大學叢書

非歐平幾何學及三角學

大學叢書

非歐平幾何學及三角學

卡士羅著
余介石譯

中華教育文化基金董事會
編譯委員會編輯

商務印書館發行

原　序

余撰此小册，以論非歐平幾何學及平三角學要義，編述之方式，力求其可供中等及高等學校教師講授初等幾何學者之用。輓近英美學校中講授幾何學之方法，已有變更，故爲教師者，皆須知歐氏幾何學中之種種假設，而對歐氏平行論所依據之臆說，尤須注意。在歷史中對於平行論探考之結果，遂引起各種非歐幾何學之討論；教師必須對此種非歐幾何學在邏輯上之可能性，有相當之了解，而後講授初等幾何學時，方有獨到見解之可言也。

是書開端兩章專述歐氏平行設論 (Parallel Postulate) 證明之嘗試中之最重要者，并紀非歐幾何學創造人波爾業 (Bolyai)，羅巴曲士奇 (Lobatschewsky)，里曼 (Riemann) 等之研究。

第三至第五章中，係將波爾業及羅巴曲士奇二人之非歐幾何學（即今日所謂之雙曲線幾何學），加以系統之說明，此種討論方法之特色，在於第三章中不用連續原理 (Principle of Continuity)，且不用立體幾何學，以建立雙曲線平幾何學及三角學。

第六，七兩章，以相同之方法討論橢圓幾何學，但視前者爲略耳。

第八章中論傍卡累 (Poincaré) 以與定圓正交或徑交 (Diametral) 之圓族幾何學表示非歐幾何學之方法，由此種表示，即得一淺易方法，闡明歐氏平行設論之不可得而證，且可使非歐幾何學本身，益爲昌明。

苟無波諾拉 (Bonola) 之著作，則此小册決不能撰成。余之知此問題

得由淺易方法討論者，皆係波氏之指示也。余撰是書，實賴於彼所著關於歷史方面之著作(此書已由余譯爲英文*)，及恩里格(Enriques)之中等幾何學問題討論集(Questioni riguardanti la geometria elementare)，而得益於此書之德文增訂本者爲尤多。

對其他研究此同一問題之諸作家中。余於李布曼(Liebmann)及斯楊刻爾(Stäckel)二氏，尤須表示謝意，蓋余書中論雙曲線平三角學之方法，卽係李氏所創者；而對其名著非歐幾何學(Nichteuklidische Geometrie)之第二版，及所贈寄之甫出版之論文，尤多採用。斯楊刻爾氏知余方從事於此作時，彼舉其討論此問題之論文，一一相贈，其中有稿件多篇，爲余在奧地利亞(Australia)時，所不易得者。此外斯氏著有Wolfgang and Johann Bolyai一書，甫出版卽承見贈，使余於校閱余稿時，得採用是書中關於發明雙曲線幾何學之事之最後論斷。其懇懃相助至此，亦令余至爲銘感。

其他尚有應爲申謝之處，當於書中相當處提出。於此須提及者，爲余所常用哈爾斯忒德(Halsted)之著作；馬可黎博士(Dr. F. S. Macaulay)曾助余校閱全稿，且多所建議及修訂。余又得此叢書†之另一編輯人約克孫君(C. S. Jackson)之助，使余之工作，減輕不少。悉德尼(Sydney)之一同事來溫君(R. J. Lyons)在未校時，曾校閱本稿之大

* Non-Euclidean Geometry, a Critical and Historical Study of its Development, by R. B nola, Authorised English translation by H. S. Carslaw. (Chicago, 1912)

† 本書爲隆曼近代算學叢書 (Longmans' Modern Mathematical Series) 之一。

部，謹拜書於此，以表謝忱。

卡士羅 (H. S. Carslaw).

1914，九月，次悉德尼。

附　　言

在大戰爆發前，此書末校已校閱完畢，上序亦草就付印矣。

他年或有一日，許吾人仍得協作之機緣，如上所述者，是則余所深盼。

H. S. C.

1916，正月，次悉德尼。

譯　序

關於非歐幾何學之著述中，此書尙非第一流作品，但原著者之本旨，蓋欲使其有裨益於中等算學教育，此其與他種著述用意不同之點，亦卽譯者欲以之貢獻於我國科學教育界人士之原因也。

三載前周家樹教授在中央大學講授非歐幾何學一課時，由譯者助理教務，卽建議於周先生，遂譯是書，印發講義，以供學子參考。但譯時常見其論證有詳略失宜處，而參考他書之部分，亦頗重要，因求其完備詳明，故於論證過略者，爲之加詳，引用參考書，亦擇要編譯附入，而該稿與原書遂多歧異。

今思求便於讀者，故將所增註釋及參考材料，改爲譯註及附錄，本文仍改照原書直譯。惟附註中常有用及書中原圖之處，每每須添入補助點線，如一一另行作圖，旣嫌重複，且不便比較，故只得補入原圖上，此則與原書小有不同之點也。所增加之部份，原係在周先生指導之下補入，但刻已改編，則一切責任，自應由譯者負之，而謹對周先生致其誠懇之謝忱。

本書第二章初稿，係承同事陸子芬先生助譯而成，而全稿又承同事趙少鐵，莊子信二先生，友人徐尉平，周伯平，余子颺諸先生，分別校閱一次，謹幷誌於此，以表感謝之意。

民國二十一年三月譯者識，時次南京中央大學。

目　次

非歐平幾何學及三角學

第一章　平行設論及薩氏勒氏高氏諸家之研究

§1. 所謂非歐幾何學者，乃一種幾何學。其中不用歐氏平行設論(Euclidean Parallel Hypothesis)，而以他種與此相反之設論代之。往昔常有欲據歐氏幾何原理(Elements of Geometry)中基本設論，以證明平行設論者，其結果遂發現非歐幾何學，在邏輯上亦能成立。在幾何原理中所述之平行線定義(1)如下：

二直線於同面，行至無窮，不相離亦不相遠，而不得相遇，爲平行線*

在第一卷二十七題中證明

兩直線有他直線交加其上，若內相對兩角(卽內錯角)等，卽兩直

---

* 在此處及他處引用歐氏原書之處，皆據希司(Heath)譯本(1908 年，劍橋大學出版)。此重要典籍，後文將簡稱爲希司本

(1) 希司本列爲定義二十三，在徐光啓譯幾何原本，作第二十四界。本書中譯文，皆據徐譯。

以後標明碼數者爲譯註，此外則爲原註。

線必平行。

又在同卷第二十八題中證明。

兩直線有他直線交加其上,若外角與同方向對之內角(即同位角)等,或同方兩內角與兩直角等,即兩直線必平行。

欲證此二題之逆理(同卷第二十九題)即

兩平行線有他直線交加其上,則內相對兩角必等,外角與同方相對之內角亦等,同方兩內角亦與兩直角等。

歐氏晉知有加一平行臆說之必要,此臆說之本文如下:

有二橫直線,或正或偏,任加一縱線,若三線之間,同方兩角,小於兩直角,則此二橫線,愈長愈相近必至相遇。

此假設亦稱歐氏設論,在他種稿本中,固有列此爲公論(Axiom)之一者。(2) 但亦有視作設論者,就其性論,以列入設論內爲宜。(3) 在第一卷中,二十九題以前,均未應用及此。故凡此諸題,在非歐幾何學中,仍不失爲眞,因二種幾何學之不同,僅在此平行設論也。推之歐氏幾何學中各定理,凡證明中未用及平行設論,或可避免不用,而僅用歐氏所明立及暗設之其他假設者,在非歐幾何學中依然成立。

§2. 近世學者嘗將歐氏及非歐氏幾何所依據之一切假設,詳加討論,此事不在本書範圍之內。此後僅取關於平行線之假設論之。但有

(2) 徐譯幾何原本,作爲公論第十一。但徐氏所譯,係以何家版本爲根據,尚未有人考出。

(3) 希司本作第五設論,關於公論與設論二詞意義不同之點,各家意見不一,讀者可參考波諾拉(Bonola) La Geometria Non-Euclidea 英譯本 pp. 18-20.

應提明者一事，卽叠合法 (Method of Superposition) 中有移動之觀念，此觀念之本身卽一公論也。第一卷中之第四題，(4) 今已視合同共論 (Axioms of Congruence) 之一 (5) 移動之觀念，卽建基於此類公論之上。歐氏似亦覺叠合法爲其書中之一缺點，故僅於證第一卷第四題中用之，其後雖有數題，如用叠合法，可使證法化簡，但氏仍屏棄之不用。

又在設論一 (6) 中，確定經過二點，可作一直線，含有如是所作直線，爲單一者 (Unique) 及二直線不能有界之形 (7) 之義。在設論二 (8) 中，確定有限直線可繼續延長，含有自兩端延長之部份爲單一者之義，換言之，卽二相異直線，不能有一公共線節也。

歐氏書中，所用假設，尙有未列入公論及設論內者，今舉較重要者各條如下：

（一）直線爲無限長。

---

(4) 兩三角形，若相當之兩腰線各等，各兩腰線間之角亦等，則兩底線必等，而兩形亦等，其餘各兩角相當者均等。

(5) 見喜爾柏特 (Hilbert) 著幾何學之基礎 (Grundlagen der Geometrie) 第一版（有漢譯本，名幾何原理，商務印書館出版）第一章 §6, IV 6 及 §7 定理十。

以後所引，多係指喜氏書之增訂本而言（第二、三、四版），增訂版中正文與第一版，無多出入，但有附錄數篇，與本書有重要關係，而爲漢譯本，英譯本（卽漢譯本所據）所無。

(6) 徐譯作第一求，譯文爲：自此點至彼點，求作一直線。

(7) 徐譯作公理十三。

(8) 徐譯作第二求，譯文爲：一有界直線，求從彼界直行引長之。

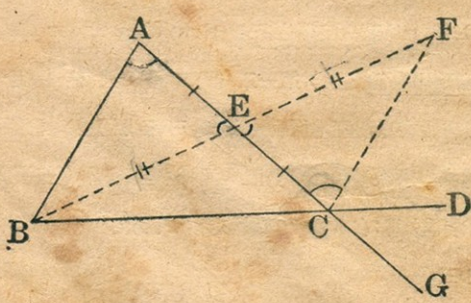
直線之此種性質，於證明第一卷十六題時，需用及之，(9) 在一種非歐幾何學中，視直線雖無起訖，但周而復始，不為無限長時，則外角常大於任一內對角之理，不能成立。

(二) 設 A,B,C 為不在同一直線上之三點，又設 a 為平面 ABC 上之直線，而不通過 A,B,C. 若 A 通過線節 AB 上之一點，則必通過線節 AC 上之一點，或通過線節 BC 上之一點。(帕希 Pasch 公論)。

由此公論可推知如一半射線經過三角形 ABC 之一頂點 A, 而介於 AB,AC 所範之區域內，則必割線節 BC 於一點。

(三) 在幾何原理第一卷第一題中，所述求作等邊三角形之法，係藉二圓之交點，以定頂點。故在此須假設此二圓必相交。又在同卷第二十二題，作已知三邊之三角形時，亦須藉此假設。而書中之基本作圖法，

(9) 十六題為：凡三角形之外角，必大於相對之各角（即內對角）。證此題之法，乃取中線 BE 為補助線，而延長之至 F, 使 EF=BE, 則易明 $B\hat{A}E=E\hat{C}F$, $E\hat{C}D>E\hat{C}F$ 故 $A\hat{C}D>B\hat{A}C$. 但如 BE 雖可延長而不為無限長時（例如球面上之大圓弧），則延長線或可折回，而使 F 點介於 BE 線節之內，而 $E\hat{C}D>E\hat{C}F$ 之關係不常真，本題遂不得成立。



如同卷第二題(10)及第九至十一諸題(11)時,皆須用第一題。

又在同卷第十二題(12)中,欲以已知點爲心之圓與已知直線相交,歐氏遂使該圓經過不與圓心同側之一點。且在第三卷之數題中,又須假設作圖時所用之圓相交,始克證明,歐氏書中之作圖題。固皆依據首三設論而成。由直線與圓之相交,求得已知點外之新點,更由此以定新線,如是繼續求作,故此等交點之存在,必待假設,或加證明,亦猶此等作圖題中,所用直線或圓之存在,已有假設,或得而證明也。

所謂連續原理(Principle of Continuity)者,即所以彌此闕陷之具也。此原理有數種不同敍述之法,得戴京德氏(Dedekind)嘗用以討論無理數之觀念,其說理較爲簡明,得氏之研究無理數,即係依據下之幾何公論:

如將直線上之一切點,分爲二類,而使第一類中各點,盡在第二類中任何點之左,則必有而僅有一點存在,得以分一切點爲二類,並此線節爲二部。*

此理無可證明,此種假設即所以說明直線之連續性也。

得氏設論。雖僅就線節立言,但推之於任何角(在此以過頂點之半

---

(10) 自一已知點作一線段,(即線節)使其長等於一已知線段。

(11) 第九題「平分一角」,第十題「平分一線段」,第十一題「從已知直線一點,作一直線,與之交於直角」

(12) 從已知直線外一點,作其垂線。

* 見得氏所著 Stetigkeit und irrationale Zahlen. p. 11(1892 出第二版,在 Braunschweig 印行)。柏曼(Beman)氏曾譯是書爲英文(1901,在 Chicago 出版)。

射線爲元素）及圓弧，均無不合。據此設論，可得上述諸題中所用之理，如直線與圓相交，圓與圓相交等。* 歐氏雖採用連續之觀念，但未言明。無理數之性質及此假設所蘊有之義，當時之算學家。固均不知也。

由得氏設論可產生重要之亞奇默德(Archimedes)設論，此設論爲後文所常引用者，茲述之如次：

已知二線節，則其一之若干倍，必可長於他線節†

§3. 近代對於幾何學基礎之研究，發現一有趣之事，卽中等幾何之大部份不藉連續原理亦可成立。(13) 歐氏書中第一卷第二題，需用及連續原理，今以下述之設論‡代之：

設 A,B 爲直線 a 上之二點。另一點 A′ 在同直線或另一直線 a′ 上，則在 a′ 上從 A′ 所引之半射線內，必有而僅有一點 B′ 能使線節 AB 合同於線節 A′B′

換言之，卽假設在一已知直線上，可從一已知點，向任一側引一線

---

* 在恩里格(Enriques)所編之中等幾何研究集 (Questioni riguardanti la geometria elementare)(1900 年在 Bologna 出版)中維塔利(Vitali)撰有一文，詳論此問題；此書有德文譯本，名 Fragen der Elementargeometrie (1911 年在 Leipzig 出版)，其 vol. i. p. 129 中載討論之譯文。亦可參考希司本 vol. i. p. 234。

† 在上舉維塔利論文中 §3，述及由得氏設論推證亞氏設論之法，喜爾柏特所著幾何學之基礎第三版中 §8，載有另一討論方法，此書之第一版，曾由坦增德(Townsend)譯爲英文(1902 年在 Chicago 出版)。亞氏設論，雖僅就線節立言，但對於角，面積，體積亦無不合。

(13) 此種幾何學，稱爲非亞幾何學(Non-Archimedean Geometrie)(可參看本書 §8 及喜氏書第一版或其漢譯本中第二章 §12)。

‡ 見喜氏書中第三版，§5 之合同公論(Axioms of Congruence.)

節，使其長等於已知者，所謂半射線，卽自一已知點所引之半直線。

歐氏書中所載「平分已知角」（第一卷第九題）「求已知直線節中點」（第一卷第十題），「在已知直線上一點，求作其垂線」（第一卷第十一題），「在已知直線外一點，求作其垂線」（第一卷第十二題），「求作一角，等於一已知角」（第一卷第二十三題），其作法均須根據連續原理，今則可以下列之作圖法代之，而可不再憑藉此原理及平行設論矣*

問題一：　求平分一已知角。

作法。　在已知角A之一邊上，取任意二點 B,C.

在他邊上，取 $AB'=AB$, 及 $AC'=AC$.

連 BC' 及 $B'C$.

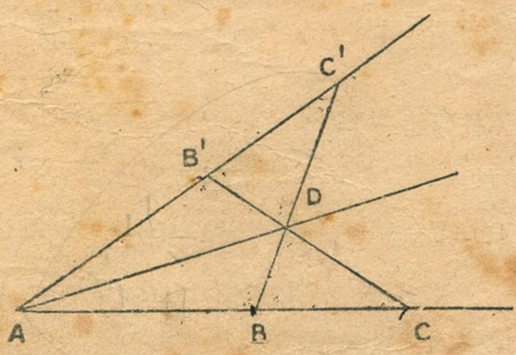


圖 1.

---

* 第一、二、三、五諸題作法，見哈爾斯武德 (Halsted) 所著 Rational Geometry (1907 年之第二版) 中。本書中第四、六兩題作法，不必依據平行設論，而哈氏書中者，則須用歐氏之假設。

設二線相交於 D.

則 AD 爲所求之平分角線。

證： 三角形 BAC′ 及 B′AC 爲合同形。

故 $A\hat{C}B' = A\hat{C'}B$ 及 $D\hat{B}C = D\hat{B'}C'$.

故三角形 BDC 及 B′DC′ 爲合同形，因

$$BC = B'C' \text{ 也。}$$

故 $$DB' = DB$$

是以三角形 BAD 與 B′AD 爲合同形，而 AD 平分已知角。

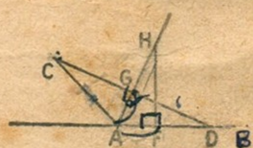
問題二： 作一垂線至一已知直線。

作法。 設 AB 爲已知直線。

過 A 點，作任意直線 AC.

在 AB 上，取 AD＝AC.

連 CD.



平分 $C\hat{A}D$（按問題一），並設此平分角線交 CD 於 G.

圖 2.

在 AB 上，取 AF＝AG，且在半射線 AG 上，取 AH＝AD.

連 FH.

則 FH 與 AB 垂直。

證： 由三角形 ACG，ADG 可知 $A\hat{G}D$ 爲直角。

又因三角形 AGD 及 AFH 爲合同形。

故 $A\hat{F}H = A\hat{G}D$ 而爲一直角。

問題三： 從已知直線上一已知點作其垂直線。

作法。 設 A 為已知點，及 BC 為已知直線。

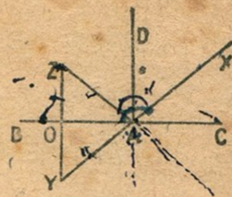


圖 3.

作垂線 ZOY（按問題二），交 BC 於 O.

取 $OY=OZ$, 連 AY 及 AZ.

延長 YA, 過 A 而至 X.

作 AD 平分 $X\hat{A}Z$（按問題一）。

則 AD 為過 A 點與 BC 垂直之線。

證： 按作法，知三角形 OAZ及 OAY 為合同形。

故 $Z\hat{A}O=Y\hat{A}O$

$=X\hat{A}C$.

又 $D\hat{A}Z=X\hat{A}D$.

故 AD 垂直於 BC.

√問題四： 從已知直線外一已知點，作其垂直線。

作法。 設 A,B 為已知線上二點， C 為線外一點連 AC 及 BC.

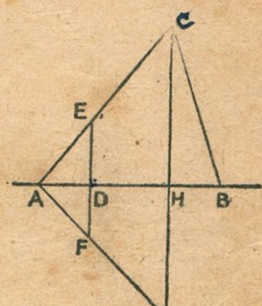


圖 4.

在線節 AB 上取一點 D, 且於 D 點作 AB 之垂線（按問題三）。

據帕希公論，此線必與 AC 或 BC 相交。

設其與 AC 相交，交點為 E.

延長 ED, 過 D 而達於 F, 使 $DE=DF$,

連 AF, 延長之至於 G, 使 AG＝AC.

連 CG, 設其與 AB 或 AB 之延長線交於 H.

則 CH 爲所求之垂線。

證： 由作法可知三角形 ADE 與 ADF 爲合同形，故 AB 平分 $C\hat{A}G$.

是以三角形 ACH, AGH 爲合同形。而 AHC 爲一直角。

問題五： 在已知直線上一已知點，作一角等於一已知角。

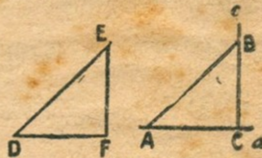


圖 5.

作法。 設 A 爲已知直線 a 上之已知點。（參照圖 5 ）。

設 D 爲已知（銳）角。

在此角之一邊上一點 E, 作 EF 垂直於他邊（按問題四）。

在 Aa 上取 AC＝DF.

就 C 點，作 Cc 垂直於 Aa （問題三）。

取 BC＝EF, 而連 AB.

證： 由作法知三角形 DEF 及 ABC 爲合同形。

故 $B\hat{A}C = E\hat{D}F$

問題六： 平分一已知線節。

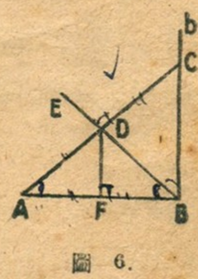


圖 6.

作法。 設 AB 爲已知線節。

自 B 點，作 AB 之垂線 Bb（按問題三）。

在 Bb 上，任取一點 C, 而連 AC,

就 B 作 $A\hat{B}E = B\hat{A}C$（按問題五）。

設 BE 交 AC 於 D.

平分 $A\hat{D}B$,（按問題一）而設此平分角線交 AB 於 F.

則 F 為 AB 之中點,

證: 由作法,知三角形 ADF 及 BDF 為合同形。

是以 $AF=FB$

註: 在橢圓幾何學(Elliptic Geometry)中, 此作法須稍加改變, C 點必介於 B 與 AB 之極點間始可（參看 §78）。

§4. 與平行設論不相涉之二定理:

1. 任意三角形底邊之中垂線與他二邊中點之聯線垂直。

設 ABC 為任意三角形, F,E 各為 AB,AC 二邊之中點。

聯 F 及 E; 從 A,B,C 作 EF 之垂線 AA',BB',CC'.

設 H 為 BC 之中點, K 為 $B'C'$ 之中點。

連 HK.

今證 HK 垂直於 BC 及 EF.

由合同三角形 AFA',BFB', 有

$AA'=BB'$.

同理 $AA'=CC'$.

故 $BB'=CC'$.

連 BK 及 KC.

圖 7.

在三角形 $BB'K$ 及 $CC'K$ 中,有

$$BB'=CC', \quad B'K=C'K,$$

而在 B',C' 之角相等。

故此二三角形爲合同形,而 $BK=CK$,

又在三角形 BHK,CHK 中,三邊各各相等。

故二者爲合同形,而

$$B\hat{H}K=C\hat{H}K=\text{直角}。$$

且 $$B\hat{K}H=C\hat{K}H.$$

又由三角形 $BB'K$,$CC'K$. 可得

$$B\hat{K}B'=C\hat{K}C'$$

故 $$H\hat{K}B'=H\hat{K}C'=\text{直角}$$

是以 HK 垂直於 BC 及 EF,

2. 在一直線上取一組點 $A,B,C,\cdots\cdots$ 在他一直線上取 $A',B',C',\cdots\cdots$ 如 $AB=A'B'$, $BC=B'C'\cdots\cdots$ 則 $AA',BB',CC',\cdots\cdots$ 等中點之軌跡爲一直線。

設 M,N. 及 P 各爲 AA',BB',CC', 之中點。

連 BM, 延長之至於 B'', 使 $BM=MB''$.

連 $B''A'$ 及 $B''B'$.

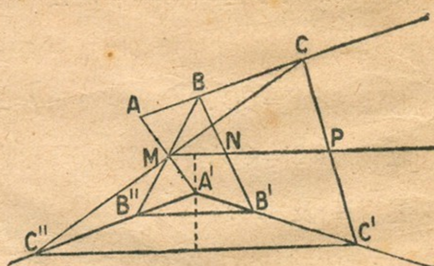


圖 8.

三角形 $BB'B''$ 之二邊,以 M 及 N 爲中點。

故 $B'B''$ 之中垂線,亦爲 MN 之垂線。

但此線平分 $B'\hat{A}'B''$, 何則,因 $A'B'=A'B''$ 故。

延長 $A'B''$ 至於 C'', 使 $B''C''=BC=B'C'$.

連 $C'C''$,MC'' 及 MC.

三角形 MAC 及 $MA'C''$ 爲合同形,故 MC,MC'' 爲在一直線上之二段。

因 $A'C'=A'C''$, 故 CC'' 之中垂線與 $B'B''$ 之中垂線相合爲一。

故 MN 及 MP 均垂直於同一直線。

是以 M,N,P 共在一直線上。

推之於 A,B,D,A',B',D' 可得相同之結果,本題遂得以證明。

§5. 據蒲羅克魯(Proclus)之歐氏原理批論(Commentary)* 所言歐氏謝世不久,其平行設論已成一爭端,此種辨論中之問題, 在十九世紀前,雖曾有多數著名之算學家,耗幾許之時間與精力,加以搜討,仍不能解決,其所討論問題有三:

(一)平行設論,能否由歐氏幾何所憑藉之其他假設中推出?

(二)如其不然,則此設論,是否應經驗事實之需要而生? 由是等基本假設所推知之理,是否能說明吾所居之空間?

(三)如此假設,及與其不能並容之假設,均能與其他假設和諧無間,歐氏假設是否爲某種廣義體系中之一特例?其採用也,純爲任意,非因其較他種幾何爲眞,而因以此說爲依據之幾何,較爲簡便耶?

歐氏本人,殆已知第一問題之解答必爲否定者,此事絕少疑義。氏將平行假論,置於其後,且於第一卷第二十九題以前,絕未用及,皆可見

* 可參看孚利德林(Friedlein)所著 Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii (1873 年在 Leipzig 出版), 及希司本 vol.i. 引論中第六章。

氏僅認此爲臆說;至少氏當知對於無此說亦能成立之諸定理,證明時以免去不用爲宜,亦猶當有他法可用時,卽摒去叠合法不用也。

但此後諸家,眼光未能如斯明晰。無效果之嘗試,以圖證明平行設論者,至十九世紀時,猶繼續不絕。在英國今日頗有主張採用有瑕疵之方向理論,以論平行線,(Direction-theory of parallels),如由是不至引起另一種所謂證明——此等著述蓋不明平行理論所依據之眞正基礎——,則殊可異矣。

第二問題所蘊之假設,對於爭論之久而不決,頗有影響。苟非誤邏輯推理之幾何,與事實證驗之幾何爲一談,則平行設論或不至久視爲幾何學上之一缺點。然在今日,吾人已承認幾何爲由某種前提以推得某種結論之科目,至其前提所論之事,是否存在,則爲另一問題。如吾人思考代表吾人所居外界性質之幾何,則爲一種應用算學之研究。歐氏幾何能說明是項性質,吾人固深知之,但吾人更知能爲說明者,非僅有此種幾何。關於是點,吾人更將於本書之末討論之。

此題之解決在第三疑問之答案中。此發明常與羅巴曲士奇 (Lobatschewsky)及波爾業氏(Bolyai)之名並垂不朽。據歐氏所明述或暗用之一切假設,去其平行設論,而以一與其不相容之他假設代之,如此樹立一種和諧系之幾何,乃二氏所完密建設,並首先公之於世者。在此基礎上之幾何體系,其爲和諧,一如歐氏者。不特此也,苟取適宜之參量(Parameter),則此體系亦能說明外界事物之關係,若合符節焉。

此種發明,爲 1823-1830 年間之事,但歐氏原著之價值,初不因之而減。歐氏幾何之席並不爲非歐派所奪。有後者,則幾何學之本性,遂得

昌明。且由是證明歐氏平行之說,不特非其著作上之一缺點,且爲莫大成功。希司有言曰:『吾人試觀歷二十世紀中,幾許幾何名家,欲證此設論,終歸失敗,當不能不贊嘆原著人之天才,已知彼之幾何體系中所不可缺之假設,果爲不可證明者矣』。*

§6. 薩克里氏 (Saccheri 1661–1733) 之研究。

關於欲證明平行設論諸嘗試之歷史。不在本書範圍之內。† 今僅述一二重要貢獻與非歐幾何學之發達有關者。

巴費亞 (Pavia) 城中大學算學教授耶穌會教徒薩克里氏爲思及能建立與歐氏之不同之假設第一人,並曾研究由此等假設所致之結果。在氏著作之主要關頭,如能更進一步,則羅波二氏所發明之理,與世人相見,可較早一百餘年矣。惜乎當時繼起無人,而氏之著述亦湮沒不彰耳。直至十九世紀末,始有意大利著名算學家柏爾特拉密(Beltrami)注意及此。氏有一短文,名 Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky, ‡ 使科學界知薩氏著述之重要, 而向以爲勒戎德耳(Legendre), 羅,波諸氏創立之定理,實已於多年前,爲薩氏發明,此種事實,亦至是始爲世所曉云。

薩氏所著之小册,名爲 Euclides ab omni nævo vindicatus

---

* 見希司本 vol. i. p. 202.

† 參看波諾拉(Bonola)所著 La geometria non-euclidea (1906 在 Bologna 出版);及其英譯本 (1912 在 Chicago 出版)。此後引用時,皆據英譯本。

‡ 載於 Rend, Acc. Lincei(4), t. v. pp. 441-448 (1889).

者，今已不難得之。* 此書於氏逝世之年(1733)刊行。書中大部分，皆係關於非歐幾何學之淺易討論。惜其常採用連續原理，否則可採者更多矣。

但有不可疏忽者一事，卽氏係深信歐氏設論爲眞者，其所討論各種相反之假設，蓋有一固定之目標，特與羅波二氏者不同耳，二氏欲證明此等假設，在邏輯上爲可能，而薩氏則冀由其研究中以推出矛盾之結果。換言之，蓋應用歸謬法(Reductio ad absurdum)之論證耳。

薩氏所研究之基本圖形，爲一含二直角之等腰四邊形，其中 A,B 爲直角，而 AC,BD 二邊相等。由合同形諸定理易證明在 C,D 之角相等，參看[§28].

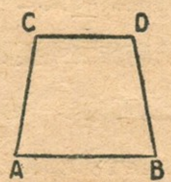


圖 9.

若採歐氏假設，則該二角均爲直角。故知假定二者均爲銳，或均爲鈍，卽不啻否認平行設論。

薩氏所討論之假設，加以下之名稱：

直角假設(The Hypothesis of the Right Angle)，$\hat{C}=\hat{D}$ 二直角

鈍角假設(The Hypothesis of the Obtuse Angle)，$\hat{C}=\hat{D}$ 二鈍角

銳角假設(The Hypothesis of the Acute Angle)，$\hat{C}=\hat{D}$ 二銳角

薩氏證明任何三角形之內角和，在直角假設成立時，則爲二直角，鈍角假設成立時，則大於二直角，銳角假設成立時，則小於二直角。

* 參看恩格爾(Engel)及斯楊克爾(Stäckel)所著 Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss, pp. 31-136 (1895 在 Leipzig 出版).

且如有某三角形之內角和等於，大於，或小於二直角時，則任何三角形莫不如是。

更證明：

平行設論，根據直角假設及鈍角假設二者，均能推出。

故氏遂將鈍角假設除去；蓋如用平行設論，得證明三角形之內角和為二直角，而與鈍角假設相刺謬矣。但吾人須注意，薩氏之論證中，嘗假定直線為無限長，苟廢此臆說，則鈍角假設，固無不合之處。

氏之目標在欲證銳角假設及鈍角假設二者均僞。故希冀能由此等假設推出一種結果，與其所依據或以前之定理相悖，以實其說。旣除去鈍角假設，次乃轉注於銳角假設。氏在建立於此假設之體系中，推出若干定理，此等定理，實卽羅波二氏幾何學中者，而信彼已得一結果，與以前者刺謬。是以遂斷定銳角假設，亦為不可能，而僅直角假設存在，故平行設理必眞。

氏自信在由銳角假設引伸所得之諸定理中，發現矛盾之點，實則大謬不然。當時多以歐氏幾何學為唯一之幾何體系，氏蔽於成見，遂入歧途耳。今述其定理三十至三十二所持之論證，卽可覘其見解已去羅波二氏之幾何學不遠矣。

氏所論者為一束半射線，自一點 A 射出，居自 A 至一已知直線 b 之垂線之一側，且在此垂線及直線所定之平面內。

氏設此束線始於垂線 AB，而終於與 AB 垂直之半射線 AX.

氏據銳角假設，證明除最後一半射線 AX 外，更有無窮半射線，均與直線 b，有一公共垂線。此等直線，顯然不能與直線 b 相交。

此種公共垂線，雖無限縮短，然該組半射線中，無最後之線，但有一下限。

且自 AB 起，則得一組與直線 b 相交之諸線，此組亦無最後之線，但有一上限。

氏證明此組之上限與前一組之下限，實係同一直線。

故有一半射線 a_1，分全束半射線為二組，使自 AB 起，在 a_1 一側之一切半射線，皆與直線 b 相交；而自 AB 之垂線 AX 起，居 a_1 之他側之一切半射線，均不與直線 b 相交，a_1 為此二組半射線之界，而漸近於直線 b. (14)

薩氏所得之結果，如加入得戴京德設論，則可更為嚴謹。由此設論，可知凡一種區分二類之方法，如上所述者，必可得一半射線，為二組之界。

不與直線 b 相交，亦不與之有公共垂線之半射線，即羅波二氏所謂該已知直線之右（或左）平行線。

§7. 勒戎德耳 (Legendre 1752-1833) 之研究。

勒戎德耳之貢獻亦宜注意，氏一一考驗鈍角，直角，銳角各假設，欲藉以證明歐氏設理為眞確，一如薩氏。在氏之著作中，係以關於三角形內角和之說為假設。

如三角形之內角和等於二直角，則有平行設論；但吾人須用亞氏設論，一如歐氏耳。*

(14)即自 a_1 上點至 b 之垂線，當該點去 A 愈遠時，此垂線之長愈短（見後 §33）.

* 可參看希司本 vol. i. pp. 218-9.

勒氏乃轉其注意於其他二種情形。氏曾作數嚴密之證明，以斷三角形之內角和不能大於二直角。但在各證中，均假設直線爲無限長。今舉其一如次：

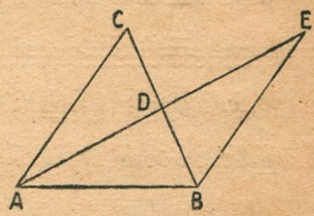


圖 10.

設三角形 ABC 之內角和爲 $\pi+\alpha$，

而 A 爲其中最小之角。

平分 BC 於 D，延長 AD 至 E，

使 DE＝AD.

連 BE.

則由三角形 ADC,BDE，得

$$C\hat{A}D=B\hat{E}D,$$

$$A\hat{C}D=D\hat{B}E.$$

故三角形 AEB 之內角和亦爲 $\pi+\alpha$，而 $B\hat{A}D$ 或 $A\hat{E}B$ 之一，必小於或等於$\frac{1}{2}C\hat{A}B$

對於三角形 ABE，再施此手續，即得一新三角形，中有一角小於或等於$\frac{1}{2^2}C\hat{A}B$，而其內角和仍爲 $\pi+\alpha$.

如次至 n 次可得一三角形，其內角和爲 $\pi+\alpha$，而有一角小於或等於$\frac{1}{2^n}C\hat{A}B$，

按亞氏設論，吾人可選 n 之值大至某程度，使 $2^n\alpha>C\hat{A}B$.

故此三角形有二角，其和大於二直角，而爲不可能之事。（設直線之長爲無限）。

如是得勒氏第一定理

三角形之內角和，不能大於二直角。

勒氏又證明

如有某三角形之內角和,等於二直角,則任何三角形。莫不皆然。

由此等定理,立可推證

如有某三角形之內角和小於二直角,則任何三角形,莫不皆然。

以上諸結論,皆爲薩氏在多年前業已求出者。

勒氏更多方證明。此和數不能小於二直角,卽在某三角形內,亦復如是。但其努力實皆失敗,吾人在今日,固知爲勢所必至者,氏發表數種所謂證法,載於其所著幾何原理(Elements de Geometrie)之各次版本中。但諸證中,皆各含有一種假設與所證明者相當。

例如在一書中,氏假定長度不能有絕對單位;* 此實爲一變相之假設,籃伯 (Lambert 1728–1777)† 曾指出之。

在他一書中,氏又假定在一角內任一點,必能作一直線,使與此角之二邊相交。

在第三書中,氏證明如過不在一直線上之任意三點,均能作一圓,則平行設論必爲眞。

在他書中 [參看第十四版 p. 279],氏作論證如下:

一直線分其所在之二平面爲二部分,互相合同。故自一點引二半射線,如所成角小於二直角,則所含面積小於平面之半,在此二半射線所限之域內,能含一無限長直線之全部,則小於平面之半之一面積,將可含半平面之面積矣。

* 見後文 §53, 或波諾拉書中 §20.

† 可參看恩格爾及斯塔刻爾書中 p. 200.

柏特龍(Bertrand)對於平行設論之著名『證法』(1778)*(15)以及 Crelle 雜志(1834)中所載之類似證法,不能成立之故,與勒氏者同。此種證法,皆有待於無限面積之比較,但對有限度量爲合理之推考方法,對於無限度量之情形,未必仍合。如曰可以推廣,則必先證推廣手續爲合法始可。羅巴曲士奇本人亦嘗考及此種證法,而指出論證中之缺點。第一缺點,卽合同之觀念,原係應用於有限面積,今施之於無限區域中,未嘗有確定之意義。第二缺點,宜引羅氏之言說明:『吾人論延至無限之面積時,必當如算學之其他部份,先明瞭二無限大數比例之意義,卽當分數之子母繼續無限增大時,其所趨之極限值爲如何』。†

所可異者,在今日猶有著名之算學家,仍贊許柏特龍之證法,而採用之耳。‡

§8. 勒,薩二氏討論諸假設時,均用直線爲限長之假設及亞氏設論。喜爾柏特§曾證明歐氏幾何,不藉亞氏設論,亦能成立,台安氏||

---

* 可參看佛郎克蘭著 Theories of Parallelism, p. 26 (1910 劍橋大學出版)。

† 見羅巴曲士奇之 New Principles of Geometry with a Complete Theory of Parallels, 恩格爾曾譯爲德文,載恩格里及斯楊刻爾所著 Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, I, p. 71.

‡ 參看佛郎克蘭 The Mathematical Gazette, vol. vii. p. 136 (1913) 及 p. 332 (1914); Nature, Sept. 7, 1911, 及 Oct. 5, 1911.

§ 見喜氏書之第三章。

|| 見 Math. Ann. vol. liii, p. 404 (1900).

(15)散麥維爾 (Sommerville) 所著 The Element of Non-Euclidean Geometry (London. 1914) 中 pp. 7-8 載有柏氏證法。此書較佛氏書,易於購得。

(Dehn)更研究如不用亞氏設論，對於薩，勒二氏所得之結果，有何影響。氏求得在此種情形下，三角形之內角和，可大於二直角。換言之，卽鈍角假設亦爲可能。氏更證明不須依據亞氏設論，仍能由有一某三角形內角和爲二直角之前提，引申而知任何三角形之內角和亦皆如是，其最大發現在闡明不用亞氏設論時，平行設論，不能由三角形內角和爲二直角之理推出。卽證明有一種非亞幾何(Non-Archimedean Geometry)，其中三角形內角和爲二直角，而平行設論依然不能適用。

在此附述台氏之研究(16)者。乃因昔常視他種假設與歐氏假設相當。由是則可知歐氏假設實較爲優美。歐氏幾何建基於歐氏假設上，而不在需乎亞氏設論。如以三角形內角和爲二直角——或距一直線等距諸點之軌跡爲一直線——等假設代之，卽可創設數種不同之幾何。其一爲歐氏幾何，在其中過已知直線外一點，只能作一直線與之平行。倘有台氏所謂之半歐幾何學(Semi-Euclidean Geometry)，則可作無窮數之平行線。*

§9. 高斯(Gauss)之研究 (1777-1855).

非歐幾何學可能性之發現，雖係由波爾業及羅巴曲士奇首先公諸

---

* 見哈爾斯忒德 Science, N. S. vol. xiv. pp. 705-717 (1901).

(16)可參考喜氏幾何學之基礎一書中之結論，台氏所著 Die Legendrēschen Sätze über die winkolsumme im Dreiech 一文[載於 Math. Ann. Leipzig. 53 404-439 (1900)]及波諾拉著 I teovemi del Padre Gerolornio Saccheri Sulla Somma degli di Untriangolo e le Ricerche di M. Dehn 一文(載於 Milamo, Rend. Ist Lomb (2), 38. 650-662 (1905).

於世，而釋明其內容，但德國大算學家高斯已於數年前由單獨研究，獲得相當之結論。惟此結論尚未發表，卽於1832年時接得倭爾夫剛(Wolfgang)寄來其子約翰(John)之名著附錄(Appendix.)

此小册於 1832 年 2 月 14 日達高氏處。氏於同日卽致函於渠常與討論算理之革爾佘(Gerlin)，*中云：

『……今日得自匈加利寄來之一小册，其中係討論非歐幾何學。余之見解及結果，竟已盡載於其內，編述頗爲美妙，但稍簡略，未習於是科者，閱之未免感受困難耳。著者乃一青年奧國官吏。爲余幼時契友之子，余與此友，在 1798 年時，嘗討論此等問題。但在其時，余之見解，尚未十分成熟，遠不如此青年單獨研究所得結果之周備。余認此青年幾何家波爾業君有極高之天才……』

至於復倭爾夫剛之函，乃在三星期之後，此函知者頗多，今因由此可見高氏自身研究之情形，† 殊有引載之價値，函中云：

『……苟余開始卽謂余不能讚美此著作品（約翰所著者），君得無驚異乎。但余實不能作他語，讚美斯作，卽不啻讚美余自身。此書之內容，哲嗣所取之途徑，所得之結論，實幾令與余之冥想契合，余之思考，蓋歷三十至三十五載之久矣，余今幾如置身夢中。至於余之研究。則近日始稍筆之於書，然余雅不欲於生前刊布之。大衆對於吾人所論之問題，未能有明晰之見解，當余與一般友人通訊研究此問題時，結果知對此有興趣者，蓋甚寥寥。欲對此發生興趣，必對於缺陷處，有銳敏之感

* 見高斯氏全集 Werke, vol. viii. p. 220.

† 見高斯氏全集 vol. viii. p. 220.

覺，但一般人，則僅有紊亂之見解耳。余意欲稍待時日，以竟成此業，冀其他年不致隨余身同歸湮沒。今則可省卻此種煩費，實令余驚喜交幷，而著我先鞭者，適爲老友之哲嗣，尤足使余至感愉快者也。……』

倭爾夫剛讀此函後，錄寄其子，並附數語：

『高氏覆書於汝著極表滿意，且推爲邦族之榮幸。一良友已云：此極可滿意矣』！

約翰波爾業得函後，不但未嘗欣喜而乃適得其反。彼知高氏所得結論，已與己者不謀而合，因而失望。尙屬常情。乃渠憤怒之下，竟疑及高氏之發明，是否果由單獨硏究而得。氏遂懷一謬見，以爲彼父業於事前將彼稿致送高氏（此稿存彼於已數年），高氏忌此匈國青年着彼先鞭，故不惜剽竊其稿。氏之此種意見，亦有所據，因高氏與彼父均嘗欲證明平行設論，於 1804 高氏曾致彼父一函。蓋倭爾夫剛自以爲已得一嚴正之證明，送交高氏，而高氏覆函，則謂該證不合法，內中迷團，彼終當有以解之。此種障礙，亦不過與爲彼努力之阻者相若耳，並謂及余生年，余必有日能掃除荊棘，以建康莊也。*

約翰波爾業之懷疑，後雖自知無據，然終喞高氏，謂待己不公。以高氏之德望，而未能相助，致使二青年算學家波爾業，羅巴曲士奇之硏究，湮沒無聞。直至二子後世數載，世之科學家始知渠等發明，有不朽之價值，惜哉。

§**10**. 波士業之發明作始於 1823 年，發表於 1832 年。遠在俄國

---

* 見高斯全集 vol. viii. p. 160.

卡省(Kasan)大學算學教授羅巴曲士奇,於 1829 年以前,約 1826 年時,亦發明此以歐氏幾何爲一特例之新幾何學。該時高斯對於平行原理之態度,至足研究。主要史料爲氏之手函數通,至今猶存,及他稿上之若干附記。

十九世紀初年氏亦如當時一般見解,以爲歐氏假設之證明,終可求得。但於 1817 年氏致奧爾柏斯(Olbers)函中云:

『發哈忒爾(Wachter)君曾發表一小册關於「幾何基本原理」者,君或已由林得諾 (Lindenau) 君處得之,彼所得雖較前人者爲深刻,然其證明亦未必較余子更爲嚴謹。故余漸覺吾人幾何學中所需證之理,殊無法能加以證明也……』*

於 1819 年,高氏又接友人革爾令自馬堡(Marburg)來函,得悉革氏同事法律教授而曾爲一敏慧之算學學生之士外卡特(Schweikart),告知革氏,謂彼確知歐氏公理,如不藉假設或其他,決不能證明;彼意吾人素習之幾何學,僅係較普通者之一特例,此說亦甚可能。同時革氏應士氏之請,將後者致彼之一備忘錄,郵寄高氏,並徵高氏對此備忘錄之意見。

此備忘錄如下:†

『馬堡,12月,1818.

『今有兩類幾何學,一爲嚴格意義之幾何學,卽歐氏所研究者;又一爲星形幾何學(Astral Geometry).

* 見高氏全集 vol viii. p. 177.

† 見高氏全集 vol. iii. p. 180.

『於後種幾何學中，三角之三內角和有不等於二直角之性質。

『假定上述眞確，吾人能嚴密證明以下諸項：

（1）一三角形之內角和小於二直角，

（2）三角形之面積增大，則三內角和常減小；

（3）一等腰直角三角形當邊增長時，其高亦隨之增長，但終不能大於某定長，余卽稱此爲恆量(Constant)。

『於是正方形遂呈以下形狀（圖 11.）：

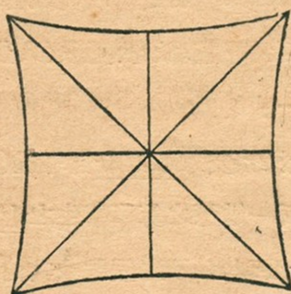


圖 11.

『對吾人言姑設此恆量爲地球之半徑（於是在此宇宙上自一固定星體，至相距 90° 之他一星體間各聯線，必爲地球表面之一條切線），則其長度必較吾人日常生活所據之空間，大無限倍。

『歐氏幾何學只於假設此恆量爲無限大時，始能成立。僅在此假定下，任何三角形三內角和等於二直角之理，始爲正確；且如吾人承認此恆量爲無限大，上理亦易於證明』。

以上文件極屬重要，因無論如何，皆雖以此爲非歐幾何學最初期之

作品也。自革氏一函之某段,* 吾人得悉士氏於沙科(Charkow)時發明此理。士氏於 1816 年自沙科赴馬堡,據上函觀之,其時士氏之造就似較 1817 年高氏所造就者爲深也。

高氏覆革氏之函如下:†

『……士外卡特君之備忘錄,令余極感愉快,余敬乞君轉達士君以余衷心之慶賀。此備忘錄幾可視爲余所書 (Es ist mir fast alles aus der Seele geschrieben)……余僅將告君,余已嘗推廣此星形幾何學,如恆量 =C 之值已知,卽能解此類一切問題,如不僅一平面三角形之角欠‡ 大時,其面積亦大,兩者且有成正比例之關係;故三角形之面積有一不能達到之極限,此極限卽爲兩兩互相漸近之三線所成三角形之面積也。……』

由波爾業稿上,可見在此期間,彼正試證平行公論之眞確。且於 1815–17 年間,羅巴曲士奇亦正在同一之傳統思想方面努力也。

§**11**. 士氏對於所謂星形幾何學上之著述,吾人所知者,僅有上節所示之備忘錄。彼亦如高斯,似未嘗將研究所得發表。惟其姪托拉那斯(Taurinus)受氏及高斯鼓勵,對此加意研究。於 1825 年,彼發表 Theorie der Parallellinien 一書,內含非歐氏平行線之論,其說擯斥鈍角之假設,研究諸點,有似於薩克里及藍伯之銳角假設。彼據數理由,謂銳角之假設,亦須摒棄,然由是而推得之數命題,彼又承認其理論上

* 參見高斯全集 vol. viii p. 238.

† 見高斯全集 vol. viii p. 181.

‡ 見本書 §31.

有可能性。

於 1824 年，托拉那斯所著尚未發表以前，高斯曾致彼一函，吾人由是函可以窺見高氏全部意見，* 函云：

『君十月三十寄余之大函及所附定理，拜讀之餘，不無興趣，且余常考所謂平行原理之諸新研究家，迄今未嘗見其對幾何上具一線之眞知灼見，故對君函，更覺可喜。余對於大著之批評，亦不過認爲尚未完備而已。君之證明一平面三角形之三內角和不能大於 180°，其討論實稍欠幾何學之嚴謹。然使證法完善亦殊非難事；此不可能之情形，能建立於最嚴密之形式上，亦毫無疑義。但第二部謂諸角和不能小於 180° 時，其情形則大異。此卽眞正障礙，足令全部爲之瓦解。余意該項問題據君腦中，爲時尚暫。至於據余腦中爲時已在三十年以上，余雖未嘗有所發表，然絕不信世間尚有何人將此問題之第二部置於腦中，較余爲久者。由三角形之三角和小於 180° 之假定，可得一特種幾何學，在吾人素習之歐氏者以外，另樹一幟，但亦能完全和諧，余嘗闡發是學，結果頗堪滿意，故除一恆量之確定，無法由先天上解決外，其餘任何問題，余均能解之，吾人所取之恆量愈大，則此幾何學愈與歐氏者相近，若恆量取爲無窮大値，則兩者相合。此種幾何學之定理，似非而實是，質諸淺見者流，則直以爲荒誕不經矣。但若屛息思考，則其中所載，無一而非不可能者。例取三角形之三邊增大至相當長度，則三角可如吾人之意使變爲任何小之程度；但三角形之面積則無論三邊若何增大終不能逾一定限，且

* 見高斯全集 vol. viii, p. 186. 此函眞跡曾載入恩格爾及斯楊刻爾之 Theorie der Parallellinien (Leipzig, 1895) 一書中。

亦不能達此定限。余對於此非歐幾何學，曾窮思竭慮，以求其瑕隙，矛盾，而終則一無所得。惟是學果眞，則空間必另有一線性量存在，不藉他事可以自定。(17)（雖吾人尙未知之），是則有違於吾人理性耳。余思除玄學家空談玄理，實無意義外，吾人對於空間之眞義，所知實甚微，或竟毫無所知，故遇不習知之事，遂視爲『絕對不可能』耳。設非歐幾何學果眞，且該恆量能與吾人在地球或天空間測度之量相比，卽可由後天決定之。有時余嘗戲言，希望歐氏幾何學不爲眞幾何學，如是則吾人先天上可得一絕對度量矣。

『有對余表示以爲自具善思考之算學頭腦者，於余以上所言，容有所誤解，余亦不甚置意此事。在任何情形下，余僅取此爲私人通信之資，未嘗公之於衆，亦絕毋需乎公之於衆也。然余有暇，異於刻下情況之時，則余所研究，將來或有問世之一日矣。』

§**12**. 於 1831 年，波爾業之附錄雖印行而未達於高氏以前，氏曾致函叔馬奇氏(Schumacher)，蓋叔氏以爲彼已證得一三角形內角之和必爲二直角，其法實與提波(Thibaut)之旋轉證法(18)相同，不幸此種證法最近已得英國之正式批准，允可載入初等幾何教科書中。高氏函中

(17)可參看本書 §53 及附錄一第 4 節。

(18)可參看散麥維爾(Sommerville):The Elements of Non-Euclidean Geometry, §5.

本書原著者（卡斯羅 Corslaw）立於嚴謹之邏輯立場，故對於中等幾何學中引用論證不完密之證法，甚爲反對(參看 §§ 5,7). 英國教科書之採用此項證法乃培理(Perry)運動之影響，自有其教育心理上之根據，譯者認爲未可厚非。

指出其證法之謬點。並曰：*

『在近數星期中余已着手將四十年† 來余之一種冥想，筆之於書。昔余未嘗將此錄出，故曾有三四次，對此問題，須重新思考。余甚不願其隨余身同歸湮沒也』。

高氏稿中關於平行線之短註，‡ 大約為此時期中作品。以下正式言及波爾業及羅巴曲士奇幾何學之發展時，將應用之。

1832 年二月波爾業氏著作達高氏之手後，其計劃為之一變。氏蓋謂今後可以不需彼自繼續此種研究矣。氏讀附錄後之誠懇態度，吾人已於上文見之。

余對此故事敍述不憚煩費者，一因其內容本身，興趣濃厚；一因不幸有若干算學主張以為高氏應儕於非歐幾何學發明者之列；更有揣測，以為波爾業及羅巴曲士奇之著作，由於高氏之研究鼓勵者甚多。

算學界之主張及推測，吾人今已知其殊少根據。此空前之發明，為幾何學上之大革命，常與波爾業及羅巴曲士奇之大名並垂不朽。二氏之發展此新幾何，達於完備之情形，乃出於獨立研究，未嘗知高氏之見解。雖發明之光榮屬諸二子，而高斯及士外卡特於同一方面之貢獻，要亦不可忘也。

* 見高斯全集 vol. viii. p. 213.

† 作此函時之前四十載，氏年僅十四歲耳！

‡ 見高斯全集 vol. viii. p. 202; 及波諾拉書 p. 67.

第二章　非歐幾何學創立者波爾業羅巴曲士奇及里曼諸家之研究

§13. 約翰波爾業 (1802–1860)

約翰波爾業爲奧地利軍次一匈牙利軍官也，於 1823 年創一系統一致之幾何學，係自歐氏幾何學中，將平行公論易以與前矛盾者而成，此事上章已述及之。氏之發明，於 1832 年始附列於其父著中發表之。其父所著爲：Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. 此著作常稱爲 Tentamen. 氏所編附錄，置於 Tentamen 第一編之末，題爲：Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

設吾人將解釋符號之標題一頁及正誤表兩頁除去，則此附錄僅有二十四頁。

波爾業之發明作始於 1823 年，時氏僅二十一齡耳。氏致其父一函如次：*

『如男能董理材料，且爲環境所許者，則將平行原理之硏究刊布，此時男尙未完成此作，但如所擬之目標不謬，則循此時所取之途徑，必能達到；此目標雖尙未達到，然男已創作如此奇異之發明，幾使男不能自持，如此著告失，則將使我抱恨終身矣。親愛之父，如見男稿者，亦必將承認其價值，故男可稱男已由虛無中創一新世界矣。男迄今曾呈諸大人者，不過此種見解之雛形耳，男深信如能完成此發明，必足與男以榮耀』

倭爾夫剛得函後卽建議其子將所著早日發表，且欲附入己著 Tentamen 內作爲附錄，並忠告其子，如眞正成功，卽日發表，勿失機宜，理由有二：†

『一因學說易於流傳，而有被他人先行發表之患；二則各類事物，常於某一時代，同時發生於不同場所，如春日紫羅蘭之各地皆放然，此說頗有至理。且每一科學之競爭，儼如激烈之戰鬪，和平之降，不知何日。故吾人能制勝時，卽應爲之，免被着先鞭者之佔優勝也』。

但 Tentamen 之刊布乃延至數年之久。其時原文在彼父手中，蓋對其中數部，尙有疑慮。迨後彼疑漸釋，始以之插入第一卷末，而先發一

* 見斯楊刻爾及恩格爾 "Gauss die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie" 一文，載 Math. Ann. vol. xlix: p. 155 (1897). 及斯氏書，vol. i. p. 85.

† 見斯楊刻爾 "Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai" 一文，載於 Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, vol. xvii. p. 14 (1901). 及斯氏書 vol. i. p. 86.

册寄至荀廷根(Göttingen)於 1832 年正月達於高氏之手。於是青年波爾業遂得當時算學界最大權威高斯之揄揚，而得一重要地位。高氏對於氏著之盛譽，前章已述及之。

§**14.** 今試予此附錄一簡約之說明

(i)此書開端，即示一平行之界說。設半射線 AM 在與同平面內另一半射線 BN 不相割，但與 ABN 角內所容之任何半射線 BP 相割，則可記爲 BN ||| AM.

在一註中，氏並謂爲『引長 BN 漸近於 AM』。

波爾業常用平行字樣及 || 符號，表等距離之意義，而留漸近字樣及 ||| 符號，以用於此新平行線，其意義與羅巴曲士奇用者相同，吾人將於下節見之。

新平行線之性質，於是得立建立。

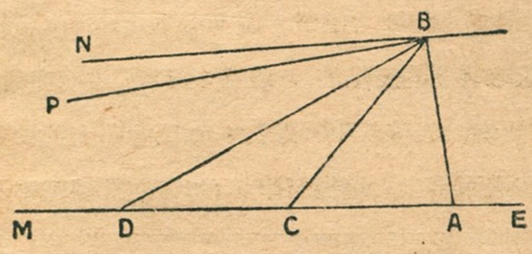


圖 12.

(ii)無限大半徑之圓及球之性質可以求得。且示明無限大半徑之球上，其幾何學與通常之平面幾何學相同。

(iii)球面幾何學得證明與平行設論無關。

(iv)非歐平面三角學公式可利用無限大半徑之球求得。

（v）對於非歐幾何學，數種幾何問題可求得其解；例如作一『正方形』與已知之圓等積。*

波爾業證明不用平行假設而能成立之定理時，特別注重。氏稱此結果爲絕對眞確，而爲構成絕對幾何學或空間絕對科學之一部。如附錄標題所示，氏之一主要目標，卽創立該項科學也。

於附錄中，氏對於歐氏平行設論證明不可能之問題未甚討論。此點雖曾一再提及；然彼欲將完善之證明，留待將來之機緣；據吾人所知，此將來之機緣終未嘗來臨也。氏附錄（據哈爾斯忒德 Halsted 譯本）之最末一語爲：

『最後尙餘一事待證（此事終可完成者），卽由先天決定（不藉其他假設）Σ 或某種 S（究係何種）之存在† 爲不可能一事。此種論證，且待將來適宜之機緣爲之』。

§**15**. 波爾業於 1833 年自軍中退役，於 1860 年後始逝世。據吾人所知，此後氏未嘗更有所發表，以推廣其附錄，或硏究他種算學。然由數種根據，主要者爲氏稿件中數筆記，知氏曾硏究關於非歐幾何學之若干問題。且嘗進而硏究立體幾何學。氏硏究非歐幾何學及球面三角學之關係甚詳，對於歐氏假設證明之可能或不可能諸問題，亦嘗熟慮。

---

* 非歐幾何學中之『正方形』並非一各邊均等，而諸角皆直角之四邊形。在非歐氏平面中，不能有長方形。波爾業所謂之正方形實則爲一正 regular 四邊形耳。其中諸角皆等，但形狀視邊長而定。

† 波爾業氏稱依歐氏假設之幾何系統爲 Σ；而用彼自身所立平行線定義之系統爲 S.

氏附錄中一部份譯稿未曾刊布，現存德國，* 稿中於其對最後論題之見解，較原附錄中相當一節，解釋較明晰。此稿始於 1832 年，其 §33 之第一部如下：

『此理論之主要結果及其成就之地位如何，余將擇要說明如次：

『I. Σ 或 S 是否實能存在，目前仍未能決定（著者能證永遠不能決定）。

『II. 今有一平面三角學為絕對眞確（即不為任何假設所拘）者，然其中（據 I ）常數 i 及其存在，仍完全不能決定。除此為不知外，其他各事皆已確定。然球面三角形，則已在 §26 中有完備之研究；故通常習知之球面三角學，決不賴公論 XI 者，則為無條件之眞確。

『III. 由此二種三角學及數補助定理（見原書 §32），立體幾何及力學上一切問題，均可解決，此種問題為所謂解析學在近時發展中所能解者，（此種敍述，不待再加說明），而此舉不須借助公理 XI，（至今任何定理仍倚之為基本柱石者）即能正確解得，且空間整個理論，自今而往，均能以新科學上解析法（在相當限制內至可贊許）處理之。

『於 Σ 及 S 二者間，以求抉擇，其事為不可能，今試論此理之證明（著者似有一證明），公理 XI 之性質終可全定；平行線之難題，完全可解；且一切陰霾，不幸曾伸展至今（而人心則渴望眞理），滅除若

---

* 見斯楊刻爾 "Untersuchungen aus der absoluten Geometrie aus Johann Bolyai's Nachlass", 載 Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, vol. xviii. p. 280, 1902. 或斯氏書 vol. ii. p. 181.

許科學上之樂趣，暗耗若許之精力與時間者，今均一掃而復歸淸明矣。

『著者已具有完全明晰之見解(彼於有思想之諸讀者，亦望如是)，且由是學之宣明，不啻於學問之眞實勝利，智慧之教養，及人類幸福之提高，予以極重大及光榮之供獻也』。

氏之闡發歐氏假設證明之不可能，似因於堅信於非歐三角學不至引起矛盾。氏稿中有以下數語：

『吾人對於平面上一組點之解析，顯能獲得球面上之同一公式；且因在球面繼續解析時，不致引起矛盾（蓋球面三角爲絕對眞確），故應用同法不致將平面上點系間任何理論引起矛盾也』。*

在同頁下段，又有：

『但對空間之思考，是否在某方面，無裨於 Σ 之建立，是仍待決之一問題也』。

氏因解析之錯誤，一時誤以爲由此已證得歐氏假設。惟不久氏卽自知之。

雖氏一時借助立體幾何，欲認可得一證論，以駁斥非歐幾何學在邏輯上爲和諧之說，然吾人殊未能據此遽斷氏之不克扼守其早年作品之要旨。一觀氏之論證，卽知氏於是學，見解極深，研討之精，實過於羅巴曲士奇。蓋如後文所述，羅氏所據僅爲平面公式耳。夫非歐平幾何學卽使已成爲完全合於邏輯而和諧之系統，然於立體幾何中定理，能否毫無矛盾之結果，則固依然未決也。

---

* 見斯楊刻附書中 vol. i. p. 121.

波爾業最初提出之問題，經若干年，始由克萊因(Klein)* 沿揆力(Cayley)之研究而解決之，吾人將於本書末章中將波，羅二氏非歐幾何學之邏輯，可能性加以淺易而嚴謹之證明，且將示明同一之論證，對於與里曼姓氏並列之非歐幾何學亦能適用焉。

§16. 羅巴曲士奇之研究 (1793–1856)

尼古拉羅巴曲士奇(Nicolaus Lobatschewsky)爲卡省大學教授，其師德人巴忒爾(Bartels)爲高氏之友，且係同鄉。氏於 1815 年卽已研究平行學說，其在講稿 (1815–1817) 中曾載有三數關於平行設論之證明，原稿爲一學生所保存，至今猶存在卡省算理學會羅氏紀念室(The Biblioteca Lobatschewskiana of the Kasan Physical-Mathematical Society)中。氏於 1823 完成關於初等幾何一稿，然未付刊，原稿於 1898 年，在卡省大學文書保存室中發現，據此可知其時氏之見解，已進一步；其中關於平行設論有言曰『對此眞理嚴密之證明，實迄未能得；前此所有之證明僅可謂之解釋，未可視爲完善之算學證明也』。†

約在 1823 年至 1826 間氏始明研究之途徑，而卒底於成。今知其曾於 1826 年二月在卡省算理學會，宣讀一文，題爲 Exposition succincte des principes de la géométrie, avec une démonstration

---

* 參看 Math. Ann. vol. iv. (1871) 中 "Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" 一文。

† 余於此謹對散麥雜爾博士深致謝意，因其以波諾拉 La geometria non-euclidea 俄文譯本中附錄 I 之發息利夫 Vasiliev 譯文見示，本書中引用各語，卽係採自該附錄中。

rigoureuse du théorème des parallèles. 此文原稿，今已散佚，題中第二語，甚為欠妥，望文生義，一若氏尚未達於目標者然。在 1829-30 時，氏刊行一俄文論文，曰幾何中原則之研究(On the Principles of Geometry),* 文中第一頁，附有小註，謂此作係 Exposition succincte 講稿之撮要。

此短文及羅氏之其他著述，至今猶存，因氏為一廣博之著作家，與波爾業不同也。氏刊布書籍多種，欲使非歐幾何能為世所重，一如其分，但在氏生前，終未克如願以償。其第一次刊布之作，已盡含此題解答之要義；完全建立此發明之眞確與價値。故苟不能完全確定 1826 為羅氏解決此題之年，則此發明完成之期，當在 1829 年，已屬毫無疑義矣。

§**17**. 此論文約及七十頁。最初一至七數節列記普通幾何學上面、線、點、距離等諸種概念，第八節始載其平行之理論。

本節所記如下：†

『吾人已知一直線三角形諸內角之和不能較 π 為大，然仍有等於 π 或小於 π 之二種假定，二者之任一皆可採用而推演之，不生矛盾；於是有二種幾何學，隨之以興：其一為通常者，至今因其簡潔，與一切實際測算，多能吻合；其二為虛幻者，較為普遍，故計算較難，其中對於線與角有相關之可能。

* 羅氏此書係俄文，但此處以英語表其書之名稱。此書有恩格爾之德文譯本，見恩格爾及斯塔刻爾所著 Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, I (Leipzig, 1898).

† 見恩格爾書 p. 10.

『假定某一直線三角形內角之和爲π，則於一切三角形中，內角和均爲同値。如設某三角形內角之和小於π，則當邊增大時，角和應漸減小 亦易證明。

『故於任何情形下，如二直線與一第三線交而所作二角和爲π，則此二直線決不能相交。如更假定一三角形諸內角和小於π，則於上述之二角。在其和小於π時，二直線之相交，亦屬可能。

『故對於一定直線言，此平面上一切直線均可分爲相交及相離二種。在自一點出發之一束線中，如後者成二類之極限，則稱爲平行線，換言之，卽一類對於他類之界線也。

『設自一已知點向一已知直線作一垂線 a，更自同點作一直線與同直線平行。垂線 a 及平行線間之角，記之爲 F(a)．則當三角形之內角和爲π時，甚易證明對於任何線，F(a) 角均等於$\frac{\pi}{\alpha}$；但由他種假設，F(a) 角隨 a 而變，故當 a 增大，則 F(a)角漸趨於零，其値常較$\frac{\pi}{\alpha}$爲小。

『在後種假設下，欲將 F(a) 之意義，對於一切直線 a 推廣之，卽應取

$$F(o)=\frac{\pi}{\alpha},\qquad F(-a)=\pi-F(a).$$

由是對於一切銳角 A，可系以正線 a，一切鈍角 A，可系以負線 a，使

$$A=F(a).$$

且在兩種假定中，任何平行線具有以下性質：

『設二直線平行，且有二平面通過之，而彼此相交，則其交跡爲一直線平行於原二線。

『二直線同平行於第三者，必彼此平行。

『設三平面，兩兩相交，得三平行直線，則其內部平面角之和等於 π』。

§9. 論及無限大半徑之圓及球，並非歐幾何學之極限曲線(Limiting-Curve) 及極限曲面* (Limiting-Surface).

§§11-15. 中論及三角形之量法及關於平平行問題之解法。

於 §13 之末，求得平面三角形內角與邊相關之基本方程式(17).

自 §16 以下，專論非歐幾何學上曲線長度，曲面面積及立體體積之各種量法。

在最重要諸情形討論以後，氏又增若干頁，關於定積分之討論，此僅有解析上之興趣。

今將原書結論，作一撮要，以其論及新幾何理論上和諧性，曾於前文述波爾業氏研究中略及之也。

『吾人獲得一三角形內邊與角相關之方程式 (17) 後，卽得線，面，體各元之普通式。於是幾何學上一切問題，俱歸於解析，而各種計算，必須互相吻合，且任何新元素，不含於此第一類方程式者，亦無在他處發現之機會。由是一切幾何量之相互關係，必可求得。或有言及論證中某點有一矛盾，迫令吾人不得不將摒棄此新幾何學中所採之基本假定者，則此種矛盾，僅能藏於方程式 (17) 本身之內。但吾人若易 a,b,c 諸邊以 ia,ib,ic 於此類方程式中，則立變爲球面三角學上之方程式 (16).且

* 見本書之 §48 之註。

於普通幾何學及球面三角學中祇有直線間之關係。是故普通幾何學，（球面）三角學，以及此新幾何學必常能互相吻合也。*

§18. 羅氏之著作，於 1841 年已得高斯之注意，由高氏諸函，可知氏於羅氏諸著作印象綦深，至欲研習俄文，以期能讀此『敏慧算學家』用該文字所發表之諸傑作。倭爾夫剛波爾業於 1848 年從高氏處得讀羅氏諸俄文著作，尤知羅氏 1840 年所出之 Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien（1）一書。於是此可驚之消息以及羅氏所著論其所研究之綱要者，均由父轉達於子。約翰得書後之感想若何，吾人可於未嘗發表之 Nicolaus Lobatschewsky's Geometrische Untersuchungen 一筆錄† 中見之。

『此名著中，雖採取若干相異之方法，然其精神與結果直與 1832 年在 Maros-Vásárhely 發表之 Tentamen matheseos 中附錄相合，烏能令人不驚異乎。如高斯所云初見附錄，繼又知匈俄兩算學家間持論

* 在羅氏他種著作中，亦曾提及此點：見 (i) Imaginary Geometry（李布曼 Liebmann 氏譯本 p. 8）；(ii) Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien（哈爾斯忒德譯本 p. 163）；(iii) Pangéométrie, §8（波諾拉書 p. 93 中曾引載之）。

† 見庫爾瑟克 (Kürschák) 及斯楊刻爾 "Johann Bolyai's Bemerkungen über Nicolaus Lobatschewsky's Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" 一文，載 Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, vol. xviii. p. 256 (1902). 亦可參看斯楊刻爾書 vol. i. 140.

（1）此書有漢譯本，名「平行線論」，齊汝璜譯，商務印書館出版。

之相合,均感驚奇,余又寧獨不然。

『絕對眞理之性質,於 Maros-Vásárhely 爲然者,於 Kamschatka 及月球亦然,卽於世界任何處所亦莫不皆然;任一有理解者發明之事,自亦能爲他人所發明也』。

氏更聲言,際此科學世界,同時發明,非不可能;惟渠終疑有人先致渠著於羅氏;後者始着手於另一途徑以達同一之目標。氏又妄測羅氏之書,或竟係高斯所作;以爲高氏負一時重望,不欲有人先己,抑又無法以阻之,於是假托羅氏之名以成是著。波氏具絕大天才。固無疑義,然亦一疑忌極重之人也。

高斯對於羅氏著作之意見,載於 1346 年致叔馬奇函中,* 函云:

『……最近余又得暇一讀羅巴曲士奇所著之小册。該書載有新幾何學之綱要,如歐氏幾何學非眞,該學必能成立,且其存在必能十分和諧。士外卡特稱是種幾何學爲星形;羅巴曲士奇則稱爲虛構。君知四十五年前(自 1792 年起),† 余卽有此同一見解(後有相當之增廣,但目前可不必提及)。余於羅君作品中,並無發見余所不知之點,惟羅君推演之途徑,較余所循者爲不同,且極有名家規式,有純正幾何之精神。故余特將此小册寄上,供君賞鑒,料其必能與君濃厚之興趣也。……』

羅巴曲士奇於 1856 年謝世,波爾業四年後亦相繼而逝;前者爲一失望之人,後者直懷恨以沒。二氏未嘗見重於當世,且算學界得讀二氏

* 見高斯全集 vol. viii, p. 238.

† 實在此年以前,因高斯生於 1777 年也。

之名著者亦絕罕。設高斯於二氏作品，不僅以於通訊及談話中，作熱烈誠懇之讚賞爲已足，復能廣爲宣揚，公之於世，則二氏應得之榮冠，必能早爲舉世所推戴矣。

二氏逝世不久，高斯及叔馬奇之通訊始刊行，當時算學家見函中所引論羅，波二氏之研究極多，始知高氏對此二湮沒無聞，姓氏不彰之二人，甚爲重視。此後卒由羅巴曲士奇著述以及法、德、意諸邦幾何學名家之努力，而後波，羅二氏所發明之非歐幾何學始得日趨光大，爲舉世所重。至今論及幾何之創立時，每一學子，對二氏之姓氏及研究，類皆耳熟能詳矣。

§19. 里曼之研究 (1826–1866).

其後非歐幾何學之發展，當以里曼氏之功爲多，氏亦哥廷根大學之教授也。其見解載於著名論文：Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen 中，氏於 1854 在哥廷根大學哲學科宣讀此著作，爲其檢定教師資格之論文 (Habilitationsschrift)，聽者不盡爲算學家，文中解析無多，所引入之觀念，多屬於直覺性質者，即職是故。此文直至 1866 年氏逝世後始刊行；此派非歐幾何之發展，多出於後繼者之手云：

前此之算學家，致力於幾何學基礎之研究時，皆採直線爲無限長之說，氏則以此說，亦待討論，一如平行設論然。氏以空間爲無際 (Unboundedness)，殆無疑義，而示無際與無限之別於下：

『論空間構造之廣袤時，余意須區別無際與無限二語之義；前者說明界域關係，而後則指度量關係言也。空間爲一無際度集體，乃由外

界觀念推得之假定;由此可知在任何時刻,眞知覺之域,得以完備,所求對象之可能諸位置,亦可建立,藉此等應用,此假設本身更得永久證實。空間之無際,富有經驗上之確定性,過於其他之外界體覺,但未必因是而生無限性。但在他一方面,如設物體對於位置爲獨立,則能使空間有常曲率,苟此曲率得有一甚小之正值,則必爲有限量』。*

§20. 里氏對於直線無限性之假設,以廣義之無際性代之,本此說則銳角假設不必摒棄。薩,勒諸氏不採鈍角假設者,乃據三角形外角之定理。在證明是理時,須設直線爲無限長始可。

鈍角假設,旣可採用,則非歐幾何之異軍叉起,當研究非歐幾何中觀念在投影幾何 (Projective Geometry) 上之作用,此種新幾何之重要,乃得大白。

近代算理大師克萊因†創有甚便利之名詞,曰雙曲線(Hyperbolic)幾何,曰橢圓(Elliptic)幾何,曰拋物線(Parabolic)幾何。第一種卽波,羅二氏所創者,第二種指里曼氏所創者,第三種爲歐氏幾何,此名詞今已通用,本書亦從之。

非歐幾何至是已超軼於初等範圍之外,是以本書之研究,當詳於雙曲線幾何,而略於橢圓幾何焉。且有一事,或爲此處更應指出者,卽橢圓幾何學實有二類,而里氏或僅能知其一——此問題後文更當論及,此種幾何學之有二類,係克萊因氏之創見。

* 此處所引,乃據克利佛德(Clifford)所譯里氏論文(載 Nature, vol. viii, 1873). 球面爲無際而非無限。二度空間上之物,在球面上移動,常可前進,而永無止境。

† 見克來因 "Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" 一文,載 Math. Ann. vol. iv. p. 577 (1871) 及在 Math. Ann. vol. vi. 中另一文,又可參看波諾拉書英譯本附錄四。

第三章　雙曲線平幾何學

§21. 本章將進述波羅二氏之幾何學，即雙曲線幾何學是。吾人考三角形內角和値之大小，而以亞氏設論爲依據時，可達此結果，已如上述。設直線爲無限長，則內角和不能大於二直角，此和數等於二直角時，歐氏幾何學得以樹立，如其小於二直角，則過任何點，可作二直線與一直線平行矣。

Geometrische Untersuchungen* 一書爲羅氏後期著述，氏著此書時，見解已定，以最善之敍述，表達其基本觀念，今就此以究其搜討之方，亦良足益吾人神思焉。

羅氏於此書 §16 中有言曰『在一平面上共過一點之諸直線，對於一已知直線言，可分爲二類，一類與該線相交，一類則否，介此二類間而爲之界者，稱爲該線之平行線。

『自A點（見圖13）作對於BC之垂線AD，且作AE垂直於AD，在直角EAD中，自A出發之直線，有與DC相交者，如AF；有與之不相交者，如垂線AE。

『不與DC相交之直線，不能確定其僅爲AE，則尙可設有其他直線，如AG，當其與DC二者，無論若何延長，終不相交。

---

* Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (Berlin, 1840) 哈爾斯忒德有英譯本 (Austin, Texas, 1891).

『由與ＤＣ相交之直線如AF等，達於ＡＧ等與ＤＣ不相交之直線時，必須經過ＤＣ之平行線ＡＨ。申言之，卽在此線之一側，如ＡＧ等線不與ＤＣ相交，而在他側之ＡＦ等線均與ＤＣ相交。

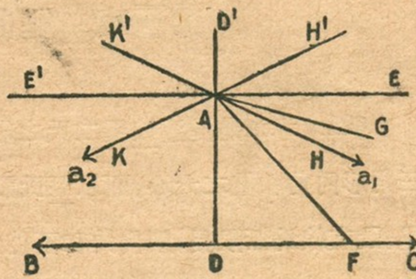


圖 13.

『平行線ＡＨ與垂線ＡＤ所成之角，稱爲平行角(Angle of Parallelism).吾人以Π(p) 記之，p表距離ＡＤ』。

羅氏次乃證明，如在Ａ點對於ＢＣ之平行角爲直角時，則任何三角形之內角和應爲二直角，如是而有歐氏幾何學，在任何點對任何線之平行角均應爲直角。

在另一方面言，如在Ａ點對於ＢＣ之平行角小於直角時，則任何三角形之內角和應小於二直角，而在任何點對任何線之平行角，應小於直角。

$\Pi(p)=\frac{\pi}{2}$一假設，爲普通幾何學之基礎，而據$\Pi(p)<\frac{\pi}{2}$之假設，則有此種新幾何學，羅氏稱之爲虛構幾何學(Imaginary Geometry).此種幾何中，過任何點，對於任何直線常能作二直線與之平行。

在此論證中羅氏亦以連續之觀念爲依據，特未明言申述耳，波氏之論證亦然。且二氏之論證中，固均未證明此二平行線之存在也。在此種幾何中二平行線之存在，爲一公論。亦如歐氏幾何僅有一平行線存在之公論然。

§22　喜爾柏特之平行公論：

喜氏之論雙曲線幾何學*曾補入下之平行公論，使其明晰，其文如下：

設 b 爲任意直線，A 爲線外任意一點，則過 A 點，常有 a_1 a_2 二半射線，而不成同一直線。二者與 b 不相交，但在 a_1 a_2 線所範之區域內，過 A 點之半射影均與 b 相交。

設 BC 爲直線 b, AH, AK 爲半射線 a_1 a_2 。

按帕希公論，† 可知在 H′AH, K′AK 區域內，無與 BC 相交之線。(1)

故過 A 點之半射線中，有與 BC 相交者，有不與之相交者。a_1 (AH), a_2 (AK) 卽此二種線之界線。

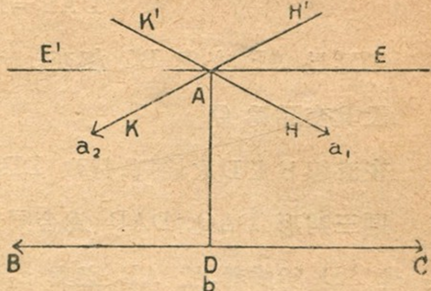


圖 14.

過 A 點作直線 b (卽BC) 之垂線 AD, 又作 AD 之垂線 E′AE.

E′AE 不與 BC 相交，如其與 BC 在 D 之一側相交，則必交他側者於一相當點。

又此線不能與 BC 平行，因據上之公論，二平行線不能成同一直線也。

* 見喜氏幾何學之基礎 p. 160.

† 見本書 §2 中(二)。

(1) 因如 AE 與 b 相交於 F, 則按帕希公論 a, 必與 DF 相交矣。

故 a_1, a_2 與 AD 所成之角必爲銳角。

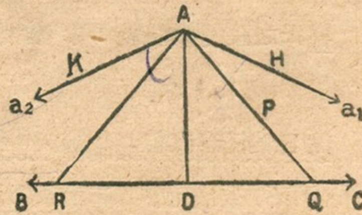


圖 15.

今請證此二角必相等。

苟二者不相等，則必有一角較大。設 a_1 與 AD 所成之角較大，則在 A 點作

$$D\hat{A}P = D\hat{A}K$$

則延長 AP 必與 BC 相交。

設其交點爲 Q.

在直線 b 上 D 之他側，截取 DR＝DQ 而聯 AR.

則三角形 DAQ, DAR 爲合同形，而 AR 與 AD 所成之角，等於 a_2 與 AD 所成者，故 AR 必與 a_2 相合。

但 a_2 不與 BC 相交；故 a_1, a_2 與 AD 所成之角非不等者。

故得證明垂線 AD 平分二平行線 a_1, a_2 所成之角。

AD 與任一半射線所成之角，稱爲對於距離 AD 之平行角，羅氏以 $\Pi(p)$ 記之，式中 AD＝p.

a_1, a_2 二半射線稱爲過 A 點對於直線 BC 之右平行線 (Right-handed parallel) 及左 (Left-handed) 平行線。

§23. 就上述之平行線定義言，半射線起點 A 尚有關係，今請證：

一直線，在線上任何點，均保持其平行性。(2)

換言之，即半射線 AH，若在 A 點，爲直線 BC 之右（或左）平行

(2) 平行線之可移性 (Transmissibility).

線，則在 AH 或 HA 之延長線上任何點，均爲同線之右（或左）平行線。

第一款　設 A′ 爲半射線 AH 上另一點。

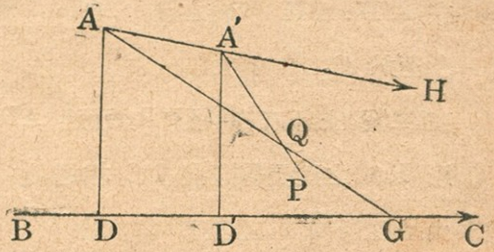


圖 16.

過 A′，作 A′D′ 垂直於 BC.

在 A′D′，A′H 所範之區域內，作任意半射線 A′P，在其上任取一點 Q.

連 AQ.

延長 AQ，則必與 BC 相交。

故由帕希公論，可知 A′Q 必與 D′C 相交。(3)

但 A′H 不與 D′C 相交，而 A′P 爲 D′A′H 區內之任意半射線。

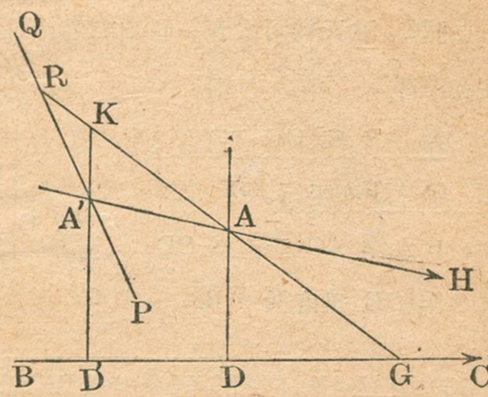


圖 17.

故 A′H 在 A′ 點，亦與 BC 平行。

第二款　設 A′ 爲半射線 AH 向後延長線上任意一點。

(3) 因 A′Q 交三角形 ADG（G爲 AQ 與 D′C 二者之交點）之一邊，則必與他二邊之一相遇；但 Q 點與 AD 在 A′D′ 線之異側，故如 A′Q 與 AD 相遇，則必先與 A′D′ 相遇，是二直線有二交點，而不合理。故只能與 DG（即 D′C）相遇。

作 A'D' 垂直於 BC.

在 A'D'. A'H 所範之區內。自 A' 點作半射線 A'P, 幷延長 PA' 過 A' 至於 Q.

在 A'Q 上任意取一點 R, 而連 AR.

則 RA 之延長線必與 DC 相遇。

由是可斷 A'P 必與 D'C 相遇。(4)

是以半射線 A'H, 在 HA 之延長線上任意一點 A', 亦與 BC 平行,一如前款。

在此二款中,此平行線與原有之半射線同向 (Sense)(卽均爲右平行線,或均爲左平行線)。故可稱直線 AB 爲直線 CD 之右(或左)平行線,不必對於 AB 線上之任何特別點而言。

§**24**. 歐氏幾何中有一習知之平行線性質,今在雙曲線幾何學,依然合理卽

如 AB 與 CD 平行,則 CD 與 AB 亦平行。(5)

自 A 作 AC 垂直於 CD,

自 C 作 CE 垂直於 AB.

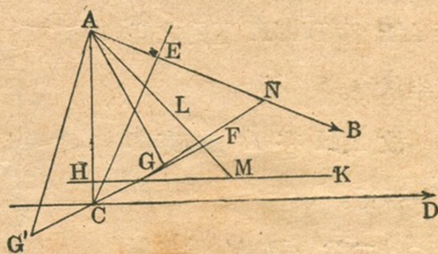


圖 18.

(4) 按帕希公論, D'A' 之延長線,必與 RA 相遇,設交點爲 K. 又設 RA 之延長線與 DC 之交點爲 G

A'P 旣經過三角形 KD'G 中 KD' 一邊,則必與他二邊之一相遇。如其與 KG 相遇,則 PR 與 AR 二直線有二交點,而不合理,故 A'P 必與 D'C 相交。

(5) 平行線之可逆性 (Reciprocity).

在 DCE 區內，作任意半射線 CF，又自 A 作 AG 垂直於 CF.

則易證 G 點必在 EDC 區域內。(6)

更因 $A\hat{C}G$ 為銳角，$A\hat{G}C$ 為直角，故 $AC>AG$.

在 AC 上截取 $AH=AG$，并作 HK 垂直於 AH，而在 CD 之同側。

作
$$H\hat{A}L=G\hat{A}B$$

則半射線 AL 必與 CD 相遇，因之 HK 必與 AL 相遇。

設 AK, AL 之交點為 M.

在 AB 上截取 $AN=AM$，而連 GN.

則三角形 HAM, GAN 為合同形。

故
$$A\hat{G}N=\text{直角}$$

故 GN 與 GF 相合，而 CF 延長線必與 AB 相遇。

但 CF 為 CE, CD 所範區域內任意之半射線，而 CD 本身不能與 AB 相交。

故 CD 平行於 AB，且與 AB 平行於 CD 之向相同。*

---

* 本書所述證法，係採自羅氏 New Principles of Geometry with a Complete Theory of Parallels 之 §96（見恩格爾譯文 p. 169）.

(6) 設垂距在半射線逆向之延長線上如 G′（見圖18），則按歐氏幾何原理第一卷第十六題（見§2(1)）必

$$A\hat{C}F>A\hat{G'}C$$

但按作法，則 $A\hat{C}F$ 為銳角，$A\hat{G'}C$ 為直角，遂生刺謬，故此垂趾必在半射線 CF 上，因之在 ECD 區域內。

§25. 今請證平行線之第三重要性質。

如直線(1)與直線(2)(3)均平行，且三線在一平面上，則直線(2)亦與(3)相平行。(7)

第一款　設直線(1)介於(2)(3)之間。(如圖15)

設A, B爲直線(2)及(3)上各一點。設AB與(1)相遇之一點爲C.(8)

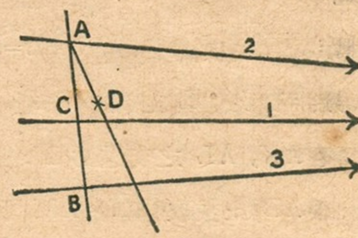


圖 19.

過A點作任意直線 AD, 介於AB與(2)之內。

則此線必與(1)相遇，且延長時，必與(3)相遇。(9)

類乎AD之一切線，莫不如是，故(2)與(3)相平行。

第二款　設(1)在(2)(3)之外，假定(2)介於(1)(3)之間(如圖20)。

苟(2)不與(3)平行，在(3)上任取一點，則過此點，可作一異於(3)之直線，與(2)平行。(10)

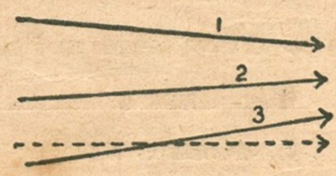


圖 20.

如是則按第一款，知該線平行於

(7) 平行線之可推性 Transtive Property.

(8) 因按帕希公論，AB必與(1)相交。

(9) 因(1)與(3)二直線爲平行故。

(10) 并設此線依同向與(2)平行。

(1),而爲不可能之事。*(11)

§26. 今論過二點之二平行半射線,及連此此二點之線節，三者所成圖形(見圖21)之性質如下：

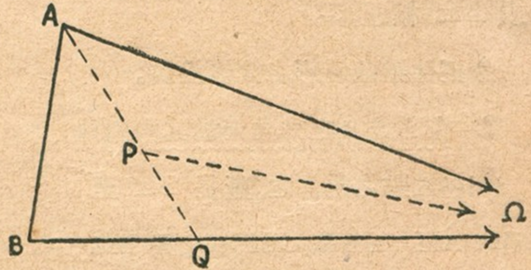


圖　21.

爲簡便計可稱二平線在無窮遠點相遇。在雙曲線幾何學中，每直線均應有二無窮遠點，各在一平行方向上,據此則過 A, B 二點之平行線,可視之爲在二線之公共無窮遠點Ω處相遇。

且如一直線與此二線依同向平行時,則稱之爲經過Ω點。

1. 如一直線經過 A, B, Ω三角頂之一且過此形內部一點,則必與對邊相遇(見圖21)。

設 P 爲形內一點。按平行公理，AP 必能與 BΩ 相交，命此交點爲 Q. 按帕希公論,直線 PΩ 必與三角形 ABQ 中 AB 或 BQ 二邊之一相割,但此線與 BΩ 平行,故不與 BQ 相交,是以必與 AB 相交。

2. 在 ABΩ 平面上之一直線,而不經過角頂者，如與一邊相交,則必與而僅與此形他二邊之一相交。

設此直線經過 AB 上一點 C. 作 CΩ 與 AΩ, BΩ 平行,苟此直線在 AC, CΩ 所範之區域內,則必與 AΩ 相遇,苟在 BC, CΩ 所範

* 本書證法係高斯氏所用者，今從波諾拉書中 p. 72 摘錄

(11) 因如是則過一點可作二線與他一線依同向平行,而與喜氏公論相矛盾。

之區域內，則必與 $B\Omega$ 相遇。

又設此直線經過 $A\Omega$ 上一點 D，連結 B, D，則易證明其必與 AB 或 $B\Omega$ 相遇。(12)

今更往證此圖形之其他性質。

3. 在A或B之外角大於其內對角

就在A點之角言之，延長 BA 至 C，作 $C\hat{A}M = A\hat{B}\Omega$. AM 不能與 $B\Omega$ 相交，因三角形之外角，必大於內對角也。又不能與 $A\Omega$ 相合，苟如是則過 AB 中點而垂直於 $B\Omega$ 之線，將爲 $A\Omega$ 之垂線，則對此公垂線言，平行角爲一直角而與喜氏平行公論相背矣。

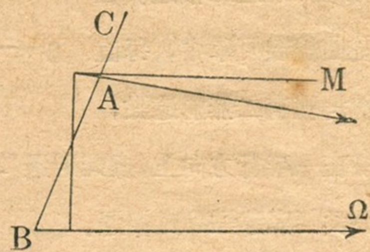


圖 22.

故 $C\hat{A}\Omega > C\hat{A}M$，但後者與 $A\hat{B}\Omega$ 相等。

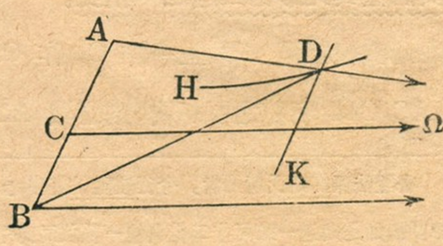
是以在A點之外角，較大於在B點之內角。

對於在B點之角，證法亦同。

今論二圖形之同具是性質者，即每形有二平行線及聯二線端點之線節。

---

(12) 苟此線在 DA, DB 所範之區域內如 DH，則必與 AB 相遇；苟在 DB, DΩ 所範之區域內如 DK，則按 §26 中 1 之理，知其必與 BΩ 相遇。



4. 如線節 AB＝線節 A′B′, 且在 A 之角＝在 A′ 之角則在 B, B′ 兩處之角相等。

設 $A\hat{B}\Omega$ 不等於 $A'\hat{B}'\Omega'$ 則必有一者較大。

命 $A\hat{B}\Omega > A'\hat{B}'\Omega'$

作 $A\hat{B}C = A'\hat{B}'\Omega'$

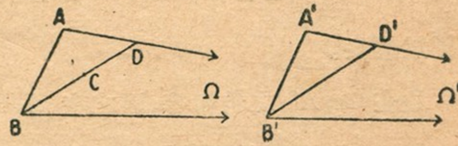


圖 23.

則 BC 必與 AΩ 相遇。

命其交點爲 D; 在 A′Ω′ 上, 取 A′D′＝AD, 而連 B′, D′.

則三角形 ABD, A′B′D′ 爲合同形, 故 $A'\hat{B}'D' = A\hat{B}D = A'\hat{B}'\Omega'$, 而不合理。

是以 $A\hat{B}\Omega$ 不能大於 $A'\hat{B}'\Omega'$, 因而此二角相等。

5. 如線節 AB＝線節 A′B′, 在 A, B 之角相等, 在 A′, B′ 之角亦相等, 則在 A, B, A′, B′ 四處之角均爲互等。

如在 A 之角, 異於在 A′ 之角, 則必有一者較大, 命此較大者爲 A.

在 A, B 各作半射線, 使與 AB 所成角, 等於在 A′ 之角。

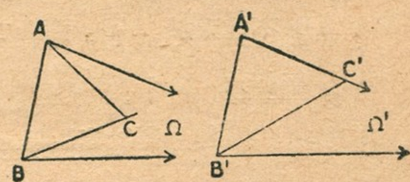


圖 24.

則此等半射線必相交, 設其交點爲 C.(13)

(13) 因過 A 之半射線, 必與 BΩ 交於一點 D. 按帕希公論, 即知過 B 之半射線, 必與 AD 相交。

在 $A'\Omega'$ 上截取 $A'C'=AC$, 而連 $B'C'$.

三角形 $ABC, A'B'C'$ 爲合同形,因之

$$A'\hat{B}'C'=A\hat{B}C=A'\hat{B}'\Omega'$$

而歸於謬妄。

故在 A, A' 之角相等,因之在 A, B, A', B' 諸角互等。

6. 如在 A, A' 之角相等, 在 B, B' 之角亦等則線節 $AB=$ 線節 $A'B'$.

如 AB 不等於 $A'B'$, 則二者必有一較長, 命此較長者爲 AB.

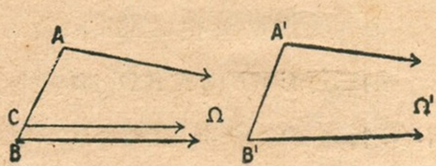


圖 25.

在 AB 上,截取 $AC=A'B'$, 而作 $C\Omega$ 平行於 $A\Omega$.

則按(4),知 $A\hat{C}\Omega=A'\hat{B}'\Omega'=A\hat{B}\Omega$

但據(3),則又有 $A\hat{C}\Omega>A\hat{B}\Omega$

故 AB 不能大於 $A'B'$, 而此二者必相等。

§27. 平行角

由 §26. (4) 即知對於等距離之平行角必相等。

更據此結果,與 §26. (3) 合言之,則有

當　$p_1>p_2$ 時,　$\pi(p_2)>\pi(p_1)$

此後 (§41) 更將述已知線段,求其相應平行角,及已知一銳角, (§45), 求其相應距離之法。

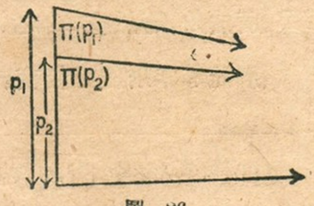


圖 26.

如是可知

當 $p_1=p_2$時, $\Pi(p_1)=\Pi(p_2)$.

$p_1>p_2$時, $\Pi(p_1)<\Pi(p_2)$.

$p_1<p_2$時, $\Pi(p_1)>\Pi(p_2)$.

且有 $\Pi(0)=\frac{\pi}{2}$ (14)

$\Pi(\infty)=0$ (15)

爲簡便起見,常用下之記法。

$$\alpha=\Pi(a),\qquad \beta=\Pi(b)\text{等。}$$

又如已知線節 a, 能求 α, 則可得 $\frac{\pi}{2}-\alpha$, 對於 $\frac{\pi}{2}-\alpha$, 亦有相當之平行距,爲簡便計,此補節(Complementary Segment)常以 a' 記之。

如是則有 $\Pi(a')=\frac{\pi}{2}-\Pi(a)$

又羅氏有言曰『當 p 爲負數時, $\Pi(p)$ 所表之意義, 可完全自由定之,故可假設

(14) 由上所述,可見 $\Pi(p)$ 爲 p 之減函數(Decreasing Function).換言之,卽 p 之値減小時, $\Pi(p)$ 之値增大,但在 §22 已證明 $\Pi(p)$ 常爲銳角,故 $p\to o$ 時 $\Pi(p)$ 趨於一極限,小於 $\frac{\pi}{2}$ 或等於 $\frac{\pi}{2}$.

此極限値不能小於 $\frac{\pi}{2}$, 否則對於介乎此及 $\frac{\pi}{2}$ 間之一値,常能求出其相當線節 p, (見後 §45),換言之,卽當 $p\to o$ 時, $\Pi(p)$ 能超過任何小於 $\frac{\pi}{2}$ 之定角,是以其極限値爲 $\frac{\pi}{2}$.

(15) 又 $p\to\infty$ 時, $\Pi(p)$ 之値漸小,但依問題之性質,應常爲正,故必趨於一極限値,大於或等於零。

此極限不能大於零,否則對於介乎此及零間之一値,常能求出其相當線節 p, 換言之,卽當 $p\to\infty$ 時, $\Pi(p)$ 能小於任何小之正角,是以其極限値爲零。

$$\Pi(p)+\Pi(-p)=\pi''^{*}$$

§28. 薩氏四邊形

圖 27.

四邊形在 A, B 二點爲直角，而有等邊 AC, BD 者。稱爲薩氏四邊形，薩氏常用此以討論其平行原理，已如前述。

在薩氏四邊形中，如直角與底相隣，則二上角爲相等之銳角底邊之中垂線亦爲對邊之中垂線。

設 AC 及 BD 爲相等二邊，在 A, B 之角爲直角。

設 E, F 各爲 AB, CD 之中點。

連 EF, CE 及 DE.

則三角形 ACE, BDE 爲合同形，而 CFE, DFE 亦爲合同形。

故在 C, D 之角相等，且 EF 爲 AB, CD 之公垂線。

且在 C, D 之角均爲銳角。

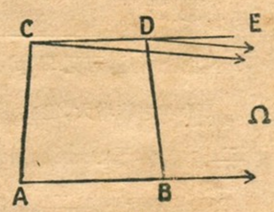


圖 28.

欲證此層，可自 C, D 作 CΩ, DΩ 平行於 AB.

按 §26(4), $A\hat{C}\Omega=B\hat{D}\Omega$.

延長 CD 至於 E. (見圖28)

按 §26(3), $E\hat{D}\Omega>D\hat{C}\Omega$.(13)

---

* Geometrische Untersuchungen §23.

(16) 故 $$E\hat{D}\Omega+B\hat{D}\Omega>D\hat{C}\Omega+A\hat{C}\Omega$$

即 $$E\hat{D}B>A\hat{C}D$$

由是即易推得下之結果。

因　$A\hat{C}D=B\hat{D}C$.　　故　$E\hat{D}B>B\hat{D}C$

是以 $A\hat{C}D$ 及 $B\hat{D}C$ 均爲銳角。

§**29.** 在四邊形 ABDC 中，在 A, B 之角爲直角，而 AC 大於 BD，則在 C 之角小於在 D 之角。

因已知 $AC>BD$. 故可在 AC 上截取 $AE=BD$. 然後連結 ED.

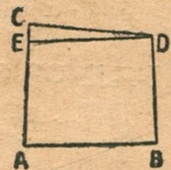


圖　29.

按 §28. 有　$A\hat{E}D=B\hat{D}E$

但　$A\hat{E}D>A\hat{C}D$　而　$B\hat{D}C>B\hat{D}E$.

故　$B\hat{D}C>A\hat{C}D$.

用間接證法，甚易證明此題之逆，卽當在 A, B 之角爲直角時，$AC \gtreqless BD$ 因 $A\hat{C}D \lesseqgtr B\hat{D}C$ 而定。

§**30.** 如 ABDC 爲一四邊形，在 A, B, C 之角均爲直角，則在 D 之角，必爲銳角。

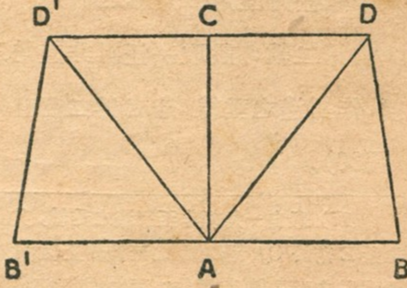


圖　30.

延長 BA 過 A 以至於 B′，使 $AB'=AB$. (圖30)

作 $B'D'$ 垂直於 $B'A$，而長等於 BD.

連 CD', $D'A$ 及 DA.

由合同三角形 $D'B'A$, DBA，有

$$D'A=DA.\quad 且\quad D'\hat{A}B'=D\hat{A}B.$$

故 $D'\hat{A}C=D\hat{A}C$，而三角形 $D'AC$. DAC 爲合同形。

是以 $D'\hat{C}A$ 爲一直角，而 CD, CD′ 成一直線。

對於四邊形 D′B′, BD 應用 §28 之結果，即知在 D′, D 之角均爲銳角。

§31. 任何三角形之內角和，均小於二直角

第一款：設三角形 ABC 爲一直角三角形內 $C=90°$

在 A 點，作 $B\hat{A}D=A\hat{B}C$.

自 AB 之中點 O, 對於 CB, AD 各作垂線 OP, OQ.

如是則三角形 POB, AOQ 爲合同形，故 OP, OQ 成一直線。

故四邊形 ACPQ 在 C, P, Q 之角，均爲直角。

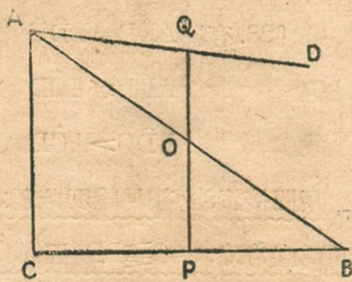


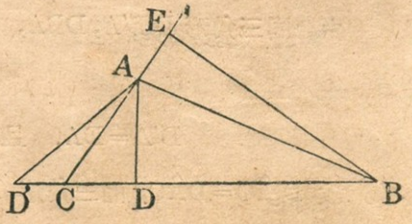
圖 31.

按 §30. 知在 A 之角 $C\hat{A}D$ 必爲銳角。

故任何直角三角形之內角和，均爲小於二直角。

第二款：設取一任何非直角三角形對於任何三角形至少可自一角頂，作對邊之垂線，分之爲二個直角三角形，此作法常爲可能之事。(17) (圖30)。

(17) 設自一角頂作至對邊之垂線，其垂趾 E 落於 CA 過 A 點之延長線上(如在過 C 點之延長線上，證法亦同)。則因三角形之外角，必大於內對角，故 $C\hat{A}B$ 爲鈍角。今自 A 向對邊作垂線，則其垂趾必在對邊 BC 線節之內。因苟在對邊之外如 D′, 則在直角三角形 AD′B 中在 D′ 之角爲直角。在 A 之角大於 $C\hat{A}B$ 而爲鈍角。故其內角和必大於二直角，而與第一款中已證明者不合。



設 AD 爲所述之垂線，而命諸角爲 α, α'', β, γ 如圖。

則 $A+B+C=(\alpha'+\beta)+(\alpha''+\gamma)$

但 $\alpha'+\beta<$ 一直角，且 $\alpha''+\gamma<$ 一直角

故 $A+B+C<$ 二直角。

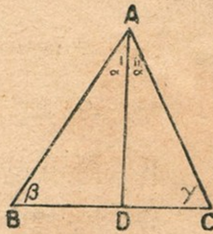


圖 32.

吾人宜注意在此證明中，幷未用及亞氏設論。

三角形內角和與二直角之差。稱爲此三角形之角欠(Defect).

枝理　二三角形，如諸角各各相等，則必爲合同形。

吾人甚易證明(18)如有若此之二三角形存在，則可得一四邊形，其內角和爲四直角，於此上須從一三角形中，割去與他三角形合同之部分卽明。但如每一三角形之內角和小於二直角，則一四邊形之內角和不能等於四直角。

§32. 離線(Not-intersecting Lines).

按歐氏幾何原理第一卷十六題之外角定理，可斷如二直線有一公共垂線，則不能相遇。且二者亦不能平行，因如此又與喜氏公理相背也[比較 §26(3)]。

此題之逆亦眞，卽

如二直線不相交，亦不平行時，則必有一公共垂線*

設 a, b 爲已知二直線，不相交，亦不平行。

在 a 上任取 A, P 二點，作 AB, PB′ 垂直於 b.

* 此係喜氏證法，見幾何學之基礎 p. 162.

(18) 證明之詳細步驟，見本書附錄 —1。

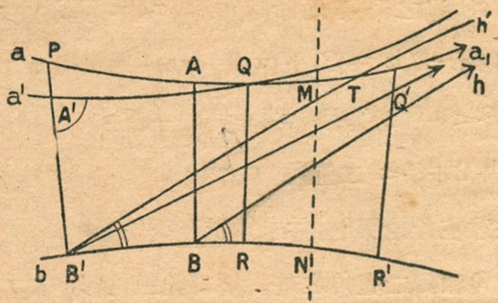


圖 33.

如 AB=PB′, 則按 §28 可知有一公共垂線存在,故只須討論 AB 不等於 PB′ 之情形即足。

設 PB′ 爲二者中較大者。

在 PB′ 上截取 A′B′ 使 A′B′=AB.

自 A′B′ 直線上 A′ 點,如 AB 所在之一側, 作半射線 a′, 使其與 A′B′ 所成之角等於 a 或 PA 之延長線與 AB 所成之角。

今請證 a′ 必與 a 相遇。

設以 a_1 記半射線 PA, 過 B 點作半射線 h 平行於 a.

因 a, b 爲離線,故半射線 h, 必在 BA 及 B′B 延長線所範之區域內。

過 B′ 作半射線 h′, 其在 B′A′ 之一側,與 h 在 BA 之側相同,且其與半射線 B′B 所成之角,等於 h 與 B′B 延長線所成之角。

按 §26(3), 可知自 B′ 所引與 h 及 a_1 平行之線,在 h′ 及 B′B 所範之區域內。

故 h′ 必與 a_1 相遇。

命此交點爲 T.

因 a' 平行於 $B'T$, 故半射線 a' 必與 PT 相遇（帕希公論）。

設半射線 a_1, a' 之交點爲 Q.

自 Q 作 QR 垂直於直線 b, 且在直線 b 上, 自 B' 向 B 之延長線中, 截取 BR' 等於 $B'R$.

同法, 在直線 a 上, 自 P 向 A 之延長線中, 截取 AQ' 等於 $A'Q$,

如是則得一四邊形 $ABR'Q'$, 爲 $A'B'RQ$ 之合同形。

故 $QRR'Q'$ 爲一薩氏四邊形, 而連結 QQ', RR' 二者中點之線卽爲 a, b 之公共垂線。

§33. 二平行線漸相趨近, 而二者間之距離, 終可小於任何預定之長度。[(19)]

設 a, b 爲二平行線。

在 a 上任取 P, Q 二點, 而以 PQ 爲諸線之平行向。

自 P, Q 作至 b 之垂線 PM, QN.

平分 MN 於 H, 在此作 b 之垂線。

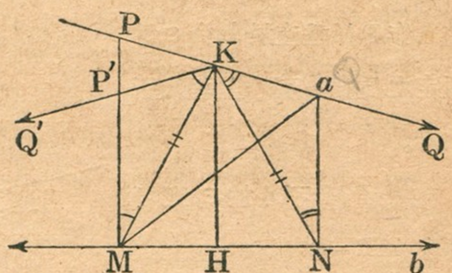


圖 34.

則此線必交線節 PQ 於一點[(20)]; 設此交點爲 K.

---

(19) 平行線之漸近性 (Asymptotic Property).

(20) 此垂線過三角形 MNQ 之一邊 MN, 而爲 NQ 之離線 (§32), 故不與 NQ 交, 而必與 MQ 交。是此線過三角形 PQM 之一邊 MQ, 又爲 MP 之離線, 故不與 MP 交, 而必與 PQ 交。

自K作b之他向平行線a'.

因此半射線在三角形PKM內,(21)而經過頂點K,故必與PM相交。

設其交PM於P'.

因三角形KHM,KHN為合同形,而$H\hat{K}P'=H\hat{K}Q$,故易證明P'M等於QN(22)

但P'在線節PM上。

是以PM大於QN,而得證明當一點在a'順平行向移動時,其至b線上之距離逐漸減少。

次乃證題第二層。

設a,b為二平行線如前,P為a上任意一點。

作PM垂直於b,命ε為預定之長度,可小至吾人所欲者。

如PM不小於ε,則可截取MR=ε.

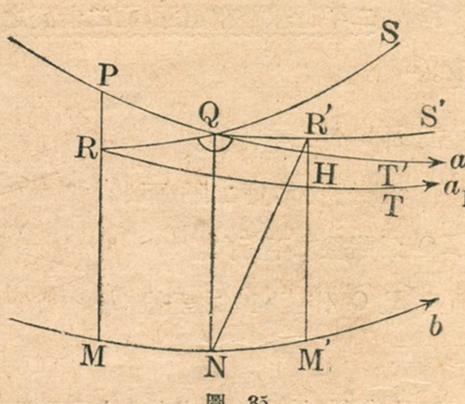


圖 35.

(21) 因二向之平行角為相等之銳角,故a'在KP,KH所範之區域內,且a'必在KP,KM所範之區域,否則將在KM與KH所範之區域內,而必與HM相遇矣。

(22) 三角形KHM,KHN為合同形,故MK=NK,又$H\hat{K}M=H\hat{K}N$,$K\hat{M}H=K\hat{N}H$,故$M\hat{K}P'=N\hat{K}Q$,$K\hat{M}P'=K\hat{N}Q$.故三角形KMP',KNQ為合同形,而P'M等於QN.

過R作半射線 a_1(卽RT),順同向與 a, b 平行。

過R作半射線RS垂直於MR.

因 $P\hat{R}T$ 爲鈍角,故RS必與半射線a相遇。(23)

設其交點爲 Q, 作QN垂直於 b.

直線RQS及b有一公共垂線。

故二者爲離線。

是以 $N\hat{Q}R$ 必較關於距離QN之平行角爲大,

在Q點,作 $N\hat{Q}S'=N\hat{Q}R$.

則 $N\hat{Q}S'>N\hat{Q}T'$, T' 爲PQ延長線上任意一點。

在直線b上,依從M至N之同向,截取 $NM'=NM$, 且在 QS' 上截取 $QR'=QR$.

連 R'M'.

則 R'M' 爲b之垂線,(24) 而與半射線PQ相遇於R'及M'間之一點。(25)

命交點爲H.

則 $M'H<M'R'$, 而 $M'R'=MR$.

如是已得a上之一點,至其b之距離,較已知長度 ε 爲短。

§34. 二離線間之最短距離爲其公共垂線,沿任一線上自是垂趾向二端移動,至其他線上之距離,逐漸增加。

---

(23) $P\hat{R}T$ 爲鈍角,故 RS 在 PRT 區域內,按 §26 (1) 知 RS 與半射線 a 相遇。

(24) 因四邊形 MNQR, M'NQR' 爲合同形故。

(25) 與第一層中 HK 必與 PQ 相遇之證法相倣。

設二離線 a, b 之公共垂線，交此二線於 A, B.

設 P, Q 爲一線上二點，在A點同側，且 $AP<AQ$.

作 PM, PN 垂直於他一線。

則在四邊形，ABMP 中，A爲直角，而 $A\hat{P}M$ 爲銳角(§30)。

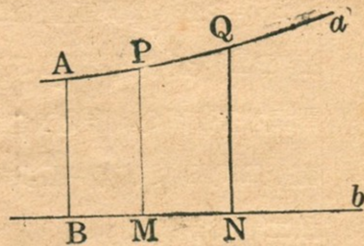


圖 6.

故 $PM>AB$(§29)

又在四邊形PQMN中，$M\hat{P}Q$爲鈍角，而 $P\hat{Q}N$ 爲銳角。

故 $QN>PM$.

如是可知當一點沿半射線APQ……移動時，其至b點之距離漸增，而較在A點之距離爲大。

吾人又可證明二平行線∨平行方向而行時，其間距離愈去愈遠，二相交直線，則去交點愈遠時距離亦愈遠，且對於相交線，或平行線依反平行向而行時，或離線，其距離可大於任何預定之量。(26)

§33–4 中之定理，羅氏均曾證明，載所著 New Principles of Geometry with a complete Theory of Parallels（恩格里譯本）§108 以後。

§35. 直角三角形及三直角四邊形二種圖形之相應

設直角三角形ABC內C爲直角，其邊依常法記以 a, b, c, A, B 二角各以 λ, μ 記之；與平行角 λ, μ 相應之距離爲 l, m. 在 a, b, c, l, m, λ, 及 μ 諸量間。有一定之關係存焉。

(26) 諸理之證明，均載本書附錄–2.

又在三直角之四邊形中，餘一角必爲銳角，其諸元素間，亦有種種關係。

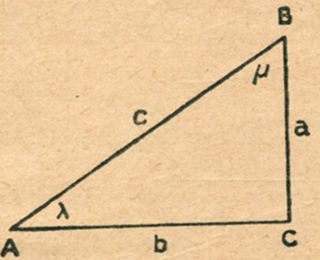


圖　37.

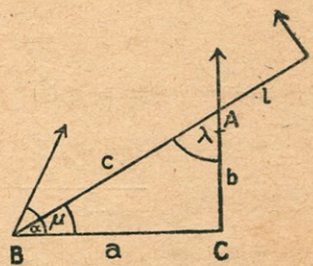


圖　38.

今將求出凡此諸量之關係方程式，且使二種圖形間成立一種重要之相應性質。

I. 直角三角形。

設ABC爲任意直角三角形，延長斜邊，過A而達於一距離l，在線節l之他端，作CA之平行線。(27) 且過B點作一線與二者平行。

按圖 38 則有

$$\mu+\Pi(c+l)=\Pi(a)=\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

同理可得

$$\lambda+\Pi(c+m)=\Pi(b)=\beta \cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

復過A作BC之平行線(如圖39)。

又作c之垂直線，且與BC依同向平行者。此線必與弦或其延長線

(27) l 爲 λ 之相當線節，故此平行線，與 l 垂直。(此種記法據 §27 之規定)。

相交，一視 m 之小於或大於 c 而定。(28)

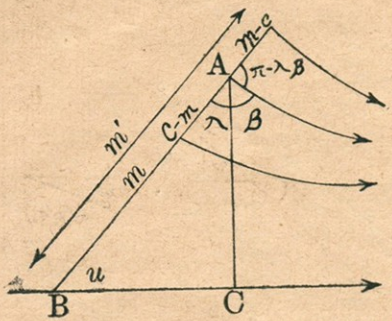


圖 39.

如 $m<c$，則有

$$\lambda+\beta=\Pi(c-m) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

如 $m>c$，則有

$$\pi-\lambda-\beta=\Pi(m-c)$$

按 §27 所述之普通記法則，後式亦化爲

$$\lambda+\beta=\Pi(c-m)$$

同理可得 $$\mu+\alpha=\Pi(c-l) \cdots\cdots\cdots\cdots (2')$$

終乃延長 CB 過 B 點，幷作 CB 延長線上之垂線而與 AB 平行者（如圖 40）又延長 AC 過 C，且作平行於 AB 而與 AC 垂直之線。(29)

(28) 本節可改述如下，似較易明：

在半射線 BA 或其延長線上，截取距離 m，在線節 m 之他端，作 BC 之同向平行線，則此平行線必與 BC 垂直。

(29) 本段可改述如下，似較易明：

終乃延長 CB，過 B 而達於距離 m，在線節 m 之他端作其垂線，則必平行於 AB. 又因關於平行角 λ 之距離 l 必大於 b，否則在該線節他端之垂線，將在三角形 ABC 內，且爲 CB 之離線，而必與 AB 相遇矣。故吾人可在 AC 向 C 之延長線上截取一距離等於 l. 在他端作 AC 之垂線，卽爲 AB 之平行線。

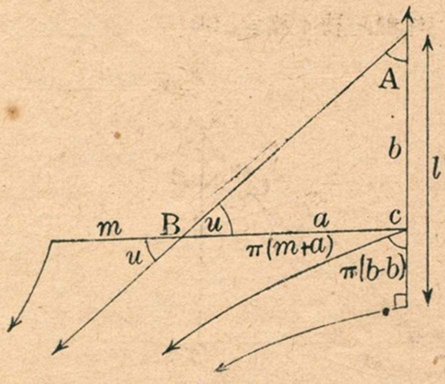


圖 40.

如圖 40, 作過 C 而平行於 AB 之直線,則易知

$$\Pi(l-b)+\Pi(m+a)=\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

同理更有

$$\Pi(m-a)+\Pi(l+b)=\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

II. 有三直角一銳角之四邊形

設 P Q R S 爲一四邊形,以 P, Q, R 爲直角。其四邊以 a_1, l_1, m_1', c_1 表之,其故觀下文自明,一銳角以 β_1 表之, l_1, c_1 爲含此 β_1 角之邊。

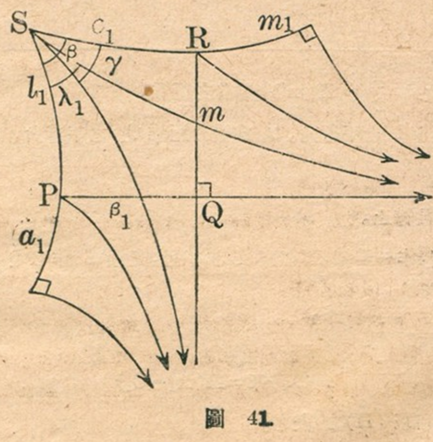


圖 41.

延長 c_1 過 R_1 而達於距離 m_1,(30) 而在此線節之他端,作其垂線,故 $\Pi(m_1)+\Pi(m_1')=\frac{\pi}{2}$,故可知此垂線必與PQ平行(如圖41)。

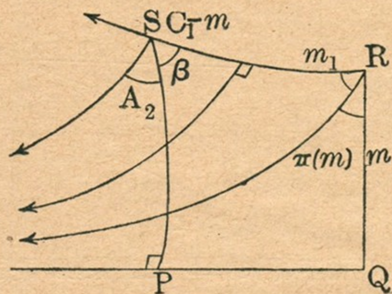


圖 42.

是以 $\lambda_1+\Pi(c_1+m_1)=\beta_1$ ....(I)

同理 $\gamma_1+\Pi(l_1+a_1')=\beta_1$(31) ....(I′)

在RS上(32) 截取線節 m_1; 則由圖 42 易知

$\lambda_1+\beta_1=\Pi(c_1-m_1)$(33) ....(II)

---

(30) m_1 爲與平行角 $\frac{\pi}{2}-\Pi(m')$ 相當之距離。

(31) λ_1 爲關於距離 l_1 之平行角。γ_1 爲關於距離 C_1 之平行角, a_1' 爲關於平行角 $\frac{\pi}{2}-\Pi(a)$ 之距離。

(32) 或 RS 之延長線上。

(33) 在 m_1 他端,作一垂線,則必與 PQ 平行,又過 S 作 PQ 之平行線,卽易證得當 $C_1>m_1$ 時有 (II) 式。

如 $m_1>c_1$ 時,則可證得

$$\pi-\lambda_1-\beta=\Pi(m_1-C_1)$$

但按 §27 之記法此式可以 (II) 式表之。

同理可得　$\gamma_1+\beta_1=\Pi(l_1-a_1')$ ……………………(II′)

終乃在ＱＰ上截取線節 m_1，及ＰＳ之延長線上，截取線節b_1，(34) 而在此等線段之端點作垂線。(35)

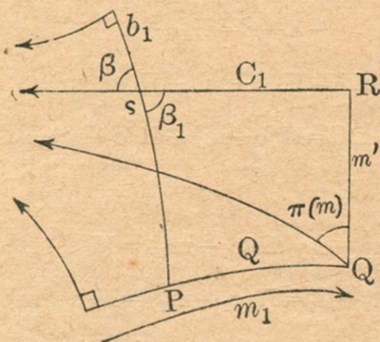


圖 43.

因是有

$$\Pi(l_1+b_1)+\Pi(m_1-a_1)=\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III})$$

同理可得　$\Pi(c_1+b_1)+\Pi(a_1'-m_1')=\frac{\pi}{2}$ ……………………(III′)

III. 至是乃可論二形之相應性矣。

一直角三角形中，如已知Ｃ與 μ 卽可完全確定，而有上述性質之四邊形，可由 c_1, m_1' 確定之。

(34) b_1 爲關於 β_1 之相當線節。

(35) 此等垂線，均與 RS 平行。

設 $c_1=c$ 及 $\Pi(m_1')=\frac{\pi}{2}-\mu$

故 $m_1=m.$(36)

則由 (1′) 與 (2) 得

$$\lambda+\beta=\Pi(c-m)$$

$$-\lambda+\beta=\Pi(c+m)$$

而有 $$2\lambda=\Pi(c-m)-\Pi(c+m)$$

$$2\beta=\Pi(c-m)+\Pi(c+m)$$

但由 (I) 與 (II)

$$\lambda_1+\beta_1=\Pi(c_1-m_1)=\Pi(c-m)$$

$$-\lambda_1+\beta_1=\Pi(c_1+m_1)=\Pi(c+m)$$

故 $$\lambda_1=\lambda \quad 及 \quad \beta_1=\beta$$

由 (III) 式及 (3′), 可得

$$\Pi(m-a)=\frac{\pi}{2}-\Pi(l+b)$$

$$\Pi(m_1-a_1)=\Pi(m-a_1)=\frac{\pi}{2}-\Pi(l_1+b_1)=\frac{\pi}{2}-\Pi(l+b)$$

是以 $$m-a_1=m-a,$$

而 $$a_1=a$$

吾人乃得一重要結論如次:

如 $a, b, c, (\lambda, \mu)$ 爲一直角三角形之五元素,則有一四邊形存在,有三直角及一銳角,其邊依次爲 c, m', a 及 l_1 而銳角 β 含於 c 與 l

(36) 因 $\Pi(m_1')=\frac{\pi}{2}-\Pi(m)$. 但 $\Pi(m_1')=\frac{\pi}{2}-\Pi(m_1)$, 故 $\Pi(m_1)=\Pi(m)$, 按 §27 知 $m_1=m$.

二邊內。*

此定理之逆亦能成立。

§36. 相輔直角三角形之連環系

如上所述對於含 $a, b, c, (\lambda, \mu)$ 之直角三角形有一含三直角之四邊形與之相應,餘一角爲銳角 β, 含於 c, l 二邊內,他二邊爲 a 及 m'.

設將 c, l 互換, m', a 亦互換,則仍爲原四邊形,(37) 是以對於已知三角形,以 $a, b, c, (\lambda, \mu)$ 爲元素者,必有他一直角三角形存在,其元素 $a_1, b_1, c_1, (\lambda_1, \mu_1)$ 爲

$$a_1 = m', \ b_1 = b, \ c_1 = l, \ \lambda_1 = \gamma, \ \mu_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

故由直角三角形

---

* 上述之結果,羅氏曾於其初期著作 On the Principles of Geometry 一書中論及〔見恩格爾氏(Engel)譯本 §11, 16〕, 但其證明須依據非歐立體幾何學之定理,此處所採者乃李布曼 (Liebmann)之證法〔見 Math. Ann, vol, lxi, p. 185. (1905 年) 或 Nichteuklidische Geometrie 第二版 §10〕, 僅用平面幾何學, 以證直角三角形與三直角四邊形相應者,氏爲第一人。

此步發展極爲重要,因平行線作法, 須賴於此種相應性, 至是非歐平面幾何學及三角學本身始稱完備。

後文 (§45) 更將指明對於已知之任意角,其相當線節常能存在,此理之樹立, 且不須用連續原理,而羅氏之證法中,則有賴乎此。故在上之證明中,雖假設已知 $\Pi(p)$ 存在, 而三角形與四邊形之對應性,仍與連續無關。

(37) 但其相應三角形之五元素則爲

$$m', \ b, \ l, \ (\gamma, \ \frac{\pi}{2} - \alpha).$$

$$a,\ b,\ c,\ (\lambda_1\ \mu) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

可得他一直角三角形,其元素爲

$$m',\ b,\ l,\left(\gamma, \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

如將此三角形之諸腰及對角,同時對換。即書之爲

$$b,\ m',\ l,\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \gamma\right)$$

時,可得另一直角三角形,其元素爲

$$c',\ m',\ a',\left(\lambda, \frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

書爲 $$m',\ c',\ a',\left(\frac{\pi}{2} - \beta, \lambda\right)$$

即得他一三角形,含下列元素:

$$l',\ c',\ b',\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \mu\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

由是又可推得三角形

$$l_1'\ a_1\ m_1\left(\gamma_1 \frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

最後由此引出

$$b,\ a,\ c,\ (\mu,\ \lambda) \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

仍爲原三角形。

此等三角形元素間之關係,可列爲一規則如次:

設 $a, b, c, (\lambda = \Pi(l), \mu = \Pi(m))$ 爲一直角三角形之腰,弦,及腰之對角,將 a', l, c, m, b', 輪次書於一五邊形之邊上。若自任何邊起,依同序,或逆序,書 $a'_r, l_r, c_r, m_r, b'_r$, 於各邊上,取同邊上有無足號之二元素使之相等,則可陸續求得相輔三角形連環系中之六個三角形。

例如按圖 44 可得

$a'_r = l.$　卽　$a_r = l'$;

$b_r' = a'$,　卽　$b_r = a$;

$m_r = b.$　卽　$\mu_r = \frac{\pi}{2} - \beta$;

$c_r = m$,

$l_r = c.$　卽　$\lambda_r = \gamma$;

而爲上述之三角形(5).

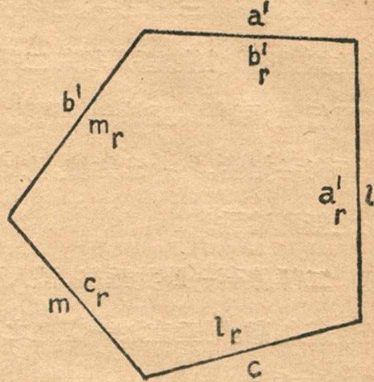


圖 44.

此種結果,對於某種作圖題,頗有關係,例如已知斜邊 c, 一股 a, 求作一直角三角形,普通作法,須設圜與直線相交;此假設卽以連續原理爲依據者也。但對於三角形 $a, b, c, (\lambda\ \mu)$; 有三角形 $l', a, m, \left(\gamma, \frac{\pi}{2} - \beta\right)$ 輔之,在此三角形中,已知一邊 a,及二隣角 $\gamma, \frac{\pi}{2}$;而可不藉此假設以求作。由相輔三角形,可得所求三角形之第二邊 b, 此處之論證,須藉後文 §§41–3 中所證明之定理, 卽已知 p, 可求 $\Pi(p)$, 及 §45 中所證已知 $\Pi(p)$ 可求 p 之理。

§**37**. 常(Proper)點與隱(Improper)點

在歐氏平面上,二直線或相交,或平行,如言二平行線爲交於『無窮遠點』,而設每直線有一『無窮遠點』。在平面上補充此等假(Fictitious)點或隱點,此後卽可謂面上二線,常交於一點。

有此了解則歐氏平面上,有二種線束 (Pencil): 普通線束以一常點(卽普通點)爲頂,而與一直線平行之一羣線,亦可視爲一線束, 以一隱點爲頂。

在此非歐幾何學中,將隱點加入平面中,亦頗有便利處。共面之二

直線，必爲下述三類之一，二線或如普通所謂之相交，或平行；或有一公共垂線，而爲離線，吾人須加二種假點或隱點，以與第二第三兩類相應。二平行線，可視爲交於一無窮遠點，而每直線上，均有二無窮遠點，與二平行向各相當。與一已知線，依同向平行之一切直線，有一公共點，即其上之無窮遠點。

二離線有一公共垂線，吾人可設二線交於一臆點，(Ideal point).與此垂線相應。同垂直於一直線之一切線，可視之爲在與此公垂線相應之臆點相交。

此後之常點——即普通點——以普通大寫字母表之，如 A. 隱點——即無窮遠點——以希臘大寫字母表之如 Ω; 而他種隱點——即臆點——以希臘大寫字母附有足號以表之，如 Γ_c.(38)

如是在羅氏平面（英語作 Hyperbolic plane）上，任意二線，可定一束線（Pencil）如下：

（1）如二線交於一普通點 A, 則此束線爲經過 A 點之直線族。

（2）如二線平行，而交於隱點 Ω, 則此束線爲面上之同向平行線族。

（3）如二線垂直於直線 c, 則交於一臆點，可以 Γ_c 記之。此束線爲直線 c 之一切垂直線所成線族。

§38. 今將羅氏平面上二點所定直線之各種情形及其作圖法臚列於下：

（1）二普通點 A, B, 連此等點所成直線之作法，已含於普通幾

(38) 足號所以表與此臆點相關之線〔見(3)〕。

何之假設中

（2）一普通點［A］及一無窮遠點［Ω］。過A作一直線，與含Ω之直線平行，且依Ω之相當方向，卽得AΩ，此題作圖法見下文§§41–3.

（3）一普通點［A］及一臆點［Γ_c］。過A作一直線，與表此臆點之直線c相垂直卽得。

（4）二無窮遠點［Ω,Ω'］，直線$\Omega\Omega'$爲$\Omega_1\Omega'$所在之直線之公共平行線，此二已知直線，不互爲平行，否則$\Omega_1\ \Omega'$爲同一無窮遠點矣。此直線之作法，可見下文§44.

（5）一臆點［Γ_c］及一無窮遠點［Ω］之不在該臆點之代表線c上者。直線$\Gamma_c\Omega$依Ω所定之方向與之平行，復與表臆點之線c垂直，其作圖法，見下§45.

（6）二臆點$\Gamma_c,\Gamma_{c'1}$］而直線c, c'不相交。亦不平行，則直線$\Gamma_c\Gamma_{c'1}$爲二離線c, c'之公共垂線，其作法已於§32中述及。

但亦有二點不能定一普通直線者，附述如次：

(i) 一臆點及在其代表直線上之一無窮遠點。

(ii) 二臆點，其代表直線，相交於一普通點，或平行者。*

§**39**. 由上述之記法，歐氏幾何學中三角形諸邊中垂線，分角線，高線均爲共點線之理，在此非歐幾何學中，亦能成立，所謂直線相交者，乃

* 在不依據平行論之射影幾何學(Projective Geometry)中，就基礎內加入二種新元素，稱爲隱線，臆線者，以別於普通之常線，卽可免去此困難，讀者可參閱波諾拉書英譯本中附錄四。(39)

(39) 此附錄中論此新元素之一部份已編譯入本書附錄一8中。

指定 §§37, 38 中之廣義而言，又言三角形之頂點時，不必卽爲常點，§26 中所研究之圖形，亦爲一三角形，有一頂點爲無窮遠點，該節中之諸定理，頗多與普通三角形中之理相類。

關於三角形中共點線之定理，今取三邊中垂線一例論之如次：

三角形各邊之中垂線，相交於一點。

設三角形 ABC 中，D, E, F 各爲 A, B, C 對邊之中點。

第一款：設二中垂線交於常點，則第三中垂線亦必過此。其證明係依據關於合同形諸定理，與歐氏幾何中者相同，

第二款：設 D, E 二點之垂線爲離線，而 D′E′ 爲二者之公共垂線。

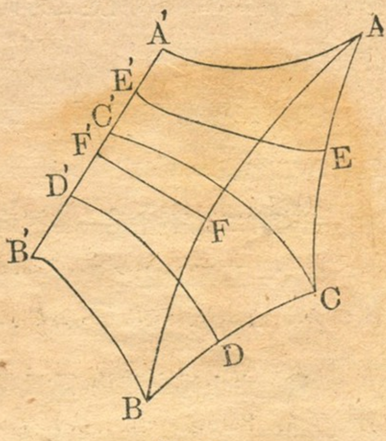


圖 45.

從 A, B, C 作至 D′ E′ 之垂線 AA′, BB′, CC′.

則不難由合同三角形以證(40)

$$AA' = CC' \text{ 及 } BB' = CC'$$

因而　　$AA' = BB'$

設 F′ 爲 A′B′ 之中點。

按 §28 可知 FF′ 與AB及 A′B′ 二者垂直。

---

(40) 四邊形 AA′ E′ E, CC′ E′ E 各有三直角，且有夾直角之二邊，各各相等，按 §36，知二者之相應直角三角形中，斜邊及銳角，各各相等。故二直角三角形爲合同形。因之，此二四邊形，亦爲合同形。是以 AA′=CC′. 同理 BB′=CC′.

故在此情形中，諸邊之中垂線，交於一臆點。(41)

第三款：今僅有過 D, E 二點而與邊垂直二線相平行之一種情形，未曾論及。由第一第二兩款，可知過 F 點與第三邊垂直之線，不能與其他垂線之一交於普通點，或臆點，(42) 故此第三中垂線，必與前二線依同向平行；或與一線依一向平行，而與他線依逆向平行。

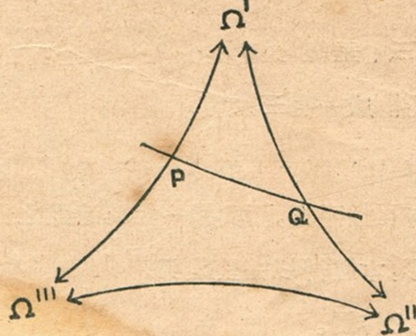


圖　46.

今請證第二事爲不可能，因之第一事必爲眞確。

當一三角形之諸頂點，均在無窮遠處 (Ω', Ω'', Ω''') 時。一直線不能盡與三邊相交。因苟一直線與二邊相交於 P, Q，則直線 PQ 延長時，必爲過 Q 之一半射線，而不與他邊相交者。

又如 BC 爲三角形最長之一邊，則在 A 處之角最大。

於是作 $C\hat{A}P = A\hat{C}B$，則 AP 之延長線，必與 BC 相交。

---

(41) FF′ 爲 AB 之中垂線，且與他二邊之中垂線 DD′, EE′ 同垂直於 A′B′ 而爲離線，卽三中垂線交於一臆點，以 A′B′ 爲其代表線。

(42) 否則餘一線亦必過此點，而不能與前者平行。

設二者之交點爲 Q.

則 EQ 爲 AC 之垂線。

對於過 F 點之垂線，可依同理斷之。

故在 E, F 之垂線，均與 BC 相遇。

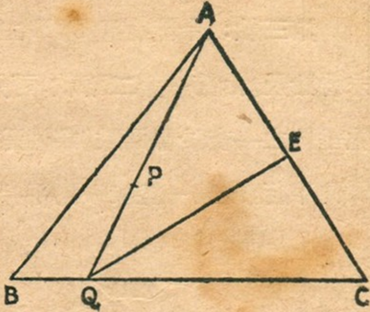


圖 47.

是則 BC 與三中垂線均相交，故三中垂線，不能構成一有三無窮遠頂點之三角形。

故諸線依同向互相平行，而共過一無窮遠點之隱點。

合此三種情形，本題得以完全證明。

§40. 平行線之作圖。

按喜爾柏特之平行公論，假設過任何直線外一點，常可能作二直線與之平行。換言之，卽對於任何線節 p，常有一平行角 Π(p) 與之相應。

關於平行線之作圖題如次：

1. 過已知點向一已知線之一端，作平行線。

2. 作一線與一已知線平行，且與他已知線之與其相交者垂直。換言之，卽

1. 已知 p 求 Π(p).

2. 已知 Π(p)，求 p.

關於此二問題，波爾業氏皆曾示其解法；羅氏亦曾論及其一。但在二氏之論證形式雖異，其實同以連續原理爲據。

在本書中討論雙曲線幾何學，不以連續原理爲依據。因此波氏之論證 (Appendix §§34, 35) 及羅氏之討論*均將略而不論。

§41. 從已知線外一點作其平行線——波氏之作法。

求過已知點 D，作已知直線 AN 之平行線。波氏之作法如次：

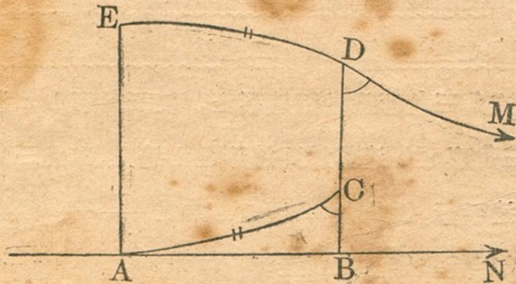


圖 48.

作 AN 之垂線 EA 及 DB（如圖 48）及 AE 之垂線 DE.

則四邊形 ABDE 中有三直角。其中 $E\hat{D}B$ 或爲直角，或爲銳角，視 ED 之等於或大於 AB 而定（參看 §29）

以 A 爲中心，與 ED 等長之半徑作一圓。

則此圓與 DB 交於一點 C，或與 B 相合，或介於 B, D 之間。

AC 與 DB 所成之角，爲與線節 BD 相當之平行角。

故作 $B\hat{D}M$ 等於 $A\hat{C}B$，則得 AN 之平行線。

波氏之證明，在此略去之故。已如上述；吾人須注意此種作法在歐

* 見羅氏 Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien, §23（哈爾斯忒德譯本 p. 135）中，或 New Principles of Geometry, §102.（恩格爾譯本）。

氏幾何學及二種非歐幾何學中均能適用；波氏謂此爲空間之絕對科學(The Absolute Science of Space) 中之方法。

§42. 在 §35 中曾論直角三角形與三直角一銳角四邊形之對應情形，由此立可推得波氏作圖法。

據前理可知對於直角三角形 a, b, c, (λ, μ)，常有一三直角及一銳角 β 之四邊形與之對應，含銳角之二邊爲 c, l, 他二邊爲 a, m'.

故如將此直角三角形置於四邊形上，使三角形中 a 邊與四邊形中之 a 邊相合，三角形之 b 邊落於四邊形之 l 邊上，則此三角形之弦，將與四邊形中 c 邊平行，因其與 m' 所成之角爲 $\frac{\pi}{2}-\mu$ 故也。(43)

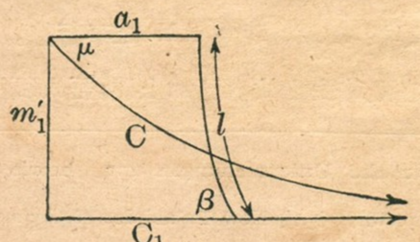
§43. 波氏平行線作法之別證。

下述之波氏作法之證明，乃李布曼氏所創者：*此證法中需用及(一) §4 中之定理二，即在二直線上，各取一組點 A, B, C,……, A', B', C',……而使 AB＝A'B', BC＝B'C',……時，線節 AA', BB', CC'……等之

---

* 見 Ber. d. k sächs. Ges. d. Wiss. Math. Phys. Klasse, vol. lxii. p. 35 (1910)；或 Nichteuklidische Geometrie (第二版) p. 35.

(43) 茲附一圖如右，以期上理易明。



中點軌跡,[44] 及(二)三角邊各邊中垂線,交於一點之理(見 §39)。

設 A 爲已知點, AF 爲 A 點至已知線之垂線。

本題乃在求作過 A 點與半射線 $A\Omega$ 平行之線。

設平行線 $A\Omega$ 爲已作出。

在 $A\Omega$, $F\Omega$ 上,截取等線節 AS 與 FD, 而連 SD.

設 M 及 M′ 各爲 AF, SD 之中點。

按 §4. 之理,[45] 知 MM′ 必平行於 $A\Omega$ 及 $F\Omega$.

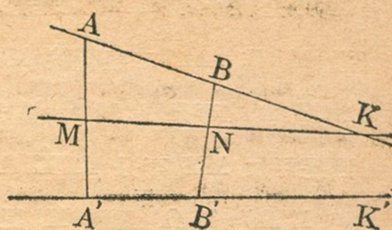
經過 A 點,作 AF 之垂線 $\Omega''A\Omega'$, 而將 M′M 向 M 延長。

---

(44) 由此軌跡題,可推得一枝理,爲本節之證明中所需用及者,茲述之如次:

設 A, A′ 距原二線交點等遠,或原二線平行時,則上述之軌跡經過原二線之交點(或爲常點,或爲隱點均可);反之,在此種情形下, 如一直線過此交點及諸線節之一之中點, 必爲此軌跡。

按帕希公論或 §26 (2) 知如 MN 不經過二線交點時,則必與其一相交。設 MN 交 AB 或其延長線於 K.



在他一線上依同側, 取 A′K′=AK, 則 MN 應經過 KK′ 之中點,故 MN 與 KK′ 應在一直線上。

但 K 及 K′, 應各在 A, A′ 與交點之間,或均在過交點之同向延長線上,因之 MN 與 KK′ 決不能相合。

又如一直線經過交點及 M, 則亦必經過 N, 因 MN 必過交點。而二點決定唯一之直線也。

(45) 須用譯註(第三章44)中所述之枝理。

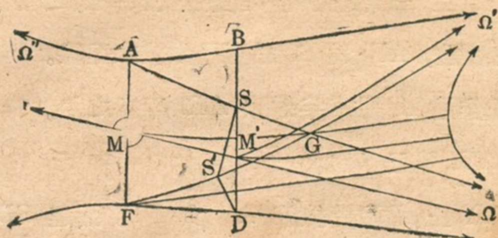


圖 49.

如是易見半射線 M'M 與 AΩ'' 線平行。(46)

過 F 作 AΩ' 之平行線 FΩ', 而設其與 AΩ 相交於一點(47) G.

在 FΩ' 上,截取 FS' 等於 AS. 連結 SS' 及 S'D.

則直線 GM 平分 SS' 而與之垂直,且垂直於直線 ΩΩ'.(48)

又 DS' 之中垂線平分 $D\hat{F}S'$, 故亦垂直於 ΩΩ'.

故此二中垂線,有一公共臆點,而 SD 之中垂線,亦必過此 (§39),換言之,則是線亦爲 ΩΩ' 之垂線。

過 M' 作 AΩ' 之平行線 M'Ω'.

$\Omega'\hat{M}'\Omega$ 之平分線,與 ΩΩ' 垂直,故即 SD 之中垂線。

因是可知 M'S 平分 $\Omega''\hat{M}'\Omega'$.

但 M'Ω'', M'Ω' 爲過 M' 點,而與 Ω''AΩ' 平行之線。

(46) 因 AM=MF, 故 Π(AM)=Π(AF), 而知此垂線與 MΩ 依逆向平行。

(47) 按 §26(1) 知 FΩ' 與 AΩ 必相交。

(48) $F\hat{A}\Omega$, $A\hat{F}\Omega'$ 同爲 AF 之平行角,故二者相等,因而 AG=GF, SG=S'G. 則按註(第三章44) 中之枝理,知 MG 必經過 SS' 之中點, 且此線將等腰三角形 GSS' 分爲二合同三角形、故 MG 亦爲 SS' 之垂線。又因其平分 $S\hat{G}S'$, 即 $\Omega'\hat{G}\Omega$, 故 MG 與 ΩΩ' 垂直。

故 M'S 與 $\Omega''A\Omega'$ 直線垂直。

而在作法中，係設 AS 等於 FD.

今將所得結果，表明如次：過 A 點作已知線 $a(F\Omega)$ 之垂線，又作 $A\Omega'$ 垂直於 AF. 在半射線 $F\Omega$ 上任意一點 D, 作 $A\Omega'$ 之垂線 DB. 則 DB 在平行線 $A\Omega$ 上截取之一段，與 FD 等長。

由是立可推出平行線作法，只須以 A 為心及與 FD 等長之半徑作圓弧。連 A 與此弧交 DB 之點，卽得平行線 $A\Omega$.

由喜爾柏特平行線存在之公論，吾人卽可斷此弧與此線必在 BD 之間相交一次，而無待於連續原理之助。*

§**44**. 求作二相交直線之公共平行線。†

設 $O\Omega$ 及 $O\Omega'$ 為二半射線 a, b, 相交於 O, 而所成角小於二直角。

在此二半射線上截取二等線節 OA 及 OB.

過 A 點作半射線 $O\Omega'$ 之平行線 $A\Omega'$, 過 B 點作半射線 $O\Omega$ 之半射線 $B\Omega$.

作半射線 a', b' 各平行 $\Omega\hat{A}\Omega'$ 及 $\Omega\hat{B}\Omega'$.

按 §26(4)，可知

$$O\hat{A}\Omega' = O\hat{B}\Omega.$$

* 在歐氏幾何原理中，不藉設論三：『已知中心及半徑，求作一圓』，亦可作卷一中之基本作圖題。自一已知點作一已知線之平行線，可化為 §3 中諸問題之一，但在雙曲線幾何學中，則需用作圖可能性之假設。

† 見喜氏書中 p. 163.

是以 $$\Omega\hat{A}\Omega'=\Omega\hat{B}\Omega'$$

$$\Omega\hat{A}E=\Omega'\hat{B}F=\Omega\hat{B}F$$

今請證半射線 a', b', 不相交亦不平行。

如爲相交,則設其交於 M.

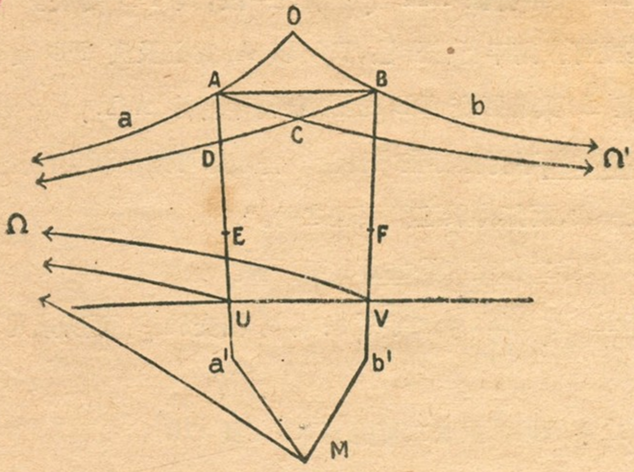


圖 50.

三角形 AOB 爲等腰,故有 $O\hat{A}B=O\hat{B}A$.

故 $B\hat{A}M=A\hat{B}M$, 而 $AM=BM$.

過 M 點,作 $M\Omega$ 與 $A\Omega, B\Omega$ 平行。

則因 $AM=BM$ 及 $M\hat{A}\Omega=M\hat{B}\Omega$, 故按 §26(4) 應有

$$A\hat{M}\Omega=B\hat{M}\Omega$$

而爲不可能之事。

故 AE, BF 不能交於普通點, 且此證法可應用於過 A 及 B 之二延長線,亦無不合。

次設二者為平行。

因半射線 a' 介於 $BA\Omega$ 域內，故必與 $B\Omega$ 相交。

設其相交於 D.

則 $\Omega\hat{A}E = D\hat{B}F$ 及 $A\hat{D}\Omega = B\hat{D}E$.

且吾人假設 DE, BF 平行，又 $A\Omega$ 及 $B\Omega$ 亦平行。

故按 §26(6) 知 $AD = DB$.

故 $D\hat{A}B = D\hat{B}A$.

但 $B\hat{A}C = A\hat{B}C$.

是以 $D\hat{A}B = C\hat{A}B$，而生剌謬。

因而半射線 AE, BF 不能平行。

同理半射線 EA, FB 各向 A, B 延長時，亦不能平行。

吾人既已證明直線 a', b' 不相交，亦不平行。

故二者必有一公共垂線（§32）。

今再證此公共垂線，與 $O\Omega$, $O\Omega'$ 二者平行。

設此公共垂線交直線 AE, BF 於 U, V 二點。

按 §29 知 $AU = BV$.

如 VU 不與 $A\Omega$ 平行，過 U 點作半射線 $U\Omega$ 平行於 $A\Omega$，過 V 作半射線 $V\Omega$ 亦平行於 $A\Omega$.

則按 §26(4) 知 $A\hat{U}\Omega = B\hat{V}\Omega$.

且 $A\hat{U}V$ 及 $B\hat{V}U$ 均為直角，故在 U 點之外角，將等於內對角 $\Omega\hat{V}U$，而為不可能之事（§26(3)）。

如是得證明半射線 VU 平行於 $O\Omega$.

半射線 UV 之平行於 $O\Omega'$, 亦可依同法證之。

故得證明二相交直線有一公共平行線,且可明其作法。

枝理: 已知共面二線常可作一公共平行線。(49)

如二已知線於延長時相交,可應用上證。

如二者不相交可在(1)線取任意一點 A, 過 A 點作一直線與 (2) 平行。

對於過 A 之二半射線,可作其公共平行線,按 §25 此線與二已知直線平行。

§**45**. 二直線相交成一銳角,求作一直線與其一垂直而與他一線平行。

設 a(OA), b(OB) 爲含一銳角之半射線。

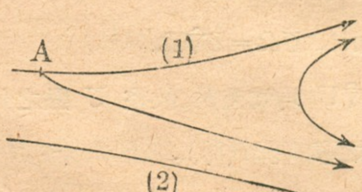
在 O 點作 $A\hat{O}B' = AOB$, 半射線 $\hat{O}B'$ 以 b' 記之。

半射線 b, b' 之公共平行線,必與OA 垂直。(§22)

故得解決平行線中之第二基本問題。對於一已知角求其相當線節。換言之,卽由 $\Pi(p)$ 以求 p.

由此且得證明對於任何銳角 $\Pi(p)$. 不論其小至若何程度,或與一直角,如何相近,常有一線節 p, 與之相應。

(49) 附圖如右



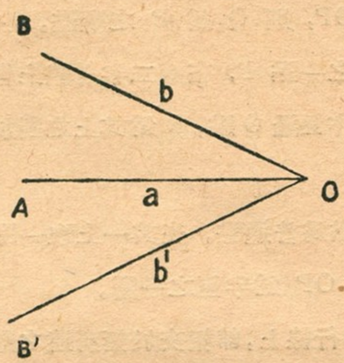


圖 51.

枝理。如二共面直線為離線，吾人仍能作一直線與其一垂直而與他一線平行。

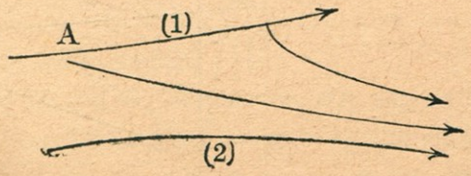
只須在(1)線上任取一點過此作一半射線與直線(2)平行，作一直線與(1)垂直而與適所作之直線平行，則亦與(2)線平行。(50)

§46. 二直線上之應點 (Corresponding points).

二直線上各有一點 P, Q, 如線節 PQ 與同側之線所成角相等，則 P, Q 稱為二線上之應點。

設二線相交於普通點 O, 而 P 為一線上一點，吾人只須在他線上，

(50) 附圖如右。



取一點 Q, 使 OQ＝OP, 則 Q 爲 P 之應點。

對於一半射線上之一點 P, 在第二半射線上僅有一應點，此理甚明；設有第三半射線，亦經過 O 點，R 爲其上之對於 Q 之應點，則 P, R 亦爲應點。(51)

一束半射線之頂點爲普通點，在其一上取一點 P, 則各線上應點之軌跡係以 O 爲心，OP 爲半徑之一圓。

§**47**. 今述關於平行線上，卽相交於無窮遠之隱點之束線上應點之情形。

(1) 如 (i) (ii) 爲二平行線對於在 (i) 上之一巳知點，在 (ii) 上有一應點存在，但只有一點。

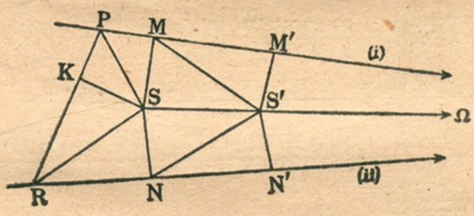
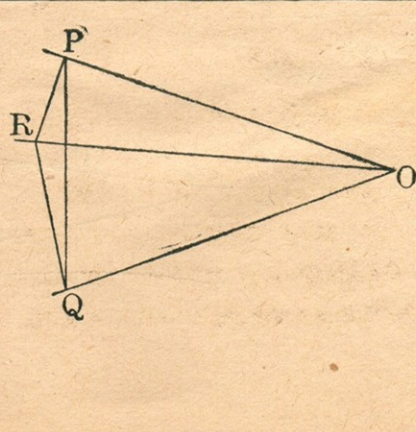


圖 52.

(51) 附圖如右。



設 P 為(i)上之已知點，在 (ii) 上任意取一點 R.

平分在 P, R 處之內角，則此二分角線必交於一普通點。(52)

設二者交於 S 自 S 作 SM, SN 各與 (i) (ii) 垂直。

SM = SN(53)

過 S 作 SΩ 平行於 PΩ.

此線亦與 RΩ 平行，且平分 $M\hat{S}N$，因對於一已知距，僅有一平行角也。

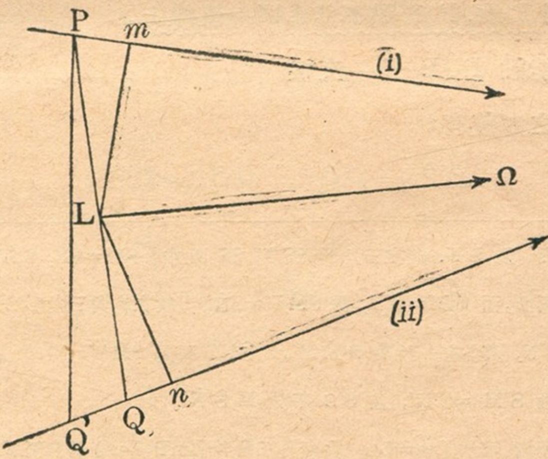


圖 53.

設 S′ 為過 S 而與 (i) (ii) 平行之直線上任意上一點。

自 S′ 作 S′M′, S′N′ 各垂直於此二線。

(52) 由 §26(5) 之證法，卽可證明。

(53) 作 SK 垂直於 PR. 因 $R\hat{P}S$, $S\hat{R}P$ 均為銳角，故按 §31 第二款中之證法，可明 K 點必在線節 PR 內。如是則得二直角三角形 PKS, PMS, 有一公共弦 PS, 及等角 $K\hat{P}S = M\hat{P}S$ 故為合同形。故 SM = SK. 同理可證 SN = SK. 故 SM = SN.

由合同形之理，易證 $S'M'=S'N'$，且 $S'\Omega$ 平分 $M'\hat{S}'N'$.(54)

自 P 作 PL 垂直於 $S\Omega$，又從 L 作 Lm, Ln 各與 (i), (ii) 垂直。(如圖53)。

在 Ωn 向 n 之延長線上截取 $nQ=mP$，而連 LQ.

由是可證 PLQ 爲一直線，而 Q 與 P 相應。(55)

且易證明在第二直線上，僅有一點，與第一直線上之 P 點相應。(56)

(2) 如 P, Q 爲直線 (i) (ii) 上之應點，Q, R 爲直線 (ii) (iii) 上之應點，則 P, Q, R 三點不能在同一直線上。

如其可能設 PQR 爲一直線

按應點之定義有：

$$\Omega\hat{P}Q=\Omega\hat{Q}P,\quad \Omega\hat{Q}R=\Omega\hat{R}Q$$

(54) 連 $S'M$ 及 $S'N$. 則在三角形 $SS'M$, $SS'N$ 中，$SM=SN$, $S'\hat{S}M=S'\hat{S}N$, 及 SS' 爲公有，故爲合同形，而 $S'M=S'N$，且 $S\hat{M}S'=S\hat{N}S'$，故在直角三角形 $S'M'M$, $S'N'N$ 中，有等弦 $S'M=S'N$，及各有一銳角 $S'\hat{M}M'$, $S'\hat{N}N'$，同爲 $S\hat{M}S'=S\hat{N}S'$ 之餘角，故爲相等，是以爲合同形，故 $S'M'=S'N'$，且 $S'\Omega$ 平分 $M\hat{S}'N'$.

(55) 按適所證，可知 $Lm=Ln$，故直角三角形 LmP, LnQ 爲合同形，故 $P\hat{L}m=Q\hat{L}n$，而 $Q\hat{L}S=Q\hat{L}n+n\hat{L}S=P\hat{L}m+m\hat{L}S=P\hat{L}S$ 二直角，是以 $P\hat{L}Q$ 等於二直角，而 PLQ 爲一直線，又 $L\hat{P}m=L\hat{Q}n$，故 Q 爲 P 之應點

(56) 因苟 (ii) 上另有一應點 Q'，對於 Q 與 Ω 異側，則應有 $\Omega\hat{Q}'P=\Omega\hat{P}Q'$. 但 $\Omega\hat{P}Q'>\Omega\hat{P}Q$，卽 $\Omega\hat{Q}'P>\Omega\hat{Q}P$，而與三角形外角大於內對角之理相刺謬。$Q'$ 對於 Q 與 Ω 同側時，亦可依同法證明之。

又可知 P, Q 爲應點之充要條件，爲 PQ 之中垂線須經過原二線之交點(常點或隱點)。此理於證明下文 (3) 時須用及。

故 $\Omega\hat{P}R+\Omega\hat{R}P=$ 二直角，而爲不可能之事，因苟如是，則 PR 將與 $P\Omega$, $R\Omega$ 作成相等之內錯角，而此二平行線將有一公共垂線矣。(57)

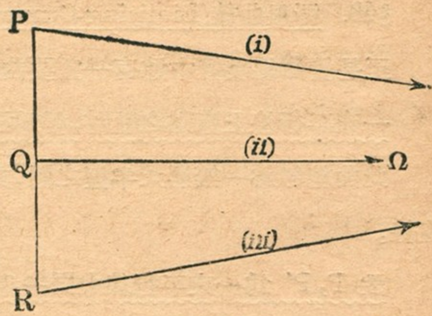


圖 54.

(3) 如 P, Q 爲平行直線 (i) (ii) 上之應點 Q, R 爲 (ii) (iii) 上之應點，則 (i) 上之P與 (iii) 上之 R 相應。

此理可由三角形各邊中垂線共過一點之理推出 (§39)

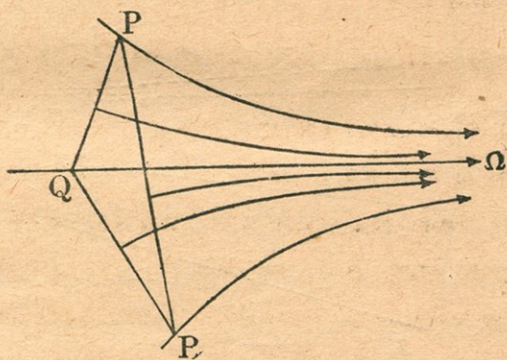


圖 55.

PQ 之中垂線與已知線平行。QR 之中垂線亦然。(58)

因 PR 之中垂線與他二中垂線平行，故與 (i),(iii) 平行。

故 P 與 R 相應。

---

(57) 參看 §26(3) 之證明。

(58) 參看註 (第三章56) 第二段，末一結論亦然。

§48. 極限曲線(Limiting-Curve)亦曰迴繞曲線(Horocycle).*(59)

至是雙曲線幾何中遂有一重要曲線。

一束平行線上應點之軌跡,稱爲極限曲線,或迴繞曲線。

此曲線卽爲一無窮大半徑之圓,其理甚明,且由 §47(2) 知其必非直線。

設 P, P′ 爲一束平行線中同一半射線上之相異二點,則過 P 點之極限曲線與過 P′ 點之極限曲線相合同。

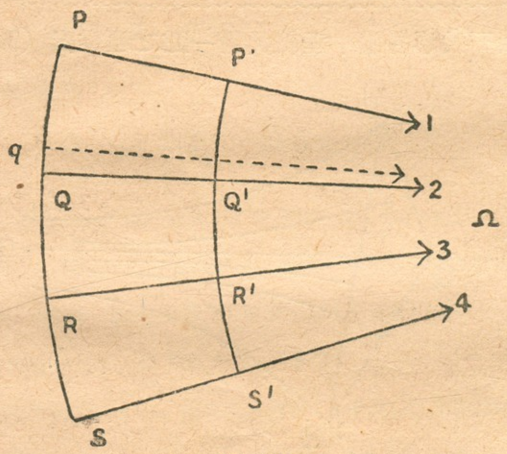


圖 56.

請先釋所謂二極限曲線相合同之意義。

設在自 P′ 點起之極限曲線上,取一組點, P′, Q′, R′, S′ 等等,各

---

* 羅巴曲士奇稱之爲 Grenzkreis, courbe-limite 及 horicycle; 波爾業稱之爲 linea-L.

(59) 亦稱周界曲線 (Boundary Curve).

在線束中一組線 1.2.3.4 等上。

今請證在過 P 點之極限曲線上有一組點 P, q, r, s 等，使線節 Pq, P′Q′ 相等，線節 qr, Q′R′ 相等，其他相當線節亦然，且此等相關線節與其所交線束中之線成等角。

欲證此理可取線節 P′Q′ 論之。

在 P 點，作 $\Omega\hat{P}q=\Omega\hat{P}'Q'$，且取 $Pq=P'Q'$.

過 q 引半射線與 $P\Omega$ 平行。

則按 §26(4)，知 $P\hat{q}\,\Omega=P'\hat{Q}'\Omega$.

但 P′, Q′ 爲應點。

故 P, q 爲應點。(60)

乃從 Q, q 起，同法可在過 P 之極限曲線上，求得一點 r，使線節 qr 與 Q′R′ 相等，且 qr 猶之 Q′R′，與過其端點之半射線成等角。

至此已證明二極限曲線間，有具此特性之單純對應 (One-to-one correspondence) 關係存焉，在此種情形下，吾人稱二曲線相合同。

且可知極限曲線，與開始所取線束中之線無涉，理甚明顯。

爲陳述便利計，可稱此束線中一切平行線所過之無窮遠點爲極限曲線之中心；此線束中各線，爲曲線之軸 (Axis). 中心相同之極限曲線，稱爲同心者 (Concentric).

此等曲線中有下述之特性：

（a）雙曲線幾何學中之極限曲線，與歐氏幾何學中無窮遠半徑之圓相當。

(60) P′, Q′ 既爲應點，即有 $\Omega\hat{P}'Q'=\Omega\hat{Q}'P'$. 故 $q\hat{P}\Omega=P\hat{q}\Omega$. 是以 P, q 相應。

（b）任何二極限曲線，均爲合同形。

（c）在同一極限曲線或任何二極限曲線中，等弦張 (Subtend) 等弧，且等弧張等弦。

（d）極限曲線與一切軸，盡皆垂直，且在任何點之曲率(Curvature)皆同。(61)

§**49.** 等距曲線(Equidistant-Curve)

至此當有過贋點之束線，即垂直於同一直線之線組，未曾論及。

(1) 如二已知線有一公共垂線對於其一上之一 P 點，在他線上常有而僅有一點 Q，與之相應。

設MN爲二已知線之公共垂線，且 P 爲其一線上一點。

在他線上，在公共垂線之同側，截取 NQ＝MP.

則 PMNQ 爲一薩氏四邊形，而在 P, Q 處之角相等。

故 Q 與 P 相應，且知在第二線上，僅有一點與一線上之已知點相應。(62)

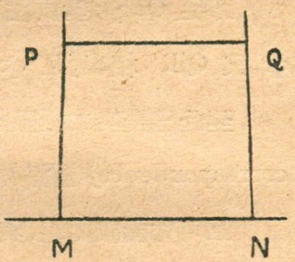


圖 57.

(2) 如直線 (i)(ii)(iii) 同垂直於一直線，如 (ii) 上之 Q 點與 (i) 上之 P 點相應，(iii) 上之 R 點與 (ii) 上之 Q 點相應，則 P.R

(61) 因二曲線間之角，即在交點處切線之交角，又切線爲弦之極限位置，按 §27.$\Pi(O)=\frac{\pi}{2}$，故知切線與軸垂直，由是更可知諸軸即爲極限曲線之法線，因其盡爲平行，是以曲率皆同。

(62) 證法與 §47(1) 中者同。

亦相應。

設公共垂線，交諸直線於 M, N, S.

則 $PM=QN$ 及 $QN=RS$.(63)

故 $PM=RS$，故 P, R 相應。

(3) 設一線束之頂點爲贗點，則其應點之軌跡稱爲等距曲線，(64)

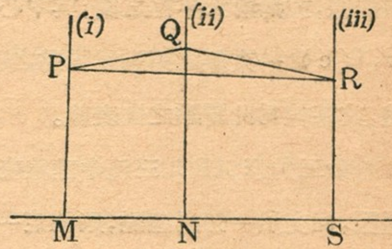


圖 58.

因此曲線上之點距此線束之公共垂線等遠也。此公共垂線稱爲曲線之基線(Base-Line)

在歐氏平面上，等距曲線卽爲一直線，但在羅氏平面上，此軌跡向此公共垂線成凹形。

此理據薩氏四邊形之性質，立可推得。(65)薩氏曾用此曲線，以爲否認銳角假設之根據。

如是在此種非歐幾何學，得三種曲線，均可視之爲『圓』。

(a) 一束線之頂點爲普通點，則其上應點之軌跡爲一普通圓，以頂點爲中心，從頂至任一應點之線節爲半徑。

---

(63) 按 §29.

(64) P, Q, R, 三應點不能在一直線上，否則 $M\hat{P}Q+S\hat{R}Q=N\hat{Q}P+N\hat{Q}R=P\hat{Q}R=$ 二直角，卽 $M\hat{P}R+S\hat{R}P=$ 二直角，而四邊形 MPRS 之內角和將等於四直角，是爲不可能之事。

(65) 在二直角四邊形中，$N\hat{Q}P=M\hat{P}Q$，故必均爲銳角，同理 $N\hat{Q}R$ 亦然，故 $P\hat{Q}R=N\hat{Q}P+N\hat{Q}R$ 必小於二直角矣。

(b) 一束線之頂點爲無窮遠點之隱點，則其上應點之軌跡爲一極限曲線，或無窮大半徑之圓，其中心在束線之頂點。

(c) 一束線之頂點爲臆點之隱點，則其應點之軌跡爲一等距曲線，其基線爲此臆點之代表線。

如三角形 ABC 三邊中垂線交於一普通點，則其三頂點確定一普通圓，如交於一無窮遠點，則確定一極限曲線，如交於一臆點，則確定一等距曲線。(參看 §39)

面積之度量(The Measurement of Area)

§50. 等容多邊形 Equivalent Polygons

如二多邊形各可分爲有限個三角形兩兩相合同則稱爲等容多邊形。

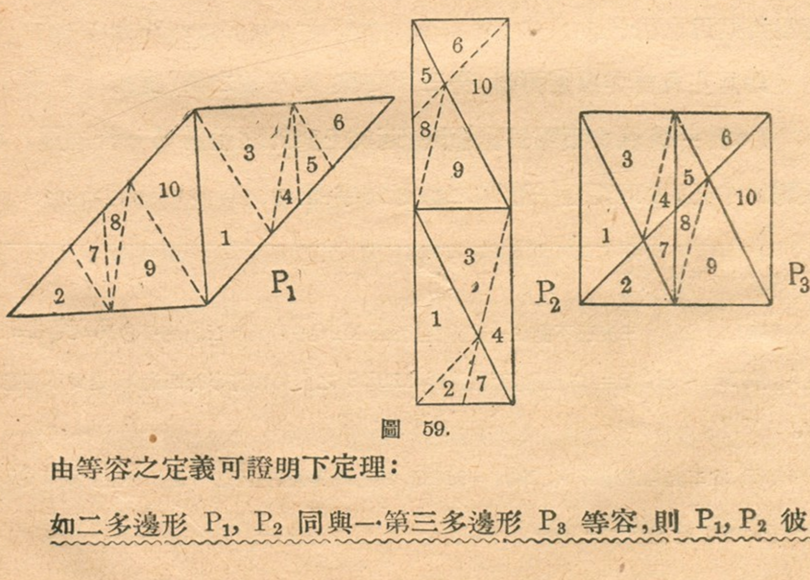


圖 59.

由等容之定義可證明下定理：

如二多邊形 P_1, P_2 同與一第三多邊形 P_3 等容，則 P_1, P_2 彼此

互爲等容。

由假設可將 P_1, P_2 各劃分爲若干三角形，使此二組分劃與 P_3 之二種分劃相應，即 P_3 二種分劃中之三角形，各與 P_1，P_2 分劃中之三角形相同合。

今將 P_3 之二種分劃中合而觀之，則往往此分劃中之三角形各邊，與第二種分劃中三角形之各邊相割，而使之成爲若干多邊形。

如增加充足之線節則可使此等多邊形分爲三角形（如圖59）。

由此法可將 P_3 之分劃，終化爲同組三角形，可與 P_1，P_2 中三角形組，各各合同。

故多邊形 P_1, P_2，能分化爲有限個之三角形，兩兩合同，而二者爲等容形。

§51. 等容三角形

二三角形相等容之充要條件爲二者之角欠相同（參看§31）

今將此定理分爲數段證明之：

1. 二三角形有一邊相等，且有同角欠則爲等容。

取三角形 ABC 中，CA, AB 二邊之中點 E 及F，而連 EF.

自 A, B, C 作至 EF 之垂線各與之相交於 A', B', C'.

則 $AA'=BB'=CC'$(66) 而四邊形 $BCC'B'$ 爲一薩氏四邊形在 B', C' 之角爲直角，而 BB'，CC' 二邊相等。

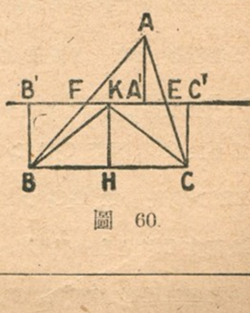


圖 60.

(66) 據 §4(1).

且在 B, C 處之銳角，各等於三角形 ABC 內角和之半。(67)

但此四邊形爲三角形 $BB'F$, $CC'E$ 及圖形 BCEF 所合成。

且因三角形 $BB'F$, $CC'E$ 各與三角形 $AA'F$, $AA'E$ 相合同。

故四邊形 $BB'C'C$ 與三角形 ABC 等容。

次設 $A_1B_1C_1$ 爲另一三角形其 B_1C_1 一邊與 BC 相等，且與三角形 ABC 有相同之角欠。

對此三角形，亦可依同法求得一薩氏四邊形在 B_1, C_1 之銳角，與在 B, C 者相等，且 B_1C_1, BC 二邊相等。

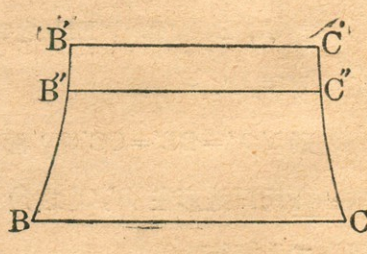
由是易知此二四邊形必相合同，苟不如是，則由一種手續，類乎將一四邊形疊置他形上，使公共邊相合，便可得內角和爲四直角之四邊形。(68)

是以三角形 ABC, $A_1B_1C_1$ 爲等容，即已證明二三角形有相等之角欠，且有一等邊者，必爲相容。

---

(67) 吾人甚易證明三角形 $AA'E$, $CC'E$ 爲合同形，故 $A'\hat{A}E=C'\hat{C}E$，同理由合同形三角形 $AA'F$, $BB'F$ 知 $A'\hat{A}'F=B'\hat{B}F$，故在 B, C 處之角相等。

(68) 如二四邊形不相合同，則 BB' 與 B_1B_1' 不能相等，而有一者較長，設 $BB'>B_1B_1'$，則可在 BB' 上取一點 B''，使 $BB''=B_1B_1'$. 又 C_1C_1' 必小於 CC'，因苟 $C_1C_1'>CC'$，而 $CC'=BB'$，$BB'>B_1B_1'$，故 $C_1C_1'>B_1B_1'$，而生剌謬。如是故可在 CC' 上取一點 C''，使 $CC''=C_1C_1'$ 則得一普通四邊形 $BB''C''C$，其內各角均爲直角，而與 §30 之定理相矛盾矣。



枝理　有同一底邊及相等角欠之三角形，其對頂點之軌跡，爲一等距曲線。

(2) 二三角形有相等之角欠，且一形中之某邊較大於他形中之一邊，則二者爲等容。

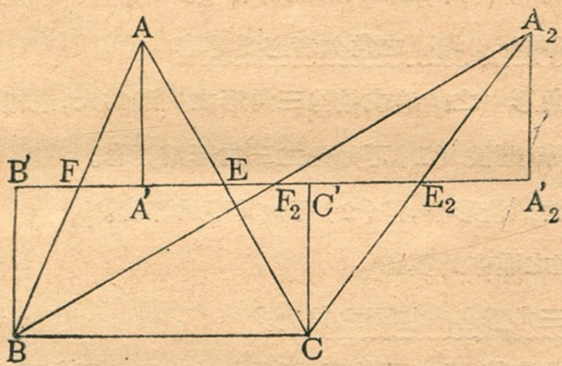


圖 61.

設 ABC, $A_1B_1C_1$ 爲二三角形，而 $A_1C_1(b_1)$ 邊大於 AC(b) 邊。

設 E, F 各爲 AC, AB 之中點。

自 C 點作 EF 之垂線 CC′，則 CC′ 不能大於 $\frac{1}{2}$b.(69)

作一直角三角形，其一邊等於 CC′，而弦等於 $\frac{1}{2}b_1$.*

截取(70) C′E_2 等於上述三角形之另一邊。

---

* 此題之作法可由已知一邊及其隣角之直角三角形導出，而不須用及連續原理。§ 6 中諸結果，示明此問題可歸於由一已知邊及一隣角，求作直角三角形之作圖題。

(69) CC′ < CE.

(70) 在 FE 或其延長線上截取之。

連 CE_2, 而延長至於 A_2, 使 $CE_2=E_2A_2$.

連 A_2B.

則三角形 A_2BC 有一邊等於 b_1, 且與已知三角形有相等之角欠(71)

且三角形 ABC, A_2BC 爲等容;按 (1) A_2BC, $A_1B_1C_1$ 三角形亦然。

故 ABC, $A_1B_1C_1$ 二三角形爲等容 (§50)

3. 二三角形有相同之角欠者必爲等容

因一三角形中之某邊或較他三角形之一邊爲大,或相等或較小。

如其相等,則按 (1) 可知此二三角形爲等容。

在其餘兩種情形下,按 (2) 可知其亦爲等容。

4. 上理之逆亦爲眞即

二等容三角形必有相同之角欠。

由等容之定義,此二三角形,可分割成有限個三角形,兩兩相合同,設以頂截線(Transvesals)法*分一三角形成一組子三角形 (Sub-triangle), 則易證明原三角形之角欠,與分割所成一切子三角形角欠之和相

---

* 所謂用頂截線分割者,即在原三角形中,自頂點作至對邊上之直線分割之,或在如是分割後,再自原三角形或分成三角形之頂點,作至對邊之直線分割之。

(71) 自 $A_1\,B_1\,C_1\,A_2$ 至 EF 之垂線 AA', BB', CC', A_2A_2', 則按同法,可證 $AA'=BB'=CC'=A_2A_2'$.

在直角三角形 $A_2\,A'_2\,F_2$, (F_2 爲 E_2F 與 A_2B 之交點) $BB'F_2$ 中,有在 F_2 之二銳角相等,及 $A_2A'_2=BB'_1$ 故爲合同形,而 $BF_2=A_2F_2$, 即 F_2 爲 BA_2 之中點,與本節 (1) 同理,可知三角形 A_2BC 及 ABC 內角和之平,與薩氏四邊形 $BB'C'C$ 之一銳角相等。故三角形 A_2BC 有性質如上述。

等。用喜氏* 之方法，可證明一三角形之任何分割，均可用頂截線法作出。(72) 由是可知諸子三角形之角欠，必等於原三角形者。

二等容三角形，旣得分爲有限個子三角形，兩兩相合同，且合同三角形之角欠相等。

故知任何二等容三角形必有相同之角欠。

是以在本節節首所述之定理『二三角形相等容之充要條件爲二者之角欠相同』，得以完全證明。

5. 設有三個三角形各分爲有限個之子三角形，其一中所分成者，與餘二三角形中者之和兩兩相合同，則稱前者與後二三角形之和相等容。

但各三角形之角欠，與其所成分諸子三角形角欠之和相等。

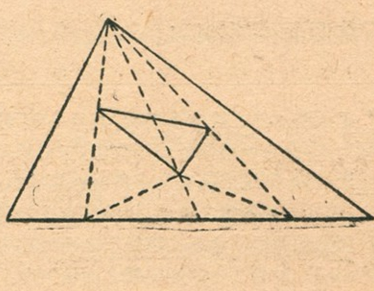
故知如一三角形與他二三角形之和相等容，則其角欠必與後二者角欠之和相等。

§52. 今視面積(Area)爲與直線形相關之一概念，猶之長度之於直

---

* 見喜氏書 §20, 或哈斯武德 Rational Geometry. p. 87.

(72) 因苟分割中之一子三角形各頂點，均在原三角形之各邊上，則此理甚明。否則可取原三角形之一頂點，作至此子三角形各頂點之連線且延長之至與對邊相交。則原三角形，被諸頂截線及該子三角形之邊，分成若干三角形及四邊形，於後者中，作其對角線，再分之爲三角形，卽明所欲證。



線，則等容三角形，必爲等積(Equal area)，*且如視直線形之面積，爲一種度量，可加以和，等，不等，大，小諸關係，則按 §51 所述之理，立知三角形之面積與其角欠成比例，又如視某三角形爲一單位面積之三角形，有 n 倍面積者，必有 n 倍之角欠。

如將此等論證，加以精密之考慮，則可見面積問題之研究中，有若干之假設存焉，經現代算學家之搜討已將面積之理論，建樹於一頗牢固之基礎上。†至於雙曲線幾何學中面積之嚴確理論，較爲簡明，今述之如次：

一三角形面積度量(或簡稱之爲面度)(Measure of area)，依定義爲 k^2 與其角欠之乘積，k 爲與單位三角形相關之一常數，而角度之單位，則採弧度法，卽一直角以 $\frac{\pi}{2}$ 爲其度量也。k^2 一數之引入可使所得結果與本書中他處用解析法所得者相符合。

按 §51 有

1. 如二三角形有相同之面度，則二者必爲等容，且二等容三角形有同面度。

2. 如將一三角形，分爲有限個三角形，則其面度，等於分割所成一切三角形面度之總和。

---

* 喜氏將上述之等容多角形，與另一種「補成等容」(Equivalent by completion 者，加以區別，二多角形稱爲補成等容者，卽可補入等容多角形，而使補成之二多角形等容之謂，如用亞氏設論，則補成等容之多角形亦爲等容。喜氏且曾不藉亞氏設論之助，在補成等容之原理上，建設一種面積之理論。可參閱喜氏書第四章。

† 可參閱恩里格主編中等幾何之研究集中第六編，安馬爾狄 (Amaldi)之論文，及芬則而 (Finzel) 所著「一般幾何學之面積原理」Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie (Leipzig. 1912). 一書。

3. 如一三角形,與他二三角形之和為等容,則前者之面度,等於後二者面度之和。

多角形之面度依定義為其所分成一切三角形面度之總和。

此和數,顯然與所採之分割法無涉,在任何分割法中，所成一切三角形角欠之總和,等於 (n-2) 倍直角,與此多角形內角形二者之較,此量亦稱為多角形之角欠。

關於多角形有下述諸定理。

1. 如二多角形有相同之面度,則二者為等容，因二者皆與以已知分割法所得角欠之和為角欠之三角形相等容也。

2. 如二多角形相等容,則二者有相同之面度，因二者能各分割成有限個之三角形,兩兩相合同也。

3. 如將一多角形分割為有限個之子多角形(Sub-polygon),則此多角形之面度,與一切子多角形面度之總和相等。

4. 如一多角形,與他二多角形之和為等容,則前者之面度,與後二者面度之和相等。

直線形之有同面度者,稱為等積,如是則等容多角形為等積，如一多角形面度較大,或較小於他一多角形,則稱前者之面積，較大或較小於後者。

§53. 在歐氏幾何學中吾人常謂一直線形含若干方吋（或方呎等等）,視曲線形為直線形所達之極限,則得度量曲線形之法。

但在雙曲線幾何學中則不能有所謂方吋,卽等邊長方形,或任何長方形。對於任一直線形,均有一等容薩氏四邊形與之相應，對於一切等

容之直線形有同一薩氏四邊形含一定銳角者與之相應。

是種此銳角之四邊形，在雙曲線幾何學中，甚易作圖。其作法可由直角三角形與三直角四邊形之相應性中推出，命此銳角爲 β. 則按 §45 之作法，可求得其當線節 b，使 $\Pi(b)=\beta$. 作一直角三角形，以 b 爲一邊，則其相關四邊形之銳角爲 β，而所求之薩氏四邊形，可由如是之二相合薩氏四邊形並列合成。(73)

一切薩氏四邊形之有相等銳角者皆爲等容。

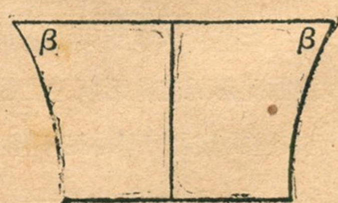
由是可見在歐氏與羅氏二種平面中，線節及面積之度量，有其基本上之歧異點存焉，*在歐氏平面中，度量爲相對 (Relative,) 在羅氏平面中，則爲絕對 (Absolute). 因對於任何線節，皆有一相關之定角，卽此線節之平行角，對於任何面積，皆有一相關之定角，卽其等容薩氏四邊形中之銳角也。

---

* 可參閱波諾拉書 §20. (74) 及 Supra, p. 17.

(73) 如右圖。

(74) 已編譯入本書附錄一4.



第四章　雙曲線平三角學

§54. 本章將討論羅氏平面上之三角學，亦不藉立體幾何學中定理之助，一如前章。

由極限曲線之性質，卽可得平三角學中各公式，而不必用及將極限曲線依一軸旋繞所得極限曲面，羅波二氏之方法，則係以此種曲面上之幾何學爲依據。

玆先述關於同心極限曲線之定理數則如次：

1. 如 A,B 及 A',B' 爲二同心極限曲線與二軸之交點，則 $AB=A'B'$

連 AA' 及 BB' (如圖 62)。

過 AA' 弦中點 M，作 $M\Omega$ 與束線中之諸半射線平行。

則 $M\Omega$ 垂直於 BB' 弦，而 $AB,A'B'$ 二平行線依之成對稱(參看§26(4)及 §47)。

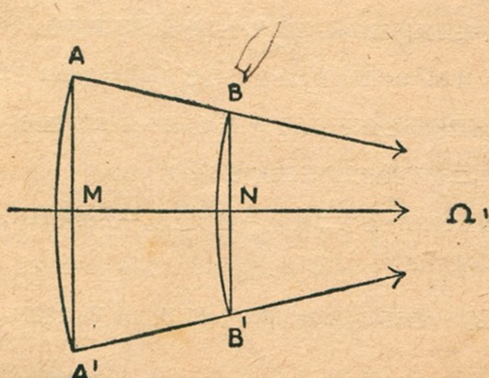


圖 62.

故此線必過 BB' 之中點 N.

故由四邊形 $ABB'A'$ 知 $AB=A'B'$,(1)

2. 如 A,B 及 A',B' 爲二同心極限曲線與二軸之交點,且 P,Q 爲 AA',BB' 二弧之中點,則 P,Q 爲此束線中之一半射線。

因等弧張等弦(§48)故 AP_1AP' 二弦相等, $BQ,B'Q$ 二弦亦然。

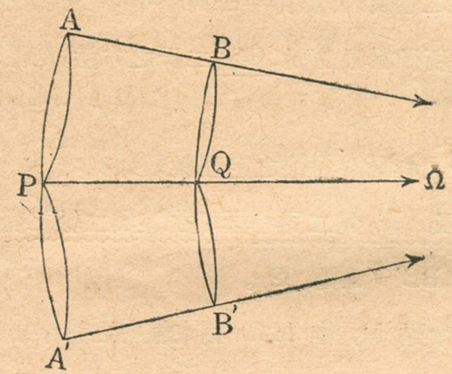


圖 63.

(1) 本書前文絕未言及對稱性質,此處遽加引用,似嫌不甚周密。今特另加一證明如次:

因 $AM=A'M$, 且 $M\hat{A}\Omega=M\hat{A}'\Omega$, 按 §26(4) 知 $A\hat{M}\Omega=A'\hat{M}\Omega$ 故均爲直角。

自 B 作 $M\Omega$ 之垂線與之交於 N,過 N 延長,則必與 $A'\Omega$ 相交於一點命之爲 B_1' 因 BN 爲 AA^1 之離線,二者不能相交於常點也(§26(2))

四邊形 $AMNB,A'MNB_1'$ 各有二直角,一相等銳角,一公共邊 MN,一等邊 $AM=A'M$ 故相合同。

故 $B_1\hat{B}A=B\hat{B}_1'A$, 因而 $B_1'\hat{B}\Omega=B\hat{B}'\Omega'$, 卽 B_1' 爲 B 之應點,故 B_1' 與 B' 相合(§47(1))

但 $A'B_1'=AB$, 是以 $A'B'=AB$.

由是可知 PQ 爲 $AB.A'B$ 二軸之對稱軸，而與是二者平行。(2)

枝理　如 $P_1P_2P_3P_4$……分 AA' 弧爲 n 等分而過是等點之軸與極限曲線 BB' 過於 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4……則 $Q_1Q_2Q_3Q_4$……等點亦分 BB' 弧爲 n 等分。

3. 如 A,A',A'' 爲一極限曲線上之點，過之作諸軸各與他一同心極限曲線於 B,B',B''，則

$$AA' \text{弧} : AA'' \text{弧} = BB' \text{弧} : BB'' \text{弧}。$$

首設 AA',AA'' 二弧爲有公度者 (Commensurable)，則可命其一爲 AP 弧(3)之 m 倍，其他爲 AP 弧之 n 倍。

過 P 引束線中之直線，設其與第二極限曲線交於 Q.

則由(2)可知 BB' 弧 $=BQ$ 弧之 m 倍，$BB''=BQ$ 弧之 n 倍。

由是卽得題理。

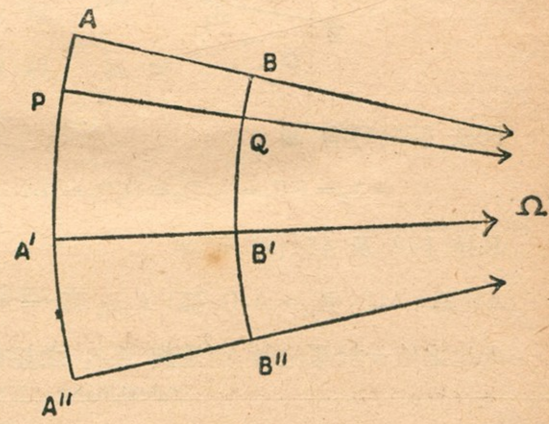


圖 64.

(2) 今不藉對稱之理，另加證明如次：
過 P 點作 $P\Omega$ 與束線中之各半射線平行，交 BB' 於 Q.
則在 $AP\Omega, A'P\Omega$ 中，有等邊 $AP=AP'$，且 $A\hat{P}\Omega=P\hat{A}\Omega, A'\hat{P}\Omega=PA'\Omega$；按 §26(5) 此四角盡爲相等。
又按本節 (1) $AB=PQ_1=A'B'$，卽四邊形 $ABQ_1P, A'B'Q_1P$ 有三邊及二夾角，各各相等，而爲合同形。
故 $BQ_1=B'Q_1$，因而 BQ_1 弧 $=B'Q_1$ 弧，卽 Q_1 爲 BB^1 弧之中點。故 Q_1 與 Q 相合。
(3) 卽二者之公度。

次設是等弧無公度，則可由極限之理證明結果相同。

§**55**. 設一極限曲線之心為 Ω，在其上取 A,B 二點，(圖 65)。

在半射線 $A\Omega$ 上截取等線節 $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots\cdots$ 并設過 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 諸點之同心極限曲線交半射線 $B\Omega$ 於 $B_1, B_2B_3, \cdots\cdots$ 等點。

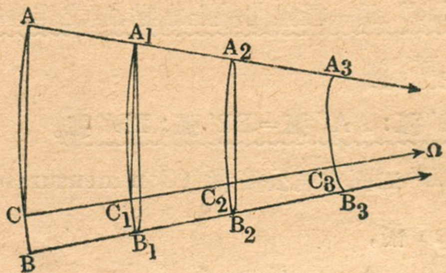


圖 65.

則按 §54(1) 有

$$AA_1 = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots\cdots$$

且按 §48 及 §54(3)，可得

$$AB\text{ 弧}: A_1B_1\text{ 弧} = A_1B_1\text{ 弧}: A_2B_2\text{ 弧} = A_2B_2\text{ 弧}: A_3B_3 = \cdots\cdots \quad (4)$$

此比之值大於單位數，而僅與 AA_1 之長有關。

---

(4) 按 §48 之理，吾人得在 AB 弧上取一點 C，使 AC 弧 $=A_1B_1$ 弧，而 AC 弦 $=A_1B_1$ 弦，過 C 作束線中之一半射線，則則交諸同心極限曲線，各於 $C_1C_2C_3 \cdots\cdots$ 等點。聯 AC, A_1B_1, A_1C_1，則在 $AC\Omega, AB_1\Omega$ 中有等線節 $AC=A_1B_1$，且二端之平行線與之成等角，故此四角均相等(§26(5))因是 $ACC_1A_1, A_1B_1B_2A_2$ 二四邊形中，有 $AA_1=A_1A_2, AC=A_1B_1, CC_1=BB_1=B_1B_2$ 三等邊，及諸邊之夾角，盡為等角，故二者為合同形，故 $A_1C_1=A_2B_2$，而 A_1C_1 弧 $=A_2B_2$ 弧。

但按 §54(3)，有 AB 弧：AC 弧 $=A_1B_1$ 弧：A_1C_1 弧故即 AB 弧：A_1B_1 弧：$=A_1B_1$ 弧：A_2B_2 弧

推之即得上式。

今選取相當線節爲單位使當 $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots\cdots$ 二單位線節時，此比之值爲 e.

當 AA_1 爲單位線節時，命 $AB, A_1B_1, A_2B_2, \cdots\cdots$ 諸弧各爲 $s, s_1, s_2, \cdots\cdots$ 等。

則有 $s:s_1=s_1:s_2=s_2:s_3$

$\cdots\cdots=e.$

故 $s_n=se^{-n}$，而 n 爲一正整數。

如線節 AP 含 x 單位(圖 66)，而 x 爲任何有理數值，以 s_x 表 PQ 弧，則得

$$s_x=se^{-x},\ (5)$$

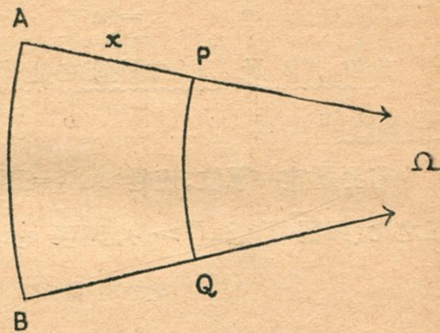


圖 66.

(5) 設 $x=\frac{k}{q}$ (p,q 爲二正整數)，且

$$s:s_x=s_x:s_{2x}=\cdots\cdots s(q-1)x:sq_x=u$$

卽得 $$s=s_xu=s_{2x}u^2=\cdots\cdots=s_{qx}u^q=s_pu^q$$

但 p 爲正整數，故有 $s_p=s_e{}^{-p}$ 或 $s=s_pe^p$

$\therefore\ u^q=e^p$ 而 $u=e^{\frac{p}{q}}$

$\therefore\ s_x=su^{-1}=se^{\frac{-p}{q}}=se^{-x}$

又 x 爲負數時，仍能適合，設 AP=x 爲正，則取 PQ=s′，AB=s'_x，$x'=PA=-x$ 而爲負值，代入上式，有

$$s'_{x}=s'e^{-x'}$$

結果亦復相同。

當 x 爲無理數時，則可用極限之理，闡明其仍能相合。

故據此單位長度，可得下之定理：

如 ABCD (如圖67)爲二同心極限曲線，AC,BD 及二直線 AB, CD 所範之圖形則 AC,BD，二弧之長 s_1, s_x 由下式聯絡之。

$$s_x = se^{-x}$$

內設 AB 及 CD 二線節之長爲 x 單位，且曲線 AC 在外，曲線 BD 在內(6)

苟另選定一單位，使當 $AA_1 = BB_1$ 二單位長度時，AB 弧與 A_1B_1 弧之比(如圖67)爲a ($a>1$)，則聯 $s_1 s_x$ 二量之方程式應如下形

$$s_x = s_a^{-x}$$

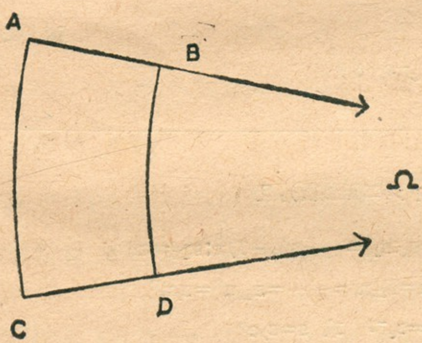


圖 67.

命 $$a = e^{\frac{1}{k}}$$

則得 $$s_x = se^{-\frac{x}{k}}$$

(6) 在外者爲第一曲線，在內者爲第二曲線。

k 之一數乃雙曲線幾何學中之參量，其值視所取之單位而定。

§56. 因吾人可得合於下式

$$\Pi(p)=\frac{\pi}{4}$$

之 p 之值故在經過 P 點之極限曲線上，必有一點 Q，使在該點之切線，與過 P 點之軸平行，而平行向則與軸之向相反。

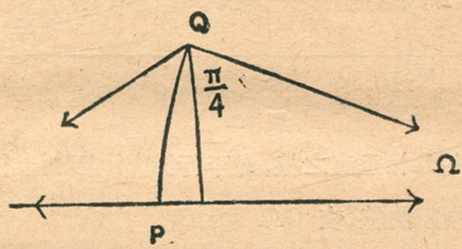


圖 68.

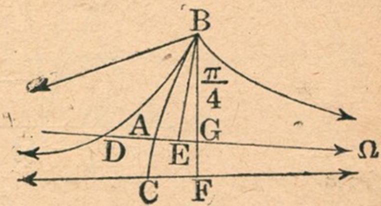
今命此弧之長爲 S.*

設在過 A 點之極限曲線內取一點 B，使 AB 弧小於 S（如圖69）則在 B 點之切線，必與過 A 點之軸相交。(7)

命此交點爲 D，線節 AD,BD 各爲 u 及 t，則易證明 $u<t$.(8)

*參看 §69(3) 及 §70.

(7) 因作 AΩ 軸，及自 B 點至 AΩ, CΩ 二軸之垂線 BE,BF，則 BF 必交 AΩ 於一點 G，而 BF>BG>BA. 故與 BF 相應之平行角，較與 BE 相應者爲大。換言之，卽在 B 點之切線，在與 AΩ 平行之二線所成之角內，故必與 AΩ 軸相交。



(8) 因 BD>DE>DA.

延長 BA 弧至 C 點,使 BC＝S.

在 ΩD 之延長線上取 A_1, 使 $DA_1=DB=t$.

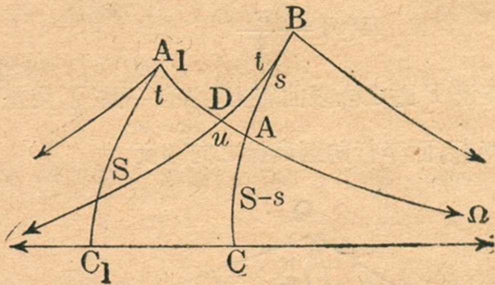


圖 69.

則過 A_1 而與 $A_1\Omega$ 軸垂直之線,必平行於 BD,因而平行於 $C\Omega'$.(9)

設過 A_1 之極限曲線,交 $C\Omega'$ 於 C_1

因在 A_1 之切線與 $C\Omega'$ 平行,故 A_1C_1 弧＝S.

按 §55 得　　A_1C_1 弧: AC 弧$=e^{u+t}$

故　　　　　$S-s=Se^{-(u+t)}$......(1)

次延長 AB 弧過 B 點以至於 P, 使 BP 弧＝S.(圖70)

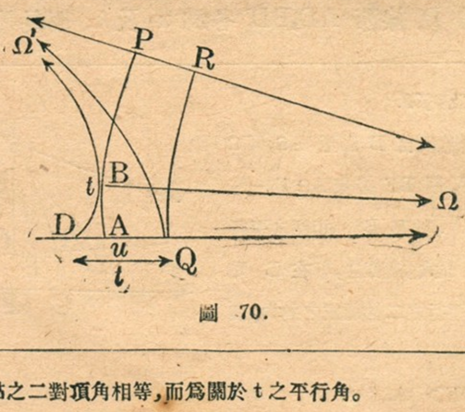


圖 70.

(9) 因在 D 點之二對頂角相等,而爲關於 t 之平行角。

命在 B 點之切線，與過 A 之軸二者之交點爲 D. 幷令 $AD=u$, $BD=t$.

在 $A\Omega$ 上，D 對於 A 之異側，取一點 Q 使 $DQ=t$.

則過 Q 點，與 $Q\Omega$ 軸垂直之線，必平行 DB，故平行於 $P\Omega'$.

設過 Q 點之極限曲線交 $P\Omega$ 軸於 R.

因在 Q 點之切線，與過 R 之軸平行，故 QR 弧 $=S$.

但 $AQ=t-u$.

故 $$S+s=Se^{t-u}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)與(2)得

$$e^u=\cosh t\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(10)

及 $$s=S\tanh t\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

§57. 極限曲線之方程式。

設 Ox,Oy 爲相交於直角之二直線，P 爲過 O 點而以 Ox 爲軸之極限曲線上一點(x,y)(如圖71).

作 PM 垂直於 Ox 軸，又設過 M 點之同心格限曲線，交過 P 點之軸於 N.

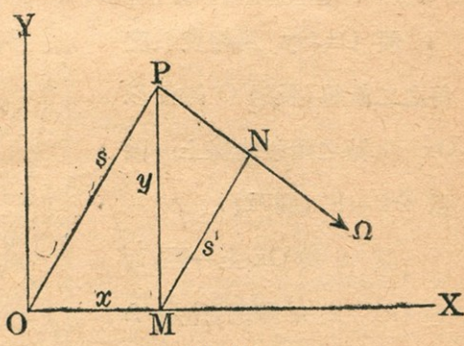


圖 71.

(10) $$\frac{s}{S}=1-e^{-(u+t)}=e^{t-u}-1$$

$$\therefore\quad e^u=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}),\qquad s=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$$

以雙曲線函數表之，卽得(3)(4)之形。

則 $OM=PN=x$, $MP=y$.(11)

又設 OP 弧 $=s$,MN 弧 $=s'$.

則由上圖之作法,可知 $s'<S$.(12)

但 P 之位標 x (OM), y (MP), 就其對於 s' 弧之關係言,即爲上節之 u, t.

故由 §56(3)得

$$e^x=\cosh y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

此卽爲過 O 點而以 x 軸爲軸之極限曲線之方程式。

且
$$s=s'e^x$$
$$=Se^x \tanh y (\text{按 §56(4)})$$
$$=S\sinh y \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

§58. 補節之雙曲線函數。

設 Ox,Oy 爲相交於直角之二直線,及過 O 點而以 Ox 爲軸之極限曲線上一段弧 $OP=S$ (圖72).

設 A 爲 Ox 上一點,而有 $OA=x$ 之關係,命過 A 點之極限曲線,交過 P 點之軸於 B.

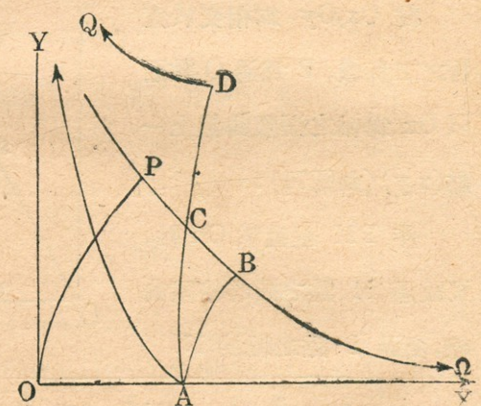


圖 72.

(11)此二量可定 P 之位置,故可視爲其位標如上。

(12)參看 §55.

令 AB 弧 $=s$.

在 A 點作 x 軸之垂線，(13) 則此線必與 PB 相交，(14) 可命此交點為 C.

延長 AC，過 C 點至於 D，使 $AC=CD$.

在 D 點作 DQ，垂直於 CD.

因 $D\hat{C}P=A\hat{C}B$，而 CB 平行於 $A\Omega$，故 DQ 必平行於 CP.

故 OY,CP,DQ 均為平行。

由是可知 OA,AD 二線節相補。

即 $$\Pi(OA)+\Pi(AD)=\frac{\pi}{2}.$$

照常用記法(§27)令 x' 為 x 之補節。

故知如 $OA=x$，則 $AC=\dfrac{x'}{2}$.

即有 $$Se^{-x}=s=S\tanh\frac{x'}{2}\quad(\text{按 §56(4)})$$

故對於補節，有次之關係 $e^{-x}=\tanh\dfrac{x'}{2}$.

但 $$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \sinh x=\frac{1}{2}\left(\coth\frac{x'}{2}-\tanh\frac{x'}{2}\right)=\frac{1}{\sinh x'}=\operatorname{cosech} x'.\ \text{(15)}$$

---

(13) 即曲線在 A 點之切線。

(14) 因 AB 弧 $<$ OP 弧 $=S$，由 §56 之證明，即可知上述二線應相交。

(15) 因前式 $=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cosh\frac{2x'}{2}-\sinh\frac{2x'}{2}}{\sinh\frac{x'}{2}\cosh\frac{x'}{2}}\right)=\dfrac{1}{2\sinh\frac{x'}{2}\cosh\frac{x'}{2}}$

$\therefore \cosh x + \sqrt{1+\sinh^2 x} = \coth x'$.

$\therefore \tanh x = \operatorname{sech} x'$ 及 $\coth x = \cosh x'$.

且 $\operatorname{sech} x = \tanh x'$ 及 $\operatorname{cosech} x = \sinh x'$.

§59. 直角三角形邊角間之關係式。

設 ABC 爲任意直角三角形, C 爲直角。

將 AC 邊向 C 延長, 且過 B 作 BΩ 平行於 AC.

且延長 AB, 過 B 至於 L, 使節 AL=l 合於

$$\lambda = \Pi(l)$$

之關係[$\lambda = B\hat{A}c$ (參看圖37)]

過 L 作 LΩ 平行於 BΩ 及 A,C.

設以 Ω 爲心, 而過 B,L 之各極限曲線遇諸軸各於 B′, D, D′ 等點, (圖73).

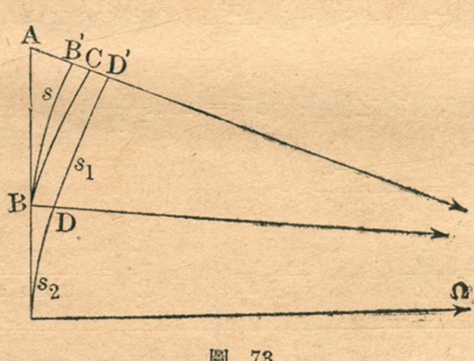


圖 73.

命 BB′,DD′,LD 諸弧爲 s, s_1, s_2, 及線節 BD=u

如是則有　$S \sinh a = s = s_1 e^u$ (§57(2))

$$s_1 + s_2 = S \tanh l \text{ (§56(4))}$$

$$s_2 = S\tanh\ BL = S\tanh(l-c)$$

$$e^u = \cosh\quad BL = \cosh(l-c)\ (\S 56(3))$$

故有 $\sinh a = \cosh(l-c)\{\tanh\ l - \tanh(l-c)\}$

$$= \frac{1}{\cosh l}[\sinh\ l\cosh(l-c) - \cosh l\sinh(l-c)]$$

$$= \sinh\ c/\cosh\ l$$

故　$\sinh c = \sinh a\cosh\ l$　(斜邊,腰,對角)……I

此公式聯絡任何直角三角形,中斜邊,腰,對角,三者之關係,將§36相輔三角形之理,施於此式,則可得其他一切元素之關係。

首取一直角三角形,其中元素爲:

$a,b,c,(\lambda,\mu)$…………………………………(1)

陸續可得三角形其中元素各爲:

$m', b, l\ (\gamma, \frac{\pi}{2} - \alpha)$……………………(2)

$c',m',a', (\lambda, \frac{\pi}{2} - \beta)$……………………(3)

$l',c',b', \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \mu\right)$……………………(4)

$l', a, m, (\gamma, \frac{\pi}{2} - \beta)$……………………(5)

由第二三角形 $m',b,l\ (\gamma, \frac{\pi}{2} - \alpha)$ 可得

$$\sinh l = \sinh m'\cosh c = \frac{1}{\sinh m}\cosh\ c\quad (\S 58)$$

故　$\cosh c=\sinh l \sinh m.$　(斜邊及二角)…………II.

且由同三角形,按 I 式有

$$\sinh l=\sinh b \cosh a'=\sinh b \coth a.$$

故　$\tanh a=\dfrac{\sinh b}{\sinh l}$　(二腰及一角)……………III.

又因　$\cosh c=\sinh l \sinh m$

而有　$\cosh c=\dfrac{\sinh b}{\tanh a}\times\dfrac{\sinh a}{\tanh b}.$

故　$\cosh c=\cosh a \cosh b$　(斜邊及二腰)………IV.

更有　$\cosh a=\sinh l \dfrac{\sinh a}{\sinh b}$　(按 II)

$$=\sinh l \frac{\cosh m}{\cosh l}\quad(\text{按 I})$$

故　$\cosh a=\tanh l \cosh m$　(腰及二角)…………V.

對於三角形, $c',m',a',(\lambda,\dfrac{\pi}{2}-\beta)$應有(IV)式卽得

$$\cosh a'=\cosh c' \cosh m'$$

由此可得　$\tanh a=\tanh m \tanh c$　(斜邊,腰及夾角)…VI.

上述之六公式,可由一規律推出,類乎球三角形中之納披爾規律(Napier's Rules)

設將 a',l,c,m,b' 順序書於一五邊形之相續各邊上,則有

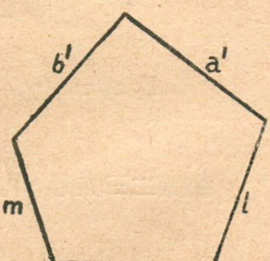


圖 74.

中部之雙曲線餘弦(Cosh of the middle part)＝二鄰部雙曲線正弦 (Sinh of the adjacent parts)之積，及中部之雙曲線餘弦＝二對(opposite)部雙曲線餘切之積。

§60. 關於普通三角形之公式。

在普通三角形 ABC 中，對頂角 A,B,C 之邊仍各以 a,b,c 記之一如常法；但在 A,B,C 之角，則各以 λ,μ,ν 記之。

用此記法，則對於在 A 點之角，其平行距爲 l.

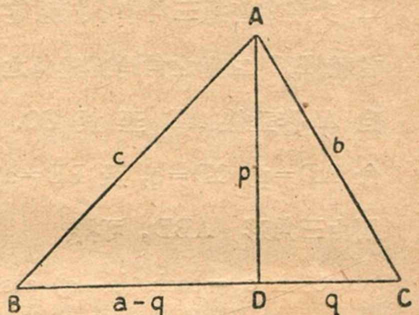


圖 75.

今請證：

I. $\sinh a : \sinh b : \sinh c = \operatorname{sech} l : \operatorname{sech} m : \operatorname{sech} n.$

此理與普通三角學中之正弦規律相當。

設 A,B,C 之諸角均爲銳角。

自任一頂點，設爲 A，作至對邊之垂線 AD，則得二直角三角形 ABD 及 ACD，如圖75.

令 AD＝p. 則得 (按 59, I)

$$\sinh p = \frac{\sinh c}{\cosh m} \quad (\text{由三角形 ABD})$$

$$\sinh p = \frac{\sinh b}{\sinh n} \quad (\text{由三角形 ACD})$$

故得　$\sinh b : \sinh c = \operatorname{sech} m : \operatorname{sech} n.$

又另取一頂點，設之爲 B，而依同法求之，即有

$$\sinh a : \sinh c = \operatorname{sech} l : \operatorname{sech} n.$$

故　$\sinh a : \sinh b : \sinh c = \operatorname{sech} l : \operatorname{sech} m : \operatorname{sech} n.$

如有一角爲鈍角則用 $\Pi(-x)=\pi-\Pi(x)$ 之記法。仍得同一結果。

對於直角三角形，則由 §59. I, 上其結果卽可得出

II 次證與普通三角學中餘弦定律相當之定理如下：

首就 B,C 二處之角均爲銳角之情形論之。

自 A 作垂線 AD 至於 BC.

命 $AD=p$, $CD=q$, 及 $BD=a-q$(見圖75).

則由三角形 ABD, 可得

$$\cosh c=\cosh(a-q)\cosh p\quad(\S59,\ \mathrm{IV})$$

又由三角形 ACD, 可得

$$\cosh b=\cosh p\cosh q$$

且 $\tanh(a-q)=\tanh c\tanh m$　(按 59, VI)

故 $\cosh b=\cosh c\cosh q/\cosh(a-q)$

$$=\frac{\cosh c\,[\cosh a\cosh(a-q)-\sinh a\sinh(a-q)]}{\cosh(a-q)}$$

$$=\cosh a\cosh c-\sinh a\cosh c\tanh(a-q)$$

$$=\cosh a\cosh c-\sinh a\sinh c\tanh m.$$

如在 B 處之角爲鈍角，則 D 落於 CB 之延長線上，如按 $\Pi(-x)=\pi-\Pi(x)$ 之記法，仍得同一結果。

如在 B 處之角爲直角，則其結果由 §59, IV 可得

如是則得餘弦公式如下形：

$$\cosh a=\cosh b\cosh c-\sinh b\sinh c\tanh l$$

§61. 角之度量：

前者所述，除 §§51–2 外均不需定出角之單位，方程式 $\alpha=\Pi(a)$ 雖表示線節與其相當平行角之關係，僅有幾何上之意義，在此式 α 爲一定銳角若於其一邊上離角頂之距爲 a 之處引其垂線則必與他一邊平行，此其特性也。

若零角以 O 表之，則於記角之數值時，只須選定一數即足，在此非歐三角學中，取 $\frac{\pi}{2}$ 爲直角之度，在此種度量法中一切他角均各有其相當之數值。

在本書內用方程式 $\alpha=\Pi(a)$ 時，α,a 二者均視爲數。其一爲據上法所得角之度量，他一數爲線節之度量，其度量法詳下文(§65)，此種單位線節，乃二同心極限曲線間之距，此二曲線，被二軸截得弧長之比爲 e 或 $e^{\frac{1}{k}}$

尙有應注意者，即以上諸節之各三角公式中，各文字之所表者，意在示線節之度量，而非線節之本身。

§62. 角之三角函數：

三角函數 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 等

由下式決定即 $\sin\alpha=\frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\quad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

雙曲線三角學之基本方程式乃 $\tanh a=\cos\alpha$ 式中設 $\alpha=\pi(a)$

今試進求此關係*

設函數 $f(\alpha)$ 由右之方程式確定 $\tanh a=\cos f(\alpha)$.

幷命 $a=\triangle(\alpha)$

當 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 時, $a=0$, $\tanh a=0$, $\cos f(\alpha)=0$; 卽 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

當 $\alpha=0$ 時, $a=\infty$, $\tanh a=1$, $\cos f(\alpha)=1$; 卽 $f(0)=0$

且當 a 由 0 增至 ∞ 時 $f(\alpha)$ 繼續減小, 由 $\frac{\pi}{2}$ 至於 0.

次設非直角之三角形 ABC, 從一頂點 B, 作對邊之垂線與之相交於 D. 命三角形 ABD 之各元素爲 $AB=C$, $BD=a$, $DA=b$, $A\hat{B}D=\mu$, $B\hat{A}D=\lambda$. 又命三角形 BDC 之各元素爲 $BC'=c_1$, $C'D=b_1$, $Db=a_1$, $B\hat{C}D=\lambda_1$ $D\hat{B}C=\mu_1$.

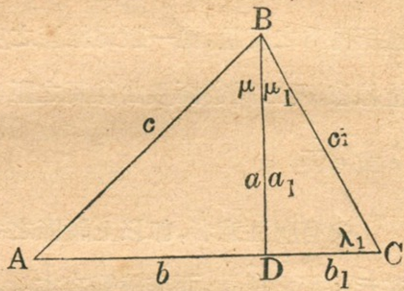


圖 76.

因 BC 邊爲公有, 故 $a=a_1$.

由 §60 之餘弦規律, 得

$$\tanh m=\frac{\cosh c\cosh c_1-\cosh(b+b_1)}{\sinh c\sinh c_1}$$

---

* 下述之證法及以前諸節之證明, 均係李布曼氏所用者, 見 "Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie," Ber. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. Math. Phys. Klasse, vol. lix. p. 187 (1907), 及 Nichteuklidische Geometrie 第二版 p. 71. 又有一不須根據空間幾何之方法, 可於機剌德(Gérard)之著作中求之, 又 §80 註中所引楊(Young)氏之論文亦載及此。

用本節之記法，則為

$$\cos f(\mu+\mu_1) = \tanh \triangle(\mu+\mu_1)$$

$$= \frac{\cosh c \cosh c_1 - \cosh(b+b_1)}{\sinh c \sinh c_1}$$

$$= \coth c \coth c_1 - \frac{\cosh b \cosh b_1}{\sinh c \sinh c_1} - \frac{\sinh b \sinh b_1}{\sinh c \sinh c_1}$$

但已知　$\tanh a = \tanh c \tanh m$ (§59, VI)

即　$\tanh a = \tanh c \cos f(\mu)$

同理　$\tanh a_1 = \tanh c.\ \cos f(\mu_1)$

故　$\coth c \coth c_1 = \coth^2 a \cos f(\mu) \cos f(\mu_1)$

且由 §59, I, 得

$$\frac{\sinh b}{\sinh c} = \frac{1}{\cosh m} = \sin f(\mu),$$ (16)

$$\frac{\sinh b_1}{\sinh c_1} = \frac{1}{\cosh m_1} = \sin f(\mu_1).$$

故　$$\frac{\sinh b \sinh b_1}{\sinh c \sinh c_1} = \sin f(\mu) \sin f(\mu_1)$$

至是尚有　$\dfrac{\cosh b \cosh b_1}{\sinh c \sinh c_1}$ 一項未論。

但按 §59. VI 及 IV 二式有

(16) 此式 $= \sqrt{1-\tanh^2 m} = \sqrt{1-\cos^2 f(\mu)}$

因 b, c 為正，故其雙曲線正弦亦然，又 $0 \leq f(\mu) \leq \frac{\pi}{2}$

故後式化作 $\sin f(\mu)$ 時，取根號前正號。

$$\frac{\tanh m}{\sinh a}=\frac{\cosh c}{\sinh c\cosh a}=\frac{\cosh b}{\cosh c}$$

故 $$\frac{\cosh b\cosh b_1}{\sinh c\sinh c_1}=\frac{\cos f(\mu)\cos f(\mu_1)}{\sinh^2 a}$$

如是得 $\cos f(\mu+\mu_1)$

$$=\coth^2 a\cos f(\mu)\cos f(\mu_1)-\operatorname{csch}^2 a\cos f(\mu)\cos f(\mu_1)-\sin f(\mu)\sin f(\mu_1)=\cos f(\mu)\cos f(\mu_1)-\sin f(\mu)\sin f(\mu_1)$$

$$=\cos[f(\mu)+f(\mu_1)]$$

但因 $$\mu=\mu_1=\mu+\mu_1=0,$$

時 $$f(\mu)=f(\mu_1)=f(\mu+\mu_1)=0.\quad(17)$$

故有 $$f(\mu+\mu_1)=f(\mu)+f(\mu_1)$$

此即一函數方程式(Functional Equation,)由此可推求連續函數 $f(\mu)$

此式可書 $f(x+y)=f(x)+f(y)$

而 $$f(0)=0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

如是則有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(y+h)-f(y)}{h}\quad(18)$$

(17) 注意 $0<\mu,\mu_1,\mu+\mu_1<\frac{\pi}{2}$

及 $0<f(\mu),\ f(\mu_1),\ f(\mu+\mu_1)<\frac{\pi}{2}$

(18) 書函數關係式如 $f(x+h)=f(x)+f(h)$

則 $f(y+h)=f(y)-f(h)$

因而 $f(x+h)-f(x)=f(y+h)-f(h)=f(h)$

取極限卽得

$$f'(x)=f'(y)$$

可見　$f'(x)=$常數

故　$f(x)=Ax+B$

由 $f(0)$ 及 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$之值以定 A 及 B,[19] 最後遂得

$$f(x)=x$$

如是卽得所求證之公式

$$\tanh a=\cos\alpha.$$

§63. 由上節可證得之結果 $\tanh a=\cos\alpha$ 可立得

$$\left.\begin{aligned}\sinh a&=\cot\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cosh a&=\csc\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \coth a&=\sec\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \operatorname{sech} a&=\sin\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \operatorname{csch} a&=\tan\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(\mathrm{I})$$

若加入 §59. 中諸三角公式，又可得下列諸結果；卽

由 $\sinh c=\sinh a\cosh l$, 可得 $\sinh a=\sinh c\sin\lambda$

由 $\sinh b=\tanh a\sinh l$, 可得 $\sinh b=\tanh a\cot\lambda$

由 $\cosh c=\sinh l\sinh m$, 可得 $\cosh c=\cot\lambda\cot\mu$

由 $\cosh c=\cosh a\cosh b$, 仍得 $\cosh c=\cosh a\cosh b$

由 $\cosh a=\tanh l\cosh m$, 可得 $\cos\lambda=\cosh a\sin\mu$.

---

(19) $f(O)=B=O$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ 卽 $A=1$.

由 $\tanh a=\tanh m \tanh c$, 可得 $\tanh a=\tanh c \cos \mu$.

而 §60. 之普通三角形公式變爲

$$\sinh a : \sinh b : \sinh c=\sin\lambda : \sin\mu : \sin \nu$$

$$\cosh a=\cosh b \cosh c-\sinh b \sinh c \cos \lambda$$

凡此諸結果，皆與球三角學中之相當公式符合，所異者式中以 λ, μ, ν 代 A. B. C 以 a, b, c 之雙曲線函數代 a, b, c 之圓函數而已。

§**64**. 平行角

按 $$\tanh a = \cos \alpha$$

而有 $$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\tanh a}{1+\tanh a}$$

故 $$\tan^2\frac{\alpha}{2}=e^{-2a}$$

而 $$\tan\frac{\alpha}{2}=e^{-a}$$

α 爲銳角，故開方時取正值。

此式又可書如

$$\tan\frac{1}{2}\Pi(p)=e^{-p}*$$

§**65**. 在求 §§56–64 之諸公式時均設單位線節爲二同心極限曲線間之距，此二曲線被二軸截取弧長之比爲 e.

若另採用他種單位，使 A B 弧與 A_1B_1 弧之比，爲大於 1 之一數a,

---

* 此結果載於波爾業之 Appendix, §29 中；羅巴曲士奇各著述中亦均言及，例如見 Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, §36.

則應以　$s_x = sa^{-x}$ 一式易 $s_x = se^{-x}$

命　$a = e^{\frac{1}{k}}$

則得　$s_x = se^{-\frac{x}{k}}$

此參變數 k 應合於以上諸節各式之內，使 $\sin\frac{a}{k}$，$\cosh\frac{a}{k}$ 等式代 $\sinh a$, $\cosh a$ 等式。

且平行角之方程式，應為

$$\tan\frac{1}{2}\Pi(p) = e^{-\frac{p}{k}}$$

由此可覘歐氏幾何為雙曲線幾何之一特例，因設 $k\to\infty$ 時此種非歐幾何學之公式均化為歐氏幾何學中之式矣。

始因　$\tan\frac{1}{2}\Pi(p) = e^{-\frac{p}{k}}$

故 $k\to\infty$ 時平行角之值為 $\frac{\pi}{2}$

且聯絡直角三角形邊角之式，即

$$\sinh\frac{a}{k} = \sinh\frac{c}{k}\sin\lambda,$$

$$\sinh\frac{b}{k} = \tanh\frac{a}{k}\cot\lambda,$$

$$\cosh\frac{c}{k} = \cot\lambda\cot\mu,$$

$$\cosh\frac{c}{k} = \cosh\frac{a}{k}\cosh\frac{b}{k},$$

$$\cos\lambda = \cosh\frac{a}{k}\sin\mu,$$

$$\tanh\frac{a}{k} = \tanh\frac{c}{k}\cos\mu.$$

中,若以 A,B 代 λ. μ.(20) 則得

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cot A = \frac{b}{a}$$

$$\cot A \cot B = 1$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\cos A = \sin B$$

$$\cos B = \frac{a}{c}$$

更由普通三角形之正弦餘弦二規律(§63)立得

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

又如不設k趨於無窮大,而令a,b,c 爲趨於零,則$\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ 亦爲無窮小,在此種情形中,亦可得歐氏幾何學中之關係式。

此結果倘可述之如次:

在羅氏平面上一點無窮隣近處,歐氏幾何學中之公式,均能成立。

或

(20) 更令 $k \to \infty$.

歐氏幾何學中公式，在羅氏平面上之無窮小幾何學中，不失爲眞。

此等定理，對於雙曲線幾何，能否代表吾人所居空間之外界關係一問題，有重要之意義，任何實際上之度察均有相當之差誤，在此差誤之範圍內，吾人雖得由實驗之事件，以示三角形之內角和，果爲二直角，但據此不能即證明吾人所居空間內之幾何，即爲歐氏一派，或係一雙曲線幾何，其中 k 之値甚大，亦未可料。

故取 k 之値大至相當程度則波羅二氏之幾何學，亦得與經驗上事實脗合，歐氏設理乃求達同一結果之他種方法，途雖殊而歸則同，此法且爲一較善之方法。因可得一較簡明之幾何學也，

第五章　用微積學以論長及面積之度量

§66. 今將應用第四章中所述三角公式，以求曲線之弧長及面積。於此首宜求平曲線弧長元素(Element of Arc)表示式如下：

用卡氏位標法求弧長元素。

在歐氏平面上，有　　　$ds^2=dx^2+dy^2$

今請證在羅氏平面上之相當式爲

$$ds^2=\cosh^2\frac{y}{k}dx^2+dy^2$$

設 P,Q 二點之位標各爲 $(x,y)(x+\delta x,y+\delta y)$

作PM及QN，各垂直於x軸。

則 $OM=x$，$MP=y$，$ON=x+\delta x$，$NQ=y+\delta y$

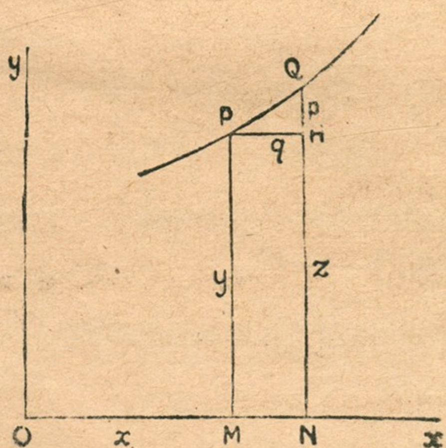


圖 77

自P作PH垂直於QN.

設 $PQ=\delta s$, $PH=q$. $HQ=p$及$NH=z$

在直角三角形內,略去高級諸項卽得 $\delta s^2=p^2+q^2$*

且在四邊形 MNHP 內, 在 M_1N_1H 之角均爲直角,自M起各邊

依次爲　　$\delta x,\ z,\ q,\ y$

而與一直角三角形中　　$a,\ m',\ c,\ l$

相應 (§35)

故有　$\sinh\frac{\delta x}{k}=\sinh\frac{q}{k}/\cosh\frac{y}{k}$ (§59,I)

略去高級諸項,卽得　$q=\cosh\frac{y}{k}\delta x$

且　$\cosh\frac{\delta x}{k}=\tanh\frac{y}{k}\coth\frac{z}{k}$ (§59,V§58)

故當 δx 甚小時, y,z 二量相差極微。(1)

命　$z=y+\eta$

卽得　$\tanh\frac{y+\eta}{k}\cosh\frac{\delta x}{k}=\tanh\frac{y}{k}$

略去高級諸項,可得

---

* 由 §65 推得,因在該節中,吾人已證得歐氏幾何公式在無窮小幾何中能成立也,如自

$$\cosh\frac{\delta s}{k}=\cosh\frac{p}{k}\cosh\frac{q}{k}$$

一式着手,則略去高級諸項,亦得同一之結果。

(1) 因 $\cosh\frac{\delta x}{k}$於 $\delta x\to 0$ 時,其値趨於 1 故也。

$$\left(\tanh\frac{y}{k}+\frac{\eta}{k}\right)\left(1+\frac{\delta x^2}{2k^2}\right)=\tanh\frac{y}{k}\left(1+\frac{\eta}{k}\tanh\frac{y}{k}\right)\ (2)$$

即 $$\eta=-\frac{1}{2k}\sinh\frac{y}{k}\cosh\frac{y}{k}\delta x^2$$

故 y,z 相差之量,對於 δx 爲二級者。

但 $p=(y+\delta y)-z$

略去二級以上諸項 $p\doteq\delta y$

代入 $\delta s^2=p^2+q^2$ 而得

$$\delta s^2=\cosh^2\frac{y}{x}\delta x^2+\delta y^2$$

此等式中設其高級諸項已略去。

故得證明以卡氏位標法表弧長元素之式爲。

$$ds^2=\cosh^2\frac{y}{k}dx^2+dy^2$$

§67. 極位標式之弧長元素。

在歐氏平面中,用極位標時,弧長元素以下式表之

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$$

今求在羅氏平面中之相當公式

求法有二,吾人可利用 x,y, 與 r,θ 之關係式,即:

---

(2) 因 $\tanh\frac{y+\eta}{k}=\left(\tanh\frac{y}{k}+\tanh\frac{\eta}{k}\right)\Big/\left(1+\tanh\frac{y}{k}\tanh\frac{\eta}{k}\right)$

再按 $\tanh\frac{\eta}{k}=\frac{\eta}{k}-\frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{k}\right)^3+\frac{2}{15}\left(\frac{\eta}{k}\right)^5-\cdots\cdots$

$\cosh\frac{\delta x}{k}=1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta x}{k}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\delta x}{k}\right)^4+\cdots\cdots$

等式代入卽得

$$\left.\begin{aligned}\cosh\frac{r}{k}&=\cosh\frac{x}{k}\cosh\frac{y}{k},\\ \tan\theta&=\frac{\tanh\dfrac{y}{k}}{\sinh\dfrac{x}{k}}\end{aligned}\right\}[\text{見 §63}]$$

以自
$$ds^2=\cosh^2\frac{y}{k}dx^2+dy^2$$
中,推出所求之結果。(3)

但此法不如直接求法之簡,且可益人神思。

---

(3) $\sinh\frac{y}{k}=\sinh\frac{r}{k}\sin\theta$ (§63. 後第一式)

$\tanh\frac{x}{k}=\tanh\frac{r}{k}\cos\theta$ (§63, 後第六式)

故
$$dy=\frac{k\sinh\dfrac{r}{k}}{\cosh\dfrac{y}{k}}\cos\theta\,d\theta+\cosh\frac{x}{k}\sin\theta\,dr$$

$$\cosh\frac{y}{k}dx=-k\sinh\frac{r}{k}\cosh\frac{x}{k}\sin\theta\,d\theta+\frac{1}{\cosh\dfrac{y}{k}}\cosh\theta\,dr$$

兩端平方相加,即得

$$\begin{aligned}ds^2&=\cosh^2\frac{y}{k}dx^2+dy^2\\ &=\left[\frac{\cos^2\theta}{\cosh^2\dfrac{y}{k}}+\cosh^2\frac{x}{k}\sin^2\theta\right](k^2\sinh^2\frac{r}{k}d\theta^2+dr^2)\\ &=k^2\sinh^2\frac{r}{k}d\theta^2+dr^2\end{aligned}$$

因按 §63 後第五式,可得

$$\frac{\cos^2\theta}{\cosh^2\dfrac{y}{k}}=\sin^2\mu,\ \cosh^2\frac{x}{k}\sin^2\theta=\cos^2\mu$$

故第一括號內式之值爲 1.

設 P,Q 二點之極位標爲(r,θ),$(r+\delta r,\theta+\delta\theta)$

作 PN垂直於OQ.

命 $PQ=\delta s$,$PN=q$.$NQ=p$ 及 $ON=z$

則按三角形 PNQ.可得 $\delta s^2=p^2+q^2$ 如前。

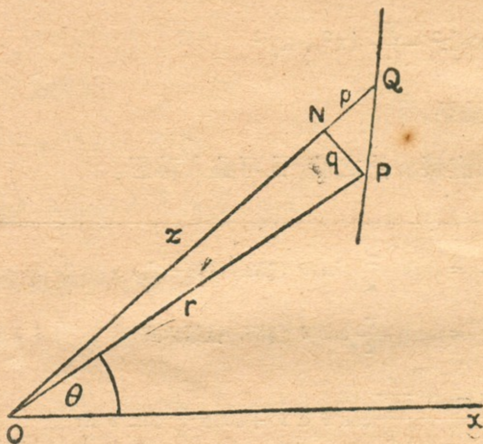


圖 78

且自三角形 ONP,又有

$$\sinh\frac{q}{k}=\sinh\frac{r}{k}\sin\delta\theta \quad (\S 63)$$

略去高級項,得　$q=k\sinh\frac{r}{k}\delta\theta$

$$\cosh\frac{r}{k}=\cosh\frac{z}{k}\cosh\frac{q}{k}.$$

故 r,z 之值,幾於相等。

命　　　　$r=z+\xi$

取低級項時,則有 $\cosh\frac{z}{k}+\frac{\xi}{k}\sinh\frac{z}{k}=\cosh\frac{z}{k}\left(1+\frac{q^2}{2k^2}\right)$

故　　$\xi=\frac{q^2}{2k}\coth\frac{z}{k}$

即 r,z, 之差,對於 $\delta\theta$ 言爲二級者。

但　　$p=r+\delta r-z$

今就一級項論,則　$p=\delta r$

由是知略去高級項時,即得 $\delta s^2=\delta r^2+k^2\sinh^2\frac{r}{k}\delta\theta^2$

故　$ds^2=dr^2+k^2\sinh^2\frac{r}{k}d\theta^2$

§68. 以極限曲線位標(Limiting-Curve Coordinates)定弧長元素。

今請述羅氏平面上之一種特殊位標制,P點之位置,由過此點之極限曲線及軸二者決定,并設諸極限曲線,皆爲同心,其公共心在爲x軸上之無窮遠點。

設過P點之極限曲線在x軸上,截取一段長 ξ (OP_0),而過P點之軸,在過O點之極限曲線上,截取一段弧長 η(OA)(圖79.)

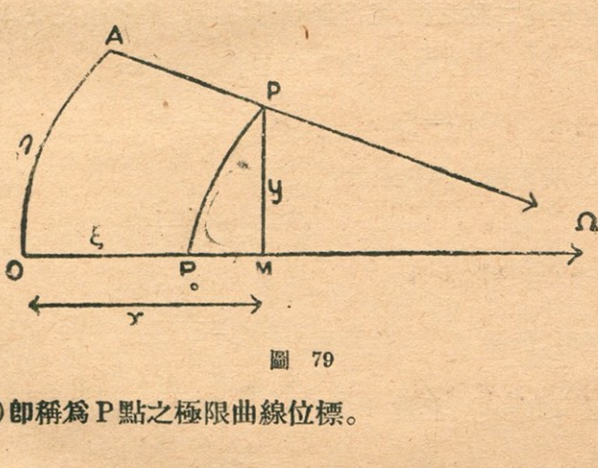


圖　79

(ξ,η) 即稱爲P點之極限曲線位標。

更另取一點Q其位標為

$(\xi+\delta\xi, \eta+\delta\eta)$

設過Q點之極限曲線，交x軸(即過O點之軸)於Q_0.

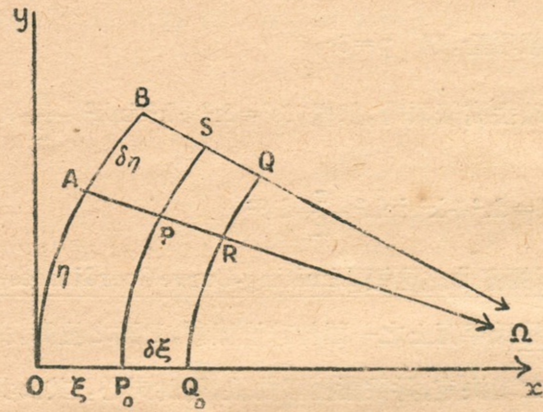


圖 80.

又設過P點之極限曲線，交過Q點之軸於S，過Q點之極限曲線，與過P點之軸交於R.

更命過P,Q二點之軸，各與過O點之極限曲線相交於A,B.

則有　　OA弧$=\eta$,　　OB弧$=\eta+\delta\eta$,

$OP_0=\xi$,　　$OQ_0=\xi+\delta\xi$,

按 §55 所述極限曲線之特性，即得

$$QR \text{ 弧} = \delta\eta . e^{-\frac{\xi+\delta\xi}{k}}.$$

僅取第一級項，即得　　QR弧$=\delta\eta . e^{-\frac{\xi}{k}}$

且 $PR=\delta\xi$，并書 $PQ=\delta s$，一如常法。

因僅取低級項論有

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$$

即
$$\delta s^2 = \delta\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{k}}\delta\eta^2$$

故
$$ds^2 = d\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{k}}d\eta^2$$

此結果亦可利用(x,y)與(ξ,η)之關係式，據 §66 以推之，[見 §57 及 §69(3)].

§69. 今應用諸公式以求圓周，等距曲線及極限曲線二者一段弧之長。

1. 以 a 爲半徑之圓周

在 $ds^2 = dr^2 + k^2\sinh^2\frac{r}{k}d\theta^2$

中，令　$r = a$　則　$dr = o$

故自 $\theta = 0$ 至 $\theta = \theta$ 之弧爲

$$s = k\ \sinh\ \frac{a}{k}x\theta$$ (4)

令　$\theta_0 = 2\pi$，即得圓周之長爲

$$s = 2\pi k\sinh\frac{a}{k}$$

2. 等距曲線 $y = b$ 之弧長。

在
$$ds^2 = \cosh^2\frac{y}{k}dx^2 + dy^2$$

---

(4) 因　$s = \int_0^\theta k\sin\frac{a}{k}d\theta$

中，令 $y=b$ 則 $dy=o$

故自 $x=o$ 至 $x=x_0$ 之弧為

$$s=x\cosh\frac{b}{k}\text{(5)}$$

3. 極限曲線之弧長。

一極限曲線過原點，而以 x 軸上之無窮遠點為心者。其方程式為

$$e^{\frac{x}{k}}=\cosh\frac{y}{k}\text{[參看 §57(1)](6)}$$

在 $ds^2=\cosh^2\frac{y}{k}dx^2+dy^2$

中代入 $dx=\tanh\frac{y}{k}dy.$(7)

則得 $ds^2=\left(1+\sinh^2\frac{y}{k}\right)dy^2.$

故 $ds=\cosh\frac{y}{k}dy.$

是以從原點起度量弧長即得

---

(5) 因 $s=\int_o^x\cosh\frac{b}{k}dx.$

(6) 并參看 §65 之說明。

(7) 就 $e^{\frac{x}{k}}=\cosh\frac{y}{k}$ 二端微分之，易得

$$dx=e^{\frac{-x}{k}}\sin\frac{y}{k}dy$$

即可化為本式。

$$s \quad = k \sinh \frac{y}{k} \quad (8)$$

以上式與 §57(2)式相較，可知當 $k=1$ 時，如極限曲線弧一端之切線，與他端之軸平行，則此弧長為單位。

§70. 面積之元素

設以Ω為心之極限曲線上一段弧 AB，而在B點之切線，與過A點之軸平行。

比較 §57(2)式及 §69 中 3，可知AB弧$=k$.

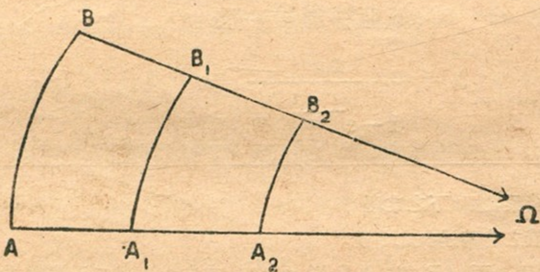


圖 81.

且若　$AA_1=1$，則 A_1B_1 弧之長 $=ke^{-\frac{1}{k}}$

若　$A_1A_2=1$，則 A_2B_2 弧之長 $=ke^{-\frac{2}{k}}$

於是等等 (§65)

命 ABB_1A_1 之面積為 Δ_0。

(8) 因　$s=\int_0^y \cosh \frac{x}{k} \, dy$.

則［參看 §48］$A_1B_1B_2A_2$ 之面積應爲 $\Delta_0 e^{-\frac{1}{k}}$(9)

而　　$A_2B_2B_3A_3$ 之面積爲 $\Delta_0 e^{-\frac{2}{k}}$ 如是等等。

故 ABB_nA_n 之面積

$$=\Delta_0\left(1+e^{-\frac{1}{k}}+e^{-\frac{2}{k}}+\cdots\cdots+e^{-\frac{n-1}{k}}\right)$$

$$=\Delta_0\left(\frac{1-e^{-\frac{n}{k}}}{1-e^{-\frac{1}{k}}}\right)$$

是以當 $n\to\infty$ 時，此面積趨於一限

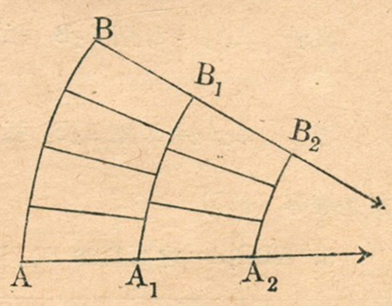
$$\Delta=\frac{\Delta_0}{1-e^{-\frac{1}{k}}}$$

(9) 欲明此結果，應知下之定理

今於進求面積之前請述次之定理。

如 $AA_1=A_1A_2$，而 AB 弧：A_1B_1弧 $=p:q$，式中 p,q，爲二正整數，則面積 ABB_1A_1：面積 $A_1B_1B_2A_2=p:q$.

設分 AB 爲 p 等分，A_1B_1 爲 q 等分，則每分盡皆相等，且連相當分點之線節亦等長(§54(1)).



故在取如是所分成之小形二，就其一中任作一內接多邊形，他一形中必有一相當之合同內接多邊形，其爲等容及等積，自不待言。

令相當之內接多邊形，各趨於其極限值，則此二極限值亦必相同，卽此二小形之面積相等，故諸小形者盡相等。

但 ABB_1A_1 爲 p 個小形所合成 $A_1B_1B_2A_2$ 爲 q 個所合成。故二者面積之比爲 $p:q$.

用趨限之法，可知二弧之比爲一無理數時，上理亦無不合。

此即一極限曲線之二軸及一段弧，當一端之切線與他端平行時，所範區域之面積也。

在此討論中，尚未選取面積之單位，今定面積之單位使 Δ 之面積即爲單位面積之 k^2 倍。

用此度量法，則　$\Delta_0 = k^2(1-e^{-\frac{1}{k}})$

且 ABB_nA_n 之面積爲

$$k^2(1-e^{-\frac{n}{k}})$$

次設 P 爲 A B 弧或其延長弧上一點，使 A P 弧 $=s$.

則　面積 APP_1A_1 : 面積 $ABB_1A_1 = s:k$

而　面積 $APP_nA_n = ks\,(1-e^{-\frac{n}{k}})$

首設 x 爲一有理數，次視 x 之無理值，爲有理值之數纚 (Sequence) 所趨之限，即可按上理求得二同心極限曲線之弧所範面積爲

$$ks(1-e^{-\frac{x}{k}})$$

式內 x 爲二曲線間距離，(10)　s 爲大弧之長。

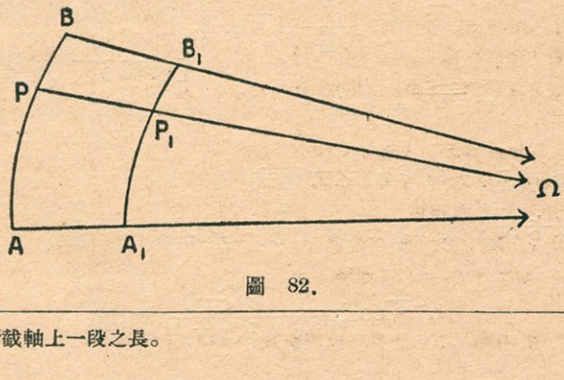


圖 82.

(10) 卽所截軸上一段之長。

由上之結果，卽可推求以極限曲線位標表面積元素之式。

設 P,Q,R,S 諸點(見圖80)之位標各爲

$$(\xi,\eta),(\xi+\delta\xi,\eta+\delta\eta),(\xi+\delta\xi,\eta),(\xi,\eta+\delta\eta)$$

則 $\qquad PS弧=\delta\eta . e^{\frac{\xi}{k}} \quad (\S 68)$

及 $\qquad PR=\delta\xi$

故面積PQRS爲 $\qquad k\delta\eta . e^{-\frac{\xi}{k}}(1-e^{-\frac{\delta\xi}{k}})$

當 $\delta\xi,\delta\eta$ 甚微時，取上式最低級項，卽得

$$e^{\frac{\xi}{k}}\delta\xi\delta\eta$$

故極限曲線位標之面積元素表示式爲$e^{-\frac{\xi}{k}}\delta\xi\,\delta\eta$

此式等於二垂直弦 PR,PS 之積，是二弦卽範此無窮小元素者，如用此等單位，則面積元素之表示式，與歐氏平面中者同。

§71. 以卡氏位標表面積元素

此結果可用微積術。由 §70 之式中推出。

吾人有
$$\left.\begin{aligned}\eta &= k\tanh\frac{y}{k}\,e^{\frac{x}{k}},\\ e^{\frac{x-\xi}{k}} &= \cosh\frac{y}{k}\end{aligned}\right\}[參看§57 及 §69(3).]$$

此卽聯絡(x,y)與(ξ,η)之方程式。

欲求以卡氏位標(x,y)表示面積元素之式，只須將

$$e^{-\frac{x}{k}}\cosh\frac{y}{k}\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}dx\,dy$$

代$e^{-\frac{\xi}{k}}d\xi d\eta$ 可矣,依式(11)化簡,即得　$\cosh\frac{y}{k}dx\,dy$

此結果亦可直接求之如次:

設 P,Q之位標爲 $(x,y),(x+\delta x,y+\delta y)$.

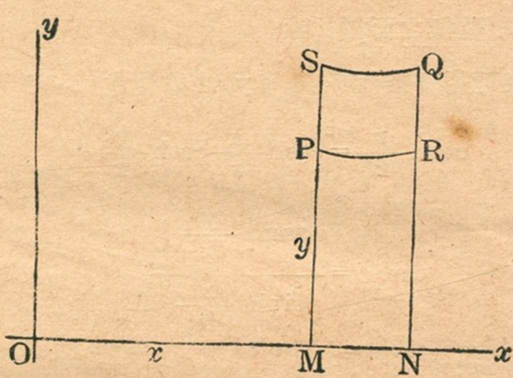


圖 83.

又設過 P,Q 二點,而以O x 爲底線之諸等距曲線,與縱標相交於R,S(圖83).

則圖形 P R Q S 於極限時,爲一長方形,且能用歐氏幾何中公式,以求其面積。(比較 §70)

---

(11) 按　$\xi=x-k\log\cosh\frac{y}{k}$,　$\eta=ke^{\frac{x}{k}}\tanh\frac{x}{k}$

即得
$$\frac{\partial(\xi,n)}{\partial(x.y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -\tanh\frac{y}{k}\\ e^{\frac{x}{k}}\tanh\frac{y}{k} & e^{\frac{x}{k}}\operatorname{sech}^2\frac{y}{k}\end{vmatrix}$$

$$=e^{\frac{x}{k}}\left(\operatorname{sech}^2\frac{y}{k}+\tanh^2\frac{y}{k}\right)=e^{\frac{x}{k}}$$

按 §69(2)式　　$PR弧 = \cosh\frac{y}{k}\delta x$

且　　$PS = \delta y$

故卞氏位標法之面積元素表示式爲　$\cosh\frac{y}{k}dx\,dy$

§72. 極位標之面積元素。

此結果可用聯絡(r,θ)與(x,y)之方程式

$$\cosh\frac{r}{k} = \cosh\frac{x}{k}\cosh\frac{y}{k}\,,$$

$$\tan\theta = \frac{\tanh\frac{y}{k}}{\sinh\frac{x}{k}}$$

求之如前(12)

(12) 由 §63 一,六兩式

$$\sinh\frac{y}{k} = \sinh\frac{r}{k}\sin\theta,\quad \tanh\frac{x}{k} = \tanh\frac{r}{k}\cos\theta$$

故 $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\cosh^2\frac{x}{k}\cos\theta}{\cosh^2\frac{r}{k}} & \dfrac{k\cosh^2\frac{r}{k}\sinh\frac{r}{k}\sin\theta}{\cosh\frac{r}{k}} \\ \dfrac{\cosh\frac{r}{k}\sin\theta}{\cosh\frac{y}{k}} & -\dfrac{k\sinh\frac{r}{k}\cos\theta}{\cosh\frac{y}{k}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{k\sinh\frac{r}{k}}{\cosh\frac{y}{k}}\left(\frac{\cos^2\theta}{\cosh^2\frac{y}{k}} + \cosh^2\frac{x}{k}\sin^2\theta\right)$$

但括號內式之值爲 1 (§67)

以　　$\cosh\frac{y}{k}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}dr\,d\theta$

代 $\cosh\frac{y}{k}dx\,dy$ 卽得　$k\sinh\frac{r}{k}dr\,d\theta$ 爲吾人所求者

但由幾何圖形，直接求面積元素，爲法較簡。

設 P,Q之位標各爲(r,θ) $(r+\delta r,\ \theta+\delta\theta)$.

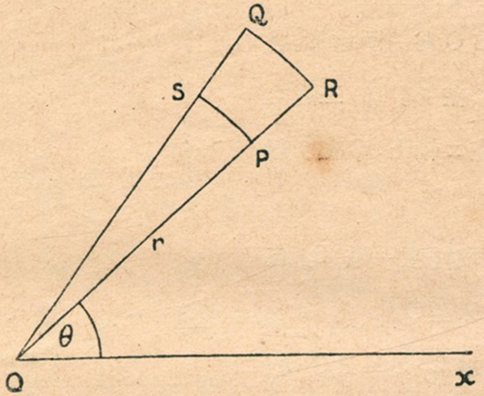


圖 84

命過 P,Q 二點以 O 爲心之諸圓，與諸半徑交於S反R，成元素 PRQS.

則按 §69(1)知　PS弧$=k\sinh\frac{r}{k}\delta\theta$,　$PR=\delta r$

且圖形PRQS於趨限時成一正方形，

是以極位標中面積元素之式爲　$k\sinh\frac{r}{k}dr\,d\theta$

故以 a 爲半徑之圓之面積爲

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}k\sinh\frac{r}{k}dr\,d\theta$$

可化得　$$2\pi k^2\left(\cosh\frac{a}{k}-1\right)\quad(13)$$

---

(13) 前式 $=k\int_0^{2\pi}\left[k\cosh\frac{r}{k}\right]_0^a d\theta$

$=k^2\left[\cosh\frac{a}{k}-1\right]\int_0^{2\pi}d\theta.$

或 $\qquad = 4\pi k^2 \sinh^2 \frac{a}{2k}$

§73. 三角形及有三直角四邊形之面積。

設 O A B C 爲一四邊形，各邊爲 a,m′,c,l, 在 O,A,C 三處之角爲直角；A在 x 軸上，C在 y 軸上。

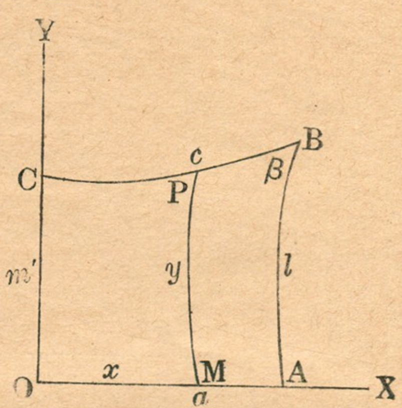


圖 85.

在C B上取任意一點 P, 自P點作垂線P M至O A.

則就與四邊形 O M P C 相輔之直角三角形可得

$$\tanh \frac{y}{k} \cosh \frac{m}{k} = \cosh \frac{x}{k} \quad (\S 59\text{V})$$

但四邊形O A B C之面積。可由

$$\int_0^a \int_0^y \cosh \frac{y}{k} dx\ dy$$

求出，今記之爲 S.

求積得 $\qquad S = k \int_0^a \sinh \frac{y}{k} dx$

$$= k \int_0^a \frac{\cosh \frac{x}{k}}{\sqrt{\sinh^2 \frac{m}{k} - \sinh^2 \frac{x}{k}}} dx$$

$$= k^2 \sin^{-1} \frac{\sinh \frac{a}{k}}{\sinh \frac{m}{k}}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{s}{k^2}=\frac{\sinh\frac{a}{k}}{\sinh\frac{m}{k}}$$

但由其相輔直角三角形，有

$$\tanh\frac{b}{k}=\frac{\sin\frac{a}{k}}{\sin\frac{m}{k}}(\S 59.\ \mathrm{III})$$

及
$$\tanh\frac{b}{k}=\cos\beta(\S 62)$$

故
$$\sin\frac{S}{k^2}=\cos\beta$$

因而
$$\therefore\ S=k^2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

是以知據此種度量時，有三直角及一銳角 β 之四邊形面積，等於

$$k^2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

但每一三角形 A B C （圖86）與一相當薩氏四邊形 B C C′B′ 等積，在後者中 B,C 二處之角，等於此三角形內角和之半。

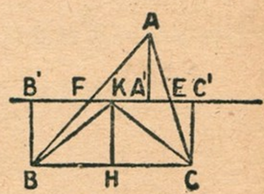


圖 86.

故此三角形之面積，二倍於一四邊形，有三直角，及一銳角爲 $\frac{1}{2}(A+B+C)$ 者。

應用適所求得之結果，可知據此種度量時，三角形 A B C 之面積爲

$$k^2(\pi-2\beta)$$

式內 $2\beta=A+B+C$

換言之,即三角形之面積爲其角欠與 k^2 之乘積。

將此結果與 §52 較,即可知 §70 所選定此種特殊單位之故矣。

第六章　橢圓平幾何學

§74. 按喜爾柏特之平行設論，過任何直線，b 外之一點 A，對此線可作二平行線，且此等平行線所定平面上之直線，有一與 b 相交者，有不與 b 相交者，二者卽以此分隔。

在歐氏假設中，則 a_1,a_2, 二半射線合而為一，卽過任何直線外一點，僅有一直線與之平行。

此外尙有一種情形，可供研究，卽過 A 點之半射線盡皆與 b 相交是也，在是例，過線外一點，不能作該線之平行線。

下文將證明此種情形，與薩氏之鈍角假設相當，因之任何三角形之內角和大於二直角，薩氏及勒氏雖曾視此種情形為不眞而删去之；但其論證，係以直線為無限長之假說為依據，里曼氏為首認鈍角假設，亦為可能之人，氏以為欲一種幾何體係，與是相合，僅須將直線為無端 (Endless) 或無際之說，以代直線為無限長之假設，（參看 §§19,20)

故此幾何，係建築於直線非無限而為無端，及過線外一點不能作其平行線之二假設上，今仍照雙曲線幾何學之方法，以討論之。

§75. 今將發展一種幾何學，據下之二假設。

(i)　凡直線皆相交。

(ii)　直線非無限長。

以代歐氏臆說，及其所暗用直線為無限長之假定。

設 A,B 為已知線 L 上之二點。

則在 A,B 二點，各作L之垂線，二者必相交於一點（按 i），

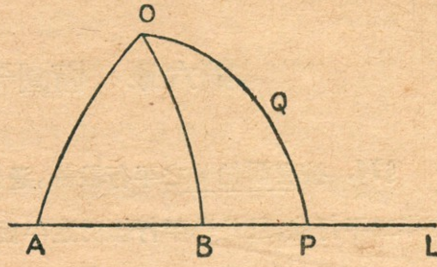


圖 87.

命其交點爲 O.

因 $O\hat{A}B=O\hat{B}A$,(1) 故 $OA=OB$.

在 O點作 $B\hat{O}Q=A\hat{O}B$（圖87），延長O Q與L交於一點，命之爲 P.

如是則 $AB=BP$, 且 $O\hat{P}A$ 爲直角。(2)

按同法繼續作圖，可明如P爲 A B向B 之延長線上一點，而$AP=m.AB$ 時，直線 OP 與L垂直，而等於 OA 及OB. 同理在A B向A之延長線上各點，合於 $BP=m.AB$ 之關係者，上理亦合，此二種情形中之m爲正整數。

今設C爲A B上一點，合於關係式 $AB=m.AC$, m 爲一正整數，則在C與L垂直之線，亦必經過 O, 因苟設其與O A交於 O′, 則按上之論證，易知 O′B 亦垂直於 L, 而與O B相合(3)

由是可知如P爲L上一點，合於$AP=\frac{m}{n}\cdot AB$ 之關係， m,n 爲

(1) 且 AO,BO 非同一直線。

(2) 因直角三角形 OBA,OBP 中有公共邊 OB 及等角 $A\hat{O}B=B\hat{O}P$. 故爲合同形，故 $AB=BP$ 且 $O\hat{P}A=O\hat{A}B$ 二直角。

(3) 因過線上一點，僅能作其一垂線也。
又 OB 與 OA 相交於 O, 故 O′ 與 O 相合。

二正整數，則 O P 必垂直於 L，而等於 OA 及 OB.

當 AP:AB 之比爲無公度數時，則由趨限之方法，得證明其仍無不合。

是以線上一切諸點，均已含於此論證中，故直線 L 上任何點之垂線，均經過同點。

今設 L' 爲另一直線，A',B' 爲其上二點。而 $A'B'=AB$.

在 A',B' 二點之垂線交於一點，命之爲 O'.

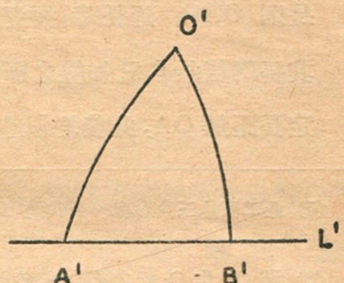


圖 88.

三角形 AOB,$A'O'B'$ 有一邊及其二隣角各各相等，故爲合同形。

故 $O'A'=OA$.

由是遂得證明在任何直線上，一切點之垂線，必交於一點，而至此線之距離爲一定

此點稱爲是線之極點 (Pole)，[4]

§76. 茲將 O A 延長至 O_1，使 $O_1A=OA$ 如圖 89

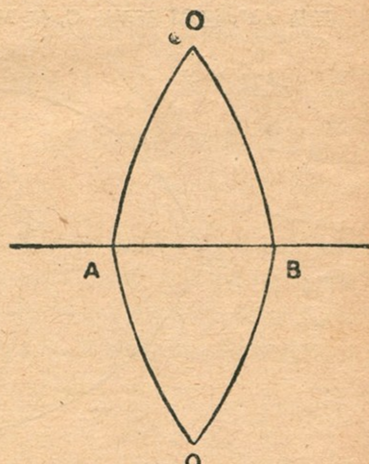


圖 89.

連 OB_1

則由三角形 OAB,O_1AB，可知

(4) 是線稱爲此點之極線(Polar Line)。

$O_1\hat{B}A = O\hat{B}A$ 二直角。(5)

故 OB 與 OB_1 爲一直線。

且延長 AO_1 必與A B交於一點 C，(6) 而有 O_1C 垂直於 AB，且 OC 亦與A B垂直。

是則 OAO_1 延長時，復返於 O，而此線爲無端或無際。

其長四倍於自已知線之極至該線之距。

定長距離 OA，此後均以△記之，用此記法，則一直線之全長爲4△.

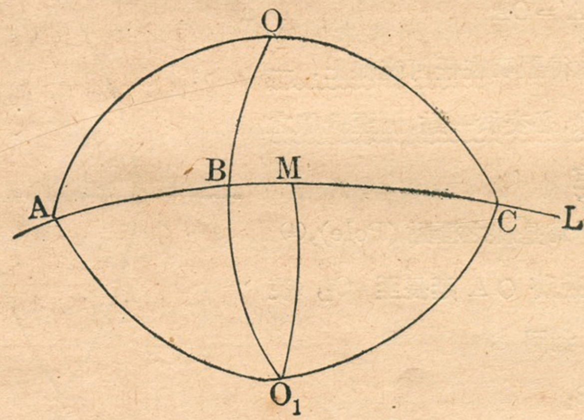
---

(5) 此二直角三角形有一公共邊 AB，且 $OA = O_1A_1$，故爲合同形，故上述二角爲直角。

(6) 過 O_1 作 O_1A 之垂線，則必與 AB 或其延長線交於一點，命之爲 M.

由上節可知 O_1M 必與 L，卽 AB，垂直。

延長 AM，過 M 而至於 C，使 $MC = AM$，并連 O_1C.



在三角形 AMO_1，CMO_1 中有公共邊 O_1M，等邊 $AM = MC$，及二者夾角均爲直角，故爲合同形，因之 $C\hat{O}_1M = A\hat{O}_1M =$ 直角。

故 AO_1，O_1C 在一直線上，換言之，卽 AO_1 之延長線與 L，卽 AB，相交於 C.

故普通幾何學中之他二假設，在是處亦生矛盾；於是遂有

二線能爲有界之形。

二點不必確定一直線。

經過一直線之二極點，(7) 可作無數直線，猶之過一球直徑二端可作無數大圓弧然。

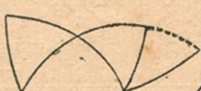
於是甚易明歐氏幾何原理第一卷第十六題。一定理之論證，在此幾何中，未必能成立（參看§2），僅於三角形內相當中線之長，小於△時，其外角大於相對內角，如此中線之長等於△，則外角等於所論之內對角；如其大於△，則外角小於所論之內對角。(8) 又第一卷之第二十七題一定理之證明中，必須用及同卷之十六題，故是理於此種幾何學中，亦不必爲眞，其事顯然可見，又如第一卷之十六題能成立，則過一直線外任何點，至少當可引一平行線，在橢圓幾何學平面上之一有限區域，第一卷之十六題可以成立，則準是而生之定理，在此區域內，亦能成立。

---

(7) 如此二點，互稱爲峙點 (Antipodal points).

(8) 當中線之長，小於 Δ時，其論證與歐氏幾何者同。因如是，則二倍中線之長，猶得小於直線全長之半，故外角頂點，與二倍中線線節之他一端點之聯線，必處於此外角之內如下圖一，如此中線之長等於 Δ，則該聯線與一邊之延長線相合，而此外角等於一相對內角，如下圖二，若中線之長大於 Δ，則上述之聯線必處於外角之外，因而此外角小於相當內角，如下圖三。

圖二



圖一

圖三

故在橢圓幾何學中之平面，其性質與球面之性質完全相倣，球面上之大圓弧，與是種平面上之直線相當，球面上任意二點，只須不爲直徑之二端時，故可定一大圓弧，球面上遇任何點之大圓弧，均與其他一切大圓弧相交。

此種類似之點，更可推展，球面三角形之內角和，恆大於二直角。此種平面上三角形之內角和亦然，球面剩餘 (Spherical Excess) 可度球三角形之面積，取適宜之單位，此種平面上三角形之面積，亦等於其角餘(9) 而橢圓幾何學中平三角學之公式，亦盡與普通球三角學之公式相合，*後將加以證明。

§77. 在 §76 之論證中，吾人嘗假設 O_1 爲與 O 相異之點，苟此二點相合，則此種幾何學之平面，與上述者將截然不同。直線之長在此將爲 2△，而非 4△，如此平面上有 P,Q 二點，及一任意直線，吾人得就面上移動由 P 至 Q 而不經過此直線，換言之。卽此平面之直線，不能將其分爲兩部。

此二種平面之主要異點，在於一爲雙層 (Two-sided) 面，一爲單層 (One-sided)面，† 第一種平面，卽吾人今所研究者，常稱爲球平面 (Spherical Plane)，亦曰雙層橢平面 (Double elliptic Plane)，適所論之第二種平面，簡稱爲橢平面 (Elliptic Plane)，亦曰單層 (Single) 橢平面。

在單雙橢平面上之幾何學，皆得稱爲里氏幾何學 (Riemann's

*球角幾何學，不必藉平行設論，卽可設立，故對此可不必言普通球三角學，以別於他者。

† 參看波諾拉書 §75.(10)

(9) 卽內角和與二直角之較。

(10) 已編譯載於本書附錄三 16.

Geometry)而爲非歐幾何學之一種，但里氏當年似僅知球平面，單橢平面及其在非歐幾何學高等研究上之重要，係克來因氏首先發明者。

§78, 今請證此種幾何學與薩氏之鈍角假設相當，因而一三角形之內角和常大於二直角。

爲證法顯豁計，請先述下之定理。

1, 在任何三角形ABC中，C爲直角，A角之小於，等於，或大於一直角，視線節BC之長小於，等於，或大於△而定。

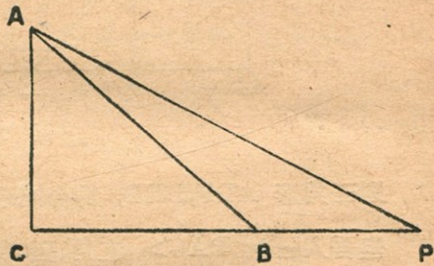


圖 90

設 P 爲 AC 邊之極點。

則 P 必在 BC 上，而 PC＝△.

連結 AP.

則 $P\hat{A}C$ ＝直角。

如 CB＞CP, 則 $B\hat{A}C > P\hat{A}C$, 卽 $B\hat{A}C >$ 直角。

如 CB＝CP. 則 $B\hat{A}C = P\hat{A}C$, 卽 $B\hat{A}C =$ 直角。

如 CB＜CP, 則 $B\hat{A}C < P\hat{A}C$, 卽 $B\hat{A}C <$ 直角。

其逆理亦爲眞，

今取一任意直角三角形 ABC, 其中C爲直角。

如 AC,BC 二邊之一大於或等於△，則按上之定理，其內角和大於二直角。

如二邊均小於△，則從斜邊之中點 D, 作 DE 垂直於 BC.

設 P 爲 DE 之極點。

延長 ED 至 F，使 ED＝DF.

連結 AF 及 PF.

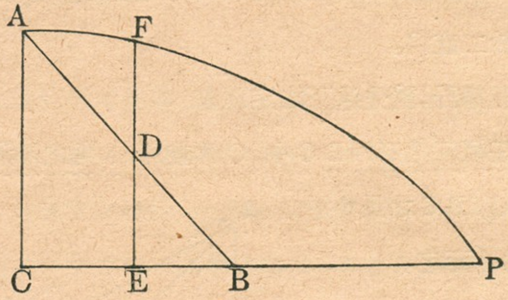


圖 91.

則三角形 ADF,DEB, 爲合同形，故 AF,FP 在一直線上。(11)

但吾人已知 $P\hat{A}C>$ 直角，因 CP 大於△故也。

故直角三角形 ACB 內，A,B 二處之角之和，在此種情形下，仍大於直角，與前款同。

如是得證明

2. 在任何直角三角形中，其內角和常大於二直角。

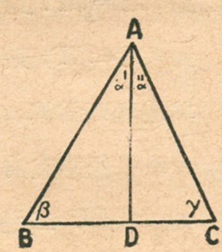


圖 92.

終乃取無一角爲直角之三角形 ABC 論之。

吾人僅須論有二角爲銳之情形卽足。

設 $A\hat{B}C$ 及 $A\hat{C}B$ 爲銳角。

(11) 上述二三角形，有二邊及其夾角，各各相等，而爲合同形。因之 $A\hat{F}D$＝B D 二直角，故 AF,FP 成一直線。

自 A 作 AD 垂直於 BC;D 點必在線節 BC 上。(12)

故按(2),得

$$A\hat{B}D+B\hat{A}D> \text{直角及 } D\hat{A}C+A\hat{C}D> \text{直角。}$$

故知三角形 ABC 之內角和大於二直角。

是以證明

3. 任何三角形之內角和,均大於二直角。

一三角形內角和較二直角溢出之量,稱爲其角餘 (Excess).

§79. 薩氏四邊形及含三直角一鈍角之四邊形。

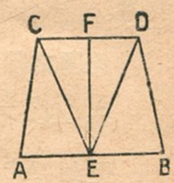


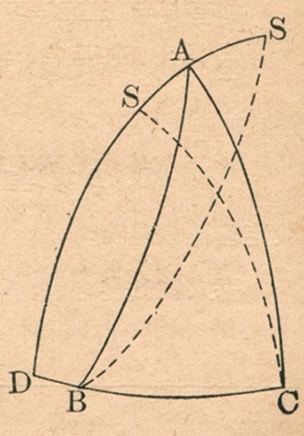
圖 93.

設 AC,BD 爲線節 AB 之垂線,且有等長。

則四邊形 ABDC 稱爲薩氏四邊形。

設 E,F 各爲 AB,CD 之中點。

吾人知 EF 與 AB,CD 二者均爲垂直,且 $A\hat{C}D$, $B\hat{D}C$ 二者相等。(13)



(12) 苟 D 點在 CB 邊向 B 之延長線上,則因在 B,C 二處之角爲銳,故 DA 必不能等於 Δ,

故可在 DA 或其延長線上,取一點 S,使 DS=Δ.

如 S 在 DA 上,可聯 SC,則 $S\hat{C}B$ = 直角,而小於 $A\hat{C}B$,是以與後者爲銳之假設相剌謬。

同理,S 不能在 DA 之延長線上(如圖中之 S′).

同理,D 不能在 BC 邊,向 C 之延長線上。

(13) 參看 §28

但一四邊形之內角和，必大於四直角，因其爲二三角形合成故也。

是以知在 C,D 之角均爲鈍角。

故橢圓幾何學與薩氏鈍角假設相當。

今設 ABDC (圖94) 爲一四邊形在 A,B,D 等處之角爲直角。

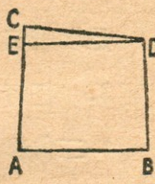


圖 94.

則按 §78 可知在 C 之角爲鈍。

在一含三直角之四邊形中含鈍角之二邊各小於其對邊。

此題之證法如下：

苟 AC 不小於 BD，則必大於或等於 BD.

但如 $AC=BD$，則 $A\hat{C}D=B\hat{D}C$，但一爲直角，一爲鈍角，而此等式爲不可能之事。

苟 $AC>BD$，則可截取 $AE=BD$ 而連 ED.

則吾人知 $A\hat{E}D=E\hat{D}B$.

但 $E\hat{D}B$ 爲銳角，(14) 因是二者均爲銳角，而爲不可能之事。

故 AC 必小於 BD.

又因 AB,CD 亦均垂直於 BD，就此入手證之，可明 CD 小於 AB，故定理得以證明。

吾人對此幾何學，不復再正式加以推展，在此種幾何學中，平行線

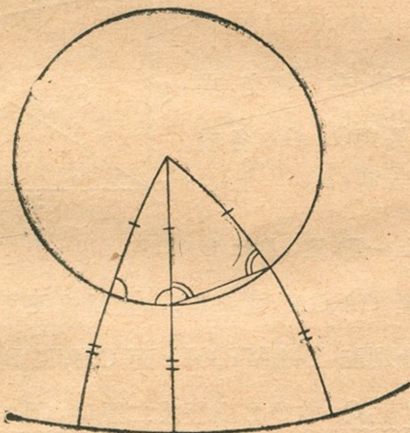
(14) 因 $E\hat{D}B<C\hat{D}B$，而 $C\hat{D}B$ 爲直角故。

既不存在，故無關於此之理論。於此僅有一種圖，(15)　為一束線上應點之軌跡，面積之度量與雙曲線幾何學中所言者同理。

二三角形有同角餘者，即有等面積，反之亦然：

一三角形之面積，與其角餘成比例。

(15) 亦可視為距定點等遠一切諸點之軌跡；或距定線為等遠一切諸點之軌跡；在此定點為定線之極點，又二定距離之和為 A，觀下圖自明。



第七章　橢圓平三角學

§80. 以下研究橢圓三角學之方法，本於機剌德(Gérard)及孟西溫(Mansion)二氏，蓋氏之研究雙曲線三角學卽據是法，*孟西溫氏指明機氏之方法亦可應用於橢圓三角學。†

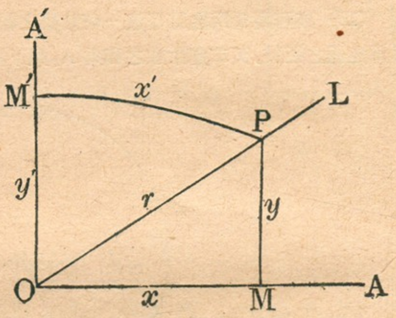


圖 95.

今請先述此法中所用之記法如下：

設 OA,OA′二線，在O相交，成一直角，另一線O L與OA,OA′各成銳角。

設P爲O L上一點，使OP<△.

自P點作自至 OA,OA′ 之垂線，命之爲 PM,PM′.

今以 x,y,r 分別記 OM,MP,OP; 而 OM,′M′P 則各以 y′,x′ 記之。

§81. (1)如 P,Q 爲O L上任意二點使 OP<OQ<△ 而 Pp, Q q爲至O A之垂線，則　　$O\hat{P}p<O\hat{Q}q$

因　$p\hat{P}Q+P\hat{Q}q>$二直角。

且　$O\hat{P}p+p\hat{P}Q=$二直角。

故　$O\hat{P}p<P\hat{Q}q$.

---

* 見機剌德 Sur la Géométrie non euclidienne (1892年，在巴黎出版)。又可參看 Amer.Journ. of Math. vol. xxxviii, p. 249(1911)中楊(Young)氏"On the Analytical Basis of Non-Euclidean Geometry"一文；及古力琪 Non-Euclidean Geometry 第四章(Oxford, 1909)

† 見孟西溫著 Principes Fondamentaux de la Géométrie non euclidienne de Riemann (1895在巴黎出版)。

如 S 爲 O L 上一點，而 OS ＝△，及 S s 垂直於 OA，則 $O\hat{S}s$＝直角。

故　$O\hat{P}p < O\hat{Q}q <$ 直角。

（2）自 O 點以至於 S，y 之值繼續增大

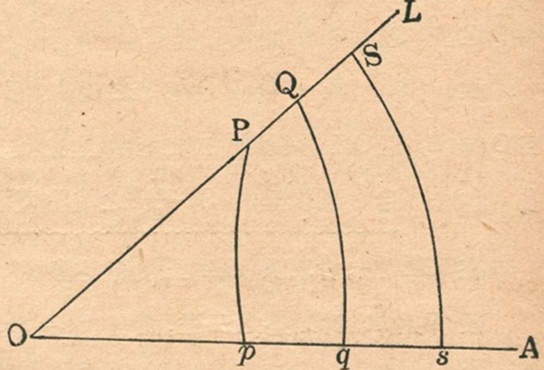


圖 96.

設 P，Q 爲 O L，上任意二點，而有 $OP < OQ < \triangle$.

如 $Pp = Qq$，則必 $p\hat{P}Q = P\hat{Q}q$；據（1）知此爲不可能之事。

且若 $\hat{P}p' > \hat{Q}q$，則可在 Pp 上，截取 $pP' = qQ$，而連結 P′.Q，(圖97)

則　$p\hat{P}'Q = P'\hat{Q}q$.

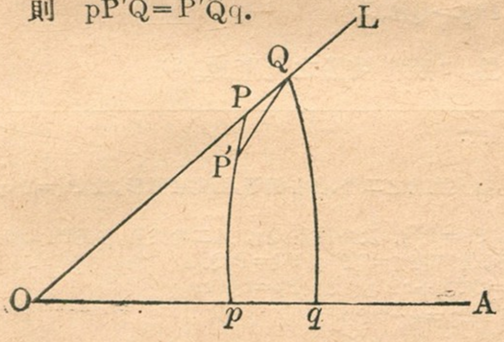


圖 97.

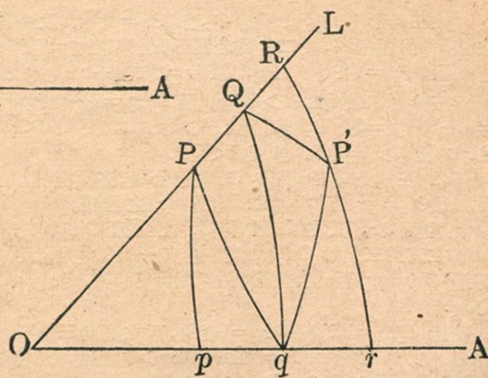


圖 98.

但　$P\hat{Q}q <$ 直角。

故　$p\hat{P}'Q$ 及 $P'\hat{Q}q$ 爲相等之銳角，而爲不可能之事，是以 P 點自 O 向 S，沿 O L 移動時，y 之值繼續增大。

（3）　自 O 點以至於 S，$\frac{x}{r}$ 之值繼續增大。

在 OL 上，首取與 OA 上相等長線節相當之諸點論之。

設 P,Q,R 爲如是之三點，而有 $pq = qr$.

則　$pP < qQ < rR$.

在　rR 上，截取 $rP' = pP$ 而連結 QP'。

則有 $PQ = QP'$ 且 $Q\hat{P}p = Q\hat{P}'r$.

故　$Q\hat{R}P' > Q\hat{P}'R$，而 $QR < QP'$.

是以當 $pq = qr$ 時，$PQ > QR$，(1)

是以對於 x 之等值增量，r 所得增量之值漸減。(2)

---

(1)玆將上列諸式，詳加證明如次：

連結 Pq 及 $P'q$

在直角三角形 Ppq，$P'rq$ 中，有夾直角之二邊，各各相等，而爲合同形，故 $Pq = P'q$. 且 $P\hat{q}p = P'\hat{q}r$，$p\hat{P}q = r\hat{P}'q$.

在三角形 PQq，$P'Qq$ 中，有 $Pq = P'q$，及公共邊 Qq，且二者夾角，各爲 $P\hat{q}p$，$P'\hat{q}r$ 之餘角，因而相等，故二者爲合同形，是以 $Q\hat{P}q = Q\hat{P}'q$，$PQ = P'Q$.

但 $Q\hat{P}p = Q\hat{P}q + p\hat{P}q$，$Q\hat{P}'r = Q\hat{P}'q + r\hat{P}'q$，故 $Q\hat{P}p = Q\hat{P}'r$.

按本節 (1)，$Q\hat{R}P' > O\hat{P}p$，而 $O\hat{P}p = \pi - Q\hat{P}p = \pi - Q\hat{P}'r = Q\hat{P}'R$，卽 $Q\hat{R}P' > Q\hat{P}'R$，故 $QR < QP'$；但 $QP' = QP$. 卽 $QR < QP$.

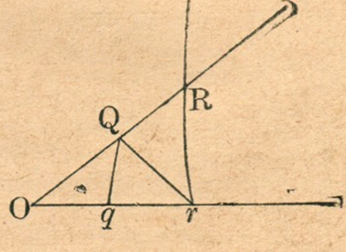
(2)注意此理於 p 點與 O 點相合時，亦復相同。

設 $Oq = qr$，而 Qq，Rr 均爲 or 之垂線。

連接 Qr，又在 O 點作 Or 之垂線 OS.

在直角三角形 OqQ，rqQ 中，有一公共邊 Qq，及等邊 $Oq = qr$，而爲合同形，故 $OQ = Qr$，且 $Q\hat{r}q = Q\hat{O}q$.

但 $R\hat{r}q = R\hat{r}Q + Q\hat{r}q =$ 直角，而在直角三角形 OrR 中，$O\hat{R}r + r\hat{O}R = O\hat{R}r + Q\hat{r}q >$ 直角，因而 $O\hat{R}r > R\hat{r}Q$，故 $Qr > QR$，卽 $OQ > QR$.



今請證如 P,Q 爲OL上任意二點，而 $OP<OQ<\triangle$，且 OM，ON 有公度時必有$\dfrac{OM}{OP}<\dfrac{ON}{OQ}$ (3)

當 OM,ON 無公度時，則由趨限之法，可得同一之結果。

是以知自O以至 S，$\dfrac{x}{r}$之值漸加。

（4）自O點以至於 S，$\dfrac{y}{r}$之值繼續減小。

---

(3)設 OM,ON 之公度爲 Ok，而$OM=m.Ok_1$，$ON=n.ok_1$，m,n 爲二正整數將 ON 分爲 n 等分，命諸分割點爲 $k_1,k_2\cdots\cdots,k_{m-1}$，$1\cdots\cdots k_{n-1}$,N.

在 k_1，k_2,……諸點各作 ON 之垂線，與 OQ 交於 $k_1,k_2\cdots\cdots$，幷命 $Ok_1=r_1$，$k_1k_2=r_2$,……$K_{i-1}K_i=r_i$，$K_{m-1}P=r_m$，……$K_{n-1}Q=r_n$.

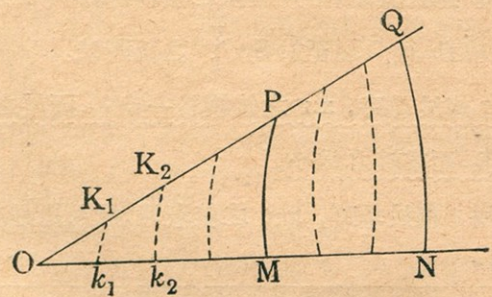
則按上所論 $r_1>r_2>\cdots\cdots\cdots\cdots>r_i>r_{i+1}>\cdots\cdots\cdots\cdots>r_m>\cdots\cdots\cdots\cdots>r_n$.

$$欲\frac{OM}{OP}<\frac{ON}{OQ}即\frac{m\cdot ok_1}{r_1+\cdots\cdots+r_m}<\frac{n\cdot ok_1}{r_1+\cdots\cdots+r_m+\cdots\cdots+r_n}只須$$

$$\frac{r_1+\cdots\cdots+r_m}{m}>\frac{r_1+\cdots\cdots+r_n}{n}卽足$$

如上之不等式成立，則 $n(r_1+\cdots\cdots+r_m)>m(r_1+\cdots\cdots+r_m+\cdots\cdots+r_n)$，因而 $(n-m)(r_1+r_2+\cdots\cdots+r_m)>m(r_{m+1}+\cdots\cdots+r_n)$

但 $(n-m)(r_1+r_2+\cdots\cdots+r_m)>(n-m)mr_m$，$m(r_{m+1}+\cdots\cdots+r_n)<(n-m)mr_{m+1}$ 且 $(n-m)mr_m>(n-m)mr_{m+1}$，故適所得之不等式爲眞。由此逐步逆溯，卽得證明 $\dfrac{OM}{OP}<\dfrac{ON}{OQ}$



首取在 OL 上相距等遠之點論之。

設 P;Q,R 爲三點，而有 PQ=QR 之關係者。

自 P,R 二點，各作 PH,RK. 垂直於 Qq. 則按§79.有 $Pp<Hq$，及 $Rr<Kq$.

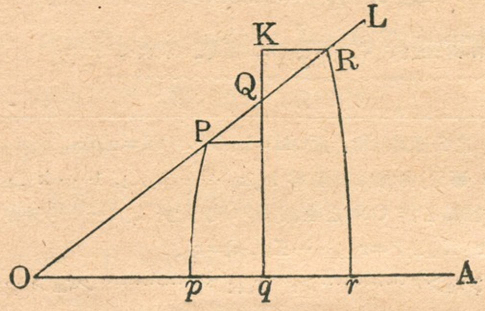


圖 99.

但 QH=QK.(4) 卽 $Qq-Hq=Kq-Qq$.

由是可知 $Qq-Pp>Rr-Qq$.

故對於 r 之等值增量，y 所得增量之值漸減。

因此知當 P,Q 爲 OL 上任意二點，而 $OP<OQ<\triangle$，

且 OP, OQ 有公度時，則 $\frac{Pp}{OP}>\frac{Qq}{OQ}$.

當 OP, OQ 無公度時，則用趨限之法，可得同一之結果，是以知當 P 點在 OL 上移動，由 O 以至於 S，$\frac{y}{r}$ 之值漸減。

(5) 當 r 趨於零時，x:r 之值趨於一定限，而較之爲大，y:r 之值亦趨於一定限，而常較之爲小。

按(3)可知 r 趨於零時，x:r 之值漸減，故此比必有一極限，或爲零，或爲有限值。

(4)直角三角形 PHQ,RKQ 中，有一銳角及一弦，各各相等，故 QH=QK.

按(4)又知 r 趨於零時，$y:r$ 之值漸增，故此比或爲一異於零之極限，或爲無窮大。

但在以(x,y,x',y')爲邊之四邊形內，$x>x'$(圖95)故$x:r>x':r$.

然據(4)之理，則當 r 趨於零時，$x':r$ 或有一不爲零之極限，或爲無窮大。

故 $x:r$ 所趨之極限，不能爲零，而必爲有限值，且由較此爲大之值，以趨於此值。

由與上相同之論證，可知 $y':r$ 應有一不爲零之有限極限值。

且 $y<y'$，而 $y:r<y':r$.

故 $y:r$ 必趨於一不爲零之有限極限值，且係由較此爲小之值以趨於此值。

$\lim\limits_{r\to o}\left(\frac{y}{r}\right)$及$\lim\limits_{r\to o}\left(\frac{x}{r}\right)$之二極限值可取作 OL 與 OA 所成銳角*之正弦及餘弦，其他比值，卽可依常法定之。

§**82**. 今請取含三直角一鈍角之四邊形研究之。

設 OABb 爲此種四邊形，在 O,B,b 處之角爲直角。

延長 Ob，在其上截取 $bc=Ob$ 及 $cd=bc$

在 o b 之延長線上 c,d 二點作其垂線，且自 A 點作至該二垂線之垂線。(6)

*此等極限値爲此角之函數，且得證明此函數爲連續，如選取一適當量角之單位，則可用通常之指數式表出，可參看古力琪書p. 53.(5)

(5)已編譯載入本書附錄三17-18中。

(6)命後二垂線與二者之交點，各爲 C，D 如圖100.

本節所論圖形中各線節，均宜小於Δ. 故首須設 Ob 之長小於$\frac{\Delta}{3}$，OA之長，小於 Δ。按§79，易知 $AB<Ob$，$AC<OC$，故 AB,BC 之長，亦各小於Δ，且 $AH<AC<\Delta$。

如是得四邊形 OABb, OACc, OADd 凡三，各以 Ob, Oc, Od, 爲底，而均有三直角。

於此易證諸四邊形中其底較長者，其鈍角亦較大。(7)

設 bB 之延長線與 AC 交於H, AB 之延長線與 Cc 交於I, 而AC

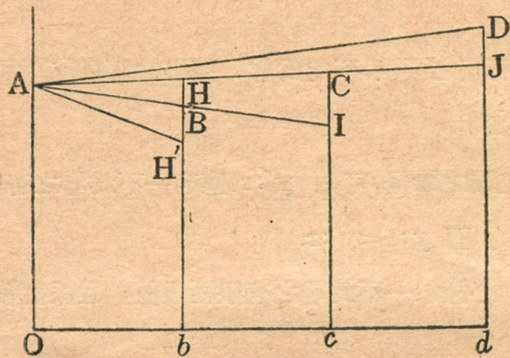


圖 100.

之延長線與 Dd 交於 J.

則有 $AB=BI$,(8) $AB<AH$, 且 $AI>AC$.(9)

(7)證法頗長，不便列入註內，可參看附錄三19.

(8)由合同三角形之法，易證四邊形 ObBA, cbBI 爲合同形，故 $AB=BI$.

(9)此結果據下之定理：

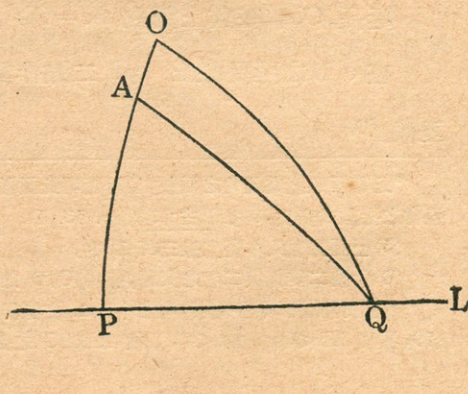
如自一點至一直線之距離小於 Δ, 則此點與此線上任何點之連結線之長，必大於該距離。

設自 A 點至直線 L 之垂線爲 AP, 則按題設$AP<\Delta$。

故 L 之極點 O, 在線節 PA 過A 延長之直線上。

在 L 上任意另取一點 Q, 連 AQ 及 OQ.

則$O\hat{Q}P$ 爲直角，QA 線在此角內，故 $A\hat{Q}P$ 爲銳角，故知 $A\hat{Q}P<A\hat{P}Q$, 因而$AP<AQ$.



由是知 $AB>AC-AB$.(10)

吾人又有 $HC=CJ$ 且 $AD<AJ$.

故 $AC-AH=AJ-AC$, 終乃得 $AC-AB>AD-AC$.

是以 $AB>AC-AB>AD-AC$.

§**83**. 按 §80. 之記法,在圖形 $OMPM'$ 中,在 O,M,M' 之角爲直角, OM,MP,PM',OM' 諸邊,各以 x,y,x',y' 記之。

茲請證下之定理:

在一三直角之四邊形(x,y,x',y')中,夾鈍角之二邊爲 x',y, 如 y' 之長固定,而 x 趨於零,則 $x':x$ 一比之値,趨於一定限 $\phi(y')$ 而常較之爲大,且此比小於 $\phi(y)$.

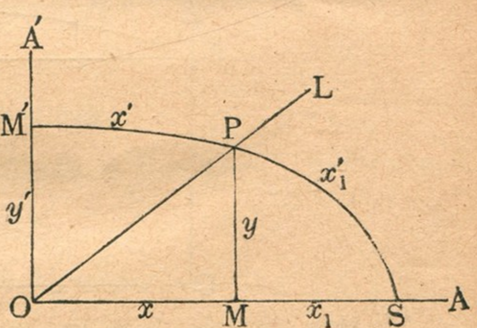


圖 101.

如 §81. 法, 吾人可證明當 x 趨於零時, $x':x$ 之値漸減, (12) 故此比値必有一極限,或爲零,或爲小於 1 之數。

(10) $AI=AB+BI=2AB>AC$, 故 $AB>AC-AB$.

(11) 因 $AB<AH$, $AD<AJ$ 如上所證,

(12) 設 $M'P,OM$ 二者之延長線交於 S, 而命 $MS=x_1$, $PS=x_1'$, (如圖101)
由§81(3)之論證,可知對於 x, 之等値增量, x_1' 所得增量之値漸減。
反言之,卽對於 x 之等値增量, x' 所得增量之値漸增。
與§81(3)同法,可證明當 x 之值增加時, $\frac{x}{x'}$ 之値漸減,因之 $\frac{x'}{x}$ 之値漸增,故 x 趨於零時, $\frac{x'}{x}$ 之値漸減。

延長 MP，作 $M'Q$ 與MP垂直。(13)

按 §82. 可知當 x 之值漸減時，$\frac{M'Q}{x}$之比值漸增。(14)

故此比之值，或有一不為零之定限，或趨於無窮大。

但 $M'Q < M'P$，故 $M'Q:x < M'P:x$.

故 $\lim\limits_{x\to o}\left(\frac{x'}{x}\right)$不能為零。

比函數與記之為 y' 之線節 $M'O$ 有關，故可以 $\phi(y')$ 表之，至是已知　$\phi(y') > M'Q:x$

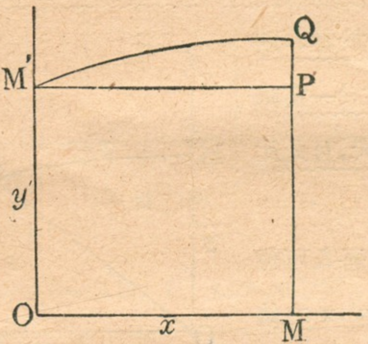


圖 102.

在四邊形 $OM'PM$ 中，PM 邊之效用，與四邊形 $OM'QM$ 中OM'邊之效用相同。

故　$\phi(y) > M'P:x$

故得　$\phi(y) > \frac{x'}{x} > \phi(y')$

---

(13)四邊形 $OMQM'$ 在 O,M,Q 三處之角為直角，故在 M' 者，必為鈍角，但原設 $P\hat{M}'O=$ 直角，故 $Q\hat{M}'O > P\hat{M}'O$，因而垂趾 Q 必在線節 MP 向 P 之延長線上。

(14)按 §82 可知對於 x 之等值增量，$M'Q$ 所得增量之值漸減。

與 §81 (3) 同理，卽得證明當 x 趨於零時。$M'Q:x$ 之值漸增。

且 $x'<x$, 故函數 $\phi(y')$ 小於單位數 1, 僅於 $y=0$ 時,其值爲單位數。

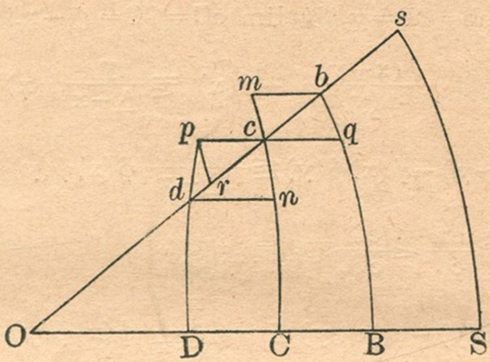


圖 103.

§84. 今請證上節所定函數爲連續。

設 OS,Os 爲相交於 O 之二直線,且 $OS=Os=\triangle$ 及 $S\hat{O}s$ 爲銳角。

則在 S,s 二處之角,均爲直角。

設 $SB=x-y$, $SC=x$, 及 $SD=x+y$.

設在 B,C,D 等點與 OS 之垂點,交 Os 於 b,c,d 諸點,

過 b 及 d, 作 Cc 之垂線 bm 及 dn.

按 §81(3)之結果,應用於銳角 $d\hat{c}n$, $b\hat{c}m$, 則得 $cb<cd$, $cm:cb<cC:cO$ 及 $cn:cd<cC:cO$.

由第二關係式,則得 $\frac{Cm}{Ss}-\frac{Cc}{Ss}<\frac{Cc}{Ss}\cdot\frac{cb}{cO.}$

即 $$\left(\frac{Bb}{Ss}:\frac{Bb}{Cm}\right)-\frac{Cc}{Ss}<\frac{Cc}{Ss}\cdot\frac{cb}{cO}\cdots\cdots\cdots\cdots(\alpha)$$

設 Ss,Bb 及 Cm 均趨於零,(15) 按 §83 即得

(15)如 $S\hat{O}s$ 趨於零,則此三量同趨於零。

$$\lim \frac{Bb}{Ss}=\phi(x-y),\ \lim\frac{Bb}{Cm}=\phi(y),\ \ \lim\frac{Cc}{Ss}=\phi(x)$$

更設 $\lim cb=CB=y$, 及 $\lim cO=CO=\triangle-x$.

故按(α)式得 $\dfrac{\phi(x-y)}{\phi(y)}-\phi(x)\gtreqless\dfrac{y}{\triangle-x}\phi(x)$

即 $$\phi(x-y)-\phi(x)\phi(y)\lesseqgtr\frac{y}{\triangle-x}\phi(x)\phi(y)\cdots\cdots\cdots\cdots(\beta)$$

又由不等式 $\dfrac{cn}{cd}<\dfrac{cC}{cO}$, 可由同法推得

$$\phi(x)\phi(y)-\phi(x+y)\lesseqgtr\frac{y}{\triangle-x}\phi(x)\phi(y)\cdots\cdots\cdots\cdots(\gamma)$$

將(β)(γ)兩式相加,得

$$\phi(x-y)-\phi(x+y)\gtreqless\frac{2y}{\triangle-x}\phi(x)\phi(y)<\frac{2y}{\triangle-x}$$

因 $\phi(x)$,$\phi(y)$ 之值均小於單位數1故也,由上式卽可知 $\phi(x)$ 爲 x 之連續函數。[16]

§85 吾人更可證此函數合於方程式

$$\phi(x+y)+\phi(x-y)=2\phi(x)\phi(y)$$

在§84 之圖中設在 c 點與 Cc 垂直之線與 Dd,Bb 各交於 p,q.在 cd 上截取 $cr=cb$, 而連結 pr.

如是則 $cp=cq$ [17] 又 $pr=qb$.[18]

---

(16)就上式,令 y 趨於零,則見 $\phi(x-y)-\phi(x+y)$ 亦趨於零,

卽 $$\lim_{y\to o}\phi(x+y)=\lim_{y\to o}\phi(x-y)$$

由此僅能斷 $\phi(x)$ 爲不爲連續函數,卽爲可移性斷續(Removable discontinuous)函數,吾人須藉下節證明之函數方程式之助,方能證明 $\phi(x)$ 爲連續,見下節中註(20)

(17)因四邊形 CcpD, CcqB 爲合同形故。

(18)因三角形 Cpr,cqb 相合同故。

今設 Ss 為無窮小，在此情形時，在 p,q 二處之角，與直角相差之量，均為無窮小，而 dpr 亦為無窮小。

可知 dr 與 pd 比較時，為高級無窮小；* 且如以 Ss 為一級無窮小時，dr 至少為二級者。

但 $dp-qb=dp-pr<dr$

及 $dp-qb=(Dp-Dd)-(Bb-Bq)$

故得 $\lim\left(\frac{Dp}{Cc}\cdot\frac{Cc}{Ss}-\frac{Dd}{Ss}-\frac{Bb}{Ss}+\frac{Bq}{Cc}\cdot\frac{Cc}{Ss}\right)=0$

但 $\lim\left(\frac{Dp}{Cc}\right)=\phi(y)=\lim\left(\frac{Bq}{Cc}\right)$

且 $\lim\left(\frac{Cc}{Ss}\right)=\phi(x),\qquad \lim\left(\frac{Dd}{Ss}\right)=\phi(x+y),$

$\lim\left(\frac{Bb}{Ss}\right)=\phi(x-y).$

故 $\phi(x+y)+\phi(x-y)=2\phi(x)\phi(y)$ (20)

§86. 吾人已得方程式。

$$\phi(x+y)+\phi(x-y)=2\phi(x)\phi(y).$$

---

*見古力琪書 p. 49 (19)

(19) 已編譯載入本書附錄三。

(20) 由此方程式，卽可推證 $\phi(x)$ 確為連續函數。

由§84已證明 $\lim\limits_{y\to o}\phi(x+y)=\lim\limits_{y\to o}\phi(x-y)$

又 $\lim\limits_{y\to o}\phi(y)=1$，由函數方程式得

$\lim\limits_{y\to o}\phi(x+y)+\lim\limits_{y\to o}\phi(x-y)=2\phi(d)$

故 $\lim\limits_{y\to o}\phi(x+y)=\lim\limits_{y\to o}\phi(x-y)=\phi(x)$

是以 $\phi(x)$ 為 x 之連續函數，而非可移性斷續性函數。

且已知 $\phi(x)$ 爲連續函數，此函數當 $x=0$ 時，其值爲 1，當 $x>0$ 時 $\phi(x)<1$.

設 x_1 爲方程式所能應用之間隔內之 x 一値。

則吾人必可得一常數 k，使 $\phi(x_1)=\cos\frac{x_1}{k}$.

函數 $\cos x$ 在此採純粹之解析意義，而由方程式。

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

決定之。

由是得 $\phi(x_1)=\cos\frac{2x_1}{k}$,(21)

$$\phi(nx_1)=\cos\frac{nx_1}{k},\text{(22)}$$

$$\phi\left(\frac{nx_1}{2^m}\right)=\cos\left(\frac{nx_1}{2^mk}\right)。\text{(23)}$$

---

(21)在函數方程式 $\phi(x+y)+\phi(x-y)=2\phi(x)\phi(y)$ 中，令 x,y 同趨於 x_1，則因 $\phi(x)$ 爲連續函數，故此關係式變爲

$$\phi(2x_1)+1=2[\phi(x_1)]^2$$

故 $\phi(2x_1)=2[\phi(x_1)]^2-1=2\cos^2\frac{x_1}{k}-1=\cos\frac{2x_1}{k}$

(22) $\phi(3x_1=\phi(2x_1+x_1)=2\phi(x_1)\phi(2x_1)-\phi(x_1)=\phi(x_1)[2\phi(2x_1-1]$

$$=\cos\frac{x_1}{k}[4\cos^2\frac{x_1}{k}-3]=\cos\frac{3x_1}{k}$$

推之卽得 $\phi(nx_1)=\cos\frac{nx_1}{k}$.

(23)令 x_1y 同趨於 $\frac{x_1}{2}$，則由函數方程式得 $\phi(x_1)+1=2\left[\phi\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2$

卽 $\phi\left(\frac{x_1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}[\phi(x_1)-1]}=\sqrt{\frac{1}{2}(\cos\frac{x_1}{k}-1}=\cos\frac{x_1}{2k}$,

推之卽得 $\phi\left(\frac{x_1}{2^m}\right)=\cos\frac{x_1}{2^mk}$.

合上式之結果，則有 $\phi\left(\frac{nx_1}{2^m}\right)=\cos\left(\frac{nx_1}{2^mk}\right)$.

今設 x 爲此間隔內之任何他值，如此值適合於

$$nx_1 \text{ 或 } \frac{nx_1}{2^m}$$

之一組值中，則適所證，可見 $\phi(x)=\cos\left(\frac{x}{k}\right)$

如此值不在該形式之組內，則對於任何正值 ϵ，可小至吾人所欲者，吾人仍能就此規劃中進行，以求得正整數 m,n，使

$$\left(x-\frac{nx_1}{2^m}\right)<\epsilon.$$

但 $\phi(x)$ 及 $\cos\frac{x}{k}$ 均爲連續函數。

是以　$\phi(x)=\cos\frac{x}{k}$.

此處之 k 值，與 OS 之度量有關，在前數節中常以△記OS.(24)

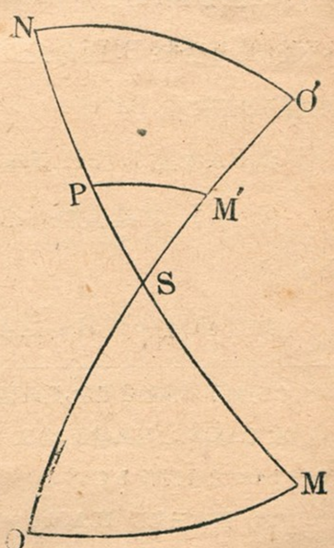
---

(24)設 $y=MS=\Delta$，則在 O 點與 OM 之垂線，亦必與 MS 交於 S，是則 x' 常等於零，故

$\phi(\Delta)=\lim\frac{x'}{x}=0$

但 $\phi(\Delta)=\cos\frac{\Delta}{k}=0$ 只須 $\frac{\Delta}{k}=\frac{\pi}{2}$ 卽可，由是可知如取一種單位，使 Δ 之度爲 $\frac{\pi}{2}$，則 $k=1$，反言之，卽 $k=1$ 時所定之單位，使 Δ 之度爲 $\frac{\pi}{2}$.

在上述 $\phi(x)$ 之定義中，原設 $x\leq\Delta$，如 $MP=x>\Delta$ 則四邊形 $OMPM'$ 之二對邊 OM',MP 相交於 S，延長 OS 至 O'，MS 至 N，使 $OO'=MN=2\Delta$，則有 $NP=2\Delta-MP=2\Delta-x$. 且 $O'N$ 與 OM 等長，在此種情形中，$x'=PM'$ 與 $x<\Delta$ 時 x' 之向相反，故 $\frac{M'P}{OM}=-\frac{M'P}{ON}$，卽當 $x>\Delta$ 時，$\phi(x)=-\phi(2\Delta-x)$，此式可視爲定義之推廣，而與普通三角學公式亦脗合。



§**87.** 今論一較複雜之圖形，由此可得關於直角三角形 ABC（內設 C 爲直角）在此種三角學中之基本方程式，即

$$\cos\frac{c}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設 ABC 爲一直角三角形，C 爲直角，在 AB 向 B 之延長線上一點 b，作 b c 垂直於AC。

移動三角形 b c A. 沿 AC 而進，使 C 合於 C，而命此時 bc 所據之位置爲 b′c。(25)

如是得三角形 b′a′c 與bAc 重合。

同法移動三角形 bcA 沿 BA 而進，使 b 合於 B. 而命此時三角形所據之位置爲 Ba″c″.

過a′A中點 I，作IL垂直於BA。則 L I 之延長線，必垂直於 b′a′,(26)

如是即得 b′a′,BA 之公垂線 KIL.

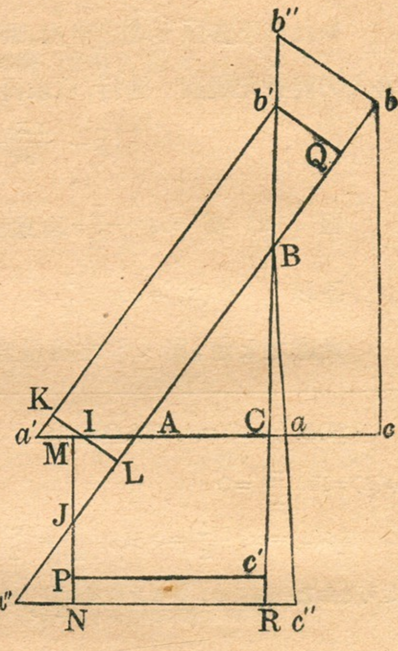


圖 104.

---

(25)如不用移動之觀念，則此種手續可言之如下：

在 CA,CB 之延長線上，各取一點 a′,b′ 使 Ca′＝cA,cb′＝CB，向連結 a′b′，則得三角形 bcA 之合同形 b′Ca′.

(26) 因在三角形 ILA,Ika′ 中，IA＝Ia′,$A\hat{I}L=a'\hat{I}K$,$I\hat{A}L=b\hat{A}C=I\hat{a}'K$，而爲合同形故（見圖104），

同理過 Aa'' 之中點 J, 可作 AC,$a''c''$ 之公垂線 MJN.

終乃作 $b'Q$ 垂直於 AB, 而 bb'' 垂直於BC.

如是則見當 B b 趨於零時

$$\lim\frac{bb''}{Bb}=\lim\frac{b'Q}{b'B}\cdots\cdots(\text{i})$$

同理 $\lim\frac{MJ}{JA}=\lim\frac{IL}{IA}$

故 $\lim\frac{MN}{Aa''}=\lim\frac{KL}{Aa'}$(27) $\cdots\cdots(\text{ii})$

以(ii)除(i),而注意 $Aa''=Bb$, 及 $Aa'=Cc$. 則得

$$\lim\frac{bb''}{MN}=\lim\frac{b'Q}{KL}\cdot\lim\frac{Cc}{Bb'}$$

此式亦可書爲

$$\lim\frac{b'Q}{KL}=\lim\frac{bb''}{Cc}\cdot\lim\frac{Bb'}{MN}\cdots\cdots(\text{iii})$$

今證明上式同於

$$\phi(AB)=\phi(BC)\phi(CA)$$

按§83, 有 $\phi(LQ)<\frac{b'Q}{KL}<\phi(Kb')$

當 B b 趨於零時, L Q 及 Kb' 同趨於 B A, 按 §84, $\phi(LQ)$ 及 $\phi(Kb')$ 同趨於 $\phi(AB)$.

故 $\lim\frac{b'Q}{KL}=\phi(AB)\cdots\cdots(\text{iv})$

同法可證 $\lim\frac{bb''}{Cc}=\phi(BC)\cdots\cdots(\text{v})$

(27)因前式 $=\lim\frac{2\cdot MJ}{2\cdot JA}=\lim\frac{2\cdot IL}{2\cdot IA}$

至是尙有$\frac{Bb'}{MN}$之極限值，尙未論及。

命 Bc'' 與 AC 之交點爲 s.

按§81(1)知 s 位在 C,c 二點之間，且 $Bs>BC$.

又因 $Cb'=Bc''$, 故得 $Bb'>sc''$

是以 $\frac{Bb'}{MN}>\frac{sc''}{MN}>\phi(Nc'')$

延長 BC, 使與 $a''c''$ 相遇於 R。

因 Bc'' 爲 $a''c''$ 之垂線，故 $BR>Bc''$(28) 卽 $BR>Cb'$,

在 BR 上，截取 $Bc'=Cb'$.

作 $c'P$ 垂直於 MN.

則得 $\frac{Bb'}{MN}<\frac{Bb'}{MP}=\frac{Cc'}{MP}<\phi(Pc')<\phi CM-PM-Cc')$(29)

故 $\phi(CM-PM-Cc')>\frac{Bb'}{MN}>\phi(Nc'')$

使趨於限，得

$$\phi(AC)=\lim\frac{Bb'}{MN}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(vi)}$$

由(iii)至(vi)諸式，卽得 $\phi(AB)=\phi(BC)\phi(CA)$, 按§86而有

$$\cos\frac{c}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}$$

註 在此論證中，有數處均假設所論之線節小於△。

此基本定理，對於適合上述條件之三角形，一經證明時，其他情形

(28)據本章註(9)之定理。

(29)因 $CM-PM-Cc'<CP-Cc'<Pc'$ 而 $\phi(x)$ 減函數故也。

即不難於推廣。(30)

§88. 其餘公式，甚易於求得

請先證 $\tan\frac{b}{k}=\cos A\tan\frac{c}{k}$ ……………………………（2）

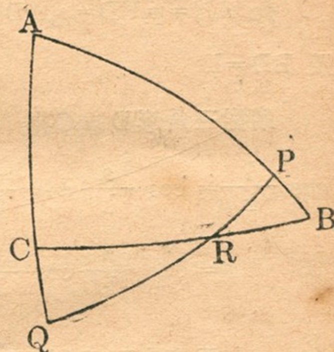
---

(30)今舉弦及他一邊均大於△之例論之，以供反三之助。

吾人首宜注意在直角三角形中，如其弦大於△，他一邊小於△，則餘一邊必大於△。

原設 $AB>\Delta$，故可在其上取一點P. 使 $AP=\Delta$.

又因 $AC<\Delta$，故可在其延長線上取一點 Q，使 $AQ=\Delta$.



連結 PQ，則按帕希公論，可知 PQ,BC 二線節必相交於一點，命之爲 R.

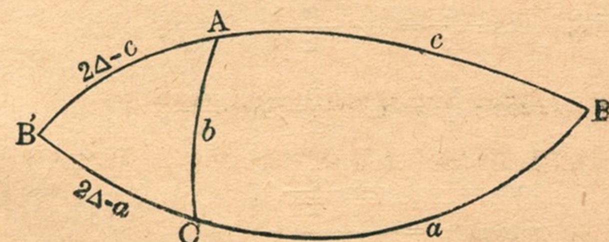
如是則 $A\hat{Q}R=$直角，又在 C 處之角亦爲直角，故 $CR=\Delta$. 因而 $CB>\Delta$.

延長 BA,BC 相遇於 B′則在直角三角形 AB′C 中 $2\Delta-a, b, 2\Delta-C$ 三邊均小Δ。

故上式亦能應用，即 $\cos\frac{2\Delta-c}{k}=\cos\frac{2\Delta-a}{k}\cos\frac{b}{k}$

但按本章註(24)內所述 $\phi(2\Delta-x=-\phi(x)$，即 $\cos\frac{2\Delta-c}{k}=-\cos\frac{c}{k}$　$\cos\frac{2\Delta-a}{k}=-\cos\frac{a}{k}$.

是以仍得　$\cos\frac{c}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}$



設 ABC 爲一直角三角形，C 爲一直角。

在 AC 上任取一點 D,而連結BD.

作 D E垂直於AB.

命 AE=p,ED=q,AD=r, 及 BD=l.

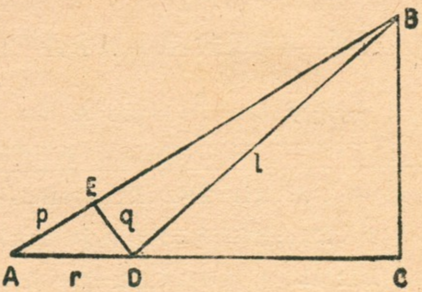


圖 105.

則從三角形D B C得

$$\cos\frac{l}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b-r}{k}$$

$$=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}\cos\frac{r}{k}+\cos\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k}\sin\frac{r}{k}$$

$$=\cos\frac{c}{k}\cos\frac{r}{k}+\cos\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k}\sin\frac{r}{k}$$

且據三角形 BDE,依同法可得

$$\cos\frac{l}{k}=\cos\frac{c}{k}\cos\frac{r}{k}+\cos\frac{q}{k}\sin\frac{p}{k}\sin\frac{c}{k}.$$

故 $\cos\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k}\sin\frac{r}{k}=\mathrm{cor}\frac{q}{k}\sin\frac{p}{k}\sin\frac{c}{k}.$

按方程式 $\cos\frac{c}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k},$

$$\cos\frac{r}{k}=\cos\frac{p}{k}\cos\frac{q}{k},$$

可得 $$\frac{\tan\frac{b}{k}}{\tan\frac{c}{k}}=\frac{\tan\frac{p}{k}}{\tan\frac{q}{k}}.$$

此結果於 r 小至任何程度時,均無不合。

但吾人已知 $r\to 0$ 時,(31) $\frac{x}{r}$ 有一異於零之極限，而定之爲此角之餘弦(見§81)

$$故\quad \cos A=\lim_{r\to o}\frac{\tan\frac{p}{k}}{\tan\frac{r}{k}}=\frac{\tan\frac{b}{k}}{\tan\frac{c}{k}}.$$

§89. 證明　$\sin A=\dfrac{\sin\frac{a}{k}}{\sin\frac{c}{k}}$ ……………………………………(3)

由前所述,當 $r\to 0$ 時,$\frac{y}{r}$ 一比趨於一不爲零之定限卽爲其相關角之正弦。

按方程式　$\cos\frac{c}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}$

故當 a,b,c 爲無窮小時,略去高級諸項,卽得 $c^2=a^2+b^2$(32)

是以　$\sin^2A+\cos^2A=1$

---

(31) 注意 $\tan\frac{p}{k}$, $\tan\frac{r}{k}$ 各與 $\frac{p}{k}$, $\frac{r}{k}$ 爲同級無窮小。

(32)按級數式,代入上式,得

$$1-\frac{1}{2!}\left(\frac{c}{k}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{c}{k}\right)^4-\cdots\cdots$$

$$=\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4-\cdots\cdots\right].$$

$$\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{b}{k}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{b}{k}\right)^4\cdots\cdots\right]$$

由 §88. 公式$\cos A=\dfrac{\tan\dfrac{b}{k}}{\tan\dfrac{c}{k}}$.

可得 $$\sin^2 A=1-\frac{\tan^2\dfrac{b}{k}}{\tan^2\dfrac{c}{k}}$$

$$=\frac{\sin^2\dfrac{c}{k}-\tan^2\dfrac{b}{k}\cos^2\dfrac{c}{k}}{\sin^2\dfrac{c}{k}}$$

$$=\frac{1-\sec^2\dfrac{b}{k}\cos^2\dfrac{c}{k}}{\sin^2\dfrac{c}{k}}$$

$$=\frac{1-\cos^2\dfrac{a}{k}}{\sin^2\dfrac{a}{k}}$$

$$=\frac{\sin^2\dfrac{a}{k}}{\sin^2\dfrac{c}{k}}.$$

故 $$\sin A=\frac{\sin\dfrac{a}{k}}{\sin\dfrac{c}{k}}$$

其他諸公式如$\cos A=\cos\dfrac{a}{k}\sin B$……………………(4)

$$\sin\frac{b}{k}=\tan\frac{a}{k}\cot A \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\cos\frac{c}{k}=\cot A\cot B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

皆不難由已得各式中推出。

以上(1)至(6)各式，即普通球三角學中之公式，不同者，僅以$\frac{a}{k}$，$\frac{b}{k}$，$\frac{c}{k}$代 a,b,c 而已。

§90. 再將正弦外弦之定義推廣於鈍角之情形.則關於任意三角形之公式，立可自直角三角形者推出，此等公式亦與普通三角形中者無異,而須僅加入一參數 k.(33)

弧長與面積之元素,亦可依第五章法推得之,在此情形中,有

$$ds^2=\cos^2\frac{y}{k}dx^2+dy^2,$$

$$ds^2=dr^2+k^2\sin^2\frac{r}{k}d\theta^2,$$

$$dA=\cos\frac{y}{k}dx\ dy,$$

$$dA=k\sin\frac{r}{k}dr\ d\theta.$$(34)

(33)此等公式如下:

$$\cos\frac{a}{k}=\cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k}+\sin\frac{b}{k}\sin\frac{c}{k}\cos A$$

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{k}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{k}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{k}}$$

(34)見本書附錄三20.

且歐式幾何中公式，在橢圓平面上之無窮小幾何學中，亦能成立。(35)

(35)卽本書附錄三17中(3)之理。

第八章　非歐幾何學之和諧性與平行設論證明之不可能

§91. 前已述及非歐幾何學之發現，乃因欲證歐氏平行設論之企圖而致，波羅二氏對於幾何學之貢獻有二，是二子不特指出此等企圖失敗之由且更詔示其所以必歸失敗之故；因二子依據相同之基礎，僅以一種相反之設論代歐氏者，亦得成功建樹一派幾何學。不背邏輯而自和諧，一如歐氏之幾何學然，彼等深信循此道以發展斯學，不至有矛盾發生，此其見解，與前人相異處。二子且認據其平行設論所建樹之幾何學，本身殊有研究之價值。

至是有一問題焉：吾人何以能斷此種幾何學之體系，不背邏輯而自相和諧耶？何以能斷繼續研究之結果中，果無矛盾背謬之點發生耶？薩氏自以已得雙曲線幾何學中剌謬之點，但其見解實誤。甚且波氏於其著作 Appendix 刊布之後，曾有一時，自以爲發現剌謬之所在，而所求歐氏設論之證明，已驪珠在握，氏蓋亦誤矣。

如僅就此種幾何中已經證明之諸定理 以示其間未嘗有矛盾之點，與昔人所期者相反；此種論斷，殊嫌不甚充足，吾人必須決定，將斯學發展時，永無剌謬發生始可，苟能證明此事，則可知歐氏假設論，不可得而證明矣。

§92. 欲證雙曲線及橢圓二種幾何學，亦猶歐氏幾何學，同爲不背

邏輯而自和諧，其法不一。*

羅氏之方法，乃利用雙曲線平三角學公式，以明斯理，波氏意見，大致亦同此。如取球半徑爲虛量，則此等公式與球面三角學之公式全同。苟普通球三角學中無矛盾，則此種幾何學亦應如是，然此證法，本身不能謂爲完備，因其未能涉及立體幾何學之領域，不能藉以斷定是域中有無此困難也。（可參看第二章§15,§17）。

非歐幾何學和諧性之各種證法中，以揆力及克來因二氏者，爲最重要。但一說超軼本書所守之初等範圍以外，他說又屬解析性質，幾何學中之假設，先化之爲數域，如是則幾何學中之矛盾點，必現於假設之算術形式或其推論之內。此種證法之形式，亦非本書所能及。

此外則有若干之幾何證法，係以非歐幾何在歐氏空間中之具體解釋爲依據，創此法最先者爲貝爾特拉密氏用之以論雙曲線幾何學。其說須藉曲面上幾何學之理，今請論羅氏平面及空間在歐氏者內之一種淺易表示法，爲傍卡纍(Poincaré)所發明者。

傍氏之言曰『設有一平面，吾稱之爲基本面(Fundamental plane.)另作辭書一，將二組名詞，分行并立，互爲相應。一若二種文字互譯之辭書，其意義互爲相應：

空間……………………………在基本面上部之空間

平面……………………………與基本面正交之球面

直線……………………………與基本面正交之圓

*如欲從高深理論方面，討論此事，可參看散麥維爾 Non-Euclidean Geometry 第五，六兩章(1914年在倫敦出版)。

球面…………………………球面

圓…………………………圓

角…………………………角

二點間距離……取過此二點而基本面正交之圓，其二交點與二已知點所成義比(Anharmonic Ratio)之對數。

等：　　　　　等：

『今取羅氏幾何學中之定理，藉此辭書以譯爲他定理，猶之藉德法辭典，以迻譯德文焉，如是可得普通幾何學中之定理。例如羅氏幾何學中下定理，「三角形之內角和小於二直角」，譯後則爲「若一曲線三角形之三邊，爲與基本面正交之圓弧，則其內角和小於二直角」，(1) 由是可知由羅氏假設推衍所成之定理，無論發展至若何程度，均不致發生矛盾，因苟其中有二定理互不相容，則按此辭書所譯成之定理，亦必互爲矛盾。但所譯成者，乃普通幾何學中之定理，固無人懷疑其中有矛盾之點也。*

§93. 雙曲線幾何學之表示，另有一法，適所論者，乃其特例。其法爲傍氏所創者，下文對此，將詳加討論，並及橢圓幾何學中之相當方法，由此卽可得一淺易論證，指示平行設論證明之不可能，而雙曲線及橢圓二種幾何學，遂有邏輯上之和諧性矣。§92 中之「辭書方法」，亦將於此理之討論中。細爲詮釋焉。

*見傍卡累著 La Science et L'Hypothèse. 或格林斯特里特 (Greenstreet) 英譯本 p. 41 以後。

(1)參看附錄四31.

今設一平面上之三種圓族（此論證可推之於球），即過一定點之圓族，與一定圓正交之圓族，及與一定圓徑交(Cutting diametrally)之圓族（所謂徑交云者，即動圓與定圓之公弦，常為定圓直徑之謂也）。以O表定點，以O為心，半徑之長為k之圓為定圓，則第一種圓族，對於O之冪(Power)為零，第二種圓族者為 k^2 第三種圓族者為 $-k^2$。此三種圓族之幾何學，即各與歐氏，雙曲線，及橢圓幾何學相當，容於下文闡述之。

§94. 過定點之圓族。

以一點O為反圖心，而求過此點之一平面上一切直線之反圖，則得過是點之一組圓，對於每一圓，均有一相應直線，逆之亦然。二圓之交角，等於相當線之交角，此圓族之特性，均得由該組直線之特性推出，在某體系中，關於直線與點之定理，皆得以他體系中關於圓與點之一相當定理解釋之。

尚另有一法，亦可藉以研究此圓族之幾何學，今將略述此法，因其可使表示二種非歐幾何學之他圓族之情形較簡易也。

已知 A,B 二點，再加O點，即可完全決定過O點之一圓今稱凡此諸圓為倣線(Nominal Line.)*在諸圓之平面上之點，稱為倣點，但O點設其不在倣點之列，二倣線之交角即表該二線之圓之交角。

依據此等定義，則在此種倣幾何學(Nominal Geometry)中，二相

*在他處如波諾拉書英譯本附錄五及Proc. Edin. Math. Soc., vol. 28, p. 95(1910)，余亦嘗用臆(Ideal)點，臆線等名詞。今易以倣點倣線等名詞，免與 §§37,38 中之臆點臆線相混淆。

異倣點 A,B 常可定一倣線 AB，猶之二普通點常可定一直線焉。

O點旣不在倣點之列，則此等倣點及倣線，又能合於『順序公論 Axioms of orders』*此類公理，係表示『界於內』之觀念，若該點不除外，則吾人不能謂一倣線上之三倣點，必有而僅有一點，界於他二點之內。(2)

玆先立平行倣線之定義，以便進論平行問題。

過一倣點而平行於一倣線之倣線，乃圓族中之一圓，過該已知點，而與表已知倣線之圓相切於O點者。

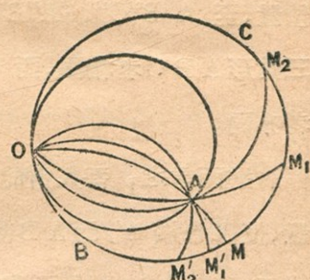


圖 106.

就圖 106 觀之，卽可知過A點之倣線族，僅有一不與 BC 相交，卽圓族中與OBC相切於O之圓也。此倣線之所以不與倣線 BC相交者，乃因O點不在倣點之列故。設過A點，而與倣線BC垂直之倣線爲AM，則此二倣線交於直角。過A點之倣線，與AM所成角小於直角時，則必於BC相交，而交點在OAM傍，與此銳角同側之一邊上。

是以在諸倣點倣線之幾何學中，歐氏之設論爲眞。

§95. 吾人於討論幾何學中度量(Metrical)性質之前，須先有長度之度量。倣線節之倣長度者，卽與此相當直線節之長度。在此定義(§95)中，所言倣線節之相應性，已於 §94 之首段提及，就此可知倣線節AB之倣長度與$\dfrac{AB}{OA\cdot OB}$成比例。此種情形之詳細討論，可於 §94 附註中

*見喜爾柏特書§3.

(2)例如在圖106中，倣點M在 B,C 二倣點之內；若O點亦視作一倣點，則 BO CM 亦爲一倣線，而吾人亦可謂倣點 C 在 B,M 二倣點之內矣。

所引之書內得之。(3)

由此定義，不難證明下理：一倣節對於組中任何圓而作反圖，其倣長不變；且對此圓作反圖，即等於將倣點倣線依表反圖圓之倣線，而作反射(Reflection).

今如依組中二圓，順序作反圖（即依二倣線，順序反射），即得一結果，與二度空間內之換位(Displacement)相當。第一次反射後；一倣三角形ABC達於 $A'B'C'$ 之位置，再經第二次反射，更由 $A'B'C'$ 之位置，至 $A''B''C''$，$A''B''C''$ 之邊及角（就吾人所用之倣度量言）與三角形ABC者相同，而 C'' 所居於 $A''B''$ 之一側，與C所居於AB者亦同。

進而言之，吾人常能確定二反圖手續，以變一已知倣節至一新位置，使A合於 A'，而AB落於一過 A' 點之已知倣線上。吾人只須先依『平分』倣線 AA' 而與其垂直之圓，以作反圖，如此使AB至一新位置如 $A'B''$. 如再取組中一圓，平分 $A'B''$ 與過 A' 點之已知倣線所成角者，依之作反圖。則線節AB達於所求之位置。

故疊合法在此幾何學中仍能使用。歐氏之論證均得直接『迻譯』成此種新幾何，吾人僅須用倣點，倣線倣平行線等名詞，以代普通之點，線，平行線等，卽得由普通幾何學衍出此圓族幾何學之定理矣。

尙有需指明一事者，卽以A點爲心之倣圓(Nominal Circle)仍爲一普通之圓，因過A之圓族(卽過A點之倣線)之正交曲線(Orthogonal Trajectories)，爲以O及A爲限點(Limiting Points)之一族共軸圓(Coa-

(3) 可參看本書附錄五32,33.

xal circles),(4) 自A以至任一圓與束線之交點,其倣節之倣長均相等。

§96. 對於立體幾何學之推廣——過一定點之球族

上述之法,可以推廣於立體幾何學。在此情形,所研究者為過一定點O之球族,而非在同一平面上過定點O之圓族。

所謂倣點,亦如常點,但O點不在倣點之列。

過二倣點之倣線,乃過O及此二點之圓。

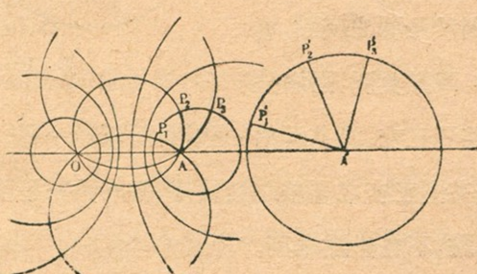
過三倣點(5) 之倣面,乃過O及此三點之球。

過一點A,而與倣線BC平行之倣線,為在過O,A,B,C,四點之球面上之一圓,過A點而與OBC圓相切於O點者。

由此可知一倣線,由二相異倣點確定,猶之一直線由二相異之普通點確定,一倣面由不在一倣線上之三相異倣點確定,猶之一平面由不在一直線上之三相異普通點確定。如一倣線上之二倣點在一倣面上,則此線上之一切各點,均在其上。二倣面之交痕,為一倣線,其他可類推。

在此新幾何學中,角之度量法與普通幾何學者相同;二倣線之交

(4)附圖如下。



(5)不在一倣線上者。

角，卽所表之圓之交角。長之度量，與前相同。依過O點之球，而作反圖，與依表此球之平面，兩作反射相當。移位爲一種點變形(Point-transformation)，凡域內之點仍變爲點，且倣線仍爲倣線，倣長及角亦不改，而可由依此球族中之球，作偶數次之反圖法以達之。

故此種倣點，線，面之幾何學，與普通歐氏幾何學相同，其元素能適合於同一定律，在一體系中爲眞之各定理在他體系中亦眞；由歐氏幾何學中之定理，可推知倣幾何學中者，反之亦然。

以前諸節所言倣點線之平幾何學，爲依據本節各定義而樹立較廣義之平幾何學中之一特例。

§97. 與一定圓正交之圓族之幾何學。

今請進而討論與一定圓正交之圓族之幾何學，此定圓之心爲O，半徑之長爲 k. 此定圓稱之爲基圓(Fundamental circle)，族中各圓對於O點之冪均爲k^2。

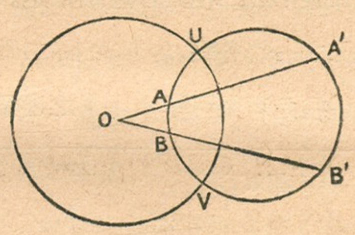


圖 107.

設 A, B 爲基圓內任意二點，A',B' 各爲其對於此圓之反點，如是則 A,A'B,B' 四點共圓，而過是四點之圓，與基圓正交，過基圓內二點，有而僅有一圓，與之正交。

在討論與基圓正交之圓族之性質時，吾人稱在是圓內之點爲倣點，基圓圓周上之點，不在倣點之列。*

所謂過二倣點之倣線，乃過是二點而與基圓正交之圓。

---

*在此處之討論中，倣點等名詞之定義；與§94附註中引及之文內所論臆點等，稍有不同。

二相異倣點 A,B 常可定一倣線 AB，猶之二相異之普通點 A,B，可定一普通直線 AB.(6) 此等倣點及倣線，亦能合『順序公論』。

所謂二相交倣線所成之角，乃表此二線之圓在基圓內有公切點之切線所成角。

茲考驗以何法立倣平行線之定義，較爲適宜。

設 A M 如圖(108)爲過 A 點之一倣線，而與 B C 相垂直；換言之卽爲過 A 點之族中之一圓，而與過 B C 之族之某圓成正交者。設想 A M 依 A 點而旋轉，使過 A 之倣線，與倣線 B C 之交角漸小，過 A 點有二圓，與過族中 B.C 之圓，各相切於 U,V，此二點卽該圓與基圓之交點，如是二圓，亦爲倣線，此二者劃分過 A 點之倣束線爲二組，一組與 B C 相交，他組則否，在圖中用影線標明之角ϕ內之倣線，均不能與 B C 相交，在未作如是標識之ψ角內者，則均與 B C 相交。

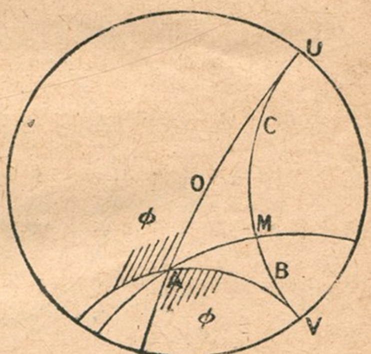


圖　108.

此特性卽爲雙曲線幾何學所依據之平行設論之理，因是吾人遂得在此種幾何學中立平行倣線之定義如次：

過一倣點，而與一倣線平行之二倣線，乃過此已知點圓族中之二圓，與表已知倣線之圓相切，而切點在該圓與基圓相交之處者。

(6)在特例，當 A,B 在基圓直徑之上時，此直徑可視爲心在無窮遠處之正交圓，故諸直徑，亦爲倣線。

如是在此種幾何學中，有二平行線，一右側者，一左側者，且此二線分劃束線爲二組，一組與已知線相交，他組則否。

§98. 至是吾人得謂雙曲線幾何學中凡關於角之性質之定理，在此圓族之幾何學中，均無不眞，反之亦然。至於關於長度者，則須先立做節之做長之定義。始克討論。

例如做三角形(Nominal Triangles)中，有三角盡爲零者(圖109)此三角形之諸邊兩兩平行，而吾人視平行線所含之角爲零。

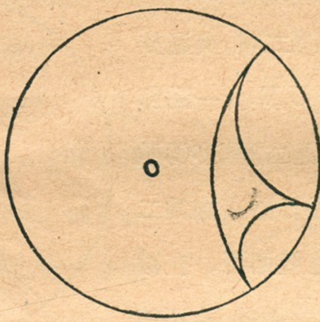


圖 109.

用反圖之理，卽可證明任何做三角之內角和小於二直角其法如次：

設 C_1,C_2,C_3, 爲族中之三圓，(卽三做線)，而成一做三角形 P Q R 今作全圓，而論各圓之全周，取 C_1,C_2, 二圓相交於基圓外之一點 R' 爲心，而作反圖，則 C_1,C_2, 二做線變爲過 R 反點之二直線 C_1', C_2'。又基圓 C 之反圖，爲另一圓 C'，與 $C_1'C_2'$,二直線正交，故其心爲二線之交點。且 C_3 一圓之反圖。爲圓 C_3' 與 C' 正交，故其心在 C' 一圓之外。

如是則得一曲線三角形，其內角和小於二直角；且因三角形之各

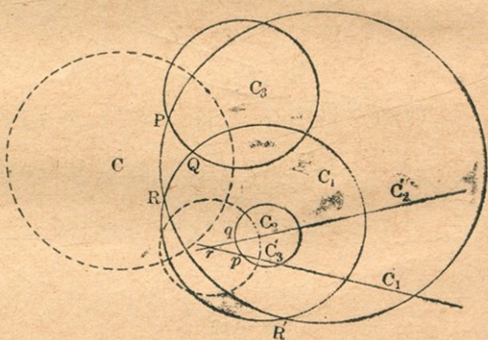
角，與倣三角形中者，各各相等，故得證明所求之結果。(7)

最後吾人更可證明族中有而僅有一圓，與此族中二離(Not-intersecting)圓正交，換言之即二離線有一公共垂線。(8)

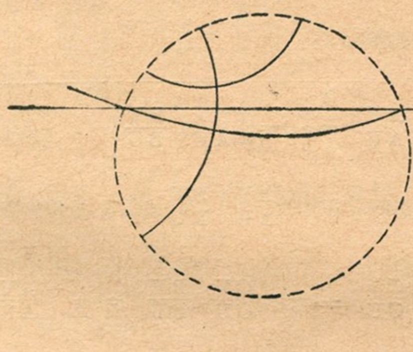
凡此諸結果，皆曾在雙曲線幾何學中證明，因是在此種圓族幾何學中，亦能成立。

§99. 至於論線長度量時，須先立倣節之線長之定義如次：

(7)附圖如下，其中曲線三角形爲pqr.



(8)此理蓋因二離圓與基圓之根心(Radical Center)(即三圓諸根軸之公共交點)在基圓之外，故可作三者之公共正交圓，且僅有一正交圓可作。



任何倣線節AB之倣長等於 $\log\left(\frac{AV}{AU}\Big/\frac{BV}{BU}\right)$,式內U, V爲AB所表之圓與基圓相交之點(見圖107)。

按此定義則 AB 之倣長與 BA 者等值,(9) 且全直線之長爲無窮大。(10) 又如C爲倣節AB上介於 A,B 間之任意一點,則AB之倣長等於 AC,CB 二者倣長之和。(11)

茲論依一族中之圓而作反圖法,對於倣點倣線之影響。

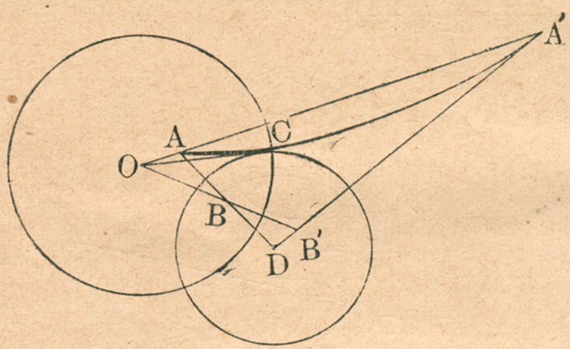


圖 110.

設A爲一倣點,A'爲其對於基圓之倣點。

設反圖圓之心爲D.而與基圓交於C.(圖110)

命A,A'之反點各爲B,B'.

(9) 因 $\log\left(\frac{BV}{BU}\Big/\frac{AV}{AU}\right)=-\log\left(\frac{AV}{AU}\Big/\frac{BV}{BU}\right)$

(10) 因A,B二點各合於U,V時,則 $\frac{AV}{AU}\Big/\frac{BV}{BU}$ 或爲零,或爲無窮大,因而其對數之値爲無窮大。

(11) 因 $\log\left(\frac{AV}{AU}\Big/\frac{CV}{CU}\right)+\log\left(\frac{CV}{CU}\Big/\frac{BV}{BU}\right)=\log\left(\frac{AV}{AU}\Big/\frac{BV}{BU}\right)$ 故。

因 AA′C 圓與反圖圓相切於 C，(12) 故其反圖亦必與該圓相切於 C. 但 A,A′,B,B′ 四點共圓，(13) 而 AA′C, BB′C, AA′BB′ 三圓之諸根軸(Radical axes)共點。

故 BB′ 亦必經過 O 點，而 $OB \cdot OB' = OC^2$，故 AA′B′B 圓，亦與基圓及反圖圓正交。

由是可知，任何倣點 A，依族中一圓作反圖法變為 B 點時，則倣線 AB 垂直於表反圖圓之倣線。

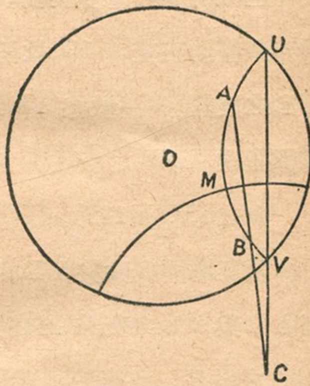


圖 111.

茲再證倣節 AB，被表反圖圓之倣線『平分』。設過 A,A′,B,B′ 四點之圓，與反圖圓相交於 M，與基圓交於 U,V (圖 111.) 則 U,V 顯然為對於反圖圓之反點

於是有 $\dfrac{BV}{AU}=\dfrac{CV}{CA}$, $\dfrac{AV}{BU}=\dfrac{CV}{CB}$

$$\therefore \frac{BV}{AU}\cdot\frac{BV}{BU}=\frac{CV^2}{CA \cdot CB}=\frac{CV^2}{CM^2}=\left(\frac{MV}{MU}\right)^2$$

$$\therefore \quad \frac{AV}{AU}\Big/\frac{MV}{MU}=\frac{MV}{MU}\Big/\frac{BV}{BU}$$

故 AM 之倣長等於 BM 者。

是以得下之結論。

依族中任何圓，而作反圖，變任何倣點 A 為點 B 時，倣節 AB，與表

(12) A′ 既為 A 對於基圓之反點，故 $OA \cdot OA' = OC^2$，因而 OC 為 AA′C 圓之切線，故上述二圓相切。

(13) 因 A,A′,B,B′ 為二對反點故。

反圖圓之倣線垂直，而被其所『平分』。

換言之，即

使任何倣點依表反圖圓之倣線反射，合於其影跡(Image).

至於反圖法對於倣線之影響，述之如下：

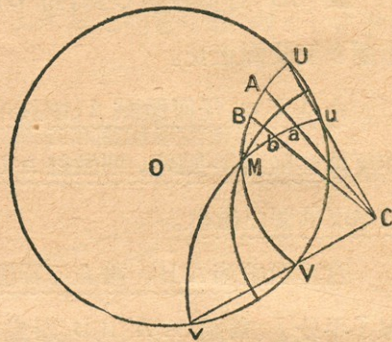


圖　112.

已知一圓與基圓正交，則其反圖亦與基圓正交，(14) 故任何倣線 A B 之反圖，爲一倣線 a b, A B 與基圓變點 U, V 之反點，各命之爲 a b 上之u,v.(圖112)。

當反圖圓與倣線A B相交時，則A B與a b之交點，必在反圖圓之周上。命此點爲M，則易證明 AM, BM 之倣長，各等於a M及b M之倣長，(15) 由是可知倣節A B之倣長，不因對族中任何圓作反圖法而改。

---

(14) 取族中一圓爲反圖圓，命其心爲C，半徑爲 λ 過C任引一直線，交基圓於 P, P′，則因C與基圓爲正交，故 $CP.CP' = \lambda^2$，因而基圓對於族中任何圓之反圖，仍爲本圓。

基圓既不變，交角大小復不改，故已知圓之反圖，仍與基圓正交。

(15) $\dfrac{AU}{au} = \dfrac{CU}{Ca}$，$\dfrac{AV}{av} = \dfrac{CV}{Ca}$　$\dfrac{AU}{AV} \cdot \dfrac{av}{au} = \dfrac{CU}{CV}$

但 $\dfrac{MU}{Mu} = \dfrac{CU}{CM}$，$\dfrac{MV}{Mv} = \dfrac{CV}{CM}$，$\dfrac{MU}{MV} \cdot \dfrac{Mv}{Mu} = \dfrac{CU}{CV}$

$\therefore\ \dfrac{AU}{AV} \cdot \dfrac{av}{au} = \dfrac{MU}{MV} \cdot \dfrac{Mv}{Mu}$，即 $\dfrac{AV}{AU} \Big/ \dfrac{MV}{MU} = \dfrac{av}{au} \Big/ \dfrac{Mv}{Mu}$

故AM之倣長等於aM者，同理BM, bM二者之倣長亦等。

且做線AB不與反圖圓相交時，只須就相當之圖形。立可得上述之結果。(15)

上述之結果，可概括之如次：

依族中任何圓，而作反圖，其對於做點，做線之影響，與依表反圖圓之做線而作反射相同。

在 §95. 中所述之理對於此種圓族，亦能應用，依族中二圓，繼續而作反圖，與二度空間內之移位法相當，故吾人可定出族中之二圓，使AB移位後，A合於另一點P，而AB合於過P點之已知做線，故在此種幾何學中，疊合法可以運用。而在雙曲線幾何學，關於合同線節之理，均得『迻譯』之，成爲此幾何中一相當定理。

§100. 吾人應注意由做節做長之定義，可定做長之單位，今在基圓之任一直徑上，取此單位線節，因諸直徑亦皆爲做線也，設此單位線節爲OP(圖113)

如是則有　$\log\left(\frac{OV}{OU}\Big/\frac{PV}{PU}\right)=1$

---

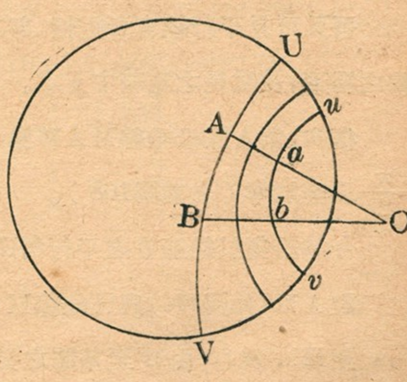
(15)如下圖，則有

$$\frac{AV}{av}=\frac{CV}{ac},\quad \frac{AU}{au}=\frac{CU}{ac}$$

$$\frac{BV}{bv}=\frac{CV}{bc},\quad \frac{BU}{bu}=\frac{CU}{bc}$$

$$\therefore \frac{AV}{AU}\cdot\frac{au}{av}=\frac{CV}{CU}=\frac{BV}{BU}\cdot\frac{bu}{bv}$$

即 $\frac{AV}{AU}\Big/\frac{BV}{BU}=\frac{av}{au}\Big/\frac{bv}{bu}$



故AB,ab二做節，有相等之做長。

即　$\log\left(\frac{PU}{PV}\right)=1$ 或 $\frac{PU}{PV}=e$

故P點分直徑成 e:1 之比。

由此則單位線節在倣點域中任何位置，均可決定，因線節 OP，能『移動』之，使其二端之一，合於任何已知點。

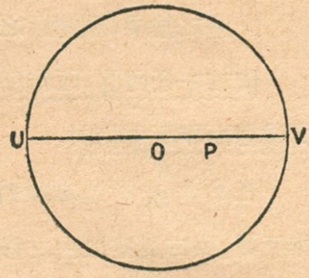


圖 113.

又有一式，可表倣長，即

$$k\ \log\left(\frac{AV}{AU}\Big/\frac{BV}{BU}\right)$$

其意乃在變易單位，使以 a 代 e 爲底。而取對數時，有相同之效果。

§101. 至是可藉此種倣幾何學中度量性質，以樹立雙曲線幾何學中之定理數則。

第一事可見者，爲相似三角形之不可能。因苟有二倣三角形，諸角各各相等，而不爲合同形，則吾人可移動其一，使其中某頂點，合於其他中之相當頂點，且其二邊兩兩相合。如是則得一『四邊形』，其內角和將等於四直角，此爲不可能之事，因倣三角形中之內角和，常小於二直角也。

吾又可見平行線有漸近性，卽二平行線漸相趨近，此理可由倣平行線之圖形，及倣長之定義中見之。

復次，當A點沿垂線MA移動，以至於BC時，則平行角之極限，由 $\frac{\pi}{2}$ 以至於零（參看圖108）。

今請證對於線節 p 之平行角$\Pi(p)$，由$e^{-p}=\tan\frac{1}{2}\Pi(p)$一式決定。

設AM（如圖114）與已知線MU垂直，而AU與之平行。

用以M′爲心，由M′至基圓之長爲半徑之圓爲反圖圓，而作其反圖。

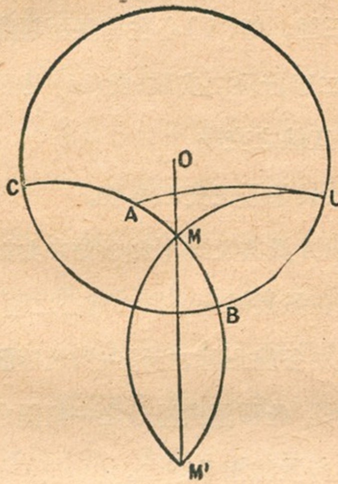


圖 114.

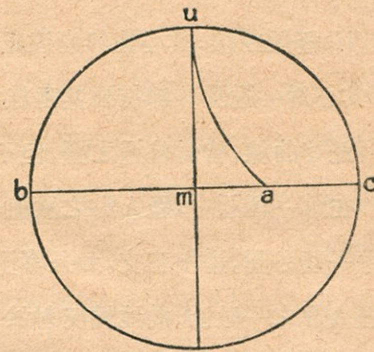


圖 115.

如是另得一圖(圖115)其中相當倣節之倣長未改，因反圖圓為族中一圓也，AM，MU 二線，變為過基圓圓心之直線，此圓心為M點之反點，且 AU圓變為 a u 圓，與半徑m u 相交於u，而與m a 所成之角為Π(p)。mu，mb，等半徑，亦為族中，之倣線。

設 A M之倣長為 p.

則有 $p=\log\left(\dfrac{AB}{AC}\Big/\dfrac{MB}{MC}\right)=\log\left(\dfrac{ab}{ab}\Big/\dfrac{mb}{mc}\right)=\log\left(\dfrac{ab}{ac}\right)$

注意　au，bc 相交所成之角為Π(p)，則由圖115中，有

$$ac=k\left\{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\Pi(p)\right\}\right.,$$

$$ab=k\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\Pi(p)\right\}\right.$$

式內 k 為基圓半徑之長，

由是可得　$p=\log\cot\frac{1}{2}\Pi(p)$，

而　$e^{-p}=\tan\frac{1}{2}\Pi(p)$

最後應知此種幾何學中，亦有圓三種，即(i)心在有限距離處之圓，(ii)極限曲線，其心在無窮遠處，即二平行線之交點，及(iii)等距曲線，其心爲一臆點，*即有公共垂線之二直線之交點。

此等曲線，皆爲普通之圓，但不屬於與基圓正交之圓族。

在第一種圓中，過A點之倣線，與以A及其反點A′爲限點之共軸圓族中一切各圓，盡相正交，如是諸圓，爲在倣幾何學中以A爲心之圓。設有過A點之一倣節，將他端反射於束線中各線上時，所得亦爲此等圓。

其第二種圓，盡與基圓相切於一點U，此種圓與過U之一組圓中任何圓相正交，即與交於無窮遠處U之平行倣線相垂直也。

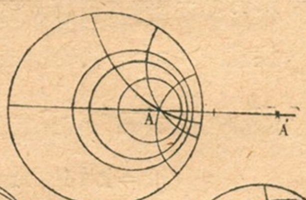
如是諸圓。爲倣幾何學中之圓，其心爲倣平行束線之公共點，如就此種束線作反射，所得亦爲此種圓。

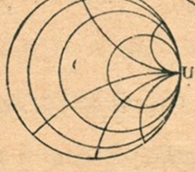
至於第三種中，則爲過U,V二點之一切圓，而與AB之一切垂線，盡相垂直。凡此諸圓，爲倣幾何學之圓，以一束離線之公共臆點爲心，就此種束線作反射，所得亦同。

上述之三種圓(16)與雙曲線幾何學中之普通圓，極限曲線及等距

*參看§37.

(16)此三種圓之圖依次如下：





曲線相當。

§102. 歐氏平行設論證明之不可能。

至是吾人可斷雙曲線幾何學中，決無矛盾存在之餘地，苟此種平幾何學中有一矛盾之處，則將此結果，依倣幾何學解釋之時，亦生剌謬，如是則歐氏幾何學中，亦必有矛盾處矣。故吾人可斷苟歐氏平幾何學中，邏輯上無不和諧處，則雙曲線平幾何學中，亦絕不至有是。但猶可謂雙曲線立體幾何學中，容或尙有矛盾存焉。對於此疑難之解答，亦甚易易。與一定圓正交之圓族之幾何學，甚易推之於三度空間。所謂倣點，指一定球內之點，而球面上之點不與焉。所謂過二倣點之倣線，爲過是二點，而與定球正交之圓。所謂倣面，爲過三倣點之球面而與定球面成正交者，普通平面可視爲倣面之一特例，故上述之平幾何學，可視爲此體系中之一特例，再對於倣長，倣平行線等名詞，加以適當之定義卽可得一種立體幾何學，與雙曲線立體幾何學胳合。因是可知雙曲線立體幾何學中，亦無矛盾之點，否則一有矛盾時，則依倣幾何學以解釋之，亦必生剌謬，而歐氏幾何學，將不免於自相悖逆矣。

依此結果，吾人之論證，乃爲完足，無論雙曲線幾何學發展至若何程度，均決不致生矛盾之結果，是以此種體系，富有邏輯上之可能性，而其所依據之諸公論，亦必不互相剌謬，可以斷言，故知歐氏平行設論證明之不可能，因苟得而證之，是不啻推翻波羅二氏之平行設論矣。

§103. 與一定圓徑交之圓族

今取與以 O 爲心，半徑長爲 k 之定圓徑交之圓族，加以討論，所謂徑交者，卽族中任何圓與定圓之交點，在後者之一直徑上，此定圓稱爲

基圓如前,此族圓對於O之冪,均爲$-k^2$.

設 A,B 爲基圓內二點, A′,B′, 爲OA,OB上之點,而合於$OA\cdot OA'=-k^2$,$OB\cdot OB=-k^2$之關係者。

如是,則 A,A′,B,B′ 四點共圓,而過此之圓, 與基圓徑交(圖116.)故過基圓內相異之二定點,有而僅有一圓,與基圓正交。

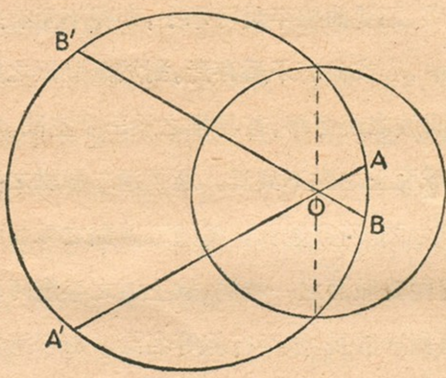


圖 116.

欲研究與基圓正交之圓族性質,其方式有二,吾人可限制此種倣幾何學中之倣點,僅爲基圓內及其上之點在此情形,須視基圓半徑之二端點,爲同一倣點。吾人亦可擴充基點之範圍於圓外,乃至於無窮遠處,而此圓周上之點,不必特殊處理之。

此二種相異情形,卽與橢圓幾何學之二派相當,在一種中, 任意二直線常有一交點,在他種中則有二,所謂倣線者, 卽與基圓徑交之一切圓也。

當倣點之範圍,限於基圓之內及其上時,任意相異二倣點 A,B, 常可定一倣線 A,B 且任意二倣線可定唯一之倣點。

如倣點之範圍擴充，而含有基圓內外一切點，則二倣點，不能常定唯一之直線。苟圓周上之 A,B 二點，在一直徑之二端時，則有一族之倣線經過之，且如 A,B 二點。在過O點之一直線上，而 $OA\cdot OB=-k^2$ 時，則與適所論者亦合。

且照此範圍，每二倣線均交二倣點。

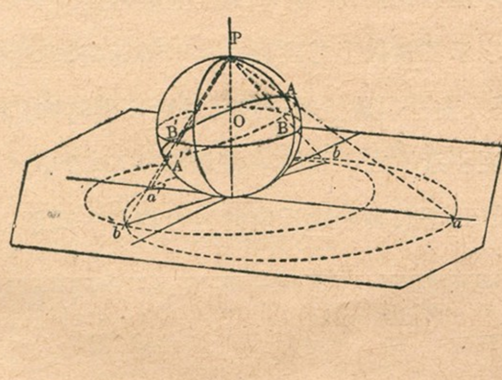
討論此圓族性質最簡便之方法，應依據下理：卽取一球，及一與其相切之平面，從過切點直徑之他端，作地形射影(Project stereographically)，則球面上大圓，在切面上射影，成為上述之圓族，設以射影心為球之極點，則赤道線之射影為基圓，一半球中各點之射影，在基圓外，他半球上者，則在基圓內，此種射影，有保態性，球面上二大圓弧之交角，與切面上射影二圓之交角相等。(17)

二線之交角，卽表此二倣線之圓之交角。

玆請證此倣幾何學之定理數則。

(17)地形射影如下圖。

設P為射影心，A,a 為二相當點，球直徑之長為 d，則 $PA\cdot Pa=d^2$，故此種射影法，與反圖同，因是有保態性（參看附錄五31)



因與一大圓正交之諸大圓，交於該圓之極點，是以一切倣線之垂直於一已知倣線者當倣點限於在圓內或周上時，則盡交於一點。當倣點範圍推及圓外時，則此公共點有二（參較§§75–77）

此交點稱爲已知線之極。

且此一直角球面三角形 ABC 中，設C爲直角，則$\hat{A}\gtreqless$直角，視 AC 在CB 延長線上，合於 B，或介於 C,B 間而定。

『譯』爲倣幾何學中之敍述，即得§78(1)之理。

復次，球三角形之內角和，大於二直角，更因此種射影法，有保態性，(Conformal)故在此種幾何學中倣三角形之內角和大於二直角（參看§78(3)）

但此種幾何學中之度量性質。不能如與基圓正交圓族幾何學之易於處理。在相當範圍內，上之論證，仍可以應用，惟於立倣長之定義時，須用及一虛圓上之交點耳。如推廣於立體幾何學之情形，可就與一定球徑交之球族論之。

此種倣幾何學，在此不復詳論。欲明橢圓幾何學。不論發展至若何程度，均無有矛盾，尙有他較簡易之法。雙曲線幾何學之情形，所以論之獨詳者，因藉以示明歐氏平行設論之不可得而證，其法至爲簡便也。

§102，吾人前已引載波爾業氏對於歐氏幾何抑非歐幾何爲眞一問題之意見*玆更引近代二大幾何名家之言，以作結論。

傍卡累氏曰，吾人對於歐氏幾何究否爲眞一問題。應如何考慮耶？

---

* 參看§15.

此題實無意義可言，猶之問權衡制中法英制之孰眞，位標系中笛氏制與極位標制之孰眞。一種幾何學，非能較他種爲眞，特有較便與否之別耳。歐氏幾何，卽有此美德，今日如是，卽他年亦將如是；第一因其最簡便，不特便於吾人心習，且吾人眞覺所攝，亦爲歐氏空間也，且其本身亦爲最簡便，猶之一次多項式之簡於二次者然，復次，其理亦能於吾人器官所感所度之自然物體相脗合，達於適當程度』*

又一法之幾何名家曰：

吾人所可得而言者，僅能謂歐氏幾何學與實現之事理逼肖。至少亦可謂二者相去極微，……其錯誤極微細，在吾人所能運用之儀器以觀察之範圍內。尙不足以知之。

『簡言之，吾人不特於理論方面言，應採用歐氏幾何、且此幾何學在物理方面，亦甚眞實』。†

此理尙可論之如次，歐氏幾何是否爲眞一問題。在純粹科學之幾何學中，無有位置，此疑義爲應用科學之幾何學中一問題。此題之解答，如其有之，乃實驗家之事，但其解答未能確切不移。彼所能告吾人者，僅爲彼所觀察之三角形，無論如何大，其內角和等於二直角，而受觀察上錯誤之限制。如曰確爲二直角，則超出其權力之外矣。

尙有一趣事，附申於此，在相對論(Thoory of Relativity)之理論中，羅波二氏之幾何學較便於用，至少在一部分內如此，高斯之戲言謂

---

* 見儍卡累La Science et l' Hypothèse.或英譯本 p. 50。

† 見哈達馬(Hadamard)著 Leçons de Géométrie élementaire, vol. i. p. 286 (1898年在巴黎出版)。

彼寧願歐氏幾何學,不爲眞幾何學,如是則吾人先天上,可得一絕對之單位,此語竟與後人所創之新理,呼應有如桴鼓,不亦奇哉巧哉。*

* 見 §11中所引載之致托拉那斯一函,及高斯全集vol. viii. p. 169 中致革爾令之函。又在籃伯 Theorie der Parallellinien §80 中,亦有一類似之議論;見恩格爾及斯楊刻爾所著書 p. 200.

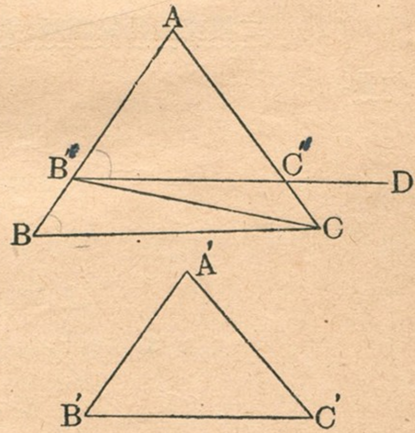
附　　錄

一　關於雙曲線平幾何學之補充及數定理之證明

1.* §31 中枝理之證明。

設三角形 ABC, A′B′C′ 諸角各各相等，卽 $A=A'$ $B=B'$ $C=C'$.

如此二個三角形，非合同形。則至少必有二相當邊不相等，設 $AB>A'B'$ 可在 AB 上截取 $AB''=A'B'$，過 B'' 作半射線 $B''D$，使 $A\hat{B}''D=A'\hat{B}'C'=A\hat{B}C$，則 $B''D$ 不能與 BC 相遇。否則在 B'' 之角必大於在 B 之角。故按帕希公論，$B''D$ 必與 AC 相遇，命此交點爲 C''。



則三角形 $AB''C''$, $A'B'C'$ 有二角一邊，各各相等，而爲合同形，故

$$A\hat{B}''C''=A'\hat{B}'C'=A\hat{B}C.$$

$$A\hat{C}''B''=A'\hat{C}'B'=A\hat{C}B.$$

---

* 附錄中節數，用數碼記之，而不附以 § 之符號，以示別於本文。以後引用時，亦依此規定。

故在四邊形 BCC″B″ 中，其內角和

$$B\hat{B}''C'' + B''\hat{B}C + B''\hat{C}''C + C''\hat{C}B$$

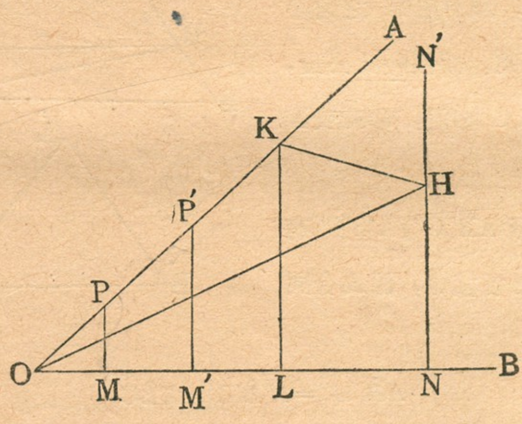
$$= B\hat{B}''C'' + A\hat{B}''C'' + B''\hat{C}''C + A\hat{C}''B'' = \text{二平角}$$

$$= \text{四直角。}$$

但任連一對角線，如B″C，分此四邊形爲二個三角形 BB″C，B″C″C，則因三角形之內角和必小於二直角，故此二個三角形內角和之和，亦卽原四邊形之內角和，必小於四直角；而上之結果與此矛盾。故題中之二原三角形相當邊必等，而爲合同形。

2.　§34 中諸定理之證明。*

（1）　二相交直角間距離，去交點愈遠時則愈大，且可大於任何已知量。



設二直線相交於 O 點。

* 據散麥維爾The Element of Non-Euclidean Geometry pp. 37-39.

在半射線 O A 上，任取 P, P′ 二點，使 OP′>OP.

自 P, P′ 作至他一線 O B 之垂線 PM, P′M′.

因任何三角形之內角和常小於二直角 (§31) 故

$M'\hat{P}'O$ $M\hat{P}O$ 必均爲銳角。

故 MPP′ 爲鈍角，而$M\hat{P}P'>M'\hat{P}'O$.

故 M′P′>MP (§29)

設 O N 爲平行角 $N\hat{O}A$ 之相當線節 (見後 § 45)，作 NN′，垂直於 ON，則 NN′ 爲 O A 之平行線。

對於任何已知定量 G 常可在 NN′ 上取一點 H，使 NN>G.

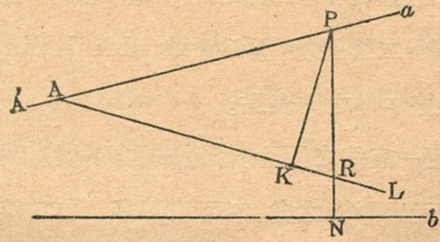
過 H 引一直線使與 H N 或銳角，則因此線在鈍角 $O\hat{H}N'$ 之內，故必與 OA 相交於一點 k.

自 k 點作至 O B 之垂線 KL.

則因 $N\hat{H}K$ 爲鈍角，故 KL>HN>G.

（2） 有二平行線，在其一上之一點，依平行向之逆向移動，則自此點至他線之距離漸增而可大於任何量。

按 § 33 之理反言之，則本理之第一層自明。



今請證此距離可使之大於任何量。

在一平行線 a 上任取一點 A 作 A L 與他一線平行。

按(1)所述,對於任何已知量 G. 常可在 a 上求得一點P,使自 P 至 A L 之垂線 $PK>G$.

自 P 點作至 b 之垂線 PN,則 PN 必與 AL 相交於一點 R.

如是則 $PN>PR>PK>G$.

(3) 離線間距離可使之大於任何量。

此理之證法,與(2)完全相同。

3. 隱線(Improper Lines)(與 § 38 參看)

在不依據平行設論之射影幾何學(Projective Geometry)中,欲求二點定一直線之設論,普遍成立。須加入新元素,以說明上述之例外情形,此等新元素稱爲隱線,以示別於普通直線或常線 (Proper Lines)· 隱線亦有二種。

(i)設Ω爲一無窮遠點束線Ω(卽一族同向平行線)中一切線,各爲一臆點之代表線。此等臆點之軌跡合此無窮遠點卽第一種隱線,稱爲無窮遠直線。此線常以 ω 記之。

(ii)如A爲一常點,則過A點之一切線。各爲一臆點之代表線,此等臆點之軌跡,卽第二種隱線,稱爲隱線 (Ideal Line). 此線常以 α_A 爲記,常點A爲隱線 α_A 之代表點。

如是則二點定一直線之設論。普遍成立,不復有例外。但二線定一點之說,有無受新元素影響之處,不可以不審。二常線常能定一點,或爲常或爲隱,已如上述;今僅取二線至少有一爲隱之各種情形論之足

矣。

(1)設 γ 爲常線，ω 爲經過 Ω 之一臆線，則 γ,ω 所定之點（常以 $\omega\gamma$ 記之）爲一臆點，其代表線爲過 Ω 而垂直於γ之直線，因吾人假設 ω 爲束線 Ω 中一切線所定臆點之軌跡，反言之，ω 上任何點之代表線均須經過 Ω.

(2)設 γ 爲一常線，α_A 爲一臆線，則 $\gamma\alpha_A$ 一點爲臆點，其代表線過 A 點而與 γ 垂直。因臆線 α_A 上任何點之代表線，均須經過 A.

(3)設 $\omega\omega'$ 各爲屬於 Ω,Ω' 之二無窮遠線。$\omega\omega'$ 一點爲臆點代表此點之線爲 Ω,Ω' 之連結線。

(4)設 α_A,β_B 爲二臆線，$\alpha_A\beta_B$ 一點爲臆點代表此點之線爲 A,B 之連結線。

(5)設 ω 爲一無窮遠線，α_A 爲一臆線，$\omega\alpha_A$ 一點爲臆點，代表此點之線爲 A, Ω 之連結線。

如是得證明射影平幾何學中二基本設論。在羅氏平面上。依然爲眞。

4. 絕對與相對之意義。*（與 § 53 參看）

§ 53 中所謂（絕對）（相對）二義之差別，今更詳釋之如下：有若干問題中，假設爲已知之元素，每可分爲二類，其一類在該題論證中始終固定而他一類則在某某數種情形下可以變易，遇此種情形時，凡涉及第一類已知件之處，每可不必言明提及，凡關於變件者，稱爲相對，關於定件者，稱爲絕對。

* 見波諾拉書英譯本 pp. 47-9

例如在數域(Domain of Rationality)之理論中,第二類之已知件(卽變件)爲某種簡單之無理數(Irrationalities)(構成基數 Base) 其第一類之已知件則僅含單位數1,而爲一切數域所公有,每可略而不言。吾人論一數時,稱其關於一已知數爲相對有理 (Rational relatively) 者,卽謂其屬於由該基數所定之數域也。 如稱一數爲絕對有理 (Rational absolutely) 則須證其對於一切域所共有之基數L爲有理。

今就幾何言,每一實際問題中,常須假設一圖形, 卽其中各部之大小爲已知,是種變件 (屬第二類),可以任意選定。此外尙須暗設若干基本圖形,如直線,平面,束線等 (卽第一類之定件) 之存在,故一作圖題,一度量,一圖形之性質,凡關於變件者。均稱爲相對,反之,如稱爲絕對,則必其僅與定件相關,或雖用變件釋明,貌若相涉, 實則變件改易時彼仍爲固定。

本此說,則普通幾何學中直線之度量,其意義顯爲相對者。相似形之存在。固不克使吾人得藉基本圖形(如直線,束線等),按任何方法。以說明一直線之大小也。

若角之度量,則異於是,吾人得用某種度量法, 以示其一種絕對性質,其法僅須取此角與旋繞一周所成角之比例卽足,亦卽取其對於全束線之比例,而後者固爲一基本形也。

由上所述, 學者當可瞭然於在羅氏幾何學中, 一切度量皆爲絕對之義。但須注意由此所得線節之數量表示, 不復有普通長度之分配惟 Distributive Property, 因取二線節之和時, 其相當角不必爲原二相當角之和也。但吾人仍可求出角之一種函數,仍有此特性者,而得使線

節與此角之函數相應，在相當範圍內。角之每一值，皆可定此函數之值，而使爲線節之絕度量。長度之絕對單位(Absolute Unit)卽一線節，使此函數之值爲1者。

5. 極限曲線位標與卡氏位標之關係。(參看§§68–9)

將 §57 (1) 式應用於圖 79. 卽得

$$e^{\frac{P_0M}{k}}=e^{\frac{x-\xi}{k}}=\cosh\frac{y}{k}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又按 §55 及 §69 (3)，有

$$\eta=PP_0\text{弧與}\ e^{\frac{\xi}{k}}\text{之乘積}=k\sinh\frac{y}{k}\cdot e^{\frac{\xi}{k}}$$

$$=ke^{\frac{x}{k}}e^{-\frac{x-\xi}{k}}\sinh\frac{y}{k}=ke^{\frac{x}{k}}\tanh\frac{y}{k}\cdots\cdots\cdots(2)$$

此卽由卡氏位標，以求極限曲線位標之關係式。

至於由後者反求卡氏位標之關係式，可得之如次。

如上已得　$PP_0\text{弧}=\eta e^{-\frac{\xi}{k}}=k\sinh\frac{y}{k}$

故　$$\sinh\frac{y}{k}=\frac{1}{k}\eta e^{-\frac{\xi}{k}}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

且　$$1=\cosh^2\frac{y}{k}-\sinh^2\frac{y}{k}=e^{\frac{2(x-\xi)}{k}}-\frac{1}{k^2}\eta^2e^{-\frac{2\xi}{k}}$$

∴　$$e^{\frac{2x}{k}}=\frac{1}{k^2}\eta^2+e^{\frac{2\xi}{k}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

6. 用變數代換法以求 §68 之弧長元素公式。就上之(3)(4)二

式取微分得

$$\cosh\frac{y}{k}dy=e^{-\frac{\xi}{k}}\left(-\frac{1}{k}\eta d\xi+d\eta\right)$$

$$e^{\frac{2x}{k}}dx=e^{\frac{2\xi}{k}}d\xi+\frac{1}{k}\eta d\eta$$

故 $$dy=e^{-\frac{x}{k}}\left(-\frac{1}{k}\eta d\xi+d\eta\right)$$

$$\cosh\frac{y}{k}dx=e^{-\frac{x-\xi}{k}}d\xi+\frac{1}{k}e^{-\frac{x+\xi}{k}}\eta d\eta$$

因而 $$ds^2=\cosh^2\frac{y}{k}dx^2+dy^2$$

$$=\left[\frac{1}{k^2}e^{-\frac{2x}{k}}\eta^2+e^{-\frac{2(x-\xi)}{k}}\right]d\xi^2+\left[\frac{1}{k}e^{-\frac{2(x+\xi)}{k}}\eta^2+e^{-\frac{2x}{k}}\right]d\eta^2$$

$$=\left[\frac{1}{k}e^{-\frac{2x}{k}}\eta^2+e^{-\frac{2(x-\xi)}{k}}\right](d\xi^2+e^{-\frac{2\xi}{k}}d\eta^2)$$

但第一括號內之式，等於 $\tanh\frac{y}{k}+\operatorname{sech}^2\frac{y}{k}$（據上之（1）（2）兩式）而爲 1. 故所得結果。與 §68 中者相合。

二　絕對形，雙曲線，空間幾何 *

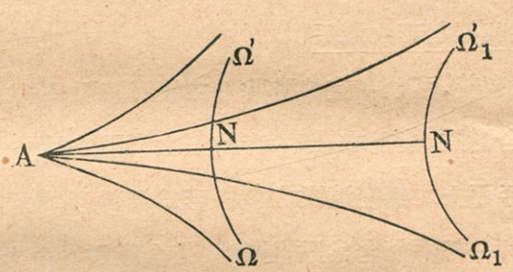
7. 絕對形。

由上所述，一直線上有二無窮遠點，故在一平面上無窮遠點之集合

* 本附錄係取材於散麥維爾 The Elements of Non-Euclidean Geometry 中 §§ 14-20, 22, 24。

形，必爲一二次曲線，卽一錐線，因任何直線均與之相交於二點也。此二次曲線卽一切無窮遠點之集合形，稱爲絕對形，若在空間則絕對形爲一二次曲面（Quadric）。

當二無窮遠點相趨近，漸至相合時由此二點所定之直線變爲絕對形之切線。但二無窮遠點 Ω,Ω' 相趨近時，則自一定點 A，連至此二點所成之角 $\Omega\hat{A}\Omega'$ 漸趨於零，而自 A 所引至 $\Omega\Omega'$ 之垂線 A N 之長趨



於無窮大，故直線 $\Omega\Omega'$ 漸移至無窮遠處，卽成前所述之無窮遠直線。

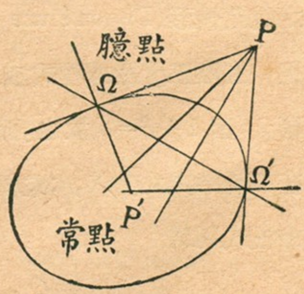
在歐氏幾何學中。在一平面上，過一已知直線外之一已知點能作而只能作一直線與之平行，卽在一直線上之二無窮遠點相合，故在此平面上無窮遠點之集合形爲一叠合線(Double line)稱爲無窮遠線卽一錐線之蛻化情形(Degenerate case)在此種情形中無窮遠處僅有一實直線；但一直線正位標方程式成爲$x\pm iy+c=o$之形者，距原點之距離均爲無窮大，因 $1+i^2=o$ 故也。而此等線族爲二虛束線 (Imaginary Pencil).在無窮遠處之直線，其方程式爲 $\alpha\equiv o\cdot x+o\cdot y+1=o$，而此二束線之方程式則爲

$$\omega+\lambda\alpha=o. \quad \omega'+\lambda\alpha=o. \text{ 式內 } \omega,\omega'=x\pm iy.$$

歐氏幾何中之絕對形以點一軌跡論，則有一叠合之無窮遠線 $\alpha^2=o$,以直線之包線論則有二虛束線 $\omega+\lambda\alpha=o$. $\omega'+\lambda\alpha=o$,且二者之頂點卽在適所述之無窮遠直線上。此二虛頂點，又係點圓 Point circle $\omega\omega'=x^2+y^2=o$與無窮遠直線之交點。因一任何圓之方程式，均可書爲 $\omega\omega'+u\alpha=o$, 式內 $u=o$ 表一直線，故可見一切圓均須經過 $\omega\omega'=o$, $\alpha=o$ 所定之二點，是以此二虛點亦稱爲虛圓點 (Circular Point)。

8. 臆線與絕對形之關係

由臆點之定義，可知一直線被其上二無窮遠點分爲二部，一部僅含常點，一部僅含臆點，換言之，卽一直線上之常臆二種點，以無窮遠點爲界，又因上述平面上之無窮遠點之集合形爲絕對形，故此形將其所在之平面分爲二部，一部中僅含常點，他部中僅含臆點，命含常點之部爲內部，含臆點之部爲外部，則無窮遠線乃一無窮遠點，及以此爲頂點之束線所代表之一切臆點，共成之集合形，故應與絕對形相切，在上節亦已述及。若臆線，則依定義，乃以一普通點爲頂點之束線所代表一切臆點構成之集合形，其上不特無常點，且不含無窮遠點；因如含無窮遠點，則爲上述之無窮遠線，如含二不同之無窮遠點，則成一常線。



今作一錐形，表示所在平面上一切無窮點遠集合而成之絕對形，則其內之點切爲常點，其外者爲臆點，直線之交於此錐線上者，爲平行線，交於其內一點者，爲普通交線，交於其外者爲離線。設 $\Gamma\Omega$, $\Gamma\Omega'$ 爲自一臆點 Γ 所作至此錐線之二切線，則凡

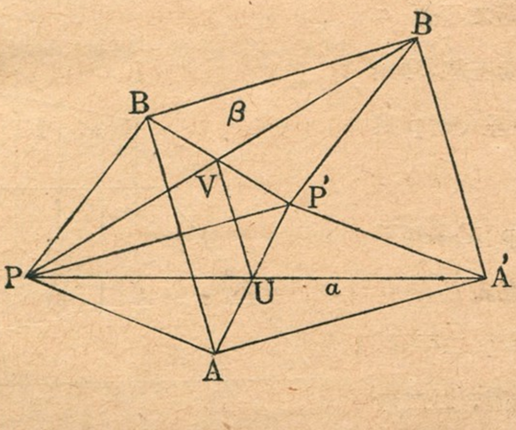
以 Γ 爲頂點之束線均與 $\Omega\Omega'$ 相垂直，換言之，卽 $\Omega\Omega'$ 爲 Γ 之代表線。

上述之圖，在此僅爲一種圖形表示。至其所蘊義理，則須藉射影幾何學，方能明之。

9.　三度空間內之推廣。

按關於三度空間之假設，二平面如有一公共點，則必有公共直線，換言之，二平面交於一直線也。如是之二平面成一二面角(Dihedral)在二平面上，自其交線上任一點各引一垂直線而以二者所成之角。度量此二面角，如此角爲直角，則稱二平面爲正垂，由此定義，可知有證明此角大小與頂點所在處無涉之必要。在歐氏幾何學中，係用平行線之理證明。故在此須另作一證如下：

設在 α，β 二平面之交線上，任意取 P,P′ 二點，在 α 平面上 PP′ 之同側。作二等長線節 PA＝P′A′，且均與 PP′ 垂直：在 β 面上，作



PB＝P′B′ 亦均與 PP′ 垂直，且在同側，連接 PA′ 及 P′A 則二者必交於

一點，命之爲 U 同理 PB' 與 $P'B$ 因必交於一點 V.

直角三角形 APP' 與 $A'P'P$，有一公共邊 PP'，及一等邊 $PA=P'A''$ 故二者爲合同形，而 $PA'=P'A$，且 $P\hat{A}P'=P'\hat{A}'P$，是以三角形 PUP' 爲二等角者，因而 $PU=P'U$.

同理可得 $PB'=P'B$ 且 $PV=P'V$.

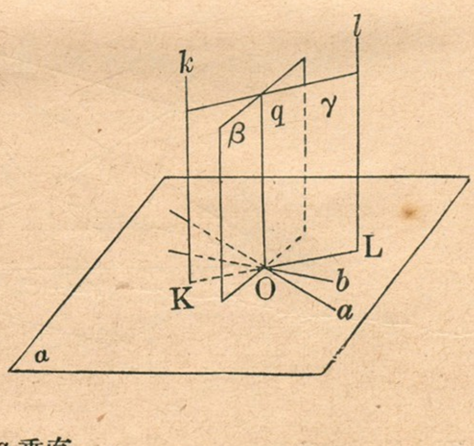
故 PUV 與 P'UV 二三角形之三邊各各相等。而爲合同形，是以 $U\hat{P}V=U\hat{P}'V$.

故 $PA'B'$ 與 $P'AB$，二三角形有二邊及一夾角各各相等，而爲合同形，是以 $AB=A'B'$.

故三角形 APB, $A'P'B'$ 有三邊各各相等，而爲合同形，是以 $A\hat{P}B=A'\hat{P}'B'$. 卽得證明。

10. 下述各理，其證明與歐氏幾何學中相同，不復贅述。

（1）如一直線 p 經過二相交線，a, b 之交點 O 且與二者均垂直，則在 a, b 所定之平面 α 上，過 O 之一切直線，均與 p 垂直。此時吾人謂 p 與平面 α 垂直。

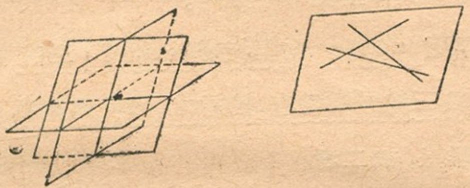


（2）過 p 之一切平面，均與 α 垂直。

（3）如 β, γ 二平面，均與平面 α 垂直，且二者交於一直線，則此交線，亦與 α 垂直。

（4）二平行線必在一平面上。

（5）l, k 二直線均與平面 α 垂直，則必在一平面內，蓋設 L, K 各爲各直線與 α 之交點，則由 l, k 所定之平面，及 k, L 所定之平面，均與 α 垂直；且其交線 KL 亦在 α 上，故二者相合爲一。



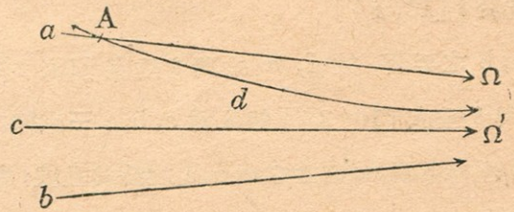
（6）三平面有一公共點，則兩兩相交於三直線共過此點。

（7）三直線兩兩相交者或共過一點或共在一平面上。

11. 空間之平行線與離線。

（1）有 a, b, c 三直線，不與在一平面上者，如 a 及 c 均與 b 平行，則 a 與 c 亦必平行。

設 a, b 所定之無窮遠點爲 Ω; c, b 所定者爲 Ω'，則此二無窮點必



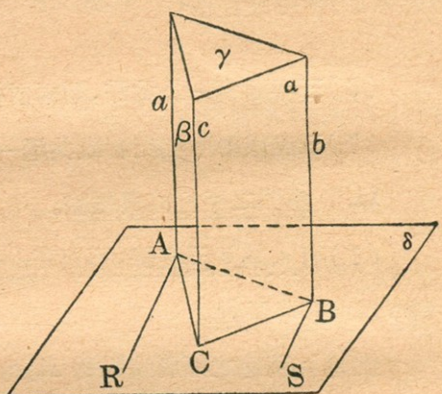
合而爲一，否則 b 之一方向上，有二不同之無窮遠點而在經過 b 之任何平面上，任取一點，均可作二直線依同向與 b 平行是與喜氏之公論相

背也。

在 a 上任取一點 A，則由 A 與直線 C 可定一平面，在此平面上作過 A 而與 C 平行之直線 AΩ，則因 A，Ω 二點，決定唯一之直線，故 AΩ 即爲 a，即 a 與 c 平行。

由是且可知 a 與 c 必在一平面內。

(2) 有三平面 α, β, γ 兩兩相交於 a, b, c 三直線如 a, b 爲離線，則必有一平面，與三線同爲垂直，換言之，即 c 爲 a 與 b 之離線。



因 a, b 爲離線，故二者必有一公共垂線，命之爲 AB. 過 A, B 各作平面 γ 之垂線 AR, BS，則按上節 (5) 知 AR, BS 必在一平面內，命此平面爲 δ.

在 δ 內之 AR, AB 二線，同與 a 垂直，故 a 垂直於 δ. 同理 b 亦垂直於 δ [10(1)] $\beta\ \alpha$ 各爲過 a, b 之平面，故 β, α 均與 δ 垂直 [10(2)]。是以 α, β 之交線 c，亦與 δ 垂直 [10(3)] 即 δ 爲 a, b, c 三直線之公共垂面。

設 c 與 δ 之交點爲 c，則 A C 爲 a, c 之公共垂線。故 a, c 爲離線，同理 b, c 亦然。

12. 錐集線 (Bundle of Lines) 錐集面。

經過空間一點 O 之一切直線，稱爲錐集線，之一切平面，稱爲錐集

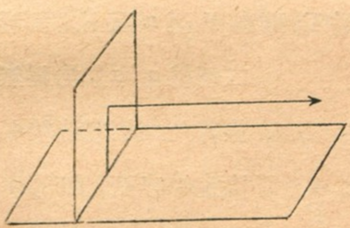
面。由上節（1）所述，知錐集線之頂點O可爲無窮遠點，則得一叢平行線，其中任意二直線，均爲平行，此錐集線，由其中任一直線及其上一向決定，由（2）又知錐集線之頂點O，可爲臆點，則得一叢直線，同與一平面相垂直。而此錐集線，由此公共垂面決定。

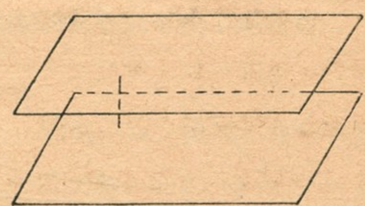
在平行錐集線中，一切直線，均兩兩共在一平面上，如是所得之一切平面，成一以此無窮遠點爲頂之錐集面，在以臆點爲頂點之錐集線中，其一切直線，亦兩兩共在一平面上，如是所得之一切平面，成一以此臆點爲頂之錐集面。

13. 直線與平面間之關係。

如一直線與一平面之交點爲無窮遠點，則稱此線與平面平行。如交點爲臆點，則有唯一之直線及平面，與此已知線已知面，同爲垂直。

二平面相交於一直線，如此直線爲無窮遠線，則稱爲平行面；如此直線爲臆線，則稱爲離面，而有唯一之直線與上二者，同爲垂直。





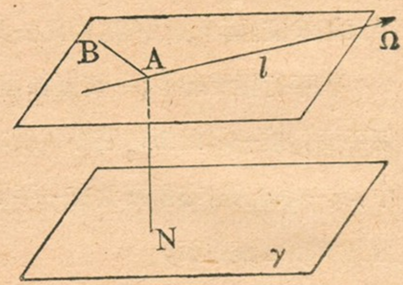
一切平面，與一已知線依定向平行，則均經過同一之無窮遠點，而兩兩相交，成平行錐集線，此卽上所述以無窮遠點爲頂點之錐集面也。

一切平面之與一已知平面相垂直者，均經過同一之臆點，而兩兩相交，成一以臆點爲頂之錐集線，此卽上所述以臆點爲頂之錐集面也。

下述之定理頗爲重要。

（1）經過與一平面平行之直線，只能作一平面，與已知面平行。

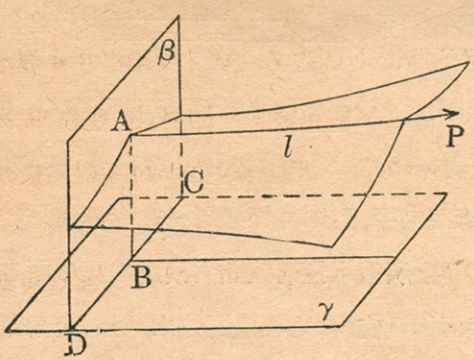
設直線 l，交平面 γ 於無窮遠點 Ω，過 Ω 僅有一無窮遠線 ω，據 §39 之定義自明，今 ω 及 l 既有一公共點 Ω，故可決定唯一之平面，卽與 α 平行者。



其實際上之作法如下：在 l 上任取一點 A，過 A 作 γ 面之垂線 AN，則 γ 與 A N 決定一平面。過 A 作一直線 AB，與適所得之平面相垂直，由 A B 與 l 所定之面，卽所求者。

（2）一直線與一平面交於臆點，則過該線可作二平面，與一已知平面平行。

設直線 l 與平面 γ 相交於一臆點 Γ，則自 Γ 至 α 面上絕對形可作二切線 α，α'，均爲無窮遠線，此二無窮遠線各與 l 決定一平面，卽爲 γ 之二平行面。



其實際上之作法如下：在 l 上取任意二點，作至 γ 之垂線則由此所定之平面，與 γ 相交於一直線，

爲 l 之離線，故二者有一公共垂線，命之爲 AB. 過 AB 作 l 之垂面 β，而命 β 與 γ 之交線爲 CD，則過 A 可作二直線，依不同之向，與 C D 平行，按（1）知每一平行線與 l 所定之平面均爲 γ 之平行面。

14. 對偶原理(Principle of Duality)

在平面上點與線間，有對偶之關係，對於一常線 c，皆有一相當贗點 Γ_c，而過 Γ_c 之一切直線，均以 c 爲公共垂線，對於一常點 A，皆有一相當贗線 α_A，在 α_A 上之一切諸點，其代表線以 A 爲公共點由 8 之圖表法，可知此種對應點線即關於絕對形之極點(Pole)與極線(Polar Line.)因而無窮遠線與其上之無窮遠點，自爲相應。

在空間內點之於面，亦復如是，一常面 γ. 有一相當贗點 Γ，而過 Γ 之一切直線及平面，均以 γ 爲公共垂面，對於一常點 A，皆有一相當贗面 δ，此面與過 A 點之一切直線及平面相垂直，因是 δ 上任一點 B，其相應之平面 β，必經過 A. 且無窮遠面之相應點，即此面與絕對形之切點，故此種對應點面，即關於絕對形之極點與極面(Polar Plane.)

15 球

在三度空間內，距定點等遠諸點之軌跡爲一球。如球心在無窮遠處，此面稱爲廻繞曲面(Horosphere)。如爲贗點，則稱爲等距曲面(Equidistant surface)；其上之點，常距一定平面等遠，後者稱爲該曲面之幅面(Axis).

以一平面截一球，則常得一圓，其最大截面及經過球心，而截痕爲球面上之大圓。

廻繞曲面之平截痕，亦爲一圓；但於平面與曲面垂直，即平面經過

曲面之法線時，其截痕爲廻繞曲線。

若一平面截等距曲面，則當此平面與幅面相離時，其截痕爲一圓；相交時，爲等距曲線；相平行時，爲廻繞曲線。

16. 錐集線及錐集面之幾何。

在平面幾何學中，有點，線，距離，角度等觀念。在過一點 0 之錐集線及面中，則有直線，平面，平角，及二面角，今設變易二者之詞句，俾與平面幾何學中之詞句相肖，猶之傳譯，必恃有辭典。今有下列之表卽足。

「點」……………………過 0 點之線

「線」……………………過 0 點之面

二「點」間之「距」……過 0 點二線所成之角

二「線」間之「角」……過 0 點二平面所成之二面角

「平行線」………………平行面

如是則二「點」定一「線」，而二「線」定一「點」。僅 0 點在無窮遠或爲臆點時，「平行線」，始能存在。

當 0 點在無窮遠處，則過一巳知「點」，可作而僅可作一「線」，與一巳知「線」「平行」〔12(1)〕又當 0 爲臆點時，過一巳知「點」可作二「線」與一巳「線」「平行」〔12(2)〕

關於是形之幾何學，亦有三種，視其頂點 0 之爲常點，無窮遠點，或臆點而定、而其結構，適與橢圓，拋物線，雙曲線三種平幾何學相類。

如過 0 點爲心，作一球與錐集線或面相截，則又可得一種相應情形，當 0 爲常點時，球爲普通之球，其辭書如下列：

「點」…………球上之一對峙點(Antipodal Points)（卽一直徑之二端）。

「線」…………大圓

「距離」…………長弧

二「線」間之「角」…………二大圓間之角

故在一普通球面上之幾何學，其大圓表直線，一對峙點表點，適成橢圓幾何學(可與第六章橢圓幾何學參看)。

如O爲贗點，則球成爲等距曲面，其上幾何遂爲雙曲線幾何學；如O爲無窮遠點，則球成爲廻繞曲面。在其上者，爲歐氏幾何，在此二種情形中「點」仍爲一點，「線」爲法面切痕，後者卽曲面上之短距線(Geodesics)也。

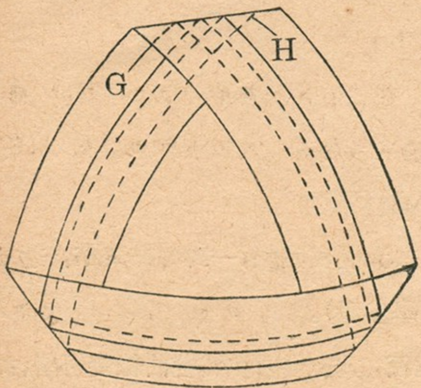
由是可得一著稱之重要定理曰

在廻繞曲面上之幾何爲歐氏幾何學。

三　關於橢圓幾何學之補充及數定理之證明

17. 雙層面與單層面［見§77］

所謂雙層面者，如普通平面，二次曲面及一切包含體積之曲面皆是。吾人於此種曲面上，得分別其表裏二層。至於單層面則不然，其中最著稱者，爲麥俾烏面(Möbius Leaf).其法截一長方紙條ABCD，將CD依其中點作二直角之旋轉，然而連接於AB. 如是使此長方紙條之表面，在連接處左近，與其裏面相銜接。如是可見此面自相聯絡如環而無表裏二層之別。



設在原長方條表裏二面上，作 AB, CD 二邊中點之連接線，則環成毛氏面後，此二面上之直線首尾相銜，成一連續線，今在此線二側，取適當之 G,H 二點，使各在原長方條上之表裏二面者，則得依適所述連續線同向移動，由 G 達於 H，取徑不離此面而不經過此連續線如上圖。

里氏平面上無窮小三角形性質及正餘弦函數 *

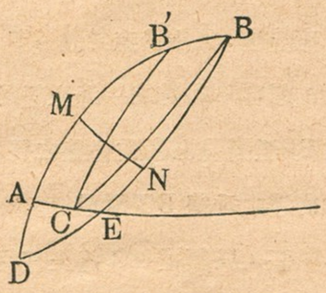
18. 在 §81 中所述 $\lim\limits_{r\to 0}\left(\dfrac{y}{r}\right)\lim\limits_{r\to 0}\left(\dfrac{x}{r}\right)$ 所趨之限，均為 OA 與 OL 所成角 θ 之函數。欲明此等函數之特徵，須首先研究里氏平面上無窮小三角形之性質，今舉其最要者如次：

（1）在任何三角形中，一頂點固定，他二頂點，常在過前者之二定直線上，如二者之一趨於此定頂點。而其他頂點與定頂點之距離；常小於 2 △，則此三角形之角餘，可小於任何預定之值。

首設此變三角形，有二固定頂點 A, B, 且 AB<2△, 而第三頂點 C, 漸趨 A, 卽線節 CA, 可小於任何已知量。

設二直線相交於 B, D 二點，則 B, D 間二線節之長，均為 2△. 取

* §§17-18 係從古力琪 Non-Euclidean Geometry 中第四章之前半及第三章末編譯而成。



二者之中點 M, N, 則 BM＝BN＝DM＝DN＝△.

在二直角三角形 BMN, DMN 中，三邊各各相等，均爲合同形，故 $M\hat{B}N=M\hat{D}N$.

如任引一直線，分此二直線所成圖形爲二三角形，則按與 §51（4）論證中相同之理，可知此二三角形角餘之和，必等於 $M\hat{B}N+M\hat{D}N=2M\hat{B}N$.

至是可證吾人能求得適宜之C點，使三角形 ABC 之角餘，小於任何預定之值 ϵ.

過B點作一直線，使此線與 BA 所成之角爲$\frac{\epsilon}{2}$, 延長此線，與定角A之他一邊交於 E, 與 AB 過 A 之延長線交於 D.

則三角形 ABE 之角餘，必小於 $2\cdot\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$.

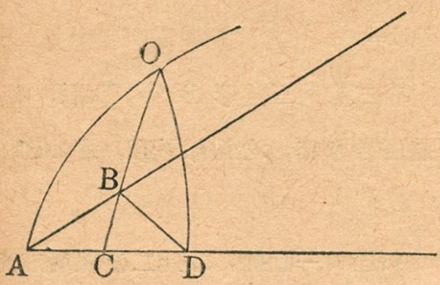
原設線節 CA, 可小於任何已知量，今命其小於 AE. 則 ABC 之角餘，必小於 ABE 者，而更小於 ϵ.

次設他一頂點，亦同時移動，但與定頂點 A 之距離，常小於 2△, 則此點常在一定長線節 AB<2△ 上移動。

在 AB 上，任取一點 B', 則三角形 AB'C 之角餘，必小於 ABC 者，因而更小於 ϵ.

故本定理得以完全證明。

（2）在任何三角形中，一邊之長，可小於任何線節，而他二邊，均小於 2△, 則此三角形之角餘，可小於任何預定之值。



1. 首設此無窮小邊之對角 A 有定值，且小於直角。

則自 A 角之一邊上任何點 B，至對邊上諸點聯線之長，以對邊之垂線 BC 為最短。

吾人只須證 AC 邊上任何點 D，與 B 之聯線 BD>BC 可矣。

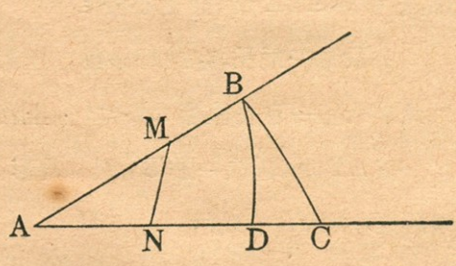
因 $C\hat{A}B<\frac{\pi}{2}$，故過 A 而與 AC 垂直之線，必在 A 角之外，故 AC 之極點 O 在 A 角之外，即此極點，應在線節 CB 之延長線上。

故 $B\hat{D}C<O\hat{D}C$＝直角＝$B\hat{C}D$，因而 BD>BC.

今請以歸謬法證明欲線節 BC 之長，可小至任何程度，則必 B,C 二點，均趨於 A，或均趨於 A 之峙點，但原設夾 A 角二邊之長，小於 2△，故後之情形，不能成立。

設 B 點不趨於 A. 則其距 A 之遠，必大於一定長線節 AM。

如此則任 B 點如何移動，常在 AM 向 M 之延長線上，又在他邊上取任何點 C，BC 之長，終不能小於任意預定之量。



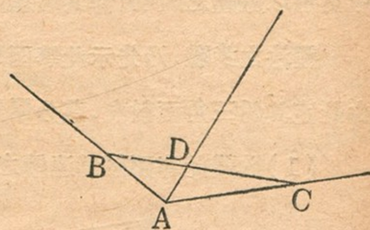
設自 M 至他邊之垂線為 MN，按 §81（2），可知自 B 點至他邊上

垂線 BD>MN，又據適所述，BC>BD，故 BC>MN，而不能小於任意預定之量。

同理 C 點亦不得不趨於 A.

按本節(1)之理，卽知 BC→O 時，無窮小三角形 ABC 之角餘，亦趨於零。

2. 如在 A 之角大於直角，而小於平角，則可引一直線，分之為二角，均小於直角者。

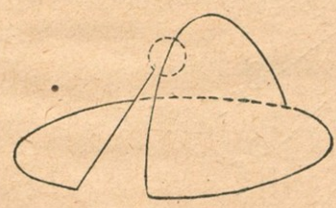


設 BC 交此分角線於 D，則 DC<BC.

故欲BC→O，則DC不得不→O.

按適所述，必 C 點趨於 A 始可。同理 B 亦應如是。

如在 A 之角等於平角，則 BC＝BA＋AC. 如欲 BC→O. 必 BA,AC 同→O 明甚。



3. 如 A 之角，不為定角，則必小於平角。否則過 A 延長其一夾邊，必與對邊相遇，因而對邊之長大於 2△，與題設相背。

是以變角 A 必常小一平角，或一小於平角之定角。如此變角之值，不趨於零，則按適所論，得知 BC→O 時，必 B,C 同趨於 A，因而三角形 ABC 之角餘，可至於任何預定之值。

如此變角之值趨於零，則不必 B, C 同趨於 A，而此情形，與本節

(1)完全相同,故仍得同一結果。

故本定理得完全證明。

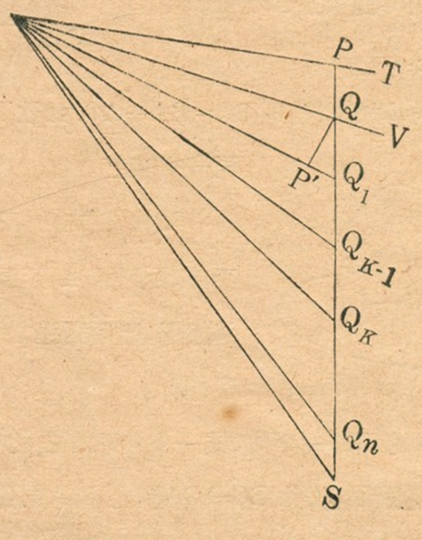
由(1),(2)兩定理,更可推得下之結論。

(3)在里氏平面上之無窮小區域內,歐氏幾何學可以適合。

19. 按上所述歐氏幾何學在里氏平面上無窮小區域內可以成立之理,學者當可領悟 $\lim\limits_{r\to 0}\left(\dfrac{y}{r}\right)$, $\lim\limits_{r\to 0}\left(\dfrac{x}{r}\right)$ 二極限一爲 $\sin\theta$, 一爲 $\cos\theta$, 今更加以嚴謹之證明,俾其義蘊得以顯豁透達焉。

證法之步驟,乃先示此等函數爲連續,再闡明其函數方程式,即可由此定其爲三角函數矣,茲分層證述如次:

(1)欲證此等函數爲連續之前,須先明下之定理。



在一三角形中有一角爲定值,另一角可小至吾人所欲,則對該角之邊爲其他諸邊之高級無窮小。

設三角形 PQR 中，$P\hat{Q}R$ 爲定角，$P\hat{R}Q$ 可小至吾人所欲。

此三角形既有一角爲無窮小，則他二角中，必有一大於直角，設其爲 $R\hat{P}Q$.

如是則對於大至任何程度之一正整數 n，及一定角 ϕ，吾人均可使 $P\hat{R}Q < \frac{\phi}{n}$，換言之，即吾人可於 PQ 向 Q 延長之直線上，求得 n 點 $Q_1, Q_2, \cdots\cdots Q_{k-1}, Q_k, \cdots\cdots Q_n$，使 $P\hat{R}Q = Q\hat{R}Q_2 = \cdots\cdots = Q_{k-1}\hat{R}Q_k = \cdots\cdots = Q_{n-1}\hat{R}Q_n$ 而 $Q\hat{R}Q_n < \phi$

若線節 RQ 之長，不趨於零，則本理顯然成立。

若線節 RQ，無窮減小，吾人常可在 PQ 向 O 延長之直線上，求得一點 S，使 $QS = QR$，如是則 $Q\hat{R}S = Q\hat{S}R$。

按上節（4），在里氏平面上無窮小區域內，歐氏幾何學能成立，故 $Q\hat{R}S$ 與 $\frac{1}{2}P\hat{Q}R$ 二角之差，可小於任何量。

如使 $Q\hat{R}Q_n > \frac{1}{2}P\hat{Q}R$，則 Q_n 點在 Q_1，S 之間。

吾人原設 $R\hat{P}Q$ 爲鈍角，$P\hat{R}Q$ 可小至吾人所欲，同時三角形 PRQ 之角餘，亦一無窮小，故定角 $P\hat{Q}R$ 爲銳角是以 $R\hat{P}Q > P\hat{Q}R$，而 $RQ > RP$.

$P\hat{Q}R$ 既爲銳角，故 RQQ_1 爲鈍角，同理可知 $RQ_1 > RQ > RP$。

故可在 RQ_1 上取一點 P′，使 $RP' = RP$，如是則三角形 RQP，RQP′ 爲合同形，而 $Q\hat{P}'R = Q\hat{P}R$. 因之 $Q\hat{P}'Q_1 = Q\hat{P}T$，又 $PQ = P'Q$，

因 PQ，RQ 二線節無窮減小，故自 R 至 PQ 中點之聯線，必可使小於 △，故 $Q\hat{P}T > PQR$，同理 $P\hat{Q}R = V\hat{Q}Q_1 > Q\hat{Q}_1P'$.

但 $Q\hat{P}'Q_1=Q\hat{P}T$，故 $Q\hat{P}'Q_1>Q\hat{Q}_1P$，因而 $QQ_1>QP'$，即 $QQ_1>PQ$.

同理可推得 $Q_nQ_{n-1}>\cdots\cdots Q_kQ_{k-1}>\cdots\cdots>Q_1Q>PQ$.

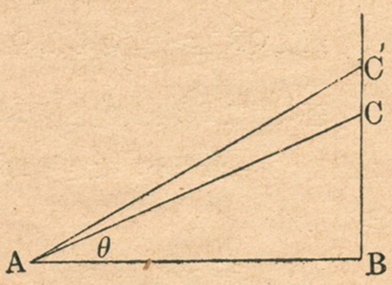
故 $PQ<\frac{1}{n}(Q_nQ_{n-1}+\cdots\cdots+Q_kQ_{k-1}+\cdots\cdots+Q_1Q)=\frac{1}{n}QR$. 即 $\frac{PQ}{QR}>\frac{1}{n}$。

如 $P\hat{Q}R$ 爲鈍角時，吾人可在 QP 向 P 之延長線上，取 n 點，依上法證明

故本定理得以完全證明。

(2) $\lim\limits_{r\to0}\frac{x}{r}$ 爲 θ 之連續函數。

在直角三角形 ABC 中，$O\hat{A}B=\theta$ 爲定角在 BC 向 C 之延長線上取一點 C'，而令 $C\hat{A}C'=\delta\theta$ 吾人如能證明當 $\delta\theta\to0$，即 C' 趨於 C 時，$\frac{AB}{AC'}$ 之值趨於 $\frac{AB}{AC}$，則本定理已證明。

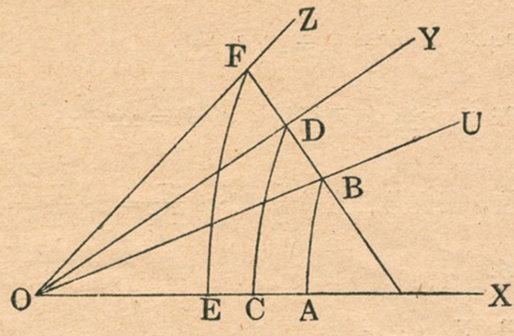


如 $\frac{AB}{AC'}$ 趨於 $\frac{AB}{AC'}$，則 $\frac{AC'}{AB}$ 趨於 $\frac{AC}{AB}$，即 $\frac{AC'-AC}{AB}<\frac{C'C}{AB}\to0$.

按(1)最末一式，顯爲眞，故本定理成立。

(3) 設 $\lim\limits_{r\to o}\frac{x}{r}=f(\theta)$ 則 $f(\theta+\phi)+f(\theta-\phi)=2f(\theta)f(\phi)$

設 θ,ϕ 二角不相等，則必有一較大，命 θ 爲其大者。



作 $X\hat{O}Y=\theta, Y\hat{O}Z=\phi$, 且 $X\hat{O}Z=\theta+\phi$.

作平射線 OU, 使 $X\hat{O}U=\theta-\phi$, 則因 $\theta>\phi$, 故 OU 在 OX, OY 線之內。

在 OZ 上取一點 F,OU 上一點 B, 使 OF=OB, 并連結 FB.

則 FB 必與 OY 相交，命此交點爲D.

自 F,D,B 三點，各作 OX 之垂線，而命其垂趾各爲 E,C,A.

因里氏平面上之無窮小區域內，歐氏幾何學能成立，故當 OB 之長甚細微時，C 點與線節 EA 中點 M 間之距離爲一無窮小。

故有 $\dfrac{OA}{OB}=f(\theta-\phi)+\varepsilon_1,\quad \dfrac{OC}{OB}=\dfrac{OC}{OD}\cdot\dfrac{OD}{OB}=f(\theta)f(\phi)+\varepsilon_2,$

$$\frac{CA}{OB}=\frac{OA}{OB}-\frac{OC}{OB}=f(\theta-\phi)-f(\phi)f(\theta)+\varepsilon_3.$$

$$\frac{OE}{OB}=\frac{OE}{OF}=f(\theta+\phi)+\varepsilon_4,$$

$$\frac{EC}{OB}=\frac{OC}{OB}-\frac{OE}{OB}=f(\theta)f(\phi)-f(\theta)+\varepsilon_5,$$

且 $\left|\dfrac{CA}{OB}-\dfrac{EC}{OB}\right|=2\cdot\dfrac{CM}{OB}<\varepsilon'$

故 $f(\theta+\phi)+f(\theta-\phi)=2f(\theta)f(\phi)$

由此照 §86 之方法，即可證得 $f(\theta)=\cos\dfrac{\theta}{k}$．

今定 k 之值，使直角之度爲$\dfrac{\pi}{2}$，則$\cos\dfrac{\pi}{2k}=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. 故必$k=1$

因之$f(\theta)=\cos\theta$.

（5） $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{y}{r}=\sin\theta$

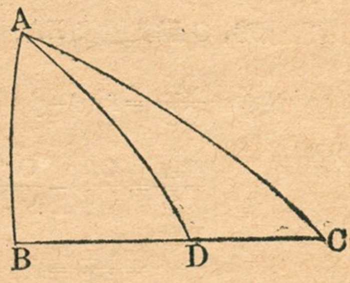
因在里氏平面上之無窮小區域內，歐氏幾何學能成立。故

$$\lim_{r\to 0}\frac{y}{r}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

20. §82 中所述四邊形一性質之證明

爲便於論證計先示一輔定理如次（注意二點間之線節，取其小於2△者）。

在直角三角形 A B C 中，在 B 處之角爲直角，AB<△，D 爲 A C 線節上任意一點，則 AB<AD<AC



由註（第七章 9）可立知AB<AD

故 $A\hat{D}B<A\hat{B}D$，即 $A\hat{D}B$ 爲一銳角是以知 $A\hat{D}C$ 爲一鈍角。

但就（1）之論證中，可知 $A\hat{C}B$ 爲一銳角，故 $A\hat{C}D<A\hat{D}C$. 因而 AD<AC.

故 AB<AD<AC.

至是可以進而論 § 82 中底較長之四邊形，鈍角亦較大之理矣。

設 AC 遇線節 bB，或其延長線於 H，則 AH<AC<△.

故在直角三角形 ABH 中，自 A 至 BH 之中線，亦必小於 △（輔定理）。故外角大於內對角之理能成立。

如H點在線節 bB 上。（如圖 100 中之H′）。則 $A\hat{H}b > A\hat{B}b$，卽 $A\hat{H}b$ 爲鈍角。

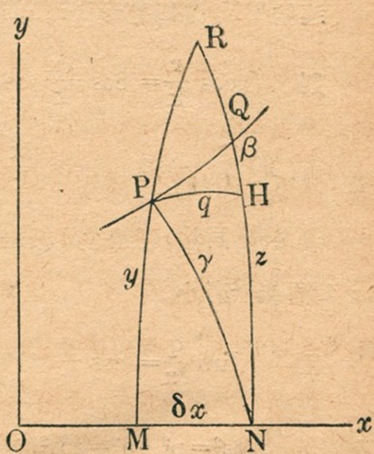
但在四邊形 bcCH 中，在 b, c, C 三處之角，均爲直角，故在H處之角，應爲鈍角，因而 $A\hat{H}b$ 爲銳角，於是遂生矛盾。

同理，H點亦不能在 bB 向 b 之延長線上。

故H點必在線節 bB 向 b 延長線上，因而 $O\hat{A}C > O\hat{A}B$.

同理可證 $O\hat{A}D > OAC$.

21. 橢圓幾何學中弧長及面積元素公式之證明。（§90）



玆應用三角學公式分別求之如次：

（1）弧長元素。先求卡氏位標之公式，則極位標式，可由變數代換法推出。

設 P, Q 爲曲線上二點其位標各爲 (x,y) (x+δx, y−δy) 自是作至 x 軸之垂線 PM,QN.

則OM =x, MP=y, ON=

$x+\delta x$. $NQ=y+\delta y$.

自P點作PH垂直於QN

命 $PQ=\delta s$, $PH=q$, $HQ=p$, 及 $NH=z$.

因里氏平面上無窮小區域內,歐氏幾何學能成立,故略去高級項可得

$$\delta s^2=p^2+q^2.$$

延長 MP,NH 交於 R, 則 $PR=\Delta-y$, $HR=\Delta-z$.

在直角三角形, PHR 中, $\cos\frac{\Delta-y}{k}=\cos\frac{q}{k}\cos\frac{\Delta-z}{k}$

但 $\cos\frac{\Delta-y}{k}=\cos\frac{\Delta}{k}\cos\frac{y}{k}+\sin\frac{\Delta}{k}\sin\frac{y}{k}=\sin\frac{y}{k}$, 同理

$\cos\frac{\Delta-z}{k}=\sin\frac{z}{k}$

故 $\cos\frac{q}{k}=\sin\frac{y}{k}\Big/\sin\frac{z}{k}$ ....(1)

連結 PN, 分四邊形 PMNH 爲二個直角三角形。

則 $\cos\frac{r}{k}=\cos\frac{\delta x}{k}\cos\frac{y}{k}=\cos\frac{z}{k}\cos\frac{q}{k}$ ....(2)

由(1)與(2)得 $\cos\frac{\delta x}{k}=\tan\frac{y}{k}\cot\frac{z}{k}$

與 §66 同法,可證 y,z 相差之量,對於 δx 爲二級無窮小, 故 p 與 δy 爲同級無窮小。

且 $\lim\frac{q}{\delta x}=\cos\frac{y}{k}$,故略去高級項可得 $q=\cos\frac{y}{k}\delta x$

及 $\delta s^2=p^2+q^2=\cos^2\frac{y}{k}\delta x^2+\delta y^2$

故　　$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ds^2=\cos^2\frac{y}{k}dx^2+dy^2}$

欲由上式推求極位標式，應先明二種位標間之關係式。

按 §§88–9中(3)(2)二式，卽得

$$\sin\frac{y}{k}=\sin\frac{r}{k}\sin\theta,\ \tan\frac{x}{k}=\tan\frac{r}{k}\cos\theta$$

與 §67. 同法，甚易證得

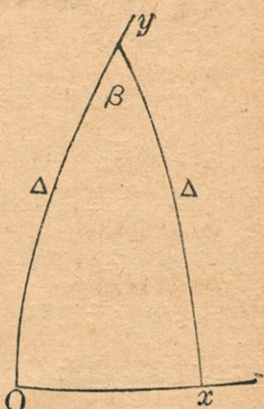
$$ds^2=dr^2+k^2\sin^2\frac{r}{k}\,d\theta^2$$

(2)面積元素。據 §71 之方法，立可證得

$$dA=\cos\frac{y}{k}\,dx\,dy$$

$$dA=k\sin\frac{r}{k}\,dr\,d\theta$$

(3)三角形面積與角餘比例爲一常數，已與 §79 中述及，今求定此常數與 k 之關係。



既已證明二量之比爲常數，故可就一特例以定其值。

作一含二直角之三角形，頂角爲 β，則此三角形之角餘卽爲 β，夾頂角二邊均爲 Δ。

由前所述之單位，使直角之度爲 $\frac{\pi}{2}$，又因二直角三角形中頂角與對邊二者之度成定比，故上述三角形頂角之對邊爲 Δ 之 $\frac{2\beta'}{\pi}$，倍如是則其面積

$$A=\int_{0}^{\frac{2\beta}{\pi}\triangle}\int_{0}^{\triangle}\cos\frac{y}{k}dx\,dy$$

又按 § 196. 所述參數 k 與度量單位之關係。$\triangle=\frac{k\pi}{2}$，上式變爲

$$A=\int_{0}^{k\beta}\int_{0}^{\frac{k\pi}{2}}\cos\frac{y}{k}dx\ dy=\int_{0}^{k\beta}\left[p\ \sin\frac{y}{k}\right]_{0}^{\frac{k\pi}{2}}dx$$

$$=k\int_{0}^{k\beta}dx=k^2\beta$$

故此常數卽參變數 k 之平方。

四　克利佛德 (Clifford) 平行線 *

22. 克利佛德平行線(亦曰側行線 Parotactic Lines)

歐氏幾何學中之平行線，乃具有下列三種性質之直線。

(i)諸平行線共面

(ii)無公共點

(iii)諸線相距等遠

若去第三種性質，而採雙曲線幾何學之見解，卽得平行線之第一種推廣，但此種平行線，與普通平線之性質絕少相同者。此乃因後種平行線所有瑰麗之特徵，皆據第三種性質而生者也。職是吾人應求另一種之推廣法，使歐氏幾何學中平行線因等距性而生之特質，此種新平行線亦有之，克利佛德氏 (1845–1879) 於 1873 年，在 Proceeding of London

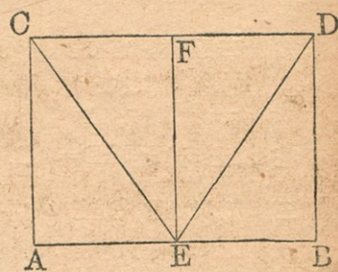
* 據波諾拉書附錄二及散麥維爾書第三章。

Mathematical Society 雜誌 vol. IV. pp. 381–395 中，發表 Preliminary Sketch of Biquarternions 一文，其中研究此種新平行線之特性。卽捨去平行線之第一種性質，而保持第二第三兩種性質，如是立一新定義如下：

二直線或在或不在一平面內，若其一上之點，距第二線等遠，則稱之爲克氏平行線，亦曰側行線，

23. 於是可見有共面不共面二種情形可論，如爲共面，則此種空間，卽爲歐氏空間，因吾人可證明其與薩氏直角假設相當也。

設平行線 CD, AB 在一平面內，自 A, B 及其中點 E, 作 AB 之垂線，各與他一平行線交於 C, D, 及 F。則按上節之定義，知 AC＝EF＝BD.



連 CE 及 DE

在直角三角形 CAE, DBE 中，有二邊各各相等，故爲合同形，因而 CE＝DE, 且 $C\hat{E}A=D\hat{E}B$。

又因 EF 爲 AB 之垂線，故 $C\hat{E}F$, $D\hat{E}F$ 各爲 $C\hat{E}A$, $D\hat{E}B$ 之餘角，因而相等，故三角形 CEF, DEF 有一公共邊，一等邊 CE＝DE, 及二邊之夾角相等，而爲合同形，故 CFE＝DFE＝直角。

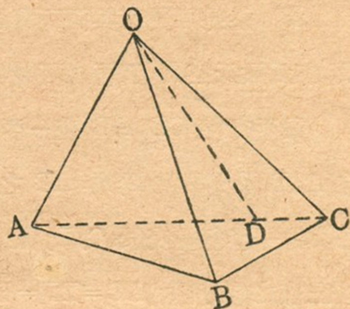
在直角三角形 CAE, EFC 中，有一邊及斜邊，各各相等。故爲合同形，故 $A\hat{C}E=F\hat{E}C$, $C\hat{E}A=E\hat{C}F$.

故 $A\hat{C}F=A\hat{C}E+E\hat{C}F=F\hat{E}C+C\hat{E}A=FEA=$ 直角。

24. 今於進研不共面情形之前，先證立體幾何學中二定理，與平行設論無關者。

(1)取一錐集面中之三平面，則成面角 (Face Angle) 凡三，而其中任二者之和，常較第三者爲大。

在二平面之交線上，取一點 A，於二平面上自 A 點各引一直線，使與此交線成等角，且使此二線，各與 A 點至他二交線之垂線所成之角，均小於與 A 點至他二交線距離相當之平行角中之小者。



則此二直線，必各與他交線相遇，命其交點各爲 B,C.

在AC上，截取 $AD=AB$.

三角形 OAB, OAD 有一公共邊，一等邊，及二者之夾角相等，而爲合同形，故 $OD=OB$, $A\hat{O}B=A\hat{O}D$

如D點在 AC 之延長線上，則 $A\hat{O}B=A\hat{O}D>A\hat{O}C$. 而 $A\hat{O}B$ 與 $B\hat{O}C$ 之和，更大於 $A\hat{O}C$, 自不待言。

如D點在 AC 線節內，則連結 BC. 在三角形 ABC 中，可得

$$BC>AC-AB=AC-AD \quad 即 \quad BC>DC.$$

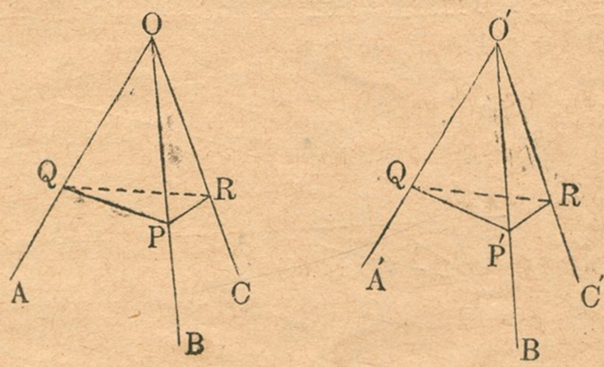
三角形 OBC,ODC 有二邊各各相等，而前者之第三邊，較後者之第三邊爲大，即 $BC>DC$, 故 $B\hat{O}C>D\hat{O}C$

但 $D\hat{O}C=A\hat{O}C-A\hat{O}D=A\hat{O}C-A\hat{O}B$

故 $B\hat{O}C>A\hat{O}C-A\hat{O}B$, 即 $A\hat{O}B+B\hat{O}C>A\hat{O}C$

(2)在二立體角(Solid Angle)中，如有二個面角，各各相等，且此二面所成之二面角亦互相等，則第三個面角亦必相等。

設在立體角 $O(ABC)$，$O'(A'B'C')$ 中有 $A\hat{O}B=A'\hat{O}'B'$，$B\hat{O}C=B'\hat{O}'C'$ 及以 OB，$O'B'$ 爲稜之兩個二面角互爲相等。



在此二稜上各取一點 P,P' 使 $OP=OP'$，而自二點，各作此稜之垂面，與原立體角之截痕爲二三角形 PQR，$P'Q'R'$．

則在此直角三角形 OPQ，$O'P'Q'$ 中，有 $OP=O'P'$，及 $P\hat{O}Q=P'\hat{O}'Q'$ 而爲合同形，故 $PQ=P'Q'$ 且 $OQ=O'Q'$.

同理 $PR=P'R'$，且 $OR=O'R'$

原設以 OB，$O'B'$ 爲稜之兩個二面角，互爲相等，而 PQ，PR 爲 OB 之垂線，且在此二平面上，$P'Q'$，$P'R'$ 亦然，故 $Q\hat{P}R=Q'\hat{P}'R$.

在三角形 PQR，$P'Q'R'$ 爲二邊及一夾角，各各相等，而爲合同形故 $QR=Q'R'$

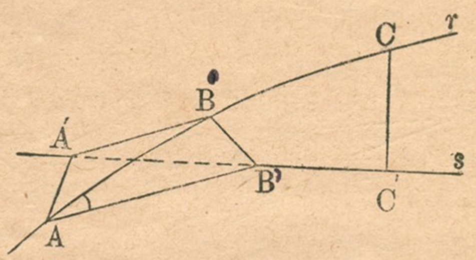
在三角形 OQR，$O'Q'R'$ 中之三邊，各各相等，而爲合同形。故

$Q\hat{O}R=Q'\hat{O}'R'$.

25. 至是可以論不共面之情形矣。

設二等距直線 r, s, 不共在一平面內,卽自 r 上任何點,至 s 之垂線之長爲一定。

設自 r 上 A,B 二點至 s 上之垂線各爲 AA', BB', 則 $AA'=BB'$



連結 AB' 及 $A'B$.

則在直角三角形 $AA'B'$, $BB'A'$ 中有一公共邊 $A'B'$, 一等邊 $AA'=BB'$, 故爲合同形,而 $AB'=BA'$

故三角形 $A'AB$, $B'BA$ 中,有一公共邊 AB, 及他二邊,各各相等,而爲合同形,故 $A'\hat{A}B=B'BA$

今在 r 上爲取一點 C, 作 s 之垂線 CC' 則 $AA'=BB'=CC'$,

則依同法,可證明 $A'\hat{A}C=C'\hat{C}A$ 及 $B'\hat{B}C=C'\hat{C}B$

故 $B'\hat{B}A=B'\hat{B}C$, 卽 BB' 亦爲 r 之垂線

同理 AA', CC' 亦爲 r 之垂線

在旋扭四邊形 (Skew quadrilateral) $ABB'A'$ 中有四直角及二對邊 AA', BB' 相等。

又直角三角形 BA′B′, B′BA 有一公共邊 BB′, 及相等斜邊，而爲合同形。故 $AB=A'B'$ 及 $A'\hat{A}B'=B\hat{B}'A$, $A\hat{B}'A'=B'\hat{A}B$.

故此旋扭四邊形之對邊皆相等，且對角線與對邊所成之角亦等。

就以 A 爲頂之立體角言，應用上節之定理一，即有

$$A'\hat{A}B'+B'\hat{A}B>A'\hat{A}B=\text{直角。}$$

但 $B'\hat{A}B=A\hat{B}'A'$

是以 $$A'\hat{A}B'+A\hat{B}'A'>\text{直角}$$

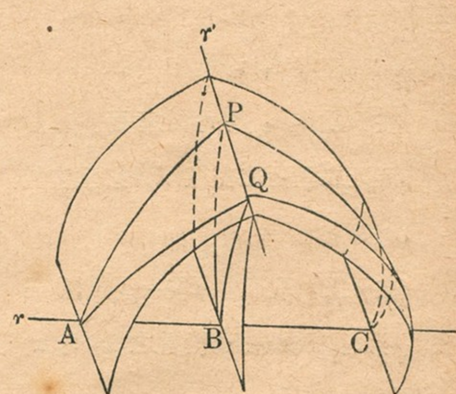
即在直角三角形 AA′B′ 中，他二銳角之和大於直角，而合於鈍角假設，故不共面之平行線，僅里氏空間中有之。

26. 絕對對極性(Absolute Polarity).

(1)在里氏空間內，與定直線垂直之一切平面，成一束面(Pencil of Planes)，換言之，即如是之一切平面，共過一線。

在里氏空間內，任意二平面，均相交於一直線，因以另一平面截之，在其上之二截線，必有一交點故。

取一直線 r 上 A, B 二點，作 r 之垂面，必相交於一直線，命之爲 r′



在 r 上任取另一點 C，作與 r 垂直之一切直線，應盡交於 r′ 上。因苟有一垂線不如是，則以此垂線與 r 所定之平面，截前二垂面，其二

截線與前線同爲 r 之垂線，在一平面上，而不共交於一點，是 §75 之理相刺謬矣。

但過 C 而與 r 垂直之一切直線，均在過 C 點而與 r 垂直之平面上。即此垂面，與在 A,B 二點之垂面，共交於一直線 r'.

直線 r' 稱爲 r 之極線(Polar)

(2)如 r' 爲 r 之極線，則 r 亦爲 r' 之極線，換言之，則 r' 上任何點之垂面，均須過直線 r.

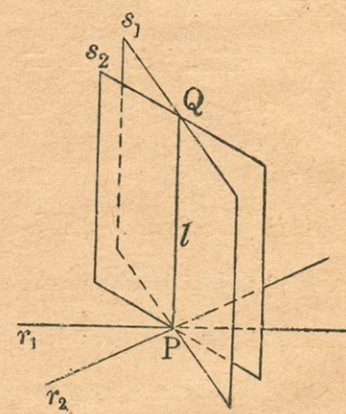
在 r' 上任取一點 P，即 P 與 r 所定之平面。截 r 之垂面於 PA, PB, PC 等線，此等交線均爲 r 之垂線，故其長均等於 Δ.

同理。自 r' 上另一點 Q，至 A,B,C 之距亦均爲 Δ.

故 A,B,C 諸點均爲 r' 之極點。

是以 AP,BP,CP 均爲 r' 之垂線，又由諸線決定 r' 上 P 點之垂面。故知此垂面經過直線 r.

(3)二線之交角等於其二極線之交角。



設二直線 r_1, r_2 相交於 P.

在 P 點作 r_1 及 r_2 之垂面。

則此二垂面之交線 l，必垂直於 r_1 及 r_2

在 l 上，取線節 $PQ=\Delta$，則 Q 必在 r_1 及 r_2 之極線上。換言之，即 r_1, r_2 之極線，s_1, s_2 相交於 Q.

又二垂面所成之二面角，與 r_1, r_2 所成之角同度。

且 l 垂直於 s_1 及 s_2. 故 s_1, s_2 所成之角亦與上述之二面角同度。

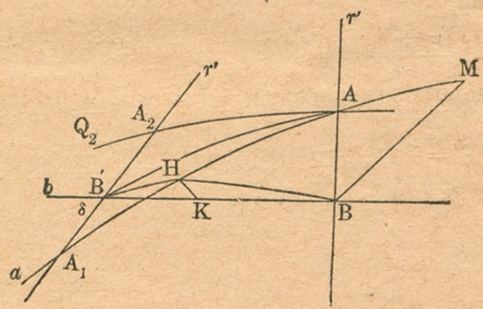
故 r_1, r_2 所成之角等於其極線 s_1, s_2 所成之角。

27. 今請證里氏空間內確有等遠而不共面之側行線存在。

就上節之理甚易知 r, r′ 卽二側行線由其一上任何點至他一線之距離均爲定量 Δ.

此例爲側行線中之一種特別情形，卽任意在此二線上各取一點其距離均爲相等。

上述之特別情形，可以免除卽在 r r′ 上各取相等線節 AB, $A_1'B'$,



其長均小於 Δ. 連結 AA′, BB′ 得 a, b 二直線. 卽爲無上述特別性質之側行線，此二線不互爲極線，而均垂直於 r 及 r′

欲驗 a b 是否爲二側行線，須證其一上任何點，至他一線上之距離，是否有定長。

但 AB 與 a, b 均爲垂直，亦應等於定長。故只須證任何距離，均等於 AB 卽足。

在 a_1 上任取一點 H, 作 HK 垂直於 b, 爲便於證理計。設H在線節 A',A 內。

在 A',A 向 A 之延長線上,取一點 M, 使 $AM=A',H$.

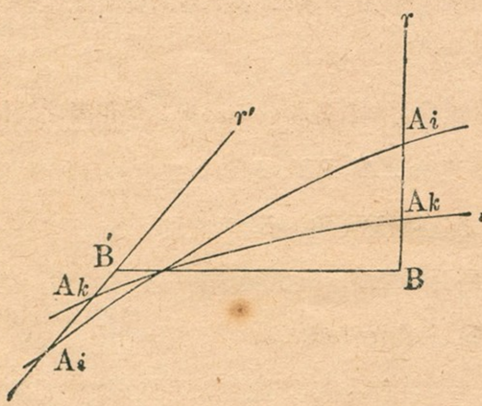
連結 HB,MB.

則在直角三角形 $B'A_1',H$, BAM 中,其夾直角之二邊,各各相等,故爲合同形,因而 $B'H=BM$.

在三角形 HBB′,HBM 中之三邊, 各各相等, 而爲合同形, 故 $H\hat{B}'B=B\hat{M}H$.

故在直角三角形 HKB′,BAM 中之斜邊及一銳角, 各各相等,而爲合同形,是以 HK=AB, 卽得證明。

由此證明中,且可知過已知線外一點, 作其側行線之法,如此點不在已知線之極線上時,則此側行線有二,而僅有二。如取相當單位, 使 $\Delta=\pi$, 則當 $A'B'=\delta$ 時,此二側行線所成之角爲 2δ



設 A,A′ 各趨於 B,B′，而常有 AB＝A′B′ 之關係，則 a_1 漸趨於 b，而常保持其側行性，吾人可視 a 線作一種螺旋運動 (Helicoidal Movement) 以漸至與 b 相合。同理 a_2 亦作一螺旋運動，但方向與前異，因是可別 a_1, a_2 爲 b 之右 (Right-handed) 側行線，及左 (Left-handed) 側行線。

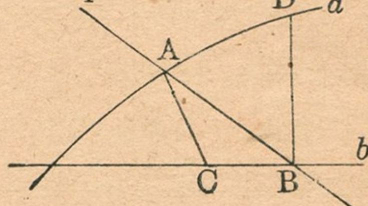
所謂方向之左右，可定之如次，設一人立於平面上，其由頂至踵之方向，同於由 A 至 B 之方向如見 a 線之螺旋運動，由左而右，則稱 a 爲 b 之左側行線，反之，則爲右側行線。本此可知如 a 爲 b 之右（或左）側行線則 b 亦爲 a 之右（或左）側行線。

28. 側行線之特性。

（1）在二側行線之一上，取任意點作至他線之垂線，則此垂線。爲二者之公共垂線。反之，如二線有二等長之公共垂線。則二者爲側行線。

此理之第一層已於 25 中證明，第二層爲前者之逆理，其證法如 27 中證 HK＝AB 之法，完全相同。

（2）設一直線與二側行線相遇則必與之成相等之同位角，內錯角等等。



設直線 l，遇二側行線 a,b 各於 A,B

自 A,B 二點，各作至他線之垂線 AC,BD

則直線三角形 ACB, BDA 中，

有公共斜邊 AB, 及一等邊 AC＝BD.而爲合同形。

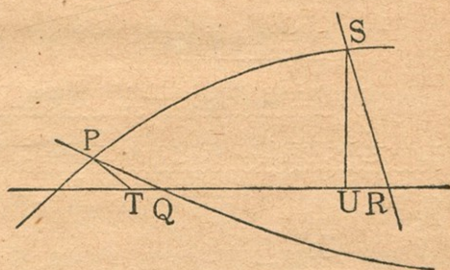
故　　$A\hat{B}C=B\hat{A}D$

旣明內錯角相等則同位角之相等亦隨之，因後者各爲前者之補角也。

其他等角，皆可由是推證。

(3) 在一旋扭四邊形中，如對邊兩兩相等，而隣角相補，則其對邊兩兩側行，而側行方向則相反，且對角兩兩相等。

設旋扭四邊形 PQRS 中之對邊，兩兩相等，卽 PQ＝SR, PS＝QR, 及 $P\hat{Q}R$, $S\hat{R}Q$ 二隣角相補。



如二相補隣角，均爲直角，則只須連其對角線，由合同三角形 PQR, SRQ, 卽可證明 PQ＝SR, 且爲他二邊之公共垂線按(1)之理，可知他二邊爲側行線。

又因原設 PS＝QR 二者亦爲 PQ,SR 之公共垂線，故後之二直線，亦爲側行線。

如二相隣補角，一鈍一銳，設 $P\hat{Q}R$ 爲鈍角，則自 P,S 二點，各作至對邊之垂線 PT.SU.

在直線三角形 PTQ,SUR 中，PQ＝SR, $P\hat{Q}T=\pi-P\hat{Q}R=S\hat{R}Q$, 故二者爲合同形，是以 PT＝SU, 且 TQ＝UR, 因而 TU＝QR＝PS.

至是此種通例已化爲適所論之特例，而知 PS, QR 爲二側行線。

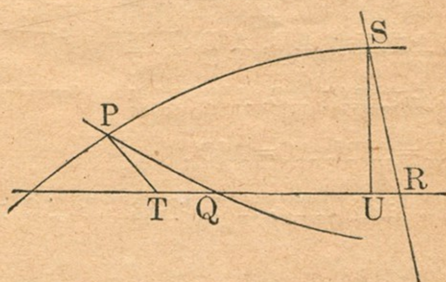
連結對角線 PR,QS, 則由合同三角形 PQR,RSP, 可證明 $P\hat{Q}S=R\hat{S}P$, 同理 $Q\hat{P}S=S\hat{R}Q$, 故知相隣諸角,咸爲兩兩相補,而對角相等。

由此又可知 PQ, SR 亦爲側行線,而側行方向,則與 PS, QR 者相反。

此種旋扭四邊形,與普通平行四邊形,頗多類似之特性, 故稱爲旋扭平行四邊形 Skew Parallelogram。但須注意, 欲定此形,除對邊相等外,尙須驗其隣角是否相補。

(4)如二側行線節之長相等連結適宜之端點, 則成一旋扭平行四邊形。

如此等連結線有一爲二線節之一之垂線, 則按(1)之理, 必爲二線節之公共垂線,更連結一對角線,則因所成之內錯角相等(按21), 故分此扭旋四邊形爲二合同三角形,而可知他一連結線,亦爲二側行線節之公共垂線。



在此種情形之下,本定理顯然爲眞。

如二連結線之一,不爲二已知側行線節之垂線,則他一連結線, 亦不得爲垂線。

設 PS, QR 爲二等長側行線節 PQ 不爲二者之垂線則按上所論,可作 PT, SU 垂直於 QR 及其延長線,則 PT＝SU.

連結對角線 PU 或 ST，則可由合同三角形之理，證明 $PS=TU$.

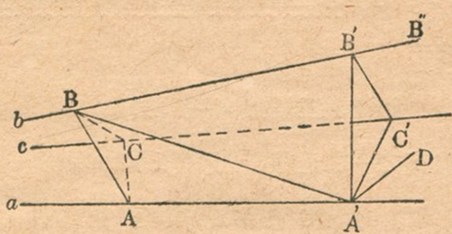
但原設 $PS=QR$，故 $UR=QR-QU=PS-QU=TU-QU=TQ$

在直角三角形 PTQ，SUR 中，有夾直角之二邊，各各相等。而爲合同形，故 $PQ=SR$，且 $P\hat{Q}T=S\hat{R}U$. 亦卽 $P\hat{Q}R$.$S\hat{R}Q$ 二隣角相補。

故 PQRS 爲一旋扭平行四邊形。

（5）一直線之二左側行線，亦互爲左側行線，二右側行線亦然。

設 b，c 爲 a 之二左側行線。



在 a 上取 A，A′ 二點，使 $AA'=\Delta$. 自此二點，作至 b 上之垂線 AB，A′B′ 及至 C 上之垂線 AC，A′C′ 則必 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$.

且因 A′B′，A′C′ 各爲 AB，AC 之極線，故 $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$ （25（3））

故三角形 ABC，A′B′C′ 有二邊及一夾角，各各相等；而爲合同形，故 $BC=B'C'$.

又　$$BB'=AA'=CC'=\Delta$$

故旋扭四邊形中二對邊各各相等，如更能證得隣角相補，則按本節（3）可知 b，c 爲側行線，

在二立體角 B（AB′C），B′（A′B″C′）中，$A\hat{B}B'=A'\hat{B}'B''=$ 直角，且因三角形 ABC，A′B′C′ 爲合同形，故 $A\hat{B}C=A'B'C'$.

連接 $A'B$，則因 $A'B'$ 爲 AB 之極線。故 $A'B$ 垂直於 $A'B'$，且 $A'B=\Delta$.

又 a, b 爲二側行線，故 $A'B'$ 爲二者之公共垂線（本節（1））。

是以 $A'A$, $A'B$ 所定之平面爲 $A'B'$ 之垂面。設此垂面，與平面 $A'B'C'$ 相交於直線 $A'D$，則 $D\hat{A}'B$ 與立體角 $B'(A'B'C')$ 中以 $B'A'$ 爲稜之二面角同度。

a. c 亦爲二側行線，故 $A'C'$ 爲二者公共垂線，故 $A'C'$ 垂直於 AA'，又按上所述，AB' 亦垂直於 AA'，是以知 $A'B'$, $A'C'$ 二者所定之平面，爲 AA' 之垂面。

今直線 $A'D$ 在 $A'B'$, $A'C'$ 所定之平面上。故 $A'D$ 垂直於 AA'，即 $A\hat{A}'D$ 二直角。

故 $D\hat{A}'B$ 與 $B\hat{A}'A$ 互爲餘角。

同理，在立體角 $B(AB'C)$ 中，與以 BA 爲稜之二面角同度之角，爲 $A'\hat{B}B'$ 之餘角。

但按本節（2）　$B\hat{A}'A=A'\hat{B}B'$

是以在上述之二立體角中，以 $B'A'$, BA 爲稜之二面角相等。

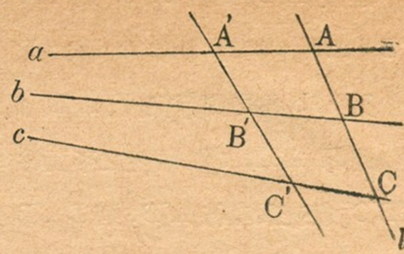
按 24 定理二知 $C\hat{B}B'=C'\hat{B}'B''$ 即 $C\hat{B}B'$ 與 $C''\hat{B}B$ 互爲補角。

按本節（3），而知 b, c 二者爲側行線。

又就上圖觀之，可知如 b, c 對於 a 同爲左（或右）側行線時，則 b, c 亦互爲左（或右）側行線，故本定理得以完全證明。

29. 克利佛德面(Clifford Surface)

設有三左（或右）側行線 a,b,c, 另一直線 l 遇之於 A,B,C, 三線上



各取相當點 A',B',C'，使 $AA'=BB'=CC'$，則按上節（3）（4），可知 $A'B'$，$A'C'$ 各爲 1 之右（或左）平行線。

但過一定點，只能作一直線，依定方向（左或右）與一已知線平行，故 $A'B'$，$A'C'$ 在一直線上，由是可得下之定理。

如有一直線與三同向側行線相遇，則有無數直線，與此三側行線相遇，且凡此諸直線，亦互爲側行，而側行方向與前者相反。

由是可知三同向側行線，可確定一二級 (Order) 之矩面 (Ruled Surface). 此矩面稱爲克利佛德面。此面上有二族母線 (Generator).—族母線，盡與三已知之同向側行線相遇，他一族，則盡與前族中之任何三直線相遇，三已知線即在第二族之內，此二族母線，爲二族異向之側行線。

30. 克利佛德面之特性。

（1）同族母線，爲同方向之側行線。

（2）不同族之母線，相交於定角。

因按 28（3），可知 $B\hat{C}C'=\pi-B'\hat{B}C=A\hat{B}B'$.

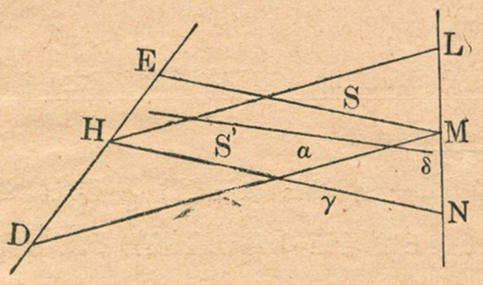
但在扭轉平行四邊形中，隣角相補，而對角相等，故此形之內角和爲四直角，而其直角假設相當。故知

（3）在克利佛德面上之幾何學，爲歐氏幾何學。

今請證。

(4)克利佛德有二不同之旋轉軸(Axis of Revolution).

自任意一點 M, 作已知直線 γ 之左側行線 d, 右側行線 S. 幷設 M 至 γ 之距離 $MN=\delta$.



在 d 上一切諸點,作 γ 之右側行線 $S', S''\cdots\cdots$, 則此等直線互爲右側行線, 而與 γ 間之距離常爲一定,均等於 δ. 故可視爲 s 依 γ 爲軸旋轉而得之諸線。

依上節之理,凡此諸線構成一克利佛德面。

反之, 設 d, s 爲一克利佛德面上之二母線,不屬於同類者,則二線必交於一點 M 而成定角 2δ.

在 M 點作與 s, d 所定平面之垂線更在其上截取相等線節 $ML=MN=\delta$.

設 D,E 各爲 LN 之極線,與 d, s 相遇之點則 $DE=2\delta$.

取 DS 之中點,命之爲 H.

如是則 HL,HN 均爲 d 及 s 之側行線,而側行方向相異。

在 HL, HN 中,選出一線,使爲 d 之左側行線, S 之右側行線, 假令此線爲 HN.

則 S 或 d 依 HN 爲軸而旋轉時，構成已知之克利佛德面。

由是可知克利佛德面，有一旋轉軸。面上一切點均距此軸等遠。

但諸點距此軸等遠，則距此軸之極線，亦必爲等遠。此即克利佛德面之第二旋轉軸。

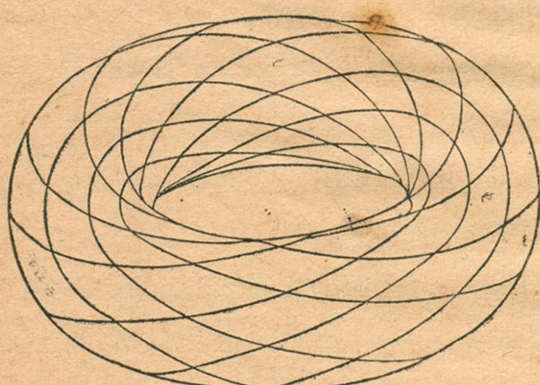
31. 俾安岐氏 (Bianchi) 定理及克利佛德面之保態表示 (Conformal Representation.)

設在克利佛德之一旋轉軸上，取任意點 O，作此軸之垂面，則此垂面，與克利佛德截痕上點，均距 O 點等遠，換言之，即截痕爲一圓，而有定半徑 δ.

但此等垂面，均經過第二旋轉軸，因二軸互爲極線故。是以知過旋轉軸，有作諸平面，與克利佛德面之截痕亦爲圓。有定半徑 $\pi-\delta$.

簡言之，即克利佛德面上之經線 (Meridians) 緯線 (Parallels) 均爲圓。

故得俾氏定理如下：



移動一圓，使其中心常在一直線上，且所在面。常與此線垂直，或令此圓，依其中心之極線，換言之，(此即線之極點爲圓心)爲軸而旋轉，則構成一克利佛德面。

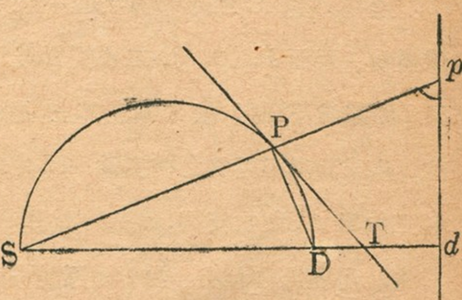
由是定理，可知在歐氏空間內，克利佛德面之保態表示，爲一環形面 (Anchor－ring 亦可作 Tore)，其一旋轉軸，爲環形之軸，他一旋轉軸，爲在無窮遠處之一直線，面上之二族母線，爲環形上之雙切環截痕 (Bitangent circular section)，如圖中所示明者。

五　第八章中定理補證

32. 在 §92 中由羅氏幾何學之內角和定理所 (譯成) 之定理，與下理相當。

有一球面及其上之一大圓，在該圓弧上任取三點爲心，作三小圓，兩兩相交。則在被大圓所分之半球面上之三交點，成一三角形，其內角和小於二直角。而可以反圖法證之如次：

首請證反圖法，爲一種保態移形，(Conformal transformation) 換言之，即反圖中二線之交角，與原圖者相等。

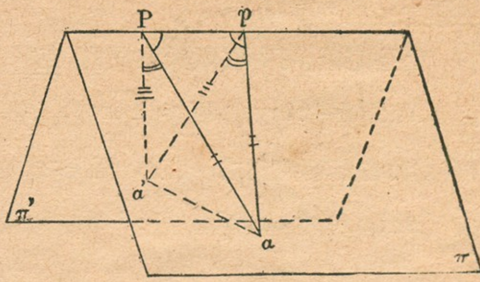


設 S 點爲反圖心，則過 S 之圓之反圖爲一直線，作過 S 點之直往，命其他端爲 D，并延長之，交此直線於 d。

又設 P. p 爲二反點，則

因$SD\cdot Sd=SP\cdot Sp$, 故 D,d,p,P 四點共圓，而 $P\hat{p}d=P\hat{D}S$.

命上述之圓，在P點之切線爲 PT. 則 $p\hat{P}T=P\hat{D}S=P\hat{p}d$ 由此不難證明平面上之反圖法，爲固範移形。



玆進論三度空間內之情形。

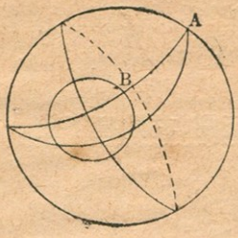
設 P, p 爲二反點，過二點各有二線相交，一線及其反圖之公切面(或所在之平面)爲 π, 他一線及反圖者爲 π',

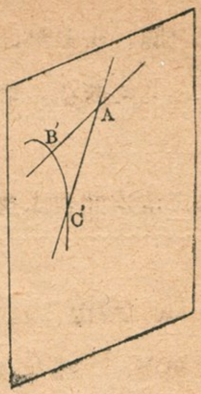
在 P, p 二點之切線兩兩相交於 α, α', 則按上述之理，易證得 $\alpha\hat{P}p=\alpha\hat{p}P$, 同理 $\alpha'\hat{P}p=\alpha'\hat{p}P$ 故 $P\alpha=p\alpha, P\alpha'=p\alpha'$.

在三角形 $P\alpha\alpha'$, $p\alpha\alpha'$ 中有一公共邊 $\alpha\alpha'$, 而他二邊，亦各各相等，適已證明，因而爲合同形，故 $\alpha\hat{P}\alpha'=\alpha\hat{p}\alpha'$ 至是欲證之理已明。

上理旣明乃取本題而證之。

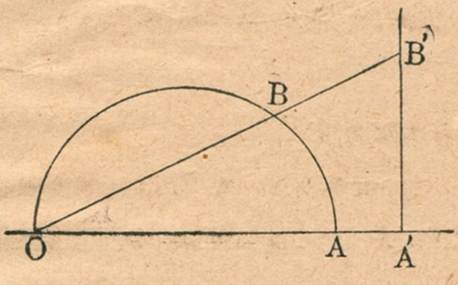
延長 AB,AC 二小圓弧交於一點 S, 以 S 爲反圖心而作反圖，則此球變爲一平面 P, AB, AC 二小圓弧變爲平面 P 上之二直線 $A'B'$, $A'C'$ 又 BC 亦爲小圓弧，故 S 不在其上，是以 BC 弧所在之平面之反圖爲一球。此球面與平面 P 之交痕爲一圓，故 BC 弧之反圖爲 $B'C'$ 弧，是則弧三角形 ABC 之反圖，爲三角形 $A'B'C'$. 後者之內角和，顯然小於二直角，而各角之大小，及不因反圖而改，故 ABC 之內角和小於二直角。





33.　§95 中有數理未加證明，今自卡士羅(Carslaw)譯波諾拉書之附錄五中摘取證法補充之如本節及下節。

設 λ^2 爲反圖常數時，則



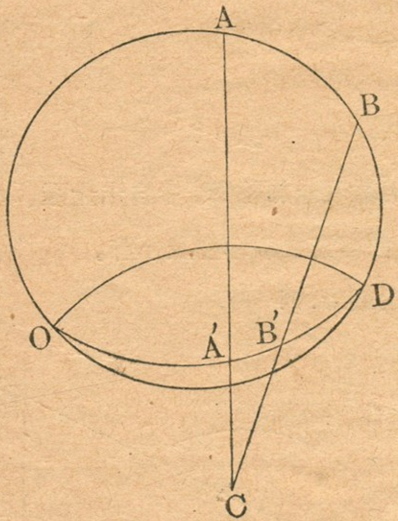
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{O'A'}{OB}=\frac{OA'\cdot OA}{OB\cdot OA}=\frac{\lambda^2}{OA\cdot OB}$$

故 $$A'B'=\frac{\lambda^2\cdot AB}{OA\cdot OB}$$

由此可知當C點界於 A,B 二點之內時，AB 之倣長 = AC 之倣長

＋ CB 之倣長，又知一倣線之倣長爲無限大。在倣線 BC 上，從垂趾 M 起，取 MM_1, M_1M_2…… 等諸弧使其所表倣線有相等之倣長，則當循序向 O 前進時，諸弧之實長，漸漸變小，以至於零。故須歷無數段等倣長之倣節，始可達於 O 點。

今請證一倣節對於組中任何圓而作反圖，其倣長不變。



設 OD 爲組中之一圓，C 爲其心，依 C 圓而作反圖，則一倣線變爲他倣線。

設倣節 AB 之反圖爲 A′B′，則此二倣線必交於 D，卽反圖圓與 AB 相交之點。

$$\text{如是則}\quad \frac{\text{AD之倣長}}{\text{A}'\text{D之倣長}}=\frac{\dfrac{AD}{OA\cdot OD}}{\dfrac{A'D}{OA'\cdot OD}}=\frac{AD}{A'D}\cdot\frac{OA}{OA'}$$

在三角形 CAD, CA′D 中, $CA \cdot CA' = CD^2$, 卽 $CA:CD = CD:CA'$

且在 C 處之角爲公共,故二者爲相似形,是以 $\frac{AD}{A'D} = \frac{CA}{CD}$

同理三角形 OAC, OA′C 亦爲相似形,因而 $\frac{CA}{CO} = \frac{AO}{A'O}$.

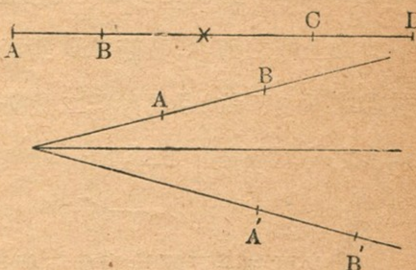
但 CD=CO, 故由上二比例式, 可得 $\frac{AD}{A'D} = \frac{OA}{OA'}$

故 AD 之倣長 = A′D 之倣長。

同理, BD, B′D 亦有相等之倣長,故 AB, A′B′ 有相等之倣長。

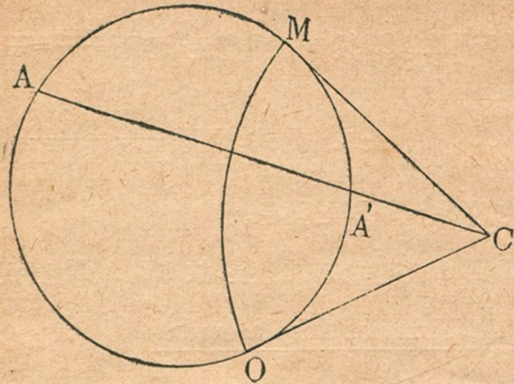
34. 倣換位(Nominal Displacement).

一線節之長,不因換位而改,由是而生倣換位之觀念。任何換位手續,皆可由數度之反射(Reflection)合成,卽就一直線,以取圖形之影跡(Image)也(在立體幾何學之情形, 須就一平面取之,)例如欲平移(Translate)線節AB,至原直線上他一位置CD時,可先依 BC 之中垂線反射之,則 A 合於 D,B 合於 C; 再依 CD 中垂線反射, 則首尾兩端點互易位,而 AB 依同向合於 CD 矣。至於欲移線節 AB 至他一位置 A′B′, 先就二線節延長線所成角之分角線反射之,卽可歸入上例討論。



今請證對於組中任何圓而作反圖, 卽等於依表反圖圓之倣線而作反射。

設C爲組中某圓之心，A′ 爲 A 對於此圓之反點，則 OAA′ 圓與反圖圓成正交，換言之，即此反圖法，將 A 點變爲 A′，而後者在垂直於反



圖圓之倣線上。且倣線 AA′，被此圓「平分」於 M，因倣節 AM，依反圖法變爲 A′M，而倣長不因反圖法而變也。

如上節之圖中，倣節 AB 對於組中一圓由反圖法，變爲倣節 A′B′. 倣節之倣長不改，且易知此二倣節延長時，交於反圖圓之上，而與之成相等之角。又倣節 AA′，BB′ 被與反圖圓相合之倣線所「平分」，并相垂直。

如是可知一反圖法實與反射法相同，平移爲其一特例，即當反圖形與倣線垂直之時是也。

故依一倣線之倣射 (Nominal Reflection) 云者，乃倣節表此線之反圖圓，而作反圖之謂也。

至於倣換位爲倣射之結果可不待贅述。

非歐幾何學在歐氏空間內之短矩表示(Geodesic representation)*

35. 由橢圓幾何學之三角公式，可見其與以 k 爲半徑之球面上三角學公式，完全相同，故橢圓幾何學，可以球面上之幾何學表示之，前者中之直線，與後者中之大圓弧相當，如所論者爲單層橢平面，則可視二峙點所表者爲同一之點，在球面上之有限區域，不含有任何對峙點者之內，其幾何學與單層橢平面上有限區域內之幾何學全然相同。

至於雙曲線幾何學之相當表示法，驟思之似有虛幻性，因雙曲線幾何學。與虛半徑之球面幾何學相同也。但吾人已能求得其實形表示，不過所表者，僅爲限於羅氏平面有限區域內之幾何學耳。爲簡便計，此種有限區域，稱之爲法域(Normal Region).

欲透徹了解此種表示法，須藉微分幾何學之理，於此不能詳及。今僅撮其要義，加以淺顯之說明，以告初學。

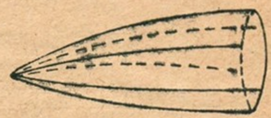
36. 曲面上之幾何學

吾人首應明瞭所謂曲面上之幾何學，曲面不必似球之有勻整(Uniform)性，所謂連二點之直線，有一種特性，即沿此以度得之距，爲二點間最短者。對於曲面上之幾何學，仍保留此性質，以爲一種與直線相當之線之表徵，在曲面上之曲線，有此最短性者，稱爲短距線(Geodesic).球面上之短矩線，即爲大圓弧，苟一曲面，能灣屈展舒，而不至伸縮綴裂，則曲面上之短矩線，伸屈後依然有最短性，仍爲屈舒所成曲面上之短距線，又原曲面上線之長度，角之大小，亦不因此曲面之屈舒而改。原

* 據散麥維爾 The Elements of Non-Euclidean Geometry 第五章中一部分，但末節係據波諾拉書 pp. 144-146.

曲面及如此方法屈舒而成之新曲面，二者互稱爲可傅(Applicable)。

例如一平面可屈成一柱面，故柱面上之幾何學，至少在一相當法域內與平面上相同。此理對於任何曲面之可平置於平面上者（亦曰可展 Developable）亦合。



球面爲不能展成平面者，故其本身另有一種幾何學。一全球不能屈舒成他面，而不至伸縮扭縐，但球面之有限部分，則可屈舒成他形（如右圖）而不改其幾何學之性質。

37. 曲率度 (Measure of Curvature) 亦曰高斯曲率或全曲率 (Total Curvature)。

球面及平面有一公共之特性焉，卽在此等面上之任何部分，可作諸合同形，如相當邊角各等之三角形是。以動學之術語述之，卽爲一剛體 (Rigid Body) 在此等面上，可自由運動，故此等面，處處可相傅合。就解析言之，可謂對於面上任何點，均有一相等之定量。此量且不因屈舒而改。

欲考此不變量(Invariant)之爲何物，可設想過曲面上任一點O處之切線 OT，而作其截面，則其截痕爲一曲線，亦以 OT 爲切線。此截之傾斜愈甚，則截痕之曲率愈大，至於此平面與曲面相切時，在尋常情形，其截痕只餘O點〔在普遍情形，則切面與曲面之截痕，爲在切點處之一節點 (Node)，及數枝級線，或實或虛，如其爲虛，則只有一點可見〕。欲曲率最小，必截面與切面正交，換言之，則必此截面經過曲線之法線。

今設截面依法線而旋轉，截痕之曲率，亦爲連續之變易，而有一極大值及極小值。與此二值相應之二截面，互相正交，而均稱爲曲面在O點之主曲率(Principal Curvatures)。此二截面稱爲主截面(Principal Sections)。二值之乘積，稱爲曲率度，常以M記之。如二主曲率爲同向，則M爲正，逆向則爲負，而在柱面或他可展面(即可展屈成平面之曲面)之情形。M爲零。對於半徑爲k之球，在各點之曲率度，均同而等於$\frac{1}{k^2}$

38. 曲率度爲常數之曲面。

高斯氏爲微分幾何學之創設者，曾發明一瑰麗之定理如下：

如一曲面，得由相當之方法屈舒之，而不至伸縮扭綴，則在任何點之曲率度，爲一不變量(此理載於高氏所著 Disquistiones Generales Circa Superficies Curvas 一書中，普通之微分幾何學，亦均述之。如愛增哈得(Eisenhart)之微分幾何學 A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces 一書 P.156 中，(曾證示此理)。由是可知如在一曲面上之圖形，有自由移動性，則必面上之一切部分，均可自相傅合，故在任何點之 M. 均有等值。

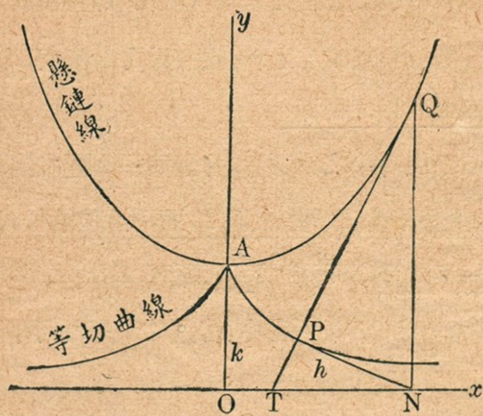
曲率度爲常數之曲面有三種(1)有正値常數之曲率度者，可以球表之，(2)有負値常數之曲率度者，例如形類馬鞍之洋響螺(Diabolo).(3)曲率度爲零者，如平面及一切可展面均是。

39. 假球(Pseudo-Sphere).

吾人不至取虛半徑之球面，爲有負値常數曲率度之曲面，乃一至可欣幸之事。此種曲面爲數甚夥，即旋轉面之有此特性者。亦屬數見不鮮，其中最簡明者，乃假球面，即依等切曲線(Tractrix)之漸近線爲軸旋繞

而成之曲面。

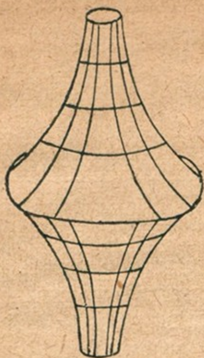
等切曲線與一簡單曲線名懸鏈線 (Catenary) 者，有密切之關係。所謂懸鏈線者，卽當一勻整之鏈懸掛時，受引力作用所成之形也。懸鏈線之狄氏位標式爲 $y=k\cosh\frac{x}{k}$, 此曲線有一特性如次：

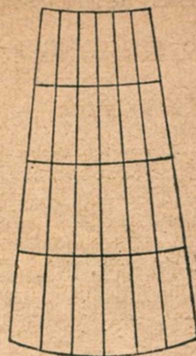


在Q點切線上一點 P, 而使 QP＝AQ 弧，并命Q點縱標之垂趾爲 N, 則 PN＝k, 由是可知如以繩 AQ, 密傅於懸鏈線上，然後使之伸直則其一端之軌跡，爲曲線 AP. 後者亦有一特性，卽其切線節 PN 之長爲一定，而等於 k. 此曲線卽等切曲線也。ox 軸爲其一漸近線，茲取等切曲線依漸近線爲軸而旋繞之，卽得一旋轉面，在 P 點之二定截面，一如等切曲線所在之經度截面，他一截面過法線 PT, 而與曲線所在之平面正垂。此等截痕之曲率半徑 (Radius of Curvature), 一爲 PQ, 一爲 PT, 而有 $PQ\cdot PT=PN^2=k^2$; 但因曲率之向相反，故曲率度等於 $-\frac{1}{k^2}$。

故此假球，爲一實面，在其上之法域內，雙曲線幾何學能成立，但此

面不能代表羅氏平面之全，因其上僅有一無窮遠點，此面上之經度曲





線，爲過此無窮遠點之短矩線，故表一族平行線，是以此面，僅與羅氏平面之一部分相當，此部分由二平行線及極限曲線之一弧所限成。

等切曲線之本體方程式(Intrinsic Equation)爲 $s=k \log \csc \phi$. 又因 $y=k \sin \phi$. 故有 $y=ke^{-\frac{s}{k}}$，在與軸垂直之二截面上，可得二極限曲線，其相弧之比爲 $e^{(s-s')k}$ 而與 §55 之結果相同。

40. 由上所述，可知有正或負值常數之曲率度之曲面，足以表非歐平面之一部分，而未能表其全。究否能得一表其全之曲面，是爲一問題。此題已爲喜爾柏特，李布曼諸名家解決，茲錄其結果如下：

(1)喜氏定理　無有一種則(Regular)之解析曲面(Analytic Surface)存在，使羅波二氏之幾何學，在其上能完全成立。

(2)李氏定理　如里氏平幾何學，在某曲面上，能成立，則該面必爲一閉形面。

唯一之規則解析閉形曲面，而有正值常數曲率度者，爲球面。

但球面上之法域，雖與單層橢平面之一部分相當，然則全球面上之直線，常交於二點；只能與雙層橢平面有同性。

由是可得一結論曰

在尋常之空間內，無有曲面，能使其全部表示非歐平面之一切特性。

上述第一定理之證明，見喜爾柏特氏幾何學之基礎一書之一附錄內（原本第二版 pp. 162–175，但英譯本及漢譯本，均未載）。關於此理之討論，有呂得刻邁爾 (G. Lütkemeyer) 之論文 Über den analytischen Charakter der Integrale von Parliellen Differentialgleichungen 及和讀格林 (E. Holmgren) 之短註 Sur Les Surfaces à courbure Constante négative〔載於 Comptus Rendus, I Sem. pp. 840–843 (1902)〕可以參考。近年 (1909) 法國解析學巨子谷耳薩 (E. Goursat). 在 Bull. Soc. Math. de France t. xxxvii pp. 51–58 中發表 Sur Les Surfaces à Courbure Constante négative 一文，亦論及此理，雖陳義稍欠普遍，然證法則較淺顯易明。

至於第二定理之證，原載於 Eine neue Eigenschaft der kugel Gött Nachr, pp. 44–55 (1899) 中，喜氏幾何學之基礎一書中 pp. 172—175，亦述及之。上述呂得刻邁爾氏之論文及和讀格林之短文 Ubereine Klasse Von Parliellen Differentialgleichungen der Zweiter ordnung, Math Ann. Bd. lvii, pp. 407–420 (1903) 亦可供參考。

人名索引