爱因斯坦全集

第六卷 柏林时期 (1914—1917)

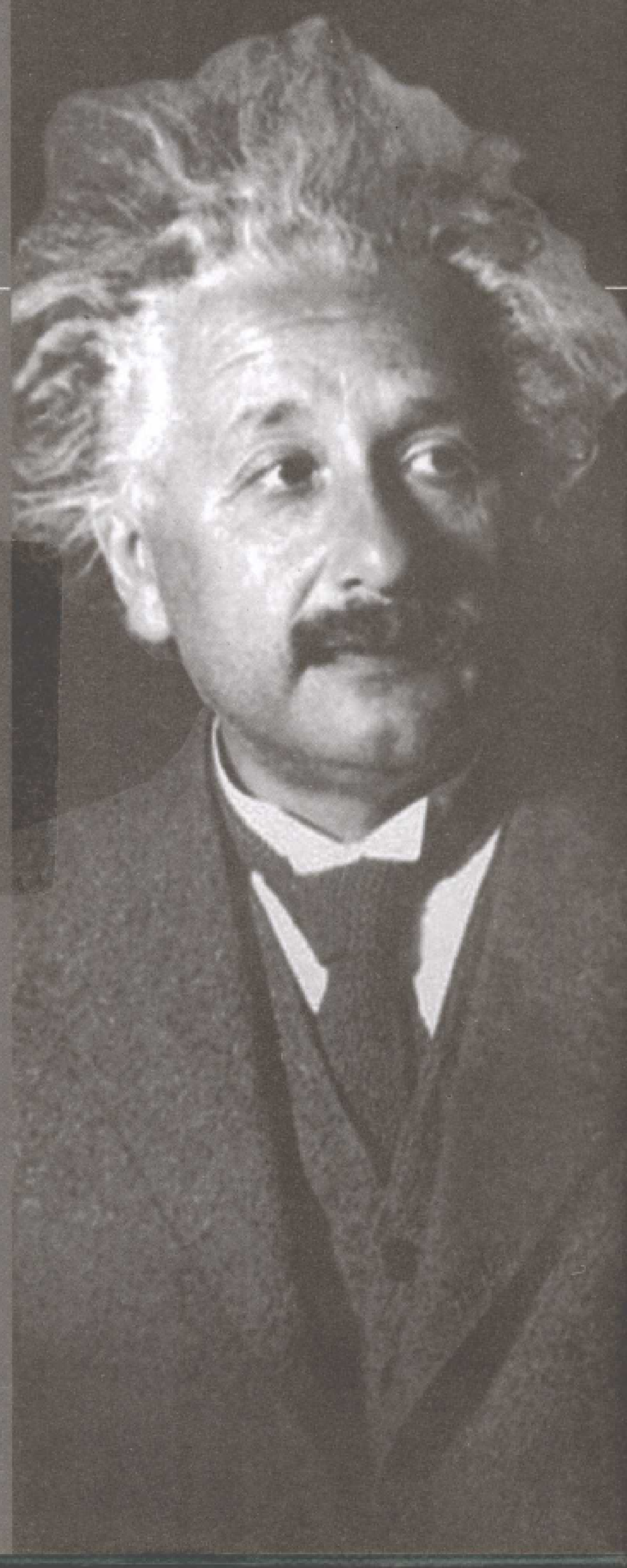
A. J. Kox, Martin J. Klein, and Robert Schulmann/主编
吴忠超/主译

[美] 阿耳伯特·爱因斯坦/著

湖南科学技术出版社

The Collect
Albert

Volume 6: The Berlin Years: Writings, 1914—1917



The Collected Papers of

Albert Einstein

ISBN 978-7-5357-5788-3

9 787535 757883 >

定价: 150.00元

爱因斯坦全集

第六卷

柏林时期

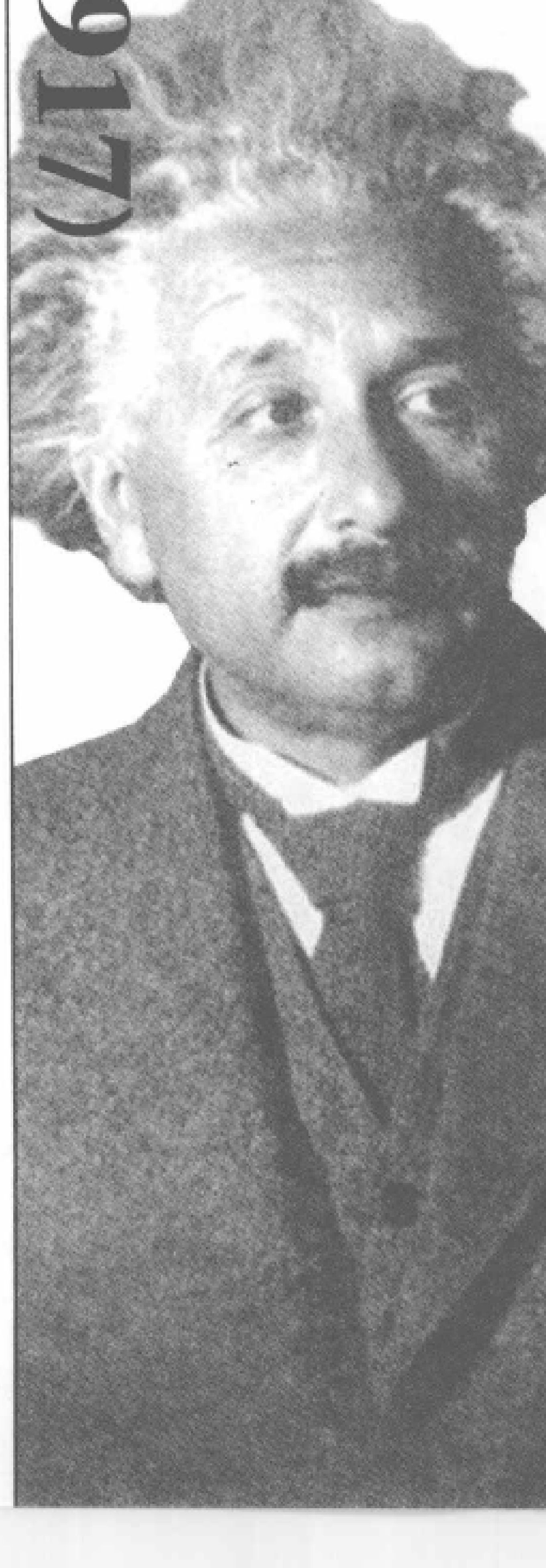
(1914—1917)

The Collected Papers of

Albert Einstein

[美] 阿耳伯特·爱因斯坦 / 著

湖南科学技术出版社



图书在版编目（CIP）数据

爱因斯坦全集. 第六卷 / （美）爱因斯坦（Einstein, A.）著；吴忠超译. —长沙：湖南科学技术出版社，2009. 5
ISBN 978-7-5357-5788-3

I. 爱… II. ①爱…②吴… III. 爱因斯坦，A.（1879～1955）—全集 IV. Z471. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 124938 号

爱因斯坦全集
第六卷　柏林时期（1914—1917）
著　　者：[美]阿耳伯特·爱因斯坦
主　　编：A. J. Kox, Martin J. Klein, and Robert Schulmann
主　　译：吴忠超
策划编辑：李永平
责任编辑：杨许国
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
　　　　　http://www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科　0731-84375808
印　　刷：长沙化勘印刷有限公司
　　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：长沙市青园路 4 号
邮　　编：410004
出版日期：2009 年 5 月第 1 版第 1 次
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：33. 5
字　　数：601000
书　　号：ISBN 978-7-5357-5788-3
定　　价：150. 00 元

THE COLLECTED PAPERS OF

Albert Einstein

VOLUME 6

THE BERLIN YEARS: WRITINGS, 1914–1917

A. J. Kox, Martin J. Klein, and Robert Schulmann
EDITORS

József Illy and Jean Eisenstaedt
CONTRIBUTING EDITORS

Rita Fountain and Annette Pringle
EDITORIAL ASSISTANTS

Princeton University Press
1996

捐 赠 者

Harold W. McGraw, Jr.

资 助 者

《爱因斯坦全集》(原书)之得以付梓，端赖下列资助者对编辑工作的慷慨资助，现耶路撒冷的希伯来大学以及美国普林斯顿大学出版社谨对他们表示感谢。

大　　学

波士顿大学(美国)

基 金 会

国家人文学科基金会(美国)

Alfred P. Sloan 基金会(美国)

Dr. Tomalla 基金会(列支敦士登公国)

Pieter Zeeman 基金会(荷兰)

公　　司

太阳微系统股份有限公司(美国)

个　　人

Jan Philipp Reemtsma

中文版出版说明

阿耳伯特·爱因斯坦不仅是20世纪最杰出的物理学家，而且是一位富有哲学探索精神的思想家，同时又是一位具有高度社会责任感的真正意义上的知识分子。对他的科学成就、科学思想、政治言论及生平的深入研究，势必成为科学史界普遍关注的话题。美国普林斯顿大学出版社自1987年出版《爱因斯坦全集》（*The Collected Papers of Albert Einstein*）第一卷以来，已陆续出版多卷，随着资料不断地收集，全集出齐将超过25卷。

全集不仅包括爱因斯坦的全部学术论文，还涉及有关和平、宗教、犹太人问题等社会政治言论，还有他与家人及朋友的往来书信，各种听课、备课笔记以及其他有关他个人的全部材料。这些材料是目前研究爱因斯坦最权威、最全面的资料。其中许多材料是首次公开发表。《爱因斯坦全集》的编辑出版，是国际科学史界的一项大工程，它不仅可以填补科学史上的一些空白，而且可以澄清一些广为流传的讹误，其学术价值和文化积累意义是不言而喻的。我社聘请国内科学史界和物理学界资深专家教授及年轻学者翻译出版《爱因斯坦全集》，这对我国学术界来说无疑是一件幸事。读者将最大限度地追踪爱因斯坦的思想、生活及科学活动，从中领略到科学和文化在现代社会中的深远影响。

《爱因斯坦全集》中文版是根据普林斯顿大学出版社出版的 *The Collected Papers of Albert Einstein* 德文版精装本翻译的，翻译过程中还参阅了此书的英文版平装本。为了便于前后各卷的统一，全集中除爱因斯坦外的人名均未译。地名及专有名词在正文中第一次出现时附注了原文。各卷的边码均指示德文原版书的页码，以利读者核对

原文。全集各卷注释及索引中的页码除特别指明外，均指德文原版书页码即中文版的边码。中文版将原版索引拆分为三，一是名词索引，包括社会政治经济和文化机构名称、地名和地址以及科学技术词汇，以人名命名的科技术语也在其中。二是人名索引。此外尚有引文索引。名词索引按汉语拼音顺序排，人名索引及引文索引按拉丁文字母顺序排。

《爱因斯坦全集》的翻译出版工作浩大而繁杂，这使得我们的工作难免留下某些遗憾。恳请海内外读书界、著译界和出版界的朋友、同仁提出宝贵的意见和建议，以利改进工作，促使此项翻译出版工程圆满完成。

湖南科学技术出版社

2009 年 5 月

第六卷序

一

在本卷所涉及的这段时期，爱因斯坦的生活和事业进入了一个崭新的阶段，我们把它描绘为柏林岁月。他是普鲁士科学院的领薪院士，这一职位使他处于当时科学界的中心——这是他离开偏远的瑞士联邦技术大学的教职后发生的重大变化。这个新职位对他的个人生活也具有重大意义：在柏林岁月里，爱因斯坦变得越来越像个社会名人，人们越来越频繁地征求他关于非科学问题的观点。的确，这个关于柏林岁月的第一卷已经包括一些非科学的篇章，其中两篇与第一次世界大战有关（文件 8 和 20），另有一篇简短陈述了德国学校体制下
[1] 传统的中学终考弊端[*Einstein 1917h*（文件 49）]。爱因斯坦不快乐的私人生活也在柏林岁月的前几个月达到了顶峰：还在苏黎世的时候，他与妻子 Mileva 就开始疏远，最后终于导致分居。与爱因斯坦在柏林仅仅度过了几个月，Mileva 就带着两个儿子 Hans Albert 和 Edu-
[2] ard 返回了苏黎世。在战争年代，爱因斯坦与其表姐 Elsa Löwenthal（她的风采也是吸引他到柏林来的原因之一）的联系进一步持续并紧密了。在 1919 年 2 月与 Mileva 离婚后，他在同一年 6 月与 Elsa 结婚。

自 1912 年夏末从布拉格返回苏黎世以后，爱因斯坦一直倾注大量时间和精力的一项任务——引力论的研究，在柏林岁月的头几年得以完成。1915 年 11 月发表了 *Einstein 1915f*，*1915g* 和 *1915i*（文件 21，21 和 25)，导出了一般协变场方程，使该理论得以完善。它在 *Einstein 1915h*（文件 24）中成功地解释了观测到的水星近日点的异常运动，使该理论得到决定性的实验支持。尽管爱因斯坦继续推导出该理论的更多结论，并写了一篇重要的综述论文[*Einstein 1916e*（文件

30)]和一本普及著作[*Einstein 1917a*(文件 42)],但是他仍有时间再次从事其他感兴趣的事情,特别地,返回到量子理论上来。他的两篇论量子理论中辐射的发射和吸收的论文(*Einstein 1916j* 和 *Einstein 1916n*[文件 34 和 38])代表了该领域的主要进步。

本卷的其他特色包括爱因斯坦与荷兰物理学家 Wander Johannes
de Haas 合作对 Ampère 分子电流的存在性进行实验研究的有关论
文,以及他在一起专利纠纷中首次以技术专家身份出庭的有关文件。 [3]
本卷以两个附录结尾:第一篇附录总结了爱因斯坦在柏林大学(分别 [4]
于 1916/1917 年和 1917/1918 年)的两次讲课的学生笔记,还收录了
他自己在 1914/1915 年有关相对论课程的讲稿,该讲稿在这里以文件
7 出现。第二篇附录是一名听众对爱因斯坦于 1915 年初夏在
Göttingen 作的关于相对论的系列演讲的一部分所做的笔记。

二

当爱因斯坦于 1914 年 3 月离开苏黎世前往柏林时,广义相对论
还不令人满意。自从爱因斯坦和 Grossmann 的"Entwurf"理论发表
后的一年里[见 *Einstein and Grossmann 1913*(第四卷,文件 13)],没
有什么大的进展。特别是,缺乏广义协变性仍旧是该理论成问题的方
面。虽然似乎爱因斯坦当时已经认为广义协变理论是不可能的,甚至 [5]
是不合需要的——他的"空洞论证"在这方面曾经一直是很有用 [6]
的——但当时仍然不清楚该理论在多大程度上是协变的。这个问题
是爱因斯坦和 Grossmann 最后一次合作研究的主题,结果是发表了
Einstein and Grossmann 1914b(文件 2)。他们以其理论的 Hamilton
形式为出发点,试图比前一篇论文更精确地确定该理论究竟允许哪些
xvii 变换。他们对使该理论成立的那些框架以及联系它们的变换引入了
术语"适应坐标系"和"合格变换",成功地导出了所有合格变换必须满 [7]
足的条件。他们还声称(没有明确的证明),允许的变换包含了加
速度。

在 1914 年 11 月发表的一篇复杂的长篇论文[*Einstein 1914o*(文
件 9)]里,从详细地阐述张量演算开始,系统地发展了该理论。在推 [8]
导场方程之前,是采用新版的"空洞论证",来证明描述引力场中的物

[9] 理过程的方程"不可能是广义协变的"。如同在 *Einstein and Grossmann 1914b*(文件 2)里一样,变分原理作为推导场方程的出发点,而与之相对照的是,在前一篇论文里从一开始就指定 Hamilton 量,而现在爱因斯坦先提出从中可导出具体的 Hamilton 量的一般条件。结果证明,用这种方式获得的 Hamilton 量导致了"Entwurf"场方程。如同爱因斯坦总结的:"现在我们以纯粹形式的方式,即没有直接用到关于
[10] 引力的物理知识,得到了非常明确的场方程。"

一年后,爱因斯坦完全改变了主意。关于他在这一年里如何与该理论斗争,直到最后得出结论,认为必须抛弃这个理论,这一过程已经
[11] 被谈论了多次,这里只能扼要重述一下。没有太多的当时的资料供我们来推想爱因斯坦在那一年里的思维过程,我们必须在很大程度上依赖于在以后的各种场合下爱因斯坦自己所做的陈述。从现有的资料来看,似乎是到 1915 年秋,爱因斯坦已经意识到该理论有三个主要缺
[12] 陷:在 *Einstein 1914o*(文件 9)中确定 Hamilton 量所使用的论证是错 xviii
误的;该理论对于旋转不是协变的;结果证明水星近日点运动太小了。对于所有这三点都可以给出一些背景介绍。

第一个问题,爱因斯坦认识到他确定 Hamilton 量的方法其实不是那么回事,这可能源于他与意大利数学家 Tullio Levi-Civita 关于 *Einstein 1914o* (文件 9)中爱因斯坦对场方程的推导过程的一个关键
[13] 点的讨论。第二点与爱因斯坦的信念有关。他坚信,合格变换应该包括旋转,因为该理论必须把 Mach 原理合并在其中,后者被看成是关
[14] 于旋转运动的相对论和由远距物质确定惯性的理论。实际上,他的 Mach 观点引导他探索广义协变场方程。在爱因斯坦写给 Erwin Freundlich 的一封信中,包含一些有趣的信息,披露了爱因斯坦得出
[15] 没有将旋转包括在容许变换中的结论的有趣过程。第三个问题,该理论没有能正确地解释水星近日点的运动,和爱因斯坦早先与他的朋友 Michele Besso 合作,根据"Entwurf"理论对水星运动所做的计算相关。这些计算(原先不为人知,在第四卷中以文件 14 给出)导致的结
[16] 果大约小了两倍。

爱因斯坦一旦认识到这三个缺陷的严重性,就决定重新开始:"因为这些原因,我对我导出的场方程完全失去了信心,并企图找到办法

以自然的方式来限制这些可能性。”他回到广义协变性上，快速连续地 [17]
发表了包含有最终理论的精髓的一系列论文。在头两篇论文中关于 [18]
场方程形式和能量-动量张量的迹的初始错误，在第三篇和最后一篇
xix 论文中得以纠正。有趣的是，这些论文根本不与“空洞论证”有关，而
这个论证在爱因斯坦早期思考中曾经起过关键作用。只有通过爱因
斯坦的通信，我们才能知道，当他认识到并非度规场，而只有时空重合
的全部才有物理意义的时候，他就拒绝了“空洞论证”。 [19]

甚至在1915年11月的三篇论文的最后一篇发表以前，爱因斯坦就用他的广义协变场方程计算水星近日点的运动，得到了每百年43
弧秒的结果，与观测结果非常满意的一致。爱因斯坦后来告诉他以前 [20]
的合作者 Adriaan Fokker，当他看见这个结果的时候，激动得心都 [21]
发颤。

在最后一篇论文发表后的几个月，爱因斯坦准备花些时间写一篇评论文章，以一致的、易理解的方式介绍并解释整个理论。文章发表在《物理学杂志》[*Einstein 1916e*（文件30）]，但也以单行本的形式广泛销售（*Einstein 1916f*）。它给出该理论一个极好的概观。同一年，爱因斯坦还完成了一部关于狭义和广义相对论的通俗介绍的书 *Ein-*
stein 1917a（文件42）。它立刻获得了成功，直到今天仍是经典著作。 [22]
新理论还引起了其他研究细节和结果：一篇关于该理论的 Hamilton 形式的论文[*Einstein 1916o*（文件41）]，本卷给出的文件31的早期手稿，以及一篇关于引力波的论文[*Einstein 1916g*（文件32）]，该论文因为一个严重错误在1918年不得不撤回。

三

1917年春，爱因斯坦发表了他的第一篇宇宙学论文，*Einstein 1917b*（文件43）。这可以说成是现代宇宙学诞生的标志。爱因斯坦在宇宙学方面的兴趣来自于他的一个信念，上面已经提到过，即引力论应该以某种方式包括 Mach 原理。爱因斯坦在完成广义相对论后这
xx 么快就转向宇宙学，这也可以从下面的事实来理解，即宇宙的几何结构不像牛顿宇宙学那样被认为是先验的，而是必须适合广义相对论的框架，在此意义上，宇宙学是广义相对论的不可缺少的部分。关于宇

宙学方面的考虑已经出现在 *Einstein 1916e*(文件 30)中。的确,此文引言部分给出的论证直接触及 Mach 原理,它涉及两个球,其中之一在旋转。已经找出解释旋转球和非旋转球在形状上的差别的物理原因为远距物质的存在;而像牛顿那样,认为原因在于绝对空间,是"完
[23] 全虚构的原因,而不是可观测到的东西"。根据爱因斯坦的虚空不可能有几何结构,孤立单独的物质不可能有惯性,也不可能给无限远处的空间赋予结构。

爱因斯坦正是以这样的信念作为他的宇宙学论文[*Einstein 1917b*(文件 43)]的出发点。Mach 原理的爱因斯坦版的结果是,在无限远处,度量张量的分量应该退化:对于各向同性场,空间分量变成零,而类时分量变成无穷大。对于中心对称静态场,事实证明不可能达到这些条件。爱因斯坦的办法是假定宇宙在空间上是有限的、闭合的、静止的,质量分布是均匀的,而且不需要边界条件。但是,为了做到这一点,爱因斯坦必须修改他的场方程,使其包括后来称作"宇宙常数"的量。这样,爱因斯坦就尽可能地把 Mach 思想并入其中,但是却没能彻底地解决旋转运动的相对性问题。

这篇论文标志爱因斯坦与荷兰天文学家 Willem de Sitter 对旋转运动的相对性和惯性的相对性开始了讨论,讨论的形式既有通信也有
[24] 发表的论文。讨论的主要议题是 De Sitter 自己的宇宙学解,该解表明虚空宇宙可以表现出整体弯曲。虽然这种解的存在对爱因斯坦的惯性相对性思想是一个沉重打击,但是他没有放弃自己的宇宙学观点。当 Friedmann,随后是 Lemaître,发现非静态宇宙解时,他也没有 xxi
改变主意。直到 1931 年,爱因斯坦才终于接受了宇宙的非静态特性,放弃了宇宙常数,认为它是不必要的,并损害了他场方程的简单性。

四

本卷中有两份文件,文件 12 和文件 19 与众不同。它们是爱因斯坦在一起涉及专利纠纷的法庭诉讼中,以专家证人的身份草拟的鉴定意见。1914 年秋,爱因斯坦卷入了德国企业 Anschütz 公司和美国 Sperry Gyroscope 公司之间的一起纠纷。争端是关于旋转罗盘的设计。这件事使爱因斯坦和这家德国企业的业主 Hermann Anschütz-

Kaempfe 之间产生了亲密的友谊。 [25]

旋转罗盘可以追溯到 19 世纪 Léon Foucault 陀螺相对于旋转的
地球，其旋转轴方向的稳定性方面的工作。随着船上铁器的使用和电
气设备的增加，使得磁罗盘的使用越来越成问题，这时候旋转罗盘就
显得是个诱人的选择。荷兰人 Martinus Gerardus van den Bos 在
1885 年获得了早期形式的旋转罗盘的专利，但是他的发明从来没有 [26]
真正工作过。1903 年，Hermann Anschütz-Kaempfe 设计了一个旋转
罗盘，用在去北极探险的潜水艇上（此次探险没有成行）。该设计获得
了专利，在德国海军的支持下，1905 年在 Kiel 建立了一家工厂。 [27]

在美国，发明家 Elmer Ambrose Sperry 也开发了一种旋转罗盘。
Anschütz 和 Sperry 在有潜在高额利润的市场上发生了竞争，因为当
时正是第一次世界大战前几年加强军备的时候。当 Sperry 在 1914
年 5 月向德国海军销售罗盘的时候，Anschütz 决定在柏林，皇家第一
州立法院控告 Sperry 专利侵权。Sperry 的辩护基于这个论断，即
xxii Anschütz 的专利没有在 Van den Bos 的旧专利上增加任何东西（同时
旧专利已由 Siemens 和 Halske 所购），所以是无效的。此案中辩论的
另一点是说 Sperry 使用的阻尼法已经被 Anschütz 取得了专利。 [28]

法庭提议指定一位双方都认可的专家。指定了爱因斯坦，让他在
1915 年 1 月 5 日首次出庭。显然他没有准备好，因为在他的陈述中，
有好几处自相矛盾。法庭于是要求他以书面报告的形式回答许多问 [29]
题，为此将给他支付 1000 马克。 [30]

爱因斯坦的报告在文件 12 中给出。其中他说 Anschütz 的专利
没有改进 Van den Bos 的专利。Anschütz 不同意，法庭也不相信。在
1915 年 3 月 26 日又一次开庭（爱因斯坦没有出席）后，要求他亲自检
查 Sperry 罗盘，就 Van den Bos，Anschütz 和 Sperry 罗盘之间的差别
写一篇进一步的报告。爱因斯坦决定在 Sperry 罗盘上做大量试验。 [31]
该试验于 1915 年 7 月 10 日在 Kiel 完成。在他 1915 年 8 月 7 日的第
二份报告（文件 19）中，爱因斯坦纠正了他前面的结论，说 Anschütz 罗
盘的水平稳定性确实改进了 Van den Bos 罗盘，他还断定 Sperry 的阻
尼法就是 Anschütz 以前的专利中所描述的方法。1915 年 11 月
16 日的法庭判决听从了爱因斯坦的报告，禁止 Sperry 制造、销售使用

[32] Anschütz 受专利保护的方法的旋转罗盘。

五

在这一时期，爱因斯坦在量子理论方面只写了少许论文，但是其中几篇却非常重要。这些文章中仅有的未发表的手稿（文件 26）讨论了理想气体的熵常量的理论计算。几年前由 Otto Sackur 和 Hugo Tetrode 也独立地完成了这个计算。1916 年 1 月爱因斯坦就这一课题讲演过，这篇手稿就是与那次讲演有关。他演讲的目的是揭示出 xxiii
Sackur 和 Tetrode 使用量子理论概念的方法的基本方面，从而能够更
[33] 加看出这一课题"没有提供任何实质上新的东西"。

本卷里四篇发表过的量子理论的论文中，有三篇至少部分地涉及爱因斯坦研究工作中反复出现的主题：为了导出 Planck 辐射定律，需要什么条件和假设？这是 *Einstein 1914n*（爱因斯坦在柏林写的第一批论文之一）（文件 5）的主要议题。这里他避免使用联系熵和概率的 Boltzmann 原理，而是借助于量子理论的基本思想，用纯粹的热力学论证导出 Planck 分布。他的论证特别有意思的是，当从量子理论的观点考察物理和化学过程时，发现这两者之间存在基本的相似性。在此文的第二部分，爱因斯坦转向另一个他已经思考了多年而且以前讨
[34] 论过的题目：Nernst 热定理的正确性。

在 1916 年夏，在他完成广义相对论后不到一年的时间，爱因斯坦在量子理论上做出了新的、重大的贡献。那时他写的两篇论文，*Ein-*
[35] *stein 1916j*（文件 34）和 *Einstein 1916n*（文件 38），与以前所有早期处理 Planck 辐射定律的方法相同，他处理辐射的量子理论所用的论证不依赖于经典电磁理论。新的理论还导出了惊人的结论：在辐射场中，原子发射和吸收的辐射具有特定的方向，而且不是由球形波组
[36] 成的。

在这些论文的第一篇 *Einstein 1916j*（文件 34），爱因斯坦考虑一个与外部辐射场保持平衡的原子系统。原子可以通过吸收或发射辐射来改变它的内部能态。关于物质和场之间的这些能量交换，爱因斯坦引入三个基本假设。首先，吸收辐射的概率与辐射密度成正比。其次，有两种发射过程：一种是自发的，遵从类似于放射性衰变的定律；

另xxiv种是受激的，由辐射场诱发，其概率与辐射密度成正比。第三，平衡时，原子内部状态的分布遵从 Boltzmann 分布定律。从这些假设可以很容易导出 Planck 定律。爱因斯坦对他的推导很满意，在一封给 Besso 的信中他描绘道："Planck 公式的一个惊人简单的推导，我应该说它是这个推导。"他的推导还有一个意外收获，爱因斯坦发现，原子 [37]
的两个内部能态之间的能量差必须等于 $h\nu$，其中 ν 是在这两个状态间跃迁时吸收或发射的辐射频率，这样就证实了 Bohr 的光谱理论中的一个假设。

在 *Einstein 1916n*（文件 38）中，重复了第一篇论文中的推导，并增加了对伴随发射和吸收过程的动量转移情况的讨论。爱因斯坦指出，除了能量以外，如果交换的辐射是定向的，那么动量也在原子和场之间转移。如果能量以球形波的形式发射，那么就没有动量转移。然后他做了一个基本而非经典的假设：在辐射场中，所有原子辐射的发射和吸收过程都有 $h\nu/c$ 的动量被转移。他研究了这个假设的定量结果，所用的技巧是他以前多次成功用在量子现象上的技巧：计算在辐射场中运动的粒子所经历的涨落，在这里是动量的涨落。在实际计算 [38]
中，爱因斯坦利用了他以前与 Ludwig Hopf 合作研究发展的方法。最 [39]
后的结果是以辐射密度的方程形式表达的、关于原子和辐射系统的一个平衡条件。Planck 定律满足它，但是 Rayleigh-Jeans 辐射定律不满足它。这被解释为一个强有力的证据，证实了原子发射的所有辐射，不论诱发的还是自发的，确实是定向的："不存在球形波的辐射。"这一 [40]
非常重要的结论成为迈向光子概念的主要一步。正如爱因斯坦所说："有了这个，光量子的存在性实际上就被肯定了。" [41]

xxv 本卷中关于量子理论的最后一篇论文，*Einstein 1917d*（文件 45），论述一个完全不同的课题：周期性系统的 Bohr-Sommerfeld 量子条件。如果坐标分离是可能的，这个条件只能以通常形式表示为（$\int p_i \mathrm{d}q_i = n_i h$）；在所有其他情况下，这个条件具有一般形式（$\sum\int p_i \mathrm{d}q_i = nh$）。在他的论文中，爱因斯坦讨论了一种无须分离变量的可能方法。通过把这个条件的一般形式解释为在（坐标）相空间

中沿着某一封闭周线的线积分，他使这个形式具有了独立于坐标的意义。如果相空间的结构使得不是所有封闭曲线都能收缩到一点，即如果系统的运动限制于某个不变子空间，那么必定存在有限个拓扑无关的周线。对于多个周期性系统，这些周线的积分值是有限的，每一个积分对应于不同的量子条件。但是，如果没有周期性，那么按照这种方法，量子化是不可能的。尽管这种方法很全面、新颖，爱因斯坦的这篇论文仍然被大多数人忽视。一个著名的例外是 Louis de Broglie，他
[42] 在 1924 年的学位论文中采用了爱因斯坦的相空间法。过了几十年以后，人们在回顾中才看出来，爱因斯坦的方法预示了相空间中不变圆
[43] 环面概念在可积动力系统分析中的应用。

[1]至少在他成为瑞士联邦技术大学的学生以前，爱因斯坦就已经对考试抱否定态度（见 *Einstein 1979*，pp. 16—17）。

[2]关于这些事情以及爱因斯坦私人生活的其他事件的更多背景情况，记载在第八卷，即相应于 Berlin 岁月的头几年的卷中。

[3]更多情况参见编辑笔记，“爱因斯坦论 Ampère 分子电流”，pp. 145—149。

[4]见下面的第Ⅳ节。

[5]有关到 1914 年春的进展情况详细讨论，参见第四卷，编辑笔记，“爱因斯坦论引力和相对性：与 Marcel Grossmann 的合作”，pp. 294—301。

[6]简单说，“空穴论点”说明，在广义协变理论中，度量场不是由物质的能量-动量张量所唯一决定的。更详细情况参见，如 *Norton 1984*。

[7]原词分别为“angepaßte Koordinatensysteme”和“berechtigte Transformationen”。

[8]对此文的详尽讨论，见 *Norton 1984*。

[9]“unmöglich allgemein kovariant sein können.” *Einstein 1914o*（文件 9），p. 1066（爱因斯坦加的强调）。

[10]“Wir sind nun auf rein formalem Wege, d. h. ohne direkte Heranziehung unserer physikalischen Kenntnisse von der Gravitation, zu ganz bestimmten Feldgleichungen gelangt.” *Einstein 1914o*（文件 9），1076 页。

[11]特别地，参见 *Earman* 和 *Glymour 1978a*；*Pais 1982*，14 章；Norton *1984*；以及 Stachel *1989*。

[12]它们被罗列在两封信里：爱因斯坦致 Arnold Sommerfeld 的信，1915 年 11 月 28 日，和爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信，1916 年 1 月 1 日。头两个缺陷在 *Einstein 1915f*（文件 21），778 页中也提到了。

[13]参见第八卷中爱因斯坦与 Levi-Civita 间的通信。关于分析，参见 *Cattani* 和 *De Maria 1989*。

[14]从 1912 年起，尤其是自“Entwurf”理论发表后，爱因斯坦在他的通信和发表的文章中强调旋转运动的相对论思想及其与 Mach 思想的关系[如见爱因斯坦致 Ernst Mach 的信，1913 年 6 月 25 日（第五卷，文件 448），以及 *Einstein 1912e*（第四卷，文件 7）]。在以后几年，爱因斯坦对 Mach 原理的解释经历了几次变化。如见 *Barbour 1992* 和 *Hoefer 1994*；另见爱因斯坦在他为 Ernst Mach 写的悼文中的评论（*Einstein 1916c*（文件 29））。

[15]见爱因斯坦致 Erwin Freundlich 的信，1915 年 9 月 30 日。

[16]关于细节讨论，见第四卷，编辑笔记，“爱因斯坦- Besso 论水星近日点运动的手稿”，pp. 344—359。

[17]“Aus diesen Gründen verlor ich das Vertrauen zu den von mir aufgestellten Feldgleichungen vollständig und suchte nach einem Wege, der die Möglichkeiten in einer natürlichen Weise einschränkte.” *Einstein 1915f*（文件 21），p. 778。

[18]*Einstein 1915f*，*1915g* 和 *1915i*（文件 21，22 和 25），分别提交于 11 月 4 日、11 日和 25 日。

[19]见爱因斯坦致 Paul Ehrenfest 的信，1915 年 12 月 26 日，和爱因斯坦致 Michele Besso 的信，1916 年 1 月3 日。

[20]见 *Einstein 1915h*（文件 24），1915 年 11 月 18 日提交。爱因斯坦完成计算和创立此文中使用的近似方法的速度极快，这一点现在变得不太令人惊奇了，因为我们知道他可以利用与 Besso 合作的早期的工作。

[21]见 *Fokker 1955*，p. 126。

[22]更多细节，参见编者按，“爱因斯坦的相对论普及本”，pp. 417—419。

[23]“eine bloß *fingierte* Ursache, keine beobachtbare Sache.” *Einstein 1916e*（文件 30），p. 771。

[24]见第八卷中爱因斯坦与 De Sitter 的通信；对爱因斯坦与 De Sitter 争论的分析，见 *Kerszberg 1989b*；对本段叙述的后来发展情况的历史讨论，见 *North 1965* 和 *Eisenstaedt 1993*。

[25]关于 Anschütz-Kaempfe、爱因斯坦与他及其企业的关系的更多情况，参见 *Lohmeier* 和 *Schell 1992*。爱因斯坦在旋转罗盘上的工作还激励了他在 Ampère 分子电流上的工作（见编者按，“爱因斯坦论 Ampère 分子电流”，p. 146）。

[26]德意志帝国专利 D. R. P. no. 34513，1885 年授。

[27]D. R. P. no. 182855 专利，以 Hermann Anschütz-Kaempfe 和 Friedrich von Schirach 的名义 1904 年 3 月 27 日递交，1907 年 4 月 2 日授予。

[28]D. R. P. no. 236200 专利，1908 年授予。

[29]参见 Wolfgang Otto 致 Anschütz & Co. 的诉讼程序报告，1915 年 1 月 6 日（GyKiA, Gruppe IIa, Mappe 555/a）。Otto 也说爱因斯坦的陈述特点是“肤浅”（“oberflächlich”）。

[30]参见 1915 年 1 月 5 日的法庭记录（在 GyKiA, Gruppe IIa, Mappe 555/a 中的副本）。

[31]见爱因斯坦致皇家州立法院 I 报告，1915 年 5 月 18 日（GyKiA, Gruppe IIa, Mappe 555/a 中的副本）。

[32]皇家州立法院 I 的裁决，Berlin，1915 年 11 月 16 日（GyKiA, Gruppe IIa, Mappe 555/a 中的副本）。

[33]“ohne etwas materiell Neues zu bieten.”文件 26，p. 1。

[34]自从 1911 年首届索尔韦会议以来，Nernst 定理的正确性就是爱因斯坦和 Nernst 讨论的议题。更多细节见 *Einstein 1914n*（文件 5），注释 3。

[35]后者出现在一期《Zürich 物理学会通报》上面，并被献给爱因斯坦以前的导师和同事 Alfred Kleiner，他于 7 月 3 日去世。该文在第二年重印为 *Einstein 1917c*。

[36]关于这些论文的历史讨论，见 *Klein 1964* 和 *Pais 1982*，第 21 章。

[37]“Eine verblüffend einfache Ableitung der Planck'schen Formel, ich möchte sagen *die* Ableitung.”爱因斯坦致 Michele Besso 的信，1916 年 8 月 11 日。

[38]1909 年，爱因斯坦计算过辐射场中镜子的动量涨落（见 *Einstein 1909b* 和 *Einstein 1909c*（第二

卷,文件 56 和 60))。对爱因斯坦早期在量子理论中使用涨落法的讨论,见 *Klein 1964*。

[39]见 *Einstein* 和 *Hopf 1910b*(第三卷,文件 8)。

[40]"Ausstrahlung in Kugelwellen gibt es nicht."*Einstein 1916n*(文件 38),p. 61。

[41]"Damit sind die Lichtquanten so gut wie gesichert."爱因斯坦致 Michele Besso 的信,1916 年 9 月 6 日。

[42]见 *De Broglie 1924*,第 3 章。1926 年,Erwin Schrödinger 在他的一篇波动力学的论文脚注里提到爱因斯坦的论文和 De Broglie 的学位论文,但仅仅指出他用的相空间法类似于爱因斯坦论文中的方法(见 *Schrödinger 1926*,495 页,脚注 1)。

[43]更多细节见 *Gutzwiller 1990*,第 14.1 章。

[黄 雄 译校]

关于英译版本的说明

我们十分高兴能够出版《爱因斯坦全集·第六卷》的翻译版。与以前出版的各卷一样，尽管竭力保证译文的科学性和精确性，但这并非意味着，使用这些译文时可以脱离其文献版，因为从文献版中可反映出丰富的编纂注解，这对于历史地和科学地充分了解原始文献很有必要。

读者可能会注意到，与先前各卷相比较，本卷第一次采用更高的精选程度。由全集的编者完成精选工作，他们还建议重印文献24、30、42和43在其他出版物登载过的更早的译文。征得那些出版者的同意后，我们正在开展这方面的工作。

此外，我们对爱因斯坦科学著作的新译者表示欢迎：数学家 Alfred Engel，以及新的顾问、纽约大学的物理学家 Engelbert Schucking 教授。我们很高兴能够和他们合作，并感谢他们对这项工作做出的奉献。

在此我们再次感谢 Michael Perlman 博士精湛的桌面刊印技术及其对本卷扫描照相版的认真制作。

普林斯顿大学出版社
1997年5月
［罗景琪　译］

致　谢

我们感谢编辑顾问及执行委员会，也向耶路撒冷的希伯来大学致谢，她允许我们公布她所拥有的资料及对编者开放爱因斯坦档案。

在准备本卷时得到一个独立的联邦机构即国家科学基金会，以及 Allerd P. Sloan 基金会和太阳微系统公司的部分资助。下述人士和欧洲机构也提供了资助，Jan Philipp Reemtsma，Dr. Tomalla 基金会（列支敦士登公国）和 Pieter Zeeman 基金会（荷兰）。

我们还感谢下列个人在本卷出版中的帮助：波士顿大学 Mugar 图书馆的馆际借书部的 Rhoda Bilansky 和其他成员；波士顿的 Julie Bolenbaugh；波士顿的 Adam Bryant 的杰出的计算机帮助；特拉维夫-雅法大学的 Leo Corry 发现了附录 B 中的笔记；波士顿大学的 William Dixon 和 Pat Merola 提醒我们关窗；哈佛大学 Widener 图书馆的 Edward Doctoroff；汉堡的 Albrecht Fölsing；波士顿的巴基斯坦总领事 Barry Hoffman；阿姆斯特丹大学的 Leo van den Horn 匹兹堡大学的 Michel Janssen；M. I. T 制图部的 Joan La Valle；波士顿的 Rebecca Kellner；耶路撒冷的希伯来大学爱因斯坦档案馆 Ber Dibner 馆长 Ze'ev Rosenkranz；阿姆斯特丹的 Wouter van Thor 提供了索引；波士顿的 Alev Yalçinkaya Hanly 和 Bing Lin Zhao。

文件所在单位符号表

GyB　Staatsbibliothek zu Berlin, Preußischer Kulturbesitz, Berlin, Germany
柏林国立图书馆,普鲁士文化遗产,柏林,德国

GyBAW　Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Germany
柏林—勃兰登堡科学院,柏林,德国

GyGöU　Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek, Göttingen, Germany
下萨克森州和大学图书馆,格丁根,德国

GyKiA　Archiv der Firma Anschütz & Co., Kiel, Germany
Anschütz & 公司档案馆,基尔,德国

GyMDM　Deutsches Museum, Munich, Germany
德国博物馆,慕尼黑,德国

说明文件种类符号表

AD	Autograph Document 亲笔文件
ADS	Autograph Document Signed 有署名的亲笔文件
PD	Printed Document 印刷文件
TDC	Typed Document,in carbon copy 打印文件,复写纸上

本卷要目

正 文 目 录

正　　文

1."论相对性原理"

[*Einstein 1914h*]

1914 年 4 月 26 日发表

载于《福森报》1914 年 4 月 26 日晨版,no. 209,8 版的 pp.[1—2],全版的 pp.[33—34]的附刊。

4

论相对性原理

爱因斯坦

《福森报》编辑部要求我为他们的读者谈谈一些有关我研究领域的东西。我为此感到荣耀。尽管不费相当的努力几乎不可能对相对论有更深的理解，让非科学工作者了解这个理论研究的新分支的方法和结果，这个任务仍然是吸引人的。仅仅对我们称为运动的过程的粗率分析就足以让我们得知，我们能感知的只是一个物体相对于其他物体的运动。我们坐在一节车厢里，看到(在邻近铁轨上的)另一节车厢通过。如果我们忽视自己车厢的振动，我们就没有直接手段确定这两节车厢"实际上"是否在运动。我们只能发现车厢的相对位置随时间而改变。即便我们看着沿着铁轨的电线杆，这种情形在本质上也没有什么改变。因为当我们通常把电线杆(以及地面)当作"静止"，而相对于它们运动的任何物体当作"运动"时，我们只不过使用一种习惯方便的表述，并不别具深意。如果在一个"运动着的"车厢上的观察者说，车厢处于静止状态，而地面的电线杆在运动，这不会和他的感知相冲突。

在很长的历史时期里，物理学家已经发现，运动以纯粹相对的方式呈现的这个特性，不能只归因于初级感知，而应归于在一群做相互(匀速)运动的事物中的任何一个单独的东西都有资格称为"处于静止状态"。让我们对在一根笔直的铁轨上匀速运动的车厢再进行思考。让我们把窗户密封，不让光线射入；车轮和轨道绝对光滑。一位物理学家携带所有可想象得出的仪器呆在车厢里。我们的确知道，这名物理学家进行的所有实验和车厢非静止也就是以不同速度运动时进行的显得完全一样。这个陈述在本质上就是物理学家称为"相对性原理"的东西。人们可以一般的把这个原理重述为："一个观察者感知的自然定律和他的运动状态**无关**。"

这个陈述听起来是无害的并且是自明的。除了来自电动力学的，最近发展的光传播定律似乎和这个原理不相容的事实以外，它不会使任何人激动。运动物体光学现象导致光在空虚的空间中，不管光源的运动状态如何，总是以相同的速度传播。而这个结果似乎和前述的相对性原理相冲突。毕竟，当一束光相对于一名观察者以确定的速度旅行时，那么第二位自身在光传播方向运动的观察者——似乎——应发现光以比第一个观察者发现的更小的速度旅行。如果情形

果真如此，那么光在真空中传播的定律对于两位做相对匀速运动的观察者而言，就不会相同——这和上述的相对性原理相矛盾。

这就是相对论的起源。该理论显示，光在真空中传播的常数性定律对于做相对运动的两位观察者可同时满足，使得对他们来讲，同一光束具有相同的速度。

对空间和时间陈述的物理意义的更深入分析，初看起来似乎荒谬的可能性就可以理解了。这个问题特别重要之处是承认同时性概念的相对性。在相对论之前，人们相信，"在两个不同地方发生的两个事件是同时的"具有清楚的意义——清楚到不必特别需要定义同时性的概念。然而，不回避同时性定义问题的更仔细的研究指出，两个事件的同时性不是绝对的，相反地，只有相对于给定运动状态的观察者时才能定义同时性。一般来讲，对于一名观察者同时的两个事件，对于与第一名观察者做相对运动的第二名观察者就不是同时的了。这表明了我们时间概念的根本改变。(这是新的相对性理论最重要也最引人争议的定理。在这里不可能对从这个基本原理演化而来的认识论和"自然哲学"的假定和结论进行深入的讨论。)* 那些想进一步深入了解的人可以参阅 E. Cohn 的小
[1] 册子《空间时间物理学》以及 Jos. Petzoldt 发表在《实证主义哲学期刊》最近一期
[2] 上的《物理相对论》的论文。

把相对性原理和在真空中光速常数性的结果相结合，用纯粹演绎的方法可以得到今天称作"相对论"的东西。作为自然定律理论演绎的辅助工具，该理论已经证明了自身的正确性。它的意义在于以下事实，由于该理论教导我们，自然现象必须这样行为，其定律与观察者的运动状态无关，现象是在空间和时间上和观察者关联，该理论为自然的每条一般定律提供了必须满足的条件。

因为外行对于相对论的两个主要结果也会有兴趣，所以应该在这里提到。第一，必须抛弃存在称作光-以太的充满空间的光传播的媒介的假设。根据这个理论，光不再是一种未知的载体的运动状态，相反地，它是物理自身存在的物理结构。第二，该理论确立物体的惯性不是绝对不变的常数，而随着能量含量的增加而增大。质量和能量守恒的重要定理汇合成一个定理：物体的能量也确定它的质量。

上面概述的相对性理论是基本完备的吗？或者它只不过是继续发展的第一步？评价相对论的物理学家们对此仍然持不同意见。尽管如此，人们更倾向于第二种可能性。我们在上面陈述过，自然定律对于"匀速运动"的观察者和对于"静止"的观察者是一样的。这意味着观察者无法找到允许他确定自己是处于静止还是处于匀速运动状态的判据。"静止"和"匀速运动"在物理上是等价的。这就引起了相对性原理是否仅限于匀速运动的问题。对于两个相对做非匀速运动

的观察者自然定律可能不同吗？最近几年的结果表明，可以对相对论进行这种推广，这导致广义相对论，而广义相对论把牛顿理论当作一阶近似包容进去。根据这个理论，光线在引力场中受到弯曲；虽然微小，却在天文观测的范围之内。未来将教导我们，这个推广的相对论，这个从认识论方面非常满意的理论是否和现实相符。*

本文与原始论文的不同处在于原文的第 1 行在 p. 1，第 2 行在 p. 2。

发表在《福森报》1914 年 4 月 26 日晨版，no. 209，8 版的 pp. [1—2]，全版 pp. [33—34]的附刊。

[1] *Cohn 1913*，在文献 *Einstein 1915 b*（第四卷，文件 21）中，爱因斯坦提出这一工作是“主题的一个精彩的表述”（“eine vorzügliche Darstellung des Gegenstandes”）。

[2] *Petzoldt 1914* 一文主要涉及相对论的哲学基础的表述（按 Mach 观点）而非理论的综述。文章也讨论了“时钟佯谬”，但文章发表后爱因斯坦指出作者的观点是错误的（见爱因斯坦致 Joseph Petzoldt 的信，1914 年 4 月 14 日）。

［吴忠超 译校］

* 英译者注：德文“Naturphilosophie”的外延比英文（培根的）“natural philosophy”包含有更多的“形而上学”；这样的逐字翻译非常容易产生误导。

2. “引力理论的场方程在广义相对论基础上的协变性”

[*Einstein and Grossmann 1914b*]

1914 年 5 月 29 日发表

载于《数学物理期刊》63(1914):215—225。

7

引力理论的场方程在广义相对论基础上的协变性

爱因斯坦与 Grossmann

在 1913 年发表的一篇文章[1]中，我们把广义相对论置于绝对微分学的基础
之上，使之也包括引力理论在内。这一理论包括了两种根本不同的方程。我们 [3]
首次建立了物质（例如力学的和电学的）过程的方程。这些方程在时空变量（“坐标”）的任意变换下是协变的，这些方程可认为是原来的相对论的相应方程的推广，其次，我们建立了一个决定引力场的方程组，只要物质过程给定，该方程组即可确定。这个方程组可以认为是牛顿引力理论的 Poisson 方程的推广。而在原来的相对论中是没有与此相应的方程组的。与上述的方程组形式对比，我们无法证明这些“引力方程组”的普遍协变性。这是因为它们的导出除了守恒定理之外，只根据**线性**变换的协变性，从而是否还有其他的变换能使这些方程变换成它们自身这一问题还是未解决的。

有两点原因使得这一问题的解决对于理论有着特殊的重要性：首先，这一问题的答案给出相对论的基本思想还能向前发展多远，这是一个对于时空哲学十
8 分重要的问题；第二，从物理的角度判断理论的价值在很大程度上取决于这一问题的答案，正如下面的考虑所表明的。

整个理论是从这样一个信念发展起来的：在引力场中发生的一切物理过程，如果没有引力场而引入一个适当加速度的（三维）坐标系，此过程将以完全相同的形式发生（等价假设）。这一基于引力质量与惯性质量相等的实验事实的假设在“表观”引力场上获得了更大的信服力——伴随着三维加速坐标系的表观引力场可以看成一个真实的引力场，换句话说，那就是理论中允许有加速度变换（这是非线性变换）的存在。

初看起来，最好的引力方程应该对于任意变换是协变的。但是在本文 § 2 中，[2]我们举出一个简单的考虑指出，描述引力场的量 $g_{\mu\nu}$ 不能由一般协变的方

1)《一个推广的相对论和引力论的纲要》(Leipzig 1913，B. G. Teubner)。 [1]

（以后简称为《纲要》。文章发表在《数学物理期刊》上，文件 62，pp. 225—261）。 [2]

2)与《数学期刊》第 62 卷抽印本中附录注比较。 [4]

程完全决定。

[5] **下面我们将证明，我们所建立的引力方程恰好在基本张量 $g_{\mu\nu}$ 可以完全确定的条件下是普遍协变的。尤其是，引力方程对于相当多样的加速度变换(非线性变换)都是协变的。**

§ 1. 理论的基本方程

相应于一物理过程的能量，我们分别用一个协变张量 $T_{\mu\nu}$ 或其反变张量 $\Theta_{\mu\nu}$ 描写，这个张量满足"纲要"的(10)，即

[6]
$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\gamma_{\sigma\mu}T_{\mu\nu})=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu},$$

或者相应的

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}g_{\sigma\mu}\Theta_{\mu\nu})=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Theta_{\mu\nu},$$

此二方程代表了物质过程的能量动量方程。如果引入下列的量： 9

$$(1)\qquad \mathfrak{T}_{\sigma\nu}=\sum_{\mu}\sqrt{-g}\gamma_{\sigma\mu}T_{\mu\nu}=\sum_{\mu}\sqrt{-g}g_{\sigma\mu}\Theta_{\mu\nu},$$

则理论中的所有方程都可取一种特别普遍的形式。此式与混合张量[1]的形式只差一个因子 $\sqrt{-g}$，因而我称此式为物理过程的**复能量密度**。现在上述方程可以改写为

[8]
$$(\mathrm{I})\qquad \sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\gamma_{\mu\rho}\mathfrak{T}_{\rho\nu}.$$

如果引入"引力场的复能量密度"

$$(2)\qquad \mathbf{t}_{\sigma\nu}=\sum_{\mu}\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\sigma\mu}t_{\mu\nu}=\sum_{\mu}\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}\theta_{\mu\nu}$$

来代替引力场的能量张量，则可得"纲要"中的(14)和(13)：

$$(2\mathrm{a})\quad -2\kappa\mathbf{t}_{\sigma\nu}=\sqrt{-g}\Big(\sum_{\beta\rho\tau}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial\gamma_{\rho\tau}}{\partial x_\beta}-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\rho\tau}\delta_{\sigma\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\rho\tau}}{\partial x_\beta}\Big),$$

式中 $\sigma\neq\nu$ 时 $\delta_{\sigma\nu}=0$，$\sigma=\nu$ 时 $\delta_{\sigma\nu}=1$。

现在，我们得到一个新的方程

[7] 1）比较"纲要"中部分Ⅱ中的 § 1。

$$(\text{Ⅱ})\qquad \sum_{\alpha\beta\mu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\gamma_{\alpha\beta}g_{\sigma\mu}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)=\kappa(\mathfrak{T}_{\sigma\nu}+\mathfrak{t}_{\sigma\nu}).$$

来取代“纲要”中的(21)和(18)。

与“纲要”§5 所用的方法类似，现在可以从(Ⅰ)和(Ⅱ)得到一般的守恒定理：

$$(\text{Ⅲ})\qquad \sum_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}_{\sigma\nu}+\mathfrak{t}_{\sigma\nu})=0.$$

§2. 论坐标系的选择

我们现在要证明：对于我们建立的完全独立的引力方程组，对于由一般协变方程组给定的 $\Theta_{\mu\nu}$ 的引力场，完全确定出基本张量 $\gamma_{\mu\nu}$ 是不可能的。

我们可以证明，如果对于给定的 $\Theta_{\mu\nu}$，$\gamma_{\mu\nu}$ 的一个解已经知道，那么，方程组的普遍协定性将允许有更多的解存在。

设在我们的四维流形中有一个区域 L，其中不存在物质过程，因而其中的 [9]
$\Theta_{\mu\nu}$ 为零。根据这个给定的 $\Theta_{\mu\nu}$，在 L 之外各处的 $\gamma_{\mu\nu}$ 已经确定，这样一来，L 之内的 $\gamma_{\mu\nu}$ 也就被确定了(假设 a)。

我们现在设想用下列方法引入新坐标 x'_ν，代替原来的坐标 x_ν；在 L 以外各处令 $x'_\nu=x_\nu$，而在 L 之内，至少对其中的一部分，至少对一个指标，令 $x'_\nu\neq x_\nu$， [10]
而另一方面，我们在所有地方都有 $\Theta'_{\mu\nu}=\Theta_{\mu\nu}$。这是因为在 L 之外有 $x'_\nu=x_\nu$，而在 L 之内是因为 $\Theta'_{\mu\nu}=0=\Theta_{\mu\nu}$。于是，如果所有代换都是允许的，那么同一个 [11]
$\Theta_{\mu\nu}$ 系统将有两个以上的 $\gamma_{\mu\nu}$ 系统属于它，这将与假设 a 冲突。[1]

一旦人们理解了可接受的引力理论必须以特殊的坐标系统为前提，也就容易看出，我们所提出的引力方程也是基于特定的坐标系统的。(Ⅱ)式对 x_ν 的微分并对 ν 求和，再同时考虑到(Ⅲ)本身，得到

$$(\text{Ⅳ})\qquad \sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\gamma_{\alpha\beta}g_{\sigma\mu}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)=0,$$

这就是 $g_{\mu\nu}$ 的微分条件，我们要把此方程写成简略形式

$$B_\sigma=0.$$

---

1)一系列的想法已在《数学物理期刊》62 卷中“纲要”重印本的附录的注中出现，可是其中提到的坐标 [12]
系的限制并未加上去；由(Ⅲ)知对线性替换的限制仅当 $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}/\sqrt{-g}$ 是张量时可以，但这是不成立的。 [13]

这个具有四个分量的量 B_σ 并不构成一般协变矢量，这一点将在 § 5 中证明。由 11
此可以得出结论：方程 $B_\sigma=0$ 表示选择坐标系的一个真正的条件。[1]

§ 3. 引力方程的 Hamilton 形式

下面对引力方程协变性的证明，我们将利用变分原理的方法。[2]

可以证明，引力方程等价于下列方程：

[15] (V) $$\int\Big(\delta H-2\kappa\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}\Big)\mathrm{d}\tau=0,$$

式中

(Va) $$H=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\mathrm{d}x_\beta},$$

而且 $\gamma_{\mu\nu}$ 除了四维区域边界上的变分为零之外，相互独立变化。

计算 δH 时利用下列容易理解的公式：

$$\delta(\sqrt{-g})=-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu},$$

$$\delta\Big(\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\Big)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\delta g_{\tau\rho})=-\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g_{\tau\mu}g_{\rho\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}),$$

$$\delta\Big(\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\Big)=\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\delta\gamma_{\tau\rho}),$$

并考虑到面积分的变分为零，可得

[16] $$\int\delta H\,\mathrm{d}\tau=\int\sum_{\mu\nu\alpha\beta\tau\rho}\Big(-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(\sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\Big)+\sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\tau\rho}\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\beta}+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\Big)\delta\gamma_{\mu\nu}\cdot\mathrm{d}\tau.$$

再利用《纲要》上的(14)和(16)，我们的条件(V)成为

$$\int\sum_{\mu\nu}\big(D_{\mu\nu}(g)+\kappa(t_{\mu\nu}+T_{\mu\nu})\big)\delta\gamma_{\mu\nu}\cdot\sqrt{-g}\,\mathrm{d}\tau=0.$$

由于假设了 $\delta\gamma_{\mu\nu}$ 是互相独立的，所以"纲要"上的(21)，即成为我们的引力方 12
程的协变性的推论。

1)把散度算符如绝对微分运算一样作用在引力场方程上可得 $B_\sigma=0$，即物质守恒律。

[14] 2)向 Zürich 的 Paul Bernays 先生致谢，因他提议采用这一步骤而简化了证明。

§4. 一个引理的证明 适应坐标系

我们下一个任务是研究方程(V)的协变性质，为此，我们首先来看下列积分的变换特性：

$$J=\int H\mathrm{d}\tau=\int\sqrt{-g}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\cdot\mathrm{d}\tau.$$ [17]

假设有一个任意的四维流形 M，归属于坐标 x_ν 的坐标系 K，然后，再把同一个流形 M 归属于另一个坐标 x'_ν 的坐标系 K'，使得下式

$$\mathrm{d}x_\nu=\sum_\mu\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\mathrm{d}x'_\mu=\sum_\mu p_{\nu\mu}\mathrm{d}x'_\mu$$

成为坐标变换公式。J 和 J' 分别是在 K 和 K' 上的积分的值。于是有

$$J'=\int\sqrt{-g'}\cdot\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma'_{\alpha\beta}\frac{\partial g'_{\tau\rho}}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial\gamma'_{\tau\rho}}{\partial x'_\beta}\mathrm{d}\tau'.$$

考虑到 $\sqrt{-g'}\cdot\mathrm{d}\tau'$ 是一个标量，J' 按照坐标系 K 的变换得出

$$J'=\int\sqrt{-g}\cdot\sum_{\substack{\mu\nu\alpha\beta\\ rsik\\ mn\tau\rho}}\left(\pi_{r\alpha}\pi_{s\beta}\gamma_{rs}\cdot p_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i}(p_{m\tau}p_{n\rho}g_{mn})p_{k\beta}\frac{\partial}{\partial x_k}(\pi_{\mu\tau}\pi_{\nu\rho}\gamma_{\mu\nu})\right)\mathrm{d}\tau,$$

因此

$$J'=\int\sqrt{-g}\sum_{\mu\nu mnik\rho\tau}\left(\gamma_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}(p_{m\tau}p_{n\rho}g_{mn})\frac{\partial}{\partial x_k}(\pi_{\mu\tau}\pi_{\nu\rho}\gamma_{\mu\nu})\right)\mathrm{d}\tau.$$

在进一步的计算中，我们将假定坐标系 K 和 K' 仅相差无穷小，即变换是一个无穷小变换。我们令

$$x_\nu=x'_\nu-\Delta x_\nu,$$

于是有

$$p_{\nu\mu}=\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\delta_{\nu\mu}-\frac{\partial(\Delta x_\nu)}{\partial x'_\mu}=\delta_{\nu\mu}-\frac{\partial(\Delta x_\nu)}{\partial x_\mu},$$

13 以及

$$\pi_{\mu\nu}=\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}=\delta_{\nu\mu}+\frac{\partial(\Delta x_\nu)}{\partial x_\mu},$$

式中 Δx_ν 是无穷小量，它的平方和乘积都可以忽略不计。结果为

$$J'-J=-4\int\sqrt{-g}\sum_{mnik\tau}\gamma_{ik}g_{mn}\frac{\partial\gamma_{\tau n}}{\partial x_k}\frac{\partial^2(\Delta x_m)}{\partial x_\tau\partial x_i}\cdot\mathrm{d}\tau.$$

分部积分可得

$$(3)\ J'-J=-4\int\sum_{mnik\tau}\frac{\partial}{\partial x_\tau}\left(\sqrt{-g}\gamma_{ik}g_{mn}\frac{\partial\gamma_{\tau n}}{\partial x_k}\frac{\partial(\Delta x_m)}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\tau+$$

[18]

$$4\int \sum_{mnik\tau} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{-g}\gamma_{ik}g_{mn}\frac{\partial \gamma_{\tau n}}{\partial x_k}\Delta x_m\right)\mathrm{d}\tau -$$
$$4\int \sum_{mnik\tau} \frac{\partial^2}{\partial x_\tau \partial x_i}\left(\sqrt{-g}\gamma_{ik}g_{mn}\frac{\partial \gamma_{\tau n}}{\partial x_k}\right)\Delta x_m \cdot \mathrm{d}\tau.$$

我们注意到,前两个积分可以写成面积分,我们把它们分别简写成 O_1 和 O_2,根据(V)式后面的写法,Δx_m 前面的因子正好是 B_m。用简写符号,(3)成为

$$J'-J=O_1+O_2-4\int\sum_m B_m\Delta x_m\cdot \mathrm{d}\tau. \tag{3a}$$

选择一个好的坐标系使得 $B_m=0$ 的理由已如 § 2 所述,我们称这种坐标系为对此流形"适应的"坐标系。从(3a)可以看出,可用的坐标系是在固定的坐标及其导数的边值条件下(考虑任何坐标)选取的,使得积分 J 成为极值的那样的坐标系。

现在,我们把两个恰当的坐标系之间的变换称为"可行的"[1] 变换。当从 K 系到 K'系的变换是可行的变换时,(3a)成为

$$J'-J=O_1+O_2.$$

§ 5. 引力方程的协变性 14

在 § 4 中我们研究了流形 M,现在我们考虑另外一个流形 $\overline{M}$,它与 M 只有无穷小的差别,而且对于 $\overline{M}$,$g_{\mu\nu}$ 及其一项导数在区域 L 的边界上的值与 M 一样。我们用以下方式赋予坐标系 $\overline{K}$ 和 $\overline{K}'$:

a. 两个坐标系对于 $\overline{M}$ 都是适应的;

b. 在区域 L 的边界上,令 $\overline{x}_\nu$ 与 x_ν 重合,$\overline{x}'_\nu$ 与 x'_ν 重合;

c. 两个坐标系的重合不仅限于在边界上,而且在边界的无限接近处的一阶量也重合。这一条件蕴含着 $\partial(\Delta x_\nu)/\partial x_\sigma$ 与 $\partial(\Delta\overline{x}_\nu)/\partial x_\sigma$ 重合。

条件(b)和条件(c)并不矛盾,从下面即可看出:因为流形 M 归属于一个适应坐标系,§ 4 中指出坐标系 K 的选择是体积分 J 在固定的边界上的坐标及其一阶导数之下为极值。这样一来就有可能加给变化了的流形 $\overline{M}$ 以一个适应坐标系 $\overline{K}$,使得 $\overline{K}$ 在 L 之外与 K 一致而仅在 L 内部与 K 有所差异。因为对于流形 $\overline{M}$ 中积分 J 必然有极值存在,所以方程 $B_m=0$ 对于 $\overline{M}$ 也必然能满足。

假设在流形 M 中所用的坐标系 K 和 K'都是适应的,根据(3b),方程

$$J'-J=O_1+O_2,$$

1)英译者注:德文原文中"berechtigt"一词在当今数学上理解为"根据已有条件证明是可行的"。现代德文中常用"zulässig"(可行的)一词代替"berechtigt"(被证明的)。

$$\bar{J}'-\bar{J}=\bar{O}_1+\bar{O}_2,$$

或相减之后的方程

$$(\bar{J}'-J')-(\bar{J}-J)=(\bar{O}_1-O_1)+(\bar{O}_2-O_2)$$

都是成立的。

由上述的条件(b)和(c),M 和 $\overline{M}$ 的关系以及(3)式可知 $\bar{O}_1-O_1$ 和 $\bar{O}_2-O_2$
15 都等于零。

$\overline{M}$ 可以称为由 M 的变分产生的流形,同样,我们可以写

$$\bar{J}-J=\delta_a J,$$
$$\bar{J}'-J'=\delta_a J',$$

并由此得出

(4) $$\delta_a J'=\delta_a J.$$

下标 a 的意思是,和流形一起,坐标系是共变的,这样变分后的坐标系和变分后的流形永远保持适应的关系,而坐标系的边值当然要保持不变(所谓的"适应变分")。

我们的目的是要证明方程

$$\delta J'=\delta J$$

对流形的**任意**变分成立,而不仅是对(4)所说的**适应**变分成立。然而我们可以令 $g_{\mu\nu}$ 变分的任意变分如下进行,即先作一个适应变分,再建立另外一个坐标系的变分。我们发现 $g_{\mu\nu}$ 的一个变分正好等价于一个坐标系的变分,而只要我们假设 δx_ν 及其一阶导数在边界上为零,又只要坐标系是适应坐标系,J 的变分 $\delta_k J$ 就等于零。其理由是(3a)直接导致下列关系

$$\delta_k J=O_1+O_2-4\int\sum_m B_m\delta x_m\cdot d\tau=0.$$

因此,我们可以把方程

(5) $$\delta_k J'=\delta_k J=0.$$

和(4)式合并在一起。

根据(4)、(5)两个方程,以及一个适应变分叠加一个单纯的坐标变分等价于一个 $\gamma_{\mu\nu}$ 的任意变分这一事实,可得出对于这样的任意变分有

(6) $$\delta J'=\delta J.$$

然而,由此方程,人们可以很容易地证明方程(V)的协变性,$\delta\gamma_{\mu\nu}$ 毕竟是反变的,
16 $T_{\mu\nu}$ 是协变的,因而 $\sum_{\mu\nu}T_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}$ 是一个标量,$\sqrt{-g}\cdot d\tau$ 也是标量。因而有

(7) $$\int\sqrt{-g'}\cdot\sum_{\mu\nu}T'_{\mu\nu}\delta\gamma'_{\mu\nu}\cdot d\tau'=\int\sqrt{-g}\cdot\sum_{\mu\nu}T_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}\cdot d\tau.$$ {1}

由(6)、(7)两式可知,只要选择变分使 $\delta\gamma_{\mu\nu}$ **及其一阶导数**在区域的边界上为

零，则方程(V)对于坐标系的一切可行变换就是协变的。这样证明的协变性定理比在§3中证明引力方程的协变性用过的那种方法的普通性略少了一点。然而，审视一下§3的证明过程表明，推导引力方程并没有受到对变分边值条件的妨碍，因此，我们证明了：

在一切坐标系的可行的变换下，即在一切满足下列条件

$$(\text{VI})\qquad B_\sigma=\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}g_{\sigma\mu}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)=0$$

的坐标系之间的变换之下，引力方程(Ⅱ)是协变的。

我们已经在§2中宣称，B_σ 的表式不是一个协变矢量。只是到现在，我们才证明了这一点，因为利用刚刚得到的结果来证明特别简单。如果 B_σ 是协变的，所有前面用过的坐标系(称为适应坐标系)就会是任意坐标系。鉴于这一点，上面的证明中的任何一步都是令人信服的。而证明的最后结果就是引力方程的完全普遍的协变性。所以下式就是一个普遍的混合张量

$$\mathfrak{A}_{\sigma\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sum_{\alpha\beta\mu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\gamma_{\alpha\beta}g_{\sigma\mu}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}-\chi\mathfrak{t}_{\sigma\nu}\right)=\frac{\chi}{\sqrt{-g}}\cdot\mathfrak{T}_{\sigma\nu}.\right. \qquad \{2\}$$

因而下式

$$\sum_\sigma\mathfrak{A}_{\sigma\sigma}=-\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\lg g}{\partial x_\beta}\right)-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\rho\tau}}{\partial x_\beta}\right).$$

是一个在任意变换下的标量。但是，正如微分不变量理论[1]中所说，这个量并不 17
同二阶唯一微分不变量，即

[19]
$$\sum_{imk}\gamma_{im}\{ik,km\}$$

一致。

尽管在上述推理中适应坐标系和可行变换可能还没有完全清晰，新的引力理论由于引力方程的广泛协变性更令人信服。我们相信，极有希望证明引力方程的协变性，因为我们对坐标系的限制条件 $B_\sigma=0$ 是引力方程的直接推论。

---

1)见《概论》的部分Ⅱ的§4。

英译者注：

{1} 等式左边的“$\delta\gamma\mu$”已更正为“$\delta\gamma_{\mu\nu}$”。

{2} $\partial\gamma\mu\nu/\partial x_\beta$ 后的括号“)”丢失了。

18 1914 年 5 月 29 日发表于《数学物理期刊》63(1914)：215—225。

[1] *Einstein* 和 *Grossmann 1913*(第四卷，文件 13)。

[2] *Einstein* 和 *Grossmenn 1914 a*。

[3] 见第四卷编者注“爱因斯坦论引力和相对论：与 Marcel Grossmann 合作”。pp. 294—301，文中讨论了包含本文在内的爱因斯坦关于广义相对论的早期工作。

[4] 见 *Einstein 1914d*(第四卷，文件 26)。

[5] 大约在 1914 年 3 月 10 日致 Besso 的信中，爱因斯坦认为使引力场方程协变的变换应包含转动，可是在 1915 年秋，他意识到这是不对的(见爱因斯坦致 Erwin Freundlich 的信，1915 年 9 月 30 日)，以后爱因斯坦把这一认识列为他修改他的引力理论的关键性洞察之一(见爱因斯坦致 Arnold Sommerfeld 的信，1915 年 11 月 28 日，爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信，1916 年 1 月 1 日，爱因斯坦致 Willem de Sitter 的信 1917 年 1 月 23 日；还可见本章导言中有关历史背景部分)。

[6] 此方程右边前面应有一负号。“$\gamma_{\sigma\mu}T_{\mu\nu}$”应改为“$\gamma_{\nu\mu}T_{\mu\sigma}$”，此处和方程(1)均得修改。

[7] *Einstein* 和 *Grossmann 1913*(第四卷，文件 13)，pp. 23—27。

[8] 方程(1)式中暗含对 ρ 的加和，这些方程首次出现在 *Einstein 1913c* 中(第四卷，文件 17)。

[9] 后面的论据被称作“空穴论证”。较早的说法见 *Einstein 1914d*(第四卷，文件 26)和 *Einstein 1914e*(第四卷，文件 25)，见 *Norton 1984* 第 5 节，*Stachel 1989* 第 3 节及第四卷编者按，“爱因斯坦论引力和相对论：与 Marcel Grossmann 的合作”，pp. 297—298 中的历史讨论。也可寻见 *Einstein 1914o*(文件 9) pp. 12—14 有关论据的最新说法和理论的协变性的一个修改过的讨论。

[10] “γ_μ”应为“$\gamma_{\mu\nu}$”。

[11] “x”应为“x_ν”。

[12] 见 *Einstein 1914d*(第四卷，文件 26)。

[13] 方程式(Ⅲ)意味着在线性变换下的协变性首次发表在 *Einstein 1913c*(第四卷，文件 17)，p. 1258。还可见爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信，1913 年 8 月 16 日(第五卷，文件 470)，爱因斯坦致 Paul Ehrenfest 的信，1913 年 11 月 7 日之前(第五卷，文件 481)以及爱因斯坦致 Paul Ehrenfest 的信，1913 年 11 月下半月(第五卷，文件 484)中的讨论。

[14] Paul Bernays(1888—1977)，Zürich 大学的讲师，是狭义相对论的批判者(*Bernays 1913*)。

[15] “2κ”应为“κ”。

[16] 在二项中的“$g_{\tau\rho}$”应为“$\gamma_{\tau\rho}$”。

[17] H 应为 $2H$。

[18] 因子“$\sqrt{-g}\gamma_{ik}g_{im}\frac{\partial\gamma_{\tau n}}{\partial x_k}$”应对 x_τ 微分。

[19] 符号$\{ik,lm\}$指 Riemann-Christoffel 张量 R^k_{iml}。见 *Einstein* 和 *Grossmann 1913*(第四卷，文件 13)，pp. 35—36。

[喀兴林　译校]

3. “就职演讲及回答”

[*Einstein 1914k*]

1914 年 7 月 2 日收到
1914 年 7 月 9 日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1914):739—742。

20 这一演讲之后，是 1913 年 Leibnitz 会议以来新加入科学院的成员发表的就职演讲。

就职演讲及回答

（爱因斯坦先生的就职演讲）

尊敬的同事！

首先请接受我衷心的感谢，感谢你们慷慨接纳像我这样一个人。邀请我加入你们的科学院，就使我可以全身心地投入科学研究，而不必再为实用性的职业 [1]
而分神和劳顿。请你们相信我的感激之情和孜孜追求，即使我的努力成果在你们看来微不足道。

请允许我就我工作的领域——理论物理学——相对于实验物理学的地位补充几句一般性的说明。一位数学家朋友最近半开玩笑地对我说："数学家，当然
21 了，知道某些东西，但可以肯定，他所知道的通常不是人们想从他那儿了解的。"理论物理学家在面对实验物理学家的咨询时，其地位庶几近之。这样奇怪地缺乏适应性，原因究竟是什么呢？

理论家的方法论，本质上要求他以一般假设——所谓原理——为基础，在此基础上他可以推导出各种结论。他的活动因此就有两个部分：首先，他必须找到 [2]
这些原理；其二，他必须导出可以从这些原理中得出的各种结论。他所在的学术圈子，为他去完成第二项任务，准备好了各种精妙的工具。因此，当他在某领域，或是就某些复杂现象，成功地完成了第一项任务时，只要他有充分的悟性并付出足够的努力，他就会获得成功。但第一项任务，即创立可作为其推论之基础的那些原理，性质却全然不同。这里可没有什么学习得来的、系统有效地引导人们到达目标的方法。研究者必须通过辨认大量实验事实的某些共同特征来窃听大自然，成为这些普遍原理的秘密知情者，才能找到这些原理的严格的和精确的表述。

原理表述一旦完成，一系列的结论就会随之而来，经常会有始料未及的联系，远远超出了借以获取原理的经验事实的范畴。但只要作为推论基础的原理没有被发现，个别的实验事实对于理论家就毫无帮助。事实上，他连那些孤立的经验性定律都没法利用。在那些可作为推导基础的原理向他显露之前，他只能无助地面对各个孤立的经验研究成果。

目前,就热辐射定律和低温分子运动来说,理论正处于这种状态。就在15年前,还没人怀疑Galilei-Newton力学和Maxwell电磁场理论作为分子运动的基础会正确描述物质的电、光和热性质。就在那时Planck向人们表明,建立与
经验一致的热辐射定律需要一种新的计算方法,该方法与经典力学原理的不相 22
容性正日益明显。与这种计算方法一起,Planck为物理学引入了所谓的量子假设,该假设自引入之后大获成功。利用量子假设,他把经典力学推到了只适用于充分小的质量、充分小的速度和充分大的加速度的情形——因此我们今天仅仅把Galilei和Newton的运动定律作为极限定律(limit-laws)来接受。然而,尽管许多理论家的艰苦努力,我们还没有找到能够容纳Planck热辐射定律或量子假设的新原理,以取代(经典)力学的诸原理。尽管热来自分子的运动这一点已不容置疑,我们仍然必须承认,我们今天面对这种运动的处境,颇类似于Newton之前的天文学家面对行星运动的处境。

刚才我指出的是一系列经验事实,对之我们尚缺乏原理来进行理论处理。不过事情也可能是另一个样子:由明确表述的原理所导出的结论,完全或几乎完全超出了我们目前的经验可及的范围。在这种情况下,就需要有扩展的试验研究,以便查明理论原理是否与实在相符。相对论就是这种情形。

时间和空间基本概念的分析表明,真空中光速不变原理——这来自动体的光学——并没有迫使我们去接受静止的光以太理论。相反,倒有可能建立一个承认下述事实的普遍理论:地球的平移运动对于地球上的试验从未产生过可觉察到的影响。因此,我们采用了相对性原理,这条原理说:在相互做匀速平移运动的坐标系之间进行坐标变换时,自然定律的形式保持不变。这个理论获得了引人注目的经验证实,对业已交织一处的大量事实也给出了简化的理论处理。

但从纯理论的角度来看,这个理论还不能完全令人满意,因为上述相对性原
理对匀速运动恩宠有加。既然从物理的观点来看匀速运动不可能有何绝对意 23
义,那么我们显然就会问,这一陈述能否推广到非匀速运动。结果,当人们从这个推广意义上的相对性原理出发,就得到一个大大推广了的相对性理论。沿此
[3] 途径,人们就会得到一个包含动力学的广义引力理论。然而,迄今为止,我们尚无那些必不可少的试验资料,以检验引入这一基本原理的正当性。

[4] 我们已经知道,归纳物理学为演绎物理学提出了许多问题,反之亦然;得出这些问题的答案,需要我们付出最大限度的努力。通过我们的共同努力,我们也许不久就会取得决定性的进展。

这是1914年7月2日在Berlin的普鲁士科学院的演讲,发表在《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》 24
(1914):739—742。发表日期是1914年7月9日。保存有两页的原稿([1 001])。发现有一处与原稿明

显不同。

[1]爱因斯坦作为普鲁士科学院的带薪成员，没有责任去讲课或做其他的费时的工作（见 1913 年 11 月 22 日普鲁士科学院给爱因斯坦的信（本书第五卷，文件 485）中的就职条款）。

[2]"benutzt"在原稿中为"braucht"。

[3]普朗克曾以普鲁士科学院一位常任秘书的资格答复过爱因斯坦（见 *Planck 1914b*）。他对于把狭义相对论推广到包含加速运动一事的必要性表示怀疑，并指出由于它的协变性受到限制，目前版本的广义相对论并不是狭义相对论的真正推广（见 *Einstein* 和 *Grossmann 1914b*，即本卷文件 2）。与此同时，他强调了爱因斯坦理论的重要性。又见 1914 年 7 月 7 日爱因斯坦给 Planck 的信中爱因斯坦对 *Planck* 的答复的评论。

[4]爱因斯坦与 Michele Besso 合作，用他的理论解释水星近日点的运动并未成功（见第四卷，文件 14 的计算）。测量预言中的光谱线的引力红移未能完成（见本书第五卷与 W. H. Julius 的通讯），企图确定预言中的光线受引力的弯曲也是一样（见本书第五卷中与 Erwin Freundlich 的通讯）。与此同时，正在准备踏上征途去观测一次日食并准备搜索资料，验证光线经过太阳附近时的弯曲[见约在 1914 年 1 月 20 日爱因斯坦给 Henrich Zangger 的信（本书第五卷，文件 507）的注释 6]。

[郝刘祥 译正文]
[喀兴林 译注释]

4. “对 P. Harzer 论文《光在玻璃中的拖曳与光行差》的评论”

[*Einstein 1914l*]

1914 年 7 月 18 日作于柏林-达勒姆
发表于 1914 年 8 月 11 日

原载:《Astronomische Nachrichten》第 199 页(1914 年)第 7—10 栏

26

对 P. Harzer 论文《光在玻璃中的拖曳与光行差》的评论

爱因斯坦 [1]

我认为，本文标题中提到的论文需做两处重要纠正。Harzer 先生说："根据光的电磁理论和 *Einstein* 相对论，光的 k 值（拖曳系数）是由在静止介质中所测得的波长 λ 确定的，其公式为：

$$k=1-1/n^2-(\lambda/n)(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda).$$

在这个公式中，光行差与介质的运动有关，尽管介质运动的作用很小。"对此，我发表如下评论：

1. 从上述论点看，似乎可以预料，根据相对论，光行差角与观测望远镜中光所穿透的物质性质有关。可是，根据相对论的基本思想，这种相关性并不存在。也就是说，如果把整个过程与一个相对于观测望远镜来说处于静止位置的坐标系联系起来，则除了观测到光的形成以外，借助静止物体上的光学仪器这整个观测过程可以忽略。

2. 根据相对论，上述表述 k 的公式绝不是普遍适用的；它仅仅适用于 Fizeau 实验中遇到的一个特例中，而没有在 Harress 实验的特例中体现出其实用价值。下面将对此进行解释。如果用 V 表示从不与物体一起运动的观测者的观点出发观测到的物体中的光速，用 V' 表示从与物体一起运动的观测者的观点出发观测到的物体中的光速，用 v 表示该物体（指向相同）的速度，则根据相对论（一阶近似值），总有

$$V=V'+(1-1/n^2)v. \tag{1}$$

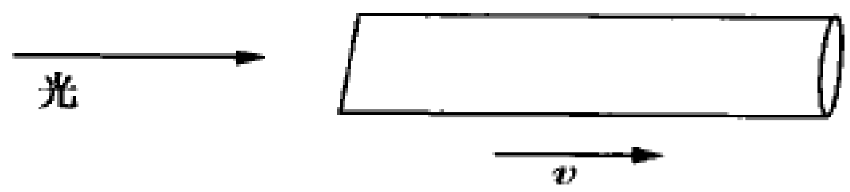
相对于介质的光速 V' 对应着在随介质一同运动的坐标系中测得的光的频率为 ν'。

如果 V' 与 ν' 无关，即色散可以忽略，则 V' 就简单地等于介质中的光速。因
27 此，可以毫无疑问地认为，参数 $(1-1/n^2)$ 可以视为"拖曳系数" k。

但是，如果 V' 与 ν' 有关，则上面表述 V 的公式本身看不出有什么明确的意义，因为在运用的时候，首先必须知道相对于介质的光频 ν' 的大小。如果所提出的任务是，根据不随同物体一起运动的坐标系求出所用光的频率 ν'，则正如刚才所表述的那样，每次所得结果均不相同。由此得出，（在不随同物体一起运动的观测者看来）V 根本不是由光的频率 ν、运动物体的性质及其运动速度 v 决定的，

而是与光入射物体的方式有关。

例 1　光向一个朝相同方向平移的物体入射，其一阶近似为：



$$\nu' = \nu(1 - v/c).$$

在光入射物体前，应用 Doppler 原理进行分析，这一点便可清楚。即：

$$V'(\nu') = V'(\nu) - \nu(v/c)(\mathrm{d}V'/\mathrm{d}\nu)$$
$$= V'(\nu) - (\lambda/n^2)(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda)v.$$

可见，得出的结果不是(1)，而是

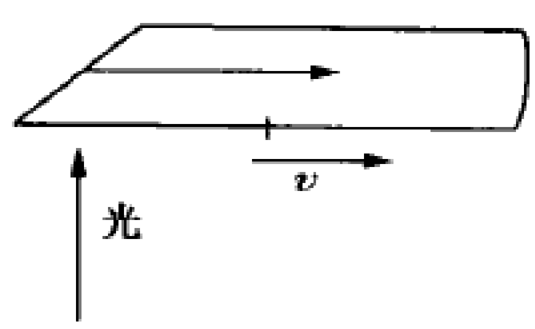
$$V = V'(\nu) + [1 - 1/n^2 - (\lambda/n^2)(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda)]v. \tag{1a}$$

在某种意义上说，参数

$$k = 1 - 1/n^2 - (\lambda/n^2)(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda).$$

在本例中可以被称为"拖曳系数"。

例 2　光入射物体，入射方向在入射后和该物体的运动方向垂直，则用一阶近似值表述为：



$$\nu' = \nu$$

这样

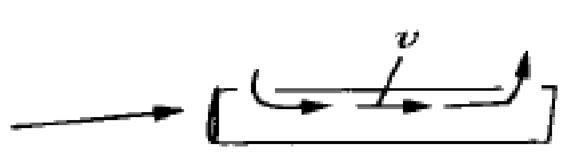
$$V = V'(\nu) + (1 - 1/n^2)v. \tag{1b}$$

此处可以在与上面同样的意义上定出：

$$k = 1 - 1/n^2.$$

例 3 (Fizeau 实验)

光轴向穿过一个静止管子，液体以速度 v 轴向流过该管。



本例中，式(1)成立，但是相对于液体的光速 V' 或者说频率 ν' 与入射光频率的关系，却不同于以上两例。因为在这里，在一个与管子相对静止的观测者看来，ν 显然等于光在液体内部的频率。根据 Doppler 原理，对于与液体一起运动的观测者来说，频率 ν' 为：

$$\nu' = \nu(1 - v/V),$$

即
$$V'(\nu')=V'(\nu)-(\nu v/V)(\mathrm{d}V'/\mathrm{d}V).$$

将此式代入(1),则得

$$V=V'(\nu)+[1-1/n^2-(\lambda/n)(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda)]v \tag{1c}$$
$$k=1-1/n^2-(\lambda/n)(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda).$$

Harzer 先生断言,根据相对论原理,可以求出符合(1c)的"拖曳系数"。而他从 Harress 实验中发现,这次实验得出的是一个符合(1b)的拖曳系数。但是,只要看一看 Harress 的实验安排就可以看出,所论述的完全是例(1b),因此这次实验与 Harzer 的计算其实并没有提供反例,反而证实了该理论。 [2]

柏林-达勒姆 1914 年 7 月 18 日。 爱因斯坦

注释:

28 本文原载 *Astronomische Nachrichten* 199(1914):cols 7—10,1914 年 7 月 18 日于柏林-达勒姆,发表于 1914 年 8 月 11 日。

[1]*Harzer 1914a*。在这篇文章中,基尔大学天文学教授和大学天文台台长 Paul Harzer(1857—1932)讨论的是 Franz Harress 1909 年至 1910 年在耶拿大学做的实验,它后来发表于 Harress 1912 年的博士论文中(*Harress 1912*)。Harress 做了一个类似 Fizeau 做的实验。它与 Fizeau 实验的不同之处在于:所用介质是一个由玻璃三棱镜连接而成的旋转多面体,而不是流水。在这篇文章中,Harzer 指出了 Harress 著作中的错误,重新计算了实验数据。爱因斯坦在本文最后一段概括了他的总结。

Harress 死于第一次世界大战期间。战后直到 1920 年,Otto Knopf(1856—1945)(Harress 曾是他的助手)才将 Harress 的实验结果发表(见 *Knopf 1920*)。同时发表的还有 Max von Laue 的一篇文章(*Laue 1920*)。Laue 给出了这个实验完整的理论处理。

[2]参见 *Einstein 1914m*(文件 6),Einstein 对 Harzer 的这篇文章作出的答复。

[周正安 吴 晔译校]

5."对量子理论的贡献"

[*Einstein 1914n*]

1914 年 7 月 24 日收到
1914 年 8 月 30 日发表

载于《德国物理学会会刊》16(1914):820—828。

30 # 对量子理论的贡献

爱因斯坦

(1914 年 7 月 24 日会议提交)

这里提出两点考虑，这两点在一定程度上是互为关联的，因为它们表明，关于热理论的最新重大成果，即 Planck 的辐射公式和 Nernst 定理，能够在多大程度上，利用量子论的基本观念而不求助于 Boltzmann 原理，按纯粹的热力学方式 [1]
推导出来。就下文的推论与实在相符而言，Nernst 定理适用于化学成分单纯的 [2]
晶体物质，而不适用于混合晶体。关于非晶态物质，由于对其本性的认识还很不清楚，因此不能作出任何断言。

为了证明这里从理论上理解 Nernst 定理的尝试是正当的，我必须指出如下事实，即所有按热力学方式，利用 $T=0$ 时热容量为零这一实验定理，从理论上推导 Nernst 定理的努力，都以彻底失败告终。如果同事们真想了解的话，我非 [3]
常乐意摆出一个个具体实例来证实我的这一断言。 [4]

§1. Planck 辐射公式的热力学推导

我们考虑一个化学上均匀的气体，每个气体分子携带一个谐振子[1)]。这些振子的能量不再假定为取任意值，而只能取某些分立的值 ε_σ(每克分子)。如果两个振子的能量 ε_σ 和 ε_τ 不同，我就把它们看作化学上不同的分子，也就是说，原
31 则上可以用半渗透壁分开。这样，我就可以将原来视为化学上均匀的气体看作是混合气体，其成分由不同的 ε_σ 值来刻画。假定该混合气体相对于分子的 ε 值的一切变化保持热力学平衡，我便得到了支配振子能量分布的统计定律。然后，回过头来再把振子能量当作“热能”，我得到了气体比热的那部分，它起源于分子上的振子。

令 n_0、n_1、n_2 等为克分子，ε_0、ε_1、ε_2 等为相应的振子能量，混合气体的能量 U 和熵 S 的表达式即为：

$$U=\sum_\sigma n_\sigma\{cT+u_0+\varepsilon_\sigma\},$$

1)这里我们用“谐振子”一词来非常一般的指称分子内能的载体，而没有预先勾勒其精确的特征。

[5] $$S=\sum_{\sigma} n_{\sigma}\{c\lg T+R\lg V\}+\sum_{\sigma} n_{\sigma}\{s_{\sigma}-R\lg n_{\sigma}\}.$$

按前述想法,每克分子的比热 c(体积不变时)是在振子能量 ε_{σ} 不变时取定的,它对所有的成分都是相同的。s_{σ} 是振子能量为 ε_{ν} 的气体的熵常数;这个常数自然对于不同的 σ 可以有不同的值。接下来,我们就得写出自由能的表达式 $F=U-TS$,以及每一个反应都得考虑的条件:

[6]

$$\delta F=\delta(U-TS)=0.$$

通过考虑每个振子反应:

$$\delta n_0=-1,$$
$$\delta n_{\sigma}=+1,$$

我们便得到可能的振子反应的总和。这样,我们就得到方程组:

[7] $$\left(s_{\sigma}-\frac{\varepsilon_{\sigma}}{T}-R\lg n_{\sigma}\right)-\left(s_0+\frac{\varepsilon_0}{T}-R\lg n_0\right)=0,$$

或 $$\frac{n_{\sigma}}{n_0}=e^{(s'_{\sigma}-s'_0)-\frac{\varepsilon_{\sigma}-\varepsilon_0}{RT}}. \tag{1)}$$

这就是我们努力寻找的平衡分布,其中 $s'_{\sigma}=\frac{s_{\sigma}}{R}$。 32

令现在所考虑的振子为单色的,带有一个自由度,频率为 ν。为了导出单色振子平均能量的普朗克公式,我们必须引入两条假设:

1. 虽然混合气体中各成分的振子能量不同,但所有成分的熵常数相等;即:
[8] $s_{\sigma}=s_0$。这个前提相当于 Nernst 定理。

2. 振子能量(每克分子)是 $Nh\nu$ 的整数倍:$\varepsilon_{\sigma}=\sigma Nh\nu$。这是单色结构的量子假设。

基于这些假设,我们得到:

$$n_{\sigma}=n_0 e^{-\frac{\sigma h\nu}{KT}}, \tag{1a)}$$

由此可得:

[9] $$\bar{\varepsilon}=\frac{\sum_0^{\infty}\varepsilon_{\sigma}n_{\sigma}}{\sum_0^{\infty}n_{\sigma}}=+RT^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left\{\lg\sum e^{-\frac{\varepsilon_{\sigma}}{RT}}\right\}=\frac{\sum\sigma Nh\nu e^{-\frac{\sigma h\nu}{KT}}}{\sum e^{-\frac{\sigma h\nu}{KT}}}=N\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}}-1}. \tag{2)}$$

[10] 这就是一维单色振子的平均能量的 Planck 公式。[1)]

---

[11] 1)已有人向我指出,Bernoulli 对 Planck 公式给出了一个类似的推导(《电化学期刊》20, 269, 1914),但 Bernoulli 的结论是基于他文中的两个错误公式(4)和(5)。

用这种方式导出 Planck 公式,可注意之点不止一处。一个分子的物理和化
33 学变化似乎失去了原则性的区别。一个分子物理状态的量子性变化与其化学变化看来没有什么原则性的不同。人们还可以走得更远。Brown 运动定律已然模糊了一个分子与一个任意的广延物理系统之间的原则性区别;另一方面,Debye 已经证明,任意的广延系统都能用量子理论上的不同态给出非常成功的描述。 [12]
甚至,不妨将一个广延系统的态的量子性变化类比于一个分子的化学变化。在这个意义上,方程 1)和 2)可以毫不犹豫地应用于任意广延系统的固有振动。

进一步设想混合气体中振子能量为 ε_σ 的成分可以从其余成分中分离出来。我们的推导基于下述假设:原则上,在不改变振子能量的前提下,这是可能的。该假设类似于化学平衡理论中的一个假设,即在不发生化学反应的前提下,一个化学上的混合物能够被分离为单纯成分。现在人们可以设想改变这个分离出来的孤立成分的温度,同时保持其振子能量不变。在实践中这有多大可能,取决于分子改变其 ε 的"反应率"。如果这个反应率足够小,那么该成分气体可以任意冷却,同时保持能量 ε_σ 不变。这种情况下,我们就有一个类似于辐射的结构。因此,对于抗磁性的辐射现象的根本理解,并不需要假设存在 Planck 意义下的 [13]
零点能。只需要假设存在一个类量子分隔的能量,该能量充分缓慢地达到热平衡就足够了。

另一方面,这一推导可以让我们更好地理解 Nernst 定理,这从导出 Planck
34 公式需要假设 1 就可以看出。为了更好地理解这一联系,且让我们将我们的分析推广到多于一个自由度的结构。如果振子的能量 ε_σ 有两个自由度怎么办?在导出公式 1)时,能量 ε_σ 的结构构成如何,完全是无关紧要的;因此,这个方程保持不变。类似地,人们可以保留假设 2。如果我们仍然以假设 1 为基础,那么我们再次得到平均能量的公式 2),这就是说,对于二维振子,只对了一半。为了得到正确的结果,不能再认为,由不同的 ε_σ 刻画的混合成分的熵常数相等了。

如果我们用只有一个自由度的两个振子取代有两个自由度的一个单色振子,这就很容易理解。此时,振子能量 $\varepsilon_{\sigma\tau}$ 取作

$$\varepsilon_{\sigma\tau}=(\sigma+\tau)h\nu.$$

如果我们总是假设两类分子 σ、τ 和 σ'、τ' 除非 $\sigma=\sigma'$,$\tau=\tau'$ 是可分离的,并且混合气体的各成分满足假设 1,那么我们就能得到正确的平均能量之值。此时我们得到:

$$\frac{n_{\sigma\tau}}{n_{00}}=e^{-\frac{\varepsilon_{\sigma\tau}-\varepsilon_{00}}{RT}},$$

$$\bar{\varepsilon}=RT^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\lg\sum_\sigma\sum_\tau e^{-\frac{(\sigma+\tau)h\nu}{RT}}\right)=2N\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{RT}}-1}. \qquad 2a)$$

当能量载体 ε_σ 有两个自由度,并且,如果该分子的态仅仅由能量 ε_σ 来刻画(不管这个能量在两个自由度之间是如何分配的),假设 1 作为 Nernst 定理的等价物,绝对不能用来作为推论的基础。这一事实,可能与下述命题有关:**当且仅当该分**
[14] **子的态——在公式 3)中用下标 σ 来标记——完全由量子理论标准来刻画,因而** 35
只能以唯一方式来实现时,假设 1 才是可容许的。在这种情况下,正确的分布定
[15] 律为

$$\frac{n_\sigma}{n_0}=e^{-\frac{\varepsilon_\sigma-\varepsilon_0}{RT}}. \tag{1a)}$$

如果我们仅限于讨论用 ε_σ 标记的该分子分立的可能实现的"内态"这一情形,那么我们就只能停留于公式 1a);假定人们为每一种可能性选定一个分立的指标(相应地,一套分立的指标体系)。在这种限定下,公式 1)不仅对普通意义下的"分子"仍然有效※,而且对在 Jeans-Debye 意义下进行量子论考察的物理系
[16] 统仍然有效。这样,人们可以放心地呆在实验已证实的量子理论的范围之内。

能量 ε_σ 涉及-克分子。当"分子"可以作为一个单独的结构接受实验考察时,总要为单个分子引入量 $\frac{\varepsilon_\sigma}{N}=\varepsilon_\sigma^*$。在这种情况下,我们必须令

$$\frac{n_\sigma}{n_0}=w_\sigma=e^{-N\frac{\varepsilon_\sigma^*-\varepsilon_0^*}{RT}}. \tag{1b)}$$

§2. 熵、Nernst 定理

我们现在来考虑一个物理系统,它起着上一节中"分子"的作用。为此,必须设想,该系统不是孤立的,而是与无穷大的热库联系在一起。我们假定,该系统在热力学上由温度和一个参数 λ(比如,体积),或是由几个参数所决定。该系统的可能的态,其可能取的能量值 ε_σ^* [1] 将依赖于参数值 λ。在 λ 为常数的情况下,
[17] 我们必须接受公式 3b)的正确性。该系统的平均能量由下式给出:

$$\overline{\varepsilon^*}=\frac{\sum\varepsilon_\sigma^* w_\sigma}{\sum w_\sigma}=\frac{\sum\varepsilon_\sigma^* e^{-\frac{N\varepsilon_\sigma^*}{RT}}}{\sum e^{-\frac{N\varepsilon_\sigma^*}{RT}}}=\frac{R}{N}T^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\lg\left\{\sum e^{-\frac{N\varepsilon_\sigma^*}{RT}}\right\}. \tag{3)}$$

由此可以推出 λ 为常数时熵的表达式(T 的函数): 36

$$S-S_0=\int_{T_0}^{T}\frac{\mathrm{d}\,\overline{\varepsilon^*}}{T}=\left|\frac{\overline{\varepsilon^*}}{T}\right|_{T_0}^{T}+\int_{T_0}^{T}\frac{\overline{\varepsilon^*}}{T^2}\mathrm{d}T,$$

1)在德文原稿中丢掉了"有效"(gelten)一词——英译者注。

适当选择 S_0 的值，即得：

$$S=\frac{\overline{\varepsilon^*}}{T}+\frac{R}{N}\lg\left\{\sum e^{-\frac{N\varepsilon_\sigma^*}{RT}}\right\}. \tag{4)}$$

如果该系统具有大量的自由度，公式 1b）显然意味着只用考虑该系统的那些态，它们对应于一个很小幅度的 ε_σ^*。利用公式（4）中的求和估算，人们可以局限于这样一个狭窄的幅度，其中 ε_σ 设定为常数。这样人们就得到

$$S=\frac{R}{N}\lg Z, \tag{4a)}$$

式中 Z 是量子理论所容许的基本态的数目；与 Z 相伴的能量值是 $\overline{\varepsilon^*}$1)。方程 4a）就是以 Boltzmann-Planck 形式表述的 Boltzmann 原理。

迄今为止，我们还只考虑了 λ 为常数情形下态的变化。当 λ 变化时，系统中的态也随之变化，此时公式 4a）是否依然有效？如果不做特殊的假设，这个问题显然无法回答。最自然的假设就是 Ehrenfest 绝热假设，它可以这样来表述：随 [18]
λ 的可逆绝热变化，每一个可能的量子态都改变成另一个可能的量子态。

这个假设的一个推论就是：在绝热过程中，量子论所允许的态的数目 Z 不发生改变。既然这对 S 也为真，我们势必就会从 Ehrenfest 绝热假设（它是 *Wien* [19]
37 位移定律的一个自然推广）得出结论：公式 4a）所表述的 Boltzmann 原理普遍有效。因此，一个系统的熵对于该系统所有（热力学定义的）态——假定这些态以 [20]
同样多的方式可以量子论地实现——具有相同的值。

现在我们问自己，关于 Nernst 定理的适用范围，我们能否作出某些预言。假定有一个物理系统，它在绝对零度时处于两个热力学定义的态 A_1 和 A_2。如果我们能找到该系统的量子论允许态的数目 Z，我们就能比较这两个热力学态的熵值。

如果构成该系统的个体原子（假定原子的数目有限）的重心位置是给定的，那么我们就可以认为，该系统处于绝对零度时的态，可由量子论和分子论的允许态（即该系统的微观态）给出完备的描述。这样，Z 就是让系统保持其热力学确定的态时可能有的微观态的数目。

如果该系统的所有部分都是化学上均匀的，并且空间点阵呈现晶体结构，各种原子所处的位置完全确定，那么我就只能通过交换同种原子的位置，来将含于 Z 内的一个微观态改变成另一个微观态。相反，交换不同种类原子所产生的态，不应计入在内。如果系统包括 n_1 个第一种分子，n_2 个第二种分子，等等，那么 Z 值为：

1）这相当于从“正则”系综过渡到“微正则”系综。

$$Z=n_1!\ n_2!\ \cdots$$

由此可以推出，鉴于公式 4a)，所有这些态的熵都具有相同的值。因此，**普朗克形式的 Nernst 定理适用于化学上单纯的晶体物质。**

然而，当两种原子形成混合物时，如果我们交换不同种类的两个原子，我们 38
并没有离开该系统的热力学态。此时我们有

$$Z=(n_1+n_2)!,$$

而对于非混合态的物质，正确的公式应该是

$$Z=n_1!\ n_2!.$$

因此，在这种情况下，绝对零度时熵相等不再成立。相反地，混合态物质与非混合态物质熵之差值为

$$\frac{R}{N}\lg\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\ n_2!},$$

[21] 当 $n_1=n_2=N$ 时，熵差自然约化为 $2R\lg 2$。

发表在《德国物理学会会刊》16(1914)：820—828。1914 年 7 月 24 日的讲演稿。1914 年 8 月 30 日发表。 39

[1]关于热定理的最初表述，见 *Nernst 1906*，而关于 Planck 对它的看法见 *Planck 1912a*。

[2]在较早的时候，爱因斯坦已多次对 Boltzmann 原理做了广泛和重要应用[见 *Einstein 1909 b*，*1909 c*(第二卷，文件 56 和 60)]。值得注意的是在本文的讨论中避免应用。

[3]在 1911 年第一次索尔维会议及 1913 年第二次会议上的讨论注记中，爱因斯坦已批评了 Walther Nernst 对其热定理的热力学证明(分别见 *Nernst et al. 1912*，p. 302 或 *Nernst et al. 1914*，p. 243(第三卷，文件 25，节Ⅶ)；和 *Grüneisen et al. 1921*，pp. 293—298，或第四卷，文件 22，节Ⅳ)，在 1912 年，爱因斯坦写了一篇批评 Nernst 的文章，起初他把该文提交给《物理学期刊》，但后来又撤回了，详情以及关于爱因斯坦在此专题方面的同期信件，见 1912 年 2 月 20 日后，爱因斯坦致 Ludwig Hopf 的信(第五卷，文件 364)，注 6。

[4]Michael Polanyi 采纳了爱因斯坦的提议，这导致在他和爱因斯坦之间交换了一些书信和一篇文章，*Polanyi 1915*(见爱因斯坦致 Michael Polanyi 的信，1914 年 12 月 13 日，1914 年 12 月 30 日，1915 年 2 月 10 日，1915 年 5 月 8 日，1915 年 6 月 18 日和 1915 年 7 月 6 日；也可见 *Polanyi 1915*，p. 351 中提及爱因斯坦的提议)。

[5]包括最后一项使得熵成为广延的，关于这一点的进一步讨论也见文件 26，注 11。

[6]“ε_ν”应为“ε_σ”。

[7]在左边第二项中的正号应为负号。

[8]这实际上是 Planck 对 Nernst 定理的 Nernst 表述的改进(见 *Planck 1913* 的前言)。

[9]在第三式的指数中“$\varepsilon\sigma$”应为“ε_σ”。

[10]这个推导最先由爱因斯坦在 *Einstein 1907a* 中给出。

[11] *Bernoulli 1914*。在爱因斯坦 1912 年 1 月 17 日致 Fritz Fichter-Bernoulli 的信中(第五卷，文件 338)和 1912 年 5 月 20 日致 Heinrich Zangger 的信(第五卷，文件 398)中，可见爱因斯坦对 Bernoulli 的能力的早期否定评价。关于 Bernoulli 作为 Basel 大学教授职位的候选人资格，曾询问过爱因斯坦的意见，他

的意见没有被考虑，Bernoulli 被委任为荣誉物理化学教授。

[12]见 *Debye 1910*，*1912*。

[13]在 Planck 修改了的 1911 年的量子论中，他已引入了零点能（见 *Planck 1911a*，*1911b*），被 Planck 讨论的这个可能的物理结论包含这样的推测，即无规的“量子发射”可能以某种方式解释放射现象（见 *Planck 1911a*，p. 148）。也见爱因斯坦在他的关于 Ampére 分子电流一文中对逆磁性和零点能存在之间联系的评述（见，*Einstein* 和 *De Haas 1915a*（文件 13），p. 153）；关于爱因斯坦在零点能方面的早期关注，也见第四卷，编者按，“爱因斯坦和 Stern 论零点能”，pp. 270—273。

[14]“3)”应为“1a)”。

[15]在他后来关于辐射量子论的一些文章中，*Einstein 1916j*（文件 34）和 *Einstein 1916n*（文件 38），爱因斯坦仔细地考虑了能量状态的可能的简并性。

[16]见 *Debye 1912* 且特别是 *Debye 1910*，James Jeans 紧接在 Rayleigh 爵士之后，把一个空腔的辐射作为一个物理系统来处理，人们能够对它应用统计力学（见 *Rayleigh 1900* 和 *Jeans 1905a*，*1905b*，*1905c*）。

[17]“3b)”应为“1b)”。

[18]见 *Ehrenfest 1913*。虽然 Ehrenfest 直到 1916 年才发表了绝热定理的一般论述（*Ehrenfest 1916*），但肯定他早就与爱因斯坦讨论过这个专题。在 *Ehrenfest 1916* 中，Ehrenfest 甚至把“绝热假说”这个名字归于爱因斯坦。

[19]后来 Ehrenfest 批评了这一结论。关于爱因斯坦在他发生错误的三年之后的承认以及关于为证明方程 4a)的普遍有效性而做的修改的理由，见 1917 年 11 月 12 日爱因斯坦致 Paul Ehrenfest 的信。

40 [20]在 *Ehrenfest 1914* 中更详细地讨论了这一点。Ehrenfest 在这篇文章中也如同在 *Ehrenfest 1913* 一样强调了它与 Wien 位移定律的联系。

[21]见文件 26 中相关的讨论。

[高尚惠　译校]

6. “对 P. Harzer 答复的答复”

[*Einstein 1914m*]

1914 年 8 月 18 日于柏林-达勒姆
发表于 1914 年 8 月 29 日

原载：*Astronomische Nachrichten* 199(1914)：cols. 47—48

42 “对 Paul Harzer 答复的答复”(第 4753 期第 10 和第 11 页) [1]

正如我已经表述的那样,相对于所穿透的介质的光的频率,对于参数 k 具有 [2] 决定性意义,因为这种频率决定着光相对于介质的速度。本例所论述的是光的一种运动过程,这种过程可以理解为相对于旋转三棱镜装置的静态过程。由此可以看出,光相对于运动着的三棱镜的频率,即参数 k,对于所有三棱镜来说,作用都是相同的。这样就驳回了 Harress 的答复。 [3]

柏林-达勒姆,1914 年 8 月 18 日

A. 爱因斯坦

43 Astronomische Nachrichten 199(1914):cols. 47—48,1914 年 8 月 18 日作于柏林-达勒姆,发表于 1914 年 8 月 29 日。

[1]见 *Harzer 1914 b* 中对他的答复。

[2]见 *Einstein 1914 l*(文件 4)中爱因斯坦就 *Harzer 1914 a* 发表的评论。

[3]在这次答复中,Harzer 指出,Harress 所使用的八个棱镜的仪器中存在稀薄的空气,以致光不能一直在玻璃中穿行,而是在离开一个棱镜进入另一个棱镜之前穿过空气。他声称,k 对于光从外界进入到第一个棱镜中具有 Fresnel 值(方程(1b)[*Einstein 1914l*(文件 4)],以及对于所有其他的穿越具有 Lorentz 值(方程式(1c)[*Einstein 1914l*(文件 4)]。他的结论是:k 就是对于八分之一光路具有 Fresnel 值,对于余下的光路具有洛伦兹值。

7. 在柏林大学 1914—1915 年冬季学期的相对论课程教案

44 在柏林大学 1914—1915 年冬季学期的相对论课程教案

[1914 年 10 月 16 日至 1915 年 3 月 15 日] [p.1]

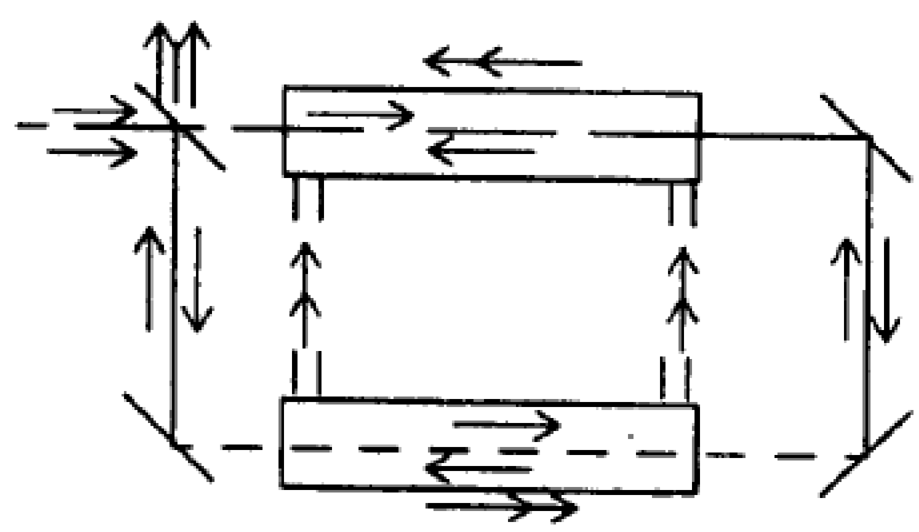
1. 讲座 [1]

作为物理学的几何学。刚体构架。作为参照物(地球表面)的空间;地球坐标系。由实际上∞大的光速产生的同时性,对于时间表述的意义。作为直线的光线;在光线作用下,地球几何结构向天空拓展的可能性;太阳坐标系。 [2] [3]

2. 讲座。用类比法对光以太所作的分析。与光以太运动属性有关的可能性。

用一起运动的物质分析。Fizeau 的相反观点与光行差。

1)Fizeau。 [4]



考虑:V 表示静水中的光速 v 表示水流速度

$\boxed{V\pm v}$=根据拖曳理论求得的流水中的光速。

时间:$\frac{l}{V+v}\Big|\ 4\quad \frac{l}{V}\left(1-\frac{v}{V}\right)=T\quad \Big|\ \frac{c}{\lambda}$频率$\Big|\ \frac{\lambda}{c}$次振动的时间

两束光线持续运动的时间差

45 $\dfrac{\frac{4lv}{V^2}}{\frac{\lambda}{c}}$=[在……的]速度差波长读数

$$\frac{4nl}{\lambda}\quad\frac{v}{V}$$

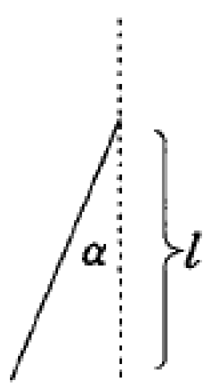
$$\frac{5\cdot 10^2}{0,5\cdot 10^{-4}}\ \frac{10^3}{3\cdot 10^{10}}=\frac{1}{3}\text{波长}$$

实验 $V\pm\Big(\underbrace{1-\frac{1}{n^2}}_{\text{比}0\&\frac{1}{2}}\Big)v$

[p. 2] 可以认为，这是微粒拖曳。但是，这种拖曳并不是仅仅由计算指数决定的（由于色散）。由静止以太（Fresnel 卤素机械白炽灯，Lorentz 电磁学理论）得出
[5] 量的结果。

[6] 2）光行差

微粒理论能够解释光行差问题，以太拖曳论解释不了。静止以太从量上正确表示光行差。



$$\frac{l}{c}=vl\alpha$$

$$\alpha=\frac{v}{c}$$

[7] Lorentz 理论

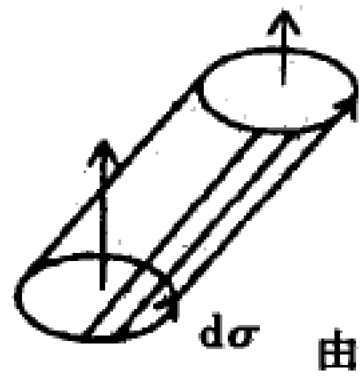
$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}\mathfrak{h}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t}=\text{电流密度}\\&\mathrm{rot}\mathfrak{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t}=0\end{aligned}\right\}\text{与所认可的系统有关}$$

$$\mathrm{div}\mathfrak{e}=\rho_w-\mathrm{div}\mathfrak{p}$$

$$\mathrm{div}\mathfrak{h}=0$$

$$\text{电流密度}=\rho_w\frac{\mathfrak{b}}{c}+\text{极化电流}$$

极化电流通过静止面积元求得。 46



$-\mathrm{div}\,\mathfrak{p}\mathfrak{v}_n\,d\sigma$ + 流过拖曳元素的极化电流

由于 $\mathfrak{p}$ 的时间变化产生的电流　　　　由于 $d\sigma$ 运动产生的电流

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial t}\right)_n d\sigma \qquad \frac{1}{dt}\Big|\,(\mathfrak{p}_n d\sigma)'-(\mathfrak{p}_n d\sigma)$$

$$\mathfrak{p}'_n d\sigma'-\mathfrak{p}_n d\sigma+\sum \mathfrak{p}[d\mathfrak{s},\mathfrak{v}]dt=\mathrm{div}\mathfrak{p}\mathfrak{v}_n d\sigma dt$$ [p. 3]

$$\int d\mathfrak{s}[\mathfrak{v},\mathfrak{p}]dt$$

$$+\mathrm{rot}_n[\mathfrak{v},\mathfrak{p}]d\sigma dt$$

$$\mathfrak{p}'_n d\sigma'-\mathfrak{p}_n d\sigma=\{\mathrm{div}\mathfrak{p}\mathfrak{v}-\mathrm{rot}[\mathfrak{v},\mathfrak{p}]\}_n d\sigma dt$$

总极化电流

$$\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial t}-\mathrm{rot}[\mathfrak{v},\mathfrak{p}]$$

即单纯计算极电流时采用的公式

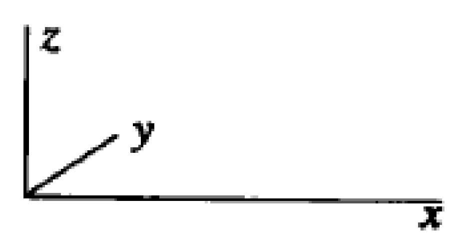
$$\mathrm{rot}(\mathfrak{h}+[\mathfrak{v},\mathfrak{p}])-\frac{1}{c}\frac{\partial(\mathfrak{e}+\dot{\mathfrak{p}})}{\partial t}=0 \qquad \mathrm{rot}\mathfrak{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t}=0$$

$$\mathrm{div}\mathfrak{p}=0 \qquad \mathrm{div}\mathfrak{h}=0$$

$$\mathfrak{p}=(\varepsilon-1)\left[\mathfrak{e}+\left(\frac{\mathfrak{v}}{c},\mathfrak{h}\right)\right]$$

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial\mathfrak{e}_z}{\partial y}-\dfrac{\partial\mathfrak{e}_y}{\partial z}\\[2ex]\dfrac{\partial\mathfrak{e}_x}{\partial z}-\dfrac{\partial\mathfrak{e}_z}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial\mathfrak{e}_y}{\partial x}-\dfrac{\partial\mathfrak{e}_x}{\partial y}\end{array}\right.$$

47

$\cancel{\mathfrak{h}_x}+\cancel{\mathfrak{v}_y\mathfrak{p}_z}-\cancel{\mathfrak{v}_z\mathfrak{p}_y}$ $\cancel{\mathfrak{h}_y}+\cancel{\mathfrak{v}_z\mathfrak{p}_x}-\cancel{\mathfrak{v}_x\mathfrak{p}_z}$ $\mathfrak{h}_z+\mathfrak{v}_x\mathfrak{p}_y-\cancel{\mathfrak{v}_y\mathfrak{p}_x}$	0 $\dfrac{\partial\mathfrak{h}\mathfrak{p}+\mathfrak{v}_x\mathfrak{p}_y}{\partial x}$ 0	0 $-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(\mathfrak{e}_y+\mathfrak{p}_y)}{\partial t}$ 0	

$$-\frac{\partial(\mathfrak{h}_z+\mathfrak{e}_x\mathfrak{p}_y)}{\partial x}+\frac{V}{c}\frac{\partial(\mathfrak{e}_y+\mathfrak{p}_y)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\mathfrak{e}_y}{\partial x}-\frac{V}{c}\frac{\partial\mathfrak{h}_z}{\partial x}=0$$

$$\mathfrak{p}_y=(\varepsilon-1)\left(\mathfrak{e}_y-\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\mathfrak{h}_z\right)$$

$(x-Vt)$ 的所有函数中只有 $\mathfrak{e}_y\mathfrak{p}_y\mathfrak{h}_z$ 是不为零的。

$$\frac{\partial}{\partial t}=-V\frac{\partial}{\partial x}.$$

$$\begin{array}{l|ccc|c}
\frac{V}{c}\mathfrak{e}_y+\left(\frac{V}{c}-\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\right)\mathfrak{p}_y-\mathfrak{h}_z=0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n}-\frac{\mathfrak{v}_x}{c} & -1 & \\
\mathfrak{e}_y+\qquad\qquad -\frac{V}{c}\mathfrak{h}_z=0 & 1 & 0 & -\frac{V}{c} & =0 \\
(\varepsilon-1)\mathfrak{e}_y-\mathfrak{p}_y-(\varepsilon-1)\frac{v_x}{c}\mathfrak{h}_z=0 & (\varepsilon-1) & -1 & -(\varepsilon-1)\frac{\mathfrak{v}_x}{c} &
\end{array}$$

$$\cancel{\begin{vmatrix}\frac{V}{c} & -1\\ (\varepsilon-1) & -(\varepsilon-1)\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\end{vmatrix}=0}$$

$$\cancel{-\frac{(\varepsilon-1)}{n}\frac{v_x}{c}+1+\frac{\varepsilon-1}{n}\frac{v_x}{c}-\frac{V}{c}\frac{v_x}{c}=0}$$

$$-\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\left(\frac{V}{c}-\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\right)(\varepsilon-1)$$

[8] $1-\frac{V^2}{c^2}=\frac{\varepsilon-1}{c^2}(V-v)^2$

[p. 4] $c^2-V^2=(\varepsilon-1)(V^2-2Vv)$

$c^2=\varepsilon V^2-2(\varepsilon-1)V_0 v$

[9] $c^2=\varepsilon V_0^2+2\varepsilon V\Delta-2(\varepsilon-1)V_0 v$

同时，$\Delta \& v=0$

[10] $c^2=\varepsilon V_0^2 \qquad \frac{c^2}{\varepsilon}=V_0^2 \qquad V_0=\frac{c}{n}=\frac{c}{\varepsilon^2}$ 48

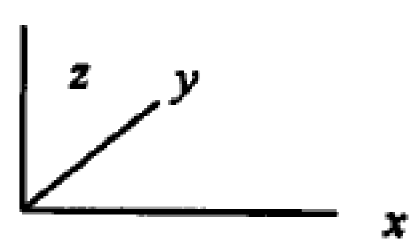
$$\boxed{\Delta=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}v=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v}$$

这是经验值。

[11] Röntgen-Eichenwald. Wilson

该理论(看起来)与力学的相对论原理相悖。

K. 太阳坐标系。



光的纵向传播

由公式 $x=ct$ 得出的 x 轴

引入新坐标系 K'

$$\begin{array}{l|l} x'=x-vt & x=x'+vt' \\ t'=t & t=t' \end{array}$$

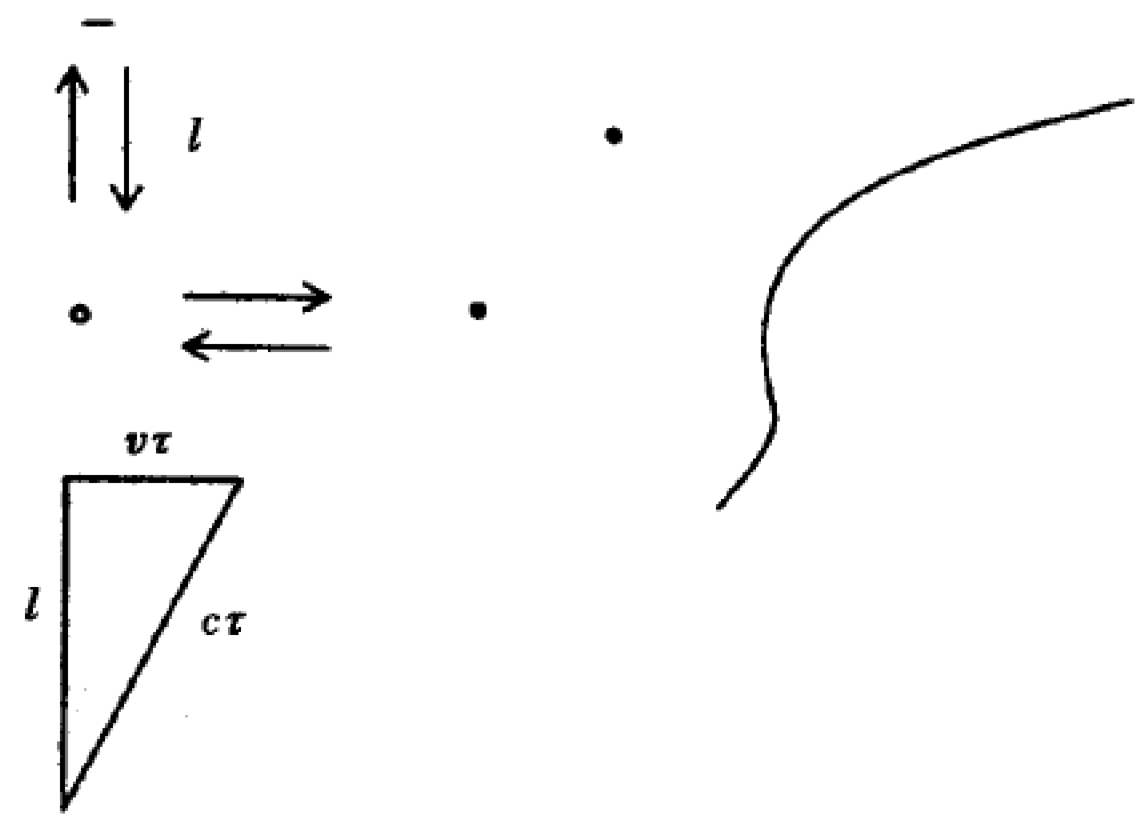
$x'+vt'=ct'$

$x'=(c-v)t'$

看起来，光速 $c-v$。

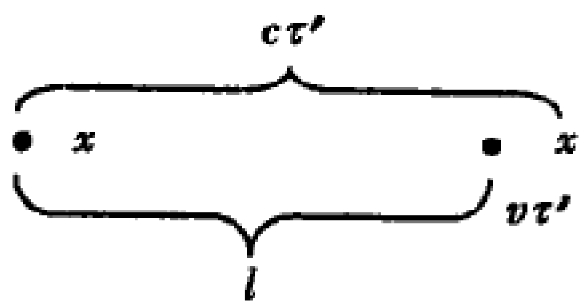
[12] 当然，由于时间测量方面的困难，不能直接证明。Lorentz 1895 年指出，

尽管按一级近似值计算有悖于相对论原理，光程仍然与运动无关。但是，Michelson [p. 5]
认为，这是二阶物理量。 [13]



$$-v^2\tau^2+c^2\tau^2=l^2$$

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}\quad 2\tau=\frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{2l}{c}\left(1+\frac{1}{2}\ \frac{v^2}{c^2}\cdots\right)$$

49 

$$l=(c-v)\tau'$$

$$\tau'=\frac{l}{c-v}\quad \tau''=\frac{l}{c+v}$$

$$\tau'+\tau''=\frac{2cl}{c^2-v^2}=\frac{2l}{c}\Big(1+\frac{v^2}{c^2}$$ [14]

$$(\tau'+\tau'')-(2\tau)=\frac{2l}{c}\left(\langle 1-\frac{1}{2}\rangle\frac{v^2}{c^2}\right)$$

换算成波长 $\frac{2l}{\lambda}\ \frac{v^2}{c^2}$

$4\cdot 10^{+6}\cdot 10^{-8}=4\cdot 10^{-2}$

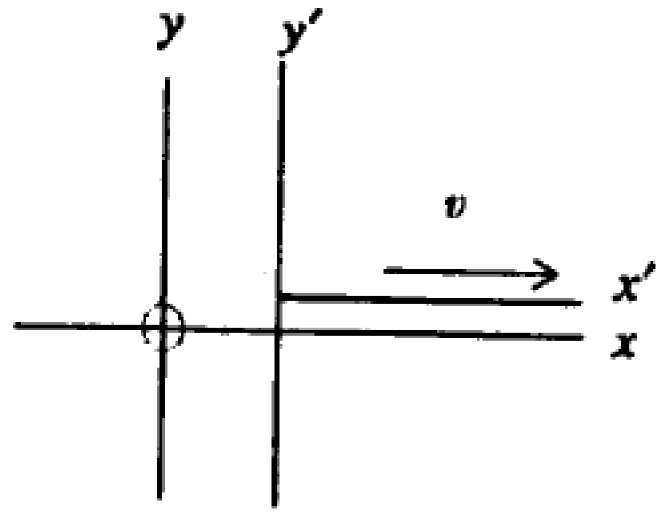
0.4 的波长，即波长的近一半，往返折射 10 次。实验证明这是不恰当的。 [15]
引入在运动方向上收缩的论点。不令人满意，因为目前的假说仍然是 Ritz 提出 [16]
的理论。速度与光源有关。 [17]

双星热力学。 [18]

（概念上关于）相对运动的各系统中的时空测量。 [p. 6]

Lorentz 变换。 [19]

与 $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2+z-c^2t^2=0=\Phi\\ x'^2+y'^2+z'-c^2t'^2=0=\Phi'\end{array}\right|$ $\langle x^2+\cdots\cdots=\lambda(\quad)\rangle$应该是同样重要的。



〈专业化 $y'=y;z'=z$〉

$\mathrm{d}x'=\alpha_{11}\mathrm{d}x+\alpha_{12}\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}t'=\alpha_{21}\mathrm{d}x+\alpha_{22}\mathrm{d}t$ · · · · ·

断语：α 肯定是恒定的。

两个相邻的点事件，其特征数值由 $\mathrm{d}x\&\mathrm{d}t$ 表述。要求空间和时间均匀性，因而 $\mathrm{d}x'\&\mathrm{d}t'$ 与 $x\&t$ 无关。

如果 ~~$y'\&z'$~~ 轴的方向选择恰当，则必然是 50

$$y'=y, z'=z$$

原因是空间的各向异性。

$$x'^2-c^2t'^2=\lambda(x^2-c^2t^2)$$

$$x^2+\cdots\cdots=\lambda(\quad)$$

通过适当选择起点，可以把线性变换公式做得很均匀。

运动面始终是运动面。因此，上述坐标是可以选择的。

$y'=\lambda y$，适用于 $x=z=t=0$ & $x'=z'=t'=0$

[p. 7] 群论观点。可逆替换。

$\lambda(v)\lambda(-v)=1$

由于各向异性，$\lambda(v)=\lambda(-v)\quad \lambda=1$

对于 x 轴上的各点，

$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2$ 此外，

结果必然是 $x'=0 \qquad x-vt=0$

$$\left.\begin{array}{l} x'=\alpha x+\beta t \\ t'=\gamma t+\delta x \end{array}\right| -c^2$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}=v \qquad \langle(\alpha x+\beta t)^2-c^2(\gamma t+\delta x)^2=x^2-c^2t^2\rangle$$

$$\alpha^2-c^2\delta^2=1$$

$$\beta^2-c^2\gamma^2=-c^2$$

$$\alpha\beta-c^2\gamma\delta=0$$

$$\alpha^2=1-c^2\delta^2$$

$$\alpha^2\frac{v^2}{c^2}=c^2(\gamma^2-1)$$

$\alpha^2 v = -c^2 \gamma\delta$

51 $x^2 + l^2 = x'^2 + l'^2$ l&l'旋转物体示意图  [20]

$x' = x\cos\varphi + l\sin\varphi$

$l' = -x\sin\varphi + l\cos\varphi$

$x + l\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0 \quad x + ic\,\mathrm{tg}\varphi t = 0$

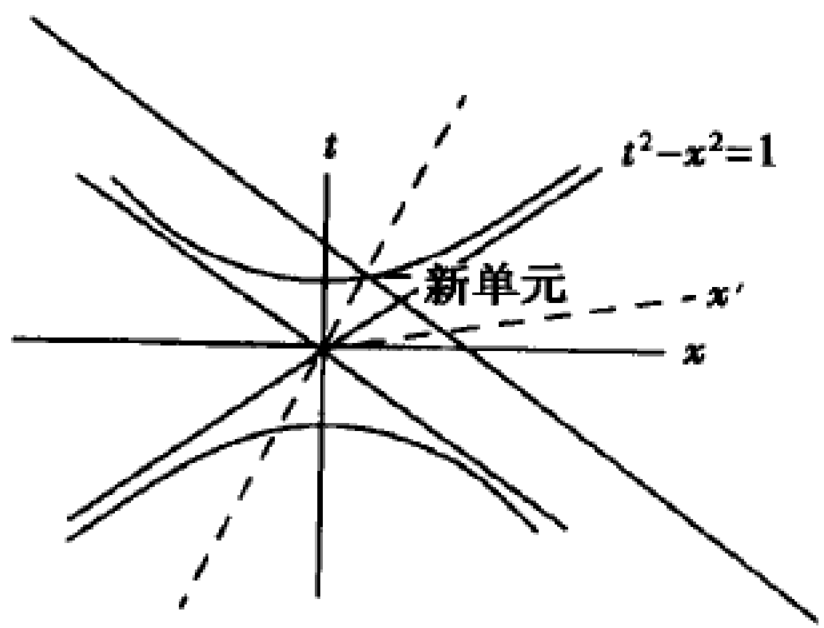
如果公式的值为 m $\quad x - vt = 0$

$$-v = ic\,\mathrm{tg}\,\varphi; \quad \mathrm{tg}\,\varphi = i\frac{v}{c} \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \sin\varphi = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{}}$$

即所求的变换为 [21]

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{w} \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{w} \end{aligned}\right\}\text{Lorentz 变换。}$$

几何学解释($c=1$) [p. 8]



线性正交变换概论

$$x'_\mu = \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} x_\nu \qquad \Big| \alpha_{\mu\sigma} \sum_\mu \qquad (1)$$

$\alpha_{\mu\nu}$,因而

$$\sum_\mu x'^2_\mu = \sum_\nu x_\nu^2 \qquad (\mathrm{I})$$

52 即$\displaystyle\sum_\mu \sum_\nu \sum_\sigma \alpha_{\mu\nu} x_\nu \alpha_{\mu\sigma} x_\sigma = \sum \delta_{\nu\sigma} x_\nu x_\sigma$

$$= \sum_{\sigma\nu} \Big(\sum_\mu \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu\sigma} \Big) x_\nu x_\sigma$$

由此得

$$\sum_{\mu}\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\sigma}=\delta_{\nu\sigma} \qquad (2)$$

$$\sum_{\nu}\delta_{\nu\sigma}x_{\nu}=x_{\sigma}=\sum\alpha_{\mu\sigma}x'_{\mu} \qquad (3)(\text{可逆替换})$$

可逆替换由同样的系数给出。由 1 产生的也是正交。因此也得

$$\sum_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\alpha_{\sigma\mu}=\delta_{\nu\sigma} \qquad (2a)$$

$$\int d\tau'=|\alpha_{\mu\nu}|\int d\tau$$

$$\int d\tau=|\alpha_{\nu\mu}|\int d\tau'$$

$$|\alpha_{\mu\nu}|^2=1$$

如果轴向相同，则 $|\alpha_{\mu\nu}|=1$ (4)

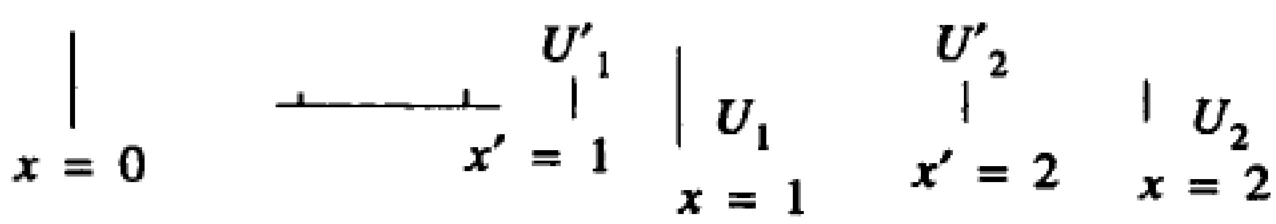
[p. 9] Lorentz 变换的物理学内容

	反变换
$x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$x=\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
$t'=\dfrac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$t=\dfrac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{''\ ''}}$

$y'=y$

$z'=z$

从 K 观察，x' 轴的形状(即适用于 $t=0$) 53



$$\left.\begin{matrix} x'=0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \\ t=0 \end{matrix}\right\} \quad x=x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=0(1,2,\cdots)\cdot w$$

在关系式 w 中，x' 轴看起来是收缩了。

如果从 K' 看 K，情况也类似。

$$\left.\begin{matrix} t=0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \\ t'=0 \end{matrix}\right\} \quad x'=x\sqrt{}=(0,1,2,\cdots)w$$

Lorentz 收缩，运动球体，椭圆形。

我们从 K' 观察标准钟，求时间 $t=0$

$$t=0;x'=n$$

由两个反变换方程得

$$t'=-\frac{v}{c^2}n$$

从 K 观测，x' 轴正面的标准钟走得慢，反面的走得快。

如果从 K' 到 K 观察钟表，则结果相反。

运动钟的运行速度。

$$t=n;\quad x'=0$$

$t=\frac{n}{\sqrt{\ }}$ 从 K 判断，时间间距较大。

同样是倒数。 [p.10]

54 速度的特殊加法定理。变换的群属性。

$$\begin{array}{c|l|l} 1 & x'=\frac{1}{w}(x-vt) & -\frac{v'}{c^2} \\ -v' & t'=\frac{1}{w}\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) & 1 \end{array}$$

$$x''=\frac{1}{w'}(x'-v't')=\frac{1}{ww'}\left[\left(1+\frac{vv'}{c^2}\right)x-(v+v')t\right]$$

$$t''=\frac{1}{w'}\left(t'-\frac{v'}{c^2}x'\right)=\frac{1}{ww'}\left[\left(1+\frac{vv'}{c^2}\right)x-\left(\frac{v+v'}{c^2}\right)t\right] \qquad [22]$$

$$\frac{1+\frac{vv'}{c^2}}{ww'}=\frac{1}{w''}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v''^2}{c^2}}} \qquad x''=\frac{1}{w''}(x-v''t)$$

$$\frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}}=v'' \qquad t''=\frac{1}{w''}\left(t-\frac{v''}{c^2}x\right)$$

但是现在是 $2\frac{vv'}{c^2}+\langle 2\rangle\frac{v^2}{c^2}+\langle 2\rangle\frac{v'^2}{c^2}$

$$w'^2=\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{vv'}{c^2}\right)^2}=1-\frac{\left(1+\frac{vv'}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{vv'}{c^2}\right)^2} \qquad [23]$$

$$=1-\frac{v''^2}{c^2}$$

两个被置换的 Lorentz 变换又产生一个加法定理。

$$\boxed{v=\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}}$$

通过 1&2 置换，表达式不变。 55

[24] 其他推导(Sommerfeld)

$$\mathrm{tg}\Psi_1=i\frac{v_1}{c}$$

$$\mathrm{tg}\Psi_2=i\frac{v_2}{c}$$

$$\mathrm{tg}\Psi=i\frac{v}{c}=\frac{\mathrm{tg}\Psi_1+\mathrm{tg}\Psi_2}{1-\mathrm{tg}\Psi_1\,\mathrm{tg}\Psi_2}=\frac{i}{c}\;\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

给出两个亚光速(相加)，再代入

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{w_1^2\,w_2^2}{\left(1+\frac{v_1 v_2}{c^2}\right)^2}$$

由此断言：

如果 v_1 或 $v_2<c$，则 $v<c$。

[p.11] Fizeau 实验。

光行差与 Doppler 原理。

[25] 矢量 & 张量理论(三维)

	x_1	x_2	x_3
x'_1	α_{11}		
x'_2			
x_3			α_{33}

$$x'_\mu=\sum_\nu \alpha_{\mu\nu}x_\nu$$

$\mathfrak{a}'_\mu=\sum \alpha_{\mu\nu}\mathfrak{a}_\nu$(矢量的定义)

$\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{b}_\nu=T_{\mu\nu}$ 二阶特殊张量

$$T'_{\mu\nu}=\sum \alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\nu\tau}T_{\sigma\tau}$$

和矢量相乘的标量积。

对矢量相乘所得张量的验证。 56

$$\sum_\nu \mathrm{T}_{\mu\nu}\mathfrak{m}_\nu=\sum_\nu \mathfrak{a}_\mu\mathfrak{b}_\nu\mathfrak{m}_\nu=\mathfrak{a}_\mu\underbrace{\sum \mathfrak{a}_\nu\mathfrak{m}_\nu}_{\text{标量}}=\text{矢量}$$

$$\sum_{\nu} T_{\mu\nu} U_{\nu\sigma} = \sum_{\nu} \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{f}_\sigma = \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{f}_\sigma \underbrace{\sum \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{e}_\nu}_{\text{标量}} = V_{\mu\sigma}$$

特殊张量

1）对称张量

通过任意置换指标得出的分量，是相等的。

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$$

例 $\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{b}_\nu + \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{b}_\mu$

二阶特殊对称张量

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{\mu\nu} = \begin{array}{l} 0(\mu\neq\nu) \\ 1(\mu=\nu) \end{array} \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{array}\right\} \text{张量特征证明} \longrightarrow \begin{array}{l} \delta'_{\mu\nu} = \sum \alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\nu\tau}\delta_{\sigma\tau} \\ = \sum \alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\nu\sigma} = \delta_{\mu\nu}. \end{array}$$

2）反对称张量

两个指标的置换改变符号

$\mathrm{T}_{\mu\nu} = -\mathrm{T}_{\nu\mu}$ [p. 12]

例如，$\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{b}_\nu - \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{b}_\mu$ 矢量积其实就是张量。

$$\left.\begin{array}{ccc} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{32} & 0 \end{array}\right\} \text{有三个代号不同的元素}$$

特殊反对称张量

$$\delta_{\rho\sigma\tau} = -\delta_{\rho\tau\sigma}\text{等} \quad = \pm 1 \qquad \delta_{123} = +1$$

$$\sum \delta_{\rho\sigma\tau} x_\rho^{(1)} x_\sigma^{(2)} x_\tau^{(3)} = \frac{1}{6} V = \text{标量}$$

$$\delta_{\rho\sigma\tau} \quad \text{张量。}$$

57 这是一种需要验证的张量特性证明。

$\sum\limits_{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \mathfrak{a}_\rho \mathfrak{b}_\sigma$ 是矢量，如果 $\mathfrak{a}$&$\mathfrak{b}$ 都是任意矢量的话。

$$\sum_{\mu\nu} T'_{\mu\nu} \mathfrak{a}'_\mu \mathfrak{b}'_\nu = \sum \mathrm{T}_{\rho\sigma} \mathfrak{a}_\rho \mathfrak{b}_\sigma$$

$$= \sum \mathrm{T}_{\rho\sigma} \alpha_{\mu\rho} \alpha_{\nu\sigma} \mathfrak{a}'_\mu \mathfrak{b}'_\nu$$

系数比较 $\mathrm{T}'_{\mu\nu} = \sum\limits_{\rho\sigma} \alpha_{\mu\rho} \alpha_{\nu\sigma} \mathrm{T}_{\rho\sigma}$

这是张量变换。

下面 $T_{\mu\nu}$是二阶反对称张量

$\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu\sigma}$是矢量。$\mathfrak{a}_\sigma$

$\mathfrak{a}_1 = T_{23}$

$\mathfrak{a}_2 = T_{31}$

$\mathfrak{a}_3 = T_{12}$

可见，这个二阶反对称张量相当于一个矢量（矢量积）。

[p.13] 例，角动量

当向左旋坐标系转移时才出现的极化矢量与轴矢量之间的差别。

$\mathfrak{a}'_1 = \mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}'_1 = \mathfrak{a}'_2\mathfrak{b}'_3 - \mathfrak{a}'_3\mathfrak{b}'_2 = \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3 = -\mathfrak{b}_1$

$\mathfrak{a}'_2 = \mathfrak{a}_3 \quad \mathfrak{b}'_2 = \mathfrak{a}'_3\mathfrak{b}'_1 - \mathfrak{a}'_1\mathfrak{b}'_3 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2 = -\mathfrak{b}_3$

$\mathfrak{a}'_3 = \mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{b}'_3 = \mathfrak{a}'_1\mathfrak{b}'_2 - \mathfrak{a}'_2\mathfrak{b}'_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 = -\mathfrak{b}_2$

可见，除了置换以外，还可以更换正负号。关键在于，在同方向坐标系（例如右旋坐标系）之间进行变换时，V 仅仅是标量。

微分运算 58

$x'_\mu = \sum \alpha_{\mu\nu}x_\nu \mid \alpha_{\mu\sigma}\sum_\mu \quad \sum \alpha_{\mu\sigma}x'_\mu = x_\sigma$

$x_\nu = \sum_\mu \alpha_{\mu\nu}x'_\mu$

$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\nu}$

$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)' = \sum_\nu \alpha_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)$

与 x 相类似的变换法则。因此，要像矢量一样进行形式上相似的处理。

$\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}$矢量

$\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)(\mathfrak{a}_\nu) = \sum_\nu \frac{\partial\mathfrak{a}_\nu}{\partial x_\nu}$（散度）

$\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)(\mathfrak{a}_\mu) = \frac{\partial\mathfrak{a}_\mu}{\partial x_\nu}$二阶张量

[26] 由此产生对称和反对称张量。应用于速度矢量。

[p.14] $\rho\frac{Du}{Dt} = X - \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z}\right)$

$T_{\mu\nu}$张量 $\quad \left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right]$矢量 $\quad \sum \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ 矢量（内积）

如果没有力矩作用于体积元，则这个张量是对称的。

四维矢量分析 59

$$x' = \frac{x - vt}{w} \qquad x'_1 = \frac{1}{w}x_1 + \frac{i}{w}\,\frac{v}{c}x_4 \qquad \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & & & \alpha_{14} \\ \frac{1}{w} & 0 & 0 & \frac{i}{w}\,\frac{v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{w}\,\frac{v}{c} & 0 & 0 & \frac{1}{w} \\ \alpha_{41} & & & \alpha_{44} \end{array}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{w} \qquad x'_4 = -\frac{i}{w}\,\frac{v}{c}x_1 + \frac{1}{w}x_4$$

矢量与张量的相对关系。

$\mathfrak{F}_{\mu\nu}$

$$\frac{1}{2}\sum \mathfrak{F}_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu\rho\sigma} = \mathfrak{G}_{\rho\sigma}$$

34 3412

$$\frac{1}{2}\sum \mathfrak{G}_{\rho\sigma}\delta_{\rho\sigma\iota\kappa}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\sum_{\rho\sigma\mu\nu} \mathfrak{F}_{\mu\nu}\delta_{\underline{\mu\nu}\rho\sigma}\delta_{\rho\sigma\iota\kappa}$$

$$\begin{array}{c} l \\ \delta_{\underline{\iota\kappa}\rho\sigma} \end{array}$$

$\mu = \iota \quad v = \kappa$ 每次两项

$\mu = \kappa \quad v = \iota$

对偶六矢量。 [27]

$$\mathfrak{F}^*_{34} = \mathfrak{F}_{12} \quad \mathfrak{F}^*_{12} = \mathfrak{F}_{34} \quad \Big\} \quad \mathfrak{F}_{23} \quad \mathfrak{F}_{31} \quad \mathfrak{F}_{12} \quad \mathfrak{F}_{14} \quad \mathfrak{F}_{24} \quad \mathfrak{F}_{34}$$

$$\mathfrak{F}^*_{12} \qquad \mathfrak{F}^*_{34}$$ [p. 15]

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{rot}\,\mathfrak{h} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = 0 & \mathrm{rot}\,\mathfrak{e} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{div}\,\mathfrak{e} \qquad = 0 & \mathrm{div}\,\mathfrak{h} = 0 \end{array}$$

$$\mathfrak{F}_{12} \qquad \mathfrak{F}_{13} \qquad \mathfrak{F}_{14}$$

$$\begin{array}{r|l|l|l} \frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial z} - \frac{\partial i\mathfrak{e}_x}{\partial(ict)} = 0 & \mathrm{i}_x & \cdot \quad \frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial x_2} + \frac{\partial(-\mathfrak{h}_y)}{\partial x_3} + \frac{\partial(-i\mathfrak{e}_x)}{\partial x_4} = 0 & \mathrm{i}_x \\ \frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial x} - \frac{\partial(i\mathfrak{e}_y)}{\partial(ict)} = 0 & \mathrm{i}_y & \frac{\partial(-\mathfrak{h}_z)}{\partial x} \quad \cdot \quad + \frac{\partial(+\mathfrak{h}_x)}{\partial x_3} + \frac{\partial(-i\mathfrak{e}_y)}{\partial x_4} = 0 & \mathrm{i}_y \\ \frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial y} - \frac{\partial i\mathfrak{e}_y}{\partial(ict)} = 0 & \mathrm{i}_z & \frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{b}_x}{\partial x_2} + \quad \cdot \quad + \frac{\partial(-i\mathfrak{e}_z)}{\partial x_4} = 0 & \mathrm{i}_z \\ \frac{\partial\, \mathfrak{e}_x}{\partial x} + \frac{\partial\, \mathfrak{e}_y}{\partial y} + \frac{\partial\, \mathfrak{e}_z}{\partial z} = 0 & \rho & \frac{\partial(i\mathfrak{e}_x)}{\partial x_1} + \frac{\partial(+i\mathfrak{e}_y)}{\partial x_2} + \frac{\partial(+i\mathfrak{e}_z)}{\partial x_3} + \quad \cdot \quad = 0 & \mathrm{i}_\rho \end{array}$$ [28]

一个六矢量发散量的消失。

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_v}(\mathfrak{F}_{\mu v}) = 0 \qquad \begin{array}{ccc|ccc} \mathfrak{F}_{23} & \mathfrak{F}_{31} & \mathfrak{F}_{12} & \mathfrak{F}_{14} & \mathfrak{F}_{24} & \mathfrak{F}_{34} \\ \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z & -ie_x & -ie_y & -ie_z \end{array}$$

由对偶六矢量求出的第二个方程组

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{F}^*_{23} & \mathfrak{F}^*_{31} & \mathfrak{F}^*_{12} & \mathfrak{F}^*_{14} & \mathfrak{F}^*_{24} & \mathfrak{F}^*_{34} \\ -ie_x & -ie_y & -ie_z & \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z \end{array}$$

[29]

$$\begin{array}{cccc} 0 & -ie_z & ie_y & \mathfrak{h}_x \\ ie_z & 0 & -ie_x & \mathfrak{h}_y \\ -ie_y & ie_x & 0 & \mathfrak{h}_z \\ \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z & 0 \end{array}$$

散变消失的原因是

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_v}(\mathfrak{F}^*_{\mu v}) = 0 \qquad \frac{\partial - ie_z}{\partial y} + \frac{\partial ie_y}{\partial z} + \frac{1}{ic}\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial\, e_z}{\partial y} - \frac{\partial\, e_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial t} = 0$$

$\mathfrak{i}_1 \cdots \mathfrak{i}_\rho$ 必然是四矢量。 61

$$\mathfrak{J}_\mu \mathrm{d}\tau^2 = \sum -\mathrm{d}x_v^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \sum \mathrm{d}x_v^2$$

$$= c^2\left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\right)\mathrm{d}t^2$$

$$\mathrm{d}\tau = c\, w\ \mathrm{d}\, t$$

速度的四矢量

[p.16]

$$\frac{\mathrm{d}x_v}{\mathrm{d}\tau} \left| \frac{\mathrm{d}x}{w\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}y}{w\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}z}{w\mathrm{d}t} \quad \frac{ic\langle \mathrm{d}t\rangle}{w\langle \mathrm{d}t\rangle} \right.$$

$$\frac{\mathfrak{q}_x}{wc} \quad \frac{\mathfrak{q}_y}{wc} \quad \frac{\mathfrak{q}_z}{wc} \quad \frac{i\langle c\rangle}{w} \qquad \sum \mathfrak{D}_v^2 = -1.$$

电荷密度的标量$\frac{\rho_0}{c}$ 乘以

$$\rho_0 \frac{\mathfrak{q}_x}{w\, c} \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{\rho_0}{w} i\langle c\rangle$$

表述 Lorentz 变换的电子理论方程是协变的

$$\mathfrak{F}'_{\rho\sigma} = \sum \alpha_{\rho\mu}\alpha_{\sigma\nu}\mathfrak{F}_{\mu\nu}$$

2 3 3 1

3 3 1 1 4

4

$\mathfrak{F}'_{23} = \mathfrak{F}_{23}$

$\mathfrak{F}_{31} = \alpha_{11}\mathfrak{F}_{31} + \alpha_{14}\mathfrak{F}_{34}$

特殊 Lorentz 变换时的 $\alpha_{\mu\nu}$ 表

	1	2	3	4
1	$\frac{1}{w}$	0	0	$\frac{i}{w}\frac{v}{c}$
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	$\frac{i}{w}\frac{v}{c}$	0	0	$\frac{1}{\omega}$

$$\mathfrak{h}'_x = \mathfrak{h}_x \qquad \mathfrak{e}'_x = \mathfrak{e}_x$$

$$\mathfrak{h}'_y = \frac{1}{w}\left(\mathfrak{h}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{e}_z\right) \qquad \mathfrak{e}'_y = \frac{1}{w}\left(\mathfrak{e}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{h}_z\right)$$

$$\mathfrak{h}'_z = \frac{1}{w}\left(\mathfrak{h}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{e}_y\right) \qquad \mathfrak{e}'_z = \frac{1}{w}\left(\mathfrak{e}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{h}_y\right)$$

62
$$\sum \mathrm{d}x_\nu^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2 = -\mathrm{d}t^2(c^2 - \mathfrak{q}^2) = -\mathrm{d}\tau^2$$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{c^2 - \mathfrak{q}^2}$$

速度的四矢量

$$\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\tau} \left| \frac{\mathfrak{q}_x}{\sqrt{\quad}}, \frac{\mathfrak{q}_y}{\sqrt{\quad}}, \frac{\mathfrak{q}_z}{\sqrt{\quad}} \; \frac{ic}{\sqrt{\quad}} \right.$$

由此得出的电流密度四矢量乘以静止密度 ρ_0

设 $\dfrac{\rho_0}{\sqrt{1-\dfrac{\mathfrak{q}^2}{c^2}}} = \rho$，则得四矢量

$$\mathfrak{J}_\nu \left| \rho\frac{\mathfrak{q}_x}{c} \quad \rho\frac{\mathfrak{q}_y}{c} \quad \rho\frac{\mathfrak{q}_z}{c} \quad i\rho. \right.$$

对电荷起作用的力 [p. 17]

1) $\varepsilon\,\mathfrak{e}$

2) $\varepsilon\left[\frac{\mathfrak{q}}{c}, \mathfrak{h}\right]$

即作用于每单位体积的力为

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{f}_x = \rho\left[\mathfrak{e}_x + \left(\frac{\mathfrak{q}_y}{c}\mathfrak{h}_z - \frac{\mathfrak{q}_z}{c}\mathfrak{h}_y\right)\right] = \\ \text{— — — — — — — — — — — —} \\ \text{— — — — — — — — — — — —}\end{array}\right| \sum (\mathfrak{F}_{1\nu}\mathfrak{J}_\nu)$$

下列方程对于协变理论具有什么意义？

$$\begin{array}{l|l} \mathfrak{F}_{12} = \mathfrak{h}_z & \rho\frac{\mathfrak{q}_y}{c} = \mathfrak{J}_2 \\ \mathfrak{F}_{13} = -\mathfrak{h}_y & \rho\frac{\mathfrak{q}_z}{c} = \mathfrak{J}_3 \\ \mathfrak{F}_{14} = -i\mathfrak{e}_x & i\rho = \mathfrak{J}_4 \end{array}$$

因此，我们引入力密度的一个四矢量 $\mathfrak{K}_\mu$。这个矢量的第四个分量是

$$\mathfrak{K}_4 = \mathfrak{F}_{41}\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{F}_{42}\mathfrak{J}_2 + \mathfrak{F}_{43}\mathfrak{J}_3 = \frac{i\rho}{c}(\mathfrak{e}_x\mathfrak{q}_x + \mathfrak{e}_y\mathfrak{q}_y + \mathfrak{e}_z\mathfrak{q}_z)$$ 63

$= \frac{i}{c}$ 每单位体积和单位时间所做的功。

$= ic\frac{\alpha}{c^2}$ $\quad\boxed{\mathfrak{f}_x\mathfrak{f}_y\mathfrak{f}_z\ \frac{i\alpha}{c}\ \text{四矢量}}$

总的来看，这就是体积力的变换定理。

[30] 能的质量

$\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$ 是转动变换的不变量。

$$\left.\begin{array}{l}\int \mathfrak{f}_x \mathrm{d}V\mathrm{d}t \\ \text{— — — —} \\ \text{— — — —} \\ ic\int \frac{\alpha}{c^2}\mathrm{d}V\mathrm{d}t\end{array}\right\}\text{因而也是四矢量。}$$

[p. 18] $\Delta I_x \Delta I_y \Delta I_z\ \frac{i}{c}\Delta E$

[31] 构成四矢量。因此，

$I_x I_y I_z \frac{i}{c} E$ 也构成四矢量。

[32] $I_x I_y I_z \frac{E}{c}$ 的变换与 $xyzt$ 相同。 64

$$I_x=\frac{I'_x+v\frac{E'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

— — — — — — —

— — — — — — —

$$\frac{E}{c^2}=\frac{\frac{E'}{c^2}+\frac{v}{c^2}I_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{E_0}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \qquad \frac{E_0}{c^2}\frac{ic\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t\sqrt{}}$$

$$m\frac{\mathfrak{q}_x}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \qquad \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$$

在被划掉的系统中，动量消失，然后得

$$I_x=\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{E_0}{c^2}$$

$$E=\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\frac{E_0}{c^2}=m$ 不变质量（静质量）

因此，我们称之为“质点”

$$I=\frac{m\mathfrak{q}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{q}^2}{c^2}}}$$

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$$

由此得质点和电子的运动方程。

65 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{m\mathfrak{q}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\}=\bar{k}=\varepsilon\left(\mathfrak{e}+\left[\frac{\mathfrak{q}}{c},\mathfrak{h}\right]\right)$$ 左边和右边的参数相同。

$$\rho V_0=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$\rho=\frac{\rho_0}{\omega}$ ~~p([— —]+[ ])一个四矢量的补充。~~

$$V=V_0\sqrt{}$$

$\varepsilon=\rho V=\rho V_0\sqrt{}$

轨道的弯曲 $\left|\frac{\dot{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{q}}\right|$ 在垂直减弱时

$\frac{m\dot{\mathfrak{q}}}{\sqrt{}}=\bar{k} \quad \Bigg| \quad \frac{|\dot{\mathfrak{q}}|}{|\mathfrak{q}|^2}=\frac{\bar{k}}{m}\frac{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}{q^2}=\frac{1}{R}.$

[p. 19] 射线的势能张量

$$[\cdot,\mathfrak{h}]\ \begin{array}{r|l} & \mathrm{rot}\mathfrak{h}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t}=\frac{\mathfrak{i}}{c}\ \Big|\ \mathfrak{e} \\ e & \mathrm{div}\mathfrak{e}=\rho \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{rot}\mathfrak{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t}=0-\mathfrak{h} \\ \mathrm{div}\mathfrak{h}=0 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} [\cdot\mathfrak{e}] \\ \mathfrak{h} \end{array}$$

能量守恒定律

$\mathrm{div}[\mathfrak{e},\mathfrak{h}]=\mathfrak{h}\ \mathrm{rot}\mathfrak{e}-\mathfrak{e}\ \mathrm{rot}\mathfrak{h}$

$-c\,\mathrm{div}[\mathfrak{e},\mathfrak{h}]=\frac{\partial}{\partial t}\frac{(\mathfrak{e}^2+\mathfrak{h}^2)}{2}+\mathfrak{e}\mathfrak{i}$

$-\mathrm{div}\mathfrak{J}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\alpha$

$\int\mathfrak{J}_n d\sigma=dE+\int\alpha dV$ 能量守恒定律和能流密度。

动量定理。Maxwell 势能。 66

$$\mathfrak{K}=\underline{\mathfrak{e}\mathrm{div}\mathfrak{e}}+[\mathrm{rot}\mathfrak{h},\mathfrak{h}]+\mathfrak{h}\mathrm{div}\mathfrak{h}+[\underline{\mathrm{rot}\mathfrak{e}},\mathfrak{e}]-\underbrace{\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t},\mathfrak{h}\right]-\frac{1}{c}\left[\mathfrak{e},\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t}\right]}_{-\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{1}{c}[\mathfrak{e},\mathfrak{h}]\}}$$

$$\mathfrak{e}_x\left(\frac{\partial\mathfrak{e}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{e}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{e}_z}{\partial z}\right)+\left[\mathfrak{e}_z\left(\frac{\partial\mathfrak{e}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{e}_z}{\partial x}\right)-\mathfrak{e}_y\left(\frac{\partial\mathfrak{e}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{e}_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$o \quad x \quad x \quad —— \quad —— \quad o \quad \frac{\partial\mathfrak{e}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{e}_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{e}_x^2}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{e}^2}{2}\right)+\frac{\partial\mathfrak{e}_x\mathfrak{e}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{e}_x\mathfrak{e}_z}{\partial z}$$

设

$$\mathfrak{p}_{11}=\frac{\mathfrak{e}^2}{2}-\mathfrak{e}_x\mathfrak{e}_x \quad \mathfrak{p}_{12}=-\mathfrak{e}_x\mathfrak{e}_y-\cdot \quad \mathfrak{p}_{13}=-\mathfrak{e}_x\mathfrak{e}_z-\cdot$$

则得

$$\mathfrak{K}_x=-\frac{\partial\mathfrak{p}_{11}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{p}_{12}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{p}_{13}}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{J}_x}{c^2}\right)$$

《文献汇编》[3 008]。这个文档保存在一个笔记本中，笔记本纸张为白色正方形，开本为 17.5 cm×21.5 cm，大部分用钢笔书写，一部分用铅笔书写。爱因斯坦在封面上注明："相对论讲座，作于 1914—1915 年冬。"右上角的标注为："Blaschke Belzigerstr. 63"爱因斯坦在封底写下了"统计力学 1913"几个字。正方形夹子上标明这篇文章写在笔记本的哪一页上，笔记本外页边缘对此作了标记。空白页和未编号散页没有收集在该文件汇编中。

这个笔记本记载着上述文章，原页码为第 1 页至第 19 页。下述材料未被收集：一页关于推迟势，一页关于量子化系统的平均能量，四页关于引力波（参照 *Einstein 1918*），四页关于广义相对论计算，包括运动方程，一页关于旋转物体的量子化能量，三页关于广义相对论，还有五页关于引力波，一页关于晶体介质中的能量，还有六页关于引力波，六页关于广义相对论的变分学计算，两页关于量子旋转体，以及五页关于椭圆度规。接下来几页情况比较复杂，有的次序颠倒，从后面开始。从后面按顺序，牵涉到以下的课题：三页介绍统计力学（Lagrange 方程、概率、平均数），两页是牛顿近似法，一页关于势函数计数，一页关于 Langevin 顺磁气体磁化公式（参见第三卷，文件 4，p. 39），以及五页关于广义相对论。

67 [1]这个文档是根据爱因斯坦为 Berlin 大学 1914/1915 年冬季学期所写的备课笔记整理的，这些笔记是 1914 年 10 月 16 日至 1915 年 3 月 15 日写成的（见 *Berlin Verzeichnis 1914*，标题页）。

[2]在这些备课笔记中，对狭义相对论和协变电动力学的论述与尚未出版的 1912 年到 1914 年的狭义相对论（参见第四卷文件 1）原稿中的论述有许多类似之处。在下文中，这份原稿即称为"第四卷文件 1"。这些备课笔记也和电磁学课程的有关狭义相对论和协变电动力学中的内容相近，那是爱因斯坦在瑞士联邦高工 1913/1914 年冬季学期讲授的课程（参见 Eduard Sidler 在 SzZE 图书馆的讲课笔记，手稿第 1067 页：15，以及第四卷摘要，附录 A；也可参见爱因斯坦第四卷，文件 19 的他的部分课程的笔记）。

[3]作为物理学组成部分的几何学概念，在第四卷，文件 1，pp. 21—22 中，以及在爱因斯坦 1917 年相对论普及本第一部分 *Einstein 1917a*（文件 42）中，也得到了详细说明。

[4]参见 *Laue 1913* §2，或者第四卷文件 1，p. 15、p. 20 中关于对 Fizeau 实验的讨论。

[5]参见 *Lorentz 1909* §§156—164 中 Lorentz 拖曳系数的推导。

[6]参见 *Laue 1913* §2 中关于光行差的讨论。恒星的光行差也是爱因斯坦狭义相对论第一篇文章的主题，*Einstein 1905r*（第二卷，文件 23）。

[7]参见第四卷文件 1 的第一个部分，对 Lorentz 电动力学的更详细论述。

[8]在下文中对上述行列式的计算，二阶物理量是被忽略的。光在自来水中的传播速度 V 被写成 $V=V_0+\Delta$，在任何时候，Δ 总是一个微小的量。下标 x 是隐蔽的。也可参见爱因斯坦在第四卷文件 1，p. 15 的计算。

[9]"V"应为"V_0"。

[10]"ϵ^2"应为"$\sqrt{\epsilon}$"。

[11]参见 *Laue 1913*，§2、*Pauli 1921* sec. 36，以及第四卷文件 1，p. 7 关于 Röntgen，Eichenwald 和

Wilson 实验的讨论。Röntgen 和 Eichenwald 的实验说明，在电场中移动的电介质产生的磁场，是由感应的表面电荷运动引起的（参见 *Röntgen 1888* 和 *Eichenwald 1903*，*1904*）；Wilson 的实验证明，由于电介质在磁场中的运动，在电介质中产生了极化（参见 *Wilson 1904*）。

[12]参见 *Lorentz 1895*。

[13]如果没有 Lorentz-Fitzgerald 收缩理论，Lorentz 1895 年的理论既不可能解释 Milchelson-Morley 实验的否定结果，也不可能解释确定地球穿过以太的运动的二阶实验。

[14]最后一项中遗漏了一个 $-\frac{1}{2}$ 的因子。

[15]爱因斯坦在早些时候的论述中指出过，Lorentz-FitzGerald 收缩是一种想当然的假设（参见 *Einstein 1915 b* 第四卷文件 21，p. 707；也可参见 Lorentz 1915 年 1 月 1 日至 23 日期间 Lorentz 致爱因斯坦为自己辩护的文章）。

[16]参见 *Ritz 1908a*，*1908b* 中关于 Walter Ritz 光发射理论的论述。爱因斯坦在第四卷，文件 1，p. 21 和 p. 20a 中讨论了这个理论所作的结论。

[17]荷兰天文学家 Willem de Sitter 指出，光发射理论与在双星运动中的观测的数据不符。参见 *De Sitter 1913 a*，*1913 b*；也可参见爱因斯坦在第四卷，文件 1，p. 20a 中的论述，以及爱因斯坦致 Paul Ehrenfest 的信中对 De Sitter 工作的赞扬，1913 年 5 月 28 日（第五卷，文件 441）。

[18]可以参阅 Edouard Guillaume 的工作，他指出如果光速仅仅依赖于源速度就会引起能量的局部积聚，任何功都不起补偿作用。对巴塞尔物理学会会议（参见 *Guillaume 1914*）上 Guillaume 呈述的结果爱因斯坦给予了评价。爱因斯坦指出，通过同样的机制，在没有任何补偿的情况下，可使物体温度高于它的环境温度。

[19]也可参见第四卷，文件 1 中的 § 9 和 § 10。这两节对 Lorentz 变换作了更详细的介绍。 68

[20]第一次采用这种方法的是 Sommerfeld（参见 *Sommerfeld 1909*）。

[21]量 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 的缩写 W 已经出现在 1913/1914 年冬季学期电学和磁学教案中（参见上面第 2 个注释）。

[22]右边的“t”和“x”是应该交换的。

[23]“w'^2”应为“w''^2”。

[24]参见第 20 个注释。

[25]也可参见在第四卷，文件 1，pp. 43—54 中关于四矢量微积分的讨论。

[26]在下面的公式中，T 表示应力能量的张量，而 X 则表示外力的 x -分量。

[27]对偶六矢量用星号表示。也可参见第四卷，文件 1，pp. 55—56 中关于它在协变电动力学中运用的论述。

[28]“$\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial x_2}$”的符号为负。

[29]在第四行中的分量的符号为负。

[30]也可参见第四卷，文件 1，§ 21 中关于能量惯性的类似讨论。

[31]上述四个积分写成 ΔI_x 等等，I 表示动量，E 表示能量。

[32]右纵行的四个公式是用铅笔写的。

[周正安　吴　晔译]

[吴忠超　校]

8.“告欧洲人书”

告欧洲人书 69

[1] (1914年10月中旬)

[2]

技术和交通的进步,使我们深切认识到国际交往的需要,并因此促使我们迈向一个共同的世界文明;但同样真切的是,从未有一次战争像今天这样,如此大规模地摧毁文化上的合作与共享。或许正是由于以前存在那么多的共同纽带,所以当我们突然意识到它们的断绝时,会更加感到伤心和痛苦。

{1} 纵使事态如此,我们也不能惊慌失措;凡是对共同的世界文明稍为关心的人,都该有双倍的责任,起来捍卫那些维护这种文明的原则。然而,那些本可指望有这种思想感情的人——主要是科学家和艺术家——到目前为止所发表的声
{2} 明几乎众口一词,好似他们想要维持这些关系的愿望,随着这些关系的断绝而一同蒸发了。他们用一种不难解释的好战精神来讲话,却从未谈及和平。

任何民族主义的热情都不能为这种态度进行辩解;这种态度同当今世界上被称为文化的东西毫不相称。如果这种态度在受过教育的人群中蔓延开来,后果将不堪设想。

那将不仅是文明的灾难,而且——我们确信——也是各个国家民族生存的灾难。这场野蛮的战争,正是以保护民族生存为借口而发动起来的。

技术已经缩小了这个世界;今天大欧罗巴半岛上的各国,其紧密程度就像古代那些地中海半岛上的各个城邦。每个人都意识到需要有各式各样的国际交往;在他们的广泛需求和经历之中,欧洲——甚至整个世界——业已显现出一体化的轮廓。

因此,每一个有教养的、善良的欧洲人都有责任,至少是去努力防止欧洲——由于缺乏一体化的组织——而重蹈古希腊的覆辙。要不然,难道也让欧洲因兄弟阋墙,逐渐精疲力竭而同归于尽吗? 70

目前蔓延的战火很难有任何"胜利者";它可能只会留下被征服者。因此,**所有国家有教养的人都要尽力去争取这样一种和平条约**,即不管目前战争的结果如何,它都**不会撒下未来战争的种子**。这种努力不仅是**明智的**,而且是**十分必要的**。必须利用这场战争所造成的欧洲**不稳定的和动荡的局势**,将其塑造成一个有机的整体。就此发展的条件而言,技术上的和文化上的准备已经成熟。

这里不是讨论怎样可以实现欧洲新秩序的场合。我们只是想着力强调我们

这样一个深切的信念：**欧洲必须联合一体，以保护她的土地、居民和文化。**

迈向这个目标的第一步，应当是所有那些真心爱护欧洲文化和文明的人——所有那些可以用 Goethe 的先见之词“善良的欧洲人”来形容的人们——团结起来。因为我们不应当放弃这样的希望：他们的一致呼声，即使高不过武装冲突的喧嚣，也不会被这种喧嚣所淹没，尤其是如果那些享有声望和权威的人都加入到“未来的善良的欧洲人”的行列。

但首先必须是欧洲人团结起来；如果像我们所希望的那样，在欧洲能够找到足够多的**欧洲人**——对这些人来讲，欧洲是一个心中爱恋的对象，而不仅仅是一个地理上的名称——那么我们就应当努力去组织欧洲人联盟。到那时，这样的一个联盟就可以发出号召，并采取行动。

我们不过是为迈向这一目标发出倡议；如果您同我们所想的一样，如果您也决心**使欧洲人的意愿获得最大限度的共鸣**，那么请您签上自己的名字吧。

PD(*Nicolai 1917*, pp. 9—11).

[1]日期由 Georg Friedrich Nicolai 签署，他是本文作者之一(参见 *Nicolai 1917*, p. 9；并见下面的注释)。

[2]本文是针对“致文明世界宣言”而起草的，后者又称“93 人宣言”，在第一次世界大战的最初，该宣言为德国的战争暴行辩护，支持德军在比利时和其他地方的军事行动。签名者是 93 个德国人，其中主要
71 是知识分子和艺术家(其中包括 Max Planck 和 Wilhelm Wien)(参见 *Nicolai 1917*, pp. 4—6，其中有宣言的全文和签名者的名单)。Nicolai“同爱因斯坦以及 Wilhelm Foerster”一同起草了这一宣言(见 *Nicolai 1917*, p. 9)。

Foerster(1832—1921)，原 Berilin 天文台台长，曾在 93 人宣言上签名，他是德国伦理学会的活动分子，是 Gustav Maier 的政治上的同事，后者曾在瑞士建立了同样的学会，并在 1895 年曾支持爱因斯坦加入 ETH 的愿望[见 Maier 的未出版的自传：*“Siebzig Jahre politischer Erinnerungen und Gedanken”*, p. 34，1895 年 9 月 25 日 Albin Herzog 致 Gustav Maier 的信(见本书第一卷文件 7)；以及本书第一卷传记，原书 348 页]。

尽管告欧洲人书在很多位教授之间流传，只有一个 Marburg 大学的研究生 Otto Buek(1873—1966)，准备在 Nicolai、爱因斯坦和 Foerster 之外签名(见 *Nathan and Norden 1960*, pp. 6—7)。因此，宣言一直没有付诸出版(见 *Nicolai 1917*, p. 11)，虽然它的文本在两年之后 1917 年以介绍 Nicolai 的印刷形式出现。第二年 Nicolai 推测说“你(爱因斯坦)所未曾卷入的宣言可能永远见不着天日了”(Georg Nicolai 给爱因斯坦的信，1918 年 5 月 18 日)。

英译者注：

{1}可以推测，在 1914 年，所有欧洲民族都把世界文明理解为西方文明。

{2}这里德文原文存在语法错误，含混不清。

中译者注：

本译文参照过许良英先生等人的译文，见：许良英、赵中立、张宣三（编译），《爱因斯坦文集》，第三卷，第1—3页，商务印书馆，1979年。

［郝刘祥　译校正文］

［喀兴林　译校注释］

9. “广义相对论的形式基础” 72

[*Einstein 1914o*]

1914 年 10 月 29 日收到
1914 年 11 月 26 日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1914):1030—1085。

广义相对论的形式基础* 73

爱因斯坦

(1914 年 10 月 29 日收到)

近几年来,我从事了对相对论进行推广的工作,其中部分是同我的朋友 Grossman 合作进行的。在这一研究工作中,从物理上和数学上引入了各种各样
[1] 的假设,并将它们用作富有启发性的工具。这样一来,很难只根据这些文章本身从形式的数学观点理解和掌握理论的特性。本文的目的是填补这些缝隙,特别是用纯协变理论的方式成功地得到了引力场的方程(D 节)。我还用简单的方法导出了绝对微分学的一些定律,其中有一些可能是第一次提出的(B 节),这是为了使读者能够完整地掌握这一理论而不必去参阅其他纯数学的文献。作为这种数学方法的事例,我推导了(Euler)流体力学方程和运动物体的电动力学场方程(C 节)。在 E 节中指出了牛顿的引力场方程是广义相对论的一个近似。广义相对论的最初步的特点也已推导出来,因为它们是牛顿(静)引力场的特性(光线的
[2] 曲率,光谱线的位移)。

A. 理论的基本思想

§1. 引 论

原来的相对论是建立在这样的前提之上:一切互相做匀速平移运动的坐标系是等价的,能同等有效地描述自然界的定律。从实验方面来讲,支持相对论的主要事实是:在地球上做实验无法得到地球以相当大的速度绕太阳运动的任何 74
信息。

而我们相信相对论还有别的根源。人们很难置下列情况于不顾:当 K' 和 K 是两个互相做匀速平移运动的两个坐标系,那么从运动学的角度看这两个坐标系是完全等价的。当把它们作为参考系来描述自然界的定律时,我们很难分出

哪一个坐标系更为优越一些。我们强烈地感到，应该把二者的等效性作为一个基本假设。

但是，这一议论立即引来一个反驳。两个坐标系的等效性决不仅限于 K 和 K' 互相做**匀速平移运动**的情况。从运动学的角度来看也发生在例如两个坐标系相对做匀速转动的情况。人们强烈地感到相对论需要作相当的推广，以便在理论中消除匀速平移运动和其他的相对运动明显不公平的现象。每一个深入学习相对论的人都会深切地感到这种推广理论的要求。[3]

初看起来，相对论的这种推广在物理上是不能接受的，因为，设想有一个 Galilei-Newton 意义上的坐标系 K，还有一个相对于 K 做匀速转动的坐标系 K'，这时，与 K' 相对静止的质量要受到离心力的作用，而与 K 相对静止的质量则不受这样的力。牛顿早已看到这一点，并且证明了必须把 K' 的转动解释为“绝对的”，换句话说，K' 没有权利像 K 一样被认为是“静止的”。然而，正如 E. Mach所特别指出的，这种说法是没有说服力的。这是因为我们并不需要一定 [4]
把离心力的存在由 K' 导出，相反我们可以把离心力的原因归结为在 K' 的周围
75 的遥远的巨大质量平均起来正在绕 K' 转动，从而把 K' 看成是静止的。如果牛顿的力学和引力学不接受这种解释，可以认为这是牛顿理论的一个缺点。下面的重要的说法也是一个很好的相对论解释。在给定的坐标系中作用于一个物体的离心力可以精确地用同一个自然常数来确定，这个自然常数就是引力场作用于物体时的那个常数。于是我们总是把地球表面的物体的重量看成是以上两种场的作用的叠加，而我们不能把这两种作用分开。于是，这种把转动的 K' 看成是**静止的**而把离心力场看成引力场的观点在各方面都说得过去。这种解释是原 [5]
来的（比较狭义的）相对论的一种解释的再现。在原来的相对论中，把运动带电质量在磁场中所受的有质动力，在一个与带电质量相对为静止的坐标系看来是一个电场的作用。

根据上述，人们已经看出，沿着我们所说路线推广的任何相对论理论，引力场都将起着根本的作用。当人们从一个坐标系 K 变换到另一个坐标系 K' 时，必然出现一个相对于 K' 的引力场，而相对于 K 则是完全不需要的。

这里自然地要发生一个问题：在推广了的相对论理论中，什么样的坐标系和什么样的变换将被认为是“可行的”？这个问题只能在后面（D 节）才能回答。在目前阶段，我们允许所有与连续性相容的所有坐标系和所有变换，像所有物理理论都要求的那样。我们将看到，相对论允许的推广可以走得相当远，而几乎不受任意性的影响。

§ 2. 引力场

根据原来的相对论,一个不受引力或其他力作用的质点根据下式沿直线做匀速运动:

$$\delta\left\{\int \mathrm{d}s\right\}=0. \tag{1}$$

式中我们令 76

$$\mathrm{d}s^2=-\sum_{\nu}\mathrm{d}x_\nu^2. \tag{2}$$

[6] 我们还令 $x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=it$. $\mathrm{d}s$ 是"本征时间微分",即与质点一起运动的时钟沿元路程($\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$)所示时间流逝的量。(1)中的变分必须是在两个积分端点坐标 x_ν 保持不变的情况下进行。

方程(1)在任何坐标变换之后都保持有效,那时(2)用更一般的形式

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\nu \tag{2a}$$

来代替。而十个量 $g_{\mu\nu}$ 是那些 x_ν 的函数,后者由所用的代换决定。在物理意义方面,$g_{\mu\nu}$ 决定了相对于新坐标系所存在的引力场,正如上一节所讨论的那样。方程(1)和方程(2a)决定了质点在引力场中的运动,而这个引力场可以通过适当选择参考系而消去。但是我们希望采取一种推广的方式,认为质点在引力场中的运动由这两个方程来决定。

量 $g_{\mu\nu}$ 还有进一步的第二个意义,因为我们总可以令

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\nu=-\sum_{\nu}\mathrm{d}X_\nu^2, \tag{2b}$$

但是式中的 $\mathrm{d}X_\nu$ 不是完全微分。然而在无穷小的情况下,$\mathrm{d}X_\nu$ 仍然可以当作坐标来用。因此显然可以认为相对论在无穷小情况下成立。那时 $\mathrm{d}X_\nu$ 就是在无穷小区域中坐标的量度,而这是用一个单位测量棒和一个适当选取的单位钟来测量的。在这个意义上 $\mathrm{d}s$ 可以称为两个时空点之间的自然测量的距离。与此相反,$\mathrm{d}x_\nu$ 不能用时钟和刚体杆用同样的方法得到。它们与自然测量到的距离 $\mathrm{d}s$ 按照(2b)通过 $g_{\mu\nu}$ 相联系。

下面,我们推出绝对微分学中最重要的一些定理。因为这些定理在我们理论中的地位和三维或四维矢量或张量分析中的定理相当(相对于 Euclid 的 $\mathrm{d}s$)。与原先相对论中的定律相当的广义相对论的定律可以很容易地利用这些定理 77
导出。

B. 从协变量理论开始

§3. 四矢量

协变四矢量 四个量 A_ν，它们是任何坐标系下坐标的函数，如果**对于任意选定的线元**，其分量为 $\mathrm{d}x_\nu$，下列和式

$$\sum_\nu A_\nu \mathrm{d}x_\nu = \varphi. \tag{3}$$

对于任意坐标变换保持为一个不变量（标量）则量 A_ν 称为一个四矢量或一秩四张量的分量。

从这一定义立即得到这些分量的变换定律。如果 $A'_\nu \mathrm{d}x'_\nu$ 表示连续统中同一点相对于另一坐标系的量，我们有

$$\sum_\nu A'_\nu \mathrm{d}x'_\nu = \sum_\alpha A_\alpha \mathrm{d}x_\alpha = \sum_{\alpha\nu} A_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} \mathrm{d}x'_\nu.$$

因为此式假设对任意选定的 $\mathrm{d}x'_\nu$ 成立，所以得到我们所找的变换定律

$$A'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} A_\alpha. \tag{3a}$$ [7]

其逆亦真。从变换定律的成立很容易证明 A_ν 是一个协变四矢量。

反变四矢量 对任意坐标系定义的坐标的四个函数 A^ν，如果 A^ν 的变换定
78 律与线元的 $\mathrm{d}x_\nu$ 的变换定律一样，则 A_ν 称为反变的四矢量或反变的一秩四张量的分量。由此得出变换定律为

$$A^{\nu\prime} = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha} A^\alpha. \tag{4}$$

根据 Ricci 和 Levi-Civita，我们用上标表示反变的分量。根据这个定义 $\mathrm{d}x_\nu$ 本身 [8]
是一个反变四矢量的分量，但是遵从习惯，我们用下标表示。

从上面的两个定义立即得出下式

$$\sum_\nu A_\nu A^\nu = \varphi \tag{3b}$$

是一个标量（不变量），我们称 φ 为协变矢量（A_ν）与反变矢量（A^ν）的积。

把两个协变四矢量或反变四矢量的分量分别相加（或相减），仍然得到一个协变的或反变的四矢量。这一结论是根据变换方程（3a）和方程（4）而来，因为它

们对于矢量分量都是线性的。

§4. 二秩和高秩张量

二秩和高秩协变张量 16 个坐标的函数 $A_{\mu\nu}$,如果下列和式

$$\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} \mathrm{d}x_\mu^{(1)} \mathrm{d}x_\nu^{(2)} = \Phi \tag{5}$$

为标量,则称为二秩协变张量。式中 $\mathrm{d}x_\mu^{(1)}$ 和 $\mathrm{d}x_\nu^{(2)}$ 表示任意选定的两个线元的分量。

这就得出了下列关系

[9]

$$\begin{aligned}\sum_{\mu\nu} A'_{\mu\nu} \mathrm{d}x_\mu^{(1)'} \mathrm{d}x_\nu^{(2)'} &= \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \mathrm{d}x_\alpha^{(1)} \mathrm{d}x_\beta^{(2)} \\ &= \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}x'_\mu} \frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}x'_\nu} A_{\alpha\beta} \mathrm{d}x_\mu^{(1)'} \mathrm{d}x_\nu^{(2)'}.\end{aligned}$$

此外,注意到此式是对任意选定的 $\mathrm{d}x_\mu^{(1)'}$ 和 $\mathrm{d}x_\nu^{(2)'}$ 成立的,我们又可以得到 16 个方程:

$$A'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta}. \tag{5a}$$

这些方程仍是与上面的定义等价的。

显然,三秩和三秩以上的协变张量可以用类似的方法来定义。 79

对称协变张量 如果一个协变张量对于一个坐标系满足下标对调时相等的条件($A_{\alpha\beta}=A_{\beta\alpha}$),则由(5a)可以看出,这一点对于别的坐标系也成立,16 个二秩协变张量的变换方程减少成 10 个。如果 $A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}$,则($A_{\mu\nu}$)的张量性质可仅由下式为标量而证明:

{1}

$$\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu = \Phi. \tag{5c}$$

此式是由下面的恒等式

$$\sum_{\mu\nu} A'_{\mu\nu} \mathrm{d}x'_\mu \mathrm{d}x'_\nu = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x_\beta = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} A_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \mathrm{d}x'_\mu \mathrm{d}x'_\nu.$$

并考虑到(5a)而得到的。

更高秩的对称协变张量可以用完全类似的方法来定义。

协变基本张量 下列的量

$$\mathrm{d}s^2 = \sum g_{\mu\nu} \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu ,$$

在理论的发展过程中将起重要的作用。我们称这个量为线元的平方。从前面所讲的可以看出,$g_{\mu\nu}$是一个二秩的协变(对称)张量,我们将称之为协变基本张量。

附注 我们或许可用另一个方法定义协变张量。因为 16 个量 $A_{\mu\nu}$ 的变换

完全和两个协变矢量(A_μ)和(B_ν)的 16 个乘积的变换一样，如果设

$$A_{\mu\nu}=A_\mu B_\nu, \tag{6}$$

则由(5a)立即得到

$$A'_{\mu\nu}=A'_\mu B'_\nu=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}A_\alpha B_\beta=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}A_{\alpha\beta},$$

再考虑到(5a)就可以知道$A_{\mu\nu}$是一个协变张量。同样的讨论可以适用于更高秩的张量。然而不是每一个协变张量都可以写成这种形式，因为$(A_{\mu\nu})$有 16 个分
80 量，而(A_μ)和(B_ν)加起来才有 8 个，因此，根据(6)，$A_{\mu\nu}$之间的代数关系一般说来是不成立的。然而，再加上几个(6)类型的量[1]，简单地令

$$A_{\mu\nu}=A_\mu B_\nu+C_\mu D_\nu+\cdots \tag{6a}$$

就可以得到**任意**张量了。

对于更高秩的协变张量类似的做法也适用。这种用几个四矢量表示张量的方法对于许多定理是很有用的。此附注也适用于高秩张量。

反变张量　正如按照(6)或(6a)由协变四矢量构成协变张量一样，人们也可以用反变四矢量按照下列方程

$$A^{\mu\nu}=A^\mu B^\nu \tag{7}$$

以及

$$A^{\mu\nu}=A^\mu B^\nu+C^\mu D^\nu+\cdots \tag{7a}$$

构成反变张量。因此，根据(4)立即可以得出变换方程

$$A^{\mu\nu'}=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta}A^{\alpha\beta}. \tag{8}$$

更高秩的反变张量也可比照二秩反变张量来定义，其特殊情况对称张量值得注意。

混合张量　也可以构造一种二秩或高秩张量，它对于某一指标是协变的，而对于另一指标是反变的。这种张量称为混合张量。例如一个二秩混合张量：

$$A_\mu^\nu=A_\mu B^\nu+C_\mu D^\nu. \tag{9}$$

反对称张量　在对称的协变或反变张量之外，反对称的协变或反变张量起 {2}
着很重要的作用。它的特点是当两个指标对调时改变符号。例如一个反变张量
81 $A^{\mu\nu}$若满足条件$A^{\mu\nu}=-A^{\nu\mu}$，它就是一个二秩的反对称反变张量，或者称为六矢量(因为它有 12 个不为零的分量，而一对一对地具有相等的大小)。一个三秩的反变张量$A^{\mu\nu\lambda}$若满足下列条件

1)正如一秩张量(四矢量)中证明了的，两个同秩张量的相应分量分别相加，显然仍构成一个张量的分量(张量的加法和减法)。

$$A^{\mu\nu\lambda}=-A^{\mu\lambda\nu}=-A^{\nu\mu\lambda}=A^{\nu\lambda\mu}=-A^{\lambda\nu\mu}=A^{\lambda\mu\nu}.$$

它就是反对称的。

我们看到(在四维连续统中)这个反对称张量只有4个不为零的分量。

利用(5a)和(8),很容易证明:这个定义与所选的参考系无关。

根据(5a)式,我们有

$$A'_{\nu\mu}=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}A_{\alpha\beta}.$$

将 $A_{\alpha\beta}$换成$-A_{\beta\alpha}$(这根据我们的假设是允许的),然后再交换求和指标 α 和β,得

$$A'_{\nu\mu}=-\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}A_{\alpha\beta}=-A'_{\mu\nu},$$

证明了反对称张量与所选参考系无关。对于反变张量和三秩、四秩张量的证明也是类似的。在四维连续统中不能存在四秩以上的反对称张量,因为所有带两个相同指标的分量都等于零。

§5. 张量的乘法

{3} **张量的外积** 我们已经见过,将几个一秩张量的分量相乘得出高秩张量的情况[见方程(6)、方程(8)和方程(9)]。用类似方法我们总可以用一个张量的分量去乘另一个张量的分量而得出一个高秩张量。例如$(A_{\alpha\beta})$和$(B_{\lambda\mu\sigma})$是两个协变张量,那么$(A_{\alpha\beta}\cdot B_{\lambda\mu\sigma})$也是一个五秩的协变张量。利用张量可以表示为四矢量乘积之和这一事实立即可以证明这一点:

$$A_{\alpha\beta}=\sum A_\alpha^{(1)}A_\beta^{(2)},$$

$$B_{\lambda\mu\sigma}=\sum B_\lambda^{(1)}B_\mu^{(2)}B_\sigma^{(3)};$$

这就是

$$A_{\alpha\beta}B_{\lambda\mu\sigma}=\sum A_\alpha^{(1)}A_\beta^{(2)}B_\lambda^{(1)}B_\mu^{(2)}B_\sigma^{(3)},$$

因此$(A_{\alpha\beta}B_{\lambda\mu\sigma})$是一个五秩张量。

这种操作称为"外乘法",所得结果称为张量的"外积"。可以看出,这种操作与参与相乘的张量的性质和秩数无关,而且交换律和结合律成立。 82

{4} **张量的内积** 在公式(3b)中对两个一秩张量 A_ν 和 A^ν 所作的操作称为"内乘法",所得结果称为"内积"。由于张量可以用四矢量来表示,这种操作可以很容易地推广到一般的张量中去。

例如,若 $A_{\alpha\beta\gamma\cdots}$是一个协变张量,$A^{\alpha\beta\gamma\cdots}$是一个反变张量,两者的秩相同,则

$$\sum_{\alpha\beta\gamma}(A_{\alpha\beta\gamma\cdots}A^{\alpha\beta\gamma\cdots})=\Phi$$

就是一个标量。若令

$$A_{\alpha\beta\gamma\cdots}=\sum A_{\alpha}B_{\beta}C_{\gamma}\cdots,$$

$$A^{\alpha\beta\gamma\cdots}=\sum A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}\cdots,$$

将二者相乘，并考虑到(3b)，立即可以得出证明。

张量的混合乘积 张量的最一般的乘积是其某些指标用于内积，另一些指标用于外积得到的。张量 A 和 B 按下式得出张量 C：

$$\sum_{\alpha\beta\gamma\ldots\alpha'\beta'\gamma'}\left(A^{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\lambda\mu\nu\ldots}_{\alpha\beta\gamma\ldots\rho\sigma\tau\ldots}B^{\alpha\beta\gamma\ldots lmn\ldots}_{\alpha'\beta'\gamma'\ldots rst\ldots}\right)=C^{\lambda\mu\nu\ldots lmn\ldots}_{\rho\sigma\tau\ldots rst\ldots}.$$

要证明 C 是一个张量，只要把上面的两个证明结合起来就可以了。

§6. 有关基本张量 $g_{\mu\nu}$ 的一些关系式

反变基本张量 如果在 $g_{\mu\nu}$ 的行列式形式中取每个 $g_{\mu\nu}$ 的余子式，并用 $g_{\mu\nu}$ 的行列式 $g=|g_{\mu\nu}|$ 去除，就得到一些量 $g^{\mu\nu}(=g^{\nu\mu})$。我们希望证明，它们构成一个反变张量。

由这一定义，得

$$\sum_{\sigma}g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma}=\delta_{\mu}^{\nu},\tag{10}$$

83 式中 δ_{μ}^{ν} 的定义是当 $\mu=\nu$ 时为 1，当 $\mu\neq\nu$ 时为零[1]。而且 {5}

$$\sum_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x_{\alpha}\mathrm{d}x_{\beta}$$

是一个标量。根据(10)，这个标量等于

$$\sum_{\alpha\beta\mu}g_{\mu\beta}\delta_{\alpha}^{\mu}\mathrm{d}x_{\alpha}\mathrm{d}x_{\beta},$$

而且还等于

$$\sum_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}g^{\mu\nu}\mathrm{d}x_{\alpha}\mathrm{d}x_{\beta}.$$

然而根据上一节的讨论，下式

$$\mathrm{d}\xi_{\mu}=\sum_{\beta}g_{\mu\beta}\mathrm{d}x_{\beta}$$

是一个协变矢量的分量。同样下式

$$\mathrm{d}\xi_{\nu}=\sum_{\alpha}g_{\nu\alpha}\mathrm{d}x_{\alpha}.$$

---

1)根据前一节，δ_{μ}^{ν} 是一个混合张量(混合基本张量)。

也是协变矢量的分量。因此,标量取下列形式

$$\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\mathrm{d}\xi_\mu \mathrm{d}\xi_\nu.$$

可以很容易地证明,$g^{\mu\nu}$是一个反变张量,因为上式是一个标量,而 $\mathrm{d}\xi_\mu$ 是任意选定的四矢量的分量,还有 $g^{\mu\nu}=g^{\nu\mu}$。

附注 根据行列式的乘法定理,

$$\left|\sum_\alpha g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}\right| = |g_{\mu\alpha}|\cdot|g^{\alpha\nu}|.$$

另一方面

$$\left|\sum_\alpha (g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu})\right| = |\delta_\mu^\nu| = 1.$$

由上二式可得

$$|g_{\mu\nu}|\cdot|g^{\mu\nu}| = 1. \tag{11}$$

体积不变量 在我们的连续统一点的邻域,根据(2b),只要我们允许 $\mathrm{d}X_\sigma$ 取虚值,总有

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu = \sum_\sigma \mathrm{d}X_\sigma^2, \tag{12}$$

对于坐标系统的选择,仍有无穷多的可能性,然而,所有这些不同的系统都由线性正交变换联系着。由此可知,在一个体元上的积分 84

$$\mathrm{d}\tau_0^* = \int \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 \mathrm{d}X_4$$

是一个不变量,即与坐标的选择完全无关。

下面我们寻求这个不变量的另一表达式。无论如何存在以下形式的关系

$$\mathrm{d}X_\tau = \sum_\mu \alpha_{\sigma\mu}\mathrm{d}x_\mu, \tag{13}$$

由此可得

$$\mathrm{d}\tau_0^* = |\alpha_{\sigma\mu}|\mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

如果 $\mathrm{d}\tau$ 和 $\mathrm{d}\tau_0^*$ 分别表示下列遍及相同域元的积分

$$\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_4 \text{ 和} \int \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\mathrm{d}X_3\mathrm{d}X_4,$$

再根据(12)和(13)有

$$g_{\mu\nu} = \sum_\sigma \alpha_{\sigma\mu}\alpha_{\sigma\nu}, \tag{15}$$

因此,根据行列式的乘法定理,得到

{6} $$|g_{\mu\nu}| = \left|\sum_\sigma (\alpha_{\sigma\mu}\alpha_{\sigma\nu})\right| = |\alpha_{\mu\nu}|^2. \tag{16}$$

现在考虑(14),我们得到

$$\sqrt{g}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\tau_0^*, \tag{17}$$

式中为了简便，我们已令$|g_{\mu\nu}|=g$。这就是我们前面要找的不变量。

附注　从(12)可以看出，dX_σ 相当于以前的相对论中的坐标。其中三个坐标是实的，一个（即 dX_4）是虚的，因而 $d\tau_0$ 是虚的。另一方面，在原来的相对论中有实的时间坐标的行列式 g 是负的，因为 $g_{\mu\nu}$ 的值为（取适当的时间单位）

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}; \tag{18}$$

因此$\sqrt{g}$也是虚的。这是相当常见的情况，正如我们将在§17中看到的那样。为了避免出现虚数，我们令

85 $$d\tau_0=\frac{1}{i}\int dX_1\,dX_2\,dX_3\,dX_4$$

并代入(17)，得

$$\sqrt{-g}\,d\tau=d\tau_0. \tag{17a}$$

Ricci 和 Levi-Givita **的反对称基本张量**　下列张量

$$G_{iklm}=\sqrt{g}\,\delta_{iklm} \tag{19}$$

是一个协变张量，式中 δ_{iklm}若其四个指标经过偶数次对调成为1234，取$+1$，若经过奇数次对调成为1234，则取-1。

为证明这一点，我们注意到下列行列式

$$\sum_{iklm}\delta_{iklm}\,dx_i^{(1)}\,dx_k^{(2)}\,dx_l^{(3)}\,dx_m^{(4)}=V. \tag{20}$$

除了一个无关的因子之外，等于一个元四面体的体积，这个元四面体的一个顶点是连续统中的一点，以及由这一点出发的4个任意线元（$dx_i^{(1)}$），（$dx_k^{(2)}$），（$dx_l^{(3)}$），（$dx_m^{(4)}$）的端点。根据(19)和(20)式，我们有 [10]

$$\sum_{iklm}G_{iklm}\,dx_i^{(1)}\,dx_k^{(2)}\,dx_l^{(3)}\,dx_m^{(4)}=\sqrt{g}V.$$

根据(17)，上式右边是一个标量，因为 δ_{iklm}的定义是一个反对称协变张量，所以(G_{iklm})正好是一个协变张量。

人们很容易从张量 G_{iklm}用下列混合乘法

$$\sum_{\alpha\beta\lambda\mu}G_{\alpha\beta\lambda\mu}g^{\alpha i}g^{\beta k}g^{\lambda l}g^{\mu m}=G_{iklm}. \tag{21}$$

构造出一个反变张量。

现在，反变张量的性质可以从§4中直接得出。根据(19)，上式左边为

$$\sqrt{g}\sum_{\alpha\beta\lambda\mu}\delta_{\alpha\beta\lambda\mu}g^{\alpha i}g^{\beta k}g^{\lambda l}g^{\mu m},$$

而此式根据已知的行列式的处理，等于

$$\sqrt{g}\delta_{iklm}\sum \delta_{\alpha\beta\lambda\mu}g^{1\alpha}g^{2\beta}g^{3\lambda}g^{4\mu},$$

根据(11),此式为

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\delta_{iklm}.$$

于是我们证明了 86

$$G^{iklm}=\frac{1}{\sqrt{g}}\delta_{iklm} \tag{21a}$$

是一个反变反对称张量。

在反对称张量的一般理论中,混合张量起着重要的作用。它是由基本张量 $g_{\mu\nu}$ 构成的,其分量为

$$G_{ik}^{lm} = \sum_{\alpha\beta}\sqrt{g}\delta_{ik\alpha\beta}g^{\alpha l}g^{\beta m} = \sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{g}}\delta_{lm\alpha\beta}g_{\alpha i}g_{\beta k}. \tag{22}$$

由上面和§4的叙述这两个表达式的张量性质是很清楚的,需要证明的只是它们二者相等。

根据(21)和(19),后一表达式只能改写成下列形式

[11]
$$\sum_{\lambda\mu\rho\sigma\alpha\beta}\sqrt{g}\delta_{\lambda\mu\rho\sigma}g^{\lambda l}g^{\mu m}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}g_{\alpha i}g_{\beta k},$$

在对 α 和 β 求和后再考虑到(10),得

$$\sum_{\lambda\mu}\sqrt{g}\delta_{\lambda\mu ik}g^{\lambda l}g^{\mu m}.$$

此式与(22)中第一个表达式仅在于求和的标号不同以及在 $\delta_{\lambda\mu ik}$ 中标号对 $\lambda\mu$ 和 ik 的次序不同(这是没有关系的)。

由(22)可以看出,混合张量 G_{ik}^{lm} 对于标号 i,k 是反对称的,对于 l,m 也是反对称的。

借助于基本张量,逆循§5给出的法则,我们可以从一个张量构造出另一个具有不同性质的张量。例如我们可以根据下列规则,

$$T^{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} \tag{23}$$

把一个协变张量($T_{\mu\nu}$)变换成一个反变张量($T^{\mu\nu}$),或者反过来有

$$T_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}. \tag{23a}$$

(23)和(23a)的互相等价性很容易用(10)证明。我们称张量($T^{\mu\nu}$)和($T_{\mu\nu}$)互为"倒张量"。如果互倒张量中有一个是对称的或反对称的,那么另一个也是,这从(23)和(23a)即可得出。这些对于任何高阶张量都成立。

对偶六矢量 如果($F^{\mu\nu}$)是二秩反对称张量,则可以利用下式 87

$$F^{\mu\nu *}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}G^{\mu\nu}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{24}$$

构造另一个反对称张量 $F^{\mu\nu *}$，被称为与 $F^{\mu\nu}$ 对偶的反变六矢量，反过来 $F^{\mu\nu}$ 也是与 $F^{\mu\nu *}$ 对偶的。因为如果我们将(24)式乘以 $G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}$ 并对 μ 和 ν 求和，得

$$\frac{1}{2}\sum G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}F^{\mu\nu *}=\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\mu\nu}G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.$$

但是，考虑到(22)，得[1)]

$$\sum_{\mu\nu}G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_{\alpha\beta}=\sum_{\mu\nu\lambda\kappa\lambda'\kappa'}\sqrt{g}\,\delta_{\mu\nu\lambda\kappa}g^{\lambda\sigma}g^{\kappa\tau}\frac{1}{\sqrt{g}}\delta_{\mu\nu\lambda'\kappa'}g_{\lambda'\alpha}g_{\kappa'\beta}=2(\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\tau}_{\beta}-\delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\tau}_{\alpha})$$

最后得

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\mu\nu}G^{\sigma\tau}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(F^{\sigma\tau}-F^{\tau\sigma})=F^{\sigma\tau},$$ [13]

这就证明了上面的论断。

所有类似结果对于协变六矢量也都成立。另外也很容易证明，若两个六矢量与两个对偶的六矢量互倒，则这两个六矢量自身也对偶。

§7. 测地线和点的运动方程

在§2中已经解释过，一个质点在引力场中的运动受下式

$$\delta\{\int \mathrm{d}s\}=0 \tag{1}$$

的制约。因此从数学的角度来看，一个点在引力场中的运动相当于四维流形中
88 的一条测地线。为了完整起见，我们在这里插入一段测地线的显式方程的推导。[14]

我们的任务是求一条连接两个点 $P^{(1)}$ 和 $P^{(2)}$ 的一条线，这条线与同样连接这两个点并与其无限接近的所有线相比，满足(1)。如果 λ 表示一个坐标 x_ν 的函数，则 λ 等于常数的"曲面"将对这些无限接近的线中每条线截取一点，只要曲线是给定的，这些点的坐标可以看成只是 λ 的函数。

令

$$w^2=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda},$$

---

1)第二个表达式根据下列事实，即只有当四个指标都不相同时才不为零，因此只剩下了两个可能($\lambda=\lambda'$，$\kappa=\kappa'$)和($\lambda=\kappa'$，$\kappa=\lambda'$)。考虑到这一点，首先对 μ，ν 求和，得

$$2\sum_{\lambda\kappa}\{g^{\lambda\sigma}g^{\kappa\tau}g_{\lambda\alpha}g_{\kappa\beta}-g^{\lambda\sigma}g^{\kappa\tau}g_{\lambda\beta}g_{\kappa\alpha}\},$$ [12]

进一步的求和仅需考虑指标组合($\lambda\kappa$)中 $\lambda\neq\kappa$ 的情况，但因为 $\lambda=\kappa$ 时大括号为零，所以可以对所有的指标组合求和。再考虑到(1)，就可以得到给出的结果。

就可将(1)式改写为

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w \mathrm{d}\lambda = 0, \tag{1a}$$

因为积分的上下限 λ_1 和 λ_2 对所研究的一切曲线都是一样的。令 δx_ν 是同一个 λ 的那些变分曲线的 x_ν 的增量,则有

$$\delta w = \frac{1}{w}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda}\delta x_\sigma + \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda}\delta\left(\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\right\}.$$

将此式代入(1a)中,对最后一项分部积分,并注意到 $\delta\lambda_\nu$ 在 $\lambda=\lambda_1$ 和 $\lambda=\lambda_2$ 时为零,得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathrm{d}\lambda \sum_\sigma (K_\sigma \delta x_\sigma) = 0,$$

式中

$$K_\sigma = \sum_{\mu\nu}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\frac{g_{\mu\nu}}{w}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right\} - \frac{1}{2w}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right],$$

由此得出

[15]

$$K_\sigma = 0, \tag{23}$$

这就是测地线的方程。

在原来的相对论中,$\mathrm{d}s^2>0$ 的测地线相当于质点的运动,而 $\mathrm{d}s=0$ 的测地线表示光线。在广义相对论中,情况也是这样。如果去掉一种情况($\mathrm{d}s=0$),我们 89
就可以选测地线的"弧长"s 作为我们的参数 λ。这时测地线方程变成

$$\sum_\mu g_{\sigma\mu}\frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{\mu\nu}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{23a}$$

[16] 在式中,我们根据 Christoffel 引入一个略写符号

$$\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right), \tag{24}$$

[17] 此式对于指标 μ 和 ν 对称,最后,将(23a)乘以 $g^{\sigma\tau}$,对 σ 求和并使用熟知的 Christoffel 符号

$$\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \tau\end{Bmatrix} = \sum_\sigma g^{\sigma\tau}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{bmatrix}, \tag{24a}$$

我们就得到代替(23a)的

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_\tau}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{\mu\nu}\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{23b}$$

这就是最一般的测地线方程。此式用 x_ν 对 s 的一阶导数表示出了它对 s 的二阶

导数。将此式微分即可用一阶导数表示出坐标对 s 的更高阶微商。用这种方法，我们将能得出一个以 s 为变量的 Taylor 展开。方程(23b)等价于 Minkowski 形式的质点运动方程，其中的 s 表示“本征时”。

§8. 用微分形成张量

众所周知，张量这个概念的根本意义在于它的分量的变换方程是线性齐次的。这一事实导致它的分量若对于任何一个坐标系全部为零，则它对所有别的坐标系也是如此。因此，一个物理系统的一组方程一旦能够证明它们构成一个
90 张量而张量的所有分量都等于零，那么这一组方程就是与坐标的选择无关的。为了建立这样的张量方程，人们就必须知道怎样由给定张量构造新的张量的法则。我们已经在前面讨论过了怎样用代数方法做到这一点，现在我们还要讨论如何从已知张量通过微分形成新的张量的规律。这些规律已由 Christoffel，Ricci 和 Levi-Civita 得出。我在这里采用一种新的特别简单的方法来做这件事。

所有对张量的微分运算，都可以归结为一种所谓的“延伸”。在原来的相对论中，即在只有线性正交的代换被认为是“可行的”的情况中，微分规则可以说成是：如果 $T_{\alpha_1\cdots\alpha_l}$ 是一个 l 秩张量，则 $\dfrac{\partial T_{\alpha_1\cdots\alpha_l}}{\partial x_l}$ 是一个 $l+1$ 秩张量。现在，所谓张量的“散度”很容易用 §6 的(10)由特殊的张量 δ_μ^ν 得出。在正交变换的限制之下，协变和反变没有区别，这个张量可以写成 $\delta_{\mu\nu}$。利用 $\delta_{\mu\nu}$ 同 $l+1$ 秩的张量的内乘，我们得到一个 $l-1$ 秩的张量

$$T_{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}}=\sum_{ls}\frac{\partial T_{\alpha_1\cdots\alpha_l}}{\partial x_s}\delta_{\alpha_l s}=\sum_{\alpha_l}\frac{\partial T_{\alpha_1\cdots\alpha_l}}{\partial x_{\alpha_l}}. \qquad \{7\}$$

这就是张量 $T_{\alpha_1\cdots\alpha_l}$ 相对于指标 α_l 所形成的散度。现在我们的任务是把这里操作推广到不受所说的限制(线性和正交性)的情况中去。

协变张量的延伸 设 $\varphi(x_1\cdots x_4)$ 是一个标量，S 是我们连续统中的一个曲线。“弧长”s 是从曲线 S 上一点 P 沿着 §1 和 §8 中解释过的一个清楚的方向测量的。在我们的连续统中函数 φ 在 S 上各点的值也可以认为是 s 的函数。显然，这时 $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}s$，$\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}s^2$ 等这些量也都是标量，即是定义与坐标系无关的量。然而因为

91

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\sum_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}, \tag{25}$$

又因为从每一点，曲线 S 都可以向任意方向画出，根据 §3，

$$A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \tag{26}$$

是协变四矢量的分量(一秩张量)。我们可以把这个四矢量看成是标量 φ(零秩张量)的“延伸”。

进一步,从(25)得

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2}=\sum_{\mu\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}+\sum_\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}\frac{\mathrm{d}^2x_\tau}{\mathrm{d}s^2}.$$

现在,我们把曲线 S 规定为测地线来进行我们的分析,这个选择是与所用的坐标系无关的,根据(25b)可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2}=\sum_{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\sum_\tau\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}\right]\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}. \tag{27}$$

下面,我们集中注意这个量

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\sum_\tau\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}, \tag{28}$$

根据(24)和(24a)它满足对称条件

$$A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}.$$

根据这一点以及(5c),可以由(27)以及 $\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}s^2$ 的标量性质导出:$A_{\mu\nu}$是一个二秩(协变)张量。我们可以把 $A_{\mu\nu}$看成一秩协变张量 $A_\mu=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x_\mu$ 的延伸。因而可将(28)写成

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\sum_\tau\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}A_\tau. \tag{28a}$$

现在,我们可以期望,不仅(26)型的四矢量,而是任何四矢量在根据(28a)加以微分延伸时,都会成为二秩的协变张量。下面我们将证明这一点。

首先,容易证明,在四维连续统中的任何四矢量的分量都可以表示为 92

$$A_\mu=\Psi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\mu}+\Psi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\mu}+\Psi_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\mu}+\Psi_4\frac{\partial\varphi_4}{\partial x_\mu},$$

式中的 Ψ_λ 和 φ_λ 都是标量,为满足此方程,可随便取 $\varphi_\nu=x_\nu$(在正在使用的特殊坐标系中的),再取 $\Psi_\nu=A_\nu$(也在使用的特殊坐标系中),如果我们能够证明,只要令(28a)中的 $A_\mu=\Psi\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x_\mu}$($\Psi$ 和 φ 都是标量),$A_{\mu\nu}$就是一个张量,那么(28a)中的 $A_{\mu\nu}$的张量性质就可以理解了。根据(28),下述量

$$\Psi\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\sum_\tau\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}\right]$$

是一个张量的分量,根据(26)和(6)下述量

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}$$

也是一个张量的分量。

相加之后，我们得到下式

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right]-\sum_\tau\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\left(\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}\right)$$

的张量性质。(28a)也由四矢量 $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x_\mu$ 构成了一个张量，所以，像以前所证明了的，可以从任意协变四矢量 A_μ 构成张量。证明完毕。

在我们已经推导出一秩张量的延伸之后，推导任意秩张量的延伸是很容易的。根据(6)和(6a)，我们可以把任意协变张量表示为下列形式的张量

$$A_{\alpha_1\cdots\alpha_l}=A^{(1)}_{\alpha_1}A^{(2)}_{\alpha_2}\cdots A^{(l)}_{\alpha_l}$$

之和，式中 $A^{(\nu)}_{\alpha_\nu}$ 表示协变四矢量。根据(28a)，我们首先有一个二秩协变张量

$$A^{(\nu)}_{\alpha_\nu s}=\frac{\partial A^{(\nu)}_{\alpha_\nu}}{\partial x_s}-\sum_\tau\begin{Bmatrix}\alpha_\nu s\\ \tau\end{Bmatrix}A^{(\nu)}_\tau.$$

93 我们可以根据外积的规则将此式乘以除 $A^{(\nu)}_{\alpha_\nu}$ 以外的全部 $A^{(\mu)}_{\alpha_\mu}$，这样就得到一个 $l+1$秩的张量，其中指标 ν 已经排除。用这种方法可以构成 l 个张量，其中排除的指标依次为 $\nu=1,\nu=2,\cdots,\nu=l$，最后把它们加到一起，即可得 $l+1$ 秩的张量：

$$A_{\alpha_1\cdots\alpha_l s}=\frac{\partial A_{\alpha_1\cdots\alpha_l}}{\partial x_s}-\sum_\tau\left[\begin{Bmatrix}\alpha_1 s\\ \tau\end{Bmatrix}A_{\tau\alpha_2\cdots\alpha_l}+\begin{Bmatrix}\alpha_2 s\\ \tau\end{Bmatrix}A_{\alpha_1\tau\alpha_3\cdots\alpha_l}\cdots\right].\tag{29}$$

这个公式是 Christoffel 首先得到的，如上所述，它可以从任意 l 秩张量构成一个 $l+1$ 秩张量。我们说，后者是前者的“延伸”。所有对张量的微分操作都可以这样推导。 [18]

将(29)式乘以 $g^{\alpha_1\beta_1}g^{\alpha_2\beta_2}\cdots g^{\alpha_l\beta_l}$，规定对 α 指标取内乘，对 β 指标取外乘，可得一个对 $\beta_1\cdots\beta_l$ 为反变，对 s 为协变的张量，再用 α 代替 β，得

$$A^{\alpha_1\cdots\alpha_l}_s=\frac{\partial A^{\alpha_1\cdots\alpha_l}}{\partial x_s}+\sum_\tau\left[\begin{Bmatrix}s\tau\\ \alpha_1\end{Bmatrix}A^{\tau\alpha_2\cdots\alpha_l}+\begin{Bmatrix}s\tau\\ \alpha_2\end{Bmatrix}A^{\alpha_1\tau\alpha_3\cdots\alpha_l}+\cdots\right].\tag{30}$$

这个张量可以称为反变张量的“延伸”。从(29)和(30)可以看出，这样定义的延伸总是产生一个协变的指标。很容易推广给出一个混合张量延伸的一般公式，这些公式将与(29)和(30)有类似形式。

散度 l 秩反变张量的延伸产生一个 $l+1$ 秩的混合张量，这个张量可用混合基本张量(10)作内积而获得一个 $l-1$ 秩的反变张量。而且这种做法共有 l 种。因此，通常一个反变张量有 l 种不同的散度。其中的一个取下列形式

[19]
$$A^{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}}=\sum_{\alpha_l s}A_s^{\alpha_1\cdots\alpha_l}\delta_{\alpha_l}^s. \tag{31}$$

对于对称的和反对称的张量,散度的最后结果与排除的指标 α_ν 无关。

某些补充公式 在我们将已得出的公式应用于特殊情况之前,我们还想导出基本张量的几个与微分有关的性质。将行列式 $|g_{\mu\nu}|=g$ 对 x_α 作微分,得 94

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha}=\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}g^{\mu\nu}=\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_\alpha}. \tag{32}$$

由(24a)、(24)和(32)得

{8}
$$\sum_\tau\begin{Bmatrix}\mu\,\tau\\ \tau\end{Bmatrix}=\sum_\tau\begin{Bmatrix}\tau\,\mu\\ \tau\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\sum_{\tau\alpha}g^{\tau\alpha}\frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\mu}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_\mu}. \tag{33}$$

对(10)式微分得

$$\sum_\sigma\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\alpha}g^{\nu\sigma}=-\sum_\sigma\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}g_{\mu\sigma}. \tag{34}$$

当将此式乘以 $g_{\nu\tau}$ 并对 ν 求和,或者乘以 $g_{\mu\tau}$ 并对 μ 求和时,考虑到(10),可分别得到两个方程,在做了一些指标改变后它们是

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=-\sum_{\sigma\tau}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha}g_{\sigma\mu}g_{\tau\nu}, \tag{35}$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=-\sum_{\sigma\tau}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha}g^{\sigma\mu}g^{\tau\nu}. \tag{36}$$

四矢量的延伸和散度 协变四矢量的延伸由(28a)给出。将 μ 和 ν 对调,然后相减,得反对称张量

$$A_{\mu\nu}-A_{\nu\mu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{28b}$$

反变四矢量 A^μ 的延伸 A_ν^μ,根据(30)式为

$$A_\nu^\mu=\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}+\sum_\tau\begin{Bmatrix}\nu\,\tau\\ \mu\end{Bmatrix}A^\tau.$$

此式的散度为

$$\Phi=\sum_{\mu\nu}A_\nu^\mu\delta_\mu^\nu=\sum_\mu\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu}+\begin{Bmatrix}\mu\,\tau\\ \mu\end{Bmatrix}A^\tau\right),$$

又由(33)得到

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\sqrt{g}A^\mu). \tag{37}$$

现在,用协变矢量 $\sum g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}$ 代替 A^μ,式中 φ 是一个标量,可得拉普拉斯 $\Delta\varphi$ 的著名的推广式

95
$$\Phi = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\right). \tag{38}$$

二秩张量的延伸和散度　将(29)和(30)应用于二秩协变和反变张量，可分别得出三秩张量：

$$A_{\mu\nu s} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_s} - \sum_\tau \left(\begin{Bmatrix} \mu s \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\tau\nu} + \begin{Bmatrix} \nu s \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\mu\tau} \right), \tag{29a}$$

$$A_s^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_s} + \sum_\tau \left(\begin{Bmatrix} s\tau \\ \mu \end{Bmatrix} A^{\tau\nu} + \begin{Bmatrix} s\tau \\ \nu \end{Bmatrix} A^{\mu\tau} \right). \tag{30a}$$

从这些公式容易得知，基本张量 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 的“延伸”分别等于零。

$A^{\mu\nu}$ 相对于指标 ν 的散度可由(31)、(30a)和(33)得出：

$$A^\mu = \sum_{s\nu} A_s^{\mu\nu} \delta_\nu^s = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_\nu \frac{\partial (A^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x_\nu} + \sum_{\tau\nu} \begin{Bmatrix} \tau\nu \\ \mu \end{Bmatrix} A^{\tau\nu} \sqrt{g} \right). \tag{39}$$

由于 $\begin{Bmatrix} \tau\nu \\ \mu \end{Bmatrix}$ 对于指标 τ 和 ν 的对称性，反对称张量(六矢量)的散度为

$$A^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_\nu \frac{\partial (A^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x_\nu}. \tag{40}$$

对于对称的 $A^{\mu\nu}$，(39)还可以改写成对于下面讨论很重要的形式。我们构造一个四矢量 $\sum_\mu A^\mu g_{\mu\sigma} = A_\sigma$，这是 (A^μ) 的逆：

$$A_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\sum_{\mu\nu} g_{\mu\sigma} \frac{\partial (A_{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x_\nu} + \sqrt{g} \sum_{\tau\nu} \begin{bmatrix} \tau\nu \\ \sigma \end{bmatrix} A^{\tau\nu} \right] =$$ [9]

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{\mu\nu} \frac{\partial (g_{\mu\sigma} A^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}\sqrt{g} \sum_{\mu\nu} \left(-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) A^{\mu\nu} \right).$$ [20]

并且，如果 $A^{\mu\nu}$ 是对称的，由此有

$$A_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial (g_{\mu\sigma} A^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} A^{\mu\nu} \sqrt{g} \right), \tag{41}$$

对这种情况，我们还有

$$A_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_\nu \frac{\partial (A_\sigma^\nu \sqrt{g})}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} A_\tau^\nu \sqrt{g} \right), \tag{41a}$$

式中引入了一个混合张量 $\sum_\mu g_{\sigma\mu} A^{\mu\nu} = A_\sigma^\nu$。

96 **Riemann-Christoffel 张量**　(29)可以使我们很简单地导出一个著名的判据，这个判据使我们能够判定具有给定线元的一个给定的连续统是不是Euclid的。换句话说，就是能不能找到一个适当的代换，使得各处的 ds^2 都等于坐标微分平方之和。

根据(29)，将一个协变四矢量 A_μ 作两次延伸，成为一个三秩张量 $(A_{\mu\nu\lambda})$，得到

{10}
[21]

$$
\begin{aligned}
A_{\mu\nu\lambda}=&\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda}-\left[\left\{\begin{matrix}\mu\lambda\\ \tau\end{matrix}\right\}\frac{\partial A_\tau}{\partial x_\nu}+\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \tau\end{matrix}\right\}\frac{\partial A_\tau}{\partial x_\lambda}\right]-\\
&\left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \tau\end{matrix}\right\}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\tau}+\left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \tau\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\tau\mu\\ \sigma\end{matrix}\right\}A_\sigma-\\
&\left[\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \sigma\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\mu\lambda\\ \tau\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \sigma\end{matrix}\right\}\right]A_\sigma.
\end{aligned}
$$

由此式立即得知 $(A_{\mu\lambda\nu}-A_{\mu\nu\lambda})$ 也是一个三秩协变张量，因而得知

[22]

$$
\left[\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \sigma\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\lambda\\ \sigma\end{matrix}\right\}+\sum_\tau\left(\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \tau\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda\tau\\ \sigma\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\mu\lambda\\ \tau\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \sigma\end{matrix}\right\}\right)\right]A_\sigma
$$

是一个三秩协变张量。这就是说方括号是一个四秩张量 $(K^\sigma_{\mu\nu\lambda})$，它对 μ,ν,λ 是协变的，对 σ 是反变的。当 $g_{\mu\nu}$ 为常数时，这个张量的所有分量都成为零。而当它对选定的一个合适坐标系等于零时，它将总是等于零。因此，方括号内的表式对所有指标组合均为零是线元可以化成 Euclid 形式的**必要条件**。然而还需要进一步证明这个条件也是充分条件。

V 张量　从(37)、(39)、(40)、(41)、(41a)各式可以看出，张量的分量中常常有 $\sqrt{g}$ 出现。所以我们希望引入一种张量特殊符号，使得它等于原来的张量分量乘以 $\sqrt{g}$（当 g 为负时乘以 $\sqrt{-g}$）。我们用德文花体字来表示这种乘积，例如

$$
A_\sigma\sqrt{g}=\mathfrak{A}_\sigma,
$$

$$
A^\nu_\sigma\sqrt{g}=\mathfrak{A}^\nu_\sigma.
$$

[23] 我们把 $(\mathfrak{A}_\sigma)$、$(\mathfrak{A}^\nu_\sigma)$ 等称为 V 张量（体积张量），当乘以 $d\tau$ 时，它们就具有给定名称的意义，因为 $\sqrt{g}\,d\tau=\sqrt{g}\,dx_1dx_2dx_3dx_4$ 是一个标量。例如，(41a)用这种写法可以写成 97

$$
\mathfrak{A}_\sigma=\sum_\nu\frac{\partial\mathfrak{A}^\nu_\sigma}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}\sum_{\mu\tau\nu}g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\mathfrak{A}^\nu_\tau. \tag{41b}
$$

C. 在给定引力场中物理过程的方程

原来的相对论中的每一个方程，在广义相对论中都有一个等价的广义协变的方程，在上一节(B节)的意义下与之对应。为了建立这些方程，基本张量 $g_{\mu\nu}$ 应该认为是已知的。用这种方法，人们把在原来的相对论中已知的物理定律进行推广，推广后的方程指出了这些方程所描写的物理过程受引力场的影响。目前，只有引力场本身的微分关系还是未知的，这些需要用特殊的方法来求得。我们将把所有其他定律(如力学定律、电磁学定律等)一律称为“物质过程的定律”。

§ 9. “物质过程”的能量动量定理

能量动量定理是“物质过程”的最一般的定律。在原来的相对论中，这个定理用 Minkowski-Laue 表述可以写成 [24]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}+\frac{\partial(i\mathfrak{i}_x)}{\partial l}=f_x\\
&\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial(i\mathfrak{i}_y)}{\partial l}=f_y\\
&\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial(i\mathfrak{i}_z)}{\partial l}=f_z\\
&\frac{\partial(i\mathfrak{f}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(i\mathfrak{f}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(i\mathfrak{f}_z)}{\partial z}+\frac{\partial(-\eta)}{\partial l}=iw
\end{aligned}\right\}. \tag{42}$$

时间坐标选为 $l=it$，式中实的时间 t 的测量要使光速成为 1。

98 式中

$$\begin{matrix}
p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} & i\mathfrak{i}_x\\
p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} & i\mathfrak{i}_y\\
p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} & i\mathfrak{i}_z\\
i\mathfrak{f}_x & i\mathfrak{f}_y & i\mathfrak{f}_z & -\eta
\end{matrix}$$

是一个四秩对称张量($T_{\sigma\nu}$)(能量张量)，而

$$f_x, f_y, f_z,\ iw$$

是一个四矢量(K_σ)。当然，这只在线性正交代换下成立，这是在原来的相对论中唯一可行的变换。从形式的观点来看，(42)说明，(K_σ)是能量张量 $T_{\sigma\nu}$ 的散度。从物理上看，各量的意义是

p_{xx} 等等:应力的分量。

$\mathfrak{i}$:动量密度矢量。

$\mathfrak{f}$:能流矢量。

η:能量密度。

f:每单位体积中外部作用于系统的力。

w:每单位时间、单位体积加给系统的能量。

如果系统是"完全的",则(42)的右边为零。

目前我们的任务是寻求与(42)相对应的一般协变方程。显然,推广后的方程在形式上也是二秩张量的散度等于一个四矢量。然而,在每一个推广过程中人们将面临一个困难,那就是在广义相对论中与原来的相对论不同,有各种不同性质的张量(协变的,反变的,混合的,还有 V 张量),每次都要进行选择,而这种选择并不涉及物理的任意性[1],只是为了公式的表达而偏好采用哪些变量。这种选择必须使方程最便于理解,并且使其中所用的量具有明显的物理意义。我们发现,最能满足这样要求的做法是用混合张量 $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ 表示张量 $T_{\sigma\nu}$,用 V 四矢量 99
$\mathfrak{K}_\sigma$ 表示四矢量 K_σ 这时散度可以根据(41b)构成,从而得到作为(42)的推广的一般协变方程

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\tau\nu} g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\mathfrak{T}_\tau^\nu + \mathfrak{K}_\sigma. \tag{42a}$$

保持上面列举的名称,根据这个方案,我们指出 $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ 的各个分量:

[25]

	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$
$\sigma=1$	$-p_{xx}$	$-p_{xy}$	$-p_{xz}$	$-\mathfrak{i}_x$
$\sigma=2$	$-p_{yx}$	$-p_{yy}$	$-p_{yz}$	$-\mathfrak{i}_y$
$\sigma=3$	$-p_{zx}$	$-p_{zy}$	$-p_{zz}$	$-\mathfrak{i}_z$
$\sigma=4$	$\mathfrak{f}_x$	$\mathfrak{f}_y$	$\mathfrak{f}_z$	η

(43)

以及 $\mathfrak{K}_\sigma$ 的分量

1)这与下列事实有关,任何张量与可以通过基本张量或者 $\sqrt{-g}$,改变其属性。

$\sigma=1$	$-f_x$
$\sigma=2$	$-f_y$
$\sigma=3$	$-f_z$
$\sigma=4$	w

(44)

与 $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ 相联系的纯协变张量(或纯反变张量)是对称的。很容易理解，当 $g_{\mu\nu}$ 这个量取下列值时

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}, \tag{45}$$

(42a)式将变换成(42)式。

(42a)式的讨论 首先，我们考虑没有引力场的情况，即将所有的 $g_{\mu\nu}$ 都看作是常量。(42a)右边第一项将为零。这时我们说所研究的系统是在空间扩展，即

100 相对于 x_1,x_2,x_3 扩展，而且是有限的。一个量 φ 遍及整个系统的积分用 $\overline{\varphi}$ 表示。由(42a)可产生这种类型的遍及 x_1,x_2,x_3 的积分有

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{i}}}{\mathrm{d}x_4}=\overline{f},$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\eta}}{\mathrm{d}x_4}=\overline{w}.$$

这两个公式是动量平衡定理和能量平衡定理的通常形式。由此得出当无外力存在时动量 $\overline{\mathbf{i}}$ 和能量 $\overline{\eta}$ 对时间的守恒。在这种情况下，动量能量定理表现为一个守恒定理，可以用下式写成微分形式。当外力不存在时($\mathfrak{K}_\sigma=0$)有：

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu}=0. \tag{42b}$$

当引力场存在时，即当 $g_{\mu\nu}$ 不恒定时，尽管 $\mathfrak{K}_\sigma$ 等于零，所研究的(空间有限)系统也没有真正遵从守恒定理。这是由于没有(42b)类型的方程成立，因为(42a)右边第一项不再为零。这与物质系统在引力场中时，其动量和能量要随时间而变化的物理事实相对应，因为引力场会向物质系统传递动量和能量。因此， [26]
(42a)右边第一项的物理意义和第二项的物理意义类似。第一项的四个分量，可以称之为

$$-f_x^{(g)},-f_y^{(g)},-f_z^{(g)},w^{(g)},$$

分别表示由引力场传给物质系统(单位体积，在单位时间内)的动量和能量的

负值。

然而，在 $\mathfrak{R}_\sigma$ 等于零的情况下，对于引力场和物质系统合在一起，人们还是需要某种定理，表示系统和引力场的总动量和总能量成为常数。这就导致了对于引力场一定存在一个复杂的量 $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$，使得下式成立

$$\sum_\nu \frac{\partial(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu)}{\partial x_\nu} = 0. \tag{42c}$$

这一点需要等到引力场的微分定律建立起来之后才能更仔细地讨论。 101

我们看到，在引力场对物质过程的作用中，下面的量

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\tau = \frac{1}{2} \sum_\mu g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \tag{46}$$

[27] 起着决定性的作用。因为这个原因，我们将称它们为"引力场的分量"。

§10. 连续分布的质量的运动方程

自然测得的量 我们早已强调过，在广义相对论中，像以前的相对论那样选择一个坐标系，使得空间坐标和时间坐标的差别直接从测量棒和时钟得出，这是不可能的。这种优越的选择只可能在令

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = -d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 - d\xi_4^2. \tag{46}$$

(11) 之后并在无穷小的情况下进行。

$d\xi$ 正是在原来的相对论中可以作为坐标测量的(§2)，但它并不是全微分。在无穷小的情况下可以把所有的量用 $d\xi$ 来表示。如果这样做了，我们就把这样的量称为"自然测得"的量，而把这个坐标系称为"正则坐标系"。

根据(17a)式，对于无穷小四维体积元，我们有

$$\sqrt{-g}\int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4. \tag{47}$$

假设所考虑的体积是由无穷短和无穷细的四维线所构成，并用 dv 表示这四维线上的积分 $\int dx_1 dx_2 dx_3$，现在我们选择 $d\xi$ 坐标使得 $d\xi_4$ 轴与四维线的轴一致，这导致 $d\xi_4 = ds$，而积分 $\int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ 成为四维线在静止时的自然测得的体积 dv_0。于是，根据(47)，我们得

$$\sqrt{-g}\, dv dx_4 = dv_0 ds. \tag{47a}$$

质量的单位 比较两个质点的质量可以按通常的方法进行，为了测量质量， 102
我们只需要一个质量的单位，设这个质量单位是装满静止的自然测得的体积为1的体积中的水。根据定义，一个质点的质量是对于一切变换都是不变的。

密度标量　对于连续分布的物质，密度标量的意思是其每单位(共动的)自然测得的体积中的质量。如果能够忽略表面力，那么在流体动力学的意义上，标量密度和速度的各个分量$\frac{dx_\mu}{ds}$就完全描述了这个物质。

物质流的能量张量，运动方程　我们可以由标量 ρ_0 和反变的四矢量$\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right)$构成一个混合的 V 矢量：

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu=\rho_0\sqrt{-g}\frac{dx_\nu}{ds}\sum_\mu g_{\sigma\mu}\frac{dx_\mu}{ds}. \tag{48}$$

我们可以认为($\mathfrak{T}_\sigma^\nu$)是有质质量流的能量张量。两方程(42a)与(48)一起相当于无内聚性(即表面力可忽略的)质量的 Euler 流动方程。我们用由此方程导出前面给出的质量的运动方程的方法来证明这一点。[28]

假设这一质量在 x_1，x_2，x_3 方向上的大小都是无穷小，并使用缩写 $dx_1dx_2dx_3=dv$。于是我们得到 [29]

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int\mathfrak{T}_\sigma^4 dv\right\}=\sum_{\tau\nu}\left\{\Gamma_{\nu\sigma}^\tau\int\mathfrak{T}_\tau^\nu dv\right\}+\int\mathfrak{K}_\sigma dv. \tag{50}$$

将(48)的 $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ 代入，并根据(47a)，有

$$dv=\frac{dv_0 i}{\sqrt{-g}}\frac{ds}{dx_4}, \tag{47b}$$

注意到

$$m=\int\rho_0 dv_0, \tag{49}$$

103　得到下列方程

$$\frac{d}{dx_4}\left\{m\sum_\mu g_{\sigma\mu}\frac{dx_\mu}{ds}\right\}=\sum_{\nu\tau}\left\{\Gamma_{\nu\sigma}^\tau\frac{dx_\nu}{dx_4}m\sum_\mu g_{\tau\mu}\frac{dx_\mu}{ds}\right\}+\int\mathfrak{K}_\sigma dv. \tag{50a}$$

或者，用下列协变四矢量作为一种缩写：

$$\mathrm{I}_\sigma=m\sum_\mu g_{\sigma\mu}\frac{dx_\mu}{ds}. \tag{51}$$

我们最后得[1]

$$\frac{d\mathbf{I}_\sigma}{dx_4}=\sum_{\nu\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\sigma}\frac{dx_\nu}{dx_4}\mathbf{I}_\tau+\int\mathfrak{K}_\sigma dv. \tag{50b}$$

这就是当选择第四坐标(时间坐标)为独立变量时质点的运动方程。(43)中的 $\mathbf{I}_\sigma$ 的各个分量的物理意义分别是动量和能量分量的负值。在原初相对论特例下,即当 $g_{\mu\nu}$ 取(18)式之值时,如果 $\mathfrak{q}$ 表示三维速度矢量,而 q 是其大小时,我们得到

$$\left.\begin{array}{l}-\mathbf{I}_1=\dfrac{m\mathfrak{q}_x}{\sqrt{1-q^2}}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{I}_4=\dfrac{m}{\sqrt{1-q^2}}\end{array}\right\}. \tag{52}$$

这一点与以前的理论相一致,如果我们回忆(18)的定义,取"光秒"作为时间单位的话。

假设在(50b)中 $\mathfrak{K}_\sigma$ 等于零,即引力场以外的外力等于零,这时,如果将方程 104
乘以 $\frac{1}{m}\cdot\frac{dx_4}{ds}$,经过简单计算即可得出质点在引力场中的运动方程(22a),而此式是与(1)等价的。这一点证实了我们的预期,即(48)中的 $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ 确实是流动物质的能量张量。

理想流体的能量张量 现在我们试图把(48)增补完全,使其能成为理想流

---

1) 在这里,我要指出,根据我的看法,为什么不用(39),而是用(41)作为能量动量定理的基础。根据(39),能量张量看来像是 V 矢量,而量 $\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}$ 像是引力场的分量。这样一来,在§11中,人们将被引导到这样的解释:即反变的四矢量的分量 $\left(\mathbf{I}^\sigma=m\frac{dx_\sigma}{ds}\right)$ 将表示质点的动量和能量分量。我们在这里将指出一个非常特殊的情况,这种解释与我们对动量本质的理解背道而驰。

考虑一个没有引力场的空间,我们引入一个坐标系,它与"正则坐标系"的差别仅在于 x_1 轴和 x_2 轴的夹角(由正则坐标系判断)φ 与 $\frac{\pi}{2}$ 不同。

于是,我们有

$$ds^2=-dx_1^2-dx_2^2-2dx_1dx_2\cos\varphi-dx_3^2+dx_4^2.$$

在这种情况下人们得到例如 $-\mathbf{I}^2=-m\frac{dx_2}{ds}$,而这个量当质点向 x_1 轴方向运动时等于零。另一方面,显然在这种情况下,动量的 x_2 分量确实存在,它与 x_1 分量只差一个因子 $\cos\varphi$。

然而如果我们基于(41)来建立动量定理,因而根据(51),用协变的四矢量来计算动量和能量,那么对于上述情况可得

[30] $$-\mathbf{I}_2=-g_{12}m\frac{dx_1}{ds}=m\left(\frac{dx_1}{ds}\right)\cos\varphi=-(-\mathbf{I}_1)\cos\varphi,$$

这正是所需要的。

体的能量张量，即允许表面力(压力)的存在，并包含能量因密度变化的变化。[1)] 人们写出介质中一点的能量张量在下列特殊的正则坐标系中的形式，这一坐标系的 $\mathrm{d}\xi_4$ 轴(在给定点上)与四维流线元相重合。

假设有一定量的物质，当其压力为零时，其(自然测得的)体积为 φ_0，质量为 1，在一般压力下其体积为 φ，于是，这一(自然测得的)体积为 φ 的这一块物质的自然测得的能量 ϵ，只考虑绝热变化，为

$$1-\int_{\varphi_0}^{\varphi} p\,\mathrm{d}\varphi,$$

式中 p 表示自然测得的压力。根据(52)，当压力为零时，静止的单位质量的能量为 1。负的积分只是压力的函数，我们称之为 P。每单位体积的能量单位可以乘以 $\rho_0=\dfrac{1}{\varphi}$ 得出。因此，能量密度为

$$\rho_0(1+P).$$

105 在我们这种特别选定的坐标之下，我们所找的张量的分量如下：

$$\begin{array}{cccc}
-p & 0 & 0 & 0 \\
0 & -p & 0 & 0 \\
0 & 0 & -p & 0 \\
0 & 0 & 0 & \rho_0(1+P).
\end{array}$$

使用一个任意选定的参考系，这一张量显然可以变换为

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu=-p\delta_\sigma^\nu\sqrt{-g}+\rho_0\sqrt{-g}\left(1+\frac{p}{\rho_0}+P\right)\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}\sum_\mu g_{\sigma\mu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}. \qquad (48\mathrm{a})$$ [31]

根据定义 ρ_0，p 和 P 都是标量，如果采用下列缩写

$$\rho_0\sqrt{-g}\left(1+\frac{p}{\rho_0}+P\right)=\rho^*,$$

则(42a)式成为

$$-\sqrt{-g}\,\frac{\partial p}{\partial x_\sigma}+\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\rho^* g_{\sigma\mu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\rho^*\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}+\mathfrak{K}_\sigma. \qquad (53)$$

这四个方程定出了五个未知函数 p 和 $\dfrac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}$，因为后者之间还有一个关系：

$$\sum g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}=1$$

而根据所讨论流体的绝热态方程，ρ 是 p 的已知函数。$g_{\mu\nu}$ 和 $\mathfrak{K}_\sigma$ 也被认为是已知的。方程(53)代替了 Euler 方程，并把连续性方程包括在内。这一点很容易证

1)在谈论这一点时，我们仅限于具有均匀绝热态方程的流体的流动的绝热过程。

明,只要把此式转入以前的相对论即可,那时出现了一些可忽略的项,如比光速小的速度和对惯性无可察觉影响的压力等。

[32]

§ 11. 电磁方程

引出电磁过程的普遍协变方程的一些考虑完全与我们将电磁过程引入从前的相对论的作法是完全类似的。因此我们在这里讲得稍微简单一点。

[33] **真空中的电磁方程** 设 $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ 和 $\mathfrak{F}^{\mu\nu^*}$ 是两个双反对称的 V 六矢量[见(24)], 106
那么,根据(40),下式

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \sum \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu^*}}{\partial x_\nu}$$

就是反对称的 V 四矢量的分量。如果令这些分量为零,则可得出普遍协变形式的 Maxwell 方程。如果把 $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ 和 $\mathfrak{F}^{\mu\nu^*}$ 的分量按照下表

$\mathfrak{F}^{23}$	$\mathfrak{F}^{31}$	$\mathfrak{F}^{12}$	$\mathfrak{F}^{14}$	$\mathfrak{F}^{24}$	$\mathfrak{F}^{34}$
$\mathfrak{h}_x$	$\mathfrak{h}_y$	$\mathfrak{h}_z$	$-\mathfrak{e}_x$	$-\mathfrak{e}_y$	$-\mathfrak{e}_z$

$\mathfrak{F}^{23^*}$	$\mathfrak{F}^{31^*}$	$\mathfrak{F}^{12^*}$	$\mathfrak{F}^{14^*}$	$\mathfrak{F}^{24^*}$	$\mathfrak{F}^{34^*}$
$-\mathfrak{e}_x^*$	$-\mathfrak{e}_y^*$	$-\mathfrak{e}_z^*$	$-\mathfrak{h}_x^*$	$-\mathfrak{h}_y^*$	$-\mathfrak{h}_z^*$

赋予其 Maxwell 形式的话,就可看出这些方程确实成为 Maxwell 方程,而且可看出,只要将 $g_{\mu\nu}$ 根据(18)赋予其特殊值时,根据(24),就有

$$\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h},$$
$$\mathfrak{e}^* = \mathfrak{e}.$$

电荷电流密度 在共动的正则坐标系中,显然有电荷密度,根据定义,这个电荷密度是一个标量,将它乘以$\sqrt{-g}$就成为一个 V 标量,我们用 $\rho_{(e)}$ 表示。它和反变的四矢量$\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}$一起,就构成一个反变的 V 四矢量:

$$\rho_{(e)} \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}.$$

真空中的 Lorentz 方程 当物质和电磁场的相互作用归结为电荷的运动时——像 Lorentz 所做的那样——人们应该把所有的事物放在下列方程基础之上

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}&=\rho_{(e)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}\\ \sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu^{*}}}{\partial x_{\nu}}&=0\end{aligned}\right\}. \tag{54}$$

107 这些方程是普遍协变形式的 Lorentz 电子论的基本方程。这些方程说明引力场作用于电磁场的规律。

运动物体的电磁方程 物体的介电常数为 1，磁导率为 1 的情况 我们考虑物体的电极化和磁极化时只产生电荷密度和磁荷密度而不产生电或磁的“极化流”的情况。但是要考虑沿着导体的电导电流。这种情况的广义协变场方程可以如下方式得到，在方程的右方和沿导体的传导电流一起还要计入对流电流和对流磁流。

像以前已经定义过的那样，令 $\rho_{(e)}$ 代表极化电子和传导电子合起来的电荷密度，于是，$\left(\rho_{(e)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}\right)$ 就是传导电子和极化电子共同产生的对流电流 V 四矢量。

假设 $\rho_{(m)}$ 为由（刚性）磁极化引起的前已定义的磁荷密度，那么 $\left(\rho_{(m)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}\right)$ 就是对流磁流的 V 四矢量。

另一个 V 四矢量是同传导电流相对应的，我们用 $(\mathfrak{L}^{\mu})$ 来表示，它在“正则坐标系”中是这样确定的，即在正则坐标系中有

$$\mathfrak{L}^{1}=-\lambda\mathfrak{F}^{14},\ \mathfrak{L}^{2}=-\lambda\mathfrak{F}^{24},\ \mathfrak{L}^{3}=-\lambda\mathfrak{F}^{34},\ \mathfrak{L}^{4}=0.$$

另一方面有

$$\frac{\mathrm{d}x_{1}}{\mathrm{d}s}=0,\quad\frac{\mathrm{d}x_{2}}{\mathrm{d}s}=0,\quad\frac{\mathrm{d}x_{3}}{\mathrm{d}s}=0,\quad\frac{\mathrm{d}x_{4}}{\mathrm{d}s}=1.$$ {12}

这些条件满足下列关系

$$\mathfrak{L}^{\mu}=-\lambda\sum_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\mathfrak{F}^{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x_{\beta}}{\mathrm{d}s}. \tag{55}$$

于是，场方程成为

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\mathrm{d}x_{\nu}}&=\rho_{(e)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}+\mathfrak{L}^{\mu}\\ \sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu^{*}}}{\mathrm{d}x_{\nu}}&=\rho_{(m)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}\end{aligned}\right\}. \tag{56}$$

108 **各向同性、可电磁极化的运动物体的场方程** 我们进一步改进刚刚得到的方程，现在把电极化流和磁极化流也考虑在内。假设在共动的正则坐标中场强与这些极化成正比。

这种情况下的场方程可以用下列方法得出，即在(56)右边分别加上电极化

流和磁极化流的 V 四矢量。我们用($\mathfrak{P}^{\mu}_{(e)}$ 表示电极化反变 V 四矢量,它在共动的正则坐标系中的分量由下式决定

$$\mathfrak{P}^{1}_{e}=-\sigma_{(e)}\mathfrak{F}^{14};\mathfrak{P}^{2}_{(e)}=-\sigma_{(e)}\mathfrak{F}^{24};\mathfrak{P}^{3}_{(e)}=-\sigma_{(e)}\mathfrak{F}^{34};\mathfrak{P}^{4}_{(e)}=0.$$

这些条件满足下列方程:

$$\mathfrak{P}^{\mu}_{(e)}=-\sigma_{(e)}\sum_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\mathfrak{F}^{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x_{\beta}}{\mathrm{d}s}. \tag{57}$$

我们可以由这个 V 四矢量构成一个 V 六矢量

$$\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)}=\mathfrak{P}^{\mu}_{(e)}\frac{\mathrm{d}x_{\nu}}{\mathrm{d}s}-\mathfrak{P}^{\nu}_{(e)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}, \tag{58}$$

又可由此得到对流电流的 V 四矢量

$$\sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)}}{\partial x_{\nu}} \tag{59}$$

用(40)计算散度,我们注意到这个矢量在正则坐标系中的分量为

$$\frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_{x})}{\partial t};\ \frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_{y})}{\partial t};\ \frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_{z})}{\partial t};-\left(\frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_{x})}{\partial x}+\frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_{y})}{\partial y}+\frac{\partial(\sigma_{(e)}\mathfrak{e}_{z})}{\partial z}\right).$$

由此看来,如果把(59)加在(56)的第一个方程的右边,这个方程将在正则坐标下变换为静止物体的 Maxwell 方程组的第一式。这就证实了(57)、(58)和(59)。

对于磁极化,类似地我们有

{13}
$$\mathfrak{P}^{\mu}_{(m)}=-\sigma_{(m)}\sum_{\alpha}g_{\alpha\beta}\mathfrak{F}^{\mu\alpha *}\frac{\mathrm{d}x_{\beta}}{\mathrm{d}s}, \tag{57a}$$

$$\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)}=\mathfrak{P}^{\mu}_{(m)}\frac{\mathrm{d}x_{\nu}}{\mathrm{d}s}-\mathfrak{P}^{\nu}_{(m)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}, \tag{58a}$$

由此产生磁极化流 V 四矢量的分量 109

$$\sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)}}{\partial x_{\nu}}. \tag{59a}$$

利用此方法可以得出场方程

{14}
$$\left.\begin{aligned}\sum_{\nu}\frac{\partial(\mathfrak{F}^{\mu\nu}-\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)})}{\partial x_{\nu}}&=\rho_{(e)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}+\mathfrak{L}^{\mu}\\ \sum_{\nu}\frac{\partial(\mathfrak{F}^{\mu\nu *}-\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)})}{\partial x_{\nu}}&=\rho_{(m)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s},\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

式中的 $\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)}$,$\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)}$,$\mathfrak{L}^{\mu}$ 按下列关系与场的 V 六矢量相联系

$$\left.\begin{array}{l|l}
\mathfrak{P}^{\mu}_{(e)}=-\sigma_{(e)}\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\mathfrak{T}^{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x_{\beta}}{\mathrm{d}s} & \mathfrak{P}^{\mu}_{(m)}=-\sigma_{(m)}\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\mathfrak{T}^{\mu\alpha *}\frac{\mathrm{d}x_{\beta}}{\mathrm{d}s} \\
\mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(e)}=\mathfrak{P}^{\mu}_{(e)}\frac{\mathrm{d}x_{\nu}}{\mathrm{d}s}-\mathfrak{P}^{\nu}_{(e)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s} & \mathfrak{P}^{\mu\nu}_{(m)}=\mathfrak{P}^{\mu}_{(m)}\frac{\mathrm{d}x_{\nu}}{\mathrm{d}s}-\mathfrak{P}^{\nu}_{(m)}\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s} \\
\multicolumn{2}{c}{\mathfrak{L}^{\mu}=-\lambda\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\mathfrak{T}^{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x_{\beta}}{\mathrm{d}s}}
\end{array}\right\}. \tag{60a}$$

沿着方程(42a)的路线进行能量动量求和也没有任何障碍,上面的讨论清楚地说明了人们怎样把已经知道的自然界规律纳入到普遍的协变形式中去。

D. 引力场的微分定律

在上一节中,我们认为 $g_{\mu\nu}$ 是 x_ν 的已知函数,而且把这些系数理解为引力势的分量。尚待找出这些量服从的微分规律。人们对迄今为止所发展的理论的认识论上的满足,在于这一理论符合最广义的相对论原理。从形式方面来看,这是基于以下性质,即方程组是**普遍的**,就是说,对 x_ν 的任意变换是协变的。

关于 $g_{\mu\nu}$ 的微分规律必须也是普遍协变的,因而这一要求也是恰当的。然而,我们将要看到,如果我们要遵守因果律的话,我们必须对这一要求加以限制。事实上,我们将证明,在引力场中表征事件进程的规律不可能是**绝对普遍协变的。**

110 ### §12. 关于选择坐标的一个必要的限制的证明 [34]

我们考虑一个连续统的有限部分 Σ,其中没有物质过程发生。当量 $g_{\mu\nu}$ 作为与用于描述的坐标系 K 相关的 x_ν 的函数给出时,Σ 中的物理过程就完全决定了。这些函数的整体,用记号 $G(x)$ 表示。

我们引入一个新坐标系 K',令它在 Σ 之外与 K 重合,而在 Σ 之内与 K 有些偏离,而 $g'_{\mu\nu}$ 对于 K' 和 $g_{\mu\nu}$ 一样是到处连续的(包括它们的导数),我们把 $g'_{\mu\nu}$ 的整体用记号 $G'(x')$ 表示。$G'(x')$ 和 $G(x)$ 将描写同一个引力场。

当我们在函数 $g'_{\mu\nu}$ 中用坐标 x_ν 去代替 x'_ν 时,就是说我们构造一个 $G'(x)$ 时,这时 $G'(x)$ 表示一个对 K 的引力场,然而,这个引力场已不是真实的(即原来

给定的那个)引力场了。

如果我们假设引力场的微分方程是处处协变的,那么只要与 K 相关的 $G(x)$满足该微分方程,对于K'的$G'(x')$也将满足该微分方程,因此,与 K 相关的$G'(x)$也将满满足该微分方程。这样一来,对于 K,就会有两个不同的解 $G(x)$ 和 $G'(x)$都满足引力场的微分方程,而这两个解在区域Σ的边界上是一致的。换句话说,**在这一区域中事件发生的过程不能由普遍的协变微分方程来唯一地确定。**

这就是说,如果我们要求在引力场中事件发生的过程是完全确定的,我们就不得不对坐标系的选择加以限制,使得引入一个新的坐标系 K'(如上文所规定的)而又不违反这些限制是不可能的。不可能任意地把坐标系连续到区域Σ的内部去。

§ 13. 对线性变换的协变性,适应坐标系

由于我们已经看到坐标系要满足一定条件,我们在选定坐标系时必须集中注意几种特定的限制,只允许线性变换可以得到极大的限制。如果我们要求物理中的方程只对于**线性变换**是协变的话,我们的理论将被剥夺掉其主要的支持。 111
变换到加速系统或转动系统的变换将不再是可容许的变换。在§1 强调过的"离心力"和引力场的等价性也将不能被理论解释成本质上相同的性质,正如在§1 强调过的。另一方面,在允许的变换中包括线性变换是有好处的(下面可以看出)。因此,当只允许线性变换而非普遍变换时,我们必须简要地讨论一下在
[35] B 节所讨论过的协变量的理论应当怎样作一些修改。

对线性变换的协变表达式 如果我们只限于讨论线性变换,我们以前在§3～§8 所讨论的张量的代数性质将不能化简。与此相反,用微分构成张量的规则(§9)却可以作很大简化。

下式是相当普遍地成立的

$$\frac{\partial}{\partial x'_\rho}=\sum_\delta\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\rho}\frac{\partial}{\partial x_\delta}.$$

{15} 因此,例如对于一个二秩的协变张量,根据(5a) 式有

$$\frac{\partial A'_{\mu\nu}}{\partial x'_\rho}=\sum_{\alpha\beta\delta}\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\rho}\frac{\partial}{\partial x_\delta}\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}A_{\alpha\beta}\right).$$

在线性变换下,导数$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}$ 等是与 x_δ 无关的,而我们有

$$\frac{\partial A'_{\mu\nu}}{\partial x'_\rho}=\sum_{\alpha\beta\delta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\rho}\frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta}.$$

因此，$\left(\frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta}\right)$是一个三秩的协变张量。

可以一般地证明，对其坐标微分一个任意张量的分量，产生一个升高一秩的张量，而增加的那个指标具有协变性。换句话说，这是在线性变换限制下的一种**扩张运算**。而因为与代数运算相联系的扩张是构成协变量的基础，我们有权对整
112 个协变量系统进行线性变换。下面我们考虑有更多限制的坐标选择。

对积分 J 的变换法则 设 H 是 $g^{\mu\nu}$ 和它的导数$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ 的函数，为了简洁，我 [16]
们把导数记为 $g_\sigma^{\mu\nu}$。现在，J 是 H 在连续统的一个有限区域 $\sum$上的积分

$$J=\int H\sqrt{-g}\mathrm{d}\tau. \tag{61}$$

假设第一次用的坐标为 K_1，当由此坐标系变换到另一个与 K_1 有无穷小差别的坐标系 K_2 时，我们问积分 J 的变化 ΔJ 是什么？

假设在区域中某点的任意量 φ 由于坐标变换引起的变化为 $\Delta\varphi$，于是根据(17)，有

$$\Delta(\sqrt{-g}\mathrm{d}\tau)=0, \tag{62}$$

进一步有

$$\Delta H=\sum_{\mu\nu\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}\Delta g^{\mu\nu}+\frac{\partial H}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\Delta g_\sigma^{\mu\nu}\right). \tag{62a}$$

取下列关系

$$\Delta g^{\mu\nu}=g^{\mu\nu'}-g^{\mu\nu},$$
$$\Delta x_\mu=x'_\mu-x_\mu.$$

根据(8)式，$\Delta g^{\mu\nu}$可以用 Δx_μ 表示为

$$\Delta g^{\mu\nu}=\sum_\alpha\left(g^{\mu\alpha}\frac{\partial\Delta x_\nu}{\partial x_\alpha}+g^{\nu\alpha}\frac{\partial\Delta x_\mu}{\partial x_\alpha}\right), \tag{63}$$

$$\Delta g_\sigma^{\mu\nu}=\sum_\alpha\left\{\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}\frac{\partial\Delta x_\nu}{\partial x_\alpha}+g^{\nu\alpha}\frac{\partial\Delta x_\mu}{\partial x_\alpha}\right)-\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma}\right\}. \tag{63a}$$

方程(62)、方程(63)和方程(63a)将 ΔH 表示为坐标的变化 Δx_μ 的一次和二次导数。

到目前为止，我们对于 H 怎样依赖于 $g^{\mu\nu}$ 和 $g_\sigma^{\mu\nu}$ 还没有做任何假设。现在， [36]
我们假设对于线性变换是不变的，即当$\frac{\partial^2\Delta x_\mu}{\partial x_\alpha\partial x_\sigma}$等于零时 ΔH 也等于零。在此假设下，我们得

$$\frac{1}{2}\Delta H=\sum_{\mu\nu\sigma\alpha}g^{\nu\alpha}\frac{\partial H}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\frac{\partial^2\Delta x_\mu}{\partial x_\sigma\partial x_\alpha}. \tag{64}$$

利用(64)和(62),又有 113

$$\frac{1}{2}\Delta J=\int d\tau\sum_{\mu\nu\sigma\alpha}g^{\nu\alpha}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}}\frac{\partial^{2}\Delta x_{\mu}}{\partial x_{\sigma}\partial x_{\alpha}},$$

由此,经过分部积分得

$$\frac{1}{2}\Delta J=\int d\tau\sum_{\mu}(\Delta x_{\mu}B_{\mu})+F, \tag{65}$$

式中我们用了缩写

$$B_{\mu}=\sum_{\alpha\sigma\nu}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{\sigma}\partial x_{\alpha}}\left(g^{\nu\alpha}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}}\right), \tag{65a}$$

$$F=\int d\tau\sum_{\alpha\sigma\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left[g^{\nu\alpha}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}}\frac{\partial\Delta x_{\mu}}{\partial x_{\sigma}}-\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\left(g^{\nu\sigma}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)\Delta x_{\mu}\right].$$

{17} (65b)

F 可以化成一个面积分,而当 Δx_{μ} 和 $\frac{\partial\Delta x_{\mu}}{\partial x_{\sigma}}$ 在边界上为零时,F 也等于零。

[37] **适应坐标系** 我们再来研究我们的连续统,其中有一个区域Σ,对于所有坐标都是有限的坐标系,我们称这个坐标系为 K。从这个坐标系出发,我们想象有坐标系 K',K''等,它们都依次彼此无限接近,而且在边界上 Δx_{μ} 和 $\frac{\partial\Delta x_{\mu}}{\partial x_{\alpha}}$ 都等于零。我们把所有这些坐标系称为"具有重合边界条件的坐标系",在这个坐标系 K,K',K'',……的整体中,对于每一对相邻的坐标系之间的每一个无穷小坐标变换,有

$$F=0,$$

所以,代替(65)我们有

[38]
$$\frac{1}{2}\Delta J=\sum_{\mu}\int d\tau\Delta x_{\mu}B_{\mu}. \tag{66}$$

在重合边界条件的坐标系统中,有一些坐标系的 J 值与邻近的坐标系的具有相同边界条件的 J 值相比达到极值,我们把这些坐标系称为"与引力场相适应的坐标系"。对于这些适应坐标系来说,根据(66)式,下列方程成立

$$B_{\mu}=0. \tag{67}$$

因为在区域Σ之内 Δx_{μ} 可以自由选取。

例过来讲,(67)是该坐标系与引力场适应的充分条件。 114

从今以后我们用只写在适应坐标系中的引力场的微分方程,这就避免了§13 中所说的困难。在只用适应坐标系的条件之下,不再允许区域Σ之外的给定的坐标系以任意的方式向其内部扩展。

§ 14. H 张量 [39]

方程(65)导致一条对于整个理论具有根本重要性的定理。如果我们把引力场的 $g^{\mu\nu}$ 作一个无穷小的改变，即把 $g^{\mu\nu}$ 换成 $g^{\mu\nu}+\delta g^{\mu\nu}$，而 $\delta g^{\mu\nu}$ 在 Σ 的边界邻近地带为零，这时 H 将变为 $H+\delta H$，J 将变为 $J+\delta J$。我们现在要求：不管 $\delta g^{\mu\nu}$ 选择怎样的变化，只要坐标系(K_1 和 K_2)对于变化前的引力场是适应坐标系，下列方程

$$\Delta\{\delta J\}=0 \tag{68}$$

永远成立。这就是说，在适应坐标系的限制之下，δJ 是一个不变量。

为了证明这一点，我们想象，$\delta g^{\mu\nu}$ 是由两部分构成的

$$\delta g^{\mu\nu}=\delta_1 g^{\mu\nu}+\delta_2 g^{\mu\nu}, \tag{69}$$

式中两部分的变分是这样选择的：

a. $\delta_1 g^{\mu\nu}$ 是这样取的，即坐标系 K_1 不仅对于 $g^{\mu\nu}$ 的引力场(原来的引力场)是适应坐标系，而且对于 $g^{\mu\nu}+\delta g^{\mu\nu}$ 的引力场(变化后的引力场)也是适应坐标系。这就是说不仅要求方程

$$B_\mu=0$$

成立，也要求方程

$$\delta_1 B_\mu=0 \tag{70}$$

成立。换句话说，$\delta_1 g^{\mu\nu}$ 不是彼此独立的，而在它们之间存在 4 个微分方程。

b. $\delta_2 g^{\mu\nu}$ 要求不改变引力场即可得出。即只对坐标系做变分得出，即只在区
115 域 Σ 中那些 $\delta g^{\mu\nu}$ 不等于零的地方(分区域)进行。这样的变分取决于 4 个互相独立的函数(坐标的变分)。显然，一般说来，$\delta_2 B_\mu\neq 0$。

因此，这两个变分的叠加取决于

$$(10-4)+4=10$$

个互相独立的函数，因而是与 $\delta g^{\mu\nu}$ 的任意的变分等价的。只要我们分两部分变分证明了方程(68)，我们的定理的证明就成功了。

变分 $\boldsymbol{\delta_1}$ 的证明 对(65)的 δ_1 变分我们可以直截了当地得到

$$\frac{1}{2}\Delta(\delta_1 J)=\int \mathrm{d}\tau \sum_\mu (\Delta x_\mu \delta_1 B_\mu)+\delta_1 F. \tag{65a}$$

因为在 δ_1 变分中，量 $g^{\mu\nu}$ 及其所有导数在 Σ 的边界上都等于零，所以根据(65b)$\delta_1 F$ 也等于零，因为它可以化为一个面积分。

考虑到这一点并利用(70)，方程(65a)成为下列关系式

$$\Delta(\delta_1 J)=0. \tag{68a}$$

变分 δ_2 的证明 变分 $\delta_2 J$ 等价于边界坐标不变情况下对坐标的无限小变分。因为坐标系是对于不变的引力场的适应坐标系，由适应坐标系的定义知

$$\delta_2 J=0.$$

其次，我们假设引力场对于坐标系 K_1 的变分是 δ_2 变分，于是有

$$\delta_2(J_1)=0.$$

如果这一变分对于 K_2 也是一个 δ_2 变分，稍后我们将证明这一点，那么我们对于 K_2，也有类似的方程，即

$$\delta_2(J_2)=0.$$

于是，欲证明的方程可用减法得出

$$\delta_2(\Delta J)=\Delta(\delta_2 J)=0. \tag{68b}$$

我们需要证明，我们正在考虑的变分对于 K_2，也是一个 δ_2 变分。我们用记 116
号 G_1 和 G_2 分别表示对 K_1 和 K_2 的未改变的张量 $g^{\mu\nu}$；同样，将对于 K_1 和 K_2 变化了的张量 $g^{\mu\nu}$ 用记号 G_1^* 和 G_2^* 表示。令坐标变换 T 将 G_1 变为 G_2，也将 G_1^* 变为 G_2^*，它的逆变换是 T^{-1}，再令坐标变换 t 把 G_1 变为 G_1^*。这样一来，G_2^* 可以由 G_2 开始，经过一系列坐标变换得到。

$$T^{-1}-t-T,$$

这一系列坐标变换也是一个坐标变换。于是，我们证明了，我们正在研究的 $g^{\mu\nu}$ 的变分，也是一个对于 K_2 的 δ_2 变分。

我们欲证明的方程(68)，通过(68a)和(68b)最后得到了证明。

通过对于定理的证明，我们导出了有一个 10 个分量的复形的存在，如果我们限于适应坐标系，则这个复形具有张量的性质。根据(61)式，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}J &= \delta\left\{\int H\sqrt{-g}\,\mathrm{d}\tau\right\}\\ &= \int \mathrm{d}\tau \sum_{\mu\nu\sigma}\left\{\frac{\partial(H\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}+\frac{\partial(H\sqrt{-g})}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\delta g_\sigma^{\mu\nu}\right\}.\end{aligned}$$

利用 $\delta g_\sigma^{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\delta g^{\mu\nu})$，进行分部积分，考虑到 $\delta(g^{\mu\nu})$ 在边界上为零，上式成为

$$\delta J=\int \mathrm{d}\tau\sum_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\left\{\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}-\sum_\sigma\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\right)\right\}. \tag{71}$$

现在我们已经证明了，在适应坐标系的限制之下，δJ 是一个不变量。由于 $\delta g^{\mu\nu}$ 只需在一个无穷小的区域内不为零，又因为$\sqrt{-g}\,\mathrm{d}\tau$ 是一个标量，这个积分除以$\sqrt{-g}$之后仍是一个不变量，即下量是一个不变量。

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum \delta g^{\mu\nu}\mathfrak{G}_{\mu\nu}, \tag{72}$$

式中

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu}=\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}-\sum_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\left(\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}}\right). \tag{73}$$

然而，$\delta g^{\mu\nu}$和$g^{\mu\nu}$一样都是反变张量，而$\delta g^{\mu\nu}$之间的比例可以是任意的，由此得出，在适应坐标系的限制和坐标替换之下

$$\frac{\mathfrak{G}_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}$$

117 是一个协变张量，而$\mathfrak{G}_{\mu\nu}$**本身是一个相应的协变 V 张量**，而且根据(73)，**是一个对称张量**。

§ 15. 场方程的推导

人们可以期望，张量$\mathfrak{G}_{\mu\nu}$应当在我们寻找的引力场方程中起根本的作用，并希望引力场方程能够取代牛顿理论中的泊松方程。在§13和§14的讨论之后，人们只能要求所要的方程，连同张量$\mathfrak{G}_{\mu\nu}$只对适应坐标系是协变的。我们所寻找的方程应该在张量$\mathfrak{G}_{\mu\nu}$和$\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$之间有很强的关联，因为我们已经见到，根据(42a)，能量张量$\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$对于引力场对物质的作用是具有决定性的。因此，很自然地希望所要的方程为

$$\mathfrak{G}_{\sigma\tau}=\kappa\,\mathfrak{T}_{\sigma\tau}. \tag{74}$$

这里κ是一个普适常数，$\mathfrak{T}_{\sigma\tau}$是一个对称的协变 V 张量，它与混合能量张量$\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$的关系由下式决定

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{T}_{\sigma\tau}&=\sum_{\nu}g_{\nu\tau}\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}\\ \mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}&=\sum_{\tau}\mathfrak{T}_{\sigma\tau}g^{\nu\tau}_{\text{resp.}}\end{aligned}\right\}. \tag{75}$$

决定函数 H 在我们还没有定出函数 H 之前，我们所寻找的方程还不能完全确定。目前我们只知道 H 只单独地取决于$g^{\mu\nu}$和$g_{\sigma}^{\mu\nu}$，而且是一个**线性**变换下的标量。[1] H 所需满足的进一步的条件可按下述方法求出。

在(42a)中，如$\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$是在所研究的区域中**所有**物质过程的能量，则功密度 V 四矢量($\mathfrak{K}_{\sigma}$)为零。那时方程(42a)指出，物质过程的能量张量$\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$的散度为零，

118 而且根据(74)，混合张量$\mathfrak{G}_{\sigma\tau}$或者由它形成的混合 V 张量$\mathfrak{G}_{\sigma}^{\nu}$的散度也等于零。因此，每一个引力场都应满足[见(41b)和(34)]

1)如果没有由§14引出的线性的限制，我们将得不出B_{μ}的表式(65a)。如果不用这一限制，下面正文的讨论将不成立，这一事实就是引入这一限制的验证。

$$\sum_{\nu\tau}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\tau\nu}\mathfrak{G}_{\sigma\tau})+\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\mathfrak{G}_{\mu\nu}=0.$$

利用(73)和(65a),这一关系可以改写成

$$\sum_{\nu}\frac{\partial S_\sigma^\nu}{\partial x_\nu}-B_\sigma=0, \tag{76}$$

式中

$$S_\sigma^\nu=\sum_{\mu\tau}\left(g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}}+g_\mu^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\mu^{\sigma\tau}}+\frac{1}{2}\delta_\sigma^\nu H\sqrt{-g}-\frac{1}{2}g_\sigma^{\mu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_\nu^{\mu\tau}}\right) \tag{76a}$$

[40] 式中的 δ_σ^ν 当 $\sigma=\nu$ 时等于 1,当 $\sigma\neq\nu$ 时等于零。

如果已知 $\mathfrak{T}_{\sigma\tau}$,则可利用(74)式中的 10 个方程定出 10 个函数 $g^{\mu\nu}$。另外,还必须满足(67)式中的 4 个方程,因为坐标系应该是适应坐标系。因此我们拥有方程数目要超过所求的函数数目。这只有一个可能,就是这些方程不是彼此独立的。我们必须确定,满足方程(74)就意味着也满足方程(67)。看一下(76)和(76a)就会看出,如果 S_σ^ν(它和 H 一样是 $g^{\mu\nu}$ 和 $g_\sigma^{\mu\nu}$ 的函数)对于各种指标组合都恒等于零的话,就可以达到这一点。因此我们必须选择 H,要求它符合下列条件

$$S_\sigma^\nu\equiv 0. \tag{77}$$

我不能提出形式上的理由,但我进一步要求 H 是 $g_\sigma^{\mu\nu}$ 的二次齐次积分函数。在这种情况下,H 可以完全确定,只差一个常数因子。因为 H 是一个线性变换下的标量,它一定是[1](考虑到我们刚刚作的假设)下列五个量的线性组合

[41]

$$\sum g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_\tau};\quad \sum g^{\sigma\sigma'}g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}g_{\mu'\nu'}\frac{\partial g^{\mu'\nu'}}{\partial x_{\sigma'}};$$

{18}

$$\sum g^{\sigma\sigma'}\frac{\partial g^{\sigma\mu}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g^{\sigma'\nu}}{\partial x_\nu};\quad \sum g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'}g^{\tau\sigma'}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\tau}\frac{\partial g^{\mu'\nu'}}{\partial x_{\sigma'}};$$

$$\sum g_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x_\tau}\frac{\partial g^{\beta\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

最后,条件(77)引导我们令 H(暂且不谈那个常数因子)与上面量中的第 4

[42] 个相等。因此我们考虑到(35),并自由使用该常数,令[2] 119

1) 证明很简单,但牵涉较多,因此我删去了这个证明。

2) 用引力场的 $\Gamma_{\sigma\tau}^\nu$ 来表示 H[见(46)],我们得

$$H=-\sum_{\mu\rho\tau\tau'}g^{\tau\tau'}\Gamma_{\mu\tau}^\rho\Gamma_{\rho\tau'}^\mu.$$

$$H=\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\tau\rho} g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial g^{\tau\rho}}{\partial x_{\beta}}. \tag{78}$$

我们必须证明，这样选择的 H 满足(77)。利用关系

$$\mathrm{d}g = g\sum_{\sigma\tau} g^{\sigma\tau}\mathrm{d}g_{\sigma\tau} = -g\sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau}\mathrm{d}g^{\sigma\tau}$$

$$\mathrm{d}g_{\alpha\beta} = -\sum_{\mu\nu} g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\mathrm{d}g^{\mu\nu}.$$

由(78)可得

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\tau} g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} = \frac{1}{2}H\sqrt{-g}\delta_{\sigma}^{\nu} + \frac{1}{4}\sqrt{-g}\sum_{\mu\mu'\tau} g^{\nu\tau}\frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_{\sigma}}\frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_{\tau}} - \\
&\qquad\qquad \frac{1}{2}\sqrt{-g}\sum_{\rho\rho'\kappa} g^{\rho\rho'}\frac{\partial g_{\sigma\kappa}}{\partial x_{\rho}}\frac{\partial g^{\nu\kappa}}{\partial x_{\rho'}}, \\
&\sum_{\mu\tau} g_{\mu}^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu}^{\sigma\tau}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\sum_{\rho\rho'\kappa} g^{\rho\rho'}\frac{\partial g_{\sigma\kappa}}{\partial x_{\rho}}\frac{\partial g^{\nu\kappa}}{\partial x_{\rho'}}, \\
&\frac{1}{2}\sum_{\mu\tau} g_{\sigma}^{\mu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\nu}^{\mu\tau}} = \frac{1}{4}\sqrt{-g}\sum_{\mu\mu'\tau} g^{\nu\tau}\frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_{\sigma}}\frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_{\tau}}.
\end{aligned}\right\} \tag{79}$$ [43]

从这一关系即可得出上面的要求。 {19}

不必使用我们的物理知识，只用了纯粹形式的方式，我们就得到了一个相当与众不同的场方程。为了把它们写成一种更为明显的形式，我们将(74)乘以 $g^{\nu\tau}$ 并对指标 τ 求和，考虑到(73)，得

$$\kappa\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu} = \sum_{\tau\alpha} g^{\nu\tau}\left(\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left[\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha}^{\sigma\tau}}\right]\right) \tag{80}$$ [44]

或者

$$-\sum_{\alpha\tau}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha}^{\sigma\tau}}\right) = \kappa\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu} + \sum_{\alpha\tau}\left(-g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} - g_{\alpha}^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha}^{\sigma\tau}}\right). \tag{80a}$$ [45]

由于我们的坐标系是适应坐标系，根据(67)和(65a)，下式也成立

120

$$\sum_{\alpha\tau\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha}^{\sigma\tau}}\right) = 0.$$

因此，考虑到(80a)，下式也同样成立。

$$\sum_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\left\{\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu} + \frac{1}{\kappa}\sum_{\alpha\tau}\left(-g^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}} - g_{\alpha}^{\nu\tau}\frac{\partial H\sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha}^{\sigma\tau}}\right)\right\} = 0. \tag{80b}$$ [46]

利用(78)、(79)和(46)，可将(80a)和(80b)换成下列各式

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma\beta}^{\nu}) = -\kappa(\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu}), \tag{81}$$

$$\sum_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}(\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}+\mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu})=0, \tag{42c}$$

式中

$$\Gamma_{\sigma\beta}^{\nu}=\frac{1}{2}\sum_{\tau}g^{\nu\tau}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_{\beta}}, \tag{81a}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu}&=-\frac{\sqrt{-g}}{4\kappa}\sum_{\mu\mu'\rho\tau}\left(g^{\nu\tau}\frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_{\sigma}}\frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_{\tau}}-\frac{1}{2}\delta_{\sigma}^{\nu}g^{\rho\tau}\frac{\partial g_{\mu\mu'}}{\partial x_{\rho}}\frac{\partial g^{\mu\mu'}}{\partial x_{\tau}}\right)\\&=\frac{\sqrt{-g}}{\kappa}\sum_{\mu\rho\tau\tau'}\left(g^{\nu\tau}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\rho\tau}^{\mu}-\frac{1}{2}\delta_{\sigma}^{\nu}g^{\tau\tau'}\Gamma_{\mu\tau}^{\rho}\Gamma_{\rho\tau'}^{\mu}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{81b}$$

方程(80),连同方程(81a)和方程(81b)就是引力场的微分方程。根据§10的讨论,方程(42c)表示物质和引力场整体的动量和能量守恒定律。$\mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu}$ 是属于引力场的动量和能量,在物理的类比上,它是能量张量(张量)的分量 $\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$。应该强调,$\mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu}$ 并不对于任意允许的变换具有张量协变性,只对于**线性**变换才有。尽管如此,我们还是把($\mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu}$)称为引力场的能量张量。同样的情况也适用于引力场的分量 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}$。

方程组(81)尽管形式复杂,但可以对其作物理解释。方程的左边表示引力场的一种散度,而其右边则说明这是由总能量张量的分量所引起的。一个非常重要之点是下列结果,引力场的能量张量本身也是产生引力场的因素,与物质的能量张量一样。

§16. 对理论基础的批评性评述 121

我们这里所导出的理论的一个实质是,原来的相对论在无穷小情况下成立。只要我们证明了在适当选择了实数坐标之后,量 $g_{\mu\nu}$ 在任意给定的点取值

$$\begin{array}{cccc}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}$$

这一点就很清楚了。这就是当二次曲面

$$\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\xi_{\mu}\xi_{\nu}=1,$$

总是(对于在连续统中出现的每一组 $g_{\mu\nu}$)有三个虚轴和一个实轴的情况。如果 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 是曲面的四个半轴倒数的平方,则四次方程

$$|g_{\mu\nu}-\lambda\delta_{\mu}^{\nu}|=0=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)(\lambda_4-\lambda)$$

成立,因而有

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=g.$$

为了避免 $g^{\mu\nu}$ 成为无穷大，我们必须要求 g 在任何地方也不能为零。因为 $g^{\mu\nu}$ 等于 $g_{\mu\nu}$ 行列式的子式除以 g。这时没有一个 λ 能等于零。因此，在连续统中只要有一点是 $\lambda_1<0,\lambda_2<0,\lambda_3<0,\lambda_4>0$，那么所有的点都是如此。因此，在我们的连续统中，一切点的附近的时空特性都和原来的相对论一样。用数学语言来说就是，从一点发出的四个互相“正交”的线元中，总有一个是“类时”的，而其他三个是“类空”的。

然而，这一点还不能建立 x_ν **的坐标系**的类空或类时关系。在通常的相对论中，每一个线元**只有**当 dx_4 不为零时才是类时的。这同样的提法对于我们的适应坐标系就不对了。考虑宇宙的充分大的一部分，就很容易想象没有一个坐标
122 轴可以认为是“时间轴”，除了说一个轴上的线元部分是类时的，另一部分是类空的之外，没有更好的说法。那么世界的四个维的等价性不仅是**形式**的，而且是**完全**的。在目前，人们必须把这个问题看成一个还未解决的问题。 [47]

现在还要提出一个更为深远的，带有根本意义的问题，而我没有能力回答这个问题。在通常的相对论中，每一条描写质点运动的线，即每一条只含有类时线元的线，必须是不闭合的。其原因是这样的线永远不含有 dx_4 为零的元素。在目前我们发展的理论中，同样的话就不能说了。因此，想象一个点的运动，描写它的运动的四维曲线几乎是一个封闭曲线也是先验地可能。在这种情况下，同一个质点在一个任意小的时空区域中，以**看起来互相独立的几个表象**而存在。这一点远远超出了我的最活跃的物理想象之外。然而我还不能证明，可以从此处发展的理论中排除这种曲线的出现。 [48]

因为在这些自白之后，我无法帮助读者，只能看着读者脸上的同情的微笑。关于物理基础的流行观点，我不能忍不住做下列的评述。在 Maxwell 之前，自然界定律对空间的关系原则上都是积分定律。这就是说，在基本定律中只出现相距有限的两个点的距离。这种描写自然界的基础是 Euclid 几何学。这种几何学的结论都起源于几何公理，在这方面，它没有任何的物理内容。然而，当添加了下列说法之后，即与刚体的位置无关，一个“刚体”中的两个点间有一个确切的相互距离，几何学就成为一种物理的科学了。加上这一修正之后，修正了的几何学定理(在物理的意义上)事实上要么是正确的，要么是不正确的。正是在这种扩展意义上的几何学构成了物理学的基础，从这一角度来看，几何学的那些定理，只要它们处理**有限范围**的两点之间的距离，它们就应被看作是物理学中的积分定律。

自从 Maxwell 以来，由于他的工作，物理学经历了一场根本的改革，这场变革到了这种程度，下列要求逐渐占了上风：有限范围内两点之间的距离不能出

现在基本定律中，现在"局域作用"的理论已经取代"超距作用"理论。在这一进
程中人们忘记了 Euclid 几何学中——当将其用于物理学中的时候——也包含 123
着物理定理。从物理的角度来看，它和牛顿质点力学中的积分定律处于同等地位。我认为这是一种不协调的立场，我们应当从这种立场中解脱出来。

解脱的企图首先再次让我们代替坐标，使用任意参数来描写我们周围的四维连续统。我们又重新达到了我们曾在本文 § B 和 § C 中的那种考虑，唯一不同的是，对于 $g_{\mu\nu}$ 和引力场的关系没有作出假设。但是，如果我们坚持使用 Euclid 几何学（在上述的意义下），我们将不得不把本节所给出的方程换成另外一些由下述假设所导出的方程。可以选择坐标 x_ν 使得 $g_{\mu\nu}$ 不依赖于 x_ν。这样一来，我们将被引导到要求我们在 § 9 发展的 Riemann-Christoffel 张量的分量为零。用这种方法，Euclid 几何学中的定理都将变成微分定律。然而，当这样表述事情时，人们意识到严格植入"局域作用"理论，既不是最简单的，也不是头脑中几乎最有可能出现的方案。

E. 对于所得普遍定律的物理意义的若干意见

在推导这些定律时，只要可能，我一直让自己注意形式的方面。为了使这一工作不致于太不完整，现在，我们集中精力于所得结果的物理方面。为了不致被复杂的数学闷死，我们只考虑近似情况。

§ 17. 近似方程的建立，从不同角度观察

人们可以看到原创的相对论方程的应用范围这么深远，在可以感受的时空 124
区域中 $g^{\mu\nu}$ 差不多可以看成是常数。因此，我们令

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu 0} + h_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} &= g_0^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \end{aligned}\right\}, \tag{82}$$

式中 $g_{\mu\nu 0}$ 和 $g_0^{\mu\nu}$ 取下值

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right\}. \tag{82a}$$

$h_{\mu\nu}$ 和 $h^{\mu\nu}$ 被认为是一级无穷小量。而忽略掉二级无穷小，它们服从下列关系

$$h^{\mu\nu}=-h_{\mu\nu}. \tag{83}$$

令时间坐标为纯虚数(Minkowski 也这样做)。据此,我们得到$(g_{44})_0=g_0^{44}=-1$,同时也得到方程组在线性正交变换下的协变性。选择时间坐标为虚数使得 g_{14}, g_{24}, g_{34} 以及 $\sqrt{-g}$ 都成为虚数。但是方程仍然成立,因为人们可以用线性变换从实的时间变量变换为虚的时间变量。像在(82a)式所做的那样,把数值固定,就可以在所考虑的区域中,使自然测量的长度与坐标长度在一阶无穷小的范围内互相一致。

现在我们把(81)和(81a)换成另外两个式子,其中二级和二级以上的无穷小都已被忽略

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial^2 h_{\sigma\nu}}{\partial x_\alpha^2}=i\kappa\mathfrak{T}_\sigma^\nu, \tag{84}$$

$$\Gamma_{\sigma\beta}^\nu=-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{\sigma\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{84a}$$

现在,我们再引入一个关于近似的新的假设,即在 $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ 中只考虑物质所受的体积力有关的各项,而忽略与表面力有关的项。在这些假设之下,(48)表示能量张量,因为根据(48)$\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ 一直保持有限。如果我们忽略(48)中的一次小量,我们已经得到一个影响深远的近似。这样,我们得到

125

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu=-i\rho_0\frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}s_0}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s_0}. \tag{84b}$$

代入到(84)中,并将左边写成$\Box h_{\sigma\nu}$,得

$$\Box h_{\sigma\nu}=\kappa\rho_0\frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}s_0}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s_0}. \tag{85}$$

在此方程中 x_1, x_2, x_3 是空间坐标,$x_4=it$ 是(虚的)时间坐标,而

$$\mathrm{d}s_0=\mathrm{d}t\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}x_1^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}x_2^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}x_3^2}{\mathrm{d}t}\right)}$$

是 Minkowski 的"原时"。

在我们把(81)换成近似方程之后,可以看出,它们与牛顿引力理论的 Poisson 方程的相似性。我们现在把物质方程(50b)和(51)换成近似方程。如果将(51)换成

$$\mathrm{I}_\sigma=-m\frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}s_0}. \tag{86}$$

可得到最粗略的近似。引入大小为 q 的三维速度矢量 $\mathfrak{q}$,这意味着方程

$$\left.\begin{aligned}-\mathbf{I}_1&=\frac{m\ \mathfrak{q}_x}{\sqrt{1-q^2}}\\-\mathbf{I}_2&=\frac{m\ \mathfrak{q}_y}{\sqrt{1-q^2}}\\-\mathbf{I}_3&=\frac{m\ \mathfrak{q}_z}{\sqrt{1-q^2}}\\-\mathbf{I}_4&=i\,\frac{m}{\sqrt{1-q^2}}\end{aligned}\right\}. \tag{86a}$$

选择虚的时间坐标导致能量不是像(52)那样表示为 $\mathbf{I}_4$，而是 $i\mathbf{I}_4$。

在不存在外力时，代替(50b)的是由(84b)得到的

[49]

$$\frac{\mathrm{d}(-\mathbf{I}_\sigma)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\sum_{\nu\tau}\frac{\partial h_{\nu\tau}}{\partial x_\sigma}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t}(-\mathbf{I}_\tau). \tag{87}$$

方程(85)、(87)、(86)在一阶近似下代替了牛顿理论。

牛顿理论作为一种近似　我们把速度 $\mathfrak{q}$ 看成一个无穷小量，并只保留方程 126
中含有 $\mathfrak{q}$ 的分量的最低次的项，就达到了这一近似。代替(85)式我们得到下列方程

$$\left.\begin{aligned}&\Box h_{\sigma\nu}=0\quad(\text{只要不是 }\nu=\sigma=4)\\&\Box h_{44}=-\kappa\rho_0\end{aligned}\right\} \tag{85a}$$

而代替(87)得

$$\frac{\mathrm{d}(m\ \mathfrak{q})}{\mathrm{d}t}=\frac{m}{2}\operatorname{grad} h_{44}. \tag{87a}$$

从(85a)我们可以得出结论(在无限远处适当的边界条件之下)说，除了 h_{44} 之外所有的 $h_{\sigma\nu}$ 都等于零。从(87a)我们可以得出结论，$\left(\frac{-h_{44}}{2}\right)$ 起着引力势的作用。将此式称为 φ，可得方程

$$\left.\begin{aligned}\Box\varphi&=\frac{\kappa}{2}\rho_0\\\frac{\mathrm{d}(m\ \mathfrak{q})}{\mathrm{d}t}&=-m\operatorname{grad}\varphi\end{aligned}\right\}, \tag{88}$$

[50] 只要与 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ 相比，$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ 可以忽略时，此式与牛顿理论一致。

方程(88)的第一式写成牛顿理论为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=4\pi K\rho_0.$$

因此，我们得到

$$\frac{\kappa}{2}=4\pi K.$$

如果用秒作为时间单位，K 的值为 6.7×10^{-8}，若取光秒为时间单位，K 值为 $(6.7\times10^{-8})/(9\times10^{20})$，因此我们得到

$$\kappa=8\pi\cdot\frac{6.7\times10^{-8}}{9\times10^{20}}=1.87\times10^{-27}. \tag{89}$$

对于相邻的两个时空点自然测得的距离，牛顿近似为

$$ds^2=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu=-dx^2-dy^2-dz^2+(1+2\varphi)dt^2.$$

127 对于纯空间距离，我们得

$$-ds^2=dx^2+dy^2+dz^2。$$

在这里，坐标长度也等于自然测得的长度。在这里，在我们所取的精度下，Euclid几何学是成立的。对于纯时间距离，我们有

$$ds^2=(1+2\varphi)dt^2$$

或者

$$ds=(1+\varphi)dt.$$

自然测得的时间长度 ds 属于时间长度$\dfrac{ds}{(1+\varphi)}$，时钟改变率用$(1+\varphi)$来度量，而且随引力势的增大而增加。由此，我们得出结论说，由太阳发出的光的谱线和由地面发出的光的相应的谱线相比，呈现出红移，移动量为

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=2\times10^{-6}.$$ [51]

对于光线$(ds=0)$，有

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt}=1+\varphi.$$

因此，光速与其方向无关，但随引力势而变，从而，光线在引力场中将是一个曲线。

最后，我们计算一下质点的动量和能量。为此我们不用(§5a)，而用严格的方程(51)，如果对 $g_{\mu\nu}$用量

$$\begin{array}{ccccc}
-1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & -1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & -1 & +h_{44}
\end{array}$$

和对 dx_ν 用量

$$dx \qquad dy \qquad dz \qquad i dt$$

代入其中,进一步取 h_{44} 为其一级小量,并将 $\left(\frac{-h_{44}}{2}\right)$ 换成 φ,而且在速度中略去二级以上的项,得

$$-\mathbf{I}_1=m(1-\varphi)q_x$$ 128

……

$$i\mathbf{I}_4=m\left[(1+\varphi)+\frac{1}{2}(1-\varphi)q^2\right].$$

因为 $(-\mathbf{I}_1)$ 是质点动量的 X 分量,$(i\mathbf{I}_4)$ 是质点的能量,人们得出结论说,惯性质量随着引力势的减少而增加。这一点与这里的解释的精神符合得很好。因为在我们的理论中没有关于空间的独立的物理量,一个质量的惯性就是这个质量与其周围的所有其他质量相互作用的结果,因此,周围其他所有质量越靠近,即 φ 越小,这个质量惯性就越大。

发表在《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1914):1030—1085,1914 年 10 月 29 日收到,1914 年 11 月 26 日发表。 129

[1]关于爱因斯坦与 Marcel Grossmann 在广义相对论方面的研究以及后来的发展见 *Einstein* 和 *Grossmann 1913*(第四卷,文件 13),*1914 b*(文件 2)和 *Einstein 1913 c*(第四卷,文件 17);关于历史的讨论也见卷四,编者按"爱因斯坦论引力和相对论:与 Marcel Grossmann 合作",pp. 294—301。在 1915 年的一封信中,爱因斯坦宣称 Grossmann"对这些结果没有实质性的贡献"("trug aber materiell nichts zu den Ergebnissen bei."1915 年 7 月 15 日爱因斯坦致 Arnold Sommerfeld 的信)。

[2]关于本文的历史讨论,见 *Norton 1984* 以及 *Cattani* 和 *De Maria 1989*。

[3]也见 1915 年 1 月 23 日爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信中,包括非线性变换所做的物理和认识论原因的讨论。

[4]关于 Mach 的思想对爱因斯坦的思考所起作用的详情,见 *Mach 1897*,2、6 两章。还可见 *Einstein 1916 c*(文件 29),注 4。

[5]这是等效原理的一种形式,最先由爱因斯坦在 1907 年用"公式表示出来(见 *Einstein 1907j*[第二卷,文件 47],§ 17)。在爱因斯坦对相对论引力的研究中,它起了重要的、启发性的作用(关于讨论,见第四卷,编者按,"爱因斯坦论引力和相对论:静态场",pp. 122—128)。进一步的说明见 *Einstein 1916p*(文件 40)。

[6]"idt"应为"it"。

[7]上标 α 应为下标。

[8]见 *Ricci* 和 *Levi-Civita 1901*。

[9]导数应为偏导数。

[10]"(2)"应为"(20)"。

[11]此处和下面的方程中下标"κ"应为"k"。

[12]上标"$\lambda\alpha$","$\kappa\beta$","$\lambda\beta$"和"$\kappa\alpha$"应为下标。

[13]"$F_{\alpha\beta}$"应为"$F^{\alpha\beta}$"。

[14]“Linse”应为“Linie”。

[15]注意方程的编号(23),(24)和(23a)在本文中使用了两次。

[16]见 *Christoffel 1869*, p. 48。

[17]见 *Christoffel 1869*, p. 49。

[18]见 *Christoffel 1869*, p. 57。

[19]“α_{-1}”应为“α_{l-1}”。

[20]在第二个求和号中,第二项中两个导数间应有一个负号。

[21]像在下面各项中对 σ 和 τ 的求和一样,在右边第二和第三项中,暗含对 τ 求和。

[22]暗含对 σ 求和。

[23]按照 Weyl,V 张量后来被命名为“张量密度”(“Tensordichten.”*Weyl 1918b*)。

[24]关于 Max Laue 的公式,例如见 *Laue 1911*,爱因斯坦在其一篇未发表的论狭义相对论的早期手稿中,使用了 Laue 的方法。

[25]“$\sigma=1$”应为“$\sigma=2$”,反之亦然。

[26]“(42)”应为“(42*a*)”。

[27]在方程(46)中“$g^{\mu\nu}$”应为“$g_{\mu\nu}$”。早期爱因斯坦就用量 $g_{\mu\nu}$ 代表引力场的分量(见 *Einstein 1914e*(第四卷,文件 25), p. 177)。

[28]“(44)”应为“(42*a*)”。

[29]“(44)”应为“(42*a*)”。

[30]“dx_2”应为“dx_1”。

[31]在此方程和下面一个方程中“$1+p+P$”应为“$1+p\rho_0^{-1}+P$”。

130 [32]避免使用对偶 6 矢量对电磁方程所做的另一种处理,见 *Einstein 1916b*(文件 27)。

[33]这个参考文件是关于 p. 1044 上方程(24)的。

[34]在 § 12 中提出的论证被称为“空穴论证”。较早的一些说明已在 *Einstein 1914d*(第四卷,文件 26),*Einstein 1914e*(第四卷,文件 25)和 *Einstein* 和 *Grossmann 1914b*(文件 2)中给出。关于历史的讨论见 *Norton 1984* sec. 5,*Stachel 1989* sec. 3 和第四卷编者按,爱因斯坦论引力和相对论:与 Marcel Grossmann 合作”, pp. 297—298。也见爱因斯坦于 1915 年 12 月 26 日致 Paul Ehrenfest 的信中,下面第三节末爱因斯坦对得出结论的收回。

[35]在 *Einstein Grossmann 1913*(第四卷,文件 13)中,考虑了对线性变换的限制。在 *Einstein* 和 *Grossmann 1914b*(文件 2)中证明了爱因斯坦与 Grossmann 理论在更广泛的一组变换下是协变的。在本节中发展起来的论证在下一篇文章做了详细说明。

[36]1915 年秋,爱因斯坦认识到假设 H 在线性变换下不变是一种错误,而且使用 p. 1057 上方程(77)去确定 H 也是错误的(见爱因斯坦 1915 年 10 月 12 日致 H. A. Lorentz 的信和 *Einstein 1915f*(文件 21), p. 778;也见 *Einstein 1916o*(文件 41),方程(13),由它得出的单独 H 的线性就意味着条件(77))。他后来把这个见解当作用于修改他的引力理论的关键步骤之一(见爱因斯坦于 1915 年 11 月 28 日致 Arnold Sommerfeld 的信,1916 年 1 月 1 日致 H. A. Lorentz 的信)。关于历史的讨论也见 *Norton 1984*, sec. 6 和 sec. 7。

[37]也见爱因斯坦 1915 年 1 月 23 日致 H. A. Lorentz 信中对本节剩余部分的论证的详细描述,它是对 Lorentz 1915 年 1 月 1 日和 23 日之间致爱因斯坦的一封信中引起异议的回答。

[38]原文中右边的负号应去掉;暗含对 μ 求和。

[39]在 § 14 中证明 p. 1073 上 $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$ 的张量特征的推理,后来被 Tullio Levi-Civita 在一系列致爱因斯坦

的信中批评。在他最初给 Levi-Civita 的回复中,爱因斯坦称这个证明是"以汗流成河为代价完成的理论的最重要的证明"("den wichtigsten, mit Strömen von Schweiss erkauften Beweis der Theorie."爱因斯坦 1915 年 3 月 5 日致 Tullio Levi-Civita 的信)。详情见第八卷中 1916 年 3 月到 5 月间爱因斯坦与 Levi-Civita 的通信;分析还可见 *Cattani* 与*De Maria 1989*。

在 1916 年 3 月 30 日致 David Hilbert 的信中,爱因斯坦暗示被 Hilbert 发现的本节中的一个错误,并且承认他在 p. 1073 上作的变分 δ 和导数的可交换性的假设是错误的(关于爱因斯坦对 Hilbert 批评的解释见 *Norton 1984* 注 62)。

[40]"$\pm$"应为"$\neq$"。

[41]在第二和第四式中"x'_{σ}"应为"$x_{\sigma'}$"。

[42]爱因斯坦后来认识到方程(77)仅表示 H 在线性变换下的不变性,而不能以方程(78)的形式确定 H,正如这里宣称的。还见注 36。

[43]在右边第一项前应当是一个负号。

[44]在圆括号中,两式之间丢了一个负号。

[45]在右边圆括号中,第二项的符号应为负号。

[46]左边第三项的符号应为负号。

[47]在 1916 年 1 月 17 日致 Lorentz 的信中,也提出了这个问题。

[48]在 1949 年 Kurt Gödel 证明了广义相对论容许包括封闭的类时曲线的解(见 *Gödel 1949*)。关于在这样的时空中因果律的讨论,见 *Geroch* 和 *Horowitz 1979*, pp. 232—243。

[49]"d_a"应为"d"。

[50]"$x\partial^2$"应为"∂x^2"。

[51]关于红移和下一个方程中光速的结果,两者都已出现在爱因斯坦论引力的第一篇文章中,*爱因斯坦 1911h*(第三卷,文件 23),在那里它们是由等效原理直接导出的,尝试测量这些效应方面的详情,见 *Einstein 1914k*(文件 3),注 4。

[高尚惠 译]
[吴忠超 校]

英译者增注:

{1}没有方程(5b)

{2}不少英文作者采用"钭对称"或作为"反对称"的同义语。

{3}不少英文作者采用"矢积"或"X 积"作为"外积"的同义语。

{4}不少英文作者采用"标积"或作为"内积"。

{5}已把"$\mu\pm\nu$"更正为"$\mu\neq\nu$"

{6}最右边项中的指标"$\sigma\nu$"已更正为"$\mu\nu$"。

{7}已更正为 $\sum\limits_{\alpha_l S}$。

{8}最右边项中的指标"α"已更正为"μ"。

{9}已把"$\partial(A_{\mu\nu}\sqrt{g}$"更正为"$\partial(A_{\mu\nu}\sqrt{g})$"。

{10}右边第 42 页中的$\frac{\partial \mathrm{A}_{\tau}}{\partial \mathrm{x}_{\mu}}$已更正为$\frac{\partial \mathrm{A}_{\mu}}{\partial \mathrm{x}_{\tau}}$。

{11}在原文中把(46)当作方程数目的第二次使用，与第一次使用无关，德文原文中这一小小的疏忽乃爱因斯坦引起的。

{12}已把“$d\mathrm{x}^3$”更正为“$d\mathrm{x}_3$”。

{13}已对 α 和 β 求和。

{14}已把“$d\mathrm{x}_{(\mu)}$”更正为“$d\mathrm{x}_{\mu}$”。

{15}已把 § $5a$ 更正为($5a$)。

{16}本行及后一行中的“I”已更正为“J”。

{17}已对 μ,α,σ 和 ν 加和。

{18}这五个量分别是：$\sum_{\mu\nu\sigma\tau} g^{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_{\tau}}$；$\sum_{\mu\nu\mu'\nu'\sigma\sigma'} g^{\sigma\sigma'} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} g^{\mu'\nu'} \frac{\partial g^{\mu'\nu'}}{\partial x_{\sigma'}}$；$\sum_{\sigma\sigma'\mu\nu} g_{\sigma\sigma'} \frac{\partial g^{\sigma\mu}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial g^{\sigma'\nu}}{\partial x_{\nu}}$；$\sum_{\mu\mu'\nu\nu'\sigma\sigma'} g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g^{\sigma\sigma'} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial g^{\mu'\nu'}}{\partial x_{\sigma'}}$；$\sum_{\alpha\beta\sigma\tau} g_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial g^{\beta\tau}}{\partial x_{\sigma}}$.

{19}右边$\sum$号后的项“$g^{\mu\tau}$”已更改为“$g^{\nu\tau}$”。

{20}在根号内的所有三个“$\mathrm{d}t$”均已更改为“$\mathrm{d}t^2$”。

131

10. 对 Alexander Brill《相对性原理：导论》的评论

[*Einstein 1914p*]

1914 年 11 月 27 日发表
载于《自然科学》2(1914)：1018。

对 Alexander Brill《相对性原理:导论》的评论

讨 论

132 **A. Brill:相对论原理** 相对论引言。B. G. Teybner 出版社 Leipzig 1914 年 [1]
第二版,33 页,定价:1.2 马克。

作者阐述了(原创的)相对论,主要对象是那些仅从形式上而不是从物理学角度了解相对论,对 Maxwell 和 Lorentz 电动力学一知半解,因而只能牵强附会地解释相对论基本关系的读者。可见,这本导论特别是给那些想不花费时间就学会这种理论的物理学家看的。除了(涉及刚体和钟表的)纯粹运动学关系式以外,只论述了质点问题。

爱因斯坦于 Dahlem

载于《自然科学》2(1914):1018。

133 [1]*Brill 1914*:Alexander von Brill(1842—1935)Tübingen 大学数学教授。

[周正安 吴 晔译校]

11. 对 H. A. Lorentz《相对性原理：三个讲演……》的评论 134

[*Einstein 1914q*]

1914 年 11 月 27 日发表

载于《自然科学》2(1914)：1018。

135 对 H. A. Lorentz《相对性原理:三个讲演……》的评论

H. A. Lorentz:相对论原理 在(德国)Haarlem 的 Teyler 基金会上所作的 [1] 三次讲演(德语)。由 W. H. Keesom 收集整理,B. G. Teubner 出版社 1914 年 Leipzig 版,52 页,定价:1.4 马克。

不少作者能够清楚简洁地阐述上述理论。但是读者们读到的几乎都是现成的结论,不能亲临其境地分享探索、发现和思想形成过程中的欢乐,很难对学者们选择这条道路,而不选择另外的道路的原因以及当时的环境有清新的认识。任何人,如果对相反的观点怀有浓厚的兴趣,都不能错过阅读这本小册子的机会。

在第一次讲座的报告中,Lorentz 概括地介绍了形成(原创的)相对论过程中的最重要事件,阐述了 Lorentz 变换及其在动力学上的应用(Lorentz 收缩、运动的钟、Doppler 原理、Fizeau 实验)。第二个报告论述的是真空电动力学协变性和物质点运动规律。他还说明,对牛顿万有引力应该做哪些修改,才能与(原创 [2] 的)相对论的要求保持一致,并探讨基本上切合实际经验的结论。他说,他们正在接近这种结论。报告用实例对系统的惯性质量和能量的相互关联作了说明。第三个报告论述的是广义相对论的基本问题。广义相对论的特征是,试图把相对性的假说拓展到非匀速运动上去。报告详尽地论述了促使人们以这种方式拓展这个理论的物理学原因,并为这样一种理论得出最通俗易懂的结论。在这个过程中,作者只讲述了对一级近似值的观测。因为,如果全面论述这个问题,就 [3] 超越了该著作的范围。

爱因斯坦于 Dahlem

136 载于《自然科学》2(1914):1018,发表于 1914 年 11 月 27 日。

[1]*Lorentz 1914b*,是 *Lorentz 1914a* 的译文。这是 1913 年 3 月作的讲演。

[2]Lorentz 在 p20—22 上提到了他对万有引力定律提出的修改意见,得出了可以被实验测试的结论(即直至第二阶的 Lorentz 不变量)。第一次实验观测出了水星的近日点偏移,根据 Lorentz 的理论,该偏移预计为每世纪 7.15 秒。这个数值远远小于观测值(引述的数值 44 秒)。第二个实验涉及木星的月食。其结果表明,牛顿的理论和 Lorentz 的修正理论是有区别的。

爱因斯坦没有就 Lorentz 在第二个讲义结尾时所要进行的讨论发表意见。那次讨论的主题是,是否存在一个优越的参考系。Lorentz 表示,他个人相信存在着这样一个具有某些以太实体性的参考系。在

Lorentz 与爱因斯坦的通信中，也讨论过同样的话题（参见 Lorentz1915 年 1 月 1 日至 23 日写给爱因斯坦的信，以及爱因斯坦 1915 年 1 月 23 日写给 Lorentz 的信；也可参见 *Kox 1988*：一场历史性的讨论）。

[3]这讨论的两次结论都涉及引力红移和引力光线偏折的问题。引力红移可由等效原理推出，光线偏折则由更定量的考虑导出。

[周正安　吴　晔译]
[吴忠超　校]

12. “关于 Anschütz 公司与 Sperry Gyroscope 公司之间诉讼案的专家意见”

关于 Anschütz 公司与 Sperry Gyroscope 公司之间诉讼案的专家意见 137

[1] (1915 年 2 月 6 日)

[p.1] 关于 Anschütz & Co. 与 Sperry Gyroscope Company 之间诉讼案的专家
[2] 意见。

1) 如果将一个任意放置并受到任意外力作用的旋转罗盘置于一个旋转系统(例如地球)上,或者从一个旋转系统出发去判断其运动,则该旋转罗盘的性能
[3] 特征如下所述:该旋转罗盘与以同样方式放置在一个不旋转系统上的旋转罗盘的性能相同。区别在于,有一个表观力矩作用于该旋转罗盘,该力矩试图使其轴(回转轴)与系统的旋转轴(例如地球自转轴)平行。这个表观力矩与作用于该旋转罗盘的其他力(外力),决定着平衡位置和回转轴的运动。

如果将旋转罗盘重新放置,使其轴不受除摩擦力以外的其他力,就能围绕垂
[p.2] 直线旋转,则其轴会始终自动位于子午线上;为了与所有的专利文件保持一致,我们把这样配置的旋转罗盘称为"子午线旋转罗盘"。

子午线旋转罗盘是由 Foucault 发明的。他的旋转罗盘的结构原理如图 1。

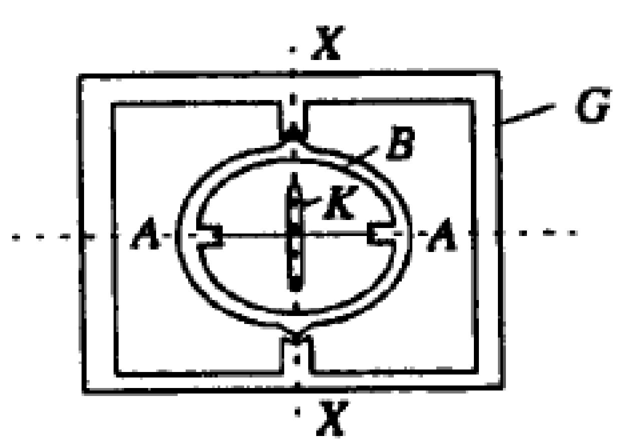


图 1

将旋转罗盘 K 的 $A-A$ 轴置于物体 B 中,用栓子将物体 B 拴在绕垂直轴 $X-X$ 的支座 G 上。支座 G 是固定在地面上的。

如果 K 迅速旋转,则轴 $X-X$ 以子午线为基线摆动,最后静止于子午线上(条件是,各个部分的摩擦力都很小)。

138 这样，“子午线旋转罗盘”的概念就清楚了。与此相反，文献中使用的是“方位角旋转罗盘”的名称，这个名称相当于一个不够明确的概念。

“方位角旋转罗盘”这个词，1914 年 5 月 13 日首次出现于专利律师 Hugo [p. 3]
Licht 表述的专家意见。在那个专家意见中，方位角旋转罗盘被称为一种吊挂 [4]
的、没有外力矩作用于回转轴的旋转罗盘。这样一种旋转罗盘的轴将保持其空间方向。但是，必须看到，由于原理上不可避免的摩擦力，这样一种旋转罗盘是不可能成为现实的。如果抱着这种意图去制造旋转罗盘，那么其轴就与地球自转轴平行，并保持在这个位置上，这实际上是一种子午线旋转罗盘。

诉讼文献中谈到的所有旋转罗盘，实际上都是“子午线旋转罗盘”。

由于下述原因，图 1 所示 Foucault 子午线旋转罗盘，可以立即取代船用罗盘。如果 G 在船体上被刚性固定，则船的摇晃会引起轴 $X-X$ 以垂直线为基线的摇晃，而垂直线又会使轴 $A-A$ 以轴 $X-X$ 为基线（剧烈）摇晃，因而使轴 $A-A$ 不能静止。所以送来审核的发明，都存在有待改进的地方：物体 B 的位置一定要恰当，才能以垂直线为基线进行旋转，才能使船的摇晃尽可能少地引起轴 $A-A$ 以垂直线为基础线的摆动。

2) a) 专利 182855 中所描述的旋转罗盘，与 Van den Bos 旋转罗盘（德国专 [5]
利号 34513）相比，没有什么新的特点。后面所述专利中所绘制和描述的旋转罗 [p. 4]
盘，符合专利 182855 的专利要求（要求 1）。即使从后面所述专利的描述来看， [6]
也不能否认，与 Van den Bos 的旋转罗盘相比，取得了一点进展。

139 此外还可以看出，专利 182855 的要求 2 很难具备说明其特性的意义，除非旋转罗盘的轴在重力作用下能产生稳定性。因为，不论三根轴是否相切于一点，不论重心高于还是低于那个切点（如果后者存在的话），都是无意义的。

在 1915 年 1 月 20 日申报的材料中，原告的代理机构为 182855 号专利发明作了如下表述：

具有三个自由度的旋转罗盘，其重心明显位于“悬挂点”下面。该旋转罗盘的缺点是，船的水平方向加速度会导致回转轴的严重摇晃。为了避免这个缺点，Anschütz 将重心安排在稍低于“悬挂点”的位置上，从而使旋转罗盘的振动时间超过一个小时。

对于这一点，必须注意到，专利申请书 182855 中表述的观点，是根本站不住
脚的。如果指望被告会本着这种精神来解释 182855 号专利，那肯定是荒唐的。 [p. 5]

b) 专利申请书 182855 的作者看来并没有充分论述地球自转对这种旋转罗
盘的影响，使得我们很难回答 2b)项中针对专家提出的问题。例如，这一点从专 [7]

利说明书的第一句中就能看出；作者如果了解 Foucault 子午线旋转罗盘，肯定不会提及与发明对象很少有关系的 Foucault 摆。作者显然并不知道，回转是用来与地球自转轴保持平衡的；这一点，Siemens & Halske 公司早在 1905 年 10 月 28 日的申请书中就合理地指出了。

专利书 182855 中（当然是漏洞百出）所描述的那样一种旋转罗盘，是放置在子午线上的。这样配置的前提是：对装置各个部分的结构都有足够的保障措施，
[8] 使得由于传动或由于非对称空气摩擦力引起的不良外来影响，不干扰内部装置。
[p. 6] c）考虑到上面的陈述，对这个问题的回答是多余的。
[9] d）专利申请书 182855 第 46 行中的“不”字从字面意义看，必须去掉。这无
[10] 疑是纯粹的疏忽。

3）如果要使一个安装在船上的旋转罗盘上的回转轴 $A-A$ 不产生剧烈的
[11] 振动，那么，支承这个旋转罗盘的物体 B 就不能直接放置在一个与船体刚性连 140
接的支座 G 上。物体 B 不能与船体一起振动；其轴 $X-X$ 一定要能够相对于旋转罗盘支座改变自己的方向。但是，如果另一方面需要轴 $A-A$ 基本上保持水平，那么就必须采取一些手段，使轴 $X-X$ 回转到垂直线上。根据这个原理，船用子午线旋转罗盘要像 Van den Bos 那样，拥有三个自由度，但应采用那种“在水平面上对旋转轴有一定束缚力的方式”；虽然可以把轴 $A-A$ 从水平线上旋转出来，但是这一定要有一个前提，就是要克服轴朝水平线回转所花费的力（重力）。

即使这些先决条件都得到了满足，仍然造不出船用旋转罗盘。如果把轴 $A-A$ 从平衡位置去掉，该轴就会围绕着这个平衡位置振动。这种振动由于遇
[p. 7] 到摩擦力而减弱。而且，如果没有脉冲或冲撞力作用于回转支座，过一些时候振动就会停止。在一艘船上，只有安装特殊设备，有效地降低那种振动，旋转罗盘才可能持续地稳定在其平衡位置上（$A-A$ 在子午线上。）Anschütz 第一个解决了这个任务，制造了第一艘真正用子午线旋转罗盘的船。

为了阐明 Anschütz 想法的重要意义，我们首先以 Van den Bos 子午线旋转罗盘为例，说明这个任务的难度。在专利申请书 34513 的图纸中，浮筒 A 起着我们绘制的图 1 所示的作用。回转轴的振动是与这个物体的振动一致的，后者的振动由于 A 与周围的液体互相摩擦而减弱。这种摩擦力不仅收到所希望的减震效果，而且产生致命的副作用；因为，船的运动经过支座 D、容器 B 和容器 B 内的液体传递到容器 A，最后传递到旋转罗盘上面，使得旋转罗盘不能静止下来。可见，这样一种减震装置原则上不能达到目的。

在 Anschütz 公司的专利书 236200 中，确保减震问题能够得到解决的办法
[p. 8] 是基于下述认识的：根据回转定理，回转轴 $A-A$ 的水平振动始终伴随着回转轴

141 的提升(垂直衰减)运动,提升运动方向与该轴的水平角运动方向是交变的。根据该专利的第一项,为了减小回转轴的水平振动,采用了一种装置,通过一个外力矩来抵消水平振动。应用这个原则,发明者才制造出了一台能够正常运转的旋转罗盘。

与以往的罗盘相比,Anschütz 旋转罗盘的优势并不在于简单地应用减震器,而是使减震器不造成上述弊病。Anschütz 之所以能够避免这种弊病,正如已经提到的那样,是因为,它使减震力矩与轴的提升运动相互配合。

4) 首先得肯定,Sperry 旋转罗盘是符合专利书 182855 第一项要求的;专家 [12]
们之所以产生疑虑,是因为第 2a)项。他们怀疑这样做是否有意义。更不容易的是,Sperry 旋转罗盘与 Anschütz 的 236200 号专利进行比较。由于后面这个专利涉及的完全是减震装置,所以关键在于怎样回答下述问题:在生产 Sperry 旋转罗盘的时候,究竟是用专利书 236200 中提供的有保护措施的方式来实现减震,还是采用别的方式? [p. 9]

关于这个问题,我首先注意到,在 1 月 5 日的谈判时,就这方面提出的问题较为复杂,尚未得到令人满意的澄清。 [13]

Anschütz 减震法(根据专利书 236200)的要点是,回转轴的水平振动与旋转罗盘的垂直制动(提升运动)是合理配置的。为了减震,利用了一种与提升运动相适应的、根据提升程度确定的、以垂直线为基线的力矩。按照 Anschütz 法,一个旋转罗盘(例如原创的 Foucault 旋转罗盘),如果它的轴不产生提升运动,是不具备减震功能的。

在 Sperry 旋转罗盘中,起作用的是一种与此毫无关系的减震法。采用这种方法时,回转轴的提升运动(垂直衰减)不起任何作用。1 月 15 日,Seligsohn 博士递交了专利律师 Du Bois-Reymond 的一份申述材料。在那份材料中,这一点表述得特别清楚。那份申述材料说,应该减小物体 B(图 1)围绕 $X-X$ 轴的水平振动,与这个物体相连接的是一个在水平方向旋转的物体 G(“伺服力矩”);当物
142 体 B 和伺服转动框架 G 相互扭曲时,即产生扭矩,从而使 B 与 G 之间原来的相 [p. 10]
对位置(以下简称“柔性连接”)得到恢复;伺服转动框架 G 是可以围绕 $X-X$ 轴转动的,并且与一个由 B 控制的伺服操纵驱动装置相连接;该驱动装置的作用是,使 G 模拟 B 的所有运动;如果 G 的这种模拟运动不耗费时间而且完整,那么,尽管 B 与 G 之间存在上述连接,G 对 B 也不会起反作用;B 的振动不会由于 G 而减小;但是,如果改变 G 的驱动装置的性能,使伺服转动框架在 B 随着 G 振动而振动的时候,稍微滞后于 B 的振动,则 B 与 G 之间的“柔性连接”会起到为物体 B 减震的作用。

这种减震方法,首先在 Sperry 的子午线旋转罗盘中得到了应用,而且在

Sperry 目录图 14 和图 16 所示的产品中，得到了非常详尽的表述。图中，回转轴的垂直衰减（提升运动）在减震方面根本不起作用，完全排除了与专利书 236200 的冲突。B 与 G 之间的“柔性连接”是通过弹簧实现的。

在 Sperry 目录中，对图 15 所示实例的情况，表述得并不怎么清楚。这个例
[p.11] 子特别重要，因为据说，该图与 Sperry 公司提供给德国海军当局的子午线旋转
[14] 罗盘是相同的（据 1 月 15 日谈判双方的口头陈述）。

这个例子与 Sperry 目录中图 14 和图 16 所示例子的区别，在于物体 B（此处绘制成机座）与“伺服转动框架”G 之间建立相互关系的方式方法。这种相互关系在此处是通过半月形重物 R 实现的。该重物一端置于伺服转动框架 G 的上面，通过偏心驱动销 S 与物体 B 耦合。这种配置，是用下面两种完全不同的、互不相关的方法实现减震：

1）如果 B 围绕垂直轴相对于 G 发生扭曲，则重物 R 由于销 S 的偏心配置
而稍微被提升；于是产生一个扭转，用于恢复 B 与 G 之间原来的相对位置。可
见，重物 R 起着实现 B 与 G 之间“柔性连接”的作用。这与图 14 和图 16 所示实 143
例完全相同。用这种方式，在进行时间滞后的伺服操作时，不论轴 $A-A$ 在振动
[p.12] 时是否产生提升运动，伺服转动框架 G 都起一定的减震作用。

2）实际上，轴 $A-A$ 在振动时是产生提升运动的。通过这种运动，机座携带重物 R 从垂直平面旋转出来，从而产生一种作用于旋转罗盘的、与提升运动成正比的、以垂直线为基线的外部扭矩。这种扭矩同样（如果旋转罗盘旋转方向选择适当的话）起减震作用。这第二种减震方式完全能够满足 Anschütz 236200 号专利的第一项要求。

从图 15 不能断定，这两种作用中主要是哪一种起减震作用。但是如果用一
个使旋转罗盘反转的模型做实验，是可以得出结论的。因为，如果在一个实际存
在的、如图 15 所示的 Sperry 旋转罗盘模型中，Anschütz 减震法起不到重要作用
[15] 的话，则在该旋转罗盘反转以后，该旋转罗盘的振动必然几乎马上减小。

无论如何都得承认，Sperry 旋转罗盘比专利书 236200 所表述的旋转罗盘更
有新意，因而不能简单地视为对已经受到 236200 号专利权保护的旋转罗盘的模
仿。另一方面，还必须说明，在 Sperry 目录的图 15 实例中所列举的两个有效减
[p.13] 震原因之一，使得那个例子与 Anschütz 的 236200 号专利相冲突。

TDC（GyKiA 数据库第 555/a 文件夹第Ⅱa 组）。*Lohmeier* 和 *Schell 1992* pp. 226—235。[79224]。

爱因斯坦的这个文档共 13 页，但是几乎不是他亲自打印的。原稿上的插图也是别人画的。文档第 1 页最前面画了“拷贝”（“副本”）记号。打印件手写的校正部分，即使不是爱因斯坦的亲笔，也收集在内。

在原稿中，页码标注在每一页的最前面，本文档把它打印在页边空白处的方形括号中。未署名者在文档的最前面页边空白处手写的注释被删除。专有名称在原稿中用较大间隔（“疏排法”）标明，在本文档中采用常规间隔。

[1]文档的日期参考爱因斯坦对本文件的补充专家意见（参见文件 19）。

[2]爱因斯坦曾作为特邀专家出席了对 Anschütz 公司与 Sperry Gyroscope 公司诉讼案的庭审。后者被指控侵犯了 Anschütz 公司的旋转罗盘的专利权。法庭对两项专利都进行了审议：一起涉及 1907 年的
144 原创罗盘设计方案（编号 182855），第二项是 1908 年的减震方案（编号 236200）。预审后，柏林第一地方法院于 1915 年 1 月 5 日要求爱因斯坦草拟一份专家意见。为此，爱因斯坦收到了 1000 马克。庭审中，法院提出了爱因斯坦必须回答的一系列问题。有关爱因斯坦对这个文档注释的来源，以及他卷入 Anschütz 公司与 Sperry 公司诉讼案，以及他和后者的关系的背景材料，请参阅 *Lohmeier 与 Schell 1992*，也可参阅本卷和文件 19 的介绍。应法院要求，爱因斯坦于 1915 年 8 月撰写了补充专家意见。

[3]本文中涉及的许多问题与法庭上提出的问题是一致的（参见前面的注释）。在法庭上，第一个提到的问题是，旋转罗盘功能是由什么物理定律制约的，“方位角顶点”（“方位角旋转罗盘”）与“子午线顶点”（“子午线旋转罗盘”）之间有什么区别。

[4]律师 Hugo Licht 代表 Anschütz 公司。

[5]庭审的第 2a 个问题涉及 Anschütz 罗盘专利与其他设计方案，特别是与 1885 年荷兰人 Marinus Gerardus van den Bos 申报的专利的区别。Van den Bos 的专利后来被 Siemens 公司和 Halske 公司采用。

[6]参见文件 19，爱因斯坦对不同结论发表的补充专家意见。

[7]庭审中提出的第 2b 个问题是，Anschütz 的第一项专利究竟是不是“子午线顶点”。

[8]对于原文中的这一点，爱因斯坦在这页的底部作了注释：“Seligsohn 博士先生 1914 年 12 月 8 日就这个问题所作的论述，从专业上看是不正确的。专家们认为，专利局当时如果对作用方式有清楚的了解，是会拒绝这项专利的，因为它缺乏新意。”Seligsohn 当时是 Sperry 公司的律师。

[9]在本案中，问题 2c 只有在对问题 2b 的否定后才有关系。在庭审中，大家对 Anschütz 公司申请的罗盘专利有了深刻的认识，有助于“子午线罗盘”方案迅速地得到应用。

[10]庭审问题 2d，总的来看是对第一项专利的肯定，第 46 页上的“不”字应该是个印刷错误。

[11]庭审的第三个问题涉及第二项专利发明的实质。这个问题使人思考另一个问题：是否可以用这个发明首次制造旋转罗盘，无论从哪方面看，它的功能作用都是完美无缺的。最后审议的问题是，该发明的改进，是否基于减小围绕子午线转动而产生的振动，或者设计出实用的减震机制。

[12]庭审第四个问题是，审议 Sperry 公司罗盘、这家公司设计方案与 Anschütz 公司设计方案的相似之处和不同之处，同时也涉及 Sperry 公司罗盘是否使用了在 Anschütz 公司的两个专利书所中描述的特色，从技术角度看，是否在一定程度上类似于 Anschütz 公司罗盘的使用。

[13]参见注释 2。

[14]Sperry 公司于 1914 年 5 月出售旋转罗盘给德国海军，促使 Anschütz 公司对 Sperry 公司提出诉讼。

[15]参见文件 19 中有关爱因斯坦对这次实验结果提出的补充意见。

[周正安　吴　晔译校]

[编者按]爱因斯坦论 Ampère 分子电流 145

一

爱因斯坦关于 Ampère 分子电流有四篇论文和两篇笔记，其中三篇是与荷兰物理学家 Wander Johannes de Hass 合作完成。它们在爱因斯坦发表的文章中占有特殊地位。它们论及的课题与他当时或以后的兴趣只有间接关系；而且，
[1] 所报告的是爱因斯坦(与 De Haas 一起)做的实验研究，在这一点上也是例外。

第一篇论文，*Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13)，于 1915 年 2 月 19 日作为讲稿提交给 Berlin 的德国物理学会，随后经修改和扩充发表。第一篇论文发表后一周，又出现了简写版，*Einstein 1915c*(文件 15)。它不含计算，只是简单涉及测量，但是背景和动机介绍更加详细了。在 1915 年春，De Haas 返回荷兰后，与爱因斯坦合作的第二篇论文由 De Haas 的岳父 H. A. Lorentz 提交给阿姆斯特丹科学院。它首先以荷兰语发表(*Einstein* 和 *de Haas 1915b*)，随后按惯例翻译成英文发表(*Einstein* 和 *de Haas 1915c*)。后者在这里以文件 14 印出。几乎在同时，Lorentz 发现的一个计算错误促使爱因斯坦发表了 *Einstein 1915d*(文件 16)，以更正前文的错误。美国物理学家 Samuel Barnett 在此前做过类似的实验，作者在写他们的第一篇论文时并不知情，这些情况在 1915 年秋的一篇简短注释中予以承认(*Einstein* 和 *De Haas 1915d*，文件 23)。首次实验后一年，爱因斯坦发表了最后一篇论文，*Einstein 1916d*(文件 28)，报告了修改的实验装置及用它完成的测量结果。

二

当 1820 年 Oersted 在磁体上发现电流效应后，Ampère 立刻证明两条电路彼此产生磁力。随后的实验结果使他猜测，磁性是在假设的“磁分子”中永恒流动的封闭小电流所产生的电现象。从 Maxwell 开始，在 19 世纪后半叶，许多科学家做实验来验证 Ampère 的猜测。这些实验所基于的想法是：如果在微观电
流中存在任何质量转移，例如，因为电流的根源是带电粒子的运动，那么磁分子 146
的行为就会像小陀螺仪。突然颠倒磁化的宏观物体的磁性，会引起物体角动量的显著变化。相反地，让未磁化的物体旋转会使小陀螺仪倾向同一方向，从而

使自身表现出宏观磁性。后一种效应也被看成是地球磁性的一种可能解释。 [2]

根据后来的回忆，爱因斯坦对 Ampère 分子电流问题产生兴趣是在他被要
求以专家身份出席德国企业 Anschütz & Co. 状告美国 Sperry Gyroscope 公司
的法庭诉讼后。诉讼是关于侵害 Anschütz 所持有的旋转罗盘设计专利。应法 [3]
庭的要求，爱因斯坦写了两篇专家意见。最后，Anschütz 公司胜诉。 [4][5]

分子电流的概念也与 20 世纪早期物理学的几个问题有关。其中之一，零点
能量的可能存在性，在 *Einstein* 和 *De Haas 1915a*（文件 13）的第一节明确地提
及。作者论证道，Curie-Langevin 顺磁定律蕴涵了零度时分子磁矩的存在性，后
者又暗示了原子内电子旋转运动的零点能量的存在性。但是他们赶紧补充道，
零点能量猜想遭到许多物理学家的反对。实际上，爱因斯坦本人于 1913 年在与 [6]
Otto Stern 合作的一篇论文中，研究过零点能量的重要性，发现氢的比热的一些 [7]
结果似乎支持这一猜测。然而不久后，他改变主意，放弃了零点能量的想法。 [8]

分子电流与现代物理学的另一个联系，与旋转电子的存在和 Maxwell 理论
之间存在明显矛盾有关。根据 Maxwell 理论，电子应该辐射，所以很快会失去
能量。*Einstein* 和 *De Haas 1915a*（文件 13）清楚显示，作者知道这个问题，但是
147 既没有提出解决办法，也没有与 Bohr 的研究工作联系起来，后者于两年前在其
关于原子论的第一篇论文中就正视过这个问题。后来在 1915 年，Bohr 把它们 [9]
联系起来，当时他引用爱因斯坦和 De Haas 的结果作为支持存在非辐射电子运
动的证据。 [10]

完成实际的实验不需要长时间。虽然在 1915 年 1 月初工作仍处于预备阶
段，但是爱因斯坦在月底前写信给 Lorentz 说，实验结果是肯定的，几星期后，他 [11][12]
宣称已经证明了分子电流的存在性，并补充道，研究工作不久将完成。第一个结 [13]
果于 1915 年 2 月 19 日在给德国物理学会的讲演中给出。修改和扩充后的讲稿
于 4 月 10 日提交。

这个问题的理论解法基于这个假设：分子电流的根源实际上在于原子内质量为 m、电荷为 e 的旋转电子。假设被磁化的物体包含许多这样的旋转原子，那么可以导出下面的它的磁矩 J 和角动量 M 之间的关系式：

$$\mathfrak{M}=\lambda J, \tag{1}$$

其中

$$\lambda=\frac{2\mu}{\varepsilon}. \tag{2}$$

于是突然颠倒物体的磁化会产生原则上可测量的扭矩。在爱因斯坦和 De Haas 的实验中，一个铁圆筒悬挂在螺线形电流线圈内，使其沿轴向磁化。颠倒线圈中电流的方向，于是物体的磁矩会使物体旋转。使用交流电，将其频率调整为圆筒

的固有频率，就产生了可测量的偏转。

实验似乎很简单，但实际上，有许多复杂因素可能导致错误。在 *Einstein* 和 148
De Haas 1915a（Doc. 13）中，列举了四个可能的干扰因素：地球磁场的影响，在圆筒中可能存在永久水平磁化，磁化轴和旋转轴不重合，金属中发生涡流。作者宣称，所有这些因素都在实验中排除掉，或者可以忽略不计。

理论上经过简单考虑可知，共振频率可能与比例常数 λ 有关，所以它的值可以由实验数据确定。如果对电子的电荷与质量之比用已知值，结果证明与方程(2)一致。所以可以认为该实验证明了电子是导致分子电流的原因。爱因斯坦和 De Haas 都把他们的实验看作是确立分子电流存在性的手段，或者换一种说法，是一种确定电子的具体电荷数的新方法。但是值得指出，从现在的观点看，
[14] 他们确定的是电子的旋磁因子，并发现它等于 1。

虽然没有一篇论文明确提到这些结果对于零点能量存在性的重要意义，但是爱因斯坦私下里确实把它们联系起来了。在一封写给 Michele Besso 的信
[15] 里，他宣称，至少在这种情况下，已经证明了零点能量的存在性。他并非唯一这么想的人：曾经怀疑零点能量的 Max von Laue 在写给爱因斯坦的信中承认，
[16] “零点能量的假设导致非常好的结果，即您的磁化分子电流的证明”。

三

1915 年 4 月 De Haas 返回荷兰，在他们的第二篇合作论文于次月发表在荷兰科学院杂志上以后，爱因斯坦与 De Haas 的合作就结束了。这篇论文基本上重复了前一篇论文，但是实际的实验细节较少，更加强调理论方面。

爱因斯坦和 De Haas 都保持了对这个问题的兴趣。爱因斯坦继续实验直
[17] 到那一年底，试图改进他的装置。他最后一次积极涉足这个问题的结果是一篇
短文，于 1916 年 2 月提交，其中他描述了一个新的简单实验来证明 Ampère 电 149
[18] 流的存在。似乎他自己成功地实施了这项实验。

同时，De Haas 继续改进实验设置。1915 年 9 月他提交了一篇论文，提出一个修改的实验方法，能更好地控制实验的错误源，其特色之一是能排除来自地球磁场干扰。虽然他没有着手做精密的实验，但是他的确在实验和理论间获得了令人满意的定性一致性。与他的妻子一道，De Haas 还发表了一篇论文，包含
[19] 对 Maxwell 最初实验的一个新的理论讨论。他们的结论是，这个效应几乎察觉不到。

四

并不是只有爱因斯坦和 De Haas 做关于 Ampère 电流的实验。自 1909 年起，美国物理学家 Samuel Barnett 就试图测量突然做旋转运动的铁棒的磁化率。他最近的结果发表在 1915 年，所对应的旋磁因子 g，是爱因斯坦和 De Haas 发现的值的 2 倍。1915 年秋，爱因斯坦和 De Haas 发表了一篇简短的笔 [20] 记(*Einstein and De Haas 1915d* [文件 23])，承认 Barnett 的工作，没有评论他们实验结果间的差异。他们仅仅断定这两个实验"以最令人满意的方式"彼此 [21] 互补。

然而随着时间的推移，来自其他类似爱因斯坦-De Haas 实验的证据越来越多地表明，实际上 g 的值靠近 2，而不是 1。爱因斯坦认真地看待这些结果，赶快 [22] 进行新的实验来决定这件事。1921 年在第三届 Solvay 会议上，De Haas 回顾了 [23] 这些实验结果。他自己最近的研究工作表明，g 的值仍然靠近 1，他不愿意接受 [24] 其他值。但是最终，有利于值 2 的证据变成压倒性多数，不可避免地得出结论： [25] 爱因斯坦和 De Haas 的实验是有缺陷的。

[1]对于爱因斯坦和 De Haas 在 Ampère 电流方面的研究工作的详细历史讨论和分析，见 *Galison 1987*，第 2 章。

[2]更多细节见 *Galison 1987*，第 2 章。

[3]"例如，一位专家观点认为，我必须写些关于旋转罗盘的东西，使我知道如何展示顺磁原子的陀螺特性"("Zum Nachweis der Kreiselnatur der paramagnetischen Atome wurde ich z. B. angeregt durch ein Gutachten, das ich über einen Kreiselkompass auszuarbeiten hatte."爱因斯坦致 Emile Meyerson 的信，1930 年 1 月 27 日。)

[4] 这里以文件 12 和 19 给出。

[5]关于爱因斯坦和 Anschütz 公司的关系的背景情况，见 *Lohmeier* 和 *Schell 1992*。

[6]在 *Einstein 1915c*(文件 15)，p. 237，爱因斯坦重申了这一观点，说道："现在的理论家说'零点能量'这个词时，没有一个不在嘴角带着半尴尬、半讽刺的微笑。"("Kein Theoretiker spricht gegenwärtig das Wort 'Nullpunktsenergie' aus, ohne daβ in seinem Gesicht ein halb verlegenes, halb ironisches Lächeln zu sehen wäre.")

[7]见 *Einstein* 和 *Stern 1913*(第四卷，文件 11)。

[8]关于讨论，见第四卷，编辑笔记"爱因斯坦和 Stern 论零点能量"，pp. 270—273。

[9]见 *Bohr 1913*。

[10]见 *Bohr 1915*。

[11]见爱因斯坦致 Edgar Meyer 的信，1915 年 1 月 2 日，其中爱因斯坦提到，他和 De Haas 正在准备实验。

[12]爱因斯坦致 Lorentz 的信，1915 年 1 月 23 日。两天后，在写给大儿子的一封热情洋溢的信里，爱因斯坦说到是一个"漂亮且重要的实验……关于磁体"("ein wundervolles und wichtiges Experiment…

über die Magnete."爱因斯坦致 Hans Albert Einstein 的信，1915 年 1 月 25 日)。

[13]见爱因斯坦致 Michele Besso 的信，1915 年 2 月 12 日。两个月后，爱因斯坦对另一个朋友宣布，De Haas 和他"已经提供了确凿的实验证据，证明了存在 Ampère 分子电流(顺磁性和铁磁性的解释)"["Wir haben experimentell den sichern Nachweis der Existenz der Ampère'schen Molekularströme geliefert(Erklärung des Para-und Ferromagnetismus)"]。爱因斯坦致 Heinrich Zangger 的信，大约 1915 年 4 月10 日。

[14]该效应由 De Haas 命名为"爱因斯坦效应"(*De Haas 1915*, p. 638)，后来重命名为爱因斯坦- De Haas 效应，爱因斯坦- Richardson 效应或 Richardson 效应。

[15]爱因斯坦致 Michele Besso 的信，1915 年 2 月 12 日。

[16]"dass die Hypothese der Nullpunktsenergie zu einem sehr schönen Ergebnis geführt hat, nämlich zu Eurem Nachweis der magnetischen Molekularströme."Max von Laue 致爱因斯坦的信，1915 年 5 月 27 日。

[17]见 1915 年 8 月 7 日爱因斯坦致 Wander de Haas 的信中的评论；爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信，1915 年 9 月 23 日；及爱因斯坦致 Wander 和 Geertruida de Haas 的信，1915 年 11 月 15 日前。

[18]见爱因斯坦致 Arnold Sommerfeld 的信，1916 年 2 月 8 日。

[19]*De Haas* 和 *De Haas 1915*。

[20]见 *Barnett 1915b*，*1915d*。

[21]"in erfreulicher Weise."*Einstein* 和 *De Haas 1915d*。

[22]见 *Stewart 1918*，*Beck 1919*，*Arvidsson 1920*。

[23]例如，见爱因斯坦致 Paul Ehrenfest 的信中的评论，1919 年 3 月 22 日。

[24]见 *De Haas 1923*。

[25]关于确定旋磁因子的以后历史的讨论，见 *Galison 1987*，pp. 56—65。

[周正安　吴　晔译校]

13. "Ampère 分子电流的实验证明"

[*Einstein and De Haas 1915a*]

1915 年 2 月 19 日报告
1915 年 4 月 10 日收到
1915 年 4 月 30 日发表

载于《德国物理学会会刊》17(1915):152—170。

Ampère 分子电流的实验证明 151

爱因斯坦与 W. J. de Haas

(国立物理工程技术学会公报)
(1915 年 2 月 19 日会议上的报告)
(参见上期第 63 页)
(1915 年 4 月 10 日修订)

自从 Oerstedt 发现,不仅永磁铁,而且电子流也产生磁效应以来,一直存在两种互相似乎完全不相干的磁场产生方式。这个事实本身就需要把这两种产生磁场的原因的根本区别,理解为一种纯粹表面上的区别,并且找出产生磁场的唯一原因。Oerstedt 公布这个发现之后不久,Ampère 作出了著名的分子电流假说。根据这个假说,可以把(顺磁材料的和铁磁材料的)磁性归结为存在于分子
[1] 中的电流。

电子理论,尤其是 Lorentz 建立的电子理论(出于对一个关于磁场成因的统一观点的需要),基本上肯定了 Ampère 的观点。但是根据这个理论,分子电流
[2] 和所有的电子电流一样,都是由运动的基本电荷构成的。

尽管这些关于在原子中或在分子中旋转的基本电荷(大部分被想象成负电子)的观点使人们确信有一个统一的产生电磁场的原因,但是人们还是消除不掉对这个观点的严肃的、原则性的疑虑。早在 Ampère 时代,就有人对无电阻电流的说法提出过质疑。此外,这个假说的电子论表述方面,还有一点麻烦:根据
Maxwell 方程,旋转电子或电子系统一定会不断辐射,使得顺磁原子不得不逐渐 152
失去其顺磁矩。这肯定是不符合实际情况的。此外,Curile-Langevin 定律表明,
[3] 分子的磁矩是与温度无关的,即在 $T=0$ 的时候也存在。所以,电子的旋转运动
[4] 是一种所谓的"零点能"。对这个概念,许多物理学家持反对态度。

赞成和反对 Ampère 假说的理由旗鼓相当,而且从上述情况看,我们对这个理论的基本问题的态度,取决于 Ampère 假说的正确与否。由于这两个原因,关于铁分子磁矩受旋转电子影响的下述实验证明,将被视为有价值的进展并受到欢迎。实验之所以能够提供证明,是因为根据这个理论,每一个旋转电子都获得一个角动量。这个角动量的方向与磁矩矢量的方向相同。磁矩与角动量的关系是一种与几何关系和旋转频率无关的固定关系;从力学性能看,磁分子像一个旋转罗盘。旋转罗盘的轴始终与磁轴重合。当一个物体的磁状态发生变化的时候,旋转

罗盘的运转方向也发生变化，因而物体磁化电子的角动量也随之发生变化。根据角动量守恒定律，随着内部角动量的这种变化，会出现另一种补偿性角动量，其方向和大小可以根据理论求得。后者将是一个简单的机械角动量。就是说，物体在发生磁化变化时会转动。这种效应就是如此，下面将证明它是存在的。

还要说明一点，在上述实验中，可以摸索出一种测定电子的 ϵ/μ 关系的、准 [5]
确的新方法。

§1. 分子的磁矩和角动量　根据 Ampère 原理，一个闭路电流在磁的远程
153 作用方面，相当于一个磁体。磁体的磁矩 m 等于用电磁法测得的电流 i 乘以环绕面积(平面)F 的积。在本文所列举的环绕电子例子中，电流等于与每秒绕圈数 n 乘以(用电磁法测得的)环绕电子电荷 ϵ。即

$$\mathrm{m}=iF=\epsilon nF. \tag{1}$$

如果理解为矢量，则这个磁矩与循环电流平面垂直；这个矢量的方向如图 1 所示或者相反，方向取决于 ϵ 为正还是为负。

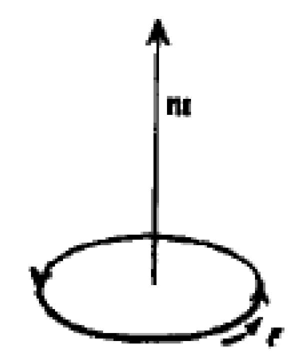


图 1

质量为 μ 的环绕粒子的角动量 $\mathfrak{M}$，其大小如下面的方程所述：

$$\mathfrak{M}=2\mu nF, \tag{2}$$

如果理解为矢量，从方向看，$\mathfrak{M}$ 与图中箭头所指方向一致。由 1)和 2)得

$$\mathfrak{M}=\frac{2\mu}{\epsilon}\mathrm{m}. \tag{3}$$

从上述运算看出，如果把方程 3)理解为矢量公式，则这个方程也成立。如果环绕电荷为负，则 ϵ 连同其负号都可以代入 3)。

$$\Sigma\mathfrak{M}=\frac{2\mu}{\epsilon}\Sigma\mathrm{m}. \tag{3a}$$

同样的公式与适用于任意延展的磁体，条件是，求和包含物体环绕电子的全部。在本例 $\Sigma\mathrm{m}$ 是其电子运动的总磁矩；J 是磁化矢量的体积积分或其总磁化
154 矢量。由此得如下基本公式：

$$\mathfrak{M}=\frac{2\mu}{\epsilon}J. \tag{3b}$$

如果环绕基本电荷为负电子，则

$$\mathfrak{M}=-1.13\times10^{-7}J. \tag{4}$$ [6]

§2. 由磁化角动量的存在而得出的结论　一个磁化物体角动量 $\mathfrak{M}$ 的任何变化，都与扭矩 θ 的出现有关，其矢量公式为

$$\mathfrak{D}=-\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}t}=1.13\times10^{-7}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}. \tag{5}$$ [7]

下面将通过实验证明这个公式。我们想以此表明，此处发现的效应并不因为其微不足道而观测不到。该物体是一个半径为 R 的、围绕本身的轴旋转的铁圆柱体；我们计算角速度 ω。如果该物体沿轴向全部反复磁化，则其角速度按方程 5)计算，可以得到

$$Q\omega = \int \theta \mathrm{d}t = 1.13 \times 10^{-7} \times 2J_S,$$

其中

$$Q = \frac{1}{2}MR^2$$

表示小棒的惯性矩，而

[8]
$$J_S = \frac{M}{7.8} \times 1100$$

表示小棒的饱和磁化。选择 $R = 0.1\mathrm{cm}$，则得

$$\omega = 0.6 \times 10^{-2}.$$

这是一个较为容易检测的角速度。

如果不是由于物体的磁状态发生变化，而是由于物体运动(转动)引起空间上的磁化矢量在时间上的变化，则公式 5) 也成立。在这种情况下，如果用 $\mathfrak{b}$ 表示物体的角速度矢量，则

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = [\mathfrak{b}, J],$$

所以 155

[9]
$$\mathfrak{D} = 1.13 \times 10^{-7}[\mathfrak{b}, J]. \qquad 6)$$

这是一个力矩，它与回旋理论所表述的力矩是一样的。对于进动，用回旋理论表述的力矩具有决定性意义。根据方程式 6)，一个摆动的悬挂磁体，必然像一个围绕其悬挂线转动的摆一样，产生进动。

能够特别直观地对方程 6) 作出解释。因为，如果磁化强度为 J 的物体处在一个均匀磁场 $\mathfrak{h}$ 中，则对该物体起作用的力矩为

$$-[\mathfrak{h}, J].$$

将这个方程与 6) 进行比较，即可看出，由于磁分子的回旋特性，物体转动所起的作用，与一种磁场的作用是一样的，这里依据的方程是

$$\mathfrak{h} = -1.13 \times 10^{-7}\mathfrak{b}. \qquad 7)$$

从这个意义看，这是一种转动磁动势。它不仅作用于整个物体，而且作用于物体的分子，即磁化分子。

这种效应尽管不如上述效应那样容易被证明，仍然有助于检验理论。

此外，还可以看出，地球自转相当于一个与地球轴线平行的、南北向的电磁

场，其强度约为 10^{-11}。这很可能是地球磁轴和转轴接近重合的原因。

§3. 实验方法的表述 方程 5) 原则上可以用下面的方式验证。将一个用软铁做成的圆柱体 Z 悬挂在一根细线 F 上（图 2），使其方向与其轴垂直，并使细线与圆柱体同心，使之持续振动几秒钟。这时，该圆柱体也与线圈 S 同心，铁圆柱体可以借助该线圈在与其轴平行的方向上磁化。如果改变 S 中的电流方向，即让圆柱体中的磁化方
156 向反转，则可以观察到由圆柱体 Z 引发的振动。

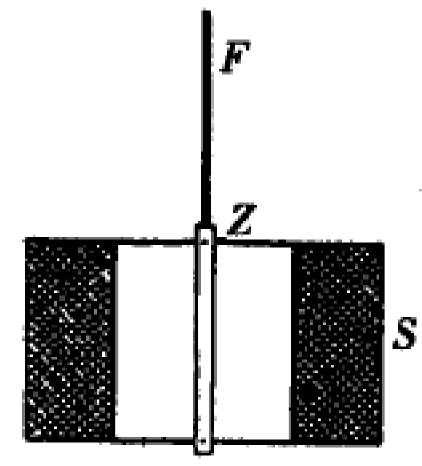


图 2

采用这样一种方法时遇到的困难在于，由线圈产生的、作用在铁棒上的磁力很大，同时从几何学角度看分布并不均衡，以致当电流换向时，铁棒产生干扰极大的运动，根本不能观察到我们所关心的、相对而言很小的效应。

避免出现这种困难的方法是，通过谐振使效应成倍增加。因此，只要用交流电激励 S，并恰当选择悬挂线 F，就能使圆柱体的扭转振动获得的频率与励磁交流电频率相同。

力矩 $\mathfrak{D}$ 围绕垂直线起作用。在这种作用下，铁棒运动的方程为

$$\mathfrak{D} = Q\ddot{\alpha} + \Theta\alpha + P\dot{\alpha}, \tag{8}$$

式中，α 表示可变偏转角，Q 表示惯性矩，Θ 表示悬挂线扭曲常数，P 表示一个（小的）摩擦系数。我们不采用 Θ 和 P，而引入 2π 倍频率（固有频率）ω 和衰减指数 κ。那么式

$$e^{j(\omega+j\kappa)t} \quad (j=\sqrt{-1})$$

满足

$$0 = Q\ddot{\alpha} + \Theta\alpha + P\dot{\alpha},$$ [10]

如果（如果忽略 P 和 κ 的平方）关系式

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{\Theta}{Q}} \\ \kappa &= \frac{P}{2Q} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

得到满足的话。

解方程 8) 的时候，必须把力矩 $\mathfrak{D}$ 作为时间函数按 Fourier 级数展开。根据方程 5)，$\mathfrak{D}$ 的相位为 $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$。假如磁化强度始终与电流成正比，则 $\mathfrak{D}$ 的变化用一个比励
157 磁电流 i 相位早 $\frac{\pi}{2}$ 的正弦函数表示。但是，励磁电流振幅越大，饱和现象对磁化曲线的影响也越大。当 i 的振幅达到非常大的时候，磁化强度几乎会突然一下子

从一个饱和值转变为与它相反的值。在相角滞后降低到很小程度时，这个值都是与反向电流饱和值重叠的[1)]。在我们计算过程中所涉及的这个极端例子中，力矩的方向如图 3 所示，单个尖峰脉冲的方向如方程 5) 所示：

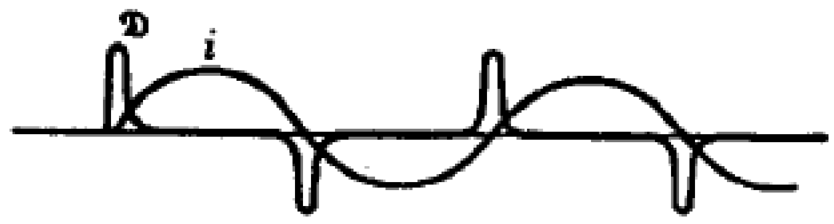


图 3

[12]

$$\int \mathfrak{D}\mathrm{d}t = +1.13 \times 10^{-7} \times 2J_s. \tag{10)}$$

如果线圈电流表述为

$$i = A\sin \omega t, \tag{11)}$$

则表述 ϑ 的展开式为

[13]

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\omega} B_n \cos n\omega t. \tag{12)}$$

在该展开式中，我们只对第一项感兴趣。我们的方法是，通过谐振加强的只是这一项。只有这一项对我们的圆柱体的可以观察到的振动有影响。将方程 12)与 $\cos \omega t$ 相乘并在一个周期 $T\left(=\frac{2\pi}{\omega}\right)$ 内的积分，再参照方程 10)，得到：

$$1.13\times10^{-7}\times4J_s=B_1\,\frac{\pi}{\omega}. \tag{13)}$$

综上所述，现在用公式

$$B_1\cos \omega t=Q\ddot{\alpha}+\Theta\,\alpha+P\,\dot{\alpha}, \tag{8a)}$$

取代方程 8)

根据方程 9)得出公式： 158

[14]

$$\alpha=\frac{B_1}{2\kappa Q\omega}\sin \omega t. \tag{14)}$$

因此，根据方程 13)求得 α 的振幅 $|\alpha|$ 为：

$$|\alpha|=\frac{2}{\pi}\times1.13\times10^{-7}\frac{J_s}{\kappa Q}. \tag{15)}$$

---

[11] 1)我们从示波图中清楚地看出，§ 6 中关于量的检验所引用的数据，可以充分满足这个条件。该示波图是在 Rogowsti 博士先生的友好帮助下绘制的。

这就解答了强励磁电流极限情况下遇到的问题。在解答下面的问题时，还必须特别强调，展开式中起决定性作用的第一项，即方程 12)，表示从理论上推测会出现的力矩。从相位看，它比励磁电流早$\frac{\pi}{2}$。

§4. 实验装置(图 4) 由软铁制成的圆柱形小棒 S 长 7 cm，直径 1.8 mm，悬挂在垂直的交变磁场中。该磁场是由性能相同的线圈 A_1 和 A_2 产生的。两个线圈通过相互间隔为大约 1 cm 的三个定位块保持平行，并放置在一个三脚架上面。三脚架的倾角可以通过三个地脚螺栓改变。小棒 S 悬挂在玻璃丝 G 上，处于三脚架的中心位置。玻璃丝被胶合在一个位于该小棒顶端的钻孔中。玻璃丝 G 直径为 0.2 mm，上端固定于一根横向小棒上。该小棒插在一个由三脚架支撑的大口径黄铜管 E 中。为了增加悬挂线 G 的有效长度，为了产生谐振，使用了下述装置。大口径管 E 上面是直径较小的管帽 D。这个可以垂直推移的并且可以用螺钉 P 固定的黄铜管 C 的管帽，起着导轨的作用，其下端是支撑夹板 B，其中一块夹板被黄铜弹簧 F 紧压在另一块上面。位于下端的一块夹板焊接着一根水平横向金属丝，使悬挂线被夹在一定的高度。在小棒 S 上面，面对面放置着两个由显微镜玻璃罩制成的小镜子，其高度与把线圈 A_1 和 A_2 分隔开的
159 空隙的高度相同。该空隙起指针的作用，让光束反射到一个相距 45 cm 远的刻度盘上。

线圈 A_1 和 A_2 是并联的，其匝数足以产生大约 50 Gauss 的交变场。将这两个线圈连接到可供我们使用的交流发电机接线柱上去的时候没有输入电压，而且发电机接线柱的电压大约为 120 V。

一个半径为 1 m 的线圈垂直缠绕在上述装置上，由蓄电池供电(补偿场)，用于补偿地磁场的垂直分量。

§5. 实验 我们在表述实验过程之前，必须考虑哪些因素会产生干扰效应。

1. 小棒 S 两端产生的变极。作用于该小棒的是地磁场的水平分量。地磁场具有励磁交流电频率，产生一个带水平轴的交变力矩。实验过程中，没有产生与一个这样的力矩相适应的、围绕一个水平轴的可感振动。

2. 构成小棒的铁磁晶体，在不规则放置时(根据 P. Weiss 对铁磁性所做的
实验结果)，某些晶体的分布方式会使得交变场不能改变该晶体的磁化方向。这 [15]
意味着出现一个永磁矩。由于晶体分布不规则，该磁矩很可能拥有一个可以观察到的水平分量。这个水平分量与不可避免要产生的交变磁场的水平分量一
160 起，可以产生一个围绕垂直线的交变力矩。其相位与励磁交流电的相位一致(“效应 2”)。

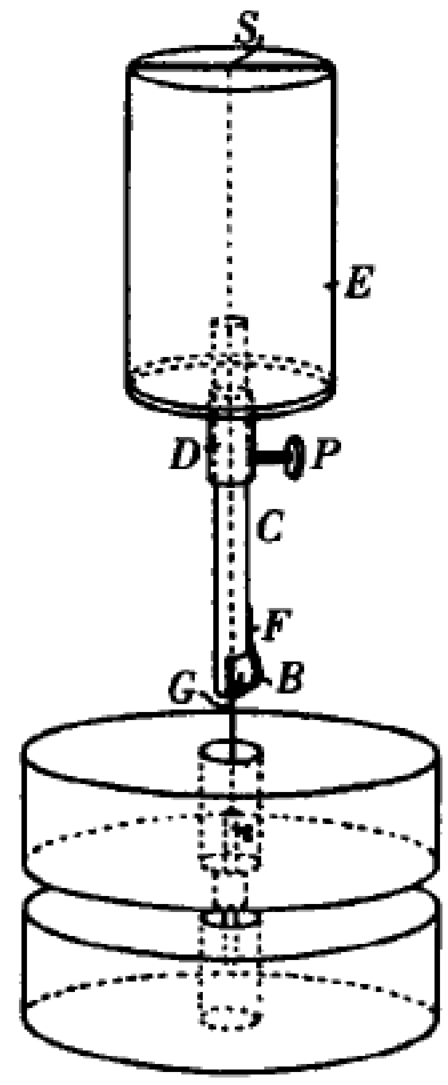


图 4

3. 小棒在轴的周围产生扭曲振动。该轴与小棒的交变磁化轴并不完全重合。因此，一个水平永磁场必然使小棒随之做扭曲振动。产生这种振动的力矩的相位，与磁化相位是相同的，因而(在强磁化电流条件下)几乎也是励磁电流的相位(“效应 3”)。小棒中产生的 Foucault 电流，对实验没有重要意义，这是显而
[16] 易见的。这种电流仅仅起某种延缓小棒反复磁化速度的作用[1)]。

除了上述干扰效应以外，据我们所知，不会有其他因素具有像励磁电流那样的频率，就是说，如果我们再做这种实验，也不会有通过谐振使频率增加的干扰因素。因此，正如下面所指出的那样，它们不可能起什么作用。

如果把线圈 A_1 和 A_2 接入交流电网，刻度盘上的光指针就保持绝对静止状态，条件是线的有效长度选择适当，使得在小棒的扭曲振动与交变场之间不会存在谐振，哪怕是很小的谐振。产生这种谐振的范围是，线的有效长度为 8 cm 到 1 mm。为了较容易地找到夹板 B 的谐振位置，为了确保我们通过场的基波振动，而不是通过谐波振动产生谐振，为了足够精确地测定振动小棒最重要的惯性矩，我们采用了如下手段。

---

1)此外，不是用 1 根小铁棒，而是用 1 根小铜棒进行的实验还表明，*Foucault* 电流是不起作用的。

我们把悬挂装置连同小棒一起，从线圈里往上提，并用火漆把一根惯性矩为
161 10.7 的铜制水平横杆固定在小棒 S 的下端。这时，小棒 S 在其几何轴上拥有 0.0045 惯性矩。由此可见，在横杆固定以后，小棒的扭曲振动比横杆安装之前大约减慢 $\sqrt{\frac{10.7}{0.0045}}=48.8$ 倍。就是说，如果把夹紧装置进行调整，使每秒频率在用横杆时为 1，那么，在不用横杆时，频率就是 48.8 左右。这个频率与所使用的交流电的频率几乎是一样的。用这种方法，很容易产生谐振。如果接着将小棒重新准确地调到谐振位置，就能通过测量电流频率，并且在再次提起小棒以后通过测量用水平铜棒时的振动频率，求出在实验中实际上起作用的惯性矩。如果 46.2 是电流频率（用谐振频率测量仪测量），1.14 是用悬挂小棒时的振动频率，则 S 的有效惯性矩为

$$Q=10.7\left(\frac{1.14}{46.2}\right)^{2}=0.0070,$$ [17]

即远远高于用几何方法算出的惯性矩 $Q=0.0045$。这当然会使小棒不能准确地围绕其几何轴振动。

如果接通交流电，并将小棒悬挂位置调整为谐振位置，而不对地磁场进行补偿，则小棒所产生的扭曲振动，正好使刻度盘上的光点最多延长到 3 cm（刻度板距离为 45 cm）。下面刻度盘上光点的长度称之为“双偏角”。

首先得出的结论是，“效应 2”，即由于水平方向永磁化而产生的振动，是不起作用的，因为，如果采用上述地脚螺栓改变线圈 A_1A_2 的轴倾角，进而产生水
162 平交变场，则双偏角保持不变。

与此相反，“效应 3”，即由变极的偏心位置产生的力矩，备受关注。因为，如果使一块永磁铁靠近线圈，双偏角就立即发生变化。如果使悬挂装置连同小棒绕垂直线运动，双偏角就发生很大变化（效应的“方位灵敏性”）。

如果要使这样测出的效应与根据电子理论推导出来的效应一样，则必须使产生其效应的力矩相位与磁化矢量的导数相位（$\frac{dJ}{dt}$）保持一致，即位于磁化相位 J 之上并与之垂直。前面称之为“效应 3”的交变力矩，相位为 J，是通过配置一个水平磁场产生的，所以综上所述，如果我们所观察的效应真的具有相位 $\frac{dJ}{dt}$，那么，当一个永磁体接近装置的时候，或者当补偿电流变化的时候，所观察到的双偏角绝不会变小。这种说法已经被证明是恰当的。

此外，理论上可以预见的效应，必然与励磁电流的强度有关。这与磁化量是一样的。这个结论也得到了检验和证实。

我们现在想把通过实验测出的效应，与从理论上求得的效应进行一番比较。

假设铁的饱和磁化量等于 1200，小棒 S 的体积等于 0.16，则

$$J_s=192.$$ 163

通过对所设置的交变场中扭曲振动的衰减情况的直接观察，得到

$$k=0.533.$$

因为

[18] $$Q=0.0069,$$

所以由方程 15)得：

$$|\alpha|=0.0036.$$

当刻度间距为 45 cm 的时候，所得双偏角为

$$4|\alpha|\cdot 45=0.65,$$

而我们通过实验测得的结果是 0.45 cm。

对此，首先必须注意到，理论上算出的值是上限。这主要是因为，磁化交变并不是像计算时所预设的那样瞬时完成的。伴随两极的去磁作用首先产生的结果是，小棒要在遇到相当高的磁场时才接近饱和。在下一部分中，将从量的角度对理论进行更精确的分析。

前面提到，在逐渐消失的水平永磁场中，所观察到的双偏角为最大值。从这一事实中可以看出，在地磁场得到补偿以后剩余并作用于小棒的力矩，其相位与磁化相位 J 是垂直的，并超前于磁化相位。这与方程 5)是一致的。但是，还必须检查这个效应的正负号，检查方法如下面所述。

光指针的光是由一个金属丝白炽灯中一根未张紧的丝产生的。这盏白炽灯与有效线圈对平行，并接于交流电源。如果一块永磁铁向这盏白炽灯靠近，则该磁铁在电动势作用下发生振动，从而引起刻度盘的光指针振动。这种振动与由小棒扭曲振动产生的指针振动重合。符号是根据下面两次观察确定的。 164

[19]

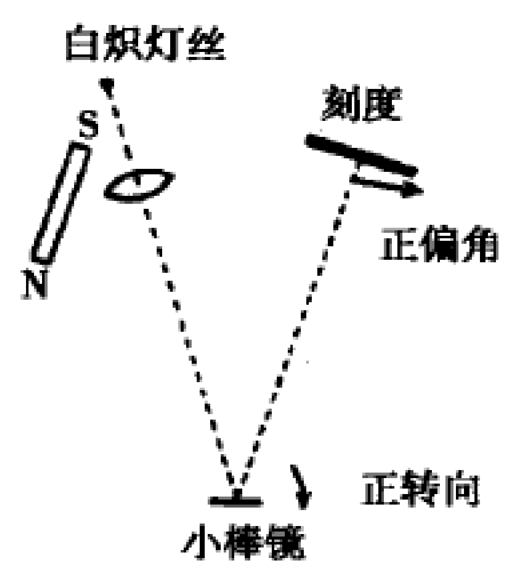


图 5

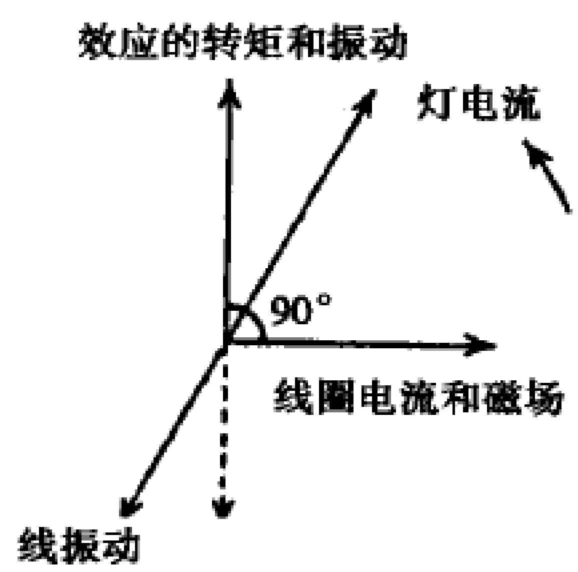


图 6

(1)如果让直流电流通过作为指针的白炽灯和线圈，电路并不改变，则前面的南极向白炽灯接近，光指针在刻度盘上显示一个正偏角。与此同时，线圈中产生一个正磁场，即方向朝下的磁场。

(2)如果让交流电流通过线圈和灯泡，则南极向前面的灯靠近，致使双偏角缩小，最后导致双偏角几乎消失。

从这两点出发，确定符号最简单的方法就是借助后面的相位示意图。由于线圈的自感强度大，灯泡电流在相位上几乎比线圈电流前移 90°；这时，灯泡电流方向如果适当，灯泡电流(当它接近前面的南极时)就会把灯丝朝刻度正偏角方向推动，灯泡电流为正。线圈电流如果产生一个向下的磁场，则方向为负。灯丝在灯泡里面是松的，所以(当摩擦很小的时候)其固有频率比交流电频率小很多，致使灯丝振动相位与灯丝电流相位相反。从实验结果看，灯丝振动相位偏离效
165 应扭曲振动相位约 90°，即偏离有效力矩相位约 90°，所以，有效力矩相位在示意图上用粗体表示，而不是用虚线画的反向箭头表示。

这证明，有效力矩与$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$而不是与$-\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$成正比，就是说，效应是由带负电的粒子，而不是由带正电的粒子产生的。

§6. 更精确的量的实验　到目前为止所描述的实验，从量的角度对理论作了完全令人满意的证实。但是仍然迫切需要从量的角度对实验作出改进。线圈磁场太弱，在小棒比较短的情况下，很难像理论上所预期的那样，使小棒磁化方向突然发生改变。此外，减震常数 κ 很难精确测定。于是有人怀疑，方程 8)是否真正通过(线性)项 $P\dot{\alpha}$ 正确考虑到了导致减震的原因。

为了快速实现磁化方向的交变。我们没有采用两个线圈 A_1 和 A_2，而是采用一个唯一的、长度为 62 cm(每厘米长度大约 100 匝)的线圈。在实验中(电流强度为 1.45 A)，在正中间产生了一个振幅为 260 Gauss 的磁场(即在结束时有一个振幅为 130 Gauss 的磁场)。此外，我们为了降低两极的去磁作用，还利用了一个长度为 16 cm、直径为 0.17 cm 的小铁棒。为了不受减震常数测量结果和关于减震规律假设条件的影响，我们规定了谐振曲线：当线的长度得到确定的时候，振幅$|\alpha|$的大小与交流电频率的依赖关系。镜子挂在一个薄壁小玻璃管下，下面胶合于小棒，并从线圈中伸出一点点。

最大偏角$|\alpha|$对于所使用频率 n 的依赖关系，由方程 13)和方程 8a)求出：

$$|\alpha|=\frac{4\lambda}{\pi}\frac{J_s}{\sqrt{(4\pi Q\nu)^2+P^2}}. \tag{16)}$$

166 式中 λ 表示一个理论上等于$\frac{2\mu}{\varepsilon}=1.13\times10^{-7}$的常数，$J_s$ 表示饱和磁化小棒

的磁矩，Q 表示对于小棒扭曲振动具有决定性意义的惯性矩，P 表示微分方程 8)中出现的减震常数，ν 表示所使用的频率 n 与谐振频率 n_0 之间的差。对于方
[20] 程 16)和方程 8a)的导数，ν/n_0 和 P 都被当作小物理量。除了一次幂外，二次幂可以忽略；这是在我们的谐振数据非常精确的情况下计算出来的。

在实验中测定了作为 ν 的函数 $|\alpha|$，并去掉我们不感兴趣的物理量 P 以后，λ 就求出来了。这种消除法的最简单方法，是用求谐振振幅的方程：

$$|\alpha|_{\max}=\frac{4\lambda}{\pi}\frac{J_s}{\sqrt{P^2}}. \tag{16a}$$

在消去 P 以后，解 λ 即得

$$\lambda=\pi^2\frac{Q}{J_s}|\alpha|_{\max}\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}, \tag{17}$$

其中

$$b=\frac{|\alpha|}{|\alpha|_{\max}}.$$

如果谐振曲线已经测出，则由方程 17)求出每个纵坐标 $|\alpha|$，得一个 λ 值。如果这个值和物理值 $\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ 被证明是常数，则表明，在方程 8a)中，可以从一个线性项推导出减震数据。

频率 $n=n_0+\nu$ 的变化和测定方法如下所述。所利用的交流电是由一个设置在大楼地下室的交流发电机提供的。该发电机由一台靠蓄电池供电的直流电机驱动。我们将一台设置在实验室中的变阻器与该电机的激励绕组并联；通过改变电阻，我们成功地改变了电机的激励电流，从而得以在一定范围内任意改变 167
电机的转速和所发交流电的频率。流经变阻器的电流是用一个电流计测定的。比例关系一般是恒定的。因此，电流计上显示的数据，就是所产生的交流电的频率的函数。此外，我们还使用了一个谐振频率测量仪，准确地测定了某些频率的数值(45，45.5，46 等，最大为 55)。这些数字之间的频率数值，可以借助上述电流计推算出来。

小棒扭点振动的振幅，也是借助光指针客观地测定的，但是为了获得更大的精度，光指针的长度规定为 145 cm。图 7 所示为精确记录下来的谐振曲线。由振荡产生的光带长度，在刻度盘上是以毫米为单位，并用所产生的频率函数显示的。

根据曲线绘制的、列在下面的表格，是用来检验方程 17)的。

从图 7 下的表格最后一栏可以看出，这根最大偏角为 7 cm 的曲线，与理论值基本相符，条件是 $\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ 基本上保持不变。这说明，引入线性减震项是正

确的。

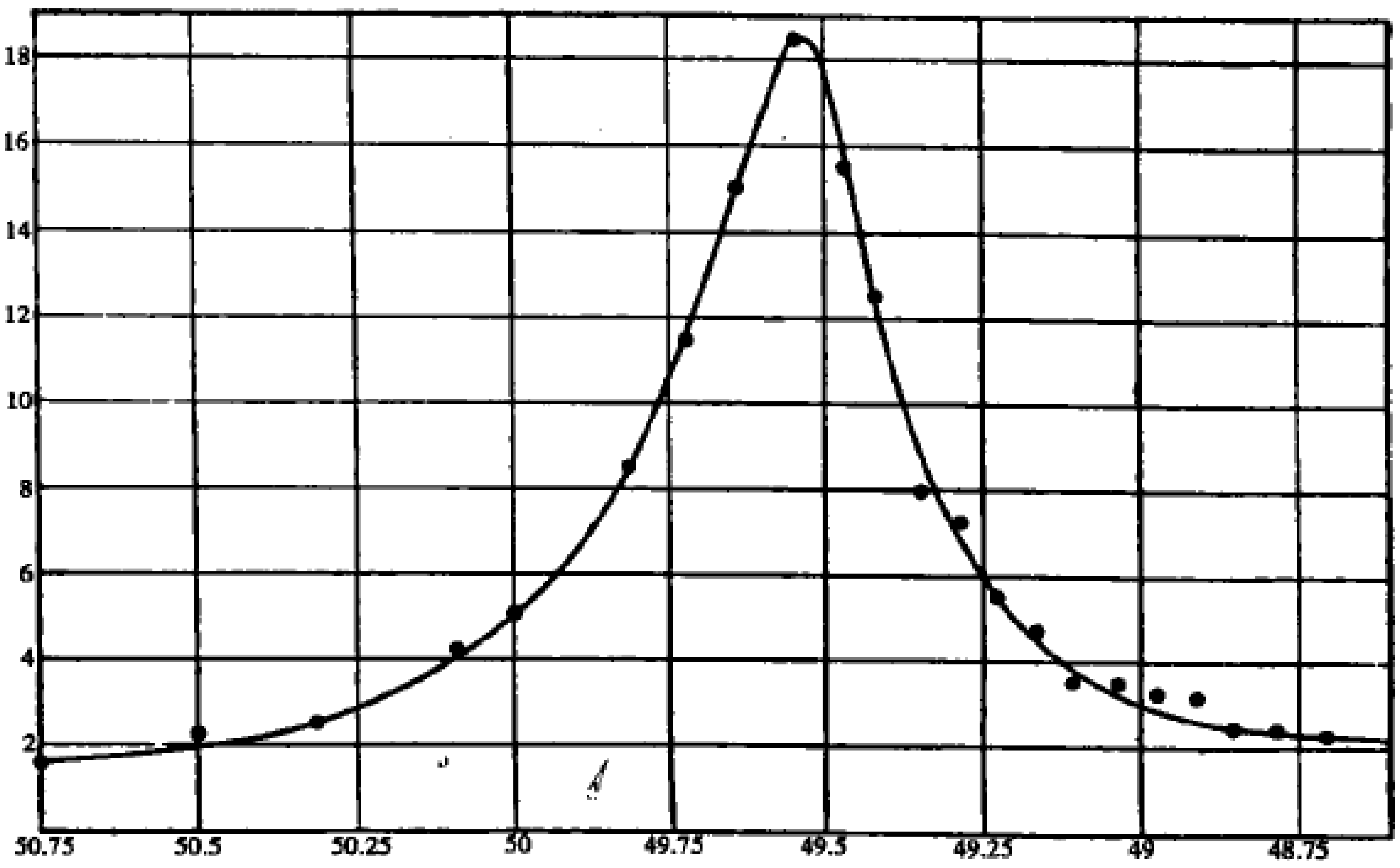


图 7

纵坐标	28ν	b	$\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$	$28\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$
15	2.55	0.812	1.32	3.36
12	4.25	0.649	0.853	3.63
9	6.2	0.488	0.560	3.46
7	8.2	0.380	0.413	3.38
5	11.3	0.271	0.280	3.18
4	13.7	0.217	0.222	30.4
3	17.3	0.163	0.165	2.68

168 如果将纵坐标数据减小，看来其他数据也会迅速变小。因此要特别提醒大家注意，这么小的偏角是不大有把握准确读得出的。在这种情况下，如果我们只把给出的前 4 个纵坐标值拿来进行计算，大概是正确的。我们所求得的是平均值： [21]

$$\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}=0.128.$$ [22]

此外，由曲线还求得：

$$|\alpha|_m=\frac{18.5}{1400.4}=0.320\times10^{-2}.$$

我们的振动系统的惯性矩，取决于一个我们了解得很清楚的附加小惯性矩

对固有频率所产生的影响。带附加惯性矩的固有频率，则是从绘制的谐振曲线可得到[1)]

$$Q=0.0126.$$

[23] 数值 1260 表示饱和磁化密度，在这个值被确定的前提下，最终可以求出饱和小棒的磁化体积积分值

$$J_s=458.$$

以这些数据为依据，由方程 17)得出：

$$\lambda=1.11\times10^{-7},$$

这个结果与理论值 1.13×10^{-7} 几乎一致。这种一致性是偶然获得的，因为我们 169
必须估计到，我们的计算大约有 10%的不确定性。不管怎么说，在文章开头所描述的循环运动电子的理论值，从量的角度看，通过实验至少已经得到近似的证实。

上述实验，是在国立研究所进行的。我们特别要感谢 Warburg 先生和
[24] Gumlich 先生，也感谢国立研究所的其他同仁，感谢他们自始至终热情的协助。

载于《德国物理学会会刊》17(1915)：152—170。讲座是 1915 年 2 月 19 日举行的。1915 年 4 月 10 日 170
提交，1915 年 4 月 30 日发表。

[1]例如，参见 *Harman 1982* 第 2 章中对于 19 世纪磁学理论综述。也可参见编者按《爱因斯坦关于 Ampère 分子电流的论述》，pp. 145—149 中关于这篇文章的基本情况介绍。

[2]例如，参见 *Lorentz 1909* 对电子理论的综述。

[3]Curie 定律是 1895 年(*Curie 1895*)根据经验创立的。根据这个定律，顺磁物质的磁化系数与温度成反比。1905 年，Paul Langevin 得出顺磁物质磁化系数公式，在小磁场下归结为居里定律(参见 *Langevin 1905*)。他的理论依据是关于每个原子都携带一个永磁矩的假说。产生这种磁矩的原因可归结为原子内的电子运动。爱因斯坦 1910 年夏季学期在苏黎世大学任教，在他的热运动学理论课上讨论 Curie 定律和 Langevin 理论[参见第三卷(文件 4)pp. 38—39 中爱因斯坦关于这个课题的讲义]。

[4]参见编者按《爱因斯坦关于 Ampère 分子电流的论述》，p. 146 中爱因斯坦关于零点能量的论述。

[5]ϵ 是电子电荷，而 μ 是它的质量。

[6]这个值相当于电子荷质比 1.77×10^7 emu/g，是最近一次实验的结果(参见 *Neumann, G 1914*)。

[7]"$\mathfrak{D}$"应为"ϑ"。

[8]在 *Einstein* 和 *De Haas 1915 c*(文件 14)p. 608 中相应之处，每立方厘米的饱和磁化估计为 1000。也可参见这篇文章的 p. 164 和 p. 169，使用的值是 1200 和 1260。铁的密度为 7.8g/cm³。

[9]"$\mathfrak{D}$"应为"ϑ"。

[10]"Q $\dot{\alpha}$"应为"Q $\ddot{\alpha}$"。

[11]参见 *Einstein* 和 *De Haas 1915 c*(文件 14)，pp. 699—700 有关示波图记录的详细介绍。Walter Rogowski(1881—1947)当时是主持这个实验的帝国物理研究所的终身研究员。

---

1)注意：根据计算，不带玻璃小管和镜子的小棒(前提是，标准的圆柱形)的惯性矩为 Q=0.0102。

[12]“$\mathfrak{D}$”应为“ϑ”。

[13]求和的上限值“ω”应为“∞”。

[14]方程(8)的更一般的解，也对不同于谐振频率的频率成立的解，可参见 *Einstein* 和 *De Haas 1915 c*(文件 14)，pp. 701—702，也可参见下面的 § 6。

[15]参见 *Weiss 1907*，1908 关于 Piere Weiss 铁磁理论的论述。爱因斯坦 1910 年夏季学期在苏黎世大学任教，在他的热运动学理论课上讨论 Weiss 理论[参见第三卷(文件 4)pp. 41—43 中爱因斯坦关于这个课题的讲义]。

[16]Foucault 电流是涡流，是由于导体在磁场中运动感应生成的。

[17]*Einstein* 和 *De Haas 1915 c*(文件 14)，p. 704，Q 值精确到 0.0065。

[18]参见前面的注解。

[19]图 6 所示力矩和角位移有着同样的相位，这是错误的，正如 Lorentz 在给爱因斯坦的电报中首先指出的那样(参见爱因斯坦 1915 年 4 月 28 日给 Lorentz 的电报。电报中，爱因斯坦承认了这个错误)。爱因斯坦纠正了 *Einstein 1915 d*(文件 16)中的错误。

[20]参见 *Einstein* 和 *De Haas 1915 c*(文件 14)，p. 701 中关于方程 16)出处的更详细的介绍。在方程 16)中，“J_1”应为“J_s”。

[21]在给 G. L. de Haas-Lorentz 的信中，爱因斯坦进一步指出，小位移的结果好像是系统的错误(参见 1915 年 4 月 10 日之前爱因斯坦给 Geertruida de Haas-Lorentz 的信)。

[22]参见 *Einstein* 和 *De Haas 1915 c*(文件 14)，p. 710，数值 0.128 被改正为 0.124。

[23]在 *Einstein* 和 *De Haas 1915 c*(文件 14)，p. 710 中相应之处，每立方厘米的饱和磁化量估计为 1300，使 J_s 和 λ 值稍微不同。

171 [24]Emil Warburg(1846—1931)当时是国立物理技术研究所所长；Ernst Gumlich(1859—1930)当时是磁学实验室主任。

[周正安 吴 晔译校]

14. “Ampère 分子电流存在的实验证明”

172

[*Einstein and De Haas 1915c*]

1915 年 4 月 23 日收到
1915 年 5 月 11 日发表

载于《Amsterdam 皇家科学院自然科学学报》18(1915—1916):696—711。

173

Ampère分子电流存在的实验证明

［爱因斯坦教授与 W. J. De Haas 博士］ [1]
（由 H. A. Lorentz 教授递交）
（发表于 1915 年 4 月 23 日会议）

在 Oerstedt 发现不仅永磁铁，而且电流也产生磁作用后，似乎存在两种完全不同的产生磁场的方法。然而，人们对这种观念十分不满，物理学家很快试图去为这两种作用找出一个共同的原因。Ampère 提出一个著名的假设，认为存在围绕着分子循环并且不受任何阻力的电流，因此成功地做到这一点。 [2]

在诸如 H. A. Lorentz 发展的电子理论中也做过同样的假设。其仅有的差 [3]
别是，现在认为，正如一般的电流，分子电流是基本电荷或电子的循环。

不可否认，这些观点招致了一些反对。其中一个反对甚至比在 Ampère 那个时代远为严重；很难设想一个能摆脱所有阻力并因此永恒地继续循环的电流。的确，根据 Maxwell 方程，循环电子由于辐射必然损失能量；因此磁体的分子会逐渐损失它们的磁矩。这类现象从未被观察到，该假设似乎和电磁学基本原理的一般有效性相冲突。

还有，Curie-Langevin 定律要求，分子的磁矩必须和温度无关，并且在绝对 [4]
零度时仍然存在。因此旋转电子的能量必须是真正的零点能。然而，按照许多物理学家的意见，不太可能存在这种能量。 [5]

总而言之，对于 Ampère 假说有利和不利的意见似乎一样多，这个问题关系到重要的物理原则。因此我们进行了一些实验，在即将描述的实验中，我们能够证明，一个铁分子的磁矩的确是由电子循环引起的。

实验之所以可以证明这一点，是基于如下事实：每一个在闭合路径中循环
174 的负电子都具有角动量，其方向和代表其磁矩的矢量相反。这两种量的比具有与几何尺度以及循环的时间无关的确定的值。磁性分子正如陀螺那样行为，它的轴和磁化方向一致。磁性状态的任何变化都涉及磁性元素的角动量和陀螺的指向的改变。由于角动量守恒定律，“磁”角动量的改变必须被所考虑物体的等量相反的角动量改变补偿。因此，一个物体的磁化必须产生力矩， [6]

它使物体旋转。[1]

§1. 分子的磁矩和角动量

一个沿着面积为 F 的圆周流动的强度为 i 的电流的磁矩由下式给出

$$\mathfrak{m}=iF,$$

或者如果电流由一个每秒循环 n 次的电子组成，则

$$\mathfrak{m}=neF. \tag{1}$$

它可用垂直于圆周平面的一个矢量来表示，矢量的正方向以熟知的方式对应于电流的正方向。

如果我们让角动量的方向和磁矩方向一致的话，则角动量为

$$\mathfrak{M}=2mnF. \tag{2}$$

因此

$$\mathfrak{M}=\frac{2m}{e}\mathfrak{m}, \tag{3}$$

对于一个具有一定数目循环电子的物体

$$\sum\mathfrak{M}=\frac{2m}{e}\sum\mathfrak{m},$$

或者如果我们用 I 表示 $\sum\mathfrak{m}$

$$\sum\mathfrak{M}=\frac{2m}{e}I. \tag{4}$$ 175

§2. 磁角动量存在的推论

一个磁化物体角动量 $\sum\mathfrak{M}$ 的任何改变引起由下述矢量方程确定的力矩 θ

$$\theta=-\sum\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}t}=1.13\times10^{-7}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \tag{5}$$

[7] 此处的数值系数是从负电子已知的$\frac{e}{m}$值推出的。

我们的目的是证实(5)所表达的关系。我们将首先阐明，计算出的效应不会小到观察不到。假定物体是一个半径为 R 的铁圆柱，它可围绕与自己垂直的轴旋转。我们将从(5)推导出把纵向的磁化反向时圆柱获得的角速度 ω，我们假定

---

1)在我们得知 O. W. Richardson(《物理学报》Vol. 26, 1908 p. 248)已经在寻找问题中的效应，但没有

[6] 得到正面的结果时，这篇文章已经交付印刷。

磁化达到饱和值 I_S。用 Q 来表示圆柱的惯性矩，用 λ 来表示上述的系数 1.13×10^{-7}，我们得到

$$Q\omega=\int\theta\mathrm{d}t=2\lambda I_S$$

这样，如果每立方厘米的磁化的饱和值为 1000，这个估值并不很高，我们有 $I_S=\frac{M}{7.8}\times 1000$。惯性矩为 $Q=\frac{1}{2}MR^2$，而对于 $R=0.1$ cm 我们得到 [8]

$$\omega=0.6\times 10^{-2},$$

这是一个容易观察到的角速度。

§3. 方法的描述

初看起来，似乎可以下面方法检验方程(5)。一个软铁圆柱 C 悬挂在一根细丝 D 上，这个细丝的方向和圆柱伸长的轴相一致，扭转振动的周期为数秒钟。一个线圈 K 环绕着圆柱 C，线圈轴和 C 的轴相重合。那么在 K 中的电流反向时，应该能观察到 C 的旋转，然而，实际上不能考虑这种简单方法。由于线圈的场不是均匀的，圆柱也许会呈现出高度无规的运动，把所要寻找的效应完全遮盖住。

176 如果这种效应被共振放大，则可以得到更好的结果。为了这个目的，使一个具有和围绕着线 D 的 C 的振动频率相同或几乎相同的交流电流过线圈。

在力矩 θ 的影响下，C 围绕着垂直轴的旋转服从下面的方程

$$\theta=Q\ddot{\alpha}+\Theta\alpha+P\dot{\alpha}. \tag{6}$$

此处偏离平衡位置的角度 α 在线圈电流的同一方向上被认为是正的。Q 为惯性矩，Θ 是细线的扭转常数，而 P 是小的摩擦系数。我们将引进两个新的常数

$$\omega_0=\sqrt{\frac{\Theta}{Q}},\quad \kappa=\frac{P}{2Q} \tag{7}$$

以取代 Θ 和 P，第一个常数是 2π 乘以在不存在摩擦时的自由频率，而 κ 是衰减常数。自由振动(令 $\theta=0$ 时从(6)可以推出)可被描述成

$$\alpha=Ce^{-\kappa t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2}\,t+p).$$

如果我们将 θ 展开成 t 函数的 Fourier 级数，就很容易解微分方程(6)。按照(5)，θ 和 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 同相。因此，如果磁化和电流成比例，我们就能直接把 θ 表示成相 [9] 位比线圈电流 i 的相位超前 $\frac{1}{4}\pi$ 的谐函数。然而，这种比例只对小的强度才成立。如果 i 的振幅增加到使磁化饱和，磁化曲线就采取不同形式。最后，对于 i

的非常大的幅度，磁化和电流方向的改变同时忽然从一个饱和值转变到相反的饱和值(除了一个很小的相位差)。现在就对这种极限情形进行计算。

可用图 1 表示作用到圆柱上的力矩，图中的正弦曲线表示电流 i[1)]。

177

图 1

每一尖峰对应于磁化的反转，而对于每一尖峰我们有

$$\int \theta \mathrm{d}t = \pm 2\lambda I_s\,. \tag{8}$$

假定原点 $t=0$ 和图 1 中的电流从负到正方向过渡的一点重合。我们可以写出

$$i = A\sin \omega t, \tag{9}$$

并且 θ 可以展开成一个级数

$$\theta = \sum_{n=1}^{n=\infty} B\cos n\,\omega\, t. \tag{10}$$

这里只需考虑这个级数的第一项，这是因为只有对应于它的效应才被共振放大，这样其他项对圆柱运动没有什么可觉察到的影响。现在，用 $\cos \omega t$ 乘以(10) 并在整周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 积分，得到

$$\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} \theta\cos\,\omega\, t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\omega}B_1.$$

在左边只有在 $t=0$ 和 $t=\frac{\pi}{\omega}$ 的非常小的邻域内 θ 才不为零。对于前者我们

---

1) 具有尖峰的曲线代表$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$，力矩 θ 与之成比例。它是以下述方法获得的。铁圆柱沿着线圈 K 轴的正确位置，线圈覆盖在一个狭小的玻璃管上，在玻璃管紧邻还有一个相同的并以相同方式覆盖的玻璃管。两个管的线圈连接成这种样子，使电流以相反方向围绕着管流动。

在这种情形下，在线圈中感应的电流和$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$准确地成比例，也和线圈 K 引起的感应成比例。利用 Siemens 和 Halske 的示波仪得到了感应电流，并由此得到$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$或者 θ 的图。用这同样的办法记录了电流 i 的交变。

178 可以令 $\cos\omega t=1$，对于后者 $\cos\omega t=-1$，利用(8)我们由此可得到

$$B_1=\frac{4\lambda\omega}{\pi}I_S. \tag{11}$$

现在我们可以用下面方程取代(6)

$$B_1\cos\omega t = Q\ddot{\alpha}+\Theta\alpha+P\dot{\alpha}, \tag{12}$$

其周期解为

$$\alpha=\frac{B_1}{u}\cos(\omega t-v), \tag{13}$$

其中 u 和 v 由下面确定

$$\left.\begin{aligned}u\cos v&=(\omega_0^2-\omega^2)Q\\ u\sin v&=2\kappa\omega Q\end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

此处，我们使量 u 取正号，它确定振幅，而角度 v 给出振动的相位。我们将用 $|\alpha|$ 表示振幅

$$|\alpha|=\frac{B_1}{u}=\frac{4\lambda I_S}{\pi Q\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega^2}+4\kappa^2}}. \tag{15}$$

对于 $\omega=\omega_0$，它取最大值 $|\alpha|_m$，即

$$|\alpha|_m=\frac{2\lambda I_S}{\pi Q\kappa}. \tag{16}$$

关于相位，我们首先指出，根据(14)，对于 $\omega=\omega_0$，$v=\frac{\pi}{2}$。如果交流电频率比圆柱频率高，我们有 $v>\frac{\pi}{2}$，对于相反的情形，$v<\frac{\pi}{2}$。当 ω 越来越远离 ω_0，在第一种情形下 v 趋近于 π，而在第二种情形下趋近于 0。如果衰减常数 κ 很小，我们可以说，在离开 ω_0 相当小的距离就能达到这些极限值。在我们的实验中，情形的确如此，因此我们可以说，除了在 ω_0 的紧邻处的 ω 值以外，对 $\omega>\omega_0$，$v=\pi$，而对于 $\omega<\omega_0$，$v=0$。鉴于我们讲到的有关正方向的一切，容易看出，如果电流 i 和偏转 α 同相，则在任何时刻圆柱就会在线圈中的电流的同一时刻的方向
179 偏离。在实际上，圆柱振动的相比电流的相滞后 $v-\frac{\pi}{2}$；这是从(9)和(13)推导出来的。还要记住，我们在推导(11)时，假定循环的电子是负的，而如果它们是正的，则 B_1 的符号和效应的相位会是颠倒的。由此我们导出下面的结论：

负电子

$\omega>\omega_0$，圆柱振动的相位比电流相位滞后 1/4 周期。

$\omega<\omega_0$，超前 1/4 周期。

$\omega=\omega_0$，振动和电流同相。

正电子

$\omega > \omega_0$，圆柱振动的相位比电流相位超前 1/4 周期。

$\omega < \omega_0$，滞后 1/4 周期。

$\omega = \omega_0$，振动和电流反相。

应该指出，在力矩 $B_1 \cos \omega t$ 和电流 $i = A\sin \omega t$ 中存在 1/4 周期的相位差，类似地，在力矩和交变磁化之间也是如此，这一点很重要。情形总是如此，与 ω_0 和 ω 的相对值以及循环电子的符号无关。

[10] §4. 仪器的概述

好几次提到的交变场由两个线圈激励，线圈的轴顺着同一垂线，且它们之间的距离大约为 1 cm，它们被安装在一个黄铜底座上，底座下的三个螺丝钉可用以调整倾斜度。两个线圈串联，提供大约 50Gauss 的场。沿着它们的轴悬挂着铁圆柱。这个圆柱 1.7 mm 粗，在第一次实验中 7 cm 长，它是由软铁仔细地车 180 成的。在它顶部中心有一个直径 0.3 mm 的小洞，一根合适的玻璃丝焊在小洞上。一面非常轻巧的镀银的显微镜覆盖玻璃做成的镜子附在圆柱的中部。一单丝灯的光通过两个线圈之间的空间投到镜子上。反射光线在一个置于 45 cm 距离上的刻度板上成像。当圆柱振动时，这个像就被扩展成一个带子，它的宽度确定双倍的偏转。

为了得到共振，当然应该可能调节玻璃丝的长度。为了这个目的，我们使用一个夹具，利用它可以在不同的长度处把玻璃丝紧紧夹住。

夹子和带有圆柱体的悬丝可以围绕着一个固定的圆柱中的垂直轴一道转动。可以从一个精密仪表上读出有效电流。最后，一个装置将整个仪器包围住，该装置可把地磁场全部补偿。我们将重新进一步考虑这个问题。

§5. 实　　验

现在让我们考查主要的干扰因素。

1. 在圆柱端部感应出交变的磁极。地磁场的水平分量作用到这些端部会产生一个交变的力矩，其频率和电流频率相同，并试图使圆柱绕着一个水平轴旋转(效应Ⅰ)。

然而，我们还未观察到这类旋转。

2. 根据 Weiss 的观点，铁磁晶体杂乱无章地处于所有方向上。因此可能发
[11] 生这种情形，它们中的一些朝向，其磁化并不被交变场颠倒。在这种情形中存在

永久磁化的水平分量，线圈中的交变磁场的水平分量作用其上在垂直轴的周围产生交变力矩，力矩的频率和相位与交变场相同（效应Ⅱ）。

3. 圆柱旋转轴和它的磁轴并不精确地一致。

因此，诸如地磁场的永恒的水平磁力会引起圆柱的扭转振动。激励这些振动的力矩的相和磁化以及交变电流（在强电流的情形下）本身同相。

4. 容易看到在圆柱上感应的 Foucault 电流对我们的实验毫无影响，它们的仅有影响是稍微延迟了磁翻转。尽我们所见，上述的效应是与线圈中的电流同 [12]
181 频率并因此被共振放大的仅有的效应。当线圈连接到主交流电导体上，只要悬线的长度不使圆柱的自由振荡频率和交变场的频率非常接近，刻度上的像就完全保持静止不动。线的长度为 8 cm，把线长改变 1 mm 的过程中，共振先出现，然而就消失了。

为了找到共振需要的长度，并保证悬挂的仪器不在它的更高模式上振动，我们使用下述的方法，这种办法还能确定圆柱体的惯性矩。

我们把一个短的铜十字棒焊在铁圆柱的下端，十字棒的惯性矩为 10.7。

计算得出圆柱惯性矩为 0.0045。

由此导出，由于加上小十字棒，圆柱的振动周期大到$\sqrt{\frac{10.7}{0.0045}}=48.8$倍。因此，如果我们选取线的长度，使得附有十字棒时频率为 1[1]，没有十字棒的频率就大约为 48.8。这几乎等于交变电流的频率。

由此我们可以确定悬挂系统以它基本的模式振动。然而，为了更精确地确定惯性矩，现在将圆柱放在线圈之中，并增加线长直到发生最大共振。那时，该自由振动的频率可被认为等于交流电的频率，后者的频率发现是 46.2。此后，从线圈中将装置移出，并将十字棒固定上去。这回我们发现频率为 1.14。我们从这些数值推出

$$Q=10.7\left(\frac{1.14}{46.2}\right)^2=0.0065.$$ [13]

在做完这些准备之后，我们发现效应Ⅱ，即圆柱的永久极引起的振动无关紧
182 要。利用基架螺钉改变线圈轴相对于垂直线的位置，这就改变了水平交变场，但是在这种情形下双偏转保持不变。

然而，稳恒磁场能作用到交变极上引起的效应Ⅲ，由于它们偏轴的位置，可以容易观察到。当把一个永磁体放到线圈附近时，双偏转立即改变。地磁场的影响也是显然的。当它未被补偿时，在共振的情形下，在标度距离为 45 cm 时，

1)我们总是用频率表示 1 秒内完成振荡的次数。

标度上的像被展宽到 3 cm。所以在所有的进一步实验中，地磁场都被补偿了，为此需要利用一台地球电感器和一台弹道检流计来进行测量。利用直径大约 1 m 的箍去分别补偿地磁场的水平和垂直分量，在箍上绕上铜线。由蓄电池提供电流，并且利用 Siemens 和 Halske 的精密电流计来持续控制其强度。

变动悬线上端可以检验是否已经得到补偿。只要地磁还作用到被交流电磁化的铁上，振动幅度便因此而改变。然而在补偿之后，这种效应的方位敏感性便消失了。最终留下了 4.5 mm 的清晰的双偏转。

现在我们必须保证这正是我们寻找的效应。为了这个目的，我们首先要利用以下的情景，作用的力矩必须在相位上和电流以及磁化相差 1/4 周期。我们拿一个永磁铁靠近线圈，使之引起效应Ⅲ，在我们关心的力矩 $B_1\cos\omega t$ 之上叠加上一个新的力矩，它和磁化具有相同或相反的相位，因此和 $B_1\cos\omega t$ 相差 1/4 周期的相位。不管这个附加的力矩的符号如何，其振幅必须比 B_1 更大。当我们把磁铁靠近线圈时，的确发现像的展宽总是增大。

理论还进一步要求效应大小依赖于交变场强度的程度和依赖磁化本身一样。实验同样验证了这一点。

最后我们来比较观察到的效应和理论值的大小。如果我们把铁达到的磁化 183
取为 1200，我们得到(圆柱体积为 0.16 cm^3)$I_S=192$。由直接观察交变场中的振动我们求得

$$K=0.533.$$

由于

$$Q=0.0065,$$

从方程(16)得出

$$|\alpha|=0.0036.$$

对于 45 cm 的标度距离，可算出双偏转 $4|\alpha|\times 45=0.65$，正如已经说过的，我们从实验中发现双偏转为 0.45。

我们必须了解，关于这个差别，由于磁化改变方向不是瞬息改变的，理论值只是一个上限。

由于自由极的退磁影响，如果磁场在改变方向时立即在新方向上取得常数值，则线圈中的场必须相当强。

§6. 相位的确定

我们已经看到了力矩和交变磁化的相位差为 1/4 周期。由比较效应(P_1)和交变电流(P_2)的相位，从 §3 我们进一步决定围绕铁分子循环的电子是否的确为负的。我们用以下方法试图促成此事。

用于读标度的单丝灯泡和包含铁圆柱的线圈并联到主交流电导体上。如果我们把一个永磁铁靠近灯泡，交变电磁力就使白炽灯丝运动，这样除了镜子振动引起的振荡外，像还会因灯丝的运动而引起振荡。

为了观察上述附加的振动是否增大或减小像的幅度，我们可以把相 P_1 和新振动的相作比较。现在发光灯丝的相决定后者，而灯丝的相又依赖于流过的电流的相，同时电流和 P_2 的相差又由线圈的自感确定。因此，可能比较 P_1 和 P_2 的相。

184 可惜的是，当我们的实验正要结束，我们中的一位必须离开柏林时，在应用方法上发现了一个错误，我们不得不承认这一部分的研究失败了。然而，由于观 [14]
察效应的大小和我们对从负电子的 $\frac{e}{m}$ 的比推导出的值相一致，循环电子的负号是非常可能的。

§7. 更精确的测量

直到现在描述的测量满意地证实了理论，但精确度还很差。线圈中的场实际上太弱了，不能引起理论设想的磁化的瞬时反向。此外，衰变系数 κ 不能在任何精度上得到确定。甚至在方程(6)中的 $P\dot{\alpha}$ 项是否正确地代表衰变影响都成问题。

由于这些原因，我们对自己的装置进行了一些修正。为了加速磁化的反转，取代原先的线圈，我们使用 62cm 长的短线圈(大约每厘米 100 圈)，在 145A 的有效强度下，场强幅度在它的中部为 260Gauss，并因此在端部为 130Gauss。为了消除极点的退磁影响，我们进而使用长 16 cm 直径 0.17 cm 的圆柱。现在镜子悬在一个薄壁的管下，管子被焊在铁圆柱的下端。它只在线圈的底端下面投影。为了避免确定衰减系数并假定衰减定律做了一系列实验，在实验中对于确定的线长，对不同的交流电频率确定幅度$|\alpha|$，这样可以画出“共振曲线”。

放在大楼的一个地下室的发电机提供交流电，并由蓄电池的电流驱动。工作室中的装置包含一个和场磁铁的绕线并联一起的可变电阻。我们通过改变电阻值，可以在一定限度内改变激励电流，并因此改变旋转的数目和感应的交流电
185 频率。用安培计控制变阻器的电流。当其他所有东西都保持不变时，交流电频率就成为可变电阻中电流的函数。此外，我们还使用 Hartmann 和 Braun 的共振频率计，用它可以精确地确定一定的频率(45，45.5，46 直到 55)。其间的频率用安培表以插入法来确定。测量圆柱振动幅度的方法和前面的实验一样。然而，为了增加精度，我们采用的标度距离为 145cm。

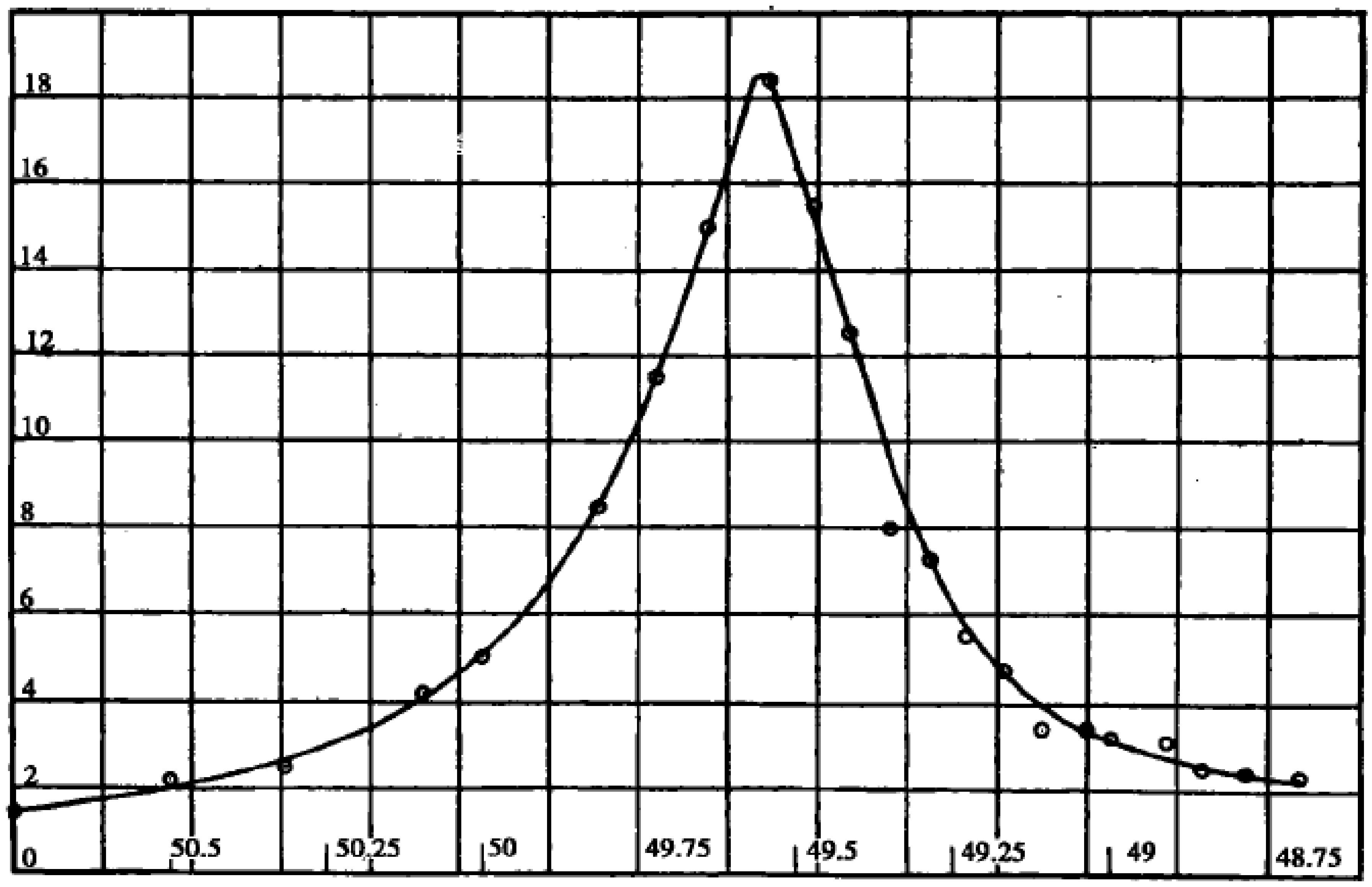


图 2

结果被画在图 2 中。水平[1]轴上的数字给出了交流电的频率，而在垂直轴上的数字是以厘米为单位的双偏转的 10 倍。 186

为了计算，我们每次使用同一高度的两点，再结合曲线最高点的纵坐标。如果为了简明起见，我们设

$$\frac{4\lambda I_S}{\pi Q}=\mu,$$

那么，从(15)得出

$$\frac{\mu}{|\alpha|}=\sqrt{\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{\omega^2}+4\kappa^2}.$$

现在，如果 $\omega_1(>\omega_0)$和 $\omega_2(<\omega_0)$是具有相同幅度$|\alpha|$的两个 ω 值，我们就得到方程

$$\frac{\mu}{|\alpha|}=\sqrt{\frac{(\omega_1^2-\omega_0^2)^2}{\omega_1^2}+4\kappa^2}\text{ 和 }\frac{\mu}{|\alpha|}=\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega_2^2)^2}{\omega_2^2}+4\kappa^2}.$$

1)我们已将原图转动 90°。

从这些方程以及下面方程中消去 ω_0 和 κ

$$\frac{\mu}{|\alpha|_m}=2\kappa,$$

我们求得

$$\frac{\mu^2}{|\alpha|^2}-\frac{\mu^2}{|\alpha|_m^2}=(\omega_1-\omega_2)^2.$$

令 ν 表示两个选择点的频率之差，这样 $\omega_1-\omega_2=4\pi\nu$ 并且令 [15]

$$\frac{\alpha}{|\alpha|_m}=b.$$

那么，在引进 μ 的值后，求得

$$\lambda=\pi^2\frac{Q}{I_S}|\alpha|_m\cdot\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}. \tag{17}$$

在画出共振曲线后，对每一纵坐标 $|\alpha|$ 的值方程(17)给出值 λ。如果这个值或者等效的 $\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ 是一常数，这就证明了衰减影响的确可由运动方程中的一个线性项来代表。

下表包括了 ν 和 b 的值，这些是从图中取得的，还有我们从它们推出的

187 $\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ 的值。

纵坐标	ν	b	$\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$	$\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$
15	0.0911	0.812	1.32	0.120
12	0.152	0.649	0.853	0.130
9	0.221	0.488	0.560	0.124
7	0.293	0.380	0.413	0.121
5	0.403	0.271	0.280	0.114
4	0.489	0.217	0.222	0.108
3	0.618	0.163	0.165	0.0957

最后一列显示，对于超过 7 mm 的较大偏转，曲线和理论的符合相当满意，$\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ 足够恒常。如果我们过渡到更小的纵坐标，这个量似乎非常快地减小。然而必须提到，小的纵坐标的测量精度不够高。因此，我们只用最早的 4 个纵坐 [16]

标。从它们得出的平均数为

[17]
$$\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}=0.124.$$

从这曲线还得出

$$|\alpha|_m=\frac{1.85}{145.4}=0.320\times10^{-2}.$$

测量附加上微小惯性矩所引起频率改变可以确定振动系统的惯性矩，这附加的惯性矩已精确知道。

我们求得[1)]

$$Q=0.0126.$$

[18] 如果我们现在磁化取 1300(从物质的磁回滞曲线以及线圈常数算出)，我们发现圆柱的磁矩为

$$I_S=470.$$

利用这些数从方程(17)导出

$$\lambda=1.1\times10^{-7},$$ 188

这和理论值 $\lambda=1.13\times10^{-7}$ 符合得非常好。

然而，我们必须看到，我们不能对我们测量赋予比 10%更高的精确度。

我们似乎觉得，在这些极限之内，我们的观察相当好地证实了理论结论。

这些实验是在物理技术国立研究所进行的。对其所提供的仪器设备的帮助表示深切感谢。

载于《阿姆斯特丹皇家科学院自然科学学报》18(1915—1916):691—711。1915 年 4 月 23 日提交了原荷兰文的版本，1915 年 5 月 14 日发表。 189

[1]这是一篇用荷兰文写的 *Einstein* 和 *De Haas 1915b* 的译文。译文和原文之间明显的区别已做了注释。含有更多实验细节的同类工作的早期说明，见 *Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13)，而关于一般的背景见编者按《爱因斯坦论 Ampère 分子电流》，pp. 145—149。

[2]关于 19 世纪磁理论的综述，见，例如，*Harman 1982*，第二章。

[3]关于电子论的综述，见，例如，*Lorentz 1909*。

[4]1895 年由经验发现的 Curie 定律(*Curie 1895*)表明顺磁物质的磁化率与温度成反比。在 1905 年 Paul Langevin 导出一个关于顺磁物质磁化率的公式，在弱场的情况下，该公式约化为 Curie 定律(见 *Langevin 1905*)。他的理论基于这样一种假说，即由于原子内电子的运动，每个原子都携带一个永久磁矩，爱因斯坦在 1910 年 Zürich 大学分子热运动理论暑期讲习班上，讨论了 Curie 定律和 Langevin 理论(关于爱因斯坦在此专题方面的演讲笔记，见第三卷，文件 4，pp. 38—39)。

[5]爱因斯坦关于零点能观点的讨论，见编者按"爱因斯坦论 Ampère 分子电流"，p. 146。

---

1)可以在此指出，对于纯粹的圆柱形，可以计算出，在没有玻璃管和小镜子时的惯性矩为 $Q=0.0102$。

[6]*Richardson 1908*。Richardson 试图测量一个未磁化的铁圆柱体在突然磁化时的力学效应，他失败了。关于对 Ampère 电流所做的其他同期实验，见编者按，"爱因斯坦论 Ampère 分子电流"，p. 149。

[7]在方程(5)中，数值系数的值相应于电子的荷质比 1.77×10^{7} emu/g，它与最新的实验结果相一致(见 *Neumann, G. 1914*)。

[8]在 *Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13)中，在对应点(p. 155)，每立方厘米的饱和磁化强度被估计为 1100。也见此文的 pp. 706 和 710，该处使用的数值为 1200 和 1300，铁的密度是 7.8 g/cm³。

[9]正如在 *Einstein* 和 *De Haas 1915b* 中一样，$\frac{1}{4}\pi$ 应为 $\frac{1}{2}\pi$。

[10]在 *Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13) § 4 中，给出对仪器的更详细的描述。

[11]关于 Pierre Weiss 的铁磁性理论，见 *Weiss 1907, 1908*。爱因斯坦在 1910 年 Zürich 大学有关热的分子运动理论的暑期讲习班课程中，讨论了 Weiss 的理论(爱因斯坦对本专题的演讲笔记见第三卷，文件 4，pp. 41—43)。

[12]Foucault 电流是在磁场中运动的导体内所感生的涡流。

[13]数值 0.0065 修正了在 *Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13)，pp. 162 和 164 中分别给出的数值 0.0070 和 0.0069。

[14]如在 *Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13)，pp. 165—166 中提出的测定回旋运动粒子的电荷时，错误地假设了扭矩和角位移有相同的位相。这一错误最早被 Lorentz 在致爱因斯坦的一封电报中指出(见 1915 年 4 月 28 日爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信，爱因斯坦在信中承认了这一错误)。在 *Einstein 1915d*(文件 16)中，爱因斯坦修正了这一错误。

[15]如在 *Einstein* 和 *De Haas 1915b* 中一样，"ν"应为"2ν"。

[16]在给 G. L. de Haas-Lorentz 的信中，爱因斯坦坚定地表明，小位移结果，似乎是系统错误(见在 1915 年 4 月 10 日前爱因斯坦致 Geertruida de Haas-Lorentz 的信)。

[17]数值 0.124 修正了在 *Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13)，p. 169 中给出的数值 0.128。

[18]在 *Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13)中，对应点(p. 169)，每立方厘米的饱和磁化强度被估计为 1260。这里使用了数值 1300，导致对 I_s 和 λ 稍微不同的结果。

[吴忠超　译校正文]
[高尚惠　译校注释]

15. “Ampère 分子电流的实验证明” 190

[*Einstein 1915c*]

1915 年 5 月 7 日发表

载于《自然科学》3(1915):237—238。

191

Ampère 分子电流的实验证明 [1]

爱因斯坦教授,博士,柏林

从这一事实出发,即一块磁铁的每一个小碎片仍然是一块完整的磁铁,人们已经早就得出结论,每一个铁磁体的分子自身都可看作是一块磁铁。由关于顺磁体(例如氧气)的有名的 Curie-Langevin 定律出发可得出,这些分子磁铁的磁矩与温度无关。P. Weiss 假设上述性质对铁磁体仍成立,并采用一个简单的附加假定("分子场")而建立起了一个铁磁体理论,它不仅能定性地也能局部定量地说明了一些错综复杂的现象。

迄今为止,人们对分子磁体的物理本质仍一无所知,虽然多数理论家对此已有一些确定的看法,Ampère 首先提出了这些看法。以后 Oerstedt 发现不仅磁体而且电流也发出磁作用。早先以为上述产生磁作用——或如今天常说的磁场——的两种方式有原则上的差异。这种情况使致力于寻找自然现象的统一解释的物理学家深为不满。因此紧接着 Oerstedt 的发现之后,Ampère 提出了他的有名的假设,即磁体所产生的磁场也来自分子内部的电流。稍后 H. A. Lorentz 认为物质的全部电磁作用皆可归结为荷电质点(离子,电子)的运动,他支持 Ampère 的假说但从电现象的分子理论观点对之进行了修改,即 Ampère 分子电流是由电子形成,后者围绕带正电荷的静止分子或原子运动。P. Langevin 在他的有关顺磁和抗磁现象的开创性的分子理论工作中引用了这一概念。

可是对于产生磁场的本质原因的这种统一的满意的解释却遭遇到了严重的困难。就我们所知而言,在趋近绝对零度时,顺磁性和铁磁性仍不消失。这可能迫使我们承认在做圆周运动的电子外还存在一种分子运动,它在温度接近绝对零度时仍然存在;人们常把这种运动的动能称之为"零点能"。众所周知,把"零点能"概念应用于一切理论中都将遇到严重困难。迄今为止,理论家在谈及"零点能"一词时,无不或心存疑惑,或面露讽嘲。这一困难也殃及 Ampère 的磁性概念并力促从实验上来判别 Ampère 假设的真伪[1]。在近 3 个月中,我与 De Haas- [2]

1)把 Ampère 理论建立在现代电子论上将遇到下述困难,按 Maxwell 电磁场方程,做圆周运动的电子由于辐射将丢失掉它的动能以致使分子以及原子的磁矩将随时间而减少或最终丢失掉,这肯定与事实不符。

Lorentz 先生合作,在帝国理工学院做了实验,按照我的设想,**实验已令人信服地证实了 Ampère 分子电流的真实存在**。实验根据如下的考虑。

设一分子(或原子)内有电子绕其正电核做行星状环绕运动,那从电磁这一方面看,分子等效于一个圆周电流或一个元磁子,从另一方面看,它应具有圆周运动的力学特性;亦即这种系统应具有角动量,并保持其空间取向不变,或欲改变其空间取向,应从外界施加一转动力矩。简要计算得出,分子的角动量 m 与 192
其(等效的)磁矩 $\mathfrak{M}$ 满足关系式[1)]

$$\mathrm{m}=-\frac{2\mu}{\epsilon}\mathfrak{M}=-1.13\times10^{-7}\mathfrak{M} \tag{1}$$

式中 μ 为电子质量,ϵ 为(电磁测量)电子电荷,负号表示二矢量 m 与 $\mathfrak{M}$ 反向。公式(1)令人意外的重要性在于此式既与电子运动速度无关也与电子轨道形状大小无关,而仅与电子的荷质比有关,后者已由极精密的阴极射线实验得出。如果分子内含有多个圆周运动电子,公式(1)也成立。

按电子理论意义上的 Ampère 理论,一个具有磁矩的分子也具有力学上的角动量。容易看出,公式(1)对于多分子组成的物体也成立,式中 $\mathfrak{M}$ 是整个物体的磁矩,m 是所有圆周运动电子的角动量之和(“内角动量”)。

按照动力学中众所周知的角动量定律,当一系统不受外力矩作用时[2)],此系统的角动量保持不变。因此改变一物体的磁化以及按上述定律与磁化随之而来的内角动量必将出现另一种角动量正好抵消这一改变,这种角动量不是别的而是通常的力学角动量,换言之,当改变一物体的磁化时将使该物体转动,在最简单情况下,这种由磁化改变所引起的力学作用可表述为:磁化改变在力学上等效于下式所示力矩 $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{D}=-\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{d}t}=1.13\times10^{-7}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

---

1)设电子做半径为 r,速度为 $v=2\pi rn$(n=每秒圆周数)的匀速圆周运动,它的角动量为 $r\cdot\mu\cdot\nu$ 或

$$2\mu\pi r^2 n,$$

按 Ampère 假设还有一个与平面电流轨道相当的磁矩 $\mathfrak{M}$,其值由电流强度与电流面积之积来给定或由

$$\epsilon\pi r^2 n$$

给出,其中 ϵn 是每秒通过圆周轨道任意定点的总电荷量,πr^2 即电流面积。

角动量和磁矩的方向均沿着轨道面的法线,但由于电子电荷为负,二者方向相反,这一情况由公式(1)给出。

2)众所周知的一条动力学定律认为,一个不受外界影响的系统不会改变它的转动或其转动运动不会消失,虽然在运动中系统(例如电子)中一部分的圆周运动可转移到系统(例如,当作刚体考虑的磁体的有质原子系统)的另一部分上去。这种类型的转移正是我们要研究的现象的起因。

检验公式(2)的原则上最简单的方法是：用细丝垂直悬挂一小铁条 S，后者与一载流螺线管同轴且上方为 N 极。改变电流，小铁条转动(从上看为顺时针方向)，转动角速度 ω 由(2)给出

$$\omega J=2\times 1.13\times 10^{-7}\times\mathfrak{M}, \tag{3}$$

式中 J 为小铁条相对于它的转轴的转动惯量，$\mathfrak{M}$ 为小铁条在电流改向前后的磁矩。

由磁体的力学转动运动所产生的角动量按(2)即等于乘以常数 1.13×10^{-7} 的磁化改变量。

(3)中因子 2 的由来是磁化时，磁化改变量等于二倍的磁化量。

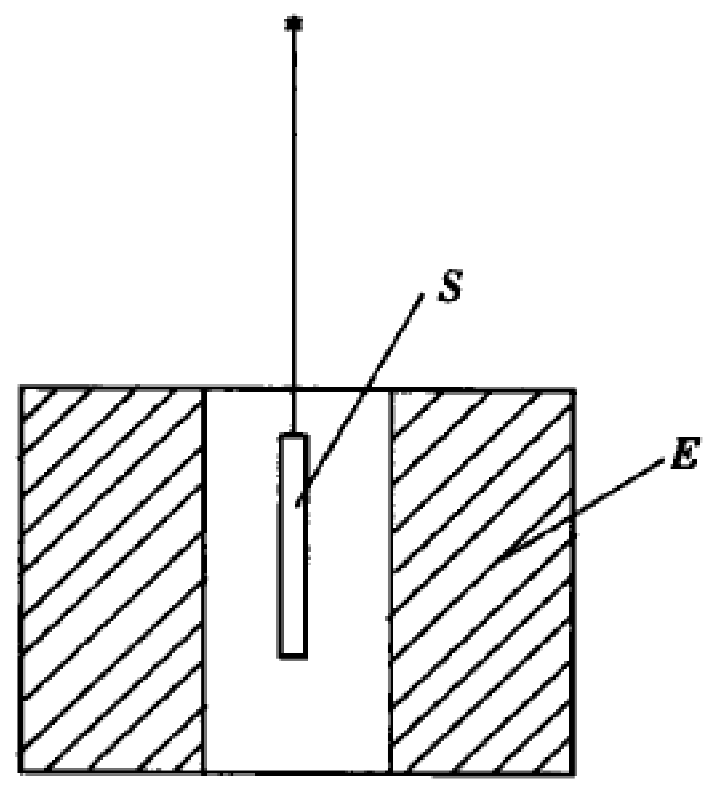


图 1

在上述简单方案中，结论并非可以轻易获得，特别是由于缺乏对称性，铁条及其悬系在电流改向时要出现横向颤动，其中部分转变为转动运动从而干扰了所研究的转动运动。然而此时我们可用一根足够结实的玻璃丝把小铁条固定，玻璃丝将把它的转动速度中的一个特征频率给予小铁条，实验的最大困难就出现在当上述频率与线圈 E 中的交流电频率一致时，利用上述共振法即可定性及定 [3]
量地(最新的精度约为 10%)证实方程(2)中的力矩。

有关上述实验的详情可参见与本文同时发表在德国物理学会通讯上的一篇报道。

193 载于《自然科学》3(1915)：237—238，7 May 1915。

[1] 本文是对早先一篇较专门的几篇论文的一个总结：*Einstein* 和 *De Haas 1915a*，*1915c*(文件 13 和 14)。参见这些论文的注释和编者按"爱因斯坦关于 Ampère 的分子电流"，pp. 145—149。

[2] 见关于 J. Wander, de Haas 的参考文献，后者系 H. A. Lorentz 的女婿，此文发表不久，爱因斯坦在给 De Haas 及其夫人的信中请求原谅他的疏忽(参见爱因斯坦致 Lorentz Wander 和 Geertruida de Haas 的信，大约 10 May 1915)。

[3] *Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13)。

[刘 辽 译校]

16. “对我与 J. W. de Haas 合作的题为《Ampère 分子电流的实验证明》论文的勘误” 194

[*Einstein 1915d*]

1915 年 5 月 10 日收到
1915 年 5 月 30 日发表

载于《德国物理学会会刊》17(1915):203。

195

对我与 J. W. de Haas 合作的题为《Ampère 分子电流的实验证明》论文的勘误 [1]

爱因斯坦

(1915 年 5 月 10 日收到)

通过 H. A. Lorentz 一篇书面询问,我注意到图 6 的表中有一个错误,无疑 [2]
向上的箭头定出了所研究效应的力矩的相角,但切勿认为,在共振时这一相角与 [3]
由力矩产生的振动[方程(8)中的 α 角]的相角相同,在全共振时,按(8)式,这一相角滞后于所产生力矩的相角 α 约为$\frac{\pi}{2}$,因此按图 6,此相角与线圈电流的相角一致。这里有一个疑点,共振是否是完整的,相角 α 能否与线圈电流的相角或前或后偏离一个小角(直至$\frac{\pi}{4}$左右)。所得相角 α 与悬线振动的相角形成一个钝角,如实验所给出的,它们与 π 角仅有很小的偏离。效应的力矩的相角由一向上而非向下的箭头给出的这一结论,由于工作笔记所带来的缺陷而有待核实。当然,把电流线圈和悬线灯串联起来可能获得更精密而一目了然的证实。

载于《德国物理学会会刊》17(1915):203。

1915 年 5 月 10 日收到。1915 年 5 月 30 日发表。

[1] *Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13). "J. W. de Haas"应为"W. J. de Haas"。

[2] 见爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信,1915 年 4 月 28 日,信中爱因斯坦感谢 Lorentz 在一封电报中指出错误。

[3] 见 *Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13),p. 165。

[刘 辽 译校]

197

对 Knapp 所投寄论文《光-以太的剪切……》的评论 [1]

1915 年 6 月 15 日

按作者的想法，光流可比作流体流(以太流)，利用这些流通过狭缝后的方向改变来说明光的衍射。自然，不少才智之士曾企图基于这一想法来计算在折射现象中的周期性强度分布，自然基于这一想法企图解释干涉现象(狭义的)是毫无希望的。从下面简短引文看来，这种导致严重困难的方案是最根本的和明晰的(引自首段 p. 31，2.)。

"干涉与这些现象毫不相干，它们并不存在，我要毫不犹豫地声明：光的干涉是一句光彩夺目的痴话，衣冠楚楚的英国佬带着它通过 Thomas Young 在向我们祝福。"

文章没有科学价值。

爱因斯坦

ADS(GyBAW，Ⅱ—Ⅵ，vol. 120，p. 289)。*Kirsten and Treder 1979a*，p. 142[82 032]。

代表普鲁士科学院终身秘书之一的 Max Planck 有一则笔记记录，文稿曾于 1915 年 6 月 24 日在普鲁士科学院物理数学组讨论过。

[1]文稿于 1915 年 5 月 25 日由 Berlin 的 Fritz Knapp 投寄普鲁士科学院(见 Max Planck 于 1915 年致 Fritz Knapp 的信，GyBAW，Ⅱ—Ⅵ. VOL. 120，p. 290)。并由 Max Planck 转寄爱因斯坦以供评审，作为科学院成员的常规工作之一是评审主动寄给科学院的文稿，此文稿存于被爱因斯坦评审为"无价值投稿(Wertlos Einsendung)"的 18 篇文稿之首的一个文夹中(见 *Kirsten* 和 *Treder 1979a*，pp. 141—142 与 *Kirsten* 和 *Treder 1979b*，p. 45)。文稿于 6 月 26 日退回作者(见同日 Max Planck 致 Fritz Knapp，GyBAW 的信，Ⅱ—Ⅵ，VOL. 120，p. 290)。

[刘 辽 译校]

18. “对 M. von Laue 的文章《概率计算中的一个定理与其对辐射理论的应用》的回答” 198

[*Einstein 1915e*]

1915 年 6 月 24 日收到
1915 年 9 月 3 日发表

载于《物理学杂志》47(1915):879—885。

199

对 M. von Laue 的文章《概率计算中的一个定理与其对辐射理论的应用》的回答[1)] [1]

爱因斯坦

在所引的文章中，Laue 使辐射统计学的数学基础变成这样一种形式，就其精确与漂亮而言无出其右，然而就这些基础对辐射理论的应用来说，我以为他已成了关键性错误的受害者，此错误急需修正。Laue 断言出现在自然辐射的局域振动中的 Fourier 展开的系数统计上不必彼此独立。如果这一断言是正确的，人们的确会得到一种很有希望的方法，去克服在 Planck 的“h”起重要作用的所有规律在理论上显示出来的“难于理解”的困难，这正是促使我在 5 年前曾与 [2]
L. Hopf 合作发表的文章中更详细地研究此问题的原因。

Laue 认识到这一并非毫无瑕疵地完成的文章的结果是从该文中所做的基本假设得来的一个正确结论。Laue 否认的是下面基本假设的允许性，它们可表述如下：

如果我们按下法获得一完全无序的辐射（即统计上相互独立的 Fourier 系数），也就是把无数的完全已知的全同的辐射叠加起来，以使得叠加的总位相被无规地选定，那么自然辐射必定是统计无序的。

在我看来这一基本假设是显然的。然而事实恰恰相反，像 Laue 这样一位有
200 经验的专家并不赞同这一意见，所以，下面我将给出一个证明，它与前述假设无关，而且——正如我希望的那样——它将无可辩驳地证明我们的波动理论的确要求 Fourier 系数的相互统计独立性。然而，在我开始证明之前，我要指出为什么在 Laue 的文章的Ⅱ和Ⅲ部分中这些考虑在我看来不是一种令人信服的证明。

Laue 考虑来自薄层中无规分布的大量共振子在垂直于（厚度为 $c\tau$）薄层方向发射的辐射。在他的文章的 Ⅱ 部分中，他假定所有这些共振子都是同时且按相同规律振动；而在Ⅲ部分中，所有共振子的振动都受相同的统计规律所支配，这个规律就是将要给出的假定。在这两种情况中，所形成辐射的展开中都不遵守 Fourier 系数的统计独立性。依我看人们不应当由此推断这个假说即这个独立性在**自然辐射**中也不存在的可能性。毕竟没有证明来自厚度为 $c\tau$ 层中共振的不规则分布导致的无序程度必须与在自然辐射中所遇到的无序程度相同。

---

1)英译者注：出现在原文中的打字错误在这篇译文中已被改正，见注{1}—{3}和注[3]。

当人们看到在 Laue 的计算中合成辐射的展开中用指标 p 和 p' 来表征的两项的统计依赖性程度被项

$$\frac{\pi(p-p')\tau}{T}$$

(一个依赖于层的厚度的量)所确定,这个怀疑变得更加显著了。但是,在自然辐射中这类统计依赖性——如果能在那里找到这样的依赖性的话——将与产生这里所考虑的辐射的方法毫无关系。

所以,依我看来在 Laue 所考虑的情况中没有一种与在自然辐射中发现的无序相等价,而且他的结果不允许人们得出与自然辐射有关的任何事情。因此我 201
坚持我以前的主张并要用新的证明去支持它,尽管使用了 Laue 在他的文章中已详细描述过的概率的定理。

§1. 由无穷多相互独立的元辐射叠加而成的辐射的统计性质

要研究的每一个辐射分量将由在 O 到 T 的时间间隔内形式为

{1}
$$\sum_n a_n^{(\nu)}\cos 2\pi n\frac{t}{T}+b_n^{(\nu)}\sin 2\pi n\frac{t}{T} \tag{1}$$

的 Fourier 展开来表示,其中系数满足概率定律

$$\mathrm{d}W=f^{(\nu)}(a_1^{(\nu)}\cdots a_z^{(\nu)}\cdots,b_1^{(\nu)}\cdots b_z^{(\nu)}\cdots)\mathrm{d}a_1^{(\nu)}\cdots \mathrm{d}b_z^{(\nu)}\cdots \tag{2}$$

这一定律对每一辐射分量(ν)可以不同。而且这个定律可以使

$$\left.\begin{aligned}\overline{a_n{}^{\nu}}&=\int a_n{}^{\nu}f^{(\nu)}\mathrm{d}a_1^{(\nu)}\cdots\mathrm{d}b_z^{(\nu)}=0\\ \overline{b_n{}^{\nu}}&=\int b_n{}^{\nu}f^{(\nu)}\mathrm{d}a_1^{(\nu)}\cdots\mathrm{d}b_z^{(\nu)}=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在时间间隔 0 到 T 中的合成辐射为

$$\left.\begin{aligned}&\sum_n A_n\cos 2\pi n\frac{t}{T}+B_n\sin 2\pi n\frac{t}{T}\\ &=\sum_\nu\sum_n\left(a_n{}^{(\nu)}\cos 2\pi n\frac{t}{T}+b_n{}^{(\nu)}\sin 2\pi n\frac{t}{T}\right)\end{aligned}\right\}^{1)} \tag{4}$$

---

1)中译者注:原文有误应改正为

$$\begin{aligned}&\sum_n\left(A_n\cos 2\pi n\frac{t}{T}+B_n\sin 2\pi n\frac{t}{T}\right)\\ &=\sum_\nu\sum_n\left(a_n^{(\nu)}\cos 2\pi n\frac{t}{T}+b_n^{(\nu)}\sin 2\pi n\frac{t}{T}\right)\end{aligned}$$

且由此得出正确的关系式

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \sum_\nu a_n{}^{(\nu)} \\ B_n &= \sum_\nu b_n{}^{(\nu)} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

现在 Fourier 系数 $A_1 \cdots B_z \cdots$ 遵从哪一个统计定律呢？

202 使用完全类似于 Laue 的文章 I 部分中的考虑，人们发现我们正在寻找的统计定律为：

$$\mathrm{d}W = \text{const} \cdot e^{-\sum_{mn}(\alpha_{mn}A_mA_n+\beta_{mn}B_mB_n+2\gamma_{mn}A_mB_n)}\,\mathrm{d}A_1 \cdots \mathrm{d}B_z. \tag{6}$$

人们由此关系可以看出无穷多的辐射分量的叠加完全不能保证 Fourier 系数的统计独立性。然而定律(6)仍然允许我们把 Fourier 系数的统计独立性问题约化为一个比较简单的问题。当且仅当指数函数中指数仅含有 A_m 和 B_m 的平方，而不含有这些量的任何乘积时，统计独立性才能得到满足，也就是

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{mn} = \beta_{mn} = 0 \quad m \neq n \\ \gamma_{mn} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

必须被满足。

此外，由式(3)和式(5)明显看出在统计独立的条件下，关系式

$$\left.\begin{aligned} \overline{A_mA_n} = \overline{B_mB_n} = 0 \quad m \neq n \\ \overline{A_mB_n} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

必定成立。条件(7a)的数目等于条件(7)的数目，全部条件(7a)都是互相独立的。所以，由它得出在式(6)成立的条件下，为保证 Fourier 系数的统计独立性，条件(7a)是充分的。

用这样的方法，我们获得如下初步的结果：因为对于自然辐射我们必须假定它的统计性质不因不相干的部分辐射的叠加而改变，人们可以说对于自然辐射方程(7a)是保证它的 Fourier 系数的统计独立性的充分条件。

§2. 自然辐射的 Fourier 系数的统计独立性的证明

令 $F(t)$ 是对无穷时间周期给出的稳态自然辐射的辐射矢量的分量。T 与

203 辐射中最长的波长的振动周期相比较是一个很长的时间间隔。在 t_0 与 t_0+T 之间，$F(t)$ 被表示为 Fourier 级数

$$\sum_n \left(A_n \cos 2\pi n \frac{t-t_0}{T} + B_n \sin 2\pi n \frac{t-t_0}{T}\right). \tag{4a}$$

$F(t)$ 的 Fourier 系数 A_n，B_n 将明显地依赖于时间初值 t_0 的选择。设想展开是对很多任意的 t_0 做出的，我们得到为导出系数 A_n，B_n 的统计性质所需的统计

数据，它们是我们在自然辐射中必须要求的。

为了导出这些性质，我们首先把 $F(t)$ 在时刻 0 与 ϑ 之间展开为 Fourier 级数，其中 ϑ 与 T 相比是很大的，对于这个时间间隔令

$$F(t)=\sum_{\nu}\alpha_{\nu}\cos\left(2\pi\nu\frac{t}{\vartheta}+\varphi_{\nu}\right). \tag{8}$$

如果 t_0 被选择在 $t=0$ 和 $t=\vartheta-T$ 之间，则系数 A_n 和 B_n 可以用 t_0 和来自
{2} 展开式(8)的系数 α_{ν} 和 φ_{ν} 表示。其次，人们得到

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\frac{2}{T}\sum_{\nu}\left\{\int_{t_0}^{t_0+T}\alpha_{\nu}\cos\left(2\pi\nu\frac{t}{\vartheta}+\varphi_{\nu}\right)\cos\left(2\pi n\frac{t-t_0}{T}\right)\mathrm{d}t\right\}\\B_n&=\frac{2}{T}\sum_{\nu}\left\{\int_{t_0}^{t_0+T}\alpha_{\nu}\cos\left(2\pi\nu\frac{t}{\vartheta}+\varphi_{\nu}\right)\sin\left(2\pi n\frac{t-t_0}{T}\right)\mathrm{d}t\right\}\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

[3] 完成此积分并将带有因子 $\frac{1}{\pi(\nu/\vartheta+\pi/T)}$ 的项与带有因子 $\frac{1}{\pi(\nu/\vartheta-n/T)}$ 的项用熟知的方法进行比较而忽略前者，人们得到

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\sum_{\nu}\alpha_{\nu}\frac{\sin\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta}-n\right)\cos\left(\chi_{\nu n}+2\pi\nu\frac{t_0}{\vartheta}\right)}{\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta}-n\right)}\\B_n&=-\sum_{\nu}\alpha_{\nu}\frac{\sin\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta}-n\right)\cos\left(\chi_{\nu n}+2\pi\nu\frac{t_0}{\vartheta}\right)}{\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta}-n\right)}\end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

其中 204

$$\chi_{\nu n}=\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta}+n\right)+\varphi_{\nu}.$$

公式(10)仅对 t_0 取值在 $t_0=0$ 到 $t_0=\vartheta-T$ 之间是正确的，因为由于式(8)此展开式仅适于时间间隔 $0-\vartheta$。然而我们却允许我们自己把公式(8)应用于 $0-(\vartheta+T)$。为此我们用 0 到 T 之间 $F(t)$ 的值代替时间值在 ϑ 与 $\vartheta+T$ 之间的函数 $F(t)$。这一措施将窜改我们关于平均值的考虑，但仅是一个无穷小量，因为时间间隔 T 相对于 ϑ 来说是无穷小的。按照这一考虑进行下去，我们将这样使用方程(10)，好像它们在整个区间 $0<t_0<\vartheta$ 内都是正确的。

借助方程(10)，我们构造平均值 $\overline{A_mA_n}$，即量

$$\overline{A_mA_n}=\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\vartheta}A_mA_n\mathrm{d}t_0.$$

在此过程中出现积分

$$\int_0^{\vartheta} \cos\left(\chi_{\mu m}+2\pi\mu\frac{t_0}{\vartheta}\right)\cos\left(\chi_{\nu m}+2\pi\nu\frac{t_0}{\vartheta}\right)\mathrm{d}t_0$$

但当整数 μ,ν 取 $\mu\neq\nu$ 时，积分变成零，而对于 $\mu=\nu$ 它取值为 $\frac{\vartheta}{2}(-1)^{m-n}$。考虑到这一点，方程(10)的第一式给出

$$\begin{aligned}\overline{A_mA_n}&=\frac{(-1)^{m-n}}{2}\sum_{\nu}\alpha_{\nu}{}^2\,\frac{\sin\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta}-m\right)\sin\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta}-n\right)}{\pi^2\left(\nu\frac{T}{\vartheta}-m\right)\left(\nu\frac{T}{\vartheta}-n\right)}\\&=\frac{1}{2}\sum\alpha_{\nu}{}^2\,\frac{\sin^2\pi\nu\frac{T}{\vartheta}}{\pi^2\left(\nu\frac{T}{\vartheta}-m\right)\left(\nu\frac{T}{\vartheta}-n\right)}.\end{aligned}\tag{11}$$

很明显，辐射分量间的统计依赖性只能在邻近的频率之间出现；所以 m 和 n 属于同一个窄的谱域，并同样适用于对我们的求和有实质性贡献的那些 ν 值。

205 因为 $\frac{T}{\vartheta}$ 是小量，故式(11)右边的商随 ν 缓慢变化。所以人们可以对 α_ν^2 按许 [4]{3}
多序列项进行平均而不会导致显著的误差，而且可把平均值 $\overline{\alpha_\nu^2}$ 当作常数拿到求和号前面，因为求和仅仅遍及一个窄的谱域。于是对商的求和可以转变为一个积分，结果是：

$$\overline{A_mA_n}=\frac{1}{2}\overline{\alpha_\nu^2}\frac{\vartheta}{\pi T}\int\frac{\sin^2 x}{(x-m\pi)(x-n\pi)}\mathrm{d}x.\tag{12}$$

人们可以用在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 之间的积分代替在前述的谱域的两个边界之间所做的积分而不会引起显著的误差。

对于 $m=n$，积分为 π，但当 $m\neq n$ 时，它总是等于零[1]（m,n 是整数）。由此看出（对于 $m\neq n$）$\overline{A_mA_n}$ 等于零；用类似的方法可以证明，（对于 $m\neq n$）$\overline{B_mB_n}$ 和 $\overline{A_mB_n}$ 等于零。由于这些平均值等于零，根据§1即得出 Fourier 系数的统计独立性。

1）这个积分等于

$$\frac{1}{(m-n)\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x-m\pi}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x-n\pi}\mathrm{d}x\right\}.$$

上面两个积分的每一个都等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 y}{y}\mathrm{d}y=0.$$

证明中的注释：为了得到这个平均值，人们也可以一个无穷多相互独立的展开式(8)为基础，对它们求平均，并用它来代替按求和(11)中许多序列项所做的平均。应用于式(11)的这个平均值的结构使人们相应地理解了在求和号前面的平均值$\overline{\alpha_v^2}$。当然，最终的结果仍然相同。

(1915 年 6 月 24 日收到)

载于《物理学杂志》47(1915)：879－885。1915 年 6 月 24 日收到，1915 年 9 月 3 日发表。 206

[1]*Laue 1915a*。为了征求意见 von Laue 曾寄给爱因斯坦这篇文章的较早的版本。von Laue 在 5 月末的一封信(见 1915 年 5 月 27 日 Max von Laue 致爱因斯坦的信)中，谈到了爱因斯坦的批评，这个批评是在一封信中正式提出的，但这封信已找不到了。他们在格丁根也曾谈及此事(见 1915 年 7 月 15 日 Max von Laue 致 Wilhelm Wien 的信[Gy MDM, Wien Nachlaβ, Mappe Laue(Gy MDM, Wien 遗产，Laue 档案夹)]。von Laue 在信中答应在他把修改稿提交给 Annalen der Physik 的同时，寄给爱因斯坦一个复印本，如果爱因斯坦仍有异议，可以写一个回答。Laue 在 1915 年 7 月中旬同时收到爱因斯坦的回答的校样稿和 *Laue 1915a* 的校样稿。然而他在寄出自己的校样稿之前，没有看爱因斯坦的文章，以免受其影响在自己的文章中做某些改变(见 1915 年 7 月 15 日 Max von Laue 致 Wilhelm Wien 的信)。*Laue 1915a* 和 *Einstein 1915e* 这两篇文章被发表在年鉴的同一期上。其一篇文章是在收到另一篇的一周内收到的。

在 *Laue 1915b* 中，此文是在 10 月 14 日收到的，是对爱因斯坦文章的回答，von Laue 抛开 p. 880 上描述的异议，而接受和推广了爱因斯坦在 § 1 和 § 2 中的计算。

[2]见 *Einstein* 和 *Hopf 1910a*，注意 von Laue 文章的标题几乎与爱因斯坦和 Hopf 的相同。

[3]"π/T"应为"n/T"。

[4]"a_v^2"应为"α_v^2"。

更正者注：

代之以从(11)式逐个对相加的项求平均，人们也可以无穷多彼此独立的展开式(8)出发来求平均，即得(11)式中加和号前的平均值$\overline{\alpha_v^2}$，结果仍旧。

(1915 年 6 月 24 日收到)

英译者附加的注释：

{1}"$\sum\limits_m$"已被改正为"$\sum\limits_n$"。

{2}"a_v 和 φ_v"已被改正为"a_ν 和 φ_ν"。

{3}"a_v^2"已被改正为"α_v^2"，而且在下一行"$\overline{a_n^2}$"已被改正为"$\overline{\alpha_v^2}$"。注[4]似乎含有一些印刷错误。

[高尚惠 译]

[刘 辽 校]

19.“补充的专家意见”

补充的专家意见 207

1915 年 8 月 7 日

[p. 1] 补充的专家意见

[1] 下面我回答 1915 年 3 月 26 日法庭上听证时对我提出的问题。

第一个问题

182855 号专利的内容与构成 34513 号专利内容的发明之间有什么关系？182855 号专利在多大程度上和多大范围内抄袭了 34513 号专利？或者说 182855 号专利在 34513 号专利以外的发明在哪里？

[2] 关于这个问题，我已经在 1915 年 2 月 6 日我所作的鉴定中表明了态度。当时我论证说，专利 182855 与专利 34513 相比，有一些新的东西。我当时就指出，专利 182855 中关于一类转动的工作原理的解释是完全错误的。关于这一专利的意义的判断有些过分。然而在重新审视这个案件时我却有另外一个如下解释：

这里提到的所有轮子设备的特点是，其轮轴都强制地安装在基本水平的位置上。可以用一个初始的 Foucault 设备，用强制的机械连接（安装在我的 1915

[p. 2] 年 6 月 2 日的意见书的第 2 页图 1 中的架子 G 上的环 B 上）将其导入水平位置；在安装了一个不产生相对于地球运动的架子情况下，而且只有在这种情况下，才能做到这一点。在船用设备中，并没有其位置与地球相对稳定的架子。

这里人们注意到，轮轴的（近处的）水平导向机构是通过**重力**来完成的。每一个类似设备的轮子都必然具有 3 个自由度，每一个轮体都像摆一样地悬挂着，而轮轴都在水平面上下做摆动可以反抗重力的作用。由此可知，这一点既是专利 34513 的内容，也是专利 182855 的内容。

现在人们来读 182855 号专利的专利要求，人们可以看到，这个专利要求中 208
事实上没有包含对对象的特征描写，它比单纯的（自己能明白的）符号好不了多少。这个不幸的特征描写实质上完全背离了专利文书的第一条。其中写道："（轮轴）在一个方向的运动时要受到一个与之成比例的较小的阻力。"

以下情况有力地支持了以上的说法：在说明书的好几个地方都支持这一说

法，我们特别想指出，在说明书的倒数第二段，在那里把摆形的悬挂物比作一个超灵敏的天平。**与此正好相反 34513 号专利指出，其轮轴对于偏离水平方向具有非常有效的稳定性。**这一点在 Danziger 博士先生 1915 年 3 月 18 日的报告的 [3]
第 4 页已经指出，并且也直接出现在 Van den Boos 的专利文书中。 [p. 3]

对于这一关键点(小的轮轴水平稳定装置)的重要性，182855 号专利是没有认识到的。这不仅由于在专利申请中完全没有在图中画出来，而更重要的是在其说明和申请中多次提到轮轴在水平面上必须保持稳定，但却没有提到为什么这一稳定装置必须是小型的。而在另一方面，发明人自己承认了这一关键设施是很重的，这可以举出在倒数第二页上的一段来证明，那里写道："在实践中必须使重心支点尽可能地接近……"

这一关键点的技术上的重要性是明显的，表现在以下两个方面：

a)每一种使轮轴在水平方向上稳定的方案都须借助于重力，而运动体由此产生的水平加速度将对轮架产生显著的影响，对轮轴产生侧向的力矩，而稳定的作用愈强，所产生的影响也愈大。由于这种原因，一个具有强力稳定性的轮子(例如 Van den Boos 的那一种)，在航海船舶上是不能采用的。

b)迄今为止，所有可用的稳定船用陀螺震动的方法都是基于将轮轴用悬吊
209 的方法安放在水平面上。在水平面上稳定轮轴是一个有意义的方法，但没有足 [p. 4]
够的阻尼。

和我以前的意见相反，我也根据上述意见(即原告的意见)认为：专利号 182855 的轮子设施具有"轮轴的小型稳定设施"关键点，而与 Van den Boos 轮子类似的专利 34513 号则没有这种关键点。

第二个问题

在被告提供给国家海军部的陀螺罗盘的发明思想中，在多大程度上被利用在专利 182855 和 236200 号中？

首先，关于专利 182855 号，早在它的第一份鉴定中就已经写道，"封闭型轮子无疑是这一专利的专利要求"。然而，按照上面的描述，如果法院认定"轮轴的 [4]
小型水平稳定器"特征是重要的，于是问题就在于这个关键点是否属于封闭型轮子这一概念之中？

根据我的意见，这个问题是肯定的，由封闭型轮子提出的轮轴稳定装置是通过一个月形重物 R 来实现的(见目录中图 15)。我确信在 7 月 10 日验证了这一点。验证这一点的实验证实，通过轮轴的上升确实产生了阻尼力矩。这表明，通过重物 4 的稳定作用是很弱的，以致由于轮子的作用使轮轴升起的量是不大的。 [p. 5]

因此，关键点"小型轮轴稳定装置"在实质意义上是属于以轮子的作用进行稳定一类的。

对于 236200 号专利，我注意到 7 月 10 日在 Kiel 对所提供的封闭型罗盘进行的实验中对于轮子的阻尼调整作用已经搞清楚了。

[5] 在专家鉴定的记录的曲线图上，有我们实验结果的曲线图表，其中横坐标是以分为单位的读数时间，纵坐标是以度为单位的轮子的位置。图表 B 中的曲线 210
是轮子的正向转动情况，图表 A 中的曲线是反向转动情况。由此曲线可以发现，由阻尼产生的力矩在倒转转动时使其变向。由此得出，在我的意见（第 12 页第二段）中指出的作用对轮子有阻尼作用。所申请的封闭型轮子完全相当于专利 236200 号中的专利要求 1）。

所申请的封闭型轮子完全落入了上述两个专利的保护范围之内。

A. 爱因斯坦（签名）

附件

1 专家鉴定书

2 曲线图表

TDC(GyKiA, Gruppe IIa, Mappe 555/a). *Lohmeier* 和 *Schell 1992*, pp. 236—239. [79 231].

这个五页的文件是爱因斯坦起草的，但是几乎可以肯定不是他打字的。在其第一页的上方注有"副本"（"Abschrift"）字样。在全页中有手写的印刷体的改正，虽然不是出自爱因斯坦之手。原稿中每页的页号现用方括号排在文章的边缘。

[1]爱因斯坦曾发表一篇"专家意见"（文件 12），在 1915 年 3 月 26 日提交给法庭，这是他早在 2 月份起草的。法庭提出的两个问题已经在文中复述。此外，法庭还要求爱因斯坦调查 Sperry 陀螺。在 1915 年 5 月 18 日致法庭的信中，爱因斯坦曾经表明过他的意见他不仅"有意去观看，而是去作一个实验研究"（"nicht nur eine *Besichtigung*, sondern auch eine *experimentelle Untersuchung*."爱因斯坦致 Königliches Landgericht I 的信，1915 年 5 月 18 日，复件存 GyKiA, Gruppe IIa, Mappe 555/a）。有关更多的背景，请参阅文件 12 的注释。

[2]见文件 12，[p. 4]。

[3]在庭审中，律师 Jacques Danziger 代表 Anschütz & Co 公司。

[4]参见文件 12，[p. 8]。

[5]图表已不可得。

［周正安 译校］

20.“我对战争的看法”

1915年10月23日至11月11日

[2][p. 1]

我对战争的看法

211

[1]

(1915年10月23日至11月11日)

战争的心理学根源,在我看来,深藏于生物学上雄性物种的攻击性本能。我们虽是"万物之尊",但并不是唯一会炫耀这种本能的物种;有些动物在这方面远远超过我们,比如公牛和公鸡。只要雄性个体并排站在一起,这种攻击性倾向就会显露出来;当组织相对严密的社群需要相互打交道时,就更是如此。几乎无一例外,他们都会以争辩收场;若不是特别谨慎,这种争辩就会升级为争吵和凶杀。我永远也不会忘记我当年的同学对临街一个学校的一年级学生所怀有的那种血腥而真实的憎恨。不知发生过多少相互殴打,那些小家伙头上都破了好多窟窿。谁敢说族间复仇和决斗不是起源于这种感情?我甚至相信,我们精心呵护的"名誉"(Ehre)正是从这类资源中获取其大部分养分的。

因此不难理解,组织更为严密的现代国家必须有力地将这种原始雄性本能的表现推到幕后。但凡两个国家相邻,并且没有高居其上的超级联合力量,这些感情时不时就会造成紧张气氛(Gemüt),直至引起战争灾难。这样说来,我认为所谓战争的目标与原因多半是无意义的,因为它们总是在激情需要的时候找出来的。

任何时代的较敏锐的知识分子都一致同意,战争是危害人类发展的最大敌人之一,必须不惜一切代价去阻止它。尽管目前的形势糟糕透顶,但我确信,在不久的将来,欧洲有可能形成一个类似国家的组织,从而完全避免欧洲内部的战争,就像德意志帝国之内 Bayern 和 Württemberg 不可能发生战争一样。所有 212
[3] 致力于精神发展的朋友,都应该支持这一我们时代最重大的政治目标。

但软弱的个体生命怎样才能为实现这一目标做出贡献呢?是不是每个人都得把相当多的时间和精力花在政治上?我确实认为,当欧洲那些知识更发达的人们忽视一般政治问题的时候,他们确实有罪;不过,我并不相信在政治参与中一个个体具有极端重要的作用。我倒是觉得,每一个人都应该按自己的方式行动起来,将我在上面详细讨论的那些情感导向合理的方向,使其不再成为普通公众的祸因。

213 每一个了解自己是在尽己所知、尽己所能来行动的人，都应该觉得光荣，而不必考虑他人的言行。他人（或其他群体）的言行不能侵犯一个人的个人（或其所在群体的）荣誉。贪心与权欲应该一如既往地被视为可鄙的罪恶；仇视和争吵也应如此看待。我没有美化过去，但依我看在这个重要问题上我们并没有进步；我们倒觉得退步了。在这些方面，每一个善良的人都应该在自己身上和自己的圈子里努力加以改进。这样，目前严重困扰我们的重担也会化为乌有。

我说这么多，其实用一句话就可以说清楚，这句话非常适合犹太人：不仅要用言辞和歌唱，更要用你们的行为，来赞美你们的主——耶稣基督。

AD(GyB,Slg. Darmst,F 1e 1908(7),pp. 9—10).[70 457]。包括在1915年10月23日之后爱因斯坦给 Goethe 协会的信中。原稿是未编页码的三页纸，此处页码用方括号标在页边。

[1]此日期系参考与此稿同在一个信封中的信上所署的日期（见注释的说明）。

[2]此稿是 Goethe 协会柏林分部1915年10月23日提供的（见爱因斯坦1915年10月23日给柏林 Goethe 协会的信）。该协会是一个致力于大众对于艺术和科学的理解的组织，成立于1900年。这个组织计划发行一本《爱国主义纪念册》，标题为“Das Land Goethes 1914—1916,”（Goethe 的国家，1914—1916），其中号召 Goethe 的后裔起来保卫德国文化免受敌人的贬低（参见副标题及本卷中的“序”即 *Einstein 1916a* 发表的那一卷的副标题和“序”）。

爱因斯坦提交这一稿件的时间在1915年10月23日和11月11日之间，按照 Goethe 协会的要求，他在略为踌躇之后修改了这一稿件（见爱因斯坦1915年11月16日给 Goethe 协会的信）。这一修改版以 *Einstein 1916a* 的形式发表，并附有爱因斯坦签名的真迹。

[3]以下两节在 *Einstein 1916a* 中被略去。

[郝刘祥 译校正文]
[喀兴林 译校注释]

21.“关于广义相对论”

[*Einstein 1915f*]

1915 年 11 月 4 日收到
1915 年 11 月 11 日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1915):778—786。

215
关于广义相对论

爱因斯坦

1915 年 11 月 4 日全体会议

我近年来致力于以相对论的假定为基础，建立广义相对论以及研究变速运动。我确实认为已经找到唯一符合合理表述的广义相对论假设的引力定律；我 [1]
并且试图在去年发表在《学报》上的一篇论文[1]中展示解决这一问题的真理性。

近来向我提出的批评意见认为，绝对不可能用所提议的方法来说明这个真理。认为之所以如此似乎是出于错误判断。如果选择 Hamilton 原理为依据，相对论假设——**只要我需要它**——就永远成立。可是实际上，它无法为建立引力场的 Hamilton 函数 H 提供什么工具。确实，限制着对 H 的选择的方程(77) l. c，只是表示 H 必须是线性变换的不变量，这是一个和加速相对性无关的要求。此外方程(78)l. c. 确定的选择绝不能确定方程(77)。 [3]

基于这些原因，我对自己推导出的场方程失去信心，转而寻找以自然方式限制这些可能性的方法。在这种追求中产生了对广义协变性的要求，这正是三年前和我的朋友 Grossmann 合作时忍痛放弃过的要求。事实上，我们那时候离问题的答案已经相当接近，详见下文。

正如狭义相对论基于所有方程组都必须相对于线性正交变换呈协变性那
216 样，在这里发展的理论基于这样的假设：**所有方程组都相对于代换行列式为 1 的变换呈协变关系。**

真正掌握它的人均无一不被其魅力所折服，因为它意味着由 Gauss、Riemann、Christoffel、Ricci 和 Levi-Civita 奠定的广义微分学的真正胜利。

§ 1. 协变量的生成法则

我在去年的一篇文章中曾详细地介绍过绝对微分法，在此我只想扼要地介

1)《相对论的形式基础》，《学报》41(1914)，pp. 1066—1077. 在下面凡是引用此文的方程均加有后缀 [2]
“l. c.”，以示与本论文的方程相区分。

绍协变量的生成法则;因此,我们只需要研究:如果只允许代换行列式为 1,协变量理论会发生什么变化。对任何变换都成立的方程

$$d\tau'=\frac{\partial(x'_1\cdots x'_4)}{\partial(x_1\cdots x_4)}d\tau,$$

鉴于我们理论的前提,即

$$\frac{\partial(x'_1\cdots x'_4)}{\partial(x_1\cdots x_4)}=1, \tag{1}$$

现在变成

$$d\tau'=d\tau. \tag{2}$$

因此,四维体元 $d\tau$ 为一不变量。此外,由于(方程(17)l. c.)$\sqrt{-g}d\tau$ 在任意代换中为一不变量,因此对于我们感兴趣的群可得到

$$\sqrt{-g'}=\sqrt{-g}. \tag{3}$$

因此,$g_{\mu\nu}$ 的行列式是一个不变量。与广义协变关系的公式相比较,由于 $\sqrt{-g}$ 的标量特征,人们可以简化协变量形成的基本公式;简而言之,因为 $\sqrt{-g}$ 和 $1/\sqrt{-g}$ 就不再出现在基本公式中,而且在张量和 V 张量之间的区别消失。特别是,可以得到:

1. 张量 $G_{iklm}=\sqrt{-g}\delta_{iklm}$ 和 $G^{iklm}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta_{iklm}$(见 19)和(21$a$)l. c.)现在被下 217

面的张量取代

$$G_{iklm}=G^{iklm}=\delta_{iklm}, \tag{4}$$

它们的结构更为简单。

2. 在我们的前提条件下,张量扩展的基本公式(29)l. c. 和(30)l. c. 不可用简化的公式取代,但定义散度的方程(以方程(30)l. c. 和(31)l. c. 合并来表达)可被简化。这可用下式表达

$$A^{\alpha_1\cdots\alpha_l}=\sum_s\frac{\partial A^{\alpha_1\cdots\alpha_l s}}{\partial x_s}+\sum_{s\tau}\left[\begin{Bmatrix}s\tau\\ \alpha_1\end{Bmatrix}A^{\tau\alpha_2\cdots\alpha_l s}+\cdots\begin{Bmatrix}s\tau\\ \alpha_l\end{Bmatrix}A^{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\tau}\right]+\sum_{s\tau}\begin{Bmatrix}s\tau\\ s\end{Bmatrix}A^{\alpha_1\cdots\alpha_l\tau}. \tag{5}$$

但是根据(24)l. c. 和(24a)l. c.

$$\sum_s\begin{Bmatrix}s\tau\\ s\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha s}g^{s\alpha}\left(\frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_\tau}+\frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_s}-\frac{\partial g_{s\tau}}{\partial x_\alpha}\right)=\frac{1}{2}\sum g^{s\alpha}\frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_\tau}=\frac{\partial(\lg\sqrt{-g})}{\partial x_\tau}. \tag{6}$$

及根据公式(3),该量具有矢量的特征。因此公式(5)右端最后一项本身是秩为 l 的反变张量。这样,我们就能够用散度的简单定义来取代公式(5),即

$$A^{\alpha_1\cdots\alpha_l}=\sum_s \frac{\partial A^{\alpha_1\cdots\alpha_l s}}{\partial x_s}+\sum_{s\tau}\left[\begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}A^{\tau\alpha_2\cdots\alpha_l s}+\cdots\begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_l \end{Bmatrix}A^{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\cdot\tau s}\right], \qquad (5a)$$

而我们将在下面一直这么处理。

例如，定义(37)l. c.

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\sqrt{-g}A^\mu)$$

必须用较简单的定义取代

$$\Phi=\sum_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu}, \qquad (7)$$

而且反变六矢量的散度方程(40)l. c. 被更简单的下式取代

$$A^\mu=\sum_\nu \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}. \qquad (8)$$

鉴于我们的假设，可以用式(9)取代公式(41a)l. c.

$$A_\sigma=\sum_\nu \frac{\partial A_\sigma^\nu}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}A_\tau^\nu, \qquad (9)$$

与(41b)相比较后发现，在我们的假设下，在广义微分学中散度法则与 V-张量的散度法则相同。这个评论适用于任何张量散度，从(5)和(5a)可推导出此结构。
218

3. 我们对行列式为 1 的变换的限制条件为仅仅从 $g_{\mu\nu}$ 及其导数生成的协变量带来意义最深远的简化。在数学上，这些协变量均可从四阶的 Riemann-Christoffel schem 张量推导出来，该张量(以其协变形式)可表达为：

$$\left.\begin{aligned}(ik,lm)=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k\partial x_l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i\partial x_m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k\partial x_m}-\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_l\partial x_i}\right)\\&+\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\begin{bmatrix} im \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kl \\ \sigma \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} il \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} km \\ \sigma \end{bmatrix}\right)\end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

正是由于引力本性，我们对二阶的张量最感兴趣，它们可以通过四阶张量与 $g_{\mu\nu}$ 内乘得到。由于 Riemann 张量的对称性，从公式(10)显然可以看出

$$\begin{aligned}(ik,lm)&=(lm,ik),\\(ik,lm)&=-(ki,lm),\end{aligned} \qquad (11)$$

这种乘法只能用一种方式进行；因此得到张量

$$G_{im}=\sum_{kl} g^{kl}(ik,lm). \qquad (12)$$

就我们目的而言，从公式(10)的另一种形式推导该张量更有利，那是 Christoffel 给出的[1)]，即

1)关于本表达式的张量特征的简单证明，请见我被多次援引文章的 1053 页。

$$\{ik,lm\}=\sum_{\rho} g^{k\rho}(i\rho,lm)=\frac{\partial\begin{Bmatrix} il \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_m}-\frac{\partial\begin{Bmatrix} im \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_l}+\sum_{\rho}\left[\begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho m \\ k \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho l \\ k \end{Bmatrix}\right]. \tag{13}$$

将此张量与下面张量相乘(内乘),

$$\delta_k^l=\sum_{\alpha} g_{k\alpha}g^{\alpha l}$$

就可得到 G_{im},即

{1} $$G_{im}=\{il,lm\}=R_{im}+S_{im} \tag{13}$$ 219

[4] $$R_{im}=-\frac{\partial\begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l}+\sum_{\rho l}\begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho m \\ l \end{Bmatrix} \tag{13a}$$

$$S_{im}=\frac{\partial\begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m}-\sum_{\rho l}\begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho l \\ l \end{Bmatrix}. \tag{13b}$$

在行列式为 1 的变换的限制下,不仅(G_{im})是个张量,而且(R_{im})和(S_{im})也具有张量性质。根据$\sqrt{-g}$为一标量这一事实,而且因为(6),$\begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}$是一个协变四矢量。然而,由于(29)l. c.,(S_{im})正是这个四矢量的延伸,这表明它也是个张量。由于(G_{im})和(S_{im})的张量特性,从(13)可知(R_{im})也具有同样特性。张量(R_{im})对于引力理论至关重要。

§ 2. 对"物质"过程微分定律的说明

1. 物质能量-动量定理(包括真空中的电磁过程)。

根据前段的一般考虑,方程(42a)l. c. 应被下式取代

$$\sum_{\nu}\frac{\partial T_{\sigma}^{\nu}}{\partial x_{\nu}}=\frac{1}{2}\sum_{\mu\tau\nu} g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}T_{\tau}^{\nu}+K_{\sigma}, \tag{14}$$

式中 T_{σ}^{ν} 为一普通张量,K_{σ} 为一普通四矢量(分别不为 V 张量,V 矢量)。对此方程我们必须加以说明,因为它对下文很重要。守恒方程使我在过去曾将量

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu} g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$$

看成引力场分量的自然表达式,即使绝对微分法的公式似乎暗示,Christoffel 符号$\begin{Bmatrix} \nu\sigma \\ \tau \end{Bmatrix}$反而是更自然的量。前面的观点是一个致命的偏见。尤其是,由于它们 220

的协变指标(这里为 ν 和 σ)的对称性,还因为它们出现在极其重要的测地线方程(23b)l. c. 中,而后者——从物理的观点看——是质点在引力场中的运动方程,所以选择 Christoffel 符号是正当的。方程(14)不能被看成反论,这是因为其右端的第一项可写成下列形式

$$\sum_{\nu\tau}\begin{Bmatrix}\sigma\nu\\ \tau\end{Bmatrix}T_{\tau}^{\nu}.$$

因此,我们从此将把下面各量

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}&=-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{Bmatrix}=-\sum_{\alpha}g^{\sigma\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}\\&=-\frac{1}{2}\sum_{\alpha}g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}\right)\end{aligned}\tag{15}$$

称为引力场的分量。当 T_{σ}^{ν} 表示所有"物质"过程的能量张量时,K_{ν} 为零,而且守恒定理(14)取以下形式

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial T_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}=-\sum_{\alpha\beta}T_{\sigma\beta}^{\alpha}T_{\alpha}^{\beta}.\tag{14a}$$

我们注意到在引力场中一个质点的运动方程(23b)l. c. 呈如下形式

$$\frac{d^2x_{\tau}}{ds^2}=\sum_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}\frac{dx_{\mu}}{ds}\frac{dx_{\nu}}{ds}.\tag{15}$$ {2}

2. 所援引文章第 10 和 11 段所考虑的内容没有改变,只不过该文中称之为 V 标量和 V 张量的结构现在分别为普适标量和张量而已。

§3. 引力场方程

从上述来看,似乎将引力场方程写成下面形式为宜

$$R_{\mu\nu}=-\kappa T_{\mu\nu},\tag{16}$$

因为我们知道这些方程在行列式为 1 的任意变换下是协变的。的确,这些方程满足我们所要的一切条件。根据方程(13a)和方程(15),它们可更详细地表达为

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}+\sum_{\alpha\beta}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}=-\kappa T_{\mu\nu}.\tag{16a}$$

221 我们现在想指出,这些场方程可以表达为 Hamilton 形式

$$\left.\begin{aligned}&\delta\left\{\int\left(\mathfrak{L}-\kappa\sum_{\mu\nu}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right)d\tau\right\}\\&\mathfrak{L}=\sum_{\sigma\tau\alpha\beta}g^{\sigma\tau}\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha}\Gamma_{\tau\alpha}^{\beta}\end{aligned}\right\},\tag{17}$$

式中,在将 $T_{\mu\nu}$ 视为恒量的同时,对 $g^{\mu\nu}$ 进行变分。其原因是(17)和下面方程

等效

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}=-\kappa T_{\mu\nu}, \tag{18}$$

式中须将 $\mathfrak{L}$ 视为 $g^{\mu\nu}$ 和$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}=(=g_{\sigma}^{\mu\nu})$的函数。另外,通过冗长但不复杂的计算可以得到下面关系

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}=-\sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}=\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}. \tag{19a}$$

它们和(18)一起构成了场方程(16a)。

现在还很容易看出,能量和动量守恒的原理得到满足。用 $g_{\alpha}^{\mu\nu}$ 乘方程(18)并对指标 μ 和 ν 求和,按惯例加以整理便可得到

$$\sum_{\alpha\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_{\sigma}}=-\kappa \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} g_{\sigma}^{\mu\nu}.$$

另一方面,根据方程(14),对于物质的总能量张量,有

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial T_{\sigma}^{\lambda}}{\partial x_{\lambda}}=-\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} T_{\mu\nu}.$$

从后两个方程可得

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}}\left(T_{\sigma}^{\lambda}+t_{\sigma}^{\lambda}\right)=0, \tag{20}$$

式中

$$t_{\sigma}^{\lambda}=\frac{1}{2\kappa}\left(\mathfrak{L} \delta_{\sigma}^{\lambda}-\sum_{\mu\nu} g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\lambda}^{\mu\nu}}\right) \tag{20a}$$

表示引力场的"能量张量",顺便指出的是,它只有在线性变换下,才具有张量性 222
质。经过简单整理,从方程(20a)和方程(19a)可得到

$$t_{\sigma}^{\lambda}=\frac{1}{2} \delta_{\sigma}^{\lambda} \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}-\sum_{\mu\nu\alpha} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}. \tag{20b}$$

最后,可以很有趣地从场方程推导出两个标量方程。将方程(16a)乘以 $g^{\mu\nu}$,并对指数 μ 和 ν 求和,稍加整理便可得到

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^{2} g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}-\sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} \Gamma_{\tau\alpha}^{\beta}+\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_{\beta}}\right)=-\kappa \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{\sigma}. \tag{21}$$

另一方面,将方程(16a)乘以 $g^{\nu\lambda}$,并对 ν 求和,便可得到

$$\sum_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\right)-\sum_{\alpha\beta\nu} g^{\nu\beta} \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}=-\kappa T_{\mu}^{\tau},$$

或者,也考虑到方程(20b),

$$\sum_{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right)-\frac{1}{2}\delta^\lambda_\mu\sum_{\mu\nu\alpha\beta}g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}=-\kappa\left(T^\lambda_\mu+t^\lambda_\mu\right).$$

将(20)纳入考虑，简单整理后得到

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\sum_{\sigma\tau\alpha\beta}g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}=0.\right. \tag{22}$$

可是，我们还进一步要求

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\sum_{\sigma\tau\alpha\beta}g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}=0, \tag{22a}$$

这样一来，(21)就可变为

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\beta}\right)=-\kappa\sum_\sigma T^\sigma_\sigma. \tag{21a}$$

从方程(21a)可看出，因为能量张量的标量不可能设为零，故不可能选择$\sqrt{-g}$等于 1 的坐标系。 [5]

方程(22a)仅仅是 $g_{\mu\nu}$的一个关系式；在由原来的坐标系通过违禁的变换所产生的新坐标系中，该关系不再成立。因此该方程指出，对于流形必须如何选择适合它的坐标系。

223

§ 4. 关于理论中物理量的一些说明

方程(22a)的一阶近似为

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=0.$$

这还没有把坐标系确定，因为这需要四个方程。因此我们被允许在一阶近似下随意加上条件

$$\sum_\beta\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0. \tag{22}$$ ⟨3⟩

为了进一步简化，我们要把虚时间当作第四个变量引入。这样，作为一阶近似，场方程(16a)取以下方式

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}=\kappa T_{\mu\nu}, \tag{16b}$$

从这一方程立即看出，它将牛顿定律作为近似而包含进去。

新的理论与运动的相对性吻合是基于这样的事实，新坐标系相对于旧坐标系旋转(具有任意变化的角速度)，以及那种新坐标系的原点相对于旧坐标系原点做任意指定的运动，都是属于允许的变换。 [6]

的确，下列代换

$$x' = x\cos\tau + y\sin\tau,$$
$$y' = -x\sin\tau + y\cos\tau,$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

和

$$x' = x - \tau_1$$
$$y' = y - \tau_2$$
$$z' = z - \tau_3$$
$$t' = t$$

的行列式为 1，此处 τ 和 τ_1, τ_2, τ_3 分别为 t 的任意函数。

英译者的附加注释：

{1}(13)这个编号上文已有方程使用过。

{2}(15)这个编号上文已有方程使用过。

{3}(22)这个编号上文已有方程使用过。

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1915)：778—786。1915 年 11 月 4 日收到，1915 年 11 月 11 日发表。 224

[1]关于历史背景，见第四卷，编者按"爱因斯坦论引力和相对论：静态场"，pp. 122－128；"爱因斯坦论引力和相对论：和 Marcel Grossmann 合作的论文"，pp. 294—301；本卷导论；Stachel 1989 和 *Einstein* 和 *Glymour 1978a*，*1978b*。尤其参阅 Norton 1984，sec. 8 有关此论文的细节讨论及以下两篇续编，*Einstein 1915 g*（文件 22）与 *Einstein 1915i*（文件 25）。

[2]*Einstein 1914 o*（文件 9）。

[3]在 1915 年 10 月 12 日爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信中更仔细地讨论了 H 的不变性以及 *Einstein 1914 o*（文件 9）中方程(77)和(78)之间的关系。更多背景还可参阅 *Einstein 1914 o*（文件 9）中的注解 36 和 42。

[4]方程(13a)和方程(13b)的右端应理解为对指标 l 求和；方程(13b)的第二项也应理解为对指标 p 求和。

[5]有关这一陈述的收回以及修改的讨论见 *Einstein 1915 g*（文件 22）。

[6]在写此文之前不久，爱因斯坦已经意识到，发表在 *Einstein 1914 o*（文件 9）中的广义相对论的版本在旋转下不协变（见爱因斯坦致 Erwin Freundlich 的信，1915 年 9 月 30 日）。爱因斯坦后来把这一洞察归功为他修改理论的关键一步（见爱因斯坦致 Arnold Sommerfeld 的信，1915 年 11 月 28 日，和爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信，1916 年 1 月 1 日）。

［罗景琪　译］
［吴忠超　校］

225 22.“关于广义相对论(附录)”

[*Einstein 1915g*]

1915年11月11日收到
1915年11月18日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1915):799—801。

关于广义相对论(附录) 226

爱因斯坦

在最近的一项研究中[1],我曾指出在多维流形中如何将 Riemann 协变量理论用做引力场理论的基础。现在我想在这里指出,通过引入另一个显然十分大胆的物质结构假设,可以使该理论具有更精确、更合理的逻辑结构。

我们要考查其合理性的这一假设和下列论题有关。"物质"的能量张量 T_μ^λ 具有一个标量 $\sum_\mu T_\mu^\mu$,它对电磁场为零是众所周知的。相比之下,对于物质**本身**,它似乎不为零。因为,如果我们考虑最简单的特殊情况,一种"无内聚力"的连续流体(压力忽略不计),那么我们通常有

$$T^{\mu\nu}=\sqrt{-g}\rho_0\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s},$$

而且我们有

$$\sum_\mu T_\mu^\mu=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=\rho_0\sqrt{-g}.$$

能量张量的标量在这种方法中不为零。

现在应该记住,我们认为的"物质"并非可以理解为原始的或者物理上简单的东西。居然还有人,不止一些人希望将物质简化为纯粹的电动力学过程。这自然需要一种比 Maxwell 电动力学更完备的理论来完成这种简化。现在让我们仅仅假定,在这种完备化的电动力学中,能量张量的标量也会为零!上述这个结果证明本理论无法构造物质吗?我认为,我可以对这个问题做出否定的回答,因为非常有可能在与上述表达式相关的那种"物质"中,引力场的确构成重要的 227 部分。在那种情况中,整个结构的 $\sum T_\mu^\mu$ 可呈现为正的,而在实际中,只有 $\sum(T_\mu^\mu+t_\mu^\mu)$ 为正的,而 $\sum T_\mu^\mu$ 处处为零。**我们在下面假定 $\sum T_\mu^\mu=0$ 在一般情形下的确成立。**

凡是明确支持这样的可能性,认为引力场会构成物质的**基本**部分者,都将在

1) 同期《学报》,*p*. 778。

下文找到对这一观念的有力支持[1)]。

场方程的推导

这个假设可使我们迈出认为广义相对论理论是有希望的最后一步。就是说,它也允许我们以广义协变的形式来写出引力场方程。我曾在以前的文章中指出过[方程(13)]

$$G_{im}=\sum_{l}\{il,lm\}=R_{im}+S_{im} \tag{13}$$

是一个协变张量。而且我们有

$$R_{im}=-\sum_{l}\frac{\partial\begin{Bmatrix}im\\l\end{Bmatrix}}{\partial x_{l}}+\sum_{\rho l}\begin{Bmatrix}il\\\rho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho m\\l\end{Bmatrix}, \tag{13a}$$

$$S_{im}=\sum_{l}\frac{\partial\begin{Bmatrix}il\\l\end{Bmatrix}}{\partial x_{m}}-\sum_{\rho l}\begin{Bmatrix}im\\\rho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho l\\l\end{Bmatrix}. \tag{13b}$$

这个张量 G_{im} 是建立引力的广义协变的方程的仅有的可以采用的张量。

如果我们同意引力的场方程应写成

$$G_{\mu\nu}=-\kappa T_{\mu\nu}, \tag{16b}$$

我们就得到广义协变的场方程。和绝对微分法提供的一般协变法则一道,它们可表达自然界中“物质”过程的因果关系;它们的表达形式强调这样一个事实,在
228 建立这些定律时并没有对坐标系作任何特殊选择——这种选择在逻辑上和自然法则毫无关系。

基于这个坐标系——回到过去的坐标系选择——人们不必对我在近期文章建立的那些定律作任何改变,就可以回到这些定律。因为很清楚,我们可以引进一个新的坐标系,使得相对于它

$$\sqrt{-g}=1$$

处处成立。那么 S_{im} 为零,并且回到近期文章中的场方程组

$$R_{\mu\nu}=-\kappa T_{\mu\nu}. \tag{16}$$

绝对微分法公式精确地按该文章所指出的方式退化。而且我们选择的坐标仍然只允许变换行列式为 1。

---

1)写此文章时,我尚不知道假设 $\sum T_{\mu}^{\mu}=0$ 在原则上是允许的。

从广义协变性推导的场方程与近期文章推导的方程在内容上的仅有区别是,后者无法指定$\sqrt{-g}$的值。该值由下式所确定:

{1}
$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\beta}\right)=-\kappa\sum_\sigma T_\sigma^\sigma. \tag{21a}$$

该方程表明,只有当能量张量的标量为零时,$\sqrt{-g}$才能为常数。

在我们现在的推导中,由我们任意的坐标系选择导出$\sqrt{-g}=1$。"物质"能量张量的标量为零来自我们的场方程,而非来自方程(21a)。**广义协变的场方程(16b)构成我们的出发点,它只有在我们在引言中解释过的假设前提下,才不会导致矛盾。**然而,我们也可以将下列限制条件加到我们前面的场方程中:

$$\sqrt{-g}=1. \tag{21b}$$

英译者的附加注释:

{1}括号中的"∂x_α"已被改正为"∂x_β"。

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1915):799—801。1915年11月11日收到,1915年11月18日发表。 229

[1]*Einstein 1915 f*(文件21)。更多的背景还可见那篇文章的注解。

[罗景琪 译]
[吴忠超 校]

230

23. “对我们的文章《Ampère 分子电流的实验证明》的评论”

[*Einstein and De Haas 1915d*]

1915 年 11 月 15 日收到
1915 年 11 月 30 日发表

载于《德国物理学会会刊》17(1915):420。

对我们的文章《Ampère 分子电流的实验证明》的评论1) 231

爱因斯坦与 W. J. de Haas

[2] 我们的同事 Berliner 最近给我们发来了 S. J. Barnett 分别于 1915 年 7 月 30
[3] 日和 1915 年 10 月 1 日发表在 Science 上的两篇短文。从这些短文清楚地看出,
[4] Maxwell 为了检验 Ampère 假设已经有过寻求磁体的陀螺性质的思想:"我现在
在本刊描述的实验可看成在很久以前 Maxwell 从事的实验的修正。他似乎首
先认为,如果 Ampère 电流,正如现代理论所假设的那样,具有实体的性质,则磁
[5] 铁应像陀螺那样行为。"

[6] Barnett 已在 6 年前开始了他的实验,现在宣布得到了正的结果。他试图展
[7] 示在快速旋转的铁杆中发生的磁动力。在实验上,我们着手的问题和这个问题
在难度上不可同日而语。我们正着手验证磁化强度改变引起的角动量。Bar-
nett 先生和我们的实验以令人愉快的方式相互补充。

发表在《德国物理学会会刊》17(1915):420. 1915 年 11 月 15 日收到,1915 年 11 月 30 发表。 232

[1]*Einstein* 和 *De Haas 1915a*(文件 13)。

[2]Arnold Berliner(1862—1942)是《自然科学》的编辑,*Einstein 1915c*(文件 15)发表在此杂志上。

[3]*Barnett 1915a*, *1915c*;Samuel Jackson Barnett(1873—1956)是俄亥俄州立大学的物理学家。对 Barnett 工作的讨论,见 *Galison 1987*, pp. 52—56, 61—65,更多的背景材料见编者按,"爱因斯坦论 Ampère 分子电流",p. 149.

[4]见 *Maxwell 1881*, § 574—575。关于讨论,见 *Galison 1987*, pp. 28—31。

[5]见 *Barnett 1915c*, p. 459。在 Barnett 的文章中,"物质"("materieller")一词用斜体字。

[6]见 *Barnett 1909*。

[7]实际上,*Barnett* 已测量了一个铁棒进入突然旋转状态时,在其中感应的磁化强度。

[吴忠超 译校正文]

[高尚惠 译校注释]

---

[1] 1)《德国物理学会会刊》17,152,1915.

233

24."以广义相对论解释水星近日点运动"

[*Einstein 1912c*]

1915年11月18日收到
1915年11月25日发表

载于《皇家普鲁士科学院(Berlin)学报》(1915):831—839。

以广义相对论解释水星近日点运动 234

爱因斯坦

[1] 我在最近发表在这些报告中的一篇论文中建立了引力场方程，该场方程相对于行列式为1的任意变换是协变的。我在一个补充中证明了，如果"物质的"能量张量的并缩为零，这些方程便是协变的，而且指出引进这个假设并没有导致
[2] 什么值得注意的异议。这个假设把时间和空间的客观实在性剥夺殆尽。[1]

我在本文中为这一相对性的基本理论找到一个重要的证据，即该理论无论是在定性上，还是在定量上，解释了水星轨道的久期旋转(在轨道运动本身的意
[4] 义上来讲)。这个进动是Leverrier发现的，其数值为每世纪45弧秒[2]。此外，我还证明了，该理论还推导出，由引力场引起的光线曲率应是我早先研究得出数值的两倍。

§1. 引力场 235

从我最近两篇论文可以推导出，在适当选取的参考系中，真空的引力场必须满足方程

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0, \tag{1}$$

此处 $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ 由以下方程定义

$$\begin{aligned}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= -\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} = -\sum_{\beta} g^{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \beta\end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{\beta} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

此外，让我再作在上次论文中建立的假设，"物质的"能量张量的并缩总是为零，这样，还额外加上行列式条件：

---

1)在即将发表的论文中，我将指出这个假设是不必要的。这是因为可以这样地选择参考系，使
[3] $|g_{\mu\nu}|$ 取值-1。下面的研究和这个选择无关。

[5] 2) E. Freundlich最近写了一篇值得注意的论文，其论题是在牛顿理论的基础上不可能满意地解释水星运动反常性(《天文信息》201,49[1915])。

$$|g_{\mu\nu}|=-1. \tag{3}$$

一个质点,也就是太阳位于坐标系的原点。这一质点产生的引力场可用逐次近似法计算出来。

尽管如此,因为方程(1)相对于行列式为1的任意变换是协变的,所以我们认为$g_{\mu\nu}$不能由这些方程在数学上完全确定。然而,我们有理由认为,由这种变换可以将所有这些解进行相互还原(在给定的边界条件下),它们在形式上相互区别,但在物理上不可区分。因此,我只要推出一个解即很满足,而不理睬该解是否是唯一的。

首先,用对应于原先的相对性理论的下式,给出$g_{\mu\nu}$的零阶近似

$$\left.\begin{matrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & +1\end{matrix}\right\}, \tag{4}$$

或者更简约一些

$$\left.\begin{aligned}&g_{\rho\sigma}=\delta_{\rho\sigma}\\ &g_{\rho4}=g_{4\rho}=0\\ &g_{44}=1\end{aligned}\right\}. \tag{4a}$$ [6]

这里ρ和σ表示指标1,2,3;如$\rho=\sigma$则$\delta_{\rho\sigma}=1$,否则$\delta_{\rho\sigma}=0$。

236 我在下面假定,$g_{\mu\nu}$和在方程(4a)中给出的值的差异比1小很多。我把这些偏离当作一阶小量来处理,而这些偏离的n次幂的函数被当作n阶的量来处理。我们可从方程(1)、方程(3)以及方程(4a)利用逐级近似的方法,将引力场准确地计算到n阶。方程(4a)给出的近似可以认为是0阶近似。

该解具有如下性质,由此可以确定坐标系:

1. 所有分量和x_4无关。

2. 这个解相对于坐标系原点是空间对称的,这是在下面的意义上来讲,如果对它进行正交线性空间变换,我们仍然遇到同样的解。

3. 方程$g_{\rho4}=g_{4\rho}=0$对于$\rho=1,2,3$精确成立。

4. 在无限远处,$g_{\mu\nu}$取方程(4a)的值。

第一阶近似 假设解为

$$\left.\begin{aligned}&g_{\rho\sigma}=-\delta_{\rho\sigma}+\alpha\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_\rho\,\partial x_\sigma}-\frac{\delta_{\rho\sigma}}{r}\right)=-\delta_{\rho\sigma}-\alpha\frac{x_\rho x_\sigma}{r^3}\\ &g_{44}=1-\frac{\alpha}{r}\end{aligned}\right\}. \tag{4b}$$

那么很容易验证,它满足刚才提到的四个条件以及在第一阶近似上满足方程(1)

[7] 和方程(3)。条件 3 确定 $g_{4\rho}(g_{\rho 4})$，r 表示量 $+\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$，而太阳质量确定常数 α。

我们立即看出条件 3 对第一阶项是满足的。可以更简单地看出，方程(1)在第一阶近似下也成立。我们只需要考虑，在忽略了第二阶和更高阶量之后，方程(1)的左边可以通过

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}$$

被成功地重新排列，此外 α 只能取 1 到 3。

正如我们从方程(4b)察到的，我的理论意味着，在静止质量的情况下，从 g_{11} 237
到 g_{33} 的分量在第一阶就已经不为零。因此，正如我们后面要看到的，在第一阶
[8] 近似下，和牛顿定律并没有差异。然而，从这个理论得出的引力场对光线的影响和我早先工作给出的结果有些不同，这是因为光线速度由下式确定

$$\sum g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu = 0. \tag{5}$$

利用惠更斯原理，对方程(5)和方程(4b)进行了简单计算后，我们发现在距离 Δ 处通过的光线遭受到数值为 $2\alpha/\Delta$ 角度的偏折，而早先的计算没有基于 $\sum T^\mu_\mu=0$ 的
[9] 假设，这个值就只有 α/Δ。从太阳表面掠过的一道光线被偏折的角度为 1.7 弧秒，而非 0.85 弧秒。和这个差异对照，关于引力势对谱线移动的结果，这一点(在数量级上)对于固定的恒星已被 Freundlich 先生确认过，不受影响，这是因为
[10] 其结果只依赖于 g_{44}。

[11] 由于我们已经在第一阶近似下得到 $g_{\mu\nu}$，我们还能够把引力场的分量 $T^\alpha_{\mu\nu}$ 计算到第一阶近似。从方程(2)和方程(4b)可以得到

[12]
$$\Gamma^\tau_{\rho\sigma} = -\alpha\left(\delta_{\rho\sigma}\frac{x_\tau}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{x_\rho x_\sigma x_\tau}{r^5}\right), \tag{6a}$$

此处 ρ,σ,τ 代表指标 1,2,3 中的任何一个，而且

$$\Gamma^\sigma_{44} = \Gamma^4_{4\sigma} = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_\sigma}{r^3}, \tag{6b}$$

此处 σ 表示指标 1,2 或 3。那些指标 4 出现一次或三次的分量皆为零。

第二阶近似 我们在后面将会看到，为了能够把行星的轨道确定到适当的精度，我们只需把 Γ^σ_{44} 三个分量精确地计算到第二阶的量。对于这个过程，最后 238
一个场方程，加上我们对方程的解附加的一般条件就已足够。最后的场方程

$$\sum_\sigma \frac{\partial \Gamma^\sigma_{44}}{\partial x_\sigma} + \sum_{\sigma\tau}\Gamma^\sigma_{4\tau}\Gamma^\tau_{4\sigma} = 0,$$

在考虑了方程(6b)并且忽略了第三阶和更高阶的量之后成为

$$\sum_{\sigma}\frac{\partial\Gamma_{44}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}}=\frac{\alpha^{2}}{2r^{4}}.$$ [13]

由此，鉴于方程(6b)和我们解的对称性质可以推出

$$\Gamma_{44}^{\sigma}=-\frac{\alpha}{2}\frac{x_{\sigma}}{r^{3}}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right). \tag{6c}$$

§2. 行星运动

从广义相对论得到的在引力场中的质点运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^{2}x_{\nu}}{\mathrm{d}s^{2}}=\sum_{\sigma\tau}\Gamma_{\sigma\tau}^{\nu}\frac{\mathrm{d}x_{\sigma}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_{\tau}}{\mathrm{d}s}. \tag{7}$$

首先我们可以从这个方程推出，它把牛顿方程作为第一阶近似包含进去。当然，如果行星运动的速度比光速小，那么 $\mathrm{d}x_1$、$\mathrm{d}x_2$、$\mathrm{d}x_3$ 比 $\mathrm{d}x_4$ 更小。结果在我们考虑的第一阶近似下，右边只余下 $\sigma=\tau=4$ 的项。鉴于方程(6b)，我们得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^{2}x_{\nu}}{\mathrm{d}s^{2}}=\Gamma_{44}^{\nu}=-\frac{\alpha}{2}\frac{x_{\nu}}{r^{3}}(\nu=1,2,3)\\&\frac{\mathrm{d}^{2}x_{4}}{\mathrm{d}s^{2}}=0\end{aligned}\right\}. \tag{7a}$$

这些方程显示，在第一阶近似下，我们可以令 $s=x_4$。这样前面的三个方程刚好是牛顿方程。如果我们在轨道面上引入极坐标，那么，正如众所周知的，能量定律和面积定律可以表达成方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}u^{2}+\Phi=A\\&r^{2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=B\end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

239 此处 A 和 B 表示能量定律的常数，而且此处

$$\left.\begin{aligned}&\Phi=-\frac{\alpha}{2r}\\&u^{2}=\frac{\mathrm{d}r^{2}+r^{2}\mathrm{d}\varphi^{2}}{\mathrm{d}s^{2}}\end{aligned}\right\}. \tag{8a}$$

现在我们必须对这些方程在更高一阶上求值。从方程组(7)的最后一个方程和方程(6b)一道可以得出

$$\frac{\mathrm{d}^{2}x_{4}}{\mathrm{d}s^{2}}=2\sum_{\sigma}\Gamma_{\sigma4}^{4}\frac{\mathrm{d}x_{\sigma}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_{4}}{\mathrm{d}s}=-\frac{\mathrm{d}g_{44}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_{4}}{\mathrm{d}s},$$

或者精确到第一阶，

$$\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}s}=1+\frac{\alpha}{r}. \tag{9}$$

现在我们回到(7)中的三个方程的第一个。右边得出：

a)对于 $\sigma=\tau=4$ 的指标组合

$$\Gamma^{\nu}_{44}\left(\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}s}\right)^2,$$

或者考虑到方程(6c)和(9)，精确到第二阶为

$$-\frac{\alpha}{2}\frac{x_\nu}{r^3}\left(1+\frac{\alpha}{r}\right).$$

b)对于 $\sigma\neq4,\tau\neq4$ 的指标组合（单独一个指标不为 4 的必须另外进行考

[14] 虑），考虑乘积 $\left(\frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}s}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x_\tau}{\mathrm{d}s}\right)$ 并利用方程(8)至第一阶近似后，准确到第二阶应为

$$-\frac{\alpha x_\nu}{r^3}\sum\left(\delta_{\sigma\tau}-\frac{3}{2}\frac{x_\sigma x_\tau}{r^2}\right)\frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\tau}{\mathrm{d}s}.$$

此处求和给出

$$-\frac{\alpha x_\nu}{r^3}\left(u^2-\frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2\right).$$

利用这个值我们可以得到准确到第二阶的运动方程， 240

$$\frac{\mathrm{d}^2x_\nu}{\mathrm{d}s^2}=-\frac{\alpha}{2}\frac{x_\nu}{r^3}\left(1+\frac{\alpha}{r}+2u^2-3\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2\right), \tag{7b}$$

它和方程(9)一起确定质点运动。此外，应该观察到，在圆周运动的情形，方程(7b)和方程(9)与 Kepler 三定律没有偏差。

首先，从方程(7b)推出，下面的方程准确地成立

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=B, \tag{10}$$

此处 B 为一常数。因此，如果我们用行星的"本征时间"来测量时间，则面积定律直至第二阶都是成立的。为了从方程(7b)确定行星的以椭圆轨道的久期旋转，我们利用方程(10)和方程组(8)中的第一个方程代入括号中的第一阶的项最为有利，在这一过程中右边的第二阶项不改变。括号内的项取以下形式

$$\left(1-2A+\frac{3B^2}{r^2}\right).$$

最后，如果我们选取 $s\sqrt{(1-2A)}$ 作为时间变量并且重新将其表为 s，让常数 B 的意义稍微有些不同，则可以得出

$$\frac{\mathrm{d}^2x_\nu}{\mathrm{d}s^2}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu},$$

[15]

$$\Phi=-\frac{\alpha}{2}\left[1+\frac{B^2}{r^2}\right]. \tag{7c}$$

为了确定轨道方程，我们现在完全按照牛顿的情形那样处理。我们首先从方程(7c)得到

$$\frac{\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2}{\mathrm{d}s^2}=2A-2\Phi.$$

如果我们借助于方程(10)从这个方程消去 ds，我们就得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=\frac{2A}{B^2}+\frac{\alpha}{B^2}x-x^2+\alpha x^3, \tag{11}$$

我们在此处用 x 来表示 $1/r$。这个方程和在牛顿理论中的相应方程的差别，只在于右方的最后那一项。

241 因此，近日点和远日点之间的半径夹角可由椭圆积分给出

$$\varphi=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2A}{B^2}+\frac{\alpha}{B^2}x-x^2+\alpha x^3}},$$

此处 α_1 和 α_2 表示以下方程的两个根

$$\frac{2A}{B^2}+\frac{\alpha}{B^2}x-x^2+\alpha x^3=0.$$

它们紧密地靠近将该方程最后一项略去时得出的方程的根。

这样，在我们所需求的精度内，可以得出

$$\varphi=[1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\cdot\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(1-\alpha x)}},$$ [16]

或者将$(1-\alpha x)^{-1/2}$展开后，

$$\varphi=[1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\cdot\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{2}x\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}}.$$

积分得出

$$\varphi=\pi\left[1+\frac{3}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right],$$

或者如果我们考虑到 α_1 和 α_2 分别表示离开太阳的最大和最小距离的倒数，

$$\varphi=\pi\left[1+\frac{3}{2}\frac{\alpha}{a(1-e^2)}\right]. \tag{12}$$

因此，近日点在完成一周轨道后，在轨道运动的意义上进动了

$$\varepsilon=3\pi\frac{\alpha}{a(1-e^2)}, \tag{13}$$

242 此处 a 表示半长轴，e 是反常度。如果我们引进轨道周期 T(秒)，我们就得到

$$\varepsilon=24\pi^3\frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)}, \tag{14}$$

此处 c 表示以每秒厘米为单位的光速。这个计算对于水星得出近日点每世纪进动 43 弧秒，而天文学家将每世纪 45±5 弧秒认为是观察值和牛顿理论值之间无
[17] 法解释的差异。因此，这个理论和观测完全一致。

对于地球和火星，天文学家分别赋予每世纪进动 11 和 9 弧秒，而我们公式分别得出每世纪进动 4 和 1 弧秒。尽管如此，由于这些行星轨道的偏心率很小，似乎赋予它们小值更合适。确定运动和偏心率 $e\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}t}$ 的乘积将更确定地证实近日点的运动。如果我们考虑这些由 Newcomb 提供的数值（我为此感谢 Freundlich
[18] 博士），

	$e\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}t}$
水星	$8.48''\pm0.43$
金星	-0.05 ± 0.25
地球	0.10 ± 0.13
火星	0.75 ± 0.35，

那么我们得到印象，毕竟只有水星才真正体现了近日点运动。然而，我宁愿让天文学专家作最终判断。

本文是 1915 年 11 月 18 日在柏林的普鲁士科学院进行的讲演，载于《皇家普鲁士科学院（Berlin）学报》(1915)：831—839。刊出日期为 1915 年 11 月 25 日。 243

[1]见 *Einstein 1915f*（文件 21）。

[2]见 *Einstein 1915g*（文件 22）。

[3]见 *Einstein 1915i*（文件 25）。

[4]关于水星近日点运动问题的历史背景，可参阅 *Roseveare 1982*。有关这篇文章的历史讨论以及仔细地重复爱因斯坦的计算，见 *Earman and Janssen* 1993。在本文发表前两年多，爱因斯坦与 Michele Besso 合作计算出由爱因斯坦与 Grossmann 在 1913 年的论文中提出的早期的广义相对论版本，"*Entwurf*"理论预言的近日点进动。早先的计算在许多方面和本文相似。关于爱因斯坦和 Besso 的计算，见第四卷，文件 14。相关讨论见第四卷编者按，"关于水星近日点运动的爱因斯坦与 Besso 手稿"，pp. 334—359。

[5]*Freundlich 1915a*。

[6]第 1 个方程右方丢失了一个负号。

[7]"v"应为"r"。

[8]爱因斯坦早期对弱静态场必须是空间平坦的假定对广义相对论发展的重要性的讨论，见 *Norton 1984*。

[9]有关计算，见 *Einstein 1916e*（文件 30），pp. 821—822。在 *Einstein 1911h*（第三卷，文件 23），§ 4 中已经从等效原理导出更早的结果，在 *Einstein 1914o*（文件 9），p. 1084 中，在 Einstein-Grossmann 理论的框架下又将这些早先的结果部分重新导出。事实上，这儿给出的结果和后来取消的条件 $\sum T^{\mu}_{\mu}=0$ 无关[见 *Einstein 1915i*（文件 25）]。

[10]关于红移的更早结果见 *Einstein 1914o*（文件 9）p. 1084，而关于似乎首次证实了这一预言，而后来证明是不能确断的观测见 *Freundlich 1915b*（有关历史的讨论见 *Earman* 和 *Glymour 1980 b* 以及 *Hentschel*. *1994*）。

[11]“T”应为“Γ”。

[12]右端第一项的“r^2”应为“r^3”。

[13]右端丢失了一个负号。

[14]“x_r”应为“x_τ”。

[15]右端丢失了一个因子 $1/r$。

[16]无论是这里还是下一方程，积分之前的因子中的“α”应为“$\frac{\alpha}{2}$”。

[17]在当代文献中进动的观察值是每世纪 41 至 45 弧秒（有关讨论见 *Earman* 和 *Janssen 1993*，pp. 131—132）。在一封致 Arnold Sommerfeld 的信中，爱因斯坦提到他对观察值和计算值之间的一致感到巨大的满足，他还承认过去他对“天文学卖弄的精度”有时在私下觉得很可笑，而该精度在这种情形下如此有用（见爱因斯坦致 Arnold Sommerfeld 的信，1915 年 12 月 9 日）。

[18]见 *Newcomb 1895*。

［吴忠超 译校］

25."引力场方程"

244

[*Einstein 1915i*]

1915年11月25日收到
1915年12月2日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1915):844—847。

245

引力场方程

爱因斯坦

我在最近发表的两篇文章[1]中已经给出，如何得到和广义相对论假设相一致的引力场方程，也就是说，在时空变量的任意替换下，该方程的一般表述是协变的。

该方程在历史上是这么演化的。首先，我发现了把牛顿理论作为近似包容在内的方程，这些方程还在行列式为 1 的任意替换下保持协变。接着我发现，如果"物质"的能量张量中的标量为零的话，这些方程和一般协变的方程等效。按照简单的规则，即要求$\sqrt{-g}$必须为 1，该坐标系统可被指定，这就导致理论方程的极端简化。然而必须指出的是，这要求引进物质的能量张量的标量为零的假设。

我最近发现，只要把物质的能量张量以稍微不同的方式插进场方程就可以避免这个假设。真空场方程并不因为这一修改而受影响，而且我利用真空场方程解释了水星近日点的进动。为了让读者不必经常翻阅早先的论文，我在此从 [2]
头开始进行论证。

人们从熟知的四秩的 Riemann 协变张量可以推导出如下二秩的协变张量

$$G_{im}=R_{im}+S_{im}, \tag{1}$$

$$R_{im}=-\sum_{l}\frac{\partial\begin{Bmatrix} i\,m \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l}+\sum_{l\rho}\begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} m\rho \\ l \end{Bmatrix}, \tag{1a}$$

$$S_{im}=\sum_{l}\frac{\partial\begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m}-\sum_{l\rho}\begin{Bmatrix} i\,m \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho l \\ l \end{Bmatrix}. \tag{1b}$$

在没有"物质"的空间中的引力场方程的 10 个一般协变的方程可由下式给出

246

$$G_{im}=0. \tag{2}$$

选取一个参考系使之$\sqrt{-g}=1$，这些方程由此得到简化。由于(1b)中 S_{im}必须

1)《学报》44，p. 778，及 46，p. 799(1915)。 [1]

为零,我们可以得出如下方程以取代方程(2)

$$R_{im}=\sum_{l}\frac{\partial\Gamma^{l}_{im}}{\partial x_l}+\sum_{\rho l}\Gamma^{l}_{i\rho}\Gamma^{\rho}_{ml}=0, \tag{3}$$

$$\sqrt{-g}=1. \tag{3a}$$

我们在此处令

$$\Gamma^{l}_{im}=-\begin{Bmatrix}im\\ l\end{Bmatrix}, \tag{4}$$

我们将这些量称作引力场的"分量"。

当在所考虑的空间中存在"物质"时,它的能量张量分别出现在方程(2)和方程(3)的右端。我们令

$$G_{im}=-\kappa\left(T_{im}-\frac{1}{2}g_{im}T\right), \tag{2a}$$

此处

$$\sum_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}=\sum_{\sigma}T^{\sigma}_{\sigma}=T. \tag{5}$$

T 是"物质"的能量张量的标量,并且方程(2a)的右端是一个张量。如果我们以熟悉的方式选定坐标系统,我们就得到代替(2a)的等效方程

$$R_{im}=\sum_{l}\frac{\partial\Gamma^{\tau}_{im}}{\partial x_l}+\sum_{\rho l}\Gamma^{l}_{i\rho}\Gamma^{\rho}_{ml}=-\kappa\left(T_{im}-\frac{1}{2}g_{im}T\right) \tag{6}$$

$$\sqrt{-g}=1. \tag{3a}$$

正如通常那样,我们假设在一般的微积分的意义上,物质的能量张量的散度为零(能量-动量定理)。按照方程(3a)那样选定坐标,这意味着 T_{im} 必须满足条件

$$\sum_{\lambda}\frac{\partial T^{\lambda}_{\sigma}}{\partial x_\lambda}=-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu} \tag{7}$$

或

$$\sum_{\lambda}\frac{\partial T^{\lambda}_{\sigma}}{\partial x_\lambda}=-\sum_{\mu\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}T^{\nu}_{\mu}. \tag{7a}$$

用 $\partial g^{im}/\partial x_\sigma$ 乘以(6)并对 i 和 m 求和,由于(7)和由(3a)导出的关系[1] 247

$$\frac{1}{2}\sum_{im}g_{im}\frac{\partial g^{im}}{\partial x_\tau}=-\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\tau}=0.$$

可以得到如下形式的合并物质和引力场的守恒定律

$$\sum_{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(T^{\lambda}_{\sigma}+t^{\lambda}_{\sigma})=0, \tag{8}$$

---

[3] 1)关于推导参见《学报》44,pp. 784—785,(1915)。关于下面的推导,我建议读者参阅 p. 785 的论述,以作比较。

此处 t_σ^λ（引力场的"能量张量"）由下式给出

$$\kappa t_\sigma^\lambda = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \sum_{\mu\nu\alpha} g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda. \tag{8a}$$

促使我在公式(2a)和公式(6)的右端引进第二项的理由在下面才会清晰，但是这理由和刚刚引用的理由(p. 785)完全相似。

我们利用 g^{im} 乘以公式(6)并对 i 和 m 求和，在简单的计算后即可得到

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \kappa(T+t) = 0, \tag{9}$$

此处，和公式(5)相对应，我们使用如下的缩写

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} t_{\rho\sigma} = \sum_\sigma t_\tau^\tau = t. \tag{8b}$$

应该指出，在我们公式(9)的附加的项中，引力场的能量张量和物质的能量张量处于同等的地位，在方程(21)l. c. 中情形并非如此。

此外，为了取代方程(22)l. c.，人们可以用和上面相同的方式，借助于能量方程，推导出关系

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \kappa(T+t)\right] = 0. \tag{10}$$

248 我们的附加项保证在和(9)相比较时，这些方程不带有附加条件；这样，关于物质的能量张量，除了它必须和能量动量定理相协调外，不需要作其他假设。

至此，在逻辑的结构上，我最终完成了广义相对论。在最一般表述上相对论假设(它使时空坐标成为没有物理意义的参数)必然导致一种非常特殊的引力论，该理论还解释了水星近日点的进动。然而，广义相对论的假设在关于自然中不同过程的本质上并未揭示比狭义相对论迄今教导我们的更新奇的不同的东西。我最近为止在这个问题上发表的意见是错误的。任何与狭义相对论相协调 [4] 的理论，都可以利用绝对微分计算合并到广义相对论的体系之中，而广义相对论并不为这些物理理论的合法性提供任何判据。

249 载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1915)：844—847；1915 年 11 月 25 日收到，1915 年 12 月 2 日发表。

[1] *Einstein 1915f*，*1915g*(文件 21 和 22)。还可参阅这些文件的注解。

[2]见 *Einstein 1915h*(文件 24)。

[3]见 *Einstein 1915f*(文件 21)。

[4]见爱因斯坦在 *Einstein 1915g*(文件 22)，pp. 799—800 的评论。

[吴忠超 译校]

26.“关于 Tetrode 和 Sackur 的熵常数的理论”

[大约 1916 年 1 月 14 日]

250

关于 Tetrode 和 Sackur 的熵常数的理论

[大约于 1916 年 1 月 14 日发表] [1]

下面的讨论——没有提供任何实质上新的内容——将便于更好地理解 Tetrode 和 Sackur 的理论。为了达到这一目的，我已删除了所有使人迷惑的附属内容。[2] 对这一重要理论给出一些思考这样做是值得的，因为该理论包含了应用于结晶固体的 Nernst 定理，也包含了 Stern 的蒸气压公式。[3][4]

§1. 熵和统计力学

按照 Gibbs 的理论，物理系统（假设它与一个相对来说有无穷大热容量的热源接触）的"微观"状态的概率由著名的正则分布律给出

$$\mathrm{d}W=e^{\frac{\Psi-E}{\Theta}}\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_n \qquad (1)$$ {1}

或写成简短的形式

$$\mathrm{d}W=e^{\frac{\Psi-E}{\Theta}}\mathrm{d}\tau. \qquad (1a)$$

我们预先假定系统可以被视作按经典力学规律理解的力学系统。Θ 是用适当单位测量的绝对温度；E 是能量，它是 $q_1\cdots p_n$ 的函数；Ψ 相对于分子运动为常量，即与 $q_1\cdots q_n, p_1\cdots p_n$ 无关的量，正如 Gibbs 已证明过的它等于系统的自由能。

考虑到对(1)式的全部相积分应当等于 1，应有

251

$$+\Psi=\bar{E}-\Theta S=-\Theta\lg\left\{\int e^{-\frac{E}{\Theta}}\mathrm{d}\tau\right\}, \qquad (2)$$

熵 S 的表示式为

$$S=\frac{\bar{E}}{\Theta}+\lg\left\{\int e^{-\frac{E}{\Theta}}\mathrm{d}\tau\right\}. \qquad (2a)$$ [p. 2]

此处 $\bar{E}$ 代表被研究系统的平均能量。我们把这一公式作为所有随后研究的基础。我们喜欢用它胜过公式(2)，因为——从热力学的观点来看——与自由能比较起来，熵是由一个"宏观"状态完全确定的函数，精确到一个加和常数。

公式(2a)的准确意义如下。基本假设（以后将要修改）是一切分子过程（包括化学过程）可被视作受经典力学规律支配的最小粒子的运动。从宏观上看，即唯象地借助通常的热力学参量（体积，压强，等等），当如下两条件已知时，系统的

状态就被确定了：

1)温度 Θ

2)能量 E，它是分子变量 $q_1 \cdots p_n$ 的函数。

系统中态的每一个非纯的热变化(例如体积的变化)由函数 E 的改变来说明。为了表达这一点，人们把 E 看作不仅依赖于 $q_1 \cdots q_n$，而且也依赖于某些参量 a_λ；系统中态的每一个非纯的热变化相应于参量 a_λ 的数值的变化。如果 S_1 和 S_2 代表所研究的物理系统的两个状态的熵值，那么——正如统计力学告诉我们的那样——系统从第一个到第二个状态的跃迁必然涉及熵的改变 $S_2 - S_1$，它等于公式(2a)右边的改变。

由上述可见，如果在公式(2a)的右边含有一个可加性常量，或更准确地说附加一个既不依赖于 Θ 也不依赖于态的其他热力学态参量 a_λ，公式(2a)仍然成立。下面我们将使用这一特点。

当能量函数在分子论意义上为已知时，公式(2a)给出两个状态的熵差。所 252
[5][p. 3] 以它也以完全不同的方式回答了熵的积分常数问题，而此积分常数的意义已被 Narnst 特别清楚地强调并用著名的 Nernst 定理回答过了(以清晰的方式)。

公式(2a)优于 Nernst 定理之处在于它的叙述与绝对温度的零点无关，所以，不必外推实验结果到绝对零度就可检验该方程。但另一方面初看起来在此方程的应用方面似乎存在一个严重的，几乎是破坏性的缺点：

a)公式(2a)预先假定我们有一个分子力学的完全系——这不是事实。同时对我们来说方程唯一能有的实际意义是：它的一些结果大都不依赖于所选择的
[6] 分子图像的特性。

b)公式(2a)预先假定分子过程可以被理解为在经典力学框架内的运动。但是我们从目前由量子理论松散关联的个别结果知道这个假定在自然界是不成立
[7] 的。所以，看来要从公式(2a)得出精确且正确的结论是不可能的〈人们怀疑用此
{2} 方程是否能成功地回答如此普遍的问题〉；此外也怀疑此方程是否能成功地用来完全确定熵常数。

我们首先着手研究上面提到的原则性异议。

§2. 考虑到量子理论

当我们现有的知识不能在经典力学规律范围内理解分子的过程时，另一方面我们也知道在系统状态的宏观(热力学)变量完全起作用的区域内，分子力学能给出人们所希望的那样好的描述。然而状态的这样一些"正规"区域被另一些分子力学失效的区域隔开了。例如，稀薄氢气，倘若将其分子想象为由两个刚性

253 连接着的原子组成，那么在一定温度 Θ_2 之上，其热学行为可以高度精确地用分子力学描述；而在一定温度 Θ_1 之下，基于假设分子的行为在动力学上与单个质点相同，可以用分子动力学解释是可能的。然而在 Θ_1 与 Θ_2 之间，不可能用分子力学的解释。 [p.4] [8]

这种情况使得只有当两个状态属于同一个“正规”区域时，公式(2a)才可用来计算熵差 S_2-S_1。类似地，如果至少有一个状态属于非正规区域，显然公式(2a)不可能用来计算它们的熵差。

现在，问题是在被非正规区域隔开的两个“正规”区域之间能否架起一座桥梁，即在 S_1 与 S_2 属于两个不同的正规区域的情况下，是否能找到一个规律去计算熵差 S_2-S_1。当然，这样的连接只能通过分子力学范围之外的假设来建立。

最简单的假设是即使在那种情况下也毫不犹豫地去应用公式(2a)。但是，这一假设由于如下的理由而被否定了。因为 Θ 具有能量的量纲，熵差 ΔS 是一个无量纲的量，即它与基本单位的选择无关。可是在公式(2a)右边第二项中的积分不是无量纲的；它的量纲是

$$(ML^2T^{-1})^n,$$ [9]

其中 n 代表系统的自由度。这一事实使得如果自由度 n 在 S_2 所属的正规区域中与在 S_1 所属的另一正规区域中不同，则由公式(2a)计算的熵差依赖于基本单位的选择。

如果在公式(2a)的右边做这样的改变，使得它的值变成与基本单位的选择无 [p.5]
254 关，那么就可能避免这一困难。这可以通过用 h^n 除右边的积分来实现，那里 h 是一量纲为 ML^2T^{-1} 的常量，根据需要它将是在数值上等于著名 Planck 的常量。 [10]

由于在它的推导过程中，公式(2a)只对系统的物质既不增添也不减少的过程成立。因此，如果我们在公式(2a)的右边加上一个以任意方式依赖于系统中各类原子总数 N_a 的常量，则不会改变公式的内容。 [11]

记住上面两个考虑，我们用如下的公式代替公式(2a)

$$S=\frac{\bar{E}}{\Theta}+\lg\frac{\int e^{-\frac{E}{\Theta}}\mathrm{d}\tau}{h^n\Pi(N_a!)},\tag{2b}$$

其中 Π 代表乘积符号。这个公式将不仅正确地表达了在正规区域内的熵差，而且也正确地表达了属于不同的正规区域的熵差。 [12]

首先，把公式(2b)应用于线性谐振子，在高温和靠近绝对零度时，它显然处于态的一个正规区域中，我们确信我们有理由放入一个量 h，它在数值上等于 Planck 常量 h。在高温 Θ 时，有效自由度 n 等于 1，在靠近绝对零度时，它们等于 0。这后一种情况代表着某种困难，因为人们不会立刻就明白对于 $n=0$，公式 [13] [p.6]

(2b)的值是什么。我们使用一点小技巧来绕过这一困难;我们考虑一个总系统,它是由要研究的第一个系统和由不同种类的基本结构组成的第二个系统的联合。用 E',n',N'_α 来表征后者,而且令它的有效自由度数在我们感兴趣的两个温度范围内大于零;此外,在这两个温度范围内,它表现为“正规”的。于是对于联合系统(2b)给出

[14]
$$S_{\text{tot}}=S+S'=\frac{\overline{E}+\overline{E'}}{\Theta}+\lg\frac{\iint e^{\frac{E+E'}{\Theta}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'}{h^{n+n'}\Pi(N_\alpha!)\Pi(N'_\alpha!)}.$$

如果不带撇的量表示一维谐振子,则 $N_\alpha=1$。对 $\mathrm{d}\tau$ 的积分成为多余的了,而且 255
如果温度如此之低以至它的自由度不再有效,人们必须令 $n=0$。此外,考虑 S' 的式子在代入带撇的量之后,它的结果由(2b)给出,对于我们感兴趣的那些低温,由 $E=$常数$=\overline{E}$ 得出

$$S_1=0,$$

[15] 用下标“1”来指示它们。考虑到这一点,现在(2b)给出

[p. 7]
$$S_2-S_1=\frac{\overline{E}_2}{\Theta_2}+\lg\frac{\Theta_2}{h\nu}。$$

基于由 Planck 比热实验中得到的确定的 $\overline{E}$ 值,即

$$\overline{E}=\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{\Theta}}-1},$$

用纯热力学方法也得到同样的结果。人们发现

$$S_2-S_1=\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\Theta}=\left|\frac{\overline{E}}{\Theta}\right|_{\Theta_1}^{\Theta_2}+\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\frac{\overline{E}\mathrm{d}\Theta}{\Theta^2},$$

在代入 Planck 公式后,对充分高的温度 Θ_2 和充分低的温度 Θ_1 两者即可取上面所给出的数值。然而这个一致性是与要求公式(2b)中的常量 h 等于 Planck 常量 h 紧密相关的。

加入本质上不重要的因子 $\Pi(N_\alpha!)$有如下意义。在热力学中我们习惯于说:如果 s 是一克分子物质的熵,那么 βs 就是 β 克分子物质的熵。这个表述是没有任意性的,因为没有可逆过程使我们能够从一克分子产生 β 克分子。所以就熵的积分常数来说对每一个 β 值我们有一个自由选择。以单原子气体为例容易证明我们通过加入因子 $\Pi(N_\alpha!)$使公式(2b)顺应于自由选择,这在热力学中是常用的。

§3. 基本公式(2b)对某些典型例子的应用 256

不能否认,基本公式(2b)很可能是正确的;人们可以打赌至少它表示一种最

简单的假设。然而，现在的问题是：由于我们对所使用的分子图像的细节的严重缺乏，这个方程的值是否仅仅是因错觉产生的。我们将通过处理两个重要且典型的例子证明完全不是这样的，这两个例子因如下的事实而著名，它们容许在对原子力毫无所知的情况下对公式(2b)右边做精确计算。

处于绝对零度的结晶物质

令所研究的系统是一化学均匀的晶体。它的热运动是这样的，相互作用的各个原子总是停留在某些固定位置的附近。空间点阵的结构是这样的，第 α 类原子有 N_α 个可用的固定位置。所以相空间分裂为许多相等数值的区域，区域的数目与系统的原子按点阵结构定律分布的可能数目相等。所有可能的分布是通过在同类原子中进行置换而得到。显然可能性为

$$\Pi(N_\alpha!),$$

因为它们都是相等数值，显然人们先对原子的一种组合进行(2b)中的积分，然后
{3} 用所给出的置换数去除[1]它。取代(2b)，我们得到 [16]

$$S=\frac{\overline{E}}{\Theta}+\lg\frac{\int e^{-\frac{E}{\Theta}}\mathrm{d}\tau}{h^n}, \tag{3}$$

其中 n 是有效自由度数，且相积分必须这样做，即只应考虑原子按点阵的一种特殊的分布。

在绝对零度时 S 的值是什么？对于这种情况公式最初是失败的。但是，通
257 过使用与以上对一维谐振子用过的同样的小技巧，人们看到，必须令 $n=0$，而且用 $e^{-\frac{E}{\Theta}}$ 代替相积分。于是右边变成零，因而得到

$$S=0. \tag{3a}$$

就此理论可应用的一切情况而言，这正是 Nernst 定理；它对于结晶的、化学均匀 [p. 9]
的物质是成立的。

对于混合晶体，此理论容许与 Nernst 定理有偏差。例如，令空间点阵有两 [17]
类原子 α 和 β，它们彼此可以任意地替换。于是相等数值的置换数为

$$(N_\alpha+N_\beta)!$$

在作了类似于如上给出的论证之后，得到在绝对零度时的熵值为

$$S=\lg\frac{(N_\alpha+N_\beta)!}{N_\alpha!\ N_\beta!}. \tag{3b}$$

---

1) "去除"应改为"去乘"，校者注。

具有刚性分子的理想气体

我们设想一由 N 个分子组成的化学均匀的气体。令气体中第 α 类原子有 N_α 个,即对每单个分子的比例为$\frac{N_\alpha}{N}$。首先,我们设想气体处于这样的高温以至它处于正规区域,在这个区域里允许我们假设分子的所有自由度都是有效的。现在我们把基本公式(2b)应用于这个气体,其次人们必须引入系统中原子数目的 3 倍以取代 n。在第二项分子中的相积分又分裂为相等数值的分立的部分区域,它相应于组成分子的原子在分子中分布的各种可能性。另外,人们可以通过使积分恰好遍及这些部分区域之一来进行计算,即在进行积分时,好像分子化合物是坚不可破的,而以后用可能的分布数 Z 去乘这个积分。

我设想一个与 N 个分子中的每一个刚性地连接着的坐标系,这些分子的相应原子的固定位置在所有这些坐标系中有相同的坐标值;我们把这些坐标系编号。显然有

$$\Pi(N_\alpha!)=\zeta$$ 258

种不同的方法把原子按先前描述的方式分布在这些坐标系中。现在我设想所有
[p. 10] 这些 ζ(可能的)种分布是分别被实现的,由此对于气体我们得到 ζ 种模式,它们的区别仅在于分子在坐标系中分布的方式不同。在每一种 ζ 模式中,我现在允许所有 N 个坐标系都取所有可能的位置和方向。每隔多久气体中所有编号原子的每一种不同分布都实现一次?

现在我想象在第一种模式中坐标系的一个不同分布。当我把这些坐标系(与它们的原子一起)中的两个彼此交换时,由于想象这些原子是编号的,我得到原子的一个不同分布。然而,如果在所有模式中实现第二个分布系统,我将发现这第二个分布的一个模式,它的原子按空间的分布与在第一个系统分布的第一个模式中的完全相同,因此在我们的"假想实验"中,每一种原子的分布都实现 $N!$ 次,恰恰对应于坐标系的 $N!$ 种排列。

没有必要依次详细讨论(编号)原子在空间的每一种个别分布实现的次数。人们倒发现如果分子有对称性,一些分布会更频繁的再现。例如,如果分子的坐标系有这样 p 个位置,使得原子的固定位置成对地重合,于是对于 p 个坐标系有 p^N 种位形,它们容许有相同的原子分布。所以在我们的假想实验中同一种原子分布与分子没有对称性情况相比出现频率为后者的 p^N 倍。

因此,我们的假想实验产生原子的每一种位形,其总数为 $N!\ p^N$ 倍。如果我们能用 $\zeta=\Pi(N_\alpha!)$乘这个相积分(它相应于原子按所有坐标系的一个单一的

分布)，ζ 是原子按 N 个坐标系的个别分布，我们的结果将是太大了，正是大了这个因子。所以正确的因子是

$$\frac{\Pi(N_a!)}{N!\ p^N}.$$

代入公式(2b)，现在我们得到 [p. 11]

259

$$S=\frac{\overline{E}}{\Theta}+\lg\frac{\int e^{-\frac{E}{\Theta}}\mathrm{d}\tau}{h^n N!p^N},\tag{4}$$

其中相积分要在“保持分子的成分的情况下”进行。

这个公式不允许做直接的、精确的计算，因为我们对分子内原子间相互作用的规律仅有一个粗略的想法。但是我们可以在那些正规区域中使用它，此时温度是如此之低，以至相应于的分子内原子的相对运动的自由度“睡着”了。这个相积分等于遍及一个分子状态变量积分

$$I=\int e^{\frac{\eta}{\Theta}}\mathrm{d}\tau,$$

的 N 次幂，其中 η 是单个分子的能量函数，现在我们区分三种情况，用 α,β,γ 表示，它们的特征如下：

α 转动自由度休眠着。

β 具有相同的转动惯量的两个转动自由度在活动(双原子气体)。

γ 所有的三个自由度都在活动。

情况 α。如果 m 是质量，x,y,z 是重心的坐标，ξ,η,ζ 是速度的相应分量，人们取

$$\eta=\eta_0+\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$$

$$\mathrm{d}\tau=m^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$$

积分得到

$$I_\alpha=e^{-\frac{\eta_0}{\Theta}}\cdot V(2\pi m\Theta)^{\frac{3}{2}}.\tag{5α}$$

对于另外两种情况，我们仅列出简单计算的结果 [18]

$$I_\beta=e^{-\frac{\eta_0}{\Theta}}\cdot V(2\pi m\Theta)^{\frac{3}{2}}\cdot 8\pi^2 I\Theta,\tag{5β}$$ [p. 12]

260

$$I_\gamma=e^{-\frac{\eta_0}{\Theta}}\cdot V(2\pi m\Theta)^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{9}{2}}\pi^{\frac{7}{2}}(I_1I_2I_3)^{\frac{1}{2}}\Theta^{\frac{3}{2}}.\tag{5γ}$$

对于$\frac{\overline{E}}{\Theta}$，在上述三种情况下必须分别地取 $N\left(\frac{\eta_0}{\Theta}+\frac{3}{2}\right)$；$N\left(\frac{\eta_0}{\Theta}+\frac{5}{2}\right)$；$N\left(\frac{\eta_0}{\Theta}+3\right)$， [19]

对于 n 应分别取 $3N,5N,6N$。p 的值通常可以从化学公式中找到，例如对于 HCl $p=1$，对于 H_2 $p=2$，对于 CH_4 $p=12$。

对于具有刚性分子的气体,问题可获得完全的解决。此公式对于计算化学平衡的重要性已被充分认识;所以我无须详述。这里我们仅把它们应用于由"单原子"到双原子 H_2 的转变,它的克分子比热(用通常的温度单位度量)在转变时从$\frac{3}{2}R$ 增加至$\frac{5}{2}R$。

对所考虑的转变,把(4)与(5α)和(5β)联合得出

$$S_2-S_1=\frac{\overline{E}}{\Theta_2}+\lg\frac{8\pi^2 I\Theta_2}{h^2},$$

其中 S 和 E 是仅有转动运动的熵和能量。从热力学上人们得到

$$S_2-S_1=\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\Theta}=\int\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}\Theta}\mathrm{dlg}\Theta=\left|\lg\Theta\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}\Theta}\right|_{\Theta_1}^{\Theta_2}-\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\lg\Theta\mathrm{d}c,$$ [1]

其中 $c=\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}\Theta}$是分子的与转动相关的比热,它的值在两个状态之间从 0 增加到 1。所以上面的公式给出

$$S_2-S_1=\lg\Theta_2-\lg\overline{E},$$

其中 $\overline{\Theta}$ 是转变温度在比热区间的平均值,由下式定义

$$\lg\overline{\Theta}=\int_{c=0}^{c=1}\lg\Theta\mathrm{d}c, \tag{6}$$

[p. 13] 它的值可以从经验中得到,令两个 S_2-S_1 的表示式相等,人们得到

$$\overline{\Theta}=\frac{h^2}{8\pi^2 I}. \tag{7}$$ 261

此方程给出氢分子的转动惯量。

AD. (附录)[2075]手稿有 13 页。原稿中的页码在每页的右上角而这里是在页边的方括号内。

[1]我们假定此文献的日期与爱因斯坦于 1916 年 1 月 14 日在德国物理学会所发表的题为《论 *Tetiode* 和 *Sackur* 确定熵常数的论据》讲演的日期相同[见《德国物理学会会刊》18(1916):41]。

[2]从 1911 至 1913 年间 Breslau 的 Otto Sackur(1880—1914)和 Amsterdam 的 Hugo Martin Tetrode (1895—1931)分别独立地发展了理想气体的量子论并成功地明确地决定了熵常数值(见 *Sackur 1911*, *1912*, *1913a*, *1913b*, *Tetrode 1912*)。看来,注[1]中提到的讲演——即这篇手稿——皆来自爱因斯坦读到 *Tetrode* 1915 及有关同一题目的一篇后续文章后所受的启发(见爱因斯坦致 Paul Ehrenfest 的信,1916 年 1 月 17 日,同日爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信中流露了他对 Tetrode 工作的推崇并在讲演中表示了出来),Sackur 的早期工作也曾激发过爱因斯坦的热情(见 1912 年 6 月 5 日后(文件 406 *VOL*. 5)爱因斯坦致 Heinrich Zangger 的信),也可以参考 *Desalvo 1992* 关于此工作的历史评述,其中讨论了当时争论的情况。

---

1)中译者注:积分 $\int\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}\Theta}\mathrm{dlg}\Theta$ 疑应改为 $\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}\Theta}\,\mathrm{d}\lg\Theta$.

[3]在此一时期稍前和稍后对 Nernst 定理的讨论见 *Nernst 1911*，*1918*. 也见在 *Einstein 1914n*（文件5）§2 中爱因斯坦对 Nernst 定理的批判性的讨论，在讨论中他认为定理仅对纯晶体成立。

[4]见 *Stern 1913*。

[5]在原始文本的这一点上，爱因斯坦在页末附加了一个脚注："问题可以很清楚地提出来，热力学不能确定熵常数的绝对值，所能确定的只是同一物质系统的两个状态的熵常数之差！"

[6]爱因斯坦长期强调过，结果的适用范围有可能远比推导时所暗含的适用范围要大，甚至可能与推导中作为基础的模型的特性无关。例如见 *Einstein 1902b*，*1903*，*1904*，*1909b*。

[7]在种类繁多的物理现象中经典力学无能为力是在爱因斯坦早期著作中经常出现的另一个主题，见例如 *Einstein 1905i*；*1909c*，*1914a*。

[8]爱因斯坦提到了 Arnold Eucken 关于氢分子比热的实验结果（见 *Eucken 1912*）；后来爱因斯坦与 Otto Stern 合作尝试提供一个理论解释（关于历史背景见 *Einstein* 和 *Stern 1913*；以及文件 4 编者按，"爱因斯坦和 Stern 论零点能"，pp. 270—273 关于历史背景）。

[9]量纲应为$(ML^2T^{-1})^n$。

[10]"MLT^{-2}"应改为"ML^2T^{-1}"。

[11]在[pp. 5—6]中讨论的系统的熵与系统中各类原子数有关是 Sackur-Tetrode 方程中最有争议的问题。爱因斯坦指出，在引进因式分解中出现了任意性，虽然这是必要的以使结果作为一个广延量的熵，几年后 Paul Ehrenfest 和 Viktor Trkal 澄清了这个问题，他们指出，熵对 N 的依赖仅当过程中 N 可以可逆变化时才是可行的有意义的。见 *Ehrenfest* 和 *Trkal 1920*，*Klein 1959*，*Desalvo 1992* 的历史讨论。

262 [12]"Zust ánden"（状态）应改为"Gebieten"（区域）。

[13]在原始文本的这个地方爱因斯坦在脚页处附加了一个注："在此公式中 n 是系统的自由度数，欲使它代表系统在有关正规区域内的真实的热容量就必须这样认为。〈代之以在某个"隐"自由度上的相积分将出现数值 $e^{-\frac{E}{\Theta}}$；很清楚，当系统仅具有"隐"自由度（在绝对零度时）情况正是这样，〉。"

[14]被积函数中的指数处的"$\bar{E}$"应改为"E"。

[15]下面方程中的 ν 是振子的频率。

[16]"dividiert（除）"应改为"multipliziert（乘）。"

[17]也见 *Einstein 1914n*（文件 5）§2 中的有关讨论和在此问题上于 1916 年 2 月至 3 月间与 Otto Stern 的通讯。

[18]爱因斯坦关于 I 的计算结果与 *Tetrode 1915* 中的推导相符。见 1915 年 11 月 7 日 Max Planck 致爱因斯坦的信，以及 *Planck 1915* 年中同一结果的不同推导。

[19]"3"，"5"和"6"应分别为"3/2"，"5/2"和"3"。

英译者注：

这里已将原文中的印刷错误按编者注释[9]，[10]，[14]和[19]改正过了。

英译者附加的注释：

{1}p_n 已改正为"dp_n"。

{2}角括号间的正文在原文中是这样标记的，以便简要地说明它是用外面的正文代替的。

[刘 辽 译校]

27. “电动力学的 Maxwell 场方程的一种新的形式阐明”

[*Einstein 1916b*]

1916 年 2 月 3 日收到
1916 年 2 月 10 日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1916):184—188。

264

电动力学的 Maxwell 场方程的一种新的形式阐明

爱因斯坦

现行的电动力学方程的协变理论描述起源于 Minkowski。它可表述如下：电动力学场的分量形成一六矢量（二秩的反对称张量）。存在第二个六矢量，它与第一个有关（与其对偶），在早期相对论的特殊情况下，第二个六矢量的分量与第一个六矢量的分量有相同的数值，但它们的分量与四个坐标轴的联系方式不同。人们得到两个 Maxwell 方程组，其一是通过令第一个六矢量的散度等于零，其二是另一个的散度等于电流的四矢量。

对偶六矢量的引入，使得它的协变理论的表示相当复杂而且混乱。特别是在广义相对论的情况下，推导动量与能量守恒定理更加复杂，因为它还要考虑引力场对电磁场的影响。下面的表述避免了对偶六矢量的概念，因此相当好地简化了系统。下面我们将立即处理广义相对论中的情况。[1)] [1]

§1. 场方程

令 φ_ν 是协变四矢量电磁势的分量。我们按照方程组

$$F_{\rho\sigma}=\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\rho}, \tag{1}$$

265 由它来构造电磁场的协变六矢量的分量 $F_{\rho\sigma}$。由(28a)l. c. 得出 $F_{\rho\sigma}$确实是一个协变张量。由(1)得出方程组

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau}+\frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma}=0 \tag{2}$$

是满足的，且它也代表第二个 Maxwell 方程组的最自然的形式（Faraday 感应定律）。首先，人们认识到(2)是广义协变的方程组，因为它由广义协变方程组(1)演化而来。此外，(2)的左边是一个三秩协变张量，这一点可证明如下，通过把(29)l. c. 三次应用于 $F_{\rho\sigma}$，$F_{\sigma\tau}$，$F_{\tau\rho}$上，并分别遍及指标 τ,ρ,σ 的取

1）我的文章（《广义相对论的形式基础》《学报》41[1914]，*p.* 1030）在下文中将被认为是已知的；在下文中附录“*l. c.*”总是指这篇文章。 [2]

值，然后把得到的三个表式加在一起，当然要使用 $F_{\rho\sigma}$ 的反对称特性。这个三秩张量是反对称的，因为每当交换两个指标时 $F_{\rho\sigma}$ 的反对称特性将迫使(2)的左边经历一符号的改变，而其值不变。所以方程组(2)完全可以被如下四个方程代替

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}=0\\ \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_4}=0\\ \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}=0\\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0\end{aligned}\right\}; \tag{2a}$$

当指标 τ,ρ,σ 被相继地给出值 2,3,4;3,4,1;4,1,2;1,2,3 时就导致上述方程。

在通常熟悉的没有引力场的特殊情况下，人们有以下等式

$$\left.\begin{aligned}F_{23}=\mathfrak{h}_x\quad F_{14}=\mathfrak{e}_x\\ F_{31}=\mathfrak{h}_y\quad F_{24}=\mathfrak{e}_y\\ F_{12}=\mathfrak{h}_z\quad F_{34}=\mathfrak{e}_z\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

于是方程(2a)给出场方程 266

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t}+\operatorname{curl}\mathfrak{e}=0\\ \operatorname{div}\mathfrak{h}=0\end{aligned}\right\}. \tag{2b}$$

如果人们保留定义方程(3)不变，即当六矢量($\mathfrak{e}$,$\mathfrak{h}$)被看作是协变六矢量时，这最后几个方程在广义相对论情况下可以保持不变。

关于第一组 Maxwell 方程，我们保留推广 Minkowski 方案，在重复引用的文章的 § 11 中对它已做了详细说明。我们引入协变的 V 六矢量

{1}

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu}=\sqrt{-g}\sum_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

并要求此反变六矢量的散度等于真空中电流密度的反变 V 四矢量 $\mathfrak{J}^{\mu}$，即

$$\sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mathfrak{J}^{\mu}. \tag{5}$$

这个方程组的确与第一组 Maxwell 方程等价，正如通过对狭义相对论情况下从(4)计算 $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ 所看到的，那里 $g^{\mu\nu}$ 取如下数值

$$\begin{matrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&+1.\end{matrix}$$

对这种特殊情况，(3)与(4)给出

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^{23}&=\mathfrak{h}_x \quad \mathfrak{F}^{14}=-\mathfrak{e}_x\\ \mathfrak{F}^{31}&=\mathfrak{h}_y \quad \mathfrak{F}^{24}=-\mathfrak{e}_y。\\ \mathfrak{F}^{12}&=\mathfrak{h}_z \quad \mathfrak{F}^{34}=-\mathfrak{e}_z\end{aligned} \tag{6}$$

此外，令

$$\mathfrak{J}^1=\mathfrak{i}_x,\quad \mathfrak{J}^2=\mathfrak{i}_y,\quad \mathfrak{J}^3=\mathfrak{i}_z,\quad \mathfrak{J}^4=\rho, \tag{7}$$

(5)取熟悉的形式

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{cul}\ \mathfrak{h}-\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}&=\mathfrak{i}\\ \mathrm{div}\ \mathfrak{e}&=\rho\end{aligned}\right\}. \tag{5b}$$

267 形式为(5b)的方程也适用于广义相对论情况，但(三维)矢量 $\mathfrak{e}$ 和 $\mathfrak{h}$ 不再与方程(2b)中的相同。更确切地说，人们必须引入两个新的矢量 $\mathfrak{e}'$ 和 $\mathfrak{h}'$，它们与 $\mathfrak{e}$ 和 $\mathfrak{h}$ 有相当复杂的关系，该关系由方程(4)确定。

概括起来说，我们指出 Maxwell 方程组的新的推广完全由方程(2)、方程(4)和方程(5)给出。它与以前的 Maxwell 方程组仅形式有别，而内容相同。

§2. 有质动力和能量-动量理论[1)]

通过电磁场的协变六矢量 $F_{\sigma\mu}$ 与电流密度的 V 四矢量 $\mathfrak{J}^{\mu}$ 的内积，我们构造出协变 V 四矢量

$$\mathfrak{K}_\sigma=\sum_\mu F_{\sigma\mu}\mathfrak{J}^{\mu}. \tag{8}$$

按照(3)它的分量用常规的三维符号表示为

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_1&=\rho\mathfrak{e}_x+[\mathfrak{i},\mathfrak{h}]_x,\\ \mathfrak{K}_2&=\rho\mathfrak{e}_y+[\mathfrak{i},\mathfrak{h}]_y,\\ \mathfrak{K}_3&=\rho\mathfrak{e}_z+[\mathfrak{i},\mathfrak{h}]_z,\\ \mathfrak{K}_4&=-[\mathfrak{i},\mathfrak{e}].\end{aligned}$$

所以，对于电磁场来说 $\mathfrak{K}_\sigma$ 正是在(42a)1. c. 中作为力密度的四矢量被引入的 V 矢量。$\mathfrak{K}_1$，$\mathfrak{K}_2$，$\mathfrak{K}_3$ 是单位体积、单位时间动量的负分量；$\mathfrak{K}_4$ 是单位体积、单位时间传输给场的能量。

为了得到电磁场的能量张量 $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ 的分量，我们只需由方程(7)和场方程——构造一个与方程(42a)1. c. 等价的方程。人们首先由(7)和(5)得出

1)我们把同一专题的不同处理归功于 H. A. Lorentz(《皇家科学院学报》23[1915]，p. 1085)。 [3]

{2}
$$\mathfrak{K}_\sigma=\sum_{\mu\nu}F_{\sigma\mu}\frac{\partial\mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(F_{\sigma\mu}\mathfrak{F}^{\mu\nu})-\sum_{\mu\nu}\mathfrak{F}^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

利用(2)可把右边第二项重新写作 268

{3}
$$\sum_{\mu\nu}\mathfrak{F}^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}=-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\mathfrak{F}^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\alpha\beta}\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

由于对称性的缘故,最后这个式子也可写作

{4}
$$-\frac{1}{4}\sum_{\mu\nu\alpha\beta}\left[\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}F_{\mu\nu}\right].$$

然而,现在它可写作

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Big(\sum_{\mu\nu\alpha\beta}\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\Big)+\frac{1}{4}\sum_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}).$$

这些项中的第一项,用简短符号表示是

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Big(\sum_{\mu\nu}\mathfrak{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big),$$

第二项在微分和重新整理后是

[4]{5}
$$-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\rho\tau}\mathfrak{F}^{\mu\tau}F_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}+\frac{1}{8}\sum_{\alpha\beta\rho\tau}\mathfrak{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}g^{\rho\tau}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

最后,把所有四个已计算过的项加在一起,人们得到关系式

{6}
$$\sum_{\nu}\frac{\partial\mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\tau}g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\mathfrak{T}_\tau^\nu=\mathfrak{K}_\sigma,\tag{8a}$$

其中

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu=\sum_{\alpha\beta}\Big(-\mathfrak{F}^{\nu\alpha}F_{\sigma\alpha}+\frac{1}{4}\mathfrak{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\delta_\sigma^\nu\Big).\tag{9}$$

{7} δ_σ^ν 是混合张量,它的分量是 1 或 0 分别取决于 $\sigma=\nu$ 或 $\sigma\neq\nu$。比较方程(8a)与方程(42a)1. c. 发现方程(8a)是电磁场的能量—动量方程,其中能量张量的分量由(9)给出。借助(3)或和(6)容易看出此处建立起来的电磁场的能量张量与以前理论中的一致。然而新近建立的形式与以前对此专题的处理所建立的形式相比更好理解。

载于《皇家普鲁士科学院(Berlin)学报》(1916):184—188,1916 年 2 月 3 日收到,1916 年 2 月 10 日发表。 269

[1]关于 Minkowski 的原始形式见 *Minkowski* 1908;一个综述见,例如,*Laue* 1913,§§21,22. 爱因斯坦在一篇关于狭义相对论 1912—1914 年未发表的手稿中,使用了 Minkowski 的方法(见卷 4,文件 1)。

[2]*Einstein 1914o*(文件 9);关于电磁性的讨论见 §11,其中使用了对偶 6-矢量。在 1915 年秋爱因斯坦已找到一种方法,避免在 1914 的理论框架中使用 6-矢量(见 1915 年 9 月 23 日爱因斯坦致 H. A. Lorentz 的信)。

[3]*Lorentz 1915*。

[4]在第一项中“$g_{\sigma\tau}$”应为“$g_{\rho\tau}$”。

英译者注：

{1}在德文原版中重复出现的印刷错误“$\surd$”已用正确的“$\sqrt{\ }$”取代，今后在译文中所做的改正没有再加注释。

{2}所有的求和意味着 μ,ν 是求和的指标，而且此处已被加在一起。

{3}前两个求和对 μ,ν 进行，第三个求和对 μ,ν,α,β 进行，且此处已被加在一起了。

{4}求和遍及指标 μ,ν,α,β 且此处已被加起来了。

{5}在第一个求和中，求和指标是 μ,ν,ρ,τ；在第二个求和中，求和指标是 α,β,ρ,τ。此处它们已被加起来了。

{6}第二个求和遍及三个指标 μ,ν,τ，它们已被加在一起了。

{7}“$\sigma=n$”已被改正为“$\sigma\neq\nu$”。

[高尚惠　译]
[刘　辽　校]

28. “演示 Ampère 分子电流的一个简单实验”

270

[*Einstein 1916d*]

1916 年 2 月 25 日宣读
1916 年 4 月 15 日发表

载于《德国物理学会会刊》18(1916):173—177。

271

演示 Ampère 分子电流的一个简单实验

爱因斯坦

（在 1915 年 2 月 25 日会议上宣读）

下面描述一个简单的实验，它可用来演示在几次演讲中提到的 Ampère 分子电流，它是我与 De Haas[1] 先生一起做过的一个实验的变种。

我们要演示一个细铁棒在它的磁化方向反转的情况下显示出（表观的）角动量，导致电子的轨道改变方向。简单演示此效应的主要困难在于，磁化场施于棒上的纯磁力与要测量的力相比非常大，为了减小这些困难，铁棒不是长久地，仅在短时间（大约 1/1000 s）内暴露在磁场中，刚好足以反转棒的剩余磁性。

272 最后使用的装置可以在下面的示意图（图 1）中看到（垂直轴面剖面）。在要研究的细铁棒 S（直径 1.4 mm，长约 10 cm）的中间是一面小镜子，用一根长几个厘米，直径约 10 μm的石英丝将棒悬挂起来。在顶端，石英丝被粘到一个带有圆形旋扭的铜轴上，后者穿过有摩擦的软木塞中心。软木塞被压入压力线圈管子 R 的木制的延长部分 R'；管子 R 被安放在带有平衡螺旋的平板 H 上。环绕着管子 R 有两个（例如，串联的）线圈 E，它们总共大约有 4000 匝，而且在两个线圈之间给玻璃窗留有一个空隙（示意图中未画出），当棒振动时经过玻璃窗可以（客观地）观察到一个光指标。 [2]

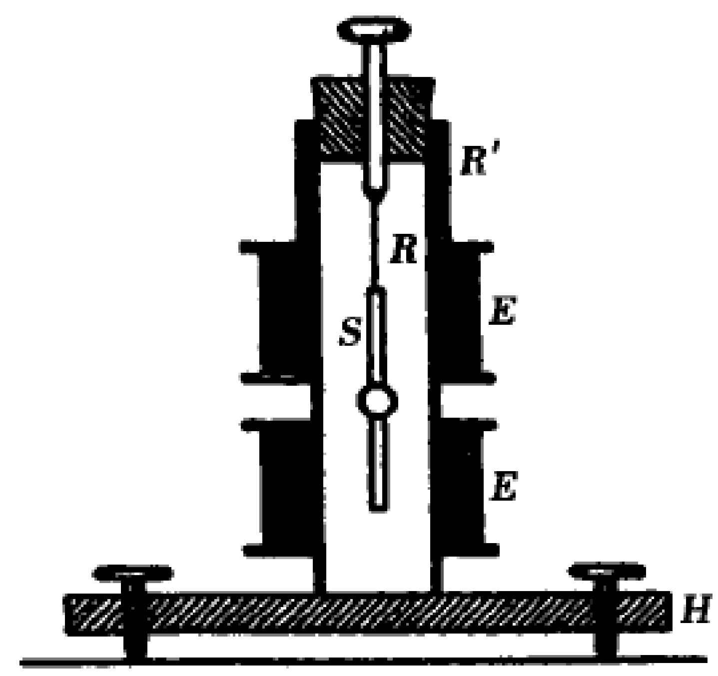


图 1

与两个线圈串联的是两个 2 μF 的电容器。开路电路经过一个 500～1000 Ω

---

1)《德国物理学会会刊》17(1915)，p. 152。同时 Barnett[《物理学报》(2)6(1915)，p. 171]在显示与上述效应相反的效应方面也获得成功。 [1]

电阻(为避免电振荡)的整流器连接到 120 V 的直流电源上,转动整流器向电容器反向充电,在此时间过程中线圈 E 内感应出一个短期的磁场,接着这个场使棒 S 的剩磁反转。我们还进一步要求有一个抵消地磁场的装置,例如一个在大约与镜子同高度处可在水平面移动的磁棒。

实验按如下的方式进行。首先,人们必须抵消地球磁场到这样的程度,使得细棒的静止位置在磁化的两个方向上完全相同。(最初不是这种情况,原因在于棒的两极从来就没有完全在它的转动轴上,因此一般来说必须极小心地去掉地球磁场产生的角动量。)

接着,人们拿一个小磁体暂时靠近细铁棒,以便诱发一个肉眼能够跟踪的扭转振动,因为光指标要开始周期为 1～2 秒的振动。现在,每当光指针通过它的 273
静止位置时,人们可以开始反转整流器,这意味着每当细棒的角速度最大时,根据要演示的效应,它就得到一个角动量。人们用这样的方法分别得到一个容易觉察的振动的增强和衰减。容易显示此效应的符号和其大小的量级都与理论一致。

如下几点也必须引起注意。重要的是细棒的悬挂点要尽可能精确地与它的惯性主轴成一直线(惯性矩最小)。如果不是非常好地接近这种情况,仪器位置的水平偏离将引起细棒的扭转振动;但是,如果中心定得好,无需对整个仪器做特殊的悬挂(避免它的振动),实验就可以做得很好;例如,人们可以把仪器挂在墙架上。

细棒的中心定得越不好,仪器对地球磁场的变化就越灵敏,要充分地抵消地球的磁场也就越困难。

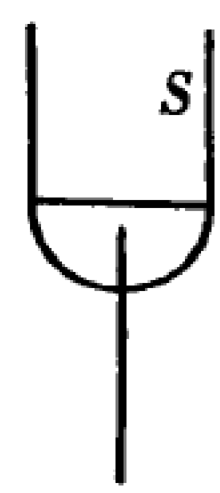


图 2

最初对细棒中心悬挂有很大困难,感谢 Jaeger 先生帮助我克服了它们。最终,如下的几乎古怪离奇的方法达到了此目的。细棒被铅直地(放松!)固定于一个架子上,使得要悬挂的端点向下。
[3] 带有石英丝的铜轴也被倒置过来,铅直地支撑在软木塞下面。然后,要仔细地调整高度,使得石英丝(用潮湿的手指握住并指向上方)刚好不碰到细棒的平面终端(见图 2 中的示意图)。现在,当用手指从下面拿过来松香时,用一个气体喷灯(由锥形的玻璃管制成)的很小的火焰加热 S 的一端,直到一滴松香粘到细棒 S 上为止。松香滴熔解并在毛细张力的作用下弯曲成完全对称的凸起。如果现在把石英丝拿来与松香接触,毛细张 274
力将把它尽可能深地吸入到松香滴中,因此自动地把它置于中心。冷却后悬挂就完成了。此后,人们可以用石蜡把小镜子(3 mm^2 并由显微镜玻片制成)固定于细棒上。

还应当指出的是,演示的这个效应不能与细棒的纯粹磁诱导的角动量相混

淆，后者的出现是由于细棒的非垂直放置与伴随细棒内非对称性和线圈磁场的非对称性相结合而造成的。其原因是电流的每一次转向都使磁场与磁极两者在符号上相对于以前的状态发生改变，因此角动量在两种情况下有相同的符号，于是不会引起振动的系统性的增强或衰减。顺便说一下，如果此角动量可被觉察到，通过调整平衡螺旋就可以容易地消除掉。

最后，还要指出原来使我头疼的一些事情。当仅仅通过电流的一次转向使 [4]
细棒从它的静止位置激发起来时，按照理论要求该演示效应是足够大的。然而，在这种情况下实验总是显示出细棒只有一个相当快的摆动，并没有引人注意的扭转振动。简单的分析表明这是因细棒的偏心悬挂而产生的。理由是激发起围绕（几乎）惯性主轴的扭转振动的定向力不是来自丝的扭转而是来自细棒的重量[1]。

275 这里我要最诚挚地感谢我的同事 Jaeger 和 Orlich，前者给予我友好的帮助，
后者为我制作了上面提到的线圈。承蒙 Warburg 先生的允许，该实验在他的研 [5]
究所第一次进行。

276 载于《德国物理学会会刊》18(1916)：173－177。1916 年 2 月 25 日演讲，1916 年 4 月 15 日发表。

[1]*Einstein* 和 *De Haas 1915a*（文件 13）和 *Barnett 1915b.* 在 *Einstein* 和 *De Haas 1915d*（文件 23）中可见到他们对 Barnett 工作的早期感谢，还可参见编者按“爱因斯坦论 Ampère 分子电流”pp. 145－149 中的讨论。

[2]在图中用 E 表示线圈。

[3]Wilhelm Ludwig Jaeger(1862－?)是国立物理技术研究所成员。

[4]Ernst Orlich(1868－1935)是柏林夏洛滕堡高等技术物理学校的电工教授和国立物理技术研究所成员。

[5]爱因斯坦提到早一个月他自己完成的实验（见 1916 年 2 月 8 日爱因斯坦致 Arnold Sommerfeld 的信）。Emil Warburg 是国立物理技术研究所成员，这个实验也被列入国立物理技术研究所 1915 年度报告中[见《仪器学报》36(1916)：118]。

[高尚惠 译]
[刘 辽 校]

1)这类振动容易在一个拉长的、不太细的物体处于非对称悬挂时被观察到，例如用一根绳把类似于一把大剪刀从它的手柄的一个洞悬挂起来。如果在悬挂点垂直于端面，轻推一下这个洞，上述运动就开始了。

29. "Ernst Mach"

[*Einstein 1916c*]

1916 年 3 月 14 日收到
1916 年 4 月 1 日发表

载于《物理学期刊》17(1916):101—104。

278

Ernst Mach[1)]

爱因斯坦

最近，Ernst Mach 同我们永别了，他对当代自然科学家在认识论上的倾向有极大影响，他是一个具有罕见的独立判断力的人。他对观察和理解事物(Sehen und Begreifen)的毫不掩饰的喜悦心情，也就是对 Spinoza 所谓的“对神的理智的爱”(amor dei intellectualis)，如此强烈地迸发出来，以致到了高龄，还以孩子般的好奇的眼睛窥视着这个世界，从理解其相互联系中求得乐趣，而无他求。 [1]

然而一位非常有才能的自然科学家怎么会关心起认识论来呢？难道在他自己的专业领域里没有更有价值的工作可做吗？我时常从我的许多同行那里听到这样的议论，或者在更多的人那里觉察到他们有这种想法。我不能同意这种看法。当我记起我在教书时所碰到那些最有才能的学生，也就是那样一些不仅以单纯的伶俐敏捷，而且以独立的判断能力显露头角的人们的时候，我可以肯定地说：他们是积极地关心认识论的。他们乐于进行关于科学的目的和方法的讨论，而从他们为自己的看法作辩护时所显示出来的那种顽强性中，可以清楚地看出这个课题对于他们是何等重要。这确实不是什么可奇怪的事。

如果我不是由于像功名利禄之类的外在原因，也不是，或者至少也不完全是由于爱好锻炼智力的游戏作乐而从事一门科学，那么，作为这门科学的新手，我必定会急切地关心这样的问题：我现在所献身的这门科学将要达到而且能够达到什么样的目的？它的一般结果究竟在多大程度上是“真的”？哪些是本质的东西，哪些则只是发展中的偶然的东西？

在评价马赫的功绩时，人们不应该提出这样的问题，比如说，在马赫对那些普遍性问题的想法中，有哪些是前人所没有看到或想到过的？事物的这种真理

1)这是爱因斯坦于 1916 年 3 月 14 日写的悼念 Mach 的文章。这里译自莱比锡《物理学期刊》1916 年，第 17 卷，第 7 期，101—104 页。

Ernst Mach，奥地利物理学家、心理学家和哲学家，生于 1838 年 2 月 18 日，卒于 1916 年 2 月 19 日。——编译者

必须一次又一次地为强有力的性格的人物重新加以刻勒，而且总是使之适应于塑像家为之工作的那个时代的需要；如果这种真理不总是不断地重新创造出来，它就会完全被我们遗忘掉。因此，要回答下面这样的问题，虽然并不十分重要， 279
却是很困难的："Mach 所教导的是什么，哪些是 Bacon 和 Hume 所根本没有过的新东西?""就相对于各门科学的一般的认识论观点而论，Mach 同 Stuart Mill[1]、Kirchhoff、Hertz、Helmholtz 等人的主要区别何在?"事实是，Mach 曾经以其历史的批判的著作，对我们这一代自然科学家起过巨大的影响，在这些著作中，他以深切的感情注意各门科学的成长，追踪这些领域中起开创作用的研究工
[2] 作者，一直到他们的内心深处。我甚至相信，那些自命为 Mach 的反对派的人，可以说几乎不知道他们曾经如同吸他们的母亲的奶汁那样吮吸了多少 Mach 的思考方式。

按照 Mach 的看法，科学不过是一种用我们逐步摸索得来的观点和方法，把实际给予我们的感觉内容加以比较和排列的结果。因此，物理学同心理学的区别，不在于它们的对象的不同，而在于把材料排列和联系起来的观点的不同。对 Mach 来说，在他面前的最主要的课题，就是以他所通晓的专业科学来表明这种排列是怎样逐一完成的。作为这种排列活动的结果，就产生了抽象的概念和联系这些概念的规律(规则)。概念和规律这两者必须这样来确定，使它们一起构成一个排列的纲目(*Schema*)，那些需要加以排列的东西可以在这个纲目中可靠而又清楚地排列起来。按照上面所说的，只有在概念所涉及的事物以及概念同这些事物得据以对应起来的观点能够被显示出来的时候，概念才有其意义。(《概念的分析》)

像 Mach 这样一个有才智的人物，他的重要性不仅在于他满足了当时哲学的某种需要，而这种需要可能被一些积习很深的专业科学家看成是一种多余的奢侈。这种在排列事物时被证明是有用的概念，很容易在我们那里造成一种权威性，使我们忘记了它们的世俗来源，而把它们当作某种一成不变的既定的东西。这时，它们就会被打上"思维的必然性"、"先验地给予"等烙印。科学前进的道路在很长一段时期内常常被这种错误弄得崎岖难行。因此，如果我们从事于分析那些流行已久的概念，从而指明它们的正确性和适用性所依据的条件，指明它们是怎样从经验所给予的东西中一一产生出来的，这绝不是什么穷极无聊的游戏。这样，它们的过大的权威性就会被戳穿。如果它们不能被证明为充分合法，它们就将被抛弃；如果它们同所给定的东西之间的对应过于松懈，它们就将

1) *John Stuart Mill*, 1806—1873, 英国哲学家和经济学家，著有《推理的和归纳的逻辑体系》。——编译者

被修改；如果能建立一个新的、由于无论哪种理由都被认为是优越的体系，那么这些概念就会被别的概念所代替。

这样一种分析，在那些过多注意具体事物的专业科学家看来，大概是多余的，言过其实的，有时甚至是可笑的。但是由于有关的这门科学的发展需要，要用一个更加严格的概念来代替一个习用的概念时，情况就完全不同了。这时，那些从未认真对待过这些概念的人，就会发出严厉的抗议，并且抱怨说，这是对最神圣遗产的革命的威胁。在这种叫喊声中，也夹杂着那样一些哲学家的声音，他们认为那个概念是不可缺少的，因为他们早已把它放进他们的“绝对的东西”或“先验的东西”的珠宝箱里去了，或者简单地说，他们早就这样安排好了，他们宣称这个概念是根本不可改变的。

读者一定已经猜到，我在这里所影射的，主要是空间和时间学说以及力学中的某些被相对论所修改了的概念。没有人能够否认，那些认识论的理论家们曾为这一发展铺平了道路；从我自己来说，我至少知道：我曾直接地或间接地特别从 Hume 和 Mach 那里受到很大的启发。我请读者拿起 Mach 的著作《发展中的力学》(Die Mechanik in ihrer Entwicklung)，看看他在第二章的第 6 和第 7 节 [3]
(“牛顿关于时间、空间和运动的观点”以及“牛顿观点的综合性批判”)中所陈述的论断。在那里，Mach 卓越地表达了那些当时还没有成为物理学家的公共财富的思想。这些部分，由于它们同逐字逐句引证牛顿的地方联在一起而格外引人入胜。下面就是其中一些精彩的段落：

牛顿：“绝对的、真正的和数学的时间自身在流逝着，并且由于它的本性而均匀地，同任何一种外界事物无关地流逝着。它又可名之为‘期间’。”

“相对的、表观的和通常的时间，是期间的一种外部的，或者是精确的，或者
280 是变化着的量度的感觉，人们通常就用这种量度，如小时、日、月、年，来代替真正的时间。”

Mach：“……如果有一事物 A 随时间而变化，那么这只是说事物 A 的状态同另一事物 B 的状态有关。如果摆的运行同地球的位置有关，那么它的振动就是在时间上进行的。由于我们在观察摆的时候用不着去考虑它同地球位置的相依关系，而可以把它同任何别的事物作比较(……)，所以很容易产生这样一种看法，认为所有这些事物都是无关紧要的……我们无法量度事物随时间所发生的变化。时间宁可说是我们从事物的变化中所得到的一种抽象，因为正是由于一切都是互相联系着的，我们就没有必要依靠某个特定的事物来作为时间的量度。”

牛顿：“绝对空间由于它的本性，以及它同外界事物无关，它永远是等同的和不动的。”

"相对空间是前者的一种量度或者是其可动的部分，是通过它对其他物体的位置而为我们的感觉所指示出来的，并且通常是把它当作不动的空间的。"

接着是同它们相应的"绝对运动"和"相对运动"等概念的定义。接着又说："把绝对运动和相对运动区别开来的有效原因，是从运动轴指向外面的离心力。如果圆周运动只是相对的，这样的力是不存在的；然而(在真实的、绝对的圆周运动中，这种力确是存在的。)[1]这种力究竟是大还是小，那就要看(绝对的)运动量的情况。"

接下去便是那著名的水桶实验的描述，用以阐明上述的推理。

Mach 对这观点的批判是很有意思的；我从其中摘录一些特别精辟的片断："如果我们说，一个物体 K 只能由于另一物体 K' 的作用而改变它的方向和速度，那么，当我们用以判断物体 K 的运动的其他物体 $A,B,C,\cdots\cdots$ 都不存在的时候，我们就根本得不到这样的认识。因此，我们实际上只认识到物体 K 同 $A,B,C,\cdots\cdots$ 的一种关系。如果我们现在突然想忽略 $A,B,C,\cdots\cdots$，而要谈论物体 K 在绝对空间中的行为，那么我们就要犯双重错误。首先，在 $A,B,C,\cdots\cdots$ 不存在的情况下，我们就不能知道物体 K 将怎样行动；其次，我们也就因此而没有任何方法，可用以判断物体 K 的行为，并用以验证我们的论断。这样的论断因而也就没有任何自然科学的意义。"

"一个物体 K 的运动总是只有在相对于别的物体 $A,B,C,\cdots\cdots$ 时，才能加以判断。由于我们总是有一些数目上足够多而彼此相对静止的、或者其位置变化得很慢的物体可供使用，所以我们在这里不一定要去指定一个特定的物体，而是能够有时忽略这一物体，有时忽略那一物体。由此也就产生了这样的一种想法：这些物体根本都是无关的。"

"牛顿用转动的水桶所作的实验，只是告诉我们：水对桶壁的相对转动并不引起显著的离心力，而这离心力是由水对地球和其他天体的质量的相对转动所产生的。如果桶壁愈来愈厚，愈来愈重，最后到达好几里厚时，那就没有人能说这实验会得出什么样的结果……"

这里所摘录的部分，表明 Mach 已清楚地看出了古典力学的薄弱方面，而且
[4] 离开提出广义相对论已经不远，而这一切是在几乎半个世纪之前的事情！倘使在 Mach 还是精力充沛的青年时代，光速不变性的意义这个问题激动了物理学家的话，那么 Mach 也许会碰巧发现相对论，这并不是不可能的。在没有来自 Maxwell-Lorentz 电动力学的这种刺激的情况下，就是有了 Mach 的批判的要
[5] 求，也不足以使我们感觉到有必要来给那些发生在不同地点的事件的同时性下

1)这里所引的牛顿的原文中漏了这半句话。——编译者

个定义。

对于牛顿的水桶实验的那些看法，表明他的思想同普遍意义的相对性（加速度的相对性）要求多么接近。应该承认，他在这里并没有充分意识到，一个物体的惯性质量同引力质量的相等，会引出更广泛意义上的相对性假设，因为我们不能用实验来判断一个物体相对于一个坐标系的降落，究竟应当归因于引力场的存在，还是应当归因于坐标系的加速状态。

281 从 Mach 的思想发展来看，他不是一位把自然科学选作他的思辨对象的哲学家，而是一位有着多方面兴趣的、勤奋的自然科学家，对于这样的自然科学家来说，研究那些在人们普遍注意的焦点之外的细节问题，显然会使他感到愉快。关于这一点，有他自己单独发表的、也有他同他的学生一起发表的关于物理学和经验心理学个别问题的几乎数不清的研究可以证明。在他的物理学的实验研究 [6]
中，关于子弹所产生的声波的那些研究，是最为人们所熟悉的。虽然这项研究中所用的基本思想根本不是什么新的思想，但这些研究却显示出他非凡的实验才能。他成功地摄下了一些关于以超声速运动的子弹周围的空气密度分布的照片，从而将前人完全不了解的一组声学过程展现在人们面前。他关于这方面的通俗演讲，对于任何一个能从物理事物中取得乐趣的人，都会感到亲切愉快。 [7]

Mach 的哲学研究，仅仅是从这样一种愿望出发，那就是他想获得一种观点，从这种观点出发，他毕生所从事的各个不同科学部门就可以理解为一种统一的事业。他把一切科学都理解为一种把作为元素的单个经验排列起来的事业，这种作为元素的单个经验他称之为“感觉”。这个词使得那些并未仔细研究过他的著作的人，常常把这位有素养的、慎重的思想家，看作是一个哲学上的唯心论者和唯我论者。

在读 Mach 的著作时，人们总会舒畅地领会到作者在并不费力地写下那些精辟的、恰如其分的话语时所一定感受到的那种愉快。但是他的著作之所以能吸引人一再去读，不仅是因为他的美好的风格给人以理智上的满足和愉快，而且还由于当他谈到人的一般的问题时，在字里行间总是透露着一种善良的、慈爱的和怀着希望的喜悦的精神。这种精神也保护着他，使他受不到那种今天很少有人能够避免的时代病的影响，就是说受不到民族狂热病的影响。在他的通俗文章《关于飞行抛射体的现象》（Über Erscheinungen an fliegenden Projektilen）中，他也不能放弃在最后一段里所表达的他对于各个民族达到相互了解的衷心 [8]
愿望。

[何成均 译 郝刘祥 校]

载于《物理学期刊》17(1916):101—104。1916 年 3 月 14 日收到,1916 年 4 月 1 日发表。 282

[1]Ernst Mach 是 Vienna 大学的归纳科学的历史和理论的荣誉退休教授,逝世于 1916 年 2 月 19 日,享年 78 岁。爱因斯坦后来对这个讣告做了贬低的评论:"它实在不好;我的风格勤勉而笨拙,我的文学知识是贫乏的"("Es ist nicht gerade gut; mein Stil ist schwerfällig und hölzern, meine Litteraturkenntnis dürftig."1917 年 2 月 20 日爱因斯坦致 Katja Adler 的信)。

[2]爱因斯坦在 1909 年做过类似的评论,明确地谈到作为 Mach 的反对者之一的 Max Planck 仍然受到 Mach 的强烈影响(见 1909 年 8 月 9 日爱因斯坦致 Mach 的信(第五卷,文件 174))。

[3]*Mach 1897*。

[4]在许多场合,爱因斯坦强调了在他讨论相对论范围内加速运动问题中,Mach 所做分析的重要性;例如,见 *Einstein 1914h*(第四卷,文件 31),pp. 344—346,*Einstein 1914o*(文件 9),pp. 1031—1032 和 *Einstein 1916e*,pp. 771—772,其中他也讨论了一个由于 Mach 的批评所引起的假想实验。关于爱因斯坦对 Mach 在力学基础方面的工作的称赞,见 1913 年 6 月 25 日和 1913 年 12 月下半月致 Mach 的信(第五卷,文件 448 和 495)以及爱因斯坦于 1913 年 8 月 14 日致 H. A. Lorentz 的信(第五卷,文件 467);关于讨论 Mach 对 Newton 的批评在爱因斯坦发展广义相对论中所起的作用,也见第四卷编者按"爱因斯坦论引力和相对论:静态场",p. 127,*Barbour 1992* 和 *Hoefer 1994*。

[5]在 *Mach 1921*(是在他去世后发表的)的前言——注明的日期为 1913 年 7 月——中,他以否定的词语表达了他对相对论的态度(关于 Mach 对相对论态度的一般讨论见 *Blackmore 1988*,*Holton 1992*;也见 *Wolters 1987*,其中对前言的真实性提出质疑)。直到 Mach 的生命结束,他不仅批判相对论,也宣称反对原子论——这个事实对爱因斯坦来说很棘手,但在讣告中并未涉及(关于 Mach 对原子论的看法以及他与爱因斯坦关系的讨论,见 *Klein 1986*;关于 Mach 对爱因斯坦影响的讨论,也见 *Holton 1988*,第 7 章)。

[6]在 1922 年,或许由于对 *Mach 1921*(见前面的注)前言的失望,爱因斯坦取更批评的态度,当时他说:"Mach 如同他是一个可悲的哲学家一样,他也是一个很好的力学学者"("Autant Mach fut un bon mécanicien, autant il fut undéplorable philosophe."*Becquerel et al. 1922*,p. 112)。

[7]见 *Mach 1903*。

[8]*Mach 1898*(用德语重新发表在 *Mach 1903* 中)的结束语是:"让各种族和各国籍之间的仇恨尽情地胡闹吧,国家间的交往仍将增加,而且将变得更加紧密,与分裂各个国家的问题相比较,要求未来人类独有权力这一伟大的共同理想,将以更清晰更有力的方式逐次出现。"

[刘 辽 译校注释]

283

30.“广义相对论基础”

[*Einstein 1916e*]

1916 年 3 月 20 日收到
1916 年 5 月 11 日发表

载于《物理学杂志》49(1916):769—822。

广义相对论基础 284

A. 爱因斯坦

[在存在的译文中少了这一段]

[1] 下面论述的理论,是今天普遍称之为"相对论"的理论的极其深远的推广。
[2] 为了区别,我将把前者称为"狭义相对论",并认为是读者已经熟悉的。相对论的
[3] 推广工作借助于数学家 Minkowski 不少,他是第一个承认空间坐标和时间坐标
形式上的等价性,并以此建造理论的人。建立广义相对论所需的数学工具是现
成的,叫做"绝对微分学",这是根据 Gauss、Riemann 和 Christoffel 对非 Euclid
[4] 流形的研究基础上,由 Ricci 和 Levi-Givita 总结起来的。并已在理论物理学中
有所应用。我将在本文的 B 节讲述所有必需的数学工具,估计这些数学工具不
[5] 是每一位物理学家都熟悉的。我尽量使我的讲述简明易懂,使得读者为了掌握
[6] 本文不必再去翻阅特别的数学文献。最后我要诚挚地感谢我的朋友,数学家
Grossmann,他不仅帮助我为掌握相关数学知识省下了很多精力,也在寻找引力
场方程的过程中给了我很多帮助。

[译文的绝大部分取自 W. Perrett 和 G. B. Jeffery 在 H. A. Lorentz 等人]《相对论原理》一书(Methuen 1923;Dover rpt,1952)中的英译本]

A. 关于相对论基本公设的根本性思考 285

§ 1. 对狭义相对论的考查

狭义相对论的基本公设如下,这个基本公设也适用于 Galilei 和 Newton 的力学。

设有一坐标系 K，对于这个坐标系物理定律以其最简单的形式很好地成立，则任何另外的，相对于 K 作匀速平动的坐标系 K'，这个物理定律也很好地成立。我们把这一基本公设称为“狭义相对性原理”，“狭义”一词是指这一基本公设仅限于 K' 对 K 作相对匀速平动的特殊情况，而不能延伸到二坐标系相对作非匀速运动的情况。

因此，狭义相对论并没有因为狭义相对性原理而偏离经典力学。真空中光速的恒定性与狭义相对性原理结合起来，按大家熟知的方式，导致了同时的相对性，Lorentz 变换以及关于物体运动和时钟行为的各种定律。

狭义相对论所接受的关于空间和时间的理论的修正确实是深远的，但是有一个重要之点并未受到影响。

关于几何学中的定律，即使是在狭义相对论中，也被直接解释为像静止的固体中的可能的相对位置。在更一般的情况下，运动学的定律都被解释为用直尺和时钟的关系来描写的定律。对于稳定刚体上选定的两个质点，永远对应着一个具有确定长度的距离，与刚体的位置和取向无关，也与时间无关。对于一个相对于某特定参考系静止的时钟，其指针的两个位置永远对应着一定长的一段时间间隔而与位置和时间有关。我们不久将会看到，广义相对论对于时间和空间不能沿袭这种简单的物理解释。

286

§2. 相对论的基本公设需要扩展

在经典力学中，在狭义相对论中也是一样，有一个内在的认识论的缺陷，这一点是 Mach 首先清楚地提出来的。我们将用下面的例子来说明。有两个同样 [7]
大小同样性质的流体在空间中自由地飘荡着。二者相距极远，与所有其他物体也相距极远。只需考虑同一物体的不同部分之间的引力的作用。设两物体间的距离不变，每个物体自身各部分之间没有相对运动。但是每一物体，从与另一物体相对静止的坐标系来看，以二体连线为轴作匀角速度的转动。这是一个可验证的二体的相对运动。现在，让每个物体都经受一个与其本身相对静止的测量仪器的测量。设结果测得 S_1 的表面是球面，而 S_2 的表面是一个旋转椭球面。

就此我们提出问题：这两个物体的这种不同是什么原因造成的呢？除非所
287 给出的理由是一个**可观察的经验事实**，这个回答才能被认为是在认识论上令人满意的[1]。只有当经验世界中的一些**可观察的事实**最终成为原因和结果出现

1）当然，如果一个答案在认识论上是令人满意的，可是与另外的实验事实相矛盾，这个答案在物理上还是靠不住的。

时，因果律的陈述才有意义。

Newton 力学对于这个问题没有给出令人满意的答案。Newton 力学的说法如下：力学定律适用于与物体 S_1 相对静止的空间 R_1，而不适用于与物体 S_2 相对静止的空间 R_2。然而这样引进的 Galilei 空间 R_1 仅仅是一个**人为的**原因，而不是一个可观察的东西。由此可以看出，在被考虑的情形中，Newton 力学实际上并没有满足因果律的要求，而只是表面上满足了因果律。因为 Newton 力学认为，这个人为的原因 R_1 造成了两个物体 S_1，S_2 的显著差别。

唯一合理的回答必须是：由 S_1 和 S_2 构成的物理系统不可能在其本身范围内揭露出任何导致 S_1 和 S_2 行为不同的可以想象的原因。所以这个原因必定在这一系统的**外面**。我们不能不接受：那些包括决定 S_1 和 S_2 形状的力学的普遍定律一定是这样的：S_1 和 S_2 的力学行为部分地在相当程度上受到远方物质的支配，我们没有把这些远方物质归到 S_1 和 S_2 的系统之内。于是，这些远方的物质及其相对于 S_1 和 S_2 的运动（这些必然是可以被观察的）就被看成是二物体 S_1 和 S_2 的行为不同的原因。这些远方的物体代替了虚假原因 R_1 的作用。在可以想象到的所有空间 R_1，R_2 等，不管它们之间有什么样的相对运动，在不修补上述认识论的障碍之下，其中没有哪一个是可以先验地被看成是优越的空间：**物理定律必须具有这样的性质，即它们必须能适用于做任何运动的参考系**。沿着这一条思路，我们达到了对于相对性公设的扩充。

除了这个根据认识论的有力的论证之外，还有一个对于扩充相对性公设有利的著名的物理事实。假设 K 是一个 Galilei 参考系，即有一个与别的物体相距足够远的物体相对于这个参考系（至少在所考虑的四维范围内）做匀速直线运动，设 K' 是另一个参考系，它相对于 K 做**匀加速**平动。那么，一个同其他物体
[8] 相距充分远的物体相对于 K' 将做匀加速运动，其加速度的大小和方向与这个物体的物质组成和物理状态无关。

是不是一个与 K' 相对静止的观测者就可以据此推断，他所在的参考系是一 288
个加速的参考系呢？答案是否定的。因为用下述的方法也可以给那个自由运动的物体和参考系 K' 之间的关系一个同样好的解释：参考系 K' 是没有加速度的，而所讨论的时空区域在受一个引力场的支配，引力场使那个物体产生相对于 K' 的加速度。

这种看法之所以可能，是因为经验告诉我们，力场的存在，即引力场有一种值得注意的性质，它可以赋予所有的物体相同的加速度[1]。各种物体相对于 K' 的力学行为与我们习惯地把 K' 当作“静止的”或“特定的”参照系时的经验是一

[9] 1）Eötvös 以极大的精确度用事实证明了引力场具有这样的性质。

样的。因此，从物理的立场上来看，上面的假设本身就建议把参考系 K 和 K′都有同样的权利被看成是静止的。这就是说，当描述物理现象时，作为参考系，它们二者是平等的。

根据这种考虑可以看到，在探求广义相对论中将导致引力理论，因为只要改变坐标系我们就能够"制造"一个引力场。同样明显的是在**真空中**光速不变的原理也必须加以改变，因为我们很容易认识到，如果相对于 K，光线以恒定的速度沿一条直线传播的话，那么相对于 K'来说，光线的路径一般来说必然是一条曲线。

§3. 时空连续统　表现自然界普遍规律的方程的普遍协变性要求

在经典力学中，在狭义相对论中也是一样，空间和时间坐标有着直接的物理
289 意义。说一个点事件的 X_1 坐标为 x_1，那就意味着这个事件在四维坐标的 X_1 轴上的投影，用 Euclid 几何学的刚性直尺沿 X_1 轴来测量时，它离坐标原点的距离是这个直尺（长度单位）长度的 x_1 倍。说这个事件的 X_4 坐标为 $x_4=t$，那就是说一个与坐标系相对静止，并与事件在同一空间位置的[1]，具有确定的时间间隔单位的标准时钟，在事件发生时所读出的时间是确定时间间隔的$x_4=t$ 倍。

关于空间和时间的这种看法早已深入到物理学家的心中，尽管通常他们并不意识到这一点。从这些概念在物理测量中起的作用可把这一点看得更加清楚。这也必然深入到读者的意识深处，因为他会把在上一节（§2）中读到的联系到某种意义。我们现在要指出，如果狭义相对论是广义相对论在不存在引力场时的特殊情况，我们必须放弃上述看法而代之以更为普遍的看法，以便能够把广义相对论的公设建立起来。

在不存在引力场的空间中，我们引入一个 Galilei 坐标系 $K(x,y,z,t)$，再引入一个与 K 相对做匀速转动的坐标系 $K'(x',y',z',t')$，令二者的原点和 Z 轴一直保持重合。我们将要证明，对于 K'系，上述关于长度和时间的物理意义就不能再维持下去。根据对称性，显然 K 系的 XY 平面上以原点为心的一个圆，也是 K'系中 $X'Y'$平面上的一个圆。假设我们用一个与半径相比为无穷小的尺去测量了圆的圆周和半径并取二者的商。如果这一实验是用一把相对于 Galilei
290 系 K 静止的尺进行的，那么圆周与半径之比将为 2π。而用相对于 K'静止的尺

1）我们假设可以确认在空间中瞬时贴近的两个事件，或者更精确一点说，在时空中贴近或重合的两个事件的"同时性"，而不对这个基本概念下定义。

去测量，得到的圆周半径比要比 2π 大一点。如果我们设想两次测量过程都是在“静止的”K 系上进行的，这就不难理解了。考虑到尺子随 K' 系运动测量圆
[10] 周时要受到 Lorentz 收缩，而测量半径时却并不如此。因此，Euclid 几何学对于 K' 系并不成立。而上面根据 Euclid 几何学定义的坐标系的概念因而对 K' 系也就不成立了。同样，我们也不能引入用与 K 系相对静止的时钟表示的与 K' 系中物理要求相对应的时间。为了确信这是不可能的，让我们设想有两个结构完全相同的时钟，一个放在坐标原点，另一个放在圆周上，都从“静止系”K 来设想这二个时钟。根据我们熟知的狭义相对论，由 K 系来看，在圆周上的那个时钟走得要比在原点的慢一点，因为前者在运动而后者是静止的。一个处在坐标的共同原点处的观察者通过光线去观察在圆周上的钟，他发现这个钟要比在他身旁的钟慢一点。由于他不打算设想在相应路径上让光速明显地依赖于时间，他将他观察的结果解释为圆周上的钟“真的”比原点处的钟走得慢。这就使他不得不这样定义时间，即时钟的快慢与它所在的地方有关。

于是，我们得到这样的结论：在广义相对论中，空间和时间不能用如下的方式定义，即空间坐标之差可用单位测量棒（直尺）来测量；时间坐标之差可用标准时钟来测量。

这样一来，我们一直使用的，在时空连续统中用一定的方式建立坐标的方法
就垮掉了，而且看来没有其他的方法对这个四维世界采用坐标系，使得我们采用 291
这种坐标系来把自然界的定律用非常简单的方式表现出来。因此，没有别的办法，只有认为在原则上一切可以想到的各种坐标系在描述自然界都同等适用的一条路了。于是，产生了下述要求：

自然界的普遍定律由一些方程来描写，这些方程对所有坐标系都同等适用，这就是说，这些方程对于不管什么样的任意坐标代换都是协变的（普遍协变的）。

显然，满足这个公设的物理理论也一定会满足广义相对论公设。因为，在任何情况下，全部代换的总和一定包含着三维坐标系的各种相对运动所引起的代换。从空间和时间中取走了最后一点物理客观性的这一广义协变性要求确是一个自然的要求，这从下面的讨论中即可看出。所有的时空验证都不外乎是确定
[11] 时空的重合。例如，若事件仅由质点的运动所构成，那么，最终能看到的只是两个或更多质点的相遇。测量的结果无非是验证我们测量仪器上的质点同别的质点的这种相遇，时钟的指针同度盘上某点的重合，以及观察到的两个事件在相同地点相同时间发生。

引入参考系的作用没有别的，只是为了便于描述这些重合的总和。我们分配给宇宙 4 个时空变量 x_1, x_2, x_3, x_4 使得每一个事件对应于一组四个数值。对于两个重合的事件，它们都对应于相同的一组数值 $x_1 \cdots x_4$。这就是说，重合的

292 特点就是一组坐标的全同。如果替代坐标 $x_1 \cdots x_4$，我们引入一组它们的函数 x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 作为新的坐标系，使得双方的一一对应没有含混之处，那么，新坐标系中的四个新坐标的全同就表示两个事件在时空中的重合。由于所有的物理事件最后都可以归结为这种重合，所以没有直接的理由认为这种坐标系比那种好一些。这就是说，我们达到了普遍协变性的要求。

§4. 四个坐标与时空中测量的关系

我并不想在本文中把广义相对论表述成一种含有最少数目的公理的尽可能简单的逻辑体系，我的主要目的是以这样方法来发展这个理论，即使读者感到我们走的这条路线是在心理上最自然的，而且感到作为基础的那些假设具有最高程度的安全性。考虑到这一目的，让我们用下面的原则作为出发点：

在无穷小的四维区域中，如果坐标选择得适当，狭义相对论成立。

为此目的，我们必须选择无穷小(局域)坐标系的加速度，使得不产生引力场，这对于无穷小区域是可能的。令 X_1, X_2, X_3 为空间坐标，X_4 为以适当单位[1)]度量的时间坐标。如果一个刚性杆被选定作为长度单位，那么当给定此坐标系以固定方位时，则四个坐标将在狭义相对论中有直接的物理意义。这时，根据狭义相对论，表达式

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{1}$$

的值与局域坐标系的取向无关，并且可以通过空间及时间的测量定出。我们称
293 四维连续统中无限接近的两个点的线元的大小为 ds。如果属于微元 $dX_1 \cdots dX_4$ 的 ds^2 为正，称为类时的，如果为负，则称为类空的，这是由 Minkowski 规定的。

对于上述"线元"，或者说对于两个无限靠近的两个事件，在任意选定的四维参考系中，还可以对应于确定的微分 $dx_1 \cdots dx_4$。如果这个坐标系和"局域"坐标系都是在所研究的区域里给出的，那么 dX_ν 可以通过一个 dx_σ 的确定的线性齐次表达式表示成：

$$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} dx_\sigma. \tag{2}$$

将此式代入(1)得

$$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau. \tag{3}$$

式中 $g_{\sigma\tau}$ 是 x_σ 的函数。这些不再依赖于"局域"坐标系的方位和运动状态，因为 ds^2 是可以对时空中无限靠近的两个事件用钟尺测量决定的量，而且已明确与特

1)时间的单位应如此选择，使得在此"局域"坐标系中测量的真空中的光速为 1。

别选定的坐标系无关。此处的 $g_{\sigma\tau}$ 应选定使得 $g_{\sigma\tau}=g_{\tau\sigma}$，求和应遍及所有的 σ 和 τ 的值，因此求和式共有 4×4 项，其中 12 项是成对相等的。

狭义相对论的情况是这里的一个特殊情况，由于在有限区域内 $g_{\sigma\tau}$ 的特殊关系，有可能在有限区域内选择一种参考系使得 $g_{\sigma\tau}$ 在狭义相对论的意义下成为常数：

$$\left\{\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array}\right. \tag{4}$$

稍后我们将发现，对于有限区域，这种坐标的选择一般说来是不可能的。 294

从§2 和§3 的考虑可以得出，$g_{\sigma\tau}$ 这个量从物理的立场来看，是一个描写引力场和所选坐标系的关系的量。因为，如果我们现在设想狭义相对论适用于适当选定坐标系的某一四维区域，则 $g_{\sigma\tau}$ 具有(4)给出的值。从而一个自由质点相对于这一坐标系的运动就是匀速直线运动。然后我们通过任意选定的坐标代换引入一个新的坐标 x_1,x_2,x_3,x_4，在这一新坐标系中 $g_{\sigma\tau}$ 将不再是常数，而是空间和时间的函数。同时，那个自由质点的运动，对于这个选定的坐标系将表现为非匀速、非直线的曲线运动，而这一运动的规律将与运动的质点的性质无关。因而我们将把这一运动解释为质点在一种引力场影响下的运动。于是，我们找到了引力场的产生与 $g_{\sigma\tau}$ 的时空可变性的关系。于是，在一般情况下，当我们无法选出坐标系将狭义相对论应用于有限区域时，我们也坚信这种观点，即 $g_{\sigma\tau}$ 是描写引力场的。

于是，根据广义相对论，与别的力，特别是电磁力相比，引力占有一个特殊的地位，因为表现引力场的 $g_{\sigma\tau}$ 中的 10 个函数同时还定义了四维量度空间的度规性质。

B. 建立广义协变方程的数学工具

我们在前文中看到了，广义相对论要求物理的方程都需要对任意坐标 $x_1\cdots$ x_4 的代换满足协变性，我们必须来考虑怎样去找到这样的协变方程。我们现在 295
将转入纯数学的讨论，我们将发现在解决这一问题的过程中(3)给出的不变量 ds 将起根本的作用。这个量我们称之为“线元”，这是从 Gauss 的曲面理论中借用来的。

这一协变量的一般理论的基本思想如下：设某些东西（“张量”）是用对于任意坐标系的许多坐标函数来定义的，这些函数称为张量的分量。然后有一些规

则，当新旧两个坐标系之间的变换关系已知时，如果张量对原坐标系的分量已知时，可以利用这些规则算出张量对新坐标系的分量。这些以后称为张量的东西还有进一步的特点，即它对新旧坐标系的分量的变换方程是线性的和齐次的。因而，如果一个张量对于原坐标系的分量全部为零，则它对于新坐标系也全部为零。因此，一个自然规律如能表为一个全部分量为零的一个张量，那么这个自然规律就是协变的。考查构成张量的规律，我们就获得描述一般协变定律的手段。

§5. 反变四矢量和协变四矢量

反变四矢量 线元由 4 个"分量"dx_ν 来确定，其变换规律可以表为下式

$$dx_\sigma' = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu \tag{5}$$

dx'_σ 可以表为 dx_ν 的线性齐次函数。因此我们可以把这 4 个坐标的微分看成一种特定"张量"的 4 个分量，我们称这种张量为反变四矢量。任何相对于坐标系用 4 个分量 A^ν 来定义的，而且是根据相同规律

$$A'^\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu, \tag{5a}$$

296 变换的东西我们也称之为反变四矢量。从(5a)立刻得知，若 A^σ 和 B^σ 都是反变四矢量的分量，则它们的和与差，$A^\sigma \pm B^\sigma$ 也是反变四矢量。相应的规律也适用于今后陆续引进的所有张量(张量的加法和减法规律)。

协变四矢量 如果 4 个量 A_ν 对于任意选定的反变四矢量 B^ν 满足

$$\sum_\nu A_\nu B^\nu = \text{不变量}. \tag{6}$$

那么我们称之为协变四矢量。协变四矢量的变化规律可以从它的定义得出。因为我们如果在方程

$$\sum_\sigma A_\sigma' B'^\sigma = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

的右边将 B^ν 用(5a)的反演式

$$\sum_\sigma \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} B'^\sigma,$$

代替，即可得出

$$\sum_\sigma B'^\sigma \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu = \sum_\sigma B'^\sigma A_\sigma'.$$

由于此式对于任意的 B'^σ 值均成立，由此得出 A_σ 的变换规律是

$$A'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu. \tag{7}$$

关于表达式的书写简化方法的注释 注意一下本节公式可以看出,所有求和的指标在求和号后面都出现两次,[例如(5)中的 ν],而且只对出现两次的指标求和。因此,可以略去求和号而不致造成不清楚。为此,我们引进下面的惯例:除非另有声明,凡公式中某一项一个指标出现两次的,就意味着对这个指标求
[12] 和。协变和反变的四矢量的区别在于它们的变换规律[分别见(7)和(5)]。在前述一般讨论的意义上,两种形式都是张量。它们的重要性也就在这里。按照 297
Ricci 和 Levi-Civita 的意见,我们把指标写在上面表示反变性质,写在下面表示
[13] 协变性质。

§6. 二秩和高秩张量

反变张量 若用两个反变矢量 A^μ 和 B^ν 的分量构成全部 16 个乘积 $A^{\mu\nu}$:

$$A^{\mu\nu}=A^\mu B^\nu, \tag{8}$$

则根据(8)和(5a),$A^{\mu\nu}$满足下列变换规律:

$$A'^{\sigma\tau}=\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu}. \tag{9}$$

我们把由相对于任意坐标系的 16 个量构成的东西,并且服从(9)的变换规律的,称为二秩反变张量。并不是每个二秩反变张量都必须由两个反变四矢量按照(8)构成。可以很容易地证明,任意满足变换规律(9)的 16 个量都可以表为适当选定的 4 对反变四矢量构成的 $A^\mu B^\nu$ 之和。因此,我们为了证明满足(9)的二秩反变张量应服从几乎所有的规律,只要用最简单的方式,即证明它们对特殊的张量(8)成立就可以了。

任意秩的反变张量 显然,遵循(8)和(9)的路线,也可以定义三秩或更高秩的反变张量,它们有 4^3 或更多的分量。同样,根据(8)和(9)也可以说,在这个意义上反变四矢量是一秩反变张量。

协变张量 另一方面,如果用两个协变四矢量 A_μ 和 B_ν 构成 16 个乘积 $A_{\mu\nu}$:

$$A_{\mu\nu}=A_\mu B_\nu, \tag{10}$$

它们的变换规律为

$$A'_{\sigma\tau}=\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}A^{\mu\nu}. \tag{11}$$

这一变换规律定义了二秩协变张量,前面所说的关于反变张量的各点,也同样适用于协变张量。 298

注 把标量(即不变量)看成是零秩反变张量或零秩协变张量是很方便的。

混合张量 我们也可以定义下列形式的二秩张量:

$$A_{\mu}^{\nu}=A_{\mu}B^{\nu}. \tag{12}$$

这种张量对于指标 μ 是协变的，对于指标 ν 是反变的，它的变换规律是

$$A'^{\tau}_{\sigma}=\frac{\partial x_{\tau}'}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\sigma}}A_{\alpha}^{\beta}. \tag{13}$$

自然，可以有带任意多协变指标和任意多反变指标的混合张量。协变张量和反变张量可以看成是混合张量的特殊情况。

对称张量 二秩的协变张量或反变张量，如果对调两个指标的分量彼此相等，称为对称张量。于是，张量 $A^{\mu\nu}$ 或 $A_{\mu\nu}$ 若对于任何一对 μ,ν 满足

$$A^{\mu\nu}=A^{\nu\mu}, \tag{14}$$

或者

$$A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}. \tag{14a}$$

就是对称张量。

必须证明这样定义的对称性质与所选的坐标系无关。事实上，如果考虑到(14)，由(9)可得

$$A'^{\sigma\tau}=\frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}}A^{\mu\nu}=\frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}}A^{\nu\mu}=\frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\nu}}A^{\mu\nu}=A'^{\tau\sigma}.$$

在上式中，我们对调了求和的指标 μ 和 ν，这只是记号的改变。

反对称张量 一个二秩、三秩或四秩的反变张量或协变张量，如果对调其分
299 量中的任意两个指标所得的分量与原分量等值反号，则称为反对称张量。例如张量 $A^{\mu\nu}$ 或 $A_{\mu\nu}$ 若对任意 μ,ν 有

$$A^{\mu\nu}=-A^{\nu\mu}, \tag{15}$$

或者

$$A_{\mu\nu}=-A_{\nu\mu}, \tag{15a}$$

则此二秩张量是反对称的。

在反对称二秩张量 $A^{\mu\nu}$ 的 16 个分量中，有 4 个 $A^{\mu\mu}$ 为零，其余的成对地相等而反号，因此实质上只有 6 个数(六矢量)。与此类似，反对称三秩张量 $A^{\mu\nu\sigma}$ 中，实质上只有 4 个数，而反对称的四秩张量 $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ 只剩下一个数。而大于四秩的反对称张量在四维连续统中是不存在的。

§7. 张量的乘法

张量的外乘 有一个 n 秩张量和一个 m 秩张量，将前者的每一个分量乘以后者的每一个分量，就得到了二者的外积，一个 $n+m$ 秩的张量的所有分量。例如，不同种类的两个张量 A 和 B 可以产生外积 T：

$$T_{\mu\nu\sigma}=A_{\mu\nu}B_{\sigma},$$
$$T^{\mu\nu\sigma\tau}=A^{\mu\nu}B^{\sigma\tau},$$
$$T_{\mu\nu}^{\sigma\tau}=A_{\mu\nu}B^{\sigma\tau}.$$

T 的张量性质可以由表达式(8)、(10)、(12)或变换规律(9)、(11)，(13)直接证明。(8)、(10)和(12)本身就是几个一秩张量的外积的例子。

混合张量的“缩并” 对于任意一个混合张量，我们可以令其一个反变指标与一个协变指标相等，并对这个指标求和，这就是缩并，结果得出一个秩数少2的张量。例如一个四秩的混合张量 $A_{\mu\nu}^{\sigma\tau}$，可以缩并成一个二秩张量： 300

$$A_{\nu}^{\tau}=A_{\mu\nu}^{\mu\tau}\left(=\sum_{\mu}A_{\mu\nu}^{\mu\tau}\right),$$

由此再有一次缩并，可以得到一个零秩张量：

$$A=A_{\nu}^{\nu}=A_{\mu\nu}^{\mu\nu}.$$

缩并的结果确实具有张量性质，既可以由张量以法则(12)的推广来表达再辅以(6)来证明，也可以用(13)的推广来证明。

张量的内乘和混合乘法 这是外乘的缩并的结合。

举例 有一个二秩协变张量 $A_{\mu\nu}$ 和一个一秩反变张量 B^{σ}，先作它们的外积，得到一个混合张量

$$D_{\mu\nu}^{\sigma}=A_{\mu\nu}B^{\sigma}.$$

然后再对 ν 和 σ，两个指标作缩并，可以得出一个协变的四矢量：

$$D_{\mu}=D_{\mu\nu}^{\nu}=A_{\mu\nu}B^{\nu}.$$

这称为两个张量 $A_{\mu\nu}$ 和 B^{σ} 的内积。类似地，我们可以由两个张量 $A_{\mu\nu}$ 和 $B^{\sigma\tau}$ 通过外积和两次缩并得到内积 $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$。我们还可以从两个张量 $A_{\mu\nu}$ 和 $B^{\sigma\tau}$ 得出一个二秩混合张量 $D_{\mu}^{\tau}=A_{\mu\nu}B^{\nu\tau}$，这一操作可以适当地认为是一个混合操作，先对指标 μ 和 τ 作外积，再对指标 ν 和 σ 作内积。

我们现在来证明一个命题。这个命题常常用来证明张量特征。前已提到，若 $A_{\mu\nu}$ 和 $B^{\sigma\tau}$ 是张量，则 $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ 就是一个标量。而我们也能作出下面的论断：**对于任意选定的张量** $B^{\mu\nu}$，如果 $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ 都是一个标量，则 $A_{\mu\nu}$ 具有张量的特性。因为，根据假设，对于任意的坐标代换有

$$A'_{\sigma\tau}B'^{\sigma\tau}=A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}.$$

但是，根据(9)的反式有： 301

$$B^{\mu\nu}=\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}B'^{\sigma\tau}.$$

将此式代入上式，得

$$\left(A'_{\sigma\tau}-\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}A_{\mu\nu}\right)B'^{\sigma\tau}=0.$$

只有括号中的式子为零。此式才能对任意的 $B'^{\sigma\tau}$ 成立，于是得到(11)。

上述命题对于任意秩、任意性质的张量都成立，在所有情况下，证明都是类似的。

这一规则还可以下述形式出现：如果 B^{μ} 和 C^{ν} 是任意矢量，而对于它们的任何取值，内积 $A_{\mu\nu}B^{\mu}C^{\nu}$ 都是标量，那么 $A_{\mu\nu}$ 就是一个协变张量。甚至在条件更特殊一点的情况下，上述命题也能很好地成立。即，对于任意选定的四矢量 B^{μ}，内积 $A_{\mu\nu}B^{\mu}B^{\nu}$ 是一个标量，同时已知 $A_{\mu\nu}$ 满足对称条件 $A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}$，这时，我们可以用上面给出的方法证明 $(A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu})$ 的张量性质，然后利用对称的性质证明 $A_{\mu\nu}$ 具有张量性质。

最后，由以上的证明可知，这一定律还可以推广到任意张量，如果对于任意选定的四矢量 B^{ν}。乘积 $A_{\mu\nu}B^{\nu}$ 构成一个一秩张量，则 $A_{\mu\nu}$ 是一个二秩张量。因为，如果 C^{μ} 是任意四矢量，根据 $A_{\mu\nu}B^{\nu}$ 的张量性质，内积 $A_{\mu\nu}C^{\mu}B^{\nu}$ 不论 B^{ν} 和 C^{μ} 如何选择一定是一个标量，由此命题得证。

§8. 基本张量 $g_{\mu\nu}$ 的某些性质

协变基本张量 在线元平方的不变量表达式

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu},$$

302 中，dx_{μ} 这一部分所起的作用是一个可任意选取的反变矢量的作用。又由于 $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$，根据上一节的考虑知，$g_{\mu\nu}$ 是一个二秩协变张量，我们称之为“基本张量”。下面我们将导出这个基本张量的一些性质，诚然，这些性质是任何二秩张量都有的，但是由于基本张量在我们的理论中起着特殊的作用，是独特的引力效应的物理基础，所以我们将要推导的关系只有论及基本张量，对我们才是重要的。

反变基本限量 如果在由 $g_{\mu\nu}$ 的各元构成的行列式中，取每个 $g_{\mu\nu}$ 的余子式并除以行列式 $g=|g_{\mu\nu}|$，则得到一些量 $g^{\mu\nu}(=g^{\nu\mu})$，这些量构成一个反变张量。下面我们就来证明。

根据行列式的一个已知性质：

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma}=\delta_{\mu}^{\nu}, \tag{16}$$

（式中的 δ_{μ}^{ν} 当 $\mu=\nu$ 时等于 1，$\mu\neq\nu$ 时等于零）我们可以把上述 ds^2 的公式改写成

$$g_{\mu\sigma}\delta_{\nu}^{\sigma}dx_{\mu}dx_{\nu},$$

利用(16)得

$$g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}g^{\sigma\tau}dx_{\mu}dx_{\nu}.$$

但是，根据上一节的乘法规律，这个量

$$d\xi_{\sigma}=g_{\mu\sigma}dx_{\mu}$$

是一个协变四矢量，而且事实上是一个任意矢量，因为 dx_μ 就是任意的。将这个量引入我们的公式中，得

$$ds^2 = g^{\sigma\tau} d\xi_\sigma d\xi_\tau.$$

由于此式是一个标量。而矢量 $d\xi_\sigma$ 是可任意选定的矢量，又由于根据定义，$g^{\sigma\tau}$ 对于指标 σ 和 τ 是对称的，所以根据上一节的结果，$g^{\sigma\tau}$ 是一个反变张量。

由(16)进一步得出 δ_μ^ν 也是一个张量，我们将称之为混合基本张量。 303

基本张量的行列式 根据行列式的乘法规则，有

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}| \times |g^{\alpha\nu}|.$$

另一方面

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |\delta_\mu^\nu| = 1.$$

因此得

$$|g_{\mu\nu}| \times |g^{\mu\nu}| = 1. \tag{17}$$

体积标量 我们首先寻找行列式 $g = |g_{\mu\nu}|$ 的变换规律，根据(11)有

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} g_{\mu\nu} \right|$$

应用两次行列式的乘法，得

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \left| \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} \right| |g_{\mu\nu}| = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right|^2 g,$$

或者

$$\sqrt{g'} = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \sqrt{g}.$$

另一方面，体积

$$d\tau' = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

的变换规律，根据 Jacobi 定理为

$$d\tau' = \left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| d\tau.$$

将最后二式相乘，得

$$\sqrt{g'} d\tau' = \sqrt{g} d\tau. \tag{18}$$

我们在以后引入 $\sqrt{-g}$ 来代替 $\sqrt{g}$，根据时空连续统的双曲性质，前者永远是实的。不变量 $\sqrt{-g}d\tau$ 在数值上等于在局域坐标系中，在狭义相对论的意义下，用刚性尺和时钟测量出来的四维体元。

关于时空连续统的性质的注释 我们关于狭义相对论永远可适用于无穷小区域这一假设，直接导致 ds^2 永远可以通过 4 个实的量 $dX_1 \cdots dX_4$ 变为(1)。如 304
果我们用 $d\tau_0$ 表示自然体元 $dX_1 dX_2 dX_3 dX_4$，则有

$$d\tau_0=\sqrt{-g}\,d\tau. \tag{18a}$$

如果在四维连续统中某一点$\sqrt{-g}$等于零，那就意味着有这一点上无穷小的“自然”体元对应于坐标中的零体积。我们假设这种情况永不发生。于是 g 就不能改变符号。我们将假设，在狭义相对论的意义上，g 永远取有限的负值。这是对我们所讨论的连续统的物理性质的一个假设，同时也是一个选用坐标的一种约定。

但是，如果 $-g$ 永远取正的有限值，那就自然地会后验地对坐标作这样的选取，使得这个量永远等于 1。我们在后面将看到，在这样的选择坐标限制之下，有可能使自然界规律的表述得到重要的简化。

于是，代替(18)，我们可以用简单的 $d\tau'=d\tau$。利用 Jacobi 定理，由此得

$$\left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right|=1. \tag{19}$$

于是，在这种坐标选定之下，只有那些在变换时行列式为 1 的坐标才是允许的。

然而，若相信这一步是表明要部分地放弃广义相对性的公设，那就错了。我们要问的不是“哪些是对于该行列式为 1 的所有代换协变的自然定律?”而是“哪些是一般协变的自然定律?”我们将在后面看到，由于对坐标选择的这类限制，才可能大大简化自然定律。

用基本张量构成的一些新张量 用基本张量对一个张量进行内乘、外乘或混合乘，可以得到一些不同性质和不同秩的张量。例如

305

$$A^\mu=g^{\mu\sigma}A_\sigma,$$
$$A=g_{\mu\nu}A^{\mu\nu}.$$

还应特别注意下列形式：

$$A^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\alpha\beta},$$
$$A_{\mu\nu}=g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}A^{\alpha\beta}$$

它们分别是协变张量和反变张量的“余张量”。还有

$$B_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}.$$

$B_{\mu\nu}$称为 $A_{\mu\nu}$的约化张量。类似地有

$$B^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}.$$

应当指出，$g^{\mu\nu}$不是别的，正是 $g_{\mu\nu}$的余张量，因为

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta}=g^{\mu\alpha}\delta_\alpha^\nu=g^{\mu\nu}.$$

§9. 测地线方程 质点的运动

由于线元 ds 的定义与坐标系无关，连接四维连续统中两点 P 和 P'并满足

$\int \mathrm{d}s$ 为极值的线，即测地线，具有与坐标的选择无关的意义。测地线的方程是

$$\delta \int_{P}^{P'} \mathrm{d}s = 0. \tag{20}$$

用通常的方法进行变分，可以由此方程得出 4 个定义测地线的微分方程。为了完整起见，我们把这一过程补在这里。令 x_ν 是一个 λ 的函数，并令它定义一个曲面族，族中各曲面都包含着测地线以及所有与测地线靠得极近的由 P 到 P' 的曲线。于是，任何这种曲线都可以假设其坐标 x_ν 为 λ 的函数而给出。令符号 δ 表示由所要的测地线上一点到对应于相同 λ 的邻近线上一点的过渡。于是，我 306
们可以用下式代替(20)：

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta\omega \mathrm{d}\lambda = 0 \\ &\omega^2 = g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

但是，因为

$$\delta\omega = \frac{1}{\omega}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda}\delta x_\sigma + g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda}\delta\left(\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\right\},$$

以及

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right) = \frac{\mathrm{d}\delta x_\nu}{\mathrm{d}\lambda},$$

在分部积分之后由(20a)得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \kappa_\sigma \delta x_\sigma \mathrm{d}\lambda = 0,$$

式中

[14]
$$\kappa_\sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\frac{g_{\mu\nu}}{\omega}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right\} - \frac{1}{2\omega}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{20b}$$

由于 δx_σ 的值是任意的，由此得出

$$\kappa_\sigma = 0 \tag{20c}$$

如果沿着测地线 $\mathrm{d}s$ 不为零，我们就可以选择测地线的“弧长”s 来代替参数 λ，这时 $\omega=1$，而(20c)可以改写成

[15]
$$g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda} = 0,$$

或者，只改变一些记法，成为

$$g_{\alpha\sigma}\frac{\mathrm{d}^2 x_\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{20d}$$

在式中，按 Christoffel 的意见，我们用了下列记号

$$\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{21}$$

最后，将(28d)乘以 $g^{\sigma\tau}$(对指标 τ 作外乘，对指标 σ 作内乘)，我们得测地线的方程为

307

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\ \frac{ds_\nu}{ds}=0. \tag{22}$$

式中，根据 Christoffel 的意见，我们取

$$\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \tau\end{Bmatrix}=g^{\tau\alpha}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \alpha\end{bmatrix}. \tag{23}$$

§10. 用微分构成张量

借助于测地线方程，现在我们可以很容易地用微分的方法从旧理论推导出新理论中的自然界定律。这意味着我们首次能够写出普遍协变的微分方程。我们达到这一目的是由于反复运用下列简单的定律：

如果在我们的连续统中给定了一个曲线，曲线上各点用从曲线上某一定点出发实际测出的距离 s 来表征，又设 φ 是空间的不变函数，那么 $d\varphi/ds$ 也是一个不变量。证明的关键是 ds 和 $d\varphi$ 都是不变量。

由于有

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\ \frac{dx_\mu}{ds},$$

所以

$$\Psi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\ \frac{dx_\mu}{ds}$$

也是一个不变量，而且对这连续统中由一点出发的所有曲线都是不变量，也就是说，对于矢量 dx_μ 的任意选择都是不变量。因此立刻可以得出：

$$A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \tag{24}$$

是一个协变四矢量，即 φ 的"梯度"。

根据我们的规则，在一个曲线上所取的微商

$$\chi=\frac{d\Psi}{ds}$$

同样也是一个不变量。将 ψ 的值代λ，我们首先得到

$$\chi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\ \frac{dx_\mu}{ds}\ \frac{dx_\nu}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\ \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}.$$

从这里不能立刻推出一个张量的存在，但是我们可以把我们沿之作微分的曲线取为测地线，那么由(22)将 d^2x_ν/ds^2 代入，得 308

$$\chi=\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\left\{\begin{matrix}\mu\ \nu\\ \tau\end{matrix}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}\right\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

因为我们可以改变微分的次序，又因为根据(23)和(21)，$\{\mu\nu,\tau\}$对于 μ 和 ν 都是对称的，所以括号中的式子对 μ 和 ν 都是对称的。由于在连续统中从一点出发的测地线可以沿任意方向来画，所以 dx_μ/ds 是一个四矢量，其分量之比可以是任意的。由§7的结果得出，

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\left\{\begin{matrix}\mu\ \nu\\ \tau\end{matrix}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau} \tag{25}$$

是一个二秩协变张量。于是我们得到下列结果：我们通过微分，从一个一秩协变张量

$$A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

得到一个二秩协变张量

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\left\{\begin{matrix}\mu\ \nu\\ \tau\end{matrix}\right\}A_\tau \tag{26}$$

我们称 $A_{\mu\nu}$ 为 A_μ 的扩张(协变导数)。首先我们可以立即证明，即使矢量 A_μ 不能表为梯度，这一操作也会导致一个张量。为看出这一点，我们首先注意到，如果 Ψ 和 φ 都是标量，则

$$\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

就是一个协变矢量。如果 $\Psi^{(1)},\varphi^{(1)},\cdots,\Psi^{(4)},\varphi^{(4)}$ 都是标量的话，4个这一类的项之和，

$$S_\mu=\Psi^{(1)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x_\mu}+\cdot+\cdot+\Psi^{(4)}\frac{\partial\varphi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

也是协变矢量。因为，如果 A_μ 是矢量，它的各分量都是 x_ν 的任意函数，为了保证 S_μ 等于 A_μ，只需令(用选定的坐标系表示) 309

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)}&=A_1,\varphi^{(1)}=x_1,\\ \Psi^{(2)}&=A_2,\varphi^{(2)}=x_2,\\ \Psi^{(3)}&=A_3,\varphi^{(3)}=x_3,\\ \Psi^{(4)}&=A_4,\varphi^{(4)}=x_4,\end{aligned}$$

即可。

因此，为了证明 $A_{\mu\nu}$ 是张量，如果用**任何**协变矢量取代 A_μ 放入右边，只需证明对矢量 S_μ 有这样的性质即可。可是(26)的右方告诉我们，为了完成这后一任

务，只需证明下述情况

$$A_\mu = \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

即可。现在，将(25)的右边乘以 Ψ，

$$\Psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ {\mu \nu \atop \tau} \right\} \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$$

这是一个张量，同样，两个矢量的外积

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

也是一个张量。两者相加，就证明了下式

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) - \left\{ {\mu \nu \atop \tau} \right\} \left(\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}\right)$$

的张量性质。注意到(26)，我们将看到，到此就完成了对矢量

$$\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu},$$

为矢量的证明，从而，也就完成了对任何矢量 A_μ 的证明。

借助于矢量的扩张，我们很容易定义任意秩的协变张量的“扩张”。这是矢量扩张的推广，我们只就二秩张量的情况作一讨论，因为这就足以给出形成法则的清楚的概念。

310 正如已经提到过的那样，任意二秩协变张量都可以表为 $A_\mu B_\nu$ 类型的张量之和[1]。只要导出这种特殊类型的张量的扩张就足够了。根据(26)，下列两式

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{ {\sigma \mu \atop \tau} \right\} A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \left\{ {\sigma \upsilon \atop \tau} \right\} B_\tau,$$

都是张量，将第一式用 B_ν 外乘，将第二式用 A_μ 外乘，我们可得到两个三秩张量。将这两个三秩张量相加，并令 $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$，即得到一个三秩张量：

---

1)将一个具有任意分量 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ 的矢量与一个分量为 1，0，0，0 的矢量作外积，即可得出一个分量为

$$\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

的张量。将类似形式的 4 个张量加起来，就可以得到具有任意给定分量的张量 $A_{\mu\nu}$。

$$A_{\mu\nu\sigma}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}-\left\{\begin{matrix}\sigma\mu\\ \tau\end{matrix}\right\}A_{\tau\nu}-\left\{\begin{matrix}\sigma\nu\\ \tau\end{matrix}\right\}A_{\mu\tau}. \tag{27}$$

由于(27)对于 $A_{\mu\nu}$ 及其一阶导数是线性和齐次的，所以，这种构造张量的规律不仅对于 $A_\mu B_\nu$ 类型的情况有效，而且对于这种类型的和也有效，这就是说，也对任意二秩协变张量有效，我们称 $A_{\mu\nu\sigma}$ 为张量 $A_{\mu\nu}$ 的扩张。

显然，(26)和(24)只是张量扩张的两个特殊情况(分别是一秩张量和零秩张量的扩张)。

一般说来，所有构造张量的特殊规律都包含在(27)和张量的乘法结合之中。

§ 11. 一些特别重要的情况

基本张量 我们首先证明几个以后有用的引理。根据行列式的微分规则有 311

$$\mathrm{d}g=g^{\mu\nu}g\,\mathrm{d}g_{\mu\nu}=-g_{\mu\nu}g\,\mathrm{d}g^{\mu\nu}. \tag{28}$$

最后的结果是由中间的结果推出的，如果我们记得 $g_{\mu\nu}g^{\mu'\nu}=\delta_\mu^{\mu'}$，就有 $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=4$，因而

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}g^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\mathrm{d}g_{\mu\nu}=0.$$

由(28)得

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma}=\frac{1}{2}\frac{\partial\lg(-g)}{\partial x_\sigma}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \tag{29}$$

再有，从 $g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma}=\delta_\mu^\nu$，经过微分得

$$\left.\begin{aligned}g_{\mu\sigma}\mathrm{d}g^{\nu\sigma}&=-g^{\nu\sigma}\mathrm{d}g_{\mu\sigma}\\ g_{\mu\sigma}\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda}&=-g^{\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}\end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

由此，分别混合乘以 $g^{\sigma\tau}$ 和 $g_{\nu\lambda}$ 然后改变指标，得

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}g^{\mu\nu}&=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\mathrm{d}g_{\alpha\beta}\\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}&=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}g_{\mu\nu}&=-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\mathrm{d}g^{\alpha\beta}\\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}&=-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\end{aligned}\right\}. \tag{32}$$

由(31)可得出一个我们以后常用的公式，根据(21)，有

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}=[\alpha\sigma,\beta]+[\beta\sigma,\alpha]. \tag{33}$$

将此式代入(31)的第二式，再考虑到(23)得

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=-g^{\mu\tau}\{\tau\sigma,\nu\}-g^{\nu\tau}\{\tau\sigma,\mu\}. \qquad (34)$$ [16]

将(34)的右方代入(29)，得

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma}=\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \mu\end{matrix}\right\}. \qquad (29a)$$ [17]

312 **反变矢量的散度**　如果我们取(26)与反变基本张量 $g^{\mu\nu}$ 的内积，并对其第一项作一变换之后，右边就取如下形式

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\mu\nu}A_\mu)-A_\mu\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)g^{\mu\nu}A_\tau.$$ [18]

根据(31)，(29)两式，上式的最后一项可以改写成 [19]

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu}A_\tau+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu}A_\tau+\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}g^{\tau\alpha}A_\tau.$$ [20]

由于求和式的指标是不重要的，此式的头两项互相抵消，如果我们写 $g^{\mu\nu}A_\mu=A^\nu$，于是，A^ν 与 A_μ 一样是一个任意矢量，最后得

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}A^\nu). \qquad (35)$$

这个标量就是反变矢量 A^ν 的**散度**。

协变矢量的旋度　(26)中的第二项对于指标 μ 和 ν 是对称的，因此 $A_{\mu\nu}-A_{\nu\mu}$是一个构造特别简单的反对称张量。我们得

$$B_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \qquad (36)$$

六矢量的反对称扩张　将(27)应用于反对称二秩张量 $A_{\mu\nu}$，再依次轮换此式的指标得出两个公式，将三式相加，就得到一个三秩张量：

$$B_{\mu\nu\sigma}=A_{\mu\nu\sigma}+A_{\nu\sigma\mu}+A_{\sigma\mu\nu}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}, \qquad (37)$$

很容易证明，这个张量是反对称的。

六矢量的散度　将(27)与 $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$ 作混合乘积，我们也能得到一个张量。
313 (27)右边第一项可以写成

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu})-g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}-g^{\nu\beta}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}.$$

如果我们把 $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu\sigma}$ 写成 $A_\sigma^{\alpha\beta}$，把 $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}$ 写成 $A^{\alpha\beta}$，再在改写后的第一项中，用(34)的右方代替

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}\text{和}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

结果得到(27)的右方共有 7 项，其中有 4 项互相抵消掉，得

$$A_{\sigma}^{\alpha\beta}=\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}}+\left\{\begin{matrix}\sigma\kappa\\ \alpha\end{matrix}\right\}A^{\kappa\beta}+\left\{\begin{matrix}\sigma\kappa\\ \beta\end{matrix}\right\}A^{\alpha\chi}. \tag{38}$$

这是一个二秩反变张量的扩张的表达式,同样也可以构成更高秩或更低秩反变张量的扩张。

我们注意到,用类似方法也可以构成混合张量的扩张:

$$A_{\mu\sigma}^{\alpha}=\frac{\partial A_{\mu}^{\alpha}}{\partial x_{\sigma}}-\left\{\begin{matrix}\sigma\mu\\ \tau\end{matrix}\right\}A_{\tau}^{\alpha}+\left\{\begin{matrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{matrix}\right\}A_{\mu}^{\tau}. \tag{39}$$

当对(38)进行关于二指标β和σ的缩并(就是与δ_{β}^{σ}作内积)时,我们得到矢量

$$A^{\alpha}=\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}}+\left\{\begin{matrix}\beta\kappa\\ \beta\end{matrix}\right\}A^{\alpha\tau}+\left\{\begin{matrix}\beta\kappa\\ \alpha\end{matrix}\right\}A^{\kappa\beta}.$$

考虑到$\{\beta\kappa,\alpha\}$对于β和κ二指标的对称性,若$A^{\alpha\beta}$正如我们假设那样是一个反对称张量时,则右边第三项成为零。而第二项可按(29a)进行变换,于是得

$$A^{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^{\alpha\beta})}{\partial x_{\beta}}. \tag{40}$$

这是一个反变六矢量的散度的表达式。

二秩混合张量的散度 将(39)对指标进行缩并、并考虑到(29a),得 314

$$\sqrt{-g}A_{\mu}=\frac{\partial(\sqrt{-g}A_{\mu}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}}-\left\{\begin{matrix}\sigma\mu\\ \tau\end{matrix}\right\}\sqrt{-g}A_{\tau}^{\sigma}. \tag{41}$$

如果在最后一项中引入一个反变张量$A^{\rho\sigma}=g^{\rho\tau}A_{\tau}^{\sigma}$,则这一项成为

$$-\left[\begin{matrix}\sigma\mu\\ \rho\end{matrix}\right]\sqrt{-g}A^{\rho\sigma}.$$

进一步,如果$A^{\rho\sigma}$是对称的,则简化为

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}A^{\rho\sigma}.$$

我们曾经引入过一个协变张量$A_{\rho\sigma}=g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta}A^{\alpha\beta}$来代替$A^{\rho\sigma}$,这个张量也是对称的,根据(31),这最后一项成为

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}A_{\rho\sigma}.$$

在对称的情况下,(41)也可以用下面两式来代替:

$$\sqrt{-g}A_{\mu}=\frac{\partial(\sqrt{-g}A_{\mu}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}A^{\rho\sigma}, \tag{41a}$$

$$\sqrt{-g}A_{\mu}=\frac{\partial(\sqrt{-g}A_{\mu}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}A_{\rho\sigma}. \tag{41b}$$

我们以后还要用到这两个式子。

§ 12. Riemann-Christoffel 张量

现在我们寻找一种单独从基本张量用微分方法获得的张量。初看起来，解答是很明显的，在(27)中用基本张量 $g_{\mu\nu}$ 去代替式中的任意张量 $A_{\mu\nu}$ 即可，这样就得出一个新的张量，即基本张量的扩张。然而，人们很容易验证，这样得出的基本张量的扩张恒等于零。我们用下列方法达到这一目的。在(27)中，取

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\\rho\end{Bmatrix}A_\rho,$$

315 即求这个四矢量 A_μ 的扩张。于是(在经过某些指标的名称改动之后)得到一个
三秩张量

$$\begin{aligned}A_{\mu\sigma\tau}=&\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma\partial x_\tau}-\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\\rho\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau}-\begin{Bmatrix}\mu\tau\\\rho\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma}-\begin{Bmatrix}\sigma\tau\\\rho\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho}\\&+\left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\\rho\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mu\tau\\\alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\sigma\\\rho\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\sigma\tau\\\alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\mu\\\rho\end{Bmatrix}\right]A_\rho.\end{aligned}$$

此式提示了 $A_{\mu\sigma\tau}-A_{\mu\tau\sigma}$ 的构建。因为如果我们这样做，$A_{\mu\sigma\tau}$ 中的下列各项将同 $A_{\mu\tau\sigma}$ 中的相应项抵消：第 1 项，第 4 项和方括号中的第末项，因为它们都是对 σ 和 τ 是对称的；第 2 项和第 3 项之和也是如此。于是我们得到

$$A_{\mu\sigma\tau}-A_{\mu\tau\sigma}=B^\rho_{\mu\sigma\tau}A_\rho \tag{42}$$

式中

$$B^\rho_{\mu\sigma\tau}=-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\\rho\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\begin{Bmatrix}\mu\tau\\\rho\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\\alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\tau\\\rho\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mu\tau\\\alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\tau\\\rho\end{Bmatrix}. \tag{43}$$

这一结果的主要特点是(42)的右边只有 A_ρ，而没有它的导数。根据 $A_{\mu\sigma\tau}-A_{\mu\tau\sigma}$ 的张量性质以及 A_ρ 是任意矢量的事实，由 § 7 的论证得知，$B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ 是一个张量，此即 Riemann-Christoffel 张量。

这个张量在数学上的重要性如下：如果连续统具有下列性质，即存在一个坐
标系而相对于此坐标系 $g_{\mu\nu}$ 为常数，则所有的 $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ 都等于零。如果我们选取另 [21]
一新坐标系来取代原来那个坐标系，而对于新坐标系 $g_{\mu\nu}$ 不是常数的话，由于其
张量性质，变换到新坐标系去的 $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ 的各分量仍然等于零。因此，Riemann 张
316 量为零，是下列事实的必要条件：选择适当的坐标系可以使 $g_{\mu\nu}$ 成为常数*。在
我们所讨论的问题中，这一点相当于：选择适当的坐标系，使得在连续统的**有限**
区域中狭义相对论能很好地成立。

---

* 数学家已经证明，这也是充分条件。

将(43)对于指标 τ 和 ρ 进行缩并，得一个二秩协变张量

$$\left.\begin{aligned} &G_{\mu\nu}=B^{\rho}_{\mu\nu\rho}=R_{\mu\nu}+S_{\mu\nu} \\ \text{式中}\quad &R_{\mu\nu}=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\}+\left\{ {\mu\alpha \atop \beta} \right\}\left\{ {\nu\beta \atop \alpha} \right\} \\ &S_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}-\left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right\}. \tag{44}$$

关于选择坐标系的注释 从§8的方程(18a)中已经明显看到，通过选取坐标系以使 $\sqrt{-g}=1$ 较为有利。观察一下在前两节中所得到的方程可以看出，在这种选择之下，构造张量的规律将会大大简化。这对我们刚刚得到的张量 $G_{\mu\nu}$ 也同样适用。这个张量在下面将要提出的理论中将起着基础的作用。因为坐标系的这种选择能够带来 $S_{\mu\nu}=0$ 的结果，从而使 $G_{\mu\nu}$ 简化为 $R_{\mu\nu}$。

因此，在以后的讨论中，对所有的关系式我都将给出在坐标系这样的特殊选定情况下的简化形式。如果在特殊的情况下有需要把某些公式改回到普遍的协变形式，那也是很容易的事。

C. 引力场理论

§13. 质点在引力场中的运动方程　引力场分量的表达式

在狭义相对论中，一个不受外力的自由质点做匀速直线运动，而根据广义相对论，对于四维空间的一部分，其中坐标系可以被选为，而且实际上确被选为其 $g_{\mu\nu}$ 具有(4)给出的特殊常数值的 K_0 时，情况也和狭义相对论一样。 317

如果我们从任意一个坐标系 K_1 来考查这一运动。根据§2的讨论，从 K_1 看来，质点是在引力场中运动。质点对于 K_1 的运动规律不难从下面的讨论中得出。对于 K_0 来说，运动规律相当于一个四维的直线，即相当于一条测地线。现在，由于测地线是与坐标系无关的，测地线对于 K_1 的方程也就是质点对于 K_1 的运动规律。如果我们令

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}=-\left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\}, \tag{45}$$

则质点对于 K_1 的运动方程就是

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_\tau}{\mathrm{d}s^2}=\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}. \tag{46}$$

现在我们作一个很自然的假设：即使没有 K_0，即不存在有限空间中狭义相对论很好成立的坐标系，质点在引力场中的运动也服从协变的方程组(46)。我们作这个假设还有更多的根据，因为(46)中只包含 $g_{\mu\nu}$的一级导数，在它们之间没有任何联系[1)]，即使在 K_0 存在的特殊情况下也是如此。

如果 $\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}=0$，则质点做匀速直线运动。所以这些量规定了运动对于匀速直线的偏离，它们是引力场的分量。

§14. 无物质的引力场方程

今后，我们将对"引力场"和"物质"作一区分，我们称引力场以外的一切东西
318 为"物质"。因此"物质"一词不仅包括通常意义下的物质，也包括电磁场。

我们下一个任务是寻求在无物质存在情况下的引力场方程。在这里，我们依然使用上一节写出质点运动方程时所用的方法。所求的方程无论如何必须满足的一个特殊情况是 $g_{\mu\nu}$具有某些常数值的狭义相对论的情况。考虑在某一确定的坐标系 K_0 中的某一有限空间。相对于这个坐标系，(43)所定义的 Riemann 张量的所有分量 $B_{\mu\sigma\tau}^{\rho}$都等于零。对于所考虑的空间，它们为零，所以对于任意其他的坐标系，也应该等于零。

因此，如果所有的 $B_{\mu\sigma\tau}^{\rho}$分量都为零的话，则所求的无物质引力场方程一定在任何情况下都满足。然而，这一条件太苛刻了。因为很明显，例如质点在其附近所产生的引力场肯定不会被变换掉，无论选择什么坐标系都不行。这就是说，它不会被变换到 $g_{\mu\nu}$等于常数的情况。

这一点促使我们转而要求由张量 $B_{\mu\nu\tau}^{\rho}$导出的对称张量 $G_{\mu\nu}$对无物质引力场为零。

这样一来，我们对于 10 个量 $g_{\mu\nu}$得到了 10 个方程，所有 $B_{\mu\nu\tau}^{\rho}$都等于零的特殊情况满足这些方程。在坐标系这样的选定之下，并考虑到(44)，无物质引力场的方程成为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}+\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}=0\\&\sqrt{-g}=1\end{aligned}\right\}. \tag{47}$$

必须指出，在这一组方程的选择中，仅有最低的任意性。因为由 $g_{\mu\nu}$及其不
319 高于二阶的导数构成的二秩张量，而且这张量又是这些二阶导数的线性式，则这

---

1)根据§12，只有在二级导数(以及一级导数)之间才有 $B_{\mu\sigma\tau}^{\rho}=0$ 的关系。

张量只能是 $G_{\mu\nu}$。[1)]

根据广义相对论的要求，通过纯数学方法得到的这些方程，和运动方程(46)一起，在一级近似下给出了 Newton 万有引力定律，在二级近似下给出了由 Leverrier 发现的水星近日点的移动的解释(这种移动在作了摄动校正后仍然存在)。这些，在我看来必然是这一理论正确性的令人信服的证明。

§15. 引力场的 Hamilton 函数　能量动量定律

为了证明引力场方程与能量动量定律相对应，最方便的办法是把它们写成下列哈密顿形式：

$$\left.\begin{aligned}&\delta\left\{\int H\mathrm{d}\tau\right\}=0\\&H=g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\\&\sqrt{-g}=1\end{aligned}\right\}.\tag{47a}$$

在上式中，在我们所考虑的四维区域的边界上，变分为零。

首先我们必须证明，(47a)的形式与方程(47)等价。为此，我们把 H 看成 $g^{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}_{\sigma}(=\partial g^{\mu\nu}/\partial x_{\sigma})$ 的函数。

$$\begin{aligned}\delta H&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+2g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\\&=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+2\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}).\end{aligned}$$

但是

[22]

$$\delta(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha})=-\frac{1}{2}\delta\left[g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_{\lambda}}\right)\right].$$

式中圆括号内最后两项的符号相反，而且通过交换指标 μ 和 β 可以由一个得到 320
另一个(因为求和的指标是无关紧要的)，它们在 δH 的式子中所乘的又是对于指标 μ 和 β 为对称的量 $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$，所以这两项互相抵消，只剩下圆括号中的第一项，再考虑到(31)，我们得

$$\delta H=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g^{\mu\beta}_{\alpha}.$$

于是

[23]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\\&\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\end{aligned}\right\}.\tag{48}$$

---

1) 确切地说，只有对于张量 $G_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}$，才能这样断言($\lambda$ 为一常数)。然而，我们如果令这个张量为零，则又回到方程 $G_{\mu\nu}=0$。

对(47a)变分，我们首先得

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=0, \tag{47b}$$

考虑到(48)，此式与(47)一致，这正是我们要证明的。

将(47b)乘以 $g_\sigma^{\mu\nu}$，得

$$\frac{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

从而有

$$g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

我们得到方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial H}{\partial x_\sigma}=0,$$

或者[1)]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}=0\\&-2\kappa t_\sigma^\alpha=g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}-\delta_\sigma^\alpha H\end{aligned}\right\}, \tag{49}$$

321 考虑到(48)，(47)的第二式和(34)，有 [24]

$$\kappa t_\sigma^\alpha=\frac{1}{2}\delta_\sigma^\alpha g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta-g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\sigma}^\beta. \tag{50}$$

值得注意的是，t_σ^α 并不是张量，另一方面，(49)适用于所有$\sqrt{-g}=1$ 的坐标系。这一方程表示了引力场的能量动量守恒定律。事实上。这一方程对于三维体积 V 的积分得出下列 4 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_4}\int t_\sigma^4\,\mathrm{d}V=\int(t_\sigma{}^1\alpha_1+t_\sigma{}^2\alpha_2+t_\sigma{}^3\alpha_3)\,\mathrm{d}S, \tag{49a}$$

式中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示边界表面的面元 dS 上向内的法线的方向余弦(在 Euclid 几何的意义上)。这是通常形式的能量动量守恒定律。我们把 t_σ^α 称为引力场的“能量分量”。

我现在想给(47)以第三种形式，这种形式对于生动地掌握本文内容特别有用。将场方程(47)乘以 $g^{\nu\sigma}$，得到“混合”形式的方程

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)-\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha,$$

根据(34)，这个量等于

1)引入因子 -2κ 的原因见后。

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\nu})-g^{\nu\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}-g^{\sigma\beta}\Gamma^\nu_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu},$$

或者(把求和指标改成另外的指标)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})-g^{mn}\Gamma^\sigma_{m\beta}\Gamma^\beta_{n\mu}-g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.$$

此式的第三项与从场方程(47)的第二项中产生的一项抵消了,利用(50),第二项可以写成

$$\kappa(t^\sigma_\mu-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu t),$$

式中 $t=t^\alpha_\alpha$。于是我们代替(47),得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})=-\kappa(t^\sigma_\mu-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu t)\\&\sqrt{-g}=1\end{aligned}\right\}. \tag{51}$$

§16. 场方程的普遍形式 322

将在§15得到的无物质空间的引力场方程与 Newton 理论的场方程

$$\nabla^2\varphi=0$$

进行比较,我们希望得到一个与 Poisson 方程对应的方程:

$$\nabla^2\varphi=4\pi\kappa\rho,$$

式中 ρ 为物质的密度。

狭义相对论已经得出结论:惯性质量恰恰就是能量,它的数学表示是一个二秩对称张量,即能量张量。因此在广义相对论中也必须引入一个相对应的物质的能量张量 T^α_σ,这个张量与引力场的能量分量 t^α_σ[见(49)、(50)二式]相类似,将具有混合张量的特性,并且应是对称的协变张量[1)]。

方程组(51)告诉我们,能量张量(对应于 Poisson 方程中的密度 ρ)是怎样引入引力场方程的。因为,如果我们考虑一个完整的系统(例如太阳系),这一系统的总质量,因而也包括它的引力作用,将取决于系统的总能量,即取决于有质能量和引力能量。这将导致在(51)中引入 $t^\nu_\mu+T^\nu_\mu$,即物质的能量分量和引力场的能量分量之和,以取代单独的引力场的能量分量。

这样,我们得到代替(51)的张量方程:

---

[25] 1) $g_{\alpha\tau}T^\alpha_\sigma=T_{\sigma\tau}$ 和 $g^{\sigma\beta}T^\alpha_\sigma=T^{\alpha\beta}$ 都是对称张量。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})=-\kappa\left[(t^\sigma_\mu+T^\sigma_\mu)-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu(t+T)\right]\\&\sqrt{-g}=1\end{aligned}\right\}, \tag{52}$$

式中我们已令 $T=T^\mu_\mu$(Laue 标量)。这就是我们所要找的混合形式的普遍的引

323 力场方程。由此倒推回去,得到代替(47)的方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}+\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}=-\kappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)\\&\sqrt{-g}=1\end{aligned}\right\}. \tag{53}$$

必须承认,这种引入物质的能量张量的方法不能单独由相对性公设来证实。由于这个原因,我们在这里的推理是从下列要求出发的,即引力场的能量和其他别的能量一样在引力方面起作用。然而选用这些方程的最强的理由是,与(49)和(49a)严格对应的,关于动量和能量守恒的推论对于总能量张量很好地成立。这将在 § 17 中讨论。

§ 17. 普遍情况下的守恒定律

很容易对(52)进行变换,使其右边第二项为零。将此式对指标 μ 和 σ 进行缩并,将所得结果乘以$\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu$,并将所得结果与(52)相减,可得

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)=-\kappa(t^\sigma_\mu+T^\sigma_\mu). \tag{52a}$$

对此式作 $\partial/\partial x_\sigma$ 的运算,得

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\sigma}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

右边圆括号中的第一项和第三项互相抵消,将第三项中的求和指标 α 和 σ 对调,β 和 λ 对调即可看出。其第二项可利用(31)改写,从而得

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\sigma}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})=\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_\mu}. \tag{54}$$

(52a)左方第二项给出

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\mu}(g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta})$$

324 或者

$$\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right].$$

对于我们已经选定的坐标系,从圆括号最后一项所导出的式子根据(29)等于零。另外两项可以根据(31)结合在一起给出

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu},$$

再考虑到(54)，我们得到下列恒等式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)\equiv 0, \tag{55}$$

由(55)和(52a)，最后得

$$\frac{\partial(t^\sigma_\mu+T^\sigma_\mu)}{\partial x_\sigma}=0. \tag{56}$$

这样，我们从引力场方程导出了能量动量守恒定律。这一点可从导出(49a)时的考虑中最容易看出。这里与那里不同的是，这里用的是物质和引力场的能量分量，而不是那里的引力场的能量分量。

§18. 作为场方程推论的物质的能量动量定律

将(53)乘以 $\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma$，按照§15中所用的方法，并考虑到下式为零：

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

得到下列方程

[26]

$$\frac{\partial t^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0,$$

或者考虑到(56)，

$$\frac{\partial T^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0. \tag{57}$$

此式与(41b)的比较表明，在我们已经选定的坐标系中，此式正好是物质能量的散度为零的预言。在物理上，上式左方第二项的出现表明，能量动量守恒定 325
律在严格意义上并不单独对物质成立，或者说只在 $g_{\mu\nu}$ 为常数时，即引力场强处处为零时成立。这第二项表示在单位体积、单位时间内引力场传给物质的能量和动量。利用(41)将(57)改写成

$$\frac{\partial T^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha}=-\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}T^\beta_\alpha, \tag{57a}$$

这一点将看得更加清楚。式中右边表示引力场对于物质在能量方面的影响。

因此，引力场方程中包含着4个支配物质现象过程的条件。这4个条件完全地给出了物质现象过程的方程，只要这后者能够写成4个互相独立的微分方程即可。[1)]

---

[27] 1)关于这个问题，参见 H. Hilbert，《Göttingen 经典学会经典数学物理信息》1915，p. 3.

D. 物质现象

在部分 B 中所阐述的数学工具，能使我们立即对于在狭义相对论中所表述的那些物理定律（流体力学，Maxwell 的电动力学）进行推广，使它们适合于广义相对论。这样做了之后，广义相对性原理确实没有对于我们的可能性进一步加以任何限制，但却使我们不必引入任何新的假设而对于所有过程的影响有所认识。

于是，不必再引入关于物质（狭义时）的物理本性的确定的假设。特别是可
326 以把电磁场理论和引力场理论结合起来能否成为物质理论的充分的基础这一问题留待以后解决。关于这一点广义相对性原理不能告诉我们什么。电磁场理论和引力学说结合起来能否解决前者单独解决不了的问题，还要看理论发展的进程来决定。

§19. 无摩擦绝热流体的 Euler 方程

假设 p 和 ρ 为两个标量，我们称前者是流体的“压力”，后者是流体的“密度”，并且假设它们之间存在一个方程。假设一个反变对称张量

$$T^{\alpha\beta}=-g^{\alpha\beta}p+\rho\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s} \tag{58}$$

是此流体的反变能量张量。附属于这个张量，还有协变张量

$$T_{\mu\nu}=-g_{\mu\nu}p+g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}g_{\mu\beta}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s}\rho \tag{58a}$$

和混合张量[1)]

$$T_\sigma^\alpha=-\delta_\sigma^\alpha p+g_{\sigma\beta}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\rho. \tag{58b}$$

将(58b)的右方代入(57a)，我们得到广义相对论中的 Euler 流体动力学方程。既然我们有 4 个方程(57a)加上已知的 p 和 ρ 之间的方程，以及方程

$$g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s}=1,$$

1) 在无穷小区域中的狭义相对论意义下的参考系中，对于随其运动的观察者来说，能量密度 T_4^4 等于 $\rho-p$，这是 ρ 的定义，因此在不可压缩流体中，ρ 并不是常数。

当 $g_{\mu\nu}$ 已知时，上述这几个方程对于决定 6 个未知量

$$p,\rho,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}s},$$

就是充分的，这些方程在理论上给出了运动问题的一个完整的解。当 $g_{\mu\nu}$ 也是未 327
知时，还需要用到(53)。存在确定 $g_{\mu\nu}$ 的 10 个函数的 11 个方程，这些函数似乎被超定了。然而应当记住，(57a)中已经被包含在(53)中，这样实际上后者只代表 7 个独立方程。这种不确定性的很好的理由就是坐标选择的充分的自由，其留下的数学上的不确定性的问题到了这种程度，以至可以任意选择 3 个空间函数。[1]

[28]

§ 20. 自由空间的 Maxwell 电磁场方程

设 φ_ν 为一个协变矢量，即电磁势矢量的分量。根据(36)，可由此构成电磁场协变六矢量 $F_{\rho\sigma}$。它们满足下列方程组

$$F_{\rho\sigma}=\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

根据(59)，下列方程组将被满足

[29]

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau}+\frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\rho}=0. \tag{60}$$

根据(37)，上式的左方是一个三秩反对称张量。因此(60)实质上含有 4 个方程，具体写出来如下

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}=0\\ \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_4}=0\\ \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}=0\\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0\end{aligned}\right\}. \tag{60a}$$

上式相当于 Maxwell 第二方程组，作如下设定 328

$$\left.\begin{aligned}F_{23}=H_x\quad F_{14}=E_x\\ F_{31}=H_y\quad F_{24}=E_y\\ F_{12}=H_z\quad F_{34}=E_z\end{aligned}\right\}, \tag{61}$$

---

1) 当选择坐标放弃 $g=-1$ 的条件时，还剩 4 个自由选择的空间函数，相当于我们在安排坐标选择时的 4 个任意函数。

就立刻可以看出这一点。于是，我们可以用通常的三维矢量分析的符号设

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial H}{\partial t}+\operatorname{curl} E=0 \\ \operatorname{div} H=0\end{array}\right\}. \tag{60b}$$

来代替(60a)。

我们将由 Minkowski 给出的方程形式来进行推广，就获得 Maxwell 的第一方程组。我们引入一个与 $F_{\alpha\beta}$ 有关的反变六矢量

$$F^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} \tag{62}$$ [30]

以及 一个反变矢量电流密度 J^{μ}。于是，考虑到(40)，下列方程对于任何行列式为 1 的坐标变换(与我们选取的坐标一致)将是不变的

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}=J^{\mu}. \tag{63}$$

令

$$\left.\begin{array}{l}F^{23}=H'_{x}, F^{14}=-E'_{x} \\ F^{31}=H'_{y}, F^{24}=-E'_{y} \\ F^{12}=H'_{z}, F^{34}=-E'_{z}\end{array}\right\} \tag{64}$$

它们的值与狭义相对论中的量 $H_x \cdots E_x$ 相同，再取

$$J^1=j_x, J^2=j_y, J^3=j_z, J^4=\rho,$$

则(63)成为

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial E'}{\partial t}+j=\operatorname{curl} H' \\ \operatorname{div} E'=\rho\end{array}\right\}. \tag{63a}$$

于是，方程(60)、方程(62)和方程(63)在我们选择坐标的惯例之下构成自由

329 空间中 Maxwell 方程的推广。

电磁场的能量分量 我们构成一个内积

$$\kappa_{\sigma}=F_{\sigma\mu}J^{\mu}. \tag{65}$$

根据(61)，此式的各分量写成三维形式为

$$\left.\begin{array}{l}\kappa_1=\rho E_x+[j, H]^x \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \kappa_4=-(jE)\end{array}\right\} \tag{65a}$$

κ_{σ} 是一个协变矢量，其分量依次为在单位体积，单位时间内带电物质传给电磁场的动量和能量的负值。如果没有物质，即单独在电磁场的影响下，协变矢量 κ_{σ} 将等于零。

为了得出电磁场的能量分量 T_{σ}^{ν}，我们只需要给方程 $\kappa_{\sigma}=0$ 以(57)的形式。

首先由(63)和(65)有

$$\kappa_\sigma=F_{\sigma\mu}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}(F_{\sigma\mu}F^{\mu\nu})-F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

根据(60),上式右边第二项可以变为

$$F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}=-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=-\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

根据对称性,上式中最后一式又可以写成

$$-\frac{1}{4}\left[g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}F_{\mu\nu}\right].$$

此式又可写成

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu})+\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}).$$

此式的第一项可以写成较简单的形式

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}),$$

其第二项在进行微分运算和整理之后成为 330

[31]

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\tau}F_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

将全部三项写到一起,我们有

$$\kappa_\sigma=\frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_\tau^\nu, \tag{66}$$

式中

$$T_\sigma^\nu=-F_{\sigma\alpha}F^{\nu\alpha}+\frac{1}{4}\delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{66a}$$

如果 κ_σ 等于零,则考虑到(30),方程(66)将等价于(57)或(57a)。因此,T_σ^ν 是电磁场的能量分量。借助于(61)和(64)二式很容易证明,这个电磁场的能量分量就是狭义相对论中的著名的 Maxwell-Poynting 表达式。

我们在一直使用$\sqrt{-g}=1$ 的坐标系情况之下,已经推导出引力场和物质所满足的普遍规律,我们用这种使用特定坐标系的方法达到了对公式和计算的可观的简化,没有堕入处处协变要求的束缚。

尽管如此,提出下列问题是有意义的:不用特殊的坐标系,能否从引力场和物质的能量分量的普遍定义出发,去构成(56)形式的能量守恒定律和(52)或(52a)形式的引力场方程,使得左边是(通常意义下的)散度而右边是物质和引力场的能量分量之和。我已经找到了,上述两点确实都是可能的。但是我不认为将我的这些进一步的想法发表出来是值得的,因为这些没有给出任何实质上的新东西。

331

E

§21. 作为一级近似的 Newton 理论 [32]

我们已经说过不止一次，狭义相对论是广义相对论的特殊情况，其特点是 $g_{\mu\nu}$ 取(4)给出的常数值。我们也已说过，这样就意味着完全忽略引力的效应。如果我们考虑到 $g_{\mu\nu}$ 与(4)给出的值的差值与 1 相比较小的情形，而且忽略二级或更高级小量时，我们就达到了与现实较近的近似(第一阶近似观点)。

还可以进一步假设，如果在我们考虑的时空领域中，在适当选择坐标系的情况下，在空间趋向无限远处 $g_{\mu\nu}$ 趋于(4)给出的值，这时我们所考虑的引力场，可以认为是完全由有限区域内的物质所产生的。

也许会想到这些近似必然会导致 Newton 理论。但是，为了达到 Newton 理论，我们还必须对基本方程作第二阶观点的近似。我们来注意一个质点按照方程(16)的运动。在狭义相对论的情况下，下列分量

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s}$$

可以取任意值，这就意味着小于真空光速($v<1$)的任意的速度

$$v=\sqrt{\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_4}^2+\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_4}^2+\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_4}^2}$$

都可以发生。如果我们仅限于讨论那些几乎所有的经验提供给我们的情况，即速度 v 与光速相比是很小的。这表明下列分量

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s}$$

应该作为小量来处理，而 $\mathrm{d}x_4/\mathrm{d}s$ 在精确到二阶小量的情况下应等于 1(第二阶近似观点)。

332 现在我们注意到，根据第一阶近似观点，$\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$ 中的各值至少是一阶小量，看一下(46)就知道：从第二阶近似观点来看，我们必须考虑 $\mu=\nu=4$ 的那些项。我们限于仅取最低阶的项，首先获得了代替(46)的

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_\tau}{\mathrm{d}t^2}=\Gamma_{44}^{\tau},$$

在此我们已经令 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}x_4=\mathrm{d}t$，或者根据第一阶近似观点只保留那些一阶项：

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2}=\begin{bmatrix}44\\\tau\end{bmatrix}(\tau=1,2,3)$$

$$\frac{d^2 x_4}{dt^2}=-\begin{bmatrix}44\\4\end{bmatrix}.$$

此外,如果我们假设引力场是准静态的,即限于讨论产生引力场的物质的运动是很慢的(与光速相比),我们可以在右边,与对空间坐标的微分相比,忽略掉对时间的微分。于是我们得到

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau}(\tau=1,2,3). \tag{67}$$

这就是 Newton 理论中的质点的运动方程,其中$\frac{1}{2}g_{44}$起着引力势的作用。在这一结果中值得注意的是,在第一阶近似下只有这个分量单独地决定了质点的运动。

现在我们讨论场方程(53)。这里我们必须考虑到,"物质"的能量密度几乎全部由较狭义的"物质"的密度,即由(58)[或者(58a)或(58b)]的右边第二项决定。如果我们作这样的近似,除了一个分量 $T_{44}=\rho=T$ 之外,所有的分量都等于 333
零。在(53)的左边的第二项是一个二阶小量,而第一项在我们的近似下为

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\1\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\2\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\3\end{bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_4}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\4\end{bmatrix}.$$

对于 $\mu=\nu=4$,忽略对时间微分的各项后,此式给出

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right)=-\frac{1}{2}\Delta g_{44}.$$

于是,(53)的最后一个方程给出

$$\Delta g_{44}=\kappa\rho. \tag{68}$$

(67)和(68)一起等价于牛顿万有引力定律。

根据(67)和(68)两式,引力势的表达式成为

$$-\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}, \tag{68a}$$

而对于我们所选定的时间单位牛顿理论给出

$$-\frac{K}{c^2}\int\frac{\rho d\tau}{r}$$

式中 K 表示常数 6.7×10^{-8},通常称为万有引力常数。与此比较,我们得到

$$\kappa=\frac{8\pi K}{c^2}=1.87\times10^{-27}. \tag{69}$$

§22. 静引力场中的尺和钟，光线的行为，行星近日点的运动

为了获得作为一级近似的牛顿理论，我们在引力场的 10 个 $g_{\mu\nu}$ 中只计算了一个分量 g_{44}，因为只有这一个分量进入了质点在引力场中的运动方程的一阶近似(67)中。由此亦可看出，$g_{\mu\nu}$ 的别的分量必然比(4)给出的值差一个一阶小量。这是条件 $g=-1$ 所要求的。

334 对于一个位于坐标原点的点质量所产生的场，在一级近似之下，其径向对称的解为

$$\left.\begin{array}{ll} g_{\rho\sigma}=-\delta_{\rho\sigma}-\alpha\dfrac{x_\rho x_\sigma}{r^3} & (\rho \text{ 和 } \sigma \text{ 取 } 1,2,3) \\ g_{\rho 4}=g_{4\rho}=0 & (\rho \text{ 取 } 1,2,3) \\ g_{44}=1-\dfrac{\alpha}{r} & \end{array}\right\}. \tag{70}$$

式中 $\delta_{\rho\sigma}$ 当 $\rho=\sigma$ 时为 1，当 $\rho\neq\sigma$ 时为零，r 是 $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$。考虑到(68a)，令 M 表示产生引力场的质量，有 [33]

$$\alpha=\frac{\kappa M}{8\pi}, \tag{70a}$$

很容易验证，在一阶小量的情况下，质点 M 的场方程(在质点之外)是满足的。

现在我们来考虑质点 M 所产生的场对于空间的度规性质的影响。在“局域”测量(§4)的长度和时间 $\mathrm{d}s$ 与坐标差 $\mathrm{d}x_\nu$ 之间的关系式

$$\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\nu.$$

是永远成立的。

例如，一个单位直尺与 x 轴“平行地”放置，我们应当令 $\mathrm{d}s^2=-1$，而 $\mathrm{d}x_2=\mathrm{d}x_3=\mathrm{d}x_4=0$。因此 $-1=g_{11}\mathrm{d}x_1^2$。如果再加上单位直尺在 x 轴上，(70)的第一个方程给出

$$g_{11}=-\left(1+\frac{\alpha}{r}\right).$$

在第一阶近似下由这两个关系得出：

$$\mathrm{d}x=1-\frac{\alpha}{2r}. \tag{71}$$

因此，由于引力场的存在，如果单位直尺沿着半径方向放置，单位直尺相对于该
335 坐标系来说，显得被稍微缩短。

用类似方法可以得出在切线方向坐标的长度。例如令

$$ds^2=-1;dx_1=dx_3=dx_4=0;x_1=r,x_2=x_3=0.$$

所得结果是

$$-1=g_{22}dx_2^2=-dx_2^2. \tag{71a}$$

因此，点质量的引力场在切线方向上对于直尺的长度没有影响。

如果我们想用同一个直尺，在不同地点和不同方向上实现同样的间距，那么在引力场存在的情况下，Euclid 几何学即使在一阶近似的情况下也是不成立的。尽管如此，但从(70a)和(69)可以看出，对地面上的测量来说，这种偏差是太小了，根本无法察觉。

现在我们来看静止于一个静态引力场中的时钟快慢。此处令单位时钟周期 $ds=1$；另外，$dx_1=dx_2=dx_3=0$，因此得

$$1=g_{44}dx_4^2;$$

$$dx_4=\frac{1}{\sqrt{g_{44}}}=\frac{1}{\sqrt{(1+(g_{44}-1)}}=1-\frac{1}{2}(g_{44}-1)$$

或者

$$dx_4=1+\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}. \tag{72}$$

因此，时钟若放在有质量物体的附近，它走得要慢一些。由此可以得出，由大恒星表面发出到地球的光线的光谱，要向光谱的红端移动[1)]。

现在我们考查光线在静引力场中的过程。根据狭义相对论，光的速度由下 336
式给出

$$-dx_1^2-dx_2^2-dx_3^2+dx_4^2=0$$

因此，在广义相对论中由下式给出

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu=0 \tag{73}$$

如果方向已知，即比例 $dx_1:dx_2:dx_3$ 已知，(73)将给出下列时量

$$\frac{dx_1}{dx_4},\frac{dx_2}{dx_4},\frac{dx_3}{dx_4}$$

因而也就给出在 Euclid 几何学意义下的速度：

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2}=\gamma,$$

我们很容易相信，如果 $g_{\mu\nu}$ 不是常数，光线将相对于坐标系发生弯曲。如果 n 是
[35] 垂直于光传播的方向，则 Huygens 原理指出，在(γ,n)平面中看来，光线将具有曲率$-\partial\gamma/\partial n$。

---

[34] 1)根据 E. Freundlich，对某些类型恒星的光谱观测，表明有这一类效应存在，但尚未对这结论作出决定性的核实。

我们看一下光线在质量 M 旁边经过距离为 Δ 时的曲率。如果我们采用附图所示的坐标系，光线的总的弯曲（若弯向原点作为正值）在足够的近似下为

337

$$B=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}\mathrm{d}x_2,$$

而(73)及(70)给出

$$\gamma=\sqrt{\left(-\frac{g_{44}}{g_{42}}\right)}=1-\frac{\alpha}{2r}\left(1+\frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

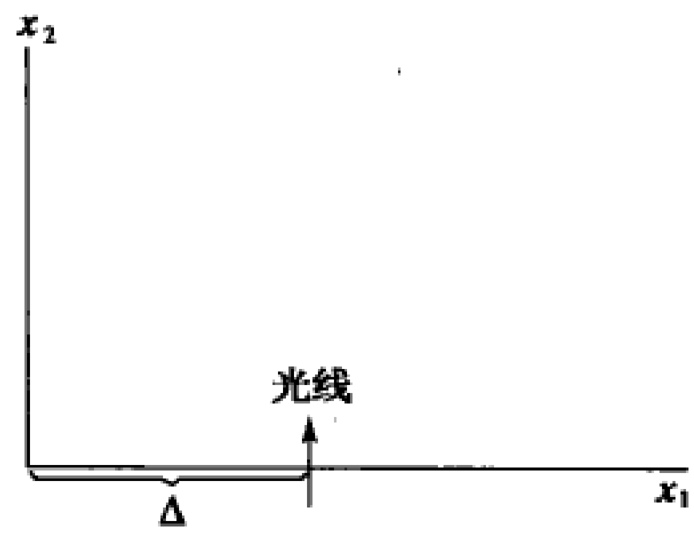


图 8 [36]

完成计算，得

$$B=\frac{2\alpha}{\Delta}=\frac{\kappa M}{4\pi\Delta},\tag{74}$$

根据此式，光线经过太阳邻近时的弯曲为 1.7″；经过木星邻近的弯曲约为 0.02″。

如果我们以更高的近似去计算引力场，而以同样的精度去计算一个相对无穷小质量的物质的轨道运动，我们将发现其运动与行星运动的 Kepler-Newton 定律的差异如下，即其轨道椭圆将在运动方向上有一个缓慢的进动，其每一圈的进动大小为

$$\varepsilon=24\pi^3\frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)}\tag{75}$$

在上式中 a 为半长轴，c 为通常意义下的光速，e 为偏心率，T 为以秒为单位的公转周期1)。

计算表明水星轨道的转动为每世纪 43″，与天文观测（Leverrier）完全一致，因为天文学家们观测到了水星近日点的转动，在去除了其他行星的摄动之后，还剩下这么多。

［喀兴林 译］
［吴忠超 校］

---

338 载于《物理学杂志》49(1916)：769—822. 1916 年 3 月 20 日收到，1916 年 5 月 11 日发表。一篇 46 页的手稿现存在耶路撒冷的希伯来大学的 Schwadron 收藏馆内，它与印刷版本没有重要的差异。

[1]此文是爱因斯坦对他在 1915 年 11 月最新发表的一些广义相对论文章，*Einstein 1915f*，*1915g*，*1915h* 和 *1915i*（文件 21，22，24 和 25）的一个全面的最终的总结，*Einstein 1916f* 中它作为单行本发表了。在 1916 年 1 月中旬，爱因斯坦对他写这样一篇文章的能力仍表示怀疑，称他的著作是“正确的，但很难理

1)关于计算，将参考原始论文：爱因斯坦《普鲁士科学院学报》47(1915)，p. 831；K. Schwarzschild, *ibid*，(1916)，p. 189。 [37]

解"("zwar richtig aber reichlich unverdaulich."爱因斯坦于 1916 年 1 月 17 日致 H. A. Lorentz 的信),但是两个月后,他把此文的手稿寄给了《物理学杂志》的编辑 Wilhelm Wien(见 1916 年 3 月 18 日爱因斯坦致 Wilhelm Wien 的信)。

[2]虽然"狭义相对论"("spezielle Relativitätstheorie")这一用语,已经出现在 *Einstein 1915f*(文件 21)和*爱因斯坦 1915i*(文件 25)中,这是爱因斯坦第一次系统地应用它。但在 p. 770 上,"狭义相对性原理"("spezielles Relativitätsprinzip")这一用语,却是第一次出现在这里。

[3]见 *Minkowski 1908*。也见例如在 1912—1914 年一篇未发表的手稿(见第四卷,文件 1)中爱因斯坦自己对狭义相对论的阐述。

[4]关于广义相对论的数学基础的讨论,见第四卷编者按"爱因斯坦的广义相对论研究笔记"pp. 195—196 和 *Reich 1994*。

[5]对这些数学工具的早期阐述,见 *Einstein* 和 *Grossmann 1913*(第四卷,文件 13)和 *Einstein 1914o*(文件 9)。

[6]几个月前爱因斯坦自己用不同的话表示,说 Grossmann"对这些结果没有实质性的贡献"("trug aber materiell nichts zu den Ergebnissen bei."爱因斯坦于 1915 年 7 月 15 日致 Arnold Sommerfeld 的信)。关于在广义相对论的发展中,属于 Marcel Grossmann 的部分讨论也见第四卷,编者按"爱因斯坦论引力和相对论:与 Marcel Grossmann 合作,"pp. 295—296。

[7]见 *Mach 1897*。关于 Mach 的观念对爱因斯坦思想的影响的详情,还见 *Einstein 1916c*(文件 29),注 4。

[8]"等效原理"已在爱因斯坦关于引力的相对性理论研究中起了一个重要的启发式的作用,在 *Einstein 1907j*(第二卷,文件 47) § 17 中首次表述出来;关于讨论也见第四卷,编者按"爱因斯坦论引力和相对论:静态场",pp. 122—124。在 *Einstein 1916p*(文件 40)中,爱因斯坦在回答 Friedrich Kottler 的批评时给出了进一步的说明。

[9]见 *Eötvös 1891*。

[10]关于刚性转动圆盘在发展广义相对论中所起作用的讨论,见 *Stachel 1980*。

[11]在爱因斯坦与 Paul Ehrenfest 以及与 Michele Besso 来往的书信中,首先强调了这一点(见爱因斯坦于 1915 年 12 月 26 日和 1916 年 1 月 5 日致 Paul Ehrenfest 的信;爱因斯坦于 1916 年 1 月 3 日致 Michele Besso 的信)。

[12]这是爱因斯坦第一次把他的"求和约定"引入到印刷体文章中,早些时候在他的来往书信中已使用过了(见爱因斯坦于 1916 年 1 月 24 日致 Paul Ehrenfest 的信)。

[13]见 *Ricci*与*Levi-Civita 1901*.

[14]右边第一项中"$g_{\mu\nu}$"应为"$g_{\mu\sigma}$".

[15]在第一和第二项中"$g_{\mu\nu}$"应为"$g_{\mu\sigma}$";第二项中的"x_σ"在两种情况下都应为"x_ν";在第二和第三项中的"λ"应为"s".

[16]左边的"$g_{\mu\nu}$"应为"$g^{\mu\nu}$".

[17]"y"应为"g."

[18]"$g^{\mu\alpha}$"应为"$g_{\mu\alpha}$".

[19]"(31)"应为"(32)."

[20]"$g^{\mu\nu}$"应为"$g^{\tau\alpha}$."

[21]在这一行以及下面三行中,$B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$代表 Riemann-Christoffel 张量。

[22]"$g^{\alpha\lambda}$"应为"$g_{\alpha\lambda}$." 339

[23]“$g^{\alpha\nu}$”应为“$g^{\mu\nu}$.”

[24]“(47)”应为“(47a).”

[25]“$g_{\sigma\tau}$”应为“$g_{\alpha\tau}$.”

[26]在左边第一项前面应有一个负号。

[27]见 *Hilbert 1915*. “p. 3”应为“p. 395”。

[28]本节中采用的方法，最早在 *Einstein 1916b*（文件 27）中被提出。

[29]第三项中“x_ρ”应为“x_σ.”

[30]“$q^{\nu\beta}$”应为“$g^{\nu\beta}$.”

[31]“$g_{\sigma\tau}$”应为“$g_{\rho\tau}$.”

[32]关于第一级近似的早期讨论，见 *Einstein 1915h*（文件 24）。

[33]“$\rho\sigma$”应为“$\rho\neq\sigma$.”

[34]见 *Freundlich 1915b*. 关于 Freundlich 力图证明存在引力红移的尝试的历史讨论，也见 *Hentschel 1994*.

[35]“Huggensche”应为“Huygenssche.”（惠更斯）

[36]此结果已发表在 *Einstein 1915h*（文件 24），p. 834. 计算是沿用爱因斯坦在 *Einstein 1911h*（第三卷，文件 23）§ 4 中首次计算引力的光线弯曲相同的方法进行（那里给出的数值是这里所得的一半）。

[37]*Einstein 1915h*（文件 24）和 *Schwarzschild 1916a*.

[高尚惠　译]

[吴忠超　校]

31.“附录　基于变分原理的理论表述”

340

附录 基于变分原理的理论表述

[1916年3月20日前] [1]

[p. 1]

爱因斯坦 [2]

§1. 引力和物质的场方程

我们假设，引力和所有其他过程的场方程可由普遍的 Hamilton 形式的变分原理导出

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\mathrm{d}\tau\right\}=0 \qquad \langle(47)\rangle(76)$$

式中 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$。$\mathfrak{H}$ 为 $g^{\mu\nu}$ 和 $g_\sigma^{\mu\nu}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)$以及某些确定的函数 $q_{(\rho)}$ 及其对 x_ν 的导数的函数，它们进一步描述了物质的全部状态和过程，但下列情况除外，即仅含引力场情况，或不存在狭义上物质的运动和状态的改变，如真空中的电磁过程，变分时应对 $g^{\mu\nu}$ 和 $q_{(\rho)}$ 独立进行且在积分边界上 $\delta g^{\mu\nu}$，$\delta q_{(\rho)}$（当然包含它们变分的导数）为零。

$q_{(\rho)}$ 中带括号的指标 ρ 表示这些指标与用来描述物质“所采用的函数的变换性质及数目无关”。我认为在表述中的这种不确定性必须预先给出，原因在于有关物质的理论图像仍嫌不足。 [3]

为了对应于有关场论中物质与引力场的独立存在这一自由叠加性的事实，我们进一步假设 $\mathfrak{H}$ 为

341

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{G}+\mathfrak{M} \qquad \langle(48)\rangle(77)$$

其中 $\mathfrak{G}$ 仅与 $g^{\mu\nu}$ 和 $g_\sigma^{\mu\nu}$ 相关，$\mathfrak{M}$ 仅与 $g^{\mu\nu}$，$q_{(\rho)}$ 及 $q_{(\rho)\alpha}=\frac{\partial q(\rho)}{\partial x_\alpha}$ 的一阶导数等相关。把(47)对 $g^{\mu\nu}$ 变分可得方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\nu}}=\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}}, \qquad \langle(49)\rangle(78)$$

对 $q_{(\rho)}$ 变分可得

[p. 2]

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right)-\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)}}=0.^{1)} \qquad \langle(50)\rangle(79)$$

我们把方程〈(49)〉(78)叫作引力场方程,〈(50)〉(79)叫作物质场方程。在方程(50)中,假定了 $\mathfrak{M}$ 仅与 $q_{(\rho)}$ 对坐标的一阶导数有关;若在 $\mathfrak{M}$ 中出现高阶导数,在〈(50)〉(79)中将出现更多的项。然而我们的下述讨论却与此无关。

§2. 广义协变性要求的形式

现在我们提出与广义相对性假设相对应的要求:条件(76)及从(78)和(79)得出的方程组在任意时空坐标变换下应是协变的。由于 $\sqrt{-g}\,d\tau$ 的不变性,只

[4] 须令 $\frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{-g}}$ 为一个不变量,这一要求即可满足;因之,(76)左边的积分和它的变分也是一个不变量,可是方程(76)保持不变并非无条件要求 $\frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{-g}}$ 不变;理由如下。

首先设 $\frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-g}}$ 为不变量,为了选择 $\mathfrak{G}$ 采用如下考虑。 342

[5] 利用方程(43)所给出的 Riemann 张量构造不变量

$$K=g^{\mu\nu}B_{\mu\nu\tau}^{\tau}=g^{\mu\nu}\Bigg[-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\tau\\ \tau\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\tau\\ \sigma\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \tau\end{Bmatrix}\Bigg]. \qquad (80)$$

数学家已证明这是由 $g^{\mu\nu}$ 及其对坐标的一阶和二阶导数且对后者为线性的唯一不变量。自然,可把函数 $K\sqrt{-g}$ 选作引力场的 Hamilton 函数 $\mathfrak{G}$(差一常数

[6] 因子),这一选择可令(76)中出现的积分具有不变性。但这一选择存在一个形式上的缺点,即 $\mathfrak{G}$ 与 $g^{\mu\nu}$ 对坐标的二阶导数有关,这一困难可作如下消除,积分

$$\int K\sqrt{-g}\,d\tau$$

[p. 3] 按(80)可改写为 4 个积分之和,其中头两个可通过分部积分改写。应用方程(29a)和(31)可得

---

1)中译者注:"=0"是译者加进去的,疑原文有误。

$$-\frac{1}{\kappa}\int K\sqrt{-g}\,\mathrm{d}\tau=\int\mathfrak{G}\,\mathrm{d}\tau+F, \tag{81}$$

式中

$$\mathfrak{G}=\frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left[\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix}\right], \tag{82}$$

κ 为一常数，F 为一遍及所考虑四维区域边界的积分，其被积函数乃 $g^{\mu\nu}$ 和 $g_{\sigma}^{\mu\nu}$ 的函数。

这种对 $\mathfrak{M}$ 的选择不再使得积分 [7]

$$\int\mathfrak{G}\,\mathrm{d}\tau$$

343 具有不变性，但却使得这一积分的变分具有不变性，条件是 $\delta g^{\mu\nu}$ 及其一阶导数在积分域的边界上为零。在此情况下 δF 也为零，因此对(52)变分可得

$$\delta\left\{\int\mathfrak{G}\,\mathrm{d}\tau\right\}=-\frac{1}{\kappa}\delta\left\{\int K\sqrt{-g}\,\mathrm{d}\tau\right\}.$$

由于方程右边 K 为不变量，方程左边也是不变的。

由于按协变要求选择物质的 Hamilton 函数具有不能预知的多种可能性，这就使得引力场的 Hamilton 函数或方程(78)的左边几乎不再满足上述附加假定。

§ 3. Hamilton 函数 $\mathfrak{G}$ 的性质

由

$$\delta\left\{\int\mathfrak{G}\,\mathrm{d}\tau\right\}$$

在积分边界上的变分为零是不变的这一事实即得积分的不变性

$$\int\delta g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\nu}}\right]\mathrm{d}\tau.$$

再利用 $\delta g^{\mu\nu}$ 的张量性质及任意性可得(78)的左边，它是一个有乘法因子 $\sqrt{-g}$ 的协变张量。由于左边仅与 $g^{\mu\nu}$，$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$，$\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}\partial x_{\tau}}$ 有关且对后者为线性，这些 [p. 4] 项一定可写成如下表达式

$$\sqrt{-g}\,(\alpha\beta_{\mu\nu}+\beta g_{\mu\nu}g^{\sigma\tau}B_{\sigma\tau})$$

式中 α 和 β 为常数，$B_{\mu\nu}$ 已在(44)中给出；这是因为不存在别的这类协变量。常数由计算得出，结果是

344

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\nu}}&=\frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}\left(B_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}K\right)\\ K&=g^{\sigma\tau}B_{\sigma\tau}\end{aligned}\right\}. \tag{83}$$

进一步可推算出 Hamilton 函数 $\mathfrak{G}$ 要满足的两个恒等式，为达此目的，让我们作无穷小坐标变换

$$x'_\nu = x_\nu + \Delta x_\nu, \tag{84}$$

式中 Δx_ν 为任意选定的坐标的无穷小函数。x'_ν 是新坐标系中世界点的坐标，在旧坐标系中它的坐标为 x_ν。对于每个场或一些 Ψ，则存在如下类型的变换规律

$$\Psi' = \Psi + \Delta\Psi,$$

式中 $\Delta\Psi$ 与 Δx_ν 及其导数线性相关。由逆变量 $g^{\mu\nu}$ 并利用关于 $g^{\mu\nu}$ 和 $g_\sigma^{\mu\nu}$ 的方程(9)和(84)，即变换方程

$$\Delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha} \tag{85}$$

$$\Delta g_\sigma^{\mu\nu} = \frac{\partial \Delta g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - g_\alpha^{\mu\nu}\frac{\partial \Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma}. \tag{86}$$

又由于 $\mathfrak{G}$ 仅与 $g^{\mu\nu}$ 和 $g_\sigma^{\mu\nu}$ 有关，可能算出 $\Delta\mathfrak{G}$，并得到方程

$$\sqrt{-g}\,\Delta\left(\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}\right) = S_\sigma^\nu \frac{\partial \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu} + 2\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}. \tag{87}$$

[p. 5] 上式中采用了缩写

$$S_\sigma^\nu = 2\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} + 2\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g_\alpha^{\mu\nu} + \mathfrak{G}\delta_\sigma^\nu - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\nu^{\mu\alpha}} g_\sigma^{\mu\alpha}. \tag{88}$$

此外由(82)易证，$\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ 并非对任意替代，而是对**线性**替代是不变量。由此得出，当所有 $\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}$ 为零时，(87)式右边也必为零，由此得出恒等式 345

$$S_\sigma^\nu \equiv 0 \tag{89}$$

必定成立。

若我们进一步选择 Δx_ν 以使它在所考虑区域的边界的无穷小邻域内保持连续下仍为零，我们就有可能附加上下述考虑。在想象的无穷小替换中有

$$\Delta F = 0.$$

再由于 K 和 $\sqrt{-g}\,d\tau$ 的不变性

$$\Delta\left\{\int K\sqrt{-g}\,d\tau\right\} = 0,$$

由此推出

$$\Delta\left\{\int \mathfrak{G}\,d\tau\right\}$$

也为零。

由 $\sqrt{-g}\,d\tau$ 的不变性及方程(87)和(89)立刻得到

$$\int \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\,d\tau = 0.$$

经过二次分部积分并考虑到 Δx_σ 的任意选择，即得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) \equiv 0. \tag{90}$$

方程(89)和(90)是 Hamilton 函数 $\mathfrak{G}$ 的不变性的一种表述。 [8]

ADS.[2077]. 手稿有 5 页，原件中的页码([p. 1]～[p. 5])写在每页的右上角，现在放在页边的方括号内。

[1] 本文件的日期是按假定标注的，该文最初作为 *Einstein 1916e*（文件 30）的 § 14，以后又作为同一论文的一个附录（《物理学杂志》1916 年 3 月 20 日收到）。手稿顶端被删掉了“§ 14”和第一，第二两页上被删除了方程编号都表示这一小节最初打算放置的位置[*Einstein 1916e*（文件 30）的 § 13 的最后一个方程的编号为 46]；未删除方程的编号表明第二次打算放置的位置[*Einstein 1916e*（文件 30）的最后一个方程的编号为 75]。

346 [2] 见 *Einstein 1916o*（文件 41）以同一标题发表的论文，它与本手稿有一些相似的地方（主要的差异见注 6）。还参见 *Cattani*，*De Maira 和 Kichenassamy 1993* 关于广义相对论中的变分原理的历史性对论。

[3] 在原始版本中，关于此点爱因斯坦写了一个注释附在该页结尾，他指出：“Hilbert 在关于 Mie 的附录中所引入的假设，认为函数 $\mathfrak{H}$ 可表为一个四矢量 q_ρ 的分量和它的一阶导数有关的函数，我认为这是难有前途的。”爱因斯坦所指的是 Hilbert 在 *Hilbert 1915* 所发展的理论，此理论乃根据 Gustav Mie 的物质理论，特别提出物质的能动张量应仅为电磁量的函数。以后在 1916 年 Einstein 颇激烈地批评了 Hilbert 理论，把他的假设称为 Hamilton 的“幼稚，是对外部世界的狡诈是天真无知的儿童的意识，”（“Kindlich，im Sinne des Kindes，das keine Tücken der Aussenwelt kennt.”爱因斯坦致 Hermenn Weyl 1916 年 11 月 23 日的信）。还参见 *Mehra 1973* 和 *Earman* 与 *Glymour 1978b* 关于 Hilbert 与爱因斯坦理论的历史性讨论。

[4] 关于此点，爱因斯坦在原始版本中在本页加了一个脚注：“Hilbert 与 Lorentz 首先探讨了这个问题”。在 *Einstein 1916o*（文件 41）的相关章节中提到 *Hilbert 1915* 和 *Lorentz 1915*，*1916b*，*1916c* 和 *1916d*。

[5] 所有编号低于 47 的参考文献均指 *Einstein 1916e*（文件 30）中的方程。

[6] 与手稿中的讨论相反，在文献 *Einstein 1916o*（文件 41）中爱因斯坦完全未确定 Hamiltonian 的形式。此处的选择，爱因斯坦已于 1916 年 1 月在致 Lorentz 的两封信中讨论过（见爱因斯坦致 H. A. Lorentz 1916 年 1 月 17 日和 1916 年 1 月 19 日的信。）

[7] “$\mathfrak{M}$”应改为“$\mathfrak{G}$”。

[8] 在文件 *Einstein 1916o*（文件 41）中 eq.(90)是用来推导能量动量守恒定律的，同样的结果也可从方程(90)和 $\mathfrak{G}$ 的显示式出发得到，可是如爱因斯坦所承认的，一连好几个月他都没有推算出来（见爱因斯坦致 Théophile de Donder 的信，1916 年 7 月 23 日。）

[喀兴林　译校]

32.“引力场方程的近似积分”

[*Einstein 1914g*]

1916 年 6 月 22 日收到
1916 年 6 月 29 日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1916):688—696。

引力场方程的近似积分

爱因斯坦

348 对于引力理论中特殊问题(非基本问题)的处理,人们常满足于 $g_{\mu\nu}$ 的一级近似。和在狭义相对论中相同的道理,使用虚数时间 $x_4=it$ 有很多好处。所谓一级近似,是指下式

$$g_{\mu\nu}=-\delta_{\mu\nu}+\gamma_{\mu\nu}, \tag{1}$$

定义的 $\gamma_{\mu\nu}$ 和 1 相比是一个小量,使得其平方或乘积同其一次方相比可以忽略。式中当 $\mu=\nu$ 时,$\delta_{\mu\nu}=1$,而 $\mu\neq\nu$ 时 $\delta_{\mu\nu}=0$。

我们将证明,$\gamma_{\mu\nu}$ 可以像电动力学中的推迟势那样计算出来,由此得出引力场以光速传播。在这一通解之后,我们还要研究引力波以及引力波是如何发生的。事实证明,我所建议的用 $g=|g_{\mu\nu}|=-1$ 作为条件所选用的参考系,对于在一级近似下计算引力场是不方便的。天文学家 De Sitter 在一封信中提醒我,他 [1] 发现一个和我所用的参考系不同的选择,使计算一个静止质点所产生的引力场的计算更为简单[1]。因此我在下面取普遍不变的场方程作为基础。

349 § 1. 近似引力场方程的积分

协变形式的引力场方程为 [3]

$$\left.\begin{aligned} R_{\mu\nu}+S_{\mu\nu}&=-\kappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)\\ R_{\mu\nu}&=-\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}+\sum_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}\\ S_{\mu\nu}&=\frac{\partial^2\log\sqrt{g}}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\sum_{\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial x_\alpha}\end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

{1}

在这里,大括号表示著名的 Christoffel 符号(第 2 类),$T_{\mu\nu}$ 是物质的协变能量张量,T 是它的连带标量,在一阶近似下,方程(2)在展开后直接得出

1)《学报》(1915):97,p. 833。 [2]

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}+\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\Big(\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha\alpha}\Big)=$$
$$-2\kappa\Big(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum T_{\alpha\alpha}\Big), \tag{3}$$

左边最后一项是由 $S_{\mu\nu}$产生的,它可以在 $\gamma'_{\mu\nu}$服从附加条件

$$\sum_{\nu}\frac{\partial\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0 \tag{4}$$

时,由

$$\gamma_{\mu\nu}=\gamma'_{\mu\nu}+\Psi\delta_{\mu\nu}, \tag{5}$$

解出。将(5)代入(3)中,左边为

[4] {2}

$$-\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\Big(\sum_{\alpha}\gamma'_{\alpha\alpha}\Big)+2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_\alpha^2}-4\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}.$$

如果 Ψ 由下列方程给出

$$\sum_{\alpha}\gamma'_{\alpha\alpha}+2\Psi=0, \tag{6}$$

则上式的第 2,3,5 三项的贡献为零,我们将要这样做。考虑到这一点,(3)成为

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\Big(\gamma'_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha}\gamma'_{\alpha\alpha}\Big)=2\kappa\Big(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha}T_{\alpha\alpha}\Big)$$ 350

即

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\gamma'_{\mu\nu}=2\kappa T_{\mu\nu}. \tag{7}$$

应该注意到,(7)是与(4)一致的。因为容易证明,在我们所希望达到的精度下,物质的能量动量定理可以表为

$$\sum_{\nu}\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0. \tag{8}$$

如果对(7)进行 $\sum_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ 的运算,则其左边不仅由于(4)而为零,而且其右方因为(8)也为零。我们注意到因为(7)和(8),下式成立:

$$\gamma_{\mu\nu}=\gamma'_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha}\gamma'_{\alpha\alpha} \tag{9}$$

$$\gamma'_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha\alpha} \tag{9a}$$

我们的问题已经解决,因为 $\gamma'_{\mu\nu}$可以像推迟势一样去计算,即

$$\gamma'_{\mu\nu}=-\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{T_{\mu\nu}(x_0,y_0,z_0,t-r)}{r}dV_0. \tag{10}$$

式中 x,y,z,t 是实坐标 $x_1,x_2,x_3,\frac{x_4}{i}$，它们没有下标时表示"场点"坐标，带有下标"0"时表示是积分元。dV_0 是空间中的三维体元。r 是空间距离 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$。 {3} [5]

为了下面的讨论，我们还需要引力场能量的分量，得到它们的最简单的方法是直接由(7)得出。将(7)乘以 $\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ 并对 μ 和 ν 求和，左方在通常的整理后可得 {4} [6]

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big[\sum_{\mu\nu}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{2}\delta_{\sigma\alpha}\sum_{\mu\nu\beta}\Big(\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\Big)^2\Big]. \quad \{5\}\ [7]$$

351 括号中的量显然是与能量分量 $t_{\sigma\alpha}$ 只差一个比例常数，而后者可由右方的计算很容易得出。不省略任何项的物质的能量动量定理为

$$\sum_\sigma \frac{\partial \sqrt{-g}T_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma}+\frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\sqrt{-g}T_{\rho\sigma}=0.$$

在我们所要的近似下，此式可以改成

$$\sum_\sigma \frac{\partial T_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma}+\frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}T_{\rho\sigma}=0. \tag{8a}$$

此式比(8)更精确一级。由此在这里考虑的精度下(7)的右边为

$$-4\kappa\sum\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}. \quad [8]$$

于是，守恒定理成为

$$\sum\frac{\partial(T_{\mu\nu}+t_{\mu\nu})}{\partial x_\nu}=0, \tag{11}$$

式中

$$t_{\mu\nu}=\frac{1}{4\kappa}\Big[\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha\beta\tau}\Big(\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\tau}\Big)^2\Big] \tag{12}$$

是引力场的能量分量。

作为一个简单的应用例，我们计算在坐标原点静止的一个质量为 M 的质点的引力场。忽略表面力的物质的能量张量为

$$T_{\mu\nu}=\rho\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}, \tag{13}$$

这里考虑到在一阶近似下，协变的能量张量可以用反变的能量张量来代替，标量 ρ 是(自然测量到的)质量密度。由(10)和(13)得到，除 γ'_{44} 以外所有的 $\gamma'_{\mu\nu}$ 都为零。而前者为

$$\gamma'_{44}=\frac{\kappa M}{2\pi r}. \tag{14}$$

352 利用(9)，(1)二式，我们得到 $g_{\mu\nu}$ 为

[9] {6}

$$\left.\begin{matrix} -1-\frac{\kappa M}{4\pi r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{\kappa M}{4\pi r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\frac{\kappa M}{4\pi r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\frac{\kappa M}{4\pi r} \end{matrix}\right\}. \tag{15}$$

De Sitter 先生以信件的方式寄给我上述数值,它们与我以前给出的数值的区别只在于参考系的选择。这使我得到上面的简单的近似解。但是应当注意,这里所作的坐标的选择在普遍情况下并没有等价物,因为 $\gamma_{\mu\nu}$ 和 $\gamma'_{\mu\nu}$ 只有相对于正交线性代换而非普遍代换才具有张量性质。

§2. 平面引力波

由(7)、(10)二式可知,引力波永远以速度 1,即光速传播。令

$$\gamma'_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\nu}f(x_1+ix_4)=\alpha_{\mu\nu}f(x-t). \tag{16}$$

即可得出沿 X 轴正方向传播的平面引力波。这里 $\alpha_{\mu\nu}$ 是常数,f 是 $x-t$ 的函数。如果所考虑的空间中没有物质,即 $T_{\mu\nu}$ 为零,则(16)满足方程(7)。方程(4)导致 $\alpha_{\mu\nu}$ 间的下列关系

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}+i\alpha_{14}=0 \\ \alpha_{12}+i\alpha_{24}=0 \\ \alpha_{13}+i\alpha_{34}=0 \\ \alpha_{14}+i\alpha_{44}=0 \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

因此,在 10 个常数 $\alpha_{\mu\nu}$ 中,只有 6 个可以自由选取。在所考虑的波中我们可以从下列 6 种叠加得到最一般的波的类型

$$\left.\begin{matrix} \text{a)}\begin{matrix}\alpha_{11}+i\alpha_{14}=0\\ \alpha_{14}+i\alpha_{44}=0\end{matrix} & \begin{matrix}\text{b)}\alpha_{12}+i\alpha_{24}=0\\ \text{c)}\alpha_{13}+i\alpha_{34}=0\end{matrix} & \begin{matrix}\text{d)}\alpha_{22}\neq 0\\ \text{e)}\alpha_{23}\neq 0\\ \text{f)}\alpha_{33}\neq 0\end{matrix}\end{matrix}\right\}. \tag{18}$$

上式的陈述可以这样理解,对于每一类型,凡是没有明显列出的,都等于零。例 353
如在类型 a)中只有 α_{11},α_{14} 和 α_{44} 不为零,等等。类型 a)具有纵波的对称性。类型 b)和类型 c)是横波,而类型 d),e)和 f)对应于新的对称性类型。类型 b)和类型 c)的区别在于它们的 y 轴和 z 轴的方向不同,类型 d),e)和 f)的不同也是类似的。因此,实质上只有三类不同的类型。

我们主要感兴趣的是这些波的能量的传递，而这可以用能流 $\mathfrak{f}_x=\frac{1}{i}t_{41}$ 来度量，对于每一种类型的波，由(12)得

$$\text{a)}\ \frac{1}{i}t_{41}=\frac{f'^2}{4\kappa}(\alpha_{11}^2+\alpha_{14}^2+\alpha_{44}^2)=0$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{i}t_{41}=\frac{f'^2}{4\kappa}(\alpha_{12}^2+\alpha_{24}^2)=0$$

$$\text{c)}\ \frac{1}{i}t_{41}=\frac{f'^2}{2\kappa}(\alpha_{13}^2+\alpha_{34}^2)=0$$

$$\text{d)}\ \frac{1}{i}t_{41}=\frac{f'^2}{4\kappa}\alpha_{22}^2=\frac{1}{4\kappa}\left(\frac{\partial\gamma'_{22}}{\partial t}\right)^2$$ {7} [10]

$$\text{e)}\ \frac{1}{i}t_{41}=\frac{f'^2}{4\kappa}\alpha_{23}^2=\frac{1}{4\kappa}\left(\frac{\partial\gamma'_{23}}{\partial t}\right)^2$$

$$\text{f)}\ \frac{1}{i}t_{41}=\frac{f'^2}{4\kappa}\alpha_{33}^2=\frac{1}{4\kappa}\left(\frac{\partial\gamma'_{33}}{\partial t}\right)^2.$$

由此看出，只有 d)，e)，f)这种类型的波传递能量，而每种平面波的能量传递为

$$\mathfrak{f}_x=\frac{1}{i}t_{41}=\frac{1}{4\kappa}\left[\left(\frac{\partial\gamma'_{22}}{\partial t}\right)^2+2\left(\frac{\partial\gamma'_{23}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma'_{33}}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{19}$$

§3. 物质系统由于放出引力波的能量损失

设我们要研究其辐射的系统一直处在坐标的原点处附近。我们只在距坐标原点的距离远大于系统的尺度处的场点研究系统产生的引力场。设场点在正的 x 轴上，即令

$$x_1=R,x_2=x_3=0.$$

354 于是，问题是在场点处有没有传递能量的辐射波，以及是否指向 x 轴的正方向？ §2 的讨论表明，只有 γ'_{22}，γ'_{23}，γ'_{33} 三个分量对此有贡献，我们只需要计算这三个，由(10)得

$$\gamma'_{22}=-\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{T_{22}(x_0,y_0,z_0,t-r)}{r}\mathrm{d}V_0.$$

如果系统的范围不太大，而其能量分量的变化又不太快时，我们可以把 $t-r$ 换成 $t-R$，而不致带来明显的误差，而后者在积分时是常数。如果再进一步把 $\frac{1}{r}$ 换成 $\frac{1}{R}$，可得在多数情况下成立的近似方程

$$\gamma'_{22}=-\frac{\kappa}{2\pi R}\int T_{22}\mathrm{d}V_0, \tag{20}$$

式中的积分按常规的方式计算，即取时间为常数来计算。利用(8)，可将上式改写成为方便于对物质系统进行计算的形式。由

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial T_{24}}{\partial x_4}=0$$

再乘以 x_2，对整个系统积分，并对第二项作部分积分，得

$$-\int T_{22}\mathrm{d}V+\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\int T_{24}x_2\mathrm{d}V\right)=0. \tag{21}$$

进一步，由

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{43}}{\partial x_3}+\frac{\partial T_{44}}{\partial x_4}=0,$$

并乘以$\frac{x_2^2}{2}$，用同样方法可得

$$-\int T_{24}x_2\mathrm{d}V+\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\int T_{44}\ \frac{x_2^2}{2}\mathrm{d}V\right)=0. \tag{22}$$

由(21)和(22)两式得

$$\int T_{22}\mathrm{d}V=\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\left(\int T_{44}\ \frac{x_2^2}{2}\mathrm{d}V\right),$$

或者，在引入实坐标之后，作为一种近似，令能量密度$(-T_{44})$与任意运动的物质 355
的质量密度 ρ 相等，

$$\int T_{22}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\rho y^2\mathrm{d}V\right). \tag{23}$$

又有

$$\gamma'_{22}=-\frac{\kappa}{4\pi R}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\rho y^2\mathrm{d}V\right). \tag{24}$$

用类似方法可以算出

$$\gamma'_{33}=-\frac{\kappa}{4\pi R}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\rho z^2\mathrm{d}V\right) \tag{24a}$$

[11] (8)

$$\gamma'_{23}=-\frac{\kappa}{4\pi R}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\rho yz\mathrm{d}V\right). \tag{24b}$$

(24)，(24a)和(24b)三式中的积分不是别的，正是随时间变化的转动惯量，并用符号 J_{22}，J_{33}，J_{23}表示。由(19)得能量辐射的强度 $\mathfrak{f}_x$ 为

(9)

$$\mathfrak{f}_x=\frac{\kappa}{64\pi^2R^2}\left[\left(\frac{\partial^3 J_{22}}{\partial t^3}\right)^2+2\left(\frac{\partial^3 J_{23}}{\partial t^3}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 J_{33}}{\partial t^3}\right)^2\right]. \tag{25}$$

由此进一步可得在一切方向上的能量辐射的平均值为

$$\frac{\kappa}{64\pi^2R^2}\cdot\frac{2}{3}\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3}\right)^2,$$

式中对下标由 1 到 3 的求和应遍及 9 个组合。其理由是，此式一方面对于坐标

系的空间转动具有不变性(由 $J_{\alpha\beta}$ 的三级张量性质即可看出),另一方面在径向对称($J_{11}=J_{22}=J_{33}, J_{23}=J_{31}=J_{12}=0$)时,此式与(25)一致。因而,乘以 $4\pi R^2$ 即可得出此系统每单位时间的辐射 A

$$A=\frac{\kappa}{24\pi}\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3}\right)^2. \qquad (26)$$ {10}

如果时间以秒为单位,能量以尔格为单位,则此式还应增加一个因子 $\frac{1}{c^4}$。进一步再考虑到 $\kappa=1.87\times10^{-27}$,显然可知,对于一切可以想到的情况,$A$ 是一个实际上趋于零的小值。

356 然而,由于电子在原子内的运动,原子不仅辐射电磁能量,也将辐射引力能量,尽管数量极小,量子论将不仅修正 Maxwell 的电动力学,也将修正新的引力理论。

补充 有一个简单的方法可说明为什么不传递能量的引力波(类型 a,b,c)能够存在。原因是这些波不是"真正的"波,而是"表观的"波。这是由于我们采 [12]
用了一种参考系,其坐标原点受到了波样的颤抖。这一点用下列方法很容易看出。如果从一开始我们用通常方法选择一个坐标系,使得 $\sqrt{-g}=1$,则所得的场 {11}
方程不是(3)而是

$$\sum_\alpha\frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}+\sum_\alpha\frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\partial x_\alpha}-\sum_\alpha\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}=0.$$

将

$$\gamma_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\nu}f(x_1+ix_4),$$

代入此方程可得出常数 $\alpha_{\mu\nu}$ 之间的 10 个方程,由此可以看出只有 α_{22}, α_{33} 和 α_{23} 三个不为零(其中 $\alpha_{22}+\alpha_{33}=0$)。在这种坐标选择之下,只有类型 d,e,f 的波存在,它们都是能传播能量的。其他类型的波都被坐标系的选择消去了,在这种意义上讲,它们不是"真正的"波。

尽管在这一研究中我们发现对坐标系的选择不加限制对一阶近似的计算有利,但我们的最后结果表明,在 $\sqrt{-g}=1$ 的限制下的坐标系还是具有深刻的物理合理性。 [13]

---

357 载于《皇家普鲁士科学院(Berlin)学报》(1916):688—696. 1916 年 6 月 22 日收到,1916 年 6 月 29 日发表。

[1]De Sitter 的信不可能得到了。但可见爱因斯坦的复信(爱因斯坦于 1916 年 6 月 22 日致 Willem de Sitter 的信),信中爱因斯坦感谢他对这篇文章的意见和总结(在同一天提交了该文)。

[2]*Einstein 1915h*(文件 24)。

[3]这是此种特定形式的场方程第一次出现。关于较早的表述见,例如,*Einstein 1916e*(文件 30),

§12;也见 *Einstein 1915i*(文件 25),方程(2a)。在第三个方程中,求和号前面丢了一个负号;第一项中的"∂"应为"∂^2"。

[4]在第一项中"$\partial\gamma'_{\mu\nu}$"应为"$\partial^2\gamma'_{\mu\nu}$"。

[5]"$z-z$"应为"$z-z_0$"。

[6]"$\gamma_{\mu\nu}$"应为"$\gamma'_{\mu\nu}$"。

[7]"$\partial_{\sigma\alpha}$"应为"$\delta_{\sigma\alpha}$";求和暗指对 α 进行。

[8]正如爱因斯坦后来认识到的,这一叙述是错误的。在所使用的近似中,方程(8a)中表达式$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\mu}$的 g 可以用 γ 代替,但不可以用 γ' 代替,正如这里所做的,因此,第 2 节和第 3 节含有错误的结果,特别是涉及存在不输运能量的波和由球对称物体辐射的波。爱因斯坦在 1918 年第二篇论引力波的文章(*Einstein 1918*)中,承认并纠正了他的错误。

[9]这个负号应为正号;在方程(15)中,44 分量的第二个负号也应为正号。这些错误在 *Einstein 1918* 中悄悄地被纠正了。

[10]在表达式 b)和 c)中,右边丢了一个因子 2;d),e)和 f)给出 t 的 41 分量。

[11]"y^2"应为"yz"。

[12]Tullio Lavi-Civita 责备关于使用非张量的量 t 表示引力场的 Stress-energy(应力—能量)这一"不可思议的结果"——爱因斯坦的广义相对论最后形式的这一特点为所有以前的形式所共有。见 *Lavi-Civita 1917* 且也见接下来在 1917 年 8 月 2 日爱因斯坦致 Tullio Levi-Civita 的信和 1917 年 8 月 2—9 日间 Tullio Levi-Civita 致爱因斯坦的信中对此专题的讨论;关于对本文以及爱因斯坦与 Levi-Civita 间来往书信这两者的历史讨论,见 *Cattani* 与 *De Maria 1993*。

[13]在注 1 中提到的给 De Sitter 的信中特别强调了这一点。关于爱因斯坦所做的进一步评论,也见 1916 年 7 月 15 日爱因斯坦致 Willen de Sitter 的信。

英译者的增注

{1}已对第三式作了更正以令加和号前出现一个负号,第一项中的"∂"已更改为"∂^2"。

{2}第一项中的"$\partial\gamma'_{\mu\nu}$"已更改为"$\partial^2\gamma'_{\mu\nu}$"。

{3}"$z-z$"已更正为"$z-z_0$"。

{4}"$\gamma_{\mu\nu}$"已更正为"$\gamma'_{\mu\nu}$"。

{5}已暗含对 x 的求和。

{6}"$-\frac{\kappa}{2\pi}\frac{M}{r}$"已更正为"$\frac{\kappa}{2\pi}\frac{M}{r}$"。

{7}在 b),c)式中右侧已添加了因子 2;d),e),f)给出了 t 的 41 分量。

{8}"y^2"已更正为"yz"。

{9}本文中第二次指定一个式子为"(20)"。

{10}本文中第二次指定一个式子为"(21)"。

{11}已把"$\sqrt{g}$"更改为"$\sqrt{-g}$"。

[喀兴林 译校正文]

[高尚惠 译注释]

[吴忠超 校注释]

358 # 33.“爱因斯坦对 Karl Schwarzschild 的纪念讲演”

[*Einstein 1916h*]

1916 年 6 月 29 日收到
1916 年 7 月 6 日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1916):768—770。

爱因斯坦对 Karl Schwarzschild 的纪念讲演 359

刚刚进入 42 岁，死神就在同年 5 月 11 日夺走了我们的同行 Karl Schwarz-
[1] schild。这位天分极高才华横溢的研究者的早逝不仅对我们也对天体物理学界
的朋友们是一次沉重的打击。

Schwarzschild 的理论工作的令人惊异之处在于他驾驭自如的数学方法和
洞察重要天文学或物理学问题的轻而易举。很少有像他这样杰出的数学家能与
这么多现实想法以及现有思想相适应，这就是为什么他能在不同领域作出有价
值的理论工作，而其他人却被数学困难吓退了。看来他的持之以恒的理论创造
的心理上的动力与其说来自渴望了解自然内在的关联，不如说来自发现较精确
的数学思想体系的一种艺术家的快乐。这样人们就了解了，为什么他的第一篇
理论工作是有关天体力学的。这一科学分支的基础较诸精确科学的任一其他分
支都巩固得多。在这类工作中，我举出有关三体问题的周期解和有关转动流体
[3] 容积的 Poincare 平衡理论。

Schwarzschild 有关天文学上的重要贡献是他对星系统计的研究，这一学科 360
是通过统计处理所观测到固定星系的光度、速度、谱分类，以了解所选定天体系
[4] 统的结构，其中也包含我们的太阳，天文学应感谢他深化并扩展了 Kapteyn 所发
现的关系[1)]。

他在理论物理上高深的知识使得他成为太阳理论的专家。这里人们应感谢
他关于太阳气层力学平衡的研究与太阳发光标准的先驱工作。人们不应忘记他
[5] 有关光对小球的光压的漂亮的理论工作，这一工作奠定了 Annhenius 的彗尾理
[6] 论的坚实基础，理论物理研究再一次转向了天文学问题。然而看来 Schwarz-
[7] schild 的兴趣仍偏重于纯粹物理问题，我们要感谢他在电动力学基础上的有意
[8] 义的研究，此后在他生命的最后几年他致力于新的引力理论的研究；他是第一个

1)Kapteyn，J. C.（1851—1922）荷兰天文学家，研究银河系的权威（译注）。

成功地精确计算了新理论的引力场的人，在他临终的几个月，当恶病已使他的身体十分虚弱时，他还对量子论进行了成功的细致的研究。 [9]

Schwarzschild 最大的理论贡献当属几何光学，他改善了天文光学仪器的误差理论。由于这些贡献，他完善了天文仪器，他应被授予一永久的勋章。 [10]

Schwarzschild 的理论工作是与作为一位常任实用天文学家而同时进行的。他不间断地任职于天文台达 24 年之久，1896～1899 年他是 Wien 的助手，1901－1909 他是 Göttingen 天文台台长，自 1909 年起他是波茨坦天体物理研究所的所长。凭借他一系列的工作他得以任职于天文观测所所长。更有甚者，在任职时他利用他的科学知识发明了一种新的观测方法，该法正表明了他思路的活跃，他发明了一种对实验物理有重要意义且以他 [11]
361 名字命名的照相版涂黑术。通过这一发明，他把照相法应用于光度学。怀着这一天才想法，虽然他日益衰弱，仍然企图对焦距外恒星进行照相光度测量；只有在这个想法之后，恒星的照相光度测量才比目视法更具有生 [12]
命力。 [13]

自 1912 年起这位平易近人的人进入了科学院，他在短时期内的研究报告，以其出类拔萃而获得称许。现在，死神已夺他而去；可是他的工作却仍在孕育激励着科学的发展，在科学上他已贡献了他的全副精力。

---

362 1916 年 6 月 29 日在 Berlin 普鲁士科学院的演讲，发表于 1916 年《皇家普鲁士科学院（柏林）学报》(1916)，768—770，7 月 6 日。

[1] Karl Schwarzschild 生于 1873 年 10 月 9 日，死于少见的皮肤病天疱疮，此病早期症状发生在俄罗斯前线服役时的德军中。

[2] *Schwarzschild 1898a*，*1898b*。

[3] *Schwarzschild 1897*，此乃他于 1896 年的博士论文的译本。

[4] 见 *Schwarzschild 1907*，*1908*。

[5] 见 *Schwarzschild 1906*，*1914*。后一论文是爱因斯坦投寄至普鲁士科学院的。

[6] *Schwarzschild 1901*。

[7] *Schwarzschild 1903a*，*1903b*，*1903c*。

[8] 见 *Schwarzschild 1916a*，*1916b*。这些论文（是爱因斯坦投寄普鲁士科学院的）首次给出广义相对论场方程的严格解。见爱因斯坦于 1916 年 1 月 9 日对 Karl Schwarzschild 第一篇论文的注记，亦可见 *Eisenstaedt 1989* 的有关历史讨论。

[9] *Schwarzschild 1916c*，此文是在他去世前 12 天投寄的。

[10] 见 *Schwarzschild 1905a*，*1905b*，*1905c*。

[11] 见 *Blumenthal 1918* 与 *Schwarzschild 1992*，vol. 3，pp. 685—693 上 Schwarzschild 的论文总目录。

[12] 见 *Schwarzschild 1899*。

[13] 见 *Schwarzschild 1900*。

[刘　辽　译校]

363 ## 34.“量子论中辐射的发射和吸收”

[*Einstein 1916j*]

1916年7月17日收到
1916年7月30日发表

载于《德国物理学会会刊》18(1916):318—323。

量子论中辐射的发射和吸收 364

爱因斯坦

[1] 16 年前，当 Planck 因推导他的辐射公式而创立量子论时，他采用了以下的
方法。根据他新发现的量子论的基本原理，他计算了一个谐振腔的作为温度函
数的平均能量 $\bar{E}$，并由此确定作为频率 ν 和温度 T 的函数的辐射密度 ρ。他基于
[2] 电磁学的考虑，推导出在辐射密度和谐振腔能量 $\bar{E}$ 之间的一个关系，而大功
告成：

$$\bar{E}=\frac{c^3\rho}{8\pi\nu^2}. \tag{1}$$

[3] 他的推导显示了无比的勇气，并且得到辉煌的证实。不仅是辐射公式本身
[4] 以及其中的基本量子的计算值得到证实，而且在后来有关比热的研究中 $\bar{E}$ 的量
子理论计算值也得到证实。这样，原先由电磁学论证发现的方程(1)也被证实
[5] 了。然而，导致(1)的电磁-力学分析和量子论不协调，这仍然是不能令人满意
[6] 的。这样 Planck 本人和其他所有在进行这个课题研究的理论家不懈地试图修
正这个理论，使之基于不相矛盾的基础之上，就毫不奇怪了。

自从 Bohr 的谱理论获得巨大成功以来，人们不再怀疑，量子论的基本思想
[7] 必须保留。看来必须建立理论的一致性，以使导致 Planck 得到(1)的电磁-力学
论证方法由关于物质和辐射之间相互作用的量子论的论证方法所取代。下面论 365
[8] 证的简单性和一般性很吸引人，它使我在这个奋斗过程中倍感兴奋。

§1. 在辐射场中的 Planck 谐振腔

如果回想首次用于 Brown 运动中的处理方法，那么根据经典理论就很容易
[9] 理解在辐射场中的单色谐振腔的行为。用 E 来表示在给定时刻的谐振腔的能
量；我们求时间过了 τ 之后的能量。特此假定 τ 比谐振腔的振动周期长，但是仍
然非常小，使得 E 在 τ 期间的百分比变化可当成无穷小量来处理。可以区分两
类变化。第一类是由于发射引起的变化

$$\Delta_1 E = -AE\tau,$$

而第二类是由电场作用到谐振腔上所做的功引起的变化 $\Delta_2 E$。第二类变化随辐射密度而增加，而且具有随机的值和随机的符号。利用电磁学理论和统计理论可得到平均值的关系

$$\overline{\Delta_2 E} = B\rho\tau.$$

可以由已知方法计算常数 A 和 B。我们将 $\Delta_1 E$ 称为发射辐射引起的能量变化，$\Delta_2 E$ 称作入射辐射引起的能量变化。由于 E 是对许多谐振腔取的平均值，可以假定它与时间无关，下式必须成立 [10]

$$\overline{E + \Delta_1 E + \Delta_2 E} = \overline{E}$$

或者

$$\overline{E} = \frac{B}{A}\rho.$$

如果借助于电磁学和力学以已知的方法计算单色谐振腔的 B 和 A，即可得到(1)。

366 现在我们要着手相应的考虑，但是要在基于量子论的基础之上，而且对我们要称为“分子”的那些结构和辐射之间的相互作用不加限定的推测。

§ 2. 量子论和辐射

我们考虑和热辐射处于静态平衡的单一分子的气体。假定每个分子只具有能量值分别为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 等的分立的态 Z_1, Z_2 等。以已知的方法及和统计力学相类似的方法，或者直接从 Boltzmann 原理，或者最后从热力学的考虑，可以推出态 Z_n 的概率 W_n(或者处于态 Z_n 的分子的相对数目)为

$$W_n = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}. \tag{2}$$

此处 k 是著名的 Boltzmann 常数。p_n 是态 Z_n 的统计“权重”，也就是一个表征分子量子态的但与气体温度 T 无关的常数。

我们现在假定分子因吸收特定频率 $\nu = \nu_{nm}$ 的辐射而从态 Z_n 跃迁到态 Z_m；而且类似地也可以因发射这样的辐射而从态 Z_m 跃迁到态 Z_n。其牵涉的辐射能量为 $\varepsilon_m - \varepsilon_n$。一般来说，对于两个指标 m 和 n 的任意组合，这种跃迁过程都是可能的。对于所有这些基本过程在热平衡中必须存在统计平衡。因此，我们只要对属于特定的一对指标(n,m)的单个基本过程进行研究就已足够。

在热平衡中，在单位时间内因吸收辐射从态 Z_n 转跃迁态 Z_m 的分子数目，和因发射辐射从态 Z_m 跃迁成态 Z_n 的分子的数目相同。我们将陈述有关这些

跃迁的简单假设,我们的指导原则是经典理论的极限情形,正如在前面简述过的那样。

我们在此还将区分两类跃迁:

a)**辐射的发射**。它是从态 Z_m 向态 Z_n 伴随着辐射能 $\varepsilon_m-\varepsilon_n$ 发射的跃迁。 367
这种跃迁是在没有外界影响下发生的。人们几乎不能想象它和放射反应有何不相似之处。在单位时间内跃迁的数目必须为

$$A_m^n N_m,$$

[11] 此处 A_m^n 是表征态 Z_m 和态 Z_n 组合的一个常数,而 N_m 是分子处于态 Z_m 的数目。

b)**辐射的入射**。分子所处的辐射确定其入射;设它和该有效频率的辐射密度 ρ 成正比。在谐振腔的情形下,它会引起能量增加,也会引起能量减少;在我们的情形下,也就是说,它会引起 $Z_n\rightarrow Z_m$ 的跃迁,也会引起 $Z_m\rightarrow Z_n$ 的跃迁。在单位时间内 $Z_n\rightarrow Z_m$ 跃迁数目为

$$B_n^m N_n \rho,$$

而 $Z_m\rightarrow Z_n$ 跃迁数目为

$$B_m^n N_m \rho,$$

此处 B_n^m,B_m^n 为与态 Z_n,Z_m 组合相关的常数。

由于在 $Z_n\rightarrow Z_m$ 和 $Z_m\rightarrow Z_n$ 之间跃迁的统计平衡的条件,人们因此得到如下方程

$$A_m^n N_m + B_m^n N_m \rho = B_n^m N_n \rho. \tag{3}$$

另一方面,从方程(2)可以得到

$$\frac{N_n}{N_m}=\frac{p_n}{p_m}e^{\frac{\varepsilon_m-\varepsilon_n}{kT}}. \tag{4}$$

从方程(3)和(4)推出

$$A_m^n p_m=\rho\left(B_n^m p_n e^{\frac{\varepsilon_m-\varepsilon_n}{kT}}-B_m^n p_m\right). \tag{5}$$

ρ 是那个频率的辐射密度,在 $Z_m\rightarrow Z_n$ 和 $Z_n\rightarrow Z_m$ 跃迁时分别以该频率发射和吸收。如果我们假定随着 T 的不断增大 ρ 必须趋向于无限大,那么我们必然得出 368

$$B_n^m p_n = B_m^n p_m. \tag{6}$$

引进缩写

$$\frac{A_m^n}{B_m^n}=\alpha_{mn}, \tag{7}$$

可以得出

$$\rho=\frac{\alpha_{mn}}{e^{\frac{\varepsilon_m-\varepsilon_n}{kT}}-1}. \tag{5a}$$

这就是 ρ 和 T 之间的 Planck 关系，余下常数尚未确定。如果我们具有和量子假设相协调的修正的电动力学和力学，就可以直接计算出常数 A_m^n 和 B_m^n。 [12]

ρ 必须是 T 和 ν 的普适函数这一事实意味着，α_{mn} 与 $\varepsilon_m-\varepsilon_n$ 都和分子的特定成分无关，而只依赖于有效频率 ν。从 Wien 定律进一步推出，α_{mn} 必须和 ν 的三 [13]
次方成比例，而 $\varepsilon_n-\varepsilon_n$ 与 ν 的一次方成比例。由此得出推论

$$\varepsilon_m-\varepsilon_n=h\nu, \tag{8}$$

此处 h 为一常数。

在从有关辐射的发射和入射的三个假设推出 Planck 辐射公式之际，我当然非常乐意承认，这并没有把它们提升到为被证实的结果。但是这个假设如此简单，可以这么轻而易举地进行分析的普遍性，以及和 Planck 线性谐振子（作为经典电动力学和力学的极限情形）的自然联系使人觉得，这些假设很可能是未来理论表述的基本特征。假设的发射统计定律只不过是放射衰变的 Rutherford 定律，而公式(8)和(5a)联合表达的定律和 Bohr 谱理论中的第二个基本假设相一致——这一点也对这里提出的理论十分有利。

369 §3. 对光化学等效定律的评论

我们以如下方式对光化学等效定律进行一系列探索。假定有一团气体，其温度如此之低，以至于从态 Z_m 到态 Z_n 跃迁的频率为 ν 的热辐射实际上不存在。 [14]

根据(2)和(5a)，态 Z_m 和态 Z_n 相比较显得十分稀少，而我们将假定几乎所有的气体都处于态 Z_n 上。除了早先考虑过的过程 $Z_m\rightarrow Z_n$ 外，还设想处于 Z_m 的分子具有其他的基本"化学"过程的能力，例如单分子离解。让我们进一步假设，这个离解的反应率比 $Z_m\rightarrow Z_n$ 跃迁的发生率大。

如果用这个有效频率来照射气体，将会发生什么呢？分子在吸收辐射能 $\varepsilon_m-\varepsilon_n=h\nu$ 时继续从态 Z_n 跃迁到态 Z_m。只有非常少量的分子由于发射或者吸收会返回到态 Z_n。至此，对应于假定的化学离解的高反应率，大多数分子被分离。这意味着，我们实际上发现，对于每一个离解的分子，辐射能 $h\nu$ 被吸收了，这正是等效定律所要求的。

这个解释的关键在于，分子是通过量子态 Z_m 吸收光，而非不通过这个中间态而直接离解。因此，人们不必将辐射的化学有效和化学无效吸收区分开来。光吸收和化学过程作为独立过程而出现。

---

370 载于《德国物理学会会刊》18(1916)：318—323；1916 年 7 月 17 日收到，1916 年 7 月 30 日发表。

[1]见 *Planck 1900b*。

[2]见 *Planck 1900a*,尤其是导出方程(34)的讨论。

[3]爱因斯坦指 Max Planck 有关电荷和质量基本单位:电子电荷和氢原子的质量的计算(特别参阅 *Planck 1901b*)。

[4]特别参阅 *Einstein 1907a*(第二卷,文件 38);还可参阅爱因斯坦与 Walther Nernst 在第一次 Solvay 会议对有关比热研究的评论,*Einstein 1914a*(第三卷,文件 26),以及 *Nernst 1914*(或者法文版,*Nernst 1912*)。

[5]有关爱因斯坦对量子假设和经典电磁学不协调性的分析,见 *Einstein 1909b*、*1909c*(第二卷,文件 56 及文件 60)。

[6]关于 *Planck* 试图修正他的理论,见他在 Solvay 会议上的报告,*Planck 1914a*(或者法文版,*Planck 1912b*),以及 *Planck 1914c*。

[7]见 *Bohr 1913*。

[8]在 1916 年 8 月 11 日致 Michele Besso 的一封信中,爱因斯坦对这篇文章所提交的研究表达了更强烈的热情,他写道:"我顿悟了有关辐射的吸收和发射的辉煌的思想。"他把自己对 Planck 定律的推导称作"惊人的简洁",描述成"最好的推导"。此信是在爱因斯坦撰写 *Einstein 1916n*(文件 38)时写的,他在该论文中重复了本文 § 2 中的论证,并且还加上了新的重要结果。

[9]见 *Einstein 1905k*。

[10]例如见 *Planck 1900a*。

[11]早在 1900 年 Ernest Rutherford 就已经用描绘这样一个"单分子"过程的方程来描述放射衰变。(见 *Rutherford 1900*)。

[12]只要把经典力学和经典电动力学采取量子形式,就真正完成了这种计算(见 *Dirac 1927*)。

[13]有关 Wien 位移定律的适当形式,见 *Planck 1901a*,第 2 节。

[14]有关光化学等效定律的爱因斯坦早期工作,见 *Einstein 1912b*(第四卷,文件 2),1912f(第四卷,文件 5),以及 *1913a*(第四卷,文件 12);还可见第四卷编者按,"爱因斯坦论光化学等效定律",pp. 109—113 的有关讨论。

[吴忠超　译校]

371 35. "为 Erwin Freundlich 所著《爱因斯坦引力理论基础》一书所作的序"

[*Einstein 1916i*]

发表日期:约为 1916 年 8 月

Erwin F. Freundlich :《爱因斯坦引力理论基础》柏林:Springer 出版社,1916。

序 372

[1] Freundlich 先生以本书向广大的读者介绍广义相对论的思想上和经验上的来源。我看过之后得到了这样的印象:作者在将理论的基本思想进行通俗化讲解方面是成功的,其中清楚地阐明了纯粹自然科学的思想方法。书中详细地说明了本问题同数学、认识论、物理学以及天文学之间的关系,特别是对与他同时代的迅速广泛传播的数学家 Riemann 的思想作了深入的评论。Freundlich 先生
[2] 作为一位展望将来知识领域的学者,不仅对事物作有说服力的描述,他还是在同
[3] 事当中第一位对理论进行热心证明的人。我愿与他成为诚挚的笔友!

爱因斯坦

Erwin F. Freundlich.:《爱因斯坦引力理论基础》,柏林:Springer 出版社,1916(*Freundlich 1916b*). 373

发表时间约在 1916 年 8 月(见下列注释 1 中关于发表时间的信息)。

[1]Freundlich 的这本 64 页的书——这是有关广义相对论最早的书籍之一——最早分两期在《自然科学》的 1916 年 6 月 30 日和 7 月 7 日上刊出(*Freundlich 1916a*)。几周后出版的单行本 *Freundlich 1916b*(参见 *Freundlich 1916a*,363 页的编者注)在正文中有较小的改动,并附有一些附加的注释。

[2]从 1911 年起,Freundlich 就参加了广义相对论的两个验证工作:光线的引力弯曲和光谱的引力红移。见本书第五卷中和 Freundlich 有关函件,关于 Freundlich 这方面的工作的历史资料见 *Hentschel 1994*。

[3]爱因斯坦手中的一本 *Freundlich 1917*,即本书的第二版,其中有很多批评性的旁注。当为第三版作准备的时候,爱因斯坦告诉 Freundlich 说,此书必须作一定的改进,并说如果不作改进,他将撤回他的序(见 1919 年 9 月 19 日爱因斯坦给 Erwin Freundlich 的信)。在两人的一次会面时讨论了对书的修改(见 1919 年 10 月 3 日 Erwin Freundlich 给爱因斯坦的信),在此书的第三版(*Freundlich 1919b*)(修订和增订版)中,爱因斯坦的序得以保留,而 Freundlich 在"第三版前言"中(日期为 1919 年 12 月)对爱因斯坦在修订工作中的帮助表示了感谢。

[喀兴林 译校]

374

36. 对 H. A. Lorentz"热力学中的统计理论：五次演讲"的评论

[*Einstein 1916k*]

1916 年 8 月 11 日发表

载于《自然科学》4(1916)：480—481。

[1]

对 H. A. Lorentz“热力学中的统计理论：五个演讲”的评论 375

研究过数学理论的人都有如下尴尬的经验：他用演绎法勤奋地、热切地证明着每一步，而他最后却一无所获。因为作者本人把全部概念的主导思想抑制起来，所以他没有获得它。这或许是由于没有能力用简洁的语言表达它，或许更坏的是，由于一种近于可笑的卖弄——正如见多识广的人所说——这在过去是特别流行的。这个弊病只能通过作者无保留的直率来克服，作者甚至应不回避使读者来熟悉他的不完善的主导思想，如果这些思想曾促进过他自己的研究。在
[2] 理论物理中，几乎没有一个领域比在统计力学中更难履行此戒律。每一位博学
的读者都会同意我的看法，认为 Gibbs 在他的关于这一重要专题的先驱性的书 376
中已相当多地违犯了这个戒律。许多人读过它，许多人证明过它——却并没有理解它。Lorentz 在他的前三篇演讲中着手处理此弊病，他用一种绝妙的简单的数学形式展示出理论的基础，从而使主导思想被清晰地集中凸现出来。

在这样做时，他把 Boltzmann 原理放在最前面，并详尽地讨论了如何定义 Boltzmann 方程 $S=\kappa \lg W$ 中概率 W 的问题。因此他使用“W＝相积分”的定义并举例说明此定义已被审稿人建议过，“W＝作为时间函数的出现频率”实质上与它相同。此时作者解释了使他不采用更多描述性的第二个定义的原因；而我特别要使读者注意这一点。

后两篇演讲主要论及 Brown 运动和涨落的理论。最后一篇演讲是将这一近期的理论巧妙应用到 Planck 辐射公式。众所周知，那里暴露出不能用波动理
[3] 论来阐述的辐射的统计性质。H. A. Lorentz 对这些关系的兴趣使本评论人特别愉快。每位物理学家都能从这本富有启发性的小册子获益。

爱因斯坦，Berlin-Charlottenburg

载于《自然科学》4(1916)：480—481。1916 年 8 月 11 日。

[1]*Lorentz 1916a*。

[2]*Gibbs 1902* 或它的德文译本,*Gibbs 1905*。

[3]爱因斯坦是指出 Planck 辐射定律意味着辐射具有非经典统计性质的第一人[见 *Einstein 1909b*(第二卷,文件 56)]。

[高尚惠 译]
[刘 辽 校]

37. “《广义相对论基础》的作者总结”

378

[*Einstein 1916l*]

总结是*爱因斯坦 1916e*(Doc. 30)中的一个独立的抽印本。

1916 年 8 月 11 日发表

载于《自然科学》4(1916):481。

379

《广义相对论基础》的作者总结

爱因斯坦，广义相对论基础

莱比锡，Johann Ambr，Barth，1916

64 页，定价 2.40 马克

在袖珍本中作者对他有关广义相对论的研究作了一个总结，头 14 页涉及理论的基础，随后是关于不变量理论方法的一个简要却是完整的表述，这对于理论 [1] 的了解是必要的。后三章是理论自身的展开及它与牛顿力学和牛顿引力论间的关系。对理论的主要看法是，在最近能保证找到一种尽可能清淅的方法，在忽略某些不确定因素后使理论获得事实的验证。最近一本详细论述基本思想，摆脱数学公式的名为"爱因斯坦引力论的基础"的小册子即将在 Springer 出版社出版，作者是天文学家 E. Freundlich。 [2]

---

380 载于《自然科学》4(1916)：481。1916 年 8 月 11 日发表。

[1] *Einstein 1916f* 是 *Einstein 1916e*（文件 30）的一个独立的单印本，在后者发表后不久即问世（见爱因斯坦 1916 年 5 月 24 日致 Paul Ehrenfest 的信）。在爱因斯坦同意将手稿 *Einstein 1916e*（文件 30）交《物理学杂志》出版时，附加一个条件即自己可选择出版者出单印本（见爱因斯坦致 Wilhelm Wien 的信，1916 年 2 月 28 日）。单印本最终由《年鉴》的出版者莱比锡的 Barth 出版。

[2] *Freundlich 1916b*，爱因斯坦为之写了序言[见 *Einstein 1916i*（文件 35）]。

[刘　辽　译正文]

[吴忠超　译注释]

38.“关于辐射的量子理论”

[*Einstein 1916n*]

1916 年 8 月 24 日之后发表

载于《苏黎世物理学会通报》18(1916):47—62。

同一篇文章于 1917 年 3 月 3 日收到并于 1917 年 3 月 15 日发表

载于《物理学期刊》18(1917):121—128。

在这个文件的边页上标明了发表于《物理学期刊》的版本中的发生断页之处:页的标志后紧跟着被引用的页首的第一个词或者词的一部分。我们注意到两个版本间的两点差别。

382

关于辐射的量子理论 [p. 47]

爱因斯坦 [1]

热辐射的颜色分布曲线和 Maxwell 的速度分布律二者形式上的相似非常引人注目，以至长期不能遗忘。事实上，这种相似性导致 W. Wien 完全确定了 [2] 他理论上很重要的论文中的辐射公式，在该论文中他导出他的位移定律

$$\rho=\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right). \tag{1}$$

众所周知，在此研究中他找到了公式 [3]

$$\rho=\alpha\nu^3 e^{\frac{-h\nu}{kT}}, \tag{2}$$

这个公式直到现在还被承认是当$\frac{\nu}{T}$的值比较大时的极限定律(Wien 辐射公式)。

目前我们知道，依靠经典力学和电动力学不能得出可用的辐射公式。经典 [4] 理论必然导致 Reyleigh 公式 [5]

$$\rho=\frac{k\alpha}{h}\nu^2 T. \tag{3}$$

当 Planck 在他的基础研究中，将他的辐射公式

$$\rho=\alpha\nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{4}$$

立足于分立的能量单元(量子理论正是依靠它而迅速创立的)时，导致(2)的 [6] Wien 的研究就自然地迅速地被遗忘了。

383 最近，我找到了一种根据量子理论的基本假设推导 Planck 辐射公式的方法[1]。这个方法也与 Wien 的原始想法有关，因为 Maxwell 曲线与颜色分布曲线 [p. 48] 的关系太引人注意了。这一推导引起关注，不仅是因为它非常简单，更重要的是它揭示了一直还不清楚的物质发射和吸收辐射的过程。关于分子发射和吸收辐射我作了几个假设，这是从量子理论的观点引入的，并由此可以证明在温度平衡

1)《德国物理学会会刊》13/14(1916)，p. 318。在本文的研究中重新审察被引用的论文中的考虑。 [7]

时分子的量子状态的分布与 Planck 的辐射处于平衡状态。根据这一做法，导出 Planck 公式(4)是令人惊异地简单和普遍。这一公式是从下列条件得出的，即分子按量子理论所要求的内能状态的分布，必须是发射和吸收辐射的唯一结果。

如果我所引入的关于辐射和物质的相互作用的假设是正确的话，这个假设必然在分子内能的正确统计分布之外还能提供更多的东西。因为，在发射和吸收辐射之外，对于分子还发生**动量**的转移。这种动量的转移，仅由于辐射和分子之间的相互作用，就导致了分子速度的某种分布。这种分布必须与分子之间由于互相碰撞而导致的分布完全相同，就是说，这种分布必定与 Maxwell 分布完全相同。人们一定要求在温度为 T 的 Planck 辐射场中分子的(每个自由度的)平均动能等于$\frac{kT}{2}$。这一点必须成立，而与发射的频率、吸收的频率和分子的性质无关。我们希望在本文中证明，上述进一步的要求确实相当普遍地被满足的。这样，我关于发射和吸收的基本过程的简单假设获得了新的支持。

[p. 49] 为了导出上述结果，我们必须对前期工作所依据的假设做一些补充，因为那些假设仅仅与**能量**交换有关。出现这样的问题：在分子吸收或发出能量 ε 时，它是否受到冲量？作为一个例子，让我们从经典电动力学的角度考虑发射的情况。当一个物体发射辐射 ε 时，如果整个辐射能量朝向一个方向射出，则物体受到反冲(动量)$\frac{\varepsilon}{c}$；而当辐射具有空间对称性时，例如放出球面波，则物体完全不受反冲。这种两者取一的选择也适用于量子辐射理论。当一个分子在量子论允许的两个状态之间跃迁而放出能量 ε 时，这一元过程可以看成是完全定向的或是部 384
[8] 分定向的，或是空间对称的(无定向的)。**我们发现，只有把这一元过程解释为完全定向的过程，才能得到无矛盾的理论。**理论的主要内容如下：

§1. 量子理论的基本假设。状态的正则分布

根据量子理论，一个分子，除了有取向与平移运动之外，只能取一系列分立的状态 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n, \cdots$，其(内部)能量分别为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$。如果这些分子是温度为 T 的气体的一部分，那么状态 Z_n 出现的概率 W_n 由统计力学中状态的正则配分函数

$$W_n = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \tag{5}$$

给出。式中 $k=\frac{R}{N}$ 是著名的 Boltzmann 常数，p_n 可以称为这个状态的统计"权
[p. 50] 重"，是与分子第 n 个状态性质有关的数，与 T 无关。公式(5)可以由 Boltzmann 385

原理导出，亦可用纯热力学的方法导出。(5)是 Maxwell 速度分布率的具有深远意义的推广。

量子理论最近的主要进展是从理论上计算可能的量子状态 Z_n 和此态的权重 p_n。对于我们目前的研究来说，这些量子态的更详细的确定是不需要的。

§2. 关于通过辐射来交换能量的假设

令 Z_n 和 Z_m 为气体分子的两个理论上可能的量子态，其能量分别为 ε_n 和 ε_m，并满足

$$\varepsilon_m > \varepsilon_n.$$

分子当吸收能量 $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ 时可由 Z_n 态变到 Z_m 态，同样，当放出能量时可由 Z_m 态变到 Z_n 态。吸收或放出的辐射的频率 ν，用两个下标(m,n)来标志。

对于决定这一跃迁的定律，我们引入一些假设，这些假设是由 Planck 关于经典共振子的已知内容移到量子理论中来的。

a)**自发发射**(“*Ausstrahlung*”) 一个振动的 Planck 共振子根据 Hertz 的理论辐射能量，不管它受不受外场的激发。与此相应，一个分子在没有外界的作用之下可以由 Z_m 态变到 Z_n 态而以频率 ν 放出能量 $\varepsilon_m - \varepsilon_n$。在 dt 时间间隔内这 [9]
一情况发生时概率 dW 为

$$dW = A_m^n dt, \tag{A}$$ [p. 51]

386 式中 A_m^n 是一个与相应的两个态有关的常数。

这一假设的统计定律相当于放射性反应，而假设中的元过程相当于只放出 γ 射线的反应。人们不必假设这种元过程不需要时间，只要元过程所需时间与分子处于 Z_1, Z_2 等态的时间相比可以忽略即可。

b)**受激发射**(“*Einstrahlung*”) 在辐射场中，一个 Planck 共振子由于辐射的电磁场对其做功而改变其能量。由于共振子和振动的电磁场的相位不同，这里的功可以是正的也可以是负的。考虑到这一点，我们引入下列量子论的假设。在频率为 ν，密度为 ρ 的辐射的作用下，分子可以从 Z_n 态变到 Z_m 态，而吸收辐射 [10]
的能量为 $\varepsilon_m - \varepsilon_n$，其概率服从下列定律

$$dW = B_n^m \rho dt. \tag{B}$$

同样，$Z_m \to Z_n$ 跃迁也是可能的，在辐射的作用下放出能量 $\varepsilon_m - \varepsilon_n$，其概率定律为

$$dW = B_m^n \rho dt. \tag{B'}$$

B_n^m 和 B_m^n 都是常数。这两个过程都称为受激引起的态改变。

现在的问题是，通过这种状态的改变，传给分子的动量是多少？我们从受激过程开始。如果一束定向的辐射对 Planck 共振子做功，辐射束将失去相应的能

量。根据动量定理,这一能量传递对应于从辐射束到共振子的动量的传递,而共振子在射线束方向承受了一个力的作用。如果能量传递是负的,提供给共振子
[p. 52] 的力也是取相反的方向。在量子假设中,显然意味着下列的说法:如果在受激吸
收中发生了 $Z_n \to Z_m$ 的过程,则分子在辐射传播方向上接受了 387

$$\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)}{c}$$

的动量。如果受激发时产生的 $Z_m \to Z_n$ 跃迁过程中,分子将接受同样大小但方向相反的动量。在共振子同时在多种辐射束照射之下时,我们假设元过程的总的能量 $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ 是由**单独一个**辐射束所获得(或给予)的,同样,动量$\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)}{c}$的传递也是如此。

如果能量损失也通过自发发射发生的,则 Planck 共振子作为整体并无动量传递,因为在经典理论中,辐射发射是以球面波形式发生的。但是我们已经说过,只有假设辐射的发射过程也是有方向性的,我们才能得到一个内部无矛盾的量子理论。于是,辐射的每一种发射过程($Z_m \to Z_n$)都把大小为$\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)}{c}$的动量传递到分子上。对于各向同性的分子,我们必须假设各个方向的辐射是等概率的,对于各向不同性的分子,如果其取向随时间的变化服从随机的规律,我们也有同样的结论。顺便提到,同样的假设也适用于受激发射的统计定律(B)和(B′)。否则,两个常数 B_n^m 和 B_m^n 将与方向有关,后者可以通过各向同性或准各向同性(对时间作平均)的假设来消除。

§ 3. Planck 辐射定律的推导

我们现在要问:什么样的有效辐射密度 ρ 能够保证分子与辐射之间根据统计定律(A),(B)和(B′)进行的能量交换不致打乱分子的正则分布(5)? 为此,必要和充分的条件是,每单位时间内平均说来,发生多少次类型(B)的元过程,就
[p. 53] 要发生多少次类型(A)和(B′)的元过程。利用(5),(A),(B)和(B′)各式,得到对 388
于一切下标(m,n)有关的元过程的方程

$$p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} B_n^m \rho = p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} (B_m^n \rho + A_m^n).$$

进一步,我们假设 ρ 将随温度增加而趋于无穷,则两个常数 B_n^m 和 B_m^n 必须满足下列关系

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n. \tag{6}$$

于是,我们得到动力学平衡的条件:

$$\rho=\frac{\frac{A_m^n}{B_m^n}}{e^{\frac{\varepsilon_m-\varepsilon_n}{kT}}-1}. \tag{7}$$

这就是根据 Planck 定律得到的辐射密度如何依赖于时间的定律。而 Planck 定律则可根据 Wien 位移定律

$$\frac{A_m^n}{B_m^n}=\alpha\nu^3 \tag{8}$$

以及

$$\varepsilon_m-\varepsilon_n=h\nu \tag{9}$$

立即得出。上式中 α 和 h 都是普适常数。为了得到常数 α 的数值，必须有关于电动力学过程和力学过程的严格理论。在目前的情况下，我们必须使用 Reyleigh 的高温极限情况，在这种情况下经典理论在极限下成立。

众所周知，(9)构成了 Bohr 光谱理论中的第二定则，而在 Sommerfeld 和 [11] Epstein 对其进行完善之后，已经可以认为是物理学中确定无疑的一部分。它还隐含着光化学等效定律，像我证明过的那样。[12]

§4. 计算分子在辐射场中运动的方法

389 现在我们来研究在辐射场影响之下分子怎样运动。为此，我们使用在 Brown 运动理论中使用的著名方法，也是我在辐射领域中多次用过的计算方法。[p. 54] 为了简化计算，我们只讨论一维运动的情况，即在坐标系的 X 方向的运动。我 [13] 们只计算直线运动动能的平均值，即跳过速度 v 服从 Maxwell 分布律的证明。设分子的质量 M 足够大，以至于 $\frac{v}{c}$ 的高次幂对于低次幂可以忽略不计，这样，可以用一般的力学去处理分子的运动。此外，我们认为分子只有 m 和 n 两个状态，这样并不影响讨论的普遍性。

在较短的时间 τ 中，一个分子的动量 Mv 经受了两个变化。

尽管各方向的辐射都具有相同的性质，分子将由于其本身的运动受到一个由辐射而造成的阻力。设这个力为 Rv，R 是一个下面要计算的常数。另外，辐射作用的不规则性会使分子得到一个大小和正负都在改变的动量 Δ，如果没有这个作用，力 Rv 的作用将使分子停止下来。因此，这个非系统的影响抵消了第一种力的作用而使分子维持某种运动。在较短时间 τ 的末尾，分子的动量将成为

$$Mv-Rv\tau+\Delta.$$

由于速度的分布是不随时间改变的，上式的平均值必须等于 Mv 绝对值的平均。即两个量的平方，对于长时间或对于大量分子的平均必定相等

[p. 55]
$$\overline{(Mv-Rv\tau+\Delta)^2}=\overline{(Mv)^2}.$$

{1}[14] 因为对于特殊选取的分子来说，v 的系统的影响使我们可以忽略平均值$\overline{v\Delta}$，将上式左边展开后得 390

$$\overline{\Delta^2}=2RM\overline{v^2}\tau. \tag{10}$$

温度 T 时的辐射在分子中产生的平均值 v^2 应该与按照气体分子运动论温度 T 下气体分子获得的平均$\overline{v^2}$相同，因为否则的话，这样的分子将破坏温度 T
[15] 下气体与热辐射之间的平衡。因此，下式必须成立

$$\frac{\overline{Mv^2}}{2}=\frac{kT}{2}. \tag{11}$$

而(10)成为

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau}=2RkT. \tag{12}$$

现在的工作应该如下进行。在给定的辐射[$\rho(\nu)$]的情况下，$\overline{\Delta^2}$和 R 的值可以借
[16] 助我们关于辐射的分子之间的相互作用的假设计算出来。如果根据 Planck 方程(4)将 ρ 表为 ν 和 T 的函数，将结果代入(12)一定会同样地满足此方程。

§5. R 的计算

假设所研究的那种分子中的一个沿坐标系 K 的 X 轴以匀速度 v 运动，我们要问的是，每单位时间由辐射传递给分子的动量的平均值是多少？为了能够计算这一点，我们必须在与分子相对静止的坐标系 K' 中讨论辐射，因为我们关于发射和吸收的假设是在分子静止的情况下提出的。由 K 到 K' 的变换已在文献
[17] 上出现多次，而且在 Mosengeil 的 Berlin 学位论文中写得最为精确。然而，为了
[p. 56] 完整，我将在本文中重复一下这一简单方法。

辐射对 K 是各向同性的，即单位体积在频率范围 $\mathrm{d}\nu$ 内的辐射向射束方向上无穷小立体角 $\mathrm{d}\kappa$ 内的贡献为 391

$$\rho\mathrm{d}\nu\,\frac{\mathrm{d}\kappa}{4\pi} \tag{13}$$

式中 ρ 只依赖于 ν 而不依赖于方向。在坐标系 K' 中，与这一辐射对应的是频率范围为 $\mathrm{d}\nu'$，立体角为 $\mathrm{d}\kappa'$ 的另一特定的辐射，这一特定辐射的体密度是

$$\rho'(\nu',\varphi')\mathrm{d}\nu'\frac{\mathrm{d}\kappa'}{4\pi}. \tag{13'}$$

这一公式就定义了 ρ'，它是与方向有关的，通常用与 X' 轴的夹角 φ' 和它在 $Y'-Z'$ 面上的投影与 Y' 轴的夹角 ψ' 来定义。这些角对应于角 φ 和 ψ，$\mathrm{d}\kappa$ 对于原坐标系 K 的方向 φ 和 ψ 也是类似地这样定义的。

其次，显然(13)与(13′)之间也应有同样的变换关系，因为它们是相应方向上的平面波的振幅的平方。因此，在我们需要的近似下，我们有

$$\frac{\rho'(\nu',\varphi')\mathrm{d}\nu'\mathrm{d}\kappa'}{\rho(\nu)\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\kappa}=1-2\frac{v}{c}\cos\varphi \tag{14}$$

$$\rho'(\nu',\varphi')=\rho(\nu)\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\nu'}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\kappa'}\left(1-2\frac{v}{c}\cos\varphi\right). \tag{14′}$$ {2}

进而，在同一近似下，相对论提供了下列公式

$$\nu=\nu'\left(1-\frac{v}{c}\cos\varphi\right) \tag{15}$$

$$\cos\varphi'=\cos\varphi-\frac{v}{c}+\frac{v}{c}\cos^2\varphi \tag{16}$$

$$\Psi'=\Psi. \tag{17}$$

在同样的近似下，由(15)得

$$\nu=\nu'\left(1+\frac{v}{c}\cos\varphi'\right).$$

392 因此，在同一近似下有 [p. 57]

$$\rho(\nu)=\rho\left(\nu'+\frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'\right)$$

或者

$$\rho(\nu)=\rho(\nu')+\frac{\partial\rho}{\partial\nu}(\nu')\cdot\frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'. \tag{18}$$

根据(15)、(16)和(17)，还有

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\nu'}=1+\frac{v}{c}\cos\varphi'$$

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\kappa'}=\frac{\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\Psi}{\sin\varphi'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\Psi'}=\frac{\mathrm{d}(\cos\varphi)}{\mathrm{d}(\cos\varphi')}=1-2\frac{v}{c}\cos\varphi'.$$

由于上述二式和(18)，(14′)成为

$$\rho'(\nu',\varphi')=\left[(\rho)_{\nu'}+\frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'\left(\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)_{\nu'}\right]\left(1-3\frac{v}{c}\cos\varphi'\right). \tag{19}$$

根据(19)和我们关于分子自发发射和受激发射过程的假设，我们很容易算出单位时间传给分子的动量。但是，在做此之前，我们还要对我们所用的方法的正确性讲几句话。有人可能反对说，(14)、(15)和(16)是根据 Maxwell 的电磁场理论而来，这个理论与量子理论是不能共存的。但这种反对意见只触及事情的形式而没有触及实质。因为无论电磁过程的理论怎样变化，Doppler 原理和光行差定律肯定会保留下来的，而与此同时，(15)和(16)也肯定会保留下来的。再说能量关系(14)的正确性是超越于二象性理论之上的。根据相对论，变换定

律也可以应用于静止时密度无穷小而以(近)光速运动的质量的能量密度。因
[18] 此,(19)在任何辐射理论中都应该是成立的。

根据(B),在立体角 $d\kappa'$ 中的辐射应该在每秒产生

$$B_n^m\rho(\nu',\varphi')\frac{d\kappa'}{4\pi}$$

次 $Z_n\to Z_m$ 型的受激元过程,如果过程后分子立即回到 Z_n 态的话。但实际上根 393
据(5),分子每秒钟在 Z_n 态停留的时间是

[p. 58]

$$\frac{1}{S}p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}},$$

式中我们用了下列简写

$$S=p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}+p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}. \tag{20}$$

因此实际上元过程的次数是

$$\frac{1}{S}p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}B_n^m\rho(\nu',\varphi')\frac{d\kappa'}{4\pi}.$$

在每一个元过程中,在 X' 轴的正方向上有动量 $\frac{\varepsilon_m-\varepsilon_n}{c}\cos\varphi'$ 传给了分子。用同样方法,我们根据(B′)得知,$Z_m\to Z_n$ 类型的元过程每秒钟发生的次数是

$$\frac{1}{S}p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}B_m^n\rho(\nu',\varphi')\frac{d\kappa'}{4\pi}$$

而每一次元过程都有 $-\frac{\varepsilon_m-\varepsilon_n}{c}\cos\varphi'$ 动量传给分子。考虑到(6)、(9),每一秒钟通过受激过程传给分子的总动量是

[19]

$$\frac{h\nu'}{cS}p_nB_n^m(e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}-e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}})\int\rho(\nu',\varphi')\cos\varphi'\frac{d\kappa'}{4\pi},$$

式中积分应当对所有立体角进行。将此积分算出,并利用(19),得

$$-\frac{h\nu}{c^2S}\left(\rho-\frac{1}{3}\nu\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)p_nB_n^m(\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}-\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}})\cdot v.$$

式中重新使用 ν 代替 ν' 表示有效频率。

[p. 59] 上式表示平均说来在单位时间传给以速度 v 运动的分子的总动量。至于自发发射,显然在坐标系 K' 看来,与外界辐射没有关系的自发发射出的辐射没有 394
占优势的方向,因此平均说来,自发发射不能给分子带来任何动量。所以,我们讨论的最后结果是

$$R=\frac{h\nu}{c^2S}\left(\rho-\frac{1}{3}\nu\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)p_nB_n^m\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{h\nu}{kT}}). \tag{21}$$

§6. $\overline{\Delta^2}$的计算

计算元过程的不规则性对于分子力学行为的影响要简单得多。因为从我们开始认为足够的近似程度看来，我们可以把计算基于分子处于静止条件下进行。

假设某些事件使得在 X 方向上传给分子的动量为 λ。在各种的情况下，这个动量可以有各种不同的方向、也可以有各种不同的大小。设 λ 服从一个统计定律，根据此定律，λ 的平均值为零。设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$是各种互相独立的原因引起的动量，全都在 X 方向而且全都传给了一个分子，使得传给分子的总动量 Δ 为

$$\Delta = \Sigma\lambda_\nu.$$

如果对于单独的 λ_ν 的平均值$\overline{\lambda_\nu}$为零，则 [20]

$$\overline{\Delta^2} = \Sigma\overline{\lambda_\nu^2}. \tag{22}$$

如果单独动量的平均值$\overline{\lambda_\nu^2}$彼此相等（$=\overline{\lambda^2}$），而产生动量的原因的数目为 l，可得下列关系式

$$\overline{\Delta^2} = l\overline{\lambda^2}. \tag{22a}$$

根据我们的假设，每一个元过程，不论是受激的还是自发的，都传给分子下列动量

$$\lambda = \frac{h\nu}{c}\cos\varphi,$$

式中 φ 是 X 轴与服从随机定律的方向的夹角，因此我们得

$$\overline{\lambda^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2. \tag{23}$$ [p. 60]

我们可以使用(22a)，因为我们已假设所有产生动量传递的事件是互相独立的。
395 因此 l 是在时间 τ 之内发生的元事件的总数。此数是时间 τ 之内发生受激过程 $Z_n \to Z_m$ 的数目的两倍，因此有

$$l = \frac{2}{S} p_n B_n^m e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \rho\tau. \tag{24}$$

由(23)，(24)以及(22)得到

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = \frac{2}{3S}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 p_n B_n^m e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \rho. \tag{25}$$

§7. 结　果

为了说明根据我们的基本假设所得由辐射传给分子的动量并不影响分子的

热力学平衡,我们只需将我们计算所得$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau}$和$R$的值代入到(21)和(23)中。我们根据(4)将(21)中的

$$\left(\rho-\frac{1}{3}\nu\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

用$\frac{\rho}{3}\frac{h\nu}{kT}$来代替,立刻发现(12)是满足的。

至此,我们的讨论即将结束。这一讨论给在§2中提出的关于辐射和物质之间的相互作用的假设,即关于发射和吸收过程或者说关于自发和受激发射过程的假设,以十分有力的支持。我是从打算以类似 Planck 关于共振子的经典理论的方法,以最简单的方法假设分子的量子理论行为的愿望出发做出这些假设的。由这一物质的普遍假设出发,可以毫不费力地得出第二定则[即方程(9)]和 Planck 的辐射公式。

关于自发发射和受激发射过程传给分子动量的结果,对我来说是最重要的
[p.61] 结果。如果企图改变我们关于动量的假设,其结果将是违反(12)。承认此
式——这是热力学所必须的——而不用我们的假设,看来是难于做到的。因此, 396
我们可以认为已经肯定地被证明了下列各点。

如果一束辐射通过元过程(受激发射过程)向靶分子施与或从靶分子接受一份能量量子$h\nu$,则永远有一份动量$\frac{h\nu}{c}$传给分子,其方向当能量被分子吸收时与射束方向一致,当分子放出能量时与射束的方向相反。如果一个分子受到多束辐射的照射,则永远只有一束辐射参与受激元过程,只有这束辐射决定传给分子的动量的方向。

如果分子在没有外界影响的情况下失去能量$h\nu$,即以辐射的形式放出能量(自发发射),同时这一过程也是有方向的。所放出的辐射并不是以球面波的形式放出的。分子受到的反冲大小仍为$\frac{h\nu}{c}$,其方向在目前阶段的理论中是随机的。

(12)所要求的元过程的性质使得建立一个辐射的类量子理论成为不可避
[21] 免。目前理论的弱点在于,第一,理论不能使我们同物质的波动理论联系起来,
第二,元过程发生的时间和发生的方向仍是随机的。

这里还需要提一个一般的评论。近乎所有的热辐射理论都基于对分子和辐射的相互作用的研究,但是一般说来,人们往往满足于考虑**能量**的交换而忽略了**动量**的交换。人们认为这样做是可以的,因为与别的导致运动的原因相比,传来的动量非常小,动量的交换往往被推到了现实的背景去。但是,在**理论**研究中,
这些微小的效应是同辐射产生的较明显的**能量**传递效应同等重要的,因为能量 397

和动量是永远内在地联系在一起的。因此,一个理论在表明辐射传给物质的动量像热力学理论所要求的那样导致了运动,这个理论才能被认可。

---

398 载于《苏黎世物理学会通报》18(1916):47—62.1916年8月24日之后发表(见1916年8月24日爱因斯坦致 Michele Besso 的信,其中爱因斯坦谈到完成了这一篇文章)。

[1]爱因斯坦就本文的专题在1916年10月27日和11月10日的德国物理学会会议上作了演讲(见《德国物理学会会刊》18(1916):367,368. 本文的一些结果早已在 *Einstein 1916j*(文件34)中发表过。

[2]见 *Wien 1894*。

[3]见 *Wien 1896*。

[4]关于得到此结果的几种不同方法,见 *Einstein 1905i*,*1909b*(第二卷,文件14和56)以及 *Lorentz 1912*。

[5]见 *Rayleigh 1900*。

[6]见 *Planck 1900b*。

[7]*Einstein 1916j*(文件34)。

[8]在一封致 Besso 的信中评论本文时,爱因斯坦特别强调了这一点(见爱因斯坦于1916年8月24日致 Michele Besso 的信)。

[9]"μ"应为"ν"。

[10]*Einstein 1917c*,这是本文在《物理期刊》上重新发表,已用"*Hypothese*"代替"*Hypothesen*"。

[11]见 *Bohr 1913*,*Sommerfeld 1915* 和 *Epstein 1916a*。

[12]见 *Einstein 1916j*(文件34),p. 323。

[13]爱因斯坦在 *Einstein 1909b* 和 *Einstein 1909c*(第二卷,文件56和文件60)中,第一次把他为研究 Brown 运动而创造的方法应用于辐射问题。在他与 Ludwig Hopf 的研究[*Einstein Hopt 1910b*(第三卷,文件8)],和与 Otto Stern 的研究[*Einstein* 与 *Stern 1913*(第四卷,文件11)]中,他再次使用了这一方法。关于这方面的历史的讨论,也见 *Klein 1964*。

[14]在 *Einstein 1917c* 中,下面的话被插在上一行的"des"和"wir"之间:"Moloküls Besonders in Rechnung gezogen haben, werden."(特别是在计算中应考虑到分子)

[15]均分定理在它的最广泛意义上的这种应用,追溯到爱因斯坦关于 Brown 运动的第一篇文章[*Einstein 1905k*(第二卷,文件16)]。

[16]关于量 R 和$\overline{\Delta^2}$的另一种推导,也见 *Friedberg 1994*。

[17]Kurd von Mosengeil 的学位论文是在他去世后发表的,*Mosengeil 1907*。Max Planck 为它的发表做了准备工作,他曾是 Mosengeil 的导师。

[18]爱因斯坦始终认为理论的结果可能是,且常常是比它们推导似乎要预示的普遍的多。见,例如,*Einstein 1903*(第二卷,文件4)和 *Einstein 1904*(第二卷,文件5)。

[19]"$\cos\varphi$"应为"$\cos\varphi'$"。

[20]"$\lambda\nu$"应为"λ_ν"。

[21]30年后,Wolfgang Pauli 在为爱因斯坦60诞辰所写文章中注意到了这些重要评论。见 *Pauli 1949*,特别是 p. 156。

英译者附注:

{1}在注[14]中提及的丢失德文已在英译中在括号中补上了。

{2}德文中"$\frac{dk}{dk}$"已更正为"$\frac{d\kappa}{d\kappa}$"。

[喀兴林　译校正文]

[高尚惠　译校注释]

399

39.“水波和飞行的初级理论”

[*Einstein 1916m*]

1916年8月25日发表

载于《自然科学》4(1916):509—510。

[1] 水波和飞行的初级理论 400

爱因斯坦

如何解释我们的飞机以及在天空翱翔的鸟类翅膀的举力?关于这个问题的糊涂观念广为流传。我必须承认我在专业的文献中连最简单的答案都找不到。因此,我希望读者欣赏以下简短的有关液体运动理论的讨论。

假定内摩擦可忽略的不可压缩的液体沿着箭头方向流过一根管子(图 1)。我们想得知管子里的压力分布。由于在每一个截面上的每秒流过的液体的量必须相同,所以流速 q 在最大截面处必须最低,而在最小截面处最快。因此在图 1 中的 L 处的液体粒子的速度最小,而且速度往 R 方向逐渐增大。只有作用到液体粒子上的压力才能对它们加速。为了使圆柱流体粒子 F 朝右方加速运动,它的尾端表面 A 比前端表面 B 受到更大的压力。A 处的压力超过 B 处的压力。重复一下结论,管子中的压力从 L 到 R 不断地降低。如果液体的流向相反,压力分布保持不变(即压力从 L 往 R 减小)。

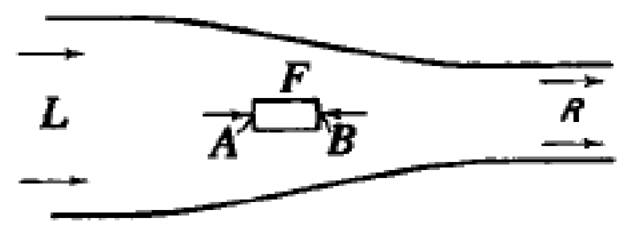


图 1

推而广之,对此早已众所周知的无摩擦的液体的流体动力学定理,我们可作如下陈述。当我们跟踪一个稳恒流体中的一个液体粒子的路径时,我们发现速度 q 低的地方,压力 p 总是较大,反之亦然。这个不可压缩液体的定理可以定量地用著名的方程表述为

$$p=\text{常数}-\frac{1}{2}\rho q^2,$$

此处 ρ 是液体的密度。

我们在下面考虑这个定理的几个熟知的例子。一个器皿中的液体在压力之下流出(Toricelli)。在 J 点(图 2)处比在 A 点压力较大,而速度较小,这样在流出的过程中

$$p+\frac{1}{2}\rho q^2$$

为常数。

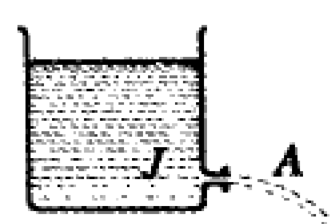


图 2

第二个例子是喷雾器(图 3)。从 L 处吹入的空气流在出口处向大气喷出后

四向散开，同时速度降低。因此，P 点的压力比 G 点的压力更小，也比周围的静止的空气压力小。由于 P 点的低压，液体就从器皿 G 中流向管子 S 再被吸上来，然后被气流吹开形成小滴。（这里是空气流而不是不可压缩的液体，这对我们的考虑没有本质的影响。）

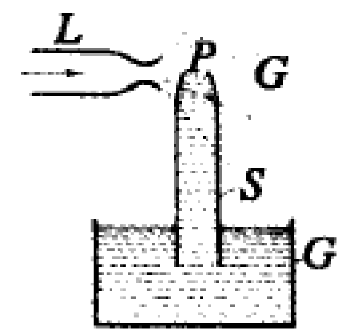


图 3

进行了这些准备之后，让我们考虑水波。假定 W（图 4）是一个圆桶形波状的刚壁，并和纸的平面垂直；它在一边形成了从左到右流动的流体的边界。我们想知道，流体对墙的压力。显然，在 B 位置上流体的截面积较大，而在 T 位置上较小。因此，液体在 B 点流得较慢，

401 而在 T 点较快。结果，流体就进一步压迫壁上业已存在的鼓包，使之更凸出。因此，如果壁是无限可塑并可无限拉伸的话，流体不能保持一个自由的表面。[1]

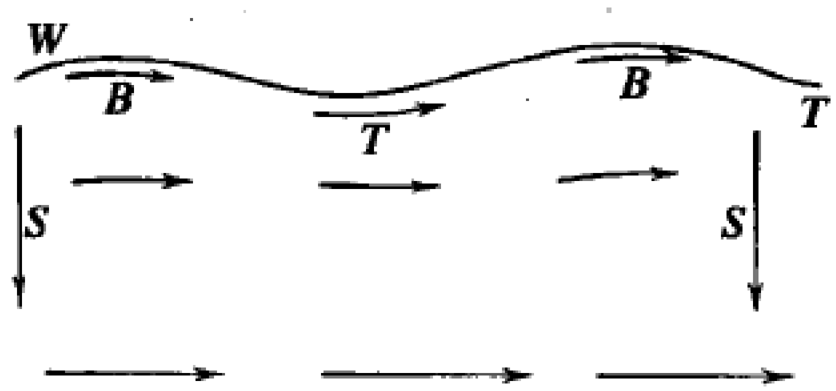


图 4

然而，正如前面的例子，所有这些考虑都是基于以下假设，除了流动本身，并没有任何其他在流体中产生压力的原因。但是如果在箭头 S 的方向上有引力作用，它会在液体中产生附加的压力，越往底部压力越大。如果只有引力作用，B 点的压力就比 T 点小。

结果，流动和引力在 B 和 T 之间产生的压力差符号相反。很显然，可以选择流体流动的速度，使得由两种原因引起的在 B 和 T 之间的压力差为零。在那种情形下，我们可以将壁 W 移开而不干扰流体的运动。我们就得到了具有波状表面的流体运动，正如在一个溪流障碍物后面看到的那样。当我们站在桥柱之上，往下游看桥柱后面的水就会注意到这一点。

想象一位以向右流去的液体流的内部速度运动的观察者描述的全过程，那么我们就在面前得到通常的水波。对于深潜下去的观察者，液体处于静止状态，而峰 B 和谷 T 以常数速度向左运动。

因此统计和动力产生在不同高度上刚好相互平衡的压力差，才可能导致波动过程。

可以非常类似地解释翼的举力。假定空气流或者液体沿切向流过一个刚体的柱形的壁 W（图 5），后者和纸平面相垂直，并且往上还有一个鼓包。如果没有鼓包的话，除了不可回避的摩擦作用外，在表面上不存在任何力。然而，这个鼓

1）众所周知，在这些论证的基础上便能理解飘动的旗帜。

包会影响壁上面和下面的流体流动,因此产生了压力。

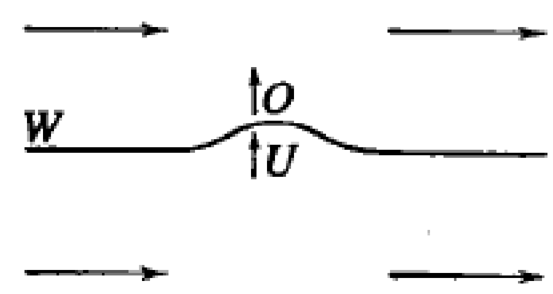


图 5

鼓包对于下面的流动代表了截面的局部增加,这意味着在 U 点流速降低,压力较大。然而,在上面 O 点鼓包收缩了截面,局部增加了流速,并使压力减小为零。因流动引起的动力压力对壁产生一个向上的力 。人们显然要意识到,为了产生这个力,只有壁上足够大的部分才能在流体中导致有效的鼓包。这样,我们就得到支持飞机或鸟类在空中不必扇动

[2] 翅膀就能飞行的翼。

从这个简单的分析中,人们看到飞机只有在克服不可避免的摩擦的障碍时才需要做功。没有摩擦的话,一只鸟可以不做任何功即能在任何水平的路径上飞行。

载于《自然科学》4(1916):509—510。1916 年 8 月 25 日发表。 402

[1]爱因斯坦在 1916 年 6 月 2 日的德国物理学会会议上就本文的专题做了演讲(见《德国物理学会会刊》18(1916):297)。

[2]爱因斯坦在这里讨论的机翼设计,后来被称为"Katzenbuckelfläche""凯兹贝克机翼"("猫背机翼")。1954 年 8 月 26 日 Paul Ehrhardt 致爱因斯坦的信,它被翻印在 *Interavia* 10(1955):684。也见 1916 年 5 月 14 日爱因斯坦致 Michele Besso 信中,对机翼的简短讨论。在 1917 年期间爱因斯坦吸引了柏林飞机公司 LVG(Luftverkehrsgesellschaft)对此设计的注意,并进行了一些空中试验。当结果证明不能令人满意时,试验被停止了,正如 40 年后 Paul Ehrhardt 所描述的那样,LVG 实验部技术主任和试验这架飞机的飞行员说:"在起飞以后,我悬在空中像一支'怀胎的鸭子'……"("wie eine'schwangere Ente'… hing ich nach dem Start in der Luft."Paul Ehrhardt 1954 年 8 月 26 日致爱因斯坦的信)。1954 年 9 月 7 日爱因斯坦在给 Ehrhardt 的复信中写道:"我不得不承认,我常常因我那些日子的愚蠢感到惭愧。"("Ich muss gestehen,dass ich mich meines damaligen Leichtsinns oft geschämt habe")

在 1917 年,爱因斯坦还在劝说在 Berlin 的另一位飞机制造商,Mercur Flugzeugbau G. m. b. H.(有限责任公司)(见 1917 年 12 月 29 日 Mercur Flugzeugbau 致爱因斯坦的信)。在德国飞机工业的历史上,爱因斯坦在 1918 年 6 月曾被列为这家公司的"科学合作者"("Wissenschaftlicher Mitarbeiter")(见 *Geschichte1918*,p. 92)。

[吴忠超 译校正文]
[高尚惠 译校注释]

403 40. “评 Friedrich Kottler 的文章：‘论爱因斯坦的等效假说和引力’”

[*Einstein 1916p*]

注明 1916 年 10 月
1916 年 10 月 19 日收到
1916 年 12 月 21 日发表

载于《物理学杂志》51(1916)：639—642。

评 Friedrich Kottler 的文章：“论爱因斯坦的等效假设和引力”[1] 404

爱因斯坦

对广义相对论进行批判性分析的文章中，特别值得注意的是 Kottler 的论
[2] 述，因为这位同行真正深入到该理论的精神实质。我这里只讨论他最近的一篇文章。

Kottler 声称，我在近期的文章里放弃了“等效原理”；可我确实引入了它，为的是统一“惯性质量”和“引力质量”这两个概念。这种看法必定是基于这样一个事实：我们两人对“等效原理”的理解不同；因为在我看来我的理论完全依靠这个
[3] 原理。因此我复述如下：

1. 狭义相对论的极限情形 假定存在一个没有引力场的有限时空区域；也就是说，假定可以引入一个坐标系 K（Galilei 坐标系），对于该坐标系中上述区域下面陈述成立：如同狭义相对论的假设的情形，假定该坐标系的各个坐标都可以用单位量杆和单位时钟按已知方式直接加以测量；相对于这个坐标系，一个孤立的质点，正如 Galilei 所假设的那样，将做匀速直线运动。

2. 等效原理 从狭义相对论的极限情形出发，人们会问：如果所考虑的区域
中有一位观察者相对于 K 做匀加速运动，那么他是否必定认为自己处于加速运 405
动的状态？抑或是他也可以——按照目前所知的自然定律——将自己的状态解释为“静止”的？这个问题，表述得更准确一些，即：目前所知的自然定律（近似地），是否允许我们将一个相对于 K 作匀加速运动的坐标系 K' 看成是静止的？更一般的表述为：相对性原理能否推广到相互作匀加速运动的坐标系？答案是：就我们所知的自然定律来说，没有什么妨碍我们将坐标系 K' 看成是静止的，只要我们假定存在一个相对于 K' 的引力场（一级近似为均匀的）。因为在一个均匀的引力场中，正如 K' 中的情形，所有物体不论其物理性质如何，都将以同样的加速度下落。我把下述假设称之为“等效原理”，即：K' 可以严格地看成是静止的，因此一切自然定律都适用于 K'。

---

[1] 1)《物理学杂志》50(1916)，p. 955。

3. 引力场不是纯粹由运动学产生的　上面的考虑也可以反过来。令我们上面讨论过的伴有引力场的坐标系 K'为原始坐标系。这时可以引入一个相对于 K'作加速运动的新坐标系 K，使得(孤立的)质量(在所讨论的区域中)做匀速直线运动。但我们却不能夸大其词地说：如果 K'是一个伴有任意引力场的坐标系，那么总能找到一个坐标系 K，相对于 K 孤立的质量做匀速直线运动，也就是说，相对于 K 引力场并不存在。这种假设之荒谬是显而易见的。如果相对于 K'的引力场是一个静止质点的引力场，那么任何处心积虑选取的坐标变换都不可能将该质点整个邻域的引力场去掉。因此，我们绝不能坚持认为，引力场能够用纯粹的运动学来解释；引力的"运动学的、非动力学的诠释"是不可能的。仅仅 [4]
406 通过 Galilei 坐标系之间的加速变换，我们不能得到任意的引力场，而只能得到一种特殊类型的引力场；但这些引力场也必定与所有其他引力场一样服从相同的定律。这是等效原理的另一种表述(应用到引力时的特殊形式)。

只要引力方程组在相对于 Galilei 坐标系作非匀速运动的**任何**坐标系 K'中不再保持不变，引力理论就违背了等效原理——在我所理解的意义上。这项指控，显然对我的广义协变方程组理论无效，因为我的方程组在所有参照系中都保持不变。**方程组的广义协变性假设已经把等效原理作为特例包含在内。**

4. 引力场的各种力是"真实的"力吗？　Kottler 指责说，我把运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_\nu}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \nu\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s}=0$$

的第二项解释成引力场对质点的影响，第一项或多或少当作 Galilei 惯性的表达式。依其所述，这会引入"引力场的真实的力"，并且不符合等价原理的精神。我对此的回答是：这个方程作为一个整体是广义协变的，因此完全遵守等效假设。我对方程各部分的命名，只是为了诉诸人们的物理思考习惯，原则上讲是没有意义的。这在所谓"引力场的分量"

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}=-\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \nu\end{Bmatrix}$$

和"引力场的能量分量"t_σ^ν 这两个概念上表现得最明显。从原则上讲，引入这些
407 名称是没必要的；但至少就目前而言，为了保持观念的连续性，我认为这样做并非毫无意义。这就是我为什么要引入这些量的缘故，尽管它们都没有张量性质。但只要方程组是协变的，等效原理就会得到满足。

5. 为满足方程组的广义协变性所付出的代价，就是放弃普通的时间测量和 Euclid 式的空间测量。 Kottler 相信他不用付出这个代价也能做到。但就在他所考虑的坐标系 K'中(K'相对于一个 Born 意义上的 Galilei 坐标系作加速运 [5]
动)，人们就不得不放弃普通的时间测量。显然，按相对论的观点，这时我们也必

须放弃普通的空间测量。如果 Kottler 先生试用更一般的方式来执行自己的预
[6] 定的理论计划,那么他肯定会说服自己,这是必要的。

1960 年 10 月

载于《物理学杂志》51(1916):639—642。注明 1916 年 10 月,1916 年 10 月 19 日收到,1916 年 12 月 21 日发表。 408

[1]*Kottler 1916b*. Friedrich Kottler(1886—1965)是 *Wien* 大学的讲师。

[2]Kottler 的另一些文章是 *Kottler 1912*,*1914a*;*1914b* 和 *1916a*. 在 *Einstein and Grossmann 1913*(第四卷,文件 13)和 *Einstein 1913c*(第四卷,文件 17)中引用了第一篇文章,它给出 Maxwell 方程的一个协变表述,但与引力理论没有任何联系。

[3]在爱因斯坦对引力的相对性理论探索中等效原理的作用详情,还可见第四卷,编者按,"爱因斯坦论引力和相对论:静态场",pp. 122—128,而关于等效原理的各种表述的历史讨论,见 *Norton 1985*。

[4]Kottler 使用引号中的话去概括他的结果与爱因斯坦理论间的主要区别(见 *Kottler 1916b*,p. 956)。

[5]关于他对具有恒定的固有加速度的加速运动的研究,见 *Born 1909*。

[6]Kottler 在他的文章中指出,他的一些研究结果已有初步的特性,军事服役阻止了他的进一步的研究(见 *Kottler 1916b*,p. 956)。在两年后发表的一篇文章(*Kottler 1918*)中,他说他已放弃了 *Kottler 1916b* 中所用的方案,因为它导致了一些矛盾。

[高尚惠 译校]

409

41. “Hamilton 原理和广义相对论”

[*Einstein 1916o*]

1916 年 10 月 26 日收到
1916 年 11 月 2 日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1916):1111—1116。

[1]

Hamilton 原理和广义相对论 410

爱因斯坦

H. A. Lorentz 和 D. Hilbert 最近成功地将广义相对论表述为一种特别全面的形式[1]，他们单纯由变分原理导出了广义相对论的基本方程。本文也将作同样的事情。我的目的是，在广义相对性原理允许的范围内将二者的基本联系表
[3] 述得尽可能透明和全面。与 Hilbert 不同的是，我将对物质结构使用尽可能少的假设。另一方面也与我本人最近对这方面有关工作不同，对坐标系选择仍将
[4] 是完全自由的。

§1. 变分原理和引力及物质的场方程

引力场像通常那样用张量[2] $g_{\mu\nu}$（或 $g^{\mu\nu}$）描写，物质（包括电磁场）则用任意数目的时空函数 $q_{(\rho)}$ 描写，我们忽略其不变性理论特点。令 $\mathfrak{H}$ 为下列各量的函数：

{1} $$g^{\mu\nu},g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}\right),g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}\left(=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}\partial x_{\tau}}\right)\text{以及 }q_{(\rho)},q_{(\rho)\alpha}\left(=\frac{\partial q_{(\rho)}}{\partial x_{\alpha}}\right).$$

这时，变分原理

$$\delta\left\{\int\mathfrak{H}\mathrm{d}\tau\right\}=0 \tag{1}$$

可提供与函数 $g_{\mu\nu}$ 和 $q_{(\rho)}$ 的数目总和一样多的微分方程，而这些函数正是要被确 411
[5] 定的，假定我们同意在变分时要求这些函数 $g^{\mu\nu}$ 和 $q_{(\rho)}$ 彼此互相独立地变化，而且在积分边界上 $\delta q_{(\rho)}$，$\delta g^{\mu\nu}$ 以及 $\dfrac{\partial\delta g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$ 均为零。

{2}[6] 我们现在假设 $\mathfrak{H}$ 是 $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ 的线性函数，而 $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ 的系数只依赖于 $g^{\mu\nu}$。这时，变分原理(1)可用对我们更方便的形式取代。利用合适的分部积分，我们得：

---

[2] 1) H. A. Lorentz 的 4 篇论文发表在《阿姆斯特丹皇家科学院通报》的 1915 和 1916 两卷；D. Hilbert 的论文在《格丁根通讯》1915，Heft. 3。

2) 在目前情况下，还未用到 $g_{\mu\nu}$ 的张量性质。

$$\int \mathfrak{H} \mathrm{d}\tau = \int \mathfrak{H}^* \mathrm{d}\tau + F, \tag{2}$$

式中 F 是一个积分，其积分区域是我们所研究的整个区域的边界，而 $\mathfrak{H}^*$ 则只依赖于 $g^{\mu\nu}, g_\sigma^{\mu\nu}, q_{(\rho)}, q_{(\rho)\alpha}$ 而与 $g_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$ 无关。对于我们所需要的变分，由(2)得

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H} \mathrm{d}\tau\right\} = \delta\left\{\int \mathfrak{H}^* \mathrm{d}\tau\right\}, \tag{3}$$

根据此式，我们可以将变分原理(1)式改为更为方便的形式

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}^* \mathrm{d}\tau\right\} = 0. \tag{1a}$$

进行对 $g^{\mu\nu}$ 以及 $q_{(\rho)}$ 的变分，得到引力和物质的场方程[1)]

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{5}$$

§ 2. 引力场单独存在的情况

能量分量不能分成两部分，使得一部分属于引力场，另一部分属于物质。除非我们做出关于 $\mathfrak{H}$ 如何依赖于 $g^{\mu\nu}, g_{\sigma\tau}^{\mu\nu}, q_{(\rho)}, q_{(\rho)\alpha}$ 的特殊的假设。为了达到这一目的，我们假设

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \mathfrak{M}, \tag{6}$$

412 式中 $\mathfrak{G}$ 只依赖于 $g^{\mu\nu}, g_\sigma^{\mu\nu}, g_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$，而 $\mathfrak{M}$ 只依赖于 $g^{\mu\nu}, q_{(\rho)}, q_{(\rho)\alpha}$。

于是方程(4)，(5)成为 {3}

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{8}$$

式中 $\mathfrak{G}^*$ 与 $\mathfrak{G}$ 的关系和 $\mathfrak{H}^*$ 与 $\mathfrak{H}$ 的关系相同。

必须指出，如果我们假设 $\mathfrak{M}$ 或 $\mathfrak{H}$ 依赖于 $q_{(\rho)}$ 的一阶以上的高阶导数，则方程(8)或(5)将成为另一种形式。与此同样，如果我们认为 $q_{(\rho)}$ 不是彼此独立而是彼此根据某些条件互相联系的话，方程(8)和(5)也将成为另一种形式。所有这些都与下面的讨论无关，因为下面的讨论只根据(7)，而(7)是对 $g^{\mu\nu}$ 变分而得 [7] {4}

---

1)作为一种简写，公式中的求和号均已省去，在一项中一个指标出现两次的，就应对此指标求和，例如在(4)式中 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)$ 即表示 $\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)$。

出的。

§ 3. 基于不变量理论的引力场方程的性质

现在我们引入一个假设，即

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \tag{9}$$

是一个不变量。这个假设确定了 $g_{\mu\nu}$ 的变换性质。我们对描写物质的 $q_{(\rho)}$ 不做任何预先假设。但是认为在任意时空坐标变换之下，

$$H=\frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{-g}},\ G=\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}\ \text{和}\ M=\frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-g}}$$

都是不变量。由这些假设可以得出，由(1)式推出的方程(7)和(8)具有普遍的不变性。由此进一步得出，G 等于(相差一个常数因子)Riemann 曲率张量的标量，因为再没有别的不变量具有 G 所需要的性质[1]。由此 $\mathfrak{G}^*$ 以及方程(7)的左方也就完全确定了[2]。 413

由广义相对性的假说产生函数 $\mathfrak{G}^*$ 的一些性质，我们现在就来推导。为此目的，我们进行一个无限小的坐标变换，令

$$x'_\nu=x_\nu+\Delta x_\nu, \tag{10}$$

式中 Δx_ν 是任意符合条件的无限小的坐标的函数。x'_ν 是世界点在新坐标系中的坐标，此点在原坐标中的坐标为 x_ν。与坐标的变换一样，任意量 Ψ 也有下列形式的变换规律

$$\Psi'=\Psi+\Delta\Psi,$$

式中的 $\Delta\Psi$ 必须永远可以用 Δx_ν 表出。由 $g^{\mu\nu}$ 的协变性质，我们可以很容易地导出 $g^{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}_\sigma$ 的变换规律：

$$\Delta g^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}\frac{\partial\Delta x_\nu}{\partial x_\alpha}+g^{\nu\alpha}\frac{\partial\Delta x_\mu}{\partial x_\alpha} \tag{11}$$

$$\Delta g^{\mu\nu}_\sigma=\frac{\partial(\Delta g^{\mu\nu})}{\partial x_\sigma}-g^{\mu\nu}_\alpha\frac{\partial\Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma}. \tag{12}$$

(5)[8] $\Delta\mathfrak{G}^*$ 可以利用(11)和(12)式算出，因为 $\mathfrak{G}^*$ 只依赖于 $g^{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}_\sigma$。这样一来，我们可以得到下列方程

---

1)这也就是为什么广义相对论的要求导致一个截然不同的引力理论的原因。

2)进行分部积分可得

$$\mathfrak{G}^*=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left[\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\mu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix}\right].$$

$$\sqrt{-g}\Delta\left(\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}\right)=S_\sigma^\nu\frac{\partial\Delta x_\sigma}{\partial x_\nu}+2\frac{\partial\mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}}g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\Delta x_\sigma}{\partial x_\nu\partial x_\alpha},\tag{13}$$

在上式中我们使用了下列缩写：

$$S_\sigma^\nu=2\frac{\partial\mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}}g^{\mu\nu}+2\frac{\partial\mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}}g_\alpha^{\mu\nu}+\mathfrak{G}^*\delta_\sigma^\nu-\frac{\partial\mathfrak{G}^*}{\partial g_\nu^{\mu\alpha}}g_\sigma^{\mu\alpha}.\tag{14}$$ [9]

由这两个方程我们可以得出对于下文很重要的两个结论。我们知道对于任意代换，$\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$是不变量而$\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}$不是。然而可以很容易地证明，后者对于坐标的**线性**变换是一个不变量。因而当所有的$\frac{\partial^2\Delta x_\sigma}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}$都为零时，(13)的右方必然总是等于零。由此得出，$\mathfrak{G}^*$必然满足下列恒等式

$$S_\sigma^\nu\equiv 0.\tag{15}$$

如果我们进一步选择 Δx_ν，使它们在所考虑的区域内不为零，而在无穷接近
414 边界处为零。则方程(2)中的直到边界上的积分之值不因坐标变换而改变，因此我们有

$$\Delta(F)=0$$

因而[1)]

$$\Delta\left\{\int\mathfrak{G}\,d\tau\right\}=\Delta\left\{\int\mathfrak{G}^*\,d\tau\right\}.$$

但是，此式的左方必须为零，因为$\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$和$\sqrt{-g}\,d\tau$都是不变量，从而此式的右方亦必为零。其次，我们由(13)，(14)和(15)得到 [10] {6}

$$\int\frac{\partial\mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}}g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\Delta x_\sigma}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}d\tau=0.\tag{16}$$

进行两次分部积分并重新整理，并考虑到 Δx_σ 是可以随意选择的，可得下列恒等式

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}}g^{\mu\nu}\right)\equiv 0.\tag{17}$$

现在我们应该由两个恒等式(15)和(17)得出结论，而此二式是由$\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$的不变性得出的，也就是由广义相对论的公设得出的。 [11] {7}

引力场方程(7)首先与 $g^{\mu\nu}$ 混合相乘加以变换，我们得到(并交换指标 σ 和 ν)一个与场方程(7)等价的方程

---

1)引入 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{G}^*$ 来代替 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}^*$。

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}\right) = -(\mathfrak{T}^\nu_\sigma + \mathfrak{t}^\nu_\sigma), \tag{18}$$

式中已令

$$\mathfrak{T}^\nu_\sigma = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \tag{19}$$

$$\mathfrak{t}^\nu_\sigma = -\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}_\alpha + \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^* \delta^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\alpha}_\nu} g^{\mu\alpha}_\sigma\right). \tag{20}$$

后一 $\mathfrak{t}^\nu_\sigma$ 的表式可以由(14)和(15)证实。(18)式对 x_ν 微分之后,再对 ν 求和,并考虑到(17),得

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}^\nu_\sigma + \mathfrak{t}^\nu_\sigma) = 0. \tag{21}$$

(21)表示能量和动量守恒。我们称 $\mathfrak{T}^\nu_\sigma$ 为物质的能量分量,$\mathfrak{t}^\nu_\sigma$ 为引力场的能量分量。 415

由引力场方程(7)得到[在乘以 $g^{\mu\nu}_\sigma$ 后,对 μ 和 ν 求和,并考虑到(20)]

$$\frac{\partial \mathfrak{t}^\nu_\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_\sigma \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

或者,考虑到(19)和(21),得

{8}[12]

$$\frac{\partial \mathfrak{T}^\nu_\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_\sigma \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0, \tag{22}$$

式中 $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ 表示 $g_{\nu\sigma}\mathfrak{T}^\sigma_\mu$。这些是物质的能量分量必须满足的四个方程。

必须强调,(普遍协变的)守恒定理(21)和(22)已经单独从引力场方程(7)导出过——还使用广义协变性(广义相对论)的公设——而没有使用物质过程的场
[13] 方程(8)。

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1916):1111—1116。1916 年 10 月 26 日收到,1916 年 11 月 2 日发表。 416
除了这篇文章 § 3 的最后两段,全都是三页手稿残篇,而有关计算的附页[5034]被保存下来了。

[1]与本文有某些相似的同一专题的较早手稿,见文件 31;主要的区别是此处完全未指定 Hamilton 的形式,而在文件 31 中选择了一个特定的形式。

[2]见 *Lorentz 1915*、*1916b*,*1916c*,*1916d* 和 *Hilbert 1915*。对广义相对论中变分原理的历史讨论,也见 *Cattani* 与 *De Maria 1993* 和 *Kichenassamy 1993*。

[3]Hilbert 的理论以 Gustav Mie 的物质理论为基础,特别是此物质理论意味着物质的能量-动量张量仅仅应该是电磁量的函数(关于 Hilbert 和爱因斯坦理论的历史讨论,见 *Mehra 1973* 以及 *Earman* 和 *Glymour 1978b*)。爱因斯坦对 Hilbert 理论的缺点更明确的评论,也见文件 31[p. 1]上的脚注(见正文的注 3),又在一封信中,他把 Hilbert 对 Hamilton 算符的假设称为"不成熟的""kindlich"(1916 年 11 月 23 日爱因斯坦致 Herman Weyl 的信)。

[4]见 *Einstein 1916e*(文件 30),其中采用了附加条件 $\sqrt{-g}=1$。

[5]“abhängig”应为“unabhängig”。

[6]“$q_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$”应为“$g_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$”。

[7]“$q^{\mu\nu}$”应为“$g^{\mu\nu}$”。

[8]“(13)和(14)”应为“(11)和(12)”。

[9]量 S 在 *Einstein 1914o*(文件 9),p. 1075 第一次出现,在那里使用它恒等于零的条件[见下面方程(15)]去确定在那篇文章中所使用的 Hamilton 算符的明显形式。

[10]“(14),(15)和(16)”应为“(13),(14)和(15)”。

[11]“(16)”应为“(15)”。

[12]负号应为正号。

[13]在同期的一封信中,爱因斯坦对从变分考虑,而不是经直接计算如他在*爱因斯坦 1916e*(文件 30),pp. 808—809 中已做过的从场方程的明显形式导出方程(17)[因而得到守恒定律(21)]表示满意。(见爱因斯坦于 1916 年 11 月 7 日致 Paul Ehrenfest 的信)。因这些与 $\mathfrak{M}$ 的特定形式无关的守恒定律,爱因斯坦在一周后也论证了 Hilbert 的关于物质的能量-动量张量假设是不合理的(见爱因斯坦于 1916 年 11 月 13 日致 H. A. Lorentz 的信)。

英译者附注:

在方程(4)、(5)前的脚注 1)中爱因斯坦引进了张量分析中加和首写法即当前熟知的爱因斯坦加和惯例,可参见 Doc,30,p. 296。

{1}具有两个下标和两个上标的“q”已更正为“g”;编者注[6]、[7]也涉及这类错误的更正。

{2}“$q_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$”已更正为“$g_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$”。

{3}“(4a)”已更正为“(5)”。

{4}“$q^{\mu\nu}$”已更正为“$g^{\mu\nu}$”。

{5}“(13)”和“(14)”已更正为“(11)”和“(12)”。

{6}“(14),(15)和(16)”已更正为“(13),(14)和(15)”。

{7}“(16)”更正为“(15)”。

{8}因子$\frac{1}{2}$前的“$-$”已更正为“$+$”。

[喀兴林 译校正文]

[高尚惠 译校注释]

[编者按]爱因斯坦的相对论普及本 417

一

1915 年秋，广义相对论的最后版本完成后不久，爱因斯坦开始认真考虑写
一本关于相对论的普及读物。但是在 1916 年初，他在给朋友的一封信中抱怨
说，他感到开头很难。“另一方面，如果我不去做，那么这个理论就不会被理解，
[1] 不论它基本上是多么简单。”这本书，*Einstein 1917a*（文件 42），于同一年的 12 月
[2] 前完成，于 1917 年春出版。爱因斯坦对结果不是完全满意，尤其是对文体，他称
[3] 之为“粗笨的”。不过这本书仍然成功了：从 1917 到 1922 年间，出了 14 版，到现
[4] 在仍可以买到。尤其是 1919 年晚秋观察到光线在引力场中的偏折后，外国出版
[5] 社变得有兴趣翻译它了。英文译本的第一版发表于 1920 年（*Einstein 1920*），在
两年内又出了五版。不久又出现了其他语言的译本，如法语（*Einstein 1921a*），
俄语（*Einstein 1921b*）和捷克语（*Einstein 1923*）。

这种对相对论的通俗解释并非首次出现。一些爱因斯坦的同代人此前已经
[6] 寻求以非技术性方式向普通听众解释狭义和广义相对论，爱因斯坦本人也尝试
[7] 过让他的工作为更多听众所理解：他写了大量关于狭义相对论的短篇解释，在一
[8] 篇论文中他还触及广义相对论基础。

爱因斯坦的文风清晰易懂。正文中仅用到简单的公式，而更多的数学细节
在附录中给出，附录是在后期的版本中为那些感兴趣的读者添加的。除了解释
该理论的基本事实以外，爱因斯坦还非常注意更基本的问题，如度量过程的本质 418
和几何在物理学中的地位。他关于借助于时钟、测量棒和光信号度量时间和距
离的讨论，本质上利用了他的关于相对论的第一篇论文，*Einstein 1905r*（第二
卷，文件 23）。他引入形象化的运动火车来阐明运动参照系的概念，使讨论变得
特别清晰生动——这种方法被以后许多科普作家采纳。

二

德文版在以后的版本中经过多次修改：爱因斯坦对原文做了一些修改，补充了几篇附录。其中两篇附录首先出现在德文版；另一篇附录是专为英译本写的，

然后包括在德文第十版中(1920)。还有两篇附录首先发表在英文版,直到 1954 年出德文第十六版时才以德文发表。同时,英文版没有顾及爱因斯坦对德文版 [9]
原文的(少量)补充和文风的改变,而是保留了基于德文第三版的英文第一版原文。即使是爱因斯坦生前出现的最后一版,补充了新附录的英文第十五版,也与其对应的德文第十六版不同,例如:在脚注中对文献的引用上存在很多差别。

第三版增加的章节和前四篇附录包含了数学细节或后期发展的情况介绍,例如光偏折测量的结果,而第五篇附录的特点却完全不同,它是在相对论背景下对“空间问题”的长篇讨论,比书中的其他部分更具哲学味。在英文第十五版前言中,爱因斯坦解释了把它包括进来的原因:“我希望说明,时空不必是人们可以认为独立存在的、与物理实验中的实际物体无关的东西。物理对象不是**在空间中**,而是**具有空间延展性**。这样‘虚空’概念就失去了意义。”虽然这篇附录展现 [10]
了爱因斯坦去世前不久,对空间概念的丰富思想——这些思想在他一生中经过持续的发展——但是它出现在相对论的通俗介绍中显得有点不合适。 [11]

419 这里给出的是第一版的原文,补充了后期添加的各种附录。由于修改和更正而造成的不同版本间的差别都加了注释。

---

417 [1] “Aber wenn ich es nicht thue, wird die Theorie nicht verstanden werden, so einfach sie im Grunde nun ist.”爱因斯坦致 Michele Besso 的信,1916 年 1 月 3 日。

[2] 见 Walther Rathenau 致爱因斯坦的信,1917 年 5 月 10—11 日,其中 Rathenau 提到他最近收到了这本书。

[3] “hölzern.”爱因斯坦致 Michele Besso 的信,1917 年 3 月 9 日。他用同样的词语描述 *Einstein 1916c*(文件 29)的文体。

[4] 在爱因斯坦一生中出现了以下德文版:第一版(1917),第二版(1917),第三版(1918,扩大版),第四版(1919),第五版(1920),第六版(1920),第七版(1920),第八版(1920),第九版(1920),第十版(1920,扩大版),第十一版(1921),第十二版(1921),第十三版(1921),第十四版(1922)和第十六版(1954,扩大版)。没有德文第十五版。

[5] 见 Elsa Einstein 致 Paul Ehrenfest 的信,1919 年 12 月 10 日。

[6] 早期的解释有 *Cohn 1913*[爱因斯坦在 *Einstein 1914h*(文件 1)中推荐了它,在 *Einstein 1915b*(第四卷,文件 21)中称赞了它];*Brill 1914* 和 *Lorentz 1914b*[二者都被爱因斯坦评论过(见 *Einstein 1914p*, *1914q* (文件 10 和 11))];以及 *Freundlich 1916b*[爱因斯坦为它写了前言(*Einstein 1916i*(文件 35))]。

[7] 见 *Einstein 1910a*(第三卷,文件 2)、*Einstein 1911i*(第三卷,文件 17)以及 *Einstein 1915b*(第四卷,文件 21)。

418 [8] *Einstein 1914h*(第四卷,文件 31)。

[9] 在第十四版后(1922),第十六版前没有新的德文版发表。

[10] *Einstein 1954*, p. 6。这篇前言,写于 1952 年 6 月 9 日,没有包括在对应的德文第十六版中。德

文原文见 *Einstein 1917a*（文件 42），注 4。

[11] 对爱因斯坦早期空间概念的讨论，可见 *Hoefer 1994*。

[黄　雄　译]

[吴忠超　校]

42.“狭义相对论和广义相对论(普及本)”

[*Einstein 1917a*]

1916 年 12 月写
1917 年由 Vieweg(Braunschweig)出版

这里还给出了后期版本中增加的章节和附录。补充有:30—32 节,“Betrachtungen über die Welt als Ganzes”(第三版,1918);附录[1],“Einfache Ableitung der Lorentz-Transformation”(第三版,1918);附录[2],“Minkowskis vierdimensionale Welt”(第三版,1918);附录[3],“Über die Bestätigung der allgemeinen Relativitätstheorie durch die Erfahrung”(第十版,1920);附录[4],“Die Struktur des Raumes im Zusammenhang mit der allgemeinen Relativitätstheorie”(第十六版,1954);及附录[5],“Relativität und Raumproblem”(第十六版,1954)。

狭义相对论和广义相对论(普及本) 421

Robert W. Lawson 的英译本是《相对论:狭义理论和广义理论》(Crown,1961 年;©爱因斯坦遗产处理委员会)一书的再版。编撰注释中的德文资料亦已翻译,详见文献的后部。

相对论:狭义理论和广义理论

阿耳伯特·爱因斯坦　原著

罗伯特·劳逊　英译

423 # 前 言

本书面向的是从一般科学和哲学的观点出发对相对论感兴趣，但是对理论物理的数学工具并不熟悉的读者[1)]，并尽可能使他们能够准确深入地了解相对论。本书假定读者具备大学入学考试所要求的教育水准。尽管篇幅短，但仍要求读者具有相当的耐心和毅力。作者不遗余力地以深入浅出的方式表达该理论的精髓，并从总体上保持它们原先创始过程中的顺序和关系。为了表达清晰，
424 看来我必须不断有所重复，而丝毫不能顾及文体的优雅。我谨遵卓越的理论物理学家 Boltzmann 的教诲，他说优雅性应该留给裁缝和鞋匠去考虑。我完全没有刻意向读者隐瞒这个理论的固有困难。另一方面，我有意以“继母般”的方式论述该理论的经验物理基础，以使对物理学不熟悉的读者不至于感到像个迷路人，只见树木不见森林。但愿本书给你带来浮想联翩的快乐时光。

1916 年 12 月　　　　爱因斯坦 [4]

---

1)狭义相对论的数学基础见 Teubner 的《相对论原理》，这本“数学的进展”专著，详尽地收集了 [1]
Lorentz，Einstein，Minkowski 和 Laue 的论文原件（Braunschweig 的 Friedr. Vieweg & Sohn 出版社出版）。 [2]
广义相对论，包括其所涉及的张量理论的数学手段，见作者撰写的小册子《广义相对论基础（Joh. Ambr. [3]
Barth，1916 年）》。该小册子假定读者已对狭义相对论有所了解。

第一部分 425

狭义相对论

§1. 几何命题的物理意义

本书的大部分读者在学校里的时候就已经熟悉了 Euclid 几何的宏伟大厦,你还记得——也许心里的崇敬多于爱戴——那个富丽堂皇的体系,在其高耸的阶梯上,你被尽责的老师催赶了数不清的时间。凭你过去的经验,如果有人否定该学科中的任何一个命题,哪怕是最冷僻的命题,你都必定会嗤之以鼻。可是如果有人问你:"那么,断言这些命题成立的意思又是什么呢?"你的这种妄自尊大的感觉便会立即荡然无存。下面让我们对这个问题稍作考虑。

几何学的出发点包括某些概念,如"平面"、"点"和"直线",我们能够把它们与大体上明确的直观观念联系起来;还包括某些简单命题(公理),有了这些直观观念,我们倾向于接受这些命题为"真理"。然后,在逻辑推理的基础上(我们不得不承认逻辑的正确性),所有其他命题都从这些公理推出,也就是得到证明。于是,若一个命题以公认的方式从公理推导出,它便是正确的("真实"的)。这样,一个几何命题是否"真实"的问题就转化为了公理是否"真实"的问题。现在, 426
人们早就知道,最后这个问题不仅用几何方法无法回答,而且它本身根本毫无意义。我们不能问,过两点是否只有一根直线。我们只能说,Euclid 几何研究的是称为"直线"的东西,每根直线都具有这样的性质:其上的两个点唯一决定了这根直线。"真实"这个概念不适合纯几何命题,因为用"真实"这个词,我们在习惯上总是指与"实际"事物相符合;但是,几何学并不关心它的概念与经验物体的关系,而只关心这些概念之间的逻辑关系。

不难理解,为什么尽管这样,我们仍不得不称这些几何命题是"真实"的。几

何概念或多或少与自然界的实际物体相对应，这些物体毫无疑问是那些概念的唯一渊源。为了使其结构具有最大限度的逻辑统一性，几何学应当避免这样的方法。例如，在一定"距离"外观察实际是刚性的物体上的两个带标记的位置，这个习惯深植于我们的思维习惯中的。此外，对于三个点，如果适当地选择观察角度，用一只眼观察若能使它们出现的位置重叠，我们习惯于认为这三个点位于同一根直线上。

如果顺从我们的思维习惯，现用这样一个命题来补充 Euclid 几何学：在一个实际是刚性的物体上的两个点总是对应于同一距离（线间距），与物体位置的变动无关。那么 Euclid 几何命题本身就会转变为关于实际刚性的物体的可能
427 相对位置的命题[1)]。经过这样扩充的几何学可视为物理学的分支。现在我们可以合法地询问经过这样解释的几何命题的"真实性"了，因为我们有正当的理由询问，与我们的几何观念相关联的那些实际物体是否满足这些命题。用不太严格的术语，这句话可以表达为：我们把几何命题在这种意义上的"真实性"理解为它在尺规作图方面的正当性。

当然，几何命题在这种意义上的"真实性"的信仰单独地建立在相当不完全的经验基础上。目前我们假设几何命题的"真实性"是成立的，以后（在广义相对论中）我们将看到这个"真实性"是有限的，并讨论它的受限制程度。

§2. 坐标系

根据上述对距离的物理解释，我们还可以用测量的办法确立刚体上两点间的距离。为此，需要有一个永远可以使用的"距离"（杆 S）用做测量标准。现在，若 A 和 B 是刚体上的两个点，则根据几何学法则，可以作一直线连接这两点；然后，从 A 点开始，逐次量出距离 S，直到达到 B 点。所度量的次数就是距离 AB 的数字测量值。这是所有长度测量的基本原则[2)]。

428 对于空间中事件的发生地点或物体的位置的描述，都是基于指明该事件或物体在刚体（参照物）上的位置而得到的。不仅科学描述是这样，日常生活也是如此。如果我分析"Berlin，Potsdam 广场"的地理位置，就会得到下列结果。地

1）由此得出结论，自然界物体也与直线相关。刚性物体上的三个点 A，B，C，若 A 与 C 已给定，且 B 的选择使得 AB 和 BC 两个距离的和尽可能短，则它们在一根直线上。这个不完整的建议将足以满足我们现在的要求。

2）这里我们假设没有任何剩余，即测量结果是整数。这一困难可以采用细分的测量杆加以克服，引进这种测量杆不需要对测量方法作根本性改变。

球是确定该位置所参照的刚体;"Berlin 的 Potsdam 广场"是一个定义明确的一点,它被赋予一个名字,该事件在空间中与之重合[1]。

这种确定位置的原始方法只能用于刚体表面的位置,而且该表面上存在可以彼此区分的点。但是我们可以摆脱这两个限制条件,而且不会改变我们的确定位置的本质。例如,如果一朵云漂浮在 Potsdam 广场上空,那么我们就可以在广场上立一根垂直的杆,让杆够到云朵,从而确定它相对于地球表面的位置。利用标准量尺测得的杆长,结合对杆的根部位置的确定,我们就得到一个完整的位置情况。通过这个例子,我们能够看出位置概念是如何得到改进的。

(a) 我们想象以某种方式扩充确定位置所参照的刚体,使得扩充后的刚体能够得着位置待定的那个物体。

(b) 在确定该物体的位置时,我们使用的是一个数字(这里是用量尺测得的杆长),而不是指定的参照点。

(c) 即使触及云朵的杆子还没竖立起来,我们就谈论了云朵的高度。方法 429
是在地面上不同的地方对云朵进行光学观测,并考虑到光的传播特性,就可以确定出用来够到云朵所需的杆的应有长度。

从这些讨论可以看出,在描述位置时,如果有可能利用数值量度,使我们不依赖于刚性参照物上带标记(有名字)的位置,那么事情就会更有利。在物理测量中,利用 Descartes 坐标系达到了这个目的。

该坐标系由三个牢牢地固定在刚体上的、互相垂直的平面组成。相对于坐标系,事件的发生地点(主要)由从事件发生地向那三个平面所作的三条垂线的
[5] 长度或坐标(x,y,z)来确定。这三条垂线的长度可以用刚性量尺根据 Euclid 几何所确立的法则和方法,进行一系列测量来确定。

实际上,构成坐标系的刚性表面一般不存在;而且,坐标值实际上也不是由刚性杆所确定,而是用间接方法获得。物理学和天文学的结果如果要保持清晰,那么就必须按照上述的讨论去寻找位置描述的物理意义[2]。

这样我们就得到下列结果:空间中事件的所有描述都涉及使用这些事件所必须参照的刚体。所得的关系认为:Euclid 几何定律适用于"距离",这种"距离" 430
在物理上习惯用刚体上的两个标记点来表示。

---

1)这里没必要深入研究"空间中重合"的意义。这个概念已十分明显,足以确保在其实际适用性上很少会发生意见分歧。

2)在我们进入本书第二部分讨论的广义相对论之前,没必要对这些观点进行细化和修改。

§3. 经典力学中的空间与时间

力学的目的是描述物体的空间位置如何随"时间"改变。如果我不经认真的反思和详细的解释，就把力学的目的描述成这样，那么我就违背了力求清晰的神圣精神，我的良心会因这严重的过失而受到谴责。下面让我们来揭示这些过失。

这里的"位置"和"空间"应该如何理解尚不明了。我站在一列匀速行驶的火车车厢内的窗户旁，向路堤丢下一块石头，注意不是投掷。如果忽略空气阻力的影响，那么我看到石头以直线下落。从人行道上观察这种不良行为的行人会注意到，石头是以抛物线落到地上的。现在要问：石头经过的"位置"在"实际中"呈直线还是呈抛物线？还有，"空间中"的运动是什么含义？根据上一节的讨论，答案是显而易见的。首先我们完全避开模糊不清的字眼"空间"，必须坦然地承认，我们无法为这个词形成丝毫的概念，我们将它替换成"相对于实际上刚性的参照物的运动"。上一节已经详细定义了相对于参照物（火车车厢或路堤）的位置。如果不用"参照物"，而是用"坐标系"这个有利于数学描述的概念，那么我们就能够说：相对于牢牢地固定在车厢上的坐标系来说，石头划过的是一条直线；可是相对于牢牢地固定在地上（路堤）的坐标系来说，则是一条抛物线。借助于这个
431 例子，就能很清楚地看出，没有独自存在的轨迹（字面意思是"路径-曲线"[1]）这
种东西，只有相对于特殊参照物的轨迹。 [6]

为了**完整地**描述运动，我们必须说明物体的位置如何随**时间**变化，即对于轨迹上的每一点，必须指明物体到达那里的时间。这些数据还必须辅以这样的时间定义，依据这种定义，这些时间值可以在本质上视为能够观测到的量值（测量结果）。若从经典力学的角度来看，我们可以用下列方式满足有关要求。我们想象有两个构造相同的时钟，站在车厢窗户旁的那个人手中拿着其中一个时钟，人行道上的那个人拿着另一个时钟。每个观察者在自己手中的时钟的每一次滴答声响时，测定石头在自己的参照物上的位置。这里我们没有考虑光速有限性带来的误差。对于这一点以及此处第二个突出的难点，我们将在后面另行细述。

§4. Galilei 坐标系

众所周知，被称为**惯性定律**的 Galilei 牛顿力学的基本定律可以这样表述：一个离开其他物体充分远的物体将保持静止或匀速直线运动状态。该定律不仅

1）即物体运动走过的曲线。

论述了物体的运动,而且还简述了力学上允许的、可以用于力学描述的参照物或坐标系。在很大近似程度上,可见的固定不动的恒星是惯性定律肯定适用的物体。如果我们使用一个牢牢地固定在地球上的坐标系,那么相对于该坐标系,在一个天文日期间,每一个固定不动的恒星都划过一个半径巨大的圆圈,这个结果 432
与惯性定律的说法相悖。因此,如果我们坚持该定律,那么在讨论这些运动时,就只能采用那些固定的恒星不在其中做圆周运动的坐标系。如果一个坐标系的运动状态使得惯性定律相对它能够成立,那么这个坐标系就被称为"Galilei 坐标系"。Galilei 牛顿力学定律可视为仅对 Galilei 坐标系成立。

§5. 相对论原理(狭义)

为了尽量清楚地表达,我们先回到火车车厢的例子,假设火车在匀速前进。我们将它的运动称为匀速平移("匀速"是因为其速度和方向保持恒定,"平移"是因为车厢尽管相对于路堤发生位置变化,但没有发生旋转)。设想有一只乌鸦在空中飞过,在路堤上观察,乌鸦沿直线匀速飞行。如果在行驶中的车厢上观察飞行的乌鸦,就会发现它以不同的速度和方向在飞行,但仍然沿直线匀速飞行。抽象地说:如果一个质点 m 相对于坐标系 K 沿直线匀速运动,只要第二个坐标系 K' 相对于 K 做匀速平移,那么该质点相对于 K' 也沿直线匀速运动。根据上一节的讨论,可以推出:

[7] 如果 K 为 Galilei 坐标系,那么其他每一个相对于 K 作匀速平移运动的坐标系 K' 也属于 Galilei 坐标系。如同适用于 K 一样,Galilei-Newton 力学定律完全适用于 K'。

当我们表述上述原理时,我们还可进一步地推广:如果坐标系 K' 相对于 K 433
做匀速运动且没有旋转,那么相对于 K',自然现象的变化过程所遵循的普遍规律与相对于 K 时完全一样。这一论述称为相对性原理(狭义)。

只要你相信,借助于经典力学,所有自然现象都可表述,那就没有必要怀疑相对性原理的正确性。但是由于电动力学和光学的最新发展,越来越多证据表明,在对所有自然现象进行物理描述方面,经典力学提供的基础显然已不够用。在这时刻,讨论相对性原理的正确性问题的时机已经成熟,而且看来不是没有可能,这个问题的答案可能是否定的。

不过有两个普遍的事实,从一开始就强烈支持相对性原理的正确性。虽然经典力学没有为所有物理现象的理论表述提供足够广泛的基础,但是我们仍然必须承认它具有相当程度的"真理性",因为它精细地刻画了天体的极为精彩的实际运动情况。因此,在力学的领域内,相对性原理肯定非常精确。可是,一个

如此广泛普遍的原理，在一个现象领域内能够这样精确地适用，而在另一个领域内却不成立，推测起来，这是不太可能的事。

现在我们进入第二个论据，后面还会再次论述这个论据。如果相对性原理（狭义）不成立，那么互相做匀速运动的 Galilei 坐标系 K，K'，K''等在描述自然现象方面就不会等价。在这种情况下，我们将被迫认为，自然定律能够以特别简单的形式表述，当然必要条件是：从所有可能的 Galilei 坐标系中，我们选出了一个
434 特别的运动状态的坐标系（K_0）作为参照物。这样我们就有理由（因为它在描述自然现象方面的优势）称这个坐标系是“绝对静止的”，而所有其他 Galilei 坐标系 K 是“运动的”。例如，如果我们的路堤为坐标系 K_0，那么火车车厢就是坐标系 K，相对于 K 的自然定律就不如相对于 K_0 的自然定律那样简单。这一简单性被减弱是由于这样的事实：车厢 K 相对于 K_0 在运动（即“真正地运动”）。在相对于 K 表示的一般自然定律中，车厢速度的大小和方向必然发挥了作用。例如，可以预料到，当风琴管的轴向与车厢行驶方向平行时，风琴发出的声调不同于风琴管的轴向与行驶方向垂直时发出的声调。由于我们的地球沿轨道环绕太阳运动，它就相当于一列火车以每秒约 30 公里的速度行驶。如果相对性原理不 [8]
成立，那么我们会预料到，地球在任何时刻的运动方向会体现在自然定律中，而且物理系统的行为将依赖于它相对于地球的空间方位。由于一年中地球公转速度方向的变化，它不可能在全年中相对于假想的坐标系 K_0 保持静止状态。然而，即使非常仔细地观测也从来不曾揭示出这种地球物理空间的各向异性，即不同方向上的物理不等价性。这是对相对性原理非常有力的有利论据。

§6. 经典力学的速度叠加定理

435 让我们设想老朋友火车车厢以恒定速度 v 沿铁轨行驶，有一个人以速度 w 沿行驶方向穿过车厢。在这个过程中，这个人相对于路堤行走得有多快？换句话说，他的速度 W 是多少？看来唯一可能的答案来自于下面的考虑：若这个人静立 1 秒钟，则他相对于路堤向前移动了距离 v，数值上等于车厢的速度。然而，因为他在行走，他相对于车厢又移动距离 w，所以在这 1 秒钟里，相对于路堤他也移动了距离 w，数值上等于他的行走速度。这样，在这 1 秒钟里，他相对于路堤的移动总距离为 $W=v+w$。后面我们会看到，表达了经典力学中的速度叠加定理的这一结果不再正确；换句话说，我们刚才写下的定律实际上并不成立。但是，目前我们姑且假设它是正确的。

§7. 光传播定律与相对性原理的表面矛盾

在物理学中几乎没有什么定律比光在真空中的传播定律更简单。每个学童都知道，或者以为自己知道，这种传播以直线方式发生，速度为 $c=300\ 000\ \mathrm{km/s}$。无论如何，我们非常精确地知道，所有颜色的光线都具有这
个速度，因为如果不是这样，那么当固定的恒星被它邻近的暗星遮蔽时，不 436
[9] 同颜色的光线的最低辐射就不会被同时观测到。根据对双星的观测做类似的考虑，荷兰天文学家 De Sitter 还能够证明，光的传播速度并不会依赖于发光物体的运动速度。光的传播速度与"在空间中"的方向有关的假设本身也是不可能的。

简言之，我们假设光速 c（在真空中）恒定这一简单定律受到学童信奉是无可非议的。谁会想到这个简单定律竟会使严谨细致的物理学家陷入极大的智力困境中？让我们看一看这些困难是如何产生的。

当然，光的传播过程（以及每个其他过程）必须相对于一个刚性参考物（坐标系）。让我们再次选取路堤作为这样一个坐标系。想象路堤上方的空气已经抽空。如果沿着路堤发射一束光，那么从上面观察，我们会看到光束的前端相对于路堤以速度 c 传播。现在假设车厢还是以速度 v 沿着铁轨行驶，其方向与光束的方向相同，但速度当然低得多。我们来探究一下光束相对于车厢的传播速度。很明显，这里可以像上节那样考虑，因为光束充当了相对于车厢行走的人。这里人相对于路堤的速度 W 被光相对于路堤的速度所替代。w 是所求的光相对于车厢的速度。有：

$$w=c-v.$$

结果光束相对于车厢的传播速度就来得比 c 小。

但是这个结果与§5节阐述的相对性原理相矛盾。因为像其他所有普遍自然定律一样，按照相对性原理，不管取火车车厢为参照物还是取铁轨为参照物， 437
真空中光传播定律必须是一样的。可是，从上述的考虑来看，这似乎是不可能的。如果所有光线相对于路堤的传播速度都是 c，那么相对于车厢，似乎就必须有另一条光传播定律成立——这个结果与相对性原理相矛盾。

鉴于这种两难局面，我们要么放弃相对性原理，要么放弃简单的**真空中**光传播定律，似乎没有别的选择。认真地理解了前述讨论的读者几乎肯定会料想到，我们应当保留相对性原理，因为它是如此自然和简单，在思想上的说服力又很强。那么，**真空中**光传播定律就必须被符合相对性原理的更为复杂的定律所替代。然而，理论物理的发展表明，我们不能走这条路。Lorentz 关于和运动物体

有关的电动力学和光学现象的划时代理论研究表明，该领域的经验无可辩驳地引导出关于电磁现象的一个理论，**真空中光速不变定律是它的必然结果**。因此，著名的理论物理学家更倾向于否定相对性原理，尽管还没有发现与该原理相矛盾的实验数据。 [10]

在这个节骨眼上，相对论问世了。通过分析时间与空间的物理概念，结果清楚地表明，**实际上相对性原理和光传播定律之间没有一丁点儿矛盾**，系统而忠实地坚持这两个定律会得出一个逻辑严密的理论。这个理论被称为**狭义相对论**，以区别于后面将要讨论的推广的理论。下面我们将介绍狭义相对论的基本思想。 [11]

438 §8. 物理学的时间概念

一道闪电击中铁路路堤上相距甚远的两个地方 A 和 B。我再补充一点，这两处雷击同时发生。如果我问你这句话有没有意义，你会很肯定地回答“有”。但是如果现在我请你向我更准确地解释这句话的意思，你考虑片刻后会发现，这个问题的答案不像它咋看起来那么容易。

过一会儿，你也许会这样回答：“这句话的意思本身是很清楚的，不需要进一步解释；当然，如果要求我通过观测来判断这两个事件是否实际上同时发生，那我就得考虑考虑了。”我对这种回答并不满意，理由如下。假设经过巧妙的思索，一位能干的气象学家发现闪电总是会同时击中 A 和 B 这两个地方，那么我们就会面临一个任务：检验这个理论结果是否与实际相符。在所有涉及“同时性”概念的物理学陈述中，我们都会面临同样的困难。对于物理学家来说，在他有可能确定一个概念是否符合实际情况以前，这个概念是不存在的。因此，我们需要给同时性下定义，使得这个定义给我们提供一种方法，这种方法使他能够在目前情况下，通过实验判定这两个闪电是否同时发生。在我以为能够给同时性陈述赋予意义的时候，只要上述要求满足不了，那么作为物理学家，我就是自愿上当受
439 骗（当然，如果我不是物理学家也是一样）（我建议读者在完全信服这一点之后再继续读下去）。

在经过一段时间仔细思考后，你提出下面的建议来检测同时性。沿着铁轨测量就可以得到 AB 连线，指定一位观察者站在 AB 间的中点 M 上。还应该给观察者一个设备（如两面呈 90°的镜子），使他能够同时用肉眼观察到 A 和 B 两地。如果观察者同时察觉到这两个闪电，那么它们就是同时的。

这个建议令我很高兴，但尽管如此，我仍不认为问题已经完全解决，因为我不得不提出下列反对意见：“你的定义肯定是对的，条件是我知道，M 处的观察

者看到的闪电的光线沿 $A \to M$ 传播的速度与沿 $B \to M$ 传播的速度一样。可是只有在我们已经有了测量时间的手段的情况下，才有可能检验这个推测。这样看来，我们好像在逻辑上兜圈子。”

经过进一步思考后，你轻蔑地瞥了我一眼——这无可非议——声明：“但是我依然坚持前述的定义，因为事实上这个定义对光根本没有什么假设。同时性的这个定义只有一个要求，即：在所有实际情况中，这个定义必须给我们提供关于判断所定义的概念是否符合实际的试验手段。而我的定义满足这个要求是毫无疑问的。光线沿着 $A \to M$ 传播与沿着 $B \to M$ 传播所需的时间相同，这一点实际上既不是对光的物理性质的**推测**，也不是**假设**，而是我为了得到同时性的定义而可以随意制定的**约定**。”

很清楚，不仅可以使用该定义给**两个**事件的同时性赋予精确的意义，而且可 440
以给我们想要选择的任意多个事件的同时性赋予精确的意义，与这些事件的发生地点相对于参照物(这里是铁路路堤)的位置无关[1]。这样我们还导出了物理学中的“时间”定义。为此，我们设想在铁路线(坐标系)的 A, B 和 C 三个地方安放有结构相同的时钟，将它们的指针同时(按以上的意义)调定在相同位置上。在这种条件下，我们把事件的“时间”理解为(在空间中)紧邻该事件的那一个时钟的读数(指针的位置)。这样，每一个本质上能够观测到的事件都有一个相关联的时间值。

这种约定还包含另一个物理假设，若没有相反的实验证据，则其正确性几乎
[12] 不会被怀疑。即，如果这些时钟结构相同，那么它们行走的**快慢相同**。更准确地讲：当两个时钟静止地放在参照物的两个不同地方的时候，如果在一个时钟的指针指向某个特别位置的同时(按以上的意义)，另一个时钟的指针也指向**同一个**位置，那么相同的“指针位置”就总是**同时**(在上述定义的意义下)出现。

§9. 同时性的相对性

迄今为止，我们的描述都是参考一个特定的参照物，我们称之为“铁路路
堤”。假设有一列很长的火车沿着铁轨以恒速 v 行驶，方向如图 1 所示。该列车 441
上的乘客可以方便地将列车作为刚性的参照物(坐标系)；他们相对于这列火车来考察一切事件。那么沿铁路线发生的每一个事件也发生在列车的某个特定点

---

1)我们进一步假设，当三个事件 A、B 和 C 发生于不同的地方时，若 A 与 B 同时，B 与 C 同时(就是在上述定义下的同时)，则 A 和 C 这一对事件的同时性标准也就得到满足。这个假设是关于光传播定律的物理假设，若要坚持**真空**中光速不变定律，这个假设就必须被满足。

上。而且也可以相对于火车给出同时性定义，其方式与相对于路堤完全一样。然而，很自然地会出现下列问题：

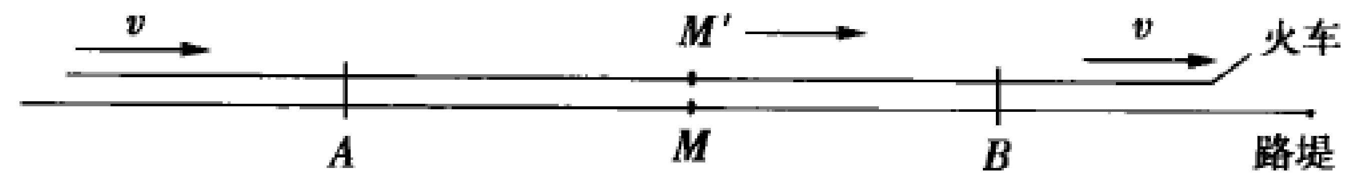


图 1

相对于铁路路堤同时发生的两个事件（例如 A 和 B 两处的雷击）是否**相对于列车**也是同时发生的？我们将直截了当地表明，答案肯定是否定的。

当我们说 A 和 B 两处的雷击相对于路堤是同时发生时，我们的意思是：发生雷击的 A 和 B 两处发出的光束在路堤 $A \to B$ 段的中点 M 处相遇。可是事件 A 和 B 也与列车上的 A 和 B 两处对应。令 M' 为行进中的列车上 $A \to B$ 距离的中点。当闪电发生那一刻[1]，点 M' 当然与点 M 重合，但是它在图中以火车的速度 v 向右运动。如果坐在列车 M' 处的观察者不具有该速度，那么他就会一直停留在 M 处，A 和 B 两处闪电发出的光线就会同时到达他这里，即它们正好相遇
442 在观察者的位置。而实际上（相对于路堤来考虑）他正迎着来自 B 点的光线前进，同时又是赶在 A 点发出的光线前头前进。所以观察者将首先看到来自 B 点的光线，然后才看见来自 A 点的光线。因此以火车为参照物的观察者肯定会得出结论，认为闪电 B 早于闪电 A。这样我们就得到一个重要的结果：

相对于路堤同时发生的事件，相对于火车并不同时发生，反之亦然（同时性的相对性）。每个参照物（坐标系）都拥有自己特定的时间；除非陈述时间时指明参照物，否则有关事件时间的陈述将毫无意义。

在相对论问世之前，物理学总是默认，关于时间的陈述具有绝对意义，即时间与参照物的运动状态无关。可是我们刚刚已经看到，这个假设与最自然的同时性定义相矛盾；如果我们放弃这个假设，那么**真空中**光传播定律与相对性原理（见 § 7）之间的矛盾便荡然无存。

是 § 6 的讨论把我们引向这个矛盾，现在这些观点不再站得住脚了。在 § 6，我们的结论是：车厢里的人相对于车厢**每秒**移动距离 w，他相对于路堤**每秒**移动距离相同。但是根据前述的讨论，一个特定事件相对于车厢所持续的时间绝不应视为等同于从路堤（作为参照物）上判断它所持续的时间。因此我们不能断言，行走的那个人相对于铁路线移动距离 w 所需的时间等于从路堤上判断的 1 秒。

而且 § 6 的讨论还基于另一个假设，严格说来，这个假设似乎太随意，虽然

1）从路堤上判断！

在引入相对论之前,它一直是不言而喻的。 443

§10. 距离概念的相对性

让我们来考虑沿路基以速度 v 行驶的火车上的两个特定的点[1],研究它们之间的距离。我们已经知道,测量距离必须有一个参照物,相对于它的距离才能被测出。最简单的做法是将火车本身当作参照物(坐标系)。火车上的观察者沿直线用量杆测量这段距离(例如,沿着车厢地板测),从一个标记点到另一个标记点需要量多少下,他就量多少下。量杆落下的次数就是所需的距离。

如果这段距离要从铁路线上来判断,就是另一回事了。这里是解决这个问题的自然方法。如果我们将火车上有待求取距离的两个点称为 A' 和 B',那么这两个点都以速度 v 沿着路堤移动。首先,我们需要确定在某个时刻 t——从路基上判断,刚刚被 A' 和 B' 这两点所经过的路堤上的点 A 和点 B。路堤上的点 A 和点 B 可以采用§8 中给出的时间定义确定出来,然后沿路堤反复使用量杆就可以测出它们的距离来。

推测起来,丝毫不能肯定,这后一次测量的结果会与第一次的相同。所以从路堤上测得的火车长度可能不同于在火车上测得的结果。这种情况使我们必须针对§6 给出的表面上显然的观点提出第二个异议,即如果车厢内的人在单位时间内移动距离 w——**在火车上测量**,那么这段距离——**从路基上测量**——不一定也等于 w。 444

§11. Lorentz 变换

前面三节的结果表明,光传播定律与相对性原理(见§7)表面上的矛盾,是由于我们借用了经典力学中的两个不合理的假设;它们是:

(1) 两个事件之间的时间间隔(时间)与参照物的运动状态无关。

(2) 刚性物体上两个点之间的空间间隔(距离)与参照物的运动状态无关。

如果我们舍弃这些假设,那么§7 的困境就会消失,因为§6 导出的速度叠加定理不再成立。这就有可能,**真空中**光传播定律与相对性原理可以相容,问题是:为了消除这两个基本实验结果之间的表面矛盾,应当如何修改§6 的观点呢?这个问题引出了一个一般性的问题。在§6 的讨论中,我们必须考虑相对于火车及路堤两者的地点和时间。当我们已知事件相对于铁路路堤的地点和时

---

1)例如:第 1 节和第 20 节车厢的中点。

间后，又如何找出它相对于火车的地点和时间呢？对这个问题是否存在一个能 [13]
想到的答案，使得**真空中**光传播定律与相对性原理不矛盾？换句话说，我们能否 [14]
想到各个事件相对于两个参照物的时空之间的相互关系，使得每一光线相对于
445 路堤和火车都具有传播速度 c？这个问题导致了一个非常明确的肯定答案，以及一个十分明确的变换定律，把事件的时空量值从相对于一个参照物变为相对于另一个参照物。

开始着手前，我们先引入以下附带的考虑。迄今我们只是考虑沿路堤发生的事件，数学上必须认为路堤起到直线的作用。如§2那样考虑，我们可以设想在该参照物的横向和纵向加装杆子组成的框架，从而任何地方发生的事件均可以相对于该框架得到定位。类似地，我们可以设想火车以速度 v 继续穿过整个空间，每个事件，不管它有多远，还可以相对于这第二个框架来定位。在不犯根本性错误的条件下，我们可以忽略这一事实：由于固体的不可入性，实际上这些框架会不断地相互干扰。在每个这样的框架中，我们设想画出三个相互垂直的平面，称它们为“坐标平面”（“坐标系”）。坐标系 K 对应于路堤，坐标系 K' 对应于火车。一个事件，无论它发生在哪里，在空间中相对于 K 的位置都可以通过坐标平面上的三条垂线 x,y,z 得以确定，而时间由时间值 t 得以确定。**同一个事件**，相对于 K' 的空间与时间通过对应的值 x',y',z',t' 来确定，它们当然不和 x,y,z,t 一样。上文已经详细讲过如何通过物理测量来求取它们的数值。

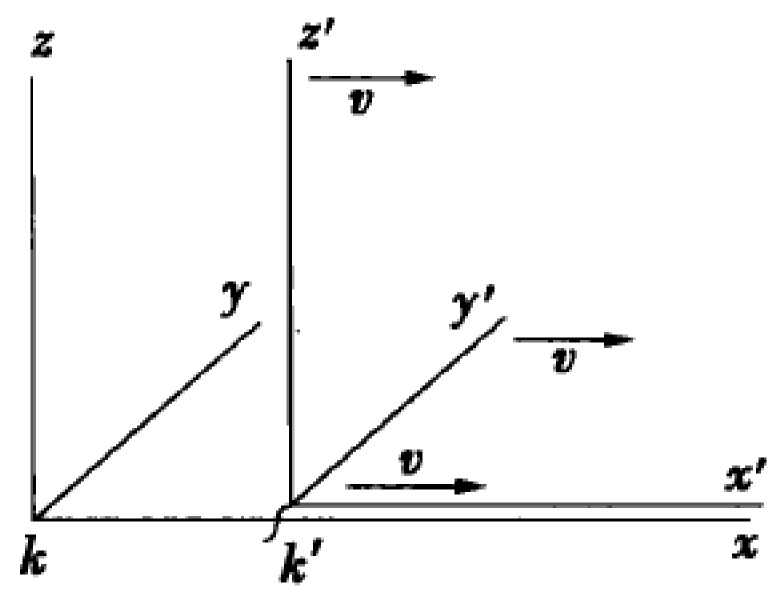


图 2

我们的问题显然可以用下列方式精确地描述。当已知一个事件相对于 K 的 x,y,z,t 数值时，该事件相对于 K' 的 x',y',z',t' 数值为多少？所选定的关系
446 式必须使得同一光线（当然也是每一光线）**在真空中**的传播定律相对于 K 和 K' 都成立。对于图2所示的坐标系的空间相对方位来说，这个问题可用下列方程式解出：

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$y'=y,$$
$$z'=z,$$
$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

[15] 这组方程组被称为"Lorentz 变换"。[1)]

如果我们用旧力学默认的关于时间和长度的绝对性的假设作为讨论的基础,而不是将光传播定律作为基础,那么我们得到的不是以上的方程,而是下列方程:

$$x'=x-vt,$$
$$y'=y,$$
$$z'=z,$$
$$t'=t.$$

这组方程常被称为"Galilei 变换"。将 Lorentz 变换中的光速 c 代之以一个无穷 447
大量,就可以得到 Galilei 变换。

借助于下述解释,很容易看出,根据 Lorentz 变换,真空中光传播定律相对
[16] 于参照物 K 和 K' 都成立。沿 x 正轴发射一个光信号,该光信号按下式前进:

$$x=ct,$$

即以速度 c 前进。根据 Lorentz 变换方程,x 和 t 之间的这个简单关系牵涉到 x' 和 t' 之间的关系。事实上,如果将 Lorentz 变换的第一和第四个方程中的 x 代之以 ct,就会得到:

$$x'=\frac{(c-v)t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$t'=\frac{(1-\frac{v}{c})t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

两式相除,马上得到下式:

$$x'=ct'.$$

1)Lorentz 变换的简单推导见附录 1。

若以 K' 为参照系，则光按此公式传播。于是我们看到，相对于参照系 K'，光传播速度也等于 c。不管光线沿任何方向前进，都会得到这同样的结果。当然这并不奇怪，因为 Lorentz 变换方程就是遵照这个观点推导的。

448

§ 12. 量杆和时钟在运动中的行为

我将一根米尺放在 K' 的 x' 轴上，使得它的一端（始端）对准点 $x'=0$，另一端（末端）对准点 $x'=1$。那么米尺相对于坐标系 K 的长度为多少呢？为了了解这一点，我们只需要搞清楚，在坐标系 K 的某个时刻 t，米尺的始端和末端在坐标系 K 的什么位置就行了。利用 Lorentz 变换的第一个方程，在 $t=0$ 的时刻， [17]
这两个点的值可以表示为

$$x_{(\text{米尺始端})}=0\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$x_{(\text{米尺末端})}=1\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

这两点间的距离为 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$。可是米尺在以速度 v 相对于 K 运动。因此结论是，沿着长度方向以速度 v 运动的刚性米尺的长度为 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 米。这样，刚性米尺在运动时比在静止时要短些，运动速度越快，尺子就越短。速度 $v=c$ 时，会有 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=0$，速度更大时，平方根变为虚数。由此我们得出这样的结论，在相对论中，速度 c 起着极限速度的作用，任何实际物体既不可能达到也不可能超越这个极限速度。

当然，速度 c 作为极限速度的这一特点从 Lorentz 变换方程中也可以清楚地推导出，因为如果令 v 的值大于 c，这些方程就毫无意义了。

相反，如果我们考虑一根相对于 K 静止在 x 轴上的米尺，那么就会发现，从
449
K' 的角度看，米尺的长度为 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$；这与作为我们讨论基础的相对性原理完全一致。

推测起来，显然我们一定能够从这些变换方程中，了解量杆和时钟的物理行为，因为 x,y,z,t 这些量恰恰是可以通过量杆和时钟获得的测量结果。如果我们的讨论所依据的是 Galilei 变换，那么就不会得到量杆因运动而缩短的结果。

现在让我们考虑永久地位于 K' 的原点（$x'=0$）处的一个秒表。$t'=0$ 和

$t'=1$是该秒表相继两下滴答声。对于这两次滴答,Lorentz 变换的第一和第四个方程给出:

$$t=0$$

和

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

从 K 的角度判断,该秒表正在以速度 v 运动;从这个参照物来看,秒表两次滴答之间的时间间隔并非 1 秒,而是 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 秒,稍长些。该秒表因运动而比它静止时走得慢些。这里速度 c 也起着不可达到的极限速度的作用。

§ 13. 速度叠加定理
Fizeau 实验

在实际中,我们只能以远小于光速 c 的速度来移动时钟和量杆;因此几乎不能将上一节的结果直接与实际情况相比较。但是另一方面,这些结果因其非常 450
奇特,必定会使你震惊。为此,我将从该理论推导出另一个结论,这个结论从前面的描述中很容易就可得出,而且已经在实验中得到完美验证。

在 § 6 中,我们推导出沿一个方向的速度叠加定理,其形式由经典力学假设得出。从 Galilei 变换(§ 11)也可以容易地推导出该定理。我们引入一个按照下述方程相对于坐标系 K'运动的点来代替车厢内行走的人:

$$x=wt'.$$

利用 Galilei 变换的第一和第四个方程,我们可以用 x 和 t 来表示 x'和 t',得到:

$$x=(v+w)t.$$

该等式表示的只不过是该点相对于坐标系 K(该人相对于路堤)的运动规律。我们用符号 W 来表示该速度,如同 § 6 一样,得到:

$$W=v+w. \tag{A}$$

可是,我们也可以基于相对论进行同样的考虑。在下式中

$$x'=wt'$$

我们必须利用 **Lorentz** 变换的第一和第四个方程,用 x 和 t 来表示 x'和 t'。这样得到的就不是方程(A),而是下述方程:

$$W=\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}. \tag{B}$$

451 该式相当于基于相对论的沿一个方向的速度叠加定理。现在出现的问题是，这两个定理中哪一个更符合实验。在这一点上，杰出的物理学家 Fizeau 在半个多世纪以前完成的一个非常重要的实验给我们以启迪，该实验后来被一些最好的 [18] 实验物理学家重复多次，证实其结果确凿无疑。该实验与下述问题有关。光在静止的液体中以速度 w 传播。当上述液体以速度 v 流过管子 T 时，光在管子中沿箭头方向（见图 3）的传播快慢如何？

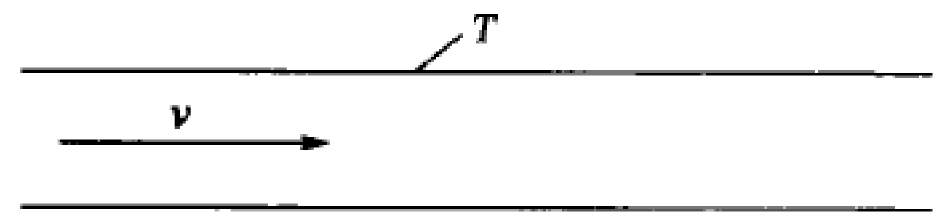


图 3

根据相对性原理，我们当然会认为，光**相对于液体**的传播速度肯定总是 w，无论液体相对于其他物体是否在运动。已知光相对于液体的速度以及液体相对于管子的速度，我们需要求出光相对于管子的速度。

显然，我们又面临与第 6 节同样的问题。管子相当于铁路路堤或者坐标系 K，液体相当于车厢或者坐标系 K'，光相当于车厢内行走的人或者本节的运动的点。如果我们将光相对于管子的速度表示为 W，那么它应该由方程(A)或(B)
452 给出，取决于 Galilei 变换和 Lorentz 变换哪一个更符合之际。

实验结果[1]倾向于支持由相对论导出的方程(B)，其吻合程度确实很好。根据 Zeemann 最近所做的非常出色的测量，流速 v 对光传播的影响可用方程(B)表示，误差在 1%之内。 [19]

然而我们必须注意到这一事实，即在相对论问世以前很久，Lorentz 就给出了关于该现象的理论。该理论是一个纯粹的电动力学理论，是利用物质的电磁结构方面的特殊假设而得到的。但是这种情况一点也没有削弱该实验作为支持相对论的关键实验的决定性意义，因为作为原始理论基础的 Maxwell-Lorentz [20] 的电动力学与相对论一点儿也不矛盾。更确切地说，相对论是从电动力学发展而来的，它是对原先彼此独立的、作为电动力学基础的那些假设的一种令人震惊

1) Fizeau 发现 $W=w+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$，其中 $n=\frac{c}{w}$ 是液体的折射系数。另一方面，由于$\frac{vw}{c^2}$与 1 相比非常小，我们可以首先用 $W=(w+v)\left(1-\frac{vw}{c^2}\right)$替代(B)，或以相同的近似度用 $w+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$来替代，这就与 Fizeau 的结果一致了。

的简洁推广和综合。

§14. 相对论的启发性价值

前文思路我们可概括如下。实验使我们确信,一方面相对性原理是成立的,另一方面真空中光的传播速度必须认为等于常数 c。将这两个基本条件结合起来,我们就得出关于构成自然界变化过程的事件的直角坐标 x,y,z 和时间 t 的 453
变换定律。在这方面,我们得出的不是 Galilei 变换,而是不同于经典力学的 **Lorentz** 变换。

我们的实际知识已经认可的光传播定律,在这一思考过程中起了重要的作用。然而一旦掌握了 Lorentz 变换,我们就可以将它与相对性原理结合起来,将理论总结如下:

所有一般自然定律的组成必须满足这样的条件:当我们引入新的坐标系 K' 的时空变量 x',y',z',t' 来代替原坐标系 K 的时空变量 x,y,z,t 时,该定律变换后的形式与变换前完全相同。在这一点上,不带撇和带撇的量之间的关系应遵循 Lorentz 变换。简而言之,自然界的普遍规律相对于 Lorentz 变换是协变的。

这是相对论对自然定律所要求的一个明确的数学条件,借助于这一点,相对论在帮助探索自然界普遍规律方面成为一个有价值的启发性工具。如果发现某个自然界普遍规律不能满足这个条件,那么该理论的两个基本假设中至少有一个不能成立。我们现在来看一看相对论迄今证明了哪些普遍性结果。

§15. 相对论的普遍性结果

从上面的讨论可以清楚地看出,(狭义)相对论是从电动力学和光学发展而来。在这些领域中,相对论一点儿没有改变理论的预言结果,但却大大简化了理论结构,即定律的推导,而且——更为重要的是——大大减少了构成理论基础的那些独立假设的数目。狭义相对论使得 Maxwell-Lorentz 理论显得合理可信, 454
以至于即使实验结果并不怎么明确地支持后者,它也得到了物理学家的广泛认可。

经典力学必须先经过修改才能与狭义相对论的要求相符。但是这种修改大多只影响快速运动的有关定律,在这种快速运动中,物体的速度 v 与光速相比并非很小。我们只有在电子和离子中才会见到这种快速运动;对于其他运动,经典力学定律的误差非常小,实际中很不明显。在讨论广义相对论之前,我们将不考虑恒星的运动。根据相对论,质量为 m 的质点的动能不再由著名的表达式给出

$$m\frac{v^2}{2},$$

由以下表达式给出

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

当速度 v 接近光速 c 时，该表达式趋向无穷大。因此无论用来加速的能量有多大，该速度必须始终小于 c。如果我们把这个动能公式表示为级数形式，就会 [21]
得到[1)]

$$mc^2+m\frac{v^2}{2}+\frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}+\cdots$$

455 当$\frac{v^2}{c^2}$远小于 1 时，上式第三项肯定远小于第二项，所以在经典力学中只考虑第二项。第一项 mc^2 没有包含速度，如果我们只关心质点的能量与速度的关系问题，则不需要考虑该项。我们以后会讨论它的本质意义。

狭义相对论得到的最重要的普遍性结论与质量概念有关。相对论问世之前，物理学承认两个具有根本重要性的守恒定律，即能量守恒定律和质量守恒定律；这两个基本定律似乎是彼此独立的。通过相对论，它们结合成为一条定律。我们现在简略地看看它们是如何结合的，以及这种结合有什么意义。

相对性原理要求能量守恒定律不仅相对于坐标系 K 成立，而且相对于每一个相对于 K 处于匀速平移运动状态的坐标系 K' 也成立，简而言之，相对于每一个“Galilei”坐标系都成立。与经典力学不同，Lorentz 变换是从一个这样的坐标系过渡到另一个这样的坐标系的决定性因素。

经过比较简单的考虑，结合 Maxwell 电动力学的基本公式，从这些前提可以得到下列结论：以速度 v 运动的物体，若吸收[2)]辐射能量 E_0，而在此过程中没 [22]
有改变速度，则结果是它的能量增加了

$$\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

456 考虑上述关于物体动能的表达式，所求的物体能量应为

$$\frac{\left(m+\frac{E_0}{c^2}\right)c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

这样，该物体的能量与运动速度为 v 质量为 $m+\frac{E_0}{c^2}$的物体的能量相同。

1）原文此公式有误，这里已经更正过。——译者注

2）E_0 是从一个与物体一起运动的坐标系上来判断所吸收的能量。

因此我们可以说:如果一个物体吸收了能量 E_0,那么它的惯性质量增加$\frac{E_0}{c^2}$;物体的惯性质量不恒定,而是随物体能量的变化而改变。一个物体系统的惯性质量甚至可以视为其能量的量度。系统的质量守恒定律变得与能量守恒定律是一回事,而且只有在系统既不吸收也不散失能量的条件下才能成立。将能量表达式写成如下形式

$$\frac{mc^2+E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

我们可以看到,至今一直吸引我们注意的 mc^2 项只不过是物体[1]在吸收能量 E_0 前所具有的能量。

目前(1920 年,见文后的注释)尚不可能将此关系式与实验直接比较,因为我们能够给予一个系统的能量变化 E_0 尚不够大,所引起的系统的惯性质量的变
[23] 化还观测不到。与能量变化前的质量 m 相比,$\frac{E_0}{c^2}$ 太小了。正是因为这一点,经 457
典力学才能够成功地将质量守恒确立为一条独立的、有效的定律。

让我就一个基本性质最后说几句。Faraday-Maxwell 对电磁超距作用的成功解释,使物理学家们相信,不存在像 Newton 万有引力定律那种类型的(不涉及中间媒介的)瞬时超距作用。根据相对论,以光速传播的超距作用总是会取代瞬时超距作用,或者说具有无穷大传播速度的超距作用。这与速度 c 在该理论中起着根本性作用这一事实有关。在第二部分我们将看到,在广义相对论中,这个结果是如何被修正的。

§16. 经验与狭义相对论

[24] 经验对狭义相对论的支持程度有多大呢?这个问题不容易回答,其原因已经在讨论 Fizeau 的重要实验时提到过。狭义相对论是电磁现象的 Maxwell-Lorentz 理论的结晶,因此所有支持电磁理论的经验事实都同样支持相对论。这里我要谈到的一个特别重要的事实是,相对论使我们能够预测从恒星发射到达我们地球的光线所受到的影响。获得这些结果的方法极其简单,所揭示的因地球相对于这些恒星的运动而产生的效应与实验结果相符。我们指的是因地球环绕太阳的运动所造成的恒星视位置的周年运动(光行差),以及恒星相对于地球所作运动的径向分量对于从这些恒星发射到我们的光线颜色的影响。这后一种

1)从与物体一起运动的坐标系上来判断。

458 效应表现为，与地面光源所产生的光谱线的位置相比，恒星发射给我们的光线的同种光谱线的位置有略微的位移(Doppler 原理)。支持 Maxwell-Lorentz 理论， [25] 同时也支持相对论的实验论据多得数不胜数。实际上它们在很大程度上限制了可能的理论，以至于除了 Maxwell-Lorentz 理论以外，没有其他理论能够经得起实验的检验。

但是至今有两类实验事实，只有再引入一个附加的假设以后才能用 Maxwell-Lorentz 理论来表示它们，该假设本身——即不使用相对论的话——显得像是与理论毫不相干。

人们知道，阴极射线和放射性物质发出的所谓 β 射线由带负电的粒子(电子)组成，它们惯性很小，速度很高。通过观察在电磁场作用下这些射线的偏转情况，我们可以非常精确地研究这些粒子的运动规律。

对这些电子进行理论处理时，我们所面临的困难是电动力学理论本身并不能说明这些电子的特性。由于电荷相同的带电物质相互排斥，构成电子的带负电的物质在相互排斥作用下必然会散开，除非它们之间存在另一种作用力，其性 [26] 质迄今仍不明了[1]。如果我们现在假设，构成电子的带电物质之间的相对距离在电子运动期间保持不变(经典力学意义上的刚性联结)，那么我们便得到一条
459 与经验不相符的电子运动定律。Lorentz 从纯形式的观点出发，率先引入这样的 [27] 假设：由于运动的缘故，电子的形状在运动方向上出现收缩，收缩的长度与 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 成正比。这个假设并没有得到任何电动力学事实的证实，但它为我们提供了一条特殊的运动定律，该规律近年来已被精确地证实。

从相对论也得到同一条运动定律，而无须对电子的结构和行为做任何特殊的假设。我们在 § 13 讨论 Fizeau 实验时得到过类似的结论，其结果为相对论所预言，而无须对液体的物理性质做任何假设。

我们提到过的第二类事实所针对的问题是，地球在空间中的运动是否在地面实验中可观察到。在 § 5 我们已经说过，这方面的所有尝试均得到否定结果。提出相对论之前，人们很难接受这个否定结果，原因如下：关于时间与空间的固有偏见不容许质疑 Galilei 变换对于从一个参照物改变成另一个参照物这一过程所具有的重要意义。现在假设 Maxwell-Lorentz 方程对参照物 K 成立，那么我们会发现，如果假设在坐标系 K 和相对于 K 做匀速运动的坐标系 K' 之间存在 Galilei 变换关系，那么这些方程相对于参照物 K' 就不成立。看来在所有 Galilei 坐标系中，有一个坐标系(K)对应于特殊的运动状态，在物理上是唯一

1)广义相对论可能认为，电子的带电物质是靠引力聚集在一起的。

的。这个结果在物理上的解释为:将 K 视为相对于空间中假想的以太处于静止状态。另一方面,所有相对于 K 运动的坐标系 K' 应视为相对于以太处于运动 460
状态。被认为相对于 K' 成立的定律之所以更加复杂,是由于 K' 相对于以太的这种运动(相对于 K' 的"以太漂移")的缘故。严格地讲,这种以太漂移也应该认为是相对于地球发生的。有很长一段时间,物理学家全力以赴企图找到地球表面存在着的以太漂移现象。

在这些努力中,最著名的是 Michelson 设计的一种方法,看起来好像它是具有决定意义的。设想在一个刚性物体上放有两面镜子,使其反射面彼此相对。如果这整个系统相对于以太处于静止状态,那么一束光线从一面镜子到达另一
[28] 面镜子后再返回就需要一段十分明确的传播时间 T。但是经过计算发现,如果该物体与镜子一起相对于以太运动,那么上述过程就需要一段稍微不同的时间 T'。还有一点:计算表明,给定相对于以太的运动速度 v,物体与镜面垂直运动时的时间 T' 不同于物体与镜面平行运动时的时间 T'。尽管估计这两个时间之
[29] 差非常小,但是在 Michelson 和 Morley 开展的涉及干涉的实验中,这一时间差应能明显地检测到。可是实验结果是否定的——一个令物理学家非常困惑的结果。Lorentz 和 Fitz Gerald 假设物体相对于以太的运动使物体在运动方向上发
[30] 生收缩,收缩量恰好足够弥补上述的时间差,从而使该理论摆脱了这一僵局。与 § 12 的讨论相比可以看出,也从相对论的观点来看,这个困难的解决方法是正确的。但是以相对论为基础的解释方法要远远地更令人满意。根据相对论,不存在"特别优越"(唯一)的坐标系,这种东西为引入以太概念提供机会,因而也不会存在以太漂移,不会有实验来证明它。这里运动物体的收缩是从相对论的两个基本原理得出的,没有引入任何特殊的假设;我们发现,这种收缩所涉及的主要因素不是运动本身,我们对这运动本身无法赋予任何意义,而是相对于在这一特殊情况下所选择的参照物的相对运动。于是对于一个与地球一起运动的坐标 461
系,Michelson 和 Morley 的镜子系统没有缩短,而对于一个相对于太阳静止的坐标系,该镜子系统的确缩短了。

§ 17. Minkowski 四维空间

非数学专业人员听到"四维"这个说法时会不寒而栗,那感觉就像想到神怪一样。然而我们所生活的世界是一个四维的时空连续统,这是再普通不过的说法了。

空间是一个三维连续统。这句话的意思是说,可以用三个数(坐标)x,y,z 来描述一个(静止)点的位置,在该点周围有无数个相邻的点,它们的位置可以用

坐标 x_1,y_1,z_1 来描述,它们的值可以任意靠近第一个点的对应坐标 x,y,z。正是由于这后一个性质,我们称其为"连续统",又由于有三个坐标,我们称它为"三维"的。

类似地,被 Minkowski 简称为"世界"的物理现象的世界,在时空意义上很自然地是四维的。因为它是由单个事件组成的,每一个事件用四个数来描述,即三个空间坐标 x,y,z 和一个时间坐标,时间值 t。"世界"在这种意义下也是一个连续统;因为对于每一个事件,我们可以选择任意多的"相邻"事件(已经发生的或者至少是想象的),这些事件的坐标 x_1,y_1,z_1,t_1 与原先考虑的事件的坐标 x,y,z,t 之间相差一个无穷小量。我们还不习惯把这种意义下的世界看作四维
462 连续统,这是因为在相对论问世之前的物理学中,与空间坐标相比,时间起的作用不同,更加独立。因此,我们习惯于把时间当作独立的连续统来看待。事实上,根据经典力学,时间是绝对的,即它与坐标系的位置和运动状态无关。我们看到,这一点表达在 Galilei 变换的最后一个方程中($t'=t$)。

在相对论中,按四维模式来考虑"世界"是很自然的,因为根据这个理论,时间被剥夺了独立性。这一点表现在 Lorentz 变换的第四个方程:

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

而且根据该方程,即使当两个事件相对于 K 的时间差 Δt 为零时,这两个事件相对于 K' 的时间差 $\Delta t'$ 一般也不为零。两个事件相对于 K 的纯粹"空间距离"造成这两个事件相对于 K' 的"时间距离"。但是对于相对论的形式推导至关重要的 Minkowski 的发现并不在于此,而是在于他认识到,相对论的四维时空连续统,在其最根本的形式性质方面,表现出与三维 Euclid 几何空间连续统有明显 [31]
的关系[1)]。然而,为了使这个关系得到应有的显现,我们必须把通常的时间坐标 t 替换为与之成正比的虚数 $\sqrt{-1}ct$。在此条件下,满足(狭义)相对论要求的自然定律所具有的数学形式中,时间坐标的作用与三个空间坐标的作用完全一样。
463 形式上,这四个坐标准确对应于 Euclid 几何的三个空间坐标。即使对于非数学专业人士,下面这一点也肯定是很清楚的:由于增加了这种纯形式的知识,相对论的清晰度必然得到极大的提高。

这些不太充分的评论只能使读者对 Minkowski 所贡献的重要思想有一个模糊的概念。没有他的思想,广义相对论(其基本观点详见下文)可能不会成长

---

1)详见附录 2。

壮大起来。对数学不熟的人无疑很难搞懂 Minkowski 的工作，可是为了理解狭义相对论或广义相对论的基本概念，也没有必要非常准确地掌握他的理论内容，所以目前我先讲到这儿，只在第二部分末尾再回来讨论它。

464

第二部分

广义相对论

§18. 狭义和广义相对性原理

作为前面所有讨论的中心的基本原理，是狭义相对性原理，即所有**匀速**运动的物理相对性原理。让我们再次仔细分析它的含义。

一直很清楚的是，从这个原理传递给我们的观点来看，每个运动都只能视为相对运动。回到我们不断引用的路堤和火车车厢的例子，我们可以用下列两种形式来表达所发生的运动，这两种形式都同样合理： [32]

(a) 车厢相对于路堤运动。

(b) 路堤相对于车厢运动。

在我们对运动描述中，(a)中的参照物是路堤，(b)中的参照物是车厢。如果问题仅仅是检测或描述所涉及的运动，那么以哪个物体为参照物原则上无关紧要。正如前面所述，这一点是不言而喻的，但切勿将它与称为"相对性原理"的更全面的陈述相混淆，后者已经是我们的研究基础。

我们所使用的原理不仅仅断言，车厢和路堤都同样可以作为描述事件的参
465 照物(这一点也是不言而喻的)，更确切地说，这个原理还断言：如果我们表示获自于经验的普遍自然定律时，利用

(a) 路堤为参照物，

(b) 火车车厢为参照物，

那么在这两种情况下，这些普遍自然定律(例如，力学定律或**真空中**的光传播规律)的形式都完全一样。这亦可表达为：对自然过程进行**物理**描述时，参照物 K，K'中哪一个都不比另一个更特殊。与前一个陈述不同，这后一个陈述的正确性

并不一定能先验地成立；它并非包含在"运动"和"参照物"这些概念中，也不能从这些概念中推导出；只有**经验**才能确定其正确与否。

可是迄今，我们根本就没有认定在表述自然定律方面**所有**参照物 K 都等价。我们的思路主要是遵循以下路线：首先，我们的出发点是假设存在一个参照物 K，它的运动状态使得 Galilei 定律相对于它是成立的：离开所有其他粒子充分远的孤立粒子将做匀速直线运动。相对于 K(Galilei 参照物)，自然定律会是最简单的。可是除了 K 以外，所有参照物 K' 也应该得到同样的待遇，在表述自然定律方面它们都应与 K 完全等价，只要它们相对于 K 处于**匀速直线和非旋转运动**状态；所有这些参照物都应视为 Galilei 参照物。过去相对性原理只有对于这些参照物才成立，对于其他参照物(例如运动状态超出上述范围的物体)则不成立。在这种意义下，我们说它是**狭义**相对性原理，或者狭义相对论。

与此不同，我们想把"广义相对性原理"理解为下列陈述：所有参照物 K，K' 466
等在描述自然现象(表达普遍自然定律)方面都是等价的，不管它们的运动状态如何。但是在深入讨论之前，应当指出的是，这个陈述在以后必须被一个更加抽象的陈述所替代，其理由在后文将会变得明显。

既然已经证明引入狭义相对性原理是正确的，那么每一位追求普遍化的才智之人都必定会受到诱惑，奋勇追索广义相对性原理。但是从一个简单且貌似可靠的观点来看，似乎至少就目前而言，这种尝试成功的希望很渺茫。设想我们回到老朋友——匀速行驶的火车车厢里，只要它做匀速运动，车厢里的乘客就感觉不到它的运动，因此他可以毫不犹豫地认为，车厢是静止的，而路堤在运动。而且根据狭义相对论，这种解释从物理学的角度来看也是完全正确的。

如果现在车厢的运动变为非匀速运动，例如发生急刹车，那么车厢里的乘客就会相应地向前猛地颠簸一下。这种减速运动表现在物体相对于车厢乘客的力学行为中。这种力学行为与前面考虑的例子中的情况不同，因此相对于静止或匀速运动的车厢成立的力学定律，相对于非匀速运动的车厢似乎不可能成立。无论如何，Galilei 定律相对于非匀速运动的车厢显然是不成立的。因此，在当前这个节骨眼上，与广义相对性原理相反，我们被迫将非匀速运动看作具有几分绝对物理实在性。但是在下文中，我们很快会看到，这个结论并不成立。

§19. 引力场 467

"如果我们拿起一块石头，然后松开手，为什么它会掉到地上呢?"对这个问题的一般回答是："因为它受到地球的吸引。"现代物理学对这个答案的描述很不一样，原因如下。对电磁现象更深入的研究，结果使我们认识到，超距作用离开

某种中间介质的介入是不可能存在的。例如,如果一块磁体吸引一块铁,我们不会承认这是磁体通过中间的虚空直接作用在铁上面,而是被迫按照 Faraday 的方式,想象磁体在其周围空间总是产生了某种物理实在的东西,这就是我们称为"磁场"的东西,然后这种磁场作用在铁块上,使铁块朝向磁体运动。这里我们不想讨论这一确实有点随意性的概念是否有道理。我们只想说,借助于它,电磁现象的理论表述要比没有它更加令人满意,它尤其适用于电磁波的传播现象。对引力效应的看法也是类似。

地球对石头的作用是间接发生的。地球在其周围产生引力场,该引力场作用在石头上,使它做下落运动。从经验得知,当我们离开地球越来越远,物体受到的作用强度按照非常明确的定律减弱。从我们的观点来看,这表示:为了正确 [33]
地表示引力作用随作用物体的距离加大而减弱的程度,空间中引力场的性质所
468 遵循的定律必须非常明确。大致说来:物体(例如地球)在其紧邻区域产生一个场;这个场在离开这个物体的各点处的强度和方向由主宰引力场自身的空间性质的定律所决定。

与电磁场不同,引力场具有非常显著的特性,这个特性对于下面的内容至关重要。在引力场单独作用下运动的物体具有一个加速度,**该加速度与物体的材料和物理状态毫不相关**。例如,在引力场中(**真空**),若一块铅和一块木头初始时都为静止状态,或具有相同的初速度,则它们下落的状态完全相同。按照下面的论述,这个非常准确的定律可以用一种不同的形式来表达。

根据牛顿运动定律,我们有:

(力)=(惯性质量)×(加速度),

其中,"惯性质量"是被加速物体的一个特征常数。如果引力是造成加速度的原因,那么就有:

(力)=(引力质量)×(引力场强度),

其中,"引力质量"同样也是物体的一个特征常数。从这两个关系式可得:

(加速度)=[(引力质量)/(惯性质量)]×(引力场强度)。

如果现在,正如我们根据经验所知,这个加速度与物体的性质和状态无关,并且对于给定的引力场总是同样的,那么引力质量与惯性质量之比对于所有物体同样也必须相同。通过适当地选择单位,可以使得该比值等于 1。于是得到下列 [34]
定律:物体的**引力**质量等于它的**惯性**质量。

的确,这个重要的定律迄今一直被记录在力学中,但是还没有得到过**解释**。
469 只有当我们承认下列事实时才会得到令人满意的解释:物体的**同一**性质依照环境不同,或表现为"惯性",或表现为"重量"。在下面的章节中,我们将说明这一点在多大程度上符合实际,以及这个问题是如何与广义相对性假设相联系的。

§20. 广义相对性假设的论据:惯性质量与引力质量的相等性

[35]设想有一片很大的虚空,它远离恒星和其他可测量到的物质,使我们有了几乎满足 Galilei 基本定律要求的条件,这样就有可能为这部分空间(世界)选择一个 Galilei 参照物,相对于这个参照物,处在静止状态的点依然静止,处在运动状态的点继续保持匀速直线运动。我们把一个像房间似的宽敞的箱子想象为参照物,里面有一位配备仪器的观察者。对他而言,引力自然不存在。他必须用绳子将自己拴在地板上,否则稍微碰一下地板都会使他慢慢上升到天花板上去。

在箱子盖的中部,从外面固定有一个钩子,钩子上拴有绳子。现在设想有一个"生物"(是何种生物无关紧要)开始用一个恒定的力拉动绳子。箱子和观察者一起开始"向上"做匀加速运动。随着时间的推移,他们的速度将达到空前的值——假若我们从另一个没用绳子拉动的参照物来观察这一切的话。

但是箱子内的人如何看待这一过程呢?箱子的加速度将通过箱子与地板的
反作用传递给观察者。因此,如果他不想整个人躺在地板上,就必须通过双腿承 470
受该压力。他站在箱子内的方式同任何人站在地球上的房间里的方式完全一样。如果他将手中握着的一个物体松开,那么箱子的加速度不再传递到该物体上,因此物体就会以加速相对运动方式向箱子的地板运动。观察者会进一步使自己相信,**不管实验中使用何种物体,物体朝向箱子地板运动的加速度总是同样大小。**

借助于他对引力场的知识(如上节所讨论的),箱子里的人将得出结论:他和箱子都处在不随时间变化的引力场中。当然,他会一度感到困惑,为什么箱子在引力场中不下落。然而这时,他会发现箱子盖中部的钩子以及拴在钩子上的绳子,从而他便得出结论:箱子是被静止地悬挂在引力场中。

我们是否该笑话这个人,说他的结论是错误的?如果我们要保持前后一致,我认为不应当笑话他,而是必须承认,他掌握事物的方式既不无道理,也没有违背已知的力学定律。即使箱子相对于开始所考虑的"Galilei 空间"做加速运动,我们仍然可以把它视为静止。因此,我们拥有充分的依据拓展相对性原理,将彼此做相对加速运动的参照物包括进去,结果得到推广的相对性假设的有力论据。

我们必须认真注意到,这种解释方式的可能性依赖于引力场的基本性质,即它给予所有物体相同的加速度,或者换句话说,依赖于惯性质量和引力质量的相等性定律。如果不存在这个自然定律,那么在加速运动的箱子内的那个人就不
能够在假设引力场存在的情况下,解释自己周围物体的行为,而且他也没有理由 471
基于经验假设他的参照物是"静止的"。

假设箱子里的人将一根绳子拴在盖子的内侧，将一个物体拴在绳子的另一端。这样做的结果是使得绳子拉直，“垂直”向下悬挂着。如果我们追究绳子张力产生的原因，那么箱子里的人会说：“悬挂的物体受到引力场的向下的力的作用，这个力被绳子的张力所抵消；决定绳子张力大小的因素是悬挂物体的**引力质量**。”另一方面，一位自由悬在空中的观察者会这样解释这一情况：“绳子必然参与箱子的加速运动，并将该运动传递给拴在它上面的物体。绳子的张力大小恰好足够产生物体的加速度。决定绳子张力大小的因素是物体的**惯性质量**。”根据这一例子，我们看到，相对性原理的推广蕴含着惯性质量与引力质量相等这一定律的必要性。这样我们就得到该定律的物理解释。

从我们对加速运动的箱子的讨论可以看出，广义相对论必然会在引力定律上产生重要结果。事实上，对广义相对性概念的系统研究已经产生了为引力场所满足的定律。然而在深入讨论之前，我必须提醒读者不要受到这些讨论所隐含的一个错误看法的影响。尽管事实上对于最早选用的坐标系不存在引力场，但是对于箱子里的人仍然存在这样的引力场。现在我们可能会轻易地认为，引力场的存在仅仅是个**表观**现象。我们还可能认为，不管出现的是何种引力场，我
472 们总有可能选择另一个参照物，使得相对于它就**不存在**引力场了。这一点绝不是对于所有引力场都成立的，而只是对于那些形式非常特殊的引力场才成立。例如，不可能选择到这样一个参照物，以它来判定地球的（整个）引力场是否消失。

我们现在知道了，为什么在 § 18 末尾提出的反对广义相对性原理的那个论据没有说服力。刹车造成车厢里的观察者猛地向前颠簸，由此他意识到车厢的 [36]
非匀速运动（减速），这些当然都是确实的。可是没有人迫使他将这种颠簸归因于车厢的“真正的”加速度（减速）。他还可以将此解释为：“我的参照物（车厢）一直处于静止状态。但是相对于它，（在刹车期间）存在一个引力场，它的方向朝前，随时间变化。在该引力场的作用下，路堤和地球一起做非匀速运动，使得它 [37]
们原来向后的速度不断减小。”

§ 21. 经典力学与狭义相对论的基础在哪些方面不令人满意

我们已经讲过多次，经典力学的出发点是以下定律：充分远离其他质点的质点将保持匀速直线运动或静止状态。我们还反复强调，这个基本定律只对于具有某种特殊运动状态、彼此相对匀速平移运动的参照物 K 才成立。相对于其他参照物 K，该定律不成立。因此，在经典力学和狭义相对论中，我们将参照物 K [38]
473 分为两类：一类是公认的“自然定律”相对于它成立的参照物；另一类是这些定律 [39]

[40] 相对于它不成立的参照物。

但是凡是思维有逻辑性的人都不会满足于这种情况。他会问道:某些参照物(或其运动状态)怎么会优越于其他参照物(或其运动状态)呢? **这种优越性的原因是什么?** 为了更清楚地说明我提出这个问题的寓意,我打个比方。

我站在一个煤气炉前,炉子上并列放有两个非常相像、容易混淆的平底锅,它们都盛有半锅的水。我注意到,一个锅在不断地往外冒蒸汽,而另一个锅则不冒。即使我以前不曾见过煤气炉或平底锅,我也会对此现象感到惊奇。但是当我注意到第一个锅的下面有一种蓝色发光的东西,而另一个锅则没有时,我就不再惊讶了,即使我以前从未见过煤气火焰。因为我只能说,正是这种蓝色的东西使蒸汽冒出来,或者起码有这种**可能**。然而,如果我在两个锅下面都见不到这种蓝色的东西,而且我观察到一个锅不断地往外冒蒸汽,而另一个则不冒,那么我依旧会感到诧异和不满意,直至我发现某个因素,可以将两个锅的差异归因于它为止。

类似地,我在经典力学(或狭义相对论)中徒劳地寻找某种实在的东西,作为
[41] 解释物体相对于参照系 K 和 K' 出现不同行为的原因[1]。牛顿看出了这一缺陷,
并试图消除它,但没有成功。但是在所有人中 Mach 看得最清楚,因为这一缺 474
[42] 陷,他主张力学必须建立在新的基础上。只有依靠符合广义相对性原理的物理学才有可能消除这一缺陷,因为这种理论的方程对于所有参照物都成立,不论其运动状态如何。

§ 22. 广义相对性原理的几个推论

§ 20 的讨论表明,广义相对性原理使我们能够以纯理论的方式推导出引力场的性质。例如,假设我们已知任一自然过程的时空"进程",即它在 Galilei 区域中相对于 Galilei 参照物 K 的发生方式。通过纯理论分析(即仅靠计算),我们就能够知道,从相对于 K 做加速运动的参照物 K' 来看,这个已知的自然过程会是什么样子。可是由于相对于这个新的参照物 K' 存在一个引力场,这个讨论还告诉我们,该引力场是如何影响所研究的过程的。

例如,我们知道,一个相对于 K 做匀速直线运动的物体(根据 Galilei 定律),相对于加速的参照物 K'(箱子)则在做加速的且一般为曲线的运动。该加速度或曲率与相对于 K' 存在的引力场对运动物体所施加的影响相对应。人们已经

1)当参照物的运动状态不需要任何外部力量维持时,例如当参照物匀速旋转时,这一缺陷就尤为重要了。

知道引力场就是这样影响物体的运动，所以这种讨论没有给我们什么新东西。

然而，当我们对一束光做类似的考虑时，就会得到一个非常重要的新结果。相对于 Galilei 参照物 K，这样一束光线以速度 c 直线传播。很容易看出，相对于
475 加速运动的箱子（参照物 K'），该光束的路径不再是直线。由此我们得出结论：**一般来说，在引力场中光以曲线方式传播。**这个结果在两个方面十分重要。

首先，它可以与实际情况相对比。虽然仔细研究该问题会发现，广义相对论所要求的光线的曲率对于我们在实际中可以自由使用的引力场来说是极其微小的，但是对于擦着太阳边缘射过来的光线，其曲率的估计值仍有 1.7 弧秒。这个 [43]
值应当可以用下面的方式表现出来。从地球看去，某些恒星出现在太阳的旁边，因此在全日食期间能够观察到它们。在这种时候，与太阳位于天空另一部分时它们在天空中的视位置相比较，这些恒星应该看起来向外偏离太阳一定距离，该距离的大小如上所述。检验该推论正确与否是一个非常重要的问题，期待天文 [44]
学家及早解决该问题。[1]

其次，我们的结果表明，根据广义相对论，作为狭义相对论两个基本假设之一的、我们经常提到的真空中光速不变定律，其正确性不能是无限制的。只有当光的传播速度随位置而变化时，光线才能发生弯曲。现在我们可能会认为，由于这种情况，狭义相对论乃至整个相对论都要被埋葬了。但实际上并非如此。我们只能得出这样的结论：狭义相对论的正确性不可能是无限制的；只有当我们能够忽略引力场对现象（例如光）的影响时，其结论才能成立。

476 由于相对论的反对者经常声称，狭义相对论被广义相对论推翻了，所以通过适当的比较把事实说清楚，也许是值得的。在电动力学发展起来以前，静电学定律被视为电学定律。现在我们知道，只有在带电物质相互间并且相对于坐标系呈完全静止状态的情况下，电场才能正确地从静电学观点中推导出，而这种情况根本不能严格实现。那么我们是否就有理由说，因为这一点，静电学就被电动力学中的 Maxwell 场方程推翻了呢？完全不能。静电学作为一个局限的情况包含在电动力学中；在场不随时间变化的情况下，后者的定律直接导出前者的定 [45]
律。一个物理理论能够得到的最好归宿，莫过于它自然而然地为引入更全面的理论指出了道路，而自己在这个新理论中作为一个局限的情况继续存在。

在刚才谈到的光传播的例子中，我们看到，广义相对论使我们能够从理论上推导出引力场对自然过程的影响，在引力场不存在时这些过程所遵循的定律已经为人所知。但是最吸引人的问题是研究引力场本身所遵循的定律，广义相对

1）理论所要求的光线的偏折，通过皇家学会和皇家天文学会组成的联合委员会所装备的两支远征队在 1919 年 5 月 29 日日食期间所拍摄的恒星照片，首次得以证实（参见附录 3）。

论为这个问题提供了关键答案。让我们考虑一下这个问题。

我们已经熟悉经过适当选择参照物后(近似地)遵循"Galilei"方式的时空域,即没有引力场的域。如果我们现在相对于具有某种运动状态的参照物 K' 来考察这样一个域,那么相对于 K',就存在一个相对于时间和空间[1]变化的引力场。这个场的性质当然依赖于 K' 所具有的运动状态。根据广义相对论,所有以这种方式得到的引力场都应满足引力场的普遍定律。尽管绝不是所有引力场都 477
能以这种方式产生,但是我们依然希望引力的普遍定律能够从这种特殊的引力场中推导出来。这种希望已经十分完美地实现了。但是,从认清这一目标到实际实现它之间,还必须克服一个严重的困难。由于这一困难涉及问题的根基,我不敢向读者隐瞒它。我们需要进一步拓展时空连续统的概念。

§ 23. 在旋转参照物上时钟和量杆的行为

至此我一直有意闭口不谈时空数据在广义相对论下的物理解释。因此,我有一定的处理的草率之罪。正如我们从狭义相对论所了解的,这种疏忽绝不是不重要和可原谅的。现在正是弥补这一缺陷的时候,但是在开始之前,我愿指出,这个问题对读者的耐心和抽象能力的要求不低。

我们还是从以前频频用过的很特殊的情况入手。让我们考虑一个时空域,这个时空域中相对于运动状态适当选定的参照物 K 不存在引力场。那么相对于所考虑的这个域而言,K 属于 Galilei 参照物,狭义相对论相对于 K 成立。设想这同一个域相对于另一个参照物 K' 的情况,K' 相对于 K 做匀速旋转运动。为了明确我们的想法,将 K' 想象为一个平面圆盘,正在其平面上环绕其中心匀速旋转。在圆盘 K' 上离开中心的位置坐着一位观察者,他能够感受到沿半径方 478
向向外作用的力,对于相对于原来的参照物 K 处于静止状态的观察者来说,这个力可以解释为惯性作用(离心力)。但是圆盘上的观察者可以将所在的圆盘视为"静止"的参照物,根据广义相对性原理,他这样做完全合理。他可以将作用在他身上的力,事实上也是作用在其他所有相对于圆盘静止的物体上的力,视为引力场的作用。然而该引力场的空间分布在牛顿的引力理论中是不可能的[2]。但是因为观察者相信广义相对论,这对他没有影响;他完全有理由相信,能够建立起引力的普遍定律——该定律不仅能够正确地解释恒星的运动,而且还能够解释他自己感受到的力场。

1)这个论断从 § 20 讨论的推广中得出。

2)这个场在圆盘的中心消失,当我们向外移动时,它随着离开中心的距离增加成比例地增大。

该观察者在他的圆盘上用时钟和量杆开展实验。他这样做的目的是想要为相对于圆盘 K' 的时空数据的意义找到准确的定义，这些定义以他的观察为依据。在这项工作中他会经历些什么呢？

开始时，他将两个结构完全一样的时钟之一放在圆盘的中央，另一个放在圆盘的边缘，这样这两个时钟都相对于圆盘静止。我们自问：从非旋转的 Galilei 参照物 K 的角度来看，这两个时钟是否走得一样快？从该参照物来看，圆盘中央的时钟没有速度，而圆盘边缘的时钟因为旋转的缘故而相对于 K 在运动。根据 § 12 获得的结果可知，后面这个时钟走得永远比圆盘中央的时钟慢，即从 K
479 的角度观察。很明显，设想有一位观察者和时钟一起坐在圆盘中央，那么他也会看到同样的效果。于是在我们的圆盘上，或者为了使情形更一般，在每一个引力场中，时钟走得快慢依赖于它（静止地）所处的位置。因此，我们不可能借助于相对于参照物静止安放的时钟获得时间的合理定义。当我们试图在这种情况下应用先前关于同时性的定义时，也会遇到类似的困难，但是我不想进一步讨论这个问题。

此外，在此阶段，空间坐标的定义也出现难以克服的困难。如果观察者将他
那标准的量杆（一种与圆盘半径相比之下很短的杆）与圆盘的边缘呈切线方向摆 [46]
放，那么从 Galilei 系统来看，该杆的长度将小于 1，因为按照 § 12 的结论，运动中的物体在运动方向上会变短。另一方面，如果量杆沿半径方向摆在圆盘上，那么从 K 来看，量杆的长度就不会变短。如果观察者用量杆先测量圆盘的周长，
然后测量圆盘的直径，那么将结果相除后，他得到的商就不会是大家都熟悉的数 [47]
$\pi=3.14\cdots$，而是一个更大的数[1)]。当然，对于相对于 K 静止的圆盘，这一过程将精确地得到 π。这证明，Euclid 几何公式在旋转圆盘上不能完全成立，更一般地，在引力场中也不能完全成立，至少是只要我们认为在所有位置和所有方向上，量杆的长度都是 1 的话，就是这种情况。因此直线这个概念也失去了意义。
这样我们就不能依靠讨论狭义相对论时使用的方法来精确地定义相对于圆盘的 [48]
坐标 x, y, z，而且只要事件的坐标和时间没被定义，我们就无法对包含这些指标的自然定律赋予精确的意义。

480 因此，我们前面所有依据广义相对性的结论似乎都有问题。实际上，为了能 [49]
够准确地应用广义相对性假设，我们必须巧妙地迂回一下。下文将使读者对此做好准备。

1）在整个讨论中，我们必须采用 Galilei（非旋转）系统 K 作为参照物，因为我们只能假设狭义相对论的结论相对于 K 是正确的（相对于 K' 引力场占上风）。

§ 24. Euclid 与非 Euclid 连续统

一张大理石桌面铺展在我的面前。我可以这样从桌子上任何一点到达另外任何一点,即连续地从一点移动到"邻近"的一点,重复这个过程(很)多次,或者换句话说,不经过"跳跃"地从一点到达另一点。我确信读者很清楚地知道我这里说的"邻近"和"跳跃"是什么意思(如果他不是太迂腐的话)。我们通过将桌面描述为连续统来表达桌面的这个属性。

现在我们设想已经做成了许多等长的小杆子,与大理石板的尺寸相比,它们的长度很小。当我说它们等长时,意思是说任何一根杆子可以放在另一根杆子
[50] 上面而且杆端互相重叠。下一步,我们将四根这样的小杆放在大理石板上,使它们构成一个对角线等长的四边形(正方形)。为了保证对角线等长,我们使用一根小测试杆。我们添加类似的四边形到这个正方形上,每个添加的四边形都与第一个正方形共用一根杆。对于每一个正方形都如此进行下去,直到最后整个大理石板都铺满了正方形。排列方式使得正方形的每个边都归属于两个正方
[51] 形,每个角都归属于四个正方形。

[52] 确实令人惊奇的是,我们能够完成这一切而没有遇到太大的困难。只需要想一想下面的情况。在任何时刻,如果三个正方形在一个角相遇,那么第四个正方形的两条边就已经摆放好了,因此该正方形的另外两条边的摆法就已经完全 481
确定。可是我现在不再能够调整这个四边形,使它的对角线相等。如果它们自己主动相等,那么这是大理石板和小杆子的恩惠,对此我只能表示感激和惊讶。如果这种构造能够成功,那么我们必定会经历许多这样的惊讶。

如果凡事都确实进展顺利,那么我就说,该大理石板的点相对于小杆子组成一个 Euclid 连续统,小杆被用作"距离"(线距)。选择一个正方形的一个角作为"原点",我就可以相对于该原点用两个数来刻画正方形的所有其他角。我只需要说明,为了到达正方形的某个角,我从原点出发,向"右"然后向"上",必须经过多少根杆子就可以了。这两个数就是这个角相对于由小杆的排列所确定的"Descartes 坐标系"的"Descartes 坐标"。

对这个抽象实验做如下的改变,我们就会认识到,肯定会存在使实验不成功的情况。设想小杆会随着温度升高成比例地"膨胀"。我们对大理石板的中央部分加热,但边缘部分不加热,在这种情况下,桌面的每个位置仍能有两根小杆被重合地放置。但是在加热期间,由于桌面中央区域的小杆膨胀,而外缘部分的小杆不膨胀,所以正方形的构建必然会乱套。

相对于我们的小杆——定义为单位长度——大理石板不再是 Euclid 连续

统，而且因为无法再进行上述的构建，我们也无法再直接借助于小杆来定义 Descartes 坐标。但是既然还有其他一些因素并不像小杆那样受到桌子温度的
482 影响（或许完全不受影响），因而保留大理石板是个“Euclid 连续统”的观点也许是很自然的。这个目的能够令人满意地得以实现，办法是对长度的测量或比较制定更精妙的规则。

但是当各种（即各种材料的）小杆放在受热不均的大理石板上时，如果它们在温度影响下的**行为方式都一样**，而且如果除了依靠在类似上述实验中的小杆的几何行为以外，我们别无其他办法来探测温度效应，那么最好的办法莫过于只要一根杆的两端能够与石板上两个点重合，就规定这两个点的距离为 1；我们还能怎样定义距离呢？其他任何方法都会使我们的定义变得极其武断随意。这样我们就必须放弃 Descartes 坐标法，代之以另一种不认为 Euclid 几何学对刚性物体成立的方法[1]。读者会注意到，这里所描述的情况相当于广义相对性假设所招致的那种情况（§23）。

483

§ 25. Gauss 坐标

根据 Gauss 的研究，可以用下列方法得到这种分析与几何相结合的处理问题的方法。想象在桌面上画有一组任意的曲线（图 4）。我们称它们为 u 曲线，并用数字标示各曲线。图上绘出了 $u=1$，$u=2$ 和 $u=3$ 三根曲线。在曲线 $u=1$ 和 $u=2$ 之间，我们必须认为还可以画出无数的曲线，每一条都对应于 1 和 2 之间的一个实数。这样我们就有了一个 u 曲线系统，而且这个“无限稠密”的系统覆盖了整个桌面。这些曲线一定不能彼此相交，而且穿过平面上的每一个点

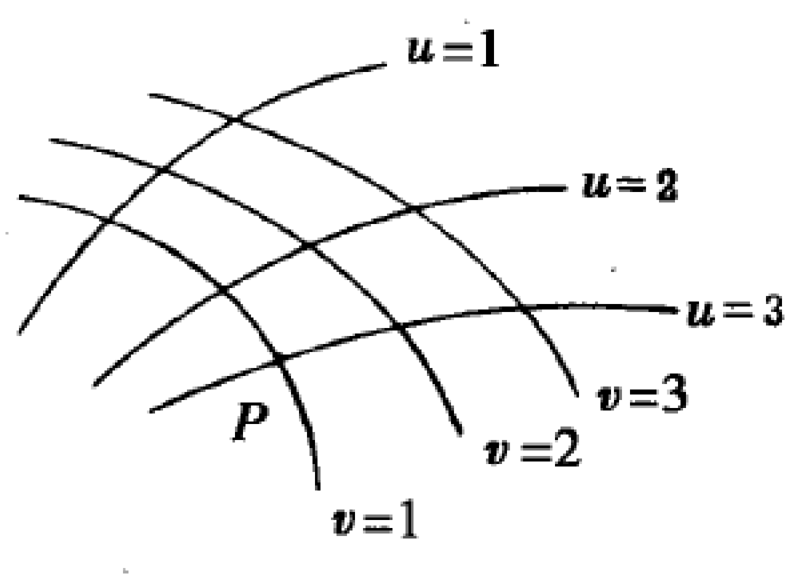


图 4

1）我们的问题已经以下列形式提到数学家面前。如果在 Euclid 三维空间中给定一个表面（例如椭球面），那么对于这个表面，如同对于一个平面一样，存在一个二维几何学。Gauss 从基本原理出发来探讨这个二维几何学，而不利用该表面属于三维 Euclid 连续统这一事实。如果我们想象用刚性小杆在该表面上 [53]
做些结构（类似于上文在大理石板上的构造），我们就会发现，这些构造遵循的定律不同于依据 Euclid 平面几何学所得出的定律。对于小杆来说，该表面不是 Euclid 连续统，在该表面上我们无法定义 Descartes 坐标。Gauss 指出了使我们能够据以处理该表面上的几何关系的原则，从而指明了通向处理多维非 Euclid 连续统的 Riemann 法的道路。因此，广义相对性假设带给我们的形式问题很久以前就被数学家们解 [54]
决了。

有且只有一条曲线。因此大理石板表面上的每一个点都有一个非常明确的值 u。同样地,我们想象在桌面上画有一组 v 曲线。这些曲线满足的条件与 u 曲线相同,同样用数字编号,而且同样具有任意的形状。由此可知,桌面上的每一个点既有 u 值也有 v 值。我们将这两个数称为桌面的坐标(Gauss 坐标)。例如,图上 P 点的 Gauss 坐标为 $u=3, v=1$。表面上两个相邻的 P 点和 P' 点对应于坐标:

$$P:\ u, v$$
$$P':\ u+\mathrm{d}u, v+\mathrm{d}v,$$

其中 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$ 代表非常小的数。类似地,如同用小杆测量出来一样,我们可以用非常小的数 $\mathrm{d}s$ 表示 P 和 P' 之间的距离(线距)。根据 Gauss 的理论,有:

$$\mathrm{d}s^2=g_{11}\mathrm{d}u^2+2g_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g_{22}\mathrm{d}v^2,$$

其中 g_{11}, g_{12}, g_{22} 的值以完全明确的方式依赖于 u 和 v。g_{11}, g_{12}, g_{22} 的值决定了 484
小杆相对于 u 曲线和 v 曲线的行为,因而也决定了小杆相对于桌面的行为。在所考虑的桌面上的点相对于测量杆形成 Euclid 连续统的情况下,也只有在这种情况下,才有可能以这样的方式画出 u 曲线和 v 曲线并给它们编号,使得下面的简单关系式成立:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2.$$

在这种情况下,u 曲线和 v 曲线是 Euclid 几何意义上的直线,而且彼此垂直。这里的 Gauss 坐标就是 Descartes 坐标。很清楚,Gauss 坐标只不过是两组数与所考虑的表面上的点的一种关联,使得彼此相差非常小的数值和"空间中"相邻的点相关联。

迄今为止,这些讨论对于二维连续统成立,但是 Gauss 的方法还适用于三维、四维或更多维的连续统。例如,假设存在一个四维连续统,我们就可以如下表示它。对于连续统上的每一个点,我们可以任意赋予四个数字 x_1, x_2, x_3, x_4,称为"坐标",邻近的点对应于邻近的坐标值。如果邻近的点 P 和 P' 的距离为 $\mathrm{d}s$,从物理的观点来看,该距离可以测量而且定义明确,那么下面的公式成立:

$$\mathrm{d}s^2=g_{11}\mathrm{d}x_1^2+2g_{12}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+\cdots+g_{44}\mathrm{d}x_4^2,$$

其中 g_{11} 等的数值随着点在连续统上的位置而变化。只有当连续统是 Euclid 连续统时,它上面的点所关联的坐标 $x_1, \cdots, x_4$ 才可能有如下的简单关系式:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\mathrm{d}x_3^2+\mathrm{d}x_4^2.$$

在这种情况下,四维连续统中成立的关系式与三维测量中成立的关系式类似。

然而,Gauss 对上述 $\mathrm{d}s^2$ 的分析并非永远可行。只有当所考虑的连续统的充 485
分小的区域可以视为 Euclid 连续统时才可行。例如,在大理石桌面局部温度变化的情况下,这显然是成立的。对于一小部分石板而言,温度实际上是常数,因

此小杆的几何行为非常接近遵循 Euclid 几何法则所要求的。这样，上一节中构造正方形的瑕疵问题，只有到构建的区域扩展到桌面相当大面积上以后，才会明显地表现出来。

我们可以总结如下：Gauss 发明了对一般连续统进行数学分析的方法，其中定义了“大小关系”(相邻点之间的“距离”)。给连续统的每一个点都指定一些数字(Gauss 坐标)，数字的个数等于连续统的维数。其做法使得这种指定只有一个意义，而且彼此相差无穷小的数字(Gauss 坐标)被指定给相邻的点。Gauss 坐标系是 Descartes 坐标系的逻辑推广。它也适用于非 Euclid 连续统，但是只有当相对于所定义的“大小”或“距离”而言，所考虑的该连续统的小区域越小，其表现越接近 Euclid 系统时，它才适用。

§ 26. 视为 Euclid 连续统的狭义相对论时空连续统

我们现在可以更精确地表达 Minkowski 的概念了，这个概念只在 § 17 中含糊地提到过。根据狭义相对论，在描述四维时空连续统时，某些坐标系享有特殊
486 的地位，我们称它们为“Galilei 坐标系”。对于这些坐标系，确定一个事件，或者换句话说，确定四维连续统的一个点的四个坐标 x,y,z,t 在物理上具有简单的定义，详见本书第一部分。当从一个 Galilei 坐标系变换到另一个相对于它做匀速运动的坐标系时，Lorentz 变换方程成立。这些方程最终构成狭义相对论推论的基础，它们本身表达的只不过是光传播定律对于所有 Galilei 参照系的普适正确性。

Minkowski 发现 Lorentz 变换满足下列简单的条件。考虑两个相邻的事件，相对于 Galilei 参照物 K，它们在四维连续统中的相对位置由空间坐标差 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 和时间差 $\mathrm{d}t$ 给出。相对于另一个 Galilei 坐标系，假设这两个事件相应的差为 $\mathrm{d}x'$，$\mathrm{d}y'$，$\mathrm{d}z'$，$\mathrm{d}t'$。那么这些量满足下列条件：1) [55]

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2-c^2\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}x'^2+\mathrm{d}y'^2+\mathrm{d}z'^2-c^2\mathrm{d}t'^2.$$

Lorentz 变换的正确性就是从这个条件导出的。我们可以将此表述如下：属于四维时空连续统的两个相邻点的数值

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2-c^2\mathrm{d}t^2$$

对于所有选中的(Galilei)参照物具有相同的值。如果我们用 x_1,x_2,x_3,x_4 来代替 $x,y,z,\sqrt{-1}ct$，就会得到：

---

1) 参考附录 1 和附录 2，在那里对于各坐标本身所推导出的关系对于坐标差也成立，因而对于坐标微分(无限小的差)也成立。

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

这个结果与参照物的选择无关。我们将数值 ds 称为这两个事件或四维点之间的"距离"。

因此,如果我们选择虚数变量 $\sqrt{-1}ct$,而不是实数 t 来作为时间变量,那么 487
我们就可以——根据狭义相对论——将时空连续统视为"Euclid"四维连续统,这个结果可以从前一节的讨论中推出。

§ 27. 广义相对论的时空连续统不是 Euclid 连续统

在本书的第一部分,我们能够利用容许对它进行简单直接的物理解释的时空坐标,而且根据 § 26,这些坐标可以视为四维 Descartes 坐标。基于光速不变定律,这样做是可以的。可是按照 § 21,广义相对论无法保持这个定律。相反,我们得到的结果是,根据广义相对论,当存在引力场时,光速肯定与坐标相关。联系到 § 23 的一个具体例子,我们发现,把我们引向狭义相对论中的目标的那种坐标和时间的定义,在存在引力场的情况下失效了。

考虑到这些讨论结果,我们相信,根据广义相对性原理,时空连续统不能被视为 Euclid 连续统,而是一种更普遍的情形,相当于存在局部温度变化的大理石板,它作为二维连续区的例子曾为我们所熟悉。正如那时不可能用等长的小杆来建造 Descartes 坐标系一样,这里也不可能用刚体和时钟来建立一个具有这种性质的坐标系(参照物),使得量杆和时钟在彼此相对固定好之后,能够直接指示位置和时间。这就是我们在 § 23 碰到的困难的本质。

但是 § 25 和 § 26 的分析给我们指出了克服这一困难的道路。我们将四维
时空连续统随意地与 Gauss 坐标联系起来。给连续统中每一个点(事件)指派四 488
个数 x_1, x_2, x_3, x_4(坐标),它们没有任何直接的物理意义,只是为了明确而随意
[56] 地用数字标示连续统的点而已。这种安排甚至不需要我们必须将 x_1, x_2, x_3 视为"空间"坐标,x_4 视为"时间"坐标。

读者可能会认为,对世界进行这样的描述会很不充分。如果坐标 x_1, x_2, x_3, x_4 本身没有意义,那么给一个事件指派这些坐标又有什么意义呢?然而更仔细地思考一下就会发现,这种担忧是没有根据的。例如,考虑一个具有某种运动状态的质点。如果该点只是瞬间存在,没有持续时间,那么在时空中它就由单独一组值 x_1, x_2, x_3, x_4 来描述。因此,它的持续存在就必须由无限多这样的数值组来刻画,它们的坐标值非常接近,表现出连续性;于是对应于这个质点,我们在四维连续统中得到一条(一维的)线。同样地,在我们的连续统中任何一些这类的线都对应于运动着的许多点。与这些点有关的、涉及物理存在性的陈述实

际上只有关于它们相遇的陈述。在我们的数学分析中，这种相遇被表达为：代表这些点的运动的两条线具有共同的一组坐标值 x_1, x_2, x_3, x_4。经过深思熟虑之后，读者毫无疑问地会承认：事实上，这种相遇构成了我们在物理描述中遇见的时空性质的唯一实际证据。

489 当我们描述一个质点相对于参照物的运动时，我们描述的只不过是该点与参照物的某些特定点的相遇关系。通过观察物体与时钟的相遇，以及观察时钟指针与钟面上特定点的相遇关系，我们也能确定相应的时间值。稍做考虑就可以看出，这就如同用量杆进行空间测量的情况一样。

下面的陈述一般都成立：每一个物理描述本身都可以分解为一系列陈述，每 [57]
一条陈述都涉及两个事件 A 和 B 的时空重合。用 Gauss 坐标的术语来说，每一条这种陈述都表达为这两个事件的四个坐标 x_1, x_2, x_3, x_4 的相等关系。因此实际上，用 Gauss 坐标对时空连续统的描述就完全代替了借助于参照物的描述，避免了后一种描述方式具有的缺陷；它不受所必须表述的连续统的 Euclid 性质的束缚。

§ 28. 广义相对性原理的精确表述

我们现在能够用精确的表述来替代 § 18 关于广义相对性原理的临时表述。
490 § 18 所用的表述方式为"在描述自然现象（表述普遍自然定律）方面，所有参照物 K, K' 等都是等价的，不管它们的运动状态如何"，这个表述不再维持，因为在时空描述中，一般不可能使用在狭义相对论的方法意义上的刚性参照物。必须用 Gauss 坐标系来替代参照物。下面的陈述反映了广义相对性原理的基本思想：**"在描述普遍自然定律方面，所有 Gauss 坐标系都是完全等价的。"**

我们也可以用另一种方式来阐述这个广义相对性原理，与使用狭义相对性原理的自然推广形式相比，这种形式更容易理解。根据狭义相对论，当使用 Lorentz 变换，将（Galilei）参照物 K 的时空变量 x, y, z, t 替换为新参照物 K' 的时空变量 x', y', z', t' 时，表达普遍自然定律的方程式的形式不变。另一方面，根据广义相对论，对 Gauss 变量 x_1, x_2, x_3, x_4 进行**任意代换**，方程式的形式必须保持不变；因为每一个变换（不仅是 Lorentz 变换）相当于从一个 Gauss 坐标系转变为另一个 Gauss 坐标系。

如果我们想坚持"旧时代"的对事物的三维观点，那么我们可以将广义相对论的基本思想目前发展的特点刻画为：狭义相对论涉及的是 Galilei 域，即没有引力场存在的域。在这一点上，Galilei 参照物被用作为参照物，即一个运动状态经过特别选择的刚体，使得"孤立"质点保持匀速直线运动的 Galilei 定律相对于

它成立。

经过考虑可以看出,我们也应该把同样的 Galilei 域去参照非 **Galilei** 参照物。那么相对于这些参照物就会存在一种特殊的引力场(参见 § 20 和 § 23)。

在引力场中,不存在具有 Euclid 性质的刚体这类东西,因此传统的刚性参照物在广义相对论中就没有用了。时钟的运动也受到引力场的影响,其影响方式使得直接靠时钟得到的时间的物理定义完全没有在狭义相对论中那样程度的 491
有道理。

为了这个原因,我们使用非刚性参照物。总体上它们不仅以任意的方式在运动,而且在运动中它们的形状还不受限制地改变。时钟用来定义时间,它可以遵循任何运动定律,无论有多么不规则。我们必须设想每一个时钟固定在非刚性参照物上的一点上。这些时钟只满足一个条件,即(空间中)相邻时钟被同时观察到的"读数"彼此相差无穷小量。将这种非刚性参照物称为"参照软体"比较合适,它大体上相当于任意选择的 Gauss 四维坐标系。与 Gauss 坐标系相比,该"软体"在某种程度上更容易理解的地方是,它在形式上保留了空间坐标与时间坐标分别存在的状态(这一点完全没有得到证明)。只要将软体当作参照物,那么软体上的每一个点都被当作空间点,每一个相对于它静止的质点都被视为处在静止状态。广义相对性原理要求,在表达普遍自然定律方面,所有这些软体都可以作为参照物,它们享有同等的权利,能够取得同样的成功;这些定律本身应当与软体的选择毫无关系。

广义相对性原理的巨大力量在于它给自然定律所做的全面限制,原因我们在上面已经看到了。

§ 29. 基于广义相对性原理解决引力问题

如果读者理解了前面的所有讨论,他就不难理解解决引力问题的方法。

我们从考虑 Galilei 域开始,即相对于 Galilei 参照物 K 没有引力场的域。 492
从狭义相对论可以知道量杆和时钟相对于 K 的行为,同样可以知道"孤立"的质点的行为,后者沿直线匀速运动。

现在让我们将这个域相对于任意的 Gauss 坐标系或者"软体"参照物 K' 来考虑。相对于 K',存在(某一种)引力场 G。仅通过数学变换我们就可以知道量杆和时钟以及自由运动的质点相对于 K' 的行为。我们将这一行为解释为在引力场 G 的作用下量杆、时钟和质点的行为。这里我们引入一个假设:即使当前的引力场**不能**简单地通过坐标变换从 Galilei 的特殊情况下推导出来,它对量杆、时钟和自由运动的质点的作用仍然按照同样的定律持续发生。

下一步是研究从 Galilei 的特殊情况简单地通过坐标变换推导出来的引力场 G 的时空行为。这种行为表述为一条定律，不管如何选用描述中所用的参照物（软体），这条定律永远成立。

因为所考虑的是一种特殊的引力场，所以该定律还不是引力场的**普遍**定律。为了找到普遍引力场定律，我们还需要将上面找到的定律进行推广。然而考虑到下列要求，无须奇思异想就可以得到这种推广：

(a) 所需的推广必须也满足广义相对性假设。

(b) 如果所考虑的域中存在物质，那么对于它激发一个场的效应而言，只有其惯性质量，根据 § 15，也就是只有其能量才具有重要作用。

493 (c) 引力场和物质一起必须满足能量（及动量）守恒定律。

最后，对于所有那些当不存在引力场时按照已知定律发生的过程，即那些已经纳入狭义相对论讨论范围的过程，广义相对性原理使我们能够确定引力场对它们的进程的影响。在这方面，我们原则上采用已经对量杆、时钟和自由运动的质点解释过的方法进行下去。

用这种方法从广义相对性假设推导出的引力理论不仅结构优美，同时消除了 § 21 揭示的经典力学的缺陷，它也不仅解释了惯性质量和引力质量相等这一 [58]
实验定律，而且还解释了经典力学无能为力的一个天文观测结果。 [59]

如果我们将该理论的应用局限在下面这种情况：引力场可以认为很弱，而且 [60]
其中所有物体相对于坐标系的运动速度都远小于光速，那么作为初次近似，我们就得到牛顿理论。这里不用做任何特殊假设就可以得到牛顿理论，但是牛顿却不得不引入了这样的假设，即相互吸引的质点之间的引力与它们的距离的平方成反比。如果我们提高计算的精度，那么与牛顿理论的偏差就会显现出来，不过由于这些偏差太小，实际上它们都肯定不能被检测出来。

这里我们必须注意到这些偏差中的一个。根据牛顿理论，行星沿椭圆轨道绕太阳运行，如果我们可以忽略恒星本身的运动以及所考虑的其他行星的影响，那么该椭圆轨道会永远保持它相对于恒星的位置不变。因此，如果我们考虑到
494 这两种影响，并据此修正了所观测到的行星运动，而且牛顿的理论是严格正确
的，那么我们所得到的行星轨道就应该是一个相对于恒星固定不变的椭圆。这 [61]
个推论能够以很高的精度进行检验，除了一个例外，它已经在所有行星上以目前 [62]
所能达到的最高观测精度得以证实。唯一的例外是离太阳最近的行星——水星。自从 Leverrier 时代以来，人们就已经知道，水星轨道的椭圆在经过消除上述影响修正之后，相对于恒星并非固定不变，而是在轨道运动的意义上，在轨道平面内极其缓慢地旋转。这一轨道椭圆的旋转运动的数值为每世纪 43 弧秒，误差保证在几弧秒内。要通过经典力学来解释这个效应，只能引入可能性很低的、

专门为此设立的假设才行。

基于广义相对论，我们发现，每一个行星环绕太阳的椭圆轨道必须按上述方
[63] 式旋转；对于所有行星，除了水星以外，这种旋转太小，目前的观测精度还无法检
[64] 测出来；但是对于水星，它肯定达到每世纪 43 弧秒，这与观测结果确实一致。

[65][66] 除此以外，迄今这个理论只可能做出两个推论能够通过观测得以检验，即光
[67][68] 线在太阳引力场作用下的弯曲[1]，以及从大恒星射到我们这里的光谱线，与地面
[69] 上以类似方式(即用同一种原子)产生的相应的光谱线相比，有位移发生[2]。从
[70] 理论得出的这两个推论都已得到证实。

1)首次由 Eddington 和其他人在 1919 年观测到(参见附录 3，pp. 145—151)。

2)由 Adams 在 1924 年证实(参见第 151 页)。

第三部分

495
对宇宙的整体考虑 [71]

§ 30. 牛顿理论的宇宙学困难

除了§21讨论的困难以外，经典天体力学还有另一个根本困难。就我所知，天文学家 Seeliger 第一个对它进行了详细讨论。如果思索这个问题：宇宙作为一个整体，我们该如何看待它？首先想到的第一个答案肯定是：在空间(及时间)方面，宇宙是无限的。到处都有星星，物质的密度，虽然在细节处千变万化，但是平均来说处处都是一样的。换言之：不论在空间中行走多远，我们会发现到处都有稀薄的恒星群，它们有着大致一样的种类和密度。

这种观点不符合牛顿理论。后者要求，宇宙应该具有某种中心，中心处恒星的密度最大，由中心向外，恒星的群密度逐渐变小，直到最后，在很远的距离上，只剩下无穷无尽的真空区域。恒星的宇宙应该是在无限的空间海洋中矗立的一块有限的海岛。[1)]

这种观念本身并不十分令人满意。由于能导出下面的结果，它就更加不令 [72]
496 人满意了：由星系中的恒星发出的光以及恒星系统的个体恒星不断地跑到无限空间中去，永不回头，永不再与自然界中的其他物体相互作用。这样一个有限物

1)证明：根据牛顿理论，从无限远处来，到一个物体上的所有“力线”的数量，与该物体的质量 m 成正比。如果平均说来，宇宙中的物质密度是常数 ρ_0，那么体积为 V 的球体包含的平均质量为 $\rho_0 V$，则穿过该球体的表面 F 进入其内部的引力线的数量与 $\rho_0 V$ 成正比。所以在该球体表面的单位面积上，进入球体的引力线的数量与 $\rho_0 \frac{V}{F}$，或 $\rho_0 R$ 成正比。随着球体半径 R 的增大，球体表面的引力场强度最终会变得无限大，这是不可能的。

质宇宙必定会逐渐地按部就班地枯竭掉。

为了避免这一困境,Seeliger 提出修改牛顿定律。他假设在很远的距离上,两物体间的吸引力减弱的速度,比倒平方数定律[1]还快。这样,物质的平均密度
[73] 就有可能处处都是一样的,甚至在无限远处,不需要产生无限大的引力场。于是,我们就把自己从这样一个讨厌的观念中解脱出来,即物质宇宙应该占有自然界的中心。当然,我们从上文提及的根本困难中得以解脱,其代价是修改并且复杂化了牛顿定律,而这种修改既没有实验的基础也没有理论的基础。我们可以设想无数这样的定律,它们都可以达到同一目的,却找不出理由说明为什么其中一个比其他的定律更好,因为这些定律中任何一个都与牛顿定律一样,只有很少基于更一般的理论原则。

§31. "有限"而"无界"宇宙的可能性

但是对宇宙结构的思索也在另一个不同的方向上进行。非 Euclid 几何的发展使我们认识到这一事实,即我们可以置疑空间的**无限性**,而不会与思维法则
[74] 和经验发生矛盾(Riemann, Helmholtz)。Helmholtz 和 Poincaré 已经以无与伦比的透彻性详细地论述过这些问题,我这里只能简略讨论一下。

首先,想象在二维空间中的一个存在。扁平的生物,带着扁平的工具,特别 497
地带有扁平的刚性量杆,在**平面**上自由移动。对它们来讲,在该平面以外,什么都不存在:它们观察到的发生在它们自己和它们的扁平"东西"上的一切,就是它们的平面所有的全部实在。特别地,利用这些杆子,可以完成平面 Euclid 几何
[75] 的结构构造,例如,§24 讨论的格子结构。与我们的宇宙不同,这些生物的宇宙是二维的;但与我们的宇宙一样,它向无限伸展。在它们的宇宙中,有地方放无数根杆子做成的相同的正方形,即(平面)体积是无限的。如果这些生物说它们的宇宙是"平面",这句话是有意义的,因为它们的意思是说它们可以用杆子完成平面 Euclid 几何的结构构造。在这方面,一根根杆子总是代表同样的长度,与其位置无关。

现在考虑另一种二维存在,但这次是在球的表面,而非平面。扁平生物带着量杆及其他东西,刚好贴在该表面上,无法离开。它们观察的整个宇宙仅仅包括
[76] 球的表面。这些生物能够把它们的宇宙的几何看作是平面几何,同时把它们的 498
杆子还看作是"距离"的实现吗?不能。因为当它们企图实现一条直线时,会得到曲线,我们"三维生物"称之为大圈,即有限长的自足的线,可以用量杆度量。

1)指牛顿的万有引力定律:两物体间的引力与距离的平方成反比。——译者注

类似地，该宇宙的面积是有限的，可以与杆子构造的正方形面积相比较。这种思考的巨大魅力在于承认这一事实：**这些生物的宇宙是有限但无界的。**

然而，球面上的生物无须周游世界，就能察觉它们没有生活在 Euclid 宇宙中。在它们的"世界"的任何部分，它们都能够使自己相信这一点，只要它们所利用的那部分不是太小即可。从某一点出发，向所有方向画等长的"直线"（从三维空间判断就是弧线）。它们把与这些线的自由端相接的线称为"圆"。在平面上，用同一把尺子测量圆周长和直径，根据平面 Euclid 几何，二者之比，等于常数 π，与圆的直径无关。在球表面，扁平生物会发现，该比值为：

$$\pi\frac{\sin(\frac{r}{R})}{(\frac{r}{R})},$$

即一个比 π 小的值。圆的半径与"世界球"的半径 R 相比越大，则该比值与 π 的差别就越大。利用这种关系，球体上的生物就可以确定它们的宇宙（"世界"）的半径，即使只有一小部分世界球可供它们测量。但是如果这一部分实在太小，它们就不再能证明它们是在一个球形的"世界"上，而不在 Euclid 平面上了，因为一小部分球面与同样大小的平面只有微小的差别。

因此，如果球面生物生活在某太阳系的行星上，而此太阳系仅仅占据球形宇宙的一丁点儿地方，那么它们就无法判定其生存的宇宙究竟是有限的还是无限的，因为在这两种情况下，它们所了解的那"一小片儿宇宙"几乎都是平面的，或 Euclid 的。从该讨论直接可知，对球面生物来说，圆的周长首先随着半径的增大而增大，直至达到"宇宙的周长"，其后随着半径的进一步增大，圆周长逐渐减小
499 到零。在这一过程中，圆面积持续不断地增大，直到最后等于整个"世界球"的总面积。

读者也许想知道，为什么我们把那些"生物"放在球面上，而不是其他的封闭表面上。这一选择有它的理由：在所有封闭表面中，球面拥有这个独一无二的性 [77]
质：它的所有点都是等价的。我承认，圆周长 c 与半径 r 的比值依赖于 r，但是当给定 r 的值时，该比值对"世界球"的所有点都是一样的。换言之，"世界球"是一个"曲率恒定的表面"。

相应于此二维球宇宙，有一个三维的类比物，即 Riemann 发现的三维球空间。它的点也同样是等价的，它的体积是有限的（$2\pi^2R^3$），由其"半径"所决定。有可能想象一个球空间吗？想象一个空间只不过意味着想象一下我们的"空间"感受的要点，即那种在移动"刚体"时所拥有的感受。在此意义上，我们**可以**想象球空间。

假设从一点出发，向所有方向画直线或拉绳子，并且用量杆为每条线标示出

[78] 距离 γ。这些线的自由端都落在一个球面上。利用量杆做成的正方形,我们可以特地度量出该球面的面积(F)。如果宇宙是 Euclid 的,那么 $F=4\pi\gamma^2$;如果宇宙是球形的,那么 F 总是小于 $4\pi\gamma^2$。随着 γ 的增大,F 从零增大到由"世界半径"决定的最大值,但是当 γ 的值进一步增大时,面积会逐渐减小到零。首先,
[79] 从起点出发的直线彼此渐行渐远,但是后来,它们彼此靠近,最后重新汇聚在起点的"对立点"上。在此情形下,它们已经穿越了整个球空间。容易看出,三维球 500
空间十分类似于二维球面,它是有限的(即体积有限),而且无界。

可以提一下,还有另一种弯曲空间,即"椭圆空间"。可以把它看成是这样一种弯曲空间:它的两个"对立点"是同一的(彼此不分)。于是,在某种程度上,椭圆宇宙可以被看成是拥有中心对称性的弯曲宇宙。

从上文可知,封闭无界的空间是可以想象的。在这些空间中,球形空间(和椭圆空间)因其简单性而优于其他空间,因为它的所有点都是等价的。作为这一讨论的结果,给天文学家和物理学家提出了一个最有趣的问题,即我们生活的宇宙究竟是无限的,还是照球形宇宙那样是有限的?我们的经验还远远不足以回答这一问题。但是广义相对论允许我们得到相当确定的回答,在这点上,§30 提到的困难有了答案。

§32. 广义相对论描绘的空间结构

根据广义相对论,空间的几何性质并非独立的,而是由物质决定的。所以,只有在已知物质状态的前提下进行思考,我们才能得出有关宇宙几何结构的结论。从经验得知,适当地选择坐标系,恒星的速度与光速相比非常小,因此,如果把物质看作静止的,我们可以大致粗略地得出一个有关宇宙本质的总体上的结论。

从前面的讨论已知,量杆和时钟的行为受引力场,也就是物质分布的影 501
响。单凭这一点就足以证明,Euclid 几何在我们的宇宙中是不可能完全准确的。但是我们的宇宙仍有可能只与 Euclid 空间相差一点点,这种想法似乎非常可能正确,因为计算表明,即使如太阳这么大质量的物质,对我们周围空间度规的影响也是极其微小的。可以设想,就几何而言,我们的宇宙近似一张平面,虽在个别地方凹凸不平,但无一处与平面有显著的差别:有点像湖面的涟漪。这样一个宇宙可以恰当地称为准 Euclid 宇宙。就它的空间而言它是无限的。但是计算表明,在准 Euclid 宇宙中,物质的平均密度必定是零。所以这样的宇宙不可能处处都有物质,它给我们呈现的是 §30 所描绘的那一幅不令人满意的图画。

如果我们想要在宇宙中具有不同于零的物质平均密度，不论这种差别有多么微小，那么宇宙就不可能是准 Euclid 的。相反，计算结果表明，如果物质分布是均匀的，那么宇宙必定是球形的(或椭圆的)。因为实际上物质的详细分布不是均匀的，所以真实的宇宙在个别地方会与球形不同，即宇宙是准球形的。但它必定是有限的。实际上，这个理论告诉我们，在宇宙的空间广度和其中的物质平均密度之间，有一个简单的关系式。[1] [80]

1)对于宇宙“半径”R，我们有方程：

$$R^2=\frac{2}{\kappa\rho}.$$

把厘米·克·秒制应用于该方程，得$\frac{2}{\kappa}=1.08\times10^{27}$；$\rho$是物质的平均密度，$\kappa$是与牛顿引力常数有关的常数。

附录 1 502

Lorentz 变换的简单推导

[§11 补充]

就图 2 所示的那两个坐标系的相对取向而言，二者的 x 轴永远重合。在目前情况下，我们可以把问题分解，首先只考虑局限在 x 轴上的事件。任何这样的事件，相对于坐标系 K，可以由横坐标 x 和时间 t 表示，而相对于坐标系 K' 由横坐标 x' 和时间 t' 表示。当给定 x 和 t 时，我们需要找出 x' 和 t' 来。

沿正 x 轴方向前进的光信号，其传播方程为

$$x=ct$$

或

$$x-ct=0. \tag{1}$$

因为该光信号相对于 K' 的传播速度必定是 c，所以其相对于 K' 的传播速度可以由类似的方程表示：

$$x'-ct'=0. \tag{2}$$

满足(1)的那些时空点(事件)必定也满足(2)。显然，一般来讲，在这种情况当下面的关系式成立时才会出现：

$$(x'-ct')=\lambda(x-ct), \tag{3}$$

其中 λ 是常数。原因是，根据(3)，$(x-ct)$ 消失会使 $(x'-ct')$ 消失。

如果对沿着负 x 轴传播的光线进行完全类似的讨论，则得到条件式：

$$(x'+ct')=\mu(x+ct). \tag{4}$$

把方程(3)和(4)相加(或相减)，为方便起见，引入常数 a 和 b 来代替常数 λ 和 μ， 503
其中

$$a=\frac{\lambda+\mu}{2},$$

且

$$b=\frac{\lambda-\mu}{2},$$

则得到方程：

$$\left.\begin{aligned}x'&=ax-bct\\ ct'&=act-bx\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

如果常数 a 和 b 已知，那么我们就应该得到问题的答案了。从下面的讨论可知 a

和 b 的值。

对于 K' 的原点，永远有 $x'=0$，所以根据方程(5)的第一个等式：

$$x=\frac{bc}{a}t.$$

如果设 v 为 K' 的原点相对于 K 运动的速度，则有：

$$v=\frac{bc}{a}. \tag{6}$$

如果计算 K' 中另外一点相对于 K 的速度，或者计算 K 的一点相对于 K' 的速度(向负 x 轴方向运动)，则从方程(5)会得到同样的值 v。简言之，我们可以认为 v 是这两个坐标系的相对速度。

进一步，相对性原理告诉我们，相对于 K' 静止的单位量杆的长度，从 K 的角度判断，必定完全等于相对于 K 静止的单位量杆的长度从 K' 的角度判断的值。为了看出 x' 轴上的点从 K 的角度看是个什么样子，只需从 K 上取 K' 的一个"瞬相"，这意味着必须引入 t 的一个具体的值(K 的时间)，如 $t=0$。对于 t 的

504 这个值，从方程(5)的第一个等式可得：

$$x'=ax.$$

在 K' 中测量，相隔距离为 $\Delta x'=1$ 的 x' 轴上的两个点，在我们的瞬相中的相隔距离就是：

$$\Delta x=\frac{1}{a}. \tag{7}$$

但是如果是从 K' 取瞬相($t'=0$)，并且从方程(5)中消去 t，考虑到表达式(6)，则得：

$$x'=a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)x.$$

由此得知：x 轴上相隔距离为 1(相对于 K)的两个点，在瞬相中的相隔距离为：

$$\Delta x'=a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{7a}$$

但是根据前面说的，这两个瞬相必定是相同的，所以(7)中的 Δx 肯定等于(7a)中的 $\Delta x'$，于是得到：

$$a^2=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{7b}$$

方程(6)和(7b)决定了常数 a 和 b。把这些常数值代入方程(5)，就得到 § 11 所列方程的第一和第四个等式。

$$
\left.\begin{aligned}
x'&=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\
t'&=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}\right\}. \tag{8}
$$

这样就得到了 x 轴上的事件的 Lorentz 变换,它满足关系: 505

$$x'^2-c^2t'^2=x^2-c^2t^2. \tag{8a}$$

[81] 为了包含在 x 轴以外发生的事件,推广该结果,保留方程(8),补充以下的关系:

$$
\left.\begin{aligned}
y'&=y\\
z'&=z
\end{aligned}\right\}. \tag{9}
$$

这样,对任意方向的光线,不论是在 K 中,还是在 K'中,我们都保证了真空中光速恒定这一假设。下面的讨论可以证明这一点。

假设在时间 $t=0$,由 K 的原点发出一个光信号,其传播方程为:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=ct,$$

或者把此方程两边平方,得:

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0. \tag{10}$$

光传播定律,结合相对性假设,要求这里的信号传播——从 K' 的角度判断——应当符合下面的公式:

$$r'=ct',$$

或者

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0. \tag{10a}$$

为使方程(10a)能从方程(10)导出,必须有:

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=\sigma(x^2+y^2+z^2-c^2t^2). \tag{11}$$

既然方程(8a)对 x 轴上的点必定成立,于是有 $\sigma=1$。易见,Lorentz 变换确实满足 $\sigma=1$ 时的方程(11)。因为方程(11)是方程(8a)和(9)的结果,也就是方程(8)和(9)的结果。于是导出了 Lorentz 变换。

由方程(8)和(9)表示的 Lorentz 变换仍有待推广。显然,K'的轴是否在空间上平行于 K 的轴是无关紧要的,K'相对于 K 的平移速度是否应朝 x 轴的方向也是不重要的。简单考虑一下就可知,我们能够从两种变换中构造这一广义的 Lorentz 变换,即从狭义的 Lorentz 变换和从纯粹的空间变换。后者用一个新 506
[82] 的坐标系替换直角坐标系,它的轴指向其他方向。

在数学上,广义的 Lorentz 变换可以刻画如下:

它把 x',y',z',t'表达为 x,y,z,t 的齐次线性函数,使得下面的关系式恒等

成立：

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2. \tag{11a}$$

就是说：如果左边以 x,y,z,t 的表达式替换 x',y',z',t'，那么(11a)的左边就等于右边。

附录 2

Minkowski 四维空间(“世界”)

［§17 补充］

若引入虚数 $\sqrt{-1}ct$ 来代替 t 作为时间变量，则可以更加简单地刻画 Lorentz 变换。若据此引入：

$$x_1 = x,$$
$$x_2 = y,$$
$$x_3 = z,$$
$$x_4 = \sqrt{-1}ct,$$

对带撇的 K' 也类似处理，那么 Lorentz 变换保证成立的条件可以表述如下：

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \tag{12}$$

即通过上述选择的“坐标”，(11a)变成了这一等式。

由方程(12)可见，在变换条件式中，虚时坐标 x_4 与空间坐标 x_1, x_2, x_3 以同 507
样的方式出现。其原因在于这一事实：根据相对论，“时间”x_4 在自然定律中出现的形式与空间坐标 x_1, x_2, x_3 完全相同。

由“坐标” x_1, x_2, x_3, x_4 描述的四维连续统被 Minkowski 称为“世界”，他还把点事件称为“世界点”。物理事件从三维空间中“发生的事件”仿佛变成了四维“世界”中“存在的实物”。

该四维“世界”与(Euclid)解析几何的三维“空间”非常相似。如果给后者引入一个原点相同的新的 Descartes 坐标系(x_1', x_2', x_3')，那么 x_1', x_2', x_3' 是 x_1, x_2, x_3 的线性齐次函数，满足下面的恒等式：

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

与方程(12)完全相似。我们可以形式地把 Minkowski 的“世界”看成四维 Euclid 空间(带有虚时坐标)，Lorentz 变换对应于该四维“世界”的坐标系的一次“旋转”。

508

附录 3

广义相对论的实验验证 [83]

从系统的理论观点来看，我们可以把经验科学的发展过程想象成一个不断的归纳过程。理论发展起来，以经验定律的形式简洁地概括了大量具体观察资料，通过比较可以从中探知一般规律。以这种观点，科学的发展类似于编纂分类目录，仿佛是一个纯粹的实验过程。

但是这种观点绝没有包含全部的实际过程，因为它忽略了直觉和演绎思维 [84]
在精密科学的发展过程中所扮演的重要角色。一旦科学从其原始阶段脱胎出来，理论的进步就不再仅仅依靠排列整理来取得了。以实验数据为指导，研究者发展起一套思想。一般地，这套思想是合乎逻辑地建立在少量基本假设，即所谓的公理的基础之上。我们称这套思想为**理论**。理论存在的意义在于这一事实：它把大量单个的观察资料联系起来了。而理论的"真理性"就恰恰在于此。

对于同一组实验数据，可能有多个理论，彼此相当不同。但是就能够被实验检验的理论的推论而言，理论间的一致性可能会非常完善，以至于难以找到能够
509 区分这两个理论的推论。例如，大家都感兴趣的一个例子是在生物学领域，Dar- [85]
win 的物竞天择式的物种进化论，和基于获得性特征遗传假设的进化论。

两理论的推论间具有广泛一致性的另一个例子发生在牛顿力学和广义相对论之间。这种一致性如此深远，以至于直到现在，只能从广义相对论中找到很少的可以考察的推论，使相对论以前的物理学不能导出它们，尽管这两个理论的基本假设存在根本差别。下面，我们会再考察这些重要推论，还要讨论迄今所获得的与它们有关的实验证据。

1. 水星近日点的运动

根据牛顿力学和牛顿引力定律，绕日运行的行星轨迹是一个环绕太阳的椭圆，或更准确一点说，是一个环绕太阳和该行星共同的重心的椭圆。在这样一个系统中，太阳，或者说共同的重心，落在椭圆轨道的焦点之一上，使得在一个行星周年中，日星距离从最小增到最大，然后又变回最小。如果在计算中不用牛顿定律，而引入稍有不同的引力定律，那么会发现，根据这新的定律，行星的运动方式仍然会使得日星距离呈现出周期变化。但是此时，在这样一个周期中（从近日
点——离太阳最近的地方——到近日点），太阳与行星的连线所画的角度会不同 [86]
510 于 360°。轨道曲线不会是封闭的，而是在这一过程中，填满了轨道平面的环形区域，即由日星间的最小距离决定的圆与最大距离决定的圆之间的环形区域。

根据广义相对论——当然是与牛顿理论不同的理论——行星在其轨道上的运动应当与其 Kepler-Newton 运动方式稍有不同，其方式使得在从一个近日点
[87] 到下一个近日点的周期中，日星半径所画的角度超过了一个完整公转所画的角度，超出部分由下式给出：

$$\frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}.$$

(注意：按照物理学中绝对角度量惯例，一个完整公转对应的角度是 2π。上式给
[88] 出的是，在从一个近日点到下一个近日点的时间间隔中，日星半径超出这一角度的部分。)在该式中，a 代表椭圆的长半轴，e 代表离心率，c 代表光速，T 代表行星公转周期。我们的结果还可以陈述如下：根据广义相对论，椭圆长轴绕日转动和行星的轨道运动具有同样意义。理论要求，对于水星，该转动应该等于每 100 年 43 弧秒，但是对于太阳系的其他行星，其数值太小，肯定检测不到了。[1)]

事实上，天文学家已经发现，用牛顿理论来计算的水星运动，达不到对应于
[89] 目前能够获得的观测灵敏度的精确观测的运动。在考虑到其他行星施加在水星上的所有干扰因素之后，人们发现(Leverrier, 1859; Newkomb, 1895)，水星轨道近日点运动仍然存在无法解释的额外的份额，其数额与上文提到的每 100 年 +43 弧秒没有明显的不同。实验结果的不确定性只有几个弧秒。

2. 光线在引力场中的偏折

§12 已经提到，根据广义相对论，当光线穿过引力场时，其传播路径是弯曲 511
的，这曲线类似于投掷一个物体，使它穿过引力场时所走的路线。根据这一理论，我们预期，在天体附近穿过的光线会偏向该天体。对于在距离太阳中心 Δ 远
[90] 处经过太阳的一束光线，其偏转角度(a)等于

$$a = \frac{1.7\ \text{弧秒}}{\Delta}.$$

[91] 另外，根据该理论，这一偏转角度中有一半是由太阳的牛顿引力场引起的，另一半是由于太阳导致空间的几何变形("曲率")而引起的。

利用日全食期间对恒星的照相记录，可以检验这一结果。必须利用日全食的唯一原因是，在其他任何时候，大气层被太阳光照得太亮了，以至于无法看见太阳圆盘附近的恒星。从图 5 上可以清楚地看出预言的效果。如果没有太阳(S)，那么从地球上观察，距离几乎无限遥远的恒星会出现在方位 D_1。但是因为恒星的光线被太阳偏转，结果是恒星出现在方位 D_2，即出现在比其真实位置距离太阳中心更远一点的位置上。

---

1)尤其是下一个行星，金星，其轨道几乎恰好是个圆，要精确地确定其近日点就变得更难了。

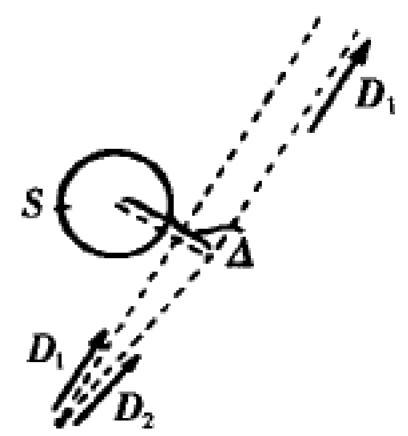


图 5

实际上，这个问题是用下面的方法检验的。在日食期间对太阳附近的恒星照相。另外，当太阳位于天空中另一个位置，即早或晚几个月的时候，对这些恒星再次照相。与正常的照片相比，日食照片上恒星的位置应该呈放射状向外位移(远离太阳中心)，位移的大小相当于角度 a。

512 我们要感谢英国皇家学会和皇家天文学会对这一重要推论的研究所作出的贡献。为了获得 1919 年 5 月 29 日的日食照片，他们不惧战争，克服战争带来的物质和精神两方面的困难，组织了两支远征队开赴 Sobral(巴西)和 Principe 岛(西非)，并派去了英国最著名的天文学家(Eddington, Cottingham, Crommelin, Davidson)。在日食期间的恒星照片与相对照的恒星照片之间，所预期的相对差异仅有百分之几毫米，因此，照相所需的校正以及随后的测量都必须非常精确。 [92]

测量的结果完全令人满意地证实了这个理论。下表中列出了观测和计算的恒星偏差(以弧秒计)的直角分量： [93]

	第一坐标		第二坐标	
恒星编号	观测值	计算值	观测值	计算值
11	−0.19	−0.22	+0.16	+0.02
5	+0.29	+0.31	−0.46	−0.43
4	+0.11	+0.10	+0.83	+0.74
3	+0.20	+0.12	+1.00	+0.87
6	+0.10	+0.04	+0.57	+0.40
10	−0.08	+0.09	+0.35	+0.32
2	+0.95	+0.85	−0.27	−0.09

3. 光谱线的红端位移

§23 已经证明，在相对于 Galilei 坐标系 K 做旋转运动的坐标系 K' 中，相对旋转参照物静止的、结构相同的时钟，行走的快慢与其位置相关。现在我们定量地考察这种关系。距离圆盘中心 r 远处的时钟，其相对于 K 的速度由下式给出：

$$v=\omega r.$$

其中 ω 代表圆盘 K' 相对于 K 旋转的角速度。若 ν_0 代表时钟静止时相对于 K 513
[94] 的单位时间内的滴答数(时钟的"速率"),那么根据§12,当它相对于 K 以速度 v
[95] 运动,但相对于圆盘静止时,它的"速率"(ν)由下式给出:

$$\nu=\nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

或者以足够的精度近似表示为:

$$\nu=\nu_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

该表达式还可以表述如下:

$$\nu=\nu_0\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{2c^2}\right).$$

若用 φ 代表时钟所在的位置和圆盘中心之间离心力的势差,即将单位质量的物体从旋转圆盘上时钟所在的位置处挪到圆盘中心处,克服离心力所需要做的功,以负数形式表示,则有:

$$\varphi=-\frac{\omega^2 r^2}{2},$$

由此可得:

$$\nu=\nu_0\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right).$$

首先,由此式可见,两个结构相同的时钟,当与圆盘中心的距离不同时,其行走的快慢也不同。从一个随圆盘一起旋转的观察者的角度来看,这一结果也是成立的。

现在,从圆盘来判断,后者处在势为 φ 的引力场中,所以我们获得的结果对引力场也十分普遍地成立。进一步,可以把发射光谱线的原子看作时钟,使得下面的陈述成立:

原子吸收和发出的光的频率与原子所在的引力场的势有关。 514

在天体表面的原子的频率,与在自由空间中(或小一些的天体的表面上)相同元素的原子频率相比,会稍小一些。现在 $\varphi=-K\frac{M}{r}$,其中 K 是牛顿引力常数,M 是天体的质量。所以,恒星表面产生的光谱线与地球表面同一元素产生的光谱线相比,应该产生向红端的位移,位移量为:

[96]

$$\frac{\nu_0-\nu}{\nu_0}=\frac{K}{c^2}\frac{M}{r}.$$

对于太阳,理论预言的向红端的位移大约等于波长的百万分之二。对恒星

来说，可靠的计算是不可能的，因为一般来讲，质量 M 和半径 r 都不知道。

到底是否存在这一效应仍是个悬而未决的问题，当代(1920 年)天文学家们
正在满腔热情地寻找答案。由于在太阳上该效应很小，对于其存在性很难下判
断。但是 Grebe 和 Bachem(Bonn)根据他们自己的测量以及 Evershed 和 [97]
Schwarzschild 在氰频带上的测量，已经几乎肯定了该效应的存在。另一些研究 [98]
人员，特别是 St. John，由自己的测量却导出了相反的结论。 [99]

对静止的恒星的统计研究确实揭示出，光谱线存在向光谱上折射性较弱一 [100]
端的平均位移。但是至于该位移是否真的归因于引力效应，迄今为止对可获得
515 的数据的分析还不足以得出任何明确的结论。在一篇由 E. Freundlich 撰写，题
目为"Zur Prüfung der allgemeinen Relativitäts-Theorie"(《自然科学》1919，
No. 35，p. 520；Julius Springer，Berlin)的论文中，汇总了观测结果，并且从我 [101]
们这里一直关注的这个问题的观点对之进行了详细讨论。

516 无论如何，在未来几年内将会有明确的结论。如果不存在引力势引起的光谱线向红端的位移，那么广义相对论是站不住的。另一方面，如果光谱线位移的原因确实是引力势，那么对位移的研究将给我们提供关于天体质量的重要信息。

注：1924 年 Adams 明确地证实了存在光谱线向光谱红端的位移效应。这是依靠观测天狼星的紧致伴星，它上面的位移效应大约比太阳上的大 30 倍。—— R. W. L.

附录 4

[102]
广义相对论描绘的空间结构

(§32 补充)

这本小册子的初版发表以来，我们对大尺度空间结构("宇宙学问题")的认识已经有了重大的进展，即使在这一题目的通俗介绍中也应该提及。

我原先对这一课题的思考基于两个假设：

(1)整个空间中，物质的平均密度处处相同，但不同于零。

(2)空间的大小("半径")与时间无关。

根据广义相对论，这两个假设都被证明是和谐的，但是必须在场方程中加入
[103] 一个假设项，而该项既不是理论本身所要求的，从理论的观点看也显得不自然("场方程的宇宙项")。

那时候对我来说，假设(2)似乎是不可避免的，因为我觉得背离它的话，会使思维陷入无休无止的猜测之中。

但是，在20年代，俄国数学家 Friedman 证明，从纯理论的观点看，另一种不同的假设是自然的。他认识到，如果愿意放弃假设(2)，那么就有可能保留假设(1)，而无须在引力场方程中引入不太自然的宇宙项。最初的场方程有这样一个 517
解，其中"世界半径"依赖于时间(膨胀空间)。在此意义上，可以说，根据 Friedman，该理论要求空间是膨胀的。

几年以后，通过对河外星云(各种"银河")的专门研究，Hubble 证明，星云所发出的光谱线呈现出红移效应，而且随着星云距离的加大，红移有规律地增加。就我们目前所知，这一现象只能用 Doppler 原理解释为大尺度上恒星系统的膨胀运动——根据 Friedman，这是引力场方程的要求。因此，可以认为，Hubble 的发现在一定程度上证实了该理论。

然而，的确存在一个很奇怪的困难。把哈勃所发现的银河光谱线红移解释为膨胀(从理论的观点看很难置疑)，由此导出该膨胀的起源时间"仅仅"在大约 10^9 年以前，而物理天文学则表明，具体的恒星和恒星系统的演化发展的时间很可能比这长得多。还不知道怎样克服这个矛盾。

我还想进一步指出，膨胀空间理论以及天文学的观测数据，不能用来判定(三维)空间的有限性或无限性，而原先关于空间的"静止"假设导致了空间的闭合性(有限性)结果。

附录 5 [104]

相对性和空间问题[1]

牛顿物理学的特点是，它必须认为空间和时间，如同物质一样，有其独立性和实在性，因为牛顿运动定律中出现了加速度概念。但是在这一理论中，加速度
518 只能代表“相对于空间的加速度”。所以牛顿的空间必须被看成是“静止的”，或者至少是“无加速的”，这样才能把运动定律中出现的加速度看成是有意义的量。对时间也是一样，当然时间也同样地出现在加速度概念中。牛顿本人以及他同时代的批评家们都感到，认为空间本身以及它的运动状态都具有物理实在性，这个观点有些令人不安。但是在当时，要想给力学以明确的意义，没有别的办法。

认为一般的空间，特别是虚空，具有物理实在性，这的确是一个很苛刻的要求。自远古以来，哲学家们就一再拒绝这样的假设。Descartes 大致如下论证过：空间等同于广延性，而广延性与物体有关，因此无物就无空间，所以不存在虚空。该论证的缺点主要如下：广延性概念来源于我们铺展或并拢固体时的体验，这当然没错。但由此并不能推论出，广延性概念就不适用于那些与此概念的形成无关的情况。这一概念拓展的合理性，可以通过它在理解实验结果方面所具有的价值，而间接地得到证明。因此，断言广延性仅仅适用于物体，这本身当然是没有根据的。然而，后面我们将会看到，广义相对论以一种迂回的方式，证实了 Descartes 的思想。使 Descartes 产生他的这一极其漂亮的观点的缘由，肯定是这样一种感觉，即不到万不得已，我们不应该认为像空间这样一类不能被“直接体验”[2]的东西具有实在性。

空间概念，或者这一概念的必要性，在心理上的起因，远远不像以我们的日常思维习惯所想象的那么明显。以前的几何学家研究概念对象（直线、点、平

1）和本书 1920 年的最初译本一样，我的老朋友、荣誉退休教授 S. R. Milner，F. R. S. 再次以他在本领域的独有的经验使我受益匪浅。他阅读了这个新附录的译本，并给出大量改进意见。我深切地感谢他和利物浦大学数学系教授 A. G. Walker，他也阅读了本附录，并给出许多有益的建议。——R. W. L.

2）不可太认真地看待这种措辞。

面),但并不真正地研究空间本身,后来的解析几何才研究它。但是某些简单的体验启示了空间概念。假设已经做好了一个盒子。可以用某种方式给盒子里摆东西,把盒子放满。这种摆放的可能性,是物体"盒子"的属性,是一种随盒子而 519
生的东西,是盒子"包围的空间"。这是一种因盒子而异的东西,很自然地想到,这种东西与盒子中在任何时候是否放有物品全然无关。当盒子中没有物品时,它的空间是"空"的。

到目前为止,我们的空间概念已经与盒子联系起来了。然而,构成盒子空间的存储潜力实际上与盒子壁的厚度无关。在不导致"空间"消失的前提下,此厚度就不能减小到零吗?显然,这种极限过程是自然的,于是,在我们的思想中,只剩下没有盒子的空间这样一个自明的事物。但是如果忘掉它的起源,这个概念会显得非常虚幻。我们知道,认为空间独立于物体,而且可以离开物质而存在,这种观点与 Descartes 是对立的[1](但是,这并不妨碍他把空间作为他的解析几何的基本概念)。只要注意到水银气压计中的真空,就完全驳倒了所有 Descartes 主义者。但是不可否认,即使在这样一个初始阶段,空间概念,或者把空间看作独立实体的想法,具有某些不令人满意的地方。

三维 Euclid 几何的研究主题是把物体摆放进空间(如盒子)的方式,它的公理体系很有欺骗性,很容易使我们忘记它所指的是可以实现的情况。

如果空间概念是按照上文所述的那样形成的,那么从"装填"盒子的体验出发继续想下去,该空间基本上是有界的。但是这种局限性似乎不是根本的,因为显然地,总可以用更大的盒子来装较小的盒子,这么看来,空间似乎是无界的。 520

这里我不打算考虑三维的 Euclid 空间性质是如何可以追溯到相对原始的体验上去的,我首先从其他角度考虑空间概念在物理思想发展中所起的作用。

当较小的盒子 s 相对静止地放在较大的盒子 S 内部时,s 的内部空间就是 S 的内部空间的一部分。包含两者的那个共同的"空间",属于每一个盒子。然而,当 s 相对于 S 运动时,这个概念就不那么简单了。人们倾向于认为,s 包含的总是同一空间,但却是空间 S 的不同的部分。这样就有必要给每一个盒子分配它的特别的空间,不把它们看作是有界的,并且假定这两个空间彼此相对运动。

在意识到这种复杂局面之前,空间似乎是一种无界的介质或容器,物体在其中游来游去。但是现在必须记住,存在无穷多彼此相对运动的空间。那种认为空间独立于其他事物而客观存在的观点属于近代科学以前的思想,而那种认为

---

1)Kant 企图通过否定空间的客观性来消除这一障碍,但是他的观点几乎不能当真。盒子内部空间所固有的、摆放物品的潜力,是与盒子本身一样客观实在的,也是与可以放在盒子中的物品一样客观实在的。

存在无穷多彼此相对运动的空间的思想则不然。后者确实是逻辑上不可避免的,但即使在科学思想中,这种观念也远未起到显著的作用。

时间概念的心理起因又是怎样的呢?毫无疑问,此概念与"回忆"有关,与感觉经验和其回忆之间的差异有关。感觉经验和回忆(或简单的重现)之间的差异是否是我们心理上直接可获得的,这一点就其本身是可疑的。每个人都有过这样的经验,自己搞不清楚究竟是以自己的感官实际感受过某件事呢,还是仅仅梦见过它。辨别这二者的能力可能最初是头脑整理次序活动的结果。

521 一种经验与"回忆"相联系,与"当前经验"相比,被认为是"更早"的经验。这是对被回忆的经验在概念上的排序原则,贯彻这一原则就产生了主观上的时间概念,即个人经验的先后排列顺序的时间概念。

我们认为时间是客观的,这是什么含义呢?让我们举一个例子。一个人 A("我")感觉到"天空在闪电"。同时 A 还感觉到另一个人 B 有这样一种举止,这种举止与他自己感觉到"天空在闪电"有关,于是 A 就把感觉到"天空在闪电"这件事与 B 联系起来了。A 就有了这样一种印象,认为其他人也感觉到"天空在闪电"。现在"天空在闪电"不再仅仅是个人的感觉,而且是其他人的感觉(或者最终只是一种"潜在的感觉")。这样就把事情解释为:"天空在闪电"原本只是一种"感觉",现在则解释为(客观)"事件"。当谈论"外部真实世界"的时候,我们所指的就是所有事件的总和。

我们已经看到,我们被迫给自己的经验规定一个时间排列,大致如下:如果 β 比 α 迟,γ 比 β 迟,那么 γ 比 α 迟("经验的顺序")。在这点上,与经验相关联的"事件"的位置在哪里呢?乍一看,似乎很明显,可以认为事件的时间排列是存在的,而且与经验的时间排列是一致的。一般来说,我们就是这样不自觉地假设的,直到感到有疑问为止。[1] 为了得到客观世界的观念,还需要另外的辅助概念:事件不仅发生在时间中,而且也发生在空间中。

在前文中,我们尝试着描述了空间、时间和事件这些概念在心理上是如何能
522 与经验发生联系的。从逻辑上考虑,这些概念是人类智慧的自由创造,是思维的工具,其目的是为了把经验彼此联系起来,以便能够更好地考察经验。了解这些基本概念的经验源头,可以昭示出我们实际在多大程度上受限于这些概念。这样我们就知道了自己的自由度。在必要的情况下有意识地利用这种自由度总是很困难的。

在关于空间-时间-事件这些概念(我们更简洁地称它们是"类空"的,与心理

---

1)例如,听觉上获得的经验的时间顺序可以不同于视觉上获得的时间顺序,所以不能简单地把事件的时间顺序与经验的时间顺序等同起来。

学领域的概念相反)的心理起源方面,还有一些要点需要补充。我们已经把空间概念与使用盒子以及在盒子中摆放物体的经验联系起来了。因此,这种概念的形成过程已经预设了物质客体(如"盒子")概念为前提。同样地,为了形成客观的时间概念而必须引入的人,在这一点上也扮演着物质客体的角色。因此,在我看来,物质客体概念的形成必须在时间和空间概念之前。

所有这些类空概念,与痛苦、目标、意图等心理学领域的概念一道,都属于近代科学以前的思想。现在,物理思想的特点,也是一般自然科学思想的特点,就是在原则上设法**仅仅**使用"类空"概念,借助于它们力求把所有关系表达为定律的形式。物理学家设法把颜色和音调归结为振动,生理学家设法把思想和痛苦归结为神经作用。如此一来,精神因素就从客观存在的因果关系中被排除了,不再作为因果关系中的独立环节而出现。毫无疑问,目前"唯物主义"一词指的是这样一种观点,即认为仅仅利用"类空"概念来理解所有关系在原则上是可行的(因为"物质"已经失去了作为基本概念的地位)。

为什么必须把自然科学思想的基本观念从神圣的 Plato 天国里拖下来,揭
露它们的世俗血统呢?答曰:为了把这些思想从强加于它们的禁忌中解放出来, 523
从而获得更大的自由来形成思想或概念。这要特别归功于 D. Hume 和 E. Mach 的不朽贡献,是他们提出了这一关键思想。

从近代科学以前的思想中,科学借鉴了时间、空间和物体(其中重要的特例是"固体")这些概念,并加以修正,使之更精确。它的第一个重大成果是产生了 Euclid 几何。但是我们绝不能被它的公理体系所蒙蔽,看不到它的经验起源(铺展或并拢固体的可能性)。特别地,空间的三维性以及它的 Euclid 几何性质都是起源于经验的(它可以被结构相似的"立方体"完全充满)。

由于发现不存在完全的刚体,空间概念就变得更加微妙了。所有物体都可以弹性形变,体积随温度变化而改变。因此,需要 Euclid 几何来描述其可能全等性的结构,离开物理概念,就描绘不出来。但是因为物理在建立其概念的过程中,仍必须利用几何,所以几何的经验内容只有在整个物理的框架内才能得以表述和检验。

在这一点上,还不能忘记原子物理学及其有限可分性概念,因为亚原子范围的空间不能度量。原子物理学还迫使我们从理论上放弃那种以为可以清楚地、静态地定义固体界面的想法。严格地说,即使在宏观尺度上,也没有**精确**的定律,来描述彼此接触的固体的可能外形。

尽管如此,也没有人想放弃空间概念,因为它在异常令人满意的整个自然科学系统中,似乎是必不可少的。在 19 世纪,只有 Mach 认真地考虑过取消空间概念,他试图用所有质点间瞬时距离的全体这一概念来代替空间概念(他这么做

的目的是为了对惯性有一个满意的理解)。

524

场

在 Newton 力学中,空间和时间扮演着双重角色。首先,它们起着物理过程中发生的事件的载体或框架的作用,事件由相对于它们的空间坐标和时间来描述。理论上,物体被看成由“质点”组成,质点的运动就形成了物理事件。当物体被看成是连续的时候就是这么做的,我们不想或不能描述它的离散结构时暂时这么处理。在这种情况下,物体的微小部分(体积元)可以被看作类似于质点,至少在我们仅仅关心运动,不关心那些没有可能,或者没有意义将之归因于运动的那些事件(如温度变化,化学过程)时这么办。空间和时间的第二个角色是作为“惯性系”。在所有可能的参照系中,惯性系被认为是最有利的,因为相对于惯性系,惯性定律是成立的。

这里的要点是,“物理实在”被认为是独立于体验它的主观意识而存在的,至少在理论上,认为其组成部分一方面包括空间和时间,另一方面包括相对于空间和时间运动的永久存在的质点。空间和时间独立存在的思想可以彻底表述如下:如果物体消失了,空间和时间仍然存在(作为物理事件发生的某种舞台)。

理论的发展超越了这种观点。起先这种发展似乎与时空问题毫不相干,就是说,出现了**场概念**,并且最终主张在理论上用它来代替粒子(质点)概念。在经典物理学框架中,场概念是作为辅助概念出现的,出现在把物体看作连续体的场合。例如,在考察固体的热传导性时,物体的状态由每时每刻物体上每一点的温度来描述。在数学上,这意味着温度 T 被表示为空间坐标和时间 t 的数学公式
525 (函数)(即温度场)。热传导定律被表示为局部关系(微分方程),包含热传导的所有特殊情形。这里温度是场概念的一个简单例子,它是一个量(或量的复合体),是坐标和时间的函数。另一个例子是描述液体的运动。在任何时刻,每一点都有一个速度,在数量上由它相对于坐标系(矢量)的轴的三个“分量”来描述。这里,在一点上的速度分量(场分量)也是坐标(x,y,z)和时间(t)的函数。

上文提到的场的特点是,它们仅仅出现在可测物质中,它们仅仅用来描述该物体的状态。依照场概念的历史发展,没有物质也就没有场。但是在 19 世纪最早 25 年里,人们发现,如果把光看作波场,即完全类似于弹性固体的机械振动场的话,那么光的干涉和运动现象就可以解释得极其清晰。于是,人们感到有必要引入这样一种场,它在没有可测物质存在的“虚空”中也能存在。

这么一来就产生了一个自相矛盾的情况。因为,按照其起源,场概念似乎局限于描述可测物体的内部状态。这一点似乎非常肯定,因为人们深信,所有场应

看作能够给予力学解释的状态,而这就预先假定了物质的存在。于是人们感到,即使在迄今认为一无所有的空间中,也必须假设到处都存在某种形式的物质,称之为“以太”。

物理思想发展史中,在心理上最有趣的事件之一就是,把场概念从认为场必须与物理载体相联系的假定中解放出来。在 19 世纪下半叶,Faraday 和 Maxwell 的研究工作越来越清楚地表明,用场来描述电磁过程远远优于以质点的力学概念为基础的处理方法。通过在电动力学中引入场概念,Maxwell 成功地预 526
言了电磁波的存在,其在本质上与光波是同一个东西,这一点毫无疑义,因为它们拥有同样的传播速度。结果是,光学在理论上被纳入了电动力学。这一巨大成功在心理上产生的一个效果是:与经典物理的力学框架相对立,场概念逐渐赢得了更大的独立性。

然而,最初人们想当然地认为,电磁场必须解释为以太的状态,并积极设法把这些状态解释为力学状态。但是由于这些努力总是遭遇挫折,科学界逐渐习惯于放弃这种力学解释的想法。不过,人们仍然深信,电磁场肯定是以太的状态,这就是 20 世纪初的情况。

以太论带来了这个问题:从力学观点看,相对于可测物体,以太的行为是怎样的?它参与物体的运动呢,还是它的各部分彼此保持相对静止?为了解决这个问题,人们进行了许多巧妙的实验。在这方面,应该提到下面的重要事实:由于地球的周年运动而导致的恒星的“光行差”,以及“Doppler 效应”,即对于已知的发射频率,恒星的相对运动对其射到我们这里的光频率的影响。除了一个实验,即 Michelson-Morley 实验以外,所有这些事实和实验的结果都由 Lorentz 在下面的假定之下给出了解释,即以太没有参与可测物体的运动,而且以太的各部分完全没有彼此的相对运动。这样以太就宛如绝对静止的空间的化身。然而 Lorentz 的研究所获更丰,它解释了当时所知的在可测物体内部的所有电磁和光学过程,所依据的假定是:可测物体对电场的作用——以及电场对可测物体的作用——完全是由于这个事实,即物体的组成粒子携带电荷,并与粒子一起运动。 527
至于 Michelson 和 Morley 的实验,Lorentz 证明,所获得的结果至少与以太静止的理论不矛盾。

尽管取得这些巨大的成功,这个理论的状况仍不完全令人满意,原因如下:毫无疑问,经典力学在很高的近似程度上是成立的。它告诉我们,就自然定律的形式表述而言,所有惯性系或惯性“空间”都是等价的,即从一个惯性系转换到另一个惯性系时,自然定律是不变的。电磁和光学**实验**也以很高的精确度得出同样的结论。但是电磁**理论**基础却告诉我们,必须优先选择一个特别的惯性系,即静止的光以太。这一理论基础观点实在不能令人满意。难道没有办法修正这个

理论，使它像经典力学那样，支持惯性系的等价性（狭义相对性原理）？

对这个问题的回答是狭义相对论。它采用了 Maxwell-Lorentz 理论中虚空里光速恒定性假设。为了使该假设与惯性系等价性（狭义相对性原理）相协调，必须放弃认为同时性具有绝对性的观念。另外，从一个惯性系转换到另一个惯性系时，要遵从关于时间和空间坐标的 Lorentz 变换。狭义相对论的全部内容包含在下面的假定中：自然定律相对于 Lorentz 变换是不变的。这一要求的重要意义在于这个事实，即它以明确的方式限定了可能的自然定律。

在空间问题上，狭义相对论的观点是什么？首先，我们必须反对这种看法，即以为是这个理论首先引入真实世界的四维性。即使在经典物理中，事件也是
528 由四个参数定位：三个空间坐标和一个时间坐标，所有物理“事件”被认为是嵌入在一个四维连续流形中。但是根据经典力学，该四维连续统客观上分解为一维的时间和三维的空间区，只有后者包含同时事件。这种分解对于所有惯性系都是一样的。两个明确的事件相对于一个惯性系是同时的，就蕴涵相对于所有惯性系也是同时的。我们说经典力学中的时间是绝对的，就是指的这个意思。而狭义相对论则认为不然。相对于具体的惯性系，与选定的事件同时发生的全体事件是存在的，这没错，但不再是与惯性系的选择无关的了。现在四维连续统不再能客观地分解为部分，每个部分包含同时事件。对于空间广大的世界，“现在”失去了它的客观意义。正是因为这一点，如果想要表达客观关系的主旨而不带有无益的传统观念的武断的话，就必须把空间和时间看作是客观上不可分解的四维连续统。

既然狭义相对论揭示了所有惯性系的物理等价性，它就证明了静止以太的假设是站不住脚的。因此，必须放弃那种把电磁场看作是物质载体的状态的想法。于是场变成物理描述中不可再分解的基本要素，就像牛顿理论中物体概念不可分解一样。

到现在为止，我们的注意力集中在狭义相对论对空间和时间概念所做的**修正**方面。现在让我们关注狭义相对论从经典力学中吸收的那些基本概念。这里，自然定律也是只有当选取了一个惯性系作为时空描述的基础的时候才能成立。惯性原理和光速恒定原理只有相对于**惯性系**才能成立，场定律也是只有相对于惯性系才有意义，才能成立。所以，如同经典力学一样，这里的空间在物理实在的表述中也是一个独立的成分。如果想象去除了物质和场，那么惯性空间，
529 或更准确地说，此空间连同相关的时间一起，依然存在。四维结构（Minkowski 空间）被认为是物质和场的载体。各惯性空间，及其相关的时间，是仅有的地位特殊的四维坐标系，它们的关系由线性 Lorentz 变换表达。在此四维结构中，因为不再存在客观地代表“现在”的部分，所以事件的发生和转化这些概念并非完

全失效了,而是更复杂了。因此,似乎把物理实在看成四维的存在显得更加自然,而不是像迄今为止那样,看成是三维存在的**演变**。

在某种程度上,狭义相对论这一刚性四维空间是 Lorentz 的刚性三维以太的四维类似物。对于狭义相对论,下面的陈述也是成立的:物理状态的描述假设了空间是预先给定且独立存在的。所以,即使这个理论也没有驱散 Descartes 因为"虚空"的独立,甚至是先验的存在性而产生的不安。这里给出的初步讨论的真正目的是为了说明,在多大程度上,这些疑问被广义相对论所克服。

广义相对论的空间概念

这一理论主要起源于试图理解惯性质量和引力质量的等同性的努力。我们从一个惯性系 S_1 说起。从物理的角度看,它的空间是一无所有的。换言之,在所考虑的这部分空间中,既不存在物质(在通常意义上)也不存在场(在狭义相对论的意义上)。假设存在第二个参照系 S_2 相对于 S_1 做匀加速运动,那么 S_2 不是惯性系。相对于 S_2,每一个实验物体都做加速运动,此加速度与其物理和化学性质无关。因此,相对于 S_2,存在一种状态,至少作为初始近似,是不能把它和引力场区分开的。这样,下面的概念是与可观测的事实相符的:S_2 也等价于"惯性系",但是相对于 S_2,存在一个(均匀的)引力场(这里不去关心这个场的起 530
源)。于是当引力场被纳入考虑范围后,如果假设这个"等价性原理"可以被扩展到相对于任何参照系的任何相对运动,那么惯性系就失去了它的客观意义。如果基于这些基本思想有可能建立一个自洽的理论,那么这个理论会很自然地满足惯性质量和引力质量的等同性这一事实,而这个事实是由实验所充分证实的。

从四维的角度考虑,四个坐标的非线性变换对应于从 S_1 到 S_2 的转换。现在产生了一个问题:这应该是一种什么样的非线性变换?或者说,应该怎样推广 Lorentz 变换?为了回答这个问题,下面的考虑是决定性的。

我们认为前面的理论中的惯性系具有这一性质:坐标间的差别由静止的"刚性"测量杆来度量,时间上的差别由静止的时钟来度量。给第一个假设又补充以另一个假设,即对于静止的测量杆的相对展开和拼接,Euclid 几何中关于"长度"的定理是成立的。经过初步思考,从狭义相对论的结果可以得出结论:对于相对于惯性系(S_1)加速度运动的参照系(S_2)而言,对坐标的这一直接的物理解释已经没有意义了。但是如果真如此,那么坐标现在仅仅表示"邻近关系"的程度或等级,因此也只能表示空间的维数等级,而不能表示任何的度量性质。这样我们

被导向把该变换推广到任意的连续变换[1]。这就蕴涵着广义的相对性原理：相对于任意的连续的坐标变换，自然定律必须是协变的。这一要求（连同自然定律要具有最大可能的逻辑简单性的要求一起）远比狭义相对性原理更严格地、极大地限制了有关的自然定律。

这一系列思想主要基于把场作为独立的概念，因为相对于 S_2 有效的条件被
531 解释为引力场，而没有提出是否存在任何物质来产生这个引力场的问题。依靠这一系列思想，还可以理解为什么关于纯粹引力场的定律会比一般的场（例如，有电磁场存在的时候）的定律更加直接地与广义相对性思想相联系。也就是，我们有充分的理由假设"无场"的 Minkowski 空间代表自然定律中可能的一种特殊情况，实际上，是可能的最简单的特殊情况。就其度量性质而言，这种空间的特点是：$dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$ 等于一个三维"类空"截面上无限靠近的两个点之间、用单位量尺测量的空间距离的平方（Pythagoras 定理），而 dx_4 等于用适当的时间量具测量的、具有相同（x_1,x_2,x_3）的两个事件之间的时间间隔。这一切只不过意味着下面的量

$$ds^2=dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2-dx_4{}^2. \tag{1}$$

具有客观的度量意义，借助于 Lorentz 变换很容易证明之。在数学上，这一事实相当于 ds^2 关于 Lorentz 变换保持不变的条件。

如果现在，在广义相对性原理的意义上，这个空间［参考方程(1)］服从一个任意的连续坐标变换，那么在这个新坐标系中，有客观意义的量 ds 由下式表示：

$$ds^2=g_{ik}dx_i dx_k. \tag{1a}$$

该式必须对下标 i 和 k 的所有组合 11，12，…直到 44 求和。这里项 g_{ik} 不是常数，而是坐标的函数，由任意选择的变换所决定。不过，项 g_{ik} 不是新坐标的随意的函数，而是这样一种函数：它使得(1a)能够由四个坐标的连续变换还原到方程(1)。为使之成为可能，函数 g_{ik} 必须满足一定的广义协变条件方程，这些方程
532 是由 Riemann 在广义相对论出现半个多世纪以前推导出来的（Riemann 条件）。根据等价性原理，当函数 g_{ik} 满足 Riemann 条件时，(1a)式以广义协变形式描述了一种特殊的引力场。

由此可知，当满足 Riemann 条件时，一般的纯粹引力场定律也必须被满足，但是它必定比 Riemann 条件更弱或限制更少。这样，纯粹引力场定律实际上是被完全确定的，这一结果就不在这里更详细地论证了。

现在我们可以看清楚，过渡到广义相对论对空间概念的修正会有多么大。根据经典力学和狭义相对论，空间（时空）的存在与物质和场无关。为了能够根

1）这种不准确的表述方式在这里也许足够了。

本描述那种填充空间、且依赖于坐标的东西,时空或者具有度量性质的惯性系,必须同时被看成是存在的,否则的话,对于"填充空间的东西"的描述就失去了意义。[1]另一方面,根据广义相对论,空间与依赖于坐标的"填充空间的东西"不同,它不能独立存在。所以纯粹引力场本来是可以由解引力方程而得的 g_{ik}(作为坐标的函数)来描述的。如果设想引力场,即函数 g_{ik} 被移走,那么就不存在(1)型的空间,而是剩下绝对的**无**,也不存在"拓扑空间",因为函数 g_{ik} 不仅描述场,而且同时描述了该流形的拓扑和度量结构性质。从广义相对论的角度来看,(1)型的空间不是没有场的空间,而是 g_{ik} 场的一个特殊情况,对它而言——即对于所使用的、本身毫无客观意义的坐标系而言——函数 g_{ik} 的值不依赖于坐标。虚空,即没有场的空间,这种东西根本不存在。时空本身不能独立存在,而只能作 533
为场的结构性质而存在。

所以当 Descartes 认为必须否认虚空的存在性时,他其实离真理并不太远。只要物理实在只出现在可测物体中,那么虚空这个概念的确显得荒谬。要说明 Descartes 思想的真义,需要把场看作物理实在的代表,并结合广义相对性原理。不存在"空场的"空间。

广义引力理论

这样就容易获得基于广义相对论的纯粹引力场论了,因为我们确信度规符合(1)的"无场"的 Minkowski 空间必定满足一般场定律。从这一特殊情况出发,通过一个事实上没有任何随意性的推广过程,就可以得出引力定律。该理论的进一步发展就不能由广义相对性原理明确地决定了。在过去几十年里,人们已经在多个不同方向进行了尝试。所有这些方向的共同点是把物理实在看作是场,而且是对引力场的一种推广,其场定律是对纯粹引力场定律的推广。经过长期探索,我相信,我现在已经找到了[2]这一推广的最自然形式,但是我还没有能确定这个推广的定律是否能经受实验事实的检验。

在前述的一般性思考中,具体的场定律问题是次要的。在现阶段,主要问题是,这里设想的这样的场论究竟是否能够达到目的,就是说,这样的理论究竟能否用场来彻底地描述物理实在,包括四维空间。现在这一代物理学家对该问题

1)如果设想那种填充空间的东西(例如场)被移走,那么根据(1),度量空间仍然存在,它仍能够决定引入其中的检验物体的惯性行为。

2)该推广可以刻画如下:根据从虚空的"Minkowski 空间"的推导过程,函数 g_{ik} 决定的纯粹引力场具有对称性,即 $g_{ik}=g_{ki}$($g_{12}=g_{21}$ 等)。广义的场是同一种场,不过没有这种对称性。其场定律的推导过程完全类似于对纯粹引力这一特殊情况的推导过程。

534 倾向于否定回答。按照现在的量子理论形式，人们相信，系统的状态不能够直接确定，而只能够通过对系统的可获得的测量结果的统计数据而间接地加以描述。流行的观点是，只有这样地削弱物理实在的概念，才能理解实验证实的自然界的二象性(粒子性和波动性)。我认为，以我们的实际知识，这样一个影响深远的理论上的放弃现在还不能被证实是正确的，在探索相对论性场论的道路上，我们不应该半途而废。

---

535 由 Vieweg 出版(Braunschweig，1917年)。前言写于1916年12月。关于更多不同版本的情况和这里用到的表达方式，参见编辑笔记，“爱因斯坦的相对论普及本”，417～419页。保留了两段手稿，第一段[1005]有一页，包括§31一部分，以74页上的方程后面的正文开头，以“zunächst immer weiter”结束(75页倒数第三行)。第二段[4010]包括补充在第十版的附录(84～91页)的正文。手稿与印刷正文之间的差别都做了注释。第十版的复件，现在 Texas 大学 Austin 分校 Harry Ransom 人文学科研究中心，包含了许多爱因斯坦手写的更正，以及夹在其中的、打字机打印的这些更正的列表，和爱因斯坦的秘书和继女 Ilse·爱因斯坦手写的注释的插页。所有更正都包括在第十三版中。手写笔记的原文以前没有出版过，但是在下面的注释49中给出来了。

[1]*Lorentz* 等，*1913*。

[2]*Laue 1913*。

[3]*Einstein 1916f*，即 *Einstein 1916e*(文件30)的单行本。

[4]以下对前言的补充首先出现在第三版中，在第十三版和以后的版本中都省略了：“第三版的附录。当年(1918)Springer-Verlag 出版了一本精心编写的优秀的广义相对论教材，由 H. Weyl 著，题为《空间、时间、物质》。向数学家和物理学家强烈推荐此书。”(“Nachtrag zur dritten Auflage. In diesem Jahre (1918) erschien im Springerschen Verlag ein ausführliches und vortreffliches, von *H. Weyl* verfasstes Lehrbuch der allgemeinen Relativitätstheorie unter dem Titel “Raum. Zeit. Materie”, das Mathematikern und Physikern hiermit warm empfohlen sei.”) 参见 *Weyl 1918a*。

在爱因斯坦1920年11月9日撰写并签名的手稿[28 006]的基础上，俄文译本(*Einstein 1921b*)补充了下面的前言：“在我们这个紧张忙碌的时代，较以往更有必要发展那些能够把不同语言、不同民族的人民更紧密地联系起来的事物。从这一点来看，即使在目前的困难条件下，促进科学研究的交流仍是非常重要的。我很高兴看到这本小册子将以俄文出版，更高兴由我极其信赖的 Herr Itelson 来执笔，他肯定能给出优秀的译作。作者自称这本小册子是‘所有人都能懂的’，为此经常被人责骂。所以，在理解方面碰到困难的俄国读者不必对自己或 Herr Itelson 感到气恼。真正有罪的人只能是作者本人。”(“Mehr als sonst bedarf es in diesen aufgeregten Zeiten der Pflege aller derjenigen Dinge, welche die Menschen verschiedener Sprache und Nation einander wieder näher zu bringen vermögen. Von diesem Gesichtspunkte aus ist es besonders wichtig, den regen Austausch der künstlerischen und wissenschaftlichen Erzeugnisse auch unter den heutigen schwierigen Verhältnissen zu vermitteln. Ich freue mich, dass nun mein Büchlein in russischer Sprache erscheint, umsomehr, als der von mir hoch geschätzte Herr Itelson für eine ausgezeichnete Übersetzung bürgt. Der Autor ist oft gescholten worden, dass er sein Büchlein als “gemeinverständlich” bezeichnet; es ist also wohl gerechtfertigt, wen der russische Leser, der beim Studium Schwierigkeiten begegnet, weder auf sich selbst noch auf Herrn Itelson böse wird. Der wahre Schuldige ist niemand anders als der Verfasser. ")

两年后,捷克语译本(*Einstein 1923*)补充了下面的前言:“这本小册子不带数学形式化地给出了相对论的基本思想。我很高兴看到现在它以这个国家的国语形式出版了。正是在这里,我找到了必要的思路,逐渐使广义相对论具有更精确的形式。这项研究的基本思想在1908年就已经被我采纳了。在德国布拉格大学理论物理研究所的安静的房间里,在Vinicna ulice,1911年我发现,等价性原理要求,在太阳旁边经过的光线会发生可观测到的偏折——当时并不知道,一百多年前,结合牛顿的光发射理论,从牛顿力学中就预见到类似的结果。在布拉格,我还发现迄今仍未完全证实的光谱线红移结果。但是,只有在1912年我返回苏黎世以后,才偶然发现与我的理论相关的数学问题与Gauss的曲面理论之间存在相似性这一决定性思想——原本并不知道黎曼、Ricci和Levi-Civita的研究工作。只是通过在苏黎世的朋友Grossmann,我才注意到这些研究工作。当时我向Grossmann提出这个问题,只是为了找到其分量仅仅依赖于二次基本不变式的系数的导数的一般协变张量。今天,似乎我们能够清楚地知道这个理论的功绩和局限。对于空间、时间、物质和引力的物理性质,它给我们提供了深入的洞察,但是却没有足够的手段解决量子和组成物质的基本电结构的原子构造问题。”(“Es freut mich, daβ das kleine Büchlein, in dem die Hauptgedanken der Relativitätstheorie ohne die mathematische Durchführung dargestellt sind, nun in der Nationalsprache desjenigen Landes erscheint, in dem ich die nötige Sammlung fand, un dem schon seit 1908 gefaβten Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie allmählich eine bestimmtere Form zu geben. In den stillen Räumen des Theoretisch-Physikalischen Instituts der Prager Deutschen Universität in der Viničná ulice kam ich 1911 auf die Entdechung, daβ das Äquivalenzprinzip eine Ablenkung der Lichtstrahlen an der Sonne von beobachtbarem Betrage verlangt, ohne zu wissen, daβ mehr als hundert Jahre vorher eine ähnliche Konsequenz aus der Newtonschen Mechanik in Verbindung mit Newtons Emissionstheorie des Lichtes gezogen worden war. Auch die immer noch nicht einwandfrei bestätigte Konsequenz von der Rotverschiebung der Spektrallinien entdeckte ich in Prag. Den entscheidenden Gedanken von der Analogie des mit der Theorie verbundenen mathematischen Problems mit der Gauβschen Flächentheorie hatte ich allerdings erst 1912 nach meiner Rückkehr nach Zürich, ohne zunächst Riemanns und Riccis, sowie Levi-Civitâs Forschungen zu kennen. Auf diese wurde ich erst durch meinen Freund Groβmann in Zürich aufmerksam, als ich ihm das Problem stellte, allgemein kovariante Tensoren aufzusuchen, deren Komponenten nur von Ableitungen der Koeffizienten der quadratischen Fundamentalinvariante abhängen. Heute scheinen sich Leistungen und Leistungsgrenzen der Theorie schon klar übersehen zu lassen. Sie liefert tiefe Erkenntnisse über die physikalische Natur von Raum, Zeit, Masse, Gravitation, aber kein hinreichendes Mittel zur Lösung des Problems der Quanten und der atomistischen Konstitution der elektrischen Elementargebilde, aus denen die Materie besteht. ")爱因斯坦提到的关于引力光偏转的更早的讨论参见Georg 536
Soldner的论文(*Soldner 1801*;关于历史的讨论见*Eisenstaedt 1991*)。

在英文第十五版(*Einstein 1954*),爱因斯坦增补了一篇新的前言,其德语原文包括在爱因斯坦写给出版社的信中(参见爱因斯坦致Methuen & Co. 的信,1952年6月9日)。原文为:“在第四部分附录里,我补充说明了我关于一般空间问题的观点,以及我对于在相对论方面我们的空间概念的逐步修正过程的看法。我想要说明,时空不是我们可以认为独立存在的、与真正具有物理实在性的物体无关的东西。物理对象不是存在于空间内,而是具有空间延展性。所以‘虚空’概念没有意义。”(“Ich habe als 4. Appendix eine Darlegung meiner Ansichten über das Raumproblem im Allgemeinen beigefügt und über die schrittweisen Modificationen unserer Ideen über den Raum unter dem Einfluss des Relativitäts-Ge sichtspunktes. Ich wollte zeigen, dass Raum-Zeit nicht etwas sei, dem man unabhängig von den eigentlichen

Gegenständen der physikalischen Realität eine selbständige Existenz zuschreiben könne: Die physikalischen Gegenstände sind nicht im Raume sondern diese Gegenstände sind räumlich ausgedehnt. Der Begriff “leerer Raum” verliert dadurch seinen Sinn. ”)英文译本发表于 1952 年 6 月 9 日。此前言在对应的德文第十六版中省略掉了。

[5]在第九版，“(x,y,z)”后面添加“vgl. Fig. 2, S. 22”。

[6]在第三版，在“Bahnkurve”后添加了脚注：“Das heißt Kurve, in der sich der Körper bewegt. ”

[7]在第二版，“wenn K'”被“das”代替。

[8]在第二版，“20”被“30”代替。在第十三版，“km”被“km in der Sekunde”代替。

[9]见 *De Sitter 1913a*，*1913b*. 另见 1913 年 5 月 28 日爱因斯坦致 Paul Ehrenfest 的信中对此文的积极评价(第五卷，文件 441)，以及在关于狭义相对论的手稿中他对 De Sitter 的工作的讨论(见第四卷，文件 1，p. 20a)。

[10]关于 Lorentz 在电动力学方面的工作的讨论，参见，如 *Miller 1981*，第 1 章。

[11]爱因斯坦首次系统地使用术语“狭义相对论”始于 1916 年[见*爱因斯坦 1916e*（文件 30)，注 2]。

[12]在第二版，“Gründe”被“Gegengründe”代替。

[13]在第十三版，“daß”后面添加了“gemäß dieser Antwort”。

[14]在第十三版，“widerspricht”被“widerspreche”代替。

[15]在第三版，在“bezeichnet wird”后添加了下面的脚注：“Lorentz 变换的简单推导列在附录里。”（“Eine einfache Ableitung der Lorentz-Transformation ist im Anhang gegeben. ”)

[16]在第二版，“sein kann”被“ist”代替。

[17]在第二版，“Transformation”后添加了“für die Zeit $t=0$”。

[18]关于 Fizeau 实验的讨论，参见，如 *Laue 1913*，§ 2.

[19]见 *Zeeman 1914*，*1915*。在第十六版，“Zeemann”被“Zeeman”代替。

[20]爱因斯坦称赞 Zeeman 的实验填补了“迄今(一直)令人不快的明显的缺陷”(“eine bisher unangenehm fühlbare Lücke”，爱因斯坦致 Pieter Zeeman 的信，1915 年 8 月 15 日)。

[21]在第十三版，“Theorie”被“Energie”代替。

[22]在第十三版，“folgenden Schluß ziehen”被“folgern”代替。

[23]首次报告证实核反应中质能关系的时间是 1932 年(见 *Cockcroft* 与 *Walton 1932*)。

[24]在第八版，省略了“Beantwortung der”。

[25]恒星光行差和 Doppler 效应已经在爱因斯坦论狭义相对性的第一篇论文中讨论过，*Einstein 1905r*(第二卷，文件 23)。

[26]在第四版，“dunkel ist”后添加了下面的脚注：“广义相对论提出这样的概念，即电子的带电物质靠引力结合在一起。”(“Die allgemeine Relativitätstheorie legt die Auffassung nahe, daß die elektrischen Massen eines Elektrons durch Gravitationskräfte zusammengehalten werden. ”)这一思想进一步完善于 *Einstein 1919*。

[27]在第十三版，“Gesichtspunkte”被“Überlegungen”代替。

[28]在第四版，“aber”后添加了“(durch Rechnung)”。

[29]关于 Michelson 和 Morley 的实验及相关的为证明地球在以太中运动而做的实验的讨论，参见，如 *Laue 1913*，§ 2。

[30]在第四版，“Kontraktion”后添加了“desselben”。

537 [31]在第三版，“geometrischen Raumes”后添加了下面的脚注：“参见附录中更加详细的阐述。”

("Vgl. die etwas ausführlichere Darlegung im Anhang.")

[32]在第十三版,省略了"z. B."

[33]在第四版,"Körper"后添加了"(z. B. die Erde)"。

[34]在第十三版,"bei passender"被"durch passende"代替。

[35]在第十三版,"erheblicher"被"hinreichender"代替。

[36]在第十三版,"(Beschleunigung)"被"der Bewegung"代替。

[37]在第五版,下面的句子被添加到最后一个问号前的段落:"还有引力场也给观测者猛地一拉。"("Dies Schwerefeld ist es auch, welches den Ruck des Beobachters bewirkt.")加速度和引力的等价性思想被称为"等价原理"。它首先被阐明于 *Einstein 1907j* (Vol. 2, Doc. 47), § 17;进一步的说明请参见 *Einstein 1916p*(文件 40)。

[38]在第十三版,"welche"后添加了"Bezugskörper"。

[39]在第十六版,"K"被"K'"代替。

[40]在第十六版,"K"被"K'"代替。

[41]在第二版,"Mangel fühlte"被"Einwand sah"代替。

[42]另见爱因斯坦在为 Mach 写的悼文中对这一点的评论,*Einstein 1916c*(文件 29)。

[43]更多细节参见 pp. 86—88。

[44]在第四版本段的末尾,添加了下面的脚注:"理论上要求存在的光线的偏折已经在 1919 年 5 月 30 日的日食期间,由英国天文学家 Eddington 照相记录在案。"("Die Existenz der von der Theorie geforderten Licht-ablenkung wurde von dem englischen Astronomen *Eddington* bei der Sonnenfinsternis vom 30. Mai 1919 photographisch festgestellt.")在第五版,这一段被修改为包括皇家学会和天文学家 Andrew Crommelin。

[45]在第十三版,"ersteren"前添加了"der"。

[46]在第五版,"Beobachter"前添加了"mit der Scheibe bewegte"。

[47]在第四版,"Zahl"后添加了下面的脚注:"总体来考虑,我们必须以 Galilean(非旋转)坐标系 K 为参照物,因为只有相对于 K(相对于 K' 存在引力场),我们才能承认狭义相对论结果的正确性。"("Bei der ganzen Betrachtung hat man das *Galileische* (nicht rotierende) System K als Koordinatenkörper zu verwenden, da nur relativ zu K die Gültigkeit der Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie angenommen werden darf (relativ zu K′ herrscht ein Gravitationsfeld).")

[48]在第十三版,"Relativität"被"Relativitätstheorie"代替。

[49]在第十版的复本(在 Harry Ransom 人文学科研究中心)中,56 页和 57 页中间插有一张纸,上面是 Ilse·爱因斯坦的手迹,原文为:"注意:人们经常反对这个解释,因其缺乏说服力。原因是,不但测量杆,而且圆盘都承受切向收缩。这个理由不令人信服,因为旋转的圆盘不能被看成欧式刚体;根据假设的理由,这样的物体旋转起来后会散架。实际上,在所有因素中,圆盘并没有起到任何作用,而只有彼此相对静止的量杆所组成的系统才起作用。这个系统由沿切线方向、呈放射状摆放的小棒组成,作为一个整体旋转。"("Anmerkung: Es ist gegen diese Ueberlegung oft eingewendet worden, daβ sie nicht stichhaltig sei, weil nicht nur die Maβstäbe sondern auch die Kreis-Scheibe tangentiale Verkürzungen erleide. Dieser Einwand ist nicht stichhaltig. Die rotierende Scheibe kann nämlich nicht als euklidischer starrer Körper gedacht werden, ein solcher müβte nämlich aus den in dieser Betrachtung angegebenen Gründen zerbrechen, wenn er in Rotation versetzt wird. Die Scheibe spielt bei der ganzen Betrachtung in Wahrheit keine Rolle, sondern nur das System relativ zu einander ruhender, als Gesamtheit rotierender, radial bezw. Tangential

gelagerter Stäbchen. ")这段注释指的是 55 页上对旋转圆盘的讨论。

[50]在第十三版,"aufeinander"被"aneinander"代替。

[51]在第十三版,"Quadratseite"前添加了"innere"。

[52]在第十三版,"Quadratecke"前添加了"innere"。

[53]在第十三版,"ein Ellipsoid"被"die Oberfläche eines Ellipsoids"代替。

[54]在第二版,"So kam"被"Daher kommt"代替。

[55]在第三版,"Bedingung"后添加了下面的脚注:"参见附录。那里为系数导出的关系式(11a)和(12)也可以应用到系数差上,因而可以应用到系数微分上(作为无穷小的差)。"("Vgl. Anhang. Die dort für die Koordinaten selbst abgeleiteten Relationen (11a) und (12) gelten auch für Koordinaten-*Differenzen*, also auch für Koordinatendifferentiale (unendlich kleine Differenzen)")。

[56]在第三版,本段的最后两个句子被下面的句子代替:"这种指派甚至无须使其必须被看成'类空'系数和'类时'系数。"("Diese Zuordnung braucht nicht einmal eine derartige zu sein, daβ man x_1, x_2, x_3 *als* "räumliche" Koordinaten, x_4 als "zeitliche" Koordinaten auffassen müsste. ")

538 [57]在第四版,引号被省略了。

[58]在第五版,"ein Beobachtungsergebnis"被"zwei wesensverschiedene Beobachtungsergebnisse"代替,"dem"被"denen"代替。

[59]在第五版,该段的末尾添加了下面的句子:"第二个结果,即光线在太阳引力场中的弯曲,已经提到过了;第一个结果指水星轨道。"("Das zweite dieser Ergebnisse, nämlich die Krümmung der Lichtstrahlen durch das Gravitationsfeld der Sonne, haben wir schon erwähnt; das erste betrifft die Bahn des Planeten Merkur. ")

[60]在第五版,"sie nämlich"被下面的内容代替:"即广义相对论方程。"("nämlich die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. ")

[61]在第七版,从"Korrigiert"到"als"的这一段被下面的内容代替:"Abgesehen von diesen beiden Einflüssen soll die. "在第八版,"soll"被"sollte"代替。

[62]在第七版,"resultieren"被"sein"代替。

[63]更多细节参见 pp. 85—86。

[64]在第五版,"haben"被"hat"代替,"zwei Konsequenzen"被"eine Konsequenz"代替。

[65]在第三版,从"sich"到"müssen"的这一段被下面的内容代替:"einer Prüfung durch die Beobachtung zugänglich sind. "在第七版,"sind"被"ist"代替。

[66]在第五版,从"die Krümmung"到"und"的这一段被省略了。

[67]在第四版,"Sonne"后添加了下面的脚注:"Durch *Eddington 1919* beobachtet. "在以后的版本中都省略了它。

[68]更多细节参见 pp. 88—91。

[69]在第五版,"Konsequenzen"被"Konsequenz"代替。

[70]在第五版,"werden"被"wird"代替。

[71]第三版增加了 30—32 节和两个附录(pp. 71—83)。在第十六版,这两个附录分别标为 1 和 2。

[72]在第四版,"sowohl"被"sowie"代替。

[73]见 *Seeliger 1895*。

[74]见 *Helmholtz 1884* 和 *Poincaré 1902*, 第 3—5 章。

[75]在第九版,"Netzkonstruktion"后添加了"auf der Tischplatte"。

[76]在第五版,"ebene"被"zweidimensional euklidische"代替。

[77]在第十三版,"Kugel"被"Kugelfläche"代替。

[78]在第十四版,这里和下一行中的"πr^2"被"$4\pi r^2$"代替。

[79]这一部分的手稿中有"Mittelpunkt",而不是"Ausgangspunkt"。

[80]在第十三版,"haben"被"geben"代替。

[81]在第十三版,"ergeben"被"ergibt"代替。

[82]在第十三版,"entspricht"被"entsprechen"代替。

[83]该附录是应译者 Robert W. Lawson 的要求(见译者序和爱因斯坦致 Lawson 的信,1920 年 4 月 22 日),为英文第一版,*Einstein 1920* 年所写。它随后出现在德文第十版。在第十六版它被标号为 3。

[84]在第十三版,"verschweigt"被"übersieht"代替。

[85]在第十六版省略了"der Arten"。

[86]在第十三版,"geschlossene"后添加了"sein"。

[87]在第十三版,"folgenden"后添加了"beschriebene Winkel"。

[88]计算参见 *Einstein 1915h*(文件 24)。

[89]对历史的讨论参见 *Roseveare 1982*。

[90]在第十三版,第二个 Δ 被省略了。

[91]计算参见 *Einstein 1916e*(文件 30)。

[92]该附录的手稿中有"Aufforderungen",而不是"Anforderungen"。

[93]远征队的结果发表在 *Dyson* 等. *1920*;对历史的讨论另参见 *Earman* 和*Glymour 1980a*。

[94]在第十三版,"v"后添加了"der"。

[95]在第十三版,"zur"被"zu"代替。

[96]在第十三版,分母中的"ν"被"ν_0"代替。 539

[97]在第十三版,"der"后添加了"sogennanten",在第十四版,"Cyanbande"后添加了"同样,Perot 基于他自己的观测。"("ebenso *Perot* auf Grund eigener Beobachtungen")。

[98]在第十四版,"insbesondere"后添加了"*W. H. Julius* und"。

[99]在第十四版,"Ansicht"后添加了下面的内容:"就是说,现存的实验资料证据没有能说服他们。"("bzw. Von der Beweiskraft des bisherigen empirischen Materials nicht überzeugt.")

[100]关于引力红移的观测问题的历史讨论,见 *Earman* 和 *Glymour 1980b* 以及 *Hentschel 1993*, *1994*。

[101]*Freundlich 1919a*。

[102]该附录首先出现在英文第十四版(*Einstein 1946*),随后出现在德文第十六版。

[103]该宇宙论术语的首次出现参见 *Einstein 1917b*(文件 43)。关于这一点以及本附录其余部分概述的进展的历史情况的讨论,参见 *North 1965*。

[104]第十六版增加了附录 5。关于更多的背景情况,见编者按,"爱因斯坦的相对论普及本",417—419 页。

[罗景琪 译正文第一部分]
[黄 雄 译其余部分并校全部]

540 # 43.“广义相对论中的宇宙学研究”

[*Einstein 1917b*]

1917年2月8日收到
1917年2月15日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1917):142—152。

[1]

广义相对论中的宇宙学研究 541

爱因斯坦

众所周知 Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi K\rho \tag{1}$$

和质点运动方程相结合仍然未能完美地取代牛顿的超距作用理论。在空间无限处势 φ 趋向于一个固定的极限值这一条件仍然必须考虑在内。在广义相对论的引力论中情形也很类似。如果我们真的必须把宇宙认为是空间无限的，那就必
[2] 须对微分方程附加上在空间无限处的限制条件。

我在处理行星问题时，以如下假设形式来选择这些限制条件：可能选择到一
[3] 个参考系，使得所有引力势 $g_{\mu\nu}$ 在空间无限处变成常数。但是在我们希望研究物理宇宙的更大部分时，以为我们可以设下相同的限制条件，绝非理所当然。我将在下面几页，叙述自己迄今对这个重要的基本问题所进行的思索。

§1. 牛顿理论

众所周知，牛顿关于 φ 在空间无限处趋向于常数的限制条件导致在无限处物质密度为零的观点。我们想象在宇宙空间中也许有一处，围绕该处的物质引力场，以大尺度的观点看，具有球对称。那么从 Poisson 方程推出，为了使 φ 在无限处趋于一个极限，随着离开中心距离 r 的增加，平均密度 ρ 趋向零的减小速度应该比 $\frac{1}{r^2}$ 还要快[1)]。因此，在这个意义上，按照牛顿的说法，宇宙是有限的，尽 542
管它可能具有无限大的总质量。

由此，首先可以推论，由天体发射出的辐射一部分径向往外离开宇宙的牛顿系统，变得微弱并在无限处消失。难道所有天体的全部可有不同的行为吗？对

1) ρ 是平均的物质密度，它是对一个比邻近恒星之间的距离更大的，但和整个恒星系统尺度相比较小的区域来计算的。

这个问题很难给出负面的答案。因为从在空间无限远处 φ 具有有限极限的假设可以推出：一个具有有限动能的天体，能够克服牛顿的吸引力，而到达空间无限远的地方。只要恒星系统转移到一个单一恒星的总能量大到足以将它送上无限之旅，它就永不返回原处，根据统计力学，这种情形随时可能发生。 [4]

我们也许可以假定，在无限远的极限势具有非常高的值，以避免这种特殊困难。如果引力势的值本身不以天体作为先决条件，那也许是一种办法。真实的情形是，我们不得不认为，引力场势的任何巨大差值的发生和事实相抵触。这些差值的数量级必须这么低，使得由它们产生的恒星速度，不超过实际观测到的速度。

如果我们把星系和一团处于热平衡的气体相比较，将关于气体分子分布的(Boltzmann)定律应用到恒星上，我们就发现牛顿恒星系统根本不能存在。这是因为对应于在中心和空间无限处之间的势的有限差值，存在一个有限的密度比率。这样在无限处密度为零意味着在中心的密度为零。

看来根据牛顿理论克服这些困难几乎是不可能的。我们可以反躬自问，对牛顿理论进行修正可否避免这些困难。我们首先提出一个方法，对这个方法本
543 身不必予以认真对待；它只不过是作为以后发展的陪衬。我们利用以下方程来取代 Poisson 方程：

$$\nabla^2\varphi-\lambda\varphi=4\pi K\rho, \tag{2}$$

此处 λ 表示一个普适常数。如果 ρ_0 是物质分布的均匀密度，那么

$$\varphi=-\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0 \tag{3}$$

是方程(2)的一个解。这个解对应于固定恒星的物质在整个空间均匀分布的情形，如果密度 ρ_0 等于宇宙中物质的实际平均密度的话。这个解对应于均匀地充满物质的中心空间的无限伸展。如果我们想象物质在局部分布不均匀，而不使平均密度有任何改变，那么在上述的方程(3)的具有常数值的 φ 之上，叠加上一个附加的 φ。只要 $\lambda\varphi$ 在更密集的物质附近比 $4\pi K\rho$ 小，附加的 φ 就和牛顿场非常相似。 [5]

一个这样构成的宇宙，就其引力场而言，不具有中心。没有必要假定密度在空间无限处减小，相反地，无论是平均势还是平均密度在趋向无限远时都保持常数。我们在牛顿理论情形中发现的和统计力学的冲突就不再重现。具有一定的但是极端微小的密度，不需要任何内部的物质力(压力)去维持平衡，物质就处于平衡状态。

§ 2. 广义相对论的边界条件

在本段落我将带领读者重走我自己旅行过的路途,这是一条相当崎岖和弯曲的路途。因为否则的话,我认为他们不会对这一行程的终端的结果有太大兴趣。我们将要得到的结论是,我奋斗迄今所得到的引力场方程仍然需要作微小的修正。这样在广义相对论的基础上,才能避免在§1中提到的牛顿理论所遭遇到的基本困难。这一修正和在§1中从 Poisson 方程(1)向方程(2)的转变完美地对应。我们最后推论出,在空间无限处的边界条件干脆不存在,这是因为宇宙的连续统,就它的空间维度而言,可被看成具有有限空间(三维)体积的一个自 544
足的流形。

关于在空间无限处设限制条件,直到最近我还接受的看法是基于以下的考
[6] 虑。在一个协调的相对性理论中,不可能存在相对于"空间"的惯性,只有质量的相对之间的惯性。因此,如果我有一个和宇宙中的其他所有质量相距足够远的质量,它的惯性必须减小为零。我们将试图在数学上表述这个条件。

根据广义相对论,协变张量乘以 $\sqrt{-g}$ 的前三个分量给出负动量,乘以最后一个分量给出能量

$$m\sqrt{-g}\, g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}. \tag{4}$$

此处,正如一直这么做的,我们令

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu. \tag{5}$$

特别清楚的情形是,在可能选取一种坐标系,使得在每一点的引力场为空间各向同性的情形下,我们可有更简单的度规

$$\mathrm{d}s^2 = -A(\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\mathrm{d}x_3^2)+B\mathrm{d}x_4^2.$$

如果同时还要求

$$\sqrt{-g}=1=\sqrt{A^3B},$$

在小速度的一阶近似下,我们从(4)中得到动量分量

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_4}, m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_4}, m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_4}$$

以及能量分量(在静止情形下)

$$m\sqrt{B}.$$

从动量表达式可知,$m\frac{A}{\sqrt{B}}$ 起静质量的角色。由于 m 是质点特定的常数,与其位置无关,如果我们在空间无限处保持 $\sqrt{-g}=1$ 的条件,只有当 A 减小至零

545 而 B 增大到无限时，$m\dfrac{A}{\sqrt{B}}$才会为零。因此，所有惯性的相对性假设似乎要求系数 $g_{\mu\nu}$ 的这种退化。这一要求意味着在无限处势能 $m\sqrt{B}$ 变成无穷大。这样一个质点将永远不能离开这个系统；而且更细微的研究表明，这也适合于光线。因此，其引力势在无限处具有这种行为的宇宙系统不会有消亡的危机，刚才我们把它和牛顿理论结合起来进行了讨论。

我想指出的是，作为这个论证基础的有关引力势的简化假设，仅仅是因为清晰明了才被引进的。为了表达这个问题的本质，不用进一步的限制假设，就可以找到 $g_{\mu\nu}$ 在无限处行为的一般表述。

在目前阶段，由于数学家 J. Grommer 的好心帮助，我研究了中心对称的，在无限处以前面提到的方式退化的稳恒的引力场。先给出引力势 $g_{\mu\nu}$，由此在引力场方程基础上计算出物质的能量张量 $T_{\mu\nu}$。但是我们在这里证明了，一个固定恒星的系统根本不需要这类边界条件，正如天文学家 de Sitter 最近也正确地强调过的。 [7] [8]

有质物体的反变能量张量 $T^{\mu\nu}$ 可表达成

$$T^{\mu\nu}=\rho\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s},$$

此处 ρ 是自然单位下的物质密度。在适当选取的坐标系中，恒星的速度和光速相比非常微小。因此，我们可以用 $\sqrt{g_{44}}\,\mathrm{d}x_4$ 来取代 $\mathrm{d}s$。这表明 $T^{\mu\nu}$ 的所有分量和最后的分量 T^{44} 相比较必须非常小。但是要把这个条件和选取的边界条件相调和根本不可能。回顾一下这个结果并不令人吃惊。从恒星具有微小速度的事实可以推出，在任何存在固定恒星之处，引力势（在我们情形下为 $\sqrt{B}$）永远不可
546 能比在地球上的大太多。这和在牛顿理论的情形完全一样，可由统计理论推出。无论如何，我们的计算使我信服，不能假设 $g_{\mu\nu}$ 在空间无限处的这种退化条件。

这种企图失败之后，出现了下面两种可能性。

(a)正如在行星问题中那样，我们可以要求 $g_{\mu\nu}$ 在适当选择的坐标系中，在空间无限处的值被近似地表达成

$$\left.\begin{matrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\}.$$

(b)我们可以完全避免为空间无限处设下普遍成立的边界条件；取而代之对于所考虑的区域的空间极限，在每一种单独的情形下分别给出 $g_{\mu\nu}$，这正如迄今为止我们已经习惯的对于时间分别给出初始条件那样。

可能性(b)无望解决这一问题,只好放弃。这是当前 de Sitter[1] 采用的无可争辩的立场。但是,我必须承认,在这个基本问题上全面投降是我无法接受的。
[10] 在我尽了一切努力而未找到满意的观点之前,我不应该作任何结论。

可能性(a)在许多方面不令人满意。首先,在那些边界条件中预先假定了一个确定的坐标系选取,这和相对论原理相违背。其次,如果我们采取这个观点,我们就不能和惯性的相对性要求相协调。质量为 m(在自然单位下)的质点的惯性依赖于 $g_{\mu\nu}$;但是这些和上面给出的在空间无限处的它们的假设值的差别很小。这样,惯性的确受(在有限空间中的)物体的**影响**,但不以后者为**条件**。根据这个观点,如果只存在一个单独的质点,它将具有惯性,而且事实上其惯性和它被实际宇宙中的其他质量环绕时的惯性几乎一样大。最后,在牛顿理论框架中 547
提到的,可能仍然会产生对这一观点的统计力学的反驳意见。

从上面的论述可见,我还未能成功地表述空间无限处的边界条件。尽管如此,仍然存在一种出路,而不必像在(b)的可能性暗示下取放弃态度。因为如果可能把宇宙认为是一个在空间上有限的(闭合的)连续统,我们就根本不需要任何边界条件。我们将进一步指出,无论是相对论的一般假设,还是小的恒星速度的事实都和空间有限宇宙假设相协调;虽然,为了实现这个思想,我们肯定要对引力场方程作一个推广的修正。

§3. 具有均匀分布物质的空间有限的宇宙

根据广义相对论,每一处的物质以及该物质的状态确定了四维时空连续统在该点的度规特征(曲率)。因此,鉴于物质分布之不均匀,这个连续统的度规结构必然是极端复杂的。但是,如果我们只关心大尺度结构,我们可以认为在巨大的空间中物质是均匀分布的,这样它的分布密度是一个变化极其缓慢的可变函数。这样,我们的步骤就和测地学家有些相似,他们利用一个旋转椭圆面来近似地球表面的形状,地球表面的小尺度是异常复杂的。

我们从关于物质分布的经验得到的最重要事实是,恒星的相对速度和光速相比是非常小的。所以,我认为我们现在可以把我们的论证基于如下的近似假设之上。存在一个参考系,相对于它物质可认为处于永恒的静止状态。因此,相
[11] 对于这个系统,物体的反变能量张量 $T^{\mu\nu}$,由于(5)的原因,具有如下简单形式

[9] 1) de Sitter:阿姆斯特丹科学院,1916 年 11 月 8 日。

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix}\right\}. \tag{6}$$

548 分布的(平均)密度标量 ρ 想当然地为空间坐标的函数。但是如果我们假定宇宙是空间有限的,我们会想到假定 ρ 与位置无关。在这个假设的基础上我们进行如下论证。

就引力场而言,从质点的运动方程

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \nu\end{matrix}\right\}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}=0$$

推出,在一个稳恒引力场中一个质点只有当 g_{44} 和位置无关时才能保持静止。由于,如果我们进一步预先假定所有的量都和时间坐标 x_4 无关,我们可以要求需要的解对所有 x_ν 有

$$g_{44}=1. \tag{7}$$

正如在处理静态问题中一直那样做的,我们还进一步必须令

$$g_{14}=g_{24}=g_{34}=0. \tag{8}$$

现在余下的任务仅是确定我们连续统的纯粹空间几何关系的引力势分量(g_{11},$g_{12}\cdots g_{33}$)。从我们有关产生场的质量分布均匀性的假设推出,所需空间的曲率一定是常数。因此,具有这样的质量分布,具有常数 x_4 的所需的 x_1、x_2、x_3 的有限连续统将是一个球空间。

例如,我们可用下面的方法得到这样的空间。我们从四维的 Euclid 空间出发,其坐标为 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4,线元为 $d\sigma$;因此令

$$d\sigma^2=d\xi_1^2+d\xi_2^2+d\xi_3^2+d\xi_4^2. \tag{9}$$

我们在这个空间中考虑超面

$$R^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2, \tag{10}$$

此处 R 表示一个常数。这个超面的点形成一个三维的连续统,具有曲率半径 R 的球空间。

我们由其出发的四维 Euclid 空间只是为了定义我们超面的方便。只有其度规性质和具有均匀分布物质的物理空间的度规性质相同的超面上的那些点,
549 我们才感兴趣。我们可以利用坐标 ξ_1,ξ_2,ξ_3(在超平面 $\xi_4=0$ 上的投影)来描述这个三维连续统,这是因为从(10)我们得知,ξ_4 可以按照 ξ_1,ξ_2,ξ_3 来表达。从(9)中消去 ξ_4,我们得到了空间球的线元的表达式

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2&=\gamma_{\mu\nu}d\xi_\mu d\xi_\nu\\ \gamma_{\mu\nu}&=\delta_{\mu\nu}+\frac{\xi_\mu\xi_\nu}{R^2-\rho^2}\end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

此处 $\delta_{\mu\nu}=1$,如果 $\mu=\nu$;$\delta_{\mu\nu}=0$,如果 $\mu\neq\nu$ 以及 $\rho^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$。在考查两点之一 $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$ 的邻域时,所选择的坐标很方便。

[12] 现在,我们还得到了所需要的四维时空的线元。对于两个下标都不是 4 的势 $g_{\mu\nu}$ 可以表示成

$$g_{\mu\nu}=-\left(\delta_{\mu\nu}+\frac{x_\mu x_\nu}{R^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}\right), \tag{12}$$

这个方程结合式(7)和(8)完美地定义了尺子、钟表和光线的行为。

§ 4. 关于引力场方程的一个附加项

[13] 我提出的引力场方程在任意选取的坐标系下写成

$$\left.\begin{aligned}&G_{\mu\nu}=-\kappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),\\&G_{\mu\nu}=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\,\nu\\\alpha\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mu\,\alpha\\\beta\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}\mu\,\beta\\\alpha\end{Bmatrix}+\frac{\partial^2\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\,\nu\\\alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}\end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

当我们把式(7)、(8)和(12)中的 $g_{\mu\nu}$ 的值以及在(6)中的物质的能量(反变)张量代入方程组(13)时,发现根本不满足。在下一段我们会看到如何简便地进行这个计算。如果能断定,我迄今所使用的场方程(13)是仅有的和广义相对论假设相符合的方程,也许我们就只好得出结论,广义相对论不允许空间有限宇宙 550
的假设。

[14] 然而,很容易将方程组(13)进行和广义相对论相和谐的推广,这和方程(2)给出的 Poisson 方程的推广完全相似。我们可以在场方程(13)的左方加上一个基本张量 $g_{\mu\nu}$ 乘以当前还未知的普适常数 $-\lambda$,而不破坏其一般协变性。我们用如下方程取代场方程(13)

$$G_{\mu\nu}-\lambda g_{\mu\nu}=-\kappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \tag{13a}$$

这个具有足够小 λ 的场方程,无论如何也和从太阳系推导的经验事实相协调。它还满足动量和能量守恒定律。这是因为从 Riemann 张量的标量利用 Hamilton 原理可以推出方程组(13),如果这个标量增加了一个普适常数,就可以同样地推出场方程(13a);而且 Hamilton 原理理所当然地保证守恒律成立。我们将会在 § 5 看到,场方程(13a)和我们对场和物质的猜测相一致。

§ 5. 计算和结果

由于我们连续统中的所有点都是平等的,只要对一点进行计算即已足够,例

如考虑具有坐标

$$x_1=x_2=x_3=x_4=0$$

的两点之一。那么对(13a)中的 $g_{\mu\nu}$ 求导一次或不求导的 $g_{\mu\nu}$ 都应代入下值

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}.$$

这样，我们首先得到

$$G_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu\\1\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu\\2\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\3\end{bmatrix}+\frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

551 由此以及方程(7)、(8)和(13)容易发现，只要满足下面两个关系，(13a)的所有方程都能满足

$$\frac{-2}{R^2}+\lambda=-\frac{\kappa\rho}{2},$$

$$-\lambda=-\frac{\kappa\rho}{2},$$

或者

$$\lambda=\frac{\kappa\rho}{2}=\frac{1}{R^2}. \tag{14}$$

这样，新引进的普适常数 λ 不仅确定了可能保持平衡的平均分布密度 ρ，而且确定了球空间的半径 R 和体积 $2\pi^2 R^3$。根据我们的观点，宇宙的总质量 M 是有限的，并且事实上为

$$M=\rho\cdot 2\pi^2 R^3=4\pi^2\frac{R_0}{\kappa}=\pi^2\sqrt{\frac{32}{\kappa^3\rho}}. \tag{15}$$ [15]

这样，如果实际宇宙和我们的论证相对应，那么关于它的理论观点如下所述。根据物质的分布，空间的曲率随时间和空间而变化，但是我们可以用一个球空间对它作粗略近似。无论如何，这种观点在逻辑上是自洽的，从广义相对论的观点看也是最显然的；而从当代天文知识的观点看，它是否站得住脚不在此讨论。为了得到这个自洽的观点，我们必须断然对还未被实际证实的引力场方程进行推广。然而，应该强调的是，即使不引进补充的项，我们的结果也给出了空 [16]
间的正曲率。那一项仅仅是为了能使物质处于准静态分布才引进的，正如恒星的小速度这一事实要求的那样。

---

552 本文载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1917)：142—152。1917 年 2 月 8 日收到，1917 年 2 月 15 日发

表。正文 p. 5 的手稿残片[2 079. 1]被保存着。它对应于发表论文的第 2 节的部分,从 p. 146 的"[*Grenz*] *bedingungen*"开始至第 2 节的倒数第 2 段的 p. 147 "*so besäße er nach dieser*"结束。

[1]有关此文的历史背景,见导言。

[2]1916 年春季爱因斯坦已经思考在无限处的边界条件的选择(见爱因斯坦致 Michele Besso 的信,1916 年 5 月 14 日,在该信中他还提到世界为有限的可能性)。

[3]有关"行星问题"中的边界条件的讨论,见 *Enistein 1915h*(文件 24),p. 833。

[4]在 *Enistein 1917a*(文件 42),pp. 71—72 中还讨论了牛顿引力理论中的这个困难。在那里还提到,为了克服这个困难,在 19 世纪后期提出的对引力势的修正(见 *Seeliger 1895* 及 *Neumann*,*C. 1896*;还见 *North 1965*,第 2 章中的历史的讨论)。

[5]"λ_φ"应为"$\lambda\varphi$"。

[6]这个陈述总结了"Mach 原理"的爱因斯坦解释。更多的有关 Mach 的观念在爱因斯坦思考中的作用,见 *Enistein 1916c*(文件 29)注释 4;在爱因斯坦致 Felix Klein 的信,1917 年 3 月 26 日(以及这篇文章)中还可见到爱因斯坦对有关惯性的相对论的评论。

[7]Jakob Grommer(1879—1933)直到 1928 年止是爱因斯坦偶尔的合作者(见 *Pais 1982*,pp. 487—488)。

[8]见 *De Sitter 1916*,p. 503(英文版 p. 531),脚注 2,De Sitter 在那里批评上述的边界条件。正如 De Sitter 指出的,在和爱因斯坦交流后于 1916 年 9 月 29 日将这个脚注加到这篇文章上。

[9]*De Sitter 1916*。这篇文章实际上是提交到 1916 年 9 月 30 日的 Amsterdam 科学院会议上。这篇批评爱因斯坦拒绝绝对空间以及他将惯性归因于远处物质的观点,正如在 *Enistein 1916e*(文件 30)中解释的,开启了在 De Sitter 和爱因斯坦之间的关于旋转相对性及惯性本质的争论。这种讨论以发表文章和通信进行(见第八卷中 1916—1918 年间爱因斯坦-De Sitter 通信),有关历史的讨论,见 *North 1965*,第 5 章,*Kerszberg 1987*,*1989a*,*1989b* 以及 *Eisenstaedt 1993*。

[10]爱因斯坦是指这一事实,在场方程的 Schwarzschild 和 Droste 准确解中一个单独的质量在全空间产生了引力场(见 *Schwarzschild 1916a* 以及 *Droste 1916*)。关于这一点的讨论还可见爱因斯坦致 Karl Schwarzschild 的信,1916 年 1 月 9 日。

[11]参考 p. 146 的方程(5)。

[12]"*Linsenelement*"应为"*Linienelement*"。

[13]例如见 *Enistein 1916g*(文件 32),方程(1)。

[14]"(14)"应为"(13)"。在译文中已作改正。

[15]最后表达式中的因子 π^2 应在平方根之前。

[16]爱因斯坦从天文学数据得出结论,R 的值为 10^7 光年,而可见宇宙的尺度的估值为 10^4 光年(有关他的评论,例如见爱因斯坦致 Michele Besso 的信,1917 年 3 月 9 日之后,以及爱因斯坦致 Paul Ehrenfest 的信,1917 年 2 月 14 日)。在本文发表后不久,Erwin Freundlich 和 Felix Klein 都向爱因斯坦指出,可用椭圆几何来取代这里考虑的球几何(见爱因斯坦致 Felix Klein 的信,1917 年 3 月 26 日,在这里爱因斯坦对此评论表示感谢,并宣布两种几何给出的半径和平均密度间的关系相同)。

[吴忠超　译校]

44."对原告 1916 年 12 月 27 日的书面陈述的答复"

[1]

对原告 1916 年 12 月 27 日的书面陈述的答复 553

第一

原告坚持说,我关于评价混合管的作用的最新意见是错误的,因为我忽略了摩擦的作用,其实,在分析混合管中的流动时,摩擦起着很重要的作用。

为此,我们首先用定量的理论计算来证明现存的关系。为此,让我们使用工程力学中所用的方法。忽略重力的影响,通过管子的气流服从下列规律:

$$h-h_1=-\int v\mathrm{d}p-B, \tag{1}$$

在上式中

$$h=\frac{w^2}{2g},\ h_1=\frac{w_1^2}{2g}, \tag{2}$$

式中 w 为管中任一处的速度,w_1 为开始处的速度,v 是体积,p 是气体的压力,B 是每单位质量气体从开始管段到目测管段之间所受的摩擦。进一步设

$$B=\zeta\frac{w^2}{2g}, \tag{3}$$

量 ζ 将在稍后出现。关于混合管,原告认为混合管上下管段的关系如下,即沿着混合管的压力是常数。对此,我们只讨论目前这一特殊情况,将处理简化、研究摩擦的影响。对于这类流动过程,对于流动的所有长度上都有 $\mathrm{d}p=0$,因此(1) 554
式右边的积分为零,于是,由(1),(2)和(3)式得到简单的关系

$$\frac{w^2}{2g}-\frac{w_1^2}{2g}=\zeta\frac{w^2}{2g}$$

或者

$$\frac{w_1}{w}=\sqrt{1+\zeta}. \tag{4}$$

此式给出在我们处理的情况下速度和摩擦的关系。特别是,此式在管的终段也成立,由此即可算出 w 和 ζ 之值,这时,B 就是整个混合管中的摩擦损失。

AD.[35 330].只得到一页,背面有不相干的概率计算,已略去。

[1]此文件与一未知的专利纠纷有关。在 1916 年 5 月 14 日爱因斯坦给 Michele Besso 的信中提到"一个相当可笑的专利案件",可能即与此文有关。

[喀兴林 译校]

555

45. “论 Sommerfeld 和 Epstein 的量子定理”

[*Einstein 1917d*]

1917 年 5 月 11 日收到
1917 年 5 月 30 日发表

载于《德国物理学会会刊》19(1917):82—92。

论 Sommerfeld 和 Epstein 的量子定理 556

爱因斯坦

（曾在 5 月 11 日的会议上发表过）
（见英文本第 79 页）

§1. 原来的表述

关于一个自由度的周期性力学系统的量子条件（Sommerfeld 和Debye提出的）

$$\int p \mathrm{d}q = \int p \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = nh. \tag{1}$$

[1] 已是完全不容怀疑了。上式中的积分遍及运动的一个完整周期，q 为系统的坐标，p 为相应的动量坐标。Sommerfeld 关于光谱的工作肯定地证明了对于多自由度的系统，必须用多个量子条件取代上述单一量子条件。一般说来，其数目
[2] (l)与其自由度一样多。根据 Sommerfeld，这 l 个量子条件为

$$\int p_i \mathrm{d}q_i = n_i h. \tag{2}$$

由于这一表述是依赖于坐标的选择的，它只能对于特定的坐标选择才是正确的。只有在特定的坐标系已经选定，而 q_i 又是时间的周期函数时，方程组(2)才是对运动的特定的描述。

[3] 进一步的主要进展是由 Epstein(以及 Schwarzschild)作出的。前者把他的
[4] 选择 Sommerfeld 坐标 q_i 的规则建立在 Jacobi 定理之上，这个定理的表述如下。令 H 为 q_i 和 p_i 和 t 的 Hamilton 函数 $H([q_i, p_i])$，它满足正则方程

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{3}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{4}$$

557 并且当它不明显包含时间时恒等于能量函数[1)]。

如果 $J(t,q_1\cdots q_l,\alpha_1\cdots\alpha_l)$ 是 Hamilton-Jacobi 偏微分方程

$$\frac{\partial J}{\partial t}+H\left(q_i,\frac{\partial J}{\partial q_i}\right)=0 \tag{5}$$

的完全积分，则正则方程的解为

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}=\beta_i, \tag{6}$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_i}=p_i. \tag{7}$$

像我们以后假设的那样，如果 H 中不显含时间，我们可以用

$$J=J^*-ht, \tag{8}$$

来求解(5)，其中 h 为一常数，而 J^* 不再显含时间。这时(5)，(6)和(7)成为

$$H\left(q_i,\frac{\partial J^*}{\partial q_i}\right)=h, \tag{5a}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial J^*}{\partial \alpha_i}&=\beta_i\\ \frac{\partial J^*}{\partial h}&=t-t_0\end{aligned}\right\}, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial q_i}=p_i, \tag{7a}$$

但是，这时(6a)的头一个方程只表示 $l-1$ 个方程，其中的 α_n 被常数 h 所代替，β_n [5]
被常数 $-t_0$ 所代替。

Epstein 的工作是，选择坐标 q_i，使得方程(5a)的完全积分存在并呈以下形式

$$J^* = \sum_i J_i(q_i), \tag{8a}$$

式中 J_i 只依赖于 q_i，而与其他的 q 无关。如果 q_i 是时间的周期函数，则 Sommerfeld 的量子条件(2)将对这些坐标 q_i 成立。

558 尽管 Sommerfeld-Epstein 把量子定理向多自由度系统的扩充取得了巨大的成功，但仍有不满意的地方，即人们必须受制于(8)的分离变量，因为有可能对量子问题本身无法着手。下面我们建议对 Sommerfeld-Epstein 条件作一个较
小的修改来避免这一缺点。后面我将简短地指出其基本思想并作较详细的 [6]
解释。

1)因为这时有 $\frac{dH}{dt}=\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i=0$。

§2. 修改后的表述

对于一个自由度的系统来说，$p\mathrm{d}q$ 是不变量（即与坐标 q 的选择无关），但与此相反，在多自由度系统中单个的乘积 $p_i\mathrm{d}q_i$ 并不是不变量，因此，量子条件(2)没有不变量的含义。只有对全部 l 的和式 $\sum_i p_i\mathrm{d}q_i$ 才是不变量。为了从这一和式导出一些不变的量子条件，我们可以如下进行。把 p_i 看成是 q_i 的函数，换句几何学的话说，我们可以把 p_i 看成是 l 维的 q_i 的空间中的一个矢量（具有协变性质）。如果在这个空间中画任意一个封闭曲线（并不需要是此力学系统的轨迹）则此曲线上的线积分

$$\int \sum p_i \mathrm{d}q_i \tag{9}$$

是一个不变量。如果 p_i 是 q_i 的任意函数，则一般说来，每一个曲线提供(9)的一个不同的积分值。然而，如果矢量 p_i 是由势 J^* 导出的，即如果下列关系成立：

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k}-\frac{\partial p_k}{\partial q_i}=0, \tag{10}$$

从而有

$$p_i=\frac{\partial J^*}{\partial q_i}, \tag{10a}$$

则对于所有可以连续地彼此变换的封闭曲线，积分(9)将取相同值，而对于所有可以连续地变换收缩为一个点的封闭曲线，积分(9)的值为零。但是，如果所考 559
虑的 q_i 空间是多连通的，那时就存在一些不能通过连续变形而缩成一个点的封闭曲线，如果那时 J^* 不是 q_i 的单值的（而是无穷多值的）函数，则一般说来，对于那样的曲线积分(9)不等于零。尽管如此，在 q_i 空间中还是有有限数目的封闭曲线，所有的封闭曲线都可以连续地变换到这有限数目的封闭曲线上。在这个意义上，有限个条件

$$\int \sum_i p_i \mathrm{d}q_i = n_i h \tag{11}$$

可以当作量子条件。我的意见是，必须用它们来代替量子条件(2)。我们必须期望，(10)中的方程的数目应该等于系统的自由度数。如果数目不够，我们就面对"退化"(Entartung)的情况。

我建议的上述基本思想（故意地留有许多脱漏之处）将在下面作详细的说明。

§3. Hamilton-Jacobi 微分方程的描述性推导

当坐标空间中的一点 P，给出了它的坐标 Q_i 和对应的速度，即动量坐标 P_i

时，这一点的运动就完全被正则方程(3)和(4)确定[1)]。因此，在其轨迹曲线 L 上的每一点都具有某一速度值，即 L 上的 p_i 是 q_i 的不同的函数。如果我们想象，在坐标空间中的一个($l-1$)维的“曲面”上的每一点 P(由 Q_i 和 P_i 决定的)，每一点都代表在坐标空间中具有一个轨道曲线 L 的运动。只要曲面上的 P_i 是 Q_i 的连续函数，这些轨迹曲线就会连续地充满坐标空间(或其一部分)。在坐标空
560 间中每一点(q_i)都会有一条轨迹曲线通过，因而在这一点也会有一个特定的动量坐标 p_i 与之相对应。这样一来，在坐标空间中就建立了一个 p_i 的矢量场。我们的任务就是去寻找这个矢量场的规律。

在正则方程组(3)中，把 p_i 看成是 q_i 的函数，我们必须将其左边换成

$$\sum_{\kappa}\frac{\partial p_i}{\partial q_\kappa}\frac{\mathrm{d}q_\kappa}{\mathrm{d}t}.$$

而根据(4)，此式可以写成

$$\sum_{\kappa}\frac{\partial p_i}{\partial q_\kappa}\frac{\partial H}{\partial p_\kappa},$$

因此，(3)成为

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_{\kappa}\frac{\partial H}{\partial p_\kappa}\frac{\partial p_i}{\partial q_\kappa}=0. \tag{12}$$

这是作为 q_κ 的函数的 p_κ 所必须满足的 l 个线性微分方程的系统。

现在我们要问，当势 J^* 存在时还有没有矢量场，即有没有满足条件(10)和(10a)的矢量场。这时，考虑到(10)，(12)成为

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_{\kappa}\frac{\partial H}{\partial p_\kappa}\frac{\partial p_\kappa}{\partial q_i}=0.$$

此方程说明 H 不依赖于 q_i，这就是说，具有所需要的势的场的确是存在的。势 J^* 应满足 Hamilton-Jacobi 方程(5a)，或 J 应满足(5)。

这样，我们已经证明了，方程(3)可以用(7a)和(5a)，或者用(7)和(5)分别来代替。我们还想证明(6a)或(6)满足方程组(4)，尽管由于下面考虑这是无所谓的。在将(5a)积分，并利用(7a)将 p_i 表为 q_i 的函数，方程组(4)形成一个决定 q_i 是时间函数的全微分方程组。根据一阶微分方程组的理论，这个全微分方程组
561 等价于下面偏微分方程组：

$$\sum_{\kappa}\frac{\partial H}{\partial p_\kappa}\frac{\partial \varphi}{\partial q_\kappa}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0. \tag{13}$$

如果 J 是(5)的完全积分，则

---

1)假设 H 不显含时间 t。

$$\varphi=\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}$$

满足上面的方程。因为如果将 φ 代入(13)式的左边,考虑到(7)得

$$\sum_{\kappa}\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial J}{\partial q_\kappa}\right)}\frac{\partial^2 J}{\partial q_\kappa \partial \alpha_i}+\frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \alpha_i}$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left\{H\left(q_\kappa,\frac{\partial J}{\partial q_\kappa}\right)+\frac{\partial J}{\partial t}\right\},$$

而根据(5),这些量是等于零的。由此得知,方程组(4)是分别由(6)及(6a)积分得来的。

§4. 一个单独轨道的 p_i 场

现在我们进入在一个非常主要的问题,在§2 对基本思想的初步描述中我特意避免提及它。在§3 的讨论中我们设想了由($l-1$)重无穷多个、互相独立的运动产生的 p_i 场,这些运动由在 q_i 空间中刚好同样多的轨迹曲线来描绘。但是,现在我们要考察的是单个不受扰动的系统在无限长时间内的运动,以及它在 q_i 空间中所描画出的轨迹曲线。这时可以出现两种情况:

1. 在 q_i 空间中存在一部分空间,在这个 l 维的连续统中的每一个点都会在时间的进程中被轨迹曲线无限靠近;

2. 轨迹曲线在整个时间进程中只充满了小于 l 维的连续统。这一类型的特例是具有严格闭合轨道的运动。

情况 1 是一般情况,而情况 2 是情况 1 的特殊情况。作为情况 1 的一个例子,我们可以想象一个受中心力作用的一个质点,用其轨道平面上的两个坐标 562
(例如极坐标 r 和 φ)描写的情况。当作用的引力的规律是严格地与 $\frac{1}{r^2}$ 成正比,而运动与 Kepler 运动的偏离(这是相对论要求的)又被忽略时,就出现了情况 2。这时轨迹曲线是封闭的,其上各点构成一个一维的连续统。从三维空间的角度来看,中心力运动永远是属于情况 2 的,因为其整个轨迹曲线充其量只能充满二维连续统,它是更复杂的力规律(例如由 Epstein 研究的在 Stark 效应理论中的运动)定义的特例。

下列的情况属于一般情况 1。考虑 q_i 空间的一个体元 $d\tau$,所研究的运动的轨迹曲线无限多次地经过 $d\tau$。每次通过都有一个动量坐标(p_i),构成一个动量组。先验地,可以有两类轨道,它们具有明显不同的性质。

类型 a)：p_i 组重复出现，只有有限个属于 $d\tau$。该运动过程可以用 q_i 的单值函数 p_i 来表示；

类型 b)：在所考虑的位置有无限多个 p_i 组，在这种情况之下，p_i 不能表为 q_i 的函数。

人们立刻注意到，类型 b)排除了我们在§2 中提出的量子条件。另一方面，经典统计力学主要只和类型 b)打交道；因为只有在这种情况下，一个系综的微正则系统等价于时间系综[1]。

563 总之，我们可以说，应用量子条件(11)式需要具有势 J^* 的轨道存在，使得单个轨道就能决定 p_i 场。

§5. 合理化坐标空间

我们已经提到过，一般说来 p_i 是 q_i 的多值函数。作为一个简单的例子，我们再次考查一个在固定中心的引力下一个点的平面转动。这个点在运动时离引力中心的距离 r 在最小值 r_1 和最大值 r_2 之间周期性地变动，注视由半径 r_1 和 r_2 围成的圆环形空间中的一个点 q_i，我们可以看到，在时间的进程中，运动点的轨道将无穷多次无限靠近这个点，或者用稍不精确的话说，经过这个点。然而通过这一点时速度的径向分量却有正负二值，视经过时 r 是增加还是减少而定。于是 p_ν 是 q_ν 的双值函数。

这种情况带来的思考不方便的最好解决办法是 Riemann 在函数论中提出的，把环形曲面想象成为双层的、互相迭合的，我们想象$\frac{dr}{dt}$为正的轨道在上层，而$\frac{dr}{dt}$为负的轨道在下层，而把相应的 p_ν 的矢量系统也这样分层。我们想象上下两层是沿着圆周边界相连着的，因为当运动时一旦轨道触及内外两个边界圆，则将由一层转入另一层。容易看出，在两个边界圆上，两层的 p_ν 是相同的。用这种双层曲面的解释，p_ν 不仅是 q_ν 的连续函数，而且是单值函数。这就是这样做的 [7]
价值所在。

在这种双层曲面上，显然有两种类型的封闭曲线，它们既不能用连续变形的
564 方式缩成一个点，也不能由一种类型转变成另一种类型。图 1 给出每一种类型的例子(L_1 和 L_2)，曲线在下层的部分用虚线表示。在双层曲面上所有其他的封闭曲线要么能利用连续变形收缩成一个点，要么能用同样方法，映射成转动一次

1)微正则系综对于给定的 q_i 仍含有任意给定的(与能量值相较量的)p_i。

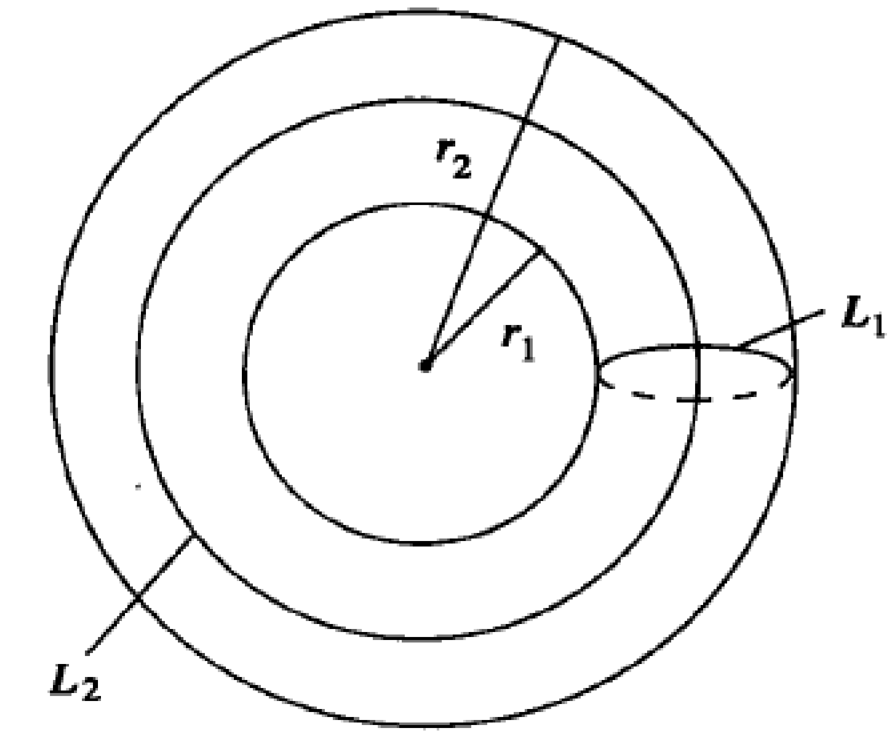


图 1

或多次的 L_1 或 L_2 类型。量子定理(11)式必须能应用于 L_1 和 L_2 两种类型路径。

显然,这些考虑要推广到所有满足 §4 的条件的运动。必须想象把相空间分割成一系列的"区"。这些区在$(l-1)$维的"表面"上是连通的,使得在这样构造的流形中 p_i 成为连续和单值的(在一个区到另一区的转换时也是如此)函数。我们将把这种辅助的几何结构称为"合理化的相空间",量子定理(11)应当适用于合理化的相空间所有的封闭曲线。

在这种形式下,为了给量子定理一个精确的意义,对于一切可以互相连续形变的封闭曲线,积分 $\int \sum p_i \mathrm{d}q_i$ 在合理化的 q_i 空间中,必须具有相同的值。这一点的证明可以完全按常规进行。在合理化 q_i 空间,令 L_1 和 L_2(见图 2 所示)是两条可以相互连续形变的封闭曲线,并同时能保持图示方向不变,则图示的整个 565 封闭曲线就可以连续地收缩成一个点。由此,根据(10)可以得出,对于整条曲线的线积分为零。如果我们考虑到根据在合理化 q_i 空间中 p_i 的单值性,沿两条无限靠近的连接线$\overline{A_1A_2}$和$\overline{B_1B_2}$的线积分是相等的,所以对 L_1 和 L_2 的回路积分是相等的。

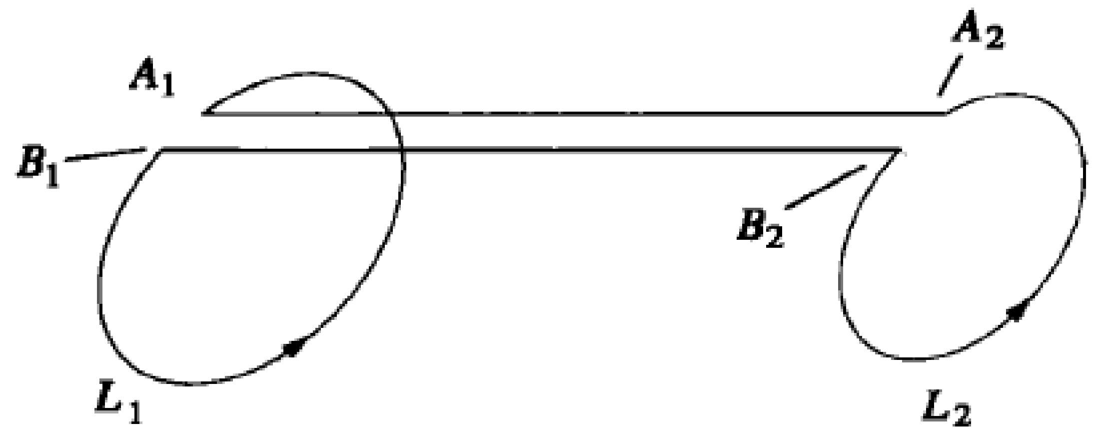


图 2

势 J^* 在合理化 q_i 空间中也是无限多值的，但是根据量子定理，这种多值性是在可以想到的情况中最简单的，因为如果合理化空间中一点的势的一个值为 J^* 的话，则其余的各值为 J^*+nh，其中 n 为一个整数。

证明的补充 进一步的思考表明，§4 中(11)式的可用性的第二个条件是永远自动满足的，即下列定理成立：如果运动产生一个 p_i 场，则必然有一个势 J^* 存在。

根据 Jacobi 定理，每一个运动都可以由(5a)中的完全积分 J^* 导出。不管怎样，至少存在一个 q_i 的函数 J^*，由此可以导出所考虑的运动系统在轨道上每一点的动量 p_i 都可以用下式计算出来：

$$p_i=\frac{\partial J^*}{\partial q_i}.$$

现在我们应记住，J^* 是通过一个偏微分方程得到的，即通过指定 J^* 在 q_i 空间中如何连续变化而得到的。因此，如果我们想知道 J^* 在一个系统的运动过程中沿其轨道曲线怎样变化，我们必须根据微分方程考查 J^* 沿其运动轨道(及其附近)如何变化的情况。如果在某一时间(可能很长)之后，轨道重又回到以前曾经经过的一点 P 的极近处，那么，我们通过在这两点间的那段轨道上对 J^* 的连续积分，那 $\frac{\partial J^*}{\partial q_i}$ 就提供这两个时刻的动量坐标。绝不能期望这种连续性能够导

566 至回到原来的 $\frac{\partial J^*}{\partial q_i}$ 值；与此相反，一般说来，在运动过程中 q_i 每一次近似地重返到所考虑的位形时，人们应当预期找到 p_i 的完全不同的系统。因此，对于一个**无限连续**的运动，把 p_i 表为 q_i 的函数是绝对不可能的。但是，如果 p_i(或者这些量的一系列有限个数值)在坐标的重复中重复出现，则在无限连续运动中 $\frac{\partial J^*}{\partial q_i}$ 可以表为 q_i 的函数。因此，如果对于一个无限连续运动有 p_i 场存在的话，那么就也存在相应的势 J^*。

因而，我们可以说：如果对于 $2l$ 个下列形式的运动方程

$$R_\kappa(q_i, p_i)=\text{常数}, \tag{14}$$

有 l 个积分存在，式中 R_k 为 p_i 的代数函数，只要 p_i 可以根据(14)可以表为 q_i 的函数，那么 $\sum p_i \mathrm{d}q_i$ 永远是一个完全微分。量子条件要求，对不可约曲线的积分 $\int \sum_i p_i \mathrm{d}q_i$ 是 h 的整数倍。在每一个 p_i 只依赖于相应的 q_i 时，这个量子条件与 Sommerfeld-Epstein 的量子条件一致。

如果(14)所示类型的积分少于 l 个，例如像 Poincaré 在三体问题中所说的那样，那时 p_i 不能表为 q_i 的函数，而 Sommerfeld-Epstein 的量子条件在本文稍加推广的形式上也不能成立。

载于《德国物理学会会刊》19(1917):82—92。1917 年 5 月 11 日的演讲稿,1917 年 5 月 30 日发表。 567

[1]对具有一个自由度的系统的量子条件的讨论和应用,见 *Sommerfeld 1914* 和 *Debye 1914*。对早期量子论中量子条件的历史讨论,也见 *Mehra* 和 *Rechenberg 1982*,章Ⅱ,4。

[2]关于 Arnold Sommerfeld 对具有几个自由度的系统的讨论,见 *Sommerfeld 1915*,*1916*。

[3]见 *Epstein 1916a*,*1916b* 和 *Schwarzschild 1916c*。在 Karl Schwarzschild 的讣告中,*Einstein 1916h*(文件 33),爱因斯坦称后一篇文章为"精妙的研究"("eine feinsinnige Untersuchung")。

[4]关于 Jacobi 定理的讨论,见,例如,*Appell 1904*(它在爱因斯坦的私人书库中)或 *Goldstein 1980*。爱因斯坦在 *Einstein 1917f*(文件 47)中给出对此定理的新推导。

[5]"α_n"应为"α_l","β_n"应为"β_l"。

[6]关于爱因斯坦对本文的总结以及在引言中对更多历史背景的讨论,也见 1917 年 6 月 3 日爱因斯坦致 Paul Ehrenfest 的信。

[7]对爱因斯坦利用相空间中不变环面的方法以及对爱因斯坦的文章与经典混沌系统的理论间关系的现代解释,见 *Gutzwiller 1990*,pp. 208—211。

[喀兴林　译校]

568 # 46. 对 Hermann von Helmholtz 论 Goethe 的两篇演讲的评论

[*Einstein 1917e*]

1917 年 11 月 2 日发表

载于《自然科学》5(1917):675。

对 Hermann von Helmholtz 论 Goethe 的两篇演讲的评论 569

Helmholtz，H. V. 论 Goethe 的两篇讲演

Braunschweig，Fr. Vieweg & Sohn，1917 年 64 页，定价，2 马克

W. König 在 Vieweg 书店出版了一本小册子，它包含 Helmholtz 于 1853 年和 1892 年所作的两篇演说。在第一篇演说中，Helmholtz 一般性地探讨了 Goethe 的研究方法，把它表征为舍弃抽象观念而直观地整理经验所得。通过他的这种想法和自信，Goethe 成功地找到了动物和植物的比较解剖学的新途径，从而 Goethe 成为达尔文的先驱。同样的情况，Goethe 拒绝了物理学的观念系统，这样一来，Helmholtz 就解释了 Goethe 在反对牛顿的颜色这一物理理论中所表现出的争辩狂热。Goethe 必须这样拒绝理论，否则他就必须通过比较经验与个别理论结果去反驳它。

每一位具有科学世界观的乐天的人都将怀着喜悦之情读到第二篇演讲。这里表现出老年的 Helmholtz 在他生命的尽头仍在为科学认知而奋斗，正如同 Goethe 从他的世界观中提精拾粹一样。Helmholtz 对待认识论，特别是对待 Kant 的态度在这里极端清楚地表述了出来，亲爱的读者！小结几近亵渎，自己读吧！

爱因斯坦，Berlin

载于《自然科学》5(1917)：675。发表日期：1917 年 11 月 2 日。 570

[1]*Helmholtz 1917*。Walter König 为 Helmholtz 两次讲座的简装版所写序言。这两次讲座是为满足人们对“营养丰富、令人振奋的教材的需求，在前线，人们的这种需求不亚于在后方”。

[刘　辽　译校]

571 47. “Jacobi 定理的推导”

[*Enistein 1917f*]

1917 年 11 月 22 日收到
1917 年 11 月 29 日发表

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1917):606—608。

[1]

Jacobi 定理的推导

572

爱因斯坦

动力学方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{2}$$

此处 H 在最一般的情形下是坐标 q_i，动量 p_i 和时间 t 的函数。众所周知，上述方程可以用 Hamilton-Jacobi 方法积分。即把 q_i 和时间 t 的函数 J 从偏微分方程

$$\frac{\partial J}{\partial t}+\overline{H}=0 \tag{3}$$

解出来。此处 $\overline{H}$ 是在 H 中将 p_i 用导数$\frac{\partial J}{\partial q_i}$来替代而得到的。如果 J 是这些方程具有积分常数 α_i 的完全积分，那么利用方程

$$\frac{\partial J}{\partial q_i}=p_i, \tag{4}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}=\beta_i \tag{5}$$

可以积分出正则方程组(1)和(2)。

[2] 有关动力学的更详细的教科书的计算证实，只要(3)、(4)和(5)得到满足，(1)和(2)就可以满足。然而，我不知道从正则方程出发推导出 Hamilton-Jacobi 方程组(3)、(4)和(5)的自然的方法，在这种方法中避免使用惊人的技巧。下面提供的便是这样的一种自然方法。

如果我在一个特定的时刻 t_0 给出系统的坐标 q_i^0 和相关的动量 p_i^0，那么方程组(1)和(2)就确定了它的运动。我用在坐标 q_i 的 n 维的空间中的一点的运 573

动来代表这个运动。如果我想象在时刻 t_0，对坐标空间的所有点 q_i 给出动量 p_i^0，利用相应系统的方程(1)和(2)使 p_i^0 是 q_i 的连续函数，那么由于方程(1)和(2)这些初始条件确定所有点的运动。我们将这些运动的整体称作“流场”。

前面是在(1)和(2)的意义上来描述流场，系统的每一点的坐标和动量被看成时间的函数。除了这种方法，我还可以把由每一点 q_i 的由 p_i 度量的运动状态当成时间的函数，这样 q_i 和 t 就被当作独立变量。这两种描述刚好分别对应于基于 Lagrange 或者 Euler 流体运动方程的流体动力学的描述。

按照第二类描述，我必须用

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}+\sum_\nu \frac{\partial p_i}{\partial q_\nu}\frac{\mathrm{d}q_\nu}{\mathrm{d}t}$$

或者根据(2)，用

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}+\sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_i}{\partial q_\nu}$$

去替换(1)的左边。

因此根据(1)，我们得到方程组

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_i}{\partial q_\nu}=0. \tag{6}$$

此处$\frac{\partial H}{\partial q_i}$和$\frac{\partial H}{\partial p_i}$是 q_i，p_i 和 t 的已知函数。由此推出，(6)是流场动量矢量分量 p_i 满足的偏微分方程组。

自然产生一个问题，是否存在流场，其动量矢量分量是有势的，因而满足

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k}-\frac{\partial p_k}{\partial q_i}=0, \tag{7}$$

$$p_i=\frac{\partial J}{\partial q_i}. \tag{7a}$$

574 如果(7)得到满足的话，(6)就取以下形式

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}+\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_\nu}{\partial q_i})\right)=0.$$

第二项是 H 相对于坐标 q_i 的全微分。如果用 $\overline{H}$ 表示在 H 中将 p_i 用 q_i 和 t 表达后的函数，可以得到

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}+\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_i}=0,$$

或者从(7a)引进势函数 J

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial J}{\partial t}+\overline{H}\right)=0.$$

如果人们要求 J 满足微分方程(即 Hamiltin 方程(3))

$$\frac{\partial J}{\partial t}+\overline{H}=0,$$

则前面方程就得到满足。把它和(7a)联立就解出了流场方程(6)。

可以用以下方式得到方程(5)。如果 J 是具有任意常数 α_1 的完整积分，那么在 J 中用 $\alpha_i+\mathrm{d}\alpha_i$ 取代 α_i 时(3)仍然成立。因此，

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t\partial\alpha_i}+\sum_\nu\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial^2 J}{\partial q_\nu\partial\alpha_i}=0$$

必须成立。因为(2)，我们还可以把它改写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_\nu\frac{\mathrm{d}q_\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_\nu}\right)\left(\frac{\partial J}{\partial\alpha_i}\right)=0.$$

但是在括号内的算子和算子$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$等同，这是 Lagrange 描述意义中的时间导数。因此$\frac{\partial J}{\partial\alpha_i}$在一个系统运动时保持常数，由此推出，对于系统中的一点的运动形式(5)的方程组必须成立。

载于《皇家普鲁士科学院(柏林)学报》(1917)：606—608。1917 年 11 月 22 日收到，1917 年 11 月 29 日发表。 575

[1]在 1917 年 4 月 27 日德国物理学会会议上，爱因斯坦就本文的专题做了演讲(见《德国物理学会会刊》19(1917)：77)。爱因斯坦在 1916 年秋就已关心到 Hamilton-Jacobi 理论(见 1916 年 9 月 6 日爱因斯坦致 Constantin Carathéodory 的信，1916 年 12 月 16 日 Constantin Carathéodory 致爱因斯坦的信)。关于爱因斯坦在量子论范围内对 Jacobi 定理的使用，也见 *Einstein 1917d*(文件 45)。

[2]在前注引用过的致 Carathéodory 的信中，爱因斯坦批评了在 *Appell 1904* 中给出的证明，这是一本著名的力学教科书，藏于他的私人书库中。

[吴忠超　译校正文]
[高尚惠　译校注释]

576

48. “Marian von Smoluchowski”

[*Einstein 1917g*]

1917 年 12 月 14 日发表

载于《自然科学》5(1917):737—738。

Marian von Smoluchowski

577

爱因斯坦，柏林

9月5日死神从我们身边突然夺走了一位优秀的理论物理学家——
[1] M. v. Smoluchowski。一场流行于 Krakau 的痢疾断送了这位刚满 40 岁的学者。

Smoluchowski 的科学工作以热分子论而闻名，特别是他的兴趣集中于分子运动论的种种推论上，而这正是从经典热力学观点无法理解的；因此他引发了在此方面需要战胜的顽固的反对，而这正好是 19 世纪末同时代的人所遭遇的分子论。

电动力学也强烈地呼唤着同一个怀疑论的精灵，它清除其中不适宜的力学图象，这个图象同时也阻碍了热学的发展。后来，物理学家认识到，无须依靠力学，完全不涉及整个物理学中的力学概念也可以有一个满足明晰性和完美的理论，因此人们懂得了 Boltzmann 于 1898 年在他的"气体论讲稿"第二部的序言中一句警语："我认为，气体理论由于一时的权威而忘却了它的对立面意见，科学里
[2] 面就出现了一片阴影，正如早期波动理论在牛顿权威下的遭遇。"

在这篇序言中提及同一年代出现的 Smoluchowski 关于在极稀薄气体情况下，壁与气体的热传导中温度的起源。这一由 Kundt 与 Warburg 早在 23 年前就已发现的现象事实上已为分子运动论提供了强有力的证据；然而介于壁和气
[3] 体之间随气体的稀释化而产生的温度根源，在没有经典热学的帮助下能满意地
[4] 说明自由程的陌生概念吗？要想转变对立的信念，需要可信的证据。在没有运动学时温度的存在的确难以理解，但可从这种现象中间接得出热运动的真实性。早在 1905～1906 年，热运动理论已因下述证据为一般人所认可，即早就知道在
[5] 流体中浮想的微观小粒子的杂乱运动或 Brown 运动可借此理论获得定量的解释。Smoluchowski 对此提供了一个特别漂亮和直观的理论，他的出发点是运动
[6] 学中的均分律，此定律要求，一直径为 1μ 的粒子（水的密度）在流体处于热力学平衡时，其平均瞬时速度约为每秒 3 mm；这样 Smoluchowski 定量得出，这一速度由于内摩擦而逐渐消失，由于无规的分子碰撞而得到恢复，他终于成功地解释了这一现象。

通过对于 Brown 运动本质的认识，对热力学定律的 Boltzmann 解释正确性

的种种疑虑都立刻烟消云散了。人们弄清了,不存在那种精确的总体上的热力学平衡,毋宁是每一个延续存在的系统都围绕着一个理想的热力学平衡态无规地来回振荡着,然而,如一般理论指出的,所有涨落都如此之小,以致我们一般地无法觉察出来。可是 Smoluchowski 于 1908 年发现了第二类可观测现象,在这类现象中涨落几乎直接起作用,即在自然界中处于临界态的气体和流体所发生的乳光中显示出来。越压缩一种物质或混合物的某部分,时空涨落就越大,由于 [7]
热运动的无规性,密度必将经受到连续的交变的涨落变化;Smoluchowski 认识到这种涨落必将导致物质的光学浑浊,这可按一般理论计算出来,Rayleigh 爵士所解释的蓝天也属于这类现象,他证明了在空气中存在着空间密度的涨落。

578 Smoluchowski 其他的科学工作在此不一一提及,但应提到在物理期刊上公开发表的两篇优秀的讲演——这是他于 1913 年和 1916 年应皇家科学协会之邀在格丁根的讲演;讲演对他不幸早逝的一生给了一个很好的总结。每一位与 [8]
Smoluchowski 有私交的人无不倾慕于他的研究才智与高尚品质。世界性灾难的最后几年,他对人性的野蛮与我们文明发展中的隐患怀有无以名状的悲哀。命运过早地终止了其作为研究者和老师的值得称道的工作,可是我们将把他的卓越形象与工作珍藏在心。

---

579 载于《自然科学》5(1917):737—738。发表日期 1917 年 12 月 14 日。

[1] Marian von Smoluchowski 生于 1872 年 5 月 28 日。

[2] 见 *Boltzmann 1898*,pp. v—vi。

[3] 见 *Smoluchowski 1898*。

[4] 见 *Kundt* 与 *Warburg 1875a*,*1875b*,爱因斯坦在 Zurich 大学 1910 年暑期讲习班上有关热分子运动论的讲演中讨论了温度的跳变(见第三卷,文件 4,pp. 9—11)。爱因斯坦在适逢 Emil Warburg 从帝国物理技术所所长职位上退休时所写的文章中也强调了此效应的重要性(*Einstein 1922*)。

[5] 在这方面的研究中爱因斯坦起了关键性的作用[见 *Einstein 1905k*(第二卷,文件 16);见 *vol.* 2 编者按"爱因斯坦论 Brown 运动"pp. 206—222,有更多的背景材料]。

[6] 见 *Smoluchowski 1906*;见第二卷编者按,"爱因斯坦论 Brown 运动",有关讨论见 pp. 215—217。

[7] 见 *Smoluchowski 1908*。以后爱因斯坦改进了 Smoluchowski 的处理[见 *Einstein 1910d*(第三卷,文件 9)和第三卷中的讨论,编者按,"爱因斯坦论临界乳光",pp. 283—285)。爱因斯坦和 Smoluchowski 在通信中也讨论了这个问题[见爱因斯坦致 Marian von Smoluchowski 的信,1911 年 11 月 27 日(第五卷,文件 315)及 Marian von Smoluchowski 致爱因斯坦的信,1911 年 12 月 12 日(第五卷,文件 323)]。

[8] 见 *Smoluchowski 1914*,*1916*。

[刘 辽 译校]

49. “噩　梦”

[*Einstein 1917h*]

1917 年 12 月 25 日发表

载于《柏林日报》1917 年 12 月 25 日晨版，no. 657，p. [1]3，全版本 p. [13]附刊。

581

噩　梦　[1]

爱因斯坦[1)]

我认为师范教育结束后的中学毕业考试**不仅是多余的而且是有害的**。我认为它多余，因为学校的教师无疑能够判断一个在校多年的年轻人的发达程度。教师们对一个学生的印象来自与学生的多年相处，以及每个学生都必须完成的大量平时作业；作为评价学生的基础，这些印象比任何精心设计的考试都要简练完善。我认为中学毕业考试有害，有两个理由。对考试的恐惧，以及**需要通过记忆来消化的各类题材的大量内容，在相当程度上损害着许多年轻人的健康**。这个事实众所周知，无须引用具体资料来证明。不过我还是要提到一个人们熟知的事实：许多人在各个不同的领域工作多年之后，仍然会受到噩梦的惊扰，而这些噩梦的根源都可以追溯到中学毕业考试。这些人可都是已经挺起腰板承担着生活的责任，因此决不能算作"神经衰弱者"。中学毕业考试之所以有害，再就是因为它降低了最后一学年的教学水平。对每门科目实质内容的全神贯注，总是让位于为学生备考进行的浅显训练。全面深入地教学沦落为或多或少带有**技巧表演性的训练**，借以使班级在主考官面前显得更有光彩。所以，让中学毕业考试滚开吧！

582　载于《柏林日报》1917年12月25日晨版，no. 657，p. [1]3，全版本 p. [13]附刊。

[1]本文发表在《柏林日报》的特刊部分，它专用于讨论在德国是否废除中学毕业考试的问题。

---

1)英译者注：不熟悉德国过去教育体制的读者请不要把爱因斯坦的文章错误地理解成"幽默"。他在这里所批判的是从帝国时代到二战之后德国一直奉行的传统的毕业考试(Abitur)。通过这个考试，学生就有资格进入德国任何一所大学和任何系，不再有任何阻碍。考试持续的五六天，笔试从上午8点到中午，中间不休息；下午2点至6点通常是口试。考试范围包括所有主修，因此也就包括必修课目，比如数学、物理、化学、德语和另外四门语言(英语、法语、拉丁语、希腊语)中的两种。只有生物、地理、历史和宗教用的是正常学年考试的成绩。所有试题都是由文化部选择的。密封试卷每天由一位政府官员专门递送，并当着班级和教师的面开封。但评分是由各个学校自己进行的。口试要求至少两位教师在场，以防"违规"。

("Reifeprüfung"(高中毕业考试)或"Maturitätsprüfung"(初中毕业考试))。另一位投稿人是小说家 Thomas Mann.

[郝刘祥　译校]

583

附录 A

爱因斯坦在柏林大学的授课总结

虽然在 Berlin 大学爱因斯坦不必教课,但是在他抵达后的第一学年,他就已经开始讲授相对论了(他的讲稿见文件 7)。在以后的大部分学年里,他每学期都教一门课(概述参见第三卷,附录 B)。这里给出爱因斯坦在 1916/1917 年冬季学期和 1917/1918 年冬季学期的讲课内容的总结。它们是以两名上过爱因斯坦的课的学生,Werner Bloch 和 Walter Zabel 的笔记为基础。

1. 1916/1917 年冬季学期

"相对论"(两个小时)

Werner Bloch 上了相对论课,他的笔记在两个笔记本[3 021]和[3 022]中。第一本有 70 页和 4 页活页,其中 3 页活页不在 Bloch 手上。这些插页所记的计算很明显是用来给正文介绍背景的。第二本有 38 页。第一本开头的注释表明 Bloch 没有参加概述性的头 3 次课,笔记接着讨论了狭义相对论的两条假设。在概要讲解了坐标变换以后,导出了 Lorentz 变换,并对其推论,如长度收缩和时间膨胀,进行了讨论。随后导出了速度叠加定理,并应用到 Fizeau 实验。所有这些都与第二卷文件 1 § 9—11 的讨论很类似。

然后爱因斯坦开始沿着与第二卷文件 1 § 3 中的讨论同样的路线,系统化地处理矢量和张量演算:张量的定义,张量的加与乘,对称与反对称张量,张量的微分。推导流体力学方程以显示矢量演算的能力。接着,爱因斯坦转向电磁学,类似于第二卷文件 1 § 4 的陈述,他发展了四维张量形式。

584 在第二本笔记里,继续讨论电动力学,包括有质动力的力和推导运动方程。作为例子,讨论了在一个电、磁结合的场中电子的运动,以及确定电子的具体电荷数的实验(其结果被引用来支持狭义相对论)。随后的题目是质能等价性和能动守恒律。笔记以前述的对流体运动的考虑的一个应用结束。

2. 1917/1918 年冬季学期

"统计力学和量子理论"(两个小时)

Werner Block 和 Walter Zabel 都上了爱因斯坦的统计力学和量子理论的课，两者的笔记都保留了下来，但是两套笔记都没有涵盖全部内容：二者都以1917 年 12 月 20 日的课结束。Zabel 的笔记写在 90 页的笔记本中 [80 018]（由 Berlin 的 Peter Damerow 所有）。第一部分写得很仔细；最后两课（1917 年 12 月 13 日和 20 日）只保留了速记的笔记。Bloch 的笔记写在两个笔记本[3 023]和[3 024]里，分别有 64 和 47 页。第一本包括除最后两课以外的所有课程的笔录；第二本的内容似乎就是 Bloch 的未修订过的课堂笔记的内容。所有笔记都是关于统计力学，两者都没有保留关于量子理论的笔记。这个题目大概是在1918 年第一个月开的课上讲授的。

课程以对力学的讨论开始，特别是讨论了 Lagrange 方程和变分原理。作为例子，详述了旋转罗盘理论。爱因斯坦个人对这个问题有兴趣，因为这与他在一起专利争端中扮演技术证人的角色有关（见文件 12 和 17）。接下去对统计力学的讨论以介绍相空间概念和概率开始。推导了 Liouville 定理，随后介绍了正则系统。非常小心地证实了正则分布函数的指数的分母可以看作是温度，这是通过考虑彼此处于热平衡状态的一大一小两个系统而得到的。作为应用，推导了 Maxwell 速度分布，计算了具体的热量。另一个应用是重力影响下的气体。接下去推导了顺磁气体磁化的 Langevin 公式，随后讨论了铁磁性的 Weiss 定理。

随后的课程专注于 Brown 运动。首先，研究了重力影响下处于平衡态的气体，从其密度分布稳态，推导出 Brown 运动平均平方位移的表达式（类似的讨论 585
出现在 1910 年爱因斯坦在动理论课程上的讲稿中 [见第三卷，文件 4，pp. 234－235]）。然后把它应用于渗透压和扩散。

最后，讨论了两个具有根本重要性的课题：从统计力学推导出热力学第二定律，以及 Boltzmann 原理。第二定律从下面的性质导出：在温度和决定能量的参数的微小变化下，分布函数的范数保持恒定；这种不变性被证明蕴涵着 dQ/T 是全微分的结论。一个熵的表达式也被导出来。在最后一次课上，讨论了 Boltzmann 原理和不可逆性与概率之间的关系。讨论用爱因斯坦以前也用过的一个例子来阐明（见*爱因斯坦等 1914*，pp. 355－356）：流体中包含一个密度比周围流体大的微粒。虽然这个微粒大部分时候会下降，因为较低的位置有较高的可能性，但是它有时候也会上升，这样就阐明了不可逆性的统计特性。

［黄　雄　译校］

586

附录 B

爱因斯坦讲课的笔记

1915 年夏

这篇附录记载的是一位不知名的听众所作的笔记［83 008］，他参加了 1915 年 6 月 28 日到 7 月 5 日，由 Wolfskehl 基金赞助，爱因斯坦在格丁根所做的关于相对论的系列讲演的一部分。在 11 页的原文开头，作者写下"爱因斯坦 28/6—5/7，格丁根"的字样。在第 12 页有两行是另一个人的笔迹。本文件存放在 GyGöU，Cod. Ms. Hilbert 724。

自然规律是以与其相关的坐标系为基础的。问题是：是否存在绝对的坐标系？若是，则两个不同的坐标系在描述自然规律方面的价值是不同的，因为它们与绝对坐标系的关系不同。

旧的观念使用刚性的以太，人们假设它完全地充满整个空间，充当物理过程的媒介，所以相对于刚性的以太静止的这个特别的坐标系就是绝对的。但是人们发现，彼此相对匀速位移运动的两个坐标系，只有当限于一阶量的影响的时候，在坐标系的相对速度和光速之间的关系中，它们才是相等的。如果考虑二阶量，那么这两个彼此相对匀速位移运动的坐标系就不相等了。这纯粹是个数学结果，随后做了实验（Michelson），证明了在地球环绕太阳运行的这个情况下，二阶量本来应该是有影响的，但是地球运动速度对自然规律的影响实际上并不存在。

由此，人们不得不得出结论：彼此相对匀速位移运动的两个坐标系的价值完
587 全是相等的。Michelson 实验所基于的自然规律是：在任何方向上光的运动速度都是相同的。两个坐标系的坐标之间的变换关系（Lorentz 变换）必须使得自然规律在这两个坐标系中都成立。

Michelson 实验导致废除了以太，确立了相对论。这说明彼此相对匀速位

移运动的两个坐标系都是同样可以描述 Lorentz 变换所表示的坐标彼此间的相互关系的。

但是，如果两个坐标系 K 和 K' 相互匀速旋转，而且 K 是 Galilei-Newton 意义上的参照系，那么经验表明，相对于 K' 静止的球体会变平(离心力)，成为椭圆体，相对于 K 静止的球体仍是球体。现在，在抛弃了以太概念以后，没有绝对的坐标系，既然 K 和 K' 唯一的差别是相互关系不同，那么为什么选择 K 而不是 K'(作为参照系)，在认识论上是不可理解的。

Mach 指出，在这个实验中 K 和 K' 中的物体状态的差别，即相对 K 匀速旋转的 K' 中出现的离心力，其理由在于 K 和 K' 间关系的差别和环境的远距质量。环境中的可想象的远距质量被认为具有相对于参照系 K' 的平均旋转运动。因此，就不考虑环境的远距质量而言，选择 K 而不是 K' 并非绝对的。对于 Mach 的思想，人们可以找到一个例子。根据旧观念，地球是平的，很明显，垂直方向是绝对的，其原因仅仅是它与地球的特殊关系：垂直。

根据这一观念，离心力可以从引力导出。把离心力和引力当作一回事，这显然可以基于实验证实，因为离心力对物体的作用与引力场对同一物体的作用都由同一自然常数所决定。因此，我们测量的物体在地球表面上的重量是两种作用的叠加，无法把它们分开。

根据这种解释，引入新坐标系就会创建引力场，即使原来的坐标系不包含这种场。根据我们的理论，可以推断，坐标变换就是产生引力场的充分必要条件(Riemann-Christoffel 张量消失了)。

这样的引力场是特殊的。具有同样特殊性的是环境中的可想象的远距质量的引力场。在我们的理论中，无穷距离也是绝对的，但是我们不像旧理论那样鲁莽，认为所有无穷远处的东西都等于零。在牛顿理论中，无穷距离导致争论。例 588
如，如果我们想象整个空间充满了均匀的质量，那么半径为 R 的球体表面上的势像 R^2 那样变化，在无穷远处必定增长为无穷大。

如果把引力场替换为坐标系的匀加速，例如替换为坐标 x_ν 的恒定加速度 γ，那么在这个坐标系中，光线会沿抛物线轨迹传播，光速 c 会是位置的函数。(Heygens 原理?)从质点运动的 Hamilton 原理可以推断，c 起着引力势的作用，特别地，$c=c_0(1+\frac{\varphi}{c_0})$，其中 $\varphi=-\gamma x_\nu$ 是引力势。

§ 引力场及其中质点的运动方程

根据原先的相对论，既不受引力也不受其他任何力作用的质点按照下面的公式匀速直线运动：

$$\delta\left\{\int \mathrm{d}s\right\}=0 \tag{1}$$

其中

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 \tag{2}$$

假设在这个坐标系中没有引力场，即使根据广义相对论，运动也遵从公式(1)和(2)。如果我们做一个任意的坐标变换：

$$ds^2=\sum g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \tag{2a}$$

其中 x_ν 是新坐标，$g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$，

$$g_{rs}=\frac{\partial x}{\partial x_r}\frac{\partial x}{\partial x_s}-\frac{\partial y}{\partial x_r}\frac{\partial y}{\partial x_s}-\frac{\partial z}{\partial x_r}\frac{\partial z}{\partial x_s}+\frac{\partial t}{\partial x_r}\frac{\partial t}{\partial x_s}.$$

根据前文，这 10 个坐标函数($g_{\mu\nu}$)刻画了新坐标系导致的引力场。我们称 $g_{\mu\nu}$ 为引力势分量。在这个新坐标系中，像原先的相对论那样，我们把质点的运动同 ds 联系起来。根据 Gl. (1)，实际上测地线是同一根；不过，ds 指的是其轨迹由 $g_{\mu\nu}$ 描写的一段区域。

589 如果我们插入 x'_ν 而不是 x_ν，则有：

$$ds^2=\sum_{\mu\nu}g'_{\mu\nu}dx'_\mu dx'_\nu,$$

其中 $g'_{\mu\nu}$ 指的是 K' 的引力势分量。$g'_{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}$ 的关系如下：

$$g'_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}g_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

于是 $\sum_{\mu\nu}g'_{\mu\nu}dx'_\mu dx'_\nu=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$。度规 ds^2 是一个标量，是与坐标系的选择无关的量，因为 ds 来自没有引力场的坐标系 x,y,z,t。

现在推广上面的结果，假设一个给定的引力场(不是由坐标变换造成的)被描写为：当 $ds^2=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$ 的时候，这个引力场中的质点的运动方程遵从公式(1)。现在证明 ds^2 是一个标量，与坐标系的选择无关。只有这样，把运动方程同 ds 联系起来才有意义。

假设有一个不同的包含引力势($g'_{\mu\nu}$)的坐标系，由此可知，$g'_{\mu\nu}$ 与 $g_{\mu\nu}$ 的关系使得引力场只能由坐标变换产生。由公式(3)可知：

$$g'_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}g_{\alpha\beta},$$

得 $(ds^2)'=\sum_{\mu\nu}g'_{\mu\nu}dx'_\mu dx'_\nu=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu=ds^2$，于是 ds^2 是一个标量。

测量方式

因为用直尺和时钟测量的缘故，推广的坐标间的关系就不像旧的相对论里那样简单。从空间坐标在静止的引力场中匀加速的例子可以看出，光速与位置
590 有关。如果我们在一定位置放上测量装置，那么结果会与位置有关。不同位置

的结果不能直接比较。而且，根据 Lorentz 的收缩假设，当旋转一个坐标系，描述环绕中心的一个圆的时候，沿着运动方向的圆周会逆着半径向内收缩。圆周和半径的结果不能直接比较。

现在我们可以获得时间和空间的广义坐标 $g_{\mu\nu}$ 如下的物理意义：设想一个充分小的时空点 $P(x_\nu)$ 邻域 U，其中 $g_{\mu\nu}$ 可以看成常数。不用邻域 P 相对于 P 的坐标 $\mathrm{d}x_\nu$，而是利用 $\mathrm{d}x_\nu$ 的线性变换，引入新的无穷小坐标 $\mathrm{d}X_\nu$，使得 $\mathrm{d}x_1$ 的平方形式 $\mathrm{d}s^2$ 变换为 $\mathrm{d}X_\nu$ 的平方和形式：

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\nu=-\sum_{\nu}\mathrm{d}X_\nu^2.$$

除了最多差一个线性正交变换以外，$\mathrm{d}X_i$ 是被完全确定的。我们称 $\mathrm{d}X_i$ 的系统为正规系统，并假定在 U 中，关于这个正规系统，可以根据旧相对论进行测量。这样测量的度规自然被称为标准度规。度规 $\mathrm{d}s$ 被看作用在这个正规系统中静止的直尺和时钟度量的两个相隔无限近的时空点间的自然距离。

为了测量，我们需要知道该正规系统，这意味着我们需要知道决定该正规系统的 $g_{\mu\nu}$。如果我们从实验中知道了引力场，从而已经找到了正规系统，能够继续测量了，那么我们就可以从中确定 $g_{\mu\nu}$。从 U 中取 10 个点 P_i，在 P 中测量他们的距离 $\mathrm{d}s$。从 10 个等式 $\mathrm{d}s^2=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\nu$ 中可以确定 U 中函数的 10 个值。

为了找到广义相对论的物理规律，我们从数学演算开始。原先相对论的物理规律在数学上表达为矢量与张量间的关系。现在对于任给的坐标变换和线素区域 $\mathrm{d}s$，这里 $\mathrm{d}s^2=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x'_\nu$，根据广义相对论和引力推广矢量-张量理论。然后，只需在旧规律中插入推广的矢量、张量及其运算，就可以得到新规律。

［黄　雄　译校］

中译者注：

附录 B 是在 Gabriele Mayer-Hunke 提供的英文译文的基础上翻译成中文的。

引用文献

在本版本的爱因斯坦文集中，每一卷中的每篇文章都有一始终如一的编目短名。例外的情况是当早先出版的某一卷中已出现的一篇文章后来又被另一卷中某篇文章所覆盖，文章的名称就可能更改了（例如，第四卷的 *Einstein 1914h* 成为本卷的 *Einstein 1914i*）。

Appell 1904 Appell, Paul. *Traité de mécanique rationnelle*. 2d rev. ed. vol. 2, *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique*. Paris: Gauthier-Villars, 1904.

Arvidsson 1920 Arvidsson, Gustaf. "Eine Untersuchung über die Ampèreschen Molekularströme nach der Methode von A. Einstein und W. J. de Haas." *Physikalische Zeitschrift* 21 (1920): 88—91.

Barbour 1992 Barbour, Julian B. "Einstein and Mach's Principle." In *Eisenstaedt and Kox 1992*, pp. 125—153.

Barnett 1909 Barnett, Samuel J. "On Magnetization by Angular Acceleration." *Science* 30 (1909): 413.

Barnett 1915a ——. "Magnetization by Rotation." *Science* 42 (1915): 163—164.

Barnett 1915b ——. "Magnetization by Rotation." *Physical Review* 6 (1915): 171—172.

Barnett 1915c ——. "The Theory of Magnetization by Rotation." *Science* 42 (1915): 459—460.

Barnett 1915d ——. "Magnetization by Rotation." *Physical Review* 6 (1915): 239—270.

Beck 1919 Beck, Emil. "Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme." *Annalen der Physik* 60 (1919) 109—148.

Becquerel et al. 1922 Becquerel, Jean, et al. "La théorie de la relativité. Discussion." *Société française de Philosophie. Bulletin* 22 (1922): 91—113.

Berlin Verzeichnis 1914 *Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin. Verzeichnis der Vorlesungen Winter-Semester 1914/1915*. Berlin: Universitäts-Buchdrukerei von Gustav Schade, 1914.

Bernays 1913 Bernays, Paul. *Über die Bedenklichkeiten der neueren Relativitätstheorie*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1913.

Bernoulli 1914 Bernoulli, August L. "Eine elementare Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes." *Zeitschrift für Elektrochemie* 20 (1914): 269—271.

Blackmore 1988 Blackmore. John T. "Mach über Atome und Relativität—neueste Forschungsergebnisse." In *Haller and Stadler 1988*, pp. 463—483.

Blackmore 1992 Blackmore, John, ed. *Ernst Mach—A Deeper Look: Documents and New Perspectives*. Dordrecht: Kluwer, 1992.

Blumenthal 1918 Blumenthal, Otto. "Karl Schwarzschild." *Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Jahresbericht* 26 (1918): 56—75.

Bohr 1913 Bohr, Niels. "On the Constitution of Atoms and Molecules." *Philosophical Magazine* 26 (1913): 1—25, 476—502, 857—875.

Bohr 1915 ——. "On the Quantum Theory of Radiation and the Structure of the Atom." *Philosophical Magazine* 30(1915): 394—415.

Boltzmann 1898 Boltzmann, Ludwig. *Vorlesungen über Gastheorie*. Part 2, *Theorie Van der Waals'; Gase mit zusammengesetzten Molekülen; Gasdissociation; Schlussbemerkungen.* Leipzig: Barth, 1898.

Born 1909 Born, Max. "Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des 592
Relativitätsprinzips." *Annalen der Physik* 30(1909): 1—56.

Brill 1914 Brill, Alexander von. *Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie.* 2d ed. Leipzig: Teubner, 1914.

Cattani and De Maria 1989 Cattani, Carlo, and De Maria, Michelangelo. "The 1915 Epistolary Controversy between Einstein and Tullio Levi-Civita." In *Howard and Stachel 1989*, pp. 175—200.

Cattani and De Maria 1993 ——. "Conservation Laws and Gravitational Waves in General Relativity (1915—1918)." In *Earman et al. 1993*, pp. 63—87.

Christoffel 1869 Christoffel, Erwin B. "Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 70 (1869): 46—70.

Cockcroft and Walton 1932 Cockcroft, John D., and Walton, Ernest T. S. "Experiments with High Velocity Positive Ions. II. The Disintegration of Elements by High Velocity Protons." *Royal Society of London. Proceedings* A137(1932): 229—242.

Cohn 1913 Cohn, Emil. *Physikalisches über Raum und Zeit*. 2d rev. ed. Leipzig: Teubner. 1913.

Curie 1895 Curie, Pierre. "Propriétés magnétiques des corps à diverses températures." *Annales de chimie et de physique* 5(1895): 289—405.

Debye 1910 Debye, Peter. "Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung." *Annalen der Physik* 33 (1910): 1427—1434.

Debye 1912 ——. "Zur Theorie der spezifischen Wärmen." *Annalen der Physik* 39 (1912): 789—839.

Debye 1914 ——. "Zustandsgleichung und Quantenhypothese mit einem Anhang über Wärmeleitung." In *Planck et al. 1914*, pp. 17—60.

De Broglie 1924 De Broglie, Louis. *Recherche sur la théorie des quanta*. Paris: Masson et Cie, 1924.

De Haas 1915 De Haas, Wander J. "Verdere proeven over het in een magneet aanwezige moment van hoeveelheid van beweging. "*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 24 (1915—1916): 638—657. Reprinted in translation as "Further Experiments on the Moment of Momentum Existing in a Magnet. "*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 18 (1915—1916): 1281—1299.

De Haas 1923 ——. "Le moment de la quantité de mouvement dans un corps magnétique. "In *Rapports 1923*, pp. 206—227.

De Haas and De Haas 1915 De Haas, Wander J., and De Haas-Lorentz, Geertruida L. "Een proef van Maxwell en de moleculaire stroomen van Ampère. "*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 24(1915—1916): 398—404. Reprinted in translation as "An Experiment of Maxwell and Ampère's Molecular Currents. "*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 19 (1916—1917): 248—255.

Desalvo 1992 Desalvo, Agostino. "From the Chemical Constant to Quantum Statistics: A Thermodynamic Route to Quantum Mechanics. "*Physis* 29(1992): 465—537.

De Sitter 1913a De Sitter. Willem. "Ein astronomischer Beweis für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. "*Physikalische Zeitschrift* 14(1913): 429.

De Sitter 1913b ——. "Über die Genauigkeit, innerhalb welcher die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Quelle behauptet werden kann. "*Physikalische Zeitschrift* 14(1913): 1267.

De Sitter 1916 ——. "De relativiteit der rotatie in de theorie van Einstein. "*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 25(1916—1917): 499—504. Reprinted in translation as "On the Relativity of Rotation in Einstein's Theory. "
Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings 19 (1916—1917): 527—532.

Dirac 1927 Dirac, Paul A. M. "The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. "*Royal Society of London. Proceedings A* 114 (1927): 243—265.

593 *Droste 1916* Droste, Johannes. "Het veld van een enkel centrum in Einstein's theorie der zwaartekracht, en de beweging van een stoffelijk punt in dat veld. " *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 25 (1916—1917): 163—180. Reprinted in translation as "The Field of a Single Centre in Einstein's Theory of Gravitation and the Motion of a Particle in That Field. "*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 19 (1916—1917): 197—215.

Dyson et al. 1920 Dyson, Frank W.; Eddington, Arthur S.; and Davidson, C. "A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919. "*Royal Society of London. Philosophical Transactions A* 219 (1920): 291—333.

Earman and Glymour 1978a Earman, John, and Glymour, Clark. "Lost in the Tensors: Einstein's Struggles with Covariance Principles 1912—1916." *Studies in History and Philosophy of Science* 9(1978): 251—278.

Earman and Glymour 1978b ——. "Einstein and Hilbert: Two Months in the History of General Relativity." *Archive for History of Exact Sciences* 19 (1978)291—308.

Earman and Glymour 1980a ——. "Relativity and Eclipses: The British Eclipse Expeditions of 1919 and Their Predecessors." *Historical Studies in the Physical Sciences* 11 (1980): 49—85.

Earman and Glymour 1980b ——. "The Gravitational Red Shift as a Test of General Relativity; History and Analysis." *Studies in History and Philosophy of Science* 11(1980): 175—214.

Earman and Janssen 1993 Earman. John, and Janssen, Michel. "Einstein's Explanation of the Motion of Mercury's Perihelion." In *Earman et al. 1993*, pp. 129—172.

Earman et al. 1993 Earman. John; Janssen. Michel; and Norton, John D. *The Attraction of Gravitation: New Studies in the History of General Relativity*. Boston: Birkhäuser. 1993.

Ehrenfest 1913 Ehrenfest, Paul. "Een mechanisch theorema van Boltzmann en zijne betrekking tot de quantentheorie." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 22 (1913—1914): 586—593. Reprinted in translation as "A Mechanical Theorem of Boltzmann and Its Relation to the Theory of Energy Quanta." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 16 (1913—1914): 591—597.

Ehrenfest 1914 ——. "Zum Boltzmannschen Entropie-Wahrscheinlichkeits-Theorem. I." *Physikalische Zeitschrift* 15(1914): 657—663.

Ehrenfest 1916 ——. "Over adiabatische veranderingen van een stelsel in verband met de theorie der quanten." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 25 (1916—1917): 412—433. Reprinted in translation as "On Adiabatic Changes of a System in Connection with the Quantum Theory." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 19(1916—1917): 576—597; also as "Adiabatische Invarianten und Quantentheorie." *Annalen der Physik* 51 (1916): 327—352.

Ehrenfest and Trkal 1920 Ehrenfest, Paul, and Trkal, Viktor. "Afleiding van het dissociatie-evenwicht uit de theorie der quanta en een daarop gebaseerde berekening van de chemische constanten." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 28 (1919—1920): 906—929. Reprinted in translation as "Deduction of the Dissociation-Equilibrium from the Theory of

Quanta and a Calculation of the Chemical Constant Based on This. "*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 23 (1920－1921): 162—183; also in abbreviated form as "Ableitung des Dissoziationsgleichgewichtes aus der Quantentheorie und darauf beruhende Berechnung der chemischen Konstanten. "*Annalen der Physik* 65 (1921): 609—628

594 *Eichenwald 1903* Eichenwald, A. "Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde. "*Annalen der Physik* 11(1903):1—30,421—441.

Eichenwald 1904 ——. "Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde (Nachtrag). "*Annalen der Physik* 13 (1904): 919—943.

Einstein 1902b Einstein. Albert. "Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. "*Annalen der Physik* 9(1902):417—433.

Einstein 1903 ——. "Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamik. " *Annalen der Physik* 11 (1903): 170—187.

Einstein 1904 ——. "Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme. "*Annalen der Physik* 14 (1904): 354—362.

Einstein 1905i ——. "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. "*Annalen der Physik* 17 (1905): 132—148.

Einstein 1905k ——. "Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flussigkeiten suspendierten Teilchen. "*Annalen der Physik* 17 (1905): 549—560.

Einstein 1905r ——. "Zur Elektrodynamik bewegter Körper. " *Annalen der Physik* 17 (1905): 891—921.

Einstein 1907a ——. "Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme. "*Annalen der Physik* 22(1907): 180—190.

Einstein 1907j ——. "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. " *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* 4(1907): 411—462.

Einstein 1909b ——. "Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems. " *Physikalische Zeitschrift* 10 (1909): 185—193.

Einstein 1909c ——. "Über die Entwickelung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung. " *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 11 (1909): 482—500. Reprinted in *Physikalische Zeitschrift* 10 (1909): 817—825.

Einstein 1910a ——. "Le principe de relativité et ses conséquences dans la physique moderne. "*Archives des sciences physiques et naturelles* 29 (1910): 5—28,125—144.

Einstein 1910d ——. " Theorie der Opaleszenz von homogenen Flüssigkeiten und Flüssigkeitsgemischen in der Nähe des kritischen Zustandes. " *Annalen der Physik* 33 (1910): 1275—1298.

Einstein 1911h ——. "Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. "

Annalen der Physik 35 (1911):898—908.

Einstein 1911i ——. "Die Relativitäts-Theorie." *Naturforschende Gesellschaft in Zürich. Vierteljahrsschrift* 56 (1911):1—14.

Einstein 1912b ——. "Thermodynamische Begriündung des photochemischen Äquivalentgesetzes." *Annalen der Physik* 37(1912): 832—838.

Einstein 1912e ——. "Gibt es eine Gravitationswirkung, die der elektrodynamischen Induktionswirkung analog ist?" *Vierteljahrsschrift für gerichtliche Medizin und öffentliches Sanitätswesen* 44(1912): 37—40.

Einstein 1912f ——. "Nachtrag zu meiner Arbeit: "Thermodynamische Begründung des photochemischen Äquivalentgesetzes". "*Annalen der Physik* 38 (1912):881—884.

Einstein 1913a ——. "Déduction tbermodynamique de la loi de l' équivalence photochimique. "*Journal de physique* 3(1913): 277—282.

Einstein 1913c ——. "Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems. "*Physikalische Zeitschrift* 14 (1913):1249—1262, Reprinted as *Einstein 1914b*.

Einstein 1914a ——. "Zum gegenwärtigen Stande des Problems der spezifischen Wärme. "In *Verhandlungen 1914*, pp. 330—352.

Einstein 1914b ——. "Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems." In *GDNA Verhandlungen 1914*, pp. 3—24. Reprint of *Einstein 1913c*.

Einstein 1914c ——. "Nachträgliche Antwort auf eine Frage vou Herrn Reißner." *Physikalische Zeitschrift* 15(1914):108—110.

Einstein 1914d ——. "Bemerkungen" to *Einstein and Grossmann 1914a*. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 62(1914): 260—261.

Einstein 1914e ——. "Prinzipielles zur verallgemeinerten Relativitätstheorie und Gravitation- 595
stheorie. "*Physikalische Zeitschrift* 15(1914): 176—180.

Einstein 1914f ——. "Méthòde pour la détermination de valeurs statistiques d'observations concernant des grandeurs soumises à des fluctuations irrégulières. "*Archives des sciences physiques et naturelles* 37·(1914): 254—256.

Einstein 1914g ——. "Physikalische Grundlagen einer Gravitationstheorie." *Naturforschende Gesellschaft in Zürich. Vierteljahrsschrift* 58(1914): 284 — 290. Reprinted in translation in *Archives des sciences physiques et naturelles* 37(1914): 5—12; and in *Bulletin de la Société astronomique de France* 31 (1917): 407—411.

Einstein 1914h ——. "Vom Relativitäts-Prinzip." *Vossische Zeitung*, 26 April 1914, 8. Beilage, pp. 33—34.

Einstein 1914i ——. "Zum Relativitäts-Problem. "*Scientia* 15 (1914): 337—348. Reprinted in translation as *Einstein 1914j*.

Einstein 1914j ——. "Sur le problème de la relativité. "*Scientia* 15 (1914) (*Supplément*): 139—150. French translation of *Einstein 1914i*.

Einstein 1914k ——. "Antrittsrede." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1914): 739—742.

Einstein 1914l ——. "Bemerkungen zu P. Harzers Abhandlung: "Über die Mitführung des Lichtes in Glas und die Aberration". "*Astronomische Nachrichten* 199(1914): cols. 7—10.

Einstein 1914m ——. "Antwort auf eine Replik Paul Harzers. "*Astronomische Nachrichten* 199(1914): cols. 47—48.

Einstein 1914n ——. "Beiträge zur Quantentheorie." *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 16 (1914): 820—828.

Einstein 1914o ——. "Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1914): 1030—1085.

Einstein 1914p ——. Review of: A. Brill, *Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie.* 2d ed. Leipzig: Teubner, 1914. *Die Naturwissenschaften* 2(1914): 1018.

Einstein 1914q ——. Review of: H. A. Lorentz, *Das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen, gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem. Bearbeitet von W. H. Keesom.* Leipzig: Teubner, 1914. *Die Naturwissenschaften* 2(1914): 1018.

Einstein 1914r ——. "Zur Theorie der Gravitation." *Naturforschende Gesellschaft in Zürich. Vierteljahrsschrift* 59. Part 2, *Sitzungsberichte*(1914): Ⅳ—Ⅵ.

Einstein 1915a ——. "Theoretische Atomistik." In *Die Kultur der Gegenwart. Ihre Entwicklung und ihre Ziele.* Paul Hinneberg, ed. Part 3, sec. 3, vol. 1, *Physik*, pp. 251—263. Emil Warburg, ed. Leipzig: Teubner, 1915.

Einstein 1915b ——. "Die Relativitätstheorie. "In *Die Kultur der Gegenwart. Ihre Entwicklung und ihre Ziele.* Paul Hinneberg, ed. Part 3, sec. 3, vol. 1, *Physik*, pp. 703—713. Emil Warburg, ed. Leipzig: Teubner. 1915.

Einstein 1915c ——. "Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme." *Die Naturwissenschaften* 3(1915): 237—238.

Einstein 1915d ——. "Berichtigung zu meiner gemeinsam mit Herrn J. W. de Haas veröffentlichten Arbeit "Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme"." *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 17 (1915): 203.

Einstein 1915e ——. "Antwort auf eine Abhandlung M. v. Laues, ,Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie"." *Annalen der Physik* 47 (1915): 879—885.

Einstein 1915f ——. "Zur allgemeinen Relativitätstheorie. "*Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*(1915): 778—786.

Einstein 1915g ——. "Zur allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag)." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*(1915): 799—801.

Einstein 1915h ——. "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen

Relativitätstheorie." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1915): 831—839.

Einstein 1915i ——. "Die Feldgleichungen der Gravitation. "*Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*(1915): 844—847. 596

Einstein 1916a ——. "Meine Meinung über den Krieg." In *Das Land Goethes 1914—1916. Ein vaterländisches Gedenkbuch. Herausgegeben vom Berliner Goethebund*, p. 30. Stuttgart, Berlin: Deutsche Verlags-Anstalt, 1916.

Einstein 1916b ——. "Eine neue formale Deutung der Maxwellschen Feldgleichungen der Elektrodynamik." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1916): 184—188.

Einstein 1916c ——. "Ernst Mach." *Physikalische Zeitschrift* 17 (1916): 101—104.

Einstein 1916d ——. "Ein einfaches Experiment zum Nachweis der Ampèreschen Molekularströme. "*Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 18(1916): 173—177.

Einstein 1916e ——. "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie." *Annalen der Physik* 49 (1916): 769—822.

Einstein 1916f ——. "*Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* "Leipzig: Barth, 1916.

Einstein 1916g ——. "Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1916): 688—696.

Einstein 1916h ——. "Gedächtnisrede des Hrn. Einstein auf Karl Schwarzschild. "*Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1916): 768—770.

Einstein 1916i ——. "Vorwort." In Freundlich, Erwin F., *Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie*. Berlin: Springer, 1916.

Einstein 1916j ——. "Strahlungs-Emission und -Absorption nach der Quantentheorie." *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 18 (1916): 318—323.

Einstein 1916k ——. Review of: H. A. Lorentz, *Les théories statistiques en thermodynamique*. Leipzig: Teubner, 1916. *Die Naturwissenschaften* 4(1916): 480—481.

Einstein 1916l ——. "Selbstanzeige" of *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Leipzig: Barth, 1916. *Die Naturwissenschaften* 4 (1916): 481.

Einstein 1916m ——. "Elementare Theorie der Wasserwellen und des Fluges. "*Die Naturwissenschaften* 4(1916): 509—510.

Einstein 1916n ——. "Zur Quantentheorie der Strahlung." *Physikalische Geselltschaft Zürich. Mitteilungen* Nr. 18 (1916): 47—62.

Einstein 1916o ——. "Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*(1916): 1111—1116.

Einstein 1916p ——. "Über Friedrich Kottlers Abhandlung" Über Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation". "*Annalen der Physik* 51(1916):639—642.

Einstein 1917a ——. *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*. (*Gemeinverständlich*.) Braunschweig: Vieweg, 1917.

Einstein 1917b ——. "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1917): 142—152.

Einstein 1917c ——. "Zur Quantentheorie der Strahlung." *Physikalische Zeitschrift* 18 (1917): 121—128.

Einstein 1917d ——. "Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein." *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 19 (1917): 82—92.

Einstein 1917e ——. Review of: H. v. Helmholtz, *Zwei Vorträge über Goethe*. Braunschweig: Vieweg, 1917. *Die Naturwissenschaften* 5 (1917): 675.

Einstein 1917f ——. "Eine Ableitung des Theorems von Jacobi." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte*(1917): 606—608.

Einstein 1917g ——. "Marian v. Smoluchowski." *Die Naturwissenschaften* 5(1917): 737—738.

Einstein 1917h ——. "Der Angst-Traum." *Berliner Tageblatt*, 25 December 1917, 3. Beiblatt, p. 1.

597 *Einstein 1918* ——. "Über Gravitationswellen." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*(1918): 154—167.

Einstein 1919 ——. "Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle?" *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*(1919): 349—356.

Einstein 1920 ——. *Relativity: The Special and the General Theory*. London: Methuen, 1920.

Einstein 1921a ——. *La théorie de la relativité restreinte et généralisée*. (*Mise à la portée de tout le monde*.) Paris: Gauthier-Villars, 1921.

Einstein 1921b ——. *Teoriya otnositel'nosti. Obshchedostupnoe izlozhenie*. Berlin: Slovo, 1921.

Einstein 1922 ——. "Emil Warburg als Forscher." *Die Naturwissenschaften* 10(1922): 823—828.

Einstein 1923 ——. *Theorie relativity speciálni i obecná. Lehce srozumitelný výklad*. Prague: Borový, 1923.

Einstein 1946 ——. *Relativity: The Special & the General Theory*. 14th ed. London: Methuen, 1946.

Einstein 1954 ——. *Relativity: The Special & the General Theory*. 15th ed. London:

Methuen, 1954.

Einstein 1979 ——. *Autobiographical Notes: A Centennial Edition.* Paul Arthur Schilpp, trans. and ed. La Salle, Ⅲ.: Open Court, 1979. Parallel English and German texts. Corrected version of "Autobiographisches—Autobiographical Notes." In *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, pp. 1—94. Paul Arthur Schilpp, ed. Evanston, Ⅲ.: The Library of Living Philosophers, 1949.

Einstein and De Haas 1915a Einstein, Albert, and De Haas, Wander J. "Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme." *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 17 (1915): 152—170.

Einstein and De Haas 1915b ——. "Proefondervindelijk bewijs voor het bestaan der moleculaire stroomen van Ampère." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 23 (1914—1915): 1449—1464. Reprinted in translation as *Einstein and De Haas* 1915*c*.

Einstein and De Haas 1915c ——. "Experimental Proof of the Existence of Ampère's Molecular Currents." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 18 (1915—1916): 696—711. English translation of *Einstein and De Haas 1915b*.

Einstein and De Haas 1915d ——. "Notiz zu unserer Arbeit. "Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme". " *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 17 (1915): 420.

Einstein and Fokker 1914 Einstein, Albert, and Fokker, Adriaan D. "Die Nordströmsche Gravitationstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalküls." *Annalen der Physik* 44 (1914): 321—328.

Einstein and Grossmann 1913 Einstein, Albert, and Grossmann, Marcel. *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation.* Leipzig: Teubner, 1913. Reprinted as *Einstein and Grossmann 1914a*.

Einstein and Grossmann 1914a ——. "Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation." *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 62 (1914): 225—259.

Einstein and Grossmann 1914b ——. "Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie." *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 63 (1914): 215—225.

Einstein and Hopf 1910a Einstein, Albert, and Hopf, Ludwig. "Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung in der Strahlungstheorie." *Annalen der Physik* 33 (1910): 1096—1104.

Einstein and Hopf 1910b ——. "Statistische Untersuchung der Bewegung eines Resonators in einem Strahlungsfeld." *Annalen der Physik* 33 (1910): 1105—1115.

Einstein and Stern 1913 Einstein, Albert, and Stern, Otto. "Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt." *Annalen der Physik* 40 (1913): 551—560.

Einstein et al. 1914 ——. "Diskussion" following *Einstein 1914*. In *Verhandlungen 1914*, pp. 353—364.

598 *Eisenstaedt 1989* Eisenstaedt, Jean. "The Early Interpretation of the Schwarzschild Solution." In *Howard and Stachel 1989*, pp. 213—233.

Eisenstaedt 1991 ——. "De l'influence de la gravitation sur la propagation de la lumière en théorie newtonienne. L'archéologie des trous noirs." *Archive for History of Exact Sciences* 42 (1991): 315—386.

Eisenstaedt 1993 ——. "Lemaître and the Schwarzschild Solution." In *Earman et al. 1993*, pp. 353—389.

Eisenstaedt and Kox 1992 Eisenstaedt, Jean, and Kox, A. J., eds. *Studies in the History of General Relativity. Boston*: Birkhäuser, 1992.

Eötvös 1891 Eötvös, Roland. "Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen." *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* 8(1891): 65—68.

Epstein 1916a Epstein, Paul S. "Zur Theorie des Starkeffektes." *Annalen der Physik* 50 (1916): 489—520.

Epstein 1916b ——. "Zur Quantentheorie." *Annalen der Physik* 51(1916): 168—188.

Eucken 1912 Eucken, Arnold. "Die Molekularwärme des Wasserstoffs bei tiefen Temperaturen." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1912): 141—151.

Fokker 1955 Fokker, Adriaan. "Albert Einstein. 14 Maart 1878—18 April 1955." *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* 21(1955): 125—129.

Freundlich 1915a Freundlich, Erwin. "Über die Erklärung der Anomalien im Planeten-System durch die Gravitationswirkung interplanetarer Massen." *Astronomische Nachrichten* 201 (1915): cols. 49—56.

Freundlich 1915b ——. "Über die Gravitationsverschiebung der Spektrallinien bei Fixsternen." *Astronomische Nachrichten* 202(1915—1916): cols. 17—24.

Freundlich 1916a ——. "Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie." *Die Naturwissenschaften* 4 (1916): 363—372, 386—392.

Freundlich 1916b ——. *Die Grundlagen der Einsteinschen Grovitationstheorie*. Berlin: Springer, 1916.

Freundlich 1917 ——. *Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie*. 2d rev. and enl. ed. Berlin: Springer, 1917.

Freundlich 1919a ——. "Zur Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie." *Die Naturwissenschaften* 7 (1919): 629—636, 696 ("Bemerkung").

Freundlich 1919b ——. *Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie*. 3d rev. and enl. ed. Berlin: Springer, 1919.

Friedberg 1994 Friedberg, R. "Einstein and Stimulated Emission: A Completely Corpuscular Treatment of Momentum Balance." *American Journal of Physics* 62(1994): 26—32.

Galison 1987 Galison, Peter. *How Experiments End*. Chicago: The University of Chicago Press, 1987.

GDNA Verhandlungen 1914 *Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 85. Versammlung zu Wien vom 21. bis 28. September 1913*. Part 2, sec. 1. Alexander Witting, ed. Leipzig: Vogel, 1914.

Geroch and Horowitz 1979 Geroch, Robert, and Horowitz, Gary. "Global Structure of Spacetimes." In *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, pp. 212—293. Stephen Hawking and Werner Israel, eds. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

Geschichte 1918 *Geschichte der deutschen Flugzeugindustrie*. vol. 1, *Geschichte vor dem Kriege*. Berlin: Reichsdruckerei, 1918.

Gibbs 1902 Gibbs. Josiah Willard. *Elementary Principles in Statistical Mechanics Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics*. New York: Charles Scribner's Sons, 1902.

Gibbs 1905 ——. *Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik*. Ernst Zermelo, trans. Leipzig: Barth, 1905.

Gödel 1949 Gödel, Kurt. "An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation." *Reviews of Modern Physics* 21(1949): 447—450. Reprinted in *Kurt Gödel: Collected Works*, vol. 2, pp. 190—198. Solomon Fefferman et al., eds. Oxford: Oxford University Press, 1990.

Goldstein 1980 Goldstein, Herbert. *Classical Mechanics*. 2d ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1980.

Grüneisen 1921 ——. "Théorie moléculaire des corps solides." In *Rapports 1921*, pp. 243— 599
280.

Grüneisen et al. 1921 Grüneisen, Eduard, et al. "Discussion" following *Grüneisen 1921*. In *Rapports 1921*, pp. 281—301.

Guillaume 1914 Guillaume, Eduard. "Sur la vitesse de la lumière." *Archives des sciences physiques et naturelles* 37(1914): 256—257.

Gutzwiller 1990 Gutzwiller, Martin C. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. New York: Springer, 1990.

Haller and Stadler 1988 ——. Haller, Rudolf, and Stadler, Friedrich, eds. *Ernst Mach—Werk und Wirkung*. Vienna: Hölder-Pichler-Tempsky, 1988.

Harman 1982 Harman, Peter M. *Energy, Force, and Matter: The Conceptual Development of Nineteenth-Century Physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

Harress 1912 Harress, Franz. *Die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern*. Erfurt: Ohlenroth'sche Buchdruckerei Georg Richters, [1912].

Harzer 1914a Harzer, Paul. "Über die Mitführung des Lichtes in Glas und die Aberration." *Astronomische Nachrichten* 198(1914): cols. 377—392.

Harzer 1914b ——. "Bemerkungen zu meinem Artikel in Nr. 4748 im Zusammenhange mit den vorstehenden Bemerkungen des Herrn Einstein." *Astronomische Nachrichten* 199 (1914): cols. 9—12.

Helmholtz 1884 Helmholtz, Hermann von. "Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome." In Helmholtz, Hermann von, *Vorträge und Reden* vol. 2, pp. 1—34. Braunschweig: Vieweg, 1884.

Helmholtz 1917 ——. *Zwei Vorträge über Goethe. Goethe's naturwissenschaftliche Arbeiten. Goethe's Vorahnungen kommender naturwissenschaftlicher Ideen*. Braunschweig: Vieweg, 1917.

Hentschel 1993 Hentschel, Klaus. "The Conversion of St. John: A Case Study on the Interplay of Theory and Experiment." *Science in Context* 6 (1993): 137—194.

Hentschel 1994 ——. "Erwin Finlay Freundlich and Testing Einstein's Theory of Relativity." *Archive for History of Exact Sciences* 47(1994): 143—201.

Hilbert 1915 Hilbert, David. "Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung.)" *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten* (1915): 395—407.

Hoefer 1994 Hoefer, Carl. "Einstein's Struggle for a Machian Gravitation Theory." *Studies in History and Philosophy of Science* 25 (1994): 287—335.

Holton 1988 Holton. Gerald. *Thematic Origins of Scientific Thought: Kepler to Einstein*. Rev. ed. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1988.

Holton 1992 ——. "More on Mach and Einstein." In *Blackmore 1992*, pp. 263—276.

Howard and Stachel 1989 Howard, Don, and Stachel, John, eds. *Einstein and the History of General Relativity*. Boston: Birkhäuser, 1989.

Jeans 1905*a* Jeans, James Hopwood. "On the Partition of Energy between Matter and Aether." *Philosophical Magazine* 10(1905): 91—98.

Jeans 1905b ——. "The Dynamical Theory of Gases and of Radiation." *Nature* 72(1905): 101—102.

Jeans 1905c ——. "A Comparison between Two Theories of Radiation." *Nature* 72(1905): 293—294.

Kerszberg 1987 Kerszberg, Pierre. "The Relativity of Rotation in the Early Foundations of General Relativity." *Studies in History and Philosophy of Science* 18(1987): 53—79.

Kerszberg 1989a ——. "The Einstein-de Sitter Controversy of 1916—1917 and the Rise of Relativistic Cosmology. In *Howard and Stachel 1989*, pp. 325—366.

Kerszberg 1989b ——. *The Invented Universe: The Einstein-De Sitter Controversy* (1916—1917) *and the Rise of Relativistic Cosmology*. Oxford: Clarendon Press, 1989.

Kichenassamy 1993 Kichenassamy, S. "Variational Derivations of Einstein's Equations." In *Earman et al. 1993*, pp. 185—205.

Kirsten and Treder 1979a Kirsten, Christa, and Treder, Hans-Jürgen, eds. *Albert Einstein in Berlin 1913—1933*. Part 1, *Darstellung und Dokumente*. Berlin: Akademie-Verlag, 1979.

Kirsten and Treder 1979b ——. *Albert Einstein in Berlin 1913—1933*. Part 2, *Spezialin-* 600
ventar. Berlin: Akademie—Verlag, 1979.

Klein 1959 Klein, Martin J. "Ehrenfest's Contributions to the Development of Quantum Statistics. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings B* 62(1959): 41—50, 51—62.

Klein 1964 ——. "Einstein and the Wave-Particle Duality." *The Natural Philosopher* 3 (1964): 3—49.

Klein 1986 ——. "Ernst Mach's Principies of the Theory of Heat." Introduction to Mach, Ernst, *Principles of the Theory of Heat: Historically and Critically Elucidated*, pp. ix—xx. Brian McGuinness, ed. Dordrecht and Boston: Reidel. 1986. (Trans. of Mach, Ernst, *Die Principien der Wärmelehre. Historisch-kritisch entwickelt*. 2d ed. Leipzig: Barth, 1900.)

Knopf 1920 Knopf, O. "Die Versuche von F. Harreß über die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern." *Annalen der Physik* 62(1920): 389—447.

Kottler 1912 Kottler. Friedrich. "Über die Raumzeitlinien der Minkowski'schen Welt." *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften* (Vienna). *Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Abteilung* II *a. Sitzungsberichte* 121 (1912): 1659—1759.

Kottler 1914a ——. "Relativitätsprinzip und beschleunigte Bewegung." *Annalen der Physik* 44(1914): 701—748.

Kottler 1914b ——. "Fallende Bezugssysteme vom Standpunkte des Relativitätsprinzips." *Annalen der Physik* 45(1914): 481—516.

Kottler 1916a ——. "Beschleunigungsrelative Bewegungen und die konforme Gruppe der Minkowski'schen Welt." *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften* (Vienna). *Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Abteilung* II *a. Sitzungsberichte* 125 (1916): 899—919.

Kottler 1916b ——. "Über Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation." *Annalen der Physik* 50 (1916): 955—972.

Kottler 1918 ——. "Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie." *Annalen der Physik* 56(1918): 401—462.

Kox 1988 Kox, A. J. "Hendrik Antoon Lorentz, the Ether, and the General Theory of Relativity." *Archive for History of Exact Sciences* 38(1988): 67—78. Reprinted in *Howard and Stachel 1989*, pp. 201—212.

Kundt and Warburg 1875a Kundt, August, and Warburg, Emil. "Ueber Reibung und Wärmeleitung verdünnter Gase." *Annalen der Physik und Chemie* 5(1875): 337—365, 525—550.

Kundt and Warburg 1875b ——. "Ueber Reibung und Wärmeleitung verdünnter Gase. II. Wärmeleitung." *Annalen aer Physik und Chemie* 6 (1875): 177—211.

Langevin 1905 Langevin, Paul. "Magnétisme et théorie des électrons." *Annales de chimie et de physique* 5(1905): 70—127.

Laue 1911 Laue, Max. *Das Relativitiätsprinzip*. Braunschweig: Vieweg, 1911.

Laue 1913 ——. *Das Relativitätsprinzip*. 2d enl. ed. Braunschweig: Vieweg, 1913.

Laue 1915a Laue, Max von. "Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie." *Annalen der Physik* 47 (1915): 853—878.

Laue 1915b ——. "Zur Statistik der Fourierkoeffizienten der natürlichen Strahlung." *Annalen der Physik* 48(1915): 668—680.

Laue 1920 ——. "Zum Versuch von F. Harreß." *Annalen der Physik* 62 (1920): 448—463.

Levi-Civita 1917 Levi-Civita, Tullio. "Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein." *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincel. Atti* 26 (1917): 381—391.

Lohmeier and Schell 1992 Lohmeier, Dieter, and Schell, Bernhardt, eds. *Einstein, Anschütz und der Kieler Kreiselkompaß. Der Briefwechsel zwischen Albert Einstein und Hermann Anschütz-Kaempfe und andere Dokumente*. Heide in Holstein: Westholsteinische Verlagsanstalt Boyens & Co. 1992.

Lorentz 1895 Lorentz, Hendrik A. *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*. Leiden: Brill, 1895.

Lorentz 1909 ——. *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*. Leipzig: Teubner. 1909.

Lorentz 1912——. "Sur l'application au rayonnement du théoréme de l'équipartition de l'énergie." In *Rapports 1912*, pp. 12—39.

601 *Lorentz 1914a* ——. "Het relativiteitsbeginsel. Voordrachten gehouden in Maart 1913." W. H. Keesom, ed. *Archives du Musée Teyler* (3)2(1914): 1—60.

Lorentz 1914b ——. *Das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem*. W. H. Keesom, ed. Leipzig: Teubner, 1914.

Lorentz 1915 ——. "Het beginsel van Hamilton in Einstein's theorie der zwaartekracht." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 23 (1914—1915): 1073—1089. Reprinted in translation as "On Hamilton's Principle in Einstein's Theory of Gravitation." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 19(1916—1917): 751—765.

Lorentz 1916a ——. *Les théories statistiques en thermodynamique. Conférences faites au Collège de France en novembre 1912*. L. Dunoyer, ed. Leipzig: Teubner, 1916.

Lorentz 1916b ——. "Over Einstein's theorie der zwaartekracht. I." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis- en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 24 (1915—1916): 1389—1402. Reprinted in translation as "On Einstein's Theory of Gravitation. I." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 19(1916—1917): 1341—1354.

Lorentz 1916c ——. "Over Einstein's theorie der zwaartekracht. II." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 24 (1915—1916): 1759—1774. Reprinted in translation as "On Einstein's Theory of Gravitation. II." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 19 (1916—1917): 1354—1369.

Lorentz 1916d ——. "Over Einstein's theorie der zwaartekracht. III." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 25 (1916—1917): 468—486. Reprinted in translation as "On Einstein's Theory of Gravitation. Ⅲ." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 20(1917—1918): 2—19.

Lorentz et al. 1913 Lorentz, Hendrik A., Einstein, Albert, and Minkowski, Hermann. *Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen mit Anmerkungen von A. Sommerfeld und Vorwort von O. Blumenthal.* Leipzig: Teubner, 1913.

Mach 1897 Mach, Ernst. *Die Mechanik in ihrer Entwickelung. Historisch-kritisch dargestellt.* 3d rev. and enl. ed. Leipzig: Brockhaus. 1897.

Mach 1898 ——. "On Some Phenomena Attending the Flight of Projectiles." In *Popular Scientific Lectures*. 3d rev. ed., pp. 309—337. La Salle, Ill: Open Court, 1898.

Mach 1903 ——. "Über Erscheinungen an fliegenden Projektilen." In *Populärwissenschaftliche Vorlesungen*. 3d rev. ed., pp. 356—383. Leipzig: Barth, 1903.

Mach 1921 ——. *Die Prinzipien der physikalischen Optik*. Leipzg: Barth, 1921.

Maxwell 1881 Maxwell, James Clerk. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 2 vols. 2d ed. Oxford: Clarendon Press, 1881.

Mehra 1973 Mehra, Jagdish. "Einstein, Hilbert, and the Theory of Gravitation." In *The Physicist's Conception of Nature*, pp. 92—178. Jagdish Mehra, ed. Dordrecht: Reidel. 1973.

Mehra and Rechenberg 1982 Mehra, Jagdish, and Rechenberg, Helmut. *The Historical Development of Quantum Theory*. vol. 1, *The Quantum Theory of Planck, Einstein, Bohr and Sommerfeld: Its Foundation and the Rise of Its Difficulties 1900—1925*. New York: Springer, 1982.

Miller 1981 Miller. Arthur I. *Albert Einstein's Special Theory of Relativity: Emergence*

(1905) and Early Interpretation (1905—1911). Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981.

Minkowski 1908 Minkowski, Hermann. "Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten* (1908): 53—111. Reprinted in *Minkowski 1911*, vol. 2, pp. 352—404.

602 *Minkowski 1911* ——. *Gesammelte Abhandlungen*. David Hilbert, ed. 2 vols. Leipzig: Teubner, 1911. Reprint, New York: Chelsea, 1967.

Mosengeil 1907 Mosengeil, Kurd von. "Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum." *Annalen der Physik* 22 (1907): 867—904.

Nathan and Norden 1960 Nathan, Otto, and Norden, Heinz. *Einstein on Peace*. New York: Simon and Schuster, 1960.

Nernst 1906 Nernst, Walther. "Ueber die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermi schen Messungen." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten* (1906): 1—40.

Nernst 1911 ——. "Über neuere Probleme der Wärmetheorie." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1911): 65—90.

Nernst 1912 ——. "Application de la théorie des quanta à divers problèmes physico-chimiques." In *Rapports 1912*, pp. 254—290.

Nernst 1914 ——. "Anwendung der Quantentheorie auf eine Reihe physikalisch-chemischer Probleme." In *Verhandlungen 1914*, pp. 208—233.

Nernst 1918 ——. *Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes*. Halle/Saale: Knapp, 1918.

Nernst et al. 1912 Nernst, Walther, et al. "Discussion" following *Nernst 1912*. In *Rapports 1912*, pp. 291—303.

Nernst et al. 1914 ——. "Diskussion" following *Nernst 1914*. In *Verhandlungen 1914*, pp. 234—244.

Neumann, C. 1896 Neumann, Carl. *Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen*. Leipzig: Teubner, 1896.

Neumann, G. 1914 Neumann, Günther. "Die träge Masse schnell bewegter Elektronen." *Annalen der Physik* 45 (1914): 529—579.

Newcomb 1895 Newcomb. Simon. *The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy, Supplement to the American Ephemeris and Nautical Almanac for 1897*. Washington, D. C.: Government Printing Office, 1895.

Nicolai 1917 Nicolai, Georg Friedrich. *Die Biologie des Krieges. Betrachtungen eines deutschen Naturforschers*. Zurich: Füssli, 1917.

North 1965 North, John D. *The Measure of the Universe: A History of Modern Cosmology*.

Oxford: Clarendon Press, 1965. Reprinted New York: Dover, 1990.

Norton 1984 Norton. John D. "How Einstein Found His Field Equations: 1912—1915." *Historical Studies in the Physical Sciences* 14(1984): 253—316. Reprinted in *Howard and Stachel* 1989, pp. 101—159.

Norton 1985 ——. "What Was Einstein's Principle of Equivalence?" *Studies in History and Philosophy of Science* 16 (1985): 203—246. Reprinted in *Howard and Stachel 1989*, pp. 5—47.

Pais 1982 Pais, Abraham. '*Subtle is the Lord...*': *The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford: Clarendon Press; New York: Oxford University Press, 1982.

Pauli 1921 Pauli, Wolfgang. "Relativitätstheorie." In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen*. vol. 5, *Physik*, part 2, pp. 539—775. Arnold Sommerfeld, ed. Leipzig: Teubner, 1904—1922. Issued 15 September 1921.

Pauli 1949 ——. "Einstein's Contributions to Quantum Theory." In *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, pp. 147—160. Paul Arthur Schilpp, ed. La Salle, Ill: Open Court, 1949.

Petzoldt 1914 Petzoldt, Joseph. "Die Relativitätstheorie der Physik." *Zeitschrift für positivistische Philosophie* 2(1914): 1—56.

Planck 1900a Planck, Max. "Ueber irreversible Strahlungsvorgänge." *Annalen der Physik* 1 (1900): 69—122. Reprinted in *Planck 1958*, vol. 1, pp. 614—667.

Planck 1900b ——. "Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum." *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 2 (1900): 237—245. Reprinted in *Planck 1958*, vol. 1, pp. 698—706.

Planck 1901a ——"Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum." *Annalen der Physik* 4(1901): 553—563. Reprinted in *Planck 1958*, vol. 1, pp. 717—727.

Planck 1901b ——. "Ueber die Elementarquanta der Materie und der Elektricität." *Annalen* 603
der Physik 4 (1901): 564—566. Reprinted in *Planck 1958*, vol 1, pp. 728—730.

Planck 1911a ——. "Eine neue Strahlungshypothese." *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 13 (1911): 138—148. Reprinted in *Planck 1958*, vol. 2, pp. 249—259.

Planck 1911b ——. "Zur Hypothese der Quantenemission." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1911): 723—731.

Planck 1912a ——. "Über neuere thermodynamische Theorien (Nernstsches Wärmetheorem und Quantenhypothese)." *Physikalische Zeitschrift* 13 (1912): 165—175. Reprinted in *Planck* 1958, vol. 3, pp. 54—64.

Planck 1912b ——. "La loi du rayonnement noir et i'hypothèse des quantités élémentaires d'action." In *Rapports 1912*, pp. 93—114.

Planck 1913 ——. *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung*. 2d ed. Leipzig: Barth, 1913.

Planck 1914a ——. "Die Gesetze der Wärmestrahlung und die Hypothese der elementaren

Wirkungsquanten." In *Verhandlungen 1914*, pp. 77—94. Reprinted in *Planck* 1958, vol. 2, pp. 269—286.

Planck 1914b ——. "Erwiderung." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*(1914): 742—744.

Planck 1914c ——. "Eine veränderte Formulierung der Quantenhypothese." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften*(Berlin). *Sitzungsberichte*(1914): 918—923. Reprinted in *Planck 1958*, vol. 2, pp. 330—335.

Planck 1915 ——. "Bemerkung über die Entropiekonstante zweiatomiger Gase." *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 17 (1915): 418—419. Reprinted in *Planck 1958*, vol 2, pp. 360—361.

Planck 1958 ——. *Physikalische Abhandlungen und Vorträge*. 3 vols. Braunschweig: Vieweg, 1958.

Planck et al. 1914 Planck, Max, et al. *Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität. Gehalten in Göttingen auf Einladung der Kommission der Wolfskehlstiftung*. Leipzig: Teubner, 1914.

Poincaré 1902 Poincaré, Henri. *La science et l'hypothèse*. Paris: Flammarion, 1902.

Polanyi 1915 Polanyi, Michael, "Zur Ableitung des Nernstschen Theorems." *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* 17(1915): 350—353.

Rapports 1912 Langevin, Paul, and de Broglie, Maurice, eds. *La théorie du rayonnement et les quanta. Rapports et discussions de la réunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911, sous les auspices de M. E. Solvay*. Paris: Gauthier-Villars, 1912.

Rapports 1921 Goldschmidt, Robert; de Broglie, Maurice; and Lindemann, Frederick A, eds. *La structure de la matière. Rapports et discussions du Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 27 au 31 octobre 1913 sous les auspices de l'Institut International de Physique Solvay*. Paris: Gauthier-Villars, 1921.

Rapports 1923 Verschaffelt, J. E.; de Broglie, Maurice; Bragg, William L.; and Brillouin, Léon, eds. *Atomes et électrons. Rapports et discussions du Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 1er au 6 avril 1921 sous les auspices de L'Institut International de Physique Solvay*. Paris: Gauthier-Villars, *1923*.

Rayleigh 1900 Lord Rayleigh (John W. Strutt). "Remarks upon the Law of Complete Radiation." *Philosophical Magazine* 49 (1900): 539—540.

Reich 1994 Reich, Karin. *Die Entwicklung des Tensorkalküls. Vom absoluten Differentialkalkül zur Relativitätstheorie*. Basel: Birkhäuser, 1994.

Ricci and Levi-Civita 1901 Ricci, Gregorio, and Levi-Civita, Tullio. "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications." *Mathematische Annalen* 54(1901): 125—201.

Richardson 1908 Richardson, Owen W. "A Mechanical Effect Accompanying Magnetization." *Physical Review* 26 (1908): 248—253.

Ritz 1908a Ritz, Walter. "Recherches critiques sur l'électrodynamique générale. "*Annales de chimie et de physique* 13(1908): 145—275.

Ritz 1908b ——. "Über die Grundlagen der Elektrodynamik und die Theorie der schwarzen Strahlung. "*Physikalische Zeitschrift* 9 (1908): 903—907. 604

Röntgen 1888 Röntgen, Wilhelm Conrad. "Ueber die durch Bewegung eines im homogenen electrischen Felde befindlichen Dielectricums hervorgerufene electrodynamische Kraft. "*Annalen der Physik und Chemie* 35 (1888): 264—270.

Roseveare 1982 Roseveare, N. T. *Mercury's Perihelion from Le Verrier to Einstein*. Oxford: Clarendon Press. 1982.

Rutherford 1900 Rutherford, Ernest. "A Radio-active Substance Emitted from Thorium Compounds. "*Philosophical Magazine* 49 (1900): 1—14.

Sackur 1911 Sackur, Otto. "Die Anwendung der kinetischen Theorie der Gase auf chemische Probleme. *Annalen der Physik* 36 (1911): 958—980.

Sackur 1912 ——. "Die Bedeutung des elementaren Wirkungsquantums für die Gastheorie und die Berechnung der chemischen Konstanten." In *Festschrift W. Nernst zu seinem fünfundzwanzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet von seinen Schülern*, pp. 405—423. Halle/Saale: Knapp, 1912.

Sackur 1913a ——. "Die universelle Bedeutung des sog. elementaren Wirkungsquantums." *Annalen der physik* 40 (1913): 67—86.

Sackur 1913b ——. "Die "Chemischen Konstanten" der zwei- und dreiatomigen Gase." *Annalen der Physik* 40(1913): 87—106.

Schrödinger 1926 Schrödinger Erwin. "Quantisierung als Eigenwertproblem. (Zweite Mitteilung.)" *Annalen der Physik* 79 (1926): 489—527.

Schwarzschild 1897 Schwarzschild, Karl. "Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichts einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse." *Neue Annalen der Königlichen Sternwarte zu Bogenhausen bei München* 3 (1897): 231—299.

Schwarzschild 1898a ——. "Ueber eine Classe periodischer Lösungen des Dreikörperproblems." *Astronomische Nachrichten* 147 (1898): cols. 17—24.

Schwarzschild 1898b ——. "Ueber weitere Classen periodischer Lösungen des Dreikörperproblems." *Astronomische Nachrichten* 147 (1898): cols. 289—298.

Schwarzschild 1899 ——. "Ueber Abweichungen vom Reciprocitätsgesetz für Bromsilbergelatine. "*Photographische Correspondenz* 36 (1899): 109—112. Reprinted in translation as "On the Deviations from the Law of Reciprocity for Bromide of Silver Gelatine. "*Astrophysical Journal* 11 (1900): 89—91.

Schwarzschild 1900 ——. "Die Bestimmung von Sternhelligkeiten aus extrafocalen photographischen Aufnahmen. "*Publicationen der v. Kuffner' schen Sternwarte in Wien* 5 (1900): B3—B23.

Schwarzschild 1901 ——. "Der Druck des Lichts auf kleine Kugeln und die Arrhenius'sche Theorie der Cometenschweife." *Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München. Mathematisch-physikalische Classe. Sitzungsberichte* 31 (1901): 293—338.

Schwarzschild 1903a ——. "Zur Elektrodynamik. I. Zwei Formen des Princips der kleinsten Action in der Elektronentheorie." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten* (1903): 126—131.

Schwarzschild 1903b ——. "Zur Elektrodynamik. II. Die elementare elektrodynamische Kraft." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten* (1903): 132—141.

Schwarzschild 1903c ——. "Zur Elektrodynamik. III. Ueber die Bewegung des Elektrons." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten* (1903): 245—278.

Schwarzschild 1905a ——. "Untersuchungen zur geometrischen Optik. I. Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Abhandlungen* 4, no. 1 (1905): 3—31.

Schwarzschild 1905b ——. "Untersuchungen zur geometrischen Optik. II. Theorie der Spiegeltelescope." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaflen zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Abhandlungen* 4, no. 2 (1905): 3—28.

605 *Schwarzschild 1905c* ——. "Untersuchungen zur geometrischen Optik. III. Ueber die astrophotographischen Objective." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Abhandlungen* 4, no. 3 (1905): 3—54.

Schwarzschild 1906 ——. "Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten* (1906): 41—53.

Schwarzschild 1907 ——. "Ueber die Eigenbewegungen der Fixsterne." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten* (1907): 614—632.

Schwarzschild 1908 ——. "Ueber die Bestimmung von Vertex und Apex nach der Ellipsoidhypothese aus einer geringeren Anzahl beobachteter Eigenbewegungen." *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten* (1908): 191—200.

Schwarzschild 1914 ——. "Über Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaflen* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1914): 1183—1200.

Schwarzschild 1916a ——. "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie." *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sit-*

zungsberichte (1916): 189—196.

Schwarzschild 1916b ——. "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. "*Königlich Preußische Akademie der Wissenschafien* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1916): 424—434.

Schwarzschild 1916c ——. "Zur Quantenhypothese. " *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1916): 548—568.

Schwarzschild 1992 ——. *Gesammelte Werke. Collected Works.* 3 vols. Hans-Heinrich Voigt, ed. Berlin: Springer, 1992.

Seeliger 1895 Seeliger, Hugo. "Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. " *Astronomische Nachrichten* 137 (1895): cols 129—136.

Smoluchowski 1898 Smoluchowski, Marian von. "Ueber Wärmeleitung in verdünnten Gasen. " *Annalen der Physik* 64 (1898): 101—130.

Smoluchowski 1906 ——. "Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. " *Annalen der Physik* 21 (1906): 756—780.

Smoluchowski 1908 ——. "Molekularkinetische Theorie der Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande, sowie einiger verwandter Erscheinungen. "*Annalen der Physik* 25 (1908): 205—226. Reprinted in *Oeuvres de Marie Smoluchowski*. vol. 1, pp. 589—609. Cracow: Imprimerie de l'Université Jaguellonne, 1924.

Smoluchowski 1914 ——. "Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie. " In *Planck et al. 1914*, pp. 87—121.

Smoluchowski 1916 ——. "Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. " *Physikalische Zeitschrift* 17 (1916): 557—571, 585—599.

Soldner 1801 Soldner. Johann G. von. "Ueber die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung, durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbei geht. " *Astronomisches Jahrbuch für das Jahr* 1804: 161—172.

Sommerfeld 1909 Sommerfeld, Arnold. "Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie. "*Physikalische Zeitschrift* 10 (1909): 826—829.

Sommerfeld 1912 ——. "Application de la théorie de l'élément d'action aux phénomènes moléculaires non périodiques. "In *Rapports* 1912, pp. 313—372.

Sommerfeld 1914 ——. "Die Bedeutang des Wirkungsquantums für unperiodische Molekularprozesse in der Physik. "In *Verhandlungen* 1914, pp. 252—297.

Sommerfeld 1915 ——. "Zur Theorie der Balmerschen Serie. "*Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München. Mathematisch-physikalische Klasse. Sitzungsberichte* (1915): 425—458.

Sommerfeld 1916 ——. "Zur Quantentheorie der Spektrallinien. "*Annalen der Physik* 51 (1916): 1—94, 125—167.

Stachel 1980 Stachel, John. "Einstein and the Rigidly Rotating Disk." In *General Relativity*
606 *and Gravitation: One Hundred Years after the Birth of Albert Einstein*. vol. 1, pp. 1—15. Alan Held, ed. New York: Plenum, 1980. Reprinted in *Howard and Stachel 1989*, pp. 48—62.

Stachel 1989 ——. "Einstein's Search for General Covariance, 1912—1915." In *Howard and Stachel* 1989, pp. 63—100.

Stern 1913 Stern, Otto. "Zur kinetischen Theorie des Dampfdrucks einatomiger fester Stoffe und über die Entropiekonstante einatomiger Gase." *Physikalische Zeitschrift* 14 (1913): 629—632.

Stewart 1918 Stewart, John Q. "The Moment of Momentum Accompanying Magnetic Moment in Iron and Nickel." *The Physical Review* 11 (1918): 100—120.

Tetrode 1912 Tetrode, Hugo M. "Die chemische Konstante der Gase und das elementare Wirkungsquantum." *Annalen der Physik* 38 (1912): 434—442; 39 (1912): 255—256 ("Berichtigung").

Tetrode 1915 ——. "Theoretische bepaling der entropieconstante van gassen en vloeistoffen." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 23 (1914—1915): 1110—1127. Reprinted in translation as "Theoretical Determination of the Entropy Constant of Gases and Liquids." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 17 (1914—1915): 1167—1184.

Verhandlungen 1914 Eucken, Arnold, ed. *Die Theorie der Strahlung und der Quanten. Verhandlungen auf einer von E. Solvay einberufenen Zusammenkunft (30. Oktober bis 3. November 1911). Mit einem Anhange über die Entwicklung der Quantentheorie vom Herbst 1911 bis zum Sommer 1913*. Halle/Saale.: Knapp, 1914. (*Abhandlungen der Deutschen Bunsen Gesellschaft für angewandte physikalische Chemie*. vol. 3, no. 7).

Weiss 1907 Weiss, Pierre. "L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique." *Journal de physique* 6 (1907): 661—690.

Weiss 1908 ——. "Molekulares Feld und Ferromagnetismus." *Physikalische Zeitschrift* 9 (1908): 358—367.

Weyl 1918a Weyl, Hermann. *Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie*. Berlin: Springer, 1918.

Weyl 1918b ——. "Reine Infinitesimalgeometrie." *Mathematische Zeitschrift* 2 (1918): 384—411.

Wien 1894 Wien, Wilhelm. "Temperatur und Entropie der Strahlung." *Annalen der Physik und Chemie* 52 (1894): 132—165.

Wien 1896 ——. "Ueber die Energievertheilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers." *Annalen der Physik und Chemie* 58 (1896): 662—669.

Wilson 1904 Wilson, Harold Albert. "On the Electric Effect of Rotating a Dielectric in a Magnetic Field." Royal *Society of London. Philosophical Transactions A* 204 (1904—1905): 121—137.

Wolters 1987 Wolters, Gereon. *Mach I, Mach II, Einstein und die Relativitätstheorie. Eine Fälschung und ihre Folgen*. Berlin: De Gruyter, 1987.

Zeeman 1914 Zeeman, Pieter. "De meesleepingscoefficient van Fresnel voor verschillende kleuren. (1ste gedeelte)." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 23 (1914—1915): 245—252. Reprinted in translation as "Fresnel's Coefficient for Light of Different Colours. (First Part)." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 17 (1914—1915): 445—451.

Zeeman 1915 ——. "De meesleepingscoéfficient van Fresnel voor verschillende kleuren. (Tweede gedeelte)." *Koninklijke Ahademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen* 24 (1915—1916): 18—28. Reprinted in translation as "Fresnel's Coefficient for Light of Different Colours. (Second Part)." *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings* 18 (1915—1916): 398—408.

名词索引

索引中的页码为原版书页码，即本书的边码。页码后标有"n"指该页的注释。参考文献集中在适当英文标题之下。"Albert Einstein"简写为"AE"。在编辑材料中所涉及的通信是按收/发信人的字母顺序来排列的，若涉及寄与 AE 的信件，则信件排列在"Correspondence with"(与 AE 通信)之后，若仅涉及一些特殊信件，则标出收/发姓名，人名及引文索引在名词索引之后。

A

B

C

D

G

H

J

K

N

P

T

W

Y

人名索引

A

B

C

D

F

G

H

J

K

L

S

T

V

W

Y

Z

引文索引

译后记

1995年，我建议湖南科学技术出版社出版《爱因斯坦全集》中文版，并同时和普林斯顿大学出版社联系版权事宜。1999年，第一卷中文版问世，4年后的今天终于见到了第二卷至第五卷的出版，这真是我国学术界、出版界的一件大事。为这位自牛顿以来最伟大的科学天才出中文版的全集，其重大意义自然不言而喻。现在正在着手出版的是第六卷。

爱因斯坦学说在一个社会的命运可以映射出该社会的文明程度，它在爱因斯坦出生国以及其他落后野蛮国家的遭遇早已耳熟能详，此处不必重复。爱因斯坦著作的中文版凝结着中国几代学人的心血和艰辛。无论如何，我们应当为这次出版盛事倍感庆幸。

爱因斯坦和他的学说是人类文明的丰碑。我游学经年，曾经拜谒过他的许多先行者的纪念地，其中包括雅典远郊的柏拉图科学院，西西里阿基米德殉难的城市和墓地，哥白尼就学的克拉科夫雅克隆大学，布鲁诺受火刑的罗马鲜花广场，伽利略做自由落体实验的比萨斜塔和受审的冈多菲堡，牛顿出生地伍尔索普领地、就学的剑桥三一学院和长眠的伦敦西敏寺，还有在格丁根的高斯以及普朗克雕刻着他著名常数的墓地。在他们的生前，有过许多更有权势的同类，然而无情的时间将他们的声名连同遗迹都化成历史的灰烬。

20多年前，我在马克斯·普朗克研究所工作时，得便访问了爱因斯坦的故乡乌尔姆，后来还拜访了他就学过的苏黎世联邦技术大学以及度过最后20年的普林斯顿永不开放的故居内部。他似乎非常先见地留下遗嘱，不在这个庸俗的社会上留下任何有形的纪念物。《爱因斯坦全集》可以认为是他的无形的纪念物。

1997年，为了配合第一卷的出版，我曾为《读书》杂志写了《以宇宙为纪念碑》一文，概述了爱因斯坦的生平和贡献。这篇文章在编辑部等待了近两年，才得以与第一卷的发行同步刊出。在那篇文章中，我感慨道，世界上一切纪念物都是速朽的，只有艺术科学的创造才是永恒的。由于人类价值观的改变，且不说社会的变幻，那些原先认为神圣的东西，在后人的眼中都会变得非常可笑和无聊。“为爱因斯坦这样的人物建立任何纪念碑本属多余，但是如果人们一定要为他建一座纪念碑，那就是我们居住的

宇宙本身”。

千禧年肇始，《时代周刊》将爱因斯坦尊崇为上世纪第一位风云人物，第二位是罗斯福总统，第三位是圣雄甘地。当任的克林顿总统为罗斯福写小传，甘地的小传由尼尔森曼德拉执笔，而爱因斯坦小传则由霍金来撰写。《时代周刊》编辑部认为，请霍金作传是显而易见的选择，不作别的考虑。其实请克林顿和曼德拉也是非常合适的。霍金写的小传被冠以《相对论简史》的题目，并将它作为第一章，收入他的新作《果壳中的宇宙》之中。有意思的是，他也在这个小传中这样写道：“爱因斯坦的场方程将和宇宙同在。”这是一篇传世之作。

爱因斯坦是狭义相对论的主要奠基者，他是量子论的奠基者之一，他更是广义相对论的奠基人。我们时代的这个星球上的所有人都毫无例外地受惠于他的贡献。现代技术的哪一项进步与他的理论无关呢?

在他的科学生涯中有两个高峰，分别为 1905 年和 1915 年。1905 年发表在《物理学杂志》上的《运动物体的电动力学》一文，是狭义相对论的鸿蒙开篇。这是他一生甚至是 20 世纪世界上最重要的论文，同年他还发表了光电效应和布朗运动的研究成果。对于爱因斯坦，1905 年恰如牛顿的 1665 年。那年夏天，牛顿为了躲避瘟疫从剑桥回到伍尔索普领地，他在那里发现了微积分、经典力学、万有引力和白光分解。1905 年和 1665 年同为科学史上最重要的时刻。

第一高峰的著作已被收入全集的第二卷中，而第六卷收入他在柏林(1914—1917) 发表的 49 篇文件，正是他第二高峰的著作。本卷主要包括爱因斯坦为寻求相对性的引力论的探索历程，其辉煌的结果便是 1915 年秋季在柏林获得的广义相对论的场方程。

在发表了狭义相对论不久后的 1907 年他就开始思索万有引力和狭义相对论相互协调的问题。他提出了“等效原理”，即加速坐标系中的惯性力和稳恒的均匀引力场的万有引力无法区分。这个原理充分揭示了伽利略的比萨斜塔实验结果，即惯性质量和引力质量等效的含义。1911 年后他研究稳恒态的引力场，他认为局部钟表测量的时间依赖于引力势，而后者服从推广的 Poisson 方程。他还从这个初期的理论推出引力场红移效应和光线受引力场的偏折。

1912 年他移居苏黎士后意识到等效原理可以在弯曲的时空中实现，物质的分布引起时空弯曲。质点在真空中沿测地线运动。在返回柏林之前他和朋友格罗斯曼合作，提出引力场由弯曲时空的曲率来体现，并将黎曼几何的数学手段引入广义相对论研究。

第六卷的文件 25《引力场方程》完成于 1915 年 11 月 25 日。这是广义相

对论最重要的文献。在此之前，他最早的场方程只对坐标的线性变换协变。后来，他把 Ricci 张量分成两部分，其中一部分在度规行列式为常数时为零，这样的场方程在这个行列式保持不变的任意坐标变换下协变，而且只有当作为引力场源的能量动量张量的标量为零时，才相互协调。他最后一步是对出现在场方程中的能量动量张量形式作些改变，由此得到了正确的方程。

广义相对论的优雅胜过之前的任何理论。时空不再是不变的无所作为的背景，在时空中的物质分布将时空弯曲，而时空的曲率又影响物质的运动。它的场方程是非线性的。它隐含着牛顿三大定律。引力场和它的物质源由场方程一并制约，不必像在麦克斯韦理论中那样。由它衍生出了黑洞、引力波、相对论天体物理和宇宙学等方向的研究。广义相对论完全变革了人类的时空观和宇宙观，是探索宇宙无中生有创生的先声。

第六卷的文件 24《以广义相对论解释水星近日点运动》完成于 1915 年 11 月 18 日。这是广义相对论早期的第三个验证。由于史瓦兹席尔德在一年后才找到引力场方程的球对称的真空解，所以爱因斯坦在这篇论文中用的是近似解。

第六卷的文件 43《广义相对论中的宇宙学研究》完成于 1917 年 2 月 8 日。这是相对论宇宙学的第一篇论文，正是引力主导着宇宙的演化。他在该文中提出了一个稳恒的有限无界的三维球宇宙模型。因为生命的延续和宇宙的年龄相比微不足道，甚至在几千年的整个文明过程中也觉察不到宇宙整体的变化，所以爱因斯坦试图从他的场方程得出一个稳态解。为此他在尽量不损害理论之美的前提下，在方程中引进了宇宙常数项。科学家们为此争论了近一个世纪。爱因斯坦的这个解是不稳定的，极微小的扰动就会使它很快偏离得面目全非，所以它的意义主要是在科学史上的。他的有限无界的三维球模型启发了后世以四维球为瞬子的量子宇宙创生模型。现代的观测宇宙学认为存在一个正的宇宙常数，它使此刻的宇宙加速膨胀。

第六卷的文件 34《量子论中辐射的发射和吸收》完成于 1916 年 7 月 17 日。在现代技术上，这是激光物理的理论基础。但是，我以为它在基础理论上的意义更为重要，它首次揭示了量子论和热力学之间的内在联系。前者通常认为是描述微观现象的理论框架，而后者是描述大量自由度的热现象的理论框架，两者关系居然这么紧密。大约 60 年后，霍金发现了从黑洞表面发射出黑体辐射，这种关系更得到发扬光大。在霍金辐射场景中，引力论、量子论和热力学得到了优美的统一。

第六卷的文件 42 完成于 1916 年 12 月。这是题为《狭义相对论和广义相对论》的科普著作，也是他最主要的科普著作。

我衷心感谢刘辽教授对本书翻译的大力支持和帮助。参与本卷译校的人有：刘辽、黄雄、喀兴林、高尚惠、罗景琪、郝刘祥、周正安、吴晔、赵文和吴忠超。

译校者均为有关方面的专家学者，大家通力合作，终于在 2005 年爱因斯坦逝世 50 周年以及狭义相对论发表 100 周年，完成了这部译作。

吴忠超

2005 年 2 月 15 日