

# 经典物理学

(I)

〔日〕汤川秀树 主编

科学出版社



经典物理学  
(I)

[日] 汤川秀树 主编

周成民 方丹群 译

方旅人 陈 潜 郭永江 校

科学出版社

1986

## 内 容 简 介

本书是日本著名物理学家汤川秀树主编的《岩波讲座 现代物理学基础》的第一卷,重点介绍经典物理学中的经典力学,经典电动力学.由浅入深地阐述了力学、光学、电磁学的过去和现在.较为系统地介绍了物理学发展中具有重大历史意义的观点和方法,并指出了许多尚待解决的问题.

本书适合于理工科高等院校师生阅读,也可供其它科研人员参考.

湯川秀樹 監修  
古 典 物 理 学

(I)

岩波書店 1978

## 经 典 物 理 学

(I)

[日] 汤川秀树 主编  
周成民 方丹群 译  
方旅人 陈 潜 郭永江 校  
责任编辑 荣毓敏

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1986年9月第一版 开本:787×1092 1/32  
1986年9月第一次印刷 印张:18 1/2  
印数:0001—4,600 字数:425,000

统一书号:13031·3286

本社书号:4891·13-3

定价: 4.30 元

000100

## 译者前言

本书是“岩波讲座 现代物理学基础”的第一卷。主编汤川秀树教授是国际上享有盛名的日本物理学家，曾因预言介子的存在而荣获 1949 年诺贝尔物理学奖金，他在理论物理的许多领域均有重大贡献。

作者以物理学的发展为线索，由浅入深阐述了力学、光学、电磁学的过去和现在，用新颖的构思、确凿的史料、丰富的实验提供了学习和研究物理学的素材和方法。本书虽着重讲述经典物理学，但也有机地联系到现代物理学的最新成就。它不仅包括了物理学发展中具有重大历史意义的观点和结论，而且也指出了目前尚待解决的许多问题，如磁单极子的存在、夸克的验证、非线性波动方程的求解等等。这对进一步探讨现代物理学具有很大的启发性。

因此，本书对理科高等院校的教师和学生有很好的参考价值，对从事物理学史的研究工作者亦不失为一份难得的资料。

由于我们水平有限，错误之处在所难免，敬希读者提出宝贵意见，以期改进。

1979 年 9 月



## 序 言

本讲座把“经典物理学”理解成在现代物理学之前业已成立的理论体系，并通过该理论体系能够充分解释所有宏观物理现象。在这种情况下，我们把量子力学的创立作为现代物理学的起点。这种规定与现代物理学开始于二十世纪的通常概念略有不同。最重要的差别在于把相对论归入经典物理学范畴之中，还是把它看成现代物理学的一部分。然而究竟怎样做比较好，尚有很大的灵活性，并不存在什么决定性的理由，可以判断这两种做法中哪一种是绝对必要的。本讲座把相对论归并到经典物理学，第一个理由是两者之间并没有什么鸿沟。与此密切相关的第二个理由是，相对论与经典物理学的其他领域一样，也是研究宏观现象的理论。不用说，狭义相对论的基本观点，即使在现代物理学中也仍然有它的生命力，这一点决不可忽视，然而对于各种微观现象，有些方面光靠它是无法解释的。从这个侧面来看，各种微观现象显示了与包含相对论在内的经典物理学相矛盾的性质。最初，人们认为存在作用量子或能量子，以这种形式来解释这种矛盾性质。随着量子的发现，“自然界是没有飞跃的”这个提法，在整个物理现象中已不复适用。因此，我们才有可能把一个仅仅以自然现象的连续性为大前提的理论体系——经典物理学——同现代物理学分开来。与此相应，所谓的早期量子论，就应该放到《量子力学》的开头加以概述。

鉴于上述理由，本讲座第一卷及第二卷所处理的《经典物理学》内容，就以经典力学、经典电动力学、相对论、热力学及

经典统计力学为主。但是，以这样的形态使经典物理学独立开来，其本身包含着与以往物理学教科书不相同的意图。也就是说，与其收罗无遗地来叙述经典物理学各领域的内容，倒不如重点描述那些能够表明它与现代物理学在各种不同意义上保持着密切联系的东西。我们不妨举出历史的关联，作为各种关联的一个例子。比如，最初作为物理学体系而建立的经典力学，通过十七世纪到十九世纪的发展，怎样为后来其它理论体系——如经典电动力学、相对论和量子力学等——的跃变打下基础的？在撰写第一卷第一部分“物质、空间和时间”的过程中，我们总是时时想到这个问题。而在第三章“连续体力学”中，除此之外，还介绍了有关非线性波动方程的最新研究成果。在第一章“物体的运动”中，则特别着重明确物质概念和空间概念之间的不可分割性。其中的研究，直接包含着与现在的基本粒子论相关的内容。另外，第二部分“光和电磁场”光学是十七世纪物理学的另一个支柱，它与力学同时并存。我们是从详细地讲它的历史开始，然后讲麦克斯韦和洛伦兹所完成的经典电动力学的发展过程。同时也是在介绍各种以太学说的演变史。由于相对论的出现，以太的存在遭到否定，此后也就很快被人们遗忘。但是，它所起到的历史作用却是非常巨大的；回顾这一点是有意义的。

第二卷第三部分“相对论”中，明确地显示出经典物理学作为一个统一体所具有的性质。而在第四部分“宏观状态的概念”中则阐明，尽管热力学是在物质原子结构的知识极为贫乏的时代产生的，但它在说明宏观现象时仍然不失为一个成效卓著的唯象理论；同时，还阐述了最近尚在探讨的相对论热力学。第五部分“经典力学的概率论处理”，并未按传统观点，把经典力学描述成各种物体运动的完全连续的因果关系，而是从迥然不同的观点出发，来重新评价布朗运动和波耳兹曼的

各态历经假说的；我们认为，这是新颖的立论。第六部分“经典物理学的世界像”，由现在叙述的牛顿-拉普拉斯因果律这个经典力学的传统解释出发，试图给出包括相对论在内的整个经典物理学所描绘出的世界像。它本身就是一个具有高度完整性的世界。然而，此后所产生的量子力学，在很多方面与经典物理学有着本质不同。不仅如此，还必须承认，即使在量子力学所给出的新的世界像中，经典物理学依然保持某种独立性，而且两者形成双重结构。有关它们之间的关联，请参看第四卷《量子力学 II》第八部分“量子力学的世界像”。

在这次发行第二版时，除对《经典物理学 I, II》进行部分勘误及字句修改外，内容未加变更。

汤川秀树

1977年11月

# 目 录

序言

## 第一部分 物质、空间和时间

第一章 物体的运动	1
§ 1.1 由几何学到运动学	1
§ 1.2 相对运动	12
§ 1.3 时间、空间和刚体运动	20
§ 1.4 物质的结构和运动	27
第二章 有关运动和力的定律	32
§ 2.1 惯性和力	32
§ 2.2 超距作用和接触作用	39
§ 2.3 旋转运动和惯性力	48
§ 2.4 开普勒三定律	56
§ 2.5 保守力和非保守力	64
§ 2.6 作为力学系的刚体	70
§ 2.7 变分原理和广义坐标	86
第三章 连续体力学	104
§ 3.1 前言	104
§ 3.2 应力	108
§ 3.3 应变	112
§ 3.4 应力和应变的关系	121
§ 3.5 变形的平衡	131
§ 3.6 变形的传播	141
§ 3.7 惠更斯原理	156
§ 3.8 一维点阵模型	168



§ 3.9	连续物质的运动	178
§ 3.10	流体的运动方程	184
§ 3.11	完全流体的运动	193
§ 3.12	粘滞流体的运动	207
§ 3.13	雷诺数	214
§ 3.14	逆散射法	220
§ 3.15	非线性波动方程的实例	231

## 第二部分 光和电磁场

第四章	光和以太	243
	前言——光和物质	243
§ 4.1	光的周期性	252
§ 4.2	光的波动——惠更斯-菲涅耳-基尔霍夫原理	278
§ 4.3	偏振和旋光(光学活性)	319
§ 4.4	光以太和运动物体中的光学现象	355
§ 4.5	部分相干性和部分偏振光	376
§ 4.6	波和粒子	407
第五章	电磁场和电子	417
§ 5.1	静电力的普里斯特莱-卡文狄希-库仑定律	420
§ 5.2	稳恒电流之间的相互作用	430
§ 5.3	磁现象的电本质	441
§ 5.4	磁电感应和电极化	452
§ 5.5	位移电流	467
§ 5.6	似稳恒现象的接触作用论解释	474
§ 5.7	电磁场的基本方程组(I)	479
§ 5.8	电磁场的基本方程组(II) 势函数表示	495
§ 5.9	电磁场的基本方程组(III) 哈密顿形式和非线性物质方程	519
§ 5.10	微观场方程和宏观场方程	530
§ 5.11	各种电量及磁量的量纲和单位	560
	文献与参考书	571

# 第一部分 物质、空间和时间



## 第一章 物体的运动

### § 1.1 由几何学到运动学

现代物理学虽然在很多方面和经典物理学显著不同，但是，它并不能完全脱离经典物理学而独立存在。可以说，现代物理学是由经典物理学演变而来的，如同具有较高级结构的生物是由具有较简单结构的生物进化而来一样。然而，不仅有这种历史上的联系，而且我们所说的物理世界当然还包括我们日常的经验世界，更正确地说，它是构成客观事物的总体的那一部分。这种经验世界依然需要通过经典物理学去理解。例如，即使在今天，我们研究眼睛能看到的物体的运动时，只要用经典力学来说明就可以了，不必每次都涉及构成物体的分子和原子的运动。不言而喻，今天与确立经典力学的十七世纪相比，情况已有很大不同。就拿上面所举的例子来说，在十七世纪人们对于物质结构几乎还没有什么确切的知識，然而到了十九世纪，就已经把宏观物体看成是由大量分子和原子构成的集合体，并通过对这种集合体的力学研究所得的结果，来理解眼睛能见到的宏观物体的运动；这样的尝试已获得了相当大的成功。但是，在那时人们也把在宏观世界中适用的经典力学的各种概念、定律，原封不动地推广到微观世界中去。然而，到了二十世纪，人们已认识到在微观世界中（特

别是关于电子和光的行为),需要采取与经典物理学不同的观点。这一事实亦同时表明,人们终于明了,以经典力学为出发点的经典物理学有它的适用范围。

但是,另一方面,我们所说的物理世界是具有相互物理联系的各个部分所构成的整体。因此,对其中所发生的各种现象的理解方法,尽管随着情况不同有所变化,甚至或者对同一现象有着不同的解释,但是,最低限度它们必须能够并存不悖。例如,在光和电磁的各种现象中,有很多用经典电动力学就能充分说明的,但是也有象脉降和激光那样不用量子电动力学就无法理解的现象。尽管如此,并不能说在上述意义下的物理世界的整体性就已经丧失。这是因为,一方面,量子电动力学可以说是由经典电动力学演变而来的;另一方面,经典电动力学又是量子电动力学的基础。这样的双重关系在量子力学和经典力学之间也是存在的。狭义的经典力学,从建立之初开始直到十九世纪末叶,它的适用范围并不清楚。只是到了二十世纪,由于和经典力学有着本质不同的相对论和量子力学的出现,前者才终于明确了自己的界限,同时也由此明确了,它们是自己赖以存在的基础。

以上所说的,是经典力学作为物理学最初的坚固理论体系建立之后的情况。然而,这绝不是说,在此之前类似理论体系的东西不曾有过。早在古希腊时代,就有了在某种意义上已成体系的亚里士多德(Aristoteles)物理学和阿基米德(Archimedes)静力学。此后,还有欧几里德(Euclid)几何学。今天,欧几里德几何学已经完全脱离物理学而包括在数学范畴之中。但是,欧几里德几何学,按它的起源我们可以追溯到对土地面积的测量上,因而从根本上说,较多地带有经验科学的特点。而且,我们所生存的世界是一个三维的欧几里德空间,毫无疑问这一点一些人很早就清楚地认识到了(不过,

对于大多数人来说,大概是无意识的),不能说人们一点不知道,通过加上时间这一维就能够正确地描述运动:特别是天体的运行。但是,我们今天所说的运动学,毕竟还是到了十七世纪以后才初具规模。当时,作为几何学的延伸而对整个运动进行研究的那种运动学,尚未得到独立地发展。什么样的运动从物理上来说是不可能的呢?这个问题是和对运动起因的力的研究紧密地联系在一起,于是,比运动学再深入一步,力学便作为物理学的理论体系发展起来了。然而,不管历史情况如何,从理论上说,由于更具有一般性,更为简单,所以下面我们首先由运动的一般研究来开始讲述。

在今天的经典力学教科书中,通常是借助于矢量分析来描述运动的。尽管依靠矢量分析可以直观而明确地理解运动,而且能使描述简化,不过意外的是历史上在力学中使用矢量表示法是近期的事。大约最早出现在1880年前后出版的W. 吉布斯 (Willard Gibbs) 的讲义中。这里我们首先要研究的是,矢量表示与坐标系概念之间的关系。我们先不考虑时间要素,设想在三维欧几里德空间中放置几个物体,它们可以看成是各自具有明确形状的几何体。

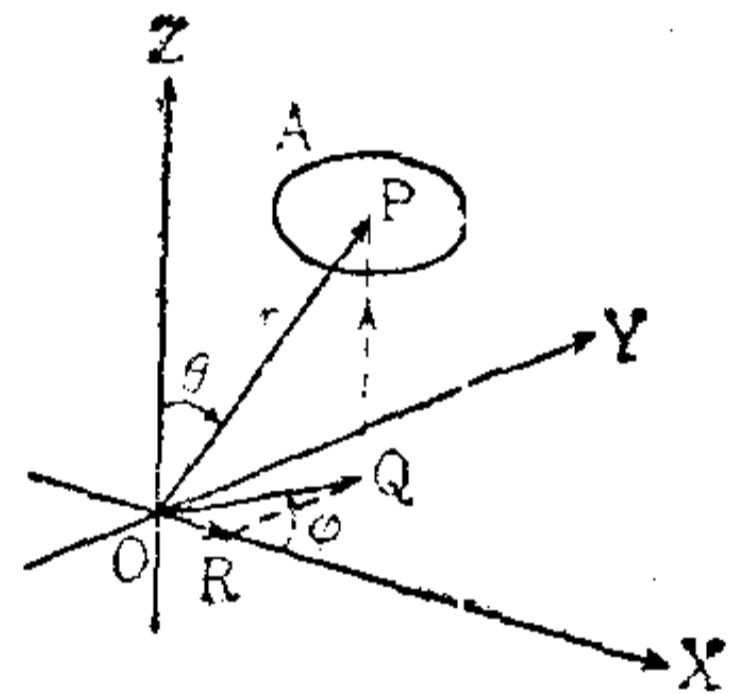


图 1.1

然后,在这个空间内设置一个直角坐标系,如图 1.1 所示,它由互相正交并通过原点的三条直线  $\overrightarrow{OX}$ 、 $\overrightarrow{OY}$ 、 $\overrightarrow{OZ}$  构成。于是,物体  $A$  的表面上或者内部的任意一点  $P$ ,都可以由笛卡儿 (Descartes) 坐标  $(x, y, z)$  唯一确定。显然,  $x, y, z$  的大小可以分别用图中的线段  $\overline{OR}$ 、 $\overline{RQ}$ 、 $\overline{QP}$  的长度给出。当  $R$  在由  $O$  指向  $X$  的半直线上,  $Q$  在由  $\overrightarrow{OX}$ 、 $\overrightarrow{OY}$  所划出的  $XY$



平面的四分之一象限中，P 在空间的上半部时，符号规定为正；相反就加负号。这里 Q 是由 P 向 XY 平面所引的垂线  $\overline{PQ}$  的垂足，R 是由 Q 向 OX 所引的垂线的垂足。

可是，如图 1.1 所示，同一点 P 也可以用**矢量**  $\vec{OP}$  唯一确定，这个矢量是由从 O 到 P 的方向与长度所规定的。这时，长度  $r$  和笛卡儿坐标  $(x, y, z)$  之间的关系如下：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.1.1)$$

如图所示，其方向则由  $\vec{OP}$  与  $z$  轴  $OZ$  的夹角  $\theta$  以及  $OQ$  与  $x$  轴  $OX$  的夹角  $\varphi$  来决定。 $r, \theta, \varphi$  和  $(x, y, z)$  之间的关系是

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

$(r, \theta, \varphi)$  叫做点 P 的球坐标；大家知道，为了使它和笛卡儿坐标之间有一一对应的关系，需要加上如下限制：

$$0 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (1.1.3)$$

通常把矢量  $\vec{OP}$  称为**位置矢量** (position vector) 或**矢径** (radius vector)，并用符号  $r$  表示。就空间位置被固定的意义而言，可以把它叫做**固定矢量** (fixed vector) 或**束缚矢量** (bound vector)。在后面出现的大多数矢量，则与它相反，只要不改变方向和长度，都看作是相同的，随便放到什么地方都可以；从这个意义上讲，应该把这些矢量叫做**自由矢量** (free vector)。但是，也有不少情况，不考虑这种区别，或者有意不考这种区别，这样更为方便，而且也是允许的。矢径  $r$  和笛卡儿坐标  $(x, y, z)$  之间的上述关系，又常常可以表示成下面的矢量关系：

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad (1.1.4)$$

这里， $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  是单位长度并分别由 O 指向 X、指向 Y 和指向 Z 的矢量，如图 1.2 所示。因为  $r$  是固定矢量，所以照理应

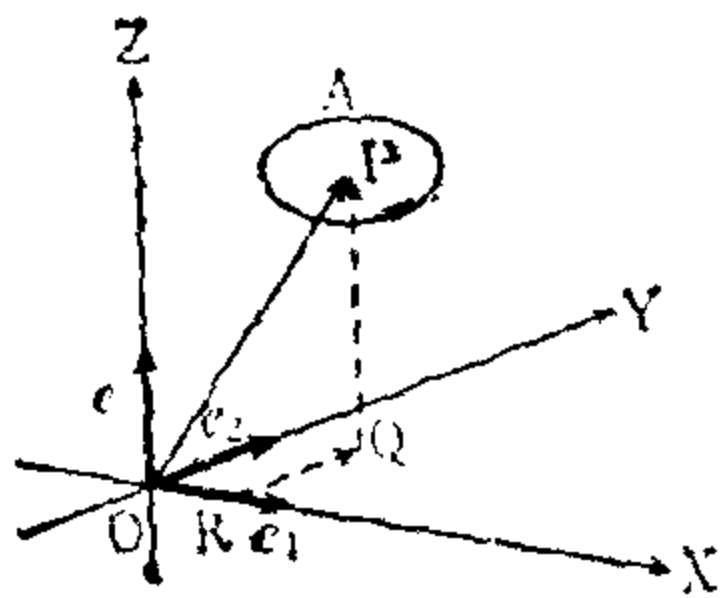


图 1.2

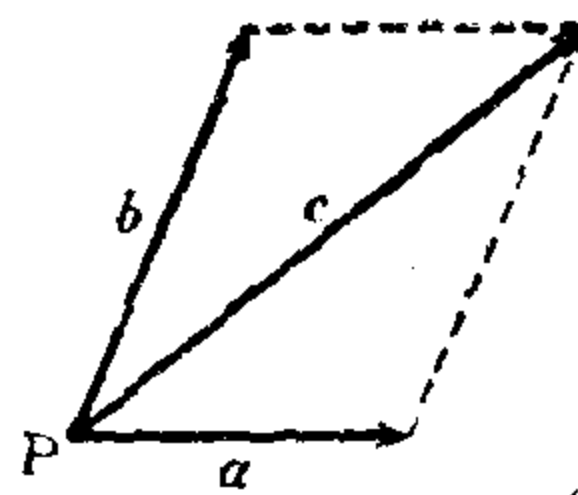


图 1.3

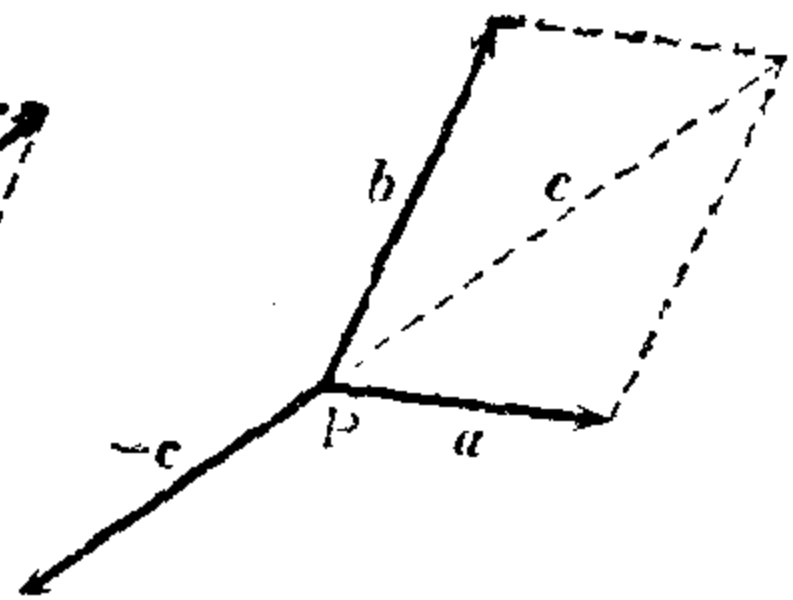


图 1.4

当认为单位矢量  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$  也是固定矢量。可是，如后面所示，常常出现这种情况： $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$  可以看成是自由矢量，也就是说，在长度和方向都不变的情况下移动，即在平移的情况下，仍然是相同的矢量。

关系式(1.1.4)可以看作是从更基本的两个矢量之和的定义

$$a + b = c \quad (1.1.5)$$

推导出来的。如图 1.3 所示，矢量  $c$  是  $a$ 、 $b$  所构成的平行四边形的对角线。这同静力学中人所共知的力的平行四边形是一样的。从历史上来说，人们认识到力是有大小和方向的物理量要比矢径来得早，用矢量来表示力的平行四边形法则是根据经验确立的。

也就是说，假设在一个物体的同一点  $P$  上(或者是在三个靠得很近，几乎可以看成一点的点上)同时作用着  $a$ 、 $b$ 、 $-c$  三个力，并保持平衡。如图 1.4 所示，根据经验有下面的关系式：

$$a + b + (-c) = 0. \quad (1.1.6)$$

这里所写的  $(-c)$ ，表示大小和  $c$  相同，而方向正好相反的力。就力而言，这是作用在哪个物体的哪个点上的问题，所以尽管与矢径略有不同，但它仍然是一种固定矢量。对于矢径或更一般的矢量来说，采用与力同样的方法，按照式(1.1.5)定

义矢量加法，倘若再承认某一矢量乘以实数可得一个仅长度不同而方向相同或相反的矢量，则重复上述的程序，便可推导出式(1.1.4)。但是，对于矢径来说，式(1.1.6)或(1.1.4)的成立绝不是不言而喻的。不用矢量表示而得到的坐标分量之间的关系式，通过使用矢量就能以比较简明，而且易于直观理解地重新表示出来，因此应该认为用矢量表示是合理的。

进而，我们把对于力和矢径那样意义下的各种不同的固定矢量都成立的关系式，推广到后面出现的一般的自由矢量上。这时，基于相同的理由，可以认为它的正确性是能够验证的。如果注意到这一点，那么在许多情况下不考虑(至少暂时不考虑)固定矢量和自由矢量的区别是更合适，更方便的。例如，假设图 1.3 的矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  是即使平移也并不变化的自由矢量，就可以认为能按照图 1.5(a) 那样来构成  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的和  $\mathbf{c}$ 。同样，对于式 (1.1.4) 右边的  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ ，可以考虑把  $\mathbf{e}_2$  的原点平移到  $R$ ， $\mathbf{e}_3$  的原点平移到  $Q$ 。而关系式(1.1.6)，亦如图 1.5 (b)所示，在几何学上可以同  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $-\mathbf{c}$  所构成闭合三角形表示相对应。

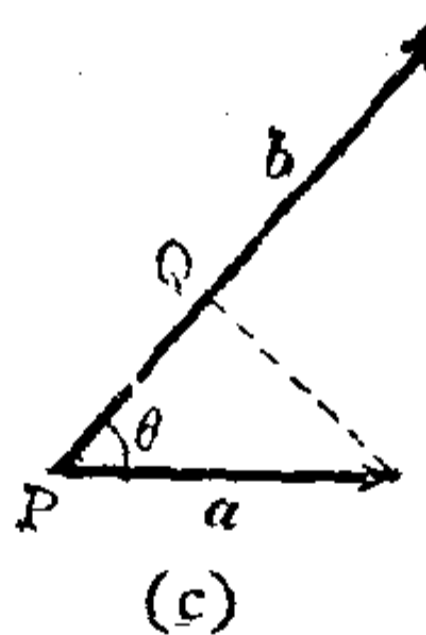
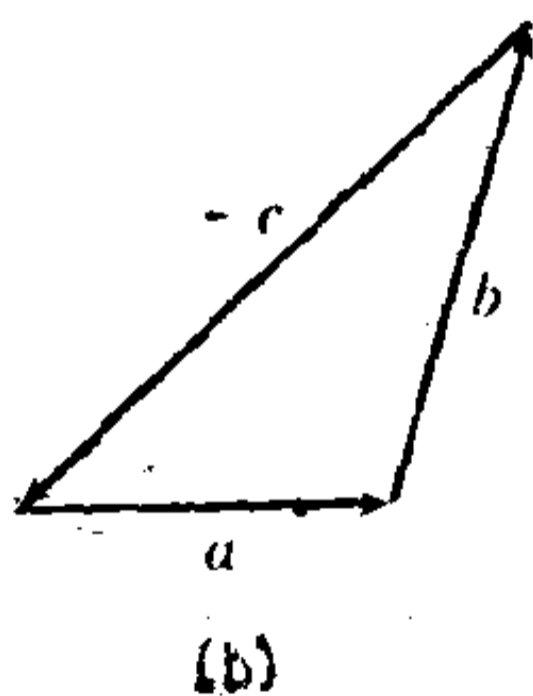
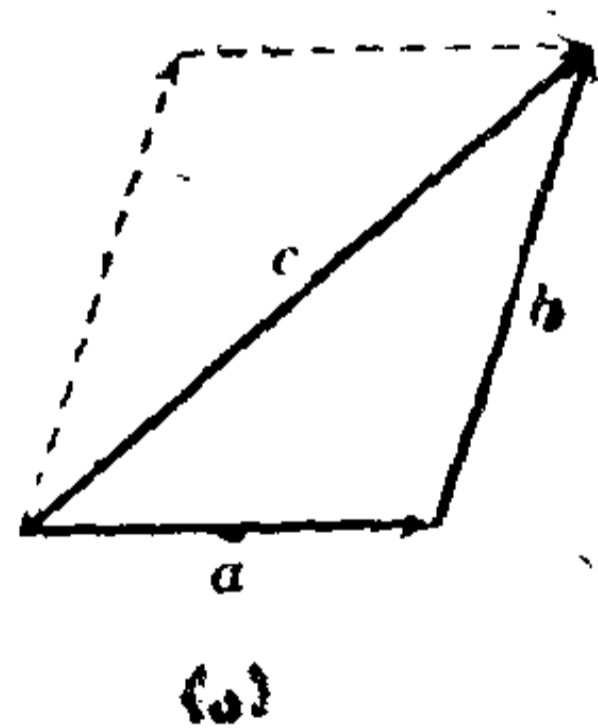


图 1.5

图 1.6

下面，我们可以定义两个矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  的两种乘积，它们都具有明确的几何意义。一个称为内积 (inner product) 或者标积 (scalar product)，可以用标量

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = ab \cos \theta \quad (1.1.7)$$

这样的实数来表示；其中  $a, b$  分别是  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的绝对值， $\theta$  是图 1.6 所示的  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  之间的夹角。假设由  $\mathbf{a}$  的末端向  $\mathbf{b}$  所引的垂线的垂足为  $Q$ ，那么，所谓内积就是线段  $\overline{PQ}$  的长度和  $b$  的乘积这样一个几何量。但在这里规定，当角度  $\theta$  大于直角时， $\overline{PQ}$  的长度为负值。显然，在这种情况下即使将  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的位置调换一下（因而乘积的顺序改变了，但内积还是相同的）。

将式 (1.1.7) 的定义应用于互相正交的单位矢量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ，我们就可以得到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1 \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.8)$$

这样一来，由图 1.5、图 1.6 的几何作图就会立即看出，对内积来说，分配律是成立的。因此，由式 (1.1.4) 可以推出

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (1.1.9)$$

更一般地，假设任意矢量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的坐标分量分别为  $(a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z)$ ，则有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x\mathbf{e}_1 + a_y\mathbf{e}_2 + a_z\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= b_x\mathbf{e}_1 + b_y\mathbf{e}_2 + b_z\mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\}, \quad (1.1.10)$$

利用式 (1.1.8) 和分配律，我们就可以立刻得到

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.1.11)$$

矢量的另一种乘积称为外积 (outer product) 或矢积 (vector product)。两个矢量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的外积  $\mathbf{c}$ ，如图 1.7 所示，是用一个矢量来定义的，其大小等于

$$ab \sin \theta,$$

也就是等于  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  所构成的平行四边形的面积；其方向垂直

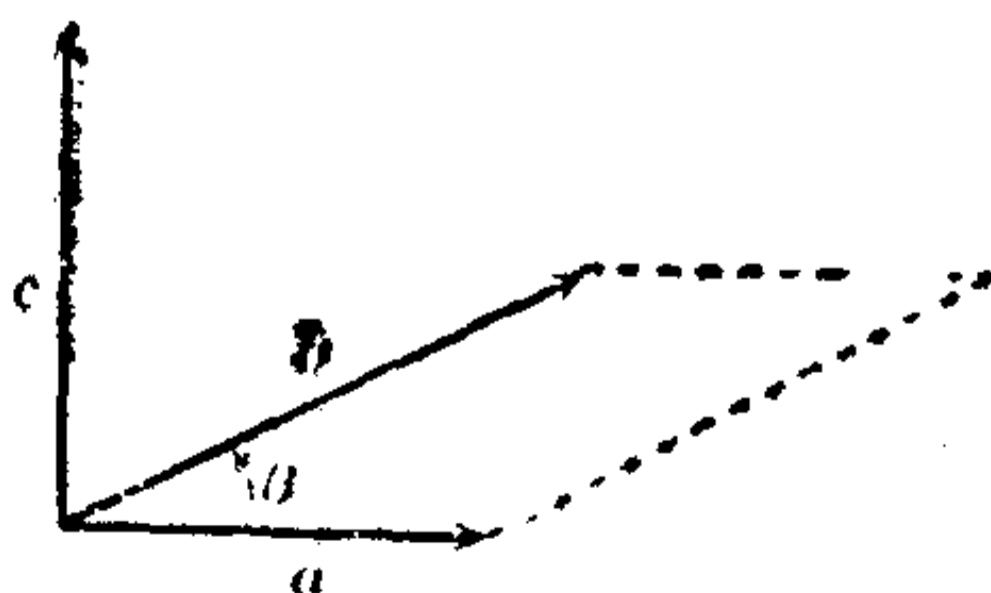


图 1.7



于  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  所构成的平面,更正确些说,是在由  $\mathbf{a}$  向  $\mathbf{b}$  旋转的右手螺旋前进的方向上. 换句话讲,三个矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  构成了右手螺旋系. 外积有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, [\mathbf{ab}], [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \quad (1.1.12)$$

等各种写法,但以后主要使用的符号是

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \quad (1.1.13)$$

由此定义可知:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \times \mathbf{a}], \quad (1.1.14)$$

也就是说,改变相乘的顺序,外积的符号也要改变,得到的是方向相反的矢量.

如果互相正交的单位矢量  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$  按照这个顺序构成右手螺旋系,那么我们立刻就可以知道

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1] &= [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2] = [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3] = 0 \\ [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] &= -[\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_3 \\ [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3] &= -[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_1 \\ [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1] &= -[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.15)$$

若使用这些关系式,则  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的外积就是

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{e}_1 + c_y \mathbf{e}_2 + c_z \mathbf{e}_3, \quad (1.1.16)$$

其分量为

$$\left. \begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x \end{aligned} \right\} \quad (1.1.17)$$

以上只是把欧几里德几何学的一部分用矢量重新写了出来,可是,如果想要用它来研究运动,就会出现种种在几何学中不曾有过的新问题. 首要的一个问题是,究竟什么在运动? 在日常的经验世界中,运动着的东西是各式各样的. 有像人类和动物那样运动时外形发生显著变化的情况; 也能看到运动时形状与大小几乎都不变化的情况,例如开动的汽车或投

掷的石块就是这样。但是，无论在哪一种情况下，只要从极远的地方去观察运动，通常总可以忽略生物躯体的各个部分及非生物体的各个部分的运动的差异，而用适当规定的中心点的运动去代表该物体整体上的运动。特别是在天文学中，自古就把星体看作一个点，来仔细地跟踪它们的运动。不用说，星球是巨大的天体，如果靠近一些，就会看到星球的自转以及星球各部分之间的相对运动。但是，如果和到观察者的距离相比，星球的直径小到能够忽略不计，那么我们就可以把它看作一个点。

不过，我们也可以采用与上稍微不同的观点，认为物体的运动能够归结为点的运动。这就是说，肉眼可见的具有形状和大小的物体，无论是生物，还是非生物，都是由很多部分组成的；它的各部分又由更小的部分组成。比如，若用显微镜来观察生物体，就可以发现它是由很多细胞构成的。而且，各个细胞又都具有复杂的结构。在确立经典力学的牛顿时代，显微镜已经相当发达，那时胡克（Hooke）就观察了植物的细胞结构。但是，当时所能看到的，较单个原子还是大得不可比拟。因此，即使设想存在着原子，也无法估计它小到什么程度。于是，可以相信，无论是把物体想象为由肉眼和显微镜都看不到的无数个微小原子和虚无空荡的间隙所组成，还是想象为一种能够无限细分的连续体，对于包括用显微镜可以看到的微小颗粒在内的宏观物体来说，经典力学总是正确成立的。因此，从经典力学的立场上来说，将形状和大小清晰可见的物体看作是在宏观上能够当成点的小物体的集合，并把这种意义上的点的运动作为研究的出发点，似乎是可行的。由此可见，无论是从这个理由来说，还是从前面所叙述的理由来说，都需要首先来研究点的运动。然而，在继续深入下去之后我们再来说明，那里实际上隐藏着疑点。

这里，我们打算再由不同的侧面研究一下究竟是什么在运动的问题。我们所考虑的运动，并不限于狭义的**物体**的运动。例如，也有影子在运动的情况。但是，无论如何，影子毕竟不是物体本身，所以它也就不会成为物理学的直接对象。这是因为，如果明白了形成影子的物体的运动，那么影子的运动也就清楚了。这样的现象是不值得一提的，另外还有更复杂一些的波的传播现象。如果向平静的水面投一石块，波面就以下落点为中心传播开来。在这种情况下，水的表层部分的运动，同波面的传播并不见得一致。构成水的表层的各部分，仅仅作上下及水平方向上的往复运动；通过观察在水面上漂浮的树叶的颠簸现象，这一点是很容易推断出来的。但是，构成物体的各个部分的运动同作为这种运动的结果所出现的波动现象，它们之间的关系一般来说不仅是复杂的，而且也是物理学的重要研究对象之一，所以我们打算在第三章中再详细讨论。

于是，我们把某物体或者物体的微小部分看作一个点，运动就是我们当前所研究的对象。这种点不是单纯的几何学的点，而是它的一种实体，其位置虽然随着时间而发生变化，却总是连续地保持着自我的同一性。这种点应该叫做**物质的点** (material point)。如第二章将要谈到的那样，具有这种实体性的点，根据它同作用在它上面的力的关系，可以断定它具有**质量** (mass)，故称之为**质点** (mass point)。考虑到我们已作了上述的说明，所以本书也将使用质点这个术语。假设在某时刻  $t$ ，质点  $P$  的位置由矢径  $\mathbf{r}(t)$  确定，如图 1.8 所示，它在短时间  $\Delta t$  内移动到矢径为  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  的点  $P'$ ，于是，质点  $P$  的位移可由下面的矢量确定：

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t). \quad (1.1.18)$$

如果  $\Delta t$  无限缩小时的极限是存在的，这个极限是矢量

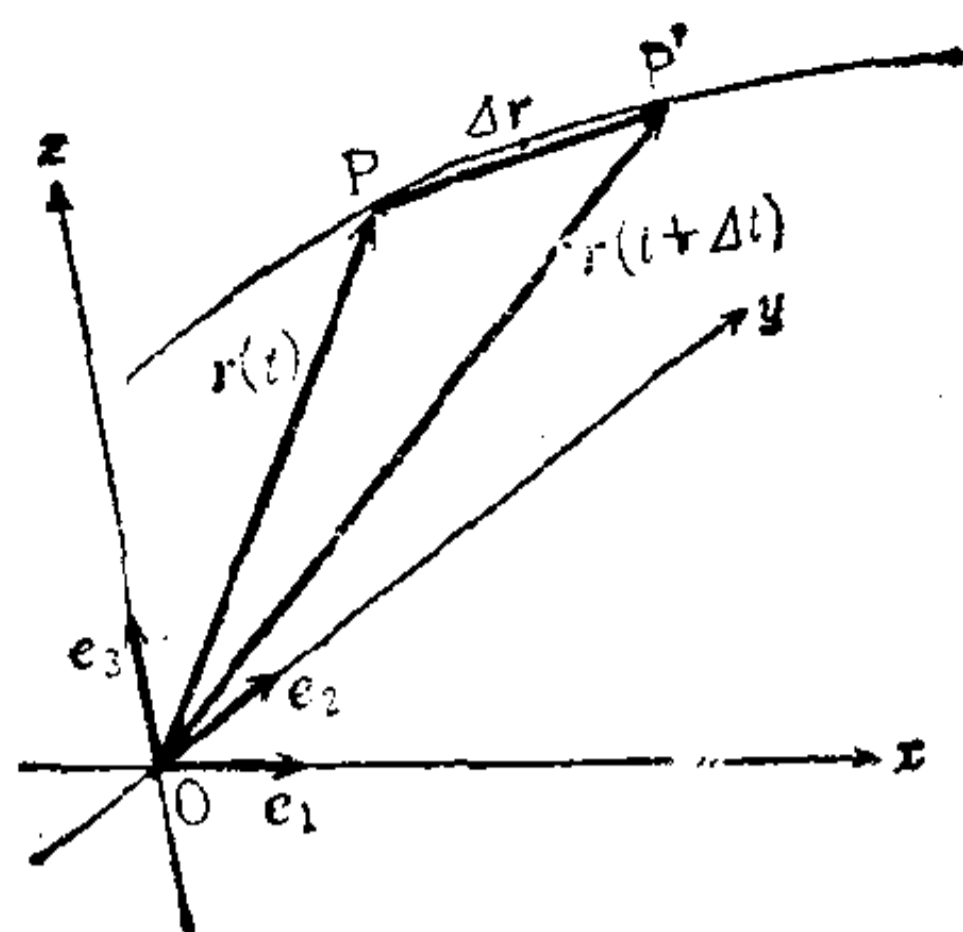


图 1.8

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \quad (1.1.19)$$

那么  $\boldsymbol{v}$  就是表示质点 P 在时刻  $t$  的速度的矢量，它的方向同描绘质点轨迹的曲线在 P 点的切线方向相一致。

在经典力学中所处理的质点的运动，仅限于中途各处的速度都是唯一确定的那种情况。更普遍一些，对于具有大小的物体，在这个意义上，也只有平滑的运动才是研究的对象。某物体同其它物体或者墙壁碰撞时，一瞬间速度变化很大，因此，即使乍一看其瞬时速度不能唯一确定，我们也应该认为，若将时间细分，在速度发生巨大变化的前后，仍然存在着有限的时间间隔。假如没有这样的限制，就推导不出第二章及本讲座第二卷《经典物理学 II》第 VI 部分中所叙述的牛顿-拉普拉斯 (Newton-Laplace) 的因果律来，而需要象第 V 部分那样作概率论研究。这种情况的合适的例子，在布朗 (Brown) 运动那样左曲右折的运动中可以见到。

回过头来，如果把式 (1.1.19) 所定义的速度矢量用式 (1.1.4) 改写一下，则有

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \boldsymbol{e}_1 + \frac{dy}{dt} \boldsymbol{e}_2 + \frac{dz}{dt} \boldsymbol{e}_3. \quad (1.1.20)$$



这意味着，用矢量表示的方法也得到了这样的必然结果：在由原点  $O$  以及互相正交的单位矢量  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$  所确定的直角坐标系中，速度  $\mathbf{v}$  的分量是

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.1.21)$$

这时对时间的微分，是在坐标系本身不随时间而移动的前提下进行的。如果考虑坐标系本身也在运动，又将出现什么情况呢？这个问题将在下节再进行讨论。

其次，将速度矢量  $\mathbf{v}$  再对时间微分，便可以得到加速度矢量  $\mathbf{a}$ ：

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{e}_3. \quad (1.1.22)$$

因此，如同所预料的那样，加速度的分量是

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, & a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} (1.1.23)$$

同样，可以将加速度矢量再对时间进行微分。但是，正如第二章所述，在经典力学的基本定律之中，并不出现对时间的三阶以上的微分，所以讨论就到加速度为止。

## § 1.2 相对运动

在上一节，我们规定了直角坐标系，并通过以该坐标系为基准的矢径  $\mathbf{r}$  确定了质点的位置。进一步假设这个坐标系是不动的，我们再来定义该质点的速度和加速度。但是，坐标系的选择不仅有任意性，而且不同的坐标系相互间还有可能运动。在下一节将要详细谈到，既然经典力学是应该适用于经验世界的理论体系，那么以几何学形式假定的坐标系，就必须

以某种形式和物理的实体相对应。为此，我们可以设想，让通过地上的一点  $O$  并由西向东水平放置的一根笔直的长棒，与  $x$  轴相对应；同样，让通过  $O$  点由南向北放置的长棒，和  $y$  轴相对应，从  $O$  点向上方垂直放置的长棒，和  $z$  轴相对应。与此相应，可以用同样的方法，设想一个固定在列车内或飞机内

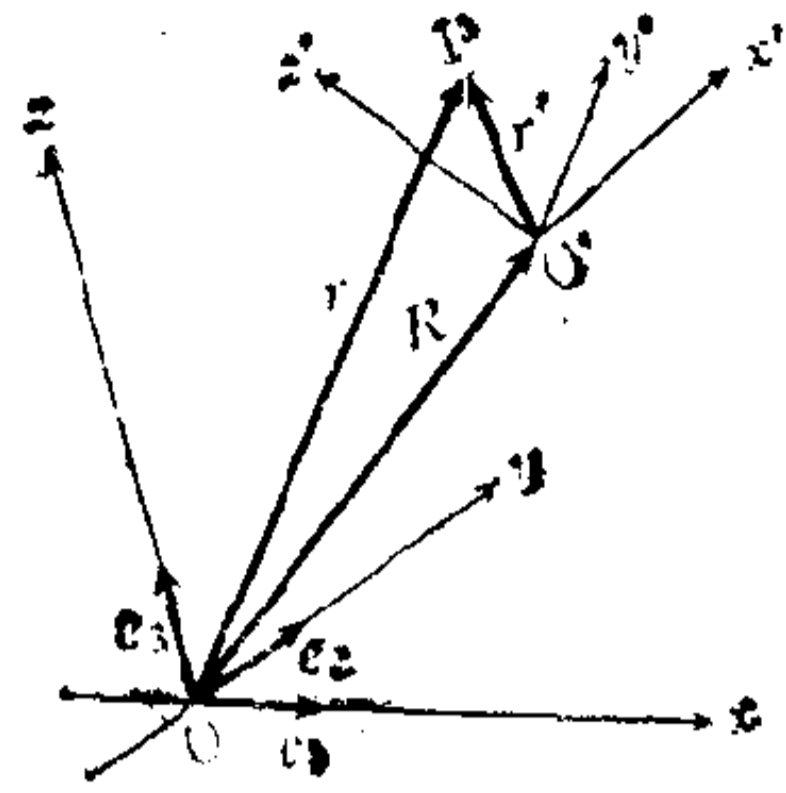


图 1.9

某一个地方的直角坐标系。如图 1.9 所示，假设后者的原点为  $O'$ ，正交的  $x'$  轴、 $y'$  轴、 $z'$  轴方向上的单位矢量分别为  $e'_1$ 、 $e'_2$ 、 $e'_3$ ，则同一个质点  $P$  在这个坐标系中就可以用下面的矢径来确定：

$$\mathbf{r}' = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3. \quad (1.2.1)$$

而且，由图明显看出，矢径  $r$  和  $r'$  之间的关系是

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (1.2.2)$$

其中

$$\mathbf{R} = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3 \quad (1.2.3)$$

表示从旧坐标系来看新原点  $O'$  时的矢径。

因此，如果我们假定  $O$ 、 $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$  所确定的坐标系是不动的，并称之为固定坐标系，与此相反，假定新坐标系的原点  $O'$ 、相互正交的单位矢量  $e'_1$ 、 $e'_2$ 、 $e'_3$  的位置和方向都随着时间变化，并称之为运动坐标系，那么，从式(1.2.1)就可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = & \left( \frac{dx'}{dt} e'_1 + \frac{dy'}{dt} e'_2 + \frac{dz'}{dt} e'_3 \right) \\ & + \left( x' \frac{de'_1}{dt} + y' \frac{de'_2}{dt} + z' \frac{de'_3}{dt} \right). \quad (1.2.4) \end{aligned}$$

此式右边第一个括弧中的表达式，是把新坐标系——即运动

坐标系——暂且看作不动时表示速度的一个矢量，所以把它写成

$$\boldsymbol{v}' = \left( \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} \right)' = \frac{dx'}{dt} \boldsymbol{e}'_1 + \frac{dy'}{dt} \boldsymbol{e}'_2 + \frac{dz'}{dt} \boldsymbol{e}'_3. \quad (1.2.4')$$

其次，即使  $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$  一齐改变方向，但由于仍然保持着长度为 1 和相互正交的条件，所以，和前节的(1.1.8)形式相同的下列关系式在任何时候都是成立的：

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1{}^2 = \boldsymbol{e}'_2{}^2 = \boldsymbol{e}'_3{}^2 = 1 \\ \boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}'_3\boldsymbol{e}'_1 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.2.5)$$

从固定坐标系来看，这些关系式对时间的微分是

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 \frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = \dots = \dots = 0 \\ \boldsymbol{e}'_1 \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} + \boldsymbol{e}'_2 \frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = \dots = \dots = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.2.6)$$

首先由式(1.2.6)第一组关系式可知， $\frac{d\boldsymbol{e}'_j}{dt}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 这三个矢量分别和  $\boldsymbol{e}'_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 本身正交，所以可以写成

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_j}{dt} = w_{jk} \boldsymbol{e}'_k + w_{il} \boldsymbol{e}'_l. \quad (1.2.7)$$

在这里约定， $j$  依次取 1、2、3 的值，相应地， $k$  依次取 2、3、1， $l$  依次取 3、1、2。如果把式(1.2.7)代入式(1.2.6)的第二组关系式，那么考虑到式(1.2.5)，就很容易导出下列关系：

$$\left. \begin{aligned} w_{12} = -w_{21} \equiv w'_x, \quad w_{23} = -w_{32} \equiv w'_y, \\ w_{31} = -w_{13} \equiv w'_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8)$$

因此，若引入由下式定义的矢量  $\boldsymbol{w}$

$$\boldsymbol{w} = w'_x \boldsymbol{e}'_1 + w'_y \boldsymbol{e}'_2 + w'_z \boldsymbol{e}'_3, \quad (1.2.9)$$

则根据矢积分量的关系式(1.1.17)，就可以把式(1.2.7)写成

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_j}{dt} = [\boldsymbol{w}_x \boldsymbol{e}'_j] \quad (j = 1, 2, 3). \quad (1.2.10)$$

若把它们代入式(1.2.4)右边第二个括弧中的表达式,并考虑到式(1.2.1)及(1.1.17),则式(1.2.4)右边的第二项就成了 $[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']$ 。因此,我们就可以把式(1.2.4)改写成

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \boldsymbol{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'] \quad (1.2.11)$$

可是,如果再回顾一下上述由式(1.2.4)到式(1.2.11)的计算过程,则可看出,在任何地方使用 $\boldsymbol{r}'$ 时,并没有特殊地说是从哪个运动坐标系中来看的质点P所得到的矢径。因此,就可得到如下的结论:在运动坐标系中,可以写成

$$\boldsymbol{A} = A'_x \boldsymbol{e}'_1 + A'_y \boldsymbol{e}'_2 + A'_z \boldsymbol{e}'_3 \quad (1.2.12)$$

的任意矢量 $\boldsymbol{A}$ ,从固定坐标系来看的时间微分,一般来说是

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)' + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}] \quad (1.2.13)$$

其中,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)' = \frac{dA'_x}{dt} \boldsymbol{e}'_1 + \frac{dA'_y}{dt} \boldsymbol{e}'_2 + \frac{dA'_z}{dt} \boldsymbol{e}'_3 \quad (1.2.14)$$

是把运动坐标系暂且看作不动时矢量 $\boldsymbol{A}$ 的时间微分。

然而,如果再次回到关系式(1.2.2),并把两边对时间进行微分,那么根据(1.2.11)即可得出

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'] \quad (1.2.15)$$

在这种情况下, $\boldsymbol{v}$ 是从固定坐标系来看的质点P的速度,而

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{dX}{dt} \boldsymbol{e}_1 + \frac{dY}{dt} \boldsymbol{e}_2 + \frac{dZ}{dt} \boldsymbol{e}_3, \quad (1.2.16)$$

则表示运动坐标系的原点 $O'$ 相对于固定坐标系的速度。

关系式(1.2.15)或(1.2.13),究竟表示出什么意思呢?为了弄清这个问题,我们首先研究一下 $\boldsymbol{\omega}$ 这个矢量的意义。因为式(1.2.13)中的 $\boldsymbol{A}$ 是任意矢量,所以对 $\boldsymbol{\omega}$ 本身来说,下列



关系式是成立的:

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right)' + [\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{w}], \quad (1.2.17)$$

根据矢积的定义,右边第二项为零,所以

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right)', \quad (1.2.17')$$

即,无论是从固定坐标系来看,还是从运动坐标系来看, $\boldsymbol{w}$  随时间的变化都是相同的. 另外,我们来考虑不管从哪一个坐标系去观察, $\boldsymbol{w}$  在时间上都不发生变化的情况,若将任意一个

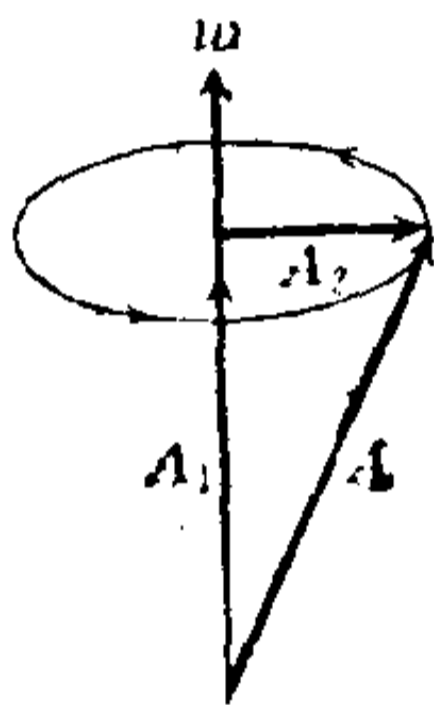


图 1.10

一个矢量  $\boldsymbol{A}$  照图 1.10 那样进行分解,则有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2. \quad (1.2.18)$$

也就是说,可以把  $\boldsymbol{A}$  写成  $\boldsymbol{A}_1$  与  $\boldsymbol{A}_2$  之和的形式,其中  $\boldsymbol{A}_1$  是与  $\boldsymbol{w}$  平行的矢量,而  $\boldsymbol{A}_2$  是与  $\boldsymbol{w}$  垂直的矢量. 如果  $\boldsymbol{A}$  是从运动坐标系来看不随时间变化的矢

量,则因  $\boldsymbol{w}$  是不随时间变化的,故而从运动坐标系来看, $\boldsymbol{A}_1$  和  $\boldsymbol{A}_2$  都是不变的. 若从固定坐标系来看它,则由式 (1.2.13) 可知

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{A}_1}{dt} &= [\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{A}_1] = 0 \\ \frac{d\boldsymbol{A}_2}{dt} &= [\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{A}_2] \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.19)$$

因为  $\boldsymbol{A}_1$  平行于  $\boldsymbol{w}$ , 所以式(1.2.19)第一式的右边为零; 这一点表明,  $\boldsymbol{A}_1$  的大小和方向都不随时间变化. 第二式的右边表示,  $\boldsymbol{A}_2$  的变化是在垂直于  $\boldsymbol{w}$  的平面内发生的. 进一步,由于  $\boldsymbol{A}_2$  和  $[\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{A}_2]$  相互正交,所以我们可以得到

$$\frac{d(\boldsymbol{A}_2)^2}{dt} = 2\boldsymbol{A}_2 \frac{d\boldsymbol{A}_2}{dt} = 2\boldsymbol{A}_2[\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{A}_2] = 0, \quad (1.2.20)$$

此式意味着,  $\mathbf{A}_2$  的长度是不变的. 把这些结果归纳起来, 如图 1.10 所示, 就可以得到以下几点: 第一, 矢量  $\mathbf{A}_2$  在垂直于  $\boldsymbol{\omega}$  的平面内, 以  $\boldsymbol{\omega}$  为轴旋转; 第二,  $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{A}_2$  是正交的, 由此可知,

$$\left| \frac{d\mathbf{A}_2}{dt} \right| = \omega \cdot |\mathbf{A}_2|, \quad (1.2.21)$$

即旋转角速度为  $\omega$ ; 第三, 如图所示, 矢量  $\mathbf{A}$  作为一个整体围绕  $\boldsymbol{\omega}$  轴以角速度  $\boldsymbol{\omega}$  进行旋转; 第四, 旋转的方向和由  $\boldsymbol{\omega}$  向  $\mathbf{A}$  旋转右手螺旋时该螺旋沿着轴前进的方向相一致.

同样的结论也适用于固定在运动坐标系上相互正交的单位矢量  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ . 这一点表明, 如果从固定坐标系来看, 该矢量组一齐围绕着  $\boldsymbol{\omega}$  轴以角速度  $\boldsymbol{\omega}$  不断旋转. 因此, 所谓  $\boldsymbol{\omega}$  不随时间变化的运动坐标系, 不外乎就是一个旋转坐标系.

更一般地来说, 当  $\boldsymbol{\omega}$  的大小和方向都随时间变化时, 可以这样来解释: 运动坐标系相对于固定坐标系旋转, 其转轴的方向和旋转的速度, 时时刻刻都在变化.

式 (1.2.15) 表示从固定坐标系来看的质点速度和从运动坐标系来看的质点速度之间的关系. 如果我们回过头来, 把它的两边再一次对时间进行微分, 那么, 根据式 (1.2.13) 就可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \left( \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] \\ &+ \left( \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'] \right)' + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']], \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

考虑到式 (1.2.17'), (1.2.4'), 右边的第四项就变成

$$\left( \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'] \right)' = \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' \right] + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'], \quad (1.2.23)$$

把它代入式(1.2.22)的右边,可以得到

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)' + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'\right] + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']]. \quad (1.1.24)$$

此式表示了同一个质点从固定坐标系来看的加速度  $d\mathbf{v}/dt$ , 和从运动坐标系来看的加速度  $(d\mathbf{v}'/dt)'$  之间最一般的关系。这个表达式右边第一项  $d\mathbf{V}/dt$ , 意味着从固定坐标系来观察时, 运动坐标系的原点  $O'$  的加速度。为了明确第三项以后各项的物理意义, 我们特别研究一下  $d\boldsymbol{\omega}/dt = 0$  的情况, 亦即运动坐标系是以恒定的  $\boldsymbol{\omega}$  所确定的旋转坐标系的情况, 这时右边的第三项成为零。第四项  $2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}']$ , 是与旋转轴  $\boldsymbol{\omega}$  和速度  $\mathbf{v}'$  都垂直的那个方向上的加速度, 即所谓科里奥利 (Coriolis) 加速度。倘若把  $\mathbf{r}'$  分解成与  $\boldsymbol{\omega}$  平行的分量  $\mathbf{r}'_1$  和与  $\boldsymbol{\omega}$  垂直的分量  $\mathbf{r}'_2$ ,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2, \quad (1.2.25)$$

则因  $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{r}'_1$  的矢积为零, 故式(1.2.24)右边的最后一项就变成

$$[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2)]] = [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_2]]. \quad (1.2.26)$$

在这里, 如果使用众所周知的关于三个矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  之积的公式

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = (ac)\mathbf{b} - (ab)\mathbf{c}, \quad (1.2.27)$$

并考虑到  $\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_2 = 0$ , 那么我们就可以得出

$$[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_2]] = -\omega^2\mathbf{r}'_2. \quad (1.2.28)$$

如图 1.11 所示, 它表示一个向心加速度, 其大小等于旋转速度的平方  $\omega^2$  和质点 P 到旋转轴的垂直距离  $r'_2$  之积, 其方向和  $\mathbf{r}'_2$  正好相反。如第二章所述, 将科里奥利加速度及向

心加速度分别乘以质点的质量,并使其反向,就应该得到科里奥利力及离心力。

通过以上分析,我们可以把两组坐标系中的一个看作固定坐标系,而把另一个看作与之相对运动的坐标系。不过,只要是研究物体或质点的一般运动,就没有特殊根据认定哪一个坐标系是静止的。实际上,就下述意义而言,即使把固定坐标系和运动坐标系的地位互换,

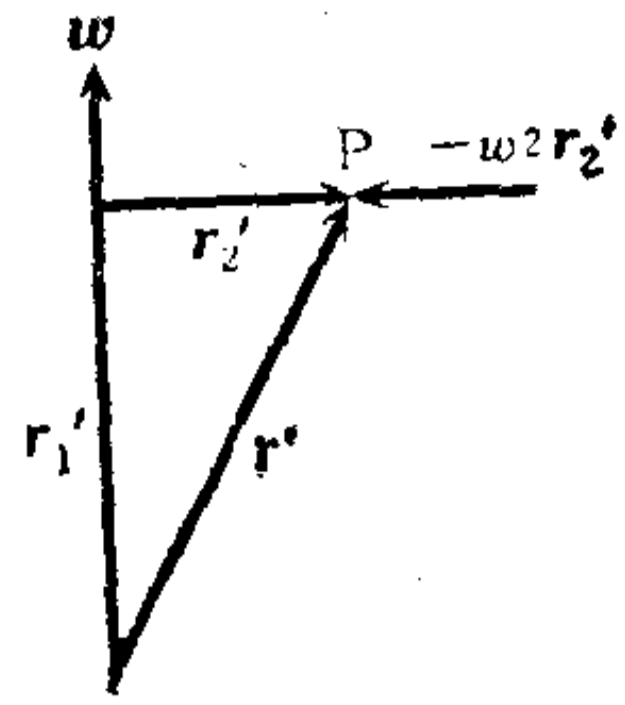


图 1.11

结果也不会改变。也就是说,原点  $O$  相对于  $O'$  的矢径是  $\mathbf{R}' = -\mathbf{R}$ , 从  $O'$ 、 $\mathbf{e}'_1$ 、 $\mathbf{e}'_2$ 、 $\mathbf{e}'_3$  所确定的坐标系来看,原点  $O$  的速度  $\mathbf{V}'$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)' = \frac{d\mathbf{R}'}{dt} + [\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{R}'] \\ &= -\mathbf{V} - [\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{R}], \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

式中,  $\boldsymbol{\omega}' = -\boldsymbol{\omega}$  是一个矢量,它表示坐标系  $O$ 、 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$  相对于坐标系  $O'$ 、 $\mathbf{e}'_1$ 、 $\mathbf{e}'_2$ 、 $\mathbf{e}'_3$  在某一瞬间旋转的方向和大小。如果把它和关系式  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$  代入式(1.2.15)的右边,便可得到

$$\mathbf{v}' = \mathbf{V}' + \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}]. \quad (1.2.30)$$

将此式和(1.2.15)比较,即可看出,就质点的速度而言,两组坐标系  $O$ 、 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$  和  $O'$ 、 $\mathbf{e}'_1$ 、 $\mathbf{e}'_2$ 、 $\mathbf{e}'_3$  的地位是完全可以互换的。同样,就加速度而言,亦能将式(1.2.24)变形,使两组坐标系的地位完全可以互换。在这个意义上,可以说相互之间进行任何运动的直角坐标系都是等价的。这叫做**运动学的相对性**(kinematical relativity)。但是,如第二章所示,若深入到作为运动起因的力去进行研究,则这种广义的运动的相对性,便失去了物理意义,取代它的将是出现更有限制性的所谓**动力学**



**相对性** (dynamical relativity). 正如在本讲座第二卷《经典物理学 II》第三部分中详细叙述的那样,狭义相对论尽管与狭义的经典力学不同,但仍然表现了带有动力学的严格限制的运动相对性. 与此不同,到了广义相对论,运动学的相对性就会以新的形态重现出来. 这些问题将在《经典物理学 II》第六部分第十九章中论述,这里暂不涉及.

### § 1.3 时间、空间和刚体运动

在 §1.1 中,我们追溯了从几何学向运动学过渡的过程. 那时,通过在三维欧几里德空间中设置直角坐标系,就能够把质点(或可以看成质点的物体)的运动,描述为质点的坐标随时间的变化,而为了以简洁、直观和更为明确的形式把它表现出来,就引进了矢径及其它矢量.

可是,我们所说的物体,无论怎样小,总具有大小和形状. 这样的物体的运动,有着在质点运动中看不到的性质. 这是因为,同一物体的不同部分的运动,一般来说是不同的. 比如,在我们日常的经验世界中,有很多被称为固体的物体. 石头、木片等就是最常见的固体. 在今天莫如说,各式各样的机器和日用器具等,倒觉得是身边常见的东西,但它们一个个都是固体,或是由数个固体部分组合而成的. 固体这种东西,只要仔细一些,不管怎样移动它,形状和大小几乎都是不变的. 不过,现实存在的固体无论是哪一个,都可以通过精密的测量发现,在运动时,通常总伴随着形状和大小的变化,尽管这个变化是很小的. 于是,我们设想一种理想的物体,它在运动时形状和大小丝毫不变;这种物体叫做**刚体** (rigid body).

质点的位置用一组直角坐标  $(x, y, z)$  或一个矢径  $\mathbf{r}$  即可完全确定;与此相反,对于刚体来说,不仅有必要确定其中一点的位置,甚至还有必要确定刚体指向什么方向的那些变量

的值。

确定刚体位置和取向 (Orientation) 的变量, 有各种各样的选择方法。其中一个选择方法, 如图 1.12 所示, 是用刚体中特定的三点 P、Q、R 的直角坐标  $(x_P, y_P, z_P)$ 、 $(x_Q, y_Q, z_Q)$ 、 $(x_R, y_R, z_R)$  给出的。但是, 这九个变量彼此之间并不独立。也就是说, 该物体是一个刚体, 这意味着 P、Q、R 三点之间的距离总保持一定的值。这个事实可以用九个变量之间的下列三个关系式来表示:

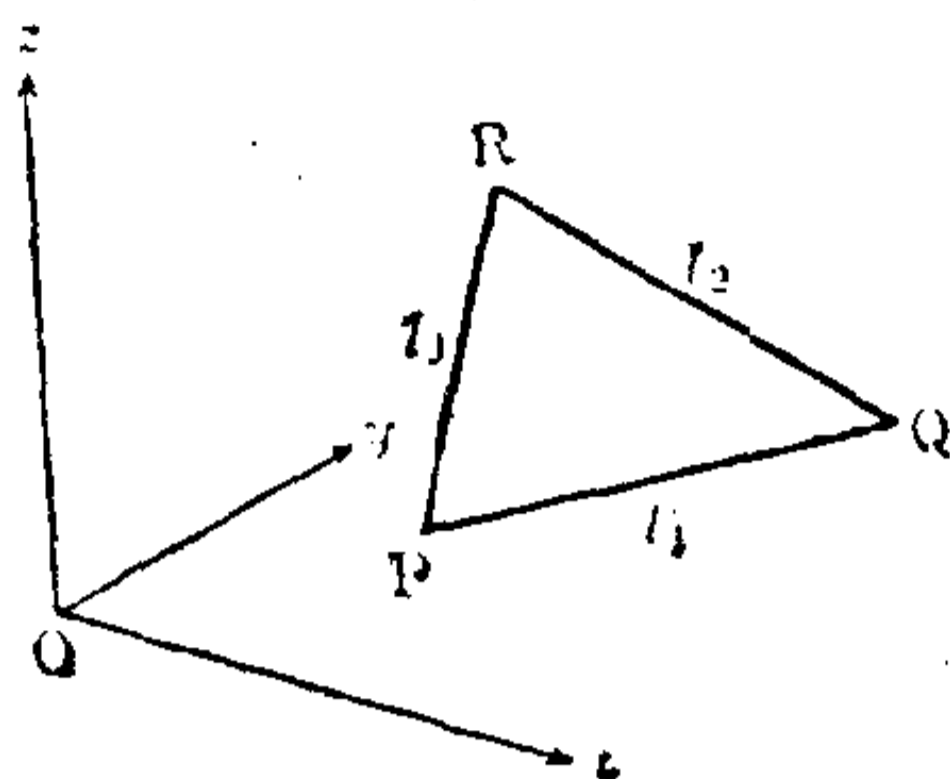


图 1.12

$$\left. \begin{aligned} (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2 &= l_1^2 \\ (x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2 + (z_Q - z_R)^2 &= l_2^2 \\ (x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2 + (z_R - z_P)^2 &= l_3^2 \end{aligned} \right\}, \quad (1.3.1)$$

式中,  $l_1$ 、 $l_2$ 、 $l_3$  是正的常数, 分别表示 P 和 Q、Q 和 R、R 和 P 之间的距离。因此, 刚体的位置和取向应该用六个独立变量来确定。换句话说, 刚体的自由度是 6。如用这种说法同理, 质点的自由度是 3。

这样一来, 刚体的运动就相当于三角形  $\Delta PQR$  在三维空间内的运动, 该三角形三边的长度一定, 因而三个内角也是一定的。在欧几里德几何中, 未曾考虑三角形的运动, 即位置和取向随时间的变化问题。但是, 为了证明两个三角形全等, 已经用过使一个三角形在空间内移动, 去和另一个三角形重合的操作。而且, 一般认为, 在移动时三角形的形状和大小都是不变的。从而, 这种作法和刚体的移动完全等价。因此, 假如换一种看法认为这种移动是随着时间的推移而发生的, 那么所研究的正是刚体运动的问题。

那么，所谓的时间推移究竟指的是什么呢？这一点在 §1.1 和 §1.2 中是置之不问的。其原因在于，物理学上的时间概念和刚体的概念是密切相关的，如果抽掉后者也就不能讨论前者了。可以认为，在物理学发达之前，人类已经具有两种时间感觉。一种是天文学的时间感觉，或者也可以叫做客观意识的时间感觉。太阳、月亮各自以几乎一定的周期遨游太空，无数星球一昼夜之间整个在天空运行一周，当谈及诸如此类的问题时，时间的概念已相当明确。也就是说，在其中有着这样的判断：同一件事情是在相同的时间内发生的，而且还能多次重复。这种时间的长短，用周期这个术语来表示。不仅在天际，还有在地面的世界中，人们也可以看到花开、花谢，再到下一次花开那样的季节的往复变化。特别是日本人，莫如说远在天文观测之前，就依靠观察地面上环境的季节变化，培养了客观意识的时间感觉。另一种时间感觉是生理的或心理的时间感觉，或者可以叫做主观意识的时间感觉。有时感到腹内空虚，有时则昏昏欲睡。正如用腹钟这个词所表示的那样，这里与生理现象的节奏相应的时间感觉，无论是谁都是在不知不觉之中获得的。当脉搏跳动时，即使用天文时间来测定它，其周期在相当精确的程度上也有一定的。但是，生理的或心理的时间感觉，一般来说很难数量化，又往往因人而异，而且纵然是同一个人，如果条件发生变化，感觉也会不同，所以，外界现象，特别是天文学上的周期现象，作为满足客观性、普遍性、数量化等要求的时间感觉，在物质文明迅速发展的许多地方，已经成为测量时间的标准。这一点并非不可思议。

如果打算通过天文观测来非常精确地测定时间，就需要有一个固定在地面上的观察装置，该装置由两部分组成，一个是能够看成刚体的物体 I，另一个是能够相对于物体 I 旋转的刚体 II。能够旋转的刚体 II 的取向，可以指向特定的星体

的方向。随着这个星体在天空中旋转，刚体 II 相对于刚体 I 的取向亦发生变化。然而，如下所示，所谓的刚体，实际上是和直角坐标系等价的。也就是说，假如给出原点  $O$  的三个位置坐标  $(X, Y, Z)$  以及三个相互正交的单位矢量  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ，那么该直角坐标系即可唯一确定。如果矢量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  相互独立，而且各自的大小和方向都没有限制，那么它们就应该包含九个独立的变量。然而，因为它们必须满足单位矢量正交的六个条件 (1.1.8)，所以独立变量的数目实际上是三个。如果把这三个变量和确定坐标原点  $O$  的三个变量加起来，就和刚体一样，自由度是 6。这个结论绝非偶然。其原因在于，假如设想在刚体中取一个固定点，并由该点作出固定在刚体上的相互垂直的单位长度的线段，那么，刚体的位置和取向就由这个固定点的位置和三个线段的取向而完全决定。

如果这样来考虑，那么通过由地面上观察恒星方向的变化来决定时间的做法，便归结为测定一个与恒星系一起转动的直角坐标系  $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  相对于固定在地面上的直角坐标系  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  的旋转角度。和前节一样，若用矢量  $\boldsymbol{\omega}$  表示这个旋转角速度，则式 (1.2.10) 是成立的。假如用这个角速度的大小  $\omega$  去除恒星旋转一周的角度  $2\pi$ ，并将所得的值定义为 24 个小时，那么我们就可以得到所谓的恒星时。

以上的叙述虽然稍微冗长了一些，但主要是想强调一下，运动、坐标系以及时间这些经典物理学的最基本的概念，和刚体的概念有着不可分割的关系。至于另一个基本概念——空间的概念，如下所示，情况也是同样的。所谓的空间，即最初作为经典力学出发点的欧几里德几何所确立的三维欧几里德空间，是一种**度规空间** (metric space)。一般所谓的度规空间，是任意两点之间的距离被定义了的空间；特别在三维欧几里德空间中，毕达哥拉斯 (Pythagoras) 定理是成立的，直角



坐标分别由  $(x_1, y_1, z_1)$  及  $(x_2, y_2, z_2)$  给出的两个点之间, 距离的平方用下式来定义:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \quad (1.3.2)$$

为了能把这样的空间看成物理的空间, 最低限度在原则上必须有一种用来决定该空间内同时存在的两个质点之间距离的物理手段. 换句话说, 需要有一个测量长度的量尺; 而作为理想量尺的, 则是刚体. 假如有一个在刚体上细刻分度的量尺, 那么同样的量尺就能够多次复制, 因而可以设想, 通过移动这些量尺, 便能测定任意时刻、任意两个质点之间的距离.

但是, 空间的概念, 本来就具有与物质概念不同的性质. 特别是在德谟克利特 (Democritus) 学派的原子论中, 与原子相对应需要有空虚空间. 为了能使原子自由运动, 必须同时存在着什么都没有的空旷的场所. 在确立经典力学的十七世纪, 主张原子论的学者甚少, 倒是有很多人赞助笛卡儿学派的以太论. 但是, 正如由牛顿在《光学》中所叙述的内容也可以推论出来的那样, 他本人把德谟克利特的世界假想为是力学赖以成立的背景. 在那个世界里, 不存在原子或可见物体的地方, 也存在着空间.

通过设置一个坐标系, 就可以用一组实数来确定质点或刚体的位置和取向, 同样, 质点或刚体没有占据的空间各点也能够用三个直角坐标来确定. 例如, 若坐标系 I 是由原点  $O$  以及正交的三个单位矢量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  确定的, 由它来观察时, 空间某点的位置是直角坐标  $(x, y, z)$ , 那么, 在  $x, y, z$  取由  $-\infty$  到  $+\infty$  的全部实数值时整个三维欧几里德空间就应该全部被占满. 即使时间  $t$  发生变化, 也可认为, 该空间的点作为  $(x, y, z)$  具有一定值的点而保持自我等同的状态. 也就是说, 借助于坐标系 I, 就可以确定一个空间. 如果用原点  $O'$  及正交的单位矢量  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  所确定的新坐标系 II 来代替 I,

并把空间的某一点用新的直角坐标  $(x', y', z')$  来表示, 那么,  $x', y', z'$  给出由  $-\infty$  到  $+\infty$  的全部实数值, 就可确定一个三维空间. 这个新的空间, 和由旧坐标系 I 给定的空间果真是相同的吗? 在通常的力学教科书中, 这个问题几乎无人论及, 但是牛顿本人在《原理》开头的“定义”部分的注释之中却就此进行了翻来复去的讨论. 原文非常难懂, 但是如果借助于上述坐标系和坐标的概念, 我们就能够对它作如下表述.

作为一个简单的情况, 现在我们假设, 在时刻  $t = 0$  坐标系 II 的原点  $O'$  和 I 的原点  $O$  一致, 而且  $e'_1, e'_2, e'_3$  的方向也分别和  $e_1, e_2, e_3$  的方向一致.

另外, 如果假设在此以后  $e'_1, e'_2, e'_3$  的方向总与  $e_1, e_2, e_3$  保持相同, 只不过原点  $O'$  由坐标系 I 来看时在  $e_1$ , 也就是在  $x$  方向上, 以一定速度  $v$  不断运动, 那么如图 1.13 所示, 在时

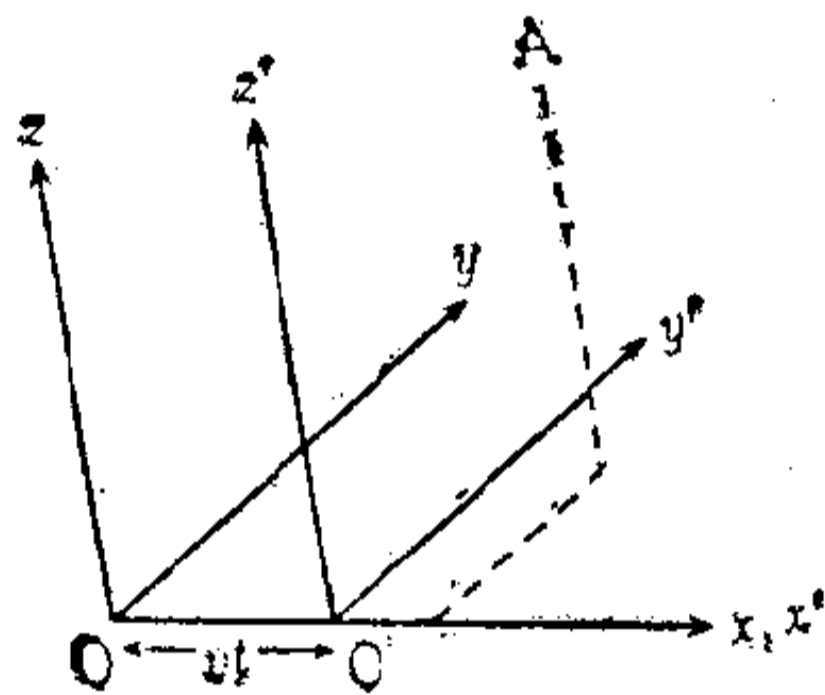


图 1.13

刻  $t$  空间同一点  $A$  的新旧两坐标之间, 有下列关系:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (1.3.3)$$

至此, 没有什么特别的问题.

由坐标系 I 所给定的空间各点, 随着时间的推移, 通过一组  $(x, y, z)$  的一定数值继续保持自我等同的性质, 与此相应, 由坐标系 II 所给定的空间各点, 应该由一组  $(x', y', z')$  的一定值保持自我等同的性质. 但是, 如(1.3.3)所示, 它们等同的方式是不一样的. 例如, 若从坐标系 II 观察, 原点  $O'$  不管是否被物体所占据, 都应该作为空间的同一个点, 由坐标  $(0, 0, 0)$  保持自我等同性, 但是, 在坐标系 I 所确定的空间中,  $O'$  却沿着  $x$  轴向不同的点不断移动. 在这个意义上, 我

们应该说由相互运动的两组坐标系所确定的空间并不是相同的。它们是各自以特定的坐标系为前提来定义的空间，在这种意义上，应该称之为**相对空间**。

正如在前一节用“运动学相对性”的术语所表示的，由纯粹运动学的立场来看，不管用什么样的坐标系来描述物体的运动，它们相互间都是完全等价的。与此相同，对应于坐标系的选法，能够确定各种各样的相对空间，但若从纯粹运动学的立场来观察，它们却是完全等价的。牛顿之所以企图把相对空间和**绝对空间**区别开来，是和诸如惯性或力这样的力学概念的引入有关的。这一点我们打算在第二章中详细论述。但是，倘若不用德谟克利特学派的原子论，而采取笛卡儿的立场，认为存在着充满宇宙的以太，那么绝对空间或绝对运动这些概念，由开始就具有物理意义。关于这个问题，我们打算在第二部分“光和电磁场”中再进一步阐述。

最后想再补充一点：在欧几里德几何的阶段，只有一个三维空间，由于研究放置在其中的物体的运动，便产生了新的情况——空间本身的多义性。倘若既不满意这种多义性，又不能去承认以太假说，那么除空间的三维之外就势必须要再加上一维时间来确立这种四维空间的唯一性。也就是说，由 $(x, y, z)$ 这三个坐标确定三维空间的点，和由 $(x', y', z')$ 这样另一坐标确定三维空间的点，一般来说，在它们之间存在着式(1.3.3)所示的差别。反之，如果对于各坐标系来说，分别认定固有的时间，并用 $(x, y, z, t)$ 这样四个变量组成的一组数值确定四维空间内的点，那么就能够避免这样的困难，既应该由坐标系确定的三维空间的点会随着时间的推移而有所差别。也就是说，假设在连时间也包括在内的四维坐标系 I 中，用 $(x, y, z, t)$ 的一组数所确定的点，在另一个四维坐标系 II 中是用 $(x', y', z', t')$ 这样一组数来确定的，那么，只要在两

者之间有一一对应的关系，就不会引起上述因时间的推移而在确定的方式之间产生的差别。在这里，四维坐标所确定的，不是三维空间的点，而是四维空间的点。当某事件在何时何地发生时，这个四维点就对应着其中的“何时何地”。而且，在那里所发生的事件，无非是四维空间中的**瞬间事件** (point event)。

如果这样来考虑，我们就能够看到，在经典运动学中潜伏着应该直接向相对论发展的主因。但是，在历史上，经典运动学却经历了由经典力学到经典电动力学的漫长曲折的道路，才得以开始向相对论接近。由第二章起到第五章，我们将依次叙述这个经过。

#### § 1.4 物质的结构和运动

前面，从 §1.1 到 §1.3，我们进行了运动学性质的考察。其时，运动物体本身，或多或少是用脱离现实的质点或刚体来代替的。这种单纯化和理想化的做法在怎样的程度上才是允许的呢？这是要根据情况而定。例如，即使像地球那样巨大的物体，在研究它围绕太阳公转的问题时，可以看成质点。反之，就地面上的物体运动而言，在很多情况下，即使该物体很小，比如像陀螺那样，若把它看成质点而不看成刚体，我们就无法理解它的运动。但是，现实存在的物体，既非质点，又非刚体。其中有接近刚体的固体，但也有液体和气体。乍一看，它们全都是连续体。也就是说，象水那样的液体也好，象金属那样的固体也好，它们不管怎样都能够细分成性质相同的部分，而且在各部分之间似乎不存在间隙。上面曾经说过，在十七世纪有了显微镜，植物的细胞结构已为人们所知，但是当时尚无必要去考虑它和物质连续性假说的矛盾。换句话说，并没有排除物质无限分割的可能性。另外，人们通过显微镜



获得的见解,也没有否定原子论,后者认为物质具有不连续的结构. 这种情况只能解释成: 如果存在着原子,那么它也是非常小的,以致于用显微镜也看不到.

在这种情况下,现实可见的物体(其中可以包括只有用显微镜才能看得到的微小物体)应该确定为下列的哪一个呢?

- i) 多数质点的集合;
- ii) 用显微镜也看不到的许多微小刚体的集合;
- iii) 可以无限分割的连续体.

或者说,它们之中的哪一个是描述宏观物体运动的最好的近似模型呢? 关于这个问题,应该说当时不可能得出决定性的答案. 非但如此,就连对于一般处理连续体运动所需要的数学手段,在牛顿力学创立之后的很长一段时间内仍停留在不发达的状态. 只是到了十八世纪,才有可能开始完整地描述刚体的运动. 那末,未必就能说,牛顿本人曾提出过质点及其集合的问题. 他经常使用粒子这一词,而不说质点. 人们断定,他是相信原子论的;但那时所谓的原子,是德谟克利特那种具有大小和形状的微小物体,而且绝不会被破坏. 它接近于刚体或完全弹性体.

十八世纪以后,随着经典力学的体系在数学上的完善化,企图从质点力学出发而把所有的力学体系统统归结为质点的集合这样的一种倾向变得日益强烈. 但是,实际上在其中仍潜藏着各种各样的问题. 比如,前节曾谈到,人们可以从经典运动学或经典力学的立场出发,把刚体看成若干个质点的集合. 那时,因为附加了这个条件: 质点间的距离是一定的,刚体的自由度并没有超过  $3 + 3 = 6$ . 或者,也可把刚体看成能变形的一般连续体中的一种特殊的极限情况. 总之,刚体的整体平动(或第二章所定义的质心运动)的自由度 3,与围绕质心旋转,即自转的自由度 3 之和,即是刚体的自由度 6,

这一点并无变化。因此，把一个个原子看成是虽然微小，但大小和形状均清晰可见的刚体，和把原子看成是单一的质点这两者，即使在使原子无限缩小的极限情况下也仍然有差别。这个差别在于，单个的原子是否具有旋转自由度。

在十八世纪，虽然提出这样的问题，但也只是学院派的研究而已。但是，到十九世纪出现道耳顿（Dalton）的原子论之后，情况渐渐有所改变。例如，如果认为几个原子集合起来产生了分子，那么，即使暂且可以把原子看成单一的质点，由三个以上原子构成的分子，最低限度也应该近似地相当于刚体。另外，由众多分子集合而成的气体的比热，也能够用作为刚体的分子的自转自由度来说明。到了廿世纪，原子本身的结构也成了研究的对象。而且，人们查明，作为原子基本组成部分的原子核和电子，无论哪一个与原子本身相比，都是极小的粒子。于是，又出现了能否把原子核本身和电子本身看成质点的问题。其中，人们首先明白了，就电子而言，除去平动自由度以外，它还具有自转自由度，即自旋自由度。从经典力学的立场来看，这一点似乎暗示着电子是微小的刚体。然而，在发现电子自旋之后不久，便出现了量子力学，它证实了电子是典型的量子力学粒子。同时，自旋本身也作为一个不能用经典力学处理的非连续量而被量子化了。

说到这里，在经典运动学或经典力学中已经明确的质点和刚体的差别便看不见了。正如在本讲座第三卷《量子力学I》以后所详细论述的那样，这是因为，在量子力学中应该认为电子是点粒子，同时还具有自旋自由度。

但是，另一方面，就原子核而言，人们进一步认为它是由许多中子和质子组成的量子力学体系。而且还知道，它们也和电子一样具有自旋，因此，似乎应该把中子和质子作为同样具有自旋的量子力学粒子来处理。然而，随着有关原子核和

基本粒子的知识不断丰富,人们进一步认识到,中子和质子并不是单纯的具有自旋的点粒子,而本身还是具有结构的粒子。否则,就难以说明具有不同质量和自旋的介子,以及比中子、质子更重的一系列重子的存在。那么,所谓重子和介子等的结构,倒底又意味着什么呢?关于这个问题,直到今天尚未作出明确的答案。但是,由于这一点将在第十卷《基本粒子论》中详细阐述,所以在此暂不涉及。

如果我们再次回到经典力学,那么也可以认为,在其出发点上就已潜伏着质点与刚体的异同问题,以不同的形式在量子力学或基本粒子论中留下了痕迹。量子力学中,质点和刚体的差异问题,虽然就电子和基本粒子的非点模型作了论述,但是还暗存着另外一个问题,那就是作为质点或刚体集合的分立的力学系统与连续体之间的本质差别。如在第三章将要详细论述的那样,连续体的运动学和动力学,能够看成是分立的力学系统的一个极限情况,但一般来说,后者的极限与弹性体那样普通的连续物质未必一致。即使不考虑这种微妙的差别,若不同时存在数目甚多的质点,就不能把它们近似地看成连续体,也就不能看到波动在这种力学系中传播的现象。然而,在量子力学中必须认为,波动(所谓的德布罗意(de Broglie)波)是附属于单个点粒子的。很难理解,象电子那样的基本粒子,会同时具有在经典力学中不能并存的粒子和波动的属性;但是正如第三卷以后多次论述的那样,通过把德布罗意波和粒子存在的概率联系起来,就能够得到使许多物理学家都满意的解释。如果再回到经典力学,对于我们眼睛可见的物体,我们来研究确定它的方法。那么,比如说,在能够把它看成质点的情况下,该物体随时间一起连续地改变位置,因而应该在三维空间内描绘出一定的轨道;但是正如第二卷第三部将要详细谈到的那样,在相对论中则换了一种说法,认



为质点在四维空间内描绘一条世界线。与此相反，在量子力学中，就不能说原子中的电子是沿着一定的轨道运动的。也就是说，所谓的电子，是一种奇妙的存在，经典力学朴素的自我确定的方式对它并不成立。当两个以上的电子同时存在并互相接近时，这种情况尤为突出。即，两个电子不仅不能完全区别，也不能看到两者的互换，而且就是通过互换也不会改变其量子力学的状态。在这个意义上，我们也可以说，电子一半是物质的存在，一半是唯象的存在。在§1.1曾谈到，在日常的经验世界中，物质的运动和波动本来就是不同的。但是，在经典力学中，波动完全应该说成是物质运动的结果，这种物质是朴素的实际存在。也就是说，波动并不是物质本身，而是物质所形成的一种图象。然而，对于光和电磁波来说，到了相对论阶段，则否定了作为波动的载体而出现的以太本身的存在。再进一步，到了量子力学，波动就再次转变，而伴随着每一个粒子。因此也可以说，粒子本身同样具有唯象的性质。

在结束第一章之际，我们还想再说一句，那就是自然界中寿命极短的基本粒子有一些是明显存在的，有一些则是潜在的。为了把基本粒子当作基本粒子来看，就必须在其产生到湮灭之间，用某种方法证明它的存在。因此，基本粒子的寿命，必须长到一定程度。我们打算在第十卷《基本粒子论》中再详细讨论；这里需要指出的是，寿命极短的基本粒子的存在，本身就接近四维的瞬间事件，这在上一节末尾已经谈到了。物质和现象本来就是显然不同的概念。而且，经典力学企图把所有的现象都归结为物质的运动。但在基本粒子世界中，情况却截然不同。它似乎要涉及到微观的时空，因此，也涉及到把时空合并在一起的四维空间的结构问题。有关这一点，我们在第十卷第V部中再讨论，第一章就此大致告一段落。



## 第二章 有关运动和力的定律

### § 2.1 惯性和力

在上一章,我们已经研究了作为物体运动的,特别是最简化情况下的质点和刚体运动的一般表示方法的运动学。在那里我们讨论了三维欧几里德空间中自身保持同一性的物体,特别是质点的位置、刚体的位置与方向的变化,以及变化的速度等问题。既然谈到变化的速度,当然要经过一段时间。但是,只用物体、空间或时间这样的概念,还很难准确地描述运动,所以,人们进一步引进了坐标系,特别是直角坐标系。此后,又广泛地采用了把直角坐标的三个分量归纳为矢量的表示方法,使运动学成为一门直观上容易掌握的学科。另外,正如§1.2中详细谈到的那样,运动学的相对性是成立的。也就是说,借助于相互进行任意运动的直角坐标系之中的任何一个来描述运动,结果都完全等价。可以认为,在这种非常一般的意义上,运动的相对性是成立的。

但是,为了使现实存在的各物体的运动再现,显然,那样的运动学框架范围过宽,限制亦过松。比如,只要能够忽略空气阻力,下落的物体就进行特定的运动,即垂直向下的匀加速运动,它是运动学所容许的各种运动中的一种。反之,一个恒定保持水平方向的运动速度而向空中抛出的物体,在能够忽略空气阻力的前提下,会进行抛物线运动。虽然自从伽利略(Galilei)以来,这些结论已为人们所熟知,但是在其中仍然会出现运动学中一般所没有的两个重要问题。一个是作为运动起因的力(force)的问题;另一个是与之密切相关的惯性

(inertia) 问题。用上述例子来说，恒定地保持水平方向的速度，是由于所有物体共同具有的惯性引起的；而垂直方向的运动伴随着恒定的加速度，则由地球的引力所致。由伽利略，经笛卡儿，再到牛顿，这种解释被归纳成众所周知的**运动学第一定律**及**第二定律**的形式。按照牛顿本人在《原理》中的表述，第一定律是：

“所有的物体，只要外力不使状态发生变化，那么它总能继续保持其静止状态，或直线上的均匀运动状态。”

在这里所谓直线上的均匀运动，当然意味着匀速直线运动。在今天，表示所有物体的运动语言都可用质点运动的术语来替换，倘若是具有大小的物体，则用它的平动这个术语来替换。如果象后面所讲的那样定义出这种具有大小的物体的**质心**，那么我们还可以用质心的运动来代替平动。

在《原理》中，**运动学的第二定律**是：

“运动的变化，与所加的推动力成正比，而且发生在该力所作用的直线方向上。”其中，运动这一词，指的是**动量** (momentum)，定义成质量和速度的乘积。而且，质量则被定义为物质的密度和体积的乘积。今天，我们对这种质量的定义甚感诧异。若把物质的密度定义成质量除以体积，似乎更自然一些。但是，之所以这样做，是因为它是由具有一定质量的物质的点——质点的概念出发的。牛顿本人不曾在数学上取过极限，去把肉眼可见的物体收缩为一个点。可是，肉眼能看到的物体，不管多么小，均可设想成是无数个眼睛看不到的原子的集合。这样一来，为了简单起见，把原子都看成是同样微小的物体，则通过数出单位体积内的原子个数，就可以测出物质的密度。到了二十世纪，人们已经弄清了宏观物体与原子之间的差异，以及宏观物体与构成原子的更小单位电子之间的差异，到此我们再回过头去看，比起十八世纪以

后定型的质点或质量的概念来，考虑到物质结构问题的牛顿的质量概念虽然仍欠明确，但是其中却能看出其思维的深度和富有伸缩性。

正如在今日的力学教科书开头所写的那样，假如把第二定律表示成质量为  $m$  的质点的运动方程，则有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{f}. \quad (2.1.1)$$

式中， $\mathbf{p} = m d\mathbf{r}/dt$  是表示动量的矢量， $\mathbf{r}$  是在选作标准的坐标系中质点的位置矢量， $\mathbf{f}$  是作用于该质点上的力。众所周知，十九世纪末叶，人们发现了电子，而且当它的速度大到几乎接近于光速时，质量  $m$  也随着速度一起增加。正如在本讲座第二卷《经典物理学 II》第三部中将要详细论述的那样，一般来说，质量以下式所示的比率与速度的绝对值  $v = |d\mathbf{r}/dt|$  成正比地增加：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.1.2)$$

这个结论是由狭义相对论推导出来的。其中， $m_0$  是物体或质点的速度为零时的质量，即静止质量； $c$  是光速。但是，对于宏观物体来说，除了宇宙范围内的天体运动之外，其速度与光速相比总是小得可以忽略不计，所以就没有必要把运动方程 (2.1.1) 中的质量  $m$  和  $m_0$  加以区别，可以认为它对该质点是一个固定的量，并不随时间变化。这样一来，式 (2.1.1) 就可以写成

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}. \quad (2.1.1')$$

因此，如果作用于该质点上的力  $\mathbf{f}$  为零，则式 (2.1.1') 就变成

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0. \quad (2.1.3)$$

也就是说，质点的加速度为零，速度  $d\mathbf{r}/dt$  不随时间发生变化，该质点应保持匀速直线运动。在这个意义上，我们可以认为，运动学第一定律，即惯性定律，是第二定律的特殊情况。

在质点的质量  $m$  一定、形如式(2.1.1')的运动方程成立的情况下，通过设置某一个直角坐标系，该方程才开始具有明确的意义；假设这个坐标系是图 1.1 所示的直角坐标系 I，而质点的速度  $d\mathbf{r}/dt$  及加速度  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  分别由式(1.1.20)及(1.1.22)来定义，那么运动方程(2.1.1')就意味着，在将它分写成  $x$ 、 $y$ 、 $z$  分量时，下式是成立的：

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= f_x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= f_y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= f_z \end{aligned} \right\}. \quad (2.1.4)$$

式中， $f_x$ 、 $f_y$ 、 $f_z$  分别表示力  $\mathbf{f}$  的  $x$  分量、 $y$  分量和  $z$  分量。

但是，如果以相对于坐标系 I 运动的直角坐标系 II 为基准，分别使用式(1.2.2)、(1.2.4')所定义的矢径  $\mathbf{r}'$ 、速度  $\mathbf{v}'$  以及以同样方式定义的加速度  $(d\mathbf{v}'/dt)'$ ，来把这个方程改写一下，那么根据关系式(1.2.24)，(2.1.4)就变成

$$m \left\{ \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \left( \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)' + \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' \right] + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']] \right\} = \mathbf{f} \quad (2.1.5)$$

其中， $\mathbf{V}$  是由坐标系 I 来观察时，坐标系 II 的原点的速度； $\boldsymbol{\omega}$  表示固定在坐标系 II 上的正交单位矢量组  $\mathbf{e}'_1$ 、 $\mathbf{e}'_2$ 、 $\mathbf{e}'_3$  相对于固定在坐标系 I 上的正交单位矢量组  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$  旋转的角速度。



如果从坐标系 I 来看, 坐标系 II 的原点  $O'$  仅仅以恒定的速度移动, 从 I 来看 II 的坐标轴方向并不变化, 那么

$$\frac{dV}{dt} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0, \quad (2.1.6)$$

所以, 运动方程(2.1.5)就变成

$$m \left( \frac{dv'}{dt} \right)' = f. \quad (2.1.7)$$

因此, 如果从坐标系 II 来观察时, 作用于该质点上的力为  $f'$ , 进而假设它和从坐标系 I 来观察时的力  $f$  是相同的, 即

$$f' = f, \quad (2.1.8)$$

那么式(2.1.7)就变成

$$m \left( \frac{dv'}{dt} \right)' = f', \quad (2.1.7')$$

这和原来的运动方程(2.1.1')形式完全相同. 如果这时质点的矢径  $r$  及  $r'$  的分量分别为  $(x, y, z)$ 、 $(x', y', z')$ , 坐标系 II 的原点相对于 I 的速度  $V$  的分量为  $(V_x, V_y, V_z)$ , 那么下列关系式是成立的:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - V_x t \\ y' &= y - V_y t \\ z' &= z - V_z t \end{aligned} \right\}, \quad (2.1.9)$$

所以, 通过取两边对时间  $t$  的二阶导数, 再代入式(2.1.4)的左边, 我们即可得到与式(2.1.4)形式相同的表达式

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x'}{dt^2} &= f'_x \\ m \frac{d^2 y'}{dt^2} &= f'_y \\ m \frac{d^2 z'}{dt^2} &= f'_z \end{aligned} \right\}. \quad (2.1.10)$$

此式表明,对于两个相互以恒定速度平动的坐标系来说,不管由其中的哪一个来观察,运动定律的形式都是相同的.这叫做**伽利略相对性**.伽利略在相对于陆地以恒定速度航行的船上让物体落下,这时他看到了与在陆地上完全相同的运动,从而发现了运动的相对性;假如从牛顿的立场来评价的话,它就表示运动定律相对于**伽利略变换** (2.1.9) 的不变性.实际上,假设船航行的速度为  $V$ ,取行进的方向为  $x$  轴,那么其速度的分量就是  $(V, 0, 0)$ ,如果再在垂直方向取  $z$  轴,则作用于落体上的引力的分量,无论在陆地上,还是在航船上都是相同的,为  $(0, 0, -mg)$ ,所以,落体的运动方程的形式两者都是相同的,它们分别是

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg \quad (2.1.11)$$

$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y'}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2z'}{dt^2} = -mg. \quad (2.1.11')$$

其中,  $g$  是所谓的重力加速度;实验证明,在相同地点,它对于所有的物体都保持同样的大小.此式表示,在右边出现的**引力质量**和左边出现的质量,即**惯性质量**,是相同的.然而,这并不是本来就明确的.牛顿本人曾认为,两者的相等是经验事实.到了二十世纪,爱因斯坦 (Einstein) 把惯性质量和引力质量总是相等的这一事实当作线索,创立了广义相对论,成功地把引力看作是一种四维时空的几何性质.其详细情况,我们将在《经典物理学 II》第三部分中叙述.假如我们把这个问题极度简化,并就上述简单情况进行讨论,结果如下所示.也就是说,通过把式(2.1.11)的两边除以共同的质量  $m$ ,便可以得到下面的运动方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g. \quad (2.1.12)$$

把此式变成包含时间在内的四维空间中的几何表象，同时再将引力也看成四维的张量场，就可以过渡到广义相对论的引力理论。

但是，上述意义上的运动相对性，与 §1.2 中所叙述的运动学相对性在很多方面有着本质的不同。从运动学的研究出发，只能得到这样非常一般的结论：不管坐标系 I 和 II 相互之间进行怎样的运动，物体的运动完全能用相同的方式来描述。这就意味着，以坐标系 I 及 II 分别定义的同一点的速度为  $v$  及  $v'$ ，在它们之间成立的关系是式(1.2.15)，如果把 I 和 II 所起的作用互换，得到的结果也是形式完全相同的式(1.2.30)；进一步对加速度来说，结论也一样。也就是说，倘若从纯粹运动学的立场来看，直角坐标系完全是等价的。反之，如果根据上述的伽利略相对性，那么只有满足以下严格限制的坐标系，相互才是等价的，即：无论由两个坐标系中的哪一个来看，同一点点的加速度都相同。在这种情况下，另一个重要问题是，作用于质点上的力无论就哪一个坐标系而言都是相同的，亦即式(2.1.8)成立。因此，作为一种力，倒底认为是什么东西呢？这是以下的一个重点讨论的问题。总之，这里所讨论的，不是对一般可能运动所讲的相对性，而是在给出决定着怎样的力作用时会引起怎样的运动的规律，即运动第二定律时的运动的相对性。在这个意义上称它为**动力学的相对性** (dynamical relativity)。

作用一种力，倒底被认为是怎样的东西呢？这个问题的回答，实际上并不容易。即使在作上述运动的船上，假如有风吹动，则在陆地上和航船上，落体的运动也多少会产生差别。纵然在无风的状态下，若增加船速，则因空气的阻力所致，落体的运动和陆地上还是有差别的。不言而喻，设想船行缓慢得几乎能够忽略空气阻力的差别或者在密闭的船舱内让

物体落下的情况,可以说,伽利略相对性是成立的。但是,一般来说,假若把空气或水的阻力,或固体和固体接触时的摩擦也算作力的话,则上述简单形式的运动相对性就不再成立了。总而言之,这是因为,纵然由相互作用匀速运动的两个坐标系中的任何一个来观察,运动方程式左边的加速度都是相同的,但右边的力却不一样。

另外,还有一些问题是,对于所谓的“力”来说,第一,有哪些种类;第二,它们中的哪一些能够在力学中处于对等的地位。关于这些问题,我们打算改在另一节再来讨论。

## § 2.2 超距作用和接触作用

假如我们把运动第二定律明确地表示成式(2.1.1)或(2.1.1')的形式,那么首先还需要唯一地确定力这个物理量的量纲(dimension)。在运动学中,除去空间长度的量纲 $L$ 和时间长度的量纲 $T$ 之外,没有独立的量纲,但是到了力学的阶段,就应该再加上质量的量纲 $M$ 。然而,因为运动方程(2.1.1)或(2.1.1')两边的物理量必须具有相同的量纲,所以力的量纲 $F$ 不是与 $L$ 、 $T$ 、 $M$ 独立的,而应该用下式确定:

$$F = MLT^{-2}. \quad (2.2.1)$$

而且,经典力学建立到现在,一般都认为,作为物理学的总体,独立的物理量量纲只有三种。其理由是,在经典物理学的范围内,空间长度、时间和质量以外的任何物理量都以某种方式和作用于物体上的力相联系,因此,任何一个物理量的量纲都能用关系式(2.2.1)还原成 $L$ 、 $T$ 、 $M$ 的某种组合。比如,假设牛顿万有引力作用在两个质点之间,一个质点在由矢径 $r_1$ 给出的点上,质量为 $m_1$ ,另一个质点在由矢径 $r_2$ 给出的点上,质量为 $m_2$ ,那么质点 $m_2$ 对质点 $m_1$ 的作用力是



$$\mathbf{f}_{12} = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (2.2.2)$$

其中,  $G$  是引力常数. 这样一来, 如果使用式 (2.2.1), 并将式 (2.2.2) 两边的量纲进行比较, 即可知道,  $G$  的量纲  $[G]$  是

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}. \quad (2.2.3)$$

假设长度、时间及质量的单位分别为厘米 (cm)、秒 (sec) 及克 (g), 则  $G$  的实测值是

$$G \approx 6.67 \times 10^{-8} \text{g}^{-1} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{sec}^{-2}. \quad (2.2.4)$$

在第二部分第五章中我们将要详细阐述, 在光和电磁理论中, 电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{H}$  作为一个在狭义经典力学中不曾有的新的基本物理量出现, 它们都和作用于物体上的电磁力有关, 因此, 其量纲也可以象下面那样规定成  $L$ 、 $T$ 、 $M$  的组合. 也就是说, 如果某时刻在点  $\mathbf{r}$  以速度  $\mathbf{v}$  运动的质点  $m$  所带的电荷为  $e$ , 而  $\mathbf{r}$  点的电场为  $\mathbf{E}$ , 磁场为  $\mathbf{H}$ , 那么, 作用于该质点上的洛伦兹 (Lorentz) 力就是

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad (2.2.5)$$

式中,  $c$  是光速. 单由这个表达式并不能决定  $e$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的量纲, 但是如果特别假设分别在位置  $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$  上静止的两个质点  $m_1$ 、 $m_2$ , 各自带着电荷  $e_1$ 、 $e_2$ , 那么  $e_2$  对  $e_1$  作用的库仑 (Coulomb) 力就是

$$\mathbf{f}_{12} = e_1e_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad (2.2.6)$$

由此即可决定电荷  $e$  的量纲  $[e]$ , 它是

$$[e] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}. \quad (2.2.7)$$

倘若给出电荷  $e$  的量纲, 根据式 (2.2.5) 便可以唯一地确定出电场  $\mathbf{E}$  及磁场  $\mathbf{H}$  的量纲.

即使把经典物理学延伸到相对论, 两者也是连结在一起

的，因此， $L$ 、 $T$ 、 $M$  之外的独立量纲就没有出现的余地。虽然在热力学中象温度那样的概念是新出现的，但是，正如本讲座第二卷《经典物理学 II》第五部分和第五卷《统计物理学》中详细论述的那样，假如把热现象归之于为数极多的分子集团的统计力学，则独立的量纲就仍然还是  $L$ 、 $T$ 、 $M$ 。若进入量子论或量子力学，便会出现与经典物理学性质不同的非连续性。不过，作为表征非连续性的普适常数，作用量子 (elementary quantum of action)，即普朗克 (Planck) 常数  $h$  (或狄喇克 (Dirac) 常数  $\hbar = h/2\pi$ ) 本身就是作为一个物理量引入的，它具有与经典力学中称为**作用** (action) 的物理量相同的量纲，后者将在本章最后一节出现，因此，其量纲就是

$$[h] = [\hbar] = ML^2T^{-1}, \quad (2.2.8)$$

其中仍然没有出现  $L$ 、 $T$ 、 $M$  以外的独立量纲。

可以认为，物理世界的各个部分并不是相互独立的，因此，在所谓的宏观世界和微观世界之间，也必然有各种各样的联系，所以上述情况并非不可思议。但是，在通过牛顿运动方程确定出三个独立的量纲之后，不管物理学对象的范围扩充到什么领域，也不管统一描述它们的理论曾经历几次大的变化，具有独立量纲的物理量种类的数目没有超过 3；可以说，这一点倒是个意外。

可能还会有另外一种想法，那就是从与此稍微不同的立场出发，认为象**温度**那样的物理量的量纲是与  $L$ 、 $T$ 、 $M$  独立的。因此，为了将温度与本章后一节出现的**能量** (energy) 那样的力学量联系起来，需要有一个玻耳兹曼 (Boltzmann) 常数  $k$ 。这样一来，玻耳兹曼常数  $k$  本身的量纲，除去  $L$ 、 $T$ 、 $M$  之外，还应该包含着温度的量纲。最初，温度的概念是和冷热的感觉相关联的，由于人们设计出温度计，把温度的上升和下降与液体或气体的膨胀联系起来，因而温度的概念也

就直观化和定量化了。其中被测定的，是液体或气体的膨胀率。特别是，假设体积为  $V$  的容器装入一摩尔理想气体，其压强为  $p$ ，绝对温度为  $T_k$ ，下列理想气体的状态方程：

$$pV = RT_k \quad (2.2.9)$$

成立，所以，若在压强  $p$  一定时测出体积  $V$ ，便可以确定绝对温度  $T_k$ 。因为上式的左边是力学量的乘积，所以不包含  $L$ 、 $T$ 、 $M$  以外的量纲的量。但是，这时在右边出现了气体常数  $R$ 。而且如第二卷第六部分 §18.2 所示，它和玻耳兹曼常数  $k$  是通过下列关系联系在一起的

$$k = \frac{R}{N}. \quad (2.2.10)$$

其中， $N$  是构成一摩尔气体的分子数，即阿伏伽德罗 (Avogadro) 数，它是一个不具有量纲的常数。因此， $R$  的量纲应该与  $k$  的量纲相同，仍然包含温度的量纲。

因而，假如一定不想确认具有  $L$ 、 $T$ 、 $M$  以外的量纲的物理量，就只好经常涉及到乘积  $RT_k$  或  $kT_k$ 。

笔者认为，如上的两种立场都是许可的，没有必要坚持哪一个。

关于物理量的量纲或单位的问题，还有另外一点想要附带说明一下。很久以前，人们便习惯于在物理学中将  $\text{cm}$ 、 $\text{sec}$ 、 $\text{g}$ ，即 CGS 单位制用作空间长度、时间和质量的单位。正因为它比其它稍早一些使用的各种单位制更为合理，所以在物理学中被人们采用。但是，它仍然是由人所决定的一种人为标度的单位制。到了二十世纪，人们已经认识到光速  $c$  和普朗克常数  $h$  是确定自然界结构的非常基本的普适量，而且常常把它们称为**自然单位** (natural unit)。不过，要想用所谓的自然单位制来替换人为的长度、时间、质量的三个单位，如 CGS 单位制，尚需要另外一个普适常数。由式(2.2.7)及(2.2.8)可

以直接知道,基元电荷 (elementary charge)  $e$ , 即电子所带电荷的绝对值, 具有和  $\sqrt{hc}$  相同的量纲, 所以它不能够成为第三个独立的单位. 与此不同, 引力常数  $G$  具有式 (2.2.3) 所示的量纲, 能够成为与  $c$  和  $h$  独立的第三个自然单位. 但是,  $G$  的数值要由式 (2.2.4) 给出, 而  $c$  和  $\hbar = h/2\pi$  的数值分别是

$$c \approx 3 \times 10^{10} \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1} \quad (2.2.11)$$

$$\hbar \approx 10^{-27} \text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}, \quad (2.2.12)$$

所以, 如果将这些普适量进行组合, 分别构成具有长度、时间及质量的量纲的量, 即为:

$$\left. \begin{aligned} l_0 &= \hbar^{1/2} G^{1/2} c^{-3/2} \approx 1.6 \times 10^{-33} \text{cm} \\ t_0 &= \hbar^{1/2} G^{1/2} c^{-5/2} \approx 5 \times 10^{-44} \text{sec} \\ m_0 &= \hbar^{1/2} G^{-1/2} c^{-1/2} \approx 7 \times 10^{-5} \text{g} \end{aligned} \right\}. \quad (2.2.13)$$

其中, 长度的单位  $l_0$  以及时间的单位  $t_0$ , 与量子力学和基本粒子论所研究的微观世界时空尺度相比, 要小得多. 反之, 质量的单位  $m_0$ , 即使与原子的质量相比也大得多, 反倒接近于宏观尺度的质量. 之所以造成这种不协调, 是由于把引力常数  $G$  作为第三个自然单位来使用的缘故. 那么, 什么才是应该代替  $G$  的普适常数呢? 这个问题的答案恐怕要由基本粒子的统一理论给出; 正如本讲座第十卷《基本粒子论》中所讲, 关于这一点尚未得到明确的结论.

在前一节结束时我们曾讨论过, 一般认为在运动第二定律的右边出现的力是各式各样的, 作为对它进行分类的一个方法, 可以考虑把力大致分成超距力和接触力. 牛顿力学中, 万有引力被看作是典型的超距力. 也就是说, 对于在点  $r_1$  处质量为  $m_1$  的质点来说, 与它相隔有限距离的点  $r_2$  处质量为  $m_2$  的质点, 直接受到  $f_{12}$  的作用, 该力由式 (2.2.2) 给出. 某一质点或某一物体, 对于相隔甚远的质点或物体, 直接而又瞬时地给予引力作用; 在这个意义上, 它是**超距作用** (action



at a distance). 反之,当物体 1 和另一物体 2 碰撞时,只有在两者接触的瞬间才相互给以强烈的冲击力,同样,当物体在空气或水中运动时,空气或水与该物体的表面相接触的部分会产生阻力. 可以认为,在这些情况下,力的作用最低限度在宏观上只加在物质的各部分之间,其相互距离被看作无限小. 在这个意义上,人们用接触力或**接触作用** (Nahewirkung) 来表示它. 但需要注意的是,此处“作用”(action) 这个术语,是在与下一节将要出现的作用,在使用上,意义是完全不一样的,后者是与上述作用量子  $h$  具有相同量纲的物理量.

在牛顿发现万有引力的反平方定律时,当时笛卡儿学派的以太理论影响甚大,许多人相信,借助于对碰撞时作用的冲击力和物体在空气或水中运动时产生的阻力所做的类推,可以把所有的力都还原成接触力. 莱布尼兹(Leibniz)反对牛顿力学的主要理由也在于,万有引力是超距力. 牛顿本人并没有否定笛卡儿学派的以太理论,而且还以它为立足点,试图将万有引力还原成接触作用,但是却没有成功. 因此,牛顿学派的人就坚持了直接认定万有引力为超距作用的立场,而且,甚至到了二十世纪,在根据爱因斯坦广义相对论所产生的作为接触作用的引力场理论出现之前,这种观点仍然是独一无二的. 我们准备到第二卷第三部分再详细叙述爱因斯坦的引力理论,在这里只想指出一点,那就是,一旦否定了经典的以太理论之后,引力理论就是新创立的接触作用理论.

电磁力是与引力并列的,它可以看作是自然界固有的一种基本力. 关于这种力,情况颇有不同. 这就是说,库仑力式(2.2.6)较洛伦兹力式(2.2.5)更先为人们所知,前者是电荷  $e_2$  加于相隔有限距离的电荷  $e_1$  上的超距作用,后者则是以电磁场为媒介的接触力. 正如在第二部分第五章中将要详细叙述的那样,在此之后,麦克斯韦(Maxwell)和洛伦兹创立了经

典电动力学,这意味着,它将超距作用的电磁力理论,还原成了以以太中的电磁场为媒介的接触作用理论。第二卷第三部分将要详细叙述,虽然在爱因斯坦的狭义相对论中以太遭到了否定,但是电磁力的接触作用的性质却原封不动地由麦克斯韦和洛伦兹那里承袭下来,而且还进一步发展成了其引力场的理论。

象这样,超距作用和接触作用的问题,在牛顿力学创立之后走过了迂迴曲折的道路。但是,在与第一章及本章所讨论的宏观物体的运动,以及第三章所处理的作为连续物质的弹性体或流体的运动有关的狭义经典力学中,是可以把超距力和接触力两个方面同时考虑的。而且,在电磁力除外的范围内,上面所举的例子,不管是超距力,还是接触力,全部都是作用于具有质量的物体之间的力,或者更广泛一些,是作用于物质各个部分之间的力。就那些力而言,我们可以认为,**运动第三定律**即作用反作用定律总是成立的。按照牛顿本人的表述,这也就是说,反作用总是与作用方向相反,大小相等的,或者,两个物体的相互作用总是大小相等而方向正好相反。

可以认为,此处使用的“作用”这个术语,不用说指的就是力,但在本章最后一节将要阐述的分析力学中,“作用”这个物理量的定义却是不同的。在那里将会看到,**相互作用**(interaction)这个更为抽象的概念会变得重要起来,第三定律则内含在这个概念之中。而且,如果深入到量子力学和基本粒子论,相互作用的概念就要比力的概念具有更基本的意义。

假如把第三定律应用于万有引力,则点  $r_1$  处质量为  $m_1$  的质点给予点  $r_2$  处质量为  $m_2$  的质点的力  $f_{21}$ , 与  $m_2$  给予  $m_1$  的力  $f_{12}$  应该大小相等而方向相反,由式(2.2.2)可知

$$f_{21} = -f_{12} = -Gm_1m_2 \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3}. \quad (2.2.14)$$

但是，这样做只是把质点  $m_1$  和质点  $m_2$  的所处地位互换了一下，所以它不过是一种必然的结果而已。

更一般地来说，假设质量为  $m_1, m_2$  的两个质点，相互之间只有满足第三定律的力  $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$  在作用，而没有任何外力作用，那么，通过把它们的运动方程

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} &= \mathbf{f}_{12} \\ m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \mathbf{f}_{21} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.15)$$

的两边分别相加，即可得出

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = 0. \quad (2.2.16)$$

其中， $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$ ， $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}_2/dt$  分别表示质点  $m_1$  及  $m_2$  的速度。因为  $\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1$ ， $\mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_2$  各自是质点  $m_1$  及  $m_2$  的动量，所以式 (2.2.16) 表明总动量  $\mathbf{P}$  不随时间变化，也就是说，**动量守恒定律** 成立。这里的总动量  $\mathbf{P}$  是

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \quad (2.2.17)$$

如果我们引进矢径  $\mathbf{R}$  来表示由质点  $m_1, m_2$  构成的系统 (system) 的**质心**位置

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.2.18)$$

再引进质心的速度  $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$ ，则有

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}, \quad (2.2.19)$$

式 (2.2.16) 也就可以写成

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0. \quad (2.2.20)$$

其中  $M = m_1 + m_2$  表示该系统的总质量。只要没有**外力** (external force) 作用在系统上，也就是说，如果只有该系统质点之间作用的**内力** (internal force) 存在，那么，式 (2.2.20) 就

表示系统的质心继续作匀速直线运动。实际上，两个可以看作质点的物体，在碰撞前后总动量是不变的，因此，质心保持匀速运动。这个结论为许多经验事实所证实。而且，反过来看，我们也可以认为，第三定律反映出作用于物体之间的力应该满足的一般性质，而不管这种力是超距力还是接触力。

其次，如果将运动方程 (2.2.15) 的第一式及第二式的两边分别乘以  $m_2$ 、 $m_1$ ，然后相减，那么我们即可得到下列关于相对坐标  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  的运动方程

$$\mu \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}, \quad (2.2.21)$$

式中  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  是相对速度， $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$ ，而

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.2.22)$$

则称为折合质量 (reduced mass)。

以上的讨论很容易推广到由质量各自为  $m_1, m_2, \dots, m_n$  的  $n$  个质点组成的系统。也就是说，假若分别用下式中的  $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{P}$  来定义该系统的质心位置、质心速度及总动量

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j}{\sum_{j=1}^n m_j} \\ \mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} \\ \mathbf{P} &= M\mathbf{V} \left( M = \sum_{j=1}^n m_j \right) \end{aligned} \right\}, \quad (2.2.23)$$

则在只有内力作用的情况下，我们就可以再次得到与式 (2.2.20) 形式相同的关系式，即总动量  $\mathbf{P}$  的守恒定律。这是因为，可以将作用于第  $j$  个质点 ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 上的力



$\mathbf{f}_j$  分解成内力  $\mathbf{f}_j^{(in)}$  和外力  $\mathbf{f}_j^{(ex)}$ :

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_j^{(in)} + \mathbf{f}_j^{(ex)}, \quad (2.2.24)$$

而内力又可以再次分解成

$$\mathbf{f}_j^{(in)} = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^n \mathbf{f}_{jk}. \quad (2.2.25)$$

其中,  $\mathbf{f}_{jk}$  是第  $k$  个质点作用于第  $j$  个质点上的力. 因此, 如果把式(2.2.24)及(2.2.25)代入该系统的运动方程

$$m_j \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2} = \mathbf{f}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.2.26)$$

的右边, 并分别在两边由 1 到  $n$  对  $j$  求和, 设外力  $\mathbf{f}_j^{(ex)}$  全部为零, 考虑到对于内力来说下式所示的第三定律成立,

$$\mathbf{f}_{jk} = -\mathbf{f}_{kj} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n; j \neq k) \quad (2.2.27)$$

则有

$$\sum_{j=1}^n m_j \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2} = 0. \quad (2.2.28)$$

根据式 (2.2.23), 左边等于总动量  $\mathbf{P}$  的时间导数, 所以式 (2.2.28) 与 (2.2.20) 的形式相同, 是表示总动量守恒的关系式.

由以上的研究可知, 把作用于某质点上的力的哪一部分看作内力, 哪一部分看作外力, 这同如何选择包含该质点的体系有关. 一般来说, 随着质点系中质点数的增加, 外力的更多部分则转入内力之中. 那么, 把这个质点系继续扩大下去的前景是什么呢? 关于这个问题, 我们准备在下一节再来讨论.

### § 2.3 旋转运动和惯性力

在本章的 §2.1 及 §2.2 中, 我们是借助牛顿的三个运动定律能以最简单形式成立的那种坐标系来描述运动的. 如果由

这样的坐标系来看,第一定律,即惯性定律成立.因此,我们可以把这种坐标系叫做**惯性系** (inertial system). 如 §2.1 中所述,假如最初选定的坐标系 I 是惯性系,则相对于它向一定方向以一定速度平动的坐标系 II 也成为惯性系.例如,在上一节结束时曾研究过,如果在由  $n$  个质点构成的系统上无外力作用,而且最初选定的坐标系 I 是惯性系,在其中运动方程 (2.2.26) 成立,那么质心的速度  $\mathbf{V}$  就是一定的.这样一来,以质心为原点、相对于坐标系 I 以速度  $\mathbf{V}$  平动的坐标系 II 也成为惯性系.从这个坐标系 II 来观察,质点系的质心总是静止在  $O$  点上,所以我们把 II 叫做**质心静止系**.

特别是当作用于质点之间的力是满足下述条件的**中心力** (central force) 时,不仅就质点系整体上的平动而言,而且就转动而言,有一种守恒定律成立.为了证明这一点,我们首先由表示第  $j$  个质点位置的矢径  $\mathbf{r}_j$  和它的动量  $\mathbf{p}_j = m_j d\mathbf{r}_j/dt$  来构成矢积

$$\boldsymbol{\mu}_j = [\mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j]. \quad (2.3.1)$$

这是一个物理量,它叫做该质点对于坐标系 I 的原点  $O$  的**动量矩** (moment of momentum) 或**角动量** (angular momentum). 若将式 (2.3.1) 的两边对时间求导数,首先就可以得到

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}_j}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} \times \mathbf{p}_j \right] + \left[ \mathbf{r}_j \times \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \right], \quad (2.3.2)$$

根据定义,  $\mathbf{p}_j$  是与  $d\mathbf{r}_j/dt$  方向相同的矢量,所以右边的第一项为零.如果再将运动方程 (2.2.26) 用于第二项,则有

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}_j}{dt} = [\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j] \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.3.3)$$

此式表示,动量矩随时间变化率等于**力矩** (moment of force).

我们现在所考虑的,是由  $n$  个质点构成的系统,其任何一点上都没有外力  $\mathbf{f}_j^{(ex)}$  作用的情况,所以,如果把式 (2.3.3) 的

两边分别对  $j$  由 1 到  $n$  求和,并考虑到式(2.2.24)及(2.2.25), 则可得出

$$\sum_{j=1}^n \frac{d\boldsymbol{\mu}_j}{dt} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ (k>j)}}^n [(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{f}_{jk}]. \quad (2.3.4)$$

其中假设, 这时右边对  $j$  和  $k$  的求和  $\Sigma$ , 是在  $k > j$  的条件下限制的。

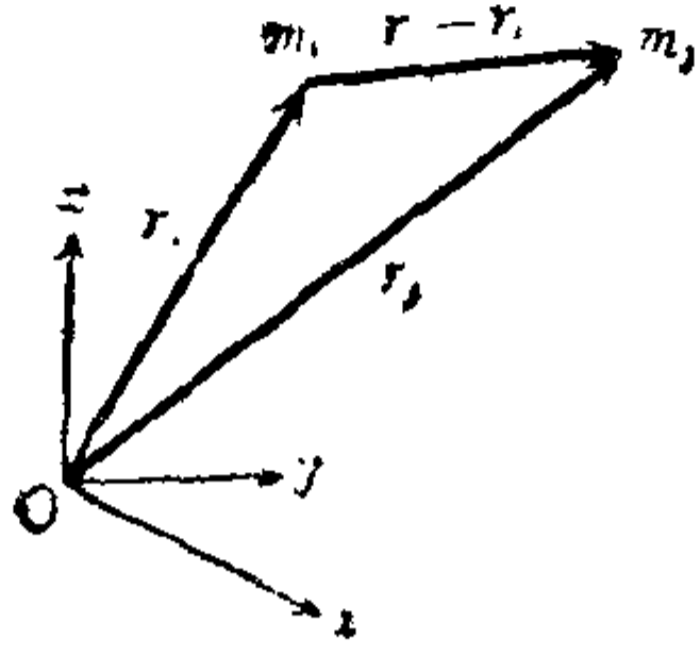


图 2.1

如图 2.1 所示, 在第  $k$  个质点作用于第  $j$  个质点上的力  $\mathbf{f}_{jk}$  的方向与连结两者的直线的方向, 即矢量  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$  的方向相一致, 或者正好相反的情况下, 该力被称为**内力**。

当  $\mathbf{f}_{jk}$  与  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$  的方向一致时, 它是斥力, 当方向相反时, 它是引力。总之, 若只有内力作用, 式(2.3.4)的右边各项便都为零, 所以, 如果用下式来定义该系统的总角动量

$$\mathbf{m} = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\mu}_j, \quad (2.3.5)$$

则有

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = 0 \quad (2.3.6)$$

的关系成立。此式表明, 当质点之间只有内力作用, 而无外力作用时, 系统的总角动量  $\mathbf{m}$  不随时间变化。也就是说, **角动量守恒定律**成立。

$\mathbf{r}_i$  是由坐标系 I 来看的矢径,  $\mathbf{r}'_i$  是由选作坐标系 II 的质心静止系来看的矢径, 在它们之间有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}'_i &= \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \\ \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - \mathbf{V} \end{aligned} \right\}, \quad (2.3.7)$$

不用说,在质心静止系中质心的矢径是

$$\mathbf{R}' = \frac{\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j}{\sum_{j=1}^n m_j} = \frac{\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j}{\sum_{j=1}^n m_j} - \mathbf{R} = 0. \quad (2.3.8)$$

这样一来,就质心静止系而言,各质点的角动量用下式来定义

$$\boldsymbol{\mu}'_j = \left[ \mathbf{r}'_j \times m_j \frac{d\mathbf{r}'_j}{dt} \right] \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.3.9)$$

总角动量是

$$\mathbf{m}' = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\mu}'_j. \quad (2.3.10)$$

如果将式(2.3.7)代入上式的右边,我们就可以得到

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' + [\mathbf{R} \times \mathbf{P}]. \quad (2.3.11)$$

此式右边第二项,不外乎是由坐标系 I 所看到的质心的角动量,也就是在认为质点系的全部质量  $M$  集中于质心  $\mathbf{R}$  上,并以速度  $\mathbf{V}$  运动时的角动量. 因此,式(2.3.11)表示,对坐标系 I 的原点来说的总角动量  $\mathbf{m}$ , 是质心的角动量与由质心静止系来看的总角动量  $\mathbf{m}'$  之和.

若将式(2.3.11)的两边再对时间求导数,那么根据式(2.3.6)及(2.2.20),即可得到

$$\frac{d\mathbf{m}'}{dt} = 0. \quad (2.3.12)$$

也就是说,即使在质心静止系中总角动量的守恒定律也是成立的.

在下述意义上,能够将以上的研究应用于太阳系. 也就是说,太阳、地球及其它行星,以至于包括月球等卫星在内的各天体间的距离,远远大于这些天体的半径,所以,只要不涉及到各天体的自转,我们就可以把太阳系看作质点系. 这样



一来,作用于天体之间的引力就是稜力,因而总动量守恒定律就对于质心静止系成立.可是,因为太阳的质量远远大于其它行星和卫星的质量,所以太阳的位置非常接近于太阳系的质心位置;由质心静止系来观察,它的速度也是很小的.因此,以太阳为静止中心的坐标系,即太阳静止系,与质心静止系几乎没有什么差别.但是,如果最初选定的坐标系(我们将它称为坐标系 II)不是惯性坐标系,而且其原点  $O'$  对于一个惯性坐标系(我们将它称为坐标系 I)以速度  $\mathbf{V}$  运动;同时,固定在 II 上的一组正交的单位矢量  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  相对于固定在 I 上的一组单位矢量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  以角速度  $\omega$  旋转,那么,如 §2.1 所述,由坐标系 II 来观察的质点运动方程就变成式(2.1.5)那样的形式. 该方程左边的量全部是用由坐标系 II 来看的矢径  $\mathbf{r}'$ 、速度  $\mathbf{v}'$  等来表示的,与此相反,右边的力  $\mathbf{f}$  仍以坐标系 I 为基准.

因此,倘若研究由  $n$  个质点组成的系统,特别是限定在质点间只有与相对位置有关的力作用而无外力作用时,第  $j$  个质点在坐标系 II 中的位置矢量  $\mathbf{r}'_j$ ,和在坐标系 I 中的位置矢量  $\mathbf{r}_j$  之间,有下列关系:

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_j. \quad (2.3.13)$$

其中,  $\mathbf{R}$  是 II 的坐标原点  $O'$  在 I 中的位置矢量. 这样一来,第  $j$  个质点对第  $k$  个质点的相对位置矢量就变成

$$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k = \mathbf{r}'_j - \mathbf{r}'_k, \quad (2.3.14)$$

不管是在坐标系 I 中,还是在坐标系 II 中,写法都是一样的. 因此,当只有与质点的相对位置有关的力作用时,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}'. \quad (2.3.15)$$

也就是说,在这种情况下,由 I 来看也好,由 II 来看也好,力都具有相同的方向和相同的大小,而且还能用相对坐标的相同函数来表示. 这时,若考虑到式(2.3.15),则由坐标系 II 来

看,各质点的运动方程就能够根据式(2.1.5)而写成:

$$\begin{aligned}
 m_j \left( \frac{d\mathbf{v}'_j}{dt} \right)' &= \mathbf{f}'_j - m_j \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\
 &\quad - m_j \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'_j \right] - 2m_j [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_j] \\
 &\quad - m_j [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_j]] \quad (j = 1, 2, \dots, n).
 \end{aligned}
 \tag{2.3.16}$$

除去原点  $O'$  对坐标系 I 的加速度  $d\mathbf{V}/dt$ 、II 的坐标轴对 I 的旋转角速度  $\boldsymbol{\omega}$  以及角加速度  $d\boldsymbol{\omega}/dt$  之外,此式的两边全部都是用与坐标系 II 有关的量表示的. 如 §1.2 所述,我们也能够使用 I 的原点  $O$  对坐标系 II 的加速度  $(d\mathbf{V}'/dt)'$ 、I 的坐标轴对 II 的旋转角速度  $\boldsymbol{\omega}'$  以及角加速度  $(d\boldsymbol{\omega}'/dt)'$  来改写  $d\mathbf{V}/dt$ 、 $\boldsymbol{\omega}$  和  $d\boldsymbol{\omega}/dt$ . 如果把这个结果和从看作惯性系的坐标系 I 来观察时的运动方程

$$m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \mathbf{f}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{2.3.17}$$

进行比较,则可以看到二者在许多方面都是不同的. 首先,右边第二项的得出,是由于坐标系 II 的原点  $O'$  对坐标系 I 在作加速运动. 相应地,第三项、第四项、第五项之中无论哪一个的得出,都是由于 II 的坐标轴相对于 I 的坐标轴在进行旋转. 它们都不是真正作用在质点间的力,因此也就不是能够应用运动第三定律、即作用-反作用定律的那种力;在这个意义上,可以看成是表观力. 在运动方程式右边不会出现这种表观力的那种坐标系,即所谓惯性系. 也可以说,某一个坐标系是否是惯性系要依是否出现表观力而定. 在这个意义上,牛顿认为旋转运动就是绝对运动. 如下节所示,就太阳系而言,把质心静止系或太阳静止系看作惯性系,求解运动方程,便能够推导出开普勒 (Kepler) 的三个定律,即关于行星运动的

经验定律。可以认为这是一个证据，证明太阳系这个质心静止系或太阳静止系，在相当好的近似程度上是一个惯性系。

在这些表观力之中，式(2.3.16)右边的第四项及第五项分别是 §1.2 曾讲过的科里奥利加速度及向心加速度乘以质量并改变符号而得到的。前者叫做**科里奥利力**，后者叫做**离心力**。我们人类居住在地球上，以固定在地球上的坐标系为基准，研究了天体和地面上物体的运动。而包括太阳、行星和太阳系以外的恒星在内，所有的星球一昼夜之间绕地球旋转一周；在承认这一经验事实的基础上，人们还试图借助于托勒玫 (Ptolemaios) 学派的正圆来说明太阳和行星（相对于恒星系的）那种运动，乍一看起来是不规则的运动，但通过进一步长期的精密观测发现是一种规则运动。到了十七世纪，这种天动说完全为地动说所代替，为此首先必须承认地球的**自转**。这意味着，从牛顿力学的立场来看，固定在地球上的坐标系并不是

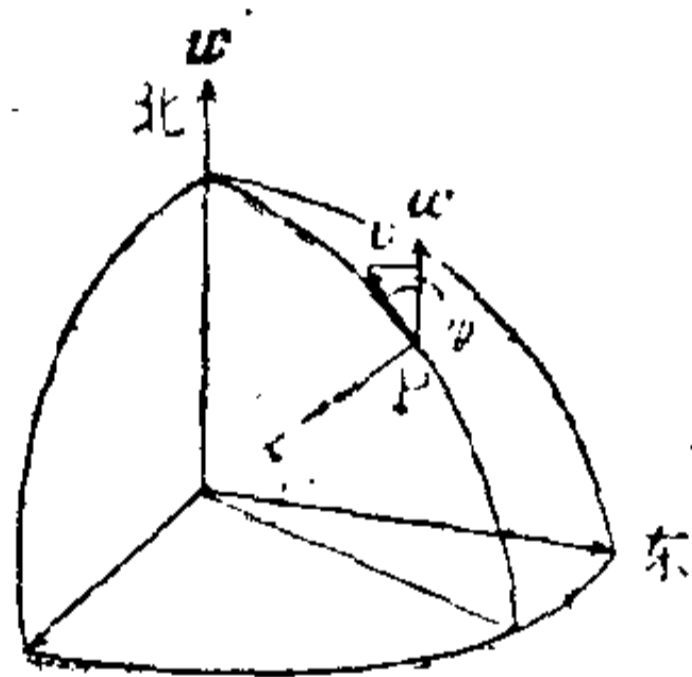


图 2.2

是惯性系，而是相对于惯性系以一定角速度  $\omega$  旋转的坐标系。这不外乎就是说，倘若以固定在地球上的坐标系为基准来表示天体及地上物体的运动定律，则在运动方程的右边，除了重力那样真实的力之外，还需要加上离心力和科里奥利力那样的表观力。因为科里奥利力是  $-2m[\omega \times v]$ ，所以，如图 2.2 所示，若在北纬  $\phi$  的地方  $P$ ，向北以初速  $v$  水平抛出质量为  $m$  的物体，则大小为  $2m\omega v \sin \phi$  的科里奥利力应该在由西向东的方向上作用。因此，该物体的运动就偏离正北方向，稍微向东。反之，向南抛出的物体的运动，应该向西偏移。如果把该物体用细线吊起来，并使它开始时在南北方向振动，那么，振动平面就

会按顺时针方向慢慢旋转。这就是所谓的傅科 (Foucault) 摆的现象。根据详细计算的结果,可以证明它的旋转角速度为  $\omega \sin \phi$ 。因为地球自转的周期  $T = 2\pi/\omega$  是二十四小时,所以,与角速度  $\omega \sin \phi$  相对应,摆的振动面旋转周期  $T'$  就是  $T/\sin \phi$  小时。例如,在北纬30度的地方,  $\sin \phi = 1/2$ ,  $T'$  就是四十八小时。这种缓慢的旋转运动,长期以来为人们所忽视。到了十九世纪中叶,它才被傅科发现,并且成了地球自转的一个证据。但是,在今天人们一般都知道,如果从地球上观察,人造卫星的轨道面与地球自转相反,总是一次又一次往西落在后面。这是使人们更容易了解地球自转的一个证据。可是,另一方面,我们又说乘坐宇宙飞船的人处于失重状态,这种说法是建立在重力被离心力所抵消的观点上的,而它还与我们的实际感觉很好地相吻合。正如本讲座第二卷《经典物理学 II》§18.4 中在“惯性系和绝对运动”的标题下稍微详细论述的那样,在这个意义上,马赫 (Mach) 认为不应该区别真实力和表观力的那种观点,也有一定的道理。

不用说,在由天动说向地动说过渡的决定性阶段,由于考虑到地球及其它行星相对于太阳的公转,就能够借助于开普勒三定律来说明从地球上观察到的太阳和其它行星运动的不规则性。进一步,由牛顿的运动定律和引力定律推导出开普勒定律,从而使这个过渡得以最后完成。关于这一点,我们打算放在下一节再来讨论。

最后,我们还想附带说明一下由牛顿力学的立场出发对时间问题所给出的答案。在钟表发明之前,从地球上观察到的太阳、月球或整个恒星系的周期运动,是表示时间流逝的客观标准。它是表达天文时间的天然钟表。可以认为,它们的运动周期提供了象1年、1月、1天那样的时间长度。钟表发明之后,起初也认为,所显示的时刻与天文时刻很好相符的钟



表,是比较准确的钟表。但是,随着天文观测的日益精确化,太阳和月球表观运动的不规性问题开始出现。而且,自从牛顿力学创立之后,人们知道,确定什么是正确的时间,这个问题的最终依据只有运动定律。之所以能使人类最初所制造的钟表至少是近似地与天文时钟同步,是因为地上的各种物体和天体都遵循着相同的运动定律。倘若这样来考虑的话,那么所谓的准确时间,不外乎就是选择得使运动定律,特别是使第二定律具有式(2.1.1')那样的简单形式的时间 $t$ 。看上去这似乎是一种循环的论证法。但是,问题并非如此,我们应该认为,牛顿力学是时间、空间、运动,力等概念以运动定律为中心,作为一个整体组合而成的一个数学体系。因此,时间的概念也并不是和其它各种概念及运动定律独立的概念。今天,我们都清楚地了解到,牛顿的时间概念,与其它理论体系(如相对论)中的时间概念是有所不同的。

## § 2.4 开普勒三定律

为了推导出关于行星运动的开普勒三定律,有必要作如下近似。首先,因为太阳、行星以及卫星之间的距离大于它们的半径,所以把它们全部看成质点。但是,尽管如此,在这许多质点之间分别有引力作用的情况下,求解整个质点系的运动方程也是相当困难的。因此,我们打算进一步只着眼于太阳与某一个行星的相对运动,并把它同其它行星和卫星分离开来。这就意味着将多体问题近似地当作二体问题来处理。如下所述,其依据在于,太阳的质量远远大于其它任何一个行星的质量。我们来考虑作为行星之一——我们的地球,设它的质量、矢径、速度分别为 $m_1$ 、 $r_1$ 、 $v_1$ 。如果再设太阳的质量、矢径、速度各自为 $m_2$ 、 $r_2$ 、 $v_2$ ,地球对太阳的相对坐标矢量及相对速度为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \end{aligned} \right\}, \quad (2.4.1)$$

那么,太阳给予地球的引力就是

$$\mathbf{f}_{12} = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.4.2)$$

而地球给予太阳的引力则是

$$\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}, \quad (2.4.3)$$

所以,倘若在 §2.2 的二体系运动方程(2.2.15)的两边分别乘以  $m_2$ 、 $m_1$ , 然后相减,我们就可以得到

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (2.4.4)$$

式中,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{12}$ ,

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.4.5)$$

是折合质量. 在现在这种情况下,因  $m_2$  远远大于  $m_1$ , 故  $m$  与地球质量  $m_1$  几乎没有差别. 对于地球及太阳来说,分别还有来自其它行星和卫星的引力在作用,但就地球而言,那些力和太阳所产生的引力相比是很小的,所以可以忽略不计. 就太阳而言,其本身的质量很大,从而由引力所引起的加速度就很小,因此可以说,太阳近似地作匀速直线运动. 鉴于同样的理由,我们可以说,太阳的位置总接近于太阳系的质心位置,所以可以近似地认为它和质心一起作匀速直线运动. 如果再深入一步讨论,则太阳系的质心、太阳和地球的质心以及太阳本身这三者的位置应略有不同,但是,因为上述的种种理由,我们可以预料,只要把太阳和地球从其它行星分离出来,当作一个二体系处理,就能够在非常好的近似程度上再现它们在整个太阳系中的运动.

运动方程(2.4.4)右边的力  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{12}$  由式(2.4.2)给出,它是

一种转矩力,所以,对于角动量

$$\boldsymbol{\mu} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}], \quad (2.4.6)$$

下列守恒定律成立:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = 0. \quad (2.4.7)$$

其中,

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\mathbf{v}. \quad (2.4.8)$$

由此得出的第一个结论是,地球相对于太阳的运动,总是平面运动. 其原因在于,角动量  $\boldsymbol{\mu}$  的方向是一定的,从而,根据定义式(2.4.6),它应该垂直于某一时刻  $t = t_0$  的矢径  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  和同一时刻的动量  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$  (或速度  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ ) 所构成的平面. 其中不包括  $\mathbf{v}_0$  的方向和  $\mathbf{r}_0$  的方向相同或相反的情况. 实际上,在那样的情况下,  $\boldsymbol{\mu}$  亦成零,所以速度  $\mathbf{v}$  的方向也总是

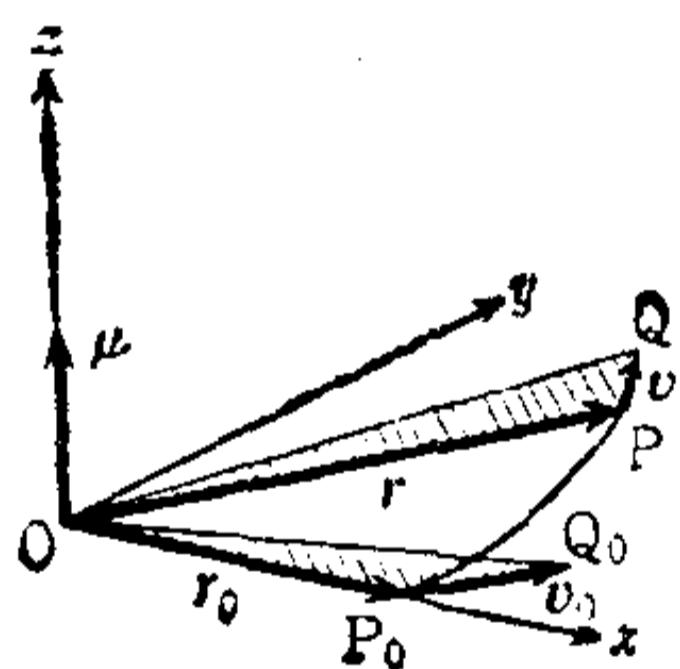


图 2.3

和  $\mathbf{r}$  的方向相同或相反,而且  $\mathbf{r}$  的方向不变,仅仅随着时间伸长或缩短. 如图 2.3 所示,对于除此以外的情况来说,在任意时刻  $t$ ,由  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{v}$  所构成的平面,是通过原点  $O$  并垂直于  $\boldsymbol{\mu}$  的平面,它与  $\mathbf{r}_0$  和  $\mathbf{v}_0$  所构成的平面是相同的. 因此,在时刻  $t_0$  到  $t$  之间,地

球应该在这个平面内的某一轨道上由点  $P_0$  移动到点  $P$ .

第二个结论是:矢径  $\mathbf{r}$  所扫过的面速度是一定的. 也就是说,  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{v}$  的矢积  $[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]$ ,其大小等于它们所构成的平行四边形的面积,其方向与  $\boldsymbol{\mu}$  相同. 因此,如果考虑矢量

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}], \quad (2.4.9)$$

则其大小等于图 2.3 中所示的三角形  $OPQ$  的面积,方向与  $\boldsymbol{\mu}$

一致，而且它与面积除以时间的量有相同的量纲，所以把  $S$  叫做**面速度** (areal velocity)。这样一来，从角动量守恒定律式(2.4.7)，我们即可得到面速度守恒定律，即

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (2.4.10)$$

而且，图 2.3 中三角形  $OPQ$  的面积应该等于  $OP_0Q_0$  的面积。这就是开普勒第一定律。

倘若两个质点之间的作用力是**径向力**，则这些结论在任何时候都是成立的，如果我们讨论的仅仅是引力，而且还引入如图 2.3 所示的直角坐标系  $Oxyz$ ，取  $\mu$  的方向为  $z$  轴， $r_0$  的方向为  $x$  轴，那么，运动方程(2.4.4)的三个分量式就是

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{Gm_1m_2x}{\rho^3} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{Gm_1m_2y}{\rho^3} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.4.11)$$

其中

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.4.12)$$

由  $z$  分量的运动方程可以得到这样的结论：一般来说， $z$  方向的速度  $dz/dt$  是一定的；特别是在上面所选择的坐标系中，矢径  $r$  总在  $xy$  平面上，所以  $z = 0$ 、 $dz/dt = 0$  总是成立的。

其次，如果引入柱坐标

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \right\}, \quad (2.4.13)$$

则面速度的大小就变成

$$S = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad (2.4.14)$$



从式(2.4.11)的第一式和第二式,可以很容易地证明

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (2.4.15)$$

另外,如果引进下列两个量

$$T = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \quad (2.4.16)$$

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{\rho}, \quad (2.4.17)$$

则将运动方程(2.4.11)的  $x$ 、 $y$  分量式两边分别乘以  $dx/dt$ 、 $dy/dt$ , 然后相加,即可得到

$$\frac{d}{dt} (T + V) = 0. \quad (2.4.18)$$

这里的  $T$  及  $V$  后面可以作更为一般定义,在特殊情况就是**动能** (kinetic energy) 及**位能** (potential energy); 在现在的情况下,式(2.4.18)表示能量守恒定律.

因此,如果将式(2.4.16)的右边变换到式(2.4.13)所定义的柱坐标中,则有

$$T = \frac{1}{2} m \left\{ \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\}, \quad (2.4.19)$$

由式(2.4.18)可知

$$T + V = \frac{1}{2} m \left\{ \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} - \frac{Gm_1m_2}{\rho} = E. \quad (2.4.20)$$

其中,  $E$  是与时间无关的一个常数,它表示相对运动的能量. 角度  $\theta$  沿着质点  $P$  所描绘的轨道变化,它随时刻  $t$  的变化由关系式(2.4.14)给出,该式左边的  $S$  是一定的. 因此,就  $\rho$  沿着轨道的变化而言,下式成立,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{2S}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta}. \quad (2.4.21)$$

将式(2.4.14)及(2.4.21)代入式(2.4.20),则有

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{2m} \frac{\rho^4}{S^2} \left( E + \frac{Gm_1m_2}{\rho} - \frac{2mS^2}{\rho^2} \right). \quad (2.4.22)$$

假如取此式两边的平方根,再进行一次积分,就能够推导出 $\rho$ 和 $\theta$ 的关系. 其详细计算过程,一般的力学教科书中都有,所以我们把它略去而只写出结果,

$$\rho = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (2.4.23)$$

式中,

$$l = \frac{4S^2}{G(m_1 + m_2)}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{8ES^2}{G^2(m_1 + m_2)^2}}. \quad (2.4.24)$$

$\theta_0$  是积分常数.

如果我们特别考虑能量 $E$ 为负的情况,则 $\varepsilon$ 就要小于1,这时式(2.4.23)给出的 $\rho$ 应该在 $\theta = \theta_0$ 取极小值,而在 $\theta = \theta_0 + \pi$ 取极大值. 也就是说,地球到太阳的距离 $\rho$ 决不会无限增大,亦不会无限减小,而是作周期性的变化,所以轨道变成封闭曲线. 众所周知,在这种情况下,式(2.4.23)是以地球和太阳的质心(可以认为它近似地在和太阳相同的位置上)为一个焦点的椭圆方程. 因此, $E < 0$ 时的关系式(2.4.23)不外乎就是开普勒第二定律. 如图2.4所示, $\varepsilon$ 是椭圆的偏心率,

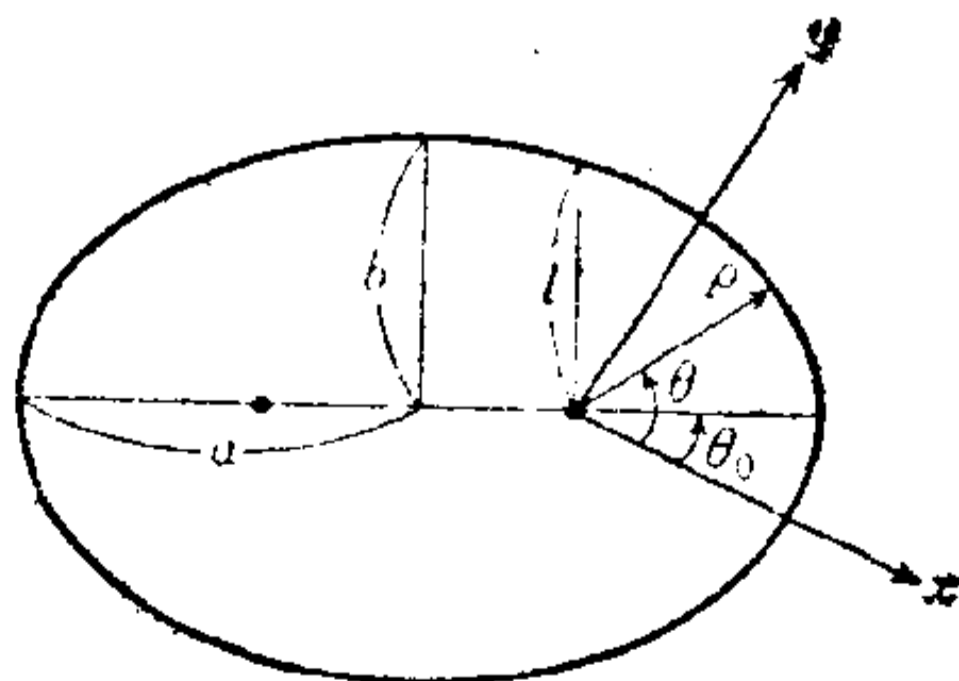


图 2.4

与  $\theta = \theta_0$  对应的点叫做近日点。另外,  $l$  是与角度  $\theta = \theta_0 + \pi/2$  对应的  $\rho$ ; 设椭圆的长半轴为  $a$ 、短半轴为  $b$ , 则有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} l &= a(1 - \varepsilon^2) \\ b &= a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \end{aligned} \right\}, \quad (2.4.25)$$

在  $\varepsilon = 0$  的特殊情况下, 轨道变成半径为  $l$  的圆。

在式 (2.4.24) 的  $l$  的表达式中,  $S$  表示面速度的大小, 假设在圆轨道的情况下沿着圆周方向的速率为  $v$ , 则有

$$S = \frac{1}{2}lv. \quad (2.4.26)$$

将它代入式 (2.4.24) 第一式的右边, 就可得到

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{l^2} = \frac{v^2}{l}. \quad (2.4.27)$$

在上式中, 如果与太阳的质量  $m_2$  相比之下, 我们忽略掉地球的质量  $m_1$ , 并在两边乘以  $m_1$ , 则有

$$\frac{Gm_1m_2}{l^2} = \frac{m_1v^2}{l}. \quad (2.4.28)$$

我们可以这样来解释: 由于左边的引力和右边的离心力保持平衡, 所以这个关系式表示地球维持圆运动。因为地球的实际轨道接近于圆, 所以它相对于太阳的公转周期, 近似地由下式给出,

$$T = \frac{2\pi l}{v}. \quad (2.4.29)$$

另外, 使用式 (2.4.28) 消去式中的  $v$ , 就可以得到

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_2} l^3. \quad (2.4.30)$$

若把与此相同的讨论推广到其它行星和太阳的相对运动, 则在圆运动的周期和圆轨道的半径之间, 可以得出与式 (2.4.30) 相同的 关系, 而在其中只包含着太阳的质量  $m_2$ , 与行星的质

量无关。因此，式(2.4.30)表示着这样的关系：行星轨道运动周期  $T$  的平方与轨道半径  $l$  的立方成正比。以上的讨论可以推广到一般的椭圆轨道，但是那时必须用椭圆的长半轴来代替圆半径。这样一来，它就成为开普勒第三定律。

包括地球在内，行星都在偏心率  $\varepsilon$  不大的椭圆轨道上作公转，与此相反，偏心率非常大的是彗星。但是，无论在哪一种情况下，总能量  $E$  都是负的。也就是说，动能总是小于引力能的绝对值，因此，即使设想到了速度成为零的地方，有限大小的引力也仍然起着作用，行星不会跑到更远的地方去。

反之，当总能量  $E$  为正时，式(2.4.24)所定义的偏心率  $\varepsilon$  就比 1 大。与此同时，式(2.4.23)给出的距离  $\rho$ ，在角度  $\theta$  满足下列条件的地方变化无限大

$$\cos(\theta - \theta_0) = -\frac{1}{\varepsilon},$$

即轨道延伸到无限远处。很容易就可以证明，这时的轨道变成了双曲线。作为一个特殊情况，如果总能量  $E$  为零，则偏心率  $\varepsilon$  为 1，这时轨道仍然伸向无限远处，变成抛物线。但是，在太阳系的范围内，这些情况基本上不予考虑。

然而，在分子和原子的世界中，总能量为正的情况，和为负的情况一样，也是非常重要的。这正如本讲座第二卷《经典物理学 II》第五部分及第五卷《统计物理学》中所详述的那样，气体分子运动论认为，分子之间的距离平均来说远远大于分子本身的大小，也远远大于分子彼此间的作用力所达到的距离。这样一来，某一个分子时常与另外的分子相碰撞，从而改变运动的方向和速度，但在此外的大部分时间内却在进行匀速直线运动。这是因为，在由其它分子给予的力所产生的位能可以忽略不计的地方，总能量等于动能，所以它当然是正的，即在研究碰撞过程时，总能量是正的。不过，分子间作用



力的性质,在很多方面都与引力不同. 因此,一般来说,尚不知道能量守恒定律是否成立. 即使在守恒定律成立的情况下,位能采取什么样的形式,也仍然是一个问题. 关于这些,我们打算放在下一节再来讨论.

## § 2.5 保守力和非保守力

设一个质点在时刻  $t$  位于由矢径  $\mathbf{r}$  所给定的点上,由于在它上面有力  $\mathbf{f}$  作用,它于时刻  $t + dt$  移动到矢径为  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  的点上,这时我们就说力  $\mathbf{f}$  作了功,它的值是

$$dW = \mathbf{f} d\mathbf{r} = f v dt. \quad (2.5.1)$$

这样一来,在时刻  $t_0$  位于  $\mathbf{r}_0$  上的质点,于时刻  $t$  移动到  $\mathbf{r}$  时,力在它们之间所作的功的总和为

$$W = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f} d\mathbf{r} = \int_{t_0}^t f v dt. \quad (2.5.2)$$

式中的积分是沿着质点由  $\mathbf{r}_0$  移动到  $\mathbf{r}$  的路线进行的. 若把式(2.5.2)分解成坐标分量来写,则

$$W = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} (f_x dx + f_y dy + f_z dz). \quad (2.5.3)$$

这样,根据运动方程(2.1.1'),(2.5.2)也可以写成

$$W = \int_{t_0}^t m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt, \quad (2.5.4)$$

所以,如果用下式来定义质点在时刻  $t$  的动能

$$T = \frac{1}{2} m \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m v^2, \quad (2.5.5)$$

则式(2.5.4)就变成

$$W = \int_{t_0}^t \frac{dT}{dt} dt. \quad (2.5.4')$$

因此,设时刻  $t_0$  的动能为  $T_0$ , 我们就可以得到

$$T = T_0 + W. \quad (2.5.6)$$

众所周知,此式表示,由于力  $\mathbf{f}$  作了的功  $W$ ,质点的动能由  $T_0$  增加到  $T$ . 显然,上一节用式 (2.4.16) 定义的  $T$  和上述的式 (2.5.5) 给出的  $T$  是相同的. 但是,式 (2.4.17) 所定义的位能  $V$ , 却限于作用在质点上的力  $\mathbf{f}$  是引力的情况.

因此,作为更一般的力,我们考虑一下大小只与离原点  $O$  的距离  $|\mathbf{r}| = r$  有关、方向与  $\mathbf{r}$  相同或相反的那种力. 这和 §2.3 中曾研究过的作用于质点间的弹性力,在本质上是相同的. 但是,在现在的情况下,有两点与前面的定义稍有不同,即原点  $O$  只是力的中心而不管该处有什么,但在另一方却要加上力的大小仅仅是离原点的距离的函数这样一个更严格的限制. 在这个意义上,弹性力一般可以写成

$$\mathbf{f} = \pm \frac{\mathbf{r}}{r} f, \quad (2.5.7)$$

右边的双重号  $\pm$ , 分别对应着斥力及引力.  $f = |\mathbf{f}|$  只是距离  $r$  的函数. 这样一来,必然存在着一个仅仅是  $r$  的函数  $V(r)$ , 相应于  $\mathbf{f}$  是斥力还是引力,它满足

$$\frac{dV}{dr} = \mp f, \quad (2.5.8)$$

所以,我们也能把式(2.5.7)写成

$$\mathbf{f} = - \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (2.5.7')$$

如果在这里引进矢量微分算符

$$\text{grad} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.5.9)$$

则式(2.5.7')就变成

$$\mathbf{f} = -\text{grad } V. \quad (2.5.10)$$

这是因为,如果取上式两边的  $x$  分量,则有

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial x} \frac{dV}{dr} = -\frac{x}{r} \frac{dV}{dr}, \quad (2.5.11)$$

它与式(2.5.7')的 $x$ 分量是一致的。这样, 犍力  $\mathbf{f}$  就是由力的位函数 (potential)  $V(r)$  推导出来的。因此, 如果把式(2.5.10)或(2.5.11)代入式(2.5.2)或(2.5.3), 则有

$$\begin{aligned} W &= -\int_{r_0}^r \text{grad}V \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\int_{r_0}^r \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) \\ &= -V + V_0 \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

式中,  $V_0 = V(r_0)$ 。

如果把  $V$  叫做质点在  $\mathbf{r}$  点的位能, 并将式(2.5.12)代入式(2.5.6)的右边, 我们就可以得到

$$T + V = T_0 + V_0. \quad (2.5.13)$$

此式表明, 不管经过时间, 质点位置和速度怎么变化, 动能  $T$  和位能  $V$  之和, 即总能量

$$E = T + V \quad (2.5.14)$$

的值不变。也就是说, 在只有犍力作用的情况下, 能量守恒定律是成立的。在这个意义上, 称犍力为**保守力**。

显然, 就引力而言, 式(2.4.17)所定义的位能  $V$  是由式(2.5.10)表示的一般定义的特殊情况。

在人们所认为的力之中, 包含着不满足形式为式(2.5.13)的能量守恒定律的一种力。我们把它叫做**非保守力**。例如, 如果考虑某物体 A 沿着另一物体 B 的表面移动的情况, 那么, 一般来说, B 对 A 施以摩擦力, 其方向和 A 相对于 B 的速度  $\mathbf{v}$  的方向相反。为了简单起见, 我们认为摩擦力的大小仅仅是速度绝对值  $v$  的函数, 而且物体 A 近似地在作平动, 同时再假设物体 B 的质量很大, 固定在它上面的坐标系近似于惯性系,

如果物体 A 的质心位置为  $\mathbf{r}$ ，那么在质心的速度  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  及加速度  $d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$  之间，有下列运动方程成立：

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{v}}{v} f(v), \quad (2.5.15)$$

其中， $m$  是物体 A 的总质量； $f(v)$  表示摩擦力  $\mathbf{f}$  的大小，我们设它总取正值。和辘力的情况一样，在式(2.5.15)的两边乘以  $\mathbf{v}$ ，再沿着 A 的质心轨道由时刻  $t_0$  到  $t$  进行积分，就可以得到关系式

$$T = T_0 + W. \quad (2.5.16)$$

其中， $W$  为摩擦力对 A 所作的功，它是

$$W = -\int_{t_0}^t v f(v) dt. \quad (2.5.17)$$

因为右边的  $v f(v)$  只取正值，所以  $W$  总是负的。因此，即使由于时刻  $t_0$  以前另外的力作用于物体 A 上的结果，使得它在时刻  $t_0$  速度  $\mathbf{v}_0$  并不为零，而且动能也取有限的正值  $T_0$ ，但是在此以后，只要作用力仅仅是摩擦力，那么根据式(2.5.16)，动能就要一直减少下去，速度  $\mathbf{v}$  的大小也要一直变小。这时，并没有象辘力作用时的那种位能的变化，所以式(2.5.14)定义的总能量  $E$  也要不断减少，此处  $E$  是动能  $T$  和位能  $V$  之和。也就是说，对于**机械能**或狭义的力学能  $E$  来说，守恒定律并不成立。

但是，众所周知，当摩擦力作用时，或多或少要产生热。而且，其热量与摩擦力所作的功  $W$  的绝对值成正比。本讲座第二卷《经典物理学 II》第四部分第九章中将要详细阐述，用热力学可以解释为，热的产生意味着物体 A 和 B 的温度或多或少总要上升；与此同时，A 和 B 的**内能**要增加。另外，除了机械能以外，倘若再加上内能，则作为它们总和的总能量仍然是守恒的；这就是热力学第一定律。



狭义地来看,物理学的发展史也是能量概念扩大的历史.对于范围更广的物理现象来说,如果想要使能量守恒定律成立,就必须扩大能量的概念.例如,对于电磁现象来说,为了使能量守恒,就必须承认电磁场能这种新形态的能量.这个问题我们将要在本卷第二部分中详细论述.这样,物理学的发展方向,就是要使能量守恒定律成为更普遍的自然定律.前面曾谈到,除了能量守恒以外,在经典力学中动量和角动量守恒定律也是相当普遍成立的.我们可以认为,物理学前进的方向,是将这些守恒定律也同时普遍化.例如,自旋是基本粒子固有的角动量,由于引进这个概念,才建立起一个理论体系,使得即使在微观世界中总角动量守恒定律也是成立的.而且,在微观世界的碰撞现象中,对已知的粒子而言,当遇到动量守恒定律不成立时人们就假定存在着未知的粒子,来力图恢复守恒定律,这就常常意味着新粒子的发现.

再回到原先的问题上:当有摩擦力那样的非保守力作用时,我们会看到物体在运动中速度要一味减少的这种单向性.与此相反,速度渐渐增大的情况则不会发生.当只有非保守力作用时,如果我们反过来把物体A的运动由现在追溯到过去,速度就应该渐渐增大.实际上,如果把这种运动拍成电影,再让胶片反转,即可观察到它.与胶片反转时相对应的现象,如果在现实中不发生,那么我们就把原来的现象叫做**不可逆现象**.如下所述,我们能够将运动到底是不可逆的还是可逆的(即胶片反转时的运动在现实中能够发生)问题,还原成运动定律及力的性质的问题.

我们假设下列运动方程的右边所出现的力  $f$ , 如同弹性力的情况一样,仅仅依赖于质点的位置  $r$ ,

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = f. \quad (2.5.18)$$

若将时间  $t$  前进的方向反转, 则反转了的时间就是  $t' = -t$ . 但是, 与式(2.5.18)形式完全相同的方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt'^2} = \mathbf{f} \quad (2.5.19)$$

对于时间  $t'$  也成立. 我们说, 这时运动方程对于**时间反演**是不变的. 然而, 因为

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt'} = -\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{v}, \quad (2.5.20)$$

所以, 由于时间反演, 速度的方向便反转. 这就意味着, 假设某一运动是式(2.5.18)的一个解, 因而在现实中能够发生, 那么, 只将速度反转过来时的运动, 也就是将胶片倒转过来时所看到的运动, 在现实中同样能够发生. 比如, 将行星的运动反向地追溯到过去, 这时所看到的运动, 从原理上讲是可以发生的.

反之, 在式(2.5.18)右边的力  $\mathbf{f}$  像式(2.5.15)那样, 与速度  $\mathbf{v}$  反向的情况下, 由于时间的反演, 变成下面的形式

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = +\frac{\mathbf{v}'}{v'} f(v'), \quad (2.5.21)$$

力的方向就会和速度  $\mathbf{v}'$  的方向一致. 也就是说, 运动方程对于时间反演不是不变的. 这时, 与摩擦力相反, 所施的力使速度增加, 然而, 这样的运动并不包含在原来的方程(2.5.15)的解中; 在这个意义上, 该运动在现实中不会发生.

第二卷第四部分和第六部分中将要反复阐述, 伴随着热的产生和吸收而发生的现象, 其不可逆性一般能用热力学第二定律, 即熵增加原理来表示. 但是, 热力学创立之后, 出现了气体分子运动论, 它立足于经典力学, 企图将热现象解释成宏观上不能看到的无数个分子运动的结果. 这种尝试取得了极大的成功. 然而, 其中它却假定了作用于分子间的力是象

弹性那样的保守力。这样一来，由无数个分子组成的力学体系的运动方程，对于时间反演就成为不变的了。这同热现象的不可逆性相矛盾。在由气体分子运动论发展起来的统计力学中，对这个问题仍然纠缠不清；即使在今天，尚有争论之处。不过，关于这些问题，在第二卷第五部分、第六部分及第五卷《统计物理学》中，我们将从各种不同的观点出发反复论述，所以在此就不去深入探讨了。

## § 2.6 作为力学系的刚体

在本章中，到目前为止我们就质点及质点系论述了运动和力的关系。而在第一章，除此之外，还涉及到了刚体运动的问题。这是因为，质点也好，具有一定大小的物体也好，为了描述它们的运动，需要首先设立坐标系，特别是设立直角坐标系。要描述这种直角坐标系本身的运动，还必须进一步设立第二个直角坐标系。但是，从运动学的角度来讲，直角坐标系与刚体等价，两者都是自由度为6的体系。而且，还可以证明，从运动学上来讲，它们和相互间距离一定的三个质点所构成的体系是等价的。因此，从运动学的立场出发，我们可以认为，只要以质点系（其中还把与刚体等价的三点系作为特殊情况包括在内）为研究的对象，就能完备地描述运动。

但是，本章试图从质点或具有大小的物体与作用在它们上面的力之间的关系方面，来研究它们的运动。从这种动力学的立场来看，即使在运动学上是等价的体系，其处理方式一般来说也是不一样的。比如，对于相互间距离一定的三个质点所组成的体系来说，力只作用在各质点上。反之，当我们设想一种刚体来把现实存在的固体理想化时，则必须认为它是由相当多的物质部分构成的，而且，力作用在它的各个部分上。实际上，可以认为能够把现实中存在的固体和液体，分解

成任何微小程度的部分。也就是说，可以把它们看成**连续体**。当然，这样的分割是有限度的，如果每个微小部分的体积到了 $(10^{-8})^3 \text{ cm}^3$ 的数量级，就会涉及到物质的原子结构问题，这时我们便不能再把它看成连续体了；在今天，这已是众所周知的事实。因此，把固体、液体或气体当作连续体来看待，确实不过是一种近似而已。但是，构成物质的单个原子是非常小的，只具有 $10^{-8} \text{ cm}$ 数量级的线度，仅仅当 $10^{24}$ 个原子集合在一起时才会构成宏观的物体，所以，在很多情况下，连续体的假定是一种非常好的近似；这样说是决不奇怪的。

对一般连续体的处理，我们打算放在第三章再讲，在这里只把刚体作为研究的对象，它是作为质点系的极限而得到的连续体之中的一个极为特殊的情况。也就是说，在由 $N$ 个质点构成的力学系中，我们逐渐地去减小每个质点的质量 $m_1, m_2, \dots, m_N$ ，同时增加 $N$ 的数目，使得总质量 $M$ 保持有限，来考虑这时的极限。其中，总质量是

$$M = \sum_{j=1}^N m_j. \quad (2.6.1)$$

在这里假设，任意两个质点 $m_j, m_k$ 之间的距离 $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$ 是不随时间变化的。满足这种性质的质点系是什么样的呢？特别是在作用于质点间的力是**势力**的情况下，这些力又是怎样的呢？如前节式(2.5.10)所示，**势力** $\mathbf{f}$ 一般可由位函数 $V$ 推导出来。特别是就第 $k$ 个质点给予第 $j$ 个质点的**势力**而言，我们可以写成

$$\mathbf{f}_{jk} = -\text{grad}_j V(r_{jk}). \quad (2.6.2)$$

其中， $r_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$ 是这两个质点之间的距离，而且

$$\text{grad}_j = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y_j} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z_j}. \quad (2.6.3)$$

我们暂且只着眼于这两个质点，忽略其它质点的存在。而且，



为了简单起见,把  $r_{ik}$  简单地写成  $r$ ,把  $\text{grad}_i$  也简单地写成

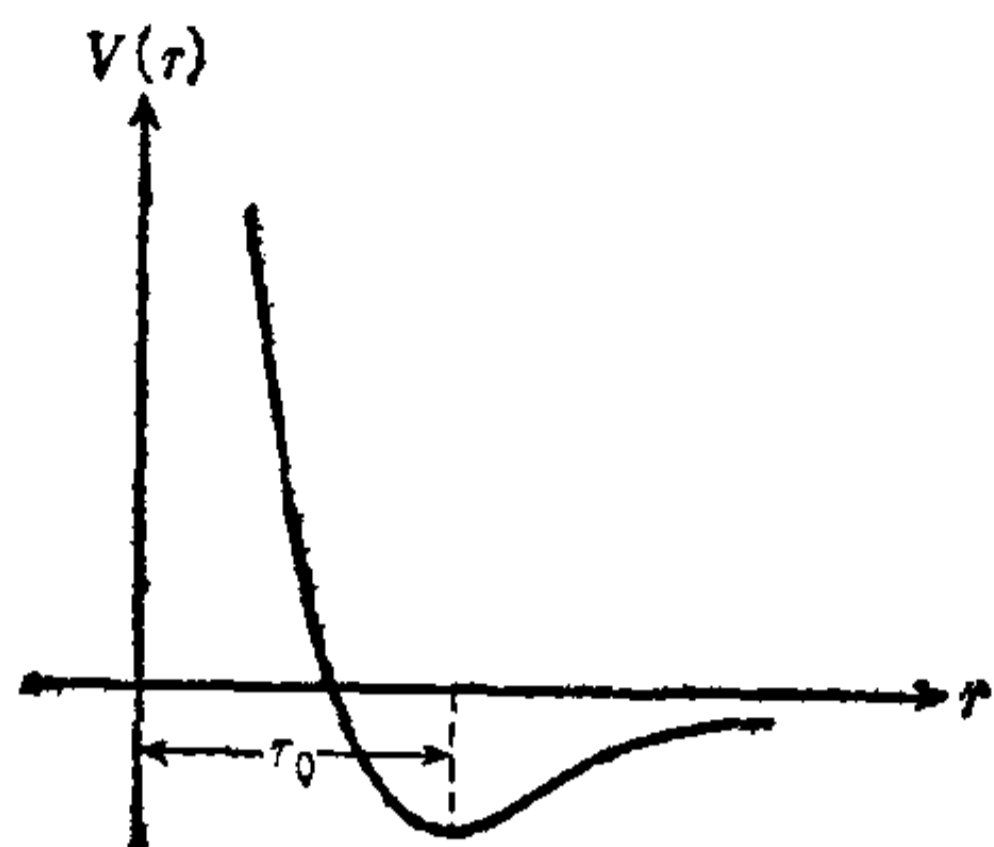


图 2.5

$\text{grad}$ , 这时,第  $i$  个质点对于第  $k$  个质点的相对运动就可用式(2.2.21),也就是下列的运动方程来确定:

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\text{grad}V, \quad (2.6.4)$$

其中,

$$\mu = m_i m_k / (m_i + m_k).$$

假设力的位函数  $V(r)$ ,如图 2.5 所示,在  $r = r_0$  处取极小值  $V_0 = V(r_0)$ ,则对于  $r_0$  附近的  $r$  值来说,  $V(r)$  可以近似地写成

$$V(r) = V_0 + \frac{\lambda}{2} (r - r_0)^2. \quad (2.6.5)$$

其中,  $\lambda$  是一个正的常数。这时,设相对运动的能量为  $E$ ,则在  $r$  接近于  $r_0$  的地方,可以把  $E$  写成

$$E = \frac{\mu}{2} \left\{ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} + V_0 + \frac{\lambda}{2} (r - r_0)^2, \quad (2.6.6)$$

不管时间如何,它总是一定的。因为右边的第一项,也就是动能,绝对不能取负值,所以,如果在开始时两个质点间的距离是  $r_0$ ,总能量是  $E$ ,那么不管此后如何移动,  $r$  的值应该限制在下列范围以内:

$$E - V_0 - \frac{\lambda}{2} (r - r_0)^2 \geq 0 \quad (2.6.7)$$

或

$$\frac{\lambda}{2} (r - r_0)^2 \leq E - V_0. \quad (2.6.7')$$

因此,在常数  $\lambda$  增大的极限情况下,两个质点之间的距离  $r$  只能取一个定值  $r_0$ 。可是,由位函数(2.6.5)得到的力的大小,与  $r$  方向的伸缩量  $|r - r_0|$  成正比,这种力是胡克力,它的作用总是力图把质点拉回到  $r = r_0$  的点上去。第三章将要详细论述,  $\lambda$  相应于连续体的弹性常数。而在弹性常数无限增大的极限情况下,所设想的物体是完全弹性体。在这个意义上,也可以说刚体是完全弹性体的一种。但是,由式(2.6.5)可知,在  $\lambda$  无限增大的极限上,位函数  $V(r)$  在  $r = r_0$  上有奇点,这是很不好的函数。因此,如下节所述,还不如把力的概念扩大,并引进**约束力**,反倒可以更好地理解作为力学系的刚体的性质。

以上讨论了把刚体看作由相当多质点构成的力学系时,作用在它们之间的内力性质。下面我们来研究一下作用在刚体上的外力。作为在固体或将固体理想化而设想的作用在刚体上的外力,可以先考虑有两种力,一种是作用在表面上某处的力,一种是作用在内部各个部分上的力。比如,象图 2.6 所示,假设有一个可以看作刚体的固体棒 R,被支撑于 A 点,处于静止状态。这个棒和支撑它的固体 B,不仅在 A 点相互间有接触力作用,而且象地球引力那样的超距力也作用在该棒的各个部分上;作用在棒 R 上的这些力总起来应该是平衡的。在比经典力学更早一些建立的静力学的阶段,人们就已经知道了平衡的条件。不用说,这个条件是:作用在棒上的所有力的矢量和为零,围绕支点 A 的力矩之和为零。倘若认

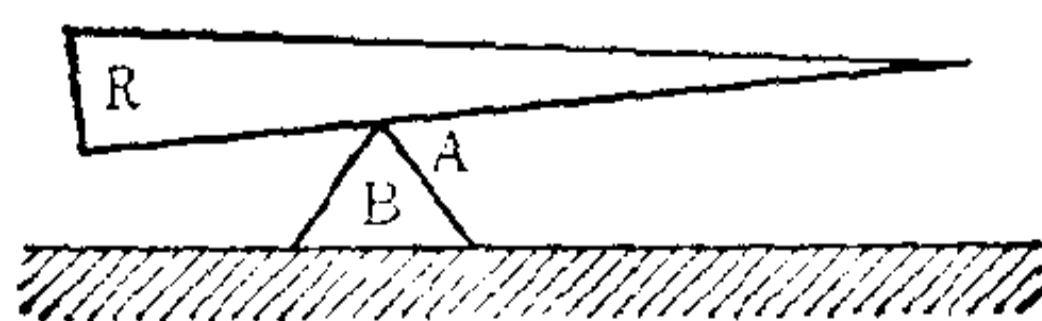


图 2.6

为刚体是由相当多的质点密集而成的，那么这些条件就能够很容易地象下面那样由运动方程推导出来。

也就是说，把构成质点系的质点数  $N$  看成无限大，在这个极限上，代替式(2.2.23)的第一式，我们可以将质心的位置写成

$$\mathbf{R} = \iiint \rho(\mathbf{r})dxdydz \cdot \mathbf{r} / \iiint \rho(\mathbf{r})dxdydz. \quad (2.6.8)$$

其中， $\iiint$  是对整个空间的体积分， $\rho(\mathbf{r})$  是  $\mathbf{r}$  点上质量密度。

再详细一点来说， $\rho(\mathbf{r})dxdydz$  表示  $\mathbf{r}$  点附近的微小体积  $dxdydz$  内质点质量的总和。因此，该式右边的分母其实就是这个体系的总质量，

$$M = \iiint \rho(\mathbf{r})dxdydz. \quad (2.6.9)$$

所以，对于微小体积  $dxdydz$  内的各个质点而言，下列运动方程分别成立：

$$m_j \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2} = \mathbf{f}_j. \quad (2.6.10)$$

其中， $m_j$ 、 $\mathbf{r}_j$ 、 $\mathbf{f}_j$  分别表示第  $j$  个质点的质量、位置矢量及作用在它上面的力。如果就该微小体积内的所有质点对式(2.6.10)的两边求和，则在认为质点分布是连续的极限情况下，我们可以得到关系式

$$\rho(\mathbf{r})dxdydz \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}(\mathbf{r})dxdydz. \quad (2.6.11)$$

此式的右边是作用在该微小体积内各质点上的力的总和，因此也可以说， $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  是作用在  $\mathbf{r}$  点上的力密度。准确地讲，左边的  $d^2 \mathbf{r}/dt^2$  是  $\mathbf{r}$  点附近的  $dxdydz$  内各质点加速度的平均值，而在  $dxdydz$  无限缩小的极限情况下，可以认为它就是  $\mathbf{r}$  点上连续体的加速度本身。也就是说，可以认为式(2.6.11)是确定在任意时刻  $t$  占据着微小体积  $dxdydz$  而质量为

$\rho(\mathbf{r})dx dy dz$  的微小物质运动的运动方程式。随着时刻  $t$  的变化, 虽然该微小物质要移动, 它所占据的体积  $dx dy dz$  及密度  $\rho(\mathbf{r})$  也要发生变化, 但是质量  $\rho(\mathbf{r})dx dy dz$  却仍然保持着同一个值, 所以我们可以把式(2.6.11)的左边写成

$$\frac{d}{dt} \left( \rho(\mathbf{r})dx dy dz \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right). \quad (2.6.12)$$

因此, 若将式(2.6.11)的两边对整个空间进行积分, 则有

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint \rho(\mathbf{r})dx dy dz \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \iiint \mathbf{f}(\mathbf{r})dx dy dz. \quad (2.6.13)$$

根据与此相同的理由, 在式(2.6.8)的两边乘以总质量  $M$ , 再对时间求导数, 所得的结果是

$$M \frac{d\mathbf{R}}{dt} = M\mathbf{V} = \iiint \rho(\mathbf{r})dx dy dz \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (2.6.14)$$

其中,  $\mathbf{V}$  是在将该质点系看作连续体的极限情况下质心的速度,  $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$  是总动量。这样一来, 我们就可以把式(2.6.13)改写成

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (2.6.15)$$

这个关系式的右边是

$$\mathbf{F} = \iiint \mathbf{f}(\mathbf{r})dx dy dz, \quad (2.6.16)$$

它表示作用于该质点系各质点上的力的总和在将该质点系看作连续体时的极限。

特别是我们假设这个质点系或连续体能够和刚体一样看待, 则使该刚体的各个部分静止并在整体上处于平衡状态的充分条件, 就是在连续体的各点上  $d\mathbf{r}/dt = 0$ 。与此相应, 一个必要条件是  $d\mathbf{P}/dt = 0$ , 根据式(2.6.15), 这也就是  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , 即作用于刚体各部分上的力的总和为零。

其次, 式(2.3.3)是确定质点系各质点的角动量随时间变



化的方程式,如果从此式出发,并采用和上面一样的作法过渡到连续体,那么,我们就可以得到方程式

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mathbf{N}. \quad (2.6.17)$$

其中,

$$\mathbf{m} = \iiint \rho(\mathbf{r}) dx dy dz \left[ \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] \quad (2.6.18)$$

表示该连续体的总角动量,而

$$\mathbf{N} = \iiint dx dy dz [\mathbf{r} \times \mathbf{f}], \quad (2.6.19)$$

不外乎就是作用于在连续体各部分上的力矩的总和. 当该连续体是刚体时,它处于静止状态的另一个必要条件是

$$d\mathbf{m}/dt = 0.$$

根据式(2.6.17),这个条件无非就是,作用于刚体各部分上的力矩的总和为零.

把以上结果归纳起来,在  $\mathbf{F} = 0$  及  $\mathbf{N} = 0$  六个条件都满足的情况下,假如在时刻  $t = t_0$  刚体是静止的,从而  $\mathbf{P} = 0$ ,  $\mathbf{m} = 0$ , 那么根据式(2.6.15)及(2.6.17)有六个方程,在其后的任意时刻  $t$ , 该刚体都应该保持  $\mathbf{P} = 0$ 、 $\mathbf{m} = 0$  的状态. 但是,刚体的自由度是6,所以总动量  $\mathbf{P}$ 、总角动量  $\mathbf{m}$  两者都为零. 就意味着刚体是静止的. 因此,  $\mathbf{F} = 0$ ,  $\mathbf{N} = 0$  这六个条件也应该是最初静止的刚体继续处于静止状态的充分条件. 这样一来,这是在静力学中很早就已经知道的平衡条件,作为动力学的特殊情况也可以推导出这些条件.

更一般地来说,方程式(2.6.15)及(2.6.17)表示,当作用于刚体上的力的总和  $\mathbf{F}$  及力矩的总和  $\mathbf{N}$  同时为零时,其质心继续作匀速运动,而且总角动量保持一定的值. 比如,我们可以近似地把地球看作刚体,作用在它的各部分上的外力和内力

的力矩总和几乎为零，所以地球自转的角速度和角动量大体上保持一定的方向和大小。但是，地球并不是完全的刚体，作用在它上面的力的总和也不完全为零，因此，如果长期进行观察，我们就可以发现，自转轴的方向也好，角速度也好，都在缓慢地发生变化。其次，太阳给予地球的引力的总和，不外乎就是作用在地球的各小部分和太阳的各小部分之间的引力之和，众所周知，地球及太阳各部分的质量，可以近似地认为是在各自质心的周围球作对称性的分布，在这种情况下，太阳作用在地球上的引力总和，其大小与两者质心间距离的平方成反比，方向由地球的质心指向太阳的质心。所以，在将太阳和地球看作质点时的运动定律，即 §2.4 中已经详细讲过的开普勒三定律，在极好的近似程度上是成立的。

当把一个惯性系选作直角坐标系时，刚体的运动方程 (2.6.15) 及 (2.6.17) 是成立的。如果由这个坐标系 I 变换到以刚体的质心  $\mathbf{R}$  为原点的坐标系 II，则有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R} + \mathbf{r}' \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \end{aligned} \right\}, \quad (2.6.20)$$

对于坐标系 II，我们可以直接由以上关系得出

$$\iiint \rho'(\mathbf{r}') dx' dy' dz' \cdot \mathbf{r}' = 0.$$

其中， $\rho'(\mathbf{r}') dx' dy' dz'$  表示由坐标系 II 所看到的  $\mathbf{r}'$  附近的微小体积  $dx' dy' dz'$  中质点的质量之和。对于坐标系 II 而言，如果用  $m_c$  来定义总角动量

$$m_c = \iiint \rho'(\mathbf{r}') dx' dy' dz' \left[ \mathbf{r}' \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right], \quad (2.6.21)$$

那么很容易就可以证明，在它对坐标系 I 而用式 (2.6.18) 定义的  $m$  之间，有下列关系：

$$\begin{aligned} m &= m_c + M[\mathbf{R} \times \mathbf{V}] \\ &= m_c + [\mathbf{R} \times \mathbf{P}], \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

其中的  $m_c$ ，是把质心选作原点时刚体的角动量。将此式代入式(2.6.17)的左边，并考虑到右边的  $\mathbf{N}$  是用式(2.6.19)来定义的，在  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{r}'$  之间又有关系式(2.6.20)，那么我们就可以得到方程式

$$\frac{dm_c}{dt} = \mathbf{N}_c. \quad (2.6.23)$$

其中，

$$\mathbf{N}_c = \iiint dx' dy' dz' [\mathbf{r}' \times \mathbf{f}] \quad (2.6.24)$$

是从坐标系 II 观察的力矩的总和，即由质心来看的力矩的总和。

在式(2.6.20)及(2.6.21)中出现的  $d\mathbf{r}'/dt$ ，表示惯性坐标系 I 被认为是固定的情况下  $\mathbf{r}'$  随时间的变化，因此，式(2.6.23)左边的  $dm_c/dt$ ，也意味着将坐标系 I 固定时  $m_c$  随时间的变化。如果进一步明确坐标系 II 的性质，假设它是和刚体一起运动（详细一点说，不仅原点和刚体的质心一起运动，而且直角坐标轴方向上的单位矢量  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  也和刚体一起旋转）的那种坐标系，那么，由坐标系 II 来观察，刚体中任意的微小部分的速度都为零。因此，

$$\mathbf{v}' = \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)' = 0, \quad (2.6.25)$$

所以，假设 II 相对于 I 旋转的角速度为  $\boldsymbol{\omega}$ ，则有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} &= \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'] \\ &= [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']. \end{aligned} \quad (2.6.26)$$

将它代入式(2.6.21)的右边，可得

$$m_c = \iiint \rho'(\mathbf{r}') dx' dy' dz' [\mathbf{r}' \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']], \quad (2.6.21')$$

而式(2.6.23)的左边也就变成

$$\frac{d\mathbf{m}_c}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{m}_c}{dt} \right)' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}_c]. \quad (2.6.27)$$

由第一章的式(1.2.17')表示的

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)'. \quad (2.6.28)$$

和式(2.6.25)及下面的关系

$$\left[ \mathbf{r}' \times \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' \right] \right] = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}' \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \mathbf{r}' \right), \quad (2.6.29)$$

式(2.6.27)右边的第一项变成

$$\iiint \rho'(\mathbf{r}') dx' dy' dz' \left\{ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}' \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \mathbf{r}' \right) \right\}. \quad (2.6.30)$$

另外,如果使用关系式

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{r}' \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']]] &= \mathbf{r}'(\boldsymbol{\omega} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']) \\ &\quad - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'](\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') \\ &= -[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'](\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (2.6.31)$$

则式(2.6.27)右边的第二项就变成

$$-\iiint \rho'(\mathbf{r}') dx' dy' dz' [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'](\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'). \quad (2.6.32)$$

因此,方程式(2.6.23)便变成

$$\begin{aligned} &\iiint \rho'(\mathbf{r}') dx' dy' dz' \left\{ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}' \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \mathbf{r}' \right) \right. \\ &\quad \left. - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'](\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') \right\} \\ &= \mathbf{N}_c. \end{aligned} \quad (2.6.33)$$

但是,如保持这种矢量方程形式的话,式(2.6.33)所具有



的意义是不容易领会的,所以我们在坐标系 II 中分别把它的  $x'$ 、 $y'$ 、 $z'$  分量写出来. 这时, 为了方便起见, 写成  $x' \equiv x'_1$ ,  $y' \equiv x'_2$ ,  $z' \equiv x'_3$ , 于是, 若把  $\mathbf{r}'$ 、 $\boldsymbol{\omega}$ 、 $\mathbf{N}_c$  写成

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}' &= x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3 \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega'_1 \mathbf{e}'_1 + \omega'_2 \mathbf{e}'_2 + \omega'_3 \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{N}_c &= N'_{c1} \mathbf{e}'_1 + N'_{c2} \mathbf{e}'_2 + N'_{c3} \mathbf{e}'_3 \end{aligned} \right\}, \quad (2.6.34)$$

则式(2.6.33)两边的  $x'$  分量就是

$$\begin{aligned} (I_{22} + I_{33}) \frac{d\omega'_1}{dt} - I_{12} \frac{d\omega'_2}{dt} - I_{13} \frac{d\omega'_3}{dt} \\ - \{ (I_{33} - I_{22}) \omega'_2 \omega'_3 + I_{13} \omega'_1 \omega'_2 - I_{12} \omega'_1 \omega'_3 \\ + I_{23} (\omega'^2_2 - \omega'^2_3) \} = N'_{c1}, \end{aligned} \quad (2.6.35)$$

$y'$ 、 $z'$  分量也具有同样的形式. 其中的  $I_{11}$ 、 $I_{12}$ 、 $\dots$  是用下式定义的量:

$$I_{ik} = \iiint \rho'(\mathbf{r}') dx'_1 dx'_2 dx'_3 \cdot x'_j x'_k \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (2.6.36)$$

因为  $I_{ik} = I_{ki}$ , 所以九个  $I_{ik}$  之中, 独立的量只有六个. 而坐标系 II 是和刚体一起运动的坐标系, 故式(2.6.36)右边的积分与时间无关, 是一个由刚体的外形和内部的密度分布所决定的量, 即刚体固有的量.

但是, 以质心为原点、固定在刚体上的直角坐标轴的选择方式有各种各样的. 其中, 根据刚体的形状和密度分布, 有可能选出一种直角坐标系, 使它满足

$$I_{ik} = 0 \quad (j \neq k). \quad (2.6.37)$$

由于证明过程冗长, 所以我们在这里只叙述一下要点. 当改变直角坐标系的选择方式时式(2.6.34)所表示的  $\mathbf{r}'$ 、 $\boldsymbol{\omega}$  等的分量按矢量的性质变换, 但  $I_{ik}$  ( $j, k = 1, 2, 3$ ) 作为一个整体所作的变换与对称张量相同. 大家知道, 必然存在着一种坐标变换, 能使对称张量成对角型, 即除了对角线上的分量

$I_{11}$ 、 $I_{22}$ 、 $I_{33}$  之外,其余的都为零,所以假如变换到这样的坐标系,就应该有  $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$ .

象这样选择的坐标轴的三个相互垂直的方向,叫做该刚体的**惯性矩** (moment of inertia) 的主轴. 如果把这些方向上的单位矢量重新写成  $e'_1$ 、 $e'_2$ 、 $e'_3$ , 则

$$I_1 \equiv I_{22} + I_{33}, \quad I_2 \equiv I_{33} + I_{11}, \quad I_3 \equiv I_{11} + I_{22} \quad (2.6.38)$$

就分别为对于主轴  $e'_1$ 、 $e'_2$ 、 $e'_3$  的惯性矩的大小.

对这个新的坐标系来说,方程 (2.6.35) 变得非常简单,对  $y'$ 、 $z'$  分量也有同样的情形,这时可得:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d\omega'_1}{dt} - (I_2 - I_3)\omega'_2\omega'_3 &= N'_{c1} \\ I_2 \frac{d\omega'_2}{dt} - (I_3 - I_1)\omega'_3\omega'_1 &= N'_{c2} \\ I_3 \frac{d\omega'_3}{dt} - (I_1 - I_2)\omega'_1\omega'_2 &= N'_{c3} \end{aligned} \right\} \quad (2.6.39)$$

这叫做刚体的**欧勒** (Euler) **运动方程**.

作为一个简单的特例,假设刚体的形状和质量分布是球对称的,则对于任何一个方向上的轴,其惯性矩都相同,即

$$I_1 = I_2 = I_3, \quad (2.6.40)$$

所以,把它简单地写成  $I$ , 式(2.6.39)就可以归纳成矢量方程的形式写出来:

$$I \frac{d\omega}{dt} = N_c. \quad (2.6.41)$$

因此,倘若作用在刚体上的力对于质心的力矩的总和为零即  $N_c = 0$ , 则刚体旋转的角速度  $\omega$  的大小和方向都是一定的,不随时间变化. 就地球的自转而言,这些前提是近似满足的;大家知道,实际上,自转轴的方向也好,旋转速度也好,几乎都是一定的.但是,更准确地说,地球并不是一个完全的球形体,

而是一个向赤道方向稍微鼓起的旋转椭球体。因此，如果取  $\mathbf{e}'_3$  的方向垂直于赤道面，则围绕它的惯性矩  $I_3$  就要稍大于  $I_1 = I_2$ 。假如  $\mathbf{N}_c = 0$ ，这时的欧勒方程(2.6.39)就变成

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d\omega'_1}{dt} + (I_3 - I_1)\omega'_2\omega'_3 &= 0 \\ I_1 \frac{d\omega'_2}{dt} - (I_3 - I_1)\omega'_3\omega'_1 &= 0 \\ I_3 \frac{d\omega'_3}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6.42)$$

由它的第三式可知，通过地球中心由南极向北极引一条轴  $\mathbf{e}'_3$ ，则围绕  $\mathbf{e}'_3$  轴旋转的角速度  $\omega_{\parallel}$  是一定的。其次，如果在第一式及第二式的两边分别乘以  $\omega'_1$ 、 $\omega'_2$ ，然后相加，即可得到

$$\frac{d}{dt} \{(\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2\} = 0. \quad (2.6.43)$$

也就是说，角速度  $\omega$  在垂直于  $\omega_{\parallel}$  的方向上的分矢量  $\omega_{\perp}$  的大小

$$\omega_{\perp} \equiv \sqrt{(\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2},$$

不管时间如何都是一定的。因此，若取

$$\left. \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_{\perp} \cos \theta \\ \omega'_2 &= \omega_{\perp} \sin \theta \end{aligned} \right\}, \quad (2.6.44)$$

并将它代入式(2.6.42)的第一式及第二式，那么无论由其中的哪一个，我们都能得到相同的关系式

$$I_1 \frac{d\theta}{dt} = (I_3 - I_1)\omega_{\parallel}. \quad (2.6.45)$$

如图 2.7 所示，上式意味着，自转角速度矢量  $\omega$  在垂直于地轴的方向上的分量  $\omega_{\perp}$  的方向，以一定的角度速  $d\theta/dt$  变化。也就是说，从固定在刚体上的坐标系 II 来看，自转角速度矢量  $\omega$ ，围绕着  $\mathbf{e}'_3$  轴保持一定的倾斜，并以一定的角速度不断旋

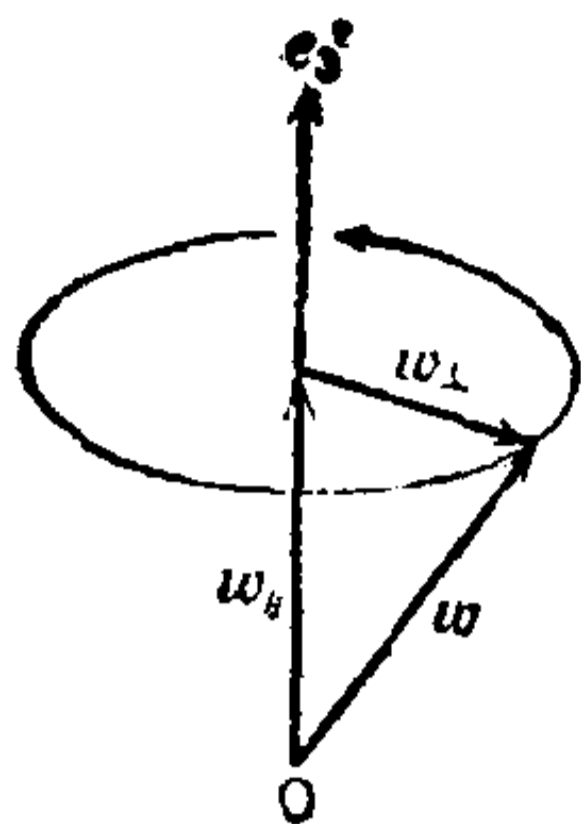


图 2.7

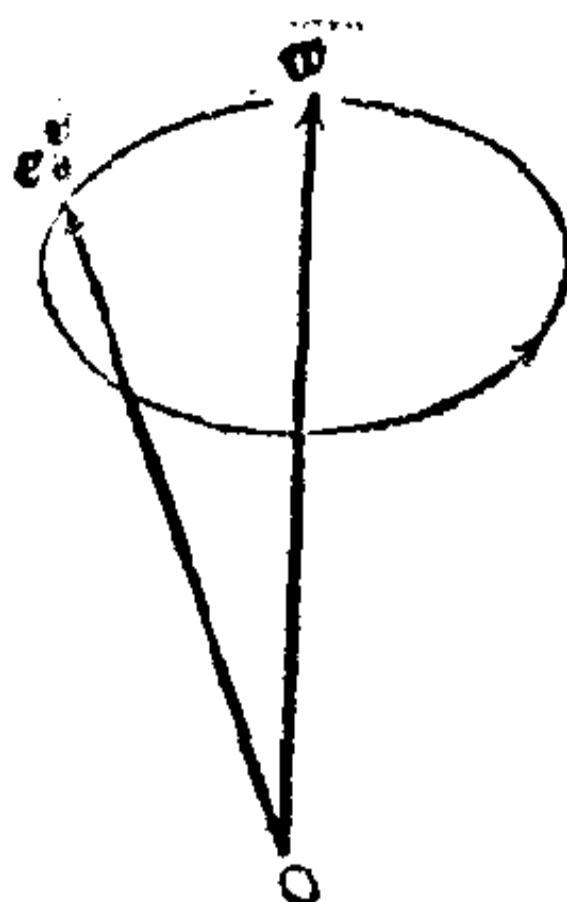


图 2.8

转。如果由惯性坐标系  $I$  来看它，则反过来是  $e'_3$  轴本身按下列方程随时间改变方向：

$$\frac{de'_3}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_3] = \omega'_2 \mathbf{e}'_1 - \omega'_1 \mathbf{e}'_2. \quad (2.6.46)$$

因此，即使从坐标系  $I$  来看，角速度  $\boldsymbol{\omega}$  一般也要随时间变化。如图 2.8 所示，在时刻  $t$ ， $e'_3$  应当以该瞬时的角速度  $\boldsymbol{\omega}(t)$  为轴、以一定的角速度  $\omega_{\perp}$  旋转。这就是所谓的**进动** (precession)。对于地球来说， $I_1$  远远大于  $I_3 - I_1$ ，所以进动的角速度  $d\theta/dt$  远远小于自转角速度  $\omega_{\parallel}$ 。

但是，仅仅从以上的研究，还不能完全决定刚体的运动。这是因为，关系式 (2.6.46) 以与刚体一起旋转的旋转坐标系为基准，给出其轴向上的单位矢量  $e'_1$ 、 $e'_2$ 、 $e'_3$  的方向变化，而对固定坐标系  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$  来说，它却不能决定  $e'_1$ 、 $e'_2$ 、 $e'_3$  是如何变化的。因此，我们把  $e'_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 中的每一个都分解成  $e_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 方向上的矢量，并写成

$$\mathbf{e}'_j = \sum_k a_{jk} \mathbf{e}_k. \quad (2.6.47)$$

如果在上式的两边依次乘以  $e_l$  ( $l = 1, 2, 3$ )，那么由于  $e_l$  ( $l = 1, 2, 3$ ) 是相互正交的单位矢量，因而就可以得到



$$a_{jk} = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_k \quad (j, k = 1, 2, 3). \quad (2.6.48)$$

另外,若在式(2.6.47)的两边依次乘以  $\mathbf{e}_l$  ( $l = 1, 2, 3$ ), 则因它们是相互正交的单位矢量, 故可得到

$$\sum_k a_{jk} a_{lk} = \delta_{jl} \quad (j, l = 1, 2, 3). \quad (2.6.49)$$

其中,  $\delta_{jl}$  当  $j = l$  时为 1, 当  $j \neq l$  时为零. 式(2.6.49)中独立的

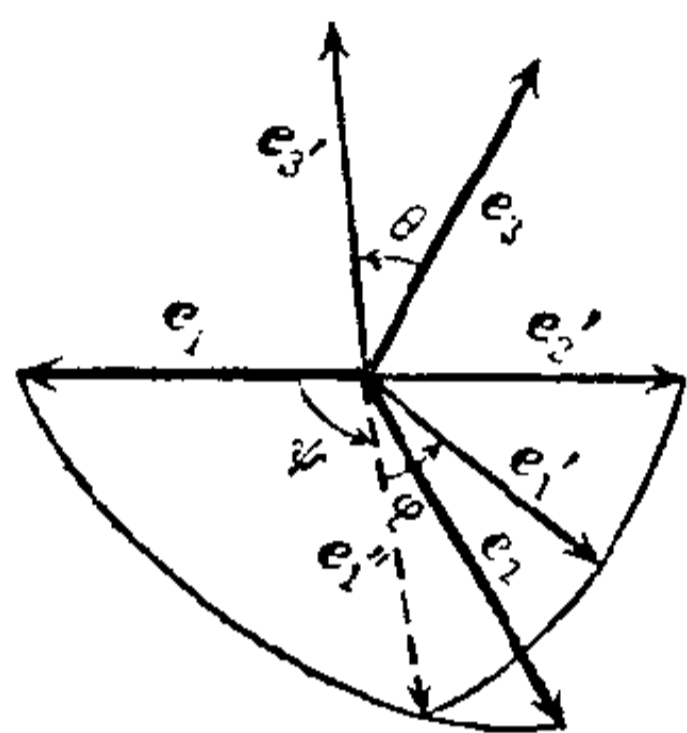


图 2.9

立的关系式是 6 个. 因为 9 个系数  $a_{jk}$  ( $j, k = 1, 2, 3$ ) 必须满足这 6 个条件, 所以其中独立的应该只有 3 个. 以上结论和刚体的旋转自由度为 3 是相对应的. 这三个独立的变量可以按照如下的方法来选择.

假设矢量组  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  相对于  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  这一组矢量的方位 (orientation) 如图 2.9 所示, 那么, 给定图中的三个角度  $(\theta, \psi, \varphi)$ , 该方位就能唯一地确定. 其中  $\theta$  是  $\mathbf{e}'_3$  和  $\mathbf{e}_3$  之间的夹角,  $\psi$  是  $\mathbf{e}'_1$  和  $\mathbf{e}_1$  之间的夹角,  $\varphi$  是  $\mathbf{e}'_1$  和  $\mathbf{e}'_1'$  之间的夹角, 此处的  $\mathbf{e}'_1'$  为  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  所构成的平面和  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$  所构成的平面的交线方向上的单位矢量. 这个  $(\theta, \psi, \varphi)$  称为欧勒角 (Euler angles). 此时, 设角度的测量分别是由  $\mathbf{e}_3$  到  $\mathbf{e}'_3$ 、由  $\mathbf{e}_1$  到  $\mathbf{e}'_1$ 、由  $\mathbf{e}'_1'$  到  $\mathbf{e}'_1$ , 我们就能够把它的范围限定为

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (2.6.50)$$

实际上, 为了在 origin 保持固定不动的情况下使矢量组  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  移动到矢量组  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ , 只要连续进行如下的三次旋转就可以了: 例如, 首先, 围绕着  $\mathbf{e}_3$  将  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  轴旋转一个角度  $\psi$ , 把  $\mathbf{e}_1$  移到  $\mathbf{e}'_1'$ . 其次, 再围绕着这个  $\mathbf{e}'_1'$ , 旋转一个角度  $\theta$ , 把  $\mathbf{e}_3$  轴移到  $\mathbf{e}'_3$ . 最后, 围绕  $\mathbf{e}'_3$  再旋转角度  $\varphi$ , 把  $\mathbf{e}'_1'$  移到  $\mathbf{e}'_1$ . 这样一来,  $\mathbf{e}_2$  当然也就最后落到  $\mathbf{e}'_2$  上.

可是,如式(1.2.10)所示,若旋转坐标系( $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ )相对于固定坐标系( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ )旋转的角速度在时刻 $t$ 为 $\boldsymbol{\omega}$ ,则由固定坐标系来看, $\mathbf{e}'_j$ 的速度为

$$\frac{d\mathbf{e}'_j}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_j]. \quad (2.6.51)$$

使用上述的欧勒角( $\theta, \phi, \varphi$ ),我们就能把式(2.6.47)右边的 $a_{jk}$ 表示成它们的函数.因此,再把(2.6.47)的两边对时间进行微分,可以得到下列关系式

$$\frac{d\mathbf{e}'_j}{dt} = \sum_k \frac{da_{jk}}{dt} \mathbf{e}_k, \quad (2.6.52)$$

它右边的 $da_{jk}/dt$ 可以写成( $\theta, \phi, \varphi$ )以及( $d\theta/dt, d\phi/dt, d\varphi/dt$ )的函数.假若把这些结果代入(2.6.51)中的 $\mathbf{e}'_j, d\mathbf{e}'_j/dt$  ( $j = 1, 2, 3$ ),就可以把角动量 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量表示成( $\theta, \phi, \varphi$ )及( $d\theta/dt, d\phi/dt, d\varphi/dt$ )的函数.因此,还能够把 $d\boldsymbol{\omega}/dt$ 的分量表示成( $\theta, \phi, \varphi$ ), ( $d\theta/dt, d\phi/dt, d\varphi/dt$ )及( $d^2\theta/dt^2, d^2\phi/dt^2, d^2\varphi/dt^2$ )的函数,所以把这些结果代入欧勒运动方程式(2.6.39),就可以构成( $\theta, \phi, \varphi$ )的二阶微分方程.假如求解这些方程能够知道( $\theta, \phi, \varphi$ )在时间上的变化,那么,刚体的旋转运动也就完全知道了,但是,我们不打算在这里作详细的探讨.我们只想指出,与其按照上述程序推导出关于( $\theta, \phi, \varphi$ )的运动方程,还不如象下节那样使用变分原理列出拉格朗日(Lagrange)运动方程,从而得出相同的表达式,要更为直截了当一些.可需要注意的另外一点是,如本讲座第三卷《量子力学 I》中所述,欧勒角尚能进一步分解成旋量.

总之,地球上的普通物体,一般来说形状是不规则的,当把它们看成刚体时,惯性矩 $I_1, I_2, I_3$ 并不相等.因此,这些物体的旋转运动,比起上述的地球自转,一般来说要远为复杂.

但是,对于象陀螺那样以其轴为旋转对称轴的物体来说,旋转运动比较简单,而且,与地球自转相同的进动,是任何人都能看清楚的.不过,详细一些来说,它与地球的情况相比,条件稍有差异.也就是说,通常陀螺轴的下端是在地面或台面的一点上固定不动的.因此,作为  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ , 需要以轴的下端为原点来取惯性矩.这样一来,作用在陀螺上的地球引力矩的总和就不会为零.陀螺以外的物体的旋转运动,即使存在着旋转对称轴,也会表现出各式各样复杂的情况.但是,对它们进行深入讨论,已经超出了本书的范围,所以我们将本节就此结束,而在下一节准备谈一下更一般地处理广义力学系的方法.

### § 2.7 变分原理和广义坐标

运动第二定律是以牛顿运动方程的形式,也就是以对时间的二阶微分方程的形式表示的.例如,就一个质点的运动而言,我们可以写成(2.1.1'),即

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}. \quad (2.7.1)$$

因此,如果给出时刻  $t = t_0$  的质点位置  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  及速度  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ ,

那么,通过求解方程(2.7.1),就能够确定在此以后任意时刻  $t$  的质点位置及速度.在这个意义上,牛顿运动方程具有微分因果律的性质.

但是,倘若把这样按照时间顺序确定下来的质点轨道,当作已经完成的轨道,重新作一下估价,我们就可以知道,它满足如下所称的**变分原理**

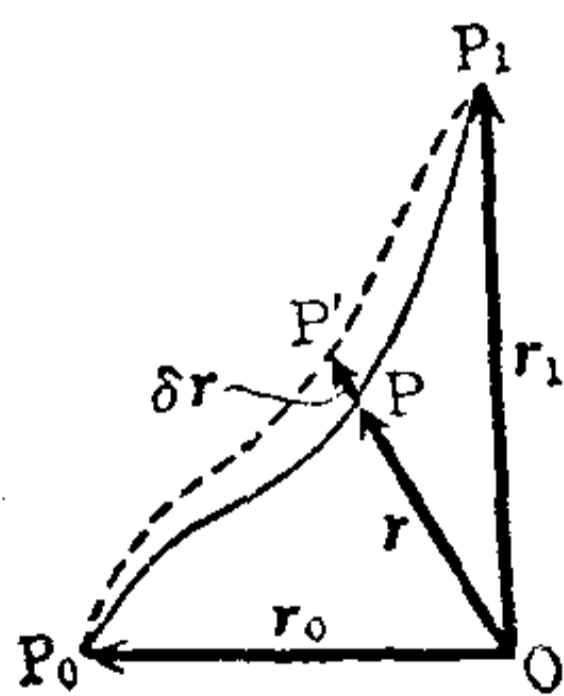


图 2.10

(variational principle).

如图 2.10 所示, 假设在  $t = t_0$  用矢径  $\mathbf{r}_0$  给出的点  $P_0$  上的质点, 受到力  $\mathbf{f}$  的作用, 沿着实线所示的轨道运动, 在  $t = t_1$  时到达矢径  $\mathbf{r}_1$  给出的点  $P_1$ . 我们设想一条与这个轨道偏离很少的假想轨道, 并用虚线表示它. 这样一来, 在  $t_0$  和  $t_1$  之间的任意时刻  $t$ , 实际轨道上的位置是矢径  $\mathbf{r}$  给出的点  $P$ , 与此相应, 假想的轨道上所对应的点  $P'$  则位移了  $\delta\mathbf{r}$ . 根据这样的虚位移, 我们就能够设想力  $\mathbf{f}$  对于质点作了虚功

$$\delta W = \mathbf{f} \delta \mathbf{r}. \quad (2.7.2)$$

但是, 另一方面, 在由  $t$  到  $t + dt$  的微小时间  $dt$  之间, 标量积  $(d\mathbf{r}/dt) \cdot \delta\mathbf{r}$  的变化是

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} \right)_{t+dt} - \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} \right)_t \\ &= \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} dt \right) \left( \delta\mathbf{r} + \frac{d}{dt} (\delta\mathbf{r}) dt \right) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= \left\{ \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) \delta\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} (\delta\mathbf{r}) \right\} dt. \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

也就是说, 下列关系式是成立的:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} \right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot \delta\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} (\delta\mathbf{r}). \quad (2.7.4)$$

虚位移或变分  $\delta\mathbf{r}$ , 是能够和实际轨道上的移动  $d\mathbf{r} \equiv \mathbf{v} dt$  独立进行的. 与此同时, 假想轨道上的质点速度, 与同一时刻实际轨道上的速度  $\mathbf{v}$ , 也会有少许差别. 如图 2.10 所示, 它应该可以自动调节, 以使得假想轨道和实际轨道相同, 都是在时刻  $t_0$  由  $P_0$  出发, 在时刻  $t_1$  到达  $P_1$ . 在这个意义上, 变分  $\delta\mathbf{r}$  和时间微分  $d/dt$  是独立的, 因此, 式 (2.7.4) 右边的第二项就可以写成

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \delta \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \delta \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right\}, \quad (2.7.5)$$



如果将(2.7.4)的两边乘以  $m$ , 则有

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} \right) = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot \delta\mathbf{r} + \delta \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right\}. \quad (2.7.6)$$

但是, 对于实际轨道来说, 运动方程 (2.7.1) 应该是成立的, 所以如果考虑到式(2.7.2), 则式(2.7.6)就成了

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} \right) = \delta W + \delta T. \quad (2.7.7)$$

其中,

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \quad (2.7.8)$$

是质点的动能.

因此, 若把式 (2.7.7) 的两边沿着实际轨道由时刻  $t_0$  到  $t_1$  对时间进行积分, 那么左边就成了  $m(d\mathbf{r}/dt) \cdot \delta\mathbf{r}$  在  $t = t_1$  的值和在  $t = t_0$  的值之差, 但因在两端  $\delta\mathbf{r} = 0$ , 故左边为 0. 而右边的时间积分和变分  $\delta$  是独立的, 所以可以改变次序. 因此, 将式(2.7.7)对时间进行积分, 结果是

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W + T) dt = 0. \quad (2.7.9)$$

此式表示, 在时刻  $t_0$  及  $t_1$  的质点位置  $\mathbf{r}_0$ , 和  $\mathbf{r}_1$  给定时所能够设想的各种轨道之中, 实际的轨道是  $W + T$  的时间积分取极值的那一个. 因为这个积分量具有能量和时间之积的量纲, 所以也可以叫做**作用积分** (action integral). §2.2 中我们曾谈到力的作用. 反作用定律, 在那时和现在的情况下, 即使同样使用“作用”这个术语, 也是不同种类的物理量; 这一点在此似乎无需再提请注意.

变分原理式(2.7.9), 不管力  $\mathbf{f}$  的性质如何, 一般都是成立的; 特别是  $\mathbf{f}$  为保守力, 而且还和位能  $V$  之间存在关系:

$$\mathbf{f} = -\text{grad } V \quad (2.7.10)$$

的情况下,

$$\delta W = \mathbf{f} \delta \mathbf{r} = -\text{grad} V \cdot \delta \mathbf{r} = -\delta V, \quad (2.7.11)$$

所以式(2.7.9)就变成

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0. \quad (2.7.12)$$

其中,

$$L = T - V \quad (2.7.13)$$

叫做**拉格朗日函数**。众所周知,不仅在经典力学中,就是在相对论和量子场论中,它都是一个非常重要的物理量;当然,在后两种理论中需要对概念作种种的扩充与变更。

形如式(2.7.9)或式(2.7.12)的变分原理,本来是由运动方程得到的;后面将要看到,我们也能够反过来由变分原理推导出运动方程。在这样的意义上,可以说二者是完全等价的。但是,最低限度在表面看来式(2.7.9)或式(2.7.12)具有和运动方程极为不同的性质。也就是说,运动方程是按因果关系来决定运动在时间上演变的定律,而变分原理则表示,当给出运动的始端和末端时,质点实际上走过的轨道和它在中途的速度,都是使作用积分取极值而得到的。可以认为,它与其说是表现出因果性,还不如说是表现出一种与目的的适应性。当然,在经典力学中,变分原理是和运动方程等价的,因此,理当可以把所看到的与目的的适应性还原成因果性。但是,即便是那样,运动定律仍可写成微分形或积分形,这一点在各种意义上都是一个应该注意的事实。

不仅如此,运动定律也可以象上面那样写成变分原理的形式,这为更广义的力学系的更广义的描述开辟了道路;在这个意义上,它是很重要的。也就是说,由 $n$ 个质点构成的力学系在各瞬间的运动状态,能够用 $3n$ 个直角坐标 $x_j, y_j, z_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )及 $3n$ 个速度分量来确定,其中的 $3n$ 个速

度分量是

$$\frac{dx_j}{dt}, \quad \frac{dy_j}{dt}, \quad \frac{dz_j}{dt} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

或者, 代替它们, 也能够用这些坐标的  $3n$  个独立的函数

$$q_\alpha(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 3n)$$

及其对时间的微分

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dt} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial z_j} \frac{dz_j}{dt} \right) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 3n) \quad (2.7.14)$$

来确定。这时, 为了使  $3n$  个  $q_\alpha$  相互独立, 需要这样的条件, 即: 用下式定义的  $3n$  行、 $3n$  列的行列式在  $x_1, \dots, z_n$  的变化范围内不为 0,

$$\left\| \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_j} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_2}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial q_{3n}}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial q_{3n}}{\partial z_n} \end{vmatrix}. \quad (2.7.15)$$

这样引进的  $q_\alpha$  及  $dq_\alpha/dt$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 3n$ ) 分别叫做**广义坐标** (generalized coordinates) 及**广义速度** (generalized velocity)。

假如把这个质点系的运动方程 (2.2.26) 用直角坐标写出来, 它就成了  $3n$  个联立方程:

$$\left. \begin{aligned} m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} &= f_{ix} \\ m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} &= f_{iy} \\ m_j \frac{d^2 z_j}{dt^2} &= f_{iz} \end{aligned} \right\} (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.7.16)$$

可是,若式(2.7.15)定义的行列式不为0,则解出关系式(2.7.14),  $dx_j/dt$ 、 $dy_j/dt$ 、 $dz_j/dt$  ( $j=1, 2, \dots, n$ )就可以表示成  $dq_\alpha/dt$  及  $q_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, 3n$ ) 的函数. 同样,因为  $d^2x_j/dt^2$ 、 $d^2y_j/dt^2$ 、 $d^2z_j/dt^2$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 也能够写成  $d^2q_\alpha/dt^2$ 、 $dq_\alpha/dt$  及  $q_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, 3n$ ) 的函数形式,所以式(2.7.16)就成了关于  $d^2q_\alpha/dt^2$ 、 $dq_\alpha/dt$  及  $q_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, 3n$ ) 的  $3n$  个联立微分方程. 它们都是广义加速度  $d^2q_\alpha/dt^2$  ( $\alpha=1, 2, \dots, 3n$ ) 的线性方程. 另外,右边的力  $f_{ix}$ 、 $f_{iy}$ 、 $f_{iz}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 也应该能够表示成  $q_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, 3n$ ) 的函数,更一般地来说,是  $q_\alpha$  及  $dq_\alpha/dt$  ( $\alpha=1, 2, \dots, 3n$ ) 的函数.

按照这样的程序,我们就可以用广义坐标来描述质点系的运动;但是,倘若用变分原理来代替这个程序,则能更为简单地推导出关于广义坐标的运动方程. 特别是在作用于各质点上的力为保守力,而质点系的位能  $V$  以  $x_j$ 、 $y_j$ 、 $z_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 的函数给出的情况下,还能把它改写成  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $\dots$ 、 $q_{3n}$  的函数. 而且,动能

$$T = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \left\{ \left( \frac{dx_j}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_j}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz_j}{dt} \right)^2 \right\} \quad (2.7.17)$$

也能通过上述程序改写成  $dq_\alpha/dt$  及  $q_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, 3n$ ) 的函数:

$$T = \sum_{\alpha, \beta=1}^{3n} \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \frac{dq_\alpha}{dt} \frac{dq_\beta}{dt}. \quad (2.7.18)$$

其中,  $a_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta=1, 2, \dots, 3n$ ) 这  $3n$  个系数仅仅是  $q_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, 3n$ ) 的函数. 但是,由于无论什么时候我们都能够选择得使  $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ , 所以,在  $a_{\alpha\beta}$  之中只有  $(3n)(3n+1)/2$  个是独立的.

因此,如果设想一个用  $3n$  个坐标  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $\dots$ 、 $q_{3n}$  来表



示的  $3n$  维空间，并把它叫做**表象空间** (representative space)，那么各个瞬间质点系的运动状态就由该空间中的一个点，即**表象点** (representative point)，以及以  $dq_\alpha/dt$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 3n$ ) 为  $3n$  个分量的速度来确定。因此，伴随着质点系运动状态在时间上的变化，应该在这个空间描绘出一条轨道。假如确定了时刻  $t = t_0$  及  $t = t_1$  上表象点的位置  $q_\alpha(t_0)$  及  $q_\alpha(t_1)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 3n$ )，则质点系在表象空间中所描绘的实际轨道，满足与式(2.7.12)形式相同的变分原理。对于这个结论，我们可以作如下证明。不过，在这种情况下，式(2.7.12)左边对时间的积分是沿着  $3n$  维表象空间的轨道进行的，因此，变分也应该在这个空间内进行。而且，式(2.7.13)所定义的拉格朗日函数亦须按照上述程序表示成  $q_\alpha$  及  $dq_\alpha/dt$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 3n$ ) 的函数。详细一点写出来，式(2.7.13)则成为

$$\begin{aligned}
 & L\left(q_1, q_2, \dots, q_f; \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \dots, \frac{dq_f}{dt}\right) \\
 & = \sum_{\alpha, \beta=1}^f \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \frac{dq_\alpha}{dt} \frac{dq_\beta}{dt} - V(q_1, q_2, \dots, q_f).
 \end{aligned}
 \tag{2.7.19}$$

在这里，为了简单起见，把  $3n$  改写成  $f$ ；它无非就是该体系的自由度。

如果对式(2.7.12)左边的积分中由式(2.7.19)给出的  $L$  进行变分，则首先可以得到

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right)} \delta \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right) \right\} dt = 0. \tag{2.7.20}$$

倘若对时间的微分和变分是独立的，则它的次序就可以改变，和前面一样，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right)} \delta \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right)} \frac{d}{dt} (\delta q_\alpha) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right)} \delta q_\alpha \right) \\ &\quad - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right)} \right) \cdot \delta q_\alpha. \end{aligned}$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, f) \quad (2.7.21)$$

将它代入式(2.7.20)左边的第二项,则对式(2.7.21)右边第一项进行积分的结果就是

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right)} \delta q_\alpha \right)_{t=t_1} - \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right)} \delta q_\alpha \right)_{t=t_0}.$$

但是,由于在  $t = t_0$  以及  $t = t_1$  时,表象点是固定的,所以  $(\delta q_\alpha)_{t=t_0}$ 、 $(\delta q_\alpha)_{t=t_1}$  都为 0. 因此,式(2.7.20)便成为

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right)} \right) \right\} \delta q_\alpha \cdot dt = 0. \quad (2.7.22)$$

因为  $\delta q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, f)$  可以独立、自由地选择,所以为了使式(2.7.22)成立,在轨道的各点上,必须满足以下  $f = 3n$  个方程:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, f). \quad (2.7.23)$$

这就是  $d^2q_\alpha/dt^2$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 的  $f$  个联立方程,叫做拉格朗日运动方程. 更一般地来说,它是由式(2.7.12)那样的变

分原理推导出的微分方程，在这个意义上，往往也叫做欧勒微分方程。当拉格朗日函数  $L$  用 (2.7.19) 的形式给出时，式 (2.7.23) 成为

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{\beta=1}^f a_{\alpha\beta} \frac{dq_{\beta}}{dt} \right) = - \frac{\partial V}{\partial q_{\alpha}}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, f). \quad (2.7.24)$$

特别是若把直角坐标  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$  本身选成  $q_1, q_2, \dots, q_f$ ，那就不难看出，牛顿运动方程会重新出现：

$$\left. \begin{aligned} m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} &= - \frac{\partial V}{\partial x_j} \\ m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} &= - \frac{\partial V}{\partial y_j} \\ m_j \frac{d^2 z_j}{dt^2} &= - \frac{\partial V}{\partial z_j} \end{aligned} \right\}. \quad (2.7.25)$$

但是，因为变分原理 (2.7.12) 的成立应该与表象空间中坐标的选法没有关系，所以，拉格朗日运动方程 (2.7.23) 或 (2.7.24)，和牛顿运动方程是等价的。

这样一来，质点系的运动可以很容易地通过广义坐标及广义速度描述出来，不过，在其中包括着只是写法改变而引起的各种可能性。例如，当由直角坐标变换到球坐标及其它坐标时，不仅能够更容易地写出运动方程，而且质点间的距离也象刚体那样保持一定，其结果也使体系的自由度只为  $f = 6$  时的处理过程变得更简单一些。这是因为，如前节开头所述，倘若想要将刚体看作多数质点间弹性力作用的极限，则这种力也就不得不变得非常特殊。但是，从变分原理的立场出发，也可以把这样的力换成变分时的约束条件。而且，这个条件还能看成是与普通力不同的别种力，即**约束力** (force of constraint) 所引起的。正如上一节结束时所述，刚体的旋转运动能

够描述成欧勒角随时间的变化,不过,即使在那种情况下,从拉格朗日方程出发也是合适的。但是,我们在此不打算再详细地讨论它们,只简单地谈一下可能出现的一些更为不同的情况。

这就是说,经典力学本来在如下的意义上,是欧几里得几何的延伸。即,它所讨论的是几何学上的体或点随着时间的变化而改变其位置、形状和方向的方式。可以说,确定这种变化方式的力应该起决定性的作用,同时也并不因该力而使问题失却几何学的形象。但是,假如采取另外一个立场,由本节所讲的**分析力学** (analytical dynamics)——详细一点来说由其中的**拉格朗日形式** (Lagrangian formalism) 出发,则力学系统的性质就应该由拉格朗日函数  $L$  来确定,该函数  $L$  是广义坐标  $q_1, q_2, \dots, q_f$  及广义速度  $dq_1/dt, dq_2/dt, \dots, dq_f/dt$  的函数。在这样的力学系统中,也能够包含着与几何学的形象没有直接联系的更抽象的系统。因此,与力的概念相比,倒不如把拉格朗日函数中的位能本身看成是更为根本的概念。可以认为,它表示质点间的**相互作用** (interaction), 或更一般意义上的粒子之间的相互作用。实际上,这种抽象化、一般化是在经典力学的框架中进行的,因此才有可能向二十世纪之后的量子论或量子力学飞跃。稍微详细一点来说,为此有必要由上述的拉格朗日形式过渡到下面所讲的**哈密顿形式** (Hamilton formalism)。

因而,我们首先来引进用下式定义的  $f$  个变量  $p_1, p_2, \dots, p_f$ ,

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dq_\alpha}{dt} \right)} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, f). \quad (2.7.26)$$

它们叫做**广义动量** (generalized momentum), 是  $q_1, q_2, \dots, q_f$



及  $dq_1/dt, dq_2/dt, \dots, dq_f/dt$  的函数。因此，如果就  $dq_\alpha/dt$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 来求解(2.7.26)的  $f$  个关系式，便能够把它们表示成  $q_\alpha, p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 这  $2f$  个变量的函数。这样一来，力学系统在任意时刻  $t$  的运动状态就应该由力学变量  $q_\alpha, p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 在时刻  $t$  的值来表示。这样的  $2f$  个变量叫做**正则变量** (canonical variables)，而一对  $q_\alpha, p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 则互称为正则共轭 (canonical conjugate) 变量。现在，如果设想以  $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f$  为坐标的  $2f$  维空间，即**相空间** (phase space)，那么，其中的表象点所描绘的轨道，就表示力学系的运动状态随时间的变化。这时，假如给出了表象点在某时刻  $t_0$  的坐标  $q_1(t_0), \dots, q_f(t_0), p_1(t_0), \dots, p_f(t_0)$ ，则此后该表象点走过的轨道便唯一地确定下来。其原因在于，确定轨道的定律是如下所述的关于  $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f$  的一阶微分方程。

这就是说，若使用式 (2.7.26) 及拉格朗日运动方程 (2.7.23) 把拉格朗日函数  $L(q_1, \dots, q_f, dq_1/dt, \dots, dq_f/dt)$  的变分

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dq_\alpha}{dt} \right)} \delta \left( \frac{dq_\alpha}{dt} \right) \right\} \quad (2.7.27)$$

改写一下，它就成了

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^f \left\{ \frac{dp_\alpha}{dt} \delta q_\alpha + p_\alpha \delta \left( \frac{dq_\alpha}{dt} \right) \right\}, \quad (2.7.28)$$

所以，由两边减去  $\delta \left( \sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} \right)$ ，再改变符号，我们就可以得到

$$\delta \left\{ \sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} - L \right\} = \sum_{\alpha=1}^f \left\{ \frac{dq_\alpha}{dt} \delta p_\alpha - \frac{dp_\alpha}{dt} \delta q_\alpha \right\}. \quad (2.7.29)$$

因此,若把此式左边括号内的量用正则坐标  $q_\alpha, p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 的函数写出来,并设它为  $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$ , 则有

$$H = \sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} - L, \quad (2.7.30)$$

从而式(2.7.29)的左边成了

$$\delta H = \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right\}, \quad (2.7.31)$$

所以,如果把它和式(2.7.29)的右边进行比较,则

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_\alpha}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \right\} (\alpha = 1, 2, \dots, f) \quad (2.7.32)$$

这样,就得到了关于正则变量  $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f$  的  $2f$  个一阶联立微分方程。它们称为哈密顿正则运动方程 (canonical equations of motion), 而  $H$  则叫做哈密顿函数 (Hamilton function), 它是这些正则变量的函数。

但是,假如拉格朗日函数

$$L = T - V \quad (2.7.33)$$

中的  $V$  并不包含广义速度  $dq_1/dt, \dots, dq_f/dt$ , 而且  $T$  取(2.7.18)的形式,那么(2.7.26)就成了

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dq_\alpha}{dt} \right)} = \sum_{\beta=1}^f a_{\alpha\beta} \frac{dq_\beta}{dt}, \quad (2.7.34)$$

于是有

$$\sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} = \sum_{\alpha, \beta=1}^f a_{\alpha\beta} \frac{dq_\alpha}{dt} \frac{dq_\beta}{dt} = 2T, \quad (2.7.35)$$

所以,把它和式(2.7.33)代入式(2.7.30)的右边,就可以得到

$$H = T + V \quad (2.7.36)$$

此式表明,对于保守系来说,哈密顿函数  $H$  是用正则变量  $q_\alpha$ 、 $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 来表示的系统的总能量。实际上,若使用正则方程(2.7.32),则有

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{dt} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.7.37)$$

它表示能量守恒定律。

另外,我们进一步设想正则变量  $q_\alpha$ 、 $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 的任意函数  $F$  及  $G$ , 并引进用下式定义的量:

$$(F, G) \equiv \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \right). \quad (2.7.38)$$

它叫做泊松括号 (Poisson bracket)。假如使用这个括号,正则方程(2.7.32)也可以写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_\alpha}{dt} &= (q_\alpha, H) \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= (p_\alpha, H) \end{aligned} \right\}. \quad (2.7.39)$$

而且,我们很容易就可以证明,更一般地来说,对于  $q_\alpha$ 、 $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 的任意函数  $F$ , 下式是成立的,

$$\frac{dF}{dt} = (F, H). \quad (2.7.40)$$

因此,在保守系的力学变量  $F$  中,满足关系式

$$(F, H) = 0$$

的  $F$ , 即是该系统的**运动常数** (constant of motion), 它在系统走过的各个轨道上保持恒定值。

假如引进一组正则变量  $q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f$ ,

则能构成这些变量的  $2f$  个相互独立的函数  $q'_1, q'_2, \dots, q'_f, p'_1, p'_2, \dots, p'_f$ 。为了使它们成为一组新的正则变量, 下列与式 (2.732) 形式相同的方程必须成立,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq'_\alpha}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial p'_\alpha} \\ \frac{dp'_\alpha}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial q'_\alpha} \end{aligned} \right\} (\alpha = 1, 2, \dots, f) \quad (2.7.41)$$

其中, 右边的  $H'$  是当作  $q'_\alpha, p'_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 的函数表示出来的  $H$ 。如下所示, 我们很容易证明, 满足上式的条件是

$$\left. \begin{aligned} (q'_\alpha, q'_\beta) &= (p'_\alpha, p'_\beta) = 0 \\ (q'_\alpha, p'_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, f) \quad (2.7.42)$$

其中  $\delta_{\alpha\beta}$  这个记号意味着, 当  $\alpha = \beta$  时为 1, 当  $\alpha \neq \beta$  时为 0。

假若使用正则方程 (2.7.32), 首先可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dq'_\alpha}{dt} &= \sum_{r=1}^f \left( \frac{\partial q'_\alpha}{\partial q_r} \frac{dq_r}{dt} + \frac{\partial q'_\alpha}{\partial p_r} \frac{dp_r}{dt} \right) \\ &= \sum_{r=1}^f \left( \frac{\partial q'_\alpha}{\partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial q'_\alpha}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial q_r} \right), \end{aligned} \quad (2.7.43)$$

如果在这里把  $H$  看成  $q'_1, \dots, q'_f, p'_1, \dots, p'_f$  的函数, 则有

$$\begin{aligned} \frac{dq'_\alpha}{dt} &= \sum_{r=1}^f \left\{ \frac{\partial q'_\alpha}{\partial q_r} \sum_{\beta=1}^f \left( \frac{\partial H'}{\partial q'_\beta} \frac{\partial q'_\beta}{\partial p_r} + \frac{\partial H'}{\partial p'_\beta} \frac{\partial p'_\beta}{\partial p_r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial q'_\alpha}{\partial p_r} \sum_{\beta=1}^f \left( \frac{\partial H'}{\partial q'_\beta} \frac{\partial q'_\beta}{\partial q_r} + \frac{\partial H'}{\partial p'_\beta} \frac{\partial p'_\beta}{\partial q_r} \right) \right\} \\ &= \sum_{\beta=1}^f \left\{ (q'_\alpha, q'_\beta) \frac{\partial H'}{\partial q'_\beta} \right\} - \sum_{\beta=1}^f \left\{ (q'_\alpha, p'_\beta) \frac{\partial H'}{\partial p'_\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (2.7.44)$$

这样一来, 根据式 (2.7.42), 上式右边的第一项为 0, 第二项成了  $\partial H' / \partial p'_\alpha$ , 所以式 (2.7.44) 和式 (2.7.41) 的第一式是一致的。同样可以证明, 式 (2.7.41) 的第二式也是成立的。



这样一来,在经典力学的哈密顿形式中,泊松括号具有重要的意义. 本讲座第三卷《量子力学 I》第三章将要详细谈到,在量子力学中,各种各样的物理量都能表示成行列式,改变它们相乘的次序,一般来说便可以得到不同的行列式. 这时,代替泊松括号(2.7.38),对易子 (commutator)

$$FG - GF$$

扮演着一个重要的角色. 另外,假如把经典力学中的  $(F, G)$  用  $i\hbar(FG - GF)$  来替换,正则方程(2.7.39)就变成了量子力学的运动方程,而(2.7.42)则成为量子力学中正则变量  $q_\alpha, p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 之间的交换关系.

虽然正则变量的选择有很大的任意性,但同时也有像与泊松括号有关的(2.7.42)所表示的那种限制. 我们能够把它以稍微不同的形式表现如下. 这就是说,如果由一组正则变量  $q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f$  变换到另一组变量  $Q_1, Q_2, \dots, Q_f, P_1, P_2, \dots, P_f$ , 那么,更一般地来说,在新旧两组变量之间,会存在着  $2f$  个函数关系

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha &= Q_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t) \\ P_\alpha &= P_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t) \end{aligned} \right\} (\alpha = 1, 2, \dots, f) \quad (2.7.45)$$

但是,使  $q_\alpha, p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 为正则变量的条件是式(2.7.30),即拉格朗日函数可以写成

$$L = \sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} - H(q_\alpha, p_\alpha). \quad (2.7.46)$$

因此,可以认为,  $Q_\alpha, P_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 也为正则变量的条件是: 同一个函数  $L$  也能写成

$$L = \sum_{\alpha=1}^f P_\alpha \frac{dQ_\alpha}{dt} - K(Q_\alpha, P_\alpha, t). \quad (2.7.47)$$

其中,  $K$  为  $Q_\alpha, P_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 及时间  $t$  的函数,它是

关于新变量的哈密顿函数。然而,这个条件过于严格。因为,关于  $q_\alpha, p_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, f)$  的正则方程(2.7.32),倘若究其本源,乃是由变分原理(2.7.12)或(2.7.22)推导出来的。但是,即使把式(2.7.12)中的  $L$  用

$$L' = L + \frac{dW}{dt} \quad (2.7.48)$$

来替换,变分原理(2.7.12)也只是变成了

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt + \delta W_1 - \delta W_0 = 0. \quad (2.7.49)$$

其中,  $W$  表示  $q_\alpha, p_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, f)$  及  $t$  的某一个函数,  $W_0, W_1$  分别表示时刻  $t_0$  及  $t_1$  的  $W$  值。为了使式(2.7.49)不管起点和终点上的变分如何均成立,仍然需要满足原来形式的变分原理(2.7.12)。如果综合考虑以上各点,则新变量  $Q_\alpha, P_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, f)$  为正则变量的条件便归结为函数  $W$  的存在,这个  $W$  满足

$$\sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} - H = \sum_{\alpha=1}^f P_\alpha \frac{dQ_\alpha}{dt} - K + \frac{dW}{dt}. \quad (2.7.50)$$

上式两边的各项都写成了  $q_\alpha, p_\alpha, Q_\alpha, P_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, f)$  及  $t$  的  $4f + 1$  个变量的函数。不过,在这些变量之间有式(2.7.45)那样的  $2f$  个关系,所以独立的变量实际上只有  $2f + 1$  个。如果把  $q_1, \dots, q_f, Q_1, \dots, Q_f$  及  $t$  选成这些变量,并认为  $W$  是这些变量的函数,那么  $W$  沿着实际轨道随时间的变化就应当是

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial W}{\partial Q_\alpha} \frac{dQ_\alpha}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (2.7.51)$$

因此,为了使式(2.7.50)的两边成为  $q_1, \dots, q_f, Q_1, \dots, Q_f$  及  $t$  的相同函数,必须满足下列关系:

$$\left. \begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}, & P_\alpha &= -\frac{\partial W}{\partial Q_\alpha} \\ K &= H + \frac{\partial W}{\partial t} \end{aligned} \right\} (\alpha = 1, 2, \dots, f) \quad (2.7.52)$$

这就是使正则变量  $q_\alpha, p_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, f)$  变成新变量  $Q_\alpha, P_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, f)$  的变换式 (2.7.45) 为**正则变换** (canonical transformation) 的条件。当这个条件满足时,  $Q_\alpha, P_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, f)$  的正则方程即成为

$$\frac{dQ_\alpha}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha}, \quad \frac{dP_\alpha}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, f), \quad (2.7.53)$$

倘若我们能特地选择新的变量  $Q_\alpha, P_\alpha$  及  $W$ , 使得下式恒等地成立

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad (2.7.54)$$

那么, 根据式 (2.7.54),  $Q_\alpha, P_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, f)$  这  $2f$  个物理量就成为不随时间变化的**运动常数** (constants of motion)。使用 (2.7.52) 详细写出来, 则 (2.7.54) 就成了关于**作用函数** (action function)  $W(q_1, \dots, q_f, Q_1, \dots, Q_f, t)$  的偏微分方程:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = 0. \quad (2.7.55)$$

这就是所谓的**哈密顿-雅可比** (Jacobi) **偏微分方程**。

但是, 以上的研究是对保守系进行的, 所以不管力学系沿着怎样的轨道运动, 总能量都应保持一定的值。设这个值为  $E$ , 则会存在下列形式的解

$$W = S - Et. \quad (2.7.56)$$

其中  $S$  仅仅是  $q_1, \dots, q_f$  及  $Q_1, \dots, Q_f$  的函数, 它必须满足

方程

$$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) = E. \quad (2.7.57)$$

由于该系统独立的运动常数并不会超过  $Q_\alpha, P_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 这  $2f$  个, 故能量  $E$  也应能表示成它们的函数. 因此, 我们就可以把  $2f$  个运动常数中的一个, 比如  $Q_1$ , 选成  $E$  本身. 所以, 如果求解(2.7.57), 确定一个函数  $S(q_1, \dots, q_f, Q_1, \dots, Q_f)$ , 并把式(2.7.56)代入式(2.7.52)的右边, 我们就可以得到  $2f$  个关系式:

$$\left. \begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, f) \\ P_1 &= -\frac{\partial S}{\partial Q_1} + t \\ P_\beta &= -\frac{\partial S}{\partial Q_\beta} \quad (\beta = 2, 3, \dots, f) \end{aligned} \right\}. \quad (2.7.58)$$

把此式对  $q_\alpha, p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, f$ ) 求解, 即可决定出下列关系

$$\left. \begin{aligned} q_\alpha &= q_\alpha(Q_1, \dots, Q_f, P_1, \dots, P_f, t) \\ p_\alpha &= p_\alpha(Q_1, \dots, Q_f, P_1, \dots, P_f, t) \end{aligned} \right\}. \quad (2.7.59)$$

也就是说, 给定  $2f$  个运动常数中的任意一组值, 就可以完全确定自由度为  $f$  的保守系的运动. 这样一来, 在经典力学中, 求解运动方程的问题, 便可以换成求解有关作用函数  $W$  或  $S$  的哈密顿-雅可比偏微分方程(2.7.55)或(2.7.57).

众所周知, 薛定谔 (Schrödinger) 在创立波动力学之际, 是以哈密顿-雅可比偏微分方程(2.7.55)为出发点的. 关于它的详细情况, 请参考第三卷《量子力学 I》.

## 第三章 连续体力学

当一个物体在比它大得多的空间中运动，而我们又是着眼于它的运动与作用于它上面的外力的关系时，把该物体近似地看成一个质点或一个刚体的做法，的确能起到重要的作用。但是，为了在宏观上理解物体本身的变形、在物体内传播的波动现象、以及在本身不保持形状的液体和气体中所看到的流动现象及波动现象，有效的办法是引进能变形的连续体的概念。通过在总体上尽量掌握各点的位移和速度，这个连续体的概念促进了场概念的建立，与此同时，人们还出色地研究出了解析的方法。

本章主要研究各点的位移是微小的，而且基本方程能够很好地用线性近似的情况，最后再谈一谈非线性波动方程的几个重要例子，这些非线性波动方程是处理小而有限的位移的。

### § 3.1 前言

在第一章及第二章中，我们讨论了质点系力学以及作为其特殊情况的刚体力学。那时，曾提出过这样的问题：近似地把物体看成是许多质点的集合，或者看成用显微镜也看不到的许多微小刚体的集合，这是否有效？或者说，无限可分的连续体的概念能不能给出一个好的近似？当然，刚体的概念对于处理物体的变形并无用处，质点系的概念若保持原样，对于描述宏观的运动也是不便的。我们依靠极限过渡由质点系引出了连续体近似，而且想说明：在研究物体的变形及其传播方



面,这种近似是非常有效的. 这里必须注意,在连续体概念中,不仅包含着无限分割的可能性,而且无论怎样微小的部分也都具有变形的可能性. 反过来说,只允许分割到不丧失可能变形的微小部分,这种近似就是连续体的概念. 或者说,连续体概念及其数学处理方法的应用界限,截止到可能变形的微小单元.

但是,以上的讨论并不适用于可以看成连续体特殊情况的刚体概念. 也就是说,在刚体中,多么微小的部分都是不变形的. 这是第一章所讲过的刚体定义的必然结论. 为了强调这一点,我们再来重复一下,任意两点之间的距离固定不变的物体就是刚体. 不用说,如果把力加到现实的物体上,它或大或小总要变形. 而且,倘若所加的力超过某一限度,该物体就要遭到破坏. 在牛顿之前,这一点甚至是估量力量大小的一个标准. 尽管如此,刚体概念和质点概念都曾在力学理论中发挥过有效的作用,这是因为,对于从整体上来掌握物体,并描述其宏观运动来说,这两个概念是相当方便的. 那时,判定有效性的标准,是变形程度对运动尺度之比. 因此,在讨论处于静止状态的物体的平衡时,刚体概念有时会不再是有效的.

例如,假设以非常坚硬的材质做得很牢固的四条腿桌子,放置在水平而坚硬的地板上. 并假定桌腿垂直地固定在桌面上,它与地板之间,没有摩擦力作用. 而且,我们还假设四条腿长度相等,无论哪一条腿都和地板接触. 如果把桌子看作刚体,则来自地板的四个反力就不能唯一确定. 这个问题,自古就以“四条腿佯谬”而为人们所知,然而,为了解决它,只要允许“无限小但不为零的”变形就可以了.

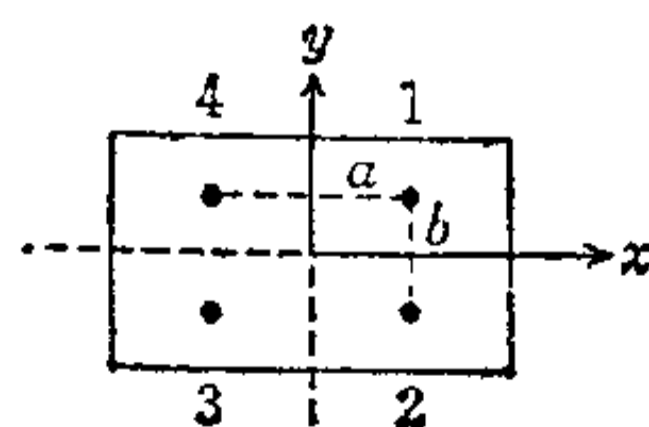


图 3.1

现在, 我们假设长度为  $h$  的棒, 分别垂直于板固定在图 3.1 所示的板的对称位置  $(a, b)$ ,  $(a, -b)$ ,  $(-a, -b)$ ,  $(-a, b)$  上. 若板远比棒硬, 而且即使腿收缩也仍保持平面, 那么, 在四条腿的收缩  $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3, \Delta l_4$  是微小量的近似条件下, 下式是成立的

$$\Delta l_1 - \Delta l_2 + \Delta l_3 - \Delta l_4 = 0. \quad (3.1.1)$$

设这时桌面的法线矢量为  $\mathbf{n} = (l, m, n)$ , 棒的杨氏(Young)模量为  $E$ , 板的质量为  $M$ , 地板对每条腿的反力为  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 那么, 根据力的和为零的条件, 我们就可以得到

$$R_i = E \frac{\Delta l_i}{h} n \quad (3.1.2)$$

$$\sum_{i=1}^4 R_i = Mg. \quad (3.1.3)$$

如果再把力矩为零的条件在  $\Delta l_i \ll h, l, m \ll n \approx 1$  的近似条件下写出来, 则有

$$\Delta l_1 - \Delta l_2 - \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0 \quad (3.1.4)$$

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 - \Delta l_3 - \Delta l_4 = 0. \quad (3.1.5)$$

这样一来, 就未知量  $\Delta l_i$  而言, 我们得到了式 (3.1.1)、(3.1.3)、(3.1.4) 及 (3.1.5) 这样四个独立的方程, 所以如果求解它们, 则有

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_4 = \frac{h}{E} \frac{Mg}{4}, \quad (3.1.6)$$

从而反力即可唯一地确定为

$$R_i = \frac{Mg}{4} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (3.1.7)$$

由这个计算可知,  $\Delta l_i$  可以假设为无限小, 但是不得为零; 这一点是很重要的. 纵然物理学中的近似计算每每把无限小量作为零来处理, 往往毫无妨碍, 但是, 由于无限小和零在本质

上是不同的,所以,在理论的框架中这种处理就会引起本质上的差别。四条腿佯谬则为其有代表性的一例。

刚体概念引起的又一个困难,是具有光滑表面的两个球的碰撞过程。这时,假如把两个球同时当作刚体,就不能使牛顿运动方程的解的唯一性得到保证(详细内容,请参看本讲座第二卷《经典物理学 II》。)在这种情况下,人们往往采用完全弹性球的概念。倘若是弹性体,那么碰撞的结果就应该在球的内部引起振动。对现实的宏观球来说,由于碰撞而转化成振动能的那一部分,比起两个球作为一个整体所具有的动能来,是微乎其微的,而且,内部的摩擦会使振动急剧衰减,所以,忽略球的振动所引起的能量激发,一般来说并无妨碍。但是,在原子分子的量级上,这样的近似就已经不能允许了。另外,完全弹性球的概念与刚体的概念相抵触,因为它隐含着这样的过程,即尽管是无限小,但球总是要变形的,而且该变形还要复原。

静力学的平衡和球的碰撞过程被认为是最简单的力学问题,刚体的概念甚至在这些问题中也失掉了应用的可能性,从而使我们不得不引进可能变形的连续体的近似。

在历史上,曾经有人企图通过把物体当作单元小球的链锁系统来处理,从而解释波动现象,但是,在近似法成为解析学的一个方法时,连续体概念就确定下来了。它不仅使推算显著地简化,而且在以后的物理学理论处理及数学各领域的发展上,作出了不可估量的贡献。不过,我们必须注意到,连续体的近似亦有所失。它的一个例子是 §3.8 我们将要看到的一维点阵的散射效应。然而,更为基本的是,它完全丢掉了作为物体结构单元的原子所具有的旋转自由,而只是把几何点的连续集合当作物理学的研究对象。因此,在本章所介绍的理论,是很难和微观物理学直接连系的。今后频繁使用的

无限小量,始终是为了使近似概念规范化的一个符号,注意不要和能够计量的物理量概念混同起来。

### § 3.2 应力

物体这个术语是在物质具有一定的形状和大小的意义上使用的,所以,保持形状的性质被人们假定成是一种内在的性质。这种性质,作为一种阻抗显示出来,在外力加到物体上时,该阻抗力图使物体不改变形状。在这种情况下,就外部加到物体上的力而言,或者是急剧地加上,或者是缓慢地加上,或者是象重力那样无论何时总是具有一定的大小。针对这些不同的情况,该物体所显示的阻抗也采取各种各样的形态。为了简单起见,在这里我们打算考虑最后谈到的那种力,即无论何时总以一定的大小作用着的力。

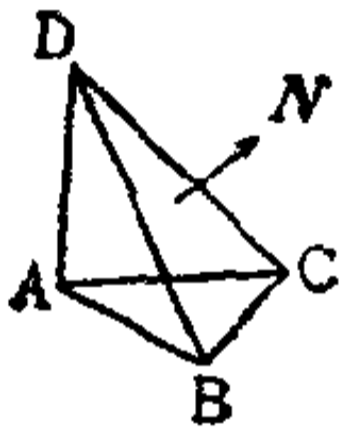


图 3.2

物体未必都由同种的均匀物质所构成,但是假如分布是连续的,那么取物体内任意一点的附近,我们就可以认为它是均匀的物质。然而,即使物质是均匀的,但一般来说未必保持各向同性。因此,我们设想一个围绕物体内某一点P的小三角锥 ABCD。在这里假设 AB, AC, AD 分别平行于  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴。因为三角锥四个面的面积非常小,所以通过这些面作用于该三角锥上的力,对于每个面来说都可以认为是恒定的。

我们把面 ACD、ABD、ABC、BCD 的面积分别用  $S_x$ 、 $S_y$ 、 $S_z$ 、 $S$  来表示,而把每单位面积由外侧作用于这些面上的力分别写成:

$$\mathbf{T}_x \equiv (T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}), \quad \mathbf{T}_y \equiv (T_{yx}, T_{yy}, T_{yz})$$

$$\mathbf{T}_z \equiv (T_{zx}, T_{zy}, T_{zz}), \quad \mathbf{T}_S \equiv (T_{Sx}, T_{Sy}, T_{Sz}).$$

如果作用于三角锥每单位体积上象重力之类的外力为



$M$ , 则由力的平衡公式, 我们就可以得到

$$T_x S_x + T_y S_y + T_z S_z + T_s S + MV = 0. \quad (3.2.1)$$

式中,  $V$  是三角锥的体积.

由(3.2.1)可知,

$$-T_s = \frac{T_x S_x}{S} + \frac{T_y S_y}{S} + \frac{T_z S_z}{S} + \frac{MV}{S}. \quad (3.2.2)$$

如果把面 BCD 的外向法线矢量写成  $N \equiv (l, m, n)$ , 那么上式就成了

$$-T_s = T_x l + T_y m + T_z n + \frac{MV}{S}, \quad (3.2.3)$$

但是, 在使三角锥变小的极限条件下, 右边的最后一项是  $V/S \rightarrow 0$ , 所以可以忽略不计. 也就是说, 点 P 周围的无限小三角锥有一个法线矢量为  $N$  的面, 该三角锥通过这个面每单位面积给予外部的作用力为

$$T \equiv -T_s = T_x l + T_y m + T_z n. \quad (3.2.4)$$

写成分量, 就是

$$\left. \begin{aligned} T_x &= T_{xx}l + T_{yx}m + T_{zx}n \\ T_y &= T_{xy}l + T_{yy}m + T_{zy}n \\ T_z &= T_{xz}l + T_{yz}m + T_{zz}n \end{aligned} \right\}. \quad (3.2.5)$$

倘若进一步研究作用于该三角锥上的力矩之和为零的条件, 则在简单的计算之后, 就可以得到

$$T_{xy} = T_{yx}, \quad T_{yz} = T_{zy}, \quad T_{zx} = T_{xz}. \quad (3.2.6)$$

另外, 因为三角锥是无限小的, 所以,  $T_{xx}$ 、 $T_{xy}$ 、 $T_{xz}$ 、 $T_{yx}$ 、 $T_{yy}$ 、 $\dots$  之中的任何一个都可以看成是 P 点位置  $(x, y, z)$  的函数. 在这里我们再强调一下, 对于三角锥上作用力的平衡条件来说, 刚体的假定是不必要的. 如果考虑三角锥的反力, 并用牛顿运动方程写出静止的条件, 那么我们就可以证明这一点.



结果表明,通过物体内一点取法线为  $\mathbf{N}$  的平面,以此平面为界把物体分成相邻的两部分,其一部分对法线  $\mathbf{N}$  指向的一侧每单位面积上的作用力  $\mathbf{T}$ ,可以由  $(T_{xx}, T_{xy}, \dots)$  这个量和  $\mathbf{N}$  的分量  $(l, m, n)$  表示成 (3.2.5)。这个关系依坐标系的选择而变化。下面我们来研究一下这个变换的情况(也有的书定义  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{N}$  的方向关系,与这里所谈的相反。不过,只要在符号上注意前后统一,无论用哪一个都可以)。

我们已经知道,力要进行矢量的变换。若两个正交的坐标系  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点是公用的,那么,在用  $\Sigma, \Sigma'$  来观察时,同一个位置矢量的分量之值  $(x, y, z), (x', y', z')$  间,便存在着下列关系:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z \\ y' &= a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z \\ z' &= a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

式中,  $(a_{xx}, a_{yy}, \dots)$  满足条件

$$\left. \begin{aligned} a_{xx}^2 + a_{yx}^2 + a_{zx}^2 &= a_{xy}^2 + a_{yy}^2 + a_{zy}^2 \\ &= a_{xz}^2 + a_{yz}^2 + a_{zz}^2 \\ &= 1 \\ a_{xx}a_{xy} + a_{yx}a_{yy} + a_{zx}a_{zy} \\ &= a_{xy}a_{xz} + a_{yy}a_{yz} + a_{zy}a_{zz} \\ &= a_{xz}a_{xx} + a_{yz}a_{yx} + a_{zz}a_{zx} \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.8)$$

因为  $\mathbf{T}, \mathbf{N}$  作为一个矢量所进行的变换和式(3.2.7)相同,所以它们的分量可以表示为

$$\left. \begin{aligned} T'_x &= a_{xx}T_x + a_{xy}T_y + a_{xz}T_z \\ T'_y &= a_{yx}T_x + a_{yy}T_y + a_{yz}T_z \\ T'_z &= a_{zx}T_x + a_{zy}T_y + a_{zz}T_z \end{aligned} \right\}, \quad (3.2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} l' &= a_{xx}l + a_{xy}m + a_{xz}n \\ m' &= a_{yx}l + a_{yy}m + a_{yz}n \\ n' &= a_{zx}l + a_{zy}m + a_{zz}n \end{aligned} \right\} \quad (3.2.10)$$

式中，加“'”的是在  $\Sigma'$  中的值。为了今后的计算方便起见，我们把式(3.2.10)反过来求解，而表示成：

$$\left. \begin{aligned} l &= a_{xx}l' + a_{yx}m' + a_{zx}n' \\ m &= a_{xy}l' + a_{yy}m' + a_{zy}n' \\ n &= a_{xz}l' + a_{yz}m' + a_{zz}n' \end{aligned} \right\} \quad (3.2.11)$$

如果把式(3.2.5)和(3.2.11)代入式(3.2.9)，再进行整理，则有

$$\left. \begin{aligned} T'_x &= T'_{xx}l' + T'_{yx}m' + T'_{zx}n' \\ T'_y &= T'_{xy}l' + T'_{yy}m' + T'_{zy}n' \\ T'_z &= T'_{xz}l' + T'_{yz}m' + T'_{zz}n' \end{aligned} \right\} \quad (3.2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} T'_{xx} &= a_{xx}a_{xx}T_{xx} + a_{xx}a_{xy}T_{xy} + a_{xx}a_{xz}T_{xz} \\ &\quad + a_{xy}a_{xx}T_{yx} + a_{xy}a_{xy}T_{yy} + a_{xy}a_{xz}T_{yz} \\ &\quad + a_{xz}a_{xx}T_{zx} + a_{xz}a_{xy}T_{zy} + a_{xz}a_{xz}T_{zz} \\ T'_{yx} &= a_{yx}a_{xx}T_{xx} + a_{yx}a_{xy}T_{xy} + a_{yx}a_{xz}T_{xz} \\ &\quad + a_{yy}a_{xx}T_{yx} + a_{yy}a_{xy}T_{yy} + a_{yy}a_{xz}T_{yz} \\ &\quad + a_{yz}a_{xx}T_{zx} + a_{yz}a_{xy}T_{zy} + a_{yz}a_{xz}T_{zz} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (3.2.13)$$

为了使式(3.2.13)的写法简化，把  $T_{xy}$ 、 $a_{xy}$  等的下标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  换成数字 1、2、3，并设  $i$ 、 $j$ 、 $k = 1, 2, 3$ ，则式(3.2.13)就可以表示成

$$T'_{ij} = \sum_{k,m=1}^3 a_{ik}a_{jm}T_{km} \quad (3.2.14)$$

与此相应，我们可以把三维的矢量变换写成

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik}A_k \quad (3.2.15)$$

对于坐标系的变换来说,经过了式(3.2.14)那种变换的量  $T = \{T_{ij}\}$ , 叫做二阶张量 (2nd rank tensor). 通常可以把三维欧几里德空间中的二阶张量写成矩阵的形式:

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.2.16)$$

由式(3.2.6)可知,我们所讨论的张量  $T$ , 就下标而言是对称的, 所以把它叫做对称张量 (symmetric tensor). 通过适当的坐标变换 (主轴变换), 二阶对称张量能够变成下列形式:

$$T' = \begin{bmatrix} T'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & T'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & T'_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.2.17)$$

按照符号的正负, 在新坐标系中,  $T'_{xx}$ 、 $T'_{yy}$ 、 $T'_{zz}$  分别是通过垂直于  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的面所给予的压力 (pressure) 或张力 (tension). 一般把与  $T_{xy}$  有关的力叫做应力 (stress), 而把与  $T = \{T_{xx}, T_{xy}, \dots\}$  有关的量称为应力张量 (stress tensor). 更详细一点来说, 把  $T_{xx}$ 、 $T_{yy}$ 、 $T_{zz}$  称为法向应力 (normal stress), 把剩余的  $T_{xy}$ 、 $T_{yz}$  等等称为切向应力 (tangential stress). 其意义在以上的讨论中是很明确的 (注意参考 p 110).

### § 3.3 应变

我们已经知道, 当外力作用于物体时, 在其内部会产生应力. 与没有外力作用的情况相比, 此时物体或大或小总要发生变形. 于是就可以认为, 在物体内部发生了伸缩或者扭曲. 因此, 我们打算在本节就变形非常小的情况, 说明一下描述连续体变形状态的方式.

刚体作为连续体的一个极限概念,是这样的一种物体,其内部任意两点之间的距离,无论对于任何外力都不发生变化.那么,我们首先来求一下,当物体内任意两点  $P, Q$  在变形后移动到  $P', Q'$  时,表示两点间距离变化的一般表达式.若把坐标系在空间固定,并设  $P, Q, P', Q'$  的坐标分别为

$$P:(x, y, z), \quad Q:(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

$$P':(x + u, y + v, z + w),$$

$$Q':(x + \Delta x + u + \Delta u, y + \Delta y + v + \Delta v, \\ z + \Delta z + w + \Delta w),$$

则两点之间距离的平方差就可以用下式来表示:

$$\begin{aligned} \overline{P'Q'}^2 - \overline{PQ}^2 &= 2(\Delta x \Delta u + \Delta y \Delta v + \Delta z \Delta w) \\ &\quad + (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2 \\ &\equiv 2(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u}) + (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$\mathbf{u} \equiv (u, v, w)$ ,  $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \equiv (u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w)$  分别称为  $P, Q$  点的位移矢量 (displacement vector), 而

$$\Delta \mathbf{x} \equiv (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

是  $P, Q$  两点的位置矢量之差.

我们认为无需事先说明,式(3.3.1)是一个与  $\Delta \mathbf{u}$  和  $\Delta \mathbf{x}$  的大小无关而严格成立的关系式.但是,为了今后讨论方便,我们把式(3.3.1)中的  $\Delta \mathbf{x}$  和  $\Delta \mathbf{u}$  所起的作用用图表示出来(图 3.3).假如把  $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{u}$  向  $\overrightarrow{QQ'} = \mathbf{u}$  平行移动,显然  $\overrightarrow{P'Q''} = \Delta \mathbf{x}$ ,  $\overrightarrow{Q''Q'} = \Delta \mathbf{u}$ .

因为我们考虑的是连续变形,所以  $\mathbf{u}$  的各个分量就是  $(x, y, z)$  的连续函数;假如点  $Q$  与点  $P$  非常接近,也就是  $|\Delta \mathbf{x}|$  非常小,那么,位移矢量之差  $\Delta \mathbf{u}$  的大小也可以认为是非常小的.因此,就能够把  $\Delta \mathbf{u}$  的各个分量近似地用  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  的线性组合 (linear combination) 来表示.我们可以把这种组合写成

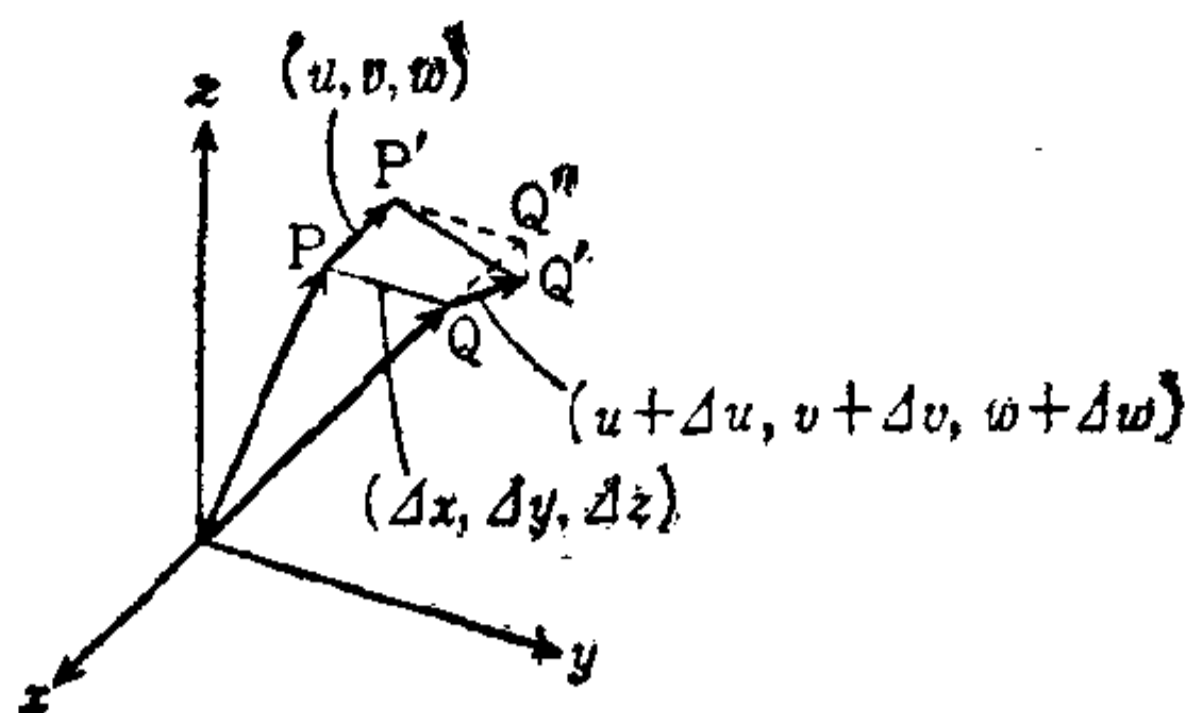


图 3.3

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \xi_{xx}\Delta x + \xi_{xy}\Delta y + \xi_{xz}\Delta z \\ \Delta v &= \xi_{yx}\Delta x + \xi_{yy}\Delta y + \xi_{yz}\Delta z \\ \Delta w &= \xi_{zx}\Delta x + \xi_{zy}\Delta y + \xi_{zz}\Delta z \end{aligned} \right\}, \quad (3.3.2)$$

此式表明, 如果  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  非常小, 那么式中每一等式的右边都要趋近于各自左边的值, 也就是说, 在极限意义下, 这是一些严密的关系。在数学上, 这不外乎就是假定了  $u$ 、 $v$ 、 $w$  对  $x$ 、 $y$ 、 $z$  是(一阶)可微的。

把式(3.3.2)代入式(3.3.1), 进行整理即可得到

$$\begin{aligned} \overline{P'Q'}^2 - \overline{PQ}^2 &= 2\{\zeta_{xx}(\Delta x)^2 + \zeta_{yy}(\Delta y)^2 + \zeta_{zz}(\Delta z)^2 \\ &\quad + \zeta_{yz}\Delta y\Delta z + \zeta_{zx}\Delta z\Delta x + \zeta_{xy}\Delta x\Delta y\}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

式中,

$$\zeta_{xx} = \xi_{xx} + \frac{1}{2}(\xi_{xx}^2 + \xi_{yx}^2 + \xi_{zx}^2) \quad (3.3.4)$$

$$\zeta_{yz} = \xi_{yz} + \xi_{zy} + \xi_{xy}\xi_{xz} + \xi_{vy}\xi_{yz} + \xi_{zy}\xi_{zx}, \quad (3.3.5)$$

让下标作  $x \rightarrow y \rightarrow z$  那样的循环变化, 就可以得到其它各项。一般来说,  $\xi_{yz} \neq \xi_{zy}$ , 但常常是  $\zeta_{yz} = \zeta_{zy}$ ; 这一点由以上定义来看是很清楚的。

然后, 我们试取  $\Delta x \rightarrow dx$ 、 $\Delta y \rightarrow dy$ 、 $\Delta z \rightarrow dz$  这样的极限。由式(3.3.2)可知,



$$\xi_{xx} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, z), \quad \xi_{xy} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, z),$$

$$\xi_{xz} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z)$$

$$\xi_{yx} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} v(x, y, z), \quad \xi_{yy} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} v(x, y, z),$$

$$\xi_{yz} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} v(x, y, z)$$

$$\xi_{zx} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} w(x, y, z), \quad \xi_{zy} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} w(x, y, z),$$

$$\xi_{zz} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} w(x, y, z),$$

所以，假如设  $\overline{P'Q'^2} \rightarrow ds'^2$ ,  $\overline{PQ^2} \rightarrow ds^2$ , 那么式 (3.3.3) 就变成

$$ds'^2 - ds^2 = 2\{\eta_{xx}(dx)^2 + \eta_{yy}(dy)^2 + \eta_{zz}(dz)^2 + \eta_{yz}dydz + \eta_{zx}dzdx + \eta_{xy}dxdy\}. \quad (3.3.6)$$

式中，

$$\eta_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (3.3.7)$$

$$\eta_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \quad (3.3.8)$$

.....

式 (3.3.6) 是表示连续体变形的一般表达式；为了更好地理解它的意义，我们可以把它改写一下。首先，因为

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2,$$

所以式 (3.3.6) 就变成

$$ds'^2 = (1 + 2\eta_{xx})(dx)^2 + (1 + 2\eta_{yy})(dy)^2 + (1 + 2\eta_{zz})(dz)^2 + 2\eta_{yz}dydz$$

$$+ 2\eta_{zx}dzdx + 2\eta_{xy}dxdy. \quad (3.3.9)$$

它还可以表示成

$$ds'^2 = g_{xx}(dx)^2 + g_{yy}(dy)^2 + g_{zz}(dz)^2 \\ + g_{yz}dydz + g_{zx}dzdx + g_{xy}dxdy \quad (3.3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{xx}(x, y, z) &\equiv 1 + 2\eta_{xx} \\ g_{yz}(x, y, z) &\equiv 2\eta_{yz} \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\}. \quad (3.3.11)$$

从几何学来考虑,式(3.3.10)表示,变形之前在连续体各点上设置的一组互相正交的单位矢量,一般来说在变形之后不仅不再正交,而且其长度也要发生变化. 为了观察角度变化、长度变化同  $g_{xx}, g_{yz}, \dots$  等的关系,我们可以作如下分析.

假设变形前连续体任意一点  $P$  的坐标是  $(x, y, z)$ , 不用说, 这里指的是固定在空间上的三维欧几里德空间的笛卡儿坐标. 我们选择通过  $P$  点的三个单位矢量分别平行于  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴, 并用  $e_1, e_2, e_3$  表示. 在  $e_1, e_2, e_3$  上分别取点  $P_1, P_2, P_3$  设

$\vec{PP}_1 \equiv (\Delta x, 0, 0), \vec{PP}_2 \equiv (0, \Delta y, 0), \vec{PP}_3 \equiv (0, 0, \Delta z),$   
其中  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  都是微小量.

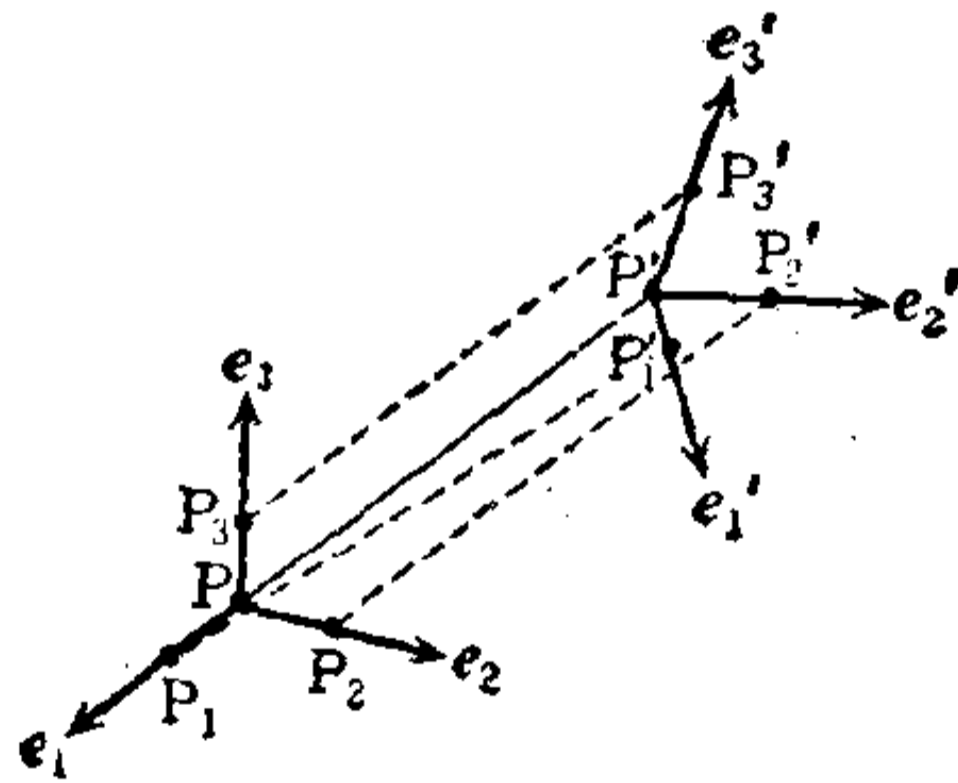


图 3.4

由于变形,  $P, P_1, P_2, P_3$  各自移动到  $P'(x', y', z'), P'_1, P'_2, P'_3.$  因为物体的变形是用各点的位移矢量  $u$  来表示的,

$$u \equiv (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)),$$

所以,

$$x' = x + u(x, y, z), \quad y' = y + v(x, y, z),$$

$$z' = z + w(x, y, z).$$

因此,假如忽略  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  二次以上的项,则

$$\vec{P'P'_1} = \left( \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x, \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x, \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x \right) \quad (3.3.12)$$

$$\vec{P'P'_2} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y, \Delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y, \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y \right) \quad (3.3.13)$$

$$\vec{P'P'_3} = \left( \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z, \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z, \Delta z + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \right), \quad (3.3.14)$$

于是有

$$\begin{aligned} (\vec{P'P'_1}, \vec{P'P'_1}) = & \left[ 1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] (\Delta x)^2 \quad (3.3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{P'P'_2}, \vec{P'P'_3}) = & \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \right] \Delta y \Delta z \quad (3.3.16) \end{aligned}$$

.....

由此可知,  $g_{xx}$  表示单位矢量  $\mathbf{e}_1$  伸长了多少倍,  $g_{yz}$  表示  $\mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_3$  夹角的余弦与零偏差了多少. 虽然我们是在忽略  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  二次以上各项的近似条件下进行讨论的,但也可把包含这些项的表达式当作  $g_{xx}$ 、 $g_{yz}$ 、 $\dots$  来处理. 以这时的式 (3.3.10) 为出发点的理论叫做有限变形理论. 本章没有必要把讨论一般化到那样的程度. 非但如此,就是在式 (3.3.15)、(3.3.16) 中  $\partial u/\partial x$ 、 $\partial u/\partial y$ 、 $\dots$ 、 $\partial w/\partial z$  也已经是微小量了,在取近似的时候将忽略它们的二次式. 这种处理方式叫做无限小变形的弹性理论 (infinitesimal elasticity the-

ory). 另外,往往把考虑了  $\partial u/\partial x, \dots, \partial w/\partial z$  的高次项及  $\partial u^2/\partial x^2, \partial u^2/\partial x\partial y, \dots$  的那种处理方式叫做高次弹性理论 (higher order elastic theory). 我们准备逐步地来明确前者的优点和缺点.

我们之所以一开始就特意说明对描述变形似乎是不必要的一般理论,是因为我们认为,对将来学习广义相对论作一个有益的准备来说这个地方是最合适不过的了. 式 (3.3.10) 是描述“弯曲空间”的基本表达式,  $g_{xx}, \dots, g_{yz}$  是所谓的基本张量 (fundamental tensor) 或度规张量 (metric tensor) (参考本讲座第二卷《经典物理学 II》). 由定义可知,  $g_{xy} = g_{yx}, g_{yz} = g_{zy}, g_{zx} = g_{xz}$ . 这种张量叫做二阶对称张量 (2nd rank symmetric tensor). 因为连续体变形的状况完全由这六个分量所构成的二阶对称张量来确定,所以,从  $g_{xx}, \dots, g_{yz}$  出发来讨论连续体力学,在形式上讲是可能的. 但是,这样作实际上却相当复杂,而且很不方便.

因此,我们再次回到式 (3.3.2),以无限小变形的近似重新研究一下变形的状况. 首先,用矩阵来表示式 (3.3.2),并把它分成反对称部分 (antisymmetric part) 和对称部分 (symmetric part):

$$\Delta \mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\xi_{xy} - \xi_{yx}) & \frac{1}{2}(\xi_{xz} - \xi_{zx}) \\ \frac{1}{2}(\xi_{yx} - \xi_{xy}) & 0 & \frac{1}{2}(\xi_{yz} - \xi_{zy}) \\ \frac{1}{2}(\xi_{zx} - \xi_{xz}) & \frac{1}{2}(\xi_{zy} - \xi_{yz}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} \xi_{xx} & \frac{1}{2}(\xi_{xy} + \xi_{yx}) & \frac{1}{2}(\xi_{xz} + \xi_{zx}) \\ \frac{1}{2}(\xi_{yx} + \xi_{xy}) & \xi_{yy} & \frac{1}{2}(\xi_{yz} + \xi_{zy}) \\ \frac{1}{2}(\xi_{zx} + \xi_{xz}) & \frac{1}{2}(\xi_{zy} + \xi_{yz}) & \xi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \\
& \equiv \Delta \mathbf{u}_R + \Delta \mathbf{u}_D \qquad (3.3.17)
\end{aligned}$$

这样一来,若把位移矢量的变化分成两部分,则有

$$(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u}_R) = 0, \qquad (3.3.18)$$

由此可知,假如忽略  $\xi_{xx}$ 、 $\xi_{xy}$  等的二次项,则根据式 (3.3.1) 而给出的距离变化就是  $\Delta \mathbf{u}_D$ 。加下标  $R$  是为了表示旋转,加  $D$  是为了表示变形。

为了判断  $\Delta \mathbf{u}_D$  的性质,可以首先根据式 (3.3.2) 来研究  $\xi_{xx}$ 、 $\xi_{xy}$  等的几何意义。考虑一个长方体,它的三个棱边是沿着  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴放置的,然后再对八个顶点  $P_1(0, 0, 0)$ ,  $P_2(\Delta x, 0, 0)$ ,  $P_3(\Delta x, 0, \Delta z)$ ,  $P_4(0, 0, \Delta z)$ ,  $P_5(0, \Delta y, \Delta z)$ ,  $P_6(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ,  $P_7(\Delta x, \Delta y, 0)$ ,  $P_8(0, \Delta y, 0)$  来计算  $\Delta \mathbf{u}$  的值。

(i),  $\xi_{xx} \neq 0$ , 其它为零

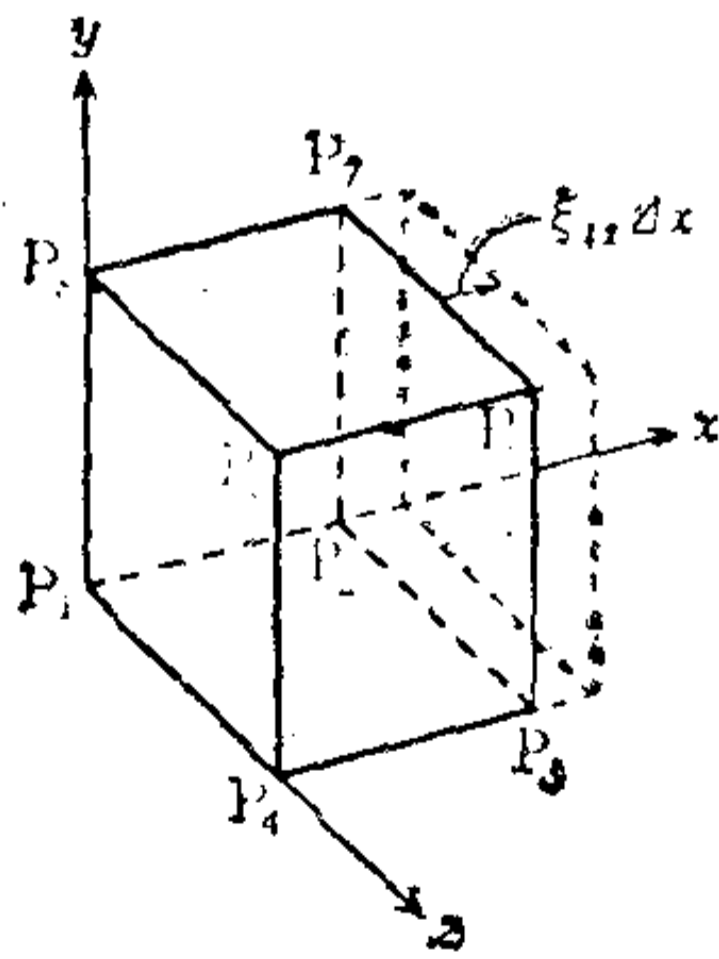


图 3.5  $\xi_{xx}$

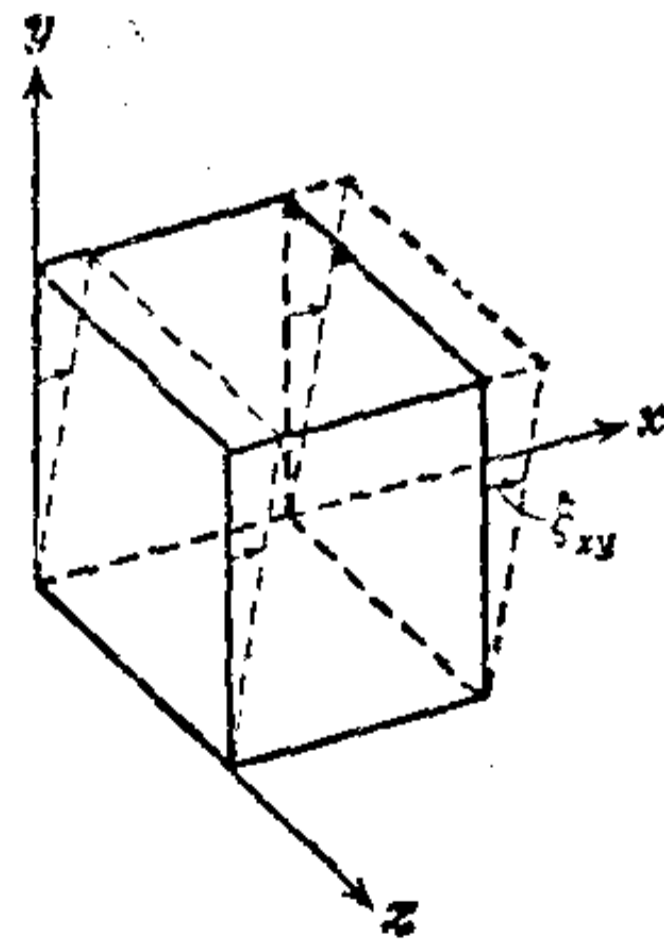


图 3.6  $\xi_{xy}$



就点  $P_1, P_4, P_5, P_8$  而言,  $\Delta u = 0$

就点  $P_2, P_3, P_6, P_7$  而言,  $\Delta u = (\xi_{xx}\Delta x, 0, 0)$

这就意味着, 长方体只在  $x$  轴方向上伸长 ( $\xi_{xx}$  为正时) 或压缩 ( $\xi_{xx}$  为负时)  $\xi_{xx}\Delta x$ .  $\xi_{xx}$  叫做  $x$  方向的延伸率 (elongation rate).

(ii),  $\xi_{xy} \neq 0$ , 其它为零

就点  $P_1, P_4, P_3, P_2$  而言,  $\Delta u = 0$

就点  $P_8, P_5, P_6, P_7$  而言,  $\Delta u = (\xi_{xy}\Delta y, 0, 0)$

这意味着, 长方体与  $x$  轴垂直的那两个面, 相对于  $yz$  面在  $x$  轴的正方向上倾斜了角度  $\xi_{xy}$ .

(iii),  $\xi_{yx} \neq 0$ , 其它为零

结果和 (ii) 一样, 它表示垂直于  $y$  轴的两个面对  $xz$  面所倾斜的角度.

因此,  $(\xi_{xy} + \xi_{yx})$  表示分别垂直于  $x$  轴,  $y$  轴的两个面的夹角的变化. 这叫做切应变 (shearing strain).

假如我们在这里取  $\Delta x \rightarrow dx$ ,  $\Delta y \rightarrow dy$ ,  $\Delta z \rightarrow dz$  的极限, 则式(3.3.2)就是

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \right\}, \quad (3.3.19)$$

所以, 式(3.3.17)便可以表示成

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}_D =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}. \quad (3.3.20)$$

显然,  $e_{xy} = e_{yx}$ ,  $e_{yz} = e_{zy}$ ,  $e_{zx} = e_{xz}$ . 另外, 我们很容易就知道,  $\{e_{xx}, e_{xy}, \dots\}$  也具有与上一节所讲的  $\{T_{xx}, T_{xy}, \dots\}$  的变换性质相同的性质.  $\{e_{xx}, e_{xy}, \dots\}$  叫做应变张量 (strain tensor). 在这里必须注意的是, 应变张量的分量中,  $e_{zy}$ ,  $e_{yx}$ ,  $e_{zx}$  无论哪一个都是切应变的二分之一.

也有些作者取掉了  $1/2$ , 而把  $e_{xy}$  定义成

$$e_{xy} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

但是, 这样一来,  $\{e_{xx}, e_{xy}, \dots\}$  就不再是张量了, 因而不能进行象下节那样的简单讨论. 尽管如此, 它还是有优点的, 那就是可以直接用来计算功等.

### § 3.4 应力和应变的关系

一般来说, 假如外力作用到物体上, 在物体内部的各点上就会产生应变, 与此相应, 还会出现应力. 放置在重力场中的物体保持着自己的形状, 这表明在它的内部已经产生了应力. 另外, 也有这样的情况: 由于物体成形时所加的外力和热处理, 该物体要产生应变, 而且这种应变会原封不动地保留下

来。但是，这里我们打算考虑在没有外力作用的状态下就没有应变的物体。

如前两节所述，应力和应变，分别用三维欧几里德空间的二阶对称张量  $\{T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{yz}, T_{zx}, T_{xy}\}$ ,  $\{e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}\}$  来表示。因为后者全部是微小量，所以如果假定变化是连续的，那么，我们就可以很自然地把前者的各分量用后者的分量的线性组合来表示。但是，物质的连续体近似并非到任何地方都是允许的，变化的线性近似 (linear approximation) 所适用的范围也自然存在着界限。

已经被伽利略非常明确化了的力的概念，又由牛顿进一步锤炼，使之在运动定律中起到了核心的作用；但另一方面，和牛顿同时代的胡克，由物质的一般性质中发现了弹性，用今天的术语来说，也就是发现了应力和应变的关系。虽然胡克的工作乍一看似乎非常质朴，被牛顿运动定律规范化的光辉成就所淹没，但却是现代物理学的基础之一，这一事实是不容混淆的。今天，当我们考虑各种力的时候，总是以平衡状态为出发点，通过线性近似来研究该平衡状态附近的各种物理量；即使说这样做是仿效了由胡克定律把这些量引进物理学中的方法，也不算夸张。

在现在的情况下，胡克定律可以写成如下形式。为了写法的简化，我们采用矩阵运算的表示方式：

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.4.1)$$

三十六个系数  $\{c_{ij}\}$ ，决定于物质的性质及状态。反过来

说,物质的主要力学性质可以概括成  $\{c_{ij}\}$ . 一般来说,不能够在应变张量的分量之中,除了任意的一个外,而使其它的全部为零,所以,我们就不能对每一个  $c_{ij}$  给出直接的物理意义.  $c_{ij}$  有时称为弹性劲度 (elastic stiffness). 关于用  $c_{ij}$  来表示杨氏模量 (Young's modulus) 和切变模量 (shear modulus) 的问题,我们在后面再研究.

认为应变是由应力来决定的,这毋宁说是一种实用的作法,所以往往使用把式(3.4.1)反过来求解所得到的形式:

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.4.2)$$

其中,  $s_{ij}$  叫做弹性顺度 (elastic compliance). 不过,以前的许多著作,在应变中使用  $(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, 2e_{yz}, 2e_{zx}, 2e_{xy})$  代替这里所讲的张量关系式,来定义弹性劲度和弹性顺度的,所以需要注意.

对于固定在物体上的任意坐标系来说,弹性劲度  $\{c_{ij}\}$  是一个常数,为了研究物体的物理性质,在其中选择适当的坐标系将是很方便的. 这是因为,假如构成物体的物质由于晶体结构而具备空间对称性的话,那么  $\{c_{ij}\}$  的相当一部分就会变成零,而且相互之间还有一定的关系. 在进行这样的讨论之前,我们想指出,通过附加某种物理上的条件,不管有无空间的对称性,都可以得到下面的关系:

$$\left. \begin{aligned} c_{ij} &= c_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ 及 } (i, j = 4, 5, 6) \\ c_{ij} &= 2c_{ji} \quad (i = 1, 2, 3; j = 4, 5, 6) \end{aligned} \right\}. \quad (3.4.3)$$

根据上式,  $\{c_{ij}\}$  的独立个数便减少到 21 个. 那个所谓的物

理条件,就是假定应力具有弹性势 (elastic potential), 我们将在下面来说明它。

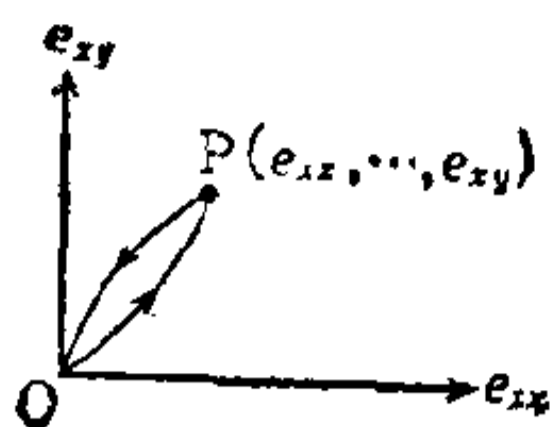


图 3.7

假如变形能够准静态地进行, 那么外力总是和应力平衡的, 这时, 我们就可以根据式(3.4.1)用应变张量的六个分量来表示应力。因此, 用总共六个独立变量所构成的六维正交空间来

表示变形状态, 将是很方便的。另外, 再假设各个边为  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$  的立方体受到外力作用发生变形, 而处于点  $P(e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy})$  所表示的状态之中。这时, 我们就能够马上计算出由这种状态变化到点  $P'(e_{xx} + de_{xx}, e_{yy} + de_{yy}, \dots, e_{xy} + de_{xy})$  时外力所作的功, 它是

$$\begin{aligned}
 w(P \rightarrow P') &= T_{xx}dydzde_{xx}dx + T_{yy}dzdxde_{yy}dy \\
 &\quad + T_{zz}dxdyde_{zz}dz + T_{yz}dxdy \cdot 2de_{yz}dz \\
 &\quad + T_{zx}dydz \cdot 2de_{zx}dx + T_{xy}dzdx \cdot 2de_{xy}dy \\
 &= (T_{xx}de_{xx} + T_{yy}de_{yy} + T_{zz}de_{zz} \\
 &\quad + 2T_{yz}de_{yz} + 2T_{zx}de_{zx} \\
 &\quad + 2T_{xy}de_{xy})dxdydz. \tag{3.4.4}
 \end{aligned}$$

在这里必须注意, 剪切形变所引起的位移分别是  $2de_{yz}dz$ ,  $2de_{zx}dx$ ,  $2de_{xy}dy$ 。倘若外力所作的功没有以热之类的形式逸散, 变形是在可逆过程中发生的, 那么, 由变形前的状态  $(0, 0, \dots, 0)$  到点  $P(e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy})$  该力所作的功, 就应该与其路径无关。为此, 把它写成下列形式, 将是必要而充分的:

$$\begin{aligned}
 w(P \rightarrow P') &= dWdxdydz \\
 &= \left( \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} de_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} de_{yy} + \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} de_{zz} \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} de_{yz} + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} de_{zx} \\
 & + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} de_{xy} \Big) dx dy dz. \quad (3.4.5)
 \end{aligned}$$

由上式和式(3.4.4)可知,满足

$$\left. \begin{aligned}
 T_{xx} &= \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}, & T_{yy} &= \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}, & T_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} \\
 2T_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}, & 2T_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}, & 2T_{xy} &= \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.6)$$

的  $W(e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy})$  的存在是必要而充分的。因此,下式必须满足

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial e_{yy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{yy} \partial e_{xx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xx} \partial e_{yy}} = \frac{\partial T_{yy}}{\partial e_{xx}} \quad (3.4.7)$$

$$2 \frac{\partial T_{yz}}{\partial e_{xx}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xx} \partial e_{yz}} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial e_{yz}}, \quad (3.4.8)$$

由式(3.4.7)和(3.4.8),我们就可以分别得到

$$c_{12} = c_{21}, \quad (3.4.9)$$

$$c_{14} = 2c_{41}. \quad (3.4.10)$$

对于其它的  $c_{ij}$ , 情况也是一样的。

所谓的弹性势,不外乎就是当外力对物体所作的功并不变成热的形式,而是完全作为机械能贮存于物体内部时每单位体积的能量。

我们假定弹性势的存在,不只是为了限制  $c_{ij}$  的独立个数。最重要的一点,是依靠这个假定就能把连续体力学从热力学中分离出来,从而纯粹把它纳入牛顿力学的框架之中。如在以下几节,特别是在关于流体运动的一节中将要证明的那样,当认为物体是连续体时,必然会涉及到多体问题的因素,因而也就必然和热力学有密切的联系。在把它与热力学

分开这一点上，弹性势概念的作用是很大的。倘若采用张量变换，则对称性的研究将会很简单。

首先，为了使写法简化，把  $c$  写成

$$C \equiv \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.4.11)$$

那么，即使围绕着所研究的物体的对称轴把坐标系旋转一个满足对称性的角度， $c$  也应该没有变化。设那样的坐标系变换是

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.4.12)$$

如果把这时的二阶对称张量的变换表示为

$$\begin{bmatrix} A_{xx'} \\ A_{yy'} \\ A_{zz'} \\ A_{yz'} \\ A_{zx'} \\ A_{xy'} \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{zz} \\ A_{yz} \\ A_{zx} \\ A_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.4.13)$$

则对称性的条件就变成了

$$UCU^{-1} = C, \quad (3.4.14)$$

即

$$UC = CU. \quad (3.4.15)$$

作为一个简单的例子，我们来研究一下围绕  $z$  轴旋转  $\pi/2$  后仍和原来一致的那种对称性。这时，因为

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4.16)$$

所以,

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.4.17)$$

把它代入(3.4.15),我们就可以得到

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.4.18)$$

但是,因为在这里必须满足

$$c_{11} = c_{22}, \quad c_{44} = c_{55}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad (3.4.19)$$

所以  $c_{ij}$  的独立个数便成了 6 个。

假设再围绕  $x$  轴旋转  $\pi/2$ , 物质的性质也不变化,那么我们就需要对式(3.4.19)追加下列条件:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66}, \quad c_{12} = c_{23} = c_{31}, \quad (3.4.20)$$

从而  $c_{ij}$  的独立个数便减少到 3 个。具有这种对称性的晶体称为立方晶系 (cubic system)。

我们来研究这样的一种情况,它或许会脱离晶体的概念,但对绕空间任意轴旋转任意角度来说,物质的性质是不变的,

也就是物质具有各向同性 (isotropy) 的情况。它当然包含着立方晶系的对称性, 所以先设

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.4.21)$$

并让它绕  $z$  轴旋转一个角度  $\theta$ ,

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4.22)$$

从而得到

$$U \equiv \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta \end{bmatrix}, \quad (3.4.23)$$

就此式而言, 只要求出式(3.4.15)对于任意的  $\theta$  都成立的条件就可以了。通过简单的计算, 我们就可得到下面的条件:

$$c_{11} - c_{12} = c_{44}. \quad (3.4.24)$$

因此, 若使用拉摩 (lamé) 常数

$$\lambda \equiv c_{12}, \quad \mu \equiv \frac{1}{2} c_{44}, \quad (3.4.25)$$

则对于各向同性的物质来说, 就能把  $c$  表示成

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}. \quad (3.4.26)$$

因为后面还会用到，所以在这里我们想求一下各向同性物质的弹性势  $W$  的具体形式。如果把式 (3.4.26) 给出的  $c_{ij}$  代入式 (3.4.1)，再用它对式 (3.4.4) 进行积分，经过整理，即可得到

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \{ \lambda (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 \\ &\quad + 2\mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) \\ &\quad + 4\mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) \} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2\mu \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \mu \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \right]. \quad (3.4.27) \end{aligned}$$

为了直接求出这个结果，也可以象下面那样利用二阶对称张量的性质。因为在后面还要用到它，所以在这里先说明一下。

假设弹性势是张量  $\{e_{xx}, \dots, e_{xy}\}$  各分量的二次齐次式，那么，对各向同性物质的研究，便归结为怎样去写出对于空间旋转为不变式的一般表达式的问题。在张量运算中，一般把



下标  $x, y, z$  用  $i = 1, 2, 3$  来表示. 因此, 这也就是由  $e_{ij}$  来构成相互独立的二次标量的问题. 它是下面的两个:

$$\left(\sum_{i=1}^3 e_{ii}\right)^2, \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e_{ij}e_{ji} = \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}^2. \quad (3.4.28)$$

从而式(3.4.27)右边就变成

$$\frac{1}{2} \lambda \left(\sum_{i=1}^3 e_{ii}\right)^2 + \mu \left(\sum_{i,j=1}^3 e_{ij}^2\right).$$

因此, 便可以清楚地知道拉摩常数的意义.

我们想就各向同性物质来研究一下前面所规定的弹性劲强度  $c_{ij}$  的物理意义. 虽然我们不能再任意给出应变张量的分量, 但是却能给出在垂直于  $x$  轴的单位面积上的作用力 ( $T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}$ ). 这是因为, 只要作出一个长方体, 并且只把力加到它的两端就可以了. 这时, 会出现怎样的应变呢? 若把式(3.4.26)代入式(3.4.1), 即可得到

$$\begin{cases} T_{xx} = (\lambda + 2\mu)e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz} & (3.4.29) \\ T_{yy} = 0 = \lambda e_{xx} + (\lambda + 2\mu)e_{yy} + \lambda e_{zz} & (3.4.30) \\ T_{zz} = 0 = \lambda e_{xx} + \lambda e_{yy} + (\lambda + 2\mu)e_{zz} & (3.4.31) \\ T_{yz} = 0 = 2\mu e_{yz} & (3.4.32) \\ T_{zx} = 2\mu e_{zx} & (3.4.33) \\ T_{xy} = 2\mu e_{xy}. & (3.4.34) \end{cases}$$

因为切变是  $2e_{yz}, 2e_{zx}, 2e_{xy}$ , 所以我们马上知道, 这时虽不产生切变  $2e_{yz}$ , 但其它变形是全部发生的. 而且, 由式(3.4.33)和(3.4.34)可知,  $\mu$  表示切变模量. 若从式(3.4.29)、(3.4.30)、(3.4.31)中解出  $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}$ , 即可得到

$$e_{xx} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{xx}, \quad (3.4.35)$$

$$e_{yy} = e_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{xx}. \quad (3.4.36)$$

也就是说,如果每单位体积的力  $T_{xx}$ , 作用到垂直于  $x$  轴的面上, 则在  $x$  轴方向上由式 (3.4.35) 给出的延伸(压缩)率(相应于  $T_{xx} > 0$  或  $< 0$ ), 要在  $y$  轴及  $z$  轴方向上产生由式 (3.4.36) 给出的压缩(延伸)率. 把这个比改变符号, 就叫做泊松比 (Poisson's ratio). 通常用  $\sigma$  来表示. 对各向同性的物质来说, 由式 (3.4.35)、(3.4.36) 可知, 它是

$$\sigma \equiv -\frac{e_{yy}}{e_{xx}} = -\frac{e_{zz}}{e_{xx}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.4.37)$$

另外,  $T_{xx}$  和  $e_{xx}$  之比叫做杨氏模量 (Young's modulus). 对各向同性物质来说, 它是

$$E \equiv \frac{T_{xx}}{e_{xx}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (3.4.38)$$

最后, 我们来看一看体积膨胀率和应力的关系. 若把式 (3.4.29)、(3.4.30)、(3.4.31) 加在一起, 即可得到

$$\begin{aligned} T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} &= (3\lambda + 2\mu)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \\ &\equiv (3\lambda + 2\mu)\theta, \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

但是, 需要特别注意, 这个关系变成了一个标量表达式.

### § 3.5 变形的平衡

物体有形状, 因此就有边界面. 我们只把作用于该边界面上的力看作外力. 前面已经讲过, 由于外力的作用, 物体会变形, 从而在其内部产生应变和应力. 另外还知道, 在应变和应力之间, 广义的胡克定律在一定范围内是成立. 在本节, 我们准备研究一下当边界面的条件, 即边界面的变形已经给定时内部各点位移的状况. 假如知道各点的位移, 就能求出该点附近的应变, 因而也能求出应力.

因为有关物质结构的信息全部概括到式 (3.4.1) 所包含的一组常数  $\{c_{ij}\}$  之中, 而且所作的处理也只限于前节已讲过的

“无限小变形”，所以，此后叙述的内容或许能使读者感到一种与其说是“物理的”，倒不如说是“数学的”色彩浓郁的印象。事实上，场的概念在现代物理学许多领域内都发挥着重要的作用，它的规范化强烈地依赖于现在就要叙述的数学方法。因此，理解该数学方法的作用和界限，看来绝非徒劳无益。

假如通过边界面作用于物体上的外力是准静态的，那么外力对物体所做的功，就全部作为物体的内能而贮存起来。我们把这种能叫做该物体的弹性能。它是把弹性势对整个物体的体积进行积分而得到的。因此，假定弹性势的存在，就等于假定该物体为力学上的保守系。

如果在这个假定下来把我们的问题规范化，即如下述。设物体的点  $(x, y, z)$  由于变形而产生的位移是

$\mathbf{u}(x, y, z) \equiv (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ ，  
当边界面  $\Gamma$  上点的位移  $\mathbf{u}(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma)$ ， $(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) \in \Gamma$  被给定时，试求一下  $\mathbf{u}(x, y, z)$ ， $(x, y, z) \in V$ ，其中  $V$  是边界面  $\Gamma$  所包围的三维区域。

在“无限小变形”的近似中，弹性势  $W$  是用应变张量  $\{e_{xx}, \dots, e_{xy}\}$  的分量的二次齐次式来表示的，更一般地来说，用  $\partial u/\partial x$ ， $\partial u/\partial y$ ， $\partial u/\partial z$ ， $\partial v/\partial x$ ， $\dots$ ， $\partial w/\partial z$  的多项式表示。这样，我们就可以把弹性能写成泛函 (functional) 的形式：

$$I = \iiint_V W \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (3.5.1)$$

之所以称为泛函，是因为该积分的值  $I$  由  $u, v, w$  的函数形式来决定。因为在平衡状态下力学定律等价于系统的势能取极小值，所以，只要把  $\mathbf{u}(x)$  在  $\Gamma$  上的值固定，再求出使  $I$  成为极小值时的  $\mathbf{u}(x)$  就可以了。

即,当以  $\mathbf{u}(x)$  为所求的解时,用和它稍微不同的

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'(x) &\equiv (u'(x), v'(x), w'(x)) \\ &\equiv (u(x) + \varepsilon\xi(x), v(x) + \varepsilon\eta(x), w(x) + \varepsilon\zeta(x))\end{aligned}\tag{3.5.2}$$

来代替式(3.5.1)的  $\mathbf{u}(x)$ , 所计算出的值为

$$I' = \iiint_V W \left( \frac{\partial u'}{\partial x}, \frac{\partial u'}{\partial y}, \frac{\partial u'}{\partial z}, \frac{\partial v'}{\partial x}, \dots, \frac{\partial w'}{\partial z} \right) dx dy dz,\tag{3.5.3}$$

$I'$  与原来的  $I$  之差总不为负的条件是

$$I' - I \geq 0,\tag{3.5.4}$$

我们的问题即可规范化成这种形式. 这里,  $\varepsilon$  是常数,  $\varepsilon \ll 1$ , 而且在  $(x, y, z) \in \Gamma$  时,  $\xi = \eta = \zeta = 0$ . 计算的过程很简单.

$$\begin{aligned}I' - I &= \varepsilon \iiint_V \left\{ \frac{\partial W}{\partial(\partial u/\partial x)} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial(\partial u/\partial y)} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right. \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial(\partial u/\partial z)} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial(\partial v/\partial x)} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\partial W}{\partial(\partial w/\partial z)} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right\} dx dy dz \\ &= -\varepsilon \iiint_V \left[ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial u/\partial x)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial u/\partial y)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial u/\partial z)} \right) \right\} \xi \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial v/\partial x)} \right) + \dots \right\} \eta \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial w/\partial x)} \right) + \dots \right\} \zeta \right] dx dy dz\end{aligned}\tag{3.5.5}$$

这个计算使用了分部积分。

因为  $\xi(\mathbf{x})$ 、 $\eta(\mathbf{x})$ 、 $\zeta(\mathbf{x})$  是各自独立选择的任意函数，所以，为了满足式(3.5.4)，必须

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial u/\partial x)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial u/\partial y)} \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial u/\partial z)} \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial v/\partial x)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial v/\partial y)} \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial v/\partial z)} \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial w/\partial x)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial w/\partial y)} \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial W}{\partial(\partial w/\partial z)} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.6)$$

这样的计算方法叫做变分法。

因此，我们可以首先把  $W$  用  $(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \dots, \partial w/\partial z)$  具体地表示出来，再根据式(3.5.6)推导联立的偏微分方程，然后求解该方程，使之和边界条件，即给出  $\Gamma$  上的  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  的那个条件相一致。为了简单起见，若选择各向同性的物质，则因该弹性势  $W$  已经以式(3.4.27)的形式求出，所以就能直接写出式(3.5.6)。但是，并不应该因此就说，在什么时候问题都可以简单求解。因而我们附加上两三个物理条件，把问题简化一下。

(i)，物体是非常长的柱子，外力只作用在两端的情况

设柱的轴向为  $x$  轴，则各点的位移矢量只用  $x$  的函数，即  $(u(x), v(x), w(x))$  就能够表示。这时，式(3.5.6)变成



$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u}{dx^2} &= 0 \\ \mu \frac{d^2 v}{dx^2} &= 0 \\ \mu \frac{d^2 w}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.7)$$

因为  $\lambda + 2\mu \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$ , 所以上式归结为

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0. \quad (3.5.8)$$

这不外乎就是把差分方程

$$\phi(x + \Delta x) - \phi(x) = \phi(x) - \phi(x - \Delta x) \quad (3.5.9)$$

或平均值关系式

$$\phi(x) = \frac{1}{2} (\phi(x + \Delta x) + \phi(x - \Delta x)) \quad (3.5.10)$$

以微分形式表示出来的表达式。这种情况暗示, 如果不把物体当成连续体, 而看作离散粒子的集合, 就有可能以布朗运动的处理方式来求解问题 (参考本讲座第二卷《经典物理学 II》)。

(ii), 物体是十分薄的板、外力只作用在它四周的情况

设垂直于板的方向为  $z$  轴, 则各点的位移矢量只用  $x$  和  $y$  的函数, 即  $(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$  就可以表示。这时, 式(3.5.6)变成

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0 \\ \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.11)$$

因为无论在上面的第一式还是第二式中, 都同时包含着未知

函数  $u$  和  $v$ , 所以不能简单求解。但是, 第三式却是在物理学中经常出现的二维拉普拉斯方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w(x, y) = 0, \quad (3.5.12)$$

其解的性质已很好地加以研究过。若把两个实数的一组  $(x, y)$ , 用一个复数来表示

$$\zeta = x + iy, \quad (3.5.13)$$

则式(3.5.12)就成了解析函数  $f(\zeta)$  的实数部分及虚数部分应该满足的条件。解析函数可用科希 (Cauchy) 积分来表示

$$f(\zeta) = \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi. \quad (3.5.14)$$

因此可知,  $w(\zeta)$  是  $w$  在以  $\zeta$  为中心的圆周上的平均值。和 (i) 一样, 这一点也暗示了由布朗运动的立场出发来求  $w(x, y)$  的可能性(参考前文引书)。

(iii), 物体内部任何一点附近都没有旋转的情况

相隔  $dx$  的两个点, 位移矢量之差为  $du$ , 根据 (3.3.17), 其中相当于旋转的部分是

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}_R \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

因  $(dx, dy, dz)$  是任意选择的, 故这时在物体内部任何地方

下式均可成立

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \quad (3.5.16)$$

为了利用这个条件,我们首先将式(3.4.27)代入式(3.5.6)的第一式,并把左边进行整理,则有

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ & = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & - \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

利用式(3.5.16)消去第二项,就可以得到一个平衡式

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.5.18)$$

同样,也可以得到其它两个方程式

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.5.19)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.5.20)$$

因此,一般可以把满足式(3.5.16)的  $(u, v, w)$  表示成

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (3.5.21)$$

式中,  $\phi(x, y, z)$  可以是可微的任意函数. 把式 (3.5.21) 代入式(3.5.18)、(3.5.19)、(3.5.20), 我们就可以得到

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.5.22)$$

由此可知,  $\phi$  必须满足

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = C. \quad (3.5.23)$$

其中  $C$  是任意常数, 特别是当  $C = 0$  时, 便可以得到三维拉普拉斯方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi \equiv \Delta \phi = 0. \quad (3.5.24)$$

对于函数  $\phi$  来说, 中值定理是成立的.

也就是说,  $\phi(x, y, z)$  等于  $\phi(x, y, z)$  在以任意一点  $(x, y, z)$  为中心的球面上的积分除以该球面的面积(关于调和函数的高斯 (Gauss) 定理).

这个方程有一个库仑势的解:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r}, \quad (3.5.25)$$

如果把式(3.5.25)代入式 (3.5.24) 的左边, 这一点是不难验证的.

若在式(3.5.23)中令  $C = m^2$ , 则可得出

$$(\Delta - m^2)\phi = 0, \quad (3.5.26)$$

这个方程有汤川势的解:

$$\phi = \frac{1}{r} e^{-mr}, \quad (3.5.27)$$

和上面一样,这个结果也能直接得到验证。

式(3.5.26)是汤川对基本粒子进行量子力学处理时作为介子的标量静态势推导出来的表达式,然而,意味深长的是,它却包括到各向同性物质弹性位移的标量势 $\phi$ 应该满足的一般表达式中。不言而喻,在掌握基本粒子世界时,把与经典物理表象的类似性轻易带进来,是很危险的。但是,我们似乎可以说,经典连续体力学最低限度在场概念的规范化中有重要的参考作用。

这样一来,我们就知道了,在物体内部的任何一点上都不存在旋转变形时,能够得到拉普拉斯方程。但是,对于第(i)种情况来说,因为可以消掉式(3.5.17)中的第二项,所以它仍然和式(3.5.18)的一维情况相同。

(iv), 在物体内部任何一点附近都不发生体积膨胀的情况。

因为点 $(x, y, z)$ 附近的体积膨胀率是

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.5.28)$$

所以,这种情况可以用 $\Theta$ 到处为零的条件来表示。换句话说,我们所考虑的物质虽有变形,但却不可压缩。如果记住这一点,再使用式(3.4.27)改写式(3.5.6)的右边,则有

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\ & = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.5.29) \end{aligned}$$



因此,我们就可得到关于  $\mathbf{u}$  的各个分量的拉普拉斯方程

$$\Delta \mathbf{u} = 0. \quad (3.5.30)$$

式(3.5.30)和(3.5.24)形式相同,其意义是很深刻的.若进一步再通过使用矢量函数

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_x(\mathbf{x}), A_y(\mathbf{x}), A_z(\mathbf{x}))$$

把条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.5.31)$$

表示成

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \right\}, \quad (3.5.32)$$

则该条件即可自动满足.到下一节的末尾,这个意义会更加清楚.

在一般情况下既要产生扭曲,也要产生体积膨胀,所以象(iii)和(iv)那样简单的处理是不可能的.但是,这里所讲的方法,在研究各种矢量场时却非常有效.本节中,公式都是一一用分量写出来的,从未使用过下列的简单符号

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.5.33)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \equiv \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.5.34)$$

这是因为,我们觉得不如在流体一节中再引进这些符号,更容易得到直观的理解.

### § 3.6 变形的传播

截至目前,我们已经在“无限小变形”的近似条件下,讨论了外力准静态地加到物体上的情况。当外力不是准静态的,而是随时间变化时,总要使物质的状态发生或大或小的热变化,所以,我们就不应该只单纯地考虑机械功。但是,只要象冲击力那样随时间急剧变化的外力不是频繁地加上,普通的物体热变化还是很小的。因此,在这一节,即使在处理所加的外力随时间变化,而物体内部的应变和应力亦随时间变化的情况时,也拟忽略不计热的效应。这样做,无非是把物体看成力学上的保守系,并假定弹性势是存在的。

这样一来,该系统的总能量就成了物体各部分的动能和位能的总和。因为物体内部各点的位移矢量,包含着时间变量  $t$ ,所以我们可以用  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$  来表示它。若考虑点  $(x, y, z)$  周围的微小体积  $dx dy dz$ , 并设这部分的密度为  $\rho(x, y, z)$ , 那么,这一部分的动能就是

$$\frac{1}{2} \rho \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy dz. \quad (3.6.1)$$

在这里,问题是  $\rho(x, y, z)$  应该选择什么样的形式。假如体积膨胀率到处都为零(不可压缩性),则密度仍象变形前那样,是不发生变化的。不过,在一般情况下,密度必然要改变。但是,我们在这里所讨论的,并不是密度本身,而是微小部分的质量  $\rho(x, y, z) dx dy dz$ 。在变形之后,它成了  $\rho(x', y', z') dx' dy' dz'$ , 由于认为质量是不灭的,所以应有

$$\rho(x, y, z) dx dy dz = \rho(x', y', z') dx' dy' dz' = dm. \quad (3.6.2)$$

因此,我们可以把变形前的密度当作式(3.6.1)中的  $\rho(x, y, z)$ 。

另外,为了简化处理过程,现在假设变形前物体的质量分布是均匀的,即  $\rho$  为常数.

因为我们已经求出了弹性势,所以就能够马上写出系统的总动能  $T$  及总位能  $U$ :

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint_V \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy dz \quad (3.6.3)$$

$$U = \iiint_V W dx dy dz. \quad (3.6.4)$$

在 §2.7 中曾学过,保守系的运动方程能由拉格朗日原理,也就是能由下式推导出来

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt \equiv \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0, \quad (3.6.5)$$

因而,在目前情况下,把式(3.6.3)、(3.6.4)代入式(3.6.5),就可以由下式求出运动方程:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \left[ \frac{1}{2} \rho \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} - W \right] dx dy dz dt = 0. \quad (3.6.6)$$

这里,  $\delta$  是一个记号,它简略地表示在前节求变形的平衡时曾采用的方法. 因此,那里使用的计算方法照样可用,从而,可以得到以下的联立偏微分方程来作为运动方程:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial (\partial u / \partial x)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial (\partial u / \partial y)} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial (\partial u / \partial z)} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial (\partial v / \partial x)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial (\partial v / \partial y)} \end{aligned} \right\}. \quad (3.6.7)$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial(\partial v/\partial z)} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial(\partial w/\partial x)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial(\partial w/\partial y)} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial(\partial w/\partial z)} \end{aligned} \right\}$$

就各向同性物质而言,以上三式的右边都已经计算过了,所以我们就能够马上写出运动方程,但是为了探索运动的本质,和平衡的时候一样,我们打算分成几种情况来考虑.

(i), 各点的位移矢量  $u$  只是  $x$  和  $t$  的函数时.

这时,运动方程可以完全分离成为

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \right. \quad (3.6.8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned} \right. \quad (3.6.9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \right. \quad (3.6.10)$$

因为  $\rho$ 、 $\lambda + 2\mu$ 、 $\mu$  是正的量,所以以上三式都变成了这样的形式:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x, t) = 0. \quad (3.6.11)$$

差别仅仅是  $c$  的值不同.

使用两个任意的函数  $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ , 就可以用下式给出式(3.6.11)的通解:

$$f(x, t) = \varphi\left(t - \frac{1}{c}x\right) + \psi\left(t + \frac{1}{c}x\right). \quad (3.6.12)$$

我们研究一下其中第一项的性质.它表示,  $f$  在  $x = 0$  的时间变化  $\varphi(t)$ , 要推迟一段时间  $x/c$ , 才会在  $x$  处发生. 这意味着  $f$  的时间变化向  $x$  的正方向以有限速度  $c$  传播. 同样, 第

二项意味着  $f$  的时间变化, 是提早了一段时间  $x/c$  发生的, 或者表示  $f$  在时间上的变化向  $x$  的负方向以速度  $c$  传播。

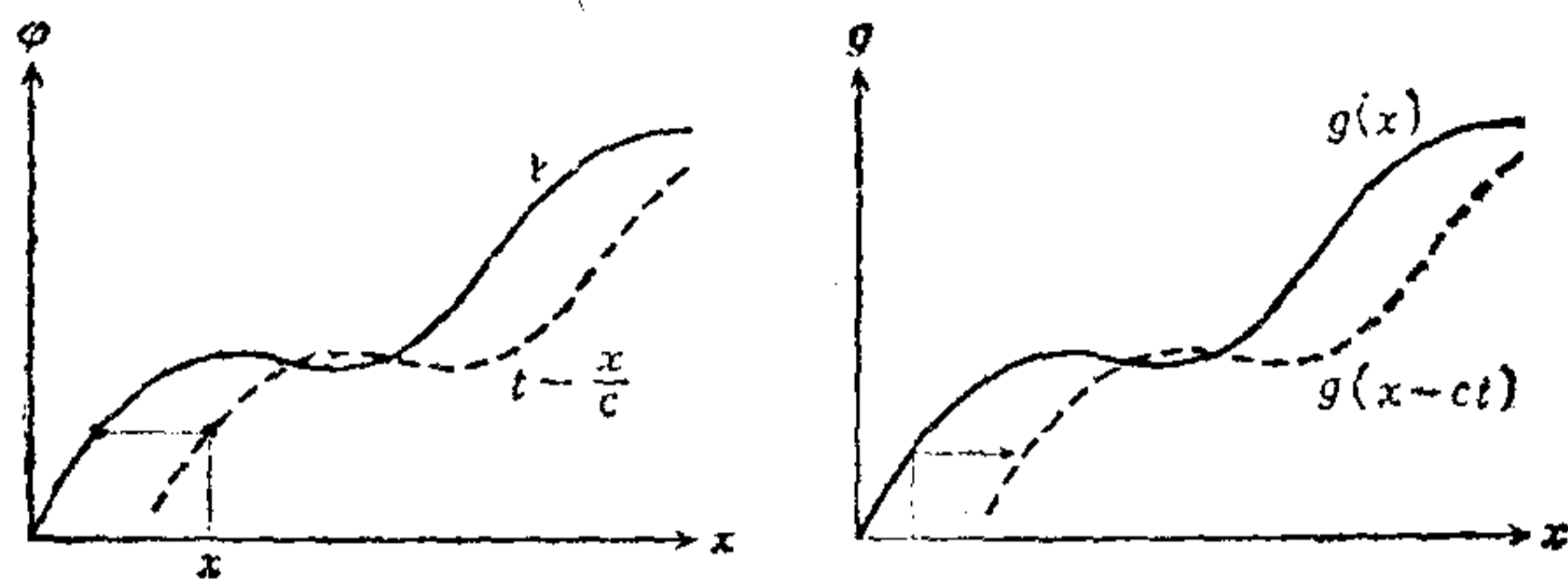


图 3.8

换一种看法, 把式(3.6.12)写成

$$f(x, t) = g(x - ct) + h(x + ct), \quad (3.6.13)$$

然后来研究它的第一项, 这时我们就会明白,  $g$  在  $t = 0$  的函数形式, 作为一个整体向  $x$  的正方向以速度  $c$  移动。同样, 第二项表示,  $h$  的函数形式向  $x$  的负方向以速度  $c$  移动。

在牛顿力学中, 假若给出各点在一定时刻的位置和速度, 即给出初始条件, 则质点系在任意时刻的状态就唯一确定。而且, 初始条件是可以任意选择的(在发生粒子碰撞的情况下多少会有点问题; 有关这些问题, 请参考本讲座《经典物理学 II》)。因为连续体可以看成是质点系的极限, 所以, 对于位移矢量分量  $f(x, t)$  的所有  $x$  来说, 若给出

$$f(x, 0) = \Phi(x), \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right]_{t=0} = \Psi(x), \quad (3.6.14)$$

则式(3.6.11)的解便可唯一确定。式中,  $\Phi(x)$ 、 $\Psi(x)$  是任意函数。通过简单的计算, 这个解就是

$$f(x, t) = \frac{1}{2} \{ \Phi(x - ct) + \Phi(x + ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(x) dx. \quad (3.6.15)$$



从物理上来讲，一个有意义的初始条件是  $\Psi(x) = 0$ 。如图 3.9 所示，在这种情况下， $f(x, t)$  被分成两个波，它们以相等的速度  $c$  向左右前进。而且，两个波的形状是不变的， $f(x, t)$  则是它们的叠加。我们假设另一个初始条件是

$$\Psi(x) = \mp c \frac{d}{dx} \Phi(x), \quad (3.6.16)$$

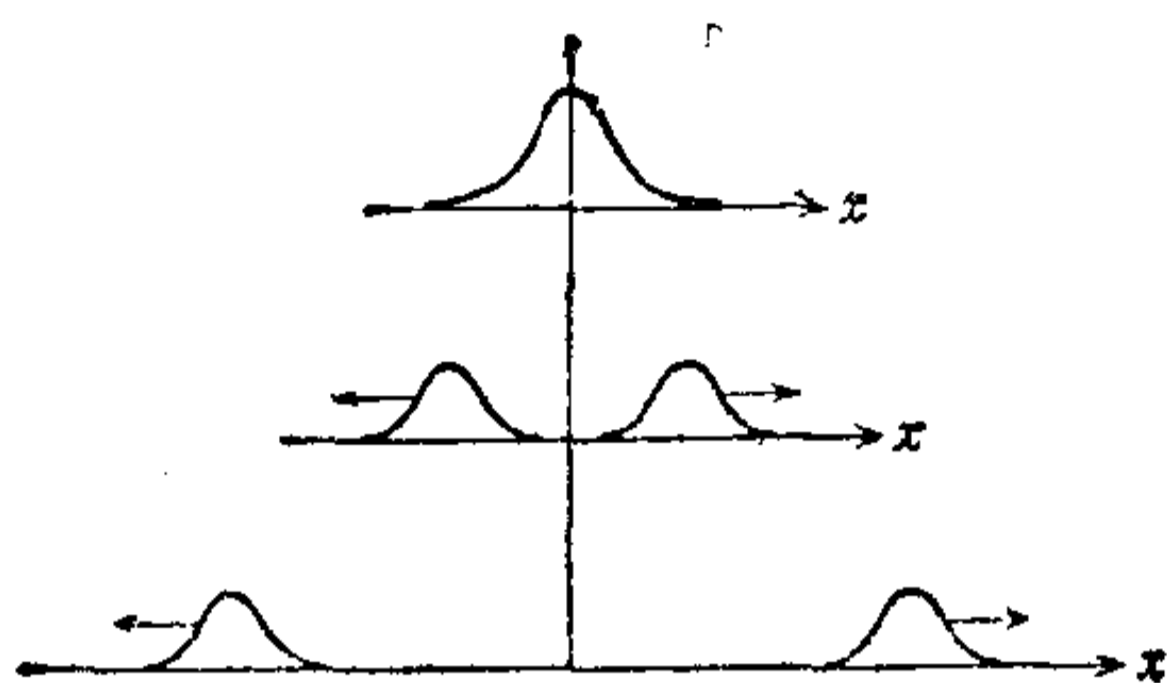


图 3.9

这时，由式(3.6.13)可知

$$f(x, t) = \Phi(x \mp ct), \quad (3.6.17)$$

所以，它是以速度  $c$  向右或向左的单个的行波。

在这里需要特别注意的是，假如暂时不管边界条件，则波动方程式(3.6.11)的解，是以速度  $c$  向右或向左的任意形状的行波。反过来说，不管选择什么样的波形，速度都由方程(3.6.11)中所包含的常数  $c^2$  唯一确定。例如，下列两式无论哪一个都是式(3.6.11)的解：

$$f(x, t) = \exp \left[ -\frac{\kappa^2}{2} (x - ct - \theta) \right] \quad (3.6.18)$$

$$f(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - \theta). \quad (3.6.19)$$

式中  $\kappa$ 、 $\theta$ 、 $A$  是任意常数(图 3.10)。这样的波叫做孤波(solitary wave)。但是，为了只让单个的孤波出现，必须加上式(3.6.16)那样严格的初始条件。反之，正如 §3.11 及 §3.14 将

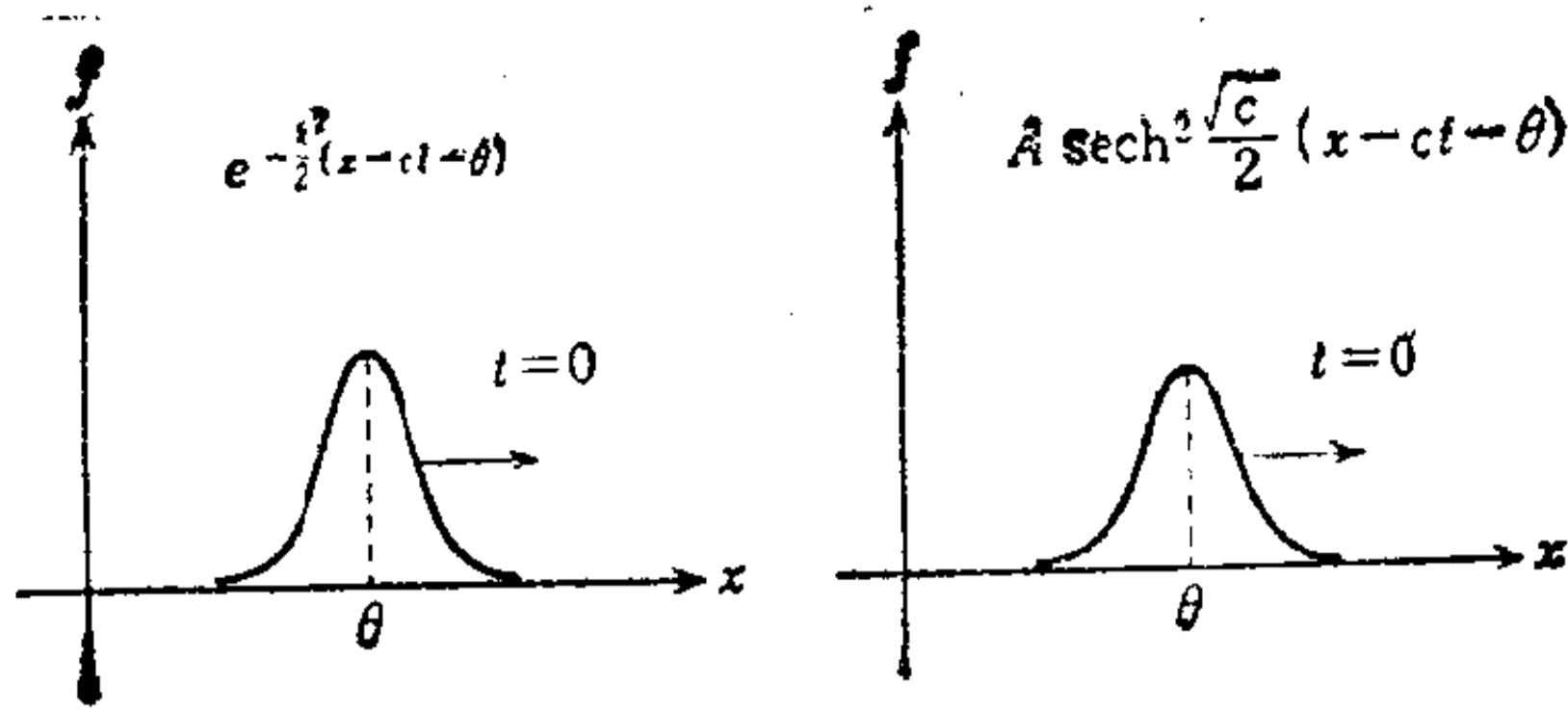


图 3.10

要说明的那样,在几个特殊的非线性波动方程中,自然会出现以任意速度向一个方向行进的孤波。但是,在那种情况下,速度与波形及波的高度是密切相关的。

再附带说明一下,式(3.6.17)的  $\Phi(\xi)$  ( $\xi = x \mp ct$ ) 可以是  $\xi$  的任意周期函数,其周期  $L$  和速度  $c$  无关。在这里,所谓的周期指的是用下式定义的  $L$ :

$$\Phi(\xi) = \Phi(\xi + nL) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

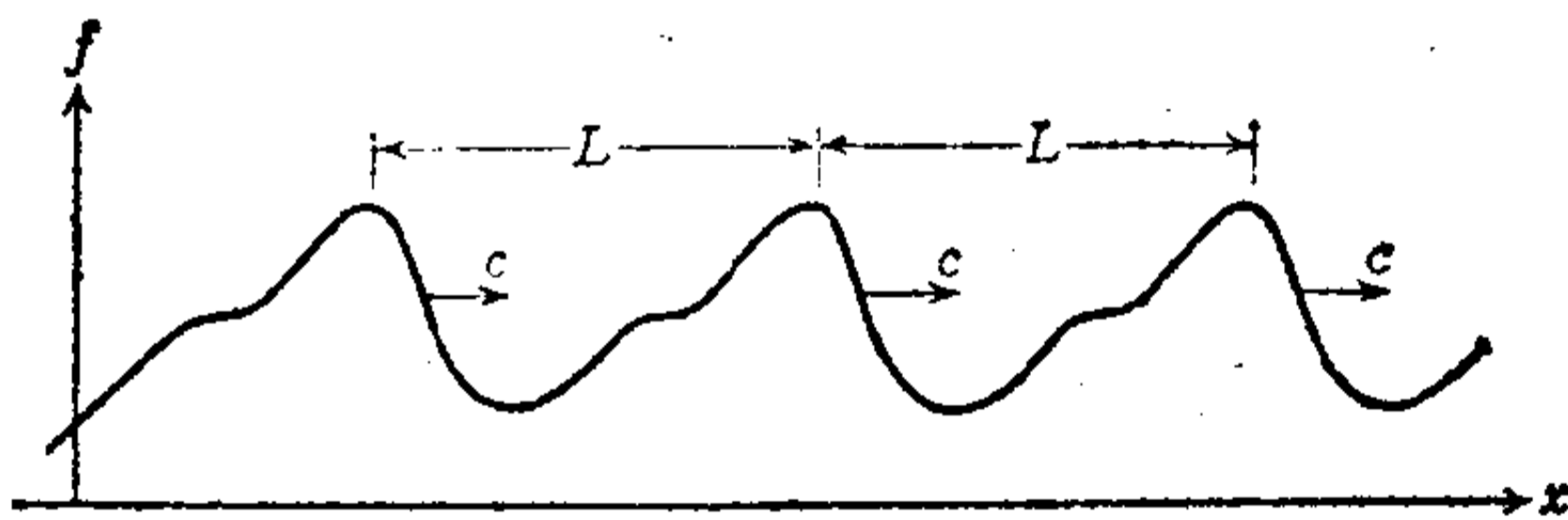


图 3.11

由于物体一定具有边界面,所以在物理上给出边界条件来求解运动方程(3.6.11),是很重要的。关于它的一些简单情况,准备在后面再说明,在这里我们换一种看法,用式(3.6.8)来研究一下媒质内波动的性质。

于是,由式(3.6.8)可知,  $u$  的传播速度由下式确定:

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (3.6.20)$$

$v$ 、 $w$  的传播速度由下式确定:

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (3.6.21)$$

这时,因为  $u$  是前进方向上的位移分量,所以叫做纵波 (longitudinal wave), 而  $v$ 、 $w$  是垂直于前进方向的位移分量,所以叫做横波 (transverse wave).

一般来说,当各点的变量(矢量也好、标量也好)在同一平面上取相同的值,而且该平面以一定速度前进时,这种波就叫做平面波 (plane wave). 对各向同性物质来说,可以把任何方向取作  $x$  轴,所以在这里所讲的内容对于各向同性物质内的任意平面波都是有效的.

(ii), 可以使用一个标量函数  $\phi(x, y, z, t)$  把各点的位移矢量  $u$  表示成  $u = \partial\phi/\partial x$ 、 $v = \partial\phi/\partial y$ 、 $w = \partial\phi/\partial z$  的情况.

考虑到式(3.5.16), 则运动方程就变成

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi \quad (3.6.22)$$

或

$$\left( \Delta - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0. \quad (3.6.23)$$

显而易见, 这个方程具有平面波的解. 实际上, 假如取平面波的前进方向为  $x$  轴, 则因解可以写成  $\phi(x, t)$ , 故式 (3.6.23) 便归结为式 (3.6.11). 因此, 其传播速度与  $c_L$  相同, 是  $\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ . 这时位移矢量为  $(\partial\phi/\partial x, 0, 0)$ , 所以是纵波.

除平面波之外, 式(3.6.23)还具有球面波 (spherical wave)

的解:

$$\phi(r, t) = \frac{1}{r} \{f(r - c_L t) + g(r + c_L t)\} \quad (3.6.24)$$

$$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.6.25)$$

把式(3.6.24)代入式(3.6.23)的左边直接进行计算,我们就能

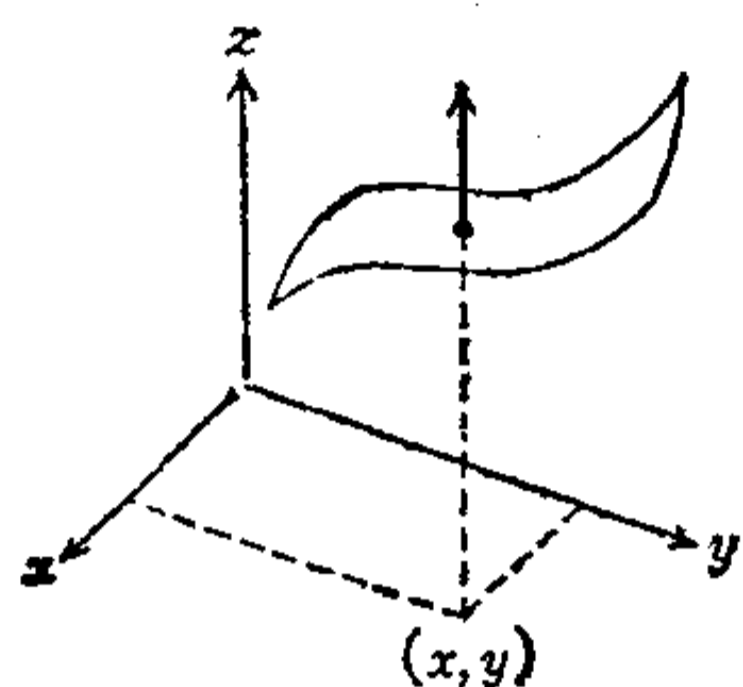


图 3.12

验证这个解.应该注意,因子  $1/r$  对这个解是必要的. 式(3.6.24)的第一项表示由原点向外扩展的波 (outgoing wave), 第二项表示向原点收缩的波 (ingoing wave). 平面波在前进时不改变形状和大小,但在其它波中,却没有这种既不改变形状也不改变大小的行波.

[定理] 在均匀而各向同性媒质中的波动方程是

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) = 0, \quad (3.6.26)$$

在它的解之中,同相位的曲面,即波面在前进时不改变形状和大小的波,只有平面波.

[证明] 因为媒质是各向同性的,所以可以取波面的前进方向为  $z$  轴. 设相同相位的曲面是

$$z = f(x, y) - ct, \quad (3.6.26')$$

令  $f(x, y)$  为连续的,而且最低限度是二阶可微的单值函数. 取一个任意函数  $\psi(\xi)$ .

$$\phi = \psi(z - f(x, y) - ct), \quad (3.6.27)$$

我们来求它是式(3.6.26)的解的必要而充分的条件. 把式(3.6.27)代入式(3.6.26)的左边,则有

$$-\psi' \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) + \psi'' \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) = 0.$$

因为  $\psi'$ 、 $\psi''$  是任意选择的,所以,

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \end{aligned} \right. \quad (3.6.28)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.6.29)$$

因处理的全部是实数,故由式(3.6.29)可知

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{且} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (3.6.30)$$

根据假定,  $f$  不包含  $z$ , 所以由式(3.6.30)得出

$$f(x, y) = \text{常数} = a$$

$$\therefore z = a - ct. \quad [\text{证毕}]$$

在以上证明中,选择了稍微特殊的式(3.6.27)作为曲面,不过,更一般地来说,即使选择

$$f(x, y, z) = ct, \quad (3.6.31)$$

我们也能够象下面那样来证明它. 显然,在这种情况下,和前面一样,

$$\psi = \psi(f(x, y, z) - ct) \quad (3.6.32)$$

是式(3.6.26)的解的必要而充分的条件为

$$\Delta f(x, y, z) = 0 \quad (3.6.33)$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 = 1. \quad (3.6.34)$$

把式(3.6.34)的两边对  $x$  进行两次微分,就可以得到

$$f_{xx}^2 + f_{xy}^2 + f_{xz}^2 + f_x f_{xxx} + f_y f_{xxy} + f_z f_{xxz} = 0, \quad (3.6.35)$$

同样,还可以得到

$$f_{yy}^2 + f_{yx}^2 + f_{yz}^2 + f_x f_{yyx} + f_y f_{yyy} + f_z f_{yyz} = 0, \quad (3.6.36)$$

$$f_{zz}^2 + f_{zy}^2 + f_{zx}^2 + f_x f_{zxx} + f_y f_{zxy} + f_z f_{zzz} = 0. \quad (3.6.37)$$



把式(3.6.35)、(3.6.36)及(3.6.37)两边相加,则有

$$\begin{aligned} & (f_{xx}^2 + f_{xy}^2 + f_{xz}^2 + f_{yx}^2 + f_{yy}^2 + f_{yz}^2 + f_{zx}^2 + f_{zy}^2 + f_{zz}^2) \\ & + f_x \frac{\partial}{\partial x} (\Delta f) + f_y \frac{\partial}{\partial y} (\Delta f) + f_z \frac{\partial}{\partial z} (\Delta f) = 0, \end{aligned} \quad (3.6.38)$$

根据式(3.6.33),左边最后三项可以消掉。另外,因为我们只处理实数,所以

$$f_{xx} = f_{xy} = \cdots = f_{zx} = 0. \quad (3.6.39)$$

因此,  $f$  是  $x, y, z$  的线性式。

证明到此完毕。实际上,这个结果初步地证明了到处有界的调和函数是常数的所谓刘维 (Liouville) 定理。这是因为,假如  $f$  是调和函数,则有

$$\Delta f_x = \frac{\partial}{\partial x} \Delta f = 0,$$

所以  $f_x$  也是调和函数;而且,由于还有  $|f_x| \leq 1$  的条件,故  $f_x$  在整个空间  $\mathbf{R}^3$  中都是常数。大概读者还会想起在整个平面上有界的解析函数是常数的那个有名的定理,然而,解析函数的实部及虚部都应该是二维的调和函数。在物理学中人们广泛采用解析函数和调和函数,可以说它的本质是由物理学的方法中抽象出来的。就调和函数而言,与布朗运动相关,还有几个有趣的性质(参考本讲座第二卷《经典物理学 II》)。

前进时波面形状相同、只是大小改变的波之一,是球面波,但那种波的种类是有限的(参考 [Morse, Feshbach]\* p. 145)。

另外,就这种情况下的球面波(3.6.24)而言,变形矢量的各个分量是

---

\* 即书末参考文献 [32] “理论物理学的方法”——译者

$$u = \frac{x}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v = \frac{y}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad w = \frac{z}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (3.6.40)$$

所以,它们是垂直于球面的.也就是说,这个球面波是纵波.

(iii), 物质不可压缩的情况.

这时,位移矢量应该满足的条件是

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.6.41)$$

利用式(3.5.30)的计算,运动方程即可写成

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{u}, \quad (3.6.42)$$

或

$$\left( \Delta - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{u} = 0. \quad (3.6.43)$$

显然,因为式(3.6.43)作为一个微分方程,除去传播常数之外,具有和式(3.6.23)相同的形式,所以 $\mathbf{u}$ 的各个分量具有平面波和球面波的解.而且,它们的传播速度全部和 $c_T$ 相同,是 $\sqrt{\mu/\rho}$ .但是,由于有条件(3.6.41),故各个分量不是独立的.

我们使用恒矢量 $\mathbf{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$ ,可以把沿单位矢量 $\mathbf{n} \equiv (l, m, n)$ 的方向前进的平面波写成

$$\left. \begin{aligned} u &= A_x f(lx + my + nz - c_T t) \\ v &= A_y f(lx + my + nz - c_T t) \\ w &= A_z f(lx + my + nz - c_T t) \end{aligned} \right\}, \quad (3.6.44)$$

由条件(3.6.41)可知,除去 $f = 0$ 这个无关紧要的情况以外,该平面波必须满足

$$lA_x + mA_y + nA_z = 0. \quad (3.6.45)$$

这就意味着,位移矢量 $\mathbf{u}$ 垂直于前进方向上的单位矢量 $\mathbf{n}$ .因此,这个平面波是横波.

对于球面波来说,使用恒矢量  $\mathbf{A}$  也可以把向外前进的波写成

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{A_x}{r} f(r - ct) \\ v &= \frac{A_y}{r} f(r - ct) \\ w &= \frac{A_z}{r} f(r - ct) \end{aligned} \right\}, \quad (3.6.46)$$

根据式(3.6.41),  $\mathbf{A}$  必须满足下列关系:

$$xA_x + yA_y + zA_z = 0. \quad (3.6.47)$$

显然,位移矢量  $\mathbf{u}$  在球面的切平面上. 因此,这个球面波也是横波.

假定存在着一种不可压缩的弹性物质,其切变模量  $\mu$  具有有限值,而质量密度  $\rho$  却非常小,那么上述横波的速度就会变得非常大. 这一点曾经是经典的光以太假说的一个依据.

到现在为止,我们使用矢量的术语和符号稍微有点随便. 例如说某时刻连续体各点的位移  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  等等. 但是,函数  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$ ,  $w(x, y, z, t)$  本来是作为运动方程的解定义的,倘若不考察该运动方程的性质,就不能说这三个函数就是矢量的分量. 设运动方程的两个解为  $(u_1(x, y, z, t), v_1(x, y, z, t), w_1(x, y, z, t))$  及  $(u_2(x, y, z, t), v_2(x, y, z, t), w_2(x, y, z, t))$ , 而  $\lambda, \mu$  为常数,这时,它们的叠加 (superposition)

$$(\lambda u_1 + \mu u_2, \lambda v_1 + \mu v_2, \lambda w_1 + \mu w_2)$$

果真会成为原运动方程的解吗? 只有当运动方程是线性微分方程 (linear differential equation) 时,答案才是肯定的. 好在我们至今所用过的运动方程全都是线性的. 因此,把

$(u, v, w)$  叫做矢量, 并没有错. 如果回过头想一想, “无限小变形” 的近似正是为了使运动方程线性化而设下的伏笔. 截止目前, 物理学理论的基础几乎都是线性理论, 而且取得了巨大的成功, 由此就可以大体上推断出, 用线性近似 (linear approximation) 能够把自然现象理解到怎么样的程度. 不言而喻, 用线性理论不能明确解释的物理现象也绝不算少. 最近, 处理这类问题的非线性理论已经有了惊人的进展. 在后面我们打算就两三个简单例子来作一下说明.

因为波动场 (wave field) 满足叠加原理, 所以我们还可以把它叫做矢量场 (vector field)  $\mathbf{u}$ . 下面我们联想前一节结束时所讲的内容, 再深入一步对  $\mathbf{u}$  进行研究.

因此, 就有必要把 §3.5 (iv) 中对表达式所作的变形 (3.5.29) 再次变形. 也就是说,

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 & \quad + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
 & = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 & \quad - \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.6.48}$$

这样做了之后, 如果像本节 (iii) 那样, 再加上不可压缩的条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{3.6.49}$$

那么, 运动方程就变成

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \\
\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \\
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.6.50}$$

因此,和前节末尾所讲过的表达式(3.5.32)一样,如果把定义为

$$\left. \begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial y} A_x - \frac{\partial}{\partial z} A_y \\
v(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \\
w(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x
\end{aligned} \right\} \tag{3.6.51}$$

的  $\mathbf{A}(x, y, z, t) \equiv (A_x(x, y, z, t), A_y(x, y, z, t), A_z(x, y, z, t))$  代入,再在两边消掉相同的微分运算 (rot), 就可以得到

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_x &= -\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) \right\} \\
&= \mu \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right\}
\end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_y &= \mu \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_y \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right\} \\ \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_z &= \mu \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.52)$$

在这里,假若再对  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  加上条件

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0, \quad (3.6.53)$$

则式(3.6.53)就与式(3.6.23)及(3.6.43)形式相同:

$$\left( \Delta - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}' = 0. \quad (3.6.54)$$

显然,如果与(ii)的讨论综合起来考虑,那么,我们使用标量场  $\phi$  和矢量场  $\mathbf{A}$ , 就可以一般地把各向同性物质内的波动场  $\mathbf{u}$  表示为

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \text{grad } \phi + \text{rot } \mathbf{A}, \quad (3.6.55)$$

其中,

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (3.6.56)$$

因为有条件(3.6.56), 所以取掉附加常数的任意性, 则有下列一一对应的关系:

$$(u, v, w) \longleftrightarrow (\phi, A_x, A_y, A_z).$$

既然谈到一对一, 就需要有严密的证明. 实际上, 上述分解是下面要讲的更一般的定理的一个例子.

[亥姆霍兹 (Helmholtz) 定理] 一个大小有限、而且到处都是均匀连续的任意矢量场  $\mathbf{F}(x, y, z)$ , 可以表示成标量场  $\phi$  和散度为零的矢量场  $\mathbf{A}$  之和:

$$\mathbf{F} = \text{grad } \phi + \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (3.6.57)$$

[证明] 当  $\mathbf{F}$  已经给出时,可以说,满足式(3.6.57)的  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  是唯一确定的. 首先,取式(3.6.57)两边的散度,可以得到

$$\text{div } \mathbf{F} = \text{div}(\text{grad } \phi) + \text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = \Delta \phi. \quad (3.6.58)$$

其次,再取式(3.6.57)两边的旋度,则由条件(3.6.56)可以得到

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \text{rot}(\text{grad } \phi) + \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) \\ &= \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \\ &= -\Delta \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.6.59)$$

它们都有泊松方程的形式

$$\Delta \phi(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z). \quad (3.6.60)$$

$\rho(x, y, z)$  是已经给出的函数,若再给出适当的边界条件,则满足式(3.6.60)的  $\phi(x, y, z)$  就是唯一确定的. 所以,倘若  $\mathbf{F}$  给出,因而  $\text{div } \mathbf{F}$ 、 $\text{rot } \mathbf{F}$  也给出的话,则  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  便可根据式(3.6.58)和(3.6.59)唯一确定.

[证毕]

由于篇幅所限,我们只作了简短的证明. 这时,作为定理前提的  $\mathbf{F}(x, y, z)$  的条件,变成了使泊松方程(3.6.60)的解存在的条件. 泊松方程在物理学的理论处理中起着非常重要的作用. 通过它的解法所引进的格临 (Green) 函数,超出了单纯的数学手段,而具有深刻的物理意义. 因此,我们打算另起一节,对它加以稍微详细的说明.

### § 3.7 惠更斯原理

我们已经推导出了用无限小变形的近似来确定弹性体平衡、弹性体波动等问题的几个基本方程. 不言而喻,在物理学中,写出了基本方程,并不等于问题的解决. 还有一项重要的

工作,就是实际解出这些方程,并将其结果与观察或实验进行比较和检查. 虽然求解方程属于应用数学的范畴,但在解方程的过程中,物理上的考虑有时却经常发挥重要的作用. 有关连续体力学的问题更是如此. 而且,这些做法不只限于历史上的兴趣,在现代物理学的各种基本方法之中,它仍然被人们所继承. 这一节我们来叙述前面推导出的连续体基本方程的解法,并在其中说明几个有兴趣的物理概念.

(i), 求解(三维)拉普拉斯方程.

这也就是求出满足下式的  $\phi(\mathbf{x})$

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in D) \quad (3.7.1)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial D). \quad (3.7.2)$$

其中,  $D$  是范围,  $\partial D$  是边界. 这个问题叫做狄利克雷(Dirichlet)问题. 当边界是长方体面或球面之类的简单形状时,通过适当地选择坐标系,就可以解决这个问题. 而在一般情况下,进行如下考虑,将是很方便的.

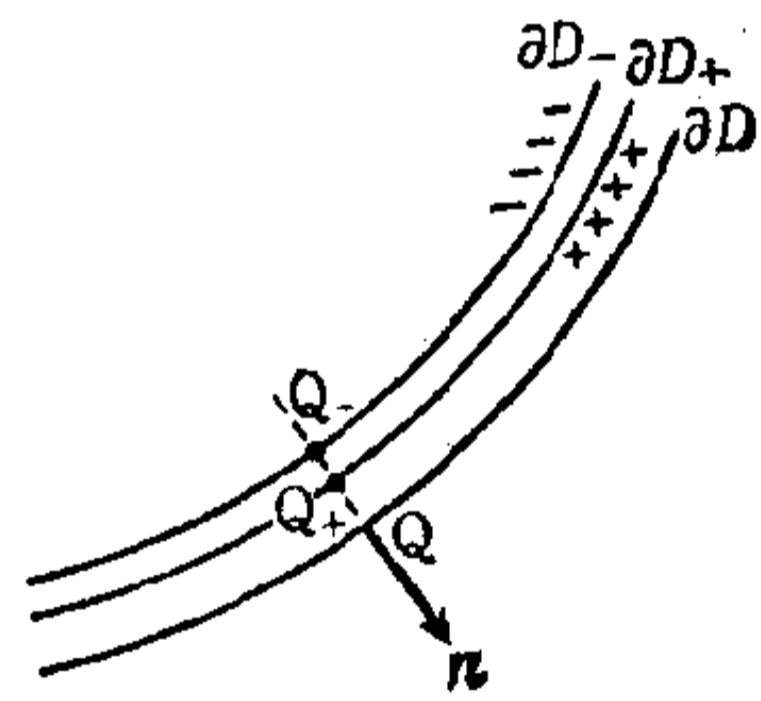


图 3.13

也就是说,我们可以把这个问题当作静电场的电势问题. 那么,在边界  $\partial D$  所包围的区域内是没有电荷的,而在边界  $\partial D$  上应该给出电势的值. 可是,要在物理上给出边界上的电势,该怎样来做呢? 为此,我们可以在  $\partial D$  的内侧放置电偶层 (electric double layer), 设它的密度为  $\Phi(\mathbf{x})$ . 在图 3.13 中,靠近边界面  $\partial D$  设想两个曲面  $\partial D_+$  和  $\partial D_-$  并在  $\partial D$  上的  $Q$  点取外向法线  $n$ . 假设  $n$  穿过  $\partial D_+$ 、 $\partial D_-$  的点分别为  $Q_+$ 、 $Q_-$ . 令  $Q_+$ 、 $Q_-$  附近的面电荷密度分别为  $\sigma$ 、 $-\sigma$ , 则  $Q$  处的电势就是

$$\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\sigma\overline{Q_+Q} + 4\pi\sigma\overline{Q_-Q}$$

$$= 4\pi\sigma\overline{Q_-Q_+}, \quad (3.7.3)$$

显然,可以设置一个电偶层,它所具有的电偶极分布是由下式确定的:

$$\frac{\Phi(\mathbf{x})}{4\pi} = \sigma\overline{Q_-Q_+} \equiv \sigma_d(\mathbf{x}) \quad (3.7.4)$$

因此,我们不再把式(3.7.1)的区域扩展到包括 $\partial D$ 在内的无限大范围,去假设在无限远处

$$\Phi(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad (3.7.5)$$

而代之以假设在内部的曲面 $\partial D$ 上,或在靠近它的地方,电偶层的分布由下式决定:

$$\frac{\Phi(\mathbf{x})}{4\pi} = \sigma_d(\mathbf{x}). \quad (3.7.6)$$

这样一来,就能够把问题归结为下面所说明的特殊处理的情况.

(ii), 求解(三维)泊松方程.

一般来说,这也就是求解

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in D), \quad (3.7.7)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial D). \quad (3.7.8)$$

为了简单起见,我们假设 $D$ 是无限大的,而且在无限远处,

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow 0.$$

这正是当电荷密度用 $\rho(\mathbf{x})$ 给定时,来求电势的问题.因式(3.7.7)是线性的,故能有效地利用叠加原理.因此,我们首先来考虑在点 $Q(\mathbf{x}_0)$ 有点电荷存在时的式(3.7.7).若使用狄喇克在量子力学创建期间所发明的下列“函数”,对这个问题将是很方便的:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad (3.7.9)$$

$$\delta(x-x_0) = 0 \quad (x \neq x_0). \quad (3.7.10)$$

的确， $\delta(x)$  不是普通意义的函数，但若采取适当的办法，我们就能够处理得在逻辑上没有矛盾。因为它本来是象上面那样在描述与电势有关的电荷和质量分布 (distribution) 时产生的，所以把  $\delta(x)$  叫做分布函数 (distribution) (详见本讲座第三卷《量子力学 I》)。在物理学中简单地称之为狄喇克  $\delta$  函数。

因为我们是在三维欧几里德空间中研究问题的，所以要使用三维的狄喇克  $\delta$  函数：

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0). \quad (3.7.11)$$

这样一来，当  $\mathbf{x}_0$  上有点电荷时，求电势的表达式就是

$$\Delta G = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3.7.12)$$

这个方程的解  $G$  自然包含变量  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{x}_0$ ，因而我们把它写成

$$G = G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0). \quad (3.7.13)$$

倘若求出  $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$  (也考虑到边界条件)，就能马上求出式 (3.7.7) 的解，即

$$\phi(\mathbf{x}) = \iiint G(\mathbf{x}|\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'. \quad (3.7.14)$$

从物理上来考虑，上式显然是式 (3.7.7) 的解。为了醒目起见，让  $\Delta$  作用于它的两边，则有

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\mathbf{x}) &= \iiint \Delta G(\mathbf{x}|\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \\ &= -4\pi \iiint \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \\ &= -4\pi\rho(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

不仅在求解泊松方程时，而且在求解一般线性微分方程时，人们也经常使用这种方便的函数，并把它们总称为格临函数。

在一般的边界条件下，具体地求出格临函数是很困难的，但是，因为我们现在所讨论的问题是边界位于无限远处，而且



还假设了那里的电势为零,所以式(3.7.12)可以直接求解。它不外乎是在  $\mathbf{x}_0$  上只有单位电荷的情况,故

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (3.7.15)$$

因此,式(3.7.14)就变成了

$$\phi(\mathbf{x}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}', \quad (3.7.16)$$

这种形式从物理上来考虑是极为自然的。

这样一来,我们已经知道了泊松方程的解法,所以使用这个方法就能很容易地补上在前一节结束时所讲的亥姆霍兹定理的证明中省略的那一部分(参考 [Morse, Feshbach] p. 53)。

另外,我们还能够把(i)中的狄利克雷问题归结为泊松方程,而使用式(3.7.12)的格林函数来求解它。也就是说,只要我们认为电偶层沿着无限广阔的空间内的曲面  $\partial D$  是以式(3.7.6)给出的密度分布存在的,再照样应用上述方法就可以了。

假设电偶层的厚度为  $\varepsilon$ , 而正负电荷各自以密度  $\rho$  分布在  $\partial D_+$ 、 $\partial D_-$  上,那么,我们即可写出点  $\mathbf{x}$  上的电势  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) = & \iiint \{G(\mathbf{x}|\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') \\ & - G(\mathbf{x}|\mathbf{x}' + \varepsilon\mathbf{n})\rho(\mathbf{x}' + \varepsilon\mathbf{n})\} d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

考虑到

$$\rho(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{n}) \quad (\varepsilon \ll 1),$$

即可得出

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) = & - \iiint \rho(\mathbf{x}') \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial x'} G(\mathbf{x}|\mathbf{x}') l \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y'} G(\mathbf{x}|\mathbf{x}') m + \frac{\partial}{\partial z'} G(\mathbf{x}|\mathbf{x}') n \right) d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \Phi(\mathbf{x}') (\text{grad}' G(\mathbf{x}|\mathbf{x}'), \mathbf{n}) d\sigma'. \quad (3.7.18)$$

虽然我们省略了中间的计算过程,但是,若使用高斯定理和  $G$  应该满足的条件,则这个计算也很简单. 式中写成  $\text{grad}'$ , 是为了表示对  $\mathbf{x}'$  进行微分.

(iii), 求解(三维)波动方程.

在这里,我们首先来考虑波源 (source of wave) 在三维空间范围  $D$  内或边界面  $\partial D$  上随时间变化的情况. 这时,可以把波动方程写成

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{x}, t) = -4\pi q(\mathbf{x}, t). \quad (3.7.19)$$

由 (i)、(ii) 的分析可知,当把波源进行分解使之成为一个点源时,它的解应该满足

$$\begin{aligned} & \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \\ & = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0). \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

式中  $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$  是这时的格临函数. 在这里必须注意,不能把时间轴和空间轴放在一起设想形式上的四维空间. 这是因为,虽然我们能考虑空间的封闭曲面,但是对于时间来说,封闭曲面本身在物理上是没有意义的. 因此,也就不得不对  $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$  给出空间的边界条件和时间的初始条件. 边界条件无须再加说明,而对初始条件却需加以注意.

对于  $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ , 我们假定,在  $t < t_0$  时,

$$\begin{cases} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = 0 & (3.7.21) \\ \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = 0. & (3.7.22) \end{cases}$$

它表示,在  $t = t_0$  所发生的作用对此之前的现象不给予任何影响,这也相当于假定了因果的时间关系 (cause-and-effect)

time relation)。在这里之所以说假定,是因为它是一个不能由牛顿力学框架中得到的独立概念。

我们已经知道,泊松方程的格林函数给出了具有单位质量的一个质点或具有单位电荷的一个点粒子所产生的引力势或静电势。与此相同,式(3.7.20)的 $G$ 应该表示在点 $\mathbf{x}_0$ 上于时刻 $t_0$ 瞬间发生的扰动所产生的波动场。这个推断的正确性可以证明如下。为了简单起见,假设 $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ 的边界条件是

$$\begin{aligned} \text{当 } R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow \infty \text{ 时,} \\ G \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

因为在各向同性的物质中,可以考虑各向同性的边界条件,所以,采用以 $\mathbf{x}_0$ 为原点的球坐标,将是很方便的。这样一来,由于 $G$ 不包含角变量,故式(3.7.20)就变成下面的样子。不过关于 $\delta$ 函数的处理要多少加以注意。为什么呢?因为

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \equiv \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0), \quad (3.7.24)$$

而且可以标准化成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) dx dy dz = 1, \quad (3.7.25)$$

所以,当把它换成用

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(R) dR = 1 \quad (3.7.26)$$

定义的 $\delta(R)$ 时,考虑到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdot dx dy dz = 4\pi \int_0^R \cdot R^2 dR, \quad (3.7.27)$$

我们就必须把式(3.7.20)的右边假设成

$$-\frac{2}{R^2} \delta(R)\delta(t - t_0). \quad (3.7.28)$$

也就是说,式(3.7.20)变成

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial G}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\frac{2}{R^2} \delta(R) \delta(t - t_0) \quad (3.7.29)$$

或

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} (RG) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (RG) = -\frac{2\delta(R)}{R} \delta(t - t_0). \quad (3.7.30)$$

加上  $G$  的初始条件来求解这个微分方程, 虽然乍一看似乎非常困难, 但是若从物理上来考虑, 却比较容易. 如果首先求出

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} (RG) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (RG) = 0 \quad (3.7.31)$$

的通解, 那么, 使用任意函数  $f, g$ , 我们就可以得到

$$RG = f(R - c(t - t_0)) + g(R + c(t - t_0)), \quad (3.7.32)$$

根据初始条件, 第二项必须舍去. 由以上的讨论, 我们自然会想到式(3.7.30)的解是

$$G = \frac{c}{R} \delta(R - c(t - t_0)). \quad (3.7.33)$$

它表示只在球面上才不为零的外向波. 不用说, 波的传播速度就是  $c$ . 实际上, 为了由式(3.7.30)得到式(3.7.33), 还需要多少作点准备. 其一是

$$\delta'(R) = -\frac{\delta(R)}{R}, \quad (3.7.34)$$

此式是当假设  $f(R)$  为可微的任意函数时, 由下列关系式得到的:

$$\int f(R) \delta'(R) dR = -f'(0) = -\int f(R) \frac{\delta(R)}{R} dR;$$

其二是通过变量变换

$$\left. \begin{aligned} \xi &\equiv R - c(t - t_0) \\ \eta &\equiv R + c(t - t_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.7.35)$$

而改写成的

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (3.7.36)$$

$$\delta'(R)\delta(t - t_0) = 2c[\delta'(\xi)\delta(\eta) + \delta'(\eta)\delta(\xi)]. \quad (3.7.37)$$

式(3.7.37)也可以和式(3.7.34)一样得到证明。这样一来,就可以把(3.7.29)表示成

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} (RG) = c[\delta'(\xi)\delta(\eta) + \delta'(\eta)\delta(\xi)]. \quad (3.7.38)$$

因为这里的  $\xi$ 、 $\eta$  是独立变量,所以可以把上式进行积分而得到

$$\begin{aligned} RG &= c \int_{-\infty}^{\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\eta} d\eta [\delta'(\xi)\delta(\eta) + \delta'(\eta)\delta(\xi)] \\ &= c \left[ \int_{-\infty}^{\xi} d\xi \delta'(\xi) \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \delta(\eta) + \int_{\xi}^{\infty} d\xi \delta(\xi) \int_{\eta}^{\infty} d\eta \delta'(\eta) \right] \\ &= c \left[ \delta(\xi) \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \delta(\eta) - \delta(\eta) \int_{\xi}^{\infty} d\xi \delta(\xi) \right]. \quad (3.7.39) \end{aligned}$$

其中,若考虑到

$$\eta = R + c(t - t_0) > 0, \quad (3.7.40)$$

则有

$$\begin{aligned} RG &= c\delta(\xi) = c\delta(R - c(t - t_0)) \\ &= \delta\left(\frac{R}{c} - (t - t_0)\right). \quad (3.7.41) \end{aligned}$$

这次与(ii)的泊松方程的情况有所不同,我们求出了式(3.7.20)的  $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ ,但是还不能马上就写出式(3.7.19)的  $\phi(\mathbf{x}, t)$ . 在(ii)的情况下,虽没有特别强调,但却有  $G(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0 | \mathbf{x})$ . 然而,在现在包含着时间的情况下,因为有条件(3.7.21),所以对于  $t > t_0$  来说,



$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \neq G(\mathbf{x}_0, t_0 | \mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.7.42)$$

为了避免这个不便,可以让时间前进的方向倒转过来. 即,

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = G(\mathbf{x}_0, -t_0 | \mathbf{x}, -t). \quad (3.7.43)$$

直观上看,这是很清楚的,当然也能得到严密证明. 我们打算把它留作读者练习. 这样一来,式(3.7.20)就成为

$$\begin{aligned} & \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{x}_0, -t_0 | \mathbf{x}, -t) \\ & = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0). \end{aligned} \quad (3.7.44)$$

若在式中把  $-t_0, -t$  重新写成  $t_0, t$  (当然变成  $t < t_0$ ), 则有

$$\begin{aligned} & \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{x}_0, t_0 | \mathbf{x}, t) \\ & = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0). \end{aligned} \quad (3.7.45)$$

在式(3.7.19)两边由左面乘以  $G(\mathbf{x}_0, t_0 | \mathbf{x}, t)$ , 然后在式(3.7.45)两边由左面乘以  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , 将所得的两式各边相减, 即可得出

$$\begin{aligned} & (G\Delta\phi - \phi\Delta G) + \frac{1}{c^2} \left( \phi \frac{\partial^2}{\partial t^2} G - G \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \right) \\ & = 4\pi\phi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0) - 4\pi Gq, \end{aligned} \quad (3.7.46)$$

接着再把上式两边对  $x, y, z, t$  进行积分. 就  $x, y, z$  而言, 假设积分范围是包含  $\mathbf{x}_0$  在内的封闭曲面  $\partial D$  所包围的区域  $D$ , 就  $t$  而言, 假设积分范围由 0 到  $t_0 + \epsilon$ . 其中,  $\epsilon$  是一个小的正数. 添上它,无非是为了把  $\delta(t - t_0)$  不为零的地方也包括到积分中去. 关于式(3.7.46)左边第一项的空间积分,我们可以使用格林定理

$$\begin{aligned} & \iiint_D (G\Delta\phi - \phi\Delta G) dx dy dz \\ & = \iint_{\partial D} ((G \text{ grad } \phi - \phi \text{ grad } G), \mathbf{n}) d\sigma, \end{aligned} \quad (3.7.47)$$

式中,  $\mathbf{n}$  是在  $\partial D$  面上向外取的法线矢量 (倘若使用高斯定

理,上式的证明是很简单的)。而第二项的时间积分是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \int_0^{t_0+\varepsilon} \left( \phi \frac{\partial^2}{\partial t^2} G - G \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \right) dt \\ &= \frac{1}{c^2} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial t} G - G \frac{\partial}{\partial t} \phi \right]_0^{t_0+\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.7.48)$$

所以,结果就得到了

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0+\varepsilon} dt \iint_{\partial D} ((G \operatorname{grad} \phi - \phi \operatorname{grad} G), \mathbf{n}) d\sigma \\ &+ \frac{1}{c^2} \iiint_D \left[ \phi \frac{\partial}{\partial t} G - G \frac{\partial}{\partial t} \phi \right]_0^{t_0+\varepsilon} dx dy dz \\ &= 4\pi \phi(\mathbf{x}_0, t_0) - 4\pi \int_0^{t_0+\varepsilon} dt \\ &\quad \times \iiint_D G(\mathbf{x}_0, t_0 | \mathbf{x}, t) q(\mathbf{x}, t) dx dy dz, \end{aligned} \quad (3.7.49)$$

但是,就  $G$  而言,由因果的时间关系(3.7.21)、(3.7.22)可知,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} G \right]_{t=t_0+\varepsilon} = 0 \quad (3.7.50)$$

$$[G]_{t=t_0+\varepsilon} = 0, \quad (3.7.51)$$

倘若再加上  $\phi$  的初始条件

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (3.7.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t)_{t=0} = 0, \quad (3.7.53)$$

那么,式(3.7.49)就变成

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}_0, t_0) &= \int_0^{t_0+\varepsilon} dt \iiint_D G(\mathbf{x}_0, t_0 | \mathbf{x}, t) q(\mathbf{x}, t) dx dy dz \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{t_0+\varepsilon} dt \iint_{\partial D} ((G \operatorname{grad} \phi \\ &\quad - \phi \operatorname{grad} G), \mathbf{n}) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.7.54)$$

因为我们已经求出了  $G$ , 所以就能进一步用它来计算式(3.7.54)。不过,最好是把式(3.7.33)改写成

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) &= \frac{c}{R} \delta(R - c(t - t_0)) \\
 &= \frac{1}{R} \delta\left(\frac{R}{c} - (t - t_0)\right) \quad (t - t_0 > 0)
 \end{aligned}
 \tag{3.7.55}$$

$$R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|,$$

再注意到式(3.7.43),则可设

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x}_0, t_0 | \mathbf{x}, t) &= G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0) \\
 &= \frac{1}{R} \delta\left(\frac{R}{c} - (t_0 - t)\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.7.56}$$

$$R = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|.$$

如果把边界扩展到无限远,并假设在它上面,

$$\phi = 0, \quad \text{grad } \phi = 0, \tag{3.7.57}$$

则式(3.7.54)右边第二项即可消掉,从而

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{x}_0, t_0) &= \int_0^{t_0+\epsilon} dt \iiint_{\infty} \frac{1}{R} \delta \\
 &\quad \times \left(\frac{R}{c} - (t_0 - t)\right) q(\mathbf{x}, t) dx dy dz \\
 &= \iiint_{\infty} \frac{1}{R} q\left(\mathbf{x}, t_0 - \frac{R}{c}\right) dx dy dz.
 \end{aligned}
 \tag{3.7.58}$$

它表示,点  $\mathbf{x}$  上的“原因”,为了传到点  $\mathbf{x}_0$ ,必须以速度  $c$  通过这两点之间的距离  $R$ . 当假设  $\phi$  为势时,式(3.7.58)就叫做推迟势 (retarded potential). 因为它是速度为  $c$  的波动方程的解,所以可以说这是必然的结论.

下面,我们假设没有由外部来的波源,以此来取代边界设在有限远处的情况. 在这种情况下,到处都是  $q = 0$ , 所以式(3.7.54)第一项就可以消掉. 因此,

$$\phi(\mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{t_0+\epsilon} dt \iint_{\partial D} \left(\frac{1}{R} \delta\left(\frac{R}{c} - (t_0 - t)\right)\right) \text{grad } \phi$$

$$\begin{aligned}
& - \phi \operatorname{grad} \left( \frac{1}{R} \delta \left( \frac{R}{c} - (t_0 - t) \right) \right), \mathbf{n} \Big) d\sigma \\
& = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \left( \left( \frac{1}{R} \operatorname{grad} \phi \left( \mathbf{x}, t_0 - \frac{R}{c} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{R}{R^3} \phi \left( \mathbf{x}, t_0 - \frac{R}{c} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{R}{cR^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) \right]_{t=t_0-(R/c)} \right), \mathbf{n} \right) d\sigma. \quad (3.7.59)
\end{aligned}$$

在这里,我们略去了中间的计算过程;因为它是狄喇克  $\delta$  函数的简单练习题,所以想让读者自己去试一试. 式(3.7.59)右边被积分项的物理意义未必清楚,不过我们可以认为,在  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  上波动场的值,是分布在曲面  $\partial D$  上的波源以速度  $c$  到达该点的作用的总和;这是惠更斯原理的一个标准的陈述. 惠更斯所设想的子波 (*onde particulière*), 与这里所讲的格临函数 (3.7.55) 丝毫不差,从而成了理想化的孤波 (*solitary wave*). 不管格临把惠更斯的方法理解到怎样的程度,在这里所进行的关于用格临函数来掌握波动场的讨论,是把惠更斯在他的著作《关于光的考察》(*Traité de la Lumière*) 第一章中所讲的内容大体上忠实地再现出来;我们认为,这样说并不过分. 但是,在其中尚缺少振动的概念,因而也缺少位相的概念,所以不能说这对光本身的理解是充分的. 关于这一点,我们打算在第四章详细讨论.

再说一点,最近人们的注意力又重新集中到孤波的概念上,特别是非线性波动中的孤立子 (*soliton*),正在受到很大的关注. 有关孤波的问题,我们将在 §3.14 中说明.

### § 3.8 一维点阵模型

今天大家都知道,物质并非数学意义上的连续体. 我们

前面所进行的讨论，始终和实在物质粗糙的近似模型相关。在本节，我们再把近似深入一步，选择一种质点点阵式排列的点阵模型，并通过取它的极限得出前面我们所假设的质量连续分布的模型。我们还准备研究一下，那时所取的极限，其得失倒底是什么。

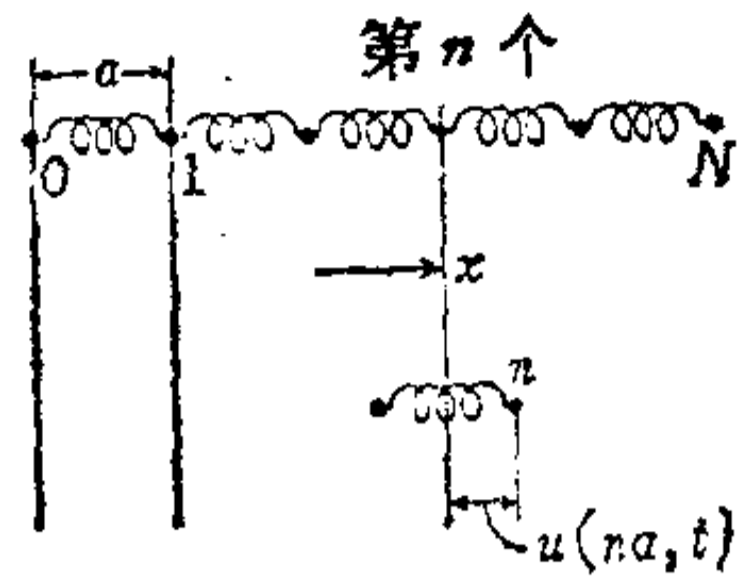


图 3.14

虽说是点阵模型，但此处只考虑容易处理的一维晶体，设质量  $m$  相等的  $N + 1$  个质点，在  $x$  轴上以相等间隔  $a$  排列，并保持平衡。这时，作用在相邻质点之间的力，与距离的变化成正比；而且两端的质点是固定的。假设第  $n$  个质点的位移为  $u(na, t)$ ，则该系统的弹性势能之和就是

$$W = \frac{1}{2} k \sum_{n=0}^{N-1} (u((n+1)a, t) - u(na, t))^2. \quad (3.8.1)$$

式中， $k$  是力和延伸率的比例常数。因为总动能是

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{d}{dt} u(na, t) \right)^2, \quad (3.8.2)$$

所以，我们就可以用和前面一样的方法来求运动方程，即有

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} u(na, t) &= -k \{ (u(na, t) - u((n-1)a, t)) \\ &\quad - (u((n+1)a, t) - u(na, t)) \} \\ &= ka^2 \left\{ \frac{u((n+1)a, t) - u(na, t)}{a} \right. \\ &\quad \left. - \frac{u(na, t) - u((n-1)a, t)}{a} \right\} \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

右边是  $u(na, t)$  的二级差分乘以  $ka^2$ 。其次，若考虑到

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m}{a} = \rho, \quad \lim_{a \rightarrow 0} ak = c_{11}, \quad (3.8.4)$$



而来取  $a \rightarrow 0$  的极限, 则由于  $na = x$ , 故式(3.8.3)就成为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.8.5)$$

这和连续体的情况完全一致.

我们已经学过, 在式(3.8.5)的解中, 包含有速度为

$$c_L = \sqrt{c_{11}/\rho},$$

而且“不改变波形的行波”

$$u = f(x \mp c_L t). \quad (3.8.6)$$

因  $f$  可以是任意函数, 故我们选择波长为  $\lambda$  的正弦波作基本解:

$$u = \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi c_L}{\lambda} t\right). \quad (3.8.7)$$

之所以说“基本的”, 乃是由于我们可以通过傅里叶 (Fourier) 展开把任意的连续函数  $f$  用三角函数的线性迭加来表示. 这在本节末尾要详细说明. 所谓“不改变波形的行波”, 是指速度与波长无关.

另外, 通过和式(3.8.7)进行对比, 我们来研究一下, 点阵时的运动方程(3.8.3)的解, 能否存在这样的形式:

$$u(na, t) = \sin\left(\frac{2\pi na}{\lambda} - \frac{2\pi c}{\lambda} t\right). \quad (3.8.8)$$

式中,  $c$  是未知量, 可象下面那样来求. 把式(3.8.8)代入式(3.8.3), 再进行简单计算, 即可得到

$$m\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 = 4k \sin^2\left(\frac{2\pi a}{2\lambda}\right) \quad (3.8.9)$$

或

$$c = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\lambda}{\pi} \sin \frac{a\pi}{\lambda}. \quad (3.8.10)$$

显然, 若给出  $\lambda$ ,  $c$  便可唯一确定. 这就意味着, 速度随着波

长变化. 假如相邻两质点的间隔  $a$  远远小于波长, 则由式 (3.8.10) 可以得到

$$c \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m} a} = \sqrt{\frac{ka}{m/a}}; \quad (3.8.11)$$

另一方面, 设  $Nm = M$ ,  $Na = L$  分别一定, 而取  $a \rightarrow 0$  的极限, 则上式变成

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{\frac{ka}{m/a}} = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} = c_L \quad (\rho: \text{线密度}) \quad (3.8.12)$$

这和连续体情况下由式 (3.8.5) 所得到的波速相一致. 因为晶体的原子间隔大致是  $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$ , 所以倘若波长与它接近, 则前进速度就显著依赖于波长. 这样的现象叫做色散 (dispersion). 色散的存在揭示了物质的原子性结构. 向连续体进行极限过渡, 虽然我们可以得到简便的处理, 但却失掉了象上述色散那样重要的物理性质.

我们从另外一个角度来看这个事实. 由于在晶格体系中波的前进速度因波长而异, 所以我们考虑波长稍微不同的两个正弦波. 因基本方程 (3.8.3) 是线性的, 故这两个正弦波之和也是它的解:

$$u(na, t) = \sin \frac{2\pi}{\lambda_1} (na - c_1 t) + \sin \frac{2\pi}{\lambda_2} (na - c_2 t). \quad (3.8.13)$$

为计算简单起见, 令

$$\kappa_i \equiv \frac{2\pi}{\lambda_i}, \quad \omega_i \equiv \frac{2\pi c_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2). \quad (3.8.14)$$

$\kappa_i$ 、 $\omega_i$  分别叫做波数 (wave number) 和频率 (frequency) (有时也把  $1/\lambda$ 、 $c/\lambda$  分别叫做波数和频率). 现在, 假如两个波的  $\kappa$ 、 $\omega$  是接近的, 则有

$$\kappa_2 = \kappa_1 + \Delta\kappa_1 \quad (3.8.15)$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega_1. \quad (3.8.16)$$

因为  $\Delta\kappa_1$ 、 $\Delta\omega_1$  都是微小量, 所以式(3.8.8)就成为

$$\begin{aligned} u(na, t) &= 2 \cos \frac{\Delta\kappa_1}{2} \left( na - \frac{\Delta\omega_1}{\Delta\kappa_1} t \right) \sin \left\{ \left( \kappa_1 + \frac{1}{2} \Delta\kappa_1 \right) na \right. \\ &\quad \left. - \left( \omega_1 + \frac{1}{2} \Delta\omega_1 \right) t \right\} \\ &\approx 2 \cos \frac{\Delta\kappa_1}{2} \left( na - \frac{\Delta\omega_1}{\Delta\kappa_1} t \right) \sin (\kappa_1 na - \omega_1 t). \end{aligned} \quad (3.8.17)$$

虽然  $\Delta\kappa_1$ 、 $\Delta\omega_1$  同时都小, 但是  $\Delta\omega_1/\Delta\kappa_1$  却可望具有有限值, 从而就可以认为, 上式表示原正弦波的振幅以余弦波的规律缓慢变化. 振幅的变化是以速度

$$c_g = \frac{\Delta\omega_1}{\Delta\kappa_1} \quad (3.8.18)$$

在和原正弦波相同的方向上进行的. 这种现象叫做拍(beat),  $c_g$  叫做群速 (group velocity), 而前面简单称为速度的  $c$  则叫做相速 (phase velocity), 以示区别.

但是, 如果把这儿的色散关系式(3.8.10)用  $\omega$ 、 $\kappa$  来表示, 则有

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\kappa a}{2}, \quad (3.8.19)$$

所以

$$\frac{d\omega}{d\kappa} = \sqrt{\frac{k}{m}} a \cos \frac{\kappa a}{2} = \sqrt{\frac{k}{m}} a \cos \frac{a\pi}{\lambda}, \quad (3.8.20)$$

显然, 当  $a \ll \lambda$  时, 群速是

$$\frac{d\omega}{d\kappa} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} a \neq 0. \quad (3.8.21)$$

但是, 倘若采取前面说过的连续体近似, 则有

$$\sqrt{\frac{k}{m}} a \rightarrow c_L, \quad (3.8.22)$$

故群速和相速一致。这一点对应的是,由于采取连续体近似,色散性质被丢掉了。在一维点阵中出现的色散效应,可以通过引进非线性力来消除(参考 §3.15 (iii))。

我们把质量相等的小球以长度相等的弹簧连结起来,如果用这样的模型实际进行试验,就可以处理上述一维点阵的问题。为了引起注意,我们使用三维的坐标位移  $(u_n, v_n, w_n)$  来进行研究。不过,为使记法简化,也准备随时使用

$$u_n \equiv u(na, t).$$

因为第  $n$  个质点和第  $n+1$  个质点的距离之差是

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a + u_{n+1} - u_n)^2 + (v_{n+1} - v_n)^2 + (w_{n+1} - w_n)^2} - a \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2a} (u_{n+1} - u_n)^2 + \frac{1}{2a} (v_{n+1} - v_n)^2 \\ & \quad + \frac{1}{2a} (w_{n+1} - w_n)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.8.23)$$

所以,若假定  $(u_{n+1} - u_n)$ 、 $(v_{n+1} - v_n)$ 、 $(w_{n+1} - w_n)$  为同级的微小量,则由上式右边第二项起,以后各项均可忽略不计。这个近似和一开始就只考虑  $x$  方向上的位移的处理方法是一致的。假如计算弹性势时从第二项起还包含着以后各项,则其中就会出现三次以上的项,运动方程也变成非线性的了。因此,我们可以说,在上述近似范围内,纯粹“弹性的”一维点阵模型只会产生纵波,这个纵波所具有的传播速度是依赖于波长的。

读者或许要问,在上述用弹簧连结的粒子链锁模型中,实际上是否也产生横波呢?的确,它也能产生横波。但是,下面将会明确,那并不是由于弹性的原因造成的。实际上,在制作弹簧模型时,我们把两端拉紧,使之成为一条直线。也就是

说,在两端加上外力  $F$  和  $-F$  来让它平衡.

为了简单起见,我们略去  $z$  轴方向上的分量,把空间当作二维来处理. 设第  $n$  个质点离开平衡位置的位移矢量为  $(u_n, v_n)$ . 这样一来,对第  $n$  个质点来说,除弹性力之外,尚须把下面两个力加到运动方程上去:

$$\begin{aligned}
 F_{nx} &= \frac{-a + u_{n-1} - u_n}{\sqrt{(a - u_{n+1} + u_n)^2 + (v_{n-1} - v_n)^2}} F \\
 &\quad + \frac{a + u_{n+1} - u_n}{\sqrt{(a + u_{n+1} - u_n)^2 + (v_{n+1} - v_n)^2}} F \\
 F_{ny} &= \frac{v_{n-1} - v_n}{\sqrt{(a - u_{n-1} + u_n)^2 + (v_{n-1} - v_n)^2}} F \\
 &\quad + \frac{v_{n+1} - v_n}{\sqrt{(a + u_{n+1} - u_n)^2 + (v_{n+1} - v_n)^2}} F
 \end{aligned} \tag{3.8.24}$$

若位移矢量之差远小于间隔  $a$ , 则式(3.8.24)就成为

$$F_{nx} = -F + F = 0 \tag{3.8.25}$$

$$F_{ny} = \frac{F}{a} (v_{n-1} - v_n + v_{n+1} - v_n) \tag{3.8.26}$$

所以,有关  $u_n$  的运动方程还是式(3.8.3)的形式. 另一方面,对  $v_n$  来说,用这种近似就不会有弹性势所引起的那一部分力,故可得运动方程

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_n = \frac{F}{a} (v_{n-1} - v_n + v_{n+1} - v_n). \tag{3.8.27}$$

只要把  $k$  换成  $F/a$ , 式(3.8.3)即和此式完全相同. 因此,这个方程也具有波动解,其速度  $c_T$  由下式确定:

$$m \left( \frac{2\pi c_T}{\lambda} \right)^2 = 4 \frac{F}{a} \sin^2 \left( \frac{2\pi a}{2\lambda} \right). \tag{3.8.28}$$

若进一步取  $a \rightarrow 0$  的极限,则式(3.8.27)就和下列连续体的波



动方程相一致:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v = \frac{F}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v. \quad (3.8.29)$$

其中,

$$\rho = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{m}{a} \quad (3.8.30)$$

是弦 (string) 的线密度.

由此可知,张紧的一维点阵以及作为其极限的弦,既能产生纵波,也能产生横波.但是,纵波的速度与张力无关,另一方面,横波的速度与弹性常数无关.

对弦来说,情况尤其如此.为了求出波动方程的解,边界条件是重要的.在前面的讨论中,我们假设波长取任意值,现在来考察一下,是否果真允许那样的情况呢?下面,先考虑一维点阵.

按照式(3.8.8),我们假设式(3.8.3)的一个解是

$$\begin{aligned} u(na, t) = & A \sin\left(\frac{2\pi na}{\lambda} - \frac{2\pi c}{\lambda} t\right) \\ & + B \sin\left(\frac{2\pi na}{\lambda} + \frac{2\pi c}{\lambda} t\right). \end{aligned} \quad (3.8.31)$$

其中,  $A$ 、 $B$  是常系数. 因第  $n = 0$  个质点是固定的,故

$$A \sin\left(-\frac{2\pi c}{\lambda} t\right) + B \sin\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t\right) = 0, \quad (3.8.32)$$

$$\therefore B = A$$

$$\therefore u(na, t) = 2A \sin\left(\frac{2\pi na}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t\right). \quad (3.8.33)$$

又因第  $n = N$  个质点亦是固定的,故

$$\sin\left(\frac{2\pi Na}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}t\right) = 0. \quad (3.8.34)$$

因此,我们姑且可以得到

$$\lambda = \frac{2Na}{j} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (3.8.35)$$

之所以说“姑且”,是因为  $j$  可取的范围在后面马上就要受到限制. 实际上,若把式(3.8.35)代入式(3.8.33),则有

$$u(na, t) = 2A \sin\left(\frac{nj\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{j\pi c}{Na}t\right), \quad (3.8.36)$$

从而,线性独立的解只有  $N-1$  组. 在这里之所以说“线性独立的解”,是因为我们能够把一组解  $(u(a, t), u(2a, t), \dots, u((N-1)a, t))$  当作  $(N-1)$  维矢量. 不用说,由于运动方程(3.8.3)是线性的,所以允许这样解释.

虽然我们已知线性独立解的组数是  $(N-1)$ , 但是在各组中所包含的共同因子

$$\cos\left(\frac{j\pi c}{Na}t\right),$$

即使取  $j = N, N+1, \dots$ , 乍一看似乎也可以. 然而,由下面的证明可知,情况并非如此.

从本质上来说,复数在这里是不必要的,不过按照惯例,我们取

$$u(na, t) = f_n e^{i\omega t}, \quad (3.8.37)$$

再把它代入式(3.8.3). 其中  $f_n, \omega$  均为未知量. 这样一来,运动方程就成为  $(f_1, f_2, \dots, f_{N-1})$  的一次联立方程.  $(f_1, \dots, f_{N-1})$  全部为零的解是价值不大的,为了使该方程具有除此以外的解,用它的系数构成的  $(N-1)$  行  $(N-1)$  列的行列式必须为零. 因此,未知量  $\omega$  应该满足以下方程:

$$\begin{vmatrix}
 2 - \frac{m}{k} \omega^2 & -1 & & & \\
 -1 & 2 - \frac{m}{k} \omega^2 & -1 & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & -1 & 2 - \frac{m}{k} \omega^2 & -1 \\
 & & & & -1 & 2 - \frac{m}{k} \omega^2
 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.8.38}$$

$\omega^2$  叫做本征值 (eigenvalue), 而式(3.8.38)叫做本征方程(eigenvalue equation). 因该方程对于  $\omega^2$  是  $(N - 1)$  次方程, 故不同的根充其量只有  $(N - 1)$  个. 由于我们已经用式(3.8.19)求出了  $\omega^2$  的值, 所以没有必要再去求解式(3.8.38). 关于直接由这个行列式来求  $\omega^2$  的方法, 请参考 [户田,\* p218].

由此可见, 两端固定的一维规则点阵的通解是用下列一组  $(N - 1)$  个解的线性组合来表示的:

$$\mathbf{u}_j \equiv \left\{ 2A \sin \left( \frac{nj\pi}{N} \right) \cos \left( \frac{j\pi}{Na} c_j t \right); n = 1, \dots, N - 1 \right\}. \tag{3.8.39}$$

现在, 把式(3.8.35)代入式(3.8.10)来求  $c_j$ . 设  $Na = l$ , 则有

$$c_j = 2 \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{l}{j\pi} \sin \frac{j\pi}{2N}, \tag{3.8.40}$$

所以, 如果使用任意常数  $(a_1, \dots, a_{N-1})$ , 则通解就是

---

\* 即书末参考文献[19]: 《振动论》

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{N-1} a_j \mathbf{u}_j, \quad (3.8.41)$$

若用分量来写,则有

$$u(na, t) = 2A \sum_{j=1}^{N-1} a_j \sin\left(\frac{nj\pi}{N}\right) \cos\left[2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{j\pi}{2N}\right) t\right]. \quad (3.8.42)$$

最后,我们再来取一下  $a \rightarrow 0$  的极限. 因为  $a \rightarrow 0$  时  $N \rightarrow \infty$ , 所以式(3.8.42)就简化为

$$u(x, t) = 2A \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) \cos\left[2\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} t\right]. \quad (3.8.43)$$

此式正是  $u(x, t)$  的傅里叶展开. 由此可见, 就  $x \in [0, L]$  所定义的  $u(x, t)$ , 成了以  $\{\sin(j\pi x/l); j = 1, 2, \dots, \infty\}$  为基矢的线性空间的矢量. 虽然该空间有无限多维, 但是由于能够进行傅里叶展开, 所以我们说它是可分离的 (separable). 这个空间的任意矢量  $u(x, t)$  描述该力学系统的状态, 即波动场的状态; 在这个意义上, 该空间叫做状态空间. 还需要指出一点, 这个空间全部用实数构成. 在通过矢量空间来描述状态时, 之所以需要复数, 是因为所处理的是微观世界(参考本讲座第四卷《量子力学 II》§20.3 (d)).

当一维点阵模型象本节所处理的那样只由两邻受到弹性力, 即服从胡克定律的力时, 运动方程变成线性方程, 所以, 解析处理比较容易. 而若力是非线性的, 则除特殊情况之外, 运动方程不能解析求解. 在本章最后, 作为在非线性力作用下可得严格解的一个例子, 我们来说明一下户田点阵 (§3.15 (iii)).

### § 3.9 连续物质的运动

前面, 我们把物质各点的位移矢量写成  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ , 它

是点  $(x, y, z)$  在时刻  $t$  的位移, 而空间坐标  $(x, y, z)$  则被看成是该物质粒子的标记. 假如在这些粒子间不存在相互作用, 那么当  $(x', y', z')$  和  $(x, y, z)$  不同时,  $u(x, y, z, t)$  和  $u(x', y', z', t)$  就相互独立. 但是, 若有强的相互作用, 则  $u(x, y, z, t)$  和  $u(x', y', z', t)$  就不再是独立的了. 作为该情况的极限 (参考一维点阵的处理), 我们假定, 若  $(x', y', z')$  接近于  $(x, y, z)$ , 则  $u(x', y', z', t)$  不仅无限接近于  $u(x, y, z, t)$ , 而且其接近方式还是平滑的. 也就是说, 我们把  $u(x, y, z, t)$  看成是  $x, y, z$  的一个连续可微的函数. 另一方面, 在以空间和时间的连续性为首要前提的经典物理学中,  $u$  对时间  $t$  显然是连续可微的.

因此, 当物体各点即使有位移也总是一个小量时, 位移矢量的有效性就会很好地发挥出来. 特别是当各点进行微小振动时, 为了知道该振动在空间的传播状况, 只要研究位移矢量应该满足的波动方程的性质就可以了. 这是因为, 既然物体具有形状, 换句话说, 既然物体的任何一部分都具有企图保持自己形状的性质, 那么, 构成物体的物质微小部分, 在空间上就不会移动太大的距离.

但是, 在液体和气体中, 除了各点的振动之外, 根据外部给予的条件, 能够引起其微小部分在空间上产生大的移动. 因此, 就有必要把我们在前面所采用的处理方法多多少少扩充一下. 在液体和气体中, 特别是在气体中, 作为多粒子系统的性质比起作为连续体的性质, 要表现得更为明显一些. 然而, 由于我们所讨论的距离比分子平均自由程 (mean free path) 要长得多, 所以, 在该范围内连续体近似是很好成立的. 再说, 在  $0^{\circ}\text{C}$  和一个大气压的空气中, 空气分子的平均自由程大约是  $6.4 \times 10^{-6}\text{cm}$ . 因此, 在我们所讨论的范围内, 已经发生了无数次碰撞, 在这个意义上, 可以认为它们受到周围粒



子的强烈作用。所以,作为位置的连续函数,上述在各点上的位移矢量的概念,在这里仍然是妥当的。

对于物质粒子的位移来说,自然是需要一定时间的。因此,我们现在把各点的速度  $\mathbf{u}$  取作位移除以所需时间的值的极限。前面已经说过,把各点速度用对空间坐标及时间可微的一组函数  $u(x, y, z, t)$ 、 $v(x, y, z, t)$ 、 $w(x, y, z, t)$  来表示,相当于向该物质粒子的质点系(由连续的无限个质点构成!)加上了非常严格的限制。然而,在这个假定之下,物质粒子的加速度又该怎样表现呢?

时刻  $t$  位于点  $P(x, y, z)$  的物质粒子,在时刻  $t + \Delta t$  位移到  $P'$ ,

$$P \rightarrow P'(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t).$$

但是,根据上面的假定,在时刻  $t + \Delta t$  位于点  $P'$  的粒子必须具有的速度是

$$\mathbf{u}(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t).$$

因此,在时刻  $t$  位于点  $P(x, y, z)$  的粒子,其加速度便可用下式确定:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(x, y, z, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{ \mathbf{u}(x + u\Delta t, y + v\Delta t, \\ &\quad z + w\Delta t, t + \Delta t) - \mathbf{u}(x, y, z, t) \} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix}. \quad (3.9.1) \end{aligned}$$

通常,我们写成

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \text{grad}),\end{aligned}$$

并把它叫做拉格朗日微分算符。若使用这个符号,则可把式(3.9.1)表示成

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(x, y, z, t) &= \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(x, y, z, t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \text{grad})\mathbf{u}.\end{aligned}\quad (3.9.2)$$

一般来说,当作为场量来定义的物理量随着物质粒子的运动而变化时,其时间上的变化,可以用拉格朗日微分算符来表示。例如,对密度那样的标量,就有

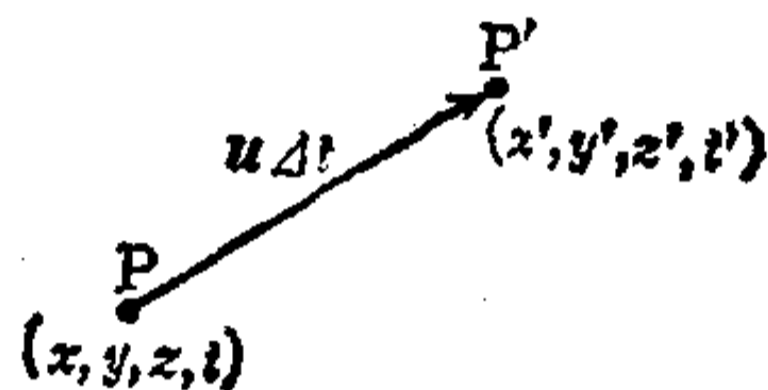


图 3.15

$$\frac{D}{Dt} \rho(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{u}, \text{grad} \rho).\quad (3.9.3)$$

但是,就密度而言,从物理上进行这样的研究,在很多情况下是不必要的。这是因为,当用牛顿力学来处理空间微小体积  $dx dy dz$  内所包含的物质的运动时,实际上所需要的是

$$\rho(x, y, z, t) dx dy dz \frac{D}{Dt} \mathbf{u}.$$

下面,我们求一下把密度当作场量来看待时的一个重要的关系式。考虑用封闭曲面  $\Gamma$  所包围的体积  $V$  内的物质。不用说,在时刻  $t$  物质的总质量由下式确定:

$$\iiint_V \rho(x, y, z, t) dx dy dz.$$

若让  $\Gamma$ 、 $V$  一定,来求时刻  $t + \Delta t$  的总质量,则有

$$\iiint_V \rho(x, y, z, t + \Delta t) dx dy dz$$

$$= \iiint_V \left\{ \rho(x, y, z, t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, z, t) \right\} dx dy dz, \quad (3.9.4)$$

所以,在单位时间内,  $\Gamma$  内的质量减少量是

$$- \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, z, t) dx dy dz.$$

另一方面,单位时间内通过  $\Gamma$  向外流出的总质量由下式给出:

$$\iint_{\Gamma} \rho(x, y, z, t) (\mathbf{u}(x, y, z, t), \mathbf{n}(x, y, z, t)) d\sigma.$$

其中,  $\mathbf{n}$  是  $\Gamma$  上的元面积  $d\sigma$  的外向法线矢量. 根据矢量分析的高斯定理,上式能够改写成

$$\begin{aligned} & \iint_{\Gamma} \rho(x, y, z, t) (\mathbf{u}, \mathbf{n}) d\sigma \\ &= \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right\} dx dy dz, \end{aligned} \quad (3.9.5)$$

于是可以得到

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right\} dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

因为  $V$  无论怎样来选择上式都是成立的,所以必须是

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0. \quad (3.9.6)$$

式(3.9.5)左边是由  $\Gamma$  所包围的区域出来的总流出量或总发散量,右边是把每单位体积的发散量对整个体积进行积分的结果. 因此,把

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \equiv \operatorname{div} \rho \mathbf{u} \quad (3.9.7)$$

叫做矢量  $\rho \mathbf{u}$  的散度 (divergence) 是适当的。用符号表示时, 往往也采用下列写法:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv \operatorname{grad} \text{ (有时也写成那勃勒 } \nabla \text{)} \quad (3.9.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = (\operatorname{grad}, \mathbf{A}) \quad (= (\nabla, \mathbf{A})). \quad (3.9.9)$$

我们已经知道, 当各点的速度矢量用  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  表示时, 各点的加速度矢量  $\mathbf{a}(x, y, z, t)$  是由式 (3.9.2) 来确定的, 所以, 可以把它分解如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \\ & \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9.10)$$

设

$$\omega_x \equiv \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y \equiv \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\omega_x \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.9.11)$$

$$\boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_x, \omega_y, \omega_z), \quad (3.9.12)$$

上式右边的第二项就可以表示成

$$\frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}].$$

当  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  时, 它表示  $\mathbf{u}$  以角速度  $\boldsymbol{\omega}/2$  在旋转。在这个意义上, 我们把  $\boldsymbol{\omega}$  表示成

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot } \mathbf{u}, \quad (3.9.13)$$

并称其为  $\mathbf{u}$  的旋度 (rotation) (有时也叫做旋量 curl)。若使用前面的记号, 则有

$$\text{rot } \mathbf{u} \equiv [\text{grad}, \mathbf{u}] \quad (= [\nabla, \mathbf{u}]). \quad (3.9.14)$$

另外, 对一般矢量场  $\mathbf{A}(x, y, z)$  来说, 斯托克斯 (Stokes) 定理是成立的。即

$$\int_C (\mathbf{A}, d\mathbf{s}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}, \mathbf{n}) d\sigma. \quad (3.9.15)$$

式中,  $d\mathbf{s}$  是在沿着一个方向来测量封闭曲线  $C$  时的线元矢量, 而  $\mathbf{n}$  则是在测量  $C$  的方向上旋转右螺旋时向着右螺旋前进一侧的面积元  $d\sigma$  的法线矢量。因此

$$\boldsymbol{\omega}(x, y, z, t) = \text{rot } \mathbf{u}(x, y, z, t)$$

叫做在时刻  $t$  点  $(x, y, z)$  附近的涡量 (vorticity)。

### § 3.10 流体的运动方程

当外力作用到物体上引起“微小变形”时, 其应变和应力遵从胡克定律 (3.4.1), 但是, 我们在弦的横波中已经说明过, 有时物体在变形之前就产生了应力。因此, 作为一级近似, 应变和应力的一般关系可由下式确定:



$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx}^0 \\ T_{yy}^0 \\ T_{zz}^0 \\ T_{yz}^0 \\ T_{zx}^0 \\ T_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{16} \\ c_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{61} & \cdots & \cdots & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.10.1)$$

其中,  $(T_{xx}^0, T_{yy}^0, T_{zz}^0, T_{yz}^0, T_{zx}^0, T_{xy}^0)$  是不取决于  $(e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy})$  的二阶对称张量, 一般来说, 它是位置的函数。

可是, 为使物体保持形状, 必须作用怎样的应力呢? 我们以冰的棱柱体为例来研究一下。这时, 重力作为外力而发生作用。若用图 3.16 中虚线所示的平面把它切去一个角, 那么, 角的那一部分必然要滑落下来。因此, 为了使这个角停在它原来的位置上, 必须有切应力、即切线应力作用。在这个例子中作为外力我们考虑了重力, 但是, 以相同物质构成的物体, 其保持形状的性质, 也要依外力大小及其作用方式而发生变化。若加上非常猛的力, 则水也会表现出固体一样的性质; 如果有非常缓慢的力作用, 那么冰也会流动。对饴糖来说, 这种情况特别明显。

在外力的大小、作用的方式有一定限制的范围内, 我们把“在连续物质的系统中, 当处于静止状态时, 切线应力为零而法线应力在互相推挤的方向上作用的那种系统”定义为流体

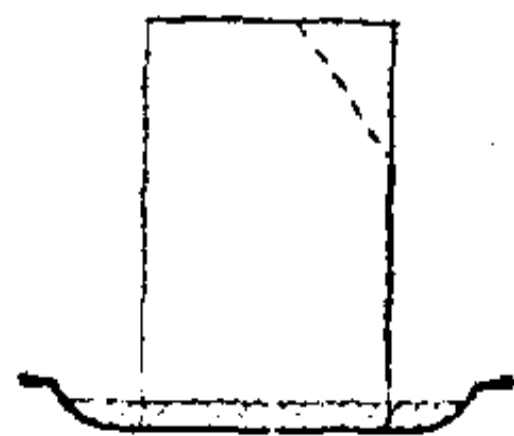


图 3.16

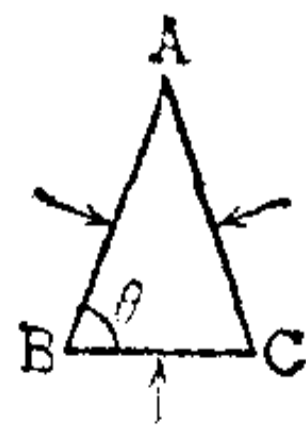


图 3.17

(fluid). 只要所讨论的是普通外力, 则水和空气都是流体. 上述互相推挤的法线应力叫做压强 (pressure), 更准确一些, 叫做静压强 (static pressure). 关于流体运动的情况, 我们在后面再研究.

本节和下一节讨论的是流体. 因此, 在(3.10.1)右边不依赖于应变的项之中, 首先必须满足

$$T_{yz}^0 = T_{zx}^0 = T_{xy}^0 = 0. \quad (3.10.2)$$

其次, 我们在流体内考虑一个截面为等腰三角形 ABC 的微小三棱体, 来求它的平衡表达式. 设作用于 AB、AC 上的压强分别为  $p_{AB}$ 、 $p_{AC}$ , 再假设  $\angle ABC = \angle ACB = \theta$ , 则有

$$p_{AB} \sin \theta = p_{AC} \sin \theta, \quad (3.10.3)$$

所以

$$p_{AB} = p_{AC}. \quad (3.10.4)$$

这个关系式不依赖于  $\theta$ , 因而也不依赖于  $\angle BAC$ , 它总是成立的. 由此可知, 静止流体内的压强, 不依赖于面的方向. 我们把这个结果写成

$$T_{xx}^0 = T_{yy}^0 = T_{zz}^0 = p(x, y, z). \quad (3.10.5)$$

这一结论还表明, 静止流体是各向同性的. 因为我们已经就各向同性的物质求出了应力和应变的关系, 所以, 把式(3.4.26)、(3.10.5)代入式(3.10.1), 即可得到

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.10.6)$$

在各向同性的情况下, 我们可以象上面那样利用对称性

来简化那些决定应力和应变关系的常数  $c_{ij}$ 。在几何上，位移矢量是速度矢量和时间  $\Delta t$  的乘积，因而，即使用速度矢量  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  来表示式 (3.10.6) 中的  $e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy}, c_{ij}$  之间的关系也不会变化。不用说，它们的量纲不同，数值亦有差异。按理讲，记号也应该改变一下，但是，因为我们已经把  $\mathbf{u}$  叫成了速度矢量，所以就把  $e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy}$  和  $\lambda, \mu$  都用同样的字母来表示。当然，作为物理量，必须有所区别，所以，今后把  $e_{xx}, \dots$  叫做应变率张量 (rate-of-strain tensor)。

这样一来， $p$  就是流体静止时的压强。当流体运动时，不仅会出现法线应力，而且也会出现切线应力。就法线应力而言，由式 (3.10.6) 可以得到

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 3p + (3\lambda + 2\mu)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}). \quad (3.10.7)$$

式 (3.10.7) 的两边对坐标系的变换 (正交变换) 是不变量，即为标量。在前面已经把  $p$  定义成静止流体的压强，而我们现在所处理的却是运动流体，因此，在严格的意义上，压强的概念已不复成立。其原因在于，法线应力  $T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}$  互相既不相等，切线应力  $T_{yz}, T_{zx}, T_{xy}$  亦不为零。尽管如此，

$$\phi(x, y, z, t) \equiv \frac{T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}}{3} \quad (3.10.8)$$

却是标量。从而，我们把式 (3.10.8) 所定义的  $\phi$  取作流体具有应变率时的压强。为了避免滥用压强这个术语，把  $\phi$  叫做平均压强 (mean pressure)，并写成  $\bar{p}$ 。从式 (3.10.8) 来看，“平均”的意义是很清楚的。这样一来，式 (3.10.7) 就变成

$$3\bar{p} = 3p + (3\lambda + 2\mu)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})$$

即

$$\bar{p} = p + \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \Theta. \quad (3.10.9)$$

式中,

$$\Theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \quad (3.10.10)$$

表示流体局部体积膨胀率的时间变化率,即膨胀速度.

当我们处理实际流体时,若采取不可压缩近似,则  $\Theta=0$ , 故由式(3.10.9),得

$$\bar{p} = p. \quad (3.10.11)$$

在相当好的近似程度上,液体之类是允许这个假定的.但在气体之类的物质中,自然会存在压缩性的问题,所以不应该直接忽略

$$\mu' \equiv \lambda + \frac{2}{3} \mu. \quad (3.10.12)$$

这里所定义的  $\mu'$ ,叫做体积粘滞度 (bulk viscosity).

在后面就会明白,当运动方程中出现应变率张量时,其重要的项中包含着系数  $\mu$ . 假如把式(3.10.6)的  $\mu$  和式(3.4.33)、(3.4.34)的切变模量进行对比,我们就可以理解,把这个  $\mu$  称为粘滞系数 (coefficient of viscosity) 是很合适的. 因此,倘若用某种方法确定出

$$\frac{\mu'}{\mu} \ll 1, \quad (3.10.13)$$

那么,索性由开始就设

$$\mu' = 0, \quad (3.10.14)$$

来进行讨论倒是很简单的. 式(3.10.14)叫做斯托克斯关系 (Stokes relation). 虽然式(3.10.14)的理论证明尚未见到,但是,就单原子气体而言,除去高温、高压状态之外,它是可以根据气体分子动力论予以说明的(参考[今井]\* p. 275)

式(3.10.14)的假定,等价于在  $\lambda$  与  $\mu$  之间假设了以下关

---

\* 即书末参考文献[14]《流体力学》

系:

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu. \quad (3.10.15)$$

我们准备在这个条件下来进行讨论.

这样一来,式(3.10.6)变成

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & & \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & & & \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & & & \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.10.16)$$

于是,为求出流体运动方程所作的准备就已经齐全了.

在作用于流体微小部分上的力之中,为了求出由周围物质产生的力,首先要计算由外部通过封闭曲面  $\Gamma$  作用于  $\Gamma$  所包围的范围  $V$  上的力. 设  $\Gamma$  的面积元  $d\sigma$  的外向法线矢量为  $\mathbf{n} \equiv (l, m, n)$ , 我们就可以使用应力张量  $T_{xx}, T_{yy}, \dots, T_{xy}$ , 把外部作用于  $d\sigma$  上的力的  $x$  分量用下式来表示:

$$f_x = -T_x d\sigma = -(lT_{xx} + mT_{xy} + nT_{xz})d\sigma. \quad (3.10.17)$$

因此,作用于  $V$  上的外力的  $x$  分量是

$$F_x = -\iint_{\Gamma} (lT_{xx} + mT_{xy} + nT_{xz})d\sigma, \quad (3.10.18)$$

根据高斯定理,可以把它改写成体积分

$$F_x = -\iiint_V \left( \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{xz} \right) dx dy dz. \quad (3.10.19)$$



因此,由周围物质作用于微小部分上的力的  $x$  分量就是

$$K_x = - \left( \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{xz} \right) dx dy dz. \quad (3.10.20)$$

同样,我们可以得到

$$K_y = - \left( \frac{\partial}{\partial x} T_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{yz} \right) dx dy dz \quad (3.10.21)$$

$$K_z = - \left( \frac{\partial}{\partial x} T_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} \right) dx dy dz. \quad (3.10.22)$$

若把式(3.10.16)代入式(3.10.20),再使用下式进行归纳:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), & e_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

则有

$$K_x = \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \Delta u \right\} dx dy dz. \quad (3.10.23)$$

因为对其它分量来说结果也是一样的,所以,概括起来,便可以写成

$$\mathbf{K} = \left\{ -\operatorname{grad} p - \frac{\mu}{3} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} \right\} dx dy dz. \quad (3.10.24)$$

现在,象重力那样的力不是通过边界面,而是直接作用在所考虑的流体微小部分  $dx dy dz$  上;假设这个力为  $\mathbf{K}' dx dy dz$ ,

那么根据式(3.10.20),牛顿运动方程就是

$$\rho(x, y, z, t) dx dy dz \frac{D}{Dt} \mathbf{u} = \mathbf{K} + \mathbf{K}' dx dy dz, \quad (3.10.25)$$

因而,结果变成了

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \mathbf{u} = & -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{\mu}{3\rho} \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) \\ & - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{K}'. \end{aligned} \quad (3.10.26)$$

上式叫做广义的纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes equation). 狭义地来讲,式(3.10.26)右边取掉第二项之后的方程叫做纳维-斯托克斯方程.

虽然我们在应力和应变率的关系(3.10.1)等公式中作了一定的近似,但却仍然相当忠实地按照物理上的分析,在牛顿力学的基本框架中,作为流体运动方程,推导了纳维-斯托克斯方程. 然而,为了使这个方程具有物理意义,还必须实地求解并和实验进行比较. 遗憾的是,一般地对式(3.10.26)严密求解,在现阶段几乎没有希望. 何况,式(3.10.26)在数学上是否有解的问题,目前尚属不明(有关这个问题,请参考[藤田-加藤]\*). 而且,式(3.10.26)左边对 $\mathbf{u}$ 来说并不是线性的,因此,就存在着一个困难,即式(3.10.26)的解 $\mathbf{u}$ ,不能构成矢量空间.

式(3.10.26)是由三个方程构成的联立方程,未知函数除了 $u, v, w$ 之外,还有 $p(x, y, z, t)$ 和 $\rho(x, y, z, t)$ . 因此,无论如何还需要两个独立条件. 好在其中的一个已经有了,即式(3.9.6)给出的连续条件(condition of continuity)

---

\* 即书末参考文献 [20]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.10.27)$$

所以，只要再找出剩下的一个就可以了。通常把这个条件用下式来表示

$$f(\rho, p, T) = 0, \quad (3.10.28)$$

并称之为状态方程 (characteristic equation)。在式 (3.10.28) 中包含的  $T$  是绝对温度，它是状态方程中不可缺少的一个量。也就是说，状态方程无疑是热力学的关系式。

这并不是一个意外的结论。当把位移矢量假设为连续的场量时，我们曾假定了粒子间的强相互作用；在把速度矢量当作连续的场量时，也暗地里假定了多粒子系统粒子间的相互作用。连续体的理想模型与近似，乍一看似乎丢掉了热力学的性质，但实际上并非如此。当由质点系牛顿力学向连续体力学过渡时，只用牛顿力学的原理是不够的，尚需状态方程这种典型的热力学关系。

这样说，或许有人会问：刚体或弹性体，难道不是连续体吗？对它们来说，热力学的研究岂非无用？但是，即使把刚体叫做多粒子系统的极限，它也是原来的多粒子系统本身在强的相互作用之下相对处于稳定静止状态的一个特殊的力学体系；而弹性体则是各个粒子由稳定位置偏移甚微，并不会引起粒子相互混杂的一种力学体系。后者仅仅涉及各点的微小振动。而且，所处理的情况是：各点的微小振动相互受到严格的限制，在空间上还是连续的。倘若各点的微小振动能够无规则进行，就有必要作热力学上的研究，在弹性体的连续体假设中，是用平均化来消除这个涨落 (fluctuation) 的。应该说，该效应实际上是算在弹性常数之中了。弹性常数是温度的函数，便印证了这一事实。

在前面我们通过变分原理简单推导了弹性体的运动方

程,这是因为,允许把它作为力学上的保守系来处理.反之,一般流体已不再是保守系,所以就不能使用变分原理,只好象我们在这里所说明的那样,通过直接计算加速度和力来导出运动方程.

最后,关于纳维-斯托克斯方程是否有解的问题,我们再附上一笔.假如运动方程是掌握自然现象的本质并对它作了准确描述的一个方程,那么,在其适用范围以内方程应该具有解,而且具有单一的解;从经典物理学的立场来说,这是必然的,因为自然现象本身就是“解”.由于数学是有高度逻辑性的体系,所以,在数学上来考察纳维-斯托克斯方程解的存在及其单一性,对于验证推导纳维-斯托克斯方程时所采用的经典物理学研究方法的可用性是有用的.当然,即使是数学的方法,未经研究的部分还是很多的,所以,只要没有明确证实解的不存在,就不能否认推导纳维-斯托克斯方程的物理依据.

### § 3.11 完全流体的运动

前一节,我们在一定的近似条件下,推导出了一般流体的运动方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{Dt} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{\mu}{3\rho} \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) \\ \quad - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{K}' \end{array} \right. \quad (3.11.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \end{array} \right. \quad (3.11.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\rho, p, T) = 0. \end{array} \right. \quad (3.11.3)$$

因此,为了知道流体的状态,只要在给定的边界条件下求解这五个联立方程就可以了.在前一节结束时我们曾提到过,所

谓的纳维-斯托克斯方程(3.11.1)在适当的物理边界条件下是否果真具有严格解,而且该解是否只限于一种,这些数学上的问题现在尚未解决。但是,如下所述,在若干情况下,可以通过考虑各种物理的近似,来求具体的解。把这些解和实验进行比较,我们就能验证原来的方程及我们附加的物理近似的合理性。

虽然现在就开始进行那样的讨论,但是,在此之前我们先讲一下一般需要注意的地方。速度矢量  $\mathbf{u}$  作为运动方程的解才能看出它的意义,但从“物理上的”考察可以假设亥姆霍兹定理(P 155)的条件,也就是假设该速度矢量大小有限,且到处都是均匀而连续的。虽然从物理上讲往往也能产生不连续的地方,但是我们在这儿打算把这些情况排除在外。这样一来,就总能把它分解成两部分:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (3.11.4)$$

$$\text{rot } \mathbf{u}_1 = 0 \quad (3.11.5)$$

$$\text{div } \mathbf{u}_2 = 0. \quad (3.11.6)$$

由式(3.11.5)可知,  $\mathbf{u}_1$  表示“无旋”场;由式(3.11.6)可知,  $\mathbf{u}_2$  表示“不可压缩”场。当处理流体时,这个分法极为有效。这一点,我们会逐渐明白的。但是,假如是“无旋而又不可压缩”的场,又是怎样的呢? 首先,因为

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0,$$

所以,存在着由下式规定的  $\Phi$ :

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Phi. \quad (3.11.7)$$

$\Phi$  叫做速度势 (velocity potential)。而根据

$$\text{div } \mathbf{u} = 0,$$

我们可以得到

$$\text{div}(\text{grad } \Phi) \equiv \Delta \Phi = 0. \quad (3.11.8)$$

因此,  $\Phi$  必须是调和函数 (harmonic function)。这个结论与



运动方程无关。然而，即使在这种情况下也能由运动方程得到以下重要的关系式。

也就是说，倘若外力  $\mathbf{K}'$  是由势  $\mathcal{Q}$  导出的，那么，根据关系式

$$(\mathbf{u}, \text{grad}) \mathbf{u} \equiv \frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - [\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{u}], \quad (3.11.9)$$

就可以把式(3.11.1)表示成

$$\text{grad} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{1}{2} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} p + \frac{1}{\rho} \mathcal{Q} \right) = 0. \quad (3.11.10)$$

因为该流体是不可压缩的，所以密度  $\rho$  是常数。由式(3.11.10)即可得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{1}{2} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} p + \frac{1}{\rho} \mathcal{Q} = f(t). \quad (3.11.11)$$

式中， $f(t)$  是时间的任意函数。式(3.11.11)叫做压强方程 (pressure equation) 或广义伯努利定理 (generalized Bernoulli's theorem)。用式(3.11.8)和(3.11.11)可以导出饶有趣味的问题，下面我们就来求解这些问题。

### (i) 浅水的波

当在断面为长方形、深度  $h$  一定的运河中行驶的小船突然停止时，我们研究一下向前方传播的波。这是典型的非线性波。虽然在 1895 年已经由荷兰数学家考特威基 (Korteweg) 和德瑞思 (de Vries) 解了出来，但是，长期以来几乎被人们所忽视。最近，由于牵涉到等离子体中的波之类的问题，它才引起大家的关注，而且促使人们去研究用线性算符来求解非线性波动方程的方法，似乎正在开拓物理学的一个新领域。关于这些情况，我们打算在本章最后一节再简单谈谈，在这里想尽可能忠实地按照考特威基和德瑞思原来的论文 ([Korte-

weg, de Vries]\*) 来说明它的经典解法。

沿运河取  $x$  轴，在垂直于水面的方向上取  $y$  轴。设  $y$  轴的原点为运河的底。这时，速度矢量就可以认为是

$$\mathbf{u} \equiv (u(x, t), v(x, t), 0).$$

倘若把运河的水看成不可压缩的无旋流体，则

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.11.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.11.13)$$

及

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + gy + \frac{1}{\rho} p = f(t) \quad (3.11.14)$$

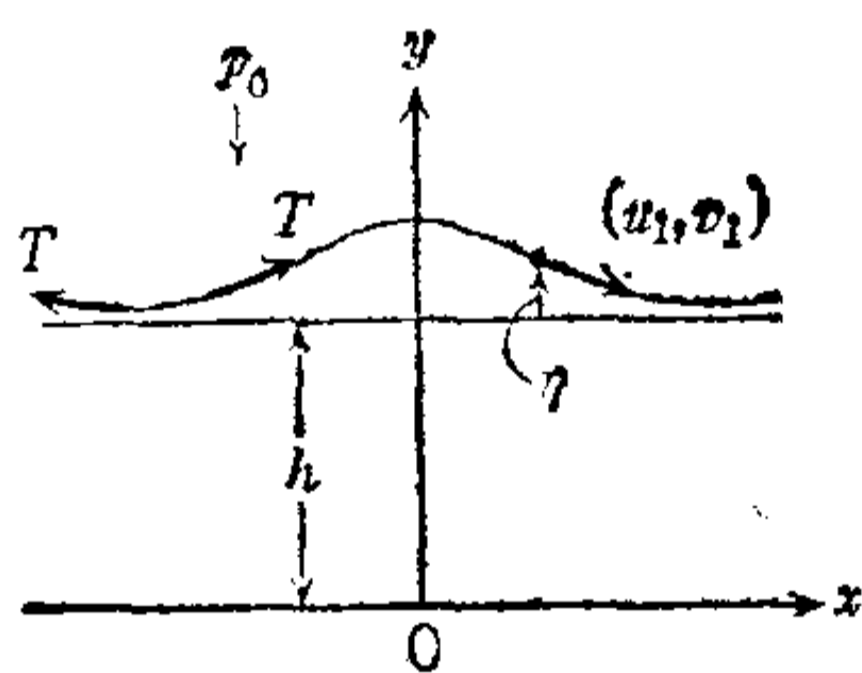


图 3.18

在水中及水面到处都成立。其中， $g$  是重力加速度。现在，我们对水面的各个量加上脚码 1，由于水面上的流体粒子总是停留在水面上（因为是无旋的），其  $y$  坐标为  $y_1(x, t)$ ，所以

$$\frac{Dy_1}{Dt} \equiv \frac{\partial y_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} = v_1, \quad (3.11.15)$$

再设水的表面张力为  $T$ ，大气压强为  $p_0$ ，则  $p_1$  就由下式确定

$$p_1 = p_0 - T \frac{\partial^2 y_1 / \partial x^2}{\sqrt{1 + (\partial y_1 / \partial x)^2}} \approx p_0 - T \frac{\partial^2}{\partial x^2} y_1. \quad (3.11.16)$$

由此式和式(3.11.14)，我们可以得到

\* 即书末参考文献[24]。——译者

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\rho} = f(t) - \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1 - \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2) \\ - g y_1 + \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} y_1. \end{aligned} \quad (3.11.17)$$

对  $x$  求偏导数, 所得到的表达式就是要求的运动方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1 + \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2) + g y_1 - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} y_1 \right) = 0. \quad (3.11.18)$$

为了求解这个方程, 首先作如下的展开:

$$u = f + y f_1 + y^2 f_2 + \dots \quad (3.11.19)$$

$$v = y \phi_1 + y^2 \phi_2 + \dots \quad (3.11.20)$$

式中,  $f, f_1, f_2, \dots, \phi_1, \phi_2, \dots$  是  $x$  和  $t$  的函数. 这样的展开是否会很快收敛, 是这个问题的关键. 虽然浅波的条件在这里发挥了作用, 但这个条件却是靠着由上面的展开得到的最后结果才得到证明的.

若把式(3.11.19)、(3.11.20)代入式(3.11.12), 则有

$$\phi_n = -\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} f_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots; f_0 = f), \quad (3.11.21)$$

再把它代入式(3.11.13), 即可得到

$$f_1 = 0, \quad f_n = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \phi_{n-1} = -\frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{n-2}, \quad (3.11.22)$$

所以, 式(3.11.19)和(3.11.20)就能分别表示成

$$u = f - \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{1}{24} y^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f - \dots \quad (3.11.19')$$

$$v = -y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{6} y^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} f - \frac{1}{120} y^5 \frac{\partial^5}{\partial x^5} f + \dots \quad (3.11.20')$$

由式(3.11.19')可立即得出

$$\Phi = \int f dx - \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{24} y^4 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \dots \quad (3.11.23)$$

积分常数只是  $y$  的函数,但在式(3.11.18)中却没有用,所以特意没写上去. 以上关系在水面上也是成立的.

我们在此处假设波的高度是有限的,而且是一个非常小的量,令

$$y_1 = h + \eta(x, t) \quad (3.11.24)$$

$$f = q_0 + \beta(x, t), \quad (3.11.25)$$

然后把式(3.11.19')、(3.11.20')、(3.11.23)代入式(3.11.18)、(3.11.15),求出  $\beta$ 、 $\eta$  一次近似的表达式,则可分别得到

$$q_0 \frac{\partial}{\partial x} \beta + \frac{\partial}{\partial t} \beta + g \frac{\partial}{\partial x} \eta = 0 \quad (3.11.26)$$

$$q_0 \frac{\partial}{\partial x} \eta + \frac{\partial}{\partial t} \eta + h \frac{\partial}{\partial x} \beta = 0. \quad (3.11.27)$$

假设

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta = \frac{\partial}{\partial t} \beta = 0, \quad \beta = -\frac{q_0}{h} (\eta + \alpha) \quad (3.11.28)$$

$$q_0 = \sqrt{gh}, \quad (3.11.29)$$

这个联立微分方程就能够满足. 其中,  $\alpha$  是积分常数,可以认为是一个小的量. 为了作进一步近似,只要令

$$f = q_0 - \frac{q_0}{h} (\eta + \alpha + \gamma), \quad (3.11.30)$$

就可以了,设其中的  $\gamma(x, t)$  小于  $\eta$ 、 $\alpha$ . 和前面一样,考虑到式(3.11.29),并在作近似计算时特别留意  $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^3 \ll \eta \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial^3 \eta}{\partial^2 x \partial t} \ll \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)$ , 则式(3.11.8)、(3.11.15)

分别成为

$$\begin{aligned} \frac{q_0}{h} \frac{\partial \eta}{\partial t} + g \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{g}{h} (\eta + \alpha) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ - \left( \frac{1}{2} h^2 g - \frac{T}{\rho} \right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (3.11.18')$$

$$\begin{aligned} \frac{q_0}{h} \frac{\partial \eta}{\partial t} - g \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{g}{h} (2\eta + \alpha) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ + \frac{1}{6} h^2 g \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \end{aligned} \quad (3.11.15')$$

从这两个式子消去  $\partial \gamma / \partial x$ , 即可得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta = \frac{3q_0}{2h} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta \right). \quad (3.11.31)$$

式中,

$$\sigma = \frac{1}{3} h^3 - \frac{Th}{\rho g}. \quad (3.11.32)$$

这就是今天所谓的考特威基-德瑞思方程(简写成 KdV 方程)的原形.

必须注意, 根据式(3.11.32), 在

$$h_c = \sqrt{\frac{3T}{\rho g}} \quad (3.11.33)$$

的地方,  $\sigma$  的符号要改变. 作为一个参考, 我们设  $g = 980$  厘米·秒<sup>-2</sup>, 对 20°C 的水求出  $h_c$  ( $T = 72.75$  达因·厘米<sup>-1</sup>,  $\rho = 0.998$  克·厘米<sup>-3</sup>), 则

$$h_c \approx 0.47 \text{ 厘米}, \quad (3.11.34)$$

所以, 在运河中当然是  $\sigma > 0$ .

如果  $\alpha = 0$ , 并适当选择  $t$  及  $x$  的单位, 再适当把  $y$  移一下, 那么在  $\sigma > 0$  的情况下, 就可以把式(3.11.31)写成



$$\frac{\partial}{\partial t} \eta - \eta \frac{\partial}{\partial x} \eta - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta = 0, \quad (3.11.35)$$

或者,象  $t \rightarrow -t$  那样改变时间方向,则有

$$\eta_t + \eta \eta_x + \eta_{xxx} = 0. \quad (3.11.36)$$

今后,为了记法简便,只要不事先特地声明,都将表示成

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta \equiv \eta_t, \quad \frac{\partial}{\partial x} \eta \equiv \eta_x, \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta \equiv \eta_{xxx}. \quad (3.11.37)$$

虽然式(3.11.36)是非线性的,但是求出满足它的一个解却很容易. 不言而喻,这时必须附加边界条件. 我们来考虑一种波,在任意时刻  $t$ , 它是

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta(x, t) = 0. \quad (3.11.38)$$

然后,使用正常数  $c$ , 令

$$\eta(x, t) = s(x - ct) \equiv s(\xi), \quad (3.11.39)$$

来研究一下这样的解是否存在.

将式(3.11.39)代入式(3.11.36),则有

$$-c \frac{ds}{d\xi} + s \frac{ds}{d\xi} + \frac{d^3 s}{d\xi^3} = 0. \quad (3.11.40)$$

这个常微分方程在下列边界条件下来求解,是很简单的:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} s(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d}{d\xi} s = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d^2}{d\xi^2} s = 0. \quad (3.11.41)$$

首先,把式(3.11.40)进行积分,可以得到

$$-cs + \frac{1}{2} s^2 + \frac{d^2}{d\xi^2} s = 0, \quad (3.11.42)$$

由于上述边界条件,右边的积分常数为零. 接着,把式(3.11.42)乘以  $2ds/d\xi$ , 再进行积分,则有

$$-cs^2 + \frac{1}{3} s^3 + \left( \frac{ds}{d\xi} \right)^2 = 0, \quad (3.11.43)$$

由边界条件可知,右边的积分常数仍然为零.

积分的结果是

$$\begin{aligned} s(\xi) &= 3c \left( \frac{2}{e^{\sqrt{c}\xi/2} + e^{-\sqrt{c}\xi/2}} \right)^2 \\ &\equiv 3c \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{c} \xi \right). \end{aligned} \quad (3.11.44)$$

这样一来,我们就证实了式(3.11.39)那样的解是存在的.在这里若把 $\eta$ 重新用 $x, t$ 来表示,则有

$$\eta(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{c} (x - ct) \right). \quad (3.11.45)$$

显然,这是在 $x$ 的正方向上以速度 $c$ 前进的孤波.需要注意的是,波的高度由速度决定,波越高、前进越快.这种波叫做孤子(soliton).

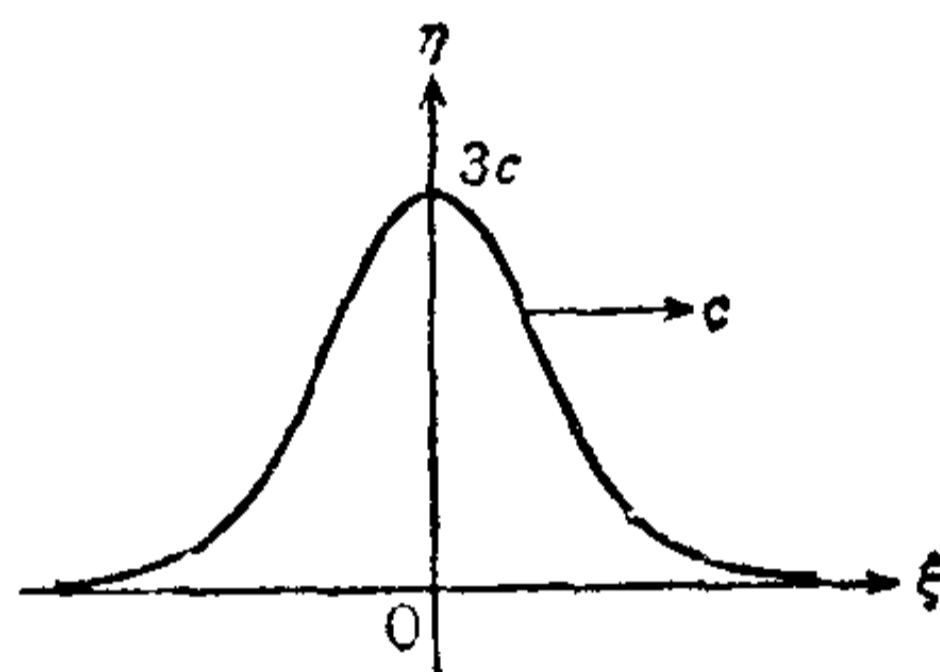


图 3.19

在以上计算中,非线性项起着重要的作用.为了看到这一点,我们来研究一下,倘若采取线性近似,将会出现怎样的

结果.为了容易看到近似,从一开始就使用速度势 $\Phi$ ,则式(3.11.12)、(3.11.13)成为

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \Phi, \quad v = \frac{\partial}{\partial y} \Phi \quad (3.11.12')$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi = 0, \quad (3.11.13')$$

根据式(3.11.14),可以把在水表面上的条件之一写成

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \frac{1}{2g} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} \Phi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \Phi \right)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{g} \left( f(t) - \frac{p}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (3.11.14')$$

虽然水表面上的压强  $p$  包含有依赖于表面张力和表面曲率的那一部分,但是,我们现在把它忽略不计(在以下讨论中,这样做不见得必要,但是为了简单起见,还是这么做的),而选择成

$$f(t) = \frac{p_0}{\rho},$$

若进一步忽略式(3.11.14')右边第二项,则可得到

$$y = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \Phi. \quad (3.11.14'')$$

假如再取线性近似,则水面的流体粒子在水面上停留的条件式(3.11.15)就变成

$$v_1 = \frac{\partial y_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} \approx \frac{\partial y_1}{\partial t},$$

所以,根据式(3.11.12'),在水面上,

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi = \frac{\partial}{\partial t} y. \quad (3.11.15')$$

因此,把式(3.11.14'')和式(3.11.15')加在一起,我们就能把水面上的边界条件用下列线性方程来表示:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi + g \frac{\partial}{\partial y} \Phi = 0. \quad (3.11.16')$$

结果,只要在  $y = h + \eta$  取边界条件 (3.11.16'), 而在  $y = 0$  取边界条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

就可以用线性近似来求解式(3.11.13')了. 令

$$\Phi(x, y, t) = A(y) \cos(\kappa x - \omega t),$$

这个问题即可简单解决. 结果是

$$A(y) = B \cosh \kappa y$$

$$\omega^2 = g \kappa \tanh \kappa(h + \eta) \approx g \kappa \tanh \kappa h,$$

最后一式表示,有色散现象. 倘若把它改写成波的波长  $\lambda$  和

相速  $c$  的关系,则有

$$c = \left( \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{1/2}. \quad (3.11.46)$$

可见,非线性项具有很好地消除这种色散的效果.

不用说,在水波中有各式各样的波,象正弦波、三角波、余次摆线波 (trochoidal wave) 等. 除正弦波外,它们全都是非线性波,处理起来相当麻烦. 有关它们的情况,请参考 [今井(全)\*]. 我们之所以要在这里提出以往的著作中几乎不曾处理的孤波(3.11.45),是因为考虑到了 KdV 方程的重要性,如同前面已经稍微讲过的那样. 详细情况,我们将在 §3.14 讨论.

对液体来说,压缩率,即单位气压下的负体积膨胀率非常小(在 20°C 的水中,是  $42.3 \times 10^{-6}$ ),所以可以认为它的密度是一定的;然而,在气体中却不是那样. 因此,有必要把它当作无旋而可压缩的流体来处理. 这时,式(3.11.1)右边第二项及第三项均不为零. 但是,在速度矢量  $\mathbf{u}$  变化不太剧烈的地方,即使忽略这些项,也是不坏的近似. 这相当于考虑了一种流体,其  $\mu/\rho$  可以假设为零. 这样的流体叫做完全流体 (perfect fluid) 或理想流体 (ideal fluid). 当状态方程 (3.11.3) 以  $\rho$  是  $p$  的单值函数的形式出现时,即

$$\rho = f(p), \quad (3.11.47)$$

该流体叫做正压流体 (barotropic fluid). 只要事先没有特别说明,我们今后所处理的都是正压流体. 下面,我们接着来考虑第二种情况.

#### (ii) 无旋的完全流体

假如作用在气体上的外力仅仅是重力,那么,这个力不妨

---

\* 即书末参考文献[14]. ——译者

忽略不计。因此，运动方程是

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{Dt} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \end{array} \right. \quad (3.11.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho + (\text{grad } \rho, \mathbf{u}) + \rho \text{div } \mathbf{u} = 0 \end{array} \right. \quad (3.11.49)$$

$$\rho = f(p)$$

因为我们还假定气体是无旋的，所以就可以写成

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Phi,$$

从而，式(3.11.48)成为

$$\text{grad} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{1}{2} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right) = -\frac{1}{f(p)} \text{grad } p. \quad (3.11.50)$$

若定义一个函数  $P$ ,

$$P(\mathbf{x}, t) \equiv \int^{p(\mathbf{x}, t)} \frac{dp}{f(p)}, \quad (3.11.51)$$

则上式的右边就是

$$\text{grad } P = \frac{dP}{dp} \text{grad } p = \frac{1}{f(p)} \text{grad } p, \quad (3.11.52)$$

所以，作为式(3.11.50)的解，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{1}{2} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + P = F(t). \quad (3.11.53)$$

式中， $F(t)$  是时间  $t$  的任意函数。式(3.11.53)不外乎就是可压缩的完全流体的压强方程。

在这里我们研究一下稳恒流动的情况，即

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0. \quad (3.11.54)$$

这时，根据式(3.11.50)，可以得到

$$\frac{1}{f(p)} \text{grad } p = -\frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (3.11.55)$$

又由连续方程(3.11.49)及式(3.11.47)可得



$$\Delta\Phi + \frac{1}{f(p)} (\text{grad } f(p), \text{grad } \Phi) = 0. \quad (3.11.56)$$

如果考虑到

$$\text{grad } f(p) = \frac{df}{dp} \text{grad } p, \quad (3.11.57)$$

并把式(3.11.55)代入式(3.11.57),对式子进行整理,则有

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi \\ & + \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi - 2 \frac{vw}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \Phi \\ & - 2 \frac{wu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \Phi - 2 \frac{uv}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi = 0. \end{aligned} \quad (3.11.58)$$

在后面马上就要谈到,式中的  $c \equiv \sqrt{dp/d\rho}$  是在压强为  $p$  的流体中的声速.

我们已经知道,无论是什么样的流体,只要满足无旋而又不可压缩的条件,那么,不管是稳恒的还是非稳恒的,其速度势  $\Phi$  都是拉普拉斯方程的解. 因此,式(3.11.58)中出现的  $u^2/c^2$ ,  $v^2/c^2$ ,  $\dots\dots$ ,  $uv/c^2$  等等,都可以认为是给出压缩性效应的因子. 更正确地说,这些项是作为完全流体的压缩性的效果出现的.

为了了解  $c$  的意义,我们采用理想气体作为流体,并选择绝热变化的状态方程. 也就是说,把

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad (3.11.59)$$

当作状态方程,其中使用了定压比热  $c_p$  与定容比热  $c_v$  之比

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}. \quad (3.11.60)$$

就空气而言,  $\gamma$  大约是 1.4.

由式(3.11.59)可知

$$dp = \gamma p \frac{d\rho}{\rho}, \quad (3.11.61)$$

因此,我们可以得到

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}. \quad (3.11.62)$$

如下所示,  $\gamma p$  相当于把完全流体看作弹性体时的弹性常数  $c_{11}$ . 流体微元的密度在运动中的变化规律是

$$\frac{D}{Dt} \rho = \frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{u}, \text{grad } \rho).$$

从而,在时间  $dt$  内,它所发生的变化是

$$d\rho = \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{u}, \text{grad } \rho) \right) dt. \quad (3.11.63)$$

可是,由连续方程(3.11.49)可知

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -(\mathbf{u}, \text{grad } \rho) - \rho \text{div } \mathbf{u}, \quad (3.11.64)$$

所以,

$$d\rho = -\rho \text{div } \mathbf{u} dt. \quad (3.11.65)$$

假如把它代入式(3.11.61),则有

$$dp = -\gamma p \text{div } \mathbf{u} dt. \quad (3.11.66)$$

正是这个表达式,给出了体积压缩率  $-\text{div } \mathbf{u} dt$  和压强变化之间的关系。因此,我们就可以得到

$$c_{11} = \gamma p. \quad (3.11.67)$$

也就是说,  $c$  给出了压强为  $p$  的声波的速度。

通常,人们写成

$$M \equiv \sqrt{\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{c^2}}, \quad (3.11.68)$$

并把  $M$  叫做局部马赫数 (local Mach number). 因为  $c$  是  $p$  的函数,而根据式(3.11.53),  $(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  也是  $p$  的函数,所以,  $M$

能用与  $(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  有关的量来表示。假设在  $\mathbf{u} = 0$  的地方,  $p$ 、 $\rho$ 、 $c$  的值分别为  $p_0$ 、 $\rho_0$ 、 $c_0$ 。若考虑到式(3.11.51)、(3.11.52)、(3.11.59)来对式(3.11.55)进行积分,则可得到

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= -2 \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \\ &= \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (3.11.69)$$

此式的意义是非常深刻的。这是因为,它表示流体的速度存在着上限。设该上限为  $q_{\max}$ , 并写成  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = q^2$ , 则由式(3.11.69)、(3.11.62)、(3.11.68)可以得到

$$\begin{aligned} q_{\max} &= \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}}, \\ c &= \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-1)(q_{\max}^2 - q^2)}, \\ M &= \sqrt{\frac{2}{(\gamma-1)} \left( \frac{q^2}{q_{\max}^2 - q^2} \right)}. \end{aligned}$$

作为一个参考,我们举出在  $15^\circ\text{C}$  的空气中  $q_{\max}$ 、 $c_0$  的值:

$$\begin{aligned} q_{\max} &= 75700 \text{ cm/s} \\ c_0 &= \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 34100 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

在这里需要注意,倘若流体的速度接近于上限  $q_{\max}$ , 则局部马赫数  $M$  要无限增大。

### § 3.12 粘滞流体的运动

在完全流体的近似下忽略了一些项,要对它们的影响作一般的研究是非常困难的。若加上无旋的条件,则那些项存在的理由便会大大减少。这是因为,旋涡发生的地方正好在粘性起作用的范围内。但是,假如取掉了无旋条件,又没有加

上不可压缩的条件,则纳维-斯托克斯方程依然过于复杂而毫无办法。因此,我们决定只针对下列不可压缩的条件能够满足的情况,来研究一下粘滞流体的运动:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.12.1)$$

首先,由式(3.12.1)可知, $\rho$ 在空间上是一定的,再根据连续方程(3.10.27),可以得到

$$\frac{D}{Dt} \rho(x, y, z, t) = 0. \quad (3.12.2)$$

它表示,流体微元的密度在运动中不变。因此,就可以认为运动方程中的 $\rho$ 是一个常数。由于假定了不可压缩,所以这个结果是必然的。但是,这样做也或多或少造成一些困难。若流体是正压流体,则当 $\rho$ 一定时,压强 $p$ 也一定。正如后面用简单例子所表明的那样,这时只能得到在物理上毫无价值的解。因此,我们假定 $\rho$ 和 $p$ 是独立的。虽然这个假定在气体中稍微有些勉强,但对液体来说却可以允许。这是因为,液体中 $\rho$ 几乎一定,从而可以认为应力的变化主要依赖于粘性。

因此,在以下的讨论中,设

$$-\frac{\mu}{\rho} \equiv \nu = \text{恒定}, \quad (3.12.3)$$

决定流体运动的方程即可写成

$$\begin{cases} \frac{D}{Dt} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{u} & (3.12.4) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. & (3.12.5) \end{cases}$$

尽管如此,上式的形式还是挺麻烦的,一般地求解它比较困难。因此,象前面多次所作的那样,我们假设流体的运动是一维的,也就是假定流体只在一个方向流动,例如 $x$ 轴的方向上。即

$$\mathbf{u} = (u, 0, 0). \quad (3.12.6)$$

这样一来,由式(3.12.5)可知

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.12.7)$$

即  $u$  不显含  $x$ . 这样,若把式(3.12.4)分解成分量写出来,便可得到

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u \end{cases} \quad (3.12.8)$$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p \end{cases} \quad (3.12.9)$$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p, \end{cases} \quad (3.12.10)$$

但是,由式(3.12.9)和式(3.12.10)可知

$$p = p(x, t) \quad (3.12.11)$$

若考虑到这一点,把式(3.12.8)分成只包含  $(y, z, t)$  的项和只包含  $(x, t)$  的项来写,则

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} u(y, z, t) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p(x, t), \end{aligned} \quad (3.12.12)$$

所以,必有

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} u(y, z, t) = a(t) \end{cases} \quad (3.12.13)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) = a(t) \end{cases} \quad (3.12.14)$$

其中,  $a(t)$  是  $t$  的任意函数.

直接求解式(3.12.14),则可得到

$$p(x, t) = p_0(t) - \rho a(t)x. \quad (3.12.15)$$

在式(3.12.13)中设  $a(t) = 0$ , 其结果和二维热传导方程形式完全相同. 这一点绝非偶然. 热传导方程的推导如下



所示。倘若把时刻  $t$  物体内某一点  $(x, y, z)$  的温度用  $T(x, y, z, t)$  来表示,再设密度为  $\rho$ 、比热为  $c$  的物体,其微元  $dx dy dz$  的热量是  $Q$ , 则

$$Q(x, y, z, t) dx dy dz = \rho c T dx dy dz. \quad (3.12.16)$$

热向着温度低的一方流动,其速度与温度梯度  $\text{grad } T$  成正比(傅里叶定律, 1822 年)。把这时的比例常数写成  $K$ , 并称之为热导率 (heat conductivity)。我们用热流  $\mathbf{J}$  来表示这样的矢量, 即: 用适当的单位测量单位时间内穿过与某一方向垂直的单位面积而向这个方向流动的热量, 把这个值作为矢量的长度, 把这个方向作为矢量的方向。于是, 傅里叶定律就归结为

$$\mathbf{J} = -K \text{grad } T. \quad (3.12.17)$$

使用高斯定理来推导

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (3.12.18)$$

其过程和流体连续方程的情况完全一样。若把式(3.12.16)和(3.12.17)代入式(3.12.18), 并设  $\rho$ 、 $c$  及  $K$  均为常数, 即可得到

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{K}{c\rho} \Delta T = 0. \quad (3.12.19)$$

假如给出初始条件和边界条件, 则  $T(x, y, z, t)$  就能唯一确定。需要注意, 式(3.12.13)的粘滞系数  $\nu$  和  $K/c\rho$  起着同样的作用。一般来说, 式(3.12.19)也叫做扩散方程 (diffusion equation)。比如, 假设溶质的密度为  $u$ , 则溶剂中溶质的扩散就用下式确定:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \sigma^2 \Delta \right) u(x, y, z, t) = 0. \quad (3.12.20)$$

常数  $\sigma^2$  叫做扩散系数。不仅在物理学中, 而且在数学中也广

泛使用的傅里叶级数，就是在解这个方程时由傅里叶发现的。

如果设该一维流动是稳恒的，也就是说与时间无关，那么，式(3.12.13)就成为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(y, z) = -\frac{a}{\nu}. \quad (3.12.21)$$

而式(3.12.15)并没有变化。我们沿  $x$  轴放置一个半径为  $r_0$  的圆管，为了把式(3.12.21)当作这个圆管内的流动来求解，使用极坐标  $(r, \theta)$  要方便一些。也就是说，令  $y = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ ，由于  $u$  只是  $r$  的函数，所以，式(3.12.21)成为

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{a}{\nu}, \quad (3.12.22)$$

因此，求解是很容易的；使用积分常数  $A$ 、 $B$ ，一般可以把解表示成

$$u(r) = -\frac{1}{4} \frac{a}{\nu} r^2 + A \ln r + B. \quad (3.12.23)$$

其中，为了不致于在  $r = 0$  引起奇异性，必须使  $A = 0$ 。另外，因为  $u(r_0) = 0$ ，所以

$$B = \frac{1}{4} \frac{a}{\nu} r_0^2. \quad (3.12.24)$$

是不是因此就说  $u(r)$  唯一确定了呢？当然不是。其原因在于， $a$  可以是任意常数。但是， $a$  是由物质的密度和压强梯度来决定的，所以，作为外部给予的条件，还不如把压强梯度当成常数要更好一些。

这样一来，流动即为下式所确定

$$\begin{aligned} u(r) &= -\frac{1}{4\rho\nu} \frac{dp}{dx} (r_0^2 - r^2) \\ &= -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r_0^2 - r^2), \end{aligned} \quad (3.12.25)$$

这样的流动叫做泊肃叶 (Poiseuille) 流动。为了从实验上求出  $\mu$ , 只要测定流量就可以了。设单位时间的流量为  $Q$ , 则

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi u r dr = - \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (3.12.26)$$

所以, 通过测定  $Q$ 、 $r_0$  及压强梯度, 便能够计算出  $\mu$  的值。正如开始所讲的, 假如设  $p$  为一定, 就得到了  $u = 0$  这个毫无意义的解。

在这里所说的泊肃叶流动是不可压缩的粘滞流体的严格解, 但是, 即使假定了不可压缩, 在一般情况下求出纳维-斯托克斯方程的解也是非常困难的。因此, 我们只好寻找适合情况的近似方法, 而用该方法来求解。然而, 回过头来想一想, 流体概念本身在物理学中只具有近似的意义, 即使作为流体运动基本公式的纳维-斯托克斯方程, 在物理上也是一个近似的关系式。因此, 以近似处理并非完美为理由而轻视这个解, 恐怕是不太妥当的。下面, 我们简单说明一下奥森 (Oseen) 近似, 它是粘滞流体的近似处理方法之一。

假设有一种流体, 以均匀而稳恒的流动  $\mathbf{U}$  在十分宽广的范围内运动。如果我们把一个尺度比起该范围来足够小的物体放在其中, 则流动矢量  $\mathbf{u}$  在该物体附近大概会与  $\mathbf{U}$  不同。这时, 物体也可以是运动着的。因此, 设

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}', \quad (3.12.27)$$

并考虑下列近似:

$$|\mathbf{U}| \gg |\mathbf{u}'|. \quad (3.12.28)$$

根据假定,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} &= 0, & \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{U} &= 0, & \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{U} &= 0, \end{aligned} \quad (3.12.29)$$

所以,式(3.12.4)、(3.12.5)分别成为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U}, \text{grad})\mathbf{u}' + (\mathbf{u}', \text{grad})\mathbf{u}' \\ = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{u}' \end{array} \right. \quad (3.12.30)$$

$$\text{div } \mathbf{u}' = 0 \quad (3.12.31)$$

因为我们取了式(3.12.28)的近似,所以可以忽略式(3.12.30)左边的第三项。此时,倘若取 $\mathbf{U}$ 的方向为 $x$ 轴,设 $|\mathbf{U}| = U$ ,则可得到关于 $\mathbf{u}'$ 的线性方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{u}' \\ \text{div } \mathbf{u}' = 0 \end{array} \right. \quad (3.12.32)$$

$$(3.12.33)$$

这叫做奥森近似(Oseen's approximation)。虽然给出物体的形状和运动来求解式(3.12.32)、(3.12.33),未必容易(关于几个具体的例子,请参考[今井]),但是倘若它的解 $\mathbf{u}'$ 满足式(3.12.28),则该近似的合理性就得到了验证。

奥森近似的一般性质之一,可以通过取式(3.12.32)两边的散度得到。即

$$\Delta p = 0. \quad (3.12.34)$$

另一个性质是通过取式(3.12.32)两边的旋度得到的。即

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + U \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (3.12.35)$$

式中,

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}' = \text{rot } \mathbf{u}. \quad (3.12.36)$$

如果进一步假设流动是稳恒的,则式(3.12.35)就成为

$$\left( \Delta - \frac{U}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \right) \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (3.12.37)$$

有趣的是,通过使用恒矢量 $\boldsymbol{\omega}_0$ 设这个方程的一个解为

$$\omega = \omega_0 x \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{U}{\nu} x \right], \quad (3.12.38)$$

则有

$$\left( \Delta - \left( \frac{U}{2\nu} \right)^2 \right) \chi = 0, \quad (3.12.39)$$

所以,这个方程具有汤川势的解

$$\chi = \frac{1}{r} \exp \left[ -\frac{U}{2\nu} r \right]. \quad (3.12.40)$$

这就是说,

$$\omega = \omega_0 \frac{1}{r} \exp \left[ -\frac{U}{2\nu} (r - x) \right] \quad (3.12.41)$$

是式(3.12.37)的基本解。之所以叫做基本解,是因为将式(3.12.41)的右边对  $x, y, z$  求导数任意多次,结果仍满足式(3.12.37),因而它们的线性组合也是解。有关这个问题更深入的讨论,见于前述的[今井]一书。

### § 3.13 雷诺数

我们已经比较一般地处理了流体的运动,作为基本的运动方程导出了纳维-斯托克斯方程,又在各种各样的条件下近似地求解了它。那时曾谈到,当速度梯度小的时候,粘性的影响可以忽略不计,但是,物理量的大小究竟以什么为标准呢?现在,我们就来研究这个问题。

为了实际计算纳维-斯托克斯方程,最好是使用长度、质量及时间的单位  $L, M, T$  把一切量都无量纲化。我们决定全部加上“'”来表示它们。不言而喻,式(3.10.26)照样成立。即

$$\frac{D}{Dt'} \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho'} \text{grad}' p' - \frac{\mu'}{3\rho'} \text{grad}' (\text{div}' \mathbf{u}')$$



$$-\frac{\mu'}{\rho'} \Delta' \mathbf{u}' + \frac{1}{\rho'} (\mathbf{K}')$$
(3.13.1)

式中,

$$\text{grad}' \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right),$$

$$\Delta' \equiv \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

因为我们的重点在于粘性的影响,所以忽略了可压缩性.因此,密度是一定的.而且,为了简单起见,我们还略去  $K'$ . 另外,把  $M = \rho L^3$  取作质量的单位.这样一来,

$$\rho' = \rho \frac{L^3}{M} = 1.$$
(3.13.2)

结果,式(3.13.1)就可以表示成

$$\frac{D}{Dt'} \mathbf{u}' = -\text{grad}' p' - \mu' \Delta' \mathbf{u}',$$
(3.13.3)

而常数仅仅是无量纲的  $\mu'$ . 由简单的计算可知

$$\mu' = \frac{\mu}{\rho} \frac{T}{L^2}.$$
(3.13.4)

进一步若引进速度的单位  $V = L/T$  来代替时间单位  $T$ , 则有

$$\mu' = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{VL}.$$
(3.13.5)

通常,人们写成

$$R \equiv \frac{1}{\mu'} = \frac{\rho VL}{\mu},$$
(3.13.6)

并把  $R$  叫做雷诺数 (Reynolds number).

假如边界条件在几何上相似,而且  $R$  的值也相同,则不可压缩的粘滞流体的运动就是相似的. 雷诺通过引进上述无量纲的数  $R$ , 发现了这个定律 (1879 年). 它叫做雷诺相似定

律 (Reynolds' law of similarity).

如果取掉无量纲量的“'”，并使用雷诺数来改写式 (3.13.3), 即为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \text{grad})\mathbf{u} + \text{grad } p = -\frac{1}{R} \Delta \mathbf{u}, \quad (3.13.7)$$

但是,一般地求解这个方程是非常困难的. 因此,人们往往作出与实际边界条件相似的几何模型,再调整密度和速度,使  $R$  的值选得和实际情况相同,然后进行实验. 风洞实验和水槽实验就是如此.

但是,我们在此处所讨论的是不可压缩流体,所以通常都有

$$\text{div } \mathbf{u} = 0,$$

不过,并没有假定它是无旋的. 若把  $\mathbf{u}$  分成无旋部分  $\mathbf{u}_0$  和有旋部分  $\mathbf{u}_1$ , 设

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \\ \text{div } \mathbf{u}_0 &= 0, \quad \text{div } \mathbf{u}_1 = 0, \\ \text{rot } \mathbf{u}_0 &= 0, \quad \text{rot } \mathbf{u}_1 \neq 0, \end{aligned}$$

则有

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}_1, \quad (3.13.8)$$

因而,只是有旋的那一部分才对式 (3.13.7) 的右边,即粘性项有所贡献. 反过来说,粘性是以旋涡的形式表示出来的.

为了避免误解,我们再附上一笔,即使在非粘性流体中,也可能存在旋涡. 不用说,在不可压缩的完全流体中,也可能存在旋涡. 但是,这时我们必须给出旋涡,来作为初始条件. 而且,表示旋涡不生不灭的拉格朗日涡流定理,以及使之进一步精确量化了的亥姆霍兹涡流定理 (Helmholtz's vortex theorem), 都是成立的,因此,我们应该说,粘性具有使涡流产生或消灭的作用.

对上述两个涡流定理的证明,请参看适当的专著,在这里我们试以正则形式来处理涡流极多的情况。首先,因为假定了不可压缩,所以

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

因此,使用矢量势  $\mathbf{A}$  就可以把  $\mathbf{u}$  表示成

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.13.9)$$

由于我们所考虑的是有涡流的情况,故在时刻  $t$  会存在着这样的点  $\mathbf{x}$ :

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \equiv \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \neq 0.$$

前面已经讲过,  $\boldsymbol{\omega}$  叫做涡量。因此,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}. \quad (3.13.10)$$

另一方面,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \quad (3.13.11)$$

而作为一个附加条件,不妨假设

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (3.13.12)$$

所以,我们便得到了泊松型的方程

$$\Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}. \quad (3.13.13)$$

自然,与电荷和质量的分布不同,涡流是带状 (string) 分布的,从而,继续进行三维的处理没有多大希望。因此,我们试对二维的情况作一讨论,也就是说,在计算时,假设

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad \omega = 0. \quad (3.13.14)$$

这样一来,

$$\mathbf{A} = (0, 0, \Psi(x, y, t)), \quad (3.13.15)$$

$$u = \frac{\partial}{\partial y} \Psi, \quad v = -\frac{\partial}{\partial x} \Psi. \quad (3.13.16)$$

其中,  $\Psi$  叫做流函数 (stream function)。

进一步,式(3.13.13)可表示成

$$\Delta \Psi(x, y, t) = -\omega(x, y, t). \quad (3.13.17)$$

式中,  $\omega(x, y, t)$  是涡量  $\omega$  的  $z$  分量, 它在时刻  $t$  通过点  $(x, y)$ 。因为在式(3.13.17)中可以把  $t$  当作一个单纯的参数来看, 所以就不用写它了。若涡量集中到一点  $(x_1, y_1)$  上, 则使用狄喇克  $\delta$  函数, 令

$$\Delta\Psi(x, y) = -2\pi\Gamma_1\delta(x - x_1)\delta(y - y_1). \quad (3.13.18)$$

这不外乎是由二维点电荷产生的 (即三维空间中电荷以均匀的线密度分布在一条直线上时的) 静电势所满足的方程, 因而, 如果边界为无限远, 则直接求解即可得到

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) \\ = -\Gamma_1 \ln \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \delta(x - x_1)\delta(y - y_1). \end{aligned} \quad (3.13.19)$$

在这里, 我们考虑  $N$  个涡量的分布, 并作如下定义:

$$H \equiv - \sum_{i < j} \sum \Gamma_i \Gamma_j \ln \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (3.13.20)$$

通过简单计算, 可以得到

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \Gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi_i, \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = \Gamma_i \frac{\partial}{\partial y_i} \Psi_i. \quad (3.13.21)$$

其中,

$$\Psi_i \equiv - \sum_{j \neq i}^N \Gamma_j \ln \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (3.13.22)$$

因为方程(3.13.18)是线性的, 所以  $\Psi_i$  显然就是在第  $i$  个涡量的位置上, 由它以外的涡量所产生的流函数。因此, 从式(3.13.16), 即可得到

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \Psi_i = u_i, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi_i = -v_i. \quad (3.13.23)$$

倘若再把流体粒子的运动写成

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{Dy}{Dt} = \frac{dy}{dt}, \quad (3.13.24)$$

则有

$$\frac{Dx}{Dt} = u, \quad \frac{Dy}{Dt} = v, \quad (3.13.25)$$

故式(3.13.23)可表示成

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \psi_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_i = -\frac{dy_i}{dt}. \quad (3.13.26)$$

进而,根据亥姆霍兹涡流定理,我们可以把  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 当作常数,所以,令

$$p_{xi} \equiv \Gamma_i x_i, \quad p_{yi} \equiv \Gamma_i y_i, \quad (3.13.27)$$

式(3.13.26)就变成了如下的正则方程 (canonical equations):

$$\frac{d}{dt} p_{xi} = \frac{\partial}{\partial y_i} H, \quad (3.13.28)$$

$$\frac{d}{dt} p_{yi} = -\frac{\partial}{\partial x_i} H. \quad (3.13.29)$$

在这种情况下,正则共轭量是  $(x_i, p_{xi})$ 、 $(y_i, p_{yi})$ 。这样一来,就有可能进行和  $N$  个质点系 (二维) 完全一样的处理。例如,我们可以立即知道,  $H$  是不随时间变化的:

$$\frac{dH}{dt} = 0; \quad (3.13.30)$$

等等。

如果返回来考虑,那么,即使假设方程(3.13.7)可以严密地求出三维解,我们也不能认为解的性质会随着  $R$  值急剧变化。前面说明过的一维解,即对粗细均匀圆管内的稳恒流动的泊肃叶解,是个严格解,  $R$  的值无论多大,它都成立。在稳恒流动下,把  $\mathbf{u}$  光滑连结起来的曲线——即流线 (stream line)——的空间位置是不随时间变化的,流体粒子沿着该流线流动。因而,借助于由小孔向水中不断注入墨水等液体的方法,就能够使流线直观化。雷诺通过这种方法,在实验上研



究了泊肃叶流动 (Poiseuille flow)。他取圆管的半径为  $L$ 、平均流速(=流量/截面积·秒)为  $V$ ，让  $R$  作各种变化，来对流线进行观察 (1883 年)。结果，他发现，当  $R < 1000$  时存在着规则的流线，当  $R > 1000$  时流动即开始紊乱，变成了极不规则的状态。这种状态的流动叫做紊流 (turbulent flow)，而前者则叫做层流 (laminar flow)。不用说，紊流是大量产生旋涡的一种状态。但是，即使谈到层流，既有速度梯度也就绝非无旋。可以认为，紊流的特征是，多数旋涡进行着不规则的运动。因此，为了在宏观上掌握紊流，有必要以统计的方法来处理大量旋涡的集合。那时，这儿粗浅谈到的二维涡集的正则形式，便成为其引导线索 ([Onsager]\*)。有关紊流的理论，请参阅书末文献。

### § 3.14 逆散射法

从容易处理的程度着眼，本章主要论述线性波动方程。在弹性所引起的波动之中，我们曾把胡克定律用于应变和应力的关系，所以该关系是一种自然的近似。但是，一旦变成流体的运动，便会立即出现非线性项。那时，我们也曾提出种种假设，作出线性近似来对它求解，从而研究了几个重要的性质。不过，正如在 §3.11 (i) 中所谈到的那样，就连在水面上传播的孤波那样的常见现象，线性波动方程都已经不起作用了。

不言而喻，非线性偏微分方程的处理是非常困难的，甚至那个作为流体运动基础的纳维-斯托克斯方程，也因其非线性而尚未明确解的存在及唯一性。长期以来，我们对非线性波动方程的解析处理已失掉信心，从而专门依赖于数值解法。

---

\* 即书末参考文献 [18]。"统计流体动力学"。

但是,下面将要谈到,最近人们围绕 KdV 方程发展了非线性偏微分方程的所谓“线性解法”,并正在把这种解法广泛地应用于物理学的很多领域,甚至还应用于生物学的神经理论中。在本章最后,我们打算按照 [Lax]\* 说明一下该方法的要点。

事先申明,这里所讨论的非线性波动方程,只限于极为特殊的一维情况。虽然最近 [Hirota]\*\* 也在处理二维的乃至三维的特殊情况,但就一般情况而言,据笔者所知,似乎还没有哪个人获得成功。

我们所处理的非线性波动方程,是进行适当变换而成的下列形式:

$$u_t = K(u). \quad (3.14.1)$$

式中,  $u_t \equiv \partial u(x, t) / \partial t$ ,  $K$  是作用于函数  $u(x, t)$  上的微分算符。假如是 KdV 方程,则有

$$K(u) = \left( -u \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) (u). \quad (3.14.2)$$

以后,为了使记法简化,我们做如下表示:

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D^3 \equiv \frac{\partial^3}{\partial x^3}. \quad (3.14.3)$$

通常,波动方程是以显含  $u_{tt}$  的形式给出的:

$$u_{tt} = W(u).$$

若用式(3.14.1)的  $K$  来表示它,则有

$$u_{tt} = K(u_t) = K(K(u)),$$

但是,一般很难找出像下式那样的  $K$ ,

$$K(K(u)) = W(u).$$

然而,线性的情况却很简单,假设

\* 即书末参考文献[25].

\*\* 即书末参考文献[30].

$$u_t = K(u) = cDu \equiv c \frac{\partial}{\partial x} u,$$

则可得到

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

我们把函数  $u$  的一个变量  $t$  作为参数, 来考虑  $u(t)$  的集合, 并用  $\mathcal{B}$  表示它. 在这里进行一点技巧性的工作. 也就是说, 考虑一个假想的实线性空间  $L^2$ , 使  $u$  与作用在  $\psi \in L^2$  上的自轭线性算符  $\hat{L}$  相对应. 关于线性空间  $L^2$  及自轭算符  $\hat{L}$  的问题, 在本讲座第四卷《量子力学 II》中有详细说明, 这里我们想暂作一简单介绍.

首先, 对于任意的  $\psi, \varphi \in L^2$  来说, 当  $\alpha, \beta$  为任意实数时, 所谓的实线性空间就意味着

$$\alpha\psi + \beta\varphi \in L^2;$$

而所谓的  $L^2$  则是一个线性空间, 对于任意的

$$\psi \in L^2$$

来说, 在该空间中有

$$\langle \psi, \psi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty. \quad (3.14.4)$$

为了计算方便 (为了使用么正变换), 我们把它正则化 (normalize) 为

$$\langle \psi, \psi \rangle = 1. \quad (3.14.5)$$

所谓的线性算符, 是满足下式的  $\hat{L}$ :

$$\hat{L}(\alpha\psi + \beta\varphi) = \alpha\hat{L}\psi + \beta\hat{L}\varphi. \quad (3.14.6)$$

正确地来说, 对于  $\hat{L}$ , 有  $L^2$  的部分空间  $D(\hat{L})$ , 而对于各个  $\psi \in D(\hat{L})$ , 则是

$$\hat{L}\psi = \varphi \in L^2.$$

我们把  $D(\hat{L})$  叫做  $\hat{L}$  的定义域 (domain of definition), 把  $\psi$  在全部  $D(\hat{L})$  中运动时而形成的  $\hat{L}\psi$  的集合写成  $R(\hat{L})$ ,

并叫做值域 (range).

这样的空间  $L^2$ , 只是作为计算的辅助手段来使用的, 在  
最后结果中完全不出现. 因为没有特殊必要, 所以在  
这里全部用实数讨论. 不过, 即使把包含复数在内的希耳伯(Hilbert)  
空间当作线性空间来使用, 讨论也完全一样. 这样一来,  $\psi$  就  
和量子力学的状态矢量相一致. 但是, 如果那样来作, 便有看  
不到经典物理学和量子力学之间本质差别的危险, 因而, 我  
们只采用实数的线性空间 (参考本讲座《量子力学 II》§20.3  
(d)).

所谓自共轭性, 指的是对于  $\phi, \varphi \in D(\hat{L})$  来说, 下式总  
是成立的:

$$\langle \varphi, \hat{L}\phi \rangle = \langle \hat{L}\varphi, \phi \rangle.$$

不用说, 就一般的  $\hat{A}$  而言,

$$\langle \varphi, \hat{A}\phi \rangle \neq \langle \hat{A}\varphi, \phi \rangle.$$

在这种情况下, 满足下式的  $\hat{A}^*$  叫做  $\hat{A}$  的共轭 (adjoint)

$$\langle \varphi, \hat{A}\phi \rangle = \langle \hat{A}^*\varphi, \phi \rangle.$$

假如  $\hat{L}$  具有自共轭性, 则  $\hat{L}$  的本征值  $\lambda$  就是实数, 该  $\lambda$  是作  
为下式的解来定义的:

$$\hat{L}\phi = \lambda\phi. \quad (3.14.7)$$

这是因为, 若在

$$\hat{L}\hat{L}\phi = \lambda\hat{L}\phi = \lambda^2\phi \quad (3.14.8)$$

的两边由左方乘以  $\phi$ , 再由  $-\infty$  到  $\infty$  对  $x$  进行积分, 则有

$$\langle \phi, \hat{L}\hat{L}\phi \rangle = \langle \hat{L}\phi, \hat{L}\phi \rangle = \lambda^2\langle \phi, \phi \rangle, \quad (3.14.9)$$

因此,

$$\lambda^2 \geq 0. \quad (3.14.10)$$

因为我们有下面的对应关系

$$u(t) \mapsto \hat{L}(t), \quad (3.14.11)$$

所以  $u(t)$  的时间变化应该对应于  $\hat{L}(t)$  的时间变化. 而算符

的变化则用么正变换  $\hat{U}(t)$  来表示。即

$$\hat{L}(t) = \hat{U}(t)\hat{L}(0)\hat{U}^{-1}(t). \quad (3.14.12)$$

这里,所谓的么正变换指的是不改变  $\langle \psi, \psi \rangle = 1$  的变换,

$$\langle \hat{U}\psi, \hat{U}\psi \rangle = \langle \psi, \hat{U}^*\hat{U}\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle. \quad (3.14.13)$$

因此,它具有下面的性质:

$$\hat{U}^*\hat{U} = 1 \quad (3.14.14)$$

或

$$\hat{U}^* = \hat{U}^{-1}. \quad (3.14.15)$$

若把式(3.14.12)改写一下,则有

$$\hat{U}^{-1}(t)\hat{L}(t)\hat{U}(t) = \hat{L}(0), \quad (3.14.16)$$

所以,如果把两边对  $t$  求导数,再进行整理,就可以表示成

$$\hat{L}_t = \hat{U}_t\hat{U}^{-1}\hat{L} - \hat{L}\hat{U}_t\hat{U}^{-1} \equiv [\hat{U}_t\hat{U}^{-1}, \hat{L}]. \quad (3.14.17)$$

因此,假设

$$\hat{B} \equiv \hat{U}_t\hat{U}^{-1}, \quad (3.14.18)$$

即

$$\hat{U}_t = \hat{B}\hat{U}, \quad (3.14.19)$$

则可得到线性算符方程

$$\hat{L}_t = [\hat{B}, \hat{L}]. \quad (3.14.20)$$

它相当于量子力学中所讲的海森伯 (Heisenberg) 表述的运动方程(参考本讲座第三卷《量子力学 I》§4.5 及第四卷《量子力学 II》第十七章)。根据  $\hat{U}$  的定义,与薛定谔表述的运动方程相当的是

$$\psi(t) = \hat{U}(t)\psi(0), \quad (3.14.21)$$

所以,把此式的两边对  $t$  进行微分,即可得到

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = \hat{U}_t(t)\psi(0) = \hat{U}_t\hat{U}^{-1}\psi(t) = \hat{B}\psi(t).$$

$$(3.14.22)$$

$\hat{U}(t)$  叫做时间变换算子 (time translation operator),  $\hat{B}(t)$  叫



做它的生成元 (generator)。式(3.14.22)是在进行数字计算时有用的方程。这是因为,当给定初始条件时,我们能够通过该方程预料到它在时间上的演变 (time evolution)。

以上所述,并非原来方程(3.14.1)的简单改写,而是具有如下的重要意义。若在式(3.14.7)中明确表示出参数  $t$  及本征值和本征矢量的关系,即为

$$\hat{L}(t)\phi_\lambda(t) = \lambda(t)\phi_\lambda(t). \quad (3.14.23)$$

式中,  $\phi_\lambda$  是相对于本征值  $\lambda(t)$  的本征函数。前面曾证明过,  $\lambda(t)$  取实数值。而如果恒等算子为  $\hat{E}$ , 则  $\hat{E}$  就能够和任意的算子交换,所以,根据(3.14.23),把  $\lambda(t)\hat{E}$  选为  $\hat{L}(t)$ , 并代入式(3.14.20),即可得到

$$\frac{d}{dt} \lambda(t)\hat{E} = \lambda(t)[\hat{B}, \hat{E}] = 0.$$

因此,

$$\frac{d}{dt} \lambda(t) = 0, \quad (3.14.24)$$

即,  $\lambda$  是运动的不变量。

只要  $\hat{L}$  和  $\hat{B}$  没有给定,以上所进行的一般讨论就不会有多大用处。问题在于,当给出式(3.14.1)的  $K(u)$  时,如何来构成  $\hat{L}$  及  $\hat{B}$ 。然而,至少至现在为止还只能依赖于观察。在这里,我们就 KdV 方程(3.14.2)来给出  $\hat{L}$  及  $\hat{B}$ 。它们是

$$\left. \begin{aligned} \hat{L} &= -D^2 - \frac{1}{6}u \\ \hat{B} &= 24 \left\{ D^3 + \frac{1}{8}(uD + Du) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.14.25)$$

式中,  $D$  是用式(3.14.3)定义的微分算符。实际上,假如计算一下算子的互换积  $[\cdot, \cdot]$ , 则有

$$[\hat{B}, \hat{L}] \equiv \hat{B}\hat{L} - \hat{L}\hat{B} = -u\hat{D} - \hat{D}^3 = K. \quad (3.14.26)$$

另一方面,根据式(3.14.11),

$$\frac{d}{dt} u(t) \equiv u_t \mapsto \frac{d}{dt} \hat{L}(t), \quad (3.14.27)$$

所以,式(3.14.20)的确是所谓的 KdV 方程(3.11.36):

$$u_t = -uu_x - u_{xxx}. \quad (3.14.28)$$

我们已经知道了式(3.14.28)在  $x \rightarrow \pm\infty$  时,  $u \rightarrow 0$  这个边界条件下的一个解。它是只有一个孤波的解,对于任意的正数  $c$  来说,可以写成

$$u(x, t) = s(x - ct) = 3c \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{c} (x - ct) \right). \quad (3.14.29)$$

这是一个具有恒定速度  $c$  的孤波,当  $t = 0$  时,其中心在原点  $x = 0$  上。当  $t = 0$  时中心在  $x = \theta$  上的孤波,只要在上式中把  $x$  换成  $x - \theta$  就行了。 $\theta$  是由初始条件决定的积分常数。其重要意义到后面就会明白。因此,为了标志一个孤波,只要明确常数  $c$  和  $\theta$  即可。我们把它写成

$$s(x - \theta - ct) \equiv s(x - ct, c, \theta). \quad (3.14.30)$$

我们的目的,是把前面的那些边界条件加到 KdV 方程上,求出更一般的解,以研究它的物理性质。为了引起注意,若准确地提出边界条件,则是:时刻  $t$  可以是任意的,但当把  $t$  固定之后而使  $x \rightarrow \pm\infty$  时,  $u \rightarrow 0$ 。其依据是本征方程(3.14.23)。倘若求出了这样的解  $u(x, t)$ ,再写出式(3.14.23),则根据式(3.14.25)而有

$$-\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6} u(x, t) \right) \phi_\lambda(x, t) = \lambda \phi_\lambda(x, t), \quad (3.14.31)$$

但是,我们曾证明过,本征值  $\lambda$  和时间无关,所以,为了求出  $\lambda$ , 可以选择适当的时刻  $t$ 。例如,在  $t = 0$  或  $t \rightarrow -\infty$  都

行。

为了了解本征值  $\lambda$  的物理意义，我们首先把在一个孤波解(3.14.29)中假设了  $t = 0$  而得到的结果。即

$$u(x, 0) = s(x, c) = 3c \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{c} x \right) \quad (3.14.32)$$

代入式(3.14.23)中看看。可以直接证明，这时的本征函数及本征值分别是

$$\psi_\lambda(x) = A s^{1/2}(x, c) = \sqrt{3c} A \operatorname{sech} \left( \frac{1}{2} \sqrt{c} x \right), \quad (3.14.33)$$

$$-\lambda = \frac{1}{4} c. \quad (3.14.34)$$

如果模仿求 KdV 方程的孤波解的计算过程，这一点也是很容易理解的。

其次，我们考虑这样一种解，即在充分遥远的未来  $t = +T$  时，存在着速度为  $c_1, c_2 (c_1 > c_2)$  的两个孤波，其中心距离相当大。假设这两个孤波分别为

$$\begin{aligned} & s(x - \theta_1^+ - c_1(t - T)) \\ &= 3c_1 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{c_1} (x - \theta_1^+ - c_1(t - T)) \right) \end{aligned} \quad (3.14.35)$$

$$\begin{aligned} & s(x - \theta_2^+ - c_2(t - T)) \\ &= 3c_2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{c_2} (x - \theta_2^+ - c_2(t - T)) \right), \end{aligned} \quad (3.14.36)$$

则在  $t = +T$  时，两个孤波中心之间的距离由下式确定

$$|\theta_2^+ - \theta_1^+| = R. \quad (3.14.37)$$

因为当  $t = +T$  时两孤波以  $x = \theta_1^+, x = \theta_2^+$  为中心，其高度向外以指数函数形式急剧衰减，所以，假如在该时刻  $R \gg 1$ ，则“叠加原理”会以相当好的近似程度成立。在这里

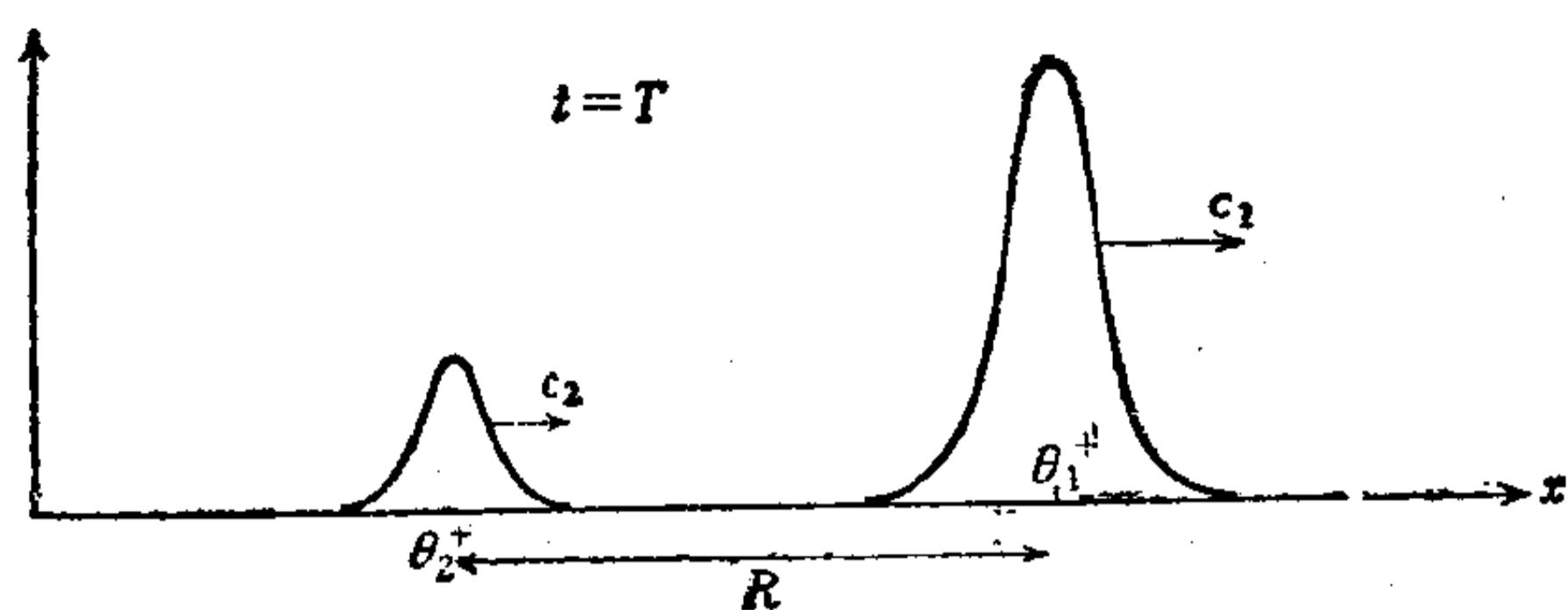


图 3.20

所说的“近似”意味着,假如  $t \rightarrow +\infty$ , 则两个孤波的边缘部分便实际上没有重叠。因此,我们假设在  $t \rightarrow +\infty$  时求出了式(3.14.28)形如下式的解

$$s(x - \theta_1^+ - c_1(t - T)) + s(x - \theta_2^+ + c_2(t - T)),$$

并把它写成

$$u(x, t) = d(x, t, c_1, c_2, \theta_1^+, \theta_2^+). \quad (3.14.38)$$

在这种情况下,本征方程成为

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6} d(x, t, c_1, c_2, \theta_1^+, \theta_2^+)\right) \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda, \quad (3.14.39)$$

这一次我们假设  $t \rightarrow +\infty$  来求  $\lambda$ 。显然,存在着两个本征值和与之相应的两个本征函数。也就是说,假设  $t = +T \rightarrow +\infty$ , 即可得到下面的严格解:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} c_1 \quad \psi_{\lambda_1} = \sqrt{3c_1} A_1 \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} \sqrt{c_1} (x - \theta_1^+)\right) \quad (3.14.40)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} c_2 \quad \psi_{\lambda_2} = \sqrt{3c_2} A_2 \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} \sqrt{c_2} (x - \theta_2^+)\right). \quad (3.14.41)$$

因为本征函数随着时刻的取法不同而改变(是非常复杂的!), 而本征值却与时间无关, 所以, 下列方程也应该具有和式

(3.14.39)一样的本征值  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6} d(x, 0, c_1, c_2, \theta_1^+, \theta_2^+) \right) \phi_\lambda(x, 0) \\
 & = \lambda \phi_\lambda(x, 0). \quad (3.14.42)
 \end{aligned}$$

像式 (3.14.38) 那样的解, 确实是存在的, 而且, 其解析形式也求出来了. 在该情况下,  $d$  叫做二重孤波解 (doublet soliton). 更一般地来说, 还存在着一种在足够遥远的未来可以分解成  $N$  个孤子的解. 这里需要注意的是, 即使反过来把  $d(x, t, c_1, c_2, \theta_1^+, \theta_2^+)$  追溯到十分遥远的过去, 我们也仍然可以把它分解成两个孤子  $s(x, t, c_1, \theta_1^-)$ 、 $s(x, t, c_2, \theta_2^-)$ , 而且一般来说,

$$\theta_1^+ \neq \theta_1^-, \quad \theta_2^+ \neq \theta_2^-. \quad (3.14.43)$$

有时,  $c_1, c_2$  等叫做本征速度 (eigenspeed), 而  $\theta_1^\pm, \theta_2^\pm$  叫做相移 (phase shift). 两个孤波在冲撞之后, 本征速度并不改变, 但相移却要变化.

在以上讨论中, 我们并没有给出最重要的二重孤子的函数形式  $d(x, t, c_1, c_2, \theta_1^+, \theta_2^+)$ . 这是因为, 既然没有说明其推导方法, 只写出结果似乎不会有太大的意义. 实际上, 在该情况下, 抽象的线性空间起到了非常重要的作用. 为了方便起见, 或者为熟知量子力学的读者着想, 我们不再用本节开始所引进的实数希耳伯空间, 而代之以使用复数希耳伯空间, 虽然这样做本来并无必要. 这时, 自轭算符就成了厄密 (Hermitic) 算符, 例如, 它可以表示成

$$\hat{p}_x = -i \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.14.44)$$

其中,  $i$  是满足  $i^2 = -1$  的虚数. 这样一来, 本征方程 (3.14.23) 就可以表示成



$$\left(\beta_x^2 - \frac{1}{6}u\right)\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda. \quad (3.14.45)$$

作为一个微分方程,它和式(3.14.31)完全相同.因为它就是量子力学中的一维薛定谔方程,所以,我们就能够运用在那里获得的许多知识.

首先,若 $\lambda$ 为负,则 $\phi_\lambda$ 表示束缚态.实际上,这可以象式(3.14.33)那样得到证明.在这里值得注意的是

$$\phi_\lambda^2(x) = A^2s(x, c) = A^2u.$$

另外,假若给出初始条件 $u(x, 0)$ ,那么,把 $u(x, 0)$ 作为势来求出束缚态的本征值 $\lambda_n$ ( $n = 1, 2, \dots, N$ ),就可以知道该初始条件包含着怎样的孤子.

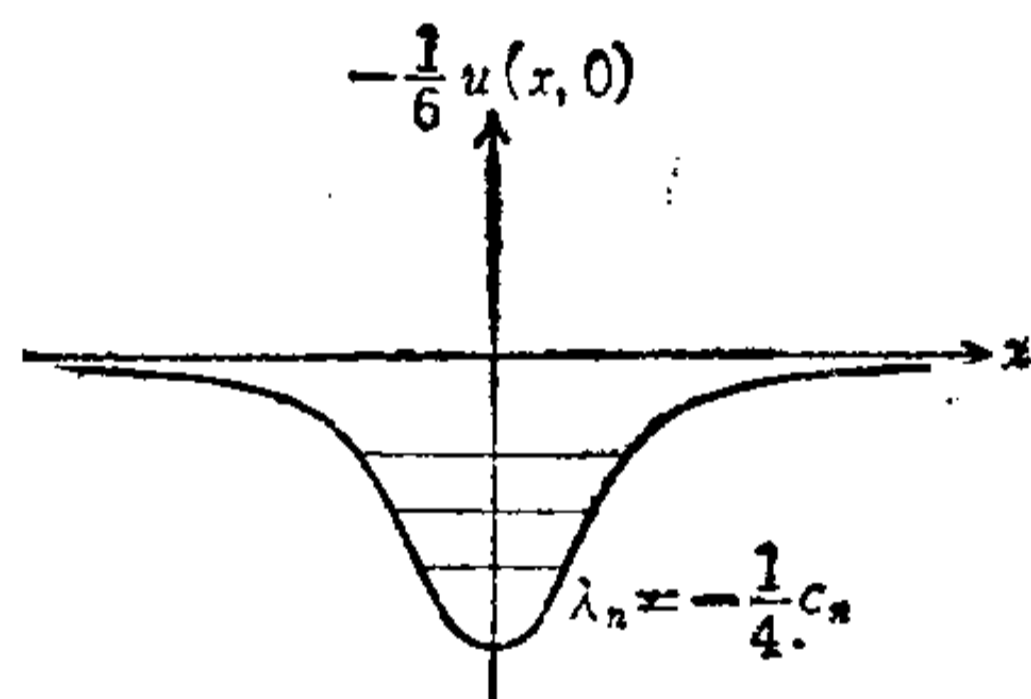


图 3.21

进一步,我们反过来解决以 $u(x, 0)$ 为势的散射问题,就能够由散射数据求出势来.这就是说,假如选择以 $c_n, \theta_n^+$ ( $n = 1, 2, \dots, N$ )为速度及相移的 $N$ 个孤子作为 $t \rightarrow \infty$ 时的状态,那么,就可以由这个状态反过来求出在 $t$ 有限时的解 $u(x, t)$ .因此,有时把这里所讲的方法叫做逆散射法(inverse scattering method).意味深长的是,量子力学中广泛使用的处理散射问题的方法却在经典物理学中发挥了威力.为了更深一步进行探讨,在学过量子力学的散射问题的基础上,可以参考一下本讲座第四卷《量子力学 II》及书末的文献.

### § 3.15 非线性波动方程的实例

在非线性波动方程中,许多物理上有兴趣的问题都包含着孤子的解,它们显示出类似于孤子的行为。这一点不足为奇。其原因在于,不管是连续体,还是分散的粒子系,我们都可以使用变分原理由拉格朗日算符推导出保守系的运动方程,并把它写成哈密顿形式。但是,到现在为止,我们只在一维情况下求出了孤波的解,而对三维解的性质的研究,还是一个有待解决的问题。下面列举的,是简单求解一维孤波的一些实例。

在此之前,我们想指出,当把电离了的气体,即等离子体(plasma),看作完全流体时,可以在适当的近似条件下推导出KdV方程。我们考虑一维运动,假设其空间坐标轴为 $x$ 。在这里,把密度、速度、长度分别用适当的单位来测量,而把所有的量都当作是无量纲的。

我们假设正离子及电子的密度分别为 $\rho(x, t)$ 及 $\rho_e(x, t)$ ,正离子的速度为 $u(x, t)$ ,而作为这些带电粒子上的作用力则考虑电场 $E(x, t)$ 。假设密度非常小,因而压力可以忽略不计。另外,由于电子惯性非常小,所以把它忽略。然后,在完全忽视粘性的情况下写出纳维-斯托克斯方程,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = E. \quad (3.15.1)$$

连续方程是,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0. \quad (3.15.2)$$

可是,因为 $E$ 是由两种带电粒子产生的,所以满足泊松方程

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \rho - \rho_e. \quad (3.15.3)$$

对于电子来说,我们使用忽略了惯性部分的动量方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_e = -\rho_e E. \quad (3.15.4)$$

在将式(3.15.1)、(3.15.2)、(3.15.3)、(3.15.4)联立求解之前,我们先进行如下的变量变换(Gardner-Morikawa变换):

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon^{1/2}(x - t) & (3.15.5) \\ \eta = \varepsilon^{3/2}x. & (3.15.6) \end{cases}$$

式中; $\varepsilon$ 是与振幅有关的微小量,而且所有的量都可以展开成 $\varepsilon$ 的幂级数.

通过以上变换,式(3.15.1)~(3.15.4)就成为

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \rho + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho u) = 0 \quad (3.15.1')$$

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} u + u \left( \frac{\partial}{\partial \xi} u + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} u \right) = \tilde{E} \quad (3.15.2')$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \rho_e + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \rho_e = -\rho_e \tilde{E} \quad (3.15.3')$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{E} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{E} = \rho - \rho_e. \quad (3.15.4')$$

其中, $\tilde{E}$ 是用下式定义的:

$$E = \varepsilon^{1/2} \tilde{E}. \quad (3.15.7)$$

接着,我们再把 $\rho$ 、 $u$ 、 $\tilde{E}$ 、 $\rho_e$ 展开成

$$\rho = 1 + \varepsilon \rho^{(1)} + \varepsilon^2 \rho^{(2)} + \dots \quad (3.15.8)$$

$$u = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots \quad (3.15.9)$$

$$\tilde{E} = \varepsilon \tilde{E}^{(1)} + \varepsilon^2 \tilde{E}^{(2)} + \dots \quad (3.15.10)$$

$$\rho_e = 1 + \varepsilon \rho_e^{(1)} + \varepsilon^2 \rho_e^{(2)} + \dots \quad (3.15.11)$$

如果加上这样的边界条件,即当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\rho = \rho_e = 1 \quad (3.15.12)$$

$$u = 0, \quad (3.15.13)$$

并就  $\varepsilon$  求到二级近似,我们就可以得到 KdV 方程

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u^{(1)} + u^{(1)} \frac{\partial}{\partial \xi} u^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} u^{(1)} = 0 \quad (3.15.14)$$

([Washimi, Taniuti]\*).

上述方法也能够适用于更一般的体系 (参考 [谷内、西原]\*\*§3.3 及 §3.4).

(i) 正弦型戈登方程

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin \phi \quad (3.15.15)$$

这个方程,作为基本粒子的一个模型,由派尔因(Perring)和斯克默(Skyrme)首先以数值计算的方法进行了研究,而后又搞清了它的解析结构 ([Perring, Skyrme]\*\*\*).

孤波的存在表明,当对式(3.15.15)进行下述伽利略变换时,解不包含  $t'$ , 而只是  $\xi$  的函数:

$$x \rightarrow \xi = x - ct, \quad t \rightarrow t' = t.$$

因此,我们令

$$\phi(x, t) = s(\xi). \quad (3.15.16)$$

在这种情况下,通过伽利略变换可把偏微分算子用常微分算符来表示:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{d}{d\xi}. \quad (3.15.17)$$

把式(3.15.16)和(3.15.17)代入式(3.15.15),则有

$$(1 - c^2) \frac{d^2}{d\xi^2} s = \sin s. \quad (3.15.18)$$

在此式两边乘以  $ds/d\xi$ , 再进行积分,就可以得到

$$\frac{1}{2} (1 - c^2) \left( \frac{ds}{d\xi} \right)^2 = -\cos s + c_1. \quad (3.15.19)$$

\* 即书末参考文献[26].

\*\* 即书末参考文献.

\*\*\* 即书末参考文献[27].

其中,  $c_1$  是积分常数, 不过, 为了求出孤波, 设  $c_1 = 1$  来试试. 倘若再假设

$$1 - c^2 > 0, \quad (3.15.20)$$

则式(3.15.18)即为

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\xi} &= \pm \frac{2}{\sqrt{1-c^2}} \sin \frac{s}{2} \\ &= \pm \frac{4}{\sqrt{1-c^2}} \sin \frac{s}{4} \cos \frac{s}{4} \\ &= \pm \frac{4}{\sqrt{1-c^2}} \tan \frac{s}{4} \cos^2 \frac{s}{4}, \end{aligned} \quad (3.15.21)$$

所以, 直接求出初等积分, 便可以得到

$$\phi(x, t) = s(\xi) = 4 \tan^{-1} \left( \exp \left[ \pm \frac{x - ct}{\sqrt{1-c^2}} + c_2 \right] \right). \quad (3.15.22)$$

它一定是一个孤波, 具有图 3.22 所示的形状. 图中, 假设相位常数  $c_2 = 0$ , 而且复号取正.

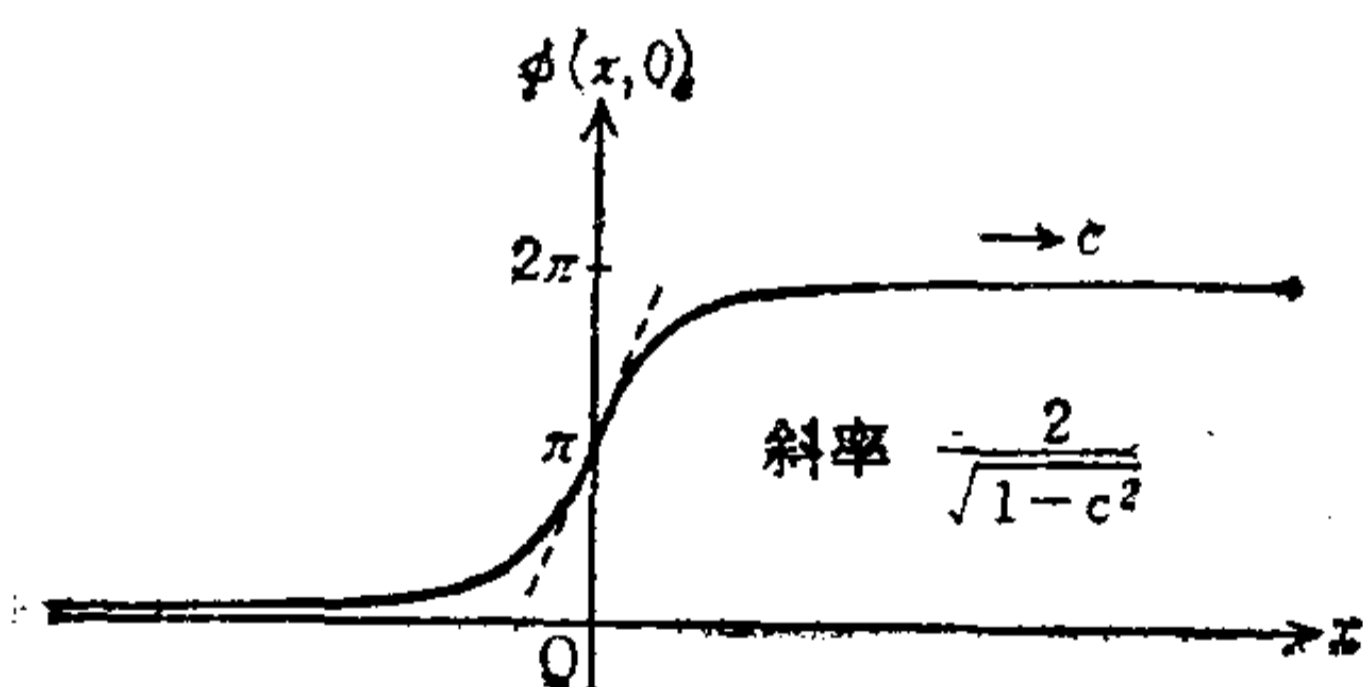


图 3.22

(ii) 希夫 (Schiff) 型克莱因 (Klein)-戈登方程

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = m^2 \phi + \kappa \phi^3 \quad (3.15.23)$$

这个方程是在质量为  $m$  的克莱因-戈登方程中加上希夫型非线性相互作用项之后得到的, 仍然能够作为基本粒子的



模型来使用。而且,它具有形状类似于孤波解的严格解。

和 (i) 一样,假设

$$\phi(x, t) = s(x - ct) = s(\xi), \quad (3.15.24)$$

再对(3.15.23)进行积分,即可得到

$$\frac{1}{2} (1 - c^2) \left( \frac{ds}{d\xi} \right)^2 = \frac{m}{2} s^2 + \frac{\kappa}{4} s^4 + c_1. \quad (3.15.25)$$

倘若适当选择积分常数  $c_1$ , 用初等积分就能求解它 (一般来说,需要椭圆函数), 但是, 因为我们寻找的是孤子的解, 故设:

$$1 - c^2 > 0, \quad c_1 = 0, \quad \kappa = -|\kappa| < 0. \quad (3.15.26)$$

这样一来,用初等计算即可求得

$$s(\xi) = \pm \sqrt{\frac{2m}{|\kappa|}} \operatorname{sech} \left( \pm \sqrt{m} \frac{x - ct}{\sqrt{1 - c^2}} + c_2 \right). \quad (3.15.27)$$

设  $c_2 = 0$ , 便得出下列形式的解

$$\phi(x, t) = \sqrt{\frac{2m}{|\kappa|}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{m} \frac{x - ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right). \quad (3.15.28)$$

$\phi(x, 0)$  的形状与孤子非常类似(图 3.23), 但是, 波的高度不再和速度有关, 而是和质量  $m$  有关。

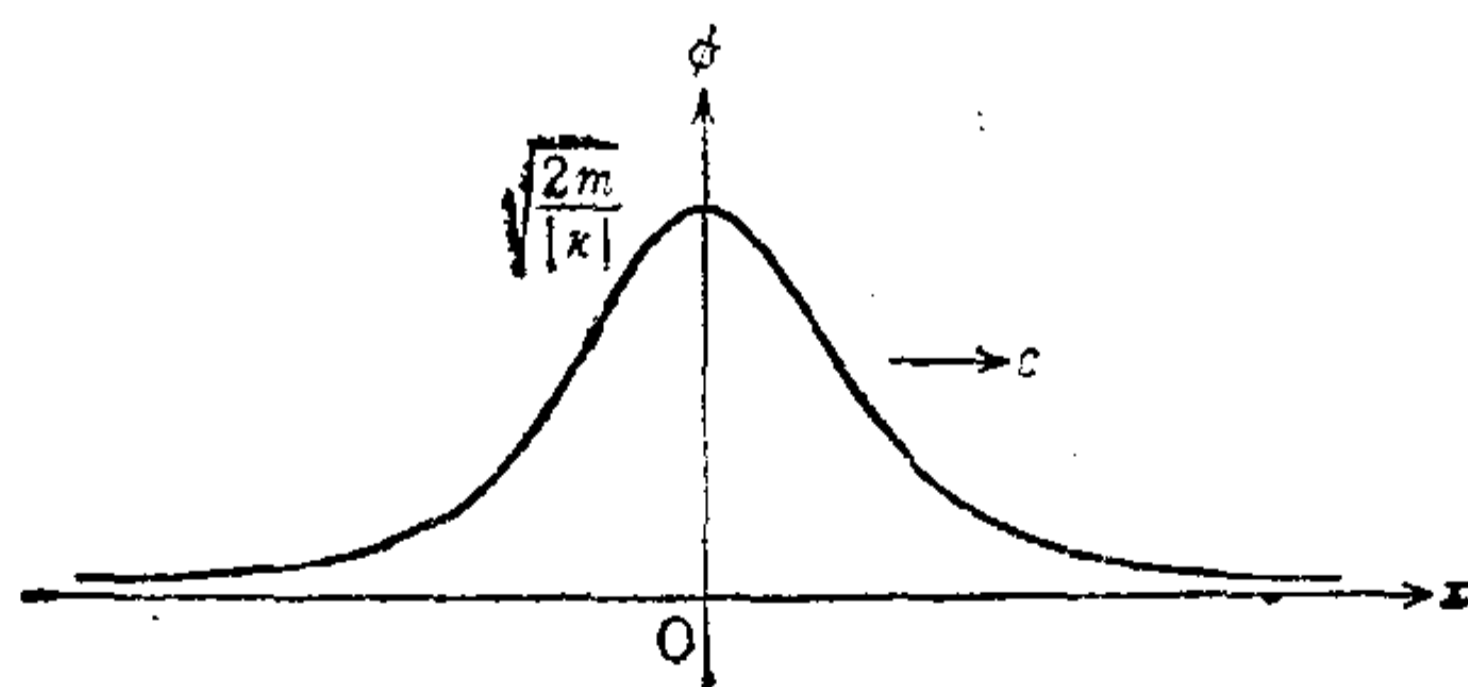


图 3.23

假设  $\kappa > 0$ ,  $c_1 = 0$ , 则有

$$s(\xi) = \sqrt{\frac{2m}{\kappa}} \operatorname{cosech} \left( \sqrt{m} \frac{\xi}{\sqrt{1-c^2}} \right), \quad (3.15.29)$$

它不再是有界函数。

### (iii) 户田点阵

有关一维完整点阵的线性波动，我们在 §3.8 已经非常详细地研究过了，但是，为了对非线性波动进行解析处理，怎样做才好呢？过去，虽然说是非线性，但处理的照样是保守系，所以，改变两粒子间势的形式，便会出现非线性项，因而只好选择容易进行解析处理的形式。户田注意到下式：

$$\frac{a}{b} e^{-bx} = \frac{a}{b} - ax + \frac{ab}{2} x^2 - \frac{ab^2}{6} x^3 + \dots, \quad (3.15.30)$$

而提出了这样一种势，它是

$$U(x) = \frac{a}{b} e^{-bx} + ax - \frac{a}{b} \quad (3.15.31)$$

([户田]\*). 式中， $a, b$  是常数，由式(3.15.30)可知

$$ab = k, \quad (3.15.32)$$

它相当于在 §3.8 中曾使用过的力和延伸率的比例常数。实际上，若把式(3.15.23)当作是一定的，而让  $b \rightarrow 0$ ，则式(3.15.30)右边第四项以后均消失，它就变成了线性势。但是，在这种情况下，

$$\frac{a}{b} = \frac{k}{b^2} \rightarrow \infty, \quad (3.15.33)$$

所以，为了避免出现无限大的势能，只有去掉式(3.15.31)最后的常数项。

另一方面，若把式(3.15.32)当作是一定的，而让  $b \rightarrow \infty$ ，式(3.15.31)就可以写成

---

\* 即书末参考文献[19]“振动论”。

$$U(x) = \frac{k}{b^2} e^{-bx} + \frac{k}{b} x - \frac{k}{b^2}$$

所以有

$$U(x) \approx \frac{k}{b} x \quad (x > 0)$$

$$\approx \frac{k}{b^2} e^{-bx} \quad (x < 0),$$

它所具有的形状在  $x = 0$  处急剧上升。图 3.24 表示了两个极限情形及其中间的情形。

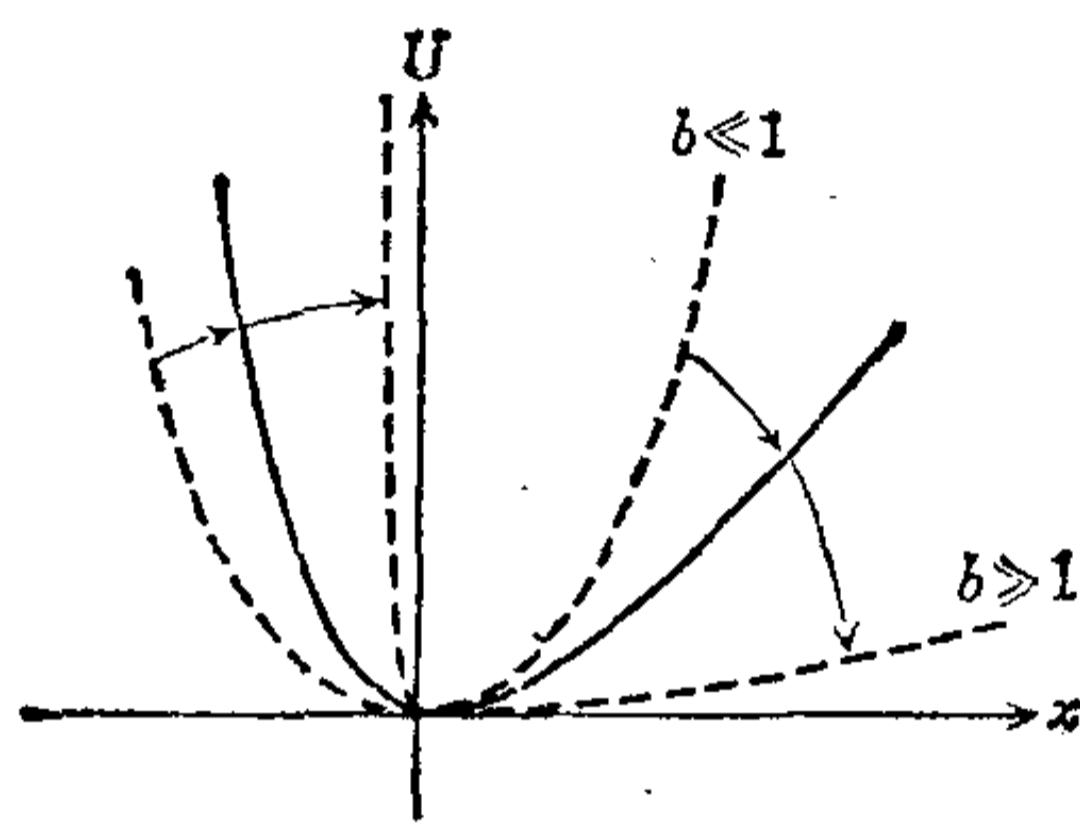


图 3.24

作为非线性的弹簧,为了进一步使之具有物理意义,可以把上述势的原点移动一个  $d$ 。也就是说,设  $x$  为弹簧的长度,则有

$$U_d(x) \equiv U(x - d) = \frac{a}{b} e^{bd} e^{-bx} + ax - \left( ad + \frac{a}{b} \right). \quad (3.15.34)$$

当把一维点阵当作保守力学系来进行解析处理时,式(3.15.31)或(3.15.34)作为这时的非线性势是很有用的,人们正在使用它进行各种各样的研究。

在 §3.8 曾讨论过质量  $m$  相等的  $N$  个质点以等距离  $d$  排列的一维点阵,把势(3.15.31)应用到这种一维点阵系统中,

叫做户田点阵 (Toda lattice). 它的总势能是

$$V = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a}{b} \exp[-b(u_{n+1}(t) - u_n(t))] + \sum_{n=1}^{N-1} a(u_{n+1}(t) - u_n(t)) \quad (3.15.35)$$

而总动能则和前面一样 (§3.8), 是

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N \left( \frac{d}{dt} u_n(t) \right)^2, \quad (3.15.36)$$

故运动方程可以直接写出. 但是, 因为直接求解它很麻烦, 所以, 我们把它看成  $N$  个自由度的力学体系, 并象下面那样引进正则共轭量, 把运动方程改写成哈密顿正则方程的形式. 首先, 引进相对位移矢量  $r_1(t)$ 、 $r_n(t)$  来代替各点的位移矢量,

$$\left. \begin{aligned} r_1(t) &\equiv u_1(t) \\ r_n(t) &\equiv u_n(t) - u_{n-1}(t) \quad (n = 2, 3, \dots, N), \end{aligned} \right\} (3.15.37)$$

再写成

$$\frac{d}{dt} u_n(t) \equiv \dot{u}_n, \quad (3.15.38)$$

则拉氏函数就是

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=1}^n \dot{r}_i \right)^2 - \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{N-1} \exp[-b r_{n+1}] - a \sum_{n=1}^{N-1} r_{n+1}, \quad (3.15.39)$$

于是,  $r_n(t)$  的正则共轭量就由下式确定

$$s_n(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_n} = m \sum_{j=n}^N \sum_{i=1}^j \dot{r}_i. \quad (3.15.40)$$

注意到

$$\left. \begin{aligned} s_n - s_{n+1} &= m \sum_{i=1}^n \dot{r}_i = m\dot{u}_n \quad (n = 1, 2, \dots, N-1) \\ s_N &= m\dot{u}_N \end{aligned} \right\}, \quad (3.15.41)$$

试写出哈密顿函数,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \sum_{n=1}^{N-1} (s_n - s_{n+1})^2 + \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{N-1} \exp[-br_{n+1}] \\ &\quad - a \sum_{n=1}^{N-1} r_{n+1} + \frac{1}{2m} s_N^2 \end{aligned} \quad (3.15.42)$$

哈密顿正则方程就成为

$$\dot{r}_n = \frac{\partial H}{\partial s_n} = \frac{1}{m} (2s_n - s_{n+1} - s_{n-1}) \quad (3.15.43)$$

$$\dot{s}_n = -\frac{\partial H}{\partial r_n} = a \exp[-br_n] - a. \quad (3.15.44)$$

由式(3.15.44)可知,

$$r_n = -\frac{1}{b} \ln \frac{\dot{s}_n + a}{a}. \quad (3.15.45)$$

把此式代入(3.15.43),即可得到

$$\frac{\dot{s}_n}{\dot{s}_n + a} = \frac{b}{m} (s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1}). \quad (3.15.46)$$

这就一来,方程式被大大简化了,但是,在 $N$ 是有限的情况下,从而要考虑边界条件来求解方程,却是非常困难的. 因此我们假定,当点阵的点无限延续时,也就是对于具有 $n$ 向 $-\infty$ 和 $+\infty$ 延伸的无限自由度的体系来说,式(3.15.46)总是成立的. 然后再求边界条件为 $n \rightarrow \pm\infty$ 时 $\dot{s}_n \rightarrow 0$ 那样的解. 虽然这样的解有好几个(因为依初始条件的给法而定),但是我们可以使用初等函数把最简单的单一孤波(就 $\dot{s}_n$ 而言)表示如下.

可以直接证明,若 $c$ 为任意正数,则以速度 $c$ 向右前进的



波满足(3.15.46), 这个波是

$$s_n(t) = s(nd - ct) = \frac{mc}{b} \gamma \tanh[\gamma(ct - nd)] \quad (3.15.47)$$

$$c = \sqrt{\frac{ab}{m} \frac{\sinh(\gamma d)}{\gamma}} \quad (3.15.48)$$

假若  $c$  已给出, 则  $\gamma$  就可根据式(3.15.48)唯一确定. 其中,  $d$  是点阵间隔. 为了更接近于孤波的形式, 可取

$$\phi_n(t) \equiv \frac{\dot{s}_n(t)}{a} = \sinh^2(\gamma d) \operatorname{sech}^2[\gamma(ct - nd)]. \quad (3.15.49)$$

根据式(3.15.30), 若  $b\gamma_n \ll 1$ , 则有

$$\phi_n(t) \approx -br_n, \quad (3.15.50)$$

由此可得

$$r_n \approx -\frac{1}{b} \sinh^2(\gamma d) \operatorname{sech}^2[\gamma(ct - nd)]. \quad (3.15.51)$$

但是, 因为  $r_n(t)$  是用式(3.15.37)定义的相对位移, 所以, 不应该直观地想象位移的样子. 由式(3.15.44), 倒是应该认为  $\phi_n(t)$  表示着相邻两点之间力的大小的传播.

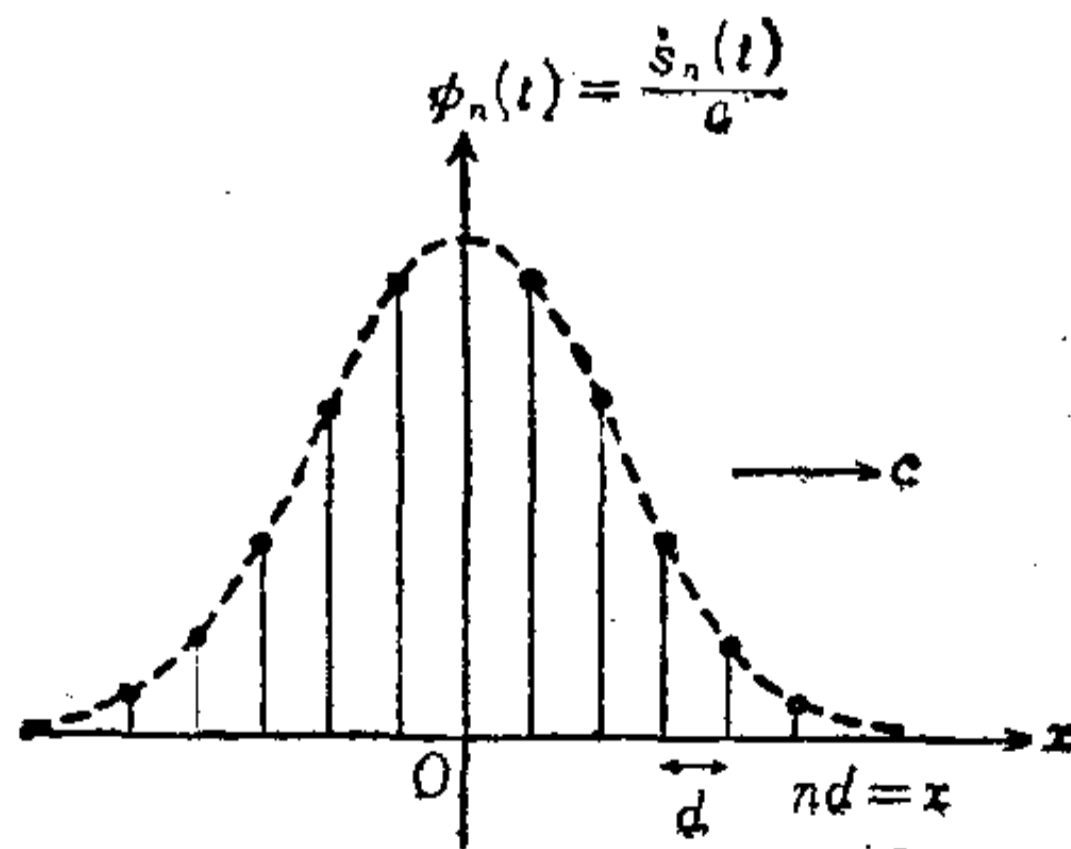


图 3.25

在适当的初始条件下, 式(3.15.46)能够具有行为如同  $N$

个孤波组合的解。现在，户田点阵的逆散射法亦为人们所知 ([Flaschka])。

通过非线性效应，户田点阵很好地消除了在一维点阵中看到的色散效应。实际上，KdV 方程本身就具有这样的性质。也就是说，KdV 方程

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

的第二项，表示波的局部速度与波的高度成正比。例如，假设在  $t = 0$  时，具有下列波形

$$u = e^{-x^2}, \quad (3.15.52)$$

那么，如图 3.26 所示，其效果是在前沿陡峭，而在后沿平滑。这就是该情况下的非线性效应。

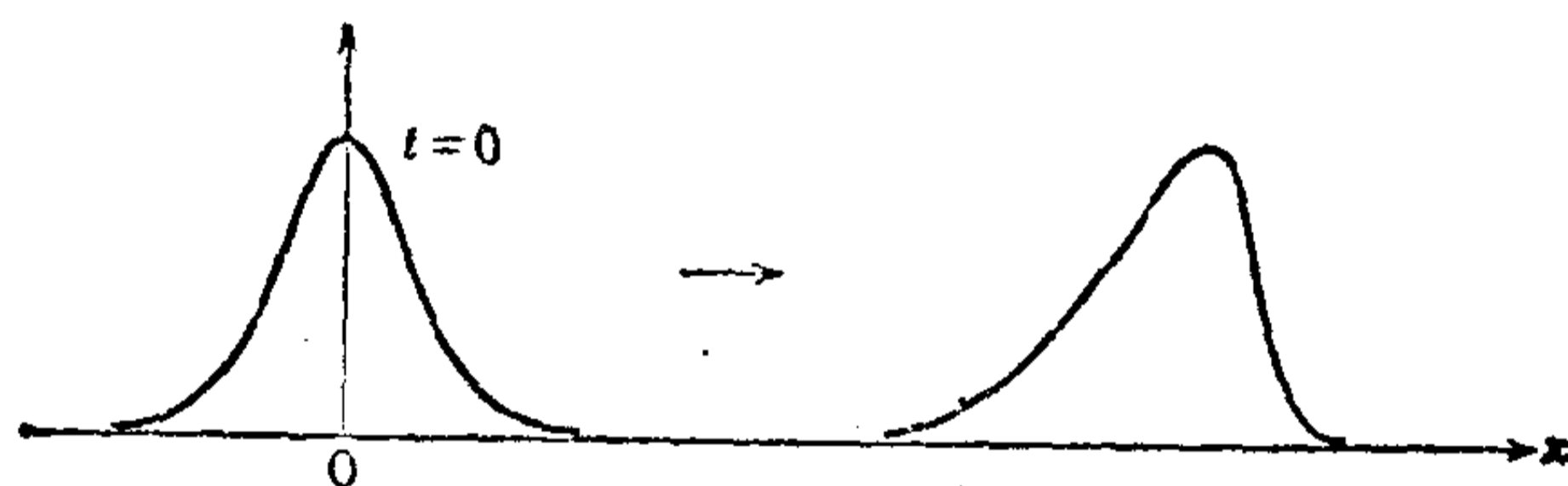


图 3.26

另一方面，若取掉非线性的第二项，则有

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (3.15.53)$$

假如把  $u = \cos(\kappa x + \omega t)$  代入此式，即可知道，这时将会出现如下的色散效应：

$$\omega = \kappa^3, \quad (3.15.54)$$

或

$$c = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2. \quad (3.15.55)$$

式中， $\lambda$  是波长、 $c$  是速度。由这种色散关系可知，波长短的

波以大的速度向左前进。

以上的讨论是定性的，但若使用下面的孤立波解（一个波）来代替式(3.15.52)：

$$u = 3c \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{c}}{2} x,$$

则 KdV 方程内在的非线性效应和色散效应便会完全互相抵消。

最后，需要注意的是，到此为止所讲的力学系统都不发生能量耗散（dissipation）。倘若考虑能量耗散，则孤波是不能够稳定存在的。有关这些问题的更深入的讨论，请参考书末的文献。

## 第二部分 光和电磁场

### 第四章 光和以太

#### 前言——光和物质

物理学是和光戚戚相关的。现代物理学正在建立极为精确的光学理论，但完备的理论则尚未形成。

不用说，视觉与听觉、触觉一起，构成了经验知识的重要来源。眼前的世界中，最先为人们所认识的，无疑是那些本身发光的客体以及由于它们照射才能看到的客体。人们把其中假想的机制取名为“光”，而把其中显现出的多样性称为“色”。早在托勒玫时代（~150年），人们就已认识到，暗的物体只是在附近发光体的照射下才能看得见。然而，直到十七世纪才弄清楚，物体在白光下之所以显示出五颜六色，乃是由于物体反射了（或透过了）相应的彩色光，以及物体表面微细的凹凸不平而产生的漫反射所致；照到物体上的光不同，物体就显现出不同的颜色。随后，人们通过太阳出没时的阳光、射进暗室中的日光等各种日常现象，认识到了光在均匀介质中是直线传播的。以欧几里德为首的希腊数学家们把光线理想化为几何学中的直线，可以说这就是光的物理学的开端。他们还注意到，当光线进入不同介质时，在其分界面上会发生反射和折射，同时，入射角等于反射角。在这一时期，透视学（*διοπτρικος*）是在光的直进性的基础上解决几何学与实际问题的（如透

视画法)的一个分科,它并不具有后来所谓折射光学(*dioptrics*)的意义(屈光器\* (*διοπτρα*)是一种水准仪的名称)。研究反射和折射的分支称为镜学(*κατοπτρικός*)。随着眼镜、望远镜、显微镜等光学仪器的发展,透视学与镜学两个分支在“焦度学”( *Dioptrique*, R. 笛卡儿 1637)的名称下合为一体,成为指导光学仪器设计制造的理论体系。光的直线传播以及反射与折射定律,不仅对于实用是足够充分的,而且,对于探究光的本质来说,它们也构成了粒子说的基础。而当遇见了如衍射等这些单单用上述规律已无法处理的光学现象,光的波动说才应运而生。

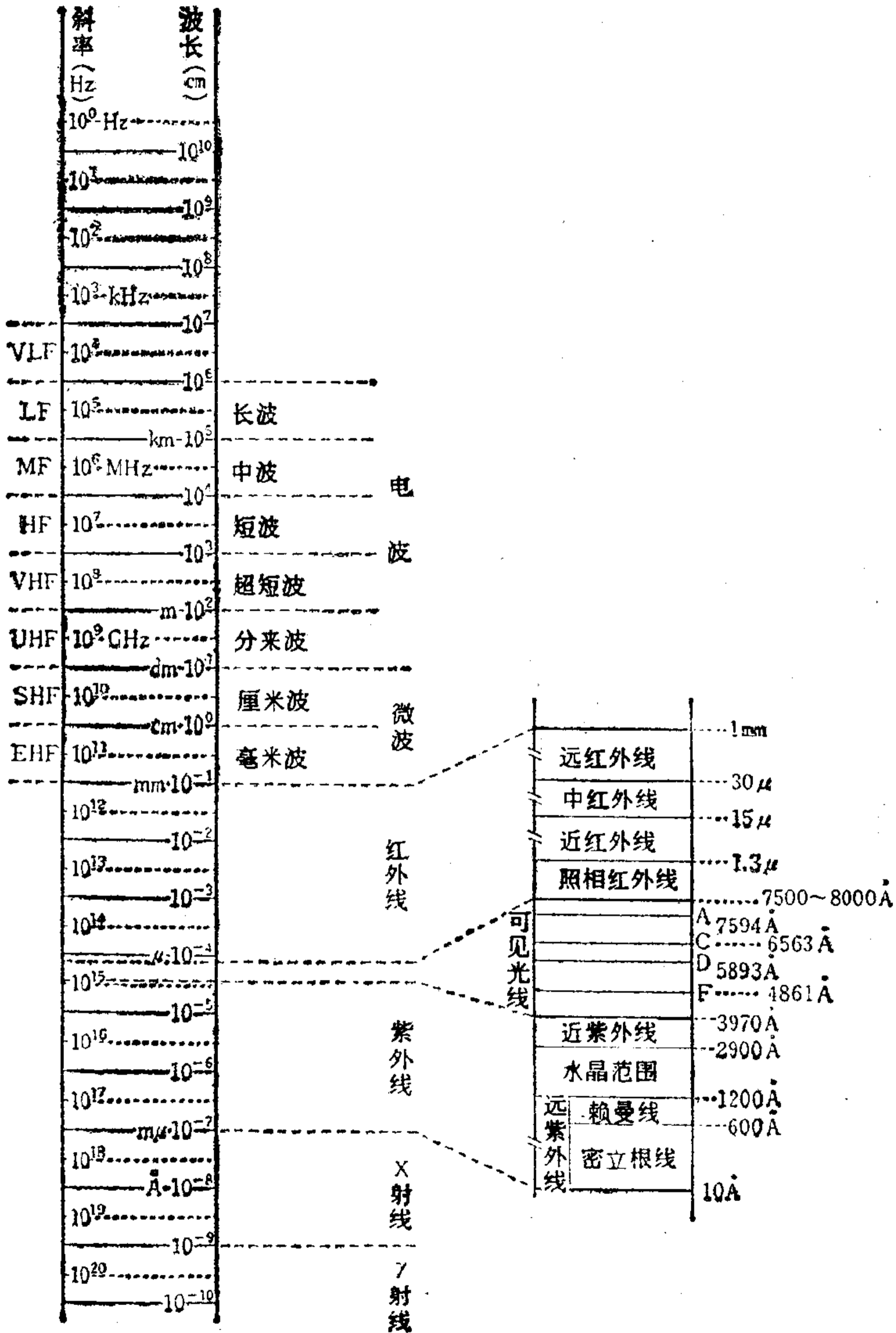
在探索与光有关的现象时,由于其性质所决定,光的物理学同视觉的生理学二者的差别长期未能明确。早期,伊壁鸠鲁(*Epicurus*, 约公元前 300 年)主张,由于从眼睛向外放射出像来,人才见得到东西。柏拉图(*Plato*)提出了眼睛的射线与物体的射线相会合的学说(*συναύγεια* 假说)。欧几里德的透视画法,其出发点是这样的假定:眼睛的射线构成了以眼为顶点、以对象的边缘为底的圆锥体。他认为,这些射线在空间中分布很密,但却有间隙;只有当视线落在物体上,该物体才是可见的;远处的物体,由于落在相邻两射线的间隙中,故而看不见。J. 开普勒(1604)最先对眼睛的机能作了完整的说明。尽管十七世纪的“新哲学”(实验哲学)摈弃了形而上学的要素,但笛卡儿或牛顿对于视觉的形成也都不能默不作声,如此等等。特别是在颜色的问题上,一直纠缠到对色彩的心理反应方面,哥忒(*Goethe*, 1791 ~ 92, 1810)和叔本华(*Schopenhauer*, 1816)对牛顿的颜色理论所作的非难,把光的物理性质和生理上心理的特征之间的差异突出了出来。这就

---

\* 屈光器和透视学、折射光学,从字源来说都是同一词根派生而来的,故云。——译者



表 4.1



是说,从物理性质上(这是连续变化的)讲,光的种类繁多;而从色彩的感觉来讲却只有极少几种。耳朵尚且能够区分各种正弦振动,可是眼睛却把白光看成为单一的颜色。

大概只是在发现了不可见光之后,光学才成为物理学。为了弄清不可见光,花费了整整一个世纪(十九世纪)。在十九世纪初叶,赫谢耳(F. W. Herschel, 1800)发现了波长超过可见光谱长波端的那一部分,它具有很强的热效应。而里特(J. W. Ritter)和渥拉斯顿(W. H. Wollaston)(1801)发现了短波端的那一部分,它具有能使氯化银变黑的作用。这种红外线和紫外线只是波长与可见光不同,而光的全部特性它都具有。特别是它们也显示出干涉、衍射和偏振的性质。前者是克诺布洛(H. Knoblauch, 1846)证实的;后者则有杨氏(1803)进行的开创性的工作:他让紫外线在牛顿环的装置上照射一小时之久,而在涂有硝酸银的感光纸上记录下了干涉条纹(这项工作是在他提出光的干涉概念之后立即进行的)。但利用新发明的照相技术来作这种实验的是缪勒(J. H. Müller, 1856)。麦克斯韦由他自己的电磁理论得出了光在本质上就是电磁波的意见(1861—62, 见 §5.7(d)),而这一见解在二十年之后由赫兹(H. Hertz, 1888)的实验得到了完全的证明。在本世纪前夕,即1895年11月间,发现了伦琴(Röntgen)射线。而确定伦琴射线的偏振性质(巴克拉(C. G. Barkla); 1904)和衍射性质(哈伽(H. Haga)与文德(C. H. Wind), 1902; 弗里德里希(W. Friedrich)、克尼平(P. Knipping)和劳埃(M. V. Laue), 1912), 则是进入二十世纪以后的事了。今天看来,伦琴射线可以作为光的电磁说的一个旁证,而上世纪末却对它的本质产生过各种各样的猜测,其原因就在此。玻耳兹曼曾设想:莫不是发现了光以太的纵波吧,而斯托克斯和维彻尔特(J. Wiechert)则认为是阴极射线射到放电管的

玻璃壁时在以太中产生的脉冲.这些情况使我们看到,在十九世纪,人们如何确信光以太的存在,机械自然观是多么根深蒂固.当时,就这个问题又对眼睛看惯了的光即太阳光之构成进行了再分析(瑞利爵士(Lord Rayleigh) 1898; 详后).与此同时,在十九世纪末,亥姆霍兹阐明了眼睛的光学结构,于是“生理光学”(Dhysiologische Optik, 1896)独立的出现了.

此外,夫琅和费(J. V. Fraunhofer)发现了线状光谱(1814—15)和光栅衍射现象,从而使光学具有了作为一门精密科学的物理学的定量性,其相对精度达 $10^{-7}$ ,即使在经典物理学中,也堪称是极其精密的分支.棱镜分离出来的光是连续变化的,把这样形形色色的光按照少量的颜色感觉来分类,这很容易带来个人误差,实为不确切的分类法.若使太阳光谱中在固定位置上呈现出的暗线分别(夫琅和费按字母顺序给它们加上文字标记)与各自的折射率一一对应,并作为标记来使用,那么光的分类就精密化了.而且,也有可能通过光栅常数和衍射角来精密地测定出光的波长(象测定光的波长这样的工作,大概开始于杨氏对牛顿环所进行的测量).然而,线状光谱的发现,并不仅是对光学,而且对整个物理学都具有重大意义.其意义就在于:以前,探求的是黑暗物体被专门的发光体照亮的机理,以及光本身的传播和显示形式;而此后,注意力则转向发光物体的结构.

无庸赘言,分光学在应用直接现象来说明物质结构方面已经提供了新的知识.同已知元素的谱线排列进行比较,就能判断出新元素的存在.冉赛(W. Ramsay, 1895)正是基于这种光谱分析发现了氦.同时,还可以把来自天体光线的线状光谱与地上物质的线状光谱相对照,从而了解天体上存在的物质等等.涉及发光体结构的研究工作有多种方面.其中,有人研究了物质在某一温度下发出怎样的辐射;也有人对

物质在光电效应或冷光效应等情况下如何吸收光、放射光以及如何转换作了研究(普朗克-爱因斯坦的辐射理论);还有人在麦克斯韦电磁理论中引进了分子论的观点,从而说明物质折射率的正常与反常色散以及塞曼(Zeeman)效应等光学性质(洛伦兹的电子论)。其结果是,用光的量子性来解释线状光谱的规律,导致整个物质世界的离散性被揭示出来。相对论和量子力学这两者若由光与物质相互关联的观点来看,可以说一个是研究传播光的介质——以太的归宿,而另一个则是研究发光物质结构的归宿。通过伽利略的望远镜(按照开普勒的“误解”),光成为“星际的使者”。而如今,光已是“整个物质世界的使者”。其原委参看本讲座第二卷《经典物理学II》第六章和第三卷《量子力学I》第一章。此处是想强调一下,像这样构成的有关发光体结构的理论,还为对光本身看法开辟了新的途径。

如前所述,与热辐射的光谱分布或伦琴射线的本质相关联,瑞利阐明了白色自然光可以看成是完全无序的过程。他提出这样的问题:自然光的振动在它被分解——不管在理论上或实验上以什么手段去分解——之前是规则的,那么它是否能与瞬时冲击所造成的扰动区别开呢?他认为,象戈威(M. Gouy, 1886)或舒斯特(A. Schuster, 1894)也曾论述过的那样一直占据支配地位的观点,即自然光是规则波的观点已经不能保持了。他主张,若在纸上画出表示白色光的曲线来,不再会成为相同波的波列。为了说明这一点,瑞利从高斯型脉冲的无规则集合出发,结果构成了与温度辐射的韦伯(Weber)定律一致的全辐射。如果从辐射的量子论来看,事情就更加清楚了。因为,自然光是太阳中各种原子或分子在所有能级间跃迁时而放射出的、仅持续 $10^{-8}$ 秒的脉冲集合。把单色光当作自然光傅里叶展开的一个正弦波分量来表述,



这并不单单是理想化成为数学上处理简便的标量波,而且,它要求备有检验光子波动性的观测装置。

这种光辐射机理还使本质上全新的单色光源成为可能。现假定某原子仅仅具有能级 I、II,它和所需频率的光辐射相对应。用某种方法使大量的这种原子处于高能级 II 上。再通过适当的装置(如电磁共振器)使之同时向能级 I 跃迁,这样就会发射出位相一致的单色光。由于原子通常都具有多个能级,故而这只不过是极端理想化的设想。但是,用这样的原理,实际上能够获得频域极窄(对  $3 \times 10^{15}$  赫的光,约达几个赫)而且位相在很长时间内(达  $10^{-1} \sim 1$  秒左右)保持一致的辐射。这种辐射业已实现。对应于微波辐射的是脉降(MASER 微波激射放大器),对应于可见光的是激光(LASER 光激射放大器)。由于这种新型光源的出现,1950 年前后开始,光学展现了全新的面貌。

例如,首先,在实验室内高精度地测定光速变为可能。在开普勒或笛卡儿时期也还认为光速是无穷大。据说,培根(F. Bacon)曾对光的传播与声的传播作过比较。第一个作实测尝试的是伽利略。他的《新科学对话》中的“第一日”里,就曾讲过两个人开闭灯的遮罩而由距离与看到对方来光的时间滞后求出光速的故事。但是,由于伽利略所取的距离只有几英里远,其时间差是  $10^{-5}$  秒的量级,人手的动作是无法跟上的。从而,只能得到光速即使有限也是极大的这个结论。要解决这个问题,就得让距离大过地球的尺度,或者换用动作比人迅速的装置。前者有罗麦(O. Roemer, 1676)利用木星卫星蚀的方法;后者有斐索(A. Fizeau, 1849)的齿轮法,以及阿喇果(D. Arago, 1838)提出的、经傅科(J. Foucault, 1850)改进的旋转镜法(迈克耳孙(A. Michelson)的测量亦属此类)。以后,卡罗鲁斯(A. Karolus, 1925)和密泰斯塔



德 (O. Mittelstadt, 1929) 等人使用克尔 (Kerr) 盒作为  $10^{-8}$  秒的快门。总而言之, 由于光速极快, 为要获得六位以上的精度, 就必须使距离达到公里的数量级。而且, 由于把空气中的光速换算到真空中的值时, 要正确估量途中的气象条件是十分困难的, 这也限制了实验的精度。迈克耳孙最后与皮斯 (F. G. Pease) 和皮尔孙 (F. Pearson) 一起尝试着在很大的真空罐中进行测定(1935), 也正是唯此之故。然而, 如果使用微波的话, 由共振腔的长度与共振频率的乘积即可确定光速。这样就能避免上述困难 (埃森 (L. Essen), 1948)。由表 4.2 中 1948 年以后的测定值 (其中包括有采用微波吸收的决定频率法的分子旋转光谱所确定的值, 也包含有由光速测距仪 (geodimeter; 贝格斯特兰 (E. Bergstrand) 1957) —— 这是伽利略法的现代翻版——进行的测定), 如第五章开头所说的那样, 把自然常数进行无矛盾的调整, 从而确定了如下的结果 (柯亨 (E. R. Cohen) 和泰勒 (R. N. Taylor); 1973):

$$C = 2.99792458 \pm 0.0000000012 \times 10^{10} \text{ (厘米/秒)}$$

脉降和激光器这类新型光源的特征在于: 由于高度相干性而带来的高谱线密度(单色性)以及很高的空间密度 (定向性), 由它可以得到极强的光场 ( $E > 10^7$  伏特/厘米)。由这样的场所感应的物质极化的电流, 并不与场强成正比, 而是显现出非线性的响应。这时, 各种物理常数都必须看成是与场强有关的量。这种光学的非线性, 由于其根源来自构成物质的原子或分子的行为, 所以需要作量子论的处理。非线性现象的最基本性质, 是叠加原理不复成立。这样一来, 就观察到了极为丰富多彩的现象, 诸如光的高次谐波 (harmonics) 的发生, 光的混频、参量效应、感应散射等等。此外, 还可以看到起根本作用的自聚焦现象——这时, 光不再是平面波的叠加, 而是在空间上受到限制的光束, 时间上受到限制的脉冲。

表 4.2

年代	测定者	方法	距离(m)	光速 (km/s)
1676	罗麦	木星蚀	$3 \times 10^{11}$	214300
1849	斐索	齿轮法	8633	$315300 \pm 500$
1856	考尔劳希和韦伯	电磁单位之比(电荷)		310800
1862	傅科	旋转镜	20	$298600 \pm 500$
1868	麦克斯韦	电磁单位之比(势)		284300
1879	迈克耳孙	旋转镜	700	$299910 \pm 50$
1882	迈克耳孙	旋转镜		$299853 \pm 60$
1926	迈克耳孙	旋转镜	35000	$299798 \pm 4$
1929	卡罗鲁斯和密泰尔斯塔德	克尔盒	300	$299786 \pm 20$
1932	迈克耳孙皮斯和皮尔孙	旋转镜	15000	$299774 \pm 11$
1948	埃森和戈登-施密斯	空腔谐振器	0.1	$299792 \pm 4.5$
1949	阿斯莱克孙	近航仪	300000	$299792.4 \pm 3.6$
1950	埃森	空腔谐振器	0.1	$299792.5 \pm 1.5$
1950	保尔	空腔谐振器		$299789.3 \pm 1.0$
1951	阿斯莱克孙	近航仪	300000	$299794.2 \pm 2.8$
1952	傅鲁姆	微波干涉仪	2	$299792.6 \pm 0.7$
1954	傅鲁姆	微波干涉仪	1	$299792.75$ $\pm 0.30$
1955	波莱勒,波莱因和科诺	红外旋转光谱		$299792 \pm 6$
1955	傅洛曼	电波干涉仪	1500	$299795.1 \pm 1.5$
1958	傅鲁姆	微波干涉仪		$299792.50$ $\pm 0.10$
1962	莫克尼希(综合报告)	光速测距仪		$299792.6 \pm 0.25$
1965	科里巴耶夫	光速测距仪		$299792.6 \pm 0.06$
1967	格洛斯	光速测距仪		$299792.5 \pm 0.05$
1967	希密根、鲁根、希科拉和斯特莱仑斯基	微波干涉仪		$299792.56$ $\pm 0.11$

在本章中，将介绍关于光的本质的各种观点的产生和发展，尤其是其经验的基础。其中，还要列举必要的具体光学现象。把光当作电磁波来处理的问题，准备放到下一章讨论。当把光作为光子的集合时，多数非线性光学现象就能解释为

多光子过程。本讲座第三卷《量子力学I》第九一十章和第十卷《基本粒子论》中将叙述这种处理方法的基础。不过，在§ 5.9中将介绍那些当作经典波处理就能解释清楚的问题。

#### § 4.1 光的周期性

##### a) 光的力学解释

可以说,在十七世纪后半叶,光的各种基本性质已臻完备,最低限度也已初见端倪了。那就是,光的 i) 直线传播, ii) 传播速度, iii) 反射和折射定律, iv) 颜色, v) 周期性, vi) 衍射, vii) 偏振。另一方面,在十七世纪还确立了物理声学的基础,而且胡克、惠更斯、牛顿等人对此都很精通。特别是牛顿在《力学原理》第 II 篇第八章中,说明了声波的衍射(命题 42、定理 33),阐述了波动传播的衰减(命题 47、定理 37),并从理论上导出了在给定介质密度与弹性力时的声波速度。从那时起到拉普拉斯的一个世纪之间,它成了有关声音的讨论的基础。J. 索维尔(Sauveur)曾在 1700 年对拍进行了巧妙的观察,并依此求出了给定声音的频率。其结果被引用于《力学原理》的同一章的注释之中。然而,为什么都必须等到十九世纪初叶才由杨氏和菲涅耳(A. Fresnel)把这二者结合起来呢?

十七世纪的光学奠基者们并非没有把光与水波或声波进行类比,而是极力地依赖于它。但是,牛顿也好、惠更斯也好,都只是把这个类比当成与光传播相对应的、肉眼可见的特例提出来的——光传播的速度由罗麦的测定而知是有限的。他们并没有象杨氏(1802,03)所尝试的那样,试图把光作为一种振动形态来和声的振动进行全面的对比。特别是惠更斯,鉴于光速和到达距离都是极大的,因而强调了声波和光波传播的差异。这和杨氏的观点完全对立。后者认为,来自各种光源的

光的速度是相同的,因为纵波的传播速度仅仅由媒质来决定;从而奠定了波动论的基础。毫无疑问,在十七世纪开始创立光学理论之际,人们大概最早是企图对实用效果最为显著的焦度学的基本原则——光的直线传播及反射和折射定律建立根据。然而,这一工作恐怕仍然要依赖于牛顿和惠更斯头脑中的自然观。一方是,物体之间的超距作用,而另一方则极接近笛卡儿的自然观:“对引起自然界如此众多令人惊异的现象发挥作用的,是具有不同速度的、大小各异的粒子的无限系列”。

笛卡儿算是光的力学解释的创始人(《哲学原理》,1664)。他的进化论的宇宙最终归结为: 构成太阳和恒星的第一元素,构成地球、行星、彗星的第三元素,第二元素(以太)无间隙地充斥于二者之间,它们都处在各自的涡动状态中(按照他对物质的规定,这三种元素的差异仅仅在于它们的大小)。由于构成太阳的第一元素的旋转所产生的离心力,使其周围第二元素的微粒受到压力,而由于第二元素的相互接续,这个压力才得以在瞬间内传递,光则是在该压力作用于人眼时被人们感觉到的东西。光是“对运动的作用(actio)或倾向(inclinatio),该运动是通过互相接触而无间隙地存在于两个地点之间的整个空间的许多物体,由一个地方传递到另一个地方去的”(《哲学原理》第 III 部分,命题 55)。支配笛卡儿的世界、支配光和物质的力学定律是惯性定律、离心力、以及弹性碰撞定律(由它推导出的动量守恒定律)。 牛顿或惠更斯都承袭了笛卡儿的这种以太。

牛顿的以太是这样的: i)它与空气的组成相同,但远为稀薄、微细,而且更富于弹性; ii)它是象空气一样的振动媒质,但其振动远为迅速而微小; iii) 它渗透于物质的间隙之中,但比起自由空间中的以太来则远为稀薄,而且物体的间隙越小,它越为稀薄。同时,他认为 iv)光既非以太,也不是以太的振动,



而是由发光体传播出来的与之迥然不同的某种东西。其大小、形状与强度，式如海岸的砂砾或海水的波浪那样，会因偶然的因素而千差万别，可以看成是连续不绝的射线的排列。他还指出，v) 这种以太和光相互作用，以太使光折射，光使以太变热。以太密度越高，这种作用就越大。iv) 的假设是棱镜实验结论的一般化，该实验认定白光不是单一的光，而是各种各样不同光的集合。iv) 的一个特殊情况就是光的粒子论——它把光当作是由发光体向所有方向射出的微小物体。这在寄给奥登堡 (H. Oldenburg) 的书信中 (1675 年 12 月 7 日寄) 写明了这一看法，并说更欣赏这一观点，但是，在 ii) 中把以太规定为振动媒质，这一点也不应忽视。因为，在后面就会看到，由薄膜和薄层颜色的生成理论可知，光粒子是乘着其自身在以太中产生的振动向前进的，换句话说，这是一种载波式的描象。在十八世纪，人们曾把牛顿的光理论贬低为单纯的“粒子说”，认为它缺乏物理内容。这大概是因为，牛顿把力学建立在质点间超距力的概念上，而且在构成统一的数学体系时刻意追求形式上的完备。

另一方面，就惠更斯的以太粒子来说为了保证光的均匀传播也作了如下假设：i) 以太是由几乎完全刚性的、并具有可用任意速度返回这样的弹性的物质构成的；ii) 以太粒子不管其自身多么微小，依然由别的成分构成，它的弹性就是微细物质非常迅速的运动所引起的。这里所说的微细物质，应该具有能够自由贯穿各种物体的流体般的结构；iii) 以太粒子的排列极不规则，因此，一个粒子和另外的许多粒子相接触。这些粒子的形状和大小大体相等。此外，他还认为，iv) 所有的发光体都是由在极其微细的媒质中漂浮的粒子构成的，该媒质以非常大的速度激励粒子，使之与粒子周围的以太粒子碰撞 (以太粒子远远小于发光体粒子) (《关于光的考察》1690，



第一章)。结果,发光体的各个微小部分便产生出各自为中心的波。惠更斯指出,以光源各点为中心的同圆心表示由这些点发出的波,但是,在这些波的中心所发生的碰撞并非是有规则地相继发生的,所以,该同心圆并不表示由同一个中心发出的许多波,而应当看做是用相等的时间间隔对同一波的前进作了标记。

对于自然界相互作用的想法,在这里已经出现了两种对立的立场。惠更斯的自然观具有多重结构。大约是它,导致了笛卡儿的物质无限可分的流派。而且,物质之间的相互作用是建立在弹性球碰撞模型基础之上的接触作用。但是,照牛顿的观点就只有物量粒子和以太。不过,作为超距作用的对象,他对这个以太作了各种各样的设想。事实上,关于光的运动和微小物体的运动路径之间的类似,牛顿虽然加上了慎重的说明,但是却把光的反射和折射,甚至把由于物体的锋利边沿所引起的衍射,都归结为光粒子和以太粒子之间的超距力(《力学原理》第 I 篇第十四章)。他认为,不同媒质之间(按照假定 iii),也就是不同的以太密度之间)的折射面,并非数学上的面,而是具有某一厚度的,在它们之间的以太取所有中间的密度值,光的折射则是在整个物理界面上连续折射的结果。由假定 v) 可知,在这个界面内光和以太的相互作用因点而异。但是,如果把它分成许多层,使得在各层的内部可以把力看成是相同的,那么,在每一层内因入射一方以太的引力或斥力,光粒子会取抛物线路径,由于光在每层内都满足斯涅耳(Snell)定律,因而得到的结论是:在整个面上也满足斯涅耳定律。除了光以太之外,牛顿还考虑了产生电力的以太、产生重力的以太等几种不同的以太。

接着就是扰动在媒质内传播的机理问题。惠更斯描述的图象是:在某一个以太粒子周围邻接着许多其它以太粒子,

中心粒子的运动对周围所有的粒子发生作用，便产生了以该粒子为中心的球面波。但是，仅仅根据惠更斯的假定 iii)、iv) 对运动所作的规定，就得出扰动在所有方向上都同样直线传播的结论，还颇有含糊之处。应该认为，当作球面波来看待，只是为了便于采用有关声波和水波的经验而使讨论(几何作图)更为简化的一个假想的手法(有关这一点，牛顿论述了来自振动物体的脉动在弹性媒质中向所有方向直线传播的机理(《原理》第 II 篇第八章)，并由此反驳了那种认为向所有方向的直线传播不是由火焰各部分的摇动产生，而是由火焰整体的伸缩 (delatio) 所引起的论点(同章，命题 43，定理 34 组))。

对于来自发光点 A 的波的扩散来说，若按惠更斯的这个图象，就有可能把它看成是子波 (Onde particulière) 的合成(图 4.1)。假设以 A 为中心的球面 DCEF 是 A 发射出的一

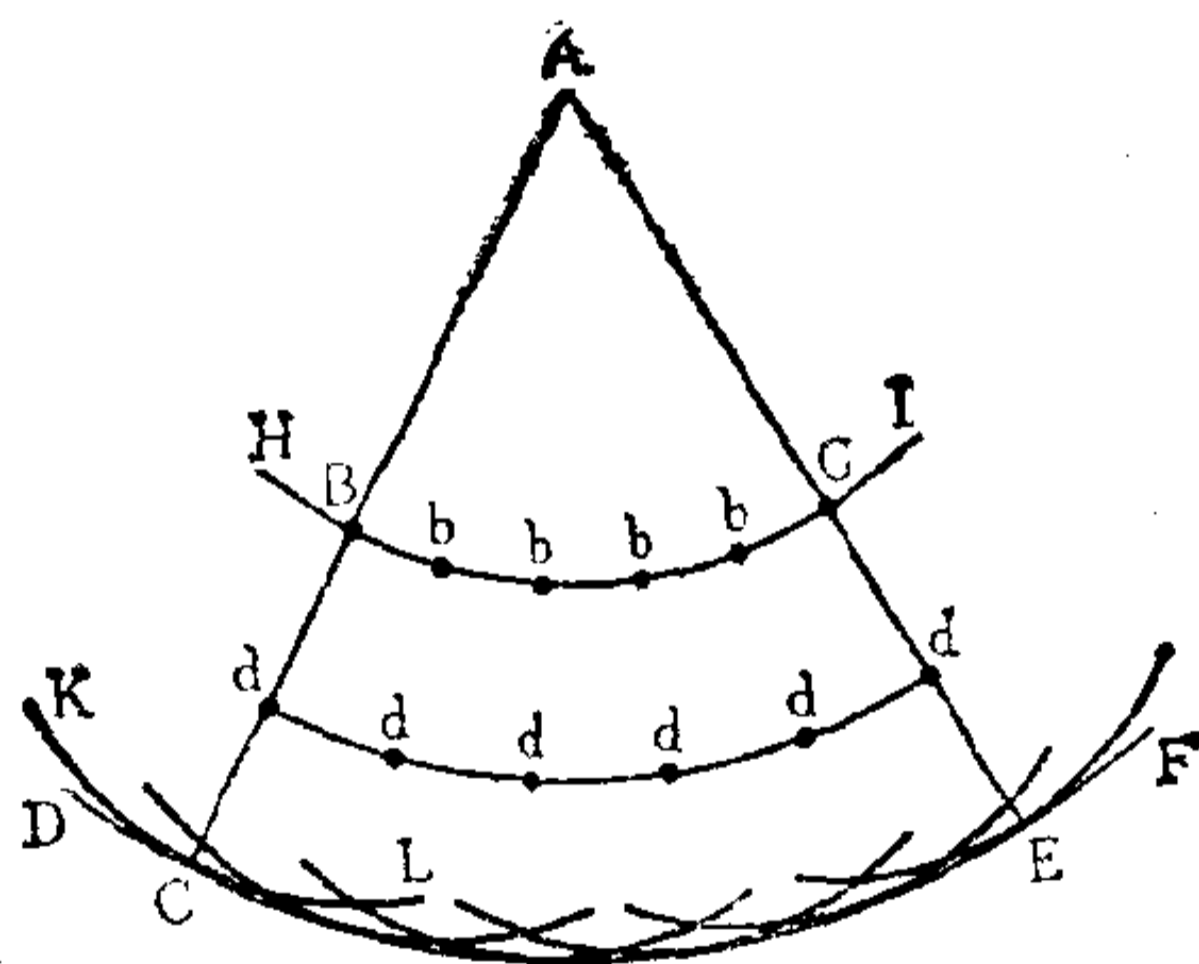


图 4.1

个波，则该球面 DCEF 内的任意一个以太粒子  $B(b, b, \dots, d, d, \dots)$  也同样)都会产生子波 KCL。这个子波， $\alpha)$  在原先于时刻  $t = t_0$  由 A 点发射的波到达 DCEF 的那个时刻  $t = t_1$  上，在 C 点，而且也仅仅在 C 点相切。这个 C 点在通过 A、B 所引的直线上； $\beta)$  各子波可以远远比波 DCEF 弱。这是因为，这些波全部的作用才合成了波 DCEF。因此，我们可以

说，光的波面 DCEF 是由从 A 出发的扰动在时间  $t_1 - t_0$  内到达的末端所决定的，也就是说，由时刻  $t = t_1$  全部子波的包络面来决定；而且，在 DCEF 的前面并不存在扰动。

由这些子波来构成波面的方法，是明确解释光学现象的一个有力手段。我们举出光在反射和折射时的波面作图法来作为说明这种情况的一个例子。这时，如图 4.2 所示，对反射的情况来说，只要在以 AG、KM、... 为半径，各自以入射点 A、K、... 为中心的二次球面波上引一条公切线就可以了，其中的 AG、KM、... 是以波面 AC 入射到反射面 AB 上的平面波照原样前进时的路径；假若选择  $AN:BC (= AG)$ ,  $KN:BL (= KM)$  ... 为媒质 II 和 I 中的光速之比，则斯涅耳折射定律亦可得到保证(《关于光的考察》第 II、III 章)。

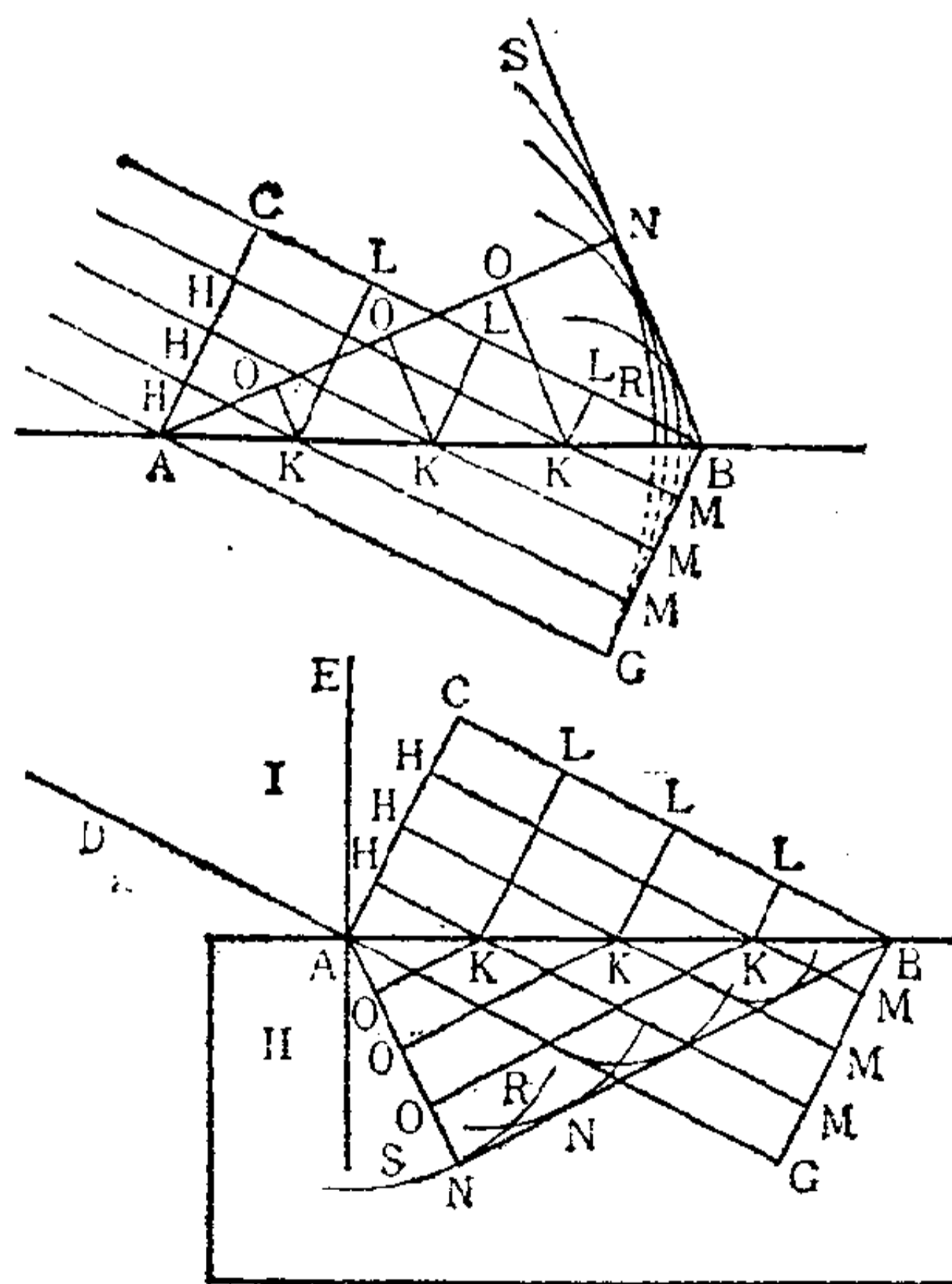


图 4.2

但是,为了承认惠更斯所描述的那种扰动的传播形式,首先必须以“既不互相混杂,也不互相影响的无数个行波”的概念为前提,即叠加原理必须成立. 惠更斯以如下的例子表明,同一个以太粒子对于来自不同侧面或相反方向的许多波发生作用. 他考虑了一列球,具有假定 i) 的性质,而且大小相等. 当同一时刻在球列两端让两个同样的球相向碰撞时,两个球就会各自以碰撞时所具有的共同速度弹回; 尽管扰动两次通过球列的全长,但整个球列依然静止不动. 这就是说,此时位于球列中央的球,起到了同一瞬间传递方向相反的两个扰动的作用(《关于光的考察》第一章). 另外,子波是以各个以太粒子为中心的球面波,假如按照字面来理解它,则后退波就应该以两种方式产生. 其一,是在以太粒子大小不等(假定 iii)) 的情况下,当与较大粒子碰撞时,一部分扰动用于反跳,产生了向发光点后退的某些部分波. 惠更斯指出,因为那样的部分波集合并没有形成一个如同无数个子波合成的波,所以就不会引起发光;其二,是就子波的中心而言与前进波对称的另一个包络面. 惠更斯本人对此并无任何查觉. 这样一来,它就与后面将要谈到的用波动论对光的直线传播所作的解释相关,或者如马赫所说(《物理光学诸原理的历史批判性的叙述》1913,第 XIII 章),也许应该认为,惠更斯只使用了子波波面切点的附近,而一次波的各点并非二次波的真正中心,只不过是象那样动作而已. 但是,它也等效于再给惠更斯的一组假定上增添以下的补充假定: v) 子波只有在波面的切点上才发生作用. vi) 子波的包络面只取与前进波对应的那一部分.

但是,惠更斯在谈到无限弱的无数个子波时,到底具有一个什么样的图象呢? 实际上,存在这样一个问题,即在惠更斯考虑这种传播方式的一个动机中,光速是有限的;与此同时,



由距离相当远的发光体(例如天体)来的光为什么无衰减地到达我们这个地方呢? (对于把天上和地上的运动起因同样看待的牛顿来说,这一点并不成问题,因光速是有限的,所以传播只可以逐渐进行;《原理》第 I 篇第十四章注释)。因此,惠更斯认为,“由发光体不同点所发出的无数个波,会合在一处,而成为一个有效的波,结果,具有充分被人们感知的力量”,而且,“即使在能想象的极短暂的时间内,由于在由各发光点上敲打以太的那些微粒的频繁撞击,从该处也会发出数千个这样的波。从而更容易使人感知它们的作用”。由此看来,说不定惠更斯本人已经考虑了全部子波的合成,而这些子波正是由图 4.1 的球面 DCEF 内的每一个以太粒子所产生的。也就是说,或许在他的头脑里已经描绘了以直线 ABC 上的所有点为中心并在波面的一点 C 相切的无限多个圆。这样说,是因为在惠更斯的陈述中完全缺乏足以显示波动的最核心的位相概念,他的这种陈述所依据的是由纯粹弹性体的碰撞定律而来的直观描象和几何方法。在某一特定波面上,位相是相同的,如果对此置之不顾,则以上讨论就是可能的,它既和惠更斯以太扰动的传播形式不相矛盾,对《关于光的考察》中各个命题的处理亦无妨碍。

惠更斯原理的解析表达建立于菲涅耳以后的波动方程之上,现在,作为它的解析结果,我们可以对惠更斯原理的内容理解如下。若按哈达玛德 (J. Hadamard (1924)) 已经整理好的形式,这就是

A (大前提)。为了由初始时刻  $t = t_0$  所给予的扰动来确定时刻  $t = t_1$  引起的光学现象的效应,可以计算在某一中间时刻  $t = t'$  上的状态,然后就能够求出在时刻  $t = t_1$  的状态。

B (小前提)。假若在时刻  $t = t_0$ , 或者更精确一些,在



微小的时间间隔  $t_0 - \epsilon \leq t \leq t_0$  内产生了局限于点  $O$  附近的光学扰动,那么,在此它稍后的时刻  $t = t'$  的效应就局限于中心为  $O$ 、半径为  $c(t' - t_0)$  的极薄的球壳内。其中  $c$  为光速。

C (结论). 为了计算由  $t = t_0$  时刻在点  $O$  附近的光学扰动所引起的  $t = t_1$  时刻的效应,可以用在中间时刻  $t = t'$  所产生的、分布于中心为  $O$  半径为  $c(t' - t_0)$  的球面上的光学扰动的集合来代替初始扰动。

这样看来,惠更斯原理就由三个命题构成,其中的每一个都可以毫无差别地叫做惠更斯原理。它的命题 A,除表示光波动服从波动方程之外,别无它有。而命题 B 则是以孤立球面波的特殊传播性质为基础的。它表示,如果使用波动方程的泊松解,就可以认为该波面服从惠更斯给出的处理方法(参考 §3.7 (ii)),这也是后面将要讲到的亥姆霍兹-基尔霍夫(Kirchhoff)定理的特殊情况。命题 C 能够推广到波动方程以外的微分方程;在这个意义上,似乎也可以把惠更斯原理看成马尔科夫(Markov)过程的原型(参考 § 3.7 及本讲座第二卷《经典物理学 II》第五部分第十六章)。

下面,我们首先由子波的性质  $\beta$ ) 入手,给出惠更斯原理明确的解析表达。这是因为,它关系到用波动论来说明光的直线传播的问题。惠更斯假设,若把图 4.1 中的 BG 看成狭缝,那么,为了使它包含相当多的小得几乎不可想象的以太粒子,不管它怎样小,都会具有一定大小,所以,波的各个小部分沿着由发光点引出的直线前进,而向空间 CAE 之外扩展的子波,并不象在 CE 上合成一个波那样,在同一时刻形成一个波作为扰动的末端。我们把这种情况用从观测点看到的方向因子来表示。现在,考虑用波长为  $\lambda$  的单色光源 L 来照亮 P 点的情况(图 4.3)。这时,假设光直接由 L 来到点 P 也

好,由二次球面波来到点 P 也好,都想要表示点 P 是同样被照亮的,这里的二次球面波是由 LP 中间某一位置 ACB 上、半径为  $r_0$  的一次球面波  $A(e^{ikr_0}/r_0)$  的波面 S 的各点 Q 来的。

二次波对点 P 的贡献,可以是各种各样的,依它们所给出的方向而定。假设该二次波的振幅随倾斜角  $\chi$  (点 Q 上的波面法线与 QP 的夹角)减小的效果用  $K(\chi)$  来表示,那么,这个函数在  $\chi = 0$  时最大,并随着  $\chi$  的增大而急剧减小,在  $\chi = \pi/2$ ,即 QP 成为波面切线时变成零。使用这个函数,我们就

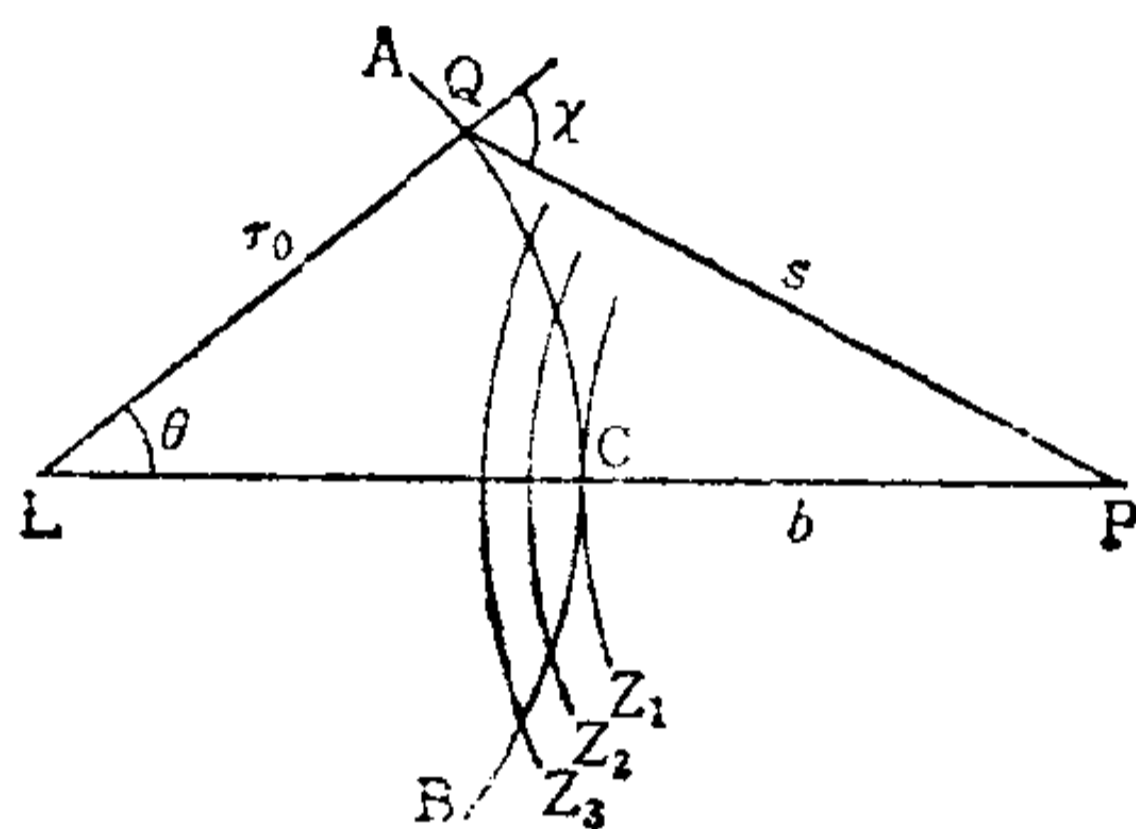


图 4.3

可以把 Q 上的波面元  $dS$  对照明点的贡献写成

$$dU(P) = K(\chi) \left( \frac{A e^{ikr_0}}{r_0} \right) \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) dS$$

( $s = \overline{QP}$ )。因此,假设  $\phi$  为方位角,则所有的二次波对 P 点的贡献就可以用下式来确定

$$\left. \begin{aligned} U(P) &= \frac{A e^{ikr_0}}{r_0} \iint_s \frac{e^{iks}}{s} dS \\ dS &= r_0^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{r_0}{r_0 + b} s ds d\phi \end{aligned} \right\} \quad (4.1.1)$$

为了计算式(4.1.1),按照菲涅耳的作法,用 P 为中心、半径为  $CP = b, b + \lambda/2, b + 2\lambda/2, b + 3\lambda/2 \dots$  的球,把一次球面

波的波面  $S$  分割成环带  $Z_1, Z_2, Z_3 \dots$  (菲涅耳半波带)。现在, 设  $r_0$  和  $s$  远远大于光的波长  $\lambda$ , 那么就可以认为, 在属于同一个菲涅耳带  $Z_j$  的各点上,  $K_j(\chi)$  取相同的值。这样一来, 第  $j$  个菲涅耳带  $Z_j$  对  $U(P)$  的贡献就是

$$\begin{aligned}
 U_j(P) &= 2\pi \frac{A e^{ikr_0}}{r_0 + b} K_j \int_{b + \frac{(j-1)\lambda}{2}}^{b + \frac{j\lambda}{2}} e^{iks} ds \\
 &= 2i\lambda (-1)^{j+1} K_j \frac{A e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b}, \quad (4.1.2)
 \end{aligned}$$

所以, 对  $P$  点的全部贡献即可写成

$$\begin{aligned}
 U(P) &= \sum_{j=1}^n U_j(P) = 2i\lambda \frac{A e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} \left. \sum \right\} \\
 \sum &\equiv \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} K_j \quad \cdot \quad (4.1.3)
 \end{aligned}$$

若使用舒斯特 (A. Schuster) 法(1891)来求和  $\sum$  (参考玻恩-乌尔夫 (Born-Wolf) 《光学的诸原理》第 VIII 章 § 8.2), 则

$$\sum = \begin{cases} \frac{1}{2} (K_1 + K_n) & (n: \text{奇数}) \\ \frac{1}{2} (K_1 - K_n) & (n: \text{偶数}). \end{cases} \quad (4.1.4)$$

于是有

$$U(P) = i\lambda (K_1 \pm K_n) \frac{A e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b}. \quad (4.1.5)$$

最后一个菲涅耳带  $Z_n$ , 正象  $QP$  可看作是由  $P$  点向波面所引的切线一样, 故有  $K_n = 0$ ; 因此, 假若  $i\lambda K_1 = 1$ , 即  $K_1 = -(i/\lambda) = e^{-i\pi/2}/\lambda$ , 换句话说, 假若二次波的振动位相只比一次波相差  $1/4$  周期, 而且振幅为  $1/\lambda$ , 那么, 来到  $P$  点的波和由  $L$  直接来的波是同样的。

b) 光和光的相互作用

在以上讨论中，我们已经考虑了作为波动的光彼此之间的相互作用——干涉，正如在为了考虑倾斜的影响而引进的因子  $K_i$  的符号交替中所看到的那样。这时，光不仅显示出了周期性，而且光的路径偏离了单纯几何直线的图象，出现了衍射效应。对于这种周期性和衍射效应的理解，是经由颜色问题而引起的；颜色这问题曾是十七世纪光学的中心议题之一。奇怪的是，惠更斯在《关于光的考察》中完全没有涉及颜色的问题。就其内幕而言，这大概是因为：在 1673 年，惠更斯针对前年发表的牛顿关于光和颜色的理论，向伦敦皇家学会提出了认为所有颜色都由黄色和蓝色合成的学说，说不定牛顿的激烈反击使其蒙受了由衷之苦；何况，对于惠更斯说来，由于他认为光的折射本质上是因为光速随媒质不同而不同，并且他还认为光是纵波，而为要使纵波的速度不同，媒质也必须不同，所以，他对由折射率连续变化的棱镜所引起的光色散便完全无法解释。

当时，在这一方面捷足先登的，是牛顿的另一个对立者胡克。在《显微镜记事》(Micrographia, 1665) 中，既可看到利用显微镜所进行的种种观察，又可看到有关薄膜、薄层显示颜色的记载。其中有：云母薄片、云母间隙中的空气层、与之相似的两块玻璃板间的空气层、松节油和酒精的薄层、气泡等等(观察 IX)。胡克认为，光是由物质异常迅速的振动产生的。把钻石在暗处摩擦，便会放出光来。这大概是由于摩擦产生的运动引起的。因为钻石的形状依然不变，所以在钻石内发生的这种运动，不应该是单一方向的运动；不过，它也不是转动，转动只适合处于流动状态的物体；因此，它是振动，而且从钻石的硬度来看，一定还是极快的振动(观察 XIII)。

由观察日光倾斜进入水面时产生彩色斑点的现象出发，他认为，白色光的波面似乎是与传播方向垂直的，彩色光的波



面则与传播方向斜交。而且，限制光线的黑暗媒质会部分地减弱波面强度。他假设这种衰减效应就蓝色光而言影响的是倾斜波面的先行部分，而就红色光而言影响的却是后来的部分。因此，蓝色光是最弱部分先行最强部分后续的、具有倾斜波面的脉冲给予视网膜的刺激，而红色光则是与之相反的脉冲所给予的刺激。他认为，所有的颜色都是这种蓝色和红色的混合或退化而生成的。根据这种颜色理论，可以对薄膜和薄层的颜色作如下说明。在薄膜和薄层的前面反射的强光，和在背面反射的弱光，一起进入眼睛，但强光波面和弱光波面一般并不一致；若使薄膜和薄层的厚度逐渐增大，则两个波面的间隔便周期性地变化，结果，有时强光的波面先到，有时弱光的波面先到，从而显示出各种各样的颜色。

牛顿之所以深入研究薄膜、薄层所显示的颜色（由他的笔记中可以看到，在胡克的《显微镜记事》出版后不久，他便对该书详细进行了探讨），是由于在棱镜实验中，倘若有两个斜边面中间稍稍突出的直角棱镜，偶而将这两个棱镜的斜边面合在一起并牢牢压紧，那么，当光极斜地射进两个棱镜构成的空气层时，反射光中斜边面相接触的部分便显示出黑斑；假如让棱镜组围绕共同的轴旋转，使人射光对空气层的倾斜度减小，则在这个黑斑周围就可以看到圆弧状或环状的彩色条纹（紫、蓝色在内侧，橙、红色在外侧）。

但是，因为在棱镜中存在着光的分解而使现象复杂化，所以，牛顿决定把一个双凸的望远镜物镜放到另一个平面朝上的平凸透镜上来进行观察。如果把两个透镜压紧，那么在显示出黑斑的透镜接触点的周围，便出现了彩色的同心圆环；若增加压力，色环就向外扩展，若取掉压力，色环又回复到原来的状态并消失于中心处。这就是今天所说的牛顿环。进一步他还看到，用单色光照射透镜组时，会出现同一颜色的明暗条



纹；他又在白光的情况下，透过棱镜来观察透镜组，发现不同颜色的环只是偏离的量不同而已；使用云母薄片或肥皂泡（动物油肥皂早在十四世纪就由大陆传到英国）等材料，也证实了同样的效应。

白光并非眼睛所见到的颜色，而是由折射率不同的多种成分组成的；在《光学》（*Opticks*, 1704）第二篇第一部分中罗列的二十四种观测，对这一主张提供了新的证据。但是，面临的问题是随之而进行的对环半径的测定。先假设使用的是单色光。若把眼置于透镜组中心的正上方（有关由斜方观察时的半径偏移及其修正，牛顿也详细地进行了研究），用圆规测量一下环的半径  $\rho_i$ ，则暗环半径的平方向外以  $0, 2, 4, \dots$  的比例增大，亮环半径的平方以  $1, 3, 5, \dots$  的比例增大。因为透镜间的空气层是用半径  $R$  很大的球面和平面包围而成的，所以可以认为，显示出环  $\rho_i$  的那一部分空气层，其厚度  $d_i$  之比等于环半径的平方之比（ $d_i \approx \rho_i^2/2R$ ）。因此，牛顿认为，之所以能看到明暗环，是由于在空气层厚度为  $0, 2, 4, \dots$  的地方发生光的透射，而在厚度为  $1, 3, 5, \dots$  的地方发生光的反射。在两块云母片构成的薄层中，若把下边的云母片用水浸湿，则环的颜色变淡；由这一观察得到的结论是：上述光的透射和反射是在第二个面引起的。

牛顿把透射和反射的这种有规律交替发生的现象，当作是光由发光体刚一出来就获得的属性，并把光被周期性地交替反射的倾向（*disposition*）——一时的激发状态——称为“反射性激发”（*fits of easy reflection*），而把透射的倾向称为“透射性激发”（*fits of easy transmission*），由一次激发到下一次激发的时间则称为“激发间隔”（*interval of fits*）（《光学》第二篇第三部分，命题 XII 及其下面的定义）。这是哪一种作用呢？是光线的旋转运动或振动，还是媒质的旋转运动或振动呢？还

是其它的什么作用？照例，有待牛顿对此作出判断的。但是，牛顿指出，不肯通过新的发现来明确解释这种本性，而试图靠假说来说明的人们，暂时也可以这样来考虑：正如投石入水即会引起波浪，所有物体一旦运动就在空气中产生振动一样，光线碰上折射反射的媒质或物质，也会在这些媒质或物质中引起振动；如同声音在空气中传播一样，这种激发起来的振动也会在媒质中传播，并追上光线，而在光有助于该运动的振动部分时，容易穿透折射面前进，反之则容易反射；这样一来，光就根据它所乘载的振动状况而被相继置于透射性或反射性的状态之中。

总而言之，在这样的立场上，牛顿首先数出用单色光照射时的环的个数，推断出激发的周期性的变化能连续进行数千次，而且论述了决定激发间隔的方法。按牛顿的说法，入射光在薄层第一个面上反射的那一部分，是忽略不计的。假定某一个透射性激发，在其下一个激发落到第一个面上的同一时刻，到达第二个面上，也就是说，假定它在一个激发间隔内到达第二个面。因为这个光透过第二个面，所以薄层是暗的。但是，倘若光在  $1/2$  激发间隔中到达第二个面，那么由第二个面向第一个面反射，直到再次到达第一个面，光又花费了  $1/2$  个激发间隔，所以，这一次光穿透第一个面，致使薄层明亮可见。因此，与某一特定颜色的一级亮环相对应的空气层厚度，等于该颜色的光在空气中的  $1/2$  激发间隔。用相同的见解，也能够确定其它媒质中的激发间隔。例如，若让水浸入透镜间的薄层，则相同级数的环半径就要比空气层时的小一些，与之相应的水层厚度，等于相应的空气层厚度除以空气对水的折射率。

在这里对周期性这一光的属性的确有明确的认识，尽管其形式是对表面现象实质的直接表示。但是，牛顿假设薄层颜色的现象是由光在薄层第二个面上的行为来决定的，正是

这一点，在解释薄层所显示的颜色时发挥了最关键的作用。这样做，虽然抓住了周期性，但却偏离了波和波相互作用的方向，让人觉得是引进了一个具有两种对立性质的周期性交替的激发理论。可以忽略由薄层的第一个面上来的光，这一点绝非实验能够确认的事实。虽说胡克曾考虑过由薄层的两面来的光，但是，那依然不过是为了使波面强部和弱部的布局进行周期性变化的一种结构。一个半世纪之后，杨氏和菲涅耳以新的认识，重复格利马尔第 (F. Grimaldi) 关于不透明的微小物体所产生的光衍射的实验 (《有关光、色及虹的物理学和数学》，1665) 时，才明确了由层的两面来的光，效果同等重要。

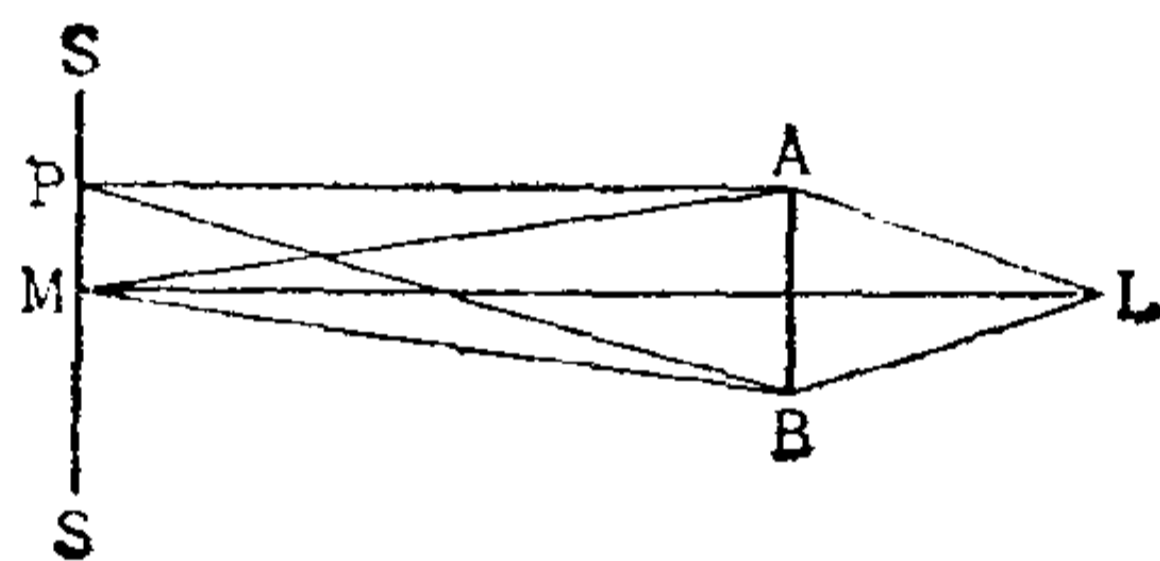


图 4.4

假设把物体 AB 置于点光源 L 的光之中，用屏幕 SS 来接收它的影子 (图 4.4)。在比光直线前进时要宽一些的影子内，格利马尔第看到了三条带色的条纹，越向外侧，该条纹越粗。进一步，如果光相当明亮，则在影子内部还常常会观察到奇数个亮条纹。实际上，牛顿也使用头发更定量地进行了这个实验，但是，他对影子内部的条纹却未作任何说明 (《光学》第三篇第一部分，观察 3)。虽然他还观察了由小孔和小刀边缘以及它们的组合所产生的衍射，但却认为自己的实验并非十分完善，而把光和物质之间的相互作用可能是超距作用的推断以“疑问”的形式提了出来。杨氏认为，在影子内部所看

到的这种条纹，是由物体 AB 的两端进入影子内部的光形成的。这是因为，若在物体任何一边的前面或者后面放置不透明的屏幕，遮掉由一边来的光，则衍射条纹便会完全消失。杨氏（开始时菲涅耳也）曾假定，进入影子内的光仅仅来自物体的两端 A、B。设图 4.4 的布局对 LM 面来说是对称的，那么，由 A、B 来的两条光在 M 点具有相等的光程 AM、BM，而且相互增强；但在 P 点，它们却具有光程差  $BP - AP$ ，这个值能从该装置的几何尺寸计算出来。现在，若让 P 点在影子范围内不断地远离 M 点，则随着光程差的增大，便会产生明暗条纹的交替（假设是单色光）。杨氏和菲涅耳认为这是光的周期性的表现，而把 P 点取在由 M 点起的最暗点上，基于这时的光程差  $BP - AP = \lambda/2$ ，引进了**周期性的尺度**（magnitude of periods） $\lambda$ ，即**波长**的概念。阿喇果是菲涅耳在研究时出谋划策的人，当他偶然用玻璃板代替那个遮蔽来自物体一端的光的不透明屏幕时，衍射条纹照样消失，对此他甚感诧异；然而，菲涅耳却认为，这是因为在玻璃板中光波变短速度变慢，使两条光的光程差有所增加，因而导致它们之间没有发生相互作用——干涉，倘若是极薄的云母片或玻璃片，则条纹并非看不到，只不过是向一个方向偏移罢了；他还直接通过实验证明了这一点。

这样，既然已经知道，由同一光源出发而向内侧弯曲的两条光线交替地互相增强、互相抵消，那么，对于薄层所显示的明暗环来说，也就没有必要再依赖于牛顿的“激发”了。这时，可以考虑由薄层两面反射的光之间的光程差。但是，要使杨氏-菲涅耳的想法适用于这种情况，必须特别注意。这是因为，在激发理论中，若激发间隔为  $T$ ，则对于垂直入射的光的反射光来说，在空气层厚度为  $d = 0, T, 3T, 5T \dots$  的位置上可以看到暗环，而在



$$d = \frac{T}{2}, \frac{3}{2} T, \frac{5}{2} T, \dots$$

的地方可以看到亮环。现在,用杨氏-菲涅耳学派的说法,在来自薄层两面的反射光的光程差为  $\frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2} \lambda, \frac{5}{2} \lambda \dots$  的地方光应互相抵消,而在  $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda \dots$  的地方则互相加强。然而,如果照旧把它看作空气层的厚度,则两个透镜的接触点就因光程差为零而显现出明亮,这与实际上中心点显现出黑暗的情况正好相反。

通过与声音进行类比,杨氏说明了这一现象的起因,是由于光疏媒质的反射和光密媒质的反射之间产生了  $1/2$  周期的位相差;而且,他还用实验证明了这一点。如果把冕玻璃和火石玻璃的透镜叠合起来,在它们之间充以黄樟油,那么,无论在哪一个面上反射,都是从光密媒质来的反射,这时,位相差消失,看到中心是明亮的。因此必须认为,若加上一个固定的位相差  $\lambda/2$ , 则在空气层厚度给出上述一系列光程差的那些地方(注意,光要在这个距离上往返),可以出现明暗的环。即,暗环出现的位置对应于

$$d = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2}{2} \lambda, \frac{3}{2} \lambda, \dots,$$

明环出现的位置对应于

$$d = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4} \lambda, \frac{5}{4} \lambda, \dots.$$

因此,对于某一特定彩色光的第一个明环来说,关系式  $d = \lambda/4 = T/2$  是成立的。从而,菲涅耳使用牛顿曾计算过的那些与一级色环相对应的空气层厚度,给出了几种彩色光的波长。

按照激发理论,当透镜间的间隙充以折射率为  $n$  的物质



时,若光垂直入射,则激发间隔必然是  $1/n$ 。而当光倾斜入射时,光环变大,光在空气层中走过的距离增加,所以,即便是对于同一种光来说,激发间隔也应该随着入射角而变化。但是,杨氏-菲涅耳理论认为,在折射率为  $n$  的介质中,光的波长成为  $1/n$ , 因此,光程差便增大  $n$  倍;倾斜入射的情况与垂直入射的情况一样,只要计算在薄层两面上的反射光的光程差就可以了:

$$n(\overline{MK} + \overline{KN}) - \overline{MP} = n \left( \frac{2d}{\cos \beta} \right) - 2d \tan \beta \sin \alpha = 2nd \cos \beta,$$

其中,  $\alpha$ 、 $\beta$  是光对各个面的人射角(图 4.5)。

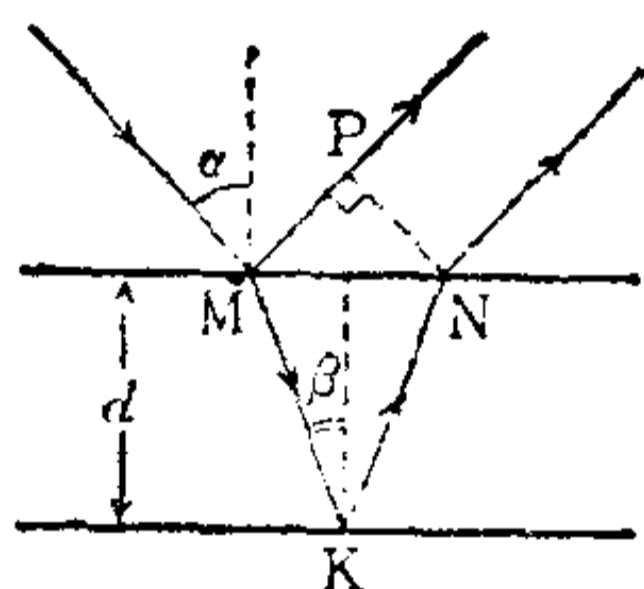


图 4.5

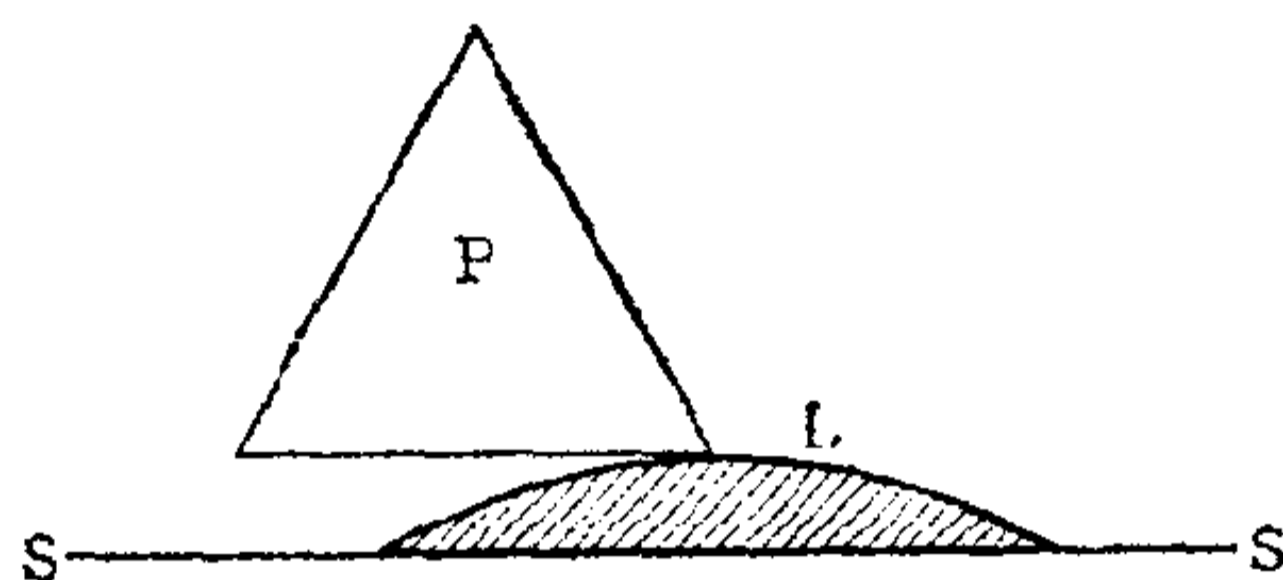


图 4.6

然而,菲涅耳用来反驳牛顿激发理论实验,使我们现在稍感困惑不解。他把背面用沥青遮住的透镜 L 置于涂黑的平面 SS 之上,再在这个透镜上安放玻璃棱镜 P(图 4.6)。假如暗的牛顿环的出现是由于光的透射所引起的,这时光在薄层第二个面上的反射遭到遏止,那么,与伸到透镜前方的棱镜的反射面相比,环就不可能变暗;但是,实际上却完全是黑的。虽然来自薄层两面的光的相互作用,无疑是菲涅耳最为关注的事,但直到光的电磁波和能量守恒定律被确立之后,才理清了光的吸收这一概念。

因此,杨氏由光学现象和音响现象的广泛对比出发,以慎重形式对干涉原理陈述如下(1804):“和声音(乐音)的情况

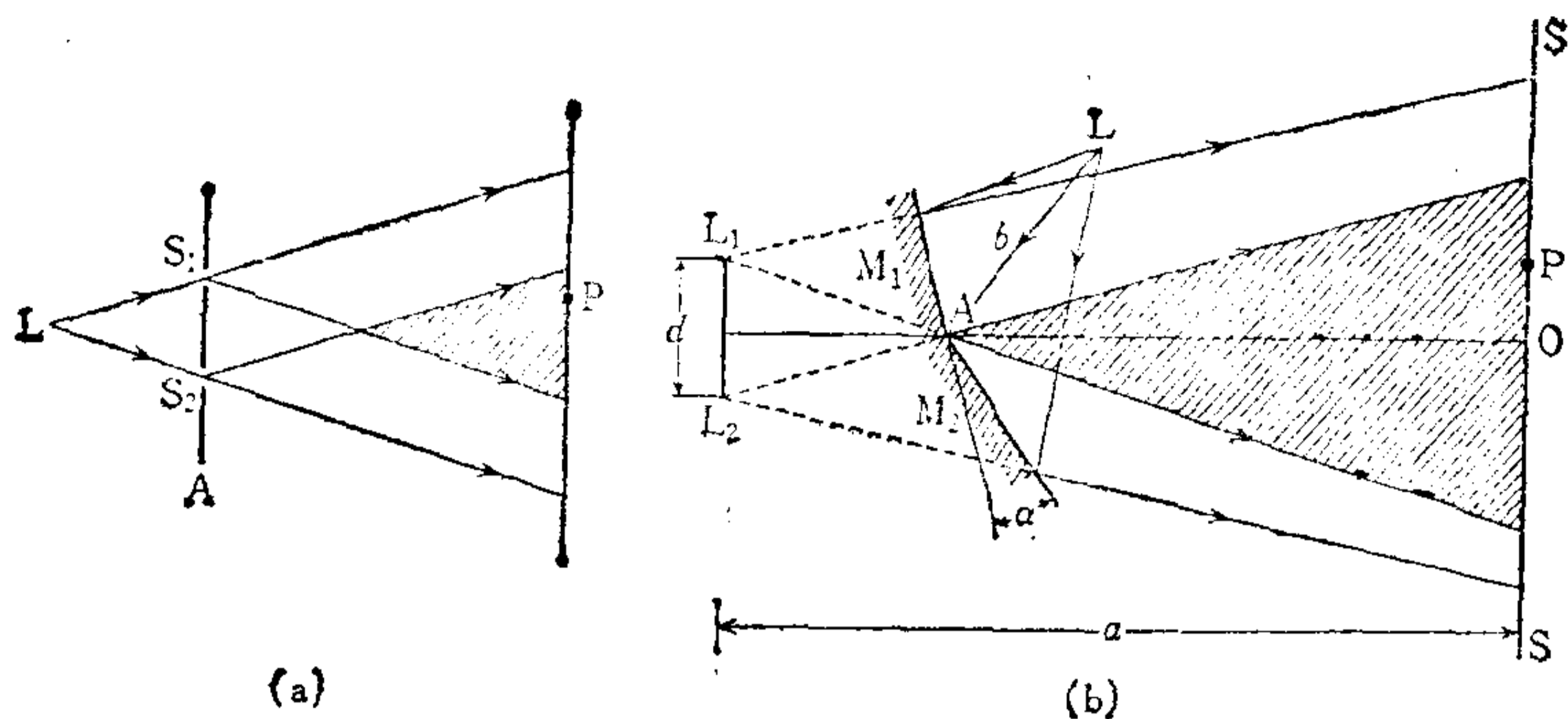


图 4.7

一样,能够相互抵消(中和)的那种相对立的性质,在(彩色)光束之中也以规则的间隔交替持续着”。而且,他认为,为了引起光的干涉,关键是把同一光源来的光在大体相近的方向上分成两束;而在两个或一个光束的路径上,能够包含反射、折射及在物体边缘上引起的衍射。鉴于这种情况,通常所谓的杨氏实验,即让来自单色光源  $L$  的光,通过屏幕  $A$  上与  $L$  等距离的两个极近的狭缝  $S_1$ 、 $S_2$  产生出可能干涉的两条光束,这种布置是根据上述想法,后来才给出的(图 4.7(a);《关于自然哲学和机械技术的讲义汇编》,1807)。

另一方面,菲涅耳除了重复格利马尔第的实验外,通过包含衍射的实验认识到干涉原理时,对他来说衍射的本质,还不是完全清楚的,所以,最好还是在不包括衍射效果的情况下,来对干涉原理进行研究。这就是使菲涅耳设想出有名的**镜的实验** (Fresnel's mirrors) 的来龙去脉。若让来自点光源  $L$  的光,入射到相互倾斜微小角度  $\alpha$  的两块平面镜  $M_1$ 、 $M_2$  上,那么,由于镜的反射便产生了  $L$  的两个虚象,它们可以起到相干光源的作用(图 4.7(b))。用这个装置进行研究之后,菲涅耳也和杨氏一样,首先提出使干涉条纹能够看到的条件,即 i) 光束必须是同时由相同光源发出的。

杨氏实验也好,菲涅耳实验也好,都假定频率为  $\nu$ 、速度为  $v$  的下列平面波分别从狭缝  $S_1$ 、 $S_2$  或光源  $L_1$ 、 $L_2$  落到屏幕的  $P$  点上:

$$V_1(\mathbf{r}, t) = a_1(\mathbf{r}) \exp [i g_1(\mathbf{r}) - i \omega t],$$

$$V_2(\mathbf{r}, t) = a_2(\mathbf{r}) \exp [i g_2(\mathbf{r}) - i \omega t],$$

该  $P$  点位于图中划斜线的可干涉范围以内. 式中, 振幅  $a_i (> 0)$  和  $g_i (i = 1, 2)$  都是位置的实数函数, 角频率  $\omega$  和频率  $\nu$ 、周期  $T$  之间的关系是  $\nu = \omega/2\pi = 1/T$ . 假设波的传播方向  $S_1P(L_1P)$ 、 $S_2P(L_2P)$  上的单位矢量为  $\mathbf{s}_1$ 、 $\mathbf{s}_2$ , 则有

$$g_i(\mathbf{r}) = \omega \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_i}{v} \right) - \delta_i = k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_i) - \delta_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \delta_i$$

$$\mathbf{k}_i \equiv k \mathbf{s}_i \quad (i = 1, 2).$$

如果以真空中的量为标准来测量媒质中的各个量, 那么它们和真空中的光速  $c$ 、波长  $\lambda_0 = cT$ 、波数  $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$  的关系是

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = v \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) = vT,$$

$$k = nk_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{\lambda} = \frac{\omega}{v}.$$

式中,  $n = c/v$  是由真空到所研究的媒质中的折射率 (绝对折射率) (由绝对折射率为  $n_1$  的媒质到  $n_2$  的媒质的相对折射率, 是  $n_{12} = n_2/n_1 = v_1/v_2$ , 它与通常的入射角  $\theta_1$  和折射角  $\theta_2$  的正弦之比  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2 = v_1/v_2$ , 即两种媒质中的光速之比是一致的).

因此,  $P$  点上合成光  $V = V_1 + V_2$  的强度  $I$  是

$$\left. \begin{aligned} I &= |V|^2 = I_1 + I_2 + I_{12} \\ I_1 &= a_1^2, \quad I_2 = a_2^2, \\ I_{12} &= 2a_1a_2 \cos \delta = 2\sqrt{I_1I_2} \cos \delta \end{aligned} \right\}, \quad (4.1.6)$$

式中,位相差是  $\delta = g_1 - g_2 = (2\pi/\lambda_0)\Delta\mathcal{S}$ , 而  $\Delta\mathcal{S}$  是来到 P 点的两束光的光程差. 所以,光强度应该在

$$|\delta| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

时取极大值

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \quad (4.1.7a)$$

而在

$$|\delta| = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$$

时取极小值

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}. \quad (4.1.7b)$$

因此,把与亮干涉条纹  $I_{\max}$  对应的位相差  $\delta$  除以  $2\pi$ , 所得到的  $|\delta|/2\pi = |\Delta\mathcal{S}|/\lambda_0 = m$ , 就成为整数  $0, 1, 2, \dots$ , 它叫做干涉的级. 特别是若  $I_1 = I_2$ , 则有

$$I = 2I_1(1 + \cos\delta) = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2},$$

$$I_{\max} = 4I_1, \quad I_{\min} = 0. \quad (4.1.8)$$

假如位相差  $\delta$  在时间上完全不规则,则  $\cos\delta$  的时间平均值就为零,这时看不到干涉.但是,如前节所述,光源发射位相常数  $\delta_i$  一定的光,只有  $10^{-8} \sim 10^{-9}$  秒的时间. 因此,用不同光源发出的光来保持上面那样有规则的位相差,事实上是不可能的.

杨氏和非涅耳认为产生这种情况的原因是:虽然点光源发出由数百万个波构成的规则波列,但却因火焰中发光粒子始终变化,致使波列中出现了不规则性,因而在两个不同光源之间简单的关系并不成立;杨氏还列举蜂群的翅膀振动声,作为与之对应的音响学的一个实例.他假设,单个蜂经常出入于它的蜂群,但是留在蜂群中的蜂翅响声和进入蜂群的蜂翅响声位相却不一致.由这样的两个蜂群发出的声波波列不能产生耳朵可以听到的干涉,但是,由同一蜂群发出的波列却能引起干涉.这是因为,在由该蜂群发出的各个波列之间,同时

产生相同的位相变化。他还假设，与火焰相同的情况亦适合于发光的固体。进一步，菲涅耳认为，就两个不同光源发出的光所谈到的情况，对于由同一光源的不同地方所发出的光来说也是成立的。“非相干性”(incoherent)(原义是不相结合)这个术语，就是菲涅耳针对两个不同光源发出的光的行为提出来的。

其次，菲涅耳还列举了以下两点，作为干涉实验得以成功的条件：ii) 光源的大小必须有限；iii) 由镜子所产生的二次光源  $L_1$ 、 $L_2$  的距离必须非常小。实际使用的光源当然具有大小，但是，我们把它看作连续的点光源的集合，来考虑一下由光源的各个点到屏幕上任一点  $P$  的光程差。为此，首先研究在平面  $LL_1L_2$  内垂直于  $LA$  把点光源  $L$  向  $L'$  移动  $\zeta$  的情况(设图 4.8 所示的方向为正)。这时二次光源  $L_1$ 、 $L_2$  移到  $L'_1$ 、 $L'_2$ ，虽然干涉条纹的间隔(假如忽略不计  $L_1L_2 = L'_1L'_2 = d$  的

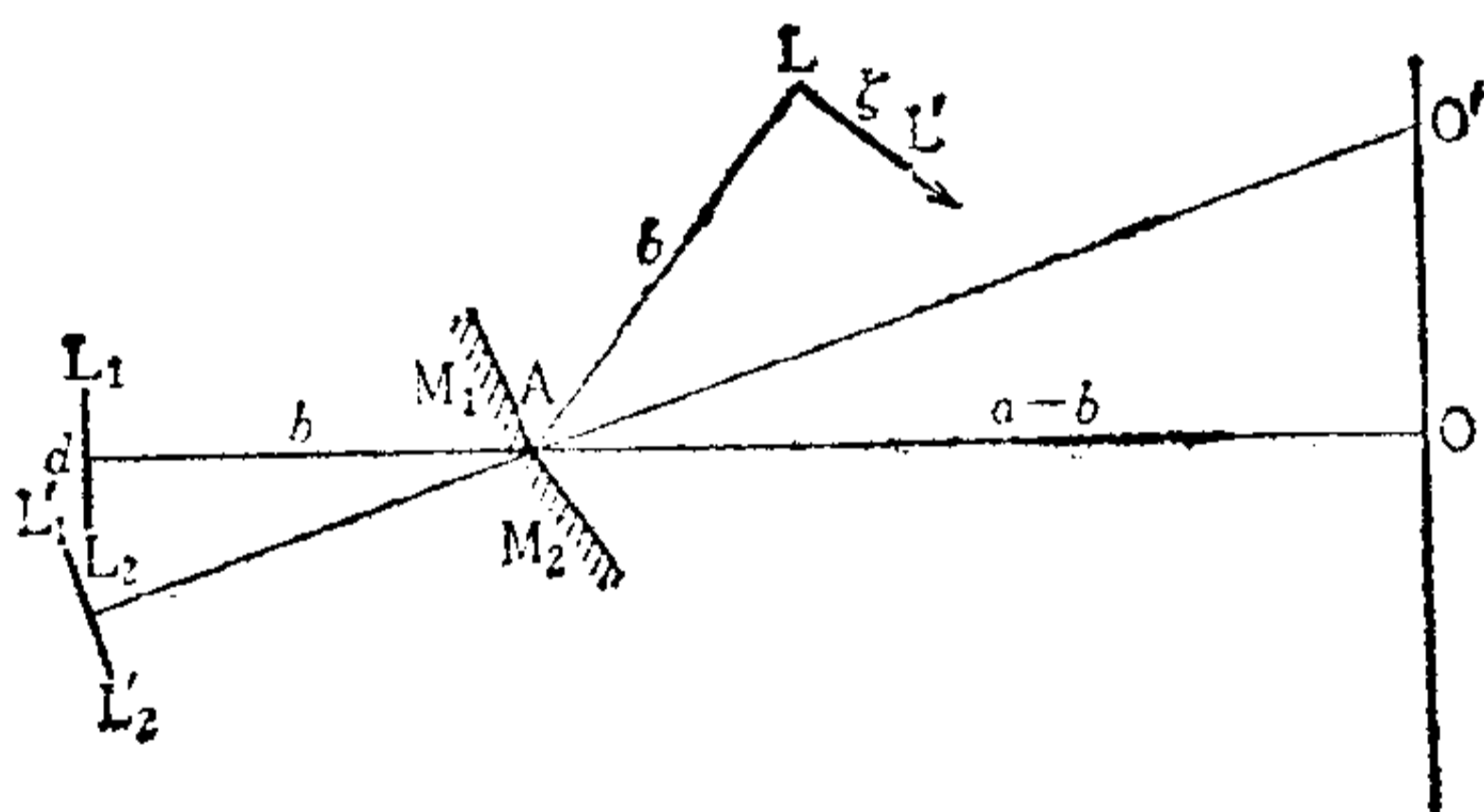


图 4.8

二次以上的项)并无变化，但是它的中心却变成  $L'_1L'_2$  的中垂线上的点  $O'$ 。由  $LL' = L_1L'_1 = L_2L'_2 = \zeta$  可知， $OO' = (a - b) \times \zeta / b$ ，所以，若由  $L$  到  $P$  点的光程差为  $\Delta \mathcal{S}$ ，则由  $L'$  到  $P$  点的光程差就是

$$\Delta \mathcal{S}' = \Delta \mathcal{S} - \frac{nd}{a} OO' = \Delta \mathcal{S} - D\zeta,$$



$$D \equiv \frac{(a-b)nd}{ab}, \quad (4.1.9)$$

相应的位相差为

$$\delta(\zeta, \Delta\mathcal{S}) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\Delta\mathcal{S} - D\zeta). \quad (4.1.10)$$

现在，我们假设光源是一个长度为  $e$  的狭缝，其中心放在  $L$  上。若把它分成垂直于  $AL$  的微小缝元，并假设从包含  $L'$  的缝元  $d\zeta$  通过一边的镜子  $M_1$  来到  $P$  点的光的强度为  $i_1 d\zeta$ ，则由式 (4.1.8) 可知，光源缝元  $d\zeta$  对  $P$  点所产生的光强度是  $i(\zeta, \Delta\mathcal{S}) = 2i_1(1 + \cos\delta)d\zeta$ ，因此，由大小为  $e$  的光源落到  $P$  点的总光强度便以下式确定：

$$\left. \begin{aligned} I(e, \Delta\mathcal{S}) &= 2i_1 \int_{-e/2}^{+e/2} [1 + \cos\delta(\zeta, \Delta\mathcal{S})] d\zeta \\ &= 2I_1 \left[ 1 + \left( \sin \frac{\pi D e}{\lambda_0} / \frac{\pi D e}{\lambda_0} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta\mathcal{S} \right) \right] \\ I_1 &\equiv i_1 e \end{aligned} \right\} \quad (4.1.11)$$

若使用迈克耳孙的**可见度** (visibility)

$$\mathcal{V} \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (4.1.12)$$

来作为分辨干涉条纹的尺度，那么，因为在这里有

$$\begin{aligned} I_{\max} &= 2I_1 \left[ 1 + \left( \sin \frac{\pi D e}{\lambda_0} / \frac{\pi D e}{\lambda_0} \right) \right], \\ I_{\min} &= 2I_1 \left[ 1 - \left( \sin \frac{\pi D e}{\lambda_0} / \frac{\pi D e}{\lambda_0} \right) \right], \end{aligned}$$

所以结果就是

$$\mathcal{V} = \left| \sin \frac{\pi D e}{\lambda_0} \right| / \frac{\pi D e}{\lambda_0}. \quad (4.1.13)$$

为了得到  $\mathcal{V} \geq 0.9$ ，必须是

$$e \leq \frac{\lambda_0}{4D} = \frac{\lambda_0 ab}{4(a-b)nd} = \frac{\lambda_0 a}{\mathcal{S}(a-b)n \sin \alpha}. \quad (4.1.14)$$

倘若规定所使用的光线,如镉红线  $\lambda_0 = 6348 \text{ \AA}$ ,再取镜的相互倾斜度为  $\alpha = 2'$ ,  $a = 120\text{cm}$ ,  $b = 100\text{cm}$ , 设  $n = 1$ ,则在狭缝大小为  $e \approx 0.83\text{mm}$ ,  $L_1$ 、 $L_2$  的距离为  $d = 2b \sin \alpha \approx 1.16\text{mm}$  的情况下,亮干涉条纹的间隔就是  $a\lambda_0/nd \approx 0.66\text{mm}$  左右。

条件 iii) 也和菲涅耳提出的另一个条件有关,即: iv) 光程差必须足够小。干涉条纹随着光程差的增大而消失,这在调节干涉仪时会经常遇到;在白光的情况下,条件 iv) 显得特别重要,但即使将辉线光谱用作光源时,光在平均波长  $\bar{\lambda}_0$  的附近也会具有某一宽度  $\Delta\lambda_0$ 。这样,当光的波长由  $\bar{\lambda}_0 - (\Delta\lambda_0/2)$  延续到  $\bar{\lambda}_0 + (\Delta\lambda_0/2)$  时(这里  $\Delta\lambda_0/\bar{\lambda}_0 \ll 1$ , 也就是假设光是**准单色**的 (quasi-monochromatic)), 干涉条纹的中心处于两个狭缝  $S_1$ 、 $S_2$  或二次光源  $L_1$ 、 $L_2$  的中垂线上,不管波长如何,该点的光程差都相同,所以与前面所说的完全一致,但是,第  $m$  级亮条纹却与波长成正比,其位置有一个相当微小的偏移,从而扩展成了  $\Delta x = (|m| a/nd)\Delta\lambda_0$ 。当该宽度  $\Delta x$  与下一个亮条纹的平均间隔  $a\bar{\lambda}_0/nd$  相比可以忽略不计时,即

$$|m| \ll \frac{\bar{\lambda}_0}{\Delta\lambda_0}, \quad \text{因而} \quad |\Delta\mathcal{S}| \ll \frac{(\bar{\lambda}_0)^2}{\Delta\lambda_0} \quad (4.1.15)$$

时,干涉条纹可以分辨。如果深入到谱线的发射机理来考虑,则发出的光就由有限长度的波列构成,在观察所需要的时间间隔内数量相当多的这种波列是在不规则的时间间隔内来到的,从而造成了这种情况。现在,设每个波列持续的时间  $\Delta t$  都一样,因此,它们就会具有完全相等的长度  $\Delta L = c\Delta t$ 。这些波列一旦进入产生干涉的装置,便各自分成长度相等的两个波列。倘若观察点 P 上的光程差大于波列的长度,则同一入射波列产生的一对波列中,在一个到达 P 点之前,另一个刚才已经过去,在 P 点合成的波列总是来源于不同的人射波列,而

且它们还是无秩序地相继来到的,所以,如果就观察的时间进行平均,则这些波列对式(4.1.6)的干涉项  $I_{12}$  的贡献便成为零. 在实际的光谱线中,因发光时的辐射衰减、原子的无规则热运动所引起的相对于观察者的多普勒(Doppler)效应、其它原子所引起的扰动等等缘故,波列会受到不规则的变化, $\Delta t$ 和与之相应的频率范围  $\Delta\nu$  只有作为平均值才具有意义,如后面所示(§4.5),它们之间的关系是  $\Delta t \Delta\nu \geq 1/4\pi$ . 由波列的这个平均持续时间  $\Delta t$  (相干时间 (coherence time)) 而定义的波列平均长度  $\Delta l$  (相干长度 (coherence length)) 是

$$\Delta l \equiv c \Delta t \geq \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{(\bar{\lambda}_0)^2}{\Delta\lambda_0}. \quad (4.1.16)$$

把它和式(4.1.15)进行比较,我们就应该说,为了使准单色光干涉,光程差必须小于光的相干长度. 为了看到可见度  $\mathcal{V}$  与这种光源的强度分布有着什么样的关系,只要用波数  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  代替波长来进行同样的讨论就可以了. 因为与光程差  $\Delta\mathcal{S}$  对应的位相差是  $\delta(k_0, \Delta\mathcal{S}) = k_0\Delta\mathcal{S}$ , 所以,波数范围  $dk_0$  内的光的成分在 P 点产生的光强度是  $i(k_0, \Delta\mathcal{S})dk_0 = 2i_1(k_0) [1 + \cos(k_0\Delta\mathcal{S})]dk_0$ , 其中除去以某一平均波数  $\bar{k}_0$  为中心的狭窄范围之外,无论哪个光束的强度分布  $i_1(k_0)$  均可忽略不计,因此,若写成

$$j(x) = i_1(\bar{k}_0 + x), \quad x = k_0 - \bar{k}_0, \quad (4.1.17)$$

则落到 P 点上的总光强度就是

$$\begin{aligned} I(\Delta\mathcal{S}) &= 2 \int j(x) \{1 + \cos[(\bar{k}_0 + x)\Delta\mathcal{S}]\} dx \\ &= P + C(\Delta\mathcal{S}) \cos(\bar{k}_0\Delta\mathcal{S}) \\ &\quad - S(\Delta\mathcal{S}) \sin(\bar{k}_0\Delta\mathcal{S}) \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= 2 \int j(x) dx, \quad C(\Delta\mathcal{S}) = 2 \int j(x) \cos(x\Delta\mathcal{S}) dx \\ S(\Delta\mathcal{S}) &= 2 \int j(x) \sin(x\Delta\mathcal{S}) dx \end{aligned} \right\} \quad (4.1.19)$$

因为仅仅对于  $|x| \ll k_0$  来说,  $i(x)$  的值才不为零, 所以, 为了求得  $I$  的极值  $I_{\text{ext}}$ , 只要相对于  $\cos(\bar{k}_0 \Delta \mathcal{S})$ 、 $\sin(\bar{k}_0 \Delta \mathcal{S})$  的变化忽略不计  $C$  和  $S$  的变化, 来计算  $\partial I / \partial(\Delta \mathcal{S}) = 0$  就可以了. 由此得到  $\tan(\bar{k}_0 \Delta \mathcal{S}) = -(S/C)$ ,  $I_{\text{ext}} = P \pm |\sqrt{C^2 + S^2}|$ , 而可见度则由下式确定

$$\mathcal{V} = \frac{|\sqrt{C^2 + S^2}|}{P}. \quad (4.1.20)$$

若  $i(x)$  对于  $x$  是对称的, 则  $S = 0$ , 上式成为

$$\mathcal{V} = \frac{|C|}{P}. \quad (4.1.20a)$$

如果  $i(x)$  是高斯型分布  $i_0 \exp(-\alpha^2 x^2)$  ( $i_0, \alpha$  为常数), 则式 (4.1.20a) 就是  $\mathcal{V} = \exp[-(\Delta \mathcal{S} / 2\alpha)^2]$  (图 4.9). 在通过实测谱线光的干涉条纹的可见度曲线来分析谱线的结构时, 这种情况是会用到的. 迈克耳孙(1892)对镉红线  $\lambda_0 = 6438 \text{ \AA}$

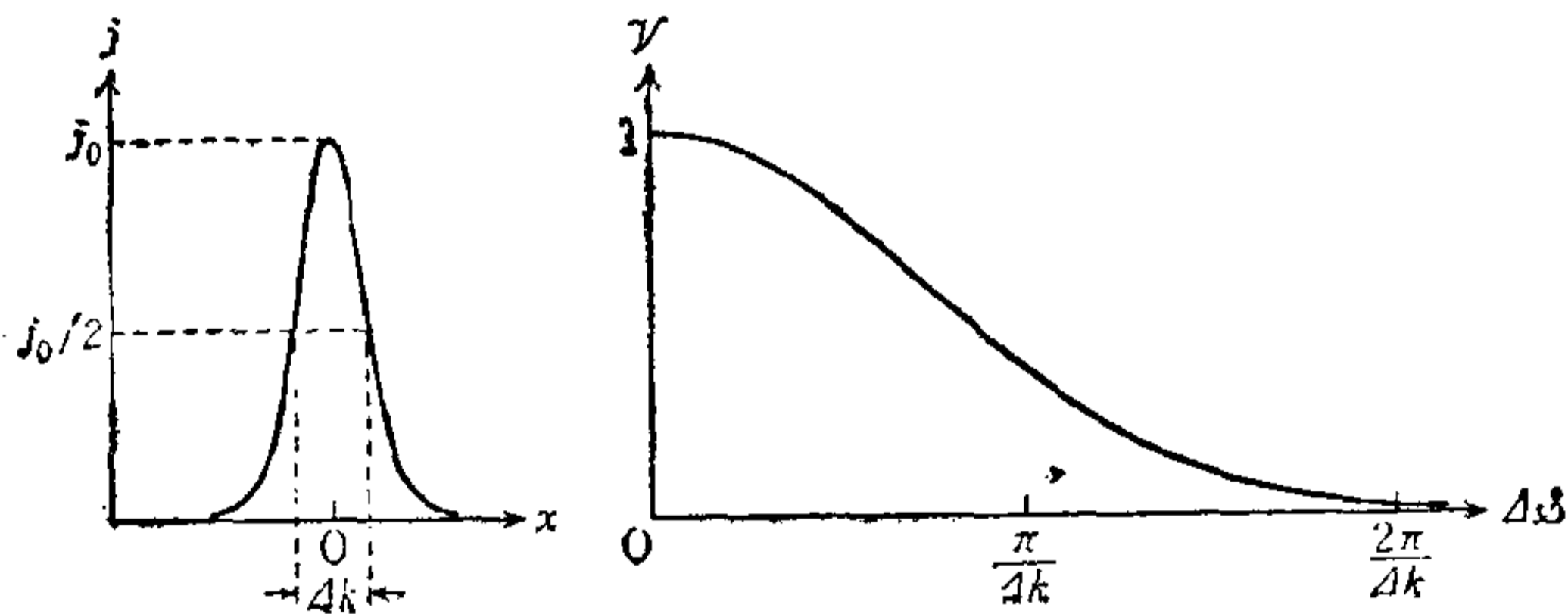


图 4.9

观察到光程差为  $(5 \times 10^5) \lambda_0$  ( $\sim 30$  厘米) 左右的干涉条纹 (倘若是高斯分布, 则在波长最大值的  $1/2$  处, 宽度为  $\Delta \lambda_0 = 0.013 \text{ \AA}$ ), 而对白光来说, 一般在光程差大于平均波长的 10 倍左右时, 干涉条纹就不会出现了.

## § 4.2 光的波动——惠更斯-菲涅耳-基尔霍夫原理

杨氏在重新研究格利马尔第的衍射实验之后, 曾经叙述



过他的想法：在衍射体影子中形成的衍射条纹，是由衍射体两端向内侧弯曲的光相互干涉产生的，而影子以外的条纹，则依靠直接来自光源的光和在衍射体两端反射的光的干涉所产生。光在衍射体两端的折射，是由牛顿以来公认的衍射体表面的以太层引起的。开始菲涅耳也认为（1815），由光源直接来的球面波和在衍射体两端弯曲的光的球面波发生干涉，从而在衍射体影子外侧给出了以光源和衍射体这一侧的端点为焦点的双曲线型衍射条纹，而在影子内部则给出了以衍射体两端为焦点的双曲线型衍射条纹。但是，菲涅耳却几乎丢弃了杨氏的看法，后者认为，在衍射体两端，光由于某种反射而弯曲。这是因为，即使把剃刀背面磨好来用，也得不到比刀刃一边更明亮的衍射条纹。另外，菲涅耳的看法也和折射的环境（deflecting atmosphere）相脱离。这是因为，在宽度相等的狭缝上，两个边作成锋利的棱也好，作成圆柱状也好，都只能给出相同的衍射条纹。进而，当使用狭缝时，按杨氏的观点，只有由狭缝两端来的光和由狭缝进入的光才互相叠加，所得到的衍射条纹应该与通过菲涅耳镜得到的干涉条纹相同，但实际上却发现条纹的出现和理论并不一致，而是更宽一些。为了演示这个结果，菲涅耳把透镜置于狭缝上，试图让光源的象成在观察衍射条纹用的屏幕上，但是，如果渐次减小狭缝的宽度，那么，即使没有透镜，通过狭缝的全部光束不仅包含由狭缝两端来的光，而且也包含通过狭缝正中的光，证明了条纹的变宽。这样一来，菲涅耳承认，不仅碰到衍射体端部的光，而且全部光都向所有的方向扩展，由于它们相互干涉，便产生出衍射效果；而且，他还考虑到惠更斯曾认为是各自独立的二次波之间的相干性（这个“修正了的”惠更斯原理，就是所谓的**惠更斯-菲涅耳原理**），从这个立场出发，菲涅耳能够系统而定量地说明光的直线传播、反射折射定律及许多衍射现象（1818



年巴黎科学院悬赏论文). 与振动曲线相应, 使用考纽(Cornu)螺线的图解方法, 是 1874 年由 A·考纽提出的。

由菲涅耳这个新的观点来看, 杨氏的想法之所以导致衍射条纹是双曲线的这个正确结论, 应该说是因为, 即使对衍射现象有所贡献的不单是碰到衍射体两端的光, 但它毕竟还是给出了特别明显的贡献。实际上, 索末菲(A. Sommerfeld, 1894) 用半无限平面所产生的平面波衍射的严格解的结构, 证明了杨氏学派对衍射的看法, 即可以认为衍射是直接光和由衍射小孔来的边界波(boundary waves)的叠加的看法。在一般衍射的情况下, 给出与菲涅耳理论同样的规范结论, 是由马吉(G. A. Maggi, 1888) 和鲁比诺维茨(A. Rubinowicz, 1917, 24) 各自独立完成的。

由于夫琅和费(1821—22)的工作, 使人们对光的衍射的认识更进了一步。他所处理的是衍射现象中极为特殊的情况, 但对光学仪器的应用却具有重要的意义; 这种情况是: 入射到衍射小孔面的光的波面, 和与衍射面上任意一点 P 保持一定光程差的(假想的)面(衍射波面)均为平面。夫琅和费把望远镜对准光源狭缝, 在其物镜前面平行于光源狭缝放置衍射用的狭缝, 而用目镜看到了衍射条纹。利用这种装置会使衍射图象更加明显, 而且在物镜上的狭缝的各点, 全部会产生相同的衍射条纹, 所以, 就没有必要象菲涅耳的情况那样, 由于从线状光源不同点来的光的非相干性, 去设法使光源狭缝和衍射狭缝的边缘严格平行。在这种情况下, 若使衍射狭缝的宽度减小, 则衍射图象的极大和极小便全部从中心对称地扩展开来, 亮度亦随着减小。但是, 保持衍射狭缝的方向不变, 而让它在狭缝平面内移动时, 衍射条纹的形状和位置也不会发生变化。因此, 为要想在狭缝特别细的情况下得到明亮的图象, 自然就想出这样的方案: 在物镜上放置许多相等的平

行的细狭缝。夫琅和费把涂黑的纸对折起来，使两个相同的平行狭缝  $S_1$ 、 $S_2$  的间隔可以自由变化，当他进行观察时，看到的不是单纯的衍射条纹的增强效果，而是在图象中分散着许多亮度弱的新条纹。这是因为，虽然  $S_1$ 、 $S_2$  中的无论哪一个都只在同样的相对位置上产生同样的衍射条纹，但是，假如两者叠加起来，而且望远镜焦距也足够长，那么，能够看到干

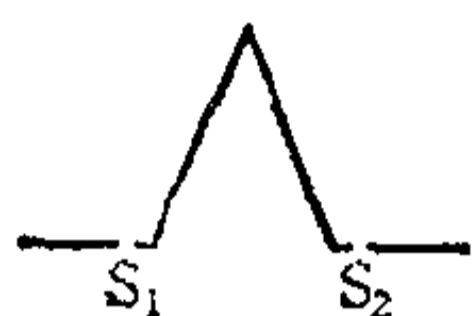


图 4.10

涉条纹的条件 i)~iv) 即可满足，该条纹与把  $S_1$ 、 $S_2$  作为二次光源的非涅耳镜在本质上是相同的。这不仅使非涅耳干涉条纹的性质更加明确，而且假如继续增加这种狭缝的数目，便会成为衍射光栅的方案（1785 年里登豪斯 (D.Rittenhouse) 已经发现了衍射光栅的原理，但却没有引起社会的关注，在 1819 年又由夫琅和费再次发现）。

希威特 (F. M. Scherdt, 1835) 给出了这种夫琅和费衍射的理论，而且证明了非涅耳理论的正确性，他宣称“波动论准确地预言衍射现象，和(牛顿的)引力理论预言天体运动，是完全相同的”。进一步，亥姆霍兹 (1859) 和基尔霍夫 (1882~83) 对惠更斯-非涅耳原理给出了明确的解析表达。下面，我们打算按照基尔霍夫的作法来进行讨论。基尔霍夫的规范化，本质上是对于标量波的，虽然他的衍射理论是和菲涅耳理论相同的一种近似理论，仅仅在光的波长比衍射孔径短的情况下才成立，但它却能够给出方向因子的表达式，这是菲涅耳不曾确定的。

#### a) 惠更斯-菲涅耳原理和亥姆霍兹-基尔霍夫定理

菲涅耳在对“修正了的”惠更斯原理进行规范化时，才把

光考虑成与空气中的声音类似的一种以太中的扰动。在此以后 (1821), 他联系偏振现象, 提出光以太的弹性理论 (参考 §4.4 (a))。现在, 我们假设在原点有一个单色光源 (类似于恒定频率的声源), 而且, 由它发出的发散球面波可以用下列速度势来确定

$$\Phi = \frac{\exp[ik(r - ct)]}{r} \quad (4.2.1)$$

(参考 §3.6)。在该波的半径为  $r = r_0$  的波面  $S$  上的以太粒子, 在时刻  $t$  受到时刻  $t - (r_0/c)$  从光源发出的扰动所产生的影响。在时刻  $t$  到达波面  $S$  的扰动继续向外传播, 于时刻  $t' = t + (r'_0 - r_0)/c$  到达半径为  $r'_0$  的波面  $S'$ 。菲涅耳首先假定: i) 在时刻  $t'$  波面  $S'$  上的以太粒子的振动, 不是由光源在时刻  $t' - (r'_0/c)$  发出的扰动引起的, 而是由波面  $S$  上的粒子在时刻  $t$  的振动引起的。也就是说, 波面  $S$  的各面元  $dS$  起到了二次光源 (声源) 的作用, 这个二次光源是靠一次波对包含在  $dS$  中的以太粒子所给予的位移和速度来维持的。而且, ii) 考虑到相互干涉, 而把由这些二次光源  $dS$  发出的二次波进行合成, 其结果给出了波面  $S'$ 。进一步还必须保证, 这些二次光源不仅对  $S$  的外部产生正常的效果, 而且对  $S$  的内部还不给予任何影响。为了讨论这个问题, 用压缩率 (condensation)  $s$  来代替以太密度 (声波中的空气密度)  $\rho$ , 那将是很方便的; 这里的  $s$ , 用以太密度  $\rho$  对平衡状态  $\rho_0$  变化的比率  $\rho = \rho_0(1 + s)$  来定义。假如就  $s$  写出波动方程的话, 那么它就是

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \Delta \Phi, \quad c^2 s = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.2.2)$$

(这里把声速  $u$  当成了光速  $c$ )。菲涅耳认为, 假如完全考虑到波面  $S$  上各点的一次波的压缩率  $s$  及速度  $v$  的动力学效果,

则上述要求大概就会得到满足,但是,实际上他所处理的,仅仅局限于这样的情况,即:波面  $S$  具有大于波长  $\lambda$  的半径,而且下列关系式在  $S$  上的各点近似成立

$$v = cs. \quad (4.2.3)$$

为了在  $S$  的外部,而且也在离  $S$  很远的点上,都给出正常的效果,假如给予  $S$  的各面元  $dS$  的速度和一次波传到它们上面的速度相同,也就足够了。但是,为了使获得的结果总是正确的,还必须假定: iii) 波面的面元  $dS$  是进行振动的,其振幅相对于一次波振幅的比为  $1:\lambda$ ,而且较一次波超前了  $1/4$  周期(参考(4.1.5))。

这个附加假定 iii) 之所以必要,是由于人们每每都把菲涅耳理论看成是缺乏物理基础的一个方便的计算手段。显然,倘若忠实地用解析方法完成菲涅耳的设想,则波面从面元  $dS$  便起到二次光源的作用,这个二次光源产生一个由力学定律所确定的符合要求的波;而且,对二次波的振幅和相位不作任何随心所欲的假定,即可导致正确的结果。一般都是把波数为  $k$  的波动的速度势写成  $\Phi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \exp(ikct) = \Psi(x, y, z) \cdot \exp(-i\omega t)$ , 并假设包围单色光光源的封闭曲面为  $S$ , 来求  $S$  外部与  $S$  上的一点  $Q$  相距为  $r_1$  的  $P$  点上的速度势的。假设在  $Q$  点上封闭曲面  $S$  的内向法线为  $n$ , 则在外向法线方向上  $Q$  点的以太粒子速度为  $(\partial\Psi/\partial n) \exp(-i\omega t)$ , 故以太粒子通过  $Q$  上的曲面面元  $dS$  以比率  $(\partial\Psi/\partial n) \times \exp(-i\omega t) dS$  流出。与通过这个  $dS$  的以太流产生的同时,  $S$  内的光源把  $Q$  上的压强由平衡状态的压强力  $p_0$  变到  $p_0 + \delta p$ 。设平衡状态的以太密度为  $\rho_0$ , 则由(4.2.2)可知

$$\delta p = \rho_0 c^2 s = -\rho_0 i \omega \Psi \exp(-i\omega t).$$

因此, 曲面面元  $dS$  应该受到大小为  $-\rho_0 i \omega \Psi \exp(-i\omega t) dS$  的压力。所以, 如果现在  $S$  内部既无光源亦无以太粒子, 那



么,为了在  $S$  外部得到由速度势  $\psi \exp(-i\omega t)$  所给定的效果,必须在整个封闭曲面  $S$  上引进具有如下性质的光源:

1°) 在各面元  $dS$  上,以  $(\partial\psi/\partial n)\exp(-i\omega t)dS$  的比率产生以太粒子;

2°) 垂直于  $dS$ , 让力  $-\rho_0 i\omega\psi \exp(-i\omega t)dS$  作用到和  $dS$  接触的以太粒子上.

因为1°)是把  $dS$  当作强度为  $(1/4\pi)(\partial\psi/\partial n)\exp(-i\omega t)dS$  的光源,所以,它在  $P$  点产生的速度势就是

$$\frac{1}{4\pi r_1} \left( \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) \exp[ik(r_1 - ct)] dS, \quad (4.2.4)$$

又因在  $Q$  点作用于  $S$  外向法线方向上的凝聚力  $F \exp(-i\omega t)$  所产生的波的速度势为

$$-\frac{iF}{4\pi\rho_0\omega} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\exp[ik(r_1 - ct)]}{r_1} \right\},$$

所以,根据2°)得到的  $P$  点的速度势就是

$$-\frac{\psi}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\exp[ik(r_1 - ct)]}{r_1} \right\} dS. \quad (4.2.5)$$

因此,若把式(4.2.4)与式(4.2.5)之和对整个封闭曲面  $S$  积分,则可得到在  $S$  上分布的全部光源的效果

$$\begin{aligned} \Phi(P, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\exp[ik(r_1 - ct)]}{r_1} \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \right. \\ \left. \times \left( \frac{\exp[ik(r_1 - ct)]}{r_1} \right) \right\} dS. \quad (4.2.6) \end{aligned}$$

当  $P$  点位于内部不包含光源的封闭曲面之中时,亦可进行同样的讨论.

亥姆霍兹和基尔霍夫指出,这个惠更斯-菲涅耳原理是表示齐次波动方程解的一个积分定理的近似表达.虽然基尔霍夫认为,光是完全弹性体以太的横波振动,而且还在波动方程



的解中加进了其散度为零的条件，但是他的这种处理是针对标量波的。

波数为  $k = \omega/c$  的单色光  $V(x, y, z, t) = U(x, y, z) \cdot \exp(-i\omega t)$  的空间部分所遵从的波动方程（亥姆霍兹方程）是

$$(\Delta + k^2)U(x, y, z) = 0, \quad (4.2.7)$$

亥姆霍兹积分定理是把这个方程在任意一点 P 上的解，用包围 P 点的任意封闭曲面 S 上的所有点上的解的值及其一阶导

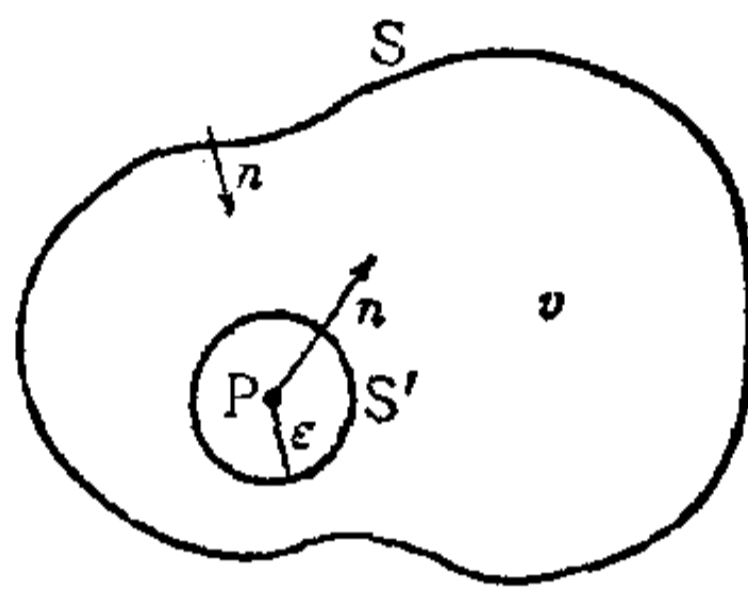


图 4.11

数值来表示的(图 4.11):

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(iks)}{s} \right) - \frac{\exp(iks)}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS, \quad (4.2.8)$$

式中  $n$  是 S 的内向法线， $s$  是点 P 和点  $(x, y, z)$  之间的距离。为了研究这个定理，只要把格林定理应用于亥姆霍兹方程的两个独立解  $U$ 、 $U'$  就可以了，该方程在 S 内及 S 上具有连续的一阶及二阶偏导数。设  $v$  为 S 所包围的体积，则有

$$-\iint_S \left( U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = \iiint_v (U \Delta U' - U' \Delta U) dv = 0,$$

在这里设  $U'(x, y, z) = \exp(iks)/s$ ，但因该函数在  $s = 0$  具有奇异性，所以必须把点 P 从积分范围中除掉。为此，最好是

选择一个以 P 为中心,  $\epsilon$  为半径的小球面  $S'$ , 再对表面  $S$  及  $S'$  所包围起来的范围进行积分:

$$\begin{aligned} & \iint_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(iks)}{s} \right) - \frac{\exp(iks)}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS \\ &= - \iint_{S'} \left\{ U \frac{\exp(iks)}{s} \left( ik - \frac{1}{s} \right) - \frac{\exp(iks)}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS' \\ &= - \iint_{\Omega} \left\{ U \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \left( ik - \frac{1}{\epsilon} \right) - \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\partial U}{\partial n} \right\} \epsilon^2 d\Omega \end{aligned}$$

其中,  $\Omega$  是与 P 相关的立体角. 因为左边对  $S$  的积分与  $\epsilon$  无关, 所以右边必须取  $\epsilon \rightarrow 0$  的极限值. 在这个极限上, 右边被积分函数中的第一项和第三项对积分没有贡献, 只剩下由第二项得来的  $4\pi U(P)$ .

与这个亥姆霍兹定理完全并协的形式是存在的. 考虑一个把光源完全包括在内的封闭曲面  $S$ , 假设  $U$  在它的内部直到二阶都连续而可微, 那么, 当 P 位于  $S$  外部时, 式 (4.2.8) 是成立的, 若 P 在  $S$  内部, 则  $U(P) = 0$ . 但是, 在这种情况下, 不仅应该规定  $S$  上的边界值, 而且还应该规定解在  $s \rightarrow \infty$  时的行为 (索末菲的“有限条件” (Endlichkeitbedingung),  $|sU| < K, s \rightarrow \infty$ ; 及“发散条件” (Ausstrahlungsbedingung),  $s(\partial U/\partial s - ikU) \rightarrow 0, s \rightarrow \infty$ ).

一般来说,  $V(x, y, z, t)$  是波动方程  $\Delta V = (1/c^2)\partial^2 V/\partial t^2$  的解, 它可用傅里叶积分来表示:

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\omega}(x, y, z) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.2.9)$$

这时, 把亥姆霍兹积分定理式 (4.2.8) 应用于傅里叶分量

$$U_{\omega}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, y, z, t) e^{i\omega t} dt,$$

可以得出

$$U_{\omega}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ U_{\omega} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(iks)}{s} - \frac{\exp(iks)}{s} \right) \right. \\ \left. \times \frac{\partial U_{\omega}}{\partial n} \right\} dS,$$

因此,根据式(4.2.9),即能求得

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S dS \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U_{\omega} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{s} \right) + \frac{i\omega}{sc} \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial s}{\partial n} \right] e^{-i\omega(t-s/c)} - \frac{e^{-i\omega(t-s/c)}}{s} \frac{\partial U_{\omega}}{\partial n} \right\} d\omega \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ [V]_{t-s/c} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{cs} \frac{\partial s}{\partial n} \right. \\ \left. \times \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right]_{t-s/c} - \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right]_{t-s/c} \right\} dS \quad (4.2.10)$$

(这是基尔霍夫给出的一般表达式)。对于积分内的解  $V$  及其导数来说,必须使用**时间推迟值** (retarded values),也就是比时刻  $t$  早一段时间的值,即在光由点  $(x, y, z)$  到达点  $P$  所需要的时间之前的那个时刻  $t - s/c$  的值。

#### b) 菲涅耳-基尔霍夫衍射理论

那末,当波数为  $k = \omega/c$  的单色光  $V(x, y, z, t) = U(x, y, z) \exp(-i\omega t)$  由点光源  $L$  穿过不透明屏蔽面上任意形状的小孔  $\mathcal{A}$  前进时,落到屏蔽面的与光源相反一侧的任意点  $P$  上的光为  $U(P)$ ,衍射问题便归结为求出这样的  $U(P)$ 。现在我们假设, i) 小孔  $\mathcal{A}$  的一维尺度大于波长  $\lambda$ ,但相对于  $L$  和  $P$  到屏蔽面的距离却很小。为了求出  $U(P)$ ,可以把由小孔  $\mathcal{A}$ 、屏蔽面上光未照到的一侧  $\mathcal{B}$ 、以及中心为  $P$ 、半径为  $R$  的大球面  $\mathcal{C}$  所构成的封闭曲面,取作亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理(4.2.8)的积分范围  $S$ 。这样一来,则有

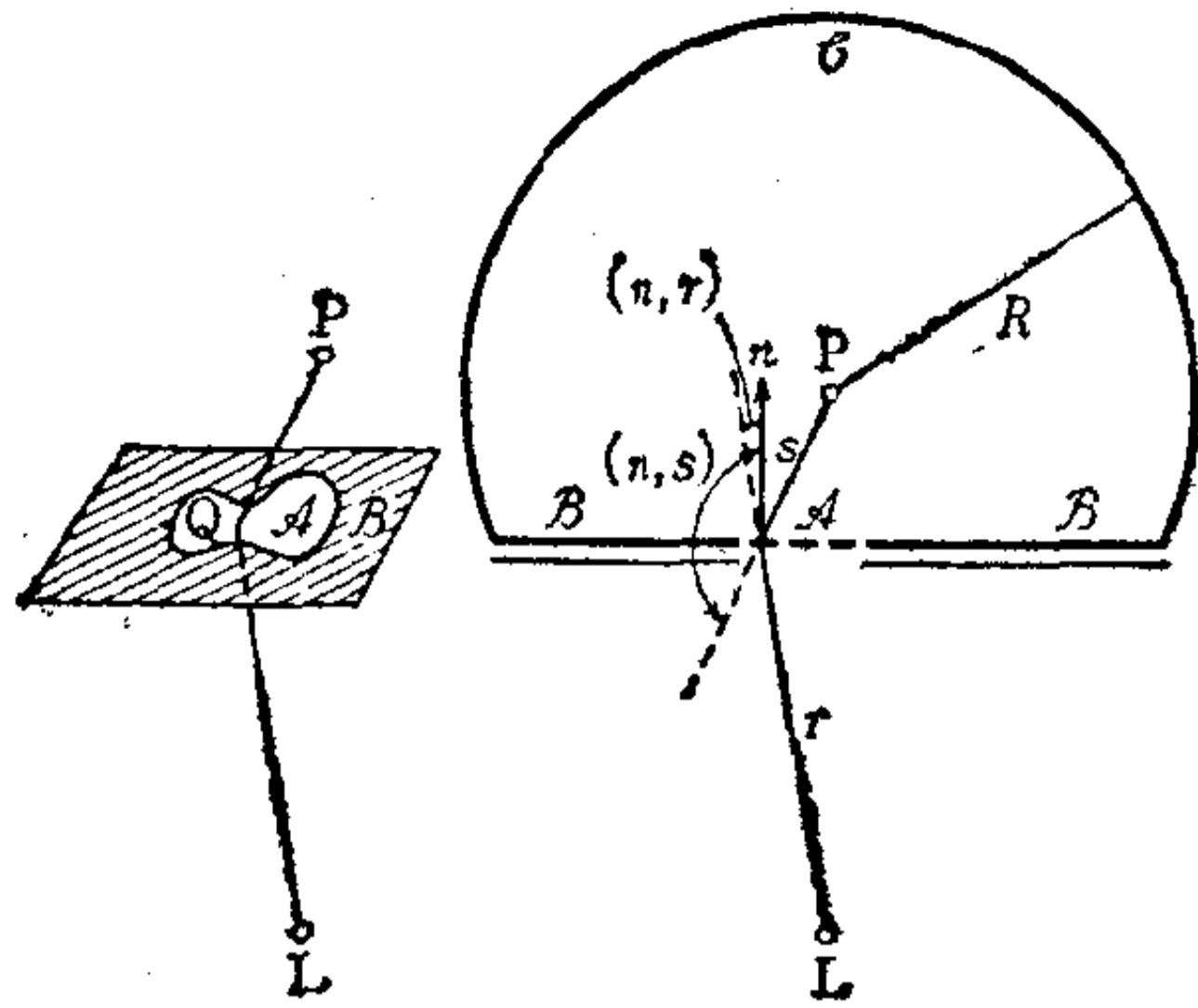


图 4.12

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \left[ \iiint_{\mathcal{A}} + \iint_{\mathcal{B}} + \iint_{\mathcal{C}} \right] \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS, \quad (4.2.11)$$

问题是怎样给出  $U$  和  $\partial U/\partial n$  在  $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$ 、 $\mathcal{C}$  上的值。基尔霍夫认为,除了离小孔  $\mathcal{A}$  的边缘非常近的地方外,在  $\mathcal{A}$  上  $U$  及  $\partial U/\partial n$  与没有屏蔽面的情况并无太大差别,从而假设了所谓的 ii) 基尔霍夫边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } \mathcal{A} \text{ 上 } U = U^{(i)} &\equiv \frac{Ae^{ikr}}{r}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial n} \\ &= \frac{Ae^{ikr}}{r} \left[ ik - \frac{1}{r} \right] \cos(n, r) \end{aligned} \right\} (4.2.12)$$

$$\text{在 } \mathcal{B} \text{ 上 } U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

就范围  $\mathcal{C}$  而言,假如使  $R$  充分增大,则  $U$  和  $\partial U/\partial n$  就能够任意减小,从而便可以忽略来自  $\mathcal{C}$  的贡献。不过,严格地说,这个边界条件在数学上是不能允许的。这是因为,假如在任意的有限面元上  $U$  和  $\partial U/\partial n$  均为零,则各次波动方程的解  $U$  在整个空间到处都必须为零。而且,若把式(4.2.12)型的边界条件加到波动方程任意两个独立解  $U$ 、 $U'$  之差  $W = U - U'$

上,则在任意的有限面元上,  $U = U'$ 、 $\partial U/\partial n = \partial U'/\partial n$ , 那么,结果就成了  $U$  和  $U'$  到处都是恒等的. 再就范围  $\mathcal{V}$  的积分而言,假如增大  $R$ ,则  $\mathcal{V}$  的表面积亦无限增大,所以,这时积分变成了零,因此就不能说当  $R \rightarrow \infty$  时  $U \rightarrow 0$ 、 $\partial U/\partial n \rightarrow 0$  是积分为零的充分条件. 更严格一些,还应该规定光的波动函数在无限远处的行为. 但是,目前如果把基尔霍夫边界条件当作一个发现问题的手段,将式(4.2.12)代入式(4.2.11),并相对于  $k$  忽略不计  $1/r$  和  $1/s$  的项,那么就可以得到**菲涅耳-基尔霍夫衍射公式**

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\mathcal{A}} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} [\cos(n,r) - \cos(n,s)] dS. \quad (4.2.13)$$

虽然此式在假定 i) 及 ii) 的范围内成立,但却适合于在光学仪器中所遇到的大部分衍射问题. 这是由光的波长都远远小于衍射体大小这一情况所决定的. 在与小孔  $\mathcal{A}$  边缘附近的光波行为有关的那些问题中,必须依靠其它的方法. 那时,就应该求解波动方程的边界值问题,其中,光源是作为波动函数的适当的奇异性来考虑的.

由菲涅耳-基尔霍夫衍射公式,能够得出有关衍射的几个一般的性质. 首先,因为式(4.2.13)对光源  $L$  和观察点  $P$  是对称的,显然,点光源  $L$  在观察点  $P$  上产生的效果,和把相等强度的点光源放到  $P$  上时在  $L$  点产生的效果是一样的 (**亥姆霍兹倒易定理** (reciprocity theorem)). 如果某一衍射孔  $\mathcal{A}$  在观察点  $P$  上引起的光分布为  $U_1(P)$ , 和  $\mathcal{A}$  互补的衍射装置上的光分布,即小孔部分和不透明屏蔽面在同  $\mathcal{A}$  的情况相反时点  $P$  上的光分布为  $U_2(P)$ , 假设完全没有屏蔽面时的光分布为  $U(P)$ , 那么,下列关系是成立的:

$$U_1(P) + U_2(P) = U(P). \quad (4.2.14)$$



这叫做**巴俾涅 (Babinet, 1837) 原理**。不言而喻,对光强度来说,式(4.2.14)一般并不成立。仅仅在  $U(P) = 0$  的情况下,两个互补的衍射装置才产生强度相等的衍射图象。在夫琅和费衍射中,除了离光源的象特别近的地方以外,这个条件是可以满足的。

对于菲涅耳-基尔霍夫衍射公式的积分范围来说,即使选择另外一个和  $\mathcal{A}$  的边缘一致的曲面也没有什么关系。我们选择近似地覆盖小孔的入射波波面  $\mathcal{F}$ ,和以  $L$  为顶点、以小孔的边缘为底的圆锥面的一部分  $\mathcal{K}$ ,来代替  $\mathcal{A}$  (图 4.13)。假如波面的曲率半径远远大于小孔的大小,那么就可以忽略  $\mathcal{K}$

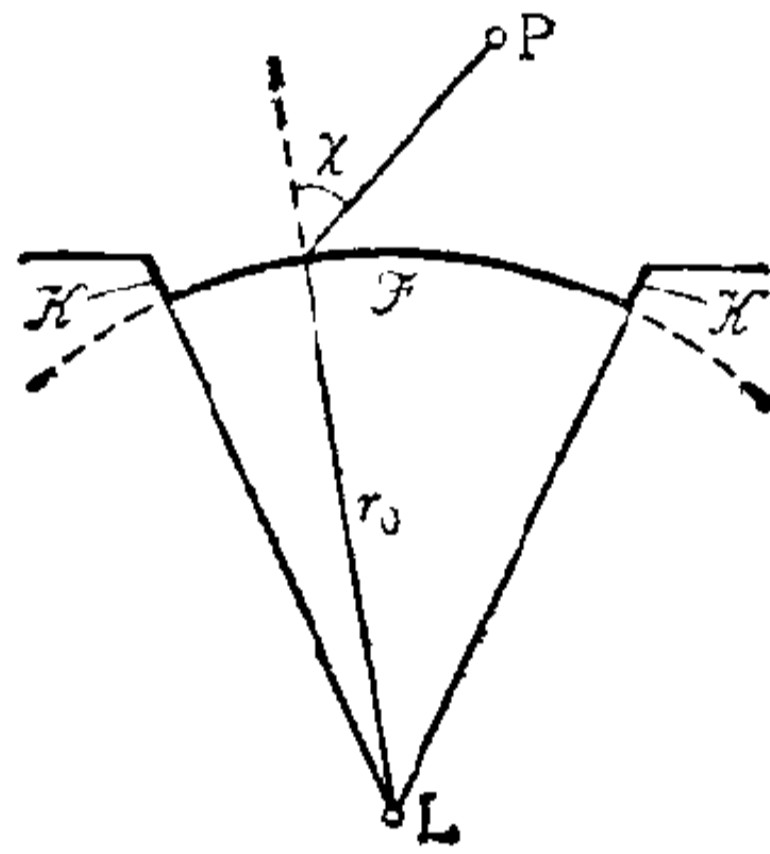


图 4.13

的贡献。若取入射球面波波面  $\mathcal{F}$  的半径为  $r_0$ ,则在  $\mathcal{F}$  上  $\cos(n, r_0) = 1$ ,故可把式(4.2.13)写成

$$U(P) = -\frac{i}{2\lambda} \frac{A e^{ikr_0}}{r_0} \iint_{\mathcal{F}} \frac{e^{iks}}{s} (1 + \cos\chi) dS. \quad (4.2.15)$$

式中,  $\chi \equiv \pi - (r_0, s)$ 。这就是假设波面面元  $d\mathcal{F}$  的贡献为  $-(i/2\lambda) \cdot (A \exp(ikr_0)/r_0)(\exp(iks)/s)(1 + \cos\chi)dS$  时,由菲涅耳给出的惠更斯原理的表达式,而且是非涅耳衍射理论的出发点。把式(4.2.15)和(4.1.1)进行比较即可知道,菲涅耳的方向因子  $K(\chi)$  在基尔霍夫衍射理论中,是用下式确定的

$$K(\chi) = -\frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \chi). \quad (4.2.16)$$

对于菲涅耳带  $Z_1$ , 此式确切地给出了  $K_1 = K(0) = -(i/\lambda)$ , 但是, 此式给出的  $K_n$  却和菲涅耳所假定的  $K_n = K(\pi/2) = 0$  不相一致.

另一方面, 如果回到式 (4.2.11), 把由小孔  $\mathcal{A}$ 、以  $L$  为顶点而母线通过小孔边缘的圆锥台的表面  $\mathcal{B}$ 、以及以  $P$  为中心

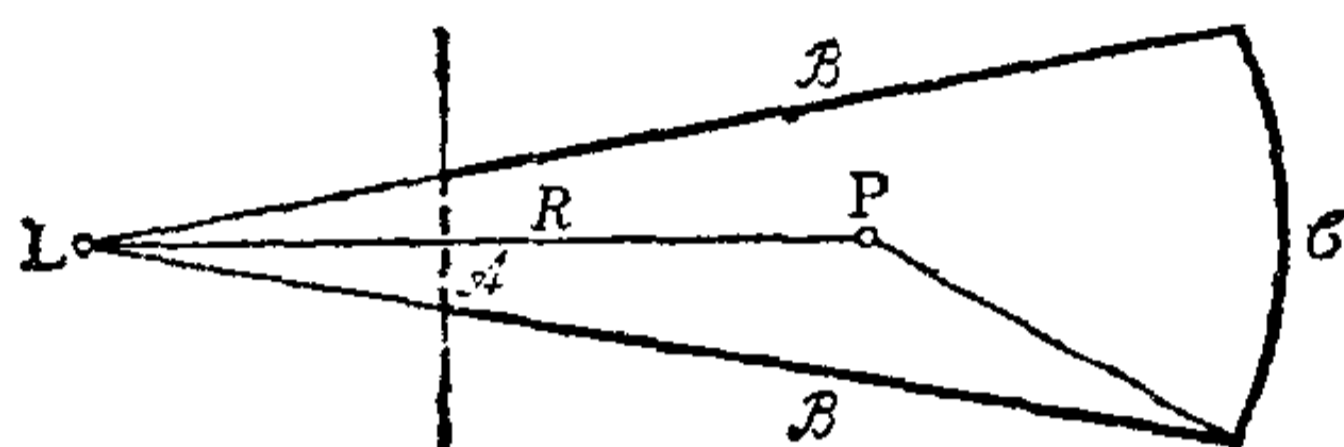


图 4.14

的大球面  $\mathcal{C}$  所构成的封闭曲面选作积分范围  $S$  (图 4.14), 根据亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS \\ & = \begin{cases} \frac{e^{ikR}}{R} & P \text{ 在封闭曲面内时,} \\ 0 & P \text{ 在封闭曲面外时,} \end{cases} \end{aligned}$$

( $\overline{LP} \equiv R$ ), 所以, 就能够把菲涅耳-基尔霍夫衍射公式改写成

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{A}} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \iint_{\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}} - \iint_{\mathcal{B}+\mathcal{C}} \right] \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS \\ &\equiv U^{(s)}(P) + U^{(d)}(P) \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

$$U^{(g)}(P) \equiv \begin{cases} \frac{e^{ikR}}{R} & P \text{ 在直接光以内时,} \\ 0 & P \text{ 在几何光学的影子中时,} \end{cases} \quad (4.2.18)$$

$$U^{(d)}(P) \equiv \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS, \quad (4.2.19)$$

$U^{(g)}$  是几何光学所预言的到 P 点来的光, 因此,  $U^{(d)}$  就是表示衍射效果的项. 我们可以把沿范围  $\mathcal{B}$  给出这个  $U^{(d)}$  的面积分, 改写成沿着小孔边缘  $\Gamma$  的线积分. 也就是说, 当圆锥台  $\mathcal{B}$  两个相邻的母线 LAB、LA'B' 与  $\Gamma$  的交点为 Q、Q' 时, 如果设 LQ =  $r_1$ 、QP =  $s_1$ 、 $\Gamma$  被 Q、Q' 截下来的曲线的线元为  $dl$ , 则可将  $U^{(d)}$  写成

$$U^{(d)}(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{e^{ik(r_1+s_1)}}{r_1 s_1} \frac{\cos(n, s_1)}{1 + \cos(s_1, r_1)} \times \sin(r_1, dl) dl. \quad (4.2.20)$$

即,  $U^{(d)}$  成为以衍射孔边界线  $\Gamma$  的各个点为源的下列子波  $dU^{(d)}(P)$  的叠加:

$$dU^{(d)}(P) = \left( \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \sin(r_1, dl) dl \right) \left( \frac{e^{iks_1}}{s_1} \right) \times \left( \frac{\cos(n, s_1)}{1 + \cos(s_1, r_1)} \right).$$

从第二个因子 ( $\exp(iks_1)/s_1$ ) 来看, 该子波显然是球面波, 而它的第一个因子表示由光源 L 来的光之中落到边界线线元  $dl$  上的那一部分, 最后一个因子给出子波对方向的依赖性, 也决定了它的解析性. 各  $dU^{(d)}$  只由  $dl$  相对于光源 L 的几何位置来确定, 而与衍射孔的形状无关. 因此, 我们就能够把给出衍射现象的  $U(P)$  看成是两部分叠加而成的, 一部分是遵守几何光学定律传播的直接光  $U^{(g)}$ , 另一部分可以认为是

入射波由于小孔的边界而引起的散射所产生的边界波  $U^{(d)}$ ；另外，还可以把基尔霍夫衍射积分的**鲁比诺维茨表达式** (4.2.17)、(4.2.18)、(4.2.20)，说成是杨氏衍射观点的定性叙述在基尔霍夫衍射理论的框架中的数学规范化。

面积分式 (4.2.19) 可以象下面那样过渡到线积分式 (4.2.20)。首先，因为中心为  $L$ 、半径为  $r$  ( $=$ 常数) 的球面全部和圆锥台  $\mathcal{B}$  正交，所以，若注意到  $\partial/\partial n(e^{ikr}/r) = 0$  及  $\partial/\partial n(e^{iks}/s) = \{\partial/\partial s(e^{iks}/s)\} \cdot \cos(n, s)$ ，就可以把  $U^{(d)}(P)$  写成

$$U^{(d)}(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{B}} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} \left( ik - \frac{1}{s} \right) \cos(n, s) dS.$$

选择上述两条母线和  $\overline{LA} = r = \text{const}$  及  $\overline{LB} = r + dr = \text{const}$  的两个球面所切下来的面积  $ABB'A'$  为面元  $dS$ ，假设母线之间的夹角为  $d\phi$ ，则有  $dS = r dr d\phi = (r/r_1) \sin(r_1, dl) dr dl$ 。这是因为，若中心为  $L$ 、半径为  $r_1$  的球和  $\mathcal{B}$  相交的圆，在两条母线之间被截下来的曲线线元为  $dl'$ ，则  $dl' = r_1 d\phi = dl \cdot \cos(dl, dl') = dl \sin(r_1, dl)$ 。另外，由于在  $A$  点及  $Q$  点上  $\mathcal{B}$  的法线是相互平行的，故有  $s \cos(n, s) = s_1 \cos(n, s_1)$ 。把以上关系式代入  $U^{(d)}(P)$ ，则可得出

$$U^{(d)}(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} dl \frac{s_1}{r_1} \cos(n, s_1) \sin(r_1, dl) \times \int_{r_1}^{\infty} e^{ik(r+s)} \left( \frac{ik}{s^3} - \frac{1}{s^3} \right) dr.$$

对  $r$  积分的被积分函数可以写成全微分的形式：

$$e^{ik(r+s)} \left( \frac{ik}{s^3} - \frac{1}{s^3} \right) = \frac{d}{dr} \times \left\{ \frac{e^{ik(r+s)}}{s[s+r-r_1+s_1 \cos(r_1, s_1)]} \right\},$$

从而该积分变成

$$\int_{r_1}^{\infty} e^{ik(r+s)} \left( \frac{ik}{s^2} - \frac{1}{s^3} \right) dr$$

$$= - \frac{e^{ik(r_1+s_1)}}{s_1^2 [1 + \cos(s_1, r_1)]},$$

于是，我们就得到式(4.2.20)。因为  $U(P)$  是位置的连续函数，所以，边界波  $U^{(d)}$  必须具有一种在几何影子的边界上与直接波  $U^{(g)}$  的不连续性相抵消的性质，这个不连续性是由分母上的因子  $[1 + \cos(s_1, r_1)]$  产生的。

### c) 衍射现象的分类

现在，我们再次回过头来看菲涅耳-基尔霍夫衍射积分，进一步详细研究一下由任意形状的衍射孔 $\Sigma$ 所引起的衍射。在式(4.2.13)中，随着  $dS$  通过整个积分区域， $r + s$  要在一个极宽的波长范围内变化，因此  $\exp[ik(r + s)]$  会剧烈波动，但是  $[\cos(n, r) - \cos(n, s)]$  却不这样变化，所以不妨把这个因子拿到积分之外。由假定 i) 可知，它能够用  $2 \cos \delta$  来替换。其中， $\delta$  是 LP 和小孔面法线的夹角。倘若  $r$  和  $s$  的变化范围亦充分受到限制，则把  $1/rs$  也拿到积分之外，并不会产生太大的误差。这样一来，式(4.2.13)就成为

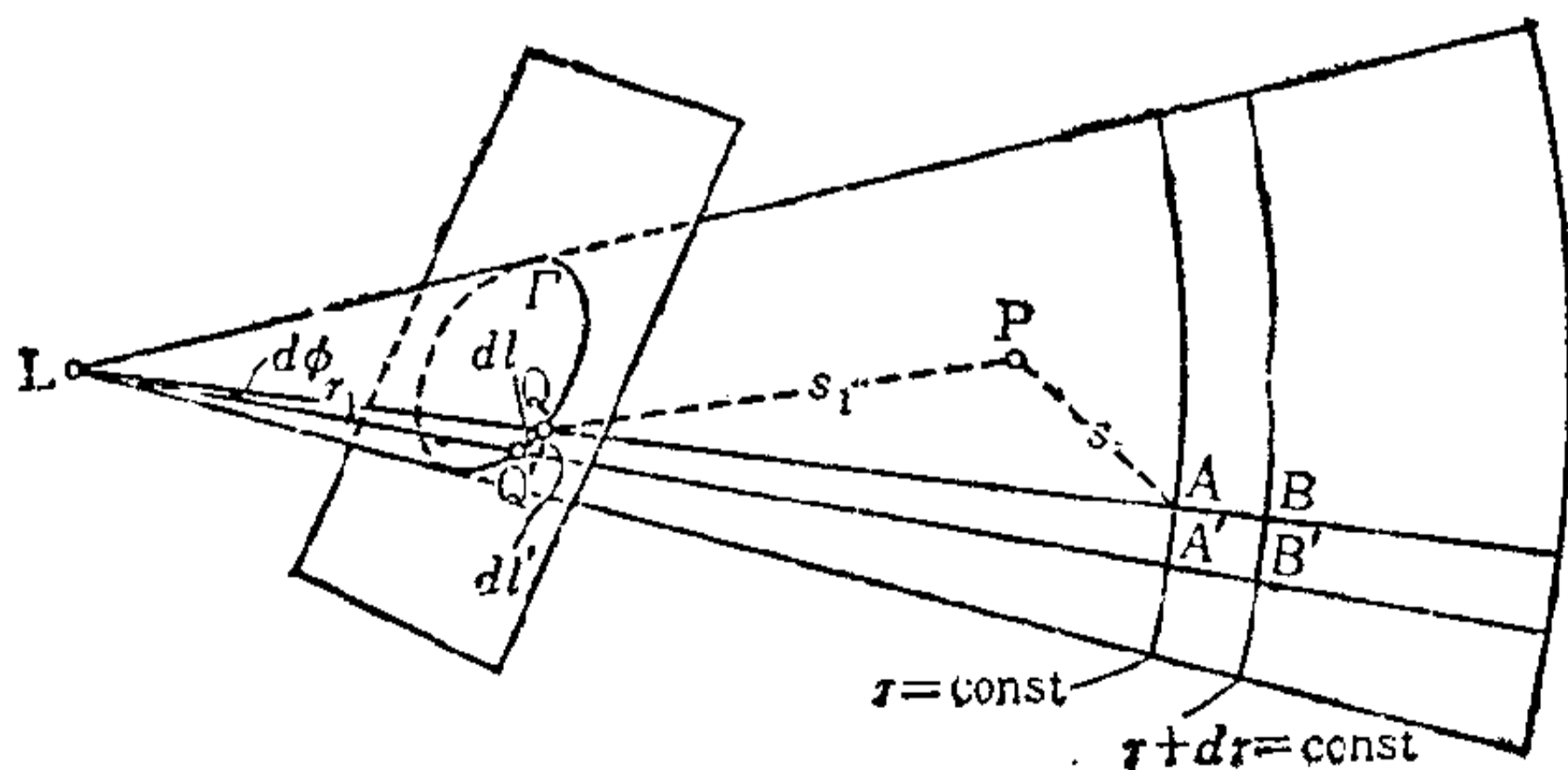


图 4.15



$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{\cos \delta}{rs} \iint_{\mathcal{A}} e^{ik(r+s)} dS. \quad (4.2.13a)$$

另外，我们在孔里取坐标原点  $O$ ，并假定  $x$  轴和  $y$  轴在孔的平面内，而使  $z$  轴的正方向为观察点  $P$  所在的一侧。设  $L$  及  $P$  的坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ 、 $(x, y, z)$ ，孔内一点  $Q$  的坐标为  $(\xi, \eta)$ ，令  $\overline{LQ} = r$ ， $\overline{QP} = s$ ， $\overline{LO} = r'$ ， $\overline{OP} = s'$ ，则有

$$r^2 = r'^2 - 2(x_0\xi + y_0\eta) + \xi^2 + \eta^2$$

$$s^2 = s'^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2.$$

由假定 i) 可知，如果把  $r$  展开成  $\xi/r'$ 、 $\eta/r'$  的幂级数，把  $s$  展开成  $\xi/s'$ 、 $\eta/s'$  的幂级数，便可以得到

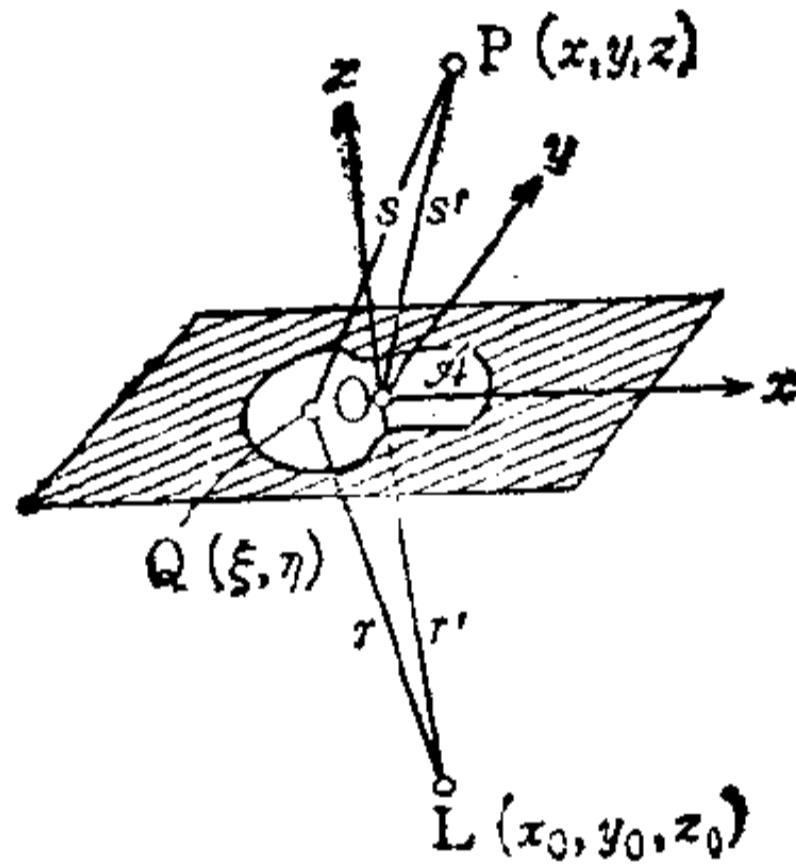


图 4.16

$$r \approx r' - \frac{x_0\xi + y_0\eta}{r'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r'} - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2r'^3} - \dots$$

$$s \approx s' - \frac{x\xi + y\eta}{s'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s'} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2s'^3} - \dots$$

因此，积分式 (4.2.13a) 即可写成

$$U(P) = -\frac{i \cos \delta}{\lambda} \frac{A e^{ik(r+s')}}{r's'} \iint_{\mathcal{A}} e^{ikf(\xi, \eta)} d\xi d\eta$$

$$f(\xi, \eta) = (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0\xi + m_0\eta)^2}{r'} - \frac{(l\xi + m\eta)^2}{s'} \right\} \dots$$

(4.2.21)

式中,  $l_0 \equiv -(x_0/r')$ ,  $m_0 \equiv -(y_0/r')$ ;  $l \equiv x/s'$ ,  $m \equiv y/s'$  是 OL、OP 的方向余弦. 只用这个  $f(\xi, \eta)$  对  $\xi$ 、 $\eta$  的一次项就能够描述的衍射现象称为**夫琅和费衍射**, 而不能忽略二次项的衍射现象则称为**菲涅耳衍射**. 严格地说, 只有在  $r' \rightarrow \infty$ ,  $s' \rightarrow \infty$  的情况下(设  $A$  和乘积  $r's'$  一样也趋于无限大), 也就是在光源和观察点都位于无限远时, 二次以上的项才会为零, 不过, 倘若二次项对积分的贡献是

$$\frac{1}{2} k \left| \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0\xi + m_0\eta)^2}{r'} - \frac{(l\xi + m\eta)^2}{s'} \right| \ll 2\pi,$$

(4.2.22)

那么, 它也没有什么大不了的影晌. 如果考虑到  $(l_0\xi + m_0\eta)^2 \leq (l_0^2 + m_0^2)(\xi^2 + \eta^2)$  型的不等式, 以及  $l_0^2, m_0^2, l^2, m^2$  均不超过 1, 那么, 为了使条件式 (4.2.22) 得到满足,

$$|r'| \gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{\lambda}$$

且

$$|s'| \gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{\lambda}$$

(4.2.23a)

或

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} = 0$$

$$\text{且 } l_0^2, m_0^2, l^2, m^2 \ll \frac{|r'| \lambda}{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}. \quad (4.2.23b)$$

若当观察点在平行于孔面的平面上时, 观察点和光源都离  $z$  轴非常近, 那么便能产生夫琅和费衍射(条件(4.2.23b)). 夫琅和费表达式所能够使用的距离  $r'$  及  $s'$ , 可由条件(4.2.23a)来估计. 对夫琅和费衍射来说, 代入  $f(\xi, \eta)$  中去的方向余弦只用  $p = l - l_0$ ,  $q = m - m_0$  这样的组合. 这一点表明, 即使让前面所谈到的孔在该面内移动, 对衍射效果也没有什么影响.

在夫琅和费衍射积分

$$U(P) = B \iint_{\mathcal{A}} e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (4.2.24)$$

中,

$$B \equiv - \frac{i \cos \delta}{\lambda} \frac{A e^{ik(r'+s')}}{r's'} \quad (4.2.25)$$

是入射到小孔部分的总光能  $E$  (根据能量守恒定律, 这也是落到观测面上的总光能), 倘若把它归一化, 成为

$$\iint |U(p, q)|^2 dp dq = E, \quad (4.2.26)$$

那么, 设小孔部分的面积为  $D$ , 便可表示成

$$B = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{E}{D} \right)^{1/2}. \quad (4.2.27)$$

因此, 在衍射条纹中心  $p = q = 0$  上, 光强度  $I_0$  是

$$I_0 = |U(0, 0)|^2 = \frac{ED}{\lambda^2} = B^2 D^2. \quad (4.2.28)$$

#### d) 由夫琅和费衍射到衍射光栅

夫琅和费衍射具有一个显著的特征: 不管衍射孔的形状如何, 衍射条纹的中心点总是明亮的, 而且对该中心点还是点对称的. 我们选择边长为  $2a$ 、 $2b$  的矩形孔(狭缝)作为一例. 取  $\xi$  轴和  $\eta$  轴分别平行于矩形的边, 就可以计算出夫琅

和费衍射的积分

$$U(P) = B \int_{-a}^a e^{ikp\xi} d\xi \int_{-b}^b e^{-ikq\eta} d\eta.$$

计算结果,可以得到衍射光的强度分布是

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left( \frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2 \left( \frac{\sin kqb}{kqb} \right)^2 I_0 \left. \vphantom{\frac{\sin kqb}{kqb}} \right\} \\ I_0 = \frac{ED}{\lambda^2} = \frac{4abE}{\lambda^2} \left. \vphantom{\frac{4abE}{\lambda^2}} \right\}. \quad (4.2.29)$$

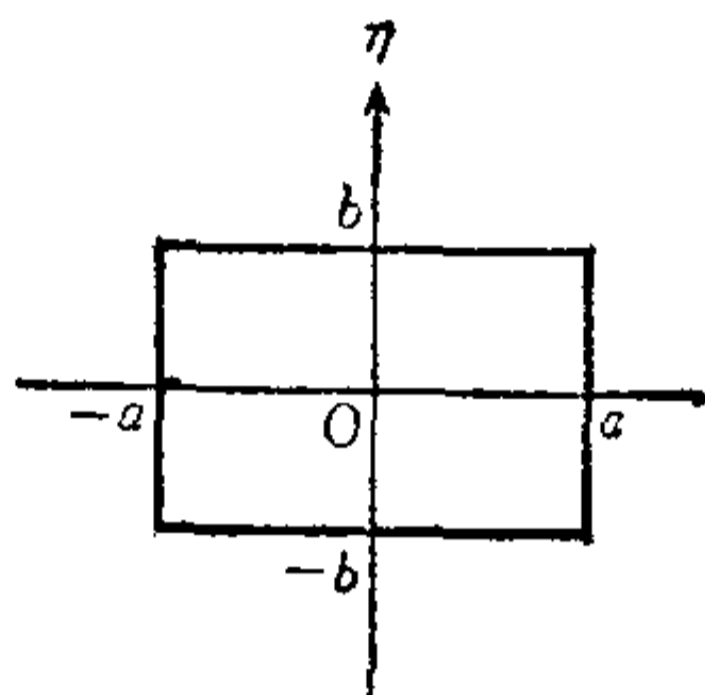


图 4.17

表 4.3

$y = (\sin x/x)^2$	
$x$	$y$
0	1
$1.430\pi = 4.493$	0.04718
$2.459\pi = 7.725$	0.01694
$3.470\pi = 10.90$	0.00834
$4.497\pi = 14.07$	0.00503

函数  $(\sin x/x)^2$  在  $x = 0$  取主极大值 1, 第二个极大值以下的, 可以用  $\tan x - x = 0$  的根来确定, 并逐渐趋近于  $x = (2J + 1)\pi/2$  ( $J$  是奇整数). 而且, 它还在  $x = \pm N\pi$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ) 取极小值 0. 因此, 衍射条纹成为由

$$kpa = \pm M\pi \quad \text{及} \quad kqb = \pm N\pi \quad (M, N = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.2.30a)$$

也就是由

$$p = l - l_0 = \pm \frac{M\lambda}{2a}$$

$$\text{及 } q = m - m_0 = \pm \frac{N\lambda}{2b} \quad (4.2.30b)$$

所给出的暗线构成的一个图象，在对于原点对称的矩形群的各个矩形上依次出现极大值。但是，如表 4.3 所示，二次以上的极大值急剧减小，所以，在  $b$  远大于  $a$  时，只不过在主极大值附近看到了水平明亮的条纹。

为了从点光源的这个结果来了解线光源发出的光在平行于光源的狭缝上的衍射，现在设线光源无限长，而且位于点光源时的  $y$  轴方向，那么，只要把 (4.2.29) 对  $q$  进行积分就可以了。在该情况下，光强度是

$$\begin{aligned} I' &= \int_{-\infty}^{+\infty} I(P) dq \\ &= \left( \frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2 I_0 \frac{1}{kb} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 dt \\ &= \left( \frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2 I'_0 \\ I'_0 &= \frac{\lambda}{2b} I_0 = \frac{2aE}{\lambda} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_{-\infty}^{+\infty}} \right\} \quad (4.2.31)$$

这时，可以看到与线光源及狭缝都平行的  $(\sin x/x)^2$  型的明暗条纹。

所谓的衍射光栅，也能在夫琅和费表示的框架内进行处理。**衍射光栅**，是在振幅或位相，或者在振幅的位相两方面，给予入射波以周期性变化的某一种装置。衍射光栅可以用**透射函数** (transmission function) 或**反射函数** (reflection function)



来表征。假设用平面单色光（方向余弦为  $l_0, m_0$ ）来照射位于  $\xi\eta$  面上的透明或半透明的物体。如果略去时间因子  $\exp(-i\omega t)$ ，用  $V_0(\xi, \eta) = A \exp\{ik(l_0\xi + m_0\eta)\}$  表示在没有该物体时落到  $\xi\eta$  面上的光，而用  $V(\xi, \eta)$  给出有物体存在时的光，那么，透射函数  $F(\xi, \eta)$  的定义就是：

$$F(\xi, \eta) = \frac{V(\xi, \eta)}{V_0(\xi, \eta)}. \quad (4.2.32)$$

一般来说， $F$  不仅与  $\xi, \eta$  有关，而且也与入射波的方向  $l_0, m_0$  有关，因为光透过物体使振幅和位相一起变化，所以  $F$  是复数。只改变振幅、不改变位相 ( $\arg F \equiv 0$ ) 的光栅特称为**振幅光栅**，而振幅不变、只改变位相 ( $|F| \equiv 1$ ) 的光栅则称为**位相光栅**。由于物体的关系，所涉及的不是透射光而是反射光时，也可以同样来定义反射函数。因为在图 4.18 中用  $A, B$  表示的物体的几何影子外部，透射函数的值是 1，所以，把这些部分用不透明的屏蔽面遮盖，衍射光栅便起到衍射孔  $\mathcal{A}$  的作用。如果  $\mathcal{A}$  的大小比波长长，而且  $F$  在波长量级的范围内也一定，那么，在基尔霍夫衍射理论的假定 i)、ii) 之下，前面的衍射公式 (4.2.13a) 是成立的。不过，这时必须在被积分函数中加上透射函数  $F$ 。

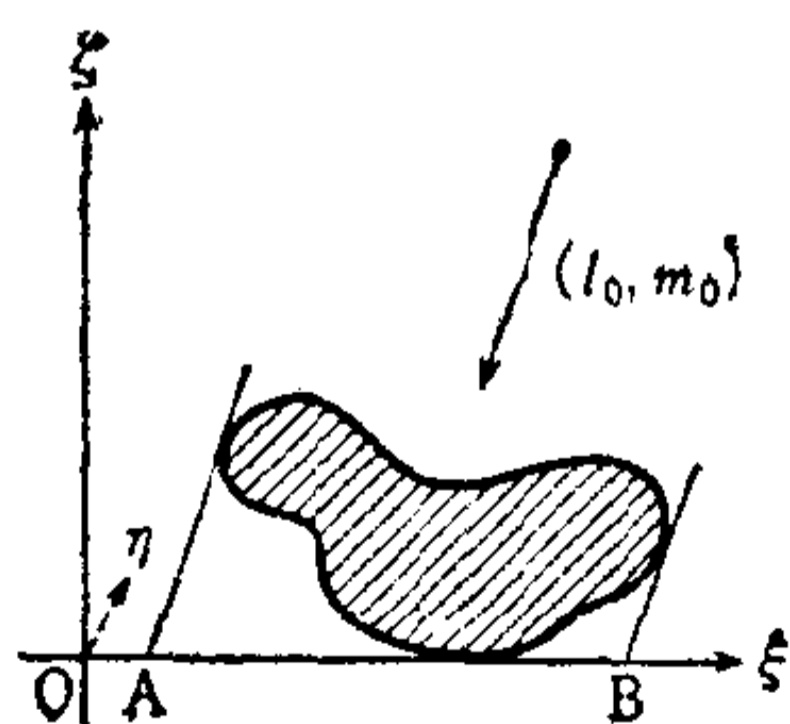


图 4.18

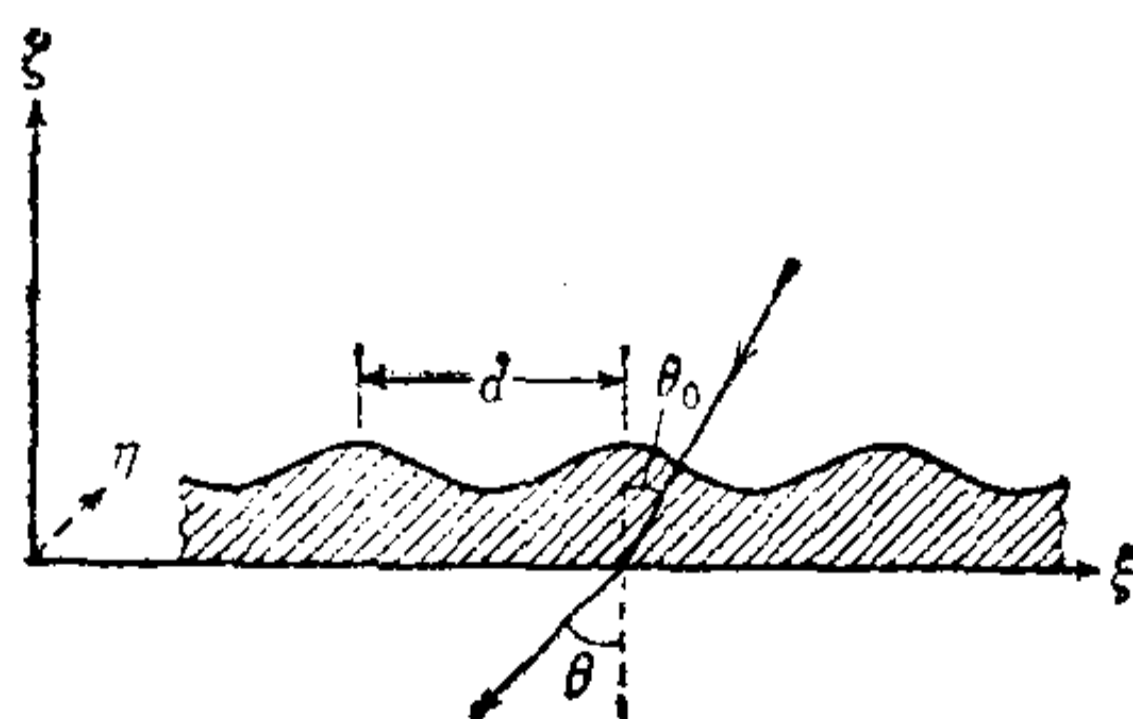


图 4.19

现在，我们来考虑在平行平面玻璃板上平行地刻有  $N$  条

沟槽的一维衍射光栅，其槽的截面是任意的。取玻璃面没有槽的一侧为  $\xi\eta$  面，取  $\eta$  轴为槽的方向，并假定在  $\xi$  方向上光栅的重复周期为  $d$  (图 4.19)。设入射的单色平面波与  $\zeta$  轴的夹角为  $\theta_0$ ，很远的一个观察点 P 与衍射光栅的夹角为  $\theta$ ， $p \equiv l - l_0 = \sin \theta - \sin \theta_0$ ，那么，根据式 (4.2.24) ( $q = 0$ ，加上一个周期单元的透射函数  $F$ )，就可以取  $\xi_n = nd$ ， $\eta_n = 0$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ )，所以，落到 P 点的光就是

$$\left. \begin{aligned} U(p) &= U^{(0)}(p) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ikpnd} \\ &= U^{(0)}(p) \left[ \frac{1 - e^{-iNkpd}}{1 - e^{-ikpd}} \right] \\ U^{(0)}(p) &\equiv B \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{ikp\xi} d\xi \end{aligned} \right\}, \quad (4.2.33)$$

即，光的分布和由相干的二次光源组所产生的光分布是一样的。后者具有相同的振幅  $|U^{(0)}(p)|$ ，位相与前者只差了  $kpd$  的整数倍，其中  $kpd$  是与通过相邻两槽的光的光程差  $pd = (\sin \theta - \sin \theta_0)d$  相对应的位相差。因此，所观察到的光强度，就可以用  $I^{(0)}$  和  $H$  的乘积确定：

$$\left. \begin{aligned} I(p) &= H(N, kpd/2) I^{(0)}(p) \\ H(N, x) &= \left( \frac{\sin Nx}{\sin x} \right)^2 \\ I^{(0)}(p) &= |U^{(0)}(p)|^2 \end{aligned} \right\}, \quad (4.2.34)$$

式中， $I^{(0)}$  表示衍射光栅一个周期单元的效果， $H$  表示不同周期单元来的光的干涉效果。因为当  $x = 0$  及  $\pi$  的整数倍时  $H(N, x)$  具有极大值  $N^2$ ，所以  $H(N, kpd/2)$  在

$$p = \frac{m\lambda}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.2.35)$$

上取极大值  $N^2$ 。因此， $m$  就是由相邻两槽所对应的点向极大值方向衍射的光的光程差用波长来测量所得的值，它与

§ 4.1(b) 中曾讲到的干涉级是符合的。在该主极大值之间， $x = kpd/2 = \pm n\pi/N$ ，即在

$$p = \frac{n\lambda}{Nd} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots; \text{除去 } n/N \text{ 为整数}$$

的情况) (4.2.36)

上有以强度为 0 的点分开的  $N - 1$  个次极大(当  $N$  很大时, 它的值只是主极大值的百分之几)。另一方面,  $I^{(0)}$  决定于槽的形状。假如由夫琅和费衍射的例子中用过的矩形狭缝来构成衍射光栅, 而用与槽平行的相当远的线光源来照射它, 那么, 由式 (4.2.31) 可知

$$I(p) = H(N, kpd/2) \left[ \frac{2aE}{\lambda} \left( \frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2 \right] \quad (4.2.37)$$

(图 4.20)。强度分布  $I(p)$  随  $I^{(0)}$  而变化, 它的大致形状由于干

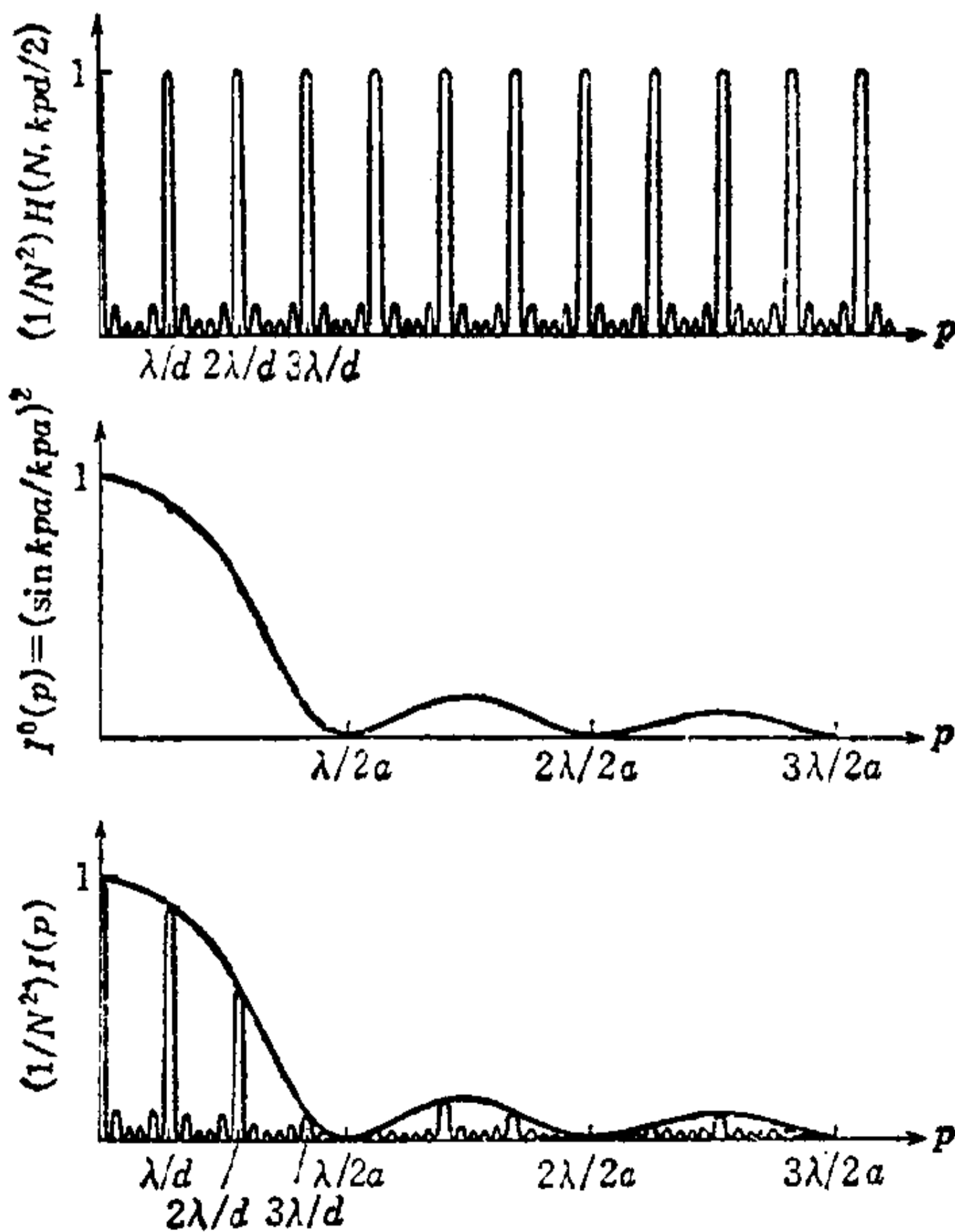


图 4.20

涉函数  $H$  决定, 在  $p = m\lambda/d$  的方向上具有相当尖的突出部分。因为这个方向依赖于波长, 所以非单色光也可以通过衍射光栅分解成光谱。为了知道把谱线结构分离到怎样的程度, 只要看一看光强相等的两个成分所产生的极大值位置的偏移就可以了。当两个成分的波长为  $\lambda \pm (1/2)\Delta\lambda$  时,  $(\lambda/\Delta\lambda)$  称为该装置的**分辨率** (resolving power)。对于单色光的强度分布为  $[\sin(x/2)/(x/2)]^2 I_{\max}$  型的情况来说, 瑞利(1879)提出这种分离程度的判断标准: 一个成分的主极大值和另一个成分的第一个极小值的位置相一致。在现在的情况下, 由式(4.2.36)可知, 第  $m$  级主极大值和邻近的极小值之间的间隔为  $\Delta p = \lambda/Nd$ , 如果波长变化  $\Delta\lambda$ , 那么根据式(4.2.35), 第  $m$  级主极大值的位置将偏离  $\Delta p' = |m|\Delta\lambda/d$ 。因此, 就可以把瑞利的标准  $\Delta p = \Delta p'$  写成

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = |m|N = \frac{Nd|\sin\theta - \sin\theta_0|}{\lambda}. \quad (4.2.38)$$

即, 衍射光栅的分辨率等于由相隔  $Nd$  的光栅两端向  $\theta$  方向衍射的光, 以波长为单位的光程差。因  $|\sin\theta - \sin\theta_0| \leq 2$ , 故光栅的分辨率不会超过  $2Nd/\lambda$ 。对于可见光的中间波长  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ , 普通棱镜是  $\Delta\lambda \approx 1 \text{ \AA}$ , 所以, 当用衍射光栅对同样的光来观察二级主极大时, 想要获得十倍的分辨率 ( $\Delta\lambda = 10^{-1} \text{ \AA}$ ), 最低限度必须有 27500 条刻线。由式(4.2.38)可知, 衍射光栅的分辨率由干涉级  $m$  和线数  $N$  来决定。刻有很多线的普通衍射光栅, 就是在低的干涉级 ( $m = 1 \sim 5$ ) 上企图通过增加线数来提高分辨率的(例如, 在罗兰(H. A. Rowland, 1882~83)的六英寸长的衍射光栅上, 每英寸刻有 14000 条, 分辨率  $\approx 1.5 \times 10^5$ )。反之, 提高干涉的级 ( $m = 1000 \sim 20000$ ), 即使  $N$  很小, 也会得到同样效果, 这种光栅就是**阶梯光栅** (echelon) (迈克耳孙最先制造的阶梯光栅, 是把

二十块平行玻璃板重叠起来作成的,对于  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  来说,  $m \approx 2 \times 10^4$ , 分辨率  $\approx 4.4 \times 10^5$ ).

### e) 菲涅耳衍射

下面,我们研究一下菲涅耳衍射,它是在菲涅耳-基尔霍夫衍射公式中不能忽略  $f(\xi, \eta)$  的二次项的一种情况. 使用式 (4.2.25) 的符号,把式 (4.2.21) 写成

$$U(P) = B(C + iS) \quad (4.2.21a)$$

$$\begin{aligned} C &= \iint_{\mathcal{A}} \cos [kf(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \\ S &= \iint_{\mathcal{A}} \sin [kf(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

为使计算简化,在图 4.16 中把  $x$  轴取作  $\overline{LP}$  在小孔面上的投影. 假设  $\overline{LP}$  和这时的  $z$  轴所构成的角为  $\delta$ , 则  $\overline{LO}$ 、 $\overline{OP}$  的方向余弦就是  $l = l_0 = \sin \delta$ 、 $m = m_0 = 0$ 、 $n = n_0 = \cos \delta$ , 这时一次项从  $f(\xi, \eta)$  中消失. 因此,若在积分式 (4.2.39) 中引进新的积分变量  $u$ 、 $v$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} \right) \xi^2 \cos^2 \delta &= \frac{\pi}{2} u^2 \\ \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} \right) \eta^2 &= \frac{\pi}{2} v^2 \\ d\xi d\eta &= \frac{\lambda}{2} \left[ dudv / \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} \right) \cos \delta \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.2.40)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} C &= b \iint_{\mathcal{A}'} \cos \left[ \frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] dudv \\ S &= b \iint_{\mathcal{A}'} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] dudv \\ b &\equiv \lambda / \left[ 2 \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} \right) \cos \delta \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.2.39a)$$

其中,  $\mathcal{A}'$  是  $uv$  平面上与  $\mathcal{A}$  相当的积分范围. 当  $\mathcal{A}'$  是



两个边与  $u$ 、 $v$  轴平行的矩形时，把三角函数的加法定理用于被积分函数，便能使积分变量分离。为了求出式 (4.2.39a)，只要知道下列菲涅耳积分就可以了：

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(w) &= \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau, \\ \mathcal{S}(w) &= \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

当  $w$  很小时，把式 (4.2.41) 的被积分函数展开成幂级数，然后逐项积分，即可得到

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{C}(w) &= w \left[ 1 - \frac{1}{2!5} \left(\frac{\pi}{2} w^2\right)^2 + \frac{1}{4!9} \left(\frac{\pi}{2} w^2\right)^4 - \dots \right] \\ \mathcal{S}(w) &= w \left[ \frac{1}{1!3} \left(\frac{\pi}{2} w^2\right) - \frac{1}{3!7} \left(\frac{\pi}{2} w^2\right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5!11} \left(\frac{\pi}{2} w^2\right)^5 - \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.2.41a)$$

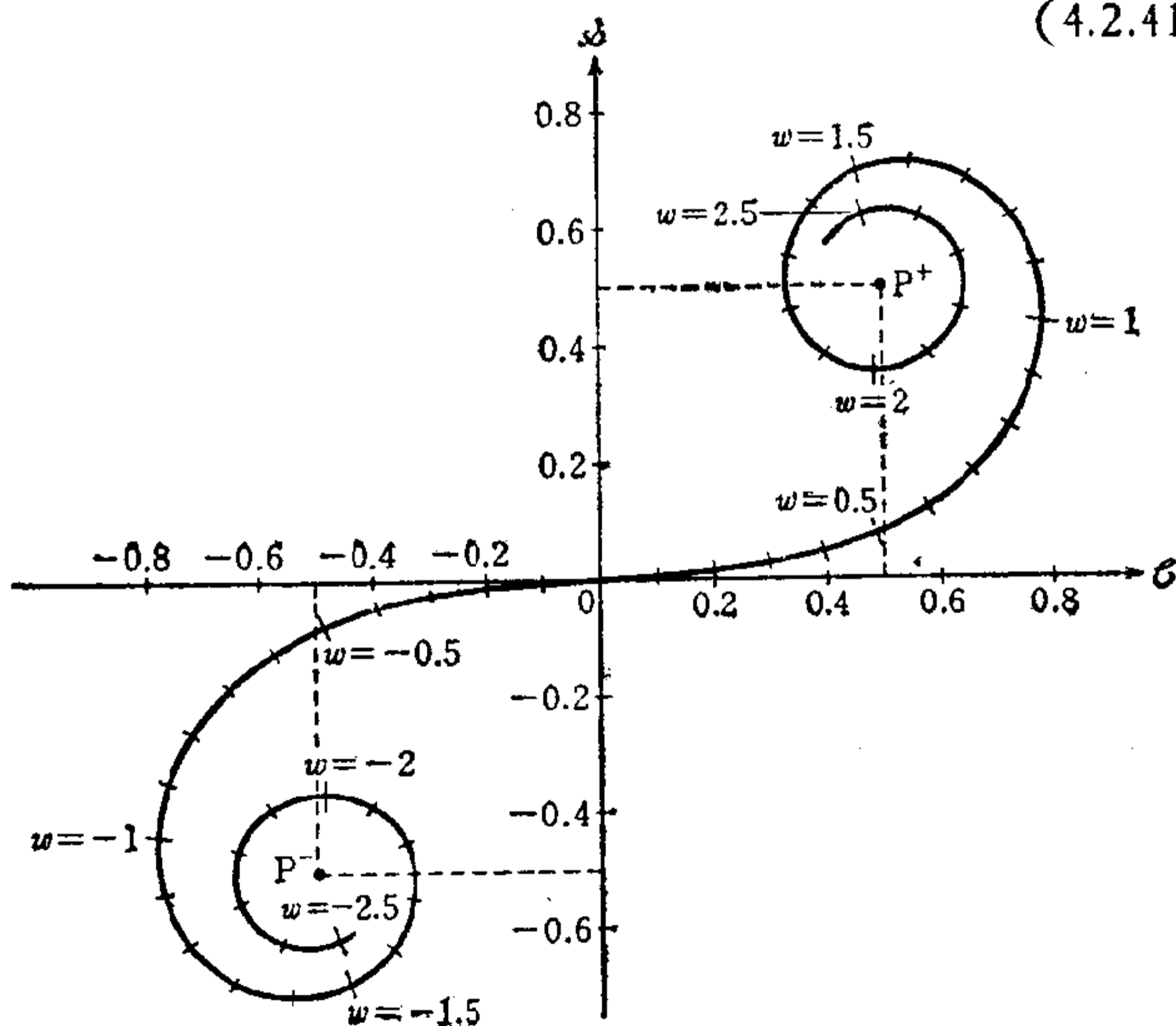


图 4.21

由此便会求得  $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{S}$  的值。当  $\omega$  很大时,把菲涅耳积分改写成

$$\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{C}(\infty) - \int_{\omega}^{\infty} \frac{d}{d\tau} \left( \sin \frac{\pi}{2} \tau^2 \right) \frac{d\tau}{\pi\tau},$$

$$\mathcal{S}(\omega) = \mathcal{S}(\infty) + \int_{\omega}^{\infty} \frac{d}{d\tau} \left( \cos \frac{\pi}{2} \tau^2 \right) \frac{d\tau}{\pi\tau},$$

重复进行分部积分,可以得到

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{C}(\omega) &= \mathcal{C}(\infty) - \frac{1}{\pi\omega} \left[ P(\omega) \cos \left( \frac{\pi}{2} \omega^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - Q(\omega) \sin \left( \frac{\pi}{2} \omega^2 \right) \right] \\ \mathcal{S}(\omega) &= \mathcal{S}(\infty) - \frac{1}{\pi\omega} \left[ P(\omega) \sin \left( \frac{\pi}{2} \omega^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + Q(\omega) \cos \left( \frac{\pi}{2} \omega^2 \right) \right] \end{aligned} \right\} (4.2.41b)$$

$$\mathcal{C}(\infty) = \int_0^{\infty} \cos \left( \frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau = \frac{1}{2}, \quad (4.2.41c)$$

$$\mathcal{S}(\infty) = \int_0^{\infty} \sin \left( \frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau = \frac{1}{2}$$

$$P(\omega) \equiv \frac{1}{\pi\omega^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(\pi\omega^2)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(\pi\omega^2)^5} - \dots,$$

$$Q(\omega) \equiv 1 - \frac{1 \cdot 3}{(\pi\omega^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(\pi\omega^2)^4} - \dots \quad (4.2.42)$$

只要用这些  $\omega$  的反幂级数同样可以求出  $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{S}$  的值。虽然式 (4.2.42) 是发散级数,但是,它的有限个项的和却能给出非常好的近似。

这样,菲涅耳衍射的图形就由菲涅耳积分式 (4.2.41) 来决定。该积分的值在皮埃尔斯 (T. Pearcey) 的“六位菲涅耳积分表”(剑桥大学出版,1956) 中有详细记载,不过,若使用

考纽 (1874) 的几何表示, 则其行为就非常容易看到。如果把  $\mathcal{C}(w)$  和  $\mathcal{S}(w)$  看成 P 点的笛卡儿坐标, 使  $w$  取所有可能的值, 那么, 点 P 就应该在  $\mathcal{C}\mathcal{S}$  面内描绘出一条曲线。这条曲线就是**考纽螺线**(图 4.21)。首先, 由菲涅耳积分的性质,  $\mathcal{C}(0) = \mathcal{S}(0) = 0$  以及

$$\mathcal{C}(-w) = -\mathcal{C}(w), \quad \mathcal{S}(-w) = -\mathcal{S}(w) \quad (4.2.43)$$

可知, 该曲线通过原点, 并对两个坐标轴是反对称的。其次, 根据

$$dl^2 \equiv (d\mathcal{C})^2 + (d\mathcal{S})^2 = \left\{ \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} w^2 \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} w^2 \right) \right\} dw^2 = dw^2,$$

曲线单元  $dl$  等于  $dw$ ; 若在  $w$  增加的方向上测量  $l$ , 则  $w$  就是由原点起测得的曲线长度。设该曲线的切线与  $\mathcal{C}$  轴的夹角为  $\theta$ , 即可得到,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{d\mathcal{S}}{d\mathcal{C}} = \left( \frac{d\mathcal{S}}{dw} \right) / \left( \frac{d\mathcal{C}}{dw} \right) \\ &= \tan \left( \frac{\pi}{2} w^2 \right), \end{aligned}$$

即

$$\theta = \frac{\pi}{2} w^2. \quad (4.2.44)$$

(上式也可以看成是考纽螺线的解析定义式)。因此,  $\theta$  随着  $|w|$  单调地增加, 当  $w = 0$  时,  $\theta = 0$ , 在原点切线与  $\mathcal{C}$  轴一致; 当  $w^2 = 1$  时,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 切线与  $\mathcal{C}$  轴垂直; 当  $w^2 = 2$  时,  $\theta = \pi$ , 切线再次与  $\mathcal{C}$  轴平行, 不过方向相反; 等等, 照此下去, 便卷成了螺线。同时, 根据式(4.2.41c)和式(4.2.43),

$$\mathcal{C}(\infty) = -\mathcal{C}(-\infty) = \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{S}(\infty) = -\mathcal{S}(-\infty) = \frac{1}{2},$$

所以, 这条曲线的两个分支应该分别趋近于渐近点  $P^+(1/2, 1/2)$ 、 $P^-(-1/2, -1/2)$ 。

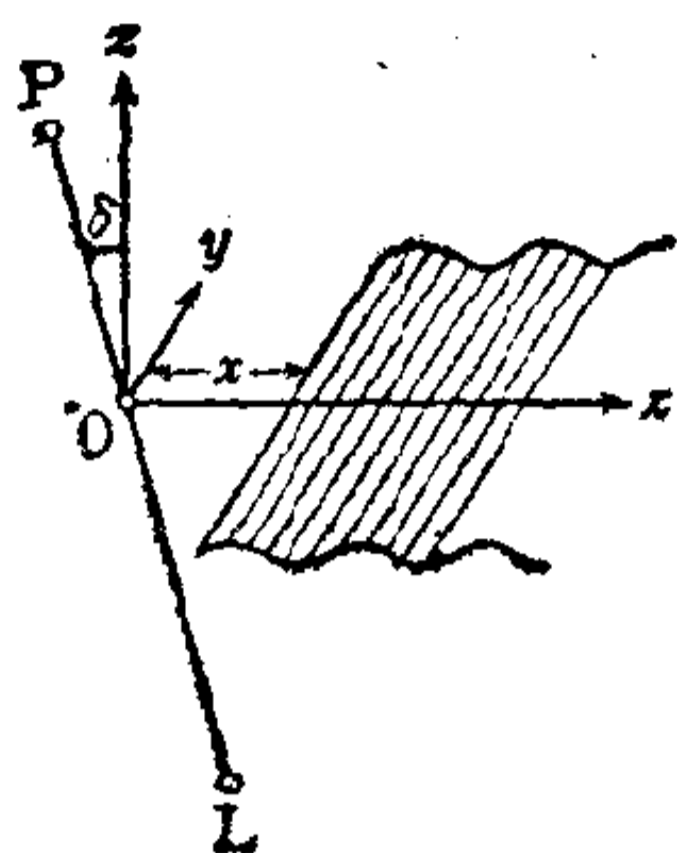


图 4.22

另外, 作为菲涅耳衍射的一个例子, 我们来看一看由不透明的半无限平面的锋利直线边缘所引起的衍射。预先限定, 连结光源  $L$  和观察点  $P$  的直线  $LP$  也好, 它在屏蔽面上的投影也好, 均与该屏蔽面的边缘垂直。取  $LP$  和屏蔽面的交点为原点, 取  $LP$  在屏蔽面上的投影为  $x$  轴, 而  $y$  轴平行于屏蔽面的边缘, 我们来考虑位于  $xz$  面内的观察点  $P$  上的光

强度。设屏蔽面的边缘到原点  $O$  的距离为  $x$ , 则随着  $x < 0$  或  $x > 0$ , 观察点  $P$  应该位于几何影子的内部或外部。也就是说, 当把观察点  $P$  固定下来, 而让屏蔽面沿着  $xy$  面平移时, 会看到  $P$  点上光强度的变化。在这种情况下, 菲涅耳-基尔霍夫衍射公式中的积分区域  $\mathcal{V}'$  的范围是  $-\infty < \xi < x, -\infty < \eta < +\infty$ 。倘若把它用  $u$  和  $v$  写出来, 并设  $\delta$  是  $\overline{LP}$  和  $z$  轴的夹角, 由式 (4.2.40) 则有

$$-\infty < u < +\infty, -\infty < v < +\infty;$$

$$w = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} \right)} x \cos \delta. \quad (4.2.45)$$

虽然这个衍射孔违背了推导式 (4.2.39a) 时的假定——孔的一维尺度要小于  $LO$ 、 $OP$ , 但是, 现在如果试着应用一下式 (4.2.39a) (关于它的严格处理, 可参考波恩-乌尔夫《光学的诸原理》第 XI 章), 则在使用式 (4.2.41c) 和式 (4.2.43) 之后, 衍射积分

$$\begin{aligned}
C &= b \int_{-\infty}^w du \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) \right. \\
&\quad \left. - \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) \right\} \\
S &= b \int_{-\infty}^w du \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) \right. \\
&\quad \left. + \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) \right\}
\end{aligned}$$

就成为

$$\begin{aligned}
C &= b \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{C}(w) \right] - \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{S}(w) \right] \right\} \\
S &= b \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{C}(w) \right] + \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{S}(w) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.2.46}$$

强度分布则是

$$\begin{aligned}
I &= |B|^2 (C^2 + S^2) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{C}(w) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{S}(w) \right]^2 \right\} I^{(0)} \\
I^{(0)} &= 4|B|^2 b^2 = \frac{|A|^2}{(r' + s')^2}
\end{aligned} \tag{4.2.47}$$

由考纽螺线，可以知道它的大致情况。这是因为，如式(4.2.47)所示， $2I/I^{(0)}$  等于在平面  $\mathcal{CS}$  的考纽螺线上，点  $w$  离渐近点  $P^-$  的距离的平方。当观察点位于直接光源照射的区域内时（对应于  $w > 0$  的分支），随着离屏蔽面边缘的距离的增加， $I/I^{(0)}$  的振幅波动式地减小，在  $w \rightarrow \infty$  时趋近于  $1$  ( $P^+$ 、 $P^-$  之间距离平方的  $1/2$ )，即接近于没有屏蔽面的情况。在几何影子的边界上 ( $w = 0$ )， $I/I^{(0)} = 1/4$ ，而最大



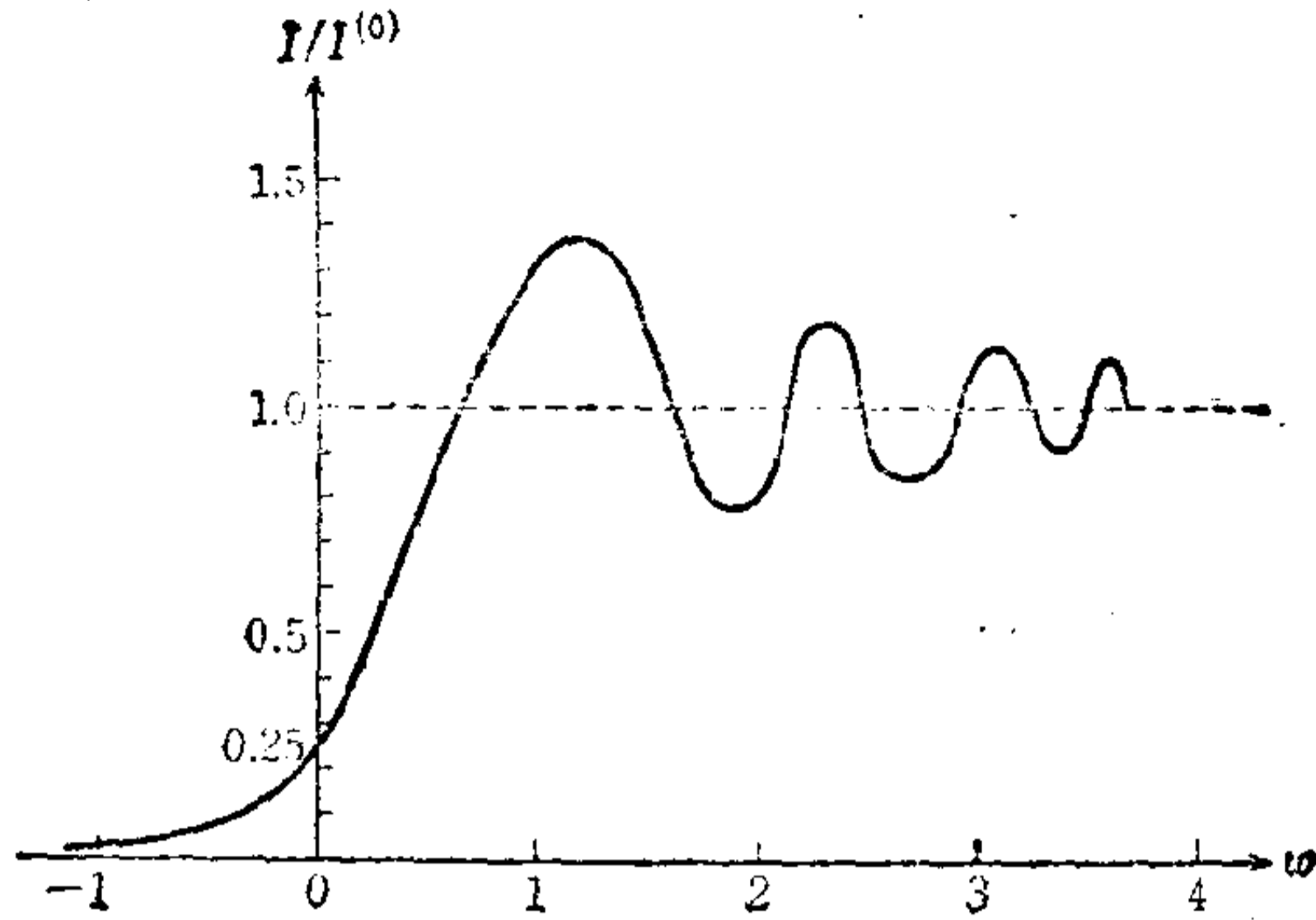


图 4.23

值出现在稍微进入照射区域的地方。因为  $w > 0$  的分支上的点离  $P^-$  的极大距离和极小距离, 近似地出现在通过原点并同  $\mathcal{C}$  轴成夹角  $\pi/4$  的直线与考纽螺线的该分支的交点上, 所以, 极大发生在  $\theta = \left(\frac{3}{4} + 2n\right)\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 由式

(4.2.44) 可知, 也就是发生在  $w = \sqrt{3/2 + 4n}$  上, 而极小则发生在  $\theta = (7/4 + 2n)\pi$ , 即发生在  $w = \sqrt{7/4 + 4n}$  上。显然,  $|w|$  越大, 考纽螺线  $w < 0$  分支的各点与渐近点  $P^-$  之间的距离就越小, 所以, 在几何影子的范围内,  $I/I^{(0)}$  单调地减小到零。

要从杨氏的立场来研究这种衍射现象, 只要把式(4.2.20)写成

$$\left. \begin{aligned}
 U^{(d)}(P) &= \oint_{\Gamma} e^{ik\zeta} f(l) dl \\
 \zeta &\equiv r_1 + s_1 \\
 f(l) &\equiv \frac{1}{4\pi r_1 s_1} \frac{\cos(\pi, s_1)}{1 + \cos(s_1, r_1)} \sin(r_1, dl)
 \end{aligned} \right\}, \tag{4.2.20a}$$

再使用固定位相法 (method of stationary phase) 求出积分值就可以了 (A. 鲁比诺维茨, 1924).  $f(l)$  不依赖于波数  $k$ , 一般来说与边界曲线的长度  $l$  一起缓慢变化. 但是, 在几何影子的边界附近, 由于分母  $1 + \cos(s_1, r_1)$  的作用, 必须特别注意. 首先, 我们来考虑离影子边界相当远的空间点  $P$ . 除了位相  $k\zeta$  作为  $l$  的函数而取固定值的点, 也就是除了  $\zeta' \equiv d\zeta/dl = 0$  那样的点  $Q_\nu$  之外, 因子  $\exp(ik\zeta)$  在衍射孔边界曲线  $\Gamma$  的所有点上急速波动. 因此, 只有固定点  $Q_\nu$  的附近才会对积分式 (4.2.20a) 有显著贡献. 由位相取固定值的条件

$$\zeta' = \frac{dr_1}{dl} + \frac{ds_1}{dl} = 0$$

可知,

$$\cos(r_1, dl) = -\cos(s_1, dl), \quad (4.2.48)$$

所以, 在  $Q_\nu$  上应该引起某种反射. 由光源  $L$  进入包含  $Q_\nu$  在内的边界曲线的线元  $dl$  的光, 和由  $dl$  向观察点  $P$  前进的光, 相对于  $dl$  构成了相同的角, 但是, 二者一般不在同一平面上. 光被线元  $dl$  反射到以  $Q_\nu$  为顶点, 以  $dl$  为轴的半圆锥体内. 这个圆锥的顶角, 是连结  $L$  和  $dl$  的直线  $r_1$  的延长线, 与该圆锥相切而形成的. 可以说, 固定位相法的使用, 就是把衍射看成了由固定点  $Q_\nu$  “反射”的光相互之间的干涉及其与直接光的干涉. 为了求出一个固定点  $Q_\nu$  对式 (4.2.20a) 的贡献  $U^{(d)}|_\nu$ , 首先需要把  $\zeta$  在  $Q_\nu$  附近展开. 对于和这个固定点有关的量, 我们约定都加上下标  $\nu$ , 则有

$$\zeta = \zeta_\nu + \frac{1}{2!} \zeta''_\nu (l - l_\nu)^2 + \frac{1}{3!} \zeta'''_\nu (l - l_\nu)^3 + \dots$$

现在来考虑把这个展开式取到二次项, 就可成为  $\zeta$  的极好近似的情况. 因为用  $f(l_\nu)$  代替  $f(l)$ , 便能忽略固定点以外对积分的贡献, 所以, 如果设积分界限是由  $-\infty$  到  $\infty$ , 那么,

$$U^{(d)}|_v = f(l_v) e^{ik\zeta_v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{1}{2}\zeta_v'(d-l_v)^2} dl.$$

用  $\frac{1}{2}k\zeta_v'(d-l_v)^2 = \frac{\pi}{2}v^2$  引进新的积分变量  $v$ , 这个积分就可以由式 (4.2.41c) 求出来. 在远离影子边界的点  $P$  上, 其结果是

$$\begin{aligned} U^{(d)}(P) &= \sum_v U^{(d)}|_v \\ &= \sum_v \frac{1}{2\sqrt{2\pi k}} \frac{1}{\sqrt{\zeta''}} \exp i \left[ k(r_1 + s_1) + \frac{\pi}{4} \right] \\ &\quad \times \frac{\cos(n, s_1)}{1 + \cos(s_1, r_1)} \sin(r_1, dl)|_v \quad (4.2.49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta'' &= r_1'' + s_1'' = \sin^2(r_1, dl) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{s_1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} [\cos(r_1, \rho) + \sin(s_1, \rho)] \quad (4.2.50) \end{aligned}$$

式中,  $\rho$  是在  $Q_v$  上边界曲线的曲率半径, 位于该点的主法线方向上.

为了推导在几何影子的边界附近也能适用的近似表达式, 必须考虑到该边界上  $U^{(d)}(P)$  (参考式(4.4.20))的值是不连续的. 假如把在影子边界受直接光照射的范围的那一侧的  $U^{(d)}$  值写成  $U_L^{(d)}$ , 而把在影子范围一侧的  $U^{(d)}$  值写成  $U_S^{(d)}$ , 那么, 设光源  $L$  和观察点  $P$  的距离  $LP$  为  $R$ , 则有

$$U_L^{(d)} - U_S^{(d)} = -\frac{e^{ikR}}{R}, \quad (4.2.51)$$

不过,  $U^{(d)}$  的法线方向的导数在影子边界上却是连续的. 因此, 如果构成一个函数

$$V \equiv \frac{\partial}{\partial k} (R e^{-ikR} U^{(d)}), \quad (4.2.52)$$

则  $V$  及其法线微分在边界上都是连续的. 把式 (4.2.20) 代入上式右边的  $U^{(d)}$  进行计算, 再将该结果对  $k$  积分, 就可

以得到

$$U^{(d)}|_v = \frac{e^{i(kR + \frac{3}{4}\pi)}}{2r_1s_1\sqrt{\zeta''}} \frac{\sqrt{r_1 + s_1 - R}}{1 + \cos(r_1, s_1)} \\ \times \cos(n, s_1) \sin(r_1, dl) \int_{+\infty}^w e^{i\frac{\pi}{2}w^2} dw \quad (4.2.53)$$

$$w \equiv \sqrt{\frac{2k}{\pi}} (r_1 + s_1 - R).$$

在这里,  $\zeta''$  也是用式 (4.2.50) 确定的. 当  $k(r_1 + s_1 - R)$  很大时, 这个表达式与式 (4.2.49) 一致. 这是因为, 在式 (4.2.53) 中出现的积分, 对于大的  $w$  值, 可以用下式来近似

$$\int_{-\infty}^w e^{i\frac{\pi}{2}w^2} dw = -\frac{i}{\pi w} e^{i\frac{\pi}{2}w^2}.$$

如果使用  $r_1$ 、 $s_1$ 、 $R$  之间的关系式  $(r_1 + s_1)^2 - R^2 = 2r_1s_1 \times \{1 + \cos(r_1, s_1)\}$ , 和  $r_1$ 、 $s_1$  所张开的平面与  $n$  方向成夹角  $\alpha$  时的关系式  $\cos(n, s_1) = \sin(r_1, s_1) \cdot \cos\alpha$ , 而把式 (4.2.53) 中的因子改写成

$$\frac{\sqrt{r_1 + s_1 - R} \cos(n, s_1)}{1 + \cos(r_1, s_1)} \\ = \frac{\sqrt{(r_1 + s_1)^2 - R^2}}{1 + \cos(r_1, s_1)} \cdot \frac{\cos(n, s_1)}{\sqrt{r_1 + s_1 + R}} \\ = 2\sqrt{\frac{r_1s_1}{r_1 + s_1 + R}} \cos\alpha \sin\left[\frac{(r_1, s_1)}{2}\right], \quad (4.2.54)$$

我们马上就会明白, 式 (4.2.53) 的  $U^{(d)}|_v$  实际在影子边界上是有限的. 由式 (4.2.54) 还可以知道, 式 (4.2.53) 在影子边界上具有前面说过的值的不连续 (4.2.51). 当点 P 接近影子边界时, 边界曲线上的对应点  $Q_v$ , 向着连结光源和观察点的直线方向移动, 式 (4.2.53) 中的  $\cos(r_1, \rho) + \cos(s_1, \rho)$  和  $r_1 + s_1 - R$  接近于零, 而  $\sin[(r_1, s_1)/2]$  和  $\cos\alpha$  则接近

于1,符号根据  $\cos(n, s_1)$  来确定,所以,式(4.2.53)在由直接光照射范围接近时,取 $-(1/2)(e^{ikR}/R)$ 的值,在由影子范围接近时,取 $+(1/2)(e^{ikR}/R)$ 的值.

另外,如果考虑由半无限平面的边缘引起的衍射,那么,在这种情况下只有与  $\zeta = Min$  对应的一个固定点  $Q_0$ . 因此,边界波  $U^{(d)}$  便可以直接用式(4.2.53)来确定,但必须认为式(4.2.50)中的曲率半径  $\rho$  是无限大的. 当衍射角小的时候,使用式(4.2.54)就能由式(4.2.17)、(4.2.18)、(4.2.53)推导出与式(4.2.47)相当的表达式. 梅耶(E. Maey, 1893)在实验上证明,这时式(4.2.48)所给出的“反射”半圆锥是存在的.

#### f) 观察衍射波面——全息照相术

杨氏和非涅耳的衍射理论对于理解光学现象的重要意义之一,在于它明确了由光学仪器所成的象都是衍射象,而且光象不过是衍射现象的极大值的记录. 阿贝(E. Abbe, 1874)和亥姆霍兹(1874)关于显微镜分辨率的理论更加明确地指出了这一点. 在今天,不必把由同一个点光源发出的光的波面或振幅进行分解,而依靠激光就可以形成相干光源,使我们能够直接用肉眼看到形成光象的非涅耳(或夫琅和费)衍射波的波面图样. 盖宝(D. Gabor, 1948)的**全息照相术**(holography),把通常依靠非相干光的一步成象过程分成了两步. 先把对象用相干光照射,再加上相干的**参考光**(background),将其衍射图形拍成照片. 这个照相底板(全息照相)包含着照明光在通过对象时受到的扰动的全部信息,不仅有光的强度,而且还加上位相的关系. 其次,在相同的几何位置上,取掉对象,只用相干的参考光来照射全息底片,这时,由底片发出的光波包含着使原来的波面再现(reconstruct)的部分,它可以看成是由对象发出的,并有足够的剩余的部分可以分离出来使对象



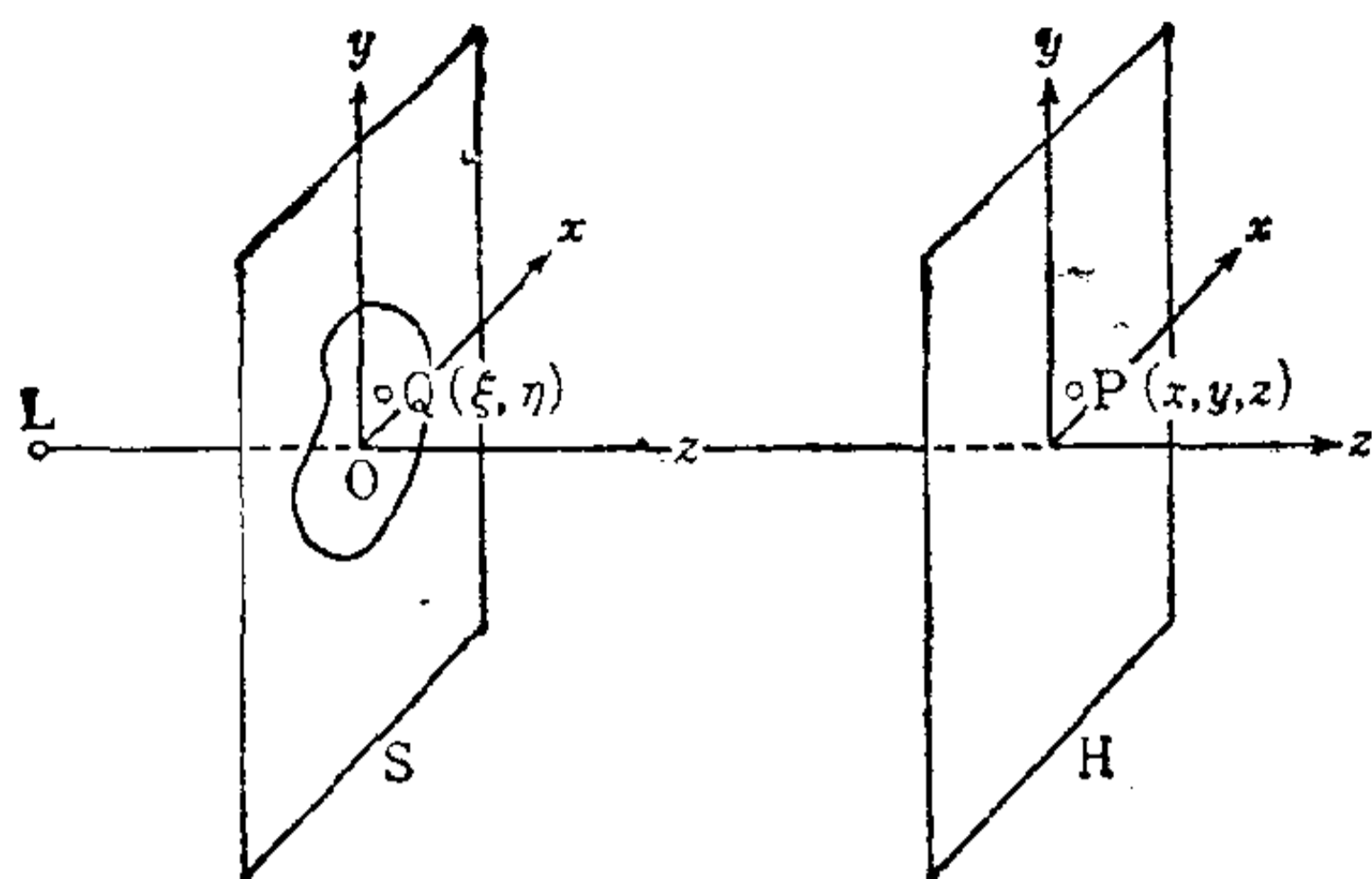


图 4.24

的像再现.

现在, 让点光源  $L$  发出的相干单色光和位于平面  $S$  上的点散射体  $Q(\xi, \eta)$  相遇, 那么,  $Q$  便会产生和入射波相干的球面波, 它与参考波进行干涉, 在与平面  $S$  相距  $z$  的平面  $H$  上形成菲涅耳衍射条纹. 倘若在  $S$  上有一个具有各种各样透射率 (或反射率) 的对象, 则对象的各点  $Q$  便分别独立地在  $H$  上产生自己的衍射条纹. 我们仿照式 (4.2.32) 来定义一个与振幅有关的透射函数 (或反射函数)  $F(\xi, \eta)$ , 并把它分成两部分: 给出平均透射率的部分  $F^{(b)}$  和剩余的部分  $F^{(r)}(\xi, \eta)$ . 如果只考虑衍射角小的情况, 则由式 (4.2.15) 可知, 向落到  $H$  上的点  $P(x, y, z)$  的光  $U(P)$ , 由下式确定:

$$U(P) \approx -\frac{i}{\lambda z} \iint [F^{(b)} + F^{(r)}(\xi, \eta)] \exp\{ik[z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}\} d\xi d\eta.$$

使用

$$[z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2} \approx z + (x - \xi)^2/2z + (y - \eta)^2/2z,$$

再略去常数位相因子  $\exp(ikz)$ , 则有

$$U(P) \approx -\frac{i}{\lambda z} \iint [F^{(b)} + F^{(r)}(\xi, \eta)] \exp \times \left\{ i \left( \frac{\pi}{\lambda z} \right) [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta. \quad (4.2.55)$$

假如把面 S 上的小孔边缘所引起的衍射除外, 则与  $F^{(b)}$  对应的项就可以看成是均匀透射的参考光。因此, 纹在 H 上的照相底板所接受到的光为

$$U(P) = F^{(b)} + \left( \frac{-i}{\lambda z} \right) \iint F^{(r)}(\xi, \eta) \exp \times \left\{ i \left( \frac{\pi}{\lambda z} \right) [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta \equiv U_0 + U_1,$$

它等于相干的参考波  $U_0$  和物波 (object wave)  $U_1$  之和。若写成  $U \equiv A e^{i\psi}$ ,  $U_0 \equiv A_0 e^{i\psi_0}$ ,  $U_1 \equiv A_1 e^{i\psi_1}$ , 则有

$$\left. \begin{aligned} U &= A e^{i\psi} = U_0 + U_1 = e^{i\psi_0} (A_0 + A_1 e^{i(\psi_1 - \psi_0)}) \\ A &= [A_0^2 + A_1^2 + 2A_0 A_1 \cos(\psi_1 - \psi_0)]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.56)$$

在该照相底板特性曲线 (赫尔特-德里菲尔德 (Hurter-Driffield) 曲线) 的直线部分, 对于无位相变化的纯吸收来说, 用这个光得到的负象全息底板的振幅透射率  $T^{(n)}$  以下列关系式确定:

$$T^{(n)}(x, y) = (K_n A)^{-\Gamma_n}.$$

其中,  $K_n$  是与曝光时间成正比的常数。因为再把该底片冲成照片时的曝光量 (曝光强度和曝光时间的乘积) 与  $T^{(n)}$  成正比, 所以, 正象全息照相的振幅透射率  $T^{(p)}$  就是

$$\left. \begin{aligned} T^{(p)}(x, y) &= [K_p (K_n A)^{-\Gamma_n}]^{-\Gamma_p} = K A^\Gamma \\ \Gamma &\equiv \Gamma_n \Gamma_p, \quad K \equiv K_p^{-\Gamma_p} K_n^\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.2.57)$$

因此, 在再现过程中只用参考光  $U_0$  来照射正像全息照片时, 透射出来的代替波 (substituted wave)  $U_s$  就是

$$U_s = T^{(\Gamma)}(x, y)U_0 = KA_0e^{i\psi_0}[A_0^2 + A_1^2 + 2A_0A_1\cos(\psi_1 - \psi_0)]^{\Gamma/2}. \quad (4.2.58)$$

若考虑  $\Gamma = 2$  的情况, 则有

$$U_s = KA^2U_0 = KA_0^2e^{i\psi_0} \times \left[ A_0 + A_1e^{i(\psi_1 - \psi_0)} + \frac{A_1^2}{A_0} + A_1e^{-i(\psi_1 - \psi_0)} \right]. \quad (4.2.58'a)$$

把它和式 (4.2.56) 相比较, 假若  $A_0$  是固定的 (即假若参考光是均匀的), 则式 (4.2.58a) 的确包含着与原来的波成正比的成分 (第 1、2 项)。剩余的成分之中, 第三项与参考波同位相, 但振幅是  $(A_1/A_0)^2$  倍。参考波相对地强一些, 这一项就可以非常小。参考波的振幅  $A_0$  远远大于物波的振幅  $A_1$ , 并不是说全息照相的反差就应该格外弱。比如, 在  $(A_1/A_0)^2 = 10^{-2}$ , 即  $(A_1/A_0) = 10^{-1}$  的情况下, 假设干涉条纹极大和极小的强度之比为  $(1.1/0.9)^2 = 1.5$ , 而且  $\Gamma = 2$ , 这时的强度透射率之比是  $(1.5)^2 = 2.25$ , 给出了十分强的反差。能够观察到的反差的界限, 大约是 4%, 相当于  $(A_1/A_0)^2 \leq 10^{-4}$ 。另外, 该式的第四项, 振幅和物波相同, 而对参考波的位相差却符号相反。这个波叫做**共轭波** (Conjugate wave)。为了判断它的意义, 我们还需要再次回过头来看看全息照相形成的过程。

照相底板上的点  $P$ , 受到两束光的照射, 一束是点光源  $L$  发出的直接光  $\overline{LP}$ , 另一束是经由对象的一点  $Q_1$  而来的间接光  $\overline{LQ_1P}$ 。在这两条光线之间, 既有与其光程差对应的位相差, 也有只由对象上的衍射而引起的位相变化的相位差; 二者干涉的结果, 形成了  $P$  点上的光的振幅。可是, 我们也能用具有相反位相差的两条光线, 形成与此相同的振幅。为此, 使光的传播方向相反, 并认为前面由  $L$  发射的波都会聚到  $L$  上。设那样的会聚波的波面为  $Q_2Q_2'$ , 若使  $\overline{LQ_1} + \overline{Q_1P} - \overline{LP} = \overline{Q_2P} -$

$\overline{Q_2'P}$ , 即  $\overline{Q_1P} - \overline{Q_1A} = \overline{Q_2P} - \overline{Q_2A}$  (A 是以 L 为中心并通过 P 的球面与  $LQ_1$  的交点), 则由  $Q_1$ 、 $Q_2$  来的光相对于直接光应该具有相反的位相差. 换句话说, 共轭波只提前了物波的位相所滞后的那一部分(当  $Q_1$  不是点, 而是具有宽度时, 存在着

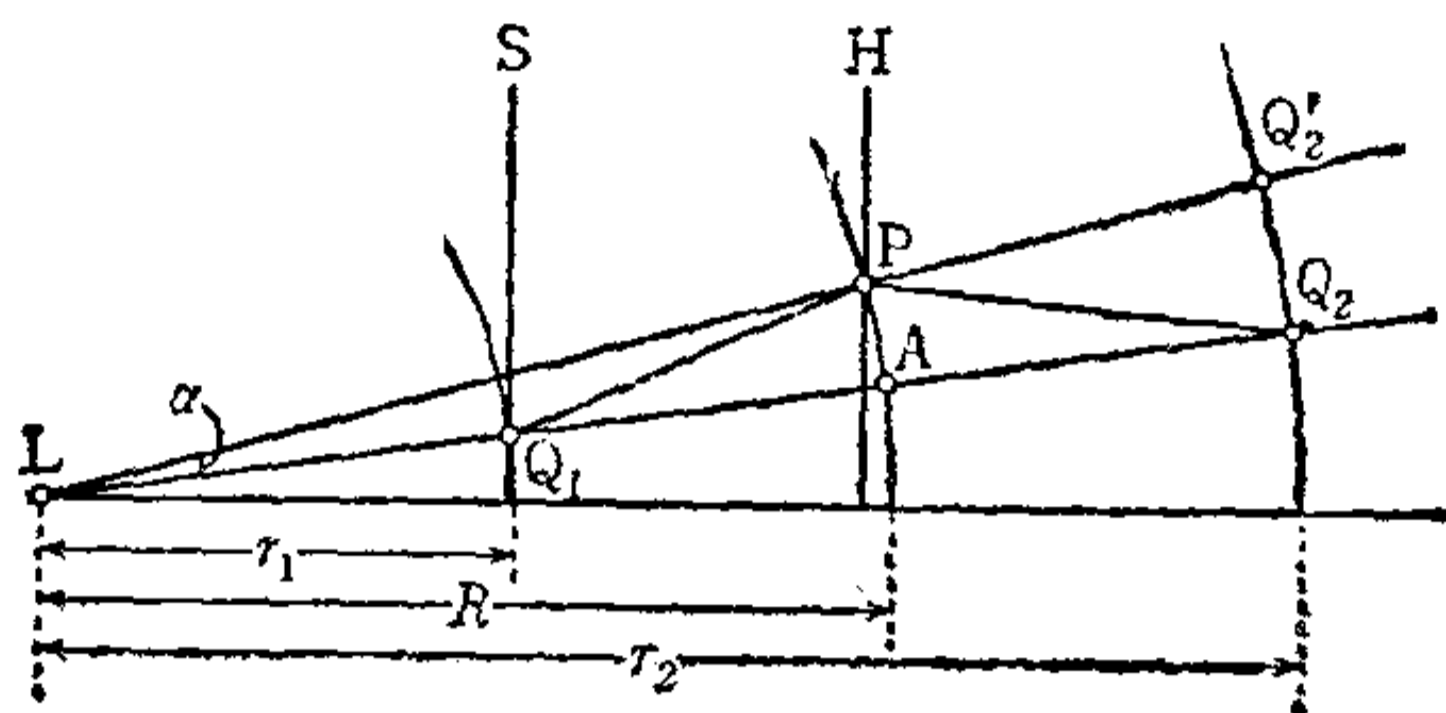


图 4.25

由衍射引起的位相滞后, 所以还必须把  $Q_2$  的位相再提前那一部分). 设  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $A$  到  $L$  的距离为  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $R$ ,  $LP$  和  $LQ_1$  的夹角为  $\alpha$ , 那么, 上面的关系就是

$$\begin{aligned} & \sqrt{(R \cos \alpha - r_1)^2 + R^2 \sin^2 \alpha} - (R - r_1) \\ & = \sqrt{(r_2 - R \cos \alpha)^2 + R^2 \sin^2 \alpha} - (r_2 - R), \end{aligned}$$

把此式两边对  $\alpha$  展开, 而且只取第一项, 则有

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{R}. \quad (4.2.59)$$

倘若全息照片形成中心为  $L$ 、半径为  $R$  的球面, 则上式在所有点上均成立, 因此, 共轭波可以看成是由一个假想对象产生的波, 这个假想对象是原来对象由球面镜(中心为  $L$ 、半径为  $R$ )所形成的镜象, 不言而喻, 即使是平面全息照片, 若光线和光轴的夹角非常小, 它也会在很好的近似程度下成立. 进一步假设  $(r_1/R) < 1$ , 则由式 (4.2.59) 可知,  $r_2 \approx -r_1$ , 所以, 共轭的对象和真正的对象就光源  $L$  而言处于对称的位置上.

因此,假设参考波是均匀的,而且比物波强,那么,除了可以看作由共轭对象来的那些成分之外,代替波  $U$ ,实质上 and 原来的波  $U$  具有相同的效果. 所以,如果把合适的透镜放在正象全息底板之后,只用参考光来照射,则在与平面  $S$  共轭的平面上就应该形成物象. 但是,这个象会因共轭波而被打乱. 为了抑止这个扰动效应,人们曾考虑过各种各样的方法. 现在一般所使用的,是让光源发出的光的一部分折射或反射,而把它当作与照明光构成有限角度的参考光来完成全息照相,然后再用这个参考光使波面再现,在空间上分离出由物波和共轭波所产生的象 (E. N. Leith 和 J. Upatnieks; 1962). 上面,我们专门讨论了菲涅耳衍射的波面,假如使光学系统满足条件式 (4.2.23a) 或 (4.2.23b), 还可以看到夫琅和费衍射的波面.

### § 4.3 偏振和旋光(光学活性)

在上一节,我们由干涉和衍射现象推导出有关光的本性的基本假定. 它指出,在时刻  $t$  以波面法向速度  $c_n$  传到与光源相距  $r$  的  $P$  点上的光学扰动,是  $t - r/c_n$  的周期函数. 而且,在各向同性的媒质中,可以把光波当作在其传播方向四周是均匀的标量波来处理. 实际上,由惠更斯到菲涅耳的光的波动论者所采取的描象,也是通过与声波类比而得到的一种以太中的波动. 但是,十九世纪前二十五年间,人们已揭示出光的波动是自然界的一种新的运动形态 (即使由光的力学解释的观点来看也是这样),其中只有垂直于前进方向的横振动才能传播下去(一般来说,在弹性体中产生两种波:纵波和横波,而在流体中只产生纵波). 而且,这种光振动在其前进方向四周并不是均匀的,按照马吕斯 (E. L. Malus, 1809) 的命名,这个特性叫做**光的偏振或偏振光** (polarization). 光通



过光学各向异性体时所表现出来的特殊行为，促成人们对这种现象的认识。在回顾偏振光概念的形成过程之际，首先领会物理学史上出现的双折射性物质，应该放在后来已经弄清的光学结晶分类和普通结晶学分类之间关联的哪个相关位置上，更为合适。为此，请看一看表 4.4。

a) 由双折射以及反射、折射引起的偏振

问题开始于 1669 年。那时，巴索里纳斯 (E. Bartholinus) 用冰洲石 (Iceland spar) 观察双重象。他注意到，使结晶体旋转，其一个象的偏移就会有变化；而且，他还确定了产生那个象的光在进行反常折射时的折射率。二十年之后，惠更斯叙述了用两个方解石晶体所做的实验，可以说，这个实验是起偏振器和检偏器组合的原型。

表 4.4

双折射性物质	结晶学分类	光学分类	菲涅耳椭圆体(主折射率)
	等轴晶系	光学各向同性体	球 ( $n_1 = n_2 = n_3$ )
	三方晶系	单轴结晶	以光轴为轴的回转椭圆体 ( $n_1 \neq n_2 = n_3$ )
方解石 $\text{CaCO}_3$ (冰洲石) 石英 $\text{SiO}_2$ (水晶、玛瑙) 电石 $\text{WX}_3\text{B}_3\text{Al}_3(\text{AlSi}_2\text{O}_9)_3$ (O, OH, F) <sub>4</sub>	六方晶系		
	正方晶系		
黄玉 $\text{Al}_2\text{SiO}_4(\text{F}, \text{OH})_2$	斜方晶系	双轴结晶	三轴完全不同的椭圆体 ( $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ )
石膏 $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	单斜晶系		
云母 $\text{KAl}_2(\text{AlSi}_3\text{O}_{10})$ (OH) <sub>2</sub>	三斜晶系		

若使聚焦极细的自然光平行光束入射到第一个结晶 K

上，则会观察到下列一些现象：在属于该入射法线的主截面  $H$ （包含入射法线并平行于结晶主轴的那个平面）内，入射光束被分成强度相等的两条光束，一条是遵从普通斯涅耳定律而折射的寻常光束  $o$ ，另一条是显示非寻常折射的非常光束  $e$ ；当属于第二个结晶  $K'$  的入射法线的主截面  $H'$  与第一个结晶主截面  $H$  构成某一角度时，一般来说每条光束又再次分成遵从斯涅耳定律的部分和不遵从斯涅耳定律的部分，即  $oo'$ 、 $oe'$  及  $eo'$ 、 $ee'$ ，而且  $oo'$ 、 $eo'$  在  $H$  面内， $oe'$ 、 $ee'$  在  $H'$  面内；这四条光束的强度仅仅依赖于两个主截面间的夹角  $\alpha$  而明显地有所不同， $oo'$ 、 $ee'$  随着两个主截面接近于平行而逐渐消失， $oe'$ 、 $eo'$  则在两个主截面垂直时便观察不到了（《关于光的考察》第五章）。

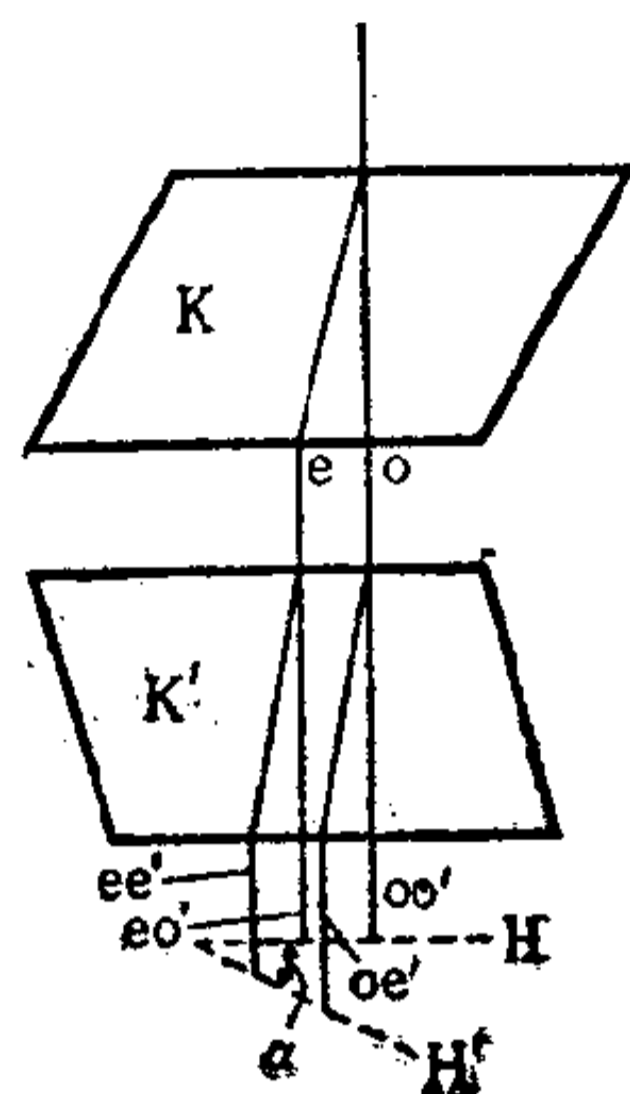


图 4.26

惠更斯设想出两种子波和与之对应的两种不同媒质，也就是说，对于寻常光束考虑以太中的球面波，而对于非常光束则考虑在以太和物质分子中都传播的旋转椭圆波，从而按子波的波面作图法成功地描绘出第一个方解石  $K$  的主截面内的双折射，但是，再进一步的说明，就不可能了。

惠更斯所面临的困难在于，当光波象声波一样，是在与前进方向垂直的所有方向上都具有相同结构的纵波时，假如该波以两种不同的方式传播，那么这只有在两种不同的媒质中才会发生。牛顿洞察了这种情况，他推断，产生双折射的原因不能只寻求于媒质，或许是由于光在入射前就具有的固有性质所决定的。《光学》第 III 篇第一章的问题 25~29 就叙述了下面的看法。牛顿极力主张光的粒子说，把光当成是在流体媒质中传播的压力或运动，他认为，把光学现象作为光束的新

的容态 (modifications) 来解释的立场是错误的,应该抛弃,从而指出,或许是光粒子具有给出固有性质的各种侧面 (sides),由于作用在光的某一侧面和晶体粒子的某一侧面之间象磁力一样具有极性的吸力,才引起了冰洲石的非常折射。

坚持粒子说的马吕斯,果然在一个世纪之后的1808年证实了牛顿对光的这种新的普遍特性的预言。他透过方解石晶体,观察了由卢森堡宫殿的窗户来的反射,改变晶体的角度有时只看到了一个象。在知道这一事实的当晚,他进一步让蜡烛光在水面及玻璃面上反射,并用方解石晶体来检验它,接着又反过来让透过方解石的光反射,从而弄清了反射具有的效果和惠更斯实验中的方解石晶体  $K$ 、 $K'$  是相同的,也就是说,起到了起偏振器及检偏振器的作用。马吕斯认为,光粒子具有三个不同的轴。这就是在光线方向上的  $a$  轴、与以偏振角使该光反射的反射面平行的  $b$  轴以及和  $a$ 、 $b$  轴垂直的  $c$  轴。他还指出,不偏振的光包含着等量的  $b$  轴和  $c$  轴,在反射中对具有一定方向的轴的光粒子进行选择,才产生了偏振的反射光,不过,在未遭到反射的光的剩余部分中,还会残留偏振光的痕迹。以这种设想为基础,他发现,折射光也是部分偏振光,而且重复多次折射,便几乎成为完全偏振光 (1809),从而确定了有关寻常光线和非常光线强度的所谓**马吕斯平方余弦定律**(1811)。

从现象上看,由双折射和反射、折射所引起的偏振光的性质,其有关规则可归纳为以下几点:

(1) 惠更斯实验(1802年;渥拉斯顿也重新做过)表明,透过方解石晶体的光具有不同于自然光的一种稳定特性,对属于入射法线的主截面而言,寻常光束  $o$  的行为和非常光束  $e$  对垂直于这个主截面的平面的行为是完全相同的。该特性可以这样来表示,即:属于这个入射法线的主截面和与之垂

直的平面分别叫做寻常光束和非常光束的偏振面,而且,各个光束在其前进方向四周的非均匀性,对于包含各光束并平行于各偏振面的平面是对称的.现在,把入射的自然光光束的强度写成  $I$ ,把由晶体出来的各条光束的强度加上图 4.26 上的符号作为下标来表示,则由第一个晶体 K 出来的光束的强度就是

$$I_o = I_e = \frac{m}{2} I. \quad (4.3.1)$$

其中,  $m$  是一个因子,它表示由于在晶体边界面上的反射和在晶体内部的吸收而产生的光强度衰减.由第二个晶体 K' 出来的各个光束的强度是

$$\left. \begin{aligned} I_{oo'} &= m I_o \cos^2 \alpha = \frac{m^2}{2} I \cos^2 \alpha, \\ I_{oe'} &= m I_o \sin^2 \alpha = \frac{m^2}{2} I \sin^2 \alpha \\ I_{eo'} &= m I_e \sin^2 \alpha = \frac{m^2}{2} I \sin^2 \alpha, \\ I_{ee'} &= m I_e \cos^2 \alpha = \frac{m^2}{2} I \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (4.3.2)$$

尤其当主截面间的夹角  $\alpha$  取以下特定值时,它们是

$$\left. \begin{aligned} \alpha = 0 \text{ 或 } \pi: & I_{oo'} = \frac{m^2}{2} I, I_{oe'} = 0, I_{eo'} = 0, I_{ee'} = \frac{m^2}{2} I \\ \alpha = \pm \frac{\pi}{2}: & I_{oo'} = 0, I_{oe'} = \frac{m^2}{2} I, I_{eo'} = \frac{m^2}{2} I, I_{ee'} = 0 \\ \alpha = \pm \frac{\pi}{4}: & I_{oo'} = I_{oe'} = I_{eo'} = I_{ee'} = \frac{m^2}{4} I \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2a)$$

阿喇果 (1850) 和威尔德 (H. Wild; 1863) 在实验上对这个马吕斯定律作过补充测试,而等号不过是近似成立的.这



是因为,寻常光束和非常光束折射率不同,从而由反射所引起的衰减并不相等.按照威尔德的结论,则有

$$\frac{I_e - I_o}{I_o} = \frac{1}{33}, \quad \frac{I_{oe'}}{I_{oo'}} = \tan^2 \alpha,$$

$$\frac{I_{ee'}}{I_{eo'}} = k \tan^2 \alpha,$$

其中,  $k$  依赖于所研究的双折射晶体及其方向(例如,对波长为  $5890 \text{ \AA}$  的光来说,在平行于方解石晶体主轴切下来的晶片上,  $k = 1.04739$ ).

(2) 如果使非偏振的光束入射到无吸收的各向同性物质的边界面上,再让反射光束通过方解石晶体,那么,由晶体出来的光束的强度一般来说因寻常光束和非常光束而异,并且依赖于反射体的入射面和属于入射法线的晶体主截面之间的夹角.当入射面和主截面平行时,寻常光束的强度达到最大,然而,即使在这种情况下非常光束的强度也并不完全为零.反射光束的行为似乎表明它是由偏振面与入射面一致的偏振光和非偏振光构成的.反射光束偏振部分的强度依赖于入射角,在入射角为  $0$  或  $\pi/2$  时是零.而对于  $0$  和  $\pi/2$  之间的某一特定角度来说,非偏振部分的强度为零.也就是说,反射光束完全在入射面内偏振时的入射角,叫做该反射体对于外部媒质的起偏振角.

起偏振角由光的波长和反射体的光学性质来决定.当波长为某一确定值时,对于无吸收的各向同性反射体的起偏振角,马吕斯给出了下面的关系

$$\sin \varphi_{12} = n_{12} \sin \varphi_{21}.$$

其中,  $\varphi_{12}$  是媒质 I 对媒质 II 的起偏振角,  $\varphi_{21}$  是媒质 II 对媒质 I 的起偏振角,  $n_{12}$  是就该波长的光而言媒质 I 相对于媒质 II 的折射率.关于这个问题,布儒斯特 (Brewster, 1815)



曾发现,当入射角等于起偏振角时,反射光束与折射光束互相垂直;若考虑到这一点,便可得到**布儒斯特定律**

$$\tan \varphi_{12} = n_{12}. \quad (4.3.3)$$

对各种各样的物质来说,塞贝克 (A. Seebeck, 1830) 确认,无吸收的各向同性物质对各向同性的外部媒质的起偏振角的正切,等于该物质对外部媒质的折射率.

当光以不等于起偏振角的任意角度入射时,会产生部分偏振的反射光束,让这种反射光束再次以任意的人射角反射,最后就可以得到几乎完全偏振的光束(布儒斯特, 1815).

(3) 使非偏振光束以  $0$  或  $\pi/2$  以外的人射角入射到相对于外部媒质的折射率大于  $1$  的、无吸收的各向同性物质上时,折射光常常部分地偏振,其偏振面垂直于反射光束的偏振面,即垂直于入射面. 无论对于怎样的人射角(即使在等于起偏振角的情况下),折射光束非偏振部分的强度都不为零. 阿喇果 (1815) 在实验中发现,折射光束偏振部分的强度等于反射光束偏振部分的强度.

从把光看作电磁场的立场出发,马吕斯在这里所定义的偏振面,相当于包含电磁波前进方向和磁场矢量在内的平面. 但是,因为电场给出使照相底板感光之类的光效应,所以,现在往往把包含波的方向和电场矢量在内的平面叫做光的**振动面**.

#### b) 偏振光的干涉

马吕斯得到的各种结果,鼓舞了十九世纪初叶以巴黎科学院为中心的牛顿学派的光粒子论者们. 而进一步被粒子论者们看作是赞助牛顿学说的现象,是彩色偏振光 (polarization colorée) 和由晶体的平行平面薄片所引起的偏振光干涉,这些现象是阿喇果 (1811) 观察到的,又由毕奥 (J. Biot, 1811~13) 详细研究过.

在由偏振光产生的牛顿环实验中，阿喇果把云母薄片对着蓝天，透过方解石晶体进行观察，这时，他看到双重象各自有不同的颜色，而且还注意到着色的程度随着天空的部位和时刻发生变化。这样，就知道了由天空来的光随着射来的部位和时刻的不同，其偏振情况发生变化，但是，阿喇果还观察到，当把云母片放在产生固定偏振的平面反射镜和方解石晶体的中间时，其着色效应更加明显，而且两个象的颜色彼此有互补色的关系，即使把云母片在该平面内旋转，也只是着色的程度发生变化而已。这时，在云母片中存在着相互垂直的两个方向，如果偏振面和它们一致，就不会显示任何效果。对于方解石来说，即使主截面取那样的方向，也总要显示出双重象，所以，阿喇果把这叫做消偏作用 (depolarizing action)。他还证实，石膏的晶体片、垂直于主轴切下来的厚水晶片以及非晶态的火石玻璃，都显示同样的效应。在水晶中，即使围绕它的轴进行旋转，效果也不变化；若转动检偏用的方解石，则所有颜色便相继出现，双重象的一个象的颜色成为另一个象的互补色。阿喇果给这样一类现象起名为彩色偏振光。

毕奥看到：把云母或石膏的晶片放在起到偏振器和检偏振器作用的两块平面反射镜的中间，若使其厚度逐渐增大，便会周期性地出现相同的颜色，而且渐渐变淡，最后成为白色；在镜子互相垂直而晶片又极薄的情况下，颜色开始是黑的，当镜子平行时是白的，颜色出现的方式与牛顿环的情况完全相同；若把检偏用的镜子由垂直位置依次转到平行位置，那么颜色亦逐渐变成互补色；当晶片主截面与偏振面垂直时，看不到着色效应，而在二者构成  $45^\circ$  角时，则显示出极为明显的着色效应。由这些特性出发，毕奥把自然光情况下的牛顿激发理论对偏振光进行模拟，建立了动态偏振光 (polarization mobil) 理论：也就是说，在平面 P 内起偏的光粒子，一进入具有主截

面H的晶片中，便立即在H的两侧以相等振幅开始振动，因此就看到周期性地沿着平面P或X起偏的光，与牛顿的理论一样，其周期随着颜色而变化。他假设，光在达到晶片第二个边界的瞬间，其振动停止，检偏用的镜子检出了各种颜色在离开晶片的瞬间所占据的偏振面。但是，给这个模型还必须附加注释性的假定。对于倾斜地通过晶片的光来说，为了与布儒斯特、渥拉斯顿等人的观测结果相符合，和牛顿的情况一样，尚须给出不同的振动周期。而且，还应该假定，在厚的晶片中，偏振面的振动是逐渐静止的。这是因为，在该情况下所发出的光，通常只显示给定的两个偏振面。

在彩色偏振光实验中，阿喇果已经断定，云母片内存在着不显示着色效果的两个互相垂直的方向。而在1818年布儒斯特发现，除了已知的方解石型结晶体只有一个不显示双折射的方向之外，在许多结晶上还有两个不显示双折射的方向。他把前一种类

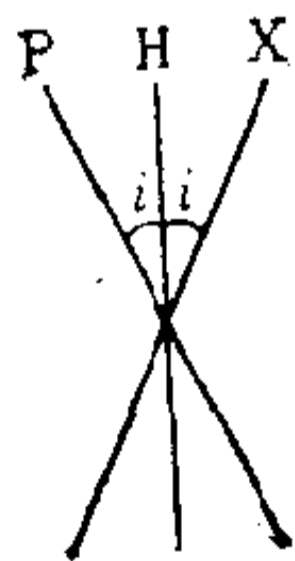


图 4.27

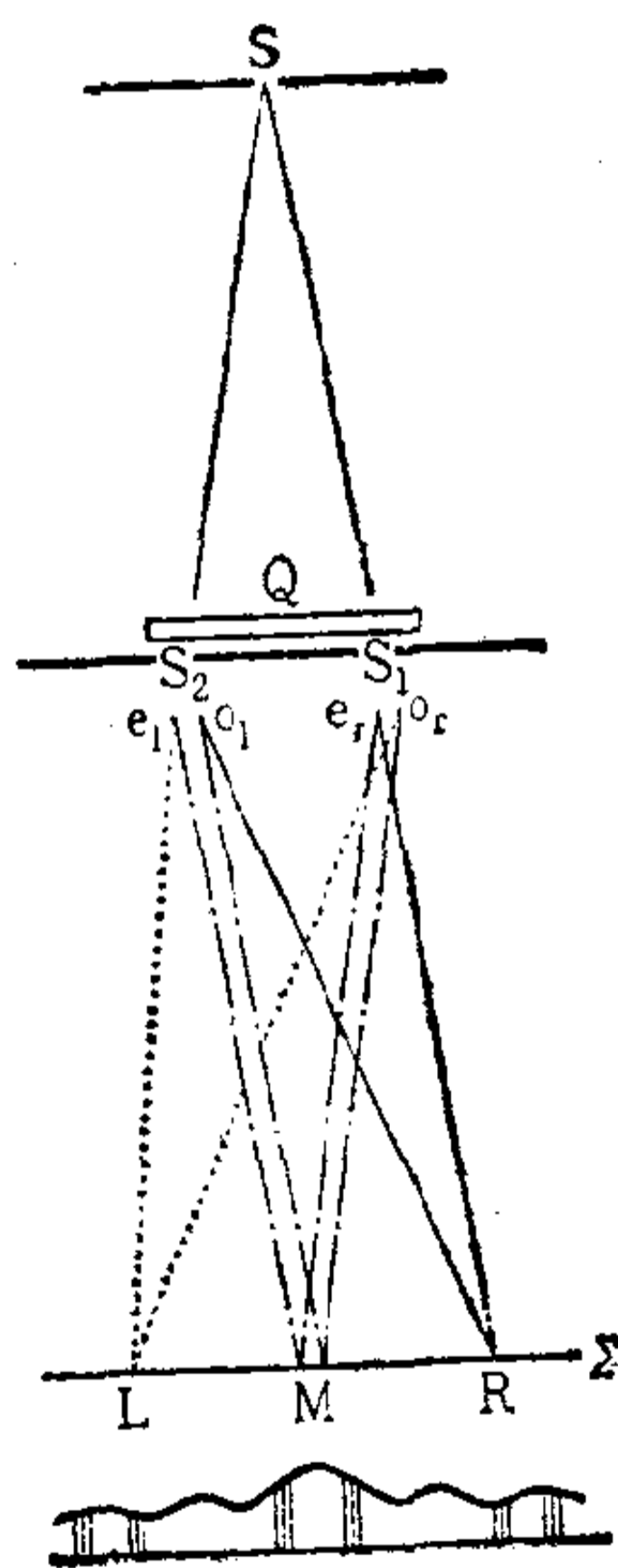


图 4.28

型的晶体命名为**单轴晶体**；而把后一种命名为**双轴晶体**。对光学性质和结晶学性质之间关系的这种认识，使人们明白惠更斯的双折射作图法已经不再是无所不能的了。不用说，这

又使得粒子论者们的气势益发高涨。布儒斯特(1815)声言,偏振现象是不能用波动论来说明的;其结果,以菲涅耳获奖而告终,巴黎科学院关于光衍射的有奖论文征集,也是在这样的学术界风潮中期待着光粒子论的确立而举行的。

另一方面,由波动论的观点出发对偏振现象进行的探讨,也是由杨氏(1814)关于偏振光的各种研究的综合报告开始的。作为彩色偏振光理论,毕奥的动态偏振理论的弱点在于:同一晶体只因厚度不同就会显示出极为不同的行为,而且在两者之间不能确定明确的界线,关于它们之间的转变本质上也是不明确;另外,两块主截面垂直的极厚的晶片,显示出相当于其厚度差的颜色,为了说明它,还有必要进一步作新的假定。但是,在光量子假说之前的光粒子说,对于每一种光学现象都是有目的地假设了特定的模型,或者假设了光粒子间的力、光粒子-以太粒子间的力的性质,这种光粒子说仅仅在说明所讨论的现象时才是有效的,因而欠缺与其它同样的说明方法之间的协调性和统一性。毕奥的理论也不例外。关于这一点,杨氏还表明,在显示特定颜色的双折射性晶体中,与给定颜色的牛顿环一样,寻常光束与非常光束的位相差是一定的,从而强调了干涉原理的普遍性。但是,他并不能说明互相垂直偏振的两束光为什么只有在特定的条件下才引起干涉。

可以推测,菲涅耳着眼于偏振光问题,是由1814年左右开始的。在由1816年起的十八年间,他与阿喇果共同进行了研究,后者对上述的杨氏报告同样关心。他们的中心课题是,光的偏振是否使干涉效果受到某种影响。菲涅耳和阿喇果把方解石、水晶、石膏晶体的薄片用作偏振光镜,而且因为没有能够得到合适的电石晶体,而使用了云母叠层等等,重复了多种多样的偏振光干涉实验。在这里,我们以尽可能简单的形



理出来,综述如下.

在前节提到的杨氏干涉实验中,如果用平行于主轴切下来的水晶薄片Q把两个狭缝遮盖,那么,寻常光束就会产生对于屏幕 $\Sigma$ 的中心是对称的干涉条纹,而非常光束也会形成同样的条纹.二者完全相同,并在 $\Sigma$ 上是一致的.菲涅耳认为,因为在水晶片中非常光束较寻常光束滞后,所以,由右侧狭缝 $S_1$ 来的寻常光束 $o_r$ 和由左侧狭缝 $S_2$ 来的非常光束 $e_l$ 进行干涉,产生了中心偏左的干涉条纹带L;同样, $o_l$ 和 $e_r$ 产生右方的R,而中心部位的M则由 $o_r$ 和 $o_l$ 、 $e_r$ 和 $e_l$ 形成.实际上,在这种情况下,寻常光束和非常光束分别产生的两个同样的干涉条纹是重叠到一起的.而且,在两条光束之间确实存在着光程差,该光程差并不依 $\Sigma$ 上的位置而变化,却是随颜色一起变化的.这恰恰是用彩色偏振光所引起的现象.

但是,在进一步继续探讨偏振光干涉的方式时,这个误解倒是发挥了作用.为了证明以上观点,如果把水晶片分成两块,在 $S_1$ 前的一块,其光轴水平放置,在 $S_2$ 前的一块,其光轴垂直放置,那么,中心部位的干涉条纹M并不出现,只能看到两侧的条纹R和L.若使两块水晶片的光轴之间夹角不是 $90^\circ$ ,而是 $45^\circ$ ,那么,这一次便可看到所有的干涉条纹.在前一种情况下,同种光束互相在垂直方向上偏振,异种光束在平行方向上偏振.就是说,如果用各自的偏振面来重新解释菲涅耳“误解”中的同种异种光束,那么,干涉效应只有在偏振面正交时才看不到,假如偏振面稍微偏移这个位置,则干涉效应就会出现.在这个实验中,两侧干涉条纹带的偏移,取决于晶片的厚度和双折射率,这可以用来检测微弱的双折射性.

那么,即使是一开始就在互相垂直的方向上偏振的光,如果使它们的偏振面在同一个平面上,也会引起干涉吗?为了实现这样的偏振状态,可以在各个狭缝之前放置同样的云母



片叠层,使光以偏振角穿过,一方的人射面是垂直的,另  
的人射面是水平的,然后再用平行于光轴切开的水晶薄片.  
盖两个狭缝,使其光轴和水平面倾斜 $45^\circ$ .可以预料,这时同  
种光束是平行偏振的,异种光束是垂直偏振的,只会出现中央  
条纹 M. 然而,实际上什么条纹也看不到.也就是说,由互相  
在垂直方向上偏振的光源发出的光,即使接着就让其偏振面  
位于同一平面上,也不会发生干涉.而且,在前面那个把光轴  
互相垂直的水晶片放置在各个狭缝之前的实验中,若用合适  
的云母叠层让照上去的光对于各水晶片的光轴呈 $45^\circ$ 角进行  
偏振,仍然只会出现两侧的干涉条纹 R、L,但是,假如在屏  
幕 $\Sigma$ 前放置方解石晶体使其主截面与水晶片的光轴构成 $45^\circ$   
角,那么就能看到所有的干涉条纹 R、M、L. 然而,一旦取  
掉云母叠层,中央条纹 M 便消失了. 由此可知,只有在平行方  
向上偏振的光,彼此之间才具有干涉能力,而开始在垂直方  
向上偏振、接着又在相同偏振面上偏振的光,只有当它们出自同  
一个偏振光时才产生干涉.

菲涅耳-阿喇果的实验(在这个阶段,他们尚未完全掌握  
偏振光的本性),作为以后研究偏振光的基本经验事实,应该  
明确以下几点: i) 在垂直平面内偏振的光,于普通非偏振光  
进行干涉的条件之下,不显示任何相互作用的痕迹; ii) 在同  
一平面内偏振的光,象非偏振光一样进行干涉,无论在什么样  
的情况下,其结果都完全相同; iii) 原来在垂直平面内偏振  
的光,即使接着使它们位于同一偏振面内,也不能获得干涉能  
力; iv) 先在垂直平面内偏振、接着又具有相同偏振面的光,  
倘若是由同一个偏振光产生的,便象非偏振光那样进行干涉.  
斯忒藩 (J. Stefan, 1866)、罗西克 (W. Rosicky, 1872)、马  
赫 (1904), 等人后来又以形式更为简练的实验证明了这个  
结论. 如后所示,用这些结果足以得到光是横波的结论. 但

是,在非涅耳和阿喇果 1819 年联名发表的论文中,横波的想法只不过是常以踌躇的态度作为脚注记载下来的。在非涅耳提出光是横波的主张之前,关于偏振光的知识仍然在不断深化。

非涅耳让透过方解石晶体的光在玻璃或液体表面上反射,再用另外的方解石晶体来研究它的反射光(1817),他发现,四个光象与第一个晶体的主截面相对于反射面的方向无关,依次消失一次。这种现象表明,假若入射光是偏振的,那么,不管其偏振面相对于入射面的方向如何,反射后也完全是偏振的。这一点也正好是马吕斯和毕奥疏忽了的地方。现在,如果把入射光的偏振面方位角,即偏振面与入射面的夹角写成  $\beta$ ,把反射光的偏振面方位角写成  $\gamma$ ,那么,当相对于入射面以某一给定角度偏振的光垂直于反射面入射时,反射光的偏振面方向和入射光的偏振面方向没有差别 ( $\gamma = \beta$ ),但是,如果把入射角增大下去,则反射光偏振面就渐渐接近入射面,在入射角等于偏振角  $\varphi$  时,反射光偏振面就和入射面相一致 ( $\gamma = 0$ )。入射角再增大,反射光的偏振面方位角就向着与前面的方向相反的方向偏离,在水平入射时又和入射光的偏振面一样 ( $\gamma = \beta$ )。这样,通过反射一般会产生偏振面的旋转 ( $\gamma \neq \beta$ ),不过,平行或垂直于入射面偏振的光,偏振面在反射之后仍保持其方向不变,只是光的强度发生变化而已。因此就能够按马吕斯平方余弦定律,把任意偏振的光分解成在这两个平面内偏振的光。

这个结果自然导致非涅耳去研究偏振光在玻璃板的第二个玻璃-空气界面上的反射。为了就所有的人射角进行探讨,非涅耳最初把两个棱镜重叠起来使用,到后来便做成了所谓的**菲涅耳菱形六面体**(Fresnel's rhomb, 图 4.29)。使用这种菱形六面体,非涅耳查明了:在彩色偏振光中阿喇果所说的

消偏作用是由全反射产生的；消偏了的光的本质是（左旋或右旋）圆偏振光（也就是说，菲涅耳菱形六面体具有  $1/4$  波片的作用）。而且，这些结果对垂直于光轴切割的水晶片上由于左右两种圆偏振光而来的彩色偏振光也是一个说明。

如果把方解石当作检偏振器，便可以确认，当相对于入射

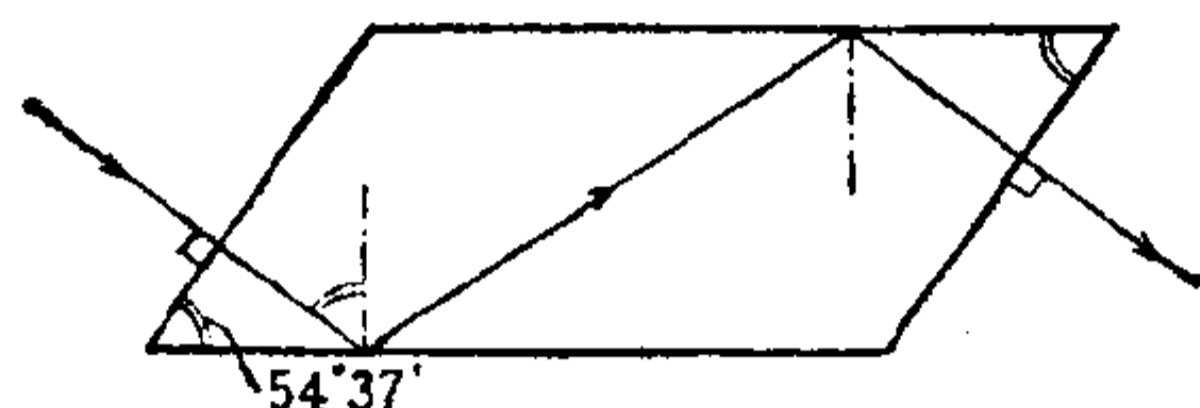


图 4.29

面以  $45^\circ$  角偏振的光入射时，在入射角达到全反射角以前，光线在第二个玻璃-空气界面反射之后仍保持完全偏振光的状态，不过，在全反射时却会产生部分的消偏作用。因为全反射和消偏的界限依光的颜色而异，所以在全反射中可以看到着色作用。如果超过全反射角之后再让人射角增大下去，那么，消偏的效应在开始时急剧增加，再往后便逐渐减少，当水平入射时就完全看不到了。全反射所引起的消偏效应，在同一入射角的情况下，能够借助于其入射面与第一个人射面垂直的第二次反射来消除。当入射面是平行的时候，消偏效应增加，而且依赖于玻璃的折射率和入射角，用二、三或四次全反射可完全消偏，不管主断面位置如何，两条光束的强度都是相等的。现在，假设用两次全反射可以完全消偏，那么，由于在菲涅耳菱形六面体内的相继全反射，这个光的行为就如表 4.5 所示。虽然它完全不同于没有起偏-消偏状态交替过渡的普通非偏振光，但是却和偏振光一样引起晶片的着色。

菲涅耳通过详细研究这种消偏光的着色效应，明确解释了消偏的本性。因为在菲涅耳菱形六面体上经过两次全反射后出来的光与入射光平行，所以，在平行于光轴切割的石膏或

水晶的晶片上，便可以清楚地观察到两种颜色，一种是偏振的人射光直接产生的颜色，另一种是消偏的反射光产生的颜色，同时，透过同一个方解石进行比较，还能够得到有关两者差异

表 4.5

全反射次数	反射光的状态
2	完全消偏
3	部分偏振
4	完全偏振(偏振面垂直于人射光偏振面)
6	完全消偏
8	完全偏振(偏振面平行于人射光偏振面)

的明确证据。当石膏片光轴平行于菱形六面体的人射面时出现的颜色所对应的光程差，转使用偏振光时要大，较垂直的情况要小。显然，这种增大或减小了的光程差，与完全偏振光的光程差相比，只差了 $1/4$ 波长。由此所得到的结论是：与菱形六面体的人射面呈 $45^\circ$ 偏振的人射光，由于两次全反射而分解成在平行于反射面的方向和垂直于反射面的方向分别偏振的两个成分，这两个成分具有由反射所引起的 $1/4$ 波长的光程差；因此，该光程差在光进入晶片之前就已经存在了。如果在检偏用的方解石上固定石膏的晶片，使其光轴的方解石的主截面构成 $45^\circ$ 的角，然后让两者一起旋转，那么，着色效应不会产生，消偏的光显示出完全对称的行为；如果相对于平行光轴切开的晶片的光轴，让偏振的光以 $45^\circ$ 角入射，接着再穿过使反射面与晶轴倾斜 $45^\circ$ 的非涅耳菱形六面体，并将检偏用的方解石旋转，那么，所观察到的颜色就会连续变化，在一次旋转期间相同的颜色出现两次，这和垂直于光轴切割下来的水晶片的情况是一样的；由以上事实出发，菲涅耳得以表明，如果假设光的振动是横振动，那么，所谓完全消偏了的光，就适合于设想成一种进行右旋或左旋圆运动的圆振动。他又



借助于沿着水晶光轴以相差甚微的速度前进的两个反向旋转的圆振动的干涉，说明了阿喇果曾对垂直于光轴切割下来的水晶片所观察过的效应。虽然这种情况应当伴随着沿水晶光轴的特殊形式的双折射，可是菲涅耳也把同样的说明应用于毕奥（1815）曾发现的那种液体中的偏振面旋转，从而成功地直接证明了，在两种情况下那样的双折射都是存在的。关于这一点，我们还打算在后面稍作定量讨论。

另一方面，因为研究了由金属面上的反射所产生的偏振光，人们才认识了椭圆偏振光。虽然马吕斯（1809）已经注意到由金属面的反射所引起的偏振光的特性，但是，布儒斯特（1815）仍独立地发现，如果让光在金或银的表面上多次反射，同时用方解石研究反射光，那么，金或银能够使光改变，而要显示出在相互垂直的方向上偏振的补色光。布儒斯特和毕奥起初认为，金属的作用象一定厚度的双折射片一样，但是，布儒斯特不久便知道，由于金属反射而引起的光的变化，是直线偏振光和圆偏振光之间的一种新型偏振光，并取名为椭圆偏振光。当非偏振光被金属表面反射时，在入射面内偏振的光总要比在垂直于入射面的方向偏振的光强一些。这种差别对银来说最小，对铁来说最大，但是，通过重复反射就能使光在反射面内完全偏振。因此，布儒斯特认为，在由  $60^\circ$  到  $80^\circ$  的角度之间，钢需要八次反射，而银则需要三十六次反射。

### c) 偏振光的波动理论。

假如想以波动论的观点来统一理解上述各种偏振光现象，那么，首先有必要引进矢量波。也就是说，必须用矢量  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  来描述时刻  $t$  偏振光在离光源为  $\mathbf{r}$  的位置上所产生的光学扰动。一般来说，该矢量的方向和波的前进方向并不一致。否则，就不能清楚地解释以偏振面为特征的在前进方向四周的非均匀性，即牛顿所说的侧面性。我们把矢量



$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  称为**光矢量** (light vector), 而且认为它的各分量是以  $t - r/c$  的周期函数给出的矢量波动方程  $(1/c^2)(\partial^2 \mathbf{V} / \partial t^2) = \Delta \mathbf{V}$  的解. 在偏振的单色平面波的情况下, 有

$$\left. \begin{aligned} V_x(\mathbf{r}, t) &= a_1(\mathbf{r}) \cos[\omega t - g_1(\mathbf{r})] \\ V_y(\mathbf{r}, t) &= a_2(\mathbf{r}) \cos[\omega t - g_2(\mathbf{r})] \\ V_z(\mathbf{r}, t) &= a_3(\mathbf{r}) \cos[\omega t - g_3(\mathbf{r})] \\ g_i(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta_i \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.4)$$

或用  $p_x(\mathbf{r}) \equiv a_1(\mathbf{r}) \cos g_1(\mathbf{r}), q_x(\mathbf{r}) \equiv a_1(\mathbf{r}) \sin g_1(\mathbf{r})$  等等来定义矢量  $\mathbf{p}(\mathbf{r}), \mathbf{q}(\mathbf{r})$ , 设  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{p}(\mathbf{r}) + i\mathbf{q}(\mathbf{r})$ , 则有

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}(\mathbf{r}) \cos \omega t + \mathbf{q}(\mathbf{r}) \sin \omega t = \text{Re}\{\mathbf{U}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}. \quad (4.3.4.a)$$

这个矢量波在位置  $\mathbf{r}$  上的强度  $I$ , 与远比光振动周期长的时间内各分量的均方值之和成正比, 它可以用下式确定

$$I = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^*. \quad (4.3.5)$$

因此, 为了判断任意空间点  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  上光矢量  $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0)$  的末端, 随着时间的推移描绘出一个什么样的轨道, 可以由式 (4.3.4) 式消掉时间, 从而得到

$$\begin{vmatrix} V_x/a_1 & \cos g_1 & \sin g_1 \\ V_y/a_2 & \cos g_2 & \sin g_2 \\ V_z/a_3 & \cos g_3 & \sin g_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.3.6)$$

由于这是  $V_x, V_y, V_z$  的一次方程, 所以轨道显然是一条平面曲线. 若选择以  $\mathbf{r}_0$  为原点、以该光矢量的振动面为  $xy$  平面的坐标系, 则式 (4.3.4) 就成为

$$\begin{aligned} V_x &= a_1 \cos(\omega t - g_1), \\ V_y &= a_2 \cos(\omega t - g_2), \\ V_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

或者, 设位相变化的部分为  $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \equiv \tau$ , 则

$$\left. \begin{aligned} V_x &= a_1 \cos(\tau + \delta_1) = \operatorname{Re}\{a_1 e^{i(\tau + \delta_1)}\} \\ V_y &= a_2 \cos(\tau + \delta_2) = \operatorname{Re}\{a_2 e^{i(\tau + \delta_2)}\} \\ V_z &= 0 \quad (a_1, a_2 > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

从式(4.3.8)中消去时间, 并把  $V_x$ 、 $V_y$  的位相差写成  $\delta_1 - \delta_2 \equiv \delta$ , 即可得到

$$\left(\frac{V_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{V_y}{a_2}\right)^2 - 2\frac{V_x V_y}{a_1 a_2} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (4.3.9)$$

式(4.3.9)表示一个在点  $(\pm a_1, \pm a_2 \cos \delta)$  及  $(\pm a_1 \cos \delta, \pm a_2)$  上和—个矩形内切的椭圆, 该矩形的边平行于坐标轴, 长度为  $2a_1$ 、 $2a_2$ . 因此, 在最一般的情况下, 与偏振的单色平面波对

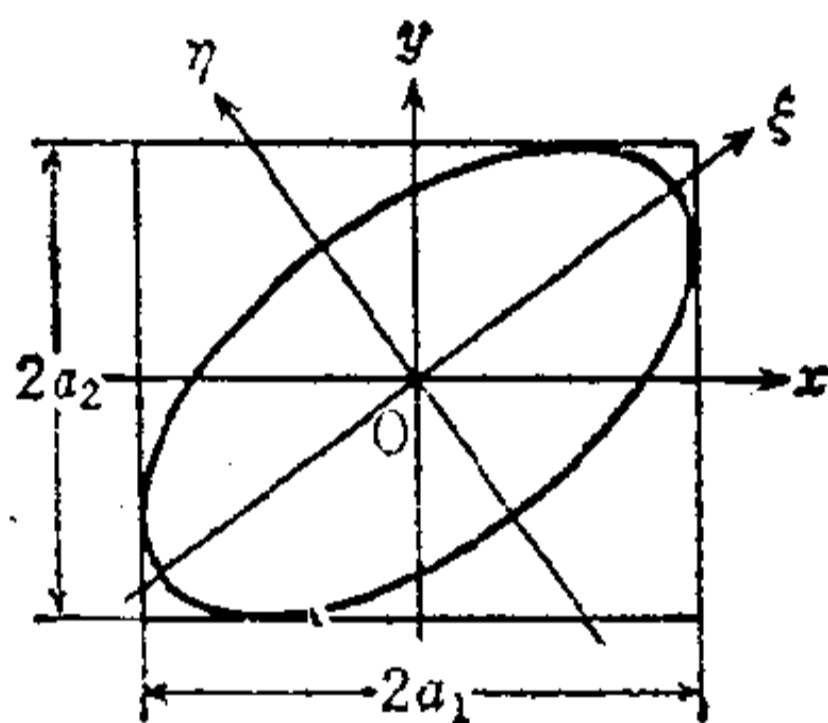


图 4.30

应的光矢量, 其振动轨道是一个椭圆, 即处于**椭圆偏振光**的状态. 光矢量在一个周期内应该描绘出这个椭圆, 其面速度为(参考式(2.4.9))

$$S = \frac{1}{2} \left( V_x \frac{dV_y}{dt} - V_y \frac{dV_x}{dt} \right) = -\frac{\omega}{2} a_1 a_2 \sin \delta, \quad (4.3.10)$$

根据  $S$  为正(反时针旋转)还是为负(顺时针旋转), 分别称之为**左旋椭圆偏振光**或**右旋椭圆偏振光**. 因为  $a_1$ 、 $a_2$  为正, 所以, 左右旋椭圆偏振光应该以  $\sin \delta$  的正负来决定. 也就是说, 若  $\sin \delta > 0$ , 则为右旋椭圆偏振光; 若  $\sin \delta < 0$ , 则为左旋椭圆偏振光. 这是由面对着光源的观察者来看的旋转方向, 与通常普遍使用的右手螺旋法则的情况正好相反.

一般来说,表示振动轨道的椭圆,其轴不在  $Ox$ 、 $Oy$  上.若把椭圆的长短轴方向  $O\xi$ 、 $O\eta$  取作新的坐标轴,设椭圆两个轴的长度为  $2\xi$ 、 $2\eta$  ( $\xi \geq \eta$ ),则对新坐标系来说,就有

$$\begin{aligned} V_\xi &= \xi \cos(\tau + \delta_0), \\ V_\eta &= \pm \eta \sin(\tau + \delta_0), \\ V_z &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

其中,复号的+对应于左旋椭圆偏振光,-对应于右旋椭圆偏振光,而且

$$\xi^2 + \eta^2 = a_1^2 + a_2^2, \quad \pm \xi\eta = a_1 a_2 \sin \delta. \quad (4.3.12)$$

椭圆的位置由它的方位角—— $O\xi$  和  $Ox$  的夹角—— $\psi$  ( $0 \leq \psi < \pi$ ) 来确定,而椭圆的形状则决定于椭圆度 (ellipticity)

$$\pm \frac{\eta}{\xi} \equiv \tan \chi \quad \left( -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \right). \quad (4.3.13)$$

设光矢量分量的振幅之比是

$$\frac{a_2}{a_1} \equiv \tan \varphi \quad \left( 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.3.14)$$

对于方位角和椭圆度来说,则可得到

$$\tan 2\psi = \tan 2\varphi \cos \delta \quad (4.3.15)$$

$$\tan 2\chi = \sin 2\varphi \sin \delta \quad (4.3.16)$$

(德塞纳蒙特 (H. de Sénarmont); 1840), 反过来则是

$$\tan \delta = \frac{\tan 2\chi}{\sin 2\psi} \quad (4.3.17)$$

$$\cos 2\varphi = \cos 2\psi \cos 2\chi. \quad (4.3.18)$$

因此,给出光矢量分量的位相差  $\delta$  和振幅比  $\varphi$ ,便可知道振动椭圆的方位角  $\psi$  和椭圆度  $\tan \chi$ ; 相反,在给出振动椭圆时,会存在无数个相互垂直的光矢量的分量,位相差和振幅比亦随方向而变,但可由式 (4.3.17)、(4.3.18) 确定.

特别是当振幅比为 1 ( $a_1 = a_2 \equiv \xi$ ) 时,式 (4.3.9) 归结

为圆的方程  $V_x^2 + V_y^2 = \xi^2$ ，由式(4.3.15)可知，方位角  $\phi$  是不定的。在这种情况下，当光矢量的一个分量取最大值  $\xi$  时，另一个分量为零，故位相差是

$$\delta = m \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (m = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots \dots),$$

倘若

$$\sin \delta > 0, \text{ 即 } \delta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \dots),$$

结果便是**右旋圆偏振光**；倘若

$$\sin \delta < 0, \text{ 即 } \delta = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

结果便是**左旋圆偏振光**。相对于这种左右旋圆偏振光的状态，式(4.3.8)是

$$\begin{aligned} V_x &= \xi \cos(\tau + \delta_1), \\ V_y &= \pm \xi \sin(\tau + \delta_1), \\ V_z &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

对复号的理解，和式(4.3.11)一样。如果再使用式(4.3.8)的复数表示，则有

$$\frac{V_y}{V_x} = e^{\pm i\pi/2} = \pm i. \quad (4.3.19a)$$

在式(4.3.19a)中， $+i$  对应于右旋圆偏振光， $i$  对应于左旋圆偏振光。

另外，当光矢量分量的位相差为

$$\delta = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots)$$

时，振动轨道成了一条通过原点  $O$  的直线  $V_y/V_x = (-1)^m a_2/a_1$ ，其斜率是

$$\tan \phi = (-1)^m \tan \varphi = (-1)^m \frac{a_2}{a_1},$$

也就是说，成了**直线偏振光**

$$V_x = a_1 \cos(\tau + \delta_1),$$

$$V_y = \pm a_2 \cos(\tau + \delta_1), V_z = 0. \quad (4.3.20)$$

因此,当把光矢量的位相差  $\delta$  由  $0$  增加到  $\pi$  时,轨道曲线如图 4.31 那样变化. 当由  $\pi$  到  $2\pi$  时,应该以相反的次序反旋转地去模仿同样的图形.

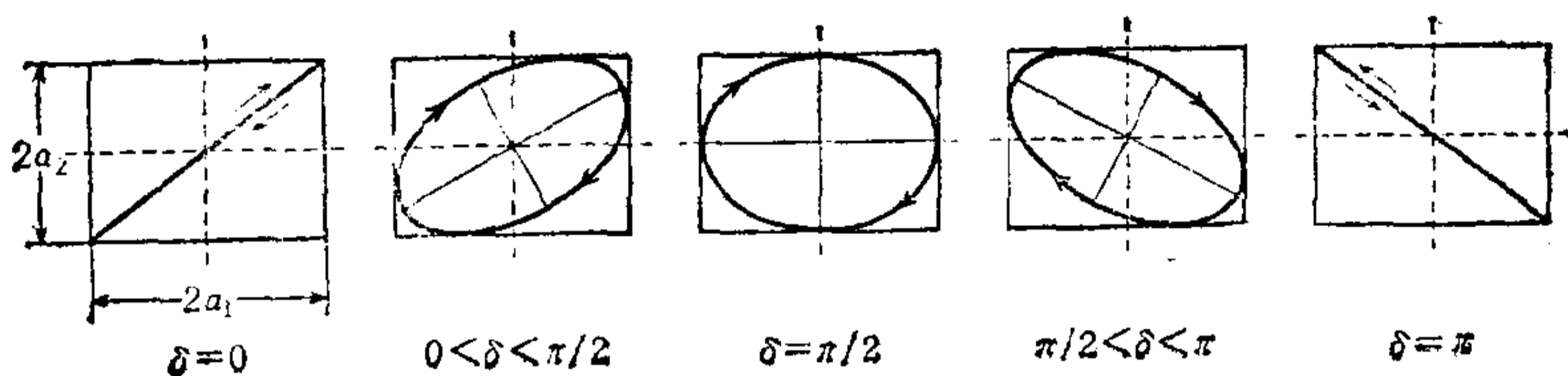


图 4.31

如推导式 (4.3.7) 时所知,偏振状态是在空间的每一个点上规定的一种局部性质. 这是因为,根据式 (4.3.4) 和 (4.3.6),只有在单色平面波的情况下,各点的振动面才平行,位相差也一定,于是,无论在什么地方偏振状态都一样,但是,对一般的  $g_i(\mathbf{r})$  来说,位相差却变成了位置的函数. 总之,为了确定某一点的偏振状态,即确定振动椭圆,需要有三个独立的量. 例如,椭圆的长短半轴  $\xi$ 、 $\eta$  及方位角  $\psi$ ,或者光矢量分量的振幅  $a_1$ 、 $a_2$  及位相差  $\delta$ . 不过,要是使用**斯托克斯参量** (G. Stokes, 1852), 那将是很方便的. 对于单色平面波来说,它的定义是

$$\begin{aligned} s_0 &\equiv a_1^2 + a_2^2, \quad s_1 \equiv a_1^2 - a_2^2, \\ s_2 &\equiv 2a_1a_2 \cos \delta, \quad s_3 \equiv 2a_1a_2 \sin \delta. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

因为在它们之间存在着关系式

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2,$$

所以,独立的量等于是三个. 由式 (4.3.5) 可知,  $s_0$  和光波强度成正比, 其它三个参量与方位角  $\psi (0 \leq \psi < \pi)$  及椭圆度



$\chi$  ( $-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$ ) 之间的关系是

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi, & s_2 &= s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi, \\ s_3 &= s_0 \sin 2\chi. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

由此,即可得到偏振状态的简单的几何表示(H. Poincaré, 1892). 根据(4.3.22),  $s_1$ 、 $s_2$ 、 $s_3$  可以看作是在半径为  $s_0$  的球面  $S$  上,极坐标为  $2\chi$  和  $2\psi$  的点  $P$  的笛卡儿坐标. 那么,给定强度 ( $s_0 = \text{const}$ ) 的单色平面波,其所有可能的偏振状态,和球面  $S$  上的点应该一一对应. 偏振光是右旋还是左旋,依  $\sin \delta$  的正负而定,由(4.3.16)可知,也依  $\chi$  的正负,从而也依  $s_3$  的正负而定,所以,右旋椭圆偏振光用波因凯尔 (Poincaré) 球  $S$  的赤道面以上的点表示,而左旋椭圆偏振光则用赤道面以下的点表示. 直线偏振光用赤道面上的点来表示; 右旋圆

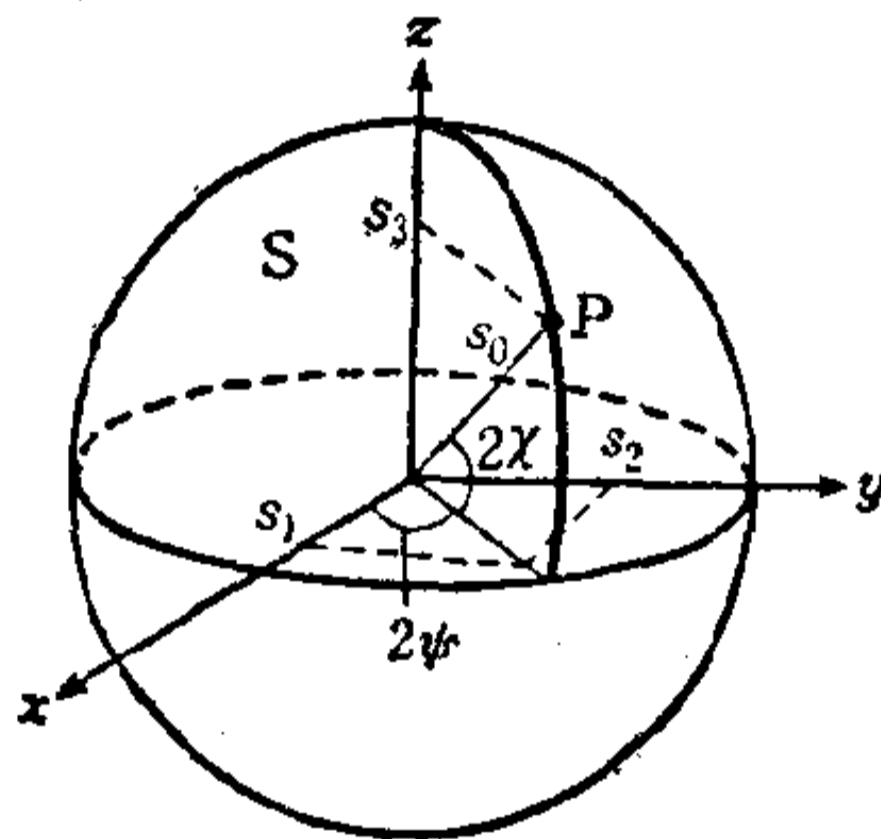


图 4.32

偏振光对应于球的北极 ( $s_1 = s_2 = 0, s_3 = s_0$ ), 左旋圆偏振光则对应于球的南极 ( $s_1 = s_2 = 0, s_3 = -s_0$ ). 若把相对于各种偏振状态的位相差及振幅的条件代入式(4.3.21)来看,以上结论就会立刻明白.

#### d) 光波的振动状态.

下面来讨论一下这种偏振光的干涉. 1816年,菲涅耳在和安培 (A. Ampère) 进行讨论时已经确认,假如把光波看成是与前进方向垂直的振动,那么,便能够全部说明以冰洲石的

双折射为起点的各种偏振现象。但是，他由互相在垂直方向上偏振的光的非干涉性确信不疑地得出光是横波的结论，还是五年之后的事。即使在那时，阿喇果作为共同的研究者，也断然拒绝对这个结论承担责任。但是，纵波这个根深蒂固的概念，在光的波动论中所具有的价值倒底是什么呢？1816年，杨氏由阿喇果那里得知他和菲涅耳的最新实验结果。于是，他在1817年版《英国大百科全书》的“色彩学”（chromatics）一项中论证，借助于方向大致相同、光程差为 $1/2$ 波长的两个纵波，会产生微弱的“假想的横振动”，又在1818年4月29日致阿喇果的信中，把以太比作进行横振动的无限长的弦。这时菲涅耳的反应是，杨氏还没有搞清那样的运动是在液体中发生的。当时，弹性体理论尚未确立，对横波传播的描写或许很难设想。正是菲涅耳，最先把那种承认横振动现实性的以太概念，建立在原子论的观点上。他认为，液体的原子必然具有完全稳定的平衡位置，但与固体相比，只是在非常狭窄的范围之中；对于给定的扰动来说，液体原子的确极为易动，但就微小位移而言，平衡状态总不会破坏，而是在静止位置的附近依靠弹性力进行振动；当斥力大的时候，也可以把纵波引进这样的媒质，但与横波相比它却远为迅速地传播掉了；横波是由垂直于传播方向的层次中的相对弹性位移所产生的；在这样的条件下，以太可以看成是象固体那样动作的不可压缩流体。根据这样的描写，菲涅耳从偏振光干涉的特性出发，推导出光波的横振动，其讨论（1821）还很难说是完全的。维笛特（E. Verdet; 1851）对此作了正确的证明。下面我们就按照他的作法来研究一下菲涅耳-阿喇果的实验结果。

首先，我们考虑由同一光源发出而向相同方向前进的两个处于椭圆偏振状态的单色平面波，来求出它们即使相遇也不会引起干涉的条件。取前进的方向为 $z$ 轴，设振动椭圆的

半轴长分别为  $\xi'$ 、 $\eta'$  及  $\xi''$ 、 $\eta''$  (为了方便起见,假定是左旋椭圆偏振光),那么,根据式 (4.3.4)、(4.3.11),这样的波的光矢量分量就是

$$\left. \begin{aligned} V'_{\xi'} &= \xi' e^{i(\omega t - g')} & V'_{\eta'} &= -i\eta' e^{i(\omega t - g')} & V'_z &= a'_3 e^{i(\omega t - g' - h')} \\ V''_{\xi''} &= \xi'' e^{i(\omega t - g'')} & V''_{\eta''} &= -i\eta'' e^{i(\omega t - g'')} & & \\ V''_z &= a''_3 e^{i(\omega t - g'' - h'')} & & & & \end{aligned} \right\} \quad (4.3.23)$$

在两个波相遇之前位相  $g'$ 、 $g''$  还各自变化  $\Delta'$ 、 $\Delta''$ ,如果写成  $\Delta \equiv (g'' + \Delta'') - (g' + \Delta')$ ,并设振动椭圆的方位角为  $\psi'$ 、 $\psi''$ ,则在某一点 P 相遇之后所产生的合成波就是

$$\begin{aligned} V_x &= (\xi' \cos \psi' + i\eta' \sin \psi') e^{i(\omega t - g' - \Delta')} \\ &\quad + (\xi'' \cos \psi'' + i\eta'' \sin \psi'') e^{i(\omega t - g'' - \Delta'')} \\ &= \{(\xi' \cos \psi' + \xi'' \cos \psi'' e^{-i\Delta}) + i(\eta' \sin \psi' \\ &\quad + \eta'' \sin \psi'' e^{-i\Delta})\} e^{i(\omega t - g' - \Delta')} \\ V_y &= \{(\xi' \sin \psi' + \xi'' \sin \psi'' e^{-i\Delta}) \\ &\quad - i(\eta' \cos \psi' + \eta'' \cos \psi'' e^{-i\Delta})\} e^{i(\omega t - g' - \Delta')} \\ V_z &= \{a'_3 + a''_3 e^{-i(\Delta + h'' - h')}\} e^{i(\omega t - g' - \Delta' - h')} \end{aligned}$$

把式 (4.3.23) 的每一个波单独存在时在 P 点上的强度写成

$$I' \equiv \xi'^2 + \eta'^2 + a_3'^2, \quad I'' \equiv \xi''^2 + \eta''^2 + a_3''^2, \quad (4.3.24)$$

再引进振动椭圆的椭圆度

$$\frac{\eta'}{\xi'} \equiv \tan \chi', \quad \frac{\eta''}{\xi''} \equiv \tan \chi'',$$

那么,由式 (4.3.5) 可知,该合成波的强度  $I$  就是

$$\begin{aligned} I &= I' + I'' + 2\xi'\xi''\{(1 + \tan \chi' \tan \chi'') \cos(\psi'' - \psi') \cos \Delta \\ &\quad + (\tan \chi' + \tan \chi'') \sin(\psi'' - \psi') \sin \Delta\} \\ &\quad + 2a'_3 a''_3 \cos(\Delta + h'' - h'). \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

一般来说,假如式 (4.3.23) 的两个波不产生干涉,  $I$  就必须与位相差  $\Delta$  无关,也就是说,在所有的情况下下式都应该满足:

$$\left. \begin{aligned} \xi' \xi'' (1 + \tan \chi' \tan \chi'') \cos(\phi'' - \phi') \\ + a'_3 a''_3 \cos(h'' - h') = 0 \\ \xi' \xi'' (\tan \chi' + \tan \chi'') \sin(\phi'' - \phi') \\ - a'_3 a''_3 \sin(h'' - h') = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.26)$$

i) 那末, 我们来谈一谈菲涅耳-阿喇果的结论 i): 在垂直平面内偏振的光不会发生干涉. 处于这种偏振状态中的光, 已经在惠更斯实验中得到了. 如果把包含入射法线在内的方解石主截面安放在垂直方向上, 那么它只发出在互相垂直的方向上偏振的光束  $oo'$  和  $oe'$ . 当围绕前进方向旋转  $\pm \pi/2$  时, 就其偏振状态而言, 两条光束的行为彼此互易. 因此, 就应该假设

$$\phi'' - \phi' = \pm \pi/2, \quad \chi'' = \chi', \quad a''_3 = a'_3, \quad h'' = h'.$$

若把上式和式 (4.2.36) 一起考虑, 即可得到

$$V'_z = V''_z = 0, \quad \tan \chi' = \tan \chi'' = 0. \quad (4.3.27)$$

由式 (4.3.27) 的第一个结果可以得出结论: 在惠更斯实验中产生的那些相互在垂直方向上偏振的波动, 其光矢量与前进方向垂直, 即这些波中的振动是横振动; 从第二个结果可以说, 振动椭圆成为直线, 即由方解石出来的波是直线偏振的. 不用说, 直线偏振光的平面波是横波这个结论已被推导出来, 而由式 (4.3.11) 或 (4.3.19) 可知, 用两个垂直的直线偏振光波叠加可以得到椭圆偏振光或圆偏振光的平面波, 所以, 一般来说, 偏振的平面波都是横波. 假如把普通的非偏振光看成是偏振光的集合, 或者看成是偏振状态变化非常迅速的波, 那么就应该说, 所有光波的振动状态都是横振动.

仅仅由式 (4.3.27) 出发, 还不能就直线偏振光波的偏振面和光矢量的振动面之间的关系作任何说明, 菲涅耳认为光矢量垂直于偏振面, 而诺埃曼 (C. Neumann; 1832) 则认为光矢量在偏振面之内. 但是, 威涅尔 (O. Wiener; 1890) 有



关稳定光波的实验结果,却对应于菲涅耳的提法.

因此,若考虑到光振动的横波性  $V'_z = V''_z = 0$ , 则平面偏振光波的非干涉性条件 (4.3.26) 就归结为

$$\left. \begin{aligned} (1 + \tan \chi' \tan \chi'') \cos(\phi'' - \phi') &= 0 \\ (\tan \chi' + \tan \chi'') \sin(\phi'' - \phi') &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.2.36a)$$

在下列无论哪一种情况下,这个条件均可满足:

$$\cos(\phi'' - \phi') = 0 \text{ 而且 } \tan \chi' + \tan \chi'' = 0, \quad (4.3.28a)$$

或

$$\sin(\phi'' - \phi') = 0 \text{ 而且 } 1 + \tan \chi' \tan \chi'' = 0, \quad (4.3.28b)$$

或

$$1 + \tan \chi' \tan \chi'' = 0 \text{ 而且 } \tan \chi' + \tan \chi'' = 0. \quad (4.3.28c)$$

由式 (4.3.28a) 可知,

$$\phi'' - \phi' = \pm \pi/2, \quad \tan \chi'' = -\tan \chi',$$

因此,在这种情况下,两个波具有长轴相互正交的相同的振动椭圆,一个在右旋椭圆偏振状态,另一个在左旋椭圆偏振状态. 特别是当  $\chi' = \chi'' = 0$  时,它们就成了正交的直线偏振光波. 由式 (4.3.28b) 可知,

$$\phi'' - \phi' = 0 \text{ 或 } \pi, \quad \chi'' = \chi' \pm \pi/2,$$

结果和式 (4.3.28a) 相同. 对式 (4.3.28c) 来说

$$\chi'' = -\chi' = \pm \pi/4,$$

即,作为以上两种情况的特殊情况,成为左右旋圆偏振光.

因此,倘若把菲涅耳-阿喇果的结论 i) 进一步精确化,我们就应该说,由同一光源产生的两个偏振的单色平面波,只要它们的振动轨道相同而且垂直,一个是右旋偏振光,另一个是左旋偏振光,则不会显示任何干涉.

特别是两个叠加的反旋圆偏振光波,与水晶片的彩色偏振光有重要关系.



$$\left. \begin{aligned} V'_x &= \xi \cos(\omega t - g'), & V'_y &= \xi \sin(\omega t - g'), & V'_z &= 0 \\ V''_x &= \xi \cos(\omega t - g''), & V''_y &= -\xi \sin(\omega t - g''), & V''_z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

的合成波

$$\left. \begin{aligned} V_x &= 2\xi \cos\left(\frac{g'' - g'}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{g' + g''}{2}\right), \\ V_y &= 2\xi \sin\left(\frac{g'' - g'}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{g' + g''}{2}\right), & V_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.29)$$

变成直线偏振光

$$V_x \sin\left(\frac{g'' - g'}{2}\right) - V_y \cos\left(\frac{g'' - g'}{2}\right) = 0,$$

根据

$$\tan \delta = \frac{V_y}{V_x} = \tan\left(\frac{g'' - g'}{2}\right),$$

振动曲线和正  $x$  轴的夹角  $\delta$ , 等于两个圆偏振光波位相差的一半。菲涅耳认为, 在水晶那样的**旋光性(光学活性)物质**中, 也就是在光透射时产生偏振面旋转的那种物质中, 这样的直线偏振光分解成两个反旋的圆偏振光, 同时又反过来进行合成, 而且, 左右旋圆偏振光在水晶内前进的速度相差甚微。现在, 设  $x$  轴方向的直线偏振光波入射到厚度为  $d$  的水晶片上 ( $g' = g'' = 0$ ,  $V_x^{(i)} = V'_x + V''_x = 2\xi \cos \omega t$ ,  $V_y^{(i)} = V'_y + V''_y = 0$ ), 若水晶片中的两个左右旋偏振光的传播速度是  $v'$ 、 $v''$  ( $\omega/2\pi v' = \lambda'$ ,  $\omega/2\pi v'' = \lambda''$ ), 则由穿过水晶片后的位相差  $g'' - g'$  可知, 旋转角  $\delta$  是

$$\delta = \pi d \left( \frac{1}{\lambda''} - \frac{1}{\lambda'} \right) = \frac{\pi d}{\lambda} (n'' - n').$$

式中,  $\lambda$  是真空中入射光的波长,  $n'$ 、 $n''$  是左右旋两个偏振光在光轴方向(参考 §4.3(e)) 上的折射率 ( $\lambda'n' = \lambda''n'' = \lambda$ ).

因此，即使在光轴方向上，旋光性物质也会引起双折射。菲涅耳所观察到的正是这种微弱的双折射，而且，根据水晶中的  $n'' = 1.5446$ ,  $n' = 1.5439$ ,  $n'' - n' = 7 \times 10^{-4}$ ，他还弄清了，若使右旋水晶和左旋水晶棱镜互相组合，以增大两个圆偏振光的分离角度，再让两者通过检偏光镜，那么所看到的就是圆偏振光。

ii) 当式(4.3.23)是相同强度的波时( $\xi' = \xi''$ ,  $\eta' = \eta''$ )，若考虑到式(4.3.24)以及光是横波这个事实，则(4.3.25)就成为

$$\left. \begin{aligned} I &= 2I'(1 + \Theta) \\ I' &= I'' = \xi'^2 + \eta'^2 \\ \Theta &\equiv \cos(\chi'' - \chi') \cos(\phi'' - \phi') \cos \Delta \\ &\quad + \sin(\chi'' + \chi') \sin(\phi'' - \phi') \sin \Delta \end{aligned} \right\}, \quad (4.3.30)$$

所以，这两个波若显示干涉现象，便会在  $\Theta_{\max} = 1$ ，即  $I_{\max} = 4I'$ ，以及  $\Theta_{\min} = -1$ ，即  $I_{\min} = 0$  上特别明显地表现出来。因此，两个波完全干涉的条件就是

$$\begin{aligned} \Theta_{\max}^2 &= \cos^2(\chi'' - \chi') \cos^2(\phi'' - \phi') + \sin^2(\chi'' \\ &\quad + \chi') \sin^2(\phi'' - \phi') = 1 \\ &= \cos^2(\phi'' - \phi') + \sin^2(\phi'' - \phi'), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \cos^2(\phi'' - \phi') \sin^2(\chi'' - \chi') + \sin^2(\phi'' - \phi') \cos^2(\chi'' \\ + \chi') = 0. \end{aligned}$$

这个条件在下列任一情况下均能满足：

$$\sin(\phi'' - \phi') = 0 \quad \text{而且} \quad \sin(\chi'' - \chi') = 0 \quad (4.3.31a)$$

或

$$\cos(\phi'' - \phi') = 0 \quad \text{而且} \quad \cos(\chi'' + \chi') = 0 \quad (4.3.31b)$$

或

$$\sin(\chi'' - \chi') = 0 \quad \text{而且} \quad \cos(\chi'' + \chi') = 0. \quad (4.3.31c)$$

由式(4.3.31a)可知,  $\psi'' = \psi'$ 、 $\chi'' = \chi'$ , 所以, 两个波的偏振状态完全相同, 特别当  $\chi'' = \chi' = 0$  时, 便是平行的直线偏振光。由式(4.3.31b)可知,  $\chi'' = \pi/2 - \chi'$ 、 $\psi'' - \psi' = \pi/2$ , 结论与式(4.3.31a)相同。式(4.3.31c)的结论是  $\chi'' = \chi' = \mp \pi/4$ , 即两个波同为右旋偏振光或同为左旋偏振光。这样, 便推导出了菲涅耳-阿喇果的结论 ii)。

iii) 在菲涅耳-阿喇果的结论 iii)、iv) 中所说的已经回复到同一偏振面内的两个本来互相在垂直方向进行直线偏振的波的状态, 仍然可以用惠更斯实验, 在由第二个晶体  $K'$  (图 4.26) 出来的四条光束  $oo'$  和  $eo'$  或  $oe'$  和  $ee'$  之中来实现。现在, 我们选择光束  $oo'$  和  $eo'$ 。菲涅耳和阿喇果宣称, 只有当入射到第一个晶体  $K$  上的波已经偏振时, 光束  $oo'$  和  $eo'$  才具有干涉能力。

把入射到第一个晶体  $K$  上的平面波的前进方向取作  $z$  轴, 垂直于包含入射法线的晶体  $K$  主断面取  $x$  轴, 在主断面内取  $y$  轴, 如果入射波是椭圆偏振的, 那么, 由式(4.3.11)可知, 入射波的光矢量  $V^{(i)}$  在其振动椭圆的两轴方向上的分量就是

$$V_{\xi}^{(i)} = \xi e^{i(\omega t - g)}, \quad V_{\eta}^{(i)} = \pm i\eta e^{i(\omega t - g)}. \quad (4.3.32)$$

设由晶体  $K$  出来的  $o$  波和  $e$  波的光矢量分别为  $V^{(o)}$ 、 $V^{(e)}$ , 那么,  $V^{(o)}$  平行于  $x$  轴,  $V^{(e)}$  则平行于  $y$  轴。如果(4.3.32)的振动椭圆的方位角为  $\psi$ , 则由式(4.3.32)对  $V^{(o)}$ 、 $V^{(e)}$  的贡献就是

$$V_x^{(i)} = (\xi \cos \psi \mp i\eta \sin \psi) e^{i(\omega t - g)} \quad (4.3.33)$$

$$V_y^{(i)} e^{-\Delta} = (\xi \sin \psi \pm i\eta \cos \psi) e^{i(\omega t - g)} \quad (4.3.34)$$

式中,  $\Delta$  是  $o$  波和  $e$  波由于以不同速度穿过晶体  $K$  而产生的相位差。因为  $oo'$  波及  $eo'$  波的光矢量  $V^{(oo')}$  和  $V^{(eo')}$  与正  $x$  轴的夹角, 等于包含入射法线的晶体  $K$  主断面与晶体  $K'$  的

主断面所夹的角  $\alpha$ , 所以, 从式 (4.3.33)、(4.3.34) 可知,  $o$  波及  $e$  波对  $V^{(oo')}$  和  $V^{(eo')}$  的贡献分别是

$$(\xi \cos \phi \cos \alpha \mp i \eta \sin \phi \cos \alpha) e^{i(\omega t - \delta - \Delta')} \quad (4.3.35)$$

$$(\xi \sin \phi \sin \alpha \pm i \eta \cos \phi \sin \alpha) e^{i(\omega t - \delta - \Delta - \Delta')}. \quad (4.3.36)$$

式中,  $\Delta'$  为  $oo'$  和  $eo'$  相对于  $o$  和  $e$  的位相差, 它是由于穿过晶体  $K'$  而产生的. 假如把光束  $oe'$  和  $ee'$  遮蔽起来, 那么, 从晶体  $K'$  出来的波, 就是由于平行偏振的波  $oo'$  和  $eo'$  的叠加所产生的直线偏振的合成波. 这个波的偏振面, 是包含入射法线在内的晶体  $K'$  的主截面. 若把第一个结晶  $K$  的入射波强度写成  $I_0 = \xi^2 + \eta^2$ , 把椭圆度写成  $\tan \chi = \eta/\xi$ , 则由式 (4.3.35)、(4.3.36) 及 (4.3.5) 可知, 该波的强度  $I$  是

$$I = I_0 \left\{ \cos^2 \chi (\cos^2 \phi \cos^2 \alpha + \sin^2 \phi \sin^2 \alpha) + \sin^2 \chi (\cos^2 \phi \sin^2 \alpha + \sin^2 \phi \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} \cos 2\chi \sin 2\chi \sin 2\alpha \cos \Delta \pm \frac{1}{2} \sin 2\chi \sin 2\phi \sin \Delta \right\}. \quad (4.3.37)$$

因此,  $I$  依赖于  $o$  波和  $e$  波的位相差  $\Delta$ , 所以, 由椭圆偏振的入射波产生的两个正交的直线偏振波  $o$  和  $e$ , 只有回到同一偏振面波才进行干涉.

假如在式 (4.3.37) 中令  $\chi = 0$ , 则在第一个晶体  $K$  的入射波为直线偏振时, 上式成为

$$I = I_0 \left( \cos^2 \phi \cos^2 \alpha + \sin^2 \phi \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin 2\alpha \cos \Delta \right). \quad (4.3.37a)$$

把此式和式 (4.3.30) 比较一下, 我们就会明白, 若式 (4.3.37a) 第三项的因子  $\sin 2\phi \sin 2\alpha > 0$ , 即  $\phi$  和  $\alpha$  在同一象限, 则两个波象位相差为  $\Delta$  的平行偏振波那样进行干涉; 若  $\sin 2\phi \times \sin 2\alpha < 0$ , 即  $\phi$  和  $\alpha$  在不同象限, 则两个波象位相差为  $\Delta \pm \pi$

的平行偏振波那样进行干涉,与前一种情况相比,极大极小的位置互换。

但是,当晶体K的入射波为非偏振光时,方位角 $\psi$ 和椭圆度 $\chi$ 在时间上有剧变,所以必须就 $\psi$ 、 $\chi$ 来取式(4.3.37a)的平均值。该平均值为

$$\frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi d\psi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\chi I = \frac{I_0}{2},$$

它并不依赖于位相差 $\Delta$ ;可以说,由非偏振波产生的两个直线偏振波,即使返回到同一偏振面上也不会发生干涉。

#### e) 惠更斯原理向各向异性媒质的推广

既然已经查明光波是横波,就没有必要再继续保持惠更斯根据纵波的性质所想象的在晶体内与两种传播速度相对应的两种不同的传播媒质(以太)。不仅如此,还要求有一种索性连双轴晶体都能包括在内的新的设想(但是,这时尚未提出把惠更斯原理推广到矢量波的数学表达式)。菲涅耳(1821—22)认为,由只用一种以太为前提的理论出发,以某种方式推导出确定速度的方程,作为该方程的两个解,难道不能得到这两种传播速度吗?假如找到了那样的方程,不仅是双折射,甚至连经常伴随着双折射的偏振光包括在内,都可以得到解释。

在单轴晶体内传播的光波,可以分解成两个直线偏振波。一个是在主截面内偏振的寻常光波,其速度 $v_1$ 用惠更斯球面的半径 $a$ 来表示:

$$v_1 = a.$$

如果从方解石晶体切下来相对于主轴构成各种各样角度的棱镜,而让自然光的平行光束入射到它们上面,那么,观察到的光谱因棱镜的不同而多种多样,但是,由寻常光波所产生的那一部分却全部相同;由此可知,即使在单轴晶体内也存在



着和光学各向同性体内相同的球面波。现在，由惠更斯迴转椭圆体的中心向其切平面引垂线，而用该垂线表示在垂直于一个主截面的方向偏振的非常光波的速度  $v_2$ 。设迴转椭圆体的方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (4.3.38)$$

那么，对于波面法线  $\mathbf{s}$  的方向余弦为  $(l, m, n)$  的波来说，就有

$$v_2^2 = b^2(l^2 + m^2) + a^2n^2. \quad (4.3.39)$$

这两个速度是作为下列与  $v$  有关的方程的根来确定的：

$$(v^2 - a^2)\{(v^2 - b^2)(l^2 + m^2) + (v^2 - a^2)n^2\} = 0 \quad (4.3.40a)$$

或

$$\frac{l^2 + m^2}{v^2 - a^2} + \frac{n^2}{v^2 - b^2} = 0. \quad (4.3.40b)$$

也可以认为， $1/v_1$ 、 $1/v_2$  是由一个椭圆的长短轴给出的，该椭圆是 (4.3.38) 的反椭圆体(以  $1/a$ 、 $1/b$  为轴的椭圆体)

$$a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2 = 1 \quad (4.3.41)$$

与通过其中心并具有法线  $\mathbf{s}$  的平面

$$lx + my + nz = 0 \quad (4.3.42)$$

的交线。因此，只考虑式 (4.3.40) 或 (4.3.41) 就可以了。在  $m = 0$  的情况下，也就是在  $xz$  平面内来考虑时，若令  $vl = x$ ， $vn = z$ ，则式 (4.3.40) 的两个解

$$v^2 = a^2, \quad v^2 = b^2(l^2 + m^2) + a^2n^2$$

便可写成

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad (x^2 + z^2)^2 = b^2x^2 + a^2z^2.$$

它表示，式 (4.3.40) 是半径为  $a$  的球面和四次迴转面——卵形面 (ovaloid; 这个名称由诺埃曼 (1885) 提出)——的双叶

面。随着  $a > b$  还是  $a < b$ ，寻常光波的传播较异常光波提早或推迟，与此相应，该晶体叫做单轴正晶体或单晶负晶体。在单轴晶体中，寻常光波与非常光波速度相等的方向(由中心引向两个面的切点的那个方向)只有一个，如果把它叫做晶体的**光轴** (optical axis)，那么应该说，包含光轴和波面法线的平面就是主截面，而寻常光波和非常光波的光矢量则垂直于主截面或平行于主截面。

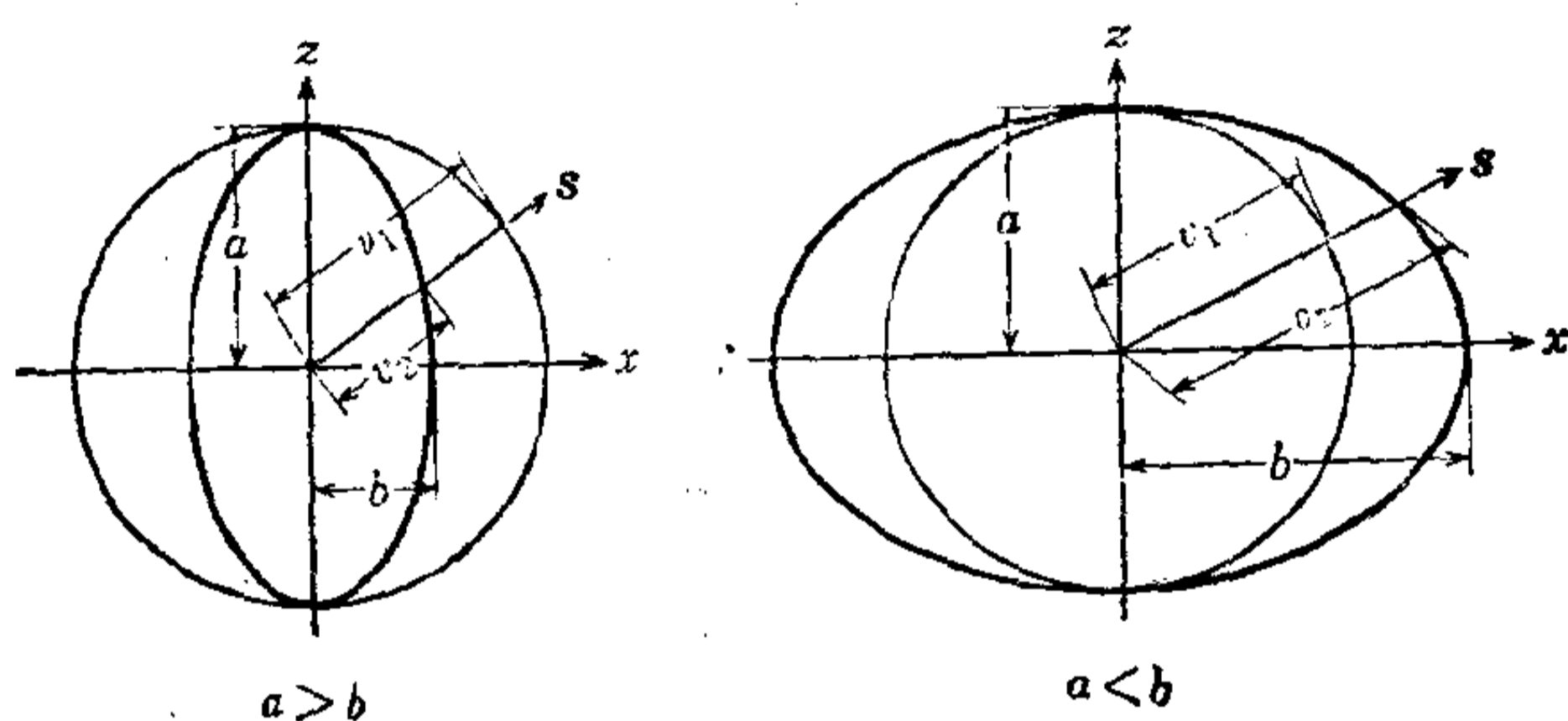


图 4.33

菲涅耳从这个结果推测，双轴晶体中的传播速度  $1/v_1$ 、 $1/v_2$ ，似乎可以用一个椭圆的长短轴来确定，这个椭圆是把式(4.3.41)的迴转椭圆柱体扩充到三个轴完全不同的情况而形成的椭圆体

$$\frac{x^2}{(1/a)^2} + \frac{y^2}{(1/b)^2} + \frac{z^2}{(1/c)^2} = 1 \quad (4.3.43)$$

与式(4.3.42)的交线。或者也可以用对应于式(4.3.30)而和  $v$  有关的下列方程的根来确定：

$$l^2(v^2 - b^2)(v^2 - c^2) + m^2(v^2 - c^2)(v^2 - a^2) + n^2(v^2 - a^2)(v^2 - b^2) = 0 \quad (4.3.44a)$$

或

$$\frac{l^2}{v^2 - a^2} + \frac{m^2}{v^2 - b^2} + \frac{n^2}{v^2 - c^2} = 0. \quad (4.3.44b)$$

为了知道这个曲面的形状，设  $a^2 > b^2 > c^2$ ，则在  $l^2 = 0$ 、 $m^2 = 0$ 、 $n^2 = 0$  的各种情况下，也就是在描绘出曲面和坐标平面的交线时，便如图 4.34 所示。双叶曲面在  $xz$  平面内相交于四点  $N$ ，把这些点和原点连结起来的直线给出两条光轴。假如照下面那样来做，则由式 (4.3.44) 可知，在双轴晶体中存在着两个传播速度相等的方向。

假设

$$a^2 \equiv b^2 + a', \quad c^2 \equiv b^2 - c', \quad v^2 \equiv b^2 + u \quad (a', c' > 0),$$

将它们代入式 (4.3.44)，就可以得到  $u$  的二次方程式

$$u^2 + \{l^2 c' + m^2(c' - a') - n^2 a'\}u - m^2 a' c' = 0. \quad (4.3.45)$$

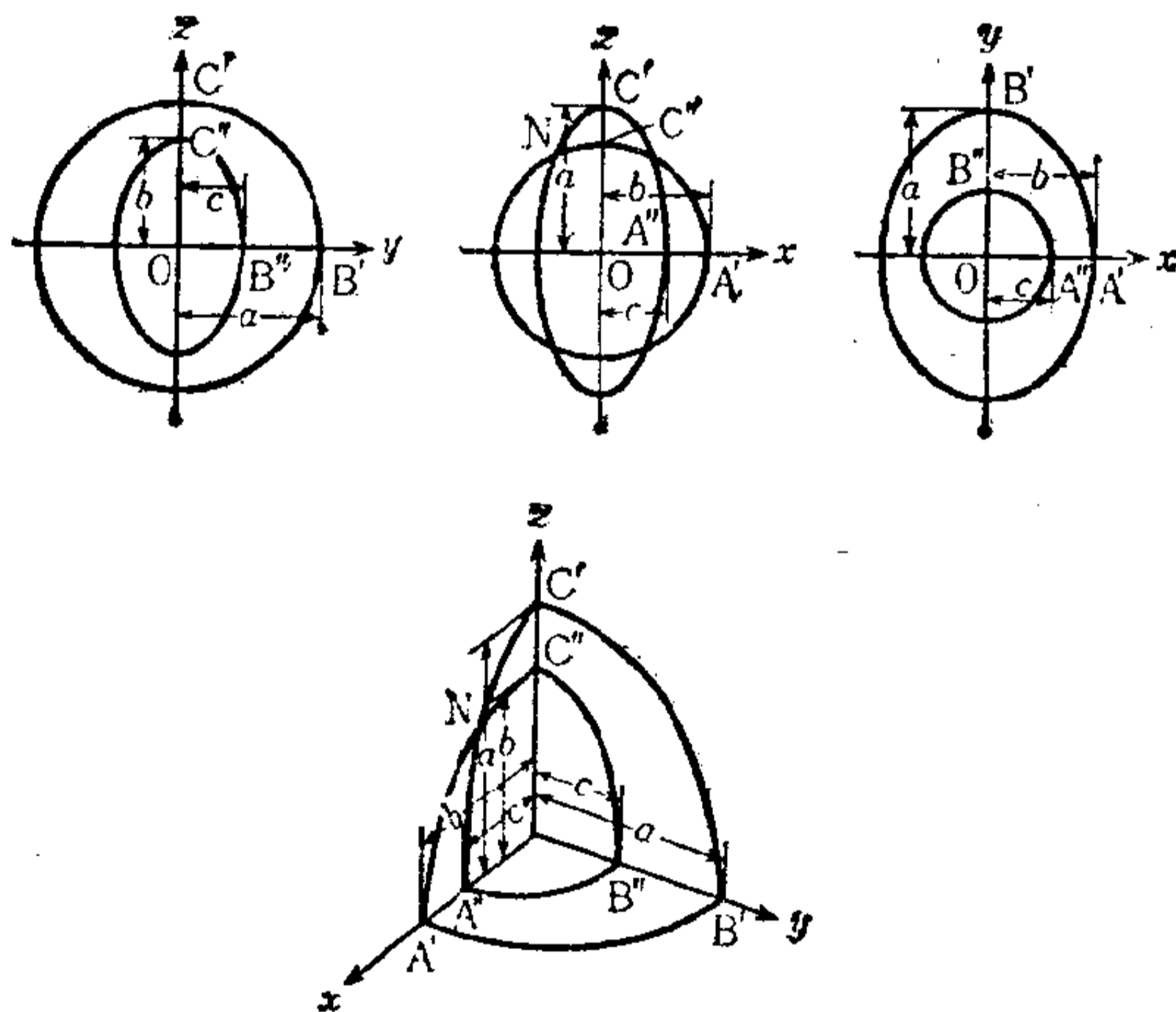


图 4.34

虽然 (4.3.45) 具有实根  $u'$ 、 $u''$ ，但是，由

$$u' u'' = -m^2 a' c' < 0$$

可知，设  $u' \geq 0$ ， $u'' \leq 0$ ，则有

$$a' \geq u' \geq 0 \geq u'' \geq -c', \quad (4.3.46)$$

所以,  $u'$  和  $u''$  只有在两者都为零时才相等. 根据式(4.3.45), 当下式成立时, 这个条件是可以实现的:

$$m^2 = 0 \quad \text{且} \quad l^2 c' = n^2 a'. \quad (4.3.47)$$

因此, 让对应的两个速度相等的那个方向, 其波面法线  $\mathbf{s}$  在  $xz$  平面内. 设它与  $z$  轴的夹角为  $\beta$ , 则由  $l = \sin\beta$ 、 $n = \cos\beta$  及式(4.3.47)可知

$$\tan\beta = \frac{l}{n} = \pm \sqrt{\frac{a'}{c'}} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}. \quad (4.3.48)$$

即, 在  $xz$  平面内双轴晶体存在着与  $z$  轴对称的两条光轴. 根据式(4.3.46), 晶体内的传播速度  $v_1$ 、 $v_2$  之间的关系是

$$a^2 \geq v_1^2 \geq b^2 \geq v_2^2 \geq c^2, \quad (4.3.49)$$

而且, 两者的行为都象非常光波.

迄今为止所说的传播速度都是波的相速度或**波面法线速度** (wave-normal velocity), 但是, 在非光学各向同性媒质中, 一般来说能量以与之不同的速度在不同于波面法线的方向上传播. 它叫做**光线速度** (ray velocity), 而相速度则是光线速度在波面法线方向上的投影. 菲涅耳上述想法的明显结论之一就是, 在双轴晶体中, 当波面法线  $\mathbf{s}$  和光轴一致时, 光线速度方向上的单位矢量  $\mathbf{t}$  和  $\mathbf{s}$  的关系具有特殊的性质, 这样, 便存在着与光轴方向的波面法线相对应的无限多条光线, 它们构成圆锥面, 并引起被称作**圆锥折射** (conical refraction) 的现象. 哈密顿(1832)指出了这种现象, 后来洛依特(H. Lloyd; 1833)、斯托克斯(1872)、格拉兹波鲁克(R. Glazebrook; 1879)以及哈斯廷(C.S. Hasting; 1887)等人在实验上予以证明.

虽然菲涅耳法线方程(4.3.44)及**菲涅耳法线椭圆柱体或折射率椭圆柱体**(4.3.43), 在光的电磁说中能由电磁场的基本方程推导出来, 但是, 菲涅耳本人仍试图由他从中看到的横波现实性的弹性体以太的立场出发来奠定基础. 他首先假定, 在

有外部扰动时,把以太粒子拉回到原来位置的弹性回复力,是粒子位移的一次函数。在第2部分第三章已经看到,在弹性理论中这种力并不依赖于绝对位移,而是依赖于应变,也就是依赖于相对位移。但是,如果把这一点置之不顾,那么便存在着回复力和位移作用于同一条直线上(应力张量的主轴方向和应变张量的主轴方向是一致的)的三个相互垂直的方向。若在这三个方向上取坐标轴,假设与坐标轴方向上的单位位移相应的回复力为  $a^2$ 、 $b^2$ 、 $c^2$ ,那么,任意方向( $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ )的位移都可以分解成分量  $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ ,所以,回复力的分量就成为  $a^2\cos\alpha$ 、 $b^2\cos\beta$ 、 $c^2\cos\gamma$ 。一般来说,它们的合力与位移方向并不一致,但却能分解成平行于位移的分量

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma$$

和垂直于位移的分量。因此,“弹性面”(surface of dasticity)

$$r^4 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 \quad (4.3.50)$$

便具有这样一种性质:矢径的平方,与该矢径方向上的单位位移所产生的弹性回复力在位移方向上的分量成正比。

用波面切割这个弹性面时所得到的交线是一个椭圆,如果只考虑沿着椭圆一个轴的位移,那么,回复力垂直于位移的分量就作用在波面法线的方向上。因此,菲涅耳假定这个垂直分量对振动的传播没有影响。虽然这个假定在力学上看来是有问题的,但是,倘若承认这一点,则光振动便在波面内进行,而且横波性亦可得到保证,横振动就会作为具有一定速度的直线偏振波而传播。

菲涅耳原封不动地沿袭了有关弦的横振动的讨论,他认为,在垂直于这个波面的方向上测量的横波传播速度,与单位位移所引起的弹性力在位移方向上的分量的平方根成正比。因此,这里考虑的直线偏振波的传播速度,应该和弹性面位移方向上的矢径大小成正比。



而且,波面内的任意位移,能够在—个椭圆的两轴方向上进行分解,该椭圆是弹性面和通过其中心并平行于波面的平面相交而成的.位移的这两个分量,作为独立的直线偏振波各自传播,其传播速度和交线椭圆的两个半轴的长度成正比.也就是说,和就原点而言的反椭圆体(4.3.43)与椭圆截面的两个半轴的长度成反比.

#### § 4.4 光以太和运动物体中的光学现象

##### a) 光的弹性波理论

上一节谈到的菲涅耳想法,尽管在力学上存在问题,但使光的横波解释有了现实意义,为说明光在晶体中所显示的各种现象带来了希望.十九世纪前半叶,光的力学解释便以菲涅耳的这种想法为基础开始起步.这种力学解释,假设**光以太**(luminiferous ether)由满足一切必要条件的弹性体微粒子组成,而光则是在那样的传播媒质中传播的弹性波.菲涅耳本人(1823)试图把光的反射和折射归结为光以太的力学性质,又对反射波和折射波强度推导出所谓的菲涅耳正弦定律和正切定律,还讨论了与之相关连的全反射和偏振状态,从而建立起作为横波的光的反射和折射的解析波动论;这就是光的力学解释迈出的第一步.

杨氏认为,光的反射和折射起因于光以太在不同媒质中的惯性(因此,假设以太粒子是均匀的,那么也就是密度)之差(反之,惠更斯和科希则假设,虽然在所有媒质中以太的密度是一样的,但切变模量并不相同),菲涅耳也采用了杨氏的观点,从而认为 i) 某媒质中光以太的惯性与该媒质内的光速平方成反比.而且,他还加上了一个条件,就是 ii) 在两个媒质的边界面上邻接的以太粒子的位移,其平行于边界面的分量,在两个媒质中是相等的;反射波和透射波的能量之和等于

入射波的能量. 如果设 iii) 光的振动与偏振面垂直, 那么, 当入射的单色平面波在入射面内偏振时, 即光的振动垂直于入射面时, 取两个均匀的各向同性媒质的边界面为  $z = 0$  的平面, 而设入射面为  $xz$  平面, 则入射波的光矢量  $\mathbf{V}_{\perp}^{(i)}$  只有  $y$  分量不为零:

$$\mathbf{V}_{\perp y}^{(i)} = A_{\perp} e^{-i\tau_i}, \quad \mathbf{V}_{\perp x}^{(i)} = \mathbf{V}_{\perp z}^{(i)} = 0. \quad (4.4.1)$$

在相应的反射波和透射波的光矢量  $\mathbf{V}_{\perp}^{(r)}$ 、 $\mathbf{V}_{\perp}^{(t)}$  中, 情况也相同:

$$\mathbf{V}_{\perp y}^{(r)} = R_{\perp} e^{-i\tau_r}, \quad \mathbf{V}_{\perp x}^{(r)} = \mathbf{V}_{\perp z}^{(r)} = 0, \quad (4.4.2)$$

$$\mathbf{V}_{\perp y}^{(t)} = T_{\perp} e^{-i\tau_t}, \quad \mathbf{V}_{\perp x}^{(t)} = \mathbf{V}_{\perp z}^{(t)} = 0. \quad (4.4.3)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} \tau_i &= \omega \left( t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(i)}}{v_1} \right) = \omega \left( t - \frac{x \sin \theta_i + z \cos \theta_i}{v_1} \right) \\ \tau_r &= \omega \left( t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(r)}}{v_1} \right) = \omega \left( t - \frac{x \sin \theta_r + z \cos \theta_r}{v_1} \right) \\ \tau_t &= \omega \left( t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(t)}}{v_2} \right) = \omega \left( t - \frac{x \sin \theta_t + z \cos \theta_t}{v_2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (4.4.4)$$

$\mathbf{s}^{(i)}$ 、 $\mathbf{s}^{(r)}$ 、 $\mathbf{s}^{(t)}$  分别是入射波、反射波、透射波传播方向上的单位矢量,  $\theta_i$ 、 $\theta_r$ 、 $\theta_t$  是入射角、反射角和折射角,  $v_1$ 、 $v_2$  是各媒质中的光速.

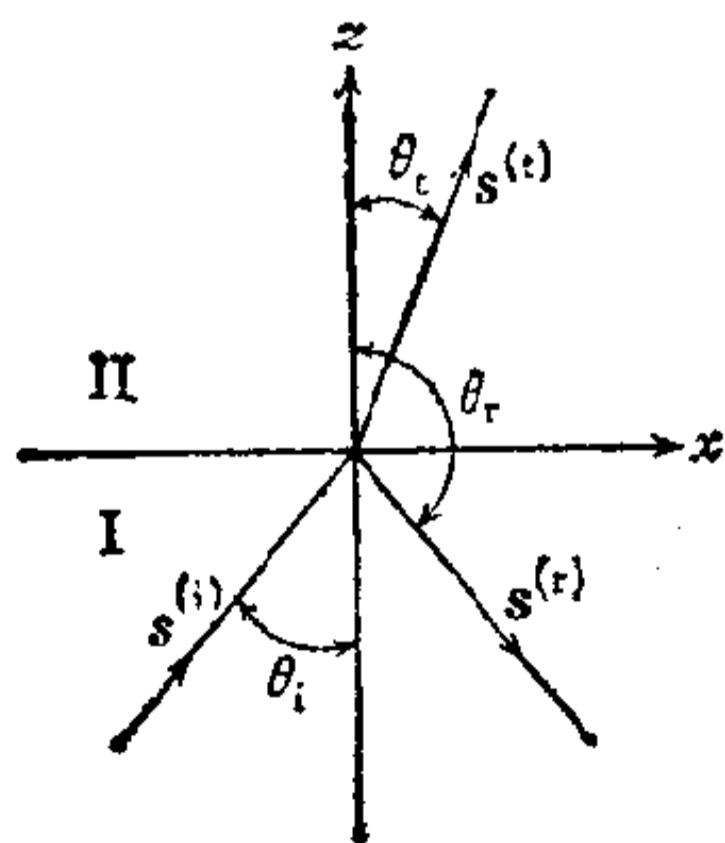


图 4.35

因此, 在边界条件之中, 边界面上切线分量连续性的条件就是

$$A_{\perp} + R_{\perp} = T_{\perp}. \quad (4.4.5)$$

设各媒质中的以太密度为  $\rho_1$ 、 $\rho_2$ , 那么, 由边界面单位面积所决定的人射光束、反射光束的截面积是  $\cos \theta_i$ , 透射光束的截面积是  $\cos \theta_t$ ,

所以,能量守恒定律就是

$$v_1 \rho_1 \cos \theta_i \cdot A_{\perp}^2 = v_1 \rho_1 \cos \theta_r \cdot R_{\perp}^2 + v_2 \rho_2 \cos \theta_t \cdot T_{\perp}^2. \quad (4.4.6)$$

若从式(4.4.5)和(4.4.6)中消掉  $T_{\perp}$ , 并使用由斯涅耳定律和假定 i) 推导出来的在弹性体光以太理论中把折射率和与以太有关的常数联系起来的关系式

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}, \quad (4.4.7)$$

则可得到

$$\frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}. \quad (4.4.8)$$

当入射波在垂直于入射面的方向上偏振时,即光的振动平行于入射面时,各个波的光矢量分量是

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_{\parallel x}^{(i)} &= -A_{\parallel} \cos \theta_i \cdot e^{-i\tau_i}, & \mathbf{V}_{\parallel y}^{(i)} &= 0, & \mathbf{V}_{\parallel z}^{(i)} &= A_{\parallel} \sin \theta_i \cdot e^{-i\tau_i} \\ \mathbf{V}_{\parallel x}^{(r)} &= -R_{\parallel} \cos \theta_r \cdot e^{-i\tau_r}, & \mathbf{V}_{\parallel y}^{(r)} &= 0, & \mathbf{V}_{\parallel z}^{(r)} &= R_{\parallel} \sin \theta_r \cdot e^{-i\tau_r} \\ \mathbf{V}_{\parallel x}^{(t)} &= -T_{\parallel} \cos \theta_t \cdot e^{-i\tau_t}, & \mathbf{V}_{\parallel y}^{(t)} &= 0, & \mathbf{V}_{\parallel z}^{(t)} &= T_{\parallel} \sin \theta_t \cdot e^{-i\tau_t} \end{aligned} \right\}, \quad (4.4.9)$$

由  $\cos \theta_r = \cos(\pi - \theta_i) = -\cos \theta_i$ , 切线分量在边界面上连续的条件就是

$$(A_{\parallel} - R_{\parallel}) \cos \theta_i = T_{\parallel} \cos \theta_t. \quad (4.4.10)$$

为了得到能量守恒定律的表达式,只要在式(4.4.6)中用式(4.4.8)把振幅替换一下就可以了.通过和前面相同的手续,就可以由这些式子得到

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}. \quad (4.4.11)$$

反射光的**正弦定律**(4.4.8)和**正切定律**(4.4.11),与布儒斯特实验是一致的,而且菲涅耳本人也从实验上得到证明.

不消掉  $T_{\perp}$ 、 $T_{\parallel}$ , 而消掉  $R_{\perp}$ 、 $R_{\parallel}$ , 还可以推导出透射光

和入射光之间的关系:

$$\frac{T_{\perp}}{A_{\perp}} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (4.4.12)$$

$$\frac{T_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}. \quad (4.4.13)$$

按照马吕斯平方余弦定律,一般的人射光都可以分解成平行于入射面而偏振的光和在垂直于入射面的方向上偏振的光(参考§4.3(b)). 根据式(4.4.11),当反射光和折射光垂直时( $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ ),  $R_{\parallel} = 0$ ,所以,反射光只在入射面内偏振. 这时,  $\sin \theta_t = \sin(\pi/2 - \theta_i) = \cos \theta_i$ ,故由斯涅耳定律就可以推导出布儒斯特定律式(4.3.3)  $\tan \theta_i = n_{12}$ . 在这里,假设光矢量的振动面与入射面的夹角为方位角  $\alpha$  ( $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ ),而对入射波、反射波、透射波来说,其定义分别是

$$\tan \alpha_i \equiv \frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}}, \quad \tan \alpha_r \equiv \frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}, \quad \tan \alpha_t \equiv \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}, \quad (4.4.14)$$

那么,由菲涅耳公式(4.4.8, 11, 12, 13)就有

$$\tan \alpha_r = -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)} \tan \alpha_i \quad (4.4.15)$$

$$\tan \alpha_t = \cos(\theta_i - \theta_t) \tan \alpha_i. \quad (4.4.16)$$

若考虑到  $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$ ,  $0 < \theta_t < \pi/2$ ,则可得出下列关系:

$$|\tan \alpha_r| \geq |\tan \alpha_i| \quad (4.4.17)$$

$$|\tan \alpha_t| \leq |\tan \alpha_i|. \quad (4.4.18)$$

这些不等式表明:在反射中振动面远离入射面;因此,偏振面接近入射面;相反,在折射中偏振面却远离入射面. 在式(4.4.17)中,当光垂直或水平入射( $\theta_i = \theta_t = 0$ 或 $\theta_i = \pi/2$ )时,等号成立,而在式(4.4.18)中,只有当光垂直入射时,等号

才成立。而且，在以偏振角入射时 ( $\theta_i + \theta_r = \pi/2$ )，不管  $\alpha_i$  的值如何，都是  $\tan \alpha_r = 0$ ，即  $\alpha_r = \pi/2$ 。这样，菲涅耳关于反射中偏振面旋转的观察结果 (§ 4.3(b)) 就全部再现了。

下面，我们研究一下媒质 I 较媒质 II 光密 ( $n_{12} < 1$ )，而入射角  $\theta_i$  比临界角  $\bar{\theta}_i$  大的情况。其中临界角  $\bar{\theta}_i$  由下式给出：

$$\sin \bar{\theta}_i = n_{12}. \quad (4.4.19)$$

当  $\theta_i = \bar{\theta}_i$  时，由式 (4.4.7) 可知， $\sin \theta_t = 1$ ，即  $\theta_t = \pi/2$ ，光沿着边界前进；如果  $\theta_i > \bar{\theta}_i$ ，就会产生全反射，这时，全部入射光都被反射到媒质 I 中去。以下决定省掉  $n_{12}$  的下标，若把

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n},$$

$$\cos \theta_t = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n^2} - 1} \quad (4.4.20)$$

代入透射波的位相因子式 (4.4.4) 中，则可得到

$$e^{-i\tau_t} = \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{x \sin \theta_i}{nv_2} \right) \right] \exp \left[ \mp \frac{\omega z}{v_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n^2} - 1} \right]. \quad (4.4.21)$$

此式表示一个在入射面内沿着媒质的边界 ( $x$  方向) 前进的波，它由边界起向媒质 II 的内部 ( $z$  方向) 以指数函数形式变化，不过，在物理上只允许式 (4.4.21) 的第二个因子取一号 (振幅不能随着距离的增加而增大) (因此，式 (4.4.20) 的复号必须取 +)。这时，振幅随  $z$  急剧衰减，向媒质 II 中渗进了  $v_2/\omega = \lambda_2/2\pi$ ，即只渗进了波长的量级。虽然在媒质 II 中存在着光矢量的振动，但是其时间均方值却是零，即通过媒质界面并没有能量流入。在这种全反射的情况下，使用式 (4.4.20)，则菲涅耳的两个定律就变成下面的形式：



$$\frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = \frac{\cos\theta_i - i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{\cos\theta_i + i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}} \quad (4.4.8a)$$

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \frac{n^2\cos\theta_i - i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{n^2\cos\theta_i + i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}. \quad (4.4.11a)$$

两式的分子和分母都是复数共轭的关系,例如,假设  $\cos\theta_i - i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2} \equiv z \equiv ae^{i\alpha}$  ( $a, \alpha$ : 实数), 那么它们便具有  $z/z^*$  的形式,所以

$$|R_{\perp}| = |A_{\perp}|, \quad |R_{\parallel}| = |A_{\parallel}|, \quad (4.4.22)$$

即,在每一个分量中,全反射的光的强度就等于入射光的强度.由式(4.4.22)可知,假设

$$\frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} \equiv e^{i\delta_{\perp}}, \quad \frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} \equiv e^{i\delta_{\parallel}}, \quad (4.4.23)$$

则  $e^{i\delta_{\perp}} = z/z^* = e^{2i\alpha}$ , 即  $\tan(\delta_{\perp}/2) = \tan\alpha$ , 所以位相就是

$$\tan \frac{\delta_{\perp}}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{\cos\theta_i}. \quad (4.4.24)$$

同样,

$$\tan \frac{\delta_{\parallel}}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{n^2\cos\theta_i}. \quad (4.4.25)$$

因此,两个分量的相对位相差  $\delta \equiv \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$  即可用下式给出

$$\tan \frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{\sin^2\theta_i}. \quad (4.4.26)$$

由此可知,当以临界角  $\bar{\theta}_i$  入射及水平入射 ( $\theta_i = \pi/2$ ) 时,相位差  $\delta$  为零,在它们之间,当入射角满足

$$\sin^2\theta_i = \frac{2n^2}{1+n^2} \quad (4.4.27)$$

时,位相差取最大值

$$\tan \frac{\delta_m}{2} = \frac{1-n^2}{2n}; \quad (4.4.28)$$

而且,当  $n$  给定时,对应于  $\delta$  的各个值,存在着入射角  $\theta_i$  的两个值.

另外,我们请读者回忆一下,圆偏振光能由两个强度相等、互相正交、而且具有  $90^\circ$  位相差的直线偏振光合成. 假若要根据这里所知的全反射中的偏振方式来构成圆偏振光,首先必须使  $|A_\perp| = |A_\parallel|$ . 为此,最好是让人射的直线偏振光与入射面法线的夹角为  $45^\circ$  ( $\alpha_i = 45^\circ$ ). 这样一来,由式(4.4.22)则有  $|R_\perp| = |R_\parallel|$ . 其次,选择  $n$  和  $\theta_i$ ,使它们之间的位相差为  $90^\circ$ . 若使用  $n_{21} = 1/n = 1.51$  的玻璃,那么,从式(4.4.28)可知,由一次全反射所产生的位相差的最大值  $\delta_m$ ,只是  $45^\circ 56'$ . 因此,我们使用两次产生  $\delta = 45^\circ$  的那种全反射. 根据式(4.4.26),最好是使人射角  $\theta_i$  为  $48^\circ 37'$  或  $57^\circ 37'$ . 取后一个值的,就是菲涅耳菱形六面体(图 4.29).

十九世纪前半叶,弹性体以太论所期待的目标,正是企图从弹性体力学出发,象这样准确地推导出对光的行为给出统一看法的菲涅耳正弦定律和正切定律(使用弹性体理论的现代表达式,表示该理论的性质和困难的一个例子,见索末菲《变形体力学》第 VIII 章 § 45). 它的特征之一,就是先验地赋予构成光以太的弹性体以下述特征,从而企图消除必然伴随弹性波出现的纵波部分,1°)使纵波的速度无限大;2°)使纵波的速度无限小;3°)不产生纵波. 1°)是菲涅耳暗示的,格临(1837,38)也曾采用过. 菲涅耳认为,以太如同胶状物和橡皮一样,对压缩的反抗要比对扭曲变形的反抗强得多. 2°)是科希(1839)的收缩性以太(contractile ether)或流动性以太(liable ether),他相反地把以太当作具有负压缩率的弹性媒质;为了在这样的媒质中产生无旋( $\text{curl} = 0$ )位移,是无须作功的,纵波所运载的能量为无限小. 3°)是麦克卡拉(J. MacuCullagh; 1848)的迴转弹性以太(rotationally elastic ether). 从现在

的观点来看,可以认为这个理论给出了一种媒质,在其中按照力学定律计算出来的振动和光的振动是相同的,从而,它就提供了一个由光的力学解释向电磁解释过渡的跳板。十九世纪前半叶,这个理论因其弹性体的非现实性而遭怀疑,到十九世纪后半叶,在构成电磁场的力学模型时,也只是限于保留性的利用(埃瑞 (G.B.Airy) 1846; 菲兹格拉德 (G.F.Fitz Gerald) 1885; 汤姆孙 1889, 90)。

为了具体看到十九世纪的物理学家们如何给予以太以生动活泼的物质表象,我们来列举麦克斯韦(1875)的试算结果。麦克斯韦认为,菲涅耳型也好、麦克卡拉型也好,以太作为一种实体,以媒质元素的部分变形引起的潜在能和振动动能的形式来保持并传播太阳的辐射能,就会具有切变模量和有限的密度,从而计算出了下面的数值:

$$\text{以太的切变模量} = 965.632,$$

$$\text{以太的密度} = 1.07 \times 10^{-18}.$$

这些数值是他由泡勒特 (C. S. Pouillet) 根据地表上日光直射的热量所求出的  $4.1 \times 10^{-5}$  尔格/厘米<sup>3</sup>·秒,仅算出太阳附近的辐射能为 1.866 尔格/厘米<sup>3</sup>·秒,再假定光的振幅不超过波长的 1/100 而推导出来的。麦克斯韦把这些值和铁的切变模量  $8 \times 10^{11}$ 、玻璃的切变模量  $2.4 \times 10^{11}$ 、以及离地球无限远处的大气密度  $3 \times 10^{-346}$  作了比较,该大气密度是在假定大气温度到处都为 0°C、地球静止、大气在地球周围处于平衡状态时的值。

#### b) 地球运动对光学现象的影响

弹性体以太理论,再次对物理学世界象的构成提出了新的课题。在第一部分中处理各种力学现象时,曾采取了德谟克利特表象,即世界是由空虚的空间和被该空间隔离的孤立而有重量的各种物体构成的。现在,这个空虚空间全部被以

以太充满,而构成该以太的则是现实的具有质量和弹性的物质,因此,需要假设牛顿对空间和时间的规定可以直接应用于被以太充满的宇宙,而且包含以太粒子在内的全部笛卡儿式的物质世界都遵从牛顿运动定律.这就是构成上述光的动力学理论基础的世界象.那么,在研究发光物体、受光物体以及传播光的媒质的运动时,应用牛顿力学体系会给出与观察相一致的结果吗?为了回答这个问题,必须知道以太在物质内外的运动状态,但是,要从经验上来直接确定它却极为困难.因此,问题也就等于是:对以太运动和物质运动的相互作用采取怎样的假说,才能说明运动物体中的光学现象呢?

倘若经典力学的伽利略相对性(§ 2.1),对于作为力学实体的光以太来说是成立的,则可认为,在远离有重量的各种物体的宇宙空间,以太静止于某一惯性系统之中.而且,就以太运动而言,因而也就光传播而言,同样的定律对于所有惯性系均准确成立,不言而喻,这只限于定律与加速度及相互作用力有关的范围,而运动的速度和方向则会因惯性系而异.假若在地球上观察用光的速度和方向所确定的光学现象,或许能给出地球或太阳系的速度.也就是说,虽然以太和所有物体共同的平动,无论在力学上还是在光学上都不能检测出来,但是,只对以太以外的各种有重量的物体而言,伽利略相对性并无成立的必要,相对以太的运动或许能在光学上确定出来.在这个意义上,以太便可规定绝对静止系.因而,问题就成为:能观察到的光学现象是仅仅依赖于各有重量物体之间的相对运动呢?或是能检测出相对于以太的运动呢?

地球运动使光速受到影响,这个问题的提出,可以追溯到布雷德利(J. Bradley, 1728)所发现的光行差.发现者已经对它作了粒子论的说明.若把地球的运动和光的运动看作是独立的,则在这两个运动合成的方向上就会观察到由相对



地球轨道速度  $v$  构成  $\theta$  角的方向上射来的星光，如果取到  $v/c \equiv \beta$  的一次方，就能在同  $\theta$  偏离角度  $\alpha$  (= 光行差) 的方向上看到它，其中  $\alpha$  由下式给出

$$\alpha = \beta \sin \theta. \quad (4.4.29)$$

杨氏(1804)最先尝试用波动论来说明光行差。他假设，以太全部静止，地球“象风经过森林的树木那样”自由地运动于以太之中，以太也自由地穿过地球；从而应用了惠更斯原理。如果用一个具有小孔 AB 的、无透镜的极其简单的观察装置来决定星的位置(图 4.36)，那么当忽略大气存在时，根据静止以太的假定，AB 的运动不会影响在某时刻到达 AB 的波面的传播，所以，使用惠更斯原理就可以知道以太扰动到达屏幕 CD 上的位置，之后便和粒子论的说明一样。但是，这种讨论在涉及到折射面时是不能适用的。

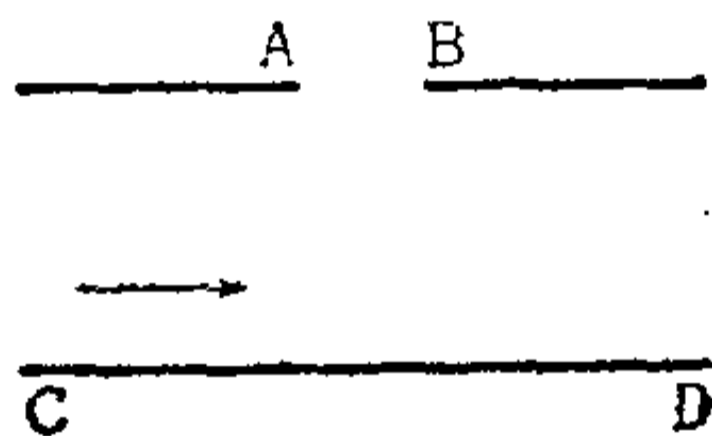


图 4.36

对光行差的说明，造成了光的波动说和粒子说对立的一个方面。但是，假设存在着光的相对速度的这种差别，那么，由星球来的光无论总会显示出与地球上的光不同的折射，例如，随着望远镜相对地球运动方向的指向不同，其焦距就会不同；人们作出了这一设想(鲁宾孙 (J. Robinson) 和威尔孙 (P. Wilson)；密歇耳 (J. Michel), 1784)，而且在这一方面进行过多次实验。

在运动坐标系中观察到的光速，是按照相对运动定律确定的。上述实验全都根据这个想法企图测量出地球相对于以太的运动。地球的平均轨道速度  $v$  是 29.76 千米/秒，从而



$\beta \equiv v/c$  是  $10^{-4}$ , 所以, 从实验的精度来说, 首先要考虑到给出与  $\beta$  一次方成正比的效果。正如麦克斯韦(1875)所指出过的那样, 使用地球上的光源来在地球上决定光速的实验, 并不符合这个条件。在那些实验中, 人们测定光在装置内一定距离  $l$  上往复的平均速度。这是因为, 当使实验装置中光的路径和地球运动方向一致时, 光在往复中所需的时间  $t$  就是

$$t = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}, \quad (4.4.30)$$

平均速度是  $2l/t = c(1 - \beta^2)$ , 与静止以太中的光速  $c$  只差了  $\beta$  的平方量。

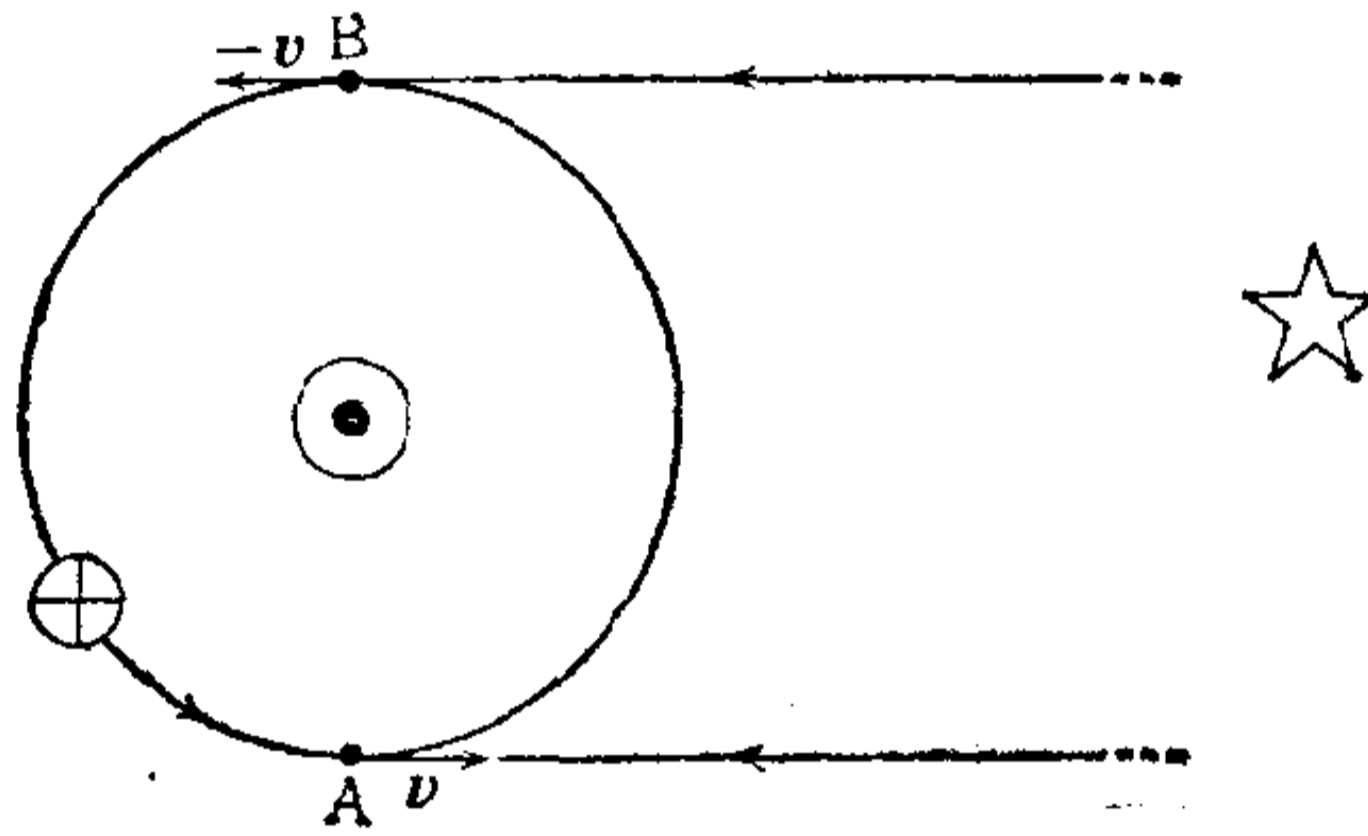


图 4.37

但是, 假如在地球外找到光源, 例如在某时于地球的运动方向上用望远镜找出某一特定的星球, 然后当地球来到轨道上的对蹠点时, 即在六个月之后用同一个望远镜观察同一个星(图 4.37), 那么, 望远镜内的光速, 在前一种情况是  $c - v$ , 在后一种情况是  $c + v$ , 可以预料, 望远镜的焦距有  $2\beta$  的量级之差。同样, 因为木星的平均公转周期是 11.862 个太阳年, 所以, 当看到木星卫星蚀时, 也就是在黄道的几乎正相反的点上从地球看到木星时, 可以说大约相隔了六年; 假若把观察所得的光速进行比较, 就会知道以太对太阳系的相对速度(麦克斯韦, 1875)。阿喇果(1810)曾在无象差棱镜内的光线方向和

地球的轨道运动方向构成种种不同角度的状态下把通过棱镜后的星光所产生的偏差进行比较的实验，由博斯科维希 (R. G. Boscovich; 1766) 提出、又由埃瑞 (1871) 作过、用来证实充满折射率大于 1 的透明物质(例如水)的望远镜和普通望远镜中光行差的差别的实验，凡此种种，都出于同样的想法。这些实验全部给出否定的结果，也就是说，在  $\beta$  的一次量级上，看不出地球运动对来自恒星的光的速度和折射有什么影响。

在上述各种实验中，我们是以相对运动的定律为基础来预料会产生某种效应的。这时假定，物体自由地通过以太，以太自由地穿透物体；有重量的物质的运动和参与光传播的以太的运动是独立进行的。实验结果表明，该假定并不成立。在弹性体以太论中，光速决定于以太的密度和弹性。菲涅耳学派假设以太弹性是一定的，在这个立场上，光速的变化仅仅依赖于物体怎样作用于其内部的以太，以及能拖动多少以太运动。菲涅耳(1818)指出，只要有一部分以太随物体运动，就足以说明  $\beta$  的一次效应。假设当某媒质静止时，该媒质中的光速是  $c_1 = c/n$  ( $n$  是静止媒质的折射率)。当这种媒质在光的传播方向上以速度  $v$  运动时，相对于以太的光速不是  $c_1 + v$ ，而是  $c_1 + kv$  ( $k < 1$ )，换句话说，即认为假设有重量媒质的行为，似乎是以媒质速度的某个比例拖动了光。在阿喇果寻求上述实验结果的波动论解释时，菲涅耳根据如下假定得出了这个**拖曳系数** (dragging coefficient)  $k$ : i) 物体内的以太密度和该物质折射率的平方成正比；ii) 物体内的以太密度中超过真空以太密度的那一部分，是和物体一起被带走的。在这里，我们打算用霍克 (M. Hoek) 的实验(1868)来确定  $k$ 。

我们用 T 来观察以半反射板 P 平分的两条互相在相反方向上传播的光线  $PM_1M_2M_3P$  和  $PM_3M_2M_1P$  的干涉(图 4.38)。

现在，在反射镜  $M_1$ 、 $M_2$  之间插入一个长度为  $l$  的盛水的圆筒  $W$ ，对装置适当调整，使  $M_1 M_2$  成为地球的运动方向或正好相反的方向，这时完全不发生干涉。设静止的水中光速为  $c_1 = c/n$ ，假如当地球在由  $M_1$  到  $M_2$  的方向上以速度  $v$  运动时，空气中的以太拖动与水中的相比可以忽略不计，那么，光

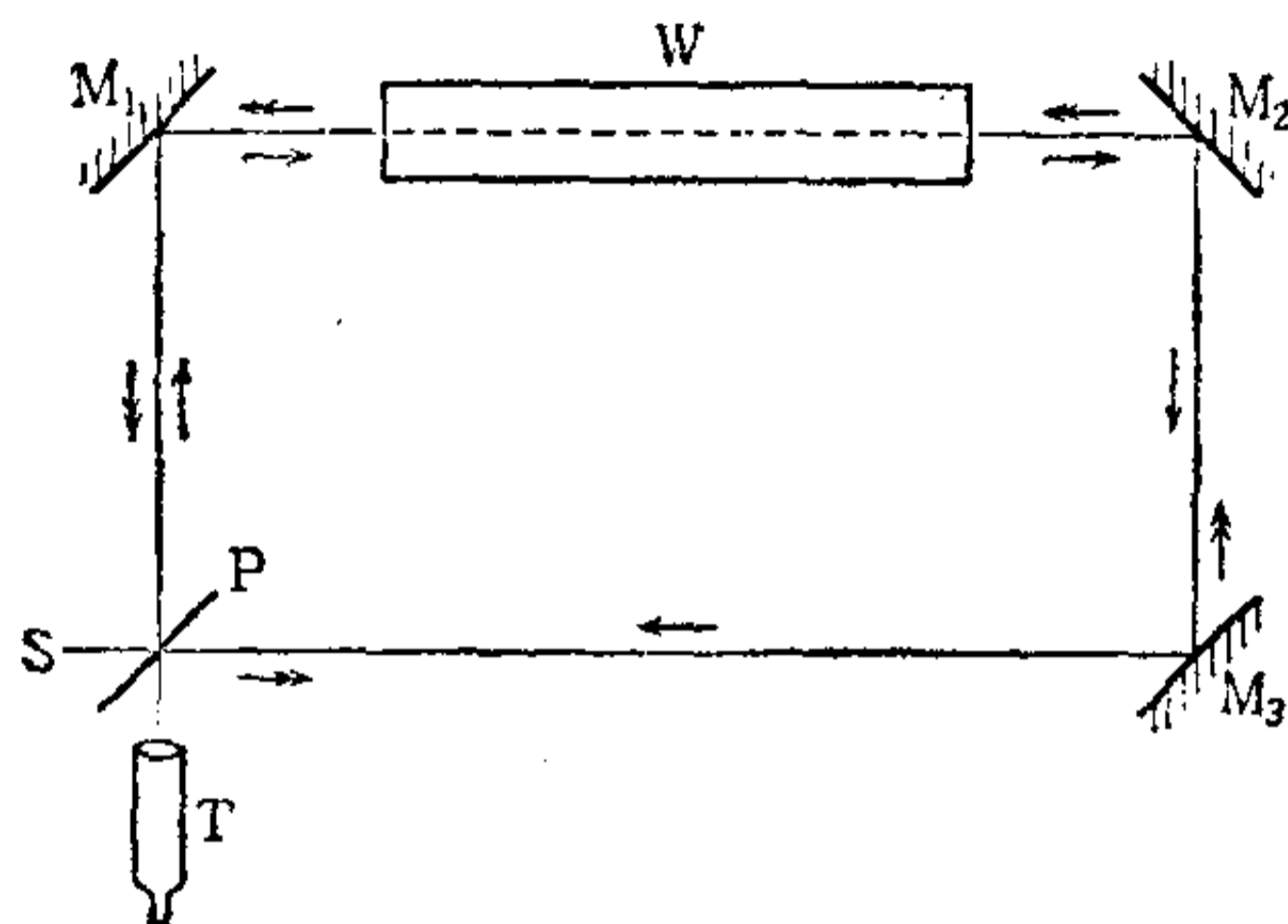


图 4.38

线  $PM_1M_2M_3P$  穿过长度为  $l$  的水和空气所需的时间就是

$$\frac{l}{c_1 + kv - v} + \frac{l}{c + v},$$

对于反方向穿过的光线  $PM_3M_2M_1P$  来说，这个时间是

$$\frac{l}{c - v} + \frac{l}{c_1 - kv + v}.$$

实验结果表明，花费的时间是一样的，与装置相对于地球运动方向的位置无关，所以，让这两个时间相等，并忽略  $\beta^2$  以上的项，则可得到**菲涅耳拖曳公式**

$$kv = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v. \quad (4.4.31)$$

因此，若相对于静止以太来测量，则在以速度  $v$  运动的折射率为  $n$  的媒质中，光速就成为  $c_1 + kv$ ，而相对于运动媒质来测量，则成为  $c_1 + kv - v = c_1 - (v/n^2)$ 。现在，反过来就能推导菲涅耳的假定 i)，即在光的弹性波理论创立期间起

过积极作用的式(4.4.7)。因为在菲涅耳学派的力学解释中，式(4.4.31)依赖于折射率，所以，以太在媒质中流动的速度就应该随着光的每种颜色而不同，而且还应该存在着与颜色数目相应的以太。H. A. 洛伦兹考虑到折射率对波长的依赖性和对波长的多普勒效应，从经典电子论的立场出发，把式(4.4.31)进一步精确化为

$$k = \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right). \quad (4.4.31a)$$

斐索(1851)对菲涅耳拖曳公式作过验证，后来迈克耳孙和莫雷(1886)又再次进行这项工作，塞曼(1914、16、17)还把洛伦兹公式亦包括在内重复作了验证(表 4.6)。

表 4.6

光的波长 (Å)	$k$ (菲涅耳)	$k$ (洛伦兹)	$k$ (实验)
4500	0.443	0.464	0.465
4580	0.442	0.463	0.463
5461	0.439	0.454	0.451
6870	0.435	0.447	0.445

按照菲涅耳的这个拖曳假说，可以证明，折射和其它一切现象都是没有光行差的。选取如下的图象，对这个问题的讨论将很方便，即给整个宇宙一个速度，其大小与地球轨道速度 $v$ 相等，而方向却相反；使地球静止，而以太到处都具有相同速度（更一般来说，假如以太的运动具有速度势，则下面的证明便适用）。我们能找到决定波面和光线方向的方法便可以。

首先，我们由确定稳恒以太中的波面开始。按照惠更斯原理，在静止以太中，由波面的一点 $O$ 发出的子波，经过时间 $t$ 之后，是以 $O$ 为中心、 $ct$ 为半径的球面。假设在 $O$ 点的速度是 $v$ （若在各点的速度变化是连续的），那么，这个球面整体

上移动了一个距离  $vt$ 。因此,在时间  $t$  之后的波面,就是这样的球面波的包络面。

其次,为了找出折射率为  $n$  的有重量媒质中的波面,我们来考虑以太是静止的,但媒质却具有速度  $-v$  的情况。在半径为  $c_1 t$  的球面上,子波整体上只是移动了  $-vt(1 - 1/n^2)$ 。因此,若给整个系统一个速度  $v$ ,则子波就会相对于媒质移动,而在距离  $(1/n^2)vt = \kappa vt$  上静止。这里的  $\kappa \equiv 1/n^2$  表示光被拖曳的程度。由波面的一点  $O$  发出的子波,是以  $OO' = \kappa vt$  的  $O'$  为中心、 $c_1 t$  为半径的球面波,所以,如果设这个球面和新包络面的切点为  $A$ ,那么,  $OA$  便给出了通过  $O$  的光线的方向,显然,沿着这个光线的传播速度  $w$  是  $OA/t$  (图 4.39)。因此,假设  $\angle O'OA \equiv \theta$ , 则有

$$c_1^2 = w^2 - 2\kappa w v \cos\theta + \kappa^2 v^2,$$

于是,如果忽略  $v/c_1$  的高次项,即可得到

$$w = c_1 + \kappa v \cos\theta + \frac{\kappa^2 v^2}{2c_1} (\cos^2\theta - 1) \quad (4.4.32)$$

或

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c_1} \left\{ 1 - \frac{\kappa v}{c_1} \cos\theta + \frac{\kappa^2 v^2}{2c_1^2} (\cos^2\theta + 1) \right\}. \quad (4.4.32a)$$

假如知道光线方向上的传播速度,我们就能够决定光相对于地球的路径。为此,可以使用费马(Fermat)最短时间原理,求出光遵从这个原理走过的路径(参考 §4.6(b))。也就是说,若把路径的线元写成  $ds$ , 则为了走过  $A$ 、 $B$  之间的任意路径所需要的时间

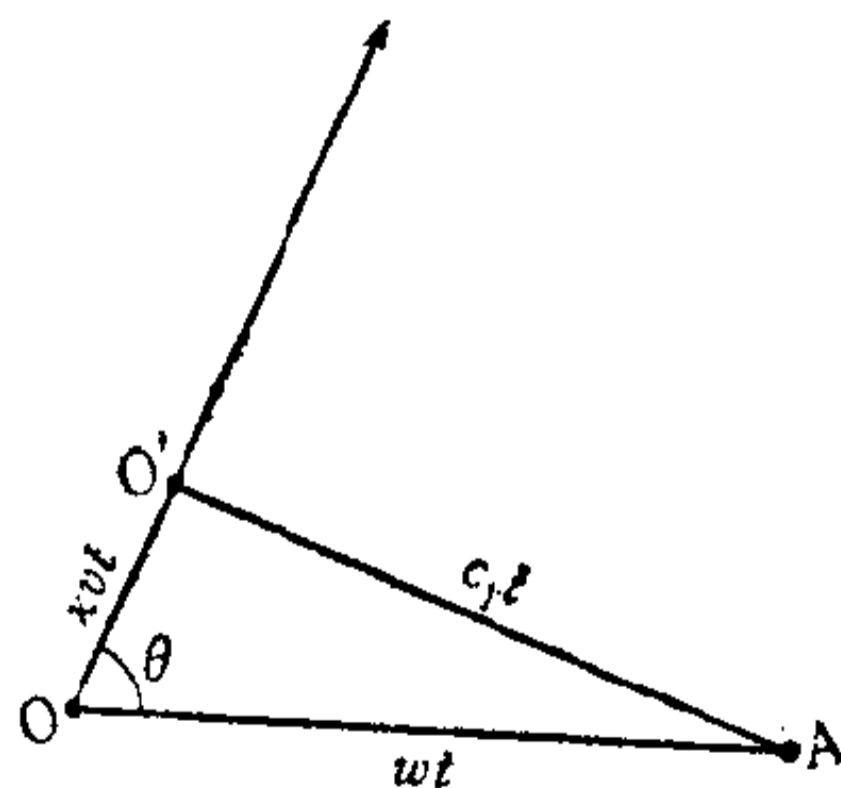


图 4.39

$$\int_A^B \frac{ds}{w},$$



对于光的现实路径来说就必须成为最小值。如果在不均匀的但却是各向同性的有重量媒质中,考虑没有不连续面的情况,那么,  $w$  便与  $\kappa$  有关。这时,  $n$  和  $c_1$  都是变量,所以,  $\kappa$  也变成了变量。另外,  $w$  还依赖于与以太运动有关的量  $v$  和  $\theta$ , 如果假定以太的运动具有速度势  $\Phi$ , 并把  $v$  在光线方向上的投影写成  $v_s$ , 则有

$$\begin{aligned} & \int_A^B \frac{ds}{c_1} \left( 1 - \frac{\kappa v}{c_1} \cos\theta \right) \\ &= \int_A^B \frac{ds}{c_1} - \int_A^B \frac{1}{n^2} \frac{v_s}{c_1^2} ds \\ &= \int_A^B \frac{ds}{c_1} - \int_A^B \frac{1}{n^2 c_1^2} \frac{d\Phi}{ds} ds. \end{aligned}$$

因为  $nc_1 = c$  在整个空间都是一定的,所以第二项  $(1/c^2) \times (\Phi_B - \Phi_A)$  不依赖于 A、B 之间的路径。因此,只要使第一项的积分为最小值就可以了。然而,由于它并不包含与以太运动有关的量,故光的路径和在以太静止的情况下是一样的。

当光由一种媒质进入另一种媒质时,最短时间原理仍然成立,所以,在这种情况下也可以由相同的条件求出光的路径。若考虑一条由 A 到 B 横穿折射面 C 的任意路径,假设  $1/n^2 c_1^2 = \mu$ , 则有

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{ds}{w} &= \int_A^C \frac{ds}{w} + \int_C^B \frac{ds}{w} \\ &= \int_A^C \frac{ds}{c_1} - \mu(\Phi_C - \Phi_A) + \int_C^B \frac{ds}{c_1} - \mu(\Phi_B - \Phi_C) \\ &= \int_A^B \frac{ds}{c_1} - \mu(\Phi_B - \Phi_A). \end{aligned}$$

为了使它成为最小值,只要使第一项成为最小值就足够了。因此,在地球上进行观察时,光应当遵从普通的折射定律。

菲涅耳在上述静止以太的基础上提出了拖曳假说,与他

相反,斯托克斯(1845、46)则认为,即使假设地球内部的以太全部是和地球一起运动,而在地球外部的附近有以太流动,也能对光行差予以说明。在地球附近的星光的波面,是按惠更斯原理逐次来确定的,但因各点上以太的速度有差别,所以波面将会稍微倾斜。由于这个波面偏转的累积,以太运动是无旋的,其速度势亦存在(参考§ 3.11),假如地球表面上的以太速度等于地球的轨道速度,就可证明与光行差的观察结果是一致的。但是,在斯托克斯理论中产生了这样一个重大的疑问,即:对说明光行差所必须的两个条件——速度势的存在、在地球表面以太速度到处都与地球轨道速度一致——是否相容?(洛伦兹,1896)。实际上,假定不可压缩的以太中存在着速度势,而在地球表面以太速度的法线分量等于地球轨道速度的法线分量,那么以太的运动就会完全确定下来。取地球的中心为原点,地球的轨道运动方向为  $x$  轴,假设轨道速度为  $v$ ,则上述条件可以用下面的速度势来满足,而且由拉普拉斯方程的理论可知,这是唯一可能的解:

$$\Phi = C \frac{x}{r^3}.$$

因此,

$$u_x = C \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right), \quad u_y = -3C \frac{xy}{r^5},$$

$$u_z = -3C \frac{xz}{r^5}.$$

式中,常数  $C$  由速度的法线分量相等这个条件来确定。设  $R$  为地球半径,  $\theta$  为矢径  $r$  和  $x$  轴的夹角,那么,由  $\partial\Phi/\partial r = -2Cx/r^4$ , 就可以得到决定  $C$  的条件是

$$-2C \frac{\cos\theta}{R^3} = v \cos\theta, \quad \text{即} \quad C = -\frac{1}{2} v R^3.$$

在通过地球中心并垂直于  $x$  轴的平面和地球表面交线的各点

上,  $u_x = -v/2$ , 而在  $x$  轴和地表的交点上,  $u_x = v$ , 假如注意到这一点, 那么就足以知道以太的地表速度在整个表面上并不等于轨道速度.

为了避免这个困难, 或者假设在地球周围的整个空间没有必要存在速度势, 或者假设以太不是不可压缩的. 虽然普朗克 (1899) 曾使用过压缩性以太, 但是, 为了调整地球表面上的以太速度, 有必要增大地球附近的以太密度, 为此必须提出如下假定: i) 以太受到地球的吸引; ii) 这种浓缩以太中的光速等于正常密度的以太中的光速; iii) 尽管这种以太是浓缩的, 但其行为仍象气体一样. 即使由测得的光行差常数的临界值来限制地球表面的以太速度, 地球表面上的以太密度与在极大距离上的以太密度之比也会达到  $e'' \approx 60000$  的量级. 正如洛伦兹所总结的那样, 由于这种情况, 说明  $\beta$  一次效应的最简单理论, 应该是以菲涅耳的拖曳假说为基础的静止以太理论.

1842 年多普勒发现, 除了速度之外, 频率也依赖于光源和观察者相对于媒质的运动. 他考虑到波数是一个不取决于参考系的量, 而对于以速度  $v_0$  及  $v$  平动的光源 (频率为  $\nu_0$ ) 和观察者来说, 若取到  $\beta$  的一次方, 则观察到的频率  $\nu'$  就是

$$\nu' = \nu_0 \left( 1 + \frac{v_0 - v}{c} \right). \quad (4.4.33)$$

因此, 观察者和光源相对于以太共同进行的 ( $v = v_0$ ) 运动, 就不能觉察出来, 在取到  $\beta$  的一次方时, 它也只依赖于光源和观察者的相对运动 ( $v_0 - v$ ).

这样, 在以  $\beta$  的一次方考虑问题时, 看上去似乎是, 光的速度和方向与被观察的天体的运动是完全独立的, 而光学现象仅仅依赖于有重量的物体的相对运动. 但是, 在力学的以太理论中, 即使暂不管这种力学解释上的困难如何, 也能对以

太的运动或它的运动给物体的影响引进某种任意的假设，并  
 按照补偿原理得到上述结论。的确，只要考虑 $\beta$ 的一次量，  
 就可以说明光学现象的相对性，这正是菲涅耳拖曳假说的一个  
 重大成果。进一步，要想知道该结论是严格地成立呢，还是  
 只在这种近似上成立呢，就必须把地球运动对光学现象影响  
 的效应测量到 $\beta^2$ 的量级。若是前一种情况，菲涅耳的以太  
 理论便遭破坏，从而在进行光学观察时必须引进本质上完全  
 崭新的某种假定，也就是说，必须认为光的行为在速度和方向  
 上与有重量的物体完全不同。迈克耳孙-莫雷的实验（1887）  
 证实了这个 $\beta^2$ 的效应，而爱因斯坦（1905）却在这个问题上反  
 复思考新的观点。

如式（4.4.30）所示，为了看到地球运动对光速影响的 $\beta^2$   
 量级的效应，只要研究光沿着地球的运动方向在距离 $l_1$ 上往

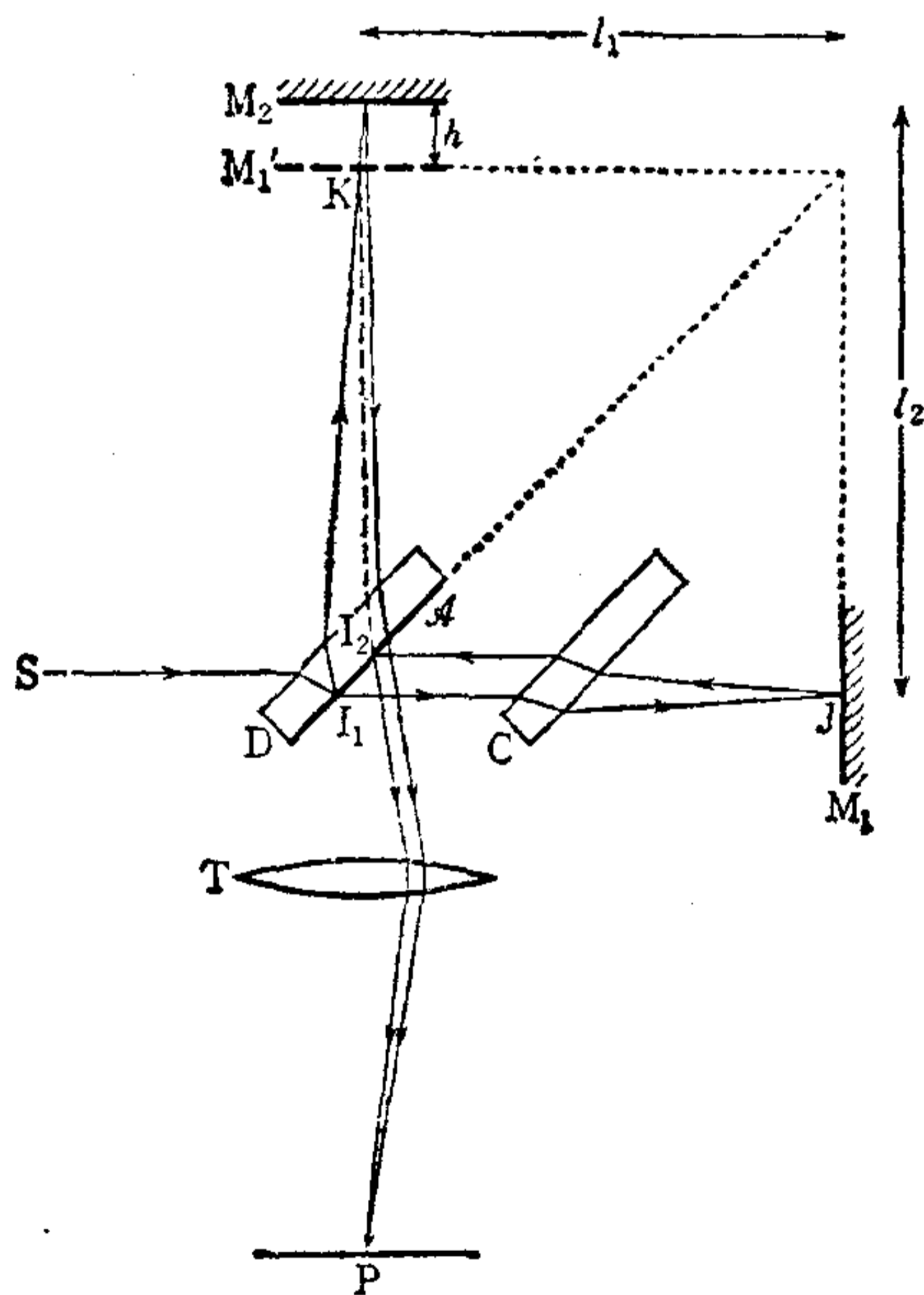


图 4.40



返所需要的时间就可以了。迈克耳孙试图采用干涉仪来对这个时间进行精确测定,该时间是

$$t_1 = \frac{2l_1}{c(1 - \beta^2)} \approx \frac{2l_1}{c} (1 + \beta^2).$$

虽然干涉仪并不是时间本身的测量手段,但是,由干涉条纹的偏移却能知道光走过各种路径所需要的时间之差。

以迈克耳孙的名字命名的干涉仪(图 4.40),是这样的一种装置,它把由波长为  $\lambda$  的单色光源  $S$  来的光,用平行平面玻璃板  $D$  的半反射面  $\mathcal{A}$  分成垂直方向上的两条光线,并用平面镜  $M_1$ 、 $M_2$  使每一条光线反射后返回到  $D$ ,再一起进入观察用的望远镜  $T$  中去;其中的  $M_1$  固定在干涉仪的底座上,而  $M_2$  却能在  $M_2D$  的方向上前后移动。在  $M_2$  上反射的光通过  $D$  三次,但在  $M_1$  上反射的光却只通过一次,为了消除这种非对称性,在  $D$  和  $M_1$  之间平行于  $D$  插入一块补偿板  $C$ ,它与  $D$  材质相同、厚度相等。如果设  $M_1'$  为  $M_1$  在  $\mathcal{A}$  上的象,那么,穿过  $\mathcal{A}$  而在  $M_1$  上反射的光的光程  $Sl_1Jl_2P$ ,就等于在  $\mathcal{A}$  上反射后又在假想平面  $M_1'$  上反射的光的光程  $Sl_1Kl_2P$ ,所以,用  $T$  观察到的干涉条纹便可以看成是使  $M_2$  具有位相变化  $\phi$  时,由  $M_2$  和  $M_1'$  所限定的空气层产生的,该  $\phi$  值等于在  $\mathcal{A}$  上的内反射和外反射的位相变化之差。因此,当  $M_2$  和  $M_1'$  平行而且相距为  $h$  时,就可以看到以光源  $S$  的象为中心的同心圆状的干涉条纹,由式 (4.1.7a,b) 可知,亮条纹在  $2nh \cos \theta \pm (\phi\lambda/2) = m\lambda$  ( $m = 0, 2, 4, \dots$ ) 的地方产生,暗条纹在  $2nh \cos \theta \pm (\phi\lambda/2) = m\lambda$  ( $m = 1, 3, 5, \dots$ ) 的地方产生,若把  $M_2$  向  $M_1'$  移近,干涉条纹便向中心收缩。

因此,如果设  $SJ$  和地球的运动方向一致,来求出光在与它垂直的方向上往返距离  $l_2$  所需的时间  $t_2$ ,那么,由于  $\mathcal{A}$  是以地球轨道速度  $v$  移动的(图 4.41),所以  $t_2$  就成为



$$t_2 = \frac{2l_2}{C\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.4.34)$$

故两条光线的光程差是

$$\Delta\mathcal{S} = C(t_1 - t_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - l_2 \right).$$

如果使该装置旋转  $90^\circ$ , 则  $l_1$  和  $l_2$  的作用就互相调换, 在这种情况下, 光程差是

$$\Delta\mathcal{S}' = C(t'_1 - t'_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

因此, 由于装置的旋转而引起的光程差的相对差距便有所增大, 取  $l_1 = l_2 = l$ , 若保留到  $\beta^2$  项, 则  $\Delta\mathcal{S} - \Delta\mathcal{S}'$  与  $\lambda$  之比就成为  $(2l/\lambda)\beta^2$ . 因为两个相邻条纹的间隔对应于一个波长的光程差, 所以, 观察到的条纹位置的移动, 应该是条纹间隔的  $1/(2l/\lambda)\beta^2$ .

迈克耳孙 1881 年的首次实验, 由于用式 (4.4.34) 估计而忽略了地球运动对光程  $\mathcal{S}_{M_2 A''}$  的影响, 对于干涉条纹的偏移也多估了两倍, 所以使用的距离只有  $l = 120$  cm. 洛伦兹 (1886) 指出了这个误差, 于是, 迈克耳孙和莫雷一起, 使光在对角线方向上往返四次 (图 4.42), 把距离延长到  $l = 1.1 \times 10^3$  cm, 又于 1887 年 7 月再次进行实验. 因为所使用的光波长是  $\lambda = 5.9 \times 10^{-5}$  cm, 所以  $2l\beta^2/\lambda \approx 0.4$ , 他们预料条纹大约将移动条纹间隔的  $1/3$ , 然而结果却是否定的. 在从迈克耳孙首次实验以来的五十年间, 人们一直在探索  $\beta^2$  的效应, 但是, 正如表 4.7 所示, 并没有观察到预期的位移. 只有密勒 (Miller) 在威尔孙山上的结果显示出比其它

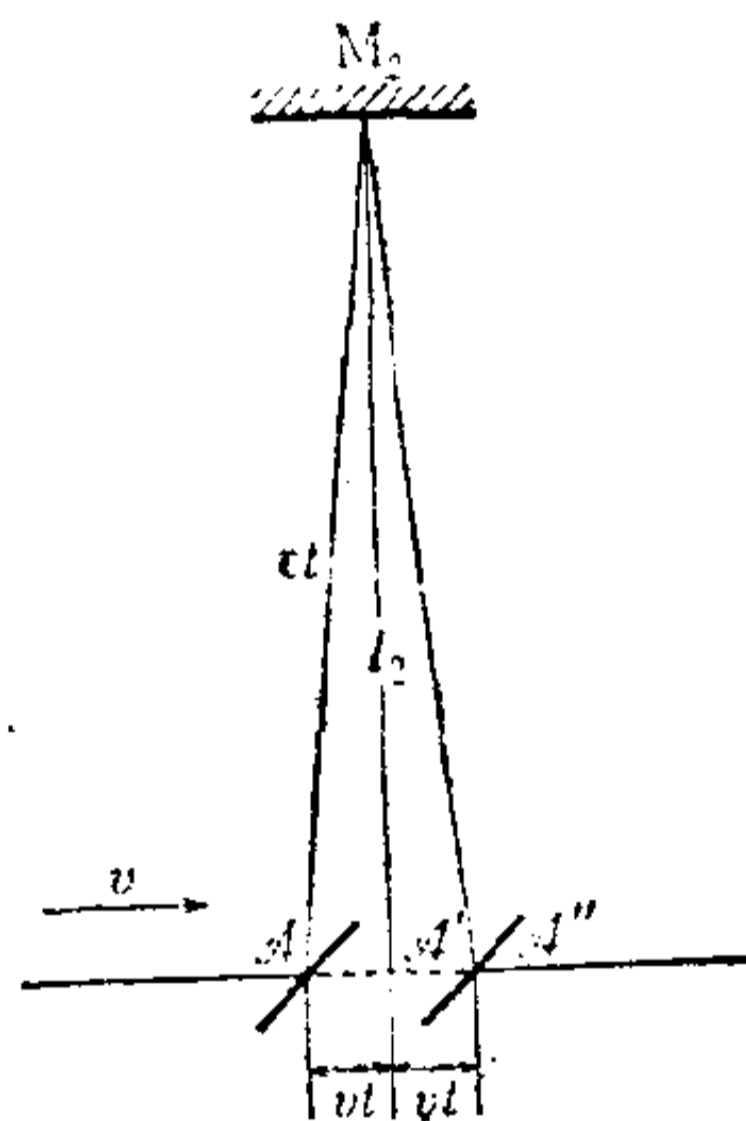


图 4.41

表 4.7

		实验地点	l(cm)	$(2l/\lambda)\beta^2$	
				理论值	实验值
迈克耳孙	1881	波茨坦	120	0.04	0.01
迈克耳孙和莫雷	1887	克利夫兰	1100	0.40	0.005
莫雷和密勒	1902—04	克利夫兰	3220	1.13	0.0073
密勒	1921	威尔孙山	3200	1.12	0.04
密勒	1923—24	克利夫兰	3200	1.12	0.015
密勒	1924	克利夫兰	3200	1.12	0.007
马歇	1924	海德堡	860	0.3	0.01
密勒	1925—26	威尔孙山	3200	1.12	0.044
凯耐狄	1926	帕沙德纳及威尔孙山	200	0.07	0.001
埃凌乌斯	1927	帕沙德纳	200	0.07	0.0002
匹卡德和斯塔尔	1927	里基山	280	0.13	0.003
迈克耳孙、皮斯 和皮尔孙	1929	威尔孙山	2590	0.9	0.005
朱斯	1930	耶纳	2100	0.75	0.001

数据大了一位，如果按香克兰 (R. S. Shankland)、麦卡斯基 (S. W. McCuskey)、莱昂 (F.C. Leone) 和库尔梯 (G. Kuerti) (1955) 等人的重新分析，可以把它解释成干涉仪温度效应的结果。可见，即使考虑到  $\beta$  的平方量级，光速也不会受地球运动的影响。

#### § 4.5 部分相干性和部分偏振光

##### a) 白光的性质

为了使光学有系统地规范化，常常使用单色的标准标量波（如正弦波），而且还使用无限连续的标准波。即使这样做忽略了偏振问题，也是极大的理想化。其原因在于，由物质原子发出的光辐射充其量不过持续  $10^{-8}$  秒左右，所以光波波列也只是  $10^2$  cm 的量级。例如，为了容纳 100 万个钠 D 线（波长

5893 Å)的波,只要 60cm 就足够了,通常在实验室中涉及到的光程差是波长的十倍左右,迈克耳孙就镉红线观察到光程差为  $5 \times 10^5$  个波长的干涉条纹 (§ 4.1(b)),是极其例外的

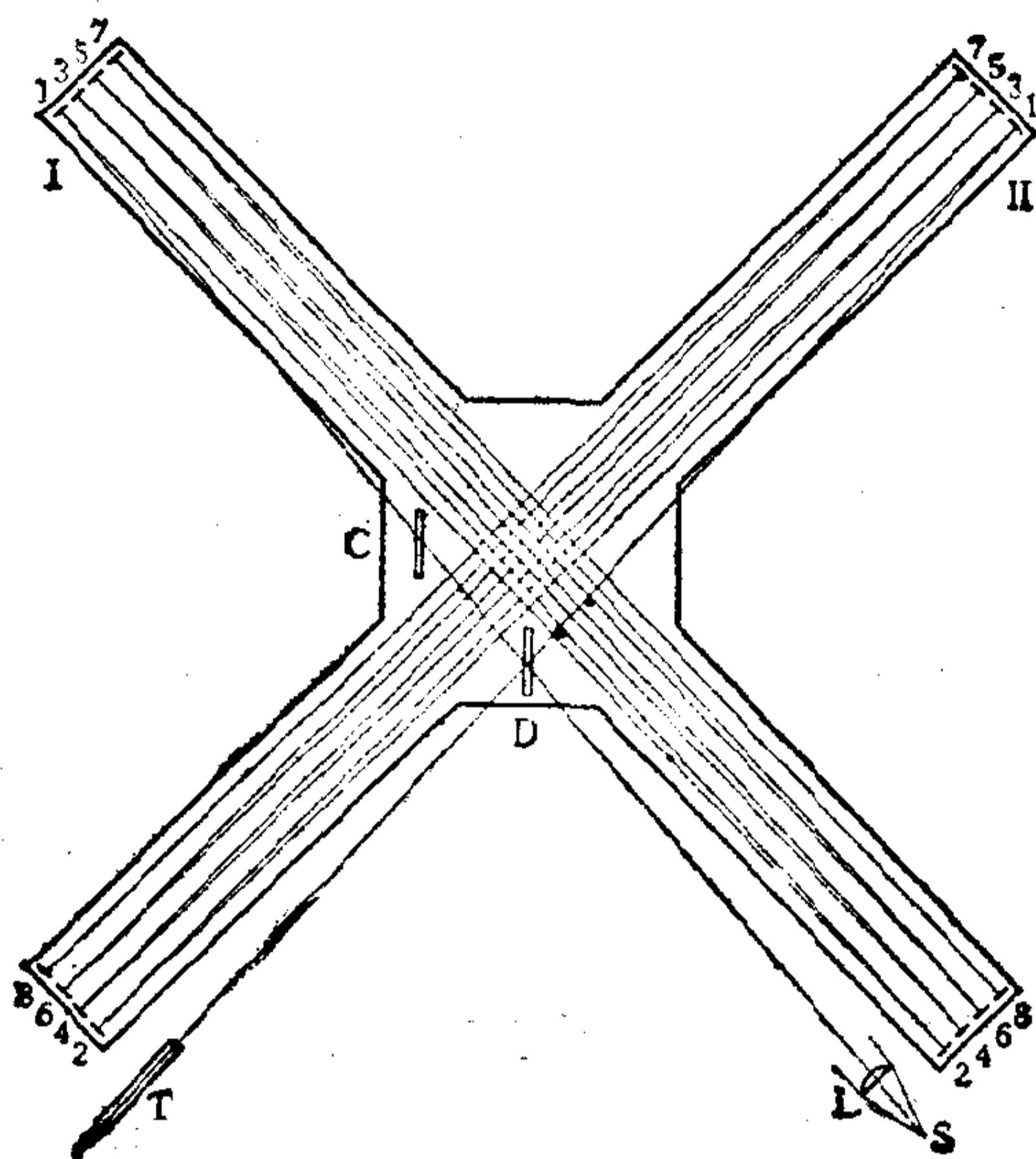


图 4.42

情况。因此可以说,上述理想化在处理日常的光学现象时是一个相当好的近似。加之,它在数学上又很容易处理,所以,与确立光的波动论的同时,在物理学家的头脑中便已经形成这样一种表象:把白光也当作是所有波长的标准波的集合。

对这样看待白光的问题所作的重新评价,是在关于光的本性的力学解释之外的探索中。即热线或辐射热——用基尔霍夫精密化了的概念来说,也就是黑体辐射——的研究热潮之中产生的。热辐射的问题,起源很早。“燃烧珠”(ιαλος, burning glass) 远在希腊已经相当普及;把太阳光线用凹面镜会聚即

能发火的事实,记载于欧几里德的《反射光学》(κατοπτρικός)之中。冷线是否也能与热线一样聚焦的问题,据说是培根(《新工具》第二卷第十二章)提出的,他在基门特科学院把五百磅冰放在凹面镜前,再把灵敏的温度计放在焦点上实际进行过实验。另外,我们还要再次引用牛顿的《光学》;他在第三篇第一部分问题 18 中谈到,把烤热了的温度计放入玻璃容器中,不管抽出还是不抽出其中的空气,温度计的冷却程度变化不大,由此看来,热是否由比空气更为微妙的媒质的振动所传播,该媒质是否与光的媒质相同;在问题 8 中他还推测:固体被加热到一定温度以上便会发光,这种辐射是不是由物体各部分的振动引起的?

很多人以各种不同的形式尝试过把热源和凹面镜或抛物面镜组合起来的实验,但是即使在它们中间放上屏蔽板遮断由热源来的光,也能够把热聚集到焦点上,由此即可区别出“发光的热”和“看不见的热”(G.L. Buffon, 1774)。而且,即使在热源前面送以强风,也不会影响凹面镜焦点上的点火效应,由此可知,对于反射来说,热线和光线的行为是一样的(K. W. Scheele, 1777; J. H. Lambert, 1779; H. B. Saussure, 1786)。就这样,到十八世纪末叶,关于辐射热的本性,众说纷云,莫衷一是:有人认为,光是大量包含热质的一种合成物,包含的热质越少,在棱镜上弯曲得越厉害,但辐射热与紫光相比热质是不多的(!)(Scheele);也有人认为它象声波那样以热的振动进行反射(Saussure);也有人认为它是一种肉眼看不见的放射体,以与光相同的速度直线传播(Dictet, 1790)。但是,一般都认为,存在着肉眼看不见的热线,它几乎是瞬间传播的,而且反射时遵从与光线相同的定律。

十九世纪前半叶,包括 W. 赫谢对红外线的发现在内, J. Hutton (1794)、L. Nobili (1830)、M. Melloni (1832)、



J. D. Forbes (1835)、H. Knoblauch (1847)、J. J. Seebeck (1849) 等人的研究工作,明确而完全地证明了热线和光线的同一性,即两者的一切物理特性(折射、干涉、衍射、偏振)都是一致的。而且,斯脱华特 (B. Stewart; 1861) 和基尔霍夫 (1859, 60) 表示,在完全绝热的容器内处于热平衡状态的辐射,即黑体辐射,不仅整体上是确定的,而且各部分也是确定的,也就是说,如果把以  $\nu$  和  $\nu + d\nu$  之间的频率进行辐射的能量写成  $F(\nu)d\nu$ , 那么,对于给定的温度来说,  $F(\nu)$  就是  $\nu$  的确定的函数。后来,发明了白炽电灯(1879),由研究其灯丝的光谱 (W. Abney 和 C. Festing 1884) 和测定在电流流过铂线时的种种温度下的谱线分布 (J. Stössel) 等等,韦伯 (H. F. Weber) 从经验上给出了“爱迪生电灯及新型碳棒灯的碳的辐射分布式”;设基尔霍夫函数为

$$F(\nu)d\nu = Ae^{-a^2\nu^2}d\nu \quad (A, a = \text{const}), \quad (4.5.1)$$

该分布式就相当于维恩 (Wien) 位移定律 (1893)——与能量密度最大值相对应的波长  $\lambda_{\max}$ , 和绝对温度  $T$  成反比 ( $\lambda_{\max}T = \text{const}$ )——的特殊情况(参考本讲座第三卷《量子力学 I》第一章)。

另外,瑞利 (1888、89) 提出了这样的问题:应该在什么样的意义上才能按照波动论的各个原理来说明式 (4.5.1) 呢? 能否构成以式 (4.5.1) 所表示的振动为特征的什么其它概念呢? 瑞利首先注意到,某一确定的频率这个概念,以不间断地无限连续的波列为前提。通过一个周期性( $n$ 次/秒)开闭的通道而听到纯声(频率为  $m$ )时的那种间歇振动,给出这个概念的一个很好的例子。那样的振动可以用  $2(1 + \cos 2\pi mt) \times \cos 2\pi nt$  来确定,还能够把它写成  $2 \cos 2\pi nt + \cos 2\pi \times (n + m)t + \cos 2\pi(n - m)t$ , 也就是说,可以认为它与频率为  $n$ 、 $n + m$ 、 $n - m$  的三个单一频率的声是等价的。对于



有限的波列,既不能说存在某个频率的波,也不能说不存在频率与之相差无限小的波。而且,也不能决定二者存在的比例。实际上,由于测量装置分辨率的限制,只不过使用了某一时间的平均。在那种情况下,对辐射分布式的任意一点来说,应该有某一个狭窄范围内的各种频率混杂的波与之对应。这个合成波是和单纯的波列一起确定下来的,其行为依赖于分量波的相对位相;必须认为,这完全是统计的结果。

白光的本质是完全不规则的一系列脉动,这种看法杨氏(1801)在说明光栅作用的基础上曾采用过,戈威(M. Gouy, 1886)等人也曾提出过,但是,该脉动本身是完全任意的,它不能与任何有限的波长或频率保持关系,亦不能区别各种温度下的辐射。各个脉动被限制在幅度狭窄的给定范围内,它们在其中以均匀速度传播;仅仅这样说还不够充分。这是因为,当它们合成时,是脉冲长度的倍数的那些波长便分离掉了。假如把各种长度的脉冲组合起来,不是就可以了吗?如果只是反过来去研究引进它们的比例,这个讨论还是不会有什么结果。什么样的特定型式的脉冲,它们的任意集合才能表示“完全的辐射”(complete radiation; 瑞利由上述观点出发,这样来称呼黑体辐射)呢?因为在这种脉冲型的定义中,常数因子是任意的,所以只要脉冲是相似的就行,未必需要相等。瑞利指出,作为推导式(4.5.1)的一个形式极为简单的脉冲,选择误差函数型的就可以:

$$\phi(x) = e^{-c^2 x^2}. \quad (4.5.2)$$

为了证实这一点,把式(4.5.2)进行傅里叶分解,则有

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos k(v-x) \phi(v) dk dv. \quad (4.5.3)$$

又由

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 v^2} \cos kv dv = \frac{\sqrt{\pi}}{c} e^{-k^2/4c^2}$$

而有,

$$e^{-c^2 x^2} = \frac{1}{C \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-k^2/4c^2} \cos kx dk. \quad (4.5.4)$$

把式(4.5.3)写成

$$\left. \begin{aligned} \pi \phi(x) &= \int_0^{\infty} f_1(k) \cos kx dk + \int_0^{\infty} f_2(k) \sin kx dk \\ f_1(k) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \cos kv \phi(v) dv, \quad f_2(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \sin kv \phi(v) dv \end{aligned} \right\} \quad (4.5.5)$$

为了简单起见,就  $f_2(k) = 0$  的情况,把  $|\phi(x)|^2$  对  $x$  由  $-\infty$  积分到  $+\infty$  来看看。这时,为了避免不确定性,拟乘上因子  $e^{\mp \alpha x}$  ( $\alpha > 0$ ) 进行计算,而在积分之后作  $\alpha \rightarrow 0$  的处理(当  $x > 0$  时,复号取-;当  $x < 0$  时,复号取+):

$$\begin{aligned} \pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(k) f_1(k') \cos kx \\ &\quad \times \cos k'x dk dk' dx. \end{aligned}$$

因此,要是使用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm \alpha x} \cosh hx dx = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + h^2},$$

即可得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |f_1(k)|^2 dk. \quad (4.5.6)$$

若把式(4.5.6)应用于式(4.5.4),则因  $f_1(k) = (\sqrt{\pi}/c) \times e^{-k^2/4c^2}$ , 故有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2c^2 x^2} dx = \frac{1}{c^2} \int_0^{\infty} e^{-k^2/2c^2} dk. \quad (4.5.7)$$

也就是说,与频率范围  $k, k + dk$  对应的辐射强度为  $c^{-2} e^{-k^2/2c^2}$ , 但因  $k$  和  $\nu$  成正比,所以它就具有式(4.5.1)的形式。

每一个式(4.5.2)型的脉冲,也可把它看成是在相同位置

上同时存在的相当多的无限小脉冲的合成，而这些小脉冲虽然全部指向某一点( $x_0$ ),但往往会因偶然情况偏离该点。这样一来,就可以把给出白光的全部光学扰动,看成是由无限个同时存在的基本脉冲所产生的。但是,这些基本脉冲并不是完全无秩序地分布。因为,属于该扰动的脉冲,全部具有相同的符号,而且必须遵从误差定律排列成指向同一点的群。然而,误差定律对于一切群都是相同的,除了这一点之外,不同的群并无关系。表示热光源发出的辐射的扰动,其群分布是高斯型的,一般来说,这个结论无论在经典理论中还是在量子论中都可以从普朗克分布得到证明(在非热光源中,也可以看到非高斯型的例子,如激光),但是,在这里需要注意,通过十九世纪末叶围绕伦琴射线的本性所作的讨论,才进一步确认了对白光的这种见解。斯托克斯(1897)和汤姆孙(J. J. Thomson, 1898)假设,伦琴射线的根源,是由于构成阳极射线的带电粒子的轰击而在以太中所产生的脉冲。1898年瑞利写道:“这些作者们的结论——‘伦琴射线不是波长极短的波,而是脉冲’——是令人吃惊的”。“从它们是高度集中的脉冲这一点出发,我不得不反过来得出它们是短波长的波的结论,……要么,傅里叶定理和它那任何扰动都能分解成标准波的主张究竟如何呢?”正如我们在上面已经看到的那样,瑞利想要尽力证明,除去脉冲的集中度低之外,白光的确具有今天赋予伦琴射线的那种结构,他还主张,当时之所以尚未发现伦琴射线的衍射和偏振,不过是因为它的波长非常短罢了。据说汤姆孙对此的回答(1902)是:“我们之间的分歧是措词的不同”。

#### b) 相干性和相干度

这样一来,假如把白光或者由现实的具有宽度的热光源发出的光,看成一种概率过程,其振幅或位相均不规则变化,

而且变化速度依赖于光谱线的有效宽度  $\Delta\nu$ , 那么, 就必须引进一个量, 并以此为基础进行统计描述, 这个量就是光波中不同两点  $P_1$ 、 $P_2$  上的振动的相关关系的标准, 劳厄 (M. von Laue; 1906—08) 首先定量地讨论了光振动的相关值, 他把热力学应用于光束, 探索了热力学第二定律与熵的加法定理之间的关系。下面, 我们打算按照范希特 (P. H. van Cittert, 1934, 39) 和则尼克 (F. Zernike; 1938) 的观点谈谈。

我们用  $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$  表示在空间点  $\mathbf{r}$  和时刻  $t$  的光扰动。虽然只要选择一个适合于当前问题的函数形式  $V^{(r)}$  就可以了, 但是, 为了简单起见, 在进行讨论时暂且忽略偏振, 并就一个确定的空间点来考虑, 而把  $V^{(r)}(t)$  当作时间的标量实函数 ( $-\infty \leq t \leq \infty$ ) (例如光矢量的直角坐标分量)。假如  $V^{(r)}(t)$  可以进行平方积分, 那么就能把它写成傅里叶积分的形式:

$$\begin{aligned} V^{(r)}(t) &= \int_0^{\infty} a(\nu) \cos[\phi(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\nu) e^{-2\pi i\nu t} d\nu, \\ v(\nu) &\equiv \frac{1}{2} a(\nu) e^{i\phi(\nu)}. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

由于  $V^{(r)}$  是实数, 所以

$$v(-\nu) = v^*(\nu) \quad (\nu \geq 0). \quad (4.5.9)$$

也就是说, 负频率部分不再给出已经包含在正频率部分中的那些信息。因此, 如果把相应的复数表达式定义成

$$V(t) \equiv 2 \int_0^{\infty} v(\nu) e^{-2\pi i\nu t} d\nu, \quad (4.5.10)$$

那么,  $V^{(r)}(t)$  就可以用  $V(t)$  的实数部分来确定。  $V(t)$  叫做属于  $V^{(r)}(t)$  的**解析信号** (analytical signal) (盖宝 (Gabor), 1946)。这个名字的由来在于, 当没有负频率部分时,

$$V(t + i\tau) \equiv \int_0^{\infty} v(\nu) e^{-2\pi i \nu(t + i\tau)} d\nu$$

定义复变量  $t + i\tau \equiv z$  在下半平面  $\tau < 0$  上解析的函数, 而  $V(t)$  则是这样的解析函数在  $\tau \rightarrow 0$  时的临界值. 由这个解析性可以推断,  $V(t) = V^{(r)}(t) + iV^{(i)}(t)$  的实数部分  $V^{(r)}$  和虚数部分  $V^{(i)}$  互相有希耳伯变换的关系:

$$\begin{aligned} V^{(i)}(t) &= \pi^{-1} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(r)}(t')}{t' - t} dt', \\ V^{(r)}(t) &= -\pi^{-1} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(i)}(t')}{t' - t} dt'. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

其中,  $\mathcal{P}$  表示  $t' = t$  时的科希主值. 使用帕希维尔 (Parseval) 定理, 由式(4.5.8)、(4.5.9)、(4.5.10)就可以得到如下关系式:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} V^{(r)2}(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} V^{(i)2}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) V^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |v(\nu)|^2 d\nu \\ &= 2 \int_0^{\infty} |v(\nu)|^2 d\nu. \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

但是, 我们现在可能使用的测量装置, 对时间的分辨率充其量不过是  $10^{-10}$  秒(在极特殊的情况下, 也有  $10^{-12}$  秒)左右, 所以, 对平均周期为  $10^{-15}$  秒的光振动来说, 不能把  $V^{(r)}(t)$  当作时间的函数来测量, 而应该测量某一时间间隔  $-T \leq t \leq T$  内的时间平均值. 另一方面, 扰动  $V^{(r)}$  实际上也只是持续有限的时间间隔, 由于这个持续时间 ( $\sim 10^{-8}$  秒) 远远大于振动周期, 所以能够进行  $T \rightarrow \infty$  的理想化处理. 这时, 还需要加上这样一个条件: 即使无限增大取平均的时间间隔, 扰动强度 ( $\propto V^{(r)2}(t)$ ) 的时间平均也会收敛到一个有限的值, 也就是说, 下式是有限的:



$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V^{(r)2}(t) dt,$$

不过,假如这个极限值是有限而不为零的,则  $\int_{-\infty}^{\infty} V^{(r)2}(t) dt$  显然会发散,  $V^{(r)}(t)$  就不可能进行平方积分。但是,若使用**舍项函数** (truncated function)

$$V_T^{(r)}(t) \equiv \begin{cases} V^{(r)}(t) & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| > T), \end{cases} \quad (4.5.13)$$

那么就有可能应用傅里叶分析的方法。倘若这个  $V_T^{(r)}$  可以进行平方积分,就能够把它写成傅里叶积分

$$V_T^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_T(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu.$$

如果同样定义出解析信号的舍项函数,则把式(4.5.12)中的被积分函数用各自的舍项函数替换,再除以  $2T$ ,所得到的下列关系式仍然成立:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(r)2}(t) dt &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(r)2}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} V_T(t) V_T^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_T(\nu) d\nu \\ &= 2 \int_0^{\infty} G_T(\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

式中,  $G_T(\nu) \equiv |v_T(\nu)|^2/2T$ 。接着,还应该取  $T \rightarrow \infty$  的极限,不过,在很多情况下函数  $G_T(\nu)$  并不收敛于一定的值,而是波动的。采用适当的修匀措施 (smoothing procedure), 即能克服这个困难。这就是说,先把  $V^{(r)}(t)$  当作群的一个组成部分,该群表示现在所考虑的点上扰动的一切可能的状态,然后再取这个群的平均值。在光学中通常遇到的群都是稳定 (stationary) 而有各态历经性 (ergodic), 稳定性意味着群的平

均完全不依赖于时间的原点；各态历经性则保证了群的平均等于与之相应的时间平均(参考本讲座第五卷《统计物理学》§ 2.1 (a), § 5.4)。假设  $G_T(\nu)$  的群平均  $\langle G_T(\nu) \rangle_c$  具有  $T \rightarrow \infty$  的极限值

$$G(\nu) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \langle G_T(\nu) \rangle_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{|v_T(\nu)|^2}{2T} \right\rangle_c, \quad (4.5.15)$$

而把  $f(t)$  的时间平均写成

$$\langle f(t) \rangle_c \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_T(t) dt, \quad (4.5.16)$$

那么,在  $T \rightarrow \infty$  的极限上,式(4.5.14)就成为

$$\begin{aligned} \langle V^{(r)2}(t) \rangle_c &= \langle V^{(i)2}(t) \rangle_c = \frac{1}{2} \langle V(t)V^*(t) \rangle_c \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) d\nu = 2 \int_0^{\infty} G(\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (4.5.14a)$$

$G(\nu)$  相当于一般所说的概率过程的**强度波谱** (power spectrum), 在现在  $V^{(r)}(t)$  表示光扰动的情况下,  $G(\nu) d\nu$  和来自频率范围  $(\nu, \nu + d\nu)$  的光对强度的贡献成正比, 所以, 我们把  $G(\nu)$  叫做光振动的**波谱密度** (spectrum density)。

另外, 为了考查不同的两个时空点上光振动之间的相关关系, 现在我们需要再来研究一下杨氏的干涉实验 (图 4.7 (a))。但是, 这一次假设  $L$  是具有宽度的多色光源。如果认为狭缝  $S_1(\mathbf{r}_1), S_2(\mathbf{r}_2)$  是二次扰动的中心, 那么由波动方程的线性可知, 在时刻  $t$  屏幕上点  $P(\mathbf{r})$  的解析信号  $V(\mathbf{r}, t)$  是

$$V(\mathbf{r}, t) = K_1 V(\mathbf{r}, t - t_1) + K_2 V(\mathbf{r}, t - t_2). \quad (4.5.17)$$

式中, 假设  $t_1 \equiv s_1/c$ ,  $t_2 \equiv s_2/c$ ;  $s_1 \equiv S_1P$ ,  $s_2 \equiv S_2P$ 。  $K_1, K_2$  与  $s_1, s_2$  成反比, 而且依赖于狭缝的大小和装置的几何尺寸。因为由  $S_1, S_2$  来的二次波, 其位相相对于一次波偏离了  $1/4$  周期, 所以  $K_1, K_2$  是纯虚数。由式(4.5.17)可知, 在点  $P(\mathbf{r})$ , 时刻  $t$  的瞬间光强度  $I(\mathbf{r}, t)$  是

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{r}, t) &= V(\mathbf{r}, t)V^*(\mathbf{r}, t) \\
&= |K_1|^2 I(\mathbf{r}_1, t - t_1) + |K_2|^2 I(\mathbf{r}_2, t - t_2) \\
&\quad + 2\text{Re}\{K_1 K_2^* V(\mathbf{r}_1, t - t_1)V^*(\mathbf{r}_2, t - t_2)\}.
\end{aligned}
\tag{4.5.18}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_c &= |K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle_c + |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle_c \\
&\quad + 2\text{Re}\{K_1 K_2^* \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t_1, t - t_2)\}.
\end{aligned}
\tag{4.5.19}$$

式中,假设

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \equiv \langle V(\mathbf{r}_1, t_1)V^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle_c \tag{4.5.20}$$

$$\langle I(\mathbf{r}_j, t_j) \rangle \equiv \langle V(\mathbf{r}_j, t_j)V^*(\mathbf{r}_j, t_j) \rangle_c \quad (j = 1, 2). \tag{4.5.21}$$

假定群具有稳定性和各态历经性,则群的平均就可以用相应的时间平均来替换,该函数仅仅通过其时间差  $t_2 - t_1 \equiv \tau$  依赖于时间变量. 因此,如果令

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \equiv \langle V(\mathbf{r}_1, t + \tau)V^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle_c, \tag{4.5.22}$$

而且因为已无必要区别两种平均,所以省略了下标  $c$  或  $t$ , 那么,式(4.5.19)就成为

$$\begin{aligned}
\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= |K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle + |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle \\
&\quad + 2|K_1 K_2| \Gamma^{(r)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau).
\end{aligned}
\tag{4.5.23}$$

式中,  $\Gamma^{(r)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  是  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  的实部.

表示相关性的函数  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ , 是部分相干光理论的一个基本物理量,它叫做  $S_1(\mathbf{r}_1)$  的光振动比  $S_2(\mathbf{r}_2)$  的光振动推迟一个时间  $\tau$  时的互相干函数 (mutual coherence function). 当两个空间点一致时 ( $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ ),

$$\Gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, \tau) \equiv \langle V(\mathbf{r}_j, t + \tau)V^*(\mathbf{r}_j, t) \rangle \quad (j = 1, 2) \tag{4.5.24}$$

叫做点  $S_j(\mathbf{r}_j)$  上的自相干函数 (self-coherence function), 它在  $\tau = 0$  时归结为  $\mathbf{r}_j$  上的正常强度:

$$\Gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, 0) = \langle V(\mathbf{r}_j, t) V^*(\mathbf{r}_j, t) \rangle = \langle I(\mathbf{r}_j, t) \rangle \quad (j = 1, 2) \quad (4.5.25)$$

使用标准化了的互相关函数

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &\equiv \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)]^{1/2} [\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)]^{1/2}} \\ &= \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle]^{1/2} [\langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

式(4.5.23)则可写成

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle I^{(1)}(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &\quad + 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} [\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} \\ &\quad \times \gamma^{(r)}\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \frac{s_2 - s_1}{c}\right). \end{aligned} \quad (4.5.23a)$$

式中,  $\gamma^{(r)}$  是式(4.5.26)的  $\gamma$  的实部, 而

$$\langle I^{(j)}(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv |K_j|^2 \langle I(\mathbf{r}_j, t) \rangle = |K_j|^2 \Gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, 0) \quad (j = 1, 2) \quad (4.5.27)$$

是只开放一个狭缝时在  $P(\mathbf{r})$  上所观察到的强度.  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  叫做**复数相干度** (complex degree of coherence), 其绝对值  $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|$  则叫做**相干度**. 其理由如下. 首先, 把薛华兹 (Schwarz) 不等式应用于  $V^{(r)}(\mathbf{r}_j, t)$  的舍项函数  $V_T^{(r)}(\mathbf{r}_j, t)$  ((4.5.13)), 可以得到

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{\infty} V_T(\mathbf{r}_1, t + \tau) V_T^*(\mathbf{r}_2, t) dt \right|^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} V_T(\mathbf{r}_1, t + \tau) V_T^*(\mathbf{r}_1, t + \tau) dt \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} V_T(\mathbf{r}_2, t) V_T^*(\mathbf{r}_2, t) dt, \end{aligned}$$

若在其中用  $t$  替换右边第一个积分内的变量  $t + \tau$ , 再将两边除以  $4T^2$ , 然后取  $T \rightarrow \infty$  的极限, 则可知道

$$|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \leq 1 \quad (\text{或 } |\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2 \leq \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)). \quad (4.5.28)$$

其次, 设光的平均频率为  $\bar{\nu}$ , 而令

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \equiv |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \exp\{i[\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) - 2\pi\bar{\nu}\tau]\} \quad (4.5.29)$$

$$\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \equiv \arg\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) + 2\pi\bar{\nu}\tau,$$

则式(4.5.23a)就可以表示成

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &\quad + 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} \\ &\quad \times \left| \gamma\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \frac{s_2 - s_1}{c}\right) \right| \\ &\quad \times \cos\left[\alpha\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \frac{s_2 - s_1}{c}\right) - \delta\right] \quad (4.5.23b) \end{aligned}$$

$$\delta \equiv 2\pi\bar{\nu}\tau = \frac{2\pi}{\lambda}(s_2 - s_1).$$

式中,  $\lambda$  是与  $\bar{\nu}$  对应的平均波长. 因此, 当  $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| = 1$  时, 式(4.5.23b)和波长为  $\lambda$ , 在  $s_1(\mathbf{r}_1)$ 、 $s_2(\mathbf{r}_2)$  振动的位相差为  $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_2 - s_1)/c)$  的单色光干涉的式(4.1.6)是一样的, 在  $s_1$ 、 $s_2$  的振动具有时间推迟  $\tau$ , 而且是相干的; 若  $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| = 0$ , 则式(4.5.23b)右边最后一项消失, 振动成为非相干的. 在  $0 < |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| < 1$  时, 光振动被称为是**部分相干的** (partially coherent), 其相干度用  $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|$  的值表示. 这是因为, 对  $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|$  的任意值来说, 都能把式(4.5.23b)写成

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \{ \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &\quad + 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} \\ &\quad \times \cos[\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) - \delta] \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \{1 - |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|\} \{ \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle \\
 & + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle \}, \quad (4.5.23c)
 \end{aligned}$$

从而由两个狭缝来到  $P(\mathbf{r})$  点的光, 可以看成两部分光的混合, 一部分是式 (4.5.23c) 右边第一行所表示的强度为  $|\gamma| \langle I^{(1)} \rangle$  和  $|\gamma| \langle I^{(2)} \rangle$  的两束光的相干性叠加, 另一部分是第三行的强度为  $\{1 - |\gamma|\} \langle I^{(1)} \rangle$  和  $\{1 - |\gamma|\} \langle I^{(2)} \rangle$  的两束光的非相干性叠加; 也就是说, 可以看成是相干光和非相干光的混合, 其强度比为

$$\frac{I_{\text{coh}}}{I_{\text{incoh}}} = \frac{|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|}{1 - |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|}. \quad (4.5.30)$$

互相干函数和复数相干度的实部  $\Gamma^{(r)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  及  $\gamma^{(r)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ , 均与解析信号  $V(\mathbf{r}, t)$  的实部  $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$  不同, 是能够根据实验来决定的量. 为了求出相对于任意一对空间点  $s_1(\mathbf{r}_1)$ 、 $s_2(\mathbf{r}_2)$  和给定时间差  $\tau$  的  $\gamma^{(r)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  值, 可以在杨氏干涉实验中, 分别测量出在屏幕上  $S_1P - S_2P = c\tau$  那样的  $P(\mathbf{r})$  点的光强度  $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$ , 和只由每个狭缝落到  $P$  点的光强度  $\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle$ 、 $\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle$ . 这样一来, 由式 (4.5.23a) 可知,  $\gamma^{(r)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  用下式确定:

$$\gamma^{(r)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle - \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle - \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle}{2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2}}. \quad (4.5.31)$$

又由式 (4.5.31) 和 (4.5.26) 可知,  $\Gamma^{(r)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  用下式求出:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(r)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) & = [\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} [\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} \gamma^{(r)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \\
 & = \frac{1}{2} \left[ \frac{\langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle}{\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle} \right]^{1/2} \\
 & \quad \times [\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle - \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle - \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]. \quad (4.5.32)
 \end{aligned}$$

特别是对准单色光——只由小于平均频率  $\bar{\nu}$  的频率范围  $\Delta\nu$  内的光谱成分构成的光——来说，作为  $\tau$  的函数，式 (4.5.29) 中的  $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|$  及  $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  比  $\cos 2\pi\bar{\nu}t$  和  $\sin 2\pi\bar{\nu}t$  变化得缓慢一些，而且，假如狭缝  $S_1$ 、 $S_2$  非常小，则  $\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle$ 、 $\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle$  在能够看到干涉条纹的范围内（在其中， $\cos 2\pi\bar{\nu}t$ 、 $\sin 2\pi\bar{\nu}t$  多次改变符号）几乎可以认为是一定的。因此，点  $P(\mathbf{r})$  附近的强度分布就成了大致相同的  $\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle$ ，即成了正弦波式的强度分布的叠加，该强度分布具有大体上固定的振幅  $2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} \times [\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|$ ；而且，点  $P(\mathbf{r})$  附近强度的最大值  $\langle I \rangle_{\max}$  和最小值  $\langle I \rangle_{\min}$  在相当好的近似程度上由下式确定：

$$\left. \begin{aligned} \langle I \rangle_{\max} &= \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &\quad + 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} [\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \\ \langle I \rangle_{\min} &= \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &\quad - 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} [\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \end{aligned} \right\} \cdot \quad (4.5.33)$$

因此，在点  $P(\mathbf{r})$  上干涉条纹的可见度  $\mathcal{V}(\mathbf{r})$  ((4.1.12)) 就可以表示成

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{r}) &\equiv \frac{\langle I \rangle_{\max} - \langle I \rangle_{\min}}{\langle I \rangle_{\max} + \langle I \rangle_{\min}} \\ &= \frac{2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2}}{\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle} |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|, \end{aligned} \quad (4.5.34)$$

对强度相等的光束 ( $\langle I^{(1)} \rangle = \langle I^{(2)} \rangle$ ) 来说，它是

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}) = |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|. \quad (4.5.34a)$$

即  $|\gamma|$  可以通过测量干涉条纹的可见度来决定。另一方面，由测定干涉条纹极大值的位置，可以知道  $\gamma$  的位相。这是因

为,根据式(4.5.29)、(4.5.23b),干涉条纹的强度极大值位置以极高的精确度由下式来确定:

$$\begin{aligned} \arg \gamma\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \frac{s_2 - s_1}{c}\right) &= \alpha\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \frac{s_2 - s_1}{c}\right) \\ &- \frac{2\pi}{\lambda}(s_2 - s_1) = 2m\pi \\ &(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (4.5.35)$$

这个位置和用波长为 $\lambda$ 的单色光源照射狭缝 $S_1$ 、 $S_2$ ,而 $S_1$ 上的相位比 $S_2$ 推迟了 $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_2 - s_1)/c)$ 的情况是相同的;由于和 $2\pi$ 相位差对应的干涉条纹极大值位置的偏移与 $S_1S_2$ 平行,是 $a\lambda/d$ ( $a$ 是狭缝和屏幕之间的距离, $d \equiv \overline{S_1S_2}$ ),所以,与 $S_1$ 、 $S_2$ 同相位的情况相比,在平行于连结两个狭缝的直线的方向上,条纹只是移动了

$$\frac{a\lambda}{d} \left[ \frac{\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_2 - s_1)/c)}{2\pi} \right] \quad (4.5.36)$$

(但是,实际测定这样的位置,却是非常困难的工作)。

在准单色光的情况下,也能用干涉光谱学(interference spectroscopy)的方法得知谱线密度 $G(\nu)$ ,这个方法和由可见度曲线来确定谱线强度分布的方法(§4.1(b))是一样的。如果光束在一点 $S(\mathbf{r})$ 上被分成强度相等的两条,它们具有光程差 $c\tau$ ,而且再次合而为一,那么,其干涉效果就可以用点 $S(\mathbf{r})$ 上的自相干函数来确定:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) &= \langle V(\mathbf{r}, t + \tau)V^*(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= 4 \int_0^\infty G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) e^{-2\pi i\nu\tau} d\nu, \end{aligned} \quad (4.5.37)$$

根据式(4.5.26),复数相干度可以表示成

$$\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) = \frac{\int_0^\infty G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) e^{-2\pi i\nu\tau} d\nu}{\int_0^\infty G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) d\nu}$$

$$= \int_0^{\infty} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu \quad (4.5.38)$$

式中,  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu)$  是标准化了的谱线密度. 为了简单起见, 在这里写成  $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) \equiv \gamma(\tau)$ ,  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) \equiv g(\nu)$ , 并设准单色光的平均频率为  $\bar{\nu}$ , 若把  $\gamma(\tau)$  表示成

$$\gamma(\tau) = \bar{\gamma}(\tau) \exp(-2\pi i \bar{\nu} \tau), \quad (4.5.39)$$

由式(4.5.38)则有

$$\bar{\gamma}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\mu) \exp(-2\pi i \mu \tau) d\mu. \quad (4.5.40)$$

其中,

$$\bar{g}(\mu) = \begin{cases} g(\bar{\nu} + \mu) & (\mu \geq -\bar{\nu}) \\ 0 & (\mu < -\bar{\nu}). \end{cases} \quad (4.5.41)$$

由式(4.5.34a)、(4.5.39)、(4.5.40), 可以得到

$$\mathcal{V}(\tau) = |\gamma(\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\mu) \exp(-2\pi i \mu \tau) d\mu \right|. \quad (4.5.42)$$

现在, 设谱线密度  $g(\mu)$  在  $\bar{\nu}$  附近是对称的, 那么  $\bar{g}(\mu)$  就成了偶函数, 因此式(4.5.42)的积分是实数, 所以,

$$\mathcal{V}(\tau) = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\mu) \exp(-2\pi i \mu \tau) d\mu. \quad (4.5.43)$$

或者, 使用傅里叶反演公式, 并注意到  $\mathcal{V}$  是  $\tau$  的偶函数, 则有

$$\bar{g}(\mu) = g(\bar{\nu} + \mu) = \pm 2 \int_0^{\infty} \mathcal{V}(\tau) \cos 2\pi \mu \tau d\tau. \quad (4.5.44)$$

因此, 在对称性的假定下, 就能由可见度曲线来计算谱线密度. 当光谱线非对称时, 实数性条件遭到破坏, 由式(4.5.42)就不能得到式(4.5.43), 为了决定谱线, 除了可见度曲线之外, 还需要根据式(4.5.36)知道  $\gamma(\tau)$  的位相  $\alpha(\tau)$  或  $\gamma(\tau)$  的位相  $\phi(\tau) = \alpha(\tau) - 2\pi \bar{\nu} \tau$ .

在现在这样在一个点分割成两条干涉光束的情况下 (例如, 迈克耳孙干涉仪上的半反射镜), 也能够使用自相干函数

(4.5.37) 或 (4.5.38) 来一般而定量地定义相干时间  $\Delta t$  和有效谱线宽度 (effective spectral width)  $\Delta\nu$  (或者根据(4.1.16) 而来的相干长度  $\Delta l$ ), 它们是在 §4.1(b) 中作为确定准单色光干涉标准的量引进的 (使用互相干函数, 还能够很容易地推广到杨氏实验中两个点分割的那种情况). 也就是说, 把相干时间和有效谱线宽度分别当作复数相干度及其谱线密度绝对值平方的标准化均方根宽度 (root-mean-square width):

$$(\Delta t)^2 \equiv N^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)|^2 d\tau \quad (4.5.45)$$

$$\Delta(\nu)^2 \equiv N^{-1} \int_0^{\infty} (\nu - \bar{\nu})^2 g^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) d\nu,$$

$$\bar{\nu} \equiv N^{-1} \int_0^{\infty} \nu g^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) d\nu \quad (4.5.46)$$

由帕希维尔定理可以推导出, 这里标准化常数的两个积分是相等的, 即:

$$N \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)|^2 d\tau = \int_0^{\infty} g^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) d\nu. \quad (4.5.47)$$

这样一来, 在它们之间**互易性不等式** (reciprocity inequality) 总是成立的:

$$(\Delta t)(\Delta\nu) \geq \frac{1}{4\pi} \quad (4.5.48)$$

(E. Wolf; 1958). 为了证明式 (4.5.48), 可以利用以下对于函数  $\psi(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) 的泡利-威尔 (Pauli-Weyl) 不等式,

$$4 \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \psi \psi^* dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi^*}{dx} dx \right) \geq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi \psi^* dx \right)^2 \quad (4.5.49)$$

(等号只对高斯函数才成立), 其中  $\psi(x)$  是就全部实数值定义的连续可微的函数, 因此, 只要使用以式(4.5.39)、(4.5.41)



引进的  $\bar{r}(\tau)$  和  $g(\mu)$  之间的傅里叶变换关系式 (4.5.40), 把  $(\Delta t)^2(\Delta \nu)^2$  单用  $\bar{r}(\tau)$  表示出来就可以了, 这时,

$$(\Delta t)^2(\Delta \nu)^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{4 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\bar{r}(\tau)|^2 d\tau \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \bar{r}(\tau)}{\partial \tau} \right|^2 d\tau \right)}{\left( \int |\bar{r}(\tau)|^2 d\tau \right)^2} \right],$$

所以, 若把式(4.5.49)用于分子, 就能得到式(4.5.48).

互相干函数  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  (式 (4.5.22)) 定义了两个时空点上光振动之间的相干度, 它的基本性质是, 在真空中遵从一组波动方程

$$\Delta_j \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = c^{-2} \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\partial \tau^2} \quad (j = 1, 2). \quad (4.5.50)$$

其中,  $\Delta_j$  是与空间点  $P_j(\mathbf{r}_j)$  的坐标有关的拉普拉斯算子, 为了处理上式, 可以首先把互相干函数写成更对称一些的形式:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= \langle V(\mathbf{r}_1, t_1 + t) V^*(\mathbf{r}_2, t_2 + t) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_T(\mathbf{r}_1, t + t_1) V_T^*(\mathbf{r}_2, t + t_2) dt. \end{aligned} \quad (4.5.51)$$

使  $\Delta_1$  作用于式(4.5.51)的两边, 则给出物理效应的  $V_T$  的实部  $V_T^{(r)}$  就满足下列波动方程:

$$\Delta_1 V_T^{(r)}(\mathbf{r}_1, t + t_1) = c^{-2} \frac{\partial^2 V_T^{(r)}(\mathbf{r}_1, t + t_1)}{\partial t_1^2}. \quad (4.5.52)$$

在式 (4.5.52) 两边进行希耳伯变换, 使用对于舍项函数的(4.5.11), 并注意到相互处于希耳伯变换中的函数, 其导数也处于相同的关系之中, 则虚部  $V_T^{(i)}$  也满足波动方程, 因此可知,  $V_T(\mathbf{r}_1, t + t_1)$  满足波动方程

$$\Delta_1 V_T(\mathbf{r}_1, t + t_1) = c^{-2} \frac{\partial^2 V_T(\mathbf{r}_1, t + t_1)}{\partial t_1^2}. \quad (4.5.52a)$$

所以,改变演算的次序,就能得到

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \\ &\times \int_{-T}^T V_T(\mathbf{r}_1, t + t_1) V_T^*(\mathbf{r}_2, t + t_2) dt \\ &= c^{-2} \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)}{\partial t_1^2}. \end{aligned}$$

对  $\Delta_2$  来说,也可以得出同样的结果. 若光扰动是稳定的,则  $\Gamma$  仅仅通过时间差  $t_1 - t_2 \equiv \tau$  依赖于  $t_1, t_2$ , 从而由  $\partial^2/\partial t_1^2 = \partial^2/\partial t_2^2 = \partial^2/\partial \tau^2$  即可推导出式(4.5.50).

迄今为止的讨论,分别处理了用自相干函数  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau)$  描述的时间相干性和空间相干性  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$ . 前者是使空间点  $P_1, P_2$  一致,而相关性仅仅依赖于  $\tau$ ; 后者是把时间推迟  $\tau \ll 1/\Delta\nu$  固定下来,而相关性依赖于两个空间点. 但是,只有在极其简单的情况才能在某种程度上把它们明确地区别开来. 一般来说,二者并不独立. 从  $\Gamma$  遵从两个波动方程(4.5.50)来看,这一点是很清楚的.

波动方程组(4.5.50)的一个有趣的结果是,在空间上非相干的光,仅仅由于其传播过程本身就能够变成在空间上部分相干或者几乎完全相干. 它的一个实例,是由恒星来的光进入望远镜后的干涉. 恒星的光由数目极多的几乎独立发出辐射的原子所产生,起初人们认为这种光源是空间非相干的,但是,在能见度良好的夜晚,星球的光却能在望远镜焦面上形成相当清晰的衍射环.

在单色光的情况下,惠更斯-菲涅耳-基尔霍夫原理(4.2.10)和由它推导出来的菲涅耳-基尔霍夫衍射公式(4.2.13)在形式上是对应的;由  $\Gamma$  满足波动方程(4.5.50)这一点出发,对于互相干函数,同样可以看出这种对应关系. 首

先,我们使用式(4.4.50)和亥姆霍兹-基尔霍夫定理,把任意两点  $Q_1, Q_2$  的互相干函数  $\Gamma(Q_1, Q_2, \tau)$ , 通过该函数及其导数在包围  $Q_1, Q_2$  的任意封闭曲面  $\mathcal{A}$  上的所有相应点  $P_1, P_2$  上的值表示出来(图 4.43):

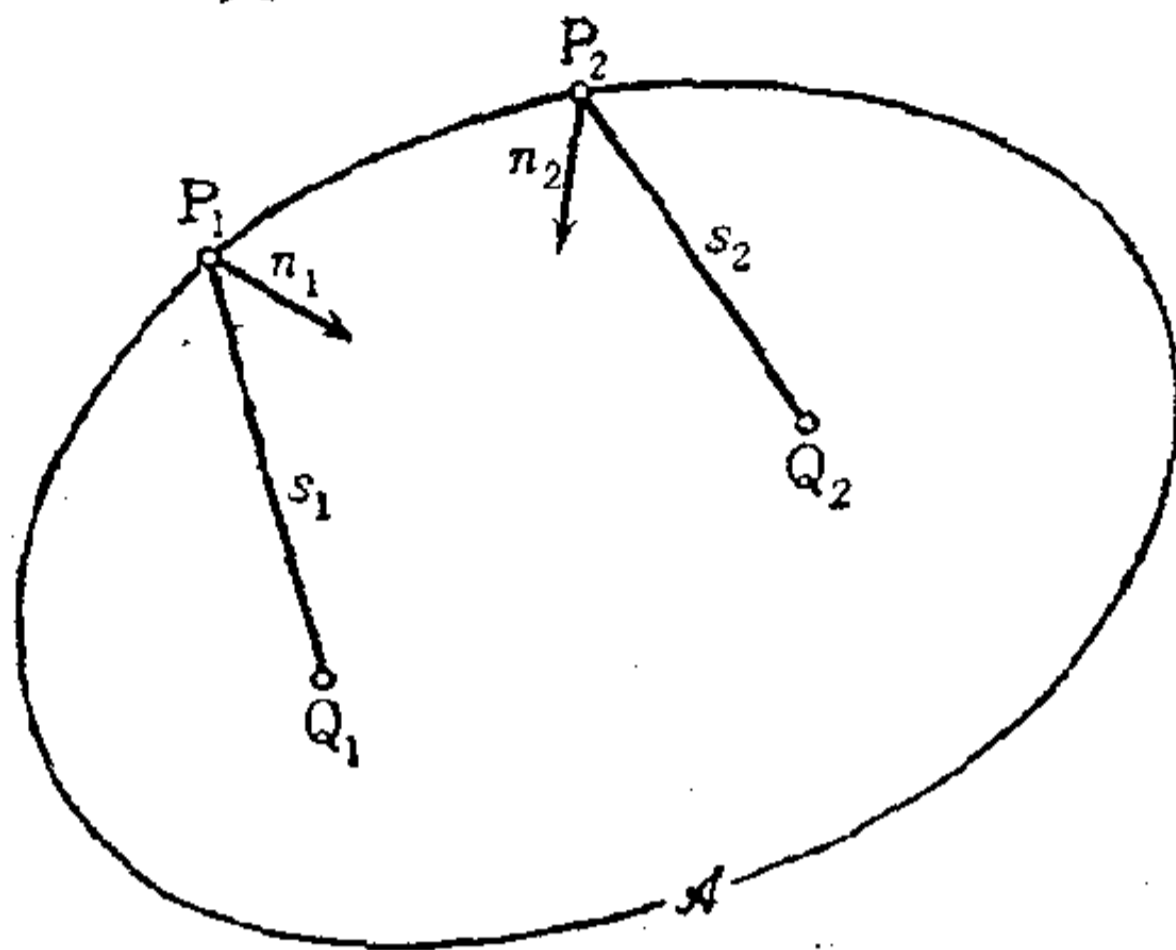


图 4.43

$$\begin{aligned} \Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = & \frac{1}{4\pi^2} \int_A \int_A \left\{ f_1 f_2 [\Gamma] - f_1 g_2 \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} \right] + f_1 h_2 \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial n_2} \right] \right. \\ & + g_1 f_2 \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} \right] - g_1 g_2 \left[ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \tau^2} \right] + g_1 h_2 \left[ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \tau \partial n_1} \right] \\ & + h_1 f_2 \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial n_1} \right] - h_1 g_2 \left[ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial n_1 \partial \tau} \right] \\ & \left. + h_1 h_2 \left[ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial n_1 \partial n_2} \right] \right\} dP_1 dP_2. \end{aligned} \quad (4.5.53)$$

式中,

$$\begin{aligned} [\Gamma] & \equiv \Gamma \left( P_1, P_2, \tau - \frac{S_1 - S_2}{c} \right) \\ f_j & \equiv \frac{\partial}{\partial n_j} \left( \frac{1}{S_j} \right), \quad g_j \equiv -\frac{1}{c S_j} \frac{\partial S_j}{\partial n_j}, \\ h_j & \equiv -\frac{1}{S_j} \quad (j = 1, 2), \end{aligned}$$

$S_j \equiv \overline{P_j Q_j}$ ,  $n_j$  是在  $P_j$  上的  $\mathcal{A}$  的内向法线。其次,再考虑和准单色光源所照射的平面内的点  $P_1, P_2$  相对应的互相干函数

$\Gamma(P_1, P_2, \tau)$ , 该光源扩展到平面上的有限范围  $\sigma$ , 其平均频率为  $\bar{\nu}$  (图 4.44). 假设以光源  $\sigma$  内的点  $S_1, S_2$  为中心、小于平均波长  $\bar{\lambda} = c\bar{\nu}$  的不同面积单元  $dS_1, dS_2$  所发出的光互相是不干涉的, 那么, 在  $\overline{S_1 P_1} \equiv R_1, \overline{S_2 P_2} \equiv R_2 \gg \lambda, S_1 P_1, S_2 P_2$  和  $\sigma$  面法线的夹角  $\theta_1, \theta_2$  非常小, 而又是

$$\left| \tau - \frac{R_1 - R_2}{c} \right| \ll \frac{1}{\Delta\nu}$$

的情况下, 求解式 (4.5.50) 就可得到**范希特-则尼克定理**

$$\Gamma(P_1, P_2, \tau) \approx \int \frac{I(S)}{R_1 R_2} \exp [ik(R_1 - R_2)] dS. \quad (4.5.54)$$

式中,  $I(S)$  是点  $S$  上每单位面积的光源强度, 如果把式 (4.5.54) 和 (4.2.13) 进行比较, 就应该说, 在具有宽度的单色光源所照射的平面内, 描述点  $P_1, P_2$  上光振动相关性的互相干函数, 当把光源换成相同大小相同形状的衍射孔, 再充以会聚到  $P_2$  点的球面波, 并考虑到在衍射孔上波面的振幅分布与光源的强度分布成正比的时候, 便和照射面内以点  $P_2$  为中心产生的衍射条纹上相应的点  $P_1$  的振幅成正比.

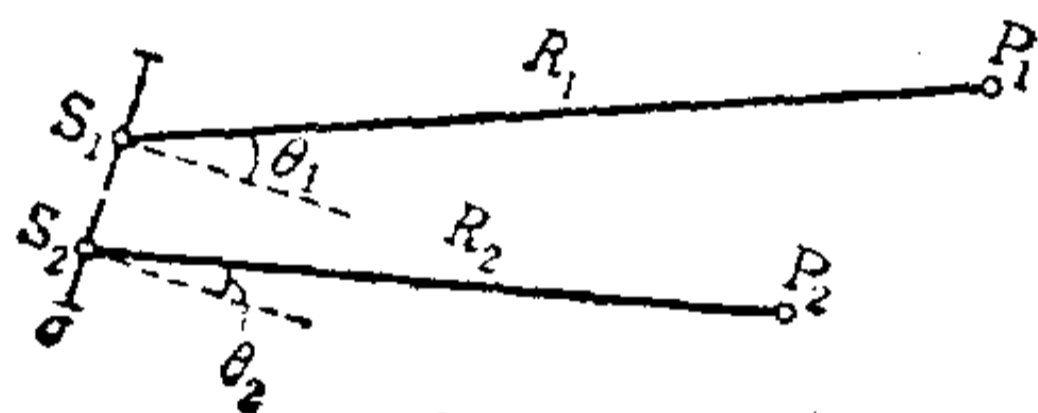


图 4.44

到现在为止我们所考虑的互相干函数, 相当于概率过程中的二次相关函数, 它具有光强度的量纲. 更高次的相关函数, 特别是四次相关函数、强度相关函数, 都和光子计数密切相关, 但是, 就其问题的性质而言, 最好是由量子论的立场出发来处理它. 以下, 我们准备讨论一下, 怎样把光的偏振引进迄今为止的规范化之中.

### c) 部分偏振光

为了统一地处理相干性和偏振光，需要引进由对应于光矢量各分量的解析信号  $V_i(\mathbf{r}, t)$  所构成的二阶相干张量  $\langle V_i(\mathbf{r}_1, t + \tau)V_j^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle$ ，来代替基于标量解析信号  $V(\mathbf{r}, t)$  的互相干函数  $\langle V(\mathbf{r}_1, t + \tau)V^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle$ 。现在，我们考虑在  $z$  方向上前进的准单色光(平均频率为  $\bar{\nu}$ ，频率范围为  $\Delta\nu \ll \bar{\nu}$ ) 平面波的一个稳定而有遍历性的群。这个群是由属于光振动的直角坐标分量  $V_x^{(e)}(\mathbf{r}, t)$ 、 $V_y^{(e)}(\mathbf{r}, t)$  的解析信号  $V_x(\mathbf{r}, t)$ 、 $V_y(\mathbf{r}, t)$  构成的。假设以它们所形成的四个二阶相干张量为元素的二行二列矩阵是  $E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ ：

$$E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \equiv [\langle V_i(\mathbf{r}_1, t + \tau)V_j^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle] \\ (i, j = x, y). \quad (4.5.55)$$

因此，如果只考虑同一点 ( $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ ) 上  $|\tau|$  值 ( $|\tau| \ll 1/\Delta\nu$ ) 小于相干时间时各分量之间的相关性，则 (4.5.55) 的各个元素在这种情况下仅仅通过因子  $\exp(-2\pi i \bar{\nu} \tau)$  依赖于  $\tau$ ，所以就可以把它写成

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) = J(\mathbf{r}) \exp(-2\pi i \bar{\nu} \tau) (|\tau| \ll 1/\Delta\nu). \quad (4.5.56)$$

在这里，二行二列的厄密 (Hermite) 矩阵

$$J \equiv [J_{ij}] \equiv [V_i(\mathbf{r}, t)V_j^*(\mathbf{r}, t)] (i, j = x, y) \quad (4.5.57)$$

叫做**相干矩阵** (coherence matrix) (E. 乌尔夫 1954, 59)。因为假定是平面波，所以，对垂直于光传播方向的任意一个平面内的所有点  $\mathbf{r}$  来说， $J$  都是一样的。假如使用列矢量  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  及其厄密共轭  $\mathbf{V}^+(\mathbf{r}, t)$ ：

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \equiv \begin{bmatrix} V_x(\mathbf{r}, t) \\ V_y(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^+(\mathbf{r}, t) \equiv [V_x^*(\mathbf{r}, t), V_y^*(\mathbf{r}, t)], \quad (4.5.58)$$

则相干矩阵  $J$  也能写成



$$J(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}^+(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (4.5.57a)$$

在点  $\mathbf{r}$  上的光强度  $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$  就可以用下式来表示

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle V_x(\mathbf{r}, t) V_x^*(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle V_y(\mathbf{r}, t) V_y^*(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{V} \mathbf{V}^+ \rangle = \text{tr} J. \end{aligned}$$

假设准单色光平面波  $\mathbf{V}$  在通过起偏振器 (polarizer) 和补偿光镜 (compensator) 之后是用列矢量  $\mathbf{V}'$  表示的:

$$\mathbf{V}' = L \mathbf{V}, \quad (4.5.59)$$

式中  $L$  是表征该光学装置的二行二列矩阵, 那么, 由装置出来之后, 光的相干矩阵  $J'$  可以用下式确定

$$\begin{aligned} J' &= \langle \mathbf{V}' \mathbf{V}'^+ \rangle = \langle L \mathbf{V} \mathbf{V}^+ L^+ \rangle \\ &= L \langle \mathbf{V} \mathbf{V}^+ \rangle L^+ = L J L^+, \end{aligned} \quad (4.5.60)$$

出来的光的强度就是

$$\langle I' \rangle = \text{tr} J' = \text{tr} \langle L J L^+ \rangle. \quad (4.5.61)$$

在表征光学装置的矩阵  $L$  中, 对于在  $x$  分量和  $y$  分量之间给出微小时间推迟  $\epsilon_1 \ll \bar{\nu}/\Delta\nu$  及  $\epsilon_2 \ll \bar{\nu}/\Delta\nu$  的补偿光镜来说, 可以选择

$$L = L_c = \begin{bmatrix} e^{i\epsilon_1} & 0 \\ 0 & e^{i\epsilon_2} \end{bmatrix}, \quad (4.5.62)$$

而对于在和传播方向垂直的平面内只允许与  $x$  轴构成  $\theta$  角的光分量通过的检偏光镜来说, 可以选择

$$L = L_p = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (4.5.63)$$

根据式 (4.5.61), 假设  $\epsilon_2 - \epsilon_1 \equiv \epsilon$ , 则通过这种补偿光镜和检偏振器的光的强度就是

$$\begin{aligned} \langle I'(\theta, \epsilon, t) \rangle &= J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta \\ &\quad + (J_{xy} e^{-i\epsilon} + J_{yx} e^{-i\epsilon}) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (4.5.64a)$$

$$\begin{aligned} &= \langle I^{(1)} \rangle + \langle I^{(2)} \rangle + 2 \langle I^{(1)} \rangle^{1/2} \langle I^{(2)} \rangle^{1/2} \\ &\quad \times |\gamma_{xy}(0)| \cos [\beta_{xy}(0) - \epsilon], \end{aligned} \quad (4.5.64b)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} \langle I^{(1)} \rangle &\equiv J_{xx} \cos^2 \theta, \quad \langle I^{(2)} \rangle \equiv J_{yy} \sin^2 \theta \\ r_{xy}(0) &= |r_{xy}(0)| \exp [i\beta_{xy}(0)] \equiv \frac{J_{xy}}{(J_{xx})^{1/2}(J_{yy})^{1/2}} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (4.5.65)$$

式 (4.5.64b) 是和式 (4.5.23b) 对应的表达式,  $|r_{xy}(0)|$  表示  $x$  分量和  $y$  分量之间的相关性, 即相干度。

如同互相干函数能由杨氏干涉实验中对强度的测定来决定一样, 从式 (4.5.64a) 可知, 相干矩阵的行列元素也能通过测定与  $\{\theta, \varepsilon\}$  对应的强度来决定, 这里的  $\{\theta, \varepsilon\}$ , 是起偏振器的透射角  $\theta$  和由补偿光镜引起的两分量间的位相差  $\varepsilon$  的几个特定值的组合。作为这个值的组合  $\{\theta, \varepsilon\}$ , 选择  $\{0^\circ, 0\}$ 、 $\{45^\circ, 0\}$ 、 $\{90^\circ, 0\}$ 、 $\{135^\circ, 0\}$ 、 $\{45^\circ, \pi/2\}$ 、 $\{135^\circ, \pi/2\}$ , 是很方便的。根据由这些测定而得到的强度, 就可以把各行列元素表示成

$$\left. \begin{aligned} J_{xx} &= \langle I(0^\circ, 0) \rangle, \quad J_{yy} = \langle I(90^\circ, 0) \rangle \\ J_{xy} &= \frac{1}{2} \{ \langle I(45^\circ, 0) \rangle - \langle I(135^\circ, 0) \rangle \} \\ &\quad + \frac{1}{2} i \{ \langle I(45^\circ, \pi/2) \rangle - \langle I(135^\circ, \pi/2) \rangle \} \\ J_{yx} &= \frac{1}{2} \{ \langle I(45^\circ, 0) \rangle - \langle I(135^\circ, 0) \rangle \} \\ &\quad - \frac{1}{2} i \{ \langle I(45^\circ, \pi/2) \rangle - \langle I(135^\circ, \pi/2) \rangle \} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (4.5.66)$$

因此, 为了决定  $J_{xx}$ 、 $J_{yy}$ 、 $\text{Re}J_{xy}$ 、 $\text{Re}J_{yx}$ , 只使用起偏器来进行测量就可以解决问题, 但是, 为了决定  $\text{Im}J_{xy}$ 、 $\text{Im}J_{yx}$ , 却需要有一个会在两个分量之间引起  $1/4$  周期位相差的补偿光镜, 例如  $1/4$  波片。

为了看看相干矩阵的具体形式，我们把一个空间点上的解析信号用下式表示，

$$\begin{aligned} V_x(t) &= a_1(t) \exp[i\phi_1(t) - 2\pi i\nu t], \\ V_y(t) &= a_2(t) \exp[i\phi_2(t) - 2\pi i\nu t]. \end{aligned} \quad (4.5.67)$$

这样一来，相干矩阵 (4.5.57a) 就成了

$$J = \begin{bmatrix} \langle a_1^2 \rangle & \langle a_1 a_2 e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \rangle \\ \langle a_1 a_2 e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \rangle & \langle a_2^2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.5.57b)$$

在  $\langle I'(\theta, \varepsilon, t) \rangle$  既不依赖于  $\theta$  也不依赖于  $\varepsilon$  的条件下，完全非偏振的光(自然光)在与光的前进方向垂直的任何方向上分量的强度都全部相同。由 (4.5.64a, b) 可知，只有在下列情况下，该条件才可以实现，即

$$\gamma_{xy}(0) = 0, \quad J_{xx} = J_{yy}.$$

如果使用式 (4.5.65) 和  $J_{xy} = J_{yx}^*$ ，把分量  $V_x, V_y$  非相干的第一个条件  $\gamma_{xy}(0) = 0$  改写一下，则有

$$J_{xy} = J_{yx} = 0, \quad J_{xx} = J_{yy}. \quad (4.5.68)$$

因此，强度为  $\langle I \rangle = J_{xx} + J_{yy}$  的完全非偏振的准单色光，其相干矩阵与单位矩阵成正比：

$$\frac{1}{2} \langle I \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5.69)$$

对完全偏振的光来说，在单色光情况下， $a_1, a_2, \phi_1, \phi_2$  都是常数，所以相干矩阵 (4.5.57b) 便归结为

$$J = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 e^{i\delta} \\ a_1 a_2 e^{-i\delta} & a_2^2 \end{bmatrix}, \quad \delta \equiv \phi_1 - \phi_2, \quad (4.5.70)$$

它是相干矩阵的行列式

$$\det |J| = J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0. \quad (4.5.71)$$

由式 (4.5.65) 可知， $\gamma_{xy}(0) = e^{i\delta}$ ，因此  $|\gamma_{xy}(0)| = 1$ ，分量  $V_x, V_y$  完全是相干的。特别是把对直线偏振光和圆偏振光的振幅比  $a_1/a_2$  和相位差  $\delta$  的条件 (§ 4.3 (c)) 代入式

(4.5.70), 便会求出各自情况下的相干矩阵来。即使在准单色光的情况下, 假如振幅  $a_1(t)$ 、 $a_2(t)$  和相位  $\phi_1(t)$ 、 $\phi_2(t)$  依赖于时间的方式, 在选择振幅比和位相差时正好与时间无关, 即

$$\frac{a_2(t)}{a_1(t)} = q, \quad \delta = \phi_1(t) - \phi_2(t) = \chi \quad (q, \chi \text{ 为常数}) \quad (4.5.72)$$

那么, 在下列情况下, 条件式 (4.5.71) 也可以满足:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \langle a_1^2 \rangle, & J_{xy} &= q \langle a_1^2 \rangle e^{i\chi}, \\ J_{yx} &= q \langle a_1^2 \rangle e^{-i\chi}, & J_{yy} &= q^2 \langle a_1^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.5.73)$$

以式 (4.5.73) 为行列元素的相干矩阵的单色光

$$\begin{aligned} V_x &= \sqrt{\langle a_1^2 \rangle} \exp[i\alpha - 2\pi i \nu t], \\ V_y &= q \sqrt{\langle a_1^2 \rangle} \exp[-i\chi + i\alpha - 2\pi i \nu t] \end{aligned} \quad (\alpha \text{ 是实数常数}) \quad (4.5.74)$$

的矩阵是相同的。因此, 结论就是, 满足条件式 (4.5.71) 的准单色光, 和完全偏振的单色光式 (4.5.74) 行为一样。

前面已经把部分相干光看成是相干光和非相干光的混合 (4.5.23c), 其强度比为式 (4.5.30), 而准单色光平面波的相干矩阵  $J$ , 也能唯一地分解成表示完全非偏振波的相干矩阵  $J^{(u)}$  和表示完全偏振波的相干矩阵  $J^{(p)}$ :

$$J = J^{(u)} + J^{(p)} \quad (4.5.75)$$

(乌尔夫, 1959)。为了证明它, 可以按照式 (4.5.69)、(4.5.71), 假设

$$J^{(u)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad J^{(p)} = \begin{bmatrix} B & D \\ D^* & C \end{bmatrix}, \quad (4.5.76)$$

式中,

$$A \geq 0, \quad B \geq 0, \quad C \geq 0; \quad BC - DD^* = 0, \quad (4.5.77)$$

然后再把  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  唯一地确定下来。显然，若把式 (4.5.76) 代入 (4.5.75)，将两边进行比较，那么， $A$  就是用下式决定的矩阵  $J$  的本征值：

$$(J_{xx} - A)(J_{yy} - A) - J_{xy}J_{yx} = 0. \quad (4.5.78)$$

由  $J$  的厄密性和薛华兹不等式可以得到

$$J_{xy}J_{yx} \geq 0, \quad \det|J| \leq J_{xx}J_{yy} \leq \frac{1}{4} (J_{xx} + J_{yy})^2, \quad (4.5.79)$$

根据上式，式 (4.5.78) 的两个根  $A = (1/2)\{(J_{xx} + J_{yy}) \pm [(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4\det|J|]^{1/2}\}$ ，是同时不为负实根，不过，取复号为 + 的那个根，并不满足  $B, C \geq 0$  的条件。因此，

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) - \frac{1}{2} [(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4\det|J|]^{1/2} \\ B &= \frac{1}{2} (J_{xx} - J_{yy}) + \frac{1}{2} [(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4\det|J|]^{1/2} \\ C &= \frac{1}{2} (J_{yy} - J_{xx}) + \frac{1}{2} [(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4\det|J|]^{1/2} \\ D &= J_{xy} \quad D^* = J_{yx} \end{aligned} \right\}. \quad (4.5.80)$$

根据式 (4.5.75)，相干矩阵为  $J$  的准单色光平面波的偏振度 (degree of polarization)  $P$  用下式定义：

$$P \equiv \frac{\langle I_{\text{pol}} \rangle}{\langle I_{\text{tot}} \rangle} \equiv \frac{\text{tr}J^{(p)}}{\text{tr}J^{(u)} + \text{tr}J^{(p)}}. \quad (4.5.81)$$

因为  $\text{tr}J^{(p)} = B + C$ ，所以，按照式 (4.5.80)，则有

$$P = \left[ 1 - \frac{4\det|J|}{(J_{xx} + J_{yy})^2} \right]^{1/2}. \quad (4.5.82)$$

由式 (4.5.79) 可知， $0 \leq P \leq 1$ 。  $P = 1$  和条件式 (4.5.71) ( $|\gamma_{xy}(0)| = 1$ ) 是等价的，而  $P = 0$  则和式 (4.5.68)



( $|\gamma_{xy}(0)| = 0$ ) 等价, 它们分别对应于完全偏振的光 ( $x, y$  分量相干) 和完全非偏振的光 ( $x, y$  分量不相干).  $0 < P < 1$  的光叫做**部分偏振光** (partially polarized), 其偏振度用  $P$  的值来确定. 因为偏振度  $P$  的表达式 (4.5.82), 可以用相干矩阵对垂直于光前进方向的平面内的旋转的不变量 ( $\text{tr}J$  及  $\det|J|$ ) 来写, 所以  $P$  的值不依赖于  $x$  及  $y$  方向的选择, 但是相干度  $|\gamma_{xy}(0)|$  却与它有关. 不过,  $|\gamma_{xy}(0)|$  的值不会超过  $P$ . 这是因为, 如果使用式 (4.5.65), 则式 (4.5.82) 就成为

$$1 - P^2 = \left[ \frac{J_{xx}J_{yy}}{(J_{xx} + J_{yy})^2/2} \right] (1 - |\gamma_{xy}|^2),$$

但是, 由于两个正数的几何平均不会超过算术平均, 故

$$1 - P^2 \leq 1 - |\gamma_{xy}|^2, \text{ 即 } P \geq |\gamma_{xy}|.$$

等号只有在  $J_{xx} = J_{yy}$ , 也就是在  $x$  方向的强度和  $y$  方向的强度相等的情况下才成立. 两个分量的强度相等的那个方向, 总是存在的; 当旋转坐标轴时  $|\gamma_{xy}(0)|$  所达到的最大值, 等于这个光的偏振度  $P$ .

我们已经知道, 为了规定准单色光平面波的偏振状态, 一般需要四个量, 例如  $J_{xx}$ 、 $J_{yy}$ 、 $\text{Re}J_{xy}$ 、 $\text{Im}J_{xy}$ , 而对准单色光平面波式 (4.5.67) 来说, 作为那样的量, 斯托克斯参量是用下式定义的:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &\equiv \langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle \\ s_1 &\equiv \langle a_1^2 \rangle - \langle a_2^2 \rangle \\ s_2 &\equiv 2\langle a_1 a_2 \cos \delta \rangle \\ s_3 &\equiv 2\langle a_1 a_2 \sin \delta \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.5.83)$$

(对于  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $\delta$  为常数的单色平面波来说, 它们归结为式 (4.3.21)). 由式 (4.5.57b) 可知, 斯托克斯参量 (4.5.83) 和相干矩阵的行列元素有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= J_{xx} + J_{yy} \\ s_1 &= J_{xx} - J_{yy} \\ s_2 &= J_{xy} + J_{yx} \\ s_3 &= i(J_{yx} - J_{xy}) \end{aligned} \right\} \text{或} \left. \begin{aligned} J_{xx} &= (s_0 + s_1)/2 \\ J_{yy} &= (s_0 - s_1)/2 \\ J_{xy} &= (s_2 + is_3)/2 \\ J_{yx} &= (s_2 - is_3)/2 \end{aligned} \right\} \quad (4.5.84)$$

一般来说,  $\det|J| \geq 0$ , 所以

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (4.5.85)$$

根据式 (4.5.71), 对单色平面波, 关系式  $s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$  是成立的(参考§4.3(c)).

和相干矩阵的行列元素一样, 斯托克斯参量也能通过使用检偏振器和补偿光镜的简单实验来决定. 从式 (4.5.66) 和 (4.5.84) 可知

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= \langle I(0^\circ, 0) \rangle + \langle I(90^\circ, 0) \rangle \\ s_1 &= \langle I(0^\circ, 0) \rangle - \langle I(90^\circ, 0) \rangle \\ s_2 &= \langle I(45^\circ, 0) \rangle - \langle I(135^\circ, 0) \rangle \\ s_3 &= \langle I(45^\circ, \pi/2) \rangle - \langle I(135^\circ, \pi/2) \rangle \end{aligned} \right\}, \quad (4.5.86)$$

也就是说,  $s_0$  显然是总光强度,  $s_1$  是穿过  $\theta = 0^\circ$  的直线检偏振器(它让方位角为  $\theta = 0^\circ$  的直线偏振光通过)的光强度与穿过  $\theta = 90^\circ$  的直线检偏光镜的光强度之差,  $s_2$  是就  $\theta = 45^\circ$  和  $\theta = 135^\circ$  而言的同样的量, 而  $s_3$  则是穿过右旋圆偏振光检偏装置(它让右旋圆偏振光通过)的光强度与穿过左旋圆偏振光检偏装置的光强度之差.

如果使用斯托克斯参量, 则由式(4.5.68)和(4.5.84), 完全非偏振的波就可以用  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$  来表示, 而完全偏振的波的条件(4.5.71)便成了  $s_0 = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2}$ , 所以, 若用一个记号  $\mathbf{s} \equiv (s_0, s_1, s_2, s_3)$  表示四个参量, 那么, 考虑到式 (4.5.80), 偏振状态用某一  $\mathbf{s}$  来规定的准单色平面波, 与式 (4.5.75) 的分解相对应的表达式就是

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{(u)} + \mathbf{s}^{(p)} \quad (4.5.87)$$

$$\mathbf{s}^{(u)} \equiv (s_0 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2}, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{s}^{(p)} \equiv ((s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2}, s_1, s_2, s_3),$$

根据式(4.5.82)、(4.5.84), 偏振度  $P$  即可写成

$$P = \frac{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2}}{s_0}. \quad (4.5.88)$$

## § 4.6 波和粒子

### a) 波动光学和几何光学

通常, 我们总是首先根据几何光学的表象来考虑光学现象的。也就是说, 在完全忽略光的波长  $\lambda_0$  具有有限大小的那种近似 ( $\lambda_0 \rightarrow 0$ ) 下, 使用以几何术语规范化了的光传播定律来进行观察。实际上, 这个做法在大部分情况下都是非常有效的。能够认为光波的振动局部地象平面波, 正是把光看作射线的依据。从可见光的平均波长  $10^{-4}$ cm 来看, 我们能够预料, 把平面波列在传播方向上的扩展大于波长的那些部分看作射线, 作为第一级近似, 是相当好的。

为使讨论简化, 我们把光扰动当作标量来处理, 而用下式表示:

$$V(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U(\mathbf{r})e^{-i\omega t}].$$

式中,  $\omega$  是光的角频率, 空间部分  $U(\mathbf{r})$  满足亥姆霍兹方程

$$\Delta U + n^2 k_0^2 U = 0. \quad (4.6.1)$$

其中,  $k_0 \equiv 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$  是真空中波长,  $n$  是媒质的折射率。因而, 我们就可以把  $U(\mathbf{r})$  展开成波长  $\lambda_0$  的幂级数:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{m \geq 0} U^{(m)} = e^{ik_0 \mathcal{S}(\mathbf{r})} \sum_{m \geq 0} \frac{a^{(m)}}{(ik_0)^m}. \quad (4.6.2)$$

假设位置的实变函数  $\mathcal{S}(\mathbf{r})$  和一般是复变函数的  $a^{(m)}$  均缓慢变化, 而且在  $k_0 \rightarrow \infty$  时并不成为无限大。首先, 我们只

取(4.6.2)的第一项  $U^{(0)}$ , 如果把它代入(4.6.1), 那么, 由

$$\text{grad}U^{(0)} = e^{ik_0\mathcal{S}}(ik_0a^{(0)}\text{grad}\mathcal{S} + \text{grad}a^{(0)})$$

$$\begin{aligned} \text{div grad}U^{(0)} = e^{ik_0\mathcal{S}}\{ & -k_0^2(\text{grad}\mathcal{S})^2a^{(0)} \\ & + ik_0(2\text{grad}\mathcal{S} \cdot \text{grad}a^{(0)} + a^{(0)}\Delta\mathcal{S}) + \Delta a^{(0)}\}, \end{aligned}$$

即可得到

$$\begin{aligned} [n^2 - (\text{grad}\mathcal{S})^2]a^{(0)} + \frac{1}{ik_0} [-2\text{grad}\mathcal{S} \cdot \text{grad}a^{(0)} - a^{(0)}\Delta\mathcal{S}] \\ + \frac{1}{(ik_0)^2} (-\Delta a^{(0)}) = 0. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

倘若在这里取波长  $\lambda_0 \rightarrow 0$ , 即  $k_0 \rightarrow \infty$  的近似, 则  $a^{(0)}$  到处都不为零, 所以, 式(4.6.3)便归结为  $(\text{grad}\mathcal{S})^2 = n^2$ , 即

$$\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z) \quad (4.6.4)$$

(A. 索末菲和 F. 隆基 (Runge); 1911). 横穿式(4.6.4)所确定的**几何波面** (geometrical wave front)  $\mathcal{S} = \text{const}$ , 而在传播方向上每单位面积、单位时间内流过的能量, 与包含在一个假想圆筒的长度为  $v = w/k = c/n$  的部分中的能量是相等的, 该圆筒的轴平行于  $\text{grad}\mathcal{S}$ , 底面为单位面积. 设  $\text{grad}\mathcal{S}$  方向的单位矢量为  $\mathbf{s}$ , 根据式(4.6.4), 则有

$$\mathbf{s} = \frac{\text{grad}\mathcal{S}}{n} = \frac{\text{grad}\mathcal{S}}{|\text{grad}\mathcal{S}|}, \quad (4.6.5)$$

所以, 若把与振幅的时间均方值成正比的平均能量密度写成  $\langle w \rangle$ , 则能流的时间平均值就是

$$\langle \mathbf{S} \rangle = v\langle w \rangle \cdot \mathbf{s}.$$

因此, 我们把表示这个能流的曲线, 即与几何光学的波面群  $\mathcal{S} = \text{const}$  垂直的轨线  $c$ , 定义成光的**射线** (geometrical light rays). 设该射线上一一点的位置矢量为  $\mathbf{r}$ , 如果认为它是  $C$  的

长度  $s$  的函数, 这儿  $s$  是由某一给定点测量到点  $\mathbf{r}$  的长度, 则  $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{s}$ , 所以射线方程就是

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \text{grad}\mathcal{S}. \quad (4.6.6)$$

射线  $C$  上的两点  $P_1$ 、 $P_2$  间的**光程或光学长度** (optical length)  $[P_1, P_2]$ , 可以用沿着  $C$  的线积分来确定:

$$[P_1, P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n ds = \mathcal{S}(P_2) - \mathcal{S}(P_1), \quad (4.6.7)$$

由  $n ds = (c/v) ds = c dt$  可知, 它也等于真空中的光速和光传过  $P_1$ 、 $P_2$  之间所需时间的乘积

$$[P_1, P_2] = c \int_{P_1}^{P_2} dt. \quad (4.6.7a)$$

若把式(4.6.6)对  $s$  求导数, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} (\text{grad}\mathcal{S}) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \text{grad}(\text{grad}\mathcal{S}) \\ &= \frac{1}{2n} \text{grad}n^2 = \text{grad}n, \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

所以, 为了看出式(4.6.6)所定义的光射线在均匀媒质中是条直线, 只要把媒质均匀的条件  $n(\mathbf{r}) = \text{const}$  代入上式就可以了. 这样一来,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0.$$

因此,

$$\mathbf{r} = s\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 为恒矢量}).$$

这是在矢量  $\mathbf{a}$  的方向上通过点  $\mathbf{r} = \mathbf{b}$  的直线. 如果在球对称媒质  $n = n(r)$  中来研究  $\mathbf{r} \times n(\mathbf{r})\mathbf{s}$  沿着射线的变化, 就会知道射线向着折射率大的一方弯曲. 为了在折射率  $n$  不连续变化时, 例如在折射率为  $n_1$  的均匀媒质和折射率为  $n_2$  的均匀媒质的边界面  $T$  上, 来研究射线的行为, 我们把不连续面  $T$  换成过渡层  $P_1P_2Q_2Q_1$  ( $P_1Q_1, P_2Q_2 \parallel T; P_1P_2, Q_1Q_2 \perp T$ ) (图



4.45), 假设  $n$  在其中急剧地, 但却是连续地由  $n_1$  变到  $n_2$ , 由恒等式  $\text{curlgrad} \equiv 0$  可知, 射线矢量  $n\mathbf{s} = n(d\mathbf{r}/ds)$  满足

$$\text{curl}n\mathbf{s} = 0, \quad (4.6.9)$$

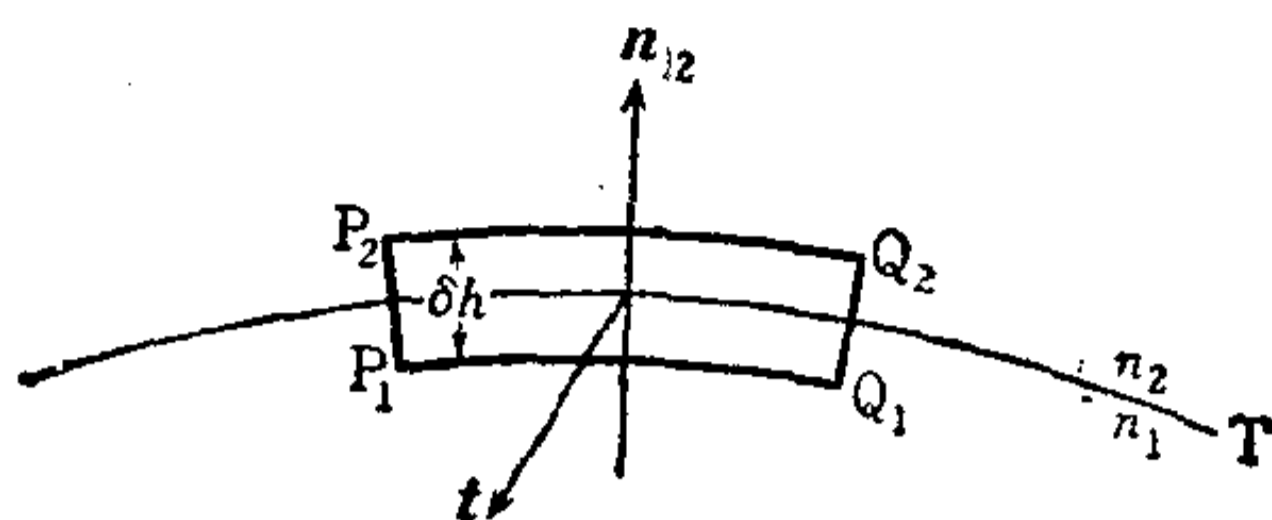


图 4.45

所以, 可以把它对面积单元  $P_1P_2Q_2Q_1$  进行积分. 假设平面  $P_1P_2Q_2Q_1$  的法线为  $\mathbf{t}$ , 那么, 使用斯托克斯定理, 即可得到

$$\int (\text{curl}n\mathbf{s}) \cdot \mathbf{t} dS = \int n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (4.6.10)$$

设由媒质  $n_1$  指向媒质  $n_2$  的边界面  $T$  的法线为  $\mathbf{n}_{12}$ , 则在过渡层厚度  $\delta h \rightarrow 0$  的极限上, 就可以推导出斯涅耳定律

$$\mathbf{n}_{12} \times (n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1) = 0, \quad (4.6.11)$$

即

$$n_2(\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{s}_2) = n_1(\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{s}_1), \text{ 因此 } n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

(第一个关系式表示, 法线  $\mathbf{n}_{12}$ 、入射线  $\mathbf{s}_1$ 、折射线  $\mathbf{s}_2$  共面).

若用平均能流  $\langle S \rangle$  的绝对值来定义光强度  $I$ , 则有

$$I = |\langle S \rangle| = \langle w \rangle v. \quad (4.6.12)$$

当考虑一个由几何波面  $\mathcal{S}(\mathbf{r}) = c_1 = \text{const}$  的曲面的面元  $dS_1$  向对应的  $\mathcal{S}(\mathbf{r}) = c_2 = \text{const}$  的曲面面元  $dS_2$  前进的所有射线构成的射线管时, 从能量守恒定律可知

$$I_1 dS_1 = I_2 dS_2, \quad (4.6.13)$$

即  $I dS$  沿着射线管是一定的. 在均匀媒质中, 当射线为直线时, 假设断面  $dS_1$ 、 $dS_2$  均由曲线 (lines of curvature) 限定, 而边  $A_1B_1$  及  $B_1C_1$  的主曲率半径是  $R_1$ 、 $R'_1$ ,  $dS_2$  沿着射线

与  $dS_1$  的距离为  $l$ , 其边  $A_2B_2$ 、 $B_2C_2$  的主曲率半径是  $R_2 = R_1 + l$ 、 $R'_2 = R'_1 + l$  (图 4.46), 则截面的面积就是

$$dS_1 = R_1 R'_1 d\theta d\phi, \quad dS_2 = R_2 R'_2 d\theta d\phi,$$

所以, (4.6.13) 成为

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{dS_1}{dS_2} = \frac{R_1 R'_1}{(R_1 + l)(R'_1 + l)}, \quad (4.6.14)$$

假如  $R_1 \ll l$ ,  $R_2 \ll l$ , 则有

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1 R'_1}{l^2}. \quad (4.6.15)$$

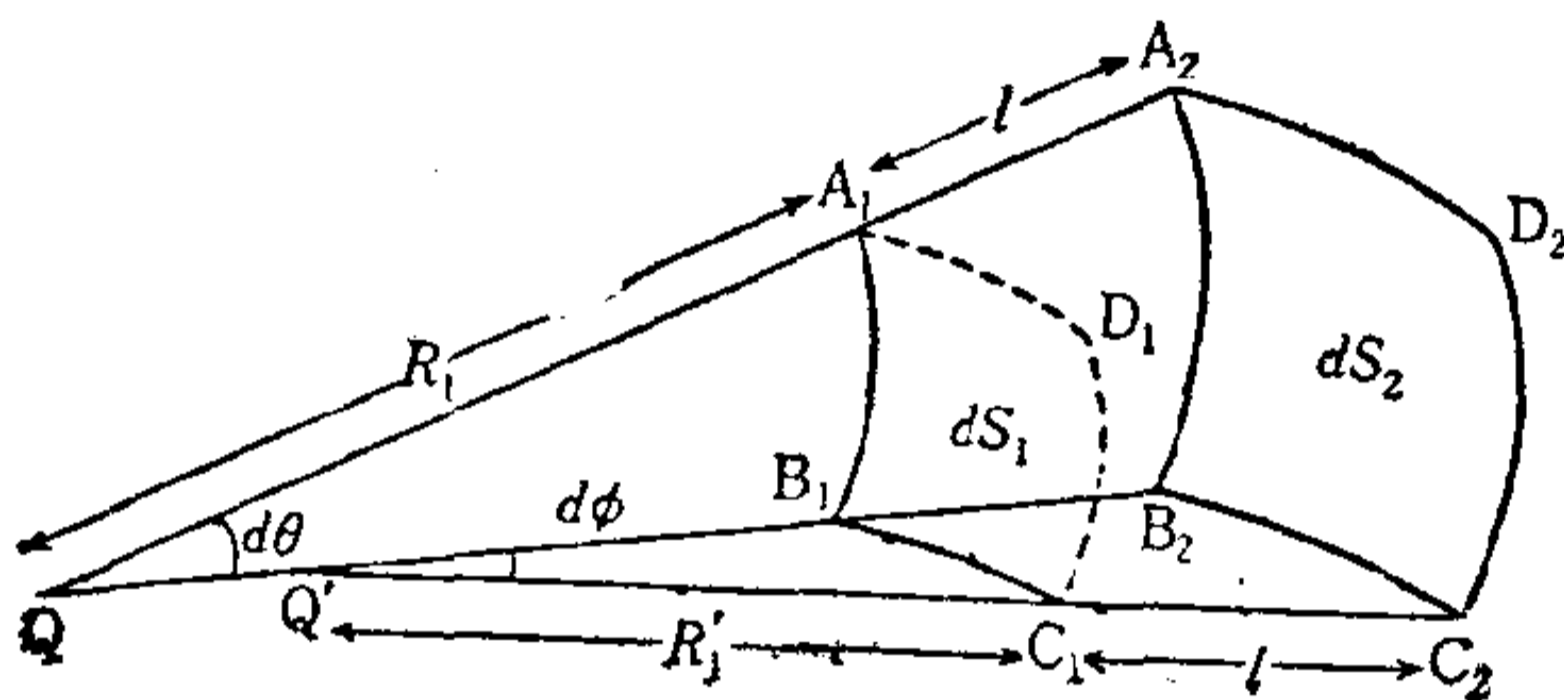


图 4.46

因此, 在直线射线上任意一点的强度, 与通过该点的几何波面的高斯曲率 (或第二曲率, 即两个主曲率半径乘积的倒数  $1/RR'$ ) 成正比。特别是当所有射线都由一个共同点发出时, 波面成为以该点为中心的球面, 所以  $R_1 = R'_1$ ,  $R_2 = R'_2$ , 从而得到了光强度的反平方定律 (朗伯 (J. H. Lambert); 1760)。

如上所见, 光能量的传输是用简单的流体力学模式描述的, 该模式完全由作为式(4.6.4)的解的实变标量函数  $\mathcal{S}$  来决定。可以说, 几何光学是使用射线和几何波面的概念对能量传输所作的近似表象。这样一来, 就可以不用着眼于特定光线去追踪它的路线, 而是讨论具有共同性质的整个射线群的数学性质, 以便统一展现光学系统的特性, 这种方法是由哈

密顿 (1828.30.33) 和波隆思 (E. H. Bruns; 1895) 发明的。函数  $\mathcal{S}$  叫做**哈密顿特征函数** (详细一点说, 是点特征函数 (point characteristic function); 作为派生的特征函数, 他另外还引进了角特征函数和混合特征函数), 按照波隆思的命名, 也可以叫做**镜象函数** (eikonal, 是由  $\varepsilon l k \tilde{\omega} v = \text{image}$  而来的), 而一阶非齐次微分方程(4.6.4)则叫做**镜象方程**。

迄今为止的讨论, 都以式(4.6.4)为基础, 也就是仅仅以式(4.6.3)的第一项为基础。在  $1/ik$  的分子也增大的情况下, 即  $\text{grad}a^{(0)}$  增大或  $\Delta\mathcal{S}$  增大的情况下, 当  $k_0 \rightarrow \infty$  时, 式(4.6.3)的第二项就不能忽略不计。前一种情况下, 已经不能再把  $a^{(0)}(\mathbf{r})$  看成缓慢变化的函数, 这是在几何影子的边界上引起的。在后一种情况下, 由式(4.6.5)可知,  $\Delta\mathcal{S} = n \text{div} \mathbf{s}$ , 因而  $\text{div} \mathbf{s}$  在 (几何光学意义的) 焦面 (focal plane) 上变成极大。无论在哪一种情况, 几何光学的各个定律已经不再是充分近似的了, 这时出现了衍射现象。由此看来, 让近似升级到式(4.6.2)的更高次项, 在大部分光学现象中是没有意义的。这是因为, 在上述两种情况下, 式(4.6.2)的展开本身已不复成立。

### b) 哈密顿相似

我们能够把**费马原理** (1661) 作为基本原理, 而由它推导出决定光射线群行为的各种几何光学定律。费马原理认为, 现实的光射线在任意两点  $P_1$ 、 $P_2$  之间的光程  $\int_{P_1}^{P_2} n ds$ , 比在某正则邻域内连结这些点的任何其它曲线的光程都要短:

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = \min. \quad (4.6.16)$$

在这里, 所谓的正则邻域 (regular neighbourhood), 是如下射线所覆盖的范围, 即其中各点有一条而且也只有一条射线通过, 就式(4.6.16)的意义而言, 费马原理就是**最短光程原理**

(principle of the shortest optical path), 但是, 根据式(4.6.7a), 则有

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = c \int_{P_1}^{P_2} dt,$$

所以, 该原理也可以叫做**最短时间原理** (principle of least time).

费马原理能够由拉格朗日的积分不变量来证明, 后者是以§ 4.6(a) 中已经推导的射线矢量  $n\mathbf{s}$  的性质(4.6.9)为基础的. 当折射率  $n(\mathbf{r})$  为位置的连续函数时, 根据式(4.6.10), 沿着任意曲面内的封闭曲线  $C$  所取的下列关系式是成立的:

$$\oint_C n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (4.6.10a)$$

即使在封闭曲线  $C$  和具有不同折射率  $n_1$ 、 $n_2$  的两种均匀媒质的界面  $T$  相交而被分成  $C_1$ 、 $C_2$  的情况下, 此式亦照样成立. 这是因为, 如果把  $C$  和  $T$  的两个交点用曲面内的另外一条曲线  $C_3$  连接, 而对在  $T$  两侧的两条封闭曲线  $C_1C_3$ 、 $C_2C_3$  分别应用式(4.6.10a), 然后将结果相加, 则有

$$\int_{C_1} n_1 \mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} n_2 \mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} (n_2 \mathbf{s}_2 - n_1 \mathbf{s}_1) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (4.6.10b)$$

但是, 根据折射定律(4.6.11),  $(n_2 \mathbf{s}_2 - n_1 \mathbf{s}_1)$  与界面  $T$  是垂直的, 因此第三项消失, 从而式(4.6.10b) 归结为式(4.6.10a).

另外, 我们考虑某一射线群 (图 4.47), 把其中一条射线

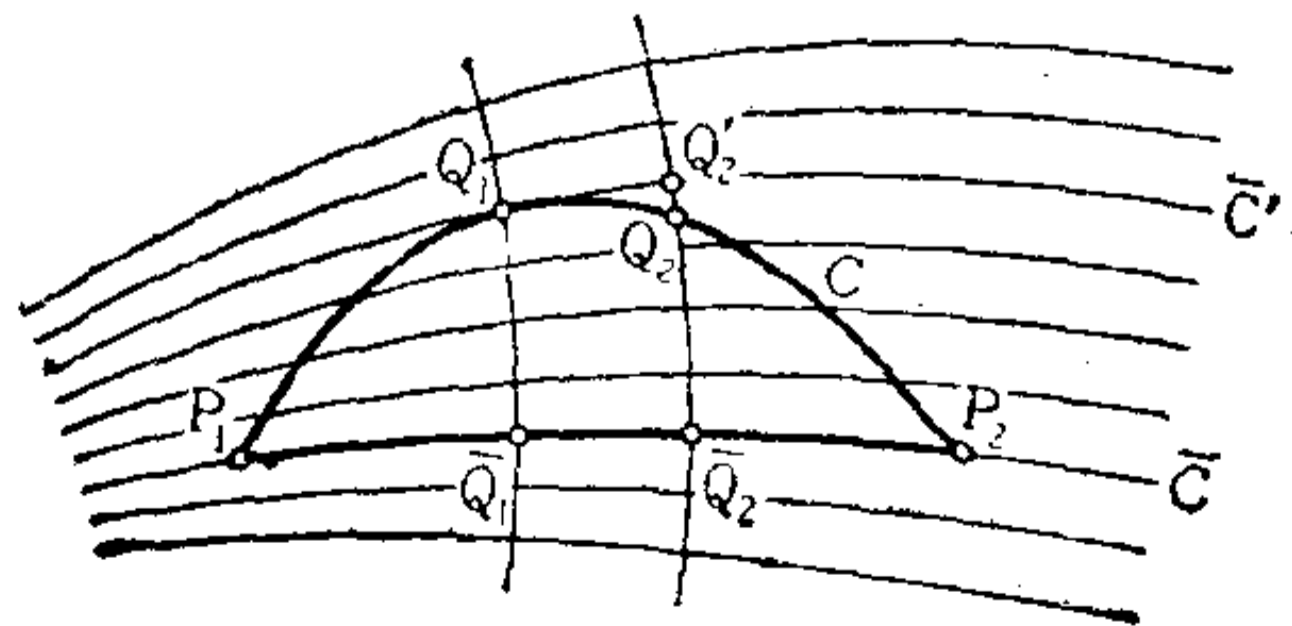


图 4.47

$\bar{C}$  的一部分  $\widehat{P_1 P_2}$  和连接  $P_1$ 、 $P_2$  点的任意曲线  $C$  进行比较。假设该射线束两个相邻的几何波面, 在  $Q_1$ 、 $Q_2$  点切割  $C$ , 在  $\bar{Q}_1$ 、 $\bar{Q}_2$  点切割  $\bar{C}$ , 而波面  $Q_2$   $\bar{Q}_2$  和通过  $Q_1$  的射线  $\bar{C}'$  相交于  $Q'_2$ 。若把式 (4.6.10a) 用于微小三角形  $Q_1 Q_2 Q'_2$ , 则有

$$(n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r})_{Q_1 Q_2} + (n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r})_{Q_2 Q'_2} - (nds)_{Q_1 Q'_2} = 0. \quad (4.6.10c)$$

根据标量积的定义,

$$(n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r})_{Q_1 Q_2} \leq (nds)_{Q_1 Q_2},$$

另外, 在波面上  $\mathbf{s} \perp d\mathbf{r}$ , 所以

$$(n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r})_{Q_2 Q'_2} = 0.$$

由式 (4.6.6) 可知,

$$\frac{d\mathcal{S}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \text{grad}\mathcal{S} = n,$$

因此, 两个波面对应的两点之间, 光程完全相等, 故

$$(nds)_{Q_1 Q'_2} = (nds)_{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2}.$$

把这些关系式用于式 (4.6.10c), 则有

$$(nds)_{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2} \leq (nds)_{Q_1 Q_2},$$

对此式进行积分, 即可得到

$$\int_{\bar{C}} nds \leq \int_C nds.$$

只有在曲线  $C$  的各点上  $\mathbf{s}$  和  $d\mathbf{r}$  的方向一致时, 即当  $C$  是真实的射线时, 等号才成立, 但是, 那样的情况却被正则邻域的假定排除掉了。

哈密顿(1834)看出了势场中质点的轨道和具有连续折射率的媒质中光射线的路径之间的相似性。从变分法的角度来看, 该相似性的基础是: 在比式(4.6.16)更一般的规范形式中(除去正则邻域的限制), 费马原理认为, 现实的射线是给出积分  $\int_{P_1}^{P_2} nds$  的留数的曲线。也就是说, 能够用决定射线的变



分原理的形式,来描述给出积分留数的留数曲线:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = 0, \quad (4.6.17)$$

这时, 镜象方程则相当于该变分问题的哈密顿-雅可比方程. 另一方面, 作为变分问题, 质点系力学也可以表示成哈密顿原理的形式

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(u_1, u_2, \dots, q_1, q_2, \dots, t) dt = 0, \quad (4.6.18)$$

其中,  $u_\alpha$  是坐标  $q_\alpha$  的时间导数 ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) (参考 §2.7), 但是, 当式(4.6.18)的拉氏函数  $L$  所定义的哈密顿函数  $H$  不依赖于时间  $t$  时,

$$H = \sum_{\alpha} u_{\alpha} p_{\alpha} - L = \text{const} = E, \quad p_{\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha}},$$

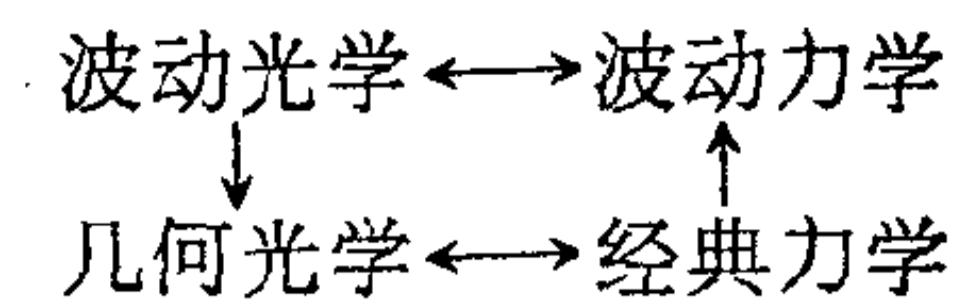
从而能由变分原理中消掉时间, 哈密顿原理便过渡到(一般化成任意的拉氏函数的)毛帕图伊斯 (Maupertuis) 最小作用原理,

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_1}^{t_2} (L + E) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} p_{\alpha} dt \\ &= \int_{P_1}^{P_2} \sum_{\alpha} p_{\alpha} dq_{\alpha} = \text{极端值}. \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

式(4.6.19)表示一个不是描述运动, 而是描述轨道的纯几何学原理.

当然, 只有限于一维的保守系, 才能一般地表示出力学的轨道群是具有射线的性质的. 尽管哈密顿的光学-力学相似只是具有发现方法上的意义, 但是, 由几何光学和经典力学的对应关系却产生出一种新力学的设想, 这种新力学设想与确定微小范围内光的行为的波动光学相对应, 支配物质微小范围内的运动. 若以图解形式来表示, 则在本讲座第三卷《量子力学 I》第一部分第一章中, 按下述路线, 叙述了薛定谔把物

质粒子的波长穿插进去的过程:



而且,哈密顿相似也在 1928年 以后被用来研制模拟光学仪器的电子光学设备(电子显微镜及其它).

## 第五章 电磁场和电子

对电 (electricity) 和磁 (magnetism) 的探讨, 开始于两种矿石: 琥珀 ( $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\omicron\nu$ ) 和磁铁 ( $\lambda\iota\theta\omicron\varsigma \mu\alpha\gamma\nu\eta\tau\iota\varsigma$ ). 关于电和磁的本性, 人们在十八世纪曾设想了电流体和磁流体, 到了本世纪, 又赋予它特有的物质表象, 使之与燃烧中的燃素和发热中的热素一起, 参与了物理学世界像的构成. 格雷 (S. Gray; 1729) 对电的良导体 (conductor, 由德赛格利 (J. T. Desagulier) 命名, 1734) 和不良导体的认识, 产生了电流体是由极其微细的粒子组成的弹性流体的想法, 杜费依 (C. F. DuFay; 1733, 34) 发现的两种电, 玻璃电 (vitreous electricity) 和树脂电 (resinous electricity), 又使它分成了二流体说 (杜费依-塞英 (R. Symmer)-库仑-泊松) 和一流体说 (富兰克林 (B. Franklin)-瓦特松 (W. Watson)-埃皮纽斯 (F. U. T. Aepinus)-卡文狄希 (H. Cavendish)) (富兰克林也和杜费依独立地认识了正负两种带电状态, 但是, 持一流体说的富兰克林却认为, 杜费依的树脂电只不过是缺乏玻璃电的一种状态, 而一切有重量的物体本来就具有一定量的这种电. 正电荷和负电荷的名称, 与其归之于富兰克林, 倒不如归之于法拉弟 (M. Faraday) 好些). 而且, 这样的物质表象已经导致了对电荷守恒原理——电绝缘系统中总电量不变——的认识 (富兰克林: 《有关电的新的实验和观察》, 书信 II). 库仑定律 (1785) 和安培 (Ampère) 定律 (1820) 确立之后, 建立于超距作用论上的十九世纪的电动力学, 引进了两种运动的电微粒或电单元, 来处理它们之间无媒介的超距力 (菲克哪 (G. T. Fechner), 1845; 韦伯, 1848;

等),并使磁现象的起因归结为电(安培,1823),从而放弃了磁流体(洛伦兹的电子论,由这个大陆派的电动力学承袭了带电粒子的概念)。自从汤姆孙(1899)发现电子以来,人们在物质原子结构的中心假设了带有正电荷的原子核,并专门根据处于物质内的电子的行为来说明各种电磁现象。或许也可以说这就是一种电流体说。但是,关于电的本性,我们的理解并没有比十八世纪的水平高多少;实际上,我们还是继续沿用“带电”或“电荷”这样的术语。

伴随着电子的发现而得到的电的一个基本性质,是电量的量子性。密立根(R. A. Millikan)由1909年到1916年进行的所谓“油滴实验”表明,各种离子的带电量完全是电子所带电量——**基元电荷** (elementary charge)—— $e = (4.770 \pm 0.005) \times 10^{-10}$  esu 的整数倍。1950年以来陆续发现的基本粒子中,无论哪一种都没有违反电量的这种量子性。作为基本粒子的基本组元而提出的夸克假说(盖尔曼(M. Gell-Mann),1964),假定具有基元电荷的 $1/3$ 或 $2/3$ 电荷的基本组元,但是,它的存在尚未得到证实。

确定基元电荷 $e$ ,归结为决定 $e/m_e$ 或 $e/h$ 这种形式的量之中的任何一个。 $m_e$ 是电子的静止质量, $h$ 为普朗克常数。决定**荷质比** $e/m_e$ 有两种方法:(i),利用自由电子在电场或磁场中偏转的“偏转法”,这个方法在某种意义上是和测定电子的速度有关的;(ii),对于束缚在原子内的电子的“光谱法”。后者还可以分成:(iia),由轻原子中里德伯(Rydberg)常数的变化求出电子的原子质量 $Nm_e$ ( $N$ 为阿伏伽德罗常数),再结合法拉第常数 $F \equiv Ne$ ,算出 $e/m_e$ ;(iib),测量强磁场中光谱线的裂距,由塞曼效应来推算 $e/m_e$ 。另一方面,决定 $e/h$ ,本质上也就是决定波长同以电子伏特来表示的能量子之间的变换因子,其方法是:(a),测定X射线连续光谱最短波长的极

限；(b), 求出使单色光所辐射的光电子静止下来而必要的电位；(c), 测量使已知波数或波数差的原子能级激发所需要的电位差。因此, 为了决定基元电荷  $e$ , 要有许多其它物理常数的值, 而且还必须同时协调地确定出  $m_e$ 、 $h$ 、 $N$ 、光速  $c$ 、玻尔半径  $a_0$  等一系列测定值。尤其是最近, 人们又在光谱法中增加了氢原子能级精细结构上的兰姆 (Lamb) 位移、 $\mu$  介子原子 (muonic atom) 等等, 而且在决定  $e/h$  时, 还利用了超导体中的约瑟夫森 (Josephson) 效应。考虑到这样一些情况, 现在确定的基元电荷的值是

$$e = (4.803242 \pm 0.0000014) \times 10^{-10} \text{esu}$$

$$= (1.6021892 \pm 0.0000046) \times 10^{-19} \text{C}$$

(科恩 (E. R. Cohen) 和泰勒 (B. N. Taylor); 1973)。

但是, 我们还没有任何理论可以说明电量的这种量子性。换句话说, 也就是没有得到任何回答, 来说明物质世界中带电粒子和中性粒子的存在型式。然而, 就带电体(电荷分布或电流分布)及磁性体所产生的电的、磁的、力学的作用而言, 却具有一组方程, 可以用来描述包含以太在内的周围媒质进行媒质传递的规律性。最初, 该方程组定量地规定了以有限速度在传递相互作用时依次发挥作用的一种媒质的“电紧张状态”(法拉弟), 即有重量媒质中的电场和磁场 (field)。在那个阶段, 它已经把磁现象归并到电学之中, 从而导致把光解释为极迅速的电振动, 另外, 把运载电磁场的媒质和传播光的媒质看做是同一物, 而对构成统一的物理学世界象作出了贡献。的确, 在追究接触作用论的逻辑合理性之余, 仍然可能按操作主义或数学公理主义的观点假设电磁场就是“所谓麦克斯韦理论中的麦克斯韦方程”, 而以伴随着时间推迟的超距作用为基础, 构成与电磁场理论等价而相辅的理论(惠勒 (J. A. Wheeler) 和菲因曼 (R. P. Feynman); 1945)。但是, 我们切不可忘



记,确立电力和磁力的接触作用论的过程,即确立经典电磁场概念的过程,同时也是用分子论明确解释物质的过程。化学亲和力具有电的性质,这个结论是由研究电解产生的;电力和磁力的传输机理,或者根据直观的模型,或者根据物理上的模拟,都是一种不成熟的描述。及至全面采用气体动力论的观点,把分子当作经典力学的体系来处理,才迎来了以太中的电磁场这种经典场的概念的建立。进一步,人们抛开包含以太在内的媒质的属性或运动状态,而把场本身看成即使在真空中也是描述空间物理状态的一个物理上的实际存在;这种现代物理学的观点,经历了对物理上的时空概念的根本审查。本章打算就自然界中所看到的相互作用的方式,专门研究一下摆脱了牛顿观点的各种想法及其经验基础。

### § 5.1 静电力的普里斯特莱-卡文狄希-库仑定律

在回顾电磁学的发展时,我们会看到两个划时代的发明:莱顿瓶 (bouteille de Leyde; 冯克莱斯特 (E. G. von Kleist), 1745; 范穆欣波洛克 (P. van Musschenbroek), 1746; 这个名称始于诺勒特 (J. A. Nollet)) 和伏打堆 (voltaic pile, 1800), 即静电蓄电器和作为稳恒电源的电池。前者导致了库仑定律的建立,后者则经过和奥斯忒 (Oersted)、阿喇果、毕奥、萨伐尔 (Savare)、安培等人齐名的黄金的 1820 年,为法拉弟的各种实验研究打好了基础,该研究使人们认为,“将来未必只限于对他们的一切发现进行说明和实际应用” (波耳兹曼 1899) (但是,在欧姆定律(1826)中,为了避免早期电池电压的不稳定性,用热电作电源)。到了十九世纪中叶,随着有关电磁的经验知识的定量性的增加,人们在牛顿的力的概念的框架内考虑电或磁的作用,从而仿照牛顿力学的体系力图构成电学和磁学的体系。静电力的**普里斯特莱-卡文狄希-库仑定律**,是这个

研究方向上的第一块基石。富兰克林研究了金属容器内壁的电荷分布,认为容器内部任何力都不会存在;正是普利斯特莱(1767)证实了他的这个设想。普利斯特莱由此得出结论:在金属容器上全部电荷都分布于容器的外表面,和重力一样,电引力遵从距离的反平方定律。1785年,库仑使用他自己发明制作的扭称进行直接测量,对于同种带电球之间的斥力,证明了距离的反平方定律,又于翌年通过振动法对异种带电球之间的引力得到了同样的结论。和两个质点间的引力相同,该力是沿着连结两个带电体的直线作用的。现在,假设点电荷  $q_1$ 、 $q_2$  之间的距离为  $r$ ,则在真空中作用于  $q_2$  上的静电力  $F_2$  可以用下式确定:

$$F_2 = K \frac{q_1 q_2 r}{r^3}. \quad (5.1.1)$$

式中,  $K$  是依所用的单位制而定的比例常数,在 CGS 静电单位制 (electrostatic units, esu) 中,取  $K = 1$ 。在我们这里所使用的 CGS-高斯单位制中,电荷全部以静电单位测量(参考 § 5.11)。

由于存在着正负两种电荷,因而会出现引力和斥力;除了这一点以外,静电力定律式(5.1.1)和牛顿引力定律完全相同。因此,便有人产生了一种想法,打算把实用性很强的力势的概念也引进静电学之中(泊松, 1811);这种力势已经由拉格朗日(1777)引进了引力理论,而拉普拉斯(1782)则表示出它所遵从的偏微分方程(拉普拉斯方程)。现在,我们把式(5.1.1)分解成一面是电荷产生的静电力和另一面是电荷,而把在任意空间点上作用的静电力  $E$  定义成将试验点电荷  $q$  放到该点时所受到的力在  $q \rightarrow 0$  时的极限值,该力是

$$F = qE \quad (5.1.2)$$

(这个操作性的定义,当不存在有重量媒质时,只不过在试验

点电荷的速度极小，而且还不会产生磁力的条件下才是允许的)。这样一来，当真空中存在点电荷  $q$  时，根据式(5.1.1)，则有

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla\left(\frac{q}{r}\right). \quad (5.1.3)$$

当电荷  $q$  以密度  $\rho(\mathbf{r})$  分布时，如果考虑到力的合成法则对静电力也能适用，则有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int \frac{\rho\mathbf{r}}{r^3} dv = -\int \rho\nabla\frac{1}{r} dv \\ &= -\nabla\int \frac{\rho dv}{r}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

这里假设，积分在电荷分布的整个范围内进行，微分算符  $\nabla$  是对求力的点取的。根据式(5.1.4)( $\text{curl grad} \equiv 0$ )，静电力  $\mathbf{E}$  是无旋矢量

$$\text{curl } \mathbf{E} \equiv \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (5.1.5)$$

所以，**静电势或电位**  $\phi(\mathbf{r})$  就能通过下式定义成位置的标量函数：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (5.1.6)$$

当电荷的分布限定于有限的空间范围时，假如使用斯托克斯定理并把曲面  $S$  取得非常大，则由式(5.1.5)，线积分就是

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (5.1.7)$$

因此， $\mathbf{E}$  是保守力。因为在移动试验电荷时，这个力所作的功不依赖于移动的路径，所以，我们就可以把某一给定空间点上的静电势解释成将单位点电荷从无限远移到该点所需要的功。

将式(5.1.3)沿着包围电荷  $q$  的任意封闭曲面  $S$  进行积分，就可以把静电力定律表示成积分型定律，即**高斯定理**(高斯，1840)的形式：

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q = 4\pi \int \rho dv. \quad (5.1.8)$$

使用高斯散度定理, 则可得到在空间各点上成立的微分型定律

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (5.1.9)$$

倘若把式(5.1.6)代入上式, 就能推导出真空中静电势的泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho. \quad (5.1.10)$$

从而静电学问题便归结为求解满足给定条件的泊松方程.

在真空中, 泊松方程的一个特解是

$$\phi(\mathbf{R}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{r} dv'. \quad (5.1.11)$$

其中,  $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  是以密度  $\rho(\boldsymbol{\xi})$  分布的电荷的空间坐标,  $r \equiv R - \boldsymbol{\xi}$  是求势的点  $\mathbf{R}(x, y, z)$  和位于  $\boldsymbol{\xi}$  上的电荷之间的距离(图 5.1), 而积分则是在电荷分布的范围  $v'(dv' = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3)$  内进行的. 当电荷分布有界, 其一维尺度为  $a$  时, 对于  $a/R \ll 1$  来说, 可以在电荷分布范围内的原点  $0$  附近把  $1/r$

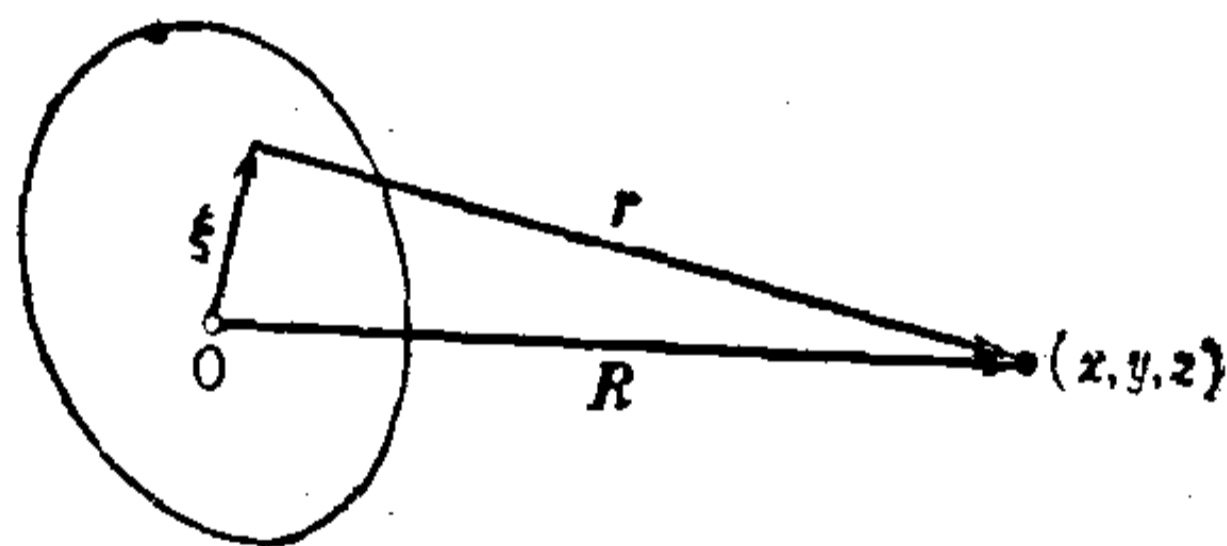


图 5.1

展成  $\xi_i$  的幂级数, 从而式(5.1.11)就能写成多极展开的形式:

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n = \frac{1}{R} \int \rho dv' \\ &+ \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{\xi=0} \int \xi_i \rho dv' \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i,j} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{\xi=0} \int \xi_i \xi_j \rho dv' + \dots \quad (5.1.12)$$

各项对  $v'$  的积分表示电荷分布的极矩。第一项

$$p^{(0)} \equiv \int \rho dv' = q$$

是 0 次极矩, 即全电荷, 第二项的

$$p_i^{(1)} \equiv \int \xi_i \rho dv'$$

是电偶极矩 (electric dipole moment) 的  $i$  分量, 第三项

$$p_{ij}^{(2)} \equiv \int \xi_i \xi_j \rho dv'$$

是电四极矩 (electric quadrupole moment) 的  $ij$  分量, …… 因为对于  $r \neq 0$  来说,  $1/R$  满足拉普拉斯方程, 而拉普拉斯方程解的导数也是解, 所以, 多极子势  $\phi_n$  就成了通过微分由  $\phi_{n-1}$  得到的新的拉普拉斯方程的解:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_i \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi_i} d\xi_i = \sum_i q d\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{r} \right) \\ &= - \sum_i p_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) \\ &= - \sum_i p_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{p_i^{(1)} x_i}{R^3}, \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

它相当于在 origin 有点电荷  $-q$ 、离 origin  $d\xi$  有点电荷  $+q$  时的电势, 即电偶极子  $p^{(1)} = qd\xi$  的电势;

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \sum_i \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_i} d\xi_i = \\ &= \sum_{ij} p_{ij}^{(2)} d\xi_i \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left( \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

是由两个偶极子—— $-p^{(1)}$  和与之相距  $d\xi$  的  $p^{(1)}$ ——所产生的势, 为  $2(p_i^{(1)} d\xi_i) = p_{ij}^{(2)}$ 。一般来说,  $2^n$  极子由两个大小相等而符号相反的  $2^{n-1}$  极子—— $-p^{(n-1)}$  和与之相距  $d\xi$  的



$p^{(n-1)}$ ——用下式来确定:

$$p^{(n)} = n p^{(n-1)} d\xi, \quad (5.1.15)$$

$2^n$  极子势是

$$\begin{aligned} \phi_n &= \sum_{i,j,\dots,n} \frac{p_{i,j,\dots,n}^{(n)}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi_i \partial \xi_j \cdots \partial \xi_n} \left( \frac{1}{r} \right) \\ &= \sum_{i,j,\dots,n} \frac{(-i)^n}{n!} p_{i,j,\dots,n}^{(n)} \frac{\partial^n}{\partial x_i \partial x_j \cdots \partial x_n} \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

特别是对多极子的电荷位移只限于一个方向的一维  $2^n$  极子来说, 求势的点仅仅由一个  $\theta$  角来确定, 这时电势成为

$$\phi_n = \frac{p^{(n)} P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}. \quad (5.1.16a)$$

式中,  $P_n(\cos \theta)$  是用下式定义的  $n$  次勒让德 (Legendre) 多项式:

$$\frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \equiv \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (5.1.17)$$

由任意一对张量指数的缩并为零这个条件可知, 当把  $2^n$  极矩看成  $n$  阶对称张量时,  $2^n$  极子势是拉普拉斯方程的解; 因此, 多极子的分量并非全部独立. 如果考虑到这一点, 那么, 比如说, 四极子势式 (5.1.14) 就变成

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \sum_{ij} \frac{1}{2} \int \left( \xi_i \xi_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \xi^2 \right) \rho dv' \\ &\quad \times \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{R} \right), \end{aligned} \quad (5.1.14a)$$

而四极矩则用下式定义:

$$Q_{ij} = \int \left( \xi_i \xi_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \xi^2 \right) \rho dv'.$$

为了在给定电荷分布  $\rho$  时求出泊松方程的通解, 可以使用格临公式. 在

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dv = \int_S (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot dS$$

中,假设  $\phi$  为静电势,  $\phi = 1/r$ ,  $r$  是由封闭曲面  $S$  限定的积分范围  $V$  内所取的一个固定点到动点的距离,则有

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\nabla^2 \phi}{r} dv - \int_V \phi \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) dv \\ &= \int_S \left[ \frac{\nabla \phi}{r} - \phi \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right] \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

在这儿,使用式(5.1.10)和  $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$  ( $\delta(\mathbf{r})$  是狄喇克  $\delta$  函数),固定点上的静电势就由下式确定:

$$\begin{aligned} \phi = & \int \frac{\rho dv}{r} + \frac{1}{4\pi} \int \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right. \\ & \left. - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

$\partial/\partial n$  是梯度  $\nabla$  在边界面  $S$  上的正向法线分量. 式(5.1.18)的体积分项为泊松方程的特解 (5.1.11), 它是在积分范围  $V$  内包含的电荷分布对势的贡献. 面积分一项,相当于齐次泊松方程(即拉普拉斯方程)的通解,它表示不在范围  $V$  内包含的电荷分布的效果,代替除  $V$  之外的剩余空间部分的积分. 因此,边界面  $S$  内部任意一点上的电势,都能根据  $S$  内的电荷分布和  $S$  上的  $\phi$  或  $\partial\phi/\partial n$  的值(由于是拉普拉斯方程,  $S$  上的  $\phi$  和  $\nabla\phi$  不能独立给出)来唯一决定. 在导体的边界面上,面积分的第一项(由高斯定理 (5.1.8)) 和  $S$  上的面电荷分布  $\sigma = (1/4\pi)\partial\phi/\partial n$  是等效的,第二项(由式(5.1.13)) 等于二极子分布所产生的电势,该二极子每单位面积的极矩为  $\phi/4\pi$ , 而且具有界面的外向法线方向. 因此,位于范围  $V$  之外的电荷,就能用界面  $S$  上的等效电荷层和偶极层来替换,并不会改变  $V$  内部各点的电势.

以上静电学和牛顿-拉格朗日-拉普拉斯引力理论在形式上的相似(尽管拉普拉斯假定势函数一般是质点间相对距离的任意函数)使人们设想,静电力严格遵从距离的反平方定律.

这个反平方定律成立的精确程度也给出了一个大致标准，来判断作为基本粒子的“光子”，其质量是否精确为零。在库仑进行的实验中，有必要对下列情况进行修正：(i)，固定测量球的电荷漏失；(ii)，两个测定球不是点电荷，而具有一定大小，所以相互间会产生影响；(iii)，在装有扭秤的容器上所感应的电荷的效应；等等，从而得出反平方定律的精度并不太高(表 5.1)。卡文狄希-麦克斯韦的实验，导致了更精密的静电力定律的出现(卡文狄希实验比库仑的直接测量进行得更早一些(1773)，而麦克斯韦精心设计的再次实验的结果，在他的《电磁论》(第一卷，§ 74，1873)中介绍之前未曾公开发表)。

表 5.1

	$Q(a)$ 的频率 (Hz)	$q(F(r) \propto r^{-(2+q)})$	$m_r(g)$
卡文狄希 (1773)	0	$2 \times 10^{-2}$	$-10^{-39}$
库仑(1785)	0	$4 \times 10^{-2}$	$-10^{-39}$
麦克斯韦 (1873)	0	$4.6 \times 10^{-3}$	$-10^{-40}$
普利姆波顿和劳顿(1936)	2	$2.0 \times 10^{-9}$	$\leq 3.4 \times 10^{-44}$
考克兰和富兰克林(1967)	$10^2 - 10^3$	$9.2 \times 10^{-12}$	$\leq 3 \times 10^{-49}$
巴特莱特、格尔德哈根和菲力蒲(1970)	$2.5 \times 10^3$	$1.3 \times 10^{-13}$	$\leq 3 \times 10^{-46}$
威廉、费勒和赫尔 (1971)	$4 \times 10^6$	$2.7 \times 10^{-16}$	$\leq 1.6 \times 10^{-47}$

卡文狄希的实验沿袭了普利斯特莱的想法：假如静电力不遵守反平方定律，那么便可以预料在导体内部也存在着电荷，或者同样也会有静电力的存在。卡文狄希把两个中空的同心导体球用导线连结，让莱顿瓶的电荷加到外侧的球壳上，然后取掉外壳，观测内壳上的电荷；而麦克斯韦却在外壳打上小孔，在取掉连结导线并把外壳接地之后，通过这个小孔插入汤姆孙象限静电计的电极来测定内壳的电荷。在普利姆波顿 (S. J. Plimpton) 和劳顿 (W. E. Lawton) (1936) 以来的最新实验中，由于技术上的缘故，把似静的高电位(缓慢变化的交流，如

普利姆波顿-劳顿实验中 3kV、2Hz 的正弦波电流)加到外壳上,用固定在内壳里的振簧电容式静电计来测定外壳电位与内壳上感应的电位之间的电位差。

现在,我们把两个点电荷间的静电力用电荷相互距离  $r$  的任意函数  $F(r)$  来表示。与  $F(r)$  有关的势函数是

$$U(r) \equiv \int_r^{\infty} F(s) ds, \quad (5.1.19)$$

由它可以得到

$$f(r) \equiv \int_0^r sU(s) ds, \quad (5.1.20)$$

如果使用  $f(r)$ , 则与电荷以面密度  $\sigma$  均匀分布的、半径为  $a$  的导体球壳中心  $O$  相距为  $b$  的点  $P$  上,电势

$$\phi(b) = \iint dS \sigma U(r),$$

可由下式确定:

$$\phi(b) = \frac{Q(a)}{2ab} [f(r_{\max}) - f(r_{\min})]. \quad (5.1.21)$$

式中,  $Q(a) \equiv 4\pi a^2 \sigma$  是球壳的全电荷,  $r_{\max}$  和  $r_{\min}$  是球壳的面积单元  $dS$  与  $P$  点之间的最大距离和最小距离。因此,设卡文狄希实验中的内外壳半径为  $b$ 、 $a$  ( $a > b$ ), 内外壳上有全电荷  $Q(b)$ 、 $Q(a)$ , 这时就能根据式(5.1.21)求出各球壳的电势  $\phi(a)$ 、 $\phi(b)$ 。因为在卡文狄希实验中, 内外球壳是用导线连结的, 所以, 如果加上同电位 ( $\phi(a) = \phi(b) \equiv \phi$ ) 的条件, 求出内壳上的电荷  $Q(b)$ , 则有

$$Q(b) = 2\phi b \frac{b[f(2a) - f(0)] - a[f(a+b) - f(a-b)]}{[f(2a) - f(0)][f(2b) - f(0)] - [f(a+b) - f(a-b)]^2}, \quad (5.1.22)$$

假如再求出当外壳加上单位电荷 ( $Q(a) = 1$ ) 时内外壳之间的电位差, 则有

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\phi}{\phi} &\equiv \frac{\phi(a) - \phi(b)}{\phi(a)} \\ &= 1 - \frac{a}{b} \left[ \frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a) - f(0)} \right].\end{aligned}\quad (5.1.23)$$

倘若在式 (5.1.22) 中  $Q(b) = 0$ , 即

$$b[f(2a) - f(0)] - a[f(a+b) - f(a-b)] = 0, \quad (5.1.24)$$

那么, 将式 (5.1.24) 对  $b$  微分两次, 就可以得到

$$f''(a+b) = f''(a-b).$$

为了使这个关系式一般来说都成立, 必须是

$$f''(r) = C_0 = \text{const.}$$

因此,

$$f'(r) = C_0 r + C_1.$$

由式 (5.1.19, 20) 可知,

$$\int_r^\infty F(s) ds = \frac{f'(r)}{r} = C_0 + \frac{C_1}{r},$$

所以,  $F(r) = (\text{const})r^{-2}$ . 这就是拉普拉斯-普里斯特莱的结论.

但是, 如果设力的规律是

$$F(r) = r^{-(2+q)} (q \ll 1), \quad (5.1.25)$$

那么, 由  $U(r) = [1/(1+q)]r^{-(1+q)}$  求出  $f(r)$ , 而忽略它对  $q$  的展开式中二次以上的项, 便可得到

$$f(r) \approx r(1 - q \ln r), \quad (5.1.26)$$

式 (5.1.23) 也就成为

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} = qM(a, b),$$

$$M(a, b) \equiv \frac{1}{2} \left\{ \frac{a}{b} \ln \frac{a+b}{a-b} - \ln \frac{4a^2}{a^2 - b^2} \right\}. \quad (5.1.27)$$

因此, 假如给定装置的几何尺寸, 使  $M(a, b) \approx 1$ , 那么, 电位差的梯度  $\Delta\phi/\phi$  就会直接给出与反平方定律的偏差  $q$ .



为了研究和光子静止质量  $m_\gamma$  的关系, 只要假设静电力的规律  $F(r)$  是由汤川型势函数推导出来的就可以了, 该势函数满足被推广到质量不为零时的势方程

$$(\nabla^2 - \mu^2)U(r) = 0, \quad \mu \equiv \frac{m_\gamma c}{\hbar} \quad (5.1.28)$$

( $\hbar \equiv h/2\pi$ ,  $h$  是普朗克常数), 其形式是

$$U(r) = \frac{e^{-\mu r}}{r}. \quad (5.1.29)$$

当  $\mu a \ll 1$  时,  $U(r) \approx (1/r) - \mu + (1/2)\mu^2 r$ , 所以, 根据式 (5.1.20, 23) 可以得到

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} \approx \frac{1}{6} \mu^2 (a^2 - b^2). \quad (5.1.30)$$

## § 5.2 稳恒电流之间的相互作用

伏打把他在电堆(铜板·锌板·浸湿了的硬壳纸的叠层)上所看到的现象,毫不犹豫地宣称为电性质的现象,但是,十九世纪初,人们对当时已经知道的摩擦电和伽伐尼电(伽伐尼(L. Galvani)本人认为存在着生物体特有的电流,与这一主张相反,伏打和法波洛尼(G. Fabroni)采取了否定的立场)之间的关系(同一性),争执了将近三十年. 电堆发明后的第二年,渥拉斯顿证实(1801),用伏打电流也好,用摩擦电的放电也好,同样都能进行水的电解. 不过,摩擦电是物体表面的现象,而伏打电流却是在物体内部的物质中传播的,对此他并没有给出令人满意的说明;另外,当时还出现了一些议论,认为电不是单一的东西,而是象太阳光线那样,可以看成是显示各种效应的实体的复合(戴维(H. Davy), 1832). 法拉弟(1833)表示,判断两者同一性的依据是,无论哪一种电都同样给出当时已知的全部电效应——生理的、磁的、光学的、热的、化学的、力学的各种作用(《有关电的实验研究》第一卷、第三集、§ 7).

但是,法拉弟的实验只是表明,在连结伏打电堆端子间的导线中所进行的过程,与连结蓄电池极板间的导线中的过程,性质是一样的;关于该过程的机理,他并没有象伏打及其拥护者们主张的那样,深入地看成是电荷的现实运动——“流动电”。伏打和法拉弟关于电流的两种立场,对电荷守恒原理给出了不同的表象。**电荷守恒原理**指出,包含在任意体积内的电量的增减,等于流入及流出该体积的电流之差;假如把在位置  $\mathbf{r}(x, y, z)$  和时刻  $t$  的电荷密度与电流密度分别写成  $\rho(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , 则该原理的微分型式可以表示为

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5.2.1)$$

(根据戴维(1821)的观察结果,电流密度是就垂直于流动方向的面积元定义的。按照他的观点,导体中流过的电流的强度与截面积成正比,与长度成反比,和截面形状无关。因此,均匀的电流应该均匀地分布在截面上)。从伏打的观点来看,假设电荷速度为  $\mathbf{U}$ , 则式(5.2.1)就成为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad c \mathbf{j} \equiv \rho \mathbf{v}, \quad (5.2.2a)$$

它和密度为  $\rho$ 、速度为  $\mathbf{v}$  的不可压缩流体的连续方程同样求解(参考(3.9.6)).另一方面,若把  $\rho$  看成是时间变化为  $c\mathbf{j}$  的矢量  $\mathbf{q}$  的散度,则式(5.2.1)亦可自动满足:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho, \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = c\mathbf{j}. \quad (5.2.2b)$$

可以认为,矢量  $\mathbf{q}$  具有位移的性质;按法拉弟的这个观点,既无必要把电流看成电荷的现实流动,亦无必要去过问移动的电荷的正负。在后面把电流概念一般化时,似乎应该站在法拉弟的这个立场上 (§ 5.4)。

从熟悉基本粒子反应径迹照片的现代眼光来看,电荷守

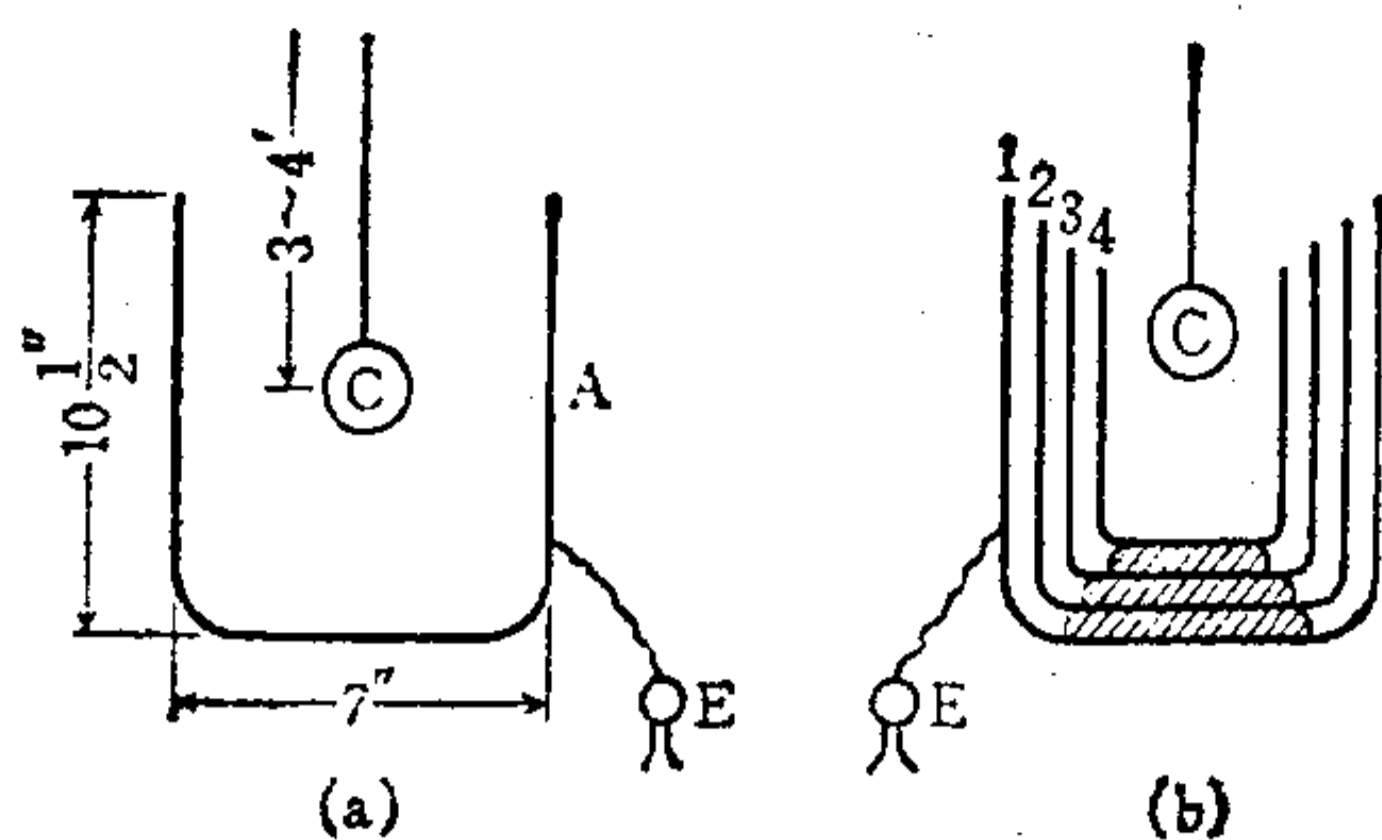


图 5.2

恒原理或许是与当然的事实相称的。但是，只有在确认了电荷的量子性和基本粒子所带的基元电荷的正负及个数的基础上，才谈得上基本粒子过程中的电荷守恒。对任意大小的电荷来说，依然是法拉弟（1843）第一个给出电荷守恒原理的令人满意的实验证明。他首先作了图 5.2(a) 所示的实验。其中，*A* 是绝缘的圆筒状金属容器（法拉弟使用的是白铁冰桶），与金箔验电器 *E* 相连接。若把带电的黄铜球 *C* 用丝线吊着放入筒中，则由容器的边缘到某一个深度（在法拉弟的装置中是 3—4 英寸），金箔张开的距离增大，但此后未稍就保持一定。即使让球 *C* 接触到容器 *A* 的底部，金箔张开的距离也不发生变化，把 *C* 提上来检查一下，可知它完全放电了。由此得出的结论是，开始给 *C* 的电和由于静电感应而在 *A* 的外壁出现的同种类电，其数量 (amount) 也好、能量 (power) 也好，都准确相等。它并不取决于 *C* 在 *A* 内的位置如何。其次，如图 5.2(b) 所示，即使使用互相以虫胶绝缘的许多金属容器来作实验，其结果也不改变。无论容器 2、3、4 用绝缘体隔开，还是把它们用导线连结起来而以一个厚金属容器出现，还是用虫胶或硫磺的厚容器来代替它们时，也就是说，即使由于容器 1 内的物质性质发生怎样变化，对验电器金箔张开的距离来说，也不会产生丝毫变化。

另外，纵然把许多带电球 C 放到 A 内的各种位置上，作用于容器外的力的大小也和在一个球上带有同等电量时的相等。

因此，在容器 A 内起作用的一定量的电荷，无论是依靠感应通过它和 A 之间的空间起作用也好，还是依靠传导在 A 内移动也好，都准确地对外部给以相同的力，感应作用并不取决于 A 内的物质的性质。法拉弟指出，就带电体的作用而言，并没有什么可以用滋生 (exaltation) 或消灭 (extinction) 的概念来衡量的东西，即使选择电流体的表象，也不能采取该流体本身中的压缩、凝固或可压缩性 (coercibility) 这样的想法；它对外部的作用完全是确定不变的，静电感应作为一种例外，并没有任何其它的作用状态——与“外表的” (simulated)、“伪装的” (disguised)、“潜在的” (latent) 等术语相对应的静电力状态(《实验研究》第二卷，p. 279)。

由式 (5.2.1) 可知，稳恒电流是  $\nabla \cdot j = 0$  那样的电流，人们最初也自然而然地模仿牛顿力学，把它们之间的相互作用作为电荷的动力学——照安培的说法(1820)，就是“电动力学” (électro-dynamique)——按伏打的观点来进行研究的。安培的理论以他亲自观察过的四个实验结果和一个假定为基础。为了测量一切力给物体影响的效果，安培的基础实验依据的是衡消法 (null method)。静力学的方法基于物体重量和吊丝弹性之间的平衡；代替这种方法，他把由同一种原因产生的两个力同时作用到已经处于平衡状态的物体上，结果表明，什么效应都不产生，即这些力本身是平衡的。他用能围绕垂直轴旋转的轻巧框架作成了两个位于同一平面上或平行平面上的等面积迴路。在各自迴路中，相等的电流向相反方向流动(通过水银槽来传输电流，是佩派斯 (W.H. Pepsy) 的发明)。把两个迴路刚性地连接在一起，就可以作成安培的“无



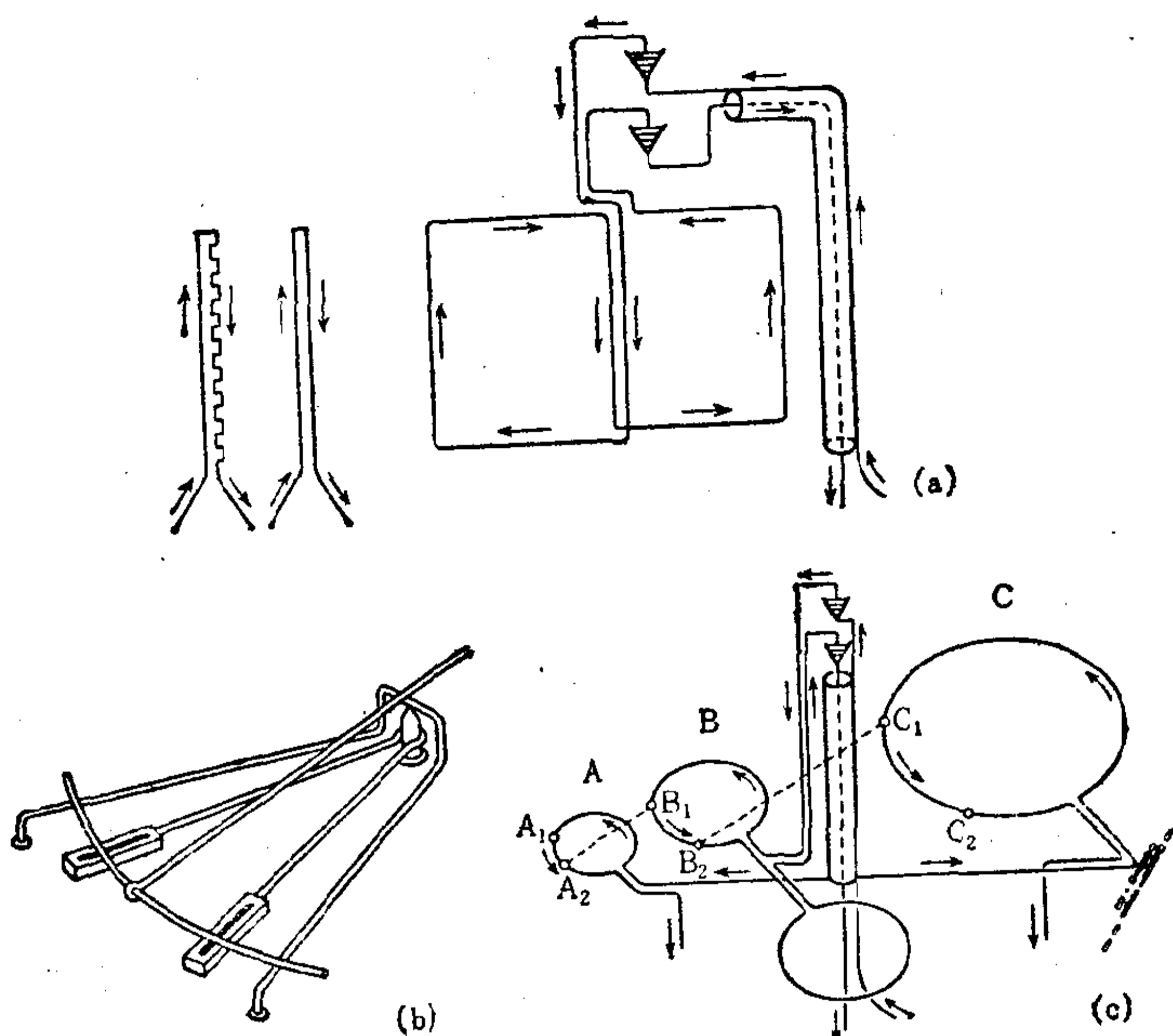


图 5.3

定向天平” (astatic balance), 该天平不受地磁的影响, 但是, 电流或磁铁以不同方式作用在放得很近的这两个迴路上, 却会使它旋转。把绝缘导线并成双股来靠近它, 即使在其中流过电流, 对天平也没有影响, 纵然导线具有许多正弦波状的小弯曲, 结果也不变化(图 5.3(a))。因此得到的结论是, 实验 1°: 当电流流动的方向相反时, 电流的作用大小相同, 但方向相反; 实验 2°: 即使在导线上有小的弯曲, 电流的作用也不变化。接着, 他用只能在其长度方向上移动的导体来代替无定向天平, 即借助于能围绕垂直轴旋转的框架把圆弧状导体水平支撑, 并使圆弧中心与旋转轴一致。把导体接到两个水银槽上, 电流由一个水银槽进去, 流过导体, 再从另一个水银槽



出来(图 5.3(b)). 虽然导体可以在其长度方向上非常自由地移动,但是却能让其它的闭合电流或磁铁靠近它,而不致于产生这种运动的微小倾向. 实验 3°: 某闭合迴路对另一闭合迴路的电流元的作用,和该电流元垂直. 与无定向天平一起,他还采用另外两个迴路 A、C,其中无论哪一个都和天平的迴路 B 相似,不过假设 C 比 B 大  $n$  倍, A 是 B 的  $1/n$ . A、C 相对于 B 位于对侧相似的位置上, CB 间的距离是 AB 间距离的  $n$  倍. 假设 A、C 上的电流  $J_A$ 、 $J_C$  的方向和强度相同,而 B 上的电流  $J_B$  的方向和强度与之相同或方向相反,那么, B 在 A、C 的作用下保持平衡(图 5.3(c)). 因此可知,实验 4°: 在同样保持电流强度的情况下,即使系统的所有一维尺度都按一定比例变化,作用于电流元之间的力,也不发生变化. 由此可以推断,假如电流元之间的力是距离的函数,那么它就会和距离的平方成反比. 这是因为,如果各迴路的相应点是  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  及  $A_2$ 、 $B_2$ 、 $C_2$ , 则作用于迴路元  $ds(B_1)$ 、 $ds(A_2)$  之间的力就可以写成  $F = J_B ds(B_1) J_A ds(A_2) f(\overline{B_1 A_2})$ , 作用于  $ds(C_1)$ 、 $ds(B_2)$  之间的力就可以写成  $F' = J_C ds(C_1) J_B ds(B_2) f(\overline{C_1 B_2})$ , 但是,由于  $nds(A_2) = ds(B_1)$ ,  $nds(B_2) = ds(C_1)$ ,  $n\overline{B_1 A_2} = \overline{C_1 B_2}$ ,  $J_C = J_A$ , 所以  $f(n\overline{B_1 A_2}) = n^2 f(\overline{B_1 A_2})$ .

另外,他假定: 作用于电流元间的力,满足反作用定律,而且沿着连结两个单元的直线作用. 假设稳恒电流  $J_1$ 、 $J_2$  所流过的闭合迴路  $s_1$ 、 $s_2$  的迴路单元分别为  $ds_1$ 、 $ds_2$  (图 5.4), 那么,首先由实验 2° 可知,作用于两个电流元之间的力  $\mathbf{F}$  的表达式,对于  $ds_1$  应该是线性齐次的,而为了满足牛顿第三定律,它对于  $ds_1$ 、 $ds_2$  还必须是对称的. 再根据实验 1°、2° 和上述假定,  $\mathbf{F}$  必须在两电流元间的距离矢量  $\mathbf{r}$  的方向上. 因此,就可以把  $\mathbf{F}$  写成

$$\mathbf{F} = C J_1 J_2 [(ds_1 \cdot ds_2) f(r) + (ds_1 \cdot \mathbf{r})(ds_2$$

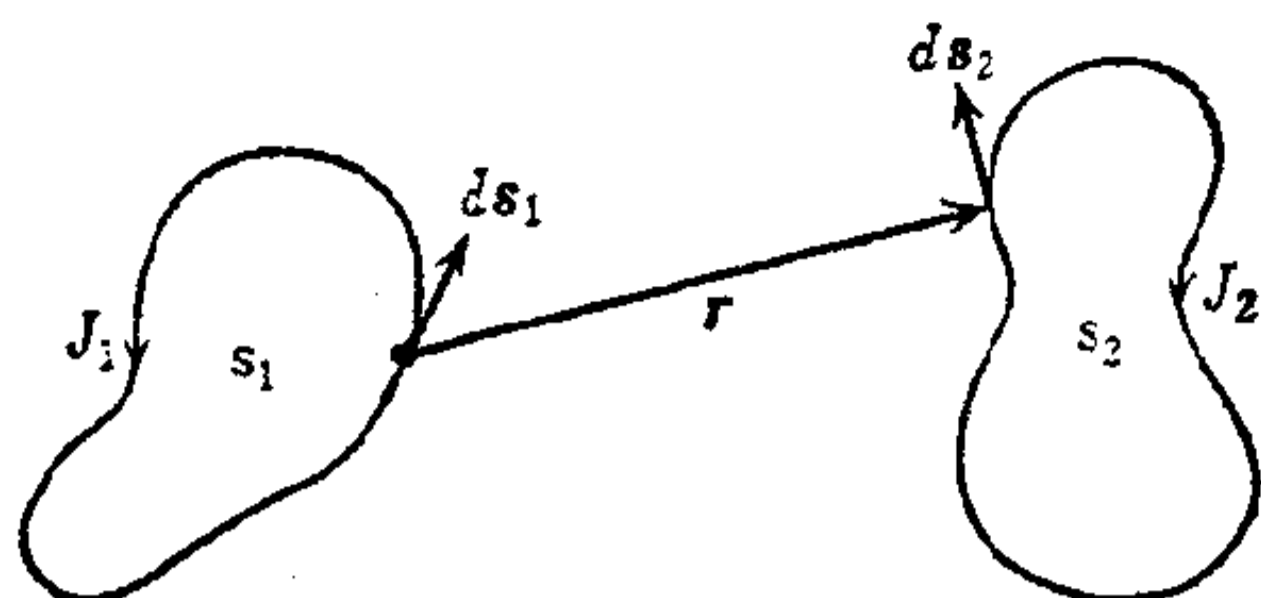


图 5.4

$$\cdot \mathbf{r})g(r)]\mathbf{r}. \quad (5.2.3)$$

式中， $C$  是依电流单位的选择而定的比例常数。由实验 4°， $r$  的任意函数  $f(r)$ 、 $g(r)$  可以取  $f(r) = A/r^3$ ， $g(r) = B/r^5$  的形式，而为了决定常数  $A$ 、 $B$ ，则要利用实验 3°。整个闭合回路  $s_1$  作用于某特定回路元  $ds_2$  上的力，即固定  $ds_2$  而把 (5.2.3) 对  $s_1$  进行积分的结果，要求不具有  $ds_2$  方向的分量：

$$\oint_{s_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_2 = C J_1 J_2 \oint_{s_1} \left[ \frac{A}{r^3} (d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2)(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}_2) + \frac{B}{r^5} (d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})^2 \right] = 0.$$

因为该被积分函数或  $ds_2$  是固定的，所以为了实现这个要求，考虑到  $d\mathbf{r} = -d\mathbf{s}_1$ ，只要使下式成为一个全微分就可以了：

$$-\frac{A}{r^3} d(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}_2)^2 + \frac{B}{r^5} (d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})^2.$$

由这个条件则有  $B = -(3/2)A$ ，从而可以得到微分型的安培基本定律

$$\mathbf{F} = C J_1 J_2 \mathbf{r} \left[ \frac{1}{r^3} (d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2) - \frac{3}{2} \frac{1}{r^5} (d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) \right]. \quad (5.2.4)$$

以下我们把常数  $C$  取为  $-2$ 。它对应于以电磁单位制 (electromagnetic units, emu) 来测量与电流 (因而也与磁) 有关的各个

量的那种情况(参考 § 5.11).

在推导式(5.2.4)时假定电流元之间的力是在  $\mathbf{r}$  方向上作用的, 这个假定排除了由积分定律过渡到微分定律时的任意性, 但是, 它不过是一个权宜的假定而已. 如果不保留这个限制, 则反作用定律只要求电流元之间的力对  $d\mathbf{s}_1$  和  $d\mathbf{s}_2$  是线性齐次的, 所以还能把下列项附加到  $\mathbf{F}$  的表达式上:

$$\begin{aligned} & \varphi(r)(d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})d\mathbf{s}_2 \text{ 及 } d[\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}_2)\chi(r)] \\ &= -d\mathbf{s}_1(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}_2)\chi(r) - \mathbf{r}(d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2)\chi(r) \\ & \quad - \mathbf{r}(d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) \frac{\chi'(r)}{r}. \end{aligned}$$

其中,  $\varphi(r)$ 、 $\chi(r)$  是  $r$  的任意函数,  $d$  表示固定  $d\mathbf{s}_2$  时沿着  $s_1$  的迴路曲线所取的微分. 因此, 在保证反作用定律的同时, 即可得到  $\mathbf{F}$  的一般表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & -J_1 J_2 \mathbf{r} \left[ \frac{2}{r^3} (d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2) - \frac{3}{r^5} (d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) \right] \\ & + \chi(r) [(d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})d\mathbf{s}_2 + (d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})d\mathbf{s}_1 - (d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2)\mathbf{r}] \\ & + \frac{\chi'(r)}{r} (d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

此式的一个最简单的形式, 是设  $\chi(r) = J_1 J_2 / r^3$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \frac{J_1 J_2}{r^3} [(d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})d\mathbf{s}_2 + (d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})d\mathbf{s}_1 \\ & - (d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2)\mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (5.2.6a)$$

显然, 除了  $r$  方向上的分量之外, 它还具有  $d\mathbf{s}_1$ 、 $d\mathbf{s}_2$  方向上的分量. 格拉斯曼 (H. Grassmann, 1845) 进一步去掉 (5.2.6a) 的第一项, 得到了

$$\mathbf{F} = \frac{J_1 J_2}{r^3} [(d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})d\mathbf{s}_1 - (d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2)\mathbf{r}], \quad (5.2.6b)$$

并把它作为电流元之间的基本定律, 不过, 因此它却不再遵从反作用定律, 而表示出与牛顿力学不同的行为. 但是, 当固定

$d\mathbf{s}_2$  来对  $s_1$  进行积分时, 因  $(d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}) = -r(dr/ds_1)ds_1$ , 故上面两式都给出了

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{s_1s_2} &= J_1J_2 \oint_{s_1} \frac{1}{r^3} [(d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})d\mathbf{s}_1 - (d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1)\mathbf{r}] \\ &= J_1J_2 \oint_{s_1} \frac{d\mathbf{s}_2 \times [d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}]}{r^3}. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

这时, 存在于安培头脑中的电流的表象, 也和光以太有关, 留有电流体说的色彩. 他认为, 在导线的金属分子之间的空隙, 充满着由两种电构成的弹性流体(以太); 该流体中正负电的比例, 使流体并非中性, 与金属分子中特有的电相反的另一种电是过剩的, 从而造成对金属分子的电屏蔽; 流体不断地重复进行正负电的离解和再结合, 在某一个分子间隙中产生的正电与电流流动方向上的下一个分子间隙的负电合为一体, 在原先间隙上的负电与逆着电流方向的下一个间隙的正电相结合; 这样的交换过程便产生了电流.

韦伯(1846)试图把电流看作导体中电单元的运动, 而由安培定律推导出作用于运动电荷之间的力的基本定律, 然后推广库仑的静电定律, 从而把静电理论(电荷的静力学)和流动电(即电流)的理论(电荷的动力学)归纳成象牛顿力学那样的统一的理论体系(虽然高斯(1835)已经给出了与韦伯相同的电力定律, 但是该定律在他生前并未公开发表). 若使用关系式

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}_1) &= -r \frac{dr}{ds_1} ds_1, \quad (d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2) = ds_1 ds_2 \cos \varepsilon, \\ \frac{d^2r}{ds_1 ds_2} &= -2 \cos \varepsilon \end{aligned}$$

把描述电流元之间作用的安培定律式(5.2.4)改写一下, 那么, 它就变成

$$\mathbf{F} = \frac{J_1J_2 ds_1 ds_2}{r^2} \left( 2r \frac{d^2r}{ds_1 ds_2} - \frac{dr}{ds_1} \frac{dr}{ds_2} \right). \quad (5.2.4a)$$

为了把它另行解释成由于电荷运动而附加到静电力上的超距力, 只要把式(5.2.4a)用电荷间的相对距离  $r$  及其二阶时间导数表示出来就可以了. 设电单元沿着  $ds_1$ 、 $ds_2$  分别以速度  $v_1$ 、 $v_2$  运动, 那么, 由  $dr/dt = v_1 dr/ds_1 + v_2 dr/ds_2$  则有,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = v_1^2 \left(\frac{dr}{ds_1}\right)^2 + 2v_1v_2 \frac{dr}{ds_1} \frac{dr}{ds_2} + v_2^2 \left(\frac{dr}{ds_2}\right)^2 \quad (5.2.8)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = v_1^2 \frac{d^2r}{ds_1^2} + 2v_1v_2 \frac{d^2r}{ds_1 ds_2} + v_2^2 \frac{d^2r}{ds_2^2}. \quad (5.2.9)$$

两式中的第二项与  $v_1v_2$  成正比, 为了取掉其它那些在式(5.2.4a)中没有出现的量, 若认为电流是电荷只向一个方向的移动, 就不用作附加说明; 若电流是由两个相反方向的流动构成的, 就只好假定包含  $v_1^2$ 、 $v_2^2$  的项合到一起的结果是零.

为此, 最简单的作法, 就是沿袭菲克纳(1845)的假说. 即, 假定电流由同数量的正负电单元的流动构成, 它们以相同速度向相反方向前进(仅仅为了现在这个目的, 可以假设各导线线元中的正负电量  $e_i$ 、 $e'_i$  ( $i = 1, 2$ ) 是相等的 ( $e_i + e'_i = 0$ ), 也可以假设两种电量与各自速度的平方成反比 ( $e_i v_i^2 + e'_i v_i'^2 = 0$ ) (麦克斯韦《电磁论》第二卷 § 846)). 因此, 倘若导线的单位长度中包含  $N_i$  单位个电单元, 则电流强度  $J_i$  就是  $cJ_i = 2N_i v_i$  ( $i = 1, 2$ ). 所以, 如果我们把位于  $ds_1$  的正负电单元对位于  $ds_2$  的正负电单元的作用的四种组合加上 ++、+-、-+、-- 来表示, 那么, 由式(5.2.8)、(5.2.9) 分别对应的四个关系式, 则有

$$F = \frac{N_1 N_2 ds_1 ds_2}{c^2 r^2} \left[ \{ (r\ddot{r})_{++} - (r\ddot{r})_{+-} - (r\ddot{r})_{-+} + (r\ddot{r})_{--} \} - \frac{1}{2} \{ (\dot{r}^2)_{++} - (\dot{r}^2)_{+-} - (\dot{r}^2)_{-+} + (\dot{r}^2)_{--} \} \right].$$



因此,若把静电力也包含在内,则作用于两个运动电荷  $q_1$ 、 $q_2$  之间的力就是

$$\mathcal{F} = \frac{q_1 q_2 c^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} r \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right\} \quad (5.2.10)$$

(式中常数  $c$  的引入,是因为在库仑定律和安培定律中使用了不同的单位制。这个  $c$  是单位电荷由静电单位制过渡到电磁单位制的换算因子,它具有速度的量纲。参考 § 5.11)。

式 (5.2.10) 给出韦伯电学理论的基本定律,这个理论是十九世纪中叶大陆派电动力学的典型。韦伯理论把电动力学的各种现象归结为运动的电荷,这些电荷之间作用的力不仅依赖于位置,而且也依赖于相对速度,在这个意义上,也许可以说他的理论就是最初的电子论。即使说韦伯的力依赖于速度,它最低限度也在形式上与能量守恒定律相吻合;若把  $\mathcal{F}$  表示成拉格朗日力的形式(参考 (2.7.24)),这一点是不难看出的:

$$\mathcal{F} = \left( -\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \right) u,$$

$$u = \frac{q_1 q_2 c^2}{r} \left( 1 + \frac{\dot{r}^2}{2c^2} \right) \quad (5.2.10a)$$

(韦伯; 1848)。这是因为,力学动能和势能为  $T$ 、 $V$  的两个带电粒子  $q_1$ 、 $q_2$  的体系,其运动方程,与动能为  $T - (q_1 q_2 / 2r) \dot{r}^2$ 、势能为  $V + (q_1 q_2 c^2 / r)$  的力学系的运动方程是一致的,而能量积分用下式确定:

$$T - \frac{q_1 q_2}{2r} \dot{r}^2 + V + \frac{q_1 q_2 c^2}{r} = \text{const.} \quad (5.2.11)$$

但是,当  $V$  给出在运动的相反方向上作用的力时,因为动能中  $-(q_1 q_2 / 2r) \dot{r}^2$  项的缘故,有时会造成带电粒子的速度无限增大的困难(比如,亥姆霍兹 (1872) 曾指出,在具有均匀面电荷

密度的球壳内运动的带电粒子的情况就是这样；参考麦克斯韦《电磁论》第二卷 § 854)。不仅对式(5.2.10)，而且一般对于在  $r^2$  的系数中引进负项的那些力的定律来说，这也是经常得到的结论，它现在作为经典电子论的脱逸解 (run-away solution) 被流传下来。

### § 5.3 磁现象的电本质

前一节推导的积分型安培定律式(5.2.7)，可以分解成两种作用的形式，一个是稳恒环电流所表示的“电磁”作用，即电流所产生的磁作用，另一个是与电流元  $J_2 d\mathbf{s}_2$  (或者是对迴路  $s_2$  进行积分的全部环电流) 的相互作用。倘若把式(5.2.7)表示成

$$\mathbf{F}_{s_1 s_2} = J_2 [d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{B}] \quad (5.3.1a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= J_1 \oint_{s_1} \frac{d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}}{r^3} = -J_1 \oint_{s_1} d\mathbf{s}_1 \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \\ &= \text{curl} \oint_{s_1} \left( \frac{J_1 d\mathbf{s}_1}{r} \right), \end{aligned} \quad (5.3.1b)$$

那么， $\mathbf{B}$  就是稳恒环电流  $J_1$  作用于真空中相距为  $r$  的单位磁极上的力(奥斯忒, 1820; 毕奥-萨伐尔, 1820)。实际上, 安培推导两个稳恒电流间相互作用的(1825年综合报告)提纲(如麦克斯韦所说, 或许和安培的真正思路不相一致) 据说是: (i), 稳恒环电流使磁铁受到了与磁偶极层同等的效应, 该磁偶极层是用与电流迴路相同的边界限定的; 所以 (ii), 假如这个力服从牛顿反作用定律, 那么, 当把环电流放到磁铁附近时, 所受到的力和对磁偶极层的相同; (iii), 因此, 假如把别的稳恒环电流设想为磁力的本源, 似乎就能确定某一稳恒环电流给予其它稳恒环电流的整体或它的任意部分上的作用。如果承认安培讨论的部分 (i) (我们打算在后面表示), 那么, 当两个电流间的势能, 即两个电流的强度保持不变时, 为了把两个

迴路的距离增大到无限远而抗拒电动力所做的功，就可以用两个环电流的“诺埃曼势”（“电动力学势”）来确定：

$$\begin{aligned}
 \Phi &= J_1 J_2 \int_{S_2} \oint_{S_1} \frac{d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S}_2 \\
 &= J_1 J_2 \int_{S_2} \oint_{S_1} \text{curl} \frac{d\mathbf{s}_1}{r} \cdot d\mathbf{S}_2 \\
 &= J_1 J_2 \oint_{S_2} \oint_{S_1} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r} \\
 &= J_2 \oint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_2 \quad (5.3.2)
 \end{aligned}$$

（诺埃曼；1845,48）。式中， $S_2$  是迴路  $s_2$  张开的任意曲面，由式（5.3.1b）可知，磁力  $\mathbf{B}$  是由磁矢量（solenoidal vector）

$$\text{div} \mathbf{B} \equiv \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.3.3)$$

它由磁矢量势

$$\mathbf{A} \equiv \oint_{S_1} \frac{J_1 d\mathbf{s}_1}{r} \quad (5.3.4)$$

按下式确定：

$$\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}. \quad (5.3.5)$$

其中，微分算符全部是对迴路  $S_2$  的线元的坐标的。再加上菲涅耳的补充，即可由此产生安培的分子电流假说。这个假说摈弃了磁流体说，开拓了一条把当时还是独立看待的电学和磁学统一为电磁学的途径。

现在，我们认为磁效应完全不是一次现象，而可以归结为（广义的）电流的效应，但是，有关磁的物理量名称的混乱，是由磁学最初作为永久磁铁的物理学这样一个历史上的原因造成的。在奥斯忒发现电磁及阿喇果（1820）与戴维（1821）观察电流产生的磁化现象之前，磁学理论的经验基础仅仅依赖于在永久磁铁和铁以外的两、三种铁磁体（Co：波兰特（G. Brandt），1733；Ni：克隆斯塔特（A.F. Cronstadt），1750）上

所看到的磁化现象,此外也依赖于对地磁的观测,而永久磁铁的一个磁极作用于其它永久磁铁的一个磁极上的力则被看成是磁力的本源(虽然波鲁格曼斯(1778)描述了 Sb 和 Bi 的抗磁性,但是,只有 1845 年以来,法拉第才广泛地研究了物质的顺磁性和抗磁性,从而考虑到物质媒质的磁性质)。通过库仑(1785, 91)扭秤的直接测量,进一步又通过高斯-韦伯(1837—43)的精密化,才确定了磁极之间的这种力  $F_m$ , 与静电力一样,服从磁极间距离  $r$  的反平方定律。与电荷相对应,假如也引进假想的两种独立的磁极 (magnetic pole) 或磁荷 (magnetic charge)  $q_m$  (指北极为正、指南极为负),那么,该定律就可以写成

$$F_m = K_m \frac{q_{m1} q_{m2} r}{r^3}. \quad (5.3.6)$$

式中,  $K_m$  是依赖于单位制的一个常数。因此,对静磁力的讨论完全能够和静电力平行地进行(泊松, 1824)。与式(5.1.3, 4)同样定义的、以存在于真空中的点磁荷  $q_m$  (或磁荷分布  $\rho_m$ ) 为基础的磁力

$$\mathbf{H} = \frac{q_m \mathbf{r}}{r^3} = -q_m \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \text{ 或 } -\nabla \int \frac{\rho_m}{r} dv'$$

是无旋矢量:

$$\text{curl } \mathbf{H} \equiv \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (5.3.7)$$

而且它应该由满足泊松方程  $\nabla^2 \phi_m = 4\pi\rho_m$  的标量势(按格临(1828)的命名,也就是磁势 (magnetic potential)) 通过下式推导出来:

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m = -\nabla \int \frac{\rho_m}{r} dv'. \quad (5.3.8)$$

磁多极子的展开也是同样的。

但是,静电力和静磁力的这种行行理论,是以单独存在的



磁极——磁单极子(magnetic monopole)——的概念为基础的。它只是一个近似的概念,由永久磁铁磁极间的力为出发点,仅仅在能够忽略磁铁另一极的效应时才具有意义。十八世纪初叶,人们以此为依据,对磁极间的力提出了距离的反平方说和反立方说(《原理》第三篇命题 6 定理 6 系 5),甚至还出现了什么反  $3/2$  次方说、反  $\sqrt{5}$  次方说(豪克斯比(F. Hauksbee), 1710—12;惠斯顿(W. Whiston)和泰勒(B. Taylor), 1721)。就此判断,或许可以说,十八世纪前半叶人工磁铁制造方法的进步(赛沃雷(S. Savery), 1729—30;克奈特(G. Knight), 1746—47;杜哈姆(H. L. Duhamel), 1749;勒迈尔(LeMaire), 1745, 50;密切尔(J. Michell), 1750)对反平方定律的确定起到一定作用,用这些方法制成的磁铁,形状符合近似独立的磁极。但是,所谓存在磁单极子的想法,并没有什么经验上的限制。这不仅在经典论中,而且在量子论中,都是相同的。为了求得电的和磁的理论的良好对称性,狄喇克(1931, 48)研究磁单极子的量子论,使电荷的量子性与磁单极子  $g$  发生关系 ( $g/e = n(\hbar c/2e^2)$ ,  $n$  是整数),他认为,具有磁单极子的粒子之所以尚未发现,似乎是因为产生那样的粒子需要极大的能量。希温格(J. Schwinger; 1969)为了对基本粒子进行分类,还引进了双荷子(dyons)作为具有基元电荷和磁单极子的基本粒子。但是,在利用加速器人工制造基本粒子的过程中,或者在宇宙射线粒子的探索中(研究在宇宙线中具有磁单极子的粒子,或者研究被宇宙线中的高能粒子成对产生的两个磁单极子中的一个由地磁场加速,从而在地球岩石中或海底固体物质中能够寻觅到的粒子),都未得到确切的证明(表 5.2)。

真实的永久磁铁,其磁量的总和(磁荷的代数和)为零。它的特点是,即使把某一磁铁任意分割,也仍然会得到具有相



等强度的正负磁极的两个磁铁。因此,为了表征棒形磁铁,不仅要用正磁极的强度,而且还必须使用它与长度的乘积——磁矩(它是具有磁轴方向的一个矢量,该磁轴是由负磁极到正磁极连结的直线);也就是说,必须把它当作磁偶极子来看待。为过渡到任意形状的磁铁,按泊松的作法(1824),需要引进**磁化矢量** (magnetization vector),即每单位体积的磁矩。从物理意义来讲,它是对铁磁体设想的一个模型,分子磁铁模型。泊松是坚持磁流体说的,他假设,物质一般是磁流体的不良导体;只有它的某一部分包含着一种流体,处于自由适应外来磁力的状态;在它们的微小磁单元内等量的两种磁流体完全能够自由运动,但是却不能由一个单元移动到另一个单元。这种结构是为了使磁化现象不是携带不等量的两种磁流体而设想的,从而可以把磁化现象看成是单元内的磁流体分离后各自向单元另一端集中的过程。韦伯(1847)和麦克斯韦(1873)认为,各个分子本来是永久磁铁,但在被磁化之前其磁轴却不是定向的。安培则认为,这个磁单元或分子磁铁的磁性根源,是流过单元内的微小的环电流;该电流只在各自的单元内循环,不会流入其它单元中去;为了使磁铁不致于因焦耳热而变成永久热源,磁单元还必须是电的极好的良导体。总之,应该选择这样的表象:铁磁体是由具有磁偶极子性质的微小部分构成的,在被磁化之前其方向完全杂乱无章。

为使讨论简单起见,现在我们假设,任意形状的永久磁铁由分子磁铁构成,这些分子磁铁是各个边为  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$  的长方体。假设磁轴是  $dx$  方向,而且在垂直于轴的两个端面上具有面磁荷密度  $M$ ,那么,分子磁铁的磁矩大小就是

$$m = M dy dz dx = M dv.$$

因此,磁化矢量  $\mathbf{M}$  在空间各个点具有该位置上的分子磁铁的磁轴方向,大小为分子磁铁的磁矩除以该体积所得的值,这个

表 5.2

依靠加速器制造磁单极粒子

	能量(GeV)	磁单极粒子质量的上限(质子质量)	制造截面积的上限(cm <sup>2</sup> )
H. 波拉德奈尔和 W.M. 埃斯拜尔(1959)	6.3	1.1	2×10 <sup>-25</sup>
E. 阿玛迪等(1963)	25~28	3.0	6×10 <sup>-41</sup>
M. 费戴卡罗等(1961)	27.5	3.0	10 <sup>-39</sup>
E. M. 帕赛尔等(1963)	30	3.0	1.4×10 <sup>-40</sup>

固体物质中磁单极子含量比

物 质	试验量 (g)	磁单极子含量的上限(个/核子)
阿德仑达克山露天磁矿 (E. 戈托等, 1963)	~5×10 <sup>3</sup>	~8×10 <sup>-28</sup>
南极海锰块 (R. L. 弗莱希等, 1969)	31.5	1.3×10 <sup>-25</sup>
北大西洋锰渣(R. L. 弗莱希等1969)	7.7×10 <sup>3</sup>	5.2×10 <sup>-28</sup>
铁陨石 (L. W. 阿尔瓦瑞芝和 R. 瓦特, 1963)	~10 <sup>2</sup>	~4×10 <sup>-26</sup>
商品铜 (L. 范德豪尔, 1968)	6.5	6×10 <sup>-25</sup>
月球静海的岩石 (L. W. 阿尔瓦瑞芝等, 1970)	8.3×10 <sup>3</sup>	4.8×10 <sup>-28</sup>
海底碎石 (H. H. 科尔姆, 1967)	~1.5×10 <sup>6</sup>	~3×10 <sup>-31</sup>

(根据第十五次磁和磁性材料年会, 费城, 18—21, 1969年11月, R. L. 夫莱舍尔等人的报告. 应用物理杂志, 41, 958 (1970))

矢量是

$$\mathbf{M} = \frac{m}{dv}, \quad (5.3.9)$$

整个磁铁的磁矩则用对其全部体积进行的积分  $\int \mathbf{M} dv$  来确定. 在与这个磁铁相距为  $r$  的点上, 磁(标量)势是

$$\phi_m^{(1)} = - \int \mathbf{M} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) dv' = \int \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dv'. \quad (5.3.10)$$

若把高斯散度定理用于上式, 则有

$$\begin{aligned}\phi_m^{(1)} &= -\int \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{r} dv' + \int \frac{\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{r} \\ &\equiv \int \frac{\rho_m}{r} dv' + \int \frac{\sigma_m}{r} dS'.\end{aligned}\quad (5.3.11)$$

显然,在真空中作用于磁铁外部各点上的磁力,和认为该磁铁上分布着泊松等效面磁荷密度  $\sigma_m \equiv (\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S})/dS$  及等效体磁荷密度  $\rho_m \equiv -\nabla \cdot \mathbf{M}$  的假想情况下的磁力是相等的。

而且,在均匀的磁偶极层的情况下,也就是以封闭曲线  $S$  为边界的任意曲面上,分布着垂直于曲面的均匀大小的磁化  $M$  时,若把来自各曲面单元的磁化  $M d\mathbf{S}$  的作用相加,则不在该曲面上的点  $P$  (距离为  $r$ ) 的磁(标量)势,就可以用磁化矢量的大小与偶极层边界  $S$  在  $P$  点张开的立体角  $\Omega$  之乘积来确定,而与曲面  $S$  无关:

$$\begin{aligned}\int_S \frac{M \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} &= M \int_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS \\ &= M \int d\Omega = M \Omega\end{aligned}\quad (5.3.12)$$

(高斯; 1838)。式中,当  $P$  点位于曲面  $S$  正的一边时,规定立体角  $\Omega$  为正。

为了求出磁铁内部的磁力,可以采用传统的方法,把真空中的操作性定义推广,在磁铁内部开一个不致打乱磁化状态的小空腔,再把试验磁极放入其中(它的现代形式,是以不同磁媒质的边界面上的边界条件给出的(参考 (5.5.9)))。泊松(1824)曾指出,这个方法的结果依赖于空腔的形状和腔壁对磁化方向的倾斜度。现在,我们假设,在磁化矢量  $\mathbf{M}$  可以看成均匀的那个范围内,于磁化方向上作一个圆柱形空腔,其轴长为  $2b$ , 半径为  $a$ , 再把单位磁极放到轴的中点上。这样一来,在圆柱表面上没有磁化分量,仅仅在两个底面上有面磁化密度,正方向为  $-\mathbf{M}$ , 负方向为  $+\mathbf{M}$ 。因为两者对试验磁极

的引力和斥力,大小相等,方向相同,所以,磁极由两个底面受到的力是

$$R = 4\pi M \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \quad (5.3.13)$$

当把空腔选成一个在轴向上长的针状孔时 ( $a \ll b$ ), 将式(5.3.13)展成  $a/b$  的幂级数, 则有

$$R = 4\pi M \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{3}{8} \left( \frac{a}{b} \right)^4 + \dots \right\}, \quad (5.3.14a)$$

因此, 在  $a/b \rightarrow 0$  的极限上, 空腔内的磁力将不受在底面出现的磁化的影响, 而只用与外部相同的  $H$  来确定,

$$H = -\nabla \phi_m^{(1)}. \quad (5.3.15)$$

另一方面, 当把空腔选成在轴向上扁平的圆板时 ( $a \gg b$ ), 若把式(5.3.13)展成  $b/a$  的幂级数, 则有

$$R = 4\pi M \left\{ 1 - \left( \frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^3 - \dots \right\}, \quad (5.3.14b)$$

在  $b/a \rightarrow 0$  的极限上, 它还会另外受到  $R = 4\pi M$  的力, 即空腔内的磁力可以用下式确定:

$$B = H + 4\pi M. \quad (5.3.16)$$

汤姆孙(1850)把式(5.3.15)称为“相应与磁极定义的磁力”(magnetic force according to the polar definition), 而把式(5.3.16)称为“相应与电磁定义的磁力”(magnetic force according to the electromagnetic definition), 以示区别。这是因为, 后者与式(5.3.1b)一样, 是一个电磁矢量。其依据是: 若使用泊松等效分布(5.3.11), 则式(5.3.16)沿着封闭曲面  $S$  的面积分

$$\int B \cdot dS = \int H \cdot dS + 4\pi \int M \cdot dS$$

成为零(麦克斯韦《电磁论》第二卷 § 402)。

当把空腔取成球形时, 腔内的磁力是



$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}. \quad (5.3.17)$$

各向同性媒质的磁化,不具有当时已知的自发磁化(永久性磁矩);泊松(1824)为了说明这个现象,把他的模型中作为磁流体完全导体的磁单元取成微小的球形,并假设它们在媒质中分布了无数个.虽然包含等量异性磁流体的各微小球,其总磁量为零,但是,如果各球体受到磁力  $\mathbf{F}_m$  的作用,它们便会产生等于  $(3/4\pi) \mathbf{F}_m \times$  (球的体积)的磁矩.因此,若存在于媒质单位体积中的球形磁单元的总体积为  $k$ ,则感应磁化矢量就为  $(4\pi/3) \mathbf{M} = k \mathbf{F}_m$ ,但是,因为球形空腔内作用的磁力是包括感应磁化效果  $\mathbf{F}_m$  在内的式(5.3.17),所以

$$\mathbf{M} = \frac{3k}{4\pi(1-k)} \mathbf{H}.$$

汤姆孙把  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{H}$  的这个比值一般地写成  $\chi_m$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (5.3.18)$$

并称之为媒质的**磁化率**(magnetic susceptibility).磁化矢量和外加磁力的这种关系,除了铁磁体以外,对于各向同性物质都是成立的.在磁化矢量的定义式(5.3.18)中,磁力采用了按照磁极定义的  $\mathbf{H}$ ,就是由于这种历史原因造成的( $\chi_m$ 在顺磁体中为正,在抗磁体中为负,对于真空来说为零).当这个关系式成立时,式(5.3.16)就可以表示成

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi_m) \mathbf{H} \equiv \mu \mathbf{H}. \quad (5.3.16a)$$

在这里,仍然是汤姆孙给  $\mu \equiv 1 + 4\pi\chi_m$  起名为**导磁率**(magnetic permeability).假如回到泊松模型来看,我们似乎可以明白汤姆孙对这个名称的心理.这是因为, $\mu$ 是泊松模型中的磁流体的传导率.假设媒质和磁单元球的磁流体传导率分别为  $\mu_1$ 、 $\mu_2$ ,则合成的传导率  $\mu$  就是

$$\mu = \mu_1 \frac{2\mu_1 + \mu_2 + 2k(\mu_2 - \mu_1)}{2\mu_1 + \mu_2 - k(\mu_2 - \mu_1)}.$$



特别当  $\mu_1 = 1$ 、 $\mu_2 = \infty$  时, 上式就是  $\mu = (1 + 2k)(1 - k)$  (麦克斯韦《电磁论》第二卷 § 314、§ 430)。

对于式(5.3.16)来说, 仍然遇到了与式(5.3.1b)相同的符号, 其合理性尚未得到证明。为了从“电磁”的立场出发重新研究永久磁铁的物理效应, 首先必须表明安培的主张(i)是成立的。现在, 假设电流为伏打意义的电流, 并把真空中的稳恒线电流推广到稳恒体电流密度  $\mathbf{j}$ , 则有

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{j} \times \mathbf{B} dv' \quad (5.3.1c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dv' = - \int \mathbf{j} \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) dv' \\ &= \text{curl} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dv'. \end{aligned} \quad (5.3.1d)$$

用式(5.3.1d)定义的“电磁”力  $\mathbf{B}$  也是电磁矢量  $\text{div} \mathbf{B} = 0$ , 从而同样可由下列磁矢量势推导出来:

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{j}}{r} dv. \quad (5.3.4a)$$

就稳恒电流  $\text{div} \mathbf{j} = 0$  而言, 由

$$\begin{aligned} \text{curl} \mathbf{B} &= \text{curl} \text{curl} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dv' = - \int \mathbf{j} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) dv' \\ &\quad + \text{grad} \text{div} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dv', \end{aligned}$$

可以得到安培迴路定律

$$\text{curl} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} \quad (5.3.19)$$

(使用斯托克斯定理, 还能得到该定律的积分形式  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi J$ )。从磁矢量势式(5.3.4a)来看, 对稳恒电流而言,

$$\text{div} \mathbf{A} = 0,$$

所以,  $\mathbf{A}$  应当满足矢量泊松方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}, \quad (5.3.20)$$

也就是说,  $\mathbf{A}$  应该是在  $\text{div} \mathbf{A} = 0$  的条件下, 以笛卡儿坐标表示的各分量  $A_i (i = 1, 2, 3)$  的联立标量泊松方程的解。因此, 式 (5.3.4a) 就成为式 (5.3.20) 的一个特解。

$\mathbf{A}$  是由稳恒电流产生的; 当该电流的分布被局限在某一有限的空间范围内时, 与静电力的情况相同 (式 (5.1.12), 图 5.1), 也能对式 (5.3.4a) 进行多极子展开:

$$\begin{aligned}
 A_i = & \frac{1}{R} \int j_i dv' + \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{\xi=0} \int j_i \xi_i dv' \\
 & + \frac{1}{2!} \sum_{j,k} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{\xi=0} \\
 & \times \int j_i \xi_j \xi_k dv' + \dots
 \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

这是因为, 对于稳恒电流来说, 这个展开式的第一项为零, 它对应于不存在磁单极子的情况:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int (\text{div}' \mathbf{j}) \xi_i dv' = \int \{ \text{div}' (\mathbf{j} \xi_i) - \mathbf{j} \cdot \nabla' \xi_i \} dv' \\
 = & \int \xi_i \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}' - \sum_k \int j_k \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_k} dv' \\
 = & - \int j_i dv'.
 \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

根据关系  $\partial / \partial \xi_i = -\partial / \partial x_i$ , 假设被积分函数为

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{\xi=0} j_i \xi_i &= - \sum_j j_j \xi_j \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r=R} \\
 &= \sum_j \frac{R_j \xi_j j_j}{R^3},
 \end{aligned}$$

再写成

$$\begin{aligned}
 j_i \xi_i &= \frac{1}{2} (j_i \xi_i + j_i \xi_i) \\
 &+ \frac{1}{2} (j_i \xi_i - j_i \xi_i),
 \end{aligned}$$

那么,因为对称部分对积分没有贡献,所以第二项就变成

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= \int \frac{1}{2} \frac{1}{R^3} \{(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\xi})\mathbf{j} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{j})\boldsymbol{\xi}\} d\nu' \\ &= \text{curl} \int \frac{[\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{j}]/2}{R} d\nu'. \end{aligned}$$

因此,若把电流分布  $\mathbf{j}$  的磁矩定义成

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \int [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{j}] d\nu', \quad (5.3.23)$$

则有

$$\mathbf{A}^{(1)} = \text{curl} \frac{\mathbf{m}}{R} = \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{m} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (5.3.24)$$

所以,“电磁”力

$$\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}^{(1)} = -\text{grad} \left( \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \right) \quad (5.3.25)$$

就和由磁标量势  $\phi_m^{(1)}$  (参看(5.3.10))推导出来的、与磁极定义相应的磁偶极子的磁力  $\mathbf{H} = -\text{grad} \phi_m^{(1)}$  (式(5.3.21))相一致。也就是说,假如把真空中分布在有限范围内的稳恒电流的磁矩用式(5.3.23)定义(对包围面积  $\mathbf{S}$  的环状线电流  $J$  来说,  $\mathbf{m} = J\mathbf{S}$ , 这儿假设  $\mathbf{S}$  的方向就电流方向而言服从右手螺旋定则),则对于在远远大于分布范围一维尺度的距离上作用的磁力来说,该稳恒电流分布和磁偶极子是等价的;磁力的磁极定义也好,电磁定义也好,都会给出相同的结果。但是,为了把安培的观点推广到磁性体内部的磁力,还必须涉及到关于电和磁之间关系的一个经验定律和根据该定律对物质的电性质所作的宏观处理。

## § 5.4 磁电感应和电极化

奥斯忒发现“电磁”(electro-magnetism)之后,安培和菲涅耳(1820)立即对“电磁”的逆过程“磁电”(magneto-electricity)

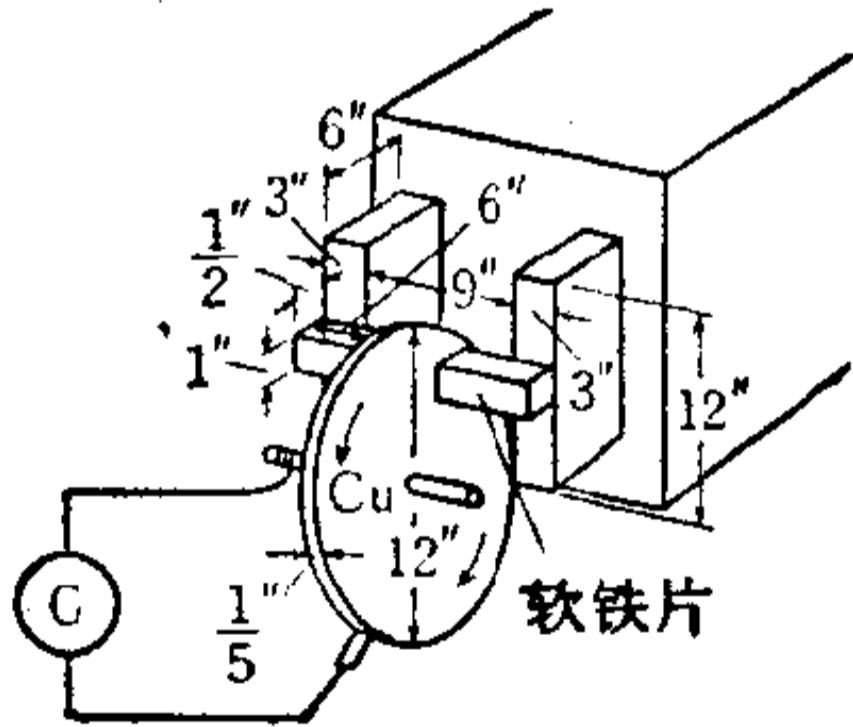
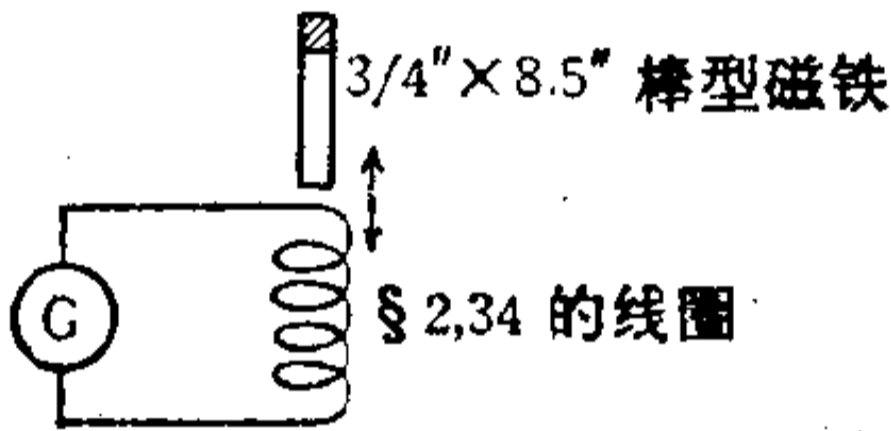
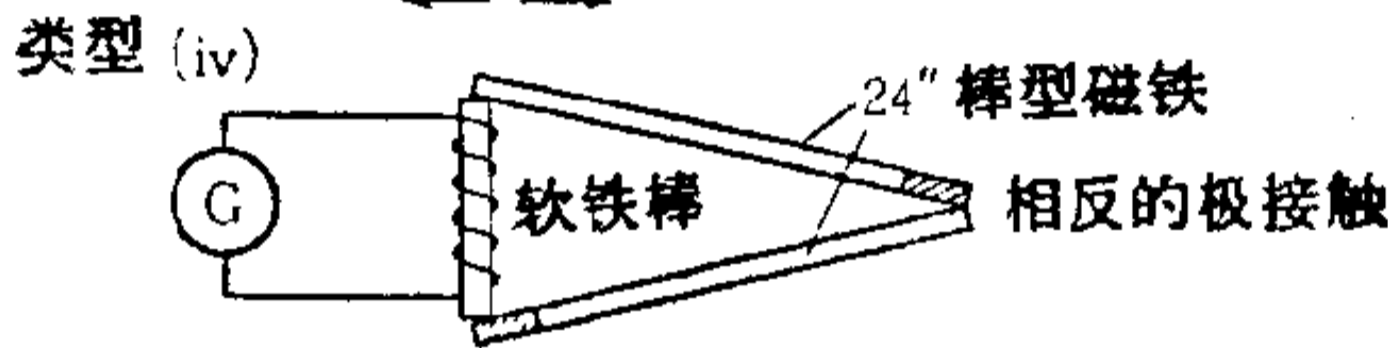
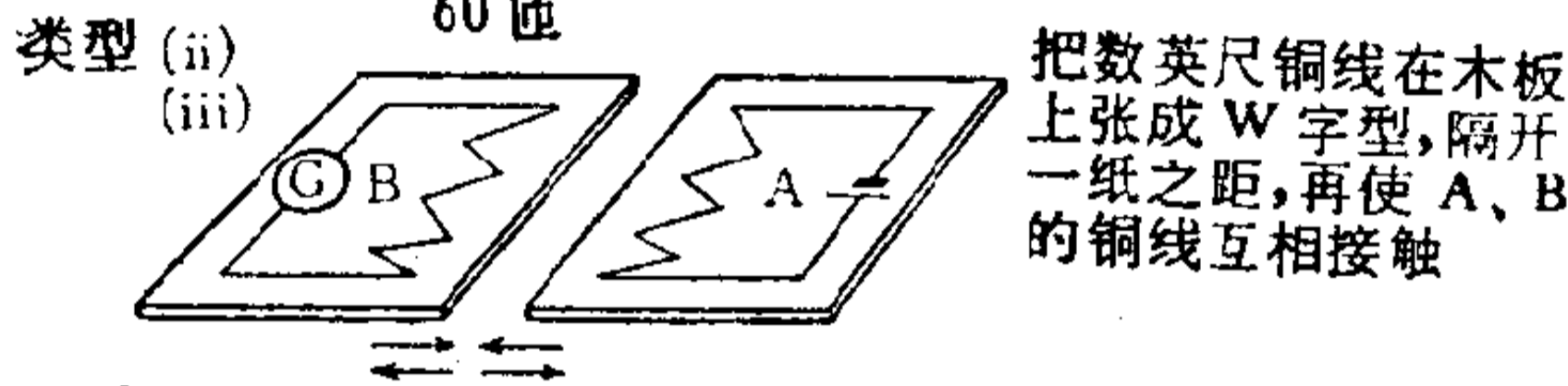
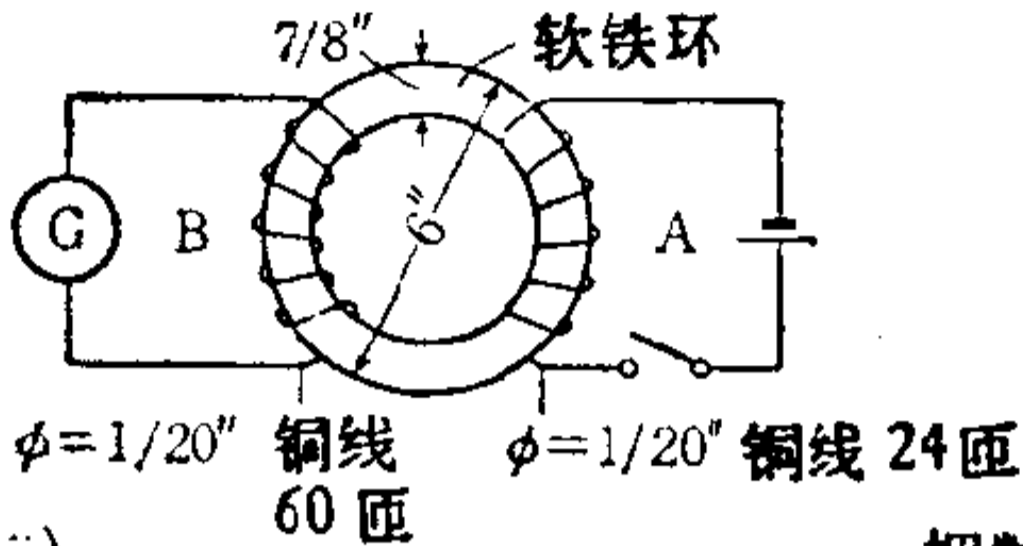
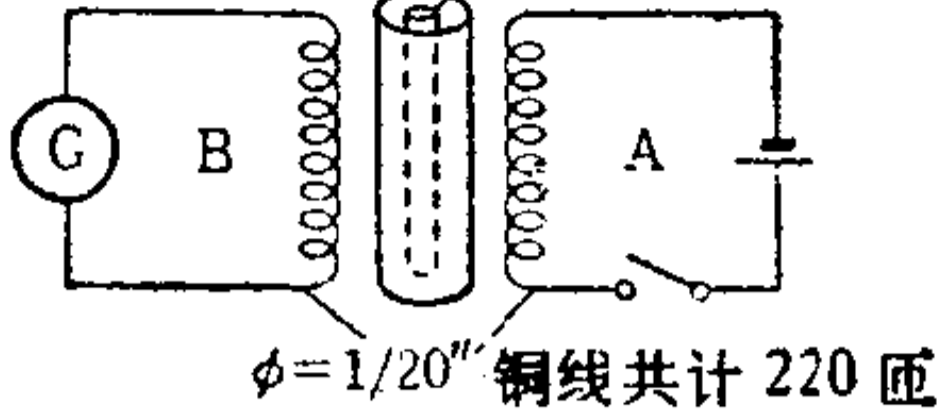
提出了推测——假如把导体放在磁铁的附近，在导体中难道不会有电流流过吗。但是，他们却不曾观察到任何预期的结果。从把磁的起因归之于分子电流的观点来判断，磁电无非就是这样的一种设想，即若把导体迴路放到电流流过的迴路附近，在其中是否会有电流流过呢？从安培的电动力学的见解出发，似乎可以把它看成是与静电感应对应的由流动电引起的感应现象。在这个意义上，该现象就是“电磁感应” (electromagnetic induction)。在有电荷流动的许多均匀的导体中，电流密度  $\mathbf{j}$  和静电力  $\mathbf{E}$  通过欧姆定律 (1826) 联系在一起：

$$c\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \quad (5.4.1)$$

式中， $\sigma$  是导体的**电导率** (electric conductivity) (卡文狄希发现；后来戴维(1821)又再次发现，电导率依导体而各自不同)。但是，仅仅用静电力并不能维持电流；这是因为，稳恒电流每单位时间、单位体积需要消耗能量  $c\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ ，然而静电力却是保守力 (参考 (5.1.5))。为了维持电流，对单位电荷来讲需要有一种沿着电流迴路的线积分不为零的力，即**电动势** (electromotive force; 欧姆, 1827)。安培-菲涅耳的试验之所以以否定的结果告终，是因为在同样为保守力的静磁力  $\mathbf{H}$  (式 (5.3.7)) 附近会使导体依然静止不动。法拉第(1831)通过“磁电感应” (magnetoelectric induction) 发现，这个电动势是由交变的磁力产生的。

法拉第的实验可以分成四种类型，即类型 (i)，由一次电流的变化引起的感应；类型 (ii)，由一次迴路的运动引起的感应；类型 (iii)，由二次迴路的运动引起的感应；类型 (iv)，由二次迴路和磁铁的相对运动引起的感应 (图 5.5)。法拉第一开始就看出，磁电感应依赖于迴路和磁力线的相对运动(《关于电的实验研究》第一卷、第一辑、§4, 114—116; 1831)。为了明

类型 (i) 硬壳纸制中空圆筒  $\phi=7/8"$ ,  $l=12"$  软铁棒



皇家学会大磁铁 (用 450 根 1' x 1/2' x 15' 棒形磁铁组合而成)

“有关电的实验研究”第一卷、第一辑  
 $\S$  1, 6—10

$\S$  2, 34—35  
 开关开闭时瞬间的感应电流

$\S$  2, 27—33  
 开关开闭时瞬间的感应电流

$\S$  1, 18—20  
 移动木板时瞬间的感应电流

$\S$  2, 36—38  
 当软铁棒与磁铁断续接触时, 瞬间的感应电流

$\S$  2, 39—43  
 当棒形磁铁插入或抽出时, 瞬间的感应电流

$\S$  4, 81—112  
 由于圆铜板的旋转引起的持续感应电流

图 5.5

确地断言这个似乎“虽难以表现, 但规律却极其简单”的依赖性, 需要弄清磁力线, 也就是需要以接触作用论来清楚地解释磁力和电力; 在此以后, 这项工作一直持续了二十年, 其中包



括因身体欠佳而中止研究的四年(1841—1845)在内。在发现磁电感应的第二年,法拉第又发现,“在物体内部由感应所产生的电流与该物体的电导率成正比”(《实验研究》第二辑,§ 6, 213; 1832),从而一度撤消了他不久前引进的一种设想:在感应时迴路导线处于被他叫做“电紧张状态”(electrotonic state; 《实验研究》第一辑,§ 3.60)的特殊状态之中(同书,第二辑,§ 6, 231, 242)。也就是说,不管迴路物质的性质如何,磁电感应都产生一定的电动势,而且仅仅依赖于导线对磁力线的切割(intersection)。那么,感应电动势与导线和磁力线的相对运动有什么关系呢?在他的回答中,把电介质中的静电感应解释成“连接粒子”(continguous particles)的作用,把电紧张状态假设成该连接粒子的极化状态,从而使之作为一个更加明确的概念重新出现;在通过电力线来探讨它的表现之后(1837—1838),他对磁力线的性质进行了有系统的实验研究(《实验研究》第三卷,二十八辑;1851),结果指出,“导线在移动时,无论是垂直切割磁力线也好,还是倾斜切割磁力线也好,如果把它穿过的磁力线所表现的磁力全部相加”(同上,3082,3113),则“送入电流的电量(即感应电动势)与穿过的磁力线数成正比”(同上,3115)。

在法拉第这个接触作用论成熟期间,人们从超距作用论的立场出发,进行了一系列尝试,企图根据电流元之间的力的安培定律来理解电磁感应。为此的第一个线索,是与法拉第实验的类型(ii)和(iii)相对应的楞次定律(楞次(H. F. E. Lenz),1834);也就是说,电流 $J_1$ 流过的一次迴路 $s_1$ ,在二次迴路 $s_2$ 中因两个迴路相对运动而感应的电流 $J_2$ ,具有一种倾向,使得作用于两迴路之间的“电磁”力妨碍它们的相对运动。假如其它条件都相同,那么就可以认为,这时感应的电流 $J_2$ 与两个迴路的相对速度 $v$ 成正比:  $J_2 = av$ ,  $a$ 是比例常数。当

认为有单位电流流过二次迴路  $s_2$  时, 假设一次电流  $J_1$  对迴路线元  $ds_2$  作用的“电磁”力  $\mathbf{F}$  (可由安培定律式(5.2.7)求出) 在运动方向上的分量为  $F_v = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}/v)$ , 则楞次定律要求

$$J_2 F_v ds_2 = a v F_v ds_2$$

具有与  $v$  相反的符号。

作为满足这个要求的最简单的假定, 诺埃曼(1845, 48)选择了  $a = -A F_v ds_2$ ; 因为  $J_2 F_v ds_2 = -v A (F_v ds_2)^2$ , 所以只要假设这时的常数系数  $A$  为正就可以了。这样一来, 根据欧姆定律, 若把迴路  $s_2$  的电阻写成  $R_2$ , 则给出感应电动势的非保守力的电力  $E'$  就是

$$E' = -R_2 A \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) ds_2, \quad (5.4.2)$$

感应电流便可以表示成

$$J_2 = -A \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) ds_2. \quad (5.4.3)$$

诺埃曼根据此式计算了种种特殊情况下的感应电流, 结果表明, 它们依赖于两个电流间的相互势函数式(5.3.2) 由于迴路运动而引起的变化。因为每单位时间内供给二次迴路  $s_2$  的功等于迴路  $s_2$  中产生的焦耳热, 所以

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= E' J_2 = J_2 R_2^2 = -J_2 R_2 A \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) ds_2 \\ &= -R_2 A \frac{d\phi}{dt}. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

根据能量守恒定律,  $R_2 A = 1$  (emu 制)。

对闭合迴路  $s_1$ 、 $s_2$  来说, 由韦伯的理论也可以推导出相同的结果。韦伯的理论把对迴路线元  $ds_2$  内的电单元的电动势, 看成是  $ds_1$  中的正负电荷作用到它们上面的电力在  $ds_2$  方向上的分量之差。因此, 只要研究与迴路线元的运动速度成正比的各项就可以了。由式(5.2.10a)可知, 两个迴路线元

的电荷之间,电能是

$$\begin{aligned} & \frac{e_1 e_2 c^2}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{e_1 e_2 c^2}{r} \left[ 1 - \frac{\{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_2)\}^2}{2c^2 r^2} \right], \quad (5.4.5) \end{aligned}$$

所以,若考虑两个迴路单元的正负电单元间的四种组合,则两电流间的电能就是

$$\begin{aligned} & \frac{4N_1 N_2 ds_1 ds_2}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_2) \\ &= \frac{J_1 J_2}{r^3} (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}_1)(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}_2) \\ &= -J_1 J_2 \left\{ \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r} + \frac{d^2 r}{ds_1 ds_2} ds_1 ds_2 \right\}. \quad (5.4.6) \end{aligned}$$

若把式(5.4.6)对封闭迴路  $s_1$ 、 $s_2$  进行积分,那么,舍掉其中的第二项,就会给出诺埃曼的势函数,因此,由于迴路的运动和电流随时间的变化而在  $ds_2$  中产生的电动势与式(5.4.4)是一致的。

亥姆霍兹(1847)和 W. 汤姆孙(1851)曾试图把能量守恒定律应用于安培定律来推导感应定律,但是,麦克斯韦却指出,在电磁感应的一般情况下,只用能量守恒定律还不够充分(1864; 参考 J. 汤姆逊对《电磁论》第三版,第二卷 §544 的脚注)。因而,就必须认为感应定律是电磁学中不能由其它关系推导出来的一条独立的经验定律。

在感应定律的规范化中,上述诺埃曼势函数  $\Phi$  形式上能确切地改写成(参考(5.3.2))

$$\Phi = J_1 J_2 \oint_{s_2} \oint_{s_1} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r} = J_2 \oint_{s_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_2,$$

或

$$J_1 J_2 \int_{s_2} \oint_{s_1} \text{curl}_2 \frac{d\mathbf{s}_1}{r} \cdot d\mathbf{S}_2$$

$$= J_1 J_2 \int_{S_2} \oint_{S_1} \frac{d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S}_2 = J_2 \int_{S_2} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_2),$$

可以看出，能够把该势函数作为表征法拉第的电紧张状态或穿过二次回路的磁通量的一个物理量来使用。但是，从本质上讲，对于处理非稳恒电流的电磁感应来说，这样的关系只是对稳恒电流所规定的各种概念不加分析的一般性关系。特别是如果假设给出“相应与电磁定义的磁力” $\mathbf{B}$ 的电流密度 $\mathbf{j}$ ，是满足安培回路定理(5.3.19)的，那么，由 $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{B} = 0$ 则有， $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ ，这和非稳恒电流的电荷守恒定律式(5.2.1)是有矛盾的。从而，必须重新作出定义，以便于既维持“电磁”磁力的特性 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ，又使电流密度在所有条件下都是电磁矢量。

因此，我们首先着眼于电介质上的感应现象 (dielectric induction)，正是它才使法拉第恢复了电紧张状态的想法。在明确解释电的作用时，法拉第认为感应现象是最基本的现象。这是因为，它“是电现象中最普遍的作用，与其中的任何一种现象均密切相关，具备本质而基础的第一原理的性质”(《实验研究》第一卷，第十一辑，§18, III, 1162)。法拉第接触作用论的根源，是通过这种感应现象而掌握的、由物质媒质来传送力的机理——连接粒子论，力线不过是它的具体可见的表现而已。特别是在发现磁电感应时，磁力线只是一个为了表现感应电流方向的方便手段(《实验研究》第一卷，第一辑，§4, 116)，这不过是在撒有铁粉的纸下放置磁铁来观察和描绘该曲线的尼科罗·卡贝奥<sup>1</sup> (Niccolo Cabeo)-彼得鲁斯·培雷格利纽斯<sup>2</sup> (Petrus Peregrinus)-拉·希雷<sup>3</sup> (La Hire) 工作的延续”。

1 Niccolo Cabeo: 17世纪意大利气象学家,磁学家、数学家。

2 Petrus Peregrinus: 13世纪法国医学家,磁学研究家。

3 La Hire: 17世纪法国天文学家、数学家、物理学家。——校者注



“当电解质处于液体状态时，尽管在电流的作用下它的元素容易析出，但在固态中却不会产生元素；这个一般事实的发现，开辟了”说明以上感应作用的途径（《实验研究》第一卷，第十一辑，1164）。例如，若把冰选作电解质，那么即使把电源接到冰上，它也只会带电而显示普通的感应，电流却不流动。当冰液化时，感应减小，电流通过，但是，这个“通过”却依赖于与电解质元素的移动相一致的粒子的“特殊的分子排列”，电流通过的程度和元素的析出量准确地成正比。这样，电解作用就可以看成是“在第一阶段出现感应、在第二阶段产生分解”的一种作用；而且，“电解质中一切效应都是特殊的极化状态所带来的粒子的作用”。因此，法拉第推测，“普通的感应本身在所有情况下都是连续粒子的作用，……除了通过中介物质影响之外，是绝对不能产生的”。他还申明，连接粒子这个词是在互相邻接的粒子的意义上使用的，“因为它们是不接触的，所以严格地说并不确切”。

法拉第对抗埃皮纽斯、卡文狄希、泊松等人把感应看成是超距的直线作用的权威观点，而主张连接粒子论，为此，他必须表明感应作用大体上是“曲线的”（induction in curved lines）（《实验研究》第一卷，第十一辑，§ 18, IIiv）。他让上端呈杯状的虫胶圆筒带上负电，在其顶端放置黄铜球，再使电荷输送球与黄铜球的各个部位接触，当把两者接地之后，拉开距离，用库仑扭秤测定输送球的电荷种类和力（图 5.6(a)）。结果看到，这个电总是正的，是由于接地而剩下的感应电荷于接地，只剩下了由感应产生的那一部分。当输送球的位置为 a、c、d 时，似乎可以用直线感应作用来预料它们的电荷，但是，接触位置为 b 时的电荷，从黄铜球的大小来说，却是和产生感应作用的虫胶柱的任何部分都不能用直线连结起来的一种曲线感应（同上，1218, 1219）。用金属小圆板代替黄铜球（图 5.6(b)）（甚至



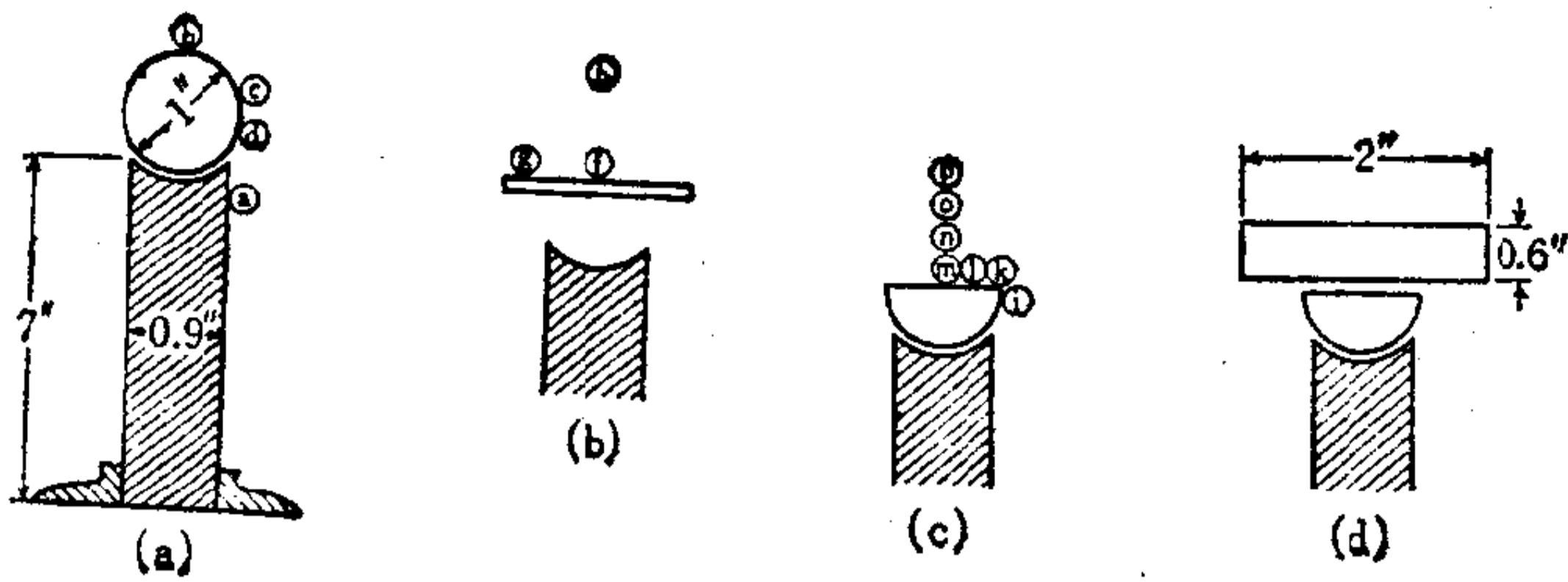


图 5.6

在情况 (c) 中的测定值

输送球位置	扭秤偏摆度
i	112°
k	108°
l	65°
m	35°
n	87°
o	108°
p	98°

对极薄的金箔来说), 这时在位置 f 上并没有给输送球电荷, 但是在靠近边上的 g、中央上方的 h 上却得到了电荷; 这样的现象否定了感应作用穿过黄铜球的可能性(同上, 1221). 当使用黄铜半圆球时, 明显地表示出感应作用的曲线性(同上, 1224)(图 5.6(c)). 输送球所显示的电力, 按 i、k、l、m 的次序依次减小, 但在 n、o 上增大, 由 p 又开始减小. 法拉第把周围的电介质由空气换成  $\text{CO}_2$  或  $\text{H}_2$ , 又把注入了液态电介体的玻璃器皿或固态电介体的薄板放在黄铜半圆球的上面(图 5.6(d)), 都得到了同样的结果(同上, 1226—1229). 因而, 就会得到这样的结论: 与感应有关的一切现象, 都是电介体的连接粒子的作用, 若使电介质处于极化及张力状态, 则由于那些力的作用, 它们在所有方向上都是相互有关的.

假如感应是连接粒子的作用,而且是电解的第一阶段,则可预料,取决于中介物质的种类,感应的电荷将会有所不同,即相对于不同物质,介电常数 (specific inductive capacity) 是不同的。按照法拉第提出的问题(《实验研究》第一卷,第十一辑,§18, II5, 1252),如果在空气中支撑的带电金属板 A 的两侧,平行而等距离地绝缘放置大小和形状完全相同的金属板 B、C,那么, A 就会在 B 和 C 上产生同等的感应;若在 AC 之间放入空气以外的其它电介质时, B 和 C 相对于 A 的关系又如何变化呢?(法拉第的介电常数是就空气而言的,至于在真空中会发生什么样的情况,他未作出判断(《实验研究》第一卷,第十三辑,§ 18, III1, 1615))。法拉第在同心球电容器的极板间充以电介质,测量同一电位差之下电容器能够蓄存的电量;在这种类型的实验中(同上,第十一辑,§ 18, II3),他针对四种固体、两种液体及二十五种气体,看到该蓄电量是空气中的  $\epsilon$  倍(同上 II5)。

到此为止,法拉第把他的感应理论的应用范围由绝缘状态中的感应现象扩大到放电现象(《实验研究》第一卷,第十二、十三辑)。这里所谓的“放电”,是与绝缘相对立的广义的放电,即传导、电解放电、火花放电、对流或输送放电等现象的总称。从连接粒子论的观点来看,绝缘也好,传导也好,都只依赖于该电介质的相同分子的作用,不过是一个共同条件或共同效应的两个极端(同书,第十二辑,§ 18, II7, 1320)。带电体所激发的物质对邻近物质所带来的影响,首先是把后者的结构粒子带入极化状态,从而使它产生感应现象。假如这个感应是非衰减的,这种情况就是完全的绝缘。极化状态保持得越好,感应作用也就越大。相反,当处于极化状态的连接粒子尚有传播外部作用力(电荷)的能力时,便会产生传导。所谓绝缘体,就是其粒子能够保持极化状态的物体,而所谓的导

体,则是其粒子不能持久极化的物体(同上,1338)。可以说,按照法拉第把感应现象当作电解的第一阶段的想法,这是必然的发展途径。放电现象也是先于它而出现的感应所产生的结果,归结为电紧张状态的程度的不同。他认为,在传导中处于极化状态的物质粒子并不位移,但在电解放电中却伴随着某种程度的位移,而在火花放电中竟伴随着其放电路径上电介质粒子的急剧位移。

在这里,所谓**极化** (polarization) 的意义是: 物体的结构粒子或微小部分, 具有与物体内的某一直线或某一方向有关的性质, 当把物体旋转使之既要保持这种性质又要将其方向变得正好相反时, 假如结构粒子的这种性质对其它各物体而言是反转的话, 那么便说结构粒子就其性质而言是极化了, 该性质构成某一特殊种类的极化状态; 总之, 当某种物理性质具有矢量的特性, 而且在该有方向量的两极 (poles) 上显示出正相反的性质时, 就说该方向量所属的物体的结构粒子是极化的。现在的情况与正负电荷有关, 是电的极化状态。按照这种说法, 上述永久磁铁的物理状态, 就应该是磁的极化状态。光线具有与其侧面有关的量, 这个量在光线的两侧是相同的, 第四章则同样把“偏振” (polarization) 的术语用于光的这种情况, 但是, 那是另一类有方向的量, 即使说成是偶极性 (dipolar) 极化亦未尝不可。在这里所讨论的, 可以说是单极性 (unipolar) 极化。

不管物质是导体还是绝缘体, 法拉第(1838)的连接粒子论都把其结构粒子全部假定为导体(《实验研究》第一卷, 第十四辑, § 20, 1669), 而且认为, 物质粒子平常并不极化, 但是, 若把带电体靠近, 则极化状态便瞬间扩展, “恰好与由多数粒子构成的绝缘的导体物质中的情况相同”(同上, 1670)。极化状态是一种被强制的状态, 物质粒子具有力图回到正常状态

的倾向(同上, 1671), 那么, 起到这个“绝缘了的传导极化部分”的作用的, 或者是物质分子, 或者是“基本粒子”(同上, 1699). “作为一个整体而极化的, 是物质的分子”, 不管它具有多么复杂的结构, “由化学亲合力结合而形成一个物质分子的所有粒子或原子, 在出现极化状态时就像一个传导物体或传导粒子那样起作用(同上, 1700). 存在于法拉第头脑中的, 仍然是在电解现象中产生的表象; 在放电发生之前的感应状态中, 电介质(如水)的极化粒子是水的分子, 但分子间的放电使“水分子分解成两个元素粒子, 氧向一方前进, 传递它在极化中得到的力(可以在与电荷相同的意义上理解它), 而氢则向另一方前进, 传递它在极化中得到的力. 然后, 它们和各自接近的下一个粒子相遇, 其结果作为一个整体形成放电”(《实验研究》第一卷, 第十二辑, § 18, II8, 1347). 因此, 他便提出了一种可以把感应中的电介质粒子比作一系列绝缘小导体的所谓“霰弹 (shot) 模型”: “用松节油或空气那样的绝缘体和霰弹般的小导体球的混合体充满带电球周围的空间, 假设小导体球相互间稍微隔开一点以便彼此绝缘, 则它们的条件和作用与我所设想的绝缘体粒子本身的条件和作用似乎会精确地相似”(同书, 第一卷, 第十四辑, § 20, 1679).

在前一节我们讲过, 坚持磁流体说的泊松在说明磁化现象时曾采用了一种模型, 电介质的这个霰弹模型和它是完全一样的. 因此, 为了在形式上构成介电媒质中的静电学, 可以用静电的术语来翻译泊松的磁化理论(汤姆孙, 1845; 莫索梯 (F. O. Mossotti), 1847, 50). 因为在电介质的极化状态中, 各霰弹的总电荷为零, 但电偶极矩却具有有限值, 所以需要假设霰散的分布非常稠密, 而且还要根据每单位体积的电偶极矩来定义**电极化矢量**  $\mathbf{P}$ . 如果使用式 (5.1.13), 则仅仅由有限体积的极化电介质, 即仅由电极化密度  $\mathbf{P}$  的分布而在电



介体外部的真空中所产生的静电势，可以用与泊松等效分布（参考(5.3.11)）相对应的表达式来确定：

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \int \sum_i P_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{r} \right) dv' \\
 &= \int \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{P_i}{r} \right) dv' \\
 &\quad - \int \frac{1}{r} \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial \xi_i} dv' \\
 &= \int \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}'}{r} - \int \frac{\text{div}' \mathbf{P}}{r} dv' \\
 &\equiv \int \frac{\sigma_P}{r} dS' + \int \frac{\rho_P}{r} dv'. \tag{5.4.7}
 \end{aligned}$$

式中，

$$\rho_P \equiv \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}'}{dS'} \tag{5.4.8a}$$

$$\rho_P \equiv -\text{div}' \mathbf{P} \tag{5.4.8b}$$

分别是假想的极化电荷的表面密度和体积密度（之所以说成“假想的”，是因为它在宏观上不可能观测）。因此，可以认为电极化的散度对静电力是有贡献的，从而能够把它包括到泊松方程的电荷中去。包含电介体的系统，即实电荷及极化电荷的体积密度  $\rho$ 、 $\rho_P$  的分布，在分布范围以外的点上所造成的静电势是

$$\nabla^2 \phi_1 = -\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi(\rho + \rho_P). \tag{5.4.9}$$

把式(5.4.8b)用于式(5.4.9)，则可得到

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho. \tag{5.4.10}$$

因此，如果把电位移或电通量密度（electric displacement） $\mathbf{D}$  定义成

$$\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \equiv \mathbf{D}, \tag{5.4.11}$$

则式(5.4.10)就可写成



$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (5.4.10a)$$

也就是说,  $\mathbf{D}$  是电力中由实电荷  $\rho$  产生的那一部分; 如式 (5.4.9) 所示, 全电力  $\mathbf{E}$  的散度是全电荷  $\rho_{\text{total}} \equiv \rho + \rho_p$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{total}}. \quad (5.4.9a)$$

假如把高斯散度定理用于式 (5.4.9a)、(5.4.10a), 就可以得到各自对应的积分型定律:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho dv + \int (-\operatorname{div} \mathbf{P}) dv \equiv q_{\text{total}} \quad (5.4.9b)$$

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho dv \equiv q. \quad (5.4.10b)$$

即使就  $\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0$  ((5.1.5)) 那样的静电力而言, 也无须要求电位移  $\mathbf{D}$  或电极化  $\mathbf{P}$  是无旋矢量。不过, 只是要求

$$\operatorname{curl} \mathbf{D} = 4\pi\operatorname{curl} \mathbf{P}. \quad (5.4.12)$$

因此, 从形式上来说, 在任意的空间点上,  $\mathbf{D}$  能由散度为实电荷密度  $\rho$  的标量势和旋度为  $\operatorname{curl} \mathbf{P}$  的矢量势推导出来。但是, 和电极化的旋度相比, 与  $\mathbf{E}$  对应的极化电荷密度, 具有更直接的物理意义。

即使对电介质内的电力, 也和求出磁铁内部的磁力一样, 如果按照把试验电荷放入电介质内部的圆柱形空腔中的方法, 那么, 当空腔是平行于外部带电体所产生的电力的一个针状空腔时, 就能忽略底面上的电极化效应, 而当空腔是垂直于外部电力的圆板状空腔时, 加到试验电荷上的力便给出媒质内的  $\mathbf{D}$ 。一般来说, 电介质内的电力也依赖于空腔形状的选择。

当与 (5.3.18) 对应的电极化和外部电力成正比时, 则有

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}. \quad (5.4.13)$$

即, 在不具有永恒电偶极矩的各向同性的电介质中(电极化率 (electric susceptibility)  $\chi$  是正系数)

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (5.4.14)$$

式中,  $\epsilon \equiv 1 + 4\pi\chi$  是(相对于真空的)媒质的**电容率或介电常数** (dielectric constant).

在上面, 我们依靠法拉第霰弹模型和泊松磁单元球模型之间的相似, 从形式上讨论了有电介质存在时的电力, 但是, 假如联想到由法拉第的“曲线感应”出发所作的讨论, 那么, 这里的  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{D}$  就必须是在空间的各点上准备好的矢量; 即必须把它们当作媒质中的力场 (field) 来看待. 关于这一点, 到后面再来研究; 当然, 法拉第还考虑到磁力是否也是“由于中间粒子的作用而向远方扩展的”力呢? 从而进行了实验研究(《实验研究》第一卷, 第十四辑, § 21). 他使用了在电磁感应中把种种物质放到磁力线中间来观察感应电流有无变化的“曲线”静电感应的磁力板. 现在, 若使棒型磁铁在两个电磁线圈的铁芯 A、B 之间移动, 就会出现感应电流 (图 5.7(a)).

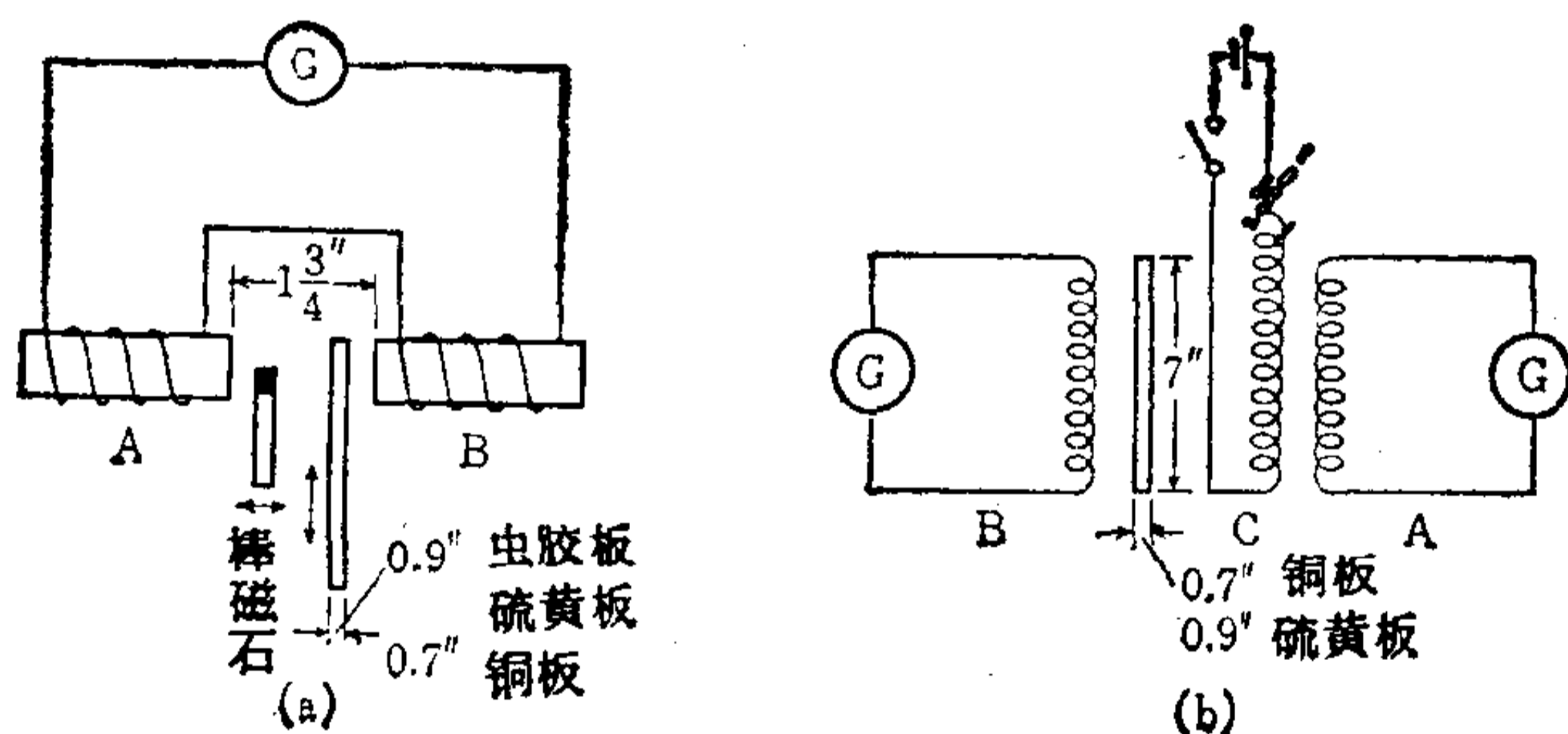


图 5.7

另外, 在检流计  $G$  的指针摆动的期间把虫胶板插入磁极之间, 又在指针返回的期间抽出来; 即使继续这个过程, 也看不到任何效应. 用硫磺板、铜板来作, 结果同样(同上, 1711-13). 插入板静止也好, 旋转也好, 都没有变化(同上, 1719). 在既能接通电流又能切断电流的线圈 C 的两侧放置线圈 A、B,

并把它们调整得以便产生同样强度的感应电流(图 5.7(b)). 接着,在 B、C 之间放入铜板或硫磺板,在 A、B 上所产生的效应也没有发生什么差别(同上, 1720—23). 其结果,得不到证据来证明中间粒子的影响. 但是,之所以不取决于中介物质的存在,也可以认为是,插入物质处于电紧张状态,如不损失感应力,就谈不上起到传播作用的可能性(同上, 1727—28);从而,把磁力看作接触作用的充分证明,似乎直到最后都没有得到. 1851年,法拉第列举以下三条,作为接触作用的判别标准: (i), 在中介媒质中变化的产生; (ii), 作用的传播在时间上的推迟; (iii), 远处的作用与接收端 (receiving end) 的存在无关. 从现代的观点来看,表示磁力是接触作用的经验事实,在宏观阶段大概也只是与第二个标准相对应的电磁波的存在.

### § 5.5 位移电流

当把安培观点推广到物质媒质中的磁力时,必须考虑在上节所看到的媒质的电性质. 同时,还必须解决唯一确定稳恒电流“电磁”力的式(5.3.3)、(5.3.19)与非稳恒电流的电荷守恒定律式(5.2.1)之间的矛盾. 为此,有两条路径可循,或者变更定义式,或者修正电流;麦克斯韦(1862)选择了后者. 由式(5.4.10a)可知,电位移  $\mathbf{D}$  的时间微分,给出法拉第意义(5.2.2b)上的电流. 若把式(5.4.10a)代入式(5.2.1),则可得到

$$\operatorname{div} \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.5.1)$$

式中,  $\mathbf{j}$  是与实电荷密度对应的实电流(传导电流)密度. 根据式(5.4.11),可以认为**位移电流** (displacement current)  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  由两部分构成:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (5.5.2)$$

**极化电流**  $\partial \mathbf{P}/\partial t$  是媒质电极化在时间上的变化，而真空中的位移电流  $\partial \mathbf{E}/\partial t$  应该归之于**真空（或以太）中的电极化** (vacuum polarization)。由式 (5.5.1) 可知，假如把位移电流加到实电流上，就能消除安培迴路定理与非稳恒电流的连续方程之间的矛盾，而且，如果使用式 (5.3.16)，则式 (5.3.19) 便可以用下式来替换：

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{B} &= \text{curl } \mathbf{H} + 4\pi \text{curl } \mathbf{M} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi(\mathbf{j} + \text{curl } \mathbf{M}). \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

也就是说，“与电磁定义相应的磁力”  $\mathbf{B}$ ，可以由作为电磁电流的全电流密度  $\mathbf{j}_{\text{total}}$  推导出来，

$$\mathbf{j}_{\text{total}} = 4\pi(\mathbf{j} + \text{curl } \mathbf{M}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (5.5.4)$$

从而能由式 (5.5.3) 和下式唯一确定：

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (5.5.5)$$

通过引进位移电流，电流就全部变成连续的，所以式 (5.5.3) 可以看成是与广义环电流相应的“电磁”力的定义。通过把电流改成全电流，从对稳恒电流推导出的式 (5.3.1c) 直到式 (5.3.20) 的一系列关系式均可全部通用，而  $\mathbf{B}$  则可由服从矢量泊松方程的矢量势  $\mathbf{A}$  推导出来。

在感应极化的情况下，“与磁极定义相应的磁力”  $\mathbf{H}$ ，相当于从全电力  $\mathbf{E}$  中把电力  $\mathbf{D}$  分离出来的那一部分，前者以全电荷为其散度，后者则以除掉极化电荷的实电荷为散度，而且， $\mathbf{H}$  对应于从全电流  $\mathbf{j}_{\text{total}}$  中除掉由磁极化产生的旋度，即除掉**磁化电流** (magnetization current)  $\mathbf{j}_m = \text{curl } \mathbf{M}$  的那个电流所给出的磁力：



$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.5.6)$$

在稳恒状态中，或在与实电流的磁作用相比可以忽略位移电流磁作用的似稳态中，式(5.5.6)归结为

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}, \quad (5.5.7)$$

它是只由实电流产生的。在永久磁化或剩余磁化中寻求磁力的起因，其表述相当于这样的情况：实电流密度  $\mathbf{j} = 0$ ，因此  $\operatorname{curl} \mathbf{H} = 0$ ，而且散度用  $\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M} = 4\pi \rho_m$  给出。所以可以允许根据磁标量势所作的处理，而式(5.5.5)则表示，磁单极子或实磁荷在自然界并不存在。

式(5.5.3)、(5.5.7)的积分形式是

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{total}} \quad (5.5.3a)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi I, \quad (5.5.7a)$$

把它们与式(5.4.9b)、(5.4.10b)进行比较，我们就会知道， $\mathbf{B}$ 起着与 $\mathbf{E}$ 相应的作用， $\mathbf{H}$ 起着与 $\mathbf{D}$ 相应的作用。这种对应关系，即使对具有不同电性质或磁性质的两个媒质界面上的行为来说，也是可以看得到的。 $\mathbf{E}$ 的切线分量和 $\mathbf{B}$ 的法线分量在边界面上是连续的，而 $\mathbf{D}$ 的法线分量和 $\mathbf{H}$ 的切线分量却表示出不连续性，其差值为边界面上的实电荷及实电流的表面密度 $\tau$ 、 $\mathbf{K}$ 的。为了看到这一点，可以这样做：首先，对 $\mathbf{E}$ 来说，考虑由平行于边界面的部分和垂直于边界面的部分构成的一个跨越边界面两侧的微小封闭曲线(图5.8(a))的线积分，对 $\mathbf{D}$ 来说，同样就跨越边界面两侧的圆柱形体积元(图5.8(b))取 $\mathbf{D}$ 的体积分，然后考虑使垂直于边界面的边或圆柱的高度各自趋于无限小的极限。若把媒质1及2上各个量的值附以下标1、2来表示，设边界面法线方向上的单位矢量为 $\mathbf{n}$ ，则有



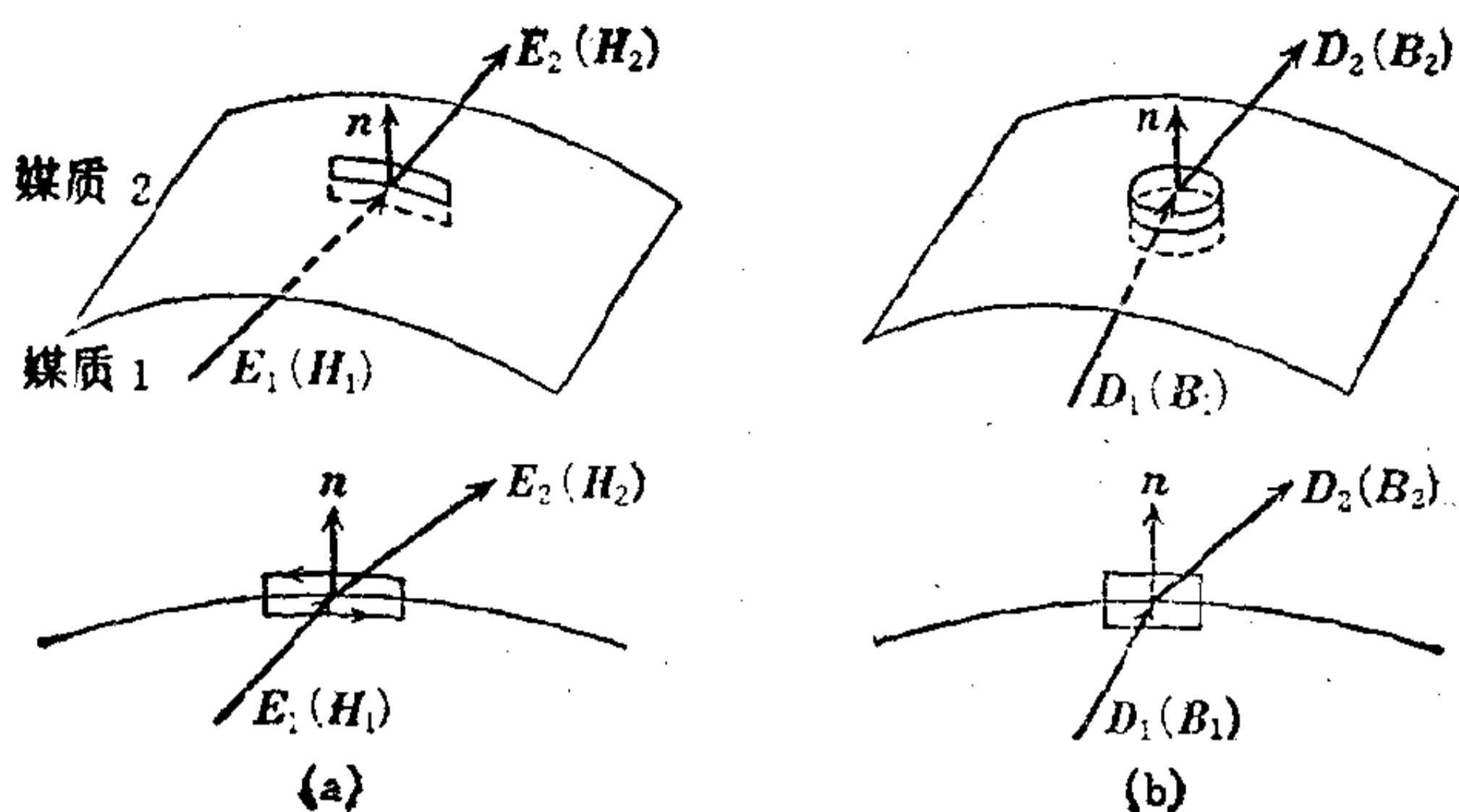


图 5.8

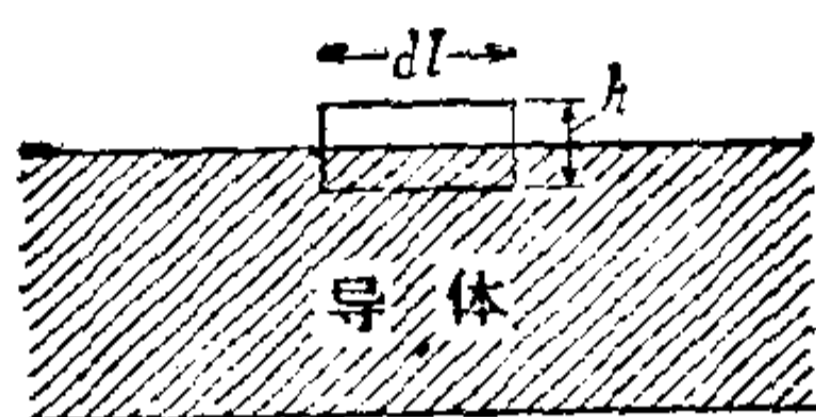


图 5.9

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 4\pi\tau, \quad (5.5.8)$$

同样,对于磁的量,由(5.5.5)、(5.5.7)亦可得到

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 4\pi\mathbf{K}. \quad (5.5.9)$$

一般来说,这些边界条件都是成立的,特别是在能把式(5.4.14)或(5.3.16a)用于保守力的情况下,式(5.5.8,9)则给出静电标量势及磁标量势的边界条件。由一种媒质向另一种媒质过渡时电特性或磁特性的不连续性,是麦克斯韦媒质理论中对电力及磁力分别引进两类物理量的一个原因。

现在,我们再回过头来讨论电磁感应。只有使用式(5.5.3)和(5.5.5)所规定的“与电磁定义相应的磁力”,才有可能由始终如一的安培观点来把本质上是非稳恒现象的电磁感应规范化。穿过由二次回路所包围的面积磁力线数,即**磁通量** (magnetic flux), 由下式确定:

$$\Phi_m \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.5.10)$$

其中，积分范围是以二次回路为边缘的任意曲面。这里使用的磁力，应该是服从边界条件式(5.5.9)的  $\mathbf{B}$ ；正如法拉第所指出的那样，这是因为感应电动势并不依赖于切割磁力线的方式。磁通量的概念，也以在空间各点已经规定出  $\mathbf{B}$  作为前提，因此，电磁感应定律就可以表示成

$$\mathcal{E} \equiv \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (5.5.11)$$

式(5.5.11)还包括由单一回路中的电流变化所产生的自感(亨利(J. Henry), 1832; 法拉第, 1834), 它对产生磁通量变化的所有方式都是成立的。

前面谈到，法拉第曾表明，给出感应电动势的非保守电力，是一个不取决于回路物质的通用量，麦克斯韦又进一步把这种非保守力的存在推广到没有导体回路的情况。它是由图5.9那样的构思设想出来的： $\mathbf{E}$  对一个边在导体内、另一个边在导体外的微小封闭曲线的线积分，在使积分回路的高度  $h$  无限减小的极限上成为零，而切线分量在导体边界面上是连续的。只要对上述积分回路能以保证式(5.5.11)，这个结果就总是成立的。因此，若把斯托克斯定理用于式(5.5.11)，则由

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int \text{curl} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

即可得到广义法拉第感应定律：

$$\text{curl} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.5.12)$$

此式是在非稳恒情况下对式(5.1.5)的修正，这是由于磁力随

时间的变化要引起感应电动势。

另一方面，赫兹（1887）指出，绝缘体内感应极化随时间的变化会产生电动势，这是位移电流假说的一个经验上的证据，而麦克斯韦本人则把这种位移电流列为他的理论的“主要特征之一”（《电磁论》第二卷，§ 610）。为了看到绝缘体中静电感应及电磁作用都伴随着电的扰动，赫兹使用了极其迅速的电振动。被这种振动状态激发起来的一次导体，对二次导体给予感应作用；要观察感应的电扰动，可在二次导体中设置火花间隙。为了使测量精确。他把二者的振动周期调整成一样。这就是所谓的赫兹振子和谐振器（其定量处理详后）。若让二次导体充分靠近一次导体，则在该位置上作用于二次导体各部分上的力就互相抵消，这时看不到火花放电。但是，若把其它导体靠近，这个平衡便遭到破坏，火花就会放出；把放电间隙的位置错开一点，找到新的平衡位置，就会知道在第三个导体上感应的电动势的大小。因此，这样的系统起到了一个感应天平（induction-balance）的作用。如果位移电流的假说是正确的，那么在把大容量的绝缘体靠近时，也会预料到同样的效应。这是因为，在一次导体的振动非常迅速的情况下，大容量绝缘体所感应的电动势至少也应该和细金属棒上的感应电动势达到同一量级。

在赫兹使用的装置（图 5.10）中，一次导体是把 40cm 见方的黄铜板 A, A' 用长度为 70cm、直径为 0.5cm 的铜线连结起来构成的。在它的中央利用黄铜球留着 3/4cm 宽的火花间隙。如果把来自强力感应线圈的放电加到它上面，那么，开始时 A、A' 带异性电，接着互相放电，而在 A、A' 上产生特有的振动（周期约为  $10^{-8}$  秒）。二次导体 B 是用直径 2mm 的铜线做成的半径为 35cm 的圆环， $f$  是在  $1 \sim 10^{-2}$ mm 的范围内可调的放电间隙。B 能围绕轴 mn 旋转，这个轴在 AA' 面内，

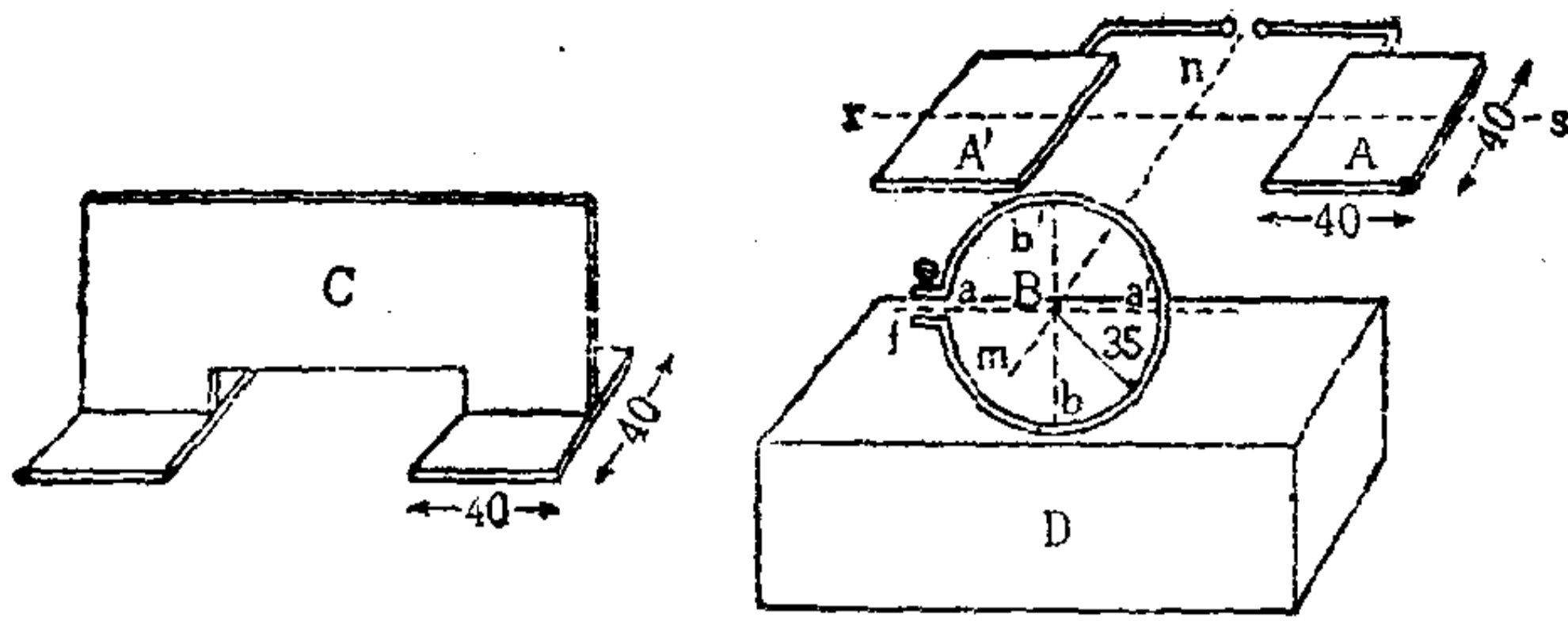


图 5.10

物 质	容积 (cm <sup>3</sup> )	$f$ 绕 $aa'$ 的旋转角
沥青	$140^L \times 60^H \times 40^W$	$31^\circ 23'$
从煤中提取的人工沥青	$140^L \times 60^H \times 40^W$	$21^\circ 13'$
纸	$75 \times 35 \times 20$	$8^\circ$
完全干燥的密质木材		$10^\circ$
砂岩(实验室的柱)		$20^\circ$
硫磺	$70 \times 35 \times 20$	$13^\circ \sim 14^\circ$
石蜡	$70 \times 35 \times 20$	$7^\circ$
汽油	$70 \times 35 \times 20$	$7^\circ$
	(45l)	(在空容器中 $2^\circ$ )

通过圆环中心而垂直于圆环面。适当选择装置的几何尺寸,使得一次、二次导体的振动周期一致。当  $f$  位于  $AA'$  面内时,也就是在  $a, a'$  上时,这个感应天平处于平衡位置。现在,如果把  $B$  多次旋转,则短火花便开始飞出,在最高点  $b'$  及最低点  $b$ ,火花达到最大尺寸 ( $\sim 3\text{mm}$ )。

赫兹首先研究了把导体  $C$  从上方靠近的情况,接着再把该装置放于大容量的绝缘体  $D$  之上。如图中附表所示,其结果证明,位移电流是存在的。表中有的是两个数值,前一个数值是使绝缘体的前沿与  $B$  相一致的情况,后一个数值是把装置向前拉出,使之和一次导体的中心线  $rs$  相一致的情况。



## § 5.6 似稳恒现象的接触作用论解释

在建立电磁现象的接触作用论的理论时，首先有以下两个问题。第一，在接触作用论中，互相以电力或磁力作用的两个物体之间的空间，必须被传播力的媒质所充满，这种媒质或者是有重量的物质，或者是以太。因为物体间的能量传输也是通过这种媒质进行的，所以传播媒质必须具有能量。现在，我们把电力或磁力影响下的范围叫作电力或磁力的场，即**电场或磁场**，假如指定它们给出的电力或磁力的大小和方向，这些场即可由范围内的各点来确定，那么，场就必须具有能量。其次，这种传播媒质不仅具有能量，而且还必须处于某种张力状态中；这是因为，有质动力的作用（ponderomotive action）也依靠这种媒质使物体受到影响。这个张力状态，正是法拉第使用了力线组才使之直观化的。在电磁学创建期间，企图使法拉第这种接触作用的现象论重新登场的各种传播媒质的力学模型，是根据物理上或数学上的相似提出来的。我们在这里打算撇开模型的研究，而从接触作用的立场出发，重新评价迄今为止已经看到的经验规律及超距作用论的结论，以便求出电场及磁场的能量和应力张量的表达式。

### a) 静电场的能量和应力张量

为了求出由电荷分布  $\rho$  产生的电场的能量密度，可以考虑把电荷移动无限小距离  $\delta\rho$  时的能量变化  $\delta U$ ，这对有质动力的约束条件来说并不做功。假设与  $\rho$  相对应的静电势为  $\phi$ ，则由式 (5.4.10a) 可知

$$\begin{aligned}\delta U &= \int \phi \delta\rho dv = \frac{1}{4\pi} \int \phi \operatorname{div}(\delta\mathbf{D}) dv \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}[(\delta\mathbf{D} \cdot \phi)] dv\end{aligned}$$



$$-\frac{1}{4\pi} \int \delta \mathbf{D} \cdot \text{grad} \phi dv.$$

如果电荷分布  $\rho$  被限制在有限范围内,那么,第一项对整个空间的积分为零,从而可以得到

$$\delta U = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}}{4\pi} dv. \quad (5.6.1)$$

在以太(真空)中 ( $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ ) 或在式 (5.4.14) 成立的情况下,能把式 (5.6.1) 从 0 积分到  $\mathbf{E}$ , 结果是

$$U = \int \frac{E^2}{8\pi} dv \quad (5.6.2)$$

或

$$U = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} dv. \quad (5.6.3)$$

不过,式 (5.6.3) 没有考虑物质的介电常数  $\epsilon$  对温度的依赖性. 在这个意义上,也就是在处理等温过程;从热力学来看, $U$  相当于自由能 (参考本讲座第二卷《经典物理学 II》第十一章). 设  $T$  为绝对温度,则总能量可用下式确定

$$U_{\text{total}} = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} \frac{1}{\epsilon} \frac{d(T\epsilon)}{dT} dv, \quad (5.6.4)$$

但在经典电磁学的处理范围内,大部分情况都可以使用式 (5.6.3).

在应力作用下,弹性体具有力学能量;与此相同,在这里我们也能定义力的体密度(作用于电介质单位体积上的力)  $\mathbf{f}$  和该力是其散度的应力张量. 因此,若引进不致改变静电状态的微小的假想速度  $\mathbf{u}$ ,再使用能量原理,则场的能量在时间上的变化(等温的)形式上可以写成

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dv = \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{\rho} + \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{\epsilon}. \quad (5.6.5)$$

由

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{\varepsilon} = \int \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} dv,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{\rho} = - \int \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dv$$

可知

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int \left( \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) dv. \quad (5.6.6)$$

当  $\varepsilon$  是质量密度  $g$  的单值函数时, 根据该假想过程中的电荷守恒定律  $(\partial \rho / \partial t) = -\text{div}(\rho \mathbf{u})$  和质量守恒定律  $(\partial g / \partial t) = -\text{div}(g \mathbf{u})$ , 式 (5.6.6) 就成为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \iint \left[ -\rho \mathbf{E} + \frac{E^2}{8\pi} \text{grad} \varepsilon - \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left( E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial g} g \right) \right] \cdot \mathbf{u} dv. \quad (5.6.7)$$

因此, 力的体密度是

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \text{grad} \varepsilon - \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left( E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial g} g \right). \quad (5.6.8)$$

$\mathbf{f}$  的第一项是与实电荷相应的静电力, 第二项表示电介体的非均匀性所产生的贡献, 第三项表示**电致伸缩** (electrostriction). 式 (5.6.8) 可以写成

$$f_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}^{(e)}}{\partial x_j}, \quad (5.6.9)$$

象这样的麦克斯韦应力张量是

$$T_{ij}^{(e)} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left[ E_i E_j - \frac{\delta_{ij}}{2} \left( 1 - \frac{g}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial g} \right) \times \sum_k E_k E_k \right]. \quad (5.6.10)$$

由高斯散度定理则有

$$\int f_i dv = \sum_i \int \frac{\partial T_{ii}^{(e)}}{\partial x_i} dv = \sum_i \int T_{ii}^{(e)} dS_i, \quad (5.6.11)$$

所以,作用于某范围的体积力,等于穿过该界面各面积元传播的表面力.

当  $(g/\varepsilon)(\partial\varepsilon/\partial g) = 0$  时,解本征方程  $|T_{ij}^{(e)} - \delta_{ij}\lambda| = 0$  求出对称张量  $T_{ij}^{(e)}$  的本征值,则有

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2, \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\varepsilon}{2\pi} E^2. \quad (5.6.12)$$

与  $\lambda_1$  对应的主轴和  $\mathbf{E}$  平行,与重根  $\lambda_2, \lambda_3$  对应的主轴和  $\mathbf{E}$  垂直. 也就是说,电场传播的是与场方向平行的张力  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} / 8\pi$  和与场方向垂直的压力  $-\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} / 8\pi$ . 特别是在两个点电荷的情况下,假如就某一盒状范围对式 (5.6.11) 进行积分,即可得到库仑定律;该盒的两个面位于两电荷之间,与两个电荷对称,另两个面位于无限远处. 以上结果符合法拉第对电力线的性质和库仑力所作的说明(《实验研究》第一卷,第十一辑, § 18, 1297).

#### b) 静磁场的能量和应力张量

由安培的观点可以研究磁性;与此相应,为了求得静磁场的能量密度,必须考虑使电流流过某一回路时应该供给的能量. 我们把回路刚性地固定在空间,而且假设对有质动力的约束条件来说不作任何功. 如果回路的电阻为  $R$ 、某一时刻流过的电流的强度为  $J$ ,那么,根据法拉第感应定律,应该由外部供给的功率是

$$\varepsilon J = RJ^2 + J \frac{d\Phi}{dt}.$$

因为第一项是焦耳热,所以,按第二项来计算,在无限小的变化期间供给场的能量是

$$U_m = J\delta\Phi = J \int \delta\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint J\delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

当  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  时, 电流密度  $\mathbf{j}$  的体积分  $\int \mathbf{j} dv$  能写成线电流  $J d\mathbf{S}$  的积分之和, 所以上式可以写成

$$U_m = \int \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dv.$$

在似稳恒的情况下, 位移电流可以忽略不计, 使用式 (5.5.7), 对于分布在有限范围内的稳恒电流来说, 可以得到和电场的情况同样的结果

$$U_m = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dv. \quad (5.6.13)$$

当式 (5.3.16a) 成立时, 则有

$$U_m = \int \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} dv. \quad (5.6.14)$$

有关导磁率  $\mu$  对温度的依赖性, 和电场的情况是一样的。

用与电场的情况相同的作法, 也可以推导磁体积力。以下的讨论限于没有剩磁, 而且在  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  之间有线性关系 (5.3.16a) 的情况。

这时,

$$\frac{dU_m}{dt} = \int \frac{\mathbf{H}}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv + \int \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial t} dv. \quad (5.6.15)$$

在这里, 若忽略磁致伸缩, 则假想速度  $\mathbf{u}$  对导磁率  $\mu$  的影响效果就是  $\partial \mu / \partial t = -\mathbf{u} \cdot \text{grad} \mu$ , 但是, 当改变  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  的形式时, 它必须依赖于运动媒质中的感应定律

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{D\mathbf{B}}{Dt},$$

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{curl}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mathbf{u} \text{div} \mathbf{B} \quad (5.6.16)$$

(参考 Panofsky-Phillips 《经典电磁学》第九章)。使用式 (5.5.7), 则式 (5.6.15) 就成为

$$-\frac{dU_m}{dt} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dv + \int \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u} dv \quad (5.6.17)$$

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{8\pi} H^2 \text{grad} \mu. \quad (5.6.18)$$

式(5.6.17)的第一项,叫做**热化学活性** (thermochemical activity),是由不可逆热损耗和对抗电动势所作的功构成的。

因此,在电场和磁场同时存在的情况下,对以速度  $\mathbf{v}$  运动的、电荷密度为  $\rho$  的带电体上所给予的全部力学作用的密度就是

$$\mathbf{f} = \rho \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (5.6.19)$$

这个力叫做**洛伦兹力**(H. A., 洛伦兹, 1892)。

磁场的应力张量,在形式上与电场的应力张量完全相同,除了磁致伸缩的项以外,它是用下式确定的:

$$T_{ij}^{(m)} = \frac{1}{4\pi} \left( H_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} \sum_k H_k B_k \right). \quad (5.6.20)$$

因此,磁场传播的是平行于磁场方向的张力  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/8\pi$  和垂直于磁场方向的压力  $-\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/8\pi$ ,这个结论符合法拉第对磁力线的研究。

以上的讨论,没有包含任何新的经验因素,只不过是把用超距作用论已经知道了的情况以接触作用论进行解释罢了。

## § 5.7 电磁场的基本方程组 (I)

在构成能适用于非稳恒电磁现象的接触作用论的通用方程组时,麦克斯韦把拉格朗日形式 (§ 2.7) 中的  $n$  自由度力学系统和由许多电流回路构成的系统进行了比较 (《电磁论》第二卷,第四部,第 V—IX 节)。对似稳恒现象的力学模型的研究(1861),已经找到了与法拉第接触作用的现象论相适合的



机理；或许可以说，他正是由此出发，和更抽象的力学系统进行类比。若把电流回路系统看成动力学体系，则该力学系统的广义速度就会与电流相对应。如果首先选择稳恒的封闭电流，那么，对应于该速度的广义坐标在拉格朗日方程组中是不会出现的。因此，该力学系统的动能，就成为电流的二次齐次函数，其系数仅仅依赖于回路的形状和相对位置。如果通过实验或其它方式知道了这个系数，那么，按照拉格朗日的作法，就可以推导出电动势及“电磁”力的表达式。其次，如果根据二次回路的各种配置来对场进行研究，则“电磁”动量 (electromagnetic momentum；它是由于把电流全部迅速地取掉而在场的点上所产生的电动势的强度对时间的积分) 就可以用一个矢量  $\mathbf{A}$  来表示，这个矢量是“按电磁定义的磁力”的矢量势。显然，回路的“电磁”动量是用  $\mathbf{A}$  对于回路的线积分来表示的，如果把这个线积分换成另一个矢量  $\mathbf{B}$  的面积分，就能描述由于导体运动所引起的感应现象以及与“电磁”力有关的现象。假若电流的磁作用是具有这种势的，那么，在数学上就能给出与奥斯忒、安培、法拉第等人所发现的各种现象有关的各个主要量之间的关系式。把同电介质中的电极化、导体中的传导、磁性体中的磁化等有关的关系式与它加到一起，就是表 5.3 中由麦克斯韦本人提出来的方程组。

由此，在某种程度上似乎可以推测出麦克斯韦所描述的电磁现象的框架。在其中，用电动势的方程来代替电场的方程，大概是为了强调电动力学的立场吧。而且，势函数是和场的量并列使用的；特别是矢量势  $\mathbf{A}$ ，我们曾多次指出，是麦克斯韦当成一个在法拉第力线的数学规范化中确定电紧张状态的量，与其说它是由这个过程产生的，倒不如说是根据麦克斯韦对矢量的想法而来的。麦克斯韦把矢量分成两类，一类是对于线来定义的，另一类是对于面积来定义的，即分成了强度

表 5.3

麦克斯韦(1864) 《电磁场动力论》第一部分和第三部分		麦克斯韦(1873) 《电磁论》第三部第四章	
(A)、电位移、实电流、全电流之间的关系	$C = K + \dot{D}$	(A) $B = \text{curl} A$	磁感应方程 ( $\text{div} A = 0$ )
(B)、磁力方程式 磁力线和迴路的感应系数之间的关系 (根据感应定律得出)	$\mu H = \text{curl} A$	(B) $E = v \times B - \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad} \phi$	电动势方程
(C)、电流方程式 电流强度及其磁效应之间的关系 (emu)	$\text{curl} H = 4\pi C$	(C) $F = C \times B + eE - m \nabla \Omega$	“电磁”力方程 ( $m = \text{div} I$ ) ( $H = -\nabla \Omega$ )
(D)、电动势方程式 由于物体在场中运动而在物体中产生的电动势、场本身的变化、以及由势的某一部分到另一部分的静电势变化	$E = \mu [U \times H] - \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad} \phi$	(D) $B = H + 4\pi I$	磁化方程
(E)、电弹性 (electric elasticity) 方程 电位移与产生它的电动势之间的关系	$E = kD$	(E) $4\pi C = \text{curl} H$	电流方程
(F)、电阻方程式 电流与产生它的电动势之间的关系	$E = -\rho K$	(F) $D = \frac{K}{4\pi} E$	电位移方程
(G)、自由电荷方程式 任意一点上自由电荷的量与它附近的电位移的关系	$e + \text{div} D = 0$	(G) $K = CE$	传导电流方程
(H)、连续方程式 自由电荷的增减与它附近的电流的关系	$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} K = 0$	(H) $C = K + \dot{D}$	全电流方程
		(I) $C = (C + \frac{K}{4\pi} \frac{d}{dt}) E$	
		(J) $e = \text{div} D$	
		(K) $\sigma = n_1 D_1 + n_2 D_2$	
		(L) $B = \mu H$ $m = \text{div} I$ $H = -\text{grad} \Omega$	

符号:  $C$ : 全电流;  $K$ : 传导电流;  $\mu$ : 导磁率;  $\psi$ : 静电势;  $E$ : 电动势强度;  $k$ : 电动势与电位移之比;  $e$ : 场的单位体积中包含的自由正电荷的量;  $\rho$ : 每单位体积的电阻率

$F$ : 有质动力;  $m$ : 磁荷密度;  $\Omega$ : 磁标量势;  $I$ : 磁化强度;  $K$ : 介电常数;  $C$ : 电导率;  $e$ : 电荷密度;  $\sigma$ : 面电荷密度;  $n_1, n_2$ : 在  $D_1, D_2$  媒质的内向法线;  $m$ : 磁荷密度

单位制仍旧是麦克斯韦采用过的单位制

(intensity) 和通量 (flux), 他假设, 前者取线积分, 后者取面积分(《电磁论》§ 12). 在麦克斯韦的以上分析中, 迴路的“电磁”动量用  $\mathbf{A}$  对迴路的线积分来确定, 然后再根据斯托克斯定理过渡到  $\mathbf{B}$  的面积分. 因此, 似乎应该把  $\mathbf{A}$  包括到前一个范畴, 即力的范畴中去(同书, § 592).

a) 亥姆霍兹-斯托克斯-勃鲁曼特定理

在这里, 我们根据矢量分析中的定理式 (3.6.57), 来整理一下电磁现象的各个定律. 首先, 把这个定理改写成适合以下讨论的形式. 假如矢量场的旋度和散度在空间所有点上都是作为坐标的函数给出的, 而总发散量和散度在无限远点上为零, 那么, 这个矢量场在空间各处都唯一确定. 现在, 假设考虑一个矢量场  $\mathbf{V}$ , 其散度为

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = s, \quad (5.7.1)$$

旋度为

$$\operatorname{curl} \mathbf{V} = \mathbf{c}. \quad (5.7.2)$$

为了使该旋度不致于和恒等式  $\operatorname{div} \operatorname{curl} = 0$  相矛盾, 必须有

$$\operatorname{div} \mathbf{c} = 0. \quad (5.7.2a)$$

因此, 若令

$$\mathbf{V} = -\operatorname{grad} \phi + \operatorname{curl} \mathbf{A} \quad (5.7.3)$$

$$\begin{aligned} \phi(x_i) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{S(x'_i)}{r(x_i, x'_i)} dv' \\ &\equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{S}{r} dv' \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x_i) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{c}(x'_i)}{r(x_i, x'_i)} dv' \\ &\equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{c}}{r} dv', \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

则式 (5.7.3) 的  $\mathbf{V}$  满足式 (5.7.1.2). 式中,

$$r(x_i, x'_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2}$$

是场的点  $x_i(x, y, z)$  和发散点  $x'_i(x', y', z')$  之间的距离。假设有两个解  $V_1, V_2$  满足(5.7.1.2), 如果作出二者之差

$$W = V_1 - V_2,$$

则  $W$  在空间到处都是  $\operatorname{div} W = \operatorname{curl} W = 0$ , 而在无限远处为  $W = 0$ , 所以应该存在着某一个函数  $\phi$ , 它的梯度  $-\operatorname{grad}\phi$  可以给出  $W$ , 若把高斯散度定理用于矢量  $\phi \operatorname{grad}\phi$ , 就可以得到

$$\int (W)^2 dv \equiv 0;$$

由此可知,  $V$  是唯一确定的。

这个定理也可以叙述如下(斯托克斯, 1856; 勃鲁曼特, 1905)。假如矢量场  $V$  在整个空间是连续的, 而且在无限远点上  $V$  和  $V$  的一阶微分为 0, 那么,  $V$  就可以唯一地分解成

$$V = U + W; \operatorname{curl} U = 0, \operatorname{div} W = 0. \quad (5.7.6)$$

所以

$$\operatorname{div} U = \operatorname{div} V, \operatorname{curl} W = \operatorname{curl} V. \quad (5.7.7)$$

因此, 假如构成一个最一般的方程组, 可以给出散度和旋度来作为描述电磁场的基本矢量, 那么, 它们的矢量场就能根据以上定理唯一确定。

#### b) 场方程和物质方程

假设在空间中由于电荷的存在而产生的一种激发状态, 即电磁场, 可以用**电场强度** (electric field intensity)  $E$  和**磁感应强度** (汤姆孙的“与电磁定义相应的磁力”)  $B$  来表示。为了描述这些场对物质产生的效应, 必须引进辅助的矢量场: **电位移**  $D$ 、**磁场强度** (“与磁极定义相应的磁力”)  $H$  和**实电流密度**  $j$ 。我们假设, 这五个矢量场的时间导数及空间导数,

在它们附近媒质的物理性质都是连续的所有点上，满足以下方程：

$$((5.5.5)) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.7.8)$$

$$((5.4.10a)) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (5.7.9)$$

$$((5.5.12)) \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.7.10)$$

$$((5.5.6)) \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.7.11)$$

式 (5.7.9) 表示实电荷密度的定义式；如前所述，式 (5.7.8) 意味着磁单极子是不存在的。这些方程可以分成包含  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  的两个齐次方程 (5.7.8.10) 和包含  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$  的两个非齐次方程 (5.7.9.11)；而满足其中包含  $\mathbf{j}$ 、 $\rho$  的非齐次方程组的 ( $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ )，可以看成是表示物质影响的部分。电荷守恒定律 (连续方程) 能够由这两个式子推导出来：

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{1}{4\pi c} \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

在运动媒质的电动力学中， $\mathbf{j}$  和  $\rho/c$  是作为四维矢量变换的，而 ( $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ ) 和 ( $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ ) 则各自作为六维矢量变换 (本讲座第二卷《经典物理学 II》第七章)。

但是，仅仅用这些方程并不能根据上述定理把场唯一地确定下来，尚须补充一些关系式，用来描述物质在电磁场影响下的行为。这些方程叫做 **物质方程** (material equations) 或 **结构方程** (constitutive relations)。

在物质是各向同性的，而且是静止或进行极缓慢运动的情况下，可以用下列方程作为物质方程：

$$((5.4.1)) \quad c\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \quad (5.7.12)$$

$$((5.4.14)) \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (5.7.13)$$

$$((5.3.16a)) \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (5.7.14)$$



在各向异性的媒质中,电极化  $\mathbf{P}$  不平行于  $\mathbf{E}$ ,但是,假如各分量仍然与  $\mathbf{E}$  成正比,则  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  只限于线性关系,电极化率也好,介电常数也好,都是对称张量:

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j. \quad (5.7.15)$$

物质宏观的电磁性质,由物质方程中出现的参数来表征,但是,如 § 5.6 所述,这些参数对温度有依赖性. 我们可以用  $\sigma \neq 0$  或  $\sigma = 0$  (或者小得能忽略不计)把物质分成电导体和绝缘体或电介质,在良导体中,电导率随着温度的升高而减小,而在**半导体** (semi-conductor) 中,它却在很宽的范围内随温度一起增大. 电介质的电磁特性完全根据  $\epsilon$  和  $\mu$  来确定. 一般的物质导磁率  $\mu$  都近似等于1,导磁率与1相差很大的物质总称为磁性体;而  $\mu > 1$  的物质称为**顺磁体** (paramagnetic substance)  $\mu < 1$  的物质称为**抗磁体** (diamagnetic substance). 显示磁滞现象的**铁磁体**,具有格外大的  $\mu$  值,但在物质特有的某个温度(居里点)以上,其行为却象顺磁体. 然而,在具有这种永久磁化(固有磁矩)的物质中,或在具有永久电极化(固有电矩)的物质(驻极电介质)中,不能使用乘法型物质方程,而必须使用加法型物质方程(式 (5.3.16)、(5.4.11)). 对于以自旋配置方式及其它量子效应为基础的现象,反铁磁性、超导体等等,必须采取微观的研究方法. 一般来说,  $\sigma$ 、 $\epsilon$ 、 $\mu$  不依赖于场的强度,但在场非常强的情况下,应该把场的量的高次项包括到物质方程中去. 例如,在激光射线场中, $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  的关系就是非线性的 (§ 5.9 (c)).

### c) 电磁能量和电磁动量

由式 (5.7.10) 和  $\mathbf{H}$  的标积减去式 (5.7.11) 和  $\mathbf{E}$  的标积,可以得到

$$\mathbf{H} \cdot \text{curl } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{curl } \mathbf{H}$$

$$+ \frac{1}{c} \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + 4\pi \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0,$$

把此式变换一下,就会在形式上给出麦克斯韦方程组(5.7.8—11)的一个能量积分:

$$\frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}) + c \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \operatorname{div}_c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}{4\pi} = 0. \quad (5.7.16)$$

当可以应用线性的物质方程时,取式(5.7.16)的体积分,再使用高斯散度定理,则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{3\pi} dv + \int c \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dv + \int \frac{c[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}{4\pi} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (5.7.17)$$

如果由§5.6的结论,把第一项的被积分函数看成电磁能量,则式(5.7.16)就表示能量守恒定律,而坡印廷矢量

$$\mathbf{N} \equiv \frac{c[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}{4\pi} \quad (5.7.18)$$

也能解释成是通过积分范围的表面每单位面积流过的能通量(坡印廷(J. H. Poynting); 1884).

从电磁能量密度的形式来看,当对场的时间变化不加任何限制时,可以预料体积力也能由应力张量式(5.6.10)及(5.6.20)之和的散度推导出来.若忽略电致伸缩和磁致伸缩的那些项,再用式(5.7.8—11)来改写,那么它就成了

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{1}{4\pi} \left( E_i \sum_j \frac{\partial D_j}{\partial x_j} \right. \\ &+ \sum_j D_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \\ &\left. - \sum_j D_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \sum_j H_i \frac{\partial B_j}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_j B_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} H^2 \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \\
& - \sum_j B_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \Big) = \left[ \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right. \\
& - \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \text{grad} \epsilon - \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2 \text{grad} \mu \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{4\pi c} \right]_i. \quad (5.7.19)
\end{aligned}$$

在似稳恒情况下,  $-\text{div} \mathbf{T}$  给出体积力密度(参考(5.6.8, 18))而  $\int \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}$  则可以看作该系统的力学动量穿过表面  $S$  的流动, 因此就有

$$\begin{aligned}
-\int \text{div} \mathbf{T} dv &= -\int \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{4\pi c} dv,
\end{aligned}$$

即

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\int \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{4\pi c} dv, \quad (5.7.20)$$

在场于无限远处为零的孤立系统中, 用  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  给出体积力的系统的力学动量  $\mathbf{p}$ , 与

$$\int \{(\mathbf{D} \times \mathbf{B})/4\pi c\} dv$$

之和是守恒的. 因此就必须对电磁场给以动量. 由于这个电磁动量密度  $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/4\pi c$  不依赖于电荷的有无, 所以即使在真空中也是作为  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi c = \mathbf{N}/c^2$  而存在的. 假如认为真空被以太所充满, 那么就必须把真空中的位移电流看成以太的运动, 正如把真空中场的能量归结为以太的应力一样, 还必须把电磁动量当作电磁场所产生的以太的力学动量. 而且, 假设电磁场具有电磁动量, 那么就能定义与它的线动量密

度  $\mathbf{D} \times \mathbf{B}/4\pi c$  相对应的角动量密度  $\mathbf{r} \times [\mathbf{D} \times \mathbf{B}]/4\pi c$ . 就它与力学角动量密度  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  的和而言, 孤立系统的角动量守恒定律是成立的.

d) 电磁波的波动方程和光的电磁学解释

可以说, 就稳恒及以稳恒现象而言, 电磁的接触作用论, 不过是超距作用论的结论的再解释 (§ 5.6). 它对非稳恒现象预言了独特的效应, 该预言的实际证明渐渐地加强了人们对麦克斯韦理论的信赖. 下面, 我们研究一下基本方程组的几个结论.

在线性物质方程(5.7.13—15)成立的静止媒质中, 如果把场方程 (5.7.8—11) 组合起来, 就能对单一的场的量来推导二阶偏微分方程. 取式 (5.7.10) 的旋度 (curl), 若使用式 (5.7.11), 即可得到

$$\text{curl} \left( \frac{1}{\mu} \text{curl} \mathbf{E} \right) = -\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (5.7.21)$$

现在, 如果不存在实电荷, 则由式 (5.7.9) 可知,

$$\text{div} \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot (1/\epsilon) \text{grad} \epsilon = -\mathbf{E} \cdot \text{grad}(\ln \epsilon),$$

此外假若也无外电动势作用, 那么式 (5.7.21) 就可以写成

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \text{grad} \mu \times \text{curl} \mathbf{E} + \text{grad}[\mathbf{E} \cdot \text{grad}(\ln \epsilon)] \\ = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.7.22)$$

当媒质是各向同性的均匀媒质时, 上式成了

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.7.23)$$

右边两项分别来源于位移电流和传导电流, 其中哪一项重要, 则决定于场随时间变化的方式和媒质的性质. 若考虑一个随着时间调谐变化的电场

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (5.7.24)$$

则式 (5.7.23) 就归结为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \left(1 + \frac{4\pi\sigma i}{\epsilon\omega}\right) \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0. \quad (5.7.23a)$$

其中,媒质的弛豫时间 (relaxation time)  $\tau_r \equiv \epsilon/4\pi\sigma$ , 决定解的性质.  $\tau_r$  是当电流分布中起初有非稳恒部分  $\mathbf{j}_0$  时, 在产生电荷流动之后, 按下列规律变化, 一直达到稳恒电流  $\mathbf{j}$  为止所需要的时间:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_0 e^{-t/\tau_r}, \quad \text{或} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = (-\text{div} \mathbf{j}_0) e^{-t/\tau_r}, \quad (5.7.25)$$

这个时间对该媒质是特有的(为了推导式 (5.7.25), 只要根据式 (5.7.12, 13), 使用在非保守场  $\mathbf{E}'$  不存在的点上成立的关系式  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = (\epsilon c/\sigma) \mathbf{j}$ , 把由式(5.7.9)和电荷守恒定律得到的  $(1/4\pi c)(\partial \mathbf{D}/\partial t) + \mathbf{j} = \mathbf{j}_s$ , 改写成  $\mathbf{j}$  随时间变化的方程就可以了). 在金属中,  $\tau_r \approx 10^{-14}$  秒, 对低于可见光范围的频率来说(参考表 4.1) 可以忽略位移电流项, 因而式 (5.7.23) 就变成扩散方程, 但是, 在均匀的介电媒质(包括真空在内)中却能省略传导电流项, 从而得到齐次波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (5.7.26)$$

在同样条件下, 还能推导出

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (5.7.27)$$

式(5.7.26, 27)型的方程, 具有平面波或球面波的解, 其传播速度可由下式确定:

$$v = \frac{d}{\sqrt{\epsilon\mu}}; \quad (5.7.28)$$

这是我们曾经在 § 3.6 中看到的结论. 实际上, 赫兹 (1887, 88, 89) 证实, 由于感应线圈的放电而产生的极其迅速的电磁



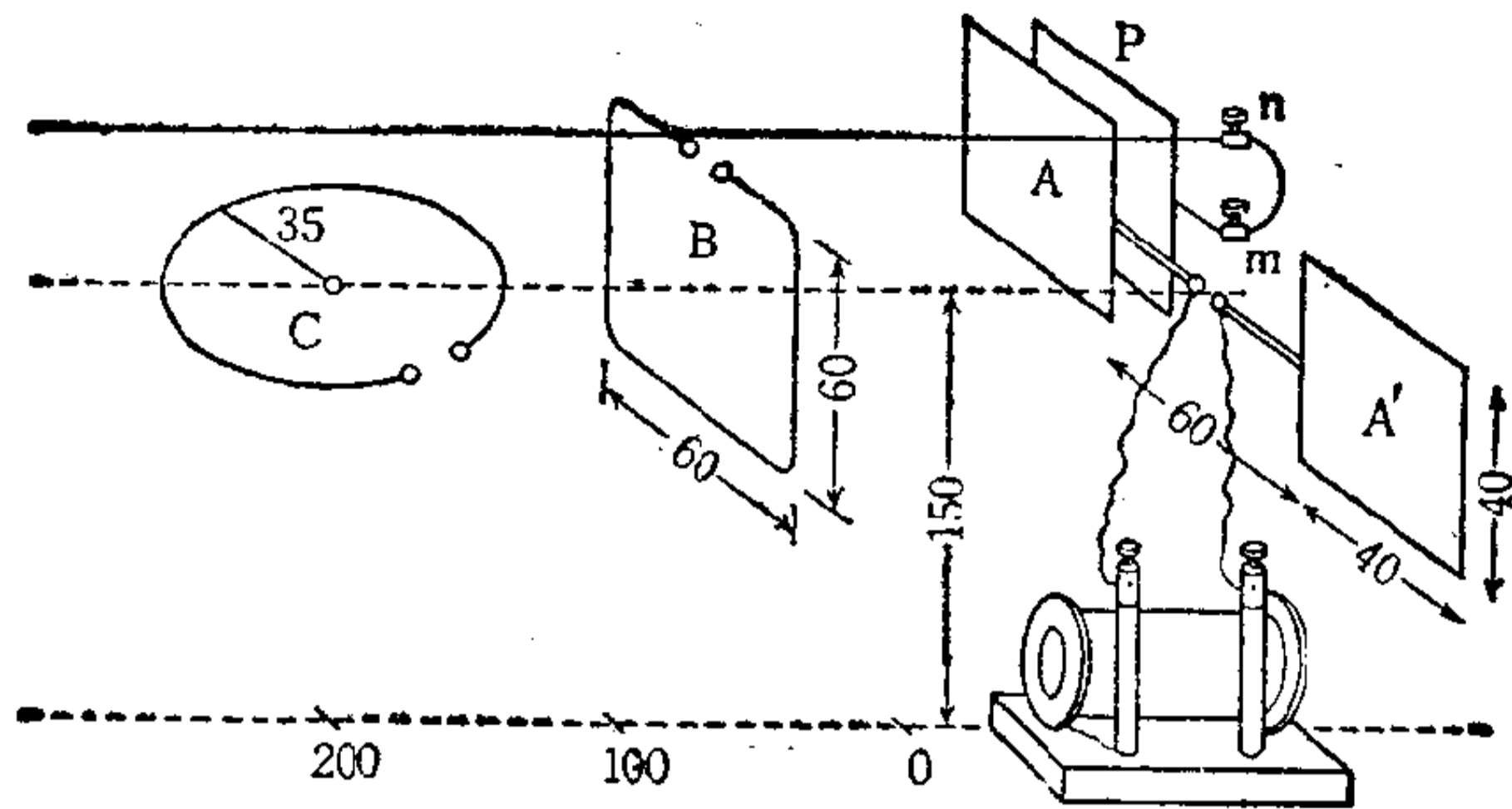


图 5.11

振动，在导线或空气中传播，具有反射、折射、干涉等波动性质。但是，赫兹的实验对接触作用论所具有的重要意义，在于它明确了电磁作用的传播是以有限速度进行的。他通过研究离振荡回路不同距离上的电磁振动的干涉，解决了这个问题（图 5.11）。首先，由笔直拉紧的一次回路导体 A、A' 发出规则的行波，在一次回路通过导线 mn 传播的波和传播于空气中的直接波两方面的影响之下，同时放置二次回路 B 或 C，使之发生干涉。他在离一次回路各种各样的距离上研究这个干涉，并把在远的地方和一次回路附近的地方相比较，来观察电磁振动是否显示位相的推迟。结果表明，感应作用无疑是以有限速度传播的。他由这个速度与导线中的传播速度之比 45:28，推断前者的绝对值与光速同量级（有关导线中的传播，应该记得，已经有了汤姆孙和斯托克斯（1854）、基尔霍夫（1857）、亥维赛（Heaviside, 1876）等人根据海底电讯讯号的推迟而对电讯方程所作的研究）。

但是，式 (5.7.26) 和 (5.7.27) 是不能分别独立求解的；这是因为，场的量必须满足一阶麦克斯韦方程组。现在，作为式 (5.7.26, 27) 的解，我们考虑在单位矢量  $\mathbf{n}$  的正方向上前进的平面波（在  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \text{const}$  的各个平面上场是均匀的那种

波):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - vt), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - vt). \end{aligned} \quad (5.7.29)$$

假设  $u \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - vt$ , 则有

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = (-v) \frac{d\mathbf{E}}{du},$$

$$\text{curl} \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{E}}{du},$$

所以, 当  $\mathbf{j} = 0$  时, 式 (5.7.10, 11) 可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{E}}{du} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{d\mathbf{B}}{du}, \\ \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{B}}{du} &= -\sqrt{\epsilon\mu} \frac{d\mathbf{E}}{du}. \end{aligned} \quad (5.7.30)$$

因此, 除了在空间上是恒定的那些场外, 会有

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad \text{或} \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (5.7.31)$$

$$\sqrt{\epsilon\mu} \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{B} \quad \text{或}$$

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{n} \times \mathbf{H}. \quad (5.7.32)$$

若取它们和  $\mathbf{n}$  的标积, 则

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.7.33)$$

也就是说, 平面电磁波式 (5.7.29) 是在前进方向上不具有分量的横波, 而且  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{n}$  构成右手系的正交矢量组。由式 (5.7.31, 32) 可知

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H},$$

所以, 在均匀介电媒质中前进的平面波, 其能量密度均等地分配到电场和磁场上, 而坡印廷矢量可以写成

$$\mathbf{N} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{c\mathbf{E}^2}{4\pi} \mathbf{n} = Wv\mathbf{n}, \quad (5.7.34)$$

其中,  $W \equiv \epsilon E^2/4\pi$  是该波的总能量.

式(5.7.33)表示,在 § 4.3(d) 由分析菲涅耳-阿喇果实验而得到的光的一个特性,可以作为麦克斯韦方程组的一个结论推导出来. 假如认为  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  就是  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , 则 § 4.3(c) 中关于各种偏振状态的讨论,对于作为电磁扰动的光来说照样是成立的. 麦克斯韦(1862)的依据有两个: 其一是这种电磁振动的横波性,它可以归结为“光是由作为电现象及磁现象起因的同一媒质的横向振动构成的”; 其二是可以作为 esu 与 emu 的换算因子而表示出来的电磁常数  $c (= 3.1074 \times 10^{10}$  厘米/秒; 考赫劳希 (Kohlrausch) 和韦伯, 1857; 参考 § 5.11) 和真空中 ( $\mu = \epsilon = 1$ ) 电磁横振动的传播速度  $v = c$ ——即真空中的光速 ( $= 3.14858 \times 10^{10}$  厘米/秒, 斐索; 1849)——在数值上的一致. 光的电磁假说宣告了光以太和电磁以太的一致性; 如果从麦克斯韦理论的立场出发,在数学上进行整理,就可以把这一假说推广到麦克斯韦理论的范围以外,形成处理连续媒质的光色散理论; H. A. 洛伦兹 (1875) 在这一方面作了大量的工作.

首先,从光的电磁说的立场出发,有关绝对折射率  $n$  的麦克斯韦公式,可以由式(5.7.28)确定:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (5.7.35)$$

因为在许多介电媒质中,导磁率与 1 的偏差可以忽略不计,所以,折射率就会等于介电常数的平方根. 但是,如牛顿的经典实验所示,折射率因光的频率而异,所以,假如想要保持麦克斯韦公式,就必须认为介电常数不是表征物质特性的一个常数,而依赖于光的频率. 为了进行这样的处理,需要涉及到物质的微观结构(参考 § 5.10(a)), 但是,波耳兹曼(1874)的测量已经表明,对于化学成分简单的气体和碳氢化合物来说,

表 5.4

物 质	$\sqrt{\epsilon}$	$n$ (黄光)
空气	1.000295	1.000294
H <sub>2</sub>	1.000132	1.000138
CO <sub>2</sub>	1.000473	1.000449
CO	1.000345	1.000340
N <sub>2</sub> O	1.000497	1.000503
<hr/>		
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	1.489	1.482
<hr/>		
CH <sub>3</sub> OH	5.7	1.34
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	5.0	1.36
H <sub>2</sub> O	9.0	1.33

$n = \sqrt{\epsilon}$  却是在极好的近似程度上成立的。然而，在玻璃之类的固体和某些液体中，它与式(5.7.35)偏差很大(表 5.4)。

另外，由麦克斯韦方程组还可以推导出关于反射光及透射光强度的菲涅耳正弦及正切定律(式(4.4.8, 11, 12, 13));前人曾把以太作为有重量的弹性体，试图得到这个定律，但因纵波的困难而完全以失败告终。为此，只要把式(5.5.8)、(5.5.9)当作平面电磁波在不同介电媒质边界面上的边界条件来用，再模仿 § 4.4(a)的推论就可以了。

进一步，洛伦兹(1875)还研究了金属光学，又在物质方程中选择式(5.7.15)而研究了结晶光学。另一方面，就光的衍射而言，也必须从光的电磁说的立场出发，把作为惠更斯-菲涅耳原理数学规范化的亥姆霍兹-基尔霍夫定理推广到矢量波。由索末菲(1896)以来直到现在，人们以积分方程、变分法等各种不同形式继续探讨，如何把衍射问题当作麦克斯韦方程组的边界值问题来严密求解。有关这些情况，请参阅其它著作。但是，在这里需要附上一笔，提请大家注意以下几点，在 § 4.2 对服从波动方程的复数标量函数  $\psi$  规范化了的衍射



理论,可以在很好的近似程度上用于普通的光学仪器之中(切莫尔(O. Theimer)、瓦瑟曼(G. D. Wassermann)和乌尔夫; 1952);因为光振动极为迅速,所以光强度  $I$  不是瞬间值,应该以每单位时间、单位面积电磁通量的时间平均  $I = (c/4\pi) \cdot \overline{|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|}$  来确定,不过在普通光学仪器中可以近似地使用  $I = |U^2|$  (乌尔夫; 1959) (参考 § 5.8(e)).

e) 辐射压力 (radiation pressure)

电磁动量和体积力都是从麦克斯韦应力张量推导出来的,由此可以设想,光在被吸收或被反射时要产生压力. 我们考虑一个垂直于真空中平面电磁波传播方向的完全吸收面(在微乎其微的深度上吸收辐射场的那种面),如果假设吸收体的质量非常大,反冲可以完全忽略不计,那么,单位时间内,吸收体每单位面积就吸收了底面为单位面积、长度为  $cdt$  的圆柱内的辐射. 因为它对应于电磁动量  $(1/4\pi)(\mathbf{E} \times \mathbf{H})dt$ , 所以,吸收体每单位面积上的压力是

$$\frac{|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|}{4\pi} = \frac{|\mathbf{N}|}{c} = W. \quad (5.7.36)$$

把体积力式(5.7.20)由吸收体的表面积分到吸收深度,也可以得到这个结果. 因为在同样的完全反射面上,反射波振幅等于入射波振幅,所以压力是  $|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|/2\pi$ . 特别是空腔内各向同性的辐射场,由于其分布毫无秩序,场的各分量的时间平均就成为

$E_x^2 = E_y^2 = E_z^2 = (1/3)E^2 = H_x^2 = H_y^2 = H_z^2 = (1/3)H^2$ , 所以它应该给四壁施以  $1/3W$  的垂直压力. 这个结论后来成为推导黑体辐射的斯忒藩-波耳兹曼定律和维恩位移定律的基础. 列别捷夫(P. Lebedew; 1899, 1901)、尼科斯(E. F. Nichols)和赫耳(G. F. Hull) (1903)等人以理论值的 1% 以内的误差证实了对辐射压力的预言. 有关辐射压力对恒星结



构方程的影响，请参阅本讲座第十一卷《宇宙物理学》第II部分第三章。

### § 5.8 电磁场的基本方程组 (II) 势函数表示

在前一节，电磁场对物质产生的影响，可以通过在物质方程中出现的几个宏观常数来表示。这种形式只处理某个有限范围的现象。如 § 5.7(d) 中所提到的那样，特别是对所谓辐射的发射、吸收、散射等现象来说，必须深入到物质的原子结构。但是，由宏观的立场出发，也有可能根据简单的模型来描述物质和场之间的相互作用。在前面我们已经引进了两个矢量，电极化  $\mathbf{P}$  和磁极化  $\mathbf{M}$ ，作为表示物质效应的物理量，假如使用它们，就可以代替式 (5.7.13, 14)，而把连系  $\mathbf{D}$  及  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$  及  $\mathbf{H}$  的物质方程写成两个场之和的形式，一个是真空中的场，一个是由于物质的影响所产生的场(式(5.4.11), (5.3.16))。这个加法型物质方程，在明确点源与场的关系时具有更直接的物理意义，而对物质中电磁作用的传播给出如下的描象。电磁场在给定的体积元中产生一定量的极化  $\mathbf{P}$  及  $\mathbf{M}$ ，在一级近似中它们和场的强度成正比；因此，该比例常数就是场的反作用的大致标准(式 (5.4.13)、(5.3.18))。各体积元重新成为二次波源，二次波彼此之间合成，也与一次波合成，从而构成整个场。在形式上这种情况可以通过与麦克斯韦微分方程等价的两个积分方程来表示。它给出了电磁理论的另外一个数学上的搭配方法。对静止的情况来说，为了由外部的已知条件(如电荷分布)求出场来，我们曾用过势函数，但是，借助于该势函数推广后的推迟(超前)势也可以表示真空中的电磁场；我们的讨论就由这儿开始。

#### a) 势函数和规范不变性

现在，假设电荷和电流分布在某一个有限范围内，在观测

前的全部时刻这个分布都是已知的；我们来考虑它在真空中所产生的电磁场。

若使用与坐标和时间有关的任意矢量函数  $\mathbf{A}$ ，则由场方程(5.7.8)，磁感应  $\mathbf{B}$  就可以写成

$$\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}. \quad (5.8.1)$$

把它代入场方程(5.7.10)，则有

$$\text{curl} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

假若把  $\phi$  当作任意的标量函数，而且选得使

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (5.8.2)$$

那么上面的方程是可以满足的。因此，我们来确定  $\mathbf{A}$  和  $\phi$ ，而让它们满足场方程组中剩余的两个方程。若把式(5.8.1,2)代入式(5.7.9,11)，则有

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi + \text{div} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -4\pi\rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left( \text{div} \mathbf{A} \right. \\ &\left. + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -4\pi \mathbf{j}. \end{aligned}$$

引进达朗伯算符： $\square \equiv \nabla^2 - (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)$ ，即可得到

$$\begin{aligned} \square \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -4\pi\rho \\ \square \mathbf{A} - \text{grad} \left( \text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -4\pi \mathbf{j}. \end{aligned}$$

因为对矢量  $\mathbf{A}$  的散度尚未作任何规定，所以如果选成

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (5.8.3)$$

则  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  分别是下列非齐次波动方程的解：

$$\square \phi = -4\pi\rho \quad (5.8.4)$$

$$\square \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}. \quad (5.8.5)$$

但是, 势函数  $\phi$ 、 $\mathbf{A}$  的方程(5.8.4, 5)及附加条件(洛伦兹条件)式(5.8.3), 并不会唯一地把  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  决定出来. 这是因为, 即使把一个由任意的标量函数  $\psi$  导出的矢量  $-\text{grad}\psi$  加到  $\mathbf{A}$  上, 把  $(1/c)(\partial\psi/\partial t)$  加到  $\phi$  上, 用式(5.8.1, 2)定义场的量也不发生变化. 这种情况叫做场的量  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E}$  对下列规范变换 (gauge transformation) 是不变的:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \text{grad}\psi, \quad \phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (5.8.6)$$

而对任意函数  $\psi$  的规定, 则称为确定势函数的规范. 当使用势函数把电磁学各定律规范化时, 该理论体系必须是规范不变的, 这是因为, 作为基础的东西, 是可以观测的场的量.

若在式(5.8.3)及(5.8.4, 5)中进行式(5.8.6)那样的变换, 则有

$$\text{div } \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial\phi'}{\partial t} = \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \square\psi,$$

而且, 因为  $\square\phi' = \square\phi - (1/c)\square\psi$ ,

$$\square \mathbf{A}' = \square \mathbf{A} + \square \text{grad}\psi,$$

所以, 只有当

$$\square\psi = 0 \quad (5.8.7)$$

时,  $\phi'$ 、 $\mathbf{A}'$  才满足洛伦兹条件, 与它们相应的波动方程的形式亦无变化; 也就是说, 式(5.8.3)及(5.8.4, 5)是规范不变的. 洛伦兹条件规定了  $\mathbf{A}$  的散度, 该条件也应该限制势函数的规范. 借助式(5.8.3)、(5.8.7)来确定势函数规范的情况, 叫做洛伦兹规范.

根据式(5.8.4, 5), 洛伦兹条件与电荷守恒定律是并存的

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \square \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad (5.8.8)$$

而且该条件还保证了势函数的相对论协变的形式 (本讲座第二卷《经典物理学 II》第七章), 但是, 有时采用别的规范也是很方便的. 通常使用的, 是把  $\mathbf{A}$  的散度规定为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (5.8.9)$$

由规范变换的观点来看, 这样做相当于把变换中的任意函数

$\phi$  取成  $-c \int \phi dt$ , 而消掉标量势. 这时,

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad (5.8.4a)$$

$$\square \mathbf{A} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -4\pi\mathbf{j}. \quad (5.8.5a)$$

因为与  $\phi$  有关的方程和静电学中的式 (5.1.10) 是一样的, 所以这种规范称为**库仑规范**. 在量子电动力学引进适当的辅助场, 尚需考虑另外的规范, 因为它与经典电动力学没有对应的关系, 所以在此毋庸赘述.

在洛伦兹规范中, 式 (5.8.4, 5) 的一个特解, 是用下式确定的:

$$\phi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho(x', y', z', t \pm r/c)}{r} dv' \quad (5.8.10)$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \int \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t \pm r/c)}{r} dv' \quad (5.8.11)$$

$$(r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2})$$

(L. 洛伦茨; 1867). 因为  $r/c$  是光由点  $(x, y, z)$  到点  $(x', y', z')$  所需要的时间, 所以, 我们把表示由点源发出的球面波的效应、并包含  $t - r/c$  在内的解叫作**推迟势** (retarded potential), 而把对应于进入点源的球面波的效应, 并包含  $t + r/c$  在内的解叫做**超前势** (advanced potential). 为了求得通解, 只要把 (5.8.4, 5) 的齐次方程  $\square \phi = 0, \square \mathbf{A} = 0$  的通解

$\phi_0, \mathbf{A}_0$  加到它们上面就可以了:

$$\phi = \phi_0 + \int \frac{\rho(x', y', z', t \pm r/c)}{r} dv' \quad (5.8.12)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \int \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t \pm r/c)}{r} dv'. \quad (5.8.13)$$

其次, 我们再通过加法型物质方程(5.4.11)、(5.3.16)

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \quad (5.8.14)$$

来描述物质和场的相互作用. 假如利用这些关系把  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  从场方程组中消掉, 再采取与推导式(5.8.4, 5)时相同的手续, 那么, 按式(5.8.1, 2)给出  $\mathbf{B}, \mathbf{E}$  的势函数  $\phi, \mathbf{A}$ , 在洛伦兹规范中显然就是下列方程的解:

$$\square\phi = -4\pi\hat{\rho} \quad (5.8.4b)$$

$$\square\mathbf{A} = -4\pi\hat{\mathbf{j}}. \quad (5.8.5b)$$

式中,

$$\hat{\rho} \equiv \rho - \operatorname{div}\mathbf{P} \quad (5.8.15)$$

$$\hat{\mathbf{j}} \equiv \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{curl}\mathbf{M} \quad (5.8.16)$$

满足连续方程  $\operatorname{div}\hat{\mathbf{j}} + (1/c)(\partial\hat{\rho}/\partial t) = 0$ , 而且与洛伦兹条件并存. 当物质具有固有极化  $\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0$  时, 我们以  $-\operatorname{div}\mathbf{P}_0, (1/c)(\partial\mathbf{P}_0/\partial t) + \operatorname{curl}\mathbf{M}_0$  的形式, 把它们加到  $\rho$  或  $\mathbf{j}$  上, 而认为  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{M}$  表示感应极化. 式(5.8.4b, 5b)也具有式(5.8.10, 11)型 ( $\rho \rightarrow \hat{\rho}, \mathbf{j} \rightarrow \hat{\mathbf{j}}$ ) 的解, 特别是在介电媒质 ( $\sigma = 0$ ) 中既无电荷分布, 亦无电流分布 ( $\rho = \mathbf{j} = 0$ ) 的范围内, 如果约定以  $[\ ]$  表示推迟时刻的值, 那么, 使用

$$\operatorname{div}'[\mathbf{P}] = [\operatorname{div}'\mathbf{P}] + (1/cr)\mathbf{r} \cdot [\dot{\mathbf{P}}],$$

$\operatorname{curl}'[\mathbf{M}] = [\operatorname{curl}'\mathbf{M}] + (1/cr)\mathbf{r} \times [\dot{\mathbf{M}}]$ , 就可以把推迟势写成

$$\phi = - \int \frac{[\operatorname{div}'\mathbf{P}]}{r} dv' = - \int \left\{ \frac{\operatorname{div}'[\mathbf{P}]}{r} \right.$$



$$-\frac{\mathbf{r} \cdot [\dot{\mathbf{P}}]}{cr^2} \} dv' \quad (5.8.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int \left\{ \frac{[\text{curl}' \mathbf{M}]}{r} + \frac{[\dot{\mathbf{P}}]}{cr} \right\} dv' \\ &= \int \left\{ \frac{\text{curl}'[\mathbf{M}]}{r} - \frac{\mathbf{r} \times [\dot{\mathbf{M}}]}{cr^2} + \frac{[\dot{\mathbf{P}}]}{cr} \right\} dv'. \end{aligned} \quad (5.8.18)$$

当物质存在的范围 ( $\mathbf{P} \neq 0, \mathbf{M} \neq 0$ ) 有限时, 通过使用高斯散度定理, 把各自的第一项改变形式, 则可得到

$$\phi = \int \left\{ [\mathbf{P}] \cdot \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\mathbf{r} \cdot [\dot{\mathbf{P}}]}{cr^2} \right\} dv' \quad (5.8.17a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int \left\{ [\mathbf{M}] \cdot \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{\mathbf{r} \times [\dot{\mathbf{M}}]}{cr^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[\dot{\mathbf{P}}]}{cr} \right\} dv'. \end{aligned} \quad (5.8.18a)$$

在以上讨论中, 前提是  $\rho, \mathbf{j}, \mathbf{P}, \mathbf{M}$  为坐标和时间的函数, 但是, 当极化是场的量的函数, 因而也是势的函数时, 就要把与  $\rho, \mathbf{j}$  有关的式(5.8.12, 13)型的表达式看成是势  $\phi, \mathbf{A}$  的积分方程。

#### b) 赫兹势和流势

使用另一组以更简单的方式与  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{M}$  发生关系的势函数, 也就是通过下式引进的赫兹矢量势 (Hertzian vector potential)  $\Pi_e, \Pi_m$ , 来代替势函数  $\phi$  和  $\mathbf{A}$ , 就能表示出任意的静止媒质中的场,

$$\phi \equiv -\text{div} \Pi_e, \quad \mathbf{A} \equiv \frac{1}{c} \dot{\Pi}_e + \text{curl} \Pi_m. \quad (5.8.19)$$

由(5.8.1, 2)可知

$$\mathbf{E} = \text{grad} \text{div} \Pi_e - \frac{1}{c^2} \ddot{\Pi}_e - \frac{1}{c} \text{curl} \ddot{\Pi}_m \quad (5.8.20)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \text{curl} \dot{\Pi}_e + \text{curl} \text{curl} \Pi_m. \quad (5.8.21)$$

历史上, 电矢量势  $\Pi_e$  (赫兹; 1889) 和磁矢量势  $\Pi_m$  (里纪 (A. Righi); 1901) 是分别引进的, 但是, 把两者看作一组, 在许多情况下却很方便 (尼斯拜特 (A. Nisbet), 1955; ( $\Pi_e$ ,  $\Pi_m$ ) 构成一个六元矢量, 姆克瑞 (W. H. McCrea; 1957) 根据赫兹势的张量形式给出了它的规范表达式).  $\Pi_e$  和  $\Pi_m$  自然是满足洛伦兹条件的; 通过使用 **电流势** (electric stream potentials)  $Q_e$ 、 $Q_m$  把  $\rho$  和  $j$  表示成

$$\rho \equiv -\operatorname{div} Q_e, \quad j \equiv \frac{1}{c} \dot{Q}_e + \operatorname{curl} Q_m \quad (5.8.22)$$

(拉波特 (O. Laporte) 和沃伦拜克 (G.E. Uhlenbeck); 1931), 就可以轻而易举地写出它们所服从的方程. 因为  $\rho$  和  $j$  满足连续方程, 所以总会找出满足 (5.8.22) 的  $Q_e$ 、 $Q_m$ . 实际上,  $-4\pi Q_e$  和  $+4\pi Q_m$  分别是  $D$ 、 $H$  的非齐次场方程 (5.7.9, 11) 的特解, 而一般来说却不是电磁场 (的部分场); 这是因为, 它们没有必要既满足其它的齐次场方程, 又满足物质方程 (5.8.14). 若把式 (5.8.19, 22) 代入式 (5.8.4b, 5b), 则有

$$\begin{aligned} \square \Pi_e &= -4\pi(P + Q_e), \\ \square \Pi_m &= -4\pi(M + Q_m). \end{aligned} \quad (5.8.23)$$

即, 赫兹势是散度为  $P + Q_e$  及  $M + Q_m$  的非齐次波动方程的解. 因此, 我们也可以把流势  $Q_e$ 、 $Q_m$  理解成其效果与  $\rho$ 、 $j$  等价的电极化及磁极化.

根据 (5.8.14)、(5.8.23),  $D$  和  $H$  的表达式就是

$$D = -4\pi Q_e - \frac{1}{c} \operatorname{curl} \dot{\Pi}_m + \operatorname{curl} \operatorname{curl} \Pi_e \quad (5.8.24)$$

$$\begin{aligned} H &= 4\pi Q_m + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_m - \frac{1}{c^2} \ddot{\Pi}_m \\ &\quad + \frac{1}{c} \operatorname{curl} \dot{\Pi}_e. \end{aligned} \quad (5.8.25)$$

为了进一步使  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  的表达式与它们对称, 我们引进磁流势 (magnetic stream potential)  $\mathbf{R}_e$ 、 $\mathbf{R}_m$ , 该磁流势用下式给出了假想的磁荷密度  $\rho_m$  及磁电流密度  $\mathbf{j}_m$ :

$$\rho_m \equiv -\operatorname{div}\mathbf{R}_m, \quad \mathbf{j}_m \equiv -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{R}}_m + \operatorname{curl}\mathbf{R}_e. \quad (5.8.26)$$

对  $\mathbf{R}_e$ 、 $\mathbf{R}_m$  来说, 也有与  $\mathbf{Q}_e$ 、 $\mathbf{Q}_m$  相同的情况: 虽然  $4\pi\mathbf{R}_e$ 、 $-4\pi\mathbf{R}_m$  是齐次场方程(5.7.10, 8)的特解, 但是却没有必要满足剩下的非齐次场方程和 (5.8.14), 所以它们一般不是电磁场。而且, 即使  $\rho_m$ 、 $\mathbf{j}_m$  为 0, 也不会要求辅助函数  $\mathbf{R}_e$ 、 $\mathbf{R}_m$  为 0。除去使场的表达式具有对称性以外, 为了使赫兹势的规范变换具有一般性, 磁流势的引进也是必要的。在引进磁流势之后, (5.8.20, 21) 成为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = 4\pi\mathbf{R}_e + \operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_e - \frac{1}{c^2}\ddot{\Pi}_e \\ - \frac{1}{c}\operatorname{curl}\dot{\Pi}_m \end{aligned} \quad (5.8.20a)$$

$$\mathbf{B} = -4\pi\mathbf{R}_m + \frac{1}{c}\operatorname{curl}\dot{\Pi}_e + \operatorname{curl}\operatorname{curl}\Pi_m, \quad (5.8.21a)$$

波动方程(与物质方程 (5.8.14) 一起)则可用下式给出:

$$\begin{aligned} \square\Pi_e &= -4\pi(\mathbf{P} + \mathbf{Q}_e + \mathbf{R}_e), \\ \square\Pi_m &= -4\pi(\mathbf{M} + \mathbf{Q}_m + \mathbf{R}_m). \end{aligned} \quad (5.8.23a)$$

式 (5.8.23) 或 (5.8.23a) 的右边是场的量的函数, 因而也是赫兹势的函数; 一般来说, 式 (5.8.23, 23a) 是  $\Pi_e$ 、 $\Pi_m$  的微积分方程, 而当  $\rho$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{M}$  是坐标和时间的函数时, 存在着 § 5.8(a) 中曾看到过的那种型式的解, 尤其是在  $\rho = \mathbf{j} = 0$  的范围内, 特解成为

$$\Pi_e = \int \frac{[\mathbf{P}]}{r} dv', \quad \Pi_m = \int \frac{[\mathbf{M}]}{r} dv'. \quad (5.8.27)$$

对于给定的电磁场来说, 赫兹势也好, 流势也好, 并不能

唯一确定。首先,我们考虑流势,当  $Q_e$ 、 $Q_m$  按照下式进行变换时,  $\rho$  和  $j$  是不变的:

$$Q_e = Q_e^0 + \text{curl} \mathbf{G}, \quad Q_m = Q_m^0 - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{G}} - \text{grad} g. \quad (5.8.28)$$

式中,  $\mathbf{G}$ 、 $g$  是坐标和时间的任意函数。同样,对于与式(5.8.28)对偶的(dual)变换

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_e^0 - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{L}} - \text{grad} L, \quad \mathbf{R}_m = \mathbf{R}_m^0 - \text{curl} \mathbf{L} \quad (5.8.29)$$

来说,  $\rho_m$  和  $j_m$  也是不变的( $\mathbf{L}$ 、 $l$  是任意函数)(5.8.28, 29)是与泡利(W. Pauli; 1941)的第一种及第二种规范变换不同的新型变换, 尼斯拜特把它叫做“第三种规范变换”。

若使用式(5.8.28, 29)所给出的新的流势, 则式(5.8.20a, 21a, 24, 25)就变成

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \left\{ \text{grad} \text{div} \boldsymbol{\Pi}_e - \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{\Pi}}_e - \frac{1}{c} \text{curl} \dot{\boldsymbol{\Pi}}_m \right\} \\ & + 4\pi \mathbf{R}_e^0 - \frac{4\pi}{c} \dot{\mathbf{L}} - 4\pi \text{grad} l \end{aligned} \quad (5.8.20b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & \left\{ \frac{1}{c} \text{curl} \dot{\boldsymbol{\Pi}}_e + \text{curl} \text{curl} \boldsymbol{\Pi}_m \right\} \\ & - 4\pi \mathbf{R}_m^0 + 4\pi \text{curl} \mathbf{L} \end{aligned} \quad (5.8.21b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & \left\{ -\frac{1}{c} \text{curl} \dot{\boldsymbol{\Pi}}_m + \text{curl} \text{curl} \boldsymbol{\Pi}_e \right\} \\ & - 4\pi \mathbf{Q}_e^0 - 4\pi \text{curl} \mathbf{G} \end{aligned} \quad (5.8.24a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \left\{ \text{grad} \text{div} \boldsymbol{\Pi}_m - \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{\Pi}}_m + \frac{1}{c} \text{curl} \dot{\boldsymbol{\Pi}}_e \right\} \\ & + 4\pi \mathbf{Q}_m^0 - \frac{4\pi}{c} \dot{\mathbf{G}} - 4\pi \text{grad} g, \end{aligned} \quad (5.8.25a)$$

而式(5.8.23a)则变成

$$\left. \begin{aligned} \square \Pi_e &= -4\pi \left( \mathbf{P} + \mathbf{Q}_e^0 + \mathbf{R}_e^0 + \text{curl} \mathbf{G} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{L}} - \text{grad} l \right) \\ \square \Pi_m &= -4\pi \left( \mathbf{M} + \mathbf{Q}_m^0 + \mathbf{R}_m^0 - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{G}} - \text{grad} g - \text{curl} \mathbf{L} \right) \end{aligned} \right\},$$

(5.8.23b)

在规范变换中的任意函数,是作为赫兹势的散度出现的。

另外,我们假设  $\Pi_e, \Pi_m$  服从如下变换:

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \Pi_e^0 + \text{curl} \mathbf{\Gamma} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} - \text{grad} \lambda, \\ \Pi_m &= \Pi_m^0 - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{G}} - \text{grad} \gamma - \text{curl} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (5.8.30)$$

其中,  $\gamma, \mathbf{\Gamma}, \lambda, \mathbf{A}$  是任意函数。把上式代入式(5.8.19),假如  $\gamma$  和  $\mathbf{\Gamma}$  是任意的,而  $\lambda$  和  $\mathbf{A}$  满足

$$\square \lambda = \frac{1}{c} \dot{\zeta}, \quad \square \mathbf{A} = -\text{grad} \zeta \quad (5.8.31)$$

( $\zeta$  为任意函数),显然,  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  就接受其规范函数服从式(5.8.7)的第二种规范变换(5.8.6),从而保证了洛伦兹规范;该变换是

$$\phi = \zeta + \frac{1}{c} \dot{\lambda} + \text{div} \mathbf{A}. \quad (5.8.32)$$

因此,  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  的方程(5.8.4, 5)及  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的表达式(5.8.20, 21),对于变换(5.8.30, 31)来说也是不变的。

其次,如果把式(5.8.30)代入由赫兹势所产生的场的量的表达式,再与式(5.8.28, 29)进行比较,我们就可以看到,对于具有任意的  $\gamma, \mathbf{\Gamma}, \lambda, \mathbf{A}$  的变换式(5.8.30)来说,假如流势同时接受第三种规范变换,则与  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$  有关的式(5.8.20a, 21a, 24, 25)是不变的;该变换的规范函数为

$$4\pi g = \frac{1}{c} \dot{\xi} - \square \gamma, \quad -4\pi \mathbf{G} = \square \mathbf{\Gamma} + \text{grad} \xi \quad (5.8.33)$$



$$4\pi l = \frac{1}{c} \dot{\zeta} - \square \lambda,$$

$$-4\pi \mathbf{L} = \square \mathbf{A} + \text{grad} \zeta \quad (5.8.34)$$

( $\xi, \lambda$  是任意函数)。换句话说,就给定的流势的取法而言,如果给定的电磁场能由赫兹势  $\Pi_e^0, \Pi_m^0$  来表示,则同一个场被式(5.8.30)的  $\Pi_e, \Pi_m$  所给出的另外一个流势是存在的。

赫兹势的这种变换,也适用于表达式(5.8.20b, 21b, 24a, 25a);这是因为,用式(5.8.33, 34)给出的  $g, \mathbf{G}, l, \mathbf{L}$  的值,仅仅是它们在式(5.8.20b~25a)中出现的任意值的相加。进一步,当  $\lambda$  和  $\mathbf{A}$  不是任意的,而是满足式(5.8.31)时,式(5.8.34)的左边成为零,流势  $\mathbf{R}_e, \mathbf{R}_m$  亦无任何变化,  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  对于式(5.8.30)是不变的。同样,假如  $\gamma$  和  $\mathbf{\Gamma}$  使式(5.8.33)的左边为零,则  $\mathbf{Q}_e, \mathbf{Q}_m$  没有变化,  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  对于式(5.8.30)来说是不变的。

c) 惠塔克 (Whittaker) 势和德拜 (Debye)-波罗姆维奇 (Bromwich) 势

当把电磁场用赫兹势来表示时,上述第三种规范变换显然具有相当自由的余地。特别当  $\rho, \mathbf{j}, \mathbf{P}, \mathbf{M}$  不是依赖于场,而是坐标和时间的函数时(在非传导非极化媒质中),以下定理不管在点源分布范围的内外都是成立的:

可以选择非齐次麦克斯韦方程的特解(即流势),使得它们和辅助场的量一般只用(作为赫兹势分量的)两个标量就能表示出来。

该定理在任意的物质媒质中都成立;这是因为,它是赫兹势的变换(5.8.30)为基础的,而式(5.8.30)并不取决于物质的种类。何况,在与式(5.8.30)相应的任意规范函数的各分量中,只有四个分量不是多余的,我们能够把它们选择得使赫兹势  $\Pi_e, \Pi_m$  的四个分量为零。因此,可以考虑如下所示的

几种可能性。

(i) 两个分量  $\Pi_c$ : 假如取  $\gamma = 0, \Lambda = 0, (1/c)\dot{\Gamma} = \Pi_m^0$ , 则  $\Pi_m = 0$ ; 进而用  $\lambda$  能使  $\Pi_c$  的一个分量为零。

(ii) 两个分量  $\Pi_m$ : 可以与 (i) 同样考虑。

(iii) 一个分量  $\Pi_c$  和一个分量  $\Pi_m$ : 这可以用多种形式来实现; 惠塔克势也好, 德拜-波罗姆维奇势也好, 均属此类。

惠塔克(1903)指出, 在真空中离点源很远的点上, 电磁场只用满足齐次波动方程的两个标量函数  $\mathcal{F}, \mathcal{S}$  即可表示, 假如把  $\mathbf{k}$  作为某一给定方向上的单位矢量, 而且选成

$$\Pi_c = \mathcal{F} \mathbf{k}, \quad \Pi_m = \mathcal{S} \mathbf{k}, \quad (5.8.35)$$

则该场的量的表达式就和式 (5.8.20, 21) 一致。若适当选择流势, 这个结论就能推广到点源分布范围以内的点上。设流势为

$$Q_c^0 = c \int j dt, \quad Q_m^0 = R_c^0 = R_m^0 = 0, \quad (5.8.36)$$

如果把  $\mathbf{k}$  取作  $z$  方向, 再把式 (5.8.35, 36) 代入式 (5.8.23b) 就可以得到  $\mathcal{F}, \mathcal{S}$  的非齐次波动方程和把规范函数与点源分布连系起来的四个标量方程。当  $\mathbf{G} = (0, 0, G_z), \mathbf{L} = (0, 0, L_z)$  时, 式(5.8.23b)的  $x$  分量及  $y$  分量是

$$-\frac{\partial G_z}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial x} = P_x + c \int j_x dt,$$

$$\frac{\partial G_z}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial y} = P_y + c \int j_y dt \quad (5.8.37)$$

$$\frac{\partial L_z}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} = M_x,$$

$$-\frac{\partial L_z}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = M_y. \quad (5.8.38)$$

因此,  $G_z, L_z$  可用下列方程的特解确定:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) G_z = (\text{curl } \mathbf{P})_z + c \int (\text{curl } \mathbf{j})_z dt \quad (5.8.37a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) L_z = -(\text{curl } \mathbf{M})_z, \quad (5.8.38a)$$

如果使用它们,就可以由式(5.8.37,38)的任何一个表达式得到  $l$  和  $g$ . 因此,规范函数能够通过电磁场的点源而表示成时间和空间的函数. 另一方面,由式(5.8.23b)的  $z$  分量可知,  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{G}$  所满足的波动方程是

$$\left. \begin{aligned} \square \mathcal{F} &= -4\pi \left( P_z + c \int j_z dt - \frac{1}{c} \dot{L}_z - \frac{\partial l}{\partial z} \right) \\ \square \mathcal{G} &= -4\pi \left( M_z - \frac{1}{c} \dot{G}_z - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.8.39)$$

借助于上两式,场的量即可由式(5.8.20b,21b)得出,它们是

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{grad div}(\mathcal{F} \mathbf{k}) - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathcal{F}} \mathbf{k} \\ &\quad - \frac{1}{c} \text{curl}(\dot{\mathcal{G}} \mathbf{k}) - \frac{4\pi}{c} \dot{L}_z \mathbf{k} - 4\pi \text{grad} l \end{aligned} \quad (5.8.20c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \text{curl}(\dot{\mathcal{F}} \mathbf{k}) + \text{curlcurl}(\mathcal{G} \mathbf{k}) \\ &\quad + 4\pi \text{curl}(L_z \mathbf{k}); \end{aligned} \quad (5.8.21c)$$

同样,由式(5.8.14)或式(5.8.24a,25a)也可以得到  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$ . 因此,即使在点源的分布范围以内,惠塔克势也表示互补场的量,也就是表示获得非齐次麦克斯韦方程的特解的一个例子,该特解只用两个标量的波动函数就能表达.

另外,德拜(1909)论述了由于球体而引起的平面波的散射,引进了与两个标量势  $\Pi_1, \Pi_2$  相应的麦克斯韦方程组的解;波罗姆维奇(1920)在同样问题中也独立地使用了由两个标量势  $U, V$  得到的解. 二者之间的关系是:  $\Pi_1 = U/r, \Pi_2 = V/r$ ; 其中  $r$  是由原点算起的矢径. 假设

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} = \mathbf{Q}_c^0 = \mathbf{Q}_m^0 = \mathbf{R}_c^0 = \mathbf{R}_m^0 = \mathbf{G} = \mathbf{L} = 0$$

$$2\pi l = \Pi_1, 2\pi g = \Pi_2;$$

$$\Pi_c = \Pi_1 \mathbf{r}, \Pi_m = \Pi_2 \mathbf{r},$$

那么,由  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  得到的场的量的表达式及势函数所满足的波动方程,就和 (5.8.20b, 21b, 24a, 25b) 及 (5.8.23b) 一致. 也就是说,德拜-波罗姆维奇势本质上是赫兹矢量势在矢径方向上的分量. 为了把这个结果推广到点源分布范围以内的点上,只要使用球坐标  $(r, \theta, \phi)$ , 假设

$$G_\theta = G_\phi = L_\theta = L_\phi = 0, 2\pi l = \Pi_1 + 2\pi l',$$

$$2\pi g = \Pi_2 + 2\pi g',$$

再采取与惠塔克势的情况完全相同的手续就可以了.  $G_r$ 、 $L_r$  是下列方程的特解:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G_r}{\partial \phi^2} \\ = (\text{curl } \mathbf{P})_r + c \int (\text{curl } \mathbf{j})_r dt \end{aligned} \quad (5.8.37b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial L_r}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 L_r}{\partial \phi^2} = -(\text{curl } \mathbf{M})_r; \end{aligned} \quad (5.8.38b)$$

而  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  则满足

$$\left. \begin{aligned} \square \Pi_1 &= -\frac{4\pi}{r} \left\{ P_r + c \int j_r dt - \frac{1}{c} \dot{L}_r - \frac{\partial l'}{\partial r} \right\} \\ \square \Pi_2 &= -\frac{4\pi}{r} \left\{ M_r - \frac{1}{c} \dot{G}_r - \frac{\partial g'}{\partial r} \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (5.8.39a)$$

这时,场的量的表达式是

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{grad div}(\Pi_1 \mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \ddot{\Pi}_1 \mathbf{r} \\ &\quad - \frac{1}{c} \text{curl}(\dot{\Pi}_2 \mathbf{r}) - 2\text{grad}\Pi_1 \end{aligned}$$

$$-\frac{4\pi}{c} \left( \dot{L}_r \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - 4\pi \text{grad} l' \quad (5.8.20d)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \text{curl}(\dot{\Pi}_1 \mathbf{r}) + \text{curlcurl}(\Pi_2 \mathbf{r}) \\ + 4\pi \text{curl} \left( L_r \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (5.8.21d)$$

#### d) 赫兹振子发出的辐射

赫兹最先引进了以他的名字命名的势函数，并通过该势函数给出电磁场方程组的一个特解；有关振动的电偶极子问题，成为当时他所进行过的各种实验的接触作用论解释的基础。现在，在真空中，当极矩为  $\mathbf{p}e^{-i\omega t}$  ( $\mathbf{p}$  是恒矢量) 的振动的电偶极子位于原点时，我们来求一下它所产生的电磁场。为了处理这个问题，可以在式 (5.8.23) 中假设点源的分布是

$$\rho = \mathbf{j} = \mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}e^{-i\omega t} \delta(\mathbf{r}). \quad (5.8.40)$$

这时，式(5.8.23)的解是

$$\Pi_c^0 = \frac{\mathbf{p}e^{i(kr-\omega t)}}{r}, \quad \Pi_m^0 = 0 \quad \left( k = \frac{\omega}{c} \right), \quad (5.8.41)$$

由式 (5.8.20, 21) 可知，场的量是

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \Pi_c^0 - \frac{1}{c^2} \ddot{\Pi}_c^0, \\ \mathbf{B} = \frac{1}{c} \text{curl} \dot{\Pi}_c^0. \quad (5.8.42)$$

根据规范变换式 (5.8.30)，相同的场的量能用磁赫兹势来表示。假如取规范函数为

$$\lambda = \gamma = \Gamma = 0, \\ \Lambda = c \int \Pi_c^0 dt = -\frac{\mathbf{p}}{ikr} e^{i(kr-\omega t)}, \quad (5.8.43)$$

则有

$$\Pi_c = 0, \quad \Pi_m = -\mathbf{p} \times \frac{\mathbf{r}}{r}$$



$$\times \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{ikr^2} \right\} e^{i(kr - \omega t)}. \quad (5.8.44)$$

由 (5.8.20a, 21a) 可知, 场的量就是

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{curl} \dot{\boldsymbol{\Pi}}_m + 4\pi \mathbf{R}_e, \quad (5.8.45)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \operatorname{curl} \boldsymbol{\Pi}_m - 4\pi \mathbf{R}_m.$$

其中, 由式 (5.8.34)、(5.8.29), 假设  $\mathbf{R}_e^0 = \mathbf{R}_m^0 = 0$ , 则有

$$\mathbf{R}_e = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{L}}, \quad \mathbf{R}_m = -\operatorname{curl} \mathbf{L} \quad (5.8.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -\frac{1}{4\pi} \square \boldsymbol{\Lambda} = c \int \mathbf{P} dt \\ &= -\frac{\mathbf{P}}{ik} e^{-i\omega t} \delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.8.47)$$

因为在原点以外  $\mathbf{L}$  为零, 所以, 如果  $\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_m = 0$ , 则场的量在原点以外的所有点上均由式 (5.8.45) 求出, 但是, 为了确切地给出它在原点的奇异性, 进行计算时必须把  $\mathbf{R}_e$ 、 $\mathbf{R}_m$  包括在内。例如, 若把式 (5.8.44, 46) 的  $\boldsymbol{\Pi}_m$ 、 $\mathbf{R}_e$  代入式 (5.8.45) 的第一式, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{curl} \operatorname{curl} \boldsymbol{\Pi}_e^0 - 4\pi \mathbf{P} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi}_e^0 \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{\Pi}}_e^0 - \square \boldsymbol{\Pi}_e^0 - 4\pi \mathbf{P}, \end{aligned}$$

由式 (5.8.23) 可知, 它与式 (5.8.42) 的第一式是一致的。式 (5.8.41) 及与式 (5.8.44) 等价的式 (5.8.45), 分别是赫兹和里纪引进的  $\boldsymbol{\Pi}_e$  和  $\boldsymbol{\Pi}_m$  的原型。

为了考察赫兹振子发出的辐射的状态, 我们现在稍微详细地研究一下式 (5.8.41, 42)。如果把电偶极子的方向取作极轴, 引进球坐标  $(r, \theta, \varphi)$  (图 5.12), 那么, 电赫兹势的各个分量就是

$$(\boldsymbol{\Pi}_e^0)_r = \frac{p \cos \theta e^{i(kr - \omega t)}}{r},$$

$$(\Pi_e^0)_\theta = -\frac{p \sin \theta e^{i(kr-\omega t)}}{r}, \quad (\Pi_e^0)_\varphi = 0,$$

而  $\text{curl} \Pi_e^0$  只有  $\varphi$  分量不为零

$$\begin{aligned} (\text{curl} \Pi_e^0)_r &= (\text{curl} \Pi_e^0)_\theta = 0, \\ (\text{curl} \Pi_e^0)_\varphi &= p \sin \theta \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{i(kr-\omega t)}. \end{aligned} \quad (5.8.48)$$

因此, 根据式 (5.8.42),

$$\begin{aligned} H_r &= H_\theta = 0, \\ H_\varphi &= -ik \sin \theta \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{i(kr-\omega t)}. \end{aligned} \quad (5.8.49)$$

因为  $\mathbf{E}$  的表达式可以改写成  $\mathbf{E} = \text{curl} \text{curl} \Pi_e^0 - 4\pi \mathbf{P}$ , 所以, 由式 (5.8.40) 可知, 对于原点外的全部空间点来说, 只要计算它的第一项就可以了:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 2p \cos \theta \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{i(kr-\omega t)} \\ E_\theta &= p \sin \theta \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{i(kr-\omega t)}, \quad E_\varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8.50)$$

磁场的表达式由与  $r^{-2}$  成正比的感应场和与  $r^{-1}$  成正比的辐射场构成。电场的  $r^{-3}$  项是偶极子的静电场,  $r^{-2}$  项——即**转移场**(transition field)——供给振动的能量, 但对辐射能量却没有贡献。在 § 5.5 结束时谈到的关于位移电流的赫兹实验, 是在  $r^{-2}$  以上的高次项起作用**的感应场区** (inductance field zone) 中进行讨论的。如果只由式 (5.8.49, 50) 中取出辐射场, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{rad}} &= \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} [(\mathbf{p} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{k}], \\ \mathbf{H}_{\text{rad}} &= \frac{ke^{i(kr-\omega t)}}{r} [\mathbf{p} \times \mathbf{k}], \quad \left( \mathbf{k} \equiv k \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \end{aligned} \quad (5.8.51)$$

在  $r^{-1}$  项为主要项的**波动区** (wave zone) 中, 赫兹振子所产生的电场和磁场与矢径正交, 而且还互相正交。把坡印廷矢

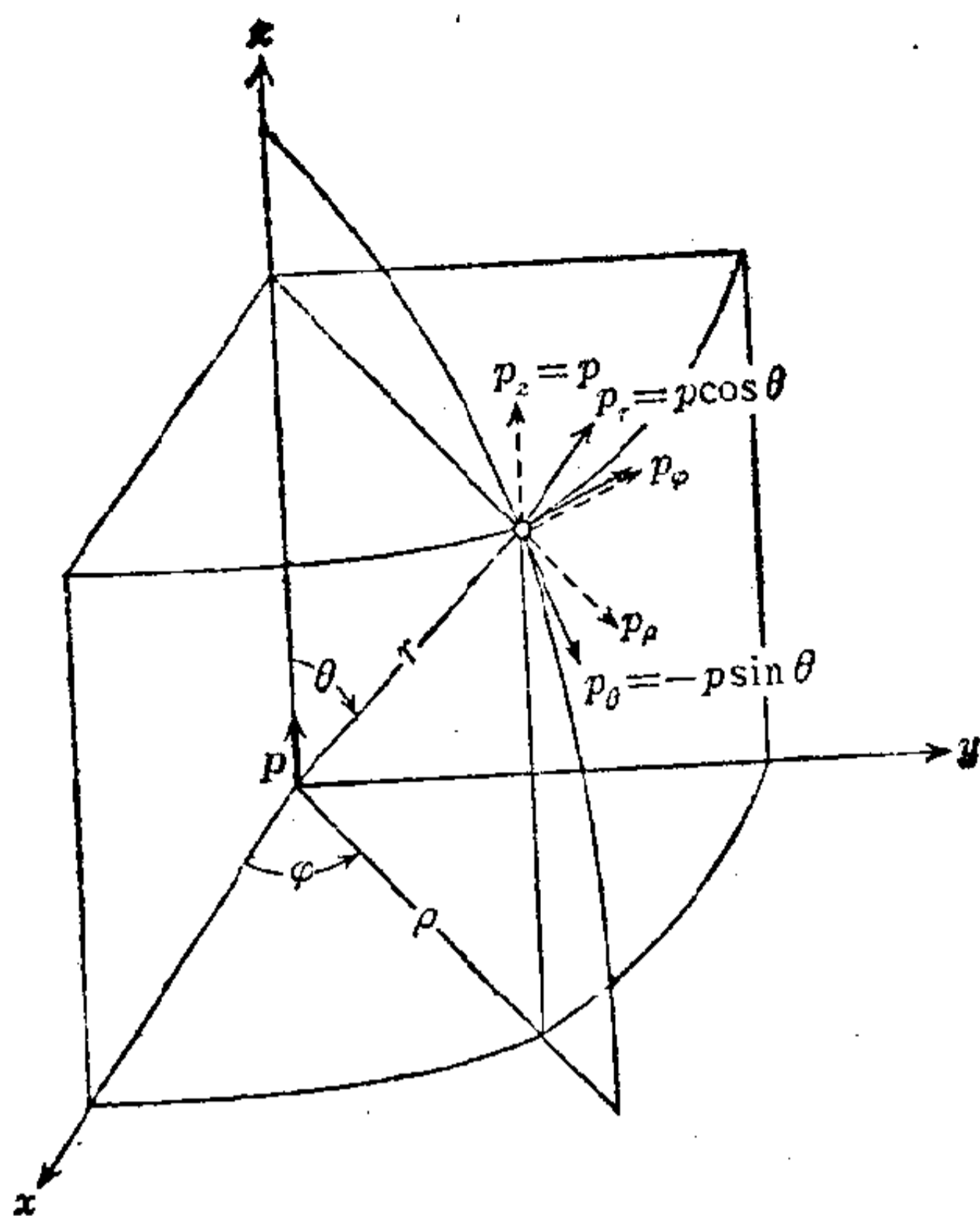


图 5.12

量的时间平均

$$|N| = (1/2)\text{Re}c |\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*| / 4\pi = c(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) / 8\pi$$

对半径  $R$  相当大的球面进行积分, 则辐射量功率就可以用下式确定:

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{cR^2}{8\pi} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* d\Omega = \frac{\omega^4}{3c^2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^*). \quad (5.8.52)$$

赫兹本人(1889)所给出的电场和磁场的表达式(他只处理了几种特殊情况下的表达式), 相当于用圆柱坐标  $(\rho, \varphi, z)$  来计算式(5.8.41)(图 5.12)。在圆柱坐标中,  $\Pi_z^0$  只有  $z$  分量不为零, 而  $\text{curl} \Pi_z^0$  只有  $\varphi$  分量不为零, 根据  $\rho/z = \sin \theta$ , 它与式(5.8.48)的极坐标的  $\varphi$  分量一致。因此, 磁场  $H_\varphi = H_z = 0$ ,  $H_\rho$  的表达式也和式(5.8.49)是一样的, 而电场则是在包含  $z$  轴和矢径的子午面内把式(5.8.50)旋转一个角度  $\theta$  的那种形式:

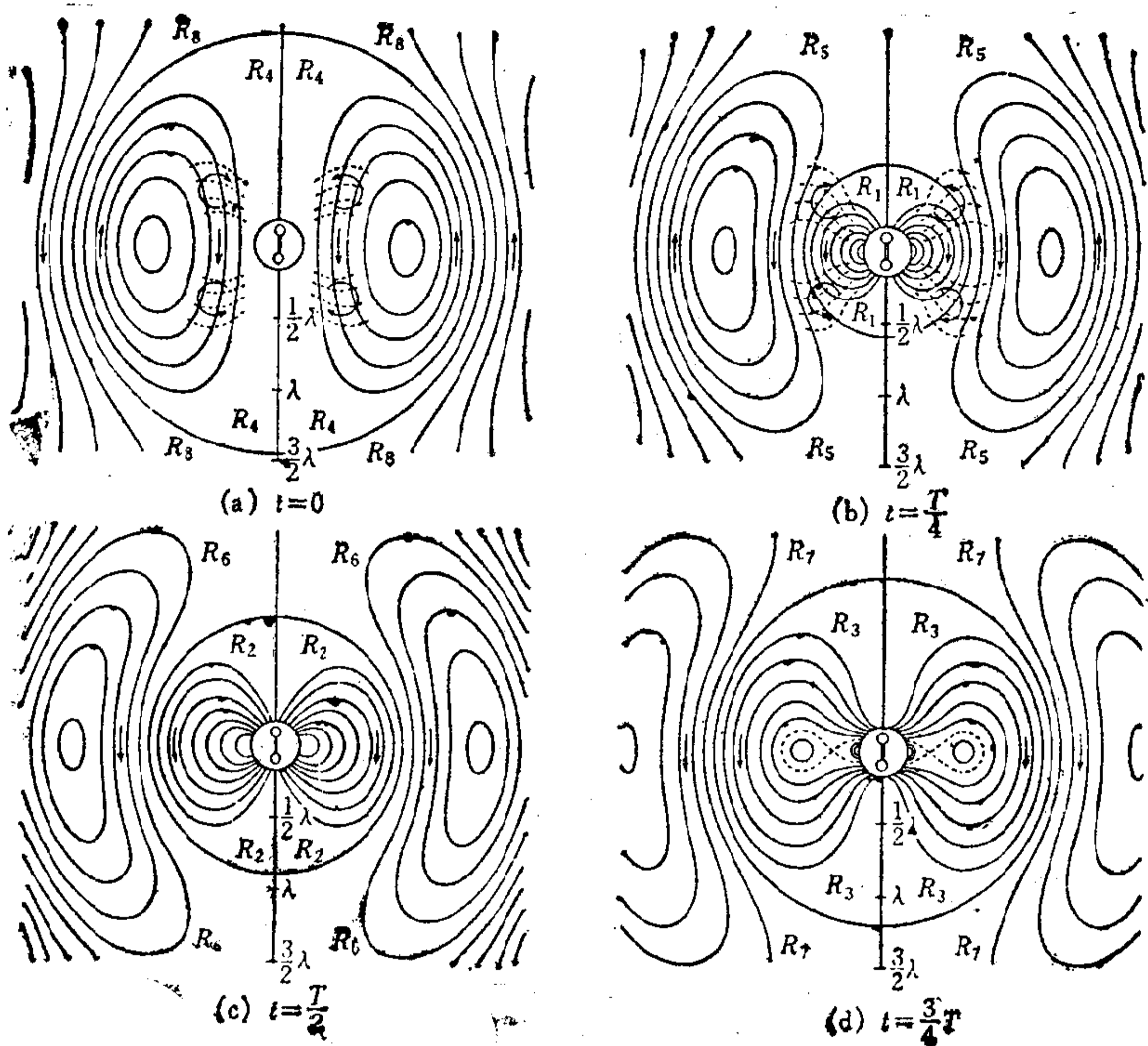


图 5.13

$$\left. \begin{aligned}
 E_\rho &= p \sin \theta \cos \theta \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{i(kr - \omega t)}, \quad E_\varphi = 0 \\
 E_z &= \left\{ -p \sin^2 \theta \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2p \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r} \right) \right\} e^{i(kr - \omega t)}
 \end{aligned} \right\} (5.8.53)$$

假设力线单元为  $ds$ , 则电力线的方程就是

$$ds \times \mathbf{E} = ds \times \text{curl curl } \Pi^0 = 0, \quad (5.8.54)$$

因在圆柱坐标中  $\mathbf{E} = \text{curl curl } \Pi^0$ , 归结为

$$E_{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \{ \rho (\text{curl} \Pi_c^0)_{\varphi} \},$$

$$E_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho (\text{curl} \Pi_c^0)_{\varphi} \},$$

所以，赫兹把  $\rho (\text{curl} \Pi_c^0)_{\varphi}$  写成  $Q$ ，描绘了与静电学中的等位线对应的下列曲线群随时间的发展变化：

$$Q = k p \sin^2 \theta \left( \frac{1}{r} - ik \right) e^{i(kr - \omega t)} = \text{const.} \quad (5.8.55)$$

图 5.13 表示式 (5.8.55) 在包含  $z$  轴和矢径  $r$  的子午面内的分布。(a)、(b)、(c)、(d) 分别相应于时刻  $t = 0, T/4, 2T/4, 3T/4$ ，而且，通过适当调转箭头方向，它们也相应于以后为  $T/4$  倍数的所有时刻（对于式 (5.8.41)，赫兹取成  $\Pi_c^0 = p \sin(mr - nt)/r$ ， $m \equiv \Pi v/c$ ， $n \equiv \pi/T$ ；因此，他使用了相当于式 (5.8.55) 虚数部分的  $Q$  表达式；在以下对图 5.13 说明时，请注意这一点）。

在各个时刻，电力线并不先由  $Q = 0$  的球面出发。当  $t = 0$  时，这个球面无限小，但却急剧扩展，在  $t = T/4$  时占据范围  $R_1$ 。其内部分布大体与静电荷的情况相同。球面  $Q = 0$  的相速，在  $kr$  小的地方远远大于光速  $c$ 。假设它和  $c$  相等，则在  $t = T/4$  时大约只会扩展到相应于  $\lambda/4$  的范围。但是，这个速度渐渐稳定到  $c$ ，球面于  $t = T/2$  时充满空间  $R_2$ 。这时振子的电荷最大，由振子发出的电力线的数目也最多。

在  $t = T/2$  之后，新的力线还没有产生。原有的力线开始向振子后退，在该处电力线消失，能量转化为磁能。伴随着力线向振子收缩的趋向，力线向侧边弯曲，随着时间的推移更接近于  $z$  轴（图(d)）。然后，外侧一部分力线以封闭曲线的形式分离出去，独立地向空间前进，而力线的剩余部分则落入振



子。虽然后退的力线数和向外发出的力线数相同,但是,能量却减少了分离出去的力线所带走的那一部分。为了不使振动衰减,必须由外部补充那一部分才行。

当  $t = T$  时,又回到图(a)(箭头方向与  $t = 0$  的情况相反),力线被分离出去的部分充满范围  $R_4$ ,而由振子发出的力线则完全消失。但是,新的力线另外涌出,在  $t = 5T/4$ 、 $6T/4$ 、 $7T/4$  的各个时刻,就  $R_5$ 、 $R_6$ 、 $R_7$  的各范围而言,又可以看到与前面相同的过程。

如果详细研究一下图 5.13,我们就能看到,既不在  $z$  轴上也不在  $xy$  平面上的那些点的电力方向,每一瞬间都发生变化,而且,一般来说,表示该点上的力的矢量,在一个振动期间描绘一个椭圆;不过,赫兹还找到了其轨迹成为圆形的那些点。另外,把时间相差  $T/2$  的两个图进行比较,还可以找到一个图的曲线系与另一个图的曲线系正交,而且一个图的曲线间隔等于另一个图的曲线间隔的那些地方。在图(a)、(b)中的圆形箭头就是那些地方,箭头的方向表示力矢量的旋转方向,虚线是  $T/2$  时间之后在图(c)、(d)中对应的曲线。对于沿着  $z$  轴的带状部分来说,可以看到这样的情况。

#### e) 光衍射的标量波理论的适用界限

在 § 5.7(d) 结束时我们曾讨论到光衍射中标量波理论的合理性,这个讨论相当于使用本节(c)中所列举的可能性(i)或(ii)。但是,在实际计算中,与其把赫兹势作为媒介,倒不如直接引进与库仑规范的实数矢量势  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  等价的复数标量势  $V(\mathbf{x}, t)$ ,构成与  $V$  有关的解析信号 (§ 4.5(b)),并用它来表示辐射场的能量密度和坡印廷矢量,要更为方便一些。现在,假设  $\mathbf{A}$  能用傅里叶积分来表示:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int_K \mathbf{c}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}. \quad (5.8.56)$$

积分范围  $K$  为整个  $\mathbf{k}$  空间。这样一来，由库仑规范的附加条件  $\text{div} \mathbf{A} = 0$  可知， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{k}, t) = 0$ ；而且，因为  $\mathbf{A}$  是实数，所以  $\mathbf{c}(-\mathbf{k}, t) = \mathbf{c}^*(\mathbf{k}, t)$ 。若把复数基矢  $\mathbf{L}$  取为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{k}) &\equiv l_1(\mathbf{k}) + il_2(\mathbf{k}); \\ l_1 &\equiv \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{k}|}, \quad l_2 \equiv \frac{\mathbf{k} \times l_1}{|\mathbf{k} \times l_1|} \\ \mathbf{L}(-\mathbf{k}) &= \mathbf{L}(\mathbf{k}) \quad (k_s \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (5.8.57)$$

( $\mathbf{n}$  是给定的实数矢量)，那么，复数标量势  $V(\mathbf{x}, t)$  就可以通过下列一次变换由  $\mathbf{A}$  来确定：

$$V(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{A}(\mathbf{x}', t) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d\mathbf{x}'. \quad (5.8.58)$$

变换的核为

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_K \mathbf{L}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}, \quad (5.8.59)$$

它是  $\mathbf{L}(\mathbf{k})$  的傅里叶变换。反之，则有

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \int V(\mathbf{x}', t) \mathbf{M}^*(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d\mathbf{x}'. \quad (5.8.60)$$

在真空中没有电荷及电流分布的范围内，矢量势  $\mathbf{A}$  服从矢量波动方程  $\square \mathbf{A} = 0$ ；这一点表明，复数标量势  $V$  满足标量波动方程

$$\square V = 0. \quad (5.8.61)$$

另外，场的能量密度和坡印廷矢量是

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{c^2} \dot{V} \dot{V}^* + \text{grad} V \cdot \text{grad} V^* \right) \end{aligned} \quad (5.8.62)$$

$$\mathbf{N} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{1}{8\pi} (\dot{V}^* \text{grad} V - \dot{V} \text{grad} V^*), \quad (5.8.63)$$

而且，它们满足能量守恒定律

$$\frac{dw}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{N} = 0. \quad (5.8.64)$$

显然, 从形式上看,  $V$  与量子力学中的概率振幅起着同样的作用(格临和乌尔夫; 1953).

因此, 若把  $V$  分成正负频率的两个部分(解析信号)

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}, t) &= V_+(\mathbf{x}, t) + V_-(\mathbf{x}, t) \\ V_+(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^0 v(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \int_0^{\infty} v(\mathbf{x}, -\omega) \exp(i\omega t) d\omega \\ V_-(\mathbf{x}, t) &= \int_0^{\infty} v(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (5.8.65)$$

则  $V_{\pm}$  也满足波动方程

$$\square V_{\pm} = 0. \quad (5.8.66)$$

可以证明, 把矢量势  $\mathbf{A}$  分解成一切可能的频率和传播方向上的单色平面波, 再把各平面波分解成左右旋圆偏振光的分量, 这时  $V_-$ 、 $V_+$  就分别是由一种圆偏振光的全部分量构成的复数势(乌尔夫; 1959).

把  $V_{\pm}$  代入(5.8.62, 63), 则有

$$w = w_+ + w_- + w' \quad (5.8.62a)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_+ + \mathbf{N}_- + \mathbf{N}'. \quad (5.8.63a)$$

式中  $w_{\pm}$ 、 $\mathbf{N}_{\pm}$  是在(5.8.62, 63)中用  $V_{\pm}$  代替  $V$  而得到的表达式,  $w'$ 、 $\mathbf{N}'$  是

$$\begin{aligned} w' &= \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{1}{c^2} (\dot{V}_+ \dot{V}_-^* + \dot{V}_+^* \dot{V}_-) \right. \\ &\quad \left. + (\nabla V_+ \cdot \nabla V_-^* + \nabla V_+^* \cdot \nabla V_-) \right] \end{aligned} \quad (5.8.67)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= -\frac{1}{8\pi} [\dot{V}_+^* \nabla V_- + \dot{V}_+ \nabla V_-^* \\ &\quad + \dot{V}_-^* \nabla V_+ + \dot{V}_- \nabla V_+^*]. \end{aligned} \quad (5.8.68)$$

若取时间平均  $\left( \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T dt \right)$ , 则可证明它们的干涉项是  $\langle w' \rangle = 0$ ,  $\langle N' \rangle = 0$ , 从而

$$\langle w \rangle = \langle w_+ \rangle + \langle w_- \rangle \quad (5.8.62b)$$

$$\langle N \rangle = \langle N_+ \rangle + \langle N_- \rangle. \quad (5.8.63b)$$

显然,  $V_+$ 、 $V_-$  对时间平均来说是非相干的。

当给定单色光场时, 即当  $\mathbf{A}$  用

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) + \mathbf{F}^*(\mathbf{x}) \exp(i\omega t) \quad (5.8.69)$$

给定时, 在式 (5.8.69) 中进行式 (5.8.58) 那样的变换, 则可得由下式构成的  $V(\mathbf{x}, t) = V_+(\mathbf{x}, t) + V_-(\mathbf{x}, t)$ :

$$\left. \begin{aligned} V_{\pm}(\mathbf{x}, t) &= U_{\pm}(\mathbf{x}) \exp(\pm i\omega t) \\ U_-(\mathbf{x}) &= \int \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d\mathbf{x}' \\ U_+(\mathbf{x}) &= \int \mathbf{F}^*(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \right\} \quad (5.8.70)$$

设  $U_{\pm}$  的振幅为  $a_{\pm}$ , 相位为  $\phi_{\pm}$  ( $a_{\pm}$ ,  $\phi_{\pm}$  是实数), 再把

$$U_{\pm} = a_{\pm} \exp(i\phi_{\pm})$$

代入式 (5.8.63a), 则有

$$\mathbf{N}_{\pm} = \mp \frac{\omega}{4\pi} a_{\pm}^2 \text{grad} \phi_{\pm}, \quad (5.8.71)$$

即单色光场的两个部分波  $V_{\pm}$  的能流, 在所有点都位于该波的等相位面的法线方向上。通常, 这种性质只有在几何光学的近似中才是存在的 ( $\omega \rightarrow \infty$ ), 但是, 这种表示却不管频率如何, 均严格成立。

其次, 在稳恒的准单色光场中 (为了简单起见, 假设它是有限的, 但是却持续在相当长的时间间隔  $-T \leq t \leq T$  之间), 当取时间平均时, 如果近似地把

$$\int_{-T}^T \exp[-i(\omega - \omega')t] dt$$

用  $\delta(\omega - \omega')$  替换, 则有

$$\begin{aligned}\langle w \rangle &\approx \frac{1}{2T} \int_0^\infty w_\omega d\omega, \\ \langle \mathbf{N} \rangle &\approx \frac{1}{2T} \int_0^\infty \mathbf{N}_\omega d\omega.\end{aligned}\quad (5.8.72)$$

式中,  $w_\omega$ 、 $\mathbf{N}_\omega$  是准单色光中有代表性的单色光(傅里叶)分量  $v(\mathbf{x}, \mp\omega) \cdot \exp(\pm i\omega t)$  的能量密度和坡印廷矢量. 如果设  $v$  的振幅为  $a_\omega(\mathbf{x})$ 、位相为  $\phi_\omega(\mathbf{x})$  ( $a_\omega$ 、 $\phi_\omega$  是实数), 而写成  $v(\mathbf{x}, \mp\omega) = a_\omega(\mathbf{x}) \exp[i\phi_\omega(\mathbf{x})]$ , 则有

$$\begin{aligned}w_\omega &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 v v^* + \nabla v \cdot \nabla v^* \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + (\nabla\phi_\omega)^2 \right] a_\omega^2 + (\nabla a_\omega)^2 \right\}\end{aligned}\quad (5.8.73)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_\omega &= \pm \frac{i\omega}{4\pi} \{ v^* \nabla v - v \nabla v^* \} \\ &= \mp \frac{\omega}{4\pi} a_\omega^2 \nabla \phi_\omega.\end{aligned}\quad (5.8.74)$$

因此, 光强度  $I(\mathbf{x})$  可以通过  $I(\mathbf{x}) = (\text{const}) v v^*$  而由波动函数中不依赖于时间的那一部分  $v(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) \exp[i\phi(\mathbf{x})]$  来确定; 由式 (5.8.74) 可知, 在位相函数的梯度比振幅平方  $a^2 = v v^*$  变化缓慢的范围内, 允许把这个在有关衍射的标量波理论中曾采用过的方法理解成取电磁场流动矢量  $\mathbf{N}$  的时间平均的绝对值. 实际上, 在几何光学的极限上, 可以认为  $|\text{grad}\phi| = \omega/c = \text{const.}$  而且, 即使在衍射效应明显的焦点附近, 等位相面实质上作为平面而等间隔排列, 位相函数的梯度大体上是一定的 (凌福特 (E. H. Linfoot) 和乌尔夫; 1956).

## § 5.9 电磁场的基本方程组 (III) 哈密顿形式和非线性物质方程

在 § 4.5 我们讲过一个统计的处理方法, 把白光看成振幅



和位相都在不规则变化的一种概率过程。从光的电磁解释的立场来看，这样的观点给出了电磁场的另外一种描象。瑞利勋爵(1900)最先把辐射场当作简谐振子的群；这种看法导致了黑体辐射的瑞利-琼斯公式，给出了辐射场的正则形式，从而为向场的量子论进行过渡作好了准备，它在现代物理学的发展中发挥了巨大的作用。从形式上来看，波动方程的本征值问题，无非是处理完全反射壁所包围的无点源的有限范围内的振动解，求出辐射场的频率分布，再把连续场看成分散自由度的力学系统的极限。

### a) 空腔内辐射场的频率分布

我们来考虑电磁波被封闭在一个远远大于其波长的空腔内的情况。因为在 § 5.7(d) 推导出来的式(5.7.26, 27)，是形式相同的方程，所以，我们选择与真空中的电场  $\mathbf{E}$  有关的齐次波动方程（因此  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ），并假设空腔是用完全反射辐射的壁所构成的立力体，其边长为  $L$ 。也就是说，要求出式(5.7.26)的驻波解，满足  $E$  的切线分量在空腔壁上为零的边界条件。假设场随时间的变化是  $e^{-i\omega t}$ ，那么，波动方程就归结为亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \mathbf{E}(x, y, z) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(x, y, z) = 0. \quad (5.9.1)$$

在直角坐标系中，这个矢量方程是与各坐标轴方向上的分量有关的三个联立的标量方程。如果就场的  $x$  分量来求

$$E_x(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

型的解，则由式(5.9.1)的  $x$  分量可以得到

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0 \quad \left( k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \right). \quad (5.9.2)$$

因为各自只是变量  $x, y, z$  的函数，其和等于常数时，各函数本身必须是常数，所以，假设这些常数为  $k_1^2, k_2^2, k_3^2$ ，则式(5.9.2)

成立的必要而充分的条件是

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_1^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_2^2 Y = 0,$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_3^2 Z = 0 \quad (5.9.3)$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2. \quad (5.9.4)$$

因此,只要求出式(5.9.3,4)的解,使它们满足下列边界条件就可以了:

$$E_x(x, 0, z) = E_x(x, y, 0) = 0,$$

$$E_x(x, L, z) = E_x(x, y, L) = 0. \quad (5.9.5)$$

对于场的量的  $y$  分量及  $z$  分量  $E_y(x, y, z)$ 、 $E_z(x, y, z)$  来说,也是一样的。这时,由边界条件式(5.9.5)的第二个条件式及  $E_y$ 、 $E_z$  相应的条件式可知,  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  只能允许有下列值:

$$k_1 = \frac{\pi}{L} n_1, \quad k_2 = \frac{\pi}{L} n_2,$$

$$k_3 = \frac{\pi}{L} n_3 \quad (5.9.6)$$

( $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$  是正整数)。

结果,对于某一特定的  $k^2$ , 式(5.9.1)满足边界条件的解是由下式确定的:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_1(k) \cos \frac{\pi n_1}{L} x \sin \frac{\pi n_2}{L} y \sin \frac{\pi n_3}{L} z \\ E_y &= E_2(k) \sin \frac{\pi n_1}{L} x \cos \frac{\pi n_2}{L} y \sin \frac{\pi n_3}{L} z \\ E_z &= E_3(k) \sin \frac{\pi n_1}{L} x \sin \frac{\pi n_2}{L} y \cos \frac{\pi n_3}{L} z \end{aligned} \right\} \quad (5.9.7)$$

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (5.9.4a)$$

空腔中辐射场的固有振动以三个正整数的一组 ( $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$ ) 来表示,而满足式(5.9.4a)的一组 ( $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$ ) 应该给出完全相同

的频率。因此,式(5.9.7)乘以任意振幅,并就那样的一组  $(n_1, n_2, n_3)$  相加,其结果也会是式(5.9.1)的解,所以,由式(5.9.7)就可以构成一个不会成为乘积形式的通解。

空腔内的辐射场应该满足的条件是:若把(5.9.7)代入  $\text{div} \mathbf{E} = 0$  ( $\mathbf{E}(k) \equiv (E_1(k), E_2(k), E_3(k)), \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ ), 则有

$$n_1 E_1(k) + n_2 E_2(k) + n_3 E_3(k) = 0 \text{ 或}$$

$$(\mathbf{E}(k), \mathbf{k}) = 0, \quad (5.9.8)$$

即对于一组  $(n_1, n_2, n_3)$  来说,显然只有与横波两个可能的偏振相对应的两个一次独立波。因此,如果引进与  $\mathbf{k}$  正交,而且也相互正交的单位矢量(偏振矢量)  $\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) (\lambda = 1, 2)$ , 那么,  $\mathbf{E}(k)$  就可以写成

$$\mathbf{E}(k) = \sum_{\lambda=1}^2 q_\lambda(\mathbf{k}) \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}), \quad (5.9.9)$$

假如把式(5.9.7,9)代入式(5.9.1),则可看到,  $q_\lambda$  满足简谐振子(频率为  $|\mathbf{k}|c/L$ ) 的方程。

这样一来,空腔内频率在  $(\nu, \nu + d\nu)$  之间的固有振动的个数  $N(\nu)d\nu$ , 对应于正整数  $(n_1, n_2, n_3)$  的组数,这些正整数通过式(5.9.4a)来表示固有振动的频率。所以,如果把  $(n_1, n_2, n_3)$  看作三维坐标空间的格子点,那么,  $N(\nu)d\nu$  就等于半径为  $(2L/c)\nu$ 、厚度为  $(2L/c)d\nu$  的球壳在  $1/8$  体积中的格子点数乘以可能的偏振状态数 2:

$$N(\nu) d\nu = 2 \times \frac{1}{8} \left\{ 4\pi \left( \frac{2L\nu}{c} \right)^2 \frac{2L}{c} \times d\nu \right\} = \frac{8\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu, \quad (5.9.10)$$

这里的  $1/8$  体积对应于  $(n_1, n_2, n_3)$  全部为正。假设空腔处于温度平衡,若把能量均分定律应用于(5.9.10),则可推导出瑞

利(1900)-琼斯(1905)定律。即,空腔每单位体积的能谱是

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu, \quad (5.9.11)$$

式中,  $k$  为波耳兹曼常数,  $T$  为平衡(绝对)温度(参考本讲座第三卷《量子力学 I》第一章)。

### b) 辐射场的哈密顿形式

假如把真空中的辐射场封闭到一个用完全反射壁作成的边长为  $L$  的立方体中,那么,在这个壁的表面,  $\mathbf{E}$  的切线分量  $= 0$ ,  $\mathbf{B}$  的法线分量  $= 0$ , 因此,若用库仑规范的矢量势  $\mathbf{A}$  来描述辐射场,则  $\mathbf{A}$  的切线分量必须为 0。而且,由于库仑规范的附加条件是  $\text{div}\mathbf{A} = 0$ , 所以就能够与 § 5.9(a) 完全相同地引进无数个频率的组合。在这种情况下,要是稍微放宽边界条件,也能假设场在壁上为周期性的(但在这时  $|\mathbf{k}| = (2\pi/L)\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$ )。在本讲座《量子力学 I》第十章中,把辐射场的哈密顿函数写成了这种驻波的固有振动的集合。

在这里需要注意,即使借助于行波的振幅,也可以把场表示出来。如果使用复数指数函数,则库仑规范中的实数矢量势  $\mathbf{A}$  就能表示成

$$\mathbf{A} = \sum_{\lambda} \{q_{\lambda}(t)\mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{r}) + q_{\lambda}^*(t)\mathbf{A}_{\lambda}^*\}. \quad (5.9.12)$$

式中,

$$\mathbf{A}_{\lambda} = \mathbf{e}_{\lambda} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} e^{i(\mathbf{k}_{\lambda} \cdot \mathbf{r})}, \quad q_{\lambda} = |q_{\lambda}| e^{-i\omega_{\lambda} t}. \quad (5.9.13)$$

各个  $\mathbf{A}_{\lambda}$  表示波动矢量为  $\mathbf{k}_{\lambda}$  的行波,在这种情况下,确定  $\mathbf{k}_{\lambda}$  的整数,正负二者皆有。  $\mathbf{A}_{\lambda}^*$  具有波动矢量  $-\mathbf{k}_{\lambda}$ , 偏振矢量  $\mathbf{e}_{-\lambda}$  与  $\mathbf{e}_{\lambda}$  相等。  $\mathbf{A}_{\lambda}$  满足标准正交条件:

$$\int \mathbf{A}_{\lambda} \cdot \mathbf{A}_{\mu}^* d\nu = \int \mathbf{A}_{\lambda} \cdot \mathbf{A}_{-\mu} d\nu = 4\pi c^2 \delta_{\mu\lambda}. \quad (5.9.14)$$

频率为  $\omega_{\lambda}$  的振子,其哈密顿函数可以写成

$$H_1 = 2\omega q_1 q_1^*, \quad (5.9.15)$$

但是,  $q_1, q_1^*$  却不是正则变量. 通过引进实数正则变量  $Q_1, P_1$ ,

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= q_1 + q_1^* \\ P_1 &= -i\omega_1(q_1 - q_1^*) = \dot{Q}_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.9.16)$$

就可以得到与使用驻波时相同的形式:

$$H_1 = \frac{1}{2}(P_1^2 + \omega_1^2 Q_1^2);$$

而辐射场的哈密顿函数则写成了简谐振子的集合.

海森伯 (Heisenberg)-泡利 (1929, 30) 的通用方法是使场的量与拉格朗日形式中的广义坐标相对应, 再把变分原理应用于拉格朗日函数, 使用泛函微分来定义正则共轭量; 关于这个方法, 请参考本讲座第十卷《基本粒子论》第一部分第九章.

### c) 非线性物质方程与非线性光学

在第四章前言中, 我们曾提到, 激光具有极高的定向性.  $Q$  开关激光既能给出  $10^6 \text{V} \cdot \text{cm}^{-1}$  的峰值输出, 又能给出  $10^9 \text{W} \cdot \text{cm}^{-2}$  的通量. 在那样局部高强度场的作用下, 非线性便显示出来, 它虽然很小, 但却是几乎所有的物质都具备的. 这时, 物质的介电常数也好, 导磁率也好, 都依赖于外加场的量, 已经不能再看作常数了. 一般来说, 应该把物质方程写成

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{E})\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{H})\mathbf{H}. \quad (5.9.17)$$

麦克斯韦物质方程的非线性, 由其产生之初已为人们所知. 利用铁磁体的非线性导磁率来设计放大器, 还是十九世纪的事; 而朗之万 (Langevin; 1905) 关于顺磁饱和的理论, 也可以说是利用了频率为零时的非线性. 等离子体中的非线性响应已经用来说明无线电波在电离层传播时的“卢森堡效应”. 脉峰和激光的最新发展, 只不过是微波及光波范围内广泛地揭示出物质的非线性罢了.



为了描述物质的非线性，可以把极化矢量展开成场的量的幂级数。例如，在电偶极子的情况下，代替(5.4.13)，可以把  $\mathbf{P}$  写成

$$\mathbf{P} = \chi_1 \mathbf{E} + \chi_2 \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi_3 \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \quad (5.9.18)$$

$\chi_1$  是通常的线性电极化率，而第二项以后则是由非线性效应所产生的非线性极化，作为它们的系数，非线性电极化率都是张量，这些张量具有各自对应的阶数和依赖于物质的对称性。当然，这样的展开只能在非线性较小的情况下使用，但是，正因为它是小的，所以才必须期待着强力激光的研制。

非线性极化率提供了认识物质结构的重要线索，但是为了求出它，尚须采取这样的手续，即：深入到微观阶段，把其中物质粒子的行为展开成场量的幂级数，再通过统计方法加上与宏观量的对应关系。这是因为，该非线性是由物质的微观结构产生的。在这里，假设这些非线性已经给出，并把它们看成是场的附加点源。这时，我们把在场方程组中出现的电流进行多极展开，而且认为，除了线性部分以外，它的各项还包含非线性部分。代替式(5.7.11)，可以假设

$$\left. \begin{aligned} \text{curl} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{\text{cond}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \text{curl} \mathbf{M} - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \mathbf{Q}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.9.19)$$

当光在非线性媒质中传播时，可以明显地看到**高次谐波**的发生和**光混频**(optical mixing)，即由频率为  $\omega$  的基波产生频率为  $2\omega$  的二次谐波，当频率为  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的两个基波同时存在时，会产生频率为  $\omega_1 \pm \omega_2$  的波；另外还产生  $3\omega$  的三次谐波和  $2\omega_1 \pm \omega_2$  的波；等等。因此，我们就可以把场展开成傅里叶级数，而写出各傅里叶分量的麦克斯韦方程。

$$E(\omega, t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} E(t) \exp(-i\omega t) dt$$

$$= E^*(-\omega, t). \quad (5.9.20)$$

其中,  $T$  是非常长的, 足以使  $\omega T \gg 1$ , 但又选得短到使  $E(\omega, t)$  不依赖于  $T$  的程度. 在非线性的时候, 这样做是可能的. 为了简单起见, 假设是  $\mu^2 = 1$  的媒质, 由式 (5.7.10)、(5.7.19) 则有

$$\text{curl} \mathbf{E}(\omega_i) = +i \frac{\omega_i}{c} \mathbf{H}(\omega_i) \quad (5.9.21)$$

$$\begin{aligned} \text{curl} \mathbf{H}(\omega_i) = & -i \frac{\omega_i}{c} \epsilon(\omega_i) \mathbf{E}(\omega_i) \\ & + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{NL}(\omega_i). \end{aligned} \quad (5.9.22)$$

从它们即可得到非线性波动方程

$$\begin{aligned} \text{curlcurl} \mathbf{E}(\omega_i) - \left(\frac{\omega_i}{c}\right)^2 \epsilon(\omega_i) \mathbf{E}(\omega_i) \\ = 4\pi i \frac{\omega_i}{c^2} \mathbf{J}^{NL}(\omega_i). \end{aligned} \quad (5.9.23)$$

这里, 角标  $L$ 、 $NL$  意味着取该量的线性部分或非线性部分. 如果使用式 (5.4.11), 线性极化就会归入介电常数. 特别在非线性的点源仅仅是式 (5.9.18) 的情况下, 上式成为

$$\begin{aligned} \text{curlcurl} \mathbf{E}(\omega_i) - \left(\frac{\omega_i}{c}\right)^2 \epsilon(\omega_i) \mathbf{E}(\omega_i) \\ = 4\pi \left(\frac{\omega_i}{c}\right)^2 \mathbf{P}^{NL}(\omega_i). \end{aligned} \quad (5.9.23a)$$

现在, 假设非线性媒质中存在着频率为  $\omega_1, \omega_2, \dots$ , 波动矢量为  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots$ , 偏振矢量为  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$  的光波, 那么, 就应该求解其个数仅仅是这些波的数目的联立方程 (5.9.22), 但是, 实际上, 纵然通过某种物理上的理由或近似, 而限于少数的频率分量, 它也是不太好处理的. 这些波在频率

率  $\omega_s = \sum_i l_i \omega_i$  ( $l_i$  是正负整数) 产生电介质极化  $\mathbf{P}^{NL}(\omega_s)$ ,

该极化还放出频率为  $\omega_s$  的辐射，倘若频率为  $\omega_s$  的新波最初振幅小到能够忽略不计，则基波频率的场就可以看成固定参数。用这个参量近似，我们只要考虑新频率  $\omega_s$  中的一个波动方程就可以了。现在，假设非线性点源是

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}^{NL}(\omega_s, \mathbf{r}) &= \mathbf{P}_0^{NL} \exp i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega_s t) \\ \mathbf{P}_0^{NL} &= \chi^{NL} \prod_i (e_i E_i)^{|l_i|} \end{aligned} \right\} \quad (5.9.24)$$

非线性极化率  $\chi^{NL}$  是  $\left( \sum_i |l_i| + 1 \right)$  阶张量，当  $l_i$  为负时，我

们约定把  $(e_i E_i)$  用它的复数共轭量替换。因此，例如，二次谐波使用  $i = 1, l_i = 2$  来确定。新频率  $\omega_s$  的波动方程是

$$\begin{aligned} \text{curl curl } \mathbf{E}(\omega_s) - \left( \frac{\omega_s}{c} \right)^2 \varepsilon(\omega_s) \mathbf{E}(\omega_s) \\ = \frac{4\pi\omega_s^2}{c^2} \mathbf{P}_0^{NL} \exp i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega_s t). \end{aligned} \quad (5.9.23b)$$

这个方程的解为齐次方程的通解与非齐次方程的特解之和，是以频率  $\omega_s$  在线性媒质中传播的所有平面波的线性叠加来表示的。倒底选择怎样的线性叠加，要依边界条件而定。作为一个例子，我们以  $z = 0$  的平面把空间分成线性媒质和非线性媒质，来观察在无限平面波入射时光的反射和折射（波洛姆贝根 (N. Bloembergen) 和波香 (P. S. Pershan); 1962)。齐次方程的解所允许的波的方向，由下列波动矢量切线分量的连续性来确定：

$$k_x^s = \sum_i l_i k_{ix}, \quad k_y^s = \sum_i l_i k_{iy};$$

而非齐次方程解的波的方向，则由下列法线分量的连续性来确定：

$$k_z^s = \sum_i l_i k_{iz}^T$$

( $\mathbf{k}_T$  是透射波的波动矢量). 式(5.9.23b)是与  $P_y^{NL} \equiv P_{\perp}^{NL}$  产生的波相对应的方程, 该波满足这些边界条件, 而且垂直于人射面偏振; 若取  $y$  轴为  $k_y^s = 0$  的方向, 则(5.9.23b)的通解是

$$\left. \begin{aligned} E_{\perp} &= T_{\perp} \exp i \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} + \frac{4\pi(\omega_s/c)^2 P_{\perp}^{NL}}{|k_s|^2 - |k_T|^2} \exp i \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} \\ |k_T| &= \frac{\omega_s \sqrt{\epsilon_T}}{c}, \quad k_x^T = k_x^s. \end{aligned} \right\} \quad (5.9.25)$$

齐次方程的解的振幅  $T_{\perp}$ , 由  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  的切线分量的连续条件来确定, 同时, 这个条件要求存在着频率为  $\omega_s$  的反射波

$$\left. \begin{aligned} E_{\perp}^R &= R_{\perp} \exp i \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} \\ |k_R| &= \frac{\omega_s \sqrt{\epsilon_R}}{c}, \quad k_x^R = k_x^T = k_x^s \end{aligned} \right\}. \quad (5.9.26)$$

由  $E_y$  及  $H_x$  在  $z = 0$  的连续性, 我们可以得到

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= -4\pi R_{\perp}^{NL} [(\sqrt{\epsilon_T} \cos \theta_T + \sqrt{\epsilon_R} \cos \theta_R) \\ &\quad \times (\sqrt{\epsilon_T} \cos \theta_T + \sqrt{\epsilon_s} \cos \theta_s)]^{-1} \end{aligned} \quad (5.9.27)$$

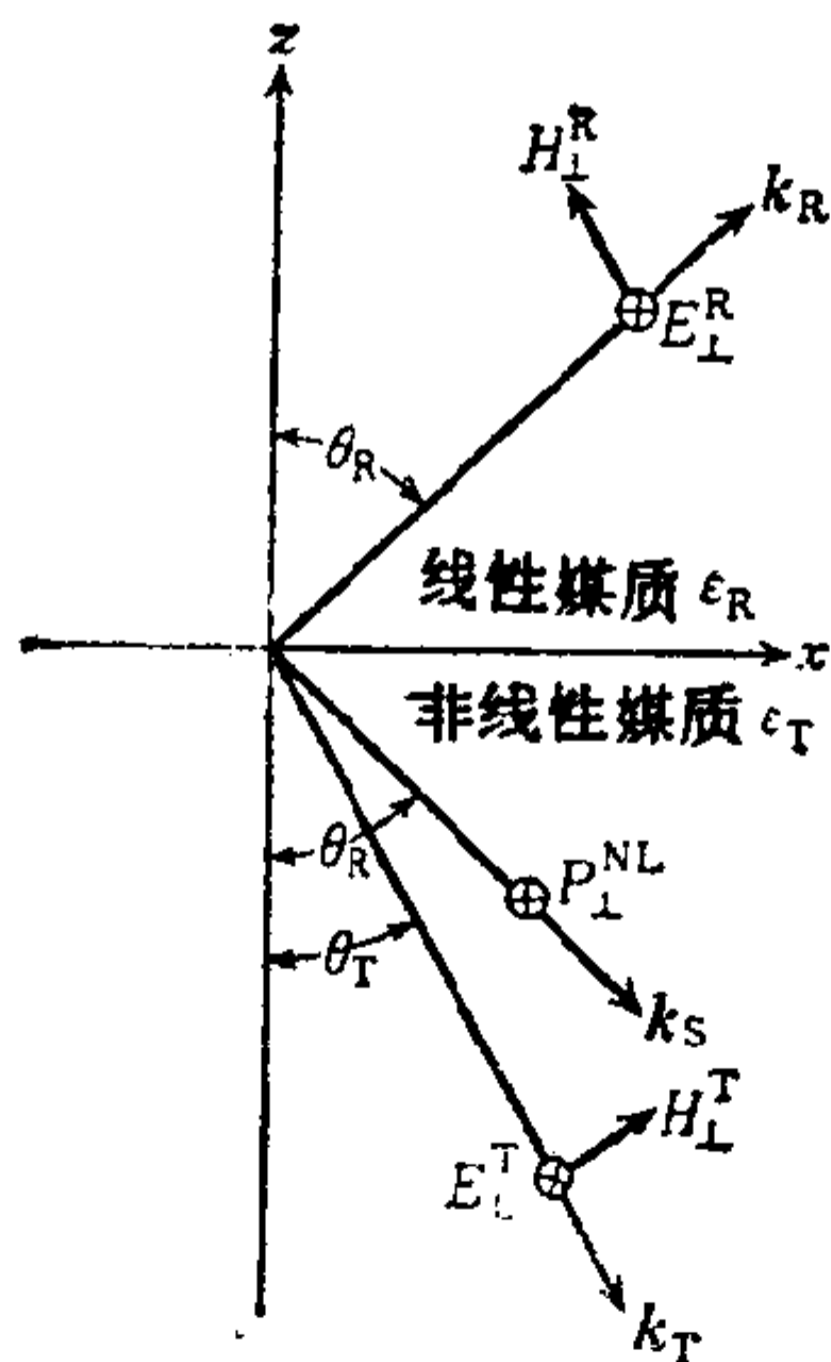


图 5.14

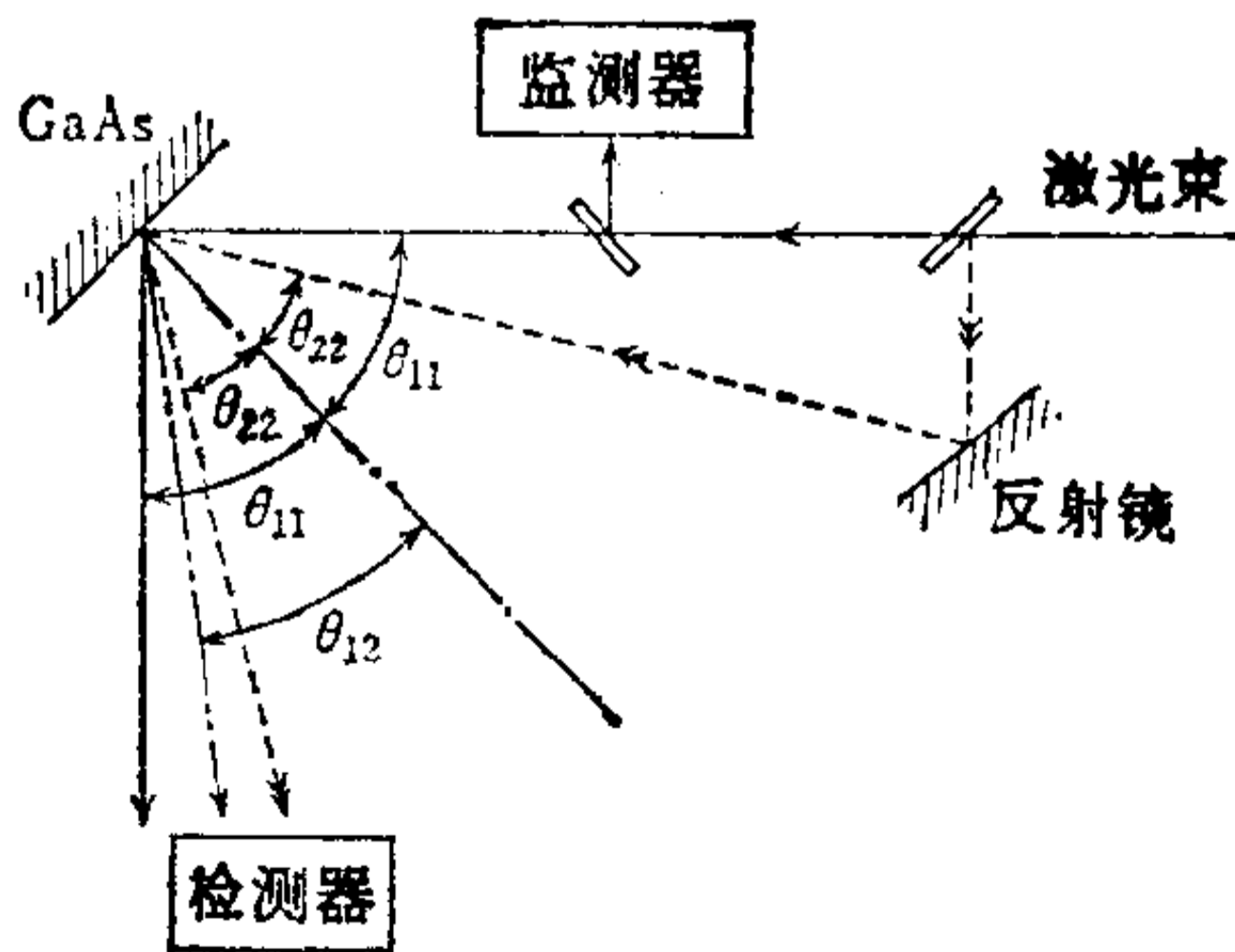


图 5.15

$$T_{\perp} = \frac{4\pi P_{\perp}^{NL}}{\varepsilon_T - \varepsilon_s} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_s} \cos \theta_s + \sqrt{\varepsilon_R} \cos \theta_R}{\sqrt{\varepsilon_T} \cos \theta_T + \sqrt{\varepsilon_R} \cos \theta_R}. \quad (5.9.28)$$

式中,  $\sqrt{\varepsilon_s} \equiv c|\mathbf{k}_s|/\omega$ , 是由非线性效应产生的波的有效介电常数,  $\varepsilon_R$ 、 $\varepsilon_T$  是线性及非线性媒质的介电常数; 各个量的几何表示见图 5.14:

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_T} \frac{\omega}{c} \sin \theta_T &= \sqrt{\varepsilon_R} \frac{\omega}{c} \sin \theta_R = |\mathbf{k}_s| \sin \theta_s \\ &= \sum_i l_i k_{ix}, \quad \sum_i l_i k_{iy} = 0. \end{aligned} \quad (5.9.29)$$

对透射波来说, 由式 (5.9.25) 则有

$$\begin{aligned} E_{\perp}^T &= \\ &\left[ R_{\perp} + 4\pi P_{\perp}^{NL} \frac{\exp\{i(\omega/c)(\sqrt{\varepsilon_s} \cos \theta_s - \sqrt{\varepsilon_T} \cos \theta_T)z\} - 1}{\varepsilon_s - \varepsilon_T} \right] \\ &\quad \times \exp i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t) \end{aligned} \quad (5.9.30)$$

对于满足条件

$$(\omega/c)z (\sqrt{\varepsilon_s} \cos \theta_s - \sqrt{\varepsilon_T} \cos \theta_T) \ll 1$$

的  $z$  来说, 该透射波的行为如下式所示:

$$\begin{aligned} E_{\perp}^T &= \left[ R_{\perp} + 4\pi i P_{\perp}^{NL} \frac{\omega}{c} z \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_s} \cos \theta_s + \sqrt{\varepsilon_T} \cos \theta_T} \right] \exp i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t). \end{aligned} \quad (5.9.30a)$$

因此, 波的强度应该按  $z^2$  增大。当垂直于边界面的相位速度相匹配时,

$$\sqrt{\varepsilon_s} \cos \theta_s = \sqrt{\varepsilon_T} \cos \theta_T, \quad (5.9.31)$$

即使对于任意的  $z$ , 式(5.9.30a)都是成立的。这种情况是因为忽略了高次谐波对基波的反作用才引起的; 若高次谐波强度增大到入射波强度的相当部分, 则参量近似不复成立。关于高次谐波的反作用、高次谐波与声波的相互作用以及其它非线



性光学效应,请参阅书末文献。杜库因 (J. Ducuing) 和波洛姆贝根 (1963) 最先对二次谐波频率上的反射波进行了观察。在图 5.15 中是

$$\begin{aligned}\sin \theta_{11}^R(2\omega) &= \frac{2k_{1x}(\omega)}{k(2\omega)}, \\ \sin \theta_{12}^R(2\omega) &= \frac{k_{1x}(\omega) + k_{2x}(\omega)}{k(2\omega)}, \\ \sin \theta_{22}^R(2\omega) &= \frac{2k_{2x}(\omega)}{k(2\omega)}.\end{aligned}$$

## § 5.10 微观场方程和宏观场方程

### a) 物质的光学性质和微观结构

亥维赛(1885)在形式上配齐了麦克斯韦方程组(表 5.3), 而赫兹(1890)则从公理论的立场出发, 把它作为接触作用的理论体系进行了整理, 但是, 电磁场概念本身的进化, 即从假设电磁场是有重量媒质的某种特殊状态的看法, 向把电磁场当作一个独立的物理学上的实际存在的观点进行过渡, 却与物质微观结构的研究密切相关。麦克斯韦理论, 通过对介电常数、导磁率、导电率给以特定的数值, 来规定有重量物质的特性。但是, 倘若想要知道物质的电磁性质与该物质的温度、密度、化学组成或结晶构造有着什么样的关系, 就不仅要在实验上来决定这些值, 而且还必须借助于同现象深处的结构有关的某种假说的作用。1860—70 年间气体动力论的显著成就, 促使洛伦兹把分子论的观点也引进了电磁学(莱顿大学就任演说; 1878)。他首先设想媒质是由分子组成的, 研究了光在其中的传播。作为一个实际问题, 是从分子论的观点出发, 就拉普拉斯以来所论述的折射率与媒质密度之间的关系, 来对麦克斯韦公式(5.7.35)重新进行思考。

按照洛伦兹(1878)的观点, 假定以太充斥于物质的分子

与分子之间,除了离分子极近的地方之外,以太具有和真空中相同的性质。但在当时,关于分子的具体结构却没有任何线索。因此,只好考虑均匀的介电媒质,而且假定在由外部加上电场  $\mathbf{E}$  时,该分子会产生感应极化,然而它却没有固有的电偶极矩。这时,作用于每一个分子上的场,不仅依赖于  $\mathbf{E}$ ,而且也依赖于所有其它分子的极化所产生的媒质的宏观电介质极化  $\mathbf{P}$ 。为了发现作用于各分子上的这个有效电场  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$ ,可以选择如下的表象: 着眼于某一个分子,来考虑以它为中心的球。设球的半径小于媒质的尺度,但是也大得能在球内包含数目极多的分子。假设该球内部各个分子所感应的偶极子的分布是完全无规则的,它们对位于中心的分子所给予的作用在整体上成为零;也就是说,应该考虑把所观察的分子放置在一个球的中心上,该球的内部是真空,外部是均匀极化了的连续媒质。在这样的安排中,媒质给予中心分子的场,即内电场  $\mathbf{E}_i$ ,能用式(5.8.17a)求出(参考波恩-乌尔夫《光学诸原理》§2.3),它平行于  $\mathbf{E}$  及  $\mathbf{P}$ ,由  $E_i = (4\pi/3)P$  确定。因此,作用于该分子上总的有效场就是

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}, \quad (5.10.1)$$

由于它的作用而在分子上所感应的电偶极矩  $\mathbf{p}$  可以根据下式确定

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}, \quad (5.10.2)$$

式中,  $\alpha$  是分子电极化率。

当式(5.10.2)对媒质的各个分子都成立时,假设媒质单位体积中包含的分子个数为  $N$ ,则每单位体积媒质的宏观电偶极矩就是

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}, \quad (5.10.3)$$

所以,把式(5.10.1,3)合起来,则有

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \chi \equiv \frac{N\alpha}{1 - 4\pi N\alpha/3} \quad (5.10.4)$$

因此,由(5.4.14)可给出媒质的介电常数是

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi = \frac{1 + 8\pi N\alpha/3}{1 - 4\pi N\alpha/3} \quad (5.10.5)$$

如果考虑到麦克斯韦公式  $\epsilon = n^2$ , 则对给定频率的光来说, 就可以得到表示折射率随媒质密度  $d$  变化的关系式

$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)d} = \text{const.} \quad (5.10.6)$$

式(5.10.6)也是洛伦茨 (Lorenz) 从弹性体以太论的立场出发独立推导出来的关系式, 被称之为洛伦兹-洛伦茨公式(洛伦茨, 1869; 洛伦兹, 1878)。

在推导式(5.10.6)时, 分子的有效场  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$  是以式(5.10.1)的形式给出的, 它是真空(以太)中的电场与来自其它物质分子的贡献之和。假如把这种看法推广到一般情况, 就媒质中的电磁现象把以太和物质分子的作用分离开来, 从而试图摆脱电磁场概念对有重量媒质的依赖性, 那么, 即使首先假定分子间的以太与真空中的以太具有相同的性质, 又应该怎样来理解物质分子上感应极化的机理呢?

在前面我们曾经提到, 法拉第和亥姆霍兹等人, 根据与电解有关的各种结论, 假设化学亲和力是一种具有电性质的力。但是, 直到十九世纪最后的几年间, 人们通过研究阴极射线的本性和探求塞曼效应的解释, 才证实了在物质的分子或原子中存在着质量远远小于原子的带负电的粒子。对于这种带电粒子来说, “电子”(electron)的术语由斯托奈 (G. J. Stoney; 1894) 用于根据电解而设想的基元电荷上, 又由拉莫尔 (J. Larmor; 1897) 予以承袭, 直到进入本世纪之后, 它才作为现在意义上的名称固定下来(汤姆孙称为“粒子”(corpuscle), 而

洛伦兹则用“离子”(ion)。因此,必须证明:(i) 该带电粒子的质量  $m$  远远小于原子的质量(从派生的意义上来说,该电荷  $e$  与氢离子同量级;通过测量阴极射线引起的放电管壁的发热量、静电场或静磁场引起的弯曲及塞曼效应的谱线裂距等等,只能确定荷质比  $e/m$ );(ii) 在原子内存在的这种带电粒子全部是同一种类的。

人们根据阴极射线能够由于磁场的作用发生弯曲(休斯特;1890)、可以穿透薄金属箔(勒纳(P. Lenard);1894)、速度远远小于光速(J. J. 汤姆孙; 1894,97)等事实,设想它是带电粒子的射线。帕林(J. Perrin; 1894)使用双层同轴的金属圆筒(外筒接地、内筒接金箔验电器)表明,当阴极射线进入内筒时,验电器带负电,而当用磁场让阴极射线弯曲使之不进入内筒时,验电器没有反应;然而,正是 J. J. 汤姆孙(1897)才给出了完全的实验证明。把阴极射线当作以太的振动,即当作一种电磁波,这种说法的依据是赫兹(1882)的结论:借助于弱静电场观察不到阴极射线的弯曲(以太论者认为,通过电位差极大的电极之间时可以看到弯曲,不是由于静电力,而是由于电极之间的放电所致)。汤姆孙表明,其原因在于阴极射线使放电管内的稀薄气体产生了电导性。他对帕林的实验进行了改良,以便抵制以太论者们的反驳(没有证明验电器带电是与阴极射线直接连系的——以太论者不否认由阴极射出了带电粒子,但是在带电粒子与阴极射线的关系上,却不承认它就是“发射来复枪时其子弹与闭光的关系”),而且还观察了在种种气体中阴极射线由于磁场而引起的弯曲,结果证明,对于静电力和静磁力来说,阴极射线的行为完全与带负电的物体一样,而阴极射线作为“被物质粒子运载的负电荷”的结论是不可避免的。

这样一来,紧接着的问题就是:该粒子是原子还是分子?



或者是更进一步分割成细小部分的物质？由于把注意力集中到这一点，汤姆孙进行了一系列确定荷质比的实验。如果把对阴极射线由磁场引起的弯曲进行观察的结果和对阴极射线在放电管壁上的发热量的测定结合起来，那么，阴极射线粒子的速度  $v$  和荷质比就用下式确定：

$$v = \frac{2W}{Ql}, \quad \frac{e}{m} = \frac{2W}{l^2Q}. \quad (5.10.7)$$

在这里，假设均匀的阴极射线束在单位时间内通过单位面积的粒子数为  $N$ ，则有

$$Ne \equiv Q, \quad \frac{1}{2} Nmv^2 = W.$$

如果在均匀磁场  $H$  内，阴极射线轨迹的曲率半径为  $\rho$ ，那么

$$\frac{mv}{e} = H\rho \equiv l.$$

而且，把阴极射线由于磁场及静电场而引起的弯曲结合起来，则有

$$v = \frac{F}{H}, \quad \frac{e}{m} = \frac{F\theta}{H^2l}. \quad (5.10.8)$$

式中， $\theta = (Fe/m)(l/v^2)$  是在均匀电力  $F$  作用下阴极射线通过距离  $l$  时，阴极射线所弯曲的角度。他求得的荷质比是  $5 \times 10^6 \text{ emu} \cdot \text{g}^{-1}$ ，这个值与放电管内残留气体的性质和所使用的电极物质没有关系，而且远远大于当时已知的电解时的氢离子的值  $10^4 \text{ emu} \cdot \text{g}^{-1}$ 。

这个荷质比  $e/m$  的值之所以非常大，是  $m$  小还是  $e$  大呢？或者是由它们二者共同造成的呢？勒纳(1894)观察了阴极射线产生的磷光的亮度随着通过的距离而减弱的现象，得到的结论是：该距离只依赖于媒质的密度，与媒质的化学性质和物理状态无关；汤姆孙注意到了这一点，从而对阴极射线



粒子是比原子更微小的带电粒子的可能性作出如下论述。如果认为阴极射线产生的磷光是由带电粒子的碰撞引起的，那么，阴极射线由磷光刚刚出现到亮度减弱所通过的距离，就应该是负电荷载流子平均自由程的不太大的倍数。按勒纳的计算，这个距离在一个大气压的空气中是 0.5cm，但是，假如认为载流子的平均自由程也是同量级的，则所谓空气分子的平均自由程便是一个位数完全不同的量。可见，该载流子必须远远小于普通的分子。现在，假设存在着比原子还要微小的原物质“粒子”，而把蒲劳脱 (Prout) 假设中的氢原子用“粒子”替换。设气体分子由于阴极附近强力电场的作用，不是分解成原子，而是分解成“粒子”；如果这些“粒子”带着电荷，在电场作用下从阴极抛出，那么，它的行为就与阴极射线相同，一定会给出不依赖于气体种类和性质的荷质比。这是因为，不管气体如何，这种“粒子”都是同样的。另外，也会推导出勒纳的结论，即“粒子”的平均自由程只与媒质密度有关。这是由于，某个“粒子”与气体分子的碰撞，不是和整个分子进行的，而是和构成分子的“粒子”进行的，因此，碰撞次数不和分子个数，而和“粒子”个数成正比。由于平均自由程与单位时间内的碰撞次数成反比，所以它就应该与单位体积中的“粒子”数成反比。然而，因为“粒子”完全具有相同的质量，故单位体积中的“粒子”数和单位体积的质量成正比；结果，平均自由程就和气体的密度成反比。而且，假若单位体积中“粒子”数一定，那么，只要相邻“粒子”间的距离大于“粒子”的一维尺度，平均自由程便与“粒子”的配置方式无关。这样，汤姆孙论述了比原子更微小的物质单位的存在，但在当时 (1897 年)，对于“粒子”质量与放电管内气体种类无关的这个事实，在他所谈问题中的质量有可能完全是他本人 (1881) 以前根据理论研究引进的电磁质量，而“粒子”的电荷也有可能比氢离子的电荷大。这个问题的

解决,要等待“粒子”电荷的直接测定 (J.J. 汤姆孙; 1899)。

另一方面,由塞曼效应(塞曼; 1897)中光谱线的裂距也能得到荷质比的值。为了进入塞曼效应的经典电子论,首先有必要研究带电微粒的运动所产生的辐射场的性质。在寻求该情况下的势函数时,假如电荷密度集中于一点,就不应该简单地把推迟距离代入式(5.8.4,5)形式上的解(5.8.10,11)中去。

这是因为,推迟电荷密度的空间积分  $\int \rho(t - r/c) dv$ , 一般并不给出全电荷。这时,必须考虑到,即使在点粒子的极限上,电荷分布范围内不同点的推迟时间也是不同的;为此,只要在求推迟势的积分时,把带电点粒子的位置矢量  $\mathbf{r}_e(t')$  表示成推迟时间的函数,再变换时间变量使之给出上面那种依赖性就可以了。对于在真空中以速度  $\mathbf{v}$  运动的电荷为  $e$  的点粒子来说,假设

$$\rho(\mathbf{r}', t') = e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_e(t')), \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \rho\mathbf{v}(t'), \quad (5.10.9)$$

则观察点  $\mathbf{r}(x, y, z)$  上的标量势可以写成

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \iint \frac{e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_e(t'))\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times dv' dt'. \quad (5.10.10)$$

对  $\mathbf{r}'$  的积分立刻可以作出,上式就变成

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{e\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} dt',$$

但是,因为  $\mathbf{r}_e$  包含着  $t'$ , 所以,若进行变量变换

$$t''(t') = t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|}{c},$$

$$dt'' = dt' \left( 1 - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) \cdot \mathbf{v}(t')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|} \right),$$

而写成  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_e \equiv \mathbf{R}$ , 则时间积分就是

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{e\delta(t-t'')}{R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c} dt'' \\ &= \left[ \frac{e}{R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c} \right] = \left[ \frac{e}{s} \right].\end{aligned}\quad (5.10.11)$$

式中,  $[\ ]$  表示取  $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|/c$  时的值,  $s \equiv R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c$ . 同样,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{e\mathbf{v}/c}{R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c} \right] = \left[ \frac{e\mathbf{v}}{cs} \right].\quad (5.10.12)$$

因为莱纳-威亥特势 (5.10.11, 12) (莱纳 (A. Liénard), 1898; 威亥特 (E. Wiehert), 1900) 是用带电点粒子的推迟位置和推迟速度表示的, 所以, 由它来计算场时, 必须考虑推迟时间  $t'$  与观测时间  $t$  之差. 如果使用

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{s}, \quad \text{grad}t' = -\frac{\mathbf{R}}{cs},\quad (5.10.13)$$

则由式 (5.8.1, 2) 可以得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{e}{s^3} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} \right) \\ &\quad + \frac{e}{c^2 s^3} \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right]\end{aligned}\quad (5.10.14)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{e}{cs^3} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{R} + \frac{e}{c^2 s^3} \frac{\mathbf{R}}{R} \\ &\quad \times \left\{ \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (5.10.15)$$

因此,  $\mathbf{B} = \mathbf{R} \times \mathbf{E}/R$ . 显然, 电场与磁场到处都是正交的.

带电粒子所产生的场的表达式 (5.10.14, 15), 都是由两部分构成的, 一部分不依赖于加速度, 另一部分依赖于加速度. 不依赖于加速度的第一项, 是带电粒子输送的传递场 (convection field), 当粒子速度  $\mathbf{v}$  非常大的时候, 它几乎集中在垂直于  $\mathbf{v}$  的平面内; 而在速度小的情况下, 磁场则归结为毕奥-萨伐

尔表达式 (5.3.1b), 对于大的  $R$  或  $s$  来说, 传递场的行为如  $1/R^2$  那样; 若沿着半径相当大的球面积分, 则相应的坡印廷矢量成为零. 因此, 为了计算辐射能, 对于大的  $R$  来说, 只考虑以  $1/R$  变化的第二项就可以了. 即, 带电粒子只有在其速度的大小或方向发生变化时, 才会产生辐射. 辐射场的坡印廷矢量, 作为现在这个时间  $t$  的函数, 是由式 (5.10.14,15) 给出的. 为了计算产生的辐射功率, 必须求出  $dw/dt'$ . 在微小立体角  $d\Omega$  内产生的辐射功率, 用下式确定

$$-\frac{dw(\theta, \varphi)}{dt'} = \frac{e^2 R}{4\pi c^3 s^5} \times \left\{ \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right\}^2 d\Omega, \quad (5.10.16)$$

辐射的角分布具有两条节线 (nodal line), 它们在  $\mathbf{U}$  和  $\dot{\mathbf{v}}$  所构成的平面内. 若对整个立体角进行积分, 则全辐射率就是

$$-\frac{dw}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}. \quad (5.10.17)$$

特别是对以匀角速度在圆形轨道上旋转的带电粒子来说, 则有

$$-\frac{dw}{dt'} = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^2} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2}. \quad (5.10.17a)$$

因此, 为了讨论有重量的物质的光学现象, 可以考虑如下模型. 设物质的原子(或分子)只包含一个参与该物质光学特性的带电微粒子(质量为  $m$ 、电荷为  $e$ ). 在原子占据的空间内, 这个带电粒子围绕某一确定的平衡位置作简谐振动. 产生该振动的弹性力  $-f\xi_i$  与粒子的位移  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 成正比, 可以认为它是由原子中的其它粒子产生的, 目前只假定  $f$  是一个由原子性质决定的正常数. 众所周知, 假如  $a_i^{(0)}$ 、 $g_i^{(0)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为任意常数, 则这时粒子运动方程的通解是

$$\xi_i = a_i^{(0)} \cos(\nu_0 t + g_i^{(0)}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.10.18)$$

式中, 频率  $\nu_0$  用  $\nu_0 = \sqrt{f/m}$  确定. 其次, 如果把一个在  $z$  轴方向上的均匀磁场加到这个系统上, 那么, 由式(5.6.19), 带电粒子的运动方程就是

$$m\ddot{\xi}_1 = -f\xi_1 + \frac{e}{c} B_z \dot{\xi}_2,$$

$$m\ddot{\xi}_2 = -f\xi_2 - \frac{e}{c} B_z \dot{\xi}_1, \quad m\ddot{\xi}_3 = -f\xi_3, \quad (5.10.19)$$

可见,  $z$  方向上的振动不受磁场影响. 在  $x$  及  $y$  分量的方程中, 允许有两种特解:

$$\xi_1 = a^{(1)} \cos(\nu_1 t + g^{(1)}), \quad \xi_2 = -a^{(1)} \sin(\nu_1 t + g^{(1)}) \quad (5.10.20)$$

$$\xi_1 = a^{(2)} \cos(\nu_2 t + g^{(2)}), \quad \xi_2 = a^{(2)} \sin(\nu_2 t + g^{(2)}). \quad (5.10.21)$$

这时, 频率  $\nu_1$ 、 $\nu_2$  根据下式确定

$$\nu_1^2 - \frac{eB_z}{mc} \nu_1 = \nu_0^2,$$

$$\nu_2^2 + \frac{eB_z}{mc} \nu_2 = \nu_0^2, \quad (5.10.22)$$

而当  $eB_z/mc$  小于  $\nu_0$  时, 可以认为

$$\nu_1 = \nu_0 + \frac{eB_z}{2mc}, \quad \nu_2 = \nu_0 - \frac{eB_z}{2mc}. \quad (5.10.22a)$$

式(5.10.19)的通解是把式(5.10.18, 20, 21)组合起来得到的.

由式(5.10.14, 15), 我们能够知道上面那种带电粒子的运动所产生的辐射的性质. 当带电粒子沿着直线  $L$  在 origin  $O$  附近振动时, 于充分远的观察点  $P$  上, 电场方向在平面  $LOP$  内, 而且在垂直于  $OP$  的方向上, 其振幅与  $\sin(\angle LOP)$  成正比. 当带电粒子在  $xy$  平面内进行式(5.10.20, 21)所表示的圆运动时, 在运动平面内的  $P$  点上观察到的辐射是直线偏振光, 其电振动方向在  $xy$  平面内, 而且垂直于  $OP$ . 对正  $z$  轴上的观察点来说, (5.10.20, 21)的分量振动会产生振幅相等的电振动, 它



们各自平行于  $x$  轴和  $y$  轴,其间有  $1/4$  周期之差。因此,沿  $z$  轴产生的辐射是圆偏振光,它的电场方向在与带电粒子的运动相对应的方向上旋转。也就是说,由于式(5.10.20)的运动,结果是右旋圆偏振光,由于式(5.10.21)的运动,结果是左旋圆偏振光(参考 § 4.3(c))。这些结论正好为塞曼的实验所证实。若把光源放在具有水平磁力线的磁场中,再垂直于磁力线将水平方向辐射的光加到分光装置上,则可看到三条光谱线,中央线所在位置  $\nu_0$  与没有磁场的情况相同。它们全部是直线偏振光,至于偏振面,中央线条是垂直的,两边两条是水平的。对于在磁力线方向上辐射的光来说,只能观察到两条线,它们与三重线两边的位置  $\nu_1$ 、 $\nu_2$  一致,一个是右旋圆偏振光,另一个是左旋圆偏振光。塞曼进一步发现,该二重线频率低的一个偏振光是右旋的。这就是说,相对于  $B_z$  的正值,式(5.10.22a)第一式的  $\nu_1$  低。因此可以得出结论:带电微粒子的电荷  $e$  必须为负。在三重线的情况下,假如知道了谱线间的距离  $\nu_1 - \nu_0$  和磁场的强度,就能由式(5.10.22a)求出荷质比。对于 Na,塞曼得到的值是  $1.6 \times 10^7 \text{emu} \cdot \text{g}^{-1}$ , 对于 Zn,得到的值是  $1.2 \times 10^7 \text{emu} \cdot \text{g}^{-1}$ 。

接着,我们再把这个模型应用于光在有重量媒质中的传播。假设媒质包含微小的粒子,该粒子受到分子内的力,能使它产生一定周期的自由振动,而且,入射光束中的力亦可使它振动,那么,这个模型就是弹性体以太论中塞尔迈耶 (Sellmeyer)-开特勒 (Ketteler)-包斯奈斯 (Boussinesq)-亥姆霍兹对于光散射的观点的延伸,该观点认为,光速依赖于振动的周期;把塞尔迈耶所考虑的微小粒子用我们的带电微粒粒子来替换,这个模型就是试图用电磁光学的术语对光散射所作的解释。在媒质原子(或分子)中包含的一个带电微粒粒子,其电偶极矩可用下式确定:

$$\mathbf{p} = e\boldsymbol{\xi}. \quad (5.10.23)$$

式中,  $\boldsymbol{\xi}$  是粒子的位移矢量. 假如媒质是均匀的, 设每单位体积的粒子数为  $N$ , 则媒质的宏观电偶极矩就是

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = Ne\boldsymbol{\xi}, \quad (5.10.24)$$

它依赖于粒子的位移矢量, 因而也依赖于作用在粒子上的力. 根据开耳芬 (Kelvin) 学派的研究, 与前面相同, 假设有效电场  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$  式 (5.10.1) 发生作用, 其中包含围绕电子的封闭曲面上的极化电荷效应在内, 则带电微粒子的运动方程是

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}\right) - f\boldsymbol{\xi}, \quad (5.10.25)$$

使用式 (5.10.24), 它就成为

$$m'\ddot{\mathbf{P}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} - f'\mathbf{P}. \quad (5.10.25a)$$

式中,

$$\frac{m}{Ne^2} \equiv m' \quad \frac{f}{Ne^2} \equiv f'.$$

如果  $\mathbf{P}$  通过因子  $e^{i\nu t}$  依赖于时间, 那么由 (5.10.25a) 可知

$$\mathbf{P} = \alpha'\mathbf{E}, \quad \alpha' \equiv f' - m'\nu^2 - \frac{4\pi}{3}. \quad (5.10.26)$$

因此, 媒质的介电常数就用  $\varepsilon = 1 + (4\pi/\alpha')$  确定, 所以, 使用麦克斯韦公式, 即可得到

$$n^2 - 1 = 4\pi \left/ \left\{ \frac{m}{Ne^2} (\nu_0^2 - \nu^2) - \frac{4\pi}{3} \right\} \right. \quad (5.10.27)$$

式中,  $\nu_0$  是在没有  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$  的情况下带电微粒子进行自由振动的频率. 假如当  $\nu_0 > \nu$  时式 (5.10.27) 的分母为正, 那么由此式得到的  $n$  值便大于 1, 而且  $n$  随着频率一起增加. 假如认为  $\nu_0$  相当于光谱紫外部分的谱线, 那么, 这就和在透明媒质中观察到的色散相一致.

式 (5.10.27) 也可以写成经典电子论的洛伦兹-洛伦茨公

式的形式

$$\frac{n^2 + 2}{3(n^2 - 1)} = \frac{1}{4\pi N e^2} \frac{m}{m_0} (\nu_0^2 - \nu^2). \quad (5.10.27a)$$

假如测定出各种密度中的折射率，由式 (5.10.27a) 就能得到  $e^2/m$  的值。把它与式 (5.10.22a) 给出的荷质比  $e/m$  结合起来，即可分别求出  $m$  和  $e$  (洛伦兹; 1898)。使用荷质比的塞曼值，再加上对光的吸收效应的研究，洛伦兹得到的结果是：带电微粒子的质量为氢原子质量的  $1/350$ ，电荷与氢离子的电荷同量级。洛伦兹对产生辐射的微粒子的结构和性质，采取了更一般的假定 ( $n$  自由度的带电振动系统)，希望说明光谱线分裂成四条或四条以上的反常塞曼效应以及线状光谱系列的规律性，但他却另外遇到了种种困难；关于这一点，请参阅洛伦兹《电子论》第三章中的内容。不过，在这里需要注意，由拉莫尔定理 (拉莫尔; 1897) 可知，假如在原子内考虑很多带电微粒子，那么，为了能说明正常塞曼效应，这些粒子的电荷必须全部是相同符号的。也就是说，当带电粒子系统受到共同的缚力场 (例如与到固定中心的距离成正比的引力) 的作用，而描绘一个椭圆轨道时，若把各粒子的运动方程  $m\ddot{\xi} = -f\xi$  变换到以角速度  $\omega$  围绕方向为  $(l_1, l_2, l_3)$  的轴旋转的坐标系中，则在该坐标系中加速度的分量就成为 (参考 (1.2.24))

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 - 2\omega(l_3\dot{\xi}_2 - l_2\dot{\xi}_3) - \omega^2\xi_1 + \omega^2l_1(l_1\xi_1 \\ + l_2\xi_2 + l_3\xi_3), \dots \end{aligned} \quad (5.10.28)$$

假如取  $\omega = eB/2mc$ ，并省略  $\omega^2$  的项，那么，该方程就和把均匀磁场  $B$  加到  $(l_1, l_2, l_3)$  方向时的方程相一致。即，为了在轴的方向和垂直于轴的方向上引起给出正常塞曼效应那样的振动变化，只要做到使轨道面法线以磁场方向为轴进行转速为  $eB/4\pi mc$  的进动就可以了。这是因为，不管带电粒子的个

数、粒子相互间的引力以及共同的磁力如何，对于所有粒子来说，假如  $eB/2mc$  相同，该方程都是成立的。

汤姆孙（1900）对“粒子”电荷的测定，及贝克勒耳（H. Becquerel；1900）进一步对  $\beta$  射线荷质比的测定，都肯定了远远小于原子的带负电粒子——电子——的存在，其中汤姆孙使用的方法是离子电荷测定法，该方法利用了以气体离子为中心所产生的雾。但是，就原子内的正电荷而言，却并不是和一个与负电荷载流子的质量同量级的小质量相结合的；根据埃斯特（Elster）-盖特尔（Geitel）对空气中白炽铂线产生的正离子和氢气中赤热炭丝产生的负离子进行的比较，及维恩对真空管内正电荷载流子的荷质比的测定，可以认为正电荷载流子的质量似乎能和普通的原子的质量相比。因此，汤姆孙宣称：“我认为，原子包含着许多叫做‘粒子’的小物体。这些‘粒子’彼此是相等的。……当它们聚集到中性原子的时候，负的效果正好被某种东西所抵消，后者使分布有‘粒子’的空间的行为仿佛它们拥有等于‘粒子’负电荷总量的正电荷一样……”，他还认为“这个负的带电粒子，在任何一个处理电的作用的理论中，从根本上说都是具有重要意义的量”。

#### b) 由微观方程推导宏观方程

既然已经查明在一切有重量媒质中包含着大量带负电的微粒子，那么借助于这种电子的分布和运动，就可以说明以太和有重量媒质中的所有电磁现象和光学现象；这就是洛伦兹和阿波拉哈姆（Abraham）电子论的意图。首先，他们假定，导体中的电子，至少也是它的一部分，能够自由运动，或被电力驱动，而在电介质中，它们却被束缚在某一个给定的平衡位置上。由于自由电子的移动，使得与导线一端连结的物体造成电子过剩状态；这种现象可以看成是传导电流。因为渗透于一切有重量物质中的以太所给出的电力，电介质中的电子也



发生位移,假如认为由于位移产生了一种弹性力,企图把电子拉回到原来位置,那么,电介体内电子的运动就被限制在某一个范围内,但是,与电介体中以太的电位移一起形成麦克斯韦位移电流,这时电极化就可以解释成是物质内的电子移动到新位置的一种状态。假如由于这个弹性力或某种原因所致,电子在平衡位置附近振动,那么,它就会向周围的以太中发出辐射。反之,辐射被物质吸收的过程,可以看成是由入射的辐射产生的周期性力引起电子作受迫振动,其运动的一部分以某种方式转化为不规则扰动,即转化为热的一种过程。即使在振动能量丝毫没有损失的情况下,振动的电子也会对振动在物质中传播的速度造成一定影响;通过考虑电子的这种反作用,就能讨论光的折射和偏振同物质状态的关系。若认为金属的自由电子,以各自的平均动能等于一定温度下金属分子的平均动能的那种速度向所有方向运动,而参与通常的分子热运动,那么,在讨论中也可联系到金属的热性质。

可以说,洛伦兹的电子论,就是二十世纪初叶的基本粒子论。这个“基本粒子论”是通过透彻地研究电磁场和物质的相关性才建立起来的。关于这一点,爱因斯坦的评语是再好不过的:“洛伦兹开始撰写论文时,麦克斯韦的电磁理论已经众所周知。……但是,所谓的电场和磁场,还没有被人们看成是一种根本的实际存在,只是假定成以连续形式存的有重量物质的支配条件。结果,我们看到,电场被分成了电场强度矢量和电位移矢量。在最为简单的情况下,这两个要素通过介电常数联系到一起,但是,从原理上讲二者却被看成独立的存在,或作为独立的存在来处理。同样的观点对于磁场尤为严重。按照这个基本概念,真空是当作有重量物质的特殊情况来处理的,它不过被看成是电场强度和电位移之间关系极其简单的一种情况。……洛伦兹开阔思路的工作正是从这里起



步的。他以卓越的条理和连贯性，提出‘电磁场的基座 (seat) 是真空’的假设，而以此作为自己的研究基础。在这种情况下，只有‘一个’电场矢量和‘一个’磁场矢量。原子中包含的各个电荷产生电磁场，场也把有质动力的 (pondero-motorically) 反作用加到这些电荷 (的负载者) 上。使电荷移动的场和有重量的物质之间的唯一联系，只在于基元电荷是与物质的微观结构单元紧密结合在一起的。而对后者来说，牛顿运动定律是成立的。在这个——形式也简化了的——基础上，洛伦兹建立了一个完整无缺的理论，它既包含运动物体的电动力学，又囊括当时已知的全部电磁现象。他的业绩无论在什么样的经验科学中都是绝无仅有的；它具备罕见的清晰、逻辑的连贯及条理的完美……”(《洛伦兹，他的创造性精神和品格》，载于1936年 G. L. 德哈斯-洛伦兹编辑：洛伦兹，对他的生活和工作的印象)。

爱因斯坦所指的真空 (empty space)，在洛伦兹来说就是自由以太所充满的空间。洛伦兹让电子具有有限的大小。他认为，虽然这种电子的内部空间是微小的，但是却包含了相当多的体积元，而且内部空间和外部空间的物理状态相同。他还认为，物质粒子是以太状态发生了局部变化的结果。这种想法促使他采取了以下的假说：(i) 以太不仅占据分子、原子或电子之间的空间，而且还充满这些粒子的全部；(ii) 以太总是静止不动的。也就是说，虽然在存在场的变化的地方，媒质的体积元保持静止不动，而场的变化本身却能畅通无阻地移动。其次，关于电子的电荷分布，他提出的假定是：(iii) 电子的电荷分布在电子内部的整个空间，其体积电荷密度  $\rho$  是坐标的连续函数。因此，内部空间和外部空间连续地联接在一起，电子内部的以太与自由以太的差别仅仅在于体积电荷密度的有无，而且，只需假设  $\rho = 0$  便能由内部空间的场方

程得到外部空间的场方程。所以，(iv) 只要假定以下的方程组就可以了：

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \quad (5.10.29)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi \rho \quad (5.10.30)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \operatorname{curl} \mathbf{e} = 0 \quad (5.10.31)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \operatorname{curl} \mathbf{b} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{u}. \quad (5.10.32)$$

下面我们约定，对微观的场的量采用小写字母，对相应的宏观量采用相应的大写字母（洛伦兹把两个基本的场的量写成  $\mathbf{d}$  和  $\mathbf{h}$ ，以后又专门使用过符号  $\mathbf{e}$  和  $\mathbf{h}$ ，但是我们在这里采用  $\mathbf{e}$  和  $\mathbf{b}$ 。之所以用  $\mathbf{b}$ ，是由于式 (5.10.29) 的缘故）。在式 (5.10.32) 中， $\mathbf{u}$  是电子速度。因为运动电荷产生的磁效应与普通的传导电流相同（这是麦克斯韦（《电磁论》第二卷，§768-70）预想的，后来由罗兰（H. A. Rowland; 1876 所证实），所以，它叫做**传递电流**（convection current）。最后，还必须给出规定电子运动的有质动力的作用。按麦克斯韦理论，作用于带电粒子上的力，是由以太的状态确定的。由假定 (i) 可知，来自以太的力全部加到粒子内部的电荷所在的点上，所以，若把电子分割成体积元，则由体积元内的以太状态所确定的力就会作用到各体积元上。参考式 (5.6.19)，这个力是

$$\mathbf{f} = \rho \left( \mathbf{e} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{b} \right). \quad (5.10.33)$$

方程组 (5.10.29~33)，不仅决定于由电荷的存在而产生的微观场，而且也决定电荷的运动。通过把电荷及电流密度另作适当解释，或进一步附加新的项，就能把这个方程组应用到由不同种类的带负电微粒子构成的体系、带正电的微粒子体系或由两者构成的体系。

因为经典电子论设想运动完全是服从牛顿运动方程的，所以，为了得到一个完整的方程组，来描述处于任意运动状态的体系的时空行为，就必须由微观的场方程(5.10.29~32)推导出宏观的场方程(5.7.8~11)，并把它编入整个宏观方程的框架中。当然，这也就给出麦克斯韦方程组的微观基础。在式(5.10.29~32)中包含的微观场和点源，是变化极其迅速的量，为了由它们得到变化较为缓慢的各个宏观量，洛伦兹(1902,04)在“物理上是无限小”的范围内对微观量取平均(因此，所谓麦克斯韦方程组的基础，也是对时空变化缓慢的那种场而言的；而对宏观量本身急剧变化的光学现象来说，需要由开始就考虑微观结构，来进行特别的研究；这一点我们似乎已经看到了)。假设这个范围在微观上包含许多粒子，而在宏观上却是无限的，也就是说，在该范围的尺度  $d$  内宏观量没有显著变化。按洛伦兹的观点，对任意一个可观测的量  $Q$ ，在宏观上测定的梯度是  $Q/d_1$  的量级，则  $d_1/d$  必须是一个极大的数。为了规定取平均的作法，就物质的结构而言，我们打算采取如下的表象；即物质是由正负两种带电微粒子构成的。因此，在式(5.10.30,32)中点源的项，就成为  $\sum_j \rho_j$  及  $\sum_j \rho_j \mathbf{u}_j$ 。其中， $j$  是标明正负带电粒子的下标。我们假设，这些带电粒子以某种方式构成许多稳定的小集团(“原子”或“分子”)。这一点在形式上可以通过引进双重下标来表示。如果下标  $k$  是附加到稳定小集团上的号码，而下标  $i$  是附加到小集团内的结构粒子上的号码，那么，点源项就可以写成  $\sum_j \rho_j \rightarrow \sum_{k,i} \rho_{ki}$ ， $\sum_j \rho_j \mathbf{u}_j \rightarrow \sum_{k,i} \rho_{ki} \mathbf{u}_{ki}$ 。假如引进一个中心点  $\mathbf{R}_k$ ，给出小集团  $k$  的整体行为，则小集团  $k$  内的结构粒子  $i$  的位置便由下式确定：

$$\mathbf{R}_{ki} = \mathbf{R}_k + \mathbf{r}_{ki}. \quad (5.10.34)$$

式中,  $\mathbf{r}_{ki}$  是内部坐标. 另外, 结构粒子  $ki$  可以由某一个物理量  $Q_{ki}$  来表征.

在计算平均值时, 我们认为取平均值和对时间及空间的微分运算可以互换, 而且首先选择各小集团的物理量的总和为零的情况, 亦即  $\sum_i Q_{ki} = 0$ . 这时, 洛伦兹对中心点给出了  $-Q_{k1}, -Q_{k2}, \dots, -Q_{km}$  的值 ( $m$  是稳定集团  $k$  的结构粒子数), 并认为“原子”  $k$  是由  $m$  个偶极子构成的, 该偶极子在  $\mathbf{r}_{ki}$  的两端具有  $-Q_{ki}, +Q_{ki}$  (因为  $\sum_i Q_{ki} = 0$ , 所以对中心点给出物理量, 并不改变该“原子”的特性). 假设这些结构偶极子无规则地分布在取平均的体积  $\Delta V$  的表面上, 如果在单位体积中有  $n$  个  $k$  “原子”, 则  $\Delta V$  内包含的物理量就是

$$-\int n \sum_i Q_{ki} \mathbf{r}_{ki} \cdot d\mathbf{S},$$

所以, 使用高斯散度定理, 该物理量的平均密度使用下式确定,

$$\begin{aligned} \langle q \rangle &= \frac{-\int \operatorname{div} \left( n \sum_i Q_{ki} \mathbf{r}_{ki} \right) dV}{\Delta V} \\ &= -\operatorname{div} \left( n \sum_i Q_{ki} \mathbf{r}_{ki} \right). \end{aligned} \quad (5.10.35)$$

当  $\sum_i Q_{ki} \neq 0$  时, 在同样的设想之下, 则有

$$\langle q \rangle = n \sum_i Q_{ki} \equiv n Q_k \left( Q_k \equiv \sum_i Q_{ki} \right). \quad (5.10.36)$$

这时, 可以忽略不计式(5.10.35)型的项. 因为, 由洛伦兹关于宏观量梯度的标准来看(把  $\Delta V$  的一维尺度取为  $d_1$ ), 忽略掉的项的相对大小是  $d/d_1$ .



洛伦兹进一步把系统内包含的“电子”分成三类，即传导“电子”、(电)极化“电子”和磁化“电子”。后两种“电子”被束缚在各个“原子”或“分子”内。正象洛伦兹事先声明的那样，它们并不是物质结构的表象，只不过是描述了稳定小集团的电极化及磁极化，作为“电子”这个实体的属性，把带电粒子对稳定小集团的机能上的作用汇集起来罢了。

通过以上手续，首先就可以使式(5.10.29~33)中场的量的平均与宏观量的平均有如下关系：

$$\langle \mathbf{e} \rangle \equiv \mathbf{E}, \quad \langle \mathbf{b} \rangle \equiv \mathbf{B}. \quad (5.10.37)$$

其次，使用式(5.10.35,36)，可以对三类“电子”中的每一种分别进行点源项的平均。为使讨论简化，以下假设“电子”具有点电荷  $e_{ki}$ 。

(1) 传导“电子”：假设传导“电子”能在系统内自由运动，而且不具有电偶极矩和磁偶极矩。现在，若系统仅由传导“电子”构成，则可以假定  $i = 1$ ，只用下标  $k$  来编号。当传导“电子”全部具有相同电荷

$$\sum_{i=1} e_{ki} \equiv e_k$$

时，由(5.10.36)可知，传导“电子”对微观平均电荷密度  $\rho$  的贡献就是

$$\langle \rho \rangle_{\text{cond}} = n e_k. \quad (5.10.38)$$

当传导“电子”的电荷不同时，右边成为同样的项之和。若把“电子”的速度  $\mathbf{u}_k = \dot{\mathbf{R}}_k$  写成  $\dot{\mathbf{R}}_k = \mathbf{v} + \hat{\mathbf{R}}_k$ ，其中  $\mathbf{v}$  是整个系统的平均速度， $\hat{\mathbf{R}}_k$  是剩下的各“电子”的振动部分，则该传导“电子”对电流密度平均值的贡献就是

$$\langle \rho \mathbf{u} \rangle \equiv c \mathbf{J} = \langle \rho \rangle_{\text{cond}} \mathbf{v} + \left\langle \sum_k \rho_k \hat{\mathbf{R}}_k \right\rangle. \quad (5.10.39)$$

宏观的实电流  $\mathbf{J}$  成了传导电流与传导电流之和。

(2) 极化“电子”：洛伦兹(电)极化“电子”的定义是，在各



个稳定的小集团中全电荷为零,即  $\sum_i e_{ki} = 0$ . 因此,当系统只由极化“电子”构成时,应该设想稳定的小集团构成了中性的“原子”或“分子”. 所以,为了求得电荷密度的平均值,假如使用(5.10.35),则按洛伦兹的作法,“原子”或“分子”所具有的电偶极矩是

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle_{\text{pol}} &= -\text{div} \bar{\mathbf{P}}^{(1)}, \\ \bar{\mathbf{P}}^{(1)} &= n \sum_i e_{ki} \mathbf{r}_{ki} = n \bar{\mathbf{p}}_k^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.10.40)$$

式中,

$$\bar{\mathbf{p}}_k^{(1)} \equiv \sum_i e_{ki} \mathbf{r}_{ki}$$

是“原子”(或“分子”)  $k$  的电偶极矩. 在电流密度中包含的“电子”的速度是  $\mathbf{u}_{ki} = \dot{\mathbf{R}}_{ki} = \dot{\mathbf{R}}_k + \dot{\mathbf{r}}_{ki}$ , 与(1)的情况相同,洛伦兹把  $\dot{\mathbf{R}}_k$  看成是物质整体上的平均速度  $\mathbf{v}$ , 而不去考虑各“原子”(“分子”)的不规则运动. 当这样来限制运动时,若把  $Q_{ki}$  分成两部分  $Q_{ki} = e_{ki}(\mathbf{v} + \dot{\mathbf{r}}_{ki}) \equiv Q_{ik,1} + Q_{ik,2}$ , 则

$$\sum_i Q_{ik,1} = 0, \quad \sum_i Q_{ik,2} \neq 0,$$

所以,如果分别使用式(5.10.35,36),再用

$$\text{curl}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\text{div} \mathbf{b})\mathbf{a} - (\text{div} \mathbf{a})\mathbf{b}$$

归纳,那么就有

$$\langle \rho \mathbf{u} \rangle_{\text{pol}} = \dot{\bar{\mathbf{P}}}^{(1)} + \text{curl}[\bar{\mathbf{P}}^{(1)} \times \mathbf{v}]. \quad (5.10.41)$$

右边第二项给出运动的电偶极子的效应,它叫做伦琴电流(这是因为,该电流是由伦琴(1888,90)发现的,后来埃钦瓦尔德(A. Eichenwald; 1903,04)又详细研究过;它说明了在均匀静电场内电介质垂直于力线运动时会产生磁场的现象).

(3) 磁化“电子”洛伦兹规定,磁化“电子”具有以下性质.

$$(i) \sum_i e_{ki} = 0, \quad (ii) \sum_i e_{ki} \mathbf{r}_{ki} = 0,$$

$$(iii) \sum_i e_{ki} (\mathbf{r}_{ki} \dot{\mathbf{r}}_{ki} + \dot{\mathbf{r}}_{ki} \mathbf{r}_{ki}) = 0.$$

也就是说,由它构成中性的“原子”(“分子”),该“原子”不具有电偶极矩,而且电偶极矩  $(1/2) \sum_i e_{ki} \mathbf{r}_{ki} \mathbf{r}_{ki}$  在时间上是个常数. 在这里,两个矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  的有序乘积  $\mathbf{ab}$ , 指的是具有分量  $\{\mathbf{ab}\}_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta (\alpha, \beta = x, y, z)$  的张量(关于并矢(dyad)符号,请参考伏见康治著《用于学习现代物理学的经典力学》第一章4). 由性质 (i)、(ii) 可知,这种“原子”(“分子”)对电荷的平均没有贡献. 为了求出它对平均电流密度的贡献,可以把与(2)相同的关系统用于“电子”的速度,由式(5.10.35)得出

$$\langle \rho \mathbf{u} \rangle_{\text{mag}} = -\text{div} \left[ n \sum_i e_{ki} \mathbf{r}_{ki} (\mathbf{v} + \dot{\mathbf{r}}_{ki}) \right].$$

由性质 (ii) 可知,此式第一项为零,所以,若把剩余的部分写成

$$-\text{div} \left( n \sum_i e_{ki} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ki} \dot{\mathbf{r}}_{ki} + \dot{\mathbf{r}}_{ki} \mathbf{r}_{ki}) - \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}}_{ki} \mathbf{r}_{ki} - \mathbf{r}_{ki} \dot{\mathbf{r}}_{ki}) \right] \right),$$

再根据性质 (iii) 以及在(2)中曾使用过的矢量分析的公式,即可得到

$$\langle \rho \mathbf{u} \rangle_{\text{mag}} = c \text{curl} \bar{\mathbf{M}}^{(1)}, \quad \bar{\mathbf{M}}^{(1)} = n \bar{\mathbf{m}}^{(1)}. \quad (5.10.42)$$

式中,

$$\bar{\mathbf{m}}^{(1)} \equiv (1/2c) \sum_i e_{ki} \mathbf{r}_{ki} \times \dot{\mathbf{r}}_{ki}$$

是“原子”(“分子”)的磁偶极矩(参考(5.3.23)).

若把以上结果归纳一下,则由式(5.10.38,40)可知,当把式(5.10.38)改写成宏观的  $\rho (\equiv n e_k)$  时,平均电荷密度就是

$$\langle \rho \rangle = \rho - \text{div} \bar{\mathbf{P}}^{(1)}. \quad (5.10.43)$$

根据式(5.10.39,41,42),平均全电流密度是

$$\langle \rho \mathbf{u} \rangle = c \mathbf{J} + \dot{\bar{\mathbf{P}}}^{(1)} + \text{curl} \bar{\mathbf{P}}^{(1)} \times \mathbf{v} + c \text{curl} \bar{\mathbf{M}}^{(1)}. \quad (5.10.44)$$

因此,假如使宏观电极化矢量  $\mathbf{P}$  和磁化矢量  $\mathbf{M}$  对应于

$$\mathbf{P} \equiv \bar{\mathbf{P}}^{(1)}, \quad \mathbf{M} \equiv \bar{\mathbf{M}}^{(1)} + \bar{\mathbf{P}}^{(1)} \times \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad (5.10.45)$$

而把宏观的场的量  $\mathbf{D}$  及  $\mathbf{H}$  定义成

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad (5.10.46)$$

那么,通过对式(5.10.29~32)取平均,就应该与宏观物质方程(5.7.13~15)独立地得到宏观场方程(5.7.8~11).

在推导以上的宏观场方程时应该注意: (i) “原子”或“分子”所具有的多极子性质,是结论中的本质; (ii) 从以真空为电磁场基座的洛伦兹观点来看,不管电极化及磁极化的来源是固有的还是感应的,宏观方程组的推导必须与之独立(实际上,发现  $\mathbf{P}$  及  $\mathbf{M}$  与场的量之间的关系,是另外一个问题,它使宏观物质方程过渡到介电常数和导磁率的微观理论); (iii)  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  及  $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{M}$  是通过对微观量取平均而得到的,  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$  不再是某种便于计算的简略记号(卡斯米尔(H. B. G. Casimir):《电学原理》,1936).

在这里我们要特别注意第(i)点. 洛伦兹法本质上的限制,在于它仅仅局限于极其特殊的运动. 如在式(5.10.45)中所见,电极化  $\mathbf{P}$  只是由宏观的电偶极矩密度  $\bar{\mathbf{P}}^{(1)}$  产生的,磁化  $\mathbf{M}$  只是由磁偶极矩密度  $\bar{\mathbf{M}}^{(1)}$  和完全具有相同速度  $\mathbf{v}$  的电偶极子产生的. 虽然它们使中性“原子”或“分子”具有电偶极矩及磁偶极矩,但是,离子不仅运载全电荷,而且也可以具有电多极子及磁多极子. 劳森菲尔德(L. Rosenfeld)(《电子论》; 1951)提出,为了构成一个理论,直到对原子内部坐标  $r_{ik}$  的展开式的某个次数都是统一的,通常总是把同次电多极子及磁多极子对  $r_{ik}$  的贡献一起来考虑. 例如,取到  $r_{ik}$  的二次,结果是  $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}^{(1)} - \text{div} \bar{\mathbf{P}}^{(2)}$ ,  $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}^{(1)}$ , 其中  $\bar{\mathbf{P}}^{(2)}$  是宏观的

电四极矩密度(在  $M$  中没有出现运动的电多极子的贡献,是因为劳森菲尔德只研究稳恒分布)。但是,假如能够以特定的电极矩及磁极矩,或它们的组合来构成一个统一的理论,那么,就内部坐标而言把多极矩包含到某个次数的理论,与只把多极矩包含到某个多重度的理论之间的差别便消失了。

为了定义洛伦兹的多极矩,还要涉及到相对论协变性的问题。上面给出的电多极矩及磁多极矩,是对观察者所在的坐标系定义的量,也就是对规定观察点坐标  $(R, ct)$  的标准系而定义的量,在非相对论近似中,它不过是表征“原子”或“分子”的不变量。只有在固定于非匀速运动的原子上的(瞬间的)洛伦兹系中来定义时,多极矩才成为“原子”的不变规范量。在没有电荷存在的情况下,洛伦兹(1904)指出,微观的基本方程组(5.10.29~32)与伽利略变换不是协变的,而在一般情况下,则仰仗波因凯尔和爱因斯坦(1905),该方程组才成为相对论协变的。闵可夫斯基(H. Minkowski; 1907)谈到,用洛伦兹变换能由静止坐标系中的宏观麦克斯韦方程推导出进行匀速运动的坐标系中的宏观麦克斯韦方程;这在今天已是一种普通的手续。在由相对论协变的微观方程来推导同样协变的宏观方程时,非相对论近似的介入虽然乍一看是似是而非的,但却是原来的宏观麦克斯韦方程的协变性所要求的,并非由微观方程的协变性推导而来。为了得到麦克斯韦方程的协变表达式,需要象式(5.10.45)那样,把伦琴电流包含到磁化  $M$  及场  $H$  中去,而不能作为一种有效电流看待。另外,还需要把位移电流  $(1/c)(\partial D/\partial t)$  由(5.7.11)的右边移到左边,不应该把它纳入麦克斯韦学派的全电流中去。这种情况对(5.10.32)同样适合。这样一来,式(5.7.9, 11)的左边就成为反对称张量的四维散度,右边也成为四维矢量。假如想要协变地推导出宏观方程,就必须注意,在原理上所有的量都应当根



据微观方程和多极子的定义来决定。

因此，为了更一般地研究处于任意运动状态中的“原子”或“分子”的情况，我们打算按照德格鲁特 (S. R. de Groot; 1969) 的作法，从两个水平上由微观方程过渡到宏观方程：

(1°) 由带电点粒子 (电子及原子核) 所产生的电磁场的方程，推导原子阶段上的场方程；后者已经考虑了稳定原子 (分子、离子) 的存在。这时，原子的电的及磁的多极子展开是可以定义的。其次，若引进依赖于这个多极矩的原子电极化及磁极化  $\mathbf{p}$  及  $\mathbf{m}$ ，则结果的表达式就已经具有麦克斯韦方程的形式，不过它还是用微观场  $\mathbf{e}$  和  $\mathbf{b}$ 、原子的电荷及电流密度、原子的极化  $\mathbf{p}$  及  $\mathbf{m}$  等微观量来表示的。

(2°) 把通过第一步手续得到的原子水平上的场方程，以适当的统计方法进行平均，得到宏观场方程。

这个程序，能用两种方法实现，或者通过非相对论的多极展开和非相对论的平均，或者通过协变的多极展开和协变的平均。有关协变的方法，请参阅书末文献；在这里我们模仿一下非相对论近似的大致作法。

首先，仿效马泽 (P. Mazur; 1953, 58) 的方法，用  $\delta$  函数把点源项表示出来。我们将 (5.10.30, 32) 写成

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi \sum_j e_j \delta(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}) \quad (5.10.30a)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \operatorname{curl} \mathbf{b} = \frac{4\pi}{c}$$

$$\times \sum_j e_j \dot{\mathbf{R}}_j \delta(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}). \quad (5.10.32a)$$

式中， $e_j$ 、 $\mathbf{R}_j$ 、 $\dot{\mathbf{R}}_j$  分别是第  $j$  个带电点粒子的电荷、位置矢量及速度矢量。在这里，为了从形式上引进稳定原子所产生的效果，和前面一样，像  $e_j \rightarrow e_{ki}$ 、 $\mathbf{R}_j \rightarrow \mathbf{R}_{ki}$  (式 (5.10.34)) 那样过



渡到双重下标。假设场方程的解  $\mathbf{e}$  及  $\mathbf{b}$  能展成  $|\mathbf{r}_{ki}|/|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}|$  的收敛级数(即,假设“原子”的线度  $|\mathbf{r}_{ki}|$  小于由“原子”中心  $\mathbf{R}_k$  到场的观察点  $\mathbf{R}$  的距离  $|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}|$ ), 因此,若把  $\delta$  函数也在  $\mathbf{R}_k - \mathbf{R}$  的附近对  $\mathbf{r}_{ki}$  展开, 则式 (5.10.30a, 32a) 就可以表示成

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \mathbf{e} &= 4\pi \left( \rho - \sum_k \nabla \cdot \mathbf{p}_k \right) \\ \rho &\equiv \sum_{ki} e_{ki} \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}), \\ \mathbf{p}_k &\equiv \sum_i e_{ki} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \mathbf{r}_{ki} (\mathbf{r}_{ki} \cdot \nabla)^{n-1} \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \end{aligned} \right\} \quad (5.10.30b)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \text{curl } \mathbf{b} \\ &= \frac{4\pi}{c} \left\{ c\mathbf{j} - \sum_k \dot{\mathbf{R}}_k (\nabla \cdot \mathbf{p}_k) \right. \\ &+ \sum_{ki} e_{ki} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \dot{\mathbf{r}}_{ki} (\mathbf{r}_{ki} \cdot \nabla)^n \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \\ &\left. c\mathbf{j} \equiv \sum_{ki} e_{ki} \dot{\mathbf{R}}_{ki} \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \right\} \quad (5.10.32b) \end{aligned}$$

假如取式 (5.10.30b) 的  $\mathbf{p}_k$  表达式的时间微分  $(1/c)(\partial/\partial t)$ , 并把  $n$  换成  $n+1$ , 则可得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial t} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{R}}_k \text{div } \mathbf{p}_k - \frac{1}{c} \\ &\quad \times \sum_i e_{ki} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \times (\dot{\mathbf{r}}_{ki} \mathbf{r}_{ki} \cdot \nabla \\ &\quad + n \mathbf{r}_{ki} \dot{\mathbf{r}}_{ki} \cdot \nabla) (\mathbf{r}_{ki} \cdot \nabla)^{n-1} \delta \\ &\quad \times (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) = 0, \end{aligned} \quad (5.10.47)$$

所以,把式(5.10.47)就  $k$  来相加,然后代入式(5.10.32b),则有

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \text{curl} \mathbf{b} = 4\pi \mathbf{j} + \sum_k \left( \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial t} + 4\pi \text{curl} \mathbf{m}_k \right)$$

$$\mathbf{m}_k \equiv \frac{1}{c} \mathbf{p}_k \times \dot{\mathbf{R}}_k + \frac{1}{c} \times \sum_i e_{ki} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n+1)!} \mathbf{r}_{ki} \times \dot{\mathbf{r}}_{ki} (\mathbf{r}_{ki} \cdot \nabla)^{n-1} \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}).$$

假如把“原子” $k$ 的全电荷和电 $2^n$ 极矩及磁 $2^n$ 极矩写成

$$e_k \equiv \sum_i e_{ki}, \quad \bar{\mathbf{p}}_k^{(n)} \equiv \frac{1}{n!} \sum_i e_{ki} \mathbf{r}_{ki}^n, \\ \bar{\mathbf{m}}_k^{(n)} \equiv \frac{n}{(n+1)!} \sum_i e_{ki} \mathbf{r}_{ki}^n \times \frac{\dot{\mathbf{r}}_{ki}}{c} \\ (n = 1, 2, \dots), \quad (5.10.48)$$

则式(5.10.30b, 32b)中原子水平的电荷密度及电流密度的表达式就可以用下式确定:

$$\rho = \sum_k e_k \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}), \\ c \mathbf{j} = \sum_k e_k \dot{\mathbf{R}}_k \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}), \quad (5.10.49)$$

运用 $\delta$ 函数的性质 $(\partial/\partial t)\delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) = -\dot{\mathbf{R}}_k \cdot \nabla \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R})$ , 我们就能推导出“原子”的电荷守恒定律

$$(1/c)(\partial\rho/\partial t) + \text{div} \mathbf{j} = 0.$$

若把原子阶段上的电极化及磁极化 $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{m}$ 定义成

$$\mathbf{p} \equiv \sum_k \mathbf{p}_k = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \nabla^{n-1} \vdots \sum_k \bar{\mathbf{p}}_k^{(n)} \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \quad (5.10.50)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m} &\equiv \sum_k \mathbf{m}_k = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \nabla^{n-1} \\
 &: \sum_k \left( \mathbf{p}_k^{(n)} + \bar{\mathbf{m}}_k^{(n)} \times \frac{\dot{\mathbf{R}}_k}{c} \right) \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \quad (5.10.51)
 \end{aligned}$$

(式中,  $:$  表示  $(n-1)$  重缩并), 再引进原子阶段上的场的量  $\mathbf{d}, \mathbf{h}$

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{e} + 4\pi\mathbf{p}, \quad \mathbf{h} \equiv \mathbf{b} - 4\pi\mathbf{m}, \quad (5.10.52)$$

则可使用式 (5.10.49, 52) 把式 (5.10.30b, 32b) 表示成

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = 4\pi\rho \quad (5.10.30c)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \operatorname{curl} \mathbf{h} = 4\pi\mathbf{j}. \quad (5.10.32c)$$

式 (5.10.30c, 32c) 和 (5.10.29, 31) 一起构成了原子阶段上的场方程组, 它与宏观的场方程形式完全相同。在式 (5.10.48, 50, 51) 的定义中, 虽然假定结构粒子和由它们所构成的“原子”都不具有自旋角动量, 但是, 在非相对论近似中, 要考虑它们, 并没有什么特殊困难。只需把轨道磁矩和真实电子的磁偶极矩加到全磁偶极矩中就可以了。

另外, 我们再来进行第二道手续。若使用分布函数  $f$  来描述取平均的作法, 则宏观量  $A$  就可以用对应的微观量  $a$  的相空间平均来表示

$$A = \langle a \rangle = \int a f d\varphi. \quad (5.10.53)$$

式中,  $d\varphi$  是相空间的体积元。由概率守恒定律和分布函数的性质, 我们能够证明平均与时间微分及空间微分的互换性。当加上对应的场的量的平均时, 考虑到该点源因位于系统之外而满足齐次方程, 就可以把宏观的外场附加上去:

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle + \mathbf{E}^{\text{ext}}, \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle + \mathbf{B}^{\text{ext}}. \quad (5.10.54)$$

前面在偶极子的情况下使用过的宏观电多极矩密度及磁多极矩密度是

$$\bar{\mathbf{P}}^{(n)} \equiv \left\langle \sum_k \bar{\mathbf{p}}_k^{(n)} \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \right\rangle,$$

$$\bar{\mathbf{M}}^{(n)} \equiv \left\langle \sum_k \bar{\mathbf{m}}_k^{(n)} \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \right\rangle, \quad (5.10.55)$$

如果用它们来表示的话,则宏观的电极化及磁极化  $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{M}$  就成为

$$\mathbf{P} \equiv \langle \mathbf{p} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \nabla^{n-1} : \bar{\mathbf{P}}^{(n)}$$

$$= \bar{\mathbf{P}}^{(1)} - \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}^{(2)} + \nabla \nabla : \bar{\mathbf{P}}^{(3)} - \dots \quad (5.10.56)$$

$$\mathbf{M} \equiv \langle \mathbf{m} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \nabla^{n-1}$$

$$: \left\{ \bar{\mathbf{M}}^{(n)} + \bar{\mathbf{P}}^{(n)} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right.$$

$$\left. + \left\langle \sum_k \bar{\mathbf{p}}_k^{(n)} \times \frac{\hat{\mathbf{v}}_k}{c} \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \right\rangle \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \nabla^{n-1} : \bar{\mathbf{M}}^{(n)}$$

$$+ \mathbf{P} \times \frac{\mathbf{v}}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \nabla^{n-1}$$

$$: \left\langle \sum_k \bar{\mathbf{p}}_k^{(n)} \times \frac{\hat{\mathbf{v}}_k}{c} \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \right\rangle. \quad (5.10.57)$$

式中,  $\mathbf{v}$  和  $\hat{\mathbf{v}}_k$  是把“原子”  $k$  的速度  $\mathbf{v}_k = \dot{\mathbf{R}}_k$  分解成平均速度  $\mathbf{v}$  和与  $\mathbf{v}$  的偏差  $\hat{\mathbf{v}}_k$  而得到的 ( $\mathbf{v}_k = \mathbf{v} + \hat{\mathbf{v}}_k$ )。式(5.10.57)最后一项给出电多极子的速度全部不相同时的效果(对宏观电流密度来说,也可以看到同样的情况。使用以上对速度  $\mathbf{v}_k$  的分解式,由(5.10.49)则有

$$c\mathbf{J} \equiv \langle c\mathbf{j} \rangle = \rho\mathbf{v} + \left\langle \sum_k e_k \hat{\mathbf{v}}_k \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \right\rangle.$$

根据(5.10.56,57),宏观的部分场  $\mathbf{D}$  包含所有电多极矩的效

果,而  $H$  则包含所有磁多极矩及电多极矩:

$$\begin{aligned} D &\equiv E + 4\pi P = E + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \nabla^{n-1} : \bar{P}^{(n)} \\ &= E + 4\pi \bar{P}^{(1)} - 4\pi \nabla \cdot \bar{P}^{(2)} + 4\pi \nabla \nabla : \bar{P}^{(3)} \\ &\quad - \dots \end{aligned} \quad (5.10.58)$$

$$\begin{aligned} H &\equiv B - 4\pi M = B - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \nabla^{n-1} \\ &\quad : \left\{ \bar{M}^{(n)} + \bar{P}^{(n)} \times \frac{v}{c} + \left\langle \sum_k \bar{p}_k^{(n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{\hat{v}_k}{c} \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (5.10.59)$$

有质动力的作用  $F$  是宏观电磁场加到极化物质上的力。最后,我们针对由“原子” $k$  所构成的物质来求这个力;该“原子”质量为  $m_k$ , 具有电偶极矩  $\bar{p}_k$  及磁偶极矩  $\bar{m}_k$  (马泽和德格鲁特, 1956; 德格鲁特, 1969)。这个过程亦可分成两个阶段进行: 先由带电点粒子的微观运动定律推导出“原子”的微观运动定律, 再通过对它取平均求得宏观运动定律。假设  $v$  为“原子”局部速度  $\dot{\mathbf{R}}_k$  的平均速度,  $g$  为物质的密度, 那么, 其结果就是

$$\begin{aligned} g \frac{Dv}{Dt} &= -\nabla \cdot \sigma + F \\ \left( \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \right). \end{aligned} \quad (5.10.60)$$

式中, 压力张量  $\sigma$  由两部分组成, 其一是由“原子”的平动而来的运动学部分  $\sigma_K$ , 其二是由“原子”电偶极矩间的相互作用而来的部分  $\sigma_E$ :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_K + \sigma_E \\ \sigma_K &= \left\langle \sum_k m_k \hat{\mathbf{R}}_k \hat{\mathbf{R}}_k \delta(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}) \right\rangle \end{aligned} \quad \left. \right\}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int m_1 \hat{\mathbf{R}}_1 \dot{\mathbf{R}}_1 f_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}_1, t) d\mathbf{R}_1 \\
 \sigma_E &= \frac{1}{8\pi} \int \left( \mathbf{s} \bar{\mathbf{p}}_1 \bar{\mathbf{p}}_2 : \nabla_s \nabla_s \frac{1}{s} \right) \\
 &\times c_2 \left( \mathbf{R} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{s}}{2}, \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, t \right) d\mathbf{s}_1 d\bar{\mathbf{p}}_1 d\bar{\mathbf{p}}_2 \\
 &- \frac{1}{c} \int \hat{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{p}}_1 \times \mathbf{B} f_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1, t) d\mathbf{R}_1 d\mathbf{p}_1
 \end{aligned} \quad (5.10.61)$$

$(\hat{\mathbf{R}}_k \equiv \dot{\mathbf{R}}_k - \mathbf{v})$ .  $f_1(\mathbf{R}_1, \dot{\mathbf{R}}_1, t) d\mathbf{R}_1 d\dot{\mathbf{R}}_1$  是原子 1 在位置为  $\mathbf{R}_1$ 、速度为  $\dot{\mathbf{R}}_1$  附近的  $d\mathbf{R}_1 d\dot{\mathbf{R}}_1$  范围内的概率；两点的相关分布函数  $c_2$  由普通的一点分布函数及两点分布函数  $f_1, f_2$  来确定：

$$\begin{aligned}
 c_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, t) &= f_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, t) \\
 &- f_1(\mathbf{R}_1, \bar{\mathbf{p}}_1, t) f_1(\mathbf{R}_2, \bar{\mathbf{p}}_2, t).
 \end{aligned}$$

而且，当  $\mathbf{v}$  均匀时，每单位体积的有质动力作用  $\mathbf{F}$  的表达式是

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P} + (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} \times \mathbf{B}. \quad (5.10.62)$$

在静电的情况下， $\mathbf{F}$  只剩下了第一项(开耳芬力)。

如果把(5.10.62)和由麦克斯韦方程得到的宏观场的动量密度守恒定律(参考式(5.7.20))结合起来，就可以得到全动量密度守恒定律

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left( g\mathbf{v} + \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{4\pi c} \right) &= -\nabla \cdot (g\mathbf{v}\mathbf{v} + \sigma + \mathbf{T}) \\
 \mathbf{T} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -\mathbf{E}\mathbf{D} - \mathbf{H}\mathbf{B} \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \right] \mathbf{U} \right\}
 \end{aligned} \quad (5.10.63)$$

式中， $\mathbf{U}$  是分量为  $U_{ij} = \delta_{ij}$  的单位张量。

## § 5.11 各种电量及磁量的量纲和单位

### a) 各电磁量的量纲

经典力学的规范通常使用三个独立量纲的量，它们是质量  $[M]$ 、长度  $[L]$  和时间  $[T]$ 。在第一部 § 2.2 中我们曾经指出，各电磁量也可以归结为这些量纲量。但是，在经典力学中独立量纲量的选择，不过是为了以牛顿力的概念为基础来考虑各种力学量才采用的一种方便的、极其简单的体系。不管方程的物理内容如何，独立量纲量的个数都能任意选择；一般来说，量纲量的数目取得越多，就有可能选择许多对于特殊目的方便的、大小适当的单位。由这个自由度出发，在考虑各种电磁量的量纲和单位时，有两种方式可供选择。即，在把各电磁量和力学量联系起来的关系式中，要么选择无量纲的常数，使各电磁量只归结为经典力学的独立量纲量  $[M, L, T]$ ，要么再任选一个电的量或磁的量，或者两者一起任选，而把它们作为第四个、第五个独立的量纲量来看待(表 5.5)。

现在，我们把介电常数  $\epsilon$  选作第四个独立量纲量的电的量。这样一来，首先由作用于两个带电体间的有质动力作用的定律 (5.1.1)、(5.4.10a) 可知

$$\left[ \frac{q^2}{\epsilon L^2} \right] = [\text{力}], \quad (5.11.1)$$

又由式 (5.1.2) 给出

$$[q\mathbf{E}] = [\text{力}], \quad (5.11.2)$$

由式 (5.4.14)、(5.6.3) 给出

$$[\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}] = [\epsilon \mathbf{E}^2] = [\text{能量密度}]; \quad (5.11.3)$$

这些表达式都加上了与力学量的量纲的关系。由以上三式可知，电荷、电场强度、电位移的量纲就是

$$[q] = [L \sqrt{\epsilon \cdot \text{力}}] = [M^{1/2} L^{3/2} T^{-1} \epsilon^{1/2}]$$

$$[\mathbf{E}] = \left[ \frac{\text{力}}{q} \right] = [M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1} \epsilon^{-1/2}]$$

$$[\mathbf{D}] = [\epsilon \mathbf{E}] = [M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1} \epsilon^{1/2}].$$

表 5.5

独立量纲的个数	量纲	单位制
3	$M, L, T$	CGS-高斯制
4	$M, L, T, \varepsilon$	CGS-esu 制
	$M, L, T, \mu$	CGS-emu 制
	$M, L, T, J$	MKSA 制
	$M, L, T, q$	
5	$L, T, \varphi, J$	MSVA 制
	$M, L, T, \varepsilon, \mu$	
	$M, L, T, q, \Phi$	
	$M, L, T, J, \Phi$	
	$M, L, T, J, \gamma^*$	

$$(* r \text{ 的定义: } r \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = J, r \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt})$$

接着,可以求出一系列电的量的量纲: 由  $J = dq/dt$  得知电流强度  $[J]$  (因此也可知道电流密度  $[j] = [L^{-2}J]$ ), 由式 (5.1.6) 可以求出静电势  $[\phi]$ , 由欧姆定律可以求出电阻  $[R]$ , 因此也求出电导率  $[\sigma]$ , 等等.

为了由这些电的量的量纲来计算磁的量的量纲, 可以使用与式 (5.7.10,11) 对应的场方程. 若引进一个联系电的量和磁的量的量纲的未定常数  $k$ , 则有

$$\text{curl} \mathbf{E} = -\frac{1}{k} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.11.4)$$

$$\text{curl} \mathbf{H} = \frac{1}{k} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{k} \sigma \mathbf{E}. \quad (5.11.5)$$

其中假设,  $k$  对所有媒质都取相同的值. 在这里对量纲的研究, 可以只使用式 (5.11.5) 右边第一项. 让式 (5.11.4,5) 的两边分别相乘, 再使用式 (5.7.13,14), 就可以得到有关量纲的等式

$$\left[ \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} \right] = [LT^{-1}]. \quad (5.11.6)$$

即,  $k/\sqrt{\epsilon\mu}$  具有速度的量纲。正如由波动方程(5.7.26,27)所知,它给出了电磁扰动在介电常数为  $\epsilon$ 、导磁率为  $\mu$  的各向同性媒质中传播的速度,是应该看作在真空中等于光速  $c$  的一个量。由(5.11.5)求出磁场强度  $[\mathbf{H}] = [k^{-1}LT^{-1}\mathbf{D}]$ , 由(5.11.4)求出磁感应强度  $[\mathbf{B}] = [kL^{-1}T\mathbf{E}]$ , 因此也就知道了导磁率  $[\mu]$ 。另外,按照式(5.3.6)以后的讨论,我们还能导出磁荷  $[q_m] = [\text{力}/\mathbf{H}]$ , 再使用适当的关系式即可由它们得知其它磁的量的量纲(表 5.6)。

假若把一个磁的量选作第四个独立的量纲量,例如导磁率  $\mu$ ,那么,当设想磁单极子时,只要由式(5.3.6)求出  $[q_m] = [L\sqrt{\mu} \cdot \text{力}]$ 、 $[\mathbf{H}] = [\text{力}/q_m]$ , 再反过来模仿把  $\epsilon$  当作量纲量时的作法就可以了。或者,也可以由安培定律(5.2.7)出发,确定  $[J] = [M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}\mu^{-1/2}]$ , 根据安培迴路定理(5.3.19)得到  $[\mathbf{H}]$ 、 $[\mathbf{B}]$ , 然后使用式(5.11.4,5)导出  $[\mathbf{E}]$ 、 $[\mathbf{D}]$  等等。这时,电流可以看成是一个磁的量。表 5.6 的  $[M, L, T, \mu]$  一栏,是按前一个方法得出的。当采用电流  $J$  作为独立的量纲量时,可以由式(5.11.5)确定  $[\mathbf{D}]$ 、 $[\mathbf{H}]$ , 故通过式(5.7.9)就能知道  $[\rho]$ , 因此也知道了  $[q]$ , 然后使用式(5.11.1,2)得出  $[\epsilon]$ 、 $[\mathbf{E}]$ 。所以,只要按照由式(5.11.4)求出  $[\mathbf{B}]$ , 再导出  $[\mu]$  的作法进行就可以了(表 5.6)。关于使用五个独立的量纲量时各电磁量的量纲,请参考考赫劳希:《实验物理》,二十版(1955~56)的表 1180。

#### b) 各电磁量的单位制

截止 1948 年 1 月 1 日,并存着两种电学单位制,即绝对电单位和国际电单位。这是由于绝对单位是具有足够精度而又难以实现的量这样一个历史上及实用上的原因造成的。随

表 5.6

电磁量	独立的量纲量	M、L、T (高斯制)	M、L、T、ε (esu 制)	M、L、T、μ (emu 制)	M、L、T、J (MKSA 制)	L、T、φ、J (MSVA 制)
电荷 [q]	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}\epsilon^{1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-2}\mu^{-1/2}k^{-1}$	TJ	TJ	TJ
电荷密度 [ρ]	$M^{1/2}L^{-3/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-3/2}T^{-1}\epsilon^{1/2}$	$M^{1/2}L^{-5/2}\mu^{-1/2}k$	$L^{-3}TJ$	$L^{-3}TJ$	$L^{-3}TJ$
电流强度 [J]	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}\epsilon^{1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}\mu^{-1/2}k$	J	J	J
电流密度 [j]	$M^{1/2}L^{-3/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-2}\epsilon^{1/2}$	$M^{1/2}L^{-3/2}T^{-1}\mu^{-1/2}k$	$L^{-2}J$	$L^{-2}J$	$L^{-2}J$
电阻 [R]	$L^{-1}T$	$L^{-1}T\epsilon^{-1}$	$LT^{-1}\mu k^{-2}$	$ML^2T^{-3}J^{-2}$	$\varphi J^{-1}$	$\varphi J^{-1}$
电导率 [σ]	$T^{-1}$	$T^{-1}\epsilon$	$L^{-2}T\mu^{-1}k^2$	$M^{-1}L^{-3}T^3J^2$	$L\varphi^{-1}J$	$L\varphi^{-1}J$
电容 [C]	L	Lε	$L^{-1}T^2\mu^{-1}k^2$	$M^{-1}L^{-2}T^4J^2$	$T\varphi^{-1}J$	$T\varphi^{-1}J$
介电常数 [ε]	1 (无量纲)	ε	$L^{-2}T^2\mu^{-1}k^2$	$M^{-1}L^{-3}T^4J^2$	$L^{-1}T\varphi^{-1}J$	$L^{-1}T\varphi^{-1}J$
静电势 [φ]	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}\epsilon^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}\mu^{1/2}k^{-1}$	$ML^2T^{-3}J^{-1}$	φ	φ
电极化 [P]	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\epsilon^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{-3/2}\mu^{-1/2}k$	$L^{-2}TJ$	$L^{-2}T\varphi$	$L^{-2}T\varphi$
电场强度 [E]	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\epsilon^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-2}\mu^{1/2}k^{-1}$	$MLT^{-3}J^{-1}$	$L^{-1}\varphi$	$L^{-1}\varphi$
电位移 [D]	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\epsilon^{1/2}$	$M^{1/2}L^{-3/2}\mu^{-1/2}k$	$L^{-2}TJ$	$L^{-2}TJ$	$L^{-2}TJ$



磁感应 [ $B$ ]	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-3/2}\epsilon^{-1/2}k$	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\mu^{1/2}$	$MT^{-2}J^{-1}k$	$L^{-2}T\phi k$
磁场强度 [ $H$ ]	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-2}\epsilon^{1/2}k^{-1}$	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\mu^{-1/2}$	$L^{-1}Jk^{-1}$	$L^{-1}Jk^{-1}$
磁化 [ $M$ ]	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-3/2}\epsilon^{-1/2}k$	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\mu^{-1/2}$	$L^{-1}Jk^{-1}$	$L^{-1}Jk^{-1}$
矢量势 [ $A$ ]	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-1/2}\epsilon^{-1/2}k$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}\mu^{1/2}$	$MLT^{-2}J^{-1}k$	$L^{-1}T\phi k$
导磁率 [ $\mu$ ]	1 (无量纲)	$L^{-2}T^2\epsilon^{-1}k^2$	$\mu$	$MLT^{-2}J^{-2}k^2$	$L^{-1}T\phi J^{-1}k^2$
磁通 [ $\Phi$ ]	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{1/2}\epsilon^{-1/2}k$	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}\mu^{1/2}$	$ML^2T^{-2}J^{-1}k$	$T\phi k$
感应系数 [ $L$ ]	$L$	$L^{-1}T^2\epsilon^{-1}k^2$	$L\mu k^{-1}$	$ML^2T^{-2}J^{-2}k$	$T\phi J^{-1}k$
磁矩 [ $m$ ]	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{3/2}\epsilon^{-1/2}k$	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}\mu^{-1/2}$	$L^2Jk^{-1}$	$LT\phi k$
磁荷 [ $q_m$ ]	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{1/2}\epsilon^{-1/2}k$	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}\mu^{1/2}$	$LJk^{-1}$	$T\phi k$
(电极化和磁化的定义 式; $\epsilon_0, \mu_0$ 是真空的介 电常数和导磁率)	$D = E + 4\pi P$ $B = H + 4\pi M$	$D = E + 4\pi P$ $B = \mu_0 H + 4\pi M$	$D = \epsilon_0 E + 4\pi P$ $B = H + 4\pi M$	$D = \epsilon_0 E + P$ $B = \mu_0(H + M)$	$D = \epsilon_0 E + P$ $B = \mu_0(H + M)$

表 5.7

单位制	无量纲量	真空中的值
麦克斯韦 静电单位制 (CGS-esu 制)	$\epsilon, k \rightarrow [\mu] = [L^{-2}T^2]$	$\epsilon = k = 1,$ $1/\sqrt{\mu} = c$
麦克斯韦 电磁单位制 (CGS-emu 制)	$\mu, k \rightarrow [\epsilon] = [L^{-2}T^2]$	$\mu = k = 1,$ $1/\sqrt{\epsilon} = c$
高斯对称单位制 (CGS-Causs 制) (亥维赛-洛伦兹制)	$\epsilon, \mu \rightarrow [k] = [LT^{-1}]$	$\epsilon = \mu = 1, k = c$ $[\epsilon = \mu = 1/4\pi,$ $k = c/4\pi]$
乔吉 MKSA 制	$k$ $[\epsilon\mu] = [L^{-2}T^2]$	$k=1, 1/\sqrt{\epsilon\mu} = c$

着测量技术的进步,今天(1946年国际度量衡委员会及1948年第九次国际度量衡全会的决议),各电磁量的单位均依据绝对电单位制。

(1) 绝对电单位制 只要质量和长度单位的原器各有一个,而地球平均公转周期假定为不变,则经典力学中基本单位CGS制的绝对性即可保证。当试图根据这个力学的绝对单位制来由量纲的研究确定各电磁量的单位制时,因为有关系式(5.11.6),所以只能任意选择 $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $k$ 之中的两个。这一点表明,电磁学和经典力学不同,真空中的光速 $c$ 是作为理论上固有的自然常数出现的。也就是说,各电磁定律,只有当长度与时间之比保持一定时,才允许尺度的变化。因此,我们考虑与表5.7中所示的选法相对应的单位制。

通过把 $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $k$ 之中的任何两个选成无量纲量,这些单位制中属于CGS制的前三个单位制,实质上都可以用三个独立的量纲量来表示,从而相应地构成了包含三个基本单位在内的单位制。只有乔吉(C. Giorgi; 1901)首先提出的MKSA制,才在 $[L] = m$ 、 $[M] = kg$ 、 $[T] = s$ 之外引进了 $[J] = \text{ampere}$ ,作为第四个基本单位(乔吉本人还列举了绝对欧姆或

绝对库仑,作为第四个单位)。

无论哪一个单位制,都会使库仑定律和安培定律的比例常数包含着一个因子  $4\pi$ ,这个因子是能够由非齐次场方程和加法型物质方程的系数消除掉的,而采用了这种作法的单位制则叫做“有理化的单位制”。这一单位制是亥维赛(1882, 83)极力主张、洛伦兹曾专门采用过的,所以往往也把有理化的高斯制称为“亥维赛-洛伦兹单位制”。而且,MKSA 单位制通常都是有理化的。

由表 5.6、5.7 可知,esu 和 emu 之比是用具有速度量纲的量来表示的。在电荷为  $q$  的情况下,它就是速度本身;韦伯-考赫劳希(1856)最先决定了这个速度的数值。他们的方法是把同等量的电先用静电的尺度测量,然后再用电磁的尺度测量。也就是说,把电容器(莱顿瓶)的电荷,先通过求出该电容量及金箔间的电位差而用 esu 确定下来,其次,再通过电流计使该电荷放电,观察电流计磁铁摆动的最大摆幅,而用 emu 得知失掉的电荷。前面已经谈到 (§ 5.7(a)),由此得到的数值,曾被用来证明麦克斯韦的光的电磁假说。这个常数  $c$ ,在电量单位与 esu 制一致、磁量单位与 emu 制一致的高斯制中,是以场方程的系数出现的。而且,esu 制的  $[q]$ 、 $[E] = [D]$ 、 $[\mu]$  的量纲,分别等于 emu 制的  $[q_m]$ 、 $[H] = [B]$ 、 $[\epsilon]$  的量纲。因此,在高斯制中场的量应该具有完全相同的量纲。电的量和磁的量的这种对偶性 (duality),是理论研究中再三采用高斯制或亥维赛-洛伦兹制的理由(但是,本章把“电磁”力当作磁力的本源,从这个立场出发,电流和电流密度是作为 emu 制的量来看待的。这时需要注意,  $c\mathbf{j}_{\text{emu}} = \rho_{\text{esu}}\mathbf{v}$ 。参考表 5.6 的  $[M, L, T]$  一栏)。

在 esu 制和 emu 制(因而也在高斯制)中,各个量的单位是把其量纲表达式在形式上用  $[M] = \text{g}$ 、 $[L] = \text{cm}$ 、 $[T] = \text{s}$

**表 5.8**  
CGS-emu 制的单位名称

磁势 $\varphi_m$	吉伯 (Gb)	$1Gb = 1cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$
磁场强度 $H$	奥斯忒 (Oe)	$1Oe = 1cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$
磁感应 $B$	高斯 (Gs 或 G)	$1Gs = 1cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$
磁通 $\Phi$	麦克斯韦 (Mx)	$1Mx = 1cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$
实用单位制的单位名称		
电量 $q$	库仑 (C)	$1C = 1s \cdot A$
电位 $\varphi$	伏特 (V)	$1V = 1m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1} = 1W/A$
电阻 $R$	欧姆 ( $\Omega$ )	$1\Omega = 1m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2} = 1V/A$
电容 $C$	法拉 (F)	$1F = 1m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2 = 1C/V$
电感 $L$	亨利 (H)	$1H = 1m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2} = 1Wb/A$
磁通 $\Phi$	韦伯 (Wb)	$1Wb = 1m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1} = 1J/A$
功率	瓦特 (W)	$1W = 1m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} = 1V \cdot A$
力	牛顿 (N)	$1N = 1m \cdot kg \cdot s^{-2} = 1V \cdot A \cdot s/m$
能量	焦耳 (J)	$1J = 1m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} = 1V \cdot A \cdot s$

替换而得到的,但对 emu 制的几个常用的量来说,一般都给以特殊的名称(表 5.8)。

(2) 实用单位制 人们也给出以经验上确定的标准为基础的电单位,来代替由研究量纲得到的绝对电单位;这种方法以雅可比(1841)把长度 1m、截面积  $1mm^2$  的铜线选成电阻的单位为前提。西门子 (Siemens, 1860) 建议把长度 1m、截面积  $1mm^2$  的水银柱在  $0^\circ C$  时的电阻作为标准;第一次巴黎会议(1881)之后,这个“西门子单位”成为电阻的单位——欧姆。在这个会议上,还定义和引进了安培、库仑、伏特、象限(现在的亨利)、焦耳、瓦特等今日已众所周知的实用单位。对实用单位所要求的是,它能够容易复现,而且具有时间上的持久性。此后,在第二次巴黎会议(1884)、芝加哥会议(1893)等屡次国际会议上均对这一点进行了重复检查,经沙罗亭布格会议的准备,在瑞利勋爵主持下召集了有二十二个国家四十



六位代表参加的伦敦国际会议(1908),对国际实用单位制的基本单位作了如下规定。在称呼由它们导出的单位时,均在该单位名字前冠以“国际”二字。

(i) 国际欧姆(int.  $\Omega$ ),是长度 106.300cm、质量 14.4521g、截面积均匀的水银柱在冰的熔点上对稳恒电流所显示的电阻。

(ii) 国际安培(int. A),是一秒钟内由硝酸银水溶液中析出 1.118mg 银的稳恒电流的强度。

(iii) 国际伏特(int. V),是保证一个国际安培流过一个国际欧姆的电位差。

这个国际实用单位制的最终形式,由 1911 年到 1948 年持续了三十七年;实际上,国际单位是各国代表们把国际技术委员会经过比较调整后的标准电池和标准电阻带回去,而根据它的二次标准来保证的。根据公式定义(i)、(ii)来确定单位,只是极其稀有的事,也就是说,只有在怀疑特定国家的标准电池或标准电阻与平均值产生偏差时才进行。

1908 年的国际会议对国际实用单位制的规定,是在对绝对单位制的统一决定之下作为与之非常接近的实用单位制而给出的;该单位制是根据绝对电单位制把基本电单位与力学的 CGS 单位制协调确定下来的一个单位制。在这个绝对单位制中,有如下规定:

(i) 绝对安培,在半径为 1cm 的圆形线圈中心上,于线圈平面内放置一个单位磁极,该磁极由电流流过的线圈的一弧度圆弧上受到一个达因的力(假设相距 1cm 的两个单位强度的磁极互相作用一个达因的力)。

(ii) 绝对欧姆和绝对伏特,由欧姆定律和焦耳定律, $V/J$  及  $RJ^2$  给出  $1W = 10^7 \text{erg} \cdot \text{s}^{-1}$  的功率。

在确定这个绝对电单位之后的技术问题,是把用作自感



或互感的线圈,或者用作精密电流天平元件的线圈,准确地作成给定的几何大小,这一工作主要由美国国家标准局和英国国立物理研究所的物理学家们完成。在两个单位制并存期间,人们多次进行工作,以便提高两个单位制之间换算因子的精度,1946年10月间作了如下规定:

$$1 \text{ 平均国际欧姆} = 1.00049 \text{ 绝对欧姆}$$

$$1 \text{ 平均国际伏特} = 1.00034 \text{ 绝对伏特.}$$

由表 5.8 可知,假如在 MKSA 制中把安培选作第四单位,也能组成实用单位,这时,并不需要像 CGS 制那样复杂的换算因子。实际上,从量纲论来看,可以认为国际电单位制是相当于  $LT\phi J$  制的 MSVA 单位制,不过,若把 MKSA 单位制的基本单位 kg 用  $V = m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1} = W/A$  来替换,同样也可以得到国际电单位制。与使用五个独立量纲量的情况相对应的五基本单位制,也能作为 MKSA 单位制的推广而推导出来。例如,在  $MLTJ\Phi$  制中,如果形式上假定  $[M] = kg$ 、 $[L] = m$ 、 $[T] = s$ 、 $[J] = A$ 、 $[\Phi] = Wb$ , 则可得到 MKSAWb (或 MSVAWb) 单位制。

# 文献与参考书

## 第一部

### 第一章 第二章

质点及刚体的力学,往往叫做一般力学。多年来,人们接连不断地撰写了许多很好的教科书。由其中选出少数几本,比较困难。从本讲座的宗旨来考虑,我们首先想举出在廿世纪初叶出现的

- (1) Planck, M.: *Einführung in die allgemeine Mechanik*,  
Wiss. Vlgsh. (I. Aufl., 1916).

但是,在第一章及第二章中,我们打算从目前的教科书重新回过头去研究创立经典力学体系的牛顿著作,并从其中题为“定义”、“公理、或运动定律”的基本部分开始。牛顿的这个著作是

- (2) Newton, I.: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, S. Pepys (1st ed., 1687).

另外,为了使原先的理论简化,还最大限度地使用了矢量表示。

但是,直到讲义

- (3) Gibbs, W.: *Elements of Vector Analysis* (1881, 1884)  
(Wilson, E. B. (ed.): *Vector Analysis*, Dover (1909))

出现之前,矢量分析并未用于力学的描述。在它之先,哈密顿的方向(*quaternion*)扮演着矢量的角色。吉布斯以后,矢量分

析迅速普及。因此,第一章、第二章的表达形式及内容都和下列文献有很多共同点:

(4) 玉城嘉十郎:《質点の力学》,内田老鹤圃(初版,1932)

(5) 玉城嘉十郎:《剛体の力学》,内田老鹤圃(初版,1936)

(6) 山内恭彦:《一般力学》,岩波书店(初版,1941)

(7) 原岛鲜:《一般力学》,河出书房(初版,1944)。

除此而外,在

(8) Casimir, H. B. G.: *Rotation of Rigid Body in Quantum Mechanics*, Wolter (1931)

中的经典力学有关刚体运动的部分,对刚体力学有简明论述。关于分析力学,有

(9) Whittaker, E. T.: *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Univ. Press (1st. ed., 1904) (reprint: Dover (1944))。

关于经典力学的历史,可以举出

(10) Mach, E.: *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, F. A. Brockhaus (1st. ed. 1833),

但是,贯穿第一章、第二章的基本想法,和马赫的并不一致。

### 第三章

公认的一般教科书是

(11) Planck, M.: *Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper*, S. Hirzel (1927)。

该书的重点在于缩短题材来使理论的框架明确。

关于弹性理论,详见

(12) 比企能夫:《弹性、非弹性》,共立出版(1972)。

此书的内容由一般弹性理论一直深入到对物性的探讨，适合于深入学习弹性、非弹性。

对变形体进行数学处理的参考书，有

- (13) 小谷正雄：《連続物体ノ力学》(岩波讲座 数学)，岩波书店 (1934)。

其中不涉及流体。

关于流体力学，通俗易懂的有

- (14) 今井功：《流体力学》(岩波全书)，岩波书店 (1970)。

虽然它是一本小册子，但在叙述时把流体力学的基本概念很好地整理出来，用处很大。对它作进一步充实的书，是由同一作者所著的

- (15) 今井功：《流体力学(前编)》，裳华房(1973)。

前编没有处理波的问题，后编尚未发行。

流体力学的教科书出版甚多，在这里我们举出一本具有特点的书：

- (16) Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М.: *Механика сплошных сред* (изд. 2-е), Госуд. изд. технико-теорет. лит. (1954)。

本书几乎没有涉及紊流的问题，关于它的资料有

- (17) 巽友正：《乱流》，槇书店(1962)。其中附有丰富的文献一览表。

尝试用统计力学来处理二维涡流群的书有

- (18) Onsager, L.: *Statistical Hydrodynamics*, *Nuovo Cimento Supplements*, **6**, 279 (1949)。

关于弹性体振动及波动的较新单行本，有

- (19) 户田盛和：《振動論》，培风馆 (1968)。该书特别偏重于非线性点阵振动的问题，富于启发性。

本章所谈 Navier-Stokes 方程的数学处理, 详见

- (20) Ладыженская, О. А. : *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука (1970).

关于这个问题的论文, 有

- (21) Ладыженская, О. А.: *О нестационарных уравнениях Навье-Стокса*, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., **19**, 9—18 (1958)

- (22) Fujita, H. & Kato, T.: On the Navier-Stokes initial value problem I, *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **16**, 269 (1964).

本章介绍的以 KdV 方程为主的非线性波动方程的处理, 详见谷内俊哉、西原修译的《非线性波动》(岩波书店, 1977)一书。另外, 还有综合报告

- (23) Scott, A. C., Chu, F. Y. F. & McLaughlin, D. W.: The Soliton: A New Concept in Applied Science, *Proc. of IEFÉ*, **61**, 1443 (1973).

在这个报告中附有多达 267 篇文献的一览表, 对于将来打算学习 Soliton 的人非常有益。本章直接引用的文献, 列举如下:

- (24) Korteweg, D. J. & de Vries, G.: On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and a New Type of Long Stationary Waves, *Phil. Mag.*, **39**, 422 (1895)

- (25) Lax, P. D.: Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **21**, 467 (1968)

- (26) Washimi, H. & Taniuti, T.: Propagation of ion-



- acoustic solitary waves of small amplitude, *Phys. Rev. Letters*, **17**, 996 (1966)
- (27) Perring, J. K. & Skyrme, T. H. R.: A model unified field equation, *Nuclear Phys.*, **31**, 550 (1962)
- (28) Toda, M.: Wave propagation in anharmonic lattices; *J. Phys. Soc. Japan*, **23**, 501 (1967)
- (29) Flaschka, H.: The Toda Lattice I, *Phys. Rev.*, **B15**, 1924 (1974); The Toda Lattice II, *Prog. Theor. Phys.*, **51**, 703 (1974).

最后,关于本章采用的数学方面的参考书,我们举出以下几册:

- (30) Hirota, R.: The Inverse Scattering Method, Solitons, and their Applications, *Lecture Notes in Mathematics*, No. 515 (R. M. Miura ed.), Springer (1976)
- (31) 寺沢宽一:《自然科学者のための数学概論》,岩波书店(1954)
- (32) Morse, P. M. & Feshbach, H.: *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill (1953).

## 第二部

### 第四章

可以说,与本章讨论的光学现象的经典处理有关的参考书,用下面的一本就够了,它极有概括性,简明而富于特色。第四章很多内容都包括在这本书中。

- (33) Born, M. & Wolf, E.: *Principles of Optics* (5th ed.), Pergamon (1975).

关于光学的历史发展,有

- (34) Whittaker, E. T.: *A History of the Theories of Aether and Electricity* I & II, Thomas Nelson, I (2nd ed. (1951)), II (1953),

该书百科辞典式的描述也贯穿了第五章。虽然只处理到光的电磁说以前,但独特的观点却富于启发性的书有

- (35) Mach, E.: *Die Prinzipien der physikalischen Optik* (1913) (英译本 Anderson, J. S. & Young, A.F. A.: *The Principles of Physical Optics* (1926)) (reprint: Dover (1959)).

特别是 § 4.5 讲到的基尔霍夫对红外线的研究,详见

- (36) Mach, E.: *Prinzipien der Wärmelehre, historischkritisch entwickelt* (3te. Aufl.), Ambrosius Barth (1919)

的第 125—152 页。与它们相关的光学经典著作有

- (37) Hooke, R.: *Micrographia, or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies made by Magnifying Glass with Observations and Inquiries Thereupon*, Martyn and Allestry (1665) (reprint: Dover (1961))

- (38) Huygens, C.: *Traité de la Lumière, où sont expliquées les causes de ce qui lui arrive dans la reflexion, et dans la refraction, et particulièrement dans l'étrange refraction du cristal d'Islande*, Pierre Vander (1690) (reprint: Culture et Civilization (1967) (英译本 Thompson, S. P.: *Treatise on Light*, Macmillan (1912)) (reprint: Dover (1962))

- (39) Newton, I.: *Opticks, or A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light*, 1st ed. (1704)(reprint: Culture et Civilization (1966));

4th ed. (1730) (reprint: Dover (1952)),

其中无论哪一册都有多维尔(Dover)版。(39)的初版以三次曲线论和流率法为附录,而第四版收录着所有的“疑问”,从光学的立场来看,四版较初版更为合适一些。

光速的测定方法详见

(40) Bergstrand, E.: Determination of the Velocity of Light, *Handbuch der Physik*, Bd. XXIV, S. 1—43, Springer (1956).

关于§ 4.2 中惠更斯原理的数学规范化,在§ 3.7 中亦有论述,其单行本有

(41) Barker, B. B. & Copson, E. T.: *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (2nd ed.), Oxford (1950).

关于衍射现象,本文叙述了以菲涅耳-基尔霍夫公式为基础的传统处理方法,而一贯采用格临函数的规范化描述,请参考

(42) Hönl, H., Maue, A. W. u. Weseppahl, K.: Theorie der Beugung, *Handbuch der Physik*, Bd. XXV/1, S. 218—573, Springer (1961).

关于包含边界波在内的衍射理论的规范化及其应用,请参考

(43) Rubinowicz, A.: *Die Beugungswelle in der Kirchhofschen Theorie der Beugung*, Polska Akademia Nauka (1957)

Rubinowicz, A.: *Ann. Physik*, **55**, 257 (1917); **78**, 339 (1924); **81**, 153 (1926); *Acta Phys. Polon.*, **12**, 225 (1953).

为了了解§ 4.2(f)提出的全息摄影的进展情况,合适的读物是

(44) 日本物理学会编:《ホログラフイー—I、II》

(物理学论文选集 155, 164) (1967, 1970)。

光是横波;有关它的经验基础,在以光的电磁说为前提的最新光学书中,几乎并不把它当作电磁波的基本性质来进行讨论。但是,认为光是电磁波的一个有力的论据,正是光的这个性质。根据菲涅耳-阿喇果实验对这个问题所作的分析,详见

(45) Szivessy, G.: Polarization, *Handbuch der Physik*, Bd. XX, Kap. 4, S. 83—120, Springer (1928).

§ 4.3 也依据该书。

为了知道十八到十九世纪光以太的力学解释 (§ 4.4),除 (34) 卷 I 第 IV、V、IX 各章外,对这个问题刻苦钻研的两位科学巨匠的著述是很有意义的。

(46) Lorentz, H. A.: *Aether Theories and Aether Models* 是 L. 希伯斯坦 (Silberstein) 和 A. P. H. 特里维尔 (Trivell) 把洛伦兹在莱顿大学的讲义翻译成英文的三卷本之中的洛伦兹, H. A.: 理论物理讲稿, 麦克米兰 (1927) 的第一卷第一章 (p. 3—71)。这一部分是 1901—02 学年作的讲义, 涉及到汤姆孙的刚体以太。作为大英百科全书 (第九版; 1875) 中的一项而写的

(47) Maxwell, J. C.: Ether 也选录在 (58) 的第二卷 p. 763—775。或参考 庑重徹: 科学史研究 (II), **13**, 65, 104 (1974)。

近五十年寻求  $\beta^2$  级效应的迈克尔逊-英雷型实验的来龙去脉, 能由

(48) Shankland, R. S., Molusky, S. W., Lorre, F. C. & Kuerti, G.: *Revs. Modern Phys.*, **27**, 167 (1955) 及其引用文献中找到。

§ 4.5 (a) 所述的瑞利勋爵对热辐射及伦琴射线的主张:

- (49) Lord Rayleigh (John William Strutt): *Phil. Mag.*,  
27, 460 (1889); *Nature*, 57, 607 (1898)

分别收录在瑞利勋爵论文集,剑桥大学出版(1899—1920)(多维尔翻印(1964))第三卷 p. 268 及第四卷 p. 353 中。

在 § 4.5(b) 中,专门用作参考资料是

- (50) Mandel, L. & Wolf, E.: *Revs. Modern Phys.*, 37,  
231 (1965).

这个综合报告采用了经典论和量子论两种方法,其经典的处理方法采取了和(33)第 X 章几乎相同的论证。这一方面的最新成果(大部分是量子论的)归纳在

- (51) 日本物理学会编:《コヒーレンス I、II》(物理学论文选集 149, 178)(1965, 1972)。

薛定谔对 § 4.6 (b) 的哈密顿相似的讨论 (*Ann. Physik* (4), 79, 489 (1926)) 见于

- (52) 田中正、南政次訳:《シュレーディンガー選集 1, 波動力学論文集》,共立出版(1974)p. 33。

## 第五章

具有经典电磁学这个标题的书籍,各类文字品种繁多,出色的解说也不少。但是,假如表示“一个”整理电磁现象的经典处理的方法,则可举出

- (53) Phillips, M.: *Classical Electrodynamics, Handbuch der Physik*, Bd. IV, S. 1—108, Springer (1962)

- (54) Panofsky, W. & Phillips, M.: *Classical Electricity and Magnetism* (2nd ed.), Addison-Wesley (1961).

前者采用高斯单位制,后者采用 MKSA 单位制。对于详细计算和各个具体问题来说,可以以(53)为主,参考(54)及(54)各章末尾的文献。这是构成电磁场理论实用体系的一个方法,



但试图创立物理学理论的人，需要阅读这个领域的经典著作是

(55) Maxwell, J. C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism* (2 vols., 3rd ed.), Constable (1891) (reprint: Dover (1954))

(56) Lorentz, H. A.: *The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat* (2nd ed.), Teubner (1916) (reprint: Dover (1952)).

特别对麦克斯韦的“专著论文”，甚至还有纠缠于没有使用矢量分析、没有充分整理基本方程组之类的传说，但是，这不过是一个证据，表明目前没有认真阅读电磁场论创始人的专著的现状。它表示了与今日的教科书等同的矢量分析的各个定理(卷1§10—26)，仅仅是记法不同而已(微分算子 $\nabla$ 已经引入，名为“哈密顿算符”)。进一步，它还涉及到各种电磁量的测定方法，单位制的设置，而且从中还可以知道对今日电磁学教科书中看到的定律的规范化及素材的全部准备。它对电磁学，和《原理》对现代力学教科书，意义完全相同。况且，有些论文只是可引用的很多，可读的极少；比如

(57) Faraday, M.: *Experimental Researches in Electricity*, vol. I & III, Taylor & Francis (1839, 1855); vol. II, Richard & John Taylor (1844).

此书一般被人们贬称为力线物理学，而他们却忘记了，只有法拉第对各种电磁现象和物质结构之间关系的研究，才是接触作用的真正基础。例如，麦克斯韦位移电流的数学表达式的确定，实在归功于麦克斯韦，但是也可以说，其基本构思却包含在法拉第的想法之中，后者在连接粒子模型的前提下统一地掌握了绝缘、传导和放电。

对于打算进一步深入了解电磁场理论创建者的思维的人来说,以下论文集是很方便的:

(58) Lord Kelvin (Thomson, W.): *Mathematical and Physical Papers* (6 vols.), Cambridge Univ. Press (1884—1911)

(59) Niven, W. D. (ed.): *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Cambridge Univ. Press (1890) (reprint: Dover (1965))

(60) Hertz, H.: *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft* (1892) (英译本 Jones, D. E.: *Electric Waves being Researches on the Propagation of Electric Action with Finite Velocity through Space*, Macmillan (1893)) (reprint: Dover (1962))

(61) Zeeman, P. & Fokker, A. D. (ed.): *H. A. Lorentz, Collected Papers* (9 vols.), Martinus Nijhoff (1935—39).

关于第五章开始谈到的基本电量的确定方法,详见

(62) Cohen, E. R., Crowe, K. M. & Dumond, J. W. M.: *Fundamental Constants of Physics*, Interscience (1957)

(63) Taylor, B. N., Parker, W. H. & Langenberg, D. N.: *Revs. Modern Phys.*, **41**, 375 (1969).

关于 § 5.1 所述库仑定律的成立精度和光子质量的问题,有综合报告

(64) Goldhaber, A. S. & Nieto, M. M.: *Revs. Modern Phys.*, **43**, 277 (1971).

库仑本人确定静电力和静磁力定律的过程,见于

(65) Gillmor, C. S.: *Coulomb and Evolution of Physics*

*and Engineering in Eighteenth-century France*, Princeton Univ. Press (1971).

由安培实验确定电流间相互作用的定律,由超距作用论的电动力学立场出发推导电磁感应定律 (§ 5.2),在(55)II卷第IV部第1—IV、XXIII章中有详细论述,不过,也可以参考(34)I卷第三章及

(66) Zerner, F.: *Die Maxwell-Hertzschen Theorie*, *Handbuch der Physik*, Bd XII, S. 1—145, Springer (1927).

§ 5.4—§ 5.7 中引用的汤姆孙、法拉第、麦克斯韦、赫兹等人的工作,收录在(55)、(57)~(60)中,特别是§ 5.7的表 5.3,请参考(54)II卷第IV部第 V—IX 章。对于 § 5.7(b) 及 § 5.8(a) 来说,也可以参考(33)的第 I、II 章。赫兹势的一般规范化 (§ 5.8(b)、(c)、(d)) 的依据是

(67) Nisbet, A.: *Proc. Roy. Soc.*, **A231**, 250 (1955), 使用张量以协变形式撰写相同内容的资料是

(68) McCrea, W. H.: *Proc. Roy. Soc.*, **A240**, 447 (1957).

§ 5.7(e) 主要依据了

(69) Green, H. S. & Wolf, E.: *Proc. Phys. Soc.*, **A66**, 1129 (1953)

Wolf, E.: *Proc. Phys. Soc.*, **A74**, 269 (1959).

关于在各种具体情况下所进行的计算,请参看(69)的引用文献。格临-乌尔夫电磁场标量表示,可以用赫兹势来写;这是尼斯贝特(67)研究的动机。

与辐射场固有振动的展开式 (§ 5.9(a)) 有关的

(70) Lord Rayleigh: *Phil. Mag.*, (5) **49**, 539 (1900) 也收集在瑞利勋爵科学论文第四卷 p.483 及物理学史研究出

版协会编:《熱輻射と量子》(物理学古典論文叢書 1), 東海大学出版会(1970).

§ 5.9(c) 按照

(71) Bloembergen, N. & Pershan, P. S.: *Phys. Rev.*, **128**, 606 (1962)

叙述了光在线性媒质和非线性媒质边界面上的反射和折射。以这篇论文的再版为附录, 并以波洛姆贝根在哈巴多大学(1963)及莱兹希夏校(1964)的讲义为基础的著作是

(72) Bloembergen, N.: *Non-linear Optics*, Benjamin (1965),

此书是这个研究方向上很好的入门书。

汤姆孙、塞曼、洛伦兹、拉莫尔等人对确认电子的存在 (§5.10(a)) 有过贡献的论文, 收集在

(73) 物理学史研究刊行会编:《電子》(物理学古典論文叢書 8), 東海大学出版会 (1969).

§ 5.10(b) 的讨论按照(56)及

(74) de Groot, S. R.: *The Maxwell Equations, Non-relativistic and Relativistic Derivations from Electron Theory*, North-Holland (1969).

(74)对洛伦兹之后试图将微观方程和宏观方程联系起来的作法的批判性介绍和作者本人的工作进行了审查, 也讨论了以协变形式对各宏观方程的推导。

本文没有机会实际应用经典电子论。关于运动物体的电动力学、辐射理论、金属电子论、热传导理论等问题, 除(56)、(61)、及(53)第 VI、VII 章以外, 请参考

(75) Rosenfeld, L.: *Theory of Electrons*, North-Holland (1951)

(76) Van Vleck, J.H.: *The Theory of Electric and Mag-*

*netic Susceptibility*, Oxford (1932) Chap. I~IV

- (77) 物理学史研究刊行会编: 《金属電子論》、《磁性》  
(物理学古典論文叢書 11、12), 東海大学出版会  
(1969、1970).

本书同样未能接触到电磁流体力学, 这些内容在(54)第十二章中有简洁说明。

关于各电磁量单位的发展经过, 详见(62)及

- (78) Silsbee, F. B.: *Establishment and Maintenance of the Electrical Units*, NBS circulars, **475**, 1 (1949)

- (79) Jaeger, W.: Die elektrischen Masssystem und Normen, *Handbuch der Physik*, Bd. XVI, Kap.1, Springer (1927).



[ G e n e r a l I n f o r m a t i o n ]

书名 = 经典物理学 1

作者 = [ 日 ] 汤川秀树

页数 = 5 8 4

SS号 = 1 0 1 7 9 4 8 6

出版日期 =