矩阵论

千题习题详解

方保镕 编著

清华大学出版社

清华大学出版社数字出版网站

WQBook 书文局泉

www.wqbook.com

ISBN 978-7-302-39274-3

9 787302 392743 >

定价：45.00元

矩阵论

千题习题详解

方保镕　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书涵盖了清华大学出版社《矩阵论》(第2版)一书中共约1300道习题和自测题的详细解答.部分习题给出了多种解法并作了一些评注.这些习题大致可分为两种类型:基础题型用以巩固所学的知识,加深对基本概念的理解,相对比较简单;综合题型是训练读者灵活运用前面所学知识的能力,有一定的难度.

本书内容全面,题量大,解答详尽,适合学习矩阵论课程的研究生以及参加博士入学矩阵论课程考试的人员阅读,对于从事矩阵论教学工作的教师也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论千题习题详解/方保镕编著. --北京:清华大学出版社,2015
ISBN 978-7-302-39274-3

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①方… Ⅲ.①矩阵论-高等学校-题解 Ⅳ.①O151.21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第024511号

责任编辑:石 磊 赵从棉
封面设计:傅瑞学
责任校对:赵丽敏
责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社
网 址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084
社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:清华大学印刷厂
经 销:全国新华书店
开 本:185mm×260mm **印 张**:20.25 **字 数**:493千字
版 次:2015年11月第1版 **印 次**:2015年11月第1次印刷
印 数:1~2000
定 价:45.00元

产品编号:052120-01

FOREWORD 前言

矩阵论是高等院校和研究院(所)面向理工科研究生开设的一门数学基础课,其理论与方法在科学和工程各个领域都有着广泛的应用.因此,学习和掌握矩阵的基本理论与方法,对于理工科研究生来说是必不可少的.而要学好它,做习题又是必不可少的环节.华罗庚先生在其《高等数学引论》的序言中精辟地论述到:习题的目的其一是熟悉和巩固学习了的东西;其二是启发大家灵活运用,独立思考;其三是融会贯通.实际上,一本书的习题往往是该书的精华所在,借助习题的印证,才能对书中的原理和方法彻底地吸收与理解.

鉴于此,清华大学出版社第2版的《矩阵论》对第1版《矩阵论》各章中的习题作了适当的扩充,从原来的600多题增加到1300余题(含小题),无论从覆盖面还是深广度方面都有了很大的提升.本书涵盖了清华大学出版社第2版《矩阵论》一书中的全部习题和自测题的详细解答,部分习题给出了多种解法并作了一些评注.这些习题大致可分为两种类型:基础题型用以巩固所学的知识,加深对基本概念的理解,相对比较简单;综合题型是训练读者灵活运用前面所学知识的能力,有一定的难度.

本书对于学习矩阵论课程的研究生以及参加博士入学矩阵论课程考试的有关人员有很好的辅导作用,对于从事矩阵论教学工作的教师也有一定的参考价值.编写本书的主旨,当然不是“越俎代庖”,不可将书中的解答看作“标准答案”,它们并不一定是最好的解题方法,它们应作为读者在经过自己的独立思考之后对照的“参考答案”.若再进而能够起到抛砖引玉的作用,启发出更精彩的解答,将是作者莫大的欣慰.

限于作者水平,在编写中难免有错误和不当之处,恳请读者指正.

编者

2015年3月

CONTENTS

目 录

第1章 矩阵的几何理论

习　题　1(1)

1. 有没有一个向量的线性空间，有没有两个向量的线性空间，有没有 m 个向量的线性空间？

解　除了由一个零向量构成的集合 $\{\boldsymbol{\theta}\}$ 可以构成线性空间外，没有两个和有限(m)个向量构成的线性空间，因为数乘不封闭($k\boldsymbol{\alpha}$ 有无限多个，$k\in\mathbb{P}$ 数域)．

2. 在几何空间$\mathbb{R}^3$中，按通常的向量加法和数乘的运算，下列集合是否是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间？

(1) 过原点的平面 H 上的所有向量集合；

(2) 位于第一象限，以原点为始点的向量集合；

(3) 位于第一、三象限，以原点为始点的向量集合；

(4) x 轴上的向量集合；

(5) 平面 H 上，不平行于某向量的集合．

解　(1)是；(2)不是，因为没有负向量；(3)不是，因为存在两向量的和向量处在第二或第四象限，即加法不封闭；(4)是；(5)不是，因为存在两个不平行某向量的和却平行于某向量，即加法不封闭．

3. 按通常的数的加法和数乘，下列数集是否构成有理数域$\mathbb{Q}$上的线性空间？是否构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间？

(1)整数集$\mathbb{Z}$；(2)有理数集$\mathbb{Q}$；(3)实数集$\mathbb{R}$；(4)复数集$\mathbb{C}$；(5)单个数的集合$\{0\}$；(6)n个数的集合 $N=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$．

解　(1)不是，因为当 $k\in\mathbb{Q}$ 或$\mathbb{R}$ 时，数乘 $k\boldsymbol{\alpha}$ 不封闭；(2)有理域上是，实数域上不是，因为当 $k\in\mathbb{R}$ 时，数乘 $k\boldsymbol{\alpha}$ 不封闭；(3)是；(4)是；(5)是；(6)不是，因为加法与数乘均不封闭．

4. 齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1+2x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$$

的全部解是否构成线性空间？

解　是，因为全部解即为通解集合，它由基础解系列向量乘以相应常数组成，显然对解的加法与数乘运算满足两个封闭性和八条公理．

5. 在 n 维向量空间 P^n 中，下列 n 维向量的集合 V，是否构成数域 P 上的线性空间？

(1) $V=\{(a,b,a,b,\cdots,a,b)\mid a,b\in P\}$；

(2) $V=\left\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}a_i=1\right\}$.

解 (1)是线性空间；(2)不是线性空间(加法不封闭；或因无零向量).

6. 检验以下集合对于矩阵的加法和实数与矩阵的乘法，是否构成实数域上的线性空间？

(1) n 阶实数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实系数多项式的全体；

(2) n 阶实对称(或上三角)矩阵的全体；

(3) 形如$\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & b\end{bmatrix}$的二阶方阵的全体.

解 (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的实系数多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 的全体为

$$\{f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m\mid a_i\in\mathbb{R},\quad m\text{ 为正整数}\}$$

显然，它满足两个封闭性和八条公理，故是线性空间.

(2)与(3)也都是线性空间.

7. 设 $V=\{x\mid x=c_1\sin t+c_2\sin 2t+\cdots+c_n\sin nt,c_i\in\mathbb{R},0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$，$V$ 中元素对于通常三角多项式的加法和数乘运算，是否构成实数域上的线性空间？并证明$\{\sin t,\sin 2t,\cdots,\sin nt\}$是 V 的一组基，试提出确定 c_i 的方法.

解 是线性空间. 不难验证 $\sin t,\sin 2t,\cdots,\sin nt$ 是线性无关的，且任一个形如题中的三角多项式都可由它们唯一地线性表示，所以它们是 V 中的一个组基. 由高等数学中傅里叶(Fourier)系数知 $c_i=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}t\sin it\,\mathrm{d}t$.

8. 设 V 是有序实数对的集合：$V=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$，规定如下的加法与数乘运算：

(1) $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$ 与 $k\circ(a,b)=(ka,b)$；

(2) $(a,b)\oplus(c,d)=(a,b)$ 与 $k\circ(a,b)=(ka,kb)$；

(3) $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$ 与 $k\circ(a,b)=(k^2a,k^2b)$；

(4) $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac)$ 与 $k\circ(a,b)=\left(ka,kb+\dfrac{k(k-1)}{2}a^2\right)$.

那么，V 关于运算$\oplus$，$\circ$是否构成$\mathbb{R}$上的线性空间？

解 (1) 不是，因为性质(6)不成立：设 $r=1,s=2,\boldsymbol{\alpha}=(3,4)$，则$(r+s)\circ(3,4)=(9,4)$，而 $r\circ(3,4)\oplus s\circ(3,4)=(3,4)\oplus(6,4)=(9,8)$，所以$(r+s)\circ\boldsymbol{\alpha}\neq r\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus s\circ\boldsymbol{\alpha}$.

(2) 不是，因为性质(1)不成立：设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2),\boldsymbol{\beta}=(3,4)$，则 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=(1,2)\oplus(3,4)=(1,2)$，$\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}=(3,4)\oplus(1,2)=(3,4)$，所以 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}$.

(3) 不是，因为性质(5)不成立：设 $r=1,s=2,\boldsymbol{\alpha}=(3,4)$，则$(r+s)\circ\boldsymbol{\alpha}=3\circ(3,4)=(27,36)$，而

$$r\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus s\circ\boldsymbol{\alpha}=1\circ(3,4)\oplus 2\circ(3,4)=(3,4)\oplus(12,16)=(15,20)$$

于是$(r+s)\circ\boldsymbol{\alpha}\neq r\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus s\circ\boldsymbol{\alpha}$.

(4) 是.

***9.** 证明：线性空间定义中，加法的交换率 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ 不是独立的，即它可由其余 7 条公理推出.

证明 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,则

$$2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=(1+1)\boldsymbol{\alpha}+(1+1)\boldsymbol{\beta}=(1\boldsymbol{\alpha}+1\boldsymbol{\alpha})+(1\boldsymbol{\beta}+1\boldsymbol{\beta})$$
$$=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}$$

另一方面,$2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(1+1)(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(1\boldsymbol{\alpha}+1\boldsymbol{\beta})+1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$

$$=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}$$

因此

$$\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}$$

从而有

$$(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\beta})=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\beta})$$

于是得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

10. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=0 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=0 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$$

的解空间 V 的维数与基.

解 先求齐次方程组的基础解系.

$$\boldsymbol{\xi}_1=(3,3,2,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_2=(-3,7,0,4)^{\mathrm{T}}$$

即为解空间 V 的一组基,所以 $\dim V=2$.

11. 证明:$x^2+x,x^2-x,x+1$ 是线性空间 $P[x]_2$ 的基底,并求出 $2x^2+7x+3$ 在此基下的坐标.

解 考察齐次式

$$k_1(x^2+x)+k_2(x^2-x)+k_3(x+1)=0$$

即

$$(k_1+k_2)x^2+(k_1-k_2+k_3)x+k_3=0$$

得线性方程组

$$\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_1-k_2+k_3=0 \\ k_3=0 \end{cases}$$

由于系数行列式不等于零,那么只有 $k_1=k_2=k_3=0$ 时,上述齐次式才成立,所以 x^2+x, $x^2-x,x+1$ 线性无关,且任二次多项式 ax^2+bx+c 都可唯一地用它们来表示(因为相应的非齐次方程组有唯一解),故为基.

令

$$2x^2+7x+3=(k_1+k_2)x^2+(k_1-k_2+k_3)x+k_3$$

得 $k_1=3,k_2=-1,k_3=3$,即坐标为$(3,-1,3)$.

12. 在$\mathbb{R}^4$中有两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0),\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0)$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,0),\qquad \boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,1)$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1),\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1),\qquad \boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵;

(2) 求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标;

(3) 求对两组基有相同坐标的非零向量.

解 (1) 因 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{C}$,所以

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$$

(2) 显然,向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^{\mathrm{T}}$,设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Y}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)^{\mathrm{T}}$,则

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{4}{9}&\frac{1}{3}&-1&-\frac{11}{9}\\\frac{1}{27}&\frac{4}{9}&-\frac{1}{3}&-\frac{23}{27}\\\frac{1}{3}&0&0&-\frac{2}{3}\\-\frac{7}{27}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}&\frac{26}{27}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{BX}$$

(3) 如果 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$,则有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BX}$,即得齐次方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,求得非零解为

$$\boldsymbol{X}=k(-1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad k\in\mathbb{R}\text{,即为所求}$$

13. 求下列线性空间的维数与一组基:

(1) 第 6 题(2)中的空间;

(2) 教材例 1.1.5 中的空间 $\mathbb{R}^+$;

(3) 实数域 $\mathbb{R}$ 上由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实系数多项式的全体组成的空间,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{bmatrix},\qquad \omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\qquad \omega^2=\bar{\omega},\qquad \omega^3=1$$

解 (1) 对 $k=1,2,\cdots,n;l=k,k+1,\cdots,n$,令 $\boldsymbol{F}_{kl}=(a_{ij})_{n\times n}$,其中 $a_{kl}=1$,其余的 $a_{ij}=0$,则 $\{\boldsymbol{F}_{kl}\}$ 为上三角矩阵空间的一组基,维数为 $\frac{1}{2}n(n+1)$.

(2) $\mathbb{R}^+$ 中任意非零元素都可作 $\mathbb{R}^+$ 的基,$\dim\mathbb{R}^+=1$.

(3) $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2$ 为所述线性空间的一组基,其维数为 3.

14. 设线性空间 V^4 的基(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 和基(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_4\\ \boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_4\end{cases}$$

(1) 求由基(Ⅰ)变到基(Ⅱ)的过渡矩阵;

(2) 求向量 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4$ 在基(Ⅰ)下的坐标;

(3) 判断是否存在非零元素 $\boldsymbol{\alpha}\in V^4$,使得 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标相同.

解 (1) 由已知关系式求得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=4\boldsymbol{\alpha}_1+8\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4\\ \boldsymbol{\beta}_2=-2\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4\\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$$

于是,由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}4&-2&1&0\\8&-4&2&1\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{bmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅱ)下的坐标为 $(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$,再由坐标变换公式计算 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅰ)下的坐标为

$$\boldsymbol{C}(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}=(11,23,4,-5)^{\mathrm{T}}$$

(3) 不难计算得 $\det(1\cdot\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})=0$,所以 1 是 $\boldsymbol{C}$ 的特征值. 不妨取过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的对应于特征值 1 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\eta}$,则有 $\boldsymbol{C\eta}=1\cdot\boldsymbol{\eta}$,那么 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{\eta}\neq\boldsymbol{0}$,再由坐标变换公式知,$\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{C\eta}=\boldsymbol{\eta}$,即存在非零 $\boldsymbol{\alpha}\in V^4$,使得 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下有相同的坐标.

15. 在 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中,求由基(Ⅰ):

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&1\\2&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}-2&1\\1&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$$

到基(Ⅱ):

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&1\end{bmatrix}$$

的过渡矩阵.

解 不难看出,由简单基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 改变为基(Ⅰ)和基(Ⅱ)的过渡矩阵分别为

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

则有

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}_2=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4,)\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2$$

故由基(Ⅰ)改变到基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$C = C_1^{-1}C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

16. 设 $P[x]_3$ 的两基为

(Ⅰ)：$f_1(x)=1$， $f_2(x)=1+x$，

$f_3(x)=1+x+x^2$， $f_4(x)=1+x+x^2+x^3$；

(Ⅱ)：$g_1(x)=1+x^2+x^3$， $g_2(x)=x+x^2+x^3$，

$g_3(x)=1+x+x^2$， $g_4(x)=1+x+x^3$.

(1) 求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵；

(2) 求 $P[x]_3$ 中在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下有相同坐标的全体多项式.

解 (1) 由简单基 $1,x,x^2,x^3$ 改变到基(Ⅰ)和基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$C = C_1^{-1}C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 设 $f(x)\in P[x]_3$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标分别为 $\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)^{\mathrm{T}}$，则有 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{C\beta}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$，即有 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，该齐次方程组的通解为 $\boldsymbol{\beta}=k(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$k\in\mathbb{R}$. 于是，在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下有相同坐标的全体多项式为

$$f(x) = (g_1(x),g_2(x),g_3(x),g_4(x))\boldsymbol{\beta} = kg_3(x) = k + kx + kx^2$$

17. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解，其通解表达式为

$$\boldsymbol{\xi} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意数. 试证：向量组 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 所有解的极大线性无关组，但是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的所有解集合不构成线性空间.

证明 首先按照定义证明 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 所有解的极大无关组.

事实上，令

$$\lambda_0\boldsymbol{\xi} + \lambda_1(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1) + \cdots + \lambda_{n-r}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}) = \boldsymbol{0}$$

即

$$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{\xi} + \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r} = \boldsymbol{0} \quad ①$$

$$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{A\xi} + \lambda_1\boldsymbol{A\alpha}_1 + \cdots + \lambda_{n-r}\boldsymbol{A\alpha}_{n-r} = \boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{b}$，可得

$$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

再由 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=0 \qquad ②$$

将②式代入①式得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}=\mathbf{0}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性无关，故有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$，代入②式可得 $\lambda_0=0$，从而说明 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性无关.

另一方面，设 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{\xi}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}\\&=(1-k_1-\cdots-k_{n-r})\boldsymbol{\xi}+k_1(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r})\end{aligned}$$

这表明 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性表示，因此 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解集合的极大无关组.

由于 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解之和、解的常数倍都不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，这说明 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解集合对加法与数乘不封闭，所以它不构成线性空间.

本题结论说明，一个无限多个向量的集合可以有极大无关组，但此集合并不一定构成线性空间. 线性空间的基一定是极大线性无关组，但一个极大线性无关组(即使是无限多个向量集合中的极大线性无关组)并不一定是基. 换言之，极大线性无关组与基的概念并不等价.

18. 证明线性空间的替换定理：设 $J=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 与 $K=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 是 n 维线性空间 V 的两个向量组，其中 J 线性无关. 如果每个 $\boldsymbol{\alpha}_j\in J$ 都可由 K 线性表示，则 $s\leqslant t$，且可将 K 中的某 s 个向量换成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，使得新的向量组生成的子空间与 K 生成的子空间相同.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=a_{1i}\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+a_{ti}\boldsymbol{\beta}_t,1\leqslant i\leqslant s$，则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{A}\qquad(\text{即 }\boldsymbol{J}=\boldsymbol{KA})$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{t\times s}\in P^{t\times s}$，由于 J 线性无关，故 $\boldsymbol{Jx}=\mathbf{0}$ 只有零解，即 $\boldsymbol{KAx}=\mathbf{0}$，从而 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解，因此 $s\leqslant t$.

进一步，考虑集合 $L=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$. 在 L 中按顺序删除前 s 个与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的 $\boldsymbol{\beta}_j$ 即可使得新的向量组生成的子空间与 K 生成的子空间相同.

19. 证明有限维线性空间的任意两个基所含向量的个数相同.

证明 由于两个基可以互相线性表示，故本题结论由上题可得.

20. 求出教材中例 1.1.5 所述线性空间 $\mathbb{R}^+$ 的一个基与维数.

解 首先注意到 $\mathbb{R}^+$ 中的单位元为 1，任取 $r\in\mathbb{R}^+$，且 $r\neq0$，设 $k\circ a=1$，那么 $a^k=1$，于是 $k=0$. 再任取 $s\in\mathbb{R}^+$，设 $s=l\circ r=r^l$，可得 $l=\log_r s$. 这表明 $\mathbb{R}^+$ 中任何一个非零数都可以作为 $\mathbb{R}^+$ 的基，从而其维数为 1.

21. 求下列线性空间的基及维数.

(1) $V_1=\{\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)\mid 2x_1-x_2=0\}$；

(2) $V_2=\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA},\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{3\times3}\}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$；

(3) $V_3=\{\boldsymbol{A}_{n\times n}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}\}$.

解 (1) $\forall\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)\in V_1$ 且 $2x_1-x_2=0$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,2x_1,x_3)=x_1(1,2,0)+x_3(0,0,1)$$

这表明 V_1 中任意 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)$ 线性表示，且易见 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的一组基，$\dim=2$.

(2) 令 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$，由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 得

$$\begin{bmatrix} x_1+x_4 & x_2+x_5 & x_3+x_6 \\ x_4+x_7 & x_5+x_8 & x_6+x_9 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & x_1+x_2 & x_2+x_3 \\ x_4 & x_4+x_5 & x_5+x_6 \\ x_7 & x_7+x_8 & x_8+x_9 \end{bmatrix}$$

由其对应关系得 $x_4=x_7=x_8=0$，$x_1=x_5=x_9$，$x_2=x_6$ 及 x_3 是任意的，令 $x_1=x_5=x_9=a$，$x_2=x_6=b$，$x_3=c$ 就有

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$=a\boldsymbol{A}_1+b\boldsymbol{A}_2+c\boldsymbol{A}_3$$

易知 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 是线性无关的，故 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 是 V_1 的一组基，$\dim V_2=3$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，知 $a_{ii}=0$，$a_{ij}=-a_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{A}$ 可表为如下矩阵的组合式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
$$=a_{12}\boldsymbol{G}_{12}+a_{13}\boldsymbol{G}_{13}+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{G}_{1n}+a_{23}\boldsymbol{G}_{23}+\cdots+a_{n-1n}\boldsymbol{G}_{n-1n}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ji}$，$i<j$，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示该矩阵中第 i 行第 j 列元素为 1，其他元素皆为 0 的矩阵.

易知 $\boldsymbol{G}_{12},\boldsymbol{G}_{13},\cdots,\boldsymbol{G}_{n-1n}$ 是线性无关的，故它们是 V_3 的一组基，基向量个数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，因而 $\dim V_3=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

22. 设 $V=\{\boldsymbol{\alpha}=(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{C}\}$.

(1) V 在通常向量加法和数乘下，在复数域上是多少维空间？

(2) V 在通常向量加法和数乘下，在实数域上是多少维空间？

解 (1) 设 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$，它们是线性无关的，对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，有 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y)=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，其中组合系数 $x,y\in\mathbb{C}$，故 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是 V 的基，故 $\dim V=2$.

(2) 在实数域上，对 $\forall\boldsymbol{\alpha}=(x,y)\in V$，在用某一组基向量线性表示时，其组合系数必须在实数域范围内选取，因此要将 $x,y\in\mathbb{C}$ 表示为

$$x=a+b\mathrm{i},\quad y=c+d\mathrm{i},\quad \mathrm{i}=\sqrt{-1},\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

则有

$$\boldsymbol{\alpha}=(x,y)=(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})=a(1,0)+b(\mathrm{i},0)+c(0,1)+d(0,\mathrm{i})$$

令

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0),\quad \boldsymbol{\beta}_2=(\mathrm{i},0),\quad \boldsymbol{\beta}_3=(0,1),\quad \boldsymbol{\beta}_4=(0,\mathrm{i})$$

易知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是线性无关的，且有

$$\forall\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\beta}_1+b\boldsymbol{\beta}_2+c\boldsymbol{\beta}_3+d\boldsymbol{\beta}_4$$

从而求得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是 V 的一组基，$\dim V=4$.

评注　本题说明同一个线性空间 V，讨论的数域不同，这个线性空间的维数可能不同.

23. 设 $P[x]_{n+1}$ 是次数不大于 n 的实系数多项式空间，

$$W=\{f(x)\mid f(1)=0,f(x)\in P[x]_{n+1}\}$$

证明 W 是一个线性空间，并求一组基及维数.

证明　设 $f_1(x),f_2(x)\in W,f_1(1)=f_2(1)=0$

$$[f_1+f_2](1)=f_1(1)+f_2(1)=0$$
$$[kf](1)=k[f(1)]=k\cdot 0=0$$

则知 $f_1+f_2\in W,kf\in W$，故 W 是 $P[x]_{n+1}$ 的子空间. 令 $g_i(x)=x^i-1,i=1,2,\cdots,n$，有 $g_i(1)=0$，下证 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 是线性无关的.

事实上，考察

$$k_1g_1(x)+k_2g_2(x)+\cdots+k_ng_n(x)=0$$

即

$$k_1(x-1)+k_2(x^2-1)+\cdots+k_n(x^n-1)=0$$
$$k_1x+k_2x^2+\cdots+k_nx^n-(k_1+k_2+\cdots+k_n)=0$$

解得　$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $g_1(x),\cdots,g_n(x)$ 线性无关.

又设

$$\forall f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in W$$

由 $f(1)=0$ 有 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=a_1(x-1)+a_2(x^2-1)+\cdots+a_n(x^n-1)+a_0+a_1+\cdots+a_n\\&=a_1g_1(x)+a_2g_2(x)+\cdots+a_ng_n(x)\end{aligned}$$

故 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 是 W 的基，$\dim W=n$

24. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性空间中4个线性无关向量，求

$$W=L[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1]$$

的基及维数.

解　设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

知 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=3$，由此得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关，而由对应关系可知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是极大无关组，也是 W 的一组基，$\dim W=3$.

25. $\mathbb{R}^4$中,设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-4,-5)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-3,6,7)^{\mathrm{T}}$.

(1) 设$W=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$,求$W$的一组基及维数;

(2) $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,求$N(\boldsymbol{A})$的基及维数(其中$N(\boldsymbol{A})$称为矩阵$\boldsymbol{A}$的零空间,即为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解空间);

(3) 记$R(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}=\boldsymbol{AX},\forall\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^4\}=\{\boldsymbol{y}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4\}=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$(即$R(\boldsymbol{A})$为$\boldsymbol{A}$的像空间)

求$R(\boldsymbol{A})$的基及维数.

解 (1) 设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&1&1&-3\\2&2&-4&6\\3&3&-5&7\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

知$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=3$,由$\boldsymbol{B}$矩阵中前3列向量线性无关知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$的极大无关组,故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$W$的一组基,$\dim W=3$.

(2) 先求$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解空间$N(\boldsymbol{A})$. 由上面矩阵$\boldsymbol{B}$知$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解为$x_1=0,x_2=k,x_3=2k,x_4=k$,即$\boldsymbol{X}=k(0,1,2,1)^{\mathrm{T}}$,故$\boldsymbol{\alpha}=(0,1,2,1)^{\mathrm{T}}$是$N(\boldsymbol{A})$的基,$\dim N(\boldsymbol{A})=1$.

(3) 因$R(\boldsymbol{A})=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$,由上面$\boldsymbol{B}$知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$R(\boldsymbol{A})$的基,$\dim R(\boldsymbol{A})=3$.

26. 在n维向量空间$\mathbb{R}^n$中,问分量满足下列条件的全体向量能否构成子空间?

(1) $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$;

(2) $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$.

解 (1) 设$\mathbb{R}^n$的子集合为$\mathbb{L}$,对任意$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{L}$,有

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad\sum_{i=i}^{n}a_i=0$$

对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{L}$,$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n),\quad\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i=0$$

又 $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,\cdots,ka_n)$,$\sum_{i=1}^{n}ka_i=k\sum_{i=1}^{n}a_i=0$,所以$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{L}$,$k\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{L}$,因此$\mathbb{L}$是$V$的子空间.

(2) 对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{L}$,$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=1,\quad\sum_{i=1}^{n}b_i=1$$

故 $$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n),\quad\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i=2$$

于是可知$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin\mathbb{L}$,因此$\mathbb{L}$不是$V$的子空间.

27. 假定$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\mathbb{R}^3$的一组基,试求由

$$\boldsymbol{\alpha}'_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\quad\boldsymbol{\alpha}'_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\quad\boldsymbol{\alpha}'_3=4\boldsymbol{\alpha}_1+13\boldsymbol{\alpha}_2$$

生成的子空间$\mathrm{Span}(\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3)$的基.

解　$\mathrm{Span}(\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3)$的基为$\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3$的一个最大无关组，$\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标依次为

$$(1,-2,3)^{\mathrm{T}},\qquad (2,3,2)^{\mathrm{T}},\qquad (4,13,0)^{\mathrm{T}}$$

该列向量组的一个最大无关组为$(1,-2,3)^{\mathrm{T}},(2,3,2)^{\mathrm{T}}$. 因此，$\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3$的一个最大无关组为$\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2$，即$\mathrm{Span}(\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3)$的一个基为$\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2$.

28. 判断下列子集是否构成子空间？

(1) 给定矩阵$\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\mathbb{R}^{n\times n}$的子集：

$$V_1=\{\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA},\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$$

(2) $\mathbb{R}^{2\times 2}$的子集：

$$V_1=\{\boldsymbol{A}\,|\,\det\boldsymbol{A}=0,\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\};V_2=\{\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\}$$

解　(1) 因为$\boldsymbol{0}_{n\times n}\in V_1$，所以$V_1$非空. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in V_1$，则有$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA},\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{PB}$. 又因为$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$，$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=k(\boldsymbol{AP})=k(\boldsymbol{PA})=\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{A})(k\in\mathbb{R})$，所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in V_1$，$k\boldsymbol{A}\in V_1$，故$V_1$是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间.

(2) 取$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，则$\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}=0$，从而$\boldsymbol{A}\in V_1,\boldsymbol{B}\in V_1$，但$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\neq 0$，所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\notin V_1$，故$V_1$不是子空间.

又$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，从而$\boldsymbol{A}\in V_2$，$2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$，$(2\boldsymbol{A})^2=\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}\neq 2\boldsymbol{A}$，所以$2\boldsymbol{A}\notin V_2$，故$V_2$也不是子空间.

29. 试证：在$\mathbb{R}^4$中，由$(1,1,0,0),(1,0,1,1)$生成的子空间与由$(2,-1,3,3),(0,1,-1,-1)$生成的子空间相同.

证明　因为

$$(2,-1,3,3)=(-1)(1,1,0,0)+3(1,0,1,1)$$
$$(0,1,-1,-1)=(1,1,0,0)+(-1)(1,0,0,1)$$

即生成的子空间有相同的基，所以它们生成的子空间相同.

30. 已知$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\end{bmatrix}$及$\mathbb{R}^{2\times 2}$的子空间{见28题(1)}

$$V_1=\{\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA},\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\}$$

(1) 求V_1的基与维数；

(2) 写出V_1中的矩阵的一般形式.

解　(1) 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\in V_1$，则由$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA}$可得齐次方程组

$$\begin{cases}-3x_3=0\\3x_1+x_2-3x_4=0\\-x_3=0\\3x_3=0\end{cases}$$

求得基础解系为$(1,-3,0,0)^{\mathrm{T}},(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，从而$V_1$的基为

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & -3\\0 & 0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\dim V_1=2$$

(2) V_1 的矩阵一般形式为 $\boldsymbol{A}=k_1\boldsymbol{A}_1+k_2\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -3k_1\\0 & k_2\end{bmatrix}(k_1,k_2\in\mathbb{R})$.

31. 设 V_1、V_2 都是线性空间 V 的子空间，且 $V_1\subseteq V_2$，证明：如果 $\dim V_1=\dim V_2$，则 $V_1=V_2$.

证明 若 V_1 的维数为 0，则 V_1 与 V_2 都是零空间，当然相等；若 V_1 的维数是 $m\neq 0$，由于 $V_1\subseteq V_2$，故 V_1 的任一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 都是 V_2 的线性无关组. 又因 V_2 与 V_1 的维数相同，故这个线性无关组也是 V_2 的一组基，即 V_1 与 V_2 有相同的基，因此 $V_1=V_2$.

32. 求$\mathbb{R}^4$的子空间：

$$V=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\mid a_1-a_2+a_3-a_4=0\}$$

$$W=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\mid a_1+a_2+a_3+a_4=0\}$$

的交 $V\cap W$ 的一组基.

解 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in V\cap W$，则有

$$a_1-a_2+a_3-a_4=0,\qquad a_1+a_2+a_3+a_4=0$$

由此相加或相减可得 $a_1+a_3=0,a_2+a_4=0$，从而 $a_1=-a_3,a_2=-a_4$，故得

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,-a_1,-a_2)=a_1(1,0,-1,0)+a_2(0,1,0,-1)$$

但$(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)$线性无关，即为所求的基.

33. 给定$\mathbb{R}^{2\times 2}=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 2}\mid a_{ij}\in\mathbb{R}\}$(即数域$\mathbb{R}$上的二阶实方阵按通常矩阵的加法与数乘构成的线性空间)的子集：

$$V=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 2}\mid a_{11}+a_{22}=0,a_{ij}\in\mathbb{R}\}$$

(1) 证明 V 是$\mathbb{R}^{2\times 2}$的子空间；

(2) 求 V 的维数与基.

解 (1) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 2},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{2\times 2}\in V$，则 $a_{11}+a_{22}=0,b_{11}+b_{22}=0$，因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{2\times 2}$，$(a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})=0$，$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{2\times 2}$，$(ka_{11})+(ka_{22})=0$，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in V,k\boldsymbol{A}\in V$，又 $\boldsymbol{0}_{2\times 2}\in V$，所以 V 是$\mathbb{R}^{2\times 2}$的子空间.

(2) 在 V 中取 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$，它们线性无关. 因为 $a_{11}+a_{22}=0$，即 $a_{22}=-a_{11}$，于是 $\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{A}_1+a_{12}\boldsymbol{A}_2+a_{21}\boldsymbol{A}_3$，因此，$V$ 的一组基为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$，从而 $\dim V=3$.

34. 判别下列集合是否构成子空间：

(1) $W_1=\{\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R},x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\mathbb{R}$ 为实数域$\}$；

(2) $W_2=\{\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$；

(3) $\mathbb{R}^3$中，$W_3=\left\{\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)\,\middle|\,\int_0^t(x_1\tau^2+x_2\tau+x_3)\mathrm{d}\tau=0\right\}$；

(4) $W_4=\left\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0,\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}\right\}$.

解 (1) W_1 不是，因为加法或数乘运算不封闭. 例如 $k=2,\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0),k\boldsymbol{\alpha}=(2,0,0)$，$x^2+y^2+z^2=4>1$，所以 $k\boldsymbol{\alpha}\overline{\in} W_1$.

(2) W_2 不是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间，因为 $\boldsymbol{0}\overline{\in} W_2$.

(3) W_3 是. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3)\in W_3$, 即有 $\int_0^t(x_1\tau^2+x_2\tau+x_3)\mathrm{d}\tau=0$, $\int_0^t(y_1\tau^2+y_2\tau+y_3)\mathrm{d}\tau=0$, 而对于 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$, 有

$$\begin{aligned}&\int_0^t[(x_1+y_1)\tau^2+(x_2+y_2)\tau+(x_3+y_3)]\mathrm{d}\tau\\=&\int_0^t(x_1\tau^2+x_2\tau+x_3)\mathrm{d}\tau+\int_0^t(y_1\tau^2+y_2\tau+y_3)\mathrm{d}\tau=0\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W_3$. 同理可证 $k\boldsymbol{\alpha}\in W_3$, 满足加法与数乘封闭性, 故 W_3 是子空间.

(4) W_4 是. 因为

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$, 则

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(a_{ij}+b_{ij})=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n b_{ij}=0$$

即有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in W_4$.

同样 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$,

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n ka_{ij}=k\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}=k\cdot 0=0$$

即有 $k\boldsymbol{A}\in W_4$, 说明加法和数乘都封闭, 所以 W_4 是一个子空间.

35. 证明: 设 $U_1=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r]$, $U_2=L[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s]$, 则 $U_1=U_2$ 的充分必要条件是生成元 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价.

证明 必要性 若 $U_1=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r]=U_2=L[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s]$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_i\in U_1$, $i=1,2,\cdots,r$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_i\in U_2$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 U_2 中的生成元 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 同理取 $\boldsymbol{\beta}_i\in U_2$, $i=1,2,\cdots,s$, 则 $\boldsymbol{\beta}_i\in U_1$, 故 $\boldsymbol{\beta}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示, 因而两向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 相互线性表示, 即它们等价.

充分性 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in U_1$, $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^r k_i\boldsymbol{\alpha}_i$. 又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价, 则有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{j=1}^r b_{ji}\boldsymbol{\beta}_j$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^r k_i\sum_{j=1}^s b_{ji}\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^s\Big(\sum_{i=1}^r k_ib_{ji}\Big)\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^s c_j\boldsymbol{\beta}_j$$

这表明 $\boldsymbol{\alpha}\in U_2$, 故有 $U_1\subseteq U_2$, 同理也有 $U_2\subseteq U_1$, 从而证得 $U_1=U_2$.

36. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(4,1,3,1)^{\mathrm{T}}$, 令 $V_1=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, $V_2=L[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]$, 求 V_1+V_2 的基与维数.

解 显然 $V_1+V_2=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]$, 所以 V_1+V_2 的维数就是向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$ 的秩. 为此考察矩阵的初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}1&2&1&1&4\\0&0&0&1&1\\2&1&1&0&3\\1&-1&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&2&1&1&4\\0&3&1&0&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

得 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=3$, 而其中的 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 就是 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$ 的一个极大无关组, 也就是 V_1+V_2 的一组基, $\dim(V_1+V_2)=3$.

37. 设 $W_1=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$，$W_2=L[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,3,7)^{\mathrm{T}}$，求 W_1+W_2 与 $W_1\cap W_2$ 的维数，并求出 $W_1\cap W_2$.

解 思路与上题类似. $W_1+W_2=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]$

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\2&1&-1&-1\\1&1&0&3\\0&1&1&7\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&1&1&7\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

得 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=3$，所以 $\dim(W_1+W_2)=3$.

因为 $\dim W_1=2$，$\dim W_2=2$，由维数定理知

$$\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)=4-3=1$$

设

$$\boldsymbol{\alpha}\in W_1\cap W_2,\quad \text{而}\quad \boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=x_3\boldsymbol{\beta}_1+x_4\boldsymbol{\beta}_4$$

即有齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2-x_3\boldsymbol{\beta}_1-x_4\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$$

或写成矩阵形式

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&-2&-1\\2&1&1&1\\1&1&0&-3\\0&1&-1&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

解得 $x_1=-k$，$x_2=4k$，$x_3=-3k$，$x_4=k$.

$\boldsymbol{\alpha}=-k\boldsymbol{\alpha}_1+4k\boldsymbol{\alpha}_2=k(-5,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，即

$$W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{\alpha}=k(-5,2,3,4)^{\mathrm{T}}\}$$

38. 设子空间 $V_1=\{\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$，$V_2=\{\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\mid x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$，求 V_1+V_2 的一组基及 $V_1\cap V_2$ 的维数，并求 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

解 在 V_1 中，$\forall\boldsymbol{\alpha}=(-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=x_2(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+x_3(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}+x_4(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}=x_2\boldsymbol{\alpha}_1+x_3\boldsymbol{\alpha}_2+x_4\boldsymbol{\alpha}_3$ 表明 V_1 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，而这个向量组显然是线性无关的，所以它们是 V_1 的基，$\dim V_1=3$.

同理，在 V_2 中，

$$\begin{aligned}\forall\boldsymbol{\alpha}&=(x_2-x_3+x_4,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=x_2(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+x_3(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}+x_4(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}\\&=x_2\boldsymbol{\beta}_1+x_3\boldsymbol{\beta}_2+x_4\boldsymbol{\beta}_3\end{aligned}$$

显然，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，所以它们是 V_2 中的一个基，$\dim V_2=3$.

令

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}-1&-1&-1&1&-1&1\\1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

由 $\boldsymbol{B}$ 可知：$\text{rank}(\boldsymbol{A})=4$，$\dim(V_1+V_2)=4$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3$ 是生成元 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$ 的极大无关组，也就是 V_1+V_2 的基. 由于

$$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=6-4=2$$

设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\in V_1\cap V_2$，则有

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{X}=k_1(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，则 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基.

39. 求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 生成的子空间与由向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 生成的子空间的交与和的基及维数.

(1) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0),\\\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,1);\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0,1),\\\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,3,7);\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,-2),\\\boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,1,1),\\\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,-1);\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,5,-6,-5),\\\boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,-7,3).\end{cases}$

解 (1) $\dim\text{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}=3$，

$$\dim\text{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}=2,\qquad\dim\text{Span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}=2$$

故交的维数为 $2+2-3=1$，交的一组基为 $(-5,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，和的维数为 3，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\}$ 为一组基.

(2) $\dim\text{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}=4$，

$$\dim\text{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=3,\qquad\dim\text{Span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}=2$$

故交的维数为 1，基为 β_1；和的维数为 4，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\}$ 为一组基.

40. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 n 维线性空间 V 的两组基，证明：

(1) 在两组基下坐标完全相同的全体向量的集合 V_1 是 V 的子空间；

(2) 若空间 V 的每个向量在这两组基下的坐标完全相同，则 $\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i(i=1,2,\cdots,n)$.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1$，且 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$，$\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{e}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$，则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i$$

$$k\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}kx_i\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{n}kx_i\boldsymbol{\varepsilon}_i,\quad k\text{ 是数}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $k\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下的坐标也是相同的，所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1$，$k\boldsymbol{\alpha}\in V_1$，故 $\boldsymbol{V}_1$ 是子空间.

(2) 因 V 中每个向量在两组基下的坐标相同，所以基向量 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标为 $(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，它也应为 $\boldsymbol{e}_i$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标，于是有

$$\boldsymbol{e}_i=1\boldsymbol{\varepsilon}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

41. 试证明所有二阶方阵的集合形成的实线性空间 $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$，是所有二阶实对称矩阵的集合形成的子空间与所有二阶反对称矩阵的集合形成的子空间的直和.

证明 设

$$V_1=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 2}\mid a_{ij}=a_{ji},a_{ij}\in\mathbb{R}\}$$
$$V_2=\{\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{2\times 2}\mid b_{ij}=-b_{ji},b_{ij}\in\mathbb{R}\}$$

容易验证 V_1 与 V_2 都是 V 的子空间. 对任意 $\boldsymbol{C}\in V$ 有

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$$

且 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\in V_1$，$\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\in V_2$，所以 $V=V_1+V_2$.

因为 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{2\times 2}\in V_1\cap V_2\Rightarrow\boldsymbol{D}\in V_1$ 且 $\boldsymbol{D}\in V_2$

$$\Rightarrow d_{ij}=d_{ji}\text{ 且 }d_{ij}=-d_{ji}$$
$$\Rightarrow d_{ij}=0,\quad i,j=1,2$$

即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$，所以 $V_1\cap V_2=\{0\}$，则 $V=V_1\oplus V_2$.

42. 设 V_1、V_2 分别是齐次线性方程组：

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$$

与

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

的解空间，试证明 $P^n=V_1\oplus V_2$.

证明 由齐次线性方程组的理论可推知 V_1 是 $n-1$ 维的，且有基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1,0,\cdots,0,1)$. 又 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，即

$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_2-x_3=0\\\quad\vdots\\x_{n-1}-x_n=0\end{cases}$$

此方程组系数矩阵的秩为 $n-1$，故解空间 V_2 的维数为 1，令 $x_n=1$，便得 V_2 的一组基 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,\cdots,1)$；又以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 为行的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}-1&1&0&\cdots&0&0\\-1&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1},\quad n\neq 0$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 为 P^n 的一组基，且有 $P^n=V_1\oplus V_2$.

43. 证明：每个 n 维线性空间都可以表示成 n 个一维子空间的直和.

证明 设 V 是 n 维线性空间，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为基，则 $L(\boldsymbol{e}_i)$ 都是一维子空间($i=1,2,\cdots,n$)，且有 $L(\boldsymbol{e}_1)+L(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+L(\boldsymbol{e}_n)=L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=V$. 又因 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是基，零向量 $\boldsymbol{\theta}$ 表示式唯一，故这个和是直和，即 $L(\boldsymbol{e}_1)\oplus L(\boldsymbol{e}_2)\oplus\cdots\oplus L(\boldsymbol{e}_n)=V$.

44. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基，$V_1=L[2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1]$，$V_2=L[\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4]$，证明 $\mathbb{R}^4=V_1\oplus V_2$.

证明 显然 $\dim V_1=2,\dim V_2=2$,

$$V_1+V_2=L[2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4]$$

令

$$\boldsymbol{A}=(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4)\xrightarrow{\text{列变换}}(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$$

可见 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\dim(V_1+V_2)=4$,则

$$\mathbb{R}^4=V_1+V_2$$

又由维数定理知

$$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=4-4=0$$

得 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$,故$\mathbb{R}^4=V_1\oplus V_2$.

45. 设连续实函数线性空间 U 中,函数 $\alpha_1=1,\alpha_2=\cos x,\alpha_3=\cos 2x,\alpha_4=\cos 3x$,子空间 $W_1=L[\alpha_1,\alpha_2],W_2=L[\alpha_3,\alpha_4]$,证明:

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关;

(2) $U=W_1\oplus W_2$.

证明 (1) 令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$,即

$$k_1+k_2\cos x+k_3\cos 2x+k_4\cos 3x=0$$

以 $x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\pi$ 代入上式,得

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=0\\ k_1+\frac{\sqrt{2}}{2}k_2-\frac{\sqrt{2}}{2}k_4=0\\ k_1-k_3=0\\ k_1-k_2+k_3-k_4=0\end{cases}$$

解得 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

(2) 由于 $\dim W_1=\dim W_2=2,\dim(W_1+W_2)=\dim L[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=4$,所以由维数定理知 $\dim(W_1\cap W_2)=0$,即 $W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$,故

$$U=W_1\oplus W_2$$

46. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n,s\times n$ 矩阵,齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 无公共解,且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$,方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 r,证明 $N(\boldsymbol{A})\oplus N(\boldsymbol{B})=\mathbb{R}^n$.

证明 由定义 $N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\}$,而齐次线性方程组非零解空间的维数 $\dim N(\boldsymbol{A})=n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n-r$.另一方面,$N(\boldsymbol{B})=\{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}\}$,且已知 $\dim N(\boldsymbol{B})=r$,故

$$\dim N(\boldsymbol{A})+\dim N(\boldsymbol{B})=n$$

又因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 无公共解,即 $N(\boldsymbol{A})\cap N(\boldsymbol{B})=\{\boldsymbol{0}\}$,即 $\dim(N(\boldsymbol{A})\cap N(\boldsymbol{B}))=0$.再由维数定理有

$$\dim(N(\boldsymbol{A})+N(\boldsymbol{B}))=\dim N(\boldsymbol{A})+\dim N(\boldsymbol{B})=n$$

故有

$$N(\boldsymbol{A})\oplus N(\boldsymbol{B})=\mathbb{R}^n$$

47. 设 $A,B,C,D\in\mathbb{R}^{n\times n}$两两可交换,且 $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{I}$,证明 $N(\boldsymbol{AB})=N(\boldsymbol{A})\oplus N(\boldsymbol{B})$.

证明 由定义 $N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\},N(\boldsymbol{B})=\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}\}$,所以 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in N(\boldsymbol{A})+N(\boldsymbol{B})$,由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则

$$(AB)z = ABx + ABy = B(Ax) + A(By) = 0$$

这意味着 $z \in N(AB)$，于是 $N(A)+N(B) \subseteq N(AB)$.

另一方面，因为 $N(AB)=\{z \mid ABz=0\}$，由 $AC+BD=I$，有

$$Iz = (AC + BD)z = ACz + BDz$$

令 $x=ACz$，$y=BDz$，则 $z=x+y$. 又因为

$$Bx = BACz = CBAz = C(ABz) = 0$$

$$Ay = ABDz = D(ABz) = 0$$

说明 $x \in N(B)$，$y \in N(A)$，则 $z=x+y \in N(B)+N(A)$，即有 $N(AB) \subseteq N(A)+N(B)$，从而有

$$N(AB) = N(A) + N(B)$$

最后，设 $\forall x_0 \in N(A) \cap N(B)$，即有 $Ax_0=0$，$Bx_0=0$，而

$$x_0 = Ix_0 = ACx_0 + BDx_0 = CAx_0 + DBx_0 = 0$$

得 $N(A) \cap N(B)=\{0\}$，故证得

$$N(AB) = N(A) \oplus N(B)$$

习　题　1(2)

1. 试说明下列对应规则是$\mathbb{R}^2$的一个变换，并说明其几何意义，其中$(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(1) $\mathscr{A}[(x_1,x_2)]=(x_1,-x_2)$；

(2) $\mathscr{A}[(x_1,x_2)]=(-x_1,x_2)$；

(3) $\mathscr{A}[(x_1,x_2)]=(-x_1,-x_2)$；

(4) $\mathscr{A}[(x_1,x_2)]=(x_1,0)$；

(5) $\mathscr{A}[(x_1,x_2)]=(0,x_2)$.

解　因为对$\mathbb{R}^2$的任一向量(x_1,x_2)，按对应规则$\mathscr{A}$都有$\mathbb{R}^2$中唯一确定的向量与之对应，所以$\mathscr{A}$是$\mathbb{R}^2$的一个变换.

(1) 关于 x 轴的对称变换；

(2) 关于 y 轴的对称变换；

(3) 关于原点的对称变换；

(4) 到 x 轴的投影变换；

(5) 到 y 轴的投影变换.

2. 判别下面所定义的变换，哪些是线性的，哪些不是.

(1) 在线性空间 V 中，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 是一固定的向量；

(2) 在线性空间 V 中，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 是一固定的向量；

(3) 在$\mathbb{R}^3$中，$\mathscr{A}[(x_1,x_2,x_3)]=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$，其中$(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$；

(4) 在$\mathbb{R}^3$中，$\mathscr{A}[(x_1,x_2,x_3)]=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$，其中$(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$；

(5) 在 $P[x]_n$ 中，$\mathscr{A}[f(x)]=f(x+1)$，其中 $f(x) \in P[x]_n$；

(6) 在 $P[x]_n$ 中，$\mathscr{A}[f(x)]=f(x_0)$，其中 $x_0 \in \mathbb{R}$ 是一固定的实数；

(7) 在$\mathbb{R}^3$中，$\mathscr{A}[(x_1,x_2,x_3)]=(\cos x_1,\sin x_2,0)$，其中$(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

解　(1) 不是. 因为 $\mathscr{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2)=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}\neq k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta})=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+k_2)\boldsymbol{\beta}$

(2) 不是. 因为

$$\mathscr{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\beta}\neq k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=(k_1+k_2)\boldsymbol{\beta}$$

(3) 不是. 因为取 $\boldsymbol{x}=(1,0,0)$, $k\neq1$ 时,

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{x})=(k^2,0,0)\neq k\mathscr{A}(\boldsymbol{x})=k(1,0,0)=(k,0,0)$$

(4) 是. 因为设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$

$$\mathscr{A}(k_1\boldsymbol{x}+k_2\boldsymbol{y})=k_1(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)+k_2(2y_1-y_2,y_2+y_3,y_1)=k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{x})+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{y})$$

(5) 是. 因为 $\mathscr{A}(k_1f_1(x)+k_2f_2(x))=k_1f_1(x+1)+k_2f_2(x+1)=k_1\mathscr{A}(f_1(x))+k_2\mathscr{A}(f_2(x))$

(6) 是. 因为 $\mathscr{A}(k_1f_1(x)+k_2f_2(x))=k_1f_1(x_0)+k_2f_2(x_0)=k_1\mathscr{A}(f_1(x))+k_2\mathscr{A}(f_2(x))$

(7) 不是. 因为设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(k_1\boldsymbol{x}+k_2\boldsymbol{y})&=(\cos(k_1x_1+k_2y_1),\sin(k_1x_2+k_2y_2),0)\neq k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{x})+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{y})\\&=k_1(\cos x_1,\sin x_2,0)+k_2(\cos y_1,\sin y_2,0)\\&=(k_1\cos x_1+k_2\cos y_1,k_1\sin x_2+k_2\sin y_2,0)\end{aligned}$$

3. 在$\mathbb{R}^2$中,设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2)$,证明:$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})=(x_2,-x_1)$与 $\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})=(x_1,-x_2)$是$\mathbb{R}^2$中的两个线性变换,并求 $\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$及 $\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$.

解　
$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=\mathscr{A}_1[(x_1+y_2,x_2+y_2)]=(x_2+y_2,-x_1-y_1)=(x_2,-x_1)+(y_2,-y_1)\\&=\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}_1(k\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}_1(k(x_1,x_2))=(kx_2,-kx_1)=k(x_2,-x_1)=k\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})$$

所以 $\mathscr{A}_1$是线性变换. 同理可证 $\mathscr{A}_2$也是线性变换.

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2)(\boldsymbol{\alpha})&=(\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2)[(x_1,x_2)]=\mathscr{A}_1[(x_1,x_2)]+\mathscr{A}_2[(x_1,x_2)]\\&=(x_2,-x_1)+(x_1,-x_2)=(x_1+x_2,-x_1-x_2)\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}_1[\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})]=\mathscr{A}_1[(x_1,-x_2)]=(-x_2,-x_1)$$

$$\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}_2[\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})]=\mathscr{A}_2[(x_2,-x_1)]=(x_2,x_1)$$

4. 设任一矩阵 $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$,又给定矩阵 $\boldsymbol{C}\in P^{n\times n}$,定义变换 $\mathscr{A}$如下:$\mathscr{A}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{AC}$.

证明:(1) $\mathscr{A}$是 $P^{n\times n}$中的线性变换;

(2) 对任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in P^{n\times n}$有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{AB})=\mathscr{A}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\mathscr{A}(\boldsymbol{B})$.

证明　(1) 因 $\mathscr{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{AC})+(\boldsymbol{CB}-\boldsymbol{BC})=\mathscr{A}(\boldsymbol{A})+\mathscr{A}(\boldsymbol{B})$

$\mathscr{A}(k\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}(k\boldsymbol{A})-(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}=k(\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{AC})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{A})$

故 $\mathscr{A}$是线性变换.

(2) $\mathscr{A}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\mathscr{A}(\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{AC})\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CB}-\boldsymbol{BC})=\boldsymbol{CAB}-\boldsymbol{ABC}=\mathscr{A}(\boldsymbol{AB})$

5. 设 $V=\left\{\begin{bmatrix}a & a+b\\ c & c\end{bmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$,作出 V 到$\mathbb{R}^3$的同构映射.

解　令$\begin{bmatrix}a & a+b\\ c & c\end{bmatrix}\leftrightarrow(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$,即可.

6. 在 $P[x]_n$ 中,$\mathscr{A}_1[f(x)]=f'(x)$, $\mathscr{A}_2[f(x)]=xf(x)$,证明:$\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2-\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$是恒等变换(即单位变换).

证明　设 $f(x)\in P[x]_n$,则

$$(\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2-\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1)(f(x))=\mathscr{A}_1[\mathscr{A}_2(f(x))]-\mathscr{A}_2[\mathscr{A}_1(f(x))]=\mathscr{A}_1[xf(x)]-\mathscr{A}_2[f(x)]$$
$$=f(x)+xf'(x)-xf'(x)=f(x)$$

故 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2-\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$ 是恒等变换.

7. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是线性空间 V^2 的基，$\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 是 V^2 的线性变换：$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}'_1,\mathscr{A}_1(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}'_2$，且 $\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}'_1+\boldsymbol{e}'_2,\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}'_1-\boldsymbol{e}'_2$，证明：$\mathscr{A}_1=\mathscr{A}_2$.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}\in V^2$，则 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2$，由于

$$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_1)+\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_2)=\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}'_1+\boldsymbol{e}'_2$$
$$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_1)-\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_2)=\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}'_1-\boldsymbol{e}'_2$$

所以，$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}'_1,\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}'_2$，于是

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})=k_1\mathscr{A}_1(\boldsymbol{e}_1)+k_2\mathscr{A}_1(\boldsymbol{e}_2)=k_1\boldsymbol{e}'_1+k_2\boldsymbol{e}'_2=k_1\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_1)+k_2\mathscr{A}_2(\boldsymbol{e}_2)=\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})$$

故 $\mathscr{A}_1=\mathscr{A}_2$.

8. 在 $P[x]_2$ 中，试求在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=1,\boldsymbol{\alpha}_2=x,\boldsymbol{\alpha}_3=x^2$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

的线性变换 $\mathscr{A}$，求 $g=2+4x-7x^2$ 的像.

解 $\forall(f)=a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3\in P[x]_2$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(f)&=\mathscr{A}(a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=\mathscr{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}a+b+c\\b+c\\c\end{bmatrix}\end{aligned}$$

于是

$$\mathscr{A}(g)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}2+4-7\\4-7\\-7\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}-1\\-3\\-7\end{bmatrix}=-1-3x-7x^2$$

9. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，对某个 $\xi\in V$ 有 $\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\mathbf{0},\mathscr{A}^k(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$，试证：$\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})$ 线性无关.

证明 考察

$$l_0\boldsymbol{\xi}+l_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})+l_2\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi})+\cdots+l_{k-1}\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0} \qquad ①$$

用 $\mathscr{A}^{k-1}$ 左乘①式两端，由于 $\mathscr{A}^k(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$，所以 $\mathscr{A}^{k+1}(\boldsymbol{\xi})=\mathscr{A}(\mathscr{A}^k(\boldsymbol{\xi}))=\mathbf{0},\mathscr{A}^{k+2}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0},\cdots$. 这样可得

$$l_0\mathscr{A}^{(k-1)}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$$

因 $\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\mathbf{0}$，所以 $l_0=0$，代入①式有

$$l_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})+l_2\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi})+\cdots+l_{k-1}\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0} \qquad ②$$

再用 $\mathscr{A}^{k-1}$ 左乘②式两端，由 $\mathscr{A}^k(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$ 可得 $l_1=0$，继续下去，可得 $l_2=\cdots=l_{k-1}=0$，于是 $\boldsymbol{\xi}$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{(k-1)}(\boldsymbol{\xi})$ 线性无关.

10. 若 n 维线性空间中线性变换 $\mathscr{A}$ 使得对于 V 中的任何向量 $\boldsymbol{\xi}$ 都有 $\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\mathbf{0}$，$\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\xi})\neq\mathbf{0}$，求 $\mathscr{A}$ 在某一基下的矩阵表示.

解　由于在 n 维线性空间 V 中若有 n 个线性无关的向量，则它们必是 V 的一个基，所以由上题可知 $\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\xi})$ 是 V 的基. 又由

$$\begin{aligned}\mathscr{A}[\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\xi})]&=[\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\xi})]\\&=[\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\xi}),\mathbf{0}]\\&=[\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\xi})]\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}_{n\times n}\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}$$

11. 在 $P[x]_3$ 中，已知线性变换

$$\mathscr{D}f(x)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},\qquad f(x)\in R[x]_4$$

求 $\mathscr{D}$ 在下列基下的矩阵：

(1) $1,x-2,(x-2)^2,(x-2)^3$；

(2) $1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$.

解　(1) 由于 $\mathscr{D}(1)=0,\mathscr{D}(x-2)=1,\mathscr{D}(x-2)^2=2(x-2),\mathscr{D}(x-2)^3=3(x-2)^2$，于是

$$\begin{aligned}\mathscr{D}[1,x-2,(x-2)^2,(x-2)^3]&=[0,1,2(x-2),3(x-2)^2]\\&=[1,x-2,(x-2)^2,(x-2)^3]\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

即 $\mathscr{D}$ 在基 $1,x-2,(x-2)^2,(x-2)^3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(2) 由于 $\mathscr{D}(1)=0,\mathscr{D}(1+x)=1,\mathscr{D}(1+x+x^2)=1+2x,\mathscr{D}(1+x+x^2+x^3)=1+2x+3x^2$
于是

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)\\ =&(0,1,1+2x,1+2x+3x^2)\\ =&(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&2\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{D}$ 在基 $1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&2\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

12. 在$\mathbb{R}^{2\times 2}$空间中,线性变换 $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}-4&0\\1&4\end{bmatrix},\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

求$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$下的矩阵表示.

解 由于

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)&=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_4))\\&=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\\&=\left(\begin{bmatrix}-4&0\\-8&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3&4\\-6&8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-11&4\\-10&8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix}\right)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}-4&-7&-15&0\\8&10&14&0\\-8&-14&-18&0\\0&8&8&3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(注:由 $\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$ 解得 $k_1=-4,k_2=8,k_3=-8,k_4=0$,其余类似.)

所以$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4&-7&-15&0\\8&10&14&0\\-8&-14&-18&0\\0&8&8&3\end{bmatrix}$$

13. 设$\mathbb{R}^3$中,线性变换 $\mathscr{A}$为:$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i,i=1,2,3$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,求

(1) $\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵;

(2) $\mathscr{A}$在标准基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵.

解 (1) 由$[\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)]=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$,可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}[\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)]\\&=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&-2&1\\-1&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(2) 先求从基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

所以$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}^{-1}$,即 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&-2&1\\-1&3&-1\end{bmatrix}$.

$\mathscr{A}$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}&=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&-2&1\\-1&3&-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&-2&1\\-1&3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&5&-2\\-1&5&-2\\-1&4&-2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

14. 在 $P[x]_4$ 中定义线性变换 $\mathscr{A}$:$\forall f(x)\in P[x]_4$,$\mathscr{A}[f(x)]=f'(x)-f(x)$.

(1) 求 $\mathscr{A}$在基 $1,x,x^2,x^3$ 下的矩阵;

(2) 求 $\mathscr{A}$在基 $1,1+x,x+x^2,x^2+x^3$ 下的矩阵.

解　(1) 由 $\mathscr{A}[f(x)]=f'(x)-f(x)$,得

$$\mathscr{A}(1)=-1,\mathscr{A}(x)=1-x,\qquad \mathscr{A}(x^2)=2x-x^2,\qquad \mathscr{A}(x^3)=3x^2-x^3$$

所以 $\mathscr{A}$在基 $1,x,x^2,x^3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&&\\&-1&2&\\&&-1&3\\&&&-1\end{bmatrix}$$

(2) 由于 $\mathscr{A}(1)=-1$,$\mathscr{A}(1+x)=1-(1+x)$,$\mathscr{A}(x+x^2)=-1+2(1+x)-(x+x^2)$,$\mathscr{A}(x^2+x^3)=1-(1+x)+3(x+x^2)-(x^2+x^3)$,故 $\mathscr{A}$在基 $1,1+x,x+x^2,x^2+x^3$ 下的矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&3\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

15. 在$\mathbb{R}^{2\times 2}$中定义线性变换$\mathscr{A}$：$\forall \boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}$，其中矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，求$\mathscr{A}$在标准基$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵.

解 $\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-b\\c&0\end{bmatrix}=-b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{bmatrix}-c&a-d\\0&c\end{bmatrix}=-c\boldsymbol{E}_{11}+(a-d)\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{22}$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{bmatrix}b&0\\d-a&-b\end{bmatrix}=b\boldsymbol{E}_{11}+(d-a)\boldsymbol{E}_{21}-b\boldsymbol{E}_{22}$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{bmatrix}0&b\\-c&0\end{bmatrix}=b\boldsymbol{E}_{12}-c\boldsymbol{E}_{21}$$

故$\mathscr{A}$在基$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}0&-c&b&0\\-b&a-d&0&b\\c&0&d-a&-c\\0&c&-b&0\end{bmatrix}$$

16. 求下列线性变换对所指定基底的矩阵：

(1) $\mathbb{R}^3$中将向量投影到xOy平面上的线性变换$\mathscr{A}$，对基底$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$(直角坐标轴上的单位向量)的矩阵；

(2) 上述线性变换对基底$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{j},\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$的矩阵；

(3) $\mathbb{R}^3$中的线性变换$\mathscr{A}$：$\mathscr{A}[(a_1,a_2,a_3)]=(2a_1-a_2,a_2+a_3,a_1)$，对基底$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$的矩阵；

(4) 由6个函数

$x_1=\mathrm{e}^{at}\cos bt,x_2=\mathrm{e}^{at}\sin bt,x_3=t\mathrm{e}^{at}\cos bt,x_4=t\mathrm{e}^{at}\sin bt,x_5=\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{at}\cos bt,x_6=\frac{1}{2}t^2\sin bt$

的所有实系数线性组合构成实数域$\mathbb{R}$上的一个六维线性空间

$$V^6=\mathrm{Span}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$$

求微分变换$\mathscr{D}$在基x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6下的矩阵.

解 (1) 因为$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$在$xOy$平面上，其投影不变，故有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i},\qquad \mathscr{A}(\boldsymbol{j})=\boldsymbol{j}$$

又$\boldsymbol{k}$垂直xOy平面，则$\mathscr{A}(\boldsymbol{k})=0$，得

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{i}),\mathscr{A}(\boldsymbol{j}),\mathscr{A}(\boldsymbol{k}))=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所求矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

(2) 因为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{i}=1\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\beta}+0\boldsymbol{\gamma}$$
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{j}=0\boldsymbol{\alpha}+1\boldsymbol{\beta}+0\boldsymbol{\gamma}$$
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}=1\boldsymbol{\alpha}+1\boldsymbol{\beta}+0\boldsymbol{\gamma}$$

所以,所求矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

(3) 由 $\mathscr{A}$的定义知,$\mathscr{A}(\boldsymbol{i})=\mathscr{A}((1,0,0))=(2,0,1)$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{j})=\mathscr{A}((0,1,0))=(-1,1,0)$$
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{k})=\mathscr{A}((0,0,1))=(0,1,0)$$

有

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{i}),\mathscr{A}(\boldsymbol{j}),\mathscr{A}(\boldsymbol{k}))=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

所求矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$.

(4) 据题设:$\mathscr{D}(f(t))=f'(t)$,则

$$\begin{cases}\mathscr{D}(x_1)=(\mathrm{e}^{at}\cos bt)'=a\mathrm{e}^{at}\cos bt-b\mathrm{e}^{at}\sin bt=ax_1-bx_2\\ \mathscr{D}(x_2)=(\mathrm{e}^{at}\sin bt)'=ax_2+bx_1\\ \mathscr{D}(x_3)=(t\mathrm{e}^{at}\cos bt)'=x_1+ax_3-bx_4\\ \mathscr{D}(x_4)=(t\mathrm{e}^{at}\sin bt)'=x_2+ax_4+bx_3\\ \mathscr{D}(x_5)=\left(\dfrac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{at}\cos bt\right)'=x_3+ax_5-bx_6\\ \mathscr{D}(x_6)=\left(\dfrac{1}{2}t^2\sin bt\right)'=x_4+ax_6+bx_5\end{cases}$$

于是

$$(\mathscr{D}(x_1),\mathscr{D}(x_2),\mathscr{D}(x_3),\mathscr{D}(x_4),\mathscr{D}(x_5),\mathscr{D}(x_6))=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\boldsymbol{D}$$

所求矩阵为

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}a&b&1&0&0&0\\-b&a&0&1&0&0\\0&0&a&b&1&0\\0&0&-b&a&0&1\\0&0&0&0&a&b\\0&0&0&0&-b&a\end{bmatrix}$$

17. 设三维线性空间 V^3 上的线性变换$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(1) 求$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1$ 下的矩阵；

(2) 求$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{e}_1,k\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵，$k\neq 0$；

(3) 求$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵.

解 (1) $\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{C}$

所以，所求矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

(2) $\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,k\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{C}$

所以，所求矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ \dfrac{a_{21}}{k} & a_{22} & \dfrac{a_{23}}{k} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(3) $\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{C}$

所以，所求矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

18. 在$\mathbb{R}^3$中，设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)$，定义线性变换$\mathscr{A}$为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$$

试求$\mathscr{A}$在自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$下的矩阵.

解 由定义知

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=(2,0,1)=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(-1,1,0)=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(0,1,0)=\boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{cases}$$

所以，所求矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19. 设$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$的线性算子$\mathscr{A}$定义为

$$\mathscr{A}[(a_1,a_2,a_3)] = (2a_1+3a_2-a_3, a_1+a_3)$$

试求$\mathscr{A}$在基偶 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$及 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1=(1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}'_2=(0,1)$下的矩阵.

解　因为

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = (2,1) = 2\boldsymbol{\varepsilon}'_1 + \boldsymbol{\varepsilon}'_2 \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = (3,1) = 3\boldsymbol{\varepsilon}'_1 \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3) = (-1,1) = -\boldsymbol{\varepsilon}'_1 + \boldsymbol{\varepsilon}'_2 \end{cases}$$

所以，所求矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

20. 在 V^3 中，线性变换$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,1)$，$\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{\eta}_3=(0,1,1)$下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $\mathscr{A}$在自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解　$\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

所以，

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3) = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21. 在 V^3 中给定两组基

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,1),\quad \boldsymbol{e}_2 = (2,1,0),\quad \boldsymbol{e}_3 = (1,1,1)$$

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1,2,-1),\quad \boldsymbol{\eta}_2 = (2,2,-1),\quad \boldsymbol{\eta}_3 = (2,-1,-1)$$

定义线性变换$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{\eta}_i$，$i=1,2,3$.

(1) 写出由基$\{\boldsymbol{e}_i\}$到基$\{\boldsymbol{\eta}_i\}$的过渡矩阵；

(2) 写出$\mathscr{A}$在基$\{\boldsymbol{e}_i\}$下的矩阵；

(3) 写出$\mathscr{A}$在基$\{\boldsymbol{\eta}_i\}$下的矩阵.

解　(1) $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{C}$，所以，过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)^{-1}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$$

(2) $(\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3))=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{C}$,所以,$\mathscr{A}$在基$\{\boldsymbol{e}_i\}$下的矩阵就是$\boldsymbol{C}$.

(3) $$\begin{aligned}(\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_3))&=\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{C}\\&=(\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3))\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\boldsymbol{C}\end{aligned}$$

所以$\mathscr{A}$在基$\{\boldsymbol{\eta}_i\}$下的矩阵仍为$\boldsymbol{C}$.

22. 在$\mathbb{R}^{2\times2}$中定义下列线性变换:

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\boldsymbol{A},\qquad \mathscr{A}_2(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}_3(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\qquad \mathscr{A}_4(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}a&2b\\2c&a\end{bmatrix}\boldsymbol{A},$$

其中$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times2}$,$a,b,c,d$都是实数.

(1) 求$\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3$在基$\boldsymbol{E}_{ij}$(第$i$行、第$j$列元素为1,其余为0的二阶方阵)下的矩阵;

(2) 求$\mathscr{A}_4$在基

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

下的矩阵.

解 (1) 由于

$$\begin{cases}\mathscr{A}_1(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{bmatrix}a&0\\0&c\end{bmatrix}=a\boldsymbol{E}_{11}+c\boldsymbol{E}_{21}\\ \mathscr{A}_1(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{bmatrix}0&a\\0&c\end{bmatrix}=a\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{22}\\ \mathscr{A}_1(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{bmatrix}b&0\\d&0\end{bmatrix}=b\boldsymbol{E}_{11}+d\boldsymbol{E}_{21}\\ \mathscr{A}_1(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{bmatrix}0&b\\0&d\end{bmatrix}=b\boldsymbol{E}_{12}+d\boldsymbol{E}_{22}\end{cases}$$

故$\mathscr{A}_1$在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{bmatrix}$$

类似地,可得$\mathscr{A}_2$在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{bmatrix}$$

由于$\mathscr{A}_3=\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$,所以$\mathscr{A}_3$在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}a^2&ac&ab&bc\\ab&ad&b^2&bd\\ac&c^2&ad&cd\\bc&cd&bd&d^2\end{bmatrix}$$

同理,可得$\mathscr{A}_4$ 在该基下的矩阵为

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 2b & 0 \\ 0 & a & 0 & 2b \\ 2c & 0 & a & 0 \\ 0 & 2c & 0 & a \end{bmatrix}$$

(2) 由于由简单基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 改变为给定基 E_1, E_2, E_3, E_4 的过渡矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是,$\mathscr{A}_4$在给定基下的矩阵为

$$B = C^{-1}A_4C = \begin{bmatrix} a & 0 & 2b & -2b \\ 0 & a & 2c & 2c \\ c & b & a & 0 \\ -c & b & 0 & a \end{bmatrix}$$

23. 设线性空间 V^3 的两组基为

(Ⅰ) e_1, e_2, e_3; (Ⅱ) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

由基(Ⅰ)变到基(Ⅱ)的过渡矩阵 $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,线性变换$\mathscr{A}$满足

$$\begin{cases} \mathscr{A}(e_1 + 2e_2 + 3e_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \mathscr{A}(2e_1 + e_2 + 2e_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \mathscr{A}(e_1 + 3e_2 + 4e_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

(1) 求$\mathscr{A}$在基(Ⅱ)下的矩阵 A;

(2) 求$\mathscr{A}(\varepsilon_1)$在基(Ⅰ)下的坐标.

解 (1) 将题给关系式写成矩阵形式为

$$(\mathscr{A}(e_1), \mathscr{A}(e_2), \mathscr{A}(e_3)) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\mathscr{A}(e_1, e_2, e_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)B$$

由于$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (e_1, e_2, e_3)C$,所以有

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathscr{A}(e_1, e_2, e_3)C = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)BC$$

故$\mathscr{A}$在基(Ⅱ)下的矩阵

$$A = BC = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \\ 6 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

(2) 因为$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$$=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{CA}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix}3\\5\\9\end{bmatrix}$$

所以$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)$在基(Ⅰ)下的坐标为(3,5,9).

24. 设 $P[x]_2$ 的两组基为

(Ⅰ) $f_1(x)=1+2x^2$, $f_2(x)=x+2x^2$, $f_3(x)=1+2x+5x^2$;

(Ⅱ) $g_1(x)=1-x$, $g_2(x)=1+x^2$, $g_3(x)=x+2x^2$.

线性变换$\mathscr{A}$满足:

$$\mathscr{A}[f_1(x)]=2+x^2,\quad \mathscr{A}[f_2(x)]=x,\quad \mathscr{A}[f_3(x)]=1+x+x^2$$

(1) 求 $\mathscr{A}$在基(Ⅱ)下的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 设 $f(x)=1+2x+3x^2$,求$\mathscr{A}[f(x)]$.

解 (1) 取 $P[x_2]$的简单基 $1,x,x^2$,则有

$$\mathscr{A}(f_1,f_2,f_3)=(1,x,x^2)A_0=(1,x,x^2)\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

从简单基改变到基 f_1,f_2,f_3 和 g_1,g_2,g_3 的过渡矩阵分别为

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&2&5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

故有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(g_1,g_2,g_3)&=\mathscr{A}(1,x,x^2)\boldsymbol{C}=\mathscr{A}(f_1,f_2,f_3)\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2\\&=(1,x,x^2)\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2=(g_1,g_2,g_3)\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2\end{aligned}$$

即$\mathscr{A}$在基(Ⅱ)下的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&-1&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

(2) 因为 $f(x)=(1,x,x^2)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=(g_1,g_2,g_3)\boldsymbol{C}_2^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=(g_1,g_2,g_3)\begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix}$,所以

$$\mathscr{A}(f(x))=\mathscr{A}(g_1,g_2,g_3)\begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix}=(g_1,g_2,g_3)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix}$$

$$=(g_1,g_2,g_3)\begin{bmatrix}4\\-5\\3\end{bmatrix}=-1-x+x^2$$

25. 设$\mathscr{A}$是数域 P 上的 n 维线性空间 V^n 的一个线性变换，证明：如果$\mathscr{A}$在任意一组基下的矩阵都相同，则$\mathscr{A}$是数乘变换.

证明 设$\mathscr{A}$在给定基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，并设 $\boldsymbol{C}$ 为从旧基到新基的过渡矩阵，由于$\mathscr{A}$在任一组基下的矩阵相同，则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$，即 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，根据"$\boldsymbol{A}$ 与一切满秩矩阵可交换"性质，即可定出 $\boldsymbol{A}$ 必为数量矩阵($\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}$，$k$ 常数).

26. 在$\mathbb{R}^3$中，线性变换$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,1,1)$下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&3&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$$

线性变换$\mathscr{B}$在基 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\eta}_2=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3)$下的矩阵为 $\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$，求$\mathscr{A}+\mathscr{B}$，$\mathscr{A}\mathscr{B}$，$\mathscr{B}\mathscr{A}$，$\mathscr{B}(\mathscr{A}+\mathscr{B})$在基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$下的矩阵.

解 由基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

故$\mathscr{B}$在基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$下的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}10&3&-5\\4&6&4\\8&6&-4\end{bmatrix}$. 那么，$\mathscr{A}+\mathscr{B}$，$\mathscr{A}\mathscr{B}$，$\mathscr{B}\mathscr{A}$，$\mathscr{B}(\mathscr{A}+\mathscr{B})$在基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$下的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}10&15&-11\\10&24&4\\-4&6&2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{AB}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&6&12\\22&21&7\\-12&0&6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}13&29&-15\\-2&26&0\\14&34&-12\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}75&96&-54\\42&114&-6\\78&120&-36\end{bmatrix}$$

27. 设$\mathscr{A}$是线性空间$\mathbb{R}^3$上的线性变换，它在$\mathbb{R}^3$中基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵表示是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}$$

(1) 求$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵；

(2) 求$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的核与值域.

解 (1) 由题意知

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

则$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4&4\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{bmatrix}$$

(2) 由于$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,所以$\mathscr{A}$的核是零空间,再由维数定理知$\mathscr{A}$的值域是线性空间$\mathbb{R}^3$.

28. 设 $V=\mathbb{R}^3$中的线性变换$\mathscr{A}$为

$$\mathscr{A}[(x,y,z)^{\mathrm{T}}]=(x+y-z,y+z,x+2y)^{\mathrm{T}}$$

(1) 求$\mathscr{A}$的值域$\mathscr{A}(V)$的维数及一组基;

(2) 求$\mathscr{A}$的核$\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{0})$的维数及一组基.

解 (1) 由题意,考察自然基的像:

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(1,1,2)^{\mathrm{T}},\qquad \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

于是

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

故$\mathscr{A}$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&2&0\end{bmatrix},\text{但}\,|\boldsymbol{A}|=0$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 中的三个列向量线性相关,而前面两个列向量线性无关.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间为

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{A})&=\mathrm{Span}\{(1,0,1)^{\mathrm{T}},(1,1,2)^{\mathrm{T}},(-1,1,0)^{\mathrm{T}}\}\\&=\mathrm{Span}\{(1,0,1)^{\mathrm{T}},(1,1,2)^{\mathrm{T}}\}\end{aligned}$$

故线性变换$\mathscr{A}$的值域为

$$\mathscr{A}(V)=\mathrm{Span}\{(1,0,1)^{\mathrm{T}},(1,1,2)^{\mathrm{T}}\}$$

那么知$\mathscr{A}(V)$的维数为 2,基为$(1,0,1)^{\mathrm{T}},(1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的核是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间,不难求得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是$(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$,因此$\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{0})$的维数是 1,基为 $2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3=(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

评注 求线性变换的值域以及核时,经常先确定线性空间的某组基,然后找到线性变换在该基下的矩阵,之后求出矩阵的列空间与核空间.最后,把它们转化到线性空间找出极大无关组,从而得到维数与一组基.

29. 设 V^3 中从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

线性变换满足

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\\\mathscr{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3\\\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3\end{cases}$$

(1) 求$\mathscr{A}$在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵$\boldsymbol{A}$；

(2) 求$\boldsymbol{\beta}_1$的像$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1)$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标.

解　(1) 依题意有

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3))\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&3\\3&2&4\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3))&=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&3\\3&2&4\end{bmatrix}^{-1}\\&=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-1&-5&4\\2&5&-4\end{bmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-1&-5&4\\2&5&-4\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&3&-2\\1&5&-4\\3&7&-6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以$\mathscr{A}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\1&5&-4\\3&7&-6\end{bmatrix}$.

(2) 由于$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{B}$，而$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，所以

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1)&=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_3))\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\&=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}3&-3&-1\\5&-5&1\\9&-7&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}3\\5\\9\end{bmatrix}\end{aligned}$$

则$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1)$在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标是$(3,5,9)^{\mathrm{T}}$.

30. 设$\mathscr{A}$是n维空间V^n的线性变换，$\boldsymbol{\alpha}\in V^n$，$\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})\neq\boldsymbol{0}$，$\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$是$V^n$的基；

(2) 求$\mathscr{A}$在基$\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$下的矩阵.

解　(1) 考察$k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$，两边同左乘以$\mathscr{A}^{n-1}$：

$$k_0\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})+k_1\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_{n-1}\mathscr{A}^{2(n-1)}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$$

因$\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，得$k_0\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，又$\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})\neq\mathbf{0}$，故$k_0=0$. 同理用$\mathscr{A}^{n-2}$左乘$k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_{n-1}\mathscr{A}^{(n-1)}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，得$k_1=0$，以此类推，得$k_2=\cdots=k_{n-1}=0$. 故$\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$线性无关，它们必是$V^n$的基.

(2) 由于

$$\begin{aligned}&[\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})),\cdots,\mathscr{A}(\mathscr{A}^{n-2}(\boldsymbol{\alpha})),\mathscr{A}(\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}))]\\&=[\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-2}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})]\begin{bmatrix}0&&&&\\1&0&&&\\0&1&\ddots&&\\\vdots&\vdots&\ddots&&\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以$\mathscr{A}$在$\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-2}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&&&&\\1&0&&&\\0&1&\ddots&&\\\vdots&\vdots&\ddots&&\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}_{n\times n}$$

31. 设$\mathscr{A}$是$\mathbb{R}^n$的线性变换，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$，

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{X}$$

(1) 证明$\mathscr{A}^n=\mathbf{0}$；

(2) 求$\mathscr{A}$的核$N(\mathscr{A})$及像空间$R(\mathscr{A})$的基和维数.

解 (1) 由于$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=(0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^2(\boldsymbol{X})=\mathscr{A}(\mathscr{A}(\boldsymbol{X}))&=\mathscr{A}[(0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}]\\&=(0,0,x_1,\cdots,x_{n-2})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

以此类推，得

$$\mathscr{A}^n(\boldsymbol{X})=\mathbf{0}$$

由于X的任意性，则$\mathscr{A}^n=\mathbf{0}$.

(2) 要使$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$，则

$$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=0,\quad 取\quad x_n=1$$

故

$$N(\mathscr{A})=\{\boldsymbol{X}\,|\,\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\mathbf{0}\}=L[\boldsymbol{\alpha}=k(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}]$$

则$\dim N(\mathscr{A})=1$，基为$(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对于$R(\mathscr{A})$的任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}(\boldsymbol{X})&=(0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}=x_1(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+x_2(0,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+\\&\quad x_{n-1}(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$是线性无关的，所以它是$R(\mathscr{A})$的基，$\dim R(\mathscr{A})=n-1$.

32. 设线性算子 $\mathscr{A}$：$\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$，有

$$\mathscr{A}[(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}]=(x_1-x_2+x_3+x_4,x_1+2x_2-x_4,x_1+x_2+3x_3-x_4)^{\mathrm{T}}$$

求 $\mathscr{A}$ 的 $N(\mathscr{A})$ 及 $R(\mathscr{A})$.

解　由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$ 有如下的齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3+x_4=0\\x_1+2x_2-x_4=0\\x_1+x_2+3x_3-x_4=0\end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{X}=k(-2,3,1,4)^{\mathrm{T}}$，故 $N(\mathscr{A})=\{\boldsymbol{X}=k(-2,3,1,4)^{\mathrm{T}}\}$.

设 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}'\in R(\mathscr{A})$，由题意有

$$\boldsymbol{X}'=(x_1-x_2+x_3+x_4,x_1+2x_2-x_4,x_1+x_2+3x_3-x_4)^{\mathrm{T}}=$$
$$x_1(1,1,1)^{\mathrm{T}}+x_2(-1,2,1)^{\mathrm{T}}+x_3(1,0,3)^{\mathrm{T}}+x_4(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$$

由于像空间是3维的，所以取前面3个线性无关的向量生成像空间：

$$R(\mathscr{A})=\{\boldsymbol{\alpha}=k_1(1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,1)^{\mathrm{T}}+k_3(1,0,3)^{\mathrm{T}}\}$$

33. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V^n 的基，$\mathscr{A}$ 是 V^n 的一个线性变换，证明：$\mathscr{A}$ 是可逆线性变换的充分必要条件是基像 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性无关.

证明　必要性　若 $\mathscr{A}$ 是可逆的，有

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 为可逆，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也线性无关.

充分性　由于 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性无关，则它们在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标组成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必可逆，$\boldsymbol{A}$ 对应的线性变换 $\mathscr{A}$ 也可逆.

34. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 是 n 维线性空间 V^n 的两个线性无关组，证明一定存在 V^n 上的可逆线性变换 $\mathscr{A}$，使 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i,i=1,2,\cdots,k$.

证明　因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关，把它们扩为 V^n 的基

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$$

同样把 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 扩为 V^n 的基

$$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k,\boldsymbol{\beta}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$$

由教材中定理1.1.11知，必存在线性变换 $\mathscr{A}$，使

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

同样也存在线性变换 $\mathscr{B}$，使

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta}_i)=\boldsymbol{\alpha}_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

即有

$$\mathscr{B}(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i))=\boldsymbol{\alpha}_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

故有 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\boldsymbol{I}$，即 $\mathscr{A}$ 是 V^n 上的可逆线性变换.

35. 设 W_1,W_2 是线性空间 V^n 的两个子空间，$W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{\theta}\}$，$\dim W_1+\dim W_2=n$，证明存在线性变换 $\mathscr{A}$，使得

$$R(\mathscr{A})=W_1,\qquad N(\mathscr{A})=W_2$$

证明　设 W_1 中的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，由于 $W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{\theta}\}$ 及 $\dim W_1+\dim W_2=n$，所以必可在 W_2 中找到 $n-r$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V^n 的基，$W_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$，$W_2=L(\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\dim W_2=n-r$. 下面定义一个线性变换：

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\alpha}_1\\ \quad\vdots\\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_r)=\boldsymbol{\alpha}_r\\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_{r+1})=\boldsymbol{0}\\ \quad\vdots\\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

由教材中定理 1.1.11 知$\mathscr{A}$是一个线性变换，且 $R(\mathscr{A})=W_1$，$N(\mathscr{A})=W_2$.

36. 已知$\mathbb{R}^{n\times n}$中线性变换$\mathscr{A}$为：$\forall \boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$$

求$\mathscr{A}$的值域 $R(\mathscr{A})$的基及维数.

解 设 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{n\times n}$，由$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & x_{12}-x_{21} & x_{13}-x_{31} & \cdots & x_{1n}-x_{n1}\\ x_{21}-x_{12} & 0 & x_{23}-x_{32} & \cdots & x_{2n}-x_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1}-x_{1n} & x_{n2}-x_{2n} & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-x_{ji})G_{ij},\quad i<j$$

其中 $G_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$，G_{ij} 共有$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$个，它们是线性无关的，故为 $R(\mathscr{A})$的一组基，$\dim R(\mathscr{A})=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

37. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，证明：$\operatorname{adj}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{adj}(\boldsymbol{B})\cdot\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$.

证明 分两步：①如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，则由线性代数知等式显然成立.

②设 $x\in\mathbb{P}$ 为参数，则除有限个 x 外，$\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{B}-x\boldsymbol{I}$ 对其余无限多个数均可逆，因此等式对这无限多个数 x 均成立，即

$$\operatorname{adj}[(\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}-x\boldsymbol{I})]=\operatorname{adj}(\boldsymbol{B}-x\boldsymbol{I})\cdot\operatorname{adj}(\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I})$$

于是上式两端矩阵的任意第 i 行第 j 列相应元素均相等，但这些元素均是 x 的多项式，而两个多项式如果对无限多个数均相等，则它们只能是同一个多项式，因此，上式两端的相应位置的元素对“所有”x 均相等，特别对 $x=0$ 也相等，即

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{adj}(\boldsymbol{B})\cdot\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$$

38. 证明：对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^n)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{n+1})$.

证明 由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{i+1})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^i)$，故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{n+1}$中必有两个矩阵 $\boldsymbol{A}^s$ 与 $\boldsymbol{A}^t$ 的秩相同，不妨假设 $s<t$，于是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^s)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{s+1})=\cdots=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^t)$. 下证必有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{t+1})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^t)$.

考虑方程组 $\boldsymbol{A}^{t+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的任意解 $\boldsymbol{\alpha}$，由于 $\boldsymbol{A\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^t)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{t-1})$，故 $\boldsymbol{A}^{t-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解，故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{t+1})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^t)$. 重复上述步骤可知

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^i)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^j),\quad i,j\geqslant s$$

39. 设 ω 是 n 次本原单位根$\left(可设\ \omega=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$，试求傅里叶矩阵

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)}\end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

解　对任意 $0<j<n$ 均有 $\overline{\omega^j}\omega^j=1$ 以及 $(\omega^j)^0+(\omega^j)^1+\cdots+(\omega^j)^{n-1}=0$,因此 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^*=n\boldsymbol{I}$,所以 $\boldsymbol{F}^{-1}=\frac{1}{n}\boldsymbol{F}^*$.

40. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 是 n 维列向量. 如果 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}})^{-1}$ 可逆,证明 Sherman-Morrison 公式:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}}$$

证明　上式两端左乘 $\boldsymbol{A}$ 可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}})^{-1}=\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}}$$

再取逆可得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}}\right)^{-1}$$

即

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}}\right)^{-1}$$

上式可以直接验证(仅需注意 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$ 是数即可).

41. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似,证明 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}$ 相似.

证明　设有可逆方阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}$,则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}$$

即 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}$ 相似.

42. 证明:$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$.

证明　设 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r_1$,$\mathrm{rank}\boldsymbol{B}=r_2$,则 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的行向量的极大无关组中分别含有 r_1,r_2 个行向量,设分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的每个行向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 线性表示,$\boldsymbol{B}$ 的每个行向量均可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 线性表示. 又知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的每个行向量是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的相应行向量的和,故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的每个行向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1},\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 线性表示. 因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的行向量组的极大无关组中所含向量的个数不超过 r_1+r_2,即 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$.

43. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$,证明:若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$,则 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}\leqslant n$.

证明　设 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_n)=\boldsymbol{0}$$

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\theta}$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\theta}$,$\cdots$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\theta}$. 这就说明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 都是以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次方程组的解. 由于 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r$,所以解空间的维数为 $n-r$,从而知 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的极大无关组所含向量的个数 $\leqslant n-r$,即 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}\leqslant n-r$,因此有

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}\leqslant r+n-r=n$$

44. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是使积 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 有定义的任意矩阵,证明:

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\leqslant\min\{\mathrm{rank}\boldsymbol{A},\mathrm{rank}\boldsymbol{B}\}$$

证明 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同一数域上的 $m\times n$ 与 $n\times g$ 矩阵，显然，方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\theta}$ 的解向量 $\boldsymbol{X}$ 也满足方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\theta}$，记

$$U=\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\theta}\},\qquad V=\{\boldsymbol{X}\mid(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\theta}\}$$

则 $U\subset V$，于是 $\dim U=n-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\leqslant n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\dim V$，即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

又由于

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$$

因此 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}$.

45. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，证明：

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$$

证明 由上题知，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$，现在只需证明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ 即可.

考虑线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\theta}$，设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是方程组的一组解，将 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\theta}$ 两边左乘 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\theta}$，即 $(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\theta}$，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\theta}$，即 $\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\}\subset\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\}$. 于是

$$n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$$

即有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$，故有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$，并且有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$$

即有 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})$.

评注 对复矩阵 $\boldsymbol{A}$，上式不一定成立. 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$.

由于

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=0$. 此时，相应的关系式应为

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AA}^{*})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})$$

46. 证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\theta}$.

证明 必要性　由上题已证得，充分性只要在 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\theta}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 即可.

47. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times s}$，证明：

(1) 若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$，则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$；

(2) 若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=n$，则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$.

证明 (1) 因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$，故 $m\geqslant n$，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 n 行线性无关，且构成的 n 阶满秩方阵为 $\boldsymbol{A}_1$，后 $m-n$ 行构成的矩阵为 $\boldsymbol{A}_2$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

所以 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B})=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，但 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

(2) 同理可证.

48. 举出 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的例子，使得

(1) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})<\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$，或 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$；

(2) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$；

(3) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})>\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$，或 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

解　(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$,　　$B=\begin{bmatrix}-1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}$;

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$,　　$B=\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$;

(3) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$,　　$B=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$.

49. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$，证明：当 $m>n$ 时，方阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 为降秩的.

证明　因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{C}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B})\leqslant\min(m,n)$，但 $m>n$，故 m 阶方阵 $\boldsymbol{C}$ 的秩 $\leqslant n<m$，所以 $\boldsymbol{C}$ 是降秩的.

50. 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_i &= a_{1i}\boldsymbol{\beta}_1+a_{2i}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{mi}\boldsymbol{\beta}_m\\ &=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{mi}\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,s\end{aligned}$$

试证：向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 的秩 = 矩阵 $(a_{ij})_{m\times s}$ 的秩.

证明　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 的列向量组的秩为 r，不妨设前 r 个列向量线性无关，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量都可由这 r 个列向量线性表示，即

$$(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^{\mathrm{T}}=\Big(\sum_{j=1}^{r}k_ja_{1j},\sum_{j=1}^{r}k_ja_{2j},\cdots,\sum_{j=1}^{r}k_ja_{mj}\Big)^{\mathrm{T}},\quad i=1,2,\cdots,s$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_i &= \Big(\sum_{j=1}^{r}k_ja_{1j}\Big)\boldsymbol{\beta}_1+\Big(\sum_{j=1}^{r}k_ja_{2j}\Big)\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\Big(\sum_{j=1}^{r}k_ja_{mj}\Big)\boldsymbol{\beta}_m\\ &=\sum_{j=1}^{r}k_j(a_{1j}\boldsymbol{\beta}_1+a_{2j}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{mj}\boldsymbol{\beta}_m)=\sum_{j=1}^{r}k_j\boldsymbol{\xi}_j,\quad i=1,\cdots,s\end{aligned}$$

由此可见向量组 $\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s\}$ 可由自身前 r 个向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示，因此 $\dim L(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s)=\dim L(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r)\leqslant r=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$. 下证等号成立(只需证 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 线性无关即可)：

事实上，若 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\xi}_r=\boldsymbol{0}$，则由

$$\boldsymbol{\xi}_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\boldsymbol{\beta}_i,\quad i=1,2,\cdots,s$$

可得

$$\Big(\sum_{i=1}^{r}k_ia_{1i}\Big)\boldsymbol{\beta}_1+\Big(\sum_{i=1}^{r}k_ia_{2i}\Big)\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\Big(\sum_{i=1}^{r}k_ia_{mi}\Big)\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$$

由题设 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关，必有

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1r}k_r=0\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}k_1+a_{m2}k_2+\cdots+a_{mr}k_r=0\end{cases}$$

此线性方程组的系数矩阵前 r 行恰是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个线性无关的列，所以系数矩阵的秩为 r，故齐次方程组只有零解，即 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，那么 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 的秩 = 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

51. 试证：(1) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})^k=\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})^k, k=1,2,\cdots$，其中 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹.

(2) 试证：$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^k=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^k$，$\lambda_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(3) 若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.

证明 (1) 由 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$，从而

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})^k&=\operatorname{tr}[(\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AB}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}]\\&=\operatorname{tr}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{A}]=\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})^k\end{aligned}$$

(2) 设 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i$，则 λ_i^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值，故有 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^k)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^k$.

(3) 由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{B}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})=\operatorname{tr}[(\boldsymbol{AP})\cdot\boldsymbol{P}^{-1}]=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

52. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n, n\times m$ 矩阵，证明：

$$\lambda^m|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\beta A}|=\lambda^n|\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB}|$$

其中 $\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{I}_m$ 为单位矩阵.

证明 设 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times m},\boldsymbol{Q}_{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}&\boldsymbol{D}_{12}\\\boldsymbol{D}_{21}&\boldsymbol{D}_{22}\end{bmatrix}$，其 $\boldsymbol{D}_{11}$ 为 $r\times r$ 矩阵，则

$$\boldsymbol{PABP}^{-1}=(\boldsymbol{PAQ})(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}&\boldsymbol{D}_{12}\\\boldsymbol{D}_{21}&\boldsymbol{D}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}&\boldsymbol{D}_{12}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BAQ}=(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1})(\boldsymbol{PAQ})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{D}_{21}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB}|&=|\boldsymbol{P}(\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}^{-1}|=\left|\lambda\boldsymbol{I}_m-\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}&\boldsymbol{D}_{12}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right|\\&=|\lambda\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{D}_{11}||\lambda\boldsymbol{I}_{m-r}|=\lambda^{m-r}|\lambda\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{D}_{11}|\end{aligned}$$

$$|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA}|=\left|\lambda\boldsymbol{I}_n-\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{D}_{21}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right|=|\lambda\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{D}_{11}||\lambda\boldsymbol{I}_{n-r}|=\lambda^{n-r}|\lambda\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{D}_{11}|$$

从而证得 $\lambda^m|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA}|=\lambda^n|\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB}|$.

53. 设 $\mathscr{A}$ 是数域 $\mathbb{C}$ 上线性空间 V^3 的线性变换，已知 $\mathscr{A}$ 在 V^3 的基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}$$

求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量.

解 先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量为

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\qquad \boldsymbol{\alpha}_1=(3,-6,20)^{\mathrm{T}}$$
$$\lambda_3=-2,\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故$\mathscr{A}$的特征值和特征向量为

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\qquad k(3\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2+20\boldsymbol{e}_3),\quad k\neq 0$$
$$\lambda_3=-2,\qquad k\boldsymbol{e}_3,\quad k\neq 0$$

54. 求复数域$\mathbb{C}$上的线性空间 V 的线性变换$\mathscr{A}$的特征值与特征向量.已知$\mathscr{A}$在一组基下的矩阵为

(1) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&3\\-1&-3&0\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$.

解 (1) $\lambda_1=\lambda_2=1,\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\lambda_3=-1,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\lambda_1=0,\boldsymbol{\alpha}_1=(3,-1,2)^{\mathrm{T}},\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{14}\mathrm{i},\boldsymbol{\alpha}_{2,3}=(6\pm\sqrt{14}\mathrm{i},-2\pm3\sqrt{14}\mathrm{i}-10)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\lambda_1=\lambda_2=1,\boldsymbol{\alpha}_1=(3,-6,20)^{\mathrm{T}},\lambda_3=-2,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$;

(4) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}},\lambda_4=-2,\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$.

以上分别求出了$\mathscr{A}$在不同基下所对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量,则类似于上题的方法,可求出$\mathscr{A}$在不同基下所对应的特征值和特征向量.

55. 在上题,哪些是非亏损矩阵(单纯矩阵)?对于非亏损矩阵,求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$.

解 (1),(2),(4)为非亏损矩阵(单纯矩阵),其变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 分别为

(1) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}3&6+\sqrt{14}\mathrm{i}&6-\sqrt{14}\mathrm{i}\\-1&-2+3\sqrt{14}\mathrm{i}&-2-3\sqrt{14}\mathrm{i}\\2&-10&-10\end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$.

56. 设$\mathscr{A}$是线性空间 V 上的线性变换,证明:$\mathscr{A}$可逆的充分必要条件是$\mathscr{A}$没有等于零的特征值.

证明 设$\mathscr{A}$在给定基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则

$$\det\boldsymbol{A}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\neq 0\Leftrightarrow\lambda_i\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

57. 证明:不论 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为怎样的两个 n 阶方阵,$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征多项式,因此有相同的特征值和迹.

证明 设 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$，则存在满秩矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{0})$，故有

$$\boldsymbol{PABP}^{-1}=\boldsymbol{PAQQ}^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{0})\boldsymbol{C}$$

其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}^{-1}=(C_{ij})$，这说明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{0})$ 相似.

另一方面，有 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BAQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1}\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{C}\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{0})$，说明 $\boldsymbol{BA}$ 与 $\boldsymbol{C}\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{0})$ 相似. 不难验证有

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{0})\boldsymbol{C})=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{0}))$$

故 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征多项式，因此有相同的特征值和迹.

58. 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值为 λ，对应于 λ 的特征子空间记为 V_λ. 对 V_λ 中任意向量 $\boldsymbol{Z}$ 有

$$\boldsymbol{ABZ}=\boldsymbol{BAZ}=\boldsymbol{B}\lambda\boldsymbol{Z}=\lambda\boldsymbol{BZ}$$

故 $\boldsymbol{BZ}\in V_\lambda$，因此 V_λ 为线性变换 $\mathscr{A}(\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{BZ}$ 的不变子空间，即 $\mathscr{A}(\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{BZ}$ 为 V_λ 中的线性变换，此线性变换的特征向量即为 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，但它又属于 V_λ，由 V_λ 的定义知它又是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量.

59. 设 $\boldsymbol{V}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 的一个线性变换. 已知 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$$

求 $\mathscr{A}$ 的全部特征值与特征向量.

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$.

当 $\lambda=1$ 代入，得 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，求基础解系为 $(-2,1,0)^{\mathrm{T}},(2,0,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{\xi}_1=-2\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\xi}_2=2\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3$，那么对应于 $\lambda=1$ 的全部特征向量是

$$\{k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\mid k_1,k_2\in\mathbb{C},k_1,k_2\text{ 为不同时为 0 的任意数}\}$$

当 $\lambda=10$ 时，解 $(10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，令 $\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\eta}_1+2\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3$，那么对应于 $\lambda=10$ 的全部特征向量是

$$\{k_3\boldsymbol{\xi}_3\mid k_3\in\mathbb{C},k_3\neq0\}$$

60. 设 $\mathscr{A}$ 是数域上的线性空间 V 的线性变换，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 分别为 $\mathscr{A}$ 的三个互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 对应的特征向量.

(1) 证明：$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 是线性无关的；

(2) 证明：$\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证明 (1) 考察

$$k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+k_3\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{0} \tag{①}$$

$$k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_2)+k_3\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_3)=\boldsymbol{0}$$

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{X}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{X}_2+k_3\lambda_3\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{0} \tag{②}$$

由①式又有

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{X}_1+k_2\lambda_1\boldsymbol{X}_2+k_3\lambda_1\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{0} \tag{③}$$

②－③式得

$$k_2(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{X}_2+k_3(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{0} \tag{④}$$

再用$\mathscr{A}$作用④式两端得

$$k_2(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2 \boldsymbol{X}_2+k_3(\lambda_3-\lambda_1)\lambda_3 \boldsymbol{X}_3=\mathbf{0} \tag{⑤}$$

由④式可得

$$k_2(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2 \boldsymbol{X}_2+k_3(\lambda_3-\lambda_1)\lambda_2 \boldsymbol{X}_3=\mathbf{0} \tag{⑥}$$

⑤－⑥式可得

$$k_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\boldsymbol{X}_3=\mathbf{0}$$

因 $\boldsymbol{X}_3\neq\mathbf{0}$，$\lambda_3-\lambda_1\neq 0$，$\lambda_3-\lambda_2\neq 0$，故 $k_3=0$，将其代入①式得

$$k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2=\mathbf{0}$$

类似用前面的步骤可证 $k_2=0$，$k_1=0$，因此 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$ 线性无关.

(2) 用反证法. 假设 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，那么有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3)=\lambda(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3)$$

$$\lambda_1\boldsymbol{X}_1+\lambda_2\boldsymbol{X}_2+\lambda_3\boldsymbol{X}_3=\lambda(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3)$$

移项后可得

$$(\lambda_1-\lambda)\boldsymbol{X}_1+(\lambda_2-\lambda)\boldsymbol{X}_2+(\lambda_3-\lambda)\boldsymbol{X}_3=\mathbf{0}$$

由第(1)题结论，必有

$$\lambda_1-\lambda=0,\qquad \lambda_2-\lambda=0,\qquad \lambda_3-\lambda=0$$

从而 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$，这与 λ_1，λ_2，λ_3 互不相同矛盾，所以 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3$ 不是$\mathscr{A}$的特征向量.

61. 已知三阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

试求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值与特征向量.

解 设 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，两端左乘 $\boldsymbol{A}^*$ 后，有

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X},\quad 即\quad |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}$$

经计算知$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，推得 $\lambda\neq 0$，所以有

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{X}$$

上式说明当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$ 时，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值便是$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，其对应的特征向量仍然为 $\boldsymbol{X}$.

由于$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$.

对应于 $\lambda=1$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$，其中 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1\neq 0$；对应于 $\lambda=2$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中 $\boldsymbol{\xi}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_2\neq 0$.

因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为

$$\mu_1=\mu_2=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=2,\qquad \mu_3=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=1$$

$\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$，$k_1\neq 0$；而属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_2\neq 0$.

62. 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 2\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解 由于 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2n)\lambda^{n-1}$,所以知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\quad \lambda_n=2n$$

对于 $\lambda=0$,解齐次方程组 $(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\cdots$,$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$,于是 $\boldsymbol{A}$ 属于 0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$,其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 是不全为 0 的任意数.

对于 $\lambda=2n$,解 $(2n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_n=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,于是属于 $2n$ 的全部特征向量是 $k_n\boldsymbol{\alpha}_n$,其中 $k_n\neq0$.

63. 已知两个 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 都是非零列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$,若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解 由于 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,所以 $|\boldsymbol{A}|^2=0$,即 $|\boldsymbol{A}|=0$,故 $\boldsymbol{A}$ 必有零特征值,其对应的特征矩阵 $0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n\\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$

(b_i 不全为 0)

可见 $\operatorname{rank}(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$,于是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量有 $n-1$ 个,因此 $\boldsymbol{A}$ 至少有 $n-1$ 个零特征值(即 $\lambda=0$ 是 $n-1$ 重根). 又由于 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$,这说明 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 个特征值 $\lambda_n=0$,故 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全为零.

由于齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 中的系数矩阵秩为 1,所以该齐次方程组可写成 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$,故特征值 $\lambda=0$ 的线性无关的 $n-1$ 个特征向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(-b_2,b_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2&=(-b_3,0,b_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\\ &\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}&=(-b_n,0,\cdots,0,b_1)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

64. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

求 $\boldsymbol{\beta}+4\boldsymbol{I}$ 的特征值与特征向量,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

解 由于

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-7),\text{因此 }\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解 $(1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda_3=7$，解 $(7\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

由于 $|\boldsymbol{A}|=7$，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=7\boldsymbol{A}^{-1}$，而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $1,1,\frac{1}{7}$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 7，7，1，其对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. 又因为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，说明 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 相似，故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值也是 7，7，1.

下面来求 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 对应于 μ_i 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_i=\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i$，那么

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*,\qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_i=\mu_i\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_i$$

这表明 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 μ_i，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_i$，于是求得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_i=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$. 也就是说，这三个向量便是 $\boldsymbol{B}$ 对应其三个特征值 7，7，1 的三个特征向量.

$\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{I}$ 的三个特征值必然是 $\mu_1+4=11$，$\mu_2+4=11$，$\mu_3+4=5$，它们对应的全部特征向量为

$$\{k_1(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}\mid k_1,k_2\text{ 不全为零}\}$$
$$\{k_3(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}\mid k_3\text{ 为任意非零数}\}.$$

65. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，且 $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$，$i=1,2,\cdots,n$，证明：$\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ 的绝对值 $|\lambda|<1$.

证明　记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的分量中绝对值最大者为 $|x_k|$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的第 k 个方程

$$\lambda x_k=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j$$

$$|\lambda||x_k|=\left|\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}||x_j|$$

$$|\lambda|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|\frac{|x_j|}{|x_k|}\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|<1$$

即有 $|\lambda|<1$.

66. 设三阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$$

的二重特征值 $\lambda=2$ 对应有两个线性无关的特征向量.

(1) 求 x,y；

(2) 求 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解　(1) 对应 $\lambda=2$ 的特征方程为 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其中

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{bmatrix}$$

由于$\lambda=2$是二重特征值，所以应有两个线性无关的特征向量，那么$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$的秩应为1，故有$x-2=0,-x-y=0$，即

$$x=2,\qquad y=-2$$

(2) 由$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$，得$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

容易求得$\lambda_1=\lambda_2=2$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；关于$\lambda_3=6$对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$，故有$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$$

67. 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$有n个相异的特征值，若有n阶矩阵$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则$\boldsymbol{B}$可对角化.

证明 因$\boldsymbol{A}$有n个不同的特征值，故可对角化，即有矩阵$\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix},\quad \lambda_i\neq\lambda_j,i\neq j$$

因$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，所以有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

令$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$，得

$$\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

由于$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$互异，所以不难用归纳法证得上式只有在矩阵$\boldsymbol{D}$是对角矩阵的情况下才能成立. 例如，当$n=2$时，设

$$\begin{bmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}\lambda_1d_{11}&\lambda_1d_{12}\\\lambda_2d_{21}&\lambda_2d_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1d_{11}&\lambda_2d_{12}\\\lambda_1d_{21}&\lambda_2d_{22}\end{bmatrix}$$

有

$$(\lambda_1-\lambda_2)d_{12}=0,\qquad(\lambda_1-\lambda_2)d_{21}=0$$

因为$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以有$d_{12}=0,d_{21}=0$. 此结论对n阶矩阵也成立，即$\boldsymbol{D}$是对角矩阵

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\mu_1&&&\\&\mu_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mu_n\end{bmatrix}$$

68. 设a_1,a_2是$\boldsymbol{A}_{n\times n}$的两个不同特征值，且有

$$\mathrm{rank}(a_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\mathrm{rank}(a_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n$$

证明：$\boldsymbol{A}$可以对角化.

证明 记 $\mathrm{rank}(a_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=r$，那么 $\mathrm{rank}(a_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-r$. 对于 $\lambda_1=a_1$，解齐次方程组 $(a_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 $n-r$ 个线性无关的特征向量；而对于 $\lambda_2=a_2$，解齐次方程组 $(a_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 又得 r 个线性无关的特征向量. 这样 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 有 n 个线性无关的特征向量组成可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

69. 设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$，试证：$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能为 ±1；若特征值都等于 1，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_i，则 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为 λ_i^2，由 $\lambda_i^2=1$ 有 $\lambda_i=\pm1$，若所有 $\lambda_i=1$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 为满秩矩阵，故由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}^2=\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

70. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且有一个可逆，证明：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似，且有相同的特征多项式.

证明 不失一般性，设 $\boldsymbol{B}$ 非奇异，有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似，所以它们有相同的特征多项式.

71. 证明：幂等矩阵 $\boldsymbol{A}$(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)与对角矩阵相似，并且 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{0})$，其中 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=r$.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，具其秩为 r，由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 1 的特征向量. 因 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=\gamma$，故特征值 1 的几何重复度为 r，其代数重复度至少为 r. 又 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\theta}$ 的基础解系中的向量个数为 $n-r$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 0 的几何重复度为 $n-r$，其代数重复度不小于 $n-r$. 由于一个 n 阶矩阵的特征值的代数重复度之和恰为 n，故特征值 1 和 0 的代数重复度分别为 r 和 $n-r$. 可见 $\boldsymbol{A}$ 除了 1 和 0 外无其他特征值，而 1 和 0 的几何重复度之和为 n，故 $\boldsymbol{A}$ 为非亏损矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 相似 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{0})$.

72. 若方阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$($k$ 为某一正整数)，则 $\boldsymbol{A}$ 不可能相似于对角矩阵.

证明 用反证法. 若 $\boldsymbol{A}$ 可相似于对角矩阵，对角元素即为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且至少有一个不为 0. 但是，由于 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，于是 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\lambda^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta}$，所以 $\lambda^k=0$，故 $\lambda=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都等于 0，矛盾.

73. 设 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，证明：$\boldsymbol{X}$ 也是 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征向量(其中 $f(x)$ 为 x 的任一多项式). 又问，对应于 $\boldsymbol{X}$ 的 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值有什么关系？

证明 由 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X})=k\lambda\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}=\lambda^k\boldsymbol{X}$，从而有 $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=f(\lambda)\boldsymbol{X}$，即 $\boldsymbol{X}$ 也是 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征向量. 显然 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $f(\lambda)$，即为 λ 的多项式.

74. 设 $\mathbb{R}^3$ 中有向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)$，线性变换定义为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=(-2x_2,-2x_3,-2x_1+3x_2-x_3,-2x_1-x_2+3x_3)$$

求 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基，使 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵.

解 取 $\mathbb{R}^3$ 中的自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$，计算得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=(0,-2,-2),\qquad \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(-2,3,-1),\qquad \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(-2,-1,3)$$

则 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-2&-2\\-2&3&-1\\-2&-1&3\end{bmatrix}$$

而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=-2$，与之对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2=(-1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_3=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(4,4,-2)$$

其中 $C=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\2&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. 由 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{C}$ 求得 $\mathbb{R}^3$ 的另一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2=(-1,2,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,0,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3=(2,1,1)$, 显然 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

75. 在 $P[x]_2$ 中, 设 $f(x)=k_1+k_2x+k_3x^2$, 线性变换 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathscr{A}[f(x)]=(k_2+k_3)+(k_1+k_3)x+(k_1+k_2)x^2$$

(1) 试写出 $\mathscr{A}$ 在基 $1,x,x^2$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求 $P[x]_2$ 的一组基, 使 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵.

解 (1) 因为 $\mathscr{A}(1)=x+x^2$, $\mathscr{A}(x)=1+x^2$, $\mathscr{A}(x^2)=1+x$, 所以 $\mathscr{A}$ 在基 $1,x,x^2$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$.

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 原特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$, 相应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, 使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}$, 故所求的基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(1,x,x^2)\boldsymbol{C}=(-1+x,-1+x^2,1+x+x^2)$$

76. 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, 线性空间 $V=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times2}\mid a_{11}+a_{22}=0, a_{ij}\in\mathbb{R}\}$ 的变换 $\mathscr{A}$ 为: $\mathscr{A}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\quad(\boldsymbol{A}\in V)$.

(1) 验证 :$\mathscr{A}$是线性变换;

(2) 求 V 的一组基, 使 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵.

解 (1) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 及 $k,l,\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})&=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\\&=k(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})+l(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\\&=k(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))+l(\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换.

(2) 取 V 的简单基

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

由于

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{A}_1)=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\qquad \mathscr{A}(\boldsymbol{A}_2)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\qquad \mathscr{A}(\boldsymbol{A}_3)=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

所以$\mathscr{A}$在基 A_1,A_2,A_3 下的矩阵为

$$R=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

R 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2$,对应的线性无关的特征向量为$(1,1,0)^{\mathrm{T}},(0,1,1)^{\mathrm{T}},(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$,令

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad \Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{bmatrix}$$

则有 $C^{-1}RC=\Lambda$,由$(B_1,B_2,B_3)=(A_1,A_2,A_3)C$ 求得 V 的另一组基为 $B_1=A_1+A_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}$,$B_2=A_2+A_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,$B_3=A_2-A_3=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$,$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为 Λ.

77. 设线性空间 V^n 的线性变换$\mathscr{A}_1$ 与$\mathscr{A}_2$ 满足

$$\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2=\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2$$

证明:(1) 1 不是$\mathscr{A}_1$ 的特征值;

(2) 若$\mathscr{A}_1$ 的 n 个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互不相同,则存在 V^n 的一组基,使$\mathscr{A}_1$ 与$\mathscr{A}_2$ 在该基下的矩阵都是对角矩阵.

证明 (1) 取 V^n 的一组基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$,设

$$\mathscr{A}_1(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$$

$$\mathscr{A}_2(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)B$$

则有

$$(\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2)(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)(AB)$$

$$(\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2)(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)(A+B)$$

由 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2=\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2$,可得 $AB=A+B$,从而有 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$.

若 1 是 $\mathscr{A}_1$的特征值,则 1 也是 A 的特征值,从而 1 也是 A^{T} 的特征值,设 A^{T} 对应于特征值 1 的特征向量为 β,即 $A^{\mathrm{T}}\beta=\beta(\beta\neq 0)$,由$(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\beta=(A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}})\beta$,可得 $B^{\mathrm{T}}\beta=\beta+B^{\mathrm{T}}\beta$,即 $\beta=0$,这与 β 是 A^{T} 的特征向量矛盾,故 1 不是$\mathscr{A}_1$ 的特征值.

(2) 因$\mathscr{A}_1$ 有几个不同的特征值,所以$\mathscr{A}_1$ 有 n 个线性无关的特征向量.记$\mathscr{A}_1$ 的对应于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的线性无关的特征向量为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,即$\mathscr{A}_1X_i=\lambda_iX_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 作为 V^n 的基时,$\mathscr{A}_1$的矩阵 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 再由 $AB=A+B$ 及$\lambda_i\neq 1$ 知

$$B=(A-I)^{-1}A=\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1},\frac{\lambda_2}{\lambda_2-1},\cdots,\frac{\lambda_n}{\lambda_n-1}\right)$$

即$\mathscr{A}_1$ 与$\mathscr{A}_2$ 在该基 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 下的矩阵都为对角阵.

78. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=kA(k\neq 0)$,试证:A 相似于对角矩阵.

证明 设 A 的特征值为λ,因 $A^2=kA(k\neq 0)$,所以 $\lambda^2=k\lambda$,A 的特征值只能是$\lambda=0$ 和$\lambda=k$.

由 $A^2=kA$ 有 $A(kI-A)=0$,自然满足

$$\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}(kI-A)\leqslant n$$

另一方面,$\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}(kI-A)\geqslant\mathrm{rank}(A+kI-A)=\mathrm{rank}(kI)=n$,因此

$$\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}(kI-A)=n$$

如果设 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r$，则 $\mathrm{rank}(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-r$，而 $\lambda=0$ 的特征矩阵 $0\cdot\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$ 的秩也为 r，它所对应的线性无关的特征向量有 $n-r$ 个；而特征值 $\lambda=k$ 的特征矩阵 $k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的秩是 $n-r$，则它对应的线性无关的特征向量有 r 个. 故 $\boldsymbol{A}$ 共有 n 个线性无关的特征向量，那么 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵.

79. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&x&0\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&2&0\\-1&y&0\\-2&-2&1\end{bmatrix}$$

(1) 求 x,y 的值；

(2) 证明：$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均可相似对角化.

解 (1) 由于相似矩阵有相同的迹及相同的行列式值，所以 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=3+x$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{B}=4+y$，由 $3+x=4+y$ 得

$$x=1+y \qquad ①$$

$|\boldsymbol{A}|=2x$，$|\boldsymbol{B}|=3y+2$，由 $2x=3y+2$ 得

$$x=\frac{3}{2}y+1 \qquad ②$$

由①，②解得 $x=1$，$y=0$，故

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&2&0\\-1&0&0\\-2&-2&1\end{bmatrix}$$

(2) 证明：因为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的两个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

对应于 $\lambda_3=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，有

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

同理，可求得

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}-1&0&-2\\1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

且有

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

80. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶矩阵且满足 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$. 由于 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，有

$$(\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

即 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}-5\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+6\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，将 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$ 代入，可得 $(\lambda^2-5\lambda+6)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda^2-5\lambda+6=0$，解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2 和 3. 注意到 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$，显然有如下的秩不等式

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\leqslant n \qquad ①$$

但是，①式左端又可以化为

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})&=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\\&\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}+3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\boldsymbol{I}=n\end{aligned}$$

即

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\geqslant n \qquad ②$$

综合①与②有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=n$$

设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=s$，则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=n-s$，意味着 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系有 $n-s$ 个解向量，即 $\lambda=2$ 有 $n-s$ 个线性无关的特征向量.

另外，$(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，它的基础解系有 $n-(n-s)=s$ 个解向量，即 $\lambda=3$ 有 s 个线性无关的特征向量.

把对应于 $\lambda=2$ 和 $\lambda=3$ 的所有特征向量放在一起，则可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量，从而 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

81. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，问 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化吗？为什么？将本题一般化有什么结论？

解 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\left(\boldsymbol{A}-\dfrac{\boldsymbol{I}}{2}\right)^2+\dfrac{7\boldsymbol{I}}{4}=\boldsymbol{0}$，即

$$\left(\boldsymbol{A}-\frac{\boldsymbol{I}}{2}+b\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{A}-\frac{\boldsymbol{I}}{2}-b\boldsymbol{I}\right)=\boldsymbol{0}\left(\text{其中 } b^2=-\frac{7}{4}\right)$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 是可对角化矩阵(见上题证明思路).

一般地，若 $(\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-y\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

82. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$，(1)证明 $\boldsymbol{A}$ 可对角化；(2)证明有 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=r$；(3)证明 $\mathbb{R}^n$ 可分解为 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征子空间的直和；(4)求 $|2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$.

证明 (1) 因 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，又可写成 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-1\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$，由上题的一般性结论 $(x=0,y=1)$ 可知，$\boldsymbol{A}$ 可对角化.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，有 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，知有 $\lambda^2-\lambda=0$，即 $\lambda(\lambda-1)=0$，表明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 或 0，且由 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$，$\boldsymbol{A}$ 可对角化为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix}\leftarrow r\text{ 行}$$

故有 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=r$.

(3) 对于 $\lambda_1=0$, $(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r$,则对 $\lambda_1=0$,有 $n-r$ 个线性无关的特征向量;对于 $\lambda_2=1$,因 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-r$,解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得对应 $\lambda_2=1$ 有 r 个线性无关的特征向量.

$$V_{\lambda_1}=\{\boldsymbol{X}\mid(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\},\quad \dim V_{\lambda_1}=n-r$$
$$V_{\lambda_2}=\{\boldsymbol{X}\mid(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\},\quad \dim V_{\lambda_2}=r$$

故 $\mathbb{R}^{n\times n}=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}$.

(4) 因 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$,由于这里 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=1$, $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$,故有

$$|2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(2-1)^r\cdot(2-0)^{n-r}=2^{n-r}$$

83. 设 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ 是数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 V^n 的线性变换,且 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2=\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$,证明:如果 λ_0 是 $\mathscr{A}_1$ 的特征值,那么 V_{λ_0} 是 $\mathscr{A}_2$ 的不变子空间.

证明 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V_{\lambda_0}$,有 $\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})\in\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 由于

$$\mathscr{A}_1(\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}))=\mathscr{A}_2(\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}))=\mathscr{A}_2(\lambda_0\boldsymbol{\alpha})$$

所以 $\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})\in V_{\lambda_0}$,故 V_{λ_0} 是 $\mathscr{A}_2$ 的不变子空间.

84. 已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 是 4 维线性空间 V^4 的一组基,V^4 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}'_1=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}'_2=3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}'_3=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}'_4=2\boldsymbol{e}_4$ 下的矩阵;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的值域与核;

(3) 在 $\mathscr{A}$ 的核中选一组基,把它扩充成 V^4 的一组基,并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵;

(4) 在 $\mathscr{A}$ 的值域中选一组基,把它扩充成 V^4 的一组基,求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵.

解 (1) $\mathscr{A}(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3,\boldsymbol{e}'_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{bmatrix}$,所以

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}6&-9&9&6\\2&-4&10&10\\8&-16&40&40\\0&3&-21&-24\end{bmatrix}$$

(2) 先求核 $\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$. 设 $\boldsymbol{\eta}_1=\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ 在基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$ 下的坐标为 (x_1,x_2,x_3,x_4), $\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\theta}$ 在此基下的坐标为 $(0,0,0,0)$,于是

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

此时 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,解之,得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\left(-2,-\frac{3}{2},1,0\right)$,$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,-2,0,1)$,作 $\boldsymbol{\eta}_1=-2\boldsymbol{e}_1-\frac{3}{2}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{\eta}_2=-\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_4$. 显然,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为核$\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$的一组基,故核由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 所张成,即 $\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=\mathrm{Span}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)$.

再求值域$\mathscr{A}(V^4)$. 由于

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_4))=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{A}$$

而 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,所以$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_4)$的秩也为 2,且$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2)$线性无关,故组成$\mathscr{A}(V^4)$的基,从而

$$\mathscr{A}(V^4)=\mathrm{Span}(\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2))$$

(3) 由(2)知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是核$\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$的一组基,易知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为 V^4 的一组基,由于有

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&\frac{-3}{2}&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{D}$$

所以$\mathscr{A}$在此基下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\\frac{9}{2}&1&0&0\\1&2&0&0\\2&-2&0&0\end{bmatrix}$$

(4) 由(2)知$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2)$是值域$\mathscr{A}(V^4)$的一组基,又知$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2),\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 为 V^4 的一组基,有

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2),\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&2&1&0\\2&-2&0&1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{T}$$

所以$\mathscr{A}$在此基下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}5&2&2&1\\\frac{9}{2}&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

85. 设$\mathscr{A},\mathscr{B}$是$\mathbb{R}^3$的两个线性变换,它们定义为

$$\mathscr{A}[(a_1,a_2,a_3)]=(a_1+a_2+a_3,0,0),\qquad \mathscr{B}[(a_1,a_2,a_3)]=(a_2,a_3,a_1)$$

试证:$\mathscr{A}+\mathscr{B}$的像子空间(值域)是$\mathbb{R}^3$,即$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^3$.

证明 取$\mathbb{R}^3$中的自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$,因为

$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+\mathscr{B}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=(1,0,0)+(0,0,1)=(1,0,1)$$

同理有

$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(2,0,0),\qquad (\mathscr{A}+\mathscr{B})(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(1,1,0)$$

这表明 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$将基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 变换成$\mathbb{R}^3$中的另一组基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,1),\boldsymbol{e}_2=(2,0,0),\boldsymbol{e}_3=(1,1,0)$(易证它们线性无关).

又因$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\mathbb{R}^3)$是$\mathbb{R}^3$的子空间,而 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\mathbb{R}^3)$的最大无关组,故这个子空间的维数为 3,再由习题 1(1)中第 31 题的结果知$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^3$(此时取 $V_2=\mathbb{R}^3$).

86. 设$\mathscr{A}$是$\mathbb{R}^3$的线性变换,它定义为$\mathscr{A}[(a_1,a_2,a_3)]=(0,a_1,a_2)$,求$\mathscr{A}^2$的像子空间$R(\mathscr{A}^2)$(值域)及核子空间 $N(\mathscr{A}^2)$的基与维数.

解 因为

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^2[(a_1,a_2,a_3)]&=\mathscr{A}(\mathscr{A}[(a_1,a_2,a_3)])\\&=\mathscr{A}[(0,a_1,a_2)]=(0,0,a_1)\end{aligned}$$

所以$\mathscr{A}^2$的像子空间为

$$R(\mathscr{A}^2)=\{(0,0,a)\mid a\in\mathbb{R}\}$$

核子空间为

$$N(\mathscr{A}^2)=\{(0,a_2,a_3)\mid a_2,a_2\in\mathbb{R}\}$$

因此,$\dim R(\mathscr{A}^2)=1$,其一组基为$(0,0,1)$;$\dim N(\mathscr{A}^2)=2$,其一组基为$(0,1,0),(0,0,1)$.

87. (1) 证明:$\mathscr{A}[(x_1,x_2,\cdots,x_n)]=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})$是线性空间 P^n 的线性变换,且$\mathscr{A}^n=\vartheta$(零变换);

(2) 求$\mathscr{A}$的核$\mathscr{A}^{-1}(\theta)$的维数及像集合(值域)$\mathscr{A}(V)$的维数.

证明 (1) 由$\mathscr{A}$的定义容易验证满足可加性和齐次性,所以它为线性变换.又因

$$\mathscr{A}^2[(x_1,x_2,\cdots,x_n)]=\mathscr{A}[(0,x_1,\cdots,x_{n-1})]=(0,0,x_1,\cdots,x_{n-2})$$

推知 $\mathscr{A}^n[(x_1,x_2,\cdots,x_n)]=(0,0,\cdots,0)$,即$\mathscr{A}^n=\vartheta$(零变换).

(2) 若$\mathscr{A}[(x_1,x_2,\cdots,x_n)]=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})=(0,0,\cdots,0)$,则 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=0$,即$\mathscr{A}^{-1}(\theta)$为由一切形如$(0,0,\cdots,x_n)$的向量构成的子空间,它是一维子空间,则$(0,\cdots,0,1)$是它的基.

又由维数关系

$$\dim\mathscr{A}(V)+\dim\mathscr{A}^{-1}(\theta)=n$$

使得$\mathscr{A}(V)$的维数等于 $n-1$.

88. 设 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A},\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$,证明:

(1) $\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$有相同的值域$\Leftrightarrow\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$;

(2) $\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$有相同的核$\Leftrightarrow\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

证明 (1) 必要性 若$\mathscr{A}(V)=\mathscr{B}(V)$,对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,则$\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})\in\mathscr{B}(V)=\mathscr{A}(V)$,故存在$\boldsymbol{\beta}\in V$,使$\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$,$\mathscr{A}\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})$,由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性有 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}$.同理可证$\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$.

充分性 若$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$,对任意 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})\in\mathscr{A}(V)\subset V$,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{B}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{B}(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))\in\mathscr{B}(V)$,故 $\mathscr{A}(V)\subset\mathscr{B}(V)$;同理可证$\mathscr{B}(V)\subset\mathscr{A}(V)$.

(2) 必要性 若 $\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=\mathscr{B}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$,对任意 $\boldsymbol{\beta}\in V$,作 $\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$,因$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})-\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\theta$,所以,$\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})\in\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=\mathscr{B}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$,则$\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=\boldsymbol{\theta}$,故 $\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{B}\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$,由 $\boldsymbol{\beta}$ 的任意性有$\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$.

同理,通过作 $\boldsymbol{\beta}-\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta})$,可得$\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{B}$.

充分性　若 $\mathscr{AB}=\mathscr{B},\mathscr{BA}=\mathscr{A}$，对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$，由 $\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{BA}(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{B}(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=\mathscr{B}(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\theta}$，故 $\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\subset\mathscr{B}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$；同理，由任意 $\boldsymbol{\beta}\in\mathscr{B}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$，可得 $\mathscr{B}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\subset\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$.

89. 设 n 维线性空间 V 的一个线性变换 $\mathscr{A}$ 有 n 个不同的特征值，证明 $\mathscr{A}$ 共有 2^n 个不变子空间.

证明　因为 $\mathscr{A}$ 的每一个特征值都对应有 $\mathscr{A}$ 的一个一维的特征子空间，所以 n 个不同的特征值就有 n 个一维的特征子空间 $\boldsymbol{V}_{\lambda_1},\boldsymbol{V}_{\lambda_2},\cdots,\boldsymbol{V}_{\lambda_n}$，它们也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 众所周知，不变子空间的交与和空间都是不变子空间，则 $\mathscr{A}$ 有 1 个零维的、n 个一维的、C_n^2 个二维的、C_n^3 个三维的、…、C_n^n 个 n 维的不变子空间，因此 $\mathscr{A}$ 共有

$$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^n=\sum_{p=0}^{n}\mathrm{C}_n^p=2^n$$

个不变子空间.

90. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，$\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0&\cdots&0&0\\0&3&1&\cdots&0&0\\0&0&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&3&1\\0&0&0&\cdots&0&3\end{bmatrix}$$

(1) 证明：如果 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 属于 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 W，那么 $W=V$；

(2) 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$ 属于 $\mathscr{A}$ 的任意一个非零不变子空间；

(3) 证明：V 不能分解成 $\mathscr{A}$ 的两个非凡不变子空间的直和；

(4) 求 $\mathscr{A}$ 的所有不变子空间.

证明　(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_n\in W$，由于 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，可知 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)\in W$，从 $\boldsymbol{A}$ 的最后一列可知 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+3\boldsymbol{\alpha}_n$，即有 $\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+3\boldsymbol{\alpha}_n\in W$，必然有 $\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\in W$；同样有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_{n-1})\in W$，导出 $\boldsymbol{\alpha}_{n-2}\in W$，依次类推. 这就说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 都属于 W，换言之，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 也是 W 的一组基，从而 $W=V$.

(2) 在 $\mathscr{A}$ 的非零不变子空间 W 中任意取一个非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，可知 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})\in \boldsymbol{W}$，这里不妨取 $\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，其中 $k_s\neq0$. 此式两端经 $\mathscr{A}$ 作用后得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})&=k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_s\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)\\&=k_13\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+3\boldsymbol{\alpha}_s)\\&=(k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_{s-1})+3(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)\in W\end{aligned}$$

所以有

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\in W$$

左端再用 $\mathscr{A}$ 继续作用，又有 $k_3\boldsymbol{\alpha}_1+k_4\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-2}\in W$.

依次类推，最后可得 $\boldsymbol{\alpha}_1\in W$.

(3) 反证法，假设 $V=W_1\oplus W_2$，其中 W_1,W_2 是 $\mathscr{A}$ 的非平凡不变子空间，那么由(2)知 $\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1\cap W_2$，但是 $W_1\cap W_2=\boldsymbol{0}$，矛盾，这就说明 $V\neq W_1\oplus W_2$.

(4) 设 W 是$\mathscr{A}$的一个非零不变子空间,又设 $\dim W=m$. 由(2)结论知 $\boldsymbol{\alpha}_1\in W$,在 W 中取一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_m$,设

$$\boldsymbol{\xi}_i = k_{i1}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{i2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{is}\boldsymbol{\alpha}_s \quad (i = 2,3,\cdots,m)$$

其中 $k_{2s},\cdots,k_{ms}$ 不全为 0,不妨设 $k_{2s}\neq 0$ 这样意味着 W 中的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,所以有 $m\leqslant s$.

另一方面,因 $\boldsymbol{\xi}_2\in W$,所以$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_2)\in W$,从而推得

$$k_{21}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_{22}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_{2s}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_s) \in W$$

上式又可写成

$$3k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{22}(\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_{2s}(\boldsymbol{\alpha}_{s-1} + 3\boldsymbol{\alpha}_s) \in W$$

整理后,有

$$(k_{22}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{23}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{2s}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}) + 3(k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{2s}\boldsymbol{\alpha}_s) \in W$$

因为 $k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{2s}\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\xi}_2\in W$,所以

$$k_{22}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{23}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{2s}\boldsymbol{\alpha}_{s-1} \in W$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1\in W$,故有

$$k_{23}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{2s}\boldsymbol{\alpha}_{s-1} \in W$$

依次类推,可得 $k_{23}\boldsymbol{\alpha}_2\in W$,则 $\boldsymbol{\alpha}_2\in W$. 同样有 $\boldsymbol{\alpha}_3\in W,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in W$,于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_m$ 线性表示,故 $s\leqslant m$.

综合知 $s=m$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 W 的一个基,从而

$$W = \operatorname{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$$

这样立即可得$\mathscr{A}$的所有不变子空间共有 $n+1$ 个,分别是$\{\mathbf{0}\}$,$\operatorname{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1\}$,$\operatorname{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$,$\cdots$,$\operatorname{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$.

习　题　1(3)

1. 设V^n为实数域上的一个 n 维向量空间,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为其一组基,两个向量

$$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$
$$\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$$

定义实函数$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$为

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \cdots + nx_ny_n$$

证明:V^n 在此规定下是一个欧氏空间.

证明　由内积定义,易知$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$满足

① $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=y_1x_1+2y_2x_2+\cdots+ny_nx_n=x_1y_1+2x_2y_2+\cdots+nx_ny_n=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$

② $(k\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=kx_1y_1+2kx_2y_2+\cdots+nkx_ny_n=k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\quad k\in\mathbb{R}$

③ 设 $\boldsymbol{w}=z_1\boldsymbol{e}_1+z_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+z_n\boldsymbol{e}_n$,则

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w}) &= (x_1+y_1)z_1 = 2(x_2+y_2)z_2 + \cdots + n(x_n+y_n)z_n \\ &= x_1z_1 + 2x_2z_2 + \cdots + nx_nz_n + y_1z_1 + 2y_2z_2 + \cdots + ny_nz_n \\ &= (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\end{aligned}$$

④ $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=x_1^2+2x_2^2+\cdots+nx_n^2>0$　(当 $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$ 时)

故 V^n 是欧氏空间.

2. 验证$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$(其中$\boldsymbol{u}=(x_1,x_2),\boldsymbol{v}=(y_1,y_2)$)是$\mathbb{R}^2$中的内积.

解　方法同上.

3. 在$\mathbb{R}^n$中,设$\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$,分别定义实数$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$如下:

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\eta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right)\left(\sum\limits_{g=1}^{n}\eta_j\right)$;

(3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}i\xi_i\eta_i\right)$.

判断它们是否为$\mathbb{R}^n$中向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的内积.

解　(1) 因为$(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(k\xi_i)^2\eta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=|k|\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\eta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=|k|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,当$k<0$且$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\neq 0$时,$(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\neq k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,故该实数不是内积.

(2) 取$\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,0,\cdots,0)\neq\boldsymbol{0}$,有$\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i=0$,所以$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$,故该实数不是内积.

(3) 设$\boldsymbol{\gamma}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in\mathbb{R}^n$,$k\in\mathbb{R}$,则有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\eta_i=\sum_{i=1}^{n}i\eta_i\xi_i=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$$

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\eta_i(\eta_i+c_i)=\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\eta_i+\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\eta_ic_i=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$$

当$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$时,$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$;当$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,存在$i_0$使得$\zeta_{i_0}\neq 0$,从而

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\sum_{i=1}^{n}i\xi_i^2\geqslant i_0\xi_{i_0}^2>0$$

故该实数为内积.

4. 设$\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2)$,$\boldsymbol{\beta}=(\eta_1,\eta_2)$是二维实线性空间$\mathbb{R}^2$的任意两个向量,问$\mathbb{R}^2$对以下定义的实函数$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$是否构成欧氏空间?

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+1$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2$;

(3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=3\xi_1\eta_1+5\xi_2\eta_2$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\xi_1\eta_1+(\xi_1-\xi_2)(\eta_1-\eta_2)$.

解　(1)与(2)均不构成欧氏空间;(3)与(4)是.

5. 高V是多项式所组成的线性空间,其内积由

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

给出.设$f(t)=t+2$,$g(t)=t^2-2t-3$,求(f,g).

解　$(f,g)=\int_0^1(t+2)(t^2-2t-3)\mathrm{d}t=\left[\dfrac{t^4}{4}-\dfrac{7t^2}{2}-6t\right]_0^1=\dfrac{-37}{4}$.

6. 设欧氏空间$P[x]_2$中的内积定义为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

(1) 求基 $1,x,x^2$ 的度量矩阵；

(2) 用坐标与度量矩阵乘积的形式计算 $f(x)=1-x+x^2$ 与 $g(x)=1-4x-5x^2$ 的内积.

解 (1) $a_{11}=(1,1)=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2, a_{12}=(1,x)=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x=0, a_{13}=(1,x^2)=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}, a_{22}=(x,x)=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}, a_{23}=(x,x^2)=\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=0, a_{33}=(x^2,x^2)=\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$, 所以度量矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

(2) $f(x),g(x)$ 在基 $1,x,x^2$ 下的坐标为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(1,-4,-5)^{\mathrm{T}}$, 所以 $(f,g)=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=0$.

7. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 n 阶正定矩阵，而 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n), \boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义实函数

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$$

(1) 证明：在这个意义下，$\mathbb{R}^n$ 构成一欧氏空间；

(2) 求向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0), \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$ 的度量矩阵；

(3) 具体写出这个空间中的柯西-布涅柯夫斯基不等式.

解 (1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=\sum\limits_{j,i=1}^{n}a_{ji}y_jx_i=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$

$$(a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}=a(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}})+b(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}})=a(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+b(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$$

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\geqslant 0$ （因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，对 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta}$，正定二次型 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}>0$）

所以，此时 $\mathbb{R}^n$ 构成欧氏空间.

(2) $(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_j^{\mathrm{T}}=a_{ij}$，故该自然基在此特殊内积定义下的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(3) $\left|\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\right|\leqslant\sqrt{\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right)\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j\right)}$.

8. 证明：对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，下列不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|\leqslant\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

证 由不等式 $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$，取 $\boldsymbol{\alpha}=(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|), \boldsymbol{\beta}=(1,1,\cdots,1)$ 代入即得.

9. 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是欧氏空间 V^n 的一组向量，而

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) & \cdots & (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_m)\\ (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2) & \cdots & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_2) & \cdots & (\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_m)\end{bmatrix}$$

试证明：$\det\boldsymbol{\Delta}\neq 0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关.

证明　考察 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{\theta}$，两端分别与 $\boldsymbol{x}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 作内积得方程组

$$k_1(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_1)+k_2(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_2)+\cdots+k_m(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_m)=0,\quad i=1,2,\cdots,m$$

由于上述方程组仅有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$（意味着 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关）的充要条件是系数行列式 $\det\boldsymbol{\Delta}\neq 0$，从而得证.

10. 证明：在欧氏空间 V^n 中，采用坐标与度量矩阵乘法形式计算两个向量的内积时，其值与选取的基无关.

证明　设基（Ⅰ）与基（Ⅱ）的度量矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V^n$ 在（Ⅰ）与（Ⅱ）下的坐标为 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$，向量 $\boldsymbol{\beta}\in V^n$ 在（Ⅰ）与（Ⅱ）下的坐标为 $\boldsymbol{Y}_1$ 与 $\boldsymbol{Y}_2$. 需证明 $\boldsymbol{X}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{X}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_2$. 设从基（Ⅰ）至基（Ⅱ）的过渡阵为 $\boldsymbol{C}$，因为 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}_2$，而 $\boldsymbol{C}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，于时有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{X}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_1=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_2)^{\mathrm T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}_2)=\boldsymbol{X}_2^{\mathrm T}(\boldsymbol{C}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{X}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_2$$

11. (1) $\mathbb{R}^n$ 中，$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$，判别实数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_ib_i|$ 是否为内积?

(2) 验证：若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1$ 与 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2$ 是欧氏空间 V 的两个不同的内积，则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2$ 也是 V 的一个内积. 试创造一种新办法再构造 V 的一种内积.

解　(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a'_1,a'_2,\cdots,a'_n)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$.

由于

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})&=\sum_{i=1}^{n}|(a_i+a'_i)b_i|=\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i+a'_ib_i|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|+\sum_{i=1}^{n}|a'_ib_i|=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

说明线性性质不成立，因此不是 $\mathbb{R}^n$ 中的内积.

(2) 直接验证即可. 新办法可以有无穷多种，读者自行设计.

12. 对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^{\mathrm T}$，规定

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=ax_1y_1+bx_1y_2+bx_2y_1+cx_2y_2$$

证明：$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的内积 $\Leftrightarrow a>0,ac>b^2$.

证明　与该双线性型对应的矩阵是 $\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$，因此该双线性型是内积 $\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow a>0,ac>b^2$.

13. 设 $V=\{a\cos t+b\sin t$，其中 a,b 为任意实数$\}$ 是实二维线性空间. 对任意 $f,g\in V$，定义

$$(f,g)=f(0)g(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

证明：(f,g) 是 V 上的内积，并求 $h(t)=3\cos(t+7)+4\sin(t+9)$ 的长度.

证明　直接验证即可知 (f,g) 是 V 上的内积.

$h(t)=3\cos(t+7)+4\sin(t+9)$ 的长度为 5（一般地，$a\cos t+b\sin t$ 的长度为 $\sqrt{a^2+b^2}$）.

14. 设 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是正实数，x_i,y_i 是任意实数，证明或否定不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_iy_i^2\right)$$

解 该不等式成立. 证明如下：对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$，定义

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i y_i$$

则容易验证$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是$\mathbb{R}^n$上的一个内积(对称性、正定性与双线性是显然的)，因此，题中的不等式恰好是相应于该内积的三角不等式，故也成立.

15. (1) $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$，定义内积$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$，证明：

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2)$$

(2) 已知 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$，证明：$|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqslant(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})^{\frac{1}{2}}$.

证明 (1) 考察右端的两个代数和向量的长度，因为

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$$

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$$

故有

$$\frac{1}{2}[|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2]=\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$，利用柯西不等式及$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})$，得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2&=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x},\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})\leqslant(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x},\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})\\&=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

故证得

$$|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqslant(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})^{\frac{1}{2}}$$

16. 设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为欧氏空间中两个非零向量，证明：

(1) $\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{v}(a>0)$必要且只要 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的夹角为 0；

(2) $\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{v}(a<0)$必要且只要 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的夹角为 π.

证明 (1) $\Rightarrow\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{v}$，$\theta=\arccos\left(\dfrac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{v}|}\right)=\arccos\left(\dfrac{a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{|a\|\boldsymbol{v}\|\boldsymbol{v}|}\right)=\arccos1=0$

$\Leftarrow$由 $\arccos\left(\dfrac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{v}|}\right)=0$，$\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 必共线

即成比例 $\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{v}$，且 $a>0$；

(2) $\Rightarrow\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{v}(a<0)$，$\theta=\arccos\left(\dfrac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{v}|}\right)=\arccos\left(\dfrac{a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{|a\|\boldsymbol{v}\|\boldsymbol{v}|}\right)=\arccos(-1)=\pi$

$\Leftarrow\arccos\left(\dfrac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{v}|}\right)=\pi$，$\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 必共线，且方向相反

即 $\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{v}(a<0)$.

17. 在$\mathbb{R}^n$中，求 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$(内积按通常意义). 设

(1) $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3,2)$，　$\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2,1)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,2,3)$，　$\boldsymbol{\beta}=(3,1,5,1)$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,2)$，　$\boldsymbol{\beta}=(3,1,-1,0)$.

解 (1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2\times1+1\times2+3\times(-2)+2\times1=0$，$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=18$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=18$，$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=36$，$\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\dfrac{18}{\sqrt{18}\sqrt{36}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=3$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=7$，$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=11$，$\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\dfrac{3}{\sqrt{7}\sqrt{11}}=\dfrac{3}{\sqrt{77}}$，$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{77}}$.

18. 在$\mathbb{R}^4$中，求一单位向量与$(1,1,-1,1)$，$(1,-1,-1,1)$及$(2,1,1,3)$均正交.

解　设单位向量为$\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z,w)$，有

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2+w^2=1\\x+y-z+w=0\\x-y-z+w=0\\2x+y+z+3w=0\end{cases}$$

得$x=\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$，$y=0$，$z=\dfrac{\sqrt{26}}{26}$，$w=\dfrac{-3\sqrt{26}}{26}$，故

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\sqrt{26}}{26}(4,0,1,-3)$$

19. 把向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

正交化、单位化.

解　先正交化. 取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，令$\boldsymbol{\beta}_2=k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，欲使$\boldsymbol{\beta}_2$与$\boldsymbol{\alpha}_1$正交，即

$$(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=(k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=k(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=0$$

只要选

$$k=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}=-\frac{1}{2}$$

因此

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right)^{\mathrm{T}}$$

同理，令$\boldsymbol{\beta}_3=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，使它同时与$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$正交，只要选

$$k_1=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}=\frac{1}{2},\qquad k_1=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}=\frac{1}{3}$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)^{\mathrm{T}}$$

再单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\boldsymbol{\beta}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)^{\mathrm{T}}$$

$$e_2=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}}\boldsymbol{\beta}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)^{\mathrm{T}}$$

$$e_3=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+1}}\boldsymbol{\beta}_3=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{2}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

20. 在 $P[x]_3$ 中,定义内积

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

求 $P[x]_3$ 的一个标准正交基(由基 $1,x,x^2,x^3$ 出发作正交单位化).

解 先正交化.

$$\begin{cases}\xi_1=1\\ \xi_2=x-0\xi_1=x\\ \xi_3=x^2-0\xi_2-\frac{1}{3}\xi_1=x^2-\frac{1}{3}\\ \xi_4=x^3-0\xi_3-\frac{3}{5}\xi_2-0x_1=x^3-\frac{3}{5}x\end{cases}$$

再单位化得 $P[x]_3$ 的一个标准正交基为

$$\begin{cases}\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \eta_2=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\xi_2=\frac{\sqrt{6}}{2}x\\ \eta_3=\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}}\xi_3=\frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\\ \eta_4=\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}}\xi_4=\frac{5\sqrt{14}}{4}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)\end{cases}$$

21. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0\\ x_1+x_2-x_3+\qquad x_5=0\end{cases}$$

的解空间(作为$\mathbb{R}^5$的子空间)的一组标准正交基.

解 由

$$\begin{cases}x_4-3x_5=-2x_1-x_2+x_3\\ \qquad x_5=-x_1-x_2+x_3\end{cases}$$

不难得到基础解系

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,-5,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,-4,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,4,1)$

它是解空间的一组基,将其正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,-5,-1)$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{9}(-7,9,0,-1,-2)$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{15}(7,6,15,1,2)$$

再单位化得标准正交基

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{3\sqrt{3}}(1,0,0,-5,-1),\ \boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{3\sqrt{15}}(-7,9,0,-1,-2),\ \boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{3\sqrt{35}}(7,6,15,1,2)$$

22. 在$\mathbb{R}^2$中按照某种内积方式(不一定是通常的)构成欧氏空间,记作V^2.已知V^2的两组基为

(Ⅰ) $\boldsymbol{e}_1=(1,1)$, $\boldsymbol{e}_2=(1,-1)$;

(Ⅱ) $\boldsymbol{e}'_1=(0,2)$, $\boldsymbol{e}'_2=(6,12)$;

$\boldsymbol{e}_i$与$\boldsymbol{e}'_j$的内积为

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}'_1)=1,\quad (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}'_2)=15,\quad (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}'_1)=-1,\quad (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}'_2)=3$$

(1) 求基(Ⅰ)的度量矩阵;

(2) 求基(Ⅱ)的度量矩阵;

(3) 求出欧氏空间V^2的一组标准正交基.

解 (1) 由于$\boldsymbol{e}_1=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}'_1+\frac{1}{6}\boldsymbol{e}'_2$,$\boldsymbol{e}_2=-\frac{3}{2}\boldsymbol{e}'_1+\frac{1}{6}\boldsymbol{e}'_2$,$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)=2$,$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=1$,$(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)=1$,$(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)=2$,所以

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

(2) 由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&9\\-1&-3\end{bmatrix}$,于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&12\\12&126\end{bmatrix}$$

(3) 利用史密特正交化方法将基(Ⅰ)标准正交化得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{e}_1=(1,1),\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{e}_2-\frac{(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

单位化 $$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-3}{\sqrt{6}}\right)$$

23. 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_5$是$\mathbb{R}^5$的一个标准正交基,子空间$W=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$,其中$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$,$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$,求$W$的标准正交基.

解 先求出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$在$\mathbb{R}^5$的标准正交基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_5$下的坐标,用观察法直接可得

$$\boldsymbol{X}_1=(1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{X}_2=(1,0,-1,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{X}_3=(2,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

用史密特正交化法,得$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2=\left(\frac{1}{2},0,-1,1,-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.再单位化求得$W$的一组标准正交基:

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,-2,2,-1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{2}(1,1,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

24. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为欧氏空间 V^n 的标准正交基，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V^n$，证明：

$$|\boldsymbol{\alpha}|^2=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2$$

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$，显然其中的坐标分量 $x_i=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_i)$，所以 $\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i$，故 $|\boldsymbol{\alpha}|^2=\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i,\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_j)\boldsymbol{\varepsilon}_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_i)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_j)(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2$.

25. 试把 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,2)^{\mathrm{T}}$ 扩充为$\mathbb{R}^4$的一个正交基.

解 设与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交的向量为 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0,\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0$，即 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_4=0\end{cases}$，解得 $\boldsymbol{X}=k_1(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$. 取 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(0,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$，此时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 满足：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=0$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是$\mathbb{R}^4$的正交基.

26. 在$\mathbb{R}^{2\times2}$中，定义 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}$，其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times2},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{2\times2}$，证明：$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$是$\mathbb{R}^{2\times2}$的一个标准正交基.

证明 由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}$ 得

$$(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12})=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{21})=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{22})=0$$
$$(\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21})=(\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{22})=(\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})=0$$

且

$$|\boldsymbol{E}_{11}|=|\boldsymbol{E}_{12}|=|\boldsymbol{E}_{21}|=|\boldsymbol{E}_{22}|=1$$

故 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$是$\mathbb{R}^{2\times2}$的一个标准正交基.

27. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，

(1) 证明$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}})$是$\mathbb{C}^{n\times n}$的一个内积；

(2) 按(1)的内积，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的长度是多少？哪些是单位向量？

(3) 证明或否定：基本矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$是$\mathbb{C}^{n\times n}$的一组标准正交基；

(4) 求$\mathbb{R}^{2\times2}$的一组由可逆矩阵构成的标准正交基.

解 (1) 直接验证即可.

(2) $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$.

(3) $(\boldsymbol{E}_{ij},\boldsymbol{E}_{kl})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{kl}^{\mathrm{H}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{lk})$，由于 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{lk}=\delta_{jl}\boldsymbol{E}_{ik}$，故 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{lk})=1\Leftrightarrow i=k,j=l$，否则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{lk})=0$，因此基本矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$是 V 的一组标准正交基.

(4) $\dfrac{\boldsymbol{I}}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$(答案不唯一).

28. 在多项式空间 $P[x]_3$ 中，定义内积为：$\forall f(x),g(x)\in P[x]_3$，

$$(f(x),g(x))=\int_0^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

把 $\boldsymbol{\alpha}_1=1,\boldsymbol{\alpha}_2=x,\boldsymbol{\alpha}_3=x^2$ 化为标准正交基.

解　这里用到广义积分 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$，计算内积：

设 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = 1$，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$，$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1) = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$；

$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = x - 1$，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2,$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2) = \int_0^{+\infty} x^2(x-1) e^{-x} dx = 4,(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2) = \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x} dx = 1$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 = x^2 - 4x + 2$$

显然 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是正交向量组，单位化后得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = 1,\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = x - 1,\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

29. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是欧氏空间 V^n 的标准正交基，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 两两正交的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_k)(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\varepsilon}_k) = 0,\quad i \neq j$$

证明　由于 $\boldsymbol{\beta}_i = \sum\limits_{k=1}^{n}(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_k)\boldsymbol{\varepsilon}_k$，$\boldsymbol{\beta}_j = \sum\limits_{m=1}^{n}(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\varepsilon}_m)\boldsymbol{\varepsilon}_m$，有

$$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_k)(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\varepsilon}_m)(\boldsymbol{\varepsilon}_k,\boldsymbol{\varepsilon}_m) = \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_k)(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\varepsilon}_k)$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 两两正交，即 $(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j) \xlongequal{i \neq j} 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_k)(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\varepsilon}_k) = 0$.

30. 已知欧氏空间 V^2 的基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & 5\end{bmatrix}$，利用合同变换方法求 $\boldsymbol{V}^2$ 的一组标准正交基（用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 表示）.

解　因度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}$，经计算 $\lambda_1=1$，$\lambda_w=9$，$\boldsymbol{Q}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$. 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3 & 1\\-3 & 1\end{bmatrix}$，则有 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 相合，其中 $\boldsymbol{C}$ 是由基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 改变到标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 的过渡矩阵，由 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{C}$ 可得 V^2 的一组标准正交基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2),\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$$

31. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为 n 维欧氏空间 V^n 的一组基，证明任两个向量

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{bmatrix}$$

的内积可由等式

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

表达的充要条件是：$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为标准正交基.

解 必要性 因为

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

此时,推得

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i)=1(i=1,\cdots,n),(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=0\quad(i,j=1,\cdots,n,i\neq j)$$

故 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为标准正交基.

充分性显然.

32. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是三维欧氏空间中一组标准正交基,证明:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3),\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3),\qquad \boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)$$

也是一组标准正交基.

解 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}\quad(i,j=1,2,3)$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是标准正交基.

33. 设欧氏空间 V^n 的一组基为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$,它的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}$,证明:存在实对称正定矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得由

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{C}$$

确定的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V^n 的标准正交基.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 对称正定,所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,它们都是正数. 记 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})$,令

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

显然 $\boldsymbol{C}$ 为对称正定矩阵,且有 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$. 因此,由 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{C}$ 确定的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$,从而该基是 V^n 的一组标准正交基.

34. 已知欧氏空间 V^3 的一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&1&1\\2&1&5\end{bmatrix}$,试利用史密特正交化方法求 V^3 的一组标准正交基(用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 表示).

解 由已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)\\(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\\(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&1&1\\2&1&5\end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{e}_1$

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{e}_2-\frac{(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{e}_2-\frac{(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{e}_3-\frac{(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_1$$

标准化得 V 的一组标准正交基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}=2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_1)$$

35. 设 e_1,e_2,e_3,e_4,e_5 是欧氏空间 V^5 的一组标准正交基，$V_1=\mathrm{Span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=e_1+e_5,\boldsymbol{\alpha}_2=e_1-e_2+e_4,\boldsymbol{\alpha}_3=2e_1+e_2+e_3$，求 V_1 的一组标准正交基.

解 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 在给定基下的坐标为

$$x_1=(1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad x_2=(1,-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad x_3=(2,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

它们线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关，从而构成 V_1 的一组基，标准正交化得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_5),\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(e_1-2e_2+2e_4-e_5),\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3-e_5)$$

36. 取酉空间 U 的一组基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，如果 U 的任意两个向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\qquad \boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$$

的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i$$

试证：$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 U 的标准正交基.

证明 取 $\boldsymbol{\alpha}=e_i=0\cdot e_1+\cdots+1\cdot e_i+\cdots+0\cdot e_n$，则 $(e_i,e_i)=1(i=1,2,\cdots,n)$，于是 $|e_i|=1$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 又取 $\boldsymbol{\beta}=e_j=0\cdot e_1+\cdots+1\cdot e_j+\cdots+0\cdot e_n$，当 $i\neq j$ 时，有 $(e_i,e_j)=0(i=1,2,\cdots,n)$，故 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 U 的标准正交基.

37. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中，求三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0,-3)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的子空间的一个标准正交基.

解 只要用史密特正交化方法将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 标准正交化，所得答案不唯一，选其中一个为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{123}}(7,3,1,-8)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{3854}}(3,54,-23,20)$$

它们即为所求子空间的一个标准正交基.

38. (1) 复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的二维线性空间，是否存在 $\mathbb{C}$ 上的一个内积，使得 i 与 $1+\mathrm{i}$ 成为 $\mathbb{C}$ 的一组标准正交基，为什么？

(2) 试构造实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的一个内积，使得向量组

$$e_1,\qquad e_1+e_2,\qquad e_1+e_2+e_3$$

是一组标准正交基. 问 e_2 与 e_3 的长度各是多少？它们的夹角又是多少？

解 (1) 存在. 因为有限维实(复)向量空间的任何一组基均可做成一个标准正交基.

(2) 设 $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3$ 是一组标准正交基，则可得 $(e_1,e_1)=1,(e_1,e_2)=-1,(e_1,e_3)=0,(e_2,e_2)=2,(e_2,e_3)=-1,(e_3,e_3)=2$，由此知相应的内积为(注意有 $e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$)：

$$((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3-(x_1y_2+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_2)$$

$$|e_2|=\sqrt{2},|e_3|=\sqrt{2},\langle e_2,e_3\rangle=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi.$$

39. 试尽可能一般性地讨论习题38中的问题.

解 有限维实(复)向量空间的任何一组基均可做成一个标准正交基，相应的内积由对应的度量矩阵决定.

40. 设二维欧氏空间的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，其度量矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

试求 V 的一组标准正交基以及它到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的过渡矩阵.

解 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的长度相等，故 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 必正交，从而 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{18}}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$是一个标准正交基$\Big($对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 可直接使用正交化方法可得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{45}}(4\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2)$是一个标准正交基$\Big)$.

41. 设 $\boldsymbol{A}$ 是反对称实矩阵(即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$)，证明：

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或纯虚数；

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于一个非零特征值的特征向量，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为实向量，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

证明 (1) 设 a 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的一个(复)特征向量，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}$，故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}$，于是 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\bar{a}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}$ 或 $-a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}=\bar{a}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}$，因此 $-a=\bar{a}$，即 $a=0$ 或为纯虚数.

(2) 设 $a\neq 0$ 是相应的特征值，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i})=a(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i})$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=a\boldsymbol{\beta}$，于是 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$. 因此 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 或 $-a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，由于 $a\neq 0$，必有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$.

42. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，定义$\mathbb{R}^2$上的二元(向量)函数$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$如下：

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

此二元函数与普通内积的差别是什么？以此二元函数为基础，建立相应的长度、角度等概念，研究其中的正交与平行的定理.

解 注意 $\boldsymbol{A}$ 对称但不可逆，因此由其定义的“内积”有对称性、双线线性但无定性，故存在长度为 0 的非零向量等，因此存在自正交的非零向量. 两个向量平行不必是线性相关的.

习 题 1(4)

1. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 是欧氏空间 V^n 中的单位向量，$\boldsymbol{\alpha}\in V^n$，定义线性变换$\mathscr{A}$为：$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}$，证明$\mathscr{A}$是正交变换.

证明 因为

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-4(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+4(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})^2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$$

所以$\mathscr{A}$是正交变换.

2. 证明：欧氏空间中两个正交变换的乘积也是正交变换；正交变换的逆变换也是正交变换.

证明 设$\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$ 是两个正交变换，对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，则有

$$|\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})|=|\mathscr{A}_1(\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}))|=|\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})|=|\boldsymbol{\alpha}|$$

而又因为有

$$|\boldsymbol{\alpha}| = |\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})| = |\mathscr{A}_1^{-1}(\boldsymbol{\alpha})|$$

故$\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$及$\mathscr{A}_1^{-1}$均为正交变换.

3. 在欧氏空间 V^n 中,取定标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,试证:对任意正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都唯一决定一个正交变换.

证明　设正交矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,规定

$$\begin{gathered} \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \vdots \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) = a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n \end{gathered}$$

则$\mathscr{A}$是 $\boldsymbol{A}$ 所决定的唯一变换.下面指出$\mathscr{A}$是正交变换.实际上只需指出$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$是标准正交基.因为

$$\begin{aligned} &(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) \\ &= (a_{1i}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{\varepsilon}_n, a_{1j}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{\varepsilon}_n) = a_{1i}a_{1j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases} \end{aligned}$$

故$\mathscr{A}$是由 $\boldsymbol{A}$ 所决定的唯一的正交变换.

4. 试证:线性变换$\mathscr{A}$为正交变换的充分必要条件是,使任意两点间的距离保持不变,即

$$|\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) - \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})| = |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$$

证明　必要性　由于

$$\begin{aligned} |\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) - \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})| &= \sqrt{(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) - \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}), \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) - \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))} \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) - (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) - (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})} \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})} = |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}| \end{aligned}$$

充分性　令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}$,有$|\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})|=|\boldsymbol{\alpha}|$,即$\mathscr{A}$保持长度不变,所以$\mathscr{A}$是正交变换.

5. 求证:线性变换$\mathscr{A}$为正交变换的必要条件为,保持任意两个向量的夹角不变.说明条件不充分.

证明　由

$$\begin{gathered} (\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \\ (\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \\ (\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \end{gathered}$$

得

$$\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|} = (\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))/|\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})||\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})| = \cos\langle\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})\rangle$$

但是,数乘变换(或相似变换)也保持任两向量夹角不变,所以条件不充分.

6. 设 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 与 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 为欧氏空间 V^n 的两组标准正交向量组,证明:必有正交变换把第一组变为第二组.

证明 将 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 扩充成 n 维欧氏空间 V^n 的标准正交基 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m,\cdots,\boldsymbol{u}_n$，同理将 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 扩充成 V^n 的另一组标准正交基 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m,\cdots,\boldsymbol{v}_n$. 设

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{v}_n\end{bmatrix}$$

则以 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 为基底，$\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵所决定的线性变换$\mathscr{A}$是正交变换，且有$\mathscr{A}(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{u}_i(i=1,2,\cdots,n)$.

7. 证明：第 1 题中的正交变换$\mathscr{A}$是第二类正交变换(即对应矩阵的行列式为-1)，又称**镜面反射**.

证明 取 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{\beta}$，将它扩大为 V^n 中的一组标准正交基：$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，则

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1-2(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_1=-1\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+\cdots+0\boldsymbol{e}_n$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_i-2(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_i=0\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{e}_i+\cdots+0\boldsymbol{e}_n,\quad i=2,\cdots,n$$

所以$\mathscr{A}$把一组标准正交基仍变为标准正交基，从而$\mathscr{A}$是正交变换，它在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix}-1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

显然行列式为-1，所以$\mathscr{A}$是第二类的正交变换.

8. (1) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维欧氏空间 V^n 中两个不同的向量，证明：存在镜面反射$\mathscr{A}$，使$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$；

(2) 证明：n 维欧氏空间 V^n 中任一正交变换都可以表示成一系列镜像变换的乘积.

证明 (1) 因为$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=1$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\theta}$，所以 $\boldsymbol{\eta}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}$是单位向量. 令$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}-2(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}$，则$\mathscr{A}$是一个镜面反射，且有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})&=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\alpha}-2\left(\boldsymbol{\alpha},\frac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}\\&=\boldsymbol{\alpha}-\frac{2}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\\&=\boldsymbol{\alpha}-\frac{2}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})}[(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})](\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\\&=\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{1-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}[1-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})](\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

即有$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$.

(2) 设$\mathscr{A}$为 V^n 中任一正交变换，取 V^n 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，则$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{\eta}_1$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)=\boldsymbol{\eta}_n$ 也是 V^n 的一组标准正交基.

如果 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n=\boldsymbol{\varepsilon}_n$，则$\mathscr{A}$就是恒等变换. 此时，作镜面反射$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1$，则有

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=-\boldsymbol{\varepsilon}_1,\qquad\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=-\boldsymbol{\varepsilon}_j\quad(j=2,3,\cdots,n)$$

于是此时显然有$\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\mathscr{A}_1$.

如果 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 不全相同，设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1\neq\boldsymbol{\eta}_1$，则由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\eta}_1$ 是两个不同的单位向量，由(1)知，存在镜面反射$\mathscr{A}_1$，使$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{\eta}_1$. 令$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\boldsymbol{\xi}_j(j=2,3,\cdots,n)$，如果 $\boldsymbol{\xi}_j=\boldsymbol{\eta}_j$，$j=2,3,\cdots,n$，则$\mathscr{A}=\mathscr{A}_1$，结论成立. 否则可设 $\boldsymbol{\xi}_2\neq\boldsymbol{\eta}_2$，再作镜面反射$\mathscr{A}_2$：

$$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta},\qquad \boldsymbol{\eta}=\frac{\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\eta}_2}{|\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\eta}_2|}$$

于是$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{\eta}_2$，且可验算有$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\eta}_1)=\boldsymbol{\eta}_1$.

如此继续下去，设经 s 次正交变换

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\longrightarrow\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n\longrightarrow\\&\longrightarrow\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n\to\cdots\to\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\end{aligned}$$

则有$\mathscr{A}=\mathscr{A}_s\mathscr{A}_{s-1}\cdots\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$，其中$\mathscr{A}_i$都是镜面反射，即正交变换$\mathscr{A}$可表示为镜面反射的乘积.

9. 如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是欧氏空间 V 中长度相同的向量，试证明：必有正交变换$\mathscr{A}$，使$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$.

证明提示：若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为两个相同的向量(包括零向量)，结论显然成立. 如果是两个不同的非零向量，则先将 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 同时化为单位向量

$$\boldsymbol{\alpha}'=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|},\qquad \boldsymbol{\beta}'=\frac{\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|}$$

再利用第8题(1)的结果即可得证.

10. 设欧氏空间 V^n 的基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{G}$，正交变换$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}$.

证明 因为$\mathscr{A}$是正交变换，所以 A 可逆，由

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_n))=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A}$$

知$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_n)$也是 V^n 的一组基，它的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$；再由$\mathscr{A}$是正交变换，即有$(\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_i),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_j))=(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$，这表明基$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_n)$的度量矩阵也是 $\boldsymbol{G}$，则有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}$.

11. 试用初等旋转变换变化向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,3,0,5)^{\mathrm{T}}$，使所得向量与 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 同方向.

解 令 $\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，得

$$\boldsymbol{R}_{12}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{13}}&\dfrac{3}{\sqrt{13}}&0&0\\\dfrac{-3}{\sqrt{13}}&\dfrac{2}{\sqrt{13}}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

从而有
$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{13}}&\dfrac{3}{\sqrt{13}}&0&0\\\dfrac{-3}{\sqrt{13}}&\dfrac{2}{\sqrt{13}}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\0\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{13}\\0\\0\\5\end{bmatrix}$$

再令 $\sin\theta=\dfrac{5}{\sqrt{\sqrt{13}^2+5^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{38}}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}}=\sqrt{\dfrac{13}{38}}$，又得

$$R_{14}=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{13}{38}} & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{38}}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{-5}{\sqrt{38}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{13}{38}}\end{bmatrix}$$

故有

$$e'_1=R_{14}x'=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{13}{38}} & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{38}}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{-5}{\sqrt{38}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{13}{38}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{13}\\ 0\\ 0\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{38}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

显然 e'_1 与 e_1 同方向.

12. 试用镜像变换(Householder 变换)将向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 变为与 $e_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 同方向的向量.

解 作单位向量 $\boldsymbol{\omega}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-|\boldsymbol{\alpha}|e_1}{|\boldsymbol{\alpha}-|\boldsymbol{\alpha}|e_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$,则

$$H=I-2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix},\quad \text{故得 } \boldsymbol{\eta}=H\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

13. 已知 $u=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$ 为单位向量,作一初等反射矩阵 H,并验证有 $H^{-1}=H$.

解 $$H=I-2uu^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$HH=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

故 $H^{-1}=H$.

14. 设有变换 $\mathscr{A}$ 定义为 $H\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$,而 $\boldsymbol{\omega}$ 是欧氏长度为 1 的列向

量，问 λ 取何值时，$\boldsymbol{H}$ 是正交矩阵.

解 先证 $\mathscr{A}$ 是线性变换. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in\mathbb{R}^n$，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2)&=(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2)-\lambda(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\bar{\boldsymbol{\omega}})\bar{\boldsymbol{\omega}}\\&=k_1[\boldsymbol{\alpha}_1-\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1,\bar{\boldsymbol{\omega}})\bar{\boldsymbol{\omega}}]+k_2[\boldsymbol{\alpha}_2-\lambda(\boldsymbol{\alpha}_2,\bar{\boldsymbol{\omega}})\bar{\boldsymbol{\omega}}]\\&=k_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}_2\end{aligned}$$

故 $\mathscr{A}$ 是线性变换. 又因为

$$(\boldsymbol{H\alpha},\boldsymbol{H\alpha})=(\boldsymbol{\alpha}-\lambda(\boldsymbol{\alpha},\bar{\boldsymbol{\omega}})\bar{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{\alpha}-\lambda(\boldsymbol{\alpha},\bar{\boldsymbol{\omega}})\bar{\boldsymbol{\omega}})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\alpha},\bar{\boldsymbol{\omega}})^2(\lambda^2-2\lambda)$$

所以当 $\lambda=0,\lambda=2$ 时，有

$$(\boldsymbol{H\alpha},\boldsymbol{H\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$$

即 $\mathscr{A}$ 是正交变换，它在标准正交基下的矩阵 $\boldsymbol{H}$ 便是正交矩阵.

15. 求两个正交矩阵，以 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 及 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},-\frac{5}{6}\right)$ 为前两行.

解 设正交矩阵的第三行为 (a,b,c,d)，它同时正交于前两行，又它本身是单位向量，即有

$$\begin{cases}\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2}+\dfrac{d}{2}=0\\\dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{6}+\dfrac{c}{2}-\dfrac{5d}{6}=0\\a^2+b^2+c^2+d^2=1\end{cases}$$

令 $d=0$ 解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2},b=-\frac{\sqrt{2}}{2},c=0$ 和 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2},b=\frac{\sqrt{2}}{2},c=0$. 这样可得正交矩阵第三行为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$.

同理，可求得第四行为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$. 故两个正交矩阵可以取(不唯一)：

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{-5}{6}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{3}&\frac{-\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{6}\end{bmatrix}\quad\text{和}\quad\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{-5}{6}\\\frac{-\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\-\frac{\sqrt{2}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}\end{bmatrix}$$

16. 证明：上三角的正交矩阵必为对角矩阵，且对角线上的元素为 $+1$ 或 -1.

证明 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&\cdots&a_{1n}\\&\ddots&&\vdots\\&&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\&&&a_{nn}\end{bmatrix}$$

因为 $a_{nn}^2=1$，所以 $a_{nn}=\pm1$. 又因为各行均与最后一行正交，故 $a_{in}=0(i=1,2,\cdots,n-1)$，由此得 $a_{n-1,n-1}^2=1$，所以 $a_{n-1,n-1}=\pm1$.

又因为各行与第 $n-1$ 行正交，故 $a_{i,n-1}=0(i=1,2,\cdots,n-2)$. 如此由下往上逐行递推，即得结果.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对阵，$\boldsymbol{S}$ 为实反对称矩阵，有关系式 $\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{SA}$，而且 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S}$ 非奇异，求证：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{-1}$ 是正交矩阵.

证明 因为

$$[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{-1}]^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{-1}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}}]^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})$$

所以

$$[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{-1}]^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{-1}]=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{-1}$$

又因为 $\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{SA}$，所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{S}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})$. 故有

$$[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{-1}]^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{-1}]=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{I}$$

即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S})^{-1}$ 是正交矩阵.

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是正交矩阵，$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，求证：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{B}|^2|(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$

所以 $2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$，即有 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

19. 证明：方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵必要且只要 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正交矩阵.

证明 必要性　因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，所以 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

充分性　由 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$，知 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

20. 证明：正交矩阵的伴随矩阵也是正交矩阵.

证明 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 知 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

21. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，证明：当 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵时，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 也是正交的. 试举例说明 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵时，虽然 $\boldsymbol{P}$ 不是正交矩阵，但 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 也可能还是正交的.

证明 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APP}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$. 当 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵，$\boldsymbol{P}$ 不是正交阵时，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 可以是正交阵，例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} & -1\\ -1 & \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}\neq\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，显然 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix} -1 & \\ & -1\end{bmatrix}$ 是正交阵.

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{SA}$ 是对称矩阵或是反对称矩阵，由 $\boldsymbol{S}$ 是对称矩阵或是反对称矩阵而定.

证明 当 $\boldsymbol{S}$ 是对称阵时，有 $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{SA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{SA}$；当 $\boldsymbol{S}$ 是反对称阵时，有 $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{SA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{SA})$.

23. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 到其本身的一个变换，其定义如下

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$$

其中 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个单位向量，求 k 取何值时，$\mathscr{A}$ 是正交变换.

解 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in\mathbb{R}^n$，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$，由于

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2)&=(l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2)-k(l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})\\&=l_1\boldsymbol{\alpha}_1-k(l_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+l_2\boldsymbol{\alpha}_2-k(l_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}\\&=l_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+l_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)\end{aligned}$$

所以$\mathscr{A}$是线性变换.另一方面,由于

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))&=(\boldsymbol{\alpha}-k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta})\\&=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2(k^2-2k)\end{aligned}$$

当 $k=0$ 和 $k=2$ 时,有

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$$

故此时$\mathscr{A}$是一个正交变换.

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称矩阵(即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$),证明:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或纯虚数,且 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 是可逆的;

(2) $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$是正交矩阵;

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个非零特征值的特征向量,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为实向量,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

证明　(1) 如果 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则有 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$,由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,有

$$(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{Ax})=(\boldsymbol{x},-\lambda\boldsymbol{x})$$

即有 $\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=-\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$,因$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\neq0$,故 $\lambda=-\bar{\lambda}$,表明 $\lambda=0$ 或纯虚数.

设 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,那么 $1-\lambda_i$ 便是 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的特征值,故 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值皆非零,即 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 是可逆的.

(2) 考察
$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}&=[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\\&=[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}]^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\\&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\\&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$是正交阵.

(3) 设 $a\neq0$ 是相应的特征值,则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i})=a(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathrm{i})$,从而 $\boldsymbol{A\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A\beta}=a\boldsymbol{\beta}$,于是 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.因此$-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\beta}=a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 或$-a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,由于 $a\neq0$,必有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$.

25. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维欧氏空间两个线性无关的向量组,证明存在正交变换$\mathscr{A}$,使$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,n)$的充要条件是:

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j),\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

证明　充分性　定义变换$\mathscr{A}$,使得$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i$,$i=1,2,\cdots,n$,由教材第 1 章定理 1.1.11 知$\mathscr{A}$是线性变换,且是唯一的.

又因为已知$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)$,则有$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j))=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$,设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V^n$,$\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i$,$\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{j=1}^{n}y_j\boldsymbol{\alpha}_j$,则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\boldsymbol{\alpha}_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$$

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))&=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i),\sum_{j=1}^{n}y_j\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j)\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j))=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)\end{aligned}$$

这样就有$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，故$\mathscr{A}$是正交变换.

必要性　因$\mathscr{A}$是正交变换，有$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j))=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$，又已知$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i$，故有$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)$，$i,j=1,2,\cdots,n$.

26. (1) 设$\boldsymbol{A}$是一个n阶实矩阵，如果只要求$\boldsymbol{A}$的列向量构成正交向量组，问$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$有何特点？此时，能否找到方阵$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{AB}$为正交阵；

(2) 设$\boldsymbol{C}$为一个$m\times n(m\neq n)$实矩阵且其列向量组标准正交，求$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$；

(3) 解矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-a & -b & c & d\\ b & 1-a & -d & c\\ -c & d & 1-a & b\\ d & c & b & 1+a\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

其中，a,b,c,d是不全为零的实数.

解　(1) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$\boldsymbol{A}$的列向量，有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{\alpha}_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\boldsymbol{\alpha}_n|^2\end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}_n|}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{AB}$$

则有$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$，这表明$\boldsymbol{Q}$为正交阵.

(2) 设$\boldsymbol{C}$的n个列向量为$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$，且标准正交，于是有

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_n\\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$$

(3) 因$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，有$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-a & -b & c & d\\ b & -a & -d & c\\ -c & d & -a & b\\ d & c & b & a\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

所以

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\begin{bmatrix}a^2+b^2+c^2+d^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & & a^2+b^2+c^2+d^2\end{bmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{I}$$

故有

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}$$

从而

$$X=(A-I)^{-1}B=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(A-I)^{\mathrm{T}}B$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(-a+b-c+d,-b-a+d+c,c-d-a+b,d+c+b+a)^{\mathrm{T}}$$

27. 证明：正交矩阵的任一行(列)用-1遍乘后，结果仍然是一个正交矩阵.

证明　设$A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$，因为$A$为正交矩阵，所以

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j\\ 0, & \text{当 } i\neq j\end{cases}$$

用-1乘第i行，那么$\sum_{k=1}^{n}(-a_{ik})^2=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=1$，第$i$行与第$j$行$(i\neq j)$各对应元素相乘的和为

$$\sum_{k=1}^{n}(-a_{ik})(a_{jk})=-\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=0$$

所以A的第i行$(i=1,2,\cdots,n)$乘-1后仍为正交阵.

同理可证A的第i列$(i=1,2,\cdots,n)$各元素乘-1后仍是正交阵.

28. 求证：下列3个条件任何两条满足时，第三条也满足：

(1) A是实对称矩阵；(2) A是正交矩阵；(3) $A^2=I$.

证明　因为$A=A^{\mathrm{T}}$，$A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$，所以$A=A^{-1}$即$A^2=I$；又因为$A=A^{\mathrm{T}}$，$A^2=I$，所以$A^{\mathrm{T}}A=A^2=I$，即A是正交阵；又因为$A^{\mathrm{T}}A=I$，$A^2=I$，所以$A^{\mathrm{T}}A=AA=I$，则$A^{\mathrm{T}}=A$，即A为对称阵.

29. 证明：若$A=(a_{ij})$为正交矩阵，则方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的解为

$$\begin{cases}x_1=a_{11}b_1+a_{21}b_2+\cdots+a_{n1}b_n\\ x_2=a_{12}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{n2}b_n\\ \qquad\vdots\\ x_n=a_{1n}b_1+a_{2n}b_2+\cdots+a_{nn}b_n\end{cases}$$

证明　因为A为正交矩阵，所以有$A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$. 此时，方程组有唯一解：

$$X=A^{\mathrm{T}}b=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

即有

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + \cdots + a_{n1}b_n \\ x_2 = a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{n2}b_n \\ \qquad \vdots \\ x_n = a_{1n}b_1 + a_{2n}b_2 + \cdots + a_{nn}b_n \end{cases}$$

30. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是行列式为 1 的三阶正交方阵,证明:

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \\ a_{21} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} \\ a_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \end{cases}$$

证明 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,则$|\boldsymbol{A}|=1$,所以

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

故得

$$\begin{cases} a_{11} = A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \\ a_{21} = A_{21} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} \\ a_{31} = A_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \end{cases}$$

31. 求将$(1,0,0)$,$(0,1,0)$变为$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$,$\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$的正交变换.

解 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$,补充 $\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$,则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是$\mathbb{R}^3$中的一组标准正交基.由于有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right), \qquad \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = \left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

如果能求出$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(x,y,z)$,使矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

成为正交矩阵,那么基像$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)$,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)$,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)$也是$\mathbb{R}^3$中的标准正交基,从而$\mathscr{A}$就是所求的正交变换,它在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

下面求正交矩阵的第三行.

考虑到第三行与前两行均正交,又本身是单位向量,有

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

解得 $x=\frac{1}{3},y=-\frac{2}{3},z=-\frac{2}{3}$ 或 $x=-\frac{1}{3},y=\frac{2}{3},z=\frac{2}{3}$,所以$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

32. 设欧氏空间 V^n 的正交变换$\mathscr{A}$的特征值都是实数,证明:存在 V^n 的标准正交基,使得$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为对角矩阵.

证明　设 V^n 的一组标准正交基为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$,正交变换$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,那么,$\boldsymbol{A}$ 为正交阵,也是实的正规矩阵. 因为$\mathscr{A}$的特征值都是实数,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也都是实数. 于是存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{\Lambda}$$

令$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{Q}$,则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V^n 的标准正交基,且$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$$

33. 证明:第二类正交变换一定有特征值-1.

证明　设$\mathscr{A}$是 V^n 的一个第二类正交变换,$\boldsymbol{A}$ 是$\mathscr{A}$在某组标准正交基下的方阵,因此 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵,且$|\boldsymbol{A}|=-1$.

令 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$,于是 $f(-1)=|(-1)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|$,但是由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$,故$(-1)^n|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}||\boldsymbol{A}|=(-1)^{n+1}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$,所以$|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=0$,$f(-1)=0$,即$-1$是$\mathscr{A}$的一个特征值.

34. 证明:(1) 正交矩阵的特征值的模全等于 1;

(2) 酉矩阵的特征值的模全等于 1;

(3) 如果 λ 是某正交矩阵的特征值,那么$\frac{1}{\lambda}$也是该正交矩阵的特征值.

证明　(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵,λ_0(复数)是它的任一特征值,$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 是属于 λ_0 的复特征向量,即 $\boldsymbol{AX}=\lambda_0\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$. 两端取转置有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\lambda_0\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$,于是$\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{AX}=\overline{\lambda_0\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\cdot\lambda_0\boldsymbol{X}$,或即$\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\overline{\lambda_0}\lambda_0\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{X}$,$\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{X}=|\lambda_0|^2\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{X}$,但因 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,从而$\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{X}=\overline{x_1}x_1+\overline{x_2}x_2+\cdots+\overline{x_n}x_n\neq0$,所以$|\lambda_0|^2=1$,即$|\lambda_0|=1$.

(2) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 为酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 关于特征值 λ 的特征向量,则 $\boldsymbol{U\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$,两端取共轭转置 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\bar{\lambda}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{H}}$,所以 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U\xi}=\bar{\lambda}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{H}}\lambda\boldsymbol{\xi}$,即 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\xi}=(\bar{\lambda}\lambda)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\xi}$,由于 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\xi}=|\boldsymbol{\xi}|^2>0$,故 $\bar{\lambda}\lambda=|\lambda|^2=1$,即$|\lambda|=1$.

(3) 设$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$,则

$$|\boldsymbol{A}^{-1}||\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I}|=|\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}|=|(\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}|=|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0$$

因为 $\lambda\neq0$,所以 $\left|\boldsymbol{A}-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{I}\right|=0$ 或 $\left|\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=0$,即$\frac{1}{\lambda}$为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

35. 证明:酉矩阵的任一行(列)用模为 1 的任何数遍乘后,结果还是酉矩阵.

证明　设酉矩阵为 $\boldsymbol{A}$,α 是模为 1 的数,因 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$,于是

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{jk}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

用α遍乘$\boldsymbol{A}$的第j行得$\boldsymbol{A}_1$，那么$\boldsymbol{A}_1$的第i行乘$\overline{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}$的第$i$列为

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha a_{ik}\alpha\bar{a}_{ik}=|\alpha|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{ik}=1$$

$\boldsymbol{A}_1$的第i行乘$\overline{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}$的第$j$列$(i\neq j)$得

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha a_{ik}\alpha\bar{a}_{jk}=\alpha\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}=0$$

$\boldsymbol{A}_1$的第j行乘$\overline{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}$的第$i$列$(j\neq i)$为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\bar{\alpha}a_{ik}=\bar{\alpha}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}a_{ik}=0$$

$\boldsymbol{A}_1$的第j行$(j\neq i)$乘$\overline{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}$的第$l$列$(l\neq i)$得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\bar{a}_{lk}=\begin{cases}1, & j=l\\ 0, & j\neq l\end{cases}$$

故$\boldsymbol{A}_1\overline{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，即$\boldsymbol{A}_1$为酉矩阵.

36. 设$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$均为$n$阶酉矩阵(正交矩阵)，证明：

(a) $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2$是酉矩阵(正交矩阵)；

(b) $\boldsymbol{Q}_1^{-1}$是酉矩阵(正交矩阵).

证明 (a) 设$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$为酉矩阵(正交矩阵)，则有

$$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{Q}_1\overline{\boldsymbol{Q}}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}\ (\text{即}\ \boldsymbol{Q}_1^{-1}=\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}}),\qquad \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{Q}_2\overline{\boldsymbol{Q}}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}\ (\text{即}\ \boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{H}})$$

所以

$$(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2)^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}=(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}$$
$$(\text{或}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}=(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1})$$

即$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2$也是酉矩阵(正交矩阵).

(b) 设$\boldsymbol{Q}_1$为酉矩阵(正交矩阵)，则有$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{Q}_1^{-1}$，故

$$(\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1}$$
$$(\text{或}(\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1})$$

即$\boldsymbol{Q}_1^{-1}$也是酉矩阵(正交矩阵).

37. 证明：n阶方阵$\boldsymbol{A}$为酉矩阵的充分必要条件是对任何行向量$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$，都有$|\boldsymbol{\alpha A}|=|\boldsymbol{\alpha}|$.

证明 设$\boldsymbol{A}$为酉矩阵，则$(\boldsymbol{\alpha A})(\boldsymbol{\alpha A})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{AA})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{H}}$，即$|\boldsymbol{\alpha A}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2$，故$|\boldsymbol{\alpha A}|=|\boldsymbol{\alpha}|$.

反之，由$|\boldsymbol{\alpha A}|=|\boldsymbol{\alpha}|$，可得$(\boldsymbol{\alpha A})(\boldsymbol{\alpha A})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{H}}$，于是$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}=0$. 令$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{I}$，可得

$$f=\boldsymbol{\alpha B\alpha}^{\mathrm{H}}=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_i\overline{x_j}=0$$

取$\boldsymbol{\alpha}$满足条件：$x_i=1,x_j=1$，其他的$x_k=0$，得$b_{ij}=0$. 由于i,j的任意性，故知$\boldsymbol{B}=(b_{ij})=0$(零矩阵)，所以有$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$，即$\boldsymbol{A}$为酉矩阵.

38. 设$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$各为$m$阶及$n$阶方阵，证明：若$m+n$阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{bmatrix}$是酉矩阵，则$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$

也是酉矩阵，且 $\boldsymbol{B}$ 是零矩阵.

证明 由于 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{PP}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{BB}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{BQ}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{QB}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{QQ}^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$，可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{QQ}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}_n(n\text{ 阶单位阵}) & ①\\ \boldsymbol{QB}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{O}(\text{零矩阵}) & ②\end{cases}$$

由①式知 $\boldsymbol{Q}$ 为酉矩阵；再应用②式可推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，最后再由 $\boldsymbol{PP}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}_m$，知 $\boldsymbol{P}$ 也是酉矩阵($\boldsymbol{Q}$ 同理).

39. 证明：(1) 如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，并且 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个元素都等于其本身的代数余子式，那么 $\boldsymbol{A}$ 是一个正交矩阵；

(2) 如果 $|\boldsymbol{A}|=-1$，并且 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素都等于其本身的代数余子式乘以 -1，那么 $\boldsymbol{A}$ 是一个正交矩阵.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，依题意有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式

于是

$$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}| & & \\ & \ddots & \\ & & |\boldsymbol{A}|\end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{I}$$

因为 $|\boldsymbol{A}|=1$，所以 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵.

(2) 同理可证.

40. 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的实对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为实反对称矩阵；且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，证明：

(1) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均可逆；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$ 与 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 都是正交矩阵.

证明 (1) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$

由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$、右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 后有 $\boldsymbol{BA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，所以

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=-\boldsymbol{BA}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 是实反对称矩阵，它的特征值为零或纯虚数，从而 1 不是 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值，故有

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|\neq 0$$

表明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是可逆的. 又 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是可逆的.

(2) 记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$，那么

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$$

又由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，所以有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

这表明 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$ 是正交矩阵.

同理可证 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 也是正交矩阵.

41. 设 n 维欧氏空间 V^n 的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，证明：存在正定矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

确定的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 V^n 的一个标准正交基.

证明 先证任意一个可逆矩阵可以写成一个正定矩阵和一个正交矩阵的乘积.

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵（对角元素为正），因此有 $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^{-1}=\boldsymbol{I}$，即 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^{-1})=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^{-1}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{D}$ 正定，故 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 正定；又 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{Q}$ 均为正交阵，故 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 也是正交矩阵，从而 $\boldsymbol{A}$ 可写成一个正定阵与正交阵的乘积.

下设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一组标准正交基，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到该基的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，即

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$$

由前段的证明，存在正定矩阵 $\boldsymbol{C}$ 与正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}$，则 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}$，因此 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{Q}^{-1}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$ 也是一组标准正交基.

42. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

试求 $\boldsymbol{U}$ 矩阵，使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 是上三角矩阵.

解 由 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)^2$，当 $\lambda=-1$ 时，求得单位特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，考察 $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{X})=0$ 得 $-2x_1+x_2+x_3=0$，求得一个单位解向量

$$\boldsymbol{\xi}_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\mathrm{T}}$$

又解 $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{X})=0$ 与 $(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{X})=0$，即

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\ \quad\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

得单位解向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$. 取

$$\boldsymbol{U}_1=\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & 0\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_1=\begin{bmatrix}-1 & -\dfrac{7\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\\[2mm] 0 & 4 & \dfrac{5\sqrt{6}}{3}\\[2mm] 0 & -\dfrac{5\sqrt{6}}{2} & -6\end{bmatrix}$$

记

$$A_1=\begin{bmatrix} 4 & \frac{5\sqrt{6}}{3} \\ \frac{-5\sqrt{6}}{2} & -6 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A_1|=(\lambda+1)^2$$

对于 $\lambda=-1$ 时，求出一个单位特征向量 $\eta_1=\left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^{\mathrm{T}}$，再求得一个与 η_1 正交的向量 $\eta_2=\left(\frac{\sqrt{15}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

令

$$V_1=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{bmatrix}$$

$$V_1^{\mathrm{H}}A_1V_1=\begin{bmatrix} -1 & -\frac{25\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

令

$$U_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{bmatrix}$$

记

$$U=U_1U_2=\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{30}}{6} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

则有

$$U^{\mathrm{H}}AU=\begin{bmatrix} -1 & \frac{\sqrt{30}}{15} & -\frac{7\sqrt{15}}{20} \\ 0 & -1 & -\frac{25\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

评注　由求解过程可知，这里的 U 不唯一.

43. 证明：$(u,v)(v,u)\leqslant(u,u)(v,v)$，其中 u,v 为酉空间中任意向量.

证明　当 u 与 v 线性相关时，必有 $u=kv$，所以

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\bar{k}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$$

当 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 线性无关时，$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{\theta}$，所以$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})>0$，令 $k=\dfrac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}$，则$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$，由 $\boldsymbol{u}-k\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{\theta}$，所以$(\boldsymbol{u}-k\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}-k\boldsymbol{v})>0$，亦即$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})-k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})-\bar{k}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+k\bar{k}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})>0$，因 $k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$，所以上式变为$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})-k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})>0$. 再用$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$乘两端得$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})-k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})>0$，从而$|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2>(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$.

44. 用向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 生成子空间 V，求 V 的正交补 $V^{\perp}$ 的基底及正交补空间 $V^{\perp}$.

解 子空间 V 的正交补空间 $V^{\perp}=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=(-2,2,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_2=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

为正交补 $V^{\perp}$ 的基.

45. 设 V_1,V_2 是欧氏空间 V 的两个子空间，证明：

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp},\qquad (V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$$

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}\in(V_1+V_2)^{\perp}$，即 $\boldsymbol{\alpha}\perp(V_1+V_2)$，于是 $\boldsymbol{\alpha}\perp V_1$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\perp V_2$ 或者 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}$，且 $\boldsymbol{\alpha}\in V_2^{\perp}$，即 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，故

$$(V_1+V_2)^{\perp}\subset(V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp})$$

又设 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，即 $\boldsymbol{\alpha}\in V_2^{\perp}$，于是 $\boldsymbol{\alpha}\perp V_1$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\perp V_2$，或者 $\boldsymbol{\alpha}\perp(V_1+V_2)$，即 $\boldsymbol{\alpha}\in(V_1+V_2)^{\perp}$. 故有$(V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp})\subset(V_1+V_2)^{\perp}$，因此第一式成立.

对 $V_1^{\perp}$ 与 $V_2^{\perp}$ 应用第一式，有

$$(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})^{\perp}=(V_1^{\perp})^{\perp}\cap(V_2^{\perp})^{\perp}=V_1\cap V_2$$

故$(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$，即第二式成立.

46. 求齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的 $N(\boldsymbol{A})$的一组标准正交基及 $N^{\perp}(\boldsymbol{A})$的一组标准正交基，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

解 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换 $\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，所以解得

$$\boldsymbol{X}=k_1(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 单位化得 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}$，即 $N(\boldsymbol{A})$的一组标准正交基.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\in N^{\perp}(\boldsymbol{A})$，则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$，解得 $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_4=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}\in N^{\perp}(\boldsymbol{A})$，单位化后得 $\boldsymbol{\varepsilon}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$. 这里 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是 $N^{\perp}(\boldsymbol{A})$的一组标准正交基.

47. 设 W 与 U 是 V^n 的两个子空间，且 $V^n=W\oplus U$，设 W 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，$U$ 的基为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$，则 U 是 W 的正交补的充要条件是 W 与 U 的两组基互相正交，即

$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=0, i=1,2,\cdots,r; j=1,2,\cdots,n-r.$

证明 必要性 由于 $U\perp W$，所以对于 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in W,\forall\boldsymbol{\beta}\in U,(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，显然有 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=0$，即 W 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 U 的基 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 正交.

充分性 记 $W=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r]$，$U=L[\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}]$，对于 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\in W,\boldsymbol{\beta}\in U$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i,\qquad \boldsymbol{\beta}=\sum_{j=1}^{n-r}l_j\boldsymbol{\beta}_j$$

由于 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=0, i=1,2,\cdots,r, j=1,2,\cdots,n-r$，则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^{n-r}l_j\boldsymbol{\beta}_j\right)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n-r}k_i\bar{l}_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=0$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，也就是 $W\perp U$，故 U 是 W 的正交补.

从这个例子可以看出，子空间的正交补可以转化为两个子空间的基的正交性来讨论.

48. 设 $P[x]_3$ 是次数不大于 3 的实域上多项式空间，定义内积：

$$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x,\qquad \forall f(x),g(x)\in P[x]_3$$

设 W 是次数为零的多项式子空间，求 $W^{\perp}$ 的一个基.

解 记 $W=L[(1)]=\mathbb{R}$，则 $\dim W^{\perp}=4-1=3$，设 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 是 $W^{\perp}$ 中的一组基，使它们满足

$$(1,f_1(x))=0,\qquad (1,f_2(x))=0,\qquad (1,f_3(x))=0$$

由内积的定义，不妨取 $f_1(x)=1-\frac{1}{2}x, f_2(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}, f_3(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}$，显见它们线性无关，且有

$$(1,f_1(x))=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x=x-x^2\Big|_0^1=0$$

$$(1,f_2(x))=\int_0^1\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right)\mathrm{d}x=0$$

$$(1,f_3(x))=\int_0^1\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)\mathrm{d}x=0$$

故 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 是 $W^{\perp}$ 的基.

49. 设实域的多项式空间 $P[x]_3$ 中，两子空间 $V_1=L[1,x]$，$V_2=L\left[x^2-\frac{1}{3},x^3-\frac{3}{5}x\right]$，在 $P[x]_3$ 中定义内积

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

证明 V_1 与 V_2 互为正交补.

证明 不难验证 $1,x,x^2-\frac{1}{3},x^3-\frac{3}{5}x$ 是线性无关的，所以它们是 $P[x]_3$ 中的一组基. 显而易见 $P[x]_3$ 是两子空间的直和，即

$$P[x]_3=L\left[1,x,x^2-\frac{1}{3},x^3-\frac{3}{5}x\right]=V_1\oplus V_2$$

又由于 $\left(1,x^2-\frac{1}{3}\right)=\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=0$

$$\left(x,x^2-\frac{1}{3}\right)=\int_{-1}^{1}x\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=0$$
$$\left(1,x^3-\frac{3}{5}x\right)=\int_{-1}^{1}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)\mathrm{d}x=0$$
$$\left(x,x^3-\frac{3}{5}x\right)=\int_{-1}^{1}x\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)\mathrm{d}x=0$$

即 $V_1\perp V_2$. 综上所述,V_1 与 V_2 互为正交补.

习 题 1(5)

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为埃尔米特矩阵,证明:$\boldsymbol{AB}$ 为埃尔米特矩阵的充分必要条件是:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}$,又

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{AB}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{AB}$$

即 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$.

2. 证明:任一复方阵都可以表示成埃尔米特矩阵与反埃尔米特矩阵之和.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 为任一复方阵,令

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} \tag{①}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 为埃尔米特矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为反埃尔米特矩阵,于是,可得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C} \tag{②}$$

由①与②联立得 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}{2},\boldsymbol{C}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}{2}$.

3. 证明:欧氏空间 V^n 的线性变换 $\mathscr{A}$ 为反对称变换,即

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})),\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V^n$$

的充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 在 V^n 的标准正交基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵(即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$).

证明 设 V^n 的标准正交基为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,$\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,则有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=a_{1i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2i}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{\varepsilon}_n$$
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=a_{1j}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2j}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{\varepsilon}_n$$
$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i),\boldsymbol{\varepsilon}_j)=a_{ji},\qquad(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_j),\boldsymbol{\varepsilon}_i)=a_{ij}$$

必要性 若 $\mathscr{A}$ 是反对称变换,即 $(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i),\boldsymbol{\varepsilon}_j)=-(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_j))$,则 $a_{ji}=-a_{ij}$,也就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.

充分性 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V^n$,有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\qquad\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix},\qquad\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$$

由于在标准正交基下,两向量的内积就等于它们的坐标向量的内积,故有

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=-(x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=-(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$$

即 $\mathscr{A}$ 是反对称变换.

4. 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^n$ 也是对称矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是反对称矩阵,但不存在奇数阶可逆反对称方阵.

证明　(1) 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,所以 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$,即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为对称阵. 又因为 $(\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^n$,即 $\boldsymbol{A}^n$ 也是对称阵.

(2) 因 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,故 $\boldsymbol{A}^{-1}=(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=-(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$,所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是反对称的.

当 n 为奇数时,如果 $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵,则 $|\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$,所以 $|\boldsymbol{A}|=0$,故不存在奇数阶可逆反对称方阵.

5. 证明:

(1) 与对称矩阵相合的矩阵仍为对称矩阵;

(2) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相合,则 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$,即在相合变换下秩是一个不变量.

证明　(1) 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,所以有

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

则 $\boldsymbol{B}$ 为对称阵.

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相合,知存在满秩矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,又因 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 都是满秩的,于是 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$,即 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$.

6. 求证:实反对称矩阵的特征值是零或纯虚数.

证明　因为 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$, $\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\bar{\lambda}\cdot\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}$, $\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{A}=-\bar{\lambda}\cdot\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}$, $\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{AX}=-\bar{\lambda}\cdot\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{X}$, $\lambda\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{X}=-\bar{\lambda}\cdot\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{X}$,由于 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{\theta}$,所以 $\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\lambda=-\bar{\lambda}$,即 λ 为 0 或为纯虚数.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$(即 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵),证明:存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$$

证明　设 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$,则 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}$,因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,且 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{\theta}$,所以 $\lambda^2-\lambda=0$,即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$. 再由 $\boldsymbol{A}$ 为实对称知,存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$$

8. 证明:酉空间 V^n 的埃尔米特变换 $\mathscr{A}$ 在 V^n 的某组基下的矩阵为对角矩阵.

证明　设 V^n 的标准正交基为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,又 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$,从而 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵,故存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$(对角阵). 再构造 V^n 的另一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$,使满足

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{P}$$

则有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)&=\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\\&=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{\Lambda}\end{aligned}$$

即 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

9. (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵,求证:$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|\geqslant 1$,且等号成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵,求证:$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geqslant|\boldsymbol{B}|$,且等号成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明　(1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 半正定,所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix},\quad 且\quad \lambda_i\geqslant 0$$

故有

$$|A+I|=|P^{-1}||A+I||P|=|P^{-1}(A+I)P|$$
$$=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}\right)\geqslant 1$$

且显见等号成立的充要条件为 $\lambda_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，即 $A=0$.

(2) 由线性代数知，存在非奇异矩阵 M、对角矩阵 D，使 $B=M^{T}M=M^{T}IM,A=M^{T}DM$ 同时成立. 再由第(1)小题知

$$|A+B|=|M^{T}||I+D||M|\geqslant|M^{T}||M|=|M^{T}M|=|B|$$

当 $|A+B|=|B|$ 时的充要条件为 $|I+D|=1\Leftrightarrow D=0\Leftrightarrow A=0$.

10. 证明：在 n 阶对称矩阵中，正定矩阵只能与正定矩阵相似.

证明 设 A,B 是两个 n 阶实对称矩阵，且两者相似. 当 A 为正定矩阵时，A 的特征值全为正实数，但相似矩阵有相同的特征值，故 B 的特征值也全为正实数，从而 B 为正定矩阵.

11. 求证：(1) 如果 A,B 都是 n 阶正定矩阵，则 $A+B$ 也是正定矩阵；

(2) 设 A 为对称正定矩阵，M 为非奇异矩阵，则与 A 相合的矩阵 $M^{T}AM$ 以及 A^{-1} 均正定.

证明 (1) 因为 A,B 正定，所以对任意非零 n 维向量 X，有 $X^{T}AX>0,X^{T}BX>0$，因此

$$X^{T}(A+B)X=X^{T}AX+X^{T}BX>0$$

由定义知 $A+B$ 为正定矩阵.

(2) 设 $B=M^{T}AM$，则因 M 非奇异及 A 为对称矩阵，有 $(M^{T})^{-1}BM^{-1}=A=P^{T}IP$，其中 P 为非奇异矩阵. 又

$$M^{T}(M^{T})^{-1}BM^{-1}=M^{T}P^{T}IPM=(PM)^{T}I(PM),\quad 即\quad B=(PM)^{T}I(PM)$$

这里 (PM) 为非奇异矩阵，所以 $M^{T}AM$ 是正定的.

又由 $A=P^{T}IP$，P 非奇异，可知

$$A^{-1}=(P^{T}IP)^{-1}=P^{-1}I(P^{T})^{-1}=P^{-1}I(P^{-1})^{T}$$

令 $C=(P^{-1})^{T}$，则 $C^{T}=P^{-1}$，C 亦为非奇异矩阵，所以

$$A^{-1}=C^{T}IC$$

即 A^{-1} 可分解成 $C^{T}C$，由充要条件知 A^{-1} 正定.

12. 求证：对任何实矩阵 $A_{m\times n}$，所得的矩阵 $B=A^{T}A$ 为半正定，且当 A 的列向量线性无关时，B 为正定矩阵.

证明 B 实对称显然. 对任意 n 元列向量 X 均有

$$X^{T}BX=X^{T}A^{T}AX=(AX)^{T}(AX),\ 令\ AX=Y,\ 则有\ X^{T}BX=Y^{T}Y\geqslant 0$$

所以 B 为半正定；而当 A 的列向量组线性无关时，当 $X\neq 0$，则 $Y\neq 0$，此时，$X^{T}BX=Y^{T}Y>0$，即 B 为正定.

13. 求证：(1) A 为实半正定矩阵的充分必要条件是 A 的主子式全大于等于零；

(2) 实对称矩阵 A 是负定的(即对应的二次型 $x^{T}Ax<0$)充分必要条件是：A 的一切偶数阶主子式都大于零、一切奇数阶主子式都小于零.

证明 (1) 必要性 设 A 半正定，则对任意正数 m，$mI+A$ 是正定的，因此 $mI+A$ 的主

子式全大于零. 如果 $\boldsymbol{A}$ 有一个 k 阶主子式 $M<0$, 那么在 $m\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 中取相应的主子式 N, 则有

$$N=m^k+c_1m^{k-1}+\cdots+c_{k-1}m+M$$

因 $M<0$, 故可找到 $m>0$, 使 $N<0$, 这与 $m\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 是正定的相矛盾, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的主子式必须全大于等于零.

充分性. 设 $\boldsymbol{A}$ 的主子式全大于等于零, 那么对任意的正数 m, $m\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 一定是正定的, 这是因为 $m\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 的主子式可表示成

$$|m\boldsymbol{I}_k+\boldsymbol{M}|=m^k+c_1m^{k-1}+\cdots+c_{k-1}m+M$$

其中 M 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个主子式, 因而 $c_i(i=1,2,\cdots,k-1)$ 是 M 的 i 阶主子式之和, 也就是 $\boldsymbol{A}$ 的一些 i 阶主子式之和, 所以 $c_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,k-1)$, 以及 $|mI_k+M|>0$.

如果 $\boldsymbol{A}$ 不是半正定的, 那么有一个非零实向量 $\boldsymbol{X}$, 使 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<0$, 即 $0<m<\dfrac{|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}|}{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}}$, 就有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(m\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}<0$, 这与 $m\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 的正定性矛盾, 所以 $\boldsymbol{A}$ 必须是半正定的.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是负定的, 即对非零列向量 $\boldsymbol{X}$, 有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<0$, 所以必要且只要 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}>0$, 即 $-\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 记 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶主子式为 $|\boldsymbol{A}^{(k)}|$, 则相应的 $-\boldsymbol{A}$ 的 k 阶主子式为 $(-1)^k|\boldsymbol{A}^{(k)}|$, 由 $(-1)^k|\boldsymbol{A}^{(k)}|>0$ 知当 k 为偶数时, $|\boldsymbol{A}^{(k)}|>0$; 当 k 为奇数时, $|\boldsymbol{A}^{(k)}|<0$.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 证明: 对任意奇数 m, 必有实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{A}$; 当 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵时, 对任意正整数 m, 有实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{A}$.

证明　因为 $\boldsymbol{A}$ 实对称, 故有正交阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$, 从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$.

由于 m 为奇数, 特征值 λ_i 均为实数, 故令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[m]{\lambda_n}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1},\quad \text{则有}\quad \boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{A}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 为半正定时, 由于 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$, 故 m 为正整数时, 可取 $\sqrt[m]{\lambda_i}$ 为算术根, 于是由上知, 对任意正整数 m, 均有实方阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{A}$.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称正定矩阵, m 是任一正整数, 证明: 存在唯一的实对称正定矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{A}$.

证明　存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$, 其中 $\lambda_i>0(i=1,\cdots,n)$. 取 $\sqrt[m]{\lambda_i}>0$, 令

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[m]{\lambda_n}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$, 则显然 $\boldsymbol{B}$ 是正定的, 且有 $\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{A}$. 下面再证唯一性.

又设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{C}^m$, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都是实正定的, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于对角矩阵, 因此它们都有 n 个线性无关的特征向量. 任取 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 相应的特征值 μ, 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=\mu\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{\alpha}=\mu^m\boldsymbol{\alpha}$, 亦即 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, μ^m 为相应的特征值, 因此 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个线性无关的向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的向量. 从而, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量完全一致. 同理, $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征向

量也完全一致，从而 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量完全一致. 并且，设 $\boldsymbol{C\alpha}=\nu\boldsymbol{\alpha}$，则有 $\nu^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{C}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{\alpha}=\mu^m\boldsymbol{\alpha}$，但 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\nu^m=\mu^m$，但 ν 与 μ 都是正实数，所以 $\nu=\mu$. 这样，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 有完全一致的特征向量和相应的特征值，因此 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 可用同样的矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 与 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}$ 是同样的对角矩阵，即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}$$

从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，唯一性得证.

16. 证明：每个非奇异实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必可表示为一个正定矩阵与一个正交矩阵的乘积，即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{B}_2$$

其中 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 是正定矩阵，$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$ 是正交矩阵，且每种表示是唯一的.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，所以 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 是正定的，则由上题可知，存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}_1$，使 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_1^2$，令 $\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{AB}_1^{-1}=\boldsymbol{Q}_2$，则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{B}_1$，且 $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_1^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1^2\boldsymbol{B}_1^{-1}=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{Q}_1$ 是正交阵. 同样可证 $\boldsymbol{Q}_2$ 为正交阵.

下证唯一性. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{C}_1$ 为正定阵，$\boldsymbol{P}_1$ 为正交阵，则 $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}_1)(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}_1)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{P}_1)(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{P}_1)^{\mathrm{T}}$，即有 $\boldsymbol{B}_1^2=\boldsymbol{C}_1^2$，由上题知 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1$，从而又得 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1$.

17. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，证明：存在 n 阶实非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ 与 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}$ 同时为对角矩阵.

证明 由于 $\boldsymbol{B}$ 正定，它与单位矩阵合同，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{I}$. 又由于 $\boldsymbol{A}$ 实对称，故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$ 仍为实对称，从而存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$. 令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{CQ}$，则

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}=(\boldsymbol{CQ})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{CQ})=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BC})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{IQ}=\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{CQ})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CQ})=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACQ}=\boldsymbol{\Lambda}$$

即存在实可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ 与 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}$ 同时为对角阵.

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是两个实正定矩阵，证明：

$$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|\leqslant|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$$

证明 由上题知，存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}=\begin{bmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{bmatrix}$$

这里 $\lambda_i>0,\mu_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 由此取行列式得 $|\boldsymbol{P}|^2\cdot|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\quad\lambda_2\quad\cdots\quad\lambda_n$，$|\boldsymbol{P}|^2\cdot|\boldsymbol{B}|=\mu_1\mu_2\cdots\mu_n$.

另一方面有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}=\begin{bmatrix}\lambda_0+\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+\mu_n\end{bmatrix}$，也取行列式得 $|\boldsymbol{P}|^2\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)\cdots(\lambda_n+\mu_n)$，显然有

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n+\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\leqslant(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)\cdots(\lambda_n+\mu_n)$$

所以

$$|\boldsymbol{P}|^2(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)\leqslant|\boldsymbol{P}|^2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$$

但$|\boldsymbol{P}|^2>0$,于是

$$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|\leqslant|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$$

19. 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,使$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵,已知

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$;(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{bmatrix}$.

解　(1) 由于$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-1)$,所以特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=4,\lambda_3=1$,其对应的单位特征向量为$\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$,取

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

从而有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-2&&\\&4&\\&&1\end{bmatrix}$$

(2) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-3)(\lambda+1)$,$\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=3,\lambda_4=-1$,它们各自对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\eta}_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\eta}_4=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

取

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

从而有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&3&\\&&&-1\end{bmatrix}$$

20. 若 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$ 分别是实对称和反对称矩阵，且 $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}-\mathrm{i}\boldsymbol{S})\neq 0$，试证：$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}+\mathrm{i}\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}-\mathrm{i}\boldsymbol{S})^{-1}$ 是酉矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}+\mathrm{i}\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}-\mathrm{i}\boldsymbol{S})^{-1}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}=\overline{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}&=[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}-\mathrm{i}\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}+\mathrm{i}\boldsymbol{S})^{-1}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}+\mathrm{i}\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}-\mathrm{i}\boldsymbol{S})^{-1}\\&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}+\mathrm{i}\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}-\mathrm{i}\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}+\mathrm{i}\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}-\mathrm{i}\boldsymbol{S})^{-1}\\&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}+\mathrm{i}\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}+\mathrm{i}\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}-\mathrm{i}\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}-\mathrm{i}\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{U}$ 是酉矩阵.

21. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是实对称矩阵，试证：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同.

证明 充分性 由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵，所以分别存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$ 与 $\boldsymbol{Q}_2$，使得

$$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}\quad 与\quad \boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{bmatrix}$$

依题意，它们的特征值相同，即 $\lambda_i=\mu_i(i=1,\cdots,n)$，故

$$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2$$

两端左乘 $(\boldsymbol{Q}_2^{-1})^{\mathrm{T}}$，右乘 $\boldsymbol{Q}_2^{-1}$，得 $(\boldsymbol{Q}_2^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$，即 $(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$，令 $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{Q}$（仍为正交阵），有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似.

必要性 由于 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，所以它们的特征值相同.

22. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A}$，试证：$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$ 是酉矩阵.

证明 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A}$，所以有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}&=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{H}}]^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{\mathrm{H}}=(-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{U}$ 是酉矩阵.

23. 设实对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{bmatrix}$$

求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵，并计算 $|\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}|$ 的值.

解 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a+1,\lambda_2=a-2$.

对于 $\lambda_{1,2}=a+1$，可求出两个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

对于 $\lambda_3=a-2$，有 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，取

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},\text{有 }\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}a+1&0&0\\0&a+1&0\\0&0&a-2\end{bmatrix}$$

因为 $|\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}|=(a-3)^2(a-6)$，$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 的特征值为：$a+1-4,a+1-4,a-2-4$，即为 $a-3,a-3,a-6$.

24. (1) 证明：如果整数 a,b 均可以表示成 4 个整数的平方和，那么 ab 也可以表示成 4 个整数的平方和；

(2) 将 1457 表示成 4 个整数的平方和.

解　(1) 不妨假设 $a=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2,b=n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2$，记 $\alpha=(n_1,n_2,n_3,n_4)$，以及

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}m_1&m_2&m_3&m_4\\m_2&-m_2&m_4&-m_2\\m_3&-m_4&-m_1&m_2\\m_4&m_3&-m_2&-m_1\end{bmatrix}$$

那么有 $b=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=a\boldsymbol{I}$，于是有

$$\begin{aligned}ab&=a\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(a\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha A}(\boldsymbol{\alpha A})^{\mathrm{T}}\\&=k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2\quad(k_i\text{ 为整数})\end{aligned}$$

(2) 因为 $1457=31\times47$，其中 $31=2^2+3^2+3^2+3^2,47=1^2+1^2+3^2+6^2$，令 $a=31,b=47,\boldsymbol{\alpha}=(1,1,3,6)$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&3&3\\3&-2&3&-3\\3&-3&-2&3\\3&3&-3&-2\end{bmatrix},\text{那么 }ab=\boldsymbol{\alpha A}(\boldsymbol{\alpha A})^{\mathrm{T}}=32^2+10^2+(-18)^2+(-3)^2$$

从而有 $1457=32^2+10^2+(-18)^2+(-3)^2$.

25. 设 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵，如果对任意向量 $\boldsymbol{x}$ 均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Ax}=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明　显然此时 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均为 0，又 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

26. 证明：(1) 埃尔米特矩阵的特征值均为实数，且属于不同特征值的特征向量彼此正交；

(2) 反埃尔米特矩阵的特征值为零或纯虚数；

(3) 酉矩阵特征值的模长为 1.

证明　(1) 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 $a\in\mathbb{C}$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}$，故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，进而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\bar{a}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}=\bar{a}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}$，左$=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A\alpha}=a(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha})$，而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}\neq0$，故 $a=\bar{a}$，即 a 是实数.

再设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$ 还有一个特征值 $b\neq a\in\mathbb{C}$，相应于 b 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{A\beta}=b\boldsymbol{\beta}$. 因为 $a\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A\beta})=b\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\beta}$，因此 $(a-b)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\beta}=0$，由 $a\neq b$，故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\beta}=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为反埃尔米特矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{X}$ 为对应 λ 的特征向量，即有 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，在此式两端取共轭转置可得

$$X^{H}A^{H}=\bar{\lambda}X^{H}$$

利用 $A^{H}=-A$,有 $-X^{H}A=\bar{\lambda}X^{H}$,用 X 从右端乘两端有 $-X^{H}AX=\bar{\lambda}X^{H}X$,于是有 $-\lambda X^{H}X=\bar{\lambda}X^{H}X$. 又由于 $X\neq\mathbf{0}$,所以 $X^{H}X\neq0$,从而有 $-\lambda=\bar{\lambda}$,这表明 λ 为零或纯虚数.

(3) 设 A 为酉阵,λ 是 A 的一个特征值,X 为其对应的特征向量,即有 $AX=\lambda X$,两端共轭转置得 $X^{H}A^{H}=\bar{\lambda}X^{H}$,再用 AX 右乘两端有 $X^{H}IX=\bar{\lambda}\lambda X^{H}X$,于是有

$$(1-\bar{\lambda}\lambda)X^{H}X=0$$

因 $X\neq\mathbf{0}$,所以 $X^{H}X\neq0$,从而有 $\bar{\lambda}\lambda=1$,这表明 λ 的模长度为 1.

27. 设 n 阶酉矩阵 U 的特征值不等于 -1,试证:矩阵 $I+U$ 满秩,而且 $W=\mathrm{i}(I-U)(I+U)^{-1}$ 是埃尔米特矩阵,反之,如果 W 是埃尔米特矩阵,那么 $V=(I+\mathrm{i}W)(I-\mathrm{i}W)^{-1}$ 是酉矩阵.

证明 由于 U 的特征值不等于 -1,所以

$$|-1I-U|\neq0$$

则 $|I+U|\neq0$,故 $I+U$ 满秩. 由于 $U^{H}U=I$,所以有

$$\begin{aligned}W^{H}&=-\mathrm{i}(I+U^{H})^{-1}(I-U^{H})=-\mathrm{i}(U^{H}U+U^{H})^{-1}(I-U^{H})\\&=-\mathrm{i}(U+I)^{-1}(U^{H})^{-1}U^{H}(U-I)=-\mathrm{i}(U+I)^{-1}(U-I)\\&=\mathrm{i}(I+U)^{-1}(I-U)\end{aligned}\qquad ①$$

又由于 $(I+U)^{-1}U=(UU^{H}+U)^{-1}U=(U^{H}+I)^{-1}U^{-1}U=(U^{H}+I)^{-1}$

$$U(I+U)^{-1}=U(U^{H}U+U)^{-1}=UU^{-1}(U^{H}+I)^{-1}=(U^{H}+I)^{-1}$$

所以有

$$(I+U)^{-1}U=U(I+U)^{-1}\qquad ②$$

又因为 $(I+U)^{-1}(I-U)=(I+U)^{-1}-(I+U)^{-1}U$

$$(I-U)(I+U)^{-1}=(I+U)^{-1}-U(I+U)^{-1}$$

所以由②式知

$$(I+U)^{-1}(I-U)=(I-U)(I+U)^{-1}\qquad ③$$

将③式代入①式,得 $W^{H}=W$,即 W 是一个埃尔米特矩阵.

由于已证 W 是埃尔米特矩阵,所以 W 的特征值全为实数,因此 $|\mathrm{i}I-W|\neq0$,由此可知 $|I-\mathrm{i}W|\neq0$,即 $I-\mathrm{i}W$ 也是一个满秩矩阵. 考察

$$\begin{aligned}V^{H}V&=[(I+\mathrm{i}W)(I-\mathrm{i}W)^{-1}]^{H}[(I+\mathrm{i}W)(I-\mathrm{i}W)^{-1}]\\&=[(I+\mathrm{i}W)^{-1}(I-\mathrm{i}W)][(I+\mathrm{i}W)(I-\mathrm{i}W)^{-1}]\\&=(I+\mathrm{i}W)^{-1}(I+\mathrm{i}W)(I-\mathrm{i}W)(I-\mathrm{i}W)^{-1}\\&=I\end{aligned}$$

这表明 V 是一个酉矩阵.

28. 设 A 为正定埃尔米特矩阵,B 为反埃尔米特矩阵,试证 AB 与 BA 的特征值实部为零.

证明 设 AB 的特征值为 λ,则 $|\lambda I-AB|=0$. 由于 A 正定,所以存在可逆矩阵 P,使得 $A=P^{H}P$,于是

$$\begin{aligned}|\lambda I-AB|&=|\lambda I-P^{H}PB|=|\lambda PP^{H}(P^{H})^{-1}-P^{H}PB|\\&=|P^{H}||\lambda I-PBP^{H}||(P^{H})^{-1}|=0\end{aligned}$$

从而有 $|\lambda I-PBP^{H}|=0$,表明 λ 也是 PBP^{H} 的特征值. 因 $B^{H}=-B$,所以 $(PBP^{H})^{H}=PB^{H}P^{H}=$

$-PBP^{H}$，即 PBP^{H} 是反埃尔米特矩阵，则它的特征值 λ 为纯虚数，也就是 AB 的特征值实部为零.

同样也可证明 BA 的特征值实部为零.

29. 设 A,B 均是埃尔米特矩阵，且 A 正定，试证：AB 与 BA 的特征值都是实数.

证明 设 λ 是 AB 的任一个特征值. 由于 A 为正定的埃尔米特矩阵，所以存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^{H}P$，则

$$\begin{aligned}0 &= |\lambda I - AB| = |\lambda I - P^{H}PB| = |\lambda P^{H}(P^{H})^{-1} - P^{H}PB| \\ &= |P^{H}||\lambda I - PBP^{H}||(P^{H})^{-1}| = |\lambda I - PBP^{H}|\end{aligned}$$

这表明 λ 也是 PBP^{H} 的特征值. 注意到 PBP^{H} 也是一个埃尔米特矩阵，故 λ 必为实数，即 AB 的特征值是实数.

同理可证 BA 的特征值是实数.

30. 设 A 是半正定埃尔米特矩阵，$A\neq 0$，B 是正定埃尔米特矩阵，试证：$|A+B|>|B|$.

证明 由于 B 是正定埃尔米特矩阵，则存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{H}P$，考察

$$\begin{aligned}|A+B| &= |A+P^{H}P| = |P^{H}||(P^{H})^{-1}AP^{-1}+I||P| \\ &= |B||(P^{H})^{-1}AP^{-1}+I| = |B||(P^{-1})^{H}AP^{-1}+I|\end{aligned}$$

由于 A 为半正定埃尔米特矩阵，可知 $(P^{-1})^{H}AP^{-1}$ 也是一个半正定埃尔米特矩阵. 记 $C=(P^{-1})^{H}AP^{-1}$，且有 $C\neq 0$. 下面可证明半正定埃尔米特矩阵 C 满足 $|C+I|>1$.

事实上，不妨设 C 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，由于 C 是半正定埃尔米特矩阵，所以 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为非负实数. 又 $C\neq 0$，于是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不能全为 0，那么，$C+I$ 的特征值 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$ 都是大于等于 1 的数，且至少有一个大于 1，故

$$|C+I| = (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1) > 1$$

也就是 $|(P^{-1})^{H}AP^{-1}+I|>1$，从而得

$$|A+B| > |B|$$

31. 设 A 是正定埃尔米特矩阵，B 是反埃尔米特矩阵，试证：$A+B$ 为可逆矩阵.

证明 考察

$$|A+B| = |A+AA^{-1}B| = |A||I+A^{-1}B|$$

由于 A 是正定的埃尔米特矩阵，所以 $|A|\neq 0$，且 A^{-1} 也是正定的埃尔米特矩阵，而 B 又是反埃尔米特矩阵，故由第 28 题的结论，可知 $A^{-1}B$ 的特征值实部为零，于是 $I+A^{-1}B$ 的特征值皆不为零，所以 $|I+A^{-1}B|\neq 0$，从而 $|A+B|\neq 0$，这表明 $A+B$ 可逆.

32. 设 A,B 均是埃尔米特矩阵，试证：A 与 B 酉相似的充要条件是 A 与 B 的特征值相同.

证明 充分性 因为 A 与 B 均为埃尔米特矩阵，所以分别存在酉矩阵 U_1,U_2，使得

$$U_1^{H}AU_1 = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad U_2^{H}BU_2 = \begin{bmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{bmatrix}$$

其中，$\lambda_i,\mu_i(i=1,\cdots,n)$ 分别为 A 与 B 的特征值，依题意有 $\lambda_i=\mu_i$，从而 $U_1^{H}AU_1=U_2^{H}BU_2$，两边左乘 $(U_2^{H})^{-1}$，右乘 U_2^{-1}，有

$$(U_1U_2^{-1})^{H}A(U_1U_2^{-1}) = B$$

令 $U=U_1U_2^{-1}$，显然 U 为酉矩阵，得 $U^HAU=B$，因此 A 与 B 酉相似.

必要性　由于相似矩阵有相同的特征值，所以当 A 与 B 正交相似时，特征值相同.

33. 设 A 是埃尔米特矩阵，且 $A^2=I$，则存在酉矩阵 U，使得

$$U^HAU=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & -I_{n-r} \end{bmatrix}$$

证明　由于 A 为埃尔米特矩阵，所以存在酉矩阵 U，使得

$$U^HAU=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}=D$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征值. 又 $A^2=I$，故

$$D^2=(U^HAU)^2=U^HA^2U=U^HU=I$$

这就说明 $\lambda_i=1$ 或 $\lambda_i=-1$. 不妨设有 r 个 1 和 $n-r$ 个 -1，记 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r$，$\lambda_{r+1}=-1,\cdots,\lambda_n=-1$，这样上式即为

$$U^HAU=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & -I_{n-r} \end{bmatrix}$$

34. 设 A 是正定埃尔米特矩阵，且 $A\in U^{n\times n}$（酉矩阵空间），则 $A=I$.

证明　因为 A 是正定埃尔米特矩阵，则存在酉矩阵 U，使得

$$U^HAU=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 又 A 为酉矩阵，于是 $|\lambda_i|=1$. 这样有 $U^HAU=I$，两端左乘 U，右乘 U^H，得 $A=I$.

35. 试证：(1)两个半正定埃尔米特矩阵之和是半正定的；

(2)半正定埃尔米特矩阵与正定埃尔米特矩阵之和是正定的.

证明　(1) 设 A 和 B 是半正定埃尔米特矩阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{C}^n$ 且 $X\neq 0$，则有埃尔米特二次型

$$X^HAX\geqslant 0,\quad X^HBX\geqslant 0$$

于是有 $f(X)=X^H(A+B)X\geqslant 0$，这表明 $A+B$ 也是一个半正定的埃尔米特矩阵.

(2) 设 A 为半正定埃尔米特矩阵，B 为正定埃尔米特矩阵，则 $\forall X\neq 0$ 有

$$X^HAX\geqslant 0,\quad X^HBX>0$$

从而有 $f(X)=X^H(A+B)X>0$，即 $A+B$ 为正定的埃尔米特矩阵.

36. 设 $A^H=A$，试证：总存在 $t>0$，使得 $A+tI$ 是正定埃尔米特矩阵，$A-tI$ 是负定埃尔米特矩阵.

证明　因 $A^H=A$，所以 A 是埃尔米特矩阵，有 $(A+tI)^H=A+tI$，即 $A+tI$ 也是埃尔米特矩阵. 如果 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，那么 $A+tI$ 的特征值为 $\lambda_1+t,\lambda_2+t,\cdots,\lambda_n+t$. 只要取

$$t>\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$$

则 $\lambda_1+t,\lambda_2+t,\cdots,\lambda_n+t$ 均大于零，此时 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}$ 为正定埃尔米特矩阵.

不难看出有 $(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I}$ 也是埃尔米特矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_i，则 $\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I}$ 的特征值为 λ_i-t，取 $t<\min\{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\}$，那么 $\lambda_1-t,\cdots,\lambda_n-t$ 均小于零，这表明 $\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{I}$ 为负定埃尔米特矩阵.

37. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，试证：

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 都是半正定的埃尔米特矩阵；

(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的非零特征值相同.

证明　(1) 显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 是埃尔米特矩阵，任取 $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^n$，那么有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，故对于埃尔米特二次型总有：

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})\geqslant 0$$

这表明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 是半正定的埃尔米特矩阵；同样可证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 是半正定的埃尔米特矩阵.

(2) 设 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$，$\lambda_i$ 和 μ_i 分别是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的特征值，那么它们均为实数，则由(1)可设

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0$$
$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_r\geqslant\mu_{r+1}=\mu_{r+2}=\cdots=\mu_n=0$$

下面证明 $\lambda_i=\mu_i>0(i=1,2,\cdots,r)$.

事实上，对于任一个 $\lambda_t(1\leqslant t\leqslant r)$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}=\lambda_t\boldsymbol{X}$ 有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}=\lambda_t\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}$，而且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，于是 λ_t 也是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的特征值，而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}$ 则是矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 对应 λ_t 的特征向量. 同样可以证明 μ_t 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的特征值，但目前还不能确定 $\lambda_t=\mu_t$.

设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_p$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 属于 $\lambda_i\neq0$ 的线性无关的特征向量，则由前面的证明可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_p$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_t 的特征向量，且这 p 个向量是线性无关的，理由如下：

若令 $k_1\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_p=\boldsymbol{0}$，$k_i\in\mathbb{C}$，有

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_p=\boldsymbol{0}$$

得
$$k_1\lambda_i\boldsymbol{X}_1+k_2\lambda_i\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_p\lambda_i\boldsymbol{X}_p=\boldsymbol{0}$$

由于 $\lambda_i>0$，所以

$$k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{X}_p=\boldsymbol{0}$$

又因为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_p$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_p=0$，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_p$ 线性无关.

从而 λ_t 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的 p 重特征值也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的 p 重特征值，因此 $\lambda_t=\mu_t(1\leqslant t\leqslant r)$，故 $\lambda_i=\mu_i>0(i=1,2,\cdots,r)$.

38. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，那么 $\boldsymbol{A}$ 可以唯一地写成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$，其中 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$ 为埃尔米特矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可以唯一地写成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是埃尔米特矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是反埃尔米特矩阵.

证明　因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\frac{\boldsymbol{A}}{2}+\frac{\boldsymbol{A}}{2}+\frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}{2}-\frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}{2}\\&=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}{2}+\mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{A}}{2}\mathrm{i}\right)\end{aligned}$$

令

$$S=\frac{A+A^{H}}{2},\quad T=\frac{A^{H}-A}{2}\mathrm{i}$$

不难验证有 $S^{H}=S$,$T^{H}=T$,即有

$$A=S+\mathrm{i}T$$

其中 S,T 为埃尔米特矩阵.

唯一性证明:假设 $A=S_1+\mathrm{i}T_1=S_2+\mathrm{i}T_2$,即 $S_1-S_2=\mathrm{i}(T_2-T_1)$,于是

$$S_1-S_2=(S_1-S_2)^{H}=[\mathrm{i}(T_2-T_1)]^{H}=-\mathrm{i}(T_2-T_1)$$

立即可得

$$\mathrm{i}(T_2-T_1)=\mathbf{0},\quad 即\quad T_2=T_1$$

同理有 $S_2=S_1$,这表明 $A=S+\mathrm{i}T$ 这种表示是唯一的.

类似可以证明 $A=B+C=\frac{A+A^{H}}{2}+\frac{A-A^{H}}{2}$ 这种表示也是唯一的.

第 2 章 λ矩阵与若尔当标准形

习 题 2

1. 下列矩阵能否与对角矩阵相似？若能与对角矩阵相似，则求出逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 2\end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & -3 & 2\\6 & -4 & 4\\4 & -4 & 5\end{bmatrix}$； (3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\-4 & 4 & 0\\-2 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

解 (1) 不难求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 7，-2，相应的特征向量为 $(1,1)^{\mathrm{T}}$，$(-4,5)^{\mathrm{T}}$，故有 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & -4\\1 & 5\end{bmatrix}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}7 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$.

(2) 同理，可求得特征值 1，2，3，所以相似对角矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 2\\1 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

(3) 由于 $\boldsymbol{A}$ 没有 3 个线性无关的特征向量，所以不能与对角矩阵相似，而只能相似若尔当(Jordan)标准形 $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

2. 求下列矩阵的不变因子及初等因子：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & & & \\ & -2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2\end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & -b_1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & -b_{n-1}\\ & & & a\end{bmatrix}$ $(b_i\neq 0)$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & 0\\-2 & -2 & -1\end{bmatrix}$； (4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1 & 0\\2 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & -1 & -2\\0 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵为

$$A(\lambda)=\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & & & \\ & \lambda+2 & & \\ & & \lambda-1 & \\ & & & \lambda-2\end{bmatrix}$$

所以$A(\lambda)$的行列式因子为

$$D_4(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)$$
$$D_3(\lambda)=D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$$

不变因子为

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$$
$$d_4(\lambda)=\frac{D_4(\lambda)}{D_3(\lambda)}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

而次数大于零的不变因子只有$d_4(\lambda)$,故由定义知A的全部初等因子为$\lambda-1,\lambda+1,\lambda-2,\lambda+2$.

(2) 因为

$$A(\lambda)=\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-a & b_1 & & \\ & \lambda-a & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & \lambda-a\end{bmatrix}_{n\times n}$$

所以$D_n(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-a)^n$.又因为它有一个$n-1$阶子式

$$\begin{vmatrix}b_1 & & & \\ \lambda-a & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda-a & b_{n-1}\end{vmatrix}=b_1b_2\cdots b_{n-1}\neq 0$$

故$D_{n-1}(\lambda)=1$,从而$D_{n-2}(\lambda)=\cdots=D_1(\lambda)=1$.于是不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1,\quad d_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$$

因此初等因子只有一个$(\lambda-a)^n$.

(3) 因

$$A(\lambda)=\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 2 & 2 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

故$D_3(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$.又易得$D_2(\lambda)=1$,从而$D_1(\lambda)=1$.于是不变因子为$1,1,(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$.因此初等因子为$(\lambda-1),(\lambda+1),(\lambda-2)$.

(4) $A(\lambda)=|\lambda I-A|$,可见$D_4(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2\\ -2 & \lambda+1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2\\ -2 & \lambda+1\end{vmatrix}=[(\lambda+1)^2+4]^2$,又$A(\lambda)$中有一个三阶子式为$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ \lambda+1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 2\end{vmatrix}=-4(\lambda+1)$,但另一个三阶子式为$\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 2\\ 0 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix}=-2[(\lambda+1)^2+4]$,这两个三阶子式互素(不计常数因子),故知

$D_3(\lambda)=1$，从而 $D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$，因此不变因子为

$$[\lambda-(-1+2\mathrm{i})]^2,[\lambda-(-1-2\mathrm{i})]^2$$

初等因子为 $(\lambda+1-2\mathrm{i})^2$，$(\lambda+1+2\mathrm{i})^2$.

3. 判断下列两个 λ 矩阵是否相抵：

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1\\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2\\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda\\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

解 因为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$，$\boldsymbol{B}(\lambda)$ 的不变因子为 $1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$，所以它们相抵.

4. 求下列 λ 矩阵的不变因子：

$$(1)\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2\end{bmatrix};\quad (2)\begin{bmatrix}\lambda+\alpha & \beta & 1 & 0\\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta\\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha\end{bmatrix}.$$

解 本题给出的两个 λ 矩阵可以利用初等变换先将它们化为史密斯标准形，其对角元素便为不变因子. 其结果如下：

(1) 不变因子为 $1,1,(\lambda-2)^3$.

(2) 当 $\beta=0$ 时，不变因子为 $1,1,(\lambda+\alpha)^2,(\lambda+\alpha)^2$；当 $\beta\neq 0$ 时，不变因子为 $1,1,1,[\beta^2+(\lambda+\alpha)^2]^2$.

5. 求下列矩阵的初等因子组：

$$(1)\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{bmatrix};\quad (2)\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

解 先写出它们各自的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$（即 λ 矩阵），然后利用初等变换化它们为史密斯标准形，求得不变因子，从而最终取得初等因子组. 其结果如下：

(1) 初等因子为 $\lambda-1,\lambda+1,\lambda-2$；

(2) 初等因子为 $\lambda-2,(\lambda-1)^2$.

6. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解 先求出若尔当标准形

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

则有

$$P^{-1}AP=J,\quad A^n=PJ^nP^{-1},\quad A^{100}=\begin{bmatrix}-199 & 0 & 100\\ 201+(-2)^{100} & 2^{100} & -101+2^{100}\\ -400 & 0 & 201\end{bmatrix}$$

7. 求下列 λ 矩阵的不变因子：

(1) $\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & \lambda+2\\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0\\ 1 & \lambda+2 & 0 & 0\\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

解 前面用初等变换的方法求矩阵的不变因子，这是一种最基本的方法. 但是，这个方法比较烦琐. 从本题开始运用教材中介绍的求不变因子的第二种方法，即行列式因子法. 不过，第二种方法技巧性较高，经过不断地练习，还是容易掌握的.

(1) 该 λ 矩阵的右上角的 2 阶子式为 1，故 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$，而 $D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$，所以该 λ 矩阵的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\quad d_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$$

(2) 该 λ 矩阵的右上角的 3 阶子式为 -1，故 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1$，而 $D_4(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5$，所以不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\quad d_4(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5$$

(3) 该 λ 矩阵的行列式因子为 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1,D_4(\lambda)=(\lambda+2)^4$，所以不变因子为 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,d_4(\lambda)=(\lambda+2)^4$.

8. 求下列 λ 矩阵的初等因子：

(1) $\begin{bmatrix}\lambda^3+2 & \lambda^3+1\\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+2\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1\\ 2\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^2-2\lambda\end{bmatrix}$.

解 读者仿照上述解题的思路，不难求得初等因子分别是

(1) $\lambda+1,(\lambda-1)^2$；

(2) $\lambda+1,\lambda-1,\lambda-1$.

9. 求下列 λ 矩阵的史密斯(Smith)标准形：

(1) $\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & \lambda(\lambda-1) & 0\\ \lambda & 0 & \lambda+1\\ 0 & 0 & -\lambda+2\end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{B}(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$.

解 (1) 因 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的左上角元素为零，故先互换第一、二行，化 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 为

$$\boldsymbol{A}_1(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & \lambda+1\\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0\\ 0 & 0 & -\lambda+2\end{bmatrix}$$

又因左上角 λ 不能整除其他所有元素，故先降低它的次数，只要交换一、三两列，再将第一列减去第三列，得

$$A_2(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0&\lambda\\0&\lambda(\lambda-1)&0\\-\lambda+2&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-(-\lambda+2)r_1]{c_3-\lambda c_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda(\lambda-1)&0\\0&0&\lambda(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-c_2]{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda(\lambda-1)&-\lambda\\0&0&\lambda(\lambda-2)\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\lambda&\lambda(\lambda-1)\\0&\lambda(\lambda-2)&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+(\lambda-2)r_2]{c_3+(\lambda-1)c_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\lambda&0\\0&0&\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1)r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

这便是所求的标准形. 而且有 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\lambda,d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.

(2) $$B(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda&2\lambda-1&\lambda\\\lambda&\lambda^2&-\lambda\\1+\lambda^2&\lambda^2+\lambda-1&-\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{c_1+c_3}\begin{bmatrix}1&2\lambda-1&\lambda\\0&\lambda^2&-\lambda\\0&\lambda^2-\lambda&-\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+(-\lambda)c_1]{c_2-(2\lambda-1)c_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda^2&-\lambda\\0&\lambda^2-\lambda&-\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+(1-\lambda)r_2]{r_2+(-1)r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&\lambda^2\\0&0&-\lambda^3-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)c_3]{c_3+(-\lambda)c_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda(\lambda^2+1)\end{bmatrix}$$

这便是所求的标准形，并且 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\lambda,d_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda$.

10. 化下列矩阵为史密斯标准形：

(1) $\begin{bmatrix}1-\lambda&\lambda^2&\lambda\\\lambda&\lambda&-\lambda\\1+\lambda^2&\lambda^2&-\lambda^2\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}0&0&0&\lambda^2\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\\lambda^2-\lambda&0&0&0\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}3\lambda^2+2\lambda-3&2\lambda-1&\lambda^2+2\lambda-3\\4\lambda^2+3\lambda-5&3\lambda-2&\lambda^2+3\lambda-4\\\lambda^2+\lambda-4&\lambda-2&\lambda-1\end{bmatrix}$；　(4) $\begin{bmatrix}2\lambda&3&0&1&\lambda\\4\lambda&3\lambda+6&0&\lambda+2&2\lambda\\0&6\lambda&\lambda&2\lambda&0\\\lambda-1&0&\lambda-1&0&0\\3\lambda-3&1-\lambda&2\lambda-2&0&0\end{bmatrix}$.

解　与上题类似，用初等变换方法可得本题的史密斯标准形为：

(1) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda(\lambda+1)\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\lambda(\lambda-1)&0&0\\0&0&\lambda(\lambda-1)&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1\end{bmatrix}$；　(4) $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\lambda(\lambda-1)&0\\0&0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{bmatrix}$.

11. 求下列 λ 矩阵的史密斯标准形：

(1) $\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+4 \\ 0 & 1 & \lambda+4 & 0 \\ 1 & \lambda+4 & 0 & 0 \\ \lambda+4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

解　求 λ 矩阵的史密斯标准形常用的方法有两种：初等变换法与行列式因子(不变因子)法.

(1) 用初等变换法，其结果如第 9 题(2)所示. 但是，对于本题的(2)与(3)用初等变换的方法较麻烦，而改用行列式因子法就方便些.

(2) 用行列式因子法.

首先求出

$$D_1(\lambda) = \lambda - 1,\quad D_2(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+1)$$

于是

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = \lambda - 1,\quad d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

从而其史密斯标准形为

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

(3) $D_4(\lambda)=(\lambda+4)^4$，$D_3(\lambda)=D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$，于是

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = d_3(\lambda) = 1, d_4(\lambda) = (\lambda+4)^4$$

从而其史密斯标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+4)^4 \end{bmatrix}$$

12. 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{bmatrix}$，分别求 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2$ 的史密斯标准形以及 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 的不变因子、行列式因子.

解　可先分别求出 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2$ 的史密斯标准形：

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix} \quad 与 \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}$$

而 $\boldsymbol{A}_1$ 的不变因子为 $1,\lambda-2,(\lambda-2)^2$，$\boldsymbol{A}_2$ 的不变因子与 $\boldsymbol{A}_1$ 的相同. 因此 $\boldsymbol{A}_1$ 的行列式因子为 $1,\lambda-2,(\lambda-2)^2$，$\boldsymbol{A}_2$ 的行列式因子与 $\boldsymbol{A}_1$ 的相同.

13. 证明:相抵的λ矩阵具有相同的秩与相同的各阶行列式因子.

证明 由相抵的定义知,若$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$相抵,则$\boldsymbol{A}(\lambda)$能经过初等变换化为$\boldsymbol{B}(\lambda)$,而初等变换不改变各阶行列式因子,因而$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$有相同的各阶行列式因子,故知它们有相同的秩.

14. 证明:两个相抵的λ矩阵(方阵)的行列式只相差一个非零的常数因子.

证明 若$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$相抵,则有$\boldsymbol{P}(\lambda)$,$\boldsymbol{Q}(\lambda)$使

$$\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{Q}(\lambda)$$

其中$|\boldsymbol{P}(\lambda)|=k\neq0$,$|\boldsymbol{Q}(\lambda)|=e\neq0$,于是$|\boldsymbol{B}(\lambda)|=|\boldsymbol{P}(\lambda)||\boldsymbol{A}(\lambda)||\boldsymbol{Q}(\lambda)|=ke|\boldsymbol{A}(\lambda)|$.

15. 秩相等的两个$m\times n$的λ矩阵是否一定相抵?

解 不一定. 例如$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^2\end{bmatrix}$的秩显然相等,但由于不变因子不同,所以它们不相抵.

16. 证明:一个$n\times n$的λ矩阵可逆的充分必要条件是:行列式$|\boldsymbol{A}(\lambda)|$是一个非零的数.

证明 充分性 设$|\boldsymbol{A}(\lambda)|=d$是一个非零的数,则$\dfrac{1}{d}\boldsymbol{A}^*(\lambda)$也是一个λ矩阵,而$\boldsymbol{A}(\lambda)\dfrac{1}{d}\boldsymbol{A}^*(\lambda)=\dfrac{1}{d}\boldsymbol{A}^*(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{I}$,因此$\boldsymbol{A}(\lambda)$可逆.

必要性 因为$\boldsymbol{A}(\lambda)$可逆,所以有$\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda)=\boldsymbol{I}$,两边取行列式,得$|\boldsymbol{A}(\lambda)||\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda)|=|\boldsymbol{I}|=1$. 又因为$|\boldsymbol{A}(\lambda)|$与$|\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda)|$都是λ的多项式,所以由它们的行列式等于1,可以推知它们都是λ的零次多项式,即为非零的数.

17. 求$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-a & c_1 & & & \\ & \lambda-a & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & c_{n-1}\\ & & & & \lambda-a\end{bmatrix}$的不变因子与初等因子,其中$a,c_1,\cdots,c_{n-1}$都是常数,且$c_i\neq0(i=1,2,\cdots,n-1)$.

解 因为$|\boldsymbol{A}(\lambda)|=(\lambda-a)^n$,所以$D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$,又因

$$\begin{vmatrix}c_1 & & & \\ \lambda-a & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda-a & c_{n-1}\end{vmatrix}=c_1c_2\cdots c_{n-1}\neq0$$

所以$D_{n-1}(\lambda)=1$,从而$D_1(\lambda)=\cdots=D_{n-2}(\lambda)=D_{n-1}(\lambda)=1$,故

$$d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1,\quad d_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$$

因此初等因子只有一个,即有$(\lambda-a)^n$.

18. 求证:两个$m\times n$的λ矩阵相抵当且仅当它们有相同的各阶行列式因子.

证明 $\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$相抵当且仅当它们有相同的不变因子,当且仅当它们的各阶行列式因子相同.

19. 求出下列矩阵的若尔当标准形：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$；

(3) 第 2 题中的各矩阵.

解 (1) 因为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$，所以 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值.求解齐次方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

得 $\boldsymbol{x}=k_1(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，可见 $\lambda=1$ 有两个线性无关的特征向量，所以 $\lambda=1$ 对应有两个若尔当块，则 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\boldsymbol{J}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

(2) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，不变因子为 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\lambda-1,d_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)$，故初等因子为 $\lambda-1,\lambda-1,\lambda+2$.因此若尔当标准形为对角矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{bmatrix}$$

(3) 若尔当标准形分别是 $\begin{bmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2\end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix}a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & a & 1\\ & & & a\end{bmatrix}$；

$$\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-1+2\mathrm{i} & 1 & & \\ & -1+2\mathrm{i} & 0 & \\ & & -1-2\mathrm{i} & 1\\ & & & -1-2\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

20. 求下列各矩阵的若尔当标准形：

(1) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}3 & 7 & -3\\ -2 & -5 & 2\\ -4 & -10 & 3\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 0 & 0\\ 7 & 1 & 2 & 1\\ -7 & -6 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

解　先求出矩阵的特征值或初等因子，其λ如果全为单根，则若尔当标准形便是对角矩阵；如果为重根，则就是若尔当标准形.

(1) $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$；　(2) $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&&\\&1+\sqrt{6}&\\&&1-\sqrt{6}\end{bmatrix}$；　(3) $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}$.

21. 试判断下面4个矩阵，哪些是相似的？为什么？

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3&3&-2\\-7&6&-3\\1&-1&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-4&4&-2\\-2&1&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-3&-1&-2\\7&5&6\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

解　$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$相似. 因为两个矩阵相似，必须要有相同的特征值(必要条件)，换言之，若两个矩阵的特征值不相同，则不可能相似.

22. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&-4\\0&4&3\end{bmatrix}$$

求$\boldsymbol{A}^5$.

解　矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式为$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda-5)^2$，故$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=5$.

属于$\lambda=1$的特征向量为$\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$；属于$\lambda=5$的特征向量为$\boldsymbol{\eta}_2=(2,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

设

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1},\quad 故\ \boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{P\Lambda}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&4\times5^4&3\times5^4-1\\0&-3\times5^4&4\times5^4\\0&4\times5^4&3\times5^4\end{bmatrix}$$

23. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{bmatrix}$$

求$\boldsymbol{A}$的若尔当标准形$\boldsymbol{J}$，并求相似变换矩阵$\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$$

解 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{bmatrix}$

初等因子为 $\lambda-1,(\lambda-1)^2$，$\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

考虑方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，解得 $\boldsymbol{X}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，其通解为 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2=(k_1,k_2,k_1-k_2)^{\mathrm{T}}$.

又考虑方程组

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_1-k_2\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & k_1\\ -2 & 2 & 2 & k_2\\ 1 & -1 & -1 & k_1-k_2\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & k_1\\ 0 & 0 & 0 & -2k_1+k_2\\ 0 & 0 & 0 & 2k_1-k_2\end{array}\right]$$

故当 $2k_1-k_2=0$ 时，方程组有解，取 $k_1=1,k_2=2$，解此方程组，得 $\boldsymbol{X}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，所以得

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

24. 证明：若尔当块

$$\boldsymbol{J}(a)=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$$

相似于矩阵

$$\begin{bmatrix}a & \varepsilon & 0\\ 0 & a & \varepsilon\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$$

(这里 $\varepsilon\neq0$ 为任意实数.)

证明 将两个数字矩阵的相似问题转化为它们对应的特征矩阵(λ 矩阵)的等价问题(因为相似矩阵有相同的特征值)，为此，先求出这两个矩阵相应的特征矩阵为

$$\begin{bmatrix}\lambda-a & -1 & 0\\ 0 & \lambda-a & -1\\ 0 & 0 & \lambda-a\end{bmatrix}\quad 与\quad\begin{bmatrix}\lambda-a & -\varepsilon & 0\\ 0 & \lambda-a & -\varepsilon\\ 0 & 0 & \lambda-a\end{bmatrix}$$

由于这两个 λ 矩阵的不变因子均为 $1,1,(\lambda-a)^3$，所以它们等价，从而 $\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}a & \varepsilon & 0\\ 0 & a & \varepsilon\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$ 相似.

25. 已知10阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{bmatrix}_{10\times 10},\quad B=\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & & & & a \end{bmatrix}_{10\times 10}$$

其中 $\varepsilon=10^{-10}$,证明 A 不相似于 B.

证明 先求出 A 与 B 对应的两个特征矩阵 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$,它们分别为

$$\begin{bmatrix} \lambda-a & -1 & & & \\ & \lambda-a & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & \lambda-a \end{bmatrix}_{10\times 10} \quad 与 \quad \begin{bmatrix} \lambda-a & -1 & & \\ & \lambda-a & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -\varepsilon & & & \lambda-a \end{bmatrix}_{10\times 10}$$

前者的不变因子为 $1,1,\cdots,(\lambda-a)^{10}$,而后者的不变因子为 $1,1,\cdots,(\lambda-a)^{10}-\varepsilon$,显然 A 与 B 不具有相同的不变因子,从而特征值不同,故不相似.

26. 已知 $A^2=A$,证明:A 相似于矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

证明 设 A 的若尔当标准形为

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix},\quad 其中\quad J_i=\begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

且存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=J$.

因 $A^2=A$,所以 $J^2=(P^{-1}AP)^2=P^{-1}A^2P=J=P^{-1}AP$,从而有 $J_i^2=J_i$,$i=1,2,\cdots,s$,即

$$\begin{bmatrix} a_i^2 & 2a_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_i^2 & 2a_i & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & 2a_i \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & a_i^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}$$

可以看出有 $a_i=1$ 或 $a_i=0$.

这表明 J 为对角矩阵,且主对角线上的元素只能是1或0.适当调整对角线上的元素的顺序,可得方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{A}$ 相似于此矩阵.

27. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同,且有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,证明:$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 的初等因子均为一次因式.

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互不相同,所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda},\quad 且\quad \lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$$

于是有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{ABP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}\boldsymbol{BP}$$

又

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{ABP}&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BAP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BPP}^{-1}\boldsymbol{AP}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}\end{aligned}$$

即有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}\boldsymbol{BP}$$

上式表明矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 可交换,但是,可与对角线元素互不相等的对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 可交换的矩阵只能是对角矩阵,即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 为对角矩阵. 由于 $\boldsymbol{B}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 相似(即 $\boldsymbol{B}$ 可对角化),所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 的初等因子必是一次因式(参见教材定理 2.2.2 的推论).

28. 设 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}(k\geqslant 2)$. 证明:$\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似.

证明 若不然,假设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

又 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$,故

$$\boldsymbol{A}^k=\left(\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^k=\boldsymbol{0}$$

即

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

由此可知 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathbf{0}$，得出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，这与 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 矛盾，从而证得 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似.

29. 求下列矩阵的若尔当标准形及其相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$；　(4) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

解　(1) 设所给矩阵为 $\boldsymbol{A}$，有 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$，

易知 $\boldsymbol{A}$ 的标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故存在 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}^{3\times 3}$，满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$，即有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)\boldsymbol{J}$$

得

$$\boldsymbol{AX}_1=2\boldsymbol{X}_1,\quad \boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{X}_2,\quad \boldsymbol{AX}_3=\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3$$

即

$$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_1=\mathbf{0},\quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_2=\mathbf{0},\quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_3=-\boldsymbol{X}_2$$

求解上述三个齐次线性方程组，不难求得 $\boldsymbol{X}_1=(2,1,-6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_3=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$，所以

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 同理有 $\boldsymbol{A}$ 的标准形 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 3 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 同理可求得 $\boldsymbol{A}$ 的标准形

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&0&0\\-1&1&-2\end{bmatrix}$$

(4) 同理有 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&-4&-1\\1&-3&0\\0&2&0\end{bmatrix}$.

30. 用求矩阵秩的方法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}8&-3&6\\3&-2&0\\-4&2&-2\end{bmatrix}$$

解 特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$.

当 $\lambda=2$ 时，$\text{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$，知若尔当块为 $3-2=1$(块)；$\text{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2=2$，知若尔当块最高阶数为 1；则此时的若尔当块为 1 阶 1 块.

当 $\lambda=1$ 时，$\text{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$，知若尔当块有 $3-2=1$(块)；$\text{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2=1$，知若尔当块阶数$\geqslant 2$ 的为 1 块；$\text{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^3=1$，知若尔当块最高阶数为 2. 则此时的若尔当块为 2 阶 1 块，从而知

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

31. 试写出若尔当标准形均为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

的两个矩阵.

解 设 $\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{B}$)的若尔当标准形是 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，知 $\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{B}$)的史密斯标准形为

$$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&(\lambda-2)^2(\lambda-1)\end{bmatrix}$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{B}$)的行列式因子为

$$D_1(\lambda)=1,\quad D_2(\lambda)=1,\quad D_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

又为了保证以 1 为主对角元的若尔当块只有一个，以 2 为主对角元的若尔当块也只有一个，根据类似于上题求矩阵若尔当标准形的"矩阵秩的"方法，只要使

$$\mathrm{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2 \text{ 或 } \mathrm{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=2$$

即可，例如取

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\9&2&1\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

均可以(不唯一).

32. 已知 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 相似于矩阵

$$\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{bmatrix}$$

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}a_i&1&&&\\&a_i&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&a_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{J}^2=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_n$，从而有

$$\boldsymbol{J}_i^2=\boldsymbol{I}_{n_i}$$

即

$$\begin{bmatrix}a_i^2&2a_i&1&&&\\0&a_i^2&2a_i&1&&\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\\vdots&&&&\ddots&2a_i\\0&\cdots&&\cdots&0&a_i^2\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}=\boldsymbol{I}_{n_i}$$

从而 $\boldsymbol{J}_i$ 必为一阶子块，且 $a_i=1$ 或 $a_i=-1$. 适当调整对角线上的元素的顺序，可得

$$\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{bmatrix}$$

而且它与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

33. 已知 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{I}$($k$ 为正整数),证明:$\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

则有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$,从而

$$\boldsymbol{J}^k=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_n$$

则第 i 个子块为

$$\boldsymbol{J}_i^k=\begin{bmatrix}a_i^k & ka_i^{k-1} & & & \\ & a_i^k & ka_i^{k-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & ka_i^{k-1} \\ & & & & a_i^k\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}=\boldsymbol{I}_{n_i}$$

故 $\boldsymbol{J}_i$ 必为一阶子块($i=1,2,\cdots,s$),即 $s=n$,所以 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

34. 求证:n 阶非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是对于任意的常数 k 都有 $\operatorname{rank}(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2$.

证明 充分性 设有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$,即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

依题意有 $\operatorname{rank}(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2$,则可以证明每个子块 $\boldsymbol{J}_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 都是一阶的.用反证法,假设 $n_1>1$,由于常数 k 具有任意性,于是取 $k=a_1$,有 $\operatorname{rank}(a_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(a_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2$,即

$$\operatorname{rank}(a_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_i)=\operatorname{rank}(a_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_i)^2,\quad i=1,2,\cdots,s$$

但是

$$a_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0\end{bmatrix},\quad (a_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_1)^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0\end{bmatrix}$$

由此可见 $\operatorname{rank}(a_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_1)\neq\operatorname{rank}(a_1\boldsymbol{J}-\boldsymbol{J}_1)^2$,矛盾,则 $n_1=1$.同样可证 $n_2=n_3=\cdots=n_s=1$,即 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵.

必要性 设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

而

$$kI-A=kI-P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}=P(kI-P^{-1}AP)P^{-1}$$

$$=P\begin{bmatrix}k-\lambda_1 & & & \\ & k-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k-\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}$$

故有

$$(kI-A)^2=P\begin{bmatrix}(k-\lambda_1)^2 & & & \\ & (k-\lambda_2)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (k-\lambda_n)^2\end{bmatrix}P^{-1}$$

比较 $kI-A$ 与 $(kI-A)^2$ 表达式的右端，可得

$$\operatorname{rank}(kI-A)=\operatorname{rank}(kI-A)^2.$$

35. 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ a & 3 & 0\\ c & b & 2\end{bmatrix}$$

(1) 求 A 的所有可能的若尔当标准形；

(2) 给出 A 可对角化的条件.

解 (1) 由于 $|\lambda I-A|=(\lambda-3)^2(\lambda-2)$，所以

当 $\lambda=3$ 时，$3I-A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -a & 0 & 0\\ -c & -b & 1\end{bmatrix}$，若 $a=0$，则 $3I-A$ 的秩为 1，故对应于 $\lambda=3$ 的线性无关的特征向量有两个，从而可以写出 A 的若尔当标准形为

$$J=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 2\end{bmatrix}$$

若 $a\neq0$，则 $3I-A$ 的秩为 2，那么 A 的属于 $\lambda=3$ 的特征向量只有一个，因此 A 的若尔当标准形为

$$J=\begin{bmatrix}3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 2\end{bmatrix}$$

(2) 只有当 $a=0$ 时，A 可对角化.

36. 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^3$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. 求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得

$$\boldsymbol{X}=k_1(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,-1)^{\mathrm{T}}=(k_1,k_1+k_2,-k_2)^{\mathrm{T}}$$

记 $\lambda=1$ 的特征向量空间为：$V_{\lambda=1}=\{\boldsymbol{\alpha}=(k_1,k_1+k_2,-k_2)^{\mathrm{T}}\}$.

由于 $\lambda=1$ 有两个线性无关的特征向量，所以 $\lambda=1$ 对应有两个若尔当块：

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \\ & \boldsymbol{J}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

求可逆矩阵，必须找出三个线性无关的向量. 首先在 $V_{\lambda=1}$ 选取适当的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(k_1,k_1+k_2,-k_2)^{\mathrm{T}}$，使得

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}k_1\\ k_1+k_2\\ -k_2\end{bmatrix}$$

有解（相容），为此对增广矩阵 $[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\alpha}]$ 作初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & k_1\\ -2 & 2 & 2 & k_1+k_2\\ 1 & -1 & -1 & -k_2\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & -1 & -k_1\\ 0 & 0 & 0 & k_2-k_1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

必须有 $\operatorname{rank}[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\ \vdots\ \boldsymbol{\alpha}]=\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$，则 $k_2-k_1=0$，取 $k_1=k_2=1$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$.

由非齐次方程组

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$$

解得 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，再取 $V_{\lambda=1}$ 中的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，不难验证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，组成可逆矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}，则\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}$$

评注 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不是唯一的. 还应当指出的是，在 $V_{\lambda=1}$ 中适当选 $\boldsymbol{\alpha}$ 时，可先试选已有的特征向量 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 或 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，将它们代入非齐次方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$ 中看是否相容，若相容则选之. 但本题这两个向量都不相容，故必须确定 k_1,k_2 来选 $\boldsymbol{\alpha}_1$.

37. 设 $W=L[\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x,x^2\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{2x}]$ 为函数向量 $\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x,x^2\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{2x}$ 生成的 4 维空间，$\mathscr{A}$ 为导数变换.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x,x^2\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{2x}$ 下的矩阵；

(2) 找一组基，使 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为若尔当标准形.

解 (1)由于

$$\begin{cases}\mathscr{A}(e^x)=e^x\\ \mathscr{A}(xe^x)=e^x+xe^x\\ \mathscr{A}(x^2e^x)=2xe^x+x^2e^x\\ \mathscr{A}(e^{2x})=2e^{2x}\end{cases}$$

即有

$$(\mathscr{A}(e^x),\ \mathscr{A}(xe^x),\ \mathscr{A}(x^2e^x),\ \mathscr{A}(e^{2x}))=(e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,\ e^{2x})\cdot\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

$\mathscr{A}$在此基下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

(2) $$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3(\lambda-2),\lambda_{1,2,3}=1,\lambda_4=2$$

对于$\lambda=1$,求解$(I-A)X=\mathbf{0}$,得解$X=k\boldsymbol{\alpha}_1=k(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,再求解$(I-A)\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}$,即

$$\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

解得$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$

还要求解$(I-A)\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_1$,即

$$\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

解得$\boldsymbol{\beta}_2=\left(0,0,\dfrac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}$.

对于$\lambda=2$,由$(2I-A)X=\mathbf{0}$得$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.取可逆矩阵.

$$P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

则有

$$P^{-1}AP=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&2\end{array}\right]=J$$

令

$$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)=(e^x,xe^x,x^2e^x,e^{2x})\boldsymbol{P}$$

求得新基为

$$\gamma_1=e^x,\quad \gamma_2=xe^x,\quad \gamma_3=\frac{1}{2}x^2e^x,\quad \gamma_4=e^{2x}$$

$\mathscr{A}$在此基下的矩阵为若尔当标准形.

38. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\a&2&0\\b&c&-1\end{bmatrix}$$

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的可能若尔当标准形；

(2) 给出 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的条件.

解 (1) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$，$\lambda_{1,2}=2$，$\lambda_3=-1$.

对于 $\lambda=2$(二重)，求解$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由于

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-a&0&0\\-b&-c&3\end{bmatrix}$$

当 $a\neq0$ 时，$\text{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$，故方程组只有一个线性无关的特征向量，所以对于 $\lambda=2$ 只有一个二阶的若尔当块 $\boldsymbol{J}_1=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$，此时 $\boldsymbol{A}$ 的标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

当 $a=0$ 时，$\text{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$，故 $\lambda=2$ 有两个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 的标准形是对角矩阵：

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-1\end{bmatrix}$$

(2) 显然只有在 $a=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可对角化.

39. 在多项式空间 $P[x]_{n-1}$ 中，$\mathscr{D}$ 是 $P[x]_{n-1}$ 的一个导数变换，证明 $\mathscr{D}$ 在任一基下的矩阵是不可对角化的.

证明 取基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$，显然 $\mathscr{D}$ 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0&1&&&\\0&0&2&&\\&&&\ddots&\\\vdots&&&\ddots&n-1\\0&&\cdots&&0\end{bmatrix}$$

由于$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}|=\lambda^n$,得$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$,且$\operatorname{rank}(0\cdot \boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})=n-1$,所以$\lambda=0$对应的线性无关的特征向量只有一个,故$\boldsymbol{D}$不可对角化. 又因为$\mathscr{D}$在不同基下的矩阵是相似的,所以$\mathscr{D}$在任一组基下的矩阵均不可对角化.

40. $\boldsymbol{A}$为n阶方阵,证明:$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{A}$有相同的若尔当标准形.

证明 设$\boldsymbol{P}$可逆,且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{bmatrix}=\boldsymbol{J},\qquad \boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}} & & & \\ & \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

令

$$\boldsymbol{C}_i=\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1 & & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{C}_s\end{bmatrix}$$

有

$$\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_i=\boldsymbol{C}_i^{-1},\ \text{且}\ \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i=\boldsymbol{J}_i$$

所以$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{J}$,即$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{P}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}]^{-1}=\boldsymbol{J}$. 如果令$\boldsymbol{Q}=[(\boldsymbol{P}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}]^{-1}$,于是有$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,这表明$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{A}$有相同的标准形.

41. 设$\boldsymbol{A}$是主对角元为0的n阶上三角矩阵,证明存在正整数k,使$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$.

证明 因为$\boldsymbol{A}$是主对角元为0的n阶上三角阵,所以$\boldsymbol{A}$的n个特征值均为0,即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s\end{bmatrix}=\boldsymbol{J},\quad \text{其中}\quad \boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

取$k=\max\{n_i\mid i=1,2,\cdots,s\}$,不难看出都有$\boldsymbol{J}_i^k=\boldsymbol{0}$,$i=1,2,\cdots,s$,从而有

$$A^k = PJ^kP^{-1} = P\begin{bmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{bmatrix}P^{-1} = 0$$

这表明，当 k 取若尔当块的最大阶数时，使 $A^k=0$.

42. 设 A 是 n 阶不可逆矩阵，但不是幂零矩阵，证明存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

其中 B 是可逆块矩阵，C 为幂零块矩阵(即 $C^k=0$).

证明 由于 A 不是幂零的，则 A 有非零的特征值，且记所有不等于零的特征值对应的若尔当块组成的分块对角矩阵为 B，又知不可逆，则 A 至少有一个特征值为 0，且记零特征值对应的若尔当块组成的对角矩阵为 C，于是存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

这里矩阵 B 是主对角元不为 0 的上三角阵，所以是可逆的，而 C 是主对角元都为 0 的上三角阵，当然存在正整数 k，使 $C^k=0$，即 C 为幂零矩阵.

43. 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，且 $A^n=0,B^n=0$，但 $A^{n-1}\neq 0,B^{n-1}\neq 0$，证明 A 与 B 相似.

证明 由于 $A^n=0$，所以 A 的特征值全为零，此时存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$，从而有 $A^n=PJ^nP^{-1}$. 当 $A^n=0$ 而 $A^{n-1}\neq 0$ 时，可知 $J^n=0$ 而 $J^{n-1}\neq 0$，这表明 J 必是对角元为 0 且仅有一块的若尔当矩阵.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} = J$$

同理，必有可逆矩阵 Q，使

$$Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} = J$$

故有

$$P^{-1}AP = Q^{-1}BQ, \quad 即 \quad B = QP^{-1}APQ^{-1}$$

记 $C=PQ^{-1}$，则有 $B=C^{-1}AC$.

44. 设 $A(\lambda)$为 5 阶 λ 矩阵，其秩为 4，初等因子为 $\lambda,\lambda^2,\lambda^2,\lambda-1,\lambda-1,\lambda+1,(\lambda+1)^3$. 试求 $A(\lambda)$的不变因子并写出其标准形.

解 因秩为 4，知其有四个不变因子：

$$d_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3, d_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1), d_2(\lambda) = \lambda, d_1(\lambda) = 1$$

所以其史密斯标准形为

$$
\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1) & \\ & & & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3\end{bmatrix}
$$

45. 已知 7 阶 λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩为 5，初等因子是 $1,\lambda,\lambda^3,\lambda-2,(\lambda-2)^4,(\lambda-2)^4$. 求 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的各阶子式的最高公因子.

解 将 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 化为对角矩阵，主对角线上元素是 $1,\lambda,\lambda^3,\lambda-2,(\lambda-2)^4,(\lambda-2)^4$，因秩为 5，故有如下结果：5 个不变因子为

$$
d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\ d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2),\ d_4(\lambda)=\lambda(\lambda-2)^4,\ d_5(\lambda)=\lambda^3(\lambda-2)^4
$$

从而求得各阶子式的最高公因子为

$$
\begin{aligned}
&D_1(\lambda)=d_1(\lambda)=1,\ D_2(\lambda)=D_1(\lambda)\cdot d_2(\lambda)=1\\
&D_3(\lambda)=D_2(\lambda)\cdot d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)\\
&D_4(\lambda)=D_3(\lambda)\cdot d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-2)^5\\
&D_5(\lambda)=D_4(\lambda)\cdot d_5(\lambda)=\lambda^5(\lambda-2)^9
\end{aligned}
$$

46. 试证 $\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 的若尔当标准形是 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

证明 因为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$，所以 $\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 的若尔当标准形只有两种可能，即

$$
\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad 及\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}
$$

但是 $\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 显然不能与 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 相似，所以它的标准形只能是 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

47. 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

解 设 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$，由

$$
\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}
$$

得

$$
\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}
$$

因此有

$$
\begin{cases}2a+b=a\\ 2c+d=a+c\\ -a=b\\ -c=b+d\end{cases}
$$

取一组解 $a=1,b=-1,c=0,d=1$，则 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ 是个可逆矩阵，而且

$$P^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

48. 试证:假如有正整数 m,使 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{I}$,那么 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是哪些数?

证明 设 $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1,\cdots,\boldsymbol{J}_s)$是与 $\boldsymbol{A}$ 相似的若尔当矩阵,且 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{C}^{1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.如果 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似,则至少有一个若尔当块 $\boldsymbol{J}_i$ 其阶数大于1,则

$$\boldsymbol{J}_i^m=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}^m=\begin{bmatrix} \lambda_i^m & \lambda_i^{m-1} & & & \\ & \lambda_i^m & m\lambda_i^{m-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & m\lambda_i^{m-1} \\ & & & & \lambda_i^m \end{bmatrix}\neq \boldsymbol{I}_p$$

其中 p 是 $\boldsymbol{J}_i$ 的阶数,于是知

$$\boldsymbol{J}^m=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1^m & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boldsymbol{J}_i^m & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boldsymbol{J}_s^m \end{bmatrix}\neq \boldsymbol{I}$$

但由于 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$,所以 $\boldsymbol{J}^m=(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^m=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$,此为矛盾.所以 $\boldsymbol{A}$ 必须与对角阵相似.若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,则 λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{I}$ 的特征值,故 $\lambda^m=1$,所以 λ 只能是 m 次单位根.

49. 证明:任意方阵可表示为两个对称方阵的乘积,且其中一个是可逆的.

证明 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{J}$ 为若尔当矩阵,且 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_k \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{J}_i$ 为第 i 个若尔当块,又取 $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 & & & \\ & \boldsymbol{H}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{H}_k \end{bmatrix}$,而 $\boldsymbol{H}_i=\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$与 $\boldsymbol{J}_i$ 同阶,则 $\boldsymbol{H}_i^2=\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{H}_i^{-1}=\boldsymbol{H}_i$,且由计算得 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}$,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{H}\boldsymbol{P})^{-1}[(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}](\boldsymbol{H}\boldsymbol{P})\\&=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{P})=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}$,且 $\boldsymbol{C}$ 是可逆的、对称的.

设 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}$,则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}$,而 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{D}$,即 $\boldsymbol{D}$ 也是对称的.

50. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值各不相等,且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,求证:$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 的初等因子全是一次的.

证明与第27题相同.

51. 应用矩阵的若尔当标准形求解线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1+x_2\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-4x_1+3x_2\\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=-8x_1+8x_2-x_3\end{cases}$$

这里 x_1,x_2,x_3 都是 t 的未知函数.

解 对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\-8&8&-1\end{bmatrix}$,求得 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&-1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&2&1\end{bmatrix}$,作代换 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$,将原方程化为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y'_1\\y'_2\\y'_3\end{bmatrix}=J\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1+y_2\\y_2\\-y_3\end{bmatrix}$$

即有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_1+y_2\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=y_2\\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}=-y_3\end{cases}$$

可求得 $y_1=c_1\mathrm{e}^t+c_2t\mathrm{e}^t$,$y_2=c_2\mathrm{e}^t$,$y_3=c_3\mathrm{e}^{-t}$. 于是

$$\begin{cases}x_1(t)=c_1\mathrm{e}^t+c_2t\mathrm{e}^t\\ x_2(t)=2c_1\mathrm{e}^t+c_2(2t+1)\mathrm{e}^t\\ x_3(t)=4c_1\mathrm{e}^t+c_2(4t+2)\mathrm{e}^t+c_3\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

52. 试证:(1) 不等于零的幂零矩阵一定不相似于对角矩阵.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 具有唯一特征值但 $\boldsymbol{A}$ 不是对角矩阵,证明 $\boldsymbol{A}$ 一定不相似于对角矩阵.

证明 (1) 用反证法. 如果幂零矩阵相似于对角矩阵,于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,所以有

$$\boldsymbol{A}^2=\left(\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^2=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^2&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{0}$$

得

$$\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

由此可知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，故有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

这表明 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，这与 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 矛盾.

(2) 反证. 如果 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，则该对角矩阵是纯量矩阵，但纯量矩阵只与自己相似，与 $\boldsymbol{A}$ 不是对角矩阵相矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 一定不相似于对角矩阵.

53. 在复数域上求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 10\\ -4 & 3 & 7\\ -3 & 1 & 7\end{bmatrix}$ 的若尔当标准形 $\boldsymbol{J}$，并求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$.

解 由 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^3=0$，可得 $\lambda=2$ 为三重特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$，则有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$，即有 $\boldsymbol{AP}_1=2\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{AP}_2=\boldsymbol{P}_1+2\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{AP}_3=\boldsymbol{P}_2+2\boldsymbol{P}_3$. 整理后可得

$$\begin{bmatrix}-6 & 2 & 10\\ -4 & 1 & 7\\ -3 & 1 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-6 & 2 & 10\\ -4 & 1 & 7\\ -3 & 1 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_1,\quad \begin{bmatrix}-6 & 2 & 10\\ -4 & 1 & 7\\ -3 & 1 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{P}_3=\boldsymbol{P}_2$$

解得

$$\boldsymbol{P}_1=(2,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{P}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{P}_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}},\text{故 }\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

54. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

试计算 $2\boldsymbol{A}^8-3\boldsymbol{A}^5+\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{I}$.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-2\lambda+1$，由于 $2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4=(\lambda^3-2\lambda+1)f(\lambda)+(24\lambda^2-37\lambda+10)$，其中 $f(\lambda)=2\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-14$，且 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$，故

$$2\boldsymbol{A}^8-3\boldsymbol{A}^5+\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{I}=24\boldsymbol{A}^2-37\boldsymbol{A}+10\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-3 & 48 & -26\\ 0 & 95 & -61\\ 0 & -61 & 34\end{bmatrix}$$

55. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}$$

试计算$(A^4-5A^3+6A^2+6A-8I)^{-1}$.

解 $|\lambda I-A|=\lambda^2-5\lambda+7$, $A^2-5A+7I=0$，而 $\lambda^4-5\lambda^3+6\lambda^2+6\lambda-8=(\lambda^2-5\lambda+7)(\lambda^2-1)+\lambda-1$，故

$$(A^4-5A^3+6A^2+6A-8I)^{-1}=(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

56. 已知3阶矩阵 A 的三个特征值为 $1,-1,2$，试将 A^{2n} 表示为 A 的二次式.

解 $|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)=f(\lambda)$，设

$$\lambda^{2n}=f(\lambda)g(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$$

其中 $g(\lambda)$ 是 λ 的多项式，a,b,c 为待定系数. 由 $f(1)=0,f(-1)=0,f(2)=0$，得

$$\begin{cases}a+b+c=1\\a-b+c=1\\4a+2b+c=2^{2n}\end{cases}$$

解之，得

$$a=\frac{1}{3}(2^{2n}-1),\quad b=0,\quad c=-\frac{1}{3}(2^{2n}-4)$$

因此

$$A^{2n}=aA^2+bA+cI=\frac{1}{3}(2^{2n}-1)A^2-\frac{1}{3}(2^{2n}-4)I$$

57. 求 $g(A)=A^7-A^5-19A^4+28A^3+6A-4I$，其中

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\-4 & 3 & 0\\1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

解 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

所以有

$$f(A)=0$$

设

$$g(\lambda)=\lambda^7-\lambda^5-19\lambda^4+28\lambda^3+6\lambda-4=f(\lambda)\cdot\varphi(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$$

其中 $\varphi(\lambda)$ 是 λ 的多项式，a,b,c 是待定系数. 从而有

$$g(A)=f(A)\cdot\varphi(A)+aA^2+bA+cI$$

下面用待定系数法求 a,b,c.

$$\begin{cases}g(1)=a+b+c=11\\g'(1)=2a+b=16\\g(2)=4a+2b+c=24\end{cases}$$

解得 $a=-3,b=22,c=-8$，故

$$g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^7 - \boldsymbol{A}^5 - 19\boldsymbol{A}^4 + 28\boldsymbol{A}^3 + 6\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = f(\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{A}) + a\boldsymbol{A}^2 + b\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{I}$$
$$= -3\boldsymbol{A}^2 + 22\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -21 & 16 & 0 \\ -64 & 43 & 0 \\ 19 & -3 & 24 \end{bmatrix}$$

58. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，证明 $n\geqslant 3$ 时，恒有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}$，并计算 $\boldsymbol{A}^{1000}$.

解 由于 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$，所以 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$. 记

$$g(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-2} - \lambda^2 + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^{n-3} + \cdots + \lambda + 1)$$
$$= f(\lambda)(\lambda^{n-3} + \cdots + \lambda + 1)$$

有

$$g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^n - \boldsymbol{A}^{n-2} - \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{I} = f(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^{n-3} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$$

从而 $\boldsymbol{A}^n-\boldsymbol{A}^{n-2}-\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，可得 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}$.

下面再计算 $\boldsymbol{A}^{1000}$，令 $h(\lambda)=\lambda^{1000}=f(\lambda)\cdot\varphi(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$，求出 a,b,c.

因 $f(1)=0, f(-1)=0$，则有 $h(1)=a+b+c, h'(1)=2a+b=1000, h(-1)=a-b+c=1$，解得 $a=500, b=0, c=-499$，故

$$\boldsymbol{A}^{1000} = a\boldsymbol{A}^2 + b\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 500 & 500 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

59. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，其特征值为 $1,-1,2$，试将 $\boldsymbol{A}^{2n}$ 表示为 $\boldsymbol{A}$ 的二次矩阵多项式，即形式为 $\boldsymbol{A}^{2n}=a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{I}$.

解 结果见第 56 题.

60. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆方阵，试把 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示为 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 次矩阵多项式的形式，若

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 考察 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$，有

$$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^n + a_1\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{A} + a_n\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\lambda_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $a_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0$，故有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n-1} + a_1\boldsymbol{A}^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\boldsymbol{A} + a_{n-1}\boldsymbol{I}) = -a_n\boldsymbol{I}$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{a_n}(\boldsymbol{A}^{n-1} + a_1\boldsymbol{A}^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\boldsymbol{A} + a_{n-1}\boldsymbol{I})$$

对给定的 $\boldsymbol{A}$(三阶)有 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=\lambda^3-12\lambda-16$，则有 $a_1=0, a_2=-12, a_3=-16$，故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{16}(\boldsymbol{A}^2 - 12\boldsymbol{I}) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

61. 举例说明,即使两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式和相同的最小多项式,但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不一定相似.

解 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

有 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\lambda^4$, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{0}$,且它们的最小多项式也相同,$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=m_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=\lambda^2$,但矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 并不相似.

62. 求下列矩阵的最小多项式:

(1) $\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}4&-2&2\\-5&7&-5\\-6&7&-4\end{bmatrix}$;

(3) n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$; (4) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,其元素均为 1;

(5) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_2&a_3\\-a_1&a_0&-a_3&a_2\\-a_2&a_3&a_0&-a_1\\-a_3&-a_2&a_1&a_0\end{bmatrix}$.

解 (1) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&2&0\\1&1&1\end{bmatrix},\qquad \lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-3&-1&1\\0&\lambda-2&0\\-1&-1&\lambda-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&(\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

故最小多项式为$(\lambda-2)^2$.

(2) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+11)$

故该矩阵有三个不同的特征值,因此其最小多项式为

$$(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+11)$$

(3) n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的最小多项式为 $m(\lambda)=\lambda-1$.

(4) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$,又 $\boldsymbol{A}^2=n\boldsymbol{A}$,即 $\boldsymbol{A}^2-n\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,故该矩阵的最小多项式为 $\lambda(\lambda-n)$.

(5) 因为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=[\lambda^2-2a_0\lambda+(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)]^2$,而 $m(\lambda)=\lambda^2-2a_0\lambda+(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)$是$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|$的因子,经检验知 $m(\lambda)$是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的最小多项式.

63. n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式,且它们的最小多项式等于特征多项式,证明 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似.

证明 因 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式等于特征多项式,则 $\boldsymbol{A}$ 相似的 $\boldsymbol{J}$ 矩阵中,每一个特征值 λ_i 只有 k_i 阶标准若尔当块 $J_i(i=1,2,\cdots,s)$,且 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$.

又 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_i)^{k_i}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$, $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=m_{\boldsymbol{B}}=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|$,于是有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}J_1(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&J_s(\lambda_s)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}J_1(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&J_s(\lambda_s)\end{bmatrix}$$

有

$$P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$$

即

$$B = (P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1}) = C^{-1}AC$$

知 A 与 B 相似.

64. 求 A 的最小多项式,其中 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

解 $|\lambda I - A| = (\lambda-2)^2(\lambda-4)$,令 $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-4)$,则

$$\varphi(A) = (A-2I)(A-4I) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故

$$m_A(\lambda) = m_B(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-4)$$

65. 设 $A \backsim J$,求 A 的最小多项式,其中

$$J_{6\times 6} = \begin{bmatrix} 5 & & & & & \\ & 5 & 1 & 0 & & \\ & & 5 & 1 & & \\ & & & 5 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}$$

解 由 A 的最小多项式与 J 的相似关系,知特征值 $\lambda=5$ 对应的若尔当块最高阶为 3,$\lambda=2$ 对应的若尔当块最高阶为 2,故有

$$m_A(\lambda) = (\lambda-5)^3(\lambda-2)^2$$

66. (1) A 为 4 阶方阵,其特征值为 3,2,2,2,求 A 的可能若尔当标准形;

(2) A 为 4 阶方阵,A 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$,求 A 的可能若尔当标准形.

解 (1) 由于 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-3)(\lambda-2)^3$,则 A 的最小多项式可能有三种情况:

$$m_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)^2$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)^3$$

故 A 相似于可能的若尔当标准形分别为

$$J_1 = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix},\quad J_2 = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix},\quad J_3 = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 由 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ 及 $\boldsymbol{A}$ 是4阶方阵,知 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式可能有两种情况

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

或

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda-2)^3$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$ 相似于可能的若尔当标准形为

$$\boldsymbol{J}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&&\\&1&&\\ \hdashline &&2&1\\&&&2\end{array}\right] \quad 或 \quad \boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$$

第3章 矩阵的分解

习 题 3

1. 判定矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3&2&-1\\-1&0&0\\-1&3&0\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&2&-1\\-1&4&-1\\1&3&-5\end{bmatrix}$ 能否进行 $\boldsymbol{LU}$ 分解，为什么？如能分解，试分解之.

解 对 $\boldsymbol{B}$ 不能进行 $\boldsymbol{LU}$ 分解，因为 $\boldsymbol{B}$ 的一阶顺序主子式为 0，而对于 $\boldsymbol{C}$ 可以进行 $\boldsymbol{LU}$ 分解：

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\-\frac{1}{3}&\frac{11}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&-1\\0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

2. 对下列矩阵进行杜利特分解：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}12&-3&3\\-18&3&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$.

解 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&&\\\frac{1}{2}&1&\\\frac{1}{2}&\frac{3}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\&&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&&\\-\frac{3}{2}&1&\\\frac{1}{12}&-\frac{5}{6}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12&-3&3\\&-\frac{3}{2}&\frac{7}{2}\\&&\frac{11}{3}\end{bmatrix}$.

3. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解.

解　对$(A \,\vdots\, I)$做初等行变换

$$(A \,\vdots\, I)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&1&1&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&1\end{array}\right]$$

可得 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$，$L=P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$，$U=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$即得分解式.

4. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}5&2&-4&0\\2&1&-2&1\\-4&-2&5&0\\0&1&0&2\end{bmatrix}$$

的杜利特分解与克鲁特分解.

解　A的杜利特分解为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{5}&1&0&0\\-\frac{4}{5}&-2&1&0\\0&5&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&2&-4&0\\0&\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&1\\0&0&1&2\\0&0&0&-7\end{bmatrix}$$

克鲁特分解为

$$A=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\2&\frac{1}{5}&0&0\\-4&-\frac{2}{5}&1&0\\0&5&2&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}&0\\0&1&-2&5\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

5. 求对称正定矩阵

$$A=\begin{bmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{bmatrix}$$

的不带平方根的乔累斯基分解.

解　$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&&\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\\\frac{-4}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{-4}{\sqrt{5}}\\&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\\&&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&&\\2&\frac{1}{5}&\\-4&\frac{-2}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&&\\&5&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&2&-4\\&\frac{1}{5}&\frac{-2}{5}\\&&1\end{bmatrix}$$

6. 对下面的矩阵进行 LDU 分解：

(1) $A=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\2&0&-1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$； (2) $A=\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&-1&9&-7\\-3&4&-3&19\\4&-1&6&-21\end{bmatrix}$，

其中 L 为单位下三角矩阵，D 为对角矩阵，U 为单位上三角矩阵.

解 (1) $A=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\2&0&1&\\0&0&-\frac{1}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-5&\\&&&\frac{6}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&1&0&0\\&&1&-\frac{1}{5}\\&&&1\end{bmatrix}$；

(2) $A=\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\-3&-2&1&\\4&2&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&-5&&\\&&12&\\&&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\&1&-\frac{3}{5}&1\\&&1&\frac{1}{2}\\&&&1\end{bmatrix}$.

7. (1) 对 $A=\begin{bmatrix}16&4&8\\4&5&-4\\8&-4&22\end{bmatrix}$进行 LDL^T 分解和乔累斯基分解 GG^T，其中 L 为单位下三角矩阵，D 为对角矩阵，G 为下三角矩阵；

(2) 对 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{bmatrix}$进行克鲁特分解和不带平方根的乔累斯基分解.

解 (1) $A=\begin{bmatrix}1&&\\0.25&1&\\0.5&-1.5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16&&\\&4&\\&&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0.25&0.5\\&1&-1.5\\&&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}4&&\\1&2&\\2&-3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&2\\&2&-3\\&&3\end{bmatrix}；$$

(2) $A=\begin{bmatrix}2&&\\1&\frac{5}{2}&\\1&\frac{3}{2}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\&1&\frac{3}{5}\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\\frac{1}{2}&1&\\\frac{1}{2}&\frac{3}{5}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&&\\&\frac{5}{2}&\\&&\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\&1&\frac{3}{5}\\&&1\end{bmatrix}$.

8. 分解四阶希尔伯特矩阵 $\boldsymbol{H}_4=(h_{ij})=(i+j-1)^{-1}$ 为

(1) $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$ 形式，其中 $\boldsymbol{L}$ 为单位下三角矩阵，$\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵；

(2) $\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$ 的形式(乔累斯基分解).

解　(1) $\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&&&\\ \frac{1}{2}&1&&\\ \frac{1}{3}&1&1&\\ \frac{1}{4}&\frac{9}{10}&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&&&\\ &\frac{1}{12}&&\\ &&\frac{1}{180}&\\ &&&\frac{1}{2800}\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&&&\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&&\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{6\sqrt{5}}&\\ \frac{1}{4}&\frac{3\sqrt{3}}{20}&\frac{1}{4\sqrt{5}}&\frac{1}{20\sqrt{7}}\end{bmatrix}$.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 n 阶矩阵，且 $\det\boldsymbol{A}_k\neq0(k=1,2,\cdots,r)$，证明：$\boldsymbol{A}$ 可进行三角分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，且可使得 $\boldsymbol{L}$ 或 $\boldsymbol{U}$ 为可逆矩阵.

证明　由于矩阵 $\boldsymbol{A}_r$ 的各阶顺序主子式 $\det\boldsymbol{A}_k\neq0(k=1,2,\cdots,r)$，所以有三角分解 $\boldsymbol{A}_r=\boldsymbol{L}_r\boldsymbol{U}_r$，其中 $\boldsymbol{L}_r$ 和 $\boldsymbol{U}_r$ 是可逆的下三角矩阵和上三角矩阵. 将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_r&\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$，由 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_r=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$，知 $\boldsymbol{A}$ 的后 $n-r$ 行可由前 r 行线性表示，即存在 $(n-r)\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{K}$，使得 $(\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22})=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A}_r,\boldsymbol{A}_{12})$，于是 $\boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{KA}_r$，$\boldsymbol{A}_{22}=\boldsymbol{KA}_{12}$，故

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_r&\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{KA}_r&\boldsymbol{KA}_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_r&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{KL}_r&\boldsymbol{I}_{n-r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_r&\boldsymbol{L}_r^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_r&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{KL}_r&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_r&\boldsymbol{L}_r^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_{n-r}\end{bmatrix}$$

即得到 $\boldsymbol{A}$ 的三角分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，且其中的 $\boldsymbol{L}$ 或 $\boldsymbol{U}$ 为可逆矩阵.

10. 将正定矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\ 1&5&-1\\ -1&-1&5\end{bmatrix}$$

做乔累斯基分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.

解　直接法，令

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\ 0&u_{22}&u_{23}\\ 0&0&u_{33}\end{bmatrix}\quad(\text{其中 } u_{ij}\ (i\leqslant j)\text{ 为待定参数})$$

由于

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u_{11}&0&0\\ u_{12}&u_{22}&0\\ u_{13}&u_{23}&u_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\ 0&u_{22}&u_{23}\\ 0&0&u_{33}\end{bmatrix}$$

可得

$$u_{11}^2=1,\quad u_{11}u_{12}=1,\quad u_{11}u_{13}=-1,\quad u_{12}^2+u_{22}^2=5$$
$$u_{12}u_{13}+u_{22}u_{23}=-1,\quad u_{13}^2+u_{23}^2+u_{33}^2=5$$

于是解得

$$u_{11}=1,\quad u_{12}=1,\quad u_{13}=-1,\quad u_{22}=2,\quad u_{23}=0,\quad u_{33}=2$$

则得

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$ 为乔累斯基分解.

11. 求下列矩阵的正交三角分解($\boldsymbol{UR}$)表达式:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解 记 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,由史密特正交化方法可得

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $|\boldsymbol{\beta}_1|=\sqrt{2}$, $\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}}$;

$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_1)\boldsymbol{\eta}_1=\left(1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, $|\boldsymbol{\beta}_2|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)^{\mathrm{T}}$;

$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $(\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_1)\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_2)\boldsymbol{\eta}_2=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$,

$|\boldsymbol{\beta}_3|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

于是取

$$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{\beta}_1| & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_1)\\ 0 & |\boldsymbol{\beta}_2| & (\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_2)\\ 0 & 0 & |\boldsymbol{\beta}_3|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{2} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ & & \dfrac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UR}$ 即为所求表达式.

12. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 5\\ 1 & -\frac{1}{2} & 2\\ -1 & \frac{1}{2} & -2\\ 1 & -\frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}$$

的 QR 分解.

解　令 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,2,-2,0)^{\mathrm{T}}$，由史密特正交化方法得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{2}(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{4}(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{2}(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

从而有

$$A=QR=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & \frac{9}{2}\\ 0 & \sqrt{2} & \frac{5}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

13. 设 A 是 n 阶可逆实矩阵，则 A 可表示成一个正交矩阵 Q 与正定矩阵 S 的乘积，即 $A=QS$.

证明　令 $B=A^{\mathrm{T}}A$，由于 A 可逆，则 B 是正定的，由埃尔米特二次型正定性的等价命题(见文献[2]3.1 节定理 1.5)有 $B=S^2$(其中 S 为对称正定矩阵).

设 Q 是 n 阶正交矩阵，则有

$$B=S^2=SIS=SQ^{\mathrm{T}}QS=(S^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}})(QS)=(QS)^{\mathrm{T}}(QS)$$

故 $A=QS$，其中 Q 为正交矩阵，S 为对称正定矩阵.

14. A 为实 n 阶矩阵，存在一个正交矩阵 Q，使 A 正交相似于分块上三角矩阵(拟上三角矩阵)，即

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=Q^{-1}AQ=R$$

其中，R 为分块上三角矩阵，其对角元上对角块矩阵为 1 阶或 2 阶块方阵. 每一个 1 阶块是 A 的实特征值，而每一个 2 阶实矩阵的两个特征值是 A 的一对共轭的特征值.

证明　由 A 是实矩阵，所以它的复特征值是共轭成对的. 设两个特征值为 $a\pm b\mathrm{i},b\neq 0$，下面证明存在正交阵 Q_1，使得

$$Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{D}_1$ 为 2 阶矩阵，其特征值为 $a\pm bi$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}\pm i\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}\pm i\boldsymbol{\beta})=(a\pm bi)(\boldsymbol{\alpha}\pm i\boldsymbol{\beta})$，可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}-b\boldsymbol{\beta}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=b\boldsymbol{\alpha}+a\boldsymbol{\beta}$$

其中实(列)向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，于是有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{C} \tag{$*$}$$

其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$.

由矩阵的正交三角分解知，存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$，使矩阵 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{Q}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，即 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{R}_1$ 是对角元为正数的 2 阶上三角阵，对($*$)式两端左乘 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}$，得 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{C}$，即

$$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{C}$$

于是

$$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}_1$ 为 2 阶实矩阵，则得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{R}_1\\ \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{R}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{$**$}$$

由($**$)式有 $\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_1^{-1}$，这表明 $\boldsymbol{D}_1$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. 因 $\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $a\pm bi$，故 $\boldsymbol{D}_1$ 的特征值也为 $a\pm bi$. 同时，由($**$)式有 $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{0}$，因 $\boldsymbol{R}_1$ 可逆，得 $\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{0}$. 从而得

$$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}\quad\text{(为分块上三角矩阵)}$$

15. 用吉温斯变换求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

的 $\boldsymbol{QR}$ 分解.

解 构造 $\boldsymbol{R}_{13}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，使 $\boldsymbol{R}_{13}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$；

又 $\boldsymbol{R}_{23}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{bmatrix}$,使 $\boldsymbol{R}_{23}\boldsymbol{R}_{13}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{7}{3\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$,令

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}_{23}\boldsymbol{R}_{13}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\\ & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{7}{3\sqrt{2}}\\ & & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$.

16. 用豪斯豪德变换求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

的 $\boldsymbol{QR}$ 分解.

解　对 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列,构造 $\boldsymbol{H}_1$ 如下:

$$\boldsymbol{b}^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}^{(1)}-|\boldsymbol{b}^{(1)}|\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$的第 1 列,构造 $\boldsymbol{H}_2$ 如下:

$$\boldsymbol{b}^{(2)}=\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}^{(2)}-|\boldsymbol{b}^{(2)}|\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & -4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1 & \\ & \boldsymbol{H}_2\end{bmatrix}$,则有

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ & 5 & 2\\ & & -1\end{bmatrix}$$

即有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$.

17. 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 6 & 0\\ 2\mathrm{i} & -4\mathrm{i} & 0 & 0\\ -2\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & 0 & 15\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

分别用豪斯豪德矩阵和吉温斯矩阵(又称平面旋转矩阵)求 A 的 QR 分解.

解 令 $\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}=(1,2\mathrm{i},-2\mathrm{i},0)^{\mathrm{T}}$,取 $\xi_1=3$(满足 $|\xi_1|=\|\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}\|_2$,且 $\xi_1\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)\mathrm{H}}-\boldsymbol{e}_1$ 为实数,于是

$$\boldsymbol{X}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}-\xi_1\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}-\xi_1\boldsymbol{e}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{12}}(-2,2\mathrm{i},-2\mathrm{i},0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{H}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0\\ 2\mathrm{i} & 1 & 2 & 0\\ -2\mathrm{i} & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad \text{且 } \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -6 & 2 & 10\mathrm{i}\\ 0 & 0 & 4\mathrm{i} & 10\\ 0 & 0 & -4\mathrm{i} & 5\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

再令 $\boldsymbol{\alpha}_3^{(2)}=(-4\mathrm{i},3)^{\mathrm{T}}$,取 $\xi_3=5\mathrm{i}$(满足 $|\xi_3|=\|\boldsymbol{\alpha}_3^{(2)}\|_2$,且 $\xi_3\boldsymbol{\alpha}_3^{(2)\mathrm{H}}\bar{\boldsymbol{e}}_1$ 为实数),于是

$$\boldsymbol{X}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3^{(2)}-\xi_3\bar{\boldsymbol{e}}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3^{(2)}-\xi_3\bar{\boldsymbol{e}}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{90}}(-9\mathrm{i},3)^{\mathrm{T}}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_3=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{X}_3^{\mathrm{H}}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4 & 3\mathrm{i}\\ -3\mathrm{i} & 4\end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \widetilde{\boldsymbol{H}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\mathrm{i}\\ 0 & 0 & -\frac{3}{5}\mathrm{i} & \frac{4}{5}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -6 & 2 & 10\mathrm{i}\\ 0 & 0 & 4\mathrm{i} & 10\\ 0 & 0 & 5\mathrm{i} & -4\\ 0 & 0 & 0 & -3\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}5 & -10\mathrm{i} & -8\mathrm{i} & -6\mathrm{i}\\ 10\mathrm{i} & 5 & -8 & 6\mathrm{i}\\ -10\mathrm{i} & 10 & -4 & 3\mathrm{i}\\ 0 & 0 & -9\mathrm{i} & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -6 & 2 & 10\mathrm{i}\\ 0 & 0 & 4\mathrm{i} & 10\\ 0 & 0 & 5\mathrm{i} & -4\\ 0 & 0 & 0 & -3\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

用吉温斯方法有

$$\boldsymbol{R}_{12}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt5} & 0 & 0\\ -\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\sqrt5 & -2\sqrt5 & \frac{6}{\sqrt5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-12\mathrm{i}}{\sqrt5} & 0\\ -2\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & 0 & 15\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{R}_{13}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & \frac{2\mathrm{i}}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{2\mathrm{i}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_{13}\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -6 & 2 & 10\mathrm{i}\\ 0 & 0 & \frac{-12\mathrm{i}}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{4\mathrm{i}}{\sqrt{5}} & 5\sqrt{5}\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{34}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-4\mathrm{i}}{\sqrt{61}} & \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{61}}\\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{61}} & \frac{4\mathrm{i}}{\sqrt{61}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_{34}\boldsymbol{R}_{13}\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -6 & 2 & 10\mathrm{i}\\ 0 & 0 & \frac{-12\mathrm{i}}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{61}{5}} & -\frac{20\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{61}}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{75}{\sqrt{61}}\end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{13}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{34}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{5}} & \frac{8}{3\sqrt{305}} & \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{61}}\\ \frac{2\mathrm{i}}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{16\mathrm{i}}{3\sqrt{305}} & \frac{-4}{\sqrt{61}}\\ \frac{-2\mathrm{i}}{3} & 0 & \frac{4\sqrt{5}\mathrm{i}}{3\sqrt{61}} & \frac{-5}{\sqrt{61}}\\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{61}} & \frac{4\mathrm{i}}{\sqrt{61}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -6 & 2 & 10\mathrm{i}\\ 0 & 0 & -\frac{12\mathrm{i}}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{61}{5}} & -\frac{20\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{61}}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-75}{\sqrt{61}}\end{bmatrix}$$

18. 用史密特正交化方法求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

的 $\boldsymbol{QR}$ 分解.

解 令 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，正交化得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$$

则有

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ & & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$.

19. 用豪斯豪德变换使矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 12 & 16\\ 12 & 288 & 309\\ 16 & 309 & 312\end{bmatrix}$$

正交相似于三对角矩阵.

解 对 $b^{(1)}=\begin{bmatrix}12\\ 6\end{bmatrix}$,计算

$$b^{(1)}-|b^{(1)}|e_1=\begin{bmatrix}-8\\ 16\end{bmatrix},\quad X=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$H=I-2XX^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}1 & \\ & H\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -3\end{bmatrix}$$

则 $QAQ^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 20 & 0\\ 20 & 600 & 75\\ 0 & 75 & 0\end{bmatrix}$.

20. 试用三种方法(豪斯豪德、吉温斯、史密特)求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ 0 & 4 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

的 QR 分解.

解 用豪斯豪德方法

$$A=H_1H_2R=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

用吉温斯方法

$$A=R_{13}^{\mathrm{T}}R_{23}^{\mathrm{T}}R=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

用史密特方法,将三列正交化得

$$P_1=\alpha_1=(0,0,2)^{\mathrm{T}},\quad P_2=\alpha_2-\frac{1}{2}P_1=(3,4,0)^{\mathrm{T}}$$

$$P_3=\alpha_3-P_1+\frac{1}{5}P_2=\left(\frac{8}{5},-\frac{6}{5},0\right)^{\mathrm{T}}$$

再单位化

$$Q_1=\frac{1}{2}P_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\ Q_2=\frac{1}{5}P_2=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)^{\mathrm{T}},\ Q_3=\frac{1}{2}P_3=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5},0\right)^{\mathrm{T}}$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{P}_1=2\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{Q}_1+5\boldsymbol{Q}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{P}_1-\frac{1}{5}\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3=2\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2+2\boldsymbol{Q}_3$$

故

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Q}_3)\begin{bmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&\frac{4}{5}&\frac{-3}{5}\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

21. 已知实对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0&1\\0&-1&-2&4\\0&-2&1&3\\1&4&3&1\end{bmatrix}$$

试用豪斯豪德矩阵和吉温斯矩阵使 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于实对称三对角矩阵.

解 不难得出

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&\frac{4}{5}&\frac{-3}{5}\end{bmatrix}$$

有

$$\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&1&5&0\\0&5&-\frac{11}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}\end{bmatrix}$$

故正交阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\0&0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&0&0\end{bmatrix}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&1&5&0\\0&5&-\frac{11}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}\end{bmatrix}$.

利用吉温斯方法,有

$$\boldsymbol{R}_{24}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_{34}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\0&0&\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

$$R_{34}R_{24}AR_{24}^{\mathrm{T}}R_{34}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&1&5&0\\0&5&-\frac{11}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}\end{bmatrix}$$

故 $Q=R_{24}^{\mathrm{T}}R_{34}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&\frac{4}{5}&\frac{-3}{5}\\0&0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&0&0\end{bmatrix}$，使得 $A^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&1&5&0\\0&5&\frac{-11}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}\end{bmatrix}$.

22. 对下列矩阵做满秩分解：

(1) $A=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\-1&1&2&-4\\1&4&8&2\end{bmatrix}$； (2) $A=\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\-1&0&-1&0\\3&2&-1&-6\\0&-1&1&3\end{bmatrix}$.

解 (1) A 经初等行变换化为上三角矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\-1&1&2&-4\\1&4&8&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&2&4&-2\\0&3&6&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&1&2&-1\\0&1&2&0\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&2&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow H=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

由矩阵 H 可知，取 A 的 1,2,4 列便构成 B，而 $C=H$，可得

$$A=BC=\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&1&-4\\1&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(2) $A=\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\-1&0&-1&0\\3&2&-1&-6\\0&-1&1&3\end{bmatrix}\longrightarrow H=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$（上三角）

可得

$$A=BC=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\3&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-3\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

23. 对 $\boldsymbol{A}$ 做满秩分解：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -2 & -1\\ -2 & -4 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

解　设 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等行变换变成 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \cdots\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 为行满秩矩阵，把这个过程写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{PA}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \cdots\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为一系列初等行变换矩阵的乘积，就有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \cdots\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{B}\ \vdots\ \boldsymbol{B}_1]\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \cdots\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{BC}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 为列满秩矩阵.

$$[\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{I}]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}-1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}-1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{C} & \\ \cdots & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{0} & \end{array}\right]$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad 而\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

只要取 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 的前两列构成 $\boldsymbol{B}$，则有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ -2 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 3\end{bmatrix}=\boldsymbol{BC}$$

评注　满秩分解并非唯一.

24. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解表达式：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2 & 3 & 1\\ 2 & 5 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$；　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 5\\ 4 & 8 & 6 & 2 & 8 & 10\end{bmatrix}$；　(4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 10\\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 36\\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 27\\ 6 & 12 & 1 & 7 & 5 & 73\end{bmatrix}$.

解

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-2&3&1\\2&5&-1&4&1\\1&3&-1&2&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{8}{5}&-\frac{2}{5}\\0&1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&1&\frac{1}{5}&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}$(简化阶梯形)

取

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&-2\\2&5&-1\\1&3&-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{8}{5}&-\frac{2}{5}\\0&1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&1&\frac{1}{5}&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$ 即为其满秩分解表达式.

(2) $\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,取 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\2&3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&0&1&2\\0&0&1&1&2&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,取 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\2&3\\4&6\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2&0&-1&-1&1\\0&0&1&1&2&1\end{bmatrix}$.

(4) $\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&1&1&0\\0&0&1&1&-1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,取 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&10\\3&1&36\\2&0&27\\6&1&73\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2&0&1&1&0\\0&0&1&1&-1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$.

25. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$,证明:

$$\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$$

证明 必要性 如果 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}$,则显然有 $\boldsymbol{BCX}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$.

充分性 如果 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$,则显然有 $\boldsymbol{BCX}=\boldsymbol{0}$,由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$ 为满秩分解,所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关,由此可知方程组 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,于是有 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}$.

26. 设 $\boldsymbol{A}$ 的任两个分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1$,则它们之间的关系为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{M},\qquad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}_1$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 是 r 阶可逆矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{C}$ 的秩为 r,则 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}$ 是可逆的.由于 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1$,两边右乘 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}$,得 $\boldsymbol{BCC}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}$,从而有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}})(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{M}$,其中 $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}})(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1}$.

同理,$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{KC}_1$,其中 $\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}_1$.由于 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1$,于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{MK}&=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}_1\\&=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1)^{-1}\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

故得 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}^{-1}$,从而得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}_1$.

27. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$A$ 的分块为

$$A=\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & W\end{pmatrix}$$

其中 $X\in\mathbb{C}^{r\times r}$，$\mathrm{rank}X=\mathrm{rank}A=r$，证明 A 有如下形式的满秩分解：

$$A=\begin{pmatrix}X\\ Z\end{pmatrix}(I_r \;\vdots\; X^{-1}Y)=\begin{bmatrix}I_r\\ ZX^{-1}\end{bmatrix}(X,Y)$$

证明　由于 $\mathrm{rank}X=\mathrm{rank}A=r$，则 C 可逆，A 的前 r 个列 $\begin{pmatrix}X\\ Z\end{pmatrix}$ 是 A 的 n 个列的极大无关列，因而 A 的后 $n-r$ 个列 $\begin{pmatrix}Y\\ W\end{pmatrix}$ 可由 $\begin{pmatrix}X\\ Z\end{pmatrix}$ 线性表示，记为

$$\begin{pmatrix}Y\\ W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ Z\end{pmatrix}H=\begin{pmatrix}X & H\\ Z & H\end{pmatrix},\quad \text{其中}\quad H\ \text{为}\ r\times(n-r)\ \text{矩阵}$$

于是有 $Y=XH$，$W=ZH$，从而有 $H=X^{-1}Y$，$W=ZX^{-1}Y$，故有

$$A=\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & ZX^{-1}Y\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ Z\end{pmatrix}(I_r \;\vdots\; X^{-1}Y)=BC$$

$$A=\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & ZX^{-1}Y\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}I_r\\ ZX^{-1}\end{pmatrix}X(I_r \;\vdots\; X^{-1}Y)=\begin{pmatrix}I_r\\ ZX^{-1}\end{pmatrix}(X \;\vdots\; Y)=BC$$

评注　若 $\mathrm{rank}A=r$，且 A 左上角 r 阶矩阵 X 可逆时，则可用上述分块方法作满秩分解.

28. 设 $A^2=A$ 且 A 满足满秩分解 $A=BC$，证明 $CB=I$.

证明　由于 $A^2=A$，即 $(BC)(BC)=BC$，于是有

$$B(CB-I)C=0$$

上式两端左乘 B^{H}、右乘 C^{H} 得

$$B^{\mathrm{H}}B(CB-I)CC^{\mathrm{H}}=0$$

又因为 $\mathrm{rank}(B^{\mathrm{H}}B)=\mathrm{rank}B=r$，$\mathrm{rank}(CC^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}C=r$，所以 $B^{\mathrm{H}}B$ 与 CC^{H} 是可逆矩阵，故有 $CB-I=0$，即 $CB=I$.

29. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\mathrm{rank}A=r$，则存在 $m\times r$ 矩阵 W 和 $r\times n$ 矩阵 R，使

$$A_{m\times n}=W_{m\times r}R_{r\times n}$$

其中 R 为行满秩矩阵，W 是 r 个标准正交列向量组成的列满秩矩阵，称为正交满秩分解.

证明　设满秩分解为 $A=BC$，其中 $\mathrm{rank}(B_{m\times r})=r$，$\mathrm{rank}(C_{r\times n})=r$，显然 $B^{\mathrm{T}}B$ 是正定矩阵. 再由正定矩阵等价的条件(见文献[3]3.1节)知，存在 r 阶正定矩阵 S，使 $B^{\mathrm{T}}B=S^2$，且

$$(BS^{-1})^{\mathrm{T}}(BS^{-1})=S^{-1}B^{\mathrm{T}}BS^{-1}=S^{-1}S^2S^{-1}=I$$

不妨记 $W=BS^{-1}$，则有 $W^{\mathrm{T}}W=I$，可见 W 的 r 个列是标准正交的，又记 $R=SC$，R 是 $r\times n$ 行满秩矩阵，又 $C=S^{-1}R$，于是

$$A=BC=WSS^{-1}R=WR$$

30. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的满秩分解为 $A=BC$，则齐次方程组 $AX=0$ 的解与齐次方程组 $CX=0$ 同解.

证明　由于 $A_{m\times n}=B_{m\times r}C_{r\times n}$，可知 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B=r$，$\mathrm{rank}(B^{\mathrm{T}}B)=\mathrm{rank}B=r$，则 $B^{\mathrm{T}}B$ 可逆. 对于齐次方程组 $AX=0$，有 $BCX=0$，两边左乘 $(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}$，得

$$(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}BCX=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}0=0$$

即 $\boldsymbol{CX}=\mathbf{0}$. 这表明有 $N(\boldsymbol{A})\subseteq N(\boldsymbol{C})$. 反之，由 $\boldsymbol{CX}=\mathbf{0}$ 可推出 $\boldsymbol{BCX}=\mathbf{0}$，得 $N(\boldsymbol{C})\subseteq N(\boldsymbol{A})$，从而方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{CX}=\mathbf{0}$ 同解.

31. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times n,n\times k,k\times p$ 矩阵，证明：

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$$

证明 设 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 r，将 $\boldsymbol{B}$ 做满秩分解

$$\boldsymbol{B}_{n\times k}=\boldsymbol{F}_{n\times r}\boldsymbol{H}_{r\times k}$$

从而有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AFH})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{AF})$$

另一方面，有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{FHC})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{HC})$$

故

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})&=\operatorname{rank}[(\boldsymbol{AF})_{m\times r}\cdot(\boldsymbol{HC})_{r\times p}]\\&\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{AF})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{HC})-r\\&\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

32. $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，若 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的左逆矩阵. 证明：$\boldsymbol{A}$ 有左逆矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵.

证明 必要性 已知 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_m$，由于

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{BA})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant m,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{BA})=\operatorname{rank}\boldsymbol{I}_m=m$$

所以 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=m$，即 $\boldsymbol{A}$ 列满秩.

充分性 已知 $\boldsymbol{A}$ 列满秩，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 非奇异. 构造 $\boldsymbol{B}_{m\times n}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，则有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A}$ 有左逆矩阵.

33. 设矩阵 $\boldsymbol{F}\in\boldsymbol{C}_r^{m\times r}$（列满秩），$\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{C}_r^{r\times n}$（行满秩），证明：

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{FG})=r$$

证明 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG}$，则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{F}=r$，因为 $\boldsymbol{F}$ 列满秩，则 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}$ 可逆，于是有

$$(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{FG}=\boldsymbol{G}$$

从而 $r=\operatorname{rank}\boldsymbol{G}\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$，故 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$.

34. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

解 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\-1&1&0&2\end{bmatrix}$，特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=\lambda_4=0$，特征向量依次为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\2\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

它们已两两正交，于是可得

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2,\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

此时

$$\boldsymbol{V}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

取

$$\boldsymbol{U}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}=[\boldsymbol{U}_1\quad \boldsymbol{U}_2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$$

35. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

解　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，得 $\lambda_1=3,\lambda_2=1$，相应的特征向量为 $(1,1)^{\mathrm{T}},(-1,1)^{\mathrm{T}}$. 于是有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2,\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

取

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V},\qquad \boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{U}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

构造正交阵 $U=[U_1,U_2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，则 A 的奇异值分解为

$$A=U\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{H}$$

36. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$，求 A 的奇异值分解.

解 第一步 计算 $A^{T}A$ 的奇异值. 注意到矩阵

$$A^{T}A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

由于 $|\lambda I-A^{T}A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda-7)$，故 $A^{T}A$ 的特征值为 7,3,0，所以 A 的奇异值为 $\sigma_1=\sqrt{7}$，$\sigma_2=\sqrt{3}$.

第二步 求 $A^{T}A$ 的对应于三个特征值的 3 个标准正交特征向量.

对于 $\lambda_1=7$，求得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,2,1)^{T}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1)^{T}$；

对于 $\lambda_2=3$，求得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{T}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^{T}$；

对于 $\lambda_3=0$，求得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,-4)^{T}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{1}{\sqrt{21}}(2,-1,-4)^{T}$.

可得酉矩阵 $V=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$，取 $V_1=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)$.

第三步 计算

$$U_1=AV_1\Delta^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{7}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

最后，计算 $U=U_1$，$V=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$，则有

$$A=U\begin{bmatrix}\sqrt{7} & & \\ & \sqrt{3} & \\ & & 0\end{bmatrix}V^{H}$$

37. 设 $\boldsymbol{A}$ 为埃尔米特正定矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的奇异值就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，试证明之.

证明　由于 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n$，有

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{bmatrix}$$

知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_i^2，故 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i^2}=\lambda_i, i=1,2,\cdots,n$.

38. $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的绝对值是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值之积.

证明　因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，它的秩为 n，又 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=n$，这意味着正定矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 有 n 个正特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 考察 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\det(\boldsymbol{A})=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

即 $|\det\boldsymbol{A}|^2=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

如果记 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个正奇异值，即得 $|\det\boldsymbol{A}|=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$.

评注　也可以用奇异值分解证明之. 因为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$$

所以 $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{U}\cdot\det\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}(\sigma_1\cdots\sigma_n)$，而 $|\det\boldsymbol{U}|=|\det\boldsymbol{V}|=1$，知

$$|\det\boldsymbol{A}|=\sigma_1\cdots\sigma_n$$

39. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的奇异分解表达式.

解　由于 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=2$，$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}|=(\lambda-5)(\lambda-2)$，于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值 $\sigma_1=\sqrt{5}$，$\sigma_2=\sqrt{2}$.

对应于 λ_1 与 λ_2 的标准正交向量分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,0)^{\mathrm{T}}$$

记 $\boldsymbol{V}_r=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)$，$\boldsymbol{\Delta}=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2)$，得

$$\boldsymbol{U}_r=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Delta}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

于是

$$A = U_r \Delta V_r^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^H$$

评注 奇异值分解表达式不唯一，可以写成 $A=U\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^H$，这里 U,V 为酉阵.

40. 已知 $A\in \mathbb{C}_r^{m\times n}$（秩为 $r>0$）的奇异值分解表达式为

$$A = U\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^H$$

试求矩阵 $B=\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ 的奇异值分解表达式.

解 由 A 的奇异值分解 $A=U\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^H$，其中 $\Delta=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$，注意到

$$BB^H = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}(A^H, A^H) = \begin{bmatrix} AA^H & AA^H \\ AA^H & AA^H \end{bmatrix}$$

如果将 U 的前 r 列向量组成的矩阵记为 U_1，而 U 的后 $n-r$ 列向量组成的矩阵记为 U_2，即有

$$U = [U_1, U_2]$$

取

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & U_1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & 0 & U_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{V} = V$$

那么

$$B = \tilde{U}\begin{bmatrix} \sqrt{2}\Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\tilde{V}^H$$

即为矩阵 $B=\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ 的奇异值分解表达式.

41. 设 $A=UDV^H$ 为矩阵 A 的一个奇异值分解.

(1) 证明：U 的列向量为 AA^H 的特征向量，称其为矩阵 A 的左奇异向量；

(2) 证明：V 的列向量为 AA^H 的特征向量，称其为矩阵 A 的右特征向量；

(3) 举反例说明依据(1)和(2)中确定的酉矩阵 U 和 V 不一定是 A 的奇异值分解.

解 (1) 证明：注意到 $A=UDV^H=U\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^H$，则

$$AA^H = U\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^HV\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^H = U\begin{bmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^H$$

那么有

$$AA^{H}U = U\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$$

设 $U=(u_1, u_2, \cdots, u_m)$，则有

$$AA^{H}u_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

表明 u_i 是 AA^{H} 的属于特征值 λ_i 的特征向量，当 $i>r$ 时，$\lambda_i=0$.

(2) 与(1)方法相同.

(3) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A^{H}A=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$，$AA^{H}=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，显然 $A^{H}A$ 的特征值为 9,1，而 AA^{H} 的特征值为 9,1,0.

关于 $A^{H}A$ 对应的两个标准正交特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{T}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{T}$$

$$V = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

关于 AA^{H} 对应的三个标准特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{T}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{T}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = (0, 0, 1)^{T}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此时

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq U\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}V^{H} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

评注 在奇异值分解表达式中，虽然 U 的列向量是 AA^{H} 的特征向量，V 的列向量是 AA^{H} 的特征向量，而且 $A^{H}A$ 与 AA^{H} 的非零特征值完全相同，但却不能以此为依据构造矩阵 A 的奇异值分解表达式.

42. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$，如果存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，使得 $B=UAV$，那么称 A 与 B 酉相抵，证明：

(1) 酉相抵是一种等价关系；

(2) 若 A 与 B 酉相抵，则 A 与 B 有相同的奇异值.

证明 (1) 读者可以根据 $B=UAV$ 直接验证的确满足反身性、对称性和传递性，因此酉相抵是一种等价关系.

(2) 由于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{UAV}$，故有 $\boldsymbol{BB}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{UAVV}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{UAA}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$，这表明 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ 与 $\boldsymbol{BB}^{\mathrm{H}}$ 酉相似，则有相同的特征值，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的奇异值.

43. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别为 m,n 阶酉矩阵，试证：$\boldsymbol{UA}$ 和 $\boldsymbol{AV}$ 的奇异值与 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值相同.

证明 因为 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 都是酉矩阵，所以有

$$(\boldsymbol{UA})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{UA}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{UA}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$$

如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的正特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个奇异值为，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$，那么 $\boldsymbol{UA}$ 的奇异值也为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$. 又因为

$$(\boldsymbol{AV})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AV}=\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AV}$$

即有 $(\boldsymbol{AV})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AV}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 酉相似，故其特征值相同，从而 $\boldsymbol{AV}$ 的奇异值也与 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值相同.

44. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$

(1) 证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ 的非零特征值相同；

(2) 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，对应的正交特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，则 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_r$，且它们也是正交向量组.

证明 (1) 设 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r$，必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times m},\boldsymbol{Q}_{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12}\\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{D}_{11}$ 为 $r\times r$ 矩阵，则

$$\boldsymbol{PAA}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}^{-1}=(\boldsymbol{PAQ})(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}^{-1})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12}\\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

而

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AQ}=(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{PAQ})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}|&=|\boldsymbol{P}(\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{P}^{-1}|=\left|\lambda\boldsymbol{I}_m-\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right|\\&=|\lambda\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{D}_{11}||\lambda\boldsymbol{I}_{m-r}|=\lambda^{m-r}|\lambda\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{D}_{11}|\\|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}|&=\left|\lambda\boldsymbol{I}_n-\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right|=|\lambda\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{D}_{11}||\lambda\boldsymbol{I}_{n-r}|\\&=\lambda^{n-r}|\lambda\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{D}_{11}|\end{aligned}$$

所以有 $\lambda^m|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}|$，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ 的特征值相同.

(2) 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，所以有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$，$i=1,2,\cdots,r$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A\alpha}_i)=\boldsymbol{A}(\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i)=\lambda_i(\boldsymbol{A\alpha}_i)$$

故 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ 的特征值 λ_i 对应的特征向量为 $\boldsymbol{A\alpha}_i$.

其次，因 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}_i=0$，$i\neq j$，则

$$(\boldsymbol{A\alpha}_i)^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A\alpha}_j)=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A\alpha}_j=\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}_j=0,\quad i\neq j$$

故 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_r$ 是正交的.

45. $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$U$，$V$ 分别为 m，n 阶酉矩阵，证明：UA，AV 的奇异值与 A 的奇异值相同.

证明　参见第 43 题.

46. $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$U$，$V$ 分别为 m，n 阶酉矩阵，若 $B=UAV$，称 A 与 B 酉等价，证明：B 与 A 的奇异值相同.

证明　参见第 42 题(2)的证明.

47. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，用 A 的奇异值分解证明 A 的极分解：

$$A = GU = UH$$

其中 G，H 为半正定埃尔米特矩阵，U 为酉矩阵.

证明　设 A 的奇异值分解为

$$A = P\begin{bmatrix}\Delta & O\\ O & O\end{bmatrix}Q^{\mathrm{H}}$$

其中 P，Q 为 m 阶和 n 阶酉矩阵. 又将上式改写为

$$A = PQ^{\mathrm{H}}Q\begin{bmatrix}\Delta & O\\ O & O\end{bmatrix}Q^{\mathrm{H}}$$

令 $U=PQ^{\mathrm{H}}$，因 P 和 Q 是酉矩阵，所以 U 也为酉矩阵.

令 $H=Q\begin{bmatrix}\Delta & O\\ O & O\end{bmatrix}Q^{\mathrm{H}}$，因 Δ 的对角元 $\sigma_i>0$，故 H 是半正定矩阵，从而有

$$A = UH$$

同理有

$$A = P\begin{bmatrix}\Delta & O\\ O & O\end{bmatrix}P^{\mathrm{H}}PQ^{\mathrm{H}} = GU$$

其中 $G=P\begin{bmatrix}\Delta & O\\ O & O\end{bmatrix}P^{\mathrm{H}}$，$U=PQ^{\mathrm{H}}$.

48. 设矩阵

(1) $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$；(2) $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

验证 A 与 B 是正规矩阵，并求 A 与 B 的谱分解表达式.

解　(1) 因为

$$AA^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix}10 & -5 & 1\\ -5 & 6 & -5\\ 1 & -5 & 10\end{bmatrix} = A^{\mathrm{H}}A$$

所以 A 是正规矩阵.

又 $|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4)$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=4$，它们对应的标准特征向量为 $\xi_1=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$，$\xi_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$，于是取

$$G_1=\xi_1\xi_1^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix},\quad G_2=\xi_2\xi_2^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$G_3=\xi_3\xi_3^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

则 $A=G_1+3G_2+4G_3$ 即为其谱分解式.

(2) 容易验证 $AA^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}A$，所以 A 是正规矩阵. 又因 $|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$，所以 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$，分别求出对应三个特征值的标准特征向量 $\xi_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$，$\xi_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$，于是得

$$G_1=\xi_1\xi_1^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix},\qquad G_2=\xi_2\xi_2^{\mathrm{H}}+\xi_3\xi_3^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

因此 $A=2G_1-G_2$ 即为其谱分解式.

49. 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&2&4\\\frac{1}{2}&0&2\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

验证 A 是单纯矩阵，并求 A 的谱分解表达式.

解 考察 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$，所以其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$，它们对应的三个线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-4,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(4,2,1)^{\mathrm{T}}$，于是

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}-2&-4&4\\1&0&2\\0&1&1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6}&\frac{2}{3}&\frac{-2}{3}\\-\frac{1}{12}&-\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{12}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

而且有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$，所以 A 是单纯矩阵(可对角化).

由于

$$(P^{-1})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$$

令

$$G_1=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$G_2=\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

故 $A=-G+2G_2$ 为 A 的谱分解表达式.

50. 试求一酉矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，其中

(1) $A=\begin{bmatrix}-1 & \mathrm{i} & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & -1\end{bmatrix}$；(2) $A=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{i} & 1\\ -\mathrm{i} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

这两个矩阵是正规矩阵吗？

解　(1) A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_2=-2$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(\mathrm{i},2,\mathrm{i})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(\mathrm{i},-1,\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$，将它们单位化得 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$，即可得 $P=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$.

(2) A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{2},\lambda_2=-\sqrt{2}$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(\sqrt{2},-\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-\sqrt{2},-\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}}$，将它们单位化得 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\left(0,\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，故酉矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{2} & -\frac{\mathrm{i}}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

显然，这两个矩阵都为正规矩阵.

51. 证明:若 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模.

证明 因 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角矩阵,即存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$,使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,于是

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{\mathrm{H}}=\operatorname{diag}(\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},\cdots,\overline{\lambda_n})$$

从而

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\operatorname{diag}(|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)$$

故由定义知 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值为 $\sigma_i=\sqrt{|\lambda_i|^2}=|\lambda_i|(i=1,2,\cdots,n)$.

52. 证明:两个正规矩阵相似(酉等价)的充分必要条件是它们的特征多项式相同.

证明 必要性 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是正规矩阵,如 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 酉相似,即存在酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$$

因而

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{Q}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$$

充分性 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式,则存在酉矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$ 及 $\boldsymbol{Q}_2$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2$$

因此有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{-1}=(\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{-1})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$,易知 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{-1}$ 是酉矩阵.

53. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解式有

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}+\lambda_2\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{H}}+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}$$

其中,$\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 对应的标准正交的特征向量.

证明 因 $\boldsymbol{A}$ 为正规阵,所以有酉阵 $\boldsymbol{U}$,使

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

$\boldsymbol{U}$ 写成列分块 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_n)$,从而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{H}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}\\&=\lambda_1\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}+\lambda_2\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{H}}+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}\end{aligned}$$

54. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,且都是埃尔米特矩阵,$\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵,证明:$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\geqslant\mu_n(\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}))$,其中 μ_n 为 $\boldsymbol{B}$ 的最小特征值,$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$ 表示 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 主对角元素之和.

证明 因 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵且半正定,则有谱分解

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{H}}+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{H}}+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\xi}_n\boldsymbol{\xi}_n^{\mathrm{H}}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\xi}_i^{\mathrm{H}}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为对应特征值 λ_i 的标准正交特征向量.

而 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵，其特征值为实数，记为 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$，对应的标准正交特征向量记为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$，它也是 $\mathbb{C}^n$ 中的一组基. 因此，对于 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 且 $|\boldsymbol{x}|=1$，有 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{\eta}_i$.

对于二次型

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} &= \Big(\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\boldsymbol{\eta}_i^{\mathrm{H}}\Big)\boldsymbol{B}\Big(\sum_{j=1}^{n}x_j\boldsymbol{\eta}_j\Big)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\boldsymbol{\eta}_i^{\mathrm{H}}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}x_j\boldsymbol{B}\boldsymbol{\eta}_j\Big)\\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\boldsymbol{\eta}_i^{\mathrm{H}}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}x_j\mu_j\boldsymbol{\eta}_j\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i|x_i|^2\\
&\geqslant \mu_n\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2=\mu_n
\end{aligned}
$$

由于 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_1+\cdots+\boldsymbol{A}_k)=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_1+\cdots+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_k$，$\boldsymbol{\xi}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}_i\geqslant\mu_n$，所以有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) &= \mathrm{tr}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\xi}_i^{\mathrm{H}}\Big)\boldsymbol{B}\Big]=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathrm{tr}(\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\xi}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathrm{tr}(\boldsymbol{\xi}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_n\\
&= \mu_n\mathrm{tr}\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

55. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 酉相似，证明

(1) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2$；

(2) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，则

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵，则

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$

证明　(1) 因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 酉相似，故有 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B}$，也有 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{U}$ 为酉矩阵，故有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2=\mathrm{tr}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2
\end{aligned}
$$

这样，就有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2$$

(2) 由舒尔定理，存在 $\boldsymbol{U}$ 矩阵，使

$$
\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ & t_{22} & \cdots & t_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & t_{nn}\end{bmatrix}, t_{ij}=0\,(i>j)\text{ 且 } t_{ii}=\lambda_i
$$

$$
U^{H}(A^{H}A)U=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}|t_{i1}|^{2} & & & * \\ & \sum_{i=1}^{n}|t_{i2}|^{2} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \sum_{i=1}^{n}|t_{in}|^{2}\end{bmatrix}
$$

故有

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{2}=\mathrm{tr}(A^{H}A)=\mathrm{tr}(U^{H}A^{H}AU)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|t_{ij}|^{2}
$$

$$
\geqslant\sum_{i=1}^{n}|\lambda_{i}|^{2}
$$

(3) 因为 A 为正规矩阵,则有

$$
U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}
$$

由(2)得

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{2}=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_{i}|^{2}
$$

56. (1) 设 A 为酉矩阵且是埃尔米特矩阵,则 A 的特征值为 1 或 -1;

(2) 若 A 是正规矩阵,且 A 的特征值 $|\lambda|=1$,则 A 是酉矩阵.

证明 (1) 由于 A 是酉矩阵,所以 A 的所有特征值 $|\lambda|=1$,又 A 是埃尔米特矩阵,则 A 的特征值皆为实数,故 A 的特征值为 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

(2) 如果 A 是正规矩阵,且 $|\lambda|=1$,则有

$$
U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad U^{H}A^{H}U=\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n\end{bmatrix}
$$

$$
U^{H}A^{H}AU=\begin{bmatrix}|\lambda_1|^{2} & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}=I
$$

上式中 U 为酉矩阵,两端左乘 U、右乘 U^{H},得

$$
A^{H}A=I
$$

即 A 是酉矩阵.

57. A 为 n 阶正规矩阵,$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是 A 的特征值,证明:$A^{H}A$ 与 AA^{H} 的特征值为 $|\lambda_i|^{2}$,$i=1,2,\cdots,n$.

证明 由于 A 正规,即 $A^{H}A=AA^{H}$,则存在酉矩阵 U,使得

$$
U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}
$$

两端转置共轭后得

$$U^{H}A^{H}U=\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n\end{bmatrix}$$

上两式左右两端各自相乘，便得

$$U^{H}A^{H}AU=\begin{bmatrix}|\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2\end{bmatrix}=U^{H}AA^{H}U$$

这表明 $A^{H}A$ 与 AA^{H} 的特征值为 $|\lambda_i|^2(i=1,2,\cdots,n)$.

58. 设 A 为正规矩阵，证明：

(1) 若对于正数 m，有 $A^m=0$，则 $A=0$；

(2) 若 $A^2=A$，则 $A^H=A$；

(3) 若 $A^3=A^2$，则 $A^2=A$.

证明　(1) 因 $A^m=0$，则 A 的所有特征值为 0，又 A 是正规矩阵，所以 A 可对角化，即 $U^{H}AU=0$，故有 $A=0$.

(2) 因 $A^2=A$，所以 A 的特征值为 1 或 0. 假定 A 的秩为 r，则存在 U 矩阵，A 可化为对角矩阵，从而有

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad (U^{H}AU)^{H}=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^{H}$$

$$U^{H}A^{H}U=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \text{可得 } A^{H}=A$$

(3) 若 $A^3=A^2$，又 A 为正规，不妨设 $U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$，可得

$$(U^{H}AU)^2=\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{bmatrix},\quad U^{H}A^2U=\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{bmatrix}$$

$$U^{H}A^3U=\begin{bmatrix}\lambda_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^3\end{bmatrix},\quad \text{从而有}\begin{bmatrix}\lambda_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{bmatrix}$$

故有 $\lambda_i^3=\lambda_i^2$，$\lambda_i=0$ 或 $\lambda_i=1$，不妨设

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \text{也有 } U^{H}A^2U=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

故有

$$A^2=A$$

59. $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$，证明 A 是正规矩阵.

证明 由舒尔定理知,A 可酉相似于上三角矩阵

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad U^{H}A^{H}U=\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ \bar{t}_{12} & \bar{\lambda}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{t}_{1n} & & \cdots & \bar{\lambda}_n\end{bmatrix}$$

故有

$$U^{H}A^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1\bar{\lambda}_1 & & & \\ & |\lambda_2|^2+|t_{12}|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2+\sum_{i=1}^{n}|t_{in}|^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2&=\mathrm{tr}(A^{H}A)=\mathrm{tr}(U^{H}A^{H}AU)\\&=|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|t_{ij}|^2(i>j\text{ 时},t_{ij}=0)\end{aligned}$$

由题给出的条件 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$,得$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|t_{ij}|^2=0$,则当 $i<j$ 时,$t_{ij}=0$, 有

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

即 A 为正规矩阵.

60. 若 A 为实矩阵,且 $A^{T}A=AA^{T}$,则 A 必是对称矩阵.

证明 因 A 为实矩阵,且有 $A^{T}A=AA^{T}$,则由定义知 A 是正规矩阵,必存在酉阵 U,使

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\qquad U^{H}A^{T}U=\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n\end{bmatrix}$$

$$U^{H}A^{T}AU=\begin{bmatrix}|\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2\end{bmatrix}$$

又 $A^{T}A$ 为实矩阵,由上式可知其特征值也为实数,从而矩阵 U 是一个正交矩阵,即 $U^{H}=U^{T}=U^{-1}$,从而有

$$U^{-1}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

其中,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 一定为实数.同样也有

$$U^{-1}A^{T}U=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

由此可得 $A^T=A$，即 A 为对称矩阵.

61. A 是正规矩阵，证明：

(1) A 的特征向量也是 A^H 的特征向量；

(2) $\forall X\in\mathbb{C}^n$，AX 与 A^HX 的长度相等.

证明 (1) 因 A 是正规矩阵，则有

$$U^HAU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

两端共轭转置得

$$U^HA^HU=\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n\end{bmatrix}$$

其中 $U=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_i$ 为 A 的单位正交特征向量，即有

$$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,\ A^H\alpha_i=\bar{\lambda}_i\alpha_i$$

故 A 与 A^H 有相同的特征向量.

(2) 由于 $A^HA=AA^H$，所以有

$$\begin{aligned}|A^HX|^2&=(A^HX)^H(A^HX)=X^HAA^HX\\&=X^HA^HAX=(AX)^H(AX)=|AX|^2\end{aligned}$$

故有

$$|A^HX|=|AX|$$

62. n 阶方阵 A 正规的充分必要条件是它与一个具有互异的特征值且与 A 有相同的特征向量的矩阵 B 可交换(即 $AB=BA$).

证明 充分性 设矩阵 B 的 n 个互异的特征值组成的对角矩阵为

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{bmatrix},\qquad U=(U_1,U_2,\cdots,U_n)$$

U_i 为矩阵 A 的特征值 λ_i 对应的单位正交特征向量. 若 $AB=BA$，$U^HBU=\Lambda$，于是有

$$(U^HAU)(U^HBU)=U^HBUU^HAU$$

则有 $(U^HAU)\Lambda=\Lambda(U^HAU)$，因与互异对角元的对角矩阵可交换的矩阵必是对角矩阵，故有

$$U^HAU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

即 A 可酉对角化，则 A 是正规矩阵.

必要性 若 A 是正规矩阵，则存在酉矩阵 U，使

$$U^HAU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_n)$，$\boldsymbol{U}_i$ 是对应于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值λ_i 的单位正交特征向量. 假设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个互异的特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，且与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征向量，则有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_i=\mu_i\boldsymbol{U}_i(i=1,2,\cdots,n)$，可得

$$\boldsymbol{BU}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{bmatrix}$$

于是有

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BU}=\begin{bmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$$

从而有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AU})(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BU})=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{ABU}&=(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BU})(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AU})\\&=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BAU}=\begin{bmatrix}\lambda_1\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

63. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正规矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则存在 n 阶酉阵 $\boldsymbol{U}$，使得

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AU}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BU}=\begin{bmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{bmatrix}$$

证明 不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_i)^{k_i}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$，$\sum\limits_{i=1}^{s}k_i=n$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵，所以有酉阵 $\boldsymbol{U}_1$，使

$$\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AU}_1=\begin{bmatrix}\lambda_1\boldsymbol{I}_{k_1} & & & \\ & \lambda_2\boldsymbol{I}_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s\boldsymbol{I}_{k_s}\end{bmatrix}=\boldsymbol{D}$$

记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BU}_1$，因 $\boldsymbol{B}$ 是正规矩阵，所以 $\boldsymbol{C}$ 也是正规矩阵，把 $\boldsymbol{C}$ 写成如下分块形式：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BU}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1s}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \boldsymbol{C}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{ss}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{ii}\text{ 为 }k_i\times k_i\text{ 块矩阵}$$

由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，即有$(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AU}_1)(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BU}_1)=(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BU}_1)(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AU}_1)$，得 $\boldsymbol{DC}=\boldsymbol{CD}$，即

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\boldsymbol{I}_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s\boldsymbol{I}_{k_s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{ss}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\boldsymbol{I}_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s\boldsymbol{I}_{k_s}\end{bmatrix}$$

从而当 $i\neq j$ 时，$\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{0}$，则

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & & & \\ & C_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{ss} \end{bmatrix}$$

由于 C 是正规矩阵，所以 C_{ii} 也是 k_i 阶正规矩阵，且必有 k_i 阶酉阵 P_i，使 $P_i^H C_{ii} P_i = \Lambda_i$，其中 Λ_i 是 k_i 阶对角矩阵. 当 $i=1,2,\cdots,s$ 时，写成分块矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} P_1^H & & \\ & \ddots & \\ & & P_s^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_s \end{bmatrix}$$

令

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_s \end{bmatrix}$$

且记 $U=U_1P$，由于 P 和 U_1 是酉矩阵，故 U 也是酉矩阵，从而有

$$U^H AU = P^H(U_1^H AU_1)P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$U^H BU = P^H(U_1^H BU_1)P = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{bmatrix}$$

64. 若两个正规矩阵可交换，证明它们的乘积也是正规矩阵.

证明　设 A,B 是正规矩阵，且有 $AB=BA$，由上题可知，存在同一个酉阵 U，使

$$U^H AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad U^H BU = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{bmatrix}$$

故

$$U^H ABU = \begin{bmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n \end{bmatrix}$$

这表明 AB 酉相似于对角矩阵，即 AB 为正规矩阵.

第4章 赋范线性空间与矩阵范数

习 题 4(1)

1. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)$ 的 l_1,l_2 及 l_∞ 范数.

解 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1=n,\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=\sqrt{n},\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty=1$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,2,3)^{\mathrm{T}}$,计算 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的三种常用范数.

解 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1=6,\quad \|\boldsymbol{\alpha}\|_2=\sqrt{14},\quad \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty=3;$

$\|\boldsymbol{\beta}\|_1=5,\quad \|\boldsymbol{\beta}\|_2=\sqrt{13},\quad \|\boldsymbol{\beta}\|_\infty=3.$

3. 设 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_a$ 与 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_b$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的两种范数,k_1,k_2 是正的常数,证明:下列函数

(1) $\max(\|\boldsymbol{\alpha}\|_a,\|\boldsymbol{\alpha}\|_b)$;

(2) $k_1\|\boldsymbol{\alpha}\|_a+k_2\|\boldsymbol{\alpha}\|_b$

是 $\mathbb{C}^n$ 上的范数.

证明 (1) 记 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\max(\|\boldsymbol{\alpha}\|_a,\|\boldsymbol{\alpha}\|_b)$,则当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时,$\|\boldsymbol{\alpha}\|>0$;当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时,$\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$.

$$\begin{aligned}\|k\boldsymbol{\alpha}\| &= \max(\|k\boldsymbol{\alpha}\|_a,\|k\boldsymbol{\alpha}\|_b)\\ &= \max(|k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|_a,|k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|_b)\\ &= |k|\max(\|\boldsymbol{\alpha}\|_a,\|\boldsymbol{\alpha}\|_b) = |k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| &= \max(\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|_a,\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|_b)\\ &\leqslant \max(\|\boldsymbol{\alpha}\|_a+\|\boldsymbol{\beta}\|_a,\|\boldsymbol{\alpha}\|_b+\|\boldsymbol{\beta}\|_b)\\ &\leqslant \max(\|\boldsymbol{\alpha}\|_a,\|\boldsymbol{\alpha}\|_b)+\max(\|\boldsymbol{\beta}\|_a,\|\boldsymbol{\beta}\|_b)\\ &= \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|\end{aligned}$$

所以 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的范数.

(2) 记 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=k_1\|\boldsymbol{\alpha}\|_a+k_2\|\boldsymbol{\alpha}\|_b$,则当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时,$\|\boldsymbol{\alpha}\|>0$;当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时,$\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$.

$$\begin{aligned}\|k\boldsymbol{\alpha}\| &= k_1\|k\boldsymbol{\alpha}\|_a+k_2\|k\boldsymbol{\alpha}\|_b\\ &= |k|(k_1\|\boldsymbol{\alpha}\|_a+k_2\|\boldsymbol{\alpha}\|_b)\\ &= |k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| &= k_1\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|_a+k_2\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|_b\\ &\leqslant k_1(\|\boldsymbol{\alpha}\|_a+\|\boldsymbol{\beta}\|_a)+k_2(\|\boldsymbol{\alpha}\|_b+\|\boldsymbol{\beta}\|_b)\end{aligned}$$

$$= (k_1\|\boldsymbol{\alpha}\|_a + k_2\|\boldsymbol{\alpha}\|_b) + (k_1\|\boldsymbol{\beta}\|_a + k_2\|\boldsymbol{\beta}\|_b)$$
$$= \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$$

所以$\|\boldsymbol{\alpha}\|$是$\mathbb{C}^n$上的范数.

4. 设$\|\cdot\|$是酉空间$\mathbb{C}^n$的向量范数，证明向量范数的下列基本性质：

(1) 零向量的范数为零；

(2) 当 $\boldsymbol{x}$ 是非零向量时，$\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\|=1$；

(3) $\|-\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$；

(4) $|\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\||\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$；

(5) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\geqslant\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|$.

解 (1) $\|\boldsymbol{0}\|=\|0\cdot\boldsymbol{x}\|=0\|\boldsymbol{x}\|=0$；

(2) $\left\|\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\|=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\|\boldsymbol{x}\|=1$；

(3) $\|-\boldsymbol{x}\|=|-1|\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$；

(4) 由$\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|$，故$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\geqslant\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|$，又$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\geqslant\|\boldsymbol{y}\|-\|\boldsymbol{x}\|$，从而$|\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\||\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$；

(5) 与第(4)题方法相同.

5. 任取 $\boldsymbol{X}=(4\mathrm{i},-3\mathrm{i},12,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^4$，其中 $\mathrm{i}^2=-1$，试计算$\|\boldsymbol{x}\|_1$，$\|\boldsymbol{x}\|_2$，$\|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

解 $\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum\limits_{i=1}^{4}|x_i|=|4\mathrm{i}|+|-3\mathrm{i}|+|12|+|0|=19$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}}=\sqrt{(4\mathrm{i})(-4\mathrm{i})+(-3\mathrm{i})(3\mathrm{i})+12\times12+0}=13$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max(|x_1|,|x_2|,|x_3|,|x_4|)$$
$$=\max(4,3,12,0)=12$$

6. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&2&\mathrm{i}\\3+\mathrm{i}&5&1+\mathrm{i}&0\\2&\mathrm{i}&2&-4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，计算$\|\boldsymbol{Ax}\|_1$，$\|\boldsymbol{Ax}\|_2$，$\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty$.

解 $\boldsymbol{Ax}=(2,7-\mathrm{i},-2+6\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$，则

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_1=2+\sqrt{50}+\sqrt{40}$$
$$\|\boldsymbol{Ax}\|_2=\sqrt{4+50+40}=\sqrt{94}$$
$$\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty=\sqrt{50}$$

7. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正实数，向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$，证明由$\|\boldsymbol{x}\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$定义的非负实数是$\mathbb{R}^n$空间的一个向量范数.

证明 (i) $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant0$，$\|\boldsymbol{x}\|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 显然.

(ii) $\|k\boldsymbol{x}\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(kx_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(k^2\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=|k|\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=|k|\cdot\|\boldsymbol{x}\|.$$

(iii) 对于 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}$，

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i+y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i^2+2x_iy_i+y_i^2)$$

由柯西不等式

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2&\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2+\sum_{i=1}^{n}a_iy_i^2+2\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|\\&=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|=(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

可得

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$$

因而 $\|\boldsymbol{x}\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个向量范数.

8. 证明：若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是二维向量，即 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，则

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\max\left(|x_1|,|x_2|,\frac{2}{3}(|x_1|+|x_2|)\right)$$

是向量范数. 并画出 $\|\boldsymbol{\alpha}\|\leqslant1$ 的图形.

证法提示　与上题类似. 图形在第一象限的部分由 $x_1=1$，$x_2=1$ 和 $\frac{2}{3}(x_1+x_2)=1$ 所围成.

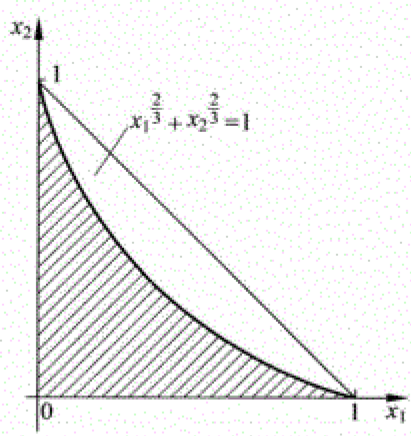
9. 求证：对 $p=\frac{1}{2}$，不能得到在 $\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$ 意义下的范数.

证明　考虑 $\boldsymbol{\alpha}=(0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0)^{\mathrm{T}}$，则当 $p=\frac{1}{2}$ 时，$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|_p=4$，而 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_p+\|\boldsymbol{\beta}\|_p=2$，显然 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|_p\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_p+\|\boldsymbol{\beta}\|_p$ 不成立.

10. 画出曲线 $x_1^{2/3}+x_2^{2/3}=1$ 的草图. 若记二维实向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，实函数 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=(|x_1|^{2/3}+|x_2|^{2/3})^{3/2}$ 是否为向量范数？

解　不是向量范数，因为不满足三角不等式，如取 $\boldsymbol{\alpha}=(0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,1)$，而 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|=2^{3/2}>2=\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.

曲线 $x_1^{2/3}+x_2^{2/3}=1$ 在第一象限的图形如下所示.



11. 区间 $[a,b]$ 上全体实值连续函数的集合，按照通常的函数加法和数乘运算，构成 $\mathbb{R}$ 上的线性实间，记作 $C[a,b]$. 对于 $f(t)\in C[a,b]$，分别定义实数：

(1) $\|f(t)\|_1=\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t$；

(2) $\|f(t)\|_\infty=\max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$.

验证$\|f(t)\|_1$与$\|f(t)\|_\infty$都是$C[a,b]$中的向量范数.

证明　(1) 当$f(t)=0$时,$\|f(t)\|_1=0$;当$f(t)$不恒等于零时,由其连续性知$f(t)$必在$[a,b]$的某个子区间$[a_1,b_1]$上不等于零,从而有

$$\|f(t)\|_1=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t\geqslant\int_{a_1}^{b_1}|f(t)|\mathrm{d}t>0$$

对$k\in\mathbb{R}$,有

$$\|kf(t)\|_1=\int_a^b|kf(t)|\mathrm{d}t=|k|\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t=|k|\,\|f(t)\|_1$$

对于$g(t)\in C[a,b]$,有

$$\begin{aligned}\|f(t)+g(t)\|_1&=\int_a^b|f(t)+g(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t+\int_a^b|g(t)|\mathrm{d}t\\&=\|f(t)\|_1+\|g(t)\|_1\end{aligned}$$

故$\|f(t)\|_1$是$C[a,b]$中的向量范数.

(2) 当$f(t)=0$时,$\|f(t)\|_\infty=0$;当$f(t)$不恒等于零时,存在$t_0\in[a,b]$,使得$f(t_0)\neq 0$,从而有

$$\|f(t)\|_\infty=\max_{t\in[a,b]}|f(t)|\geqslant f(t_0)|>0$$

对于$k\in\mathbb{R}$,有$\|kf(t)\|_\infty=\max\limits_{t\in[a,b]}|kf(t)|=|k|\max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|=|k|\,\|f(t)\|_\infty$;

对于$g(t)\in C[a,b]$,有

$$\begin{aligned}\|f(t)+g(t)\|_\infty&=\max_{t\in[a,b]}|f(t)+g(t)|\\&\leqslant\max_{t\in[a,b]}[|f(t)|+|g(t)|]\leqslant\max_{t\in[a,b]}|f(t)|+\max_{t\in[a,b]}|g(t)|\\&=\|f(t)\|_\infty+\|g(t)\|_\infty\end{aligned}$$

故$\|f(t)\|_\infty$是$C[a,b]$中的向量范数.

12. 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$是对称正定矩阵,对于$\mathbb{R}^n$中的列向量$\boldsymbol{\alpha}$,定义实数$\|\boldsymbol{\alpha}\|_A=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}$,验证$\|\boldsymbol{\alpha}\|_A$是$\mathbb{R}^n$中的向量范数.

证明　当$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$时,$\|\boldsymbol{\alpha}\|_A=0$;当$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$时,由$\boldsymbol{A}$对称正定知,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$,即$\|\boldsymbol{\alpha}\|_A>0$.

对$k\in\mathbb{R}$,有$|k\boldsymbol{\alpha}|_A=\sqrt{(k\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha})}=|k|\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}=|k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|_A$.

再由$\boldsymbol{A}$对称正定知,存在正交阵$\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\quad\lambda_i>0$$

从而有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

令$\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,则有

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_A^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha})=\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\|_2^2$$

对于$\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$,有

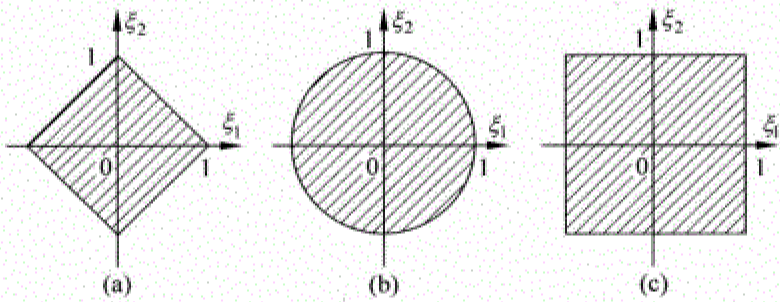
$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|_A&=\|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\|_2=\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\|_2+\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}\|_2\\&=\|\boldsymbol{\alpha}\|_A+\|\boldsymbol{\beta}\|_A\end{aligned}$$

故$\|\boldsymbol{\alpha}\|_A$是$\mathbb{R}^n$中的向量范数.

13. 在$\mathbb{R}^2$中，将向量$\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2)$表示成平面上直角坐标系中的点$(\xi_1,\xi_2)$，分别画出下列不等式决定的$\boldsymbol{\alpha}$全体所对应的几何图形：

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant 1,\quad \|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant 1,\quad \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\leqslant 1$$

解 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant 1$ 即 $|\xi_1|+|\xi_2|\leqslant 1$，如图(a)所示；$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant 1$，即 $\xi_1^2+\xi_2^2\leqslant 1$，如图(b)所示；$\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\leqslant 1$，即 $\max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}\leqslant 1$，如图(c)所示.



14. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，且$\boldsymbol{B}$可逆，对于$\mathbb{C}^n$中的列向量$\boldsymbol{\alpha}$，定义实数$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\|\boldsymbol{A\alpha}\|_1+3\|\boldsymbol{B\alpha}\|_2$，验证$\|\boldsymbol{\alpha}\|$是$\mathbb{C}^n$中的向量范数.

证明 当$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B\alpha}=\boldsymbol{0}$，从而$\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$；当$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$时，$\|\boldsymbol{A\alpha}\|_1\geqslant 0$，由$\boldsymbol{B}$可逆知$\boldsymbol{B\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，从而$\|\boldsymbol{B\alpha}\|_2>0$，故$\|\boldsymbol{\alpha}\|>0$.

对于$k\in\mathbb{C}$，有

$$\begin{aligned}\|k\boldsymbol{\alpha}\|&=\|\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha})\|_1+3\|\boldsymbol{B}(k\boldsymbol{\alpha})\|_2=\|k(\boldsymbol{A\alpha})\|_1+3\|k(\boldsymbol{B\alpha})\|_2\\&=|k|\|\boldsymbol{A\alpha}\|_1+3|k|\|\boldsymbol{B\alpha}\|_2=|k|\|\boldsymbol{\alpha}\|\end{aligned}$$

对于$\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^n$，有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|&=\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\|_1+3\|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\|_2\\&\leqslant\|\boldsymbol{A\alpha}\|_1+\|\boldsymbol{A\beta}\|_1+3\|\boldsymbol{B\alpha}\|_2+3\|\boldsymbol{B\beta}\|_2\\&=(\|\boldsymbol{A\alpha}\|_1+3\|\boldsymbol{B\alpha}\|_2)+(\|\boldsymbol{A\beta}\|_1+3\|\boldsymbol{B\beta}\|_2)\\&=\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|\end{aligned}$$

故$\|\boldsymbol{\alpha}\|$是$\mathbb{C}^n$中的向量范数.

15. 设$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{X}\|_p=\Big(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\Big)^{1/p},\quad 0<p<1$$

问$\|\boldsymbol{X}\|_p$是否为$\mathbb{C}^n$上的向量范数？如果是，请予以证明；如果不是，请举反例说明.

证明 $\|\boldsymbol{X}\|_p$不是$\mathbb{C}^n$上的向量范数.例如，取

$$\boldsymbol{X}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{Y}=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad p=\frac{1}{2}$$

于是有

$$\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\|_{\frac{1}{2}}=4,\quad \|\boldsymbol{X}\|_{\frac{1}{2}}=1,\quad \|\boldsymbol{Y}\|_{\frac{1}{2}}=1$$

显然不满足三角不等式，故$\|\boldsymbol{X}\|_p$不是$\mathbb{C}^n$上的向量范数.

16. 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\|\cdot\|_a$是$\mathbb{C}^m$上的一种向量范数，对于任意的$\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{X}\|_b=\|\boldsymbol{AX}\|_a$$

证明：$\|\boldsymbol{X}\|_b$是$\mathbb{C}^n$上的向量范数.

证明 下面验证$\|\boldsymbol{X}\|_b$满足向量范数的三条性质.

(i) 当 $X=0$ 时，有 $AX=0$，于是 $\|X\|_b=\|AX\|_a=0$；当 $X\neq 0$ 时，有 $AX\neq 0$（因当 A 列满秩），则 $\|X\|_b=\|AX\|_a>0$.

(ii) 对任意 $k\in\mathbb{C}$，有

$\|kX\|_b=\|A(kX)\|_a=\|k(AX)\|_a=|k|\,\|AX\|_a=|k|\,\|X\|_b$

(iii) 对任意 $Y\in\mathbb{C}^n$，有

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_b&=\|A(X+Y)\|_a=\|AX+AY\|_a\leqslant\|AX\|_a+\|AY\|_a\\&=\|X\|_b+\|Y\|_b\end{aligned}$$

故 $\|X\|_b$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的向量范数.

17. 设 A 为 n 阶正定埃尔米特矩阵，对任意 $X\in\mathbb{C}^n$，定义

$$\|X\|_A=\sqrt{X^{\mathrm{H}}AX}$$

试证：$\|X\|_A$ 是一种向量范数.

证明　因 A 是正定埃尔米特矩阵，由教材中等价命题（见第 1 章定理）可知，存在可逆矩阵 Q，使得 $A=Q^{\mathrm{H}}Q$，于是有

$$\|X\|_A=\sqrt{X^{\mathrm{H}}Q^{\mathrm{H}}QX}=\sqrt{(QX)^{\mathrm{H}}QX}=\|QX\|_2$$

由上题可知 $\|X\|_A$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一种向量范数.

18. 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基，任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标，已知 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一种向量范数，定义

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_v=\|X\|$$

试证：$\|\boldsymbol{\alpha}\|_v$ 是 V 上的向量范数.

证明　(i) 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是零向量，那么 X 为 $\mathbb{C}^n$ 中的零向量，于是有 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_v=\|X\|=0$；如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，那么 X 为 $\mathbb{C}^n$ 中的非零向量，于是有 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_v=\|X\|>0$.

(ii) 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$k\in\mathbb{C}$，于是有

$$\|k\boldsymbol{\alpha}\|_v=\|kX\|=|k|\,\|X\|=|k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|_v$$

(iii) 任取 $\boldsymbol{\beta}\in V$，$\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$，于是有

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|_v=\|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|_v+\|\boldsymbol{\beta}\|_v$$

故 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_v$ 是 V 上的向量范数.

评注　这个例子说明抽象线性空间 V 的向量范数可以用 $\mathbb{C}^n$ 的向量范数来表示.

19. 设区间 $[a,b]$ 上全体实值连续函数的集合，在通常函数的加法与数乘运算构成一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，记为 $C[a,b]$，$\forall f(x)\in C[a,b]$，定义实数：

$$\|f(t)\|=\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

证明 $\|f(t)\|$ 是 $C[a,b]$ 上的向量范数.

证明　逐条验证向量范数的三条性质：(i) 当 $f(t)=0$ 时，有 $\|f(t)\|=0$；当 $f(t)\neq 0$ 时，则必在 $[a,b]_1$ 的某子区间 $[a_1,b_1]$ 上 $f(t)$ 不等于零，故有

$$\|f(t)\|=\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t\geqslant\int_{a_1}^{b_1}|f(t)|\,\mathrm{d}t>0$$

(ii) $\forall k\in\mathbb{R}$，显然有

$$\|f(t)\|=\int_a^b|kf(t)|\,\mathrm{d}t=|k|\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t=|k|\cdot\|f(t)\|$$

(iii) 对 $g(t)\in C[a,b]$，

$$\|f(t)+g(t)\|=\int_a^b|f(t)+g(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b(|f(t)|+|g(t)|)\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t+\int_a^b|g(t)|\mathrm{d}t=\|f(t)\|+\|g(t)\|$$

故 $\|f(t)\|$ 是 $C[a,b]$ 中的向量范数.

20. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则范数 $\|x\|$ 是变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一致连续函数，即对任意给定的正数 ε，必存在正数 δ，对于 $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，当 $\max\limits_i|y_i|<\delta$ 时，有 $|\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|-\|\boldsymbol{\alpha}\||<\varepsilon$，试证明之.

证明 设 $\boldsymbol{e}_j$ 为 n 阶单位矩阵的第 j 列，则 $\boldsymbol{\beta}=h_1\boldsymbol{e}_1+h_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+h_n\boldsymbol{e}_n$.

由三角不等式有

$$\|\boldsymbol{\beta}\|\leqslant|h_1|\|\boldsymbol{e}_1\|+|h_2|\|\boldsymbol{e}_2\|+\cdots+|h_n|\|\boldsymbol{e}_n\|$$

设 $M=\|\boldsymbol{e}_1\|+\|\boldsymbol{e}_2\|+\cdots+\|\boldsymbol{e}_n\|$，则对于确定的范数 $\|\cdot\|$，M 是常数，故 $\|\boldsymbol{\beta}\|\leqslant M\max\limits_i|h_i|$，再由不等式 $|\|\boldsymbol{\alpha}\|-\|\boldsymbol{\beta}\||\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$，则有 $|\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|-\|\boldsymbol{\alpha}\||\leqslant\|\boldsymbol{\beta}\|\leqslant M\max\limits_i|h_i|$，对任给正数 ε，取 $\delta=\varepsilon/M$，则当 $\max\limits_i|h_i|<\delta$ 时，结论恒成立.

21. 证明：若 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{C}^n$，则向量范数 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1$，$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$ 及 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$ 两两等价，且有

(1) $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant n\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$；

(2) $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant\sqrt{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$；

(3) $\frac{1}{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant\sqrt{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_1$；

(4) $\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant\sqrt{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，且 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|=|x_{i_0}|$，则 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty=|x_{i_0}|$；

另一方面又有

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_1=|x_1|+\cdots+|x_n|\geqslant|x_{i_0}|=\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$$
$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_1=|x_1|+\cdots+|x_n|\leqslant n|x_{i_0}|=n\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$$

故有

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant n\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$$

(2) 由 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^2=|x_{i_0}|^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^n|x_i|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2=\sum\limits_{\lambda=1}^n|x_i|^2\leqslant n|x_{i_0}|^2=n\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^2$，则有

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant\sqrt{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$$

(3) 再由上面的两个结果可得

$$\frac{1}{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant\sqrt{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_1$$

因此向量范数 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1$，$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$ 及 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$ 两两等价.

(4) 设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，令 $\boldsymbol{\xi}=(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，则由 $|(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})|\leqslant|\boldsymbol{\xi}|\cdot|\boldsymbol{\eta}|$，得

$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant\sqrt{n}(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$，即 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant\sqrt{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$

又$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2$，即$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|_1$，可得

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$$

22. 已知对称正定矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，直接验证：$\mathbb{R}^2$中的向量范数$\|\boldsymbol{\alpha}\|_A$与$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$等价，且有

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|_A \leqslant \sqrt{3}\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$$

其中$\|\boldsymbol{\alpha}\|_A=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}$.

证明　设$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}\|_A^2 &= \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2 \leqslant 2x_1^2+(x_1^2+x_2^2)+2x_2^2\\ &= 3\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2\end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_A^2=(x_1^2+x_2^2)+(x_1+x_2)^2 \geqslant x_1^2+x_2^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2$$

故$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_A\leqslant\sqrt{3}\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$.

23. 证明：在$\mathbb{R}^n$中当且仅当$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关而且$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\geqslant 0$时，才有$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|_2$.

证明　由柯西不等式$|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}|=|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|_2$，当且仅当$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关时，等号成立，即

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|=\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|_2$$

又已知$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\geqslant\boldsymbol{0}$，故$|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}|=|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|_2$.

24. 设数域$\mathbb{R}$上的多项式空间$P[x]_{n-1}$的两组基为

（Ⅰ）$f_1(x)=1,f_2(x)=x,\cdots,f_n(x)=x^{n-1}$；

（Ⅱ）$(g_1,g_2,\cdots,g_n)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\boldsymbol{C}$，

其中$\boldsymbol{C}$为可逆矩阵，$f(x)\in P[x]_{n-1}$在基（Ⅰ）与基（Ⅱ）下的坐标分别为

$$\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$$

(1) 证明：对任意的$f(x)\in P[x]_{n-1}$，$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=\|\boldsymbol{\beta}\|_2$的充分必要条件是$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$；

(2) 取$n=3$，找出使(1)成立的基（Ⅱ），而且$g_i(x)\neq\pm f_j(x)\quad(i,j=1,2,3)$.

证明　(1) 充分性　由$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$及坐标变换公式$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\beta}$可得

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2\text{，即}\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=\|\boldsymbol{\beta}\|_2$$

必要性　由$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=\|\boldsymbol{\beta}\|_2$，知$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$. 利用坐标变换公式$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\beta}$，可导出$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$. 令$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=(b_{ij})_{n\times n}$，显然$\boldsymbol{B}$是实对称矩阵，且$\boldsymbol{B}$对应的二次型满足：

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$$

由于非零向量$\boldsymbol{\beta}$的任意性（随$f(x)$任意变化），故有$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$.

（事实上，可以取$f(x)=g_i(x)$，此时$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\varepsilon}_i$，即自然基向量，第$i$个分量为1，其余为0，由$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$知$b_{ii}=1(i=1,\cdots,n)$；又取$f(x)=g_i(x)+g_j(x)$，此时$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j(i\neq j)$，由$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$可得$b_{ii}+b_{ij}+b_{ji}+b_{jj}=2$，即$b_{ij}=0(i\neq j,i,j=1,\cdots,n)$，故有$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，也就是$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$.）

（2）取正交矩阵

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

则使(1)成立的基(Ⅱ)为

$$g_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t),\quad g_2(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1+t-t^2),\quad g_3(t)=\frac{1}{\sqrt{6}}(1+t+2t^2)$$

而且 $g_i(t)\neq \pm f_j(t)(i,j=1,2,3)$.

25. 设 $f(x)\in C[a,b]$,定义

$$\|f(x)\|_p=\left(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

试证:$\|f(x)\|_p$ 是 $C[a,b]$上的向量范数.

证明　$\|f(x)\|_p$ 的非负性和齐次性容易验证,由闵柯夫斯基不等式

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p},\quad p\geqslant 1$$

立即可知其满足三角不等式.因此$\|f(x)\|_p$ 是 $C[a,b]$上的向量范数.

26. 设$\|\boldsymbol{\alpha}\|$是$\mathbb{C}^n$上的向量范数,$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,则$\|\boldsymbol{A\alpha}\|$也是$\mathbb{C}^n$上的范数的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

证明　必要性　由于$\|\boldsymbol{A\alpha}\|$也是$\mathbb{C}^n$上的向量范数,由范数定义可知,对任意的$\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$都有$\|\boldsymbol{A\alpha}\|\neq 0$,而$\|\boldsymbol{A\alpha}\|\neq 0\Leftrightarrow\boldsymbol{A\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,此即如果 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$,那么 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.这表明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性无关,从而 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

充分性　(i) 如果 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$,那么 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,于是有$\|\boldsymbol{A\alpha}\|=0$;如果 $\boldsymbol{A\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,那么$\|\boldsymbol{A\alpha}\|\neq 0$,即对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$都有$\|\boldsymbol{A\alpha}\|\geqslant 0$,$\|\boldsymbol{A\alpha}\|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

(ii) 容易验证$\|k\cdot\boldsymbol{A\alpha}\|=|k|\,\|\boldsymbol{A\alpha}\|$.

(iii) 任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^n$都有

$$\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\|=\|\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{A\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{A\alpha}\|+\|\boldsymbol{A\beta}\|$$

因此$\|\boldsymbol{A\alpha}\|$是$\mathbb{C}^n$上的向量范数.

27. 设 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$,试证:

$$\frac{1}{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_1$$

证明　因为 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$,设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,则

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|\leqslant n\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|=n\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$$

故有$\frac{1}{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$.又因为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^2=(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|)^2\leqslant\sum_{i=1}^n|x_i|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2$$

从而有$\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$.又

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2=\sum_{i=1}^n|x_i|^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n|x_i|\right)^2$$

由此得$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_1$. 综上所述，有

$$\frac{1}{n}\|\boldsymbol{\alpha}\|_1\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|_1$$

28. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数，$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$，试证：$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是向量范数.

证明　(i) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，都有$\|\boldsymbol{\alpha}\|\geqslant 0$，$\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

(ii) $\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|$.

(iii) $\forall\,\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，那么

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i+y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i^2+2x_iy_i+y_i^2)$$

由柯西-许瓦兹不等式可知

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2&\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2+\sum_{i=1}^{n}a_iy_i^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\beta}\|\\&=(\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|)^2\end{aligned}$$

由此可得$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$，故$\|\boldsymbol{\alpha}\|$是$\mathbb{R}^n$上的向量范数.

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定埃尔米特矩阵，试证：若 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$，则$\|\boldsymbol{\alpha}\|=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\frac{1}{2}}$是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量范数，称此范数为椭圆范数.

证明同第 17 题.

习　题　4(2)

1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=[-1\quad 2\quad 1]$和 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&2&3\\1&0&\mathrm{i}\end{bmatrix}$(其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$)的范数$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_\infty$及$\|\cdot\|_2$.

解　将 $\boldsymbol{A}$ 看成是 1×3 的矩阵，则

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\{|-1|,2,1\}=2,\quad\|\boldsymbol{A}\|_\infty=|-1|+2+1=4$$

由谱范数的性质知$\|\boldsymbol{A}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}=\sqrt{\lambda_{\max}(6)}=\sqrt{6}$

$$\|\boldsymbol{B}\|_1=\max\{|-\mathrm{i}|+1,2+0,3+|\mathrm{i}|\}=4$$

$$\|\boldsymbol{B}\|_\infty=\max\{|-\mathrm{i}|+2+3,1+|\mathrm{i}|\}=6$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&2\mathrm{i}&4\mathrm{i}\\-2\mathrm{i}&4&6\\-4\mathrm{i}&6&10\end{bmatrix}$$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}|=\lambda(\lambda-(8+2\sqrt{13}))(\lambda-(8-2\sqrt{13}))$$

故$\|\boldsymbol{B}\|_2=\sqrt{8+2\sqrt{13}}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&2&3\\0&-2&1\end{bmatrix}$，计算$\|\boldsymbol{A}\|_1$，$\|\boldsymbol{A}\|_1$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty$及$\|\boldsymbol{A}\|_F$.

解 $\|\boldsymbol{A}\|_1=5$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=5$，$\|\boldsymbol{A}\|_F=\sqrt{24}$

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\lambda^3-24\lambda^2+160\lambda-289=0$$

先介绍三次一元方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 求根的一般方法. 作代换：令 $x=y+a$，消 x^2 项，得特殊三次方程 $y^3+py+q=0$，其根为

$$\begin{cases} y_1=2\sqrt[3]{r}\cos\theta \\ y_2=2\sqrt[3]{r}\cos(\theta+120^\circ) \\ y_3=2\sqrt[3]{r}\cos(\theta+240^\circ) \end{cases}$$

其中 $r=\sqrt{-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$，$\theta=\dfrac{1}{3}\arccos\left(\dfrac{-q}{2r}\right)$.

根据以上公式，令 $\lambda=y+8$，得 $y^3+32y-33=0$，即 $p=-3$，$q=+33$；$r=\sqrt{-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}=34.837$，$\theta=\dfrac{1}{3}\arccos\left(\dfrac{-q}{2r}\right)=20.577^\circ$，代入得 $y_1=6.115$，$y_2=-5.046$，$y_3=-1.069$. 故得 $\lambda_1=y_1+8=14.115$，$\lambda_2=y_2+8=2.954$，$\lambda_3=y_3+8=6.931$. 因而

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{14.115}\approx 3.757$$

3. 设 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆，又已知 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\|_1$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量范数，试求 $\boldsymbol{A}$ 从属于该向量范数 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 的矩阵算子范数 $\|\boldsymbol{A}\|$（提示：将 $\boldsymbol{A}$ 这样的算子范数 $\|\boldsymbol{A}\|$ 用另一个矩阵的 1 范数来表示即可）.

解 由矩阵的从属范数（又称算子范数）的定义可得

$$\|\boldsymbol{A}\|=\max_{\alpha\neq\theta}\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=\max_{\alpha\neq\theta}\frac{\|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\|_1}{\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}\|_1}=\max_{\beta\neq\theta}\frac{\|(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\beta}\|_1}{\|\boldsymbol{\beta}\|_1}=\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_1$$

即 $\boldsymbol{A}$ 从属于 $\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}\|_1$ 的算子范数 $\|\boldsymbol{A}\|$ 用矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的 1 范数来表示.

4. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，常数 $h>0$，证明：实数 $\max\left(|x_1|,\dfrac{|x_2-x_1|}{h}\right)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的范数，并求 $\boldsymbol{A}$ 从属于该向量范数的矩阵算子范数 $\|\boldsymbol{A}\|_h$（提示：将这样的算子范数 $\|\boldsymbol{A}\|_h$ 用另一个矩阵的 ∞ 范数来表示即可）.

解 令 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_h=\max\left(|x_1|,\dfrac{|x_2-x_1|}{h}\right)$，首先，它满足向量范数定义条件，故 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_h$ 是向量范数. 再者，易知 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_h=\|\boldsymbol{\beta}\|_\infty$，其中 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{h} & \dfrac{1}{h}\end{bmatrix}$. 由从属于向量范数的矩阵范数（又称算子范数）的定义，可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\|_h&=\max_{\alpha\neq\theta}\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\|_h}{\|\boldsymbol{\alpha}\|_h}=\max_{\alpha\neq\theta}\frac{\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\|_\infty}{\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}\|_\infty}=\max_{\beta\neq\theta}\frac{\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}\|_\infty}{\|\boldsymbol{\beta}\|_\infty}=\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\|_\infty\\ &=\left\|\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12} & a_{12}h\\ \dfrac{1}{h}(a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12}) & a_{22}-a_{12}\end{bmatrix}\right\|_\infty\\ &=\max\left(|a_{11}+a_{12}|+h|a_{12}|,\ |a_{22}-a_{12}|+\frac{1}{h}|a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12}|\right)\end{aligned}$$

5. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，举例说明 $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$ 不是矩阵 A 的范数.

证明　因为不满足矩阵范数定义的第四个条件，如取 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，则 $A^2=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$，但 $2=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant 2}(|(A^2)_{ij}|)>\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant 2}(|a_{ij}|)\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant 2}(|a_{ij}|)=1$，所以不是范数.

6. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，分别定义实数：

(1) $\|A\|=\sqrt{mn}\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$；

(2) $\|A\|=\max\{m,n\}\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$；

并验证它们都是 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 中的矩阵范数.

证明　(1) 当 $A=0$ 时，$\|A\|=0$；当 $A\neq 0$ 时，存在 i_0 与 j_0，使得 $a_{i_0j_0}\neq 0$，从而有 $\|A\|\geqslant\sqrt{mn}|a_{i_0j_0}|>0$.

对 $k\in\mathbb{C}$，有 $\|kA\|=\sqrt{mn}\cdot\max|ka_{ij}|=|k|(\sqrt{mn}\max|a_{ij}|)=|k|\|A\|$.

对于 $B=(b_{ij})_{m\times n}$，有
$$\begin{aligned}\|A+B\|=\sqrt{mn}\max|a_{ij}+b_{ij}|&\leqslant\sqrt{mn}\max(|a_{ij}|+|b_{ij}|)\\&\leqslant\sqrt{mn}(\max|a_{ij}|+\max|b_{ij}|)=\|A\|+\|B\|.\end{aligned}$$

对于 $B=(b_{ij})_{n\times s}$，有 $\|AB\|=\sqrt{ms}\cdot\max\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|$
$$\begin{aligned}&\leqslant\sqrt{ms}\cdot\max\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}b_{kj}|\right)\leqslant\sqrt{ms}\cdot n\cdot\max|a_{ij}|\cdot\max|b_{ij}|\\&=(\sqrt{mn}\cdot\max|a_{ij}|)(\sqrt{ns}\cdot\max|b_{ij}|)=\|A\|\|B\|\end{aligned}$$
因此，由(1)定义的 $\|A\|$ 是 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 中的矩阵范数.

(2) 同理可证非负性、齐次性及三角不等式成立. 对于 $B=(b_{ij})_{n\times s}$，有 $\|AB\|=\max\{m,s\}\cdot\max\left|\sum\limits_{k\backslash 1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\leqslant\max\{m,s\}\cdot\max\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\right)$
$$\begin{aligned}&\leqslant\max\{m,s\}\cdot n\cdot\max|a_{ij}|\cdot\max|b_{ij}|\\&\leqslant(\max\{m,n\}\cdot\max|a_{ij}|)(\max\{n,s\}\cdot\max|b_{ij}|)\\&=\|A\|\cdot\|B\|\end{aligned}$$
因此，由(2)定义的实数 $\|A\|$ 也是 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 中的矩阵范数.

7. 设 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆，已知 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中有矩阵范数 $\|\cdot\|_M$，对于 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，定义实数 $\|A\|=\|P^{-1}AP\|_M$，验证 $\|A\|$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的一种矩阵范数.

证明　当 $A=0$ 时，$\|A\|=0$；当 $A\neq 0$ 时，$P^{-1}AP\neq 0$，从而 $\|A\|>0$.

对 $k\in\mathbb{C}$，有 $\|kA\|=\|P^{-1}(kA)P\|_M\|k(P^{-1}AP)\|_M=|k|\|P^{-1}AP\|_M=|k|\|A\|$.

对于 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，有
$$\begin{aligned}\|A+B\|&=\|P^{-1}(A+B)P\|_M=\|P^{-1}AS+P^{-1}BP\|_M\\&\leqslant\|P^{-1}AP\|_M+\|P^{-1}BP\|_M=\|A\|+\|B\|\\\|AB\|&=\|P^{-1}(AB)P\|_M=\|(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)\|_M\\&\leqslant\|P^{-1}AP\|_M\|P^{-1}BP\|_M=\|A\|\|B\|\end{aligned}$$
故 $\|A\|$ 是 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 中的矩阵范数.

8. 给定 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的两种矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与 $\|\cdot\|_S$，对于 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，分别定义实数：

(1) $\|A\|=\max\{\|A\|_M,\|A\|_S\}$；

(2) $\|\boldsymbol{A}\|=\|\boldsymbol{A}\|_M+2\|\boldsymbol{A}\|_S$;

并验证它们都是$\mathbb{C}^{n\times n}$中的矩阵范数.

证明 非负性、齐次性及三角不等式显然成立. 下面分别验证第四个条件也成立. 对于$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,有

(1) $\|\boldsymbol{AB}\|=\max\{\|\boldsymbol{AB}\|_M,\|\boldsymbol{AB}\|_S\}\leqslant\max\{\|\boldsymbol{A}\|_M\|\boldsymbol{B}\|_M,\|\boldsymbol{A}\|_S\|\boldsymbol{B}\|_S\}$

$\leqslant\max\{\|\boldsymbol{A}\|_M,\|\boldsymbol{A}\|_S\}\cdot\max\{\|\boldsymbol{B}\|_M,\|\boldsymbol{B}\|_S\}=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$

(2) $\|\boldsymbol{AB}\|=\|\boldsymbol{AB}\|_M+2\|\boldsymbol{AB}\|_S\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_M\|\boldsymbol{B}\|_M+2\|\boldsymbol{A}\|_S\cdot\|\boldsymbol{B}\|_S$

$\leqslant(\|\boldsymbol{A}\|_M+2\|\boldsymbol{A}\|_S)(\|\boldsymbol{B}\|_M+2\|\boldsymbol{B}\|_S)=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$

因此,它们都是$\mathbb{C}^{n\times n}$中的矩阵范数.

9. 证明:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_F\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_F$$

证明 因为$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}$,矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$是埃尔米特矩阵,其特征值是非负实数,记为$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant0$,于是得$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\lambda_1}$,且

$$\|\boldsymbol{A}\|_F=\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\geqslant\sqrt{\lambda_1}=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

另一方面,$\|\boldsymbol{A}\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\leqslant\sqrt{n\lambda_1}=\sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_2$,故有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_F\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_F$$

10. 对所有的非奇异矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$,在算子范数意义下,证明:

(1) $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\geqslant\frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}$;

(2) $\|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{B}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|$.

证明 (1) $\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\geqslant\|\boldsymbol{AA}^{-1}\|=\|\boldsymbol{I}\|=1$,故有$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\geqslant\frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}$.

(2) 由$\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}$即得.

11. 证明:若$\|\boldsymbol{A}\|<1$,则$\|\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$.

证明 因为$\|\boldsymbol{A}\|<1$,所以由定理知$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$可逆. 又由$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})-\boldsymbol{I}=-\boldsymbol{A}$,两端右乘$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$,可得$\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$,故

$$\|\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\|=|-1|\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$$

12. 设λ为矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times m}$的特征值,证明:

$$|\lambda|\leqslant\sqrt[m]{\|\boldsymbol{A}^m\|}$$

证明 设$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$,即$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,从而有$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\lambda^m\boldsymbol{\alpha}$,则有$|\lambda|^m\|\boldsymbol{\alpha}\|=\|\lambda^m\boldsymbol{\alpha}\|=\|\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}^m\|\|\boldsymbol{\alpha}\|$,即$|\lambda|^m\leqslant\|\boldsymbol{A}^m\|$,也就是$|\lambda|\leqslant\sqrt[m]{\|\boldsymbol{A}^m\|}$.

13. 设矩阵$\boldsymbol{A}$非奇异,λ是它的任意一个特征值,证明:

$$|\lambda|\geqslant\frac{1}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}$$

证明　设对应 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$，则 $\left|\frac{1}{\lambda}\right|\|\boldsymbol{\alpha}\|=\left\|\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}\right\|=\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{\alpha}\|$，即 $\left|\frac{1}{\lambda}\right|\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$，也就是 $|\lambda|\geqslant\frac{1}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}$.

14. 试证：

(1) $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵 m_1 范数与 $\mathbb{C}^n$ 上的向量 1 范数是相容的；

(2) $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵 m_∞ 范数与 $\mathbb{C}^n$ 上的向量 ∞ 范数是相容的.

证明　(1) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$，则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{AX}\|_1&=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|\leqslant\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}||x_j|\right)\leqslant\sum_{i=1}^n\left[\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\right)\left(\sum_{j=1}^n|x_j|\right)\right]\\&=\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\right)\left(\sum_{j=1}^n|x_j|\right)=\|\boldsymbol{AX}\|_{m_1}\|\boldsymbol{X}\|_1\end{aligned}$$

即矩阵的 m_1 范数与向量的 1 范数是相容的.

(2)

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{AX}\|_\infty&=\max_i\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|\leqslant\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}||x_j|\\&\leqslant\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\left(\max_j\sum_{j=1}^n|x_j|\right)\\&=\left(\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\right)\left(\max_j\sum_{j=1}^n|x_j|\right)\\&\leqslant\max_i\cdot n\max_i|a_{ij}|\cdot\max\sum_{j=1}^n|x_j|\\&=n\max_{i,j}|a_{ij}|\cdot\max_j\sum_{j=1}^n|x_j|\\&=\|\boldsymbol{AX}\|_{m_\infty}\|\boldsymbol{X}\|_\infty\end{aligned}$$

评注　类似地可以证明 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵 m_∞ 范数与 $\mathbb{C}^n$ 上的 1 范数、2 范数也是相容的. 事实上，对于 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上任意给定的矩阵范数一定存在一个与之相容的向量范数.

15. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$，证明矩阵范数 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}$ 与向量的 p 范数 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ 相容.

证明　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，记 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为第 i 行、第 j 列的元素是 1，其余元素是 0 的矩阵，则 $\boldsymbol{E}_{ij}=(0,\cdots,0,x_j,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，且 $\|\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{\alpha}\|_p\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_p$，所以有

$$\|\boldsymbol{A\alpha}\|_p=\left\|\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{\alpha}\right\|_p\leqslant\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\|\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{\alpha}\|_p\leqslant\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\|\boldsymbol{\alpha}\|_p=\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}\|\boldsymbol{\alpha}\|_p$$

即 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}$ 与 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_p$ 相容.

16. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，列向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$，证明：矩阵范数 $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{mn}\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$ 与向量的 2 范数相容.

证明　设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A\alpha}\|_2^2&=\sum_{i=1}^m\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\cdot\sum_{j=1}^n|x_j|^2\right)=\left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\right)\sum_{j=1}^n|x_j|^2\\&\leqslant mn\cdot\max_{ij}|a_{ij}|^2\cdot\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2=\|\boldsymbol{A}\|^2\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2\end{aligned}$$

故有

$$\|A\alpha\|_2\leqslant\|A\|\|\alpha\|_2$$

评注 推导中使用了不等式$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|^2\leqslant(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2)(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2)$，$a_i,b_i$ 为常数.

17. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，列向量 $\alpha\in\mathbb{C}^n$，证明：矩阵范数

$$\|A\|=\max\{m,n\}\max_{i,j}|a_{ij}|$$

与向量 2 范数和∞范数都相容.

证明 设 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，由上题的推导可得

$$\|A\alpha\|_2^2\leqslant mn\cdot\max|a_{ij}|^2\cdot\|\alpha\|_2^2\leqslant(\max\{m,n\})^2(\max|a_{ij}|)^2\|\alpha\|_2^2=\|A\|^2\|\alpha\|_2^2$$

即$\|A\alpha\|_2\leqslant\|A\|\|\alpha\|_2$.

$$\|A\alpha\|_\infty=\max\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|\leqslant\max\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||x_k|\leqslant(\max\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|)\cdot\max|x_j|$$
$$\leqslant(n\cdot\max|a_{ij}|)\|\alpha\|_\infty\leqslant(\max\{m,n\}\cdot\max|a_{ij}|)\|\alpha\|_\infty=\|A\|\|\alpha\|_\infty.$$

18. 证明：

(1) $\|A\|_F=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ 与向量范数$\|x\|_2$ 相容；

(2) $\|A\|_m=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$ 与向量范数$\|x\|_1$ 相容.

证明 设$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$，取 $e_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$且$\|A\|_a$ 是$\mathbb{C}^{n\times n}$中的一个已知矩阵范数，则容易验证如下定义的$\|x\|_u=\|xe_1^{\mathrm{T}}\|_a$ 是$\mathbb{C}^n$中的向量范数(读者自行验证满足向量范数的三条性质).

(1) 取$\|A\|_a=\|A\|_F$，注意到 $xe_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_1&0&\cdots&0\\x_2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n&0&\cdots&0\end{bmatrix}$，所以有

$$\|Ax\|_u=\|(Ax)e_1^{\mathrm{T}}\|_F=\|A(xe_1^{\mathrm{T}})\|_F\leqslant\|A\|_F\cdot\|xe_1^{\mathrm{T}}\|_F$$
$$=\|A\|_F\cdot\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=\|A\|_F\|x\|_2$$

即$\|A\|_F$ 与向量范数$\|x\|_2$ 相容.

(2) 同理，取$\|A\|_a=\|A\|_m$，注意到 $xe_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n&0&\cdots&0\end{bmatrix}$，所以有

$$\|Ax\|_u=\|(Ax)e_1^{\mathrm{T}}\|_m=\|A(xe_1^{\mathrm{T}})\|_m\leqslant\|A\|_m\|xe_1^{\mathrm{T}}\|_m$$
$$=\|A\|_m\cdot(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)=\|A\|_m\cdot\|x\|_1$$

即$\|A\|_m$ 与向量范数$\|x\|_1$ 相容.

19. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 及$\mathbb{C}^n$的列向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，证明：矩阵范数$\|A\|=n\cdot\max|a_{ij}|$与向量 2 范数$\|x\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ 相容.

证明 已知$\|A\|=n\cdot\max|a_{ij}|$是一个矩阵范数，只要证

$$\|Ax\|\leqslant\|A\|\cdot\|x\|_2$$

因为

$$Ax=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j,\sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\right)^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2^2&=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)\leqslant(n^2\max_{i,j}|a_{ij}|^2)(\|x\|_2^2)\\&=\|A\|^2\|x\|_2^2\end{aligned}$$

即$\|Ax\|_2\leqslant\|A\|\cdot\|x\|_2$，故$\|A\|$与$\|x\|_2$相容.

20. 设$\|A\|_a$是$\mathbb{C}^{m\times n}$中的一个已知矩阵范数，给定$\mathbb{C}^n$中一个向量$\alpha\neq 0$，定义：$\forall x\in\mathbb{C}^m$，$\|x\|_u=\|x\alpha^{\mathrm{H}}\|_a$.

证明$\|x\|_u$是$\mathbb{C}^m$中的向量范数，且是与$\|A\|_a$相容的范数.

证明　(i) 非负性：当$x=0$时，$\|x\|_u=0$，当$x\neq 0$时，由于$\alpha\neq 0$，所以$m\times n$矩阵$x\alpha^{\mathrm{H}}\neq 0$，故$\|x\|_u=\|x\alpha^{\mathrm{H}}\|_a>0$.

(ii) 齐次性：$\forall k\in\mathbb{C}$，$\|kx\|_u=\|kx\alpha^{\mathrm{H}}\|_a=|k|\cdot\|x\alpha^{\mathrm{H}}\|_a$.

(iii) 三角不等式：设$y\in\mathbb{C}^n$，有

$$\begin{aligned}\|x+y\|_u&=\|(x+y)\cdot\alpha^{\mathrm{H}}\|_a=\|x\alpha^{\mathrm{H}}+y\alpha^{\mathrm{H}}\|_a\\&\leqslant\|x\alpha^{\mathrm{H}}\|_a+\|y\alpha^{\mathrm{H}}\|_a=\|x\|_u+\|y\|_u\end{aligned}$$

故$\|x\|$是$\mathbb{C}^m$中的向量范数. 又因为

$$\begin{aligned}\|Ax\|_u&=\|(Ax)\alpha^{\mathrm{H}}\|_a=\|A\cdot(x\alpha^{\mathrm{H}})\|_a\leqslant\|A\|_a\|x\alpha^{\mathrm{H}}\|_a\\&=\|A\|_a\|x\|_u\end{aligned}$$

故$\|x\|_u$是与$\|A\|_a$相容的向量范数.

21. 试证：对于$\mathbb{C}^{m\times n}$中任意给定的矩阵范数$\|\cdot\|_M$，一定有多个与之相容的向量范数.

证明　分两步证：第一步，给定$\mathbb{C}^n$中的非零列向量β和$C^{m\times n}$中的矩阵范数$\|\cdot\|_M$，以$\mathbb{C}^m$中的列向量α，定义实数$\|\alpha\|=\|\alpha\beta^{\mathrm{T}}\|_M$，验证$\|\alpha\|$是$\mathbb{C}^m$中的向量范数.

事实上，当$\alpha=\theta$时，$\|\alpha\|=\|0\|_M=0$；当$\alpha\neq\theta$时，由$\beta\neq\theta$知$\alpha\beta^{\mathrm{T}}\neq 0$，从而$\|\alpha\|=\|\alpha\beta^{\mathrm{T}}\|_M>0$.

对于$k\in\mathbb{C}$，有$\|k\alpha\|=\|(k\alpha)\beta^{\mathrm{T}}\|_M=\|k(\alpha\beta^{\mathrm{T}})\|_M=|k|\|\alpha\beta^{\mathrm{T}}\|_M=|k|\|\alpha\|$；

对于$\gamma\in\mathbb{C}^m$，有$\|\alpha+\gamma\|=\|(\alpha+\gamma)\beta^{\mathrm{T}}\|_M=\|\alpha\beta^{\mathrm{T}}+\gamma\beta^{\mathrm{T}}\|_M$

$$\leqslant\|\alpha\beta^{\mathrm{T}}\|_M+\|\gamma\beta^{\mathrm{T}}\|_M=\|\alpha\|+\|\gamma\|;$$

故$\|\alpha\|$是$\mathbb{C}^m$中的向量范数.

22. 举例说明：$\mathbb{C}^{m\times n}(n>1)$中矩阵的1范数与$\mathbb{C}^n$中向量的$\infty$范数不相容.

解　取$A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$，$\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$，显然$\|A\|_1=1$，$\|\alpha\|_\infty=1$. 但是$A\alpha=(n,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，从而$\|A\alpha\|_\infty=n$. 由于$n>1$，故$\|A\alpha\|_\infty>\|A\|_1\|\alpha\|_\infty$，即$A$的1范数与向量$\alpha$的$\infty$范数不相容.

23. 设$\|\cdot\|$是$\mathbb{C}^{n\times n}$上的矩阵范数,证明:

(1) $\|\boldsymbol{I}\|\geqslant 1$;

(2) 设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆矩阵,λ是$\boldsymbol{A}$的任意特征值,那么

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^{-1}\leqslant|\lambda|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|$$

证明 (1) 由于$\rho(\boldsymbol{I})\leqslant\|\boldsymbol{I}\|$,显然$\rho(\boldsymbol{I})=1$,于是有$\|\boldsymbol{I}\|\geqslant 1$.

(2) 设λ是$\boldsymbol{A}$的任一特征值,$\boldsymbol{X}$为其对应的特征向量,即$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$,那么

$$|\lambda|\,\|\boldsymbol{X}\|=\|\lambda\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{AX}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{X}\|$$

于是$\lambda\leqslant\|\boldsymbol{A}\|$.又由于$\lambda^{-1}$是$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值,同样有$|\lambda^{-1}|\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$,此即$|\lambda|^{-1}\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$,故$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^{-1}\leqslant|\lambda|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|$.

24. 已知$\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n(n>1)$为一个单位列向量,令$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{uu}^{\mathrm{T}}$,试证:

(1) $\|\boldsymbol{A}\|_2=1$;

(2) 对任意的$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$,如果有$\boldsymbol{AX}\neq\boldsymbol{X}$,那么

$$\|\boldsymbol{AX}\|_2<\|\boldsymbol{X}\|_2$$

证明 (1) 因为$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{uu}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{uu}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,所以$\boldsymbol{A}$是一个幂等矩阵,从而特征值只能是0或1.当$n>1$时有$\operatorname{rank}(\boldsymbol{uu}^{\mathrm{T}})=1$,于是$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{uu}^{\mathrm{T}}|=0$,这表明1是矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值,故$\rho(\boldsymbol{A})=1$.又$\boldsymbol{A}$是对称矩阵,有$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,从而$\boldsymbol{A}$也是正规矩阵,从而$\|\boldsymbol{A}\|_2=\rho(\boldsymbol{A})=1$.

(2) 由于$\boldsymbol{AX}\neq\boldsymbol{X}$,记$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{AX}\neq\boldsymbol{0}$.又$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$,于是有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{AX})&=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX})-(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}-(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})\\&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{X}\|_2^2=\|\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{AX}\|_2^2&=(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{AX})\\&=[\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}](\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}+2(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{AX})+(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})\\&=\|\boldsymbol{AX}\|_2^2+\|\boldsymbol{Y}\|_2^2>\|\boldsymbol{AX}\|_2^2\end{aligned}$$

故$\|\boldsymbol{AX}\|_2<\|\boldsymbol{X}\|_2$.

25. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\in\mathbb{C}^{n\times n}$,证明:

$$\|\boldsymbol{AB}\|_F\leqslant\min\{\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{B}\|_F,\|\boldsymbol{A}\|_F\|\boldsymbol{B}\|_2\}$$

证明 设$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,利用$\|\boldsymbol{A\beta}_i\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{\beta}_i\|_2$可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{AB}\|_F^2=\|\boldsymbol{A\beta}_1\|_2^2+\cdots+\|\boldsymbol{A\beta}_n\|_2^2&\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2^2(\|\boldsymbol{\beta}_1\|_2^2+\cdots+\|\boldsymbol{\beta}_n\|_2^2)\\&=\|\boldsymbol{A}\|_2^2\|\boldsymbol{B}\|_F^2\end{aligned}$$

即$\|\boldsymbol{AB}\|_F\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{B}\|_F$,另一方面利用上述不等式,有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{AB}\|_p\|(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{H}}\|_F=\|\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_F&\leqslant\|\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\|_2\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_F=\|\boldsymbol{B}\|_2\|\boldsymbol{A}\|_F\\&=\|\boldsymbol{A}\|_F\|\boldsymbol{B}\|_2\end{aligned}$$

因此题中结论成立.

26. 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,证明:

$$\|\boldsymbol{A}\|_F\geqslant(|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+\cdots+|\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

证明 对于矩阵$\boldsymbol{A}$,存在酉矩阵$\boldsymbol{Q}$,使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AQ}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$,即上三角矩阵

$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，且有

$$|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+\cdots+|\lambda_n|^2\leqslant\|\boldsymbol{B}\|_F^2=\|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\|_F^2=\|\boldsymbol{A}\|_F^2$$

两端开平方即得证.

27. 证明：如果 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则有 $\|\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_F$.

证明　由算子范数定义以及"$\|\boldsymbol{A}\|_F$ 与 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 相容"得

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}(\|\boldsymbol{A}\|_F\|\boldsymbol{x}\|_2)=\|\boldsymbol{A}\|_F$$

28. 举例说明：矩阵的谱半径不是矩阵范数.

解　因为不满足三角不等式，如取

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\qquad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

则谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})=0$，$\rho(\boldsymbol{B})=0$，但 $\rho(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=1$.

29. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 都是对称矩阵，求证：

$$\rho(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\rho(\boldsymbol{A})+\rho(\boldsymbol{B})$$

证明　因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 对称，所以 $\rho(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$，$\rho(\boldsymbol{B})=\|\boldsymbol{B}\|_2$，故

$$\rho(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2+\|\boldsymbol{B}\|_2=\rho(\boldsymbol{A})+\rho(\boldsymbol{B})$$

30. 证明下面的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant1$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\[4pt]\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\[4pt]\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{3}{6}&\frac{1}{6}\\[4pt]\frac{1}{7}&\frac{1}{7}&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

证明　$\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant4}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|=\max\left\{1,1,1,\frac{6}{7}\right\}=1.$

31. 设 $\|\cdot\|_\alpha$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，$\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，记 $\|\boldsymbol{A}\|_\beta=\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_\alpha$，证明 $\|\cdot\|_\beta$ 也是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数.

证明　(i) 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{A}\|_\beta=\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_\alpha=\|\boldsymbol{0}\|_\alpha=0$；当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{0}$，那么 $\|\boldsymbol{A}\|_\beta=\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_\alpha>\boldsymbol{0}$.

(ii) 对任意 $k\in\mathbb{C}$，$\|k\boldsymbol{A}\|_\beta=\|\boldsymbol{P}^{-1}(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}\|_\alpha=\|k\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_\alpha=|k|\,\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_\alpha=|k|\,\|\boldsymbol{A}\|_\beta$.

(iii) 任取 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_\beta&=\|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}\|_\alpha=\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\|_\alpha\\&\leqslant\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_\alpha+\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\|_\alpha=\|\boldsymbol{A}\|_\beta+\|\boldsymbol{B}\|_\beta\end{aligned}$$

(iv) 任取 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\|_\beta&=\|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}\|_\alpha=\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\|_\alpha\\&\leqslant\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_\alpha\cdot\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\|_\alpha=\|\boldsymbol{A}\|_\beta\cdot\|\boldsymbol{B}\|_\beta\end{aligned}$$

全部满足矩阵范数定义中的四个条件，所以 $\|\cdot\|_\beta$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数.

32. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，试证：$\|\boldsymbol{A}\|=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})]^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵范数.

证明 当 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵时，此矩阵的 Frobenius 范数可写成 $\|\boldsymbol{A}\|_F=\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})]^{\frac{1}{2}}$；当 $\boldsymbol{A}$ 为复矩阵时，文献[3]已证明它的 Frobenius 范数为 $\|\boldsymbol{A}\|_F=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})]^{\frac{1}{2}}$. 因此，题中 $\|\boldsymbol{A}\|=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})]^{\frac{1}{2}}=\|\boldsymbol{A}\|_F$，故是一种矩阵范数.

33. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$，且其奇异值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$，试证

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_i\sigma_i$$

证明 由谱范数定义可知

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\max_j\lambda_j(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}=\sqrt{\max_i\sigma_i^2}=\max_i\sigma_i$$

其中 $\lambda_j(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的第 j 个特征值.

34. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，证明：

(1) $\|\boldsymbol{A}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\|_2=\|\bar{\boldsymbol{A}}\|_2$；

(2) $\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\|_2=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_2^2$；

(3) $\|\boldsymbol{A}\|_2=\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{y}\|_2=1}|\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|$；

(4) $\|\boldsymbol{A}\|_2^2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_1\|\boldsymbol{A}\|_\infty$.

证明 (1) 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 有相同的非零特征值，于是有

$$\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_2=\sqrt{\max_i\lambda_i(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}=\sqrt{\max_i\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

其中 $\lambda_i(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 与 $\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的第 i 个特征值. 又因为 $|\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{T}}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}|$，从而 $\|\boldsymbol{A}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\|_2$.

另一方面有 $\|\boldsymbol{A}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_2=\|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{T}}\|_2=\|\bar{\boldsymbol{A}}\|_2$，故得 $\|\boldsymbol{A}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\|_2=\|\bar{\boldsymbol{A}}\|_2$.

(2) 由于 $\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\max_i\lambda_i[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})]}=\sqrt{\max_i\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^2}=\|\boldsymbol{A}\|_2^2$，同样可证 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_2^2$，故得

$$\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\|_2=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_2^2$$

(3) 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$，且满足 $\|\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{y}\|_2=1$，于是由柯西-许瓦兹不等式有

$$|\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\leqslant\|\boldsymbol{y}\|_2\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2\cdot\|\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

不妨取 $\boldsymbol{y}=\dfrac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2}$，显然满足 $\|\boldsymbol{y}\|_2=1$，$\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}=\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2}$，由于 $\|\boldsymbol{A}\|_2$ 是算子范数，由算子范数定义知

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\|_2&=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2}\\&=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2}=\max_{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{y}\|_2=1}|\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\end{aligned}$$

(4) 由谱半径性质 $\rho(\boldsymbol{A})<\|\boldsymbol{A}\|$，可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\|_2^2&=\max_i\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\|_1\leqslant\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_1\cdot\|\boldsymbol{A}\|_1\\&=\|\boldsymbol{A}\|_\infty\cdot\|\boldsymbol{A}\|_1\end{aligned}$$

35. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_{n\times n}$，试证：

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=1,\quad \|\boldsymbol{A}\|_F=\sqrt{n}$$

证明　由于$\|\boldsymbol{A}\|_2^2=\max\limits_i\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$，又$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，所以$\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=1$，从而$\|\boldsymbol{A}\|_2=1$. 又$\|\boldsymbol{A}\|_F=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}$.

36. 设$\|\cdot\|$是$\mathbb{C}^{n\times n}$上的矩阵范数，证明：对任意的$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，都有$\rho(\boldsymbol{A})=\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^k\|^{\frac{1}{k}}$.

证明　由于$[\rho(\boldsymbol{A})]^k=\rho(\boldsymbol{A}^k)\leqslant\|\boldsymbol{A}^k\|$，于是

$$\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}^k\|^{\frac{1}{k}},\quad k=1,2,\cdots$$

另一方面，对任意的$\varepsilon>0$，构造矩阵$\bar{\boldsymbol{A}}=[\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon]^{-1}\boldsymbol{A}$，那么$\rho(\bar{\boldsymbol{A}})<1$，所以$\lim\limits_{k\to\infty}\bar{\boldsymbol{A}}^k=\boldsymbol{0}$，于是当$k\to\infty$时，有$\|\bar{\boldsymbol{A}}^k-\boldsymbol{0}\|=\bar{\boldsymbol{A}}^k\to\boldsymbol{0}$，则存在正整数$K$，当$k>K$时有$\|\bar{\boldsymbol{A}}^k\|\leqslant1$，即对任意的$k>K$都有$\|\bar{\boldsymbol{A}}^k\|\leqslant[\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon]^k$，$\|\boldsymbol{A}^k\|^{\frac{1}{k}}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon$，故$\rho(\boldsymbol{A})=\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^k\|^{\frac{1}{k}}$.

37. 设$\boldsymbol{A}$为埃尔米特矩阵，证明

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_i|\lambda_i(\boldsymbol{A})|$$

证明　$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\max_i\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}=\sqrt{\max_i\lambda_i(\boldsymbol{A}^2)}$$
$$=\max_i|\lambda_i(\boldsymbol{A})|$$

38. 证明：

(1) 酉矩阵$\boldsymbol{U}$的谱范数等于1；

(2) 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$为$n$阶酉阵，则

$$\|\boldsymbol{UA}\|_2=\|\boldsymbol{AV}\|_2=\|\boldsymbol{UAV}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

证明　(1) 因$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}$，故$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}$的特征值皆为1，则

$$\|\boldsymbol{U}\|_2^2=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U})}=1$$

(2) $\|\boldsymbol{UA}\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{UA})}=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}=\|\boldsymbol{A}\|_2$，又$\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{V}$与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$相似，故$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\lambda_{\max}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{V}$，于是

$$\|\boldsymbol{AV}\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{V}^{H}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AV})}=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}=\|\boldsymbol{A}\|_2$$
$$\|\boldsymbol{UAV}\|_2=\|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{AV})\|_2=\|\boldsymbol{AV}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

故证得$\|\boldsymbol{UA}\|_2=\|\boldsymbol{AV}\|_2=\|\boldsymbol{UAV}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_2$.

39. 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$且$\boldsymbol{A}$可逆，若$\lambda$是$\boldsymbol{A}$的任一特征值，证明：

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2}\leqslant|\lambda|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2$$

证明　因$|\lambda|\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2$，故有$|\lambda|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2$.

对任意$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$，$\|\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{Ix}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Ax})\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\cdot\|\boldsymbol{Ax}\|_2$，所以$\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2}\leqslant\|\boldsymbol{Ax}\|_2$.

设$\boldsymbol{\alpha}$是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值λ对应的特征向量，即$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则

$$\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2}\leqslant\|\boldsymbol{A\alpha}\|_2=\|\lambda\boldsymbol{\alpha}\|_2=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$$

故有$\dfrac{1}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2}\leqslant|\lambda|$.

40. 设$\|\boldsymbol{A}\|_p$是由向量$\|\boldsymbol{x}\|_p$诱导的矩阵范数，$\boldsymbol{A}$为可逆矩阵，证明：

(1) $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_p\geqslant\dfrac{1}{\|\boldsymbol{A}\|_p}$；

(2) $\dfrac{1}{\|A^{-1}\|_p}=\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$.

证明 (1) 由 $AA^{-1}=I$, $\|I\|_p=1$,则有

$$\|AA^{-1}\|_p=\|I\|_p,\quad \|A\|_p\cdot\|A^{-1}\|_p\geqslant 1$$

可得 $\|A^{-1}\|_p\geqslant\dfrac{1}{\|A\|_p}$.

(2) 由算子范数定义,且令 $y=A^{-1}x$,有

$$\|A^{-1}\|_p=\max_{x\neq 0}\frac{\|A^{-1}x\|_p}{\|x\|_p}=\max_{y\neq 0}\frac{\|y\|_p}{\|Ay\|_p}=\frac{1}{\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}}$$

可得

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_p}=\min_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

41. A 是 n 阶正规矩阵,证明

$$\|A\|_2=\rho(A)(\rho(A)\text{ 是 }A\text{ 的谱半径})$$

证明 因 A 是正规矩阵,所以存在酉阵 U,使

$$U^{\mathrm{H}}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad\text{即}\quad A=U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^{\mathrm{H}}$$

$$A^{\mathrm{H}}A=U\begin{bmatrix}|\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2\end{bmatrix}U^{\mathrm{H}}$$

故 $A^{\mathrm{H}}A$ 的特征值为 $|\lambda_i|^2$,因而

$$\|A\|_2=[\lambda_{\max}(A^{\mathrm{H}}A)]^{\frac{1}{2}}=(\rho^2(A))^{\frac{1}{2}}=\rho(A)$$

若 A 是埃尔米特矩阵,则 $\|A\|_2=\rho(A)$;若 A 是酉阵,则 $\|A\|_2=1$.

42. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$,且 $a_{ij}\geqslant 0$,每一行元素之和为常数 a,证明:A 的谱半径 $\rho(A)=\|A\|_\infty$.

证明 由于 A 的每行元素之和为 a,则 $\|A\|_\infty=a$.

设 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,则 $A\alpha=a\alpha$,这表明 a 为 A 的特征值;又 $\lambda=a\leqslant\rho(A)\leqslant\|A\|_\infty=a$,故得

$$\rho(A)=\|A\|_\infty=a$$

43. (1) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$A$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,证明:

$$\|A\|_F\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(2) 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$\mathrm{rank}A=\gamma$,且 A 的非零奇异值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$,证明:

$$\|A\|_F=(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_r^2)^{\frac{1}{2}}$$

证明 (1) $\|A\|_F^2=\mathrm{tr}(A^{\mathrm{H}}A)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$,再由参考文献[3]第3章内容提要的舒尔不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$$

故得

$$\|\boldsymbol{A}\|_F \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(2) 因 $\text{rank}\boldsymbol{A}=r$，$\boldsymbol{A}$ 的奇异值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$，则 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{U\Lambda V}^{\mathrm{H}}$$

其中 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 为酉矩阵，所以用它们左乘或右乘某一矩阵均不改变其 Frobenius 范数，得

$$\|\boldsymbol{A}\|_F=\|\boldsymbol{U\Lambda V}\|_F=\|\boldsymbol{\Lambda}\|_F=(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_r^2)^{\frac{1}{2}}$$

44. (1) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times s}$，记 $\sigma_1(\boldsymbol{M})$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的最大奇异值. 证明：$\sigma_1(\boldsymbol{AB})\leqslant\sigma_1(\boldsymbol{A})\sigma_1(\boldsymbol{B})$；

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则 $\sigma_1(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\sigma_1(\boldsymbol{A})+\sigma_1(\boldsymbol{B})$.

证明 (1) 由于 $\|\boldsymbol{AB}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{B}\|_2$，又因为 $\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\max\lambda(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}=\sigma_1(\boldsymbol{A})$，$\|\boldsymbol{B}\|_2=\sqrt{\max\lambda(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})}=\sigma_1(\boldsymbol{B})$，$\|\boldsymbol{AB}\|_2=\sigma_1(\boldsymbol{AB})$，故有 $\sigma_1(\boldsymbol{AB})\leqslant\sigma_1(\boldsymbol{A})\sigma_1(\boldsymbol{B})$.

(2) 由 $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2+\|\boldsymbol{B}\|_2$，则有

$$\sigma_1(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\sigma_1(\boldsymbol{A})+\sigma_1(\boldsymbol{B})$$

45. 设 σ_1 和 σ_n 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大奇异值和最小奇异值，证明：$\sigma_1=\|\boldsymbol{A}\|_2$；当 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵时，$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2=\dfrac{1}{\sigma_n}$.

证明 由 $\|\boldsymbol{A}\|_2^2=\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\sigma_1^2$，得 $\|\boldsymbol{A}\|_2=\sigma_1$；当 $\boldsymbol{A}$ 非奇异时，$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 都是埃尔米特正定矩阵，它们的特征值都大于零，且有

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2^2=\lambda_{\max}[(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}]=\lambda_{\max}[(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})^{-1}]=\frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})}=\frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}=\frac{1}{\sigma_n^2}$$

即 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2=\dfrac{1}{\sigma_n}$.

46. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\|\boldsymbol{A}\|<1$，证明：

(1) $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\frac{\|\boldsymbol{I}\|}{1+\|\boldsymbol{A}\|}\leqslant\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant\frac{\|\boldsymbol{I}\|}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$$

(2) $\|\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant\dfrac{\|\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$.

证明 (1) 反证，若 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 不可逆，则存在 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，使 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{AX}=-\boldsymbol{X}$，有 $\|\boldsymbol{AX}\|=\|-\boldsymbol{X}\|$，$\|\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{AX}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{X}\|$，因 $\|\boldsymbol{X}\|\neq0$，得 $1\leqslant\|\boldsymbol{A}\|$，这与条件 $\|\boldsymbol{A}\|<1$ 矛盾. 故证得 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

再由$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}$,可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{I}\|&=\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|=\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\\&\leqslant\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|+\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\\&\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|+\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\\&=\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|(\|\boldsymbol{A}\|+1)\end{aligned}$$

即

$$\frac{\|\boldsymbol{I}\|}{1+\|\boldsymbol{A}\|}\leqslant\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|$$

另一方面,由$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}$有$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}$,推得

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|&\leqslant\|\boldsymbol{I}\|+\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}\|\\&\leqslant\|\boldsymbol{I}\|+\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{A}\|\end{aligned}$$

从而有

$$\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant\frac{\|\boldsymbol{I}\|}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$$

故证得

$$\frac{\|\boldsymbol{I}\|}{1+\|\boldsymbol{A}\|}\leqslant\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant\frac{\|\boldsymbol{I}\|}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$$

(2) 由于$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})-\boldsymbol{I}$,两边右乘$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$有

$$\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\tag{$*$}$$

两边左乘$\boldsymbol{A}$,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}&=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\\\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|&=\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\\&\leqslant\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\end{aligned}$$

即

$$\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$$

又由上面($*$)式取范数,证得

$$\|\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$$

47. 设$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$,$\boldsymbol{A}$是$n$阶实对称正定矩阵,定义向量范数

$$\|\boldsymbol{X}\|_A=\sqrt{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}}$$

又设$f(t)$是m次实系数多项式,证明

$$\|f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\|_A\leqslant\max\{|f(\lambda_i)|\}\cdot\|\boldsymbol{X}\|_A$$

式中λ_i是$\boldsymbol{A}$的特征值,$i=1,2,\cdots,n$.

证明 由于$\boldsymbol{A}$是对称正定矩阵,所以它有n个实的正特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,对应的$n$个标准正交特征向量为$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$,即有$\boldsymbol{\xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_j=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$,它们也是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基.对于$\forall\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$,有

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{\xi}_i$$

$$f(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^n x_if(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}_i=\sum_{i=1}^n x_if(\lambda_i)\boldsymbol{\xi}_i$$

而

$$\|X\|_A^2 = X^T A X = \Big(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\Big)^T \Big(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j \xi_j\Big) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i$$

$$\begin{aligned}\|f(A)X\|_A^2 &= (f(A)X)^T A (f(A)X)\\ &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i f(\lambda_i)\xi_i^T\Big)\Big[f(A)A\Big(\sum_{j=1}^n x_j \xi_j\Big)\Big]\\ &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i f(\lambda_i)\xi_i^T\Big)\Big(\sum_{j=1}^n x_j f(\lambda_j)\lambda_j \xi_j\Big)\\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 f(\lambda_i)\cdot\lambda_i \leqslant \max_i\{f^2(\lambda_i)\}\sum_{i=1}^n x_i^2\lambda_i\\ &= \max_i\{f^2(\lambda_i)\}\cdot\|X\|_A^2\end{aligned}$$

证得

$$\|f(A)X\|_A \leqslant \max_i\{|f(\lambda_i)|\}\|X\|_A$$

习 题 4(3)

1. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 10^{-10}\end{bmatrix}$ 的条件数 $\text{cond}(A)_\infty$.

解 $\text{cond}(A)_\infty = 10^{10}$.

2. 在 $P=1,\infty$ 的范数意义下，求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1.001 & 2.001\end{bmatrix}$ 的条件数.

解 $\text{cond}(A)_1 = \text{cond}(A)_\infty = 12011$.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}2\lambda & \lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，证明：当 $\lambda=\pm\frac{2}{3}$ 时，$\text{cond}(A)_\infty$ 有最小值.

解 $A^{-1}=\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ -1 & 2\lambda\end{bmatrix}$，$\|A\|_\infty = \max(3|\lambda|, 2) = \begin{cases}3|\lambda|, & 当|\lambda|\geqslant\frac{2}{3}\\ 2, & 当|\lambda|<\frac{2}{3}\end{cases}$，$\|A^{-1}\|_\infty =$ $\max\Big(\frac{1}{|\lambda|}+1, \frac{1}{|\lambda|+2}\Big) = \frac{1}{|\lambda|}+2$，故有

$$\text{cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty = \begin{cases}3+6|\lambda|, & 当|\lambda|\geqslant\frac{2}{3}\\ 4+\frac{2}{|\lambda|}, & 当|\lambda|<\frac{2}{3}\end{cases}$$

显然，当 $|\lambda|\geqslant\frac{2}{3}$ 时，$\text{cond}(A)_\infty\geqslant 7$，而当 $|\lambda|<\frac{2}{3}$ 时，$\text{cond}(A)_\infty>7$，所以，当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，$\text{cond}(A)_\infty=7$ 为最小值.

4. 设 n 阶矩阵($n=101$)

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 10^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 10^{-1} \end{bmatrix}
$$

求 $\det(\boldsymbol{A})$和 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty$.结果说明了什么?

解 $\det\boldsymbol{A}=10^{-100}$,$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty=10$.虽然行列式值很小,近乎奇异,但条件数却不大.

5. 方程组

$$
\begin{bmatrix} 6 & 13 & -17 \\ 13 & 29 & -38 \\ -17 & -38 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}
$$

是否病态?

解 其系数行列式的值为 1,其真解为$(1,-3,-2)^{\mathrm{T}}$,系数阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为
$\begin{bmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -4 & 11 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$,$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty=105\times22=2310$,这对 3×3 矩阵而言,是大的,有可能病态.

6. 4 阶 Hilbert 矩阵 $\boldsymbol{H}_4$ 的元素为 $h_{ij}=(i+j-1)^{-1}$,求 $\boldsymbol{H}_4$ 在 1 范数和∞范数意义下的条件数及 $\det(\boldsymbol{H}_4)$.

解
$$
\boldsymbol{H}_4^{-1}=\begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}
$$

$\|\boldsymbol{H}_4\|_1=\|\boldsymbol{H}_4\|_\infty=\dfrac{25}{12}$,$\|\boldsymbol{H}_4^{-1}\|_1=\|\boldsymbol{H}_1^{-1}\|_\infty=13620$,故得

$$
\mathrm{cond}(\boldsymbol{H}_4)_1=\mathrm{cond}(\boldsymbol{H}_4)_\infty=28375
$$

$$
\det(\boldsymbol{H}_4)=\frac{1}{12\times180\times2800}=\frac{1}{6048\times10^3}\approx1.6537\times10^{-7}
$$

7. 已知 Wilson 矩阵

$$
\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}
$$

求解线性方程组 $\boldsymbol{WX}=\boldsymbol{b}$.其中

(1) $\boldsymbol{b}=(32,23,33,31)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{b}=(32.01,22.99,33.01,30.99)^{\mathrm{T}}$;

并讨论右端项 $\boldsymbol{b}$ 的摄动对解 $\boldsymbol{X}$ 的影响.

解 (1) $\boldsymbol{X}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{X}=(1.82,-0.36,1.35,0.79)^{\mathrm{T}}$.

从上可看出,右端项的摄动,对解的影响较大。一般地,若 $\boldsymbol{WX}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\beta}$,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\beta})=$

$W^{-1}b+W^{-1}\beta$，利用(1)的结果，若 $b=(32,23,33,31)^{T}$，则 $X=(1,1,1,1)^{T}+W^{-1}\beta$，故当 $\beta=(\varepsilon,-\varepsilon,\varepsilon,-\varepsilon)^{T}$，利用 W^{-1}，得 $x_1=1+82\varepsilon,x_2=1-136\varepsilon,x_3=1+35\varepsilon,x_4=1-21\varepsilon$.

8. (1) 求线性方程组 $AX=b$ 的准确解，这里

$$A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0.3\\1\\1\end{bmatrix};$$

(2) 当(1)中的 $b=\begin{bmatrix}0.3\\1\\1.01\end{bmatrix}$时，再解 $AX=b$.

解　(1) $X=(-3.3,1.2,9)^{T}$；

(2) $X=(-3,-0.6,10.8)^{T}$.

9. 已知线性方程组

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

的真解为$(9,-36,30)^{T}$，若方程组变为

$$\begin{bmatrix}1 & 0.50 & 0.33\\ 0.50 & 0.33 & 0.25\\ 0.33 & 0.25 & 0.20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.0\\0.0\\0.0\end{bmatrix}$$

用高斯消去法求解(取二位有效数字运算)，并把两者结果进行比较，能得出什么结论？

解　$X=(7.0,-23,17)^{T}$. 可见，当系数矩阵有微小误差(摄动)时，引起了解的较大变化.

10. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}\frac{25}{12}\\ \frac{77}{60}\\ \frac{57}{60}\\ \frac{319}{420}\end{bmatrix}$

方程组 $AX=b$ 的真解为 $X=(1,1,1,1)^{T}$，试：

(1) 用三位有效数字(切断)运算，求 $AX=b$ 的解；

(2) 用三位有效数字(舍入)运算，求 $AX=b$ 的解；再与(1)比较；

(3) 用五位有效数字(舍入)运算，求解 $AX=b$，再把结果与(1)、(2)比较.

解　(1) $X=(1.11,0.228,1.95,0.797)^{T}$；与真解相差较大.

(2) $\boldsymbol{X}=(0.988,1.42,-0.428,2.10)^{\mathrm{T}}$；与(1)比较，相差较大.

(3) $\boldsymbol{X}=(1.000,0.9995,1.0017,0.9990)^{\mathrm{T}}$；与真解靠得较近，说明运算时随着有效数字的增加(摄动减小)，解的精度会增加.

11. 利用圆盘定理估计下面矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的分布范围：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -0.5 & -0.5 & 0\\ -0.5 & 1.5 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & -0.5\mathrm{i} & 5 & 0.5\mathrm{i}\\ -1 & 0 & 0 & 5\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

解 根据圆盘定理知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值都在复数平面上的几个圆盘 $|Z-a_{ii}|\leqslant R_i$，$i=1,2,\cdots,n$ 的并集内，这里 $R_i=|a_{i1}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{in}|$. 所以，$\boldsymbol{A}$ 的四个特征值都落在下列的四个盖尔圆的并集内：

$$|Z-1|\leqslant 1;\quad |Z-1.5|\leqslant 1.5;\quad |Z-5|\leqslant 1;\quad |Z-5\mathrm{i}|\leqslant 1$$

12. 用相似方法，求 $\boldsymbol{A}$ 的孤立圆盘，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.01 & 0.12\\ 0.01 & 0.8 & 0.13\\ 0.01 & 0.02 & 0.4\end{bmatrix}$$

解 由圆盘定理可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值在下列圆盘之中：$|\lambda-0.9|\leqslant 0.13$，$|\lambda-0.8|\leqslant 0.14$，$|\lambda-0.4|\leqslant 0.03$. 所以第一、二个圆盘构成一个连通部分，而第三个圆盘单独构成一个连通部分. 这样，有两个特征值不能分离. 但作相似变换 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{S}$ 是对角矩阵 $\mathrm{diag}\left(1,1,\frac{1}{10}\right)$，则

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.01 & 0.012\\ 0.01 & 0.8 & 0.013\\ 0.1 & 0.2 & 0.4\end{bmatrix}$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的圆盘为 $|\lambda-0.9|\leqslant 0.022$，$|\lambda-0.8|\leqslant 0.023$，$|\lambda-0.4|\leqslant 0.3$，从而 $\boldsymbol{B}$ 的三个圆盘都是孤立的，因而每个圆盘中都有一个特征值. 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，从而有相同的特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别在上述三个圆盘中，且与其余圆盘分离，从而它们都是实数.

13. 证明 $\boldsymbol{A}$ 至少有两个实特征值，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}9 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 8 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

证明 $\boldsymbol{A}$ 的四个圆盘为

$$\boldsymbol{D}_1=|\lambda-9|\leqslant 4,\quad \boldsymbol{D}_2=|\lambda-8|\leqslant 2,\quad \boldsymbol{D}_3=|\lambda-4|\leqslant 1,\quad \boldsymbol{D}_4=|\lambda-1|\leqslant 1$$

直接计算可知，四个圆盘构成两个连通部分，分别为 $\boldsymbol{G}_1=\boldsymbol{D}_1\cup\boldsymbol{D}_2\cup\boldsymbol{D}_3$ 与 $\boldsymbol{G}_2=\boldsymbol{D}_4$. 因此 $\boldsymbol{G}_2$ 包含唯一的特征值，该特征值只能与自己共轭，故为实数. 因此，含在 $\boldsymbol{G}_1$ 中的三个特征值必有一个是实数，从而 $\boldsymbol{A}$ 至少有两个实特征值.

14. 在圆盘定理中，如果一个连通部分是由两个外切圆构成的，证明每个圆上不可能都

有两个特征值.

证明　由圆盘定理又知，$\boldsymbol{A}$ 的任一由 k 个盖尔圆组成的连通部分里，有且只有 $\boldsymbol{A}$ 的 k 个特征值，那么由两个外切圆构成的连通部分里，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有且只有两个特征值. 如果在每个圆上有两个特征值，则在连通部分 $\boldsymbol{A}$ 就有至少有 3 个特征值，这与前述结论矛盾.

15. 求 $\boldsymbol{A}$ 的圆盘，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ \mathrm{i} & 1 & 2\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

解　$D_1(\boldsymbol{A})=\{x: |x|\leqslant 2\}, D_2(\boldsymbol{A})=\{x: |x-2|\leqslant 1\}, \boldsymbol{D}_3(A)=\{x: |x-2\mathrm{i}|\leqslant 2\}$.

16. 求 $\boldsymbol{A}$ 的圆盘并估计其特征值，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10 & 1 & 2 & 3\\ 5 & 30 & 1 & 2\\ 10 & 3 & -10 & 5\\ 2 & 3 & 1 & -10\end{bmatrix}$$

解　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的圆盘为 $|\lambda-10|\leqslant 1+2+3=6, |\lambda-30|\leqslant 1+5+2=8, |\lambda+10|\leqslant 10+3+5=18, |\lambda+40|\leqslant 2+3+1=6$，因此，4 个特征值均落在 4 个圆盘之中.

17. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对角强优条件(亦称"严格对角占优"条件)，其中

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\cdots,n$$

证明：$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

证明　只需证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全部不为 0. 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则由圆盘定理，它必然落在某个圆盘之内，即存在 k，使得 $|\lambda-a_{kk}|\leqslant\sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|$，如果 $\lambda=0$，则有 $|a_{kk}|\leqslant\sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|$，矛盾！故 $\boldsymbol{A}$ 不可能有零特征值，从而 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不等于 0.

评注　圆盘定理只是说明每个特征值必然落在一个圆盘内，但并未指明落在哪个圆盘内. 因此，有些圆盘可能不含特征值，而另一些则可能包含多个特征值.

18. 求 $\boldsymbol{A}$ 的圆盘，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10 & -8\\ 5 & 0\end{bmatrix}$$

解　直接计算可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=5+\sqrt{15}\mathrm{i}, \lambda_2=5-\sqrt{15}\mathrm{i}$，而 $\boldsymbol{A}$ 的圆盘为 $|\lambda-10|\leqslant 8, |\lambda|\leqslant 5$.

第 5 章 矩阵微积分及其应用

习　题　5

1. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}$,证明:$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|=\|\boldsymbol{A}\|$,其中 $\boldsymbol{A}^{(k)},\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$\|\cdot\|$是$\mathbb{C}^{m\times n}$中的任何一种矩阵范数.

证明　由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\|=0$,再利用矩阵范数的性质

$$\big|\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|-\|\boldsymbol{A}\|\big|\leqslant\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\|$$

所以有 $\lim\limits_{k\to\infty}\big|\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|-\|\boldsymbol{A}\|\big|=0$,即 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|=\|\boldsymbol{A}\|$.

2. 设 $\boldsymbol{A}^{(k)},\boldsymbol{B}^{(k)}\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{C}$,且 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}$,$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^{(k)}=\boldsymbol{B}$,$\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=\alpha$,$\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k=\beta$,证明:

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k\boldsymbol{A}^{(k)}+\beta_k\boldsymbol{B}^{(k)})=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}$$

证明　因为

$$\begin{aligned}\|(\alpha_k\boldsymbol{A}^{(k)}+\beta_k\boldsymbol{B}^{(k)})-(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})\|&=\|(\alpha_k\boldsymbol{A}^{(k)}-\alpha\boldsymbol{A})+(\beta_k\boldsymbol{B}^{(k)}-\beta\boldsymbol{B})\|\\&\leqslant\|\alpha_k\boldsymbol{A}^{(k)}-\alpha\boldsymbol{A}\|+\|\beta_k\boldsymbol{B}^{(k)}-\beta\boldsymbol{B}\|\\&=\|\alpha_k\boldsymbol{A}^{(k)}-\alpha_k\boldsymbol{A}+\alpha_k\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{A}\|+\|\beta_k\boldsymbol{B}^{(k)}-\beta_k\boldsymbol{B}+\beta_k\boldsymbol{B}-\beta\boldsymbol{B}\|\\&\leqslant|\alpha_k|\,\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\|+|\alpha_k-\alpha|\,\|\boldsymbol{A}\|+|\beta_k|\,\|\boldsymbol{B}^{(k)}-\boldsymbol{B}\|\\&\quad+|\beta_k-\beta|\,\|\boldsymbol{B}\|\end{aligned}$$

利用 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\|=0$,$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{B}^{(k)}-\boldsymbol{B}\|=0$,以及 $\lim\limits_{k\to\infty}|\alpha_k-\alpha|=0$,$\lim\limits_{k\to\infty}|\beta_k-\beta|=0$,$|\alpha_k|$,$|\beta_k|$有界,知

$$\lim_{k\to\infty}\|\alpha_k\boldsymbol{A}^{(k)}+\beta_k\boldsymbol{B}^{(k)}-(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})\|=0$$

故有 $\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha_k\boldsymbol{A}^{(k)}+\beta_k\boldsymbol{B}^{(k)})=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}$

3. 下列矩阵是否为收敛矩阵?为什么?

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.2&0.1&0.2\\0.5&0.5&0.4\\0.1&0.3&0.2\end{bmatrix};\qquad(2)\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}.$$

解　(1) 由于$\|\boldsymbol{A}\|_1=0.9$,从而 $\boldsymbol{A}$ 是收敛矩阵.

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\frac{5}{6}$,$\lambda_2=-\frac{1}{2}$,$\rho(\boldsymbol{A})=\frac{5}{6}<1$,故 $\boldsymbol{A}$ 为收敛矩阵.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & a & a\\ a & 0 & a\\ a & a & 0\end{bmatrix}$，讨论实数 a 取何值时，$\boldsymbol{A}$ 为收敛矩阵？

解 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2a,\lambda_2=\lambda_3=-a$，于是 $\rho(\boldsymbol{A})=2|a|$，故当 $\rho(\boldsymbol{A})<1$ 即 $|a|<\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 为收敛矩阵.

5. 设矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 收敛（或绝对收敛），说明：$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}$ 也收敛（或绝对收敛），并且有等式 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}\right)\boldsymbol{Q}$. 其中 $\boldsymbol{A}^{(k)}\in\mathbb{C}^{m\times n},\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}^{s\times m},\boldsymbol{Q}\in\mathbb{C}^{n\times t}$.

证明 记 $\boldsymbol{S}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)},\boldsymbol{S}^{(N)}=\sum\limits_{k=0}^{N}\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\left(\sum\limits_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}^{(k)}\right)\boldsymbol{Q}$，于是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}=\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{S}^{(N)}=\boldsymbol{P}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}^{(k)}\right)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{PSQ}=\boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}\right)\boldsymbol{Q}$$

即 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}$ 也收敛. 如果 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|$ 收敛. 又由于 $\|\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}\|\leqslant\|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|\|\boldsymbol{Q}\|\leqslant\tau\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|$，其中 τ 是与 k 无关的正数，由比较判别法知 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}\|$ 收敛，故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}$ 也绝对收敛.

6. 讨论下列矩阵幂级数的敛散性.

$$(1)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1 & 7\\ -1 & -3\end{bmatrix}^k;\qquad (2)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{6^k}\begin{bmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{bmatrix}^k.$$

解 (1) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ -1 & -3\end{bmatrix}$$

可求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，所以 $\rho(\boldsymbol{A})=2$，幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}x^k$ 的收敛半径为

$$r=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{k^2}=1$$

因 $\rho(\boldsymbol{A})=2>r$，知矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\boldsymbol{A}^k$ 发散.

(2) 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，可求得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=5$，所以 $\rho(\boldsymbol{B})=5$. 又因幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k}{6^k}x^k$ 的收敛半径

$$r=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{6^k}\,\frac{6^{k+1}}{k+1}=6$$

即有 $\rho(\boldsymbol{B})<r$，故矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k}{6^k}\boldsymbol{B}^k$ 绝对收敛.

7. 计算矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}0.1 & 0.7\\0.3 & 0.6\end{bmatrix}^k$.

解 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.7\\0.3 & 0.6\end{bmatrix}$，由于 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=0.9<1$，故矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$ 收敛，且其和为 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{2}{3}\begin{bmatrix}4 & 7\\3 & 9\end{bmatrix}$.

8. (1) 设矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^{(k)}\}$，其中 $\boldsymbol{A}^{(k)}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}$，证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|=\|\boldsymbol{A}\|$；

(2) 举例说明，$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|=\|\boldsymbol{A}\|$，不一定有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}$$

解 (1) 证明：由范数的三角不等式知

$$\big|\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|-\|\boldsymbol{A}\|\big|\leqslant\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\|$$

又 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\|=0$，故有当 $k\to\infty$ 时，$\big|\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|-\|\boldsymbol{A}\|\big|\to 0$，这就证明了 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|=\|\boldsymbol{A}\|$.

(2) 例如 $\boldsymbol{A}^{(k)}=\begin{bmatrix}(-1)^{(k)} & \dfrac{1}{k}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 及 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$，有

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|_F=\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+1+\left(\frac{1}{k}\right)^2}=\sqrt{2}\text{，而}\|\boldsymbol{A}\|_F=\sqrt{2}$$

故有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|_F=\|\boldsymbol{A}\|_F$，但 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 不存在，因而 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}\neq\boldsymbol{A}$.

评注 本题说明 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}\not\Leftarrow\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|=\|\boldsymbol{A}\|$. 即矩阵序列的收敛性与矩阵范数数列的收敛性不等价.

9. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & a & a\\a & 0 & a\\a & a & 0\end{bmatrix}$$

问 a 取何值时，有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$.

解 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\rho(\boldsymbol{A})<1$，又 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+a)^2(\lambda-2a)$，$\lambda_{1,2}=-a$，$\lambda_3=2a$，$\rho(\boldsymbol{A})=|2a|$，有

$$|2a|<1\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$$

那么只要取 $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$，就有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$.

10. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

求 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k$.

解　$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda-\frac{1}{5}\right),\lambda_1=\frac{1}{2},\lambda_2=\frac{1}{3},\lambda_3=\frac{1}{5}$，$\boldsymbol{A}$ 又可相似对角矩阵，即存在 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\quad \boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^k & & \\ & \left(\frac{1}{3}\right)^k & \\ & & \left(\frac{1}{5}\right)^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

故有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{POP}^{-1}=\boldsymbol{O}$.

评注　方法二，利用 $\rho(\boldsymbol{A})<1$，则有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=0$.

11. 求 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}\right)^k$，其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

解　$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-6),\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=0$，则 $\rho(\boldsymbol{A})=6$. 由于对应 $\lambda=0$ 的齐次方程组 $(0\cdot \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$，所以此齐次方程组有 $3-1=2$ 个线性无关的特征向量，因此 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即存在 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}6 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\quad \frac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}\right)^k=\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\boldsymbol{A}$.

12. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是一个 5 阶方阵，其特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)(\lambda-1)^2\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)^2$$

且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3$，试证：矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^k\}$ 收敛.

证明　设 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为 $\boldsymbol{J}$，有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中对于 $\lambda_1=\frac{1}{3}$，有一个子块 $\boldsymbol{J}_1=\left[\frac{1}{3}\right]$；对于 $\lambda_2=\frac{1}{4}$ 的子块可能有两种情况：

$$\boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 1\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\quad 或\quad \boldsymbol{J}'_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

无论哪种情况都有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{J}_2^k=\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{J}'_2)^k=\boldsymbol{0}$.

对于 $\lambda_3=1$，由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3$，所以对应有 $5-3=2$ 个线性无关的特征向量，故有 $\boldsymbol{J}_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

于是有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^k & & \\ & \boldsymbol{J}_2^k & \\ & & \boldsymbol{J}_3^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

这表明极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k$ 存在，从而$\{\boldsymbol{A}^k\}$收敛.

13. 判断矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}^k$ 的敛散性.

解 记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$，$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\left(\lambda-\frac{5}{6}\right)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$，所以 $\rho(\boldsymbol{A})=\frac{5}{6}<1$. 又幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ 的收敛半径 $R=1$，故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$ 绝对收敛.

14. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

(1) 求证：矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\boldsymbol{A}^k$ 收敛；

(2) 求矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\boldsymbol{A}^k$ 的收敛和.

解 (1) 证明：$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\left(\lambda+\frac{2}{5}\right)\left(\lambda-\frac{4}{5}\right)$，$\lambda_1=-\frac{2}{5}$，$\lambda_2=\frac{4}{5}$，于是 $\rho(\boldsymbol{A})=\frac{4}{5}$，而幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2x^k$ 的收敛半径 $R=1$，显然 $\rho(\boldsymbol{A})<R$，故矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\boldsymbol{A}^k$ 收敛.

(2) 因 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k=(1-x)^{-1}$，$\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k\right)'=(1-x)^{-2}$，所以 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}kx^{k-1}=(1-x)^{-2}$，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}kx^k=x(1-x)^{-2}$. 同样地，$\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}kx^k\right)'=(x+1)(1-x)^{-3}$，于是

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^k=x(x+1)(1-x)^{-3}$$

则

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^2\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-3}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]^3=5\begin{bmatrix}-\frac{7}{24} & \frac{11}{24}\\ \frac{11}{24} & -\frac{7}{24}\end{bmatrix}$$

15. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶矩阵，且 $\rho(\boldsymbol{A})<1$，求 $\sum_{k=0}^{\infty}k\boldsymbol{A}^k$.

解 方法一 由上题(2)中知

$$\sum_{k=0}^{\infty}kx^k = x(1-x)^{-2}$$

则有

$$\sum_{k=0}^{\infty}k\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-2} = \boldsymbol{A}[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]^2$$

方法二 当 $\rho(\boldsymbol{A})<1$ 时，$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 是绝对收敛的，于是有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}k\boldsymbol{A}^k &= \boldsymbol{A}\sum_{k=0}^{\infty}k\boldsymbol{A}^{k-1} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{A}^2+\cdots)\\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots)(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots)\\ &= \boldsymbol{A}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k\Big)= \boldsymbol{A}[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]^2\end{aligned}$$

16. 求 von Neumann 级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}0.2 & 0.5\\0.7 & 0.4\end{bmatrix}^k$ 的和.

解 令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.5\\0.7 & 0.4\end{bmatrix}$. 由于 $\|\boldsymbol{A}\|_1=0.9<1$，所以 $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_1<1$，则 von Neumann 级数收敛.

又因为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

故 $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}0.2 & 0.5\\0.7 & 0.4\end{bmatrix}^k = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}8 & -5\\-7 & 6\end{bmatrix}^{-1} = \frac{10}{13}\begin{bmatrix}6 & 5\\7 & 8\end{bmatrix}$.

17. 试找一个收敛的二阶可逆矩阵序列，但其极限矩阵不可逆.

解 设 $\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(k)},\cdots$ 为一个二阶矩阵序列，其中

$$a_{11}^{(k)} = \frac{k+1}{3k},\qquad a_{12}^{(k)} = \sqrt[k]{k},\qquad a_{21}^{(k)} = 5^{\frac{1}{k}},\qquad a_{22}^{(k)} = \frac{3k^2-k}{k^2+2}$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

显然有 $|\boldsymbol{A}|=0$，但每个 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ 均可逆.

18. 讨论矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1 & 4\\-1 & -3\end{bmatrix}^k$ 的收敛性.

解 记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\-1 & -3\end{bmatrix}$，$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)^2$，所以 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，对应于特征值 -1 的齐次方程组为 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\-1 & -2\end{bmatrix}$ 的秩为 1，则对应于 -1 的线性无关的

特征向量只能是 1 个，故 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化，而只能化成若尔当标准形，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ & -1\end{bmatrix}$$

这样有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & -3\end{bmatrix}^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}^k\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

由于交错级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ 均收敛，而 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 均为常值矩阵，所以题中的级数收敛.

19. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{M}$，求 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{C}^k$ 以及

$$\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix}0.2 & 0 & 1 & 1\\ 0.3 & 0.7 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解 由于 $\boldsymbol{C}$ 为分块上三角矩阵，具有如下性质：

$$\boldsymbol{C}^2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^3=\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^3 & (\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{C}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^k & (\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{C}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$时，有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{4} & 0\\ \dfrac{5}{4} & \dfrac{10}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{4} & \dfrac{5}{4}\\ \dfrac{5}{4} & \dfrac{95}{12}\end{bmatrix}$

故

$$\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix}0.2 & 0 & 1 & 1\\ 0.3 & 0.7 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dfrac{5}{4} & \dfrac{5}{4}\\ 0 & 0 & \dfrac{5}{4} & \dfrac{95}{12}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

20. 讨论矩阵幂级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^k$$

的敛散性.

解 记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$，$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$，$\rho(\boldsymbol{A})=1$，这样就不能用第 14 题(2)中的结果，而只能用定义判别敛散性.

对于特征值 $\lambda_{1,2}=-1$，由于 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，rank$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=2$，只有 1 个线性无关的特征向量，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可化成若尔当标准形，即有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^k & k(-1)^{k-1}\\ 0 & 0 & (-1)^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2} & 0 & 0\\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\\ 0 & 0 & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ 均收敛，故矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\boldsymbol{A}^k$ 收敛.

21. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某种范数 $\|\boldsymbol{A}\|<1$，求 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{A}^{k-1}$.

解 由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$ 的收敛半径 $R=1$，又 $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}\|<1$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{A}^{k-1}$ 是绝对收敛的.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{A}^{k-1}&=\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{A}+\cdots\\ &=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots)(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots)\\ &=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k\Big)=[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]^2\end{aligned}$$

评注 与第 15 题相比较知，矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{A}^{k-1}$ 与 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}k\boldsymbol{A}^k$ 的结果是有区别的.

22. 设 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{C}^k=\boldsymbol{S}$，且 $\rho(\boldsymbol{C})<1$，求 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k$，并求

$$\lim_{k\to\infty}\left[\begin{array}{cc:cc}0.1 & 0.3 & 0 & 0\\ 0 & 0.6 & 0 & 0\\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

解 因

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{C}^2 & \boldsymbol{0}\\ \hdashline \boldsymbol{DC}+\boldsymbol{D} & \boldsymbol{I}\end{array}\right]$$

递推得

$$\boldsymbol{A}^k=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{C}^k & \boldsymbol{0}\\ \hdashline \boldsymbol{D}(\boldsymbol{C}^{k-1}+\cdots+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{I}) & \boldsymbol{I}\end{array}\right]$$

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})^{-1} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

当 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3\\ 0 & 0.6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$时，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{C}^k=\boldsymbol{0}$，而

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{10}{9} & \frac{30}{36}\\ 0 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{9} & \frac{5}{6}\\ \frac{10}{9} & \frac{35}{6}\end{bmatrix}$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{10}{9} & \frac{5}{6} & 1 & 0\\ \frac{10}{9} & \frac{35}{6} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶方阵，其特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-0.5)^2(\lambda-0.25)$$

且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3$，证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k$ 收敛.

证明 $\boldsymbol{A}^k$ 收敛问题转化为若尔当标准形 $\boldsymbol{J}^k$ 的收敛问题，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=$

λ_3 的收敛性. 对于 $\lambda_1=0.25$，有一个 $\boldsymbol{J}_1=(0.25)$；对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，由于 $\operatorname{rank}(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3$，所以有 2 个线性无关的特征向量，故对应的 $\boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；对于 $\lambda_4=\lambda_5=0.5$，对应的若尔当块不外乎出现两种情况为 $\boldsymbol{J}_3=\begin{bmatrix}0.5 & 1\\ & 0.5\end{bmatrix}$或 $\boldsymbol{J}'_3=\begin{bmatrix}0.5 & \\ & 0.5\end{bmatrix}$. 显然有 $\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{J}'_3)^k=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{J}_3^k=\begin{bmatrix}0.5^k & k(0.5)^{k-1}\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}$，也有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{J}_3^k=\boldsymbol{0}$. 故有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^k & & \\ & \boldsymbol{J}_2^k & \\ & & \boldsymbol{J}_3^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

证得$\{\boldsymbol{A}^k\}$收敛.

24. (1) 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,若$\|\boldsymbol{A}\|<1$,则$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$.

(2) $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\rho(\boldsymbol{A})<1$.

证明　(1) 由于$\|\boldsymbol{A}^k\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|^k$,且$\|\boldsymbol{A}\|<1$,所以$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}\|^k=0$,故$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$.

(2) 充分性　已知$\rho(\boldsymbol{A})<1$,设$\boldsymbol{A}$有若尔当标准形

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i^k(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i^k & \mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & \mathrm{C}_k^{n_i-1}\lambda^{k-n_i+1}\\ & \lambda_i^k & & \vdots\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_i^k\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

显然$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{J}_i^k(\lambda_i)=\boldsymbol{0}$,故$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$.

必要性　因为$\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}\|$,所以

$$\rho^k(\boldsymbol{A})=\rho(\boldsymbol{A}^k)\leqslant\|\boldsymbol{A}^k\|$$

又$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^k-\boldsymbol{0}\|=0$,有$\lim\limits_{k\to\infty}\rho^k(\boldsymbol{A})=0$,必有$\rho(\boldsymbol{A})<1$.

评注　本题(1)中$\|\boldsymbol{A}\|<1$并不是$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$的必要条件,例如$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$,$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$,但$\|\boldsymbol{A}\|_1=1$.

25. 设$\boldsymbol{A}^k\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}$,且$(\boldsymbol{A}^k)^{-1}$和$\boldsymbol{A}^{-1}$均存在,则$\lim\limits_{k\to\infty}[\boldsymbol{A}^k]^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 试举一具体例子,说明条件$(\boldsymbol{A}^k)^{-1}$与$\boldsymbol{A}$都可逆是不可少的.

解　例如

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}\dfrac{1+k}{k} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\qquad (\boldsymbol{A}^k)^{-1}=\begin{bmatrix}k & -k\\ -k & k+1\end{bmatrix}$$

有$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^{-1}$不存在,尽管$(\boldsymbol{A}^k)^{-1}$存在,但$\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{A}^k)^{-1}$不存在(无极限).

26. 讨论矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$的敛散性,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$$

解 由于 $\|A\|_1=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}\left(\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{ij}|\right)=0.9<1$，所以该级数收敛.

评注 特别是对于高阶矩阵 A，计算 A 的特征值往往比较麻烦，所以用 $\rho(A)<1$ 来判别敛散性很困难，因此常常用此法(充分条件)先判别.

27. 证明：$e^{A+2\pi iI}=e^{A}$(其中 $i=\sqrt{-1}$)，$\sin(A+2\pi I)=\sin A$.

证明 因 $A(2\pi iI)=(2\pi iI)A$，所以有

$$
\begin{aligned}
e^{A+2\pi iI}&=e^{A}e^{2\pi iI}=e^{A}\left[I+(2\pi iI)+\frac{1}{2!}(2\pi iI)^2+\frac{1}{3!}(2\pi iI)^3+\frac{1}{41}(2\pi iI)^4+\cdots\right]\\
&=e^{A}\left\{\left[1-\frac{1}{2!}(2\pi)^2+\frac{1}{4!}(2\pi)^4-\cdots\right]+i\left[2\pi-\frac{1}{3!}(2\pi)^3+\frac{1}{5!}(2\pi)^5-\cdots\right]\right\}I\\
&=e^{A}\{\cos 2\pi+i\sin 2\pi\}I=e^{A}
\end{aligned}
$$

又因 $A(2\pi I)=(2\pi I)A$，所以有

$$
\begin{aligned}
\sin(A+2\pi I)&=\sin A\cos(2\pi I)+\cos A\sin(2\pi I)\\
&=\sin A\left[I-\frac{1}{2!}(2\pi I)^2+\frac{1}{4!}(2\pi I)^4-\cdots\right]\\
&\quad+\cos A\left[2\pi I-\frac{1}{3!}(2\pi I)^3+\frac{1}{5!}(2\pi I)^5-\cdots\right]\\
&=\sin A\left[1-\frac{1}{2!}(2\pi)^2+\frac{1}{4!}(2\pi)^4-\cdots\right]I\\
&\quad+\cos A\left[2\pi-\frac{1}{3!}(2\pi)^3+\frac{1}{5!}(2\pi)^5-\cdots\right]I\\
&=\sin A\cos 2\pi+\cos A\sin 2\pi=\sin A
\end{aligned}
$$

28. 证明：若 A 为实反对称矩阵($A^{T}=-A$)，则 e^{A} 为正交矩阵.

证明 因为

$$
\begin{aligned}
(e^{A})^{T}&=\left(I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots\right)^{T}\\
&=I+A^{T}+\frac{1}{2!}(A^{T})^2+\frac{1}{3!}(A^{T})^3+\cdots=e^{A^{T}}=e^{-A}
\end{aligned}
$$

所以有 $e^{A}(e^{A})^{T}=e^{A}\cdot e^{A^{T}}=e^{A-A}=e^{0}=I$. 故 e^{A} 为正交阵.

29. 证明：若 A 是埃尔米特矩阵，则 e^{iA} 是酉矩阵.

证明 因为 $(e^{iA})^{H}=(e^{iA})^{H}=(e^{iA})^{H}=e^{-iA}$，于是有

$$
e^{iA}(e^{iA})^{H}=e^{iA}e^{-iA}=e^{0}=I
$$

故 e^{iA} 为酉阵.

30. 设

$$
A=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}
$$

(1) 试求 A 的特征多项式；

(2) 利用凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理计算 e^{A} 和 $\sin A$.

解 (1) $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^3-\lambda^2$；

(2) 由凯莱-哈密顿定理知

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2=0,\quad 即\ \boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2$$

从而有

$$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^3\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2$$
$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}^4\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2$$
$$\vdots$$

故

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n+\cdots\\
&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\right)\\
&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+(\mathrm{e}-2)\boldsymbol{A}^2\\
\sin\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}\boldsymbol{A}^{2k+1}+\cdots\\
&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}+\cdots\right)\\
&=\boldsymbol{A}+(\sin 1-1)\boldsymbol{A}^2
\end{aligned}$$

31. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}},\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}(t\in\mathbb{R})$ 及 $\sin\boldsymbol{A}$.

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$,求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$,于是存在可逆矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-3&1&0\\3&1&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&3&3\\6&4&2\end{bmatrix}$$

使得 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$. 再根据矩阵函数值公式为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{C}\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{1},\mathrm{e}^{2})\boldsymbol{C}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6\mathrm{e}^2&4\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}&2\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}\\0&3\mathrm{e}+3\mathrm{e}^{-1}&3\mathrm{e}-3\mathrm{e}^{-1}\\0&3\mathrm{e}-3\mathrm{e}^{-1}&3\mathrm{e}+3\mathrm{e}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{C}\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-t},\mathrm{e}^{t},\mathrm{e}^{2t})\boldsymbol{C}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6\mathrm{e}^{2t}&4\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}&2\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}\\0&3\mathrm{e}^{t}+3\mathrm{e}^{-t}&3\mathrm{e}^{t}-3\mathrm{e}^{-t}\\0&3\mathrm{e}^{t}-3\mathrm{e}^{-t}&3\mathrm{e}^{t}+3\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$$

$$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\mathrm{diag}(\sin(-1),\sin 1,\sin 2)\boldsymbol{C}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}\sin 2&4\sin 2-2\sin 1&2\sin 2-4\sin 1\\0&0&6\sin 1\\0&6\sin 1&0\end{bmatrix}$$

32. 设 $f(z)=\ln z$,求 $f(\boldsymbol{A})$. 这里 $\boldsymbol{A}$ 为

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix};\qquad (2)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

解 (1) 对 $\boldsymbol{A}$ 求得 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1\\ & & & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}$，所以有

$$\ln\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\cdot\ln\boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0\end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \\ & \boldsymbol{J}_2\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{J}_1=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，于是有

$$\ln\boldsymbol{J}_1=\begin{bmatrix}\ln2 & \frac{1}{2}\\ 0 & \ln2\end{bmatrix},\quad \ln\boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\ln\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\ln\boldsymbol{J}_1 & \\ & \ln\boldsymbol{J}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ln2 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ & \ln2 & 0 & 0\\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{bmatrix}$$

33. 对下列矩阵 $\boldsymbol{A}$，求矩阵函数 $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}$：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -12 & -6\end{bmatrix}$；　　(4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}$.

解 (1) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$；

(2) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=-\dfrac{\mathrm{e}^{t}}{6}\begin{bmatrix}-3 & 5 & -2\\ 3 & -5 & 2\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}+\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{15}\begin{bmatrix}0 & 11 & -11\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -14 & 14\end{bmatrix}+\dfrac{\mathrm{e}^{3t}}{10}\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 4\end{bmatrix}$；

(3) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}2t^2+2t+1 & 2(t+1) & \frac{1}{2}t^2\\ -4t^2 & -4t^2+2t+1 & -t^2-t\\ 8t(t-5) & 4t(2t-3) & 2t^2-12t+1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}$；

(4) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}1 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}+\begin{bmatrix}0 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}t\mathrm{e}^{-2t}+\begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-3t}$.

34. 求下列三类矩阵的矩阵函数 $\cos\boldsymbol{A}$、$\sin\boldsymbol{A}$，$e^{\boldsymbol{A}^2}$.

(1) 当 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵($\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)时；

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 为对合矩阵($\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$)时；

(3) 当 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵($\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$)时.

解 (1) $\cos\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+(\cos1-1)\boldsymbol{A}$，$\sin\boldsymbol{A}=(\sin1)\boldsymbol{A}$，$e^{\boldsymbol{A}^2}=\boldsymbol{I}+(e-1)\boldsymbol{A}$；

(2) $\cos\boldsymbol{A}=(\cos1)\boldsymbol{I}$，$\sin\boldsymbol{A}=(\sin1)\boldsymbol{I}$，$e^{\boldsymbol{A}^2}=e\boldsymbol{I}$；

(3) $\cos\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$e^{\boldsymbol{A}^2}=\boldsymbol{I}$.

35. 计算下列矩阵函数：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{1000}$；

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&2&-5\\6&4&-9\\5&3&-7\end{bmatrix}$，求 $e^{\boldsymbol{A}}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1\\4&4\end{bmatrix}$，求 $\arcsin\dfrac{\boldsymbol{A}}{4}$；

(4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}16&8\\8&4\end{bmatrix}$，求$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$及 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$.

解 (1) $\boldsymbol{A}^{1000}=\dfrac{5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}}{4}+\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}}{4}5^{1000}$；

(2) $e^{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}3e-1&e&-3e+1\\3e&e+3&-3e-3\\3e-1&e+1&-3e\end{bmatrix}$；

(3) $\arcsin\dfrac{\boldsymbol{A}}{4}=\begin{bmatrix}\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}&-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\\\dfrac{2\sqrt{3}}{3}&\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$；

(4) $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{21}\begin{bmatrix}5&-8\\-8&17\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}\boldsymbol{A}$.

36. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式，已知：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\left[\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix},[3],\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}\right]$.

解 (1) 利用初等变换求 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda+1&2&-6\\1&\lambda&-3\\1&1&\lambda-4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&&\\&\lambda-1&\\&&(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为$(\lambda-1)^2$.

(2) 同理,$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为$(\lambda-2)^2$.

(3) 注意到

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\left[\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix},[3],\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}\right]$$

是一个由四个若尔当块构成的若尔当形矩阵,所以其最小多项式是$(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$.

37. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式与最小多项式分别为 $f(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2$ 与 $m(\lambda)=\lambda^2-5\lambda$,试用它们计算矩阵 $\boldsymbol{A}^4$ 的表达式.

解 由于$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=f(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2=0$,所以有

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2=0,\quad 即\quad \boldsymbol{A}^3=5\boldsymbol{A}^2$$

于是有 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^3\cdot\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{A}^3=25\boldsymbol{A}^2$,又 $m(\lambda)=\lambda^2-5\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式,那么有 $m(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}^2=5\boldsymbol{A}$,故

$$\boldsymbol{A}^4=25\boldsymbol{A}^2=25\times5\boldsymbol{A}=125\boldsymbol{A}.$$

38. 用若尔当标准形法求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^3$,$\lambda_{1,2,3}=1$,对应于特征值 $\lambda=1$ 的齐次方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 显然 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$,故 $\boldsymbol{A}$ 只有一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$,表明 $\boldsymbol{A}$ 只能化为若尔当标准形.

解非齐次方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$,得 $\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,-1)^{\mathrm{T}}$,又解非齐次方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_2$,得 $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}$$

故 $f(\boldsymbol{A})$的若尔当表示为

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} f(1) & f'(1) & \dfrac{f''(1)}{2!} \\ 0 & f(1) & f'(1) \\ 0 & 0 & f(1)\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

当 $f(\boldsymbol{A})=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 时，则有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & \dfrac{t^2}{2!}\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\mathrm{e}^t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t^2/_2 & 1 & -t \\ -t & 0 & 1\end{bmatrix}$$

39. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -4\end{bmatrix}$，求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$，$\sin\boldsymbol{A}$.

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=-(\lambda+1)^3$，$\lambda_{1,2,3}=-1$.

对应 $\lambda=-1$，解齐次方程 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},\quad 得\quad \boldsymbol{X}=k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\lambda=-1$ 的两个线性无关的特征向量. 再解相容的非齐次方程组 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$，求得 $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\left[\begin{array}{c:cc} -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1\end{array}\right]$$

故

$$f(\boldsymbol{A})=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-1} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{A})=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 2t+1 & 2t & -6t \\ t & 1+t & -3t \\ t & t & 1-3t\end{bmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{A})=\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \sin(-1) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(-1) & \cos(-1) \\ 0 & 0 & \sin(-1)\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 2\cos1-\sin1 & 2\cos1 & -6\cos1 \\ \cos1 & -\sin1+\cos1 & -3\cos1 \\ \cos1 & \cos1 & -\sin1-3\cos1\end{bmatrix}$$

40. 设 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$.

解 因 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}$，故 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$，$\lambda_{1,2}=1$，$\lambda_3=2$.

对于 $\lambda_{1,2}=1$

$$f(\boldsymbol{J}_1)=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_3=2$

$$f(\boldsymbol{J}_2)=(\sqrt{2})$$

故

$$f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A})^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{J}_1)&\\&f(\boldsymbol{J}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

41. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $e^{\boldsymbol{A}t}$.

解 用待定系数法. 由于

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2\lambda\text{，得 }\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$$

因 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$. $f(\lambda)=e^{\lambda t}$，令 $f(\lambda)=g(\lambda)=C_0+C_1\lambda+C_2\lambda^2$，当 $\lambda=0$ 时，$g(0)=C_0=f(0)=e^0=1$；当 $\lambda=1$ 时，$g(1)=C_0+C_1+C_2=f(1)=e^t$；$g'(1)=C_1+2C_2\lambda|_{\lambda=1}=C_1+2C_2=f'(1)=te^{\lambda t}|_{\lambda=1}=te^t$. 解得 $C_0=1$，$C_1=2e^t-te^t-2$，$C_2=te^t-e^t+1$，可得

$$e^{\boldsymbol{A}t}=g(\boldsymbol{A})=C_0\boldsymbol{I}+C_1\boldsymbol{A}+C_2\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}e^t&e^t-1&te^t-e^t+1\\0&1&e^t-1\\0&0&e^t\end{bmatrix}$$

42. $\boldsymbol{A}=\frac{\pi}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\sin\boldsymbol{A}$.

解 用待定系数法. $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\pi)\left(\lambda-\frac{\pi}{2}\right)^2$. $f(\lambda)=\sin\lambda$，令 $g(\lambda)=C_0+C_1\lambda+C_2\lambda^2$，有

$$g(\pi)=C_0+\pi C_1+C_2\pi^2=0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_0+\frac{\pi}{2}C_1+\frac{\pi^2}{4}C_2=1$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_1+\pi C_2=0$$

解得 $C_0=0$，$C_1=\frac{4}{\pi}$，$C_2=-\frac{4}{\pi^2}$，故

$$\sin\boldsymbol{A}=C_0+C_1\boldsymbol{A}+C_2\boldsymbol{A}^2=\frac{4}{\pi}\boldsymbol{A}-\frac{4}{\pi^2}\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

43. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$,求:

(1) $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$;

(2) $e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}}$的若尔当形.

解　(1) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$,$\lambda_{1,2}=1$,$\lambda_3=4$.对应于 $\lambda_{1,2}=1$ 线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.对应于 $\lambda_3=4$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&-1&1\\0&2&1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}$$

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,4,则函数矩阵 $e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}}$ 的特征值为 $e^{i\frac{\pi}{2}}$,$e^{i\frac{\pi}{2}}$,$e^{2\pi i}$,对应的特征向量与 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量相同.故与 $e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}}$相似的若尔当标准形为

$$\boldsymbol{P}^{-1}e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{\frac{\pi}{2}i}&&\\&e^{\frac{\pi}{2}i}&\\&&e^{2\pi i}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}i&&\\&i&\\&&1\end{bmatrix}$$

44. 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形是由两个二阶非零若尔当块构成,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,求 $\sin\boldsymbol{A}$.

解　由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,所以幂零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,依题意有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\left[\begin{array}{cc:cc}0&1&0&0\\0&0&0&0\\\hdashline 0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right],\qquad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

设 $f(\lambda)=\sin\lambda$,所以有 $f'(\lambda)=\cos\lambda$,故

$$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\left[\begin{array}{cc:cc}\sin0&\cos0&0&0\\0&\sin0&0&0\\\hdashline 0&0&\sin0&\cos0\\0&0&0&\sin0\end{array}\right]\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{A}$$

45. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 为 n 阶矩阵,证明:

(1) $(e^{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{H}}=e^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则 $e^{\boldsymbol{A}}$ 是正交阵;

(3) 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$,则 $e^{i\boldsymbol{A}}$是酉阵.

证明　(1) $e^{\boldsymbol{A}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$,由于$\left(\sum\limits_{k=0}^{N}\dfrac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right)^{\mathrm{H}}=\sum\limits_{k=0}^{N}\dfrac{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^k}{k!}$,故

$$(e^{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{H}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^k}{k!}=e^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}$$

(2) 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，且 $(\mathrm{e}^{A})^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}}$，所以有

$$(\mathrm{e}^{A})^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{e}^{A}=\mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}}\cdot\mathrm{e}^{A}=\mathrm{e}^{-A}\cdot\mathrm{e}^{A}=\mathrm{e}^{0}=\boldsymbol{I}$$

证得 e^{A} 为正交矩阵.

(3) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$，$(\mathrm{e}^{A})^{\mathrm{H}}=\mathrm{e}^{A^{\mathrm{H}}}$，$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}A})^{\mathrm{H}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A^{\mathrm{H}}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}=\mathrm{e}^{0}=\boldsymbol{I}$

证得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}$ 是正交矩阵.

46. 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&-1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

求矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})$ 的若尔当表示，并计算 e^{A}，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}$，$\arctan\dfrac{\boldsymbol{A}}{4}$，$\sin\dfrac{\pi}{2}\boldsymbol{A}$，$\cos\pi\boldsymbol{A}$.

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，$\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=2$，求得 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

易求得三个特征值的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,-1)^{\mathrm{T}}$. 所以

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

所以 $f(\boldsymbol{A})$ 的若尔当表示为

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\cdot f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}f(1)&0&0\\0&f(2)&f'(2)\\0&0&f(2)\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}f(2)&0&0\\f(1)-f(2)&f(2)&-f'(2)\\0&0&f(2)\end{bmatrix}$$

当 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$ 时，$f(1)=\mathrm{e}$，$f(2)=\mathrm{e}^2$，$f'(2)=\mathrm{e}^2$，故

$$\mathrm{e}^{A}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}&0&0\\\mathrm{e}-\mathrm{e}^2&\mathrm{e}^2&-\mathrm{e}^2\\0&0&\mathrm{e}^2\end{bmatrix}$$

当 $f(x)=\mathrm{e}^{tx}$ 时

$$\mathrm{e}^{At}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{t}&0&0\\\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{2t}&-t\mathrm{e}^{2t}\\0&0&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$$

当 $f(x)=\arctan\dfrac{x}{4}$ 时

$$\arctan\frac{\boldsymbol{A}}{4}=\begin{bmatrix}\arctan\frac{1}{4}&0&0\\\arctan\frac{1}{4}-\arctan\frac{1}{2}&\arctan\frac{1}{2}&-\frac{1}{5}\\0&0&\arctan\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

当 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 时

$$\sin\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&\frac{\pi}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

当 $f(x)=\cos\pi x$ 时

$$\cos\pi\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

47. 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

求矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})$的若尔当表示,并计算 $e^{t\boldsymbol{A}}$,$\sin\boldsymbol{A}$,$\cos\pi\boldsymbol{A}$,$\ln(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$.

解 方法与步骤同上题,这里只给出结果:

$\boldsymbol{A}$ 的标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

于是 $f(\boldsymbol{A})$的若尔当表示为

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}f(1)&f'(1)&f'(1)+\frac{1}{2!}f''(1)\\0&f(1)&f'(1)\\0&0&f(1)\end{bmatrix}$$

得

$$e^{t\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}e^t&te^t&te^t+\frac{1}{2!}t^2e^t\\0&e^t&te^t\\0&0&e^t\end{bmatrix}$$

$$\sin\pi\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-\pi&0\\0&0&-\pi\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad \cos\pi\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&\frac{\pi^2}{2!}\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\ln(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}\ln2&\frac{1}{2}&\frac{3}{8}\\0&\ln2&\frac{1}{2}\\0&0&\ln2\end{bmatrix}$$

48. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$，求矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})$ 的若尔当表示，并计算 $e^{t\boldsymbol{A}}$，$\sin\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}$，$\cos\pi\boldsymbol{A}$，$\ln(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$，其中

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$.

解　本题(1)和(2)给出的两个矩阵，本身就是一个若尔当标准形 $\boldsymbol{J}$，因此不需要重新计算特征值和特征向量，例如：(1)中矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})$ 的若尔当表示为

$$f(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}f(2)&f'(2)&0&0\\0&f(2)&0&0\\0&0&f(1)&f'(1)\\0&0&0&f(1)\end{bmatrix}$$

(2) 中 $f(\boldsymbol{A})$ 的若尔当表示为

$$f(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}f(2)&f'(2)&\frac{1}{2!}f''(2)&0\\0&f(2)&f'(2)&0\\0&0&f(2)&0\\0&0&0&f(2)\end{bmatrix}$$

直接代入即可(读者自行练习).

49. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

求 $e^{t\boldsymbol{A}}$，$\sin\boldsymbol{A}$，$\cos\boldsymbol{A}$.

解　将题中给定的 $\boldsymbol{A}$ 加以转置

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}$$

那么 $\boldsymbol{B}$ 是一个若尔当形矩阵，从而避免了求特征值问题，大大简化了计算. $f(\boldsymbol{B})$ 的若尔当表示为

$$f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=f(\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}f(1)&f'(1)&\frac{1}{2!}f''(1)&\frac{1}{3!}f'''(1)\\0&f(1)&f'(1)&\frac{1}{2!}f''(1)\\0&0&f(1)&f'(1)\\0&0&0&f(1)\end{bmatrix}$$

显然有

$$f(\boldsymbol{A})=[f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} f(1) & 0 & 0 & 0 \\ f'(1) & f(1) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!}f''(1) & f'(1) & f(1) & 0 \\ \frac{1}{3!}f'''(1) & \frac{1}{2!}f''(1) & f'(1) & f(1) \end{bmatrix}$$

读者自行将不同的矩阵函数代入即得所需结果(略).

50. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 求 $e^{\boldsymbol{A}}$, $\sin\boldsymbol{A}$;

(2) 分别求可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$, 使得 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}e^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Q}_1$ 与 $\boldsymbol{Q}_2^{-1}\sin\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_2$ 均为若尔当标准形矩阵.

解 (1) 容易求得 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和可逆矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

于是 $f(\boldsymbol{A})$的若尔当表示为

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & f'(1) \\ 0 & 0 & f(1) \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} f(1)-2f'(1) & f'(1) & 0 \\ -4f'(1) & 2f'(1)+f(1) & 0 \\ f(1)-f(2)+2f'(1) & f(2)-f(1)-f'(1) & f(2) \end{bmatrix}$$

故有

$$e^{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} -e & e & 0 \\ -4e & 3e & 0 \\ 3e-e^2 & e^2-2e & e^2 \end{bmatrix}$$

$$\sin\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \sin1-2\cos1 & \cos1 & 0 \\ -4\cos1 & 2\cos1+\sin1 & 0 \\ \sin1-\sin2+2\cos1 & \sin2-\sin1-\cos1 & \sin2 \end{bmatrix}$$

(2) 由前面(1)中知 $\boldsymbol{P}^{-1}e^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$.

令

$$M=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&e^{-1}\end{bmatrix},\qquad M^{-1}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&e\end{bmatrix}$$

于是

$$M^{-1}P^{-1}e^{A}PM=\begin{bmatrix}e^2&0&0\\0&e&1\\0&0&e\end{bmatrix}$$

那么，$Q_1=PM$ 即为所求矩阵，且满足 $Q_1^{-1}e^{A}Q_1$ 为若尔当标准形.

同理，由前面(1)中知

$$P^{-1}\sin AP=\begin{bmatrix}\sin 2&0&0\\0&\sin 1&\cos 1\\0&0&\sin 1\end{bmatrix}$$

令

$$N=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&(\cos 1)^{-1}\end{bmatrix},\qquad N^{-1}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\cos 1\end{bmatrix}$$

于是有

$$N^{-1}P^{-1}\sin APN=\begin{bmatrix}\sin 2&0&0\\0&\sin 1&1\\0&0&\sin 1\end{bmatrix}$$

那么 $Q_2=PN$ 即为所求矩阵，且满足 $Q_2^{-1}\sin AQ_2$ 为若尔当标准形.

51. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}17&-6\\35&-12\end{bmatrix}$，求矩阵函数 $f(A)$的多项式表示，并计算 e^{tA}.

解 首先求出 A 的最小多项式 $\Psi_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$，于是可用待定系数法求出比最小多项式 $\Psi_A(\lambda)$低一次的多项式：

$$f(\lambda)=P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$$

所以

$$f(2)=a_0+2a_1,\qquad f(3)=a_0+3\lambda$$

解之得 $a_0=3f(2)-2f(3)$，$a_1=f(3)-f(2)$，故

$$f(A)=[3f(2)-2f(3)]I+[f(3)-f(2)]A$$

当 $f(x)=e^{tx}$ 时，$f(2)=e^{2t}$，$f(3)=e^{3t}$，则

$$\begin{aligned}e^{tA}&=(3e^{2t}-2e^{3t})I+(e^{3t}-e^{2t})A\\&=\begin{bmatrix}-14e^{2t}+15e^{3t}&-6(e^{3t}-e^{2t})\\35(e^{3t}-e^{2t})&15e^{2t}-14e^{3t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

52. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\-2&-1&2\end{bmatrix}$，求矩阵函数 $f(A)$的多项式表示，并计算 $\cos\pi A$.

解 A 的最小多项式为 $\Psi_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$，于是设

$$P(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2,\qquad P'(\lambda)=a_1+2a_2\lambda$$

所以

$$f(1)=a_0+a_1+a_2,\qquad f'(1)=a_1+2a_2,\qquad f(2)=a_0+2a_1+4a_2$$

解之,得

$$a_0=-2f'(1)+f(2),\quad a_1=2f(1)+3f'(1)-2f(2),\quad a_2=f(2)-f(1)-f'(1)$$

故有

$$f(\boldsymbol{A})=(-2f'(1)+f(2))\boldsymbol{I}+(2f(1)+3f'(1)-2f(2))\boldsymbol{A}+(f(2)-f(1)-f'(1))\boldsymbol{A}^2$$

当 $f(x)=\cos\pi x$ 时,$f(1)=-1,f'(1)=0,f(2)=1$,故

$$\cos\pi\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\-6&-4&1\end{bmatrix}$$

53. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,试证:

(1) $e^{2\pi i\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{I},e^{2\pi i\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}}=e^{\boldsymbol{A}}$,这里 $i^2=-1$;

(2) $\sin2\pi\boldsymbol{I}=0,\cos2\pi\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}$;

(3) $\sin(2\pi\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\sin\boldsymbol{A}$;

(4) $|e^{\boldsymbol{A}}|=e^{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})}$;

(5) $\|e^{\boldsymbol{A}}\|\leqslant e^{\|\boldsymbol{A}\|}$.

证明 (1) 记 $\boldsymbol{B}=2\pi i\boldsymbol{I}$,则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2\pi i$,且 $\boldsymbol{B}$ 可对角化,于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$e^{2\pi i\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{2\pi i}&&&\\&e^{2\pi i}&&\\&&\ddots&\\&&&e^{2\pi i}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{I}$$

于是有 $e^{2\pi i\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}}=e^{2\pi i\boldsymbol{I}}\cdot e^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}\cdot e^{\boldsymbol{A}}=e^{\boldsymbol{A}}$.

(2) 记 $\boldsymbol{C}=2\pi\boldsymbol{I}$,显然 $\boldsymbol{C}$ 是对角矩阵,它的特征值为 2π,且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\sin2\pi\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\sin2\pi&&&\\&\sin2\pi&&\\&&\ddots&\\&&&\sin2\pi\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O}$$

$$\cos2\pi\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\cos2\pi&&&\\&\cos2\pi&&\\&&\ddots&\\&&&\cos2\pi\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{I}$$

(3) 由于

$$\sin(\boldsymbol{A}+2\pi\boldsymbol{I})=\frac{1}{2i}[e^{i(\boldsymbol{A}+2\pi\boldsymbol{I})}-e^{-i(\boldsymbol{A}+2\pi\boldsymbol{I})}]=\frac{1}{2i}[e^{i\boldsymbol{A}}\cdot e^{2\pi i\boldsymbol{I}}-e^{-i\boldsymbol{A}}\cdot e^{-2\pi i\boldsymbol{I}}]$$

且由(1)知

$$e^{2\pi i\boldsymbol{I}}=e^{-2\pi i\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{I}$$

于是有

$$\sin(\boldsymbol{A}+2\pi\boldsymbol{I})=\frac{1}{2i}(e^{i\boldsymbol{A}}-e^{-i\boldsymbol{A}})=\sin\boldsymbol{A}$$

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_s)\boldsymbol{P}^{-1}$，则

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_1},\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_2},\cdots,\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_s})\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_i}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_i} & \mathrm{e}^{\lambda_i} & \frac{1}{2!}\mathrm{e}^{\lambda_i} & & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!}\mathrm{e}^{\lambda_i}\\ & \mathrm{e}^{\lambda_i} & \mathrm{e}^{\lambda_i} & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \mathrm{e}^{\lambda_i} & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}\mathrm{e}^{\lambda_i}\\ & & & \ddots & \ddots & \mathrm{e}^{\lambda_i}\\ & & & & \ddots & \mathrm{e}^{\lambda_i}\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$i=1,2,\cdots,s,n_i$ 为若尔当块 $\boldsymbol{J}_i$ 的阶数，于是有

$$\begin{aligned}\det\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}&=\det\boldsymbol{P}\cdot\det(\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_1},\cdots,\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_s}))\cdot\det\boldsymbol{P}^{-1}=\det\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_1}\cdot\det\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_2}\cdot\cdots\cdot\det\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}_s}\\&=\mathrm{e}^{n_1\lambda_1+n_2\lambda_2+\cdots+n_s\lambda_s}=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})}\end{aligned}$$

(5) 由于 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$，记 $\boldsymbol{S}^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$，则

$$\|\boldsymbol{S}^{(N)}\|=\left\|\sum_{k=0}^{N}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{N}\frac{\|\boldsymbol{A}\|^k}{k!}$$

两端取极限可得

$$\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|\boldsymbol{A}\|^k}{k!}=\mathrm{e}^{\|\boldsymbol{A}\|}$$

54. 求下列各矩阵函数的幂级数表示，并求出相应幂级数的收敛范围.

(1) $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}$；(2) $\sin\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}$；(3) $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

解 (1) $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A}+\frac{1}{2!}(t\boldsymbol{A})^2+\frac{1}{3!}(t\boldsymbol{A})^3+\cdots+\frac{1}{k!}(t\boldsymbol{A})^k+\cdots$ 对任意 $\boldsymbol{A}$ 收敛.

(2) $\sin\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}=\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}\right)^3+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}\right)^{2k-1}+\cdots$ 对任意 $\boldsymbol{A}$ 收敛.

(3) $$\begin{aligned}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}&=\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}=\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{3}\boldsymbol{A}+\frac{1}{3^2}\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{3^3}\boldsymbol{A}^3+\cdots+\frac{1}{3^k}\boldsymbol{A}^k+\cdots\right)\\&=\frac{1}{3}\boldsymbol{I}+\frac{1}{3^2}\boldsymbol{A}+\frac{1}{3^3}\boldsymbol{A}^2+\cdots+\frac{1}{3^{k+1}}\boldsymbol{A}^k+\cdots\end{aligned}$$

当 $\rho(\boldsymbol{A})<3$ 时收敛.

55. 计算矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}^k$ 之和.

解 记 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}$，显然 $\rho(\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}<1$，而数项幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^k$ 的收敛半径 $\boldsymbol{R}=1$，所以 $\sum_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{A}^k$ 绝对收敛.

由于 $\sum_{k=1}^{\infty}x^k=(1-x)^{-1}$，$(\sum_{k=1}^{\infty}x^k)'=(1-x)^{-2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$，故

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x(1-x)^{-2}$$

同样有

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\Big)' = [x(1-x)^{-2}]' = (x+1)(1-x)^{-3}$$

于是可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = x(1+x)(1-x)^{-3}$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-x)^{-3}$$

将 $\boldsymbol{A}$ 代入后，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix}6 & 80\\0 & 6\end{bmatrix}$$

56. 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0.9 & 1\\0 & 0.8\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{A}^2+\cdots+k\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots$ 之和.

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-0.9)(\lambda-0.8)$，显然 $\rho(\boldsymbol{A})<1$，而幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = (1-x)^{-2}$ 的收敛域为 $|x|<1$，从而矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\boldsymbol{A}^{k-1}$ 绝对收敛，且和为 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-2} = [(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]^2 = \begin{bmatrix}100 & 750\\0 & 25\end{bmatrix}$.

57. 已知 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，那么

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}=\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$；

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}[\sin(t\boldsymbol{A})]=-[\sin(t\boldsymbol{A})]\boldsymbol{A}$；

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(t\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}[\cos(t\boldsymbol{A})]=[\cos(t\boldsymbol{A})]\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由于 $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^k\boldsymbol{A}^k}{k!}$ 对任意 t 与 $\boldsymbol{A}$ 都绝对收敛，并对 t 一致收敛，所以可以逐项求导，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\boldsymbol{A}^k}{k!}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}\boldsymbol{A}^k}{(k-1)!} = \boldsymbol{A}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m\boldsymbol{A}^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m\boldsymbol{A}^m}{m!}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}} = \mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{A}$$

(2) 由于 $\cos t\boldsymbol{A} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k t^{2k}\boldsymbol{A}^{2k}}{(2k)!}$ 对任意 $\boldsymbol{A}$ 与 t 都绝对收敛，且对 t 一致收敛，所以可逐项求导，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{(-1)^k t^{2k}\boldsymbol{A}^{2k}}{(2k)!}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k-1}\boldsymbol{A}^{2k}}{(2k-1)!}$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k-1}\boldsymbol{A}^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k-1}\boldsymbol{A}^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)$$
$$=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+1}\boldsymbol{A}^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)(-\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{A})\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+1}\boldsymbol{A}^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)$$
$$=-[\sin(t\boldsymbol{A})]\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}[\sin(t\boldsymbol{A})]$$

(3) 方法与(2)类似，读者自己完成.

58. 已知函数矩阵

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}2t-1 & \mathrm{e}^t\\ \dfrac{t}{t-1} & 0\end{bmatrix}$$

(1) 证明：$\boldsymbol{A}(t)$在点 $t=0$ 处连续；

(2) 证明：$\boldsymbol{A}(t)$在点 $t=1$ 处不连续.

证明 (1) 由于$\lim\limits_{t\to0}\boldsymbol{A}(t)=\lim\limits_{t\to0}\begin{bmatrix}2t-1 & \mathrm{e}^t\\ \dfrac{t}{t-1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，所以有$\lim\limits_{t\to0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(0)$，故 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $t=0$ 处连续.

(2) 由于$\lim\limits_{t\to1}\boldsymbol{A}(t)=\lim\limits_{t\to1}\begin{bmatrix}2t-1 & \mathrm{e}^t\\ \dfrac{t}{t-1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{e}\\ \infty & 0\end{bmatrix}$，而 $\boldsymbol{A}(1)$是无意义的，所以 $\boldsymbol{A}(t)$在 $t=1$ 处不连续.

59. 设

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ 2+t & 0\end{bmatrix}$$

(1) 求$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}$；

(2) 求 $\int_0^{\pi}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}(\cos t)' & (\sin t)'\\ (2+t)' & (0)'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin t & \cos t\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

(2) $\int_0^{\pi}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}t & \int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t\\ \int_0^{\pi}(2+t)\mathrm{d}t & \int_0^{\pi}0\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2\pi+\dfrac{\pi^2}{2} & 0\end{bmatrix}$.

60. 已知函数矩阵

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}\sin x & \cos x & x\\ \dfrac{\sin x}{x} & \mathrm{e}^x & x^2\\ 1 & 0 & x^3\end{bmatrix}$$

其中 $x\neq0$，试求$\lim\limits_{x\to0}\boldsymbol{A}(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x^2}$，$\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}\right|$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 1\\ \dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2} & \mathrm{e}^x & 2x\\ 0 & 0 & 3x^2\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x^2}=\begin{bmatrix}-\sin x & -\cos x & 0\\ -\dfrac{2}{x^2}\cos x+\left(\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)\sin x & \mathrm{e}^x & 2\\ 0 & 0 & 6x\end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}\right|=3x^2\left(\mathrm{e}^x\cos x-\frac{1}{x}\sin x\cos x+\frac{1}{x^2}\sin^2 x\right)$$

61. 已知函数矩阵

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^x & x^2\\ \mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{2x} & 0\\ 3x & 0 & 0\end{bmatrix}$$

试求 $\int_0^1\boldsymbol{A}(x)\mathrm{d}x$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right)$.

解

$$\int_0^1\boldsymbol{A}(x)\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x & \int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x & \int_0^1 x^2\mathrm{d}x\\ \int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x & \int_0^1 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x & \int_0^1 0\mathrm{d}x\\ \int_0^1 3x\mathrm{d}x & \int_0^1 0\mathrm{d}x & \int_0^1 0\mathrm{d}x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1) & 1 & \dfrac{1}{3}\\ 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}} & \mathrm{e}^2-1 & 0\\ \dfrac{3}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right)=2x\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2x^2} & x^2\mathrm{e}^{x^2} & x^4\\ \mathrm{e}^{-x^2} & 2\mathrm{e}^{2x^2} & 0\\ 3x^2 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

62. 设 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$,求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^{-1}(t)$,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{A}(t)|$,$\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)\right|$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{bmatrix}$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^{-1}(t)=\begin{bmatrix}-\sin t & -\cos t\\ \cos t & -\sin t\end{bmatrix}$,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{A}(t)|=0$,$\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)\right|=1$

63. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 n 阶可微矩阵,说明关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)]^m=m[\boldsymbol{A}(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$$

一般不成立.问该式在什么条件下能成立?

解　$m=2$ 时取 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}t^2 & t\\ 0 & t\end{bmatrix}$,则

$$\boldsymbol{A}^2(t)=\begin{bmatrix}t^4 & t^3+t^2\\0 & t^2\end{bmatrix},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^2(t)=\begin{bmatrix}4t^3 & 3t^2+2t\\0 & 2t\end{bmatrix}$$

$$2\boldsymbol{A}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}4t^3 & 2t^2+2t\\0 & 2t\end{bmatrix}$$

可见，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^2(t)\neq 2\boldsymbol{A}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$.

64. 已知

$$\sin\boldsymbol{A}t=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sin5t+3\sin t & 2\sin5t-2\sin t & \sin5t-\sin t\\ \sin5t-\sin t & 2\sin5t+2\sin t & \sin5t-\sin t\\ \sin5t-\sin t & 2\sin5t-2\sin t & \sin5t+3\sin t\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解 两边对 t 求导数，得

$$\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{A}t=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5\cos5t+3\cos t & 10\cos5t-2\cos t & 5\cos5t-\cos t\\ 5\cos5t-\cos t & 10\cos5t+2\cos t & 5\cos5t-\cos t\\ 5\cos5t-\cos t & 10\cos5t-2\cos t & 5\cos5t+3\cos t\end{bmatrix}$$

令 $t=0$，并注意到 $\cos0=\boldsymbol{I}$，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\1 & 3 & 1\\1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

65. 已知函数矩阵

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}\\ \mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t & 2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}\\ 3\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 因 $(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})'=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$，当 $t=0$ 时，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}0}=\mathrm{e}^0=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}=(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})'|_{t=0}$. 先计算

$$(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})'=\begin{bmatrix}4\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t & 2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^{2t}\\ 2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t & 4\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^{2t}\\ 6\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^t & 6\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^t-4\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}=(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})'|_{t=0}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\1 & 3 & -1\\3 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

66. 求 $\int_0^t\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$，其中

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^t & 1+t\\ \mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{2t} & \sin t\\ 3t & 0 & t\end{bmatrix}$$

解

$$\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}\int_0^t \mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\tau & \int_0^t \tau\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau & \int_0^t (1+\tau)\mathrm{d}\tau\\ \int_0^t \mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{d}\tau & \int_0^t 2\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\tau & \int_0^t \sin\tau\mathrm{d}\tau\\ \int_0^t 3\tau\mathrm{d}\tau & 0 & \int_0^t \tau\mathrm{d}\tau\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1) & \mathrm{e}^t(t-1)+1 & \frac{t^2}{2}+t\\ \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t}) & \mathrm{e}^{2t}-1 & 1-\cos t\\ \frac{3t^2}{2} & 0 & \frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

67. 若函数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $[t_0,t]$ 上可积，证明：

$$\left\|\int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right\|_1\leqslant\int_{t_0}^t \|\boldsymbol{A}(t)\|_1\mathrm{d}t$$

证明 设 $\boldsymbol{A}(\tau)=(a_{ij}(\tau))_{m\times n}$，有

$$\int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\left(\int_{t_0}^t a_{ij}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)_{m\times n}$$

由积分不等式 $\left|\int_{t_0}^t a_{ij}(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\int_{t_0}^t |a_{ij}(\tau)|\mathrm{d}\tau$，就有

$$\max_i\sum_{i=1}^m\left|\int_{t_0}^t a_{ij}(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\max_i\sum_{i=1}^m\int_{t_0}^t |a_{ij}(\tau)|\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^t\left(\max\sum_{i=1}^m|a_{ij}(\tau)|\right)\mathrm{d}\tau$$

即证得

$$\left\|\int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right\|_1\leqslant\int_{t_0}^t \|\boldsymbol{A}(\tau)\|_1\mathrm{d}\tau$$

68. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$；

(2) 求解 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)\\ \boldsymbol{X}(0)=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}.\end{cases}$

解 (1) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-2)^2$，$\lambda_{1,2}=0$，$\lambda_{3,4}=2$.

当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_{3,4}=2$ 时，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{bmatrix}$$

故得

$$e^{At}=P\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&e^{2t}&\\&&&e^{2t}\end{bmatrix}P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+e^{2t}&0&0&1-e^{2t}\\0&1+e^{2t}&1-e^{2t}&0\\0&1-e^{2t}&1+e^{2t}&0\\1-e^{2t}&0&0&1+e^{2t}\end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{X}(t)=e^{At}\boldsymbol{X}(0)=e^{2t}(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

69. 设 $\boldsymbol{X}=[x_{ij}]_{n\times n}$,求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})$,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}\det(\boldsymbol{X})$.

解 由于 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n}x_{ii}$,所以

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

故$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{I}_{n\times n}$.

又因为 $|\boldsymbol{X}|=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}A_{ik}$,其中 A_{ik} 为元素 x_{ik} 的代数余子式.于是

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}|\boldsymbol{X}|=\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ik}A_{ik}\right)=A_{ij}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}\det(\boldsymbol{X})=[A_{ij}]=(\boldsymbol{A}^{*})^{\mathrm{T}}$$

这里 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

70. 设 $f(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_F^2=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$,其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$是矩阵变量,求$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}$.

解 这是数量函数对矩阵变量的导数.设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,则

$$f(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_F^2=\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}a_{st}^2=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$$

又因为$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}=2a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,所以

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}=\left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right)_{m\times n}=(2a_{ij})_{m\times n}=2\boldsymbol{A}$$

71. 设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是实对称矩阵,$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,$c$ 为常数,试求 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+c$ 对于 $\boldsymbol{X}$ 的导数.

解 由于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,再由 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=y_1x_1+y_2x_2+\cdots+y_nx_n$,知$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}$,而$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=0$,因此$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}$.

72. 设 $\boldsymbol{X}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 依次为 $n\times n$ 和 $m\times n$ 的常数矩阵,证明:

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}))=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}))=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}$.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{n\times m}$，则 $\boldsymbol{BX}=\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}x_{kj}\right)_{m\times m}$，于是有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX})=\sum_{k=1}^{n}b_{1k}x_{k1}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}b_{jk}x_{kj}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}b_{mk}x_{km}$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX})}{\partial x_{ij}}=b_{ji}\quad(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX}))=\begin{bmatrix}b_{11}&\cdots&b_{m1}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{1n}&\cdots&b_{mn}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

注意到 $\boldsymbol{BX}$ 与 $(\boldsymbol{BX})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 有相同的迹，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX}))=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{n\times m}$，$f=\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX})$，则有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_{11}&\cdots&x_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ x_{1m}&\cdots&x_{nm}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{AX}=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_{k1}&\cdots&\sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_{km}\\ \vdots&&\vdots\\ \sum_{k=1}^{n}a_{nk}x_{k1}&\cdots&\sum_{k=1}^{n}a_{nk}x_{km}\end{bmatrix}$$

$$f=\sum_{e=1}^{n}x_{e1}\sum_{k=1}^{n}a_{ek}x_{k1}+\cdots+\sum_{e=1}^{n}x_{ej}\sum_{k=1}^{n}a_{ek}x_{kj}+\cdots+\sum_{e=1}^{n}x_{em}\sum_{k=1}^{n}a_{ek}x_{km}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}=\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\left[\sum_{e=1}^{n}x_{ej}\sum_{k=1}^{n}a_{ek}x_{kj}\right]$$

$$=\sum_{e=1}^{n}\left[\frac{\partial x_{ej}}{\partial x_{ij}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ek}x_{kj}\right)+x_{ej}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ek}x_{kj}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ek}x_{ej}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{n\times m}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}X=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}$$

73. 设 $\boldsymbol{X}$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{u}$ 为 n 维常数列向量，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶常数对称矩阵，证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{u})=2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{u})$$

证明 设 $f=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{u})$，因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}-2(\boldsymbol{Au})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Au}$$

利用第71题的结果可得 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=2\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{Au}=2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{u})$.

74. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是矩阵变量，且 $\det\boldsymbol{A}\neq0$，令 $f(\boldsymbol{A})=\det\boldsymbol{A}$，证明：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}=\det\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，记 a_{ij} 的代数余子式为 $\boldsymbol{A}_{ij}$，将 $\det\boldsymbol{A}$ 按第 i 行展开，得

$$\det\boldsymbol{A}=a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+\cdots+a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{in}$$

所以$\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}=\boldsymbol{A}_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，从而有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{n\times n}=(\mathrm{adj}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=((\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\det\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

其中 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

75. 设 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是给定矩阵，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 是矩阵变量，$f(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$，试求$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}$.

解 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$. 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的第 k 行第 k 列元素为 $\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{t=1}^{n}a_{sk}b_{st}a_{tk}$，所以

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})&=\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{sk}b_{st}a_{tk}\Big)=\sum_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{m}\Big(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{sk}b_{st}a_{tk}\Big)+\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{sj}b_{st}a_{tj}\\&=\sum_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{m}\Big(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{sk}b_{st}a_{tk}\Big)+a_{1j}\sum_{t=1}^{n}b_{1t}a_{tj}+a_{ij}\sum_{t=1}^{n}b_{it}a_{tj}+\cdots+a_{nj}\sum_{t=1}^{n}b_{nt}a_{tj}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}&=a_{1j}b_{1j}+\cdots+a_{i-1,j}b_{i-1,i}+\Big(\sum_{t=1}^{n}b_{it}a_{tj}+a_{ij}b_{ij}\Big)+a_{i+1,j}b_{i+1,i}+\cdots+a_{nj}b_{ni}\\&=\sum_{t=1}^{n}b_{it}a_{tj}+\sum_{s=1}^{n}b_{si}a_{sj}\end{aligned}$$

最后得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}=\left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right)_{n\times m}=\Big(\sum_{t=1}^{n}b_{it}a_{tj}\Big)_{n\times m}+\Big(\sum_{s=1}^{n}b_{si}a_{sj}\Big)_{n\times m}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$

特别地，当 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵时，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$；当 $\boldsymbol{A}$ 为列向量时，$f=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，且$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

76. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n}$是向量变量，$\boldsymbol{F}(X)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{G}(X)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，试求$\dfrac{\mathrm{dF}(\boldsymbol{X})}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})}{\mathrm{d}X}$.

解 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，由于

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_k,\cdots,\sum_{k=1}^{n}a_{mk}x_k\Big)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_k,\cdots,\sum_{k=1}^{n}a_{mk}x_k\Big)^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}=(a_{1i},\cdots,a_{mi})^{\mathrm{T}},\qquad \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_i}=(a_{1i},\cdots,a_{mi})$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}=(a_{11},\cdots,a_{m1},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{mn})^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_n}\right)=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

77. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{m}$，$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n}$是向量变量，$f(\boldsymbol{X})=\|\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{b}\|_2^2$，试求$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}$.

解 因为

$$f(x)=\|\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{b}\|_2^2=(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

故由上两题的结果得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$$

78. 设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$f(\boldsymbol{X})=(f_1(\boldsymbol{X}),f_2(\boldsymbol{X}),\cdots,f_n(\boldsymbol{X}))^{\mathrm{T}}$，其中

$$f_i(\boldsymbol{X})=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\delta_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}f(\boldsymbol{X})$.

解 因为$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i},\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i},\cdots,\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)^{\mathrm{T}}=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^{\mathrm{T}}=\alpha_i$，故有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$$

79. 设 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{t} & t^2 \\ \mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 3t & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 $\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$，$\int_0^1\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^{t^2}\boldsymbol{A}(x)\mathrm{d}x\right)$.

解
$$\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}+c_{11} & (t-1)\mathrm{e}^{t}+c_{12} & \frac{1}{3}t^3+c_{13} \\ -\mathrm{e}^{-t}+c_{21} & \mathrm{e}^{2t}+c_{22} & c_{23} \\ \frac{3}{2}t^2+c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1) & 1 & \frac{1}{3} \\ 1-\mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^2-1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^{t^2}\boldsymbol{A}(x)\mathrm{d}x\right)=2t\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t^2} & t^2\mathrm{e}^{t^2} & t^4 \\ \mathrm{e}^{-t^2} & 2\mathrm{e}^{2t^2} & 0 \\ 3t^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

80. 求以下微分方程的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}x(t) \\ x(o)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

解 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，$A$ 的特征值为 $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，相应的两个特征向量为

$$\alpha=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\end{bmatrix},\qquad \beta=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\end{bmatrix}$$

作矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\end{bmatrix}$$

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，则

$$\mathrm{e}^{At}=P\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\sqrt{3}\mathrm{i}t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\sqrt{3}\mathrm{i}t}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\sqrt{3}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t & \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\\ \frac{-2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t & \cos\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\end{bmatrix}$$

故

$$x(t)=\mathrm{e}^{At}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\\ \cos\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\end{bmatrix}$$

81. 求以下非齐次微分方程的解：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\ 0\end{bmatrix}\\ x(o)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{cases}$$

解 设 $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$，它的特征值为 $\lambda=3\pm5\mathrm{i}$，对应的两个线性无关的特征向量为 $\alpha=(1,\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$，$\beta=(i,1)^{\mathrm{T}}$，作可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$，从而有

$$\mathrm{e}^{A}=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(3+5\mathrm{i})t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{(3-\sqrt{5}\mathrm{i})t}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos5t & \sin5t\\ -\sin5t & \cos5t\end{bmatrix}\mathrm{e}^{3t}$$

故

$$\begin{aligned}X(t)&=\mathrm{e}^{At}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\tau}\\0\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau\\ &=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}\sin5t\\ \cos5t\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{3t}\int_0^t\begin{bmatrix}\cos5t\ \cos5\tau+\sin5t\ \sin5\tau\\ -\sin5t\ \cos5\tau+\cos5t\ \sin5\tau\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-4\tau}\mathrm{d}\tau\\ &=\begin{bmatrix}\sin5t\\ \cos5t\end{bmatrix}\mathrm{e}^{3t}+\begin{bmatrix}a(t)\\ b(t)\end{bmatrix}\mathrm{e}^{3t}\end{aligned}$$

其中

$$a(t)=\left[\frac{\mathrm{e}^{-4t}}{41}(-4\cos5t+5\sin5t)+\frac{4}{41}\right]\cos5t+\left[\frac{\mathrm{e}^{-4t}}{41}(-4\sin5t-5\cos5t)+\frac{5}{41}\right]\sin5t$$

$$b(t)=-\left[\frac{\mathrm{e}^{-4t}}{41}(-4\cos5t+5\sin5t)+\frac{4}{41}\right]\sin5t+\left[\frac{\mathrm{e}^{-4t}}{41}(-4\sin5t-5\cos5t)+\frac{5}{41}\right]\cos5t$$

82. 求微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-2x_1+x_2+1\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-4x_1+2x_2+2\\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=x_1+x_3+\mathrm{e}^t-1\end{cases}$$

满足初始条件 $x_1(o)=1, x_2(o)=1, x_3(o)=-1$ 的解.

解　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}, b(t)=\begin{bmatrix}1\\2\\\mathrm{e}^t-1\end{bmatrix}, x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}, \varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^3-\lambda^2$,

由 $\boldsymbol{C}$-$\boldsymbol{H}$ 定理知

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2,\quad \boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^2,\quad \boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}^2,\quad \cdots$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}t)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\frac{1}{4!}(\boldsymbol{A}t)^4+\cdots\\&=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A}+\left(\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{4!}t^4+\cdots\right)\boldsymbol{A}^2\\&=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A}+(\mathrm{e}^t-1-t)\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1-2t&t&0\\-4t&t&0\\1+2t-\mathrm{e}^t&\mathrm{e}^t-t-1&\mathrm{e}^t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}x(t)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\left\{x(o)+\int_0^t\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}b(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\left\{x(o)+\int_0^t\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\mathrm{d}t\right\}\\&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\2t\\0\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}1\\1\\(t-1)\mathrm{e}^t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

83. 求解三阶齐次线性微分方程

$$\begin{cases}y'''(t)-5y''+7y'-3y=0\\y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=0\end{cases}$$

解　先通过变量代换化为微分方程组的形式求解.

令

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=x_3\\\dot{x}_3=3x_1-7x_2+5x_3\end{cases},\qquad \boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\3&-7&5\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{X}(o)=(1,0,0)^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$，得 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=3$.

对于 $\lambda_{1,2}=1$，求解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{x}=k(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，取 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，由 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$，求得广义特征向量 $\boldsymbol{\beta}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda_3=3$，求解 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,9)^{\mathrm{T}}$，得

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&3\\1&1&9\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-3&10&-3\\-6&8&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

从而

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^t&t\mathrm{e}^t&0\\0&\mathrm{e}^t&0\\0&0&\mathrm{e}^{3t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

故

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^t&t\mathrm{e}^t&0\\&\mathrm{e}^t&0\\&&\mathrm{e}^{3t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}(0)$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\mathrm{e}^t-6t\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{3t}\\-3\mathrm{e}^t-6t\mathrm{e}^t+3\mathrm{e}^{3t}\\-9\mathrm{e}^t-6t\mathrm{e}^t+9\mathrm{e}^{3t}\end{bmatrix}$$

84. 设 $\boldsymbol{Z}(t)$ 是非齐次常系数微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

的一个解，证明满足初始条件 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 的解为

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{Z}(t)+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}[\boldsymbol{X}(t_0)-\boldsymbol{Z}(t_0)]$$

解 由于 $y(t)=\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{Z}(t)$ 是齐次微分方程组 $\dot{y}(t)=\boldsymbol{A}y(t)$ 的解，即它满足

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=\boldsymbol{A}y(t)\\y(t_0)=\boldsymbol{X}(t_0)-\boldsymbol{Z}(t_0)\end{cases}$$

而上面方程组的解为

$$y=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}(\boldsymbol{X}(t_0)-\boldsymbol{Z}(t_0))$$

故有

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{Z}(t)+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}[\boldsymbol{X}(t_0)-\boldsymbol{Z}(t_0)]$$

85. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶常数矩阵，证明：线性非齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t),\qquad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

证明 首先对矩阵函数 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)$ 求微分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t))=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\right)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{f}(t)$$

将上式两端积分可得

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\mathrm{e}^{-A\tau}\boldsymbol{x}(\tau))\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-A\tau}\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

于是有

$$\mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\mathrm{e}^{-At_0}\boldsymbol{x}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-A\tau}\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

从而有

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

86. 求解微分方程组

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{X}(0)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

解 应用上题的结果,这里 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$,$t_0=0$,$\boldsymbol{f}(t)=(0,0,\mathrm{e}^{2t})^{\mathrm{T}}$,则本题的解可写为

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{X}(0)+\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

下面对上式中的矩阵函数和积分作进一步地计算:

由于 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$,$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,存在

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&2\\5&1&1\\2&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1&1&1\\3&3&-9\\2&-2&4\end{bmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\qquad \mathrm{e}^{At}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{0t}&&\\&\mathrm{e}^{2t}&\\&&\mathrm{e}^{3t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

于是

$$\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&\mathrm{e}^{2t}&\\&&\mathrm{e}^{3t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1-3\mathrm{e}^{2t}+8\mathrm{e}^{3t}\\5-3\mathrm{e}^{2t}+4\mathrm{e}^{3t}\\2+4\mathrm{e}^{3t}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)&=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&\mathrm{e}^{2(t-\tau)}&\\&&\mathrm{e}^{3(t-\tau)}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\mathrm{e}^{2\tau}\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2\tau}-9\mathrm{e}^{2t}+8\mathrm{e}^{3t-\tau}\\5\mathrm{e}^{2\tau}-9\mathrm{e}^{2t}+4\mathrm{e}^{3t-\tau}\\2\mathrm{e}^{2\tau}+4\mathrm{e}^{3t-\tau}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

求积分,得非齐次微分方程组的一个解

$$Z(t)=\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}-\left(9t+\frac{15}{2}\right)e^{2t}+8e^{3t}\\ -\frac{5}{2}-\left(9t+\frac{3}{2}\right)e^{2t}+4e^{3t}\\ -1-3e^{2t}+4e^{3t}\end{bmatrix}$$

最后得解为

$$X=e^{At}X(0)+Z(t)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\left(9t+\frac{21}{2}\right)e^{2t}+16e^{3t}\\ \frac{5}{2}-\left(9t+\frac{9}{2}\right)e^{2t}+8e^{3t}\\ 1-3e^{2t}+8e^{3t}\end{bmatrix}$$

87. 设微分方程组 $\dot{X}(t)=AX(t)$，其中系数矩阵 A 可对角化，试推导该方程组的一般解为

$$X(t)=C_1e^{\lambda_1 t}\alpha_1+C_2e^{\lambda_2 t}\alpha_2+\cdots+C_ne^{\lambda_n t}\alpha_n$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是对应于这些特征值的 n 个线性无关的特征向量，$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数.

解 设

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix},\qquad P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是对应于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的线性无关的特征向量.

微分方程组可写成

$$\dot{X}(t)=AX(t)=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}X(t)$$

$$P^{-1}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}[P^{-1}X(t)]$$

令 $Y(t)=P^{-1}X(t)$，则有

$$\dot{Y}(t)=P^{-1}\dot{Y}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}Y(t)\qquad (*)$$

易解出(*)式

$$Y(t)=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}&&\\&\ddots&\\&&e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_n\end{bmatrix}$$

故得

$$X(t)=PY(t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}&&\\&\ddots&\\&&e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_n\end{bmatrix}=C_1e^{\lambda_1 t}\alpha_1+C_2e^{\lambda_2 t}\alpha_2+\cdots+C_ne^{\lambda_n t}\alpha_n$$

88. $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$，求 $\dot{X}(t)=AX(t)$ 的一般解(通解).

解　$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)$，得 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=3$，可对角化，三个线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=(-1,4,1)^{\mathrm{T}},\qquad \alpha_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \alpha_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$$

根据上题的结果，一般解为

$$X(t)=C_1\mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{bmatrix}+C_2\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+C_3\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

式中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

89. 设二阶齐次微分方程组

$$\begin{cases}\ddot{X}(t)+A^2X(t)=\mathbf{0}\\ X(0)=X_0,\quad \dot{X}(0)=X_1\end{cases}$$

证明：(1) $\sin At,\cos At$ 是该方程组的两个解；

(2) 若 A 可逆，则通解为

$$X=(\sin At)C_1+(\cos At)C_2$$

且 $X(t)=(\sin At)A^{-1}X_1+(\cos At)X_0$ 是满足初始条件的解.

证明　(1) 只要将 $X(t)=\sin At$ 与 $\cos At$ 分别代入微分方程，若等式成立，则它们便是该方程组的解. 事实上，因为

$$(\sin At)'=A\cos At,\qquad (\sin At)''=-A^2\sin At$$
$$(\cos At)'=-A\sin At,\qquad (\cos At)''=-A^2\cos At$$

于是

$$\ddot{X}(t)+A^2X(t)=-A^2\sin At+A^2\sin At=\mathbf{0}$$
$$\ddot{X}(t)+A^2X(t)=-A^2\cos At+A^2\cos At=\mathbf{0}$$

这说明 $\sin At,\cos At$ 是方程组的两个解.

(2) 设 C_1 与 C_2 是任意常量矩阵，显然，由(1)知

$$X(t)=(\sin At)C_1+(\cos At)C_2$$

也是该方程组的解. 由于 A 可逆，再根据两初始条件 $X(0)=X_0,\dot{X}(0)=X_1$，不妨取 $C_1=A^{-1}X_1,C_2=X_0$，则容易验证

$$X(t)=(\sin At)A^{-1}X_1+(\cos At)X$$

正好是该微分方程组满足两初始条件的特解.

90. 设 $\ddot{X}+A^2X(t)=\mathbf{0}$，$A$ 是半正定的埃尔米特矩阵，求通解.

解　设 $\mathrm{rank}A=r$，A 又是半正定的，则 A 可酉对角化，即存在酉阵 U，使

$$U^{\mathrm{H}}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix},\quad \lambda_i>0$$

设$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{Y}$,代入微分方程,得

$$\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)+\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{0}$$

令$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}$,其中$\boldsymbol{Y}_1\in\mathbb{C}^r$,$\boldsymbol{Y}_2\in\mathbb{C}^{n-r}$,且设

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_r}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{W}^2=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{Y}}_1(t)+\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{Y}_1(t)=\boldsymbol{0}\\ \ddot{\boldsymbol{Y}}_2(t)=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

由上题知,以上方程组的通解为

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}_1=(\sin\boldsymbol{W}t)\boldsymbol{C}_1+(\cos\boldsymbol{W}t)\boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{Y}_2=t\boldsymbol{C}_3+\boldsymbol{C}_4\end{cases}$$

故解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}(\sin\boldsymbol{W}t)\boldsymbol{C}_1+(\cos\boldsymbol{W}t)\boldsymbol{C}_2\\ t\boldsymbol{C}_3+\boldsymbol{C}_4\end{bmatrix}$$

第6章 广义逆矩阵及其应用

习 题 6

1. 求下列矩阵的减号逆 A^-：

(1) $A_1=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\1&0&2\\1&0&2\end{bmatrix}$； (2) $A_2=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$.

解 (1) $A_1^-=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{2}{5}&0&0&0\end{bmatrix}$；

(2) $A_2^-=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}$.

2. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\mathrm{rank}A=r$，若有 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶置换矩阵 T，使得

$$PAT=\begin{bmatrix}I_r&S\\0&0\end{bmatrix},\quad S\in\mathbb{C}^{(m-r)\times(n-r)}$$

证明：对任一个 $L\in\mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$，矩阵 $G=T\begin{bmatrix}I_r&0\\0&L\end{bmatrix}P$ 是 A 的一个减号逆；若取 $L=0$，则相应的 G 是 A 的一个自反减号逆 A_r^-.

证明 因为 $A=P^{-1}\begin{bmatrix}I_r&S\\0&0\end{bmatrix}T^{-1}$，所以

$$\begin{aligned}AGA&=P^{-1}\begin{bmatrix}I_r&S\\0&0\end{bmatrix}T^{-1}T\begin{bmatrix}I_r&0\\0&L\end{bmatrix}PP^{-1}\begin{bmatrix}I_r&S\\0&0\end{bmatrix}T^{-1}\\&=P^{-1}\begin{bmatrix}I_r&S\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_r&0\\0&L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_r&S\\0&0\end{bmatrix}T^{-1}=P^{-1}\begin{bmatrix}I_r&S\\0&0\end{bmatrix}T^{-1}=A\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆. 当 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{0}$ 时，有

$$\boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{PP}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{G}$$

从而 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的自反减号逆.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 零矩阵，哪一类矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆？哪一类矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的自反减号逆？

解 所有 $n\times m$ 矩阵是 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆；只有 $n\times m$ 零矩阵是 $\boldsymbol{A}$ 的自反减号逆.

4. 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 除第 i_0 行第 j_0 列的元素为 1 外，其余元素均为 0，哪一类矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆？哪一类矩阵是 $\boldsymbol{A}$ 的自反减号逆？

解 设 $\boldsymbol{G}=(g_{ij})_{n\times m}$，满足 $g_{j_0i_0}=1$、其余元素任意的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆；而满足 $g_{j_0i_0}=1$、$g_{ki_0}(k\neq j_0)$ 和 $g_{j_0k}(k\neq i_0)$ 任意、$g_{st}=g_{si_0}g_{j_0t}(s\neq j_0,t\neq i_0)$ 的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的自反减号逆.

5. 设 $\boldsymbol{B}$ 是所有元素全为 1 的 n 阶方阵，记 $\boldsymbol{A}=(a-b)\boldsymbol{I}+b\boldsymbol{B}$，证明：若 $a+(n-1)b=0$，则 $\boldsymbol{G}=(a-b)^{-1}\boldsymbol{I}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆.

证明 因为 $\boldsymbol{B}^2=n\boldsymbol{B}$，所以由计算可知：

$$\boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A}+b(a-b)^{-1}[a+(n-1)b]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$$

即 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆.

6. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}$$

证明：$\boldsymbol{G}=-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{-1}\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆.

证明 经计算易知 $\boldsymbol{A}^3=-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\boldsymbol{A}$，所以

$$\boldsymbol{AGA}=-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{-1}\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}$$

故 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆.

7. 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的一个减号逆和自反减号逆.

解 经若干次初等行变换和列变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化成前面第 2 题中提到的埃尔米特标准形

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

即容易求得

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 6 & 1 & -4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

使得 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 相抵：

$$\boldsymbol{PAT}=\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1\\0&1&0&0&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

那么，由第2题知

$$\boldsymbol{A}^{-}=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{L}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c_1\\0&0&c_2\\0&0&c_3\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}6c_1&c_1&-4c_1\\2&0&-1\\6c_2&c_2&-4c_2\\1&0&-1\\6c_3&c_3&-4c_3\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，得 $\boldsymbol{A}_r^{-}=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&-1\\0&0&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

8. 对第1题中的两个矩阵，分别求出方程 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}_2$ 的通解，其中 $\boldsymbol{b}_1=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$.

解 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}_1$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}+\frac{4}{5}c_1-\frac{2}{5}c_2\\\frac{2}{5}-\frac{2}{5}c_1+\frac{1}{5}c_2\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}_2$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}c_1-\frac{1}{3}c_2-\frac{1}{3}c_4\\\frac{1}{3}-\frac{1}{3}c_1+\frac{2}{3}c_2+\frac{1}{3}c_3\\\frac{1}{3}c_2+\frac{1}{3}c_3-\frac{1}{3}c_4\\\frac{1}{3}-\frac{1}{3}c_2-\frac{1}{3}c_3+\frac{2}{3}c_4\end{bmatrix}$$

（c 任意取值）

9. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的一个减号逆和自反减号逆；

(2) 求 $\boldsymbol{A}^{+}$.

解

$$A^{-}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-c&c&-c&c\end{bmatrix}$$

$$A_r^{-}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-c&c&-c&c\end{bmatrix},\qquad A^{+}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3&3&-1&-1\\-1&3&3&-1\\-1&-1&3&3\\3&-1&-1&3\end{bmatrix}$$

10. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\-1&4&5&3\end{bmatrix}$$

的 Moore-Penrose 逆 A^{+}.

解 可求得 A 的满秩分解为

$$A=FG=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

于是 $A^{+}=G^{\mathrm T}(GG^{\mathrm T})^{-1}(F^{\mathrm T}F)^{-1}F^{\mathrm T}=\dfrac{1}{18}\begin{bmatrix}5&2&-1\\1&1&1\\-4&-1&2\\6&3&0\end{bmatrix}$.

11. 求 $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$ 的左逆 $A_{\mathrm L}^{-1}$.

解 对增广矩阵 $(A\ \vdots\ I)$ 做初等行变换：

$$(A\ \vdots\ I)=\left[\begin{array}{cc:ccc}1&0&1&0&0\\2&-1&0&1&0\\-1&2&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:ccc}1&0&1&0&0\\0&-1&-2&1&0\\0&2&1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:ccc}1&0&1&0&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&-3&2&1\end{array}\right]$$

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix}$$

得

$$A_{\mathrm L}^{-1}=(I\ \vdots\ K)P=\left[\begin{array}{cc:c}1&0&k_1\\0&1&k_2\end{array}\right]\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3k_1&2k_1&k_1\\2-3k_2&-1+2k_2&k_2\end{bmatrix}$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

12. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，且 $A=PBQ$，其中 P 为 $m\times k$ 列满秩矩阵，Q 为 $s\times n$ 行满秩矩阵，证明 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B$.

证明 由于 P 是列满秩，Q 为行满秩，所以 $P^{\mathrm T}P,QQ^{\mathrm T}$ 都可逆. 再由 $A=PBQ$，有

$$(P^{\mathrm T}P)^{-1}P^{\mathrm T}AQ^{\mathrm T}(QQ^{\mathrm T})^{-1}=(P^{\mathrm T}P)^{-1}P^{\mathrm T}PBQQ^{\mathrm T}(QQ^{\mathrm T})^{-1}=B$$

根据积的秩不等式知

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{B} \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$$

另一方面,由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBQ}$,有 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$,从而得

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$$

13. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times m}$,$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$,$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=n$,$m\geqslant n$.

(1) 求 $\boldsymbol{AB}$ 的全部特征值;

(2) 证明:$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$,$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B})$.

解 (1) 由于$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AIB}=\boldsymbol{AB}$,所以 $\boldsymbol{AB}$ 是幂等矩阵,它的特征值为 1 或 0,且 $\boldsymbol{AB}$ 可对角化. 又因为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=n$,可见 $\boldsymbol{AB}$ 有 n 个特征值都为 1,$m-n$ 个特征值为 0.

(2) 证明:由于 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$,则 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩,$\boldsymbol{A}$ 有左逆,$\boldsymbol{B}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的左逆,且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{-1}=\boldsymbol{A}^{+}$. 再由参考文献[3]4.3 节定理 3.3 知,如果 $\boldsymbol{A}^{+}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵,则有 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{AA}^{+})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$,故有 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{AA}^{+})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$.

下证 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{AB})$.

令 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{N}(\boldsymbol{AB})$,即 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$,因 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$,就有 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{ABx})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B})$,所以 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{AB})\subseteq\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B})$.

同理,令 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B})$,即 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$,有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{By})=\boldsymbol{0}$,从而$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{N}(\boldsymbol{AB})$,所以 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B})\subseteq\boldsymbol{N}(\boldsymbol{AB})$. 综合推得 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B})$.

14. 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times m}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}^{n\times n}$是可逆的,证明:

(1) 若 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$是左可逆的,则 $\boldsymbol{ABC}$ 是左可逆;

(2) 若 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$是右可逆的,则 $\boldsymbol{ABC}$ 是右可逆.

证明 (1) 由于 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$左可逆,显然有 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=n$,又已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 可逆,则有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=n$,这表明 $\boldsymbol{ABC}$ 是左可逆,且$(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{ABC})=\boldsymbol{I}_n$,故$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$是 $\boldsymbol{ABC}$ 的一个左逆.

(2) 若 $\boldsymbol{B}$ 是一个右可逆,显然有 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=m$,$\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=n$,故 $\boldsymbol{ABC}$ 是右可逆的,且 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$是 $\boldsymbol{ABC}$ 的一个右逆.

15. $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$是一个行满秩矩阵,证明 $\boldsymbol{A}$ 有右逆为

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{VA}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 是使 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ 成立的任一 n 阶方阵.

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩,即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=m$,则 $\boldsymbol{A}$ 是右可逆. 设 $\boldsymbol{V}$ 是使 $\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}}$ 为可逆的 $m\times m$ 矩阵,则

$$(\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{I}_m, \quad 即 \quad \boldsymbol{A}[(\boldsymbol{VA}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}})^{-1}] = \boldsymbol{I}_m$$

令 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{VA}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}})^{-1}$,即有 $\boldsymbol{AG}=\boldsymbol{I}_m$,故 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的右逆.

同理,若 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩,则 $\boldsymbol{A}$ 有左逆为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{G} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{UA})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 是使 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{UA})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$ 成立的任意 $m\times m$ 矩阵.

16. $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$是左可逆的,证明存在 $\varepsilon>0$,使满足条件$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|<\varepsilon$ 的每一个矩阵 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$都是左可逆的. 换言之,单边可逆矩阵对小摄动是稳定的.

证明 题意是要证明满足$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|<\varepsilon$ 的 $\boldsymbol{B}$ 有左逆 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$. 设 $\boldsymbol{A}$ 的左逆为 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{-1}$,令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{-1}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$. 取 $\varepsilon>0$,使$\|\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$,且满足条件$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|<\varepsilon$,则有

$$\|C\| = \|A_L^{-1}(B-A)\| \leqslant \|B-A\| \cdot \|A_L^{-1}\| < \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$$

由第 4 章习题 4(2)第 46 题的结果知 $I+C$ 是可逆矩阵,则 $(I+C)^{-1}A_L^{-1}B=[I+A_L^{-1}(B-A)]^{-1}A_L^{-1}B=(I+A_L^{-1}B-I)^{-1}A_L^{-1}B=(A_L^{-1}B)^{-1}(A_L^{-1}B)=I_n$,即$[(I+C)^{-1}A_L^{-1}]B=I_n$,故 B 的左逆为 $B_L^{-1}=(I+C)^{-1}A_L^{-1}$.

17. 设

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\1&2&2\end{bmatrix}$; (2) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\1&0&0\\2&1&-1\end{bmatrix}$.

求 A^+.

解 (1) 先用初等行变换将 A 简化为阶梯形(埃尔米特形).

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\1&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=H$$

对 A 做满秩分解,取 A 的 1,3 列构成 B,取 H 的 1,2 行构成 C,即 $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,则有 $A=BC$.

$$CC^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad (CC^{\mathrm T})^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}$$

$$B^{\mathrm T}B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&5\end{bmatrix},\qquad (B^{\mathrm T}B)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-2\\-2&2\end{bmatrix}$$

故得

$$A^+=C^{\mathrm T}(CC^{\mathrm T})^{-1}(B^{\mathrm T}B)^{-1}B^{\mathrm T}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}5&-2&1\\10&-4&2\\-10&10&10\end{bmatrix}$$

(2)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\1&0&0\\2&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=H$$

将 A 满秩分解

$$A=BC=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$CC^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\qquad (CC^{\mathrm{T}})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$B^{\mathrm{T}}B=\begin{bmatrix}6&2\\2&2\end{bmatrix},\qquad (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&3\end{bmatrix}$$

从而得

$$A^{+}=C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2&-2&2&2\\-1&3&-1&1\\1&-3&1&-1\end{bmatrix}$$

18. 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-1&0&1\\2&0&-2\end{bmatrix}$$

分别求 A^{+},B^{+}.

解　对 A 做满秩分解

$$A=BC=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}$$

于是

$$CC^{\mathrm{T}}=2,\quad B^{\mathrm{T}}B=5,\quad (CC^{\mathrm{T}})^{-1}=\frac{1}{2},\quad (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}=\frac{1}{5}$$

故得

$$A^{+}=C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$$

B 的满秩分解为

$$B=DE=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}$$

于是

$$EE^{\mathrm{T}}=2,\qquad D^{\mathrm{T}}D=5,\qquad (EE^{\mathrm{T}})^{-1}=\frac{1}{2},\qquad (D^{\mathrm{T}}D)^{-1}=\frac{1}{5}$$

故得

$$B^{+}=E^{\mathrm{T}}(EE^{\mathrm{T}})^{-1}(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1&2\\0&0\\1&2\end{bmatrix}$$

19. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$P$ 与 Q 分别为 m 阶与 n 阶酉矩阵，试证

$$(PAQ)^{+}=Q^{+}A^{+}P^{+}$$

证明　设 A 的满秩分解为 $A=BC$，那么 $PAQ=PBCQ$

$$\begin{aligned}(PAQ)^{+}&=(PBCQ)^{+}=(CQ)^{\mathrm{H}}[CQ(CQ)^{\mathrm{H}}]^{-1}[(PB)^{\mathrm{H}}PB]^{-1}(PB)^{\mathrm{H}}\\&=Q^{\mathrm{H}}C^{\mathrm{H}}[CQQ^{\mathrm{H}}C^{\mathrm{H}}]^{-1}[B^{\mathrm{H}}P^{\mathrm{H}}PB]^{-1}B^{\mathrm{H}}P^{\mathrm{H}}\\&=Q^{-1}C^{\mathrm{H}}(CC^{\mathrm{H}})^{-1}(B^{\mathrm{H}}B)^{-1}B^{\mathrm{H}}P^{-1}\\&=Q^{+}A^{+}P^{+}\end{aligned}$$

20. 证明下列等式：

(1) $(A^HA)^+=A^+(A^H)^+$；$(AA^H)^+=(A^H)^+A^+$；

(2) $(A^HA)^+=A^+(AA^H)^+A=A^H(AA^H)^+(A^H)^+$；

(3) $AA^+=(AA^H)(AA^H)^+=(AA^H)^+(AA^H)$；

(4) $A^+A=(A^HA)(A^HA)^+=(A^HA)^+(A^HA)$；

(5) 如果 $A^H=A$，那么

$$(A^2)^+=(A^+)^2,\qquad A^2(A^2)^+=(A^2)^+A^2=AA^+$$

(6) 如果 $A^H=A$，那么

$$AA^+=A^+A$$

证明 (1) 设满秩分解为 $A=BC$，那么

$$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

于是

$$\begin{aligned}(A^HA)^+&=(C^HB^HBC)^+\\&=(B^HBC)^H(B^HBCC^HB^HB)^{-1}(CC^H)^{-1}C\\&=C^HB^HB(B^HB)^{-1}(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}(CC^H)^{-1}C\\&=[C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H][B(B^HB)^{-1}(CC^H)^{-1}C]\\&=A^+(A^H)^+\end{aligned}$$

同样可证，$(AA^H)^+=(A^H)^+A^+$.

(2) 由(1)可得$(A^HA)^+=A^+(A^H)^+=A^+(A^+)^H=A^+[A^H(AA^H)^+]^H$

$$=A^+[(AA^H)^+]^HA=A^+(AA^H)^+A$$

同样可证$(A^HA)^+=A^H(AA^H)^+(A^H)^+$.

(3) 容易得到

$$AA^+=A[A^H(AA^H)^+]=(AA^H)(AA^H)^+$$

又由

$$\begin{aligned}(AA^H)^+(AA^H)&=(BCC^HB^H)^+(BCC^HB^H)\\&=BCC^H(CC^HB^HBCC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^HBCC^HB^H\\&=B(CC^H)(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}(CC^H)^{-1}CC^HB^H\\&=BC[C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H]\\&=AA^+\end{aligned}$$

故有

$$AA^+=(AA^H)(AA^H)^+=(AA^H)^+(AA^H)$$

(4) 证明方法与(3)类似.

(5) 若 $A^H=A$，则由(1)可得$(A^2)^+=(A^+)^2$，于是由(3)有 $AA^+=A^2(A^2)^+=(A^2)^+A^2$.

(6) 若 $A^H=A$，则由(4)可得 $A^+A=A^2(A^2)^+=(A^2)^+A^2$，于是由(5)可得 $AA^+=A^+A$.

21. 设 A 是一个正规矩阵，证明 $AA^+=A^+A$.

证明 由于 A 是正规矩阵，所以存在酉矩阵 U，使

$$A=U\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}U^H=U\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}U^+$$

则

$$A^+ = \left[U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^+\right]^+ = (U^+)^+\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}^+ U^+$$

从而

$$\begin{aligned}A^+A &= U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}^+ U^+U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^+ \\ &= U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^+\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}AA^+ &= U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^+U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^+ \\ &= U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^+\end{aligned}$$

故 $AA^+=A^+A$.

22. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，且 A 的 n 个列是标准正交的，证明 $A^+=A^{\mathrm{T}}$.

证明　由于 A 的 n 个列是标准正交的，则 A 是列满秩的，且 $A^{\mathrm{T}}A=I$，于是由 A^+ 的计算公式 $A^+=A_L^{-1}=(A^{\mathrm{H}}A)^{-1}A^{\mathrm{H}}$ 得

$$A^+=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}=I^{-1}A^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}$$

23. A 是幂等且是埃尔米特阵（即 A 是正交投影矩阵），证明 $A^+=A$.

证明　因 $A^2=A$（幂等阵），则 A 的特征值是 1 或 0，又 $A^{\mathrm{H}}=A$（埃尔米特阵），则 A 可酉相似对角矩阵，即

$$U^{\mathrm{H}}AU=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad A=U\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^{\mathrm{H}}$$

利用 A^+ 的运算性质有

$$A^+=\left[U\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^{\mathrm{H}}\right]^+=U\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^+U^{\mathrm{H}}=U\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^{\mathrm{H}}=A$$

24. $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\operatorname{rank}A=1$，证明：

(1) 存在数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，使

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

(2) $A^+=\dfrac{1}{a}A^{\mathrm{H}}$，其中 $a=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_ib_j|^2$.

证明　(1) 因 $\operatorname{rank}A=1$，必存在可逆矩阵 P,Q，使

$$PAQ=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix},\quad 即\quad A=P^{-1}\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$$

设 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 的第一列为 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}^{-1}$ 的第一行为 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\boldsymbol{BC}$$

为满秩分解.

(2) $\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}}=\sum\limits_{j=1}^{n}|b_j|^2$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}=\sum\limits_{i=1}^{m}|a_i|^2$，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{+}&=\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\\&=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m}|a_i|^2\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}|b_j|^2}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_ib_j|^2}(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{H}}\\&=\frac{1}{a}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}},\quad 其中\quad a=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_ib_j|^2\end{aligned}$$

25. $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r$，$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 是正交矩阵，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}$，其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为可逆矩阵，则

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

证明 由 $\boldsymbol{A}^{+}$ 的运算性质有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{+}&=\left[\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}\right]^{+}=\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\\&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{+}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\\&=\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{+}&\\&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\end{aligned}$$

26. 证明：$\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AC}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$.

证明 由 $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AC}$，两边左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{AC}$$

再由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{A}$，证得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$.

反之，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，两边左乘 $\boldsymbol{A}^{+}$ 可得 $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AC}$.

27. $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，且 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=n$，$\boldsymbol{A}$ 的正交上三角分解为：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$，其中 $\boldsymbol{Q}_{m\times n}$ 的 n 个列标准正交，$\boldsymbol{R}$ 是正对角线元的上三角矩阵，证明：

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

证明 因 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$ 显然为满秩分解，由 $\boldsymbol{A}^{+}$ 的运算性质有 $\boldsymbol{A}^{+}=(\boldsymbol{QR})^{+}=\boldsymbol{R}^{+}\boldsymbol{Q}^{+}$，又 $\boldsymbol{Q}$ 的 n 个列向量是标准正交的，由前面 22 题知 $\boldsymbol{Q}^{+}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，故得 $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$.

28. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，对应的 n 个标准正交的特征向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 组成正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{+}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

证明 显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，则有

$$Q^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)Q=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda,\quad \lambda_i\geqslant 0$$

所以 $A^{\mathrm{T}}A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，由于 Q 是正交阵，利用 A^+ 的运算性质有

$$(A^{\mathrm{T}}A)^+=(Q\Lambda Q^{\mathrm{T}})^+=(Q^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\Lambda^+Q^{\mathrm{T}}=Q\Lambda^+Q^{\mathrm{T}}$$

再根据 A^+ 的计算公式得

$$A^+=(A^{\mathrm{T}}A)^+A^{\mathrm{T}}=Q\Lambda^+Q^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

29. 举例说明有关 Moore-Penrose 逆的下列命题不真：

(1) $(AB)^+=B^+A^+$；

(2) $(A^k)^+=(A^+)^k$，k 为正整数；

(3) 若 λ 是 A 的特征值，则 λ 是 A^+ 的特征值；

(4) 若 P、Q 为可逆矩阵，则 $(PAQ)^+=Q^{-1}A^+P^{-1}$.

解 (1) 取 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，则 $AB=[1]$，$(AB)^+=[1]$，$A^+=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$B^+=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$B^+A^+=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，可见 $(AB)^+\neq B^+A^+$.

(2) 取 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}$，可求得 $A^+=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}$，而 $(A^2)^+=A^+=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}$，$(A^+)^2=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}$，可见 $(A^2)^+\neq(A^+)^2$.

(3) 取 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}$，则 A 的特征值为 1 和 0，而 $A^+=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}$ 的特征值为 $\frac{1}{2}$ 和 0.

(4) 取 $A=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$，$Q=[1]$，则有

$$PAQ=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\qquad (PAQ)^+=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix},\qquad Q^{-1}A^+P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

可见 $(PAQ)^+\neq Q^{-1}A^+P^{-1}$.

30. 求下列矩阵的极小范数广义逆 A_m^-：

(1) $A_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\2 & 1 & 4\end{bmatrix}$；　(2) $A_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 3 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$；

并分别求方程 $A_1X=b_1$ 和 $A_2X=b_2$ 的最小范数解，其中 $b_1=(1,-1)^{\mathrm{T}}$，$b_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解 (1) $A_m^-=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 0\\-10 & 5\\2 & 0\end{bmatrix}$，$A_1X=b_1$ 的最小范数解为 $X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\-15\\2\end{bmatrix}$.

(2) $A_m^-=\frac{1}{154}\begin{bmatrix}8 & 19 & 9\\-10 & 34 & 8\\44 & -11 & 11\end{bmatrix}$，$A_2X=b_2$ 的最小范数解为 $X=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}3\\-2\\13\end{bmatrix}$.

31. 已知

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\-1&4&5&3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}4\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

(1) 用广义逆矩阵方法判定线性方程组 $AX=b$ 是否相容?

(2) 求 $AX=b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解(指出解的类型).

解 (1) 由上面第 10 题已求得 $A^+=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}5&2&-1\\1&1&1\\-4&-1&2\\6&3&0\end{bmatrix}$,由于 $AA^+b=A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\-3\end{bmatrix}\neq b$,所以 $AX=b$ 不相容.

(2) 它的极小范数最小二乘解为 $X_0=A^+b=(1,0,-1,1)^T$.

32. 设矩阵 $G\in A\{1,4\}$(即 G 为最小二乘广义逆),则 $X\in\mathbb{C}^n$ 是不相容线性方程组 $AX=b$ 的最小二乘解的充分必要条件是:对任何 $b\in\mathbb{C}^m$,X 是方程组 $AX=AGb$ 的解,试证明之.

证明 设 $X_0=Gb$,则 $X=Gb$ 为 $AX=b$ 的最小二乘解.

充分性 若 $AX=AGb$,则 $\|AX-b\|=\|AGb-b\|=\|AX_0-b\|$,故 X 为最小二乘解.

必要性 若 X 为最小二乘解,即 $\|AX-b\|=\|AX_0-b\|$,则

$$\begin{aligned}\|Ax-b\|^2&=\|AX-AX_0+AX_0-b\|^2\\&=\|AX-AX_0\|^2+\|AX_0-b\|^2+(AX-AX_0)^H(AX_0-b)+(AX_0-b)^H(AX-AX_0)\end{aligned}$$

由 $\|AX-b\|=\|AX_0-b\|$ 及

$$\begin{aligned}(AX-AX_0)^H(AX_0-b)&=(AX-AGb)^H(AGb-b)=(X^H-b^HG^H)A^H(AGb-b)\\&=(X^H-b^HG^H)[(AGA)^H-A^H]b=0.\end{aligned}$$

(注意:$AG=(AG)^H$,$(AGA)^H=A^H$,$(AX_0-b)^H(AX-AX_0)=[(Ax-AX_0)^H(AX_0-b)]^H=0$,得 $\|AX-AX_0\|^2=0$,即 $AX=AX_0=AGb$.)

33. 求下列矩阵的最小二乘广义逆 A_l^-:

(1) $A_1=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&1\end{bmatrix}$; (2) $A_2=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\2&1&2&1\\2&0&2&2\\4&2&4&2\end{bmatrix}$;

并分别求不相容方程组 $A_1X=b_1$ 和 $A_2X=b_2$ 的最小二乘解,其中 $b_1=(1,0,0)^T$,$b_2=(0,1,0,1)^T$.

解 (1) $A_l^-=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-4&7&1\\7&-4&1\end{bmatrix}$,不相容方程组 $A_1X=b_1$ 的最小二乘解为 $X=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix}$;

(2) $A_e^- = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$，不相容方程组 $A_2X=b_2$ 的最小二乘解为

$$X = \frac{1}{25}(3,9,3,-6)^T$$

34. 用满秩分解法求下列矩阵的极小最小二乘广义逆 A^+：

(1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$；　　(2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

并分别求不相容方程组 $A_1X=b_1$ 和 $A_2X=b_2$ 的极小最小二乘解，其中 $b_1=(1,2,1,2)^T$，$b_2=(0,1,0,0)^T$.

解　(1) $A^+ = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & -2 & 2 \end{bmatrix}$，$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$；

(2) $A^+ = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} 6 & -10 & 11 & 11 \\ 0 & 14 & -7 & -7 \\ 6 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$，$X = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

35. 证明：线性方程组 $AX=b$ 有解的充分必要条件是 $AA^+b=b$ 和 $\text{rank}A=\text{rank}(A|b)$.

证明　充分性　若 $AA^+b=b$ 及 $\text{rank}A=\text{rank}(A|b)$，则后一条件表明 $AX=b$ 相容，显然 $X=A^+b$ 为方程组的解.

必要性　设方程组有解 X. 即 $AX_0=b$，显然有 $\text{rank}A=\text{rank}(A|b)$，且 $AA^+b=AA^+AX_0=AX_0=b$.

36. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$P,Q$ 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵.

(1) 证明 $Q^{-1}A^-P^{-1}\in(PAQ)^-$；

(2) 举例说明 $(PAQ)^+=Q^{-1}A^+P^{-1}$ 不真.

证明　(1) 由 $(PAQ)(Q^{-1}A^-P^{-1})(PAQ)=PAQ$，知 $Q^{-1}A^-P^{-1}\in(PAQ)^-$；

(2) 如取 $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$Q=[1]$，则有 $PAQ=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$(PAQ)^+=\frac{1}{5}[2\quad 1]$，$Q^{-1}A^+P^{-1}=\frac{1}{2}[10]$，可见 $(PAQ)^+\neq Q^{-1}A^+P^{-1}$.

37. 证明：设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{C}^{p\times q}$，$C\in\mathbb{C}^{m\times q}$，则矩阵方程 $AXB=C$ 相容的充分必要条件是：对某个 A^-，B^- 有 $AA^-CB^-B=C$ 成立，且方程的通解为

$$X = A^-CB^- + (Z - A^-AZBB^-)$$

其中 $Z\in\mathbb{C}^{m\times p}$ 任意.

证明　必要性　因为 $AXB=C$，所以有

$$AA^-CB^-B = AA^-(AXB)B^-B = AXB = C$$

充分性　设对某个 A^- 和 B^-，有 $AA^-CB^-B=C$，则 A^-CB^- 显然是解，且对任何 $Z\in\mathbb{C}^{n\times p}$，$X=A^-CB^-+(Z-A^-AZBB^-)$ 都是解. 设 Y 为任一解，令 $Y=Z$ 就有 $Y=A^-CB^-+y-A^-(AyB)B^-$，即任一解 Y 也满足 $A^-CB^-+(Z-A^-AZBB)$ 的形式.

38. 设非齐次线性方程组 $AX=b$ 有解，证明：此方程组的一般解为 $X=A^-b$，其中 A^- 是 A 的任意一个广义逆.

证明　设 $AX=b$ 有解 $X=\alpha$，那么 $A\alpha=b$，因为 $A=AA^-A$，所以 $b=A\alpha=AA^-A\alpha=AA^-b=A(A^-b)$，这表明 A^-b 是 $AX=b$ 的一个解.

反之，对于 $AX=b$ 的任意一个解 α，我们要证明存在 A 的一个广义逆 A^-，使得 $\alpha=A^-b$ 即可.

设 A 是一个 $s\times n$ 矩阵，其秩为 r，并有

$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q,\quad \text{其中}\quad P,Q\text{ 分别是 }S\text{ 阶、}n\text{ 阶可逆矩阵.}$$

由于 A 的广义逆具有形式

$$A^-=Q^{-1}\begin{bmatrix}I_r&B\\C&D\end{bmatrix}P^{-1}\tag{$*$}$$

因此要找到矩阵 B,C,D，使得 $\alpha=Q^{-1}\begin{bmatrix}I_r&B\\C&D\end{bmatrix}P^{-1}b$，即有

$$Q\alpha=\begin{bmatrix}I_r&B\\C&D\end{bmatrix}P^{-1}b$$

由已知条件 $A\alpha=b$，即 $P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q\alpha=b$ 可得

$$\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q\alpha=P^{-1}b$$

分别将 $Q\alpha,P^{-1}b$ 分块，设

$$Q\alpha=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix}\begin{matrix}r\text{ 行}\\n-r\text{ 行}\end{matrix},\qquad P^{-1}b=\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\end{bmatrix}\begin{matrix}r\text{ 行}\\s-r\text{ 行}\end{matrix}$$

于是有

$$\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\end{bmatrix}$$

由此可知 $Y_1=Z_1,Z_2=0$. 由于 $b\neq 0$，所以 $P^{-1}b\neq 0$，从而 $Z_1\neq 0$，不妨设

$$Z_1=(k_1,k_2,\cdots,k_r)^{\mathrm{T}},\quad \text{其中 } k_i\neq 0$$

若在 A^- 的表达式($*$)中取 $B=0,D=0,C=(0,\cdots,0,k_i^{-1}Y_2,0,\cdots,0)$，从而有

$$\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}b=\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_1\\CZ_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix}=Q\alpha$$

于是得

$$\alpha=Q^{-1}\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}b$$

这表明只要取

$$A^- = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

就可以使 $AX=b$ 的任意一个解 $\alpha=A^- b$.

39. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ x_1+x_3=0 \\ 2x_1+2x_3=1 \\ 2x_1+4x_2+6x_3=3 \end{cases}$$

(1) 证明此线性方程组无解(或为不相容线性方程组);

(2) 求此方程组的最佳(极小)最小二乘解 X;

(3) 求 $\|X\|_2$,并求 $b=(1,0,1,3)^T$ 到 $R(A)$ 的最短距离,这里 A 为此方程组的系数矩阵.

解 (1)

$$(A \vdots b) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 4 & 6 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

由于 $\mathrm{rank}A=2\neq\mathrm{rank}(A \vdots b)=3$,故方程组不相容.

(2) 由(1)可知,取

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CC^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad [CC^T]^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^TB=\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}, \qquad [B^TB]^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T=\frac{1}{30}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 10 & -2 \\ 2 & -4 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

最佳(极小)二乘解

$$X=A^+b=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(3) $\|X\|_2=\dfrac{\sqrt{14}}{10}$

b 到 $R(A)$ 的最短距离为 $\|AX-b\|_2=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.

40. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

的最佳(极小)最小二乘解.

解

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 4 & 0 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = 2 \neq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) = 3$$

由此可知该方程组无解,其最佳(极小)最小二乘解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$. 利用满秩分解方法求得

$$\boldsymbol{A}^+ = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

于是最佳(极小)最小二乘解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 25 \end{bmatrix}$$

41. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha} \notin \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$;

(2) 在 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$ 中求一向量 $\boldsymbol{Y}_0$,使 $\boldsymbol{Y}_0$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 距离最近;

(3) 求 $\|\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{\alpha}\|_2$.

解 (1)

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

知 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2\neq\operatorname{rank}(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\alpha})=3$,故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 无解,所以 $\boldsymbol{\alpha}\notin\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$.

(2) 要求 $Y_0\in\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$,$Y_0$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 距离最近,即要求 $\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{\alpha}=Y_0$.

由于

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{BC}$$

可求得

$$A^{+}=C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\\ -1 & 3 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\\ 4 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

故

$$Y_0=AA^{+}\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{11}(12,8,6,14)^{\mathrm{T}}$$

(3) $\|Y_0-\boldsymbol{\alpha}\|_2=\dfrac{2}{\sqrt{11}}$.

42. 设平面曲线的4个点坐标为$(-1,3)^{\mathrm{T}},(0,0)^{\mathrm{T}},(1,2)^{\mathrm{T}},(2,5)^{\mathrm{T}}$,求一与这些点吻合的二次曲线.

解 设二次曲线 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$,将已知点坐标代入,得线性方程组

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 2\\ 5\end{bmatrix}$$

其增广矩阵

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4 & 5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 12\end{array}\right]$$

由于 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=3\neq\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=4$,所以方程组不相容. 但 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩,所以其广义逆为$\boldsymbol{A}^{+}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,最佳最小二乘解为

$$\boldsymbol{x}_0=(a_0,a_1,a_2)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{5},-\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

故与这些点吻合的二次曲线为

$$y=\frac{3}{5}-\frac{7}{10}x+\frac{3}{2}x^2$$

43. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$,$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=n$,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为不相容的线性方程组.

(1) 求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最佳(极小)最小二乘解 $\boldsymbol{x}_0$;

(2) 利用矩阵的正交三角分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}_{m\times n}\boldsymbol{R}_{n\times n}$,证明最佳最小二乘解为 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.

解 (1) 因 $\boldsymbol{A}$ 列满秩,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^{+}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{-1}$,故方程组的最佳最小二乘解为

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

(2) 由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$ 是正交三角分解,其中 $\boldsymbol{Q}_{m\times n}$的 n 个列向量应是标准正交的,即 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}_n$,而 $\boldsymbol{R}$ 是上三角可逆矩阵,于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_0&=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QR})^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\&=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

44. 用奇异值分解证明：

(1) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$；

(2) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{+})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$；

(3) $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^{+})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$；

(4) $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$.

证明 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的奇异值分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$，其中 $\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}$，$\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值；$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 分别为 m,n 阶酉矩阵.

设分块矩阵 $\boldsymbol{U}=(\underset{m\times r}{\boldsymbol{U}_1}\ \vdots\ \boldsymbol{U}_2)$，$\boldsymbol{V}=(\underset{n\times r}{\boldsymbol{V}_1}\ \vdots\ \boldsymbol{V}_2)$，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{H}},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}} \tag{①}$$

由广义逆的运算性质及 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解式，有

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}} \tag{②}$$

又因为 $\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{I}_r$，$\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{I}_r$，故有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Delta}^2\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}},\qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Delta}^2\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{H}} \tag{③}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}},\qquad \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{H}} \tag{④}$$

由上面①～④式可知(留给读者作练习)：

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}_1) & \text{(i)}\\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V}_1) & \text{(ii)}\\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{+})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V}_1) & \text{(iii)}\\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}_1) & \text{(iv)}\\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V}_1) & \text{(v)}\\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}_1) & \text{(vi)}\\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V}_1) & \text{(vii)}\end{cases}$$

由(i)，(iv)，(vi)式得

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})$$

于是(1)得证.

由(ii)，(iii)，(v)，(vii)式得

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{+})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})$$

于是(2)得证.

因

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^{+})=\boldsymbol{R}^{\perp}(\boldsymbol{A})\text{ 及 }\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}^{\perp}(\boldsymbol{A}^{+})$$

且由于正交补的唯一性，得

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^{+})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})$$

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})$$

于是(3)与(4)得证.

第7章 几类特殊矩阵与特殊积

习　题　7(1)

1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为非负矩阵，且是非奇异的，问逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 满足

$$b_{ij}\geqslant 0(i\neq j),\qquad \boldsymbol{B}\geqslant \boldsymbol{0}$$

的条件是什么？

解　若 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\geqslant\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{A}$ 为单调矩阵，其充要条件是可从 $\boldsymbol{AX}\geqslant\boldsymbol{0}$ 推出 $\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$，这里 $\boldsymbol{X}$ 是列向量.

事实上，因为 $\boldsymbol{A}$ 是单调矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant\boldsymbol{0}$. 若 $\boldsymbol{AX}\geqslant\boldsymbol{0}$，则必有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}\geqslant\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$.

反之，若可从 $\boldsymbol{AX}\geqslant\boldsymbol{0}$ 推出 $\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异. 事实上，设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有解 $\overline{\boldsymbol{X}}$，即 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{0}$，于是 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}\geqslant\boldsymbol{0}$，由假设知 $\overline{\boldsymbol{X}}\geqslant\boldsymbol{0}$；再由 $\boldsymbol{A}(-\overline{\boldsymbol{X}})=-\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{0}$，又可推出 $-\overline{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，所以 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在.

记 $\boldsymbol{\alpha}_j^{-1}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 j 列 $(j=1,2,\cdots,n)$，则 $\boldsymbol{A\alpha}_j^{-1}=\boldsymbol{e}_j\geqslant\boldsymbol{0}$，则假设有 $\boldsymbol{\alpha}_j^{-1}\geqslant\boldsymbol{0}$，这就是说 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 j 列 $\boldsymbol{\alpha}_j^{-1}$ 为非负向量，故 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant\boldsymbol{0}$. 这就证明了 $\boldsymbol{A}$ 为单调矩阵.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 n 维向量，证明：

(1) 如果 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{Ax}>\boldsymbol{0}$；

(2) 如果 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{Ax}\geqslant\boldsymbol{Ay}$；

(3) 如果对所有 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 都有 $\boldsymbol{Ax}\geqslant\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{0}$.

证明　(1) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，由于 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}$ 为正矩阵，$a_{ij}>0(i,j=1,2,\cdots,n)$，又由 $\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{X}$ 为非零的非负向量，$x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n$，至少有一个不为 $0)$，所以 $(\boldsymbol{AX})_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j>0(i=1,2,\cdots,n)$，故 $\boldsymbol{AX}>\boldsymbol{0}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\geqslant\boldsymbol{0}$，如果 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$，由上题知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})>\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{AX}>\boldsymbol{AY}$；如果 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$. 故有 $\boldsymbol{AX}\geqslant\boldsymbol{AY}$.

(3) 反证. 若不然，对所有 $\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{X}_j\geqslant\boldsymbol{0}(j=1,2,\cdots,n)$ 时，有 $\boldsymbol{A}<\boldsymbol{0}$，即 $a_{ij}<0(i,j=1,2,\cdots,n)$，则当 $\boldsymbol{X}$ 有一个分量 $\boldsymbol{X}_k>\boldsymbol{0}$ 时都有

$$(\boldsymbol{AX})_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j<0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

即 $\boldsymbol{AX}<\boldsymbol{0}$，这与假设总有 $\boldsymbol{AX}\geqslant\boldsymbol{0}$ 矛盾. 故 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{0}$.

3. 证明：设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，如果 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是素矩阵，但反之未必.

证明 因为 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$，由 Perron 定理知 $\rho(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值，且 $\boldsymbol{A}$ 的任一不等于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征值 λ 必有 $|\lambda|<\rho(\boldsymbol{A})$，即只有 1 个模为 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 为素矩阵. 但反之不真，因为例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

就是素矩阵(不难验证 $\boldsymbol{A}^4>0$)，显然 $\boldsymbol{A}$ 不是正矩阵.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非负素矩阵，证明 $\rho(\boldsymbol{A})>0$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{0}$，所以由非负矩阵谱半径的估计式

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 是素矩阵，即存在正整数 m，使得 $\boldsymbol{A}^m>\boldsymbol{0}$，因而 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，因而 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，显然 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}>0$，故 $\rho(\boldsymbol{A})>0$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶不可约非负对称矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 是素矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}+\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$ 非奇异.

证明 必要性 设 $\boldsymbol{A}$ 是非负素矩阵，则 $\rho(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值，且 $\boldsymbol{A}$ 的任何一个其他特征值 λ，都有 $|\lambda|<\rho(\boldsymbol{A})$，而 $-\rho(\boldsymbol{A})$ 的模 $|-\rho(\boldsymbol{A})|=\rho(\boldsymbol{A})$，显然 $-\rho(\boldsymbol{A})$ 就不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故 $|\boldsymbol{A}+\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}-(-\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I})|\neq0$，即 $\boldsymbol{A}+\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$ 非奇异.

充分性 设 $|\boldsymbol{A}+\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}|\neq0$，则 $-\rho(\boldsymbol{A})$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由题设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶不可约非负对称矩阵，那么它的特征值全为实数，且由 Perron-Frobenius 定理知 $\rho(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的(正的)单特征值，而 $-\rho(\boldsymbol{A})$ 又不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以模等于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的实特征值只能是 $\rho(\boldsymbol{A})$ 一个，再不会有第二个，即 $k=1$，故 $\boldsymbol{A}$ 为素矩阵.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7&2&2\\2&1&1\\4&2&2\end{bmatrix}$，求 $\rho(\boldsymbol{A})$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}[\rho(\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}]^n$.

解 $\rho(\boldsymbol{A})=9$；

$\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\rho(\boldsymbol{A})=9$ 的正特征向量 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$；

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 对应于特征值 $\rho(\boldsymbol{A})=9$ 的正特征向量 $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}[\rho(\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}]^n=(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix}9&3&3\\3&1&1\\6&2&2\end{bmatrix}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶不可约非负矩阵，证明：如果 $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\boldsymbol{A}^{n-1}>\boldsymbol{0}$.

证明 显然，可以选取 n 阶不可约非负矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}\geqslant r(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})$，$r>0$. 于是 $\boldsymbol{A}^{n-1}\geqslant r^{n-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{n-1}>\boldsymbol{0}$.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是单调矩阵，问 $\boldsymbol{A}$ 是怎样的矩阵？

解　若 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是单调矩阵，则 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{0}$（非负）.

9. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正随机矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})=1$.

证明　注意到 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值，可以转而考虑 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的谱半径. 根据随机矩阵 $\boldsymbol{A}$ 应满足的条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=1(j=1,2,\cdots,n)$，显然

$$\boldsymbol{\zeta}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量，而且 1 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值，$\boldsymbol{\zeta}$ 是相应于特征值 1 的特征向量.

另一方面，由于 $\boldsymbol{A}$ 是正矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正矩阵，又 $\boldsymbol{\zeta}>0$，依 Perron-Frobenius 定理知，$\boldsymbol{\zeta}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的优势特征向量，即 $\boldsymbol{\zeta}$ 是相应于优势特征值 $\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 的特征向量，因此

$$\rho(\boldsymbol{A})=\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=1$$

10. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和它的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 都是 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，问 $\boldsymbol{A}$ 是怎样的矩阵？

解　若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 都是 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 必为对角矩阵.

11. 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 矩阵的充分必要条件是：$a_{ii}>0$，$a_{ij}\leqslant0(i\neq j)$ 以及 $\rho(\boldsymbol{B})<1$，这个结论是否正确？这里 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$，而 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

解　应当表述为矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij}\leqslant0(i\neq j)$，则 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 矩阵的充要条件是 $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$，且矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$ 满足 $\rho(\boldsymbol{B})<1$，这里 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.（因为 $\boldsymbol{M}$ 矩阵只不过是 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵（$a_{ij}\leqslant0,i\neq j$）的特殊情况，所以应先强调 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵，这样更合适些.）

12. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，问 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是否为 $\boldsymbol{M}$ 矩阵？

解　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，但和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不一定是 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，例如，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.5 & -1\\ 0 & 0.5\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ -1 & 0.5\end{bmatrix}$$

容易验证 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ 是奇异的，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 不存在，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不是 $\boldsymbol{M}$ 矩阵（不作特别声明时，$\boldsymbol{M}$ 矩阵指的是非奇异 $\boldsymbol{M}$ 矩阵）.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非奇异 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，$\boldsymbol{X}$ 是 n 维列向量，证明：若 $\boldsymbol{AX}\geqslant\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$.

证明　设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}\geqslant\boldsymbol{0}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 矩阵满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant\boldsymbol{0}$ 推出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\geqslant\boldsymbol{0}$.

14. 证明：设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称的矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $\boldsymbol{M}$ 矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

证明　因为 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $\boldsymbol{M}$ 矩阵等价于 $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式为正数；而在 $\boldsymbol{A}$ 是实对称的条件下，$\boldsymbol{A}$ 的所有主子式是正的等价于 $\boldsymbol{A}$ 是正定的.

15. 证明：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}\in\boldsymbol{Z}_n$. 特别，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 矩阵.

提示　证明很容易，考察 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{b}a_{1k}b_{kn}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}b_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kn}\end{bmatrix}$

有

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant\boldsymbol{0}$$

习　题　7(2)

1. 设 $A=\mathrm{diag}(1,2,\cdots,n)$，$m$ 阶矩阵 B 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m(m>1)$，试计算 $A\otimes B$ 的特征值.

解　$A\otimes B$ 的特征值为 $i\lambda_j$，即

$$\lambda_1,\cdots,\lambda_m;\quad 2\lambda_1,\cdots,2\lambda_m;\quad \cdots,n\lambda_1,\cdots,n\lambda_m$$

2. 设 $A_{m\times m}$ 和 $B_{n\times n}$ 都是酉矩阵，计算 $(A^H\otimes B)(A\otimes B^H)$.

解　$(A^H\otimes B)(A\otimes B^H)=(A^HA)\otimes(BB^H)=I_m\otimes I_n=I_{mn}$.

3. 设 $A^2=A,B^2=B$，证明：$(A\otimes B)^2=A\otimes B$.

证明　由性质知

$$(A\otimes B)^2=(A\otimes B)(A\otimes B)=(AA)\otimes(BB)=A\otimes B$$

4. 设 A 和 B 都是(半)正定矩阵，证明：$A\otimes B$ 也是(半)正定矩阵.

证明　因为 $(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H=A\otimes B$，所以 $A\otimes B$ 是埃尔米特矩阵，又 $\lambda(A\otimes B)=\lambda(A)\lambda(B)>(\geqslant)0$，故 $A\otimes B$ 是(半)正定矩阵.

5. 用 Kronecker 积求矩阵 A 的特征值及相应的特征向量，其中

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0&0&2&0\\2&4&0&0&2&4\\1&0&1&0&1&0\\1&2&1&2&1&2\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&3&6\end{bmatrix}$$

解　令

$$B=\begin{bmatrix}2&0&2\\1&1&1\\0&0&3\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$$

可以看出：$A=B\otimes C$. 容易求得 B 的特征值为 1,2,3；C 的特征值为 1,2. 因此，求得 A 的 6 个特征值为 1,2,2,3,4,6.

容易求得 B 的对应于 1,2,3 的特征向量分别为 $x_1=(0,1,0)^T,x_2=(1,1,0)^T,x_3=(4,3,2)^T$；$C$ 的对应于 1,2 的特征向量分别为 $y_1=(1,-1)^T,y_2=(0,1)^T$. 因此，A 的对应于 1,2,2,3,4,6 的特征向量分别为

$$\alpha_1=x_1\otimes y_1=(0,0,1,-1,0,0)^T,\qquad \alpha_2=x_1\otimes y_2=(0,0,0,1,0,0)^T,$$
$$\alpha_3=x_2\otimes y_1=(1,-1,1,-1,0,0)^T,\qquad \alpha_4=x_3\otimes y_1=(4,-4,3,-3,2,-2)^T,$$
$$\alpha_5=x_2\otimes y_2=(0,1,0,1,0,0)^T,\qquad \alpha_6=x_3\otimes y_2=(0,4,0,3,0,2)^T.$$

6. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m},B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，它们的特征向量分别为 ξ 和 η，证明：$\xi\otimes\eta$ 是 $A\otimes B$ 的特征向量.

证明　$A\xi=\lambda\xi,B\eta=\mu\eta$，则有

$$(A\otimes B)(\xi\otimes\eta)=(A\xi)\otimes(B\eta)=(\lambda\xi)\otimes(\mu\eta)=\lambda\mu(\xi\otimes\eta)$$

7. 证明：两个反埃尔米特矩阵的直积是埃尔米特矩阵.

证明　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是反埃尔米特矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{B}$，由性质得

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=(-\boldsymbol{A})\otimes(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$$

即 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 是埃尔米特矩阵.

8. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 m 维列向量，$\boldsymbol{y}$ 是 n 维列向量，且 $\|\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{y}\|_2=1$，试计算 $\|\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}\|_2$.

解　因为

$$\|\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}\|_2^2=(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x})\otimes(\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y})=1$$

所以 $\|\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}\|_2=1$.

9. 设 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 是单位列向量，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正交矩阵，计算 $\|\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{x}\|_F$.

解　因为

$$\|A\otimes\boldsymbol{x}\|_F^2=\mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{x})]=\mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\otimes(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})]=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_n)=n$$

所以 $\|\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{x}\|_F=\sqrt{n}$.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 m 阶和 n 阶酉矩阵，试计算 $\|\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\|_2$.

解　由

$$\|\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\|_2^2=\rho[(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})]=\rho[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\otimes(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})]=\rho(\boldsymbol{I})=1$$

知 $\|\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\|_2=1$.

11. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 和 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，问：矩阵方程 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^2-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是什么？

解　由于原方程等价于 $[[\boldsymbol{A}^2\otimes\boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}]-2\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]\overline{\mathrm{vec}}(x)=0$，其系数矩阵的特征值为 $\lambda_i^2\cdot1+1\cdot\mu_j^2-2\lambda_i\mu_j=(\lambda_i-\mu_j)^2$，所以存在非零解的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共特征值.

12. 证明：$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^+=\boldsymbol{A}^+\otimes\boldsymbol{B}^+$.

证明　根据直积性质有

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^+\otimes\boldsymbol{B}^+)(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\\
&(\boldsymbol{A}^+\otimes\boldsymbol{B}^+)(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^+\otimes\boldsymbol{B}^+)=(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)\otimes(\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^+)=\boldsymbol{A}^+\otimes\boldsymbol{B}^+\\
&[(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^+\otimes\boldsymbol{B}^+)]^{\mathrm{H}}=[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^+)]^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{H}}\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^+)^{\mathrm{H}}\\
&\qquad=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^+)=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^+\otimes\boldsymbol{B}^+)
\end{aligned}$$

同理

$$[(\boldsymbol{A}^+\otimes\boldsymbol{B}^+)(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})]^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}^+\otimes\boldsymbol{B}^+)(\boldsymbol{A}\otimes B)$$

故

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^+=\boldsymbol{A}^+\otimes\boldsymbol{B}^+$$

附录 模拟考试自测题(共15套)

自测题一

一、(35 分)设$\mathbb{P}$为数域,$V=\mathbb{P}^{m\times n}$,$\boldsymbol{C}=(c_{ij})\in\mathbb{P}^{m\times n}$,$\mathscr{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{XC}$,$\forall \boldsymbol{X}\in V$.

(1) 证明:V 为数域$\mathbb{P}$上的线性空间;

(2) 求出 V 的一组基,及 $\dim V$,并验证之;

(3) 证明$\mathscr{A}$是 V 上的线性变换,并求$\mathscr{A}$在 V 上的上述基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(4) 当 $m=n=2$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$时,分别求$\mathscr{A}$和 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和全部特征向量;

(5) 问$\mathscr{A}$和 $\boldsymbol{A}$ 可否对角化?若能,试求 V 的基:使$\mathscr{A}$在此基下的矩阵为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$;

(6) 给出从第(2)题中的基到第(5)题中的基变换公式、过渡矩阵和相应的坐标变换公式.

解 (1) 显然 $V=\mathbb{P}^{m\times n}\neq\varnothing$(非空),由矩阵的加法和数乘的运算法则知:对 $\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in V$ 及 $\lambda,\mu\in\mathbb{P}$,有:①$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$,②$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$,③$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$,④$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,⑤$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$,⑥$\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$,⑦$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$,⑧$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.从而 V 对矩阵的加法和数乘构成$\mathbb{P}$上的线性空间.

(2) 取(Ⅰ)为$\{\boldsymbol{E}_{ij}\mid i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$,则(Ⅰ)为 V 的一组基.因为若有 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{0}$,即$(\lambda_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{0}$,从而 $\lambda_{ij}=0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,于是(Ⅰ)线性无关.而对 $\forall \boldsymbol{X}\in V$,设 $\boldsymbol{X}=(a_{ij})_{m\times n}$,则 $\boldsymbol{X}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$,从而 $\dim V=mn$.

(3) 对 $\forall \boldsymbol{X}\in V$,$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}\in V$,显然$\mathscr{A}$是 V 上的变换,且对 $\forall \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in V$,$\lambda\in\mathbb{P}$,$\mathscr{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{XC}+\boldsymbol{YC}=\mathscr{A}(\boldsymbol{X})+\mathscr{A}(\boldsymbol{Y})$,$\mathscr{A}(\lambda\boldsymbol{X})=(\lambda\boldsymbol{X})\boldsymbol{C}=\lambda(\boldsymbol{XC})=\lambda\mathscr{A}(\boldsymbol{X})$,于是$\mathscr{A}$是 V 上的线性变换.由于

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{C}_{12}\cdots\boldsymbol{C}_{1n}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{E}_{11},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{21},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn})\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11}\\ \boldsymbol{C}_{12}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}_{1n}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

类似的其余$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{ij})$在基(Ⅰ)下的坐标依次为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{21}\\ \boldsymbol{C}_{22}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}_{2n}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{n1}\\ \boldsymbol{C}_{n2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}_{nn}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \boldsymbol{C}_{11}\\ \boldsymbol{C}_{12}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}_{1n}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \boldsymbol{C}_{m1}\\ \boldsymbol{C}_{m2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}_{mn}\end{bmatrix}$$

即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{11}\cdots\boldsymbol{E}_{1n}\boldsymbol{E}_{21}\cdots\boldsymbol{E}_{mn})=(\boldsymbol{E}_{11}\cdots\boldsymbol{E}_{1n}\boldsymbol{E}_{21}\cdots\boldsymbol{E}_{mn})\boldsymbol{A}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & & & \\ & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & & \boldsymbol{0}\\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\in\mathbb{P}^{mn\times mn},\quad \text{主对角线上是 } m \text{ 个 } \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}.$$

即为所求的$\mathscr{A}$在基(Ⅰ)下的矩阵.

(4) 当$m=n=2,\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$时,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$,由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & & \boldsymbol{0}\\ -1 & \lambda-1 & & \\ & & \lambda-1 & -1\\ \boldsymbol{0} & & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)^2$$

得$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\lambda_4=2$,也是$\mathscr{A}$的全部特征值.

当$\lambda=0$时,解$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{cases}-x_1-x_2=0\\ -x_1-x_2=0\\ -x_3-x_4=0\\ -x_3-x_4=0\end{cases}$$

显然,对应$\lambda_1=\lambda_2=0$的全部特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1\\ -\boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{C}_2\\ -\boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}+\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\text{ 不全为 }0$$

当 $\lambda=2$ 时，解 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \\ x_3-x_4=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases}$

对应 $\lambda_3=\lambda_4=2$ 的全部特征向量为

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_3 \\ \boldsymbol{C}_3 \\ \boldsymbol{C}_4 \\ \boldsymbol{C}_4 \end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\boldsymbol{C}_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_3, \boldsymbol{C}_4 \text{ 不全为 } 0$$

而 $\mathscr{A}$ 的属于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的全部特征向量为

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & -\boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 & -\boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} \in V, \quad \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2 \text{ 不全为 } 0$$

$\mathscr{A}$ 的属于 $\lambda_3=\lambda_4=2$ 的全部特征向量为

$$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{E}_{11} \quad \boldsymbol{E}_{12} \quad \boldsymbol{E}_{21} \quad \boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_3 \\ \boldsymbol{C}_4 & \boldsymbol{C}_4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_3, \boldsymbol{C}_4 \text{ 不全为 } 0$$

可以验证 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{Y})=2\boldsymbol{Y}$.

(5) $\mathscr{A}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 都可以相似对角化. 取如下的向量组(Ⅱ)：

$$\{\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{21}-\boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_4=\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}\}$$

则类似于(1)中的(Ⅰ)，可以证明(Ⅱ)是 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，且有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4)=(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{\Lambda}, \quad \text{其中} \quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

即 $\mathscr{A}$ 在基(Ⅱ)下的矩阵为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

取 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆($|\boldsymbol{P}|=-4\neq 0$)，且有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$

$\left(\text{不难验证，注意 } \boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

(6) 从(Ⅰ)到(Ⅱ)的基变换公式为

$$(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4)=(\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{P}.$$

其中过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 即为(5)中所示. 相应的坐标变换公式为

$$\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}_1$$

其中 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 分别为 $\boldsymbol{X}\in V$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标.

二、(15 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&2&-1\\2&1&0\end{bmatrix}$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子、不变因子和初等因子.

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形.

(3) 求 $\sin\boldsymbol{A}$.

解　(1) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

行列式因子：$\boldsymbol{D}_3=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,\boldsymbol{D}_2=1,\boldsymbol{D}_1=1$；

不变因子：$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$；

初等因子：$(\lambda-1),(\lambda-2)^2$.

(2) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1&\\&\boldsymbol{J}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}$.

(3) 对 $\lambda_1=1,(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_1=0$,得 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$；

对 $\lambda_2=2,(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_2=0$,得 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

再求 $\lambda_2=2$ 的一个广义特征向量：

由 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_3=-\boldsymbol{X}_2$,得 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

取
$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

令 $f(\boldsymbol{A})=\sin\boldsymbol{A}$,则

$$f[\boldsymbol{J}_1(\lambda_1)]=f(\lambda_1)=\sin1,\qquad f[\boldsymbol{J}_2(\lambda_2)]=\begin{bmatrix}\sin2&\cos2\\0&\sin2\end{bmatrix}$$

故 $\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(f[\boldsymbol{J}_1(\lambda_1)],f[\boldsymbol{J}_2(\lambda_2)])\boldsymbol{P}^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin1&&\\&\sin2&\cos2\\&&\sin2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos2+\sin2&\cos2&-\cos2\\\sin2-\sin1&\sin2-\sin1&\sin1-\sin2\\\sin2+\cos2-\sin1&\cos2+\sin1&\sin1-\cos2\end{bmatrix}$$

三、(10 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{6}&\frac{1}{10}\\\frac{1}{8}&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{10}&\frac{1}{6}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$

(1) 求证：矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^k\}$ 收敛,并求当 $k\to\infty$ 时极限；

(2) 证明：矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$ 绝对收敛,并写出其和矩阵的表达式.

解 (1) $\|A\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{ij}|=\max\left\{\frac{14}{30},\frac{3}{8},\frac{14}{30}\right\}=\frac{14}{30}<1$，故 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0$；

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ 的收敛半径为 1，而 $\|A\|_\infty<1$ 在其收敛域内，故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ 绝对收敛，且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}$.

四、(20 分)设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\|A\|_1,\|A\|_{m_1},\|A\|_\infty,\|A\|_{m_\infty},\mathrm{cond}(A)_\infty$ 以及 $\rho(A)$；

(2) 问 A 可否进行 LU 分解，为什么？

(3) 求 B^-,B^+,B_r^-.

解 (1) $\|A\|_1=5,\|A\|_{m_1}=15,\|A\|_\infty=5,\|A\|_{m_\infty}=6$；又因为

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{bmatrix},\qquad \|A^{-1}\|_\infty=\frac{7}{5}$$

所以

$$\mathrm{cond}(A)_\infty=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty=\frac{7}{5}\times 5=7$$

$$|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2,\quad \lambda_1=5,\quad \lambda_2=\lambda_3=-1$$

故 $\rho(A)=\lim|\lambda_i|=5$.

(2) $\Delta_1=1\neq 0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3\neq 0$，故可分解.

(3) B^-,B^+,B_r^- 均可取 B^{-1}.

五、(10 分)设线性空间 V^n 中，从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 C，证明：有非零向量 $\alpha\in V^n$，使 α 在两组基下坐标相同的充要条件是 1 为矩阵 C 的特征值.

证明 设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 分别为$\mathscr{A}$在两组基下的坐标，则 $X=CY$，当 $X=Y$ 时有：$(I-C)X=\theta$，则 $|I-C|=0$，故 C 有特征值 1.

反之，若 1 是过渡矩阵 C 的一个特征值，设其对应的特征向量为 X，即 $CX=1\cdot X$，由坐标变换公式知，$\mathscr{A}$在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标 $Y=CX$，故有 $Y=X$.

六、(10 分)设 A 是 n 阶实对称正定矩阵，证明：存在非奇异矩阵 P，使 A 与单位矩阵相合，即

$$P^TAP=I$$

证明 由于 A 对称正定，所以存在正交矩阵 C，使

$$C^TAC=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=D$$

其中特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

对 $\forall X\neq 0$，有 $Y=CX$，使

$$X^TAX=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=Y^TDY$$

其中 $Y\neq 0$. 令 $y_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}z_1,y_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}=z_2,\cdots,y_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}z_n$. 于是

$$Y=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{bmatrix}Z=BZ,\quad Z\neq\theta$$

故 $Y^TDY=Z^T(B^TDB)Z=Z^TZ$. 而 $X=C^TY=C^TBZ=PZ$(令 $C^TB=P$),所以

$$Y^TDY=X^TAX=Z^T(P^TAP)Z=Z^TZ$$

因 Z 的任意性,知 $P^TAP=I$,即 A 与 I 相合.

自测题二

一、(8 分)设矩阵 $A=\lambda I$($\lambda\in\mathbb{R}$,I 为单位矩阵),按通常意义下的矩阵加法与数乘运算,问下列集合 V 是否构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?若是,试求出它的维数与一组基.

$$V=\{a_0I+a_1A+\cdots+a_nA^n\mid a_i\in\mathbb{R}\}$$

解　$A=\lambda I$,$A^k=\lambda^kI$,$a_kA^k=a_k\lambda^kI$

$$\forall\, a_0I+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^k=(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n)I$$

其中 $a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n\in\mathbb{R}$,故取 V 的基为 I,$\dim V=1$.

二、(12 分)

(1) 在 $P[x]_2$ 中,设 $\alpha\in P[x]_2$ 在基 $1,x,x^2$ 下的坐标为$(1,0,-1)$,试写出 α 在另一组基 $1+x,x+x^2,x^2$ 下的坐标;

(2) 设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$,定义变换 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathscr{A}[(a_1,a_2,a_3)]=(a_1^2,a_1+a_2,a_3)$$

问:$\mathscr{A}$ 是否为线性变换,为什么?

(3) 在 $\mathbb{R}^2$ 中,函数 $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle(a_1,a_3),(b_1,b_2)\rangle=a_1b_1-a_2b_2$ 是不是内积?若不是,给出反例.

解　(1)从基 $1,x,x^2$ 到基 $1+x,x+x^2,x^2$ 的过渡矩阵

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

所以 $\mathscr{A}$ 在新基下的坐标为 $C^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$.

(2) 不是线性变换. 因为

$$\mathscr{A}(\alpha+\beta)=(a_1+2a_1b_1+b_1^2,a_1+b_1+a_2+b_2,a_3+b_3)\neq\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta)$$

(3) 不是内积. 如 $\alpha=(1,2)$,$\langle(1,2),(1,2)\rangle=1-4=-3<0$,不具有非负性.

三、(20 分)在$\mathbb{R}^3$中,已知一组基$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

(1) 试将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$改造为正交基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$;

(2) 若有线性变换$\mathscr{A}$,它在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,求$\mathscr{A}$在上述正交基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$下的矩阵.

解 (1) 利用 Schmidt 正交化方法,得

$$\boldsymbol{e}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{e}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{e}_3=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)^{\mathrm{T}}$$

(2) 从$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$的过渡阵$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-2&-\frac{4}{3}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&1&3\\0&0&-6\end{bmatrix}$,故所求$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-2&-\frac{4}{3}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

四、(15 分)

(1) 设$\boldsymbol{A}$是n阶实对称矩阵,且$\boldsymbol{A}$的特征值分别为$1,\sqrt{2},\cdots,\sqrt{n}$. 试求$\|\boldsymbol{A}\|_F$,$\rho(\boldsymbol{A})$,$\|\boldsymbol{A}\|_2$,$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2$,$\|(\boldsymbol{A}^{-1})^m\|_2$;

(2) 举例说明$\mathbb{C}^{n\times n}(n>1)$中的矩阵范数$\|\boldsymbol{A}\|_1$与$\mathbb{C}^n$中的向量范数$\|\boldsymbol{\alpha}\|$不相容.

解 (1) 由于$\boldsymbol{A}$实对称,所以存在正交阵$\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&&\\&\sqrt{2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{n}\end{bmatrix}$$

故$\|\boldsymbol{A}\|_F=\|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\|_F=\|\boldsymbol{\Lambda}\|_F=\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}$;$\rho(\boldsymbol{A})=\sqrt{n}$;$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{n}$;$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2=\sqrt{n}$;$\|(\boldsymbol{A}^{-1})^m\|_2=1$.

(2) 取$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$,得

$$\|\boldsymbol{A\alpha}\|_2=n,\qquad \|\boldsymbol{A}\|_1=1,\qquad \|\boldsymbol{\alpha}\|_2=\sqrt{n}$$

即有$\|\boldsymbol{A\alpha}\|_2>\|\boldsymbol{A}\|_1\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$.

五、(15 分)设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形；

(2) 求 $\cos\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形.

解　(1) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$；$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

$$\boldsymbol{D}_3(\lambda)=(\lambda+1)^3,\qquad \boldsymbol{D}_2(\lambda)=\boldsymbol{D}_1(\lambda)=1$$

所以不变因子为 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=(\lambda+1)^3$；初等因子为$(\lambda+1)^3$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(2) $\cos\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为：$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\cos(-1) & \sin(-1) & \frac{1}{2}\cos(-1)\\ 0 & \cos(-1) & \sin(-1)\\ 0 & 0 & \cos(-1)\end{bmatrix}$.

六、(10 分)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.23 & 0.4 & 0.14\\ 0.25 & 0 & 0.35\\ 0.11 & 0.33 & 0.25\end{bmatrix}$.

(1) 证明：矩阵序列$\{\boldsymbol{A}^k\}$收敛,并求当 $k\to\infty$时的极限；

(2) 证明：矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$ 绝对收敛,并写出其和矩阵.

证明　(1) 因$\|\boldsymbol{A}\|_1=0.73<1$,故$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$.

(2) 因 $\boldsymbol{A}$ 有范数小于 1,故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$ 绝对收敛,且其和的形式为$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

七、(10 分)已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$,求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的极小范数最小二乘解.

解　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$；取 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$；

则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$(最大秩分解)；

$$\boldsymbol{B}^+=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{C}^+=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

则 $\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{B}^+$,所以方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的极小范数最小二乘解为：$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$.

八、证明题：(10 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为实 n 阶非奇异矩阵,证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{A}$ 在实数域$\mathbb{R}$上相合,则 n 必为偶数；

(2) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，且 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1, i=1,2,\cdots,n$，证明：$\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ 的绝对值 $|\lambda|<1$.

证明 (1) 由于 $-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$，所以 $(-1)^n|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{C}|^2|\boldsymbol{A}|$，则有

$$|\boldsymbol{C}|^2=(-1)^n>0,\quad n \text{ 必为偶数}$$

(2) 设 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 的分量中绝对值最大者为 $|x_k|$，则 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 的第 k 个方程

$$\lambda x_k=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j$$

$$|\lambda||x_k|=\left|\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}||x_j|$$

$$|\lambda|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|\frac{|x_j|}{|x_k|}\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|<1$$

故有 $|\lambda|<1$.

自 测 题 三

一、(10 分)按通常意义下矩阵的加法和数乘运算，问下列集合 V 是否构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间？若是，试求它们的维数，并写出一组基.

(1) V 为所有实的 n 阶对称与反对称矩阵的全体；

(2) V 为由对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 所生成的实系数 n 次多项式 $f(\boldsymbol{D})$ 的全体，其中 d_i 互异.

解 (1) 不是. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}$，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\neq(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}(\text{一般情况下})$$

又 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\neq-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$(一般情况下)，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\notin V$.

$$(2)\ a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{D}+\cdots+a_n\boldsymbol{D}^n=(a_0+a_1d_1+\cdots+a_nd_1^n)\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}$$

$$+\cdots+(a_0+a_1d_n+\cdots+a_nd_n^n)\begin{bmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

故得一组基为 $\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$，且 $\dim V=n$.

二、(20 分)V 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上次数不超过 3 的多项式与零多项式构成的线性空间，对 $\forall f(x)=ax^2+bx+c\in V$，在 V 上定义线性变换：

$$\mathscr{A}[f(x)]=3ax^2+(2a+2b+3c)x+(a+b+4c)$$

(1) 求$\mathscr{A}$在V的一组基$x^2,x,1$下的矩阵;

(2) 判断$\mathscr{A}$是否可以对角化,为什么?

(3) 在V中定义内积$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$,求基$x^3,x,1$的度量矩阵.

解　(1) $\mathscr{A}(x^2)=3x^2+2x+1$

$\mathscr{A}(x)=\quad 2x+1$

$\mathscr{A}(1)=\quad 3x+4$

$\mathscr{A}$在基$x^2,x,1$下的矩阵为:$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&2&3\\1&1&4\end{pmatrix}$.

(2) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&0\\-2&\lambda-2&-3\\-1&-1&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda-5)$

可见矩阵$\boldsymbol{A}$有三个不同的单根1,3,5,故$\boldsymbol{A}$可以对角化,即$\mathscr{A}$可以对角化.

(3) 设度量矩阵$\boldsymbol{C}=(C_{ij})_{3\times3}$,则

$$C_{11}=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}C_{12}=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}C_{21}$$

$$C_{13}=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}=C_{31},C_{22}=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

$$C_{23}=C_{32}=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},C_{33}=\int_0^1\mathrm{d}x=1$$

故
$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}.$$

三、(15分)设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是三维欧氏空间$V$的一组标准正交基,求$V$的一个正交变换$\mathscr{A}$,使得

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3\\\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$$

解　设$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$,使得$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)$是标准正交的.

因为$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)$已标准正交化,所以

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2))=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3))=0$$
$$|\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)|=1$$

即得

$$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=0\\2x_1-x_2+2x_3=0;\\x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\end{cases}\quad\text{解得:}x_1=-\frac{1}{3},x_2=\frac{2}{3},x_3=\frac{2}{3}$$

即$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)=\frac{1}{3}(-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$.

因为$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)$,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)$,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)$为标准正交基,且$\mathscr{A}$把标准正交基变为标准正交基,故$\mathscr{A}$为正交变换,它在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

四、(15 分)设复数域$\mathbb{C}$上的线性空间V^3的一组基为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,线性变换$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

求V^3的另一组基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$(可用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示),使$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为若尔当标准形.

解 由自测题一中第二题(2)知$\boldsymbol{A}$的若尔当标准形为$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{bmatrix}$,相似变换矩阵

$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

由$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{\mathrm{T}}$,求得$V^3$的一组基为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\qquad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\qquad \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$$

则$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为$\boldsymbol{J}$.

五、(10 分)设$\boldsymbol{\alpha}$是给定的n维非零列向量,$\|\boldsymbol{A}\|_F$是$\mathbb{C}^{n\times n}$中矩阵的Frobenius范数,定义实值函数$\|\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\|_F$(其中任意$\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^n$).试证明$\|\boldsymbol{X}\|$是$\mathbb{C}^n$上的向量范数,且矩阵的$F$范数与它相容.

证明 当$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$时,$\|\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{0}\|_F=\|\boldsymbol{0}\|_F=0$;当$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$时,$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\neq 0$;从而$\|\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\|_F>0$.

$$\forall k\in\mathbb{C},\|k\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{\alpha}(k\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\|_F=\|k(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})\|_F=|k|\|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\|_F=|k|\|\boldsymbol{X}\|$$

$$\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\|=\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\|_F=\|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\|_F\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\|_F+\|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\|_F=\|\boldsymbol{X}\|+\|\boldsymbol{Y}\|$$

因此,$\|\boldsymbol{X}\|$是向量范数.

又因为
$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\|_F=\|(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\|_F\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\|_F\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\|_F=\|\boldsymbol{A}\|_F\|\boldsymbol{X}\|$$

因此,$\|\boldsymbol{A}\|_F$与$\|\boldsymbol{X}\|$相容.

六、(10 分)矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$,求$\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}\right)^k$.

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-6)$,特征根为$\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=0$,则$\rho(\boldsymbol{A})=6$.由于$\boldsymbol{A}^2=6\boldsymbol{A}$,故$\boldsymbol{A}$可

以对角化.即存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{C}^{-1}$$

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{C}^{-1}$$

故得

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}\right)^k=\boldsymbol{C}\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}^k\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{C}^{-1}=\frac{1}{6}\boldsymbol{A}.$$

七、(10分)设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,证明:$\rho(\boldsymbol{A})<1$的充分必要条件是存在某种矩阵范数$\|\cdot\|$,使得$\|\boldsymbol{A}\|<1$.

证明　$\Rightarrow$设$\rho(\boldsymbol{A})<1$,取$\varepsilon=\frac{1}{2}[1-\rho(\boldsymbol{A})]>0$,对于矩阵$\boldsymbol{A}$,存在矩阵范数$\|\cdot\|$,使

$$\|\boldsymbol{A}\|\leqslant\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon=\frac{e(\boldsymbol{A})+1}{2}<1.\Leftarrow\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}\|<1$$

便得证.

八、(10)设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$是两个n阶正交矩阵,且$|\boldsymbol{AB}|=-1$,试证明:

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=-1$;

(2) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

证明　(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}|=-1$.

同理,有$|\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=-1$.

(2) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}||(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{AB}|$,得$2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$,即有$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

自测题四

一、(15分)矩阵$\mathbb{R}^{2\times2}$的子空间$V=\{\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{2\times2}\,|\,x_{11}+x_{12}+x_{21}=0\}$(按通常矩阵的加法和数量乘法),在$V$中定义线性变换$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$(对任意$\boldsymbol{X}$属于$V$).

(1) 求$\mathscr{A}$在所给基$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$下的矩阵;

(2) 在V中求一个基,使$\mathscr{A}$在该基下的矩阵为对角形.

解　(1) $\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_1)=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_2)=\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_3)=\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{E}_3$$

所以 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{E}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

(2) 设有一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，从 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$ 到 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的过渡矩阵设为 $\boldsymbol{C}$. 即

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{C}$$

再设 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

要使 $\boldsymbol{B}$ 为对角阵，即找一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角阵

因为 $$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$$

对 $\lambda=0$，求得特征向量 $(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，对 $\lambda=2$，求得两个线性无关的特征向量 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角阵.

由 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3)\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\\\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}\\\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.\end{cases}$$

二、(10 分) 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是欧氏空间 V^3 中一组标准正交基，

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)\\\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)\\\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3)\end{cases}$$

若有线性变换 $\mathscr{A}$ 能将 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 变为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，试证明 $\mathscr{A}$ 是正交变换.

证明 易得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)=1,\quad(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)=0$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)=0,\quad(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)=1$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)=0,\quad(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)=1$$

即 $\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{\alpha}_1,\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{\alpha}_2,\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是标准正交基,故 $\mathscr{A}$ 是正交变换.

三、(10 分)求解下列各题:

(1) 已知向量 $\boldsymbol{X}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$,求初等反射矩阵 $\boldsymbol{H}$,使 $\boldsymbol{HX}=(\xi_1,\eta_2,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}$,且幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k}{6^k}x^k$ 的收敛半径为 6,则矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k}{6^k}\boldsymbol{A}^k$ 收敛吗?为什么?

解　(1) 令 $\boldsymbol{Y}=(\xi_1,\eta_2,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,由 $\boldsymbol{HX}=\boldsymbol{Y}$,知 $|\boldsymbol{Y}|=|\boldsymbol{HX}|=|\boldsymbol{X}|$;取 $\boldsymbol{\eta}=\dfrac{\boldsymbol{X}-|\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}_0}{|\boldsymbol{X}-|\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}_0|}=\dfrac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|}$;$\boldsymbol{Y}_0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{Y}|}\boldsymbol{Y}$,构造初等反射矩阵

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\eta\eta}^{\mathrm{T}}$$

则有 $\boldsymbol{HX}=|\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{Y}$.

(2) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 8\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-16=(\lambda-5)(\lambda-3)$.

$$\lambda_1=5,\lambda_2=3,\text{所以 }\rho(\boldsymbol{A})=\max_i|\lambda_i|=5$$

因为 $\rho(\boldsymbol{A})=5<6$,故矩阵幂级数收敛.

四、(10 分)设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & a & 0\\ 0 & 0 & 1\\ b & c & 0\end{bmatrix}$$

问 a、b、c 为何值时,$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵?

解　由正交矩阵行(列)向量组标准正交,得

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+a^2=1\\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+b^2=1\\ \frac{a}{\sqrt{2}}+bc=0\end{cases}$$

四组解是:

$$\begin{cases}a=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ b=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ c=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases},\quad \begin{cases}a=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ c=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases},\quad \begin{cases}a=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ b=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ c=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases},\quad \begin{cases}a=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ c=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

五、(20 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\|\boldsymbol{A}\|_1,\|\boldsymbol{A}\|_\infty,\|\boldsymbol{A}_{m_\infty}\|,\rho(\boldsymbol{A})$;

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 可否进行 $\boldsymbol{LU}$ 分解，为什么？

(3) 求 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的秩，$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^2$ 的所有特征根；

(4) 求 $\boldsymbol{B}^-,\boldsymbol{B}^+,\boldsymbol{B}_r^-,\rho(\boldsymbol{A})$；

(5) 求 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形；

(6) 求矩阵函数$\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$的值.

解 (1)

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max_j\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|=\max\{6,4,2\}=6$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|=\max\{5,4,3\}=5$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}=n\cdot\max\{|a_{ij}|\}=9$$

因 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$，故

$$\rho(\boldsymbol{A})=\max_i|\lambda_i|=2$$

(2) $\Delta_1=3\neq0$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=5\neq0$，故可以进行 $\boldsymbol{LU}$ 分解.

(3) 易得 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3\quad\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$，所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=6$，$\boldsymbol{B}$ 的特征根为 $\mu_1=1,\mu_2=2$，故 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的特征根为

$$\lambda_1\mu_1=1,\quad\lambda_1\mu_2=2,\quad\lambda_2\mu_1=2,\quad\lambda_2\mu_2=4,\quad\lambda_3\mu_1=2,\quad\lambda_3\mu_2=4$$

$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^2$ 的特征根为 1,4,4,16,4,16.

(4) 因为 $|\boldsymbol{B}|=2\neq0$，所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且 $\boldsymbol{B}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-3\\0&1\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{B}^-,\boldsymbol{B}^+,\boldsymbol{B}_r^-$ 均可取为 $\boldsymbol{B}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-3\\0&1\end{bmatrix}$.

(5) $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为：$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}$.

(6) 对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，对应于 $\lambda_2=2$ 的线性无关的特征向量只有一个，即 $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，再求一个广义特征向量为 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\qquad\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

令 $f(\boldsymbol{A})=\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$，则

$$f(\boldsymbol{J}_1(\lambda_1))=1;\quad f(\boldsymbol{J}_2(\lambda_2))=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1(\lambda_1),\boldsymbol{J}(\lambda_2))\cdot\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\-3&3&5\end{bmatrix}.$$

六、(10 分)

(1) $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,取$\mathbb{R}^n$的子空间 $V_\lambda=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}\}$,若 λ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根,则 $\dim V_\lambda$ 等于多少?若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根,则 $\dim V_\lambda$ 等于多少?

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Householder 矩阵,求 $\boldsymbol{A}^2$.

解　(1) 由 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$,即$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,若 λ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根,则$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|\neq0$,所以$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,故 $\dim V_\lambda=0$;

若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根,则$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$,所以$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=r$,则 $\dim V_\lambda=n-r$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\omega\omega}^{\mathrm{T}}$　其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为单位向量 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}=1$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\omega\omega}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\omega\omega}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\omega\omega}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{\omega\omega}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{\omega\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega\omega}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\omega\omega}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{\omega\omega}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.\end{aligned}$$

七、(10 分)设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,试证:

(1) $\boldsymbol{B}$ 为半正定矩阵;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关时,$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

证明　(1) 设 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^m(\neq0)$,由于二次型

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})\geqslant0$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 为半正定矩阵.

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关时,若 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{AX}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}=(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})>\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

八、(15 分)证明题:

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异,λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值,证明:$|\lambda|\geqslant\dfrac{1}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,若对某种矩阵范数有$\|\boldsymbol{B}\|<\dfrac{1}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}$,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆.

证明　(1) λ 为非奇异,λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,故 $\lambda\neq0$,而$\dfrac{1}{\lambda}$为 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值,根据特征值上界原理,有

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right|\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|,\quad 即\quad |\lambda|\geqslant\frac{1}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}$$

(2) 对 $\forall\,\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,由已知有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}\|&=\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BX}\|\geqslant\|\boldsymbol{X}\|-\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BX}\|\\&\geqslant\|\boldsymbol{X}\|-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{B}\|\|\boldsymbol{X}\|=(1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{B}\|)\|\boldsymbol{X}\|\end{aligned}$$

由已知$\|\boldsymbol{B}\|<\dfrac{1}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}$,即$\|\boldsymbol{B}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|<1$,故知

$$\forall \boldsymbol{X}\neq \boldsymbol{0},\quad \|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}\|\geqslant(1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{B}\|)\|\boldsymbol{X}\|>0$$

即对 $\forall \boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,有

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 无非零解

故 $|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|=|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq0$,从而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq0$,即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆.

自测题五

一、(10 分)设有矩阵空间$\mathbb{R}^{2\times2}$的子空间

$V_1=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\middle|\, x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$, $V_2=L[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2]$,其中 $\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

(1) 求 V_1 的一组基及维数;

(2) 求 V_1+V_2 及 $V_1\cap V_2$ 的维数.

解 (1) V_1 中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_3+x_4 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$

$$=x_2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

令
$$\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

因 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$ 线性无关,由定义知,它们是 V_1 的基,且 $\dim V_1=3$.

(2) $V_2=\boldsymbol{L}[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2]$,因为 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 线性无关,$\dim V_2=2$.

$$V_1+V_2=L(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$$

在$\mathbb{R}^{2\times2}$的标准基下,将 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 对应的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 排成矩阵,并做初等变换

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

可见 $\dim(V_1+V_2)=4$.

由维数定理 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=5-4=1$.

二、(15 分)

(1) 设$\mathbb{R}^3$中基为 $\boldsymbol{x}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,试写出某向量 $\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 在该基下的坐标表达式;

(2) 设线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 有两个不同的特征值 λ_1 和 λ_2,记特征子空间 $V_{\lambda_i}=\{\boldsymbol{x}\,|\,\mathscr{A}(\boldsymbol{x})=\lambda_i\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in V\}(i=1,2)$,试计算 $\dim(V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2})$.

解 (1) 因 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,过渡阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{C}^{-1}=$

$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix}$,所以 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{C}^{-1}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2-a_1 \\ a_3-a_2 \end{bmatrix}$.

(2) 设 $\boldsymbol{x}\in V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}$,则有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\lambda_1\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\lambda_2\boldsymbol{x}$,两式相减得 $(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$,只有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,故 $\dim(V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2})=0$.

三、(10分)设 $P[x]_3$ 中的多项式为 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$,线性变换 $\mathscr{A}$ 定义为

$$\mathscr{A}[f(x)]=(a_0-a_2)+(a_1-a_3)x+(a_2-a_0)x^2+(a_3-a_1)x^3$$

求 $P[x]_3$ 的一组基,使 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵.

解　取 $P[x_3]$中的简单基 $1,x,x^2,x^3$,由于

$$\mathscr{A}(1)=1-x^2,\quad \mathscr{A}(x)=x-x^3,\quad \mathscr{A}(x^2)=1+x^2,\quad \mathscr{A}(x^3)=-x+x^3$$

则 $\mathscr{A}$ 在 $1,x,x^2,x^3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为:$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\lambda_4=2$,相应的特征向量为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$.

再由 $(f_1,f_2,f_3,f_4)=(1,x,x^2,x^3)\boldsymbol{C}$,求得 $P[x]_3$ 中另一组基:

$$f_1(x)=1+x^2,\quad f_2(x)=x+x^3,\quad f_3(x)=1-x^2,\quad f_4(x)=x-x^3$$

四、(12分)求解下列各题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,求 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t$;

(2) 在欧氏空间中,求满足条件 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\mathrm{i}$ 的正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解　(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}^{-1}\int_0^1\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}^{-1}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{I})$.

(2) 当 $i\neq j$ 时,$(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0$,故度量矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix}$.

五、(18分)

(1) 已知 $\boldsymbol{X}=(-1,\mathrm{i},0,1)$,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,求

$$\|\boldsymbol{X}\|_1,\|\boldsymbol{X}\|_2,\|\boldsymbol{X}\|_\infty,\|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\|_{m_1},\|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\|_F,\|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\|_{m_\infty},\|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\|_\infty$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -5 & 21 & 17\\ 6 & -26 & -21\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形.

解 (1) $\|\boldsymbol{X}\|_1=3,\|\boldsymbol{X}\|_2=\sqrt{3},\|\boldsymbol{X}\|_\infty=1,\|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\|_{m_1}=9,\|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\|_F=3$, $\|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\|_{m_\infty}=4,\|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\|_\infty=3$.

(2) $\boldsymbol{D}_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)$,易得 $\boldsymbol{D}_2(\lambda)=\boldsymbol{D}_1(\lambda)=1$. 所以不变因子 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$, $d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)$;初等因子 $\lambda^2,(\lambda+1)$. $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为:$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

六、(15 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 4\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^+$;

(3) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解,指出是哪种解.

解 (1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$,其中 $\boldsymbol{B}$ 为列最大秩矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为行最大秩矩阵.

(2) $\boldsymbol{B}^+=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & -3 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{C}^+=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{B}^+=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -3 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}5 & -4 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ -5 & 7 & 2\\ 5 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{15}\begin{bmatrix}5 & -4 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ -5 & 7 & 2\\ -5 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 4\end{bmatrix}=\dfrac{1}{15}\begin{bmatrix}15\\ 15\\ 0\\ 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.

七、(10 分)设 V^n 是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间,$\boldsymbol{x}\in V^n$ 在基(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为$\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}$ 在基(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标为$\boldsymbol{\beta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$,且由基(Ⅰ)

变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$，$\|\circ\|_2$ 表示$\mathbb{R}^2$中向量的 2 范数. 证明：$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=\|\boldsymbol{\beta}\|_2$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵.

证明提示　类似习题 4(1)第 24 题(1)的证明.

八、(10 分)证明：$\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{AC}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$.

证明

$\Rightarrow\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{AC}$ 两边左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，有

$$(\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$$

故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$.

$\Leftarrow\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，设 $\boldsymbol{A}^+$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的加号逆，两边左乘 $\boldsymbol{A}^+$，有

$$\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{AC}$$

自 测 题 六

一、(12 分)设$\mathbb{R}^{2\times2}$的矩阵子空间 $V=\{\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{2\times2}\mid x_{12}+x_{21}=0\}$，在 V 中定义线性变换 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$(对任意 $\boldsymbol{X}$ 属于 V).

(1) 求 V 的维数，并写出 V 的一组基；

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵；

(3) 在 V 中求一个基，使 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为对角形.

解　(1) 当 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\in V$ 时，由 $x_{12}+x_{21}=0$ 得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_{11}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\boldsymbol{X}_{22}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\boldsymbol{X}_{21}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$，因线性无关，则它们是 V 的一个基.

(2) $\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_1)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$；

$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_2)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$；

$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_3)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}$；

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$ 下的矩阵为：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$.

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 对角化，取 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{bmatrix}$；

设所求基为 $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3$，有

$$(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3)=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{C}$$

得 $Y_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，$Y_2=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$，$Y_3=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$，则 $\mathscr{A}$ 在基 Y_1,Y_2,Y_3 下的矩阵为对角形.

二、(10 分)设 $A=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的不变因子和初等因子；

(2) 求 A 的若尔当标准形；

(3) 问 A 可否进行 LU 分解，为什么？

解 (1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&5&-2\\-5&\lambda+7&-3\\-6&9&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)$

A 的特征根 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$；

行列式因子 $D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)$，易得 $D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$；

不变因子 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)$；

初等因子 $\lambda^2,\lambda-1$.

(2) A 的若尔当标准形为 $J=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$；

(3) 因为 $\Delta_1=-1\neq0,\Delta_2=\begin{vmatrix}-1&1\\-5&21\end{vmatrix}=-16\neq0$，所以 A 能进行 LU 分解.

三、(12 分)

(1) 设 $A=\begin{bmatrix}t^2&1\\t&0\end{bmatrix}$，求 $\dfrac{d^2A}{dt^2},\dfrac{dA^{-1}}{dt},\dfrac{dA^2}{dt}$；

(2) 设 $X=\begin{bmatrix}x_{11},x_{12},x_{13}\\x_{21},x_{22},x_{23}\end{bmatrix}$，$f(X)=x_{11}+x_{12}^2+x_{13}^3$，求 $\dfrac{df}{dX}$.

解 (1) $\dfrac{d^2A}{dt^2}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\dfrac{dA^{-1}}{dt}=\begin{bmatrix}0&-\dfrac{1}{t^2}\\0&-1\end{bmatrix}$，$\dfrac{dA^2}{dt}=\begin{bmatrix}4t^3+1&2t\\3t^2&1\end{bmatrix}$.

(2) $\dfrac{df}{dX}=\begin{bmatrix}1&2x_{12}&3x_{13}^2\\0&0&0\end{bmatrix}$.

四、(9 分)

(1) 设 $A=\dfrac{1}{2}(B+I)$，试证：A 为幂等矩阵($A^2=A$)的充分必要条件是 $B^2=I$；

(2) 设 A,B 为 n 阶方阵，且满足 $A^2=A,B^2=B$，以及 $(A+B)^2=A+B$，证明：$AB=0$.

证明

(1) 由 $A=\dfrac{1}{2}(B+I)$，得 $B=2A-I$，$B^2=(2A-I)^2=4A^2-4A+I$，显然，当且仅当 $B^2=I$ 时，有 $A^2=A$.

(2) 因 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A+AB+BA+B=A+B$，得

$$AB+BA=0,\quad 即\quad AB=-BA$$

两端右乘 $\boldsymbol{B}$ 得 $\boldsymbol{AB}^2=-\boldsymbol{BAB}$,从而 $\boldsymbol{AB}=(-\boldsymbol{B})\boldsymbol{AB}$,由于幂等阵 $\boldsymbol{B}$ 的任意性,故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

五、求解下列各题(每题 6 分,共 24 分)

(1) 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\ (m>1)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交的单位向量,记 $\boldsymbol{A}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,求 $\boldsymbol{A}^+$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$,讨论矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\boldsymbol{A}^k$ 的敛散性;

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&5\end{bmatrix}$,求 $(2\boldsymbol{A}^4-12\boldsymbol{A}^3+19\boldsymbol{A}^2-29\boldsymbol{A}+37\boldsymbol{I})^{-1}$;

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,2,\cdots,n)$,$m$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征根是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\ (m>1)$,求 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的所有特征根.

解　(1) 因为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 为两两正交的单位向量,所以 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$ 为列满秩矩阵,故

$$\boldsymbol{A}^+=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$,且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}$ 都收敛,所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\boldsymbol{A}^k$ 收敛.

(3) 因为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2-6\lambda+7$,而

$$2\lambda^4-12\lambda^3+19\lambda^2-29\lambda+37=(\lambda^2-6\lambda+7)(2\lambda^2+5)+(\lambda+2)$$

由于 $\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$,所以原式 $=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}=\dfrac{1}{23}\begin{bmatrix}7&1\\-2&3\end{bmatrix}$.

(4) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征根为 $i\ (i=1,2,\cdots,n)$,$\boldsymbol{B}$ 的特征根为 $\lambda_j\ (j=1,2,\cdots,m)$,所以 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的特征根为 $i\lambda_j\ (i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$.

六、(15 分)证明题:

(1) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{D}^+=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}^+,\boldsymbol{A}^+)$;

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{X}=-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{-1}\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆;

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为实反对称矩阵,则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 是正交矩阵.

证明　(1) 当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 时,设 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$,则 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{BC}\\\boldsymbol{BC}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{C}=\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{C}$.而

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}^+=\left\{[\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right\}^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}]=\frac{1}{2}[\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{B}^+]$$

$\boldsymbol{D}^+=\boldsymbol{C}^+\widetilde{\boldsymbol{B}}^+=\boldsymbol{C}^+\cdot\dfrac{1}{2}[\boldsymbol{B}^+,\boldsymbol{B}^+]=\dfrac{1}{2}[\boldsymbol{A}^+,\boldsymbol{A}^+]$.当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 时上式也成立.

(2) 经计算 $\boldsymbol{A}^3=-(a_1^2+a_1^2+a_3^2)\boldsymbol{A}$,于是

$$\boldsymbol{AXA}=-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{-1}\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}$$

$\boldsymbol{X}=-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{-1}\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个减号逆.

(3) 因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,所以 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}},\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}$,故 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 为正交矩阵.

七、(10 分)已知欧氏空间 V^n 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，且向量 $\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+n\boldsymbol{\alpha}_n$，定义变换 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_0)\boldsymbol{\alpha}_0$，$\boldsymbol{\alpha}\in V^n$，实数 $k\neq 0$，

证明：(1) $\mathscr{A}$ 是线性变换；

(2) $\mathscr{A}$ 是正交变换的充要条件是 $k=-\dfrac{2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V^n$，$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})&=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}+k(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_0)\boldsymbol{\alpha}_0\\&=\lambda(\boldsymbol{\alpha}+k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_0)\boldsymbol{\alpha}_0)+\mu(\boldsymbol{\beta}+k(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_0)\boldsymbol{\alpha}_0)\\&=\lambda\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mu\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}$ 是线性变换.

(2) $\mathscr{A}$ 是正交变换$\Leftrightarrow(T\boldsymbol{\alpha},T\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$，即

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_0)^2+k^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_0)^2(\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_0)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$$

得

$$k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_0)^2[2+k(\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_0)]=0$$

由 $\boldsymbol{\alpha}\in V^n$ 的任意性，上式等价于

$$2+k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_0)=0$$

所以 $k=-\dfrac{2}{(\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_0)}=\dfrac{2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

八、(8 分)设复矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征值集合(即 $\boldsymbol{A}$ 的谱)为 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，试证明不等式：

$$\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ig}|^2$$

又等号当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵时成立.

证明 由舒尔定理知，存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 及上三角矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})$，使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}$，因此有 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}$，从而得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}$. 又因为

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}})\tag{①}$$

由于 $\boldsymbol{R}$ 主对角线上的元素都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故由①式得

$$\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2=\sum_{i=1}^n|r_{ij}|^2\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|r_{ij}|^2\tag{②}$$

而②式左端是 $\boldsymbol{R}$ 的 Frobenius 范数的平方，又因在酉相似(即 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}$)下矩阵的 $\boldsymbol{F}$ 范数不变，所以

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|r_{ij}|^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\tag{③}$$

综合②、③两式便得到所需证的不等式. 又不等式②取等号当且仅当 $i\neq j$ 时都有 $r_{ij}=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于三角形矩阵，也就是 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵.

自 测 题 七

一、(10 分)设$\mathbb{R}^4$的两个子空间为

$$V_1=\{\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)\mid a_1+a_2-a_4=0\}$$

$$V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2),\quad \boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1,1),\quad \boldsymbol{\beta}_2=(1,1,1,0)$$

(1) 求 V_1+V_2 的基与维数；

(2) 求 $V_1\cap V_2$ 的基与维数.

解　(1) 由 $a_1+2a_2-a_4=0$,得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,0,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0,1)$$

所以 V_1 的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,且 $\dim\boldsymbol{V}_1=3$.

因 $V_1+V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$,易知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的一个极大无关组,故 $\dim(V_1+V_2)=4$,V_1+V_2 的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$.

(2) $\forall\,\boldsymbol{\xi}\in V_1\cap V_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\xi}=k_4\boldsymbol{\beta}_1+k_5\boldsymbol{\beta}_2$,所以

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3-k_4\boldsymbol{\beta}_1-k_5\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$$

解此方程组得

$$(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)=(2,-2,-3,-3,1)$$

所以 $V_1\cap V_2$ 的一组基为 $\boldsymbol{\xi}=(1,-2,-2,-3)$,且 $\dim(V_1\cap V_2)=1$.

二、(12 分)

(1) 在 $P^{2\times2}$ 中定义线性变换

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵；

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

解　(1) $\begin{cases}\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{11})=a\boldsymbol{E}_{11}+c\boldsymbol{E}_{21}\\ \mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{12})=a\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{22}\\ \mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{21})=b\boldsymbol{E}_{11}+d\boldsymbol{E}_{21}\\ \mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{22})=b\boldsymbol{E}_{12}+d\boldsymbol{E}_{22}\end{cases}$

即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{bmatrix}$$

(2) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,得到 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=0,\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}$,即

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$$

显然 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 均为可逆方阵,于是有

$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$$

即 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}$,亦即 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,从而 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$.

三、(12 分)

(1) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&3&2\end{bmatrix}$,求 A 的若尔当标准形;

(2) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$,求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\mathrm{tr}(A)$;

(3) 已知 $\mathrm{e}^{At}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}&\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}&\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}&2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}&\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{2t}\\3\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{t}&3\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{t}&3\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$,求 A.

解 (1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&1-\lambda&0\\2&3&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)$

$$D_3(\lambda)=(1-\lambda)^2(2-\lambda),\quad D_2(\lambda)=1,\quad D_1(\lambda)=1$$

$$d_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1,\quad d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

所以初等因子为:$(1-\lambda)^2,2-\lambda$.

A 的若尔当标准形为$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\mathrm{tr}(A)=I_n$.

(3) 两边求导数,利用$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}=A\mathrm{e}^{At}$,且 $\mathrm{e}^{0}=I$,得

$$A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&3&-1\\3&3&-1\end{bmatrix}$$

四、(21 分)设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3&2\\1&2\end{bmatrix}$$

计算:(1) $\|A\|_1,\|A\|_\infty$;(2) $\rho(A)$,$\mathrm{cond}(B)_\infty$;(3) $\mathrm{rank}(A\otimes B)$,$A\otimes B$ 的特征值;(4) A^-,A^+.

解 (1) $\|A\|_1=\max\limits_j\sum\limits_i|a_{ij}|=5$;$\|A\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_j|a_{ij}|=5$.

(2) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$,$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$;故 $\rho(A)=\max\limits_i|\lambda_i|=5$;

$$B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&3\end{pmatrix},\quad 故\quad \mathrm{cond}(B)_\infty=\|B\|_\infty\cdot\|B^{-1}\|_\infty=5\times4\times\frac{1}{4}=5$$

(3) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3,\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=2;\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=3\times2=6.$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6-2=(\lambda-1)(\lambda-4)$$

所以 $\lambda_1=1,\lambda_2=4$,故 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的特征值为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=5,\quad \lambda_4=-4,\quad \lambda_5=-4,\quad \lambda_6=20$$

(4) 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,$\boldsymbol{A}^{-1}$存在,所以

$$\boldsymbol{A}^{-}=\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{bmatrix}$$

五、(15 分)已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\0&1&2&3\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的一个非平凡最大秩分解;

(2) 用广义逆矩阵法判别方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 是否相容?

(3) 求线性方程组的 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的极小范数解.

解 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\0&1&2&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\end{bmatrix}=\boldsymbol{BC}$$

(2) 因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2,\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b})=2$,所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 相容.

(3) 因为 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4&10&6\\10&30&20\\6&20&14\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}_m^{-}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})^{-}=\begin{bmatrix}0&\frac{7}{10}&-1\\0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{5}{10}&0\\0&-\frac{3}{10}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

所以极小范数解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}_m^{-}\boldsymbol{b}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$.

六、(14 分)

(1) 设可逆方阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$,且知 $\|\boldsymbol{X}\|_P=\|\boldsymbol{PX}\|_2$ 是$\mathbb{R}^2$上的向量范数.若 $\|\boldsymbol{A}\|_P$ 表示$\mathbb{R}^{n\times n}$上从属于向量范数 $\|\boldsymbol{X}\|_P$ 的矩阵范数,试导出 $\|\boldsymbol{A}\|_P$ 与矩阵的 2 范数之间的关系式;

(2) 用 Gerschgorin 定理说明

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&4&0&1\\1&0&6&2\\0&1&1&8\end{bmatrix}$$

至少有两个实特征值.

解

(1) $\|A\|_P=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|AX\|_P}{\|X\|_P}=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|PAX\|_2}{\|PX\|_2}=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|PAP^{-1}y\|}{\|y\|_2}=\|PAP^{-1}\|_2$.

(2) A 的 4 个盖尔圆为

$$G_1=\{g\,||g|\leqslant 1\},\quad G_2=\{g\,||g-4|\leqslant 2\}$$

$$G_3=\{g\,||g-6|\leqslant 3\},\quad G_4=\{g\,||g-8|\leqslant 2\}$$

它们构成的两个连通部分为 $S_1=G_1$, $S_2=G_2\cap G_3\cap G_4$. 易见, S_1 与 S_2 都关于实轴对称. 由于实矩阵的复特征值必成共轭出现,所以 S_1 中含 A 的一个实特征值,而 S_2 中至少含 A 的一个实特征值. 因此 A 至少有两个实特征值.

七、(16 分)证明:

(1) 正交变换的特征值等于±1;

(2) 设 $\mathscr{A}$ 为$\mathbb{P}$上 n 维线性空间 V 的一个对合变换($\mathscr{A}^2=\mathscr{I}$),则 V 可以分解成特征子空间的直和,试分解之.

证明 (1) 设 $\mathscr{A}$ 为正交变换,λ 为 $\mathscr{A}$ 的特征值,则有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{\alpha}\neq \mathbf{0}$$

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=(\lambda\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$$

因为$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})>0$,所以 $\lambda^2=1$,故 $\lambda=\pm 1$;

(2) 设 λ 为 $\mathscr{A}$ 的任一特征根,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\mathscr{A}$ 的属于 λ 的一个特征向量,即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{\alpha}\neq \mathbf{0}$$

则 $\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\alpha})=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\lambda^2=1,\Rightarrow\lambda_{1,2}=1,-1$.

记 $\lambda_1=1$ 的特征子空间为 V_1, $\lambda_2=-1$ 的特征子空间为 V_{-1}. 对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$ 有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))/2+(\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))/2$$

而

$$(\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))/2\in V_1,\quad (\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))/2\in V_{-1}$$

所以 $V=V_1+V_{-1}$.

又 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_{-1}\Rightarrow\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$,且 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=-\boldsymbol{\alpha}$;得 $\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$,即 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,故 $V=V_1\oplus V_{-1}$.

自 测 题 八

一、(20 分)实数域$\mathbb{R}$上次数不超过 2 的多项式与零多项式构成的线性空间 $P[t]_2$ 的基为: $f_1(t)=1-t$, $f_2(t)=1+t^2$, $f_3(t)=t+2t^2$,定义线性变换

$$\mathscr{A}[f_1(t)]=2+t^2,\quad \mathscr{A}[f_2(t)]=t,\quad \mathscr{A}[f_3(t)]=1+t+t^2$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在已知基下的矩阵 A;

(2) 设 $f(t)=1+2t+3t^2$,求 $\mathscr{A}[f(t)]$;

(3) 在 $P[t]_2$ 中定义内积 $(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$,求基 $1,t,t^2$ 的度量矩阵.

解　(1) $\mathscr{A}$ 在已知基 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 下的矩阵为:$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 3 & 2 & 3\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$;

(2) $\mathscr{A}(f(t))=(1,t,t^2)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$;基 $1,t,t^2$ 到基 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

则 $\mathscr{A}(f(t))=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))\boldsymbol{C}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=-4+3t-2t^2$.

(3) 设度量矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{3\times 3}$,则

$$d_{11}=\int_0^1 1\mathrm{d}t=1,\quad d_{12}=d_{21}=\int_0^1 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

$$d_{13}=d_{31}=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3},\quad d_{22}=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}$$

$$d_{23}=d_{32}=\int_0^1 t^3\mathrm{d}t=\frac{1}{4},\quad d_{33}=\int_0^1 t^4\mathrm{d}t=\frac{1}{5}$$

故

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

二、(15分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $2,4,\cdots,2n$,试求 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}|$ 的值($\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵);

(2) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}8 & -3 & 6\\ 3 & -2 & 0\\ -4 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形.

解　(1) 令矩阵 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ,则 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值是 $f(\lambda)=\lambda-3$,故 $f(\boldsymbol{A})$ 的 n 个特征值为

$$f(2)=-1,\quad f(4)=1,\quad f(6)=3,\quad \cdots,\quad f(2n)=2n-3$$

从而 $|f(\boldsymbol{A})|=|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}|=-(1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3))$

(2) $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-8 & 3 & -6\\ -3 & \lambda+2 & 0\\ 4 & -2 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$;

特征根为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

行列式因子：$D_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2, D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$;

不变因子：$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1; d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$;

初等因子：$(\lambda-2),(\lambda-1)^2$;

故 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

三、(15 分)已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(1) 求 $e^{\boldsymbol{A}t}$;

(2) 用矩阵函数方法求微分方程

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$$

满足初始条件 $\boldsymbol{X}(0)=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 的解.

解 (1) 由于 $\boldsymbol{A}$ 实对称，所以易求得非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2\end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & e^{2t} & \\ & & & e^{2t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\ &=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}+e^{2t}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\ &=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+e^{2t} & 0 & 0 & 1-e^{2t}\\ 0 & 1+e^{2t} & 1-e^{2t} & 0\\ 0 & 1-e^{2t} & 1+e^{2t} & 0\\ 1-e^{2t} & 0 & 0 & 1+e^{2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{X}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}(0)=(e^{2t},0,0,-e^{2t})^{\mathrm{T}}$.

四、(15 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-2&-2\\-2&3&-1\\-2&-1&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&5\\0&3\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$，$\rho(\boldsymbol{A})$；

(2) 求 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的秩和所有特征根；

(3) 求 $\boldsymbol{B}_l^-$，$\boldsymbol{B}^+$.

解　(1) $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=6$；

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&2&3\\2&\lambda-3&1\\2&1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda&4\\2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-4)^2;$$

特征根为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=4$，则 $\rho(\boldsymbol{A})=4$.

(2) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$，所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=6$；

$\boldsymbol{B}$ 的特征根 $\mu_1=4$，$\mu_2=3$，所以 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的全部特征根为

$$-8,-6,16,16,12,12$$

(3) 因为 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{5}{12}\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{B}_l^-$，$\boldsymbol{B}^+$ 可取 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

五、(10 分)用 Givens 变换求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&5&5\\0&3&4\\4&0&5\end{bmatrix}$ 的 $\boldsymbol{QR}$ 分解.

解　$\boldsymbol{\alpha}_1=(3,0,4)^{\mathrm{T}}$，构造 $\boldsymbol{R}_{13}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&0&4\\0&5&0\\-4&0&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}_{13}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&3&7\\0&3&4\\0&-4&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1$.

同理，构造 $\boldsymbol{R}_{23}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&-4\\0&4&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}_{23}\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}5&3&7\\&5&\frac{16}{5}\\&&\frac{13}{5}\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}$.

令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{R}_{13}\boldsymbol{R}_{23})^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}15&16&-12\\0&-15&20\\20&-12&0\end{bmatrix}$$

六、(15 分)证明题：

(1) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，定义实数 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_A=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}$，验证 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量范数；

(2) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右逆；

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=-1$，证明 $\boldsymbol{A}$ 一定有特征根 -1.

证明

(1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵，所以 $\forall\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 有 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_A>0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_A=0$；

对$\forall \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}$有：$\|\boldsymbol{\alpha}\|_A=\sqrt{k\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}k\boldsymbol{\alpha}}=\|k\|\|\boldsymbol{\alpha}\|_A$；

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|_A=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})}=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}}$$
$$\leqslant\sqrt{(\|\boldsymbol{\alpha}\|_A+\|\boldsymbol{\beta}\|_A)^2}=\|\boldsymbol{\alpha}\|_A+\|\boldsymbol{\beta}\|_A$$

(2) 因为$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{I}$，所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$是$\boldsymbol{A}$的右逆.

(3) 因为$|\boldsymbol{A}|=-1$，且$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，所以有

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$$

则$|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|$，即$|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=0$. 故$\boldsymbol{A}$一定有特征根$-1$.

七、(10分)利用特征多项式及凯莱-哈密顿定理，证明：任意可逆矩阵$\boldsymbol{A}$的逆阵$\boldsymbol{A}^{-1}$都可以表示为$\boldsymbol{A}$的多项式.

证明 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+(-1)^n|\boldsymbol{A}|$，由$f(\boldsymbol{A})=0$得

$$\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+(-1)^n|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$$

即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{I})=(-1)^{n+1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{(-1)^{+1}|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{n+1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{I})$$

自测题九

一、(5分)设V是有序实数对组成的集合：$V=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$，加法和数乘运算定义为

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1,b_1)$$
$$k\circ(a,b)=(ka,kb),k\in\mathbb{R}$$

问：V关于运算$\oplus$，o是否构成$\mathbb{R}$上的线性空间？并说明理由.

解 不是. 如取$\boldsymbol{\alpha}=(1,2)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=(1,2)$，$\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}=(3,4)$，则有$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}$.

二、(15分)设V表示数域$\mathbb{P}$上2阶矩阵全体组成的线性空间，定义V的一个变换$\mathscr{A}$如下：

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{X},\quad \boldsymbol{X}\in V$$

(1) 证明：$\mathscr{A}$是线性变换；

(2) 求$\mathscr{A}$在基$\boldsymbol{E}_{11}$、$\boldsymbol{E}_{12}$、$\boldsymbol{E}_{21}$、$\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵；

(3) 求$\mathscr{A}$的核$\ker\mathscr{A}$，给出$\ker\mathscr{A}$的维数及一组基.

解 (1) 令$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$，则$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}\in V$. $\forall\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in V$，$\forall k\in P$，则

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\mathscr{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\mathscr{A}(\boldsymbol{X})+\mathscr{A}(\boldsymbol{Y}),\mathscr{A}(k\boldsymbol{X})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{X})$$

所以$\mathscr{A}$是线性变换.

(2) $\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&-1\end{bmatrix}$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{21})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}$，

$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{22})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix}$，设 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}.$$

(3) 令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$其中 $\boldsymbol{\beta}_i$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量，由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=2$，且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的一个极大线性无关组，所以 $\dim\mathscr{A}(V)=2$，且 $\mathscr{A}(V)=L(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2)$，其中

$$\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_2=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix}$$

且 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 为 $\mathscr{A}(V)$的一组基，得 $\dim\ker\mathscr{A}=4-\dim\mathscr{A}(V)=2$.

令 $\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$. 记

$$\boldsymbol{B}_3=(\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_4=(\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$$

则 $\ker\mathscr{A}=L(\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)$，且 $\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 为 $\ker\mathscr{A}$ 的一组基.

三、(10 分)已知$\mathbb{C}^{n\times n}$中的两种矩阵范数 $\|\cdot\|_a$ 与 $\|\cdot\|_b$，对于 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，验证 $\|\boldsymbol{A}\|=\|\boldsymbol{A}\|_a+\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_b$ 是$\mathbb{C}^{n\times n}$中的矩阵范数.

解 非负性. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{A}\|_a=0$，$\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_b=0$，从而 $\|\boldsymbol{A}\|=0$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{A}\|_a>0$，$\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_b=0$，从而$\|\boldsymbol{A}\|>0$.

相容性. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{AB}\|&=\|\boldsymbol{AB}\|_a+\|(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{H}}\|_b\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_a\|\boldsymbol{B}\|_a+\|\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\|_b\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_b\\&\leqslant(\|\boldsymbol{A}\|_a+\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_b)(\|\boldsymbol{B}\|_a+\|\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\|_b)=\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|\end{aligned}$$

同样可验证齐次性与三角不等式. 因此$\|\boldsymbol{A}\|$是矩阵范数.

四、(15 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\1&-2&-3&-1\\-1&4&5&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\3\\-3\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解；

(2) 求 $\boldsymbol{A}^+$；

(3) 用广义逆矩阵方法判断方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 是否有解？

解 (1) $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&-2\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{FG}$.

(2) $\boldsymbol{F}^+=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3&-6\\-6&20\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}10&4&2\\3&0&3\end{bmatrix}$

$$G^+=G^T(GG^T)^{-1}=G^T\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

$$A^+=G^+F^+=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}10&4&2\\3&0&3\\-7&-4&1\\13&4&5\end{bmatrix}$$

(3) $A^+b=(1,0,-1,1)^T$，$AA^+b=b$，故 $AX=b$ 有解，极小范数解为

$$X_0=A^+b=(1,0,-1,1)^T$$

五、(15 分)设 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix}$，求

(1) $\mathrm{rank}(A\otimes B)$，$A\otimes B$ 的所有特征值，及 $|A\otimes B|$；

(2) $f(B)=B^2-B+3I$ 的特征值.

解 (1) 因 $\mathrm{rank}A=3$，$\mathrm{rank}B=2$，得

$$\mathrm{rank}(A\otimes B)=\mathrm{rank}A\cdot\mathrm{rank}B=3\times 2=6$$

令 $|\lambda I-B|=(\lambda-7)(\lambda+2)=0$，特征值 $\mu_1=7$，$\mu_2=-2$. 所以 $A\otimes B$ 的所有特征值为

$$\lambda'_1=7,\quad \lambda'_2=7,\quad \lambda'_3=-2,\quad \lambda_4^1=-14,\quad \lambda_5^1=-14,\quad \lambda_6^1=4$$

$$|A\otimes B|=|A|^2|B|^3=(-2)^2\cdot(-14)^3=-10976$$

(2) 因为 B 的特征值 $\lambda_1=7$，$\lambda_2=-2$，所以 $f(B)=B^2-B+3I$ 的特征值为 $\lambda'_1=7^2-7+3=45$；$\lambda'_2=(-2)^2-(-2)+3=11$.

六、(10 分)用 Householder 变换求 $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&0&2\\2&1&1\end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

解 $\beta_1-|\beta_1|e_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\quad H_1=I-2\omega_1\omega_1^T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$$

$H_1A=\begin{bmatrix}3&1&3\\0&0&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，令 $A_1=\begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix}$，$\beta_2-|\beta_2|e_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$$\omega_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\quad H_2=I-2\omega_2\omega_2^T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad H_2A_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$$

所以取 $Q=H_1\begin{bmatrix}1&\\&H_2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix}3&1&3\\&1&1\\&&2\end{bmatrix}$，得 $A=QR$.

七、(15分)

(1) 设 W 为 n 维欧氏空间 V 的 $n-1$ 维子空间,且 V 中非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 W 正交,即 $(\boldsymbol{\alpha},W)=0$,若 $\mathscr{A}$ 为 V 的一个线性变换,对 $\forall\boldsymbol{\xi}\in W$,使 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}$ 而 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=-\boldsymbol{\alpha}$,证明 $\mathscr{A}$ 为 V 的一个正交变换;

(2) 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V^n 中的正交变换,它在标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 都是实数. 证明:该正交变换 $\mathscr{A}$ 也是对称变换.

证明　(1) 令 $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关. 通过标准正交化,将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 变为 W 的一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}$.

由已知可得 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_i\rangle=0$, $i=1,2,\cdots,n-1$,因而 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1},\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关. 把 $\boldsymbol{\alpha}$ 单位化,令 $\boldsymbol{\eta}_n=\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$,于是 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1},-\boldsymbol{\eta}_n\}$ 与 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1},\boldsymbol{\eta}_n\}$ 均为 V 的标准正交基. 同时,由题设 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_i)=\boldsymbol{\eta}_i$, $i=1,2,\cdots,n-1$,而 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_n)=-\boldsymbol{\eta}_n$,则 $\mathscr{A}$ 把标准正交基 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1},\boldsymbol{\eta}_n\}$ 变为标准正交基,故 $\mathscr{A}$ 为正交变换.

(2) $\mathscr{A}$ 为正交变换,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵. 又因 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都为实数,故有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,即 $\boldsymbol{A}$ 为实的正规矩阵,从而存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,即 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 是对称变换.

八、证明题(15分)

(1) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 d,而 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的特征根的绝对值都小于1. 证明:$0<|d|<2^n$,其中 $|d|$ 表示 d 的绝对值;

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个三阶正交方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=1$,证明:存在实数 t, $-1\leqslant t\leqslant 3$,使 $\boldsymbol{A}^3-t\boldsymbol{A}^2+t\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=0$.

证明　(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征根是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,令 $f(\lambda)=1-\lambda$,则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的特征根是 $1-\lambda_1,\cdots,1-\lambda_n$,由题设 $|1-\lambda_i|<1$, $i=1,\cdots,n$,故 $-1<\lambda_i-1<1$,即 $0<\lambda_i<2$,因此 $0<|\lambda_i|<2$, $i=1,\cdots,n$,进而 $0<|\lambda_1|\cdots|\lambda_n|<2^n$,然而 $|\boldsymbol{A}|=d=\lambda_1\cdots\lambda_n$,故 $0<|d|=|\lambda_1\cdots\lambda_n|<2^n$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶正交方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=1$,易证奇数维欧氏空间中的旋转变换一定有特征值1,因此不妨设 $\lambda_1=1$,则 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|=1$,于是

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=1+\lambda_2+\lambda_3$$

从而 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-t\lambda^2+t\lambda-1$,其中 $t=1+\lambda_2+\lambda_3$ 为实数(因 λ_2,λ_3 或均为实数或为一对共轭复数).

又由于正交方阵的特征根的模为1,故有

$$-(|\lambda_2|+|\lambda_3|)\leqslant\lambda_2+\lambda_3\leqslant|\lambda_2|+|\lambda_3|,\quad -2\leqslant\lambda_2+\lambda_3\leqslant 2$$

所以 $-1\leqslant 1+\lambda_2+\lambda_3\leqslant 3$,即 $-1\leqslant t\leqslant 3$. 由凯莱-哈密顿定理知:

$$\boldsymbol{A}^3-t\boldsymbol{A}^2+t\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=0$$

自测题十

一、(12 分)(1) 试求数域$\mathbb{P}$上线性空间

$$V=\left\{\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&-5&4\\3&-1&3&-3\\3&5&-13&11\end{bmatrix}\right\}$$

的一组基及维数；

(2) 设 $P^{n\times n}$ 为数域$\mathbb{P}$上全体 n 阶方阵所构成的空间，记 V_1 为$\mathbb{P}$上全体 n 阶对称方阵构成的子空间，V_2 为$\mathbb{P}$上一切 n 阶反对称方阵构成的子空间. 试证：

$$P^{n\times n}=V_1\oplus V_2$$

解 (1) 因 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=2$，求得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,24,9,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_2=(2,-21,0,9)^{\mathrm{T}}$$

即为 V 的一组基，且 $\dim V=2$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为$\mathbb{P}$上任一 n 阶方阵，则$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$为对称阵，$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$为反对称阵，且 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，得 $P^{n\times n}=V_1+V_2$.

又若 $\forall \boldsymbol{B}\in V_1\cap V_2$，则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，则 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$，故 $P^{n\times n}=V_1\oplus V_2$.

二、(14 分)设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是四维线性空间 V 的基，线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\-1&1&1&-1\\-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

求：

(1) $\mathscr{A}$ 的核与维数；

(2) 在 $\mathscr{A}$ 的核中选取基，将它扩充为 V 的一组基，并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵.

解 (1) $\forall \boldsymbol{\xi}\in\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\Rightarrow\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\theta}$.

设 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标为(x_1,x_2,x_3,x_4)，则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标为 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$. 且 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\theta}$ 及 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\-1&1&1&-1\\-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$；取$\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$中两个线性无关的解向量$\begin{cases}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3\\\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4\end{cases}$，所以$\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=L(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$，$\dim\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=2$.

(2) 由于$\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$中有一组基$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$，所以取$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$，易知$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$线性无关，则$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$构成$V$的一组基. 设由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$到基$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}$，则

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

所以$\mathscr{A}$在$\xi_1,\xi_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的矩阵为$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&0&-1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&2&2\\0&0&-2&2\end{bmatrix}$.

三、(12分)设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，且$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$，行向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，在$\mathbb{R}^n$中定义实函数$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明：在该实函数定义下，$\mathbb{R}^n$成为欧氏空间；

(2) 求$\mathbb{R}^n$中自然基$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,\cdots,0,1)$的度量矩阵.

解　(1) 先由$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$，即$\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关，证$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$是正定矩阵(见自测题四中第七题)，再由习题1(3)中第7题知，$\mathbb{R}^n$构成一个欧氏空间.

(2) 令$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=(c_{ij})$，$(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}_j=c_{ij}$，所以自然基在该内积定义下的度量矩阵为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

四、(15分)

(1) 设$\boldsymbol{B}=\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{A}^n$，证明$\boldsymbol{B}$是幂等阵；

(2) 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-\frac{1}{2}\\2&0\end{bmatrix}$，求$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\boldsymbol{A}^k}{2^k}$；

(3) 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^+$.

解

(1) 因为$\boldsymbol{A}$是幂收敛的，所以$\boldsymbol{B}^2=(\lim\boldsymbol{A}^n)(\lim\boldsymbol{A}^n)=\lim\boldsymbol{A}^{2n}=\boldsymbol{B}$.

(2) 令

$$\frac{\boldsymbol{A}}{2}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{4}\\1&0\end{bmatrix},\quad |\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|^2\Rightarrow|\lambda|<1$$

$\boldsymbol{B}$ 是幂收敛，所以原级数和为 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解式为：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG}=\boldsymbol{AI}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

显然 $(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{GG}^{\mathrm{H}})^{-1}=\boldsymbol{I}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{+}&=\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{GG}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

五、(13 分)求线性方程组 $\begin{cases}2x_1+4x_2+x_3+x_4=10\\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=6\\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4=-7\end{cases}$ 的全部最小二乘解和极小范数最小二乘解.

解 令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ -1 & -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}10\\ 6\\ -7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{+}=\dfrac{1}{33}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 2 & -2\\ 1 & -5 & -6\\ 1 & 6 & 5\end{bmatrix}$，

由于 $\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{b}=(11,6,-6)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{b}$，所以方程组无解.

全部最小二乘解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}+\frac{1}{11}\begin{bmatrix}9 & -4 & -1 & -1\\ -4 & 3 & -2 & -2\\ -1 & -2 & 5 & 5\\ -1 & -2 & 5 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}$$

($(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{C}$，任意)，极小范数最小二乘解为

$$\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}=\left(1,2,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$$

六、(12 分)

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$，$\forall\,\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^n$，定义向量范数 $\|\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{\alpha X}^{\mathrm{T}}\|_F$，试写出这种向量范数与向量 2 范数之间的关系；

(2) 证明：设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times m}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $\det(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=(\det\boldsymbol{A})^n(\det\boldsymbol{B})^m$.

证明　(1) 设 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{T}}$,则

$$\boldsymbol{\alpha X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{\alpha X}^{\mathrm{T}}\|_F=\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}=\sqrt{n}\|\boldsymbol{X}\|_2.$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1,\cdots,\mu_n$,则 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_i\mu_j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 所以

$$\det(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j=\left(\prod_{i=1}^{m}\lambda_i\right)^n\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_j\right)^m=(\det\boldsymbol{A})^n(\det\boldsymbol{B})^m$$

七、(10分)设线性空间 V^3 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$,证明:$W=L(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)$是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证明　由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$ 得

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)=2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$$

对于 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in W$,存在常数 k_1,k_2,使得

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=-(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})&=-(k_1+k_2)(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1))+k_1(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2))+k_2(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3))\\&=-k_1(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)-k_2(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)\in W\end{aligned}$$

故 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

八、(12分)设 $\mathscr{A}$ 为线性空间 V 上的线性变换.

(1) 证明:$\dim(\mathscr{A}(V))+\dim(\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}))=\dim V$;

(2) 是否有 $\mathscr{A}(V)+\mathscr{A}^{-1}(\theta)=V$? 若有,给出证明;若没有,给出反例.

证明　(1) 设 $\dim\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=r$,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 为 $\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$的一组基,而 $\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$是 V 的一个子空间,所以 $\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 可扩充为 V 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 下面来证 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$为 $\mathscr{A}(V)$的一组基.

(a) $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}(V)$,则存在 $\boldsymbol{\zeta}\in V$,使 $\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}(\boldsymbol{\zeta})$,而

$$\boldsymbol{\zeta}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{\varepsilon}_r+a_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}(\boldsymbol{\zeta})&=a_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+\cdots+a_r\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_r)+a_{r+1}\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1})+\cdots+a_n\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\\&=a_{r+1}\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1})+\cdots+a_n\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\end{aligned}$$

(b) 设 $a_{r+1}\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1})+\cdots+a_n\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)=\boldsymbol{\theta}$,所以

$$\mathscr{A}(k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n)=\boldsymbol{\theta}$$

故

$$k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n\in\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$$

所以

$$k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\varepsilon}_r$$

即

$$-k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1-\cdots-k_r\boldsymbol{\varepsilon}_r+k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=\boldsymbol{\theta}$$

而 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基，所以 $k_{r+1}=\cdots=k_n=0$，故 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 线性无关.

由(a)、(b)得 $\dim\mathscr{A}(V)=n-r$，所以 $\dim\mathscr{A}(V)+\dim\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=n$.

(2) $\mathscr{A}(V)+\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ 与 V 未必相等.

反例：令 $\mathscr{A}$ 为求导变换，$V=P[x]_n$，$\mathscr{A}(V)=P[x]_{n-1}$，$\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=C$(常数)，尽管有

$$\dim\mathscr{A}(V)+\dim\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=\dim V$$

但 $\mathscr{A}(V)+\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=\mathscr{A}(V)\neq P[x]_n$.

自测题十一

一、(10 分)

设 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的一组基为 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，另一组基为 $\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$.

(1) 求从前基到后基的过渡矩阵；

(2) 求从后基到前基的过渡矩阵.

解 (1) 取标准基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$，则

$$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-1&-1&0\\0&1&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

从前基到后基的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-1&-1&0\\0&1&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\0&-2&-1&0\\-1&0&-1&-1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

(2) 从后基到前基的过渡矩阵为

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&0&1&1\\0&-1&-2&-2\\-1&-1&-1&0\end{bmatrix}$$

二、填空题(每题 4 分,共 20 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-3&8&2\\2&12&-2&12\\1&3&1&4\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的值域

$$R(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\}\text{的维数 }\dim R(\boldsymbol{A})=\underline{\ 2\ }.$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\1&-1&3&7\end{bmatrix}$,$V_1,V_2$ 分别为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间,则

$$\dim(V_1\cap V_2)=\underline{\ 1\ }.$$

(3) 设 $\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix}\dfrac{n+(-1)^n}{n}&\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\\\dfrac{n+1}{3n}&\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^n\end{bmatrix}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n=\underline{\begin{bmatrix}1&1\\\dfrac{1}{3}&\mathrm{e}\end{bmatrix}}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&1\\2&0&2\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LDU}$ 分解为

$$\boldsymbol{A}=\underline{\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\1&\frac{2}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac{5}{2}&0\\0&0&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{5}\\0&0&1\end{bmatrix}}.$$

(5) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-2&5\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&4\\2&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\underline{\begin{bmatrix}2&4&4&8\\2&0&4&0\\-4&-8&10&20\\-4&0&10&0\end{bmatrix}}$.

三、(15 分)已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的全部行列式因子、不变因子、初等因子及史密斯标准形;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形 $\boldsymbol{J}$ 及过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$.

解　(1) $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的行列式因子为 $D_0(\lambda)=1,D_1(\lambda)=1,D_2(\lambda)=1,D_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$;

不变因子为 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$;

初等因子为 $\lambda-2,(\lambda-1)^2$;

史密斯标准形为$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{J}=\left[\begin{array}{c:cc}2 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{J}_2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{J}_1=(2)$,$\boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$. 经验证 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$ 成立,或 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$,$\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}$.

四、(10 分)

设函数矩阵

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{bmatrix}$$

求$\int_0^t \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$ 和$\left(\int_0^{t^2}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right)'$.

解 $\int_0^t \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}\int_0^t \sin t\mathrm{d}t & \int_0^t(-\cos t)\mathrm{d}t\\ \int_0^t \cos t\mathrm{d}t & \int_0^t \sin t\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\cos t & -\sin t\\ \sin t & 1-\cos t\end{bmatrix}\left(\int_0^{t^2}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right)'=$ $\boldsymbol{A}(t^2)\cdot 2t=2t\begin{bmatrix}\sin t^2 & -\cos t^2\\ \cos t^2 & \sin t^2\end{bmatrix}$

五、(15 分)

(1) 设 $f(\boldsymbol{X})=\|\boldsymbol{X}\|_F^2=\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})$,其中 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$是矩阵变量,求$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$是向量变量,$F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Ax}$,求$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}$.

解 (1) $f(\boldsymbol{X})=\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n x_{ij}^2$,$\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}}=2x_{ij}$;

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{m\times n}=(2x_{ij})_{m\times n}=2\boldsymbol{X};$$

(2) $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Ax}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^n a_{1k}x_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^n a_{mk}x_k\end{bmatrix}$,$\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\begin{bmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{mi}\end{bmatrix}$,$i=1,2,\cdots,n$;$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}=$ $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1},\dfrac{\partial F}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$.

六、(15 分)已知微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{Ax}\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases},\quad 其中\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形 $\boldsymbol{J}$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$;

(3) 计算矩阵函数 $e^{\boldsymbol{A}t}$;

(4) 求该微分方程组的解.

解　(1) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^3$,$\mathrm{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$,$\lambda=2$ 对应有两个线性无关的特征向量,不妨取 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$(不唯一),则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}$;

(2) 由 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形知

$$m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$$

(3) $e^{\boldsymbol{A}t}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1+t&-t\\0&t&1-t\end{bmatrix}$(方法不限).

如用代定系数法:$f(\lambda)=e^{\lambda t}$,$r(\lambda)=a+b\lambda$,由 $r(2)=f'(2)$ 可求得 $a=(1-2t)e^{2t}$,$b=te^{2t}$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=a\boldsymbol{I}+b\boldsymbol{A}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1+t&-t\\0&t&1-t\end{bmatrix}$$

(4) $x(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\\e^{2t}\end{bmatrix}$.

七、(15分)

(1) 设线性空间 V^n 中,从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$,证明:有非零向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V^n$,使 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下坐标相同的充要条件是 1 为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的特征值.

(2) 证明:与任意 n 阶方阵可交换的矩阵必是纯量矩阵.

解　(1) 必要性　设 $\boldsymbol{\alpha}\in V^n$,在两组基下坐标为 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$,即

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X},\quad \boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{Y}$$

若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$,则由坐标变换公式 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$,得

$$\boldsymbol{PY}=1\cdot\boldsymbol{Y}$$

可见 1 是 $\boldsymbol{P}$ 的一个特征值.

充分性　因为 1 是过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的一个特征值,设 $\boldsymbol{P}$ 的特征值 1 对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$,即 $\boldsymbol{PX}=1\cdot\boldsymbol{X}$,根据坐标变换公式,$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{PX}$,有 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}$,即 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两基下坐标相同.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$与任意矩阵可换,则 $\boldsymbol{A}$ 与基本矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 可换,即 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$,注意 $\boldsymbol{AE}_{ij}$ 是第 j 列为 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列,其余列均为 0 的矩阵,而 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$ 是第 i 行为 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行,其余行均为 0 的矩阵.由此可知 $\boldsymbol{A}$ 的非对角元素均为 0,而对角元素均满足 $a_{ii}=a_{jj}$,即 $\boldsymbol{A}$ 是纯量矩阵.

自测题十二

一、(5分)判断下列变换 $\mathscr{A}$ 哪些是线性变换.

(1) $\mathbb{R}^3$ 中,$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$,$\mathscr{A}[(x_1,x_2,x_3)]=(x_1+1,x_2+2,x_3+x_1)$;

(2) $\mathbb{R}^{n\times n}$中，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{A}$；

(3) $\mathbb{R}^{n\times n}$中，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\forall\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}$；

(4) $\mathbb{R}^{2\times 2}$中，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^*$.

其中$\boldsymbol{A}^*$是二阶方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵.

解 (1) $\mathscr{A}$不是线性变换，由于$\mathscr{A}(\boldsymbol{0})\neq\boldsymbol{0}$，所以不满足线性变换的性质(即不满足齐次性)；

(2) $\mathscr{A}$不是线性变换，因$\mathscr{A}(\boldsymbol{0})\neq\boldsymbol{0}$；

(3) $\mathscr{A}$是线性变换，因为$\forall\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)&=\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)+(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)\boldsymbol{B}\\&=(\mathscr{A}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{AX}_2+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B})\\&=\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1)+\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_2)\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{X})=\mathscr{A}(k\boldsymbol{X})+(k\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{X});$$

说明满足线性变换定义中的二条公理.

(4) $\mathscr{A}$是线性变换，因为设

$$\forall\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{bmatrix}$$

有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathscr{A}\left(\begin{bmatrix}a_1+b_1&a_2+b_2\\a_2+b_3&a_4+b_4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a_4+b_4&-a_2-b_2\\-a_3-b_3&a_1+b_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_4&-a_2\\-a_3&a_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_4&-b_2\\-b_3&b_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*=\mathscr{A}(\boldsymbol{A})+\mathscr{A}(\boldsymbol{B})$$

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{A})=\mathscr{A}\left(\begin{bmatrix}ka_1&ka_2\\ka_3&ka_4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}ka_4&-ka_2\\-ka_3&ka_1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}a_4&-a_2\\-a_3&a_1\end{bmatrix}=k\boldsymbol{A}^*=k\mathscr{A}(\boldsymbol{A})$$

所以满足线性变换的二条公理.

二、(5分)设矩阵空间$\mathbb{R}^{2\times 2}$的子空间$V=\{\boldsymbol{X}=(x_{ij})\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0\}$构成线性空间(按通常的矩阵加法和数量乘法)，试求$V$的维数，并写出$V$的一组基.

解 因为齐次方程$x_{11}+x_{12}+x_{21}=0$的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\qquad\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

所以V的一组基为$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，显然$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$线性无关.

$\forall\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\in V$，有$a_{11}=-a_{12}-a_{21}$，于是有

$$\boldsymbol{A}=a_{12}\boldsymbol{A}_1+a_{21}\boldsymbol{A}_2+a_{22}\boldsymbol{A}_3$$

即$\boldsymbol{A}$可由$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$线性表示，故$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$为$V$的一组基；且$\dim V=3$.

三、(15分)设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{bmatrix}$.

(1) 求$\boldsymbol{A}$的初等因子组；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形 $\boldsymbol{J}$；

(3) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$；

(4) 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解　(1) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0 & -1\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ 4 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

观察得 $\boldsymbol{D}_1=1,\boldsymbol{D}_2=1,\boldsymbol{D}_3=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$,因此初等因子组为$(\lambda-1)^2,(\lambda-2)$.

(2) $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$.

(3) 设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$,得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1 & ①\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 & ②\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3 & ③\end{cases}$$

由①,$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$,解得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -0.5\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由②,$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1$,解得

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

其中

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\ \vdots\ -\boldsymbol{\alpha}_1)=\left[\begin{array}{ccc:c}2 & 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & -2 & -2\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -0.5 & -0.5\\ 0 & 1 & 0.5 & -0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

由③,$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,解得

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

其中

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

容易求得三个线性无关的特征向量,从而得

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&-1&1\\2&1&0\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

(4) $J^k=\begin{bmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&2^k\end{bmatrix}$，$A^k=PJ^kP^{-1}=\begin{bmatrix}-2k+1&0&k\\2k+1-2^k&2^k&-k-1+2^k\\-4k&0&2k+1\end{bmatrix}$.

四、(15 分)设微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax\\ x(0)=x_0\end{cases},\quad 其中\quad A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{bmatrix},\quad x_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

(1) 求 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$；(2) 求 e^{At}；(3)求该方程组的解.

解 (1) 由于 $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^3$，所以 $m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$.

(2) 设 $f(z)=\mathrm{e}^{zt}=m_A(z)g(z)+a+bz$.

由 $f(2)=a+2b=\mathrm{e}^{2t}$，$f'(2)=b=t\mathrm{e}^{2t}$，解得

$$a=\mathrm{e}^{2t}(1-2t),b=t\mathrm{e}^{2t}$$

因此有

$$f(A)=\mathrm{e}^{At}=aI+bA=\mathrm{e}^{2t}(1-2t)I+t\mathrm{e}^{2t}A$$
$$=\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1+t&t&-t\\-2t&1-2t&2t\\-t&-t&1+t\end{bmatrix}$$

(3) $x(t)=\mathrm{e}^{At}x_0=\mathrm{e}^{2t}(1+t,1-2t,1-t)^{\mathrm{T}}$.

五、(20 分)

(1) 设 A 是 n 阶埃尔米特正定矩阵，定义

$$\|x\|_A=(x^{\mathrm{H}}Ax)^{\frac{1}{2}},\quad \forall x\in\mathbb{C}^n$$

试证上述函数是向量范数；

(2) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的一个算子范数，如果 $\|A\|<1$，证明 $I-A$ 可逆，且有 $\|(I-A)^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{1-\|A\|}$.

证明 (1) 因为 A 是埃尔米特正定矩阵，故存在可逆矩阵 Q，使得 $A=Q^{\mathrm{H}}Q$，则

$$\|x\|_A=(x^{\mathrm{H}}Ax)^{\frac{1}{2}}=(x^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Qx)^{\frac{1}{2}}=((Qx)^{\mathrm{H}}(Qx))^{\frac{1}{2}}=\|Qx\|_2$$

所以，由已知结论，$\|x\|_A=(x^{\mathrm{H}}Ax)^{\frac{1}{2}}$ 是向量范数.

(2) 由于 $|\lambda_i|\leqslant\rho(A)\leqslant\|A\|<1$，所以 $I-A$ 的特征值 $1-\lambda_i\neq0$，从而 $I-A$ 可逆.

$(I-A)^{-1}(I-A)=I\Rightarrow(I-A)^{-1}=I+(I-A)^{-1}A\Rightarrow\|(I-A)^{-1}\|=\|I+(I-A)^{-1}A\|\leqslant 1+\|(I-A)^{-1}\|\|A\|\Rightarrow\|(I-A)^{-1}\|(1-\|A\|)\leqslant1\Rightarrow$结论.

六、(10 分)

判别矩阵级数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\-\frac{4}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$ 的收敛性，若收敛，求其和.

解 考虑$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$,其收敛半径$R=1$.矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$的半径$\rho(\boldsymbol{A})=\frac{5}{6}<R$,故$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$(绝对)收敛.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

七、(15分)设矛盾方程$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(1) 求$\boldsymbol{A}$的满秩分解$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG}$;

(2) 由上面分解来计算$\boldsymbol{A}^+$;

(3) 写出该方程组最小二乘解表达式,并求出极小范数最小二乘解.

解 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GG}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{33}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -6 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

(3) $x=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^4$任意.

极小范数最小二乘解为$\tilde{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

八、(10分)

设$\mathscr{A}$是$\mathbb{C}^n$的线性变换,$W\neq\{0\}$是$\mathbb{C}^n$的一个子空间,且是$\mathscr{A}$的不变子空间,证明W中必有$\mathscr{A}$的特征向量.

证明 令$\dim W=r$,设n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为$W$的基,$W=L[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r]$,因$W$是$\mathscr{A}$的不变子空间,即$\mathscr{A}(W)\subseteq W$,则像$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_r)$属于$W$,它们可表示为基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的线性组合:

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_r))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{A}_{r\times r}$$

设μ与$\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$是矩阵$\boldsymbol{A}_{r\times r}$的特征值与对应的特征向量,即$\boldsymbol{AY}=\mu\boldsymbol{Y}$,令$\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{Y}$,则$\boldsymbol{Z}\neq\boldsymbol{0}\in W$,因为

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{Z}) &= \mathscr{A}[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{A}_{r\times r}\boldsymbol{Y}\\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\mu\boldsymbol{Y} = \mu(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{Y}\\ &= \mu\boldsymbol{Z}\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{Z}\in W$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征向量.

自测题十三

一、(5 分)在 $\mathbb{R}^3$ 中线性变换 $\mathscr{A}$ 将基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

变为基

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵表示；

(2) 求向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 及 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标；

(3) 求向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 及 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

解 (1) 不难求得

$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$

$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

因此 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$$

(2) 设 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}$,即

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&0\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}10\\-4\\-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\-4\\-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-15\\6\end{bmatrix}$$

$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下坐标为

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}23\\-32\\-13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\-32\\-13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\-4\\-9\end{bmatrix}$$

解之得：$k_1=10,k_2=-4,k_3=-9$,所以 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(10,-4,-9)^{\mathrm{T}}$.

$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\-4\\-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\-32\\-13\end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}10\\-4\\-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\-4\\-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-15\\6\end{bmatrix}$$

$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}23\\-32\\-13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\-32\\-13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\-4\\-9\end{bmatrix}$$

二、(5 分)设实数域上的多项式

$p_1(x)=x^3+2x^2+2x+3,p_2(x)=x^3+x^2+2x+3$

$p_3(x)=-x^3+x^2-4x-5,p_4(x)=x^3-3x^2+6x+7$

求线性空间 $W=\mathrm{Span}(p_1,p_2,p_3,p_4)$的一组基和维数.

解　$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&1&1&-3\\2&2&-4&6\\3&3&-5&7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

p_1,p_2,p_3 是 W 的一组基,$\dim W=3$.

三、(15 分)计算:

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆,求$\int_0^1 \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t$(用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 或其逆矩阵表示);

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)^{\mathrm{T}}$ 是给定的常向量,$\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{2\times4}$是矩阵变量,求$\dfrac{\mathrm{d}(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}$;

(3) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-6)$,且 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,求 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}\right)^k$.

解　(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}^{-1}\int_0^1\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}^{-1}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{I})$.

(2) 由 $\boldsymbol{X\alpha}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^4 x_{1j}a_j\\\sum\limits_{j=1}^4 x_{2j}a_j\end{bmatrix},(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}=\left(\sum\limits_{j=1}^4 x_{1j}a_j\quad\sum\limits_{j=1}^4 x_{2j}a_j\right)$ 得

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\partial x_{11}}&\dfrac{\partial(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\partial x_{12}}&\dfrac{\partial(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\partial x_{13}}&\dfrac{\partial(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\partial x_{14}}\\\dfrac{\partial(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\partial x_{21}}&\dfrac{\partial(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\partial x_{22}}&\dfrac{\partial(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\partial x_{23}}&\dfrac{\partial(\boldsymbol{X\alpha})^{\mathrm{T}}}{\partial x_{24}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_1&0&a_2&0&a_3&0&a_4&0\\0&a_1&0&a_2&0&a_3&0&a_4\end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征根为 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=0,\rho(\boldsymbol{A})=6$，由于 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{C}^{-1}$，从而 $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{C}^{-1}$，故

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}\right)^k=\boldsymbol{C}\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}^k\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{C}^{-1}=\frac{1}{6}\boldsymbol{A}$$

四、(15 分)已知矛盾方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1+2x_2=1\\2x_1+3x_2=1\end{cases}$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG}$；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆 $\boldsymbol{A}^+$；

(3) 求该方程组的最小二乘解 $\boldsymbol{x}_{LS}$.

解 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{FG}$(不唯一)；

(2) $\boldsymbol{A}^+=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\4&2&-2\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{x}_{LS}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

五、(15 分)利用 Gerschgorin 圆盘定理证明矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2^2}&\cdots&\frac{1}{2^{n-1}}\\\frac{2}{3}&4&\frac{2}{3^2}&\cdots&\frac{2}{3^{n-1}}\\\frac{3}{4}&\frac{3}{4^2}&6&\cdots&\frac{3}{4^{n-1}}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{n}{n+1}&\frac{n}{(n+1)^2}&\frac{n}{(n+1)^3}&\cdots&2n\end{bmatrix}$$

(1) 能与对角矩阵相似；

(2) 特征值全为实数.

解 (1)

$$R_k=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)^i}=1-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}<1$$

G_k 互不交，说明 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，从而可对角化；

(2) G_k 关于实轴对称，如果 $\boldsymbol{A}$ 有复特征值必成对共轭出现，而 G_k 中只有一个特征值，所以必为实数.

六、(15 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\\0&2\\1&0\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&1&2\\1&2&-1&1\\2&2&-2&-1\end{bmatrix}$ 的满秩分解.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&5\end{bmatrix}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值为$\sqrt{2},\sqrt{5}$. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 5,2 的标准特征向量为 $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,记 $V=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,再计算 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的标准正交特征向量,解得分别与 5,2,0,0 对应的四个标准正交特征向量

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{-2}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{-2}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&\sqrt{2}\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$.

(2)

$$[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{cccc:ccc}-1&0&1&2&1&0&0\\1&2&-1&1&0&1&0\\2&2&-2&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{cccc:ccc}-1&0&1&2&1&0&0\\0&2&0&3&1&1&0\\0&0&0&0&1&-1&1\end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

可求得

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\-2&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1&0&1&2\\0&2&0&3\end{bmatrix}$$

于是有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1&2\\0&2&0&3\end{bmatrix}=\boldsymbol{BC}$$

七、(15 分)已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

求 e^{At}, $\sin At$ 和 $\cos At$.

解 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为 $\boldsymbol{J}=\left[\begin{array}{c:cc}2&0&0\\ \hdashline 0&2&1\\0&0&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{J}_2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{J}_1=(2)$, $\boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$,过渡阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

令 $f_1(\lambda)=e^{\lambda t}$, $f_2(\lambda)=\sin\lambda t$, $f_3(\lambda)=\cos\lambda t$,则

$$f'_1(\lambda)=te^{\lambda t},\quad f'_2(\lambda)=t\cos\lambda t,\quad f'_3(\lambda)=-t\sin\lambda t$$

从而

$$f_1(\boldsymbol{J}_1)=(e^{2t}),\quad f_2(\boldsymbol{J}_1)=(\sin 2t),\quad f_3(\boldsymbol{J}_1)=(\cos 2t)$$

$$f_1(\boldsymbol{J}_2)=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix},\quad f_2(\boldsymbol{J}_2)=\begin{bmatrix}\sin 2t&t\cos 2t\\0&\sin 2t\end{bmatrix}$$

$$f_3(\boldsymbol{J}_2)=\begin{bmatrix}\cos 2t&-t\sin 2t\\0&\cos 2t\end{bmatrix}$$

于是有

$$e^{\boldsymbol{J}t}=f_1(\boldsymbol{J})=\begin{bmatrix}f_1(\boldsymbol{J}_1)&0\\0&f_1(\boldsymbol{J}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$\sin\boldsymbol{J}t=f_2(\boldsymbol{J})=\begin{bmatrix}f_2(\boldsymbol{J}_1)&0\\0&f_2(\boldsymbol{J}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin 2t&0&0\\0&\sin 2t&t\cos 2t\\0&0&\sin 2t\end{bmatrix}$$

$$\cos\boldsymbol{J}t=f_3(\boldsymbol{J})=\begin{bmatrix}f_3(\boldsymbol{J}_1)&0\\0&f_3(\boldsymbol{J}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2t&0&0\\0&\cos 2t&-t\sin 2t\\0&0&\cos 2t\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(1+t)e^{2t}&te^{2t}&-te^{2t}\\0&e^{2t}&0\\te^{2t}&te^{2t}&(1-t)e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$\sin At=P\sin JtP^{-1}=P\begin{bmatrix}\cos 2t&0&0\\0&\cos2t&-t\sin2t\\0&0&\cos2t\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}t\cos2t+\sin2t&t\cos2t&-t\cos2t\\0&\sin2t&0\\t\cos2t&t\cos2t&\sin2t-t\cos2t\end{bmatrix}$$

$$\cos At=P\cos JtP^{-1}=\begin{bmatrix}\cos2t-t\sin2t&-t\sin2t&t\sin2t\\0&\cos2t&0\\-t\sin2t&-t\sin2t&\cos2t+t\sin2t\end{bmatrix}.$$

评注　也可用第二种方法——待定系数法求解：

因 A 的最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2$(验证 $(A-2I)^2=0$),故可设 $e^{At}=g_1(A)$,$\sin At=g_2(A)$,$\cos At=g_3(A)$,其中 $g_i(\lambda)=a_i\lambda+b_i$,$i=1,2,3$. 由 $f_i(2)=g_i(2)$ 和 $f'_i(2)=g'_i(2)$ 得

$$\begin{cases}e^{2t}=2a_1+b_1\\te^{2t}=a_1\end{cases},\qquad\begin{cases}\sin2t=2a_2+b_2\\t\cos2t=a_2\end{cases},\qquad\begin{cases}\cos2t=2a_3+b_3\\-t\sin2t=a_3\end{cases}$$

因此 $e^{At}=te^{2t}\cdot A+(1-2t)e^{2t}\cdot I$

$\sin At=t\cos2t\cdot A+(\sin2t-2t\cos2t)I$

$\cos At=t\sin2t\cdot A+(\cos2t+2t\sin2t)I$(结果同上).

八、(15分)设 A 是可逆矩阵,$\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}=\alpha$,$\|B-A\|=\beta$(这里矩阵范数都是算子范数),如果 $\beta<\alpha$,证明:

(1) B 是可逆矩阵;(2) $\|B^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{\alpha-\beta}$;(3) $\|B^{-1}-A^{-1}\|\leqslant\dfrac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$.

证明　(1) $\|x\|=\|A^{-1}Ax\|\leqslant\|A^{-1}\|\|Ax\|=\dfrac{1}{\alpha}\|(A-B)x+Bx\|$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha}(\|(A-B)x\|+\|Bx\|)\leqslant\frac{\beta}{\alpha}\|x\|+\frac{1}{\alpha}\|Bx\|$$

从而有

$$(\alpha-\beta)\|x\|\leqslant\|Bx\|\tag{$*$}$$

因此,$\forall x\neq 0\Rightarrow Bx\neq 0$,说明 B 可逆.

(2) 由式($*$),取 $x=B^{-1}y$

$$(\alpha-\beta)\|B^{-1}y\|\leqslant\|BB^{-1}y\|=\|y\|\Rightarrow\|B^{-1}y\|\leqslant\frac{1}{\alpha-\beta}\|y\|$$

由算子范数的定义得 $\|B^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{\alpha-\beta}$

(3) $\|B^{-1}-A^{-1}\|=\|B^{-1}(A-B)A^{-1}\|\leqslant\|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{\alpha-\beta}\cdot\beta\cdot\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$

自测题十四

一、(10 分)填空题

(1) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\\ 2 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 则

$\|\boldsymbol{A}\|_1=\underline{\sqrt{5}+2}$; $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\underline{1+\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; $\|\boldsymbol{Ax}\|_1=\underline{4+3\sqrt{2}}$; $\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty=\underline{3\sqrt{2}}$.

(2) 已知 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V^3 上的线性变换，且有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_3$$

则变换 $\mathscr{A}$ 在基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$下的变换矩阵为 $\underline{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}}$.

(3) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解为 $\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\ & 3 & 6\\ & & 1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LDU}$ 分解为 $\underline{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}$.

(4) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})<1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{A}^n=\underline{\boldsymbol{0}}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 的特征值为 1,2,0，则矩阵 $\sin\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\underline{\sin1,\sin2,0}$.

(6) 已知正规矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1+2\mathrm{i},\lambda_3=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值为 $\underline{2,\sqrt{5},1}$.

(7) 如果 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 的最小多项式 $m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+3)^2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当矩阵为 $\underline{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}}$.

(8) 设 $f(z)=\sqrt{z}$, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, 则 $f(\boldsymbol{A})=\underline{\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}}$.

二、(10 分)在欧氏空间$\mathbb{R}^3$中求一个正交变换 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{e}_3$, $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{e}_1$，其中 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$为$\mathbb{R}^3$的基本单位向量(称自然基)，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

解 因正交变换 $\mathscr{A}\Leftrightarrow$把标准正交基变为标准正交基，则

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_2$$

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3))=(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$$

故

$$\mathscr{A}=(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

三、(10分)设$\mathbb{R}^{2\times2}$中,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$,定义变换

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA},\quad \forall\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times2}$$

(1) 证明 $\mathscr{A}$ 是$\mathbb{R}^{2\times2}$的线性变换;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$下的矩阵;

(3) 证明 0 是 $\mathscr{A}$ 的特征值;

(4) 试讨论特征值为 0 的重数对于 a,b,c,d 的依赖关系.

解　(1) 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in\mathbb{R}^{2\times2}$,由 $\mathscr{A}$ 的定义可得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)-(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)\boldsymbol{A}\\&=(\boldsymbol{AX}_1-\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{AX}_2-\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A})\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_2)\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X})-k\boldsymbol{XA}=k(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{X})$$

故 $\mathscr{A}$ 是线性变换.

(2) $\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_1)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-b\\c&0\end{bmatrix}$

$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_2)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c&a-d\\0&c\end{bmatrix}$

$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_3)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&0\\d-a&-b\end{bmatrix}$

$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_4)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&b\\-c&0\end{bmatrix}$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-c&b&0\\-b&a-d&0&b\\c&0&d-a&-c\\0&c&-b&0\end{bmatrix}$$

(3) 当$|0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$,即$|\boldsymbol{A}|=0$,则 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.将$|\boldsymbol{A}|$的第一列展开

$$|\boldsymbol{A}|=b\begin{bmatrix}-c&b&0\\0&d-a&-c\\c&-b&c\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-c&b&0\\a-d&0&b\\c&-b&0\end{bmatrix}$$

$$=b(-c^2b+bc^2)+c(b^2c-b^2c)=0.$$

(4) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}\lambda & c & -b & 0\\ b & \lambda-a+d & 0 & -b\\ -c & 0 & \lambda-d+a & c\\ 0 & -c & b & \lambda\end{bmatrix}=\lambda^2[\lambda^2-(a-d)^2-4bc]$.

当$(a-d)^2+4bc\neq0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 的特征值 0 的重数为 2;

当$(a-d)^2+4bc=0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 的特征值 0 的重数为 4.

四、(20 分)

(1) 证明过渡矩阵必是可逆矩阵;

(2) 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 既是正规矩阵,又是幂零矩阵,证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{J},\boldsymbol{K}$ 是两组基,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为两个过渡矩阵,即 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{JA},\boldsymbol{J}=\boldsymbol{KB}$,于是 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{BA})$,但坐标唯一,故知 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$,从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 皆可逆且互为逆矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正规阵,则 $\boldsymbol{A}$ 可酉对角化,又 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值皆为 0,即存在酉阵 $\boldsymbol{U}$,使得

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$$

五、(20 分)已知

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}\sin t & -\cos t\\ \mathrm{e}^t\cos t & \mathrm{e}^t\sin t\end{bmatrix}$$

求(1) $\lim\limits_{t\to0}\boldsymbol{A}(t),\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t^2},\dfrac{\mathrm{d}\,|\,\boldsymbol{A}(t)\,|}{\mathrm{d}t},\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|$ 和$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}$.

(2) $\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t,\int_0^1\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$ 和$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$.

解 (1) $\lim\limits_{t\to0}\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \mathrm{e}^t(\cos t-\sin t) & \mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)\end{bmatrix},\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t^2}=\begin{bmatrix}-\sin t & -\cos t\\ -2\mathrm{e}^t\sin t & 2\mathrm{e}^t\cos t\end{bmatrix},\dfrac{\mathrm{d}\,|\,\boldsymbol{A}(t)\,|}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^t}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^t,\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|=\mathrm{e}^t(2\sin t\cos t+\cos^2t-\sin^2t)=\mathrm{e}^t(\sin2t+\cos2t),\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\sin t & \mathrm{e}^{-t}\cos t\\ -\cos t & \mathrm{e}^{-t}\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t & -\mathrm{e}^{-t}(\sin t+\cos t)\\ \sin t & \mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)\end{bmatrix}$.

(2) $$\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}-\cos t & -\sin t\\ \dfrac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t+\cos t) & \dfrac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t-\cos t)\end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}1-\cos1 & -\sin1\\ \dfrac{\mathrm{e}}{2}\left(\sin1+\cos1-\dfrac{1}{2}\right) & \dfrac{\mathrm{e}}{2}(\sin1-\cos1)+\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right)=2x\boldsymbol{A}(x^2)=\begin{bmatrix}2x\sin x^2 & -2x\cos x^2\\ 2x\mathrm{e}^{x^2}\cos x^2 & 2x\mathrm{e}^{x^2}\sin x^2\end{bmatrix}$$

六、(10 分) 讨论幂级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^k$ 的敛散性,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$.

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)^2,\lambda_{1,2}=-1$,得 $\rho(\boldsymbol{A})=1$,而矩阵幂级数的收敛半径 $R=1$,

讨论如下：

$\lambda_{1,2}=-1$，求解$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，因$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=1$，只能求得一个线性无关的特征向量，故$\boldsymbol{A}$相似于一个二阶若尔当矩阵，即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{J}^k=\begin{bmatrix}(-1)^k & k(-1)^{k-1}\\ 0 & (-1)^k\end{bmatrix}$$

因而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\boldsymbol{J}^k\Big)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\\ 0 & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

因级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$发散，所以$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^k$发散.

七、(10分)设$\boldsymbol{A}_i\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b}_i\in\mathbb{R}^m(i=1,2,\cdots,k)$，$f(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_i\|_2^2$.

(1) 求$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$和$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\Big(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\Big)$；

(2) 如果$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$是$f(\boldsymbol{x})$的极小值点，证明$\boldsymbol{x}_0$为下面方程组的解$\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\Big)\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}$.

解　(1) $f(\boldsymbol{x})=\sum(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_i)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_i)=\sum(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=2\sum(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\Big(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\Big)=2\sum\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i$$

(2) 如果$\boldsymbol{x}_0$是$f(\boldsymbol{x})$的极小值点，则

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\Big|_{x=x_0}=2\sum(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i)=\boldsymbol{0}\Rightarrow\Big(\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\Big)\boldsymbol{x}_0=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i$$

或者

方程组$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_k\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_k\end{bmatrix}$的最小二乘问题为求$f(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_i\|_2^2$的极小值，而极小值点与方程组$\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\Big)x=\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i$的解等价.

自测题十五

一、(10分)填空

(1) $\mathbb{R}^2$的两组基为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1)^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1)^{\mathrm{T}}$，设$\mathscr{A}$在$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，求$\mathscr{A}$在$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$下的矩阵为$\underline{\begin{bmatrix}19 & 24\\ -11 & -14\end{bmatrix}}$.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&2&1&-1\\1&0&2&1\end{bmatrix}$ 的满秩分解表达式 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\underline{\begin{bmatrix}1&2\\0&2\\1&0\end{bmatrix}},\quad \boldsymbol{C}=\underline{\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}}.$$

(3) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 为单纯矩阵，求 $a=\underline{0}$.

(4) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$，$\mathbb{C}^{2\times2}$ 的子集 $V=\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^2\}$，求 V 的一组基，$\underline{\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&-1\end{bmatrix}}$ 以及 $\dim V=\underline{2}$.

二、(10 分)

(1) 设 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times2}$，定义变换 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}$，试证 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 上的线性变换；

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times2}$，记 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}$，问函数 $\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 是否为内积，为什么？

(3) 设 $f(t),g(t)\in C[0,1]$，定义内积 $(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$，取 $f(t)=t,g(t)=\mathrm{e}^t$，试具体写出 Cauchy-Suhwarz 不等式的表达式.

解 (1) $\forall\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in V,\lambda\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)&=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}_1+\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}_2\\&=\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1)+\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_2)\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}(\lambda\boldsymbol{X}_1)=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\lambda\boldsymbol{X}_1=\lambda\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}_1=\lambda\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1)$$

又因任意两个二阶方阵的乘积、和仍为二阶方阵，故 $V=V'$，即 $\mathscr{A}$ 为从 V 到 V(自身)的线性算子，所以 $\mathscr{A}$ 为线性变换.

(2) 不是内积. 因为

$$\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\rangle=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A})=2\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=2(a_{11}+a_{22})$$

并不一定大于零.

(3) 因为 $(f,g)=\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=1$

$$|f|=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_0^1 t^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$|g|=\sqrt{(g,g)}=\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|(f,g)|\leqslant|f|\cdot|g|$$

即 $1\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{e^2-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

三、(15分)$\mathbb{R}^n$中,设 n 维非零列向量为 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,又已知 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_{n-1}$ 是 $n-1$个线性无关向量组,且 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_i=0,i=1,2,\cdots,n-1$. 证明:

(1) $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量,并求 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征值;

(2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,求矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

证明　(1) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\alpha}$$

其中数 $k=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 k 对应的特征向量.

(2) 由 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_i=0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,n-1$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_i=0\cdot\boldsymbol{q}_i$,所以 $\boldsymbol{q}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 0 对应的特征向量. 故 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量组成 $\boldsymbol{P}$,

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_{n-1})$$

使得 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(k,0,\cdots,0)$.

四、(15分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,对任意 $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 均有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}$,证明:$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆并求其逆.

(2) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,证明:

$$\|e^{\boldsymbol{A}}\|\leqslant e^{\|\boldsymbol{A}\|}\quad 及\quad |e^{\boldsymbol{A}}|=e^{\mathrm{tr}\boldsymbol{A}}$$

证明　(1) 条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}$,表明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值不等于1,因此 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})<1$,则

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^m+\cdots(右端的级数一定收敛)$$

(2) $e^{\boldsymbol{A}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$,记 $\boldsymbol{S}_N=\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$

$$\|\boldsymbol{S}_N\|=\left\|\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\|\boldsymbol{A}\|^k$$

两边取极限得

$$\|e^{\boldsymbol{A}}\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|\boldsymbol{A}\|^k}{k!}=e^{\|\boldsymbol{A}\|}$$

设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$,有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$

$$e^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{J_1}&&&\\&e^{J_2}&&\\&&\ddots&\\&&&e^{J_m}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中

$$e^{J_i}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_i}&1&&\\&e^{\lambda_i}&1&\\&&\ddots&1\\&&\ddots&e^{\lambda_i}\end{bmatrix}$$

因而 e^{A} 的行列式为

$$|\mathrm{e}^{A}| = |\boldsymbol{P}||\mathrm{e}^{J}||\boldsymbol{P}^{-1}| = |\mathrm{e}^{J}| = \left|\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{J_1} & & & \\ & \mathrm{e}^{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{J_m} \end{bmatrix}\right|$$

$$= |\mathrm{e}^{J_1}||\mathrm{e}^{J_2}|\cdots|\mathrm{e}^{J_m}| = \mathrm{e}^{\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_2}\cdots\mathrm{e}^{\lambda_m}$$

$$= \mathrm{e}^{\lambda_1+\cdots+\lambda_m} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}.$$

五、(15 分)已知 3 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

的二重特征值 $\lambda=2$ 对应两个线性无关的特征向量.

(1) 求 x,y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵;

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解表达式.

解 (1) 因 $\lambda=2$ 对应两个线性无关的特征向量,所以线性方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

的秩应为 1,对 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 作初等行变换将其化为阶梯形矩阵,得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可得 $x=2, y=-2$.

(2) 已经得到

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

求得 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$,所以其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=6$. 对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$,其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$;对于 $\lambda_3=6$,其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$,于是

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(3) 求出

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix},\quad (P^{-1})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$$

令 $G_1=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

$$G_2=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

故 $A=2G_1+6G_2$ 为矩阵 A 的谱分解表达式.

六、(15 分)(1) 设 A 和 B 是 n 阶正定埃尔米特矩阵,则 $|\lambda B-A|=0$ 的根全是正数,试证明之.

(2) 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7}\\ \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{3}{6} & \frac{1}{7}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

试证:$\rho(A)\leqslant 1$.

证明　(1) 由于矩阵 B 是正定矩阵,所以存在可逆矩阵 P,使得 $P^{\mathrm{H}}BP=I$,即 B 与 I 相似.同时,由于矩阵 A 是正定矩阵,则 $P^{\mathrm{H}}AP$ 也是正定矩阵,从而 $P^{\mathrm{H}}AP$ 的特征值全为正数,即特征方程 $|\lambda I-P^{\mathrm{H}}AP|=0$ 的根全为正数.将上述 $P^{\mathrm{H}}BP=I$ 代入后,得

$$|\lambda I-P^{\mathrm{H}}AP|=|\lambda P^{\mathrm{H}}BP-P^{\mathrm{H}}AP|=|P^{\mathrm{H}}||P||\lambda B-A|=0$$

因 $|P|\neq 0$, $|P^{\mathrm{H}}|\neq 0$,所以有

$$|\lambda I-P^{\mathrm{H}}AP|=|\lambda B-A|=0$$

则 $|\lambda B-A|=0$ 的根全为正数.

(2) 由矩阵1范数的定义及谱半径的性质可知

$$\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant 4}\sum_{i=1}^{4}|a_{ij}| = \max\left\{1,1,1,\frac{6}{7}\right\} = 1$$

七、(10分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 写出 $\boldsymbol{A}$ 的4个盖尔圆;

(2) 应用盖尔圆定理证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有两个实特征值.

解 (1) $G_1:|z-9|\leqslant 4$;$G_2:|z-8|\leqslant 2$;$G_3:|z-4|\leqslant 1$;$G_4:|z-1|\leqslant 1$.

(2) 它们构成两个连通部分 $S_1=G_1\cup G_2\cup G_3$,$S_2=G_4$,且 S_1,S_2 均关于实轴对称,故 S_2 只有一个特征值且必为实数,S_1 中有三个特征值,故至少有一个实特征值.

八、(10分)假设三维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} 2 & a & c \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,问:当 a,b,c,d 满足什么条件时,存在 V 的一组基,使得 $\mathscr{A}$ 的矩阵是 $\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & d & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

解 因 $\boldsymbol{J},\boldsymbol{K}$ 为同一线性变换下的矩阵,故 $\boldsymbol{J}\backsim\boldsymbol{K}$,且有相同的若尔当标准形,相同的特征值,相同的迹,相同的秩.

根据 $\boldsymbol{J},\boldsymbol{K}$ 迹相同(即主对角元素的和相同)得

$$\boldsymbol{d}=-1,\qquad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

考察矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

当 $\lambda=2$ 时,$\operatorname{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}=2$,求得矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的若尔当标准形为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,从而矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的若尔当标准形也为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

再考察矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -a & -c \\ 0 & \lambda-2 & -b \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

当 $\lambda=2$ 时,

$$\operatorname{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J})=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & -a & -c\\ 0 & 0 & -b\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=2$$

所以最后求得

$$b\neq 0, a=c=0, \quad \text{或} \quad b=0, ac\neq 0$$

参 考 文 献

[1] 方保镕，等．矩阵论[M]．2 版．北京：清华大学出版社，2013．

[2] 张凯院．矩阵论典型题解析及自测试题[M]．西安：西北工业大学出版社，2001．

[3] 林升旭．矩阵论学习辅导与典型题解析[M]．武汉：华中科技大学出版社，2003．

[4] 魏丰，等．矩阵分析指导[M]．北京：北京理工大学出版社，2005．