中華文庫

初中第一集

三角表解

張鵬飛編

中華書局印行

編例

本書表是主，解是輔；表求簡括，有系統，少缺漏，解求清楚，有根據，不累贅。 分類標準極顯豁，便初學三角者的檢查；記憶方法均奇巧，可助已學者的溫習；重要途徑多指示，能充自修者的引導。 因求系統完整，根據齊備，排印便利，翻閱容易起見，形式和普通的表解，略有一點出入。

書中以初中學生爲對象，範圍不得過廣，程度不能過深；所以選擇材料，偏重下列各項：

(一)基本或重要事件在本學科須反復學習的。

(二)常見而容易忽略或錯誤須特別注意的。

(三)教科書講而不詳須補充的。

(四)教科書全未講到須補出的。

務使閱者精神時間沒有絲毫浪費。

書中材料，一一分別輕重，加以標識，如：

(一)附※號者，是必須要記的。

(二)附◎號者，是最好要記的。

(三)附△號者，是可以不記的。

(四)沒有號者，是不須記得的。

務使閱者精神時間用得恰得其當。

本書成於短促時間，恐有未能盡善之處，務希閱者不吝指正！

三角表解目次

三角表解

第一　名詞表

一　平面圖形

*1. 角

(1)獨立角
- 甲. 平角——方向相反兩直綫的夾角。
- 乙. 直角——平角的一半。
- 丙. 銳角——小於直角的。
- 丁. 鈍角——大於直角而小於平角的。

(2)關係角
- 甲. 補角——和等於二直角的兩角。
- 乙. 餘角——和等於一直角的兩角。

*注意：成角的兩直綫，是牠的邊；邊的交點，是牠的頂。

*2. 綫

- 關係綫
  - 甲. 垂綫 — 直角的兩邊. 說這兩綫互相垂直.
  - 乙. 平行綫——在一直綫同側和牠成公一邊的相等兩角,就是成相等兩同位角的兩直綫. 說這兩綫互相平行.

3. 三角形

- (1)各部
  - 甲. 邊——做界的各直綫段. 可拿一邊做底,餘兩邊做腰. 三邊合叫做周.
  - 乙. 角——兩邊的夾角. 底張的角是頂角,餘兩角是底角.
  - 丙. 頂——頂角的頂.
- (2)各種
  - 甲. 直角三角形——一角是直角的.　　*注意: 直角抱的邊,也叫斜邊.
  - 乙. 斜角三角形
    - (甲′)銳角三角形——三角都是銳角的.
    - (乙′)鈍角三角形——一角是鈍角的.
- (3)附屬綫——高綫——底的垂綫過三角形頂的. 這綫在頂 底或底的延綫間部份的長叫高.

注: 直角三角形的直角兩邊,以前叫勾和股,餘一邊叫弦. 弦和圓的弦混,宜棄而不用.

4. 圓

- (1)各部
  - 甲. 心——居中的一點.
  - 乙. 周——做界的曲綫. 周的一部叫弧,四分之一叫象限弧.

丙. 徑——穿心到界的相等各直綫段. 從心到界的直綫段叫半徑,是直徑的一半.

(2)特種——單位圓——半徑長1單位的.

(3)附屬角——圓心角——兩半徑的夾角. 等於半徑的弧所張的圓心角,叫半徑角或弳 Radian.

(4)附屬綫
- 甲. 割綫——交周於兩點的直綫.
- 乙. 切綫——祇能交周於一點的.
- 丙. 弦——夾於周間的直綫段.

注: 弳,以前叫弧度,和弧的度相混,宜棄而不用.

二 圓函數或三角函數

1. 原名

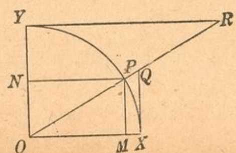
(1)在單位圓O裏:

甲. XPY弧是象限弧. OX、OP、OY表1. XOY、PMO、QXO、ONP、OYR各角都是直角.

乙. 拿∠XOP做本角,∠POY是餘角.

丙.
- MP 或 $\frac{MP}{OP}$ 就表本角的正弦,
- XQ 或 $\frac{XQ}{OX}$ 就表本角的正切,
- OQ 或 $\frac{OQ}{OX}$ 就表本角的正割,

以上三者為正函數;



NP 或 $\frac{NP}{OP}$ 就表本角的餘弦，
YR 或 $\frac{YR}{OY}$ 就表本角的餘切，
OR 或 $\frac{OR}{OY}$ 就表本角的餘割，
} 餘函數.

丁. 本角度數是這些函數的逆函數.

注： MX 或 $1-\frac{NP}{OP}$ 表正矢，就是 1－餘弦，NY 或 $1-\frac{MP}{OP}$ 表餘矢，就是 1－正弦，和上六者，以前合叫八綫. 但常用的，祇有正弦，餘弦，正切.

(2)在直角三角形ABC裏：

甲. ∠C 是直角.

乙. 拿∠A 做本角，∠B 是餘角.

丙. $\frac{CB}{AB}$ 就表本角的正弦， $\frac{AC}{AB}$ 就表本角的餘弦，
$\frac{CB}{AC}$ 就表本角的正切， $\frac{AC}{CB}$ 就表本角的餘切，
$\frac{AB}{AC}$ 就表本角的正割， $\frac{AB}{CB}$ 就表本角的餘割.

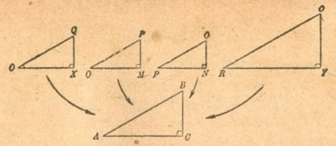
丁. 本角度數是這些函數的逆函數.

甲. 關係——在∠XOP＝∠A 時：

$$\frac{MP}{OP}=\frac{ON}{OP}=\frac{CB}{AB},\quad \frac{XQ}{OX}=\frac{CB}{AC},\quad \frac{OQ}{OX}=\frac{AB}{AC},$$

$$\frac{NP}{OP}=\frac{OM}{OP}=\frac{AC}{AB},\quad \frac{YR}{OY}=\frac{AC}{CB},\quad \frac{OR}{OY}=\frac{AB}{CB}.$$

(3)兩形函數的關係



乙. 理由
- (甲′)三角形三角的和等於二直角， 限弧所張的圓心角是一直角.
- (乙′)各角一一相等的兩個三角形相似，牠們對應邊的比率都相等.

2. 記 號*

(1) A角的函數
- 正弦記做 SinA.　Sin 是 Sine 的略寫.
- 餘弦記做 CosA.　Cos 是 Cosine 的略寫.
- 正切記做 TanA.　Tan 是 Tangent 的略寫.
- 餘切記做 CotA.　Cot 是 Cotangent 的略寫.
- 正割記做 SecA.　Sec 是 Secant 的略寫.
- 餘割記做 CscA.　Csc 是 Cosecant 的略寫.

(2)函數的平方——正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割的平方，順次記做：

Sin^2A. Cos^2A. Tan^2A. Cot^2A. Sec^2A. Csc^2A.

*注意：A 可以是角度，如Sin30°、Cos45°、Tan60°.

(3)函數的逆函數——正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割的逆函數，順次記做：

$\underline{\mathrm{Sin}^{-1}A}$. $\underline{\mathrm{Cos}^{-1}A}$. $\underline{\mathrm{Tan}^{-1}A}$. $\underline{\mathrm{Cot}^{-1}A}$. $\underline{\mathrm{Sec}^{-1}A}$. $\underline{\mathrm{Csc}^{-1}A}$.

注：現有人創新記號，也和上記號同，都有一二缺點.

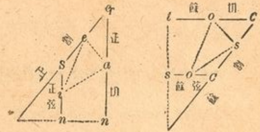
3. 記憶法

(1)原名記憶法

甲. 就單位圓講，正餘弦、正餘切、正餘割順次是單位圓弦切割綫的一部份. 正弦、正切都是本角所抱的直綫段，而正割是本角餘角公有邊從角頂到正切的一部份；餘弦、餘切都是餘角所抱的直綫段，而餘割是本角餘角公有邊從角頂到餘切的一部份. 照這樣想，絕對不會記錯.

乙. 就直角三角形，記這六個函數，可看後面直角三角形公式記憶法.

(2)記號記憶法——這六個函數的記號，用右方兩個圖來幫助，也很容易記得.



三 空間圖形

1. 普通

(1)點綫面角

- 甲. 關係綫面
  - (甲′)平行綫面——直綫和平面不能相交時,叫這平面的平行綫,而這平面也叫這直綫的平行面. 不能相交的兩平面,互叫平行面.
  - (乙′)垂直綫面——直綫和平面交於一點且平面內過交點的它直綫都和這直綫垂直時,叫這平面的垂綫,而這平面也叫這直綫的垂綫. 對含它面垂綫的兩平面,互叫垂面.
- 乙. 點綫射影
  - (甲′)點的射影——從點到直綫或平面所作垂綫的足.
  - (乙′)綫段射影——從直綫段兩端到它直綫或平面所作兩垂綫足間的直綫段.
- 丙. 獨立綫面
  - (甲′)水平綫面——靜水的表面,叫水平面,可做平面看;牠的平行面,也叫水平面. 水平面內的直綫,叫水平綫;牠的平行綫,都是水平綫.
  - (乙′)鉛垂綫面——像下端懸鉛錘的線,引長能通過地球中心的,叫鉛垂綫,可做水平面的垂綫看;牠的平行綫,也叫鉛垂綫. 含鉛垂綫的平面,叫鉛垂面;牠的平行面,都是鉛垂面.
  - (丙′)地平綫面——過地面一點並和這點鉛垂綫垂直的平面,叫地平面,可做水平面看. 地平面內的直綫,叫地平綫,可做水平綫看.
- 丁. 獨立角
  - (甲′)水平角——水平面內的角. 兩直綫在同水平面內射影的夾角,叫牠們的水平角.
  - (乙′)鉛垂角——鉛垂面內一邊是水平綫的角.

*注意：水平綫、角，也叫方向綫、角，或方位綫、角；鉛垂綫、面、角，也叫直立綫、面、角。　離開很遠的兩地，不能有相同的水平綫、面、角，和鉛垂綫、角。

(2)距離和高

- 甲．距離
  - (甲′)水平距離——兩點間直綫段在水平面內射影的長，叫這兩點的水平距離。
  - (乙′)鉛垂距離——兩點間直綫段在鉛垂綫內射影的長，叫這兩點的鉛垂距離。
- 乙．高
  - (甲′)物體的高——物體最高部份叫頂，最低部份叫基，頂基的鉛垂距離叫做物體的高。
  - (乙′)物體高度——離地物體做一點看時，牠和地平面內一點的鉛垂距離，叫這物體的高度。

*2. 特別

(1)點

- 甲．求點——要求高度或距離的點，可叫求點。
- 乙．基點——從牠觀測求點的點，就是觀測者眼所在處。

(2)綫

- 甲．求綫——要求長的直綫段，可叫求綫。
- 乙．基綫——至少一端是　點或基點的直綫段，長已知或可量的。
- 丙．視綫
  - (甲′)求點視綫——求點和觀測者眼中間的直綫段，可叫求點視綫。
  - (乙′)視水平綫——含觀測者眼的水平綫。

(甲′)仰角——鉛垂面內求點視綫和視水平綫的夾角，而求點視綫在上方的。

(3)角 —— 視角
(乙′)俯角 —— 鉛垂面內求點視綫和視水平綫的夾角，而求點視綫在下方的。

(4)面 —— 基面 —— 含求點、基點、求綫，基綫的水平面或鉛垂面。

第二　公式表

一　直角三角形

*1. 記號

本書設 $\triangle ABC$ 表直角三角形，$\angle A$ 和 $\angle B$ 都是銳角，$\angle C$ 是直角，牠們的角度順次是 A、B、C，所抱的邊順次是 a、b、c 單位長，面積是 F 單位；假如表斜角三角形，除 $\angle C$ 不是直角外，$\angle A$ 和 $\angle B$ 或表兩銳角或表一銳角和一鈍角．

*2. 公式

(1)角式——$A+B=C=1$ 直角．　根據三角形的三角和定理．

(2)邊式——$a^2+b^2=c^2$．　根據直角三角形的商高或畢氏定理．

(3)邊角式
$$\begin{cases} \text{Sin } A=\frac{a}{c}=\text{Cos } B, & \text{Cos } A=\frac{b}{c}=\text{Sin } B, & \text{Tan } A=\frac{a}{b}=\text{Cot } B, \\ \text{Csc } A=\frac{c}{a}=\text{Sec } B, & \text{Sec } A=\frac{c}{b}=\text{Csc } B, & \text{Cot } A=\frac{b}{a}=\text{Tan } B. \end{cases}$$

(4)面積式——$F=\frac{1}{2}ab$.

*注意：Sin A＝Cos B，Cos A＝Sin B等，也是角式．

3. 記憶法

(1)角式邊式記憶法——角式邊式相似;拿 a^2、b^2、c^2 順次代 A、B、C,就能從角式得邊式.

(2)邊角式的記憶法——在$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{b}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{a}$六個函數之內:前二個母是 a 的,是 Sin A 和 Cos A;中二個母是 b 的,是 Tan A 和 Sec A;後二個母是 a 的,是 Cot A 和 Csc A. 照這樣想,容易記得這六個函數.

二 函 數

1. 公 式

(1)積式——Sin A×Csc A=1,　Cos A×Sec A=1,　Tan A×Cot A=1.

(2)商式——Sin A÷Cos A=Tan A,　Cos A÷Sin A=Cot A.

(3)冪式——Sin^2 A+Cos^2 A=1,　1+Tan^2 A=Sec^2 A,　1+Cot^2 A=Csc^2 A.

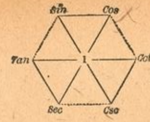
2. 記憶法

(1)積式記憶法——各含右圖六角形一對角綫內的三數.

(2)商式記憶法——各含右圖六角形連接三角頂的三數.

(3)冪式記憶法——各含右圖一實綫三角形各角頂的數.

*注意： **商式或冪式裏，記得一式，餘都可以推出. 商式若都寫出，共可得十二式.**



三 對 數

*1. 記 號

(1)數的對數

- 甲. N的10底對數，記做 Log N，就是 $N=10^{\text{Log}\,N}$. Log是Logarithm的略寫.
- 乙. N的10底餘對數，記做 Colog N，就是 $N^{-1}=10^{\text{Colog}\,N}$. Colog.是 Complement of a logarithm 的略寫.

(2)函數的對數

- 甲. 定位部不全是正數時，A角正弦、餘弦、正切等的對數，記做Log Sin A、Log Cos A、Log Tan A 等.
- 乙. 定位部須全是正數時，A角正弦、餘弦、正切等的對數，記做 LSin A、LCos A、Ltan A 等.

*2. 公 式

$\text{Log}\,NM=\text{Log}\,N+\text{Log}\,M$. $\text{Log}\,\frac{N}{M}=\text{Log}\,N-\text{Log}\,M$,

(1)數的對數式 $\begin{cases} \text{Log } N^M = M \text{ Log } N, & \text{Log} \sqrt[M]{N} = \frac{1}{M} \text{Log } N. \\ \text{Colog } N = \log \frac{1}{N} = -\log N. \end{cases}$

(2)函數對數式——Log Sin A＝LSin A －10，Log Cos A＝LCos A－10，Log Tan A＝L Tan A－10等。

*注意： M、N 都可表正整小數。

第三　常數表

一　角度

1. 六十分制

1周角=360度或360°，　1平角=180°，　1直角=90°，

1度=60分或60′，　1分=60秒或60″.

2. 百分制

1直角=100級(Grade)或100^g，

1級=100分或100\`，　1分=100秒或100\`\`.

注：這是法制，六十分制是英制；法制現不通行.

3. 半徑制

π弳或3.1416弳=180°，　1弳=$\frac{180}{3.1416}$度或57.2957°或57°17′45″，

$\frac{\pi}{2}$弳=90°，$\frac{\pi}{3}$弳=60°，$\frac{\pi}{4}$弳=45°，$\frac{\pi}{6}$弳=30°，$\frac{\pi}{8}$弳=22.5°或22°30′，$\frac{\pi}{16}$弳=11.25°或11°15′

4. 方位

含一點和某點的直線或含 點的直線，牠在含某點水平面內的射影和過某點的南北綫所夾的角度，就是這點對於某點或這直綫的方位.

(1)北東間的方位
- 北微東或北 $11\frac{1^\circ}{4}$ 東，就是北偏東 $11\frac{1^\circ}{4}$，
- 東北北或北 $22\frac{1^\circ}{2}$ 東，就是北偏東 $22\frac{1^\circ}{2}$，
- 東北微北或北 $33\frac{3^\circ}{4}$ 東，就是北偏東 $33\frac{3^\circ}{4}$，
- 東北或北 45° 東，就是北偏東 45°，
- 東北微東或北 $56\frac{1^\circ}{4}$ 東，就是北偏東 $56\frac{1^\circ}{4}$，
- 東北東或北 $67\frac{1^\circ}{2}$ 東，就是北偏東 $67\frac{1^\circ}{2}$，
- 東微北或北 $78\frac{3^\circ}{4}$ 東，就是北偏東 $78\frac{3^\circ}{4}$.

(2)北西間的方位——北微西、西北北、西北微北、西北、西北微西、西北西、西微北，順次是北偏西 $11\frac{1^\circ}{4}$、$22\frac{1^\circ}{2}$ 等.

(3)南東間的方位——南微東、東南南、東南微南、東南、東南微東、東南東、東微南，順次是南偏東 $11\frac{1^\circ}{4}$、$22\frac{1^\circ}{2}$ 等.

(4)南西間的方位——南微西、西南南、西南微南、西南、西南微西、西南西、西微南，順次是南偏西 $11\frac{1^\circ}{4}$、$22\frac{1^\circ}{2}$等。

二 函 數

1. 正切割弦

(1) $\mathrm{Tan}\ 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$，　$\mathrm{Tan}\ 45^\circ=1$，　$\mathrm{Tan}\ 60^\circ=\sqrt{3}$。

(2) $\mathrm{Sec}\ 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$，　$\mathrm{Sec}\ 45^\circ=\sqrt{2}$，　$\mathrm{Sec}\ 60^\circ=2$。

(3) $\mathrm{Sin}\ 30^\circ=\frac{1}{2}$，　$\mathrm{Sin}\ 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$，　$\mathrm{Sin}\ 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

2. 餘切割弦

(1) $\mathrm{Cot}\ 30^\circ=\sqrt{3}$，　$\mathrm{Cot}\ 45^\circ=1$，　$\mathrm{Cot}\ 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$。

(2) $\mathrm{Csc}\ 30^\circ=2$，　$\mathrm{Csc}\ 45^\circ=\sqrt{2}$，　$\mathrm{Csc}\ 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$。

(3) $\mathrm{Cos}\ 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　$\mathrm{Cos}\ 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$，　$\mathrm{Cos}\ 60^\circ=\frac{1}{2}$。

3. 記憶法

(1)正切割弦九數記憶法——把牠們改做下面形式，就很容易記得.

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{3}{(\sqrt{3})^3} & \dfrac{3}{(\sqrt{3})^2} & \dfrac{3}{\sqrt{3}} \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{\sqrt{1}} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{1}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(2)餘切割弦九數記憶法——牠們是上九數的倒數，記得上九數，就記得牠們了.

第四　應用表一

一　同角函數的互求

1. 從兩個函數推出它一函數

(1) 積式

$$\mathrm{Cos\,A}\times\mathrm{Tan\,A}=\mathrm{Sin\,A},\quad \mathrm{Sin\,A}\times\mathrm{Cot\,A}=\mathrm{Cos\,A},\quad \mathrm{Sin\,A}\times\mathrm{Sec\,A}=\mathrm{Tan\,A},$$

$$\mathrm{Cos\,A}\times\mathrm{Csc\,A}=\mathrm{Cot\,A}\quad \mathrm{Tan\,A}\times\mathrm{Csc\,A}=\mathrm{Sec\,A},\quad \mathrm{Cot\,A}\times\mathrm{Sec\,A}=\mathrm{Csc\,A}.$$

(2) 商式

$$\frac{\mathrm{Cos\,A}}{\mathrm{Cot\,A}}=\frac{\mathrm{Tan\,A}}{\mathrm{Sec\,A}}=\mathrm{Sin\,A},\quad \frac{\mathrm{Sin\,A}}{\mathrm{Tan\,A}}=\frac{\mathrm{Cot\,A}}{\mathrm{Csc\,A}}=\mathrm{Cos\,A},\quad \frac{\mathrm{Sin\,A}}{\mathrm{Cos\,A}}=\frac{\mathrm{Sec\,A}}{\mathrm{Csc\,A}}=\mathrm{Tan\,A},$$

$$\frac{\mathrm{Cos\,A}}{\mathrm{Sin\,A}}=\frac{\mathrm{Csc\,A}}{\mathrm{Sec\,A}}=\mathrm{Cot\,A},\quad \frac{\mathrm{Tan\,A}}{\mathrm{Sin\,A}}=\frac{\mathrm{Csc\,A}}{\mathrm{Cot\,A}}=\mathrm{Sec\,A},\quad \frac{\mathrm{Cot\,A}}{\mathrm{Cos\,A}}=\frac{\mathrm{Sec\,A}}{\mathrm{Tan\,A}}=\mathrm{Csc\,A}.$$

(3) 積商式

$$\frac{1}{\mathrm{Cot\,A\;Sec\,A}}=\mathrm{Sin\,A},\quad \frac{1}{\mathrm{Tan\,A\;Csc\,A}}=\mathrm{Cos\,A},\quad \frac{1}{\mathrm{Cos\,A\;Csc\,A}}=\mathrm{Tan\,A},$$

$$\frac{1}{\mathrm{Sin\,A\;Sec\,A}}=\mathrm{Cot\,A},\quad \frac{1}{\mathrm{Sin\,A\;Cot\,A}}=\mathrm{Sec\,A},\quad \frac{1}{\mathrm{Cos\,A\;Tan\,A}}=\mathrm{Csc\,A}.$$

(4) 積根式

$$\mathrm{Cos\,A}\sqrt{\mathrm{Sec\,A}-1}=\mathrm{Sin\,A},\quad \mathrm{Sin\,A}\sqrt{\mathrm{Csc}^2\mathrm{A}-1}=\mathrm{Cos\,A},\quad \mathrm{Sec\,A}\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2\mathrm{A}}=\mathrm{Tan\,A},$$

$$\mathrm{Csc\,A}\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2\mathrm{A}}=\mathrm{Cot\,A},\quad \mathrm{Tan\,A}\sqrt{1+\mathrm{Cot}^2\mathrm{A}}=\mathrm{Sec\,A},\quad \mathrm{Cot\,A}\sqrt{1+\mathrm{Tan}^2\mathrm{A}}=\mathrm{Csc\,A}.$$

2. 從一個函數推出它一函數

3. 從一個函數求它五個函數

(1)商　式

$$\frac{1}{\text{Csc A}}=\text{Sin A},\quad \frac{1}{\text{Sec A}}=\text{Cos A},\quad \frac{1}{\text{Cot A}}=\text{Tan A},$$

$$\frac{1}{\text{Tan A}}=\text{Cot A},\quad \frac{1}{\text{Cos A}}=\text{Sec A},\quad \frac{1}{\text{Sin A}}=\text{Csc A}.$$

(2)根　式

$$\sqrt{1-\text{Cos}^2\text{A}}=\sqrt{(1+\text{Cos A})(1-\text{Cos A})}=\text{Sin A},$$

$$\sqrt{1-\text{Sin}^2\text{A}}=\sqrt{(1+\text{Sin A})(1-\text{Sin A})}=\text{Cos A},$$

$$\sqrt{\text{Sec}^2\text{A}-1}=\sqrt{(\text{Sec A}+1)(\text{Sec A}-1)}=\text{Tan A},$$

$$\sqrt{\text{Csc}^2\text{A}-1}=\sqrt{(\text{Csc A}+1)(\text{Csc A}-1)}=\text{Cot A},$$

$$\sqrt{1+\text{Tan}^2\text{A}}=\text{Sec A},\quad \sqrt{1+\text{Cot}^2\text{A}}=\text{Csc A}.$$

(3)商根式

$$\frac{1}{\sqrt{1+\text{Cot}^2\text{A}}}=\frac{\text{Tan A}}{\sqrt{1+\text{Tan}^2\text{A}}}=\frac{\sqrt{\text{sec}^2\text{A}-1}}{\text{Sec A}}=\text{Sin A},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\text{Tan}^2\text{A}}}=\frac{\text{Cot A}}{\sqrt{1+\text{Cot}^2\text{A}}}=\frac{\sqrt{\text{Csc}^2\text{A}-1}}{\text{Csc A}}=\text{Cos A},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\text{Csc}^2\text{A}-1}}=\frac{\text{Sin A}}{\sqrt{1-\text{Sin}^2\text{A}}}=\frac{\sqrt{1-\text{Cos}^2\text{A}}}{\text{Cos A}}=\text{Tan A},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\text{Sec}^2\text{A}-1}}=\frac{\text{Cos A}}{\sqrt{1-\text{Cos}^2\text{A}}}=\frac{\sqrt{1-\text{Sin}^2\text{A}}}{\text{Sin A}}=\text{Cot A},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\text{Sin}^2\text{A}}}=\frac{\text{Csc A}}{\sqrt{\text{Csc}^2\text{A}-1}}=\frac{\sqrt{1+\text{Cot}^2\text{A}}}{\text{Cot A}}=\text{Sec A},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\text{Cos}^2\text{A}}}=\frac{\text{Sec A}}{\sqrt{\text{Sec}^2\text{A}-1}}=\frac{\sqrt{1+\text{Tan}^2\text{A}}}{\text{Tan A}}=\text{Csc A}.$$

(1)從正弦求它函數式

$\mathrm{Csc}\ A=\frac{1}{\mathrm{Sin}\ A}$,

$\mathrm{Cos}\ A=\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 A}$, $\mathrm{Sec}\ A=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 A}}$,

$\mathrm{Tan} A=\frac{\mathrm{Sin}\ A}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 A}}$, $\mathrm{Cot}\ A=\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 A}}{\mathrm{Sin}\ A}$.

(2)從餘弦求它函數式

$\mathrm{Sec}\ A=\frac{1}{\mathrm{Cos}\ A}$,

$\mathrm{Sin}\ A=\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2 A}$, $\mathrm{Csc}\ A=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2 A}}$,

$\mathrm{Cot}\ A=\frac{\mathrm{Cos}\ A}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2 A}}$, $\mathrm{Tan}\ A=\frac{\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2 A}}{\mathrm{Cos}\ A}$.

(3)從正切求它函數式

$\mathrm{Cot}\ A=\frac{1}{\mathrm{Tan}\ A}$,

$\mathrm{Sec}\ A=\sqrt{1+\mathrm{Tan}^2 A}$, $\mathrm{Cos}\ A=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Tan}^2 A}}$,

$\mathrm{Sin}\ A=\frac{\mathrm{Tan}\ A}{\sqrt{1+\mathrm{Tan}^2 A}}$, $\mathrm{Csc}\ A=\frac{\sqrt{1+\mathrm{Tan}^2 A}}{\mathrm{Tan}\ A}$.

(4)從餘切求它函數式

$\mathrm{Tan} A=\frac{1}{\mathrm{Cot}\ A}$,

$\mathrm{Csc}\ A=\sqrt{1+\mathrm{Cot}^2 A}$, $\mathrm{Sin}\ A=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Cot}^2 A}}$,

$\mathrm{Cos}\ A=\frac{\mathrm{Cot}\ A}{\sqrt{1+\mathrm{Cot}^2 A}}$, $\mathrm{Sec}\ A=\frac{\sqrt{1+\mathrm{Cot}^2 A}}{\mathrm{Cot}\ A}$.

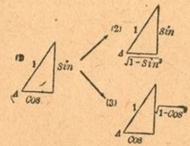
$\mathrm{Cos}\ A=\frac{1}{\mathrm{Sec}\ A}$,

(5)從正割求它函數式
$$\mathrm{Tan}\,A=\sqrt{\mathrm{Sec}^2A-1},\quad \mathrm{Cot}\,A=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Sec}^2A-1}},$$
$$\mathrm{Csc}\,A=\frac{\mathrm{Sec}\,A}{\sqrt{\mathrm{Sec}^2A-1}},\quad \mathrm{Sin}\,A=\frac{\sqrt{\mathrm{Sec}^2A-1}}{\mathrm{Sec}\,A}.$$

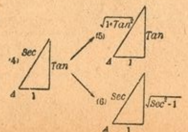
(6)從餘割求它函數式
$$\mathrm{Sin}\,A=\frac{1}{\mathrm{Csc}\,A},$$
$$\mathrm{Cot}\,A=\sqrt{\mathrm{Csc}^2A-1},\quad \mathrm{Tan}\,A=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Csc}^2A-1}},$$
$$\mathrm{Sec}\,A=\frac{\mathrm{Csc}\,A}{\sqrt{\mathrm{Csc}^2A-1}},\quad \mathrm{Cos}\,A=\frac{\sqrt{\mathrm{Csc}^2A-1}}{\mathrm{Csc}\,A}.$$

4. 記憶法

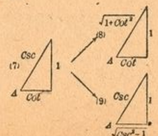
(1) 3 的(1)、(2)各式記憶法 ——先依解釋函數意義的單位圓，畫 (1) 圖，次依商高定理變做(2)、(3)圖，後依直角三角形邊角公式求 A角的各函數.



(2) 3 的(3)、(5)各式記憶法——仿前先畫(4)圖，次變做 (5)、(6)圖，後求 A角的各函數.



(3) 3 的(4)、(6)各式記憶法——仿前先畫(7)圖，次變做 (8)、(9)圖，後求 A角的各函數.



二　角度和函數的互求

1. 求特別角度的函數

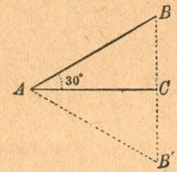
(1) 30° 的函數

甲. 求法——先設$\angle CAB=30°$，並畫直角三角形 ABC 和全等於牠的直角三角形 AB′C；後從 $CB=\frac{1}{2}AB$， $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，得；

$$\text{Sin } 30°=\frac{CB}{AB}=\frac{1}{2},\quad \text{Cos } 30°=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{Tan } 30°=\frac{CB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \text{Cot } 30°=\frac{AC}{CB}=\sqrt{3},$$

$$\text{Sec } 30°=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{\sqrt{3}},\quad \text{Csc } 30°=\frac{AB}{CB}=2.$$



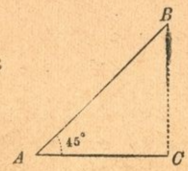
乙. 理由
- (甲′)三角形等角所抱的邊相等同三角和定理.
- (乙′)商高定理和正方形的面積定理.

(2) 45° 的函數

甲. 求法——先設$\angle CAB=45°$，並畫直角三角形 ABC；後從 $CB=AC=\frac{1}{\sqrt{2}}AB$，得：

$$\text{Sin } 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{Cos } 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{Tan } 45°=1,$$

$$\text{Cot } 45°=1,\quad \text{Sec } 45°=\sqrt{2},\quad \text{Csc } 45°=\sqrt{2}.$$



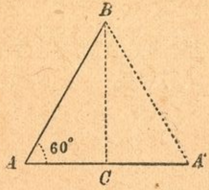
乙. 理由——同前.

(3) 60° 的函數

甲. 求法——先設$\angle CAB=60^\circ$,並畫直角三角形 ABC 和全等於牠的直角三角形 A'BC; 後從 $CB=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$, $AC=\frac{1}{2}AB$,得:

$\text{Sin } 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{Cos } 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\text{Tan } 60^\circ=\sqrt{3}$,

$\text{Cot } 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{Sec } 60^\circ=2$, $\text{Csc } 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$.



乙. 理由——同前.

2. 求一般角度的函數

查三角函數表. 無論甚麼銳角,一個角度的某函數祇有一個數值.

3. 求約略的函數

在方格紙裏,拿角頂做心,畫單位圓的象限弧,並畫弦切割綫,如前解釋函數意義的圖. 若半徑佔10格,可得正餘弦切的二位略數;若半徑佔 100 格,可得正餘弦切的三位略數.

4. 求特別函數的角度

(1)正弦是$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{\sqrt{2}}$、$\frac{\sqrt{3}}{2}$的角度

甲. 求法——先設 CB=1, AB=2, 並畫直角三角形 ABC 和全等於牠的直角三角形 AB′C, 或設 CB=1, AB=$\sqrt{2}$, 並畫直角三角形 ABC, 或設 CB=$\sqrt{3}$, AB=2, 並畫直角三角形 ABC 和全等於牠的直角三角形 A′BC;後從 $\angle CAB=\frac{1}{2}\angle B'AB=30^\circ$, 得 $\text{Sin } 30^\circ=\frac{1}{2}$, 或從 $\angle CAB=45^\circ$, 得 $\text{Sin } 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 或從 $\angle CAB=60^\circ$, 得 $\text{Sin } 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

乙. 理由
- (甲′)三角形等邊所張的角相等同三角和定理.
- (乙′)商高定理.

(2)餘弦是$\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\frac{1}{\sqrt{2}}$、$\frac{1}{2}$的角度

甲. 求法——先設 AC=$\sqrt{3}$, AB=2, 或 AC=1, AB=$\sqrt{2}$, 或 AC=1, AB=2, 仿前畫圖;後再仿前得 $\text{Cos } 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 或 $\text{Cos } 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 或 $\text{Cos } 60^\circ=\frac{1}{2}$.

乙. 理由——同前.

(3)正切是$\frac{1}{\sqrt{3}}$、1、$\sqrt{3}$的角度

甲. 求法——先設 CB=1, AC=$\sqrt{3}$, 或 CB=1, AC=1 或 CB=$\sqrt{3}$, AC=1, 仿前畫圖;後再仿前得 $\text{Tan } 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 或 $\text{Tan } 45^\circ=1$, 或 $\text{Tan } 60^\circ=\sqrt{3}$.

乙. 理由——同前.

(4)餘切是$\sqrt{3}$、1、$\frac{1}{\sqrt{3}}$的角度
- 甲. 求法——仿(3)法,得 $\text{Cot } 30°=\sqrt{3}$,或 $\text{Cot } 45°=1$,或 $\text{Cot } 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- 乙. 理由——同前.

(5)正割是$\frac{2}{\sqrt{3}}$、$\sqrt{2}$、2 的角度
- 甲. 求法——仿(2)法,得 $\text{Sec } 30°=\frac{2}{\sqrt{3}}$,或 $\text{Sec } 45°=\sqrt{2}$,或 $\text{Sec } 60°=2$.
- 乙. 理由——同前.

(6)餘割是 2、$\sqrt{2}$、$\frac{2}{\sqrt{3}}$的角度
- 甲. 求法——仿(1)法,得 $\text{Csc } 30°=2$,或 $\text{Csc } 45°=\sqrt{2}$,或 $\text{Csc } 60°=\frac{2}{\sqrt{3}}$.
- 乙. 理由——同前.

5. 求一般函數的角度

查三角函數表. 無論甚麼函數,祇能屬於一個角度的銳角.

6. 求約略的角度

在方格紙裏,畫單位圓的象限弧,並分圓心角做若干等份. 若半徑佔10格,可得二位數正餘弦切的約略角度;若半徑佔 100 格,可得三位數正餘弦切的約略角度.

三 直角三角形角邊的互求

1. 求角

- (1)從角式
  - 甲. 求A的—— $A=90^\circ-B$.
  - 乙. 求B的—— $B=90^\circ-A$.
- (2)從邊式
  - 甲. 求A的—— $\operatorname{Tan} A=\frac{a}{b}$, $\operatorname{Sin} A=\frac{a}{c}$, $\operatorname{Cos} A=\frac{b}{c}$,
    $\operatorname{Cot} A=\frac{b}{a}$, $\operatorname{Csc} A=\frac{c}{a}$, $\operatorname{Sec} A=\frac{c}{b}$.
  - 乙. 求B的—— $\operatorname{Tan} B=\frac{b}{a}$, $\operatorname{Sin} B=\frac{b}{c}$, $\operatorname{Cos} B=\frac{a}{c}$,
    $\operatorname{Cot} B=\frac{a}{b}$, $\operatorname{Csc} B=\frac{c}{b}$, $\operatorname{Sec} B=\frac{c}{a}$.

2. 求邊

- (1)從邊式
  - 甲. 求a的—— $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)}$.
  - 乙. 求b的—— $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$.
  - 丙. 求c的—— $c=\sqrt{a^2+b^2}$.
- (2)從邊角式
  - 甲. 求a的—— $a=b\operatorname{Tan} A=c\operatorname{Sin} A=b\operatorname{Cot} B=c\operatorname{Cos} B$
    $=\frac{b}{\operatorname{Cot} A}=\frac{c}{\operatorname{Csc} A}=\frac{b}{\operatorname{Tan} B}=\frac{c}{\operatorname{Sec} B}$.
  - 乙. 求b的—— $b=a\operatorname{Cot} A=c\operatorname{Cos} A=a\operatorname{Tan} B=c\operatorname{Sin} B$
    $=\frac{a}{\operatorname{Tan} A}=\frac{c}{\operatorname{Sec} A}=\frac{a}{\operatorname{Cot} B}=\frac{c}{\operatorname{Csc} B}$.

丙. 求c的——$c=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{a}{\cos B}=\dfrac{b}{\sin B}$

$=a\csc A=b\sec A=a\sec B=b\csc B$.

四 解直角三角形

在直角三角形六元素 A、B、C、a、b、c 裏,除 C外,從兩元素(至少含 a、b、c 三者之一)求餘三個元素,叫做解直角三角形 ABC. 但是知 A 求 B,知 B 求 A,都是用 $B=90°-A$, $A=90°-B$,可以略去,下面祇舉求邊的式.

1. 知一銳角大和一邊長

(1)這邊是這銳角所抱的
- 甲. 知a、A求b、c——$b=\dfrac{a}{\tan A}$, $c=\dfrac{a}{\sin A}$.
- 乙. 知b、B求a、c——$a=\dfrac{b}{\tan B}$, $c=\dfrac{b}{\sin B}$.

(2)這邊非斜邊屬這銳角的
- 甲. 知a、B求b、c——$b=a\tan B$, $c=\dfrac{a}{\cos B}$.
- 乙, 知A、b求a、c——$a=b\tan A$, $c=\dfrac{b}{\cos A}$.

(3)這邊是斜邊的
- 甲. 知A、c求a、b——$a=c\sin A$, $b=c\cos A$.
- 乙. 知B、c求a、b——$a=c\cos B$, $b=c\sin B$.

2. 知兩邊長

(1)兩邊都不是斜邊的——知 a、b 求 A、B、c——$\operatorname{Tan} \underline{A}=\frac{a}{b}$，　$\operatorname{Tan} \underline{B}=\frac{b}{a}$，

$\underline{c}=\sqrt{a^2+b^2}$

(2)有一邊是斜邊的

甲. 知 a、c 求 A、b、B——$\operatorname{Sin} \underline{A}=\frac{a}{c}$，　$\operatorname{Cos} \underline{B}=\frac{a}{c}$，

$\underline{b}=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$.

乙. 知 b、c 求 a A、B——$\operatorname{Cos} \underline{A}=\frac{b}{c}$，　$\operatorname{Sin} \underline{B}=\frac{b}{c}$，

$\underline{a}=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)}$.

注意： 這裏所舉，都是從已知元素求未知元素最直接最簡便的式子． 若不限定簡便，從 a、A 求 b，可有下面兩式：

$$b=a\operatorname{Cot} A,\quad b=\frac{a}{\operatorname{Tan} A}.$$

又不限定直接，可有下面五種求法：

$$\left.\begin{matrix}a\\A\end{matrix}\right\rangle\to b \qquad \left.\begin{matrix}A\to B\\a\end{matrix}\right\rangle\to b \qquad \left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}a\\A\end{matrix}\right\rangle\to c\\a\end{matrix}\right\rangle\to b \qquad \left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}a\\A\end{matrix}\right\rangle\to c\\A\end{matrix}\right\rangle\to b \qquad \left.\begin{matrix}A\longrightarrow B\\\left.\begin{matrix}\\a\end{matrix}\right\rangle\to c\end{matrix}\right\rangle\to b$$

其餘都是這樣，並且都可再改做　數式． 所以沒有限制，求法就非常的多了．

五　解斜角三角形

*解斜角三角形 ABC,就是從三元素(至少含 a、b、c 三者之一)求餘三個元素;都能先畫高綫,成功可解的直角三角形.

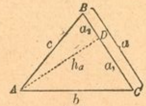
甲 {知 a、b、C / 求 A、B、c}

1. 知兩邊長和一角大

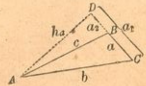
(甲′)畫 a 邊高綫,並設 AD、DC、BD 順次是 h_a、a_1、a_2 單位長,如右方(1)、(2)、(3)圖.

(1)圖 ABC是銳角三角形,或是鈍角三角形而∠CAB是鈍角. 先從直角三角形 ACD,依 $h_a=b\ \mathrm{Sin}\ C$ 求 h_a,依 $a_1=\sqrt{(b+h_a)(b-h_a)}$ 求 a_1,並從 $a_2=a-a_1$ 求 a_2;後從直角三角形 ADB,依 $\mathrm{Tan}B=\frac{h_a}{a_2}$ 求 $\underline{B}$,依 $c=\sqrt{h_a^2+a_2^2}$ 求 $\underline{c}$,並從 $A=180°-C-B$ 求 $\underline{A}$.

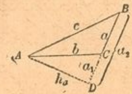
(2)圖 ABC 是鈍角三角形,∠ABC 是鈍角. 先從直角三角形 ACD,仿前求 h_a、a_1,並從 $a_2=a_1-a$ 求 a_2;後從直角三角形 ADB,依 $\mathrm{Tan}DBA=\mathrm{Tan}(180°-B)=\frac{h_a}{a_2}$ 求 $180°-B$ 和 $\underline{B}$,並仿前求 $\underline{c}$、$\underline{A}$.



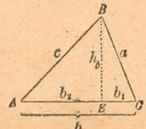
(1)



(2)



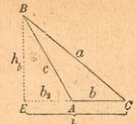
(3)



(4)

(1)兩邊都屬於這角的

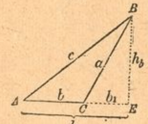
(3)圖 ABC 是鈍角三角形，∠BCA 是鈍角．先從直角三角形 ACD，依 $h_a=b\sin ACD=b\sin(180°-c)$ 求 h_a，並仿前求 a_1，從 $a_2=a+a_1$ 求 a_2；後從直角三角形ADB 仿(1)法求 B、c、A．



(5)

(乙′)畫 b 邊高綫，並設 BE、EC、AE 順次是 h_b、b_1、b_2 單位長，如右方(4)、(5)、(6)圖．

仿(甲′)法，祇拿 a 代 b，h_b 代 h_a，b_1 代 a_1，b_2 代 a_2，A 代 B，B 代 A，就求得 A、c、B．



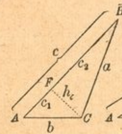
(6)

乙．知 a、B、c 求 A、b、C——解法和甲一樣．

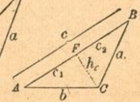
丙．知 A、b、c 求 a、B、C——解法和甲一樣．

甲 知a、A、b 求B、c、C

畫 c 邊高綫，並設 CF、AF、FB 順次是 h_c、c_1、c_2 單位長，因 ∠CAB 是銳角，a>b，或∠CAB是銳角，a=b，或 ∠CAB 是銳角，a<b，或 >CAB 鈍角，而有(1)、(2)、(3)、(4)四圖．



(1)

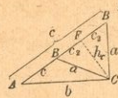


(2)

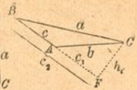
先從直角三角形 ACF，依 $h_c=b\sin A$ 或 $b\sin(180°-A)$ 求 h_c，依 $c_1=$

(2) 一邊不屬於這角的

$\sqrt{(b+h_c)(b-h_c)}$ 求 c_1；後從直角三角形 BCF，依 Sin B 或 Sin (180°−B) = $\frac{h_c}{a}$ 求 B，依 $c_2=\sqrt{(a+h_c)(a-h_c)}$ 求 c_2，並從 C=180°−A−B 求 C，從 $c=c_1+c_2$ 或 c_1-c_2 或 c_2-c_1 求 c。除(3)圖的 B、c、C 有兩組值之外，其餘各祇有一組值。



(3)



(4)

乙. 知 a、b、B 求 A、c、C——解法和甲一樣。

丙. 知 a、A、c 求 b、B、C——同前。

丁. 知 a、c、C 求 A、b、B——同前。

戊. 知 b、B、c 求 a、A、C——同前。

己. 知 b、c、C 求 a、A、B——同前。

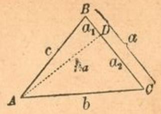
2. 知兩角大和一邊長

(甲′)畫 a 邊高綫，並設 AD、BD、DC 順次是 h_a、a_1、a_2 單位長，如下方 (1)、(2)、(3)圖。

(1) 兩角都含這一邊的

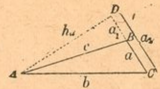
甲 知A、B、c 求a、b、C

先從 $C=180°-A-B$ 求 C；次從直角三角形 ADB，依 $h_a=c\ \mathrm{Sin}\ B$ 或 $\mathrm{Sin}\ (180-B)$ 求 h_a，依 $a_1=\sqrt{(c+h_a)(c-h_a)}$ 求 a_1；後從直角三角形 ACD，依 $b=\frac{h_a}{\mathrm{Sin}\ C}$ 或 $\frac{h_a}{\mathrm{Sin}\ (180°-C)}$ 求 b，依 $a_2=\sqrt{(b+h_a)(b-h_a)}$ 求 a_2，並從 $a=a_1+a_2$ 或 a_2-a_1 或 a_1-a_2 求 a.



(1)

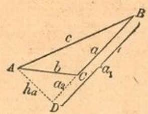
(乙′)畫 b 邊高綫，並設 BE、AE、EC 順次是 h_b、b_1、b_2 單位長.



(2)

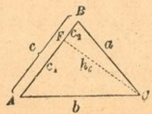
仿(甲′)法，祇拿 h_b 代 h_a，A 代 B，b_1 代 a_1，a 代 b，b_2 代 a_2，b 代 a，就求得 a、b、C

(丙′)畫 c 邊高綫，並設 CF、AF、FB 順次是 h_c、c_1、c_2 單位長，如右方(4)、(5)、(6)圖.



( )

先從 $h_c=c_1\ \mathrm{Tan}\ A=(c-c_1)\mathrm{Tan}\ B$，或 $h_c=c_1\ \mathrm{Tan}(180°-A)=(c+c_1)\mathrm{Tan}\ B$，或 $h_c=c_1\ \mathrm{Tan}\ A=(c_1-c)\ \mathrm{Tan}\ (180°-B)$，求 c_1，並從 $c_2=c-c_1$ 或 $c+c_1$ 或 c_1-c 求 c_2；後從 $a=\frac{c_2}{\mathrm{Cos}\ B}$ 或 $\frac{c_2}{\mathrm{Cos}(180°-B)}$ 求 a，從 $b=\frac{c_1}{\mathrm{Cos}\ A}$

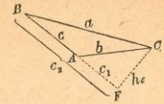


(4)

或$\frac{c_1}{\cos(180°-A)}$求 b,並從 $C=180°-A-B$ 求 C.

乙. 知 A、b、C 求 a、B、c ——解法和甲一樣.

丙. 知 a、B、C 求 A、b、c ——同前.



(5)

(2) 一角不含這一邊的

甲. 知 A、c、C 求 a、b、B ——先從 $B=180°-A-C$ 求 B, 後仿(1)甲法求 a、b.

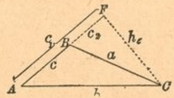
乙. 知 B、c、C 求 a、A、b ——解法和甲一樣.

丙. 知 A、b、B 求 a、c、C ——同前.

丁. 知 b、B、C 求 a、A、c ——同前.

戊. 知 a、A、B 求 b、c、C ——同前.

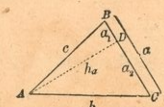
已. 知 a、A、C 求 b、B、c ——同前.



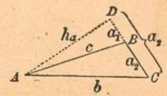
(6)

3. 知三邊長

畫 a 邊高綫,並設 AD、BD、DC 順次是 h_a、a_1、a_2 單位長,如右方(1)、(2)、(3)圖. 先從 $h_a^2=c^2-a_1^2=b^2-(a-a_1)^2$,或 $h_a^2=c^2-a_1^2=b^2-(a+a_1)^2$,或 $h_a^2=c^2-a_1^2=b^2-(a_1-a)^2$, 求

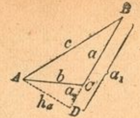


(1)



(2)

知 a、b、c，求 A、B、C：a_1，並從 $a_2=a-a_1$ 或 $a+a_1$ 或 a_1-a 求 a_2；後從 $\cos B$ 或 $\cos(180°-B)=\frac{a_1}{c}$ 求 $\underline{B}$，從 $\cos C$ 或 $\cos(180°-C)=\frac{a_2}{b}$ 求 $\underline{C}$，並從 $A=180°-B-C$ 求 $\underline{A}$。畫 b 邊高綫或 c 邊高綫，也能仿此求 $\underline{A}$、$\underline{B}$、$\underline{C}$。



(3)

第五　應用表二

一　簡易測量

1. 定綫面角

- (1)定水平綫
  - 甲. 直接法——把水準放在直綫上，使氣泡在中央。
  - 乙. 間接法
    - (甲′)看牠是不是水平面內的直綫，或水平面和另一平面的交綫。
    - (乙′)看牠是不是水平綫的平行綫。
    - (丙′)看牠是不是鉛垂綫的垂綫。
    - (丁′)看牠是不是鉛垂面的垂綫，卽鉛垂面內相交兩直綫的公垂綫。
- (2)定水平面
  - 甲. 直接法——把水準放在平面上，使含相交的兩水平綫。
  - 乙. 間接法
    - (甲′)看牠是不是含相交的兩水平綫。
    - (乙′)看牠是不是相交兩水平綫的公平行面，卽含各綫的一平行綫的平面，或另一水平面的平行面。
    - (丙′)看牠是不是鉛垂綫的垂面，卽含這綫的相交兩垂綫的平面。
- (3)定水平角——看兩邊是不是水平綫。
  - 甲. 直接法——把銅錘懸在直綫旁，使和錘同方向。

(4)定鉛垂綫
- 乙．間接法
  - (甲′)看牠是不是鉛垂綫的平行綫．
  - (乙′)看牠是不是鉛垂面內水平綫的垂綫．
  - (丙′)看牠是不是相交兩水平綫的公垂綫，或一水平面的垂綫，或兩鉛垂面的交綫．

(5)定鉛垂面
- 甲．直接法——把銅錘放在平面旁，使含一鉛垂綫．
- 乙．間接法
  - (甲′)看牠是不是含一鉛垂綫．
  - (乙′)看牠是不是水平綫的垂面，即含這綫的相交兩垂綫的平面．

(6)定鉛垂角——看兩邊是不是在一鉛垂面內並且有無一邊是水平綫．

注意：(1)含相交兩直綫或平行兩直綫的，祇能有一平面． 含一定點的水平面或鉛垂綫，都是祇有一個． 含一定水平面內一定點的水平綫，都在這個水平面內；含一定鉛垂面內一定點的鉛垂綫，都在這個鉛垂面內． 含一定直綫而非鉛垂綫的鉛垂面，也是祇有一個．

(2)一直綫祇能交一平面於一點，二平面祇能交於一直綫． 一直綫垂直它兩直綫於一點時，就是含它兩直綫的平面垂綫．

(3)同直綫的平行綫平行，同平面的垂綫平行． 含一直綫平行綫的平面，就是這綫的平行面；含相交兩直綫平行綫的平面，就是這兩綫的公平行面，或含這兩綫的平面的平行面．

2. 量綫

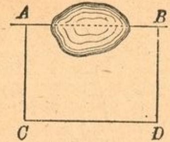
甲. 直接法——用鏈尺或捲尺等,從直綫 AB 的 A 端量到 B 端.

乙. 間接法

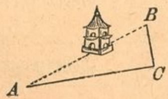
(甲′) A、B 都能到而中間有障礙,有時可照 (1) 圖,畫 AB 的垂綫 AC、BD,使 AC=BD,成功長方形 ABDC. 因爲 AB=CD,就量 CD 來代 AB.

(乙′)在 A 不能見 B,有時可照 (2) 圖,從 A 畫一直綫,並從 B 畫牠的垂綫,成功直角三角形 ABC. 因爲 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$,就量 AC、CB 算出 AB 的長.

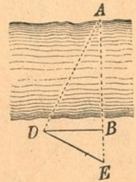
(丙′) A 不能到,有時可照(3)圖,畫 AB 的垂綫,成功直角三角形 ADB,並畫 AD 的垂綫,成功直角三角形 ADE. 因爲△ADB 和△DEB 相似,而 $\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{DB}^2$,就量 DB、BE 算出 AB 的長.



(1)



(2)



(3)

因爲直線段在牠的平行面內的射影和牠相等,所以在測量上,量一綫段,常量這種射影以求便利.

3. 測 角

(1)測水平角

甲. 直接法——用羅盤儀或經緯儀等,從水平角 ZHP 的 HZ 邊測到 HP 邊.

乙. 間接法

(甲′)在 H 處放儀器, 人眼在含 H 鉛垂綫內 H′ 處 測不和 H 在同水平面內的 P 對於 H 的方位,就是測 HP 在含 H 水平面內射影 HZ 和南北綫 SN 的夾角 ZHN,可照(1)圖:

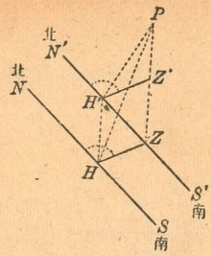
(a)定含 H′ 的水平面.

(b)定含 H′ 和 P 到 H′ 水平面的垂綫的平面,即含 HH′、H′P 的平面.

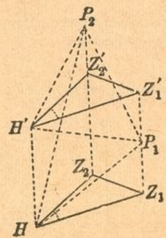
(c)定 H′P 在 H′ 水平面內的射影,即前平面和 H′ 水平面的交綫 H′Z′.

因爲 ∠Z′H′N′=∠ZHN,就量∠Z′H′N′ 來代 ∠ZHN.

(乙′)仿前放儀器,用眼測不和 H 在同水平面內的 P_1、P_2 對於H的水平角,就是 HP_1、HP_2 在含 H 水平面內的射影 HZ_1、HZ_2 的夾角 Z_1HZ_2,可照(2)圖:



(1)



(2)

(a)定含 H′的水平面.

(b)定含 HH′、HP_1 的平面和含 HH′、HP_2 的平面.

(c)定前兩平面和 H′水平面的交綫 HZ'_1、HZ'_2.

因爲$\angle Z'_1H'Z'_2=\angle Z_1HZ_2$,就量$\angle Z'_1H'Z'_2$來代$\angle Z_1HZ_2$.

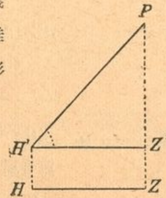
(2)測鉛垂角——在 H 或含 H 的鉛垂綫內某處放經緯儀或它儀器,人眼在這綫內 H′處,測 P 對於 H′的鉛垂角,就是 H′P 和牠在含 H′的水平面內射影 H′Z′的夾角 Z′H′P,可照 (3) 或 (4) 圖:

(a)定含 H′的水平面.

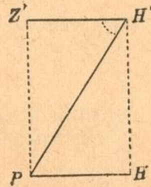
(b)定含 HH′、H′P 的平面.

(c)定前平面和 H′水平面的交綫 H′Z′.

由此得$\angle Z'H'P$,而(4)圖的$\angle Z'H'P$等於$\angle HPH'$.



(3)



(4)

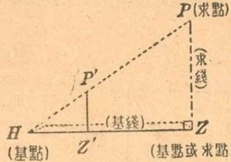
注意: (2)圖 Z_1Z_2 和 $Z'_1Z'_2$ 的長都是 P_1、P_2 的水平距離. (3)圖 HZ、H′Z′和(4)圖 HP 的長,都是 H′P 的水平距離. (3)、(4)圖 Z′P 的長,都是 H′P 的鉛垂距離.

4.求高和距離

平常求河闊或路遠,都是求水平距離,河闊就是兩岸公垂綫在水平面內射影的長,路遠也是路綫在水平面

內射影的長；在測量時，可在一水平面內，定人眼所在的基點和屬於這種射影的求綫，以求綫爲一邊，基點爲角頂，成功水平面三角形，叫水平面測量．　平常求山高或河深，都是求鉛垂距離；在測量時，須定人眼所在的基點、和含基點同表山高河深的求綫二者的鉛垂面，以求綫爲一邊，基點爲角頂，成功鉛垂面三角形，叫鉛垂面測量．　鉛垂面測量也可以求河闊路遠．

(甲′)方法
- a. 不測角的——可照(i)圖：
  - (a) 量 HZ′、HZ，Z′P′——直接或間接．(若知 HZ 的長，即可不量)
  - (b)依 HZ′:HZ＝Z′P′:ZP，求 ZP 長．
- b. 須測角的——可照(ii)或(iii)圖：
  - (a)作∠PZH，使∠PZH＝1直角．
  - (b)量 HZ——直接或間接．



(i)

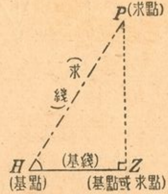
— 表可量或長已知的綫段．
- - - - 表長要求的求綫．
‥‥‥表補成三角形的補助綫

甲 成功直角三角形而直角一邊是基綫的

(c)測$\angle$ZHP.

(d)依 $ZP = HZ \tan ZHP$,或 $HP = \frac{HZ}{\cos ZHP}$,求 ZP 或 HP 的長.

(ii)



(iii)

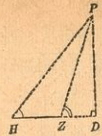
(乙′)實例——某家臨河,隔河有樹. 河岸綫成水平綫,從正對樹的甲點,沿河岸量 m 公尺到乙點,並測得樹基和甲點對乙點的水平角爲 α 度. 求樹基離甲點有多遠!. 又乙處有船,從乙坐船到樹所在處, 要走多少公尺的路?

乙. 成功直角三形而直角的邊都不是基綫的——可照(iv)或(v)或(vi)或(vii)圖:

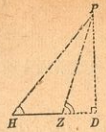
(a)量 HZ——直接或間接.

(b)測$\angle$DHP 和 $\angle$DZP.

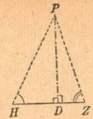
(1)水平面測量



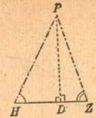
(iv)



(v)



(vi)



(vii)

(c)先從 HDP 和 ZDP 兩個三角形，得 ZD Tan DZP＝(HZ±ZD) Tan DHP，知道

$$ZD=\frac{HZ\ \mathrm{Tan}\ DHP}{\mathrm{Tan}\ DZP \mp \mathrm{Tan}\ DHP};\quad 再從這式得 DP=\frac{HZ\ \mathrm{Tan}\ DHP\ \mathrm{Tan}\ DZP}{\mathrm{Tan}\ DZP \mp \mathrm{Tan}\ DHP},$$

$$ZP=\frac{HZ\ \mathrm{Tan}\ DHP}{(\mathrm{Tan}\ DZP \mp \mathrm{Tan}\ DHP)\ \mathrm{Cos}\ DZP},\quad HP=\frac{HZ\ \mathrm{Tan}\ DZP}{(\mathrm{Tan}\ DZP \mp \mathrm{Tan}\ DHP)\ \mathrm{Cos}\ DHP},$$

依這三式求 DP、ZP、HP 的長.

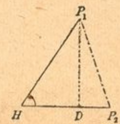
(甲′)方法——可照(viii)或 ix圖)：

(a)量 HP_1 和 HP_2 ——直接或間接.

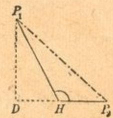
(b)測 $\angle P_2HP_1$.

(c)先從三角形 DHP_1，得

$DP_1 = HP_1\ \mathrm{Sin}\ P_2HP_1$



(viii)



(ix)

丙 不成直角三角形而求綫兩端都可到的

或 $HP_1 \sin(180^\circ-\angle P_2HP_1)$,

$HD=HP_1 \cos P_2HP_1$ 或 $HP_1 \cos(180^\circ-\angle P_2HP_1)$;

後從這兩式和三角形 DP_2P_1,得

$P_2P_1=\sqrt{(HP_1 \sin P_2HP_1)^2+(HP_2-HP_1\cos P_2HP_1)^2}$ 或

$\sqrt{[HP_1 \sin(180^\circ-\angle P_2HP_1)]^2 \quad [\ P_2+HP_1\cos(180^\circ-\angle P_2HP_1)]^2}$

$=\sqrt{\overline{HP_1}^2+\overline{HP_2}^2-2\overline{HP}_1\times\overline{HP}\cos P_2H\,'_1}$

或 $\sqrt{\overline{HP_1}^2+\overline{HP_2}^2+2\overline{HP}_1\times\overline{HP}_2\cos(180^\circ-\angle P_2HP_1)}$,

依這式求 P_2P_1 的長.

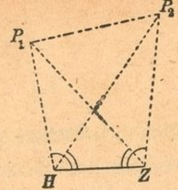
(乙′)實例——某家前後,各有一電綫桿. 在某家旁取一點甲,量得從甲到各桿基的水平距離爲 m 公尺和 n 公尺,並測得兩桿基對甲的水平角爲 a 度. 求兩桿基的距離!

丁. 不成直角三角形而求綫兩端都不可到的——可照(x)圖:

(a)量 HZ ——直接或間接。

(b)量 ZHP_1、ZHP_2、P_2ZH、P_1ZH 各角。

(c)先從三角形 HZP_1 求 ZP_1 的長,次從三角形 HZP_2 求 ZP_2 的長,後從三角形 P_1ZP_2 求 P_1P_2 的長。

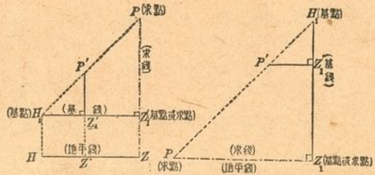


(x)

(甲′)方法

a. 不測角的——可照(i)或(ii)圖,仿(1)甲(甲′)a法求 Z_1P 的長。

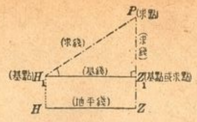
但在(i)圖,須再依 $ZP=Z_1P+HH_1$,求 ZP 的長。



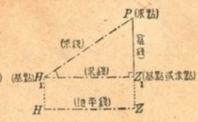
(i) (ii)

b. 測仰角的——可照(iii)或(iv)圖仿1)甲(甲′)b法求 H_1P 和 Z_1P 或 H_1Z_1 的長。但在(iii)圖,須再求 ZP 長;在(iv)圖,須先求 $\angle H_1PZ_1$ 的度數。

甲 { 成功直角三角形而直角一邊是基綫的

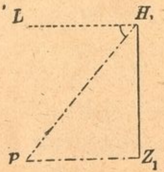


(iii)

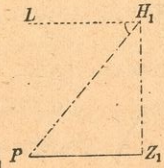


(iv)

c. 測俯角的——可照(v)或(vi)圖,仿 b 法求 H_1P 和 Z_1P 或 H_1Z_1 的長. 但在(v)圖,因爲 $\angle PH_1Z_1=90°-\angle LH_1P$; 在(vi)圖,因爲 $\angle Z_1PH_1=\angle LH_1P$.



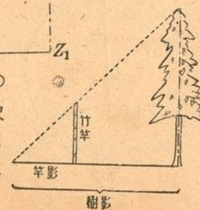
(v)



(vi)

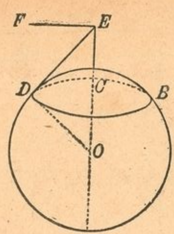
(乙′)實例 {

a. 有日光時,在某樹前插長 m 尺的竹竿,量得竿影 p 尺,樹影 q 尺,而竿影在樹影內,兩影前端相齊. 求樹高!



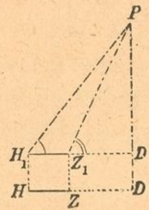
(2)鉛垂面測量

b. O是地球,人眼在E,測得視水平面(圓BCD)俯角FED爲α度,他的視界半徑ED怎樣? 但地球半徑OD長r尺,$\angle ODE$是直角.

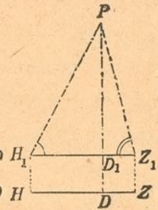


(甲′)方法

a. 基綫是水平綫的——可照(vii)或(viii)圖,仿(1)乙法求D_1P、Z_1P、H_1P的長. 但求得D_1P長後,須再求DP長.



(vii)

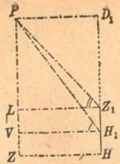


(viii)

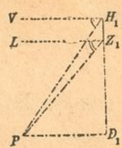
b. 基綫是鉛垂綫的——可照(ix)或(x)或(xi)圖,仿a法求Z_1D_1、D_1P、Z_1P、H_1P的長. 但在這三圖裏,因爲$\angle D_1H_1P=$

乙 {成功直角三角形而直角的邊都不是基綫的}

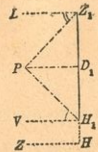
(乙′)實例



(ix)



(x)



(xi)

$90°-\angle PH_1V$, $\angle D_1Z_1P=90°-\angle PZ_1L$，而 (ix) 圖 Z_1D_1 長求得後，須由 $Z_1D_1+H_1Z_1+HH_1$ 再求 ZP 的長.

a. 兩人相離 m 尺，依相同或相反的方位，仰望飛機，測得仰角爲 α 度和 β 度. 求飛機高.

b. 某人在高屋的兩層上，望遠處塔頂，測得兩個仰角或兩個俯角或一仰角和一俯角爲 α 度和 β 度，而這兩層相離有 m 公尺. 求塔高！

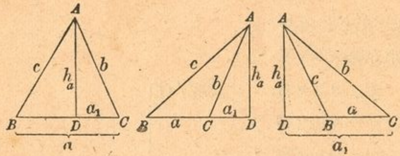
注意： 在(2)甲(乙′)a 裏，兩影前端可以不齊，竿影也可不在樹影之內. 在(2)甲(甲′)b 裏，$\angle Z_1H_1P$ 有時叫 P 的高度角或 H_1P 的斜度角；實例 a 裏竿長對影長的比率，就是太陽高度角的正切，山高對坡長的比率，就是山坡斜度角的正弦.

二　綫面的計算

1. 綫段長的計算

實例

a. 知三角形 ABC 的 a b,c,求 a 邊上的高!

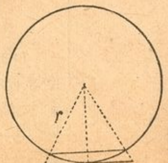


設 AD,DC 順次是 h_a、a_1 單位長，因爲 $h_a^2 = b^2 - a_1^2 = c^2 - (a \mp a_1)^2$，所以 $a_1 = \pm\frac{a^2+b^2-c^2}{a}$，而 $h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$. 故

$$h_a = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}.$$

b. 設圓半徑長 r 單位,求內接外切正 n 角形的邊長!



設內接外切正 n 角形的邊,順次是 s、S 單位長. 因爲拿圓心做頂,正 n 角形各邊做底,可分正 n 角形做 n 個全等三角形,再分即可各成兩個直角三角形,一邊是半徑,一角等於 $\frac{180°}{n}$,所以 $s=2r\,\mathrm{Sin}\frac{180°}{n}$, $S=2r\,\mathrm{Tan}\frac{180°}{n}$.

2. 面積的計算

實例

a. 知直角三角形 ABC 的 a、A 或 a、B 或 c、A，求面積！

因為 $a=c\ \mathrm{Sin}\ A$，$b=c\ \mathrm{Cos}\ A=a\ \mathrm{Tan}\ B=a\ \mathrm{Tan}\ (90^\circ-A)$，所以 $F=\frac{1}{2}a^2\ \mathrm{Tan}\ (90^\circ-A)$

或 $\frac{1}{2}a^2\ \mathrm{Tan}\ B$ 或 $\frac{1}{2}c^2\ \mathrm{Sin}\ A\ \mathrm{Cos}\ A$.

b. 知三角形 ABC 的 a、b、c，求面積！

因為 $h_a=\frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$，$F=\frac{1}{2}ah_a$，所以

$F=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$.

c. 知圓半徑長 r 單位，求內接外切正 n 角形的面積！

設內接外切正 n 角形的面積，順次是 F_1、F_2 單位. 因為可分做 n 個全等三角形，面積都是 $2r\ \mathrm{Sin}\frac{180^\circ}{n}\times r\ \mathrm{Cos}\frac{180^\circ}{n}\times\frac{1}{2}=r^2\ \mathrm{Sin}\frac{180^\circ}{n}\mathrm{Cos}\frac{180^\circ}{n}$，或 $2r\ \mathrm{Tan}\frac{180^\circ}{n}\times r\times\frac{1}{2}=r^2\ \mathrm{Tan}\frac{180^\circ}{n}$ 單位，所以 $F_1=nr^2\ \mathrm{Sin}\frac{180^\circ}{n}\mathrm{Cos}\frac{180^\circ}{n}$，$F_2=nr^2\ \mathrm{Tan}\frac{180^\circ}{n}$.

三 圖式的證明

1. 三角恆等式的證明

實例

a. 證 $\sin A=\cos A\times\tan A$!

因爲在直角三角形 ABC 裏,$\sin A=\frac{a}{c}$,$\cos A=\frac{b}{c}$,$\tan A=\frac{a}{b}$,所以 $\sin A=\cos A\times\tan A$.

或因爲 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$,所以 $\sin A=\cos A\times\tan A$.

b. 證 $\sec A=\frac{\csc A}{\cot A}$!

因爲在直角三角形 ABC 裏,$\sec A=\frac{c}{b}$,$\csc A=\frac{c}{a}$,$\cot A=\frac{b}{a}$,所以 $\sec A=\frac{\csc A}{\cot A}$.

或因爲 $\cos A\times\sec A=1$,$\sin A\times\csc A=1$,$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$,所以 $\sec A=\frac{1}{\cos A}=$

$$\frac{1}{\sin A}\Big/\frac{\cos A}{\sin A}=\csc A\Big/\cot A.$$

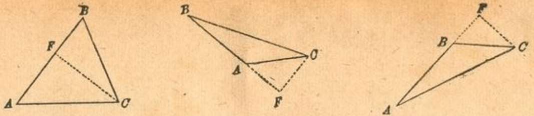
2. 斜角三角形公式的證明

a. 證正弦定律:「在三角形 ABC 裏,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\ 或\ \frac{a}{\sin(180^\circ-A)}=\frac{b}{\sin B},\ 或\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin(180^\circ-B)};$$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\ 或\ \frac{b}{\sin(180^\circ-B)}=\frac{c}{\sin C},\ 或\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin(180^\circ-C)};$$

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A},\ 或\ \frac{c}{\sin(180^\circ-C)}=\frac{a}{\sin A},\ 或\ \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin(180^\circ-A)}.」$$



實例

設 $CF \perp AB$，是 h_c 單位長. 因爲 $h_c = b \operatorname{Sin} A = a \operatorname{Sin} B$，或 $h_c = b \operatorname{Sin}(180° - A) = a \operatorname{Sin} B$，或 $h_c = b \operatorname{Sin} A = a \operatorname{Sin}(180° - B)$，所以 $\frac{a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{b}{\operatorname{Sin} B}$，或 $\frac{a}{\operatorname{Sin}(180° - A)} = \frac{b}{\operatorname{Sin} B}$，或 $\frac{a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{b}{\operatorname{Sin}(180° - B)}$. 仿此，可證其餘各式.

b. 證射影定律：「在三角形 ABC 裏，

$a = b \operatorname{Coo} C + c \operatorname{Csc} B$，或 $b \operatorname{Cos} C - c \operatorname{Cos}(180° - B)$，或 $c \operatorname{Cos} B - b \operatorname{Cos}(180° - C)$；

$b = c \operatorname{Cos} A + a \operatorname{Cos} C$，或 $c \operatorname{Cos} A - a \operatorname{Cos}(180° - C)$，或 $a \operatorname{Cos} C - c \operatorname{Cos}(180° - A)$；

$c = a \operatorname{Cos} B + b \operatorname{Cos} A$，或 $a \operatorname{Cos} B - b \operatorname{Cos}(180° - A)$，或 $b \operatorname{Cos} A - a \operatorname{Cos}(180° - B)$.」

用 a 的圖. 因爲 $AF = CA \operatorname{Cos} A$ 或 $CA \operatorname{Cos}(180° - A)$，$FB = BC \operatorname{Cos} B$ 或 $BC \operatorname{Cos}(180° - B)$，所以 $c = a \operatorname{Cos} B + b \operatorname{Cos} A$，或 $a \operatorname{Cos} B - b \operatorname{Cos}(180° - A)$，或 $b \operatorname{Cos} A - a \operatorname{Cos}(180° - B)$. 仿此，可證其餘各式.

c. 證餘弦定律：「在三角形 ABC 裏，

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A$ 或 $b^2 + c^2 + 2bc \operatorname{Cos}(180° - A)$；

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \operatorname{Cos} B$，或 $c^2 + a^2 + 2ca \operatorname{Cos}(180° - B)$；

$c^2=a^2+b^2-2ab\ \mathrm{Cos}\ C$，或 $a^2+b^2+2ab\ \mathrm{Cos}(180°-C)$.」

用 a 的圖. 因爲 $\overline{BC}^2=\overline{CF}^2+\overline{FB}^2=[\overline{CA}^2-(CA\ \mathrm{Cos}\ A)^2]+(AB-CA\ \mathrm{Cos}\ A)^2$，或 $\{\overline{CA}^2-[CA\ \mathrm{Cos}(180°-A)]^2\}+[AB+CA\ \mathrm{Cos}\ (180°-A)]^2$，或 $[\overline{CA}^2-(CA\ \mathrm{Cos}\ A)^2]+(CA\ \mathrm{Cos}A-AB)^2$，所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\ \mathrm{Cos}\ A$，或 $b^2+c^2+2bc\ \mathrm{Cos}\ (180°-A)$. 仿此可證其餘各式.

注意：在高中三角裏，鈍角也有函數，而 $\mathrm{Sin}\ (180°-A)=\mathrm{Sin}\ A$，$\mathrm{Cos}\ (180°-A)=-\cos A$ 等，所以上三定律可以化簡如下：

$a/\mathrm{Sin}\ A=b/\mathrm{Sin}\ B=c/\mathrm{Sin}\ C$……………………正弦定律，

$$\left.\begin{aligned}a&=b\ \mathrm{Cos}\ C+c\ \mathrm{Cos}\ B\\ b&=c\ \mathrm{Cos}\ A+a\ \mathrm{Cos}\ C\\ c&=a\ \mathrm{Cos}\ B+b\ \mathrm{Cos}\ A\end{aligned}\right\}\text{……………………射影定律，}$$

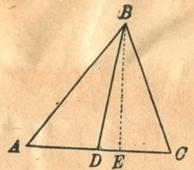
$$\left.\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\ \mathrm{Cos}\ A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\ \mathrm{Cos}\ B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\ \mathrm{Cos}\ C\end{aligned}\right\}\text{……………………餘弦定律.}$$

3. 幾何圖形的證明

——實例

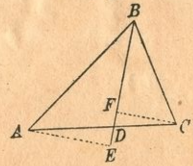
a. 右圖 AD=DC，並設 BD 是 m_b 單位長。證 $2(a^2+c^2)=4m_b^2+b^2$！

從 2 的 c，知道 $a^2=m_b^2+(\frac{1}{2}b)^2-2m_b\times(\frac{1}{2}b)\operatorname{Cos}CDB$，$c^2=m_b^2+(\frac{1}{2}b)^2+2m_b\times(\frac{1}{2}b)\operatorname{Cos}CDB$，所以 $a^2+c^2=2m_b^2+\frac{1}{2}b^2$，而 $2(a^2+c^2)=4m_b^2+b^2$。



b. 右圖 ∠ABD=∠DBC，並設 AD、DC 順次 p、q 單位長。證 p:q=c:a！

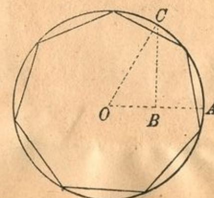
因為 $p\operatorname{Sin}ADE=c\operatorname{Sin}ABD$，$q\operatorname{Sin}CDF=a\operatorname{Sin}DBC$，而 ∠ABD=∠DBC，∠ADE=∠CDF，所以 p/q=c/a，而 p:q=c:a。



c. 右圖 OA 是圓半徑，B 是 OA 的中點，BC⊥OA。

證 BC 的長近於內接正七角形的邊！

設半徑長 1 單位，那麼 OC 長 1 單位，OB 長 $\frac{1}{2}$ 單位，BC 長 $\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=.866$ 單位。但是內接正七角形的一邊長 $2\operatorname{Sin}\frac{180°}{7}=2\operatorname{Sin}25°43'=2\times.4331=.8662$。所以 BC 的長近於內接正七角形的一邊。（完）



民國三十六年十二月發行
民國三十六年十二月初版

中華文庫初中第一集　三角表解（全一冊）

定價國幣一元六角
（郵運匯費另加）

編者　張鵬飛

發行人　中華書局股份有限公司代表　李虞杰

印刷者　中華書局永寧印刷廠　上海澳門路八九號

發行處　各埠中華書局

（九二三六）（天）