第 1 篇　不确定度与数据处理基础

用实验方法研究物理现象，必须进行大量的观测，获得大量的数据，然后将所得数据进行处理，找出数据之间的相互关系；另一方面，还必须对所测结果进行分析，估算结果的可靠程度，并对所测数据给予合理的解释。为此，必须掌握有关的误差理论、不确定度与实验数据处理的基本知识。

1.1　测量与误差的基本概念

物理学是一门实验科学，进行物理实验时主要是进行各种测量，不仅要定性地观察物理变化的过程，而且还要定量地测定物理量的大小。

1. 测量

测量是把被测量和体现计量单位的标准量作比较的过程。通过比较，确定出被测量是计量单位的若干倍，该倍数值和单位一起表示被测量的测量值(数据)。因此，记录数据时测量值的大小和单位缺一不可。

测量分为直接测量和间接测量两类。

1) 直接测量

用量具或仪表直接读出测量结果的，称为直接测量。直接测量常用的方法有直读法和比较法两种。直读法是使用具有相应分度的量具或仪表直接读取被测量的测量值(如用米尺测量长度、用电流表测量电流等)，比较法是把被测对象直接与体现计量单位的标准器进行比较(如用电桥测电阻、电位差计测电动势、用标准信号源和示波器测频率等)。

2) 间接测量

由直接测量结果经过公式计算才能得出结果的，称为间接测量。对大多数被测物理量来说，没有直接读数用的量具或仪表，只能用间接的方法进行测量，即根据被测物理量与若干可直接测量的物理量的关系，先测出这些可直接测量的物理量的测量值，再通过相关的物理公式进行计算而得出。例如，要测量圆柱体的体积，可先直接测出圆柱体的直径和高的测量值，然后通过相关的公式进行计算后就可得出。其中，圆柱体的直径和高是可直接测量的量。

此外，根据测量条件的不同，测量又可分为等精度测量和不等精度测量。

等精度测量是指在测量过程中，影响测量的诸多因素相同的测量，即在测量条件相同的情况下进行的一系列测量。例如，由同一个人在同一地点、用同一台仪器和同样的测量方法对同一被测物理量进行的连续多次测量。不等精度测量是指在测量条件部分相同或完全不同的情况下进行的一系列测量。等精度测量的数据处理比较简单，常为大多数实验采用，本书只讨论等精度测量方面的问题。

2. 测量误差

任何被测对象都具有各种各样的特性，反映这些特性的物理量都有其客观真实的值。被测物理量的客观真实数值，称为被测量的真值。测量的目的就是力图得到该真值。但是，由于测量仪器、实验条件及种种不确定因素伴随在测量过程之中，测量结果具有一定程度的不确定性，因此，被测量的真值是不能通过测量得出的。测量结果只能给出被测量的近真值或最佳值，并给出其不确定度。有关不确定度的概念及其估算将在 1.3 节中介绍，本节和 1.2 节的内容只介绍有关误差的基本知识。

测量值与被测量的真值之差，称为测量误差。

测量误差反映的是测量值偏离被测量真值的大小和方向，因此也常称为绝对误差或真误差。若被测量的测量值为 x，被测量的真值为 x_0，则测量误差

$$\varDelta = x - x_0 \tag{1-1-1}$$

与绝对误差相对应，相对误差的定义为

$$E_{\mathrm{r}} = \frac{\varDelta}{x_0} \times 100\% \tag{1-1-2}$$

3. 误差的种类

根据误差产生的原因和性质的不同，误差可分为两类。

1) 系统误差

在相同条件下，多次测量同一物理量时，测量值对真值的偏离(包括大小和方向)总是相同的，这类误差称为系统误差。

系统误差的主要来源有：

(1) 测量仪器本身的固有缺陷。如刻度不准、砝码未经校正等。

(2) 测量方法或理论公式的近似性，或测量方法有缺陷。如用伏安法测电阻时，若不考虑电表内阻的影响，就会使测量结果产生误差。

(3) 个人习惯与偏向。如用秒表计时时，掐表的反应能力(提前或滞后的倾向)。

(4) 测量过程中，环境条件(温度、气压等)的变化。如尺长随温度的变化。

系统误差使测量结果具有一定的偏向，或者偏大、或者偏小、或者按一定的规律变化，其来源又是多方面的。消减系统误差是个比较复杂的问题。要很好地分析整个实验中依据的原理及测量的每一环节和所用仪器，才能找出产生系统误差的种种原因。系统误差的特点是稳定性，不能用增加测量次数的方法使它减小。学生应该在实验中不断提高对系统误差的分析和处理能力。

消减和修正系统误差的措施如下：

(1) 消减产生系统误差的根源。例如，采用符合实际的理论公式；保证仪器装置良好且满足规定的使用条件等。

(2) 找出修正值对测量结果进行修正。如用标准仪器校准一般仪器，作出校正曲线进行修正；对理论公式进行修正，找出修正项大小；修正千分尺的零点等。

(3) 在系统误差值不易被确切地找出时，可选择适当的测量方法设法抵消它的影响。如替换法、交换法、对称观测法、半周期偶数观测法，等等。这些测量方法后续章节将结合有关实验加以介绍。

(4) 培养实验者的良好习惯。

2) 随机误差

在相同条件下，多次测量同一物理量时，每次出现的误差的大小、正负没有确定的规律，以不可预知的方式变化着，这类误差称为随机误差。

大多数情况下，随机误差是由对测量值影响不大的、相互独立的多种变化因素造成的综合效果。如各种实验条件在控制范围内的波动使测量仪器和测量对象产生的微小起伏变化；重复测量中实验者每次在对准、估读、判断、辨认上产生的微小差异；其他一些未知的偶然因素的影响等。在多次测量中，由于随机误差具有时大时小、时正时负的特点，因此，把多次测量值取平均值，必然会抵消掉部分影响。

在采用多次重复测量的方法取得大量数据以后，需加以分析。分析表明：虽然每一个数据中所含随机误差是不可预知的，但大量数据中所含随机误差是服从统计学分布规律的。随机误差的特点是随机性。如果在相同的宏观条件下，对某一物理量进行多次测量，当测量次数足够多时，便可以发现这些测量值呈现出一定的规律性。

在一个实验中，随机误差和系统误差一般同时存在。除此以外，还可能存在因实验者的粗心大意而造成的错误，如读错数、记错数等。这些错误虽然不属于误差，但是实验者必须避免的。

1.2　随机误差的估算

本节中，假定系统误差已经被减弱到足以被忽略的程度。

1. 随机误差的统计学分布规律

如前所述，随机误差是由一些不确定的因素或无法控制的随机因素引起的。这些因素使得每一次测量中误差的大小和正负没有规律，从表面上看纯属偶然。但是，大量实践证明：当对某个被测量物重复进行测量时，测量结果的随机误差却服从一定的统计学分布规律。

常见的一种是随机误差服从正态分布(高斯分布)规律，其分布曲线如图 1-2-1 所示。该分布曲线的横坐标 Δ 为误差，纵坐标 $f(\Delta)$为误差的概率密度分布函数。分布曲线的含义是：在误差 Δ 附近，单位误差范围内误差出现的概率。即误差出现在 $\Delta \sim \Delta + \mathrm{d}\Delta$ 区间内的概率为 $f(\Delta)\cdot\mathrm{d}\Delta$。

由图 1-2-1 可见，服从正态分布的随机误差具有以下特点。

(1) 单峰性：绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

(2) 对称性：绝对值相同的正负误差出现的概率相同。

(3) 有界性：绝对值很大的误差出现的概率接近于零。

(4) 抵偿性：随机误差的算术平均值随着测量次数的增加而减少，最后趋于零。

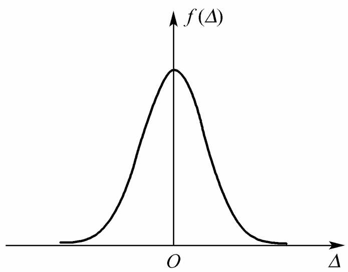

图 1-2-1

由此可见，增加测量次数可以减少随机误差。在实验中

常常采取多次测量方法的原因就在于此。但是，当测量次数有限时，随机误差是不能消除的，测量后必须进行误差估算。为定量估算，下面进一步考查正态分布曲线。

理论研究表明，正态分布的误差概率密度分布函数 $f(\varDelta)$ 可表示为

$$f(\varDelta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\varDelta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-2-1}$$

在某一次测量中，随机误差出现在 a～b 内的概率应为

$$P=\int_a^b f(\varDelta)\cdot \mathrm{d}\varDelta \tag{1-2-2}$$

给定的区间不同，P 也不同。给定的区间越大，误差越过此范围的可能性就越小。显然，在$-\infty$～$+\infty$ 内，$P=1$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varDelta)\cdot \mathrm{d}\varDelta=1 \tag{1-2-3}$$

由理论可进一步证明，$\varDelta=\pm\sigma$ 是曲线的两个拐点的横坐标值。当 $\varDelta\to 0$ 时，$f(0)\to\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$。

由图 1-2-2 可见，σ 越小，必有 $f(0)$越大，分布曲线中部上升越高，两边下降越快，表示测量的离散性小；与此相反，σ 越大，必有 $f(0)$越小，分布曲线中部下降较多，误差的分布范围就较宽，测量的离散性大。因此，σ 这个量在研究和计算随机误差时是一个很重要的特征量。σ 被称为标准误差。

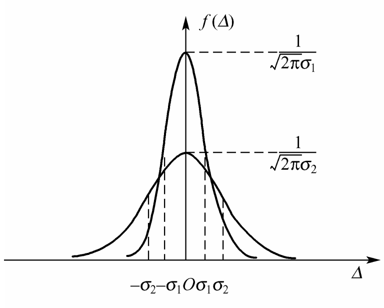

图 1-2-2

2. 标准误差的统计意义

理论上，标准误差由式(1-2-4)表示

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2}{n}} \tag{1-2-4}$$

式中，n 为测量次数；x_i 为第 i 次测量的测量值；x_0 为被测量的真值。

该式成立的条件是要求测量次数 $n\to\infty$。

某次测量的随机误差出现在$-\sigma$～$+\sigma$ 内的概率，可以证明为

$$P=\int_{-\sigma}^{\sigma} f(\varDelta)\cdot \mathrm{d}\varDelta=0.683$$

同理可求，随机误差出现在-2σ～$+2\sigma$ 和-3σ～3σ 内的概率分别为

$$P=\int_{-2\sigma}^{2\sigma} f(\varDelta)\cdot \mathrm{d}\varDelta=0.955$$

$$P=\int_{-3\sigma}^{3\sigma} f(\varDelta)\cdot \mathrm{d}\varDelta=0.997$$

由此可见标准误差 σ 所表示的统计意义为：对被测量 x 任作一次测量时，误差落在$-\sigma$～$+\sigma$ 内的可能性为 68.3%，误差落在-2σ～$+2\sigma$ 内的可能性为 95.5%，误差落在-3σ～$+3\sigma$ 内的可能性为 99.7%。因此，近年来标准误差 σ 被广泛地用在随机误差的估算中。

3. 随机误差的估算

众所周知，实际测量的次数是不可能达到无穷大的，且被测量的真值也是不可能得到

的，因此标准误差σ的计算只有理论上的意义。物理实验中随机误差的估算方法如下所述。

1) 被测量的算术平均值

在相同条件下，对被测量x进行n次测量，测量值分别为$x_1, x_2,\cdots, x_n$，则被测量x的算术平均值定义为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1-2-5}$$

根据随机误差的抵偿性，随着测量次数的增大，算术平均值越接近真值。因此，测量值的算术平均值为近真值或测量结果的最佳值。

2) 偏差

测量值与算术平均值之差，称为偏差。上述某一次测量的偏差可表示为

$$x_i-\bar{x}$$

3) 标准偏差

在有限次数的测量中，可用标准偏差s作为标准误差σ的估计值。标准偏差s的计算公式如下：

$$s(x)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-2-6}$$

标准偏差s有时也称为标准差，它具有与标准误差σ相同的概率含义。式(1-2-6)称为贝塞尔公式。

被测量x的有限次测量的算术平均值$\bar{x}$，也是一个随机变量。即，对x进行不同组的有限次测量，各组测量结果的算术平均值是不会相同的，彼此之间有所差异。因此，有限次测量的算术平均值也存在标准偏差。如用$s(\bar{x})$表示算术平均值的标准偏差，可以证明，$s(\bar{x})$与$s(x)$之间有如下关系：

$$s(\bar{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n}} \tag{1-2-7}$$

或表示为

$$s(\bar{x})=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-2-8}$$

被测量x的有限次测量的算术平均值及其标准偏差$s(\bar{x})$被求得以后，意味着被测量x的真值x_0落在$\bar{x}-s(\bar{x})$～$\bar{x}+s(\bar{x})$内的可能性为 68.3%；落在$\bar{x}-2s(\bar{x})$～$\bar{x}+2s(\bar{x})$内的可能性为 95.5%，落在$\bar{x}-3s(\bar{x})$～$\bar{x}+3s(\bar{x})$内的可能性为 99.7%。

【例 1-2-1】 对某一长度l测量了 10 次，测得数据为 63.57，63.58，63.55，63.56，63.56，63.59，63.55，63.54，63.57，63.57(单位：cm)。求其算术平均值$\bar{l}$及标准偏差$s(l)$、$s(\bar{l})$。

解：算术平均值为

$$\bar{l}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}l_i=63.564\text{cm}$$

标准偏差$s(l)$为

$$s(l)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(l_i-\bar{l})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{2040\times10^{-6}}{9}}\text{cm}=0.015\text{cm}$$

算术平均值$\bar{l}$的标准偏差为

$$s(\bar{l})=\frac{s(l)}{\sqrt{n}}=\frac{0.015}{\sqrt{10}}\text{cm}=0.0048\text{cm}$$

1.3　测量的不确定度

长期以来，在报告测量的结果时，由于不同国家和不同学科有不同的规定，影响了国际的交流和对成果的相互利用。为加速与国际惯例接轨，我国原国家技术监督局(现为国家质量监督检验检疫总局)于 1999 年 1 月 11 日颁布了新的计量技术规范 JJF 1059—1999《测量的不确定度与表示》，代替了 JJF 1027—1991《测量误差及数据处理》中的误差部分，并于 1999 年 5 月 1 日起实行。为了培养面向新世纪的高科技人才，物理实验课程中正在逐步推行用不确定度来评价测量结果的质量，以适应国内外形势发展的需要。

1. 测量的不确定度的基本概念

测量的不确定度(简称为不确定度)是对被测量的真值所处量值范围的评定。它反映了被测量的平均值附近的一个范围，而真值以一定的概率落在其中。不确定度越小，标志着误差的可能值越小，测量值的准确程度越高；不确定度越大，标志着误差的可能值越大，测量值的准确程度越低。

测量结果与很多量有关，所以不确定度来源于许多因素，这些因素对测量结果形成若干不确定度分量。因此，不确定度一般由若干分量组成。

如果这些分量只用标准误差给出，称为标准不确定度，用符号 u(通常带有作为序号的下角标)表示。按照评定方法的不同，标准不确定度可分为两类：一类是用统计的方法评定的不确定度，称为 A 类标准不确定度；另一类由其他方法和其他信息的概率分布(非统计的方法)来估计的不确定度，称为 B 类标准不确定度。

计算 A 类标准不确定度的方法有多种，如贝塞尔法、最大偏差法、极差法等；而 B 类标准不确定度常用估计方法，要估计适当，需要确定分布规律，需要参照标准，更需要估计者的学识水平、实践经验等。因此，在物理实验课的教学中，将计算进行理想化和简单化的处理，以利于教学。

2. A 类标准不确定度的评定

用贝塞尔法计算 A 类标准不确定度时，就是直接对多次测量的数值进行统计计算，求其平均值的标准偏差。因此，在物理实验课的教学中，A 类标准不确定度的计算方法如下：

对被测量x，在相同条件下，测量n次，以其算术平均值$\bar{x}$作为被测量的最佳值。它的 A 类标准不确定度为

$$u_{\text{A}}(x)=s(\bar{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n}}\tag{1-3-1}$$

式中的 $s(x)$ 可由贝塞尔公式即式(1-2-6)求出。

在特殊情况下，对被测量 x 只测量一次时，测量结果的 A 类标准不确定度为

$$u_A(x) = s(x) \tag{1-3-2}$$

式中，$s(x)$ 是在本次测量的“先前的多次测量”(实验者本人或其他实验人员完成或生产厂家、检定单位完成)时得到的。当然，本次测量的测量条件与“先前的多次测量”时的测量条件一致。

3. B 类标准不确定度的评定

B 类标准不确定度的评定中往往依据的是计量器具的检定书、标准、技术规范、手册上提供的技术数据及国际上公布的常数与常量等。这些信息也是通过统计方法得出的，但是，给出的信息不完全，依据这些信息进行估算，往往比较复杂。在物理实验课的教学中，B 类标准不确定度主要体现在对测量仪器的最大允许误差的处理上。

1) 测量仪器的最大允许误差

生产厂家在制造某种仪器时，在其技术规范中预先设计、规定了最大允许误差(又称为极限允许误差、误差界限、允差等)，终检时，凡是误差不超过此界限的仪器均为合格品。因此，最大允许误差是生产厂家为一批仪器规定的技术指标(过去常用的仪器误差、示值误差或准确度，实际上都是最大允许误差)。它不是某台仪器实际存在的误差或误差范围，也不是使用该仪器测量某个被测量值时所得到的测量结果的不确定度。在物理实验课的教学中，测量仪器的最大允许误差通常用 $\Delta_{仪}$ 表示。

测量仪器的最大允许误差是一个范围，某种仪器的最大允许误差为 $\Delta_{仪}$，表明凡是合格的该种仪器，其误差必定在 $-\Delta_{仪}$ ～ $+\Delta_{仪}$ 范围之内。它的给出方式有如下两种：

(1) 以绝对误差形式给出；

(2) 以引用误差形式给出，即以绝对误差与特定值之比的百分数来表示，“特定值”指的是量程值或其他值。

如量程为 1mA、1.0 级直流毫安表的 $\Delta_{仪}=\pm(1\text{mA}\times1.0\%)=\pm0.01\text{mA}$。其引用误差为 0.01mA /1mA=1.0%，以“1.0”在表盘上表示。

又如数字式电压表的最大允许误差为 $\Delta_{仪}=\pm$(级别%×读数+n×最低位数值)。其中n代表仪器固定项误差，相当于最小量化单位的倍数，只取 1，2，3，…例如，某台数字式电压表的级别为 0.02，读数为 1.1666V，n=2，则 $\Delta_{仪}=\pm(0.02\%\times1.1666+2\times0.0001)\text{V} = \pm4.3\times10^{-4}\text{V}$。

2) B 类标准不确定度的估计

在物理实验课的教学中，B 类标准不确定度的估计方法是：

对误差服从正态分布的仪器，B 类标准不确定度为 $u_B=\dfrac{|\Delta_{仪}|}{3}$；

对误差服从均匀分布的仪器，B 类标准不确定度为 $u_B=\dfrac{|\Delta_{仪}|}{\sqrt{3}}$。

所谓均匀分布是指测量值的某一范围内，测量结果取任一可能值的概率相等，而在该范围外的概率为零。若对某类仪器的分布规律一时难以判断，可近似按均匀分布处理。在

物理实验课教学中，一般规定：除非另有说明，均按均匀分布处理。

4. 合成标准不确定度

如上所述，在测量结果的质量评定中，标准不确定度有两类分量。总的标准不确定度是由各标准不确定度分量合成而来。由各标准不确定度分量合成而来的标准不确定度称为合成标准不确定度。在直接测量的情况下，合成标准不确定度的计算比较简单；在间接测量的情况下，间接被测量往往由若干量以一定的方式合成而来，合成标准不确定度的计算则比较复杂。这是因为，不仅仅要考查“若干量”中的每个量，而且要考查“若干量”中的每个量之间的相关性。

在物理实验课的教学中，合成标准不确定度的估计方法简化如下：

(1) 当被测量 y 是直接测量量 x 时，即 $y=x$ 时，合成标准不确定度为

$$u_{\mathrm{c}}(y)=u(x) \tag{1-3-3}$$

$u(x)$ 的来源有 A 类、B 类无数个标准不确定度分量，分别为 $u_1(x)$，$u_2(x)$，$\cdots$ 如果这些分量是相互独立的，即不相关的，则有

$$u(x)=\sqrt{u_1^2(x)+u_2^2(x)+\cdots} \tag{1-3-4}$$

即合成标准不确定度等于各标准不确定度分量的平方和的根(方和根法)。

【例 1-3-1】 用螺旋测微器(测量范围为 0～25mm、$\varDelta_{仪}=\pm 0.004\mathrm{mm}$)测量钢丝的直径 d，5 次测量的数据为 0.575，0.576，0.574，0.576，0.577(单位：mm)，求钢丝的直径 d 的算术平均值 $\overline{d}$ 及合成标准不确定度 $u_{\mathrm{c}}(d)$。

解：钢丝的直径 d 的算术平均值为

$$\overline{d}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i=\frac{1}{5}\times(0.575+0.576+0.574+0.576+0.577)\mathrm{mm}=0.5756\mathrm{mm}$$

测量的 A 类标准不确定度分量为

$$u_{\mathrm{A}}(d)=s(\overline{d})=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\overline{d})^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{[(-0.6)^2+0.4^2+(-1.6)^2+0.4^2+1.4^2]\times 10^{-6}}{5\times(5-1)}}\mathrm{mm}$$

$$=0.1\times 10^{-3}\mathrm{mm}$$

测量的 B 类标准不确定度分量为

$$u_{\mathrm{B}}(d)=\frac{\varDelta_{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{0.004}{\sqrt{3}}\mathrm{mm}=2\times 10^{-3}\mathrm{mm}$$

测量的合成标准不确定度为

$$u_{\mathrm{c}}(d)=u(d)=\sqrt{u_{\mathrm{A}}^2(d)+u_{\mathrm{B}}^2(d)}=\sqrt{(0.1)^2+(2)^2}\times 10^{-3}\mathrm{mm}=2\times 10^{-3}\mathrm{mm}$$

(2) 被测量 J 是若干个直接测量量 x，y，z，$\cdots$ 的函数时，即 $J=f(x,\ y,\ z,\cdots)$。

若 x，y，z，$\cdots$ 彼此无关，则合成标准不确定度可按方和根法求得，即

$$u_{\mathrm{c}}(J)=\sqrt{c_x^2u^2(x)+c_y^2u^2(y)+c_z^2u^2(z)+\cdots} \tag{1-3-5}$$

式中，c_x，c_y，c_z，$\cdots$ 称为不确定度的传播系数，且

$$c_x=\left|\frac{\partial J}{\partial x}\right|,\ c_y=\left|\frac{\partial J}{\partial y}\right|,\ c_z=\left|\frac{\partial J}{\partial z}\right|,\cdots \tag{1-3-6}$$

【例 1-3-2】 求例 1-3-1 中钢丝的横截面积 S 的最佳值 $\overline{S}$ 及其合成标准不确定度 $u_c(S)$ 。

解：钢丝的横截面积 S 的最佳值 $\overline{S}$ 为

$$\overline{S}=\frac{\pi}{4}\overline{d}^2=\frac{\pi}{4}\times(0.5756)^2\,\text{mm}^2=0.065\text{mm}^2$$

其合成标准不确定度为

$$u_c(S)=\sqrt{c_d^2\cdot u^2(d)}=\sqrt{\left|\frac{\partial S}{\partial d}\right|^2\cdot u^2(d)}=\frac{2\pi}{4}\overline{d}\times 2.3\times10^{-3}=\frac{\pi}{2}\times0.5756\times2.3\times10^{-3}\,\text{mm}^2$$

$$=2\times10^{-3}\,\text{mm}^2$$

【例 1-3-3】 已知圆柱体直径 d 的 $\overline{d}$ 、$u(d)$，圆柱体高 h 的 $\overline{h}$ 、$u(h)$，求该圆柱体体积 V 的 $\overline{V}$、$u_c(V)$ 。

解：圆柱体体积 V 的最佳值为

$$\overline{V}=\frac{\pi}{4}\cdot\overline{d}^2\cdot\overline{h}$$

圆柱体体积 V 的合成标准不确定度 $u_c(V)$ 为

$$u_c(V)=\sqrt{c_d^2\cdot u^2(d)+c_h^2\cdot u^2(h)}$$

式中，$c_d=\left|\frac{\partial V}{\partial d}\right|=\frac{\pi}{4}\cdot2\cdot\overline{d}\cdot\overline{h}=\frac{\pi}{2}\overline{d}\cdot\overline{h}$；$c_h=\left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|=\frac{\pi}{4}\cdot\overline{d}^2$ 。

当 $J=f(x,\ y,\ z,\cdots)$ 为乘除或方幂的函数关系时，采用相对不确定度(不确定度与被测量的最佳值之比)可以大大简化合成标准不确定度的运算。方法是先取对数后再作方和根合成，即

$$\frac{u_c(J)}{\overline{J}}=\sqrt{(\frac{\partial\ln f}{\partial x})^2\cdot u^2(x)+(\frac{\partial\ln f}{\partial y})^2\cdot u^2(y)+\cdots}\qquad(1\text{-}3\text{-}7)$$

【例 1-3-4】 在例 1-3-3 中，如果还测得该圆柱体质量 m 的 $\overline{m}$ 及 $u(m)$，求出该圆柱体密度 ρ 的 $\overline{\rho}$ 及 $u_c(\rho)$。

解：该圆柱体密度的最佳值为

$$\overline{\rho}=\frac{\overline{m}}{\overline{V}}=\frac{\overline{m}}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\cdot\overline{h}}=\frac{4\overline{m}}{\pi\overline{d}^2\cdot\overline{h}}$$

$$\frac{u_c(\rho)}{\overline{\rho}}=\sqrt{(\frac{\partial\ln\rho}{\partial d})^2\cdot u^2(d)+(\frac{\partial\ln\rho}{\partial m})^2\cdot u^2(m)+(\frac{\partial\ln\rho}{\partial h})^2\cdot u^2(h)}$$

因为 $\ln\rho=\ln\frac{4}{\pi}+\ln m-\ln h-2\ln d$

所以 $\frac{\partial\ln\rho}{\partial d}=-\frac{2}{\overline{d}}$，$\frac{\partial\ln\rho}{\partial m}=\frac{1}{\overline{m}}$，$\frac{\partial\ln\rho}{\partial h}=-\frac{1}{\overline{h}}$

代入式(1-3-7)可得

$$\frac{u_c(\rho)}{\overline{\rho}}=\sqrt{\frac{4}{\overline{d}^2}\cdot u^2(d)+\frac{1}{\overline{m}^2}\cdot u^2(m)+\frac{1}{\overline{h}^2}\cdot u^2(h)}$$

常用函数的合成标准不确定度的计算，见表 1-3-1。

表 1-3-1　常用函数的合成标准不确定度的计算

函　　数	合成标准不确定度
$J = x \pm y$	$u_c(J) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)}$
$J = x \cdot y$	$\dfrac{u_c(J)}{J} = \sqrt{[\dfrac{u(x)}{x}]^2 + [\dfrac{u(y)}{y}]^2}$
$J = \dfrac{x}{y}$	$\dfrac{u_c(J)}{J} = \sqrt{[\dfrac{u(x)}{x}]^2 + [\dfrac{u(y)}{y}]^2}$
$J = \dfrac{x^k \cdot y^m}{z^n}$	$\dfrac{u_c(J)}{J} = \sqrt{k^2[\dfrac{u(x)}{x}]^2 + m^2[\dfrac{u(y)}{y}]^2 + n^2[\dfrac{u(z)}{z}]^2}$
$J = kx$	$u_c(J) = ku(x)$
$J = \sqrt[k]{x}$	$\dfrac{u_x(J)}{J} = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{u(x)}{x}$
$J = \sin x$	$u_c(J) = \cos x \cdot u(x)$
$J = \ln x$	$u_c(J) = \dfrac{u(x)}{x}$

5. 扩展标准不确定度

扩展标准不确定度是确定测量结果分散区间的参数。它所给出的置信空间有更高的置信水平，它常用标准不确定度的倍数表示，即扩展标准不确定度由合成标准不确定度乘以因子 k 得出。用 U 代表扩展标准不确定度，则有

$$U = k \cdot u_c(J) \tag{1-3-8}$$

式中，k 为包含因子或覆盖因子。

k 把合成标准不确定度 $u_c(J)$ 扩展了 k 倍。在物理实验课的教学中，一般取 k=2 或 k=3。在大多数情况下，k=2 时，区间的置信概率为 95.5%；k=3 时，区间的置信概率为 99.7%。

1.4　有效数字及测量结果的表示

实验中用仪器直接测得的数值都有一定的不确定度，因此，测出的数据只能是近似数。由这些近似数经过计算而求出的间接测量量也是近似数。显然，几个近似数的运算并不能使运算结果更准确些。因此，测量数据的记录、运算和测量结果的表达都有一些规则，以便体现测量结果的近似性。

1. 有效数字的概念

任何一个物理量，既然其测量结果都体现近似性(都包含误差)，该物理量的数值就不应该无限制的记录下去。例如，测量结果(1.341 256 ± 0.002)cm，其准确表达为(1.341± 0.002)cm。这是依据不确定度 0.002cm，该数值在千分位上已存在误差，千分位之后的数字便无意义。因此，测量结果只表达到开始有误差的那一位数，并且在这位数以后按“四舍五入”的法则取舍。把测量结果中可靠的几位数字加上有误差的一位数字称为测量结果的有效数字；或者说，有效数字的最后一位是不确定度。

综上所述，有效数字是表示不确定度的一种粗略方法，而不确定度则是对有效数字中最后一位数字不确定程度的定量描述。它们都表示含有误差的测量结果。

有效数字的几点说明：

(1)“0”的位置。“0”在非零数字中间或最末一位都“有效”，不能随意添加或略去；而表示小数点位置的“0”不是有效数字。如 0.602 00kg 和 602.00g 都是五位有效数字。而不能写成 602g，因为它们的准确度是不同的。

(2) 有效数字的位数与十进制单位的变换无关。这从上例不难看出。

(3) 为避免混淆，并使记录和计算方便，当数字很大或很小，但有效数字位数较多时，一般采用科学计数法，例如，0.000 012km 可写成 $1.2\times10^{-5}\,\text{km}$，以米为单位时，写成 $1.2\times10^{-2}\,\text{m}$。

有效数字的位数多少反映出相对误差的大小。有效数字的位数越多，则相对误差越小，测量结果的准确度越高。

2. 如何确定有效数字

(1) 当给出(或求出)不确定度时，测量结果的有效数字由不确定度来确定。由于不确定度本身只是一个估计值，一般情况下，不确定度的有效数字只取一位。测量值的最后一位要与不确定度的最后一位取齐，例如，(2.03 ± 0.01)cm。一次直接测量结果的有效数字可以由仪器最大允许误差的不确定度来确定；多次直接测量结果(算术平均值)的有效数字，由计算得到的算术平均值的不确定度来确定；对于间接测量结果的有效数字，也是先算出结果的不确定度，再由不确定度来确定。

(2) 当未给出(或未求出)不确定度时，运算结果的有效数字也不能任意选取。

对于直接测量量，在一般情况下，有效数字取决于仪器的最小分度，是否估读以及估读的程度。

对于间接测量量，其有效数字位数由参与运算的各直接测量量的有效数字位数及运算方式来估计。例如，3.2+0.2231，第一个数的误差在十分位上，已远大于第二个数的误差，因此运算结果应写为 3.4 而不能写为 3.4231。

对于加减类型的运算，由于运算结果的不确定度总是大于或等于各分量中最大的不确定度，所以运算结果的有效数字位数应由这个具有最大不确定度的分量来决定，即运算结果的末位应与末位最高的数的末位取齐。例如，234.3+0.1234−1=233。

对于乘除类型的运算，由于运算结果的相对不确定度总是大于或等于有效数字位数最少的分量的相对不确定度，所以运算结果的有效数字位数应与有效数字位数最少的分量相同。例如，$\dfrac{36\times2.1256}{1.21^2}=52$。

当运算结果的第一位是 1、2、3 时，可以多保留一位有效数字。例如，$5.3\times2.3=12.2$。

以上运算规则是粗略的，只是对有效数字的一种估计。只有不确定度才是决定有效数字位数的严格依据。

3. 测量结果的表示

在物理实验课中，测量结果的表示方式规范如下：

被测量的符号=测量结果的值±不确定度的值　单位

或

被测量的符号=测量结果的值(不确定度的值)　单位

不确定度的有效数字位数一般取一位有效数字。相对不确定度的有效数字位数一律也

取一位有效数字。测量数值的有效数字位数根据求出的不确定度的有效数字位数决定。即不确定度定到了哪一位，测量数值也应定到这一位。

如，例 1-3-1 中钢丝直径 d 的 $\overline{d}$=0.5756mm、$u_{\mathrm{c}}(d)=2\times10^{-3}\,\mathrm{mm}$，测量结果表示为

$$d=\overline{d}\pm u_{\mathrm{c}}(d)=0.576\pm0.002\mathrm{mm}$$

或

$$d=0.576(0.002)\mathrm{mm}$$

为了比较测量结果精确度的高低，常常使用相对不确定度这一概念，其定义为

$$相对不确定度=\frac{不确定度}{测量的平均值}$$

1.5　实验数据处理方法

实验的数据处理，是从带有随机性的观测值中用数学方法导出规律性的过程。在不少实验中，现象的随机性十分突出，使物理过程的规律性往往被现象的随机性所掩盖。因此，运用适当的数据处理方法才能恰当地设计实验，才能由实验数据得出正确的结论。

在物理实验中常用的数据处理方法有：列表法、作图法、逐差法、平均法及最小二乘法等。在本节中只介绍这些方法的特点和一般原则，以后将在实验中根据情况选用这些方法。

1. 列表法

列表法是指在记录数据时，把数据列成表，是记录数据的基本方法。数据列表后不仅简明醒目，还有助于看出物理量之间的对应关系，有助于发现实验中的问题。而且表格设计得当，还可使数据计算比较方便。

列表法的要求：

(1) 列表并不是把所有数据填入一个表内，写入表内的通常是些主要的原始数据，计算过程中的一些中间结果也可列入表内。有些个别的或与其他量关系不大的数据，可以不列入表内，而是写在表格的上方或下方。

(2) 设计表格时要注意数据间的联系及计算顺序，设法做到有条理、完整而又简明。

(3) 把单位与物理量的名称(或符号)组成一个项目，不必在每个数据后都写上一个单位。自定义的符号要说明它代表什么。

(4) 表中数据的写法应注意整齐统一，同一列的数值，小数点应上、下对齐。若数据的有效数字位数较多，但在表中只有后几位有变化，则只有第一个数据需要写出全部数位，以后的各数可只写出变化的数位。

2. 作图法

作图法能将物理量之间的关系用图线表示出来，既简单又直观。有了图线以后(例如，设函数关系为 $y=f(x)$)，则可在图线范围内得到任意 x 值对应的 y 值(内插法)。在一定的条件下，也可以从图线的延伸部分得到测量数据以外的数据(外推法)。若不通过图线，要想获得以上数据还要做很多的计算或重新观测。此外，利用图线可求某些物理量(例如，图线为直线时，通过求截距和斜率，可求出有关物理量)。运用图解法还可由图线建立相应的经验公式。

1) 作图规则

(1) 作图一律用坐标纸(直角坐标纸或对数坐标纸等)。坐标纸的大小和坐标轴的比例应根据所测数据的有效数字位数和结果的需要而定。原则是，测量数据中的可靠数字在图中应为准确的，最后一位存疑数字在图中应是估计的。即坐标纸的最小格对应测量数据中的最后一位可靠数字。

(2) 选轴：以横轴代表自变量，纵轴代表因变量，并画两条粗细适当的线表示横轴和纵轴。在轴的末端近旁注明所代表的物理量及单位，中间用逗号分开。对于每个坐标，在相隔一定的距离上用整齐的数字来标度。横、纵轴的标度可以不同，两轴的交点也可以不从零开始，而取比数据最小值再小些的整数开始标值，以便调整图线的大小和位置，使图线占据图纸大部分而不偏于一角或一边。若数据特别大或特别小，可以提出乘积因子(如10^{-5}、10^{2}等)，并标在坐标轴上最大值的右面。

(3) 标点：根据测量数据，用削尖的铅笔在图上标出各测量数据点，并以该点为中心，用“+”“×”“⊙”等符号中的任一种标明。符号在图上的大小，由这两个物理量的最大绝对误差决定。同一图线上的观测点要用一种符号。如果图上有两条图线，则应用两种不同符号加以区别，并在图纸的空白处注明符号所代表的内容。

(4) 连线：除了画校正图线要把相邻两点用直线连接以外，一般连线时，应尽量使图线紧贴所有的观测点而过(但应舍弃严重偏离图线的某些点)，并使观测点均匀分布于图线的两侧。方法是：一面移动透明的直尺或曲线板，一面用眼注视着所有的观测点，当直尺或曲线板的某一段跟观测点的趋向一致时，用削尖的铅笔连成光滑曲线。如欲将此图线延伸到观测数据范围之外，则应依其趋势用虚线表示。

(5) 写图名：在图纸顶部附近空白位置写出简洁而完整的图名。一般将纵轴代表的物理量写在前面，横轴代表的物理量写在后面，中间用符号“-”连接。在图名的下方允许附加必不可少的实验条件或图注。

2) 求直线的斜率和截距

物理实验中遇到的图线大多数属于普通曲线，因此这些曲线大都可用一个方程式来表示。与图线对应的方程式一般称为经验公式。现在先讨论实验图线为直线的情况。

设经验公式为 $y=a+bx$，则该直线的斜率 b 为

$$b=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{1-5-1}$$

式中，(x_1,y_1)、(x_2,y_2) 分别为图中直线上两点的坐标，这两个点不允许使用原标观测点。

若 x 轴起点为零，则可直接从图上读出截距 a (因 $x=0$ 时，$y=a$)。如 x 轴起点不为零，则可在求出 b 后，再选图线上任一点(x_3,y_3)代入 $y=a+bx$ 中，即可求出截距 a 为

$$a=y_3-bx_3 \tag{1-5-2}$$

(x_3,y_3) 点也不允许使用原标观测点。应当指出，这是一种粗略地求 a、b 的方法，较准确的方法后面再加以介绍。

3) 曲线改直

实验中物理量之间的关系往往不是线性的，因而若直接用测得的变量数据作图，图线往往是曲线，这样不仅由图求值困难，而且不易判断结论是否正确。因此，往往进行适当的变量代换，使变量之间成线性关系，图线也由曲线转化为直线，这样一来可使问题大为简化。

例如，为验证玻义耳定律 $pv=c$，由测得的 p、v 数据作 v-p 图，如图 1-5-1 所示。如

果定律正确，所得曲线应为双曲线，但要判断所作曲线是否为双曲线并不很容易。但是可进行变量代换，将纵轴变量改为$\frac{1}{v}$，作$\frac{1}{v}$ - p 图，如图 1-5-2 所示。那么玻义耳定律正确时，所得图线应为一直线，这样就容易判断了。

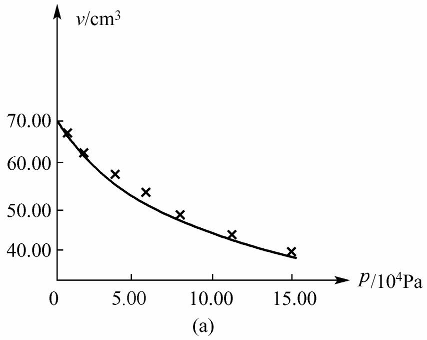

图 1-5-1　v-p 图

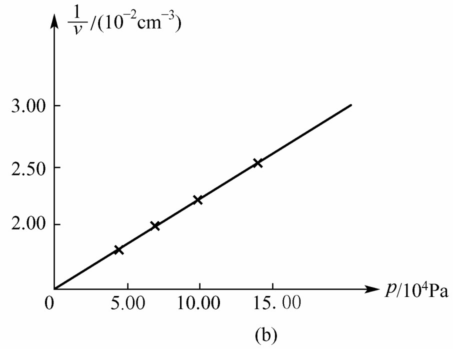

图 1-5-2　$\frac{1}{v}-p$ 图

表 1-5-1　p，v，$\frac{1}{v}$ 实验数据

$p/10^4$ Pa	7.87	8.36	9.22	10.14	11.41	12.76	14.80
v/cm^3	64.00	60.00	55.00	50.00	45.00	40.00	35.00
$\frac{1}{v}\Big/10^{-2}\,\mathrm{m}^{-3}$	1.56	1.67	1.82	2.00	2.22	2.50	2.86

当物理量之间的关系不太清楚时，有时可从实验图线大致判断它们所具有的函数关系，再进行适当的变量代换，将原图线转化为直线。

例如，设经验公式为 $y = ax^n$ 。式中，a、n 为未知常数。将方程两边取对数，可得

$$\lg y = n\lg x + \lg a$$

这样，以变量的对数代替变量作图，在坐标纸上以 $\lg y$ 为纵轴，以 $\lg x$ 为横轴，则可得一直线。直线的斜率、截距分别为欲求的常数 n 和 $\lg a$ ，从而 a 也可求出。

更简便的办法是直接在对数坐标纸上作图，这时不必查对数就可直接在坐标纸上标点。

综上所述，作图法可以直观地表达出物理量之间的关系，根据图线也可以找出经验公式。但是由于图纸大小受到限制，连线也具有较大的主观任意性，因此，作图法仅仅是一种粗略的方法。下面再介绍几种较准确的计算方法。

3. *逐差法(环差法)*

逐差法是常用的数据处理方法之一，常常用它求一般线性方程(例如 $y = a + bx$) 中的待定系数(例如 a、b)。

若实验中，自变量 x 作等差变化(等间距变化)，测量数据的对应关系为

$$\begin{cases} y_0 = a + bx_0 \\ y_1 = a + bx_1 \\ \quad\vdots \\ y_n = a + bx_n \end{cases}$$

一般只测两组数据，由两个方程相减求差就可求出b，进而求出a。但是，为了减少误差，现在测了n组。怎样求差才能充分利用数据？下面先采用每两个相邻的方程相减求差的方法。由每两个相邻的方程相减求差后，有

$$\begin{cases}\Delta y_1 = y_1 - y_0 = b(x_1 - x_0) = b\Delta x_1 \\ \Delta y_2 = y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1) = b\Delta x_2 \\ \qquad\vdots \\ \Delta y_n = y_n - y_{n-1} = b(x_n - x_{n-1}) = b\Delta x_n\end{cases}$$

将等式两边取平均，可得

$$b = \frac{\overline{\Delta y}}{\overline{\Delta x}} = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$$

这是因为

$$\overline{\Delta y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta y_i = \frac{1}{n}\left[(y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1})\right] = \frac{1}{n}(y_n - y_0)$$

同理

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}(x_n - x_0)$$

这样一来，只有首、末两组数据起作用，而中间的数据都一一抵消了。上述相减求差的方法是不可取的，它没有充分利用数据。下面介绍一种特殊的求差方法。

将多次测量的数据分成数目相同的前、后两组，然后将前、后两组的相应项依次相减求差，这种方法称作逐差法(环差法)。为讨论方便，设测量数据共有$2n$组，每组n个方程

$$\text{前组}\begin{cases}y_1 = a + bx_1 \\ y_2 = a + bx_2 \\ \quad\vdots \\ y_n = a + bx_n\end{cases} \qquad \text{后组}\begin{cases}y_{n+1} = a + bx_{n+1} \\ y_{n+2} = a + bx_{n+2} \\ \quad\vdots \\ y_{2n} = a + bx_{2n}\end{cases}$$

将前、后两组的对应项依次相减求差得

$$\begin{cases}\Delta y_1 = y_{n+1} - y_1 = b(x_{n+1} - x_1) = b\Delta x_1 \\ \Delta y_2 = y_{n+2} - y_2 = b(x_{n+2} - x_2) = b\Delta x_2 \\ \qquad\vdots \\ \Delta y_n = y_{2n} - y_n = b(x_{2n} - x_n) = b\Delta x_n\end{cases}$$

等式两边取平均，得

$$b = \frac{\overline{\Delta y}}{\overline{\Delta x}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta y_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{n+i} - y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_{n+i} - x_i)} \tag{1-5-3}$$

为求a，再由

$$\sum_{i=1}^{2n} y_i = 2na + \sum_{i=1}^{2n} bx_i = 2na + b\sum_{i=1}^{2n} x_i$$

得

$$a = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{2n} y_i - b\sum_{i=1}^{2n} x_i\right) \tag{1-5-4}$$

应该指出，上述求 a、b 的方法，为一次逐差法。当求一元二次方程的系数时，还应对测量数据连续分两次计算，即采用二次逐差法，在此不再赘述，可查阅有关文献。

总之，逐差法充分利用测量数据，具有对数据取平均的效果，比作图法精确，减少了误差，因此在物理实验中，常被采用。但是，用逐差法处理的问题只限于多项式形式的函数关系，而且自变量需等间距变化，这是该方法的局限性。

4. 平均法

平均法也是在处理方程组数目多于变量个数时，求系数的一种方法。

设一方程内含 k 个系数，用平均法求此 k 个系数的步骤为：

(1) 将所测 n 组观测值代入方程内，得 n 个方程；

(2) 将所得 n 个方程分成 k 组，每组中所含方程数大致相等；

(3) 将每组方程各自相加，分别合并为一式，共得 k 个方程；

(4) 解此 k 个方程，得 k 个系数值。

实验表明，分组方式不同时，会有不同的结果。方程分组时，以前后顺序(按数值的大小)分组为好。

5. 最小二乘法

当在实验中测得自变量 x 与因变量 y 的 n 个对应数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_i,y_i)，…，(x_n,y_n) 时，要找出已知类型的函数关系 $y=f(x)$，使 $y_i-f(x_i)$ (称为残差)的平方和

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-f(x_i)\right]^2=\min\ (\text{最小}) \tag{1-5-5}$$

这种求 $f(x)$ 的方法，称为最小二乘法。

本书只讨论简单线性函数的最小二乘法，考查当独立变量只有一个时，即函数关系为 $y=a+bx$ 时，如何用最小二乘法求出待定系数 a、b。

设
$$Q=\sum_{i=1}^{N}\left[y_i-(a+bx_i)\right]^2$$

由数学分析知，欲使残差的平方和 Q 取值最小，要满足的条件是 $\frac{\partial Q}{\partial a}=0$、$\frac{\partial Q}{\partial b}=0$，且其二阶导数大于 0。因此，对 Q 求导，并令其为零，可得两个联立方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(a+bx_i)\right]=0\\[2ex]\dfrac{\partial Q}{\partial b}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\left[y_i-(a+bx_i)\right]=0\end{cases}$$

整理后，可写为

$$\begin{cases}\overline{x}\cdot b+a=\overline{y}\\ \overline{x^2}\cdot b+\overline{x}\cdot a=\overline{xy}\end{cases}$$

式中，$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$；$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$。

$$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \qquad \overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)$$

方程的解为

$$b=\frac{\overline{x}\cdot\overline{y}-\overline{xy}}{\overline{x}^2-\overline{x^2}} \tag{1-5-6}$$

$$a=\overline{y}-b\overline{x} \tag{1-5-7}$$

进一步的计算表明，上述a、b值，使Q的二阶导数大于零，即满足Q为最小的条件。这样，用最小二乘法得出了方程$y=a+bx$中a、b的值。与作图法、平均法、逐差法相比，最小二乘法是确定待定系数的最好方法。

注意：运用最小二乘法确定待定系数时要求每个数据的测量都是等精度的，而且，假定x_i、y_i中只有y_i是有测量误差的。在实际处理问题时，可以把相对来说误差较小的变量作为x。

在数理统计学中，本处讲述的方法属于一元线性回归，且只是一元线性回归处理数据的方法之一，有关线性回归的完整知识，不再多述，可查阅有关文献。

习　　题

1．指出下列情况属于随机误差还是系统误差：

(1) 米尺刻度不均匀；

(2) 游标卡尺零点不准；

(3) 米尺因温度改变而伸缩；

(4) 最小分度后一位的估计；

(5) 实验者读数时的习惯偏向；

(6) 测质量时，天平未调水平。

2．比较下列三个量的不确定度的大小：

(1) $u_1=55.0\text{V}\pm0.1\text{V}$；(2) $u_2=0.55\text{V}\pm0.01\text{V}$；(3) $u_3=0.0055\text{V}\pm0.001\text{V}$。

3．量程为 10V、级别为 0.5 的电压表，其读数的 B 类标准不确定度是多少？

4．用秒表(最大允许误差为 0.01s)测时 5 次：测得值为 10.75s、10.78s、10.76s、10.80s、10.77s。求$\bar{t}$、$u_{\text{c}}(t)$、$U(t)(k=3)$，并表示该测量结果。

5．导出下面几个函数的合成标准不确定度和相对不确定度的计算式：

$$J=x-y,\quad J=x/y,\quad J=x^m y^n/z^l,\quad y=\ln x,\quad y=\sin x,\quad y=x^{\frac{1}{k}}。$$

6．根据有效数字的含义、运算规则，改正以下错误：

(1) L=12.832cm$\pm$0.2cm；(2) L=12.8cm$\pm$0.22cm；(3) L=12.832cm$\pm$0.2222cm；

(4) 18cm=180mm；(5) 266.0=2.66$\times10^2$；(6) 0.028$\times$0.166=0.004 648；

(7) $\dfrac{150\times2000}{13.60-11.6}=150000$。