer*, strömt die Luft entgegen der Strömungsrichtung des Gases zum Brennkammerkopf. Sie hat den Vorteil der guten Zugänglichkeit und ist daher bei stationären Anlagen die häufigste Bauform.

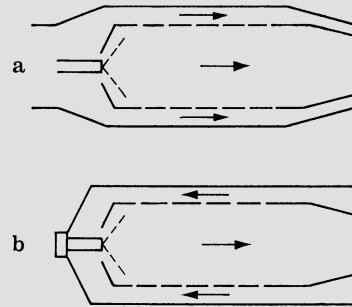


Abb. 19.14.1. a) Gleichstrombrennkammer;
b) Gegenstrombrennkammer

Bei industriellen Gasturbinen findet man häufig die Einzelbrennkammer (Abb. 18.6.1), d.h. eine Gasturbogruppe besitzt eine einzige Brennkammer großer Abmessung. Größere Verbreitung haben aber auch hier Anordnungen, bei denen mehrere Brennkammern parallel angeordnet sind. Im Beispiel Abb. 18.6.3 sind es zwei. Klassisch geworden ist die ursprünglich vom Flugtriebwerk übernommene Anordnung, bei der eine größere Zahl kleiner Brennkammern (Beispiel Abb. 18.6.4) kreisförmig um die Maschine herum angeordnet ist. Die Ringbrennkammer (Abb. 18.6.5), welche die Maschinenachse ringförmig umgibt, hat sich im Flugtriebwerksbau allgemein durchgesetzt und findet auch im industriellen Gasturbinenbau Eingang (Abb. 14.1.4).

Ein wesentliches Charakteristikum einer Anordnung ist die gesamte Anzahl der Brennstoffdüsen. Ist nur eine einzige vorhanden wie bei der klassischen Einzelbrennkammer, so entstehen entsprechend große Mischwege. Die Längserstreckung des benötigten Brennraumes ist aber diesem Mischweg etwa proportional. Daher bringt eine Aufteilung in mehrere Düsen eine Verkürzung des Brennraumes. Man beachte etwa, wie kurz die Brennkammer nach Abb. 18.6.3 bemessen ist, weil sie mehrere Düsen aufweist. — Das zeigt, daß die Brennkammerbelastung B nach Gl. 19.14(1) — die ja unter sonst gleichen Bedingungen um so größer ausfallen wird, je größer die Zahl der Düsen — nicht ohne weiteres das sinnvollste Beurteilungskriterium einer Brennkammer ist. Nach der durchgeführten Überlegung würde die Bezugnahme auf den Stirnquerschnitt A des Brennraumes eher auf ein universelles Kriterium führen als die Bezugnahme auf V , d.h. die Belastungskennzahl wäre

$$B' = \dot{Q}/pA. \quad 19.14(2)$$

Sie hat die Dimension m/s und ist ja in der Tat ein Maß für die Durchtrittsgeschwindigkeit durch die Brennkammer. Noch einfacher und anschaulicher ist es daher, direkt eine solche Durchtrittsgeschwindigkeit zu definieren. Ist \dot{m}' der Primärluftstrom — also die Luftmenge, die unmittelbar dem eigentlichen Brennraum zugeführt wird — und ρ die Dichte der Luft vor Brennkammer, so kann

$$\bar{w} = \dot{m}'/\rho A \quad 19.14(3)$$

als Charakteristikum verwendet werden. Typische Werte von \bar{w} liegen in der Regel zwischen 10 und 40 m/s, während B in außerordentlich weiten Grenzen variiert, etwa zwischen 100 und 1500 s⁻¹.

Die große Einzelbrennkammer besitzt den Vorteil der größeren Unempfindlichkeit gegen die Wahl des Brennstoffes. Insbesondere ist mit größerer Sicherheit vermeidbar, daß Brennstofftropfen an die Wand gelangen und dort Koks bilden, der dann verbrennt und zur Zerstörung der Wand führt. Wo nur eine Düse vorgesehen ist, entfällt auch das Problem der gleichmäßigen Verteilung des Brennstoffes, das bei der Mehrdüsenanordnung auftritt. Die längeren Strömungswege und der notwendig asymmetrische Eintrittsstutzen der Turbine erschweren andererseits die Probleme beim Übergang zu sehr hoher Temperatur. Die Aufteilung in mehrere Brennstoffdüsen (mehrere Brennkammern oder Ringbrennkammer) führt auf das Verteilungsproblem und ist hinsichtlich Brennstoffwahl heikler, gibt aber kompakte symmetrische Bauformen, die den Übergang zu hoher Temperatur erleichtern.

Führt man Brennstoff in eine Parallelströmung ein, so darf ihre Geschwindigkeit nur wenige m/s betragen, wenn die Flamme nicht ausgeblasen werden soll. Die Größenordnung von \bar{w} , die auf annehmbare Proportionen führt, liegt also bereits zu hoch. Deshalb müssen die Brennkammern stets so gestaltet sein, daß Totwassergebiete entstehen, welche die Flamme stabilisieren. Ein viel verwendetes Verfahren besteht darin, der Verbrennungsluft Drall zu erteilen. Da im Zentrum einer solchen Drallströmung Unterdruck herrscht, stellt sich dort eine Rückströmung heißen Gases ein, wie in Abb. 19.14.2 angedeutet. Dadurch wird die Verbrennung aufrechterhalten bei Durchsatzgeschwindigkeiten, die weit über der natürlichen Flammenausbreitungsgeschwindigkeit liegen.

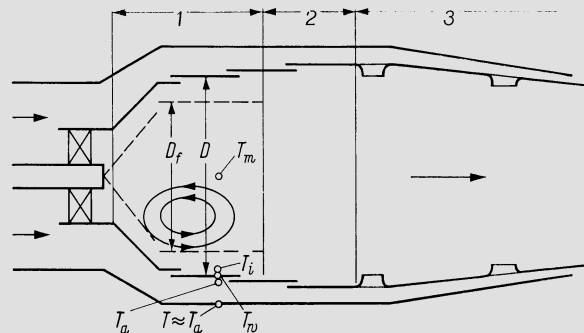


Abb. 19.14.2. Zoneneinteilung einer Brennkammer. 1 Primärzone, 2 Sekundärzone, 3 Mischzone

Wie in Abb. 19.14.2 angegeben, pflegt man eine Brennkammer einzuteilen in Primärzone, Sekundärzone und Mischzone. Die Verbrennung erfolgt zum weitaus größten Teil in der Primärzone. Es ist vorausgesetzt, daß nur die durch den Drallkörper zentral eingeführte Luft als Verbrennungsluft zur Verfügung stehe, nicht auch die den Wänden entlangströmenden Luftfilme, die der Kühlung dienen. Der bei flüssigen Brennstoffen infolge der Kohlenstoffpartikel gelb strahlende Flammenkörper erfüllt im wesentlichen die Primärzone, während in der Sekundärzone nur noch verhältnismäßig schwache Nachreaktionen stattfinden. Diese Zoneneinteilung ist offensichtlich nicht scharf und bis zu einem gewissen Maße willkürlich. In der Mischzone schließlich wird die restliche Luft dem Gase beigemischt, derart, daß bis Eintritt Turbinenleitrad ein möglichst vollständiger Temperaturengleich stattfindet. Es sei T_0 die Temperatur der Luft vor Brennkammer, \bar{T} die Mischtemperatur vor Leitrad und ΔT die größte Temperaturdifferenz im Querschnitt vor dem Leitrad. Dann ist $\Delta T/(\bar{T} - T_0)$ ein Charakteristikum für den Grad der Ausmischung. Werte von 0,1 bis 0,2 gelten als normal; der untere ist extrem günstig, aber auch höhere Werte kommen vor.

Die Maximaltemperatur T_m der Flamme selbst hat man durch die Bemessung des Primärluftstromes \dot{m}' in der Hand. Man wählt etwa $T_m \approx 1800 - 2000$ K. Die Bestimmung von \dot{m}' kann folgendermaßen erfolgen. Es sei x der Verbrennungsgasgehalt eines Gemisches stöchiometrischen Verbrennungsgases mit Luft, $\beta(x)$ die zur Erzeugung dieses Gas-

gemisches nötige Brennstoffmenge pro Masseneinheit Luft, $h(T, x)$ die Enthalpie des Gases bei der Temperatur T und \dot{m} der ganze zur Verfügung stehende Luft-Massenstrom. Die Brennkammer ist auszulegen für \dot{m} und eine vorgeschriebene Temperatur \bar{T} (Temperaturen und Enthalpien sind hier strenggenommen auf den Totalzustand zu beziehen). Nach den Ausführungen in Bd. I, Abschn. 2.4 muß dann offenbar gelten

$$\dot{m}'\{[1 + \beta(x')] h(T_m, x') - h(T_0, 0)\} = \dot{m}\{[1 + \beta(\bar{x})] h(\bar{T}, \bar{x}) - h(T_0, 0)\}, \quad 19.14(4)$$

wobei sich die linke Seite der Gleichung auf das Gas in der Flammenzone bei T_m bezieht, die rechte auf den schließlich zu erreichenden Mischzustand. Mit der gegebenen Anfangstemperatur T_0 und den Temperaturen T_m und \bar{T} lassen sich nach Bd. I, Abschn. 2.4, die x' und \bar{x} bestimmen, ebenso alle h und β . Damit ist 19.14(4) eine Bestimmungsgleichung für \dot{m}' . Die Sekundärluftmenge folgt aus $\dot{m}'' = \dot{m} - \dot{m}'$. Mit einem angenommenen Wert des Druckabfalles zwischen der Luft vor Brennkammer und dem Inneren des Brennraumes liefert die Durchflußgleichung aus den \dot{m}' und \dot{m}'' die vorzusehenden Durchflußquerschnitte. Der Druckabfall muß so gewählt werden, daß eine günstige Konfiguration entsteht. — Es ist eine grundlegende Bedingung, die Brennkammer baulich so zu gestalten, daß diese Querschnitte im Betriebe unbedingt eingehalten werden. Es muß also vermieden werden, daß sie sich durch mögliches Verziehen einzelner Blecheinsätze verändern können, oder daß Asymmetrien entstehen, die zu örtlichen Überhitzungen führen.

Für die Lebensdauer der Brennkammer ist die Beherrschung der Wandtemperaturen maßgebend. An einer gegebenen Stelle der Brennkammer seien T_w die Wandtemperatur, T_a und T_i die Lufttemperaturen auf der Außen- und Innenseite der Wand, D der Brennraumdurchmesser und D_f der Durchmesser des Flammenkörpers (vgl. Abb. 19.14.2). Weiter seien α_a, α_i die beidseitigen Wärmeübergangszahlen, $\sigma = 5,77 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ die Strahlungszahl des schwarzen Körpers, ϵ_f das Emissionsverhältnis Flamme-Wand und ϵ_w dasjenige zwischen Brennraumwand und Außenwand. Dann gilt folgende Wärmeübertragungsgleichung:

$$\frac{D_f}{D} \epsilon_f \sigma (T_m^4 - T_w^4) = \alpha_a (T_w - T_a) + \alpha_i (T_w - T_i) + \epsilon_w \sigma (T_w^4 - T_a^4). \quad 19.14(5)$$

Das links stehende Glied ist die Einstrahlung des Flammenkörpers auf die Wand; es ist etwa $D_f/D \approx 0,8$. Rechts stehen die äußere und innere Wärmeübertragung an die Luft und als drittes Glied der Strahlungsaustausch zwischen Brennraumwand und Außenwand, wobei vereinfachend die Außenwandtemperatur gleich T_a gesetzt ist, was in Anbetracht der Kleinheit dieses Gliedes genügt. T_a ist strenggenommen nicht gleich der Temperatur T_0 , mit der die Luft dem Verbrennungssystem zur Verfügung gestellt wird infolge der Wärmeübertragung von der Brennraumwand an die Luft, doch ist der Unterschied meist nur klein. Unterlagen zur Bestimmung von α_a finden sich unter 19.2. Über α_i und den Verlauf von T_i vgl. die Literatur über Filmkühlung, z.B. [36]. Erhebliche Unsicherheit besteht bezüglich ϵ_f . Eine untere Schranke ist gegeben durch die reine Gasstrahlung, über die Messungen vorliegen, vgl. etwa [48, 49]. Die obere Schranke ist die Strahlung des schwarzen Körpers, also $\epsilon_f = 1$. Leuchtende Flammen liegen zwischen beiden Grenzen, vgl. [50]. Genauere Unterlagen können nur empirisch erhalten werden, d.h. man rechnet einen gegebenen Brennkammertyp nach, mißt T_w und bestimmt ϵ_f so, daß Übereinstimmung hergestellt wird. — Führt man alles dies ein, so ist 19.14(5) eine Bestimmungsgleichung für T_w .

Bei berippten Wandelementen, etwa nach Abb. 18.6.1 ist die Gleichung entsprechend abzuwandeln. Ist F_i die Innenfläche, F_a die Außenfläche ohne Rippen, F_r die Rippenfläche, und η_r der Rippenwirkungsgrad (der die Wärmeübertragung durch die Rippe zu derjenigen in einer Rippe unendlicher Leitfähigkeit ins Verhältnis setzt), so gilt

$$\frac{D_f}{D} \epsilon_f \sigma (T_m^4 - T_w^4) = \frac{F_a + \eta_r F_r}{F_i} \alpha_a (T_w - T_a) + \alpha_i (T_w - T_i). \quad 19.14(6)$$

Hier ist die Strahlung an die Außenwand sogleich vernachlässigt. Über η_r finden sich an vielen Stellen Unterlagen, etwa [28, 51].

Außerhalb der Zone der leuchtenden Flamme ist ε_f gleich dem ε_g der Gasstrahlung. In der Mischzone ist die Innentemperatur gleich der Temperatur des Gaskörpers, und die Gleichung lautet dort

$$\varepsilon_g \sigma (T_i^4 - T_w^4) + \alpha_i (T_i - T_w) = \alpha_a (T_w - T_a) + \varepsilon_w (T_w^4 - T_a^4). \quad 19.14(7)$$

Die genauere Rechnung müßte allgemein so erfolgen, daß man den Strömungsweg in Intervalle einteilt und schrittweise die Temperaturänderungen infolge der Wärmeübertragung berechnet, was insbesondere bei der Gegenstrombrennkammer auf eine kompliziertere Iteration führt. Dabei bleibt die Temperatur im Flammenkörper unter dem theoretischen Maximum T_m , da ja schon während der Verbrennung Wärme nach außen übertragen wird. Gerade bei modernen Konstruktionen mit ihren kurzen Strömungswegen und hochbelasteten Brennräumen sind aber diese Effekte klein, so daß eine Komplizierung der Rechnung selten nötig sein dürfte.

Da alle Wärmeübergangszahlen proportional ρw sind, müssen die Kühlluftgeschwindigkeiten hinreichend groß gewählt werden, woraus sich die Bemessung der Querschnitte der luftführenden Ringkanäle ergibt. Wählt man die durch 19.14(3) definierte charakteristische Geschwindigkeit \bar{w} klein, was auf großen Brennraumquerschnitt führt, so wird die Breite dieser Ringkanäle klein, mithin auch ihr hydraulischer Durchmesser, womit die Druckabfälle zunehmen. Bei schwach belasteten Brennkammern ist es also schwieriger, die Wände hinreichend zu kühlen als bei höher belasteten, um so mehr als auch ε_f größer wird.

Der Forderung, einen vollständigen Ausbrand zu erzielen, die schon im Hinblick auf Abgasvorschriften erfüllt werden muß, ist mit großen Brennkammern leichter zu genügen als mit kleinen, besonders bei schlechten Brennstoffen. Die großen Verweilzeiten führen aber andererseits auch zu erhöhter NO_x -Bildung, die ebenfalls vermieden werden muß. Einführung von Wasserdampf hemmt die NO_x -Bildung, ist aber nicht in allen Fällen möglich. Hohe Flammentemperatur begünstigt die NO_x -Bildung. Deshalb ist eine möglichst gleichmäßige Flammentemperatur (Vermeidung heißer Punkte) von nicht über 2000 K anzustreben, was mit Luftzerstäubung des Brennstoffes besser gelingt als mit Druckzerstäubung.

Für jeden Brennstoff existieren gewisse Grenzen, innerhalb welcher das Massenverhältnis Luft/Brennstoff liegen muß, damit die Zündung gesichert ist. Diese Zündgrenzen sind auch temperaturabhängig. Die Strömungsführung in der Brennkammer muß sicherstellen, daß insbesondere auch bei Leerlauf noch eine Zone bestehen bleibt, innerhalb der das Mischungsverhältnis unter der oberen Zündgrenze bleibt, was durch die Schaffung des schon erwähnten Totwassergebietes gelingt. Trotzdem ist der Ausbrand bei kleiner Last oft wesentlich schlechter als bei Vollast. Man kennzeichnet diesen durch den Ausbrandwirkungsgrad η_A . Bei Vollast liegt dieser heute in der Regel über 0,99, kann also vor allem bei stationären Anlagen praktisch 1 gesetzt werden. Für seine Abhängigkeit von der Belastung gibt Münzberg [52] eine empirische Relation an. Es sei

$$\Omega = \frac{\dot{m}}{\rho^{1,8} e^{(T_w/100)} V}. \quad 19.14(8)$$

Dann gilt

$$\log (1 - \eta_A) = A + B \log \Omega. \quad 19.14(9)$$

B variiert in den angegebenen Beispielen zwischen 1,34 und 1,94, so daß 1,6 als Mittelwert gegeben werden kann. Hingegen variiert A in weitesten Grenzen, was verständlich ist, wenn man beachtet, wie außerordentlich verschieden die Brennkammervolumen für eine gegebene Leistung je nach Bauart ausfallen.

Literatur zu Kap. 19

1. *v. Helmholtz, H.*: Vorlesungen über Theorie der Wärme. Leipzig 1904.
2. *Deissler, R. G.*: NACA-Report 1210 (1955).
3. *Kraussold, H.*: Der konvektive Wärmeübergang. Technik 3 (1948) 205—213 u. 257—261.
4. *Hausen, H.*: Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1950 (2., neubearb. Auflage 1976).
5. *Nunner, W.*: Wärmeübergang und Druckabfall in rauhen Rohren. VDI-Forschungsheft 455, Düsseldorf 1956.
6. *Norris, R. H.*: Some Simple Approximate Heattransfer Correlations for Turbulent Flow in Ducts with Rough Surfaces. Winter Annual Meeting of the ASME, New York 1970, S. 16—26.
7. *Sutherland, W. A.*: Improved Heat Transfer Performance with Boundary Layer Turbulence Promoters. Int. J. Heat Mass Transfer 10 (1967) 1589.
8. *Dipperey, D. F.*; *Sabersky, R. H.*: Heat and Momentum Transfer in Smooth and Rough Tubes at Various Prandtl Numbers. Int. J. Heat Mass Transfer 6 (1963) 329.
9. *Ito, H.*; *Nanbu, K.*: Flow in Rotating Straight Pipes of Circular Cross Section. Trans. ASME 93, J. Basic Eng. (1971) 383—394.
10. *Mori, Y.*; *Nakayama, W.*: Convective Heat Transfer in Rotating Radial Circular Pipes. Int. J. Heat Mass Transfer, 14 (1971) 1807—1824.
11. *Nakayama, W.*: Forced Convective Heat Transfer in a Straight Pipe Rotating around Parallel Axis. Int. J. Heat Mass Transfer, 11 (1968) 1185—1201.
12. *Schlichting, H.*: Grenzschichttheorie, Karlsruhe: Braun 1965.
13. *Kestin, J.*; *Wood, R. T.*: The Influence of Turbulence on Mass Transfer from Cylinders. Trans. ASME, Ser. C, (1971) 321—327.
14. *Petrick, E. N.*; *Smith, R. D.*: Experimental Cooling of Radial Flow Turbines. ASME-Paper No. 54-A-245 (1954).
15. *Sheinin, E. I.*: Experimentelle Untersuchungen des Wärmeüberganges in der Zone der Endabdichtungen von Gasturbinen (russ.) Energomashinostroenie 1961, Nr. 1.
16. *Kapinos, V. M.*; *Gura, L. A.*: Investigation of Heat Transfer in Labyrinth Glands on Static Models. Teploenergetika 17 (1970) 38—41.
17. *Kapinos, V. M.*; *Gura, L. A.*: Wärmeübergang in Kammnut-Labyrinthdichtungen (russ.) Energomashinostroenie (1973) 22—25.
18. *Kuznezow, A. L.*; *Zuravlov, O. A.*: Wärmeübergang in den Labyrinthdichtungen von Gasturbinen (russ.) Energomashinostroenie (1972) 10—12.
19. *Globe, S.*; *Droppkin, D.*: Natural Convection Heat Transfer in Liquids Confined by Two Horizontal Plates and Heated from Below. J. Heat Mass Transfer, Trans. ASME, Ser. C, 81 (1959) 24—28.
20. *Shlyko, Y. P.*; *Ganin, Y. E.*: Thermal Resistance of Metallic Contacts. Int. J. Heat Mass Transfer 7 (1964) 921—929.
21. *May, H.*: Theoretische und experimentelle Untersuchungen über Flüssigkeitskühlung von Gasturbinenschaufeln bei Gastemperaturen bis 1200°C. Forsch. Ing.-Wes. 28 (1962) 154—161 u. 187—196.
22. *Eckert, E.*: Die Berechnung des Wärmeüberganges in der Grenzschicht umströmter Körper. VDI-Forschungsheft 416, Berlin 1942.
23. *Hodge, R. I.*: A Turbine Nozzle Cascade for Cooling Studies. Aeron. Res. Coun. C.P. 493 (1960).
24. *Patankar, S. V.*; *Spalding, D. B.*: Heat and Mass Transfer in Boundary Layers. London: Intertext Books 1970.
25. *Carslaw, H. S.*; *Jaeger, J. C.*: Conduction of Heat in Solids, 2nd. Ed. Oxford: Clarendon Press 1959.
26. *Bachmann, H.*: Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper. Berlin: Springer 1938.
27. *Gröber/Erck/Grigull*: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, 3. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1955.
28. *Grigull, U.*; *Sandner, H.*: Wärmeleitung. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1979.
29. *Endres, W.*; *Salm, M.*: Anfahren und Laständerungen von Dampfturbinen. Brown Boveri Mitt. 45 (1958) 339—347.
30. *Fischer, P.*; *Rieß, W.*: Einfaches Analogieverfahren für technische Wärmeleitungsprobleme. Konstruktion 12 (1960).
31. *Bayley, F. J.*; *Owen, J. M.*; *Turner, A. B.*: Heat Transfer. London: Nelson 1972.
32. *Zurmühl, R.*: Praktische Mathematik, 5. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1965.
33. *Bremi, P.*: Berechnung stationärer und instationärer Temperaturfelder mit Hilfe elektronischer Rechenautomaten. Tech. Rundsch. Sulzer, Forschungsheft, Winterthur 1970, S. 85—90.
34. *Zienkiewicz, O. C.*; *Cheung, Y. K.*: Finite Elements in the Solution of Field Problems. Engineer (1965) 507.
35. *Courant, R.*; *Hilbert, D.*: Methoden der Mathematischen Physik I. Berlin: Springer 1931.
36. *Goldstein, R. J.*: Film Cooling. Advances in Heat Transfer, Vol. 7. New York: Academic Press 1971, S. 321 to 379.
37. *Sivasegaram, S.*; *Whitelaw, J. H.*: Film Cooling Slots: the Importance of Lip Thickness and Injection Angle. J. Mech. Eng. Sci. 11 (1969) 22—27.

38. *Pai, B. R.; Whitelaw, J. H.*: The Influence of Strong Pressure Gradients on Film Cooling Effectiveness. Heat Transfer 1970, Paris-Versailles 1970, Vol. II, FC 1.11.
39. *Wilson, D. J.; Goldstein, R. J.*: Effect of Film Cooling Injection on Downstream Heat Transfer Coefficients in High Speed Flow. Trans. ASME, Ser. C. 95 (1973) 505—509.
40. *Metzger, D. E.; Takenchi, D. I.; Kuenstler, P. A.*: Effectiveness and Heat Transfer with Full-Coverage Film Cooling. ASME-Paper No. 73-GT-18, 1973.
41. *Liess, C.; Carnel, J.*: Application of Film Cooling to Gas Turbine Blades. AGARD Conf. Proc. No. 73 on High Temperature Turbines, AGARD-CP-73-71, 1971.
42. *Nicolas, J.; Le Meur, A.*: Curvature Effects on a Turbine Blade Cooling Film, ASME-Paper No. 74-GT-16, 1974.
43. *Scholz, N.; Hennecke, D.*: Untersuchungen zur Wirksamkeit der Effusionskühlung von Turbinenschaufeln. Z. Flugwiss. 19 (1971) 151—158.
44. *Friedrich, R.*: Eine Gasturbine mit gekühlten Schaufeln für Gastemperaturen über 1000°C. BWK 14 (1962) 368.
45. *Caruwana, A.*: Development of High-Temperature Turbine Subsystem Technology to a "Technology Readiness Status", Phase I, Final Report (1977). General Electric Co. Schenectady N.Y. 12345.
46. *Hornbogen, E.*: Werkstoffe, 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978.
47. *Sahm, P. R.; Speidel, M. O.* (Hrsg.): High-Temperature Materials in Gas Turbines, Amsterdam, London, New York: Elsevier 1974.
48. *Eckert, E.*: Messung der Gesamtstrahlung von Wasserdampf und Kohlensäure in Mischung mit nicht-strahlenden Gasen bei Temperaturen bis 1300°C. VDI-Forschungsheft 387, Berlin 1937.
49. *Landermann, C. A.*: Über ein Verfahren zur Bestimmung der Gesamtstrahlung von Kohlensäure und Wasserdampf in technischen Feuerungen. Diss. TH Karlsruhe 1948.
50. *Rummel, B. K.; Veh, P. O.*: Die Strahlung leuchtender Flammen. Arch. Eisenhüttenwes. 14 (1941) 489—499.
51. *Jakob, M.*: Heat Transfer, Vol. I. New York, London 1949.
52. *Münzberg, H. G.; Kurzke, J.*: Gasturbinen — Betriebsverhalten und Optimierung. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977.

20 Schwingungen von Schaufeln und Scheiben

20.1 Der einfache Schwinger

Wir gehen aus vom einfachsten Falle eines Körpers von der Masse m , der federnd aufgehängt ist (vgl. Abb. 20.1.1) derart, daß einer Auslenkung x aus der Gleichgewichtslage eine rückstellende Federkraft vom Betrage kx entspricht (k die Federkonstante).

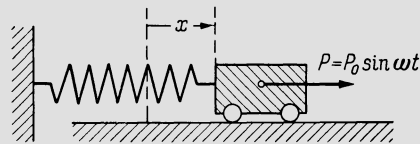


Abb. 20.1.1. Einfacher Schwinger

Dieser Körper sei einer in x -Richtung wirkenden äußeren Kraft P unterworfen, die sich gemäß dem Gesetz

$$P = P_0 \sin \omega t \quad 20.1(1)$$

periodisch verändert. Die Bewegung sei mit Reibung verbunden, wobei die Reibungskraft der Geschwindigkeit proportional, also gleich $-b\dot{x}$ gesetzt werde (Minuszeichen, weil die Kraft der Bewegung entgegensteht, b eine die Reibung kennzeichnende Konstante). Die Bewegungsgleichung unseres Problems lautet offenbar

$$m\ddot{x} = -kx + P_0 \sin \omega t - b\dot{x}$$

oder

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = P_0 \sin \omega t. \quad 20.1(2)$$

Ihre allgemeinste Lösung ist

$$\left. \begin{aligned} x &= x_H + \frac{P_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}, \\ \tan \varphi &= \frac{b\omega}{k - m\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad 20.1(3)$$

Hier ist x_H die Lösung der homogenen Differentialgleichung. Setzt man

$$\omega_e^2 \equiv \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 \quad 20.1(4)$$

und ist diese Größe positiv — was bei den kleinen Dämpfungskonstanten b , die uns im Hinblick auf unseren Problemkreis einzig interessieren, stets zutrifft — so lautet die Lösung x_H

$$x_H = \exp\left(-\frac{b}{2m}t\right)(C_1 \cos \omega_e t + C_2 \sin \omega_e t), \quad 20.1(5)$$

wo C_1 und C_2 beliebige Integrationskonstanten sind. Für großes t strebt x_H offensichtlich gegen Null, so daß die schließlich übrigbleibende Bewegung beschrieben wird durch

$$x = \frac{P_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} = \frac{x_P \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{k}\omega\right)^2}}. \quad 20.1(6)$$

Hier ist

$$\underline{x_p \equiv \frac{P_0}{k}} \quad 20.1(7)$$

die Auslenkung, die das System erfahren würde bei konstanter Einwirkung der Kraft P_0 .

Das durch Gl. 20.1(4) definierte ω_e ist nach Gl. 20.1(5) offenbar nichts anderes als die Kreisfrequenz der gedämpften Eigenschwingung des Systems. Ferner ist gemäß Gl. 20.1(5) das Verhältnis von zwei aufeinanderfolgenden Ausschlägen der gedämpften Eigenschwingung gegeben durch

$$\frac{\exp\left(-\frac{b}{2m}t\right)}{\exp\left[-\frac{b}{2m}\left(t + \frac{2\pi}{\omega_e}\right)\right]} = \exp\left(\frac{\pi b}{m\omega_e}\right). \quad 20.1(8)$$

Der Logarithmus dieses Verhältnisses wird als *logarithmisches Dekrement* δ bezeichnet, hat also den Betrag

$$\underline{\delta = \frac{\pi b}{m\omega_e}}. \quad 20.1(9)$$

Die Gln. 20.1(4) und (9) führen unmittelbar auf die Beziehung

$$\frac{k}{m} = \omega_e^2 \left[1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2\right], \quad \frac{b}{k} = \frac{\delta}{\pi\omega_e \left[1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2\right]}. \quad 20.1(10)$$

Wenn diese in Gl. 20.1(6) eingesetzt werden, folgt

$$x = \frac{x_p \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2 [1 + (\delta/2\pi)^2]}\right)^2 + \left(\frac{\delta\omega}{\pi\omega_e [1 + (\delta/2\pi)^2]}\right)^2}}. \quad 20.1(11)$$

In den uns interessierenden Anwendungsfällen ist δ stets so klein, daß $(\delta/2\pi)^2$ gegen Eins vernachlässigbar ist. Wenn man dies beachtet und in die zweite der Gln. 20.1(3) noch die Gln. 20.1(9) und (10) einführt, so erhält man schließlich

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{x_p \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{\delta\omega}{\pi\omega_e}\right]^2}}, \\ \tan \varphi = \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{\left(\frac{\omega_e}{\omega}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)}. \end{array} \right. \quad 20.1(12)$$

$$\quad \quad \quad 20.1(13)$$

Im Rahmen der hier gebrauchten Näherung kann für die Kreisfrequenz der Eigenschwingung gemäß der ersten der Gln. 20.1(10) auch gesetzt werden

$$\underline{\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}}. \quad 20.1(14)$$

Zusammen mit den Gln. 20.1(7), (9) und (14) beschreiben die Beziehungen 20.1(12) und (13) die erzwungene Schwingung vollständig, die nach dem Abklingen der gedämpften Eigenschwingung noch übrigbleibt.

Es sei x_0 der Amplitudenwert von x . Dann nennen wir

$$V \equiv \frac{x_0}{x_p} \quad 20.1(15)$$

den *Vergrößerungsfaktor*. Sein Wert ist offenbar

$$V = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{\delta\omega}{\pi\omega_e}\right]^2}}. \quad 20.1(16)$$

Seinen Gipfelwert erreicht er, wo der Radikand durch ein Minimum geht, d.h. also für den ω -Wert, der durch die Gleichung

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{\delta\omega}{\pi\omega_e}\right]^2 \right\} = 0 \quad 20.1(17)$$

bestimmt wird. Die Differentiation liefert

$$\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \approx 1, \quad 20.1(18)$$

d.h., wir erhalten das bekannte Ergebnis, daß bei kleiner Dämpfung der größte Ausschlag dann eintritt, wenn

$$\omega = \omega_e, \quad 20.1(19)$$

also im Resonanzfall. Der Vergrößerungsfaktor bzw. die Amplitude erhalten dann gemäß Gl. 20.1(16) die Werte

$$V_{\max} = \frac{\pi}{\delta}, \quad x_{0\max} = \frac{\pi}{\delta} x_P. \quad 20.1(20)$$

Abb. 20.1.2 zeigt V in Funktion von ω/ω_e für einige Werte δ . Der Winkel φ kennzeichnet die Phasenverschiebung zwischen den harmonischen Funktionen $P(t)$ und $x(t)$. Wie sein Verlauf nach Gl. 20.1(13) zeigt, sind P und x für $\omega/\omega_e < 1$ in Phase, für $\omega/\omega_e > 1$ in

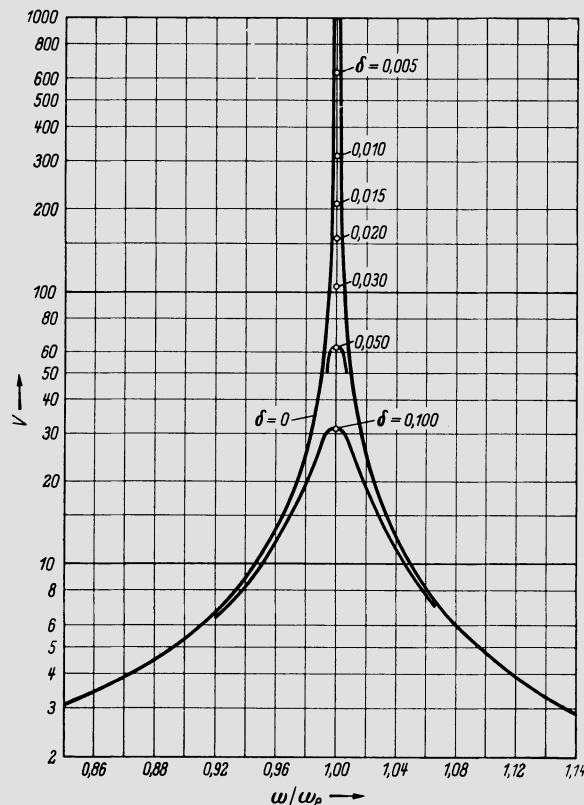


Abb. 20.1.2. Vergrößerungsfaktor V im Bereiche der Resonanz

Gegenphase, während im Resonanzfall eine Phasenverschiebung von 90° besteht. Dieses Verhalten ist zwar bekannt, aber keineswegs von vornherein anschaulich plausibel, weshalb wir noch kurz darauf eingehen.

Wenn ω/ω_e nach Null strebt, also bei ganz langsamer Bewegung, sind die Beschleunigungen und die Reibungskräfte äußerst gering, so daß praktisch stets Gleichgewicht besteht zwischen P und der Rückstellkraft $-kx$. Daher sind P und x hier in Phase. Wird ω/ω_e etwas größer, so sind die Beschleunigungen nicht mehr vernachlässigbar. Die Masse schwingt deshalb beidseitig über die Lage $\pm x_P$ hinaus, und zwar so weit, daß der Unterschied zwischen der Rückstellkraft und P den Betrag $m\ddot{x}$ erreicht. Hierbei ist die Reibung noch außer acht gelassen, und es ist offensichtlich, daß das Bewegungsgesetz erfüllt werden kann, wenn x und P in Phase sind. Kommt die Reibung hinzu, so wirkt auf den Körper noch eine weitere kleine Kraft ein, die in Gegenphase zur Geschwindigkeit \dot{x} ist, d. h. ihre Phase eilt derjenigen von $x(t)$ um 90° nach. Diese Kraft wird um so größer, je mehr die Geschwindigkeiten anwachsen, d. h., je mehr sich ω/ω_e dem Wert Eins nähert. Daraus ergibt sich die mit steigendem ω/ω_e allmählich fühlbar werdende Phasenverschiebung der Bewegung.

Im Falle der Resonanz besteht Phasengleichheit zwischen der Geschwindigkeit \dot{x} und der erregenden Kraft P , und die Reibungskraft $-bx$ hält in jedem Augenblick P das Gleichgewicht. Die Masse führt also eine regelrechte ungedämpfte Eigenschwingung aus, da ja die Dämpfungskraft gerade durch die erregende Kraft aufgehoben wird. Die Amplitude dieser Eigenschwingung stellt sich so ein, daß eben diese beiden Kräfte einander ausgleichen. So beantwortet sich die naheliegende Frage, wie es möglich sei, daß durch eine kleine erregende Kraft große Ausschläge hervorgebracht werden, die zudem noch gegenüber dieser Kraft 90° Phasenverschiebung aufweisen. Die erregende Kraft erzwingt eben gar nicht unmittelbar die Ausschläge, sondern sie hält gewissermaßen nur die Reibung im Schach, so daß sich die Eigenschwingung entsprechend entwickelt.

Im Gebiet $\omega/\omega_e > 1$ sind die Lage x und die erregende Kraft P ungefähr in Gegenphase, d. h. die elastische Kraft $-kx$ ist mit P in Phase. Da aber die Ausschläge mit zunehmendem ω immer kleiner werden — bei den gegebenen Beschleunigungen kann der Körper während der kurzen Dauer einer Periode keine großen Wege mehr zurücklegen — treten die Rückstellkräfte und Reibungskräfte immer mehr zurück, und der Körper bewegt sich bei sehr großen ω/ω_e so, als ob er einzig der Störkraft P ausgesetzt wäre, d. h. es ist

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= P_0 \sin \omega t, \\ x &= -\frac{P_0}{m\omega^2} \sin \omega t. \end{aligned}$$

In der Tat sind hier x und P genau in Gegenphase.

20.2 Rückführung des allgemeinen Falles des schwingenden Körpers auf den einfachen Schwinger

Wir betrachten den Fall eines beliebig gestalteten elastischen Körpers, an dessen Oberfläche harmonisch variierende Spannungen \vec{p} angreifen (vgl. Abb. 20.2.1). Diese Spannungen können von sehr allgemeiner Art sein. Vor allem kommen Druckspannungen (Gasdruck) in Frage, aber ebensowohl auch Zug- und Schubspannungen¹. An jedem Punkt der Körperoberfläche variiert die Spannung gemäß

$$\vec{p} = \vec{p}_0 (\sin \tau \sin \omega t + \cos \tau \cos \omega t). \quad 20.2(1)$$

¹ Zur Körperoberfläche gehört bei dieser Betrachtungsweise gegebenenfalls auch der Einspannungsquerschnitt, wo der Körper in einen anderen, nicht mitschwingenden übergeht.

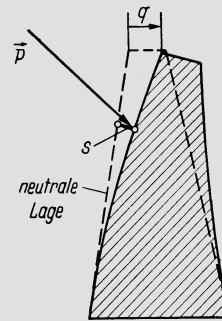


Abb. 20.2.1. Allgemeiner schwingender Körper

Hier ist \vec{p}_0 die aufgeprägte Spannungsamplitude, deren Größe und Richtung Funktionen des Ortes an der Oberfläche sind. Der Winkel τ kennzeichnet die Phase und ist ebenfalls Funktion des Ortes. Damit ist eine sehr allgemeine harmonisch variierende Kräfteinwirkung auf die Körperoberfläche beschrieben. Die Beifügung eines zeitlich unveränderlichen Spannungswertes, dem sich das durch Gl. 20.2(1) gegebene \vec{p} überlagern würde, ist unnötig, da der Schwingungsvorgang dadurch nicht beeinflusst wird. Auch verzichten wir auf die Einführung von Feldkräften, da diese Verallgemeinerung nichts wesentlich Neues liefern würde.

Unter der Einwirkung dieser aufgeprägten Spannungen erfährt der Körper eine periodische Deformation mit der Frequenz ω . Diese hat zudem harmonischen Charakter, denn es ist leicht aufzuzeigen, daß einer Bewegung mit der Frequenz $n\omega$ (n eine ganze Zahl) durch eine beliebige Spannungsverteilung nach Gl. 20.2(1) keinerlei Energie zugeführt wird. Allfällige Oberschwingungen würden daher infolge der Dämpfung ausklingen und es bliebe, wie behauptet, nur die harmonische Bewegung übrig. Es sei \vec{s} die Auslenkung irgendeines Punktes des Körpers aus seiner Lage im Gleichgewichtszustand. Dann gilt nach dem eben Gesagten

$$\vec{s} = \vec{s}_0 \sin(\omega t - \varphi), \tag{20.2(2)}$$

wo \vec{s}_0 die örtliche Amplitude ist. Wenn für jeden Punkt \vec{s}_0 und der Phasenwinkel φ bekannt sind, so liegt damit die ganze Bewegung des Körpers fest. Wir machen nun speziell die einschränkende Voraussetzung, daß φ für alle Punkte denselben Wert habe, d. h. daß die Bewegungen aller Körperpunkte in Phase seien. Dies ist eine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, denn wir schließen damit, wie wir sehen werden, den Fall der gekoppelten Schwingungen aus. — Übrigens ist die allgemeinste harmonische Schwingung eines Körpers darstellbar als eine Superposition von zwei Schwingungen der zuletzt genannten spezielleren Art, deren Phasen um 90° verschieden sind. — Greifen wir irgendeinen ausgezeichneten Punkt heraus, dessen Koordinate q gemäß

$$q = q_0 \sin(\omega t - \varphi) \tag{20.2(3)}$$

variiert, so sind alle s offenbar proportional diesem q mit ortsabhängigem Proportionalitätsfaktor. Jedem q entspricht also ein bestimmter Deformationszustand. An sich kann q irgendeine charakteristische Lagenkoordinate sein, z. B. bei Drehschwingungen die Winkel­auslenkung an einer ausgezeichneten Stelle des Körpers.

Die elastische Verformung des Körpers, ausgehend vom entspannten Zustand ($q = 0$) bis zu einem durch q gekennzeichneten, erfordert den Arbeitsaufwand

$$\Psi = E \int_V \left\{ \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2}{6(1 - 2\nu)} + \frac{1}{2(1 + \nu)} \left[\frac{1}{3} [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] \right\} dV, \tag{20.2(4)}$$

vgl. z.B. [1]. Hier bedeuten wie üblich E den Elastizitätsmodul, ν die Querkontraktionszahl, $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ und ε_z die Dehnungen in den drei Richtungen und γ_{xy}, γ_{yz} und γ_{zx} die drei Verformungswinkel an der betreffenden Stelle. Das Integral ist über das ganze Volumen V des Körpers zu erstrecken. Alle ε und γ sind aber gemäß der gemachten Voraussetzungen proportional q . Daher läßt sich aus Gl. 20.2(4) auch gewinnen

$$\Psi = \frac{K}{2} q^2, \quad 20.2(5)$$

wo $K/2$ eine Konstante ist, die sich für eine gegebene Verformung aus Gl. 20.2(4) ergibt

Die Bewegungsenergie T des schwingenden Körpers ist in irgendeinem Zeitpunkt gegeben durch

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V \dot{s}^2 dV. \quad 20.2(6)$$

Da aber alle \dot{s} proportional \dot{q} sind, gilt somit auch

$$T = \frac{M}{2} \dot{q}^2, \quad 20.2(7)$$

wo M wiederum die entsprechende, aus der Integration gewonnene Konstante ist.

Die Arbeit dW , die von den äußeren Kräften \vec{p} bei einer unendlich kleinen Deformation an der Körperoberfläche F geleistet wird, ist

$$dW = \int_F (\vec{p}, d\vec{s}) dF = dt \int_F (\vec{p}, \dot{\vec{s}}) dF = \dot{q} dt \int_F (\vec{p}, \vec{\Phi}) dF. \quad 20.2(8)$$

Hier ist $\vec{\Phi}$ definiert durch

$$\vec{\Phi} = \frac{\dot{\vec{s}}}{\dot{q}} = \frac{\vec{s}}{q} \quad 20.2(9)$$

und ist eine Funktion des Ortes an der Oberfläche. Die Integrale sind über die ganze Oberfläche F zu erstrecken. Mit Gl. 20.2(1) folgt aus Gl. 20.2(8) auch

$$dW = \dot{q} dt \left[\left(\int_F (\vec{p}_0, \vec{\Phi}) \sin \tau dF \right) \sin \omega t + \left(\int_F (\vec{p}_0, \vec{\Phi}) \cos \tau dF \right) \cos \omega t \right]. \quad 20.2(10)$$

Wir setzen

$$P_0 \equiv \sqrt{\left(\int_F (\vec{p}_0, \vec{\Phi}) \sin \tau dF \right)^2 + \left(\int_F (\vec{p}_0, \vec{\Phi}) \cos \tau dF \right)^2}, \quad 20.2(11)$$

$$\tan \psi = \frac{\int_F (\vec{p}_0, \vec{\Phi}) \cos \tau dF}{\int_F (\vec{p}_0, \vec{\Phi}) \sin \tau dF} \quad 20.2(12)$$

(vgl. Abb. 20.2.2). Durch Verschiebung des Nullpunktes unseres bisherigen Zeitmaßstabes um Betrag $\Delta t = \psi/\omega$ können wir offenbar erreichen, daß mit der neuen Nullpunktwahl gilt

$$dW = (P_0 \sin \omega t) \dot{q} dt. \quad 20.2(13)$$

Es bedeutet dies lediglich, daß es stets möglich ist, den Nullpunkt des Zeitmaßstabes so zu wählen, daß in Gl. 20.2(10) das zweite Integral verschwindet, wobei das erste einen maximalen Wert annimmt, nämlich P_0 .

Schließlich werde vorausgesetzt, daß die Bewegung mit einer gewissen Dämpfung verbunden sei. Die bei einer unendlich kleinen Deformation eines Raumelementes dissipierte Arbeit kann proportional dieser Deformation und proportional der Deformationsgeschwindigkeit gesetzt werden. Da alle Deformationen proportional dq und alle Deformationsgeschwindigkeiten proportional \dot{q} sind, ist also schließlich die Dämpfungsarbeit

$$dW_a = B \dot{q} dq. \quad 20.2(14)$$

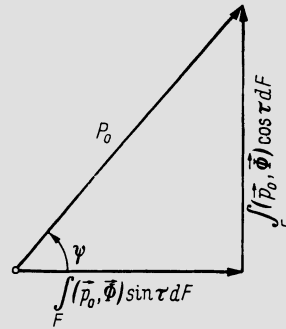


Abb. 20.2.2. Zur Veranschaulichung von Gln. 20.2(11) und (12)

Nun formulieren wir für eine unendlich kleine Deformation den Energiesatz. Er lautet

$$d\Psi + dT + dW_d = dW, \tag{20.2(15)}$$

denn die von außen geleistete Arbeit dW ist gleich der Zunahme der potentiellen und kinetischen Energie, vermehrt um die dissipierte Energie. Wenn wir in Gl. 20.2(15) die in Gln. 20.2(5), (7), (13) und (14) gefundenen Ausdrücke einsetzen und noch durch dt dividieren, folgt

$$Kq\dot{q} + M\ddot{q} + B\dot{q}^2 = (P_0 \sin \omega t) \dot{q},$$

oder bei Ausschluß des trivialen Falles $\dot{q} = 0$ (für jedes t) auch

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = P_0 \sin \omega t. \tag{20.2(16)}$$

Diese Gleichung hat aber genau denselben Aufbau wie die Differentialgleichung 20.1(2) des einfachen Schwingers, weshalb sich auch die Lösung von dort übernehmen läßt. Bei kleiner Dämpfung ist insbesondere

$$\omega_e = \sqrt{\frac{K}{M}} \tag{20.2(17)}$$

die Kreisfrequenz der Eigenschwingung, und die größte Amplitude tritt dann auf, wenn die erregende Kreisfrequenz ω gleich ω_e ist. Der Wert dieser größten Amplitude $q_{0\max}$ ergibt sich in Analogie zu Gl. 20.1(20), wobei man dort für x_p den Wert aus Gl. 20.1(7) einzusetzen hat.

$$q_{0\max} = \frac{\pi}{\delta} \frac{P_0}{K} = \frac{\pi}{\delta K} \sqrt{\left(\int_F (\vec{p}_0, \vec{\Phi}) \sin \tau dF\right)^2 + \left(\int_F (\vec{p}_0, \vec{\Phi}) \cos \tau dF\right)^2}. \tag{20.2(18)}$$

Hier ist wiederum δ das logarithmische Dekrement.

Damit ist die Schwingung eines beliebigen Körpers auf die des einfachen Schwingers zurückgeführt. Allerdings ist diese Äquivalenz keine vollständige. In die Bestimmung der Konstanten B , K , M und P_0 geht die Gestalt der Verformung ein, die z. B. in der Funktion $\vec{\Phi}$ ihren Ausdruck findet. Diese wird aber im allgemeinen nicht unabhängig sein von der erregenden Frequenz ω . Wählt man irgendein bestimmtes ω , so beschreibt Gl. 20.2(16) einen Schwingungsvorgang, der dem des einfachen Schwingers völlig analog ist. Jedoch sind die Koeffizienten B , K , M , P_0 Funktionen von ω , so daß man für jedes ω einen anderen äquivalenten einfachen Schwinger vor sich hat. Von praktischem Interesse sind allerdings fast nur die Verhältnisse bei Resonanz. Die hierbei gültige Gl. 20.2(18) stellt indessen keinen direkten Zusammenhang her zwischen der statischen Auslenkung und derjenigen in Resonanz.

Die Berechnung der Eigenfrequenz setzt nach Gl. 20.2(17) die Kenntnis der Koeffizienten K und M voraus, d. h. also wiederum, daß die Gestalt der Verformung bekannt sein muß. Deshalb laufen alle Berechnungsverfahren der Eigenschwingungszahlen darauf hinaus, daß die Verformung des Körpers bestimmt werden muß.

20.3 Gekoppelte Schwingungen

Wir betrachten das in Abb. 20.3.1 dargestellte System. Die beiden Massen m_1 und m_2 sind den äußeren Kräften

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_{10} \sin(\omega_1 t - \psi_1) \\ P_2 &= P_{20} \sin(\omega_2 t - \psi_2) \end{aligned} \right\} \quad 20.3(1)$$

unterworfen, wobei durch ψ_1 und ψ_2 beliebige Phasen gegeben sind. Wenn wir der Einfachheit halber von Dämpfungskräften absehen, lauten mit den Federkonstanten K_1 , K_2 und K_{12} die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (K_1 + K_{12}) x_1 - K_{12} x_2 &= P_{10} \sin(\omega_1 t - \psi_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 + (K_2 + K_{12}) x_2 - K_{12} x_1 &= P_{20} \sin(\omega_2 t - \psi_2). \end{aligned} \right\} \quad 20.3(2)$$

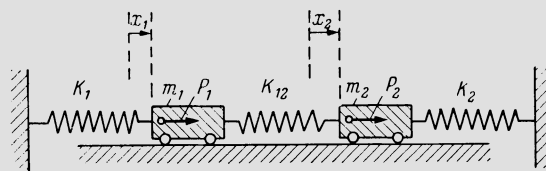


Abb. 20.3.1. Einfaches gekoppeltes Schwingungssystem

Da die beiden Funktionen x_1 und x_2 in beiden Gleichungen vorkommen, sind sie voneinander nicht unabhängig, sondern wir haben gekoppelte Schwingungen vor uns. Die Auflösung des Systems ist nach üblichen Methoden möglich, vgl. etwa [2]. Als wichtigstes Ergebnis wird erhalten, daß zwei Eigenschwingungen möglich sind mit den Kreisfrequenzen

$$\omega_{I,II}^2 = \frac{\omega'^2 + \omega''^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega'^2 + \omega''^2)^2}{4} - \left[1 - \frac{K_{12}^2}{(K_{12} + K_1)(K_{12} + K_2)} \right] \omega'^2 \omega''^2}. \quad 20.3(3)$$

Hier sind ω' und ω'' gegeben durch

$$\omega' = \sqrt{\frac{K_1 + K_{12}}{m_1}}, \quad \omega'' = \sqrt{\frac{K_2 + K_{12}}{m_2}}. \quad 20.3(4)$$

Danach haben ω' und ω'' eine einfache anschauliche Bedeutung. Denkt man sich z. B. m_2 festgehalten — gleichgültig in welcher Lage — so stellt m_1 mit den Federn K_1 und K_{12} einen einfachen Schwinger dar, dessen Eigenfrequenz ω' ist. Das Analoge gilt von ω'' . Man überzeugt sich leicht davon, daß zwar die Lage, in der wir die Masse 2 festhalten, die Frequenz ω' des dann vorliegenden Schwingers nicht beeinflußt; wohl aber wird dadurch die neutrale Lage (Gleichgewichtslage) der Masse m_1 beeinflußt. Betrachten wir nun wieder die gekoppelte Schwingung, so besteht die Rückwirkung der Bewegung von m_2 auf m_1 . Dasselbe gilt natürlich ebenso in umgekehrter Richtung.

Wenn eine der erregenden Frequenzen ω_1 und ω_2 mit einer der Eigenfrequenzen ω_I und ω_{II} übereinstimmt, liegt Resonanz vor. Bei Vernachlässigung der Dämpfung werden dann die Ausschläge der Massen unendlich.

Nun kehren wir zurück zu dem unter 20.2 behandelten allgemeineren Fall des schwingenden Körpers. Unter den dort gemachten Voraussetzungen führt der Körper eine harmonische Schwingung aus. Wir hatten die Untersuchung weiterhin beschränkt auf den Fall, daß die Bewegungen aller Punkte des Körpers in Phase seien. Wenn dies nicht der Fall ist, kann man sich die Bewegung des Körpers stets erzeugt denken durch die Überlagerung von zwei Bewegungen dieses einfachen Typs, die eine Phasenverschiebung von 90° aufweisen. Diese sollen als Schwingung 1 und 2 bezeichnet werden. Wenn man für

beide die Überlegungen des Abschn. 20.2 durchführt, kann sich u. U. eine gewisse Komplikation einstellen. Es kann nämlich sein, daß die der Schwingung 1 zugeordnete neutrale Lage sich verschiebt, wenn man sich irgendeine der Schwingung 2 entsprechende Auslenkung q_2 festgehalten denkt. Dann tritt in der für die Schwingung 1 angeschriebenen Gl. 20.2(16) noch ein Zusatzglied auf, das proportional q_2 ist. Umgekehrt tritt auch in der für die Schwingung 2 formulierten Gl. 20.2(16) ein Zusatzglied mit q_1 auf. Das so entstehende Gleichungssystem hat somit die gleiche Form wie das Gleichungssystem 20.3(2)². Deshalb treten auch hier zwei Resonanzfrequenzen auf, und die beiden Schwingungszustände des Körpers sind miteinander gekoppelt. Wie aus dieser Überlegung hervorgeht, ist eine solche Kopplung immer dann gegeben, wenn eine Deformation entsprechend der einen Schwingung die neutrale Lage der anderen beeinflußt. Ist diese Beeinflussung nur gering, so entspricht dies einer kleinen Federkonstanten K_{12} in unserem Modell Abb. 20.3.1. Wie Gl. 20.3(3) lehrt, werden dann ω_I und ω_{II} von ω' und ω'' nur wenig verschieden sein, denn für $K_{12} = 0$ ist $\omega_I = \omega'$, $\omega_{II} = \omega''$. In der Tat ist daher eine Vernachlässigung der Kopplung bei der Bestimmung der Frequenzen sehr oft zulässig.

20.4 Differentialgleichungen des schwingenden Stabes

Schaufelschwingungen — vor allem die Grundschiwingung — lassen sich oft als Biegeschwingungen eines geraden Stabes behandeln. Abb. 20.4.1a zeigt einen Ausschnitt aus einem solchen Stab. An den Grenzflächen eines Längenelementes dx desselben greifen die Momente M , $M + dM$ und die Querkräfte Q , $Q + dQ$ an. Das Gleichgewicht der Momente erfordert (unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung)

$$dM = Q dx \cdot \frac{\partial M}{\partial x} = Q. \quad 20.4(1)$$

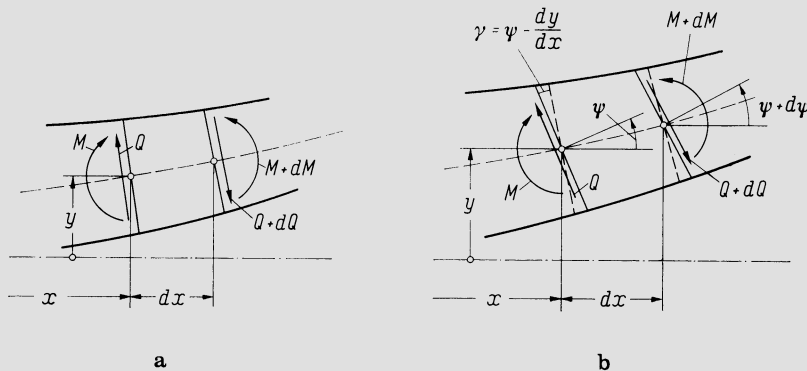


Abb. 20.4.1. Zur Herleitung der Differentialgleichung des schwingenden Stabes. a) Euler-Balken; b) Timoshenko-Balken

Indem hier Gleichgewicht der Momente vorausgesetzt ist, wird der Einfluß der Drehbeschleunigung des einzelnen Massenelementes als verschwindend klein vernachlässigt. Die Bewegungsgleichung in Richtung des Ausschlages y lautet

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx = -\rho f \ddot{y} dx. \quad 20.4(2)$$

² Man beachte, daß diese mathematische Analogie zustande kommt, obwohl hier nur ein einziger Körper vorliegt anstatt zwei beim Modell nach Abb. 20.3.1.

Da mit 20.4(1) $\partial Q/\partial x = \partial^2 M/\partial x^2$, folgt hieraus

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\rho f \ddot{y}. \quad 20.4(3)$$

Nach der elementaren Theorie des gebogenen Stabes ist weiter

$$M = EJy'', \quad 20.4(4)$$

wobei jetzt Akzente Ableitungen nach x andeuten sollen. Aus Gln. 20.4(3) und (4) folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJy'') = -\rho f \ddot{y} \quad 20.4(5)$$

oder auch

$$\underline{(EJ)y'''' + 2(EJ)'y'''' + (EJ)''y'' = -\rho f \ddot{y}}, \quad 20.4(6)$$

eine partielle Differentialgleichung für die Funktion $y(x, t)$. Da keine äußeren Kräfte und Momente, keine Dämpfungskräfte und im Stabquerschnitt auch kein Drillmoment vorausgesetzt wurde, beschreibt die Gleichung die einzige Bewegung, die dann noch möglich ist, die Biege-Eigenschwingung. Die Gl. 20.4(4) der klassischen Balkentheorie setzt voraus, daß ebene Stabquerschnitte bei der Deformation eben bleiben und die Schubdeformation des Ausschnittes von der Länge dx vernachlässigbar sei. Das trifft bei schlanken Stäben zu, doch sind viele Schaufeln so gedrungen, daß diese Näherung ungenügend wird.

Es ist möglich, sowohl die Drehbeschleunigung des Massenelementes als auch die Schubdeformation mitzuberücksichtigen (also den sog. Timoshenko-Balken vorauszusetzen). Abb. 20.4.1b veranschaulicht die dann am Element dx auftretenden Verhältnisse. Das Massenträgheitsmoment dieses Elementes ist $\rho J dx$. Damit tritt an die Stelle von 20.4(1) die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\psi} \rho J dx = dM - Q dx, \quad 20.4(7)$$

wo ψ der in der Figur dargestellte Neigungswinkel ist, der die Neigung der Stabachse und die Schubdeformation umfaßt. Die Bewegungsgleichung 20.4(2) bleibt unverändert. Anstatt Gl. 20.4(4) läßt sich schreiben

$$M = EJ\psi', \quad 20.4(8)$$

weil ja $d\psi = \psi' dx$ die gegenseitige Neigung der beiden dargestellten Querschnitte ist. Schließlich besteht zwischen dem Verzerrungswinkel γ und der Schubkraft Q die Beziehung

$$\gamma = \frac{Q}{Gf_s}, \quad 20.4(9)$$

wo G der Gleitmodul und f_s der äquivalente Schubquerschnitt ist. Würden die Querschnitte bei der Verformung tatsächlich eben bleiben (was auch mit 20.4(8) vorausgesetzt ist), so wäre f mit dem Balkenquerschnitt identisch. Das wäre indessen kein elastizitätstheoretisch möglicher Verformungszustand, und γ ist daher ein *mittlerer* Neigungswinkel. Rechnet man mit diesem, so muß man einen ideellen wirksamen Schubquerschnitt f_s einführen, der aus dem wirklichen hervorgeht durch $f_s = f/\kappa$. Dabei ist $\kappa > 1$ eine Zahl, die von der Geometrie des Querschnittes abhängt (z.B. $\kappa = 1,2$ für das Rechteck), eine Situation, die derjenigen bei der Torsionsbeanspruchung eines Stabes analog ist. Man findet für κ den Ausdruck

$$\kappa = \frac{f}{J^2} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{1}{b(y)} \left[\int_y^{y_{\max}} yb(y) dy \right]^2 dy, \quad 20.4(10)$$

vgl. etwa [3]. Hier ist $b(y)$ die örtliche Stabbreite, J wie üblich das Trägheitsmoment der Gesamtfläche bezüglich der Hauptträgheitsachse a (Abb. 20.4.2).

Beachtet man noch $\gamma = \psi - y'$, so führen die Gln. 20.4(2), (7), (8), (9) auf folgendes Gleichungssystem:

$$Q' = -\rho f \ddot{y}, \quad \rho J \ddot{\psi} = M' - Q, \quad \psi' = \frac{M}{EJ}, \quad \psi - y' = \frac{\kappa Q}{Gf}. \quad 20.4(11)$$

Dies sind vier partielle Differentialgleichungen für die unbekanntenen Funktionen y , ψ , M , Q . Man könnte z.B. ψ , M und Q aus ihnen eliminieren und so eine einzige, allerdings komplizierte Gleichung für y erhalten. Eine analytische Lösung ist aber nicht möglich, weshalb nur numerische Verfahren in Frage kommen. Für diese ist aber das Gleichungssystem 20.4(11) der zweckmäßigere Ausgangspunkt.

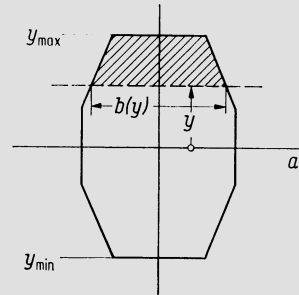


Abb. 20.4.2. Zur Bestimmung des Faktors κ nach Gl. 20.4(10)

Man beachte, daß bei diesen Herleitungen stets Symmetrie der Stabquerschnitte bezüglich der Bildebene vorausgesetzt ist, so daß die maßgebende Hauptträgheitsachse überall senkrecht zu dieser Ebene steht. Das schließt die verwundene Schaufel aus, für welche diese Betrachtungsweise nur eine Näherung sein kann, die in vielen Fällen ungenügend wird.

20.5 Lösung des Eigenwertproblems des schwingenden Stabes

Eine analytische Lösung ist selbst unter den vereinfachenden Voraussetzungen, die der Gl. 20.4(6) zugrunde liegen, nur in wenigen einfachen Fällen möglich, vorab beim *Stab konstanten Querschnittes*, wo sich die Differentialgleichung auf die Form

$$y'''' = -\frac{\rho f}{EJ} \ddot{y} \quad 20.5(1)$$

reduziert. Mit dem bekannten Produktansatz

$$y = Y(x) F(t) \quad 20.5(2)$$

geht die Gleichung über in

$$Y'''' F = -\frac{\rho f}{EJ} Y \ddot{F} \quad \cdot \cdot \cdot \quad \frac{Y''''}{Y} = -\frac{\rho f}{EJ} \frac{\ddot{F}}{F}. \quad 20.5(3)$$

In der zweiten Form steht links ein Ausdruck, der nicht von t abhängt, rechts ein solcher, der nicht von x abhängt. Das ist nur möglich, wenn beide gleich ein und derselben Konstanten sind, die a^4 benannt werde. Damit zerfällt die Gleichung in zwei totale Differentialgleichungen:

$$-\frac{\rho f}{EJ} \frac{\ddot{F}}{F} = a^4, \quad \frac{Y''''}{Y} = a^4. \quad 20.5(4)$$

Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen lauten

$$F(t) = \sin \left[\left(a^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho f}} \right) t - \varphi \right]. \quad 20.5(5)$$

$$Y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + C_3 \text{Sinh } ax + C_4 \text{Cosh } ax. \quad 20.5(6)$$

$C_1 \dots C_4$ sind Integrationskonstanten. Der willkürliche Phasenwinkel φ hat ebenfalls den Charakter einer Integrationskonstanten. Eine multiplikative Konstante fehlt in 20.5(5), da sie bei der Bildung des Produktes YF in die C_i eingeschlossen werden kann. — Es ist zweckmäßig, an dieser Stelle eine Dimensionsbefreiung vorzunehmen. Ist l die Länge des Stabes — in der praktischen Anwendung die Schaufellänge — so ist $\kappa = al$ eine dimensionslose Größe, wie leicht nachzuprüfen. Mit der dimensionslosen Koordinate $\xi = x/l$ schreiben sich dann die Lösungsgleichungen 20.5(5) und (6)

$$F(t) = \sin \left[\left(\frac{\kappa^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho f}} \right) t - \varphi \right] \quad 20.5(7)$$

$$Y = C_1 \sin \kappa \xi + C_2 \cos \kappa \xi + \text{Sinh } \kappa \xi + C_4 \text{Cosh } \kappa \xi. \quad 20.5(8)$$

Die weitere Behandlung des Problems verlangt die Einführung der *Grenzbedingungen* des jeweiligen besonderen Falles. Liegt etwa der *einseitig eingespannte Stab* nach Abb. 20.5.1 vor, so lauten diese

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y''(1) = 0, \quad Y'''(1) = 0. \quad 20.5(9)$$

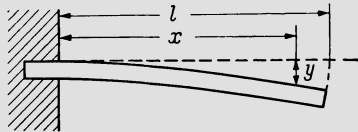


Abb. 20.5.1. Einseitig eingespannter Stab konstanten Querschnittes

Die Bedingung über Y'' besagt, daß am freien Ende kein Biegemoment auftritt, die Bedingung über Y''' , daß dort auch die Ableitung des Biegemomentes nach ξ verschwinden muß. Die ersten beiden dieser Gleichungen sind erfüllt, wenn $C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_2$, so daß übrigbleibt

$$Y = C_1 (\sin \kappa \xi - \text{Sinh } \kappa \xi) + C_2 (\cos \kappa \xi - \text{Cosh } \kappa \xi). \quad 20.5(10)$$

Die dritte Gleichung liefert dann

$$C_1 (\sin \kappa + \text{Sinh } \kappa) + C_2 (\cos \kappa + \text{Cosh } \kappa) = 0$$

$$\frac{C_1}{C_2} = - \frac{\cos \kappa + \text{Cosh } \kappa}{\sin \kappa + \text{Sinh } \kappa}, \quad 20.5(11)$$

die vierte in entsprechender Weise

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\sin \kappa - \text{Sinh } \kappa}{\cos \kappa + \text{Cosh } \kappa}. \quad 20.5(12)$$

Da 20.5(11) und (12) gleichzeitig gelten müssen, folgt

$$- \frac{\cos \kappa + \text{Cosh } \kappa}{\sin \kappa + \text{Sinh } \kappa} = \frac{\sin \kappa - \text{Sinh } \kappa}{\cos \kappa + \text{Cosh } \kappa}, \quad 20.5(13)$$

eine transzendente Bestimmungsgleichung für κ . Sie besitzt eine unendliche Folge von Lösungen $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n, \dots$, die *Eigenwerte* des Problems, die eingesetzt in Gl. 20.5(7) offensichtlich die *Kreisfrequenzen* ω_{en} der verschiedenen Ordnungen liefern. Sie sind

$$\omega_{en} = \frac{\kappa_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho f}}. \quad 20.5(14)$$

Das Einsetzen der κ_n in Gl. 20.5(8) liefert die zugehörigen *Eigenfunktionen*, welche die *Schwingungsformen* der verschiedenen Ordnungen darstellen.

Für den praktischen Gebrauch ist es zweckmäßiger, die Frequenzen $\nu_{en} = \omega_{en}/2\pi$ anzugeben. Mit $\kappa'_n = \kappa_n^2/2\pi$ werden diese

$$\nu_{en} = \frac{\kappa'_n}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho f}} \tag{20.5(15)}$$

In Abb. 20.5.2 sind oben die Werte $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3$ für den hier behandelten einseitig eingespannten Stab angegeben. In genau analoger Weise werden aus den jeweiligen Grenzbedingungen die Eigenwerte für andere Konfiguration gefunden. Die Ergebnisse für drei weitere Fälle sind ebenfalls in Abb. 20.5.2 angegeben.

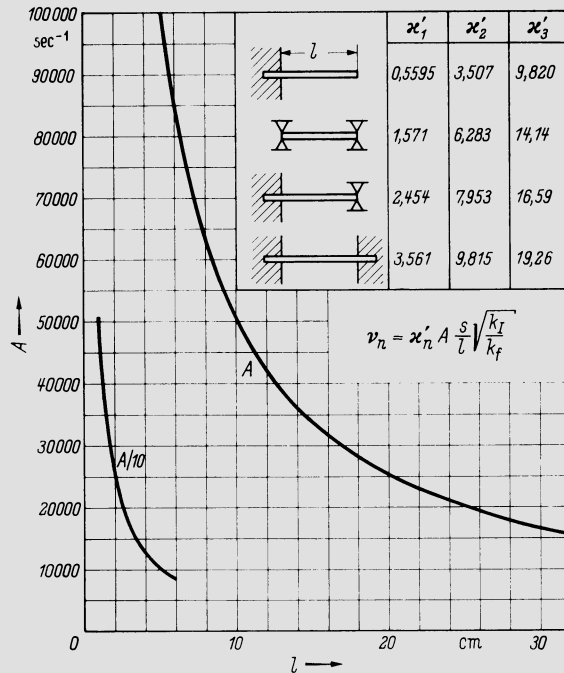


Abb. 20.5.2. Werte κ'_n und A zur Berechnung der Biege-Eigenschwingungszahlen von Stäben konstanten Querschnittes

$$k_J = J/s^4, \quad k_f = f/s^2, \quad A = (1/l) \sqrt{E/\rho}, \text{ angegeben für } \rho = 7,85 \text{ g/cm}^3, E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

Die entsprechende Untersuchung läßt sich auch durchführen für allgemeinere Bedingungen, wie sie bei Schaufeln häufig gegeben sind. Gerade moderne Ausführungen tragen an ihrem Ende oftmals eine Deckplatte mit der Teilung t_d und dem Querschnitt f_d , mithin der Masse $\rho f_d t_d$. Schwingt die Schaufel mit der Kreisfrequenz ω , so entsteht damit eine Trägheitskraft mit der Amplitude

$$Q_d = -\rho f_d t_d Y(l) \omega^2 = -\rho f_d t_d Y(l) \frac{\kappa^4 EJ}{l^4 \rho f} \tag{20.5(16)}$$

Hier ist $Y(l)$ der Ausschlag am Schaufelende und für ω ist der in 20.5(7) auftretende Ausdruck eingesetzt. Da nun aber weiter mit M als Amplitudenwert des Momentes

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_l = Q_d, \tag{20.5(17)}$$

vgl. Gl. 20.4(1), und

$$M = EJ \frac{d^2 Y}{dx^2}, \tag{20.5(18)}$$

folgt auch

$$\left. \frac{d^3 Y}{dx^3} \right|_l = - \frac{f d^4}{f l^4} \kappa^4 Y(l) \tag{20.5(19)}$$

als eine der äußeren Grenzbedingungen. — Weiter ist die Einspannung niemals vollkommen starr. Vielmehr stellt sich auch an der Schaufelwurzel, also in $x = 0$ eine dem Biegemoment $M(0)$ proportionale Neigung der Schaufelachse ein, die durch die Gleichung

$$\left. \frac{dY}{dx} \right|_0 = k M(0) = k E J \left. \frac{d^2 Y}{dx^2} \right|_0 \tag{20.5(20)}$$

beschrieben werden kann mit k als Proportionalitätsfaktor.

Wiederum wird eine Dimensionsbefreiung vorgenommen durch die Setzungen

$$K \equiv \frac{k E J}{l}, \quad \alpha \equiv \frac{f d^4}{f l^4} \tag{20.5(21)}$$

Wenn man die dimensionslose Koordinate ξ einführt und die Ableitung nach dieser durch den Akzent bezeichnet, schreiben sich die Grenzbedingungen

$$Y(0) = 0, \tag{20.5(22)}$$

$$Y'(0) = K Y''(0), \tag{20.5(23)}$$

$$Y''(1) = 0, \tag{20.5(24)}$$

$$Y'''(1) = -\alpha \kappa^4 Y(1). \tag{20.5(25)}$$

Gl. 20.5(23) geht aus 20.5(20) hervor, Gl. 20.5(25) aus 20.5(19), während Gl. 20.5(24) das Verschwinden des Biegemomentes am Schaufelende ausspricht. Wenn man in diesen Gleichungen die Y und ihre Ableitungen gemäß 20.5(10) einsetzt, entsteht ein System von vier homogenen linearen Gleichungen für die Unbekannten $C_1 \dots C_4$, das noch κ als Parameter enthält. Die Bedingung des Verschwindens der Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems liefert eine Bestimmungsgleichung für κ , deren Lösungen $\kappa_1, \kappa_2 \dots$ die Eigenwerte sind. In Abb. 20.5.3 sind die Werte $\kappa'_n = \kappa_n^2 / 2\pi$ für die Ordnungen $n = 1, 2, 3$ in Funktion der Parameter K und α dargestellt, womit man aus Gl. 20.5(15) unmittelbar die Eigenfrequenz bestimmen kann.

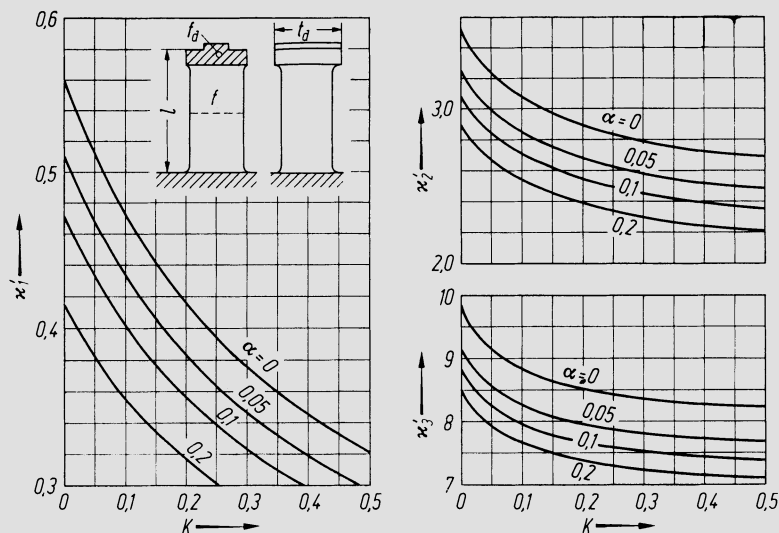


Abb. 20.5.3.

Werte $\kappa'_1 \dots \kappa'_3$ für Schaufeln konstanten Querschnittes mit Deckplatte bei nachgiebiger Einspannung

Während die Bedeutung von α anschaulich unmittelbar klar ist, kann man sich die von K folgendermaßen veranschaulichen. Für einen vollkommenen eingespannten Stab der Länge l , der an seinem Ende durch die Querkraft Q belastet wird, erhält man an jener Stelle die Ausbiegung

$$Y \equiv \frac{Q}{EJ} \frac{l^3}{3}.$$

Ist die Einspannung nicht starr, sondern durch den Nachgiebigkeitsparameter K gekennzeichnet, so wird

$$Y = \frac{Ql^3}{EJ} \left(\frac{1}{3} + K \right).$$

So geht etwa bei $K = 0,333$ die Auslenkung auf das Doppelte. Damit ist zugleich ein Weg aufgezeigt, K experimentell zu bestimmen.

20.6 Drehschwingungen eines geraden Stabes

Schlanke unverdrehte Schaufeln können zu Schwingungen angeregt werden, die als Drehschwingung eines geraden Stabes aufgefaßt werden können. Ein Element von der Erstreckung dx an der Stelle x ist im allgemeinen gegenüber der entspannten Lage um den Winkel γ verdreht um die Stabachse als Drehachse. Wenn J_p das polare Trägheitsmoment des Querschnittes an der Stelle x ist, so ist $\rho J_p dx$ das Massenträgheitsmoment des betrachteten Elementes. Der Unterschied der Drillmomente in den beiden begrenzenden Querschnitten sei dM (vgl. Abb. 20.6.1). Dann lautet das Bewegungsgesetz

$$dM = \ddot{\gamma} \rho J_p dx \cdot \frac{\partial M}{\partial x} = \rho J_p \ddot{\gamma}. \quad 20.6(1)$$

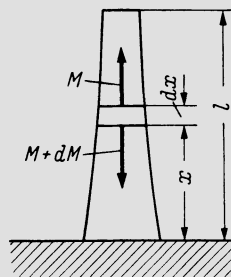


Abb. 20.6.1. Zur Herleitung der Differentialgleichung der Drehschwingung eines Stabes

Nach der Theorie des auf Torsion beanspruchten Stabes bewirkt das Drillmoment M längs der Strecke dx einen Verdrehungswinkel $d\gamma$ vom Betrage

$$d\gamma = \frac{\psi_t M}{GJ_p} dx \quad 20.6(2)$$

mit G als Schubmodul. Der Koeffizient ψ_t berücksichtigt die Verwölbung des Querschnittes, d.h. $J_t = J_p / \psi_t$ ist das effektive Torsionsträgheitsmoment, das ja nur bei kreisförmigem Querschnitt mit J_p identisch wird. Nach 20.6(2) ist

$$M = \frac{GJ_p}{\psi_t} \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad 20.6(3)$$

was eingesetzt in 20.6(1) auf die partielle Differentialgleichung der Drehschwingung führt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{GJ_p}{\psi_t} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = \rho J_p \ddot{\gamma}. \quad 20.6(4)$$

Eine analytische Lösung läßt sich im allgemeinen nur für den Stab konstanten Querschnittes auffinden. Wenn hierbei noch als Variable $\xi = x/l$ eingeführt und die Ableitung nach dieser durch den Akzent gekennzeichnet wird, geht 20.6(4) über in

$$\gamma'' = \frac{l^2 \psi_{tQ}}{G} \ddot{\gamma}. \quad 20.6(5)$$

Die Lösung dieser Gleichung gelingt mit dem Produktansatz

$$\gamma = u(\xi) v(t), \quad 20.6(6)$$

der die Differentialgleichung 20.6(5) in die Form

$$u''v = \frac{l^2 \psi_{tQ}}{G} u \ddot{v} \quad \cdot \cdot \cdot \quad \frac{u''}{u} = \frac{l^2 \psi_{tQ}}{G} \frac{\ddot{v}}{v} = -\kappa^2 \quad 20.6(7)$$

überführt. Auf Grund der gleichen Überlegung wie unter 20.5 zerfällt damit die partielle Differentialgleichung in zwei totale. Diese sind nachfolgend links, ihre allgemeinen Lösungen rechts geschrieben:

$$u'' + \kappa^2 u = 0, \quad u = C_1 \sin \kappa \xi + C_2 \cos \kappa \xi \quad 20.6(8)$$

$$\ddot{v} + \frac{\kappa^2 G}{l^2 \psi_{tQ}} v = 0, \quad v = \sin \left[\left(\frac{\kappa}{l} \sqrt{\frac{G}{\psi_{tQ}}} \right) t + \varphi \right] \quad 20.6(9)$$

Die *Grenzbedingungen* mögen in folgender Weise eingeführt werden. In $x = 0$ sei der Stab mit einer gewissen Drehelastizität gehalten, die beschrieben werde durch

$$\gamma(0) = k_t M(0) = k_t \frac{G J_p}{\psi_t} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right|_0, \quad 20.6(10)$$

während das andere Stabende frei sei, was auf

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right|_l = 0 \quad 20.6(11)$$

führt. In diesen Gleichungen darf man γ auch durch u ersetzen, da ja das nur von t abhängige v beidseitig als Faktor auftritt. Mit der Definition

$$K_t \equiv k_t \frac{G J_p}{l \psi_t} \quad 20.6(12)$$

gehen dann die beiden Grenzbedingungen über in

$$u(0) = K_t u'(0), \quad u'(l) = 0. \quad 20.6(13)$$

Das Einsetzen des Ausdruckes 20.6(8) für u bringt diese beiden Gleichungen in die Form

$$C_2 = K_t \kappa C_1, \quad \kappa [C_1 \cos \kappa - C_2 \sin \kappa] = 0.$$

was nur nichttriviale Lösungen zuläßt, wenn

$$\cos \kappa - K_t \kappa \sin \kappa = 0. \quad 20.6(14)$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte $\kappa_1, \kappa_2, \dots$. Mit $\kappa'_n = \kappa_n/2\pi$ schreibt sich dann die *Eigenfrequenz n-ter Ordnung* gemäß Gl. 20.6(9)

$$\underline{\underline{\nu_{en} = \frac{\kappa'_n}{l} \sqrt{\frac{G}{\psi_{tQ}}}}}. \quad 20.6(15)$$

Speziell für die starre Einsparung, also $K_t = 0$, findet man

$$\kappa'_n = \frac{2n-1}{4}. \quad 20.6(16)$$

Für den beidseitig starr eingespannten Stab würde die analoge Untersuchung auf $\kappa'_n = n/2$ führen.

Die Anwendung dieser Ergebnisse auf die Schaufel setzt das Bekanntsein des Koeffizienten ψ_t voraus. Zu seiner Bestimmung hat *Beglinger* in einer unveröffentlichten Arbeit eine Näherungsmethode angegeben, die sich für Schaufelprofile eignet. Sie möge anhand Abb. 20.6.2 erklärt werden. Das gegebene Profil, Form a, Abb. 20.6.2, wird zunächst umgeformt in ein symmetrisches Profil b, das mit dem gegebenen die Dickenverteilung $h(\sigma)$ gemein hat. Dieses hat bezüglich seiner Hauptträgheitsachsen die Trägheitsmomente J_1^* und J_2^* . Die gleichen Trägheitsmomente hat ein elliptisches Profil c mit den Hauptachsen a und b , und zwar ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{J_2^*}{J_1^*}. \quad 20.6(17)$$

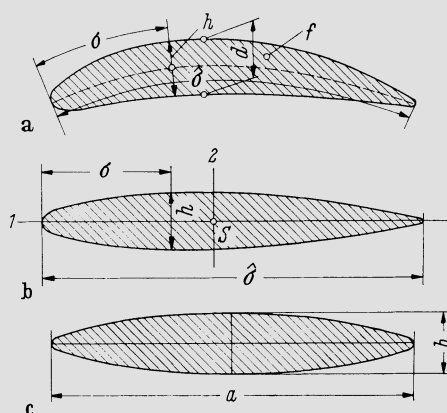


Abb. 20.6.2. Zur Bestimmung des Koeffizienten ψ_t . a) Gegebenes Profil; b) gleichwertiges Profil mit gerader Skelettlinie; c) äquivalente Ellipse

Für die Ellipse ist das Torsionsproblem streng gelöst und man findet

$$\psi_t = \frac{1}{4} \left[\frac{J_2^*}{J_1^*} + \frac{J_1^*}{J_2^*} + 2 \right]. \quad 20.6(18)$$

Dieses ψ_t kann auch für das gegebene Schaufelprofil verwendet werden, während sein J_p durch die allgemeine Formel gegeben ist.

20.7 Bestimmung von Eigenfrequenzen nach der Energiemethode

Sofern ein System irgendwelcher Art (Stab, Scheibe) einer Eigenschwingung unterworfen ist, bei der die Bewegungen aller seiner Punkte in gleicher Phase erfolgen, läßt sich der Vorgang beschreiben durch

$$y = Y(x_i) \cos \omega_e t. \quad 20.7(1)$$

Durch x_i mögen dabei die sämtlichen Koordinaten angedeutet sein, welche die Lage eines Punktes im Körper definieren. Y ist die örtliche Amplitude, y die momentane örtliche Abweichung von der neutralen Lage. Die zeitliche Ableitung \dot{y} , also die momentane Geschwindigkeit der Bewegung, erreicht ihren Höchstwert beim Durchgang durch die Mittellage, und zwar beträgt dieser nach 20.7(1)

$$\dot{y}_{\max} = \omega_e Y(x_i). \quad 20.7(2)$$

Wenn Y so definiert ist, daß es die Dimension einer Länge hat, \dot{y} also eine ‚echte‘ Geschwindigkeit ist, wird die *kinetische Energie* eines Volumenelementes dV beim Durchgang durch

die Mittellage

$$dT = \frac{1}{2} \dot{y}_{\max}^2 \rho dV = \frac{\omega_e^2}{2} Y^2(x_i) \rho dV, \quad 20.7(3)$$

folglich die kinetische Energie des ganzen Körpers

$$T = \frac{\omega_e^2 \rho}{2} \int_V Y^2(x_i) dV, \quad 20.7(4)$$

wobei das Integral über das ganze Volumen zu erstrecken ist.

Für die *potentielle Energie* Ψ des Körpers im Augenblick größter Auslenkung kann stets ein Ausdruck der folgenden Art geschrieben werden. Die in der elastischen Verformung eines Volumenelementes dV aufgespeicherte Energie hängt ab vom Ort, d. h. von den x_i und von den örtlichen Verformungsgrößen, die mit Y' und Y'' bezeichnet werden mögen. Es wird damit einfach angedeutet, daß die ersten und zweiten Ableitungen von Y — im allgemeinen nach den verschiedenen Koordinaten x_i — maßgebend sind. So entsteht ein Ausdruck der Art

$$\Psi = \int_V F(x_i, Y', Y'') dV, \quad 20.7(5)$$

wo F den betreffenden Funktionalzusammenhang bezeichnet. — Nun muß aber offenbar die kinetische Energie beim Durchgang durch die Mittellage gleich sein der potentiellen Energie des Systems bei größter Auslenkung, d. h. es ist $T = \Psi$. Wenn man hier die Ausdrücke nach den Gln. 20.7(4) und (5) einsetzt, enthält die linke Seite den Faktor ω_e^2 , so daß nach diesem aufgelöst werden kann. So erhält man

$$\omega_e^2 = \frac{\int_V F(x_i, Y', Y'') dV}{\frac{\rho}{2} \int_V Y^2(x_i) dV}. \quad 20.7(6)$$

Der rechts stehende Ausdruck wird als *Rayleigh-Quotient* bezeichnet. Bildet man ihn mit der Eigenfunktion Y n -ter Ordnung, so erhält man das Quadrat der Kreisfrequenz der Eigenschwingung dieser Ordnung.

Das auf *Rayleigh* zurückgehende Energieverfahren besteht nun darin, in Gl. 20.7(6) eine Näherung der Funktion $Y(x)$ einzusetzen und so einen Näherungswert von ω_e zu erhalten. Es läßt sich zeigen, daß solche Näherungswerte stets etwas zu groß ausfallen, vgl. z. B. [1]. Das ist plausibel, wenn man beachtet, daß sich ein Körper immer so verformt wie er am wenigsten Widerstand zu leisten vermag, so daß die Verformungsarbeit — mithin Ψ — ein Minimum wird. Macht aber die tatsächliche Form Y die Kreisfrequenz ω_e zu einem Minimum im Vergleich zu benachbarten Formen, so führen auch Abweichungen gegenüber dem korrekten Y nur zu kleinen Fehlern, worauf die Leistungsfähigkeit des Verfahrens beruht. Am besten arbeitet es naturgemäß bei der Grundschwingung, weil man für diese die Funktion Y am besten schätzen kann.

Bei der eindimensionalen Behandlung der *Biegeschwingung* eines geraden Stabes — der in der Eulerschen Näherung behandelt werde — gelten folgende Relationen (Bezeichnungen wie unter 20.5):

$$T = \frac{\omega_e^2 \rho}{2} \int_0^l Y^2 f dx, \quad \Psi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad 20.7(7)$$

Zweckmäßig führt man die folgenden dimensionslosen Größen ein

$$\varphi \equiv \frac{f}{f_0}, \quad \vartheta \equiv \frac{EJ}{E_0 J_0}, \quad \xi \equiv \frac{x}{l}. \quad 20.7(8)$$

Hier kennzeichnet Index 0 irgendeine ausgezeichnete Stelle, z. B. den Einspannquerschnitt. Ferner läßt sich aus Y ein dimensionsloser Wert bilden gemäß $u \equiv Y/Y^*$, wobei Y^* wieder ein beliebiger Bezugswert ist, der nicht notwendig an der Stelle 0 auftritt. Wenn man diese Definition in 20.7(7) einführt und den Rayleigh-Quotienten bildet, ist man auf

$$\omega_e^2 = \frac{E_0 J_0}{\varrho f_0 l^4} \frac{\int_0^1 \vartheta(\xi) u''^2(\xi) d\xi}{\int_0^1 \varphi(\xi) u^2(\xi) d\xi} \quad 20.7(9)$$

geführt. Für die Frequenz $\nu_e = \omega_e/2\pi$ folgt damit

$$\nu_e = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\int_0^1 \vartheta(\xi) u''^2(\xi) d\xi}{\int_0^1 \varphi(\xi) u^2(\xi) d\xi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{E_0 J_0}{\varrho f_0}}. \quad 20.7(10)$$

Man beachte die Analogie des Aufbaues gegenüber Gl. 20.5(15). Während aber dort konstanter Stabquerschnitt vorausgesetzt wurde, ist hier ein beliebiger Querschnittsverlauf $\varphi(\xi)$ möglich. Durch Einsetzen der Eigenschwingungsform n -ter Ordnung u_n bekommt man die zugehörige Eigenfrequenz ν_{en} .

Bei der Bestimmung der Grundfrequenz, für die dieses Verfahren vor allem in Frage kommt, ist es vorteilhaft, von einer Schätzung der Größe $\vartheta u''$ auszugehen, da diese unmittelbar dem Biegemoment proportional ist, dessen Verlauf der Anschauung leicht zugänglich ist. Beim einseitig eingespannten Stab, der eine Schaufel repräsentieren mag, hat z. B. $\vartheta u''$ mit Sicherheit den in Abb. 20.7.1 dargestellten Verlauf. An der Einspannstelle $\xi = 0$ tritt der höchste Wert auf, während am freien Ende $\xi = 1$ nicht nur das Moment, sondern auch seine Ableitung nach ξ verschwinden muß. Das folgt daraus, daß das Biegemoment, welches das Element $d\xi$ am Stabende an der Stelle $1 - d\xi$ ausübt, unendlich klein von zweiter Ordnung ist. — Bei einer abgesetzten Welle (Abb. 20.7.2) läßt sich $\vartheta u''$ als Verlauf des Biegemomentes ebenfalls leicht schätzen, vgl. die gestrichelte Linie. Daraus ergibt sich sogleich auch u'' , in diesem Falle eine unstetige Funktion, wie die ausgezogene Kurve darstellt. Stets sind von u'' aus durch zweimalige Integration u' und u auffindbar, womit nun der Rayleigh-Quotient gebildet werden kann.

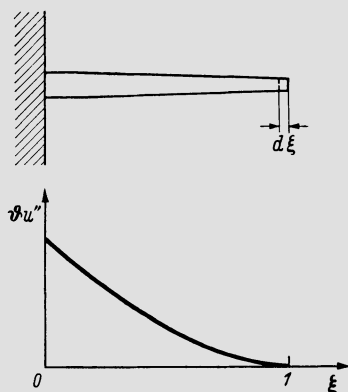


Abb. 20.7.1. Verlauf der Funktion u'' für den einseitig eingespannten Stab

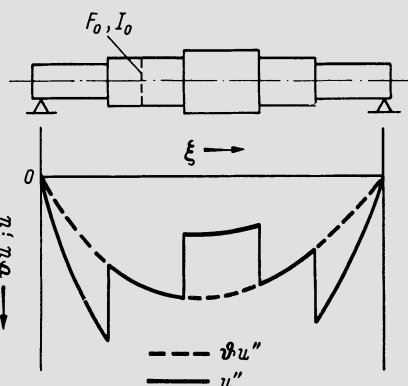


Abb. 20.7.2. Verlauf der Funktion u'' und u'' für eine abgesetzte Welle

Eine einigermaßen verlässliche Bestimmung von Eigenfrequenzen höherer Ordnung wäre so aber im allgemeinen nicht möglich. Dafür kommt vielmehr vor allem die *Methode von Ritz* in Betracht. Zu ihrer Darstellung werde abkürzend

$$\Omega^2 \equiv \omega_e^2 \frac{\varrho f_0 l^4}{E_0 J_0} \quad 20.7(11)$$

gesetzt. Gl. 20.7(9) kann dann in der Form

$$\int_0^1 \vartheta(\xi) u''^2(\xi) d\xi - \Omega^2 \int_0^1 \varphi(\xi) u^2(\xi) d\xi = 0 \quad 20.7(12)$$

geschrieben werden. Wenn nun u eine Funktion ist, die zwar die gegebenen Grenzbedingungen erfüllt, mit der wirklichen aber nicht übereinstimmt und man in Gl. 20.7(12) den wahren Wert von Ω einsetzt, verschwindet die Differenz nicht, sondern wird nach dem oben Gesagten positiv, d. h. es ist

$$Z \equiv \int_0^1 \vartheta(\xi) u''^2(\xi) d\xi - \Omega^2 \int_0^1 \varphi(\xi) u^2(\xi) d\xi > 0. \quad 20.7(13)$$

Nun mögen $u_1(\xi), u_2(\xi), \dots, u_p(\xi)$ Funktionen sein — z. B. Polynome verschiedener Ordnung — welche die gegebenen Grenzbedingungen erfüllen. Dann kann die tatsächliche Funktion $u(\xi)$ angenähert werden durch den Ansatz

$$u(\xi) = a_1 u_1(\xi) + a_2 u_2(\xi) + \dots + a_p u_p(\xi) \quad 20.7(14)$$

mit vorerst unbekanntem Koeffizienten a_i . Setzt man diese Näherung in 20.7(13) ein, so lautet sie

$$Z = \int_0^1 \vartheta(\xi) \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j u_i' u_j' d\xi - \Omega^2 \int_0^1 \varphi(\xi) \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j u_i u_j d\xi. \quad 20.7(15)$$

Offenbar kommt man nun mit demjenigen Satz von Koeffizienten a_i der exakten Lösung am nächsten, für den Z ein Minimum wird. Die optimale Wahl der a_i ist also dadurch gekennzeichnet, daß für sie gilt

$$\frac{\partial Z}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial Z}{\partial a_p} = 0. \quad 20.7(16)$$

Nach 20.7(15) bedeutet dies

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} = 2 \left[\int_0^1 \vartheta \sum_{j=1}^p a_j u_i' u_j' d\xi - \Omega^2 \int_0^1 \varphi \sum_{j=1}^p a_j u_i u_j d\xi \right] = 0$$

oder

$$\sum_{j=1}^p a_j \left[\int_0^1 \vartheta u_i' u_j' d\xi - \Omega^2 \int_0^1 \varphi u_i u_j d\xi \right] = 0. \quad 20.7(17)$$

Nun sind aber bei gegebenen Funktionen u_i die Integralausdrücke

$$m_{ij} \equiv \int_0^1 \vartheta u_i' u_j' d\xi, \quad n_{ij} \equiv \int_0^1 \varphi u_i u_j d\xi \quad 20.7(18)$$

festliegende Zahlen. Gl. 20.7(17) kann also geschrieben werden

$$\sum_1^p a_i (m_{ij} - \Omega^2 n_{ij}) = 0. \quad 20.7(19)$$

Für jedes i gilt eine solche Gleichung, und diese bilden zusammen ein homogenes lineares System für die p Unbekannten a_i . Es hat nichttriviale Lösungen nur, wenn seine Koeffi-

zientendeterminante verschwindet, d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} (m_{11} - \Omega^2 n_{11}) & (m_{12} - \Omega^2 n_{12}) & \dots & (m_{1p} - \Omega^2 n_{1p}) \\ (m_{21} - \Omega^2 n_{21}) & (m_{22} - \Omega^2 n_{22}) & \dots & (m_{2p} - \Omega^2 n_{2p}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m_{p1} - \Omega^2 n_{p1}) & (m_{p2} - \Omega^2 n_{p2}) & \dots & (m_{pp} - \Omega^2 n_{pp}) \end{vmatrix} = 0. \quad 20.7(20)$$

Dies wiederum ist eine Gleichung, die nur für bestimmte Werte $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p$ erfüllt ist.

Das Lösungsverfahren kann nun überblickt werden. Man wählt einen Satz von p Funktionen u_i , die in $\xi = 0$ und 1 die gegebenen Grenzbedingungen erfüllen. Jeder Ausdruck der Art Gl. 20.7(14) erfüllt dann die Grenzbedingungen ebenfalls. Alsdann werden die sämtlichen Integralausdrücke m_{ij}, n_{ij} nach Gl. 20.7(18) gebildet. Aus den Lösungen $\Omega_1 \dots \Omega_p$ der Gl. 20.7(20) hat man schließlich vermöge Gl. 20.7(11) alle ω_e von Ordnung 1 bis p . Das Ergebnis wird um so genauer, je besser es gelingt, durch lineare Kombinationen nach Gl. 20.7(14) die wirklichen Eigenfunktionen wiederzugeben. Man wählt die u_i so, daß ihr Verlauf nach Schätzung möglichst den verschiedenen Eigenfunktionen entspricht. Würde man dies genau treffen, so würden wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen die m_{ij} und n_{ij} nur für $i = j$ von Null verschieden. Die Determinantengleichung 20.7(20) würde dann in einen Satz von Gleichungen der Art $m_{ii} - \Omega^2 n_{ii} = 0$ zerfallen, womit man gerade zur ursprünglichen Form 20.7(9) zurückkäme. — Praktisch läßt sich mit diesem Verfahren etwa bis zur dritten Ordnung eine hinreichende Genauigkeit erreichen.

Selbstverständlich läßt sich die Energiemethode auch zur Berechnung von *Dreh-schwingungen* heranziehen. Es ist in diesem Falle

$$T = \frac{\omega_e^2 \varrho}{2} \int_0^l J_p u^2 dx, \quad \Psi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{G J_p}{\psi_i} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx. \quad 20.7(21)$$

Die Bezeichnungen sind die gleichen wie unter 20.6. Insbesondere ist u die örtliche Winkelamplitude. Wiederum möge Index 0 auf eine ausgezeichnete Stelle — z. B. die Einspannstelle — verweisen, und es werde gesetzt

$$\vartheta_p \equiv \frac{J_p}{J_{p0}}, \quad \vartheta_l \equiv \frac{G J_p \psi_{l0}}{G_0 J_{p0} \psi_l}, \quad \xi \equiv \frac{x}{l}. \quad 20.7(22)$$

Dann führt $T = \Psi$ schließlich auf die Formel

$$\underline{\underline{\nu_e = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\int_0^1 \vartheta_l(\xi) u'^2(\xi) d\xi}{\int_0^1 \vartheta_p(\xi) u^2(\xi) d\xi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{l} \sqrt{\frac{G_0}{\varrho \psi_{l0}}}}}. \quad 20.7(23)$$

Wiederum ist die Analogie zu Gl. 20.6(15) zu sehen. Zur Bestimmung von Eigenfrequenzen höherer Ordnung ist auch hier das Ritzsche Verfahren sinngemäß anzuwenden.

20.8 Zusätzliche Effekte bei gedregenen Stäben

Unter 20.4 sind bereits die Differentialgleichungen der Biegeschwingungen eines Stabes angegeben worden für den Fall, daß die Schubdeformation und die Rotationsträgheit des einzelnen Stabelementes mitberücksichtigt werden, vgl. Gl. 20.4(11). Bei der rechnerischen Behandlung solcher Schwingungen kann man entweder direkt von den Differentialgleichungen ausgehen und diese numerisch, d. h. durch Differenzenrechnung lösen, vgl. [4];

eher naheliegend ist es aber gerade in diesem Falle, die Energiemethode zu benutzen, z. B. [5, 6]. Um die entsprechende Relation zu gewinnen, gehen wir aus von der Situation nach Abb. 20.4.1 b und setzen

$$y = \hat{y} \cos \omega_e t, \quad \gamma = -\hat{\gamma} \cos \omega_e t. \quad 20.8(1)$$

Dabei sind \hat{y} und $\hat{\gamma}$ die ortsabhängigen Amplitudenwerte. Da zugleich mit dem positiven y -Aus Schlag ein negativer γ -Aus Schlag auftritt, wird bei der getroffenen Vorzeichenkonvention $\hat{\gamma}$ positiv. Wegen $\hat{\gamma} = -(\hat{\psi} - \hat{y}')$ folgt dann aus der ersten und letzten der Gln. 20.4(11)

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{Gf}{\kappa} \hat{\gamma} \right] = \varrho f \hat{y}. \quad 20.8(2)$$

Da aber

$$\ddot{y} = -\omega_e^2 \hat{y} \cos \omega_e t, \quad 20.8(3)$$

ist auch

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{Gf}{\kappa} \hat{\gamma} \right] = -\omega_e^2 \varrho f \hat{y},$$

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_0 - \omega_e^2 \frac{\varrho \kappa}{Gf} \int_0^x f \hat{y} dx, \quad 20.8(4)$$

wo $\hat{\gamma}_0$ der Wert in $x = 0$ ist. — Nun sind die potentiellen Energiebeträge in voll ausgebogenem Zustand:

$$\text{Biegung} \quad \frac{1}{2} \int_0^l EJ (\hat{y}'' - \hat{\gamma}')^2 dx,$$

$$\text{Schubdeformation} \quad \frac{1}{2} \int_0^l \frac{Gf}{\kappa} \hat{\gamma}^2 dx.$$

Der erste Ausdruck wird klar, wenn man beachtet, daß $\hat{\psi} = \hat{y}' - \hat{\gamma}$ und die dritte der Gln. 20.4(11) heranzieht. Die Bewegungsenergien beim Durchgang durch die Mittellage sind:

$$\text{Translation} \quad \frac{\varrho \omega_e^2}{2} \int_0^l f \hat{y}^2 dx,$$

$$\text{Rotation} \quad \frac{\varrho \omega_e^2}{2} \int_0^l J (\hat{y}' - \hat{\gamma})^2 dx.$$

Die Bedingung $T = \Psi$ führt dann schließlich auf

$$\omega_e^2 = \frac{\int_0^l \left[EJ (\hat{y}'' - \hat{\gamma}')^2 + \frac{Gf}{\kappa} \hat{\gamma}^2 \right] dx}{\varrho \int_0^l [f \hat{y}^2 + J (\hat{y}' - \hat{\gamma})^2] dx}. \quad 20.8(5)$$

Bei gegebener Funktion $\hat{y}(x)$ bestimmt diese Gleichung ω_e iterativ, da ja $\hat{\gamma}(x)$ aus 20.8(4) zu bestimmen ist, worin ω_e bereits auftritt. Eine sehr gute Näherung erhält man, indem man für $\hat{y}(x)$ die Funktion verwendet, die ohne Schubdeformation gilt. Das in 20.8(4) auftretende $\hat{\gamma}_0$ hängt von den jeweiligen Grenzbedingungen ab. Beim in l frei endigenden Stab muß $\hat{\gamma}$ am freien Ende verschwinden, weshalb

$$\hat{\gamma}_0 = \omega_e^2 \frac{\varrho \kappa}{Gf} \int_0^l f \hat{y} dx. \quad 20.8(6)$$

Die Abweichung gegenüber dem Verhalten eines Stabes in Eulerscher Näherung hängt nach Gl. 20.8(4) bei gegebenen $\hat{y}(x)$ ab von ω_e . Wenn wir der Einfachheit halber den Stab konstanten Querschnittes zugrundelegen, ist nach Gl. 20.5(14) die Größe

$$i = \sqrt{J/f}$$

bei gegebener Stablänge der maßgebende geometrische Parameter. Das so definierte i ist der mit J gebildete *Trägheitsradius*. Das dimensionslose Charakteristikum ist i/l , und es zeigt sich, daß die Fehler der elementaren Theorie mit i/l zunehmen. Soll etwa die Schwingungszahl erster Ordnung auf 5% genau erhalten werden, so ist etwa $i/l < 0,025$ zu fordern, während 5% Genauigkeit der zweiten Ordnung selbst $i/l < 0,016$ verlangt.

Dieser Problemkomplex hängt aufs engste zusammen mit demjenigen der minimalen Nachgiebigkeit der Einspannung, worüber eine eingehende Untersuchung von *Beglinger et al.* [7] vorliegt. Am besten nähert man sich dem Grenzfall vollkommener Einspannung offenbar dann, wenn der Stab ein Stück bildet mit dem Körper, von dem er gehalten wird (vgl. Abb. 20.8.1). Aber auch so ist vollkommene Einspannung nicht zu verwirklichen, da ja im Bereich des Überganges stets eine gewisse Zone sich mitverformen wird (im Bild gestrichelt angedeutet). Offensichtlich ist diese Zone bei gegebenem l um so größer, je dicker der Stab ist, vgl. die Fälle a und b in Abb. 20.8.1. Der maßgebende Parameter ist wiederum i/l . — Sind Q_0 und M_0 Querkraft und Biegemoment im Wurzelquerschnitt, so treten dort eine Verschiebung y_0 und eine Neigung y'_0 auf, die beide je von Q_0 und M_0 abhängen. Praktisch kann man allerdings die Bedingungen oft genügend genau erfassen, indem man nur eine Proportionalität zwischen M_0 und y'_0 einführt. Wie bei [7] gezeigt, ist es ungenügend, im Übergangsbereich nur die Verformung des Körpers zu betrachten. Man muß vielmehr auch die dort auftretenden Trägheitskräfte mit berücksichtigen, was den Effekt der unvollkommenen Einspannung abschwächt.

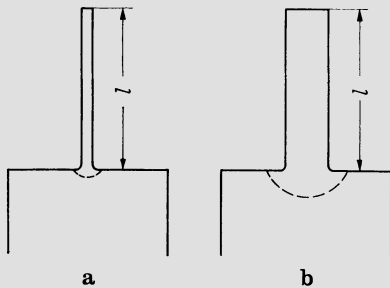


Abb. 20.8.1

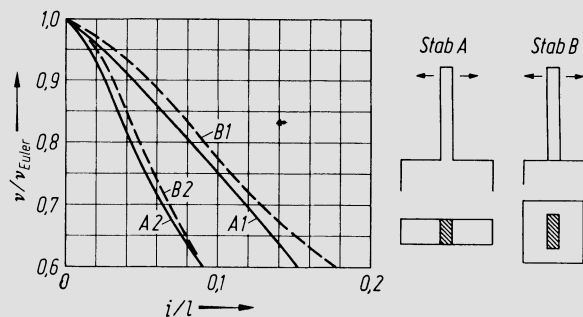


Abb. 20.8.2

Abb. 20.8.1. Einseitig eingespannte Stäbe. Beim schlanken Stab (a) ist der Deformationsbereich an der Einspannstelle kleiner als beim gedrungenen Stab (b)

Abb. 20.8.2. Herabsetzung der Eigenfrequenz eines Stabes durch Rotationsträgheit, Schubdeformation und nachgiebige Einspannung. Nach [7]

Abb. 20.8.2 zeigt Ergebnisse nach [7]. Dargestellt ist das Verhältnis der effektiven Biege-Eigenfrequenz ν zur Frequenz ν_{Euler} , die man erhält, wenn man den Stab in Eulerischer Näherung betrachtet und vollkommene Einspannung voraussetzt. Die Kurven geben Versuchsergebnisse wieder für die beiden rechts im Bild dargestellten Anordnungen A und B, fassen also die Einflüsse von Schubdeformation, Rotationsträgheit und unvollkommener Einspannung zusammen. Sie wurden teilweise mit finiten Elementen rechnerisch überprüft mit sehr guter Übereinstimmung. Bei den Kurven bedeutet A1 Stab A, erste Schwingungsordnung, A2 Stab A, zweite Schwingungsordnung und analog für B. Die Schwingungsrichtung ist im Bild durch Pfeile angegeben. Bei der ersten Schwingungsordnung ist der Effekt der unvollkommenen Einspannung der größere Anteil. Schubdeformation und Rotationsträgheit tragen dabei zur Größe $1 - (\nu/\nu_{\text{Euler}})$ nur etwa 35 bis 50% bei. Bei der zweiten und vollends bei den höheren Ordnungen ist der Einfluß der Einspannung gering. In einer unveröffentlichten Arbeit erhält *Seippel* [8] für den Einfluß

von Schubdeformation und Rotationsträgheit allein:

$$1. \text{ Ordnung:} \quad 1 - (\nu/\nu_{\text{Euler}}) = 9,7 (i/l)^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq i/l \leq 0,1,$$

$$2. \text{ Ordnung:} \quad 1 - (\nu/\nu_{\text{Euler}}) = 67 (i/l)^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq i/l \leq 0,05.$$

Alle diese Unterlagen gelten für unverjüngte Schaufeln. Für verjüngte werden die Effekte kleiner, vor allem bei den höheren Schwingungsordnungen.

Um eine Vorstellung davon zu geben, in welchen Größenordnungen sich i/l bewegt, seien folgende Angaben gemacht. Bei HD-Dampfturbinen kommen Werte bis 0,1 vor und vereinzelt selbst darüber. In MD-Dampfturbinen bewegt man sich meist zwischen 0,01 und 0,05, während bei sehr schlanken Schaufeln noch kleinere Werte vorkommen. Gedrungene Schaufeln gekühlter Gasturbinen können ebenfalls Werte bis 0,1 erreichen. Beim Axialverdichter bewegt man sich etwa zwischen 0,005 und 0,03, doch treten vereinzelt noch wesentlich höhere Werte auf. Es zeigt sich also, daß die hier besprochenen Effekte praktisch durchaus bedeutsam sind.

Der hier behandelten minimalen Einspannelastizität, die dann gegeben ist, wenn der Stab mit der Fixierung ein Stück bildet, entspricht in der Darstellungsweise von Abschn. 20.5 ein nach Gl. 20.5(21) definierter K -Wert von

$$K = \beta \frac{i}{l} \quad 20.8(7)$$

mit $\beta \approx 1 - 1,1$. Praktisch können sehr viel größere K -Werte auftreten je nach der Nachgiebigkeit der Fußbefestigung. Schaufeln konstanten Querschnittes kann man nach den Ausführungen unter 20.5 mit dem der Konstruktion angepaßten K -Wert behandeln, indem man anschließend noch die oben angegebene Korrektur nach *Seippel* anbringt. Genauer ist folgendes Vorgehen. Man bestimmt mit dem der Konstruktion entsprechenden K den Wert κ_n nach 20.5 und mit diesem nach Gl. 20.5(8) den Verlauf von Y , wobei man für eine der Integrationskonstanten einen willkürlichen Wert setzt und die drei anderen aus den Grenzbedingungen 20.5(22)–(25) gewinnt. Der so bestimmte Y -Verlauf wird als Amplitude in Gl. 20.8(5) eingesetzt und diese unter Berücksichtigung von Gl. 20.8(4) iterativ gelöst.

Belinger und *Schlachter* [9] führen die Untersuchung in sehr allgemeiner Weise durch, indem sie als Grenzbedingungen an der Einspannstelle setzen

$$\left. \begin{aligned} \hat{y}(0) &= \varepsilon i^2 \hat{y}''(0) - \vartheta i^3 \hat{y}'''(0), \\ \hat{y}'(0) &= \beta i \hat{y}''(0) - \varepsilon i^2 \hat{y}'''(0). \end{aligned} \right\} \quad 20.8(8)$$

Aus einer statischen Betrachtung wurde erschlossen $\beta = 1,40$, $\varepsilon = 0,52$, $\vartheta \approx 5$. Dynamisch werden die Verhältnisse richtiger wiedergegeben durch $\beta = 0,85$, $\varepsilon = 0$, $\vartheta = 5$. Der Einfluß von β erweist sich aber als weitaus am größten, so daß man meist gute Resultate erhält, indem man $\beta = 1 - 1,1$ und die anderen Koeffizienten Null setzt.

Auch die Gesetze der *Torsion* komplizieren sich bei sehr gedrungenen Stäben. Es wirkt sich dann aus, daß sich die Profile längs x verschieden stark verwölben, woraus Längsspannungen entstehen, welche die Torsionssteifigkeit erhöhen. Unterlagen zur Berücksichtigung dieser Effekte geben *Kündig* und *Schlachter* [10]; sie lassen sich kurz wie folgt zusammenfassen. Zum gegebenen Schaufelprofil werde nach den Ausführungen unter 20.6 ein entsprechendes elliptisches Profil bestimmt, das die Hauptachsen a und b , Abb. 20.6.2, aufweist. Dann bildet man die Größe

$$\zeta = 0,165 \frac{a}{l} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}. \quad 20.8(9)$$

Für den einseitig eingespannten frei endigenden Stab wird das Verhältnis der wirklichen Torsionseigenfrequenz n -ter Ordnung ν_{en} zum Wert ν_{enE} nach der elementaren Theorie, Gl. 20.6(15),

$$\frac{\nu_{en}}{\nu_{enE}} = \sqrt{1 + 2\zeta + \zeta^2 \left\{ 1 + \left[\frac{\pi}{2} (2n - 1) \right]^2 \right\}}. \tag{20.8(10)}$$

Die effektive Schwingungszahl liegt hier also höher als nach der elementaren Theorie, im Gegensatz zum Falle der Biegeschwingung. — Der Einfluß der Nachgiebigkeit der Fixierung in einem Körper, der mit dem Stab ein Stück bildet, ist relativ gering. Die Konstante K_t nach Gl. 20.6(12) hat etwa den Wert

$$K_t = \frac{\lambda EJ_p}{i_p}, \quad i_p = \sqrt{\frac{J_p}{f}} \tag{20.8(11)}$$

mit $\lambda \approx 1$. Für J_p und f sind bei variablem Querschnitt die Werte des Wurzelquerschnittes einzusetzen.

Ganz allgemein muß aber bemerkt werden, daß die Vorstellung einer reinen Dreh-schwingung im Falle der Schaufel in der Regel an sich schon eine verhältnismäßig grobe Idealisierung darstellt. Die entsprechenden Schwingungsformen haben bei Schaufeln eher den Charakter von Plattenschwingungen. Am ehesten ist die Theorie der Drehschwin-gungen anwendbar auf sehr schlanke, unverdrehte Schaufeln.

20.9 Eigenfrequenzen von Schaufelpaketen und verjüngten Schaufeln

Sobald Schaufeln durch Deckbänder oder Bindedrähte miteinander verbunden sind, muß das durch diese Verbindung gebildete Schaufelpaket als Ganzes betrachtet werden. Verhältnismäßig einfach ist die Behandlung dieses Falles dann, wenn die Schaufelprofile so orientiert sind, daß eine Hauptträgheitsachse parallel zur Drehachse liegt, während die andere tangential gerichtet ist. Dann sind einerseits Schwingungsvorgänge mög-lich, bei denen sich sämtliche Bewegungen in achsnormalen Ebenen abspielen (vgl. Abb. 20.9.1a), andererseits solche, bei denen die Ausschläge senkrecht zu diesen Ebenen stehen (Abb. 20.9.1b). Zwischen beiden Bewegungen besteht keine Kopplung, so daß sie getrennt behandelt werden können. Leider sind allerdings bei der Mehrzahl moderner Schaufelungen diese Bedingungen nicht mit hinreichender Näherung erfüllt. Im allge-meinen komplizierten Falle wird daher heute zur Methode der finiten Elemente gegriffen.

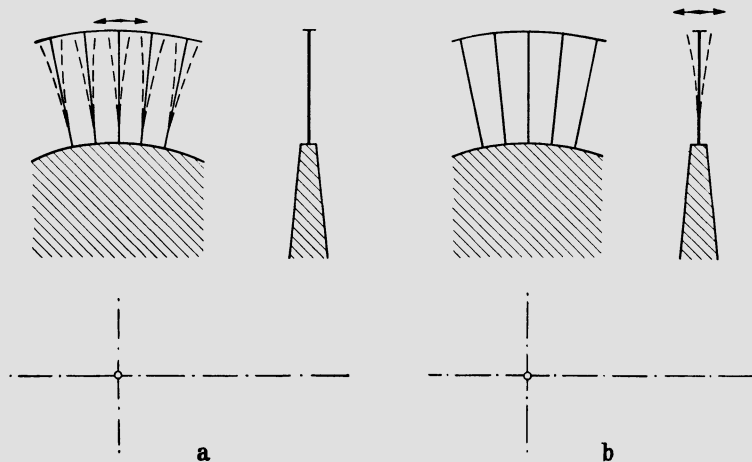


Abb. 20.9.1. Zwei Grundtypen von Paketschwingungen. a) Schwingung in achsnormalen Ebenen; b) Schwin-gung in Meridianebene

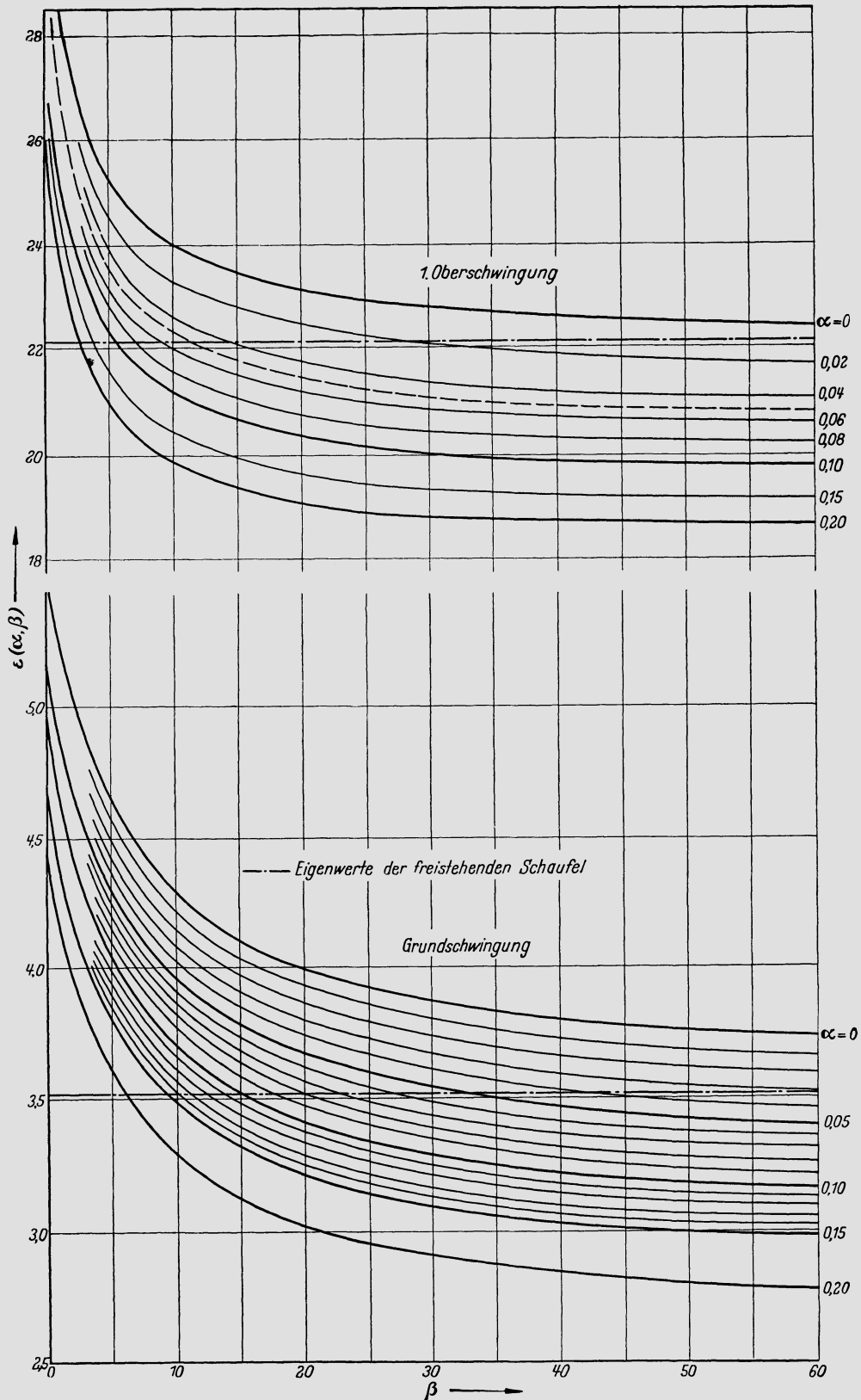


Abb. 20.9.2. Diagramm zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Paketen aus Schaufeln konstanten Querschnittes mit Deckband. Nach [11]

Für die Schwingungen in achsnormalen Ebenen, also nach Abb. 20.9.1a, kann das Eigenwertproblem bei *konstantem Schaufelprofil* nach *Kirchberg* und *Thomas* [11] streng gelöst werden. Die Verbindung zwischen Schaufel und Deckband wird dabei als vollkommen biegeungssteife Ecke betrachtet. Die Biegesteifigkeit des Deckbandes bewirkt eine Erhöhung der Eigenfrequenzen. Das Ergebnis der Untersuchung kann in folgender Weise zusammengefaßt werden. Man setzt

$$\nu_e = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho f}}, \quad 20.9(1)$$

wobei ε für die Grundschiwingung und die erste Oberschiwingung (Schwingungsordnungen 1 und 2) der Abb. 20.9.2 entnommen werden kann. Im Diagramm haben α und β die folgenden Bedeutungen:

$$\alpha \equiv \frac{\rho_a f_a l_a}{\rho f l}, \quad \beta \equiv \frac{EJ}{E_a J_a} \frac{l^*}{l}. \quad 20.9(2)$$

Index d verweist auf das Deckband; die Bezeichnungen sind die gleichen wie sonst in diesem Kapitel verwendet. Es ist l^* die elastisch wirksame Deckbandlänge zwischen zwei Schaufeln. Sie ist üblicherweise kleiner als die Deckbandteilung und hängt von der baulichen Gestaltung ab. — Bezüglich der Axialschiwingung nach Abb. 20.9.1b ist die versteifende Wirkung des Deckbandes vernachlässigbar, sofern die Schaufeln in Phase schwingen. Deshalb genügt es dann, das Deckband einfach als zusätzliche Masse zu betrachten. Auch bei der Tangentialschiwingung überschätzt man im allgemeinen die versteifende Wirkung des Deckbandes, wenn man den Übergang als biegesteife Ecke betrachtet, wie es die Theorie tut. Es wird in [11] folgendes angegeben. Wenn ν' die Eigenfrequenz bei völlig biegesteifer Ecke ist und ν'' diejenige ohne jede Versteifungswirkung, so ist die wahre Frequenz

$$\nu \approx \frac{1}{3} (2\nu' + \nu''). \quad 20.9(3)$$

In [11] ist auch der Fall des *längs der Schaufel variierenden Querschnittes* behandelt, allerdings wieder unter der gleichen einschränkenden Annahme bezüglich der Lage der Hauptträgheitsachsen. Die Lösung des Problems erfolgt energetisch nach dem Verfahren von Ritz. Für die Ergebnisse sei auf die Originalveröffentlichung verwiesen.

Paketschwingungen entstehen bei deckbandlosen Schaufeln, wenn eine Querverbindung durch *Bindedrähte* hergestellt wird, worüber ebenfalls eine Untersuchung von *Kirchberg* und *Thomas* [12] vorliegt. Bei dieser ist vereinfachend die gegenseitige Rückwirkung der Schaufeln aufeinander so behandelt, daß am Ort des Bindedrahtes die Schwingung einen Knotenpunkt besitzt. Diese Punkte werden dann als fest betrachtet, womit die Masse des Bindedrahtes belanglos wird; seine Steifigkeit wird vernachlässigt. Das Problem wird durch Einführung der entsprechenden Grenzbedingungen in die Differentialgleichung gelöst. Abb. 20.9.3 gibt die in Gl. 20.9(1) einzusetzenden ε -Werte für die drei ersten Schwingungsordnungen und für verschiedene geometrische Konfigurationen.

Im Laufe der neueren Entwicklung hat jene Konstruktion an Bedeutung gewonnen, bei der die Schaufelenden in Deckplatten übergehen, die mit der Schaufel ein Stück bilden. Sie stoßen in Umfangsrichtung mehr oder weniger dicht aneinander, doch entsteht kein mehrere Schaufeln mechanisch verbindendes Band. Unter 20.5 sind für diesen Fall bereits die nötigen Unterlagen angegeben worden für konstantes Schaufelprofil. Diese müssen hier noch ergänzt werden durch solche für variables Schaufelprofil. Einschränkend muß dabei vorausgesetzt werden, daß die Schaufeln nur schwach verdreht sein dürfen, so daß es eine brauchbare Näherung ist anzunehmen, die Richtungen der Hauptträgheitsachsen seien längs der Schaufelerstreckung konstant. Sonst aber muß keine einschränkende Voraussetzung über die Richtungen der Hauptträgheitsachsen gemacht werden. Die Nachgiebigkeit der Einspannung wird berücksichtigt. Die nachfolgend gemachten Angaben

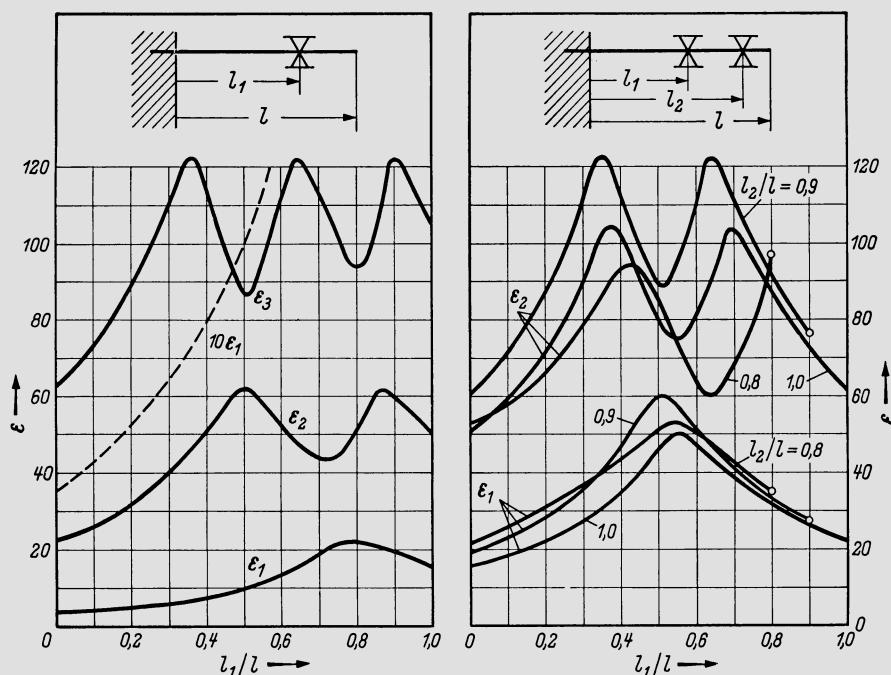


Abb. 20.9.3. Diagramm zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Schaufeln konstanten Querschnittes mit einem oder zwei Bindedrähten. Knotenpunkt am Ort des Bindedrahtes. Nach [12]

fassen die Ergebnisse einer Diplomarbeit von *F. Buck* zusammen. Die Berechnung erfolgte energetisch nach der Methode von *Ritz*.

Deckplattenmasse und Nachgiebigkeit der Einspannung werden durch die Kennwerte α und K nach Gl. 20.5(21) charakterisiert, und es werden die durch die Gln. 20.7(8) definierten dimensionslosen Größen φ , ϑ und ξ benutzt. Dabei sind f_0 und J_0 Querschnitt und Trägheitsmoment an der Einspannstelle. Für den Querschnittsverlauf ist der Ansatz

$$\varphi = 1 - p\xi \quad 20.9(4)$$

gemacht, d.h. es ist lineare Abnahme des Querschnittes angenommen mit p als maßgebendem Koeffizienten; $p = 0,75$ bedeutet z. B., daß der Querschnitt am freien Ende 25% des Wurzelquerschnittes beträgt. Der Verlauf des Trägheitsmomentes wird gegeben durch

$$\vartheta = \varphi^q, \quad 20.9(5)$$

wo q ein für den gegebenen Fall kennzeichnender Exponent ist. Für ein Schaufelblatt konstanter Sehnenlänge mit rechteckigem Profil wäre für die Schwingung entsprechend dem kleineren Trägheitsmoment $q = 2$. Für wirkliche Profile erhält man üblicherweise Werte von der Größenordnung 2,5 bis 3.

Die Berücksichtigung der Trägheit der Deckplatte verlangt eine Verallgemeinerung des Ausdruckes für den Rayleigh-Quotienten gegenüber Gl. 20.7(9). Er lautet jetzt

$$\Omega^2 = \frac{\int_0^1 \vartheta(\xi) u''^2(\xi) d\xi}{\int_0^1 \varphi(\xi) u^2(\xi) d\xi + \alpha u^2(1)}. \quad 20.9(6)$$

Das Zusatzglied $\alpha u^2(1)$ im Nenner repräsentiert den Beitrag der Deckplattenmasse zur

Bewegungsenergie der Schaufel beim Durchgang durch die Mittellage. — Zur Durchführung des Ritzschen Verfahrens werden folgende zwei Funktionen eingeführt:

$$u_1 = \xi + \frac{1}{2K} \xi^2 - \frac{1}{6K} \xi^3, \tag{20.9(7)}$$

$$u_2 = \xi + \frac{1}{2K} \xi^2 - \left(\frac{1}{6K} + 2\right) \xi^3 + \xi^4. \tag{20.9(8)}$$

Diese folgen aus einer Optimierungsüberlegung. Bei vollkommen starrer Einspannung, also $K = 0$, sind diese Gleichungen zu ersetzen durch

$$u_1 = \xi^2 - \frac{1}{3} \xi^3, \quad u_2 = \xi^2 - \frac{7}{3} \xi^3 + \xi^4. \tag{20.9(9)}$$

Mit diesen u_1 und u_2 lassen sich nun nach den Ausführungen unter 20.7 die m_{11} , m_{12} , n_{12} , n_{22} berechnen, wobei der Ausdruck für n_{ij} gemäß dem Zusatzglied $\alpha u^2(1)$ in 20.9(6) sinngemäß zu ergänzen ist. Die Determinantengleichung 20.7(2) geht in die Form

$$\Omega^4(n_{11}n_{22} - n_{12}^2) + \Omega^2(2m_{12}n_{12} - m_{11}n_{22} - m_{22}n_{11}) + (m_{11}m_{22} - m_{12}^2) = 0 \tag{20.9(10)}$$

über, woraus die Ω_1 und Ω_2 entsprechend den ersten beiden Schwingungsordnungen zu berechnen sind. Das Ergebnis ist in Abb. 20.9.4 zusammengefaßt. Es ist

$$v_{en} = \frac{\alpha'_n}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\rho f_0}}, \tag{20.9(11)}$$

mit α'_n für $n = 1$ und 2 aus dem Diagramm. Die ausgezogenen Kurven gelten für $q = 2,5$, die gestrichelten für $q = 3$.

Bei den Ausführungen über Paketschwingungen ist stets angenommen worden, daß alle Schaufeln des Paketes in gleicher Weise schwingen. Es sind aber, wie Abb. 20.9.5

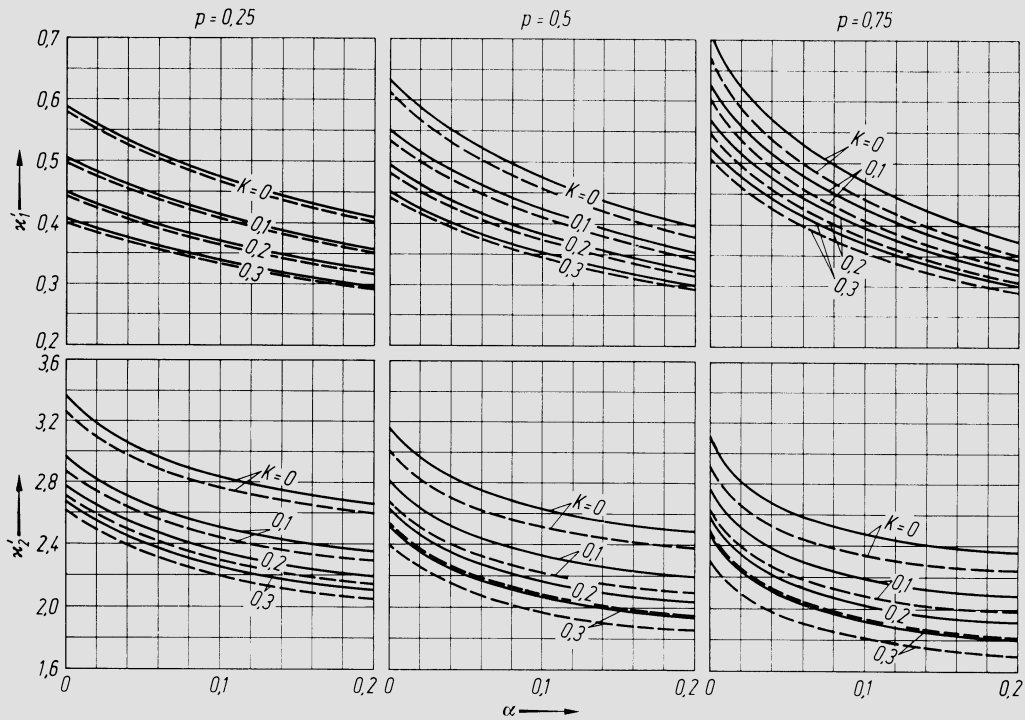


Abb. 20.9.4. Diagramm zur Berechnung der Eigenfrequenzen erster und zweiter Ordnung für verjüngte Schaufeln mit Deckplatten und nachgiebiger Einspannung. Werte α'_n , α , K nach Abschn. 20.5

zeigt, weitere Biegeschwingungen möglich, bei denen dies nicht zutrifft, und zwar sind jeder Ordnung n weitere $z_p - 1$ solche Schwingungsformen zugeordnet, wenn z_p die Anzahl Schaufeln des Paketes ist. Diese Schwingungsformen mögen mit

$$\begin{aligned}
 &1; 1 \quad 1; 2 \quad 1; 3 \quad \dots \quad 1; z_p - 1, \\
 &2; 1 \quad 2; 2 \quad 2; 3 \quad \dots \quad 2; z_p - 1, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

bezeichnet werden. Abb. 20.9.5 stellt die Schwingungen mit vorausgehender Ordnungszahl 1 dar. Sie haben mit der Grundform erster Ordnung die Eigenschaft gemein, daß sie zwischen dem unteren und dem oberen Schaufelende keine weiteren Knotenpunkte aufweisen. Ihre Schwingungszahlen liegen relativ nahe beieinander, und zwar nach [13, 14] etwa zwischen dem 4,4- und 5fachen der Grundschwingung. Schwingungen mit vorausgehenden Ordnungszahlen 2 und mehr haben derart hohe Frequenzen, daß sie meist nicht mehr in Frage kommen.

Während bei den Formen nach Abb. 20.9.5 tangentielle Bewegung vorausgesetzt ist, zeigt Abb. 20.9.6 Schwingungen mit axialen Ausschlägen und zwar wiederum eine Gruppe

$$1; 1 \quad 1; 2 \quad \dots \quad 1; z_p - 1.$$

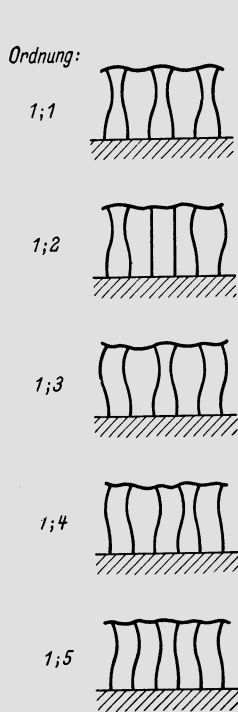


Abb. 20.9.5. Paketschwingungen in achsnormaler Ebene. Nach Caruso und Wundt [15]

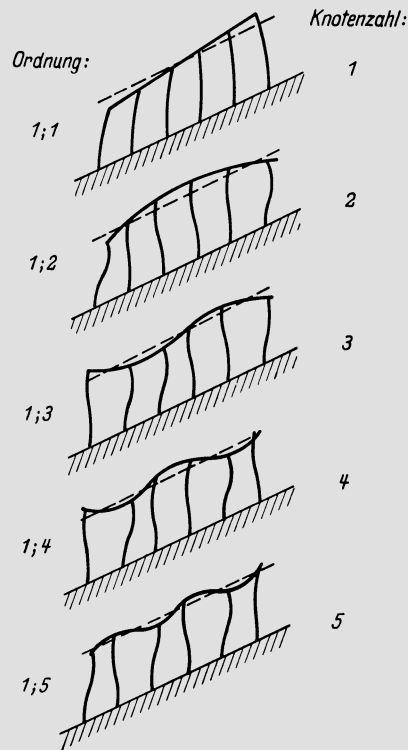


Abb. 20.9.6. Paketschwingungen senkrecht zur achsnormalen Ebene. Nach Caruso und Wundt [15]

Über solche Schwingungsformen vgl. [15]. Für die Axialschwingung 1;1 wurde gefunden $\nu_{1;1} \approx 1,3\nu_1$. Die übrigen Frequenzen liegen sehr viel höher, in einem bei [15] angegebenen Beispiel 3,2 bis 3,65 mal höher als $\nu_{1;1}$.

Die allgemeine Behandlung von Paketschwingungen, die auch alle diese zusätzlichen Schwingungsformen mitumfaßt, ist heute grundsätzlich möglich nach der Methode der finiten Elemente, allerdings mit außerordentlich großem Rechenaufwand. Oft wird das experimentelle Vorgehen hier zweckmäßiger sein.

20.10 Der Einfluß der Fliehkraft auf die Eigenfrequenzen

Bei Laufschaufeln findet durch den Einfluß der Fliehkraft eine Verschiebung der Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen statt, der in den vorangegangenen Abschnitten nicht berücksichtigt worden ist.

Wir betrachten zunächst die freistehende Schaufel (vgl. Abb. 20.10.1). Dabei sei zuerst angenommen, die Schaufel schwinde in einer Meridianebene. Ein Massenelement dm liegt im voll ausgebogenen Zustand um die Strecke z weiter innen als beim Durchgang durch die Mittellage. Wenn nun das Teilchen beim Zurückschwingen die Radialverschiebung z erfährt, leistet die Fliehkraft an ihm eine gewisse Arbeit, die zur elastischen Energie des ausgebogenen Stabes hinzukommt und einen schnelleren Durchgang durch die Mittellage bewirkt. Mit dem in Abb. 20.10.1 eingetragenen Winkel ν ergibt sich geometrisch und unter Berücksichtigung bekannter elementarer Relationen

$$z = \int_0^x (1 - \cos \nu) dx^* \approx \frac{1}{2} \int_0^x \sin^2 \nu dx^* \approx \frac{1}{2} \int_0^x \tan^2 \nu dx^* = \frac{1}{2} \int_0^x Y'^2(x^*) dx^*, \quad 20.10(1)$$

wo $Y' = dY/dx^*$. Schwingt die Schaufel von der Grenzlage in die Mittellage zurück, so wird am Massenelement dm die Arbeit

$$dA = z dm r \omega_r^2 = z \rho f dx (r_N + x) \omega_r^2 = \frac{\rho}{2} \omega_r^2 f (r_N + x) dx \int_0^x Y'^2(x^*) dx^* \quad 20.10(2)$$

geleistet, wobei f der Schaufelquerschnitt, r_N der Nabenradius und ω_r die Winkelgeschwindigkeit des Rotors ist. Für die ganze Schaufel wird also die Fliehkraftarbeit

$$A = \frac{\rho}{2} \omega_r^2 \int_0^1 f(x) (r_N + x) \int_0^x Y'^2(x^*) dx^* dx. \quad 20.10(3)$$

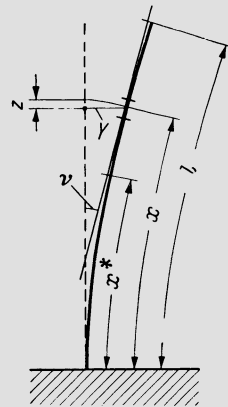


Abb. 20.10.1. Zur Herleitung des Einflusses der Fliehkraft auf die Eigenfrequenzen von Schaufeln

Wir führen wiederum dimensionslose Koordinaten $\xi = x/l$, $\xi^* = x^*/l$ ein, bezeichnen mit dem Akzent die Ableitung nach ξ bzw. ξ^* und setzen weiter $f = f_0 \varphi(\xi)$. Für Y schreiben wir u , wobei die beiden vorerst als identisch betrachtet werden können. Dann ist

$$A = \frac{\rho}{2} \omega_r^2 f_0 l \int_0^1 \varphi(\xi) \left(\frac{r_N}{l} + \xi \right) \int_0^\xi u'^2(\xi^*) d\xi^* d\xi. \quad 20.10(4)$$

Die gesamte potentielle Energie des voll ausgebogenen Stabes ist also, wenn wir für den elastischen Anteil den aus Gl. 20.7(7) folgenden Ausdruck heranziehen

$$\Psi = \frac{1}{2} \left[\frac{EJ_0}{l^3} \int_0^1 \vartheta(\xi) u''^2(\xi) d\xi + \rho \omega_r^2 f_0 l \int_0^1 \varphi(\xi) \left(\frac{r_N}{l} + \xi \right) \int_0^\xi u'^2(\xi^*) d\xi^* d\xi \right]. \quad 20.10(5)$$

Die Bildung des Rayleigh-Quotienten führt also für die Kreisfrequenz der Eigenschwingung auf

$$\omega_e^2 = \frac{EJ_0}{\rho f_0 l^4} \frac{\int_0^1 \partial u''^2 d\xi}{\int_0^1 \varphi u^2 d\xi} + \omega_r^2 \frac{\int_0^1 \varphi \left(\frac{r_N}{l} + \xi \right) \int_0^\xi u'^2 d\xi^* d\xi}{\int_0^1 \varphi u^2 d\xi}. \quad 20.10(6)$$

Da hier u im Zähler und Nenner auftritt, kann es ebensogut als nicht identisch mit Y , sondern ihm proportional und dimensionslos betrachtet werden. Der zweite Summand in Gl. 20.10(6) ist offensichtlich nichts anderes als die Vergrößerung, die ω_e^2 durch den Einfluß der Fliehkraft erfährt. Bevor wir die Theorie weiterentwickeln, wollen wir noch auf die Ausgangsvoraussetzungen zurückkommen, wonach die Schaufel in einer Meridianebene schwingt. Wenn wir nämlich die Annahme machen, die Schaufel schwingt in einer achsnormalen Ebene, so entsteht ein etwas anderes Ergebnis, was anhand der Abb. 20.10.2 zu erkennen ist. Die jetzt maßgebende Verschiebung des Massenelementes ist nämlich $(z - \sigma)$, wo σ die Pfeilhöhe des Kreisbogens mit dem Radius $r = r_N + x$ und der halben Sehne Y ist. Unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung ist

$$\sigma = \frac{Y^2}{2(r_N + x)}, \quad 20.10(7)$$

womit die folgende Relation an die Stelle der Gl. 20.10(2) tritt:

$$dA = (z - \sigma) dm r \omega_r^2 = \frac{\rho}{2} \omega_r^2 f_0 \left[(r_N + x) \int_0^x Y'^2(x^*) dx^* - Y^2 \right] dx. \quad 20.10(2')$$

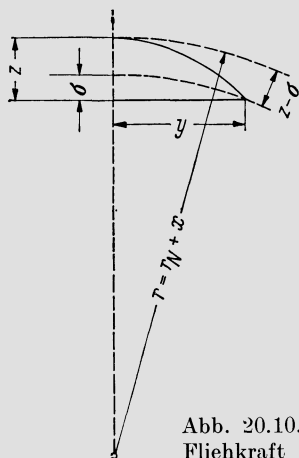


Abb. 20.10.2. Zur Berechnung des Einflusses der Fliehkraft auf die Eigenfrequenzen von Schaufeln

Dementsprechend geht Gl. 20.10(4) über in

$$A = \frac{\rho}{2} \omega_r^2 f_0 l \left[\int_0^1 \varphi(\xi) \left(\frac{r_N}{l} + \xi \right) \int_0^\xi u'^2(\xi^*) d\xi^* d\xi - \int_0^1 \varphi(\xi) u^2(\xi) d\xi \right]. \quad 20.10(4')$$

Bei der Wiederholung der Operation, die schließlich zur Gl. 20.10(6) führte, nimmt hier das mit dem Minuszeichen versehene Glied den Wert 1 an, da ja gerade durch diesen Ausdruck dividiert wird, so daß das Zusatzglied in Gl. 20.10(6), das den Einfluß der Fliehkraft wiedergibt, nun

$$\omega_r^2 \left[\frac{\int_0^1 \varphi \left(\frac{r_N}{l} + \xi \right) \int_0^\xi u'^2 d\xi^* d\xi}{\int_0^1 \varphi u^2 d\xi} - 1 \right]$$

lautet.

Damit sind zwei Extremfälle der Schwingungsrichtung behandelt, und es ist sogleich einzusehen, welches der korrekte Ausdruck für das Zusatzglied sein wird, wenn die Schaufel in einer Ebene schwingt, die mit einer achsnormalen Ebene den Winkel β bildet (also β der Winkel zwischen der Richtung des Schwingungsausschlages und der Umfangsrichtung). Offenbar tritt dann $\cos^2 \beta$ an die Stelle des Wertes 1. Das Ergebnis der Untersuchung läßt sich also in folgender Weise darstellen. Es seien ω_e^* und ν_e^* die Kreisfrequenz bzw. die Frequenz der Eigenschwingung ohne Fliehkraftereinfluß. Dann ist

$$\omega_e^2 = \omega_e^{*2} + \Delta(\omega_e^2),$$

oder wenn wir direkt zu den Frequenzen übergehen auch

$$\underline{\nu_e^2 = \nu_e^{*2} + \Delta(\nu_e^2)}, \quad 20.10(8)$$

wobei

$$\Delta(\nu_e^2) = n_s^2 \left[\frac{\int_0^1 \left(\frac{r_N}{l} + \xi \right) \varphi(\xi) \int_0^\xi u'^2(\xi^*) d\xi^* d\xi}{\int_0^1 \varphi(\xi) u^2(\xi) d\xi} - \cos^2 \beta \right]. \quad 20.10(9)$$

Hier ist n_s die sekundliche Drehzahl. Die Rückwirkung der Fliehkraft auf die Eigenfrequenz ist damit für die freistehende Schaufel berechenbar, und zwar an sich für jede beliebige Schwingungsordnung, wenn nur der entsprechende u -Verlauf eingesetzt wird.

Für den praktischen Gebrauch kann Gl. 20.10(9) noch durch eine etwas einfachere Beziehung ersetzt werden, denn $\Delta(\nu_e^2)$ ist eine Korrektur, die an ν_e^{*2} anzubringen ist und nur einen Bruchteil dieses letzteren Wertes ausmacht. Wenn also z. B. $\Delta(\nu_e^2)$ nur auf 10% genau bestimmt wird, so macht der Fehler in ν_e im allgemeinen kaum 1% aus. So kann man ohne zu großen Fehler $\varphi(\xi)$ aus Gl. 20.10(9) weglassen, da es in Zähler und Nenner auftritt und daher das Ergebnis nicht stark beeinflußt. Dies bedeutet, daß der Fliehkraftereinfluß bei der verjüngten Schaufel nicht wesentlich anders ist als bei der prismatischen, was die genauere Rechnung (nach Gl. 20.10(9)) auch bestätigt. Ferner kann für den Ausdruck $(r_N/l + \xi)$ näherungsweise auch ein konstanter Mittelwert eingesetzt werden. Als solchen wählen wir, da ξ von 0 bis 1 läuft,

$$\frac{r_N}{l} + \bar{\xi} = \frac{r_N}{l} + \frac{3}{4}. \quad 20.10(10)$$

Als mittlerer ξ -Wert ist hier also nicht $1/2$ eingesetzt, wie es zunächst naheliegender schiene, denn die Funktion

$$\int_0^\xi u'^2(\xi^*) d\xi^*$$

nimmt mit wachsendem ξ immer größere Werte an — und zwar progressiv —, weshalb der Bereich großer ξ für den Wert des Zählers von Gl. 20.10(9) ausschlaggebend ist.

Gemäß Gln. 20.5(10) und (11) kann für u gesetzt werden

$$u = C_1 (\sin \kappa \xi - \text{Sin } \kappa \xi) + (\cos \kappa \xi - \text{Cos } \kappa \xi), \quad 20.10(11)$$

$$C_1 = - \frac{\cos \kappa + \text{Cos } \kappa}{\sin \kappa - \text{Sin } \kappa}. \quad 20.10(12)$$

Die willkürliche Setzung $C_2 = 1$, die hier erfolgt ist, ist in Anbetracht der Bedeutung von u ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit zulässig. Wenn nun hier die unter 20.5 angegebenen κ -Werte der verschiedenen Ordnungen eingesetzt werden, ist die Funktion u jeweils eindeutig bestimmt, und in der aus Gl. 20.10(9) folgenden vereinfachten Gleichung

$$\Delta(\nu_e^2) = n_s^2 \left[\left(\frac{r_N}{l} + \frac{3}{4} \right) \frac{\int_0^1 \int_0^\xi u'^2(\xi^*) d\xi^* d\xi}{\int_0^1 u^2(\xi) d\xi} - \cos^2 \beta \right] \quad 20.10(13)$$

lassen sich alle Integrale ausrechnen. Für die Schwingung erster Ordnung läßt sich allerdings $u(\xi)$ noch einfacher und mit großer Genauigkeit durch

$$u = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{12} \quad 20.10(14)$$

ersetzen, wobei $u'' = (1 - \xi)^2$. So erhält man schließlich für den Fliehkrafteinfluß bei der freistehenden Schaufel für die verschiedenen Schwingungsordnungen n

$$\Delta(\nu_{en}^2) = n_s^2 \left[\left(\frac{r_N}{l} + \frac{3}{4} \right) k_n - \cos^2 \beta \right], \quad 20.10(15)$$

wobei k_n aus Zahlentafel 20.10.1 zu entnehmen ist, und zwar gilt für freistehende Schaufeln, wie auch für den Fall der Schaufel mit einem Deckband ohne Biegesteifigkeit die Kolonne $\lambda = 0$.

Zahlentafel 20.10.1

	k_n		δ_n		ν_n	
	$\lambda = 0$	$\lambda = \infty$	$\lambda = 0$	$\lambda = \infty$	$\lambda = 0$	$\lambda = \infty$
$n = 1$	1,61	1,645	4,53	3,29	4,00	2,27
$n = 2$	7,05	6,58	27,8	13,17	4,00	2,00
$n = 3$	16,70	14,8	41,8	29,6	4,00	2,00

Es ist beachtenswert, daß der Fliehkrafteinfluß durch ein additives Zusatzglied berücksichtigt werden kann. Dies gilt auch, wenn weiterhin ein Deckband beigefügt wird. Auch dieses erleidet beim Schwingungsvorgang Radialverschiebungen, wodurch im Ausdruck für Ψ ein zusätzlicher, vom Deckband herrührender Arbeitsbetrag hinzukommt. Dieser Arbeitsbetrag kann in Analogie zu den oben angeführten Überlegungen aufgefunden werden.

Er ist, wenn wir sogleich den Fall eines beliebigen Winkels β betrachten, gegeben durch

$$\begin{aligned} A_a &= m_a r_a \omega_r^2 [z(l) - \sigma(l)] = m_a r_a \omega_r^2 \left[z(l) - \frac{Y^2(l)}{2r_a} \cos^2 \beta \right] \\ &= \frac{\rho f_a t r_a \omega_r^2}{2} \left[\int_0^1 Y'^2(x) dx - \frac{Y^2(l)}{r_a} \cos^2 \beta \right] \\ &= \frac{\rho f_a t r_a \omega_r^2}{2l} \left[\int_0^1 u'^2(\xi) d\xi - \frac{l}{r_a} u^2(1) \cos^2 \beta \right], \end{aligned} \quad 20.10(16)$$

wobei $m_a = \rho f_a t$ die Deckbandmasse und r_a der Deckbandradius ist und t die Teilung in r_a . Ebenso wie früher ist $u' = du/d\xi$. Die Verschiebung der Eigenfrequenz durch den Fliehkrafteinfluß auf das Deckband ergibt sich hieraus zu

$$\Delta_a(\nu_e^2) = n_s^2 \frac{f_a t r_a}{f_0 l^2} \left[\frac{\int_0^1 u'^2(\xi) d\xi}{\int_0^1 \varphi(\xi) u^2(\xi) d\xi} - \frac{l}{r_a} \frac{u^2(1) \cos^2 \beta}{\int_0^1 \varphi(\xi) u^2(\xi) d\xi} \right]. \quad 20.10(17)$$

Meistens kann auch hier wieder vereinfacht werden, indem man $\varphi(\xi)$ durch einen geeigneten Mittelwert ersetzt. Da u^2 namentlich in den äußeren Partien große Werte annimmt,

sei wieder empfohlen, φ in $\xi = 3/4$ als Mittelwert zu benutzen, was aber je nach der Schwingungsform etwas geändert werden kann. Für den dort erscheinenden Querschnitt setzen wir

$$\bar{f} = f_0 \varphi \left(\frac{3}{4} \right) \quad 20.10(18)$$

und erhalten so

$$\Delta_d(v_e^2) = n_s^2 \frac{f_d t r_d}{\bar{f} l^2} \left[\frac{\int_0^1 u'^2(\xi) d\xi}{\int_0^1 u^2(\xi) d\xi} - \frac{l}{r_d} \frac{u^2(1) \cos^2 \beta}{\int_0^1 u^2(\xi) d\xi} \right]. \quad 20.10(19)$$

Hier sind wieder für $u(\xi)$ Approximationen einzusetzen, die den betrachteten Schwingungsformen angepaßt sind, womit das Problem gelöst ist.

So erhalten wir für die Fliehkraftkorrektur, die vom Deckband herrührt, allgemein

$$\underline{\Delta_d(v_{en}^2)} = n_s^2 \frac{f_d t r_d}{\bar{f} l^2} \left[\delta_n - \gamma_n \frac{l}{r_d} \cos^2 \beta \right], \quad 20.10(20)$$

wobei δ_n und γ_n für die Ordnungen $n = 1 \dots 3$ aus Zahlentafel 20.10.1 zu entnehmen sind.

Die Größe $\lambda = 12J_0 J_d l / J^2(1) l^*$ kennzeichnet die Biegesteifigkeit des Deckbandes. $\lambda = 0$ entspricht dem Deckband ohne jede Biegesteifigkeit, das z. B. verwirklicht ist, wenn es aus einzelnen, nicht zusammenhängenden Deckplatten besteht oder wenn für die betreffende Schwingungsrichtung die Deckbandsteifigkeit nicht zur Wirkung kommt. $\lambda = \infty$ entspricht demgegenüber dem Grenzfall des unendlich biegesteifen Deckbandes. Wie Zahlentafel 20.10.1 zeigt, liegen diese beiden Extremfälle so nahe beieinander, daß die Angabe der beiden Grenzwerte für praktische Bedürfnisse genügt. Auch der Fliehkrafteinfluß auf die Schaufel selbst ist bei Vorhandensein und bei voller Wirksamkeit eines vollkommen starren Deckbandes etwas anders, wie die Werte k_n unter $\lambda = \infty$ zeigen. Für die Schaufelung mit Deckband erweitert sich Gl. 20.10(8) also allgemein zu

$$\underline{v_{en}^2} = v_{en}^{*2} + \Delta(v_{en}^2) + \Delta_d(v_{en}^2). \quad 20.10(21)$$

Für Biegeschwingungen ist damit der Einfluß der Fliehkraft hinreichend genau erfaßt. Für Drehschwingungen würde eine völlig exakte Theorie ebenfalls einen gewissen Fliehkrafteinfluß liefern, denn der verdrehte Stab ist etwas kürzer als der völlig entspannte. Der Effekt ist aber sehr klein und daher technisch belanglos.

20.11 Schwingungen stark verwundener Schaufeln

Wenn eine Schaufel stark verwunden ist, werden Koppelleffekte zwischen verschiedenen Schwingungsformen fühlbar. Die Berechnung der Eigenfrequenzen führt dann auf einen sehr umfangreichen mathematischen Formalismus, der aber dank der elektronischen Rechenmaschine für die praktische Rechnung verwendbar geworden ist. In diesem Abschnitt geben wir ein Berechnungsverfahren von *Montoya* [16] an. Für die genaue Herleitung verweisen wir auf die Originalarbeit und stellen die Theorie hier nur soweit dar, daß sie verständlich wird. Dazu muß zuerst der Begriff des Schubmittelpunktes oder Querkraftmittelpunktes eingeführt werden.

In einem achsnormalen Schnitt eines Stabes (Abb. 20.11.1) bestehe eine gewisse Verteilung der Schubspannungen τ . Diese Schubspannungsverteilung ist äquivalent einer Kraft P , deren Betrag, Richtung und Angriffslinie a festliegen. Durch dieses P erfährt der Querschnitt im allgemeinen eine Torsionsbeanspruchung, was sich in einer entspre-

chenden Deformation (Verdrillung) des Stabes äußert. Es gibt eine und nur eine zu a parallele Linie a' , welche die Eigenschaft hat, daß keinerlei Torsionsbeanspruchung entsteht, wenn eine Kraft gerade sie zur Angriffslinie hat. Das von P ausgeübte Torsionsmoment ist demnach hP (vgl. Abb. 20.11.1). — Wäre die gegebene Schubspannungsverteilung gerade die, welche der reinen Torsion entspricht, so läge der Grenzfall $P \rightarrow 0$, $h \rightarrow \infty$ vor. — Nun möge die gleiche Überlegung für eine zweite Schubspannungsverteilung durchgeführt werden, die auf eine anders gerichtete Resultierende führt. Auch für jene Richtung gibt es eine Gerade b' derart, daß kein Torsionsmoment entsteht, wenn die Kraft gerade sie zur Angriffslinie hat. Die Geraden a' und b' schneiden sich in einem Punkt T (Abb. 20.11.1). Da diese Überlegungen aber für beliebige Richtungen durchführbar sind, folgt: Eine in der Querschnittsebene liegende Kraft erzeugt dann und nur dann kein Torsionsmoment, wenn ihre Angriffslinie durch den Punkt T geht, den wir Schubmittelpunkt oder Querkraftmittelpunkt nennen. Er ist im allgemeinen nicht identisch mit dem Schwerpunkt S . Hat der Querschnitt eine Symmetrieachse, so liegt er auf dieser; hat er zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen, so liegt er im Schnittpunkt beider und ist dann zugleich der Schwerpunkt. Das Auffinden von T für eine gegebene Geometrie des Querschnittes gelingt im allgemeinen nicht durch eine elementare Formel, sondern verlangt eine feinere Untersuchung, vgl. z. B. *Biezeno/Grammel* [1].

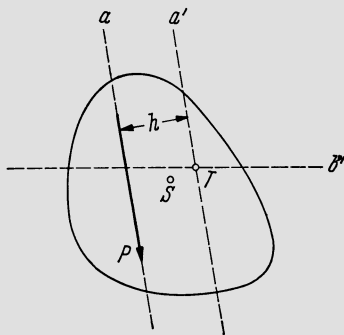


Abb. 20.11.1. Zur Definition des Schubmittelpunktes

In der Darstellung und in der Wahl der Symbole halten wir uns in diesem Abschnitt in der Hauptsache an die Originalarbeit [16]. Abb. 20.11.2 zeigt das Koordinatensystem: x ist axial stromaufwärts gerichtet, y weist in Richtung der Radbewegung, z radial nach außen. Es ist vorausgesetzt, daß die Schwerpunkte der sämtlichen zur z -Achse normalen Schaufelschnitte auf der z -Achse liegen. Die Schaufel wird weiter als schlank vorausgesetzt, so daß sie als Stab betrachtet werden kann und die Krümmung der Verbindungslinien der Schubmittelpunkte vernachlässigbar ist. In jedem Schaufelschnitt haben die Hauptträgheitsachsen eine Lage, die durch den Winkel φ festgelegt ist, und die Verwindung der Schaufel wird dargestellt durch die Funktion $\varphi(z)$. Der örtliche Verwindungsparameter an einer Stelle z ist definiert durch

$$\vartheta \equiv \frac{d\varphi}{dz}. \quad 20.11(1)$$

Im betrachteten Schnitt seien x_T , y_T die Koordinaten des Schubmittelpunktes T (der Schwerpunkt hat die Koordinaten $0,0$). Dann setzen wir

$$\bar{x} = x - x_T, \quad \bar{y} = y - y_T. \quad 20.11(2)$$

Weiter sei df das Flächenelement des Querschnittes. Für die mathematische Formulierung

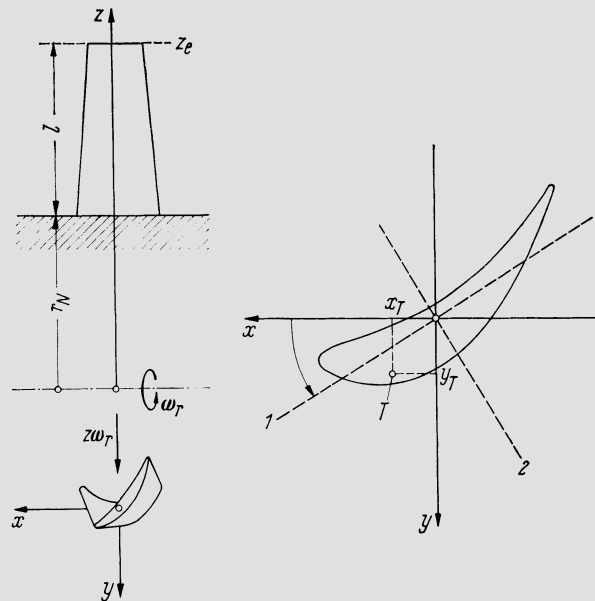


Abb. 20.11.2. Festlegung der Bezeichnungen zur Theorie von *Montoya* [16] zur Berechnung der Schwingungen stark verwundener Schaufeln

benötigen wir die folgenden Trägheitsmomente und höheren Momente:

$$J_{Gx} \equiv \int_f y^2 df, \quad J_{Gy} \equiv \int_f x^2 df, \quad J_{Gxy} \equiv \int_f xy df, \quad 20.11(3)$$

$$J_{Tx} \equiv \int_f \bar{y}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) df, \quad 20.11(4)$$

$$J_{Ty} \equiv \int_f \bar{x}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) df, \quad 20.11(5)$$

$$J_T \equiv \int_f (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2 df, \quad 20.11(6)$$

$$J_{TP} \equiv \int_f \overline{TP}^2 df. \quad 20.11(7)$$

J_{TP} ist das auf den Schubmittelpunkt bezogene polare Trägheitsmoment, denn \overline{TP} ist der Abstand zwischen dem Schubmittelpunkt T und dem laufenden Punkt P . — Weiter treten in den Gleichungen als Kopplungskoeffizienten folgende Größen auf:

$$J_{\bar{x}} \equiv -y_T J_{TP} - J_{Tx}, \quad 20.11(8)$$

$$J_{\bar{y}} \equiv -x_T J_{TP} - J_{Ty}, \quad 20.11(9)$$

$$J \equiv J_T - \frac{J_{TP}^2}{f}. \quad 20.11(10)$$

Ist ω_r die Winkelgeschwindigkeit des Läufers, so ist

$$\sigma = \frac{v\omega_r^2}{f} \quad \text{mit} \quad v \equiv \int_z^{z_e} \varrho r f dz \quad 20.11(11)$$

die fliehkraftbedingte Normalspannung in dem betrachteten, in z gelegenen Schaufelschnitt, wobei die Koordinate z_e das äußere (freie) Schaufelende kennzeichnet.

Da die Theorie lediglich zur Bestimmung der Eigenfrequenzen dient, stellen wir nur die (homogenen) Bewegungsgleichungen der ungedämpften Eigenschwingung auf. Dann darf aber ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß die Lageabweichungen sämtlicher Punkte gegenüber ihrer Neutrallage stets in Phase seien. In einem beliebigen Zeitpunkt t sind die Auslenkungen des Schwerpunktes des Profils gegenüber seiner neutralen Lage δx und δy ; gleichzeitig ist es um einen Winkel $\delta\varphi$ aus seiner neutralen Lage gedreht. Nach dem eben Gesagten läßt sich dann der Schwingungsvorgang beschreiben durch

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= X \cos \omega t, \\ \delta y &= Y \cos \omega t, \\ \delta\varphi &= \Phi \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad 20.11(12)$$

womit die Amplitudenfunktionen X , Y und Φ eingeführt werden, die nur von z abhängen. Die entsprechenden Auslenkungen u und v des Schubmittelpunktes sind offenbar

$$\left. \begin{aligned} u &= X - y_T \Phi, \\ v &= Y + x_T \Phi. \end{aligned} \right\} \quad 20.11(13)$$

Damit können nun die Gleichungen, welche den Vorgang der Eigenschwingung beherrschen, angegeben werden. Die Amplitudenwerte M_x und M_y der beiden Komponenten des Biegemomentes und der Amplitudenwert M_z des Torsionsmomentes hängen mit den die Verformung beschreibenden Größen wie folgt zusammen:

$$M_x = -E(J_{G_{xy}}u'' - J_{G_x}v'') - E\partial J_x \Phi', \quad 20.11(14)$$

$$M_y = +E(J_{G_y}u'' - J_{G_{xy}}v'') + E\partial J_y \Phi', \quad 20.11(15)$$

$$M_z = (GJ_T + \sigma J_{TP} + E\partial^2 J) \Phi' + E\partial(J_y u'' + J_x v''). \quad 20.11(16)$$

Durch die Akzente sind hier Ableitungen nach z angedeutet. E ist der Elastizitätsmodul, G der Schubmodul. — Das System der Bewegungsgleichungen schreibt sich schließlich

$$-\frac{d^2 M_y}{dy^2} + \frac{d}{dz} \left(\nu \omega_r^2 \frac{dX}{dz} \right) + \varrho f \omega^2 X = 0, \quad 20.11(17)$$

$$+\frac{d^2 M_x}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left(\nu \omega_r^2 \frac{dY}{dz} \right) + \varrho f (\omega^2 + \omega_r^2) Y = 0, \quad 20.11(18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[M_x + \nu \omega_r^2 \left(\frac{dX}{dz} y_T - \frac{dY}{dz} x_T \right) \right] + \nu \omega_r^2 \left(\frac{dY}{dz} \frac{dx_T}{dz} - \frac{dX}{dz} \frac{dy_T}{dz} \right) + \\ + \varrho f \omega^2 \left(u y_T - v x_T + \frac{J_{TP}}{f} \Phi \right) + \varrho f \omega_r^2 \left(\frac{J_{G_y} - J_{G_x}}{f} \Phi - Y x_T \right) = 0. \end{aligned} \quad 20.11(19)$$

Die Gln. 20.11(14) bis (19) beschreiben den Vorgang vollständig, sobald noch die besonderen Grenzbedingungen des Problems beigefügt werden. Die numerische Integration verlangt eine formale Umgestaltung dieses Gleichungssystems derart, daß nur erste Ableitungen auftreten. Es erweist sich dabei als zweckmäßig, gleichzeitig zur dimensionslosen Darstellung überzugehen. Wir bezeichnen mit J_0 irgendein ausgezeichnetes Trägheitsmoment, z. B. das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente des Querschnittes an der

Schaufelwurzel. Darum führen wir folgende Größen ein:

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha &\equiv \frac{J_0 J_{Gx}}{J_{Gx} J_{Gy} - J_{Gxy}^2}, & \beta &\equiv \frac{J_0 J_{Gy}}{J_{Gx} J_{Gy} - J_{Gxy}^2}, \\
 \gamma &\equiv \frac{J_0 J_{Gxy}}{J_{Gx} J_{Gy} - J_{Gxy}^2}, & \varkappa &\equiv \frac{J_{TP}}{l^2 f}, \\
 \lambda &\equiv \frac{J_{Gy} - J_{Gx}}{l^2 f}, & \varepsilon &\equiv \frac{G J_T}{E J_0}, \\
 \xi &\equiv \frac{x_T}{l}, & \eta &\equiv \frac{y_T}{l}, \\
 \delta &\equiv \frac{l^2}{E J_0} \nu, & \mu &\equiv \frac{l^4}{E J_0} \varrho f, \\
 \vartheta_1 &\equiv \frac{\vartheta}{J_0} (\gamma J_{\bar{x}} - \alpha J_{\bar{y}}), & \vartheta_2 &\equiv \frac{\vartheta}{J_0} (\gamma J_{\bar{y}} - \beta J_{\bar{x}}), \\
 \vartheta_3 &\equiv \frac{\vartheta}{J_0} (\vartheta J + \vartheta_1 J_{\bar{y}} + \vartheta_2 J_{\bar{x}}).
 \end{aligned} \right\} 20.11(20)$$

Hier ist l die Schauffellänge. Bis auf δ und μ , welche die Dimensionen s^2 haben, sind alle diese Größen dimensionslos. Weiter setzen wir mit $Z \equiv (z - r_N)/l$

$$\left. \begin{aligned}
 U &\equiv \frac{u}{l}, & V &\equiv \frac{v}{l}, & K &\equiv \frac{dU}{dZ}, & L &\equiv \frac{dV}{dZ}, \\
 M &\equiv \frac{l M_x}{E J_0}, & N &\equiv \frac{l M_y}{E J_0}, & R &\equiv -\frac{dN}{dZ} + \delta \omega_r^2 \frac{dX}{dz}, \\
 S &\equiv \frac{dM}{dZ} + \delta \omega_r^2 \frac{dY}{dz}, & F &\equiv \Phi, \\
 T &\equiv \frac{l M_z}{E J_0} + \delta \omega_r^2 \left(\frac{dX}{dz} \eta - \frac{dY}{dz} \xi \right).
 \end{aligned} \right\} 20.11(21)$$

Hier, wie im nachfolgenden Gleichungssystem, bedeuten die Akzente Ableitungen nach der dimensionslosen Koordinate Z . — Mit diesen Setzungen läßt sich unser Gleichungssystem in die folgende Form bringen:

$$\left. \begin{aligned}
 U' &= K, \\
 V' &= L, \\
 K' &= \gamma M + \alpha N + \vartheta_1 F', \\
 L' &= -\beta M - \gamma N + \vartheta_2 F', \\
 M' &= S - \delta \omega_r^2 (L - F' \xi - F \xi'), \\
 N' &= -R + \delta \omega_r^2 (K + F' \eta + F \eta'), \\
 R &= -\mu \omega^2 (U + F \eta), \\
 S' &= -\mu (\omega^2 + \omega_r^2) (V - F \xi), \\
 F' &= \frac{T - \delta \omega_r^2 [K \eta - L \xi + F(\xi \xi' + \eta \eta')] - M \vartheta_2 - N \vartheta_1}{\varepsilon + \delta \omega_r^2 (\varkappa + \xi^2 + \eta^2) + \vartheta_3}, \\
 T' &= \mu \omega^2 (V \xi - U \eta - F \varkappa) + \mu \omega_r^2 [V \xi - F(\lambda + \xi^2)] + \\
 &\quad + \delta \omega_r^2 [F'(\xi \xi' + \eta \eta') + F(\xi'^2 + \eta'^2) + K \eta' - L \xi'].
 \end{aligned} \right\} 20.11(22)$$

Dies ist ein System von zehn homogenen, linearen Differentialgleichungen erster Ordnung für die folgenden zehn unbekanntenen Funktionen von Z :

$$U, V, K, L, M, N, R, S, T, F.$$

In den variablen Koeffizienten tritt die Kreisfrequenz ω als noch unbekannte Größe auf. Sie wird dadurch bestimmt, daß der gegebenen Anordnung entsprechend 10 Grenzbedingungen gesetzt werden müssen, deren gleichzeitige Erfüllung nur mit bestimmten ω -Werten gelingt. Diese seien $\omega_{e1}, \omega_{e2}, \dots$ genannt. Sie sind die Eigenwerte unseres Problems und zugleich die Kreisfrequenzen der verschiedenen möglichen Eigenschwingungen.

Ist die Schaufel am Fuß völlig eingespannt, am äußeren Ende frei, so lauten die 10 Grenzbedingungen:

$$\text{In } Z = 0 \text{ ist } U = V = K = L = F = 0, \quad 20.11(23)$$

$$\text{in } Z = 1 \text{ ist } M = N = R = S = T = 0. \quad 20.11(24)$$

Die Lösung kann auf folgendem Wege geschehen. Es wird ein Wert ω angenommen und das Gleichungssystem 20.11(22) durch Differenzenrechnung, beginnend bei $Z = 0$, fünfmal gelöst. Bei jeder dieser fünf Lösungen werden in $Z = 0$ die Grenzbedingungen 20.11(23) gesetzt und dazu noch je fünf weitere gemäß nachfolgendem Schema.

	$M(0)$	$N(0)$	$R(0)$	$S(0)$	$T(0)$
Lösung 1	1	0	0	0	0
Lösung 2	0	1	0	0	0
Lösung 3	0	0	1	0	0
Lösung 4	0	0	0	1	0
Lösung 5	0	0	0	0	1

Als dann setzt man als Lösung eine lineare Kombination der Lösungen 1...5 mit fünf Konstanten $C_1 \dots C_5$. Des homogenen Charakters unseres Gleichungssystems wegen kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit eine davon — etwa C_1 — willkürlich gleich 1 gesetzt werden. Wenn man nun mit dieser Lösung in die fünf noch verbleibenden Grenzbedingungen 20.11(24) eingeht, erhält man

$$\left. \begin{aligned} M_1(1) + C_2 M_2(1) + C_3 M_3(1) + C_4 M_4(1) + C_5 M_5(1) &= 0, \\ N_1(1) + C_2 N_2(1) + C_3 N_3(1) + C_4 N_4(1) + C_5 N_5(1) &= 0, \\ R_1(1) + C_2 R_2(1) + C_3 R_3(1) + C_4 R_4(1) + C_5 R_5(1) &= 0, \\ S_1(1) + C_2 S_2(1) + C_3 S_3(1) + C_4 S_4(1) + C_5 S_5(1) &= 0, \\ T_1(1) + C_2 T_2(1) + C_3 T_3(1) + C_4 T_4(1) + C_5 T_5(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad 20.11(25)$$

Dies ist ein System von fünf linearen Gleichungen für die vier Unbekannten $C_2 \dots C_5$. Das Problem ist also überbestimmt, was daher rührt, daß ω willkürlich angenommen wurde. Man muß nun also die ganzen Rechnungen für verschiedene ω wiederholen, aus vier der Gln. 20.11(25) die Konstanten C_i berechnen und prüfen, ob die fünfte erfüllt ist. Indem man ω systematisch variiert, findet man solche Werte, für die dies zutrifft. Das sind die gesuchten Eigenwerte³. Abb. 20.11.3 veranschaulicht eine so durchgerechnete 71,65 cm lange Endstufenschaufel einer Dampfturbine. Für den stillstehenden Läufer konnten die Eigenfrequenzen ν_e auch gemessen werden, was zu der Gegenüberstellung von gerechneten und gemessenen Werten nach Zahlentafel 20.11.1 führte.

³ Das gleiche kann ausgedrückt werden, indem man (25) als ein homogenes Gleichungssystem für die fünf C_i auffaßt und fordert, daß die Koeffizientendeterminante verschwindet, was eine Bedingung für ω ist.

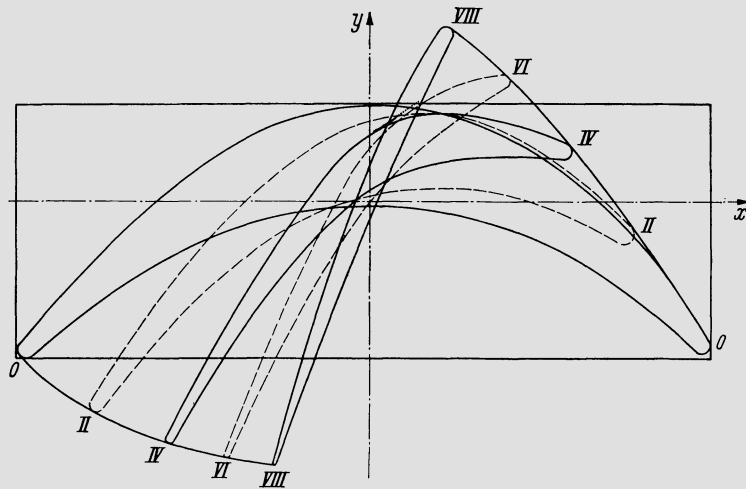


Abb. 20.11.3. Durchgerechnetes Beispiel einer stark verwundenen Schaufel

Zahlentafel 20.11.1

Frequenz	Gemessen	Berechnet	Berechnet mit $\vartheta = 0$	Berechnet ohne Kopplung
ν_{e1}	83,4	80,3	93,5	93,6
ν_{e2}	184,8	185,5	203,6	206,9
ν_{e3}	344,3	356,3	299,4	305,5
ν_{e4}	399,7	410,3	443,8	441,2
ν_{e5}	500	535,7	606,1	621,7
ν_{e6}	655	724,3	618,2	626,7
ν_{e7}	840	847,1	883,3	928,8

Die Schwingungsformen 3, 6 und 7 haben im wesentlichen den Charakter von Torsionsschwingungen. Alle Frequenzen in s^{-1} angegeben.

Das Berechnungsverfahren ist sinngemäß abzuwandeln, wenn andere Grenzbedingungen vorliegen. Gesetzt etwa der Fall, die Radscheibe, auf der die Schaufel sitzt, habe eine fühlbare Elastizität gegenüber einem Krepmmoment. Es ist dann in $Z = 0$

$$\frac{dX}{dz} = CM_y,$$

wo C diese Elastizität kennzeichnet. Diese Relation läßt sich auch schreiben

$$K = C^*N \tag{20.11(26)}$$

mit $C^* = EJ_0C/l$. Die übrigen Grenzbedingungen bleiben unverändert. Von den Partikulärlösungen ersetzt man alsdann die Lösung 2 durch eine solche mit den Grenzbedingungen $N(0) = 1, K(0) = C^*, U = V = L = F = M = R = S = T = 0$ in $Z = 0$, worauf die Rechnung in gleicher Weise erfolgt. Ebenso läßt sich die Biegeelastizität der Fußverbindung gegenüber einem Moment in der achsnormalen Ebene berücksichtigen.

Das Verfahren von *Montoya* ist hier in seiner ursprünglichen Form angegeben worden, wobei die üblichen Voraussetzungen der elementaren Balkentheorie gemacht werden. Eine Verallgemeinerung der Ansätze ist möglich und wird auch praktisch verwendet, wobei natürlich der Rechenaufwand erheblich ansteigt.

20.12 Berechnung von Scheibenschwingungen mit Übertragungsmatrizen

Radscheiben von Turbomaschinen können Biegeschwingungen ausführen, wobei die Erregung meist von den Schaufeln ausgeht. Die Berechnung solcher Scheibenschwingungen kann nach der Energiemethode erfolgen, vgl. insbesondere die ausführliche Darstellung in [1]. In neuerer Zeit ist indessen die Methode der *Übertragungsmatrizen* mehr in den Vordergrund getreten, weil es so leichter gelingt, sich beliebigen geometrischen Konfigurationen anzupassen und auch die Kopplung mit den Schaufelschwingungen zu berücksichtigen. In allgemeiner Form wird dieses Verfahren z. B. in *Hübner* [17] und *Uhrig* [18] beschrieben. In diesem Abschnitt wird zunächst die Scheibenschwingung allein in Anlehnung an *Pfützner* [19] behandelt. Man denkt sich die Scheibe ersetzt durch ein System masseloser Ringe konstanter Dicke, an deren Trennstellen die Masse in unendlich dünnen Schichten konzentriert gedacht wird (vgl. Abb. 20.12.1). Die Biegeschwingung der Scheibe läßt sich so beschreiben, daß man für den örtlichen Momentanwert der Auslenkung aus der neutralen Lage setzt

$$\ddot{u}(r, \vartheta, t) = u_k(r) \cos(k\vartheta) \cos(\omega t). \tag{20.12(1)}$$

Je nachdem $k = 0, 1, 2, \dots$ ist, entstehen Schwingungsformen der in Abb. 20.12.2 veranschaulichten Art; k ist die Zahl der Knotendurchmesser. Insbesondere entspricht $k = 0$ der sog. Schirmschwingung. Für jedes k existiert eine Folge von Eigenfunktionen u_k , die Schwingungsformen mit verschiedenen Anzahlen von Knotenkreisen darstellen. Es besteht also eine doppelte Mannigfaltigkeit von Schwingungsformen, deren jede einer bestimmten Kreisfrequenz ω_e entspricht. Charakteristisch für eine Schwingungsform ist die Funktion $u_k(r)$. Die größte Beschleunigung, die den Amplitudenwert der Trägheitskraft bestimmt, ist $u_k(r) \omega^2$. Wenn wir setzen $\tilde{\varphi} = \partial \ddot{u} / \partial r$ und wenn weiter \tilde{M} und \tilde{Q} das Biegemoment und die Querkraft pro Längeneinheit des Kreisumfanges in r darstellen,

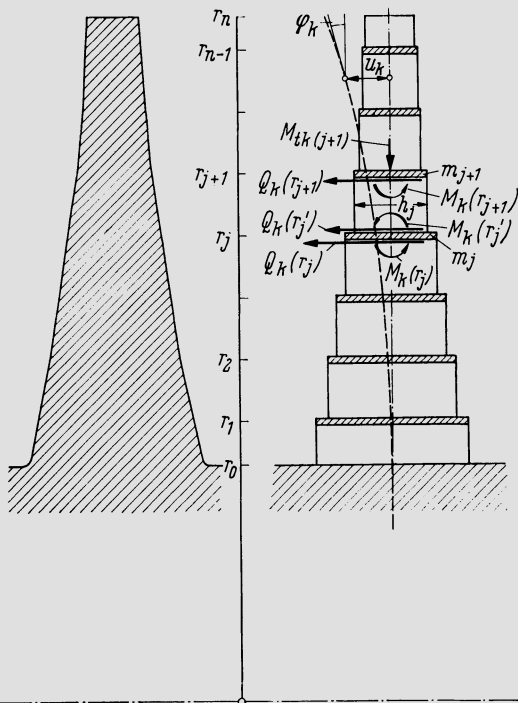


Abb. 20.12.1. Ersatz einer Scheibe durch ein System masseloser Ringe, an deren Trennstellen unendlich dünne Masseschichten gedacht sind

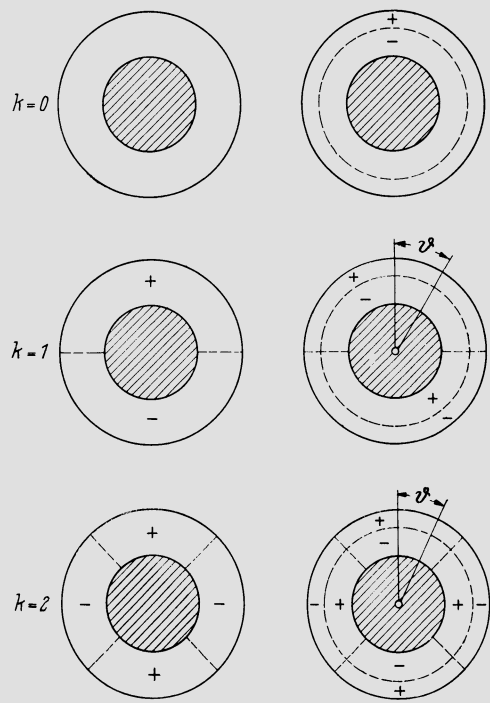


Abb. 20.12.2. Verschiedene Schwingungsformen einer Scheibe

so ist

$$\tilde{\varphi}(r, \vartheta, t) = \varphi_k(r) \cos(k\vartheta) \cos \omega t, \quad 20.12(2)$$

$$\tilde{M}(r, \vartheta, t) = M_k(r) \cos(k\vartheta) \cos \omega t, \quad 20.12(3)$$

$$\tilde{Q}(r, \vartheta, t) = Q_k(r) \cos(k\vartheta) \cos \omega t, \quad 20.12(4)$$

womit die maßgebenden Amplitudenfunktionen φ_k , M_k , Q_k eingeführt sind. Um über diese Funktionen auf hinreichend einfachem Wege eine Aussage machen zu können, führen wir die Idealisierung nach Abb. 20.12.1 ein.

Wie z. B. in [1] gezeigt wird, gehorcht die Auslenkung der Scheibe konstanter Dicke im ganzen Bereich, wo sie keinen äußeren Kräften ausgesetzt ist, der Gleichung

$$\nabla^2(\nabla^2 u) = 0, \quad 20.12(5)$$

wo ∇^2 die Laplacesche Ableitung ist, die in Polarkoordinaten

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \quad 20.12(6)$$

lautet. Im Falle der durch Gl. 20.12(1) gegebenen u -Funktion geht Gl. 20.12(5) in eine totale Differentialgleichung für u_k über, die sich geschlossen lösen läßt. Man findet

$$\text{für } k = 0 : u_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r, \quad 20.12(7)$$

$$\text{für } k = 1 : u_1 = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r, \quad 20.12(8)$$

$$\text{für } k > 1 : u_k = A_k r^k + B_k r^{k+2} + C_k r^{-k} + D_k r^{-k+2}, \quad 20.12(9)$$

wobei die A , B , C , D Integrationskonstanten sind. Durch Ableiten erhält man hieraus

$$\text{für } k = 0 : \varphi_0 = 2B_0 r + C_0 r^{-1} + D_0 r(2 \ln r + 1), \quad 20.12(10)$$

$$\text{für } k = 1 : \varphi_1 = A_1 + 3B_1 r^2 - C_1 r^{-2} + D_1 (\ln r + 1), \quad 20.12(11)$$

$$\text{für } k > 1 : \varphi_2 = kA_k r^{k-1} + (k+2) B_k r^{k+1} - kC_k r^{-k-1} - (k-2) D_k r^{-k+1}. \quad 20.12(12)$$

Biegemoment M_k und Querkraft Q_k — beide pro Längeneinheit Umfang — hängen mit der Deformation zusammen, und zwar ist bei linearelastischem Verhalten nach [1]

$$M_k = N \left[\frac{d^2 u_k}{dr^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{du_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} u_k \right) \right], \quad 20.12(13)$$

$$Q_k = -N \left\{ \frac{d^3 u_k}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 u_k}{dr^2} - \frac{1}{r^2} [1 + k^2(2 - \nu)] \frac{du_k}{dr} + \frac{k^2}{r^3} (3 - \nu) u_k \right\} \quad 20.12(14)$$

mit

$$N = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad 20.12(15)$$

Es ist h die Scheibendicke, ν die Querkontraktionszahl. Für den Fall $k = 0$ erhält man damit insgesamt folgende Gleichungsgruppe:

$$\begin{aligned} u_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r, \\ \varphi_0 &= 2B_0 r + C_0 r^{-1} + D_0 r(2 \ln r + 1), \\ M_0 &= N \{ 2B_0(1 + \nu) - C_0 r^{-2}(1 - \nu) + D_0 [(2 \ln r + 1)(1 + \nu) + 2] \}, \\ Q_0 &= -4ND_0 r^{-1}. \end{aligned} \quad 20.12(16)$$

Aus Gründen der numerischen Behandlung ist es nun zweckmäßig, die zweite dieser Gleichungen mit r , die dritte mit r^2 und die vierte mit r^3 zu multiplizieren. Dies entspricht nicht der Originaldarstellung in [19], sondern dem Vorgehen bei einer in Ausarbeitung begriffenen Arbeit von *Bütikofer*. In den Übertragungsmatrizen treten dann weniger große

Unterschiede der Größenordnungen der einzelnen Glieder auf, was die Numerik verbessert. Weiter wird mit r_n als Außenradius eine Dimensionsbefreiung durchgeführt durch die Setzungen

$$U_k \equiv \frac{u_k}{r_n}, \quad M_k^* \equiv \frac{M_k r_n}{N}, \quad Q_k^* \equiv \frac{Q_k r_n^2}{N}, \quad R \equiv \frac{r}{r_n}, \quad 20.12(17)$$

die insbesondere auch für $k = 0$ gelten. Damit läßt sich nun die Gleichungsgruppe 20.12(16) als Matrixgleichung folgendermaßen schreiben:

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ \varphi_0 R \\ M_0^* R^2 \\ Q_0^* R^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R^2 & \ln R & R^2 \ln R \\ 0 & 2R^2 & 1 & R^2(2 \ln R + 1) \\ 0 & 2(1 + \nu) R^2 & -(1 - \nu) & [(2 \ln R + 1)(1 + \nu) + 2] R^2 \\ 0 & 0 & 0 & -4R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix}. \quad 20.12(18)$$

Die gleiche Umformung, die hier für den Fall $k = 0$ angegeben wurde, kann ebensogut für andere k -Werte durchgeführt werden. Zur Abkürzung der Schreibweise mögen folgende Kolonnenmatrizen (Vektoren) eingeführt werden:

$$\mathbf{Q}_k(R) \equiv [U_k, \varphi_k R, M_k^* R^2, Q_k^* R^3]^T, \quad 20.12(19)$$

$$\mathbf{c}_k \equiv [A_k, B_k, C_k, D_k]^T. \quad 20.12(20)$$

Dann erhält man stets in Analogie zu Gl. 20.12(18) eine Matrixgleichung der Form

$$\mathbf{Q}_k(R) = A_k \mathbf{c}_k \quad 20.12(21)$$

Hier hat die Matrix $[A_k]$ den Aufbau

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad 20.12(22)$$

und zwar ist für $k = 1$

$$\left. \begin{array}{llll} a_{11} = R & a_{12} = R^3 & a_{13} = R^{-1} & a_{14} = R \ln R \\ a_{21} = R & a_{22} = 3R^3 & a_{23} = -R^{-1} & a_{24} = R \ln R + R \\ a_{31} = 0 & a_{32} = 2(3 + \nu) R^3 & a_{33} = 2(1 - \nu) R^{-1} & a_{34} = R(1 + \nu) \\ a_{41} = 0 & a_{42} = -2(3 + \nu) R^3 & a_{43} = -2(1 - \nu) R^{-1} & a_{44} = R(3 - \nu) \end{array} \right\} \quad 20.12(23)$$

und für beliebiges k

$$\left. \begin{array}{ll} a_{11} = R^k & a_{12} = R^{k+2} \\ a_{21} = kR^k & a_{22} = (k+2) R^{k+2} \\ a_{31} = k(k-1)(1-\nu) R^k & a_{32} = (k+1) [k(1-\nu) + 2(1+\nu)] R^{k+2} \\ a_{41} = k^2(k-1)(1-\nu) R^k & a_{42} = -k(k+1) [4 - k(1-\nu)] R^{k+2} \\ a_{13} = R^{-k} & a_{14} = R^{-(k-2)} \\ a_{23} = -kR^{-k} & a_{24} = -(k-2) R^{-(k-2)} \\ a_{33} = k(k+1)(1-\nu) R^{-k} & a_{34} = (k-1) [k(1-\nu) - 2(1+\nu)] R^{-(k-2)} \\ a_{43} = -k^2(k+1)(1-\nu) R^{-k} & a_{44} = -k(k-1) [4 + k(1-\nu)] R^{-(k-2)}. \end{array} \right\} \quad 20.12(24)$$

Bei der Durchführung der Rechnung erweist es sich als notwendig, das durch 20.12(21) gegebene Gleichungssystem nach den Integrationskonstanten, also nach \mathbf{c}_k aufzulösen, d.h. es ist die entsprechende Matrizeninversion durchzuführen:

$$\mathbf{c}_k = A_k^{-1} \mathbf{Q}_k \quad 20.12(25)$$

Wir betrachten nun einen Teilring zwischen den Masseschichten m_j und m_{j+1} (Abb. 20.12.1). Mit r_j' bezeichnen wir den Radius unmittelbar außerhalb m_j und mit r_{j+1} denjenigen

unmittelbar innerhalb m_{j+1} . Im Radius r_{j+1} gilt dann nach Gl. 20.12(21)

$$\mathbf{q}_k(R_{j+1}) = \mathbf{A}_k(R_{j+1}) \mathbf{c}_k, \quad 20.12(26)$$

während Gl. 20.12(25), für r'_j formuliert, lautet

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{A}_k^{-1}(R'_j) \mathbf{q}_k(R'_j). \quad 20.12(27)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt sogleich

$$\mathbf{q}_k(R_{j+1}) = \mathbf{A}_k(R_{j+1}) \mathbf{A}_k^{-1}(R'_j) \mathbf{q}_k(R'_j), \quad 20.12(28)$$

womit der Übergang von R'_j auf R_{j+1} gewonnen ist.

Der Übergang von r_j auf r'_j (Abb. 20.12.1), also die „Überquerung“ des Masserings m_j , wird durch folgende Relation hergestellt:

$$u_k(r'_j) = u_k(r_j), \quad \varphi_k(r'_j) = \varphi_k(r_j), \quad 20.12(28')$$

$$M_k(r'_j) = M_k(r_j) - \Theta_j \omega^2 \varphi_k(r_j), \quad \Theta_j = \frac{m_j}{2\pi r_j} \frac{h_j^2}{12}, \quad 20.12(29)$$

$$Q_k(r'_j) = Q_k(r_j) - \frac{\omega^2}{r_j^2} \left[\frac{m_j r_j}{2\pi} + \Theta_j k^2 \right] u_k(r_j) + \frac{m_j \omega_r^2}{2\pi} \varphi_k(r_j). \quad 20.12(30)$$

Hier ist Θ_j das Massenträgheitsmoment des Masserings m_j , ω die Kreisfrequenz der Schwingung und ω_r die Winkelgeschwindigkeit des Rotors. Die Gln. 20.12(28') formulieren die geometrische Kontinuität. In 20.12(29) ist $\Theta_j \omega^2 \varphi_k$ das durch die Trägheit des Masserings bedingte Krepmmoment. In 20.12(30) ist das erste Glied in eckiger Klammer der von der translatorischen Beschleunigung herrührende Anteil der Querkraft, während das zweite die äquivalente Querkraftverteilung repräsentiert, welche die Verteilung des Torsionsmomentes M_t (Abb. 20.12.1) ersetzt, vgl. [1, 19]. Schließlich gibt das letzte Glied in 20.12(30) den Einfluß der Fliehkraft wieder, die die Tendenz hat, die ausgebogene Scheibe aufzurichten. — Die Gleichungsgruppe 20.12(28')–(30) kann nun wiederum als Matrixgleichung geschrieben werden, wobei links der Vektor aus u_k , φ_k , M_k , Q_k erscheint. Gegebenermaßen wird man an dieser Stelle wieder die oben angegebene Dimensionsbefreiung nach 20.12(17) und die Transformation einführen, die links den Vektor \mathbf{q}_k nach 20.12(19) erscheinen läßt. Nach dieser Umformung schreibt sich die Gleichungsgruppe 20.12(28') bis (30)

$$\mathbf{q}_k(R'_j) = \mathbf{M}_k(R_j) \mathbf{q}_k(R_j) \quad 20.12(31)$$

mit

$$\mathbf{M}_k(R_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_j \omega^2}{2\pi} \frac{h_j^2 R_j}{12 N_j} & 1 & 0 \\ -\frac{m_j \omega^2 R_j r_n^2}{2\pi N_j} \left[R_j^2 + \frac{k^2}{12} \left(\frac{h_j}{r_n} \right)^2 \right] & \frac{m_j \omega_r^2 r_n^2 R_j^3}{2\pi N_j} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad 20.12(32)$$

Wenn man noch 20.12(31) in 20.12(28) einsetzt, folgt

$$\mathbf{q}_k(R_{j+1}) = \mathbf{A}_k(R_{j+1}) \mathbf{A}_k^{-1}(R_j) \mathbf{M}_k(R_j) \mathbf{q}_k(R_j). \quad 20.12(33)$$

Damit ist die Beziehung aufgestellt, die es gestattet, von einem zum nächsten Radius weiterzuschreiten und so schließlich den Zusammenhang zwischen den „Zustandsgrößen“ U , φR , $M^* R^2$, $Q^* R^3$ am Innenradius r_0 und am Außenradius r_n (Abb. 20.12.3) herzustellen. Die gesamte sog. *Übertragungsmatrix* \mathbf{T}_k lautet bei der Anordnung nach Abb. 20.12.3a

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k &= \mathbf{A}_k(R_n) \mathbf{A}_k^{-1}(R_{n-1}) \mathbf{M}_k(R_{n-1}) \mathbf{A}_k(R_{n-1}) \mathbf{A}_k^{-1}(R_{n-2}) \mathbf{M}_k(R_{n-2}) \dots \\ &\dots \mathbf{A}_k(R_2) \mathbf{A}_k^{-1}(R_1) \mathbf{M}_k(R_1) \mathbf{A}_k(R_1) \mathbf{A}_k^{-1}(R_0), \end{aligned} \quad 20.12(34)$$

während sie bei der Anordnung nach Abb. 20.12.3b die Form

$$T_k = M_k(R_n) A_k(R_n) A_k^{-1}(R_{n-1}) M_k(R_{n-1}) A_k(R_{n-1}) A_k^{-1}(R_{n-2}) \dots \dots A_k(R_2) A_k^{-1}(R_1) M_k(R_1) A_k(R_1) A_k^{-1}(R_0) \tag{20.12(35)}$$

annimmt. In beiden Fällen ist der Innenrand völlig eingespannt. Die Konfiguration nach Abb. 20.12.3a entspricht dem Fall, wo der Außenrand frei ist, während bei Abb. 20.12.3b der Außenrand eine Masse trägt. Es sei zunächst der erstgenannte Fall weiterbehandelt. Da hierbei innen, d.h. in R_0 Ausschlag und Neigung verschwinden, außen hingegen Moment und Querkraft, hängt der Zustandsvektor am Außenrand $R = 1$ mit dem am Innenrand zusammen gemäß

$$\begin{bmatrix} U_k(1) \\ \varphi_k(1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_0^2 M_k^*(R_0) \\ R_0^3 Q_k^*(R_0) \end{bmatrix} \tag{20.12(36)}$$

mit T_k nach 20.12(34). Mit den Abkürzungen $U_k(1) = x$, $\varphi_k(1) = y$, $R_0^2 M_k^*(R_0) = m$, $R_0^3 Q_k^*(R_0) = q$ ist dies ein Gleichungssystem der Form

$$\left. \begin{aligned} -x + T_{k13}m + T_{k14}q &= 0 \\ -y + T_{k23}m + T_{k24}q &= 0 \\ T_{k33}m + T_{k34}q &= 0 \\ T_{k43}m + T_{k44}q &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{20.12(37)}$$

für die Unbekannten x, y, m, q . Da es homogen ist, hat eine nichttriviale Lösung das Verschwinden der Koeffizientendeterminante zur Bedingung, also

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & T_{k13} & T_{k14} \\ 0 & -1 & T_{k23} & T_{k24} \\ 0 & 0 & T_{k33} & T_{k34} \\ 0 & 0 & T_{k43} & T_{k44} \end{vmatrix} = 0. \tag{20.12(38)}$$

Wie aus der vorausgegangenen Entwicklung zu erkennen ist, hängen die einzelnen T_k von der Kreisfrequenz ω der Schwingung ab. Folglich ist 20.12(38) eine Bestimmungsgleichung für ω , deren Lösungen $\omega_{k1}, \omega_{k2}, \dots$ die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen

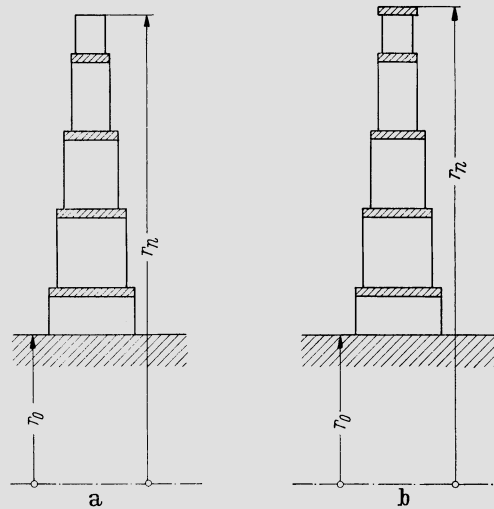


Abb. 20.12.3. a) Anordnung mit freiem Scheibenrand; b) Scheibenrand mit kurzen Schaufeln besetzt (äußerste Masseschicht)

der Scheibe sind. Man berechnet also die Determinante in Funktion von ω ; wo sie Null wird, liegt eine Eigenfrequenz. Die zweckmäßige Durchführung solcher Rechnungen wird in [19] erläutert.

Im Falle nach Abb. 20.12.3b kann genau gleich vorgegangen werden — nur daß die T_k aus 20.12(35) zu bestimmen sind — sofern wirklich am Rand eine reine Massenbelegung angenommen werden darf. Das wäre etwa der Fall extrem kurzer Schaufeln. Richtiger aber wird man die am Scheibenrand durch die Schaufeln hervorgerufenen Momente und Querkräfte mitberücksichtigen, wie im folgenden Abschnitt gezeigt. Hier seien lediglich noch einige allgemeine Betrachtungen angeschlossen.

Indem man k die Werte 0, 1, 2, ... durchlaufen läßt, liefern solche Rechnungen eine doppelte Mannigfaltigkeit von Schwingungszahlen, die den Schwingungsformen nach Abb. 20.12.1 entsprechen. Mit festen Knotenlinien haben sie den Charakter von stehenden Wellen. An sich ist aber ebensogut der Vorgang denkbar, bei dem die Wellen auf der Scheibe umlaufen. Solche umlaufend Wellen wird man zweckmäßig in einem mit der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe mitrotierenden Koordinatensystem betrachten, und es hat dabei keine Umlaufrichtung einen Vorzug, da die Rotation sich nur durch ein für beide Richtungen gleiches Fliehkraftglied äußert. Nun liefert aber die Überlagerung zweier Wellen, die sich durch nichts als den Umlaufsinn unterscheiden, wiederum die stehende Welle. Daher ist durch die Theorie der stehenden Welle umgekehrt auch die umlaufende erfaßt. Ist k die Zahl der Wellen am Umfang — zugleich die Zahl der Knotendurchmesser der stehenden Welle gleicher Form — und ω_{ki} die Kreisfrequenz der betreffenden Schwingungsform, so ist $\omega_{ui} = \omega_{ki}/k$ die Winkelgeschwindigkeit des Umlaufes der Störung. Nur $k = 0$, die sog. Schirmschwingung, ist hier ein Sonderfall, da ihr keine umlaufende Welle entspricht.

In der Maschine treten tatsächlich solche umlaufenden Wellen auf. Eine raumfeste, in Umfangsrichtung periodische durch die Struktur des Strömungsfeldes gegebene Störung führt offenbar zu einer Resonanz, wenn die Scheibenschwingung mit einer Winkelgeschwindigkeit umläuft, die entgegengesetzt gleich der Winkelgeschwindigkeit ω_r des Rotors ist, so daß die Deformation der Scheibe, vom ruhenden Beobachter aus betrachtet, im Raume unveränderlich bleibt. Die Resonanzbedingung lautet daher

$$\omega_{ui} = |\omega_r| \cdot \omega_{ki} = k |\omega_r|. \quad 20.12(39)$$

Eine Übersicht über Erfahrungsmaterial gibt *Kantorowicz* [20].

Für das Verständnis der energetischen Verhältnisse beachte man noch folgendes. Bei der umlaufenden Scheibenschwingung ist bei gegebener Amplitude doppelt so viel Energie im Spiel wie bei der stehenden, da jedes Scheibenelement voll an der Schwingung teilnimmt. Dabei sind im Falle der umlaufenden Schwingung die integrale Bewegungsenergie und die integrale potentielle Energie konstant, während bei der stehenden Schwingung nur die Summe beider konstant ist; die Bewegungsenergie ist in diesem letzteren Falle Null, wenn die potentielle Energie ihr Maximum erreicht und umgekehrt. Der Rayleigh-Quotient wird aber in beiden Fällen gleich, mithin auch die Eigenfrequenz.

20.13 Koppelschwingungen von Schaufeln und Scheibe

Die Ausführungen dieses Abschnittes stützen sich auf diejenigen der beiden vorangehenden, weshalb auch Definitionen und Bezeichnungen von dort übernommen werden. Der unter 20.12 eingeführte Index k , der auf die Zahl der Knotendurchmesser verweist, wird allerdings im folgenden weggelassen. Es wird also vorausgesetzt, daß die ganze Untersuchung für ein festes k durchgeführt wird, das im voraus gewählt wurde. Wenn Schwingungen mit verschiedener Anzahl Knotendurchmesser interessieren, ist der ganze Rechnungsgang je für die entsprechenden k durchzuführen.

Abb. 20.13.1 zeigt die einfache Anordnung, die hier als typisches Beispiel behandelt wird. Die Scheibe kann an ihrem Übergang in die Welle im Radius r_0 als eingespannt betrachtet werden. An ihrem Außenrand trägt sie freistehende Schaufeln, die im Radius r_n direkt in die Scheibe übergehen.

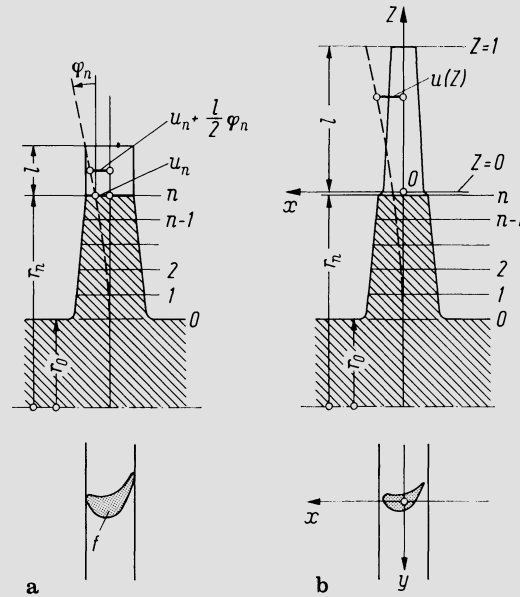


Abb. 20.13.1. Zur Berechnung der Koppelschwingungen von Schaufeln und Scheibe. a) Extrem kurze Schaufeln; b) lange Schaufeln

Bei der Anordnung nach Abb. 20.13.1a sind die Schaufeln sehr kurz und gedrungen, so daß die niedrigste Eigenfrequenz der fest eingespannten Schaufel weit über der höchsten in Frage kommenden Eigenfrequenz der Scheibe liegt. Dann können die Schaufeln mit hinreichender Näherung als starre Massen betrachtet werden, was zu einer verhältnismäßig einfachen Behandlung führt. Bei konstantem Schaufelquerschnitt f und einer Schaufellänge l ist die Schaufelmasse $\rho f l$, und die Amplitude des Schaufelschwerpunktes nach Abb. 20.13.1a ist $u_n + (l/2) \varphi_n$. Mithin wird die Amplitude der Querkraft einer Schaufel

$$Q_s = m_s \omega^2 \left(u_n + \frac{l}{2} \varphi_n \right) = \rho f l \omega^2 u_n + \frac{\rho f l^2 \omega^2}{2} \varphi_n. \quad 20.13(1)$$

Das Krepmmoment einer Schaufel am Scheibenumfang ist

$$M_s = Q_s \frac{l}{2} + \frac{\rho f l^3}{12} \omega^2 \varphi_n. \quad 20.13(2)$$

Hier ist $\rho f l^3 / 12$ das Massenträgheitsmoment der Schaufel um die maßgebende, durch den Schwerpunkt gehende Achse. Durch Einsetzen von Q_s aus Gl. 20.13(1) folgt

$$M_s = \frac{\rho f l^2 \omega^2}{2} u_n + \frac{\rho f l^3 \omega^2}{3} \varphi_n. \quad 20.13(3)$$

Mit der Laufschaufelzahl z'' werden dann Moment und Querkraft pro Längeneinheit Scheibenumfang

$$M_n = \frac{z'' \rho f l^2 \omega^2}{4 \pi r_n} u_n + \frac{z'' \rho f l^3 \omega^2}{6 \pi r_n} \varphi_n, \quad 20.13(4)$$

$$Q_n = \frac{z'' \rho f l \omega^2}{2 \pi r_n} u_n + \frac{z'' \rho f l^2 \omega^2}{4 \pi r_n} \varphi_n. \quad 20.13(5)$$

Die dimensionslosen Werte nach Gl. 20.12(17) sind also gegeben durch

$$M_n^* = \frac{z''_0 f l^2 r_n \omega^2}{4\pi N} U_n + \frac{z''_0 f l^3 \omega^2}{6\pi N} \varphi_n = A U_n + B \varphi_n, \quad 20.13(6)$$

$$Q_n^* = \frac{z''_0 f l r_n^2 \omega^2}{2\pi N} U_n + \frac{z''_0 f l^2 r_n \omega^2}{4\pi N} \varphi_n = C U_n + D \varphi_n. \quad 20.13(7)$$

Die $A \dots D$ sind die aus diesen Gleichungen hervorgehenden Ausdrücke. Mit diesen M_n^* und Q_n^* am Außenrand tritt nun an die Stelle der Gleichung 20.12(36) die folgende:

$$\begin{bmatrix} U_n \\ \varphi_n \\ A U_n + B \varphi_n \\ C U_n + D \varphi_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_0^2 M_0^* \\ R_0^3 Q_0^* \end{bmatrix}. \quad 20.13(8)$$

T ist die Übertragungsmatrix nach Gl. 20.12(34). Dies ist ein homogenes Gleichungssystem für $U_n, \varphi_n, R_0^2 M_0^*, R_0^3 Q_0^*$. Die Bedingung des Verschwindens der Koeffizientendeterminante lautet

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & T_{13} & T_{14} \\ 0 & -1 & T_{23} & T_{24} \\ -A & -B & T_{33} & T_{34} \\ -C & -D & T_{43} & T_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad 20.13(9)$$

Man hat also wiederum diese Determinante in Funktion von ω zu berechnen, und die Nullstellen liefern die Kreisfrequenzen $\omega_1, \omega_2, \dots$ der Eigenschwingungen des Systems.

Sehr viel verwickelter ist der allgemeine Fall von nicht starren Schaufeln, wobei eine echte kombinierte Schwingung von Schaufeln und Scheibe entsteht. Ein Verfahren von *Dietrich* und *Anke* [21] behandelt die Schaufel als ein Ersatzsystem von Balkenstücken und konzentrierten Massen. Diese Rechnung läßt sich vereinigen mit der Scheibenrechnung nach 20.12. Rationeller und wirklichkeitsnäher zugleich dürfte es sein, die Schaufel nach dem unter 20.11 beschriebenen Verfahren von *Montoya* zu behandeln und diese Rechnung in das Verfahren der Übertragungsmatrizen einzubeziehen. Damit der Anschluß zwischen Schaufel und Scheibe hergestellt werden kann, müssen dabei die entsprechenden dimensionslosen Variablen nach Abschn. 20.11 und 12 miteinander in Beziehung gebracht werden. Der Zustand am Scheibenaußenrand ist gekennzeichnet durch

$$U_n = \frac{u_n}{r_n}, \quad \varphi_n, \quad M_n^* = \frac{M_n r_n}{N_n}, \quad Q_n^* = \frac{Q_n r_n^2}{N_n}. \quad 20.13(8')$$

Die entsprechenden Variablen im Schaufelwurzelquerschnitt sind $U(0), K(0), N(0), R(0)$. Sie unterscheiden sich von denen der Scheibe dadurch, daß die dimensionsbehafteten Größen, mit denen sie gebildet sind, sich auf eine Schaufel beziehen statt auf die Längeneinheit des Umfangs, und daß sie mit l statt mit r_n dimensionslos gemacht sind. Vergleicht man die Definitionen, so ist man auf folgende Relationen geführt:

$$U(0) = U_n(r_n|l), \quad K(0) = \varphi_n, \quad 20.13(9')$$

$$N(0) = \frac{2\pi r_n M_n}{z''} \frac{l}{E J_0} = \frac{2\pi N_n l}{z'' E J_0} M_n^*, \quad 20.13(10)$$

$$R(0) = \frac{2\pi N_n l^2}{z'' E J_0 r_n} Q_n^*. \quad 20.13(11)$$

Die Grenzbedingungen an der Schaufelwurzel unterscheiden sich von denen, die unter 20.11 zugrunde gelegt wurden. Es ist zu setzen

$$V(0) = L(0) = F(0) = 0. \quad 20.13(12)$$

Alle anderen Variablen an der Stelle $z = 0$ sind unbekannt. Selbst $F(0) = 0$ ist eigentlich nicht streng zutreffend, denn F ist ja die Verdrillwinkelamplitude. Diese ist an den Schwingungsbäuchen Null und verschwindet im *Mittelwert* über den Umfang, im allgemeinen aber nicht lokal. Darauf wird später noch eingegangen. Die Grenzbedingungen am freien Schaufelende lauten wir früher

$$M(1) = N(1) = R(1) = S(1) = T(1) = 0. \quad 20.13(13)$$

In Analogie zu dem unter 20.11 beschriebenen Verfahren werden nun für das Differentialgleichungssystem 20.11(22) Partikulärlösungen numerisch bestimmt für die Grenzbedingungen, die in Zahlentafel 20.10.1 angegeben sind und denen noch die Bedingungen 20.13(12) beizufügen sind.

Zahlentafel 20.13.1

	$U(0)$	$K(0)$	$M(0)$	$N(0)$	$R(0)$	$S(0)$	$T(0)$
Lösung 1	r_n/l	0	0	0	0	0	0
Lösung 2	0	1	0	0	0	0	0
Lösung 3	0	0	1	0	0	0	0
Lösung 4	0	0	0	$\frac{2\pi N_n l}{z'' E J_0}$	0	0	0
Lösung 5	0	0	0	0	$\frac{2\pi N_n l^2}{z'' E J_0 r_n}$	0	0
Lösung 6	0	0	0	0	0	1	0
Lösung 7	0	0	0	0	0	0	1

Um die äußeren Grenzbedingungen 20.13(13) zu erfüllen, muß eine lineare Kombination dieser sieben Partikulärlösungen vorgenommen werden. Zum Beispiel liefert Lösung 1 am freien Ende die Werte

$$M_1(1), N_1(1), R_1(1), S_1(1), T_1(1).$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir allgemein für Lösung i

$$M_i(1) = c_{1i}, N_i(1) = c_{2i}, R_i(1) = c_{3i}, S_i(1) = c_{4i}, T_i(1) = c_{5i}.$$

Die Grenzbedingungen 20.13(13) werden dann durch die fünf folgenden Gleichungen ausgesprochen:

$$\left. \begin{aligned} c_{11}U_n + c_{12}\varphi_n + c_{13}M(0) + c_{14}M_n^* + c_{15}Q_n^* + c_{16}S(0) + c_{17}T(0) &= 0 \\ c_{21}U_n + c_{22}\varphi_n + c_{23}M(0) + c_{24}M_n^* + c_{25}Q_n^* + c_{26}S(0) + c_{27}T(0) &= 0 \\ &\vdots \\ c_{51}U_n + c_{52}\varphi_n + c_{53}M(0) + c_{54}M_n^* + c_{55}Q_n^* + c_{56}S(0) + c_{57}T(0) &= 0. \end{aligned} \right\} 20.13(14)$$

In diesem Gleichungssystem erscheinen direkt die U_n , φ_n , M_n^* , Q_n^* am Scheibenrand. Um dies zu ermöglichen, ist z. B. bei Lösung 1 der Anfangswert r_n/l gewählt worden, denn dann liefert die Multiplikation mit U_n unmittelbar $U(0)$. Lösung 1 gilt somit für $U_n = 1$ und das entsprechend gilt für die Lösungen 4 und 5. Das Gleichungssystem 20.13(14) enthält sieben Unbekannte, so daß die fünf Gleichungen noch nicht genügen. Es sind noch die Gleichungen heranzuziehen, welche die Zustandsgrößen am Scheibenaußenrand mit denen

am Innenrand in Beziehung bringen, nach den Ausführungen unter 20.12 also

$$\begin{bmatrix} U_n \\ \varphi_n \\ M_n^* \\ Q_n^* \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_0^2 M_0^* \\ R_0^2 Q_0^* \end{bmatrix}. \quad 20.13(15)$$

Damit sind noch zwei weitere Unbekannte M_0^* und Q_0^* eingeführt. Da aber vier zusätzliche Gleichungen vorliegen, hat man insgesamt neun Gleichungen für neun Unbekannte. Dieses aus 20.13(14) und (15) bestehende Gleichungssystem ist durch Zahlentafel 20.13.2 dargestellt.

Zahlentafel 20.13.2

$R_0^2 M_0^*$	$R_0^2 Q_0^*$	U_n	φ_n	$M(0)$	M_n^*	Q_n^*	$S(0)$	$T(0)$	
T_{13}	T_{14}	-1							
T_{23}	T_{24}		-1						= 0
T_{33}	T_{34}				-1				
T_{43}	T_{44}					-1			
		c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}	
		c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}	c_{27}	
		c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	c_{36}	c_{37}	= 0
		c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	c_{46}	c_{47}	
		c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}	c_{56}	c_{57}	

Im Kopf der Zahlentafel sind die Unbekannten angegeben, in der Tafel selbst die von Null verschiedenen Koeffizienten, mit denen sie multipliziert werden. Die rechte Seite ist durchweg Null, so daß das Gleichungssystem homogen ist.

Damit ergibt sich nun das folgende Rechenverfahren. Nach den Ausführungen unter 20.12 bestimmen sich die T_{ij} . Weiter liefert die numerische Integration des Differentialgleichungssystems 20.11(22) für die sieben verschiedenen Grenzbedingungen nach Zahlentafel 20.13.1 die c_{ij} . Alles dies hat in Funktion der Kreisfrequenz ω zu erfolgen, von der ja die T_{ij} und c_{ij} abhängen. Weiter ist die Determinante der Koeffizienten zu bilden, die in Zahlentafel 20.13.2 zusammengestellt sind. Für gewisse ω -Werte, $\omega_1, \omega_2, \dots$ wird die Determinante Null. Dies sind die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen des Systems.

Das Verfahren ist hier an der einfachen Anordnung entwickelt worden, die durch Abb. 20.13.1 veranschaulicht ist. Unter Beibehaltung seiner gedanklichen Struktur läßt es sich aber abwandeln und verallgemeinern, so daß es auf andere geometrische Konfigurationen angewandt werden kann. Ein Beispiel einer solchen Konfiguration ist etwa der Läufer nach Abb. 17.12.12, wo die Scheiben nicht durch eine Welle miteinander verbunden sind, sondern durch zylindrische Tragränder. Bei Schaufeln mit Deckplatten ergeben sich andere Grenzbedingungen am äußeren Ende. Besonderer Beachtung bedarf auch häufig der Bereich der Schaufelbefestigung. Diese Zone kann gegebenenfalls durch einen Ring mit geänderten Elastizitätseigenschaften dargestellt werden.

Abschließend muß noch die an der Schaufelwurzel gesetzte Grenzbedingung $F(0) = 0$ diskutiert werden, die ja zugleich besagt $\Phi(0) = 0$ wo Φ nach Gl. 20.11(22) die Amplitude des Drillwinkels der Schaufel ist. Streng erfüllt ist diese Bedingung nur bei $k = 0$, also bei der Schirmschwingung. In allen anderen Fällen tritt in den Schwingungsknoten der von Null verschiedene Wert der Drillwinkelamplitude in $Z = 0$ auf, während bei den

Schwingungsbäuchen der Drillwinkel verschwindet. Eine Theorie der vorliegenden Struktur kann indessen an dieser Stelle eine Vereinfachung nicht vermeiden. Man kann sie nicht einfach in strenger Weise durchführen, indem man einen geeigneten Wert $\Phi(0)$ einführt, denn bei der stehenden Welle treten die Amplituden von Lage und Neigung gegen die Umfangsrichtung nicht im gleichen Punkt auf. Damit werden aber die Grenzbedingungen und folglich auch die Schwingungsformen der einzelnen Schaufeln verschieden, während die Theorie voraussetzt, daß alle Schaufeln in gleicher Weise, wenn auch mit verschiedener Amplitude schwingen. Wollte man diesem Umstand Rechnung tragen, so müßte man ein Schwingungssystem betrachten, das sich in die einzelnen Schaufeln verzweigen würde. Das ist zwar prinzipiell möglich, vgl. *Uhrig* [18], führt aber in Anbetracht der großen Schaufelzahl zu einem riesigen Rechenaufwand. — Bei der umlaufenden Welle ist demgegenüber die Situation für alle Schaufeln die gleiche, nur treten dann die Extrema von Ausschlag und Drillwinkel phasenverschoben auf.

Es ist leicht zu verifizieren, daß in $Z = 0$, also am Scheibenumfang, der Drillwinkel am Ort der Knotenlinie

$$\Phi = \frac{2k}{\pi} U_n \quad 20.13(16)$$

ist. Man könnte nun die Rechnung so durchführen, daß man die Lösung 1 anstatt nach Zahlentafel 20.10.1 für folgende Anfangsbedingungen in $Z = 0$ bestimmte:

$$U(0) = \frac{r_n}{l}, \quad F(0) = \frac{2k}{\pi}, \quad V = K = L = M = N = R = S = T = 0. \quad 20.13(17)$$

So würde man einen Vorgang berechnen, bei dem die Schaufelwurzel an der Stelle des Schwingungsbauches auch den größten Verdrillungsausschlag erfährt, was kinematisch unmöglich ist. Gesetzt nun der Fall, es bestehe für die gegebene Schaufel keinerlei Koppung zwischen Torsionsverformung und Biegeverformung. Dann hat dieser ideelle, nur im Gedankenexperiment mögliche Bewegungsvorgang, den die Rechnung liefert, die gleiche Energie wie der wirkliche, denn die Energiesumme wird ja dadurch nicht geändert, daß die Energie der Drehbewegung anders auf die Schaufeln verteilt wird. Hat aber der Vorgang die gleiche Energie, so hat er die gleiche Frequenz. — Die Rückwirkung der Torsionsmomente in den Schaufelwurzelquerschnitten auf die Scheibenschwingung ist in der Theorie ohnehin nicht enthalten, da die Ansätze nach Abschn. 20.12 ja nur Kreppmomente und Querkräfte berücksichtigen. — Man kann also festhalten, daß im Falle von Schaufelschwingungen, die wesentlich den Charakter von Torsionsschwingungen haben (das ist der Fall, wo die Setzung $F(0) = 0$ auf merkliche Fehler führen könnte), eine gute Näherung erhalten werden kann, wenn man die Lösung 1 der Zahlentafel 20.13.1 durch diejenige ersetzt, die durch die Gln. 20.13(17) festgelegt wird. Am weiteren Rechenverfahren ändert sich dabei nichts.

20.14 Schwingungsberechnung nach dem Verfahren der finiten Elemente

Die Ausführungen dieses Abschnittes schließen sich direkt an diejenigen des Abschn. 15.6 an. Es wird dabei vom einfachen Fall ausgegangen, wo der Körper in finite Scheibenelemente dreieckiger Gestalt eingeteilt werden kann. Um das Verfahren so abzuwandeln, daß es die Berechnung von Eigenschwingungen erlaubt, muß die Körpermasse diskretisiert werden derart, daß sie in die Knotenpunkte des Netzwerkes konzentriert gedacht wird. Jeder Knotenpunkt i ist dann ein Massenpunkt mit der Masse m_i (vgl. Abb. 20.14.1). Schwingt der Körper mit der Kreisfrequenz ω , so sind die Koordinaten x_i und y_i des Punktes i

$$x_i = u_i \sin \omega t, \quad y_i = v_i \sin \omega t, \quad 20.14(1)$$

wo u_i und v_i die lokalen Schwingungsamplituden sind. Die Amplitudenwerte der d'Alem-

bertschen Trägheitskräfte X_i und Y_i werden damit

$$X_i = m_i \omega^2 u_i, \quad Y_i = m_i \omega^2 v_i. \quad 20.14(2)$$

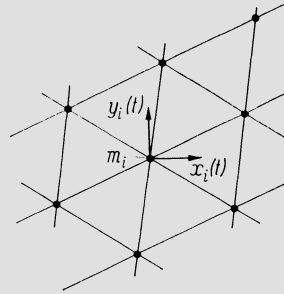


Abb. 20.14.1. Ersatz eines Körpers durch finite Elemente mit diskreten Massenpunkten

Es sei angenommen, daß der Körper im feldfreien Raum schwinde und Einspannkkräfte nur an solchen Knotenpunkten angreifen, die in Ruhe bleiben. Dann erhält man die Eigenschwingung mit der Annahme, daß die d'Alembertschen Trägheitskräfte die einzigen seien, die an beweglichen Punkten des Körpers angreifen. Die Gln. 15.6(50) lauten dann z.B. mit Einführung von 20.14(2)

$$\begin{aligned} S_{11}u_1 + S_{12}v_1 + S_{13}u_2 + S_{14}v_2 + \dots + S_{1,10}v_5 &= m_1 \omega^2 u_1, \\ S_{21}u_1 + S_{22}v_1 + S_{23}u_2 + S_{24}v_2 + \dots + S_{2,10}v_5 &= m_1 \omega^2 v_1, \end{aligned}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (S_{11} - m_1 \omega^2) u_1 + S_{12}v_1 + S_{13}u_2 + \dots + S_{1,10}v_5 &= 0, \\ S_{21}u_1 + (S_{22} - m_1 \omega^2) v_1 + S_{23}u_2 + \dots + S_{2,10}v_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad 20.14(3)$$

Die Zusammenfassung dieser Gleichungspaare für alle Knotenpunkte läßt sich als Matrizen-gleichung analog zu Gl. 15.6(51) schreiben:

$$([S] - [m] \omega^2) \{\tilde{q}\} = 0. \quad 20.14(4)$$

Hier ist $[m]$ die aus den sämtlichen m_i gebildete Matrix diagonalen Struktur, deren Aufbau aus dem Gleichungspaar 20.14(3) unmittelbar hervorgeht. Die u_i und v_i sind in $\{\tilde{q}\}$ zusammengefaßt. Im Gegensatz zu Gl. 15.6(51) ist dieses Gleichungssystem homogen. Die Bedingung des Verschwindens der Koeffizientendeterminante, also

$$\det([S] - [m] \omega^2) = 0, \quad 20.14(5)$$

liefert als Wurzeln $\omega_{e1}, \omega_{e2}, \dots$ die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen. Man hat also die Koeffizientendeterminante in Funktion von ω zu berechnen und ihre Nullstellen aufzusuchen. Entsprechend der großen Zahl der Freiheitsgrade des Ersatzsystems ist die Zahl der Wurzeln von 20.14(5) sehr groß, doch interessieren naturgemäß nur die paar tiefsten Werte.

Sollte der Körper einem Fliehkraftfeld ausgesetzt sein oder sollte eine unvollkommene Einspannung vorliegen, so werden die entsprechenden Kraftamplituden an den Knotenpunkten wiederum proportional den Ausschlägen. Damit wird wiederum das entsprechende Gleichungssystem homogen. Es ändert sich also nichts an der mathematischen Struktur des Verfahrens.

Es ist hier der Einfachheit halber vom dreieckförmigen Scheibenelement ausgegangen worden, doch läßt sich das Verfahren in sinngemäßer Abwandlung auf andere Typen finiter Elemente übertragen. Zur Behandlung der Schwingungen von Schaufeln und Scheiben sind geeignete Elemente in großer Zahl vorgeschlagen worden. *Rieger* [22] gibt darüber einen Überblick und diskutiert auch die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Verfahren. Einige veröffentlichte Methoden sind in [23–30] aufgeführt. Dieser Weg ist heute derjenige, der bei komplizierter Geometrie auf die höchste Genauigkeit führt. Zugleich aber ist naturgemäß der Rechenaufwand außerordentlich groß.

Abb. 20.14.2 zeigt vier Eigenschwingungsformen einer ND-Dampfturbinschaufel, die so berechnet wurden, vgl. *Pfeiffer* [31]. Es kamen rechteckig begrenzte gekrümmte Schalelemente zur Verwendung. Das Netzgitter geht aus der Abbildung hervor, und zwar ist die Schaufeldruckseite dargestellt. Die größte Verschiebung wurde dabei willkürlich normiert. In Abb. 20.14.3 sind die so errechneten Spannungsverteilungen dargestellt, wobei die räumlich verwundene Schaufel in die Bildebene gedreht ist. Die Zahlen sind Relativwerte, die der jeweiligen Normierung jeder Schwingungsform entsprechen.

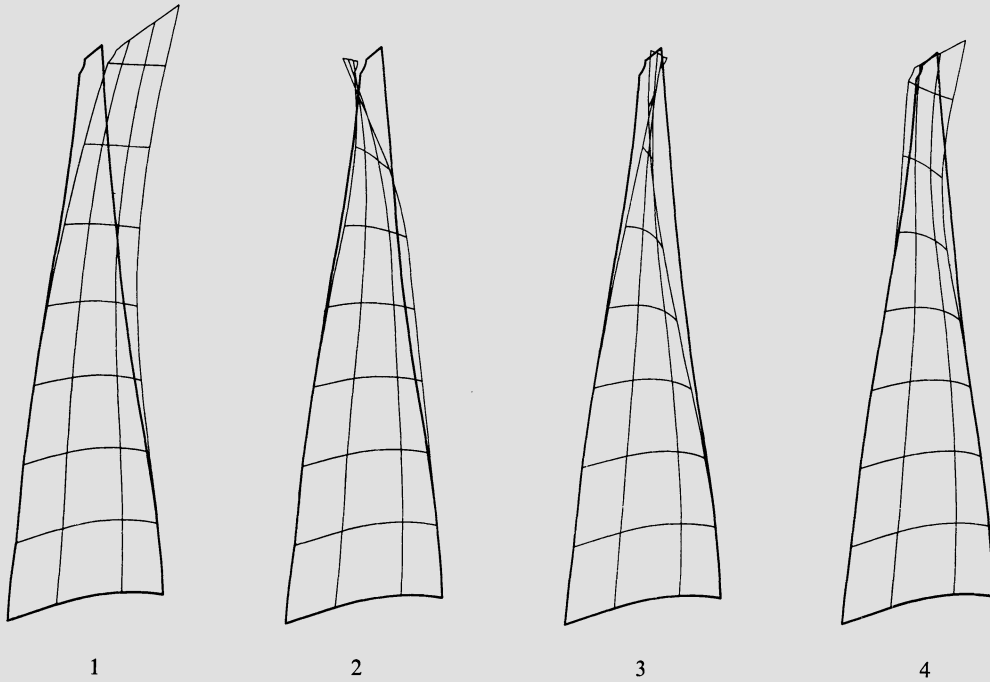


Abb. 20.14.2. Vier Schwingungsformen einer verdrehten Schaufel. Nach [31]

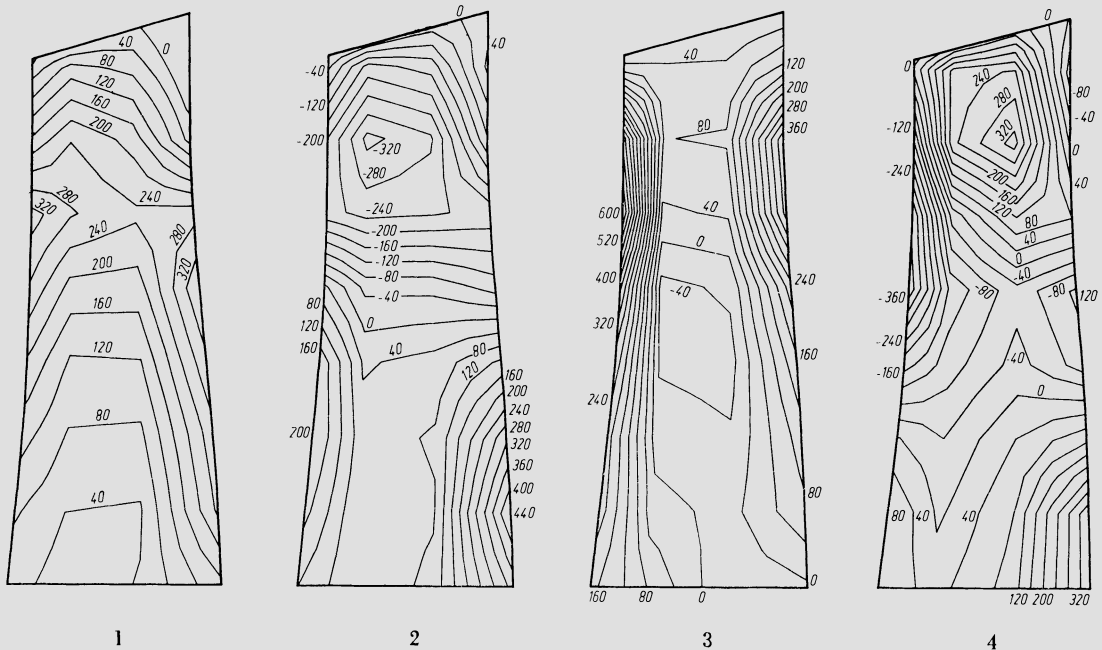


Abb. 20.14.3. Spannungsverteilungen entsprechend den vier Schwingungsformen 1-4 nach Abb. 20.14.2. Nach [31]

20.15 Experimentelle Untersuchung von Schaufelschwingungen

Man hat von jeher Schaufelschwingungen auch auf experimentellem Wege untersucht. Lange Zeit war dies in komplizierter gelagerten Fällen der einzige Weg, die Eigenfrequenzen genügend genau zu bestimmen. Die modernen Rechenverfahren erlauben es zwar, Konfigurationen rechnerisch zu untersuchen, bei denen dies früher unmöglich gewesen wäre; andererseits muß oft so sehr an die Grenzen der Möglichkeiten gegangen werden, daß man auf die experimentelle Verifikation nicht verzichten wird. In manchen Fällen ist es dabei wirtschaftlicher, die Untersuchung an einem der Ausführung geometrisch ähnlichen Modell auszuführen, das aus einem anderen Werkstoff bestehen kann. Deshalb sei hier vorausgeschickt, in welcher Weise die Übertragung vom Modell auf die Ausführung zu erfolgen hat. Nachfolgend möge links die Gleichung für die Biegeschwingung, rechts diejenige für die Drehschwingung angegeben werden. Die Eigenschwingungszahl n -ter Ordnung v_{en} kann nach den Ausführungen unter 20.5 und 6 dargestellt werden durch

$$v_{en} = \frac{\kappa'_n}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\rho f_0}}, \quad v_{en} = \frac{\kappa'_{in}}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho \psi_0}}. \quad 20.15(1)$$

Mit $J_0 = k_J s^4$, $f_0 = k_f s^2$ und indem man G durch E ausdrückt, geht dies auch über in

$$v_{en} = \frac{\kappa'_n s}{l} \sqrt{\frac{Ek_J}{\rho k_f}}, \quad v_{en} = \frac{\kappa'_{in}}{l} \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho\psi_0}}. \quad 20.15(2)$$

Diese beiden Formeln können offensichtlich in die Form

$$v_{en} = \frac{K_n}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_{en} = \frac{K'_n}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad 20.15(3)$$

gebracht werden. Da nun die K_n bzw. K'_n für geometrisch ähnliche Schaufeln gleich sind, erhält man für die Biegeschwingung und die Drehschwingung die gleiche Relation zwischen Modell und Ausführung, wie zu erwarten. Kennzeichnet Index M das Modell, so wird

$$v_e = v_{eM} \frac{l_M}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{\rho_M}{E_M}} \quad 20.15(4)$$

für alle Schwingungsordnungen n .

Grundsätzlich sind zwei Arten der Problemstellung möglich. In einem Falle handelt es sich lediglich um die *Feststellung der Eigenfrequenzen* und der *Eigenschwingungsformen*. Hierbei genügt es in der Regel, mit ruhenden Objekten zu experimentieren. Diese können Schaufeln, Schaufelpakete oder auch maßstäbliche Modelle von solchen sein. Allerdings fehlt bei derartigen Versuchen der Einfluß der Fliehkraft. Er muß nötigenfalls durch eine Korrekturrechnung berücksichtigt werden. — Im anderen Falle steht darüber hinaus die *Schwingungsbeanspruchung* der Schaufeln im Vordergrund des Interesses. Dann muß mit der rotierenden Schaufelung experimentiert werden, sei es mit besonderen Versuchsmaschinen, sei es mit der Großausführung.

Stationäre Versuche wurden schon früh in sehr einfacher Weise durchgeführt, etwa lediglich durch Anschlagen der Schaufel oder durch Streichen mit einem Geigenbogen. Später ging man dazu über, die Schaufel mit einstellbarer Frequenz permanent zu erregen. Zum Beispiel wurde durch eine rotierende Scheibe, die an ihrem Umfang Löcher aufwies, Luft hindurchgeblasen (Sirene), derart, daß die Luftstrahlen die Schaufel intermittierend trafen und sie so erregten. Die Schwingungsformen wurden dabei in bekannter Weise durch Aufstreuen von Lycopodiumpulver sichtbar gemacht.

Im Zuge der Weiterentwicklung der Versuchstechnik sind diese Verfahren durch die elektromagnetische Erregung ersetzt worden. Abb. 20.15.1 zeigt eine solche Anordnung. Ein elektromagnetischer Geber einstellbarer Frequenz überträgt durch einen Kontaktstift

die Kraft auf das Werkstück. Da der Stift mit Rücksicht auf die Trägheit keinen großen Weg zurücklegen kann, muß er an einer Stelle angesetzt werden, wo keine große Amplitude zu erwarten ist. Zur Registrierung der Schwingungsbewegung können an geeigneten Stellen auf das Werkstück aufgeklebte Dehnungsmeßstreifen wie auch berührungsfreie induktive Aufnehmer verwendet werden. Diese Signale können über Verstärker auf Magnetbandgeräte und Oszillographen gegeben werden.

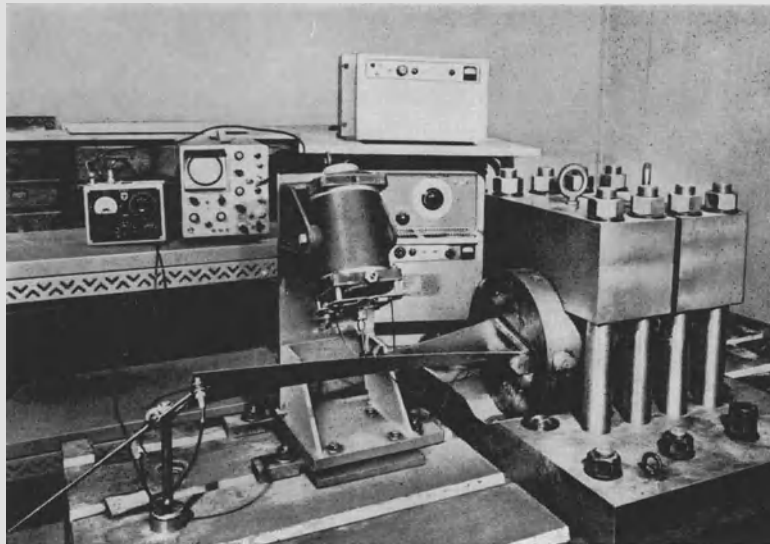


Abb. 20.15.1. Versuchseinrichtung zur Messung von Schaufelschwingungen (BBC)

Auch mit solchen Anordnungen stößt man an Grenzen, die durch die Größe elektromagnetischer Geber und die unvermeidliche mechanische Trägheit gegeben sind. Man verwendet daher zur Erregung auch auf die Schaufeln aufgeklebte leichte Piezokristalle, die ihrerseits mit einstellbarer Frequenz elektrisch erregt werden können. Abb. 20.15.2 zeigt im Schema eine solche Versuchseinrichtung von *Wolfs* [32], mit der die Schwingungen von Schaufelpaketen untersucht werden. Da die an den verschiedenen Schaufeln angebrachten Piezokristalle in unterschiedlicher Phase erregt werden können (z.B. je zwei aufeinanderfolgende Schaufeln im Gegentakt), lassen sich die verschiedenen in einem Paket möglichen Schwingungsformen herbeiführen. Die Registrierung der Schwingungen erfolgt induktiv und durch Dehnungsmeßstreifen. Da gerade Schaufelpakete komplizierte Schwingungsspektren mit dicht beieinanderliegenden Frequenzen aufweisen, ist es notwendig, eine Fourier-Analyse mit Hilfe eines Echtzeitanalysators durchzuführen (RTA = real time analyzer).

Aber auch grundsätzlich andere Wege zur Durchführung einer Modalanalyse (Bestimmung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen) sind bekannt. Ein System, das bei BBC im Gebrauch ist, beruht auf folgendem Prinzip. Wird ein Körper angeschlagen, so ist die entstehende Schwingung eine Überlagerung aller Eigenschwingungen, die entsprechend der Dämpfung asymptotisch abklingen. Auf das Werkstück wird nun ein Netz aufgezeichnet und die Erregung erfolgt durch einen Anschlag mit einem Spezialhammer in einem Netzpunkt. Der Hammer besitzt eine eingebaute Kraftmeßzelle, die das Kraftspektrum zu analysieren gestattet. Die Systemantwort wird mit einem an einer Referenzstelle eingebauten Akzelerometer bestimmt. Diese beiden Signale werden in einen Mikrocomputer eingespeist, der daraus eine Übertragungsfunktion berechnet. Die Gesamtheit der Übertragungsfunktionen für die sämtlichen nacheinander anzuschlagenden Netzpunkte definieren das Eigenwertproblem, das vom Computer gelöst wird. Die Lösung

liefert die Frequenzen, die Ausschläge in allen Gitterpunkten und die Dämpfung, und zwar alles für jede der Schwingungsmoden. Auf einen Bildschirm kann jede Schwingung dargestellt werden, derart, daß die Schwingungsausschläge vergrößert, der zeitliche Ablauf verlangsamt wiedergegeben werden, so daß die Schwingung unmittelbar anschaulich wird.

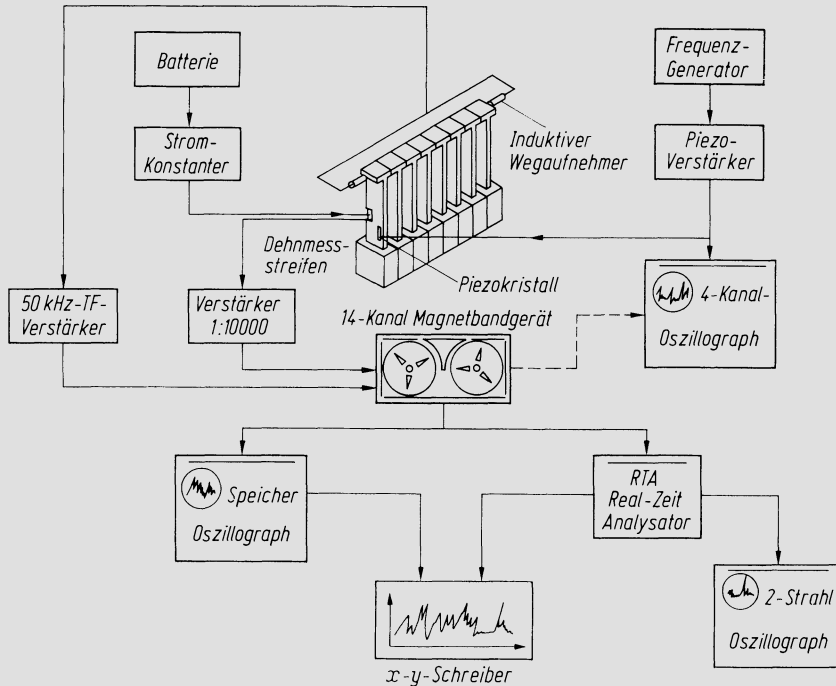


Abb. 20.15.2. Schema einer Versuchseinrichtung zur Messung von Schwingungen an einem Schaufelpaket. Nach [32]

Bei allen stationären Schwingungsversuchen kommt der einwandfreien Einspannung des Werkstückes große Bedeutung zu. Manchmal stößt man hier an eine Grenze, vor allem bei Scheibenläufern, wo die Scheibenschwingung einen maßgebenden Einfluß hat.

Versuche an rotierenden Schaufelkränzen sind naturgemäß sehr viel aufwendiger als solche an ruhenden Werkstücken. Nicht nur sind korrekte Grenzbedingungen verwirklicht, sondern es ist auch die reelle Erregung gegeben, so daß auch die effektiven Spannungsamplituden erhalten werden. Das Anbringen der Dehnungsmeßstreifen und der zugehörigen Leiter stellt schwierige mechanische und herstellungstechnische Probleme. Die Weiterleitung der Signale aus dem Läufer in die stillstehende Auswertungsanlage kann grundsätzlich auf zwei Arten geschehen. Man kann über entsprechende *Kontakttringe* die unmittelbare leitende Verbindung herstellen. *Bloemhof* [33] beschreibt eine solche Anordnung, bei der Quecksilberdreherübertrager verwendet wurden, die sich durch sehr niedrige Übertragungswiderstände auszeichnen. Die andere Methode ist die *Telemetrie*, bei der die Signalübertragung drahtlos geschieht. Ein Blockschaltbild einer solchen Anordnung zeigt Abb. 20.15.3.

Ein Hochfrequenzspeisegerät 1 erzeugt in einer ringförmigen Spule 2 ein elektrisches Feld, das in einer mit dem Läufer rotierenden Sekundärspule 3 eine hochfrequente Spannung induziert. Von dieser wird durch den Gleichrichter 4 und den Stabilisator 5 eine Gleichspannung von 2,5 V erzeugt, mit welcher der Sender 6 gespeist wird. Das der oszillierenden Dehnung des Dehnungsmeßstreifens 7 entsprechende Analogsignal wird zur Modulation der im Ultrakurzwellenbereich liegenden Trägerfrequenzen des Senders be-

nutzt. Dieses modulierte Signal wird von der Sendeantenne 8 auf die ringförmige Empfangsantenne 9 übertragen. Im Empfänger 10 wird das Signal demoduliert und wieder rücktransformiert in ein solches, das der Dehnung des Meßstreifens analog ist. So wird es in das Magnetbandgerät 11 eingespeist, um von dort jeder gewünschten weiteren Aus-

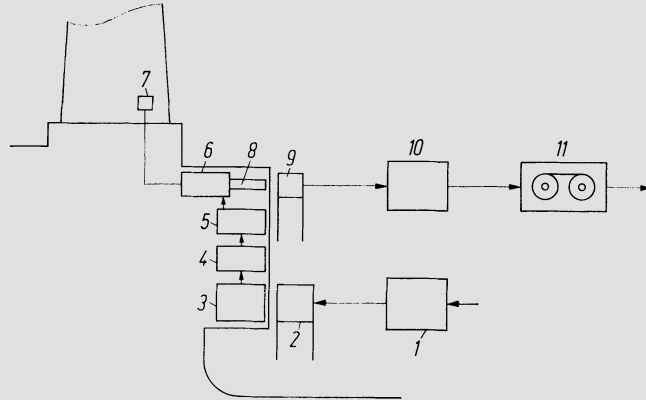


Abb. 20.15.3. Blockschaltbild einer Telemetrievorrichtung zur Messung von Schaufelschwingungen

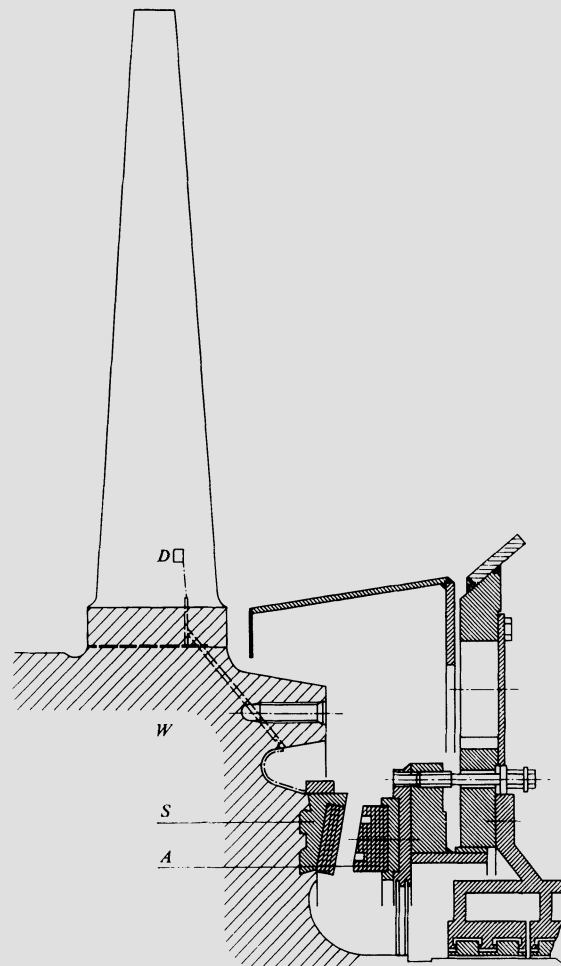


Abb. 20.15.4. Telemetrieordnung zur Messung von Schaufelschwingungen (BBC). *A* Antenne, *D* Dehnmeßstreifen, *S* Sender, *W* Welle

wertung zugeführt zu werden. Eine Anordnung dieser Art zeigt Abb. 20.15.4. — In diesem Beispiel erfolgt die Speisung des Senders von außen auf induktivem Wege. In anderen Fällen wird zur Speisung eine Batterie verwendet.

Mit Dehnungsmeßstreifen können naturgemäß nur wenige Schaufeln eines Rades erfaßt werden und an diesen nur einzelne Punkte. Deshalb sind auch optische Verfahren entwickelt worden. Dabei werden dünne Lichtstrahlen auf die rotierende Schaufelung gerichtet und von den Schaufeln bei ihrem Durchgang reflektiert. Es entstehen intermittierende Lichtsignale, die einem Photodetektor zugeleitet werden können. Schwingungen sind als Unregelmäßigkeiten dieser Signale zu erkennen. So kann das ganze Rad abgeleuchtet werden.

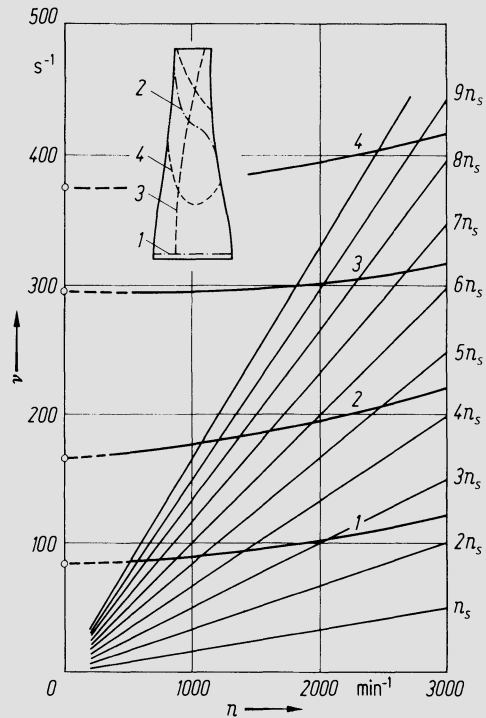


Abb. 20.15.5. Schwingungsformen und Campbell-Diagramm einer Endstufenschaufel einer Dampfturbine

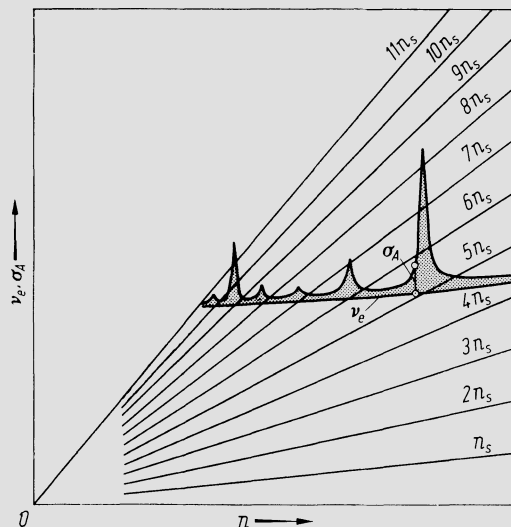


Abb. 20.15.6. Campbell-Diagramm mit eingetragenen Spannungsamplituden

In Abb. 20.15.5 ist ein sog. *Campbell-Diagramm* dargestellt, wie es aus Telemetriemessungen an der Endstufe einer Dampfturbine hervorgegangen ist. Die Eigenfrequenzen der im Bilde wiedergegebenen Schwingungsformen 1–4 sind in Funktion der Drehzahl aufgetragen. Die Grundschiwingung 1 ist offensichtlich eine praktisch reine Biegeschwingung, während die Form 3 ausgesprochenen Torsionscharakter hat. Die anderen sind kombinierte Moden, die eher als Schalenschwingungen zu kennzeichnen sind. Weiter sind in das Diagramm Strahlen eingetragen, die ganzzahlige Vielfache der sekundlichen Drehzahl n_s darstellen. Ihre Schnittpunkte mit den Frequenzkurven 1–4 der einzelnen Schwingungsformen sind Resonanzpunkte. Bei der Betriebsdrehzahl liegen offensichtlich keine Resonanzpunkte. — Ist die Drehzahlabhängigkeit der verschiedenen Eigenfrequenzen einmal experimentell verifiziert, so lassen sich die Frequenzen bei Betriebsdrehzahl aus denen im Stillstand bestimmen. Im Laufe der Fabrikation werden daher die maßgebenden Frequenzen jeder einzelnen Schaufel einer Endstufe im stationären Versuch gemessen, daraus diejenigen bei Betriebsdrehzahl gerechnet und geprüft, ob keine Resonanzen auftreten.

Campbell-Diagramme lassen sich auch durch das elektronische Auswertesystem unmittelbar erzeugen. Beispiele solcher Diagramme finden sich z. B. in [33]. Zur besseren Deutlichkeit ist in Abb. 20.15.6 ein solches schematisiert dargestellt. Es wird einerseits in Funktion der Drehzahl die Eigenschwingungszahl ν_e aufgezeichnet. Von dieser ν_e -Kurve ausgehend trägt die Auswertevorrichtung je die im betreffenden Zustand gemessenen Spannungsamplitude σ_A im geeigneten Maßstab nach oben ab. So entstehen über den Resonanzpunkten typische Spannungsspitzen, deren Höhe erkennen läßt, ob die betreffende Resonanz die Schaufel gefährdet.

20.16 Schwingungsanregung und Spannungsamplitude bei einzeln schwingenden Schaufeln

Die Vorausrechnung der Beanspruchung in Resonanz schwingender Schaufeln ist nur unter starken Vereinfachungen möglich und auch heute noch mit großer Unsicherheit behaftet. Vorerst sei hier vorausgesetzt, daß die Schaufel höchstens schwach verwunden sei, so daß Biegeschwingung und Drehschwingung praktisch entkoppelt sind und für sich betrachtet werden können.

Die *Biegeschwingung* kann, wenn wir von den Bezeichnungen nach Abb. 20.16.1 ausgehen, durch

$$y = Y(x) \cos \omega t \quad (20.16(1))$$

beschrieben werden. Für den periodischen Anteil der Kraft, die auf die Schaufel einwirkt, werde gesetzt

$$\Delta P_x = \Delta P_{x0} (\sin \tau \sin \omega t + \cos \tau \cos \omega t). \quad (20.16(2))$$

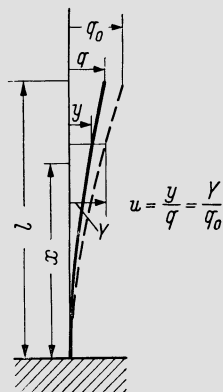


Abb. 20.16.1. Schaufel in ausgebogener Lage, zur Herleitung der Beziehung über die Spannungsamplitude in Resonanz

Hier ist ΔP_x der lokale und momentane Wert der Kraft pro Längeneinheit, ΔP_{x_0} der entsprechende Amplitudenwert und τ eine von x abhängige Größe, die berücksichtigt, daß die Kräfte längs x im allgemeinen Phasenverschiebungen aufweisen. ΔP_x möge so gleich als die Kraftkomponente in Richtung der durch 20.16(1) gegebenen Bewegung aufgefaßt werden. — Nun sei *Resonanz* vorausgesetzt, also $\omega = \omega_e$. Wenn man beachtet, daß das Verhältnis $u = y/q$ nach Abb. 20.16.1 der Größe Φ in Abschn. 20.2 entspricht, wird der Resonanzausschlag $q_{0\max}$ an der Schaufelspitze in genauer Analogie zu Gl. 20.2(18)

$$q_{0\max} = \frac{\pi}{\delta K} \sqrt{\left(\int_0^l \Delta P_{x_0} u \sin \tau dx\right)^2 + \left(\int_0^l \Delta P_{x_0} u \cos \tau dx\right)^2}. \quad 20.16(3)$$

Mit der vereinfachenden Voraussetzung, daß ΔP_{x_0} längs der Schaufel konstant sei, nämlich $\Delta P_0/l$, wo ΔP_0 die Amplitude der gesamten periodischen Kraftkomponente ist, und mit $\xi \equiv x/l$ geht diese Gleichung über in

$$q_{0\max} = \frac{\pi \Delta P_0}{\delta K} \sqrt{\left(\int_0^1 u \sin \tau d\xi\right)^2 + \left(\int_0^1 u \cos \tau d\xi\right)^2}. \quad 20.16(4)$$

Für die Konstante $K = 2\Psi/q^2$ läßt sich ein Ausdruck gewinnen, wenn man beachtet, daß die potentielle Energie des ausgebogenen Stabes

$$\Psi = \frac{E}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 J dx = \frac{EJ_0 q^2}{2l^3} \int_0^1 u''^2 \vartheta d\xi \quad 20.16(5)$$

beträgt, wobei Akzente Ableitungen nach ξ bezeichnen. Index 0 verweist wieder auf einen ausgezeichneten Querschnitt, gegebenenmaßen den Einspannquerschnitt, und es ist wie früher $\vartheta = J/J_0$. Somit wird

$$K = \frac{EJ_0}{l^3} \int_0^1 u''^2 \vartheta d\xi. \quad 20.16(6)$$

Aus numerischen Gründen erweist es sich als zweckmäßig, dieses Integral vermöge der Rayleighschen Beziehung 20.7(9) in folgender Weise durch ein anderes auszudrücken. Es ist

$$\int_0^1 u''^2 \vartheta d\xi = \frac{qf_0 l^4}{EJ_0} \omega_e^2 \int_0^1 \varphi u^2 d\xi \quad 20.16(7)$$

mit $\varphi = f/f_0$. Da das Integral rechts die kinetische Energie der Schaufel repräsentiert, ist es gegebenenfalls zu ergänzen durch ein Glied, das den Beitrag der Masse einer Deckplatte u. dgl. berücksichtigt, wie unter 20.9 angegeben. Man kann dies auch berücksichtigen durch einen entsprechenden Verlauf von φ , das dann an der Schaufelspitze entsprechend dem Deckbandgrundriß einen sehr großen Wert annimmt. Setzt man noch

$$\Omega^2 \equiv \frac{qf_0 l^4}{EJ_0} \omega_e^2, \quad 20.16(8)$$

führt Gl. 20.16(7) in 20.16(6) ein und die so entstehende Beziehung wieder in 20.16(4), so folgt

$$q_{0\max} = \frac{\pi \Delta P_0}{\delta} \frac{l^3}{EJ_0} \frac{\sqrt{\left(\int_0^1 u \sin \tau d\xi\right)^2 + \left(\int_0^1 u \cos \tau d\xi\right)^2}}{\Omega^2 \int_0^1 \varphi u^2 d\xi}. \quad 20.16(9)$$

Man beachte, daß Ω durch die Gestalt des Stabes und die Schwingungsform allein gegeben ist. Beim prismatischen Stab ist es z. B. identisch mit κ_n^2 nach Gl. 20.5(14).

Nun ist im voll ausgebogenen Zustand im Resonanzfall die Auslenkung

$$Y = u q_{0\max}, \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} q_{0\max} = \frac{u''}{l^2} q_{0\max}. \quad 20.16(10)$$

Da aber $dY^2/dx^2 = M/EJ$, erhält man, wenn man 20.16(10) speziell für die Schaufelwurzel $\xi = 0$ ansetzt

$$M(0) = \frac{EJ_0 u''(0)}{l^2} q_{0\max}. \quad 20.16(11)$$

Die in 20.16(9) auftretende Kraftamplitude ΔP_0 möge nun durch den zeitlichen Mittelwert \bar{P} der fluiddynamischen Schaufelkraft ausgedrückt werden vermöge

$$\Delta P_0 = S\bar{P}, \quad 20.16(12)$$

wodurch der *Stimulus* S definiert ist. Für die am Fuß eingespannte freistehende Schaufel (auch mit nicht verbundener Deckplatte) ist das fluiddynamisch bedingte mittlere Biegemoment an der Schaufelwurzel

$$M_{bF} = \frac{\bar{P}l}{2}, \quad 20.16(13)$$

mithin $\bar{P} = 2M_{bF}/l$, was in 20.16(12) eingesetzt, auf

$$\Delta P_0 = \frac{2M_{bF}}{l} S \quad 20.16(14)$$

führt. Wenn man dies in 20.16(9) einführt und den so entstehenden Ausdruck für $q_{0\max}$ in 20.16(11) einsetzt, entsteht eine Gleichung, bei der links $M(0)$ steht, während rechts der Faktor M_{bF} auftritt. Nun ist $M(0)/M_{bF} = \sigma_A/\sigma_{bF}$, wo σ_A die durch die Schwingung an der Schaufelwurzel entstehende Spannungsamplitude ist. Das Verhältnis σ_A/σ_{bF} ist aber nichts anderes als der mit Gl. 16.10(3) eingeführte *dynamische Faktor*, und zwar ist es sein Maximalwert D_{\max} bei Resonanz. So gewinnt man also schließlich eine Beziehung für D_{\max} , die sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$D_{\max} = \frac{\pi}{\delta} SH_n = \frac{\pi}{\delta} SH_n^a H_n^r, \quad 20.16(15)$$

$$H_n^a = \frac{2u''(0) \int_0^1 u_n d\xi}{\Omega_n^2 \int_0^1 \varphi u_n^2 d\xi}, \quad 20.16(16)$$

$$H_n^r = \frac{\sqrt{\left(\int_0^1 u_n \sin \tau d\xi\right)^2 + \left(\int_0^1 u_n \cos \tau d\xi\right)^2}}{\int_0^1 u_n d\xi}. \quad 20.16(17)$$

Hier ist durchweg noch der Index n beigefügt, um anzudeuten, daß alle diese Ausdrücke für verschiedene Schwingungsordnungen n gebildet werden können, denen verschiedene Schwingungsformen u_n und Frequenzgrößen Ω_n entsprechen. Der Faktor H_n ist nach dem Vorschlag von *Bloemhof* [33] in zwei Teilfaktoren H_n^a und H_n^r zerlegt, von denen der erste nur von Schaufelgestalt und Schwingungsform, der zweite von der Phasenverteilung der Erregungskräfte längs der Schaufel abhängt. Für phasengleichen Angriff ist $H_n^r = 1$. Dann wird $H_n = H_n^a$ identisch mit dem H_n , das in früheren Auflagen dieses Buches angegeben war.

In genau analoger Weise kann die *Torsionsschwingung* behandelt werden. Ein Unterschied besteht allerdings insofern, als die durch Strömungskräfte bedingten zeitlichen

Mittelwerte der Biegespannungen stets leicht berechnet werden können, während die entsprechenden zeitlich gemittelten Torsionsspannungen viel schwerer zugänglich sind; üblicherweise sind sie auch klein und werden schon aus diesem Grunde nicht berechnet. Deshalb ist es zweckmäßig, die Schubspannung τ_i , die vermöge Gl. 16.10(3) den dynamischen Faktoren D_τ definiert, nach der folgenden einfachen Konvention zu berechnen. Es ist τ_i die größte Schubspannung, die im Schaufelwurzelquerschnitt entsteht, wenn die Schaufel einem Torsionsmoment unterworfen wird, das gleich dem Produkt aus der zeitlich gemittelten Tangentialkraft \bar{T} und der halben Profillehnenlänge $s/2$ ist. Mit W_{t0} als Torsions-Widerstandsmoment des Schaufelwurzelquerschnittes wird also

$$\tau_i = \frac{\bar{T}s}{2W_{t0}}, \quad \tau_A = D_\tau \frac{\bar{T}s}{2W_{t0}}, \tag{20.16(18)}$$

womit eine Relation für die Torsionsspannungsamplitude τ_A im Wurzelquerschnitt gewonnen ist. Der dynamische Faktor $D_{\tau\max}$ im Resonanzfall ergibt sich aus einer Herleitung, die genau gleich verläuft wie im Falle der Biegung und auf folgendes führt:

$$D_{\tau\max} = \frac{\pi}{\delta_t} \left(2S \frac{a}{s} \right) H_{tn} = \frac{\pi}{\delta_t} \left(2S \frac{a}{s} \right) H_{tn}^a H_{tn}^r, \tag{20.16(19)}$$

$$H_{tn}^a = \frac{u'(0) \int_0^1 u_n d\xi}{\Omega_{tn}^2 \int_0^1 \varphi_t u_n^2 d\xi}, \tag{20.16(20)}$$

$$H_{tn}^r = \frac{\sqrt{\left(\int_0^1 u_n \sin \tau d\xi \right)^2 + \left(\int_0^1 u_n \cos \tau d\xi \right)^2}}{\int_0^1 u_n d\xi}. \tag{20.16(21)}$$

Hier ist $u = \gamma/\gamma_{\max}$ das Verhältnis des lokalen Verdrillungswinkels zu seinem Maximalwert, δ_t das logarithmische Dekrement bei Torsion. Ferner ist

$$\Omega_{tn}^2 = \frac{G}{\rho l^2 \varphi_0} \omega_{ten}^2, \quad \varphi_t = \frac{J_p}{J_{p0}}. \tag{20.16(22)}$$

Wo J_p das polare Trägheitsmoment ist, vgl. auch die Ausführungen unter 20.6. Das Stimulsglied $(2Sa/s)$ kommt folgendermaßen zustande. Für den Amplitudenwert des oszillierenden fluiddynamischen Drehmomentes wird gesetzt

$$\Delta M_{t0} = S\bar{T}a, \tag{20.16(23)}$$

wo S der gleiche Stimulus ist, der für die Biegeschwingung gilt und a ein Hebelarm, der dadurch definiert ist, daß er vermöge Gl. 20.16(23) auf das korrekte ΔM_{t0} führt. Ersetzt man hier \bar{T} nach 20.16(18) durch

$$\bar{T} = 2\tau_i W_{t0}/s, \tag{20.16(24)}$$

so folgt

$$\Delta M_{t0} = \frac{2S\tau_i W_{t0} a}{s}, \tag{20.16(25)}$$

womit der Ausdruck sofort gegeben ist. Man beachte, daß $(2Sa/s)$ unmittelbar die Größe ist, die z. B. *Gloger* [34, 35] angibt. Daten über S und a/s finden sich in Abschn. 20.18.

Zahlentafel 20.16.1 liefert für die Schaufel konstanten Querschnittes die H_n^a und H_n^r bis zur dritten Ordnung, und zwar für verschiedene Einspannverhältnisse.

Zahlentafel 20.16.1

Grenzbedingungen	Biegeschwingung			Torsionsschwingung		
	H_1^a	H_2^a	H_3^a	H_{t1}^a	H_{t2}^a	H_{t3}^a
Ein Ende eingespannt, anderes frei	0,8908	0,0788	0,0165	0,8106	0,0901	0,0324
Beide Enden eingespannt	0,1485	0	0,0120	0,4053	0	0,0450
Ein Ende eingespannt, anderes gestützt	0,2231	0,0066	0,0128	—	—	—

Wenn man für das Gesetz der Phasenverschiebung der Erregung längs der Schaufel den Ansatz

$$\tau = \frac{\pi}{2}(1 - c\xi) \tag{20.16(26)}$$

macht und somit die Phasenverschiebung durch die Konstante c kennzeichnet, kann man die H_n und H_{tn} auch unmittelbar in Funktion von c angeben, vgl. [36]. Abb. 20.16.2 und 3 zeigen die so erhaltenen Ergebnisse. Dividiert man diese Werte durch die ihnen entsprechenden H_r^a nach Zahlentafel 20.16.1, so hat man die H_n' und H_{tn}' . Alle diese Angaben können näherungsweise auch auf schwach verjüngte und verdrehte Schaufeln übertragen werden. Für die erste Ordnung gibt $c = 0$, also der Fall ohne Phasenverschiebung, die intensivste Erregung, nicht aber für die anderen Ordnungen.

Man beachte, daß man bei Verwendung dieser Unterlagen stets die Spannungsamplituden σ_A oder τ_A in $\xi = 0$ erhält, und zwar ausgehend von der Spannung σ_{bF} , die sich aus dem Moment nach Gl. 20.16(13) ergibt, bzw. dem τ_i , das aus 20.16(18) folgt. Dies gilt unabhängig von der Art der Einspannung, da die Beziehungen so normiert sind. — Die Formeln können noch in zweierlei Hinsicht verallgemeinert werden. Herrscht nicht genau Resonanz, so tritt einfach der unter 20.1 eingeführte Vergrößerungsfaktor V an die Stelle von π/δ . Wenn die kritische Beanspruchung nicht an der Schaufelwurzel auftritt, sondern an einer beliebigen Stelle der Schaufel, läßt sich stets für die dort erscheinende Vergleichsspannungsamplitude σ_{vA} setzen

$$\sigma_{vA} = k_{\sigma n} \sigma_A \quad \text{oder} \quad \sigma_{vA} = k_{\tau n} \tau_A. \tag{20.16(27)}$$

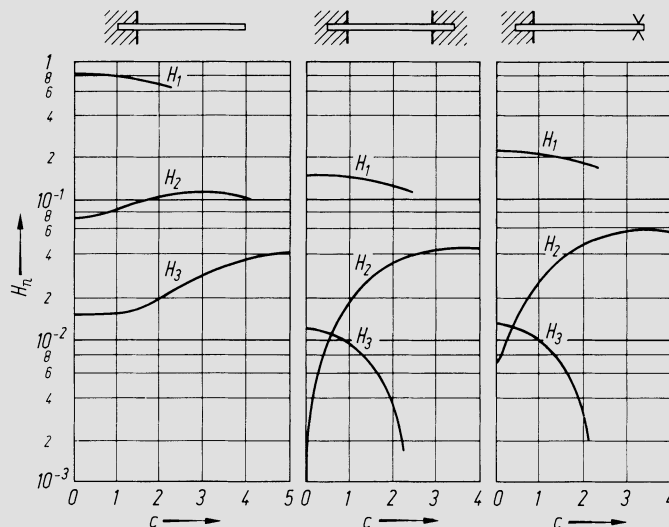


Abb. 20.16.2.

H_n in Funktion der die Phasenverschiebung kennzeichnenden Konstanten c für Biegeschwingungen

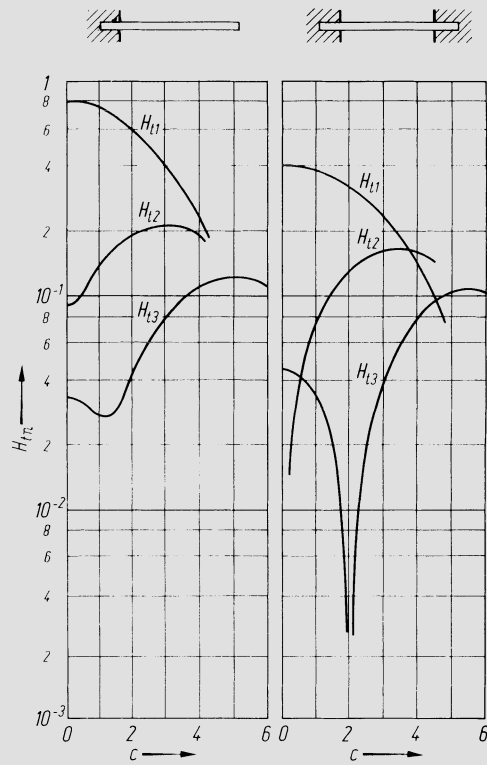


Abb. 20.16.3. H_{tn} in Funktion der die Phasenverschiebung kennzeichnenden Konstanten c für Torsionsschwingungen

Die Koeffizienten $k_{\sigma n}$ und $k_{\tau n}$ für die betrachtete Stelle hängen von der Schaufelgeometrie und der Schwingungsform ab, was durch die Indices angedeutet ist. Damit erhält man schließlich

$$\sigma_{vA} = k_{\sigma n} \sigma_{bF} V S H_n, \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{vA} = k_{\tau n} \tau_i V_t \left(2S \frac{a}{s} \right) H_{tn}, \quad 20.16(28)$$

je nachdem Biegung oder Torsion vorliegt. Diese Beziehungen sind nur anwendbar in unmittelbarer Nähe der Resonanz, denn es wurde ja vorausgesetzt, daß eine bestimmte Schwingungsform vorliegt. In der Tat dominiert in Resonanznähe die betreffende Schwingungsform so sehr, daß sie allein berücksichtigt werden muß, während im allgemeinen eine Überlagerung der verschiedenen Schwingungsformen vorzunehmen ist. Praktisch interessiert aber nur das Verhalten in Resonanznähe.

In der hier dargelegten Form setzt die Theorie die unverdrehte Schaufel voraus, ist also auf stark verwundene Schaufeln nicht anwendbar. Bloemhof [33] gibt einen sehr allgemeinen Formalismus analoger Art an. Die Lage des einzelnen Schaufelschnittes wird definiert durch die Verschiebungen seines Schwerpunktes in Richtung der Gitterfront und der Gitternormalen und durch den örtlichen Verdrillungswinkel. Dementsprechend werden periodische Erregungskräfte in diesen beiden Koordinatenrichtungen und ein erregendes Moment eingeführt. Überlegungen grundsätzlich gleicher Art wie oben dargelegt, führen auf eine Formel von gleichem Typ, nur daß H_n naturgemäß sehr viel komplizierter aufgebaut ist. Die Anwendung dieses Formalismus in strenger Weise setzt allerdings sehr umfassende Unterlagen über die Art der Erregung voraus. An dieser Stelle muß der Autor im praktischen Falle doch wieder wesentliche Vereinfachungen vornehmen, weshalb auch so nur eine beschränkte Genauigkeit erreichbar ist. Deutlich tritt indessen zutage, daß sich bei starker Verwindung die Verhältnisse gegenüber der unverdrehten Schaufel sehr verschieben. Nur gerade im Falle der Biegeschwingung erster Ordnung ist der für die prismatischen Schaufeln berechnete Faktor H_1 eine gut brauchbare Näherung.

Man könnte vermuten, daß auch die Nachgiebigkeit der Einspannung die Ergebnisse stark beeinflussen könnte, doch zeigt die Untersuchung, daß dies nicht zutrifft. Sofern nämlich diese Nachgiebigkeit mit der gleichen Dämpfung (log. Dekrement) verbunden ist wie die des Schaufelblattes, verschieben sich die Arbeitsaufnahme der schwingenden Schaufel und die Energiedissipation in gleichem Maße, womit das Ergebnis unbeeinflusst bleibt.

20.17 Schwingungsanregung und Spannungsamplitude bei Paketschwingungen

Die Ausführungen des vorangehenden Abschnittes lassen sich verallgemeinern für den Fall, daß Querverbindungen zwischen den Schaufeln bestehen (Deckbänder, Bindedrähte), wodurch die Schaufeln zu Gruppen — auch Pakete genannt — zusammengefaßt werden. Es möge zuerst der einfache Fall der Schwingung im *Gleichtakt* vorausgenommen werden, bei dem alle Schaufeln in gleicher Weise und in Phase schwingen.

Die Kraftkomponente (pro Längeneinheit) in Richtung der Schwingungsbewegung einer Schaufel des Paketes ist stets darstellbar in der Form

$$P_x = \bar{P}_x + \sum_{Z=1}^{\infty} P_{xZ} \sin [Z(\omega_r t - \varphi_Z)]. \quad 20.17(1)$$

Hier ist ω_r die Winkelgeschwindigkeit des Läufers und \bar{P}_x der zeitliche Mittelwert der Schaufelkraft. Die Amplituden P_{xZ} und Phasen φ_Z ergeben sich aus der Fourier-Analyse der längs des Umfanges variierenden Kraft und sind im allgemeinen Funktionen des Radius, d. h. auch Funktionen der Koordinate ξ des vorangehenden Abschnittes. Für unsere Untersuchung interessiert nur der oszillierende Anteil \tilde{P}_x der Kraft. Es sei weiter z die gesamte Schaufelzahl des Rades und z_p die Zahl der Schaufeln des betrachteten Paketes. Wenn nun φ_z der Phasenwinkel der ersten Schaufel des Paketes ist, gilt für die anderen Schaufeln offenbar

$$\tilde{P}_x = \sum_{Z=1}^{\infty} P_{xZ} \sin \left[Z \left(\omega_r t - \varphi_z + \frac{2\pi k}{z} \right) \right]. \quad 20.17(2)$$

Die resultierende oszillierende Kraft auf alle Schaufeln des Paketes zusammen ist

$$\tilde{P}_{x\text{res}} = P_{xZ} \sum_{Z=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{z_p-1} \sin \left[Z \left(\omega_r t - \varphi_z + \frac{2\pi k}{z} \right) \right]. \quad 20.17(3)$$

Nun sei $Z\omega_r$ mit *einem bestimmten* Z die Erregungsfrequenz, mit der das Schaufelpaket in Resonanz tritt. Dann interessiert von der Summe nur das Glied, das diesem Z entspricht. Dafür läßt sich setzen

$$\tilde{P}_{x\text{res}}(Z) = P_{x0}(Z) \sin (Z\omega_r t - \varphi_z) = P_{xZ} \sum_{k=0}^{z_p-1} \sin \left[Z \left(\omega_r t - \varphi_z + \frac{2\pi k}{z} \right) \right], \quad 20.17(4)$$

wodurch die Amplitude $P_{x0}(Z)$ und der Phasenwinkel φ_z *definiert* sind. Nun werde als *Bindungsfaktor* α_z die folgende Größe definiert:

$$\alpha_z \equiv \frac{P_{x0}(Z)}{z_p P_{xZ}}; \quad 20.17(5)$$

$P_{x0}(Z)$ ist offenbar die Kraftamplitude, die an der Schaufel angreifen müßte, wenn sie von den anderen unabhängig wäre und trotzdem die gleiche Anregung erfahren sollte. Somit kennzeichnet α_z die Verminderung der Erregung durch die gegenseitige Verbindung der Schaufeln. Es ist nach 20.17(4) und (5)

$$\alpha_z = \text{Amplitude von } \left\{ \frac{1}{z_p} \sum_{k=0}^{z_p-1} \sin \left[Z \left(\omega_r t - \varphi_z + \frac{2\pi k}{z} \right) \right] \right\}. \quad 20.17(6)$$

In komplexer Schreibweise kann dies dargestellt werden durch

$$\alpha_Z = \frac{1}{z_p} \left| \sum_{k=0}^{z_p-1} \exp\left(\frac{2\pi k Z}{z} i\right) \right|, \tag{20.17(7)}$$

d.h. $z_p \alpha_Z$ ist die in Abb. 20.17.1 gestrichelt wiedergegebene Resultierende des Polygons der komplexen Vektoren. Beachtenswerterweise ist α_Z unabhängig von φ_Z . Auch bei längs ξ variierendem φ_Z wird also α_Z für alle ξ gleich groß und gilt mithin nicht nur für einen Schaufelschnitt sondern für die ganze Schaufel.

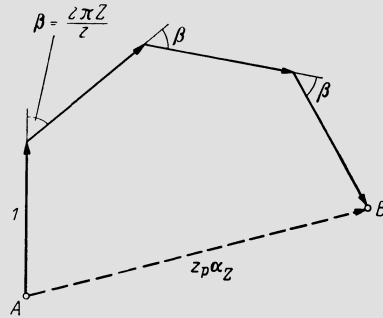


Abb. 20.17.1. Polygon zur Bestimmung von α_Z

Abb. 20.17.2 zeigt so ermittelte α_Z -Werte für Pakete mit $z_p = 2$ bis 6 Schaufeln. Abszisse ist dabei die Größe $\Delta\varphi/\Delta\varphi_Z$, wobei $\Delta\varphi$ der Winkel ist, der durch das Paket eingenommen wird (vgl. Abbildung) und $\Delta\varphi_Z$ der Periodenwinkel der Strömung, also

$$\Delta\varphi_Z = \frac{2\pi}{Z}, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi z_p}{z}, \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi_Z} = \frac{z_p}{Zz}. \tag{20.17(8)}$$

Um auch für Schaufelpakete mit mehr als sechs Schaufeln noch einen Anhaltspunkt zu haben, ist in Abb. 20.17.3 α_Z für $z_p = \infty$ angegeben, was sich durch einen Übergang von der Summation zur Integration auffinden läßt, vgl. [37]. — Man erkennt aus den Diagrammen, daß in gewissen Fällen die resultierende Anregung verschwindet, da sich das Polygon nach Abb. 20.17.1 schließt. Das trifft immer dann zu, wenn die Anzahl z_p der zu

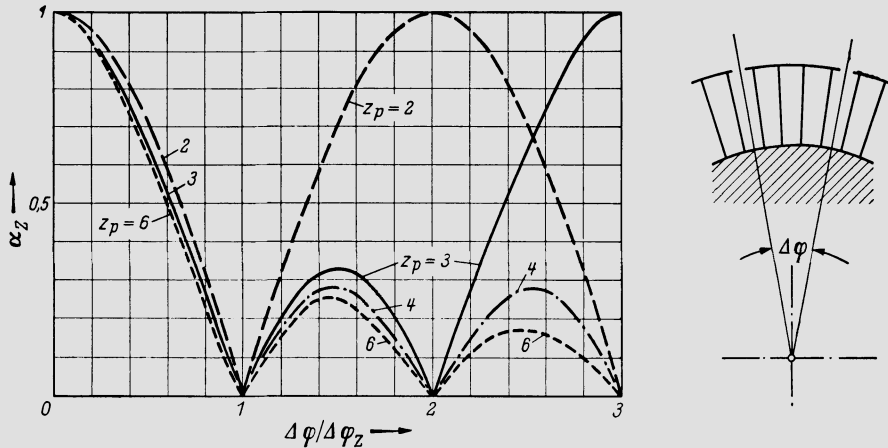


Abb. 20.17.2. α_Z -Werte für Schaufelgruppen mit $z_p = 2$ bis 6 Schaufeln

einem Paket vereinigten Schaufeln gemäß der Vorschrift

$$z_p = N \frac{z}{Z} \quad 20.17(9)$$

gewählt wird. Hier ist N irgendeine ganze Zahl, die aber kein ganzzahliges Vielfaches von z_p sein darf. In Worten lautet also die Regel:

Man muß so viele Schaufeln durch Querverbindung vereinigen, wie auf eine Störperiode entfallen oder ein ganzzahliges Vielfaches (N -faches) davon, wobei aber N nicht ganzzahliges Vielfaches von z_p sein darf.

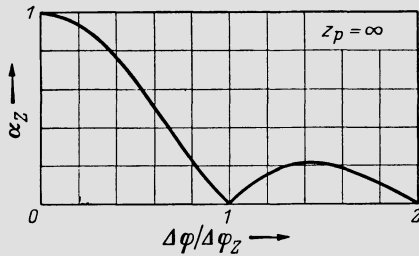


Abb. 20.17.3. Grenzwert von α_z für $z_p \rightarrow \infty$

Demgemäß sind insbesondere alle Gleichtaktschwingungen eliminiert, sobald alle Schaufeln eines Rades zusammengebunden werden, sofern nur die aufeinanderfolgenden Schaufelkränze verschiedene Schaufelzahlen aufweisen. Das läßt sich z. B. verwirklichen, indem alle Schaufeln Deckplatten tragen, die aneinanderstoßen.

Da, wie oben bemerkt, α_z für die ganze Schaufel gilt, unabhängig von der Phasenfunktion $\varphi_z(\xi)$ und vom Verlauf von $P_{xz}(\xi)$, läßt sich sogleich aussagen, daß einfachhin an die Stelle der Gl. 20.16(28) die Beziehung

$$\underline{\sigma_{vA}} = k_{on} \sigma_{bF} V S \alpha_z H_n \quad 20.17(10)$$

tritt. Dabei ist H_n zu bilden unter Berücksichtigung der Schwingungsform innerhalb der Paketschwingung, der Phasenfunktion $\varphi_z(\xi)$ und — wo nicht konstant — auch des Verlaufes von $P_{xz}(\xi)$. Nur im Grenzfall, wo diese Bedingungen mit den in 20.16 vorausgesetzten übereinstimmen, können die H_n -Werte direkt von dort übernommen werden. Das ist z. B. bei Schaufeln mit aneinanderstoßenden Deckplatten oft hinreichend genau möglich.

Schwingen die Schaufeln wechselweise im Gegentakt — aber mit gleicher Schwingungsform — so ist noch der gleiche Formalismus brauchbar, nur daß beim Vektorpolygon wechselweise die Pfeilsinne umzukehren sind, was natürlich auf einen anderen resultierenden Vektor α_z führt. Hingegen läßt sich dieser Weg nicht mehr beschreiten bei komplizierten Schwingungsformen, wie sie unter 20.9 beschrieben wurden, weil hier die Schwingungsformen der einzelnen Schaufeln verschieden sind. In diesem Falle ist direkt die Untersuchung nach Abschn. 20.16 zu verallgemeinern, indem die Integrale durch Summen von Integralen über sämtlichen z_p Schaufeln ersetzt werden. Das führt auf

$$H_n = \frac{2u_v''(0) \sqrt{\left(\sum_k \int_0^1 u_k \sin \tau_k d\xi \right)^2 + \left(\sum_k \int_0^1 u_k \cos \tau_k d\xi \right)^2}}{\Omega_n^2 \sum_k \int_0^1 \varphi u_k^2 d\xi}, \quad 20.17(11)$$

$$\tau_k = \tau_0 + \frac{2\pi k}{z}. \quad 20.17(12)$$

Die Summen sind zu erstrecken auf $k = 0$ bis $z_p - 1$. Die $u_k(\xi)$ sind die Schwingungsformen der einzelnen Schaufeln, wobei der Index n der Einfachheit halber weggelassen wurde. Weiter kennzeichnet $\tau_0(\xi)$ die Phasenverteilung der Erregung für die Schaufel mit Nummer 0, τ_k diejenige der Schaufel k . Die Integrale im Nenner sind im allgemeinen wieder zu ergänzen durch Glieder zur Berücksichtigung der Bewegungsenergie des Verbindungselementes (z. B. Deckband); man kann dies auch in die Funktion φ einschließen. Das Glied $u'_\nu(0)$ kennzeichnet die Krümmung einer bestimmten Schaufel mit Nummer $k = \nu$, zweckmäßig derjenigen, für die $u''(0)$ am größten wird. — Alsdann kann die Vergleichsspannungsamplitude σ_{vA} an irgendeiner Stelle des Schaufelpaketes nach Gl. 20.16(28) berechnet werden, wobei $k_{\sigma n}$ eben so definiert ist, daß σ_A die Biegespannung der Schaufel ν in $\xi = 0$ ist. Ein Bindungsfaktor α_Z ist hier nicht beizufügen, da dieser Effekt schon bei der Bildung von H_n berücksichtigt wurde.

20.18 Größe der Erregungskräfte (der Stimulus)

Die vollständigste Beschreibung der auf eine Schaufel einwirkenden Erregungskräfte müßte in folgenden Angaben bestehen. Amplitude und Phase der oszillierenden Kräfte in gitterparalleler und gitternormaler Richtung und ebenso des Drillmomentes, alles dies in Funktion der radialen Lage längs der Schaufel. Diese umfassende Information wird praktisch nie zur Verfügung stehen. Auch bei *Bloemhof* [33], wo die Theorie in allgemeinsten Form durchgeführt ist, wird bei der praktischen Anwendung auf die Annahme gleicher Phase der beiden Komponenten und des Momentes zurückgegangen, d. h. es wird angenommen, daß die oszillierende Kraft in jedem Schaufelschnitt einen festen Angriffspunkt und eine feste Richtung habe. Die periodische Kraft einer bestimmten Frequenz läßt sich dann durch einen einzigen Stimulus S kennzeichnen, wie dies in den vorangehenden Abschnitten geschehen ist. Mit Gl. 20.16(12) ist S sogleich definiert mit Hilfe der Kraftkomponente in Richtung der Schwingungsbewegung. Dem kommt aber in der Regel keine große Bedeutung zu, denn selbst wenn etwa die Schwingungsrichtung mit der Kraft einen Winkel von 30° bildet, ist der Cosinus des Zwischenwinkels immer noch 0,866, also nahe bei 1. — Angaben über das oszillierende Drillmoment werden in der Literatur leider oft so gemacht, daß man seine Amplitude zum zeitlichen Mittelwert dieses Momentes in Beziehung setzt. Da man den letzteren aber in der Regel nicht kennt, lassen sich solche Unterlagen nicht verwerten. Bei der Kennzeichnung der Amplitude des Momentes durch einen Hebelarm a , der nach Gl. 20.16(23) diese Amplitude aus der mittleren Tangentialkraft \bar{T} zu berechnen gestattet, genügt eine Angabe über a/s , denn \bar{T} ist immer leicht berechenbar.

Wenn n_s die sekundliche Drehzahl eines Läufers ist, sind bei Abwesenheit äußerer periodischer Störungen die sämtlichen erregenden Frequenzen, denen irgendeine Schaufel ausgesetzt ist Zn_s , wobei $Z = 1, 2, \dots$, denn jede längs des Umfanges periodische Kraft läßt sich durch Fourier-Analyse zerlegen in einzelne sinusartige Störungen, welche die genannten Frequenzen aufweisen. Der einer Ordnung Z zugeordnete Stimulus sei S_Z . Die Frequenz der Erregungsordnung $Z = 1$ liegt im allgemeinen so tief, daß keine Resonanzen auftreten. Hingegen können die Erregungsordnungen $Z = 2, 3, 4, \dots$ bei schlanken, langen Schaufeln bereits zu Resonanzen führen. Ursachen solcher Erregungsordnungen sind — auch bei Vollbeaufschlagung — Störungen der Kreissymmetrie durch Stutzen am Eintritt und Austritt und durch Anzapfstutzen, durch Brennkammern, vor- oder nachgeschaltete Rippen, aber auch durch Fertigungsfehler der Gehäuse und der Schaufelungen selbst. Schon daraus wird klar, daß es unmöglich ist, allgemeine genaue Angaben über die Stimuli dieser ‚niedrigen Erregungsordnungen‘ zu machen. Man gibt 0,05 (in Extremfällen bis 0,1) als typische Größenordnung der Stimuli für $Z = 2 \dots 6$ an. Höhere Ordnungen treten bei der Fourier-Analyse meist mehr und mehr zurück, doch ist dies keineswegs stets der Fall. Sind etwa einer Turbine 12 Brennkammern vorgeschaltet, so ist selbst-

verständlich $Z = 12$ eine ausgesprochene Erregungsordnung. Einem Laufrad dicht nachfolgende Rippen können starke Störungen verursachen, wenn die Abströmrichtung aus dem Rad nicht mit der Richtung der Rippe übereinstimmt. Die dann entstehenden lokalen Stauzonen führen auf periodische Kraftschwankungen, bei denen eine nicht voraussehbare Fourier-Ordnung stark in Erscheinung treten kann. Man vermeidet dies durch hinreichenden Abstand zwischen Rippe und Rad.

Vorgeschaltete Rippen erzeugen vor allem an den nachfolgenden Laufschaufelreihen von Axialverdichtern starke Störungen. *Zollinger* [38] untersucht die Ausglättung solcher Unregelmäßigkeiten durch Beschleunigung der Strömung unmittelbar vor der Schaufelung. Es ergibt sich, daß das praktisch mögliche Maß der Beschleunigung nicht genügt, um die Strömungen weitgehend zu unterdrücken. *Schmidt* [39] behandelt die Fourier-Analyse cosinusförmiger Störungen von der Breite Δ , wie sie durch vorgeschaltete Rippen hervorgerufen werden können. Die Winkellagen der Rippen seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots, \varphi_{z_r}$ (vgl. Abb. 20.18.1); die Rippen müssen also nicht gleichmäßig verteilt sein. Tritt nur eine einzige Störung am Umfang auf, und zwar mit dem Spitzenwert $2\hat{S}$, so zeigt die Fourier-Analyse, daß der Stimulus k -ter Ordnung gegeben ist durch

$$S_k = \frac{2\hat{S}}{\pi k} \frac{\sin \frac{k\Delta}{2}}{1 - \left(\frac{k\Delta}{2\pi}\right)^2}. \quad 20.18(1)$$

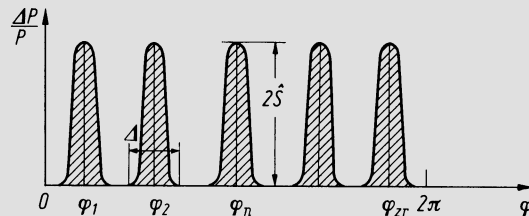


Abb. 20.18.1. Cosinusförmige Störimpulse durch vorgeschaltete Rippen

Sind z_r derartige Störungen am Umfang verteilt, und zwar in den oben erwähnten Winkellagen, so wird

$$S_k = \frac{2\hat{S}}{\pi k} \frac{\sin \frac{k\Delta}{2}}{1 - \left(\frac{k\Delta}{2\pi}\right)^2} \left| \sum_{n=1}^{z_r} \exp(ik\varphi_n) \right|. \quad 20.18(2)$$

Für einen ausgeführten Schaufelkranz, der als Erregungsquelle einem anderen (zu untersuchenden) vorausgeht, kann man sich über die Größenordnung der Stimuli niederer Ordnung in folgender Weise ein Bild machen. Man mißt die sämtlichen lichten Weiten a der z_v Schaufelkanäle des vorausgehenden Schaufelkranzes; sie seien $a_1, a_2, \dots, a_v, \dots, a_{z_v}$ benannt. Dann bildet man

$$\bar{a} \equiv \frac{1}{z_v} \sum_{v=1}^{z_v} a_v, \quad b_v \equiv \frac{a_v - \bar{a}}{\bar{a}} \quad 20.18(3)$$

und berechnet

$$A_Z = 2 \sum_{v=1}^{z_v} b_v \cos \frac{2\pi v Z}{z_v}, \quad B_Z = 2 \sum_{v=1}^{z_v} b_v \sin \frac{2\pi v Z}{z_v}, \quad 20.18(4)$$

$$K_Z = \sqrt{A_Z^2 + B_Z^2}, \quad \tan \psi_Z = A_Z / B_Z. \quad 20.18(5)$$

Das so berechnete K_Z ist die durch Ausführungsfehler bedingte Querschnittsschwankung der Ordnung Z und ψ_Z der zugehörige Phasenwinkel (Abb. 20.18.2). Von den K_Z kann folgendermaßen näherungsweise auf die S_Z geschlossen werden. Man denke sich den Querschnitt des vorausgehenden Schaufelkranzes gleichmäßig um beispielsweise 5% vergrößert und berechne nach der elementaren Theorie der Stufe die dadurch bedingte Veränderung der Geschwindigkeitsdreiecke und damit der Schaufelkraft des nachfolgenden (zu untersuchenden) Schaufelkranzes. Damit hat man den Zusammenhang zwischen Schaufelkraftänderung und Querschnittsänderung, mithin zwischen S_Z und K_Z .

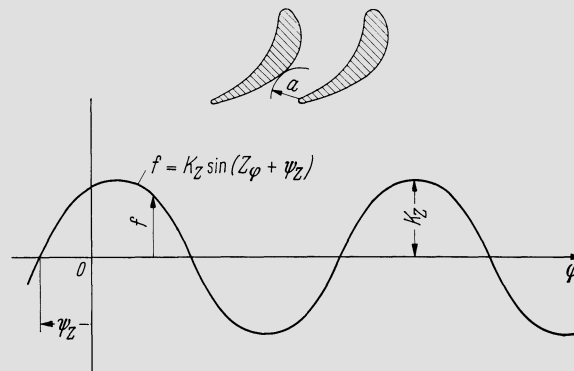
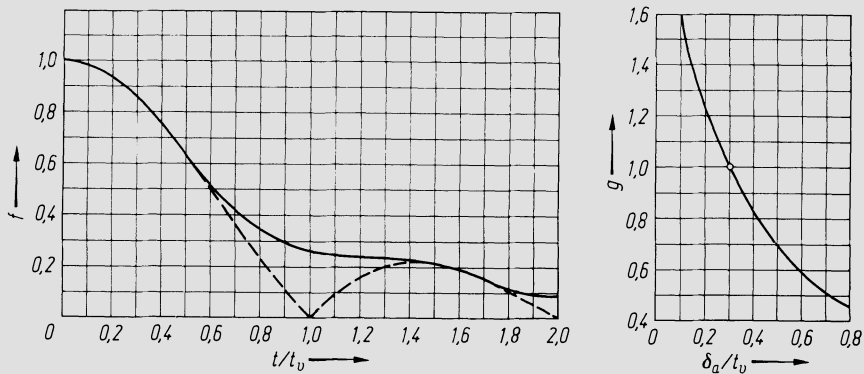


Abb. 20.18.2. Zur Bestimmung der Erregungskräfte niederer Ordnung an einer ausgeführten Maschine

Die praktisch wichtigste Erregung ist diejenige, die von der *endlichen Teilung des dem betrachteten Schaufelkranz vorausgehenden* herrührt. Ist z_v die Schaufelzahl dieses vorausgehenden Kranzes, so ist $Z = z_v n_s$ die zugehörige Erregungsfrequenz. Die große Bedeutung dieser Erregungsart hat dazu geführt, daß darüber Untersuchungen in größerer Zahl durchgeführt wurden. Bereits *Hort* [40] hat diese Erregung theoretisch zu erfassen versucht, und später sind ähnliche Theorien ausgearbeitet worden. Rein potentialtheoretische Verfahren haben z. B. *Lienhart* [41] und *Lotz* [42] angegeben. Die potentialtheoretische Störung klingt aber mit wachsendem Abstand vom Gitter sehr rasch ab, während in Wirklichkeit der Einfluß der Nachlaufdellen in viel größerem Abstand spürbar bleibt. Deshalb ist auf experimentelle Untersuchungen nicht zu verzichten, vgl. darüber [34, 35, 43–47]. Es wurde versucht, aus diesen Unterlagen allgemeine Richtlinien über den Stimulus zu gewinnen, welcher der Erregungsfrequenz $z_v n_s$ zugeordnet ist. Man kann dafür setzen

$$S = Afg. \quad 20.18(6)$$

Hier ist A ein empirischer Beiwert, f eine Funktion von t/t_v , wo t die Teilung des betrachteten Gitters, t_v diejenige des vorausgehenden (als Erregungsursache wirkenden) Gitters ist. Weiter ist g eine Funktion von δ_a/t_v , mit δ_a als axialer Spaltweite zwischen dem vorausgehenden und dem betrachteten Gitter. Beide Funktionen sind in Abb. 20.18.3 dargestellt. Für f ist gestrichelt auch der Verlauf nach *Hort* [40] eingetragen, an dem sich f bis zu einem gewissen Grade anlehnt. In $t/t_v = 1$ gibt diese einfachste Theorie $f = 0$, was bereits *Naguib* [48] vermieden hat. Der Übergang in diesem Gebiet wurde bestimmt durch eine möglichst gute Wiedergabe der Versuchsergebnisse, ebenso die Kurve für g . Stützt man sich auf diese Kurven für f und g und bestimmt A aus den Versuchen, so erhält man die Werte nach Zahlentafel 20.18.1.

Abb. 20.18.3. Die Funktionen f und g zur Bestimmung des Stimulus

Zahlentafel 20.18.1

Quelle	Schaufelung	$\frac{t}{t_v}$	A	
			Mittel	Maximum
<i>Kirillov</i> [43]	Gleichdruckturbine	0,5	0,39	—
<i>Moiseev</i> [44]	Überdruckturbine	0,89	0,34	—
<i>Gloger</i> [34]	Überdruckturbine	1,19	0,10	0,15
	Gleichdruckturbine	0,5	0,10	0,18
<i>Lambertz et al.</i> [47]	Verdichter	1,14	0,21	—
<i>Ispas et al.</i> [46]	Verdichter	0,5	0,18	—
		0,79	0,14	—
		1	0,16	0,24
<i>Rieger und Wicks</i> [45]	Gleichdruckturbine subson.	0,317	0,62	0,76
		0,505	0,21	0,25
		0,817	0,25	0,30
	Gleichdruckturbine superson.	0,317	0,137	—

Bei der Beurteilung dieser Zahlen ist folgendes zu beachten. Die Messungen nach [34, 46, 47] können relativ hohe Genauigkeit für sich beanspruchen, erfolgten aber nur im Mittelschnitt, [34] durch Kraftmessung und bei Mach-Zahlen unter 0,3, [46] und [47] durch Druckintegration und bei Mach-Zahlen bis etwa 0,45. Es wurden für die Zahlentafel nur Versuchspunkte verwendet, die sich vom günstigen Arbeitsbereich der betreffenden Stufen nicht zu weit entfernen. In einem sehr ungünstigen Betriebspunkt erreicht z.B. [34] den Extremwert $A = 0,58$. Die russischen Experimente sind schwer zu beurteilen; sie wurden verwendet, um die Funktion g zusätzlich experimentell zu stützen. Das Gitter von *Moiseev* [44] hat eine abnormal dicke Austrittskante, kann also nicht als typisch gelten. Die Versuche nach [45] basieren auf der hydraulischen Analogie. Die Ergebnisse sind sehr unsicher, da die Streuungen außerordentlich groß sind. Da Kräfte auf ganze Schaufeln gemessen wurden, sind Randeffekte mit umfaßt. Alle Werte fassen hier ganze Versuchsreihen zusammen, die günstige und ungünstige Betriebszustände der Stufe enthalten. Das gilt auch für die unter 'Maximum' angegebenen Zahlen, die dem Stufendruckverhältnis entsprechen, das auf das höchste gemittelte A führte. Im supersonischen Falle gehen Stoßwellen von den Leitradprofilen aus, was wohl den außerordentlich großen A -Wert begründet. — Welch große Unsicherheit der Voraussage der oszillierenden Kräfte eigen ist, zeigt sich z.B. darin, daß im Falle [47] die Zuschaltung eines

Vorleitrades die Werte z.T. auf weniger als die Hälfte reduzierte (nicht berücksichtigt in der Zahlentafel). Bei [45—47] sind auch die höheren Harmonischen der Erregung gemessen, d.h. die Kräfte mit den Erregungsfrequenzen $2z_0 n_s$, $3z_0 n_s$ usw. Wo nicht die erste Harmonische abnormal tief liegt, ist schon die zweite meist kleiner als $\frac{2}{3}$ der ersten.

Bei dieser Situation kann man sich etwa an die folgenden Richtlinien halten. Setzt man in günstigen Betriebspunkten und im subsonischen Bereich $A \approx 0,25$ für Turbinen und $A \approx 0,35$ für Verdichter, so liegt man wesentlich über allen gemessenen Werten nach [34, 46] und [47] und hat damit eine Reserve für die Randeffekte eingerechnet. Wo vergrößerte Verluste im vorgeschalteten Gitter zu erwarten sind (dicke Austrittskanten, ungünstiger Betriebspunkt), ist A proportional diesen Verlusten zu vergrößern. Im supersonischen Falle wird die jeweilige Stoßkonfiguration von maßgebendem Einfluß sein, so daß keine allgemeine Aussage möglich ist. Jedenfalls muß unter diesen Bedingungen ein großer Stimulus erwartet werden, z. B. 0,3 um eine Größenordnung zu nennen.

Über die Amplitude des für die *Torsionsschwingungen* maßgebenden Drillmomentes kann folgender Anhaltspunkt gegeben werden. Wenn man S nach Gl. 20.18(6) berechnet mit $A = 0,25$ und mit f und g aus Abb. 20.18.3 und damit wiederum aus den Meßergebnissen [35] a/s nach Gl. 20,16(23) bestimmt, so erhält man die Werte nach Abb. 20.18.4.

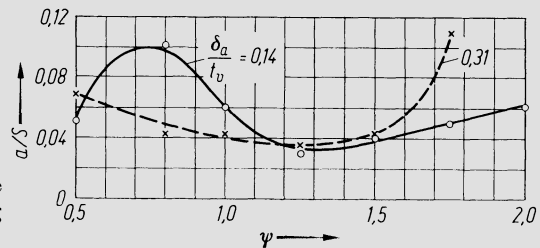


Abb. 20.18.4. Verhältnis Hebelarm/Sehnenlänge a/s in Funktion der Druckzahl, zur Berechnung der Torsionserregung. Nach Gloger [35]

Man beachte, daß [$\psi = \Delta h_s / u^2$, während in den Originalveröffentlichungen [34, 35] $\psi = 2\Delta h_s / u^2$. — Mit $a/s = 0,1$ hat man also im Bereich günstiger Strömungszustände ($\psi = 1 \dots 1,5$) das Drillmoment sehr reichlich eingeschätzt, d.h. man hat noch eine Reserve zur Berücksichtigung der Randeffekte eingerechnet, die durch die Messungen nicht erfaßt wurden. Indem man A bei ungünstigen Strömungszuständen vergrößert, ergibt sich selbst mit einem Festwert a/s eine entsprechende Vergrößerung des Drillmomentes. Es ist aber zu beachten, daß gerade diese Drillmomente wesentlich von den Einzelheiten der geometrischen Konfiguration abhängen können, weshalb auch wesentlich ungünstigere Werte möglich sind.

Manchmal muß auch die *Rückwirkung des nachfolgenden Schaufelkranzes* auf den betrachteten beachtet werden, vgl. darüber [35]. Dieser Effekt ist rein potentialtheoretisch bedingt und klingt deshalb mit zunehmendem Axialabstand δ_a sehr rasch ab, vgl. etwa [41]. Nach [49] hat das Gesetz exponentiellen Charakter. Ist S_0 der Stimulus entsprechend einem Axialabstand δ_{a0} und einer Frequenz $Z = n_s t_n$ (t_n die Teilung des nachfolgenden Schaufelkranzes), so ist für beliebigen Abstand

$$S = S_0 \exp [-2\pi(\delta_a - \delta_{a0})/t_n]. \quad 20.18(7)$$

In der Regel ist der Einfluß schon im Abstand einer halben Teilung t_n sehr klein; nur bei sehr dicker Profilnase des nachfolgenden Rades oder bei sehr ungünstiger Zuströmung können größere Abstände notwendig werden. Im kritischen Falle hat man es aber stets in der Hand, durch hinreichenden Axialabstand diesen Effekt praktisch zu eliminieren.

Sehr starke periodische Erregungskräfte entstehen naturgemäß bei *Teilbeaufschlagung*. Abb. 20.18.5 veranschaulicht den Verlauf der Schaufelkraft P in Funktion des Drehwinkels φ und damit auch der Zeit. Die Fourier-Analyse dieser Funktion liefert an sich

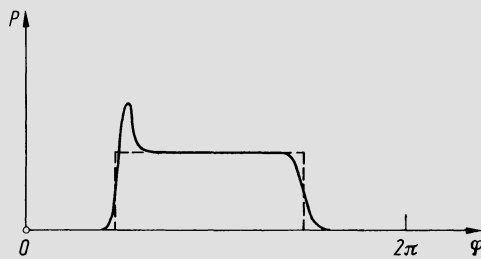


Abb. 20.18.5. Verlauf der Schaufelkraft P über dem Drehwinkel φ bei Teilbeaufschlagung

die sämtlichen Stimuli. Leider wird der Kraftverlauf nicht genauer bekannt sein, so daß man zu Näherungen greifen muß, etwa wie gestrichelt eingetragen. Das kann aber vor allem Fourier-Koeffizienten höherer Ordnung wesentlich fälschen, und zwar in einer nicht im voraus abschätzbaren Weise. Die am Anfang auftretende Kraftspitze, die auf das Doppelte der rechnermäßigen Strömungskraft gehen kann, ist von großem Einfluß. *Bloemhof* [33] untersucht das Problem der Stimuli bei Teilbeaufschlagung für Turbolader in sehr umfassender Weise. Dabei geht er auch auf den Einfluß ungleichmäßiger Leitradteilungen ein. An die Stelle einer scharfen Anregung mit der Frequenz $z_v n_s$ tritt dann ein Spektrum dicht beieinanderliegender Erregungsfrequenzen mit kleineren Stimuli. Größenordnungsmäßig kann der Stimulus so auf die Hälfte zurückgebracht werden. Eine Komplikation des Erregungsspektrums tritt beim Turbolader noch dadurch ein, daß durch die Auspuffstöße des Motors eine fremde Frequenz eingeführt wird.

Eine Anregung ähnlichen Charakters wie bei Teilbeaufschlagung entsteht beim Axialverdichter wenn *rotierendes Abreißen* auftritt. Da rotierende Teilablösung in der Regel an der Schaufelspitze erfolgt, kann man sich die pulsierenden Kräfte dort konzentriert denken. *Schmidt* [39] behandelt diese Situation im Zusammenhang mit Störungen der Kreissymmetrie in unmittelbarer Nähe der Gehäusewand. Für Biegeschwingungen und Schaufeln konstanten Querschnittes folgt aus seiner Untersuchung $H_1 = 1, 3$, $H_2 = 0,18$; für allgemeinere Bedingungen muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. — Nach *Stenning* und *Kriebel* [50] ist die Umlaufgeschwindigkeit u_a der Ablösezellen (in Richtung Raddrehung) gegeben durch

$$u_a \approx c_n \left[\cot \beta_1 - \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{\frac{\rho}{2} w_1^2 \sin^2 \beta_1} - 1} \right]. \quad 20.18(8)$$

Die Bezeichnungen sind die üblichen; alle Größen sind einzusetzen für den Betriebszustand, wo das Abreißen einsetzt. Da das Rad gegenüber den Ablösezellen mit der Umfangsgeschwindigkeit $u - u_a$ läuft, kennt man die Kreisfrequenzen einer Fourierdarstellung der pulsierenden Kraft. Leider ist aber die Gl. 20.18(8) nur eine Näherung, womit auch die Frequenzen ungenau werden. Deshalb ist eine sichere Vermeidung von Resonanzen unmöglich. Die pulsierenden Kräfte ihrerseits erweisen sich als sehr groß. Daher verlangt die Betriebssicherheit die Vermeidung des rotierenden Ablösens.

Alles in allem ist festzuhalten, daß wir Stimuli nur größenordnungsmäßig abschätzen können, vor allem wenn man auch noch an die Möglichkeit von Interferenzen der Einflüsse verschiedener Schaufelkränze denkt. Man muß sie also vorsichtigerweise verhältnismäßig groß einschätzen.

20.19 Selbsterregung, stochastische Erregung, Stoßerregung

Die Erregung von Schaufelschwingungen kann auch durch Mechanismen erfolgen, die von denen grundsätzlich verschieden sind, die in den vorangehenden Abschnitten behandelt wurden. So ist schon von *Bellenot* und *Lalive* [51] auf die Möglichkeit der *Selbsterregung*

hingewiesen worden. Wird eine Schaufel durch irgendwelche äußere Einwirkungen in leichte Schwingung versetzt, so entsteht durch die Wechselwirkung mit dem strömenden Fluid eine oszillierende Druckverteilung an der Schaufeloberfläche. Dabei können sich solche Phasenverschiebungen zwischen Kraft und Bewegung ergeben, daß an der Schaufel Arbeit geleistet wird, welche die einmal eingeleitete Schwingung weiter anfacht. Solche Bedingungen treten bevorzugt auf in abgelöster Strömung, können aber auch in anliegender Strömung gegeben sein. Drehschwingungen neigen in höherem Maße zu diesem Vorgang als Biegeschwingungen. Im Überschallgebiet kann die Rückwirkung der Lage der Profile auf die Stoßkonfiguration zur Selbsterregung führen. Eine grundsätzliche Überlegung über die Rückwirkung einer Schwingung auf die Strömung des Fluids möge mit Hilfe des Bewegungsgesetzes angestellt werden, das nach Bd. I, Gl. 3.1.(2) reibungsfrei und im feldfreien Raum in der Form

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \sum_j c_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = - \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad 20.19(1)$$

geschrieben werden kann. Hier durchlaufen i und j die Werte 1, 2, 3 und die Dichte ϱ ist sogleich durch das Isentropengesetz ausgedrückt, wo Index 0 einen geeigneten Bezugszustand kennzeichnet. Nun werde gesetzt

$$c_i = \bar{c}_i + c'_i + c''_i. \quad 20.19(2)$$

Hier ist \bar{c}_i die Geschwindigkeit in der stationären Gitterströmung bei nicht ausgelenkter Lage der Profile, während c'_i und c''_i die Zusatzgeschwindigkeiten sind, die durch die Schwingung der Profile entstehen. Die Abweichung der momentanen Lage der Profile gegenüber der nicht ausgelenkten erzeugt das Zusatzgeschwindigkeitsfeld c'_i , während die momentane Geschwindigkeit der Profile das Feld c''_i erzeugt. Gl. 20.19(1) geht somit über in

$$\frac{\partial(c'_i + c''_i)}{\partial t} + \sum_j (\bar{c}_j + c'_j + c''_j) \frac{\partial(\bar{c}_i + c'_i + c''_i)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad 20.19(3)$$

Andererseits gilt für das stationäre Feld

$$\sum_j \bar{c}_j \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{p_0}{\bar{p}} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}. \quad 20.19(4)$$

Nun mögen die Störgeschwindigkeiten c'_i und c''_i als sehr klein betrachtet werden. Wenn alsdann Gl. 20.19(4) von (3) subtrahiert wird, ergibt sich mit $p^* \equiv p - \bar{p}$ und den üblichen Vereinfachungen der Störungsrechnung

$$\frac{\partial c'_i}{\partial t} + \sum_j \left[\bar{c}_j \frac{\partial c'_i}{\partial x_j} + c'_j \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial c''_i}{\partial t} + \sum_j \left[\bar{c}_j \frac{\partial c''_i}{\partial x_j} + c''_j \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\partial p^*}{\partial x_i}. \quad 20.19(5)$$

Von hier aus kann zur dimensionslosen Darstellung übergegangen werden. Die Schwingung kann gezeichnet werden durch eine Amplitude Y und eine Kreisfrequenz ω . Weiter sei s die Profilschnellenlänge und c_0 die stationäre Geschwindigkeit in einem geeigneten Bezugspunkt. Dann werde gesetzt:

$$\bar{q}_i \equiv \frac{\bar{c}_i}{c_0}, \quad q'_i \equiv \frac{s c'_i}{Y c_0}, \quad q''_i \equiv \frac{c''_i}{\omega Y}, \quad P^* \equiv \frac{p^*}{\frac{\varrho_0}{2} c_0^2}, \quad \tau \equiv \frac{c_0}{s} t, \quad X_i \equiv \frac{x_i}{s}. \quad 20.19(6)$$

Die Definitionen von q'_i und q''_i sind offenbar sinnvoll, denn die c'_i sind sicher proportional Y/s , die c''_i proportional ωY . — Damit geht Gl. 20.19(5) über in

$$\begin{aligned} \frac{Y}{s} \left\{ \frac{\partial q'_i}{\partial \tau} + \sum_j \left[\bar{q}_j \frac{\partial q'_i}{\partial X_j} + q'_j \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial X_j} \right] \right\} + \frac{\omega Y}{c_0} \left\{ \frac{\partial q''_i}{\partial \tau} + \sum_j \left[\bar{q}_j \frac{\partial q''_i}{\partial X_j} + q''_j \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial X_j} \right] \right\} \\ = - \frac{1}{2} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\partial P^*}{\partial X_i}. \end{aligned} \quad 20.19(7)$$

Von den beiden in geschweifter Klammer geschriebenen Ausdrücken beschreibt der erste den Einfluß der Lageänderung, der zweite den Einfluß der Schwingungsgeschwindigkeit auf die momentane Druckverteilung. Die Auswirkung dieser beiden Effekte werde anhand Abb. 20.19.1 veranschaulicht. Nach Abb. 20.19.1a ist bei der gezeigten Situation der Anstellwinkel der momentanen relativen Zuströmgeschwindigkeit c_{1r} , die aus der Zuströmgeschwindigkeit c_1 und der Schwingungsgeschwindigkeit \dot{y} gebildet wird, kleiner als derjenige von c_1 . Der Auftrieb, der in diesem Falle in Richtung der Bewegung weist, wird also kleiner. Bei entgegengesetzt gerichtetem \dot{y} wären Anstellwinkel und Auftrieb größer. Beides wirkt der Schwingungsbewegung entgegen, hat also die Tendenz diese zu *dämpfen*. — Der Einfluß der Lageveränderung möge an dem besonders einfachen Beispiel Abb. 20.19.1b betrachtet werden. Wenn dort, wie gestrichelt dargestellt, das mittlere Profil aus seiner Mittellage verschoben wird, so herrscht im Querschnitt a_2 ein tieferer Druck als in a_1 , da die Strömung mehr eingeschnürt wird. Demnach hat die Druckverteilung die Tendenz, die Verschiebung zu verstärken, wirkt also *labilisierend*.

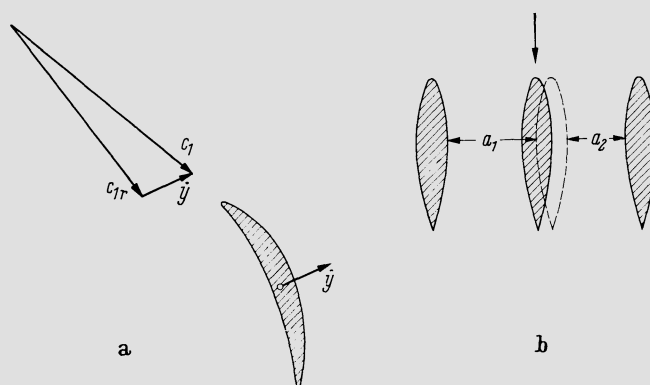


Abb. 20.19.1. Zur qualitativen Beurteilung der Rückwirkung der Schwingungsbewegung einer Schaufel auf die Strömungskraft. a) Einfluß der augenblicklichen Geschwindigkeit \dot{y} ; b) Einfluß der augenblicklichen Lageabweichung

Was an diesen Beispielen gezeigt wurde, trifft allgemein zu. Deshalb ist das Verhältnis der beiden Faktoren Y/s und $\omega Y/c_0$, die vor den Klammerausdrücken in Gl. 20.19(7) stehen, offenbar für die Stabilität maßgebend. Je größer ihr Quotient

$$\frac{c_0}{\omega s},$$

desto größeres Gewicht gewinnt das labilisierende erste Glied. Man nennt diese Größe die *Strouhal-Zahl*. Sie ist ein maßgebendes dimensionsloses Kriterium für das *Flattern*, d.h. das Auftreten selbsterregter Schwingungen. Ein zweites ist die *Mach-Zahl*. Sie steckt implizite im Ausdruck der rechten Seite von Gl. 20.19(7), denn unter sonst gleichen Bedingungen ist die örtliche Verteilung von p_0/\bar{p} von der Mach-Zahl abhängig.

Über das Problem des Flatterns existieren zwar theoretische Untersuchungen in großer Zahl, doch kennen wir keine Lösung, die bei den komplizierten geometrischen Konfigurationen, die in Turbomaschinen gegeben sind, treffsichere Voraussagen machen könnte. Die Praxis muß sich daher auf empirische Grenzwerte der Strouhal-Zahl stützen, bei deren Überschreiten das Flattern zu erwarten ist. Diese hängen ab von der Gittergeometrie, dem Zuströmwinkel und der Mach-Zahl in einer Weise, die im Einzelfall nur durch das Experiment genauer bestimmt werden kann. Für den praktischen Gebrauch ist es naheliegender, die Strouhal-Zahl mit der Frequenz ν statt mit der Kreisfrequenz ω zu bilden. Bei einem Plattengitter fand z. B. *Hiller* [52] folgende kritischen Werte der mit der Zuströmgeschwin-

digkeit c_1 gebildeten Strouhal-Zahl $c_1/\nu s$, und zwar für das Torsionsflattern. Bei einem Anstellwinkel der Platten gegen die Zuströmung von 15° war $c_1/\nu s = 6,3$; bei kleineren Anstellwinkeln stieg der Wert an. Bei einem Anstellwinkel von 32° und mehr, also vollkommen abgerissener Strömung fiel der kritische Wert auf $c_1/\nu s = 3,1$. Alles dies bezieht sich auf Mach-Zahlen unter 0,5. — Typische Größenordnungen kritischer Strouhal-Zahlen technischer Gitter sind etwa die folgenden:

Verzögerungsgitter, Biegeschwingung	$c_1/\nu s = 20$,
Verzögerungsgitter, Drehschwingung	$c_1/\nu s = 4$,
Beschleunigungsgitter, Biegeschwingung	$c_2/\nu s = 80$,
Beschleunigungsgitter, Drehschwingung	$c_2/\nu s = 16$.

Man beachte, daß die Werte der Beschleunigungsgitter mit der Austrittsgeschwindigkeit gebildet sind. Bei Laufrädern sind für c_1 und c_2 die entsprechenden Relativgeschwindigkeiten einzusetzen. Die ν sind stets die tiefsten Frequenzen des betreffenden Schwingungstyps. Es geht aus diesen Untersuchungen die plausible Tatsache hervor, daß man die Schwingungszahl hoch legen, also steife Schaufeln verwenden muß, wenn Flattern vermieden werden soll.

Wenn an einem Gitterprofil Ablösung auftritt, so kann die Schaufel zu Schwingungen angeregt werden, die sie gefährden, selbst wenn das Flattern unterbleibt. Die Schaufel erfährt dann stark fluktuierende Kräfte, die eine *stochastische Erregung* herbeiführen können. Die Kraft pro Längeneinheit, welche die Schaufel erfährt, kann dargestellt werden in der Form

$$P(t) = \bar{P} + \Delta P(t), \quad 20.19(8)$$

wo $\Delta P(t)$ der fluktuierende Anteil ist, der sich dem zeitlich konstanten \bar{P} überlagert. Für den quadratischen Mittelwert von ΔP läßt sich setzen

$$\overline{\Delta P^2} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \Delta P^2 dt \right] = \int_0^\infty g(\omega) d\omega. \quad 20.19(9)$$

Man denkt sich also ΔP gebildet durch eine Überlagerung harmonischer Anteile mit Kreisfrequenzen ω , und es ist die Verteilungsfunktion $g(\omega)$, die den Charakter der Fluktuation kennzeichnet. Abb. 20.19.2 stellt diese Funktion dar für das Beispiel eines mit der Geschwindigkeit c quer angeströmten Zylinders vom Radius R nach *Chen* [53].

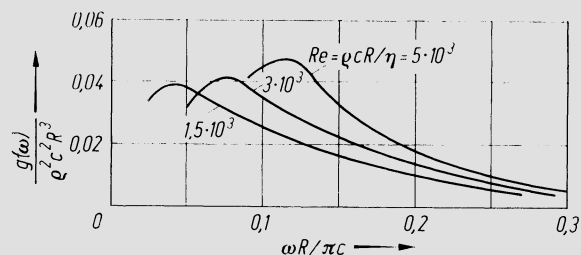


Abb. 20.19.2. Verteilungsfunktion $g(\omega)$.
Nach *Chen* [53]

Durch eine solche Kraft wird nun dem Körper eine ebenfalls regellose oszillierende Bewegung aufgezwungen. Liegt aber seine Eigenfrequenz ω_e im Bereich, in dem $g(\omega)$ große Werte annimmt, so treten in der Fourier-Integraldarstellung dieser Bewegung einzig die Anteile mit Eigenfrequenzen nahe an ω_e stark hervor. Es entsteht also ein Schwingungsvorgang, der durch Überlagerung von Teilschwingungen mit Frequenzen nahe an ω_e entsteht und durch regellose Schwebungen gekennzeichnet ist. Für den quadra-

tischen Mittelwert der Auslenkung unter solchen Bedingungen gibt *Rice* [54] für einen einfachen Schwinger mit Masse m , Eigenkreisfrequenz ω_e und logarithmischem Dekrement δ den Wert

$$\bar{q}^2 = \frac{\pi^2}{\delta} \frac{1}{m^2 \omega_e^4} g(\omega_e) \omega_e \quad 20.19(10)$$

an. Daß hier δ im Nenner nicht im Quadrat steht, wie man erwarten könnte, hängt mit folgendem Umstand zusammen. Bei einer Vergrößerung von δ wird die Spitze der Resonanzüberhöhungskurve zwar weniger hoch aber breiter, so daß ein größerer Bereich erregender Frequenzen zur Wirkung kommt. — Überträgt man dies auf die Schaufel, d. h. den einseitig eingespannten Stab, so ist man auf folgende Formel geführt:

$$\frac{\sqrt{\sigma_w^2}}{\sigma_b} = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}} H_1 \frac{\sqrt{g(\omega_e) \omega_e}}{\bar{P}} \quad 20.19(11)$$

Im Zähler steht links der zeitliche Mittelwert der so erzeugten Wechsellspannung, im Nenner die statische Biegespannung, die unter der Einwirkung einer über der Schaufelhöhe konstanten Kraft \bar{P} entsteht. Es ist die Biegeschwingung erster Ordnung und Phasengleichheit der Kräfte längs der Schaufel vorausgesetzt, eine ungünstige Annahme. Darum tritt der Faktor H_1 nach Abschn. 20.16 auf. Wo keine Unterlagen über die Funktion $g(\omega)$ vorliegen, können näherungsweise diejenigen des Zylinders verwendet werden, wobei man für R etwa die halbe Sehnenlänge einsetzen kann. — Stochastische Erregung kann auch dadurch entstehen, daß eine Schaufel einer sehr starken Turbulenz ausgesetzt ist, die durch ein anderes Strömungselement erzeugt wird, z. B. durch Ablösung in einem Eintrittsstutzen.

Vereinzelt sind auch schon Schaufelschwingungen aufgetreten, die mechanisch vom Rotor aus angeregt wurden. Das kann insbesondere eintreten, wenn ein Rotor *Drehstöße* empfängt, z. B. infolge des Pumpens eines Verdichters. Damit werden vom Schaufelfuß aus Schwingungen angestoßen. Diese werden zwar zwischen je zwei Stößen immer wieder abklingen, können aber doch momentan so stark sein, daß sich schon nach verhältnismäßig kurzer Zeit ein Schaden akkumuliert, der zum Schaufelbruch führt.

20.20 Die Dämpfung

Allgemein möge hier die Dämpfung durch das logarithmische Dekrement δ gekennzeichnet werden. Der durch die *Werkstoffdämpfung* allein gegebene Anteil δ_w ist für einige Materialien in Abb. 20.20.1 dargestellt. Diese Werte gelten für die reine Biegeschwingung, während für das logarithmische Dekrement der Torsionsschwingung zu setzen ist $\delta_{wt} = 0,5 \delta_w$. Beachtlich sind die günstigen Werte der Stähle vom Typ 13% Cr, während hochwarmfeste Legierungen schlechte Dämpfungseigenschaften aufweisen.

Daneben ist, solange man unter der kritischen Strouhal-Zahl bleibt, auch die *aerodynamische Dämpfung* wirksam. Sie wird beschrieben durch das zweite Glied links in Gl. 20.19(7). Hinreichend weit unter der kritischen Grenze kann angenommen werden, daß dieses Glied stark überwiege. Da die durch Gl. 20.19(2) eingeführten c'' proportional der momentanen Schwingungsgeschwindigkeit \dot{y} des Schaufelprofils gesetzt werden können und alle \bar{c} proportional der Bezugsgeschwindigkeit c_0 gilt, wie der Aufbau von Gl. 20.19(5) zeigt, die Proportionalität

$$\frac{\partial P^*}{\partial X_i} = \frac{1}{\frac{\rho_0}{2} c_0^2} \frac{\partial p^*}{\partial X_i} \sim \frac{c_0 \dot{y}}{c_0^2} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial X_i} \sim \frac{\rho_0}{2} c_0 \dot{y},$$

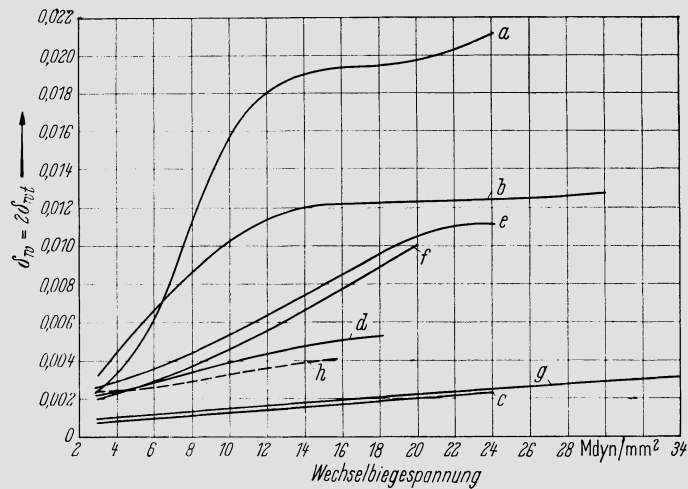


Abb. 20.20.1. Werkstoffdämpfung δ_w in Funktion der Wechselbiegebeanspruchung (1 Mdyn = 10 N = 1,02 kp). Nach Schmidt [39]. Kurven gelten für folgende Werkstofftypen:

a: X 20 Cr 13	e: FKDM 10
b: X 22 Cr Mo V 12,1	f: austenitisch 15 Cr, 7 Ni, 7 Mn
c: K 40 Cr Ni Mo 6	g: Nimonic
d: C 15 (Weichstahl)	h: Duralumin

mithin auch

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_i} \sim \frac{\rho_0}{2s} c_0 \dot{y}. \quad 20.20(1)$$

Da aus dem Druckgradienten durch zweimalige Integration über den Profilmfang die aerodynamische Dämpfungskraft D_a entsteht, kann man für diese setzen

$$D_a = C_d \frac{\rho_0}{2} s c_0 \dot{y}, \quad 20.20(2)$$

denn die zweimalige Integration führt in die Proportionalität 20.20(1) noch den Faktor s^2 ein. Der Koeffizient C_d ergibt sich grundsätzlich aus der Integration der instationären Strömungsgleichungen; praktisch wird man sich eher auf die Empirie stützen.

Die Dämpfungsarbeit, die an der ganzen Schaufel während des Zeitintervalls dt geleistet wird, ist

$$dW_d = dt \int_0^l D_a \dot{y}(x) dx = C_d \frac{\rho_0}{2} dt \int_0^l s c_0 \dot{y}^2 dx. \quad 20.20(3)$$

Sowohl c_0 als auch s werden im allgemeinen längs x variieren, doch kann mit Mittelwerten gerechnet und der Koeffizient C_d gegebenenfalls angepaßt werden. Damit folgt

$$\frac{dW_d}{dt} = C_d \frac{\rho_0}{2} s c_0 \int_0^l \dot{y}^2 dx. \quad 20.20(4)$$

Nun existiert längs der Schaufel sicher eine Stelle, wo \dot{y} gerade so groß ist, daß man den korrekten Wert der Bewegungsenergie der Schaufel erhält, wenn man ihre Masse m mit dem dort auftretenden $\dot{y}^2/2$ multipliziert. Das dort vorhandene y sei mit y^* bezeichnet. Dann läßt sich Gl. 20.20(4) auch schreiben

$$\frac{dW_d}{dt} = \left[C_d \frac{\rho_0}{2} s c_0 \int_0^l \left(\frac{Y(x)}{Y^*} \right)^2 dx \right] y^{*2} = B y^{*2}. \quad 20.20(5)$$

In der Tat übernimmt hier y^* die Rolle von q in Abschn. 20.2, und der Ausdruck in eckiger Klammer ist daher die dort eingeführte Dämpfungsgröße B . Somit wird das logarithmische Dekrement δ_a der aerodynamischen Dämpfung vermöge Gl. 20.1(9)

$$\delta_a = \pi B / m \omega_e. \quad 20.20(6)$$

Ist $\bar{f} = k_f s^2$ der mittlere Schaufelquerschnitt, ρ_s die Dichte des Schaufelwerkstoffes, mithin $m = \rho_s k_f s^2 l$ die Schaufelmasse, so wird

$$\delta_a = C_d \frac{\rho_0}{\rho_s k_f} \frac{\pi c_0}{2s\omega_e} \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{Y(x)}{Y^*} \right)^2 dx. \quad 20.20(7)$$

Der Vergleich mit der Darstellungsweise bei *Schmidt* [39] zeigt, daß der durch l dividierte Integralausdruck in dieser Gleichung für die Schwingung n -ter Ordnung gleich H_n^a / μ_n ist. Hier ist H_n^a der Ausdruck nach Gl. 20.16(16), μ_n eine Funktion von f_a/f_i (Querschnitt am freien Ende durch Einspannquerschnitt), die für die frei endigende Schaufel und die beiden ersten Schwingungsordnungen in Abb. 20.20.2 dargestellt ist. Wenn also noch der Index n beigefügt wird, um anzudeuten, daß die Schwingungsform der Ordnung n betrachtet wird, die Kreisfrequenz ω_e durch die Frequenz ν_e ersetzt wird und schließlich noch die Zuströmbedingungen ρ_1, c_1 als Bezugszustand gewählt werden, schreibt sich Gl. 20.20(7)

$$\delta_{an} = \frac{C_d \rho_1}{4\rho_s k_f} \frac{c_1}{s\nu_{en}} \frac{H_n^a}{\mu_n}. \quad 20.20(8)$$

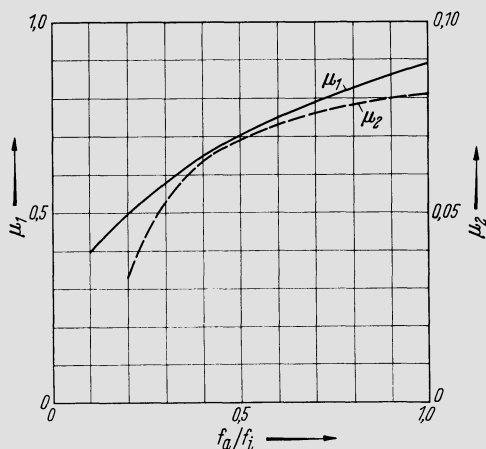


Abb. 20.20.2. Faktoren μ_1 und μ_2 .
Nach *Schmidt* [39]

Eine analoge Überlegung liefert für den Fall der Torsionsschwingung

$$\delta_{atn} = \frac{C_{at} \rho_1}{4\rho_s k_{Jp}} \frac{c_1}{s\nu_{en}} \frac{H_n^a}{\mu_{tn}}, \quad 20.20(9)$$

wobei k_{Jp} der Koeffizient des polaren Trägheitsmomentes $k_{Jp} = J_p/s^4$ ist und für H_{tn}^a/μ_{tn} näherungsweise 1 gesetzt werden kann.

Über die Koeffizienten C_d und C_{at} können folgende Angaben gemacht werden. Meßergebnisse für C_d an Plattengittern gibt *Hiller* [55]. Sie sind in Abb. 20.20.3 wiedergegeben als Kurvenband a und können wohl am ehesten für Axialverdichter als Richtwerte verwendet werden. Für Turbinengitter finden sich bei *Samoilovich* [56] Unterlagen. Man kann demgemäß setzen

$$C_d \approx C_{d0} K_t K_\alpha. \quad 20.20(10)$$

Der Basiswert C_{d0} wird durch Kurvenband b (Abb. 20.20.3) wiedergegeben. K_t ist ein Korrekturfaktor zur Berücksichtigung des Teilungsverhältnisses t/s , während K_α von der Abweichung $\Delta\alpha$ des Anstellwinkels vom Optimalwert abhängt (vgl. Abb. 20.20.3). Ebenfalls nach [56] wäre etwa zu setzen $C_{d0} \approx 0,5$. Über eine theoretische Behandlung unter stark vereinfachenden Annahmen vgl. [57].

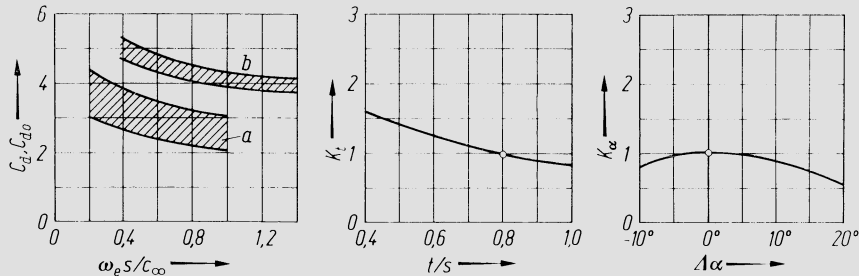


Abb. 20.20.3. Empirische Unterlagen zur Berechnung der aerodynamischen Dämpfung

Für das gesamte *logarithmische Dekrement* δ_n der Biegeschwingung n -ter Ordnung bzw. δ_{tn} der Torsionsschwingung n -ter Ordnung läßt sich mithin setzen

$$\delta_n = \delta_w + \delta_{an} + \delta_{rn}, \quad \delta_{tn} = \delta_{wt} + \delta_{atn} + \delta_{rtn}. \quad 20.20(11)$$

Die zusätzlichen Glieder δ_{rn} und δ_{rtn} erfassen die Dämpfung durch *Reibung*, die durch die besondere konstruktive Ausbildung gegeben ist. Schon seit den Anfängen des Dampfturbinenbaues hat man bei Laufrädern lose eingelegte sog. Dämpferdrähte verwendet mit dem Ziel, auf diese Weise durch Reibung des Drahtes im Loch Dämpfung zu schaffen. Die genauere Untersuchung zeigt indessen, daß die starke Anpressung des Drahtes durch die Fliehkraft praktisch ein Gleiten verhindert. Eine gewisse zusätzliche Dämpfung dürfte trotzdem entstehen, denn man muß annehmen, daß selbst die Ruhereibung mit mikroskopischen Gleitvorgängen verbunden ist, was z.B. dazu führen kann, daß sich eine Schraubenverbindung trotz Vorspannung allmählich lockert. — Bei anderen Bauformen ist eher mit deutlichen gegenseitigen Bewegungen zu rechnen, z.B. bei aneinanderstoßenden mit den Schaufeln ein Stück bildenden Deckplatten. Dort sind im Versuch schon logarithmische Dekremente von mehreren Prozent festgestellt worden. — Wo keine verlässlichen Versuchsergebnisse über solche Dämpfungseffekte vorliegen (beachte die starke Abhängigkeit von Ausführungstoleranzen!), ist es aber vorsichtig, sie nicht in Rechnung zu setzen, also in Gl. 20.20(11) $\delta_{rn} = \delta_{rtn} = 0$ anzunehmen. Man hat auch der Fußbefestigung einen wesentlichen dämpfenden Effekt zugeschrieben. Dieser ist aber mindestens bei Laufrädern im allgemeinen sehr klein. Hingegen scheint die Befestigung verstellbarer Leiträder durch Drehzapfen eine Dämpfung zu schaffen, die praktisch alle Schwingungen unterdrückt. —

Aicher et al. [58] haben z. B. an Axialverdichtern gesamte δ -Werte im Betrieb gemessen und fanden bei Laufschaufeln Werte bis knapp 0,02. Dies zeigt, daß die Dämpfung durch Reibung in der Fußbefestigung verschwindend klein sein muß, denn sonst müßte der Gesamtwert höher liegen. — Für ganz überschlägige Überlegungen kann man etwa $\delta = 0,02$ als Richtwert annehmen.

20.21 Ergänzendes zur schwingungstechnischen Auslegung

Lange Zeit hat man versucht, die dynamische Beanspruchung der Schaufeln durch summarische Berechnungsvorschriften zu berücksichtigen, die sich auf Schadensstatistik abstützten. So wurde etwa vorgeschrieben, die niedrigste Biegeeigenfrequenz müsse über

dem Fünffachen der Drehzahl liegen, und gleichzeitig sollen bei den Festigkeitsrechnungen die von den Strömungskräften herrührenden Spannungen bei Vollbeaufschlagung mit 2,5, bei Teilbeaufschlagung mit 8 multipliziert werden. Mit solchen Regeln hat man wohl praktisch das Flattern, wie auch stochastische Schwingungen ausgeschlossen. Bei Resonanzschwingungen sichert man sich durch ein solches Vorgehen nicht gegen unzulässige Beanspruchung, weshalb noch Empfehlungen beigefügt werden, wie etwa das Anbringen von Dämpferdrähten in Fällen, die nach Erfahrung kritisch waren. Den heutigen Anforderungen kann man mit solchen Verfahren meist nicht mehr genügen.

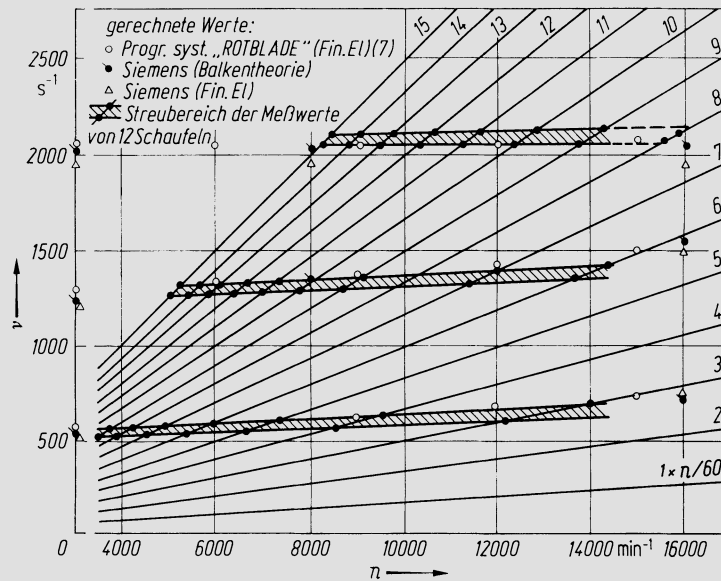


Abb. 20.21.1. Campbell-Diagramm für eine freistehende ND-Dampfturbinschaufel.
Nach Wolter und Wachter [59]

Eine schwingungstechnische Auslegung verlangt die Erstellung eines Campbell-Diagrammes, wie schon unter 20.15 beschrieben. Abb. 20.21.1 zeigt ein solches für eine freistehende ND-Schaufel einer Industriedampfturbine nach Wolter und Wachter [59]. Es sind bei diesem Beispiel Rechnungswerte und Meßwerte verglichen und man erkennt insbesondere auch die Streuungen infolge der Fertigungstoleranzen. Die drei Kurvenbänder zeigen die Frequenzen für die drei ersten Schwingungsformen. Von der sehr großen Zahl der Resonanzen können die weitaus meisten a priori als ungefährlich gelten, sei es, daß sie stets rasch durchfahren werden, sei es, daß die zu erwartenden Resonanzamplituden (Faktor H_n !) sehr klein bleiben. Eine Abschätzung der Resonanzamplituden kann nach den Ausführungen der vorangehenden Abschnitte erfolgen, und es ergibt sich daraus auch, welche Maßnahmen zur Verbesserung allenfalls möglich sind. Bei Maschinen, die mit konstanter Drehzahl laufen, wird man Resonanzen mit der Grundschwingung wie auch mit den untersten Oberschwingungen zu vermeiden suchen. Oberschwingungen hoher Ordnungen empfangen fast stets nur sehr wenig Energie. Allerdings kann man selbst in diesem Falle manchmal nicht allen Resonanzen ausweichen, die gefährlich werden könnten, denn in einer vielstufigen Schaufelung kann eine Maßnahme, die eine Resonanz in einem Schaufelkranz vermeidet, in einem anderen gerade zur Resonanz führen.

Vollends unmöglich wird die Vermeidung von Resonanzen bei Maschinen mit variabler Drehzahl. Hier muß man zu schwingungsdämpfenden Mitteln greifen. Sehr häufig sind

diese ohnehin von vornherein vorgesehen, so bei allen Konstruktionen mit Deckplatten oder Deckbändern. Eine oft verwendete Maßnahme ist der Bindedraht oder Dämpferdraht. Abb. 20.21.2 zeigt das Campbell-Diagramm des gleichen Rades wie Abb. 20.21.1, aber mit eingelegtem Dämpferdraht. Entsprechend der Vielfalt der Schwingungsformen bei Paketschwingungen ergibt sich eine große Zahl von Kurven für die entsprechenden Eigenschwingungszahlen, womit auch die Zahl der möglichen Resonanzen auf ein Mehrfaches erhöht wird. Demgegenüber zeigen aber die Messungen der Spannungsamplituden in Resonanz nach [59] eine Herabsetzung gegenüber dem Fall ohne Dämpferdraht auf 20% und weniger. Einzig bei einer Resonanz, die an der obersten Grenze des Betriebsbereiches dieser Maschine liegt, kommt man auf 50% der Spannungsamplitude der Schaufel ohne Draht.

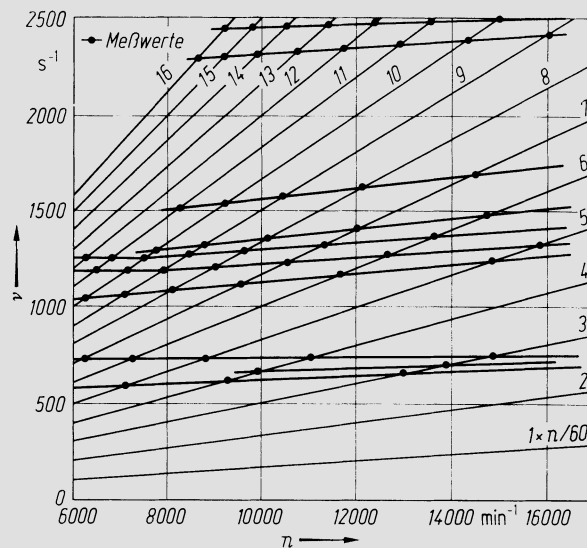


Abb. 20.21.2. Campbell-Diagramm des gleichen Rades wie Abb. 20.21.1, jedoch mit eingelegtem Dämpferdraht

Diese Situation dürfte typisch sein für Anordnungen, bei denen eine Querverbindung zwischen den Schaufeln hergestellt wird. Nach den Ausführungen unter 20.17 wird dabei die Erregungsenergie stark herabgesetzt, was besonders bei der Gleichtaktschwingung durch den Bindungsfaktor α_z zum Ausdruck kommt, der selbst Null werden kann. Die Verminderung der Spannungsamplituden dürfte in erster Linie durch diese Herabsetzung der Erregungsenergie bedingt sein, während die zusätzliche mechanische Dämpfung wohl in der Regel nur einen kleinen Beitrag liefert, da höchstens mikroskopisches Gleiten auftritt. Bei der heute verbreiteten Ausführung mit aneinanderstoßenden integralen Deckplatten kann diese Dämpfung beträchtlich sein, hängt aber stark von den Toleranzen ab. Teilweise wird diese Konstruktion so ausgeführt, daß diese Deckplatten um den ganzen

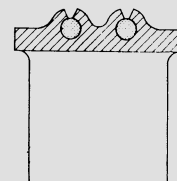


Abb. 20.21.3. In Deckplatten eingestemmtte Bindedrähte, Konstruktion von STAL-LAVAL

Umfang herum mit Vorspannung aneinanderstoßen, wobei man für die Grundschiwingung im Gleichtakt $\alpha_z = 0$ erhält, sofern nur die Schaufelzahlen für Leit- und Laufrad verschieden sind.

Eine sehr bemerkenswerte Ausführungsform, die von STAL-LAVAL stammt, ist in Abb. 20.21.3 dargestellt. In die Deckplatten sind Drähte eingewalzt, welche die Verbindung der Schaufeln herstellen. Bei sehr schlanken Schaufeln werden zudem noch Dämpferdrähte vorgesehen. Damit sind nur noch solche Schwingungsformen möglich, die nur eine schwache Anregung erfahren (kleiner H_n -Faktor), und die Wechsellspannungen bleiben entsprechend niedrig. Die Ausführung ist bei Schiffsturbinen in Gebrauch, bei denen jede Drehzahl unbeschränkt gefahren werden muß und deshalb Resonanzen nicht vermieden werden können. — Bei Gasturbinenleiträdern werden auch aus mehreren Schaufeln bestehende Sektoren gemeinsam mit ihrem Deckband und der Fußpartie als ein einziger Präzisionsgußteil gefertigt.

Literatur zu Kap. 20

1. *Biezeno, C. B.; Grammel, R.*: Technische Dynamik, Bd. I und II, 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1953.
2. *Hübner, E.*: Technische Schwingungslehre. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1953.
3. *Langhaar, H. L.*: Energy Methods in Applied Mechanics, New York: Wiley 1962.
4. *Matusz, J. M.; O'Donnel, W. J.; Erdlac, R. J.*: Local Flexibility Coefficients for the Build-In Ends of Beams and Plates. Trans. ASME. J. Eng. for Industry (1969) 461–464.
5. *Sutherland, J. G.; Goodman, L. E.*: Vibration of Prismatic Bars including Rotary Inertia and Shear Corrections. Dep. of Civil Engineering, Univ. of Illinois, Urbana 1951.
6. *Vogel, D.*: Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen unverwundener freistehender Turbinenschaufeln unter Berücksichtigung von Zusatzeffekten, Konstruktion 21 (1969) 27–30.
7. *Beglinger, V.; Bolleter, U.; Locher, W. E.*: Effects of Shear Deformation, Rotary Inertia, and Elasticity of the Support on the Resonance Frequencies of Short Cantilever Beams, Trans. ASME Ser. A, J. Eng. Power 98 (1976) 79–87.
8. *Seippel, C.*: Eigenfrequenzen kurzer zylindrischer Schaufeln. Unveröffentl. Bericht TT 7211, BBC Baden.
9. *Beglinger, V.; Schlachter, W.*: Influence of Support Elasticity, Shear Deformation, Rotary Inertia and Cross-sectional Warping on the Natural Frequencies of Turbomachine Blades. Sulzer Tech. Rev. Research Number, Winterthur 1978.
10. *Kündig, A.; Schlachter, W.*: Effects of Shear Deformation and Elasticity of the Support on the Torsional Resonance Frequencies of Short Beams. Paper CIMAC-Congress, Tokyo 1977.
11. *Kirchberg, G.; Thomas, H. J.*: Berechnung von Eigenfrequenzen der Schaufelpakete in Dampf- und Gasturbinen, insbesondere bei verjüngten Schaufeln. Konstruktion 10 (1958) 41–50.
12. *Kirchberg, G.; Thomas, H. J.*: Berechnung von Eigenschwingungszahlen von Dampfturbinenschaufeln. Konstruktion 3 (1951) 14–19 u. 41–46.
13. *Prohl, M. A.*: Method for Calculating Vibration Frequency and Stress of a Bladed Group of Turbine Buckets. Trans. ASME 80 (1958) 169–180.
14. *Weaver, F. L.; Prohl, M. A.*: High Frequency Vibration of Steam Turbine Buckets. Trans. ASME 80 (1958) 181–189.
15. *Caruso, W. J.; Wundt, B. M.*: Diskussionsbeitrag zu [13]. Trans. ASME 80 (1958) 190.
16. *Montoya, J. G.*: Gekoppelte Biege- und Torsionsschwingungen einer stark verwundenen rotierenden Schaufel. Brown Boveri Mitt. 53 (1966) 6–15 u. 54–59.
17. *Hübner, E.*: Eigenschwingungszahlen zusammengesetzter Schwingungs-Systeme. Ing. Arch. 29 (1960) 134–149.
18. *Uhrig, R.*: Elastostatik und Elastokinetik in Matrixschreibweise. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973.
19. *Pfützner, H.*: Koppelschwingungen von Rad und Schaufeln an Turbomaschinen. Diss. TU Berlin 1961.
20. *Kantorowicz, O. P. T.*: On Steam Turbine Wheel, Batch and Blade Vibrations. North East Coast Inst. of Engrs. and Shipbuilders, Trans. 79 (1963) 51–93.
21. *Dietrich, G.; Anke, H.*: Die Berechnung der Biegeeigenfrequenzen von Schaufeln mit Hilfe von Übertragungsmatrizen. Maschinenbautechnik 11 (1962) 627–630.
22. *Rieger, N. F.*: Finite Element Analysis of Turbomachine Blade Problems: Finite Element Applications in Vibration Problems. ASME, New York 1977.

23. *Carnegie, W.; Thomas, J.; Dokumaci, E.*: An Improved Method of Matrix Displacement Analysis in Vibration Problems. *Aeronaut. Qu.* 20 (1969) 321.
24. *Rawtani, S.; Dokainish, M. A.*: Bending of Pretwisted Cantilever Plates. *Canadian Aeronautic and Space Institute Transactions* 2 (1969) No. 2.
25. *Lindburg, G. M.; Olson, M. D.; Sarazin, A. C.*: Finite Element Dynamic Analysis of Shallow Shell Structures. National Research Council of Canada, Aeronaut. Rep. Lr-650, Ottawa 1970.
26. *Ahmad, S.; Anderson, R. G.; Zienkiewicz, O. C.*: Vibration of Thick Curved Shells with Particular Reference to Turbine Blades. *J. Strain Anal.* 5 (1970) No. 200-6.
27. *Lelanne, M.; Trompette, P.*: Rotating Blade Analysis by Finite Element Method. In: *Dynamics of Rotors, Symp. Lyngby, Denmark 1974*. Ed. Nierdson, F. (IUTAM Symp.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1975, pp. 299–318.
28. *Salama, A. L.; Petyt, M.*: Dynamic Response of Packets of Bladed by the Finite Element Method. ASME-Paper No. 77-Det-70, 1977.
29. *Kirkhope, J.; Wilson, G. J.*: Finite Element Analysis for the Vibration Modes of a Bladed Disc. *J. Sound Vib.* 49 (1976) 469–482.
30. *Zienkiewicz, O. C.*: *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. New York: McGraw-Hill 1967.
31. *Pfeiffer, R.*: Die Spannungsverteilung einer freistehenden Niederdruckschaufel. In: *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. J. Wachter, Univ. Stuttgart 1980*.
32. *Wolfs, H.*: Einfluß des Schaufeldeckbandes auf das Schwingungsverhalten von Turbinenschaufeln. In: *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. J. Wachter, Univ. Stuttgart 1980*.
33. *Bloemhof, H. F.*: Resonanzbeanspruchung schwingender Schaufeln, insbesondere von Abgasturboladern. Diss. ETH Zürich 1979.
34. *Gloger, M.*: Experimentelle Bestimmung instationärer Schaufelkräfte in Abhängigkeit von den Strömungsungleichmäßigkeiten stromauf vom betrachteten Schaufelgitter. *VDI Ber. Nr. 361 (1980)* 61–70.
35. *Gloger, M.*: Experimentelle Untersuchung der durch die benachbarten Schaufelgitter hervorgerufenen instationären Kräfte auf die Laufschaufeln von Axialturbinen. Diss. Univ. Stuttgart 1980.
36. *Traupel, W.*: Die Beanspruchung schwingender Schaufeln in Resonanz. *Schweiz. Bauztg.* 88 (1970) 528.
37. *Traupel, W.*: Die Herabsetzung der Erregung von Schaufelschwingungen durch gegenseitiges Verbinden der Schaufeln. *Schweiz. Bauztg.* 75 (1957) 822–824.
38. *Zollinger, H.*: Dellen in beschleunigter Strömung. Diss. ETH Zürich 1971.
39. *Schmidt, R.*: Resonanzverhalten und Schwingungssicherheit der Schaufeln von Turbomaschinen. *Maschinenbautechnik* 11 (1962) 630–637.
40. *Hort, W.*: Schwingungen der Räder und Schaufeln in Dampfturbinen. *Z VDI* 70 (1926) 1375–1381 u. 1419–1424.
41. *Lienhart, W.*: Berechnung der instationären Strömung durch gegeneinander bewegte Schaufelgitter und der instationären Schaufelkräfte. *VDI Ber. Nr. 193 (1973)* 75–79.
42. *Lotz, M.*: Erregung von Schaufelschwingungen in axialen Turbomaschinen durch die benachbarten Schaufelgitter. *Wärme* (1972) 59–68.
43. *Kirillov, J. J.; Laskin, A. S.*: Untersuchung der wechselnden aerodynamischen Kräfte in dem von einem nichtstationären Strom umflossenen Turbinengitter (russ.) *Energomashinostroenie* 12 (1966) 29–32.
44. *Moiseev, A. A.*: Einfluß des Axialspiels auf die Vibrationsfestigkeit der Überdruck-Laufschaufeln einer Axialturbine (russ.) *Energomashinostroenie* 17 (1971) 21/23.
45. *Rieger, N. F.; Wicks, A. L.*: Measurement of Nonsteady Forces in Three Turbine Stage Geometries Using the Hydraulic Analogy. *Trans. ASME, J. Eng. Power* 100 (1978) 525–532.
46. *Ispas, I.; Grollius, H.; Gallus, H. E.*: Über den Einfluß von Nachlaufdellen auf die instationäre Druckverteilung an den nachfolgenden Schaufelreihen in Axialverdichtern und Axialturbinen. *VDI Ber. Nr. 361 (1980)* 33–43.
47. *Lambertz, J.; Wallmann, Th.; Gallus, H. E.*: Vergleich der Meßergebnisse dynamischer Schaufelkräfte in axialen Turbomaschinen mit Berechnungsverfahren verschiedener Autoren. *VDI Ber. Nr. 361 (1980)* 49–60.
48. *Naguib, M.*: Theoretical Estimation of Dynamic Forces and Vibratory Stresses for a Turbine Blade. *Mitt. Inst. Therm. Turbomasch. Nr. 9, ETH Zürich* 1965.
49. *Lotz, M.; Raabe, J.*: Blade Oscillations in one Stage Axial Turbomachinery. *Trans. ASME, J. Basic Eng.* (1968) 485.
50. *Stenning, A. H.; Kriebel, A. R.*: Stall Propagation in a Cascade of Aerofoils. *ASME Paper No. 57-SA-29, 1957*.
51. *Bellenot, C. U.; Lalive, J.*: Selbsterregte Schwingungen von Turbomaschinenschaufeln. *Brown Boveri Mitt.* 37 (1950).
52. *Hiller, H.*: Die Luftkraftdämpfung bei Torsionsschwingungen von Schaufeln. *Maschinenbautechnik* 11 (1962) 638–642.
53. *Chen, N. Y.*: Karman Vortex Influence upon Drag and Lift of Circular Cylinders. *Interner Bericht Sulzer Winterthur* 1968.
54. *Rice, S. O.*: Mathematical Analysis of Random Noise. *Bell Syst. Tech. J.* 23 (1944).

55. *Hiller, H.*: Zur Frage der Luftkraftdämpfung von Schaufelschwingungen. *Maschinenbautechnik* 11 (1962) 536–541.
56. *Samoilowich, G. S.*: Schaufelschwingungen in Turbomaschinen (russ.) Moskau 1969.
57. *Hanamura, Y.; Tanaka, H.*: Flexure-Torsion Flutter of Airfoils in Cascade. *Bull. Jap. Soc. Mech. Eng.* 10 (1962).
58. *Aicher, W.; Jenny, R.; Roduner, H.*: Untersuchungen an Turbokompressoren: Rotorschwingungen, Schaufelschwingungen, Versuche mit schweren Gasen. *Tech. Rundsch. Sulzer, Forschungsheft*, Winterthur 1978.
59. *Wolter, I.; Wachter, J.*: Ein Beitrag zum Schwingungsverhalten von Endstufenschaufeln mit und ohne eingelegtem Dämpferdraht. *VDI Ber. Nr. 361* (1980) 81–91.

21 Dynamik des Läufers

21.1 Allgemeines

Schon der Schöpfer der ersten Dampfturbine, *Gustaf de Laval*, erkannte, daß die hohen Drehzahlen der Rotoren thermischer Turbomaschinen auf besondere dynamische Probleme führen. Es existiert nach de Laval für einen gegebenen Läufer eine *kritische Drehzahl*, die wesentlich mit seiner Biege-Eigenschwingungszahl zusammenfällt und bei der die Welle nicht dauernd betrieben werden darf mit Rücksicht auf Schwingungen, die ein gefährliches Ausmaß annehmen können. Oberhalb wie unterhalb der kritischen Drehzahl ist aber ein einwandfreier Betrieb möglich. Die Theorie der kritischen Drehzahl wurde schon früh entwickelt, vor allem durch *Föppl* [1] und *Stodola* [2, 3], der nicht nur ein Verfahren zur Bestimmung kritischer Drehzahlen beliebig gestalteter Wellen angeben konnte, sondern auch feinere Effekte analysierte. Insbesondere konnte er zeigen, daß der überkritische Laufzustand des dämpfungsfreien, symmetrischen, isotrop gelagerten Einscheibenrotors, der nur durch die Unwucht erregt wird, stabil ist, sofern nur die Exzentrizität hinreichend klein ist gegenüber dem Trägheitsradius. — Die dynamische Berechnung der Rotoren beschränkte sich durch Jahrzehnte hindurch auf die Bestimmung der kritischen Drehzahlen.

Die praktische Erfahrung zeigte indessen schon immer, daß die Läufer ein Verhalten zeigten, das von dieser klassischen Vorstellung deutlich abwich. Einerseits erwiesen sich die Ausschläge bei der kritischen Drehzahl meist als überraschend klein. Die aus der Theorie gefolgerte Meinung, daß eine kritische Drehzahl sehr rasch durchfahren werden müsse, die z.B. selbst in dem hervorragenden Werk von *Biezeno* und *Grammel* [4] vertreten wird, wurde durch die Erfahrung nicht bestätigt. Oft ist es sogar möglich, unbegrenzt in der kritischen Drehzahl zu fahren, und heute wird dies verlangt. — Andererseits sind bei anderen Drehzahlen (meist im überkritischen Gebiet) sporadisch immer wieder Laufstörungen aufgetreten. Ein physikalisches Verständnis dieser Erscheinungen fehlte weitgehend. Zu ihrer Vermeidung konnte man nur Erfahrungsregeln, die aber nie zuverlässig waren.

Die Klärung dieser Erscheinungen setzte in den fünfziger Jahren ein. *Hagg* und *Sankay* [5, 6] konnten — allerdings nur unter speziellen Bedingungen — die Dämpfung im Ölfilm der Gleitlager experimentell bestimmen. Nach diesen Ergebnissen wurden die kleinen Ausschläge beim Durchgang durch die kritische Drehzahl verständlich. In den oben erwähnten zusätzlichen Laufstörungen erkannte man *selbsterregte Schwingungen*, die durch drei verschiedene Mechanismen ausgelöst werden. Die innere Dämpfung des Rotors bewirkt oberhalb der kritischen Drehzahl eine Labilisierung des Laufzustandes, die nur durch äußere Dämpfung unterdrückt werden kann. Unter bestimmten Bedingungen geht vom Ölfilm der Lager eine Anfachung selbsterregter Schwingungen aus (sog. ‚oil whip‘). Schließlich haben die Spaltströmungen am Laufradumfang und in Labyrinthdichtungen die Tendenz, eine einmal eingeleitete Schwingung weiter anzufachen (sog. Spalterregung).

Die Theorie hat unter Ausnutzung der Möglichkeiten des Computers Verfahren gefunden, um die kritischen Drehzahlen komplizierter, mehrfach gelagerter Läufersysteme genau zu berechnen (auch bei nachgiebiger Lagerung), was früher nicht zuverlässig gelang. Die oben genannten Selbsterregungseffekte wurden zunächst je für sich allein unter vereinfachenden Annahmen theoretisch und experimentell untersucht. Erst der Computer

eröffnete aber die Möglichkeit einer theoretischen Behandlung des gesamten Problemkomplexes unter wirklichkeitsnahen Voraussetzungen. Heute sind wir in der Lage, in einem zusammenhängenden Rechnungsgang die kritischen Drehzahlen und das Stabilitätsverhalten von Rotorsystemen zu bestimmen. Bei gegebener Unwuchtverteilung können auch die Ausschläge berechnet werden. In solche Rechnungen gehen allerdings empirische Unterlagen ein (über Spalterregung und Lagerverhalten), die noch nicht in genügend umfassender Weise vorliegen.

Nachfolgend werden zunächst am einfachen Beispiel des Laval-Rotors — eine einzige Scheibe an einer masselosen Welle — einige grundlegende Zusammenhänge aufgezeigt. Alsdann erfolgt die Behandlung des allgemeinen Problems.

21.2 Laval-Rotor, elementare Theorie

Als Laval-Rotor bezeichnet man die Anordnung, bei der eine Scheibe in der Mitte einer masselosen Welle angeordnet ist (vgl. Abb. 21.2.1). Die ursprüngliche Laval-Turbine kam in der Tat diesem einfachen Grenzfall sehr nahe. Aus Symmetriegründen bewegt sich dabei die Scheibe sicher in ihrer Mittelebene. Da das Eigengewicht für den Vorgang unwesentlich ist, kann es sogleich aus der Betrachtung weggelassen werden. Die Kräfte, welche die Scheibe von der Welle erfährt, sind, wenn x_W, y_W die Koordinaten des Durchstoßpunktes W der Wellenachse durch die Scheibenmittelebene bedeuten

$$X = -kx_W, \quad Y = -ky_W. \quad 21.2(1)$$

Hier kennzeichnet k die Steifigkeit der Welle (ihre „Federkonstante“). Hat die Scheibe die Masse m und den Trägheitsradius κ , so lauten die Bewegungsgleichungen mit den Bezeichnungen der Abb. 21.2.1:

$$m\ddot{x} = -kx_W, \quad 21.2(2)$$

$$m\ddot{y} = -ky_W, \quad 21.2(3)$$

$$m\kappa^2\ddot{\varphi} = \kappa k(y_W \cos \varphi - x_W \sin \varphi). \quad 21.2(4)$$

Gl. 21.2(4) formuliert die Erhaltung des Drehimpulses und gilt daher für stationären Zustand, wo das System kein resultierendes Moment empfängt. Wenn man 21.2(4) in der Form

$$me\ddot{\varphi} = \left(\frac{e}{\kappa}\right)^2 \kappa k(y_W \cos \varphi - x_W \sin \varphi) \quad 21.2(5)$$

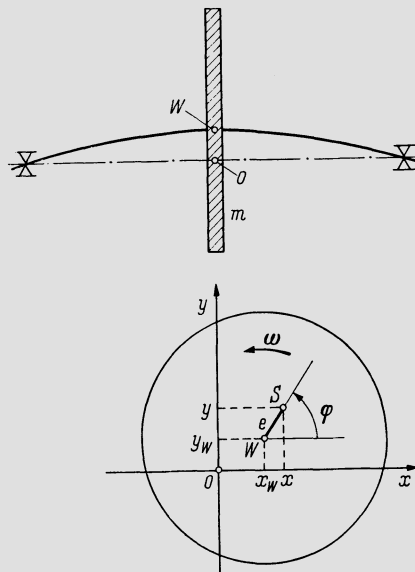


Abb. 21.2.1. Laval-Rotor:
Scheibe an masseloser Welle

schreibt und beachtet, daß $(e/\kappa)^2$ praktisch vernachlässigbar klein wird, folgt

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad \therefore \quad \varphi = \omega t. \quad 21.2(6)$$

Eine Integrationskonstante φ_0 kann entfallen, da stets der Zeitnullpunkt so gewählt werden kann, daß $\varphi = \omega t$ gilt. Mit

$$x_W = x - e \cos \varphi = x - e \cos \omega t, \quad 21.2(7)$$

$$y_W = y - e \sin \varphi = y - e \sin \omega t \quad 21.2(8)$$

ergeben sich durch Einsetzen in Gln. 21.2(2) und (3) die beiden Differentialgleichungen

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} e \cos \omega t, \quad 21.2(9)$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{k}{m} e \sin \omega t, \quad 21.2(10)$$

deren allgemeine Lösung lautet

$$x = A \cos \omega_e t + B \sin \omega_e t + \frac{e}{1 - (\omega/\omega_e)^2} \cos \omega t \quad 21.2(11)$$

$$y = C \cos \omega_e t + D \sin \omega_e t + \frac{e}{1 - (\omega/\omega_e)^2} \sin \omega t, \quad 21.2(12)$$

wobei

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 21.2(13)$$

die Kreisfrequenz der Biegeeigenschwingung des Systems ist. Die Glieder mit den Integrationskonstanten $A \dots D$ stellen die allgemeine Biegeschwingung des Systems dar. Ohne weitere äußere Erregung und bei der geringsten äußeren Dämpfung wird diese Bewegung mit der Zeit exponentiell abklingen. Was dann übrigbleibt, sind zwei aufeinander senkrechte Schwingungen gleicher Amplitude und mit 90° Phasenverschiebung, also eine zirkular polarisierte Schwingung, m. a. W. eine Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Radius

$$r = \frac{e}{1 - (\omega/\omega_e)^2}, \quad 21.2(14)$$

der für $\omega \rightarrow \omega_e$ nach Unendlich strebt; ω_e ist die *kritische Winkelgeschwindigkeit*.

Beachtlicherweise wird r positiv, wenn $\omega < \omega_e$, negativ, wenn $\omega > \omega_e$. Dies bedeutet, daß im unterkritischen Gebiet die Welle sich in der Richtung der Unbalance ausbiegt, im überkritischen Gebiet in entgegengesetzter Richtung. Abb. 21.2.2a und b stellen diese Verhältnisse dar, und es ist leicht nachzuprüfen, daß beides mögliche dynamische Gleichgewichtszustände sind; man hat nur die Rückstellkraft der ausgebogenen Welle der Fliehkraft gleichzusetzen und findet Gl. 21.2(14) bestätigt. Hingegen drängt sich bei Betrachtung der Abb. 21.2.2b die Vermutung auf, daß der überkritische Laufzustand instabil sei, denn wenn man sich den Schwerpunkt um einen noch so kleinen Betrag nach außen verschoben denkt, nimmt die Fliehkraft stärker zu als die Rückstellkraft. In der Tat ist das System im überkritischen Laufzustand instabil, sobald man die Scheibe durch einen

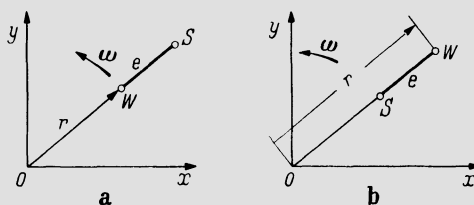


Abb. 21.2.2. Lage von Drehzentrum O , Schwerpunkt S und Wellendurchstoßpunkt W . a) Unterkritischer Laufzustand; b) überkritischer Laufzustand

Massenpunkt ersetzt. *Stodola* [3] konnte indessen zeigen, daß das axiale Trägheitsmoment eine Stabilisierung herbeiführt. Stabilität ist nach seiner Untersuchung gewährleistet, sobald

$$\left(\frac{\omega - \omega_e}{\omega}\right)^3 > 4 \left(\frac{e}{\varkappa}\right)^2. \quad 21.2(15)$$

Wir verzichten darauf, Stodolas Herleitung hier wiederzugeben, da moderne Theorien die Stabilitätsfrage unter sehr viel allgemeineren Voraussetzungen (Ölfilmkräfte, Spalterregung, innere Dämpfung) behandeln.

Um den Übergang vom unterkritischen zum überkritischen Laufzustand zu verfolgen, muß die Dämpfung eingeführt werden, da ohne diese der Ausschlag in $\omega = \omega_e$ nach Unendlich strebt. Wenn angenommen wird, daß der Bewegung des Scheibenschwerpunktes in den beiden Koordinatenrichtungen die dämpfenden Kräfte $-b\dot{x}$ und $-b\dot{y}$ entgegenstehen, lauten die ergänzten Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}e \cos \omega t, \quad 21.2(16)$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}e \sin \omega t. \quad 21.2(17)$$

Sie sind identisch mit der Gleichung des einfachen Schwingers, so daß die Lösung von dort übernommen werden kann:

$$x = \frac{e \cos(\omega t - \psi)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{b\omega}{m\omega_e^2}\right]^2}}, \quad y = \frac{e \sin(\omega t - \psi)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{b\omega}{m\omega_e^2}\right]^2}}, \quad 21.2(18)$$

$$\psi = \arctan \left[\frac{b}{m\omega_e} \frac{1}{\left(\frac{\omega_e}{\omega}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)} \right] \quad 21.2(19)$$

Das sind zwei aufeinander senkrecht stehende, um 90° phasenverschobene Schwingungen, die zusammen eine Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω ergeben. Im Resonanzfall $\omega = \omega_e$ entsteht die endliche Amplitude

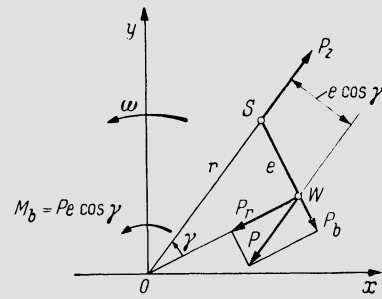
$$r_{\max} = \frac{em\omega_e}{b}, \quad 21.2(20)$$

während gleichzeitig $\psi = 90^\circ$. Weit unter der kritischen Winkelgeschwindigkeit, also wenn $\omega/\omega_e \ll 1$ wird $\psi \rightarrow 0^\circ$. Über der kritischen Winkelgeschwindigkeit, also für $\omega/\omega_e \gg 1$, wird $\psi \rightarrow 180^\circ$, d. h. es bestehen die Verhältnisse nach Abb. 21.2.2a und b. Bei $\omega = \omega_e$, steht $e = \overline{WS}$ nach Abb. 21.2.3 senkrecht auf der Wellenauslenkung \overline{OW} , und zwar weist e in Richtung der Drehbewegung. Damit ist der stetige Übergang vom unterkritischen zum überkritischen Laufzustand hergestellt.

Daß der in Abb. 21.2.3 dargestellte kritische Laufzustand ein Gleichgewichtszustand ist, läßt sich in folgender Weise unmittelbar einsehen. Die ausgebogene Welle übt auf die Scheibe die Rückstellkraft $P_r = k(\overline{OW})$ aus, die nach innen weist und die Richtung \overline{OW} hat. Außerdem erfährt die Scheibe eine senkrecht zum Radius $r_w = \overline{OW}$ stehende und entgegen der Bewegung weisende bremsende Kraft $P_b = br_w\omega$. Die Resultierende aus P_r und P_b ist eine Kraft P , die nach Größe und Richtung der Fliehkraft $P_z = mr\omega^2$ entgegengesetzt gleich sein muß. Hier ist $r = \overline{OS}$. Nun ist

$$P_r = k(\overline{OW}) = kr_w, \quad P_b/P_r = e/r_w,$$

Abb. 21.2.3. Gleichgewichtsbetrachtung beim kritischen Laufzustand. Drehmoment M_b ist aufzuwenden zur Überwindung des bremsenden Momentes



somit also durch Einsetzen der Ausdrücke für P_b und P_r auch

$$\frac{br_W\omega}{kr_W} = \frac{e}{r_W} \quad \therefore \quad r_W = \frac{ek}{b\omega}. \quad 21.2(21)$$

Bei sehr kleiner Dämpfung wird $\overline{OW} \approx e$, somit also der Winkel γ sehr klein und folglich $r_W \approx r$, $P \approx P_r$. Also wird $P_z \approx P_r$, woraus

$$mr\omega^2 = kr, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad 21.2(22)$$

Da aber $\sqrt{k/m} = \omega_e$, kann man durch Einsetzen von $k = m\omega_e^2$ in Gl. 21.2(21) das Ergebnis auf die Form

$$\omega = \omega_e, \quad r = \frac{em\omega_e}{b} \quad 21.2(23)$$

bringen. Die erste dieser Gleichungen sagt aus, daß der durch Abb. 21.2.3 dargestellte Laufzustand dann und nur dann eintritt, wenn die Winkelgeschwindigkeit gleich der Kreisfrequenz der Biegeschwingung des Systems ist, während mit der zweiten Beziehung Gl. 21.2(20) wiedergewonnen ist.

Der wirkliche Dämpfungsmechanismus ist allerdings komplizierter als hier vorausgesetzt, denn die Dämpfungskräfte entstehen vor allem in den Lagern und greifen nur zu einem meist vernachlässigbaren kleinen Teil an der Läuferscheibe an. Für die genauere Analyse der Verhältnisse verweisen wir auf Abschn. 21.4.

Abschließend sei noch auf den idealisierten Grenzfall des dämpfungsfreien, vollkommen zentrischen Laval-Rotors hingewiesen. Wenn der Schwerpunkt S mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit dem Radius r um das geometrische Zentrum 0 rotiert, ist die Fliehkraft $mr\omega^2$, die Rückstellkraft kr , so daß die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$mr\omega^2 = kr \quad \therefore \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad 21.2(24)$$

Nur bei dieser Winkelgeschwindigkeit, die offensichtlich wieder die Kreisfrequenz der Eigenschwingung ist, ist $r \neq 0$ überhaupt möglich, und zwar ist dann an sich jedes r denkbar. Hat ein vollkommen unwuchtfreier Rotor also seine kritische Winkelgeschwindigkeit, so ist er bei jeder Auslenkung im indifferenten Gleichgewicht. Hier tritt bereits zutage, daß das Problem der kritischen Drehzahl ein *Eigenwertproblem* ist. Das Problem des dynamischen Gleichgewichts läßt im allgemeinen nur die triviale Lösung zu, d. h. die Welle erfährt überhaupt keine Auslenkung. Nur bei einem Wert der Winkelgeschwindigkeit — dem Eigenwert — ist sie beliebiger Auslenkungen fähig.

Man beachte übrigens, welchen Charakter die Bewegung der Welle unter den in diesem Abschnitt gemachten einfachen Voraussetzungen stets hat. Die ausgebogene Welle schlägt wie ein starrer Körper (also ohne wechselnde Deformationen zu erleiden) mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die geometrische Drehachse.

21.3 Laval-Rotor in anisotrop elastischen Lagern

Anisotrope (d.h. nicht in allen Richtungen gleiche) Elastizität ist in der Regel bei der Lagerung der Rotoren gegeben, weshalb hier der Einfluß solcher Anisotropie am einfachen Beispiel des Laval-Rotors untersucht werde. Abb. 21.3.1 stellt den Typus der Lagerung schematisch dar. Es sind k_1 und k_2 die Federkonstanten in den beiden Richtungen x und y . Erfährt also das Lager Verschiebungen x' und y' , so entstehen die rückstellenden Kräfte

$$X' = -k_1x', \quad Y' = -k_2y'. \tag{21.3(1)}$$

Es ist hier der Einfachheit halber angenommen, daß keine Koppelkoeffizienten auftreten, d.h. eine Verschiebung in Richtung x erzeugt nicht auch eine Kraft in y -Richtung und umgekehrt.

Die Scheibe möge wiederum unter der Voraussetzung sehr kleiner Exzentrizität behandelt werden, so daß hinreichend genau eine gleichförmige Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω angenommen werden darf und eine Formulierung des Drallsatzes sich erübrigt. Für den Winkel φ (Abb. 21.3.2) gilt also $\varphi = \omega t$. Ist k die elastische Konstante der Welle, so sind die beiden Kraftkomponenten der ausgebogenen Welle auf die Scheibe

$$X = -k(x - x' - e \cos \omega t), \quad Y = -k(y - y' - e \sin \omega t), \tag{21.3(2)}$$

wo x und y die Schwerpunktskoordinaten sind. Bei masselos vorausgesetzten Lagern ist

$$X = 2X', \quad Y = 2Y'. \tag{21.3(3)}$$

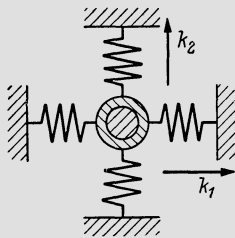


Abb. 21.3.1. Federnd abgestütztes Lager

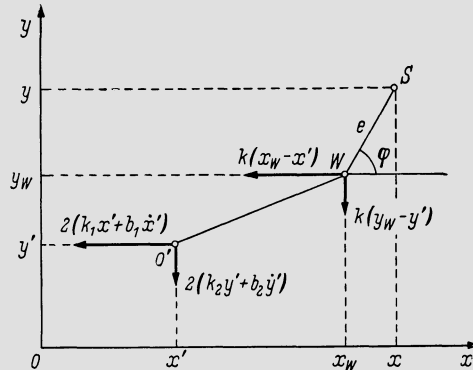


Abb. 21.3.2. Zur Aufstellung der Differentialgleichungen des Laval-Rotors mit federnd abgestützten Lagern

Wenn man für X, X', Y, Y' die obigen Ausdrücke einsetzt und nach x' und y' auflöst, folgt

$$x' = \frac{x - e \cos \omega t}{\frac{2k_1}{k} + 1}, \quad y' = \frac{y - e \sin \omega t}{\frac{2k_2}{k} + 1}. \tag{21.3(4)}$$

Die für den Scheibenschwerpunkt und die x -Richtung formulierte Bewegungsgleichung lautet, wenn man sofort noch eine Dämpfungskraft $-b\dot{x}$ beifügt

$$m\ddot{x} = X - b\dot{x} \tag{21.3(5)}$$

oder mit 21.3(2) auch

$$m\ddot{x} + k(x - x') + b\dot{x} = ke \cos \omega t. \tag{21.3(6)}$$

Wenn man hier noch x' nach der ersten der Gln. 21.3(4) einsetzt und ordnet, erhält man die nachfolgende Gl. 21.3(7), der wir sogleich noch die analoge Gleichung für die y -Rich-

tung beifügen:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} \left[\frac{1}{1 + k/2k_1} \right] x = \frac{k}{m} \left[\frac{1}{1 + k/2k_1} \right] e \cos \omega t, \quad 21.3(7)$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} \left[\frac{1}{1 + k/2k_2} \right] y = \frac{k}{m} \left[\frac{1}{1 + k/2k_2} \right] e \sin \omega t. \quad 21.3(8)$$

Beide Gleichungen sind voneinander unabhängig und unterscheiden sich von den Gln. 21.3(16) und (17) nur durch die Koeffizienten. Dementsprechend werden jetzt die Kreisfrequenzen der beiden Eigenschwingungen

$$\omega_{e1} = \sqrt{\frac{k}{m} \left[\frac{1}{1 + k/2k_1} \right]}, \quad \omega_{e2} = \sqrt{\frac{k}{m} \left[\frac{1}{1 + k/2k_2} \right]}. \quad 21.3(9)$$

Wiederum möge abgesehen werden von den allgemeinen Lösungen der verkürzten Gln. 21.2(7) und (8), die bei Abwesenheit von Erregungskräften exponentiell abklingen. Dann bleiben als stationäre Lösungen übrig

$$x = \frac{e \cos(\omega t - \psi_1)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{e1}} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{b\omega}{m\omega_{e1}^2} \right]^2}}, \quad y = \frac{e \sin(\omega t - \psi_2)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{e2}} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{b\omega}{m\omega_{e2}^2} \right]^2}} \quad 21.3(10)$$

$$\tan \psi_1 = \frac{b}{m\omega_{e1}} \frac{1}{\left(\frac{\omega_{e1}}{\omega} \right) - \left(\frac{\omega}{\omega_{e1}} \right)}, \quad \tan \psi_2 = \frac{b}{m\omega_{e2}} \frac{1}{\left(\frac{\omega_{e2}}{\omega} \right) - \left(\frac{\omega}{\omega_{e2}} \right)}. \quad 21.3(11)$$

Die größten Ausschläge x_{\max} , y_{\max} , die im Resonanzfall erreicht werden, sind

$$x_{\max} = \frac{em\omega_{e1}}{b}, \quad y_{\max} = \frac{em\omega_{e2}}{b}. \quad 21.3(12)$$

Wie aus den Gln. 21.3(9) hervorgeht, bewirkt eine Nachgiebigkeit der Lagerung eine Herabsetzung der kritischen Drehzahl; ist diese Nachgiebigkeit in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen verschieden, so werden zwei kritische Drehzahlen erhalten. — Die angegebene Lösung erlaubt es auch, die Schwerpunktsbewegung zu analysieren. Die beiden aufeinander senkrecht stehenden Schwingungsbewegungen $x(t)$ und $y(t)$ haben hier weder gleiche Amplituden noch um 90° verschobene Phasen. Daher ist die Bewegung keine zirkular polarisierte Schwingung. Es werde angenommen, die Nachgiebigkeit in x -Richtung sei größer als die in y -Richtung, also $\omega_{e1} < \omega_{e2}$, und zwar sei der Unterschied beträchtlich. Dann ergibt sich nach den Gln. 21.3(10) und (11) das in Abb. 21.3.3 dargestellte Verhalten.

Wenn $\omega < \omega_{e1}$ (Fall 1), bewegt sich der Schwerpunkt auf einer Ellipse, die kreisähnlichen Charakter hat, solange man weit unter ω_{e1} bleibt und immer schlanker wird, je mehr man sich ω_{e1} nähert. Der Umlaufsinn stimmt mit dem Drehsinn überein. Wenn $\omega = \omega_{e1}$ (Fall 2), wird die Ellipse außerordentlich langgezogen. Bei weiterer Steigerung der Drehzahl wird sie noch schlanker und degeneriert wenig oberhalb ω_{e1} , nämlich dort, wo $\psi_1 - \psi_2 = \pi/2$, zu einer Geraden (Fall 3). Bei weiterer Drehzahlsteigerung wird $\psi_1 - \psi_2 > \pi/2$. Hier erscheint die Ellipse wieder, wird nun aber entgegen dem Drehsinn des Rotors durchlaufen (Fall 4). — Weiter ändert die Ellipse ihre Orientierung, wird, wenn ω_{e1} und ω_{e2} hinreichend weit auseinanderliegen (wobei sich $\psi_1 - \psi_2$ vorübergehend dem Wert π nähert) sehr kreisähnlich, um dann wieder schlanker zu werden, weil $\psi_1 - \psi_2$ wieder abnimmt. Schließlich wird sie knapp unterhalb $\omega = \omega_{e2}$ wieder zur Geraden, wo $\psi_1 - \psi_2 = \pi/2$ (Fall 5). In $\omega = \omega_{e2}$ ist die Bahn wieder eine schlanke Ellipse, die im Drehsinn des Rotors durchlaufen wird (Fall 6). Steigert man ω immer weiter über ω_{e2} hinaus, so wird die Ellipse immer kreisähnlicher und schrumpft mehr und mehr zusammen (Fall 7).

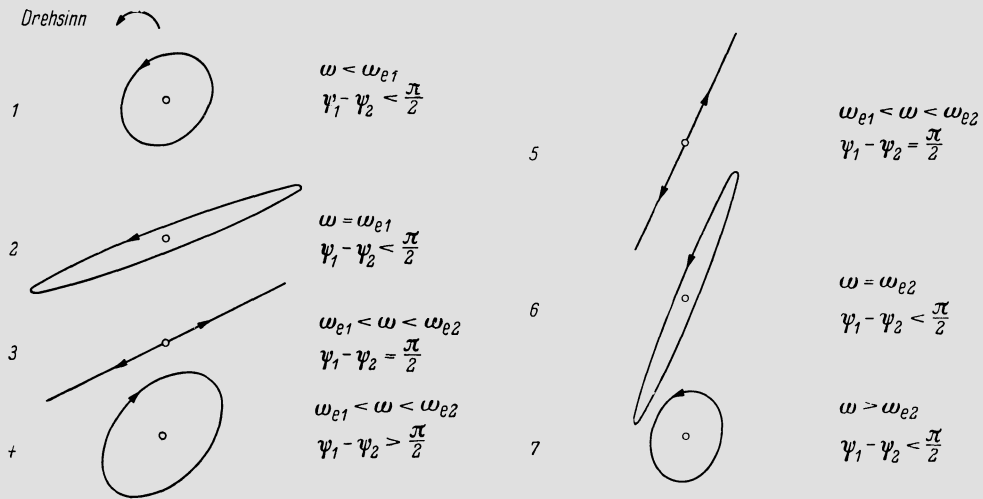


Abb. 21.3.3. Bahnkurven des Schwerpunktes bei elastischer Lagerung mit verschiedener Nachgiebigkeit in horizontaler und vertikaler Richtung. Zwischen Laufzuständen 3 und 5 läuft Schwerpunktsbewegung im Gegenlauf

Liegen ω_{e1} und ω_{e2} weniger weit auseinander als hier vorausgesetzt, so wird das Gebiet der gegenläufigen Pärzessionsbewegung des Schwerpunktes schmaler und verschwindet schließlich ganz, d.h. Fall 3 wird dann mit Fall 5 identisch. Rücken ω_{e1} und ω_{e2} so nahe zusammen, daß im ganzen Gebiet $\psi_1 - \psi_2 < \pi/2$, dann geht zwischen den beiden kritischen Winkelgeschwindigkeiten die Ellipse des Falles 2 unter stetiger Verformung in die des Falles 6 über. Die Ellipsen sind dann kreisähnlicher und werden im Grenzfall $\omega_{e1} = \omega_{e2}$ zu identischen Kreisen. — Es ist hier der symmetrische Aufbau des Laval-Rotors vorausgesetzt worden. Eine Verallgemeinerung, bei der diese Symmetriebedingung fallengelassen wurde, gibt Pfützner [7]. Grundsätzlich werden die gleichen Effekte erhalten wie im symmetrischen Fall.

21.4 Laval-Rotor mit nicht drehsymmetrischer Welle

Ein anderer Typus von Anisotropie liegt vor beim *nicht drehsymmetrischen Läufer*. Eine geringfügige Störung der Drehsymmetrie kann schon gegeben sein durch Keilnuten in einer Welle. Insbesondere sind aber bei den Rotoren der elektrischen Generatoren die Trägheitsmomente bezüglich der Verbindungslinie der Pole und bezüglich der dazu senkrecht stehenden Hauptträgheitsachse verschieden. — Der Einfachheit halber setzen wir nachfolgend wiederum den Laval-Rotor ohne Dämpfung in starren Lagern voraus.

Es ist zweckmäßig, diese Untersuchung durchzuführen in einem Koordinatensystem, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω des Rotors umläuft und dessen Koordinatenachsen ξ, η Hauptträgheitsachsen sind, denen die Trägheitsmomente J_{\max} und J_{\min} entsprechen (vgl. Abb. 21.4.1). Ist der Durchstoßpunkt W der Wellenachse um ξ_W, η_W aus der neutralen Lage 0 ausgelenkt, so erfährt die Scheibe elastische Rückstellkräfte

$$F_\xi = -k_1 \xi_W, \quad F_\eta = -k_2 \eta_W, \tag{21.4(1)}$$

wobei k_1 und k_2 die elastischen Konstanten entsprechend den beiden Hauptträgheitsmomenten sind, und zwar sei $k_1 < k_2$. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m\ddot{\xi} = -k_1 \xi_W - mg \sin \omega t + m\omega^2 \xi + 2m\omega \dot{\eta}, \tag{21.4(2)}$$

$$m\ddot{\eta} = -k_2 \eta_W - mg \cos \omega t + m\omega^2 \eta + 2m\omega \dot{\xi}. \tag{21.4(3)}$$

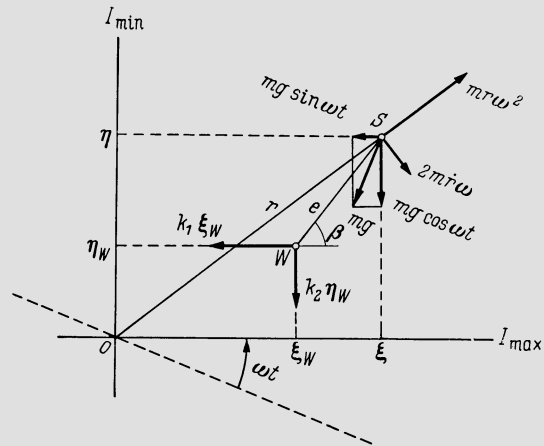


Abb. 21.4.1. Gleichgewichtsbetrachtung für nicht drehsymmetrische Welle

In diesen Gleichungen ist jeweils das dritte und vierte Glied rechts die betreffende Komponente der Zentrifugal- und Coriolis-Kraft, die im rotierenden System eingeführt werden müssen. Die Glieder mit dem Faktor mg stellen den Einfluß der Schwere dar, der hier nicht übergangen werden darf. Die Formulierung des Drallsatzes kann aus gleichen Gründen wie früher entfallen. Es darf vielmehr konstante Winkelgeschwindigkeit vorausgesetzt werden, womit der Winkel β (Abb. 21.4.1) unveränderlich bleibt. Da nun

$$\xi_W = \xi - e \cos \beta, \quad \eta_W = \eta - e \sin \beta, \quad 21.4(4)$$

lassen sich die Bewegungsgleichungen 21.4(2) und (3) in die Form

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{k_1}{m} - \omega^2 \right) \xi - 2\omega\dot{\eta} = \frac{k_1}{m} e \cos \beta - g \sin \omega t \quad 21.4(5)$$

$$\ddot{\eta} + \left(\frac{k_2}{m} - \omega^2 \right) \eta - 2\omega\dot{\xi} = \frac{k_2}{m} e \sin \beta - g \cos \omega t \quad 21.4(6)$$

bringen. Die Partikulärlösung dieses Gleichungssystems lautet folgendermaßen. Wir setzen

$$\omega_{e1} = \sqrt{k_1/m}, \quad \omega_{e2} = \sqrt{k_2/m}. \quad 21.4(7)$$

Dann ist

$$\xi = \frac{\omega_{e1}^2}{\omega_{e1}^2 - \omega^2} e \cos \beta + \frac{4\omega^2 - \omega_{e2}^2}{\omega_{e1}^2 \omega_{e2}^2 - 2(\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2) \omega^2} g \sin \omega t, \quad 21.4(8)$$

$$\eta = \frac{\omega_{e2}^2}{\omega_{e2}^2 - \omega^2} e \sin \beta + \frac{4\omega^2 - \omega_{e1}^2}{\omega_{e1}^2 \omega_{e2}^2 - 2(\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2) \omega^2} g \cos \omega t. \quad 21.4(9)$$

Insbesondere ergibt sich damit

$$\xi = \infty \text{ wenn } \omega = \omega_{e1}, \quad \eta = \infty \text{ wenn } \omega = \omega_{e2}. \quad 21.4(10)$$

Dieses Ergebnis ist plausibel, denn es besagt, daß die kritische Drehzahl sich aufspaltet in zwei Werte, die den elastischen Konstanten k_1 und k_2 entsprechen. Außerdem können aber die oszillierenden Glieder in 21.4(8) und (9), die mit der Schwere zusammenhängen, unendliche Amplituden annehmen, denn ihr Nenner verschwindet in $\omega = \omega_g$, wo

$$\omega_g = \frac{\omega_{e1}^2 \omega_{e2}^2}{2(\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2)}. \quad 21.4(11)$$

Wenn ω_{e1} und ω_{e2} nur sehr wenig verschieden sind, so daß bei der Setzung

$$\omega_{e1} = \bar{\omega} - \delta, \quad \omega_{e2} = \bar{\omega} + \delta \quad 21.4(12)$$

δ klein ist im Vergleich zum Mittelwert

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_{e1} + \omega_{e2}}{2}, \quad 21.4(13)$$

geht Gl. 21.4(11) mit großer Genauigkeit in

$$\omega_g = \frac{\bar{\omega}}{2} \quad 21.4(14)$$

über. Praktisch liegt stets der Fall vor, wo δ klein ist gegen $\bar{\omega}$, so daß auch 21.4(14) gilt. Die durch die Schwere bedingte kritische Drehzahl ist also halb so groß wie diejenige, die der mittleren Biegesteifigkeit der Welle entspricht. Dieses Ergebnis kann man sich leicht verständlich machen. Gemäß 21.4(8) und (9) hat die durch die Schwere bedingte Schwingung im rotierenden Koordinatensystem die Frequenz ω . Vom ruhenden Beobachter aus wird daher die Frequenz 2ω . In der Tat nimmt die Welle im Verlaufe der Drehung zweimal eine Lage ein, wo sie in senkrechter Richtung die größte Steifigkeit aufweist und zweimal eine solche, wo die Steifigkeit in senkrechter Richtung ein Minimum wird. Also wird sie unter dem Einfluß der Schwere zwei Schwingungen je Umdrehung ausführen, und wenn sie mit der halben „normalen“ kritischen Drehzahl läuft, tritt folglich Resonanz ein. Die Beobachtung, daß manche Rotoren bei der halben kritischen Drehzahl etwas vergrößerte Schwingungsausschläge zeigen, findet hier ihre Erklärung.

Zur Ergänzung des Bildes müssen wir noch die allgemeine Lösung der verkürzten Differentialgleichungen 21.4(5) und (6) (ohne Störungsfunktionen) betrachten. Man findet sie, indem man mit dem Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \cos(\varrho_1 t + \tau_1) + B \cos(\varrho_2 t + \tau_2), \\ \eta &= C \sin(\varrho_1 t + \tau_1) + D \sin(\varrho_2 t + \tau_2) \end{aligned} \right\} \quad 21.4(15)$$

in die Differentialgleichungen eingeht. Es ergibt sich dann, daß ϱ_1 und ϱ_2 der gemeinsamen Bestimmungsgleichung

$$\varrho^4 = 2 \left(\omega^2 + \frac{\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2}{2} \right) \varrho^2 + (\omega^2 - \omega_{e1}^2) (\omega^2 - \omega_{e2}^2) \quad 21.4(16)$$

genügen müssen. Diese Gleichung hat zwei reelle positive Wurzeln ϱ^2 nur, wenn

$$\left(\omega^2 + \frac{\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2}{2} \right) > (\omega^2 - \omega_{e1}^2) (\omega^2 - \omega_{e2}^2) > 0. \quad 21.4(17)$$

Dies ist erfüllt, wenn entweder $\omega < \omega_{e1}$ oder $\omega > \omega_{e2}$ (es ist $\omega_{e1} < \omega_{e2}$). Somit beschreiben die Gln. 21.4(15) dann Schwingungen mit beliebiger konstanter Amplitude, die aber beim Vorhandensein äußerer Dämpfung verschwinden. Im Gebiet $\omega_{e1} < \omega < \omega_{e2}$ gilt hingegen für das Konstantglied in 21.4(16)

$$(\omega^2 - \omega_{e1}^2) (\omega^2 - \omega_{e2}^2) < 0. \quad 21.4(18)$$

Dann hat Gl. 21.4(16) eine reelle positive und eine reelle negative Wurzel ϱ^2 ; d.h. aber, daß eines der ϱ imaginär ist. In 21.4(15) erscheinen damit Hyperbelfunktionen, die mit t unbeschränkt anwachsen, womit Instabilität gegeben ist. Im Gebiet $\omega_{e1} < \omega < \omega_{e2}$ stellen zwar die Lösungen Gln. 21.4(8) und (9) ein dynamisches Gleichgewicht dar, doch ist es instabil. Deshalb ist theoretisch der ganze Bereich $\omega_{e1} < \omega < \omega_{e2}$ als kritisch zu betrachten. In Wirklichkeit besorgt die Dämpfung in den Ölfilmen der Lager die Begrenzung der Ausschläge wie dies auch für die kritischen Drehzahlen gilt. — Das Problem ist hier für den Laval-Rotor behandelt. Grundsätzlich das gleiche erhält z.B. *Kellenberger* [8] für den Fall der gleichmäßig mit Masse belegten Welle konstanten Querschnittes.

21.5 Mechanismen der Selbsterregung

a) Allgemeines

Die theoretischen Untersuchungen der Abschn. 21.2–4 gehören alle zum klassischen Typ, bei dem die Unwucht, und beim nicht drehsymmetrischen Läufer die Schwerkraft als einzige erregende Kräfte in Betracht gezogen werden. Daneben können aber Selbsterregungsmechanismen wirksam werden, und zwar ausgehend von der inneren Dämpfung des Rotors, vom Ölfilm der Lager oder von den Spaltströmungen in Schaufelungen und Labyrinthdichtungen. Selbsterregte Schwingungen sind dadurch gekennzeichnet, daß der Rotor mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und mit der Kreisfrequenz ω_e einer seiner Eigenschwingungen (meist mit der tiefsten) schwingt. Schwingungsfrequenz und Drehfrequenz sind also verschieden. — Die Ausführungen dieses Abschnittes haben nur das Ziel, die Selbsterregungsmechanismen anschaulich verständlich zu machen. Sie stellen keine exakte Theorie dar. Deshalb wird einheitlich die vereinfachende Annahme gemacht, die Rotorschwingung sei zirkular polarisiert. Der Rotation des Läufers überlagert sich also eine kreisförmige Präzessionsbewegung seines Schwerpunktes mit ω_e .

b) Innere Dämpfung

Abb. 21.5.1 zeigt oben für drei verschiedene Fälle einen Schnitt durch die ausgebogene Welle in der Scheibenmittelebene (es ist der Laval-Rotor vorausgesetzt). Unten sind die zugehörigen Kräfte dreiecke dargestellt. Das Koordinatensystem ξ, η rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω des Rotors. θ ist die Projektion der Lagerzapfenmittelpunkte auf die Bildebene. Der Drehsinn ist der Gegenuhrzeigersinn.

Im Falle a läuft der Rotor *unterkritisch*, also $\omega < \omega_e$. Sein Schwerpunkt S präzessiert mit der Eigenfrequenz ω_e auf einem Kreise mit Radius r , und zwar in gleichem Umlaufsinn wie die Rotordrehung. Es liegt also der sog. *Gleichlauf* vor. Gegenüber dem Koordinatensystem ξ, η präzessiert die Welle also mit einer Kreisfrequenz $\omega_e - \omega$, und zwar

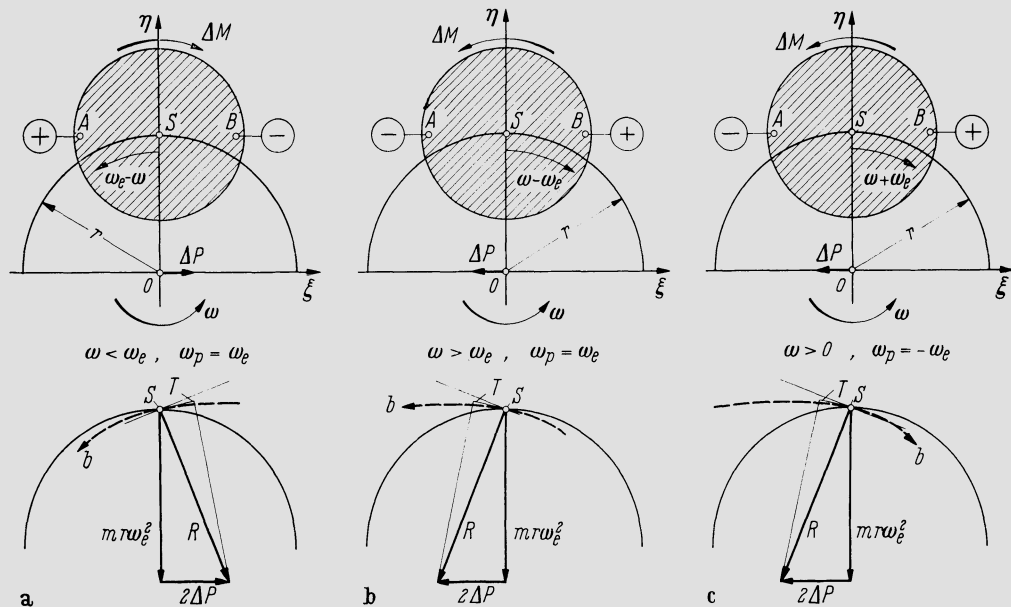


Abb. 21.5.1. Innere Dämpfungskräfte und damit entstehende Bewegung des Wellenschwerpunktes S bei einer durch äußere Störung einmal eingeleiteten Präzessionsbewegung der Welle mit der Kreisfrequenz ω_e ihrer Eigenschwingung. a) Welle läuft unterkritisch und präzessiert im Gleichlauf; b) Welle läuft überkritisch und präzessiert im Gleichlauf; c) Welle präzessiert im Gegenlauf

im Gegenuhrzeigersinn. In diesem Koordinatensystem ist die zeitliche Deformation erkennbar, welche die Welle „erlebt“. In der gezeichneten Lage wird die Faser A mit zunehmender Zeit gestreckt, die Faser B gestaucht. Infolge der Werkstoffhysteresis entsteht nun in der Faser A , wie in allen Fasern der Zone, die der Streckung unterworfen ist, eine kleine zusätzliche Zugspannung senkrecht zur Bildebene. Umgekehrt ruft die Hysteresis in der Faser B und der ganzen Zone, die gerade gestaucht wird, eine Druckspannung hervor. Dieser nicht elastisch bedingten Spannungsverteilung entspricht ein Biegemoment M_b . Soll dieses aber bestehen können, so muß an den beiden Lagerzapfen je eine zusätzliche Lagerreaktion ΔP in der in Abb. 21.5.1a dargestellten Richtung angreifen, derart, daß $\Delta Pl/2 = M_b$ mit l als Lagerabstand. Allerdings entsteht auf diese Weise bezüglich des Schwerpunktes S auch ein Drehmoment $2r \Delta P$ im Gegenuhrzeigersinn. Soll die Scheibe keine Winkelbeschleunigung erfahren, so muß am System ein Gegenmoment ΔM gleichen Betrages im Uhrzeigersinn angreifen. Dies ist ein Unterschied der Drehmomente an der Scheibe und an der Wellenkupplung, der sich von selbst einstellt, wenn auf konstante Drehzahl eingeregelt wird. — Die beiden Lagerkräfte ΔP und das Moment ΔM haben zusammen den gleichen Effekt, wie wenn die Kraft $2\Delta P$ im Schwerpunkt angreifen würde, der zudem noch der elastischen Rückstellkraft ausgesetzt ist, die $mr\omega_e^2$ beträgt. So entsteht das unten angegebene Kräftedreieck mit der Resultierenden R . Es entsteht offensichtlich eine Kraftkomponente, die (vom ruhenden Beobachter aus betrachtet) der Präzessionsbewegung entgegensteht. Deshalb wird eine einmal eingeleitete Präzessionsbewegung allmählich wieder verschwinden. Die tatsächliche Schwerpunktbahn wird der gestrichelten Linie b entsprechen, d. h. die Bewegung ist *stabil*.

Im *Falle b* ist überkritischer Lauf vorausgesetzt, also $\omega > \omega_e$. Wiederum erfolge die Präzessionsbewegung im *Gleichlauf*. Da nun aber das Koordinatensystem mit einer Winkelgeschwindigkeit rotiert, die über ω_e liegt, bleibt die Präzessionsbewegung hinter dem Koordinatensystem zurück. S bewegt sich also nun bezüglich des Koordinatensystems im Uhrzeigersinn mit $\omega - \omega_e$. Somit wird jetzt die Faser A gestaucht, die Faser B gestreckt. Die Wiederholung der gleichen Überlegung führt auf eine Kraft ΔP und ein Moment ΔM von entgegengesetztem Vorzeichen gegenüber dem vorhergehenden Fall und somit auch auf das dargestellte Kräftedreieck, das jetzt — vom ruhenden Beobachter aus gesehen — eine Komponente in Richtung der Präzessionsbewegung ergibt. Die einmal eingeleitete Bewegung wird also weiter verstärkt und es entsteht eine Bahnkurve b wie dargestellt. *Der überkritische Lauf wird also infolge der inneren Dämpfung instabil*.

Das Paradoxon, daß die innere Dämpfung, die doch stets mit Energiedissipation verbunden ist, eine Störbewegung weiter anfachen kann, erklärt sich wie folgt. Das Drehmoment, das der Rotor durch die Schaufelung erfährt, ist um ΔM größer als dasjenige, das der Rotor an den Nutzleistungsempfänger abgibt, und zwar weist ΔM in die Richtung der Raddrehung. Der Leistungsbetrag $\omega \Delta M$ deckt die Energiedissipation und liefert die zusätzliche Energie für die weitere Anfachung der Störbewegung.

Fall c (Abb. 21.5.1) stellt einen Laufzustand dar, bei welchem der Rotor im *Gegenlauf* (im angegebenen Beispiel im Uhrzeigersinn) präzessiert. Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ist also $\omega_p = -\omega_e$, während der Rotor mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit ω läuft. Im rotierenden Koordinatensystem ξ, η hat die Präzession die Winkelgeschwindigkeit $\omega + \omega_e$ im Uhrzeigersinn, unabhängig von der Größe von ω . Also sind ΔP und ΔM gleich gerichtet wie im *Falle b*, und auch das Kräftedreieck hat die gleiche Gestalt wie dort. Da die Präzession im ruhenden Koordinatensystem aber die umgekehrte Richtung hat wie unter *b* (Uhrzeigersinn), wird die Bewegung gehemmt, klingt also ab, wie die gestrichelte Bahnkurve b andeutet. Der *Gegenlauf* wird bei beliebiger Winkelgeschwindigkeit ω abgedämpft, führt also niemals zur Instabilität.

Das Gesamtergebnis ist also, daß oberhalb der kritischen Drehzahl unter dem Einfluß der inneren Dämpfung *allein* Instabilität besteht, die aus dem *Gleichlauf* hervorgeht. Soll doch Stabilität erreicht werden, so muß diese durch *äußere Dämpfung* — vor allem durch den Ölfilm der Lager — herbeigeführt werden. Beim einfachen schwingenden Stab, der

mit der Kreisfrequenz ω_e schwingt, ist bekanntlich der Zusammenhang zwischen der Dämpfungskonstanten b und dem logarithmischen Dekrement δ gegeben durch

$$\delta = \pi b / m \omega_e. \quad 21.5(1)$$

Beim Rotor ist die Kreisfrequenz der Deformation, die ja für die innere Dämpfung maßgebend ist, $\omega_e - \omega$. Dies ist also in obiger Formel anstelle von ω_e einzusetzen. Wenn man noch nach b auflöst, erhält man

$$b = \frac{m(\omega_e - \omega) \delta}{\pi}. \quad 21.5(2)$$

Kennt man also das δ des Werkstoffes, so kann man nach dieser Formel die Dämpfungskonstante b berechnen und rechnen, als ob die Dämpfungskraft im Schwerpunkt angreifen würde, denn bei $\omega > \omega_e$ wird b negativ, d. h. man erhält die labilisierende Wirkung richtig. Eine sehr umfassende Analyse des Einflusses der inneren Dämpfung unter verschiedenen Voraussetzungen gibt *Tondl* [9].

c) Selbsterregung durch den Ölfilm

Der Ölfilm der Gleitlager, der im ordnungsgemäßen Laufzustand die notwendige äußere Dämpfung schafft, kann seinerseits Ursache der Instabilität und damit einer selbst-erregten Schwingung sein, eine Erscheinung, für die sich die englische Bezeichnung *oil whip* eingeführt hat. Folgende Überlegungen mögen dies qualitativ verständlich machen.

Abb. 21.5.2a stellt einen Lagerzapfen in einer *zylindrischen Lagerschale* dar. Durch eine äußere Störung werde der Rotor in Schwingung versetzt, und es wird vereinfachend angenommen, die Schwingung sei zirkular polarisiert. Dann präzessiert auch der Lagerzapfen mit der Kreisfrequenz ω_e der Eigenschwingung auf einem Kreis mit dem Radius δr , und zwar möge die Bewegung im Gleichlauf stattfinden, also im gleichen Drehsinn wie die Winkelgeschwindigkeit ω des Läufers (in der Abbildung im Gegenuhrzeigersinn). — Zur Untersuchung des Vorganges ist es zweckmäßig, ein Koordinatensystem einzuführen, dessen Ursprung im Zapfenmittelpunkt C liegt und das mit der Winkelgeschwindigkeit ω_e rotiert. Gegenüber diesem Koordinatensystem rotiert der Zapfen mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega - \omega_e$, die Schale aber mit $-\omega_e$, also im entgegengesetzten Drehsinn (Uhrzeigersinn).

Nun sei $\omega < 2\omega_e$. Dann ist $\omega - \omega_e < \omega_e$, d. h. der Zapfen rotiert in unserem Koordinatensystem im Gegenuhrzeigersinn langsamer als die Lagerschale im Uhrzeigersinn rotiert. Damit fördert die Lagerschale von rechts mehr Öl zur Engstelle s als der Zapfen

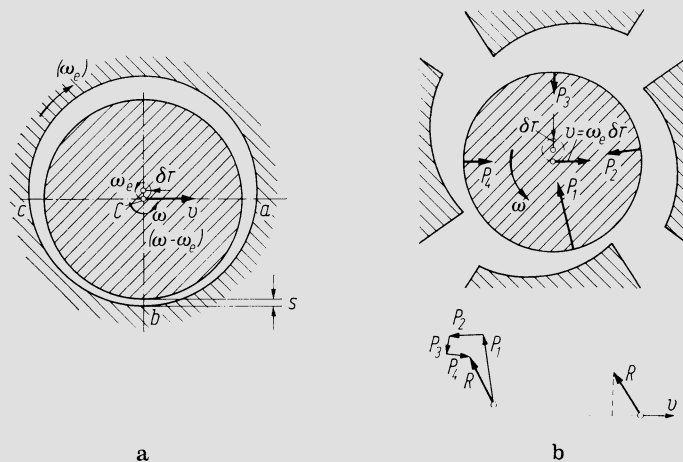


Abb. 21.5.2. Zur Veranschaulichung der Ölfilmstabilität von Gleitlagern. a) Lager mit zylindrischer Schale; b) Vierflächengleitlager, Kräfte an einem Zapfen der mit $\omega > \omega_e$ rotiert und auf kreisförmiger Bahn mit der Eigenfrequenz ω_e präzessiert

wegführt. In s entsteht ein Durchfluß von rechts nach links, und dementsprechend baut sich längs ab ein höherer Öldruck auf als längs bc . In einem ruhenden Koordinatensystem präzessiert der Zapfenmittelpunkt mit der Geschwindigkeit $v = \omega_e \delta r$. Da auf der Vorderseite ab der Druck höher ist als auf der Rückseite bc , entsteht eine resultierende Kraft, die der Geschwindigkeit v entgegensteht und somit die einmal eingeleitete Bewegung dämpft. Bei $\omega < 2\omega_e$ ist somit der Lauf *stabil*.

Ist $\omega > 2\omega_e$, dann folgt $\omega - \omega_e > \omega_e$, d.h. der Zapfen rotiert im bewegten Koordinatensystem schneller als die Lagerschale. Er fördert somit längs cb mehr Öl nach dem Spalt s als die Lagerschale wegfordert. Es entsteht also in s ein Durchfluß von links nach rechts, und dementsprechend baut sich längs bc ein höherer Druck auf als längs ab . Der Zapfen erfährt nun eine Kraft, die in die gleiche Richtung weist wie v , wodurch die einmal eingeleitete Präzessionsbewegung weiter angefacht wird. Bei $\omega > 2\omega_e$ ist somit der Lauf *instabil*.

Man kann diese Stabilitätsgrenze, die bei zylindrischer Lagerschale mindestens in erster Näherung bei $\omega = 2\omega_e$ liegt, sehr stark nach oben verschieben durch sog. *Mehrflächengleitlager* (MFG-Lager). Abb. 21.5.2b zeigt eine solche Anordnung mit vier Flächen, die so gestaltet sind, daß vier Ölkeile entstehen. Hier sind allerdings die Verhältnisse so verwickelt, daß nur noch eine ganz qualitative Überlegung möglich ist. Wieder werde vereinfachend angenommen, dem Läufer werde eine zirkular polarisierte Eigenschwingung erteilt, so daß der Zapfenmittelpunkt eine kreisförmige Präzessionsbewegung mit Radius δr und der Kreisfrequenz ω_e ausführe. In den Spalträumen 1–4 treten dann je zwei Effekte auf. Einerseits schleppt der rotierende Zapfen an seiner Oberfläche Öl in den Spaltraum hinein und zwar so, daß es gegen die Engstelle zu gefördert wird; dies ist der *Schlepppeffekt*. Andererseits verdrängt der Zapfen zufolge seiner Präzessionsbewegung Öl, der sog. *Verdrängungseffekt*.

Im Spaltraum 1 addieren sich Schlepppeffekt und Verdrängungseffekt, und da zudem der Austrittsspalt eng ist, entsteht eine große Kraft P_1 . Auch im Spaltraum 2 addieren sich beide Effekte (der Verdrängungseffekt ist sogar sehr groß, weil der Zapfen sich nach rechts bewegt), doch ist der Austrittsspalt so groß, daß die entstehende Kraft P_2 nicht allzu groß wird. Im Spaltraum 3 ist der Verdrängungseffekt negativ, d.h. er subtrahiert sich vom Schlepppeffekt, und da zudem der Austrittsspalt groß ist, entsteht nur eine sehr kleine Kraft P_3 . Im Spaltraum 4 ist der Verdrängungseffekt stark negativ (Zapfen entfernt sich von der Lagerschale), der Austrittsspalt aber eng, so daß trotzdem eine Kraft P_4 von mittlerer Größe zustandekommt. Wenn man nun das Kräftepolygon aus $P_1 \dots P_4$ bildet, entsteht eine Resultierende R , die gemäß Abb. 21.5.2b eine der Präzessionsgeschwindigkeit v entgegengesetzte Komponente besitzt und folglich die Präzessionsbewegung abdämpft. Es ist also im Gleichlauf *Stabilität* gegeben, und im Gegenlauf wäre dies übrigens in noch höherem Maße der Fall. — Man kann sich aber leicht vergegenwärtigen, daß auch bei diesem Lager schließlich eine Stabilitätsgrenze erreicht wird. Wird nämlich ω so hoch, daß praktisch nur noch der Schlepppeffekt wirksam ist, dann wird P_4 des kleinen Austrittsspaltens wegen groß, und das Kräftepolygon liefert eine Resultierende mit einer Komponente in Richtung v , womit Labilität entsteht.

Die Stabilitätsgrenze des MFG-Lagers liegt praktisch sehr viel höher als die des zylindrischen Lagers. Besonders günstig ist dabei asymmetrische Anordnung der Gleitflächen. Das häufig verwendete Lager mit „Zitronenspiel“ liegt zwischen dem zylindrischen und dem MFG-Lager. Günstigste Eigenschaften werden erreicht mit MFG-Lagern, deren tragende Flächen frei einstellbar (kipubar) gelagert sind.

d) Spalterregung

Ein weiterer Erregungsmechanismus entsteht durch die Spaltströmungen in Stufen und auch allgemein in Labyrinthdichtungen. Abb. 21.5.3 dient der Veranschaulichung dieser Effekte, oben für die Turbine, unten für den Verdichter. Wieder werde verein-

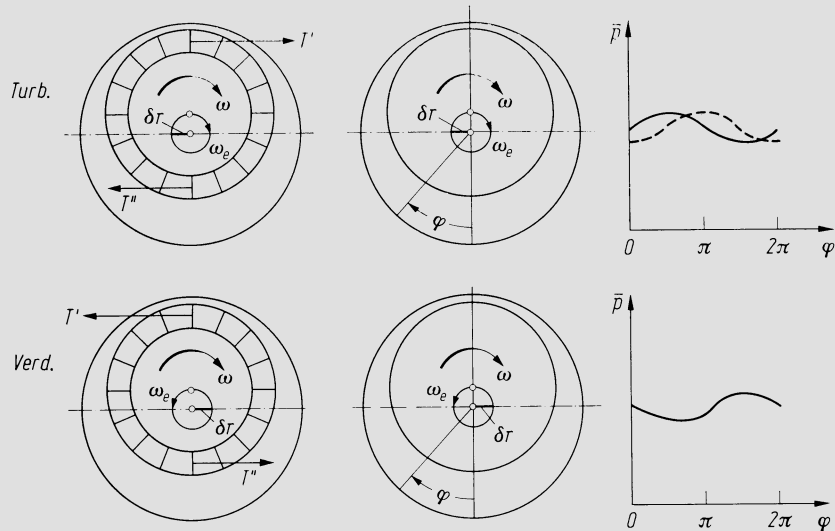


Abb. 21.5.3. Zur Veranschaulichung der Spalterregung bei Turbinen und Verdichtern. Links: Spalterregung durch ungleichmäßige Tangentialkräfte an Schaufelkränzen; rechts: Spalterregung durch Druckverteilungen in Labyrinthdichtungen

fachend angenommen, daß der Läufer durch eine äußere Störung in eine zirkular polarisierte Schwingung versetzt wird. Seiner Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω überlagert sich also eine Präzessionsbewegung mit ω_e auf einem Kreis mit Radius δr . In der oben links gezeichneten Lage des Turbinenrotors ist das radiale Schaufelspiel oben klein und unten groß. Deshalb erfährt wegen der unterschiedlichen Spaltverluste die Schaufel oben eine Tangentialkraft T' , die größer ist als die entsprechende Tangentialkraft T'' unten. Die Summation aller Schaufelkräfte ergibt somit eine von links nach rechts weisende Resultierende. Erfolgt die Präzessionsbewegung wie angedeutet im Gleichlauf, so wird sie durch diese Kraft weiter angefacht, womit die selbsterregte Schwingung entsteht.

Aber auch bei Labyrinthdichtungen ohne Schaufeln kann ein Erregungseffekt entstehen. Im Bild oben rechts ist eine augenblickliche Lage der Welle innerhalb des Labyrinthgehäuses dargestellt. Wenn nun das Fluid im Spalt außer der axialen Durchtrittsgeschwindigkeit auch eine Tangentialgeschwindigkeit aufweist (das wird praktisch stets in mehr oder weniger hohem Maße der Fall sein) entsteht bei Gleichlauf eine Druckverteilung gemäß der ausgezogenen Kurve im Diagramm rechts. Dort ist über dem Winkel φ der Mittelwert \bar{p} des Druckes über der axialen Tiefe aufgetragen. Ohne tangentialen Geschwindigkeitskomponente ergibt sich eine Verteilung gemäß der gestrichelten Kurve. — Die Entstehung dieser Druckverteilungen ist anschaulich nicht ohne weiteres plausibel. Sie ergibt sich aus einer komplizierteren Untersuchung, vgl. etwa *Hochreuther* [10] und *Urlichs* [14] und wird auch experimentell gefunden. Ihre Bestimmung gelingt allerdings heute erst in grober Näherung. — Aus der Druckverteilung folgt nun, daß eine nach rechts gerichtete resultierende Kraft entsteht, welche die einmal eingeleitete Schwingung weiter anfacht.

Unten in Abb. 21.5.3 sind die Verhältnisse im Verdichter dargestellt, wiederum links der Schaufelkranz, rechts die Labyrinthdichtung. Die Bedingungen sind analog denen in der Turbine, nur ist es hier der *Gegenlauf* (Präzessionsbewegung in dem der Rotordrehung entgegengesetzten Drehsinn), der durch die auftretenden Kräfte weiter angefacht wird.

Man beachte, daß die Spalterregung an sich bei jeder Winkelgeschwindigkeit möglich ist, nicht nur im überkritischen Laufzustand. Die Spalterregung ist in neuerer Zeit ins Zentrum des Interesses gerückt, weil sie bei der hohen Leistungskonzentration moderner Maschinen besonders stark in Erscheinung tritt.

e) Künstliche Dämpfung

Sowohl die Labilisierung durch Spalterregung als auch diejenige durch innere Dämpfung müssen durch äußere Dämpfung ausgeglichen werden. Diese hat normalerweise ihren Sitz im Ölfilm der Lager. Der Arbeitsbereich der Lager muß also hinreichend Distanz halten von der Stabilitätsgrenze der Lager selbst, damit genügend Dämpfungsreserve besteht. Man zieht aber neuerdings auch in Erwägung, künstlich äußere Dämpfung zu schaffen durch eine dämpfende Bettung des Lagers. Diese Maßnahme war schon immer üblich bei Wälzlagern, weil dort der Ölfilm fehlt. Verschiedene Wege sind hier möglich. Bei der *Quetschöldämpfung* werden Ölpolster vorgesehen, die bei schwingender Lagerbewegung verdrängt werden müssen und so Energie dissipieren. Beim *Blechpaketdämpfer* wird der Lagerkörper mit Paketen von Blechen umgeben, zwischen die Ölfilme einsickern und so für Dämpfung sorgen. An die Stelle von Blechpaketen können auch *Drahtkissen* treten. Eine weitete Möglichkeit besteht darin, den Lagerkörper in *Kunststoff* hoher Hysterese zu betten.

Ein Problem bei allen diesen Lösungen besteht darin, die Dämpfung richtig zu bemessen, denn es läuft nicht etwa darauf hinaus, einfach eine möglichst hohe Dämpfungskonstante zu erreichen. Das läßt sich leicht aufzeigen durch eine Betrachtung an dem einfachen System aus Feder (Federkonstante k) und Dämpfungsglied (Dämpfung b), das in Abb. 21.5.4 dargestellt ist. Das System wird der periodischen Kraft P unterworfen. Sein Verhalten wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$kx + b\dot{x} = P_0 \sin \omega t. \quad 21.5(3)$$

Ihre periodische Partikulärlösung wird gewonnen durch den Ansatz

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad \dot{x} = \omega(A \cos \omega t - B \sin \omega t). \quad 21.5(4)$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in 21.5(3) und Identifizieren der Koeffizienten von \sin und \cos führt auf

$$A = \frac{P_0 k^2}{k^2 + (b\omega)^2}, \quad B = -\frac{P_0 b\omega}{k^2 + (b\omega)^2}. \quad 21.5(4')$$

Die von der Kraft P geleistete Arbeit ist gegeben durch

$$dW = P dx = P\dot{x} dt = P_0 \omega (A \cos \omega t - B \sin \omega t) \sin \omega t dt,$$

also für einen vollen Zyklus

$$W = P_0 \omega \int_0^{2\pi/\omega} (A \cos \omega t - B \sin \omega t) \sin \omega t dt = -\pi B P_0, \quad 21.5(5)$$

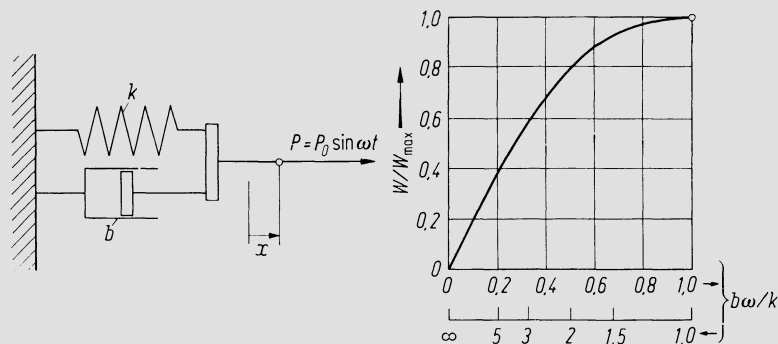


Abb. 21.5.4. Links: Modell aus Feder und Dämpfungsglied zur Beschreibung des Mechanismus der künstlichen Dämpfung; rechts: relative Dissipationsarbeit W/W_{\max} in Funktion der Größe $b\omega/k$

somit auch

$$W = \frac{\pi P_0^2 (b\omega)}{k^2 + (b\omega)^2}. \quad 21.5(6)$$

W ist offenbar gerade die pro Zyklus dissipierte Arbeit, die möglichst groß sein soll. Um optimale Verhältnisse aufzufinden, hat man bei festem P_0 und k nach $b\omega$ abzuleiten und die Ableitung Null zu setzen. So findet man

$$b\omega = k. \quad 21.5(7)$$

Diese Gleichung liefert das b , das bei gegebenem k beste Dämpfung erreicht, wo also $W = W_{\max}$. In Abb. 21.5.4 ist noch W/W_{\max} in Funktion von $b\omega/k$ dargestellt. Es zeigt sich, daß bei nicht optimalem b noch in weitem Bereich ein günstiger Dämpfungseffekt erreicht wird. — Unter komplizierten Bedingungen (Koppeleffekte!) gilt diese einfache Relation zwar nicht mehr, doch gewinnt man einen Anhaltspunkt über günstige Größenordnungen und erkennt, daß es sich in jedem Falle um ein Problem der gegenseitigen Abstimmung der Charakteristika handelt.

Es ist beachtlich, daß schon bei der ersten Maschine, die überhaupt überkritisch lief, der Laval-Turbine, künstliche Dämpfung vorgesehen war. Abb. 21.5.5 zeigt die Lagerkonstruktion. Zufolge ihrer extremen Länge muß die Lagerschale den Schlagbewegungen der Welle folgen. Dabei wird in ihrer kugelförmigen Zentrierung Energie dissipiert. Diese Dämpfung kann durch geeignete Bemessung der Feder, die dem Ring rechts an die Kugel drückt, zweckmäßig abgestimmt werden. Offensichtlich wollte de Laval so den gefahrlosen Durchgang durch die kritische Drehzahl sichern. Zugleich eliminierte er damit die ganzen Stabilitätsprobleme, die damals noch nicht bekannt waren.

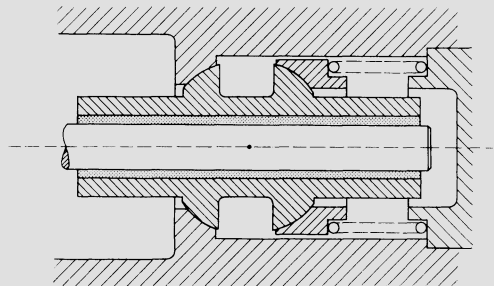


Abb. 21.5.5. Lageranordnung mit künstlicher Dämpfung bei der Laval-Turbine

21.6 Laval-Rotor bei beliebiger Lagerung und Spalterregung, Stabilitätsuntersuchung

In diesem Abschnitt werden die Mechanismen, die zur Selbsterregung führen können mit in die Theorie des Laval-Rotors einbezogen. Das ist mehrfach durchgeführt worden, vgl. etwa [11, 12]. Nachfolgend halten wir uns an die Ausführungen von *Thomas* [13], der die Theorie auf eine mathematisch besonders einfache Form bringen konnte. Ausgangspunkt ist wieder die Disposition nach Abb. 21.3.2, doch ist der Zusammenhang zwischen der Auslenkung des Lagerzapfens und der auf den Zapfen einwirkenden Kraft durch ein allgemeineres Gesetz gegeben, das durch die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{bmatrix} \quad 21.6(1)$$

wiedergegeben wird, die an die Stelle von 21.3(1) tritt. Charakteristisch für das Verhalten des Lagers ist also das Auftreten von Koppelgliedern k_{12} und k_{21} im Gesetz der Nachgiebigkeit und ferner von Dämpfungsgliedern b_{ij} . — Weiter möge an der Scheibe eine

Spalterregungskraft angreifen, deren Komponenten Q_x und Q_y gegeben seien durch (q der Spalterregungskoeffizient)

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -q \\ +q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_W \\ y_W \end{bmatrix}. \quad 21.6(2)$$

An sich würde ein allgemeinerer Ansatz wie Gl. 21.6(1) die Verhältnisse noch genauer beschreiben. Im allgemeinen nehmen aber einzig die hier beibehaltenen Glieder eine beträchtliche Größe an, so daß der Ansatz für eine grundsätzliche Untersuchung genügt. Er beschreibt genau die Situation nach Abb. 21.5.3, denn eine Auslenkung in y -Richtung erzeugt eine Kraft in x -Richtung und umgekehrt. Der antimetrische Aufbau der q -Matrix entspricht der Kreissymmetrie der Anordnung, die meist gegeben ist (nicht bei Teilbeaufschlagung!).

Wesentlich für die Stabilität sind die Arbeitsbeträge, die durch die einzelnen Kräfte am System geleistet werden. Dabei sollen nachfolgend nur die x -Komponenten der Kräfte betrachtet werden; die Beiträge der y -Komponenten ergeben sich daraus in Analogie. Der Einfachheit halber wird auch die Exzentrizität $e = 0$ gesetzt, da diese weder die Stabilität noch die Eigenfrequenzen beeinflußt. Die Zapfenbewegung wird beschrieben durch

$$x' = \hat{x}' \sin \omega_e t, \quad y' = \hat{y}' \sin (\omega_e t - \psi). \quad 21.6(3)$$

Die Kreisfrequenz ω_e der Taumelbewegung (Eigenfrequenz) ist *nicht* die Winkelgeschwindigkeit ω des Läufers. Nachfolgend werden nun die von den Anteilen $k_{11}x'$, $k_{12}y'$, $b_{11}\dot{x}'$, $b_{12}\dot{y}'$ der Kraft X' herrührenden Arbeitsanteile (pro Zyklus) W_{11} , W_{12} , W_{d11} , W_{d12} berechnet.

$$dW_{11} = -k_{11}x'\dot{x}' dt = -k_{11}\hat{x}'^2\omega_e \sin \omega_e t \cos \omega_e t dt,$$

$$W_{11} = -k_{11}\hat{x}'^2\omega_e \int_0^{2\pi/\omega_e} \sin \omega_e t \cos \omega_e t dt = 0. \quad 21.6(4)$$

$$dW_{12} = -k_{12}y'\dot{x}' dt = -k_{12}\hat{y}'\hat{x}'\omega_e \sin (\omega_e t - \psi) \cos \omega_e t dt,$$

$$W_{12} = -k_{12}\hat{y}'\hat{x}'\omega_e \int_0^{2\pi/\omega_e} \sin (\omega_e t - \psi) \cos \omega_e t dt = -k_{12}\hat{y}'\hat{x}'\omega_e J_{12}. \quad 21.6(5)$$

$$dW_{d11} = -b_{11}\dot{x}'^2 dt = -b_{11}\hat{x}'^2\omega_e^2 \cos^2 \omega_e t dt,$$

$$W_{d11} = -b_{11}\hat{x}'^2\omega_e^2 \int_0^{2\pi/\omega_e} \cos^2 \omega_e t dt = -\pi b_{11}\hat{x}'^2 \omega_e^2. \quad 21.6(6)$$

$$dW_{d12} = -b_{12}\dot{y}'\dot{x}' dt = -b_{12}\hat{y}'\hat{x}'\omega_e^2 \cos (\omega_e t - \psi) \cos \omega_e t dt,$$

$$W_{d12} = -b_{12}\hat{y}'\hat{x}'\omega_e^2 \int_0^{2\pi/\omega_e} \cos (\omega_e t - \psi) \cos \omega_e t dt = -b_{12}\hat{y}'\hat{x}'\omega_e^2 J_{d12}. \quad 21.6(7)$$

Die Integrale J_{12} und J_{d12} sind im allgemeinen von Null verschieden. J_{12} verschwindet für $\psi = 0, \pi, 2\pi \dots$ während J_{d12} für $\pi/2, 3\pi/2, \dots$ Null wird.

Die wesentliche mathematische Vereinfachung besteht nun darin, die an den Lagerzapfen angreifenden Kräfte in den Scheibenmittelpunkt zu reduzieren. Dazu muß vor allem die gesamte Federkonstante \bar{k}_{11} bestimmt werden, die sich aus der Hintereinanderschaltung der Welle mit der Federkonstanten k und der Lager mit der Federkonstanten $2k_{11}$ (Faktor 2 weil zwei Lager) ergibt. Es ist leicht zu verifizieren, daß gilt

$$\frac{1}{\bar{k}_{11}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k_{11}},$$

woraus die nachfolgende Gleichung folgt, der sogleich die entsprechende für y -Richtung beigelegt ist:

$$\bar{k}_{11} = \frac{k}{1 + k/2k_{11}}, \quad \bar{k}_{22} = \frac{k}{1 + k/2k_{22}}. \quad 21.6(8)$$

Nun darf weiter angenommen werden, daß auch der Scheibenmittelpunkt — dessen Koordinaten nun einfach x, y genannt werden, weil sie mit denen des Schwerpunktes identisch sind — eine harmonische Bewegung ausführe, womit gesetzt werden kann

$$x = \hat{x} \sin \omega_e t, \quad y = \hat{y} \sin (\omega_e t - \psi). \quad 21.6(9)$$

Wenn nun im Scheibenmittelpunkt Kräfte angreifen sollen, welche die gleiche Arbeit leisten wie diejenigen, die effektiv an den Zapfen angreifen, so muß für deren Koeffizienten $\bar{k}_{12}, \bar{b}_{11}, \bar{b}_{12}$ offenbar gelten

$$2W_{12} = -\bar{k}_{12} \hat{y} \hat{x} J_{12}, \quad 21.6(10)$$

$$2W_{d11} = -\pi \bar{b}_{11} \hat{x}^2 \omega_e^2, \quad 2W_{d12} = -\bar{b}_{12} \hat{x} \hat{y} \omega_e^2 J_{d12}. \quad 21.6(11)$$

Der Vergleich mit 21.6(5), (6), (7) liefert

$$\bar{k}_{12} = 2 \frac{\hat{y}' \hat{x}'}{\hat{y} \hat{x}} k_{12}, \quad \bar{b}_{11} = 2b_{11} \frac{\hat{x}'^2}{\hat{x}^2}, \quad \bar{b}_{12} = 2b_{12} \frac{\hat{y}' \hat{x}'}{\hat{y} \hat{x}}. \quad 21.6(12)$$

Der Beitrag von b_{12} erweist sich als sehr klein und soll daher vernachlässigt werden. Da die Amplituden im umgekehrten Verhältnis stehen wie die Federkonstanten, also z.B. $\hat{x}'/\hat{x} = \bar{k}_{11}/k_{11}$, folgt aus 21.6(8) und (12)

$$\bar{k}_{12} = \frac{2k^2}{(k_{11} + k/2)(k_{22} + k/2)} k_{12}, \quad \bar{b}_{11} = \frac{2k^2}{(k_{11} + k/2)^2} b_{11}, \quad 21.6(13)$$

$$\bar{k}_{21} = \frac{2k^2}{(k_{11} + k/2)(k_{22} + k/2)} k_{21}, \quad \bar{b}_{22} = \frac{2k^2}{(k_{22} + k/2)} b_{22}. \quad 21.6(14)$$

Damit kann nun 21.6(1) ersetzt werden durch eine Gleichung für ideale, im Scheibenzentrum angreifende Kräfte X^*, Y^* :

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{b}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}. \quad 21.6(15)$$

Dabei sind $\bar{k}_{11}, \bar{k}_{12}, \bar{k}_{21}, \bar{k}_{22}, \bar{b}_{11}, \bar{b}_{22}$ mit 21.6(8), (13) und (14) aus dem ursprünglich gegebenen Lagerkonstanten zu bestimmen.

Schließlich kann man noch zur Berücksichtigung der Werkstoffdämpfung eine weitere im Scheibenzentrum angreifende Dämpfungskraft einführen deren x -Komponente

$$X_w = -b(\dot{x} - \dot{x}') = -b\omega_e(x - x') \quad 21.6(16)$$

beträgt, wobei b aus Gl. 21.5(2) gegeben ist (b wird bei $\omega > \omega_e$ negativ, womit X_w im Sinne der Labilisierung wirkt). Auch 21.6(16) soll ersetzt werden durch die Form

$$X_w = -\bar{b}_1 \omega_e x. \quad 21.6(17)$$

Dann ist

$$\bar{b}_1 = b \frac{x - x'}{x} = b \frac{\hat{x} - \hat{x}'}{\hat{x}} = b \frac{\bar{k}_{11}}{k},$$

somit

$$\bar{b}_1 = \frac{b}{1 + k/2k_{11}}, \quad \bar{b}_2 = \frac{b}{1 + k/2k_{22}}. \quad 21.6(18)$$

Nun sind alle Kräfte durch die Scheibenmittelpunktskoordinaten und ihre Ableitungen ausgedrückt, womit die Bewegungsgleichungen direkt hingeschrieben werden können:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + (\bar{b}_{11} + \bar{b}_1)\dot{x} + \bar{k}_{11}x + (\bar{k}_{12} + q)y &= 0, \\ m\ddot{y} + (\bar{b}_{22} + \bar{b}_2)\dot{y} + \bar{k}_{22}y + (\bar{k}_{21} - q)x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad 21.6(19)$$

Der einfache Aufbau dieser Gleichungen erlaubt die Berechnung der Stabilitätsgrenze in geschlossener Form. Mit dem Ansatz

$$x = c_x \exp(\lambda t), \quad y = c_y \exp(\lambda t) \quad 21.6(20)$$

geht 21.6(19) über in das System der charakteristischen Gleichungen, das nichttriviale Lösungen c_x, c_y nur hat, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet, d.h. wenn

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + (\bar{b}_{11} + \bar{b}_1)\lambda + \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} + q \\ \bar{k}_{21} - q & m\lambda^2 + (\bar{b}_{22} + \bar{b}_2)\lambda + \bar{k}_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad 21.6(21)$$

Diese Bestimmungsgleichung für λ hat im allgemeinen komplexe Wurzeln

$$\lambda = \delta \pm i\omega_e, \quad 21.6(22)$$

die *Eigenwerte*. Es treten stets Paare von konjugiert komplexen Lösungen auf, wie durch das Doppelvorzeichen angedeutet. Aus der Struktur des Gleichungssystems folgt, daß nur ein solches Paar auftritt. Es ist

$$\exp(\lambda t) = \exp[(\delta + i\omega_e)t] = \exp(\delta t) \exp(i\omega_e t) = \exp(\delta t) (\sin \omega_e t + i \cos \omega_e t), \quad 21.6(23)$$

d.h. der Vorgang ist eine harmonische Schwingung, die mit t exponentiell anwächst oder abklingt. Stabilität ist gegeben bei $\delta < 0$. Mit $\delta = 0$ wird die *Stabilitätsgrenze* erhalten. Nur in diesem Grenzfall hat die Lösung genau den Charakter, der mit 21.6(3) bzw. (9) bereits vorausgesetzt wurde, doch bleiben die Voraussetzungen hinreichend genau erfüllt, sofern der Betrag von δ klein ist. Für jeden Eigenwert λ liefert 21.6(21) ein festes, im allgemeinen komplexes Verhältnis c_y/c_x , womit auch die Phasenverschiebung gegeben ist, die in 21.6(9) durch den Phasenwinkel ψ wiedergegeben wird. Die Lösung des homogenen Gleichungssystems beschreibt den Vorgang, der entsteht, wenn die unwuchtfreie Welle durch eine äußere Störung aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht wird und dann durch eine abklingende Schwingung ihre Gleichgewichtslage wieder findet ($\delta < 0$) oder aber instabil eine sich immer mehr aufschaukelnde Schwingung ausführt ($\delta > 0$). Daß zwei Vorzeichen von ω_e auftreten besagt, daß zwei Bewegungsvorgänge möglich sind, Gleichlauf und Gegenlauf.

Ist $\lambda = i\omega_e$, d.h. $\delta = 0$, so erlaubt 21.6(21) eine geschlossene Lösung, was deshalb bedeutsam ist, weil dies ja gerade die *Stabilitätsgrenze* ist. Es mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k} &\equiv \frac{\bar{k}_{11} + \bar{k}_{22}}{2}, & \bar{b} &\equiv \frac{\bar{b}_{11} + \bar{b}_1 + \bar{b}_{22} + \bar{b}_2}{2}, \\ A &\equiv \frac{\bar{k}_{22}}{\bar{k}_{11}}, & B &\equiv \frac{\bar{b}_{22} + \bar{b}_2}{\bar{b}_{11} + \bar{b}_1}, \\ C &\equiv \frac{\bar{k}_{21}}{\bar{k}_{12}} = \frac{k_{21}}{k_{12}}, & D &\equiv \frac{\bar{b}}{2\sqrt{m\bar{k}}}, & E &\equiv \frac{\bar{k}_{12}}{\bar{k}}. \end{aligned} \right\} \quad 21.6(24)$$

Die Lösung ω_e für den Sonderfall $\delta = 0$ sei ω_e^* genannt. Man findet dafür

$$\omega_e^* = \sqrt{\frac{\bar{k}}{m}} \sqrt{2 \frac{A + B}{(1 + A)(1 + B)}}. \quad 21.6(25)$$

Sie liegt zwischen den beiden Werten $\sqrt{\bar{k}_{11}/m}$ und $\sqrt{\bar{k}_{22}/m}$, die den beiden extremen Federkonstanten entsprechen würden. Aus der Spalterregungskraft q bildet man zweckmäßig die dimensionslose Größe

$$S \equiv q/\bar{k}. \quad 21.6(26)$$

Für diese läßt sich nach *Thomas* [13] ebenfalls ein geschlossener Ausdruck finden, nämlich

$$S = \frac{(C-1)E}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(C+1)E}{2}\right]^2 + \frac{4B}{(1+B)^2} \left[D^2 \frac{8(A+B)}{(1+A)(1+B)} + \left(\frac{1-A}{1+A}\right)^2 \right]}. \quad 21.6(27)$$

Diese Gleichung beschreibt die Abhängigkeit der Spalterregung an der Stabilitätsgrenze von den verschiedenen maßgebenden Parametern, nämlich: A Anisotropie der Federsteifigkeit, B Anisotropie der Dämpfung, C Anisotropie der Lagerkopplung, D mittlere Dämpfung, E Lagerkopplung. Kennt man S , so ist

$$|q| < \bar{k} |S| \quad 21.6(28)$$

die Bedingung, der die Spalterregungskraft genügen muß, damit Stabilität gesichert sei. Ist $S = 0$, so bedeutet dies, daß die Stabilität schon durch die anderen Effekte erschöpft ist. In Gl. 21.6(27) gibt das untere Vorzeichen ein negatives S (weshalb in 21.6(28) absolute Beträge einzusetzen sind). Das bedeutet, daß die Spalterregung entgegen der Lagererregung wirksam ist, wie das beim Verdichter zutrifft. Da die Strömungskräfte mit wachsender Leistung zunehmen, wird verständlich, daß bei fester Drehzahl und zunehmender Leistung von einer gewissen Grenze an Laufstörungen eintreten können, dann nämlich, wenn die Bedingung 21.6(28) nicht mehr erfüllt ist.

Abb. 21.6.1 zeigt Rechenergebnisse aus [13]. Die Diagramme a, b, c fassen eine Parameterstudie zusammen. Auffallen mag, daß selbst mit der Dämpfung $D = 0$ noch Stabilität gewährleistet sein kann, sobald $A < 1$. Das mag überraschen, da doch die Spalterregung Arbeit am Rotor leistet, die irgendwo dissipiert werden muß. Durch die Lagerzapfenkräfte wird diese Arbeit zunächst aufgenommen. Auch bei $\bar{b} = 0$, somit $D = 0$ wird Arbeit im Lager dissipiert, nämlich durch die Schubspannungen im Schmierfilm, d. h. also durch eine Erhöhung der Lagerreibung. — Das Diagramm d gibt die Anwendung dieser Ergebnisse auf bestimmte Lager wieder, Kurve 1 ein zylindrisches Lager, Kurve 2 ein Lager mit „Zitronenspiel“, Kurve 3 ein Dreikeil-MFG-Lager, Kurve 4 ein Kippsegment-Dreikeillager. Abszisse ist das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit zur kritischen Winkelgeschwindigkeit. Man erkennt, wie komplex das Problem ist, denn es gibt kein

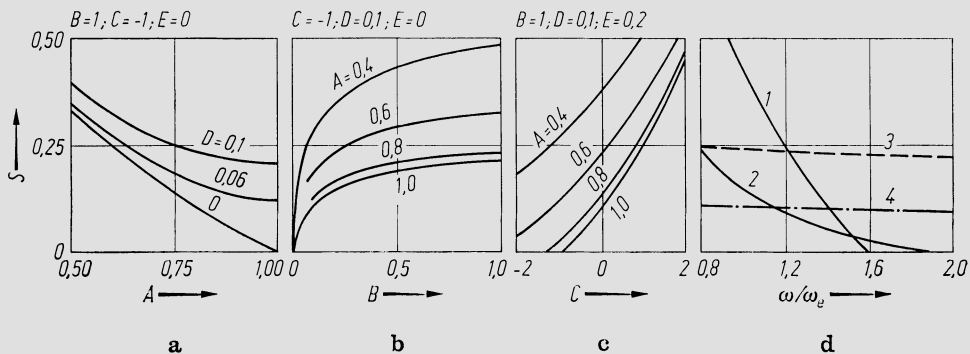


Abb. 21.6.1. Systemerregungsparameter S an Stabilitätsgrenze in Funktion der maßgebenden Variablen. Nach *Thomas* [13]. a) Stabilitätsgrenze in Funktion von Federanisotropie A und Dämpfung D bei verschwindender Lagerkopplung E (reine Spalterregung); b) Stabilitätsgrenze in Funktion von Dämpfungsanisotropie B und Federanisotropie A bei Verschwinden der Lagerkopplung E ; c) Stabilitätsgrenze in Funktion von Lagerkopplungsanisotropie C und Federanisotropie A ; d) S in Funktion von ω/ω_c für: 1 zylindrisches Lager, 2 Zweikeillager, 3 Dreikeillager, 4 Kippsegment-Dreikeillager.

Lager, das in allen Fällen günstigste Resultate liefert. Wo die Kurven 1 und 2 die Abszissenachse erreichen, liegt die Stabilitätsgrenze des Ölfilms (Grenze für oil whip), da ohne Werkstoffdämpfung gerechnet wurde.

21.7 Die kritischen Drehzahlen eines beliebigen drehsymmetrischen Läufers

Wir betrachten einen Läufer drehsymmetrischer, aber sonst beliebiger Gestalt, der auf einer beliebigen Zahl von Lagern ruht (Abb. 21.7.1). An der Stelle z werde ein Ausschnitt mit der axialen Dicke dz herausgegriffen. Es sei 0 der Durchstoßpunkt der Verbindungslinie der Lagermittelpunkte durch die Ebene $z = \text{const}$, zugleich der Ursprung des Koordinatensystems x, y . Punkt W mit den Koordinaten x_W, y_W ist der Durchstoßpunkt der ausgebogenen geometrischen Mittellinie, S mit den Koordinaten x, y der Schwerpunkt des betrachteten Ausschnittes. Der Abstand zwischen W und S ist die lokale Exzentrizität $e(z)$, die unter einem Winkel φ liegt (vgl. Abb. 21.7.1). In der in z gelegenen Schnittebene werden vom links dieses Schnittes gelegenen Rotorteil auf den rechts liegenden eine Schubkraft mit den Komponenten X, Y und ein Drehmoment M ausgeübt. In der Ebene $z + dz$ greifen dann die Kräfte $-(X + dX), -(Y + dY)$ und das Drehmoment $-(M + dM)$ an. (Minuszeichen, weil es sich um die Reaktionen handelt, die vom rechts liegenden auf den links liegenden Teil ausgeübt werden.) Da e sehr klein ist, kann aus gleichen Gründen wie beim unter 21.2 behandelten Laval-Rotor die Betrachtung der Momente entfallen und es bleiben als Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} dm = -dX, \quad \ddot{y} dm = -dY. \tag{21.7(1)}$$

Das betrachtete Rotorelement wird allerdings bei der Ausbiegung des Läufers nicht mehr senkrecht auf der Verbindungslinie der Lagermittelpunkte stehen. Dieser Effekt sei hier der Einfachheit halber vernachlässigt; er kann später mit eingeschlossen werden.

Nachfolgend wird die ganze theoretische Entwicklung nur für die x -Richtung durchgeführt, da das Ergebnis in y -Richtung in genauer Analogie folgt. Der Einfluß der Schwerkraft bewirkt beim drehsymmetrischen Läufer weiter nichts als die Überlagerung einer statischen Durchbiegung. Mit der Massenverteilungsfunktion

$$\mu(z) \equiv dm/dz \tag{21.7(2)}$$

schreibt sich die Bewegungsgleichung

$$\mu \ddot{x} = -\frac{dX}{dz}. \tag{21.7(3)}$$

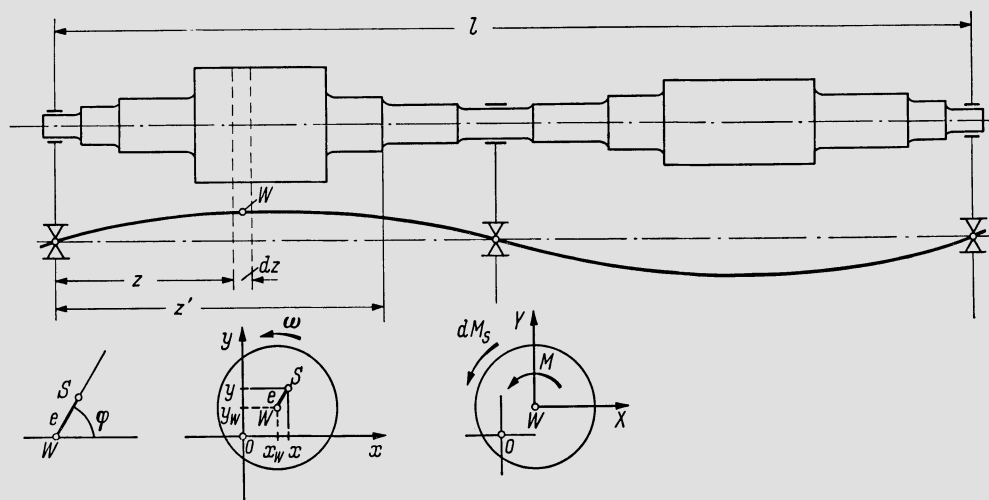


Abb. 21.7.1. Zur allgemeinen Untersuchung der Bewegung eines Läufers

Aus der Gleichförmigkeit der Drehung folgt mit ω als Winkelgeschwindigkeit des Läufers

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \varphi = \varphi_0(z) + \omega t, \quad 21.7(4)$$

und da

$$x = x_W + e \cos \varphi \quad 21.7(5)$$

auch

$$x_W = x - e \cos(\varphi_0 + \omega t) = x - e [\cos \varphi_0 \cos \omega t - \sin \varphi_0 \sin \omega t]. \quad 21.7(6)$$

Denkt man sich an irgendeiner Stelle z' des ruhend gedachten Rotors eine Einheitskraft in x -Richtung angreifend, so wird dadurch an der Stelle z eine Ausbiegung in x -Richtung (also ein x_W) entstehen, die $W_x(z', z)$ genannt sei. W_x ist die *Einflußzahl* einer Kraft in z' in bezug auf die Stelle z . In W_x kann sehr wohl eine Nachgiebigkeit der Lager eingeschlossen werden, nicht aber eine Kopplung zwischen x - und y -Richtung, wie sie unter 12.6 durch die Koeffizienten k_{12} und k_{21} wiedergegeben wird. — Da nun $-\ddot{x}\mu(z') dz'$ die d'Alembertsche Trägheitskraft auf ein Element der Länge dz' ist, findet man in z die Ausbiegung

$$x_W(z) = - \int_0^l W_x(z', z) \mu(z') \ddot{x}(z') dz'. \quad 21.7(7)$$

Mit 21.7(6) folgt also

$$x(z) - e(z) [\cos \varphi_0(z) \cos \omega t - \sin \varphi_0(z) \sin \omega t] = - \int_0^l W_x(z', z) \mu(z') \ddot{x}(z') dz'. \quad 21.7(8)$$

Für diese Integro-Differentialgleichung machen wir den Lösungsansatz

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) p_n(t) + U_1(z) \cos \omega t + U_2(z) \sin \omega t, \quad 21.7(9)$$

wo u_n , p_n , U_1 , U_2 noch unbekannte Funktionen sind. Einsetzen in 21.7(8) liefert

$$\begin{aligned} \sum u_n p_n + U_1 \cos \omega t + U_2 \sin \omega t - e [\cos \varphi_0 \cos \omega t - \sin \varphi_0 \sin \omega t] \\ = - \sum \ddot{p}_n \int_0^l W_x(z', z) \mu(z') u_n(z') dz' + \\ + \omega^2 \int_0^l W_x(z', z) \mu(z') [U_1(z') \cos \omega t + U_2(z') \sin \omega t] dz'. \end{aligned} \quad 21.7(10)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn jede der folgenden erfüllt ist:

$$u_n(z) p_n(t) = - \ddot{p}_n \int_0^l W_x(z', z) \mu(z') u_n(z') dz' \quad n = 1, 2, \dots, \quad 21.7(11)$$

$$U_1(z) - e(z) \cos \varphi_0(z) = \omega^2 \int_0^l W_x(z', z) \mu(z') U_1(z') dz', \quad 21.7(12)$$

$$U_2(z) + e(z) \sin \varphi_0(z) = \omega^2 \int_0^l W_x(z', z) \mu(z') U_2(z') dz'. \quad 21.7(13)$$

Gl. 21.7(11) kann in die Form

$$\frac{\ddot{p}_n(t)}{p_n(t)} = \frac{u_n(z)}{\int_0^l W_x(z', z) \mu(z') u_n(z') dz'} = -\omega_{nx}^2 \quad 21.7(14)$$

gebracht werden. Da der Ausdruck in p_n nicht von z , derjenige in u_n nicht von t abhängt, müssen beide gleich einer Konstanten sein, die $-\omega_{nx}^2$ genannt wurde. Damit folgt aus 21.7(14) einerseits

$$p_n = A_n \cos \omega_{nx} t + B_n \sin \omega_{nx} t, \quad 21.7(15)$$

wo A_n und B_n Integrationskonstanten sind. Weiter folgt aber auch

$$u_n(z) = \omega_{nx}^2 \int_0^l W_x(z', z) \mu(z') u_n(z') dz'. \quad 21.7(16)$$

Dies ist aber nichts anderes als die Integralgleichung der Biege-Eigenschwingung des Rotors. Sie hat nichttriviale Lösungen nur für die Eigenwerte $\omega_{1x}, \omega_{2x}, \dots, \omega_{nx}, \dots$ und die u_n sind die zugehörigen Eigenfunktionen, d.h. die verschiedenen Biegeschwingungsformen, denen die Kreisfrequenzen ω_{nx} entsprechen.

Um Gl. 21.7(12) weiter zu analysieren, entwickeln wir die Funktion U_1 nach den Eigenfunktionen u_n , setzen also nach Art einer Fourier-Reihe

$$U_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n. \quad 21.7(17)$$

Damit geht 21.7(12) über in

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n - e_0 \cos \varphi_0 = \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^l W_x(z', z) \mu(z') u_n(z') dz'.$$

Jedes der hier auftretenden Integrale ist nach 21.7(16) nichts anderes als $u_n(z)/\omega_{nx}^2$, so daß wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n - e \cos \varphi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_{nx}} \right)^2 a_n u_n$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{nx}} \right)^2 \right] a_n u_n = e \cos \varphi_0. \quad 21.7(18)$$

Der rechts stehende Ausdruck gibt den Verlauf der lokalen Exzentrizität und ihrer Lage in Funktion von z wieder. Diese Funktion kann selbst wiederum nach Eigenfunktionen entwickelt werden, und das gleiche gilt von der Funktion $e \sin \varphi_0$, die später ebenfalls noch gebraucht wird. Man kann also setzen

$$e \cos \varphi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \quad e \sin \varphi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n \quad 21.7(19)$$

mit

$$\alpha_n = \frac{\int_0^l u_n(z) e(z) \cos \varphi_0(z) dz}{\int_0^l u_n^2(z) dz}, \quad \beta_n = \frac{\int_0^l u_n(z) e(z) \sin \varphi_0(z) dz}{\int_0^l u_n^2(z) dz}. \quad 21.7(20)$$

Durch Einsetzen von 21.7(19) in (18) gewinnt man sogleich

$$a_n = \frac{\alpha_n}{1 - (\omega/\omega_{nx})^2}. \quad 21.7(21)$$

Das gleiche Verfahren auf Gl. 21.7(13) angewandt, liefert

$$U_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n, \quad 21.7(22)$$

$$b_n = \frac{-\beta_n}{1 - (\omega/\omega_{nx})^2}. \quad 21.7(23)$$

Nun werden die erhaltenen Ausdrücke Gln. 21.7(15), (16), (17), (21), (22), (23), in (9) eingeführt. Das liefert die erste der beiden nachfolgenden Gleichungen. Die zweite für die y -Richtung ergibt sich in einfacher Analogie dazu.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ u_n(z) (A_n \cos \omega_n x t + B_n \sin \omega_n x t) + \frac{u_n(z)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} [\alpha_n \cos \omega t - \beta_n \sin \omega t] \right\}, \quad 21.7(24)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ v_n(z) (C_n \cos \omega_n y t + D_n \sin \omega_n y t) + \frac{v_n(z)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} [\gamma_n \cos \omega t - \delta_n \sin \omega t] \right\}. \quad 21.7(25)$$

Die v_n sind die Eigenfunktionen für die y -Richtung. Sie sind mit den Eigenfunktionen in x -Richtung dann nicht identisch, wenn die Lagerelastizitäten in beiden Richtungen verschieden sind, und dementsprechend unterscheiden sich auch die Eigenwerte ω_{ny} von den ω_{nx} . Die γ_n und δ_n sind gebildet wie α_n und β_n , vgl. 21.7(20), aber mit v_n anstatt u_n .

Bei der Diskussion der Gln. 21.7(24) und (25) ist zu beachten, daß ohne Dämpfung und ohne andere Erregungskräfte als die Exzentrizität gerechnet wurde und auch eine Kopplung der Bewegungen in x - und y -Richtung unberücksichtigt geblieben ist. Die Glieder mit den Integrationskonstanten $A_n \dots D_n$ stellen die ungedämpften Biege-Eigenschwingungen dar, die unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit ω mit den verschiedenen Eigenfrequenzen ω_n erfolgen und einmal angestoßen, sich unbegrenzt erhalten. In Wirklichkeit treten Verhältnisse auf, wie sie im vorangehenden Abschnitt behandelt wurden, d.h. entweder die Schwingungen verschwinden asymptotisch durch Dämpfungskräfte (Stabilität) oder sie werden durch einen Selbsterregungsmechanismus immer mehr angefacht.

Die restlichen Glieder stellen die unwuchterregten Schwingungen dar, deren Kreisfrequenz stets gleich der Winkelgeschwindigkeit des Läufers ist. Sobald ω gleich einem der Eigenwerte ω_n ist, verschwindet unter der Voraussetzung der Dämpfungsfreiheit einer der Nenner und es entsteht ein unendlicher Ausschlag. Man beachte die vollständige Analogie zu den für den Laval-Rotor gültigen Gln. 21.2(11) und (12). *Das Spektrum der Kreisfrequenzen der sämtlichen Biege-Eigenschwingungen ist also identisch mit dem Spektrum der kritischen Winkelgeschwindigkeiten.* — Interessant ist, welche Größe hier an die Stelle der Exzentrizität des Laval-Rotors tritt. Man hat die Exzentrizitätsverteilung längs des Läufers nach Art einer „verallgemeinerten Fourier-Reihe“ nach Eigenfunktionen zu entwickeln. Die so entstehenden Entwicklungskoeffizienten der verschiedenen Ordnungen n übernehmen die Rolle der Exzentrizität für diese Ordnung. Alle diese Koeffizienten sollten möglichst klein sein, was der Grund dafür ist, daß die Auswuchtung der Rotoren in mehreren Ebenen erfolgen muß.

Eine gewisse Komplikation kommt praktisch dadurch hinzu, daß Kopplungseffekte zwischen den Richtungen x und y stets vorhanden sind, während hier die beiden Bewegungen voneinander völlig unabhängig sind. Bei isotroper Lagerung werden beide Bewegungen genau gleich, nur um 90° phasenverschoben, d.h. man hat die zirkular polarisierte Schwingung. Die verformte Rotorachse rotiert dann wie eine starre Kurve im Raum und der Rotor erleidet keine periodische Verformung.

21.8 Die Kreiselwirkung

In den vorangehenden Abschnitten wurde stets vorausgesetzt, daß die Scheibe oder das einzelne Läuferelement in seiner Ebene schwingt, daß also der Einfluß der Neigung der Läuferachse vernachlässigbar sei. Dieser Einfluß wird nachfolgend untersucht. Abb. 21.8.1 zeigt die Disposition. Im Koordinatensystem x, y, z ist z die Drehachse. Der

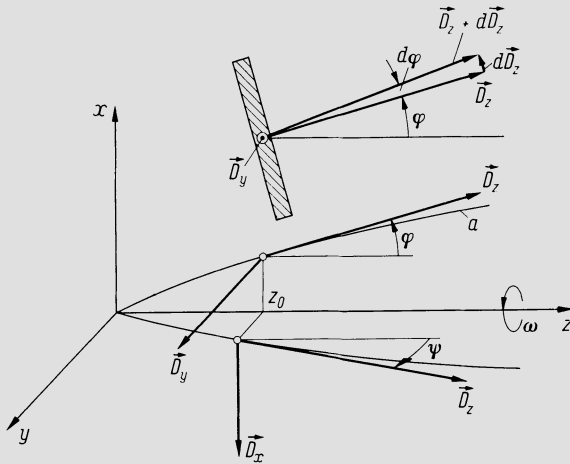


Abb. 21.8.1. Zur Herleitung der Beziehungen über die Kreiselwirkung

Rotor dreht mit der Winkelgeschwindigkeit ω in Richtung z betrachtet im Uhrzeigersinn. In z_0 sitzt eine Scheibe, deren Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse Θ_z sei. Ist die Scheibe dünn, so ist ihr Trägheitsmoment bezüglich jedes Radius $\Theta_r = \Theta_z/2$. Die den Koordinatenrichtungen zugeordneten Einheitsvektoren seien $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Nun möge zunächst angenommen werden, der Rotor führe mit der Kreisfrequenz ω_c eine Biegeschwingung aus, und zwar ausschließlich in der Ebene xz . In einem beliebigen Augenblick hat dann die Rotorachse a an der Stelle z_0 eine Neigung φ_y , die stets so klein sein wird, daß $\cos \varphi_y = 1$ gesetzt werden darf. Die z -Komponente des Dralles der Scheibe ist dann

$$\vec{D}_z = \Theta_z \omega \vec{k}. \quad 21.8(1)$$

Ändert sich im Zeitintervall dt die Neigung φ um $d\varphi$, so ist (vgl. die obere Figur in Abb. 21.8.1)

$$d\vec{D}_z = D_z d\varphi \vec{i} = \Theta_z \omega d\varphi \vec{i},$$

womit

$$\frac{d\vec{D}_z}{dt} = \Theta_z \omega \dot{\varphi} \vec{i}. \quad 21.8(2)$$

Der Drall bezüglich einer y -parallelen Schwerachse der Scheibe ist nach dem oben Gesagten

$$\vec{D}_y = \frac{\Theta_z}{2} \dot{\varphi} \vec{j}, \quad 21.8(3)$$

mithin

$$\frac{d\vec{D}_y}{dt} = \frac{\Theta_z}{2} \ddot{\varphi} \vec{j}. \quad 21.8(4)$$

Analoge Formeln erhält man, wenn man eine Schwingung ausschließlich in der Ebene yz betrachtet. Anstelle der Gln. 21.8(2) und (4) findet man dann (vgl. auch Abb. 21.8.1)

$$\frac{d\vec{D}_z}{dt} = \Theta_z \omega \dot{\psi} \vec{j}, \quad \frac{d\vec{D}_z}{dt} = -\frac{\Theta_x}{2} \ddot{\psi} \vec{i}. \quad 21.8(2'), (4')$$

Wenn nun das Problem im d'Alembertschen Sinne als Gleichgewichtsproblem formuliert wird, sind die einzuführenden Momente $\Delta M = -dD/dt$. Mit den nachfolgend angegebenen Ansätzen für die Schwingungsbewegung ergeben sich die entsprechenden d'Alembertschen Momente:

Schwingung in xz -Ebene:

$$\varphi = \hat{\varphi} \cos \omega_e t, \quad \dot{\varphi} = -\omega_e \hat{\varphi} \sin \omega_e t, \quad \ddot{\varphi} = -\omega_e^2 \hat{\varphi} \cos \omega_e t, \quad 21.8(5)$$

$$\Delta \vec{M}_x = \vec{i} \Theta_z \hat{\varphi} \omega \omega_e \sin \omega_e t, \quad \Delta \vec{M}_y = \vec{j} \frac{\Theta_z}{2} \hat{\varphi} \omega_e^2 \cos \omega_e t. \quad 21.8(6)$$

Schwingung in yz -Ebene:

$$\psi = \hat{\psi} \sin \omega_e t, \quad \dot{\psi} = \omega_e \hat{\psi} \cos \omega_e t, \quad \ddot{\psi} = -\omega_e^2 \hat{\psi} \sin \omega_e t, \quad 21.8(7)$$

$$\Delta \vec{M}_y = -\vec{j} \Theta_z \hat{\psi} \omega \omega_e \cos \omega_e t, \quad \Delta \vec{M}_x = -\vec{i} \frac{\Theta_z}{2} \hat{\psi} \omega_e^2 \sin \omega_e t. \quad 21.8(8)$$

An sich willkürlich ist hier für die Schwingung in der yz -Ebene ein Ansatz gemacht, der gegenüber dem für die xz -Ebene um $\pi/2$ nacheilt. Dann folgt aus der Überlagerung beider Bewegungen ein Fall, der praktisch häufig wenigstens annähernd verwirklicht ist. Setzt man noch weiter gleiche Amplituden voraus, also $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$, und überlagert dann die beiden Bewegungen, so erhält man die *zirkular polarisierte Schwingung im Gleichlauf*:

$$\Delta \vec{M}_x = \vec{i} \Theta_z \hat{\varphi} \left[\omega \omega_e - \frac{\omega_e^2}{2} \right] \sin \omega_e t, \quad \Delta \vec{M}_y = -\vec{j} \Theta_z \hat{\varphi} \left[\omega \omega_e - \frac{\omega_e^2}{2} \right] \cos \omega_e t. \quad 21.8(9)$$

Dies ist ein Momentvektor, der stets senkrecht auf der Ebene steht, die vom Scheibenzentrum und der z -Achse aufgespannt wird, und der bei positivem $\hat{\varphi}$ der Präzessionsbewegung entgegen gerichtet ist. Der Betrag des Vektors ist

$$\Delta M = \Theta_z \hat{\varphi} \left[\omega \omega_e - \frac{\omega_e^2}{2} \right]. \quad 21.8(10)$$

Wenn nur die Verhältnisse bei der kritischen Drehzahl interessieren, also $\omega = \omega_e$, wird

$$\Delta M = \frac{\Theta_z \hat{\varphi} \omega_e^2}{2}. \quad 21.8(11)$$

Dies ist die Relation, die bei vielen Verfahren zur Berechnung kritischer Drehzahlen verwendet wird, da die meisten von ihnen die zirkular polarisierte Schwingung im Gleichlauf voraussetzen. Abb. 21.8.2a und b stellen für zwei typische Fälle den Verlauf des Biegemomentes M in der Welle dar, wie es sich unter dem Einfluß der Kreiselwirkung einstellt. Wo wesentliche Massen nur zwischen den Lagern angeordnet sind (Fall a), ist die Verschiebung der kritischen Drehzahl durch die Kreiselwirkung meist sehr klein; die Kreiselwirkung kann daher in der Regel vernachlässigt werden. Bei überhängenden Massen, Fall b, muß sie hingegen berücksichtigt werden. Man beachte, daß bei einer Umkehr der Drehrichtung und somit auch des Drehsinnes der Präzessionsbewegung wieder die gleiche Richtung von ΔM herauskommt, und daher die Situation nach Abb. 21.8.2 unverändert bleibt.

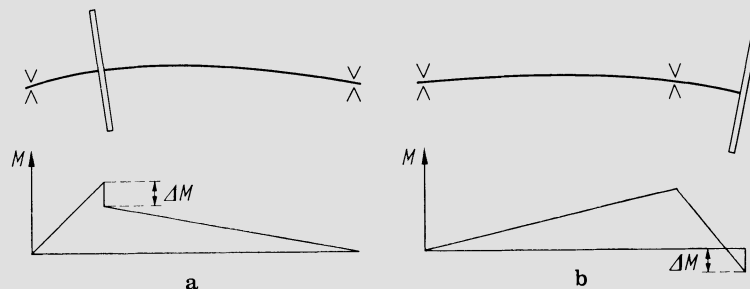


Abb. 21.8.2. Verlauf des Biegemomentes M unter dem Einfluß der Kreiselwirkung. a) Scheibe zwischen Lagern; b) überhängende Scheibe

Durch Umkehr des Vorzeichens beim Schwingungsansatz Gl. 21.8(7) entsteht der *Gegenlauf*. Hierbei geht 21.8(9) über in

$$\Delta \vec{M}_x = \vec{i} \Theta_z \hat{\varphi} \left[\omega \omega_e + \frac{\omega_e^2}{2} \right] \sin \omega_e t, \quad \Delta \vec{M}_y = \vec{j} \Theta_z \hat{\varphi} \left[\omega \omega_e + \frac{\omega_e^2}{2} \right] \cos \omega_e t. \quad 21.8(9')$$

Der Momentenvektor weist wieder der Präzessionsbewegung entgegen und hat den Betrag

$$\Delta M = \Theta_z \hat{\varphi} \left[\omega \omega_e + \frac{\omega_e^2}{2} \right], \quad 21.8(10')$$

wird also bei der kritischen Drehzahl selbst

$$\Delta M = \frac{3\Theta_z \hat{\varphi} \omega_e^2}{2}. \quad 21.8(11')$$

Der Gegenlauf ist seltener als der Gleichlauf. Er kommt vor bei Kompressoren, wenn die Spalterregung alle anderen Erregungsursachen bei weitem übersteigt.

Es geht aus dieser Herleitung hervor, daß im allgemeinen Falle die Kreiselwirkung nicht einfach durch Beifügen eines konstanten Momentes ΔM berücksichtigt werden kann. Es findet vielmehr eine kompliziertere Kopplung der Bewegungen in x - und y -Richtung statt.

21.9 Bestimmung kritischer Drehzahlen nach dem Verfahren von Stodola

Von den klassischen Verfahren zur Bestimmung kritischer Drehzahlen hat dasjenige von *Stodola* [3] die größte Verbreitung gefunden, da es sich beliebiger Rotorgeometrie anpaßt. Vorausgesetzt wird allerdings, daß die Schwingung entweder zirkular polarisiert sei oder bei anisotroper Lagerung, daß keine Kopplung zwischen den Bewegungen in Richtung x und y bestehe. In beiden Fällen hat das Schwingungsproblem die gleiche einfache Struktur.

In Abb. 21.9.1 ist eine beliebig abgesetzte Welle vorausgesetzt. Sie führe eine Biegeschwingung mit der Kreisfrequenz ω_e aus. Ist an der Stelle z der Ausschlag $u(z)$, so wird der Amplitudenwert der Beschleunigung $-\omega_e^2 u(z)$. Ein Massenelement dm in z erfährt demzufolge die d'Alembertsche Trägheitskraft

$$dF = \omega_e^2 u(z) dm = \omega_e^2 u(z) \frac{dm}{dz} dz. \quad 21.9(1)$$

An der Stelle z hat der Rotor den wirksamen Querschnitt f mit dem Trägheitsmoment J . — Es wurde absichtlich vom wirksamen Querschnitt gesprochen, denn bei einem Scheibenläufer ist z.B. der Querschnitt der Scheiben nicht zur Übertragung der Biegemomente wirksam. — Die Massenverteilung $m(z)$ ist ebenfalls durch die Läufergeometrie gegeben. Wenn an einer Stelle z' eine Einheitskraft normal zur Rotorachse angreift, so entsteht an der Stelle z eine Auslenkung $W(z', z)$. Dieses W ist also die unter 21.7 eingeführte Einflußfunktion, die durch Geometrie und Werkstoff gegeben ist. Unter Beachtung von 21.9(1) wird also die Ausbiegung $u(z)$ unter dem Einfluß der sämtlichen Trägheitskräfte

$$u(z) = \omega_e^2 \int_0^{\hat{z}} W(z', z) u(z') \left(\frac{dm}{dz} \right)_{z'} dz'. \quad 21.9(2)$$

Durch $(dm/dz)_{z'}$ soll angedeutet sein, daß die Ableitung in z' zu bilden ist. Die obere Integrationsgrenze \hat{z} ist der Koordinatenwert am rechten Ende der Welle. — Gl. 21.9(2) ist eine Integralgleichung für die Funktion $u(z)$, die nichttriviale Lösungen nur hat für bestimmte Werte $\omega_{e1}, \omega_{e2}, \dots$, die Eigenwerte des Problems. Das Verfahren von Stodola ist eine graphische Methode zur Lösung dieser Integralgleichung.

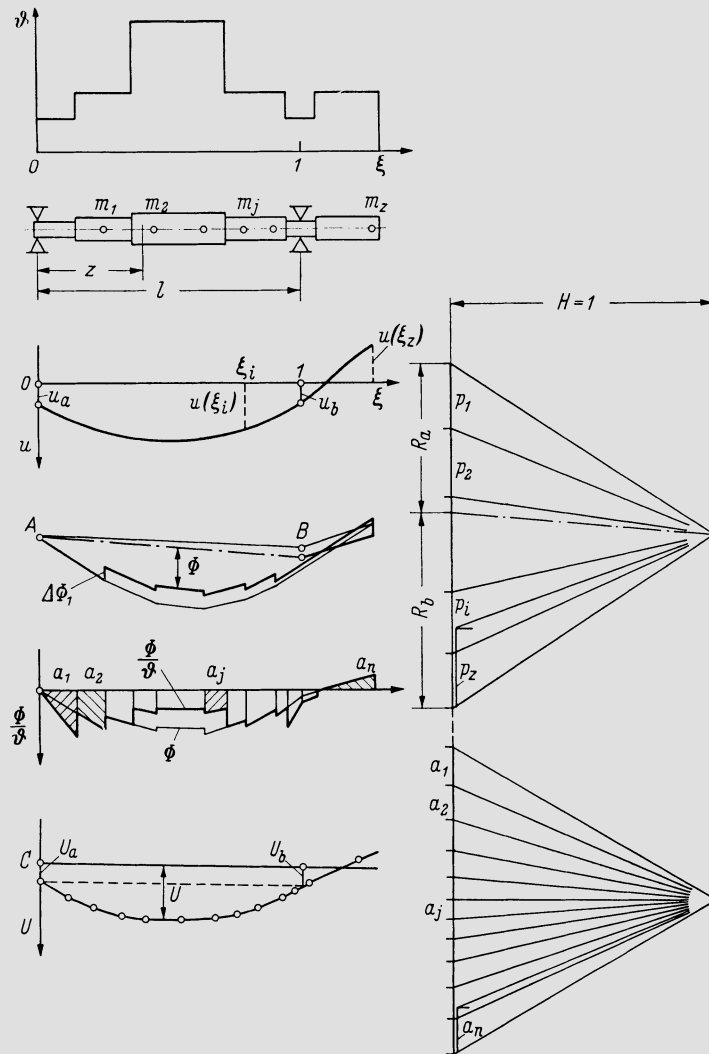


Abb. 21.9.1. Verfahren von Stodola zur Bestimmung kritischer Drehzahlen mit Berücksichtigung der elastischen Lagerung und der Kreiselwirkung

Abweichend von der Stodola'schen Originaldarstellung wird hier zur dimensionslosen Behandlung übergegangen, weil dann undurchsichtige Maßstabsfragen vermieden werden. Die stetige Massenverteilung der Welle wird ersetzt durch Einzelmassen $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_z$, deren Trägheitsmomente bezüglich der Drehachse $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_i, \dots, \Theta_z$ seien. Der Lagerabstand sei l (vgl. Abb. 21.9.1). Dann führen wir die folgenden dimensionslosen Größen ein:

$$\xi \equiv \frac{z}{l}, \quad W^*(\zeta, \xi) \equiv \frac{J_0 E_0}{l^3} W(z', z), \quad 21.9(3)$$

$$\vartheta \equiv \frac{EJ}{E_0 J_0}, \quad \mu_i \equiv \frac{m_i}{\rho f_0 l}, \quad \lambda_i \equiv \frac{\Theta_i}{2 \rho f_0 l^3}. \quad 21.9(4)$$

E_0, J_0, f_0 sind Elastizitätsmodul, Flächenträgheitsmoment und Querschnitt an irgend-einer ausgewählten Stelle des Läufers (beliebig wählbar) und ρ die Dichte des Werkstoffes. Weiter seien k_a und k_b die Federkonstanten der beiden Lager an den Stellen A und B , Abb. 21.9.1 (Lagerkräfte pro Einheit der Zapfenverschiebung). Daraus werden die fol-

genden dimensionslosen Werte gebildet:

$$\kappa_a \equiv \frac{k_a l^3}{J_0 E_0}, \quad \kappa_b \equiv \frac{k_b l^3}{J_0 E_0}. \quad 21.9(5)$$

Wenn man noch setzt $u(\xi_i) = u_i$, geht die Integralgleichung 21.9(2) mit der Diskretisierung und den eingeführten Bezeichnungen in die Summengleichung

$$u_i = \omega_e^2 \frac{\rho f_0 l^4}{J_0 E_0} \sum_{j=1}^z W^*(\xi_j, \xi_i) u_j \mu_j = \omega_e^2 \frac{\rho f_0 l^4}{J_0 E_0} U_i \quad 21.9(6)$$

über. Der nur von ξ_i abhängende Summenausdruck ist hier mit U_i abgekürzt, eine Größe, die offensichtlich proportional u_i ist. Da die Gleichung in u homogen ist, darf man die u_i und somit auch die U_i sogleich als dimensionslose Größen auffassen. Die Funktion $u(\xi)$ beschreibt also eine affine Verzerrung der elastischen Linie.

Die Aufgabe läuft also darauf hinaus, die Gestalt der elastischen Linie unter dem Einfluß der Trägheitskräfte zu bestimmen, was Stodola nach der Mohrschen Methode des Kräfte- und Seilpolygons durchführt. Das Verfahren beginnt damit, eine Kurve $u(\xi)$ nach Schätzung anzunehmen. In den Lagerpunkten $\xi = 0$ und 1 hat u im allgemeinen nicht den Wert Null, sondern ist vielmehr gleich u_a bzw. u_b zu setzen, entsprechend der Nachgiebigkeit der Lager. Als Anhaltspunkt zur Schätzung der u_a und u_b kann dienen, daß die damit verbundene Verschiebung des größten Ausschlages u_{\max} umgekehrt proportional dem Verhältnis der kritischen Drehzahlen ohne und mit Lagerelastizität ist. — Ausgehend von der geschätzten Kurve $u(\xi)$ können für die Aufpunkte i , in denen die Massen m_i angebracht werden, die Größen $p_i = u_i \mu_i$ bestimmt werden. Diese faßt man als Kräfte auf und konstruiert das Kräftepolygon mit der Poldistanz $H = 1$. Das hieraus folgende Seilpolygon mit seiner Schlußlinie \overline{AB} ist in Abb. 21.9.1 ebenfalls dünn eingetragen. Ohne Kreiselwirkung ist die in diesem Seilpolygon erscheinende Ordinate bereits ein Maß für das örtliche Biegemoment. Soll die Kreiselwirkung berücksichtigt werden, so ist an dieser Stelle eine Korrektur notwendig. Das dimensionslose Maß für das Kreiselmoment der Masse m_i ist

$$\Delta\Phi_i = \lambda_i \left(\frac{du}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_i}. \quad 21.9(7)$$

Mit dem angegebenen λ_i gilt dies für den Gleichlauf; bei Gegenlauf wäre das Dreifache des Wertes nach Gl. 21.9(4) einzusetzen. — In ξ_i springt also die Kurve des Momentenverlaufes um $\Delta\Phi_i$ und verläuft im übrigen parallel zur ursprünglichen, nicht korrigierten Seillinie. Dies ist in Abb. 21.9.1 eingetragen. Hinsichtlich der Richtung von $\Delta\Phi_i$ ist folgendes zu beachten. Es ist üblich, das positive u , wie auch das positive Moment nach unten aufzutragen. $\Delta\Phi_i$ ist nach oben anzusetzen, wo u mit wachsendem ξ zunimmt und umgekehrt. Im Zweifelsfalle ist einfach der Drehsinn des Kreiselmomentes nach der Herleitung unter 21.8 zu beachten. — Am rechten Wellenende des gezeigten Beispiels nimmt z. B. u ab, da es negativ ist und sein Betrag zunimmt; deshalb ist dort $\Delta\Phi$ nach unten abzutragen. — Das so korrigierte Seileck führt anstatt auf den bisherigen Endpunkt B zu einem neuen, der im vorliegenden Beispiel etwas tiefer liegt als B . Die strichpunktiert eingetragene Verbindungsgerade mit A ist die neue Schlußlinie. Zwischen ihr und der berichtigten Seillinie erscheint die Größe Φ , die ein Maß für das Biegemoment ist. Die Übertragung der strichpunktierten Geraden ins Kräftepolygon erlaubt dort die Bestimmung zweier Strecken R_a und R_b , die den Reaktionen in den Lagern in $\xi = 0$ und $\xi = 1$ proportional sind.

Ausgehend von dem jetzt bekannten Verlauf $\Phi(\xi)$ kann mit dem gegebenen $\vartheta(\xi)$ auch Φ/ϑ in Funktion von ξ aufgetragen werden (vgl. Abb. 21.9.1). Diese Größe ist proportional der lokalen Krümmung, weshalb aus ihr durch den nachfolgend beschriebenen Integrationsprozeß die Gestalt der elastischen Linie (in affiner Verzerrung) gewonnen werden kann. Die zwischen dem Linienzug Φ/ϑ in Funktion von ξ und der Abszisse erscheinende

Fläche teilt man ein in Flächenstücke a_i , die man als Kräfte auffaßt, und mit denen man erneut mit $H = 1$ das Kräftepolygon konstruiert. Das daraus folgende Seilpolygon mit seiner gestrichelt eingetragenen Schlußlinie gibt die Gestalt der elastischen Linie. Die Bestimmung der Gesamtausschläge verlangt aber noch die Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Lager. Dies geschieht durch Zufügen der Strecken

$$U_a = \frac{R_a}{\kappa_a}, \quad U_b = \frac{R_b}{\kappa_b} \quad 21.9(8)$$

an den Stellen $\xi = 0$ und 1 . Die so entstehenden Punkte verbindet man durch die ausgezogene Schlußlinie. Zwischen ihr und dem Seilpolygon erscheint die Größe $U(\xi)$. Ohne Kreiselwirkung ist sie in den Punkten ξ_i identisch mit dem U_i nach Gl. 21.9(6). Das folgt unmittelbar aus der Bedeutung von U_i . Es ist hier nur nicht über die Einflußfunktion W^* bestimmt worden, sondern durch die Mohrsche Seileckmethode, was aber den Wert U_i nicht verändert. Mit Kreiselwirkung ist U_i die Verallgemeinerung der mit Gl. 21.9(6) eingeführten Größe, die diesen Zusatzeffekt noch berücksichtigt und kann also in diese Gleichung eingesetzt werden.

Nun ist zu fordern, daß U_i dem u_i proportional sei, was aber nur dann zutreffen wird, wenn u_i gerade richtig geschätzt war. Deshalb bestimmt man eine verbesserte Näherung mit $u_i = CU_i$, wobei die Konstante C nach Gesichtspunkten der zeichnerischen Zweckmäßigkeit gewählt werden kann. Damit wird das Verfahren wiederholt. So wird weitergefahren bis das Verhältnis des erhaltenen U_i zum Ausgangswert u_i hinreichend genau für alle i gleich ist. Im allgemeinen ist das spätestens nach der zweiten Wiederholung der Fall. Nach Gl. 21.9(6) ist dann mit

$$\omega_e^2 = \frac{J_0 E_0}{\varrho f_0 l^4} \frac{u_i}{U_i} \quad 21.9(9)$$

die Kreisfrequenz der Eigenschwingung gegeben. Anstatt u_i/U_i — das ja für alle i gleich sein sollte — setzt man zweckmäßig einen über die i gemittelten Wert $(u/U)_m$ ein. Man kann alsdann sogleich eine Formel angeben für die Frequenz $\nu_e = \omega_e/2\pi$, die zugleich die sekundliche kritische Drehzahl ist:

$$\nu_e = \left[\frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{u}{U} \right)_m} \right] \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{E_0 J_0}{\varrho f_0}}. \quad 21.9(10)$$

Man beachte, daß der maßgebende Mittelwert $(u/U)_m$ vor allem durch die Werte im Bereich des größten Ausschlages bestimmt wird. Bei [4] findet sich ein Verfahren, diesen Mittelwert genauer zu bestimmen, doch dürfte sich diese Komplikation kaum lohnen, wenn die Endlösung U_i genügend genau bestimmt wurde.

Bei der Beschreibung des Verfahrens ist stillschweigend vorausgesetzt worden, daß es konvergiere. Das trifft zu für die Schwingung erster Ordnung, nicht aber für die höheren Ordnungen. Würde man $u(\xi)$ für eine höhere Schwingungsordnung schätzen und nun das Verfahren anwenden, so würde es nach einer größeren Zahl von Iterationen wieder zur Grundschwingung konvergieren. In [4] ist gezeigt, wie man bei jedem Iterationsschritt die erste Ordnung wieder eliminieren und so eine Konvergenz nach der zweiten Ordnung herbeiführen kann. Solche Verfahren sind aber umständlich und haben ihre Bedeutung durch das Aufkommen der Computermethoden verloren. Das Verfahren läßt sich auch so ausgestalten, daß Wellen auf mehr als zwei Lagern behandelt werden, wie *Stodola* [3] gezeigt hat. Auch dies ist aber nur mit großem Zeitaufwand möglich und kommt daher heute nicht mehr in Frage.

Abschließend möge hier noch eine einfache Formel hergeleitet werden, die von der Vorstellung des einfachen Laval-Rotors ausgeht. Mit der Federkonstante k der Welle ist die Kreisfrequenz seiner Eigenschwingung

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad 21.9(11)$$

Bei waagrechter Welle wird sich die Masse unter dem Einfluß der Schwere um eine Pfeilhöhe f einsenken, die gegeben ist durch

$$G = mg = kf. \quad 21.9(12)$$

Somit ist $k/m = g/f$, folglich auch

$$\omega_e = \sqrt{\frac{g}{f}}. \quad 21.9(13)$$

Will man f in cm, g in cm/s^2 einsetzen und die kritische Drehzahl n_k in min^{-1} erhalten, so liefert dies

$$n_k = \frac{300}{\sqrt{f}}. \quad 21.9(14)$$

Dies ist die Formel von *Föpppl*, die es gestattet, aus der statischen Durchbiegung mindestens einen Näherungswert der kritischen Drehzahl zu erhalten.

21.10 Berechnung kritischer Drehzahlen nach dem Verfahren der finiten Elemente

Das Aufkommen der Computer hat dazu geführt, daß in zunehmendem Maße der Matrizenkalkül zur Berechnung kritischer Drehzahlen herangezogen wurde. Zunächst stand dabei das Verfahren der *Übertragungsmatrizen* im Vordergrund, vgl. [15–18] und die zusammenfassende Darstellung [19]. Dieses Verfahren arbeitet befriedigend bei völlig starrer, wie auch bei weicher Lagerung. Hingegen entstehen in einem Zwischenbereich — sehr harte, aber nicht vollkommen starre Lagerung — numerische Schwierigkeiten. Man hat daher in neuerer Zeit diese Methode verlassen zugunsten derjenigen der *finiten Elemente*, bei der diese Schwierigkeiten nicht entstehen, vgl. *Spieth* und *Uhrig* [20].

Abb. 21.10.1 a veranschaulicht ein Gedankenmodell des Läufers, wie es zur Behandlung der Aufgabe herangezogen werden kann. Der Rotor wird ersetzt durch ein System von scheibenförmigen Massen, die durch elastische, masselose Stäbe (die finiten Elemente) miteinander verbunden sind. Das Ganze ruht auf einer beliebigen Zahl von Lagern, die starr oder beliebig elastisch sein können. Wiederum ist hier wie im vorangehenden Abschnitt vorausgesetzt, daß die Schwingung entweder zirkular polarisiert sei, oder aber daß zwei aufeinander senkrechtstehende Schwingungsrichtungen bestehen, zwischen denen keine Kopplung existiert, so daß beide Richtungen gleich behandelt werden können (mit verschiedenen Lagerelastizitäten). An der Stelle j sitzt eine Scheibe mit der Masse m_j und dem Massenträgheitsmoment Θ_j . Die Schwingungsamplitude ist dort u_j (bei zirkular

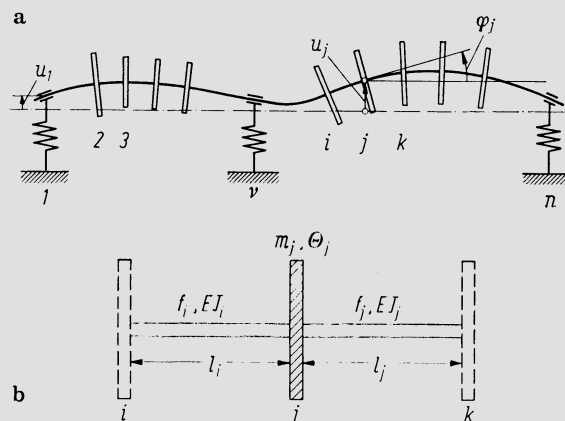


Abb. 21.10.1. a) Ersatzsystem, bestehend aus Scheiben und masselosen elastischen Wellenstücken, elastisch gelagert; b) Scheibe j mit den angrenzenden Wellenstücken

polarisierter Schwingung der Ausschlagradius), die Neigungsamplitude der Welle φ_i . Mit f_j , EJ_j und l_j werden Querschnitt, Biegesteifigkeit und Länge des rechts an die Masse m_j anschließenden Wellenstückes bezeichnet (Abb. 21.10.1 b).

Da unter den gegebenen Voraussetzungen alle Massen in gleicher Phase schwingen, kann die Bewegungsgleichung im d'Alembertschen Sinne als Gleichgewichtsbedingung formuliert werden, wobei alle Werte Amplitudenwerte sind. Die Kraft Q_j und das Drehmoment M_j der Masse m_j auf die Welle sind dann gegeben durch

$$Q_j = m_j \omega^2 u_j, \quad M_j = -\frac{\Theta_j}{2} \varphi_j \omega^2. \quad 21.10(1)$$

Das Minuszeichen in der Gleichung für M_j rührt von der Vorzeichenkonvention her; nach Abb. 21.10.1 wird das Drehmoment im Gegenuhrzeigersinn positiv gerechnet. — Nun muß Gleichgewicht bestehen zwischen Q_j und M_j einerseits und der Summe der Kräfte und

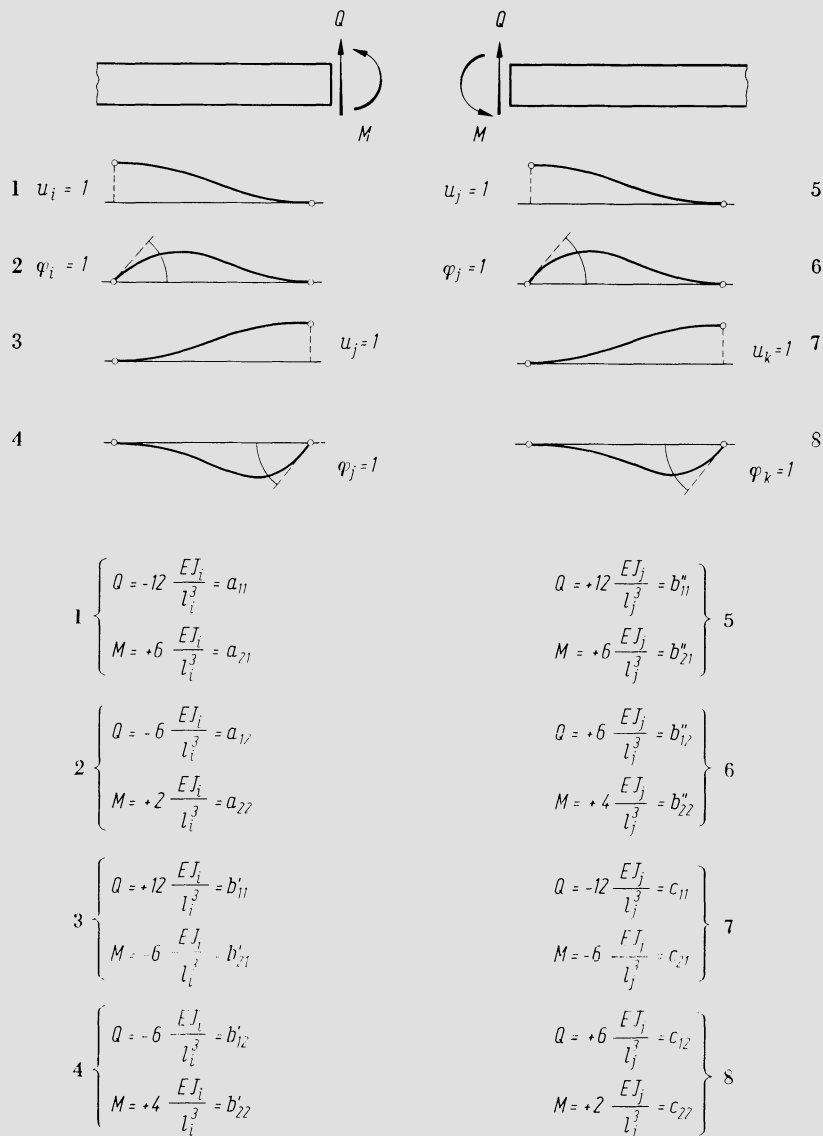


Abb. 21.10.2. Zur Aufstellung des Gleichungssystems der finiten Elemente: Normierte Verformungen und ihnen zugeordnete Querkräfte und Momente

Momente, die von den beiden Wellenstücken mit Index i und j ausgeübt werden, andererseits. Um dies zu erreichen, wird folgendermaßen vorgegangen. Für beide Wellenstücke werden je vier normierte Verformungen betrachtet. Verformungszustand 1 des Wellenstückes i ist z. B. gekennzeichnet durch $u_i = 1, \varphi_i = 0, u_j = 0, \varphi_j = 0$. Dabei sind die in Abb. 21.10.2 angegebenen a_{11} und a_{21} die Kraft und das Moment, die rechts (also an der Stelle j) auf das Wellenstück einwirken müssen, wenn diese Verformung bestehen soll. Ebenso ist Verformungszustand 2 gekennzeichnet durch $u_i = 0, \varphi_i = 1, u_j = 0, \varphi_j = 0$ und a_{12} und a_{22} sind die entsprechenden Kräfte und Momente usw. Es ist nun leicht zu sehen, daß jeder beliebige Verformungszustand des in Abb. 21.10.1 b dargestellten Systems durch eine lineare Kombination der insgesamt acht normierten Verformungszustände nach Abb. 21.10.1 darstellbar ist. Die gesamte Kraft Q_j und das gesamte Moment M_j , das von der Scheibe j auf die beiden Wellenstücke ausgeübt wird, ergibt sich aus der Summation der einzelnen Anteile, deren Superposition den Verformungszustand darstellt. Es ergibt sich somit:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}u_i + a_{12}\varphi_i + (b'_{11} + b''_{11})u_j + (b'_{12} + b''_{12})\varphi_j + c_{11}u_k + c_{12}\varphi_k &= Q_j, \\ a_{21}u_i + a_{22}\varphi_i + (b'_{21} + b''_{21})u_j + (b'_{22} + b''_{22})\varphi_j + c_{21}u_k + c_{22}\varphi_k &= M_j. \end{aligned} \right\} \quad 21.10(2)$$

Wenn man hier noch für Q_j und M_j die Ausdrücke nach Gl. 21.10(1) einsetzt, liegt ein Gleichungspaar vor, das in den Variablen $u_i, \varphi_i, u_j, \varphi_j, u_k, \varphi_k$ homogen ist.

Hier ist vorausgesetzt, daß am Ort des betrachteten Knotenpunktes j eine Scheibe sei. Handelt es sich aber um ein Lager (Punkte 1, v , n im Beispiel Abb. 21.10.1), dann gilt anstelle von 21.10(1)

$$Q_j = -k_j u_j, \quad M_j = 0. \quad 21.10(3)$$

Hier ist k_j die Federkonstante des Lagers, Q_j die Lagerkraft, während das Moment, das vom Lager auf die Welle ausgeübt wird, praktisch Null ist.

Für die praktische Durchführung der Rechnung erweist sich die nachfolgende Umformung als zweckmäßig. Es sei \bar{l} irgendeine Bezugsgröße des Rotors (z. B. die gesamte Lagerdistanz) und \overline{EJ} seine Biegesteifigkeit an irgendeiner ausgezeichneten Stelle. Dann setzt man

$$EJ_i = \alpha_i \overline{EJ}, \quad EJ_j = \alpha_j \overline{EJ}, \quad l_i = \beta_i \bar{l}, \quad l_j = \beta_j \bar{l}, \quad 21.10(4)$$

womit die α und β definiert sind. Weiter wird die Variable φ ersetzt durch

$$\Phi = \bar{l}\varphi, \quad 21.10(5)$$

was den Vorteil ergibt, daß beide Variablen die gleiche Dimension haben. An die Stelle der a, b und c , die aus Abb. 21.10.2 hervorgehen, treten nun die folgenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= -12 \frac{\alpha_i}{\beta_i^3}, & A_{12} &= -6 \frac{\alpha_i}{\beta_i^2}, & A_{21} &= +6 \frac{\alpha_i}{\beta_i^2}, & A_{22} &= +2 \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \\ B_{11} &= +12 \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i^3} + \frac{\alpha_j}{\beta_j^3} \right), & B_{12} &= -6 \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i^2} - \frac{\alpha_j}{\beta_j^2} \right), \\ B_{21} &= -6 \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i^2} - \frac{\alpha_j}{\beta_j^2} \right), & B_{22} &= +4 \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} + \frac{\alpha_j}{\beta_j} \right), \\ C_{11} &= -12 \frac{\alpha_j}{\beta_j^3}, & C_{12} &= +6 \frac{\alpha_j}{\beta_j^2}, & C_{21} &= -6 \frac{\alpha_j}{\beta_j^2}, & C_{22} &= -\frac{\alpha_j}{\beta_j}. \end{aligned} \right\} \quad 21.10(6)$$

Man beachte, daß die B den bisherigen $b' + b''$ entsprechen; so tritt etwa B_{11} an die Stelle von $b'_{11} + b''_{11}$. Schließlich werden noch die folgenden Abkürzungen eingeführt

$$\mu_i \equiv \frac{m_j \bar{l}^3}{EJ}, \quad \vartheta_j \equiv \frac{\Theta_j \bar{l}}{2EJ}, \quad \kappa_j \equiv \frac{k_j \bar{l}^3}{EJ}. \quad 21.10(7)$$

Die Bedeutung der Symbole ist z. T. eine andere als im vorangehenden Abschnitt, da wir uns hier an die Originalarbeit [20] anlehnen. Mit diesen Definitionen geht das Gleichungspaar 21.10(2), wenn in Punkt j eine Scheibe sitzt, über in

$$\left. \begin{aligned} A_{11}u_i + A_{12}\Phi_i + (B_{11} - \mu_j\omega^2)u_j + B_{12}\Phi_j + C_{11}u_k + C_{12}\Phi_k &= 0, \\ A_{21}u_i + A_{22}\Phi_i + B_{21}u_j + (B_{22} + \vartheta_j\omega^2)\Phi_j + C_{21}u_k + C_{22}\Phi_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad 21.10(8)$$

Indem man hier alle Größen durch ihre Definitionsgleichungen ausdrückt, wird man tatsächlich wieder auf das Gleichungspaar 21.10(2) zurückgeführt. Ist der Punkt j ein Lager, so sind einfach die folgenden Änderungen vorzunehmen:

$$(B_{11} - \mu_j\omega^2) \text{ ist zu ersetzen durch } (B_{11} + \kappa_j),$$

$$(B_{22} + \vartheta_j\omega^2) \text{ ist zu ersetzen durch } B_{22}.$$

Die Koeffizienten A, B, C sind natürlich für jeden Punkt j besonders nach dem Schema 21.10(6) zu bilden.

Die u und Φ haben an sich die Dimension einer Länge. Da die Gleichungen aber homogen sind, kann man die u und Φ ebensogut als dimensionslos auffassen, indem man sie auf irgendeine Bezugslänge bezogen denkt, die nicht mit \bar{l} identisch sein muß. Dann sind die Gln. 21.10(8) dimensionslos, was günstige Bedingungen für die numerische Behandlung schafft. Die μ_j und ϑ_j haben die Dimension T^2 , während die κ_j dimensionslos sind. — Im Falle der starren Lagerung degeneriert für den Lagerpunkt die erste Gleichung einfach zu $u_j = 0$, was man ohne weiteres auch verifizieren kann, indem man sie durch κ_j dividiert und dann κ_j gegen ∞ streben läßt.

Für jeden Knoten der gegebenen Welle — 1 bis n im Beispiel Abb. 21.10.1 — existiert nun ein Gleichungspaar des Typs Gl. 21.10(8). Die Zusammenfassung aller dieser Gleichungen führt auf ein homogenes System von $2n$ Gleichungen mit $2n$ Unbekannten u und Φ , das den in Abb. 21.10.3 dargestellten Aufbau hat. Die Gleichungen für $j = 1$ und n enthalten zwei Unbekannte weniger als die anderen, da sie den beiden Wellenden entsprechen. Ist $[S]$ die Koeffizientenmatrix dieses Gesamtgleichungssystems und $\det [S]$ der Wert der aus $[S]$ gebildeten Determinante, so ist zu fordern

$$\det [S] = 0, \quad 21.10(9)$$

wenn das System nichttriviale Lösungen haben soll. Da einzelne der Koeffizienten in $[S]$ die Größe ω^2 enthalten (siehe Gl. 21.10(8)), ist 21.10(9) eine Bestimmungsgleichung für ω , deren Wurzeln $\omega_{e1}, \omega_{e2}, \omega_{e3}, \dots$ genannt seien; sie sind die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen, mithin die kritischen Winkelgeschwindigkeiten. Abb. 21.10.4 zeigt schematisch ein Läufersystem einer Dampfturbogruppe, Abb. 21.10.5 für dieses Läufersystem

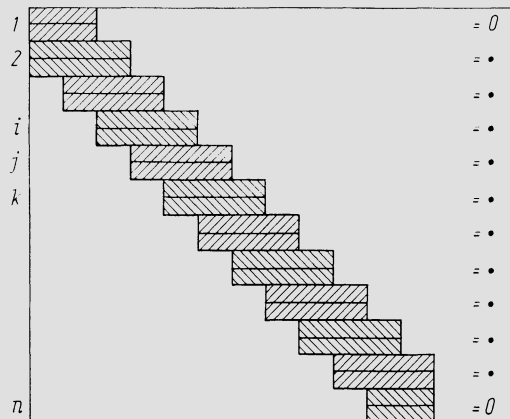


Abb. 21.10.3. Aufbau des Gleichungssystems der finiten Elemente

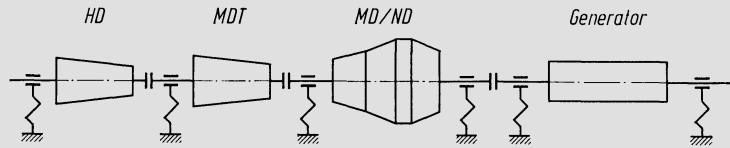


Abb. 21.10.4. Schema des Läufersystems einer Turbogeneratorgruppe

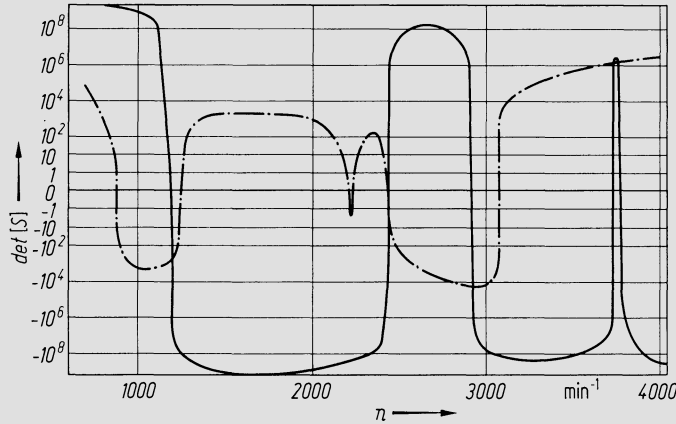


Abb. 21.10.5. Verlauf der Determinanten $\det[S]$ in Funktion der Drehzahl n für das Läufersystem Abb. 21.10.4. Nach Spieth und Uhrig [20]. Ausgezogene Kurve bei starrer, strichpunktierte bei elastischer Lagerung $k = 20 \mu\text{m/t}$

den Verlauf von $\det[S]$ in Funktion der Drehzahl $n = (60/2\pi)\omega$, nach [20]. Die ausgezogene Kurve gilt für starre Lagerung, die strichpunktierte für eine Lagernachgiebigkeit von $k = 20 \mu\text{m/t} = 2,04 \cdot 10^{-9} \text{ m/N}$. Die kritischen Drehzahlen sind gegeben durch die Schnittpunkte dieser Kurven mit der Achse $\Delta = 0$. Man erkennt, daß die Lagernachgiebigkeit die Werte der kritischen Drehzahlen vollständig verschiebt.

Der Ersatz des Rotors durch ein System von Massen und masselose Stäbe ist nicht die einzige Möglichkeit, die man hat. Es können auch Elemente anderer Art herangezogen werden. Beispiele gibt etwa Uhrig [19]. Die Koeffizienten a, b, c erhalten dann einen anderen Aufbau. Die Struktur des Verfahrens und das Vorgehen bleiben aber unverändert. Der Vorteil solcher Varianten besteht darin, daß man u. U. mit weniger Knotenpunkten auskommt, was zu einer Abkürzung der Rechenzeit führen kann.

Ferner läßt sich das Verfahren so ausgestalten, daß zusammengesetzte Systeme behandelt werden können, wie etwa die in Abb. 21.10.6 dargestellte Turbo-Generatorgruppe mit ihrem Stahlfundament. Das Läufersystem ist der Balken 1, Fundamenttisch und Gehäuse bilden den Balken 2. Beide lassen sich behandeln wie oben für den Läufer aufgezeigt. Federn zwischen Balken 1 und 2 repräsentieren die Lager, Federn zwischen Balken 2 und dem starren Betonfundament die Fundamentstützen. Es sei an einer Lagerstelle ν die Federkonstante des Lagers k_ν , während die zugehörige Fundamentstütze μ die Federkonstante k_μ besitze. Wenn die nach oben positiv gerechneten Auslenkungen von Welle und Fundamenttisch u_ν und u_μ sind, gelten anstelle der ersten der Gln. 21.10(3) die folgenden Beziehungen für die Querkräfte Q_ν und Q_μ an den beiden Knotenpunkten.

$$Q_\nu = -k_\nu(u_\nu - u_\mu), \quad Q_\mu = k_\nu(u_\nu - u_\mu) - k_\mu u_\mu. \quad 21.10(10)$$

Die Gleichungssysteme für Balken 1 und 2 sind an sich gleich aufgebaut wie früher, nur enthalten sie dank der Relationen 21.10(10) auch u -Werte des anderen Balkens. Somit bilden beide Systeme zusammen ein gekoppeltes Gleichungssystem. Die Rechnung ist gesondert durchzuführen für die vertikale und die horizontale Richtung, da ja die k -Werte für beide Richtungen im allgemeinen verschieden sein werden.

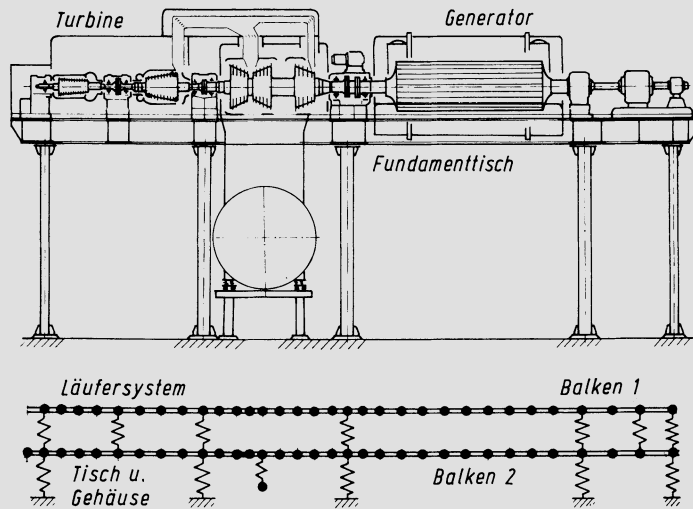


Abb. 21.10.6. Dampfturbo-Generatorgruppe auf Stahlfundament und zugehöriges Ersatzsystem

Die Methode der finiten Elemente eignet sich auch zur Berechnung von *Drehschwingungen*. Diese sind zwar seltener, können aber doch auftreten. Ungleiche Belastung der Phasen eines Drehstromgenerators führt z. B. zu einer periodischen Variation des von ihm aufgenommenen Drehmomentes. Die entsprechenden Resonanzen lassen sich vermeiden, da ja die Maschine nur bei der Synchrondrehzahl belastet wird. Stehen einzelne Wellenstränge durch Zahnradgetriebe miteinander in Verbindung, so rufen die Verzahnungsfehler Drehmomentschwankungen hervor. Diese muß man tiefhalten, indem man eine große Drehelastizität im Zahnradgetriebe vorsieht. Im Gegensatz zu den Biegeschwingungen wirkt hier die Werkstoffhysterese stets dämpfend.

Abb. 21.10.7a zeigt die Anordnung eines Wellensystems, das aus Scheiben mit den Massenträgheitsmomenten Θ_j und Wellen mit den Längen l_j und den polaren Trägheitsmomenten J_{pj} gebildet ist. Mit G als Gleitmodul ist dann die Torsionssteifigkeit des Wellenstückes l_j

$$T_j \equiv \frac{GJ_{pj}}{l_j} . \tag{21.10(11)}$$

Es sei weiter γ_j die Winkelamplitude der Drehschwingung an der Stelle der Masse j . Wenn nun M_i die Amplitude des Momentes ist, das von links auf die Scheibe j ausgeübt wird, lautet die Bewegungsgleichung dieser Scheibe

$$M_i - M_j = \omega_e^2 \Theta_j \gamma_j , \tag{21.10(12)}$$

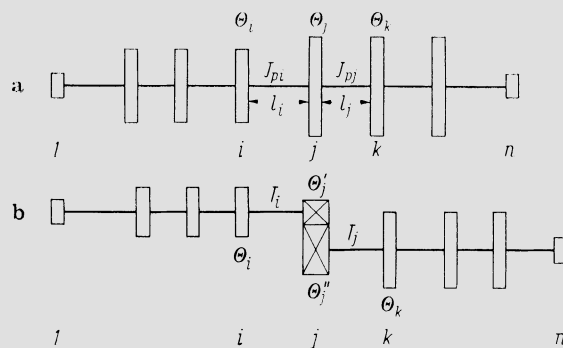


Abb. 21.10.7. Zur Behandlung der Drehschwingungen. a) Einfache Welle; b) zwei Wellen durch Getriebe verbunden

da ja $\omega_e^2 \gamma_j$ der Amplitudenwert von $\ddot{\gamma}_j$ ist. Nun ist aber

$$T_i(\gamma_j - \gamma_i) = M_i, \quad T_j(\gamma_k - \gamma_j) = M_j, \quad 21.10(13)$$

folglich durch Einsetzen dieser Ausdrücke in 21.10(12)

$$-T_i \gamma_i + (T_i + T_j - \omega_e^2 \Theta_j) \gamma_j - T_j \gamma_k = 0. \quad 21.10(14)$$

Für jeden Knotenpunkt j gilt eine solche Gleichung, die drei Unbekannte enthält; nur die Gleichungen für die beiden Wellenenden enthalten nur zwei Unbekannte. Alle diese Gleichungen zusammen bilden ein homogenes System, das einen zu der Darstellung Abb. 21.10.3 analogen Aufbau hat, nur daß hier nur eine Gleichung pro Knoten auftritt, dort zwei.

Sind zwei Wellen gemäß Abb. 21.10.7b durch ein Zahnradgetriebe verbunden, so ist das Vorgehen folgendermaßen abzuwandeln. Es seien Θ'_j und Θ''_j die Massenträgheitsmomente der beiden Zahnräder, r' und r'' ihre Teilkreisradien, γ'_j und γ''_j die Amplituden ihrer Winkelausschläge, und F sei die Amplitude der Umfangskraft. Die Bewegungsgleichungen der beiden Zahnräder lauten dann in Analogie zu 21.10(12)

$$M_i - Fr' = \omega_e^2 \Theta'_j \gamma'_j, \quad Fr'' - M_j = \omega_e^2 \Theta''_j \gamma''_j. \quad 21.10(15)$$

Wenn man hier M_j und M_i analog zu 21.10(13) ausdrückt und einsetzt, erhält man

$$T_i(\gamma'_j - \gamma_i) - Fr' = \omega_e^2 \Theta'_j \gamma'_j, \quad Fr'' - T_j(\gamma_k - \gamma''_j) = \omega_e^2 \Theta''_j \gamma''_j. \quad 21.10(16)$$

Dem ist noch die Beziehung

$$\gamma'_j r' = \gamma''_j r'' \quad 21.10(17)$$

beizufügen. Aus den Gln. 21.10(16) und (17) lassen sich F und γ''_j eliminieren. Dann liegt wieder eine einzige lineare homogene Gleichung in γ_i , γ'_j und γ_k vor. Bei der Bewegungsgleichung für den Knoten k ist lediglich γ''_j durch $\gamma'_j r' / r''$ zu ersetzen. Damit wird die mathematische Struktur des Problems genau gleich wie bei der einfachen Welle, und die Lösung erfolgt gleich wie dort: Man hat die von ω_e abhängige Determinante der Koeffizientenmatrix des Gesamtgleichungssystems Null zu setzen und erhält mit den so bestimmten Eigenwerten ω_e die Kreisfrequenzen der Torsionsschwingungen des Systems.

21.11 Theorie der Stabilität und der Ausschläge schwingender Läufer

Mit dem Aufkommen der Computer sind Berechnungsverfahren in größerer Zahl entwickelt worden, die es erlauben, bei grundsätzlich beliebiger Geometrie und Lagerung die Laufstabilität zu untersuchen und Aussagen über die zu erwartenden Schwingungsausschläge zu gewinnen, vgl. [21–27]. Diese Theorien führen, obwohl formal mathematisch verschieden, wesentlich auf die gleichen Resultate, unterscheiden sich aber in Rechenaufwand und Leistungsfähigkeit. Die neuen Theorien [24–27], die sich auf das Verfahren der finiten Elemente stützen, sind in dieser Beziehung am günstigsten. Die nachfolgende Darstellung schließt unmittelbar an die Ausführungen des vorangehenden Abschnittes an, die nur einer entsprechenden Verallgemeinerung bedürfen.

Da die Lagerung im allgemeinen anisotrop sein wird, wird ein Koordinatensystem x, y, z nach Abb. 21.8.1 verwendet und auch die in jenem Abschnitt hergeleiteten Beziehungen können übernommen werden. Die Projektion der Welle auf die xz -Ebene entspricht der Abb. 21.10.1; am Knotenpunkt j ist die Auslenkung u_j und die Neigung φ_j . Die Projektion auf die yz -Ebene hat eine analoge Gestalt, wobei Auslenkung und Neigung hier mit v_j und ψ_j bezeichnet werden mögen. Abweichend von Abschn. 21.10 sollen diese Symbole hier nicht Amplitudenwerte, sondern *Momentanwerte* bedeuten. Die Gln. 21.10(2) gelten aber trotzdem, sobald man auch unter Q_j und M_j Momentanwerte versteht, denn diese Gleichungen beschreiben ja lediglich das elastische Verhalten der Welle. Es sind zwei Paare solcher Gleichungen zu formulieren, für die Richtungen x und y . Wenn man

noch setzt $b'_{11} + b''_{11} = b_{11}$, $b'_{12} + b''_{12} = b_{12}$ usw., entsteht so folgende Gleichungsgruppe:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}u_i + a_{12}\varphi_i + b_{11}u_j + b_{12}\varphi_j + c_{11}u_k + c_{12}\varphi_k &= Q_{xj}, \\ a_{21}u_i + a_{22}\varphi_i + b_{21}u_j + b_{22}\varphi_j + c_{21}u_k + c_{22}\varphi_k &= M_{yj}, \\ a_{11}v_i + a_{12}\psi_i + b_{11}v_j + b_{12}\psi_j + c_{11}v_k + c_{12}\psi_k &= Q_{yj}, \\ a_{21}v_i + a_{22}\psi_i + b_{21}v_j + b_{22}\psi_j + c_{21}v_k + c_{22}\psi_k &= M_{xj}. \end{aligned} \right\} \quad 21.11(1)$$

Ist der betrachtete Knoten j eine *Scheibe*, so lauten die Ausdrücke für die beiden Komponenten der Querkraft im unwuchtfreien Falle

$$Q_{xj} = -m_j\ddot{u}_j - q_jv_j, \quad Q_{yj} = -m_j\ddot{v}_j + q_ju_j. \quad 21.11(2)$$

Hier ist jeweils das erste Glied rechts die d'Alembertsche Trägheitskraft. Das zweite ist die Spalterregungskraft, wie sie durch den Ansatz Gl. 21.6(2) gegeben ist. Es ist also q_j der Spalterregungskoeffizient an der Stelle j . — Die Momente M_{xj} und M_{yj} (wobei die Indices x und y die Richtung des Momentenvektors andeuten) ergeben sich nach den Gln. 21.8(2), (4), (2'), (4') zu

$$M_{yj} = -\Theta_j\omega\dot{\psi}_j - \frac{\Theta_j}{2}\ddot{\varphi}_j, \quad M_{xj} = +\Theta_j\omega\dot{\varphi}_j - \frac{\Theta_j}{2}\ddot{\psi}_j. \quad 21.11(3)$$

Bezüglich der Vorzeichen beachte man das folgende. Die beiden Projektionen der Wellenachse sind jeweils von der Seite zu betrachten, bei der eine Vergrößerung der Neigung eine Drehung der Tangente im Gegenuhrzeigersinn bedeutet, und die Momente sind, so betrachtet, im Gegenuhrzeigersinn positiv.

Ist der Knoten j ein *Lager*, so lauten die entsprechenden Gleichungen unter Verwendung des Ansatzes Gl. 21.6(1)

$$\left. \begin{aligned} Q_{xj} &= -k_{xx}u_j - k_{xy}v_j - b_{xx}\dot{u}_j - b_{xy}\dot{v}_j, \\ Q_{yj} &= -k_{yx}u_j - k_{yy}v_j - b_{yx}\dot{u}_j - b_{yy}\dot{v}_j. \end{aligned} \right\} \quad 21.11(4)$$

$$M_{yj} = 0, \quad M_{xj} = 0. \quad 21.11(5)$$

Hier sind die Indices 1 und 2 der Koeffizienten k und b durch x und y ersetzt, um Verwechslungen mit den anderen hier auftretenden Indices zu vermeiden. Der Einfachheit halber ist bei den Koeffizienten der Gln. 21.11(4) der Index j , der auf das *betreffende* Lager verweist, weggelassen worden, wie ja auch die Koeffizienten in den Gln. 21.11(1) für jedes j besonders zu bilden sind.

Die Gln. 21.11(4) setzen voraus, daß die Lagerschalen starr gehalten seien. Trifft dies nicht zu, sondern ruhen sie etwa auf einem nachgiebigen Fundament, so sind die Ansätze sinngemäß zu verallgemeinern, wobei wie in 21.10(10), Koordinatendifferenzen an die Stelle der Koordinaten treten.

Nun sind in der Gleichungsgruppe 21.11(1) die rechts stehenden Querkräfte und Momente durch die Ausdrücke nach den Gln. 21.11(2) und (3) bzw. (4) und (5) zu ersetzen, worauf alle Glieder auf die linke Seite des Gleichheitszeichens genommen werden. Weiter ist die bereits unter 21.10 angegebene Transformation durchzuführen, d. h. man setzt

$$\Phi_j = \bar{l}\varphi_j, \quad \Psi_j = \bar{l}\psi_j \quad 21.11(6)$$

mit \bar{l} als Bezugsgröße wie unter 21.10. Zu den dort angegebenen Gln. 21.10(4), (6) und (7) ist noch beizufügen

$$\tilde{q}_j \equiv q_j \frac{\bar{l}^3}{EJ}, \quad 21.11(7)$$

$$\tilde{k}_{xx} \equiv k_{xx} \frac{\bar{l}^3}{EJ}, \quad \text{analog } \tilde{k}_{xy}, \tilde{k}_{yx}, \tilde{k}_{yy}, \quad 21.11(8)$$

$$\tilde{b}_{xx} \equiv b_{xx} \frac{\bar{l}^2}{EJ}, \quad \text{analog } \tilde{b}_{xy}, \tilde{b}_{yx}, \tilde{b}_{yy}. \quad 21.11(9)$$

Die Gleichungsgruppe 21.11(1) geht dann, wenn j einer *Scheibe* entspricht, in die Form

$$\left. \begin{aligned} A_{11}u_i + A_{12}\Phi_i + B_{11}u_j + B_{12}\Phi_j + C_{11}u_k + C_{12}\Phi_k + \mu_j\ddot{u}_i + \tilde{q}_jv_j &= 0, \\ A_{21}u_i + A_{22}\Phi_i + B_{21}u_j + B_{22}\Phi_j + C_{21}u_k + C_{22}\Phi_k + \vartheta_j\dot{\Phi}_j + 2\vartheta_j\omega\dot{\Psi}_j &= 0, \\ A_{11}v_i + A_{12}\Psi_i + B_{11}v_j + B_{12}\Psi_j + C_{11}v_k + C_{12}\Psi_k + \mu_j\ddot{v}_i - \tilde{q}_ju_j &= 0, \\ A_{21}v_i + A_{22}\Psi_i + B_{21}v_j + B_{22}\Psi_j + C_{21}v_k + C_{22}\Psi_k + \vartheta_j\dot{\Psi}_j - 2\vartheta_j\omega\dot{\Phi}_j &= 0 \end{aligned} \right\} 21.11(10)$$

über. Ist der Knoten j ein *Lager*, so lautet sie

$$\left. \begin{aligned} A_{11}u_i + A_{12}\Phi_i + B_{11}u_j + B_{12}\Phi_j + C_{11}u_k + C_{12}\Phi_k + \\ + \tilde{k}_{xx}u_j + \tilde{k}_{xy}v_j + \tilde{b}_{xx}\dot{u}_i + \tilde{b}_{xy}\dot{v}_i &= 0, \\ A_{21}u_i + A_{22}\Phi_i + B_{21}u_j + B_{22}\Phi_j + C_{21}u_k + C_{22}\Phi_k &= 0, \\ A_{11}v_i + A_{12}\Psi_i + B_{11}v_j + B_{12}\Psi_j + C_{11}v_k + C_{12}\Psi_k + \\ + \tilde{k}_{yx}u_j + \tilde{k}_{yy}v_j + \tilde{b}_{yx}\dot{u}_i + \tilde{b}_{yy}\dot{v}_i &= 0, \\ A_{21}v_i + A_{22}\Psi_i + B_{21}v_j + B_{22}\Psi_j + C_{21}v_k + C_{22}\Psi_k &= 0. \end{aligned} \right\} 21.11(11)$$

Für jeden Knoten gilt nun eine Gleichungsgruppe der Form 21.11(10) oder (11), wobei am linken Wellenende die Glieder mit Index i , am rechten diejenigen mit Index k wegfällen. So entsteht ein Gesamtgleichungssystem, das nach den Variablen und ihren Ableitungen geordnet und als Matrixgleichung geschrieben werden kann. Es bezeichne $\{u\}$ die Kolonnenmatrix, die von oben nach unten die folgenden Glieder enthält: $u_1, \Phi_1, v_1, \Psi_1, u_2, \Phi_2, \dots, v_n, \Psi_n$. Ebenso sei $\{\dot{u}\}$ die Kolonnenmatrix $\dot{u}_1 \dots \dot{\Psi}_n$ und $\{\ddot{u}\}$ die Kolonnenmatrix $\ddot{u}_1 \dots \ddot{\Psi}_n$. Dann kann das genannte Gesamtgleichungssystem in der Form

$$[M]\{\ddot{u}\} + [B]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad 21.11(12)$$

geschrieben werden. Die Glieder der Matrizen $[M]$, $[B]$, $[K]$ sind die entsprechenden Koeffizienten der Gleichungsgruppen des Typs 21.11(10) und (11). Gl. 21.11(12) repräsentiert ein homogenes System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Der Lösungsansatz lautet

$$\{u\} = \{\hat{u}\} \exp(\lambda t), \quad 21.11(13)$$

wo $\{\hat{u}\}$ die $\{u\}$ -Matrix in $t = 0$ ist. Da

$$\{\dot{u}\} = \lambda\{\hat{u}\} \exp(\lambda t), \quad \{\ddot{u}\} = \lambda^2\{\hat{u}\} \exp(\lambda t), \quad 21.11(14)$$

ergibt sich durch Einsetzen in Gl. 21.11(12)

$$([M]\lambda^2 + [B]\lambda + [K])\{\hat{u}\} = 0. \quad 21.11(15)$$

Dies ist das *charakteristische Gleichungssystem*, ein homogenes System linearer Bestimmungsgleichungen für die Glieder von $\{\hat{u}\}$. Es ist das genaue Analogon des Gleichungssystems, das unter 21.10 erhalten wurde. Wie dort, ist die Existenz einer nichttrivialen Lösung an die Bedingung des Verschwindens der Koeffizientendeterminante gebunden, d. h. es ist zu fordern

$$\det([M]\lambda^2 + [B]\lambda + [K]) = 0. \quad 21.11(16)$$

Diese Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte λ hat die Lösungen

$$\lambda_1 = \delta_1 + i\omega_{e1}, \quad \lambda_2 = \delta_2 + i\omega_{e2}, \dots, \lambda_v = \delta_v + i\omega_{ev}, \dots \quad 21.11(17)$$

Sie sind im allgemeinen komplex, was mit der Struktur des Gleichungssystems zusammenhängt, das erste Ableitungen enthält (im Gegensatz zu der Situation unter 21.10). Auch die Elemente von $\{\hat{u}\}$, die sich als Lösung von 21.11(15) ergeben, sind komplex. Daß

damit doch eine physikalisch reelle Lösung gegeben ist, erkennt man wie folgt. Infolge des homogenen Charakters des Gleichungssystems wird es zugleich mit einer komplexen Lösung auch durch die ihr konjugiert komplexe erfüllt. Die Überlagerung beider Lösungen ist aber reell; daher genügt es, den Realteil einer komplexen Lösung zu betrachten.

Die Lösungen des homogenen Gleichungssystems beschreiben *Eigenschwingungen* der Welle, wie sie durch eine einmalige äußere Störung eingeleitet werden können. Die ω_{ev} sind die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen, mithin auch die kritischen Winkelgeschwindigkeiten, während die δ_v den weiteren zeitlichen Verlauf der Amplituden der einmal angestoßenen Schwingungen beschreiben. Diese klingen ab, wenn $\delta_v < 0$. *Stabilität* ist demnach dann gewährleistet, wenn $\delta_v < 0$ für alle v . Über Verfahren zur Auffindung der Eigenwerte λ_v , vgl. etwa *Zurmühl* [28]. Einen speziell für Turborotoren geeigneten Algorithmus entwickelt *Nordmann* [29]. Abb. 21.11.1 zeigt Rechenergebnisse nach [27] für einen Dampfturbinenläufer auf sieben Dreikeillagern. Da die Lagerkonstanten, die in $[B]$ und $[K]$ eingehen, Funktionen der Winkelgeschwindigkeit sind, muß die Eigenwertberechnung nicht nur einmal durchgeführt werden, sondern in Funktion von ω , was ein Ergebnis liefert wie in Abb. 21.11.1 dargestellt. Wo $\omega = \omega_{ev}$, liegen kritische Drehzahlen, während der instabile Bereich dort beginnt, wo eines der δ_v — hier δ_1 — positiv wird.

Die Theorie läßt sich so ausgestalten, daß auch unwuchterzwungene Schwingungsausschläge bestimmt werden können. Es weise z.B. die Masse m_j gegenüber der geometrischen Drehachse eine Exzentrizität ε_j auf. An die Stelle der Gln. 21.11(2) tritt dann

$$\left. \begin{aligned} Q_{xj} &= -m_j [\ddot{u}_j - (\varepsilon'_j \cos \omega t + \varepsilon''_j \sin \omega t)] - q_j v_j, \\ Q_{yj} &= -m_j [v_j + (\varepsilon'_j \sin \omega t - \varepsilon''_j \cos \omega t)] + q_j u_j. \end{aligned} \right\} \quad 21.11(2')$$

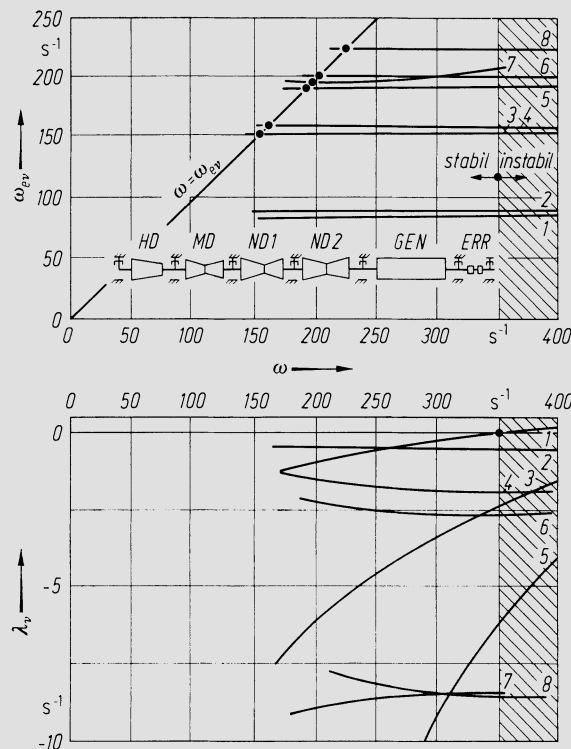


Abb. 21.11.1. Eigenkreisfrequenzen ω_{ev} und Anfachungskoeffizienten λ_v eines Rotorsystems in Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω . Nach *Nordmann* [27]

Hier ist $\varepsilon_j = \sqrt{\varepsilon_j'^2 + \varepsilon_j''^2}$ und durch ε_j' und ε_j'' wird die Winkellage der Exzentrizität bestimmt. Wenn man diese Störungsglieder mitnimmt und sogleich zur komplexen Schreibweise übergeht, erscheinen in der Gleichungsgruppe 21.11(10) rechts die folgenden Glieder:

$$\begin{aligned} \mu_j \operatorname{Re} \{ \varepsilon_j \exp [i(\omega t - \varphi_j)] \}, & \quad 0, \\ \mu_j \operatorname{Re} \left\{ \varepsilon_j \exp \left[i \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi_j \right) \right] \right\}, & \quad 0. \end{aligned}$$

Die Matrixgleichung 21.11(12) nimmt dann die Form

$$[M]\{\ddot{u}\} + [B]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \operatorname{Re} [\{F\} \exp (i\omega t)] \quad 21.11(18)$$

an, wobei die Kolonnenmatrix $\{F\}$ alle Störungsglieder zusammenfaßt. Die Partikulärlösung dieser Gleichung gewinnt man durch den Ansatz

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{u_c\} \cos \omega t + \{u_s\} \sin \omega t = \\ &= \operatorname{Re} (\{u_c\} - i\{u_s\}) (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \operatorname{Re} [\{U\} \exp (i\omega t)]. \end{aligned} \quad 21.11(19)$$

Ableiten und Einsetzen in Gl. 21.11(18) liefert

$$([K] - \omega^2[M] + i\omega[B])\{U\} = \{F\}. \quad 21.11(20)$$

Dieses Gleichungssystem kann nach einem komplexen Gauß-Algorithmus gelöst werden. Man erhält schließlich die sämtlichen Ausschläge, die in $\{U\}$ zusammengefaßt sind. Dies kann nach Bedarf für jedes ω durchgeführt werden, insbesondere auch für die kritischen Winkelgeschwindigkeiten, wo Maxima der Ausschläge zu erwarten sind.

Die Durchführung dieser Rechnung geht aus von Größe und Lage der Exzentrizitäten, die ja in $\{F\}$ zusammengefaßt sind. Da diese aber im voraus nicht bekannt sein werden, wird man typische Annahmen treffen und verifizieren, ob die Ausschläge in zulässigen Grenzen bleiben. Abb. 21.11.2 zeigt ein solches Rechenergebnis nach [27] für den gleichen

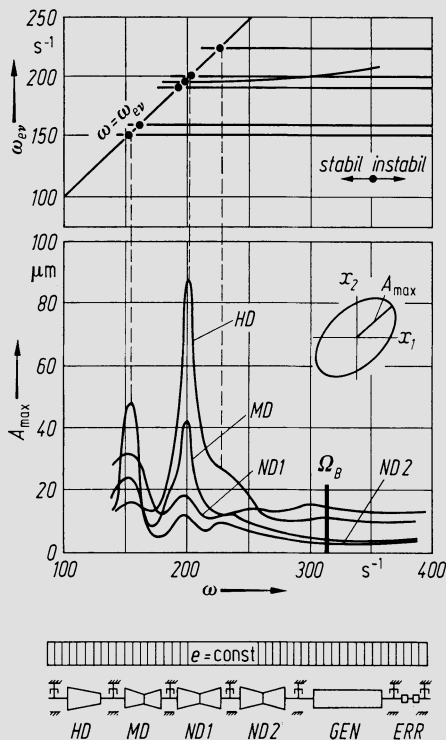


Abb. 21.11.2. Größte Rotorausschläge A_{max} in Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω für das gleiche Läufersystem wie Abb. 21.11.1. Nach Nordmann [27]

Läufer wie Abb. 21.11.1. Die Überlagerung der Bewegung in x - und y -Richtung liefert dabei im allgemeinen elliptische Bahnen der Wellenzentren an den verschiedenen Punkten j . Dabei ergibt die Rechnung von selbst, ob die Ellipse im Gleichlauf oder im Gegenlauf durchlaufen wird, wie ja auch Aufspaltungen kritischer Drehzahlen infolge der Anisotropie der Lagerung durch die Bestimmung der Eigenwerte von selbst erhalten werden.

Bei der Durchführung solcher Rechnungen erhebt sich die Frage, bis zu welcher Eigenfrequenz ω_{ev} sie ausgedehnt werden sollen. Mathematisch hängt die Zahl der existierenden Ordnungen ab von der Zahl der Einzelmassen, d. h. also von der Art der Diskretisierung. Prinzipiell könnte nun irgendeines der δ_v positiv werden, was Labilität bedeuten würde. Tatsächlich wird es aber nicht nötig sein, sehr hohe Schwingungsordnungen einzubeziehen. Die Rechnung vernachlässigt die Werkstoffdämpfung. Diese kann notfalls summarisch in die Spalterregungskoeffizienten eingeschlossen werden. Bei Frequenzen, die über der Drehzahl liegen, wirkt sie immer stabilisierend und dies mit steigender Frequenz immer mehr. Deshalb treten sehr hochfrequente Schwingungen faktisch nicht auf.

McGuire [30] beschreibt z. B. die dynamischen Läuferuntersuchungen, wie sie in der Praxis beim Neuentwurf mehrgewählter Maschinen durchgeführt werden. Zunächst wird der Läufer jedes einzelnen Gehäuses für sich vereinfachend als unabhängig und zweifach gelagert betrachtet und die Stabilität ohne Spalterregung untersucht, womit das Verhalten der Lager in Erscheinung tritt. Dann wird noch die Spalterregung mitberücksichtigt, mindestens dort, wo dieser Effekt wesentlich ist (hohe Dichte des Fluids, schlanke Rotoren). Gegebenenfalls wird die Lagerkonstruktion geändert, so daß ein befriedigendes Ergebnis erzielt wird. Ist dies erreicht, so darf erwartet werden, daß bei der nachfolgenden Behandlung des mehrfach gelagerten Gesamtsystems ein günstiges Ergebnis herauskommen wird. Dabei können Rechnungen mit und ohne Einbezug eines elastischen Fundamentes durchgeführt werden, was wesentlich sein kann, da die Nachgiebigkeit des Fundamentes die Wirksamkeit der Ölfilmdämpfung herabsetzt. Bei der definitiven Berechnung werden auch Ausschläge bestimmt.

An sich sind unsere heutigen Rechenverfahren außerordentlich leistungsfähig. Trotzdem scheinen die Ergebnisse noch nicht in allen Fällen zu befriedigen, wobei allerdings die theoretische Beurteilung der Stabilität im allgemeinen eher zu ungünstig ausfällt. Die Unzulänglichkeit kann aber kaum in der Struktur der Theorie selbst liegen, sondern sie ist eher in der Ungenauigkeit der Eingaben zu suchen, welche die Spalterregung und das Verhalten der Lager beschreiben. Beachtet man etwa den schleifenden Schnitt der Kurve $\nu = 1$, Abb. 21.11.2, mit der Achse $\delta_v = 0$, so wird verständlich, daß selbst verhältnismäßig kleine Fehler der Eingaben die Lage der rechnerischen Stabilitätsgrenze wesentlich verschieben können.

Treten an ausgeführten Maschinen Schwierigkeiten auf, so sind die Änderung der Lagerkonstruktion und der Lagerspiele die wichtigsten Mittel zur Abhilfe. Dabei haben Maßnahmen, welche die Stabilitätsgrenze nach oben verschieben die Tendenz, die Resonanzausschläge zu vergrößern, so daß hier ein optimaler Mittelweg gefunden werden muß. Der unter 21.5 bereits beschriebene Weg, Lager dämpfend zu betten, gewinnt im Zusammenhang mit dieser Situation an Bedeutung.

21.12 Die Spalterregung

Spalterregung entsteht durch die zwei in Abschn. 21.5 beschriebenen Mechanismen, Variation der Umfangskraft infolge der Spaltverluste und asymmetrische Druckverteilung über Deckbändern und in Labyrinthdichtungen, vgl. insbes. Abb. 21.5.3. Es sind darüber in neuerer Zeit Untersuchungen in größerer Zahl durchgeführt worden, etwa [10–14, 31–35]. Der Ansatz Gl. 21.6(2), der auch in Gl. 21.11(2) übernommen wurde, ist der einfachst mögliche: Er ist linear und enthält nur einen einzigen Koeffizienten, den labilisie-

renden Koppelkoeffizienten η . In Wirklichkeit kommen noch weitere Effekte hinzu, wie strömungsbedingte Momente infolge der Schiefstellung der Läuferscheiben und ebenso Kräfte und Momente, die den Verformungsgeschwindigkeiten proportional sind, vgl. etwa [32–35]. Es wird aber aus diesen Untersuchungen deutlich, daß nur der Koppelkoeffizient η einen maßgebenden Einfluß auf das Stabilitätsverhalten ausübt. Koeffizienten, die Kraft und Ausschlag in gleicher Koordinatenrichtung verbinden, sind sehr klein gegenüber den entsprechenden elastischen Koeffizienten. Momentkoeffizienten treten in ihrer Größenordnung stark zurück. Die den Deformationsgeschwindigkeiten proportionalen Kräfte sind schon deshalb gering, weil diese Geschwindigkeiten um Zehnerpotenzen tiefer liegen als die Strömungsgeschwindigkeiten. Deshalb kann der einfache Ansatz 21.6(2) als genügend betrachtet werden.

Es möge zunächst die *Spalterregung durch Variation der Umfangskraft* behandelt werden, ein Mechanismus, der erstmals durch *Thomas* [36] angegeben wurde. Abb. 21.12.1 stellt die Situation dar. In der gezeigten Lage wird die Variation der Spaltweite δ beschrieben durch

$$\delta = \delta_0 - e \cos \varphi, \quad 21.12(1)$$

wo δ_0 die mittlere Spaltweite, e die Exzentrizität des Läufers bedeuten. Einem Sektor mit Zentriwinkel $d\varphi$ an der Stelle φ entspricht eine Tangentialkraft dT , die positiv gerechnet werde, wenn sie in die Richtung der Raddrehung weist, also im Falle der Turbine. Die für die Spalterregung maßgebende Querkraft dQ ist

$$dQ = dT \cos \varphi. \quad 21.12(2)$$

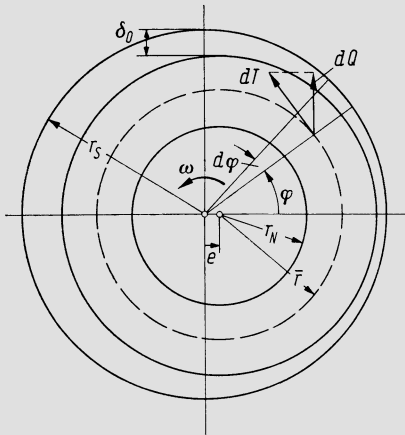


Abb. 21.12.1. Zur Herleitung der Formeln für Spalterregung durch Umfangskräfte

Die Tangentialkraft dT muß im Euler-Radius \bar{r} angreifend gedacht werden, wo die Umfangsgeschwindigkeit $\bar{u} = \omega \bar{r}$ beträgt. Der auf $d\varphi$ entfallende Radleistungsanteil dP ist

$$dP = \bar{u} dT, \quad 21.12(3)$$

womit

$$dQ = \frac{dP}{\bar{u}} \cos \varphi. \quad 21.12(4)$$

Für die hier nötige Genauigkeit genügt es, den Euler-Radius durch den mittleren Radius r_m zu ersetzen.

Bei der nachfolgenden Herleitung möge nun stets links die Gleichung für die Turbine, rechts diejenige für den Verdichter geschrieben werden. Es sei Δh_s die isentrope Enthalpieänderung in der Stufe, $\psi = \Delta h_s / \bar{u}^2$ die ihr entsprechende Druckzahl, ρc_z der Mittelwert der axialen Massenstromdichte im Sektor $d\varphi$ und η der Wirkungsgrad, der Δh_s mit dem

spezifischen Arbeitsumsatz verknüpft. Dann gilt

$$dP = \frac{r_S^2 - r_N^2}{2} \rho c_z \psi \bar{u}^2 \eta d\varphi, \quad dP = - \frac{r_S^2 - r_N^2}{2} \rho c_z \frac{\psi \bar{u}^2}{\eta} d\varphi. \quad 21.12(5)$$

Für den Wirkungsgrad werde gesetzt

$$\eta = \eta_0 - \Delta\zeta_{sp}, \quad \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_0} + \Delta\zeta_{sp}, \quad 21.12(6)$$

wobei $\Delta\zeta_{sp}$ die Abweichung des Spaltverlustes gegenüber dem Wert ist, den er bei $\delta = \delta_0$ annimmt. Es läßt sich mithin auch schreiben

$$\eta = \eta_0 - \frac{d\zeta_{sp}}{d\delta} (\delta - \delta_0), \quad \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_0} + \frac{d\zeta_{sp}}{d\delta} (\delta - \delta_0), \quad 21.12(7)$$

oder mit 21.12(1)

$$\eta = \eta_0 + \frac{d\zeta_{sp}}{d\delta} e \cos \varphi, \quad \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_0} - \frac{d\zeta_{sp}}{d\delta} e \cos \varphi. \quad 21.12(8)$$

Wenn man dies noch in 21.12(5) einsetzt und 21.12(4) beachtet, folgt

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{r_S^2 - r_N^2}{2} \rho c_z \psi \bar{u} \left[\eta_0 + \frac{d\zeta_{sp}}{d\delta} e \cos \varphi \right] \cos \varphi d\varphi && \text{Turbine,} \\ dQ &= - \frac{r_S^2 - r_N^2}{2} \rho c_z \psi \bar{u} \left[\frac{1}{\eta_0} - \frac{d\zeta_{sp}}{d\delta} e \cos \varphi \right] \cos \varphi d\varphi && \text{Verdichter.} \end{aligned} \quad 21.12(9)$$

Es ist nun wesentlich zu erkennen, daß die Integration, die von hier aus Q liefert nicht in willkürfreier Weise möglich ist. Die Variation der Spaltweite nach Gl. 21.12(1) wird nämlich im allgemeinen zur Folge haben, daß auch die Massenstromdichte ρc_z und selbst der Druckumsatz, also ψ , Funktion von φ werden, doch kann eine allgemeingültige Angabe darüber nicht gemacht werden. Man hat üblicherweise, ohne den einschränkenden Charakter dieser Annahme zu beachten, nur η als Funktion von φ eingeführt. Einzig *Piltz* [34] macht hier eine genauere Untersuchung, kommt aber auch nicht ohne willkürliche Annahme aus. — Es gibt zwei Extremannahmen, welche die Integration der Gl. 21.12(9) sogleich ermöglichen. Die eine ist die klassische Annahme, wonach nur η Funktion von φ ist. Die andere ist eine sinnvolle Näherung bei Schaufelungen mit Deckbändern und Labyrinthdichtungen. Dort kann man von der Vorstellung ausgehen, der Spaltverlust entstehe lediglich dadurch, daß ein Teil des Fluids die Schaufelung umgeht. In der Schaufelung selbst wird dann längs des Umfanges überall gleich viel Arbeit umgesetzt. Im Rahmen des hier angegebenen Formalismus bedeutet dies im Falle der Turbine $\rho c_z \eta = \text{const}$, und da auch $\psi = \text{const}$ vorausgesetzt wird, liefert die Integration $Q = 0$.

Die klassische Annahme, daß nur η von φ abhängt, führt nur im Falle der *Turbine* auf ein sinnvolles Ergebnis. Die Schreibweise läßt sich dann vereinfachen, da

$$\frac{r_S^2 - r_N^2}{2} \rho c_z d\varphi = \frac{\dot{m}}{2\pi} d\varphi,$$

wo \dot{m} der gesamte Massenstrom der Stufe ist. Dann liefert die Integration von 0 bis 2π

$$Q = \frac{\dot{m} \psi \bar{u} e}{2} \frac{d\zeta_{sp}}{d\delta}, \quad 21.12(10)$$

somit wird also schließlich der gesuchte Koeffizient $q = Q/e$

$$q = \frac{\dot{m} \psi \bar{u}}{2} \frac{d\zeta_{sp}}{d\delta}. \quad 21.12(11)$$

Der gleiche Formalismus, auf den *Verdichter* übertragen, liefert das physikalisch unplausible Ergebnis, daß T bei kleinerem *Spiel* kleiner wird. Plausibel ist vielmehr das Umgekehrte und somit die Annahme, daß schließlich auch Gl. 21.12(11) für den Verdichter

übernommen werden könne, aber mit umgekehrtem Vorzeichen, also

$$q = - \frac{n\psi\bar{u}}{2} \frac{d\zeta_{sp}}{d\delta}. \quad 21.12(12)$$

Das kann aber nur erhalten werden, wenn man voraussetzt, daß $\rho c_z \psi$ im umgekehrten Sinne Funktion von φ sei wie $1/\eta$, und zwar müssen z. B. ρc_z und ψ einzeln je die gleiche prozentuale Veränderung aufweisen wie $1/\eta$, doch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Das ist nicht undenkbar, dürfte aber jedenfalls eine Extremannahme darstellen.

Spalterregung durch Variation der Umfangskraft allein ist nur im Falle der Anordnung mit *frei endigenden Schaufeln* eine sinnvolle Annahme. Nur in diesem Falle scheint man damit mindestens bei der Turbine etwa die richtige Größenordnung zu treffen, vgl. [37]. Es sei also empfohlen, bei frei endigenden Schaufeln nach Gl. 21.12(11) bzw. (12) zu rechnen. Damit wird man vor allem beim Verdichter den Effekt eher überschätzen, was aber auf der sicheren Seite liegt. Die Größe $d\zeta_{sp}/d\delta$ ist entweder für den gegebenen Schaufelungstyp aus Messungen bekannt oder sie kann, wo solche fehlen, aus den allgemeinen Unterlagen in Bd. I, Kap. 8 gewonnen werden. — Man beachte noch, daß q hier für eine Stufe angegeben wurde, während es im Rechenverfahren nach 21.11 auf eine Ersatzmasse zu beziehen ist, die nicht notwendig mit der Stufe identisch ist.

Die *Spalterregung durch Druckverteilung über Deckbändern* kann formal wie folgt dargestellt werden. Es seien D_a der Durchmesser, b die axiale Breite des Deckbandes, $u_a = \omega D/2$ seine Umfangsgeschwindigkeit und ρ die mittlere Dichte des Fluids über dem Deckband. Dann werde für die Querkraft Q gesetzt

$$Q = K D_a b \rho u_a^2 \frac{e}{\delta_0}. \quad 21.12(13)$$

Unter δ_0 ist die Dichtspaltweite am Labyrinthkamm zu verstehen. Der Aufbau der Formel entsteht aus der Vorstellung, daß die Druckdifferenzen am Umfang sämtlich proportional einem charakteristischen dynamischen Druck seien. Als solcher ist ρu_a^2 gesetzt, und der empirische Beiwert K wird bei gegebener Geometrie davon abhängen, welches das Verhältnis der Umfangskomponente der Strömung vor dem Deckband zu u_a ist.

Gegebenermaßen ist man bei der Behandlung der *Stufe mit Deckbändern* davon ausgegangen, daß die Spalterregung teilweise von der Variation der Umfangskraft, teilweise von der Druckverteilung über dem Deckband herrührt, vgl. [13, 32, 37]. In der formalen Darstellung wurden dann allerdings beide Effekte in einer Formel zusammengefaßt, deren Aufbau von der Vorstellung der Erregung durch Umfangskräfte ausgeht, also die Resultierende der Druckverteilung eigentlich in eine äquivalente Umfangskraft überträgt. Überblickt man nun den so definierten, aus den Versuchsergebnissen sich ergebenden Koeffizienten, so erkennt man, daß eine alle durchgemessenen Fälle zusammenfassende Korrelation so auch nicht annähernd gelingt. Die Resultate legen vielmehr den Gedanken nahe, daß der umgekehrte Weg, nämlich die Spalterregung auf Druckverteilung am Deckband zurückzuführen und die variable Umfangskraft nur als Nebeneffekt zu betrachten, besser zum Ziele führt. Dies verspricht um so mehr Erfolg, als bei der Deckbandschaufelung die einfache Vorstellung, die im Spaltverlust lediglich einen Leckverlust sieht und die auf konstante Umfangskraft führt, eine gute Näherung ist. Wir haben daher die Versuche von *Wohlrab* [32] neu ausgewertet, indem Formel 21.12(13) zugrunde gelegt und aus den Versuchsergebnissen der Wert K bestimmt wurde¹.

Abb. 21.12.2 stellt die so gewonnenen Ergebnisse dar. Die Diagramme a, b, c entsprechen den bei *Wohlrab* mit *A, B, C* bezeichneten Stufen. Die wiedergegebenen Kurvenbänder gehen direkt aus den Kurvenbändern der Bilder 3.14, 3.21 und 3.22 der genannten

¹ Herr Prof. Dr. *H. J. Thomas* hat uns in verdankenswerter Weise die hierzu nötigen Unterlagen zur Verfügung gestellt.

Originalarbeit hervor. Abszisse ist die auf den Spitzendurchmesser bezogene Druckzahl

$$\psi_S = \Delta h_s / u_s^2 \approx \Delta h_s / u_d^2, \quad 21.12(14)$$

während Wohlrab die Definition $\psi = 2\Delta h_s / u_m^2$ benutzt. Trotz der großen Verschiedenheit der Geometrie der drei Stufen ist der Funktionalzusammenhang $K = f(\psi_S)$ sehr ähnlich.

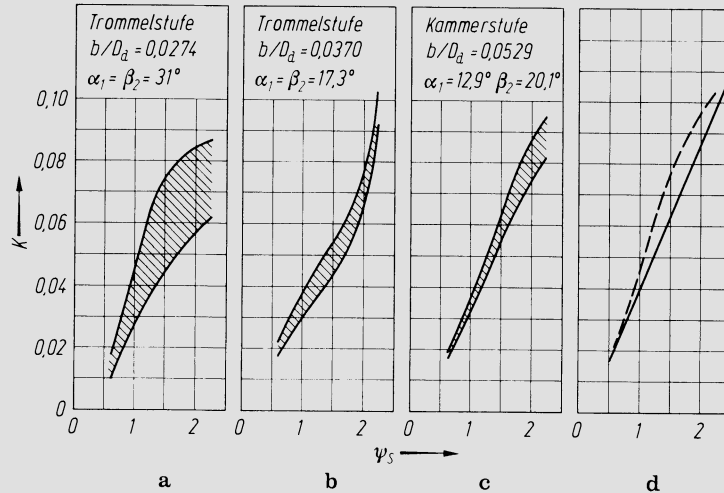


Abb. 21.12.2. Koeffizient K zur Berechnung der Spalterregung an Turbinenstufen, umgerechnete Ergebnisse von Wohlrab [32]

Das Kurvenband im Falle a ist lediglich deshalb besonders breit, weil die Streuung der Meßpunkte besonders groß war. In der ursprünglichen Darstellung von Wohlrab liegen die Kurvenbänder weit auseinander. Die Größe ψ_S hängt unmittelbar mit der Umfangskomponente der Geschwindigkeit am Laufraddeckband zusammen. Daß daher K mit ψ_S stark ansteigt, steht in Übereinstimmung mit der Theorie. Man würde vielleicht erwarten, daß die Kurve für die Kammerstufe ihres kleineren Reaktionsgrades wegen höher liegen müßte als für die Trommelstufen. Dem steht aber entgegen, daß bei der Trommelstufe die Leiträder immerhin einen gewissen Beitrag zu den Querkräften liefern, bei den Kammerstufen praktisch keinen. — In Diagramm d ist die gestrichelte Linie so gelegt, daß sie die höchstliegenden Punkte der Kurvenbänder a, b, c verbindet. Die ausgezogene Gerade sei als Berechnungsunterlage empfohlen. Wenn man also den Koppelkoeffizienten aus

$$q = \frac{K D_d b q u_d^2}{\delta_0} \quad 21.12(14')$$

bestimmt mit K nach dem durch Diagramm d gegebenen Linearansatz, so dürfte er eher reichlich eingesetzt sein, und man hat eine Rechnungsunterlage, die eine gewisse universelle Gültigkeit besitzt. — Die Breite der Kurvenbänder entspricht übrigens nicht nur reiner Streuung, sondern umfaßt auch den Einfluß des Axialspaltes zwischen Leit- und Laufrad, der indessen nicht sehr einheitlich ist. Selbstverständlich ist q wieder entsprechend umzurechnen, wenn die Ersatzmasse nach Abschn. 21.11 nicht mit der Stufe identisch sein sollte.

Sehr bedeutsam ist das Problem der Spalterregung auch bei *Radialverdichtern mit Deckscheibe* für Medien extrem hoher Dichte, z. B. für Ammoniaksynthese. Abb. 21.12.3 stellt ein solches Verdichterrad dar. Die Spalterregung erfolgt im wesentlichen an der Labyrinthdichtung der Deckscheibe. Genaue Unterlagen darüber kann nur der Versuch liefern, doch gibt nachfolgende Überlegung immerhin einen guten Anhaltspunkt. Tritt das Fluid mit der Umfangskomponente c_{u2} aus dem Laufrad aus, so hat der rückströmende Teil

im Dichtungsdurchmesser D_d etwa die Umfangskomponente

$$c_{ud} = c_{u2} D_2 / D_d \tag{21.12(15)}$$

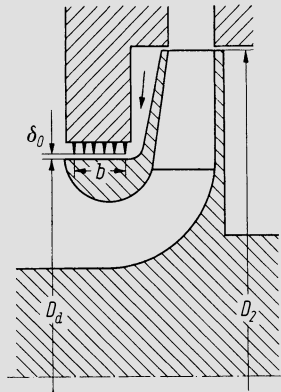


Abb. 21.12.3. Radialverdichterrad mit Deckscheibe

Nun entspricht c_{ud}/u_d ungefähr dem Wert ψ_S in Abb. 21.12.2. Man kann also aus diesem Diagramm den zu $\psi_S = c_{ud}/u_d$ gehörigen K -Wert ablesen und mit diesem vermöge 21.12(14') q bestimmen.

Bei HD-Turbinen können auch lange Labyrinthdichtungen an Wellen und Schubausgleichkolben wesentlich zur Spalterregung beitragen. Die in [10] und [31] entwickelten Theorien der Spalterregung in Labyrinthdichtungen laufen auf umfangreiche Differenzrechnungen hinaus und sind für lange Labyrinthdichtungen ungeeignet, weil sie Inkompressibilität voraussetzen. Sie lassen sich ohne Zweifel derart verallgemeinern, daß die Kompressibilität berücksichtigt wird, werden dann aber sehr aufwendig. Unvermeidlich gehen empirische Eingaben in solche Rechnungen ein (Reibungsbeiwerte), die unsicher sind und das Ergebnis so stark beeinflussen, daß sich die komplizierte Rechnung in Anbetracht der Ungenauigkeit des Resultates kaum lohnt. Hingegen liegen empirische Unterlagen von *Benckert* [59] vor. Wenn wir die Darstellung jenes Autors in die hier verwendete übertragen, läßt sich setzen

$$q = \frac{\alpha K D b \bar{\rho} u^2}{\delta_0} \tag{21.12(16)}$$

Hier ist u die Umfangsgeschwindigkeit im Labyrinthdurchmesser D , b die axiale Labyrinthbreite und $\bar{\rho} = (\rho_1 + \rho_2)/2$, wo ρ_1 und ρ_2 die Dichte vor und nach der Labyrinthdichtung bezeichnen. Der empirische Koeffizient K entspricht der Größe $K_{QW}^*/4E_{OW}^*$ der Originalarbeit und ist in Abb. 21.12.4 wiedergegeben. Dieses Diagramm beruht auf Bild 8

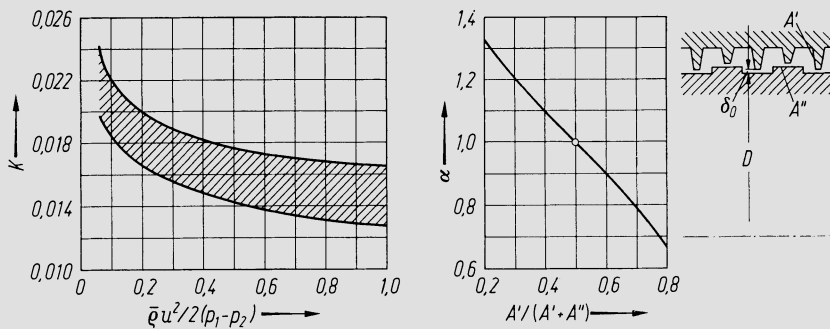


Abb. 21.12.4. Zur Berechnung der Spalterregung in Labyrinthdichtungen

in [59], das für das Labyrinth an einer rotierenden Welle gilt. In Abb. 21.12.4 ist p_1 der Druck vor der Dichtung, p_2 derjenige nach dieser. Der Faktor α (vgl. Abb. 21.12.4) gibt noch eine Korrektur in Funktion von $A'/(A' + A'')$, wo A' die ruhende, A'' die bewegte Labyrinthoberfläche bedeuten. Die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Fluids im Labyrinth, die maßgebend ist, hängt von diesem Verhältnis ab. Mit Rücksicht auf die Spalterregung erweist es sich als vorteilhaft, die Kämme der Labyrinthdichtungen auf der stillstehenden Seite anzubringen.

Die Tatsache, daß bei Dampfturbinen Laufstörungen durch Spalterregung aufgetreten sind, sobald die Leistung einen gewissen kritischen Wert erreichte, hat dazu geführt, die Leistung unmittelbar als die erregende Ursache zu betrachten, also den Effekt der Umfangskraft in den Vordergrund zu schieben. Bei der HD-Turbine ist aber der *Druck* und damit die *Dichte* der Leistung praktisch proportional und dadurch, d. h. also durch die Druckverteilungen ist die Erregung primär gegeben.

21.13 Grundlagen der Lagertheorie

Die Lager industrieller Turbomaschinen sind üblicherweise ölgeschmierte Gleitlager, wobei stets mit vollkommen flüssiger Reibung gerechnet werden darf. Damit sind die Vorgänge nach der hydrodynamischen Schmierfilmtheorie erfaßbar. Das mag zunächst die Vorstellung erwecken, daß von den physiko-chemischen Eigenschaften des Schmiermittels nur die Zähigkeit von Bedeutung sei, was indessen der Erfahrung widersprechen würde. Insbesondere macht die Schmierfilmtheorie die Voraussetzung vollkommener Haftung zwischen dem Schmierfilm und den Oberflächen, die den Schmierpalt begrenzen. Ob diese Voraussetzung erfüllt ist, hängt von molekularphysikalischen Gegebenheiten ab, weshalb die Wahl des Schmiermittels und der Werkstoffe wesentlich ist. An austenitischen Stählen ist in dieser Beziehung schon gelegentlich ein ungünstiges Verhalten beobachtet worden, vereinzelt auch an Wellen aus ferritischem 13-%-Cr-Stahl. Allerdings scheint bei solchen Schwierigkeiten auch die Gegenwart von Verunreinigungen eine Rolle zu spielen. Kleinste Fremdkörper, die eine Verletzung der Wellenoberfläche bewirken, können bei härtenden Werkstoffen zur Spanbildung führen, was die rasche Zerstörung des Lagers herbeiführt. Über die Frage des Haftens des Schmiermittels vgl. etwa *Kamps* [38]. — Selbstverständlich ist auch die Temperaturbeständigkeit des Schmieröls von maßgebender Bedeutung. Einen Überblick über die Eigenschaften der Schmieröle geben *Lang* und *Steinhilper* [39].

Man ist bestrebt, die flüssige Reibung auch beim Anlaufen und Stillsetzen und beim langsamen Durchdrehen der außer Betrieb gesetzten Maschine sicherzustellen, um Abnutzung oder Beschädigung der Lagerschalen zu vermeiden. Das früher übliche intermittierende Weiterdrehen („Schalten“) des Läufers der stillgesetzten Maschine hat sich in dieser Beziehung nicht bewährt. Heute zieht man ein stetiges Durchdrehen mit etwa 60 min^{-1} vor, wobei in den Lagern Gleitgeschwindigkeiten von etwa 0,5 bis 2 m/s auftreten und schon Flüssigkeitsreibung gegeben ist. Außerdem erzeugt dann die Schaufelung eine systematische Ventilationswirkung, wodurch die thermisch bedingte Verkrümmung der Gehäuseteile unterbunden wird. Zum Schutze der Lager beim Losbrechen aus dem Stillstand und zur Verminderung des Losbrechdrehmomentes wird jetzt oft eine besondere Hochdruckschmierung vorgesehen, die im normalen Betrieb abgestellt wird. Bei dieser wird mit einer Kolbenpumpe (Diesel-Einspritzpumpe) Schmieröl mit einem Druck von 70 bis 300 bar durch eine kleine Bohrung an einem Punkt der untersten Mantellinie in die Lagerschale eingeführt (vgl. Abb. 21.13.1). In der Umgebung der Lochmündung, die entsprechend gestaltet werden muß, bildet sich so ein „Drucksee“, auf dem der Zapfen selbst im Stillstand schwimmt. Im Betriebe würde diese Schmierung nicht genügen, da der Öldurchsatz zur Abführung der Lagerreibungswärme nicht ausreichen würde.

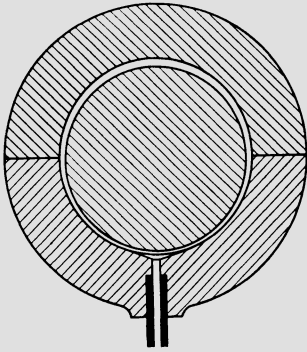


Abb. 21.13.1. Hochdruckschmierung eines Traglagers

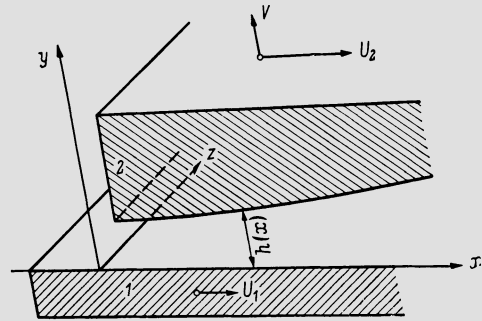


Abb. 21.13.2. Zur Herleitung der Differentialgleichung der Schmierfilmtheorie

Nachfolgend wird die grundlegende Differentialgleichung der Schmierfilmtheorie hergeleitet. In einem ruhenden Koordinatensystem x, y, z (Abb. 21.13.2) mögen sich die beiden Flächen 1 und 2 in folgender Weise bewegen. Die x -Komponente der Geschwindigkeit der Fläche 1 sei U_1 , während die y - und z -Komponenten Null sein mögen. Die x -Komponente der Fläche 2 sei U_2 , die z -Komponente Null. Die y -Komponente sei V , und zwar muß nicht vorausgesetzt werden, daß sie von x unabhängig sei. Wenn der Körper 2 z. B. eine Kippbewegung ausführt, wird V eine lineare Funktion von x . Der Raum zwischen beiden Flächen sei erfüllt von einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit, die an beiden Wänden haften, und zwar möge vorerst *laminare Bewegung* vorausgesetzt werden. Gesucht ist das aus dem Strömungsvorgang folgende Druckfeld, bei dem p jederzeit von y unabhängig ist, da die Spalthöhe h sehr klein gegenüber den übrigen Abmessungen ist. Ferner seien die Zähigkeitskräfte derart groß, daß ihnen gegenüber die Trägheitskräfte vernachlässigt werden können. Sind u, v, w die x, y, z entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten in einem beliebigen Raumpunkt, so wird die Bewegung der Flüssigkeit durch folgende Differentialgleichungen beschrieben. Die *Kontinuitätsgleichung* lautet

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad 21.13(1)$$

während das Bewegungsgesetz unter den gegebenen Voraussetzungen durch

$$\left. \begin{aligned} \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad 21.13(2)$$

ausgesprochen wird. Gleichungsgruppe 21.13(2) ist das System der Gleichungen von Navier und Stokes, in dem die Trägheitsglieder weggelassen sind. Bei der Strömung durch den sehr engen Spalt können ferner $\partial^2 u / \partial x^2$ und $\partial^2 u / \partial z^2$ gegen $\partial^2 u / \partial y^2$ vernachlässigt werden und das Entsprechende gilt auch für v und w . Damit vereinfacht sich das Gleichungssystem in folgender Weise:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad 21.13(3)$$

Da nun nach Voraussetzung $\partial p/\partial x$ und $\partial p/\partial z$ nicht von y abhängen, können diese Gleichungen sogleich integriert werden, wobei folgende Grenzbedingungen gelten:

$$\left. \begin{array}{l} \text{In } y = 0 \text{ gilt: } u = U_1, v = 0, w = 0, \\ \text{in } y = h \text{ gilt: } u = U_2, v = V + U_2 \frac{\partial h}{\partial x}, w = 0. \end{array} \right\} \quad 21.13(4)$$

Damit führt die Integration von 21.13(3) auf

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \frac{U_2 - U_1}{h} y + U_1, \\ v = \left(V + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{y}{h}, \\ w = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy). \end{array} \right\} \quad 21.13(5)$$

Die so erhaltenen Ausdrücke können in 21.13(1) eingeführt werden, womit diese Gleichung übergeht in

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 (U_1 + U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12V. \quad 21.13(6)$$

Dies ist die *Reynoldssche Differentialgleichung*, welche die Basis der Schmierfilmtheorie darstellt. Obwohl an sich ein nicht gekrümmter Spalt vorausgesetzt wurde, läßt sich die Gleichung ohne weiteres auch auf das Traglager anwenden, weil der Krümmungsradius sehr groß ist gegenüber der Spaltweite. Ferner kann sogleich angenommen werden, daß nur einer der beiden Körper eine Bewegung in x -Richtung ausführt, deren Geschwindigkeit U sei, im praktischen Falle also die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens. Weiter seien r der Zapfenradius, Δr das kleinste Spiel zwischen Zapfen und Schale bei zentrischer Zapfenlage, η_0 die Zähigkeit des Schmiermittels am Eintritt und ω die Winkelgeschwindigkeit. Dann lassen sich folgende dimensionslose Größen einführen:

$$\left. \begin{array}{l} H \equiv \frac{h}{\Delta r}, \quad \psi \equiv \frac{\Delta r}{r}, \quad \eta^* \equiv \frac{\eta}{\eta_0}, \quad \Pi \equiv p \left(\frac{\psi^2}{\eta_0 \omega} \right), \\ Re \equiv \frac{\rho U \Delta r}{\eta_0}, \quad Re^* \equiv \psi Re, \\ \varphi \equiv \frac{x}{r}, \quad \bar{y} \equiv \frac{y}{\Delta r}, \quad \bar{z} \equiv \frac{z}{r}, \\ \bar{u} \equiv \frac{u}{U}, \quad \bar{v} \equiv \frac{v}{\omega \Delta r}, \quad \bar{w} \equiv \frac{w}{U}, \quad \bar{V} \equiv \frac{V}{\omega \Delta r}. \end{array} \right\} \quad 21.13(7)$$

Wenn weiter b und d Breite und Durchmesser des Zapfens sind, G die vom Lager aufgenommene Querkraft (Gewicht) und $p_m = G/bd$ die mittlere Flächenpressung, läßt sich auch mit dieser der entsprechende mittlere Druckparameter

$$\Pi_m \equiv p_m \left(\frac{\psi^2}{\eta_0 \omega} \right) \equiv S_o \quad 21.13(8)$$

bilden, der auch als *Sommerfeld-Zahl* bezeichnet wird. Es ist nun leicht zu verifizieren, daß mit diesen Festsetzungen die Differentialgleichung 21.13(6) in die folgende Form übergeht:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{H^3}{\eta^*} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{H^3}{\eta^*} \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right] = 6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} + 12\bar{V}. \quad 21.13(9)$$

Bei dieser Herleitung ist stets rein laminare Spaltströmung vorausgesetzt. Bei großen Lagern und hohen Umfangsgeschwindigkeiten gelangt man aber ins Gebiet des *turbulent strömenden Schmierfilms*. Die damit nötige Verallgemeinerung der Theorie wird erreicht durch einen empirischen Turbulenzansatz. Als dimensionsloser Schubspannungsparameter werde eingeführt

$$\bar{\tau} \equiv \tau \left(\frac{\psi}{\eta_0 \omega} \right). \quad 21.13(10)$$

Die beiden Schubspannungskomponenten $\bar{\tau}_{xy}$ und $\bar{\tau}_{zy}$ sind dann gegeben durch

$$\bar{\tau}_{xy} = \eta^* \left(1 + \frac{\nu_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{\tau}_{zy} = \eta^* \left(1 + \frac{\nu_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}. \quad 21.13(11)$$

Hier ist ν die kinematische Zähigkeit, ν_s die scheinbare kinematische Zähigkeit, die den turbulenten Impulsaustausch beschreibt. Die gesamte Schubspannung wird

$$|\bar{\tau}| = \sqrt{\bar{\tau}_{xy}^2 + \bar{\tau}_{zy}^2}. \quad 21.13(12)$$

Die Empirie geht nun ein in den Ansatz, der für ν_s/ν gemacht wird. *Dong-Cul Han* [40] verwendet für das wandnahe Gebiet den Ansatz von *Reichardt* [57]

$$\left(\frac{\nu_s}{\nu} \right)_W = 0,4 \left[\bar{y} \sqrt{\frac{Re |\bar{\tau}|}{\eta^*}} + 10,7 \tanh \left(\frac{\bar{y}}{10,7} \sqrt{\frac{Re |\tau|}{\eta^*}} \right) \right] \quad 21.13(13)$$

und für den Außenbereich denjenigen von *Nunner*, siehe *Hinze* [58]

$$\left(\frac{\nu_s}{\nu} \right)_A = 0,035 \frac{Re H^2}{\eta^*} \sqrt{\bar{\tau}_1^2 + \bar{\tau}_2^2}, \quad 21.13(14)$$

wo $\bar{\tau}_1$ und $\bar{\tau}_2$ die Schubspannungsvariablen an den Begrenzungswänden 1 und 2 sind. Es ist dann

$$\nu_s/\nu = \min [(\nu_s/\nu)_W, (\nu_s/\nu)_A], \quad 21.13(15)$$

d. h. es ist in jedem Punkt der kleinere der beiden Werte $(\nu_s/\nu)_W$ und $(\nu_s/\nu)_A$ einzusetzen. Ergänzt man nun das Reibungsglied der Navier-Stokesschen Gleichungen in der Weise, die durch die Gln. 21.13(11) gegeben ist und führt man diese Ergänzung durch die Herleitung hindurch weiter, so ist man schließlich auf folgendes geführt, vgl. [40]. Man setze

$$I(\bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} \frac{d\bar{y}}{1 + \nu_s/\nu}, \quad \bar{I} = \int_0^H I(\bar{y}) d\bar{y}, \quad 21.13(16)$$

$$J(\bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} \frac{\bar{y} d\bar{y}}{1 + \nu_s/\nu}, \quad \bar{J} = \int_0^H J(\bar{y}) d\bar{y}. \quad 21.13(17)$$

$$K_x = \frac{H^3}{12 \left[J(H) \frac{I}{I(H)} - \bar{J} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{I}}{I(H)} \right) \eta^* H / \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right]}, \quad 21.13(18)$$

$$K_z = \frac{H^3}{12 \left[J(H) \frac{I}{I(H)} - \bar{J} \right]}. \quad 21.13(19)$$

Dann geht die Reynoldssche Druckgleichung über in

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{H^3}{K_x \eta^*} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{H^3}{K_z \eta^*} \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right] = 6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} + 12 \bar{V}. \quad 21.13(20)$$

Obwohl diese Gleichung den gleichen Aufbau hat wie Gl. 21.13(9), ist die Komplikation doch sehr groß, denn man muß die K für jeden Punkt aus den Relationen 21.13(12)–(19) iterativ berechnen. Die dazu benötigten $\bar{\tau}_{xy}$ und $\bar{\tau}_{zy}$ ergeben sich aus

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \bar{y} + \bar{\tau}_{xy}(0), \quad \bar{\tau}_{zy} = \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \bar{y} - \bar{\tau}_{zy}(0), \quad 21.13(21)$$

welche Gleichungen aus 21.13(3) folgen und wobei die Wandschubspannungen die Werte

$$\bar{\tau}_{xy}(0) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \frac{J(H)}{I(H)} + \frac{\eta^*}{I(H)}, \quad \bar{\tau}_{zy}(0) = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \frac{J(H)}{I(H)} \quad 21.13(22)$$

besitzen. — Ein weiteres iteratives Vorgehen ist notwendig zur Ermittlung des Verlaufes von η^* . Da die Zähigkeit temperaturabhängig ist, erfordert dies die Ermittlung der Temperaturverteilung, was mit Hilfe der Energiegleichung geschieht, vgl. [40]. Dieser Schritt ist aber im laminaren und turbulenten Falle selten nötig, da man eine sehr gute Näherung erhält, wenn man mit einem konstanten mittleren η rechnet.

Die in der Reynoldsschen Differentialgleichung — in der Form 21.13(9) oder (20) — auftretende Funktion H ist durch die Schengeometrie und die Zapfenlage gegeben. Hingegen sind ihr noch die *Randbedingungen* beizufügen. Die tragende Fläche reiche von φ_A bis φ_E (gegebenenfalls der volle Umfang 2π) und es herrsche nirgends wesentlicher Unterdruck. Sogleich in dimensionsloser Form geschrieben, lautet dann die Bedingung für die beiden seitlichen Ränder, daß der Druck dort verschwindet, also

$$\Pi(\varphi, \bar{z} = \pm b/d) = 0. \quad 21.13(23)$$

An den beiden Enden φ_A und φ_E herrschen die beiden Taschendrucke Π_A und Π_E , d. h. es ist

$$\Pi(\varphi_A, \bar{z}) = \Pi_A, \quad \Pi(\varphi_E, \bar{z}) = \Pi_E. \quad 21.13(24)$$

Die Lösung kann, vor allem beim voll umschlossenen Lager, leicht zu dem Ergebnis führen, daß bereichsweise ein stark negativer Druck entsteht, was aber ausgeschlossen wurde, weil es physikalisch unmöglich ist. Wo ein solcher Unterdruck theoretisch entstehen würde, herrscht praktisch der Verdampfungsdruck des Öles. Diese Ausgestaltung der Theorie ist wohl von *Floberg* und *Jakobsson* [41] erstmals vorgenommen worden, wobei als Verdampfungsdruck vereinfachend der atmosphärische Druck gewählt wird, der zugleich den Drucknullpunkt darstellt. Erhält man rechnerisch Unterdruckgebiete, so muß man dort $\Pi = 0$ setzen und sie als Gebiete der Verdampfung und Luftausscheidung betrachten. Die Reynoldssche Druckgleichung verlangt, daß an der Grenze, wo der Druckberg in dieses Gebiet übergeht, die Bedingung $\partial \Pi / \partial \varphi = 0$ erfüllt ist. Man muß also nach einer ersten Durchrechnung an der so erhaltenen Grenze des Gebietes diese Bedingung stellen, die Rechnung wiederholen und die Grenze iterativ verschieben bis alle Bedingungen erfüllt sind.

21.14 Rechenverfahren und Ergebnisse der Lagertheorie

Die mathematische Schwierigkeit, daß der Druckparameter Π in der Reynoldsschen Differentialgleichung von zwei Variablen abhängt, hat man früher durch vereinfachende Annahmen zu umgehen versucht, insbesondere so, daß man die Variation des Druckes über die axiale Breite durch Parabelgesetze approximiert, deren Exponenten aus der Erfahrung erschlossen wurden, vgl. etwa [42–44]. Obwohl diese Theorien in vielen Fällen befriedigten, ist die Beurteilung der Genauigkeit im Einzelfalle nicht leicht möglich. Mit dem Aufkommen des Computers lag es nahe, die partielle Differentialgleichung in üblicher Weise durch Diskretisierung und Übergang zur Differenzenrechnung zu lösen. Aus nume-

rischen Gründen ist dabei eine Variablentransformation durchzuführen, vgl. [39, 40, 45, 46]. Das Rechenverfahren zur Bestimmung der *stationären Lagerdaten* läßt sich in großen Zügen wie folgt beschreiben.

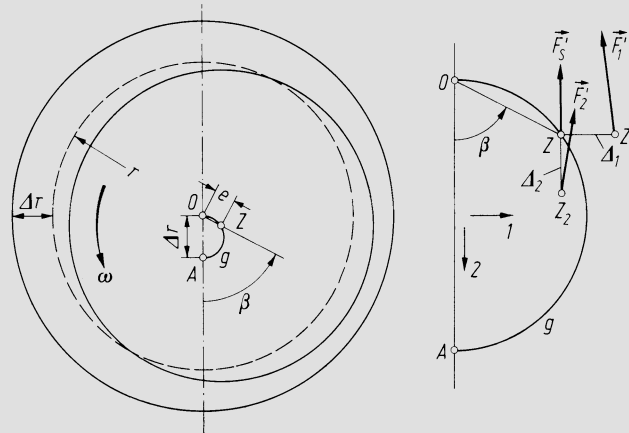


Abb. 21.14.1. Lagerzapfen in Lagerschale, allgemeine Situation

Ausgangspunkt ist die Wahl einer Exzentrizität e — bzw. des entsprechenden Wertes $\varepsilon = e/\Delta r$ — und die Schätzung eines Verlagerungswinkels β des Zapfenmittelpunkts Z (Abb. 21.14.1). — In der Abbildung ist eine kreiszylindrische Lagerschale dargestellt, doch erlaubt das Verfahren beliebige Schalengeometrie. — Erfolgt die Lagerbelastung senkrecht nach unten, so bewegt sich Z mit steigender Last längs einer Kurve g , der Gümbel-Linie, die bei zylindrischer Lagerschale näherungsweise ein Kreis ist. Bei anderer Schalengeometrie kann man mindestens für den Anfang der Iteration die kreisförmige Gümbellinie zugrunde legen. Mit der Lage von Z ist bei gegebener Schalengeometrie die Funktion H in Gl. 21.13(9) oder (20) bestimmbar, und da im stationären Falle $\bar{V} = 0$ ist, kann jetzt die Lösung der Differentialgleichung mit den Randbedingungen erfolgen. Sie liefert die Π -Verteilung am Lagerzapfen und aus deren Integration auch die Richtung der resultierenden Kraft, die aber mit der Richtung der Belastung übereinstimmen sollte. Ist dies nicht der Fall, so ist der Winkel β entsprechend zu verändern. Im Falle der turbulenten Bewegung ist in den Iterationsprozeß noch die Bestimmung der K_x und K_z einzubeziehen, wie unter 21.13 angegeben. Ist schließlich die Iteration beendet, so kennt man die Verteilung der Geschwindigkeiten aus den Gln. 21.13(5) (die in dimensionslose Form zu bringen sind, und in denen bei Turbulenz die Zähigkeit durch den verallgemeinerten Ausdruck zu ersetzen ist). So gewinnt man den Schmiermitteldurchfluß, die Schubspannungsverteilung am Zapfen, mithin den Reibungskoeffizienten und ebenso die resultierende Druckkraft, d.h. die Lagerbelastung, die dem Ausgangswert ε entspricht. — Diese Rechnung für mehrere ε durchgeführt, liefert schließlich die exakte Gümbellinie und das vollständige Verhalten des Lagers in Funktion seiner Belastung.

Von besonderer Bedeutung ist die Bestimmung des *instationären Verhaltens*, d.h. der unter 21.6 eingeführten Koeffizienten k_{ij} und b_{ij} . Zweckmäßig bildet man aus diesen dimensionslose Größen gemäß

$$\gamma_{ij} \equiv k_{ij} \frac{\Delta r}{G}, \quad \beta_{ij} \equiv b_{ij} \omega \frac{\Delta r}{G}. \quad 21.14(1)$$

Hier ist G die statische Lagerbelastung (Gewicht). Das Vorgehen bei der Ermittlung dieser Koeffizienten kann anhand der Figur in Abb. 21.14.1 rechts veranschaulicht werden. Ausgangspunkt ist eine Gleichgewichtslage: der Zapfenmittelpunkt Z liegt also auf der Gümbellinie g . Von hier aus denkt man sich den Zapfen einmal in horizontaler Richtung nach Z_1 ,

einmal in vertikaler Richtung nach Z_2 verschoben. Die Verschiebungsstrecken Δ_1 und Δ_2 sind sogleich dimensionslos zu verstehen, d. h. Δ_1 ist z. B. die durch r dividierte Strecke \overline{ZZ}_1 . Nun sei \vec{F}'_s die aus der Π -Verteilung ermittelte statische Zapfenkraft; der Akzent bedeute, daß es sich um den dimensionslosen Wert handelt, der entsteht aus der Π -Verteilung und mit einem Zapfenradius 1. Nun wird Punkt Z_1 festgehalten, für diese Zapfenlage die Π -Verteilung gerechnet und aus dieser durch Integration die Kraft \vec{F}'_1 . Ebenso ergibt sich für die Zapfenlage Z_2 eine Kraft \vec{F}'_2 . Alsdann sind

$$\Delta\vec{F}'_1 = \vec{F}'_1 - \vec{F}'_s, \quad \Delta\vec{F}'_2 = \vec{F}'_2 - \vec{F}'_s \quad 21.14(2)$$

die Zusatzkräfte, die den Verschiebungen Δ_1 und Δ_2 entsprechen. $\Delta\vec{F}'_1$ hat die Komponenten $\Delta F'_{11}$ und $\Delta F'_{21}$, während $\Delta\vec{F}'_2$ die Komponenten $\Delta F'_{12}$ und $\Delta F'_{22}$ besitzt. Beachtet man die Definition von Π Gl. 21.13(7) und diejenige von γ_{ij} , Gl. 21.14(1), so läßt sich leicht verifizieren, daß

$$\gamma_{ij} = -\frac{\Delta F'_{ij}\psi}{F'_s \Delta_i} \quad 21.14(3)$$

Um die β_{ij} zu bestimmen, geht man wieder von der Gleichgewichtslage aus und stellt sich vor, der Zapfen bewege sich mit einer Geschwindigkeit w durch diese Lage hindurch, einmal in horizontaler, einmal in vertikaler Richtung. Die Geschwindigkeit w wird so gewählt, daß $w/\omega \Delta r = 1$. Aus der Geometrie der Lagerschale ergeben sich für die horizontale und die vertikale Bewegung je eine Verteilung der Größe $\bar{V}(\varphi)$, die bisher stets Null war. Nun werde \bar{V} in Gl. 21.13(20) eingesetzt und Π ersetzt durch $\Pi + \Delta\Pi$, wo $\Delta\Pi$ der Anteil ist, der durch das Hinzutreten von \bar{V} bedingt ist. Da die Störbewegung als klein vorausgesetzt wird, zerfällt dann die Differentialgleichung in zwei Gleichungen, eine für den statischen Anteil und eine für die Störung \bar{V} allein, die lautet

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} \left[\frac{H^3}{K_x \eta^*} \frac{\partial(\Delta\Pi)}{\partial\varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left[\frac{H^3}{K_z \eta^*} \frac{\partial(\Delta\Pi)}{\partial\bar{z}} \right] = 12\bar{V} \quad 21.14(4)$$

Für jede dieser beiden Störbewegungen erhält man aus dieser Gleichung eine Lösung, deren Integrale die Zapfenkräfte (dimensionslos) \vec{P}'_1, \vec{P}'_2 ergeben. Diese wiederum haben Komponenten $P'_{11}, P'_{21}, P'_{12}, P'_{22}$. Aus ihnen ergibt sich

$$\beta_{ij} = -P'_{ij}/P'_s, \quad 21.14(5)$$

wie unter Beachtung der Definition 21.14(1) zu verifizieren ist.

Bei den ganzen theoretischen Entwicklungen ist hier vorausgesetzt worden, daß die Trägheitsglieder in den Bewegungsgleichungen vernachlässigbar seien. Das trifft stets zu bei turbulenter Bewegung, während im laminaren Falle für

$$Re \psi \geq \sim 1, \quad Re = U \Delta r / \nu_0 \quad 21.14(6)$$

der Einfluß der Trägheitskräfte spürbar wird. Das führt zu einer weiteren Komplikation der Theorie, vgl. [40].

Obwohl die Schmierfilmtheorie eine außerordentliche Verfeinerung erfahren hat, stützen sich die Hersteller nicht allein auf die Theorie, sondern weitgehend auch auf Versuche. Abb. 21.14.2 zeigt eine Versuchseinrichtung von BBC, die zur Erprobung der Kippsegmentlager großer Dampfturbinen dient. Die Belastung wird hier von hydraulischen Kolben aus über Belastungssegmente aufgebracht. Eine andere Anordnung besteht darin, den Zapfen praktisch spielfrei in Wälzlagern zu halten und dafür die Schale von außen zu belasten und beweglich anzuordnen, so daß sie die Verschiebungen erfährt, vgl. etwa [47]. Gemessen wird in der Regel die Druckverteilung und die relative Verlagerung zwischen Zapfen und Schale. Je nach Versuchsanordnung kann die Belastung auch dynamisch erfolgen.

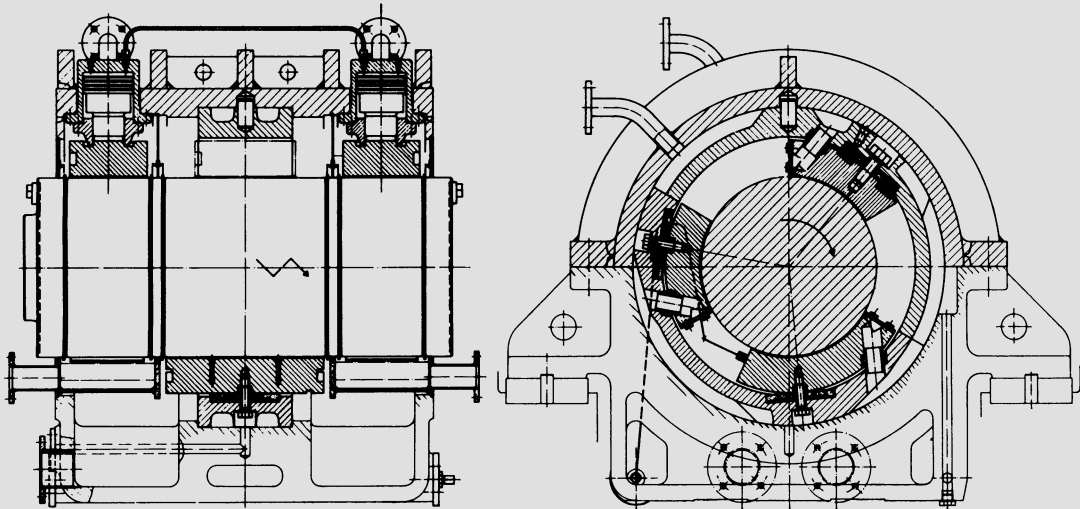


Abb. 21.14.2. Lagerversuchsstand von BBC zur Prüfung großer Gleitlager. Nach Hohn [53]

Theoretische und experimentelle Ergebnisse über Gleitlager sind in der Literatur in großer Zahl veröffentlicht, vgl. etwa [48–51]. In [39] finden sich umfassende theoretisch bestimmte Unterlagen über Lager mit zylindrischer Schale. Abb. 21.14.3 faßt einige dieser Ergebnisse für das vollumschlossene Lager zusammen. Mit der Flächenpressung $p_m = G/bd$ folgt mit $So = p_m(\psi^2/\eta\omega)$ die Sommerfeld-Zahl, worauf aus den Diagrammen ϵ , μ und q bestimmt werden können. Als dann sind Reibungsleistung P , durchzusetzender minimaler Ölvolumenstrom Q und Öltemperaturerhöhung ΔT

$$P = \mu GU, \quad Q = qrU \Delta r, \quad \Delta T = P/\rho c Q, \quad 21.14(7)$$

wo ρ und c Dichte und spezifische Wärmekapazität des Lagers sind.

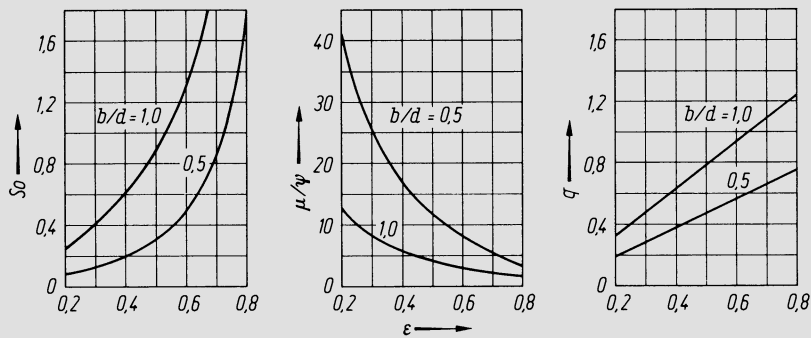


Abb. 21.14.3. Rechnerergebnisse für voll umschlossene Gleitlager mit zylindrischer Schale. Nach Lang und Steinhilper [39]

In Abb. 21.14.4 sind ein Lager mit zylindrischer Schale, ein Zitronenlager und ein MFG-Dreikeillager veranschaulicht, während Abb. 21.14.5 von Glienicke [48] experimentell bestimmte Daten über Dämpfungs- und Federkonstanten zusammenfaßt. Die Lager hatten sämtlich $b/d = 0,5$, während die Spieldaten die folgenden sind: Zylinderlager $\Delta r/r = 0,0019$, Zitronenlager $\Delta r_{\min}/r = 0,00135$, $\Delta r_{\max}/r = 0,00365$, MFG-Lager $\Delta r_{\min}/r = 0,0011$, $\Delta r_{\max}/r = 0,00429$. Man beachte, daß Π_m zugleich die Sommerfeld-Zahl ist, während die Ordinatenwerte mit γ_{ij} und β_{ij} identisch sind.

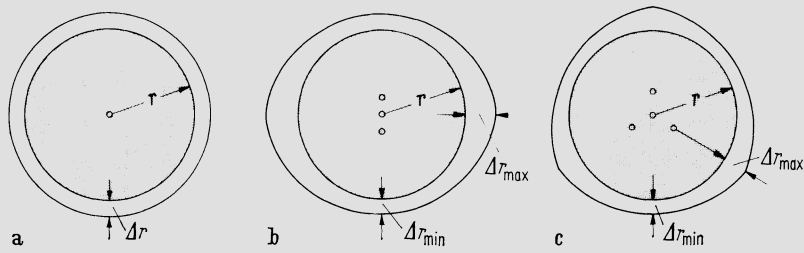


Abb. 21.14.4. a) Zylindrisches Lager; b) Lager mit Zitronenspiel (Zweikeillager); c) MFG-Dreikeillager

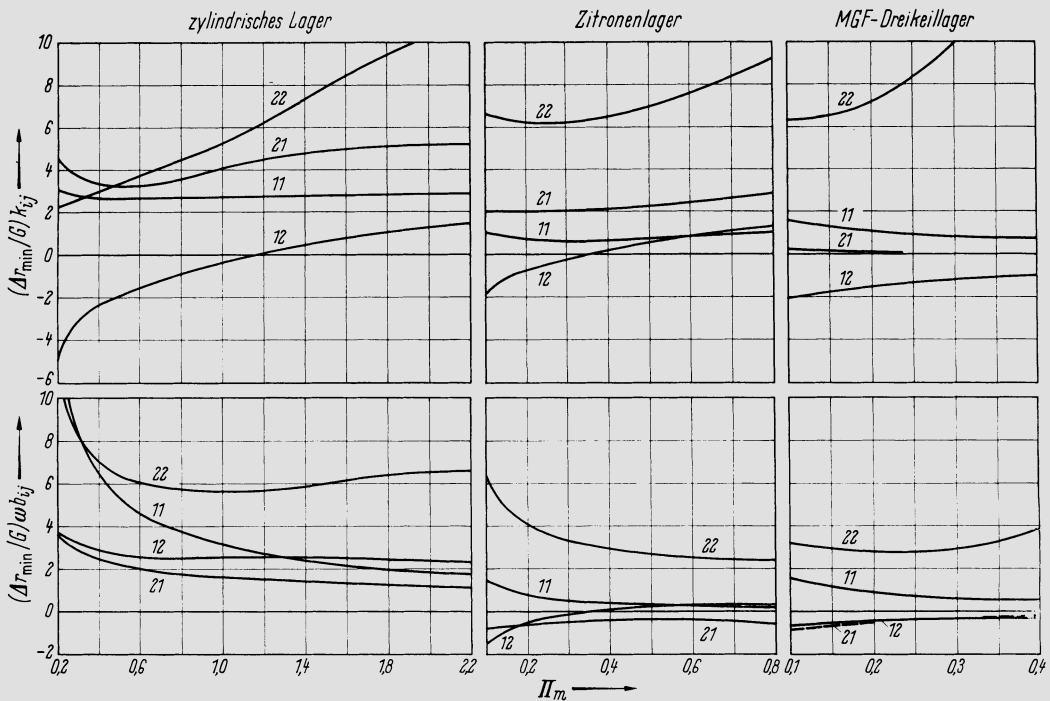


Abb. 21.14.5. Dämpfungs- und Federkonstanten von zylindrischen Lagern, Zitronenlagern und MFG-Dreikeillagern, $b/d = 0,5$, Kraftangriff senkrecht von oben nach unten, nach Versuchen von Glienicke [48]. Es ist

$$(\Delta r_{\min} G) k_{ij} = \gamma_{ij}, (\Delta r_{\min} G) \omega b_{ij} = \beta_{ij}, \pi_m = S_o$$

Abb. 21.14.6 gibt den Zusammenhang zwischen S_o und ε für drei typische Lager nach [49] wieder und zeigt, daß diejenigen Lagertypen, die günstige Stabilitätseigenschaften besitzen, weniger belastbar sind bei gegebenem ε . Feder- und Dämpfungskonstanten für Kippsegmentlager nach [49] gibt Abb. 21.14.7. Auch kleines b/d vermindert übrigens die spezifische Tragfähigkeit und erhöht die Stabilität.

Der Übergang zur Turbulenz des Schmierfilmes setzt etwa ein bei $Re = U \Delta r / \nu \approx 500 - 1000$, abhängig von der Geometrie des Lagers, vgl. [52, 53]. Kippsegmentlager scheinen hier ein besonders günstiges Verhalten zu zeigen, vgl. Varga [54]. Abb. 21.14.8 zeigt nach [40] ε in Funktion von S_o für verschiedene Re , während Abb. 21.14.9 die zugehörigen Feder- und Dämpfungskonstanten gibt, alles für ein MFG-Vierflächenlager. Die Kurven über die β_{ij} und γ_{ij} könnten zunächst den Eindruck vermitteln, daß die Stabilität durch die Turbulenz nicht stark beeinflußt werde. Man muß aber beachten, daß für eine gegebene Lagerbelastung S_o mit hoher Turbulenz ein kleineres ε entsteht. Bestimmt man für dieses die β_{ij} und γ_{ij} , so erhält man Werte, die vom laminaren Fall stark ab-

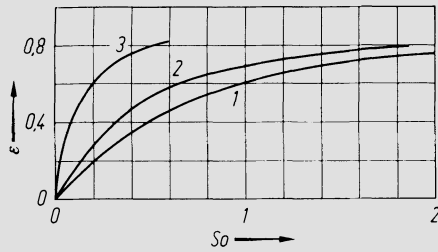


Abb. 21.14.6. Zusammenhang zwischen ϵ und S_o für verschiedene Lagertypen: 1 zylindrische Lagerschale, 2 Zitronenlager, 3 MFG-Dreikeillager, $b/d=0,8$. Nach Glienicke [49]

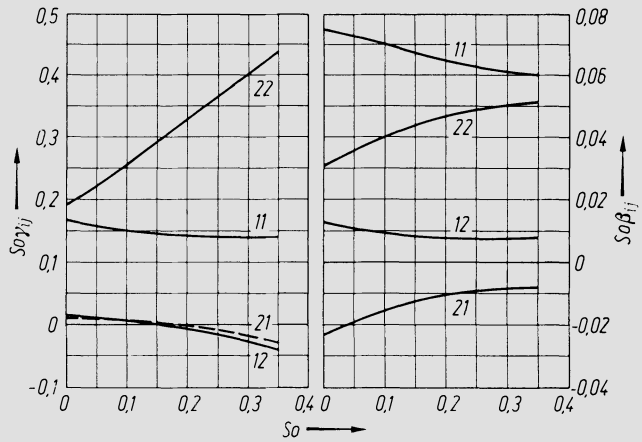


Abb. 21.14.7. Feder- und Dämpfungskonstanten eines Kippsegmentlagers mit drei Segmenten, $b/d = 0,73$

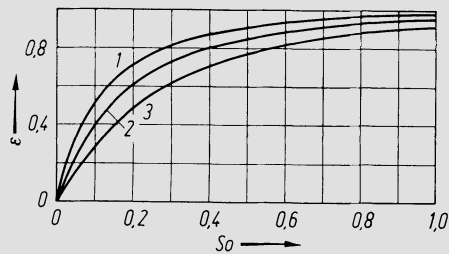


Abb. 21.14.8. Zusammenhang zwischen ϵ und S_o für ein MFG-Vierflächengleitlager, $b/d = 0,5$, $\Delta r_{\max}/\Delta r_{\min} = 3$, für verschiedene Reynolds-Zahlen: 1 laminar; 2 turbulent, $Re = 2000$; 3 turbulent, $Re = 5000$. Nach Dong-Chul Han [40]

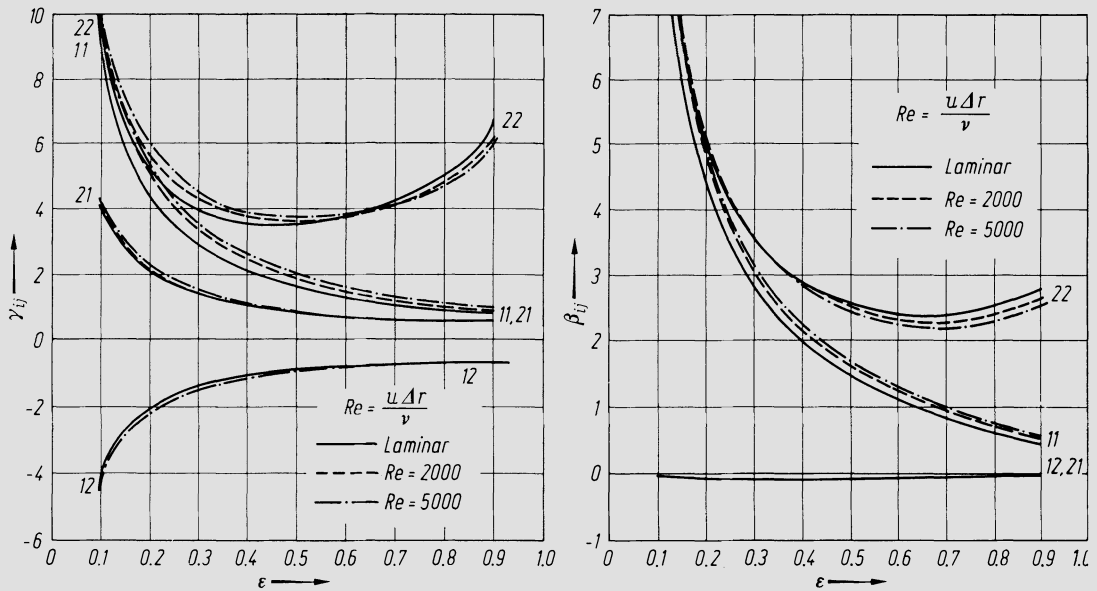


Abb. 21.14.9. Feder- und Dämpfungskonstanten für ein MFG-Vierflächengleitlager $b/d = 0,5$, $\Delta r_{\max}/\Delta r_{\min} = 3$, für verschiedene Reynolds-Zahlen

weichen. Grosso modo hat die Turbulenz etwa den Effekt einer erhöhten Zähigkeit, womit das Lager ein Verhalten zeigt, als ob die Belastung (Sommerfeld-Zahl) kleiner wäre. Kleine Lagerbelastung *verschlechtert* aber die Stabilitätseigenschaften, und das gleiche gilt daher auch von der Turbulenz. Dem kann man entgegenwirken, indem man die mittlere Flächenpressung p_m im Falle der Turbulenz höher wählt. Allgemein vergrößert die Turbulenz den Reibungskoeffizienten in einem Maße, das von der jeweiligen Situation abhängt, beim Übergang vom laminaren Fall auf $Re = 5000$ z.B. um einen Faktor 1,7 bis 3,5. Im laminaren Gebiet ist μ/ψ für festes So unabhängig von Re .

Bei Kippsegmentlagern muß in Extremfällen auch die Segmentmasse mit in die dynamische Betrachtung einbezogen werden, vgl. [40], da dann das sog. Segmentflattern auftreten kann.

Radiale Lagerspiele der Gleitlager liegen in der Größenordnung $\Delta r/r = 1-4\%$, kleinste im Normalbetrieb zulässige Schmierpaltweiten etwa bei 0,01–0,02 mm. Flächenpressungen betragen bei kleinen Maschinen nur wenige bar, bei großen hingegen bis 40 bar. Die Gleitgeschwindigkeiten erreichen bei großen Maschinen 100 m/s, liegen aber bei kleineren sehr viel tiefer. Als Schmierölerwärmung wird etwa 15 °C zugelassen.

21.15 Unterlagen über Axiallager

Die theoretische Grundlage zur Berechnung der Axiallager ist die gleiche wie für die Traglager. Die tragende Fläche wird stets in einzelne Sektoren eingeteilt, die leicht geneigt angeordnet werden, damit Ölkeile entstehen. Diese tragenden Flächen sollen in Umfangsrichtung nicht zu dicht aufeinander folgen, damit genügend Raum für Zu- und Abfuhr des Schmieröles bleibt. Die Lücken sollten etwa 30–40% der verfügbaren Ringfläche einnehmen. Für hohe Ansprüche werden solche Lager als *Michell-Lager* (amerikan. *Kingsbury-Lager*) ausgebildet. Bei diesen werden die einzelnen Tragklötze kippbar und exzentrisch unterstützt, so daß sie die leichte Neigung im Betrieb von selbst annehmen.

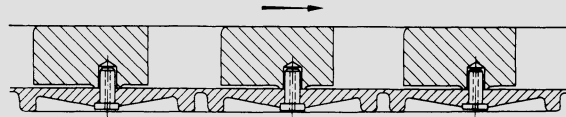


Abb. 21.15.1. Elastisch unterstützte Tragklötze eines Michell-Lagers (BBC)

Die Abstützung der Klötze wird so ausgebildet, daß eine möglichst gleichmäßige Verteilung des Schubes gesichert ist. Heute bevorzugt man zu diesem Zweck elastische Unterstützungen, wie im Beispiel Abb. 21.15.1. Soll das Lager in beiden Richtungen Schub aufnehmen können, so muß dafür gesorgt werden, daß jeweils auch auf der entlasteten Seite eine gewisse Restbelastung bleibt, so daß die Schräglage der Klötze auch dann gesichert ist, was durch elastische Elemente erreicht werden kann. Dann ist das Lager unempfindlich gegen Schubumkehr. *Fricke* [55] untersucht Axiallager mit kreisförmigen, zentral unterstützten Gleitschuhen, bei denen sich die Keilform des Schmierpalt durch elastische Deformation des Gleitschuhes einstellt. Für kleinere Belastungen genügen auch Axiallager mit festen Gleitflächen, die ihre Schräglage lediglich durch Bearbeitung erhalten.

Berechnungsunterlagen für Axiallager liegen in großer Zahl vor, vgl. die zusammenfassende Darstellung in [39]. Umfassende Berechnungen hat *Pinkus* [56] durchgeführt, indem er die Differentialgleichung durch Differenzenrechnung integrierte. Abb. 21.15.2 zeigt die Anordnung des Gleitschuhes und gibt die Bezeichnungen. Der Grundriß des Kreissektors ist gekennzeichnet durch den Winkel θ und das Breitenverhältnis B/R . Die Dicke h des Ölpaltes hängt gemäß

$$h = a + f \left(1 - \frac{\theta}{\Theta} \right) \quad 21.15(1)$$

vom Winkel ϑ ab. Die Rechenergebnisse sind in Abb. 21.15.3–7 zusammengefaßt. Die Berechnung eines Lagers kann anhand dieser Diagramme wie folgt durchgeführt werden.

Man wählt Anzahl und Abmessungen der Tragflächen, einschließlich der Abmessung f (Abb. 21.15.2), welche die Schräglage der Fläche festlegt. Aus dem aufzunehmenden Axialschub A gewinnt man die mittlere Flächenpressung p_m und kann hiermit die Kennzahl

$$T = \frac{\eta n_s}{p_m} \left(\frac{B}{f} \right)^2 \tag{21.15(2)}$$

berechnen, wobei n_s die sekundliche Drehzahl ist. Mit den bekannten T und B/R erhält man aus Abb. 21.15.3 durch Interpolieren a/f , somit also a . Es ist zu prüfen, ob dieser Abstand noch zugelassen werden kann. Befriedigt die Lösung, so lassen sich aus Abb. 21.15.4–7 die Größen j , q_s , q_e , ϑ_P und y_P bestimmen. Mit z als Anzahl der Kippsegmente

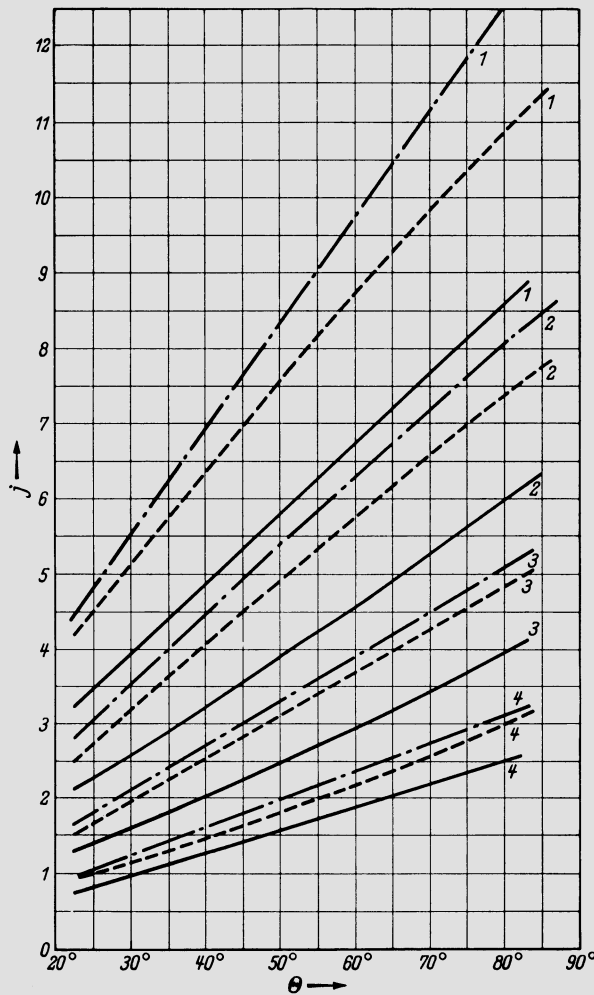


Abb. 21.15.4. Kennzahl j zur Berechnung der Reibungsleistung von Axiallagern. Nach *Pinkus* [56]

—————	$B/R = 1/3$	1	$a/f = 1/8$
-----	$B/R = 1/2$	2	$a/f = 1/4$
-.-.-.-.-	$B/R = 2/3$	3	$a/f = 1/2$
		4	$a/f = 1$

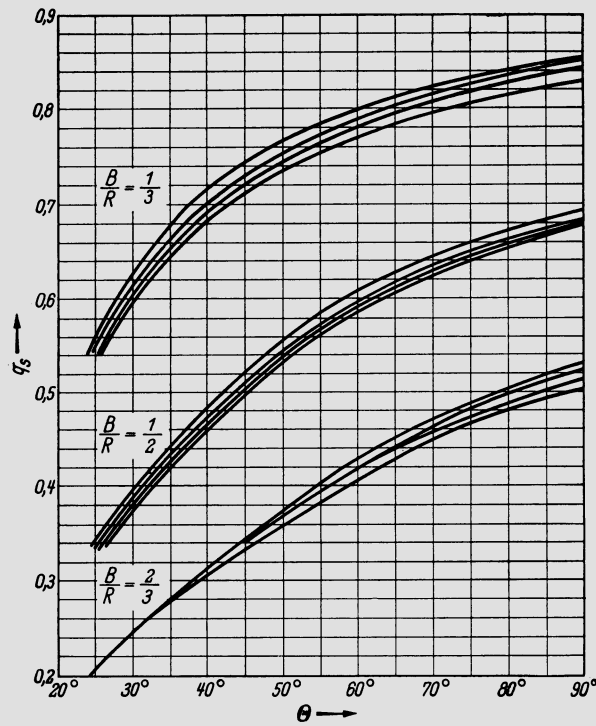


Abb. 21.15.5. Faktor q_s zur Berechnung des Öldurchflusses durch Axiallager. Nach Pinkus [56]. In jeder Kurvenschar Kurven von oben nach unten gültig für $a/f = 1/8, 1/4, 1/2, 1$

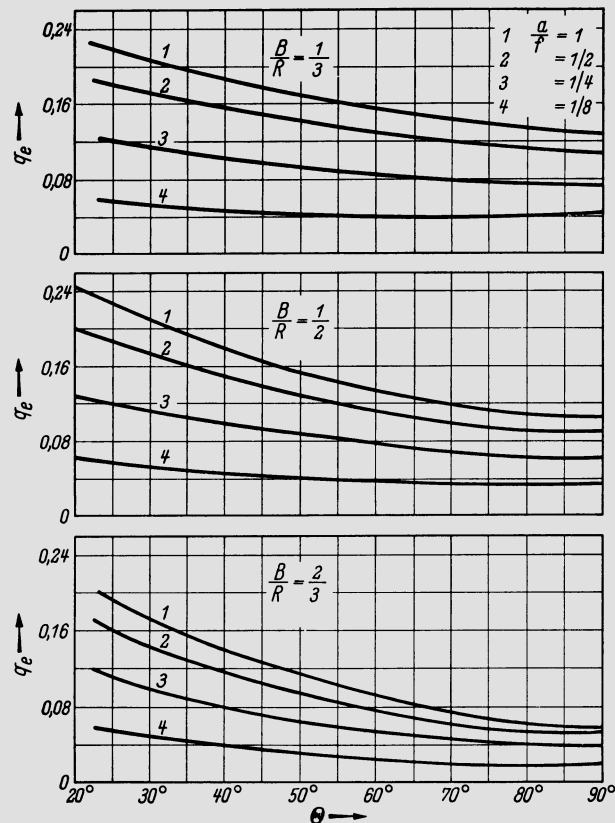


Abb. 21.15.6. Faktor q_e zur Berechnung des Öldurchflusses durch Axiallager. Nach Pinkus [56]

werden dann Reibungsleistung P und Ölvolumenstrom Q

$$P = \frac{zj\pi\eta n_s^2 R^4}{f}, \quad 21.15(3)$$

$$Q = z\pi R B f n_s \left\{ q_s + q_e + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{B}{R} \right) \right] \frac{a}{f} \right\}, \quad 21.15(4)$$

während mit ϑ_p und y_p die Koordinaten des Stützpunktes gegeben sind. Die dritte der Gln. 21.14(7) liefert auch die Temperaturerhöhung.

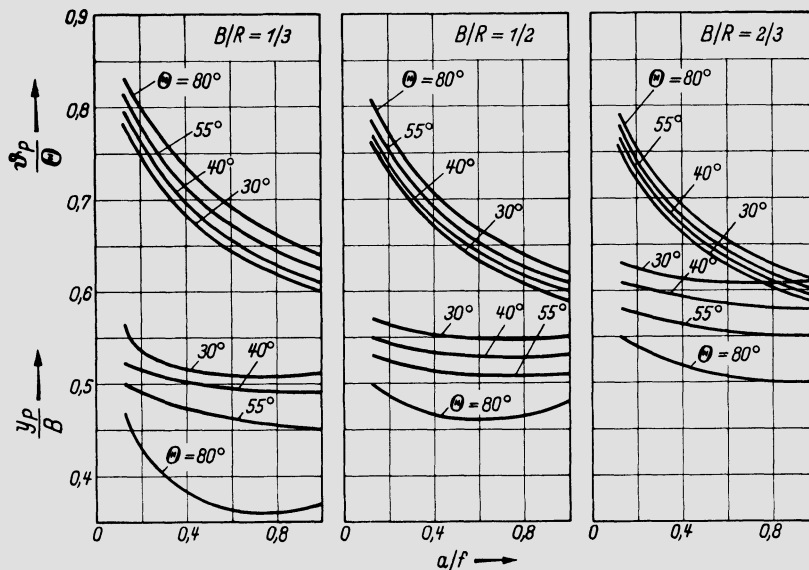


Abb. 21.15.7. Diagramm zur Berechnung des Angriffspunktes der Resultierenden der Öldruckkräfte bei Axiallagern. Nach Pinkus [56]

Als einfache Näherung kann auch folgendes verwendet werden. Es ist

$$L = \pi(2R - B) \vartheta / 360^\circ \quad 21.15(5)$$

die mittlere Gleitschuhlänge und $q = L/B$. Schreibt man sich dann die Minimalspaltweite a vor, so läßt sich der Axialschub

$$A = \frac{\eta\omega(2R - B) zBL^2}{15a^2(1 + q^2)} \quad 21.15(6)$$

übertragen, und der Reibungskoeffizient wird

$$\mu = \sqrt{\eta\omega(2R - B) \pi z B (1 + q^2) / A}. \quad 21.15(7)$$

Kleinstzulässige Spaltweiten a haben die Größenordnung 0,01–0,02 mm. Bei Kippsegmentlagern können die Flächenpressungen etwa 35 bar erreichen, während die Umfangsgeschwindigkeiten im Mittelkreis bis auf 80–100 m/s ansteigen können. Bei Lagern mit festen Tragflächen wird man die Flächenpressung nicht über 10 bar wählen, die mittleren Umfangsgeschwindigkeiten nicht über 60 bis höchstens 80 m/s. Allgemein soll die Erwärmung des Schmieröles 20 °C nicht überschreiten.

Literatur zu Kap. 21

1. *Föppl, A.*: Das Problem der Lavalschen Turbinenwelle. *Civiling.* (1895) 248–250.
2. *Stodola, A.*: Neuere Beobachtungen über die kritischen Umlaufzahlen von Wellen. *Schweiz. Bauztg.* 68 (1916) 210–214.
3. *Stodola, A.*: Dampf- und Gasturbinen, 6. Aufl. Berlin: Springer 1924.
4. *Biezeno, C. R.; Grammel, R.*: Technische Dynamik, 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1953.
5. *Hagg, A. C.; Sankey, G. O.*: Some Dynamic Properties of Oil-Film Journal Bearings with Reference to Unbalance Vibration of Rotors. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 23 (1956) 302–306.
6. *Hagg, A. C.; Sankey, G. O.*: Film Properties for Unbalance Vibration Calculations. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 25 (1958) 141–143.
7. *Pfützner, H.*: Das dynamische Verhalten von rotierenden Wellen unter Berücksichtigung der Schmierfilm-elastizität in den Lagern. *Forsch. Ing.-Wes.* 32 (1966) 19–28.
8. *Kellenberger, W.*: Biegeschwingungen einer unrunder rotierenden Welle in horizontaler Lage. *Ing. Arch.* 26 (1958) 302–318.
9. *Tondl, A.*: Some Problems of Rotor Dynamics. London: Chapman and Hall 1965.
10. *Hochreuther, W.*: Kräfte bei axial durchströmten Spaltdichtungen. *Diss. Univ. Stuttgart* 1975.
11. *Pollmann, E.*: Stabilität einer in Gleitlagern rotierenden Welle mit Spalterregung. *Fortschr.-Ber. VDI-Z, Reihe 1, Nr. 15* (1969).
12. *Wohlrab, R.*: Einfluß der Lagerung auf die Laufstabilität einfacher Rotoren mit Spalterregung. *Konstruktion* 28 (1976) 473–478.
13. *Thomas, H. J.*: Zur Laufstabilität einfacher Turborotoren, besonders bei Spalterregung, *Konstruktion* 30 (1978) 339–344.
14. *Urlichs, K.*: Die Spaltströmung bei thermischen Turbomaschinen als Ursache für die Entstehung schwingungsanfänger Querkkräfte. *Ing. Arch.* 45 (1976) 193–208.
15. *Prohl, M. A.*: A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors. *J. Appl. Mech.* 12 (1945) 142–146.
16. *Bigret, R.*: Nouvelles methodes de détermination des vitesses critiques de flexion d'un rotor repostant sur paliers. *Rev. Gen. Mec.* (1953) 35–43.
17. *Fuhrke, H.*: Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. *Ing. Arch.* 23 (1955) 329–384.
18. *di Taranto, R. A.*: Natural Frequences of Nonuniform Beams. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 25 (1958) 57–63.
19. *Uhrig, R.*: Elastostatik und Elastokinetik in Matrizenschreibweise. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973.
20. *Spieth, R.; Uhrig, R.*: Schwingungsberechnung rotierender Wellen. *Brown Boveri Nachr.* 48 (1966) 107 bis 116.
21. *Schirmer, G. F.*: Zur Stabilität der Schwingungen von Turbinenwellen. *Diss. TH Darmstadt* 1969.
22. *Vogel, D. H.*: Die Stabilität gleitgelagerter Rotoren von Turbomaschinen unter besonderer Berücksichtigung einer Erregung durch Spaltströme. *Diss. TU München* 1969.
23. *Gasch, R.*: Selbsterregte Schwingungen rotierender Wellen. *Konstruktion* 23 (1971) 5–13.
24. *Gasch, R.*: Unwuchterzwungene Schwingungen und Stabilität von Turbinenläufern. *Konstruktion* 25 (1973) 161–168.
25. *Grabowski, B.*: Zur modalen Simulation des instationären Schwingungsverhaltens von Turboläufern. *Diss. TU Hannover* 1976.
26. *Nordmann, R.*: Schwingungsberechnung von nichtkonservativen Rotoren mit Hilfe von Links- und Rechts-Eigenvektoren. *VDI Ber. Nr. 269* (1976) 175–182.
27. *Nordmann, R.*: Schwingungen von Turborotoren. *Konstruktion* 30 (1978) 345–351.
28. *Zurmühl, R.*: Praktische Mathematik, 5. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1965.
29. *Nordmann, R.*: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenformen von Turbo-rotoren mit Gleitlagern, Spalterregung äußerer und innerer Dämpfung, *Diss. TH Darmstadt* 1974.
30. *McGuire, P. M.*: The Dynamic Design of Large Turbine Generator Rotor Systems. *Inst. of Mech. Eng., Conf. Steam turbines for the 1980's, London* 1979, p. 217–224.
31. *Urlichs, K.*: Durch Spaltströmung hervorgerufene Querkkräfte an den Läufern thermischer Turbomaschinen. *Diss. TU München* 1975.
32. *Wohlrab, R.*: Experimentelle Ermittlung spaltströmungsbedingter Kräfte an Turbinenstufen und deren Einfluß auf die Laufstabilität einfacher Rotoren. *Diss. TU München* 1975.
34. *Piltz, E.*: Belastung von Dampfturbinenlaufrädern bei Auslenkungen der Welle. *Konstruktion* 24 (1972) 141–148.
35. *Piltz, E.*: Einfluß von Dampfbelastungen auf die Stabilitätsgrenze einer einstufigen Modellturbine. *Konstruktion* 25 (1973) 130–135.
36. *Thomas, H. J.*: Instabile Eigenschwingungen von Turbinenläufern, angefacht durch Spaltströmungen in Stopfbüchsen und Schaufelungen. *Bull. de. l'AIM Nr. 11/12* (1958) 1039–1063.

37. *Thomas, H. J.; Urlichs, K.; Wohlrab, R.*: Läuferinstabilität bei thermischen Turbomaschinen infolge Spalterregung. VGB Kraftwerkstechnik 56 (1976) 377—383.
38. *Kamps, R.*: Lager- und Schmiertechnik. Düsseldorf: VDI-Verlag 1957.
39. *Lang, O. R.; Steinhilper, W.*: Gleitlager, (Konstruktionsbücher, Bd. 31). Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978.
40. *Dong-Chul Han*: Gleitlager-Turbulenz. Forschungsberichte der FVV, Heft 265, Frankfurt 1979.
41. *Floberg, L.; Jakobsson, B.*: The Finite Journal Bearing Considering Vaporization. Transactions of Chalmers University of Technology, N 109, Göteborg, 1957.
42. *Schiebel, A.; Kömer, K.*: Die Gleitlager, Berechnung und Konstruktion. Berlin: Springer 1933.
43. *Fränkel, A.*: Berechnung von zylindrischen Gleitlagern. Mitt. Inst. Thermodynamik u. Verbrennungsmotoren, ETH Zürich. Zürich: Leemann 1944.
44. *Vogelpohl, G.*: Zur Integration der Reynoldsschen Gleichung für das Zapfenlager endlicher Breite. Ing. Arch. 14 (1943—44) 192—212.
45. *Sassenfeld, H.; Walther, A.*: Gleitlagerberechnungen. VDI-Forschungsheft, Nr. 441. Düsseldorf: VDI-Verlag 1954.
46. *Hakansson, B.*: The Journal Bearing Considering Variable Viscosity. Trans. of Chalmers Univ. of Technology, Göteborg 1965.
47. *Dillenkofer, H.*: Einfluß der Lage der Ölzuführungsstelle auf das Betriebsverhalten stationär belasteter zylindrischer Gleitlager endlicher Breite. Diss. Univ. Stuttgart 1975.
48. *Glienicke, J.*: Feder- und Dämpfungskonstanten von Gleitlagern für Turbomaschinen und deren Einfluß auf das Schwingungsverhalten eines einfachen Rotors. Diss. TH Karlsruhe 1966.
49. *Glienicke, J.*: Experimentelle Ermittlung der statischen und dynamischen Eigenschaften von Gleitlagern für schnellaufende Wellen. — Einfluß der Spaltgeometrie und der Lagerbreite. Fortschrittsber. VDI-Z, Reihe 1, Nr. 22 Düsseldorf 1970.
50. *Schaffrath, G.*: Ein Verfahren zur Berechnung der vier Feder- und Dämpfungskoeffizienten von Radiallagern. Forsch. Ing. Wes. 35 (1969) 184.
51. *Klumpp, R.*: Ein Beitrag zur Theorie von Kippsegmentlagern. Diss. TU Karlsruhe 1975.
52. *Leonhard, H.*: Gleitlagerturbulenz, Forschungsberichte der FVV, Heft R 342, Frankfurt 1979.
53. *Hohn, A.*: Die Lager von Dampfturbogruppen. Brown Boveri Mitt. 62 (1975) 72—83.
54. *Varga, Z.*: Kippsegment-Radiallager 900 mm für Dampfturbogruppen: Eigenschaften und Erprobung. Brown Boveri Mitt. 64 (1977) 309—320.
55. *Fricke, J.*: Das Axiallager mit kippbeweglichen Kreisgleitschuhen. VDI-Forschungsheft, Nr. 567, Düsseldorf 1975.
56. *Pinkus, O.*: Solution of the Tapered-Land Sector Thrust Bearing. Trans. ASME 80 (1958) 1510—1516.
57. *Reichardt, H.*: Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. ZAMM 31 (1951) 208—219.
58. *Hinze, J.*: Turbulence. New-York: McGraw-Hill 1959.
59. *Benckert, H.*: Dynamisches Verhalten von Labyrinthdichtungen. In: Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. J. Wachter, Univ. Stuttgart 1980.

Namen- und Sachverzeichnis

- Abblaselinie 103
Abblaseregulung 99, 108
Abdampfstützen 68
Abfangklappe 95
Abfangventil 55, 83
Ähnlichkeitsgesetz (Wärmeleitung) 316
Aicher 455
Anke 423
Anlassen 124
Anstrengungshypothese 151
Anzapfdruck 65
Aerodynamische Dämpfung 452
Ausschlag (Läufer) 498
Axiallager 519
Axialverdichterstufe 41, 112
Axialverschiebung 366
- B**
Bauschinger-Effekt 155
Beanspruchung, quasizyklische 202
–, schwingende 202, 204
–, zyklische 201
Beglinger 179, 219, 261, 264, 391, 398
Beharrungszustand 59, 126
Bellenot 448
Benckert 508
Bendemann-Ellipse 10
Betriebszustand Turbine 16
Bidard 34
Biegebeanspruchung (Schaufel) 213
Biegeschwingung 392
Biezeno 150, 221, 224, 257, 410, 461
Bindedraht 210, 401
Biot-Zahl 316, 334
Bloemhof 431, 436, 439, 443, 448
Bolzen 300
Borel 5, 20
Bremi 351
Brennkammer 307, 368
Brennkammerbelastung 369
Bruch (Rotor) 276
Bruchdehnung 155
Bruchhypothese 151
Bruchkriterium 199
Bruchmechanik 193, 194
Bruchspannung 155
Buck 402
Burkhardt 273
Bütikofer 417
- Campbell-Diagramm* 434, 456
Carslaw 327
Charakteristik mehrstufig 29
– Radialverdichterstufe 27
– Turbinenstufe 3
– Verdichterstufe 24
Charakteristisches Gleichungssystem 500
Chen 451
Čizmar 67, 73
Crocco-Zahl 2, 3, 25
Curtis-Stufe 76, 77
- D**
Dämpferdraht 210, 457
Dämpfung 452
Dämpfungskonstante 517
Dauerschwingfestigkeit 202
Dauerstandversuch 156
Dauerwechselfestigkeit 182
Day 36
Dean 45, 47
Deckband 224, 401
Deckplatte 208, 402
Deissler 319
Deviator 156
Dietrich 423
Diffusionsfaktor 41
Diffusor 68
Diffusorventil 80
Dittié 40, 41
Donath 261
Dong-Cul Han 512
Doppelkreisbogenprofil 219
Doppelsitzventil 80, 82
Drehbeschleunigung 384
DrehSchwingung 389, 497
Drehzahlregelung 107
Drehzahlvariable 29
Drehzahlvariation 98
Dreiachsiger Spannungszustand 153
Dreieckselement 161, 166
Drosselregelung 49, 59, 72, 107
Druckabfall 130
Druckpegel 125
Druckverhältnis 29
Duhamelsches Integral 329
Duktilität 182
Durchflußgröße 14, 115
Durchflußvariable 29
Durchflußverhalten 115
Düse 116
Düsengruppenregelung 50, 61, 73
- Düsengruppenventil 52
Dynamik, Gasturbinenregelung 144
Dynamik (Regelung) 88
Dynamischer Faktor 436
- E**
Ebener Spannungszustand 153
Eberle 299
Eckenkraft 163
Eckert 324
Effektivität (Kühlung) 364
Effusionskühlung 360, 366
Eigenfunktion 386
Eigenschwingung 376
Eigenwert 386, 390
Eigenwertproblem 385
Einachsiger Spannungszustand 152
Einbeulen 307
Eindimensionales Verfahren 16
Eindimensionale Wärmeleitung 336
Einsatz 307
Einwellige Gasturbine 131
Elastizität 159
Elastizität (lineare) 152
Ellipsenfaktor 9, 59
Ellipsenfunktion 8
Emissionsverhältnis 371
Endres 334
Endstufe 68
Energimethode 391
Engelke 297
Entnahme-Gegendruckturbine 54
Entnahme-Kondensationsturbine 54
Entnahmeturbine 61
Entropiefunktion 130
Erregungskraft 443
Erzwungene Strömung 317
Euler-Balken 383
Euler-Radius 5
- F**
Federkonstante 517
Festigkeitsrechnung 150
Feuchtigkeit 127
Finite Elemente 159, 172, 275, 352, 427, 492
Fister 275
Flammentemperatur 372
Flattern 450
Fliehkrafteinfluß 405
Fließgrenze 155

- Fließregel 155
Floberg 513
Flügel 12
 Flugtriebwerk 124
Föppl 461, 492
 Formfaktor 190, 242
 Fouriersches Wärmeleitungsgesetz 315
 Fourier-Zahl 316
Franklin 186, 189, 190
Frei 318
 Freie Konvektion 317, 322
 Freitragender Ring 248
 Fremdkühlung 360
Fricke 519
Friedrich 360
 Füllzeit 89
- Gaier** 193
Gallagher 275
 Gasstrahlung 372
Gauß 171
 Gegendruckturbine 60
 Gegenlauf 472, 488
 Gegenstrombrennkammer 369
Geisler 77
 Gekoppelte Schwingung 382
 Gekühlte Gasturbine 356
 Gekühlte Schaufel 364
 Gekühltes System 361
 Geometriefaktor 195
 Gesamtbeanspruchung (Schaufel) 246
 Gesamtcharakteristik 12, 103
 – (Gasturbine) 132, 136
 Geschlossene Gasturbine 125
 Gestaltänderungsarbeit 151
 Gitter 1
 Gleichlauf 471, 487
 Gleichstrombrennkammer 369
 Gleitdruckregelung 50, 59, 72
Glienicke 516
Gloger 446
 Goodman-Diagramm 184
Grammel 150, 221, 224, 257, 261, 410, 461
 Grashof-Zahl 317, 322
Greitzer 34
 Grenzbedingung 161, 171
 Grenzschichttheorie 324
Grgić 299
 Gümbel-Linie 514
- Häas** 185, 196
Hagg 461
 Hammerkopf 235, 241
 Hauptabsperrventil 49
 Hauptspannung 150
Hausen 319
Häusler 271
Heiderich 275
Heil 127
Helmholtz 317
Herrmann 213
Hetényi 241, 242
- Hiller* 450, 454
Hinze 512
Hochreuther 475
 Hochtemperaturreaktor 125
Hohn 241, 275
Honegger 261
 Hookesches Gesetz 152
 Horizontalflansch 300
Hornbogen 360
Hort 445
Horvath 34
Hossli 96
Hübner 416
Hult 179, 276, 300
 Hyperbolische Scheibe 260
 Hysterisis 186
- Idealplastizität** 155
 Inbetriebsetzung 56
 Innenkühlung 357
 Innere Dämpfung 471
 Instationäre Temperaturverteilung 331
Ispas 446
Iten 137, 148
- Jaeger* 327
Jäger 261
Jaggi 137
Jakobsson 513
- Kamps** 509
 Kanaldiffusor 46
Kantorowicz 421
Kauderer 152
 Kegellesetz 6, 117
Kellenberger 470
Keller 261
 Kennfeld (Verdichter) 39, 103
 Kennlinie 98
 Kerbeffekt 190
 Kernkraftwerk 125
 Kingsbury-Lager 519
 Kippsegmentlager 517
Kirchberg 401
Kirillov 446
Kleinau 91
 Kondensationsdruck 64
 Kondensationsturbine 59
 Kontaktwiderstand 323
 Koppelschwingung 421
 Korrosion 194, 360
Kraussold 319
 Kreiselwirkung 485
 Kriechen 156, 175, 176, 201, 203, 307
 Kriechgesetz 158
 Kritische Drehzahl 482, 488
 Kritischer Laufzustand 464
 Kritisches Druckverhältnis 10
 Kritische Winkelgeschwindigkeit 463
 Kugel 329
Kündig 398
- Künstliche Dämpfung 476
Kurzke 129
- Labyrinthdichtung** 321, 508
 Lagertheorie 509, 513
Lalive 448
Lambertz 446
Lang 509
 Lastabwurf 125
 Lastfaktor 78
 Läufer 461
 de Laval 240, 256, 461
 Laval-Rotor 462, 466, 468, 477, 491
 Laval-Turbine 477
 Lebensdauer 157, 176, 177, 279
 Leistungsgleichgewicht 134
 Leitradverstellung 100, 119, 122
 Leitradzwischenboden 306
 Leitschaufelverstellung 140
Leonhart 91
Lienhart 445
 Lochrandspannung 273
Löffler 261, 273
 Logarithmisches Dekrement 376, 381
Lotz 445
- Mach-Zahl** 1, 10, 26
Maiya 197, 279
Majumdar 197, 279
Manson 155, 180, 185, 261
May 324
McGuire 503
 Mehrflächengleitlager 474
 Michell-Lager 519
 v. Mises 151
 v. Mises-Kriterium 151
 Modalanalyse 430
 Mohrscher Spannungskreis 150
Moiseev 446
Montoya 409, 415
Münzberg 129, 147, 372
- Naguib* 445
Neuber 152, 191, 241
Nolan 307
Nordmann 501
 Normalenthalpie 1, 18
 Normalspannung 150
Norton 158
 Nortonsches Gesetz 232
 Nortonsches Kriechgesetz 300
 NO_x-Bildung 372
 Nuklearkraftwerk 95
Nunner 512
 Nusselt-Zahl 316
- Oberle** 91
Odqvist 179, 276, 300
 Öffnungsparameter 140
Ohtsuka 211
 Ölfilmstabilität 473
Oppelt 91

- Paketschwingung** 403, 440
Pampreen 47
Parsons 51
Patankar 326
 Pegelregelung 125
Petersen 192
Peterson 241
Pfeiffer 428
Pfützner 416, 468
 Phasenverschiebung 438
Piltz 505
Pinkus 519
 Plastifikation 280
 Plastifizierung 191, 192
 Plastizität 154, 172
 Platte 328
 Prandtl-Zahl 317
 Präzisionsguß 357
 Primärkriechen 157
 Pumpen 28
 Pumpgrenze 32, 43, 44, 103
 Pumpverhütungsregelung
 102, 114, 122, 142

Querkontraktionszahl 153

Raab 91
 Radialverdichter 507
 –, Laufrad 274
 Radialverdichterstufe 44
 Radkammerdruck 61
 Radkranz 249
 Radweise Nachrechnung 18
Rateau 239
 Rayleigh-Quotient 392
Reeves 46
 Regeleingriff 49, 98, 122
 Regelstufe 50, 52, 61, 66, 72
 Regelstufencharakteristik 62
 Regelstufensektor 61
 Regelsystem 56
 Regelventil 80
Reichardt 512
 Rekuperationsturbine 99
 Rekuperatorwirkungsgrad 131
 Relaxation 176, 179
 Repetierstufencharakteristik 112
 Resonanz 378
Reuter 304
 Reynoldssche Differential-
 gleichung 511
 Reynolds-Zahl 1, 137, 317
Rice 452
Rieger 427, 446
Rieß 208, 239
 Ringelement 167
 Rißzähigkeit 195, 196
Ritz 394, 402
Rodgers 45
 Rohrventil 82
 Rotationsschale 291
 Rotationsträgheit 398
 Rotierende Abreißströmung 35
 Rotierendes Abreißen 28, 448

 Rotierende Scheibe (Wärme-
 übergang) 320
 Rotor (Festigkeit) 248
 Rotor, gebaut 281
 –, geschmiedet 281
 –, geschweißt 288

Sägezahnfuß 236
Salm 334
Salzmann 261
Samoilovich 454
Sankey 461
 Sattdampfturbine 95
 Saugdrosselregelung 98
 Schaufel (Wärmeübergang) 324
 Schaufelbeanspruchung 206
 Schaufelbefestigung 234, 241
 Schaufel konstanter Fliehkraft-
 spannung 207
 Schaufelloser Diffusor 45
 Schaufelpaket 224, 399
 Schaufelschloß 235
 Schaufelschwingung 387, 429
Scheffczyk 297
 Scheibe beliebigen Profils 261
 Scheibe (Differentialgl.) 253
 Scheibe gleicher Festigkeit 256
 Scheibe konstanter Dicke 257
 Scheibenschwingung 416
Schilhansl 274
Schlachter 274, 398
 Schleppeffekt 474
 Schlucklinie 132
 Schluckzahl 7
Schmidt 444, 448
 Schnellschlußventil 49, 56, 83, 93
 Schrumpfringverbindung 298
 Schrumpferverbindung 269
 Schubdeformation 384, 398
 Schubmittelpunkt 410
 Schubspannung 150
 Schubspannungshypothese 152
 Schwinger 375
 Schwingungsanregung 434, 440
 Schwingungsform 386
Seidel 171
Seippel 51, 397
 Sekundärkriechen 157
 Selbsterregte Schwingung 461
 Selbsterregung 448, 471
Senoo 45
 Sicherheitsfaktor 199, 280
Siebel 193
Sigwart 192
Smith 43
 Sommerfeld-Zahl 511
Spalding 326
 Spalterregung 474, 477, 503
 Spaltkanal 318
 Spannungsamplitude 434, 440
 Spannungs-Dehnungs-Diagramm
 154
 Spannungsintensitätsfaktor 196
 Spannungsoptik 241

 Spannungsspitze 177
 Spannungs-Verformungsgesetz
 150, 158
 Spannungszustand 150
Späti 44
Spera 187
 Sperrgrenze 28, 32, 46, 103
 Spezifische Wärmekapazität
 (Verhältnis) 128, 129
Spieth 492
 Stab (Schwingung) 383
 Stabilität 91
 – (Läufer) 498
 Stabilitätsgrenze 28, 32, 41,
 102, 103, 117, 480
 Stabilitätsuntersuchung 477
 Stanton-Zahl 316, 365
 Steckfuß 239
 Steilheit (Kennlinie) 24
Steinhilper 509
 Stellkraft 82
 Stimulus 436, 443
 Stochastische Erregung 448, 451
Stodola 12, 260, 306, 461, 488,
 490, 491
 Stopfgrenze 28
 Strahlungszahl 371
 Streckgrenze 155
 Strouhal-Zahl 450
Strub 261
 Stufencharakteristik 3, 17, 39,
 117, 119
 Stufenüberbrückung 63, 77
Suter 44

Taylor 307
 Teilablösung 36
 Teilbeaufschlagung 447
 Telemetrie 431
 Temperaturleitzahl 315
 Temperaturverteilung (Schaufel,
 Scheibe) 340
 Tertiärkriechen 157
Thomas 158, 401, 477, 504
Tilly 186
 Timoshenko-Balken 383
Tölke 294
 Topfbauart 295
 Torsion 398
 Torsionsbeanspruchung (Schaufel)
 211
 Torsionsfrequenz 399
 Torsionsschwingung 436, 447
 Totaldruckabfall 130
 Totzeit 91
 Tragfähigkeitsgrenze 199
 Trägheitszeit 88
Tresca 152
 Trommel 266
Tröscher 91
 Turbinenleitrad, verstellbares
 137
 Turbulenter Schmierfilm 512
 Turbulenzgrad 1

- Überdrehzahl* 55, 91
Überlast 51
Überlastregelung 52
Überlastventil 52
Übertragungsmatrix 416
Uhrig 416, 426, 492, 496
Umbiaserregelung 99, 109
Umsetzungsgrad 68
Unbalance 463
*Unterteilung des Dehnungs-
bereiches* 187
Urlichs 475

Varga 517
Ventilschwingung 81
Verbrauchercharakteristik 98
Verdichterkennlinie 33
Verdichterregelung 107
Verdrängungseffekt 474
Vergleichsdehnung (plastische)
156
Vergleichsspannung 151
Vergrößerungsfaktor 377
Verjüngte Schaufel 399
Verstellmechanismus 113
Verwundene Schaufel 409
Verzerrungswinkel 153

Viskoplastischer Spannungszustand (Schaufel) 232
Viskoplastizität 156
Vollablösung 36
Vollastabschaltung 147
Vorhubventil 82

Wachter 456
Wahl 276, 306
Wärmedehnung 153, 366
Wärmeleitung 315
Wärmeleitungsgleichung 327
Wärmespannung 259
– (Schaufel) 229
Wärmestromdichte 315
Wärmeübergang 315
Wärmeverbrauch 79
Wasserfilm 95
Wechselbeanspruchung 191
Werkstoffdämpfung 186, 452
Whittle 35
Wicks 446
Wirkungsgrad 66
Wirkungsgradänderung 68
Wirkungsgradverlauf (Endstufe)
70
Wohlrab 506

Wolfs 430
Wolter 456

Yamaguchi 34

Zeitbruchlinie 157
Ziegler 155
Zitronenspiel 481
Zollinger 444
Zugfestigkeit 155
Zurmühl 501
Zwangskriechen 186, 189
Zweidimensionales Verfahren 22
Zweidimensionale Temperaturverteilung 347
Zweistromtriebwerk 124
Zweiwellentriebwerk 124
Zweiwellige Gasturbine 133
Zwischenabblasen 110, 122
Zwischenabblasung 102, 118
Zwischenkühlung 111
Zwischenüberhitzung 57, 59, 74
Zwischenumblasen 110
Zyklenzahl 181
Zyklus 187
Zylinder 328
Zylindrische Lagerschale 473