大專升學必備

標準
高中三角學

陳明哲編著

中央書局

標準高中三角學 陳明哲編著 中央書局發行

標準

高中三角學

陳明哲編著

中央書局

本書之用法

爲了培養解題之能力，必徹底理解基本定理，即在本書各節所示之定義定理，而舉出之例題亦爲詳加研究之對象，故後讀者必須徹底研究。

但在研究例題時，千萬不可看其解答，必須先自解之，如雖經充分思考後，仍覺難解時，則可先看其解答之一部分再自解之，如尙覺難解者，始可觀其全解。爲徹底了解其解答，應重複默解之。

本書讀法一般步驟再詳述如下：

初讀時，例題中，如有困難者，附以省略號○。

如必要讀之例題，附以再讀號◎爲便。

習題在初讀時解之亦可，或再讀後解之亦可。

但，必須自力解之。雖在習題後附有解答，尙以不看爲要。

再讀之時，先讀附有再讀之記號者，如認爲不必再讀者，則附以×號，以消去之，如認爲必要三讀者，留之不作記號。次讀有省略號○者，其中認爲必要再讀之例題，塡以小圈。在省略號內爲◎表示必再讀，如認爲不必再讀之時，附以×號消去之。仍感困難者留之。

解習題亦照前法讀之。

如此繼續反覆讀之，則難解之問題逐漸減少，而短時期中可讀完。

如有充分時間者，本書末之補充題再研究之，以期其徹底理解。

高三或畢業之讀者可按前法讀之爲便。

高一之讀者可作教科書之補充，尤以本書之定義及定理之證明比一般教科書爲詳細明瞭，例題豐富必可作讀者之好伴侶。

標準高中三角學

第一章　角之度量法

第二章　三角函數

第三章 複角函數

第四章 三角形邊角間之關係

第五章 測量問題

第六章 含三角函數之行列式

第七章 反三角函數

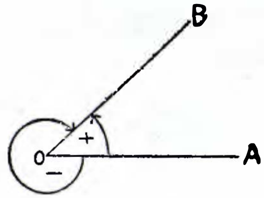
第八章 代數學上之應用

第一章 角之度量法

1. 角（Angle）

設一半直線 OX 之位置一定，又一半直線 OA 初與 OX 相重，O 為樞紐，自 OA 位置旋轉至 OB 位置構成角 AOB。

OA 稱為角之始邊（*Initial side*）
OB 為終邊（*Terminal side*），
O 為頂點（*Vertex*），且
規定旋轉方向與時針旋轉方向相同時為負角，相反時為正角。



2. 角之度量法（Measurement of angles）

量角之大小所用之單位有下列三種：

（一） 六十分制（*Sexagesimal system*）

將圓周分為 360 等分，每一等分弧所對之圓心角，稱為 1 度（*Degree*），故圓周角等於 360 度，每度分為 60 分（*Minute*），每分分為 60 秒（*Second*），度，分，秒簡記為 "°"，"′"，"″"。此法數理上多用之。

度 分 秒

（二） 百分制（*Centesimal system*）

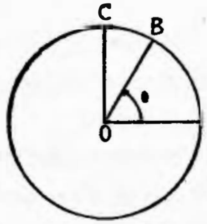
以一直角之百分之一為單位，這單位稱為 1 級（*Grade*），一級之百分之一稱為一分（*Minute*），一分之百分之一稱為一秒。（*Second*）。此法沿用不廣。

（三） 弧度制（*Circular system*）

於圓周上取等於半徑之弧，其弧所對之圓心角為角之單位，稱為一弧度（*Radian*），或稱一弳。

3. 六十分制與弧度制

於圓 O 上取 AB 弧之長等於半徑 OA，則 θ 角等於 1 弧度，另作半徑 $CO\perp OA$。



由幾何定理

(i) 圓周 $=2\pi r$（r 爲半徑，π 爲圓周率）

(ii) 同圓或等圓內，兩圓心角之比，等於所對兩圓弧之比。

故得

$$\frac{\angle AOB}{\angle AOC}=\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}}=\frac{r}{\frac{\pi r}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

$\therefore\quad \angle AOB=\frac{2}{\pi}\angle R$

因直角與 π 爲常數，故知 $\angle AOB$ 亦爲常數，則 $\angle AOB$ 爲一弧度單位。

$\therefore\quad 1\text{ 弧度}=\frac{2\times 90^\circ}{\pi}=\frac{180^\circ}{3.1416}=57.2957^\circ=57^\circ17'45''$

$\therefore\quad 1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ 弧度}=\frac{3.1416}{180}\text{ 弧度}=0.0174533\cdots\cdots\text{弧度}$

$\therefore\quad 360^\circ=2\pi$ 弧度 $\qquad 180^\circ=\pi$ 弧度

茲再討論六十分制與弧度制之互相關，設一角以弧度法所量之值爲 R，以六十分制所量之值爲 D，因一直角爲 90°，則 $\frac{D}{90^\circ}$ 表此角與直角之比。但 $\frac{\pi}{2}$，表直角以弧度爲單位，故此角與直角之比爲 $\frac{2R}{\pi}$，此以上兩比之比值相等，故可得下式之關係。

$$\frac{D}{90^\circ}=\frac{2R}{\pi}\quad\text{即}\quad\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}$$

由是 $R=\frac{D\pi}{180}\qquad D=\frac{180R}{\pi}$

今將特別角其六十分制與弧度制對照表列於後：

D	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
R	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
D	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
R	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

〔例1〕 化 150° 及 $43^\circ15'18''$ 爲弧度。

（解） $150^\circ=150^\circ\times\frac{\pi}{180}$ 弧度 $=\frac{5}{6}\pi$ 弧度

$43^\circ15'18''=43^\circ+\frac{15^\circ}{60}+\frac{8^\circ}{60\times 60}=\frac{38927^\circ}{15\times 60}$

故 $\frac{38927^\circ}{15\times 60}=\frac{38927}{15\times 60}\times\frac{\pi}{180}=\frac{38927}{162000}\pi=(0.7548\cdots)$ 弧度

〔例2〕 化 $\frac{2}{3}\pi$ 弧度及 0.75 弧度爲六十分制。

（解） $\frac{2}{3}\pi$ 弧度 $=\frac{2\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=120^\circ$

$0.75\text{弧度}=0.75\times\frac{180^\circ}{3.1416}=42^\circ\times\frac{0.30528}{3.1416}=52^\circ58'18''$

〔例3〕 壬時鐘在十二點十五分之時，求鐘面兩針所夾之角，以六十分制表之。

（解） 分針十二點鐘行過十五格，但時針速度爲分針之 $\frac{1}{12}$，故時針經過 15 格 $\times\frac{1}{12}=\frac{5}{4}$ 格，故兩針中隔 15格 $-\frac{5}{4}$ 格 $=\frac{55}{4}$ 格。

又鐘面每格爲 6°，故兩針成

$6^\circ\times\frac{55}{4}=82.5^\circ=82^\circ30'$ 之角。

〔例4〕 求正五邊形，正八邊形，正 x 邊形之各一內角，以弧度表出之。

（解） 依幾何定理正多邊形各內角爲 $D=\frac{(n-2)\cdot180^\circ}{n}$

由 $\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}$ 得 $R=\frac{D\pi}{180^\circ}$

故 $R=\frac{\frac{(n-2)\cdot180^\circ}{n}\times\pi}{180^\circ}=\frac{(n-2)\cdot\pi}{n}$

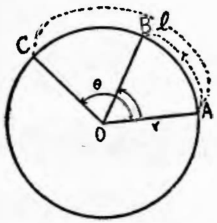
設 $n=5,8,x$ 分別代入上式，則可得正五邊形之一內角爲 $\frac{3\pi}{5}$，正八邊形之一內角爲 $\frac{3\pi}{4}$，正 x 邊形之一內角爲 $\frac{(x-2)\pi}{x}$。

4. 圓心角、弧、半徑間之關係及扇形之面積

於半徑爲 r 之圓，設圓心角爲 θ 弳之弧長爲 l，由平面幾何知圓心角之大小與所對的弧成比例。

故 $l:r=\theta:1$

∴ $l=r\theta$ 或 $\theta=\frac{l}{r}$



即 弧長＝半徑×圓心角

或 圓心角＝$\frac{\text{弧長}}{\text{半徑}}$

又設扇形 AOC 之面積爲 A，則

扇形 AOC 之面積：圓之面積＝$\theta:2\pi$

即 $A:\pi r^2=\theta:2\pi$ ∴ $A=\frac{1}{2}\theta r^2$

〔例1〕 一圓的半徑爲2寸，求4.3寸之弧所對之圓心角。

（解） 由公式 $\theta=\frac{l}{r}=\frac{4.3}{2}=2.15$

故其所對之圓心角爲2.15弧度。

〔例2〕 地球之直徑爲7900哩，則地球中心角1'所對之弧長若干？

（解） 半徑＝7900哩÷2＝3950°哩。

∴ 弧長＝$r\theta$＝3950哩×$\frac{\pi}{180\times60}$＝1.149哩。

5. 雜 例

〔例1〕 設三角形的三內角成等差級數，而以六十分制量最小角所得的數值與弧度法最大角所得之比爲 $60:\pi$。問三角各若干度？

（解） 解三角形三內角之度數各爲 $(x-y)^\circ$, x°, $(x+y)^\circ$（但 y° 爲公差），則依題意得

$x-y:\frac{(x+y)\pi}{180}=60:\pi$ ∴ $(x-y)\pi=60\times\frac{(x+y)\pi}{180}$

則 $x-y=\frac{1}{3}(x+y)$……(1)

因三角形三內角之和爲180°，故得

$(x-y)+x+(x+y)=180$ ∴ $x=60$……(2)

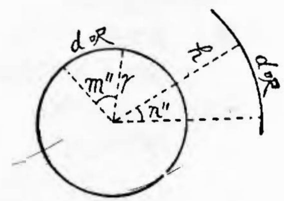
以(2)代入(1)，得 $y=30$

∴ $x-y=30$, $x=60$, $x+y=90$ 答：30°, 60°, 90°

〔例2〕 相隔 d 呎距離之兩點，在地面下二垂線之交角爲 m''，于 h 哩之高處其交角爲 n''，則地球半徑爲 $\frac{nh}{m-n}$，試證之。

（證） 設地球之半徑爲 r，因地球半徑比 d 值甚大，故可視 d 爲一弧，由弧度制得知

$d=r\theta=(r+h)\theta'$



但 $\theta=\frac{m\pi}{180\times60^2}$，$\theta'=\frac{n\pi}{180\times60^2}$

故 $\frac{rm\pi}{180\times60^2}=\frac{(r+h)n\pi}{180\times60^2}$

即 $rm=(r+h)n$ ∴ $r=\frac{nh}{m-n}$

〔例3〕 有二種正多角形，其一正多角形一內角之度數與另一正多角形之弧度（弳）之比爲 $144:\pi$。如此多角形有幾組，再求各組之邊數。

（解） 設適合於條件之二種正多角形之邊數爲 n 及 m。

則 正 n 邊形一內角之度數＝$\frac{90(2n-4)}{n}$

正 m 邊形一內角之弳數 $=\frac{(m-2)\pi}{m}$

故依題意，得

$$\frac{90(2n-4)}{n}{}^{\circ}:\frac{(m-2)\pi}{m}=144:\pi$$

就 n 解之，得 $n=10-\frac{80}{m+8}$

因 $n\geqq3$ 故 $\frac{80}{m+8}\leqq7$；就 m 解之，得 $m\geqq\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$

∴ $m+8\geqq12$，而 $m+8$ 必為 80 之約數

80 之約數中不小於 12 者為 16, 20, 40, 80

$m+8=16$，時 $m=8$ ∴ $n=5$

$m+8=20$，時 $m=12$ ∴ $n=6$

$m+8=40$，時 $m=32$ ∴ $n=8$

$m+8=80$，時 $m=72$ ∴ $n=9$

故所求之多角形有四組，而其各組之邊數為(5, 8)，(6, 12)，(8, 32)，(9, 72)。

〔例 4〕 設兩圓正交，其半徑 1 及 $\sqrt{3}$，試求兩圓公共部份周圍之長及面積之大小。

（解） 於左圖 $PO=1$，$PO'=\sqrt{3}$

因圓 O 與圓 O' 正交，故 $OP\perp PO'$

於 $\triangle POO'$

$OO'=\sqrt{PO^2+PO'^2}=\sqrt{1+3}=2$

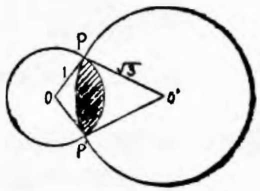
∴ $OO'=2OP$

∴ $\angle POO'=60^\circ=\frac{\pi}{3}$

∴ $\angle POP'=\frac{2\pi}{3}$

∴ $\angle PO'O=30^\circ=\frac{\pi}{6}$

∴ $\angle P'O'P=\frac{\pi}{3}$



由公式 $l=r\theta$ 得兩弧長為 $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

故其周長為 $\frac{\pi}{3}(2+\sqrt{3})$

又公共部份之面積為兩扇形之和，減去三角形 OPO' 面積之兩倍。

但扇形 OPP' 之面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times1^2=\frac{\pi}{3}$

扇形 $O'PP'$ 之面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times(\sqrt{3})^2=\frac{\pi}{2}$

$\triangle OPO'$ 之面積 $=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故公共部份之面積 $=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$

習 題 一

（1） 試將下列諸角的單位，化為六十分制：

$(a)\ \frac{\pi}{2}$ $(b)\ \frac{2}{3}\pi$ $(c)\ \frac{5}{6}\pi$ $(d)\ \frac{4}{3}\pi$ $(e)\ \frac{11}{6}\pi$

$(f)\ 2n\pi$

（2） 化下列各角的單位為弧度制：

$(a)\ 12^\circ$ $(b)\ 56^\circ$ $(c)\ 135^\circ$ $(d)\ 225^\circ$ $(e)\ 5^\circ\,37'\,30''$

$(f)\ 22.9^\circ$

（3） 試以六十分制表出一弧度，又以弧度制表出一度。

（4） 設有一圓，其半徑為 4 公尺，問其圓心角為 80° 所對的弧長為若干？

（5） 月之直徑向地球之角度為 $1868''$，月與地球之距離為 238793 哩，求月之直徑。（月之直徑可視為弧長）

（6） 順次將 ABC 三角形之角為單位量，度其餘兩角，並求其和，若三和成等差級數，則原三角成調和級數。

（7） 在三點半時，鐘面長短兩針成何角，以本位弧單位表之。

（8） 分圓周成五段成 **A. P.**（等差級數），最大者爲最小者之 6 倍，問最小弧對中心角爲幾本位弧？

（9） 若兩正多角形內角之比等于其邊數之比，試求各正多角形之邊數。

（10） 設半徑爲 r 的六個等圓圓心都在他圓周上，且相鄰二圓互相外切，求此六等圓圍成部份的面積。

（11） 已知月球公轉地球一次所需之時間爲 27.4 日，問月球每日之角速度爲若干徑？

（12） 如半徑爲 r 之三個等圓互相外切，求此三圓圍成部份之面積。

習題略解

（1） (a) 90° (b) 120° (c) 150° (d) 240° (e) 330° (f) $360n°$

（2） (a) $\frac{\pi}{15}$ (b) $\frac{14\pi}{45}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{5}{4}\pi$

(e) $5°37'30''=5°+\frac{37°}{60}+\frac{30°}{60\times60}=\frac{45°}{8}$ $\therefore\ \theta=\frac{45\pi}{8\times180}=\frac{\pi}{32}$

(f) $22.9°=\frac{229\pi}{10\times180}=\frac{229\pi}{1800}$

（3） (一) $D=\frac{180°\times R}{\pi}=\frac{180}{3.1416}=57.29578°=57°17'45''$

(二) $R=\frac{D\pi}{180}=\frac{3.1416}{180}=0.01745$ 徑

（4） 設所求的弧長爲 l 公尺，$80°=\frac{\pi}{180}\times80=\frac{4\pi}{9}$ 弧度

$\therefore\ l=4\times\frac{4\pi}{9}=5.5850$………（公尺）

5） 月之直徑（弧長）$=238793\times1868\times\frac{\pi}{180\times60\times60}=2162$ 哩

6） 此三和爲 $\frac{B}{A}+\frac{C}{A}$，$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}$，$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}$，故

$$\left(\frac{B}{A}+\frac{C}{A}\right)-\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{B}\right)=\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{B}\right)-\left(\frac{A}{C}+\frac{B}{C}\right)$$

即：$\frac{B(B+C)-A(A+C)}{AB}=\frac{C(A+C)-B(A+B)}{BC}$

$\frac{(B-A)(A+B+C)}{AB}=\frac{(C-B)(A+B+C)}{BC}$

$\frac{B-A}{AB}=\frac{C-B}{BC}$，$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{1}{B}-\frac{1}{C}$，故原三角成調和級數。

（7） 今分針移過 30 格時，時針在第 $15+\frac{30}{12}=17.5$ 格。 ∵ 兩針相差爲 12.5 格。又因每格爲 6°，故兩針相差 $12.5\times6=75°=\frac{5}{12}\pi\ rad$

（8） 設五段長依次爲 $x-2y,\ x-y,\ x,\ x+y,\ x+2y$，則由題意知

$x-2y+x-y+x+x+y+x+2y=2\pi$……①

$6(x-2y)=x+2y$……② 由①得 $5x=2\pi$

$\therefore\ x=\frac{2}{5}\pi$ 代入 ② $y=\frac{5}{14}x=\frac{1}{7}\pi$

故最小弧所對中心角爲 $x-2y=\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{7}\right)\pi=\frac{4}{35}\pi\ rad$

（9） 設兩正多角形之邊數各爲 n, n' 則其一內角分別爲

$\frac{(n-2)180°}{n}$，$\frac{(n'-2)180°}{n'}$，由題意得

$\frac{(n-2)180°}{n}:\frac{(n'-2)180°}{n'}=n:n'$ 即 $\frac{n-2}{n}:\frac{n'-2}{n'}=n:n'$

$n-\frac{2n}{n'}=n'-\frac{2n'}{n}$，故 $n-n'=\frac{2(n^2-n'^2)}{nn'}$， 即 $nn'=2(n+n')$

即 $n'=\frac{2n}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}$

因 n, n' 同爲正整數，故得解答爲 $\begin{cases}n=6,4,3\\ n'=3,4,6\end{cases}$

（10） 於第 1 圖 $AB=BC=CD=DE=EF=FA=2r$ ∴ $ABCDEF$ 爲正六邊形，正 $\triangle OAF=AH\cdot OH=r\sqrt{3}r=\sqrt{3}r^2$

[∴ 於 $\triangle AOH$ 中，$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{(2r)^2-r^2}=\sqrt{3}r$]

∴ 正六邊形 $ABCDEF$ 之面積 $=6\sqrt{3}r^2$，$\angle A=\frac{(6-2)\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$

∴ 扇形 GAH 之面積$=\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{3}r^2\pi$, 設所求之面積爲 S,

則 $S=$(正六邊形 $ABCDEF$ 之面積)-6(扇形 GAH 之面積)

$=6\sqrt{3}\cdot r^2-6\cdot\frac{1}{3}r^2\pi=r^2(6\sqrt{3}-2\pi)$

(11) 設所求之弧度爲 x, 則由題意(第 2 圖), 27.4日:1日$=2\pi:x$

∴ $x=\frac{2\pi}{27.4}=\frac{2\times 3.1416}{27.4}=0.229\cdots$ 答: 0.229 弧度。

(12) 設 A, B, C 爲三個圓心, D, E, F 爲三圓的切點(第 3 圖)

則 $\triangle ABC$ 爲正三角形。於 $\triangle ABE$, $\angle E=R\angle$, $AB=2r$,

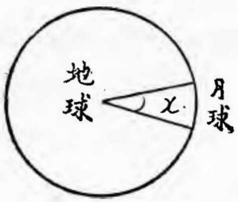
$BE=r$ ∴ $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{(2r)^2-r^2}=\sqrt{3}\,r$

∴ $\triangle ABC$ 之面積$=BE\cdot AE=r\cdot\sqrt{3}\,r=\sqrt{3}\,r^2$

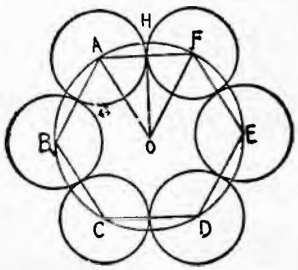
$\angle A=60^\circ=\frac{\pi}{3}$ ∴ 扇形 DAF 之面積$=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}r^2$

∴ 圖形 DEF 之面積$=$($\triangle ABC$ 之面積)-3(扇形 DAF 之面積)

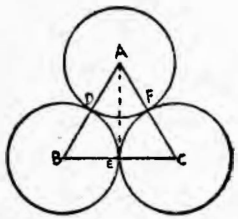
$=\sqrt{3}\,r^2-\frac{3\pi}{6}r^2=(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})r^2$ 答: $(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})r^2$



(第 2 圖)



(第 1 圖)



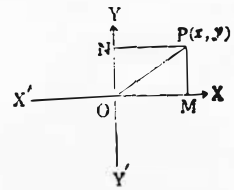
(第 3 圖)

第二章 三角函數

1. 直角坐標

在平面上作互相垂直之二直線 XX' 及 YY', 其交點 O, 謂之原點 XOX' 稱爲橫軸, 或 X 軸; YOY' 稱爲縱軸, 或 Y 軸。

自 Y 軸至平面上任一點之距離, 稱爲此點之橫坐標, 自 X 軸至此點之距離, 稱爲縱坐標; 且規定點在 Y 軸之右, 其橫坐標爲正, 在左爲負, 點在 X 軸之上, 其縱坐標爲正, 在下爲負。

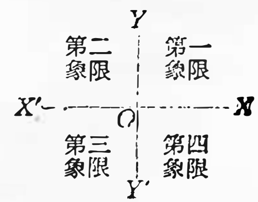


如上圖中之 PN 名爲橫坐標, 以 x 表之, PM 名爲縱坐標, 以 y 表之, x, y 稱爲 P 點之坐標, 而記爲 (x, y)。

一點 P 與原點 O 之距離以 r 表之, 稱爲該點之向徑 (*Radian Vector*), 向徑恆規定爲正, 應用畢氏定理, 則得 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 若平面上有一點, 則可以量得其坐標, 反之如已知其坐標, 則可決定其位置, 故知坐標實係決定平面上之位置。

2. 象限

平面上垂直相交二直線分平面爲四部份, 依逆時針方向計之, 而稱 XOY 爲第一象限, YOX' 爲第二象限, $X'OY'$ 爲第三象限, $Y'OX$ 爲第四象限。

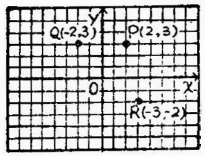


如 (x, y) 表示任一點之坐標, 則

第一象限內各點之坐標 (x, y)。

第二象限內各點之坐標 $(-x, y)$。

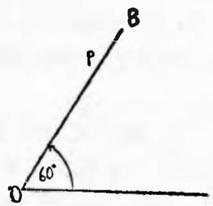
第三象限內各點之坐標$(-x, -y)$。第四象限內各點之坐標$(x, -y)$。縱軸上各點之坐標$(0, \pm y)$，橫軸上各點之坐標$(\pm x, 0)$。



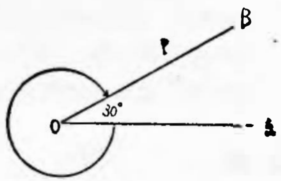
定一點之坐標以用方格紙爲便，如右圖中各點之坐標：P 爲$(2,3)$，Q 爲$(-2,3)$，R 爲$(+3,-2)$。

3. 角之推廣

若 $\angle AOB=60°$，今設想動直線 OP，自 OA 沿逆時針方向旋轉一周後而至 OB，則所成之角爲 $420°$，旋轉兩週後而至 OB，則成 $780°$ 之角，旋轉 n 週後而至 AB，則成 $n\times 360°+60°$ 之角。



同理，若 OP 沿與時針同向旋轉至 OB，則成 $-330°$ 之角(如右圖)；旋轉 n 週而至OB，則成$-n\times 360°-330°$之角。



通常均令角之始邊與 OX 重合，頂點與原點重合，視其終邊所在象限，稱之爲該象限之角。如大於 $180°$ 小於 $270°$ 之角，爲第三象限角；大於 $720°$ 小於 $810°$ 之角，爲第一象限角；大於 $-270°$ 小於 $-180°$ 之角，爲第二象限角等等。

4. 三角函數

在未解釋三角函數前，先解釋函數之意義。函數 (*Function*) 設 x, y 表二變數，如 y 是隨 x 改變而改變其值，則 y 爲 x 之函數。

如 $y=x^2+2x+1$ 之代數式中。

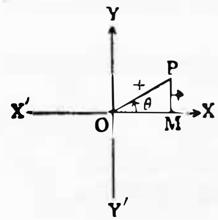
若 $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=$ ....

則 $y=0$, $y=1$, $y=4$, $y=$ ....

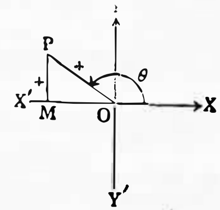
總之 x 改變爲任一數值，y 亦改變爲其他任一數值，以滿足此代數式，則稱 y 爲 x 之函數。

三角函數

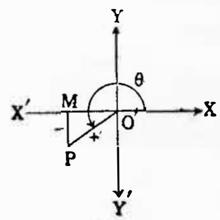
(i) 動線在第一象限



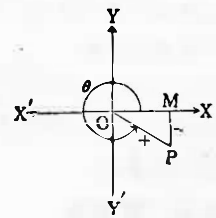
(ii) 動線在第二象限



(iii) 動線在第三象限



(iv) 動線在第四象限



在上圖中，設向徑 OP 初與 OX 重合，以 O 點爲定點，繞 OX 反時針方向旋轉成 θ 角，不論 θ 角之向徑 OP 在第幾象限，皆可作 $PM\perp X$ 軸，則 OM 爲 P 點橫坐標，PM 爲縱坐標，OP 爲 P 點至原點之距離。今線分 OM, PM, OP 分別以 a, b, r 表之，取其中任兩線作比，共得六個不同之比值如下：

$$\frac{b}{r},\ \frac{a}{r},\ \frac{b}{a},\ \frac{a}{b},\ \frac{r}{a},\ \frac{r}{b}$$

若 θ 角不變，不論 P 點之坐標如何，此六個比值亦不變，反之六個比值改變，則 θ 角亦改變。故 θ 角之改變，則六個比值亦隨之而改變，按上述函數之定義，知此六個比值乃爲 θ 角之函數，通稱爲三角函數，茲

將其名稱及符號記於下；

$\frac{b}{r}$ 即 $\frac{\text{縱坐標}}{\text{斜線}}$，稱為 θ 角之正弦（*Sine*），簡記之為 $\sin\theta$。

$\frac{a}{r}$ 即 $\frac{\text{橫坐標}}{\text{斜線}}$，稱為 θ 角之餘弦（*Cosine*），簡記之為 $\cos\theta$。

$\frac{b}{a}$ 即 $\frac{\text{縱坐標}}{\text{橫坐標}}$，稱為 θ 角之正切（*Tangent*），簡記之為 $\tan\theta$。

$\frac{a}{b}$ 即 $\frac{\text{橫坐標}}{\text{縱坐標}}$，稱為 θ 角之餘切（*Cotangent*），簡記之為 $\cot\theta$。

$\frac{r}{a}$ 即 $\frac{\text{斜線}}{\text{橫坐標}}$，稱為 θ 角之正割（*Secant*），簡記為 $\sec\theta$。

$\frac{r}{b}$ 即 $\frac{\text{斜線}}{\text{縱坐標}}$，稱為 θ 角之餘割（*Cosecant*），簡記為 $\csc\theta$。

此六種函數總稱之為 θ 角之三角函數。

此外尚有兩種函數值：

正矢（*Versedsine*）即 $\text{vers}\,\theta=1-\cos\theta$

餘矢（*Coversedsine*）即 $\text{covers}\,\theta=1-\sin\theta$

正矢餘矢致用甚少。

5. 三角函數之正負值

利用一點坐標之正負性質及向徑恆為正之規定，由三角函數定義，知各象限角之符號。

今將各象限內角之諸函數之正負值情形列表於下：

符號 函數 象限	a	b	$\sin\theta=\frac{b}{r}$ $\csc\theta=\frac{r}{b}$	$\tan\theta=\frac{b}{a}$ $\cot\theta=\frac{a}{b}$	$\cos\ \ =\frac{a}{r}$ $\sec\theta=\frac{r}{a}$
第一象限	+	+	+	+	+
第二象限	−	+	+	−	−
第三象限	−	−	−	+	−
第四象限	+	−	−	−	+

〔註〕 將上表用以下圖來記較為方便

II	I
$\left.\begin{matrix}\sin\theta\\ \csc\theta\end{matrix}\right\}+$	all+
III	**IV**
$\left.\begin{matrix}\tan\theta\\ \cot\theta\end{matrix}\right\}+$	$\left.\begin{matrix}\cos\theta\\ \sec\theta\end{matrix}\right\}+$

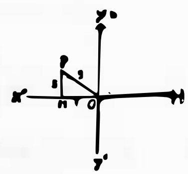
於左圖中，第一象限內記 all+ 即表第一象限角之三角函數均為「+」的意思。第二象限內記 $\left.\begin{matrix}\sin\theta\\ \csc\theta\end{matrix}\right\}+$ 即第二象限角之正弦（$\sin\theta$）及餘割（$\csc\theta$）為「+」而其他函數為「−」之意思，以下類推。

6. 已知一函數值求同角的其他各函數值

已知某角一函數值，或其終邊上一點之坐標，則此角之各函數，均可按畢氏定理及三角函數定義求得之，今示例如下：

〔例 1〕 已知 θ 角之終邊上一點之坐標 $x=-4, y=3$，求 θ 之三角函數值。

（解） 按題意 $x=-4, y=3$，故知此角必在第二象限又按畢氏定理知



$$PO=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

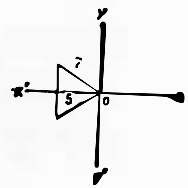
$$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5},\quad \cos\theta=-\frac{5}{4}$$

$$\tan\theta=-\frac{3}{4},\quad \cot\theta=-\frac{4}{3}$$

$$\sec\theta=-\frac{5}{4},\quad \csc\theta=\frac{5}{3}$$

〔例 2〕 已知 $\cos\theta=-\frac{5}{7}$，求 θ 的各函數。

（解） 由函數定義



$$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{5}{7}$$

$$\therefore y=\pm\sqrt{49-25}=\pm2\sqrt{6}$$

故 θ 之終邊有二，一在第二象限，一在第三象限，如圖

$\therefore \sin\theta=\pm\frac{2\sqrt{6}}{7}$　　$\csc\theta=\pm\frac{7}{2\sqrt{6}}$

$\cos\theta=-\frac{5}{7}$　　$\sec\theta=-\frac{7}{5}$

$\tan\theta=\mp\frac{2\sqrt{6}}{5}$　　$\cot\theta=\mp\frac{5}{2\sqrt{6}}$

〔例 3〕 已知 $\sin x=\frac{2}{5}$，及 $\tan x>0$，求其他三角函數。
（聯合招生、武漢、四川等大學）

（解） 因 $\sin x=\frac{2}{5}$，$\tan x>0$，故 x 在第一象限。

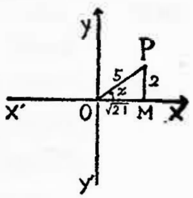
由畢氏定理，知

$OM=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

$\therefore \cos x=\frac{\sqrt{21}}{5}$

$\cot x=\frac{\sqrt{21}}{2}$　　$\tan x=\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{21}$

$\csc x=\frac{5}{2}$　　$\sec x=\frac{5}{\sqrt{21}}=\frac{5\sqrt{21}}{21}$



〔例 4〕 在直角 $\triangle ABC$ 中，$a-b=\frac{1}{4}c$，求 A 角之各函數。

（解） 今 $a-b=\frac{1}{4}c$ ………(1)　$a^2+b^2=c^2$ ……………(2)

$(1)^2-(2)$　　$-2ab=-\frac{15}{16}c^2$ ………(3)

$\sqrt{(2)-(3)}$　　$a+b=\frac{\sqrt{31}}{4}c$ …………(4)

今假定 $a>b$，則 (4) 中負號可略去

由 (1)，(4) 得　$a=\frac{1}{8}(\sqrt{31}+1)c$，　$b=\frac{1}{8}(\sqrt{31}-1)c$

故　$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{8}(\sqrt{31}+1)$　$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{8}(\sqrt{31}-1)$

$\tan A=\frac{\sqrt{31}+1}{\sqrt{31}-1}=\frac{16+\sqrt{31}}{15}$，　$\cot A=\frac{\sqrt{31}-1}{\sqrt{31}+1}=\frac{16-\sqrt{31}}{15}$

$\sec A=\frac{4}{15}(\sqrt{31}+1)$，　$\csc A=\frac{4}{15}(\sqrt{31}-1)$

習　題　二

（1） 下列諸角在第幾象限？
① $130°$　② $286°$　③ $540°$　④ $2360°$
⑤ $\frac{12}{5}\pi$　⑥ $\frac{105}{12}\pi$

（2） 下列之各點為角的終邊上一點，試分別求其各函數。
① $(3,4)$　② $(2,-3)$　③ $(-7,1)$

（3） 已知下列函數，試分別求 θ 的各函數。
① $\sin\theta=\frac{1}{3}$　② $\sec\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}$
③ $\cos\theta=\frac{7}{25}$　θ 在第四象限。

（4） 已知 $\cot\theta=-\frac{4}{3}$，且 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$
求 $\frac{3\sin\theta+5\cos\theta}{2\sin\theta+6\cos\theta}$ 之值。

設 a, b, c 為直角三角形的二鄰邊及斜邊：〔(5)～(8)〕

（5） 在直角三角形中，$a=\frac{2}{3}c$，求銳角 A 之各函數。

（6） 在直角三角形中，$c=\sqrt{p^2+q^2}$，$b=q$，求 A 角的各函數。

（7） 設 $a+b=\frac{5}{4}c$，求 A 角之各函數。

（8） 設 $c=4$，$a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，求 $\cos A, \tan A$ 之值。

（9） 已知 $\tan x=\frac{3}{4}$ 及 x 在第三象限，求其他各三角函數。

習　題　略　解

（1） ① $130°=90°\times1+40°$　$\therefore$　$130°$ 在第二象限。

② $286°=90°\times3+16°$ ∴ $286°$ 在第四象限

③ 略　　④ 略

⑤ $\frac{12}{5}\pi=\frac{\pi}{2}\times4+\frac{2\pi}{5}$ ∴ $\frac{12}{5}\pi$ 在第一象限

⑥ $\frac{105}{12}\pi=\frac{35}{4}\pi=\frac{\pi}{2}(4\times4+1)+\frac{\pi}{4}$ ∴ $\frac{105}{12}\pi$ 在第二象限

(2) ① $r=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$　$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\tan\theta=\frac{4}{3}$, $\cot\theta=\frac{3}{4}$, $\sec\theta=\frac{5}{3}$, $\csc\theta=\frac{5}{4}$

② 略　　③ 略

(3) ① ∵ $\sin\theta=\frac{1}{3}$　$r=3$, $y=1$ 則 $x=\pm\sqrt{9-1}=\pm2\sqrt{2}$

$\sin\theta=\frac{1}{3}$,　$\cos\theta=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$,　$\tan\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\cot\theta=\pm2\sqrt{2}$,　$\sec\theta=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$,　$\csc\theta=3$

② ∵ $\sec\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　$x=\sqrt{2}$　$r=\sqrt{3}$ ∴ $y=\pm\sqrt{3-2}=\pm1$

各函數按 ① 推之。

③ ∵ $\cos\theta=\frac{7}{25}$　$r=25$, $x=7$ ∴ $y=\pm\sqrt{25^2-7^2}=\pm24$

因 θ 爲第四象限，故 $y=-24$。

(4) ∵ $\cot\theta=-\frac{4}{3}$，又 θ 爲第二象限角，故令 $x=-4$, $y=3$.

$r=\sqrt{9+16}=5$,　由是 $\sin\theta=\frac{3}{5}$,　$\cos\theta=-\frac{4}{5}$

故 $\frac{3\sin\theta+5\cos\theta}{2\sin\theta+6\cos\theta}=\frac{3\times\frac{3}{5}+5(-\frac{4}{5})}{2\times\frac{3}{5}+6(-\frac{4}{5})}=\frac{11}{18}$

(5) 令 $a=\frac{2}{3}c$，又 $a^2+b^2=c^2$, $b=\sqrt{c^2-a^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}c$ 從此可求其函數。

(6) 令 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{p^2+a^2-a^2}=p$ 由此可求其函數。

(7) 按例 3 求之，即可得

(8) $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,

∴ $\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2-\sqrt{3}$

(9) $\sin x=\frac{-3}{5}$,　$\cos x=\frac{-4}{5}$,　$\cot x=\frac{4}{3}$,　$\sec x=\frac{-5}{4}$,　$\csc x=\frac{-5}{3}$

7. 三角函數之基本關係式

設△ABC 爲直角三角形，C 爲直角，則角 A 之對邊恆以 a 表之。角 B 之對邊以 b 表之，角 C 之對邊恆以 c 表之。

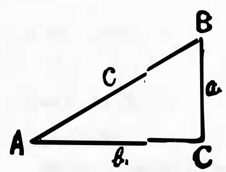
由是

$\sin A=\frac{a}{c}$

$\cos A=\frac{b}{c}$　　$\tan A=\frac{a}{b}$

$\cot A=\frac{b}{a}$　　$\sec A=\frac{c}{b}$

$\csc A=\frac{c}{a}$



則有下列之關係：

(i) 倒數關係式：

$$\therefore \begin{cases} \sin A\cdot\csc A=1 & \sin A=\frac{1}{\csc A} & \csc A=\frac{1}{\sin A} \\ \cos A\cdot\sec A=1 & \cos A=\frac{1}{\sec A} & \sec A=\frac{1}{\cos A} \\ \tan A\cdot\cot A=1 & \tan A=\frac{1}{\cot A} & \cot A=\frac{1}{\tan A} \end{cases}$$

(ii) $\sin A\cdot\csc A=\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$

$\cos A\cdot\sec A=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}=1$

$\tan A\cdot\cot A=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$

(ii) 商數關係式:

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}\qquad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

(證) $\sin A\div\cos A=\frac{a}{c}\div\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\times\frac{c}{b}=\frac{a}{b}=\tan A$

$\cos A\div\sin A=\frac{b}{c}\div\frac{a}{c}=\frac{b}{c}\times\frac{c}{a}=\frac{b}{a}=\cot A$

(iii) 平方關係式.

$$\begin{cases}\sin^2 A+\cos^2 A=1,\ \sin^2 A=1-\cos^2 A,\ \cos^2 A=1-\sin^2 A\\ 1+\tan^2 A=\sec^2 A,\ \tan^2 A=\sec^2 A-1,\ \sec^2 A-\tan^2 A=1\\ 1+\cot^2 A=\csc^2 A,\ \cot^2 A=\csc^2 A-1,\ \csc^2 A-\cot^2 A=1\end{cases}$$

(證) $\sin^2 A+\cos^2 A=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$

$1+\tan^2 A=1+\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2+a^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}=\sec^2 A$

$1+\cot^2 A=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}=\csc^2 A$

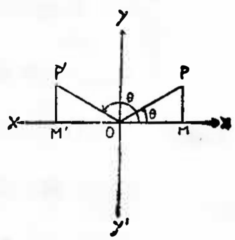
8. 三角函數之互換

應用基本關係式，則一切三角函數皆可以任一函數表示之。

〔例1〕試以正弦表示其他五函數值。

(要點) 如此類之問題須注意其符號，其符號須視 θ 在何象限而定之。參考第5節三角函數之正負值。

(解) 設 $\sin\theta=K$，則 θ 在第一象限或第二象限，如右圖。



$\angle POM=\theta$，或 $\angle P'OM=\theta$

令 $PM=P'M'=K$

$OP=OP'=1$

$\therefore\ OM=\sqrt{1-K^2}$

$OM'=-\sqrt{1-K^2}$

(i) $\angle POM=\theta$ 在第一象限之函數值

$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\sqrt{1-K^2}$

$=\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$

(ii) $\angle P'OM=\theta$ 在第二象限之函數值

$\cos\theta=\frac{OM'}{OP'}=-\sqrt{1-K^2}$

$=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{-1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$

〔例2〕已知 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，求其餘五函數之值。

(解) 因 $\frac{\sqrt{5}+1}{4}>0$，故 θ 爲第一象限或第四象限的角。

$\therefore\ \sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}$

$=\pm\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\pm\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)}=\pm\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}+1)^2}}$

$=\pm\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}}=\pm\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}$

$=\pm\sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{9-5}}=\pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}}=\pm\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{(5-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}}$

$$=\pm\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{4}{\sqrt{5}+1}=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\sqrt{5}-1$$

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\pm\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\pm\sqrt{\frac{16}{10-2\sqrt{5}}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{8(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}$$

$$=\pm\sqrt{2+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

但 θ 爲第一象限之角時，取正號。

θ 爲第四象限之角時，取負號。

〔例 3〕 已知 $\sec x=-1$，求其他五函數之值。

（解） 因 $-1<0$，故 θ 爲第二象限或第三象限之角。

$$\cos x=\frac{1}{\sec x}=\frac{1}{-1}=-1$$

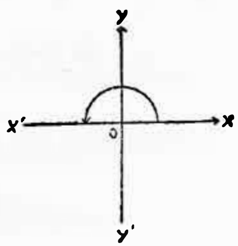
$$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$=\pm\sqrt{1-1}=0$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{-1}=0$$

$$\cot x=\frac{1}{\tan x}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\csc x=\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{0}=\infty$$



〔例 4〕 設 $\tan^3\phi=\frac{a}{b}$，則 $a\csc\phi+b\sec\phi=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

（解） $\sec^2\phi=1+\tan^2\phi=1+\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^2=1+\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$

$$\therefore\quad \sec\phi=\frac{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}$$

同理 $\csc\phi=\frac{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$

故 $a\csc\phi+b\sec\phi=a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

習　題　三

（1） 求他五函數之值，設已知

ⓐ $\sec x=-\frac{5}{3}$　　ⓑ $\csc x=-1$

ⓒ $\sin\theta=\frac{1}{2}$　　ⓓ $\csc\theta=-\sqrt{3}$

（2） 已知 $\cot\theta=\frac{m}{n}$，求其他各三角函數。

（3） 已知 $\cos\theta=\frac{2mn}{m^2+n^2}$，求其他各三角函數。

（4） 已知 $\sin\theta=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$，求 $\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 的值。但 $m>n>0$

（5） 已知 $\tan\theta=\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$，求其他三角函數之值。

（6） 設 $\tan\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$，試證

$$\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta)-\sec\theta=\frac{a}{b}$$

（7） 已知 $\frac{\sin A}{\sin B}=\sqrt{3}$，$\frac{\tan A}{\tan B}=3$，求 A 及 B 之最小正角。

（8） 若 $2\sin\theta=2-\cos\theta$，求 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 之函數值。

(9) 設線段 AB 的三等分點爲 C, D, 以 CD 爲直徑的圓周上任一點爲 E, 設 $\angle AEC=\alpha$, $\angle BED=\beta$, 試證 $\tan\alpha\ \tan\beta$ 爲一定。

習題略解

(1) ⓐ $\cos x=\frac{1}{\sec x}=-\frac{3}{5}$, $\sin x=\pm\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=\pm\frac{4}{5}$,

$\tan x=(\pm\frac{4}{5})/(-\frac{3}{5})=\mp\frac{4}{3}$, $\cot x=\frac{1}{\tan x}=\mp\frac{3}{4}$,

$\csc=\frac{1}{\sin x}=\pm\frac{5}{4}$

ⓑ $\sin x=\frac{1}{\csc x}=\frac{1}{-1}=-1$, $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}=0$,

$\tan x=\frac{-1}{0}=\infty$, $\cot x=\frac{1}{\infty}=0$, $\sec x=\frac{1}{0}=\infty$

ⓒ $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\tan\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cot\theta=\pm\sqrt{3}$, $\csc\theta=2$,

ⓓ $-\sqrt{3}<0$, 故 θ 在第三或第四象限。

$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\theta=\mp\sqrt{1-\sin^2\theta}=\mp\frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\sec\theta=\mp\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\tan\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cot\theta=\pm\sqrt{2}$,

θ在第三象限時, $\tan\theta$, $\cot\theta$ 爲正, 其他爲負。θ 在第四象限時 $\cos\theta$, $\sec\theta$ 爲正, 其他爲負。

(2) $\tan c=\frac{n}{m}$, $\sin\theta=\pm n/\sqrt{m^2+n^2}$, $\cos\theta=\pm m/\sqrt{m^2+n^2}$

$\sec\theta=\pm\sqrt{m^2+n^2}/m$, $\csc\theta=\pm\sqrt{m^2+n^2}/n$

(3) $\sin\theta=\pm(m^2-n^2)/(m^2+n^2)$, $\tan\theta=\pm(m^2-n^2)/2mn$

$\cot\theta=\pm 2mn/(m^2-n^2)$, $\sec\theta=(m^2+n^2)/2mn$

$\csc\theta=\pm(m^2+n^2)/(m^2-n^2)$

(4) 由假設 $m^2-n^2>0$, ∴ $\sin\theta=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}>0$, 故 θ 在第一或第二象限。$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2})^2}=\pm\frac{2mn}{m^2+n^2}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\frac{m^2-n^2}{2mn}$, 但 θ 在第一象限時, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 取正號。θ 在第二象限時, 取負號。

(5) $\tan\theta=\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}>0$, 故 θ 在第一或第三象限。

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $\sec\theta=\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}=\pm\sqrt{2-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$

$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\pm\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\csc\theta=\pm(\sqrt{5}+1)$

$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}=\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ 但, θ 在第一象限時, 取正號。θ在第三象限時, $\tan$, $\cot\theta$ 取正號, 其他取負號。

(6) 左邊 $=(\sin\theta+\cos^2\theta/\sin\theta)+(\cos\theta+\sin^2\theta/\cos\theta)-\sec\theta$

$=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}-\sec\theta=\csc\theta=\sqrt{1+\cot^2\theta}$

$=\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{a}{b}$

(7) $\frac{\sin A}{\sin B}=\sqrt{3}$……① $\frac{\tan A}{\tan B}=3$……②, 由①得

$\sin A=\sqrt{3}\sin B$……③, 由②得 $\tan A=3\tan B$……④,

$\frac{③}{④}$則 $\sin A\cdot\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sin B\cdot\frac{\cos B}{\sin B}$

∴ $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos B$……⑤, ③²+⑤² $1=3\sin^2 B+\frac{1}{3}\cos^2 B$

∴ $1=3\sin^2 B+\frac{1}{3}(1-\sin^2 B)$ 整理之, 得 $\sin^2 B=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \sin B=\pm\frac{1}{2}\quad\therefore\ B=30^\circ$，代入③得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ A=60^\circ$　答：$A=60^\circ$，$B=30^\circ$

〔8〕 $\because\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$ 又由題中知 $\cos\theta=2(1-\sin\theta)$

$\therefore\ \sqrt{1-\sin^2\theta}=2(1-\sin\theta)$

$1-\sin^2\theta=4-8\sin\theta+4\sin^2\theta\quad\therefore\ 5\sin^2\theta-8\sin\theta+3=0$

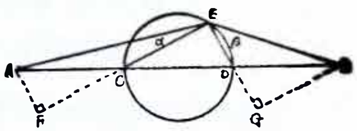
$\therefore\ (5\sin\theta-3)(\sin\theta-1)=0\quad\therefore\ \sin\theta=\frac{3}{5}$ 或 1，

若 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\pm\frac{4}{5}$（$-\frac{4}{5}$代入原式不合）

$\therefore\ \sin\theta=1$，$\cos\theta=0$

〔9〕 過A作EC的垂線，垂足爲F。

過B作ED的垂線，垂足爲G。



則 $\triangle ACF\cong\triangle DCE$

$\because\ (AC=DC,\ \angle AFC=R\angle=\angle DEC\ \ \angle ACF=\angle DCF)$

同理 $\triangle DBG\cong\triangle DCE$

$\therefore\ AF=ED=GD,\ FC=CE=BG$

$\therefore\ \tan\alpha=\frac{AF}{EF}=\frac{DE}{2CE},\ \tan\beta=\frac{GB}{EG}=\frac{CE}{2ED}$

$\therefore\ \tan\alpha\ \tan\beta=\frac{ED}{2CE}\cdot\frac{CE}{2ED}=\frac{1}{4}$

9. 三角恆等式（Trigonometric identity）

（本節所論之恒等式爲簡易恒等式，比較繁者待後論之。）

在等式中，有的不論其未知數之值如何。恒能成立，有的必須未知數爲某特殊値方能成立，前者稱爲恒等式，後者稱爲方程式。含未知角三角函數之恒等式稱爲三角恒等式。

今舉其通常用於證明恒等式之方式如下：

求證 $A=B$		
第 一 方 式	第 二 方 式	第 三 方 式
（證） $A=D$	（證） $B=C$	（證）$A=D$　$B=D'$
$=E$	$=F$	$=E$　$=E'$
$=F$	$=E$	$=F$　$=F'$
$=C$	$=D$	$=C$　$=C$
$=B$	$=A$	
$\therefore\ A=B$	$\therefore\ A=B$	$\therefore\ A=B$

第四方式：利用已知之公式或恒等式，化簡出與證明之原恒等式左邊（右邊）完全相同，再證明與右邊（左邊）完全相同，此種方式大多應用於證明三角形中邊與角之關係之恒等式。

證明方式通用第一方式，如第一方式感覺困難，便可用第二方式，如第二方式亦感覺困難，便用第三方式。

在證明中由繁式（項式多或因式多者）推至簡式較易，由簡式推至繁式則較難，所以第一第二兩法，可由此選擇。

10. 證明三角恒等式之方法

如何證明三角恒等式，在初學時往往感覺困難，對之有無從措手之感。玆特介紹兩入門方法以便讀者之伴侶。

（一） 分析法（*Analytic method*）

此種方法，就是先假定一恒等式已經成立，從而推其兩邊間之關係，讀者對於此法大抵都會使用，因其與幾何證題中之分析法性質大致相同。所用之方法雖無一定規則可循，約略說來，有下面幾種：

（1） 在兩邊加減以同數（即移項）

（2） 在兩邊乘以同數（去分母）

（3） 在兩邊除以同數（約簡）

（4） 在兩邊乘同次方或開同次方

（5） 在兩邊各自展開或化簡，

從此逐漸推演到解決為止，但證明正文寫出必須用方式中任一種。

（二） 湊合法（*Adjustment*）

此種方法，初視之似感覺變化多端，不易捉摸，其實應用亦並不難。譬如一恆等式為 $A=\frac{B}{C}$ 之形，則證明時先化 $A=\frac{AC}{C}$。分母中之 C 始終不去動他，實際若 AC 能推至等於 B，則 $A=\frac{AC}{C}=\cdots\cdots=\frac{B}{C}$ 可成立。又如一恆等式為 $A=B-C$ 之形，不易即證明者，便可先試化 $A=(A+C)-C$，後面之 C 始終不去動他。實際若 $A+C$ 能推到等於 B，則 $A=(A+C)-C=\cdots\cdots=B-C$ 成立。此種方法變化較多，難以一一列舉，茲舉其常用者幾種如下：

（1） 在一邊加減同一數（即加 $A-A$）

（2） 在一邊乘除同一數（即乘以 $\frac{A}{A}$）

（3） 在一邊乘 n 次方，同時開 n 次根〔即 $(A^n)^{\frac{1}{n}}$〕

（4） "1" 之代用法，其運用極為重要，有時同加 "1"，減 "1"，或乘 "1"，除 "1"。

如 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta\cot\theta=1$

$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$，$\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$

$\sin 90°=1$　　$\cos 180°=-1$……等等

（5） 化 $\sin A$ 為 $\sin(p+q)A$ 等，$(p+q)=m$

（6） 化 $\sin A$ 為 $\sin(r-s)A$ 等，$(r-s)=m$

本節對於湊合法用到之處尚不多，待後章恆等式之證明時，處處用之。望讀者隨時留意，細心體會為盼。

11. 有關證題之其他應注意之點

（1） 公式須熟記，初學時只求能熟記，應用既久，則自然得心應手，運用自如。

（2） 如正割，餘割，先化成含有正弦及餘弦之函數做較易求證，因關於正餘割之公式不够用，但遇正切餘切，則可化或不化成餘弦及正弦須視題情形而定。

（3） 應用代數學中之公式，如因子分解，分數化法，比例定理，指數定理及開根等。

（4） 因着手進行之方法不同，一題之證，往往不止一種。在證時究運用何種方式較簡捷，惟於證題前必須多予考慮。

12. 簡易恆等式之證明

（一） 根據已知的公式，定理，及代數公式逐步演變化擬證式之一邊，使等於另一邊。

〔例1〕 試證 $(\cos A+\sin A)^2+(\cos A-\sin A)^2=2$

〔要點〕 若設 $\cos A=a$，$\sin A=b$，則得 $(a+b)^2+(a-b)^2$ 而變其形。利用平方關係式可求得。

〔解〕 $(\cos A+\sin A)^2+(\cos A-\sin A)^2$

$=\cos^2 A+2\cos A\sin A+\sin^2 A+\cos^2 A-2\cos A\sin A$

$+\sin^2 A=2(\cos^2 A+\sin^2 A)=2$

$[\because \cos^2 A+\sin^2 A=1]$

〔例2〕 試證 $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=2\sec^2\theta$

〔要點〕 分母之 $1-\sin^2\theta$ 可變形為 $\cos^2\theta$

〔解〕 $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}=2\sec^2\theta$

〔例3〕 試證 $\tan a+\cot a=\sec a\csc a$

〔要點〕 本題 $\tan a$，$\cot a$ 均化為 $\sin a$，$\cos a$，因此容易看出其間之關係。

〔解〕 $\tan a+\cot a=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\cos a}{\sin a}=\frac{\sin^2 a+\cos^2 a}{\cos a\sin a}$

$=\frac{1}{\cos a\sin a}=\sec a\csc a$

〔例 4〕 試證 $(1-\tan^2\theta)^2=(\sec^2\theta-2\tan\theta)(\sec^2\theta+2\tan\theta)$

〔解 1〕 左邊 $=1-2\tan^2\theta+\tan^4\theta$

$=1+2\tan^2\theta+\tan^4\theta-4\tan^2\theta$

$=(1+\tan^2\theta)^2-(2\tan\theta)^2$

$=(\sec^2\theta)^2-(2\tan\theta)^2$

$=(\sec^2\theta-2\tan\theta)(\sec^2\theta+2\tan\theta)$

〔解 2〕 右邊 $=(1+\tan^2\theta-2\tan\theta)(1+\tan^2\theta+2\tan\theta)$

$=(1-\tan\theta)^2(1+\tan\theta)^2$

$=[(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)]^2$

$=(1-\tan^2\theta)^2$

〔解 3〕 左邊 $=(1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta})^2=(\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta})^2$

$=\dfrac{\cos^4\theta-2\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta}{\cos^4\theta}$

$=\dfrac{\cos^4\theta+2\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta-4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^4\theta}$

$=\dfrac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^4\theta}$

$=\dfrac{1-4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^4\theta}=\dfrac{1}{\cos^4\theta}-\dfrac{4\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\sec^4\theta-4\tan^2\theta$

$=(\sec^2\theta+2\tan\theta)(\sec^2\theta-2\tan\theta)$

〔解 5〕 求證 $\sec^2\theta-\sec\theta=\dfrac{\tan^4\theta+\tan^2\theta}{\sec^2\theta+\sec\theta}$

〔要點〕 原式去分母，則得 $\sec^4\theta-\sec^2\theta=\tan^4\theta+\tan^2\theta$
再將左邊或右邊設法變形，假如先變右邊而得

$\tan^4\theta+\tan^2\theta=\tan^2\theta(\tan^2\theta+1)$，

同時按平方關係式 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$

得 $\tan^2\theta(\tan^2\theta+1)=(\sec^2\theta-1)\sec^2\theta=\sec^4\theta-\sec^2\theta$

由此知原成立。今再作別證，即將由已知公式變形而作證明。

〔證〕 將公式 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ ……………………(1)

平方，得 $1+2\tan^2\theta+\tan^4\theta=\sec^4\theta$ ……(2)

(2)—(1) 得 $\tan^2\theta+\tan^4\theta=\sec^4\theta-\sec^2\theta$

$\therefore\ \sec^2\theta-\sec\theta=\dfrac{\tan^4\theta+\tan^2\theta}{\sec^2\theta+\sec\theta}$

習 題 四

證明下列各恒等式：

(1) $\sin^2A\cot^2A+\sin^2A=1$

(2) $\sin^2\theta(1+\cot^2\theta)+\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)=2$

(3) $(1+\tan x)^2+(1-\tan^2x)=2\sec^2x$

(4) $(\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta)=1$

(5) $\sin^4A+\cos^4A=1-2\sin2A\cos^2A$

(6) $\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

(7) $\tan^2A-\sin^2A=\sin^4A\sec^2A$

(8) $\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta=1$

(9) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1-2\cos^2\alpha=2\sin^2\alpha-1$

(10) $\sec^2A+\csc^2A=\sec^2A\csc^2A$

(11) $\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}=\dfrac{\cot A-1}{\cot A+1}$

(12) $(\sin A+\csc A)^2+(\cos A+\sec A)^2=\tan^2A+\cot^2A+7$

(13) $\sec A+\tan A=\dfrac{1}{\sec A-\tan A}$

習 題 略 解

(1) 左邊 $=\sin^2\cdot\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}+\sin^2A=\cos^2A+\sin^2A=1$

(2) 左邊 $=\sin^2\theta\csc^2\theta+\cos^2\theta\sec^2\theta=2$

(3) 左邊 $=2+2\tan^2x=2(1+\tan^2x)=2\sec^2x$

(4) 左邊 $=\csc^2\theta-\cot^2\theta=\cot^2\theta+1-\cot^2\theta=1$

(5) 左邊 $=(\cos^2 A+\sin^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A$

(6) 左邊 $=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

(7) 左邊 $=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}-\sin^2 A=\dfrac{\sin^2 A(1-\cos^2 A)}{\cos^2 A}=\sin^4 A\cdot\dfrac{1}{\cos^2 A}$

$=\sin^4 A\sec^2 A$

(8) 左邊 $=\sin^2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+\cos^2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

(9) 左邊 $=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

$=(1-\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha=1-2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)$

$=2\sin^2\alpha-1$

(10) 左邊 $=\dfrac{1}{\cos^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 A}=\dfrac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}=\sec^2 A\csc^2 A$

(11) 左邊 $=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}\cdot\dfrac{\cot A}{\cot A}=\dfrac{\cot A-1}{\cot A-1}$

(12) 左邊 $=\sin^2 A+2\sin A\csc A+\csc^2 A+\cos^2 A+2\cos A\sec A$

$+\sec^2 A=5+(1+\cot^2 A)+(1+\tan^2 A)=$ 右邊

(13) 由 $1+\tan^2 A=\sec^2 A$ 得 $\sec^2 A-\tan^2 A=1$

$\therefore$ $(\sec A+\tan A)(\sec A-\tan A)=1$ $\therefore$ 原式得證。

(二) 應用"1"之代用法逐步從一邊化至另一邊即較複雜題之解法。

〔例5〕 求證 $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta=\tan\theta+\cot\theta$

(要點) 將 $\tan\theta$, cot 化爲含有 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 之函數，證之亦可，但將左邊變形如下:

左邊 $=(1-\cos^2\theta)\tan\theta+(1-\sin^2\theta)\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta$

求證爲方便。

(解) 左邊 $=(1-\cos^2\theta)\tan\theta+(1-\sin^2\theta)\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=\tan\theta+\cot\theta-\cos^2\theta\tan\theta-\sin^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=\tan\theta+\cot\theta-\cos^2\theta\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin^2\theta\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+2\sin\theta\cos\theta$

$=\tan\theta+\cot\theta-\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=\tan\theta+\cot\theta$

〔例6〕 求證 $\dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$

(解1) 左邊 $=\dfrac{\cos A(1+\sin A)}{1-\sin^2 A}=\dfrac{\cos A(1+\sin A)}{\cos^2 A}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$

(解2) 左邊 $=\dfrac{\cos^2 A}{\cos A(1-\sin A)}=\dfrac{1-\sin^2 A}{\cos A(1-\sin A)}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$

〔註〕 (解1)及(解2)均利用湊合法證明之例。

(解3) $\because$ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$\therefore$ $\cos^2 A=1-\sin^2 A=(1-\sin A)(1+\sin A)$

兩邊除以 $\cos A(1+\sin A)$ 得

$\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{1-\sin A}{\cos A}$

〔例7〕 求證 $\dfrac{1+2\sin X\cos X}{\cos^2 X-\sin^2 X}=\dfrac{1+\tan X}{1-\tan X}$

(要點) 化1爲 $\sin^2 X+\cos^2 X$，後代入之，則得證。

(證) 左邊 $=\dfrac{\cos^2 X+2\sin X\cos X+\sin^2 X}{\cos^2 X-\sin^2 X}$

$=\dfrac{(\cos X+\sin X)^2}{(\cos X-\sin X)(\cos X+\sin X)}=\dfrac{\cos X+\sin X}{\cos X-\sin X}$

$=\dfrac{1+\tan X}{1-\tan X}$ (分母分子同時除以 $\cos X$)

〔例8〕 求證 $\tan^2 X+\cot^2 X+1=(\tan^2 X+\tan X+1)\times$
$(\cot^2 X-\cot X+1)$

(證1) 左邊 $=\tan^2 X+\dfrac{1}{\tan^2 X}+1=\dfrac{\tan^4 X+\tan^2 X+1}{\tan^2 X}$

$=\dfrac{(\tan^4 X+2\tan^2 X+1)-\tan^2 X}{\tan^2 X}$

$=\dfrac{(\tan^2 X+1)^2-\tan^2 X}{\tan^2 X}$

$=\dfrac{(\tan^2 X-\tan X+1)(\tan^2 X+\tan X+1)}{\tan^2 X}$

$$=\left(1-\frac{1}{\tan X}+\frac{1}{\tan^2 X}\right)(\tan^2+\tan X+1)$$

$$=(\tan^2X+\tan X+1)(\cot^2X-\cot X+1)$$

（證2） 左邊 $=\tan^2X+\cot^2X+2\tan X\cot X-1$

$$=(\tan X+\cot X)^2-1$$

$$=(\tan X+\cot X-1)(\tan X+\cot X+1)$$

$$=(\tan X+\cot X-1)(\tan X+\cot X+1)\tan X\cot X$$

$$=(\tan^2X+\tan X+1)(\cot^2X-\cot X+1)$$

〔註〕 用 $\tan X\cot X$ 代1乘之。

〔例9〕 求證 $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$（武漢大學）

（證1） 左邊 $=\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-(\sec^2\theta-\tan^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)(1-\sec\theta+\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

$$=\tan\theta+\sec\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

（證2） 左邊 $=\dfrac{\tan\theta+(\sec\theta-1)}{\tan\theta-(\sec\theta-1)}\cdot\dfrac{\tan\theta+(\sec\theta-1)}{\tan\theta+(\sec\theta-1)}$

$$=\frac{\tan^2\theta+2\tan\theta(\sec\theta-1)+(\sec\theta-1)^2}{\tan^2\theta-(\sec\theta-1)^2}$$

$$=\frac{\tan^2\theta+2\tan\theta(\sec\theta-1)+\sec^2\theta-2\sec\theta+1}{\tan^2\theta-\sec^2\theta+2\sec\theta-1}$$

$$=\frac{2\tan\theta(\sec\theta-1)+2\sec\theta(\sec\theta-1)}{2(\sec\theta-1)}$$

$$=\tan\theta+\sec\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

〔例10〕 求證 $\sqrt{\sec^2\theta+\csc^2\theta}=\tan\theta+\cot\theta$

（證） 左邊 $=\sqrt{1+\tan^2\theta+1+\cot^2\theta}$

$$=\sqrt{\tan^2\theta+2+\cot^2\theta}$$

$$=\sqrt{\tan^2\theta+2\tan\theta\cot\theta+\cot^2\theta}$$

$$=\sqrt{(\tan\theta+\cot\theta)^2}$$

$$=\tan\theta+\cot\theta$$

習 題 五

試證下列各恒等式:

（1） $\sin^2\theta\tan^2\theta+\cos^2\theta\cot^2\theta=\tan^2\theta+\cot^2\theta-1$

（2） $2\sec^2\theta-\sec^4\theta-2\csc^2\theta+\csc^4\theta=\cot^4\theta-\tan^4\theta$

（3） $(1-\tan^2\alpha)^2=(\sec^2\alpha-2\tan\alpha)(\sec^2\alpha+2\tan\alpha)$

（4） $\dfrac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

（5） $\dfrac{\csc x+\cot x}{\sec x+\tan x}=\dfrac{\sec x-\tan x}{\csc x-\cot x}$

（6） $(1-\sin A+\cos A)^2=2(1-\sin A)(1+\cos A)$

（7） $(\csc\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=1$

習 題 略 解

（1） 左邊 $=(1-\cos^2\theta)\tan^2\theta+(1-\sin^2\theta)\cot^2\theta=\tan^2\theta-\sin^2\theta$ $+\cot^2\theta-\cos^2\theta=$ 右邊

（2） 左邊 $=2(\sec^2\theta-\csc^2\theta)-(\sec^4\theta-\csc^4\theta)$

$$=(\sec^2\theta-\csc^2\theta)(2-\sec^2\theta-\csc^2\theta)$$

$$=(\tan^2\theta-\cot^2\theta)(-\tan^2\theta-\cot^2\theta)$$

$=(\cot^2\theta-\tan^2\theta)(\cot^2\theta+\tan^2\theta)=$ 右邊

（3） 右邊 $=(1+\tan^2\alpha-2\tan\alpha)(1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha)$

$=(1-\tan)^2(1+\tan\alpha)^2=$ 左邊

（4） 左邊 $=\dfrac{(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=$ 右邊

（5） 左邊 $=\dfrac{(\csc x+\cot x)(\sec x-\tan x)}{\sec^2x-\tan^2x}$

$=\dfrac{(\csc x+\cot x)(\sec x-\tan x)}{\csc^2x-\cot^2x}=$ 右邊

(6) 左邊 $=[(1-\sin A)+\cos A]^2=1+\sin^2 A-2\sin A+2\times(1-\sin A)\cos A+\cos^2 A=2(1-\sin A)+2(1-\sin A)\cos A$ $=$右邊

(7) 右邊 $=(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta)(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta)(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta})$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=1$$

(三) 兩邊同時變化，以達同一之形式及條件恒等式之證明。

〔例11〕 求證 $\frac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\frac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$

(要點) 將 $\sec A$, $\tan A$ 化爲含有 $\sin A$, $\cos A$ 之式子，變形上頗困難。故不如去其分母求證爲便。

(證) 去分母

$$(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)$$
$$=(\sec A+\tan A-1)(1+\sec A-\tan A)$$

左邊 $=(1+\tan A-\sec A)(1+\tan A+\sec A)$
$=(1+\tan A)^2-\sec^2 A$
$=1+2\tan A+\tan^2 A-\sec^2 A=2\tan A$

右邊 $=[\sec A+(\tan A-1)][\sec A-(\tan A-1)]$
$=\sec^2 A-(\tan A-1)^2$
$=\sec^2 A-\tan^2 A+2\tan A-1=2\tan A$

∴ $(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)$
$=(\sec A+\tan A-1)(1+\sec A-\tan A)$

∴ $\frac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\frac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$

〔例12〕 求證 $\frac{1}{\csc\theta-\cot\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\csc\theta+\cot\theta}$

(證) 左邊 $=\frac{1}{\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}}-\frac{1}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-1+\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{-\cos^2\theta+\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\cot\theta$

右邊 $=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}}$

$=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\cot\theta$

∴ 左邊＝右邊

〔例13〕 求證 $(\csc A+\cot A)\text{covers } A-(\sec A+\tan A)\text{vers } A$
$=(\csc A-\sec A)(2-\text{vers } A\,\text{covers } A)$

(證) 左邊 $=(\frac{1}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A})(1-\sin A)-(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A})$
$(1-\cos A)=\frac{1}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}-1-\cos A-\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}$
$+1+\sin A$

右邊 $=(\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\cos A})[2-(1-\cos A)(1-\sin A)]$
$=(\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\cos A})(1+\cos A+\sin A-\sin A\cos A)$
$=\frac{1}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}+1-\cos A-\frac{1}{\cos A}-1-\frac{\sin A}{\cos A}+\sin A$

∴ 左邊＝右邊

〔例14〕 設 $(\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}-\frac{\tan\beta}{\tan\theta})^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$,

求證 $\cos\theta=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$

(要點) 將假設式變換爲 cos 之方程式以求 $\cos\theta$ 的值。

（證） $(\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}-\frac{\tan\beta}{\tan\theta})^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$

∴ $(\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}-\frac{\tan\beta\cos\theta}{\sin\theta})^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$

$$\frac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha\tan\beta\cos\theta+\tan^2\beta\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$

∴ $\tan^2\alpha-2\tan\alpha\tan\beta\cos\theta+\tan^2\beta\cos^2\theta$

$=(\tan^2\alpha-\tan^2\beta)\sin^2\theta=(\tan^2\alpha-\tan^2\beta)(1-\cos^2\theta)$

$=\tan^2\alpha-\tan^2\beta-\tan^2\alpha\cos^2\theta+\tan^2\beta\cos^2\theta$

∴ $\tan^2\alpha\cos^2\theta-2\tan\alpha\tan\beta\cos\theta+\tan^2\beta=0$

即 $(\tan\alpha\cos\theta-\tan\beta)^2=0$

∴ $\tan\alpha\cos\theta-\tan\beta=0$ ∴ $\cos\theta=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$

※〔例15〕 設 $\cos A=n\sin B$, $\cot A=\frac{\sin B}{\tan C}$，

求證 $\cos^2 C=\frac{n^2}{1+n^2\cos^2 B}$

（要點） 因證明式中不含 A，所以要先由二式消去 A，然後變形。

（證） $\cos A=n\sin B$……(1) $\cot A=\frac{\sin B}{\tan C}$………(2)

由(1),(2)各得 $\sec^2 A=\frac{1}{n^2\sin^2 B}$………(3)

$\tan^2 A=\frac{\tan^2 C}{\sin^2 B}$………(4)

(3)−(4)，得 $1=\frac{1}{n^2\sin^2 B}-\frac{\tan^2 C}{\sin^2 B}$, $1=\frac{1-n^2\tan^2 C}{n^2\sin^2 B}$

即 $n^2\sin^2 B=1-n^2\tan^2 C$

∴ $\tan^2 C=\frac{1-n^2\sin^2 B}{n^2}$………(5)

又 $\cos^2 C=\frac{1}{\sec^2 C}=\frac{1}{1+\tan^2 C}$……(6)

$=\frac{1}{1+\frac{1-n^2\sin^2 B}{n^2}}=\frac{n^2}{n^2+1-n^2\sin^2 B}$

$=\frac{n^2}{n^2+1-n^2(1-\cos^2 B)}=\frac{n^2}{1+n^2\cos^2 B}$

即 $\cos^2 C=\frac{n^2}{1+n^2\cos^2 B}$

※〔例16〕 設 $\frac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\frac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$，則 $\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=1$，試證之。（武漢大學）

（證） 今 $\frac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\frac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=\sin^2 A+\cos^2 A$

〔∵ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$〕

即 $\sin^2 B\cos^4 A+\cos^2 B\sin^4 A=\sin^2 B\cos^2 B(\sin^2 A+\cos^2 A)$

即 $\sin^2 B\cos^2 A(\cos^2 A-\cos^2 B)+\sin^2 A\cos^2 B(\sin^2 A-\sin^2 B)=0$

即 $\sin^2 B\cos^2 A(\cos^2 A-\cos^2 B)-\sin^2 A\cos^2 B(\cos^2 A-\cos^2 B)=0$

即 $(\cos^2 A-\cos^2 B)(\sin^2 B\cos^2 A-\sin^2 A\cos^2 B)=0$

即 $(\cos^2 A-\cos^2 B)[(1-\cos^2 B)\cos^2 A-(1-\cos^2 A)\times\cos^2 B]=0$

即 $(\cos^2 A-\cos^2 B)^2=0$ 即 $\cos^2 A-\cos^2 B=0$

∴ $\cos^2 A=\cos^2 B$ 故 $1-\sin^2 A=1-\sin^2 B$

∴ $\sin^2 A=\sin^2 B$

則 $\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=\frac{\cos^4 B}{\cos^2 B}+\frac{\sin^4 B}{\sin^2 B}=\cos^2 B+\sin^2 B=1$

習 題 六

試證下列各恒等式：

(1) $\dfrac{\tan A\sin A}{\tan A+\sin A}=\dfrac{\tan A-\sin A}{\tan A\sin A}$

(2) $\tan\theta\dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}=\cot\theta\dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$

(3) $\dfrac{2(\cos A-\sin A)}{1+\sin A+\cos A}=\dfrac{\cos A}{1+\sin A}-\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$

(4) $(\csc\theta-\sec\theta)^2=(1-\tan\theta)^2+(\cot\theta-1)^2$

(5) $\dfrac{1}{\csc\theta-\cot\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\csc\theta+\cot\theta}$

(6) $(\csc A-\cot A)^2=\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$

※(7) 設 $\tan\theta=\dfrac{\sin X-\cos X}{\sin X+\cos X}$，求證$\sqrt{2}\sin\theta=\sin X-\cos X$

※(8) 設 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$,求證 $\cos\theta+\sin=\sqrt{2}\cos\theta$

※(9) 設 $\tan X+\sin X=m$，$\tan X-\sin X=n$

求證 $\cos X=\dfrac{m-n}{m+n}$

※(10) 若 $\tan A+\sin A=m$，$\tan A-\sin A=n$

求證 $(m^2-n^2)^2=16mn$ (北平大學)

※(11) 設 $m\sec A=1+\tan A$ 與 $n\sec A=1-\tan A$

試證 $m^2+n^2=2$

習 題 略 解

(1) 左邊$=\dfrac{\sin^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$

右邊$=\dfrac{\sin A(1-\cos A)}{\sin^2 A}=\dfrac{\sin A(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$

(2) 去分母$\tan\theta(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)=\cot\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$

左邊$=\tan\theta(1-\sin^2\theta)=\tan\theta\cos^2\theta=\sin\theta\cos\theta$

右邊$=\cot\theta(1-\cos^2\theta)=\cot\theta\sin^2\theta=\sin\theta\cos\theta$

(3) 左邊$=\dfrac{2(\cos A-\sin A)(1-\sin A-\cos A)}{[1+(\sin A+\cos A)][1-(\sin A+\cos A)]}$

$=\dfrac{-2(\sin A-\cos A)(1-\sin A-\cos A)}{1-(\sin^2 A+\cos^2 A)-2\sin A\cos A}$

$=\dfrac{(\sin A-\cos A)(1-\sin A-\cos A)}{\sin A\cos A}$

右邊$=\dfrac{\cos A(1-\sin A)}{1-\sin^2 A}-\dfrac{\sin A(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}$

$=\dfrac{1-\sin A}{\cos A}-\dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

$=\dfrac{\sin A-\sin^2 A-\cos A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}$

$=\dfrac{(\sin A-\cos A)(1-\sin A-\cos A)}{\sin A\cos A}$

(4) 略 (5) 略 (6) 略

(7) 今 $\sec\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos X+\sin X}$ ∴ $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}(\sin X+\cos X)}{2}$

∴ $\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}(\sin X-\cos X)}{2}$

∴ $\sqrt{2}\sin\theta=\sin X-\cos X$

(8) 從已知式移項得 $(\sqrt{2}+1)\sin\theta=\cos\theta$，兩邊以$\sqrt{2}-1$

乘之 $\sin\theta=(\sqrt{2}-1)\cos\theta$，移項得 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$

(9) 今 $2\tan X=m+n$，$2\sin X=m-n$

前式除後式得 $\cos X=(m-n)/(m+n)$

(10) 因 $2\tan A=m+n$，$2\sin A=m-n$，故

$(m^2-n^2)^2=(2\tan A\cdot 2\sin A)^2=16\tan^2 A\sin^2 A$

$=16\tan^2 A(1-\cos^2 A)=16(\tan^2 A-\sin^2 A)=16mn$

(11) 因 $m^2\sec^2 A=1+2\tan A+\tan^2 A$，又

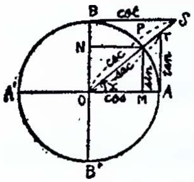
$n^2\sec^2 A=1-2\tan A+\tan^2 A$ 相加得

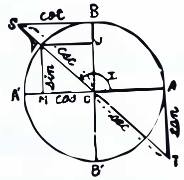
$(m^2+n^2)\sec^2 A=2(1+\tan^2 A)$，但 $1+\tan^2 A=\sec^2 A$

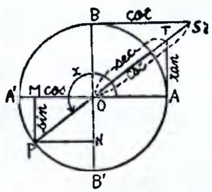
故 $(m^2+n^2)\sec^2 A=2\sec^2 A$ 即 $m^2+n^2=2$

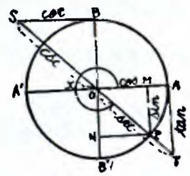
13. 三角函數之直線表示法

取一單位圓(即半徑等於1)於圓周上一點 P 作 PM 垂直 OA。由 A 作圓之切線交 OP 之延長線於 T，又作半徑 OB 垂直 OA，由 B 作圓之切線交 OP 之延長線於 S，作 PN 平行 OA 交 OB 於 N。









今 $OA=OB=OP=1$，令 $\angle AOP=x$

又 $rt.\triangle OMP \backsim OAT \backsim SBO$

故得 $\sin X=\dfrac{MP}{OP}=MP$

$\cos X=\dfrac{OM}{OP}=OM$

$\tan X=\dfrac{MP}{OM}=\dfrac{AT}{OA}=AT$

$\cot X=\dfrac{OM}{MP}=\dfrac{BS}{OB}=BS$

$\sec X=\dfrac{OP}{OM}=\dfrac{OT}{OA}=OT$

$\csc X=\dfrac{OP}{MP}=\dfrac{OS}{OB}=OS$

$vers\ X=1-\cos X=OA-OM=MA$

cc: $sX=1-\sin X=OB-ON=NB$

14 三角函數值之變化 (Variation of the function)

上圖之 AOP 角自 $0°$ 逐漸增，則各函數變化情形，可在下表中就其所代表之線考之。

玆將各函數值變化情形列表如下：

函數＼象限	(1) 0°→90°	(2) 90°→180°	(3) 180°→270°	(4) 270°→360°
sin	0 ↗ 1	1 ↘ 0	0 ↘ −1	−1 ↗ 0
csc	∞ ↘ 1	1 ↗ ∞	−∞ ↗ −1	−1 ↘ −∞
cos	1 ↘ 0	0 ↘ −1	−1 ↗ 0	0 ↗ 1
sec	1 ↗ ∞	−∞ ↗ −1	−1 ↘ −∞	∞ ↘ 1
tan	0 ↗ ∞	−∞ ↗ 0	0 ↗ ∞	−∞ ↗ 0
cot	∞ ↘ 0	0 ↘ −∞	∞ ↘ 0	0 ↘ −∞

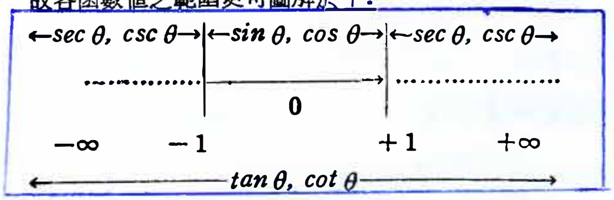
綜合以上之變化情形，故可知：

(一) $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 之函數值，必在＋1與－1之間，但不能大於＋1或小於－1。

(二) $\tan\theta$ 與 $\cot\theta$ 之函數值無限制爲任何數值。

(三) $\csc\theta$ 與 $\sec\theta$ 之函數值必大於＋1或小於－1，但不能在－1與＋1之間。

故各函數值之範圍更可圖解於下：

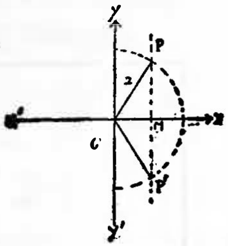


〔註〕 各書局出版之課本已詳載其變化情行及圖解，希讀者再作參考

以求徹底之理解。

〔例1〕 設 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，求此角。

（解） 作一線平行 y 軸，其距離為1，又以 O 為中心，2為半徑作弧交前線於 P,P' 則第一象限之 $\angle XOP$，與第四象限之 $\angle XOP'$ 均為所求之角，因



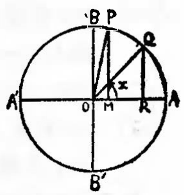
$$\cos\angle XOP=\frac{OM}{OP}=\frac{1}{2},$$

又 $\cos\angle XOP'=\frac{OM}{OP'}=\frac{1}{2}$。

〔註〕 假使所求之角，註明為銳角，則 θ 可用下法求之為便，即作 $rt.\triangle OMP$，設 $\angle M=90°$，$OM=1$，$OP=2$。

〔例2〕 設 x 為銳角，今 $\cos y=\frac{1}{4}\cos x$，求作 y 角。

（解） 在單位圓中，設 AA'，BB' 為垂直二直徑，又 $\angle AOQ=x$，作 $QR\perp AA'$，等分 OR 成四份。



設 $OM=\frac{1}{4}OR$

作 $MP\perp AA'$ 交圓周於 P，

聯 OP，則 $\angle AOP$ 為所求者。

因 $\cos AOP=OM=\frac{1}{4}OR$

$$=\frac{1}{4}\cos AOQ$$

即 $\cos y=\frac{1}{4}\cos x$

〔例3〕 若 $\cos\theta=x+\frac{1}{x}$，試證 x 不能為實數。

（解） $\cos\theta=\frac{x^2+1}{x}$，$x\cos\theta=x^2+1$

$\therefore\ x^2-x\cos\theta+1=0$，$x=\frac{\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-4}}{2}$

$\because\ \cos^2\theta<1\quad\therefore\ \cos^2\theta-4$ 必 <0

則 $\sqrt{\cos^2\theta-4}$ 必為虛數，故 x 不能為實數。

習 題 七

作下列諸角，設已知

（1） $\sin\theta=\frac{4}{5}$ （2） $\cot\theta=-\sqrt{2}$

作 y 角，設已知銳角 x，而有下之關係：

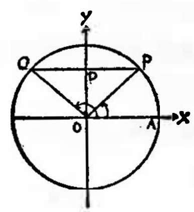
（3） $\tan Y=3\tan X$ （4） $\sin Y=\frac{1}{m}\sin X$

（5） 在 $\sin\theta=x+\frac{1}{x}$ 中，試證 x 之值不能為實數。

*（6） 設 x,y 為實數，則在 $\sec^2\theta=\frac{4xy}{(x+y)^2}$ 中，必 $x=y$，否則不能成立，試證之。

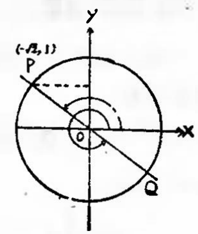
習 題 略 解

（1）



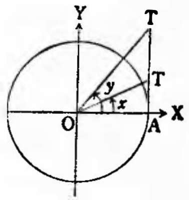
$OA=1$，$OD=\frac{4}{5}$

（2）



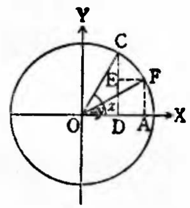
$\angle XOP$ 及 $\angle XOQ$

(3)



$AT'=3AT$，y 為 $\angle AOT'$

(4)



$DE=\frac{1}{m}DC$，y 為 $\angle AOF$

(5) 原式即 $x^2-x\sin\theta+1=0$ 若 x 為實數，則 $(-\sin\theta)^2-4\geqq 0$
即 $\sin^2\theta-4\geqq 0$ 而得 $|\sin\theta|\geqq 2$，但此式不合理，
故 x 不能為實數。

(6) $\because$ $x^2+y^2\geqq 2xy$ $\therefore$ $(x+y)^2\geqq 4xy$

$\therefore$ $\frac{4xy}{(x+y)^2}\leqq 1$ 即 $\sec^2\theta\leqq 1$

但 $\sec\theta$ 必大於 1，即 $\sec^2\theta$ 不能小於 1，至少等於 1，此時
$4xy=(x+y)^2$，即 $(x-y)^2=0$，$\therefore$ $x=y$

15. 餘角之三角函數

一角之函數中，正弦與餘弦，正切與餘切，正割與餘割，均稱之互為餘函數。

在 $\triangle ABC$ 中，C 為直角，則 A 與 B 互為餘角，即

$B=90^\circ-A$ $\sin B=\frac{b}{c}=\cos A$

B

$\cos B=\frac{a}{c}=\sin A$ $\tan B=\frac{b}{a}=\cot A$

$\cot B=\frac{a}{b}=\tan A$ $\sec B=\frac{c}{a}=\csc A$

$\csc B=\frac{c}{b}=\sec A$

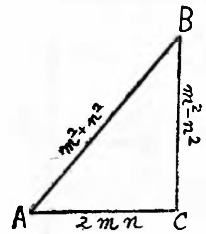
$$\therefore\begin{cases}\sin(90^\circ-A)=\cos A & \cos(90^\circ-A)=\sin A\\ \tan(90^\circ-A)=\cot A & \cot(90^\circ-A)=\tan A\\ \sec(90^\circ-A)=\csc A & \csc(90^\circ-A)=\sec A\end{cases}$$

用文字述之為

"一銳角之函數，等於其餘角之餘函數。"

〔例1〕 於直角△ABC 中，$\angle c=90^\circ$，已知 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，求B 角的各函數。

〔解〕 $c=\sqrt{(m^2-n^2)^2+(2mn)^2}=\sqrt{(m^2+n^2)^2}=m^2+n^2$



$\sin B=\frac{b}{c}=\frac{2mn}{m^2+n^2}$，$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$

$\tan B=\frac{b}{a}=\frac{2mn}{m^2-n^2}$，$\cot B=\frac{1}{\tan B}=\frac{m^2-n^2}{2mn}$

$\sec B=\frac{1}{\cos B}=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$，

$\csc B=\frac{1}{\sin B}=\frac{m^2+n^2}{2mn}$

16. 特別角之三角函數值

特別角之三角函數值，僅第一象限中，0°，30°，45°，60°，90° 之各角之三角函數值。

(一) 0° 角之三角函數值。

設終邊 OP 與 X 軸重合，今在 OP 上任取一點 $P(a,b)$ 則 $b=0$，$a=r$

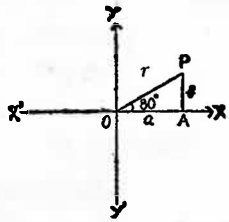
$\sin 0^\circ=\frac{b}{r}=0$ $\cos 0^\circ=\frac{a}{r}=1$，$\tan 0^\circ=\frac{b}{a}=0$

$\csc 0^\circ=\frac{r}{b}=\infty$ $\sec 0^\circ=\frac{r}{a}=1$，$\cot 0^\circ=\frac{a}{b}=\infty$

(二) 30° $(\frac{\pi}{6})$ 之三角函數值

令 $\angle POA=30^\circ$ 終邊 OP 上取一點 $P(a,b)$，則 $a>0,\ b>0$，且 $r=2b$

$a^2=r^2-b^2=4b^2-b^2=3b^2 \therefore\ a=\sqrt{3}\,b$



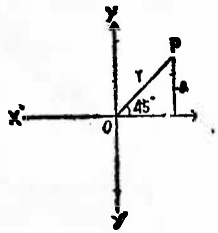
$\sin 30^\circ=\frac{b}{r}=\frac{b}{2b}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \csc 30^\circ=\frac{1}{\sin 30^\circ}=2$

$\cos 30^\circ=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}\,b}{2b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\ \sec 30^\circ=\frac{1}{\cos 30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan 30^\circ=\frac{b}{a}=\frac{b}{\sqrt{3}\,b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore\ \cot 30^\circ=\frac{1}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}$

（三） $45^\circ\ (\frac{\pi}{4})$ 之三角函數值



設終邊 OP 上一點 $P(a,b)$，則

$a=b>0,\ r^2=a^2+b^2=2b^2$

$\therefore\ r=\sqrt{2}\,b$

$\sin 45^\circ=\frac{b}{r}=\frac{b}{\sqrt{2}\,b}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \csc 45^\circ=\sqrt{2}$

$\cos 45^\circ=\frac{a}{r}=\frac{b}{\sqrt{2}\,b}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore\ \sec 45^\circ=\sqrt{2}$

$\tan 45^\circ=\frac{b}{a}=1$ $\therefore\ \cot 45^\circ=1$

【例 2】 於直角△ABC 中，已知 $a=3$，$\tan A=\frac{1}{3}$，求 b 及 c。

（解） 由函數定義 $\tan A=\frac{a}{b}$

將 a 與 $\tan A$ 之值代入得 $\frac{1}{3}=\frac{3}{b}$ $\therefore\ b=9$

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+81}=3\sqrt{10}$

【例 3】 在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，已知 $\tan 3A=\cot 2A$，

求 A 及 B。

（解） $\because\ \tan 3A=\cot 2A$ $\therefore\ \cot(90^\circ-3A)=\cot 2A$

由是 $90^\circ-3A=2A$ $\therefore\ A=18^\circ$

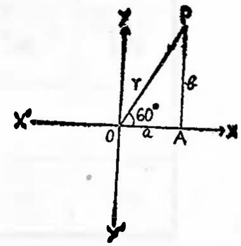
$\therefore\ B=90^\circ-18^\circ=72^\circ$

（四） $60^\circ\ (\frac{\pi}{3})$ 之三角函數值

設終邊上一點 $P(a,b)$

則 $r=2a,\ b^2=r^2-a^2=4a^2-a^2=3a^2$

$\therefore\ b=\sqrt{3}\,a$



$\sin 60^\circ=\frac{b}{r}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos 60^\circ=\frac{a}{r}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$ $\therefore\ \sec 60^\circ=2$

$\tan 60^\circ=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}\,a}{a}=\sqrt{3}$ $\therefore\ \cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

（五） 90° 角之三角函數值

設終邊 OP 與 y 軸重合，於 OP 上取一點 $P(a,b)$

則 $a=0,\ b=r$

$\sin 90^\circ=\frac{b}{r}=1$ $\cos 90^\circ=\frac{a}{r}=0$

$\tan 90^\circ=\frac{b}{a}=\infty$ $\cot 90^\circ=\frac{a}{b}=0$

$\sec 90^\circ=\frac{r}{a}=\infty$ $\csc 90^\circ=\frac{r}{b}=1$

茲將各特別角之函數值列表如下：

$(\sqrt{2}=1.4142,\ \sqrt{3}=1.7321)$

角度 函數	0°	30°	45°	60°	90°
sin	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{0}$
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

〔註〕 爲便利記憶可採下法記憶:

30°, 45°, 60° 之正弦 ($\sin\theta$) 各爲 1, 2, 3 之平方根的一半，餘弦 ($\cos\theta$) 爲 3, 2, 1 之平方根的一半。

應用公式 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 就能求出正切 ($\tan\theta$) 之值。

又 $\csc\theta, \sec\theta, \cot\theta$ 各爲 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ 之倒數，故僅記 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ 就够用。

〔例 1〕 求 $\sqrt{3}\tan 30°+\sqrt{3}\sin 60°+\cos 60°$ 之值。

〔解〕 原式 $=\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$

$=1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$

$=\frac{6}{2}=3$

〔例 2〕 試求 $3\tan^2\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\tan^2\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\cos^2\frac{\pi}{6}$

$+\frac{1}{8}\sec^4\frac{\pi}{3}$ 之值？

〔解〕 原式 $=3\times(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+\frac{4}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{1}{2}\times(1)^2-\frac{2}{3}\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

$+\frac{1}{8}\times(2)^4$

$=3\times\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\times 1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\times 16$

$=1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2$

$=3$

〔例 3〕 設 $A=30°$，試證 $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

〔證〕 (i) $\sin 2A=\sin 2\times 30°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\sin A\cos A=2\sin 30°\cos 30°$

$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\sin 2A=2\sin A\cos A$

(ii) $\cos 2A=\cos 2\times 30°=\cos 60°=\frac{1}{2}$

$\cos^2 A-\sin^2 A=\cos^2 30°-\sin^2 30°=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

∴ $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

習 題 八

(1) 試證 $\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°=1$

（2） 試證 $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

（3） 求 $4\cot^2 45°-\sec^2 60°+\sin^2 30°$ 之值。

（4） 求 $\frac{4}{3}\cot^2 30°+3\sin^2 60°-2\sec^2 60°-\frac{3}{4}\tan^2 30°$ 之值。

（5） 試證 $2\cos^2\frac{\pi}{6}-1=\cos\frac{\pi}{3}$

（6） 在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$

① 已知 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{6}$，求 A 的各函數

② 已知 $b=m-n$, $c=m+n$，求 B 的各函數

③ 已知 $\cos A=\frac{9}{41}$，求 $\cot A$, $\csc A$

④ 已知 $A=45°$，$b=20$，求 a, c 及 B

⑤ 已知 $\sin 4A=\cos 5A$，求 A

⑥ 已知一直角邊爲他直角邊的$\sqrt{3}$倍，求其兩銳角。

（7） 求 $\sin 22.5°$，$\cos 22.5°$，$\tan 22.5°$ 之值。

習題略解

（1） 略 （2） 略 （3） $\frac{1}{\text{[illegible]}}$ （4） -2 （5） 略

（6） ① 略 ② 略 ③ $a=\sqrt{41^2-9^2}=40$ ∴ $\cot A=\frac{9}{40}$

$\csc A=\frac{41}{40}$ ④ $B=90°-A=45°$ $\tan 45°=1$ ∴ $b=20$

$\sec 45°=\sqrt{2}$ ∴ $c=b\times\sqrt{2}=20\sqrt{2}$

⑤ ∵ $\sin 4A=\cos 5A$ ∴ $\cos(90°-4A)=\cos 5A$ 由是

$90°-4A=5A$ 解之得 $A=10°$

⑥ $a=1$ $b=\sqrt{3}$ $\tan A=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 故 $A=30°$

$B=90°-A=60°$

（7） $\sin 22.5°=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\cos 22.5°=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

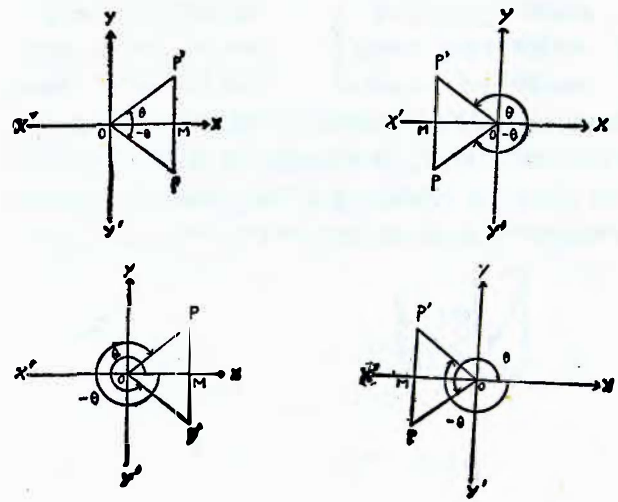
$\tan 22.5°=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}}=\sqrt{2}-1$

17. 化負角三角函數爲正角三角函數

$$\left.\begin{aligned}\sin(-\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)&=\cos\theta\\ \tan(-\theta)&=-\tan\theta\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\csc(-\theta)&=-\csc\theta\\ \sec(-\theta)&=\sec\theta\\ \cot(-\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}$$

（證） 設動線 OP 自 OX 位置沿與時針同向旋轉至 OP 位置，命 $\angle XOP=-\theta$，於其終邊上任取一點 P，作 $PM\perp X'X$，延長至 P'，令 $P'M=PM$，則$\triangle OPM\cong\triangle OP'M$，故 $\angle XOP'=\angle XOP$ 方向相反；$MP'=MP$，方向相反。

∴ $\angle XOP'=\theta$, $MP=-MP'$, $OP=OP'$



由三角函數定義易知

$$\sin(-\theta)=\frac{MP}{OP}=-\frac{MP'}{OP'}=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\frac{OM}{OP}=\frac{OM}{OP'}=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=\frac{MP}{OM}=-\frac{MP'}{OM}=-\tan\theta$$

$$\cot(-\theta)=\frac{OM}{MP}=-\frac{OM}{MP'}=-\cot\theta$$

$$\sec(-\theta)=\frac{OP}{OM}=\frac{OP'}{OM}=\sec\theta$$

$$\csc(-\theta)=\frac{OP}{MP}=-\frac{OP'}{MP'}=-\csc\theta$$

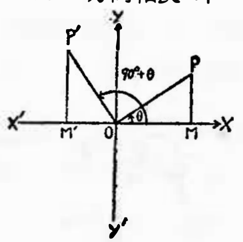
〔例〕 $\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

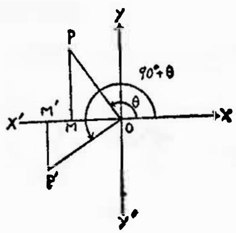
$\cos(-60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

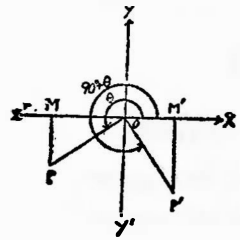
18. 化 $(90^\circ+\theta)$ 角之三角函數爲 θ 角三角函數

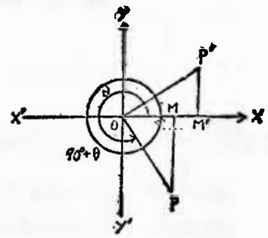
證
$$\left.\begin{aligned}\sin(90^\circ+\theta)&=\cos\theta\\ \cos(90^\circ+\theta)&=-\sin\theta\\ \tan(90^\circ+\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\csc(90^\circ+\theta)&=\sec\theta\\ \sec(90^\circ+\theta)&=-\csc\theta\\ \cot(90^\circ+\theta)&=-\tan\theta\end{aligned}\right\}$$

設動線 OP 自 OX 位置沿逆時方向旋轉至 OP 位置，命 $\angle XOP=\theta$，自 O 作 $OP'\perp OP$，則 $\angle XOP'=90^\circ+\theta$，取 $OP'=OP$，作 $PM\perp XX'$ $P'M'\perp XX'$，則 $\triangle OMP=\triangle OP'M'$ 且 $OM=M'P'$ 方向相同。$MP=OM'$ 方向相反 即 $OM=M'P'$，$MP=-OM'$，$OP=OP'$









由三角函數定義，易得

$$\sin(90^\circ+\theta)=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ+\theta)=\frac{OM'}{OP'}=-\frac{MP}{OP}=-\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ+\theta)=\frac{M'P'}{OM'}=-\frac{OM}{MP}=-\cot\theta$$

$$\cot(90^\circ+\theta)=\frac{OM'}{M'P'}=-\frac{PM}{OM}=-\tan\theta$$

$$\sec(90^\circ+\theta)=\frac{OP'}{OM'}=-\frac{PM}{OP}=-\csc\theta$$

$$\csc(90^\circ+\theta)=\frac{OP'}{M'P'}=\frac{OP}{OM}=\sec\theta$$

（別證） 由負角三角函數之關係化 $(90^\circ+\theta)$ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數亦可，即

$\sin(90^\circ+\theta)=\sin[90^\circ-(-\theta)]=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\cos(90^\circ+\theta)=\cos[90^\circ-(-\theta)]=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\tan(90^\circ+\theta)=\tan[90^\circ-(-\theta)]=\cot(-\theta)=-\cot\theta$

以下類推。

〔例〕 求 $\sin 120^\circ$ 及 $\sec(-150^\circ)$ 之函數值？

（解） $\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sec(-150^\circ)=\sec 150^\circ=\sec(90^\circ+60^\circ)$

$$=-\csc 60^\circ=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

19. 化 $(90^\circ-\theta)$ 角之三角函數爲 θ 角三角函數

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^\circ-\theta)&=\cos\theta\\ \cos(90^\circ-\theta)&=\sin\theta\\ \tan(90^\circ-\theta)&=\cot\theta\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\csc(90^\circ-\theta)&=\sec\theta\\ \sec(90^\circ-\theta)&=\csc\theta\\ \cot(90^\circ-\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}$$

(證) ∵ $90^\circ-\theta=90^\circ+(-\theta)$ 以之代入前節 (17) 之公式中，即得：

$\sin(90^\circ-\theta)=\sin[90^\circ+(-\theta)]=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\cos(90^\circ-\theta)=\cos[90^\circ+(-\theta)]=-\sin(-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\tan[90^\circ+(-\theta)]=-\cot(-\theta)=\cot\theta$

同法可求出其他關係式。

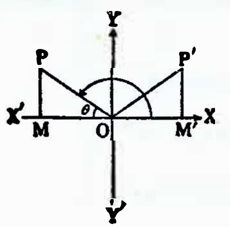
但讀者自行繪圖依上法試證之。

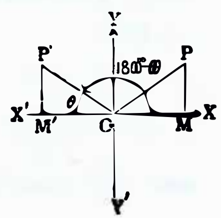
20. 化 $(180^\circ-\theta)$ 角之三角函數爲 θ 角三角函數

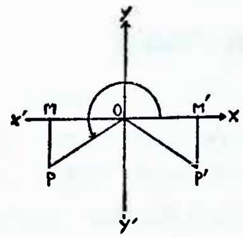
$$\left.\begin{aligned}\sin(180^\circ-\theta)&=\sin\theta\\ \cos(180^\circ-\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(180^\circ-\theta)&=-\tan\theta\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\csc(180^\circ-\theta)&=\csc\theta\\ \sec(180^\circ-\theta)&=-\sec\theta\\ \cot(180^\circ-\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}$$

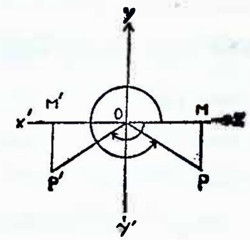
(證) 設動線 OP 自 OX 沿逆時針方向旋轉至 OP 位置，令 $\angle POM=\theta$, OP' 自 OX 沿逆時針方向旋轉至 OX' 再順時針旋轉成 θ 則 $\angle P'OM=180^\circ-\theta$，取 $OP=OP'$，作 $PM, P'M'$〔各垂直於 OX 或 OX'，則在下圖中 $\angle POM=\angle P'OM'$

∴ $\triangle POM\cong\triangle P'OM'$, $OM'=-OM$, $PM=P'M'$









$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin XOP'=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{PM}{OP}=\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos XOP'=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-OM}{OP}=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan XOP'\frac{P'M'}{OM'}=\frac{PM}{-OM}=-\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ-\theta)=\cot XOP'=\frac{OM'}{P'M'}=\frac{-OM}{PM}=-\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ-\theta)=\sec XOP'=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-OM}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ-\theta)=\csc XOP'=\frac{OP'}{P'M'}=\frac{OP}{PM}=\csc\theta$$

(別證) ∵ $180^\circ-\theta=90^\circ+(90^\circ-\theta)$ 以之代入 17 節之公式中即得

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin[90^\circ+(90^\circ-\theta)]=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\cos(180^\circ-\theta)=\cos[90^\circ+(90^\circ-\theta)]=-\sin(90^\circ-\theta)$

$=-\cos\theta$

同法可求得其他關係式。

〔例〕 求 $\sin 135^\circ$ 及 $\cos\frac{5\pi}{6}$ 之函數值？

(解) $\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

21. 化 $(180°+\theta)$ 角之三角函數為 θ 角三角函數

$$\left.\begin{aligned}\sin(180°+\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(180°+\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(180°+\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\csc(180°+\theta)&=-\csc\theta\\ \sec(180°+\theta)&=-\sec\theta\\ \cot(180°+\theta)&=\cot\theta\end{aligned}\right\}$$

〔證〕 今由負角三角函數關係化 $(180°+\theta)$ 為 θ 角之三角函數。但讀者自行繪圖證之。

$\sin(180°+\theta)=\sin[180°-(-\theta)]=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(180°+\theta)=\cos[180°-(-\theta)]=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180°+\theta)=\tan[180°-(-\theta)]=-\tan(-\theta)=\tan\theta$

$\cot(180°+\theta)=\cot[180°-(-\theta)]=-\cot(-\theta)=\cot\theta$

$\sec(180°+\theta)=\sec[180°-(-\theta)]=-\sec(-\theta)=-\sec\theta$

$\csc(180°+\theta)=\csc[180°-(-\theta)]=\csc(-\theta)=-\csc\theta$

〔例〕 求 $\sin 210°$，$\tan\frac{5}{4}\pi$ 及 $\cot(-210°)$ 之函數值？

〔解〕 $\sin 210°=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{5\pi}{4}=\tan(\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\cot(-210°)=-\cot 210°=-\cot(180°+30°)$

$=-\cot 30°=-\sqrt{3}$

22. 化 $(270°-\theta)$ 角之三角函數為 θ 角三角函數

$$\left.\begin{aligned}\sin(270°-\theta)&=-\cos\theta\\ \cos(270°-\theta)&=-\sin\theta\\ \tan(270°-\theta)&=\cot\theta\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\csc(270°-\theta)&=-\sec\theta\\ \sec(270°-\theta)&=-\csc\theta\\ \cot(270°-\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}$$

〔證〕 $\because\ 270°-\theta=90°+(180°-\theta)$ 以之代入17節中之公式，可得

$\sin(270°-\theta)=\sin[90°+(180°-\theta)]=\cos(180°-\theta)$

$=-\cos\theta$

$\cos(270°-\theta)=\cos[90°+(180°-\theta)]=-\sin(180°-\theta)$

$=-\sin\theta$

$\tan(270°-\theta)=\tan[90°+(180°-\theta)]=-\cot(180°-\theta)$

$=\cot\theta$

同法可求證其他關係式。

讀者自行繪圖證之。

〔例〕 求 $\sin 210°$ 及 $\tan 225°$ 之函數值？

〔解〕 $\sin 210°=\sin(270°-60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$

$\tan 225°=\tan(270°-45°)=\cot 45°=1$

23. 化 $(270°+\theta)$ 角之三角函數為 θ 角三角函數

$$\left.\begin{aligned}\sin(270°+\theta)&=-\cos\theta\\ \cos(270°+\theta)&=\sin\theta\\ \tan(270°+\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\csc(270°+\theta)&=-\sec\theta\\ \sec(270°+\theta)&=\csc\theta\\ \cot(270°+\theta)&=-\tan\theta\end{aligned}\right\}$$

〔證〕 由負角三角函數之關係化 $(270°+\theta)$ 為 θ 角之三角函數或由上法 $(270°+\theta)=90°+(180°+\theta)$ 代入 19 節之公式亦可證。

$\sin(270°+\theta)=\sin[270°-(-\theta)]=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$

$\cos(270°+\theta)=\cos[270°-(-\theta)]=-\sin(-\theta)=\sin\theta$

$\tan(270°+\theta)=\tan[270°-(-\theta)]=\cot(-\theta)=-\cot\theta$

同法可求其他關係式。

讀者亦可自行繪圖證之。

〔例〕 求 $\sin(-300°)$ 及 $\tan 330°$ 之函數值？

〔解〕 $\sin(-300°)=-\sin(270°+30°)=\cos 30°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 330°=\tan(270°+60°)=-\cot 60°=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

24. 化 $(360°-\theta)$ 角之三角函數為 θ 角三角函數

$$\left.\begin{aligned}\sin(360°-\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(360°-\theta)&=\cos\theta\\ \tan(360°-\theta)&=-\tan\theta\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\csc(360°-\theta)&=-\csc\theta\\ \sec(360°-\theta)&=\sec\theta\\ \cot(360°-\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}$$

（證） ∵ $360°-\theta=90°+(270°-\theta)$〕以之代19節之公式即得

$$\sin(360°-\theta)=\sin[90°+(270°-\theta)]=\cos(270°-\theta)$$
$$=-\sin\theta$$
$$\cos(360°-\theta)=\cos[90°+(270°-\theta)]=-\sin(270°-\theta)$$
$$=\cos\theta$$
$$\tan(360°-\theta)=\tan[90°+(270°-\theta)]=-\cot(270°-\theta)$$
$$=-\tan\theta$$

同法可求證其他關係式。

讀者自行繪圖證之。

〔例 1〕 求 $\csc 330°$ 及 $\sec\frac{11}{6}\pi$ 之函數值？

（解） $\csc 330°=\csc(360°-30°)=-\csc 30°=-2$

$$\sec\frac{11}{6}\pi=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

〔例 2〕 化下列各函數為 θ 角之函數。

ⓐ $\sin(\theta-2\pi)$ ⓑ $\cos(\theta-2\pi)$

（解） ⓐ $\sin(\theta-2\pi)=\sin[-(2\pi-\theta)]=-\sin(2\pi-\theta)$

$$=-(-\sin\theta)=\sin\theta$$

ⓑ $\cos(\theta-2\pi)=\cos[-(2\pi-\theta)]=\cos(2\pi-\theta)$

$$=\cos\theta$$

25. 化 $(n\times360°+\theta)$ 角之三角函數為 θ 角三角函數

若動線自 OX 位置沿逆時針方向旋轉一週後而終止於 θ 之終邊位置，則所成之角為 $360°+\theta$，今其終邊始邊與 θ 之終邊始邊均相重合，則其函數必相同，故

$$\left.\begin{aligned}\sin(360°+\theta)&=\sin\theta\\\cos(360°+\theta)&=\cos\theta\\\tan(360°+\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}\csc(360°+\theta)&=\csc\theta\\\sec(360°+\theta)&=\sec\theta\\\cot(360°+\theta)&=\cot\theta\end{aligned}\right\}$$

若動線自 θ 之終邊位置繼續旋轉 n 週而終止，則所成之角為 $n\times360°+\theta$，（沿逆時針方向旋轉時，n 為正整數；與時針同向旋轉時，n 為負整數），今其終邊始邊均與 θ 之終邊始邊相重合，則其函數亦必相同，故得

$$\left.\begin{aligned}\sin(n\times360°+\theta)&=\sin\theta\\\cos(n\times360°+\theta)&=\cos\theta\\\tan(n\times360°+\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}\csc(n\times360°+\theta)&=\csc\theta\\\sec(n\times360°+\theta)&=\sec\theta\\\cot(n\times360°+\theta)&=\cot\theta\end{aligned}\right\}$$

〔例〕 求 $\cos(-1394°)$ 之函數值？

〔解〕 $\cos(-1394°)=\cos 1394°=\cos(3\times360°+314°)=\cos 314°$

$$=\cos(360°-46°)=\cos 46°=\sin 44°$$

〔註〕 從上各節公式雖多，但一經分類歸納，其實不過兩式。即凡 $90°$ 之奇數倍加或減 θ 角之三角函數，化為 θ 角之三角函數，其三角函數，必變為原三角函數之餘函數，凡 $90°$ 之偶數倍加或減 θ 角之三角函數，化為 θ 角之三角函數時，其三角函數仍為原三角函數。

茲為便於記憶起見，可歸納二公式如下：

$[(2n+1)90°\pm\theta]=|符號|\cdot(\theta$ 角之原三角函數之餘函數）

$[2n\cdot90°\pm\theta]=|符號|\cdot(\theta$ 角之原三角函數）

至於正負號之決定，視〔$(2n+1)90°\pm\theta$〕或〔$2n\cdot90°\pm\theta$〕之角度為何象限而決定，即由本章第 5 節三角函數之正負值而決定。一般課本均不以此為正式公式，故讀者亦不大注意，但將來於三角本身及解析幾何中用處極多，望讀者熟記。

〔例 1〕 化簡下列各式：

$\cos(x-90°)$, $\tan(x-\frac{3}{2}\pi)$, $\sec(x-720°)$, $\text{covers}(-300°)$

（解） ① $\cos(x-90°)=\cos[-(90°-x)]=\cos(90°-x)=\sin x$

② $tan(x-\frac{3\pi}{2})=tan[-(\frac{3\pi}{2}-x)]=-tan(\frac{3}{2}\pi-x)$
$=-cotx$

③ $sec(x-720°)=sec[-(720°-x)]=sec(720°-x)$
$=sec(2\times360°-x)=sec(-x)=sec\,x$

④ $covers\,(-300°)=1-sin(-300°)=1+sin\,300°$
$=1+sin(360°-60°)=1-sin\,60°$
$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})$

〔例2〕 化簡 $cot(90°-A)cot\,Acos(90°-A)tan(90°-A)$

（解） 原式$=tanA\ cotA\ sinA\ cotA$

因 $tanAcotA=1$. 故

原式$=sinA\cdot\frac{cosA}{sinA}=cosA$

〔例3〕 化簡 $sec(\frac{3\pi}{2}-\theta)sec(\frac{\pi}{2}-\theta)-\frac{tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)}{cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}$

（解） 原式$=sec[\pi+(\frac{\pi}{2}-\theta)]csc\theta-\frac{tan[\pi+(\frac{\pi}{2}-\theta)]}{-sin\,\theta}$

$=-sec(\frac{\pi}{2}-\theta)csc\,\theta+\frac{tan\,(\frac{\pi}{2}-\theta)}{sin\,\theta}$

$=-csc^2\,\theta+\frac{cot\,\theta}{sin\,\theta}=\frac{-1}{sin^2\,\theta}+\frac{cos\,\theta}{sin^2\theta}=\frac{cos\,\theta-1}{sin^2\,\theta}$

〔例4〕 化簡 $sin^2(\theta-270°)+cos^2(90°+\theta)+tan^2(\theta-360°)$

（解） 原式$=\{sin[-(270°-\theta)]\}^2+(-sin^2\theta)^2+\{tan[-(360°-\theta)]\}^2$

$=\{-sin(270°-\theta)\}^2+sin^2\,\theta+\{-tan(360°-\theta)\}^2$

$=cos^2\,\theta+sin^2\,\theta+tan^2\,\theta$

$=1+tan^2\,\theta=sec^2\,\theta$

〔例5〕 求適合下列之最小之正角，設已知

① $cosx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $tanx=-1$ ③ $sin^2\,x=\frac{1}{2}$

（解） ① 此角在第二象限內，

因 $cos(180°-30°)=-cos\,30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 故$x=150°$

② 此角在第二象限內，

因 $tan(180°-45°)=-tan\,45°=-1$ 故 $x=135°$

③ ∵ $sin\,x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$取正號時爲 45°，但當取負角時，此角在第三象限內，因 $sin(180°+45°)=-sin\,45°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，故爲 225°，故合於此式中 x 之最小正角爲 45° 及 225°

〔例6〕 設 n 爲任意之整數，求 $sin[\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}]$之值。

（要點） 於 $sin[\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}]$，若不變其形，則不能改爲小於$2\pi$之角之函數，爲改爲小於 2π 之角函數，必須先將$\frac{n\pi}{2}$改爲 2π 的倍數與小於 2π 之角的和，因此可將 n 分類如下：

（i） 4 之倍數可以 $n=4m$ 表之。

（ii） 以 4 除得之餘數爲 1，可以 $n=4m+1$ 表之。

（iii） 以 4 除得之餘數爲 2 可以 $n=4m+2$ 表之。

（iv） 以 4 除得之餘數爲 3，可以 $n=4m+3$ 表之。

（解） （i） $n=4m$ 時

原式$=sin[\frac{4m\pi}{2}+(-1)^{4m}\frac{\pi}{6}]=sin(2m\pi+\frac{\pi}{6})$

$=sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

（ii） $n=4m+1$時

$$原式=\sin\left[\frac{(4m+1)\pi}{2}+(-1)^{4m+1}\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=\sin\left[2m\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(iii) $n=4m+2$ 時

$$原式=\sin\left[\frac{(4m+2)\pi}{2}+(-1)^{4m+2}\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=\sin\left[2m\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

(iv) $n=4m+3$ 時

$$原式=\sin\left[\frac{(4m+3)\pi}{2}+(-1)^{4m+3}\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=\sin\left[2m\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

〔例 7〕 已知 $\tan 238°=1.6$, 求 $\sin 122°$ 之值。

(解) $\tan 238°=\tan(180°+58°)=\tan 58°=1.6$

今 $\dfrac{\sin 58°}{\cos 58°}=\tan 58°=\dfrac{1.6}{1}$

$\therefore \dfrac{\sin 58°}{1.6}=\dfrac{\cos 58°}{1}$ $\dfrac{\sin^2 58°}{1.6^2}=\dfrac{\cos^2 58°}{1}$

兩邊平方後應用加比定律

$\therefore \dfrac{\sin^2 58°}{1.6^2}=\dfrac{\cos^2 58°}{1^2}=\dfrac{\sin^2 58°+\cos^2 58°}{2.56+1}=\dfrac{1}{3.56}$

$\therefore \sin^2 58°=\dfrac{1.6^2}{3.56}$ $\sin 58°=\dfrac{1.6}{\sqrt{3.56}}$

同理 $\cos 58°=\dfrac{1}{\sqrt{3.56}}$

$\therefore \sin 122°=\sin(180°-58°)=\sin 58°=\dfrac{1.6}{\sqrt{3.56}}=0.85$

〔例 8〕 設 A, B, C 爲 $\triangle ABC$ 之內角，求證

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B+C}{2}\right)$$

(證) $\because \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{A}{2}\right)=\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{A}{2}\right)\right]$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$$

又因 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}(B+C)$

$$\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}=-\frac{\pi}{4}+\frac{B+C}{2}=-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B+C}{2}\right)$$

$\therefore \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{A}{2}\right)=\cos\left[-\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{B+C}{2}\right)\right]$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B+C}{2}\right)$$

故 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{A}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{A}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{B+C}{2}\right)$

習 題 九

(1) 試化下列諸三角函數爲第一象限之三角函數：

① $\sin 180°$ ② $\cos 327°$ ③ $\cot 216°$ ④ $\csc 354°$

⑤ $\tan 343°18'54''$ ⑥ $\cos\dfrac{19}{4}\pi$ ⑦ $\sin\dfrac{16}{5}\pi$

⑧ $\cot\dfrac{11}{6}\pi$ ⑨ $\sec\dfrac{17}{9}\pi$ ⑩ $\cos\dfrac{23}{9}\pi$

(2) 試求下列各三角函數之值：

① $\sin(-60^\circ)$ ② $\sec(-150^\circ)$ ③ $\cos(-225^\circ)$

④ $\tan(-\frac{17}{6}\pi)$ ⑤ $\cot(-\frac{5\pi}{4})$ ⑥ $\csc(-\frac{5}{3}\pi)$

⑦ $\sin 2370^\circ$ ⑧ $\cos 3540^\circ$ ⑨ $\tan(-5430^\circ)$

⑩ $\cot(-7320^\circ)$

(3) 試求下列各式之值:

① $2\cos 120^\circ \sin 225^\circ - 3\sin 120^\circ \tan 135^\circ$

② $\sin^2(540^\circ+\theta)+\sin^2(270-\theta)$

③ $a^2\cos 0^\circ - b^2\sin 270^\circ - 2ab\tan(-45^\circ)\cot(-135^\circ)$

④ $\cos 180^\circ \tan(-45^\circ)+\sin 150^\circ \times \sec 210^\circ$

⑤ $\dfrac{\cos 150^\circ \tan 300^\circ}{\cot 225^\circ+\sin(-30^\circ)}$ (臺省師大)

(4) 化簡下列各式:

① $\dfrac{\sin(180^\circ-a)}{\tan(180^\circ+a)}\times\dfrac{\cot(90^\circ-a)}{\tan(90^\circ+a)}\times\dfrac{\cos(360^\circ-a)}{\sin(-a)}$

② $\sin(180^\circ+\theta)\cos(90^\circ+\theta)-\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)$

③ $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\pi+\theta)}+\dfrac{\sin(\pi-\theta)\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\pi+\theta)}$

④ $\dfrac{(a+b)\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cot(\pi-\theta)}+\dfrac{(a-b)\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cot(\pi+\theta)}$

(5) 已知 $\tan 237^\circ=1.54$，求 $\sin 123^\circ$ 與 $\cos 123^\circ$ 之函數值。

(6) 設 A, B, C 爲一三角形之內角，求證:

① $\sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B+C}{2}$ ② $\tan A=-\tan(B+C)$

③ $\sin A=-\sin(2A+B+C)$ ④ $\cos A=-\cos(2A+B+C)$

⑤ $\sin A=-\cos(\dfrac{3A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2})$

⑥ $\sin(\dfrac{A}{2}+B)=\cos\dfrac{B-C}{2}$

(7) 求適合於下列各式之角:

① $\sin x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 於 0° 與 360° 之間

② $\csc x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 同上

③ $\tan x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 於 -90° 與 90° 之間

④ $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 同上

⑤ $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 於 0° 與 180° 之間

⑥ $\sec x=-\sqrt{2}$ 同上

習題略解

(1) ① $-\sin 0^\circ$ ② $\cos 33^\circ$ ③ $\cot 36^\circ$ ④ $-\csc 6^\circ$

⑤ $-\tan 16^\circ 41' 6''$ ⑥ $-\cos\frac{\pi}{4}$ ⑦ $-\sin\frac{\pi}{5}$

⑧ $-\cot\frac{\pi}{6}$ ⑨ $+\sec\frac{\pi}{9}$ ⑩ $-\cos\frac{4}{9}\pi$

(2) ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ -1

⑥ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ⑦ $-\frac{1}{2}$ ⑧ $\frac{1}{2}$ ⑨ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑩ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(3) ① 原式 $=2\cos(180^\circ-60^\circ)\sin(180^\circ+45^\circ)-3\sin(180^\circ-60^\circ)\tan(180^\circ-45^\circ)=2\cos 60^\circ \sin 45^\circ+3\sin 60^\circ \tan 45^\circ$

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2}$

② 原式 $=\sin^2(360^\circ+\overline{180^\circ+\theta})+\sin^2(180^\circ+\overline{90^\circ-\theta})$

$=\sin^2(180^\circ+\theta)+\sin^2(90^\circ-\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

③ 原式 $=a^2+b^2-2ab(-1)[-\cot(180^\circ-45^\circ)]$

$=a^2+b^2+2abc\cot 45^\circ=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

④ 原式 $=\cos 180^\circ(-\tan 45^\circ)+\sin 30^\circ(-\sec 30^\circ)$

$$=(-1)(-1)+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

⑤ 原式 $=\dfrac{\cos(180^\circ-30^\circ)\tan(360^\circ-60^\circ)}{\cot(180^\circ+45^\circ)-\sin 30^\circ}$

$$=-\frac{(\cos 30^\circ)(-\tan 60^\circ)}{\cot 45^\circ-\sin 30^\circ}=\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3})}{1-\frac{1}{2}}=3$$

(4) ① 原式 $=\dfrac{\sin a}{\tan a}\times\dfrac{\tan a}{-\cot a}\times\dfrac{\cos a}{-\sin a}=\cos a\times\dfrac{\sin a}{\cos a}=\sin a$

② 原式 $=(-\sin\theta)(-\sin\theta)-\cos\theta(-\cos\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

③ 原式 $=\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{-\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta(-\sin\theta)}{-\sin\theta}=-\sin\theta+\sin\theta=0$

④ 原式 $=\dfrac{(a+b)\cot\theta}{-\cot\theta}+\dfrac{(a-b)(-\cot\theta)}{\cot\theta}=-(a+b)-(a-b)$

$=-2a$

(5) 參考〔例7〕 $\sin 123^\circ=0.841$, $\cos 123^\circ=-0.546$

(6) ① $\sin\dfrac{A}{2}=\sin\left(\dfrac{A+B+C}{2}-\dfrac{B+C}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B+C}{2}\right)$

$=\cos\dfrac{B+C}{2}$

② $\tan A=\tan[(A+B+C)-(B+C)]=\tan[\pi-(B+C)]$

$=-\tan(B+C)$

③ $\sin A=-\sin(\pi+A)=-\sin[(A+B+C)+A]$

$=-\sin(2A+B+C)$

④ $\cos A=-\cos(\pi+A)=-\cos[(A+B+C)+A]$

$=-\cos(2A+B+C)$

⑤ 右邊 $=-\cos\left(\dfrac{A+B+C}{2}+A\right)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)=\sin A=$ 左邊

⑥ 左邊 $=\sin\left(\dfrac{A+B+C}{2}+\dfrac{B-C}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{B-C}{2}\right)$

$=\cos\dfrac{B+C}{2}=$ 右邊

(7) ① $\sin 225^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $\sin 315^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

② $\csc 60^\circ=\csc 120^\circ=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ③ $\tan(-30^\circ)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

④ $\sin 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ⑤ $\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$

⑥ $\sec 135^\circ=-\sqrt{2}$

綜合習題一

(1) 化簡 $\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\dfrac{1+\sec\theta}{1+\csc\theta}$ 答：$\tan\theta$

(2) 化簡 $\cos^2 A(\sec^2 A-\tan^2 A)+\sin^2 A(\csc^2 A-\cot^2 A)$ 答：1

(3) 化簡 $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}$ 答：$2\csc\theta$

(4) 化簡 $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)$ 答：$\sec A+\csc A$

(5) 化簡 $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$ 答：$\tan\alpha\tan\beta$

(6) 化簡 $(\sin A-\csc A)^2-(\tan A-\cot A)^2+(\cos A-\sec A)^2$ 答：1

(7) 化簡 $\csc^4\theta(1-\cos^4\theta)-2\cot^2\theta$ 答：1

(8) 試以小於 $\dfrac{\pi}{4}$ 之正銳角表出 $\sin(-9846^\circ)$, $\cos 1485^\circ$, $\tan(-920^\circ)$ 及 $\tan(-780^\circ)$

答：$-\cos 36^\circ$，$\cos 45^\circ$，$-\tan 20^\circ$，$-\cot 30^\circ$

(9) 求 $\cos 570^\circ\sin 150^\circ+\sin(-330^\circ)\cos(-390^\circ)$ 之值。 答：0

(10) 求 $\sin 60^\circ\cos 150^\circ-\cos 225^\circ\sin 315^\circ+\tan 300^\circ\sec 180^\circ$ 之值。

答：$\dfrac{4\sqrt{3}-5}{4}$

(11) [illegible] $A=\dfrac{1}{2}$，試求 $\tan A+\cot A$ 之值。 答：4

(12) 已知 $\tan\alpha=\frac{2}{5}$，試求 $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\cos\alpha-4\sin\alpha}$ 之值。 答：$\frac{19}{7}$

試證下列各式：(13—36)

(13) $\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ+3\sin^2 60^\circ-2\csc^2 60^\circ-\frac{3}{4}\tan^2 30^\circ=3\frac{1}{3}$

(14) $\sin^2 30^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 90^\circ=\frac{5}{2}$

(15) $\cos 570^\circ \sin 510^\circ-\sin 330^\circ \cos 390^\circ=0$

(16) $(a+b)\tan(2\pi-A)-(a+b)\cot(A-2\pi)=-(a+b)(\tan A+\cot A)$

(17) $[\sin\theta+\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)]^2+[\cos\theta-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)]^2=2$

(18) $\sec(270^\circ-A)\sec(90^\circ-A)+\tan(270^\circ-A)\tan(90^\circ-A)+1=0$

(19) $\sin^2 B+\tan^2 B=\sec^2 B-\cos^2 B$

(20) $(1-\sin^2\theta)\tan^2\theta=\sin^2\theta$

(21) $\sec A(\sin A-\cos A)+\csc A(\sin A+\cos A)=\sec A\ cso\ A$

(22) $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$

(23) $(\tan A+\sec A+1)(\tan A-\sec A+1)=2\tan A$

(24) $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta=\frac{1-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

(25) $\tan A=\frac{\sin A+2\sin A\cos A}{1+\cos A+\cos^2 A-\sin^2 A}$

(26) $\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta)=\sec\theta+\csc\theta$

(27) $(\csc\theta-\sec\theta)^2=(1-\tan\theta)^2+(\cot\theta-1)^2$

(28) $(1+\cos A-\sin^2 A)^2(1-\cos A)^2$
$+(1+\sin A-\cos^2 A)^2(1-\sin A)^2=\sin^2 A\cos^2 A$

(29) $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\csc\theta$

(30) $(\sin A+\sec A)^2+(\cos A+\csc A)^2=(1+\sec A\csc A)^2$

(31) $2\sin\theta\cos\theta+\sin^3\theta\sec\theta+\cos^3\theta\csc\theta=\tan\theta+\cot\theta$

(32) $\frac{1-\sin\theta}{1+\sec\theta}-\frac{1+\sin\theta}{1-\sec\theta}=2\cos\theta(\cot\theta+\csc^2\theta)$

(33) $\frac{\cot x+\cot y}{\tan x+\tan y}=\cot x\cot y$

(34) $(\sec\alpha\sec\beta+\tan\alpha\tan\beta)^2-(\tan\alpha\sec\beta+\sec\alpha\tan\beta)^2=1$

※(35) 若 $\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}+\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}=1$，則 $(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta})(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1)=0$

(36) $\frac{(a^2-b^2)\cot(\pi-\theta)}{\cos(\pi+\theta)}+\frac{(a^2+b^2)\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{-2b^2}{\sin\theta}$

第三章 複角函數

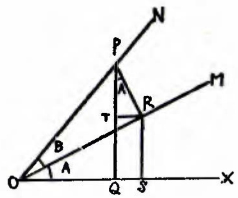
(Function of Compound Angles)

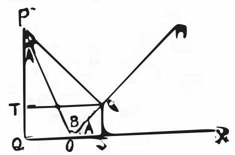
1. 兩角和之正弦與餘弦

公式： $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

（證） 設 $A<90°$，$B<90°$，$A+B<90°$，令 $\angle XOM=A$，$\angle MON=B$，則 $\angle XON=A+B$





在複角 $A+B$ 之界線 ON 內，取一點 P，作 $PQ\perp OX$，$PR\perp OM$，又作 $RS\perp OX$，$RT\perp PQ$，則

$$\sin(A+B)=\frac{PQ}{OP}=\frac{RS+PT}{OP}=\frac{RS}{OP}+\frac{PT}{OP}$$

$$=\frac{RS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\cos TPR\sin B$$

但 $\angle TPR=90°-\angle TRP=\angle TRO=\angle ROS=A$

∴ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

又 $$\cos(A+B)=\frac{OQ}{OP}=\frac{OS-TR}{OP}=\frac{OS}{OP}-\frac{TR}{OP}$$

$$=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}-\frac{TR}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

當 A, B 兩角，有一角或二角同時為 $0°$ 或 $A+B=90°$ 時定理亦可適用。

若 $A+B>90°$；則其證法如下：(上頁右圖)

（證） $\sin(A+B)=\sin(180°-\angle POQ)=\sin POQ$

$$=\frac{PQ}{OP}=\frac{RS+PT}{OP}=\frac{RS}{OP}+\frac{PT}{OP}$$

$$=\frac{RS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$\cos(A+B)=\cos(180°-\angle POQ)=-\cos POQ$

$$=-\frac{OQ}{OP}=-\frac{QS-OS}{OP}=-\frac{TR-OS}{OP}=\frac{OS}{OP}-\frac{TR}{OP}$$

$$=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}-\frac{TR}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

〔註〕 因 $\sin$ 為一種記號，並非數量，故 $\sin(A+B)\neq\sin A+\sin B$，$\cos(A+B)\neq\cos A+\cos B$

2. 兩角和之正弦餘弦公式意義之推廣

A, B 非銳角時，前節之公式仍能成立，茲舉例演示如下：

（i） A 為第二象限正角，B 為第四象限正角時：

設 $A=90°+A'$，$B=270°+B'$，則 A', B' 均為銳角，

$A+B=360°+(A'+B')$

$\sin(A+B)=\sin[360°+(A'+B')]=\sin(A'+B')$

$=\sin A'\cos B'+\cos A'\sin B'$ ……(1)

$\cos(A+B)=\cos[360°+(A'+B')]=\cos(A'+B')$

$=\cos A'\cos B'-\sin A'\sin B'$ ……(2)

但 $A'=A-90°$，$\sin A'=\sin(A-90°)=-\cos A$

$\cos A'=\cos(A-90°)=\sin A$

$B'=B-270°$，$\sin B'=\sin(B-270°)=\cos B$

$$\cos B' = \cos(B - 270^\circ) = -\sin B$$

將　$\sin A', \cos A', \sin B', \cos B'$ 代入 (1) 及 (2)，得

$$\sin(A+B) = (-\cos A)(-\sin B) + \sin A \cos B$$
$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\cos(A+B) = \sin A(-\sin B) - (-\cos A)\cos B$$
$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

(ii)　A 為第三象限正角，B 為第二象限負角時：

設　$A = 270^\circ - A'$，$B = -180^\circ - B'$，則　A', B' 均為銳角。

$A + B = 90^\circ - (A' + B')$，故

$$\sin(A+B) = \sin[90^\circ - (A'+B')] = \cos(A'+B')$$
$$= \cos A' \cos B' - \sin A' \sin B'$$
$$\cos(A+B) = \cos[90^\circ - (A'+B')] = \sin(A'+B')$$
$$= \sin A' \cos B' + \cos A' \sin B'$$

但　$\sin A' = \sin(270^\circ - A) = -\cos A$

$\cos A' = \cos(270^\circ - A) = -\sin A$

$\sin B' = \sin[-(180^\circ + B)] = -\sin(180^\circ + B) = \sin B$

$\cos B' = \cos[-(180^\circ + B)] = \cos(180^\circ + B) = -\cos B$

代入 (1) 及 (2)，得

$$\sin(A+B) = (-\sin A)(-\cos B) - (-\cos A)\sin B$$
$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\cos(A+B) = (-\cos A)(-\cos B) + (-\sin A)\sin B$$
$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

A, B 非銳角之其他情形，讀者不難用同樣之方法推證之，可[illegible]節之公式為恆等式，其成立與 A, B 之值無關，公式既為恆等式，則凡由其誘出之其他關係式，亦均為恆等式。

〔例〕　求　$\sin 75^\circ$　及　$\cos 75^\circ$ 之值。

〔解〕　$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

3. 兩角差之正弦與餘弦

公式： $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

〔證〕　於 25 節之公式中，以 $-B$ 代 B 即得

$\sin(A-B) = \sin[A + (-B)] = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$[\because \cos(-B) = \cos B, \sin(-B) = -\sin B]$

$\cos(A-B) = \cos[A + (-B)] = \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

〔例〕　求　$\sin 15^\circ$ 之值。

〔解〕　$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

〔例 1〕　求　$\sec 15^\circ$ 及 $\csc 15^\circ$ 之函數值？

〔要點〕　應用倒數關係式求之，即得。

即　$\sec 15^\circ = \dfrac{1}{\cos 15^\circ}$　　$\csc 15^\circ = \dfrac{1}{\sin 15^\circ}$

〔解〕　$\sec 15^\circ = \dfrac{1}{\cos 15^\circ} = \dfrac{1}{\cos(45^\circ - 30^\circ)}$

$$= \frac{1}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$\csc 15^\circ=\frac{1}{\sin 15^\circ}=\frac{1}{\sin(45^\circ-30^\circ)}$$

$$=\frac{1}{\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$$

〔例2〕 試證 $\sin(30^\circ+A)+\sin(30^\circ-A)=\cos A$

（證） 左邊 $=\sin 30^\circ\cos A+\cos 30^\circ\sin A+\sin 30^\circ\cos A$

$-\cos 30^\circ\sin A$

$=2\sin 30^\circ\cos A$

$=2\times\frac{1}{2}\times\cos A=\cos A$

∴ 左邊＝右邊

〔例3〕 試證

$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C$

$-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C$

（證） $\cos(A+B+C)=\cos[(A+B)+C]$

$=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\cos C-(\sin A\cos B$

$+\cos A\sin B)\sin C$

$=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C-\sin A\cos B\sin C$

$-\cos A\sin B\sin C$

〔例4〕 試證 $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

$=\cos^2 B-\cos^2 A$

（證） $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ………(1)

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ ………(2)

由(1)×(2)，得

$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 B$

$=(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)$

$=\cos^2 B-\cos^2 A$

〔例5〕 證明 $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})+\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}$

（證） 左邊 $=\cos^2\alpha+(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3})^2$

$+(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3})^2$

$=\cos^2\alpha+(\frac{\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{2})^2+(\frac{\cos\alpha}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2})^2$

$=\cos^2\alpha+\frac{1}{4}(\cos^2\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha+3\sin^2\alpha$

$+\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha+3\sin^2\alpha)$

$=\cos^2\alpha+\frac{1}{4}(2\cos^2\alpha+6\sin^2\alpha)$

$=\frac{3}{2}\cos^2\alpha+\frac{3}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{3}{2}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\frac{3}{2}$

∴ $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})+\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}$

〔例6〕 已知 $\sin A=\frac{5}{13}$，$\cos B=\frac{3}{5}$，求 $\cos(A+B)$ 之函數值。

（要點） 因 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$，又 $\sin A$，$\cos B$ 爲已知，故求出 $\cos A$ 與 $\sin B$ 之值代入即得。

由 $\sin A=\frac{5}{13}>0$，故知 A 在第一或第二象限之角。

而 $\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\pm\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=\pm\frac{12}{13}$

因此 A 在第一象限角時，因 $\cos A>0$，故複號中取「+」。

A 在第二象限角時，因 $\cos A<0$，故複數號中取「−」。

同理，由 $\cos B=\frac{3}{5}>0$，故知 B 在第一或第四象限之角。

而 $\sin B=\pm\sqrt{1-\cos^2 B}=\pm\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\pm\frac{4}{5}$，

因此，B 在第一象限角時，因 $\sin B<0$，故複號中取「+」。

B 在第四象限角時，因 $\sin B<0$，故複號中取「−」。

故應分為下列四種情形計算，即

(i) $\begin{cases}A\text{ 在第一象限}\\B\text{ 在第一象限}\end{cases}$ (ii) $\begin{cases}A\text{ 在第一象限}\\B\text{ 在第四象限}\end{cases}$

(iii) $\begin{cases}A\text{ 在第二象限}\\B\text{ 在第一象限}\end{cases}$ (iv) $\begin{cases}A\text{ 在第二象限}\\B\text{ 在第四象限}\end{cases}$

(解) $\because\ \sin A=\frac{5}{13}>0\ \therefore\ A$ 為第一或第二象限之角

$\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\pm\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=\pm\frac{12}{13}$

(A 在第一象限時取「+」，在第二象限時取「−」。)

$\because\ \cos B=\frac{3}{5}>0\ \therefore\ B$ 為第一或第四象限之角。

$\sin B=\pm\sqrt{1-\cos^2 B}=\pm\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\pm\frac{4}{5}$

(B 在第一象限時取「+」，在第四象限時取「−」。)

(i) A 在第一象限，B 在第四象限時。

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$$=\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{65}$$

(ii) A 在第一象限，B 在第四象限時

$$\cos(A+B)=\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}-\frac{5}{13}(-\frac{4}{5})=\frac{56}{65}$$

(iii) A 在第二象限，B 在第一象限時

$$\cos(A+B)=(-\frac{12}{13})\cdot\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{56}{65}$$

(iv) A 在第二象限，B 在第四象限時

$$\cos(A+B)=(-\frac{12}{13})\cdot\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\cdot(-\frac{4}{5})=-\frac{16}{65}$$

習 題 十

試證下列各式：(1——14)

(1) $\sin(45°\pm\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta\pm\sin\theta)$

(2) $\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\cos(60°-\theta)$

(3) $\sin(B+45°)+\sin(B-45°)-\sqrt{2}\sin B=0$

(4) $\cos(30°+B)-\cos(30°-B)+\sin B=0$

(5) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

(6) $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$
$+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C$ 〔公式〕

(7) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$

(8) $\sin(A+B)\cos(A-B)=\sin A\cos A+\sin B\cos B$

(9) $\cos(A+B)\sin(A-B)=\sin A\cos A-\sin B\cos B$

(10) $\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\frac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}=0$

(11) $\cos(45°+A)\cos(45°+B)-\sin(45°+A)\sin(45°+B)$
$=-\sin(A+B)$

(12) $\sin(x+y)\cos y-\cos(x+y)\sin y=\sin x$

(13) $\cos\alpha=\cos(\frac{\alpha}{2}+nx)\cos(\frac{\alpha}{2}-nx)-\sin(\frac{\alpha}{2}+nx)\sin(\frac{\alpha}{2}-nx)$

(14)　$\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}+\beta)$

(15)　求　$\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})$之值。

(16)　求　$\tan 195^\circ \sin 105^\circ+\cos 165^\circ \cot 165^\circ+\tan 135^\circ \sin 90^\circ$ 之值。

(17)　已知：$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，　$\cos\beta=-\frac{9}{41}$，且 α 爲第三象限角 β 爲第二象限角，求 $\sin(\alpha-\beta)$ 及 $\cos(\alpha-\beta)$。

(18)　已知：$\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\sin\beta=\frac{5}{13}$，且 α,β 均爲第二象限，求　$\sin(\alpha+\beta)$ 及 $\cos(\alpha+\beta)$。

(19)　已知：$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，　$\cos\beta=-\frac{8}{17}$，求 $\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ 及 $\cos(\alpha-\beta)$之值。

習　題　略　解

(1)　左邊$=\sin 45^\circ\cos\theta\pm\cos 45^\circ\sin\theta$

(2)　右邊$=\cos\theta\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\sin\theta=$左邊

(3)　左邊$=\sin B\cos 45^\circ+\cos B\sin 45^\circ+\sin B\cos 45^\circ$
$-\cos B\sin 45^\circ-\sqrt{2}\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin B+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin B-\sqrt{2}\sin B$
$=\sqrt{2}\sin B-\sqrt{2}\sin B=0$

(4)　左邊$=\cos 30^\circ\cos B-\sin 30^\circ\sin B-\cos 30^\circ\cos B-\sin 30^\circ$
$\sin B+\sin B=-\frac{1}{2}\sin B-\frac{1}{2}\sin B+\sin B=0$

(5)　左邊$=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)$
$=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4})=$右邊

(6)　倣〔例3〕證　　(7)　倣〔例4〕證

(8)　左邊$=\sin A\cos A\cos^2 B+\cos^2 A\sin B\cos B+\sin^2 A\sin B$

$\cos B+\sin A\cos A\sin^2 B=\sin A\cos A(\sin^2 B+\cos^2 B)$
$+\sin B\cos B(\sin^2 A+\cos^2 A)=\sin A\cos A+\sin B\cos B$

(9)　倣上題證

(10)　左邊$=(\cot B-\cot A)+(\cot C-\cot B)+(\cot A-\cot C)=0$

(11)　左邊$=\cos[(45^\circ+A)+(45^\circ+B)]=\cos[90^\circ+(A+B)]=$右邊

(12)　左邊$=\sin[(x+y)-y]=\sin x$

(13)　$\cos\alpha=\cos[(\frac{\alpha}{2}+nx)+(\frac{\alpha}{2}-nx)]=$右邊

(14)　左邊$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$=\cos\beta(\sin\alpha+\cos\alpha)-\sin\beta(\sin\alpha+\cos\alpha)$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\beta-\sin\beta)$
$=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha)\times\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta-\frac{1}{\sqrt{2}}\times$
$\sin\beta)=2(\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha)(\cos\frac{\pi}{4}\cos\beta$
$-\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta)=$右邊

(15)　原式$=\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin x\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=0$

(16)　原式$=(2-\sqrt{3})\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})(-2-\sqrt{3})$
$+(-1)\cdot 1=\sqrt{6}+\sqrt{2}-1$

(17)　$\because$　$\sin=-\frac{3}{5}$　$\therefore$ $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，　$\cos\beta=-\frac{9}{41}$，　$\sin\beta=\frac{40}{41}$
$\sin(\alpha-\beta)=(-\frac{3}{5})(-\frac{9}{41})-(-\frac{3}{5}+\frac{40}{41})=\frac{189}{205}$
$\cos(\alpha-\beta)=(-\frac{4}{5})(-\frac{9}{41})+(-\frac{3}{5})(+\frac{40}{41})=-\frac{84}{205}$

(18)　倣上題求得　$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{171}{121}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{140}{221}$

(19)　$\because$　$\sin\alpha=\frac{4}{5}>0$　$\therefore$　α 爲第一或第二象限角。

又 $\cos\beta=-\frac{8}{17}<0$ ∴ β 爲第二或三象限角。

倣〔例6〕求得

(i) α 爲第一，β 爲第二象限時，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{13}{85}$，

$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{84}{85}$，$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{77}{85}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{36}{85}$

(ii) α 爲第一，β 爲第三象限時，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{77}{85}$

$\sin(\alpha-\beta)=\frac{13}{85}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{36}{85}$，$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{84}{85}$

(iii) α 爲第二，β 爲第二象限時，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{77}{85}$

$\sin(\alpha-\beta)=\frac{13}{85}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{36}{85}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{84}{85}$

(iv) α 爲第二，β 爲第三象限時，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{13}{85}$

$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{77}{85}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{84}{85}$，$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{36}{85}$

4. 兩角和及差之正切

公式：$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

（證） $\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$

以 $\cos A\cos B$ 除分子及分母之各項，則

$$\tan(A+B)=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$$

同理可證 $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}$

〔例〕 求 $\tan 75^\circ$ 及 $\tan 15^\circ$ 之函數值。

（解） $\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\frac{1+\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1-1\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

$\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\frac{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+1\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

5. 兩角和及差之餘切

公式：$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$

$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

（證） $\cot(A+B)=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

以 $\sin A\sin B$ 除分子分母之各項，則

$$\cot(A+B)=\frac{\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-1}{\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos A}{\sin A}}=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

同理可證明 $\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

〔例1〕 試證 $\cot A=\frac{\cot 3A\cot 2A+1}{\cot 2A-\cot 3A}$

（證） $\cot A=\cot(3A-2A)=\frac{\cot 3A\cot 2A+1}{\cot 2A-\cot 3A}$

〔例2〕 試證 $\tan(A+B+C)$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$$

又設　$A+B+C=\pi$

則　$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

（證）　$\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$

$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdot\tan C}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$$

∴　左邊＝右邊

如　$A+B+C=\pi$，則　$\tan(A+B+C)=\tan\pi=0$

故上式之分子必爲0。

即　$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

〔例3〕　設　$\tan A=\dfrac{5}{6}$，$\cot B=11$ 時，$A+B$ 之角度若何？

但　A, B 均爲銳角。

（要點）　因所設之值爲 $\tan A$, $\cot B=\dfrac{1}{\tan B}$，故先求 $\tan(A+B)$之值。再從而推定 $A+B$ 之角度。

（解）　由　$\cot B=11$，得　$\tan B=\dfrac{1}{11}$

$$\therefore\quad \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{11}}{1-\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{11}}=1$$

然因 A, B 均爲銳角，故 $A+B<180°$，而正切在第一象限內爲正，第二象限內爲負，故適合於 $\tan(A+B)=1$ 之 $A+B$ 之角度爲45°。

〔例4〕　已知　$\cos A=\dfrac{40}{41}$，$\cos B=\dfrac{60}{61}$，求

$\tan(A+B)$ 及 $\tan(A-B)$ 之值。

（解）　$\because\ \cos A=\dfrac{40}{41}>0$, $\cos B=\dfrac{60}{61}>0$　∴　A, B 均在第一或第四象限。

$$\sin A=\pm\sqrt{1-\cos^2 A}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{40}{41}\right)^2}=\pm\frac{9}{41}$$

$$\sin B=\pm\sqrt{1-\cos^2 B}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{60}{61}\right)^2}=\pm\frac{11}{61}$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\pm\dfrac{9}{41}}{\dfrac{40}{41}}=\pm\frac{9}{40},\quad \tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\pm\dfrac{11}{61}}{\dfrac{60}{61}}=\pm\frac{11}{60}$$

（i）　A, B 均在第一象限時：

$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{9}{40}+\dfrac{11}{60}}{1-\dfrac{9}{40}\cdot\dfrac{11}{60}}=\frac{980}{2301},\quad \tan(A-B)=\frac{\dfrac{9}{40}-\dfrac{11}{60}}{1+\dfrac{9}{40}\cdot\dfrac{11}{60}}=\frac{100}{2499}$$

（ii）　A 在第一，B 在第四象限時：

$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{9}{40}+\left(-\dfrac{11}{60}\right)}{1-\dfrac{9}{40}\left(-\dfrac{11}{60}\right)}=\frac{100}{2499}$$

$$\tan(A-B)=\frac{\dfrac{9}{40}-\left(-\dfrac{11}{60}\right)}{1+\dfrac{9}{40}\left(-\dfrac{11}{60}\right)}=\frac{980}{2301}$$

（iii）　A 在第四，B 在第一象限時：

$$\tan(A+B)=\frac{-\dfrac{9}{49}+\dfrac{11}{60}}{1+\left(-\dfrac{9}{40}\right)\dfrac{11}{60}}=-\frac{100}{2499}$$

$$\tan(A-B)=\frac{-\frac{9}{40}-\frac{11}{60}}{1+(-\frac{9}{40})\frac{11}{60}}=-\frac{980}{2301}$$

(iv) A, B 均在第四象限時：

$$\tan(A+B)=\frac{-\frac{9}{40}+(-\frac{11}{60})}{1-(-\frac{9}{40})(-\frac{11}{60})}=-\frac{980}{2301}$$

$$\tan(A-B)=\frac{-\frac{9}{40}-(-\frac{11}{60})}{1+(-\frac{9}{40})(-\frac{11}{60})}=-\frac{100}{2499}$$

習　題　十

（1） 求 $\cot 15°$ 及 $\cot 75°$ 之值。

試證下列諸式：

（2） $\tan(45°+\theta)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

（3） $\cot(\theta-45°)=\frac{1+\cot\theta}{1-\cot\theta}$

（4） $\cot(45°+\theta)\cot(45°-\theta)=1$

（5） $\tan 2A=\frac{\tan 5A-\tan 3A}{1+\tan 5A\tan 3A}$

（6） $\frac{\cot 2A\cot A-1}{\cot A+\cot 2A}=\cot 3A$

（7） $\frac{\tan 5A-\tan 3A}{1+\tan 5A\tan 3A}=\frac{\tan 3A-\tan A}{1+\tan 3A\tan A}$

（8） $\tan(B+45°)+\cot(B-45°)=0$

（9） $\tan(B-45°)+\cot(B+45°)=0$

（10） $\frac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$

（11） $\frac{\cot A-\cot B}{\cot A+\cot B}=\frac{-\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$

（12） $\cot A\pm\cot B=\frac{\sin(B\pm A)}{\sin A\sin B}$

（13） $\cot(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma-\cot\alpha-\cot\beta-\cot\gamma}{\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta-1}$

又設 $\alpha+\beta+\gamma=90°$ 則 $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$

（14） 已知 $\sin x=-\frac{4}{5}$， $\cos y=\frac{3}{5}$，求 $\tan(x+y)$ 及 $\cot(x-y)$ 之函數值。

（15） 二銳角之正切分別各為 $\sqrt{7}+\sqrt{6}$，$\sqrt{7}-\sqrt{6}$，試求其和為幾度？

（16） $x^2-2\sqrt{7}x+1=0$ 之二根為 $\tan\alpha, \tan\beta$，求 $\alpha+\beta$ 之值。但 α, β 均為銳角。

習　題　略　解

（1） $2+\sqrt{3}$， $2-\sqrt{3}$

（2） 左邊$=\frac{\tan 45°+\tan\theta}{1-\tan 45°\tan\theta}=$右邊

（3） 左邊$=\frac{\cot\theta\cot 45°+1}{\cot 45°-\cot\theta}=\frac{1+\cot\theta}{1-\cot\theta}$

（4） 左邊$=\frac{\cot 45°\cot\theta-1}{\cot\theta+\cot 45°}\cdot\frac{\cot 45°\cot\theta+1}{\cot\theta-\cot 45°}=\frac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}\cdot\frac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}=1$

（5） $\tan 2A=\tan(5A-3A)=$右邊

（6） $\cot 3A=\cot(2A+A)=$左邊

（7） 左邊$=\tan(5A-3A)=\tan 2A=\tan(3A-A)=$右邊

（8） 左邊$=\frac{\tan B+\tan 45°}{1-\tan B\tan 45°}+\frac{1}{\frac{\tan B-\tan 45°}{1+\tan B\tan 45°}}=\frac{\tan B+1}{1-\tan B}+\frac{1+\tan B}{\tan B-1}$

$=0$

（9） 倣前題證明

（10） 右式$=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

$$=\frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\text{左邊}$$

(11) 倣前題證明

(12) $\text{左邊}=\frac{\cos A}{\sin A}\pm\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\sin B\cos A\pm\cos B\sin A}{\sin A\sin B}=\frac{\sin(B\pm A)}{\sin A\sin B}$

(13) 倣例〔例 2〕證明

(14) 倣〔例 4〕 $\tan(x+y)=\mp\frac{24}{7}$, $\cot(x-y)=\infty$

(15) 倣〔例 3〕 $\tan A=\sqrt{7}+\sqrt{6}$, $\tan B=\sqrt{7}-\sqrt{6}$

答: $A+B=90°$

(16) $\tan\alpha+\tan\beta=2\sqrt{7}$, $\tan\alpha\tan\beta=1$

$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\infty$ 答: $\alpha+\beta=90°$

6. 兩倍角之三角函數

公式: $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$$
$$=1-2\sin^2 A$$
$$=2\cos^2 A-1$$
$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$
$$\cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$$

(證) 於二角和之正餘弦定理及正餘切定理中,令 $A=B$,

則 $\sin(A+A)=\sin A\cos A+\cos A\sin A$

$\therefore\ \sin 2A=2\sin A\cos A$

$\cos(A+A)=\cos A\cos A-\sin A\sin A$

$\therefore\ \cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

$=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A=1-2\sin^2 A$

$=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)=2\cos^2 A-1$

$\tan(A+A)=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A}$

$\therefore\ \tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$\cot(A+A)=\frac{\cot A\cot A-1}{\cot A+\cot A}$

$\therefore\ \cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$

〔例 1〕 求 $\sin 120°$, $\cos 120°$ 及 $\tan 120°$ 之函數值。

(解) $\sin 120°=\sin 2\times 60°=2\sin 60°\cos 60°$

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 120°=\cos 2\times 60°=\cos^2 60°-\sin^2 60°$

$=(\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$

$\tan 120°=\tan 2\times 60°=\frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°}=\frac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{1-3}=-\sqrt{3}$

〔例 2〕 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$, 且 $90°<A<135°$, 求 $\sin 2A$ 之值。

(要點) 依據公式 $\sin 2A=2\sin A\cos A$, 已知 $\sin A$ 之值, 故祇須求出 $\cos A$ 之值代入便得解。

(解) $\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\pm\frac{4}{5}$

因 A 爲第二象限內之角, 故 $\cos A=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin 2A=2\sin A\cos A=-2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=-\frac{24}{25}$

〔例 3〕 設 $\tan\frac{A}{2}=a$, 求 $\sin A$ 之值。

〔要點〕 $\sin A$ 可改爲半角，即 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

（解） $\sin A$ 改用以 $\tan\frac{A}{2}$ 之項表示，則得

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cos^2\frac{A}{2}$$

$$=2\tan\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{\sec^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{2a}{1+a^2}$$

〔例 4〕 以 $\tan A$ 表 $\sin 2A$ 及 $\cos 2A$ 之函數。

（解） $$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A+\sin^2 A}=\frac{2\frac{\sin A}{\cos A}}{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}=\frac{1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

（別解） $$\sin 2A=2\sin A\cos A=2\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\cos^2 A=2\tan A\cdot\cos^2 A$$

$$=\frac{2\tan A}{\sec^2 A}=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=\cos^2 A(1-\tan^2 A)=\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}$$

〔例 5〕 試證 $\frac{1-\tan^2(45°-A)}{1+\tan^2(45°-A)}=\sin 2A$

（證） $$左邊=\frac{1-\frac{\sin^2(45°-A)}{\cos^2(45°-A)}}{1+\frac{\sin^2(45°-A)}{\cos^2(45°-A)}}=\frac{\cos^2(45°-A)-\sin^2(45°-A)}{\cos^2(45°-A)+\sin^2(45°-A)}$$

$$=\cos^2(45°-A)-\sin^2(45°-A)=\cos 2(45°-A)$$

$$=\cos(90°-2A)=\sin 2A$$

〔∵ $\cos^2(45°-A)+\sin(45-A)=1$〕

〔例 6〕 求證 $16\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 8A=\sin 16A$

（解） ∵ $2\sin A\cos A=\sin 2A$

$2\sin 2A\cos 2A=\sin 4A$

$2\sin 4A\cos 4A=\sin 8A$

$2\sin 8A\cos 8A=\sin 16A$

相乘得

$16\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 8A=\sin 16A$

〔例 7〕 設 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$；求 $\sin 2\theta$ 及 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 之值。

（解） $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ∵ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

∴ $\sin 2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)^2-1=(\frac{5}{4})^2-1=\frac{9}{16}$$

又 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$$-\sin\theta\cos\theta]=\frac{5}{4}(1-\frac{1}{2}\times\frac{9}{16})=\frac{5}{4}\times\frac{23}{32}=\frac{115}{128}$$

〔例 3〕 試證 $\cos 4\theta-4\cos 2\theta+3=8\sin^4\theta$

（證） 左邊 $=\cos 4\theta-1-4\cos 2\theta+4$

$=4(1-\cos 2\theta)-(1-\cos 4\theta)$

$=8\sin^2\theta-2\sin^2 2\theta$ 〔∵ $1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta$〕

$=8\sin^2\theta-2\times 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=8\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)=8\sin^4\theta$

習 題 十 二

（1）已知 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，求 $\cos 2\theta$。

（2）已知 $\sin\theta=\frac{9}{41}$，但 θ 爲第二象限角，求 $\tan 2\theta$。

(3) 已知 $\cos\theta=-\frac{3}{4}$，且 θ 爲第三象限角，求 $\cot 2\theta$。

(4) 已知 $\sin\theta+\cos\theta=k$，求 $\sin 2\theta$ 及 $\cos 2\theta$ 之函數值。

(5) 已知 $\tan\alpha=\frac{m}{n}$，試求 $m\cos 2\alpha+n\sin 2\alpha$ 之值。

(6) 求 $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$ 之值。

試證下列各恆等式：(7—16)

(7) $\cos 2\theta=\cos^4\theta-\sin^4\theta$

(8) $\sin 2X=\frac{2\tan X}{1+\tan^2 X}$ (9) $\sec 2A=\frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}$

(10) $\sin 4A=4\sin A(2\cos^3 A-\cos A)$

(11) $\cos 4A=8\cos^4 A-8\cos^2 A+1$ (交通大學)

(12) $\cos(15°-A)\sec 15°-\sin(15°-A)\csc 15°=4\sin A$

(13) $\tan\theta+\cot\theta=2\csc 2\theta$

(14) $2\sin(45°+\theta)\sin(45°-\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

(15) $\cot 3\theta=\frac{3\cot\theta-\cot^3\theta}{1-3\cot^2\theta}$

(16) $\cos 6\theta=32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1$

(17) 已知 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$，求 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 之值。

(18) 設 $\tan A=\csc B-\cot B$，求證 $\tan 2A=\tan B$

習題略解

(1) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2(\frac{3}{5})^2=\frac{7}{25}$

(2) $\because \sin\theta=\frac{9}{41}$ $\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{9}{41})^2}=-\frac{40}{41}$

($\because$ θ 爲第二象限)

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{9}{40}$ 故 $\tan 2\theta=\frac{2(-\frac{9}{40})}{1-(\frac{9}{40})^2}=-\frac{720}{1519}$

(3) 倣前題求得 $\cot 2\theta=\frac{\sqrt{7}}{21}$

(4) 例〔例6〕求得 $\sin 2\theta=k^2-1$

$\cos 2\theta=\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=k\sqrt{2-k^2}$

(5) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{2}{1+\tan^2\alpha}-1=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$$=\frac{1-\frac{m^2}{n^2}}{1+\frac{m^2}{n^2}}=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}$$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\tan\alpha\cos^2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$$=\frac{\frac{2m}{n}}{1+\frac{m^2}{n^2}}=\frac{2mn}{n^2+m^2}$$

$\therefore$ $m\cos 2\alpha+n\sin 2\alpha=\frac{m(3n^2-m^2)}{n^2+m^2}$

(6) 設 x=原式，兩邊乘 $2^3\sin 20$,

$\therefore$ $2^3 x\sin 20°=2^3\sin 20°\cos 20°\cos 40°\cos 80°$

$=2^2\sin 40°\cos 40°\cos 80°=2\sin 80°\cos 80°=\sin 160$

$\therefore$ $2^3 x\sin 20°=\sin 20°$ $\therefore$ $x=\frac{1}{8}$

(7) 右邊$=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\cos^4\theta-\sin^4\theta=$左邊

(8) $\because$ $\sin 2X=2\sin X\cos X=\frac{2\sin X\cos X}{\sec^2 X\cos^2 X}=\frac{\frac{2\sin X}{\cos X}}{\sec^2 X}$

$=\frac{2\tan X}{1+\tan^2 X}$

(9) 右邊$=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A}=\frac{1}{\cos^2 A-\sin^2 A}=\frac{1}{\cos 2A}=\sec 2A$

(10) 左邊$=\sin 2(2A)=2\sin 2A\cos 2A=4\sin A\cos A(2\cos^2 A-1)$

$=4\sin A(2\cos^3 A-\cos A)$

(11) 左邊 $=\cos 2(2A)=2\cos^2(2A)-1=2(2\cos^2 A-1)^2-1$

$=2(4\cos^4 A-4\cos^2 A+1)-1=$ 右邊

(12) 左邊 $=\dfrac{\sin[15^\circ-(15^\circ-A)]}{\cos 15^\circ \sin 15^\circ}=\dfrac{2\sin A}{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}=\dfrac{2\sin A}{\sin 30^\circ}=4\sin A$

(13) 左邊 $=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}=\dfrac{2}{2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin 2\theta}=2\csc\theta$

(14) 左邊 $=\cos(45^\circ+\theta-45^\circ+\theta)-\cos(45^\circ+\theta+45^\circ-\theta)$

$=\cos 2\theta-\cos 90^\circ=\cos 2\theta=$ 右邊

(15) 左邊 $=\cot(2\theta+\theta)=\dfrac{\cot 2\theta\cot\theta-1}{\cot\theta+\cot 2\theta}=\dfrac{\dfrac{\cot^2\theta-1}{2\cot\theta}\cot\theta-1}{\cot\theta+\dfrac{\cot^2\theta-1}{2\cot\theta}}=$ 右邊

(16) 左邊 $=\cos 2(3\theta)=2\cos^2 3\theta-1=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)^2-1$

$=2(16\cos^6\theta-24\cos^4\theta+9\cos^2\theta)-1=$ 右邊

(17) 原式 $=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta$

$=1-\dfrac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta)=\dfrac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta)=\dfrac{17}{25}$

(18) 由已知條件得 $\tan A=\dfrac{1-\cos B}{\sin B}$

$\therefore\ \tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\dfrac{2(1-\cos B)}{\sin B}\div\left[1-\dfrac{(-\cos B)^2}{\sin^2 B}\right]$

$=\dfrac{2\sin B(1-\cos B)}{2\cos B(1-\cos B)}=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\tan B$

7. 三倍角之三角函數

公式: $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$

$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$

$\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

$\cot 3A=\dfrac{3\cot A-\cot^3 A}{1-3\cot^2 A}$

(證) $\sin 3A=\sin(A+2A)=\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A$

$=\sin A(1-2\sin^2 A)+\cos A(2\sin A\cos A)$

$=\sin A-2\sin^3 A+2\sin A(1-\sin^2 A)$

$=\sin A-2\sin^3 A+2\sin A-2\sin^3 A$

$=3\sin A-4\sin^3 A$

$\cos 3A=\cos(A+2A)=\cos A\cos 2A-\sin A\sin 2A$

$=\cos A(2\cos^2 A-1)-2\sin^2 A\cos A$

$=2\cos^3 A-\cos A-2\cos A(1-\cos^2 A)$

$=2\cos^3 A-\cos A-2\cos A+2\cos^3 A$

$=4\cos^3 A-3\cos A$

$\tan 3A=\tan(A+2A)=\dfrac{\tan A+\tan 2A}{1-\tan A\tan 2A}$

$=\dfrac{\tan A+\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}{1-\tan A\cdot\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}=\dfrac{\tan A-\tan^3 A+2\tan A}{1-\tan^2 A-2\tan^2 A}$

$=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

同理可證明

$\cot 3A=\dfrac{3\cot A-\cot^3 A}{1-3\cot^2 A}$

上述公式極為普遍，凡一角為他角之三倍時，俱能應用。

例如: $\cos 6A=\cos 3\cdot 2A=4\cos^3 2A-3\cos 2A$

$=4(2\cos^2 A-1)^3-3(2\cos^2 A-1)$

$=4(8\cos^6 A-12\cos^4 A+6\cos^2 A-1)-6\cos^2 A+3$

$=32\cos^6 A-48\cos^4 A+24\cos^2 A-4-6\cos^2 A+3$

$=32\cos^6 A-48\cos^4 A+18\cos^2 A-1$

〔例1〕 求 18°, 36°, 54°, 72° 之三角函數。

(解) 設 $\alpha=18^\circ$, 則 $5\alpha=90^\circ$ $\therefore\ 2\alpha=90^\circ-3\alpha$

由是 $\sin 2\alpha=\sin(90^\circ-3\alpha)=\cos 3\alpha$

即 $2\sin\alpha\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$\therefore\ 4\cos^2\alpha-2\sin\alpha-3=0$ ($\because \cos\alpha\neq 0$)

$\therefore\ 4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0$ （$\because\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$）

$\therefore\ \sin\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ （$\because\ \sin\alpha>0$）

即 $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=\sin(90^\circ-72^\circ)=\cos 72^\circ$

$$\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{1-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\sin 72^\circ$$

$$\tan 18^\circ=\frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}}=\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

$$=\cot 72^\circ$$

又 $\sin 36^\circ=2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\cos 54^\circ$

$$\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\sin 54^\circ$$

$$\tan 36^\circ=\frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}=\frac{\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}+1)^2}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\cot 54^\circ$$

$$\cot 36^\circ=\frac{1}{\tan 36^\circ}=\sqrt{\frac{1}{5-2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{(5-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}=\tan 54^\circ$$

〔例 2〕 求證 $\sin 5x=5\sin x-20\sin^3 x+16\sin^5 x$

〔證〕 $\sin 5x=\sin(3x+2x)=\sin 3x\cos 2x+\cos 3x\sin 2x$

$=(3\sin x-4\sin^3 x)(1-2\sin^2 x)+(4\cos^3 x-3\cos x)(2\sin x\cos x)$

$=3\sin x-10\sin^3 x+8\sin^5 x+2\sin x\cos^2 x(4\cos^2 x-3)$

$=3\sin x-10\sin^3 x+8\sin^5 x+2\sin x(1-\sin^2 x)(1-4\sin^2 x)$

$=5\sin x-20\sin^3 x+16\sin^5 x$

〔例 3〕 求證 $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\cdot\tan 2A\cdot\tan A$

〔證〕 左邊 $=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}-\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}-\tan A$

$=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A-3\tan^3 A+\tan^5 A-2\tan A+6\tan^3 A-\tan A+4\tan^3 A-3\tan^5 A}{(1-3\tan^2 A)(1-\tan^2 A)}$

$=\dfrac{6\tan^3 A-2\tan^5 A}{(1-3\tan^2 A)(1-\tan^2 A)}$

$=\dfrac{(3\tan A-\tan^3 A)2\tan^2 A}{(1-3\tan^2 A)(1-\tan^2 A)}$

$=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\cdot\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\cdot\tan A$

$=\tan 3A\tan 2A\tan A$

習題十三

(1) 設 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，而 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 試求 $\sin 2x+\cos 3x$ 之值。

(2) 試求 $\sin 54^\circ-\sin 18^\circ$ 之值。

試證下列各式： 3—8

(3) 求 $\sin 12^\circ$ 之值。(武漢、交通大學)

(4) $3\sin A-\sin 3A=2\sin A(1-\cos 2A)$

(5) $\sin 6\alpha = 32\cos^5\alpha\sin\alpha - 32\cos^3\alpha\sin\alpha + 6\cos\alpha\sin\alpha$

(6) $\cos^6 A + \sin^6 A = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2A$

(7) $\frac{1}{\tan 3A - \tan A} - \frac{1}{\cot 3A - \cot A} = \cot 2A$

(8) $\frac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 3$

(9) 求下列各式之值:

① $\sin^2 24° - \sin^2 6°$ ② $\cos 36° - \sin 18°$

(10) 試證 $\sin(36°+\alpha) - \sin(36°-\alpha) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sin\alpha$

習 題 略 解

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) 原式 $= 3\sin 18° - 4\sin^3 18° - \sin 18°$

$= 2\sin 18° - 4\sin^3 18° = 2\sin 18°[1 - 2\sin^2 18°] = \frac{1}{2}$

(3) $\sin 12° = \sin(30° - 18°) = \sin 30°\cos 18° - \cos 30°\sin 18°$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$= \frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3})$

(4) 左邊 $= 3\sin A - (3\sin A - 4\sin^3 A) = 4\sin^3 A = 2\sin A(2\sin^2 A)$

$= 2\sin A(1 - \cos 2A)$

(5) 倣 $\cos 6A$ 證之。

(6) 左邊 $= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^4 A - \cos^2 A\sin^2 A + \sin^4 A)$

$= (\cos^2 A + \sin^2 A)^2 - 3\cos^2 A\sin^2 A$

$= 1 - \frac{3}{4}(2\sin A\cos A)^2 =$ 右邊

(7) 左邊 $= \frac{\cos 3A\cos A}{\sin 3A\cos A - \cos 3A\sin A} - \frac{\sin 3A\sin A}{\cos 3A\sin A - \sin 3A\cos A}$

$= \frac{\cos 3A\cos A}{\sin(3A-A)} + \frac{\sin 3A\sin A}{\sin(3A-A)} = \frac{\cos(3A-A)}{\sin(3A-A)} = \frac{\cos 2A}{\sin 2A}$

$= \cot 2A$

(8) 左邊 $= \cos^2\alpha - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \sin^2\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 1 + \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$

$= 1 + \frac{\sin(3\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha} = 1 + \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 1 + 2 = 3$

(9) ① 原式 $= \sin(24°+6°)\sin(24°-6°) = \sin 30°\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$

② $\cos 36° - \sin 18° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2}$

(10) 左邊 $= 2\sin\alpha\cos 36° = 2\sin\alpha\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sin\alpha$

8. 半角之三角函數

公式: $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

(證) 在二倍角公式中，左邊之角恒爲右邊之2倍，若以 θ 代 $2A$，則

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ ....(1)

$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$

$= 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ ....(2)

$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$

$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$ ....

又由（2）$2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta$ ∴ $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$ ∴ $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

相除數 $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ ∴ $\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

〔例 1〕 試求 22°30′ 之三角函數值。

（解） 設 $45°=\theta$，則 $22°30'=\frac{\theta}{2}$，其三角函數值爲正。

故 $$\sin 22°30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22°30'=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22°30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

〔例 2〕 設 $\tan\theta=-2\sqrt{2}$，求 $\sin\frac{\theta}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$ 之值。

但設 θ 爲小於 360° 之正角。

（解） 因 $\tan\theta=-2\sqrt{2}$，而 $360°>\theta>0°$，可知 θ 不是第二象限內之角，就是第四象限內之角，即

$180°>\theta>90°$，或 $360°>\theta>270°$

∴ $90°>\frac{\theta}{2}>45°$，或 $180°>\frac{\theta}{2}>135°$

即 $\frac{\theta}{2}$ 不是第一象限之角，就是第二象限內之角，

於是將 $\tan\theta=-2\sqrt{2}$ 代入公式

$$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

，就可得關於 $\tan\frac{\theta}{2}$ 之二次方程式，解之，

$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}$，或 $\tan\frac{\theta}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

然因 $\frac{\theta}{2}$ 爲第一象限或第二象限之角，故 $\frac{\theta}{2}$ 在第一象限內時，$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}$，在第二象限內時，$\tan\frac{\theta}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，於是有如下之兩種情形：

（i） $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}$ 時

$90°>\frac{\theta}{2}>45°$

因而 $\sin\frac{\theta}{2}>0$, $\cos\frac{\theta}{2}>0$

$$∴ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$∴ \sin\frac{\theta}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=0$$

（ii） $\tan\frac{\theta}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 時

$180°>\frac{\theta}{2}>135°$

因而 $\sin\frac{\theta}{2}>0$, $\cos\frac{\theta}{2}<0$

$$∴ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan\frac{\theta}{2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$∴ \sin\frac{\theta}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

〔例3〕 試以 $\tan A$ 表 $\sin 2A$ 及 $\cos 2A$。

（解） $\sin 2A=2\sin A\cos A=2\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\cos^2 A=2\tan A\cos^2 A$

$=\dfrac{2\tan A}{\sec^2 A}=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$， $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

$=\cos^2(1-\tan^2 A)=\dfrac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

〔例4〕 試證 $\tan(45°-\dfrac{\theta}{2})=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

（證） 左邊 $=\dfrac{\sin 2(45°-\dfrac{\theta}{2})}{1+\cos 2(45°-\dfrac{\theta}{2})}=\dfrac{\sin(90°-\theta)}{1+\cos(90°-\theta)}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

〔例5〕 求證 $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1+\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan\dfrac{\theta}{2}}$

（證） 左邊 $=\dfrac{1+2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\dfrac{1+2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}=\dfrac{\sec^2\dfrac{\theta}{2}+2\tan\dfrac{\theta}{2}}{\sec^2\dfrac{\theta}{2}-2\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$

$=\dfrac{\tan^2\dfrac{\theta}{2}+1+2\tan\dfrac{\theta}{2}}{\tan^2\theta+1-2\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{(1+\tan\dfrac{\theta}{2})^2}{(1-\tan\dfrac{\theta}{2})(1+\tan\dfrac{\theta}{2})}$

$=\dfrac{1+\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan\dfrac{\theta}{2}}$

〔例6〕 在以 C 為直角之直角三角形中，求證下列關係式為真確

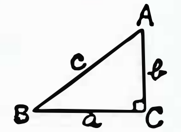
ⓐ $\sin^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{c-a}{2c}$ ⓑ $(\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2})^2=\dfrac{a+c}{c}$

ⓒ $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{b+c}$

（證） ⓐ 因 $\triangle ABC$ 為直角三角形 $\angle C=90°$ 及 $2\sin^2\dfrac{B}{2}=1-\cos B$

則 $\sin^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{1-\cos B}{2}=\dfrac{1-\dfrac{a}{c}}{2}=\dfrac{c-a}{2c}$

∴ $\sin^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{c-a}{2c}$



ⓑ $(\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2})^2$

$=\sin^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

$=1+2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}=1+\sin A=1+\dfrac{a}{c}=\dfrac{a+c}{c}$

∴ $(\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2})^2=\dfrac{a+c}{c}$

ⓒ 因 $0°<A<90°$， $\tan\dfrac{A}{2}>0$

∴ $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\dfrac{\dfrac{c-b}{c}}{\dfrac{c+b}{c}}}=\sqrt{\dfrac{c-b}{c+b}}$

$=\sqrt{\dfrac{(c-b)(c+b)}{(c+b)^2}}=\sqrt{\dfrac{c^2-b^2}{(c+b)^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2}{(b+c)^2}}=\dfrac{a}{b+c}$

∴ $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{b+c}$

〔例7〕 試述求 $\sin\dfrac{\pi}{2^n}$， $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ 之方法。

（解） 因 $\sin\dfrac{\pi}{4}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

公式 $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos A)}$， $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\cos A)}$

故 $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi}{4})}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

由是 $\sin\frac{\pi}{16}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}})}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$\cos\frac{\pi}{16}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$\sin\frac{\pi}{32}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

$\cos\frac{\pi}{32}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

同理，可求出 $\sin\frac{\pi}{2^n}$，$\cos\frac{\pi}{2^n}$ 之值，但 n 爲正整數。

習題十四

(1) 求下列各函數值：

① $\cos 15°$ ② $\tan 165°$ ③ $\cot 345°$ ④ $\sin 9°$

(2) 已知 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\sin\frac{A}{2}$，$\cos\frac{A}{2}$

(3) 已知 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\sin\frac{A}{2}$，$\cos\frac{A}{2}$

試證下列各式：

(4) $(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2=1+\sin\theta$

(5) $\tan(45°+\frac{\theta}{2})-\tan(45°-\frac{\theta}{2})=2\tan\theta$

(6) $\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1-\cos\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{4}$

(7) $\tan\frac{x}{4}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}$

(8) $\tan^2\frac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(9) $\cot x=\dfrac{\cot^2\frac{x}{2}-1}{2\cot\frac{x}{2}}$

(10) $\cos A=\dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

(11) $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

習題略解

(1) ① $\cos 15°=\sqrt{\dfrac{1+\cos 30°}{2}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

② $\tan 165°=-\sqrt{\dfrac{1-\cos 330°}{1+\cos 330°}}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

③ $\cot 345°=-\sqrt{\dfrac{1+\cos 690°}{1-\cos 690°}}=-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

④ $\sin 9°=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 18°)}=\sqrt{\frac{1}{4}(2-2\cos 18°)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 18°)-2\sqrt{1-\sin^2 18°}+(1-\sin 18°)}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 18°}-\sqrt{1-\sin 18°})$

$=\frac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}})$

(2) ∵ $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $90°>A>-90°$ 由是 $45°>\frac{A}{2}>-45°$

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(3) ∵ $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ $180°>A>0$ 由是 $90°>\frac{A}{2}>0$

$\cos A=\pm\frac{1}{2}$，$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$

(4) 左邊 $=1+\sin 2(\frac{\theta}{2})=1+\sin\theta$

(5) 左邊 $=\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)-\cos\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}=2\tan\theta$

(6) 右邊 $=\cot\frac{1}{2}(\frac{\theta}{2})=$ 左邊

(7) 左邊 $=\tan\frac{1}{2}(\frac{x}{2})=$ 右邊

(8) 左邊 $=\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}=$ 右邊

(9) 左邊 $=\cot(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=\dfrac{\cot\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}-1}{\cot\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}}=$ 右邊

(10) 右邊 $=\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=\cos 2(\frac{A}{2})$

(11) 左邊 $=(\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2})^2+(\dfrac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2})^2+(\dfrac{1-\cos\frac{5}{4}\pi}{2})^2+(\dfrac{1-\cos\frac{7}{4}\pi}{2})^2$

$=\frac{1}{4}[2+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2+2\cos^2\frac{\pi}{4}]=\frac{1}{4}[4+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}]$

$=\frac{3}{2}$

9. 化正餘弦之積爲和或差

公式：$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

〔證〕 今由正餘弦之兩角和差公式得

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ …………(1)

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ …………(2)

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ …………(3)

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ …………(4)

(1)+(2) 得 $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$

(1)−(2) 得 $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$

(3)+(4) 得 $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$

(4)−(3) 得 $\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$

〔註〕 本公式應用甚廣，極重要，即凡證明題中由少數項推至多數項時常用之讀者應熟記以資應用。

〔例1〕 $2\sin 6\theta\cos 4\theta=\sin(6\theta+4\theta)+\sin(6\theta-4\theta)$

$=\sin 10\theta+\sin 2\theta$

〔例2〕 $\cos\frac{7\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}=\frac{1}{2}[\cos(\frac{7\theta}{2}+\frac{5\theta}{2})+\cos(\frac{7\theta}{2}-\frac{5\theta}{2})]$

$=\frac{1}{2}(\cos 6\theta+\cos\theta)$

〔例3〕 $4\sin(45°-\theta)\cos(45°+\theta)$

$=2[\sin(45°-\theta+45°+\theta)+\sin(45°-\theta-45°-\theta)]$

$=2(\sin 90°-\sin 2\theta)=2(1-\sin 2\theta)$

10. 化正餘弦之和或差爲積

公式：$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

〔證〕 設　$A+B=\alpha$，$A-B=\beta$，則

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad B=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

以之代入前節四個公式中，得化和差積之公式。

〔註〕 本公式可由和或差式化爲積，此爲三角法中分解因式之特別方法。此法不特在證明題中用處甚多，其在解方程式中功用更大，可以化繁爲簡，化難爲易。希讀者對此公式必須熟記。

〔例1〕 試證　$\cos(60°+A)-\cos(60°-A)=-\sqrt{3}\sin A$

（解） 若　$\cos(60°+A)$ 與 $\cos(60°-A)$ 分別展開，則得

$$\cos(60°+A)-\cos(60°-A)=\cos 60°\cos A$$
$$-\sin 60°\sin A-\cos 60°\cos A-\sin 60°\sin A$$
$$=-2\sin 60°\sin A=-\sqrt{3}\sin A$$

結果固然一樣，但在演習上太無意義，故應將 $60°+A$，$60°-A$ 當作一值，代入公式

$\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 證之爲便。

即　$\cos(60°+A)-\cos(60°-A)$

$$=2\sin\frac{60°+A+60°-A}{2}\sin\frac{60°-A-60°-A}{2}$$
$$=2\sin 60°\sin(-A)=-\sqrt{3}\sin A$$

〔例2〕 試證　$\sin(60°+A)-\cos(30°+A)=\sin A$

（要點） 因無公式如 $\sin\alpha-\cos\beta$ 形，故應設法化爲上述之公式，即利用餘角 $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$ 之公式，則

$$\sin\alpha-\cos\beta=\cos(90°-\alpha)-\cos\beta$$

設 $\cos\beta=\sin(90°-\beta)$，則可化爲

$\sin\alpha-\cos\beta=\sin\alpha-\sin(90°-\beta)$ 形證之，即得。

（解） $\sin(60°+A)-\cos(30°+A)=\sin(60°+A)-\sin(60°-A)$

$$=2\cos\frac{60°+A+60°-A}{2}\sin\frac{60°+A-60°+A}{2}$$
$$=2\cos 60°\sin A=\sin A$$

11. 關於證明恆等式之研究

（一） 三項式之變形

取適當二項變爲乘積形，且使與第三項有公因式。至其法，不外三種，即先取第一，二兩項，或先取第一，三兩項，或先取第二，三兩項，總是使與最後一項有公因式。

〔例1〕 試證　$\sin A+\sin(A+120°)+\sin(A+240°)=0$

（證） 式邊 $=2\sin(A+60°)\cos 60°+\sin(A+240°)$

$$=\sin(A+60°)+\sin(A+240°)$$
$$=2\sin(A+150°)\cos 90°$$
$$=2\sin(A+150°)\times 0=0$$

〔例2〕 試證　$\sin 10°+\sin 20°-\sin 30°=4\sin 15°\sin 10°\sin 5°$

（證） 左邊 $=2\sin 15°\cos 5°-2\sin 15°\cos 15°$

$$=2\sin 15°(\cos 5°-\cos 15°)$$
$$=4\sin 15°\sin 10°\sin 5°$$

〔例3〕 試證　$\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}=\tan 3A$

（要點） 取第一，三項兩項以作角之半和，半差則得 $3A$ 與 $2A$，恰與第三項之 $3A$ 有公因式，因得證如下：

（證） 原式 $=\dfrac{\sin A+\sin 5A+\sin 3A}{\cos A+\cos 5A+\cos 3A}$

$$=\frac{2\sin 3A\cos 2A+\sin 3A}{2\cos 3A\cos 2A+\cos 3A}$$
$$=\frac{\sin 3A(2\cos 2A+1)}{\cos 3A(2\cos 2A+1)}=\tan 3A$$

（二） 四項式之變形

取適當二項各分別變爲乘積形，且使各組有公因式。

〔例 4〕 試證 $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha$

$=4\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 4\alpha$

（證） 左邊$=2\sin 2\alpha\cos\alpha+2\sin 6\alpha\cos\alpha$

$=2\cos\alpha(\sin 2\alpha+\sin 6\alpha)$

$=4\cos\alpha\sin 4\alpha\cos 2\alpha$

$=4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$

〔例 5〕 求證 $\sin(x+y-z)+\sin(z+x-y)+\sin(y+z-x)$

$=\sin(x+y+z)+4\sin x\sin y\sin z$

（武漢、四川、臺南工院）

（要點） 將 $\sin(x+y+z)$ 移至左邊，則變爲四項形。

（證） 移項 $\sin(x+y-z)+\sin(z+x-y)+\sin(y+z-x)$

$-\sin(x+y+z)$

$=2\sin x\cos(y-z)+2\cos(y+z)\sin(-x)$

$=2\sin x[\cos(y-z)-\cos(y+z)]$

$=2\sin x[-2\sin y\sin(-z)]$

$=4\sin x\sin y\sin z$

〔例 6〕 試證 $\cos 9\alpha+3\cos 7\alpha+3\cos 5\alpha+\cos 3\alpha=8\cos 6\alpha\cos^3\alpha$

（要點） 注意係數 3，將第一與第四項配合，第二與第三項配合做上例求證即得。

（證） 原式$=\cos 9\alpha+\cos 3\alpha+3(\cos 7\alpha+\cos 5\alpha)$

$=2\cos 6\alpha\cos 3\alpha+6\cos 6\alpha\cos\alpha$

$=2\cos 6\alpha(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)$

$=2\cos 6\alpha(4\cos^3-3\cos\alpha+3\cos\alpha)$

$=8\cos 6\alpha\cos^3\alpha$

〔例 7〕 試證 $\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-\cos 11^\circ+\cos 25^\circ=\sin 7^\circ$

（解） 式邊$=\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-(\cos 11^\circ-\cos 25^\circ)$

$=2\sin 54^\circ\sin 7^\circ-2\sin 18^\circ\sin 7^\circ$

$=2\sin 7^\circ(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)$

$=4\sin 7^\circ\cos 36^\circ\sin 18^\circ$

因 $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，故

$\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=1-2\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$

$=1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

∴ $4\cos 36^\circ\sin 18^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=1$

∴ $\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-\cos 11^\circ+\cos 25^\circ=\sin 7^\circ$

（三） 平方關係式之變形

以 $\cos^2 A=\dfrac{1+\cos 2A}{2}$，$\sin^2=\dfrac{1-\cos 2A}{2}$ 代入所與之式。而消去平方關係式。

〔例 8〕 試證 $\cos^2 A+\cos^2(120^\circ+A)+\cos^2(240^\circ+A)=\dfrac{3}{2}$

（證） 原式$=\dfrac{1+\cos 2A}{2}+\dfrac{1+\cos(240^\circ+2A)}{2}+\dfrac{1+\cos(480^\circ+2A)}{2}$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}[\cos 2A+\cos(240^\circ+2A)+\cos(480^\circ+2A)]$

而 $\cos 2A+\cos(240^\circ+2A)+\cos(480^\circ+2A)$

$=\cos 2A+2\cos(360^\circ+2A)\cos 120^\circ$

$=\cos 2A-\cos 2A=0$

原式$=\dfrac{3}{2}$

〔例 9〕 試證 $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$

（證） 原式$=\dfrac{2\sin^2 A-2\sin^2 B}{2\sin A\cos A-2\sin B\cos B}$

$=\dfrac{1-\cos 2A-1+\cos 2B}{\sin 2A-\sin 2B}=\dfrac{\cos 2B-\cos 2A}{\sin 2A-\sin 2B}$

$=\dfrac{2\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\cos(A+B)\sin(A-B)}=\tan(A+B)$

（四） 立方關係的變形

如式中含有立方關係時則可將公式

$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A,\ \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$

變形爲 $\sin^3 A=\dfrac{3\sin A-\sin 3A}{4},\ \cos^3 A=\dfrac{\cos 3A+3\cos A}{4}$

而代入於所與之式，消去立方關係式。

〔例1〕 試證 $\sin^3 A+\sin^3(120°+A)-\sin^3(120°-A)=-\dfrac{3}{4}\sin 3A$

（證） $\sin^3 A=\dfrac{3\sin A-\sin 3A}{4}$ ……………………(1)

$\sin^3(120°+A)=\dfrac{3\sin(120°+A)-\sin(360°+3A)}{4}$ …(2)

$\sin^3(120°-A)=\dfrac{3\sin(120°+A)-\sin(360°-3A)}{4}$ …(3)

而因 $\sin(360°+3A)=\sin 3A,\ \sin(360°-3A)=-\sin 3A$

故 (1)+(2)−(3)，得

原式$=\dfrac{3}{4}[\sin A+\sin(120°+A)-\sin(120°-A)-\sin 3A]$

但 $\sin A+\sin(120°+A)-\sin(120°-A)$

$=\sin A+2\cos 120°\sin A$

$=\sin A-\sin A=0$

∴ 原式$=-\dfrac{3}{4}\sin 3A$

〔例2〕 求證 $\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha=\cos^3 2\alpha$

（證一） ∵ $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\ \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

∴ $\sin^3\alpha=\dfrac{3}{4}\sin\alpha-\dfrac{1}{4}\sin 3\alpha,\ \cos^3\alpha=\dfrac{3}{4}\cos\alpha+\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

故 左邊$=\dfrac{3}{4}[\cos\alpha\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 3\alpha]$

$+\dfrac{1}{4}(\cos^2 3\alpha-\sin^2 3\alpha)$

$=\dfrac{1}{4}[3\cos 2\alpha+\cos 6\alpha]$

$=\dfrac{1}{4}[2\cos 2\alpha+(\cos 2\alpha+\cos 6\alpha)]$

$=\dfrac{1}{4}[2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha\cos 2\alpha]$

$=\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha[1+\cos 4\alpha]$

$=\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha[2\cos^2 2\alpha]=\cos^3 2\alpha$

（證二） ∵ $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

故 左邊$=4(\cos^6\alpha-\sin^6\alpha)-3(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)$

$=4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha)$

$-3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$=\cos 2\alpha\{4[(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-\sin^2\alpha\cos^2\alpha]-3\}$

$=\cos 2\alpha\{4-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3\}$

$=\cos 2\alpha(1-\sin^2 2\alpha)=\cos^3 2\alpha$

（證三） 左邊$=\sin^2\alpha(\sin 3\alpha\sin\alpha)+\cos^2\alpha(\cos 3\alpha\cos\alpha)$

$=\dfrac{1}{2}[\sin^2\alpha(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)+\cos^2\alpha(\cos 4\alpha+\cos 2\alpha)]$

$=\dfrac{1}{2}[\cos 2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos 4\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]$

$=\dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha\cos 2\alpha)=\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha(2\cos^2 2\alpha)$

$=\cos^3 2\alpha.$

習題十五

試證下列各式：

（1） $\sin\dfrac{5\theta}{2}-\sin\dfrac{3\theta}{2}=2\cos 2\theta\sin\dfrac{\theta}{2}$

（2） $\cos(\theta+45°)+\sin(\theta-45°)=0$

（3） $\cos A+\cos(120°+A)+\cos(120°-A)=0$

(4) $\sin 4A-\sin 2A+\sin A=\sin A(2\cos 3A+1)$

(5) $\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta=\cos\theta(2\cos\frac{\theta}{2}-1)$

(6) $\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)+\sin(\ -A)$

$=4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$

(7) $\frac{\cos 2B+\cos 2A}{\cos 2B-\cos 2A}=\cot(A+B)\cot(A-B)$

(8) $\frac{\sin A-\sin 4A+\sin 7A}{\cos A-\cos 4A+\cos 7A}=\tan 4A$

(9) $\frac{\cos A+\cos(120^\circ+B)+\cos(120^\circ-B)}{\sin B+\sin(120^\circ+A)-\sin(120^\circ-A)}=\tan\frac{A+B}{2}$

(10) $\frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}$

(11) $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}=\tan 4x$ （同濟大學）

(12) $\frac{\sin(\alpha-\gamma)+\sin\alpha+\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta+\sin(\beta+\gamma)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

(13) $\sin(30^\circ+\theta)+\cos(60^\circ+\theta)=\cos\theta$

(14) $\cos(A+B)+\sin(A-B)=2\sin(45^\circ+A)\cos(45^\circ+B)$

(15) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=4\cos x\cos 2x\cos 4x$

(16) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$

(17) $\cos 10A+\cos 8A+3\cos 4A+3\cos 2A=8\cos A\cos^3 3A$

(18) $\sin\theta+3\sin(\theta+2\alpha)-3\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta+3\alpha)$

$=8\sin^3\frac{\alpha}{2}\cos(\theta+\frac{3\alpha}{2})$

(19) $1+\cos 6\theta-\cos 10\theta-\cos 4\theta=4\sin 5\theta\cos 3\theta\sin 2\theta$

(20) $\sin^2 A+\sin^2(60^\circ+A)+\sin^2(60^\circ-A)=\frac{3}{2}$

(21) $\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\alpha\sin\beta$

(22) $\sin^2 5\alpha-\sin^2 3\alpha=\sin 8\alpha\sin 2\alpha$

(23) $\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=1+\cos\alpha\cos\beta$

(24) $\cos^3 A+\cos^3(120^\circ+A)+\cos^3(120^\circ-A)=\frac{3}{4}\cos 3A$

(25) $\sin 3A\cos^3 A+\cos 3A\sin^3 A=\frac{3}{4}\sin 4A$

習題略解

(1) 略　(2) 倣〔例2〕　(3) 略

(4) 左邊$=2\cos 3A\sin A+\sin A=\sin A(2\cos 3A+1)$

(5) 左邊$=2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta=$右邊

(6) 左邊$=2\sin\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-2B+C}{2}-2\sin\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$

$=2\sin\frac{A-C}{2}(\cos\frac{A-2B+C}{2}-\cos\frac{A-C}{2})=$右邊

(7) 略　(8) 略

(9) 左邊$=\frac{\cos A-\cos B}{\sin B-\sin A}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}}=\tan\frac{A+B}{2}$

(10) 取第一項三項變形，倣〔例3〕

(11) 左邊$=\frac{2\sin 2x\cos x+2\sin 6x\cos x}{2\cos 2x\cos x+2\cos 6x\cos x}=\frac{\sin 2x+\sin 6x}{\cos 2x+\cos 6x}$

$=\frac{2\sin 4x\cos 2x}{2\cos 4x\cos 2x}=\tan 4x$

(12) 取第一項與第三項化爲積，後括出公因式

(13) 倣〔例2〕

(14) 式邊$=\sin[90^\circ-(A+B)]+\sin(A-B)=2\sin(45^\circ-B)\cos(45^\circ-A)=2\cos[90^\circ-(45^\circ-B)]\times\sin[90^\circ-(45^\circ-A)]=$右邊

(15) 略

(16) 左邊 $=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$=2\cos\frac{A+B}{2}(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B+2C}{2})=$ 右邊

(17) 倣〔例6〕原式 $=2\cos A(\cos 9A+3\cos 3A)=4\cos^3 3A-3\cos 3A$

(18) 倣〔例6〕，原式 $=2\cos\frac{2\theta+3\alpha}{2}(3\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{3}{2}\alpha)$

$=2\cos\frac{2\theta+3\alpha}{2}(3\sin\frac{\alpha}{2}+4\sin^3\frac{\alpha}{2}-3\sin\frac{\alpha}{2})$

(19) $1=\cos 0°$ (20) 略

(21) 左邊 $=\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}-\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}=$ 右邊

(22) 左邊 $=(\sin 5\alpha+\sin 3\alpha)(\sin 5\alpha-\sin 3\alpha)$

$=(2\sin 4\alpha\cos\alpha)(2\cos 4\alpha\sin\alpha)$

$=(2\sin 4\alpha\cos 4\alpha)(2\sin\alpha\cos\alpha)=\sin 8\alpha\sin 2\alpha$

(23) 略 (24) 略

(25) 左邊 $=(\frac{3\cos A+\cos 3A}{4})\sin 3A+(\frac{3\sin A-\sin 3A}{4})\cos 3A$

$=\frac{3}{4}(\sin 3A\cos A+\cos 3A\sin A)=\frac{3}{4}\sin(3A+A)=$ 右邊

（五） 由二因數之積變形為和

〔例1〕 試證 $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

（要點） 依公式 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ 變形。

（證） 左邊 $=\frac{1}{2}[\cos(A+B-A+B)-\cos(A+B+A-B)]$

$=\frac{1}{2}(\cos 2B-\cos 2A)$

$=\frac{1}{2}[(1-2\sin^2 B)-(1-2\sin^2 A)]=\sin^2 A-\sin^2 B$

〔例2〕 試證 $\sin 3x=4\sin x\sin(60°+x)\sin(60°-x)$

（證） 右邊 $=2\sin x[2\sin(60°+x)\sin(60°-x)]$

$=2\sin x(\cos 2x-\cos 120°)$

$=2\sin x\cos 2x+\sin x$

$=(\sin 3x-\sin x)+\sin x$

$=\sin 3x$

$[\because\ \cos 120°=\cos(90°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}]$

〔例3〕 試證 $\sin\theta\sin 2\theta+\sin 3\theta\sin 6\theta=\sin 4\theta\sin 5\theta$

（要點） 本題是由積之和而成，故完全變為和形，然後再變為積形。

（證） 左邊 $=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 3\theta+\cos 3\theta-\cos 9\theta)$

$=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 9\theta)=\sin 4\theta\sin 5\theta$

〔例4〕 試證 $1+\tan(A+B)\tan(A-B)=\frac{1-2\sin^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 B}$

（要點） 設 $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$ 代入左邊變形

（證） 設 $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$, 則

左邊 $=1+\tan\alpha\tan\beta=1+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

因 $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$, 故

左邊 $=\frac{\cos 2B}{\cos(A+B)\cos(A-B)}=\frac{2\cos 2B}{2\cos(A+B)\cos(A-B)}$

$=\frac{2\cos 2B}{\cos 2A+\cos 2B}=\frac{2(1-2\sin^2 B)}{2\cos^2 A-1+1-2\sin^2 B}$

$\frac{1-2\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$

〔例5〕 試證 $\cos^2 A-\cos A\cos(60°+A)+\sin^2(30°-A)=\frac{3}{4}$

（要點） 消去平方關係式，再變積形為和形。

（證） 左邊 $=\frac{1+\cos 2A}{2}-\frac{\cos(60°+2A)+\cos 60°}{2}$

$+\frac{1-\cos(60°+2A)}{2}$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}[\cos 2A-\cos(60^\circ+2A)-\cos(60^\circ-2A)]$$

因 $\cos 2A-[\cos(60^\circ+2A)+\cos(60^\circ-2A)]$

$$=\cos 2A-2\cos 60^\circ\cos 2A$$

$$=\cos 2A-\cos 2A=0$$

$\therefore$ 左邊 $=\frac{3}{4}$

(六) 由三因數之積變爲和形

〔例 6〕 將 $4\cos A\cos B\cos C$ 變形爲和。

（要點） 在三個因數中任取二個變形爲和，再去括號導成二因數之積變形爲和。

（解） $4\cos A\cos B\cos C=2\cos A\times 2\cos B\cos C$

$$=2\cos A[\cos(B+C)+\cos(B-C)]$$

$$=2\cos A\cos(B+C)+2\cos A\cos(B-C)$$

$$=\cos(A+B+C)+\cos(A-B-C)+\cos(A+B-C)$$

$$+\cos(A-B+C)$$

〔例 7〕 試證 $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$

（要點） 做上例，但所設爲特別角，在變形之中途，須隨時化爲數字。

（證） 左邊 $=\frac{1}{2}\times 2\sin 20^\circ\sin 40^\circ\times\sin 80^\circ$

$$=\frac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 80^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}(2\sin 80^\circ\cos 20^\circ-\sin 80^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ-\sin 80^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}(2\cos 90^\circ\sin 10^\circ+\sin 60^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

〔例 8〕 試證 $\sin 20^\circ\sin 35^\circ\sin 45^\circ+\cos 25^\circ\cos 45^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{4}$

（要點） 做上例亦可，但兩項含有特別角 $\sin 45^\circ$ $\cos 45^\circ$ 之三角函數，以之代入化簡爲便。

（證） 左邊 $=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 20^\circ\sin 35^\circ+\cos 25^\circ\cos 80^\circ)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos 15^\circ-\cos 55^\circ+\cos 105^\circ+\cos 55^\circ)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos 15^\circ+\cos 105^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 60^\circ\cos 45^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$$

〔例 9〕 求證 $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)$
$\times\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta-\gamma)$
$=2\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$

（證） $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta+\gamma-\alpha)$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]\sin(\beta+\gamma-\alpha)$$

$$=\frac{1}{4}[2\sin(\beta+\gamma-\alpha)\cos(\alpha-\beta+\gamma)-2\sin(\beta+\gamma-\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\beta-\gamma)]$$

$$=\frac{1}{4}[\sin 2\gamma+\sin 2(\beta-\alpha)-\sin 2\beta-\sin 2(\gamma-\alpha)]$$

$$=\frac{1}{4}[\sin 2\gamma-\sin 2\beta-\sin 2(\alpha-\beta)-\sin 2(\gamma-\alpha)]\cdots\cdots\cdots(1)$$

因左邊爲 α,β,γ 之循環式，故

$\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma+\alpha-\beta)$

$$=\frac{1}{4}[\sin 2\alpha-\sin 2\gamma-\sin 2(\beta-\gamma)-\sin 2(\alpha-\beta)]\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta-\gamma)$

$$=\frac{1}{4}[\sin 2\beta-\sin 2\alpha-\sin 2(\gamma-\alpha)-\sin 2(\beta-\gamma)]\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)+(2)+(3)，得

$$左邊=-\frac{1}{2}[\sin 2(\beta-\gamma)+\sin 2(\gamma-\alpha)+\sin 2(\alpha-\beta)]$$

$$=-[\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)\cos(2\alpha-\beta-\gamma)]$$

$$=-\sin(\beta-\gamma)[\cos(\beta-\gamma)-\cos(2\alpha-\beta-\gamma)]$$

$$=-2\sin(\beta-\gamma)\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)$$

$$=2\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$$

〔例10〕 試證 $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)\ \sin(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\sin(\theta-\beta)}{\sin(\beta-\gamma)\ \sin(\beta-\alpha)}+\dfrac{\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\gamma-\alpha)\ \sin(\gamma-\beta)}=0$ （北平大學）

〔證〕 $左邊=\dfrac{-\sin(\theta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)-\sin(\theta-\beta)\sin(\gamma-\alpha-\sin(\theta-\gamma)\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}$

$$分子=\frac{1}{2}[\cos(\theta-\alpha+\beta-\gamma)-\cos(\theta-\alpha-\beta+\gamma)]$$

$$+\frac{1}{2}[\cos(\theta-\beta+\gamma-\alpha)-\cos(\theta-\beta-\gamma+\alpha)]$$

$$+\frac{1}{2}[\cos(\theta-\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\theta-\gamma-\alpha+\beta)]=0$$

故 左邊=0

習 題 十 六

試證下列各式:

(1) $\sin 2A\cos A+\cos 4A\sin A=\sin 3A\cos 2A$

(2) $\sin(3A+B)\sin(3A-B)-\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin 2A\sin 4A$

(3) $\sin 100^\circ\sin(-160^\circ)+\cos 200^\circ\cos(-280^\circ)=-\dfrac{1}{2}$

(4) $\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos(B+C)\cos(B-C)+\cos(A+C)\cos(A-C)=\cos 2A$

(5) $\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\delta)+\sin(\gamma-\delta)\cos(\beta-\alpha)+\sin(\delta-\beta)\cos(\alpha-\gamma)=0$

(6) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)+\cos(\gamma+\delta)\sin(\gamma-\delta)+\cos(\delta+\alpha)\sin(\delta-\alpha)=0$

(7) $\cos 55^\circ\cos 65^\circ+\cos 65^\circ\cos 175^\circ+\cos 55^\circ\cos 175^\circ=-\dfrac{3}{4}$

(8) $\cos\theta\cos(120^\circ+\theta)+\cos\theta\cos(120^\circ-\theta)+\cos(120^\circ+\theta)\cos(120^\circ-\theta)=-\dfrac{3}{4}$

(9) $\tan\dfrac{A+B}{2}-\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$

(10) $\sin^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ-\sin 10^\circ\cos 20^\circ=\dfrac{3}{4}$

(11) $4\sin A\sin B\sin C=\sin(A-B+C)+\sin(B-C+A)+\sin(C-A+B)-\sin(A+B+C)$

(12) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\dfrac{3}{16}$

(13) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{1}{8}$

(14) $\dfrac{\sin\alpha\sin 2\alpha+\sin 3\alpha\sin 6\alpha+\sin 4\alpha\sin 13\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin 3\alpha\cos 6\alpha+\sin 4\alpha\cos 13\alpha}=\tan 9\alpha$

(15) $\sin A\sin(60^\circ+A)\sin(60^\circ-A)=\dfrac{1}{4}\sin 3A$

(16) $4\cos(\alpha+\beta+45^\circ)\cos(\alpha+\beta+45^\circ)\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+3\beta)+\cos(3\alpha+\beta)$

(17) $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta-\gamma)=0$

(18) $\sin^2\theta+\sin^2(\phi-\theta)+2\sin\theta\sin(\phi-\theta)\cos\phi=\sin^2\phi$

習 題 略 解

(1) 倣〔例3〕　　(2) 倣〔例2〕

(3) $\sin 100°=\sin 80°, \sin(-160°)=-\sin 20°,$
$\cos 200°=-\cos 20°$，$\cos(-280°)=\cos 80°$ 代入左邊變形。

(4) 左邊$=\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B-\cos 2B-\cos 2C+\cos 2A+\cos 2C)$
$=\cos 2A$

(5) 倣上題，化積爲和形，適當將第二，第三項改爲 $\sin(-A)=-\sin A$ 後即可得。

(6) 左邊$=-\frac{1}{2}[(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)+(\sin 2\beta-\sin 2\gamma)+$
$(\sin 2\gamma-\sin 2\delta)+(\sin 2\delta-\sin 2\alpha)]=0$

(7) 左邊$=\cos 65°(\cos 55°+\cos 175°)+\cos 55° \cos 175°$
$=2\cos 65° \cos 115° \cos 60°+\cos 55° \cos 175°$
$=\cos 65° \cos 115°+\cos 55° \cos 175°$
$=\frac{1}{2}(\cos 180°+\cos 50°+\cos 230°+\cos 120°)$
$=\frac{1}{2}(-1+\cos 50°-\cos 50°-\frac{1}{2})=-\frac{3}{4}$　　(8) 倣(7)題

(9) 設 $\frac{A+B}{2}=\alpha, \frac{A-B}{2}=\beta$ 倣〔例4〕變形

(10) 倣〔例5〕

(11) 倣〔例6〕　　(12) 倣〔例7〕，$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(13) 倣〔例6〕

(14) 左邊$=\dfrac{\frac{1}{2}[(\cos\alpha-\cos 3\alpha)+(\cos 3\alpha-\cos 9\alpha)+(\cos 9\alpha-\cos 17\alpha)]}{\frac{1}{2}[(\sin 3\alpha-\sin\alpha)+(\sin 9\alpha-\sin 3\alpha)+(\sin 17\alpha-\sin 9\alpha)]}=\dfrac{\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 17\alpha)}{\frac{1}{2}(\sin 17\alpha-\sin\alpha)}$

$=\dfrac{\sin 9\alpha \sin 8\alpha}{\cos 9\alpha \sin 8\alpha}=\tan 9\alpha$

(15) 左邊$=\frac{1}{2}\sin A(\cos 2A-\cos 120°)=\frac{1}{2}\sin A(1-2\sin^2 A+\frac{1}{2})$
$=\frac{1}{4}(3\sin A-4\sin^3 A)=\frac{1}{4}\sin 3A$

(16) 左邊$=2[\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 90°]\cos(\alpha-\beta)$
$=2\cos 2(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos(3\alpha+\beta)\cos(\alpha+3\beta)$

(17) $\frac{1}{2}\{[\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]\cos(\beta+\gamma-\alpha)$
$+[\cos(\beta-\gamma+\alpha)-\cos(\beta+\gamma-\alpha)]\cos(\gamma+\alpha-\beta)$
$+[\cos(\gamma-\alpha+\beta)-\cos(\gamma+\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta-\gamma)\}=0$

(18) 左邊$=\sin^2\theta+\sin(\phi-\theta)[\sin(\phi-\theta)+2\sin\theta\cos\phi]$
$=\sin^2\theta+\sin(\phi-\theta)\sin(\phi+\theta)$
$=\sin^2\theta+\sin^2\phi-\sin^2\phi$

(七) 正切之和積互變

〔例1〕 試證 $\tan A\tan(A+60°)\tan(A+120°)=-\tan 3A$

(要點) 將左邊變形，可依據公式 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 而展開，或可依據公式 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 改爲 sin, cos 亦可求證。

(證) 左邊$=\tan A\times\frac{\tan A+\tan 60°}{1-\tan A\tan 60°}\times\frac{\tan A+\tan 120°}{1-\tan A\tan 120°}$
$=\tan A\times\frac{\tan A+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan A}\times\frac{\tan A-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan A}$
$=\tan A\times\frac{\tan^2 A-3}{1-3\tan^2 A}=-\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}=-\tan 3A$

〔例2〕 $\tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan\theta=\tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta$

(要點) 注意 $3\theta=2\theta+\theta$，設法將 $\tan 3\theta$ 改用 $\tan 2\theta$ 與 $\tan\theta$ 表示即 $\tan 3\theta=\tan(2\theta+\theta)=\frac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}$ 去分母變形。

(證一) ∴ $\tan 3\theta=\tan(2\theta+\theta)=\dfrac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}$

去分母 $\tan 3\theta(1-\tan 2\theta\tan\theta)=\tan 2\theta+\tan\theta$

$\tan 3\theta-\tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta=\tan 2\theta+\tan\theta$

∴ $\tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan\theta=\tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta$

(證二) $3\theta+(-2\theta)+(-\theta)=0$

∴ $\tan[3\theta+(-2\theta)+(-\theta)]=0$

$$\frac{\tan 3\theta+\tan(-2\theta)+\tan(-\theta)-\tan 3\theta\tan(-2\theta)\tan(-\theta)}{1-\tan 3\theta\tan(-2\theta)-\tan 3\theta\tan(-\theta)-\tan(-2\theta)\tan(-\theta)}=0$$

$\tan 3\theta+\tan(-2\theta)+\tan(-\theta)-\tan 3\theta\tan(-2\theta)\tan(-\theta)=0$

∴ $\tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan\theta=\tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta$

〔例3〕 試證 $3+\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ)+\tan A\tan(A+60^\circ)+\tan A\tan(A-60^\circ)=0$

(證) 設 $A+60^\circ=\alpha$, $A-60^\circ=\beta$, 則

$\alpha-\beta=120^\circ \quad \tan(\alpha-\beta)=\tan 120^\circ$

即 $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-\sqrt{3}$

$1+\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{\sqrt{3}}$

$1+\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ)$

$=\dfrac{\tan(A-60^\circ)-\tan(A+60^\circ)}{\sqrt{3}}$ ……………………(1)

同理 $1+\tan A\tan(A+60^\circ)=\dfrac{\tan(A+60^\circ)-\tan A}{\sqrt{3}}$ ……(2)

$1+\tan A\tan(A-60^\circ)=\dfrac{\tan A-\tan(A-60^\circ)}{\sqrt{3}}$ ……(3)

(1)+(2)+(3), 則右邊等於0, 而左邊即爲所求證之式。

∴ $3+\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ)+\tan A\tan(A+60^\circ)+\tan A\tan(A-60^\circ)=0$

(八) 雜題

〔例1〕 求證 $\sqrt{1+\sin\theta}=1+2\sin\dfrac{\theta}{4}\sqrt{1-\sin\dfrac{\theta}{2}}$

(證) 左邊 $=\sqrt{1+2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}=\sqrt{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+2\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$

$=\sqrt{\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}$

$=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{4}+2\sin\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{4}$

$=1+2\sin\dfrac{\theta}{4}\left(\cos\dfrac{\theta}{4}-\sin\dfrac{\theta}{4}\right)$

$=1+2\sin\dfrac{\theta}{4}\sqrt{\left(\cos\dfrac{\theta}{4}-\sin\dfrac{\theta}{4}\right)^2}$

$=1+2\sin\dfrac{\theta}{4}\sqrt{\cos^2\dfrac{\theta}{4}-2\sin\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{4}+\sin^2\dfrac{\theta}{4}}$

$=1+2\sin\dfrac{\theta}{4}\sqrt{1-\sin\dfrac{\theta}{2}}$ = 右邊

〔例2〕 試證 $\dfrac{1+2\cos 2A}{1-2\cos 2A}=\cot(A+30^\circ)\cot(A-30^\circ)$

(證) $\dfrac{1+2\cos 2A}{1-2\cos 2A}=\dfrac{2(\frac{1}{2}+\cos 2A)}{2(\frac{1}{2}-\cos 2A)}=\dfrac{\cos 60^\circ+\cos 2A}{\cos 60^\circ-\cos 2A}$

$=\dfrac{2\cos(A+30^\circ)\cos(A-30^\circ)}{2\sin(A+30^\circ)\sin(A-30^\circ)}=\cot(A+30^\circ)\cot(A-30^\circ)$

〔例3〕 試證 $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=\dfrac{\sin^2 3x}{\sin x}$

(證) 左邊 $=\sin 3x+2\sin 3x\cos 2x$

$=\sin 3x(1+2\cos 2x)\dfrac{\sin x}{\sin x}$

$=\dfrac{\sin 3x(\sin x+2\cos 2x\sin x)}{\sin x}$

$$=\frac{\sin 3x(\sin x+\sin 3x-\sin x)}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin^2 3x}{\sin x}=\text{右}$$

〔例 4〕 試證 $\dfrac{\sec(-120°)[\sin(60°-A)-\cos(A-30°)]}{2\tan A+\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}}$

$$=\sin^2 A\cos A$$

（證） 在分子中

$$\sec(-120°)=\frac{1}{\cos(-120°)}=\frac{1}{\cos 120°}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

$$\sin(60°-A)-\cos(A-30°)=\cos(30°+A)-\cos(A-30°)$$

$$=2\sin(-30°)\sin A=-2\sin 30°\sin A=-\sin A$$

在分母中

$$\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\cos A}{\sin A}=2\cot A$$

∴ 分母 $=2\tan A+2\cot A=2\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}\right)=\dfrac{2}{\sin A\cos A}$

把以上各值代入左邊，則

$$\text{左邊}=\frac{(-2)\times(-\sin A)}{\frac{2}{\sin A\cos A}}=\sin^2 A\cos A$$

〔例 5〕 試證 $\dfrac{1+\tan^2(45°-\theta)}{1-\tan^2(45°-\theta)}=\csc 2\theta$

（證一） 左邊 $=\dfrac{1+\left(\dfrac{\tan 45°-\tan\theta}{1+\tan 45°\tan\theta}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\tan 45°-\tan\theta}{1+\tan 45°\tan\theta}\right)^2}=\dfrac{1+\left(\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2}$

$$=\frac{(1+\tan\theta)^2+(1-\tan\theta)^2}{(1+\tan\theta)^2-(1-\tan\theta)^2}$$

$$=\frac{1+2\tan\theta+\tan^2\theta+1-2\tan\theta+\tan^2\theta}{1+2\tan\theta+\tan^2\theta-1+2\tan\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2(1+\tan^2\theta)}{4\tan\theta}=\frac{\sec^2\theta}{2\tan\theta}=\frac{1}{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta}=\frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin 2\theta}=\csc 2\theta=\text{右邊}$$

（證二） 左邊 $=\dfrac{1+\dfrac{\sin^2(45°-\theta)}{\cos^2(45°-\theta)}}{1-\dfrac{\sin^2(45°-\theta)}{\cos^2(45°-\theta)}}=\dfrac{\cos^2(45°-\theta)+\sin^2(45°-\theta)}{\cos^2(45°-\theta)-\sin^2(45°-\theta)}$

$$=\frac{1}{\cos 2(45°-\theta)}=\frac{1}{\cos(90°-2\theta)}=\frac{1}{\sin 2\theta}=\csc 2\theta=\text{右邊}$$

〔例 6〕 試證 $\dfrac{\sin 3\theta+4\cos 2\theta+3\sin\theta-4}{\cos 3\theta-4\sin 2\theta+5\cos\theta}=\tan\theta$

（要點） 詳細觀分子中之 $\sin 3\theta+3\sin\theta$，因 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$4\cos 2\theta-4=-4(1-\cos 2\theta)=-8\sin^2\theta$

分母中，因 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

代入左邊而化簡即得證。

（證） 左邊 $=\dfrac{3\sin\theta-4\sin^3\theta+3\sin\theta-4(1-\cos 2\theta)}{4\cos^3\theta-3\cos\theta-8\sin\theta\cos\theta+5\cos\theta}$

$$=\frac{6\sin\theta-4\sin^3\theta-8\sin^2\theta}{4\cos^3\theta+2\cos\theta-8\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta(3-4\sin\theta-2\sin^2\theta)}{2\cos\theta(1-4\sin\theta+2\cos^2\theta)}$$

然 $1-4\sin\theta+2\cos^2\theta=1-4\sin\theta+2(1-\sin^2\theta)$

$=3-4\sin\theta-2\sin^2\theta$

故 左邊 $=\tan\theta$

〔例 7〕 設 $A+B=45°$，求證 $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$

（證） 因 $A+B=45°$，故 $\tan(A+B)=\tan 45°$

即 $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$

$\therefore\ \tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$

即 $\tan A+\tan B+\tan A\tan B-1=0$

因而左邊 $=(1+\tan A)(1+\tan B)$

$=1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B$

$=2+\tan A+\tan B+\tan A\tan B-1=2=$ 右邊

習題十七

試證下列各式:

(1) $\tan 20^\circ\tan 80^\circ\tan 140^\circ=-\sqrt{3}$

(2) $\tan 40^\circ\tan 100^\circ\tan 160^\circ=\sqrt{3}$

(3) $\tan A+\tan(45^\circ-A)+\tan A\tan(45^\circ-A)=1$

(4) $\sqrt{3}+\tan 40^\circ+\tan 80^\circ=\sqrt{3}\tan 40^\circ\tan 80^\circ$

(5) 已知 $A+B=180^\circ$

求證 $2(1-\sin A\sin B)=\cos^2 A+\cos^2 B$

(6) $\tan 5A\tan 3A\tan 2A=\tan 5A-\tan 3A-\tan 2A$

(7) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\tan^2(45^\circ+\dfrac{\theta}{2})$

(8) $\dfrac{\sec 8\theta-1}{\sec 4\theta-1}=\dfrac{\tan 8\theta}{\tan 2\theta}$　　(9) $\csc 2\theta+\cot 2\theta=\cot\theta$

(10) $\dfrac{\sin 2x+\cos 2y}{\sin 2x-\cos 2y}=\dfrac{\tan(x+y+45^\circ)}{\tan(x-y-45^\circ)}$

(11) $\sin 5\alpha-5\sin 3\alpha+10\sin\alpha=16\sin^5\alpha$

(12) $1+\cos 3\alpha\cos 5\alpha=\cos^2 4\alpha+\cos^2\alpha$

習題略解

(1) 倣〔例1〕　　(2) 倣〔例1〕

(3) 設 $45^\circ-A=B$, 則 $A+B=45^\circ$; $\tan(A+B)=\tan 45^\circ$

即 $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$　$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$

因 $B=45^\circ-A$, 故 左邊 $=1=$ 右邊

(4) 因 $40^\circ+80^\circ=120^\circ$, $\tan(40^\circ+80^\circ)=\tan 120^\circ$,

即 $\dfrac{\tan 40^\circ+\tan 80^\circ}{1-\tan 40^\circ\tan 80^\circ}=-\sqrt{3}$, 去分母即得證。

(5) 倣〔例7〕 $\because\ A+B=180^\circ$, $\therefore\ A=180^\circ-B$, $\sin A=\sin B$, $\cos A=-\cos B$ 代入兩邊即得證。

(6) 倣〔例2〕

(7) 左邊 $=\dfrac{1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2}{(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2}=\left(\dfrac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2$

$=\left(\dfrac{\tan 45^\circ+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan 45^\circ\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2=$ 右邊

(8) 左邊 $=\dfrac{\frac{1}{\cos 8\theta}-1}{\frac{1}{\cos 4\theta}-1}=\dfrac{(1-\cos 8\theta)\cos 4\theta}{(1-\cos 4\theta)\cos 8\theta}=\dfrac{2\sin^2 4\theta\cos 4\theta}{2\sin^2 2\theta\cos 8\theta}$

$=\dfrac{\sin 4\theta}{2\sin^2 2\theta}\cdot\dfrac{2\sin 4\theta\cos 4\theta}{\cos 8\theta}=\dfrac{1}{\frac{2\sin^2 2\theta}{\sin 4\theta}}\cdot\dfrac{\sin 8\theta}{\cos 8\theta}$

$=\dfrac{1}{\frac{2\sin^2 2\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}}\cdot\tan 8\theta=$ 右邊

(9) 左邊 $=\dfrac{1}{\sin 2\theta}+\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\dfrac{1+2\cos^2\theta-1}{\sin 2\theta}=\dfrac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=$ 右邊

(10) 左邊 $=\dfrac{\sin 2x+\sin(90^\circ+2y)}{\sin 2x-\sin(90^\circ+2y)}=\dfrac{2\sin(x+y+45^\circ)\cos(x-y-45^\circ)}{2\cos(x+y+45^\circ)\sin(x-y-45^\circ)}$

$=\tan(x+y+45^\circ)\cot(x-y-45^\circ)=$ 右邊

(11) 因 $\sin 5\alpha+\sin\alpha=2\sin 3\alpha\cos 2\alpha=2(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)$

$(1-2\sin^2\alpha)=6\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$,

故 $\sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$,

故左式 $=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha-5(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)$

$+10\sin\alpha=16\sin^5\alpha$

(12) 左邊 $=1+\cos(4\alpha-\alpha)\cos(4\alpha+\alpha)=1+\cos^2 4\alpha\cos^2\alpha$
$-\sin^2 4\alpha\sin^2\alpha=1+\cos^2 4\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha$
$(1-\cos^2 4\alpha)=1+\cos^2 4\alpha-\sin^2\alpha$
$=\cos^2 4\alpha+(1-\sin^2\alpha)=\cos^2 4\alpha+\cos^2\alpha$

12. 具有條件 $A+B+C=180°$ 之三角函數數式之變形

因 $A+B+C=180°$，故 A 與 $B+C$，B 與 $A+C$，C 與 $A+B$ 均互爲補角，即

$$B+C=180°-A,\ C+A=180°-B,\ A+B=180°-C$$

因此可得下列關係式：

$$\sin(B+C)=\sin(180°-A)=\sin A$$
$$\cos(B+C)=\cos(180°-A)=-\cos A$$
$$\tan(B+C)=\tan(180°-A)=-\tan A$$

$C+A$，$A+B$ 之三角函數可照上式類推。

又因 $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°$，故 $\frac{B+C}{2}$ 與 $\frac{A}{2}$，$\frac{C+A}{2}$ 與 $\frac{B}{2}$，$\frac{A+B}{2}$ 與 $\frac{C}{2}$ 均互爲餘角，即

$$\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2},\ \frac{C+A}{2}=90°-\frac{B}{2},\ \frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$$

因此可得下列關係式：

$$\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2},\ \cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$$
$$\tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}$$

〔例1〕 若 $A+B+C=180°$，證明

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(復旦、東北、武漢等大學)

(要點) 先將末二項變形爲，即

$$\sin B+\sin C=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

因 $A+B+C=180°$ 故 $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$，以之代入，則

$$\sin B+\sin C=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

將第一項 $\sin A$ 變形爲 $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，則其與末二項有公因數 $\cos\frac{A}{2}$，即

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

將括號內之 $\sin\frac{A}{2}$ 化爲 $\cos\frac{B+C}{2}$ 後，再化和爲積形即得證。

(證) 左邊 $=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$
$=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$
$=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)$
$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

〔例2〕 設 $A+B+C=180°$，求證

$$\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}$$

(要點) 倣〔例1〕首兩項變形爲積，得

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

着眼於 $\sin\frac{C}{2}$，將 $\cos C-1$ 變形

$\cos C-1=-(1-\cos C)=-2\sin^2\frac{C}{2}$，則有公因數

$sin\frac{C}{2}$，後倣〔例1〕證之。

（證一） 左邊 $=2\ cos\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}-(1-cosC)$

$=2\ sin\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}-2\ sin^2\frac{C}{2}$

$=2(cos\frac{A-B}{2}-sin\frac{C}{2})\ sin\frac{C}{2}$

$=2(cos\frac{A-B}{2}-cos\frac{A+B}{2})\ sin\frac{C}{2}$

$=4\ sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$

（證二） 式邊 $=cos\ A+cos\ B+cos\ C+cos\ 180°$

$=2\ cos\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}+2cos\frac{180°+C}{2}cos\frac{180°-C}{2}$

$=2\ sin\frac{C}{2}cos\frac{A-B}{2}-2\ sin\frac{C}{2}cos\frac{A+B}{2}$

$=2\ sin\frac{C}{2}\ [cos\frac{A-B}{2}-cos\frac{A+B}{2}]$

$=4\ sin\frac{C}{2}\ sin\frac{B}{2}\ sin\frac{A}{2}$

〔例3〕 設 $A+B+C=180°$，試證

$sin\ 3A+sin\ 3B+sin\ 3C=-4\ cos\frac{3A}{2}\ cos\frac{3B}{2}\ cos\frac{3C}{2}$

（證） 左邊 $=2\ sin\frac{3A}{2}\ cos\frac{3A}{2}+2\ sin\frac{3(B+C)}{2}\ cos\frac{3(B-C)}{2}$

因 $B+C=180°-A$，故

$sin\frac{3(B+C)}{2}=sin\frac{3(180°-A)}{2}=sin(270°-\frac{3A}{2})$

$=-sin(90°-\frac{3A}{2})=-cos\frac{3A}{2}$

∴ 左邊 $=2\ sin\frac{3A}{2}\ cos\frac{3A}{2}-2\ cos\ \frac{3A}{2}\ cos\frac{3(B-C)}{2}$

$=2\ cos\frac{3A}{2}[sin\frac{3A}{2}-cos\frac{3(B-C)}{2}]$

但 $sin\frac{3A}{2}=sin\frac{3(180°-\overline{B+C})}{2}=sin[270°-\frac{3(B+C)}{2}]$

$=-cos\frac{3(B+C)}{2}$

∴ 左邊 $=-2\ cos\frac{3A}{2}[cos\frac{3(B+C)}{2}+cos\frac{3(B-C)}{2}]$

$=-4\ cos\frac{3A}{2}cos\frac{3B}{2}cos\frac{3C}{2}$

〔例4〕 設 $A+B+C=\pi$；試證

$sin^2 A+sin^2 B+sin^2 C=2+2\ cos\ A\ cos\ B\ cos\ C$ （齊魯大學）

（要點） 將公式 $sin^2 A=\frac{1-cos\ 2A}{2}$ 代入左邊消去其平方關係，後變形證之。

（證） 左邊 $=\frac{1-cos\ 2A}{2}+\frac{1-cos\ 2B}{2}+\frac{1-cos\ 2C}{2}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(cos\ 2A+cos\ 2B+cos\ 2C)$

因 $cos\ 2A+cos\ 2B+cos\ 2C=2\ cos(A+B)cos(A-B)$

$+cos\ 2C=-2\ cos\ C\ cos(A-B)+2\ cos^2 C-1$

$=-2\ cos\ C[cos(A-B)-cos\ C]-1$

$=-2\ cos\ C[cos(A-B)+cos(A+B)]-1$

$=-4\ cos\ A\ cos\ B\ cos\ C-1$

∴ 左邊 $=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-4\ cos\ A\ cos\ B\ cos\ C-1)$

$=2+2\ cos\ A\ cos\ B\ cos\ C$

〔例5〕 設 $A+B+C=\pi$；試證 $sin^3 A+sin^3 B+sin^3 C$

$=3\ cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}cos\frac{C}{2}+cos\frac{3A}{2}cos\frac{3B}{2}cos\frac{3C}{2}$

（要點） 將 $sin\ 3A=3\ sin\ A-4\ sin^3 A$ 變形為 $sin^3 A=\frac{3\ sin\ A-sin\ 3A}{4}$

代入左邊，消去立方關係後，照〔例1〕及〔例4〕證之。

（證） 左邊$=\dfrac{3\sin A-\sin 3A}{4}+\dfrac{3\sin B-\sin 3B}{4}+\dfrac{3\sin C-\sin 3C}{4}$

$=\dfrac{3}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)-\dfrac{1}{4}(\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C)$

$=\dfrac{3}{4}\left(4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\right)-\dfrac{1}{4}\left(-4\cos\dfrac{3A}{2}\cos\dfrac{3B}{2}\cos\dfrac{3C}{2}\right)$

$=3\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\cos\dfrac{3A}{2}\cos\dfrac{3B}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$

〔例6〕 設 $A+B+C=\pi$，試證

$\cos 2A+\cos 2B+\sin 2C$

$=4\sin(A-45°)\cos(B+45°)\cos C$

（證） 左邊$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=-2\cos C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\cos C[-\cos(A-B)+\sin(A+B)]$

$=2\cos C[-\sin(90°-A+B)+\sin(A+B)]$

$=2\cos C[\sin(A+B)-\sin(90°-A+B)]$

$=4\sin(A-45°)\cos(B+45°)\cos C$

〔例7〕 設 $A+B+C=\pi$，求證

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

（要點） 本題可倣前節（七）〔例1〕及〔例2〕證之，或將求證之式予變形爲 $\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

$=-\tan C(1-\tan A\tan B)$

$\therefore\ \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

上式之左邊爲 $\tan(A+B)$ 之展開式，故可證如下：

（證一） $\because\ A+B+C=\pi$，$\therefore\ A+B=\pi-C$

$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$

$\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

即 $\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

（證二） 若 $A+B+C=\pi$，則 $\tan(A+B+C)=\tan\pi=0$

$\tan(A+B+C)$ 展開式之分子必等於0，

即 $\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C=0$

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

〔例8〕 設 $A+B+C=180°$，試證

$\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=1$

（武漢大學）

（證） 因 $A+B+C=180°$ $\dfrac{A+B}{2}=90°-\dfrac{C}{2}$

$\tan\dfrac{A+B}{2}=\tan\left(90°-\dfrac{C}{2}\right)=\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}$

$\dfrac{\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}}{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}$

$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$

$\therefore\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=1$

※〔例9〕 設 $A+B+C=\pi$，試證

$\dfrac{\tan B}{\tan C}+\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan A}{\tan B}+\dfrac{\tan B}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}+\dfrac{\tan A}{\tan C}$

$=\sec A\sec B\sec C-2$

（證） $\dfrac{\tan B}{\tan C}+\dfrac{\tan A}{\tan C}=\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan C}=\dfrac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}}{\dfrac{\sin C}{\cos C}}$

$$=\frac{\sin(A+B)\cos C}{\cos A\cos B\sin C}=\frac{\sin C\cos C}{\cos A\cos B\sin C}=\frac{\cos C}{\cos A\cos B}$$

同理 $\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan B}{\tan A}=\frac{\cos A}{\cos B\cos C}$，

$\frac{\tan A}{\tan B}+\frac{\tan C}{\tan B}=\frac{\cos B}{\cos C\cos A}$ 兩邊相加，則

$$左邊=\frac{\cos C}{\cos A\cos B}+\frac{\cos A}{\cos B\cos C}+\frac{\cos B}{\cos C\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$分子=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\frac{1+\cos 2C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1]$$

$$=\frac{3}{2}+[-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C]-\frac{1}{2}$$

$$=1-\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

$$=1-2\cos A\cos B\cos C$$

$$\therefore 左邊=\frac{1-2\cos A\cos B\cos C}{\cos A\cos B\cos C}=\sec A\sec B\sec C-2$$

〔例10〕 設 $\alpha+\beta+\gamma=0$,

試證 $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$

$=(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$

（證） $左邊=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma$

$=2\sin\gamma[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

$=-4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$$右邊=2(-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2})(4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2})$$

$$=-4(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2})$$

$=-4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ 故原式得證。

〔例11〕 設 $A+B+C=\frac{\pi}{2}$，試證

$\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B=1$

（清華、同濟等大學）

（證） 因 $\frac{1}{\tan(A+B+C)}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}}=0$

故 $$\frac{1}{\frac{\tan A+\tan(B+C)}{1-\tan A\tan(B+C)}}=\frac{1-\tan A\tan(B+C)}{\tan A+\tan(B+C)}=0$$

即 $$1-\tan A\tan(B+C)=1-\frac{\tan A(\tan B+\tan C)}{1-\tan B\tan C}$$

$$=\frac{1-\tan B\tan C-\tan A\tan B-\tan C\tan A}{1-\tan B\tan C}=0$$

故 $\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B=1$

〔例12〕 設 $A+B+C+D=360°$，試證

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$$

（證） $$左邊=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

因 $A+B+C+D=360°$，$C+D=360°-(A+B)$

$$\frac{C+D}{2}=180°-\frac{A+B}{2}$$

$$\cos\frac{C+D}{2}=\cos(180°-\frac{A+B}{2})=-\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\therefore 左邊=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C-D}{2})$$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{(B+D)-(A+C)}{4}$$

$$\sin\frac{(A+D)-(B+C)}{4}$$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{(A+B+C+D)-2(A+C)}{4}$$
$$\sin\frac{(A+B+C+D)-2(B+C)}{4}$$
$$=4\cos\frac{A+B}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right)$$
$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$$

習題十八

試證下列各式:〔設 $A+B+C=180°$, (1)——(17)〕

(1) $\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(2) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

(3) $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1$

(4) $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A\cos B\sin C$

(5) $\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C=2\sin A\sin B\sin C$

(6) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=-4\cos A\cos B\cos C$

(7) $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1-4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$

(8) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=-4\sin A\sin B\cos C+1$

(9) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

(10) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(11) $\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C=2-2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$

(12) $\sin^2 A+2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 B+\sin^2 C$

(13) $\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C$

$$=1+3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$$

(14) $\sin A+\sin B+\cos C+1=4\cos\left(45°-\frac{A}{2}\right)\cos\left(45°-\frac{B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$

(15) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$

(復旦大學)

(16) $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$

(17) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

(18) 設 $\alpha+\beta+\gamma=0$, 求證

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(19) 設 $\alpha+\beta+\gamma=0$, 求證 $\cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha=1$

(20) 設 $A+B+C+D=2\pi$, 求證

$$\frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\cot A+\cot B+\cot C+\cot D}=\tan A\tan B\tan C\tan D$$

習題略解

(1) 倣〔例1〕 (2) 左邊 $=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=2\sin C\ 2\sin A\sin B=$ 右邊

(3) 倣〔例2〕 (4) 倣(2)證之。

(5) 變 $\sin A\cos A=\frac{1}{2}\sin 2A$, $\sin B\cos B=\frac{1}{2}\sin 2B$,

$\sin C\cos C=\frac{1}{2}\sin 2C$ 則變成(2)題。

(6) 左邊 $=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C=-2\cos C\cos(A-B)$

$+2\cos^2 C=-2\cos C[\cos(A-B)-\cos C]$

$=-2[\cos(A-B)+\cos(A+B)]\cos C=$ 右邊

(7) 倣〔例3〕

(8) 左邊 $=2\cos(A+B)\cos(A-B)-2\cos^2 C+1$

$=-2\cos C\cos(A-B)+2\cos C\cos(A+B)+1$

$=2\cos C[\cos(A+B)-\cos(A-B)]+1=$ 右邊

(9) 左邊 $=\frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B+1+2\cos C)$

$=\frac{1}{2}[3+(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)]$

$=\frac{1}{2}[3-4\cos A\cos B\cos C-1]=$ 右邊

(10) 倣〔例 4〕　(11) 倣〔例 4〕

(12) 先作 $\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=-2\sin B\sin C\cos A$.

後倣〔例 4〕　(13) 倣〔例 5〕

(14) 左邊 $=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos^2\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\left(90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)\right]$

$=4\cos\frac{C}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)$

(15) 右邊 $=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left[\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right]$

$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}+2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$

$=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{4}=$ 右邊

(16) $\tan(A+B)=-\tan C$, $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

∴ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$，兩邊除以 $\tan A\tan B\tan C$ 即得證之。

(17) 倣上題得 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}=\cot\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

將 tan 之項改為 cot 之項則，得

$$\frac{1}{\cot\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cot\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}-\frac{\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}}$$

$$\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{A}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{C}{2}$$

(18) 左邊 $=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

$=2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]=$ 右邊

(19) $\cot\alpha=\cot[-(\beta+\gamma)]=-\frac{\cot\beta\cot\gamma-1}{\cot\beta+\cot\gamma}$

即 $\cot\alpha(\cot\beta+\cot\gamma)=-(\cot\beta\cot\gamma-1)$，故得證。

(20) $A+B=2\pi-(C+D)$

$\tan(A+B)=-\tan(C+D)$, $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{\tan C+\tan D}{1-\tan C\tan D}$

$(\tan A+\tan B)(1-\tan C\tan D)$

$=(\tan C+\tan D)(\tan A\tan B-1)$

∵ $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D=\tan A\tan B\tan C$

$+\tan B\tan C\tan D+\tan C\tan D\tan A+\tan D\tan A\tan B$

$=\tan A\tan B\tan C\tan D(\cot A+\cot B+\cot C+\cot D)$

∴ 得證

13. 關於等差級數 (A.P.) 等比級數 (G.P.) 及調和級數 (H.P.) 等問題

〔例 1〕 若 $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ 為 A. P., 則

$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}, \tan\frac{\gamma+\alpha}{2}, \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ 亦為 A. P.

〔證〕 因 $\sin\alpha-\sin\beta=\sin\beta-\sin\gamma$

即 $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$

即 $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\overline{\gamma+\alpha}-\overline{\beta+\gamma})$

$=\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\overline{\alpha+\beta}-\overline{\gamma+\alpha})$

即 $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)[\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$

$-\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)]$

$=\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)[\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

$-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)]$

兩邊以 $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ 除之則

$\tan\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)-\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$

$=\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\tan\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ 故得證

〔例2〕 設 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ 爲 A. P., 又 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\delta$ 爲 H. P., 則 $\frac{\tan\gamma}{\tan\delta}=1-\frac{8\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha\sin 2\beta}$

(證) 今 $\tan\alpha+\tan\gamma=2\tan\beta$ ($\because$ A. P.)

$\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\delta}=\frac{2}{\tan\beta}$ ($\because$ H. P.)

故 $\frac{\tan\gamma}{\tan\delta}=(2\tan\beta-\tan\alpha)(\frac{2}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan\alpha})$

$=\frac{5\tan\alpha\tan\beta-2\tan^2\alpha-2\tan^2\beta}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

$=1-\frac{2(\tan\alpha-\tan\beta)^2}{\tan\alpha\tan\beta}=1-\frac{2\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\tan\alpha\tan\beta}$

$=1-\frac{2\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta}=1-\frac{8\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha\sin 2\beta}$

〔例3〕 設 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, 又 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ 成 A. P., 則 $\cos(\beta+\gamma-\alpha)=\frac{4+5\cos 2\gamma}{5+4\cos 2\gamma}$

(證) 今 $\tan\alpha+\tan\gamma=2\tan\beta=-2\tan(\alpha+\gamma)$

$=\frac{-2(\tan\alpha+\tan\gamma)}{1-\tan\alpha\tan\gamma}$ ($\because$ A. P.)

$\therefore$ $1-\tan\alpha\tan\gamma=-2$, 即 $\tan\alpha\tan\gamma=3$

$\therefore$ $\tan\alpha=3\cot\gamma$ 或 $\tan^2\alpha=3\cot^2\gamma$

故 $\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{9(1+\cos 2\gamma)}{1-\cos 2\gamma}$

即 $\frac{1}{\cos 2\alpha}=\frac{5+4\cos 2\gamma}{-(4+5\cos 2\gamma)}$ (合分比定理)

但 $\cos 2\alpha=-\cos(\pi-2\alpha)=-\cos(\beta+\gamma-\alpha)$

$\therefore$ $\cos(\beta+\gamma-\alpha)=\frac{4+5\cos 2\gamma}{5+4\cos 2\gamma}$

〔例4〕 設 $\sin\alpha$ 與 $\cos\alpha$ 之等差中項爲 $\sin\theta$, 等比中項爲 $\sin\phi$, 求證 $\cos 2\theta=\frac{1}{2}\cos 2\phi=\cos^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

(證) 依假設則 $\begin{cases}2\sin\theta=\sin\alpha+\cos\alpha\cdots\cdots\cdots(1)\\ \sin^2\phi=\sin\alpha\cos\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

$[(1)]^2-(2)\times 2$, 得 $4\sin^2\theta-2\sin^2\phi=1$

$\therefore$ $4(\frac{1-\cos 2\theta}{2})-2(\frac{1-\cos 2\phi}{2})=1$

$\therefore$ $\cos 2\theta=\frac{1}{2}\cos 2\phi$

又 $\frac{1}{2}\cos^2\phi=\frac{1}{2}[1-\sin^2\phi]=\frac{1}{2}[1-2\sin\alpha\cos\alpha]$

$=\frac{1}{2}[1-\sin 2\alpha]=\frac{1}{2}[1+\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha)]$

$=\frac{1}{2}[2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)]=\cos^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

$\therefore$ $\cos 2\theta=\frac{1}{2}\cos 2\phi=\cos^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

習題十九

(1) 設 $\sin(B+C-A)$, $\sin(C+A-B)$, $\sin(A+B-C)$ 成等差級

數，則 $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 亦成等差級數。

(2) 設一三角形之三內角各爲 A, B, C，若 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 成 A.P. 則 $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ 亦成 A.P.

(3) 若 $\cos(\beta-\alpha)$, $\cos\beta$, $\cos(\beta+\alpha)$ 成 H.P. 則

$$\cos\beta=\pm\sqrt{2}\times\cos\frac{\alpha}{2}$$

(4) 設 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，又 $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ 成等差級數，則

$$\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{3}$$

習題略解

(1) $\sin(C+A-B)-\sin(B+C-A)$
$=\sin(A+B-C)-\sin(C+A-B)$
$\therefore\ 2\cos C\sin(A-B)=2\cos A\sin(B-C)$
$\therefore\ \cos C\sin A\cos B-\cos C\cos A\sin B$
$=\cos A\sin B\cos C-\cos A\cos B\sin C$
兩邊除以 $\cos A\cos B\cos C$，則得證。

(2) 由假設 $\sin B-\sin A=\sin C-\sin B$，故

$$2\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}=2\cos\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2}$$

$$\therefore\ \sin\frac{C}{2}\sin\frac{B-A}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2}$$

$$\therefore\ \sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

兩邊各除以 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，則得證。

(3) 因 $\frac{2}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos(\beta-\alpha)}+\frac{1}{\cos(\beta+\alpha)}=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)\cos(\beta+\alpha)}$

$=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\beta-\alpha)\cos(\beta+\alpha)}=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$，故

$\cos^2\beta=\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$，故得證。

(4) $\because\ \sin\alpha+\sin\gamma=2\sin\beta=2\sin(\alpha+\gamma)$

即 $\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$ 即 $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

$=2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$

故 $3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$，故 $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{3}$

14. 雜題

〔例 1〕 設 $A+B+C=\pi$，則 $\cot A+\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$ 在式中，A, B, C 之位置，無論如何互換，其值仍不變。

〔要點〕 將原式變換爲關於 A, B, C 之對數式。

〔證〕 $\cot A+\frac{\sin A}{\sin B\sin C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$

$=\frac{\cos A\sin B\sin C+\sin^2 A}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{\cos A\sin B\sin C+1-\cos^2 A}{\sin A\sin B\sin C}$

$=\frac{1+\cos A(\sin B\sin C-\cos A)}{\sin A\sin B\sin C}$

$=\frac{1+\cos A[\sin B\sin C+\cos(B+C)]}{\sin A\sin B\sin C}$

$=\frac{1+\cos A(\sin B\sin C+\cos B\cos C-\sin B\sin C)}{\sin A\sin B\sin C}$

$=\frac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}$

上式右邊 A, B, C 之位置，無論如何互換，其值顯然不變，故左邊即原式之值不變。

〔例 2〕 若 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$……① 及 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$……② 時，試證 $3(\beta-\gamma)$, $3(\gamma-\alpha)$, $3(\alpha-\beta)$ 各爲 2π 之整數倍，並求 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$ 之值。（武漢大學）

（解） 由 $\cos\alpha\times①-\sin\alpha\times②$，得 $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)=0\cdots③$

由 $\sin\alpha\times①+\cos\alpha\times②$，得

$1+\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\gamma)=0\cdots\cdots\cdots④$

因由③得 $\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}+\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\gamma)}=0$，展開之得

$\cos(\alpha-\beta)=\pm\cos(\alpha-\gamma)$

由④及上式得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\gamma-\alpha)=-\frac{1}{2}$

同理可得 $\cos(\beta-\gamma)=\cos(\gamma-\alpha)=\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$

故 $\beta-\gamma=\gamma-\alpha=\alpha-\beta=2n\cdot360°\pm120°$

故 $3(\beta-\gamma)=3(\gamma-\alpha)=3(\alpha-\beta)=360°$ 之整數倍

又 $\beta=120°-\alpha,\ \gamma=120°+\alpha$

故 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$

$=\frac{1}{2}[3+\cos2\alpha+\cos(240°-2\alpha)+\cos(240°+2\alpha)]$

$=\frac{1}{2}[3+\cos2\alpha+2\cos240°\cos2\alpha]=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$

〔例4〕 設 $\tan\alpha,\tan\beta$ 爲 $x^2+px+q=0$ 之根，且 $\alpha\neq\beta$，試證

$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=q$

（證） 由 $\tan\alpha+\tan\beta=-p,\ \tan\alpha\tan\beta=q$

得 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{p}{q-1}$，$\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}$

故原式 $=\cos^2(\alpha+\beta)[\tan^2(\alpha+\beta)+p\tan(\alpha+\beta)+q]$

$=\frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}[(\frac{p}{q-1})^2+p(\frac{p}{q-1})+q]$

$=\frac{p^2}{p^2+(q-1)^2}+\frac{pp(q-1)}{p^2+(q-1)^2}+\frac{q(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}=q$

〔例5〕 若 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，試證 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha$

（解） 由 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，得 $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\frac{1}{m}$

$\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}=\frac{1+m}{1-m}$

$\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}=\frac{1+m}{1-m}$

故 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha$

習題二十

1） 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，又 $\sin\alpha=\cos\beta\cos\gamma$ 時，試證

$\tan\beta+\tan\gamma=1$

2） $\sin^2(\alpha-\theta)+2\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)\sin\theta+\sin^2\theta$ 中之 θ 與式之値無關。

3） 若 $\tan\alpha,\tan\beta$ 爲 $x^2+bx+1+b=C$ 之根，且 $\alpha\neq\beta$

則 $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$ （武漢大學）

4） 設 $\alpha\neq\beta$，且均能滿足 $a\cos2\theta+b\sin2\theta=c$，

試證 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\frac{a^2+ac+b^2}{a^2+b^2}$

習題略解

1） 因 $\alpha=\pi-(\beta+\gamma)$，故 $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)=\cos\beta\cos\gamma$，

即 $\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma=\cos\beta\cos\gamma$，故 $\tan\beta+\tan\gamma=1$

2） 原式 $=\sin(\alpha-\theta)[\sin(\alpha-\theta)+2\cos\alpha\sin\theta]+\sin^2\theta$

$=\sin(\alpha-\theta)[\sin(\alpha-\theta)+\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)]+\sin^2\theta$

$=\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha+\theta)+\sin^2\theta=\sin^2\alpha-\sin^2\theta+\sin^2\theta$

$=\sin^2\alpha$ 故 θ 與式之値無關

（3） $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=-b,\ \tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=1+b$

故 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$，即 $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$

（4） 化原式爲 $a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2b\sin\theta\cos\theta=c$

$2a\cos^2\theta-a-c=2b\sin\theta\cos\theta$，

$(2a\cos^2\theta-a-c)^2=(2b\sin\theta\cos\theta)^2$ 即 $4(a^2+b^2)\cos^4\theta-4(a^2+ac+b^2)\cos^2\theta+(a+c)^2=0$ 視上式爲 $\cos^2\theta$ 之二次方程式，則 $\cos^2\theta$ 兩根爲 $\cos^2\alpha,\cos^2\beta$，故得證。

綜合習題二

(1) 已知 $\cos A=\frac{2}{3}$ 及 $\sin B=\frac{4}{5}$，求 $\sin(A-B)$ 及 $\cos(A-B)$ 之値

答：$\frac{-8\pm3\sqrt{5}}{15}$，$\frac{\pm6\pm4\sqrt{5}}{15}$

(2) 求 $\cos 130^\circ\tan(-45^\circ)+\sin 150^\circ\sec 210^\circ$ 之值。 答：$1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(3) 求 $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ 之值。 答：$\frac{1}{8}$

(4) 求 $\cos 40^\circ+\cos 60^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ$ 之值。 答：$\frac{1}{2}$

(5) 求 $\tan 20^\circ\tan 40^\circ\tan 60^\circ\tan 80^\circ$ 之值。 答：3

(6) 試證 $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=\sin 70^\circ+\sin 80^\circ$

(7) 試證 $\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

(8) 求證 $\tan x+2\tan 2x+4\tan 4x=\cot x-8\cot 8x$

提示：$\tan x-\cot x=-2\cot 2x$

(9) 試證 $\sin(x+y)+\cos(x-y)=2\sin(x+\frac{1}{4}\pi)\sin(y+\frac{1}{4}\pi)$

(10) 試證 $\sin(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin(x-\frac{1}{4}\pi)\sin(y-\frac{1}{4}\pi)$

提示：(9)及(10)應從右邊推至右邊

(11) 求證 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

(12) 求證 $16\sin\frac{x}{16}\cos\frac{x}{16}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}=\sin x$

(13) 求證 $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{-(\cot\alpha-\cot\beta)}{\cot\alpha+\cot\beta}$

(14) 求證 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

(15) 求證 $\frac{1}{\tan 3\theta+\tan\theta}-\frac{1}{\cot 3\theta+\cot\theta}=\cot 4\theta$

(16) 求證 $4\cos 3\alpha\sin^3\alpha+4\sin 3\alpha\cos^3\alpha=3\sin 4\alpha$

(17) 求證 $\tan 3x\tan x=\frac{\tan^2 2x-\tan^2 x}{1-\tan^2 2x\tan^2 x}$

提示：左邊$=\tan(2x+x)\tan(2x-x)=\cdots\cdots$

(18) 試證 $\sin 3x=\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{\sin x}$

(19) 試證 $\sin(\alpha-\theta)\sin(\beta-\gamma)+\sin(\beta-\theta)\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\gamma-\theta)\sin(\alpha-\beta)=0$

(20) 試證 $\tan(x-y)+\tan(y-z)+\tan(z-x)=\tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x)$

(21) 求證 $16\cos^5 x=\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x$

(22) 求證 $\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})+\cot(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})=\frac{2}{\cos x}$

(23) 求證 $2\sin 7x+16\sin x\cos^2 x=\frac{\sin 6x+4\sin 2x(1+2\cos^3 2x)}{\cos x}$

提示：左邊$=\frac{1}{\cos x}(\sin 8x+\sin 6x+8\sin 2x\cos^2 x)$

(24) 求證 $\sin 7x=7\sin x-56\sin^3 x+112\sin^5 x-64\sin^7 x$

(25) 求證 $\sin 6x=2\sin x(16\cos^5 x-16\cos^3 x+3\cos x)$

(26) 求證 $\sin 5x+\cos 5x=(\sin x+\cos x)(2\cos 4x+2\sin 2x-1)$

(27) 求證 $\tan 9^\circ-\tan 27^\circ-\tan 63^\circ+\tan 81^\circ=4$

(28) 求證 $\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ=\sqrt{3}$

(29) 求證 $\cos^2 A+\cos^2(60^\circ+A)+\cos^2(60^\circ-A)=\frac{3}{2}$

(30) 求證 $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=-\frac{1}{12}$

設 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$：(31——32)

(31) 求證 $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=-4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

(32) 求證 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+1$

若 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$：(33——36)

(33) 試證 $(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)$
$=1+\csc\alpha\csc\beta\csc\gamma$

(34) 試證 $\frac{\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma}{\sin2\alpha+\sin2\beta-\sin2\gamma}=\cot\alpha\cot\beta$

(55) 試證 $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$

(36) 試證 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\times\tan\gamma$
$+\sec\alpha\sec\beta\sec\gamma$

提示：$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$：(37——46)

(37) 試證 $\sin3\alpha+\sin3\beta+\sin3\gamma=-4\cos\frac{3}{2}\alpha\cos\frac{3}{2}\beta\cos\frac{3}{2}\gamma$

(38) 試證 $\cos4\alpha+\cos4\beta+\cos4\gamma=4\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma-1$

(39) 試證 $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

(40) 試證 $\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta=1$

(41) 試證 $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$

(42) 試證 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-1$

(43) 試證 $\frac{\cot\beta+\cot\gamma}{\tan\beta+\tan\gamma}+\frac{\cot\gamma+\cot\alpha}{\tan\gamma+\tan\alpha}+\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=1$

(44) 試證 $\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma+4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

(45) 試證 $\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma$

$$=1-\sin\frac{3}{2}\alpha\sin\frac{3}{2}\beta\sin\frac{\lambda}{2}+3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

(46) 試證 $\sin(\beta+2\gamma)+\sin(\gamma+2\alpha)+\sin(\alpha+2\beta)$
$=4\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

若 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$：(47——48)

(47) 試證 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta}{\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma+\cot\delta}=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\tan\delta$

(48) 試證 $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$
$+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}$

(49) 設 $\cot\alpha, \cot\beta, \cot\gamma$ 爲 A. P.，則 $\cot(\beta-\alpha), \cot\beta, \cot(\beta-\gamma)$ 亦爲 A. P.

(50) 設 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan\gamma$ 爲 A. P. 又 $\tan\alpha$，$\tan\beta, \tan\delta$
爲 H. P. 則 $\frac{\tan\gamma}{\tan\delta}=1-\frac{8\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin2\alpha\sin2\beta}$

(51) 設 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，又 $\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\sin\gamma$ 成 A. P.
則 $\cot\frac{\alpha}{2}$，$\cot\frac{\beta}{2}$，$\cot\frac{\gamma}{2}$ 亦成 A. P.

(52) 若 $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=p$ 及 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=q$，試證
$\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma$ 爲 $qx^3-px^2+(1+q)x-p=0$ 之三根

※(53) 若 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$，
試證 $\csc^2\alpha+\csc^2\beta+\csc^2\gamma\pm2\csc\alpha\csc\beta\csc\gamma=1$

※(54) 若 $\tan\frac{\alpha}{2}=\tan^3\frac{\beta}{2}$，$\tan\beta=2\tan\phi$，則 $\alpha+\beta=2\phi$，
試證之。

※(55) $\sin A:\sin B:\sin C=x:y:z$，則
$(x-y)\cot\frac{C}{2}+(y-z)\cot\frac{A}{2}+(z-x)\cot\frac{B}{2}=0$

提示：用比例法求出 $x-y$，$y-z$，$z-x$

※(56) 設 $\sin^3\gamma=\sin(A-\gamma)\sin(B-\gamma)\sin(C-\gamma)$

求證 $\csc^2\gamma=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$

※(57) 設 x, y, z 爲 A.P., 則

$$\frac{\tan y}{\tan(y-z)}=\frac{\sin x+\sin z}{\sin x-\sin z}=\frac{\tan\frac{1}{2}(x+z)}{\tan\frac{1}{2}(x-z)}$$

提示 ∵ $y-z=y-x$ 即 $y-z=\frac{1}{2}(x+z)-z=\frac{1}{2}(x-z)$

※(58) 設 $\frac{\tan(A-B)}{\tan A}+\frac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=1$, 則 $\tan^2 C=\tan A\tan B$

※(59) 設 $\cos(\phi-\alpha)$, $\cos\phi$, $\cos(\phi+\alpha)$ 爲 H.P., 則

$\cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\alpha$

※(60) 若三角形 A, B, C, 三角合乎 $\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$ 之關係，則爲直角三角形。(東北大學)

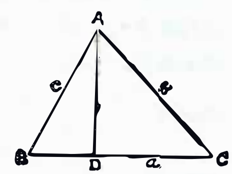
第四章 三角形邊角間之關係

1. 正弦定律 (Law of sine)

設任意三角形△ABC 中, A, B, C 表三內角; a, b, c 各表角 A, B, C 之對邊，則邊與對角之正弦成比例。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

(證) (i) 設 △ABC 爲銳角三角形, AD 爲 BC 之垂線，則



$\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{c}$

∴ $AD=c\sin B$

$\sin C=\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{b}$

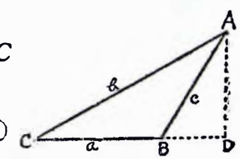
∴ $AD=b\sin C$

∴ $c\sin B=b\sin C$ 即 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

同理由 C 引對邊之垂線，則得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

故 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

(ii) 設 △ABC 爲鈍角三角形, B 爲鈍角，作 AD 垂直 CB 之延長線，則



$AD=AC\sin C=b\sin C$

又 $AD=AB\sin B$

$=AB\sin(180°-B)$

$=c\sin B$

∴ $b\sin C=c\sin B$

即 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

(iii) 設 △ABC 爲直角三角形, $\angle C=\angle R$

則 $\sin C=1;\ \sin B=\frac{b}{c}$

即 $\frac{b}{\sin B}=c=\frac{c}{1}=\frac{c}{\sin C}$

由正弦定律之公式，任意三角形，若已知兩角及一邊，或兩邊及一邊之對角，可求出其餘之部分。

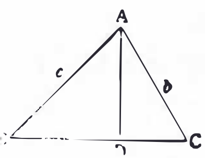
2. 餘弦定律 (Law of cosine)

$$\left.\begin{array}{l} b\cos C+c\cos B=a\\ c\cos A+a\cos C=b\\ a\cos B+b\cos A=c\end{array}\right\}\cdots(A)\qquad \left.\begin{array}{l} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{array}\right\}\cdots(B)$$

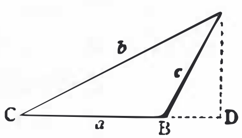
$$\left.\begin{array}{l} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{array}\right\}\cdots\cdots(C)$$

(證) 於 $\triangle ABC$ 中，自 A 作 $AD\perp BC$，交 BC 或其延長線於 D，

〔圖一〕



〔圖二〕



於〔圖一〕中，

$BD=c\cos B$

$DC=b\cos C$

$BC=BD+DC$

$\therefore\ a=c\cos B+b\cos C$

於〔圖二〕中，

$BD=c\cos\angle ABD=-c\cos B$

$CD=b\cos C$

$BC=DC-DB$

$\therefore\ a=b\cos C+c\cos B$

同理：若自 B,C 各向對邊作垂線，即可得任意三角形中之一組關係式：

$$\begin{cases} b\cos C+c\cos B=a\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ c\cos A+a\cos C=b\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ a\cos B+b\cos A=c\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

由 $(2)\times b-(1)\times a$，得 $bc\cos A-ac\cos B=b^2-a^2\cdots\cdots(4)$

由 $(3)\times c+(4)$，得 $2bc\cos A=c^2+b^2-a^2$

$$\therefore\text{同理可得}\quad \left.\begin{array}{l} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{array}\right\}$$

或

$$\left.\begin{array}{l} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{array}\right\}$$

由餘弦定律之公式，任一三角形若已知兩邊及夾角，或已知三邊，可求得其餘三部分。

3. 正切定律 (Law of tangent)

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(C-A)}{\tan\frac{1}{2}(C+A)}$$

(證) 由正弦定律

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\qquad\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$

由合分比定理，

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$=\cot\frac{1}{2}(A+B)\tan\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\therefore\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

同理可證其他關係式。

4. 半角定律

(1) $$\begin{cases}\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{cases}$$

(3) $$\begin{cases}\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{cases}$$

(r 爲△之內接圓之半徑)

(4) $$\begin{cases}\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}\\ \tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b}\\ \tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}\end{cases}$$

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，r 爲內切圓之半徑

（證） 由餘弦定律得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\quad\therefore\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

(1) $$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{1}{4bc}[a^2-(b-c)^2]=\frac{1}{4bc}(a-b+c)(a+b-c)$$

因 $2s=a+b+c$ 故 $a-b+c=2(s-b)$

$a+b-c=2(s-c)$，$-a+b+c=2(s-a)$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{bc}(s-b)(s-c)$$

因 $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$ ∴ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

同理 $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$，$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

(2) $$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{1}{4bc}[(b+c)^2-a^2]=\frac{1}{4bc}(a+b+c)(b+c-a)$$

$$=\frac{1}{bc}s(s-a)$$

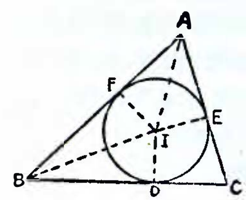
因 $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$ ∴ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

同理 $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$，$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

(3) $$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\cdot\frac{bc}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

同理 $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$，$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

(4)



於△ABC，設內切圓心爲 I，切點爲 D, E, F，則

$AF=AE$

$BD=BF$

$CD=CE$ (+

$\therefore\ AF+BC=BF+AC=s$　即　$AF+a=BF+b=s$

$\therefore\ AF=s-a,\ BF=s-b$, 同理 $CE=s-c$

故　$\tan\frac{A}{2}=\frac{FI}{AF}=\frac{r}{s-a}$　　$\tan\frac{B}{2}=\frac{FI}{BF}=\frac{r}{s-b}$

$\tan\frac{C}{2}=\frac{EI}{CE}=\frac{r}{s-c}$

5. 三角形之解法

一三角形中有六個原素，即三個內角(A,B,C)及三邊(a,b,c)。但因$A+B+C=180°$，故實際只有五個條件。任意知其中三個(至少須有一邊)其餘兩個即可求得。今分二類討論於下：

〔註〕 等腰三角形及正多邊形可變爲直角形解之。

（一） 直角三角形之解法

設　$\triangle ABC$中$\angle C=90°$，應用三角函數之定義及畢氏定理。

則　a,b,c,A及下有下列之關係式。

$a=c\sin A=c\cos B$ ……………(1)

$b=c\sin B=c\cos A$ ……………(2)

$a=b\tan A=b\cot B$ ……………(3)

$b=a\tan B=a\cot A$ ……………(4)

$c^2=a^2+b^2$ ……………………………(5)

$A+B=90°$ ………………………(6)

直角三角形之解法可分爲四種如下：

(i) 已知斜邊及一直角邊，即已知c及a邊：求A及B角用公式(1)；求b邊用公式(5)；驗算$A+B=90°$

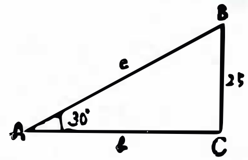
(ii) 已知兩直角邊，即已知a及b兩邊：求A及B角用公式(3)或(4)；求c用公式(5)；驗算$A+B=90°$

(iii) 已知斜邊及一銳角，即已知c邊及B角：
求a邊用公式(1)；求b邊用公式(2)
求A角用公式(6)；　驗算用公式(5)

(iv) 已知一直角邊及一銳角，即已知a邊及A角：
求B角用公式(6)；求c邊用公式(1)
求b邊用公式(3)或(4)；驗算用公式(5)

〔例1〕 已知　$A=30°$，$a=25$，求解此直角三角形。

(解) $\angle B=90°-\angle A=90°-30°=60°$



$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{25}{\sin 30°}=\frac{25}{\frac{1}{2}}=50$

$b=\frac{a}{\tan A}=\frac{25}{\tan 30°}$

$=\frac{25}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=25\sqrt{3}$

驗算：$a^2+b^2=c^2$ 即 $(25)^2+(25\sqrt{3})^2=50^2$

〔例2〕 已知　$a=70$，$b=70\sqrt{3}$，求解此直角三角形

(解) $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{70^2+(70\sqrt{3})^2}=\sqrt{4900+14700}=\sqrt{19600}$
$=140$

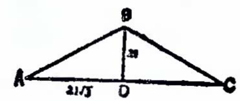
$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{70}{70\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$\therefore\ \angle A=30°$

$\angle B=90°-\angle A=90°-30°=60°$

驗算：$\angle A+\angle B=90°$

〔例3〕 已知一等腰三角形之底長爲$42\sqrt{3}$，高21。求解此三角形。

(解) 如右圖自B作$BD\perp AC$，則



$AD=\frac{AC}{2}=\frac{42\sqrt{3}}{2}=21\sqrt{3}$

$\therefore\ AB=BC=\sqrt{BD^2+AD^2}$
$=\sqrt{441+1323}=42$

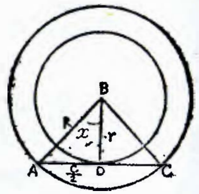
$\tan A=\frac{BD}{AD}=\frac{21}{21\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$\therefore\ A=30°$

因　$\triangle ABC$爲等腰三角形　$\therefore\ A=C=30°$

$B=180°-30°-30°=120°$

〔例 4〕 設正 n 角形之邊長爲 c，外接圓半徑爲 R，內接圓半徑爲 r，試證 $R=\frac{1}{2}c\cdot\csc\frac{180°}{n}$ 及 $r=\frac{1}{2}c\cdot\cot\frac{180°}{n}$

（證） 如右圖設 $AC=c$，$AB=R$，$BD=r$，則



$AD=\frac{1}{2}c$，按幾何定理知

$\angle ABC=\frac{360°}{n}$，故直角三角形

ABD 中，$\angle x=\frac{180°}{n}$，且 R 爲

$\angle x$ 之斜邊，r 爲 $\angle x$ 之鄰邊及

AD 爲 $\angle x$ 之對邊，故

$$\sin x=\sin\frac{180°}{n}=\frac{AD}{R}=\frac{\frac{1}{2}c}{R}$$

$$\therefore\quad R=\frac{\frac{1}{2}c}{\sin\frac{180°}{n}}=\frac{1}{2}c\cdot\frac{1}{\sin\frac{180°}{n}}=\frac{1}{2}c\ \csc\frac{180°}{n}$$

又 $$\tan x=\tan\frac{180°}{n}=\frac{AD}{r}=\frac{\frac{1}{2}c}{r}$$

$$\therefore\quad r=\frac{\frac{1}{2}c}{\tan\frac{180°}{n}}=\frac{1}{2}c\cdot\frac{1}{\tan\frac{180°}{n}}=\frac{1}{2}c\cdot\cot\frac{180°}{n}$$

（二） 任意三角形之解法

茲分四種情形分別舉例討論於下：

（i） 已知二角及一邊

設已知一邊 c 又二角 A, B,

(1) 求 $\angle C=180°-(A+B)$

(2) 求 a 及 b 邊

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C},\qquad b=\frac{c\sin B}{\sin C}$$

驗算：$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}$$

〔例〕 已知 $A=105°$，$B=60°$，$c=4$，求 C, a, b。

（解） $C=180°-(A+B)=180°-(105°+60°)=15°$

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{4\sin 60°}{\sin 15°}=\frac{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{8\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$$

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{4\sin 105°}{\sin 15°}=\frac{4\sin(90°+15°)}{\sin 15°}=\frac{4\cos 15°}{\sin 15°}$$

$$=4\cot 15°=4(2+\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$$

驗算：略

（ii） 已知三邊

設已知三邊 a, b, c,

應用餘弦定律求 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$ 驗算：$A+B+C=\pi$

有解之條件爲二邊之和大於第三邊。

〔註〕 應用半角定律解，則用對數計算爲原則。

〔例 2〕 已知 $a=\sqrt{3}+1$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$，求 A, B, C。

（解） $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{2})^2+2^2-(\sqrt{3}+1)^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2+4-3-2\sqrt{3}-1}{4\cdot\sqrt{2}}=\frac{2-2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\sqrt{2}}{4\cdot2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

∴ $\angle A=105^\circ$（$\angle A=195^\circ$ 不合理）

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{4+3+2\sqrt{3}+1-2}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{6+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(3+\sqrt{3})}{4(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2(3-1)}=\frac{3\sqrt{3}+3-3-\sqrt{3}}{2\cdot 2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ $\angle B=30^\circ$

∴ $\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-(105^\circ+30^\circ)=45^\circ$

〔例 3〕 設三邊爲 x^2+x+1，x^2-1，$2x+1$，求其最大角。（設 $x>1$）

〔解〕 今 $x^2+x+1-(x^2-1)=x+2>0$

又 $x^2+x+1-(2x+1)=x^2-x=x(x-1)>0$（∵ $x>1$）

故 x^2+x+1 爲最大邊

按幾何學知大邊對大角，今設此角爲 G，則

$$\cos G=\frac{(x^2-1)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}$$

$$=-\frac{2x^3+x^2-2x-1}{2(2x^3+x^2-2x-1)}=-\frac{1}{2}$$

∴ $\cos(180^\circ-G)=\frac{1}{2}$　　∴ $180^\circ-G=60^\circ$

∴ $G=120^\circ$，即最大角爲 120°

(iii) 已知兩邊及一夾角

設已知兩邊 b 及 c，一夾角 A

(1) 餘弦定律法

求 a 邊，則用 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

(2) 正切定律角法

求 $\frac{B-C}{2}$ 角，∵ $\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$ 爲已知

∴ $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\tan\frac{B+C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

驗算：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

〔例 4〕 已知 $c=3$，$b=5$，$\angle A=120^\circ$，求 a，B，C。

〔解〕 $a^2=c^2+b^2-2bc\cos A=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos 120^\circ$

$$=9+25-2\cdot 3\cdot 5\left(-\frac{1}{2}\right)=34+15=49$$

∴ $a=7$（-7 不合）

$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}=90^\circ-\frac{120^\circ}{2}=30^\circ\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{b-c}\cot\frac{A}{2}=\frac{5+3}{5-3}\cot 60^\circ$$

$$=4\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

∴ $\frac{B-C}{2}=24.34^\circ\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解 (1) 及 (2) 得 $B=54.34^\circ$，$C=5.66^\circ$

(iv) 已知二邊及一對角

設已知二邊 a 及 b 一對角 A，

(1) 求 $\angle B$　$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$

(2) 求 $\angle C$　$\angle C=180^\circ-(A+B)$

(3) 求 c 算　$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$

驗算：$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}$

討論：$\sin B=\frac{b\sin A}{}$

因 $\sin B$ 之函數值不能大於正1或小於負1。
故當 a, b, A 之數值代入後常有下列之情形：

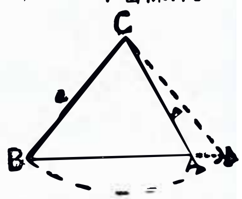
$\sin B>1=90°$ $\sin B=1=90°$, $\sin B<1$,

（1） $\sin B>1$ 不可能，則無解。

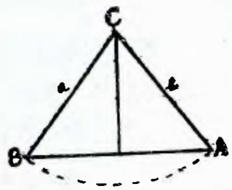
（2） $\sin B=1$, 則 $B=90°$, 故此三角形爲直角三角形，
若 $\angle A<90°$ 有解，$\angle A\geqq 90°$ 無解。

（3） $\sin B<1$, 則 B 在 $0°$ 與 $180°$ 之內可爲銳角或鈍角，若視 a 與 b 之關係，則有下列情形。

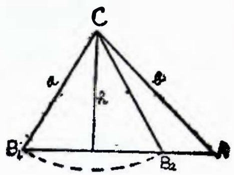
當 $a>b$ 時，則 $\angle A>\angle B$
有一解如圖，則爲 $\triangle ABC$,（但 $\triangle AB'C$ 不合條件。
∵ $\angle CAB'$ 爲 $\angle A$ 之補角）



當 $a=b$ 時，則 $\angle A=\angle B$,
有一解爲等腰三角形。
但當 $\angle A\geqq 90°$ 時無解，
故 $\angle A$ 必小於 $90°$ 時方有解，



當 $a<b$ 時，則 $\angle A<\angle B$
若 $\angle A\geqq 90°$ 無解
（∵ $\angle B$ 必小於 $\angle A$）
若 $\angle A<90°$ $\angle B$ 反有二值，
爲銳角 B_1, 及其補角 B_2, 其解之情形如下；
$a<h$ 無解
$a=h$ 則爲直角三角形
$a>h$, 而 $a<b$, 則有兩解爲
$\triangle AB_1C$ 及 $\triangle AB_2C$



〔例5〕 已知 $C=60°$, $b=2\sqrt{3}$, $c=3\sqrt{2}$, 求 A。

（解） $\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $B=45°$ 或 $135°$
$B=135°$ 應棄之，因在此情形，則 $B+C>180°$，
∴ $A=180°-60°-45°=75°$

〔例6〕 已知 $\angle A=15°$, $a=3-\sqrt{3}$, $b=3+\sqrt{3}$，求解此三角形。

（解） $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{(3+\sqrt{3})\cdot\sin 15°}{3-\sqrt{3}}$

$$=\frac{(3+\sqrt{3})\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(12+6\sqrt{3})\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{6\cdot 4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}+3-2-\sqrt{3})}{4}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

∴ $\angle B=75°$ 或 $105°$

$h=b\sin A=(3+\sqrt{3})\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

$$=\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3}+3-3-\sqrt{3})}{4}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

∴ $\angle A<90°$, $a<b$, 而 $a>h$
故有兩解
即 $\angle B_1=75°$, $\angle B_2=105°$

（i） 當 $\angle B=75°$ $(\triangle AB_1C)$ 則 $\angle C_1=180°-(75°+15°)=90°$

$$c_1=\frac{a\sin C_1}{\sin A}=\frac{(3-\sqrt{3})\sin 90°}{\sin 15°}=\frac{3-\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}$$

$$=\frac{4(3-\sqrt{3})}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{2}(3\sqrt{3}-3+3-\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$$

（ii） 當 $\angle B_2=105°$ $(\triangle AB_2C)$ 則
$\angle C_2=180°-(105°+15°)=60°$

$$c_2=\frac{a\sin C_2}{\sin A}=\frac{(3-\sqrt{3})\sin 60^\circ}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}=\frac{4(3-\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$=2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{2}$$

驗算：省略，讀者自行驗算之。

習題二十一

(1) 已知 $a=20$, $c=40$, $C=90^\circ$, 求 b, A, B。

(2) 已知 $B=30^\circ$, $c=48$, $C=90^\circ$, 求 A, a, b。

(3) 已知 $A=45^\circ$, $a=20$ 解此直角三角形。

(4) 已知正六角形一邊長 10 寸，求此多角內接圓及外接圓半徑。

(5) 設圓之半徑爲 r，試證其內接正 n 角形之邊長爲 $2r\sin\frac{180^\circ}{n}$；外切正 n 角形之邊長爲 $2r\tan\frac{180^\circ}{n}$。

(6) 已知 $A=75^\circ$, $B=45^\circ$, $c=20$, 解此三角形。

(7) 已知 $A=30^\circ$, $a=4$, $b=9$, 求解此三角形。

(8) 已知 $A=60^\circ$, $b=2$, $a=\sqrt{6}$，求解此三角形。

(9) 已知 $c=3$, $b=5$, $\angle A=120^\circ$, 求解此三角形。

(10) 設 $A=60^\circ$, $B=45^\circ$, 試證

$a:b:c=\sqrt{6}:2:\sqrt{3}+1$

(11) 設 $a=\sqrt{6}$, $b=2\sqrt{3}$, $c=3+\sqrt{3}$, 求 A, B, C。

(12) 三邊爲 $2x+3$, x^2+3x+3, x^2+2x, 求最大角。$(x>0)$

(13) 設 $a:b:c=m+n:m-n:\sqrt{2(m^2+n^2)}$, 求 C。

(14) 設三角形之三個角之比爲 1:2:3，求其三邊之比。

習題略解

(1) $b=20\sqrt{3}$, $A=30^\circ$, $B=60^\circ$

(2) $A=60^\circ$, $a=24\sqrt{3}$, $b=24$

(3) $B=45^\circ$, $C=20\sqrt{2}$, $b=20$

(4) 外接圓半徑 $=10$，內接圓半徑 $=5\sqrt{3}$

(5) 設內接正 n 角形之邊長爲 x，則 $r=\frac{x}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$， ∴ $x=2r\sin\frac{180^\circ}{n}$

設外接正 n 角形之邊長爲 y，則 $y=\frac{y}{2}\cot\frac{180^\circ}{n}$， ∴ $y=2r\tan\frac{180^\circ}{n}$

(6) $\angle C=60^\circ$, $b=\frac{20}{3}\sqrt{6}$, $a=\frac{10}{3}\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$

(7) $\angle B=90^\circ$, $\angle C=60^\circ$, $c=4\sqrt{5}$

(8) $\angle B=45^\circ$, $\angle C=75^\circ$, $c=\sqrt{3}+1$

(9) $a=7$, $\angle B=54.34^\circ$, $\angle C=5.66^\circ$

(10) $c=75^\circ$, $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sin 60^\circ:\sin 45^\circ:\sin 75^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{6}:2:\sqrt{3}+1$

(11) $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $C=105^\circ$

(12) 設 $a=2x+3$, $b=x^2+3x+3$, $c=x^2+2x$, 今 $b-a=x^2+x>0$,

$b-c=x+3>0$ (∵ $x>0$) 故 b 爲最大邊，B 角爲最大

$\cos B=-\frac{1}{2}$, 故 $B=120^\circ$

(13) 設比值爲 k，則 $a=(m+n)k$, $b=(m-n)k$, $c=\sqrt{2(m^2+n^2)}k$

∵ $\cos C=0$, ∴ $C=90^\circ$

(14) 設 $\frac{A}{1}=\frac{B}{2}=\frac{C}{3}=k$, 則 $A=k$, $B=2k$, $C=3k$,

∵ $A+B+C=180^\circ$, ∴ $k=30^\circ$, ∴ $A=30^\circ$, $B=60^\circ$, $C=90^\circ$,

由 $\frac{a}{\sin 30^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin 90^\circ}$

∴ $a:b:c=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$

6. 三角形中邊與角之恆等式之證明

此類恒等式與前章所討論者不同，式中除角以外，併含有三角形之邊等等，又所含之角不止一種，通常稱爲三角形之內角。證明此種恒等式所用之公式，以正弦，餘弦等定律爲主，再以普通三角函數之公式，代數運算定律爲補，至於證題時應行注意之事項如下：

(一)　代數之運算須純熟

凡用正弦定律入手，大多與分數化法及比例有關。

(二)　三角形之特性須熟記

其最重要者爲 $\triangle ABC$ 中

$A+B+C=180°$ 之一性質。因此連帶有

$\sin A=\sin(B+C)$,　$\cos A=-\cos(B+C)$, …………

$\sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}(B+C)$,　$\cos 2A=\cos 2(B+C)$, ……

及 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\tan A+\tan B+\text{tna}\, C=\tan A\tan B\tan C$

等等關係。

(三)　正弦正切，餘弦定律，及邊表表示角之各函數等公式必須熟記。

〔例1〕　試證 $\frac{a+mb}{a-nb}=\frac{\sin A+m\sin B}{\sin A-n\sin B}$

(證)　$\because\ \frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sin B}=k$　$\therefore\ a=k\sin A,\ b=k\sin B$

$$\frac{a+mb}{a-nb}=\frac{k(\sin A+m\sin B)}{k(\sin A-n\sin B)}=\frac{\sin A+m\sin B}{\sin A-n\sin B}$$

〔例2〕　試證　$a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$

(要點)　應用比例法，設 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，則

$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$，以之代入左邊即得證。

(證)　設 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，則

$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$

以此代入左邊，則

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C$$
$$=k(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)$$
$$=\frac{k}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$
$$=\frac{k}{2}[2\sin A\cos A+2\sin(B+C)\cos(B-C)]$$
$$=\frac{k}{2}[-2\sin A\cos(B+C)+2\sin A\cos(B-C)]$$
$$=k\sin A[\cos(B-C)-\cos(B+C)]$$
$$=2k\sin A\sin B\sin C=2a\sin B\sin C$$

〔例3〕　求證　$a\sec A-b\sec B=\sec C(b\sec A-a\sec B)$

(要點)　兩邊均複雜，不易從一邊導致另一邊，可分別由兩邊變形導成一形。

(證)　$\because\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$,

$\therefore\ a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$,

$$a\sec A-b\sec B=\frac{k\sin A}{\cos A}-\frac{k\sin B}{\cos B}=\frac{k\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sec C(b\sec A-a\sec B)=\frac{1}{\cos C}\left(\frac{k\sin B}{\cos A}-\frac{k\sin A}{\cos B}\right)$$
$$=\frac{k(\sin B\cos B-\sin A\cos A)}{\cos A\cos B\cos C}=\frac{k(\sin 2B-\sin 2A)}{2\cos A\cos b\cos C}$$
$$=\frac{2k\sin(B-A)\cos(B+A)}{2\cos A\cos B\cos C}=\frac{k\sin(A-B)\cos C}{\cos A\cos B\cos C}$$
$$=\frac{k\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$\therefore\ a\sec A-b\sec B=\sec C(b\sec A-a\sec B)$

〔例4〕　求證 $\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}$

(證一) $\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b+c}{\sin B+\sin C}$

$$\therefore \frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$

但 $\cos\frac{1}{2}A=\cos[90°-\frac{1}{2}(B+C)]=\sin\frac{1}{2}(B+C)$

$$\therefore \frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$

(證二) 從餘弦定律

$$b=c\cos A+a\cos C$$
$$c=a\cos A+b\cos B$$

相加，$b+c=(b+c)\cos A+a(\cos B+\cos C)$

即 $(b+c)(1-\cos A)=a(\cos B+\cos C)$

$$\therefore \frac{a}{b+c}=\frac{1-\cos A}{\cos B+\cos C}=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}A}{2\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$

但 $\cos\frac{1}{2}(B+C)=\cos(90°-\frac{1}{2}A)=\sin\frac{1}{2}A$

$$\therefore \frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$

〔例5〕 求證 $\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$

(要點) 仿前例應用正弦比例式固然可證，但此式之左邊是由餘弦與邊組成之式，應用餘弦定律證爲易。

(證一) $\because$ $a=c\cos B+b\cos C,\ b=a\cos C+c\cos A,$

$\therefore$ $a-c\cos B=b\cos C,\ b-c\cos A=a\cos C$

將此代入左邊，則

$$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{b\cos C}{a\cos C}=\frac{k\sin B}{k\sin A}=\frac{\sin B}{\sin A}\qquad \left[\because \begin{matrix}b=k\sin B\\ a=k\sin B\end{matrix}\right]$$

(證二) 將公式

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

代入左邊，則

$$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{a-\frac{c(c^2+a^2-b^2)}{2ca}}{b-\frac{c(b^2+c^2-a^2)}{2bc}}=\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}}$$

$$=\frac{b}{a}=\frac{k\sin B}{k\sin A}=\frac{\sin B}{\sin A}$$

〔例6〕 試證 $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

(要點) 本題左邊僅含餘弦而右邊之平方關係式，應用餘弦第二公式證之爲便。

(證一) $\because$ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cdots\cdots\cdots$

將此代入式邊，則

$$左邊=\frac{1}{a}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{1}{b}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{1}{c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2abc}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

(證二) $\because$ $\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B\cdots\cdots\cdots(1)\\ b=c\cos A+a\cos C\cdots\cdots\cdots(2)\\ c=a\cos B+b\cos A\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$

由 $(1)\div bc+(2)\div ca+(3)\div ab$，併且由右邊先寫起得

$$2\left[\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}\right]=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$$

$$\therefore \frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

〔例 6〕 試證 $(a^2-b^2)\cot C+(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B=0$

（要點） 因式中含有三角形之邊, b, c, 故將三角函數改爲邊即可

又 $\cot C=\dfrac{\cos C}{\sin C}$

將 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c}{2ab}$， $\sin C=\dfrac{c}{k}$代入之，得證。

（證） $\cot C=\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{c}{k}}=\dfrac{k(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$

$\therefore\ (a^2-b^2)\cot C=\dfrac{k(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$

$=\dfrac{k[(a^4-b^4)-c^2(a^2-b^2)]}{2abc}$

$(b^2-c^2)\cot A=\dfrac{k[(b^4-c^4)-a^2(b^2-c^2)]}{2abc}$

$(c^2-a^2)\cot B=\dfrac{k[(c^4-a^4)-b^2(c^2-a^2)]}{2abc}$

兩邊分別相加，則 因$\dfrac{k}{2abc}$爲三式所公有， 故

分子 $=a^4-b^4-c^2(a^2-b^2)+b^4-c^4-a^2(b^2-c^2)+c^4-a^4$
$-b^2(c^2-a^2)=0$

$\therefore\ (a^2-b^2)\cot C+(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B=0$

〔例 7〕 試證 $\dfrac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=\dfrac{a-b}{c}$

（證） 將 $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ $\tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

代入左邊，則

分子 $=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}-\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

$=\sqrt{\dfrac{(s-b)^2(s-c)}{s(s-a)(s-b)}}-\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)^2}{s(s-a)(s-b)}}$

$=(s-b)\sqrt{\dfrac{s-c}{s(s-a)(s-b)}}-(s-a)\sqrt{\dfrac{s-c}{s(s-a)(s-b)}}$

$=(a-b)\sqrt{\dfrac{s-c}{s(s-a)(s-b)}}$

同理，分母 $=(2s-a-b)\sqrt{\dfrac{s-c}{s(s-a)(s-b)}}$

因 $2s=a+b+c$, 故

分母 $=c\sqrt{\dfrac{s-c}{s(s-a)(s-b)}}$

$\therefore\ \dfrac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=\dfrac{a-b}{c}$

〔例 8〕 試證 $\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=0$

（要點） 因 $\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1+\cos A}{2}$，而 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，將後式代入前式可以導成表示邊之關係式，又

$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$， $\therefore\ \cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{s(s-a)}{bc}$

將此式代入，直接變成邊之關係式。本例依之。

（證） 左邊 $=\dfrac{b-c}{a}\times\dfrac{s(s-a)}{bc}+\dfrac{c-a}{b}\times\dfrac{s(s-b)}{ca}+\dfrac{a-b}{c}\times\dfrac{s(s-c)}{ab}$

$=\dfrac{s}{abc}[(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)]$

將括號內之各項就 s 整理，則 s 之係數及不含 s 之項均爲 0，故各項爲 0 因此知原式成立。

〔例 9〕 試證 $(a+b+c)(\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B)=2c\cot\frac{1}{2}C$

（證一） 左邊 $=(a+b+c)\left[\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}+\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\right]$

$$=2s\sqrt{\frac{s-c}{s}}\left[\sqrt{\frac{s-b}{s-a}}+\sqrt{\frac{s-a}{s-b}}\right]=2\sqrt{s(s-c)}\cdot\frac{s-}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}$$

$$=\frac{2(2s-a-b)\sqrt{s(s-c)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}=2c\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=2c\cot\frac{1}{2}C$$

（證二） $\because\ \cot\frac{1}{2}C=\cot\left[90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)\right]=\tan\frac{1}{2}(A+B)$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B}{1-\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B}$$

$$\therefore\ \frac{\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B}{\cot\frac{1}{2}C}=1-\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B$$

$$=1-\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\cdot\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=1-\frac{s-c}{s}$$

$$=1-\frac{\frac{1}{2}(a+b-c)}{\frac{1}{2}(a+b+c)}=1-\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{2c}{a+b+c}$$

$$\therefore\ (a+b+c)\left(\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B\right)=2c\cot\frac{1}{2}C$$

〔例10〕 試由正弦定律導出餘弦定律。

（證） $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{\sqrt{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}}$.

$$\frac{c^2}{\sin^2 C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}$$

又 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C$

故 $\dfrac{c^2}{\sin^2 C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\sin A\sin B\cos C}$

但 $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}$， $\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}$ 代入上式，得

$$\frac{c^2}{\sin^2 C}=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{2ab\sin C\sin C\cos C}\quad 即\ 1=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\cos C}$$

亦即 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

〔例11〕 由餘弦定律導出正弦定律。

（證） 由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 即 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

又 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{a}{\sqrt{1-\cos^2 A}}=\dfrac{a}{\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}}$

$$=\frac{2abc}{\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}=k$$

同理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$

習題二十二

試證下列各式：

（1） $\dfrac{\sin A+2\sin B}{\sin C}=\dfrac{a+2b}{c}$

（2） $b\sin B-c\sin C=a\sin(B-C)$

（3） $a^2+b^2+c^2=2(ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B)$

（4） $\dfrac{a-b}{a+b}=\tan\dfrac{A-B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$

（5） $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

（6） $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$

（7） $c(\sin^2 A+\sin^2 B)=\sin C(a\sin A+b\sin B)$

（8） $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$

（9） $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$

（10） $c(\cos A+\cos B)=2(a+b)\sin^2\dfrac{C}{2}$

（11） $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=c\left(\dfrac{\cos B}{b}-\dfrac{\cos A}{a}\right)$

（12） $\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$

(13) $\dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$

(14) $\dfrac{c}{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}=\dfrac{a}{1-\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}}=\dfrac{b}{1-\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}}$

(15) $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)$

(16) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$

(17) $(a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=2a\cos^2\dfrac{A}{2}+2b\cos^2\dfrac{B}{2}+2c\cos^2\dfrac{C}{2}$

(18) $a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})\cos A+b^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}})\cos B+c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})\cos C$

$=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}})$

習題略解

(1) $\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{a}{c}$……①， $\dfrac{2\sin B}{\sin C}=\dfrac{2b}{c}$……②，①+②即得證。

(2) 左邊$=k(\sin^2 B-\sin^2 C)=\dfrac{k}{2}[(1-\cos 2B)-(1-\cos 2C)]$

$=\dfrac{k}{2}(\cos 2C-\cos 2B)=k\sin(B+C)\sin(B-C)$

$=k\sin A\sin(B-C)=$右邊

(3) 右邊$=2[ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ca\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}]=$左邊

(4) 左邊$=\dfrac{k(\sin A-\sin B)}{k(\sin A+\sin B)}=\dfrac{2\sin\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}}{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}$

$=\tan\dfrac{A-B}{2}\cot\dfrac{A+B}{2}=$右邊

(5) 左邊$=2R[\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)$
$+\sin C\sin(A-B)]$

$=2R[\sin(B+C)\sin(B-C)+\sin(C+A)\sin(C-A)$
$+\sin(A+B)\sin(A-B)]$

$=R[(\cos 2C-\cos 2B)+(\cos 2A-\cos 2C)+(\cos 2B$
$-\cos 2A)]=0$

(6) 倣上題證之。

(7) 左邊$=c(\dfrac{a^2}{k^2}+\dfrac{b^2}{k^2})=\dfrac{c(a^2+b^2)}{k^2}$，左邊$=\dfrac{c}{k}(\dfrac{a^2}{k}+\dfrac{b^2}{k})=\dfrac{c(a^2+b^2)}{k^2}$

(8) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ 及 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，相減即得。

(9) 將餘弦第二公式代入右邊化簡即得。

(10) 左邊$=k\sin C(\cos A+\cos B)=4k\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}$

$\cos\dfrac{A-B}{2}=4k\sin^2\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$=2k(\sin A+\sin B)\sin^2\dfrac{C}{2}=$右邊

(11) 同 (9)

(12) 左邊$=\dfrac{1-2\sin^2 A}{a^2}-\dfrac{1-2\sin^2 B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}-2(\dfrac{\sin^2 A}{a^2}-\dfrac{\sin^2 B}{b^2})$

$=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}-2(\dfrac{\sin^2 A}{k^2\sin^2 A}-\dfrac{\sin^2 B}{k^2\sin^2 B})=$右邊

(13) $\dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{\sin B\cos C}{\cos B\sin C}=(\dfrac{b}{k}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab})\div(\dfrac{c}{k}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca})=$右邊

(14) $1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{c}{s}$ $\therefore$ $\dfrac{c}{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}=s$〔參考(例7)〕

(15) 左邊$=4R^2[\sin^2 A(\cos^2 B-\cos^2 C)+\sin^2 B(\cos^2 C-\cos^2 A)$
$+\sin^2 C(\cos^2 A-\cos^2 B)]=4R^2[(1-\cos^2 A)(\cos^2 B$
$-\cos^2 C)+(1-\cos^2 B)(\cos^2 C-\cos^2 B)+(1-\cos^2 C)$
$(\cos^2 A-\cos^2 B)]=0$

(16) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}=\dfrac{4R^2\sin^2 A\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}$

$=\dfrac{4R^2\sin A\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}=\dfrac{4R^2\sin A(\sin^2 B-\sin^2 C)}{\sin B+\sin C}$

$=4R^2\sin A(\sin B-\sin C)$

同理第二、第三項化簡後，相加即得。

(17) 左邊 $=a+b+c+2a\sin B\sin C=a+b+c+a\cos A+b\cos B$
$+c\cos C=a(1+\cos A)+b(1+\cos B)+c(1+\cos C)=$ 右邊

(18) 左邊 $=a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}})\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$
$+c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2abc}[a^{\frac{3}{2}}(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})(b^2+c^2$
$-a^2)+b^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})(c^2+a^2-b^2)+c^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})(a^2+b^2$
$-c^2)]=\frac{1}{2abc}[2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^2+2b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}a^2+2c^{\frac{3}{2}}a^2+2c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}b^2]$
$=\frac{1}{abc}[a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}})]=$ 右邊

7. 附有條件之證明問題

〔例 1〕 設 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，求證

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha$$

(要點) 由 $m=\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$，求出 $\frac{1+m}{1-m}$ 之值，即得。

(證) 由 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，得 $m=\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$

$$\therefore\ \frac{1+m}{1-m}=\frac{1+\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}}{1-\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}}=\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}$$

$$=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}=\tan(\alpha+\beta)\cot\alpha$$

$$\therefore\ \frac{1+m}{1-m}\tan\alpha=\tan(\alpha+\beta)$$

〔例 2〕 設 $a\sec A-c\tan A=d$，$b\sec A+d\tan A=c$，求證
$a^2+b^2=c^2+d^2$

(要點) 由第一，第二假設式求出 a 及 b 之值代入證式亦可。但由下證亦可證。

(證) 將假設變形，得

$$a\sec A=c\tan A+d$$
$$b\sec A=c-d\tan A$$

平方之，$a^2\sec^2 A=c^2\tan^2 A+2cd\tan A+d^2$
$b^2\sec^2 A=c^2-2cd\tan^2 A+d^2\tan^2 A$

相加，得

$$(a^2+b^2)\sec^2 A=c^2(1+\tan^2 A)+d^2(1+\tan^2 A)$$
$$=(c^2+d^2)\sec^2 A$$

$$\therefore\ a^2+b^2=c^2+d^2$$

〔例 3〕 設 $a\cos A+b\sin A=a\cos B+b\sin B=c$，求證

$$\frac{a}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

(證) $a\cos A+b\sin A=c$……………(1)
$a\cos B+b\sin B=c$……………(2)

由(1)，(2)消去 b，則

$a(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=c(\sin A-\sin B)$

$$a\sin(A-B)=2c\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$2a\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2c\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

設 $\sin\frac{A-B}{2}\neq 0$，以之除上式之兩邊，則

$$a\cos\frac{A-B}{2}=c\cos\frac{A+B}{2}\quad\therefore\ \frac{a}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

同理消去 a，則 $\frac{b}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{A-B}{2}}$

$$\therefore \quad \frac{a}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

〔例 4〕 設 $\tan\theta=\frac{x\sin\alpha}{y-x\cos\alpha}$，$\tan\phi=\frac{y\sin\alpha}{x-y\cos\alpha}$，求證 $\tan(\theta+\phi)=-\tan\alpha$

（證） 將 $\tan\theta=\frac{x\sin\alpha}{y-x\cos\alpha}$，$\tan\phi=\frac{y\sin\alpha}{x-y\cos\alpha}$ 代入 $\tan(\theta+\phi)$ 之展開式中，則得

$$\tan(\theta+\phi)=\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=\frac{\frac{x\sin\alpha}{y-x\cos\alpha}+\frac{y\sin\alpha}{x-y\cos\alpha}}{1-\frac{xy\sin^2\alpha}{(y-x\cos\alpha)(x-y\cos\alpha)}}$$

$$=\frac{x\sin\alpha(x-y\cos\alpha)+y\sin\alpha(y-x\cos\alpha)}{(y-x\cos\alpha)(x-y\cos\alpha)-xy\sin^2\alpha}$$

$$=-\frac{\sin\alpha(x^2-2xy\cos\alpha+y^2)}{\cos(x^2-2xy\cos\alpha+y^2)}=-\tan\alpha$$

〔例 5〕 設 $\tan\theta=\frac{b}{a}$，求證 $a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=a$

（證） $$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\frac{2b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

$$=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{2ab^2}{a^2+b^2}=\frac{a(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=a$$

〔例 6〕 設 $\tan A=2\tan B$，求證 $\sin(A+B)=3\sin(A-B)$

（證） $$\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}$$

兩項除以 $\cos A\cos B$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A-\tan B}$$

將 $\tan A=2\tan B$ 代入 $=\frac{2\tan B+\tan B}{2\tan B-\tan B}=3$

$$\therefore \quad \sin(A+B)=3\tan(A-B)$$

〔例 7〕 $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 爲 $x^2+6x+7=0$ 之二根，求證
因 $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$

（證） $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 爲 $x^2+6x+7=0$ 之根，由根與係數之關係
得 $\tan\alpha+\tan\beta=-6$, $\tan\alpha\tan\beta=7$,

$$\therefore \quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-6}{1-7}=1$$

即 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=1$

$$\therefore \quad \sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$$

〔例 8〕 在 $\triangle ABC$ 中，設 $C=90°$，求證 $\sin^2\frac{B}{2}=\frac{c-a}{2c}$

（證一） $$\sin^2\frac{B}{2}=\frac{1-\cos B}{2}=\frac{1-\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{2}=\frac{b^2-(c-a)^2}{4ca}$$

因 $C=90°$，故 $a^2+b^2=c^2$，$\therefore\ b^2=c^2-a^2$

$$\therefore \quad \sin^2\frac{B}{2}=\frac{c^2-a^2-(c-a)^2}{4ca}=\frac{2a(c-a)}{4ca}=\frac{c-a}{2c}$$

（證二） $$\frac{c-a}{c}=\frac{(k\sin C-\sin A)}{2k\sin C}=\frac{\sin C-\sin A}{2\sin C}$$

因 $C=90°$，及 $A=90°-B$，故

$$\frac{c-a}{2c}=\frac{1-\sin(90°-B)}{2}=\frac{1-\cos B}{2}=\sin^2\frac{B}{2}$$

〔例 9〕 在 $\triangle ABC$ 中，$B=60°$，則 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ 試證之。

（證） $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ 變形爲

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$$

於是 $\dfrac{a+b+c}{a+b}+\dfrac{a+b+c}{b+c}=1+\dfrac{c}{a+b}+1+\dfrac{a}{b+c}$

$$=2+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=2+\frac{c(b+c)+a(a+b)}{(b+a)(b+c)}$$

$$=2+\frac{a^2+(a+c)b+c^2}{b^2+(a+c)b+ac}$$

因 $B=60^\circ$，故由公式 $b^2=a^2+c^2-2\,ca\cos B$，得

$b^2=c^2-ca+a^2 \quad \therefore \quad b^2+ca=c^2+a^2$

$$\therefore \quad \frac{a+b+c}{a}+\frac{b+a+c}{b+c}=2+\frac{b^2+(a+c)b+ac}{b^2+(a+c)b+ac}=2+1=3$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$$

〔例10〕 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，則此三角形之形狀如何？

〔要點〕 解這類問題有兩種方法，(一) 爲將所設關係式變形而簡化，從角之關係推知其爲何種三角形，(二) 爲將所設式導致邊之關係式，從而推知其爲何種三角形。今就此二種方法作二解。

〔解一〕 將 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$ 變形爲

$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=0$ 再將左邊變形，則

$$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sin^2 A+\frac{1-\cos 2B}{2}-\frac{1-\cos 2C}{2}$$

$$=\sin^2 A+\frac{\cos 2C-\cos 2B}{2}=\sin^2 A+\sin(B-C)\sin(B+C)$$

$$=\sin^2 A+\sin(B-C)\sin A=\sin A[\sin A+\sin(B-C)]$$

$$=\sin A[\sin(B+C)+\sin(B-C)]=2\sin A\sin B\cos C$$

$\therefore \quad 2\sin A\sin B\cos C=0 \ \therefore \sin A=0, \sin B=0$ 或 $\cos C=0$

求適合以上各式中 A, B, C 之值，知爲

$A=0,\ B=0$，或 $C=90^\circ$

但因 $A=0,\ B=0$ 不能成三角形，故 $A\neq 0,\ B\neq 0$，因而 $C=90^\circ$，即所求三角形爲直角三角形。

〔解二〕 從正弦定律

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$ 得

$\sin A=\dfrac{a}{k},\quad \sin B=\dfrac{b}{k},\quad \sin C=\dfrac{c}{k}$

以此諸式代入所設式，則

$$\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}=\frac{c^2}{k^2} \quad \therefore \quad a^2+b^2=c^2$$

此式表直角三角形之邊關係，故知所求三角形是 $C=90^\circ$ 之直角三角形。

〔例11〕 設 $(s-b)\cot\dfrac{C}{2}=s\tan\dfrac{B}{2}$，則此三角形爲二等邊三角形。

〔證〕 原式爲 $(s-b)\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=s\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

$$\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{(s-a)}}=\sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{(s-b)}}$$

$$\sqrt{s(s-c)}\left[\sqrt{\frac{s-b}{s-a}}-\sqrt{\frac{s-a}{s-b}}\right]=0$$

$\because \quad \sqrt{s(s-c)}\neq 0$，即 $s\neq 0,\ s-c\neq 0$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{s-b}{s-a}}-\sqrt{\frac{s-a}{s-b}}=0$$

$$\frac{(s-b)-(s-a)}{\sqrt{(s-b)(s-a)}}=0$$

即 $(s-b)-(s-a)=0 \quad \therefore \quad a-b=0$

$\therefore \quad a=b$，故此三角形爲二等邊三角形。

〔例12〕 $\triangle ABC$ 中，若 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$，求證 C 爲 45° 或 135°。

〔證〕 將原式變形

$$a^4+b^4-2(a^2+b^2)c^2+c^4=0$$

$$(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)c^2+c^4=2a^2b^2$$

$$(a^2+b^2-c^2)^2=2a^2b^2$$

$$a^2+b^2-c^2=\pm\sqrt{2}ab$$

代入公式　$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

得　$\cos C=\pm\dfrac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

∴　$C=45°$ 或 $C=135°$

〔例13〕 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，及 $\sin A=2\times\sin B\cos C$，此三角形之形狀如何？

（解） 將 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$ 改用邊之關係式表示，則

$$a^2=b^2+c^2$$

於是此三角形爲 $A=90°$ 之直角三角形，因知 $\sin A=1$，如此 $\sin A=2\sin B\cos C$

便可變爲　$2\sin B\cos C=1$

即　$\sin(B+C)+\sin(B-C)=1$

但　$A=90°$　∴　$B+C=90°$

故　$1+\sin(B-C)=1$

∴　$\sin(B-C)=0$　∴　$B=C$

故所求三角形爲二等邊直角形。

〔例14〕 在三角形中，$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 若成等級數，則明

（i） $\cot\dfrac{A}{2}$　$\cot\dfrac{B}{2}$　$\cot\dfrac{C}{2}$ 亦成等差級數

（ii） $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$

（要點） 本例之意思，就是 $\sin B-\sin A=\sin C-\sin B$，即 $2\sin B=\sin C\sin A$ 時，求證

（i） $\cot\dfrac{B}{2}-\cot\dfrac{A}{2}=\cot\dfrac{C}{2}-\cot\dfrac{B}{2}$

即 $2\cot\dfrac{B}{2}=\cot\dfrac{C}{2}+\cot\dfrac{A}{2}$

（ii） $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$

在（ii）式，可引用公式 $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ 作爲 $\tan\dfrac{A}{2}$，

$\tan\dfrac{B}{2}$ 之已知事項，因此將假設式應導成邊之關係式。

（證） （i） $\cot\dfrac{B}{2}-\cot\dfrac{A}{2}$

$$=\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}-\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\cdots\cdots(1)$$

同理　$\cot\dfrac{C}{2}-\cot\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\cdots\cdots(2)$

又　$\sin B-\sin A=2\sin\dfrac{B-A}{2}\cos\dfrac{B+A}{2}$

$=2\sin\dfrac{B-A}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

$\sin C-\sin B=2\sin\dfrac{C-B}{2}\cos\dfrac{C+B}{2}$

$=2\sin\dfrac{C-B}{2}\sin\dfrac{A}{2}$

因假設　$\sin B-\sin A=\sin C-\sin B$

∴　$2\sin\dfrac{B-A}{2}\sin\dfrac{C}{2}=2\sin\dfrac{C-B}{2}\sin\dfrac{A}{2}$

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\cdots\cdots(3)$$

比較（1），（2）之左邊與（3），可知（1），（2）之右邊相等

∴　$\cot\dfrac{B}{2}-\cot\dfrac{A}{2}=\cot\dfrac{C}{2}-\cot\dfrac{B}{2}$

（ii） 從公式　$\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$，知

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)^2(s-c)}{s^2(s-a)(s-c)}}=\frac{s-b}{s}=\frac{2s-2b}{2s}=\frac{a-b+c}{a+b+c}$$

因假設爲 $\sin B-\sin A=\sin C-\sin B$，改用邊表示，則得

$b-a=c-b$, $\therefore$ $b=\frac{a+c}{2}$ 代入上式，得

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{a-\frac{a+c}{2}+c}{a+\frac{a+c}{2}+c}=\frac{a+c}{3(a+c)}=\frac{1}{3}$$

〔例15〕 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\tan A, \tan B, \tan C$ 成調和級數，則 a^2, b^2, c^2 成等差級數。

（證） 因 $\tan A, \tan B, \tan C$ 成調和級數，故

$$\frac{1}{\tan B}-\frac{1}{\tan A}=\frac{1}{\tan C}-\frac{1}{\tan B}$$

$$\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\cos C}{\sin C}-\frac{\cos B}{\sin B}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

應用正弦定律及餘弦第二公式導成邊之關係式，

則 $$\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{k(c^2+a^2-b^2)}{2abc}-\frac{k(b^2+c^2-a^2)}{2abc}$$

$$=\frac{2k(a^2-b^2)}{2abc}=\frac{-k(b^2-a^2)}{abc}$$

同理 $$\frac{\cos C}{\sin C}-\frac{\cos B}{\sin B}=-\frac{k(c^2-a^2)}{abc}$$

故從(1) $$-\frac{k(b^2-a^2)}{abc}=-\frac{k(c^2-a^2)}{abc}$$

$\therefore$ $b^2-a^2=c^2-b^2$

即 a^2, b^2, c^2 成等差級數

〔例16〕 若 $\cos(B+\frac{C-A}{2})$, $\cos\frac{C+A}{2}$, $\cos(B-\frac{C-A}{2})$ 成等

則 $\sin(\frac{C+A}{2}-B)$, $\sin\frac{C-A}{2}$, $\sin(\frac{C+A}{2}+B)$ 亦成等比級數。

（證） $$\cos(B+\frac{C-A}{2})\cos(B-\frac{C-A}{2})=\frac{1}{2}[\cos 2B+\cos(C-A)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 2B+1-2\sin^2\frac{C-A}{2}]=\frac{1}{2}(2\cos^2 B-2\sin^2\frac{C-A}{2})$$

$$=\cos^2 B-\sin^2\frac{C-A}{2}$$

$$\therefore\ \cos^2\frac{C+A}{2}=\cos^2 B-\sin^2\frac{C-A}{2}$$

因此 $$\sin^2\frac{C-A}{2}=\cos^2 B-\cos^2\frac{C+A}{2}$$

$$=\frac{1+\cos 2B}{2}-\frac{1+\cos(C+A)}{2}=\frac{1}{2}[\cos 2B-\cos(C+A)]$$

$$=\sin(\frac{C+A}{2}-B)\sin(\frac{C+A}{2}+B)$$

故 $\sin(\frac{C+A}{2}-B)$, $\sin\frac{C-A}{2}$, $\sin(\frac{C+A}{2}+B)$ 成等比級數。

〔例17〕 $\triangle ABC$ 中，設 a, b, c 成等差級數，求證

$$\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$$

（證） 因 a, b, c 成等差級數，故 $a+c=2b$

$$k(\sin A+\sin C)=2k\sin B$$

$$\sin A+\sin C=2\sin B$$

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

因 $A+B+C=180°$，故

$$\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}\quad\therefore\ \cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$$

〔例18〕 設 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ 成等差級數，則

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin A\sin B}{\cos A+\cos B}}\quad\cdots\cdots(1)$$

（證） 由 $\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}$ $\therefore$ $ac=\frac{(a+c)b}{2}$

即 $\sin A \sin C=\frac{(\sin A+\sin C)\sin B}{2}$

∴ 原式右邊 $=\sqrt{\frac{(\sin A+\sin C)\sin B}{2(\cos A+\cos C)}}$

$$=\sqrt{\frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\cdot 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}}=\cos\frac{B}{2}$$

【例19】三角形三邊 a, b, c 其對角為 $2\theta, 3\theta, 4\theta$, 則

$\tan^2\theta=\left(\frac{2b}{a+c}\right)^2-1$

(證) ∵ $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$ ∴ 即證 $\sec^2=\frac{2b}{a+c}$

由正弦定律

$$\frac{b}{\sin 3\theta}=\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{c}{\sin 4\theta}=\frac{a+c}{\sin 2\theta+\sin 4\theta}$$

∴ $\frac{b}{a+c}=\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta+\sin 4\theta}=\frac{\sin 3\theta}{2\sin 3\theta\cos\theta}=\frac{1}{2\cos\theta}=\frac{\sec\theta}{2}$

即 $\sec\theta=\frac{2b}{a+c}$

【例20】在三角形 ABC 中, $\cos A+\cos B+\cos C>1$

(證) 因 $a=b\cos C+c\cos B$, $b=c\cos A+a\cos C$

∴ $a+b=(a+b)\cos C+c(\cos A+\cos B)$

∴ $(a+b)(1-\cos C)=c(\cos A+\cos B)$

∴ $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos A+\cos B}{1-\cos C}>1$ (∵ $a+b>c$)

∴ $\cos A+\cos B>1-\cos C$

即 $\cos A+\cos B+\cos C>1$

習題二十三

(1) 設 $\sin A=a$, $\tan A=b$, 求證 $b^2=a^2(1+b^2)$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 設 $\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)=n\sin\frac{B}{2}$, 求證

$\frac{n-1}{n+1}=\sin\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$

(3) 設 $\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$, 求證 $\tan^2\frac{A}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\cot^2\frac{\beta}{2}$

(4) 設 $\cot^2 A=\left(\frac{\cos B}{\tan C}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\tan D}\right)^2$ 求證

$\csc^2 A=\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2$

(5) 設 $\tan^2\theta=2\tan^2\phi+1$, 求證 $\cos 2\phi=2\cos 2\theta+1$

(6) 設 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$, 求證 $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$

(7) 設 $\tan A=\frac{b}{a}$, 求證 $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\frac{2\cos A}{\sqrt{\cos 2A}}$

(8) 已知 $x^2+ax+b=0$ 之二根為 $\tan\theta$ 及 $\tan\phi$, 求用 a, b 表示 $\cos^2(\theta+\phi)$ 之值。

(9) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cot A+\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$, 若將 A, B, C 三者兩兩交換, 其值不變, 試證之。

(10) 在 $\triangle ABC$ 中, $C=60°$ 時, $a+b=2c\cos\frac{A-B}{2}$

(11) $\triangle ABC$ 中, $\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}$ 時, 此三角形之形狀如何?

(12) $\triangle ABC$ 中, $a\cos A=b\cos B$ 時, 此三角形之形狀如何?

(13) 設 A, B, C, 成 A. P., 求證 $\sin A-\sin C=2\sin(B-C)\cos B$

(14) 三角形三邊成等差級數, 試證其半角之餘切亦成等級數。

(15) 設 $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:7$ 則 $c:a=(\sqrt{5}+1):(\sqrt{5}-1)$

(16) 設 $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$, 則

$\angle c=60°$ 或 $120°$

(17) 若 a, b, c 成 $H.P.$，則 $\sin^2\frac{A}{2}$, $\sin^2\frac{B}{2}$, $\sin^2\frac{C}{2}$ 亦爲 $H.P.$。

(18) 若 a^2, b^2, c^2 成 $A.P.$，則 $\cot A, \cot B, \cot C$ 亦成 $A.P.$。

(19) 若 a^2, b^2, c^2 成 $A.P.$，試證 $a\sec A, b\sec B, c\sec C$ 成 $H.P.$。

(20) 若 $\cos A+\cos B=4\sin^2\frac{C}{2}$；則三邊成 $A.P.$。

習 題 略 解

(1) 右邊 $=\sin^2 A(1+\tan^2 A)=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\tan^2 A=b^2$

(2) 將 $n=\sin(A+\frac{B}{2})/\sin\frac{B}{2}$ 代入左邊形，即得。

(3) 將假設式代入 $\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$ 而化簡即得。

(4) $\csc^2 A=1+\cot^2 A=1+\left(\frac{\frac{\cos B}{\sin C}}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\frac{\sin B}{\sin D}}{\cos D}\right)^2$

$=1+\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2\cos^2 C+\left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2\cos^2 D$

$=1+\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2-(\cos^2 B+\sin^2 B)$

$=$ 右邊

(5) $1+\tan^2\theta=2\tan^2\phi+2$； $1+\tan^2\theta=2(1+\tan^2\phi)$

$\sec^2\theta=2\sec^2\phi$ $\therefore$ $2\cos^2\theta=\cos^2\phi$，因 $\cos 2\phi=2\cos^2\phi-1$

$\therefore$ $\cos 2\phi=4\cos^2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)+1=2\cos 2\theta+1$

(6) $\sin\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$，代入原式之左邊即得。

(7) $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{b}{a}$， $\therefore$ $a=k\cos A, b=k\sin A$ 代入左邊化簡。

(8) 倣〔例 7〕，引用公式 $\cos^2(\theta+\phi)=\frac{1}{1+\tan^2(\theta+\phi)}$ 以求之。

(9) $\because$ $A+B+C=180°$ $\therefore$ $\sin A=\sin(B+C)$

原式 $=\cot A+\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\cot A+\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\sin B\sin C}$

$=\cot A+\cot B+\cot C$

(10) $a+b=k(\sin A+\sin B)=2k\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$=2k\sin 60°\cos\frac{A-B}{2}=2k\sin C\cos\frac{A-B}{2}=2c\cos\frac{A-B}{2}$

(11) $\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{a}{2c}$ 即 $c^2+a^2-b^2=a^2$, $c^2=b^2$ $\therefore$ $b=c$ 故所求△爲二等邊三角形

(12) $k\sin A\cos A=k\sin B\cos B$, $2\sin A\cos A=2\sin B\cos B$

$\therefore$ $\sin 2A=\sin 2B$ $\therefore$ $2A=2B$ $\therefore$ $A=B$ 或 $A+B=180°$

所求△爲二等邊三角形或直角三角形

(13) $\sin A-\sin C=2\sin\frac{A-C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$，由假設 $A=2B-C$

$A-C=2(B-C)$ 故得證。

(14) $\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}+\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=2\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}$

兩邊乘以 $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ 則 $(s-a)+(s-c)=2(s-b)$

$\therefore$ $a+c=2b$

(15) 因 $18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\frac{A}{1}=\frac{B}{2}=\frac{C}{7}=\frac{A+B+C}{1+2+7}=\frac{180°}{10}$

$\therefore$ $A=18°$, $B=36°$, $C=126°$ $\therefore$ $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin 126°}{\sin 18°}$

$=\frac{(\sqrt{5}+1)/4}{(\sqrt{5}-1)/4}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

(16) $\therefore$ $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=0$

$(c^2-a^2-b^2-ab)(c^2-a^2-b^2+ab)=0$

若 $c^2-a^2-b^2-ab=0$ 則 $\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=-1$ 即 $\cos C=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\angle c=120°$,

若 $c^2-a^2-b^2+ab=0$ 則 $\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=1$ 即 $\cos C=\frac{1}{2}$

∴ $\angle C=60^\circ$

(17) $\frac{1}{\sin B}-\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin C}-\frac{1}{\sin B}$ 即 $\frac{\sin A-\sin B}{\sin A\sin B}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B\sin C}$

$\sin C(\sin A-\sin B)=\sin A(\sin B-\sin C)$

$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\times 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\times 2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$

$\sin^2\frac{C}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)=\sin^2\frac{A}{2}\left(\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)$

(18) 由 $a^2+c^2=2b^2$ 得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=2b^2-2ac\cos B$

即 $b^2=2ac\cos B=2\times\frac{b\sin A}{\sin B}\times\frac{b\sin C}{\sin B}\times\cos B$

故 $\sin^2 B=2\sin A\cos A\sin C$, 即 $\frac{2\cos B}{\sin B}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}$

$\frac{2\cos B}{\sin B}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}$, 故 $2\cot B=\cot A+\cot C$

(19) 因 $b\sec B=\frac{b}{\cos B}=\frac{2abc}{2ac\cos B}=\frac{2abc}{a^2+c^2-b^2}$, 又 $a^2+c^2=2b^2$

故 $b\sec B=\frac{2abc}{b^2}=\frac{2ac}{b}=\frac{2ac}{a\cos C+c\cos A}=\frac{2ac\sec A\sec C}{a\sec A+c\sec C}$

(20) $2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)=4\sin^2\frac{C}{2}$

即 $\cos\frac{1}{2}(A-B)=2\sin\frac{C}{2}$

又 $\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}(A+B)=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\sin A+\sin B=2\sin C$

8. 三角形之面積

已知兩邊及夾角　設 $\triangle ABC$ 之面積爲 $\triangle$, C 邊上之高爲 h, 則

$$\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

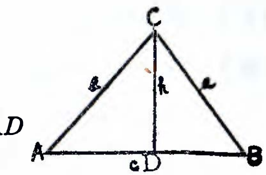
(證) 於 $\triangle ABC$ 作 $CD\perp AB$, 則

$\triangle=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}ch$

若 $\angle A<90^\circ$, 則 $h=b\sin A$

若 $\angle A>90^\circ$, 則 $h=b\sin\angle CAD$

$=b\sin A$

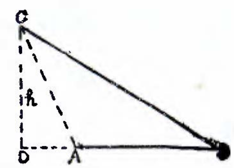


將此代入上式，均得

$\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A$

同理可證 $\triangle=\frac{1}{2}ca\sin B$

$\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C$



(二) 已知兩角及一邊

$$\triangle=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$$

(證) 由正弦定律 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ ∴ $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$

∴ $\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\sin C=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$

同理同證 $\triangle=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$

(三) 已知三邊

$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　(Heron 氏公式)

(證) ∴ $\triangle=\frac{bc}{2}\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$=bc\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

∴ $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

例1) 若 $b=20$ 寸, $c=15$ 寸, $A=60^\circ$, 求此三角形之面積。

（解） $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times20\times15\times\frac{\sqrt{3}}{2}=75\sqrt{3}$ （方寸）

〔例 2〕 設 $a=13$, $b=14$, $c=15$, 求面積。

（解） $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(13+14+15)=21$

$\therefore$ $s-a=8$, $s-b=7$, $s-c=6$

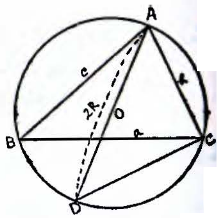
$\therefore$ $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{21\times8\times7\times6}=84$

(四) 外接圓半徑

(i) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

(ii) $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4\triangle}$ (iii) $\triangle=\frac{abc}{4R}$

（證） (i) 設 $\triangle ABC$ 之外接圓 O, 其半徑爲 R, $OA=R$, 今延長 AO 交 BC 弧上於 D 點



則 $AD=2R$, 連接 DC

則 $\angle ACD=\angle R$

由三角函數之關係

得 $\sin\angle ADC=\frac{b}{2R}$

但 $\angle ADC=\angle B$

$\therefore$ $\sin B=\frac{b}{2R}$ $\therefore$ $b=2R\sin B$

$\therefore$ $R=\frac{a}{2\sin A}$

同理可證 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

同理可證 (ii) $R=\frac{b}{2\sin B}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{ab}{4\triangle}$

(iii) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, 即 $\sin A=\frac{a}{2R}$

$\therefore$ $\triangle=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ac\frac{b}{2R}=\frac{abc}{4R}$

〔例 1〕 設一三角形之各邊角爲 $a, A, b, B, c\ C$, ;試證

(i) $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

(ii) $c^2=(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}+(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}$

（證） $\because$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\therefore$ $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

(i) 左邊 $=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=$ 右邊

(ii) 右邊 $=c^2\cos^2\frac{A-B}{2}+c^2\sin^2\frac{A-B}{2}$

$=c^2(\cos^2\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{A-B}{2})=c^2$

〔例 2〕 試證 $a^2+b^2+c^2=8R^2(1+\cos A\cos B\cos C)$

R 爲 $\triangle ABC$ 外接圓之半徑。

（證） $\therefore$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\therefore$ $a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2 B+\sin^2 B+\sin^2 C)$

$=4R^2(\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2})$

$=4R^2(\frac{3}{2}+2\cos A\cos B\cos C+\frac{1}{2})$

$=8R^2(1+\cos A\cos B\cos C)$

〔例 3〕 設 a, b, c, 爲 $\triangle ABC$ 之三邊, $\triangle$ 爲面積, 試證

$a^2b^2c^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=32\triangle^3$

（證） 左邊 $=a^2b^2c^2\times4\sin A\sin B\sin C$

$=16\triangle^2R^2\times4\sin A\sin B\sin C$

$=32\triangle^2(2R^2\sin A\sin B\sin C)$

$$=32\triangle^2\times\frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C$$

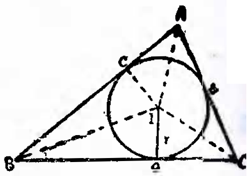
$$=32\triangle^2\times\frac{1}{2}ab\sin C=32\triangle^3$$

（五） 設 $\triangle ABC$ 之內接圓半徑為 r，則

$\triangle=sr$

且證 $r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

（證） 設 I 為 $\triangle ABC$ 之內心，I 各向三邊之切點聯線，則由幾何學知此線必垂直於三邊，且其長均為 r，今



$S=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$

$=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rs$

又因 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\therefore\quad rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

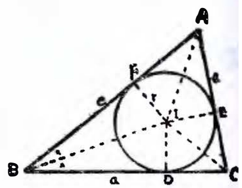
$\therefore\quad r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

9. 三角形外接圓半徑與內切圓半徑之關係

設外接圓半徑為 R，內接圓半徑為 r，則

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

（證） 設 $\triangle ABC$ 其內心為 I，內切圓半徑為 r，又以 a,b,c 表三邊則



$a=BD+DC,\ BD=r\cot\frac{B}{2}$

$DC=r\cot\frac{C}{2}$

$(\because\ ID\perp BC,\ ID=r)$

$$a=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=r\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$=r\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\qquad 若\quad R=\frac{a}{2\sin A}$$

$$a=2R\sin A=2R\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\therefore\quad\frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

即 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

0. 三角形之傍切圓之半徑

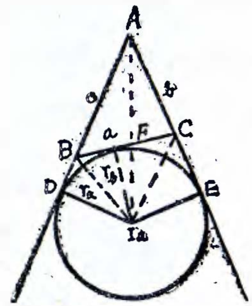
設 r_a, r_b, r_c 為 $\triangle ABC$ 之三傍切圓半徑，I 為傍心

則 $r_a=s\tan\frac{A}{2}=\frac{\triangle}{s-a}$，$r_b=s\tan\frac{B}{2}=\frac{\triangle}{s-b}$

$r_c=s\tan\frac{C}{2}=\frac{\triangle}{s-c}$

（證） 連接 $I_aE,\ I_aF,\ I_aD$，則 $I_aD=I_aE=I_aF=r_a$

$\triangle ABC=\triangle AI_aB+\triangle AI_aC-\triangle BCI_a$



$=\frac{1}{2}r_ac+\frac{1}{2}r_ab-\frac{1}{2}r_aa$

$=\frac{1}{2}r_a(c+b-a)$

$=\frac{1}{2}r_a2(s-a)$

$=r_a(s-a)$

$\therefore\quad r_a=\frac{\triangle}{s-a}$

同理 $r_b=\frac{\triangle}{s-b}$, $r_c=\frac{\triangle}{s-c}$

或 $r_a=AD\tan\frac{A}{2}$, ∵ $AD=AE$, $AD+AE=2AD$

又 $BD=BF$, $CE=CF$, ∴ $AB+BD=AC+CE$

原 $AB+BC+AC=2AD$ ∴ $AD=s$ ∴ $r_a=s\tan\frac{A}{2}$

同理 $r_b=s\tan\frac{B}{2}$, $r_c=s\tan\frac{C}{2}$

〔例1〕 求證下列各等式

(i) $r_c\cdot r_b+r_c\cdot r_a+r_a\cdot r_b=s^2$

(ii) $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$

〔證〕 (i) 左邊 $=\frac{\triangle^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{\triangle^2}{(s-c)(s-a)}+\frac{\triangle^2}{(s-a)(s-b)}$

$$=\frac{\triangle^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdot s(s-a+s-b+s-c)$$

$$=\frac{\triangle^2}{\triangle^2}s(3s-2s)=s^2$$

(ii) 左邊 $=\frac{s-a}{\triangle}+\frac{s-b}{\triangle}+\frac{s-c}{\triangle}=\frac{1}{\triangle}(3s-2s)=\frac{s}{\triangle}=\frac{s}{rs}=\frac{1}{r}$

〔例2〕 試證: $\triangle=\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

〔證〕 右邊 $=\frac{2abc}{2s}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

$$=\frac{abc}{s}\cdot\frac{s}{abc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\triangle=\text{左邊}$$

〔例3〕 證證 $\frac{s}{r}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$

〔證一〕 右邊 $=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}+\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}+\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$

$$=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}[(s-a)+(s-b)+(s-c)]$$

$$=\sqrt{\frac{s^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}}[3s-(a+b+c)]$$

$$=\frac{s}{\triangle}(3s-2s)=\frac{1}{r}\cdot s=\frac{s}{r}$$

(證二) ∵ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

∴ 右邊 $=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-a)}}$

$$=\frac{s\cdot\triangle}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{\triangle}{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$=\frac{\triangle}{r^2}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\triangle}{r}=\frac{1}{r}\cdot s$$

〔例4〕 試證 $r_a+r_b+r_c-r=4R$

〔證一〕 左邊 $=\frac{\triangle}{s-a}+\frac{\triangle}{s-b}+\frac{\triangle}{s-c}-\frac{\triangle}{s}=\frac{\triangle}{s(s-a)(s-b)(s-c)}[(s-b)(s-c)s+(s-c)(s-a)s+(s-a)(s-b)s-(s-a)(s-b)(s-c)]$

$$=\frac{\triangle}{\triangle^2}\{s[(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)]-[s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-abc]\}$$

$$=\frac{1}{\triangle}\{s[3s^2-2(a+b+c)s+(ab+bc+ca)]-[s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-abc]\}$$

$$=\frac{1}{\triangle}\{3s^3-2(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-s^3+(a+b+c)s^2-(ab+bc+ca)s+abc\}$$

$$=\frac{1}{\triangle}\{2s^3-(a+b+c)s^2+abc\}=\frac{1}{\triangle}\{2s^3-2s\cdot s^2+abc\}$$

$$=\frac{abc}{\triangle}=4R$$

〔證二〕 左邊 $=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$+4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=4R\left[\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right.$

$\left.+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right]$

$=4R\sin\frac{A+B+C}{2}=4R\sin 90^\circ=4R$

〔例5〕 設 a, b, c 爲 $\triangle ABC$ 之三邊，$\triangle$爲面積，試證

$$\triangle=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}$$

〔證〕 $\triangle=\frac{a^2\sin A\sin B\sin C}{2\sin^2 A}=\frac{b^2\sin A\sin B\sin C}{2\sin^2 B}$

$=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B\sin C}{2(\sin^2 A-\sin^2 B)}=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B\sin C}{2\sin(A+B)\sin(A-B)}$

$=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}$

〔例6〕 設 $r_a-r=r_b+r_c$，則三角形爲直角三角形。

〔證一〕 $\because$ $r_a-r=r_b+r_c$

$\therefore$ $4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+4R\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\therefore$ $4R\neq 0$

$\therefore$ $\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

$=\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}$

$\sin^2\frac{A}{2}=\cos^2\frac{A}{2}$，$\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=0$

即 $\cos A=0$ $\therefore$ $A=90^\circ$ 故爲直角三角形

〔證二〕 $\because$ $r_a-r=r_b+r_c$

$\therefore$ $\frac{\triangle}{s-a}-\frac{\triangle}{s}=\frac{\triangle}{s-b}+\frac{\triangle}{s-c}$

$\because$ $\triangle\neq 0$ $\therefore$ $\frac{s-(s-a)}{(s-a)s}=\frac{(s-c)+(s-b)}{(s-b)(s-c)}$

$\frac{a}{(s-a)s}=\frac{a}{(s-b)(s-c)}$

$\because$ $a\neq 0$ $\therefore$ $s(s-a)=(s-b)(s-c)$

$s^2-sa=s^2-sb-sc+bc$

$s(b+c-a)-bc=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)(b+c-a)-bc=0$

即 $(b+c)^2-a^2-2bc=0$

$b^2+2bc+c^2-a^2-2bc=0$

$\therefore$ $b^2+c^2-a^2=0$

即 $a^2=b^2+c^2$ 故爲直角三角形

〔例7〕 已知三角形三邊長 a, b, c, 爲 x^3-px^2+qx-r 之三根

(一) 求以 p, q, r 表此三角形之面積。

(二) 試以 p, q, r 表示 $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$ 之值。

〔證〕 (一) 因 $a+b+c=p$, $ab+bc+ca=q$, $abc=r$

則 $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{s\{[s^2-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-abc]\}}$

$=\sqrt{\frac{p}{2}\{(\frac{p}{2})^3-p(\frac{p}{2})^2+q(\frac{p}{2})-r\}}$

$=\sqrt{\frac{p}{2}\{\frac{p^3}{8}-\frac{p^3}{4}+\frac{pq}{2}-r\}}=\sqrt{\frac{p}{2}(\frac{-p^3+4pq-8r}{8})}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{-p^4+4p^2q-8pr}$

（二） $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C}{abc}$

$=\frac{(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)}{2abc}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

$=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{2abc}=\frac{p^2-2q}{2r}$

〔例8〕 在任何三角形中，其內切圓之面積與此三角形之面積之比等於 π 與 $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ 之比，試證之

〔證〕 設三角形之面積爲 $\triangle$，其內接圓之面積爲 A，則

$A:\triangle=\pi r^2:\triangle=\pi:\frac{\triangle}{r^2}$， 然

$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-b)(s-c)}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}}$

$\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=\frac{s\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$

$=\frac{s^2}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=\frac{s^2}{\triangle}=\frac{s^2}{rs}=\frac{sr}{r^2}=\frac{\triangle}{r^2}$

$\therefore\ A:\triangle=\pi:\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

習題二十四

(1) 試證下列等式:

① $2rR=\frac{abc}{a+b+c}$　② $r_1+r_2+r_3=4R+r$

③ $r_1r_2r_3=r^3\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}$

④ $r_1=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$　⑤ $r_ar_br_c=rs^2$

⑥ $\frac{r_ar_br_c}{\sqrt{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}}=S$

⑦ $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{S^2}$

⑧ $r_a+r_b=c\cot\frac{C}{2}$　⑨ $\frac{r\,r_a}{r_b\,r_c}=\tan^2\frac{A}{2}$

(2) 試證下列表三角形面積之公式:

① $\triangle=s(s-a)\tan\frac{A}{2}$　② $\triangle=(s-a)^2\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

③ $\triangle=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$

④ $\triangle=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$

⑤ $\triangle=\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(3) 試證在底邊及他二邊和爲一定之三角形中等腰三角形之面積最大。

(4) 於 $\triangle ABC$，設對應 a, b, c 之高各爲 h_1, h_2, h_3,

試證 (i) $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{s}{\triangle}$

(ii) $(h_1\sin A+h_2\sin B+h_3\sin C)$

$=18\triangle\sin A\sin B\sin C$

(5) 試證 $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{h_b\,h_c}{4r_b\,r_c}$

(6) 試證 $(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)=4Rr^2$

(7) 試證 $(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a})(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b})(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c})=\frac{4R}{r^2s^2}$

(8) 試證 $r(\sin A+\sin B+\sin C)=2R\sin A\sin B\sin C$

(武漢大學)

(9) 試證 $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$

(武漢大學)

習題略解

(1) ① $\because\ \triangle=rs,\ \triangle=\frac{abc}{4R}\quad\therefore\ rs=\frac{abc}{4R}\quad\therefore\ 2rR=\frac{abc}{2s}$

$=\frac{abc}{a+b+c}$

② $r_1+r_2+r_3-r=\frac{\triangle}{s-a}+\frac{\triangle}{s-b}+\frac{\triangle}{s-c}-\frac{\triangle}{s}=\triangle[\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)}$

$+\frac{s-(s-c)}{s(s-c)}]=c\triangle\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}+\frac{1}{s(s-c)}\}$

$=c\triangle\{\frac{2s^2-s(a+b+c)+ab}{\triangle^2}\}=\frac{abc}{\triangle}=4R$

③ $r_1r_2r_3=\frac{\triangle^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ 然 $s^3=\frac{\triangle^3}{r^3}$

$\frac{r_1r_2r_3}{r_3}=\frac{s^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}$

$=\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}\cdot\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}\cdot\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}$

$=\frac{s^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\therefore\ \frac{r_1r_2r_3}{r_3}=\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}$

④ 左邊 $=r_1=\frac{\triangle}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

右邊 $=a\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}\cdot\frac{s(s-c)}{ab}\cdot\frac{bc}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

⑤ 左邊 $=\frac{\triangle}{s-a}\cdot\frac{\triangle}{s-b}\cdot\frac{\triangle}{s-c}=\frac{\triangle^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{\triangle^3 s}{\triangle^2}$

$=\triangle s=rs^2$

⑥ 左邊 $=\frac{rs^2}{\sqrt{\frac{S^2}{(s-a)(s-b)}+\frac{S^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{S^2}{(s-c)(s-a)}}}$

$=\frac{rs^2}{\sqrt{\frac{S^2 s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}}=\frac{r^2s^2}{\sqrt{S^2}}=rs=S$

⑦ 左邊 $=\frac{1}{r^2}+\frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{S^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{S^2}$

⑧ 左邊 $=\frac{S(s-b+s-a)}{(s-a)(s-b)}=\frac{Sc}{(s-a)(s-b)}=\frac{rsc}{(s-a)(s-b)}$

$=\frac{1}{r^2}rc(s-c)=\frac{c(s-c)}{r}=c\cot\frac{C}{2}$

⑨ 左邊 $=(\frac{\triangle}{s}\cdot\frac{\triangle}{s-a})/(\frac{\triangle}{s-b}\cdot\frac{\triangle}{s-c})=\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}=\tan^2\frac{A}{2}$

(2) ① 右邊 $=s(s-a)\frac{r}{s-a}=sr=\triangle$

② 右邊 $=(s-a)^2\frac{r}{s-a}\cdot\frac{s-b}{r}\cdot\frac{s-c}{r}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{sr}$

$=\frac{\triangle^2}{\triangle}=\triangle$

③ 右邊 $=\frac{1}{4}(2a^2\sin B\cos B+2b^2\sin A\cos A)$

$=\frac{1}{2}(a^2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+b^2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})$

$=\frac{2abc^2}{8Rc}=\frac{abc}{4R}=\triangle$

④ 右邊 $=Rr(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R})=r\cdot\frac{a+b+c}{2}=rs=\triangle$

⑤ 右邊 $=\frac{abc}{s}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\triangle$

(3) 於 $\triangle ABC$，設 $BC=a$，$AB+AC=l$，$\triangle^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$

因 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(a+l)=$一定， $\therefore$ $s-a=$一定，

故 $(s-b)(s-c)$ 最大時，面積爲最大，然 $(s-b)+(s-c)$

$=a=$一定，故 $s-b=s-c$，即 $b=c$，時 $(s-b)(s-c)$ 爲最大。

(4) (i) 因 $\triangle=\frac{ah_1}{2}=\frac{bh_2}{2}=\frac{ch_3}{2}$，

故 $\frac{1}{h_1}=\frac{a}{2\triangle}$，$\frac{1}{h_2}=\frac{b}{2\triangle}$，$\frac{1}{h_3}=\frac{c}{2\triangle}$ 此三式相加得

$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{a+b+c}{2\triangle}=\frac{2s}{2\triangle}=\frac{s}{\triangle}$

(ii) 因 $ah_1=bh_2=ch_3=2\triangle$，故 $2Rh_1\sin A=2Rh_2\sin B$

$=2Rh_3\sin C=2\triangle$ 因之 $(h_1\sin A+h_2\sin B+h_3\sin C)^2$

$=\frac{9\triangle^2}{R^2}$……① 然 $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4\triangle}$

$=\frac{2R\sin A\,2R\sin B\,2R\sin C}{4\triangle}$

∴ $R^2=\frac{\triangle}{2\sin A\sin B\sin C}$ 代入(1)得

$(h_1\sin A+h_2\sin B+h_3\sin C)^2=9\triangle^2\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\triangle}$

$=18\triangle\sin A\sin B\sin C$

(5) 左邊$=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$，但 $s-b=\frac{\triangle}{r_b}$， $s-c=\frac{\triangle}{r_c}$

故左邊$=\frac{\triangle^2}{bcr_br_c}=\frac{h_bh_c}{4r_br_c}$

(6) 因 $r_a-r=4R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

$=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}=4R\sin^2\frac{A}{2}$

故 左邊$=64R^3\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=4Rr^2$

(7) 左邊$=\frac{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}{r^3r_ar_br_c}=\frac{4Rr^2}{r^3\frac{s\triangle^3}{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

$=\frac{4Rr^2}{r^3rs^2}=\frac{4R}{r^2s^2}$

(8) 左邊$=4r\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=16R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=$右邊

(9) 左邊$=\frac{c\sin A\cos A}{\sin C}+\frac{c\sin B\cos B}{\sin C}+\frac{c\sin C\cos C}{\sin C}=\frac{c}{2\sin C}$

$(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=R\cdot 4\sin A\sin B\sin C=$右邊

11. 雜 題

(一) 四邊形之面積

設四邊形 $ABCD$ 之四邊爲 a, b, c, d,

$a+b+c+d=2s$, $\angle A+\angle C=2\alpha$, 其面積爲 S

則 (i) $S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha}$

(ii) 若四邊形 $ABCD$ 內接於圓時

$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

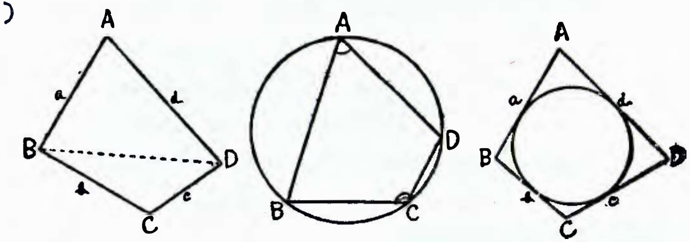
(iii) 若四邊形 $ABCD$ 外切於圓時

$S=\sqrt{abcd}\sin\alpha$

(iv) 若四邊形 $ABCD$ 外切於圓，同時內切於他圓時，

$S=\sqrt{abcd}$

(證)



(i) $\overline{BD}^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C$

∴ $ad\cos A-bc\cos C=\frac{1}{2}(a^2+d^2-b^2-c^2)$……(1)

$\triangle ABD=\frac{1}{2}ad\sin A$, $\triangle CBD=\frac{1}{2}bc\sin C$

∴ $ad\sin A+bc\sin C=2S$ ……(2)

$(1)^2+(2)^2$ $a^2d^2+b^2c^2-2abcd(\cos A\cos C-\sin A\sin B)$

$=4S^2+\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$……(3)

然 $\cos A\cos C-\sin A\sin C=\cos(A+C)=\cos 2\alpha$

代入(3)得 $a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos 2\alpha$

$=4S^2+\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$

∴ $16S^2=4(a^2d^2+b^2c^2)-8abcd(2\cos^2\alpha-1)$

$$-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$$

$$=4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-16\,abcd\cos^2\alpha$$

$$=(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a+b+c-d)(-a+b+c+d)-16\,abcd\cos^2\alpha$$

$$=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-16\,abcd\cos^2\alpha$$

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha}$$

(ii) 若四邊形 $ABCD$ 內接於圓時，因 $2\alpha=\angle A+\angle C=180°$

$\therefore\ \cos\alpha=\cos 90°=0$

$\therefore\ S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

(iii) 若四邊形 $ABCD$ 外切於圓時，因 $a+c=b+d=s$

$s-a=a+c-a=c,\quad s-b=b+d-d=d$

$s-c=a+c-c=a,\quad s-d=b+d-d=b$

$\therefore\ S=\sqrt{abcd-abcd\cos^2\alpha}=\sqrt{abcd(1-\cos^2\alpha)}$

$=\sqrt{abcd\sin^2\alpha}=\sqrt{abcd}\sin\alpha$

(iv) 若四邊形 $ABCD$ 外切於圓，同時內接於他圓時，

$\pi=90°$, $\sin\alpha=1$ $\therefore$ $S=\sqrt{abcd}$

(二) 三角形之三中線長

設 $\triangle ABC$ 之各中線長為 m_a, m_b, m_c，則

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A},\quad m_b=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+2ca\cos B}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C}$$

(證) 於 $\triangle ABC$ 中，設 D 為 BC 之中點，則

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$

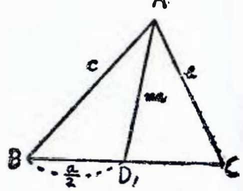
即 $c^2+b^2=2(m_a^2+\frac{a^2}{4})$

$\therefore\ 4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$……(1)

然 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

代入(1)得

$4m_a^2=b^2+c^2+2bc\cos A$



$\therefore\ m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$,

同理 $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+2ca\cos B}$, $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C}$

(三) 內外平分線之長

設 $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 之平分線與 BC 之交點為 D, $\angle A$ 之外角之平分線與 BC 延長交點為 E, 則

(i) $AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, (ii) $AE=\frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2}$

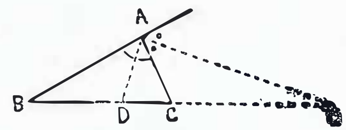
(證) (i) $\triangle ABD+\triangle ACD=\triangle ABC$

$\therefore\ \frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A$

$$\therefore\ AD=\frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$



(ii) 設 $\angle CAE=\alpha$, 則 $\alpha+\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\triangle ABE-\triangle ACE=\triangle ABC$

$\therefore\ \frac{1}{2}c\cdot AE\sin(\alpha+A)-\frac{1}{2}b\cdot AE\sin\alpha=\frac{1}{2}bc\sin A$

然 $\sin(\alpha+A)=\sin\alpha$ ($\because\ 2\alpha+A=\pi$)

$\therefore\ c\cdot AE\sin\alpha-b\cdot AE\sin\alpha=bc\sin A$

$$\therefore\ AE=\frac{bc\sin A}{(c-b)\sin\alpha}=\frac{2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(c-b)\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2}\quad(\because\ \alpha+\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2})$$

(註) 因 E 在 BC 之延長上，故必 $c>b$，若 E 在 CB 之延長上，

則 $b>c$, $\triangle ACE-\triangle ABC=\triangle ABC$

$$AE=\frac{bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}$$

〔例 1〕設內接於圓之四邊形 $ABCD$ 之對角線為 x, y, 四邊長各為 a, b, c, d, 外接圓半徑為 R, 試證

(i) $x=\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ab+bc)}{ab+cd}}$ (ii) $y=\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$

(iii) $R=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$

〔證〕(i) $x^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$

$$\therefore\quad 2\cos B=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{x^2}{ab}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2\cos D=\frac{c^2+d^2}{cd}-\frac{x^2}{cd}\cdots\cdots\cdots(2)$$

然 $\angle B+\angle D=180^\circ$ $\therefore$ $\cos B=-\cos D$

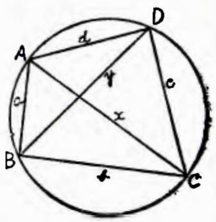
$$\therefore\quad \frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{x^2}{ab}=-\left(\frac{c^2+d^2}{cd}-\frac{x^2}{cd}\right)$$

$$\therefore\quad x^2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\right)=\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}=\frac{(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab}{abcd}$$

$$=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}\cdot\frac{abcd}{ab+cd}=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$



(ii) 同理 $y=\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$

(iii) $\triangle ABC=\dfrac{abx}{4R}$, $\triangle ACD=\dfrac{cdx}{4R}$

設四邊形 $ABCD$ 之面積為 S,

則 $S=\dfrac{(ab+cd)x}{4R}$

$$\therefore\quad R=\frac{(ab+cd)x}{4S}=\frac{(ab+cd)}{4S}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

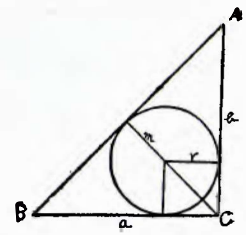
然 $S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 代入上式

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

〔例 2〕設一直角三角形內切圓之半徑為 r, 直角之平分線長為 m, 求證其 a 與 b 二直角邊長為下列二次方程式之根。

$$(m-2\sqrt{2}\,r)x^2+2\sqrt{2}\,r^2x-2mr^2=0$$

〔證〕$\because m=\dfrac{2ab}{a+b}\cos 45^\circ=\dfrac{2ab}{a+b}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$\therefore$ $ab=(a+b)\dfrac{m}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又 $\because [(a-r)+(b-r)]^2=a^2+b^2$

即 $2r^2+ab-2r(a+b)=0\cdots\cdots(2)$

由 (1) 代入 (2) 得

$2\sqrt{2}\,r^2+(m-2\sqrt{2}\,r)(a+b)=0$

$\therefore$ $a+b=\dfrac{-2\sqrt{2}\,r^2}{m-2\sqrt{2}\,r}$, $ab=\dfrac{-2mr^2}{m-2\sqrt{2}\,r}$

習題二十五

(1) 試證在四邊長一定之四邊形中，內接於圓時，其面積為最大。

(2) 試證對角線之長為 p, q, 其夾角為 ϕ 之四邊形之面積等於 $\dfrac{1}{2}pq\sin\phi$。

(3) 如四邊形 $ABCD$ 有一外接圓及一內切圓，試證

(i) $\cos A=\dfrac{ad-bc}{ad+bc}$ (ii) $\tan^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{bc}{ad}$

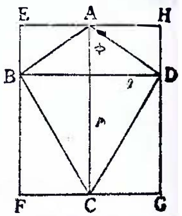
(iii) 內切圓半徑 $=\dfrac{\sqrt{abcd}}{s}$

習題略解

(1) 設四邊形 $ABCD$ 之面積爲 S, 四邊長各爲 a, b, c, d, $2s=a+b+c+d$, $\angle A+\angle C=2\alpha$; 則 $S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha$, 因 $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ 與 $abcd$ 爲一定，故 $\cos^2\alpha$ 最小時 S 爲最大。

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{2}$ 即 $2\alpha=\pi$, 即 $\angle A+\angle C=\pi$ 時, S 爲最大。

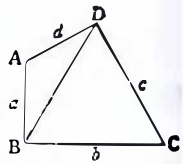
(2) 於四邊形 $ABCD$ 過各頂點作對角線之平分線所成之平行四邊形爲 $EFGH$, 則 $\angle EFG=\phi$; $EF=AC=p$,



$FG=BD=q\ \ \therefore\ \square ABCD=\frac{1}{2}\square EFGH$

$=\triangle EFG=\frac{1}{2}pq\sin\phi$

(3) (i) 四邊形 $ABCD=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$, 因四邊形 $ABCD$ 內接於圓，故 $\angle A+\angle C=\pi\ \ \therefore\ \sin C=\sin A$



$\therefore$ 四邊形 $ABCD=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A$

又因四邊形 $ABCD$ 有外接圓及內切圓，
故四邊形 $ABCD=\sqrt{abcd}$

$\therefore\ \sqrt{abcd}=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A,\ \ \therefore\ \sin A=2\sqrt{abcd}/(ad+bc)$

$\therefore\ \cos A=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{abcd}}{ad+bc}\right)^2}=\frac{ad-bc}{ad+bc}$

(ii) $\tan^2\frac{A}{2}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\cos A)}{\frac{1}{2}(1+\cos A)}=\frac{1-\frac{ad-bc}{ad+bc}}{1+\frac{ad-bc}{ad+bc}}=\frac{bc}{ad}$

(iii) $S=\frac{1}{2}r(a+b+c+d)=rs\ \because\ S=\sqrt{abcd}\ \therefore\ r=\frac{S}{s}=\frac{\sqrt{abcd}}{s}$

綜合習題三

試證下列各恆等式:

(1) $a\cos A+b\cos B=c\cos(A-B)$

(2) $\frac{ma+b+c}{ma-b+c}=\frac{m\sin A+\sin B+\sin C}{m\sin A-\sin B+\sin C}$

(3) $(a\sin A+b\sin B+c\sin C)^2=(a^2+b^2+c^2)(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$

(4) $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$

(5) $\frac{a\cos B-b\cos A}{\sin(A-B)}=\frac{c}{\sin C}$

(6) $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}=\frac{b\cos C-c\cos B}{b\cos C+c\cos B}$

(7) $a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C=3abc$

(8) $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$

(9) $(b+c-a)(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2})=2a\cot\frac{A}{2}$

(10) $(a+b)\sin\frac{C}{2}=c\cos\frac{A-B}{2}$

(11) $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}$

(12) $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2c\sin A\sin B$

(13) $a\sin(B-C)\cos(B+C-A)+b\sin(C-A)\cos(C+A-B)+c\sin(A-B)\cos(A+B-C)=0$

(14) $\triangle=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$

(15) $\triangle=\frac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot A+\cot B+\cot C)}$

(16) $\triangle=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$

(17) $\triangle=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}$

(18) $(\frac{a^2}{\sin A}+\frac{b^2}{\sin B}+\frac{c^2}{\sin C})\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\sin C=\triangle$

(19) $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2rR}$

(20) $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r)$

(21) $r_a=s\tan\frac{A}{2}=(s-c)\cot\frac{B}{2}=(s-b)\cot\frac{C}{2}$

(22) $\frac{s}{r}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$

(23) $\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{a+b+c}\right)=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{2abc}$

(24) $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$

(25) $\triangle=\frac{1}{4}(a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C)$ (兵工學院)

(26) $\triangle=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(27) $\triangle=\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(28) $4r(r_a+r_b+r_c)=2(bc+ca+ab)-(a^2+b^2+c^2)$

(29) $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a{}^2}+\frac{1}{r_b{}^2}+\frac{1}{r_c{}^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{\triangle^2}$

(30) $t_a\cos\frac{A}{2}+t_a\cos\frac{B}{2}+t_c\cos\frac{C}{2}=a+b+c$

(31) $R=\frac{(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)}{4(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)}$

(32) 設 $\frac{\cos A}{b}=\frac{\cos B}{a}$，則此三角形爲等腰三角形或直角三角形。

(33) 設 $(s-b)\cot\frac{C}{2}=s\tan\frac{B}{2}$，則此三角形爲等腰三角形。

(34) 設一三角形內 $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1$，則其中有一角爲 120°

(35) 設 $C=2B$, $A\neq B$, 則 $c^2=b(a+b)$

(36) 設 $\cos\theta=\frac{a-b}{c}$，則 $\sin\frac{1}{2}\theta=\frac{c\sin\theta}{2\sqrt{ab}}$

(37) 若 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 成 A. P.，則

$\cot\frac{A}{2}$，$\cot\frac{B}{2}$，$\cot\frac{C}{2}$ 亦成 A. P.。

(38) 若 $A:B:C=1:2:7$, 則 $c:a=\sqrt{5}+1:\sqrt{5}-1$，試證。

(39) 若 $\frac{\cos A}{a}$，$\frac{\cos B}{b}$，$\frac{\cos C}{c}$ 成 A. P.，則 a^2, b^2, c^2 亦成 A. P.。

(40) 若 A, B, C 成 A. P.，則 $2\cos\frac{A-C}{2}=\frac{a^2+c^2}{b^3}$。

(41) 若 $\cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}=\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 則 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形。

(42) 若 $a^2=bc$, 則 $\cos(B-1)=1-\cos A-\cos 2A$

(43) 若 $2\cos A+\cos B+\cos C=2$ 則

$2a=b+c$

(44) 設三角形三邊之長爲 a, b, c，其三中線爲 l, m, n 試證

$(b^2-c^2)l^2+(c^2-a^2)m^2+(a^2-b^2)n^2=0$

(45) 設三邊爲 x^2+x+1, x^2-1, $2x+1$，求最大角。 答：120°

(46) 若 $2\cos A+\cos B+\cos C=2$，則 $2a=b+c$。

(47) 設 $C=\frac{\pi}{2}$，試證 $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{c-b}{2c}$，$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{c+b}{2c}$

$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}$

(48) 若 $b+c:c+a:c+b=4:5:6$ 則

$\cos A:\cos B:\cos C=-7:11:13$

$\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$

(49) 設兩圓外切；半徑分別爲 R 與 r，若兩圓公切之交角爲 θ，試證

$\sin\theta=\frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}$

(50) 有互相外切之三圓，其半徑分別爲 a, b, c，試求三圓中空隙之面積。

答：$s=\sqrt{abc(a+b+c)}-\frac{\pi(a^2A+b^2B+c^2C)}{360}$

第五章 測量問題

1. 測量術語

三角形解法之主要應用爲測量問題。茲將測量中最常用之術語，說明如下：

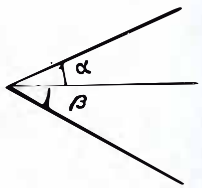
(一) 鉛垂線繫金屬物於繩之一端，線之一端固定，使其自由下垂，此繩所持之位置，稱爲該點之鉛垂線。

(二) 鉛垂面含有過一點鉛垂線之平面，稱爲該點之鉛垂面。

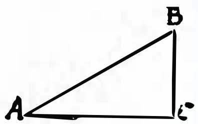
(三) 水平線過鉛垂線上一點而與鉛垂線，相垂直的直線，謂之該點之水平線。

(四) 水平面過一點而與此點鉛垂線相垂直的平面謂之該點之水平面。

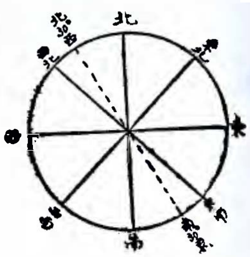
(五) 仰角及俯角：仰角，視線在水平線之上所成之角，如圖 α 角。
俯角，視線在水平線之下所成之角，如圖 β 角。



(六) 距離如 AC 爲 A 點之水平線，BC 爲 B 點之鉛垂線，AC, BC 相交於 C，如右圖則：AC 稱爲 A,B 間之水平距離，BC 稱爲 A,B 間之鉛直距離 AB 叫做 A,B 間之距離。



(七) 羅盤航海時恒用羅盤以定方位，將圓形盤面分成 32 等分，故兩分點間弧所對圓心角爲 $\frac{360^\circ}{32}$，即 11.25°。



羅盤之向及點——由一定點視他一點之方向平分東與北兩向，則稱他一點之向爲東北。

例：視右圖與下例即得知其方向。

(i) 南 30° 東　(ii) 北 30° 西

2. 解測量問題之步驟

初學者對於測量題，往往視爲一難關，考其原因均不了解題意，或代數學不熟，或幾何定理不會應用。此類題目是三角應用問題，簡單者不過爲解三角形，繁雜者與代數學中應用問題相同。惟立方程式時要用三角學中之定義及公式與幾何學中之定義及定理而已。茲將其步驟簡述如下：

(一) 關於羅盤方向及測量術語，須徹底了解明白。

(二) 看清楚題意，作一適當之圖形。

(三) 找出幾個三角形爲基礎，必要時可作輔助線。用三角法及幾何定理，(畢氏定理正餘弦定理等) 以考察其邊角間之關係。

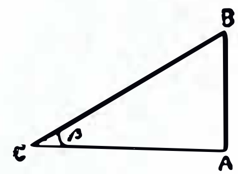
(四) 令所求之値 x，(有時爲便利起見可引用幾個未知數) 由上面所得之關係立方程式。

(五) 解此方程式，答數有不合理者應說明棄去。

3. 簡易測量題

〔例1〕 平地上立一竿，於離竿足 a 公尺處，測得竿頂之仰角爲 β 度，求竿高？

〔要點〕 設竿高爲 x 公尺，即 $AB=x$，而 $AC=a$ 公尺，$\angle ACB=\beta$ 度，今從 a, β 之間找出其已知關係即由三角函數之定，得立下式

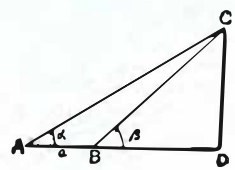


$$\frac{x}{a}=\tan\beta \quad \therefore \quad x=a\tan\beta$$

於是因 a, β 爲已知數，x 爲未知數，將已知數代入上式便可得其解。

〔解〕 從略

〔例2〕 有砲臺一座，自同平面上測得仰角爲 α，向砲臺走近 a 尺，再測得仰角爲 β，求砲臺之高。(臺省師大)



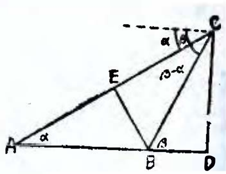
〔解一〕 如右圖設砲臺爲 $CD=x$,

A, B 爲兩測點，則 $AD=x\cot\alpha$，$BD=x\cot\beta$

$\therefore\ AB=AD-BD=x(\cot\alpha-\cot\beta)$

$$\therefore\ x=\frac{a}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

(解二) 今 $\angle ACB=\beta-\alpha$，作 $BE\perp AC$，



在直角三角形 ABE 中

$BE=a\sin\alpha$

又在直角三角形 BCE 中，

$BC=BE\csc(\beta-\alpha)$

$$=\frac{BE}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

在直角三角形 BCD 中，$CD=BC\sin\beta$

$$\therefore\ x=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

(解三) 設 $CD=x$ 尺，$BD=y$ 尺

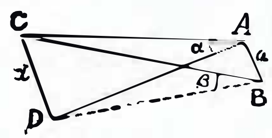
$$今\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\tan\beta\cdots\cdots\cdots(1)\\[2mm]\dfrac{x}{y+a}=\tan\alpha\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

由 $\dfrac{(1)}{(2)}$ 得 $\dfrac{y+a}{y}=\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}$，即 $(y+a)\tan\alpha=y\tan\beta$

$$\therefore\ y=\frac{a\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha};\quad x=\frac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$$

〔例 3〕一人於塔之正東平地上一點測得塔之仰角爲 α，復南行 a 尺，測得塔之仰角爲 β，求塔高。(武漢大學、北洋工院、統一招生)

(解) 如右圖，設塔高 $CD=x$，



A, B 爲第一，第二測點，則

$AD=x\cot\alpha$，$BD=x\cot\beta$

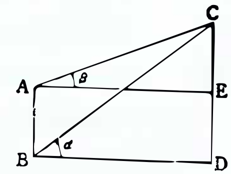
因 $\angle DAB$ 爲直角 (正東正南相交成直角)，故在 rt$\triangle BAD$ 中，$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2$

即 $a^2=x^2(\cot^2\beta-\cot^2\alpha)$

$$\therefore\ x=\frac{a}{\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}}\left(=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}\right)$$

〔例 4〕在塔底測得對面山頂之仰角爲 α，復在塔頂測得其仰角爲 β，若塔高爲 a，求山之高。

(解一) 如右圖，設山高 $CD=x$，則 $CE=x-a$ 又設 $BD=y$，則



$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\tan\alpha\cdots\cdots\cdots(1)\\[2mm]\dfrac{x-a}{y}=\tan\beta\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$\dfrac{(1)}{(2)}$： $\dfrac{x}{x-a}=\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$

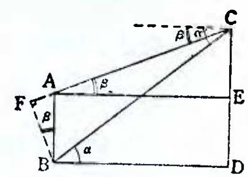
即 $x\tan\beta=x\tan\alpha-a\tan\alpha$

$$\therefore\ x=\frac{a\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

(解二) 作 $BF\perp CA$ 之延長線，則 $\angle ABF=\beta$；$\angle BCA=\alpha-\beta$

在 rt$\triangle ABF$ 中，$BF=a\cos\beta$

又在 rt$\triangle CBF$ 中



$$CB=\frac{BF}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{a\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

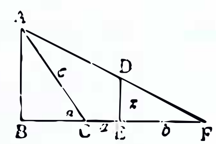
再在 rt$\triangle BCD$ 中，

$CD=CB\sin\alpha$

$$即\quad x=\frac{a\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

〔例 5〕平地上有一塔；距山脚 a 尺處，知山之傾斜爲 α 角，一人由山脚上行 c 尺，至山頂一點遠矚，塔頂所到之處，恰爲一小池，設塔與小池之距離爲 b，求證塔高爲

$$\frac{bc\sin\alpha}{a+b+c\cos\alpha}$$



(證) 如右圖，設塔高爲 $DE=x$

則 $x=EF\tan F=b\tan F$

又 $AB=c\sin\alpha$, $BC=c\cos\alpha$

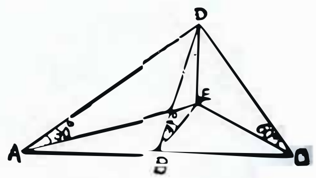
$BF=CE+EF+BC$

$=a+b+c\cos\alpha$

故 $\tan F=\dfrac{AB}{BF}=\dfrac{c\sin\alpha}{a+b+c\cos\alpha}$ 即 $x=\dfrac{bc\sin\alpha}{a+b+c\cos\alpha}$

〔例 6〕 一直線上 A, B, C 三點，在各點測一山，其仰角爲 30°, 45°, 60°, $AB=BC=600$ 尺，求山高。

（解） 如右圖，設山高爲 $DE=x$



在 $\triangle ADE$ 內，

$AE=x\cot 30°=\sqrt{3}x$

在 $\triangle CDE$ 內，

$CE=x\cot 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

在 $\triangle BDE$ 內， $BE=x\cot 45°=x$

∵ $AB=BC=600$ 尺

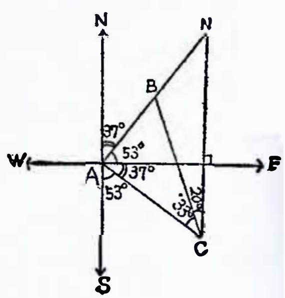
∴ BE 爲 $\triangle AEC$ 之中線

故由幾何定理三角形二邊平方和等於中線平方與第三邊半平方和之 2 倍得 $\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=2(\overline{BE}^2+\overline{BC}^2)$

即 $3x^2+\dfrac{1}{3}x^2=2x^2+2\times 360000$

$x^2=540000$ ∴ $x=\sqrt{540000}=300\sqrt{6}$ （尺）

〔例 7〕 在上午十一時，一船從 A 點以一時 8 浬之速率向南 53° 東之方向進行，當時測得一砲臺 B 在北 37°，東追至下午一時到達 C 點，測得砲臺在北 20° 西，求 BC 之距離。



（解） 如左圖，在 $\triangle BAC$ 中，

$\angle BAC=53°+37°=90°$

又 $\angle ACB$

$=90°-(\angle CAE+\angle NOB)$

$=90°-(37°+20°)=33°$

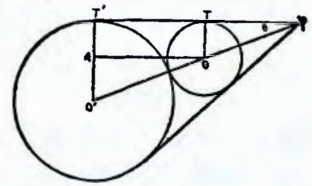
今 $BC=\dfrac{AC}{\cos 33°}=AC\sec 33°$

$=16\times 1.1924=19.0784$

故知 BC 之距離爲 19 浬

〔例 8〕 設兩圓互相外切，大圓之半徑爲 R，小圓之半徑爲 r，求此兩圓之外公切線所成之角 θ。

（解） 設 p 爲兩外公切線之交點，



T, T' 爲相當兩切點 O, O' 爲兩圓中心，聯 OT, $O'T'$，

再作 $OA\perp O'T'$

則 $\angle A=R\angle$

$\angle T=\angle T'=R\angle$

又 $\angle OPT'=\dfrac{1}{2}\theta=\angle AOO'$

且 $OO'=R+r$, $O'A=O'T'-AT'=O'T'-OT$

$=R-r$

今 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{O'A'}{OO'}=\dfrac{R-r}{R+r}$

是 $\dfrac{\theta}{2}$ 可求，即 θ 可求得。

習題二十六

(1) 平地上立一竿，於離竿足 150 公尺處，測得竿頂之仰角爲 30°，求竿高？

(2) 在某地測一砲臺其仰角爲 10°，更向砲臺走近 200 公尺測之其仰角爲 15°，求砲臺之高及第二觀測點與砲臺之距離？
($\sin 15°=0.2588$, $\sin 5°=0.0872$)

(3) 在山麓之一點測得山頂之仰角爲 60°，再退後 120 公尺，仍在同一水平面上之一地點測得其仰角爲 30°，求此山之高。

(4) 河邊一塔一塔已知高爲 93.97 尺，今測得對岸一物之俯角爲 25°12′,

求河寬。($tan\,64°\,48'=2.1251$)

(5) 自 a 尺高之山頂測地面上正南之兩點，得其俯角各為 α 及 β，求此兩點間之距離。

(6) 屋頂上豎一旗桿，今在 A 點測得旗桿頂之仰角為 α，又走近 a 尺至 B，測得桿頂及桿底之仰角各為 β 及 γ，求旗桿之長。

(7) 兩人立於距 a 尺之 A, B 兩處，同時觀察一氣球，此球正在兩人之間(即同一垂直面)上各得仰角 α 及 β，問氣之高度。

(8) A, B 兩目標分在山之兩旁之平地上，一人立於山頂，恰與 A, B 在同一鉛垂面內，測 A, B 之俯角各為 45°, 30°，設山高 200 尺，求 A, B 的距離。

(9) 一長 40 尺之梯，倚於街之一旁，適與一高 33 尺之窗口相齊，若梯不動，將梯轉倚以街之他傍，則可及高 21 尺之窗口，求街寬。

(10) 一桿豎立於土，堆上於平地上一點測得桿頂及桿底之仰角各為 60° 及 30° 求證桿長為土堆高之二倍。

(11) 塔上豎立一旗桿，今於離塔基 a 尺之處，測得塔頂之仰角為 θ，旗桿頂之仰角為 $90°-\theta$，試證旗桿長 $2a\cot 2\theta$ 尺。

(12) 一山坡與地面成 30° 之角，一人從山脚背山走遠 300 尺，測得半山一點之仰角為 15°，求山高。

(13) 一人站在離一塔 a 尺之屋頂測得塔頂仰角為 α，塔底俯角 β，則塔高為 $a(\tan\alpha+\tan\beta)$ 或 $\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$。

(14) 由 a 尺高之燈塔測得恰在塔東徑過之船之俯角為 45°，經過一小時後，船恰行至塔之正南，是時測得俯角為 30°，求船之速度。

(15) 在 A 點測得正南一塔之仰角為 30°，又在 A 點之西 a 尺之處 B 點測得其仰角為 18°，設 $\tan 18°=\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$ 則塔高為 $\dfrac{a}{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}$

(16) 甲乙兩船同時在正午離埠，甲向 $W.\,28°\,S.$ 每時速 10 浬，乙向 $E.\,62°\,S.$ 每時速 $10\frac{1}{2}$ 浬，問在下午二時，甲乙兩船距離若干？

習題略解

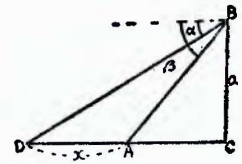
(1) 倣〔例 1〕竿高 $50\sqrt{3}$ 公尺

(2) 倣〔例 2〕砲臺高 103 公尺，第二觀測點離砲臺 384.3 公尺

(3) 倣〔例 2〕高 $=120/(\cot 30°-\cot 60°)=103.92$ (公尺)

(4) $x=93.97\tan(90°-25°12')=200$ (尺)

(5) 設 $AD=x$ 尺

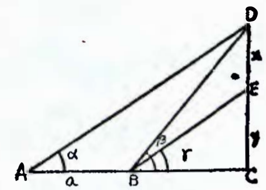


$DC=a\tan(90°-\alpha)=a\cot\alpha$

$AC=a\tan(90°-\beta)=a\cot\beta$

$\therefore x=DC-AC=a(\cot\alpha-\cot\beta)$

(6) 設旗桿高 $=x$ 尺，屋高 $=y$ 尺，則



$(x+y)\cot a-y\cot\gamma=a$ ………(1)

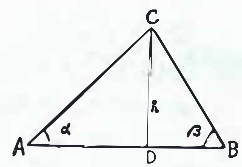
$(x+y)\cot\beta=y\cot\gamma$ …………(2)

解 (1), (2) 得

$$x=\frac{a(\cot\gamma-\cot\beta)}{\cot\gamma(\cot\alpha-\cot\beta)}$$

$$=\frac{a\tan\alpha(\tan\beta-\tan\gamma)}{\tan\beta-\tan\alpha}\text{ 尺}$$

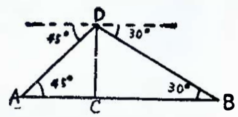
(7) 氣球之高 $=\gamma$，則 $AD=\gamma\cot\alpha$, $BD=\gamma\cot\beta$



$\therefore \gamma(\cot\alpha+\cot\beta)=AD+BD=a$

$$\therefore \gamma=\frac{a}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$=\frac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

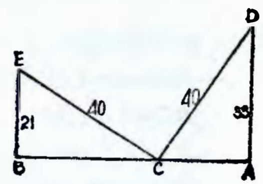


(8) $AC=200\cot 45°=200$ (尺)

$BC=200\cot 30°=346.4$ (尺)

$AB=AC+CB=546.4$ 尺

(9) $BC=\sqrt{40^2-21^2}=34.05$ (尺)



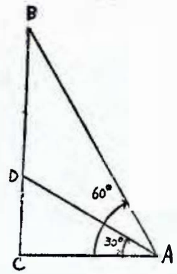
$AC=\sqrt{40^2-33^2}=22.605$ (尺)

故 $AB=56.655$ 尺

(10) $BD=AC\tan 60^\circ-AC\tan 30^\circ$

$=AC(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{2}{\sqrt{3}}AC$

$=2\,AC\tan 30^\circ$



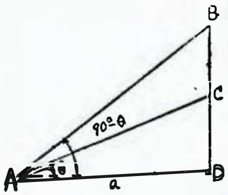
(11) $CD=a\tan B$

$BD=a\tan(90^\circ-\theta)=a\cot\theta$

$BC=a\cot\theta-a\tan\theta=a$

$(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta})=a\frac{\cos(\theta+\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{2a\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=2a\cot 2\theta$

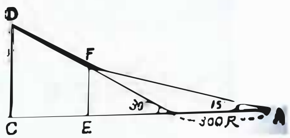


(12) $EF=\frac{300}{\cot 150^\circ-\cot 30^\circ}$

$=\frac{300}{3.732-1.732}=150$ (尺)

$\because EF=\frac{1}{2}DC$

故 $DC=2EF=2\times150$ 尺$=300$ 尺



(13) $ED=$屋，$BA=h=$塔高，則

$h=BC+CA=DC(\tan\beta+\tan\alpha)$

$=a(\tan\alpha+\tan\beta)$

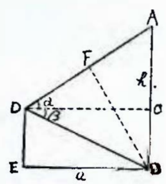
如作 $BF\perp AD$ 則

$BD=DC/\cos\beta=a/\cos\beta$

$BF=BD\sin(\alpha+\beta)$,

$AB=BF/\cos\alpha$

$\therefore h=AB=\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$



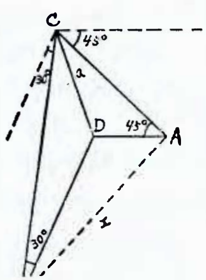
(14) 設 A,B 爲船之兩位置，其距離爲 x 尺

$AD=a\cot 45^\circ=a$,

$BD=a\cot 30^\circ=a\sqrt{3}$

$\therefore x^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=a^2+3a^2$

$=4a^2(AD\perp BD)$



$x=2a$, 即時速每時 $2a$ 尺

(15) 今 AD 南向，AB 西向，故 $\angle BAD=90^\circ$

又設塔高爲 x 尺，則 $\overline{BD}^2-\overline{AD}^2=\overline{AB}^2=a^2$

但 $BD=x\cot 18^\circ=x\sqrt{\frac{5}{5-2\sqrt{5}}}$

$=x\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$AD=x\cot 30^\circ=x\sqrt{3}$ 代入上式

得 $x^2(5+2\sqrt{5}-3)=a^2$

$\therefore x=\frac{a}{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}$

(16) 今 $\angle AOB=180^\circ-28^\circ-62^\circ=90^\circ$

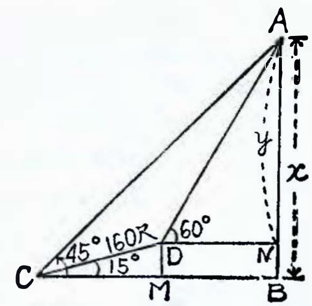
又 $OA=2\times10=20$ 浬

$OB=2\times10\frac{1}{2}=21$ 浬

$\therefore AB=\sqrt{20^2+21^2}=29$ 浬

4. 簡易測量題(續)

〔例1〕有人於山麓，測得山頂之仰角爲45°，由此山麓上山之坡傾斜15°，登山160尺，再測山頂仰角爲60°，求山高。但不滿一寸的須四捨五入。



(解) 從直角三角形 ABC, 得

$AB=BC=x$

從直角三角形 ADN, 得

$DN=y\cot 60^\circ$

從直角三角形 CDN, 得

$Z=DM=160\sin 15^\circ$,

$CM=160\cos 15^\circ$

因 $x=y+z=y+160\sin 15^\circ$ …………(I)

又 $BC=CM+BM$ 即 $AB=CM+DM$

故 $x=160\cos 15^\circ+y\cot 60^\circ$ ……………(2)

由 (1), (2) 就 x, y 解得

$$y=\frac{160(\cos 15^\circ-\sin 15^\circ)}{1-\cot 60^\circ}$$

因 $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

故 $$\frac{160\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{80\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{80\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}=40\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$$

由是由 (1), 得

$$x=40\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)+160\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=120\sqrt{2}+40\sqrt{6}+40\sqrt{6}-40\sqrt{2}$$

$$=80\sqrt{2}+80\sqrt{6}=80(\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

$$=80(1.4142+2.4492)=309.088$$ 答: 309.1 尺

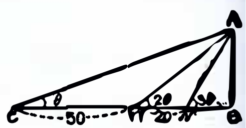
〔例 2〕有塔 AB, 在從其基底 B 所引一水平直線上之三點 L, M, N 上, 測得 $\angle AMB$ 為 $\angle ACB$ 之二倍, $\angle ANB$ 為 $\angle ACB$ 之三倍, 且 $CM=50$ 尺, $MN=20$ 尺, 求塔高。(交通大學)

〔解〕設 $AB=x$, $\angle ALB=\theta$

則 $\angle AMB=2\theta$, $\angle ANB=3\theta$

$BC=x\cot\theta$, $BM=x\cot 2\theta$,

$BN=x\cot 3\theta$



由是 $x\cot\theta-x\cot 2\theta=50$ ……………(1)

$x\cot 2\theta-x\cot 3\theta=20$ ………… (2)

將 (1) 之左邊形, 則

$$(\cot\theta-\cot 2\theta)x=\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\right)x=\frac{x\sin\theta}{\sin 2\theta\sin\theta}=\frac{x}{\sin 2\theta}$$

∴ $\frac{x}{\sin 2\theta}=50$ ∴ $x=50\sin 2\theta$ ………………(3)

同理由 (2) 得 $x=40\sin 3\theta\cos\theta$ ………(4)

由 (3) 及 (4) 消去 x, 得

$50\sin 2\theta=40\sin 3\theta\cos\theta$, $5\sin 2\theta=2(\sin 4\theta+\sin 2\theta)$

$3\sin 2\theta=2\sin 4\theta$, $3\sin 2\theta=4\sin 2\theta\cos 2\theta$

∴ $\sin 2\theta=0$ 或 $\cos 2\theta=\frac{3}{4}$

按題意, 知 θ 為銳角, 故 $\sin 2\theta$ 不能為 0, 因此取 $\cos 2\theta=\frac{3}{4}$

∴ $\sin 2\theta=\sqrt{1-\cos^2 2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\doteq\frac{\sqrt{7}}{4}$

由是從 (3) 式 $x=50\sin 2\theta=\frac{50\sqrt{7}}{4}=\frac{100\sqrt{3}}{8}=33.0$

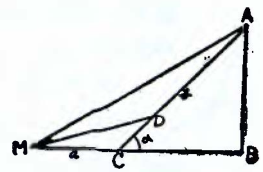
答: 約 33 尺

〔例 3〕從坡路之頂點, 測知平地上一點之俯角為 30°, 再走下坡路之 $\frac{3}{4}$, 測知同點之俯角為 15°, 設坡路之傾角為 α, 則

$$\tan\alpha=\frac{3}{3\sqrt{3}-2}$$

〔解〕設 $CM=a$, $AC=b$,

則 $CD=\frac{1}{4}b$



因 $\angle MAC=\alpha-30^\circ$,

$\angle MDC=\alpha-15^\circ$ 故由 $\triangle AMC$, 得

$$\frac{a}{\sin(\alpha-30^\circ)}=\frac{b}{\sin 30^\circ} \text{……………(1)}$$

由 $\triangle DMC$, 得

$$\frac{a}{\sin(\alpha-15^\circ)}=\frac{\frac{1}{4}b}{\sin 15^\circ} \text{……………(2)}$$

由 (1) 及 (2) 得 $\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin 30^\circ}$, $\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{4}\sin(\alpha-15^\circ)}{\sin 15^\circ}$

$$\therefore \quad \frac{\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin(\alpha-15^\circ)}{4\sin 15^\circ}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

即 $$\frac{\sin\alpha\cos 30^\circ-\cos\alpha\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos 15^\circ-\cos\alpha\sin 15^\circ}{4\sin 15^\circ}$$

$$\cot 30^\circ\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{4}(\cot 15^\circ\sin\alpha-\cos\alpha)$$

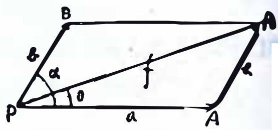
$$4(\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha)=(2+\sqrt{3})\sin\alpha-\cos\alpha$$

$$(3\sqrt{3}-2)\sin\alpha=3\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \tan\alpha=\frac{3}{3\sqrt{3}-2}$$

〔例 4〕 在 P 點有兩力拽之，一爲 a 磅，一爲 b 磅。兩者之方向夾一角 α。求其合力之大小及方向。

（解） 作 PA 代表 a 磅之力，PB 代表 b 磅之力。∴ $\angle APB=\alpha$



以 PA, PB 爲兩邊作一平行四邊形 $PARB$，則 PR 代表合力之大小及方向。

今設 $PR=f$，$\angle APR=\theta$，在 $\triangle PAR$ 中，$\angle A=180^\circ-\alpha$，

$AR=PB=b$

$$\therefore \quad f^2=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha)=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$$

又 $$\frac{\sin\theta}{b}=\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{f}=\frac{\sin\alpha}{f}$$

故 f, θ 俱可求。

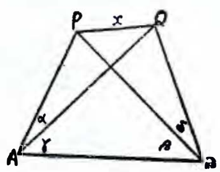
※〔例 5〕 有兩點可見而不可及，試求其間之距離。

（解） 設兩點爲 P, Q，又 $PQ=x$，

今取一底線 AB，其長爲 a，

量得，$\angle PAQ=\alpha$，$\angle QAB=\gamma$

$\angle ABP=\beta$，$\angle PBQ=\delta$



今在 $\triangle ABP$ 及 $\triangle ABQ$ 中，

應用正弦定律

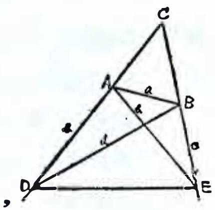
$$\frac{BP}{\sin A}=\frac{AB}{\sin APB} \quad \therefore \quad BP=\frac{a\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma+\beta)}$$

又 $$\frac{BQ}{\sin\gamma}=\frac{AB}{\sin AQB} \quad \therefore \quad BQ=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\delta+\gamma)}$$

再在 $\triangle BPQ$ 中，今有兩邊 BP, BQ 及一夾角 δ 已知，故 x 之值可求。又 A 如可取在 QP 之延長線上，則此題可更簡單。

※〔例 6〕 不用量角器求至一不可及之一點之距離。

（解） 設 C 爲不可及之一點。今取一底線 AB，又在 CA, CB 之延長線上各取 D, E 兩點。聯 AE, BD, DE 量 $AB=a$，$AD=b$，$BE=c$，$BD=d$，$AE=e$，今先在 $\triangle ABD$，$\triangle ABE$ 中，各求 $\angle DAB$，$\angle ABE$，則在 $\triangle ACB$ 中，$\angle A$，$\angle B$ 可求得。再由正弦定律即可求得 AC 及 BC 之值。



※〔例 7〕 在某一地點望直立在丘上之塔之頂點及其基底各得仰角 α 及 β，又向塔近 d 之距離，再量望塔頂之仰角得 θ，試證丘高爲

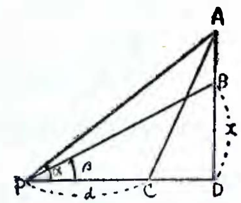
$$\frac{d\sin\theta\cos\alpha\tan\beta}{\sin(\theta-\alpha)}$$

（證） 設丘爲 $BD=x$，塔爲 AB，

則 $x=PB\sin\beta$

於 $\triangle APC$ 中，$$\frac{AP}{\sin\theta}=\frac{d}{\sin(\theta-\alpha)}$$

$$\therefore \quad AP=\frac{d\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)}$$



$$\frac{PB}{AP}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\beta)}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\theta$$

$$\therefore \quad PB=\frac{AP\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{d\sin\theta\cos\alpha}{\cos\beta\sin(\theta-\alpha)}$$

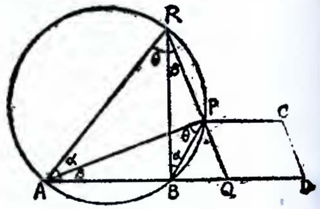
$$\therefore \quad x=PB\sin\beta=\frac{d\sin\theta\sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta\sin(\theta-\alpha)}$$

即 $x=\dfrac{d\sin\theta\cos\alpha\tan\beta}{\sin(\theta-\alpha)}$

〔例 8〕 平地上一塔，其頂植一竿，一人於地上某處，測得竿與塔所張之角為 α 與 β，某人向前行 a 尺後，測此竿張角與前相同，設塔高 h，竿長 l。(統一招生)

證 $h=\dfrac{a\sin B\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}$，$l=\dfrac{a\sin\alpha}{\cos(\alpha+2\beta)}$

(證) 如圖設 PQ 各為塔之頂與基 PR 為竿，又 $\angle PAR=\angle PBR=\alpha$，則由幾何學之定理知 $ABPR$ 共圓，故知 $\angle BRP=\angle BAP=B$，次令 $\angle APB=\theta$



又 $\angle APR=90^\circ+\angle PAQ$

$=90^\circ+\beta$

$\therefore\ \alpha+(90^\circ+\beta)+(\theta+\beta)=180^\circ$

$\therefore\ \theta=90^\circ-(\alpha+2\beta)$，$\sin\theta=\cos(\alpha+2\beta)$

由 $\triangle APR$, $\triangle ABR$ 應用正弦定律得

$$\frac{PR}{\sin\alpha}=\frac{AR}{\sin RPA}=\frac{AB}{\sin ABR}=\frac{a}{\sin\theta}$$

$\therefore$ 竿長 $l=PR=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin\theta}=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin[90^\circ-(\alpha+2\beta)]}=\dfrac{a\sin\alpha}{\cos(\alpha+2\beta)}$

又 $\dfrac{DQ}{PQ}=\cos BPQ=\cos(\alpha+\beta)$………(1)

$\dfrac{PB}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin Q}$…………………………(2)

(1)×(2) $\dfrac{PQ}{a}=\dfrac{\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}$

即 $\dfrac{PQ}{a}=\dfrac{\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}$

$\therefore$ 塔高 $h=PQ=\dfrac{a\sin B\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}$

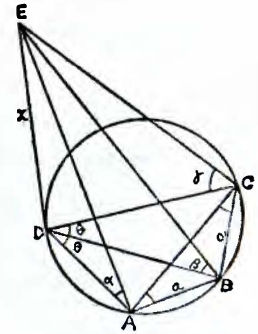
〔例 9〕 設一塔 DE 立一圓湖 $ABCD$ 之邊上，從湖濱 A, B, C 三點測得 E 之仰角各為 α, β, γ，今設弦 AB=弦 $BC=a$，求塔高。

(解) 在圓中 $\because\ AB=BC(=a)$ 則 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$

故 $\angle CDB=\angle ADB$ (令為 θ)

今 $AD=x\cot\alpha$, $BD=x\cot\beta$, $CD=x\cot\gamma$,

在 $\triangle BDC$, $\triangle BDA$ 中，



$$\begin{cases} a^2=\overline{CD}^2+\overline{BD}^2-2\overline{CD}\cdot\overline{BD}\cos\theta \\ a^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{BD}\cos\theta \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} a^2=x^2\cot^2\gamma+x^2\cot^2\beta \\ \qquad -2x^2\cot\gamma\cot\beta\cot\theta \\ a^2=x^2\cot^2\alpha+x^2\cot^2\beta \\ \qquad -2x^2\cot\alpha\cot\beta\cos\theta \end{cases}$$

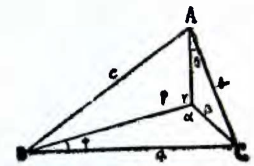
從上兩式消去 $\cos\theta$，則得

$$a^2(\cot\alpha-\cot\gamma)=x^2(\cot^2\beta-\cot\alpha\cot\gamma)(\cot\alpha-\cot\gamma)$$

$$\therefore\ x=\frac{a}{\sqrt{\cot^2\beta-\cot\alpha\cot\gamma}}$$

〔例10〕 已知三定點 A, B, c 之位置，設 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$。今從一點 P, 測知 $\angle BPC=\alpha$, $\angle CPA=\beta$。求 PA, PB, PC 之距離。

(解) (一) 設 P 點在 $\triangle ABC$ 內，今令 $\angle PAC=\theta$, $\angle PBC=\phi$, 則



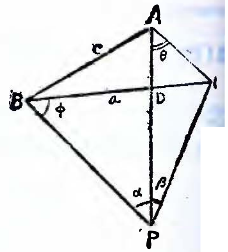
$$PC=\frac{a\sin\phi}{\sin\alpha}=\frac{b\sin\theta}{\sin\beta}$$

$$\frac{\sin\phi}{\sin\theta}=\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}=\text{定值}$$

設其值為 $1/\tan\lambda$ 則

$$\frac{\sin\theta-\sin\phi}{\sin\theta+\sin\phi}=\frac{1-\tan\lambda}{1+\tan\lambda}$$

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(\theta-\phi)}{\tan\frac{1}{2}(\theta+\phi)}=\tan(45^\circ-\lambda)\cdots\cdots(A)$$



今因 P 在形內，故于 $\triangle PBC$ 形中，

$$\theta+\phi+\alpha+\beta+C=360^\circ$$

故 $\theta+\phi$ 可知，而 $\theta-\phi$ 亦可知，亦即 θ,ϕ 均可求得。

今在 $\triangle APC$ 中， $\angle ACP=180^\circ-(\theta+\beta)$

$$\therefore\ PA=\frac{b\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta}$$

同理可得 $PB=\dfrac{a\sin(\phi+\alpha)}{\sin\alpha}$， $PC=\dfrac{a\sin\phi}{\sin\alpha}$

(二) 若 P 點在形外，可知(壹)求到 (A) 式，再設 PA 交 BC 於 D 則在 $\triangle DAC, \triangle DPB$ 中

$$\angle PAC+\angle ACB=\angle PBC+\angle APB$$

即 $\theta+C=\phi+(\alpha-\beta)$ $\therefore$ $\theta-\phi=\alpha-\beta-C$

故 $\theta-\phi$ 可得，從 (A) 又可求得 $\theta+\phi$，故 θ,ϕ 均可知。所得 PA, PB, PC 之結果與(一)相同。故知不論 P 點之位置若何，其至 A, B, C 之距離均可求得。

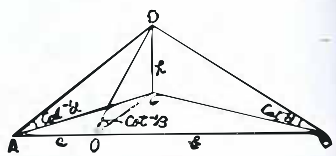
〔例11〕 在同一直線上之 A, O, B 三處，同時測一氣球之高度。設 $OA=a$, $OB=b$ 又在 A, O, B 三點之仰角各為 $\cot^{-1}\alpha$, $\cot^{-1}\beta$, $\cot^{-1}\alpha$；試證此氣球之高為

$$\sqrt{\frac{ab}{\alpha^2-\beta^2}}$$ （交通大學）

（解） 設 $CD=h$ 為氣球之高

在 $\triangle ACD$ 內，

$$\cot\angle CAD=\frac{AC}{h}$$



即 $\alpha=\dfrac{AC}{h}$， $\therefore$ $AC=\alpha h$ 在 $\triangle BCD$ 內，

$\cot\angle CBD=\dfrac{BC}{h}$ 即 $\alpha=\dfrac{BC}{h}$， $\therefore$ $BC=\alpha h$

故 $AC=BC$, 而 $\triangle ACB$ 為等腰三角形，

$\therefore$ $\angle CAB=\angle CBA$ 又在 $\triangle OCD$ 內，

$\cot\angle COD=\dfrac{OC}{h}$， 即 $\beta=\dfrac{OC}{h}$ $\therefore$ $OC=\beta h$

在 $\triangle AOC$ 內，$\cos\angle CAO=\dfrac{AC^2+AO^2-OC^2}{2AC\times AO}$

$$=\frac{\alpha^2h^2+a^2-\beta^2h^2}{2\alpha ha}$$

在 $\triangle BOC$ 內，$\cos\angle CBO=\dfrac{BC^2+BO^2-OC^2}{2BC\times BO}$

$$=\frac{\alpha^2h^2+b^2-\beta^2h^2}{2\alpha hb}$$

但 $\angle CAO=\angle CBO$

$$\therefore\ \frac{\alpha^2h^2+a^2-\beta^2h^2}{2\alpha ha}=\frac{\alpha^2h^2+b^2-\beta^2h^2}{2\alpha hb}$$

$$\frac{(\alpha^2-\beta^2)h^2+a^2}{a}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)h^2+b^2}{b}$$

$$b(\alpha^2-\beta^2)h^2+a^2b=a(\alpha^2-\beta^2)h^2+ab^2,$$

$$(a-b)(\alpha^2-\beta^2)h^2=ab(a-b)$$

$$h^2=\frac{ab}{\alpha^2-\beta^2}\qquad\therefore\ h=\sqrt{\frac{ab}{\alpha^2-\beta^2}}$$

習題二十七

（1） 從某山頂望在正東之 A 點得俯角 30°，再望在南 30° 西方向之 B 地點得俯角 45°，求 AB 之距離。但 A 和 B 同在一水面上，而山頂距此水面之高為 246 尺。

（2） 從在水平面上成三角形三地點 A, B, C，望某山頂時仰角均為 α，試證山高為 $\dfrac{a}{2}\tan\alpha\csc A$。

（3） 一人見目標 A 在其正北，目標 B 在其北 30° 西，向西北行一里後，

則 A 在其東北，B 在正東，求 A, B 間之距離。

(4) ABC 爲橫貫東西之道路。今在 A, B, C 三點觀測 A 之正北一塔頂之仰角，分別得 $60°, 45°, 30°$，求證 B 爲 AC 之中點。

(5) 海中一小島四周 3 哩之處敷設水雷，今有一軍艦，從西向東行望見該島在北 $69°$ 東，行 5 哩後見該島在北 $18°$ 東，若此艦不受其前進方向，問有無危險？

(6) 兩桿相距 12 尺，在兩桿底測得此桿之仰角爲彼桿之兩倍，在兩桿間中點測之兩仰角互爲餘角，求證兩桿之長爲 9 尺與 4 尺。

(7) 江岸有一砲臺，其高爲 30 尺，江內有兩艦，由臺頂測之，其俯角爲 $30°$ 及 $45°$，又二艦與臺底聯線所成之角爲 $60°$，求二艦之距離。

(8) 某鐵道之一彎曲爲兩反向角孤相接而成，一孤 $18°30'$ 半徑 2100 尺，另一孤 $21°$ 半徑 2800 尺，問此彎曲共長若干？

(9) 人在岸上望見一船桅頂與桅上他一點，其視角之正切値爲 0.6，今知他一點距桅頂之長爲全長之 $\frac{3}{4}$，求此人望桅視角之正切。

(10) 在 A 點測得正南一塔之仰角爲 $30°$，又在 A 點正西 B 點測得仰角爲 $18°$，設 $AB=\alpha$，求證塔高爲 $\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$。

(11) 二平面直交於線 AB，而又與第三平面分別交於線 AC 及線 AD。設角 CAB 及角 DAB 分別爲 α 及 β，則線 AB 與平面 CAD 所成角的正切爲 $\dfrac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}$。

(12) 一人立於高爲 h 之塔之正南 0 處，測得塔之仰角爲 α，自此向西行至 A 處，測得仰角爲 β，繼續西行至 B，測得仰角爲 γ，求 AB 之長以 h, α, β, γ 表之。

(13) 塔與電桿同立于地面，自塔頂測得桿頭之俯角爲 α，自塔底測得桿頭仰角爲 β，若塔高 h 尺，則桿高若干？

(14) 平地上有一丘陵爲 B, C，上立一尖閣 CD，D 頂插一旗桿 DE，今于地面上 A，測得 BC, DE 所張之角相等，設 $BC=a$，$CD=b$，$DE=c$，求 AB 之長。

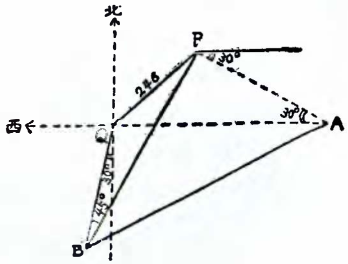
(15) 空中一氣球在其北處 A 仰視此氣球之角爲 α，同時在 A 之東 B 處之仰角爲 β，設 h 爲氣球之高，a 爲 A, B 之距離，試證

$$h=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}。$$

(16) 一塔略向北斜，在塔南距塔脚 a, b 二處對塔頂之仰角爲 α 及 β，設 θ 爲背斜塔與地面所交之角，h 爲塔垂直之高，試證

$$\tan\theta=\frac{b-a}{b\cot\alpha-a\cot\beta},\quad h=\frac{b-a}{\cot\beta-\cot\alpha}。$$

習 題 略 解



(1) 於 $\triangle PQA$, $\dfrac{QA}{246}=\cot 30°$

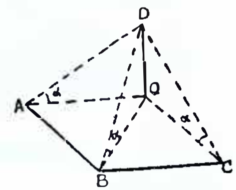
於 $\triangle PQB$, $\dfrac{QB}{246}=\cot 45°$,

$QB=246$

於 $\triangle QAB$,

$$AB=\sqrt{\overline{QA}^2+\overline{QB}^2-2QA\cdot QB\cos 120°}$$

$$=\sqrt{3\times246^2+246^2+2\times3\times246^2\times\frac{1}{2}}=632(m)$$



(2) 設 $BC=a$, $PQ=x$,

$\triangle PQA\cong\triangle PQB\cong\triangle PQC$

$\therefore$ $QA=QB=QC=l$

$\therefore$ Q 爲 $\triangle ABC$ 之外心

$\therefore$ $\angle BQC=2A$，於 $\triangle QBC$

$a^2=l^2+l^2-2ll\cos 2A$

$a^2=2l^2(1-\cos 2A)=4l^2\sin^2 A$

$l=\frac{a}{2\sin A}$ 於 △AQB, $x=l\tan\alpha=\frac{a\tan\alpha}{2\sin A}$, $x=\frac{a}{2}\tan\alpha\csc A$

(3) $\angle ACB=45^\circ$,

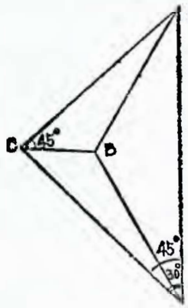
$\angle BCD=180^\circ-(90^\circ+45^\circ)=45^\circ$

又 $CN=CD$, $\angle B=\angle B$

故 $AB=BD$, $\angle CBD=120^\circ$

∵ $BD=\frac{1\cdot\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

則 $BD=\frac{\sqrt{6}}{3}$, 故 $AB=\frac{\sqrt{6}}{3}$(里)



(4) 因 △AMN, △BMN, △CMN 均爲直角三角形,故設 $MN=x$,

則 $AM=x\cot 60^\circ$,

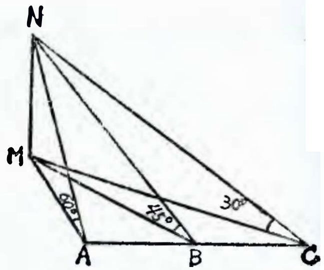
$BM=x\cot 45^\circ$,

$CM=x\cot 30^\circ$,

由是由直角三角形 AMB, AMC, 分別得

$\overline{AB}^2=x^2\cot^2 45^\circ-x^2\cot^2 60^\circ$

$=(1-\frac{1}{3})x^2=\frac{2}{3}x^2$



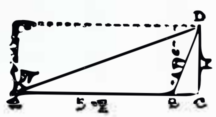
$\overline{AC}^2=x^2\cot^2 30^\circ-x^2\cot^2 60^\circ=(3-\frac{1}{3})x^2=\frac{2}{3}x^2$

∴ $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{\frac{2}{3}x^2}{\frac{8}{3}x^2}=\frac{1}{4}$ $\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$ ∴ $AB=\frac{1}{2}AC$

5) 如右圖,設直行後距離最近者爲 $CD=x$,

則 $x\tan 69^\circ-x\tan 18^\circ=5$,

$x=\frac{5}{\tan 69^\circ-\tan 18^\circ}=\frac{5}{2.61-0.325}$



$=\frac{5}{2.285}<3$ 故無有危險。

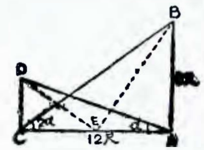
(6) 設 AB, CD 爲兩桿, E 爲 AC 中點,則 $\triangle ABE\backsim\triangle CDE$, 故得

$AB\cdot CD=AE\cdot EC=36$

又 $\frac{AB}{CD}=\frac{\tan\angle ACB}{\tan\angle CAD}=\frac{\tan 2\alpha}{\tan\alpha}$

$=\frac{2}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2}{1-(\frac{CD}{12})^2}=\frac{288}{144-\overline{CD}^2}=\frac{9}{4}$

即 $9\overline{CD}^2=144$, $3\overline{CD}=12$, $\overline{CD}=4$ 又 $\overline{AB}=9$



(7) 設兩艦之距離爲 $BC=x$, 則

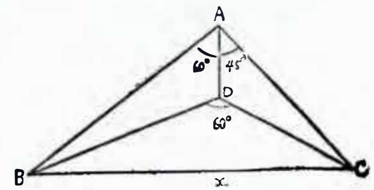
$BD=30/\cot 60^\circ=30\sqrt{3}$,

$CD=30\cot 45^\circ=30$, 故

$BC^2=x^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\overline{BD}\cdot\overline{CD}\cos 60^\circ$

$=30^\circ+(30\sqrt{3})-2\times 30\times 30\sqrt{3}\cos 60^\circ$

$=30^2(4-\sqrt{3})$ 即 $x=30\sqrt{4-\sqrt{3}}$(尺)



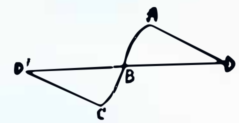
(8) 設彎曲之長爲 AB+BC 尺,化 18° 30′ 及 21° 爲弧度

$\frac{18.5\pi}{180}$ 及 $\frac{21\pi}{180}$, 故

$AB+BC=BD\times\frac{18.5\pi}{180}+BD'\times\frac{21\pi}{180}$

$=\frac{18.5\pi}{180}\times 2100+\frac{21\pi}{180}$

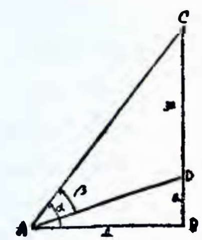
$\times 2800=542.5\pi$(尺)



(9) 設 BC 爲全塔, A 爲視察點, α 爲視角, 則

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{a}{b}$, $\tan\alpha=\frac{4a}{b}$

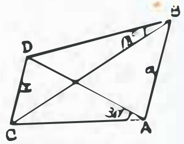
故 $\tan\alpha=4\tan(\alpha-\beta)$



$$=\frac{4(\tan\alpha-\tan\beta)}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4(\tan\alpha-\frac{3}{5})}{1+\frac{3}{5}\cdot\tan\alpha}$$

即 $\tan^2\alpha-5\tan\alpha+4=0$, $(\tan\alpha-1)(\tan\alpha-4)=0$

故 $\tan\alpha=1, 4$

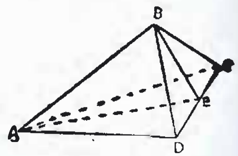


(10) 設塔高為 $CD=x$, 則 $BC=x\cot 18°$, $AC=x\cot 30$, 又 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

則 $x^2\cot^2 18^2=\alpha^2+x^2\cot^2 30°$

故 $x=\frac{\alpha^2}{\cot^2 18^2-\cot^2 30°}=\frac{\alpha^2}{\frac{5}{5-2\sqrt{5}}-3}=\frac{\alpha^2}{2+2\sqrt{5}}$

即 $x=\frac{\alpha}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$



(11) $\tan\theta=\frac{BE}{AB}$, $\tan\alpha=\frac{BC}{AB}$, $\tan\beta=\frac{BD}{AB}$

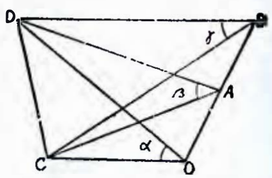
將此代入求證式，則得

$$\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}=\frac{\frac{BC\cdot BD}{AB^2}}{\sqrt{\frac{\overline{BC}^2+\overline{BD}^2}{AB^2}}}$$

因△BCD為 rt△，故

$BC\cdot BD=2\triangle BCD=CD\cdot BE$, $\overline{BC}^2+\overline{BD}^2=\overline{CD}^2$

$$\therefore\ \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}=\frac{CD\cdot BE}{\overline{AB}^2}\times\frac{AB}{CD}=\frac{BE}{AB}=\tan\theta$$



(12) 設 CD 為塔高，則 $CO=h\cot\alpha$

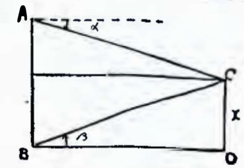
$CA=h\cot\beta$, $CB=h\cot\gamma$, 故

$OB=h\sqrt{\cot^2\gamma-\cot^2\alpha}$,

$OA=h\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}$

即 $AB=OB-OA$

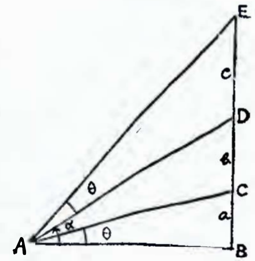
$=h\{\sqrt{\cot^2\gamma-\cot^2\alpha}-\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}\}$



(13) 設 AB, CD 為塔及桿之高，則

$BD=x\cot\beta=(h-x)\cot\alpha$

故 $x=\frac{h\cot\alpha}{\cot\alpha+\cot\beta}$(尺)



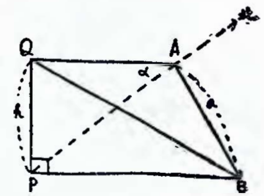
(14) 設 $AB=x$, 則 $\tan\theta=\frac{a}{x}$, $\tan\alpha=\frac{a+b}{x}$

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\theta}$$

$$=\frac{\frac{a+b}{x}+\frac{a}{x}}{1-\frac{a(a+b)}{x^2}}=\frac{a+b+c}{x}$$

故 $x^2(c-a)=a(a+b)(a+b+c)$

即 $x=\sqrt{\frac{a(a+b)(a+b+c)}{c-a}}$



(15) 設氣球為 Q 其垂足為 P, 則

$\overline{AP}^2=h^2\cot^2\beta P=h^2\cot\alpha$

而 $\overline{BP}^2-\overline{AP}^2=a^2$

$\therefore\ h^2\cot^2\beta-h^2\cot^2\alpha=a^2$,

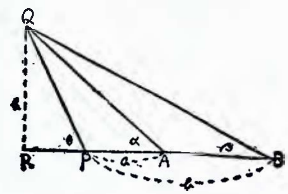
$h^2(\cot^2\beta-\cot^2\alpha)=a^2$

但 $\cot^2\beta-\cot^2\alpha$

$$=\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\quad\therefore\ h^2=a^2\cdot\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$$

$$\therefore\ h=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$$



(16) 設斜塔為 PQ, 塔垂直線為 RQ, 距塔脚為 a, b 之二處各為 A, B

$PQ=x$, $PR=y$, $PA=a$, $PB=b$,

$h\cot\beta=RB$……(1)

$h\cot\alpha=RA$……………(2)

(1)−(2) $h(\cot\beta-\cot\alpha)=b-a$ ∴ $h=\dfrac{b-a}{\cot\beta-\cot\alpha}$……(3)

$y=h\cot\beta-b$ ∴ $\tan\theta=\dfrac{h}{y}=\dfrac{h}{h\cot\beta-b}$……………(4)

以(3)代入(4)得 $\tan\theta=\dfrac{b-a}{b\cot\alpha-a\cot\beta}$

綜合習題四

(1) 在高150尺之山上依同一方向測得地面上 A, B,二物之俯角爲30°及45°,試求 A, B 之距離。 答: 110尺

(2) 一定長之竿,一端着地,他端向日轉動,則最長之影爲何?若最長影長爲竿長之 $\frac{7}{2}$ 倍,則日高將如何?

答: $l\csc\theta$(日高), $\theta=16°31'$

(3) 有一電桿高40尺栽於平地上,由桿脚 A 點,直行至 B 點測桿頂其仰角爲45°,又再於 A, B 直行至 C 點,測得桿頂爲30°,問 BC 長若干尺? 答: 30.4尺

(4) 設三角形三角正弦之比爲4:5:6而其最小角所對之邊爲2尺,三角形周長爲7尺5寸,求其他二邊各若干尺?

答: $b=2.5$尺, $c=3$尺

(5) 於相距1000公尺之甲乙兩地,測得某山之仰角爲30°及45°,今甲地在山之正東向,乙地在山之東南向,求山高。

答: $100\sqrt{10(4+\sqrt{6})}$公尺

(6) 有兩汽車同時自某處出發,其速率爲每小時40里及每小時30里。兩車所取之路線均爲直線其交角爲30°,問二小時後兩車相距若干里? 答: 約41.1里

(7) 山上有一高塔磴道之傾斜角爲30°,某人立於山麓測塔頂與塔脚之角爲15°,由是沿磴道向塔行485尺,再測塔頂與塔脚之角爲30°,求塔脚至山麓之距離? 答: 塔高約280尺,距離約765尺

(8) 有人在某處測得山頂之仰角爲 θ,向上前進 a 尺,其仰角爲 $\frac{\pi}{2}-\theta$,再前進 b 尺,其仰角爲 2θ,求證山高爲 $\sqrt{(a+b)^2-\frac{1}{4}a^2}$ 尺。

(9) 一舟向正西行江中,航程與岸平行,初見岸邊一點 P 在北 α 西,行 a 里見 P 在北 β 東,求舟離岸之距離。 答: $\dfrac{a}{\tan\alpha+\tan\beta}$

(10) 有船其針路爲南20°西船走中當南85°東認海面有波浪發見暗礁之存在由是船行1海里之後測該暗礁方位爲北50°東,求發見時船位置至暗礁之距離。 答: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$海里

※(11) 二光塔頂恰與觀測者之眼在同一仰角爲 α 之直線上,二塔在靜水中之倒影之俯角各爲 β, γ,若觀測者之眼高于水面 a 尺,求證二塔水平距離爲 $2a\cos^2\alpha(\gamma-\beta)/\sin(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)$。(交通大學)

(12) P, Q 兩點,可見不可及,且平地上無一點可以同時見及 P, Q 者,試設法求 PQ 之距離。

(13) 山脚 A 點望山頂 P 之仰角爲 α,今上一傾斜 β 角之坡行過 a 尺至 B,測得 P 之仰角爲 γ 求山高。 答: $\dfrac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$(尺)

※(14) 高 b 尺之土堆上豎一旗桿,今于高 d 尺之城上測得旗桿與土堆兩者所張之角相等。今設測點與旗桿之水平距離爲 a 尺。求桿頂離地之高度。 答: $2b(a^2+b^2-bd)/(a^2+d^2-b^2)$(尺)

※(15) 從直通城門大道上一點 A 測得城樓 ED 之仰角爲 α,樓上一旗桿 DC 之對角爲 β。對城門走近 C 尺,測得旗桿之對角仍爲 β。求旗桿之長度。 答: $c\sin\beta/\cos(2\alpha+\beta)$(尺)

※(16) 平地一塔 AB,塔頂豎一旗桿 BC,今于離塔 a 尺之處 E 點測得 BC 所張之角 α 爲極大,求塔高及旗桿之長。

答: $a\tan(45°-\frac{1}{2}\alpha)$尺

※(17) 在一直線上三點 A, B, C 測一圓池所對之角各爲 $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$。設 $AB=m$, $BC=n$,求圓池之値徑。

答: $\left[\dfrac{mn(m+n)}{m\csc^2\gamma+n\csc^2\alpha-(m+n)\csc^2\beta}\right]$

※(18) 設 O 爲球心，BP 當爲切線，則 $OP\perp BP$。又設 B 所見 P 之俯角爲 θ（弧度），則 $\angle POA=\theta$。 答：$\dfrac{R\sqrt{2Rh}}{R+h}$ 哩

※(19) 於塔之水平距離 a 處，測得塔頂仰角爲 α，塔底之俯角爲 β，求證塔之高 $h=\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$。

※(20) 於相距 1000 尺之甲乙兩地測得山之仰角爲 30° 及 45°，今甲地在山之正東，乙地在山之東南，求山高。 答：$100\sqrt{40+10\sqrt{6}}$ 尺

※(21) 相距 1000 公尺有兩砲臺，甲砲臺在乙砲臺之西，自甲砲臺發現正北方有敵機一架。乃以仰角 20° 之方向擊之隨落，其時乙砲臺觀測，敵機墜落之處，在北 60° 西之方向，問敵機被擊時之高如何？

答：210.028 尺

※(22) 斜坡上一點 A 測得坡上一塔之頂之視線與坡面成 α 角，向山峯走近 a 尺，則爲 β 角。設塔高 h，又斜坡與地面成 θ 角，則

$\theta=\cos^{-1}\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{h\sin(\beta-\alpha)}$。

(23) 80 磅，50 磅之兩力同時作用于一點，兩力方向所夾之角爲 120°，求其合力之大小。 答：70 磅

※(24) 一人于一方塔底之對角線延長線上，離塔 $2a$ 之處，測較遠兩角尖之高爲其仰角各爲 30°，近之一角尖之仰角爲 45°，則塔闊爲 $a(\sqrt{10}-\sqrt{2})$。

※(25) 地面一點測得塔之仰角爲 A；向塔走近 a 尺爲 45°，再走近 b 尺爲 $90°-A$，求塔高。 答：$ab/(a-b)$ 尺

※(26) 晚間一人在一燈塔之正南，見所照本人在地面之影長 24 尺，今向東走過 300 尺，則影長 30 尺，設人高六尺，求燈塔之高度。

答：106 尺

※(27) 一人上一斜坡 d 尺測地面一點之俯角爲 α，再上 d 尺，見此點之俯角爲 β，則此斜坡傾斜地面之角爲 $\cot^{-1}(2\cot\beta-\cot\alpha)$。

※(28) 北半球一塔在圓池之中央，正午時塔影越池 45 尺，太陽在正西時則越池 120 尺。設兩影端點相距 375 尺，又塔在池邊之仰角爲 60° 求圓直徑及塔高。 答：直徑 360 尺，塔高 $180\sqrt{3}$ 尺

※(29) 某甲行一直路，方向爲北 30° 東，初見道側一屋在其正北，這前進一里，見屋在其正西，他側一風車在其北東，再前進 3 里，則風車已在正南。求證屋與風車之聯線與路所成之角之正切爲 $(48-2\sqrt{3})/11$。

※(30) 塔上立一桿，一人測得桿頂仰角 β，今向塔走 a 尺見方其桿所張之角 α 爲極大，則桿長爲 $\dfrac{2a\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha+\sin(\alpha-\beta)}$。

※(31) 初在高出海面 64 呎之船檣上恰可望見一燈塔，後向塔前進30分鐘，在高出海面 16 呎之甲板上已可看見燈塔。設地球半徑爲 4000哩。求此船每時之速度。 答：8.62 浬（1 浬＝6080.27 呎）

第六章　含三角函數之行列式

行列式之性質及展開法在標準高等代數學下冊已詳述之，希讀者作參考。

〔例1〕　求證

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

$$=4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$

（要點）　欲證此類題目，第一總是先行展開行列式後再證之即得證。

（證）　左邊 $=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$

$=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-(\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\gamma)$

$=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)-(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)^2$

$=\sin^2\alpha\sin^2\beta-(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)^2$

$=(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma)$

$=[\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma][\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)]$

$=[-2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma)][-2\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha+\beta)]=4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$

〔例2〕　求證

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}=\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$$

（證）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \sin\beta-\sin\alpha & \sin\gamma-\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\beta-\cos\alpha & \cos\gamma-\cos\alpha \end{vmatrix}$$

×(−1) ↑ ↑

$$=\begin{vmatrix} \sin\beta-\sin\alpha & \sin\gamma-\sin\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \cos\gamma-\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$=(\sin\beta-\sin\alpha)(\cos\gamma-\cos\alpha)-(\sin\gamma-\sin\alpha)(\cos\beta-\cos\alpha)=\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\alpha-\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\beta+\sin\gamma\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$

$=\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma+\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$

〔註〕 (i) 欲展開行列式求其值時，先將行列式中某一行（或某一列）之各元，除一個外其餘皆變爲零，化得一個降低一階之行列式，如此繼續進行，到最後一個二階行列式。

(ii) 每行（或列）所註乘數，表明倍乘各行（或列）原素，箭頭表示移往相加。

〔例3〕 設 $\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$，試計算下列式之值。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos C & \cos B & 1 \\ \cos C & 1 & \cos A & 1 \\ \cos B & \cos A & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

（解） $\because \cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$，

$\therefore \cos A=1-2(\frac{1}{3})^2=\frac{7}{9}$

$$原式=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&\frac{7}{9}&\frac{7}{9}&1\\\frac{7}{9}&1&\frac{7}{9}&1\\\frac{7}{9}&\frac{7}{9}&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&0\\-\frac{2}{9}&0&-\frac{2}{9}&0\\-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&0&0\end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix}0&-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}\\-\frac{2}{9}&0&-\frac{2}{9}\\-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&0&\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&0\end{vmatrix}=2\left(\frac{2}{9}\right)^3=\frac{16}{729}$$

〔例4〕 設 $A+B+C=0$，試求

$$\begin{vmatrix}\sin^2 A&\cot A&1\\\sin^2 B&\cot B&1\\\sin^2 C&\cot C&1\end{vmatrix}$$ 之值。

〔解〕

$$原式=\begin{vmatrix}\sin^2 A&\cot A&1\\\sin^2 B&\cot B&1\\\sin^2 C&\cot C&1\end{vmatrix}$$ （第一列 $\times(-1)$ 加於第二、三列）

$$=\begin{vmatrix}\sin^2 A&\cot A&1\\\sin^2 B-\sin^2 A&\cot B-\cot A&0\\\sin^2 C-\sin^2 A&\cot C-\cot A&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sin^2 B-\sin^2 A&\cot B-\cot A\\\sin^2 C-\sin^2 A&\cot C-\cot A\end{vmatrix}$$

因 $\sin^2 B-\sin^2 A=\sin(B+A)\sin(B-A)$

$\sin^2 C-\sin^2 A=\sin(C+A)\sin(C-A)$

$\cot B-\cot A=\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos A}{\sin A}=-\frac{\sin(B-A)}{\sin B\sin A}$

$\cot C-\cot A=-\frac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}$

$$故原式=\begin{vmatrix}\sin(B+A)\sin(B-A)&-\frac{\sin(B-A)}{\sin B\sin A}\\\sin(C+A)\sin(C-A)&-\frac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{\sin(B-A)\sin(C-A)}{\sin A}\begin{vmatrix}\sin(B+A)&\frac{1}{\sin B}\\\sin(C+A)&\frac{1}{\sin C}\end{vmatrix}$$

因 $\sin(B+A)=\sin C$ $\quad\sin(C+A)=\sin B$

$$\therefore\ \begin{vmatrix}\sin(B+A)&\frac{1}{\sin B}\\\sin(C+A)&\frac{1}{\sin C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin C&\frac{1}{\sin B}\\\sin B&\frac{1}{\sin C}\end{vmatrix}=1-1=0$$

$\therefore$ 原式$=0$

〔例5〕 分解 $\begin{vmatrix}1&\tan x&\tan 2x\\1&\tan y&\tan 2y\\1&\tan z&\tan 2z\end{vmatrix}$ 為其素因式之連乘積。

〔解〕 令 $\tan x=a$，$\tan y=b$，$\tan z=c$，則

$$原式=\begin{vmatrix}1&a&\frac{2a}{1-a^2}\\1&b&\frac{2b}{1-b^2}\\1&c&\frac{2c}{1-c^2}\end{vmatrix}=\frac{2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}\begin{vmatrix}1-a^2&a(1-a^2)&a\\1-b^2&b(1-b^2)&b\\1-b^2&b(1-c^2)&c\end{vmatrix}$$

（第三行 $\times(-1)$ 加於第二行）

$$=\frac{2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}\begin{vmatrix}1-a^2&-a^3&a\\1-b^2&-b^3&b\\1-c^2&-c^3&c\end{vmatrix}$$

但

$$\begin{vmatrix} 1-a^2 & -a^3 & a \\ 1-b^2 & -b^3 & b \\ 1-c^2 & -c^3 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a^3 & a \\ 1 & -b^3 & b \\ 1 & -c^3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a^2 & -a^3 & a \\ -b^2 & -b^3 & b \\ -c^2 & -c^3 & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} + abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)+abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c+abc)$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{2(\tan x-\tan y)(\tan y-\tan z)(\tan z-\tan x)(\tan x+\tan y+\tan z+\tan x\tan y\tan z)}{(1-\tan^2 x)(1-\tan^2 y)\times(1-\tan^2 z)}$$

〔例 6〕 若 A, B, C 爲 $\triangle ABC$ 之三角，試證

$$\begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B & \cot B & 1 \\ \sin^2 C & \cot C & 1 \end{vmatrix}=0$$

〔證〕 設 $\triangle ABC$ 之三邊爲 a, b, c, 外接圓之半徑爲 R, 則

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$\therefore \sin^2 A=\frac{a^2}{4R^2},\quad \sin^2 B=\frac{b^2}{4R^2},\quad \sin^2 C=\frac{c^2}{4R^2}$$

又 $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\dfrac{2R}{a}=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc}$

同理 $\cot B=\dfrac{(c^2+a^2-b^2)R}{abc}\qquad \cot C=\dfrac{(a^2+b^2-c^2)R}{abc}$

$$\therefore \begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B & \cot B & 1 \\ \sin^2 C & \cot C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a^2}{4R^2} & \frac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc} & 1 \\ \frac{b^2}{4R^2} & \frac{(c^2+a^2-b^2)R}{abc} & 1 \\ \frac{c^2}{4R^2} & \frac{(a^2+b^2-c^2)R}{abc} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4Rabc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2-a^2 & 1 \\ b^2 & c^2+a^2-b^2 & 1 \\ c^2 & a^2+b^2-c^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4Rabc}\begin{vmatrix} a^2 & a^2+b^2+c^2 & 1 \\ b^2 & a^2+b^2+c^2 & 1 \\ c^2 & a^2+b^2+c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

×(2) ↑　　(第二行與第三行之對應元素成比例)

$$=0$$

〔例 7〕 試證

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}=4\sin\theta\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma)$$

但 $\theta=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

〔證〕 左邊 $=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-\cos^2\alpha$

$$=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\frac{1}{2}(1+\cos 2\beta)-\frac{1}{2}(1+\cos 2\gamma)-\cos^2\alpha$$

$$=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\frac{1}{2}(\cos 2\beta+\cos 2\gamma)-\cos^2\alpha$$

$$=\cos\alpha[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]-\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)-\cos^2\alpha=\cos(\beta+\gamma)[\cos\alpha-\cos(\beta-\gamma)]+\cos\alpha[\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha]$$

$$=[\cos\alpha-\cos(\beta-\gamma)][\cos(\beta+\gamma)-\cos\alpha]$$

$$=2\sin\frac{\beta-\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma-\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}$$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

$$=4\sin\theta\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma)$$

習題二十八

(1) 求 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \tan x & \cot x \\ 1 & 0 & \sin^2 x & \cos^2 x \end{vmatrix}$ 之值。

(2) 試證下列各行列式:

① $\begin{vmatrix} 1 & \cos^4\theta & \sin^4\theta \\ 1 & (1+\sin^2\theta)^2 & \sin^4\theta \\ 1 & \cos^4\theta & (1+\cos^2\theta)^2 \end{vmatrix}=16\sin^2\theta\cos^2\theta$

② $\begin{vmatrix} 1 & \cot\alpha & \cot 2\alpha \\ 1 & \cot\beta & \cos 2\beta \\ 1 & \cot\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}=0$ ③ $\begin{vmatrix} 1 & \tan\alpha & \sin 2\alpha \\ 1 & \tan\beta & \sin 2\beta \\ 1 & \tan\gamma & \sin 2\gamma \end{vmatrix}=0$

④ $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=\sin\theta$

⑤ $\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix}=\sin(y-z)+\sin(z-x)+\sin(x-y)$
$=-4\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

⑥ $\begin{vmatrix} a & \sin^2\frac{A}{2} & \cos^2\frac{A}{2} \\ b & \sin^2\frac{B}{2} & \cos^2\frac{B}{2} \\ c & \sin^2\frac{C}{2} & \cos^2\frac{C}{2} \end{vmatrix}=\frac{(a+b+c)(b-c)(c-a)(c-b)}{2abc}$

⑦ $\begin{vmatrix} 1 & \cos A & \frac{a}{s-a} \\ 1 & \cos B & \frac{b}{s-a} \\ 1 & \cos C & \frac{c}{s-c} \end{vmatrix}=0$ ⑧ $\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos^2\frac{A}{2} \\ b & b^2 & \cos^2\frac{B}{2} \\ c & c^2 & \cos^2\frac{C}{2} \end{vmatrix}=0$

(3) 設 A, B, C 爲一三角形之三內角，求證

$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix}=0$

(4) 求 $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ 0 & \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}=0$ 中 θ 之值。

習題略解

(1) 原式 $=\begin{vmatrix} \tan x & \cot x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{vmatrix}=\sin x\cos x-\sin x\cos x=0$

(2) ①左邊 $=\begin{vmatrix} 1 & \cos^4 & \sin^4\theta \\ 1 & (1+\sin^2\theta)^2 & \sin^4\theta \\ 0 & 0 & (1+\cos^2\theta)^2-\sin^4\theta \end{vmatrix}$

$=[(1+\cos^2\theta)^2-\sin^4\theta][(1+\sin^2\theta)^2-\cos^4\theta]$

$=(1+\sin^2\theta+\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$\times(1+\sin^2\theta+\cos^2\theta)(1+\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=2\cdot 2\cos^2\theta\cdot 2\cdot 2\sin^2\theta=16\sin^2\theta\cos^2\theta$

②左邊 $=\begin{vmatrix} 1 & \cot\alpha & 1-2\sin^2\alpha \\ 1 & \cot\beta & 1-2\sin^2\beta \\ 1 & \cot\gamma & 1-2\sin^2\gamma \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1 & \cot\alpha & 1 \\ 1 & \cot\beta & 1 \\ 1 & \cot\gamma & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & \cot\alpha & \sin^2\alpha \\ 1 & \cot\beta & \sin^2\beta \\ 1 & \cot\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}=0$

③因 $\tan\beta\ \sin 2\gamma-\tan\gamma\ \sin 2\beta=\frac{\sin\beta\cdot 2\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\beta}$

$-\frac{\sin\gamma\, 2\sin\beta\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}(\cos^2\gamma-\cos^2\beta)$

$=\frac{2\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-r)}{\cos\beta\cos\gamma}$

$=\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}$

$=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\tan\beta-\tan\gamma)$

故左邊 $=(\tan\beta\sin2\gamma-\tan\gamma\sin2\beta)-(\tan\alpha\sin2\gamma-\tan\gamma\sin2\alpha)+(\tan\alpha\sin2\beta-\tan\beta\sin2\alpha)$

$=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\ (\tan\beta-\tan\gamma+\tan\gamma-\tan\alpha+\tan\alpha-\tan\beta)=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdot0=0$

④

左邊 $=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}\begin{vmatrix}\sin^2\theta\cos\phi & \cos^2\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ \sin^2\theta\sin\phi & \cos^2\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\phi & 0\end{vmatrix}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}\begin{vmatrix}\sin^2\theta\cos\phi & \cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ \sin^2\theta\sin\phi & \sin\phi & \sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\cos\phi & 0 & 0\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ \sin\phi & \sin\theta\cos\phi\end{vmatrix}=\sin\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{vmatrix}$

$=\sin\theta$

⑤左邊 $=\begin{vmatrix}\sin y & \cos y\\ \sin z & \cos z\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \sin z & \cos z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \sin y & \cos y\end{vmatrix}$

$=(\sin y\cos z-\cos y\sin z)-(\sin x\cos z-\cos x\sin z)+(\sin x\cos y-\cos x\sin y)$

$=\sin(y-z)+\sin(z-x)+\sin(x-y)$

又 $=2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y-2z}{2}+2\sin\dfrac{(x-y)}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$=2\sin\dfrac{x-y}{2}\left(\cos\dfrac{x-y}{2}-\cos\dfrac{x+y-2z}{2}\right)$

$=2\sin\dfrac{x-y}{2}\cdot(-2)\sin\dfrac{y-z}{2}\sin\dfrac{z-x}{2}$

$=-4\sin\dfrac{x-y}{2}\sin\dfrac{y-z}{2}\sin\dfrac{z-x}{2}$

⑥左邊 $=\begin{vmatrix}a & \dfrac{(s-b)(s-c)}{bc} & \dfrac{s(s-a)}{bc}\\ b & \dfrac{(s-c)(s-a)}{ca} & \dfrac{s(s-b)}{ca}\\ c & \dfrac{(s-a)(s-b)}{ab} & \dfrac{s(s-c)}{ab}\end{vmatrix}$

$=\dfrac{s}{abc}\begin{vmatrix}1 & (s-b)(s-c) & (s-a)\\ 1 & (s-c)(s-a) & (s-b)\\ 1 & (s-a)(s-b) & (s-c)\end{vmatrix}$

$=k(b-c)(c-a)(a-b)\dfrac{s}{abc}$

因 $a=b=c$ 代入上式均爲 0，且爲 a, b, c 之三次式，故能析出項因式，又比較係數得 $k=1$，故原式得證。

⑦左邊 $=\begin{vmatrix}1 & -2\sin^2\dfrac{A}{2} & \dfrac{a}{s-a}\\ 1 & -2\sin^2\dfrac{B}{2} & \dfrac{b}{s-b}\\ 1 & -2\sin^2\dfrac{C}{2} & \dfrac{c}{s-c}\end{vmatrix}$

$=\dfrac{-2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\begin{vmatrix}1 & \dfrac{a}{s-a} & \dfrac{a}{s-a}\\ 1 & \dfrac{b}{s-b} & \dfrac{b}{s-b}\\ 1 & \dfrac{c}{s-c} & \dfrac{c}{s-c}\end{vmatrix}=0$

⑧左邊 $=\begin{vmatrix}a & a^2 & \dfrac{s(s-a)}{bc}\\ b & b^2 & \dfrac{s(s-b)}{ca}\\ c & c^2 & \dfrac{s(s-c)}{ab}\end{vmatrix}=s\begin{vmatrix}a & a^2 & \dfrac{a(s-a)}{abc}\\ b & b^2 & \dfrac{b(s-b)}{abc}\\ c & c^2 & \dfrac{c(s-c)}{abc}\end{vmatrix}$

$$=\frac{sabc}{abc}\begin{vmatrix}1&a&s-a\\1&b&s-b\\1&c&s-c\end{vmatrix}=0$$

(3) 設$\triangle ABC$之三邊爲 a, b, c, 由餘弦第一定律改爲

$$\left.\begin{aligned}-a+b\cos C+c\cos B&=0\\ a\cos C-b+c\cos A&=0\\ c\cos B+b\cos A-c&=0\end{aligned}\right\}$$ 由此三方程式消去 a, b, c 得證原式爲0。

(4)

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\ \cos\theta&\sin^2\theta&\cos\alpha&\cos\beta\\ 0&\cos\alpha&1&\cos\gamma\\ 0&\cos\beta&\cos\gamma&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin^2\theta&\cos\alpha&\cos\beta\\ \cos\theta&1&\cos\gamma\\ \cos\alpha&\cos\gamma&1\end{vmatrix}$$

$$=\sin^2\theta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin^2\theta\cos^2\gamma-\cos^2\alpha$$

$$-\cos^2\beta=0$$

$$(1-\cos^2\gamma)\sin^2\theta=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

故 $$\sin^2\theta=\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$$

$$\theta=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}$$

$$\pm\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}}$$

第七章 反三角函數

1. 反三角函數之意義

設 $\sin x=y$, 此關係亦 可用一種新記號,

$x=\sin^{-1}y$ (或 $x=\operatorname{arc}\sin y$)

表示之,稱之爲反正弦函數,其意義即謂正弦等於 y 之角。

同理, $\cos x=y$, 則 $x=\cos^{-1}y$ (或 $\operatorname{arc}\cos y$)

$\tan x=y$, 則 . $\tan^{-1}y$ (或 $\operatorname{arc}\tan y$)

各稱之爲反餘弦函數,反正切函數。

反正弦,反餘弦,反正切,反餘切,反正割,反餘割統稱之爲反三角函數(*Inverse trigonometric function*)。

總而言之,于三角函數中距離,橫坐標,縱坐標任取二線分之比值爲 θ 角之三角函數,反之 θ 角亦爲二線分之比值之反三角函數。

例: $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 則 $60°=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120°=-\frac{1}{2}$, 則 $120°=\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

〔注意〕(i) 反三角函數記號中之"-1",非爲指數如 $\sin^{-1}a$ 係指正弦等於 a 之角,非 $\frac{1}{\sin a}$。如欲將 $\frac{1}{\sin a}$ 記爲負指數形式,應作 $(\sin a)^{-1}$。

(ii) 三角函數之比值爲不名數,但反三角函數,則指角量之大小故有名數,其單位多以弧度表之。

(iii) 如 $\sin x=\frac{1}{2}$, 則 $x=\sin^{-1}\frac{1}{2}=30°$,

切不可作 $\sin x=\frac{1}{2}=30°$。

(iv) 正弦,餘弦之絕對值不大於1,正割,餘割之絕對值不小於1,

故如 $\sin^{-1}2$, $\sec^{-1}\frac{1}{3}$ 等等,均無意義。

2. 反三角函數之性質

三角函數之符號與反三角函數之符號相連時具有相消性，如同運算中之"加"與"減""乘"與"除"可以相消。

設 $\sin\theta=a,\quad \theta=\sin^{-1}a,\qquad \therefore\ \sin\theta=\sin\ \sin^{-1}a$

$\therefore\ \sin\theta=a,$ 則 $\sin\ \sin^{-1}a=a$

故 $\sin$ 與 $\sin^{-1}$ 或 $\sin^{-1}$ 與 $\sin$ 相連時無意義。

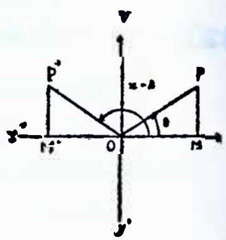
同理 $\tan$ 與 $\tan^{-1}$ 及 $\cos$ 與 $\cos^{-1}$ 相連亦無意義。

3: 反三角函數之通值 (General value)

例如 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，$\theta=30°$，若按廣義三角函數之定義能滿足此式之 θ 角必無限制，如 $\theta=30°, 150°, 390°,\cdots\cdots \sin\theta$ 之函數值均等於 $\frac{1}{2}$。今討論正弦函數等於 $\frac{1}{2}$ 之一切 θ 角之數值，稱之爲正弦之通值。

(一) 正弦之通值

設 $\sin\theta=a,$ 則 $\theta=\sin^{-1}a,\ o<a<1,$ 在第一象限或第二象限作 θ 角，令 $OP=OP'=1,\ PM=a,$



$\angle POM=\theta,\ \angle P'OM=\pi-\theta,$

$\because\ \triangle OPM\cong\triangle OP'M',$

$\therefore\quad PM=P'M'$

$\therefore\quad \sin\theta=\sin(\pi-\theta)=a$

若 OP, OP' 再旋轉一週後

則 $\angle POM=2\pi+\theta,\quad \angle P'OM=2\pi+\pi-\theta=3\pi-\theta$

而正弦之函數值亦爲 a，考察上兩式之情形可知偶數倍 π 加 θ 或奇數倍 π 減 θ 之正弦函數值均爲 a。因此兩式可合併成爲

$$n\pi+(-1)^n\theta$$

(因 -1 之偶次方爲正，奇次方爲負)

不論 n 爲任何數，$n\pi+(-1)^n\theta$ 均表示 θ 與 $\pi-\theta$ 二角之正弦

函數相同。

若 $-1<a<0$，則在第三第四象限，上述之理仍可成立。

故知同正弦函數值之 θ 角之通值爲 $n\pi+(-1)^n\theta$

$$\sin\theta=\sin[n\pi+(-1)^n\theta]=a$$

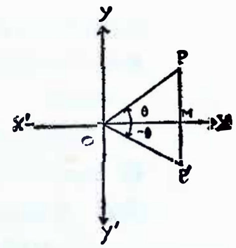
即 $\sin^{-1}a=n\pi+(-1)^n\theta$

同理 $\csc\theta=a$ 時，$\csc^{-1}a=n\pi+(-1)^n\theta$

(二) 餘弦之通值

設 $\cos\theta=a,\ \theta=\cos^{-1}a,\ 0<a<1,$ 則 θ 在第一第四象限，

令 $OP=OP'=1,\ \angle POX=\theta$



若 $OM=a,$ 則 $OM'=a,$

$\cos\theta=\cos(-\theta)$ 或

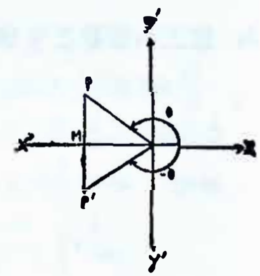
$\cos(-\theta)=\cos(2\pi-\theta)=a$

若 OP, OP' 再旋轉一週後，則

$\angle POM=2\pi+\theta,\ \angle P'OM=4\pi-\theta,$ 而正弦之函數亦等於 a。

故 可知偶數倍 π 加或減 θ 之餘弦函數均爲 a，

$\therefore\ 2n\pi\pm\theta$ 表 θ 或 $(-\theta)$ 二角之餘弦之函數角相同。



若 $-1<a<0$，則餘弦之函數在第二第三象限爲負值，按上理仍可成立。

故 知同餘弦函數之 θ 角之通值爲 $2n\pi\pm\theta$。

$\therefore\ \cos(\pm\theta)=\cos(2n\pi\pm\theta)=a$

即 $\cos^{-1}a=2n\pi\pm\theta$

同理 $\sec\theta=a,$ 則 $\sec^{-1}a=2n\pi\pm\theta$

(三) 正切之通值

設 $\tan\theta=a,\quad \tan^{-1}a=\theta,\quad a>0,$ 則 θ 角在第一第三象限。

令 $\angle POM=\theta,\ \angle P'OM=\pi+\theta$

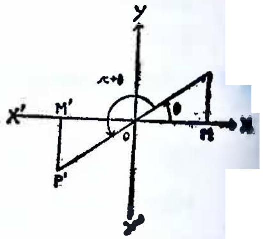
$OM=OM'=1$，

$\therefore\ \triangle POM \cong \triangle P'OM'$

若 $PM=a$，則 $P'M'=a$

$\therefore\ \tan\theta=\tan(\pi+\theta)=a$

若 OP，OP' 再旋轉一週，則 $\angle POM$ $=2\pi+\theta$，$\angle P'OM=3\pi+\theta$，其正切之函數均同 a 相等。



由是可知任何整數位之 π 加 θ 角之正切函，數值均相同。

$\therefore\ n\pi+\theta$ 表 θ 或 $\pi+\theta$ 二角之正切函數值。

若 $a<0$，則 θ 角之正切函數值在第四或第二象限。

故知同正切函數值之 θ 角之通值爲

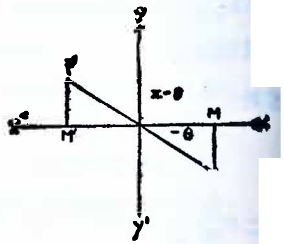
$n\pi\pm\theta$

$\therefore\ \tan\theta=\tan(n\pi\pm\theta)=\pm a$

即 $\tan^{-1}(\pm a)=n\pi\pm\theta$

同理　若 $\cot\theta=\pm a$ 時，

$\cot^{-1}(\pm a)=n\pi\pm\theta$



4. 反三角函數之主值

在反正弦，反餘割，反正切，反餘切函數之通值中，有僅有一個絕對值最小之角，稱之爲主值。

例如：　$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ 之主值爲 30°，　$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ 之主值爲 30°，

$\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 之主值爲 60° 等等。

由函數之變化情形，易知：

反正弦，反餘割，反正切，反餘切之主值在 −90° 與 90° 之間，或與之相等。反餘弦，反正割之主值，在 0° 與 180° 之間，或與之相等。

〔例 1〕　求 $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 之主值及通值？

（解）　設 $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\theta$，則 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$　$\theta=45°$（主值）

$\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$（通值）

〔例 2〕　求 $\cos^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ 之主值及通值？

（解）　設 $\cos^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}})=\theta$，　則 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$　$\theta=135°$（主值）

$\theta=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$（通值）

〔例 3〕　求 $\tan^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ 之主值及通值？

（解）　設 $\tan^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\theta$，則 $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$　$\theta=-30°$（主值）

$\theta=n\pi-30°$（通值）

〔例 4〕　設 $\tan 4x=-\sqrt{3}$，　求 x 之通值？

（解）　令 $4x=\theta$，$\tan\theta=-\sqrt{3}$，　$\theta=\tan^{-1}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$

$\therefore$　$\theta=\tan^{-1}(-\sqrt{3})=n\pi-\frac{\pi}{3}$

$\therefore$　$4x=n\pi-\frac{\pi}{3}$　　$\therefore$　$x=\frac{1}{4}(n\pi-\frac{\pi}{3})$

〔例 5〕　設 $\sec(2x+\alpha)=\infty$，求 x 之通值？

（解）　令 $2x+\alpha=\theta$，　$\therefore \sec\theta=\sec(2x+\alpha)=\infty$

$\theta=\sec^{-1}\infty=\pm\frac{\pi}{2}$

$\therefore$　$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$，即 $2x+\alpha=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}-\alpha\qquad\therefore x=\frac{1}{2}(2n\pi\pm\frac{\pi}{2}-\alpha)$

〔例5〕 求適合於 $\sin x+\cos x=0$ 而比 $360°$ 小之正值。

（解） $\because\ -\cos x=\sin(270°-x)\quad\therefore \sin x=\cos(270°-x)$

$\therefore\ x=n\cdot180°+(-1)^n\cdot(270°-x)$

n 爲奇數時不合用，當 n 爲偶數時

$x=2k\cdot180°+(270°-x)$

$2x=k\cdot360°+270°$ 故 $x=k\cdot180°+135°$

故 比 $360°$ 小之正角爲 $135°, 315°$。

〔例6〕 求 $\sin^{-1}\frac{(-1)^m}{2}$ 之通值。

（解） 令 $\sin^{-1}\frac{(-1)^m}{2}=\theta$， 則 $\sin\theta=\frac{(-1)^m}{2}$

$\therefore$ θ 之主值爲 $(-1)^m\frac{1}{6}\pi$

$\therefore$ 通值爲 $n\pi+(-1)^{n+n}\theta$，即 $n\pi+(-1)^{m+n}\frac{1}{6}\pi$

※〔例7〕 設 $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$，求 θ 之通值。

（解） $\cos(\pi\sin\theta)=\sin(\frac{1}{2}\pi-\pi\sin\theta)$

$=\sin[n\pi+(-1)^n\frac{1}{2}\pi(-\pi\sin\theta)]$

$\therefore\ \pi\cos\theta=n\pi+(-1)^n(\frac{1}{2}\pi-\pi\sin\theta)$

即 $\cos\theta+(-1)^n\sin\theta=n+(-1)^n\frac{1}{2}$

即 $\cos\frac{1}{4}\pi\cos\theta+(-1)^n\sin\frac{1}{4}\pi\ \sin\theta=\frac{2n+(-1)^n}{2\sqrt{2}}$

即 $\cos\{\theta-(-1)^n\frac{1}{4}\pi\}=\frac{2n+(-1)^n}{2\sqrt{2}}$

$\therefore\ \theta=(-1)^n\frac{1}{4}\pi+\cos^{-1}\frac{2n+(-1)^n}{2\sqrt{2}}$

但因 $|\cos\theta|<1$，故 n 只能有 1, 0 兩值。

習題二十九

求下列各式之通值：

(1) $\cot^{-1}(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ (2) $\sin^{-1}(\pm1)$

(3) $\sec^{-1}(\pm\sqrt{2})$ (4) $\csc^{-1}(\pm2)$

(5) $\sin5x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (6) $\cos7x=0$

(7) $\tan3x=-1$ (8) $\cot\frac{x}{3}=-\sqrt{3}$

試證下列各式：

(9) 設 $\sin x=1$， 則 $x=\frac{1}{2}(4n+1)\pi$

(10) 設 $\cos y=\pm\frac{1}{2}$，則 $y=n\pi\pm\frac{1}{3}\pi$

(11) 設 $\tan3x\infty$， 則 $x=\frac{1}{6}(2n+1)\pi$

(12) 設 $\sin\theta+\tan^{-1}\frac{b}{a}=c$，則 $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha-\tan^{-1}\frac{b}{a}$ $(\alpha=\sin^{-1}c)$

※(13) 設 $\cos^{-1}\frac{(-1)^m}{2}=\theta$， 則 $\theta=(2n+m)\pi\pm\frac{1}{3}\pi$

※(14) 設 $\tan^{-1}(-1)^m=\theta$，則 $\theta=n\pi+(-1)^m\frac{1}{4}\pi$

(15) 設 $\tan(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin\theta)=\cot(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\theta)$

則 $\theta=2n\pi+\frac{1}{4}\pi$

(16) 設 $\sin(m\cos\theta)=\cos(m\sin\theta)$

則 $\theta=(-1)^n\frac{1}{4}\pi+\cos^{-1}\frac{[2n+(-1^n)]\pi}{2m\sqrt{2}}$

(17) 設 $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$，則 $2\theta=\pm\sin^{-1}\frac{3}{4}$

習 題 略 解

(1) $\cot^{-1}(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

(2) $\sin^{-1}(\pm 1)=n\pi\pm\frac{\pi}{2}$

(3) $\sec^{-1}(\pm\sqrt{2})=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

(4) $\csc^{-1}(\pm 2)=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$

(5) $x=\frac{n\pi}{5}-(-1)^n$ [illegible]

(6) $x=\frac{n\pi}{7}\pm\frac{90^\circ}{7}$

(7) $x=\frac{n\pi}{3}-15^\circ$

(8) $x=3n\pi-\frac{\pi}{2}$

(9) $x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}[2k+(-1)^k]\pi=\frac{1}{2}(4n+1)\pi$

(10) $\because y$ 之主值為 $\frac{\pi}{3}$ 及 $\pi+\frac{\pi}{3}$，$\therefore y=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 或 $y=(2k\pm1)\pi\pm\frac{\pi}{3}$

(11) $3x=n\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}(2n+1)\pi \quad \therefore x=\frac{1}{6}(2n+1)\pi$

(12) $\because \theta+\tan^{-1}\frac{b}{a}=n\pi+(-1)^n\alpha$，$(\alpha=\sin^{-1}c)$

$\therefore \theta=n\pi+(-1)^n\alpha-\tan^{-1}\frac{b}{a}$

(13) m 為偶數時，θ 之主值為 $\frac{\pi}{3}$， 故 $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$m$ 為奇

θ 之主值為 $\pi+\frac{\pi}{3}$。 故 $\theta=(2n+m)\pi\pm\frac{\pi}{3}$

(14) $\because \tan\theta=(-1)^m \quad \therefore \theta$ 之主角為 $(-1)^m\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta=n\pi+(-1)^m\frac{\pi}{4}$

(15) $\because \cot(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\theta)=\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\theta) \quad \therefore \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin\theta$

$=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\theta, \quad \therefore \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)=2n+1$，

即 $\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=2n+1$ 但 $|\cos(\theta-\frac{\pi}{4})|\leqq 1$，

故 $n=0$ 時此式始能成立。

即 $(\theta-\frac{\pi}{4})=1 \quad \therefore \theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi$

(16) $\because \cos(m\sin\theta)=\sin(\frac{\pi}{2}-m\sin\theta)$. $\therefore m[\cos\theta+(-1)^n\sin\theta]$

$=\frac{1}{2}[2n+(-1)^n]\pi \qquad \therefore \cos[\theta-(-1)^n\frac{\pi}{4}]$

$=\frac{1}{2m\sqrt{2}}[2n+-(1)^n]\pi$ 故 $\theta-(-1)^n\frac{\pi}{4}=\cos^{-1}\frac{1}{2m\sqrt{2}}$

$[2n+(-1)^n]\pi$ 即 $\theta=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\cos^{-1}\frac{1}{2m\sqrt{2}}[2n+(-1)^n]\pi$

(17) $\because \sin(\pi\cos\theta)=\cos(\frac{\pi}{2}-\pi\cos\theta)=\cos(\pi\cos\theta-\frac{\pi}{2})$

$\therefore \pi\cos\theta-\frac{\pi}{2}=2n\pi\pm\pi\sin\theta \quad \therefore \cos\theta\mp\sin\theta=2n+\frac{1}{2}$

但 $|\cos\theta\mp\sin\theta|\leqq 2$. 故祗在 $n=0$，時上式成立。

即 $\cos\theta\mp\sin\theta=\frac{1}{2}$ 即 $1\mp\sin 2\theta=\frac{1}{4} \quad \therefore \pm\sin 2\theta=\frac{3}{4}$

故 $2\theta=\pm\sin^{-1}\frac{3}{4}$

5. 反三角函數之恒等式

三角函數之恒等式，亦可變爲反三角函數中之恒等式，故三角函數中之公式，亦可變爲反三角函數中之公式，通常不再另立公式。一以其形式特殊，記憶不易。二以反三角函數式均可變爲三角函函數式。

例如： $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$

與 $\cos 2y=2\cos^2 y-1$ 相同，

設 $\cos^{-1}x=y$，則 $\cos y=x$，

$\therefore 2y=\cos^{-1}(2x^2-1)$

即 $\cos 2y=2x^2-1$

即 $\cos 2y=2\cos^2 y-1$

故反三角函數之公式不必要。即有，亦可以不用記憶。通常解反三角函數問題，不論其爲恒等式，方程式等一切之式，均先變爲三角函數關係，然後再行加以演算。

〔例 1〕 求 $\tan[\sin^{-1}\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)]$ 之值。

（解） 令 $\sin^{-1}\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)=x$，則 $\sin x=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

$\therefore\ \cos x=\sqrt{1-\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

故 $\tan x=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$

$=\sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{20}}=\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$

〔例 2〕 化簡 $\sec 2\sin^{-1}\tan\cot^{-1}x$

（解） 設 $\cot^{-1}x=A$，則 $\cot A=x$，$\tan A=\frac{1}{x}$

又設 $\sin^{-1}\tan\cot^{-1}x=B$

則 $\sin B=\tan\cot^{-1}x=\tan x=\frac{1}{x}$

今 $\cos 2B=1-2\sin^2 B=1-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}$

故 $\sec 2B=\frac{x^2}{x^2-2}$

即 $\sec 2\sin^{-1}\tan\cot^{-1}x=\frac{x^2}{x^2-2}$

〔例 3〕 試證 $\cos^{-1}a=\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}$

（證） 令 $\cos^{-1}a=A$，則 $\cos A=a$

$\therefore\ \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-a^2}$

$\therefore\ A=\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}=\cos^{-1}a$

〔例 4〕 試證 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

（證一） 設 $\sin^{-1}x=\alpha$，$\cos^{-1}x=\beta$ 則 $\sin\alpha=x=\cos\beta$

但 $\cos\beta=\sin(\frac{1}{2}\pi-\beta)$ （因 α,β 均假定爲銳角）

故 $\alpha=\frac{1}{2}\pi-\beta$ 即 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}\pi$

故 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{1}{2}\pi$

（證二） 設 $\sin^{-1}x=\alpha$，$\cos^{-1}x=\beta$，則 $\sin\alpha=x$，$\cos\beta=x$

$\therefore\ \cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$，$\sin\beta=\sqrt{1-x^2}$

今 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=x\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-x^2}=0$

$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{1}{2}\pi$

即 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{1}{2}\pi$

〔例 5〕 試證 $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$

（證） 設 $\cos^{-1}\frac{4}{5}=A$，即 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\sin A=\frac{3}{5}$

$\cos^{-1}\frac{12}{13}=B$，則 $\cos B=\frac{12}{13}$，$\sin B=\frac{5}{13}$

$\because\ \cos(\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13})=\cos(A+B)$

$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$

$\therefore\ \cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$

〔例 6〕 試證 $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

（證） 設 $\tan^{-1}\frac{1}{3}=A$，則 $\tan A=\frac{1}{3}$，

設 $\tan^{-1}\frac{1}{7}=B$，則 $\tan B=\frac{1}{7}$

$\therefore\ 2A+B=\frac{\pi}{4}$。$\tan(2A+B)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \tan(2A+B)=\frac{\tan 2A+\tan B}{1-\tan 2A\tan B}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}$$

$$=\frac{21+4}{28-3}=\frac{25}{25}=1$$

$\therefore$ 1=1 即 $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

〔例7〕 試證 $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{1}{2}\pi$

（證一） 設 $\sin^{-1}\frac{4}{5}=A$, $\sin^{-1}\frac{5}{13}=B$, 則 $\sin A=\frac{4}{5}$, $\sin B=\frac{5}{13}$

$\therefore$ $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{12}{13}$

今 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{63}{65}$$

則 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\frac{16}{65}$

令 $\sin^{-1}\frac{16}{65}=C$, 則 $\sin C=\frac{16}{65}$, $\cos C=\frac{63}{65}$

今 $\cos(A+B+C)=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$

$$=\frac{16}{65}\times\frac{63}{65}-\frac{63}{65}\times\frac{16}{65}=0$$

$\therefore$ $A+B+C=\frac{1}{2}\pi$

即 $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{1}{2}\pi$

（證二） 令 $\sin^{-1}\frac{4}{5}=A$, $\sin^{-1}\frac{5}{13}=B$

從上各推得 $\sin(A+B)=\frac{63}{65}$, $\cos(A+B)=\frac{16}{65}$

但 $\cos(A+B)=\sin[\frac{1}{2}\pi-(A+B)]$

即 $\sin[\frac{1}{2}\pi-(A+B)]=\frac{16}{65}$

故 $\frac{1}{2}\pi-A-B=\sin^{-1}\frac{16}{65}$

$\therefore$ $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{1}{2}\pi$

〔例8〕 試證 $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}-\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}=\tan^{-1}\frac{2(x-y)(1+xy)}{(1+xy)^2-(x-y)^2}$

（證） 令 $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\alpha$, $\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}=\beta$,

則 $\cos\alpha=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\cos\beta=\frac{1-y^2}{1+y^2}$

故 $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}=\frac{\sqrt{4x^2}}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}$

又 $\sin\beta=\sqrt{1-\frac{(1-y^2)^2}{(1+y^2)^2}}=\frac{\sqrt{4y^2}}{1+y^2}=\frac{2y}{1+y^2}$

$\therefore$ $\tan\alpha=\frac{2x}{1-x^2}$, $\tan\beta=\frac{2y}{1-y^2}$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2x}{1-x^2}-\frac{2y}{1-y^2}}{1+\frac{4xy}{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

$$=\frac{2x-2y+2x^2y-2xy^2}{1-x^2-y^2+x^2y^2+4xy}$$

$$=\frac{2(x-y)+2xy(x-y)}{(1+2xy+x^2y^2)-(x^2-2xy+y^2)}$$

$$=\frac{2(x-y)(1+xy)}{(1+xy)^2-(x-y)^2}$$

$$\alpha-\beta=\tan^{-1}\frac{2(x-y)(1+xy)}{(1+xy)^2-(x-y)^2}$$

即 $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}-\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}=\tan^{-1}\frac{2(x-y)(1+xy)}{(1+xy)^2-(x-y)^2}$

※〔例 9〕 試證 $\cos\sec^{-1}\sin\tan^{-1}\cos\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\tan\sin^{-1}x=\sqrt{\dfrac{3-4x^2}{1-x^2}}$

（證） 設 $\sin^{-1}x=A$, 則 $\sin A=x$, $\therefore\ \tan A=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

設 $\cos^{-1}(\tan A)=B$, 則 $\cos B=\tan A=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore\ \sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1-2x^2}{1-x^2}}$

設 $\tan^{-1}(\sin B)=C$ $\therefore\ \tan C=\sin B=\sqrt{\dfrac{1-2x^2}{1-x^2}}$

$\therefore\ \cos C=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2C}}=\sqrt{\dfrac{1}{1-\left(\sqrt{\dfrac{1-2x^2}{1-x}}\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2-3x^2}}$

設 $\tan^{-1}(\cos C)=D$ $\therefore\ \tan D=\cos C=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2-3x^2}}$

$\therefore\ \sin D=\sqrt{1-\cos^2D}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2D}}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{3-4x^2}}$

設 $\sec^{-1}(\sin D)=E$, $\sec E=\sin D=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{3-4x^2}}$

$\therefore\ \cos E=\dfrac{1}{\sec E}=\sqrt{\dfrac{3-4x^2}{1-x^2}}$，故得證。

※〔例10〕 試證 $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c=\tan^{-1}a$

（解） 因 $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$,

設 $\tan A=a$, $\tan B=b$, 則 $\tan(A-B)=\dfrac{a-b}{1+ab}$

即 $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}=A-B=\tan^{-1}a-\tan^{-1}b$………(1)

同理 $\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}=\tan^{-1}b-\tan^{-1}c$…………………(2)

(1)+(2) 得，$\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}=\tan^{-1}a-\tan^{-1}c$

故 $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c=\tan^{-1}a$

習 題 三 十

(1) 求下列各式之值：

① $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{2}+\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$

② $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt5}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right)$

③ $\tan\left(\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right)$

④ $\csc 2\tan^{-1}\cot x$

⑤ $\sin 2\cos^{-1}\cot 2\tan^{-1}x$

(2) 試證下列各式：

① $\cos^{-1}a=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$　　② $\sin^{-1}\dfrac{12}{13}=\cot^{-1}\dfrac{5}{12}$

③ $2\sin^{-1}x=\cos^{-1}(1-2x^2)$　　④ $2\tan^{-1}\dfrac{1}{5}=\tan^{-1}\dfrac{5}{12}$

⑤ $\sec^{-1}a+\csc^{-1}a=\dfrac{\pi}{2}$　　⑥ $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$

⑦ $2\tan^{-1}\dfrac{1}{5}+\tan^{-1}\dfrac{1}{4}=\tan^{-1}\dfrac{32}{43}$

⑧ $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{82}}+\sin^{-1}\dfrac{4}{\sqrt{41}}=\dfrac{\pi}{4}$

⑨ $\tan^{-1}\dfrac{3}{4}+\tan^{-1}\dfrac{3}{5}-\tan^{-1}\dfrac{8}{19}=\dfrac{\pi}{4}$

⑩ $\tan^{-1}\dfrac{1}{3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{5}+\tan^{-1}\dfrac{1}{7}+\tan^{-1}\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$

⑩ $\tan^{-1}a=\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c$

⑫ $\sin^{-1}\dfrac{4}{5}+\sin^{-1}\dfrac{5}{13}+\sin^{-1}\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}$

⑬ $\sin^{-1}x=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$

⑭ $\sin\cot^{-1}\cos\tan^{-1}x=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$

⑮ $\tan^{-1}(2+\sqrt{3})-\tan^{-1}(2-\sqrt{3})=\sec^{-1}2$

⑯ $\sin^{-1}(3x-4x^3)=3\sin^{-1}x$

⑰ $\frac{1}{2}\tan^{-1}2\tan[a+\tan^{-1}(\tan^3 a)]=a$

⑱ $\tan^{-1}x\pm\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x\pm y}{1\mp xy}$

⑲ $\tan^{-1}[(\sqrt{2}+1)\tan\alpha]-\tan^{-1}[(\sqrt{2}-1)\tan\alpha]$
$=\tan^{-1}(\sin 2\alpha)$

⑳ $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}[xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}]$

㉑ $\frac{2b}{a}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b})+\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b})$

※㉒ $\tan^{-1}\frac{2x}{2+x^2+x^4}+\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}(x+1)=2\tan^{-1}x$

※㉓ $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2\alpha)+\tan^{-1}(\cot\alpha)+\tan^{-1}(\cot^3\alpha)=0$

※㉔ $\sin^{-1}\frac{2ab}{a^2+b^2}+\sin^{-1}\frac{2cd}{c^2+d^2}=\sin^{-1}\frac{2xy}{x^2+y^2}$

※㉕ $\frac{a^3}{2}\csc^2(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{a}{b})+\frac{b^3}{2}\sec^2(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{b}{a})=(a+b)(a^2+b^2)$

※㉖ $\sin(\frac{2\pi}{3}+\cos^{-1}\frac{a}{b})\sin(\frac{2\pi}{3}-\cos^{-1}\frac{a}{b})$
$-\cos(\frac{2\pi}{3}+\cos^{-1}\frac{a}{b})\cos(\frac{2\pi}{3}-\cos^{-1}\frac{a}{b})=\frac{1}{2}$

※㉗ $\cos 6\tan^{-1}x=\frac{1-15x^2+15x^4-x^6}{(1+x^2)^3}$

習題略解

(1) ① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=1$

② 原式$=\sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\tan^{-1}\frac{1}{3}+\cos\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\tan^{-1}\frac{1}{3}$
$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}+\cos\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$
$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

③ 設 $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\alpha$，$\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}=\beta$，
則 $\sin 2\alpha=\frac{2x}{1+x^2}$，$\cos 2\beta=\frac{1-y^2}{1+y^2}$
∴ $\cos 2\alpha=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，$\sin 2\beta=\frac{2y}{1+y^2}$，因 $\tan\alpha=x$，$\tan\beta=$
故 原式$=\tan(\alpha+\beta)=\frac{x+y}{1-xy}$

④ 設 $\tan^{-1}\cot x=\alpha$，則 $\tan\alpha=\cot x$，今原式$=\csc 2\alpha$
$=\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{1+\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}=\frac{1+\cot^2 x}{2\cot x}=\frac{\tan^2 x+1}{2\tan x}=\csc 2x$

⑤ 設 $\tan^{-1}x=\alpha$，則 $\tan\alpha=x$，
$\cot 2\alpha=\frac{1}{\tan 2\alpha}=\frac{1-x^2}{2x}$ 又設 $\cos^{-1}\cot 2\alpha=\beta$，
則 $\cos\beta=\cot 2\alpha=\frac{1-x^2}{2x}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{6x^2-x^4-1}}{2x}$
今原式$=\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\frac{(1-x^2)\sqrt{6x^2-x^4-1}}{2x^2}$

(2) ① 設 $\cos^{-1}a=A$，則 $\cos A=a$，
$\tan A=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

② 設 $\sin^{-1}\frac{12}{13}=A$，則 $\sin A=\frac{12}{13}$，$\cot A=\cos A/\sin A=\frac{5}{12}$

③ $\cos 2A=1-2\sin^2 A=1-2x^2$

④ $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{5}{12}$

⑤ $\sec\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sec A=a$，$\frac{\pi}{2}-A=\csc^{-1}a$

⑥ $\tan A=\frac{1}{2}$，$\tan B=\frac{1}{3}$，$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$

$\therefore\ A+B=\tan^{-1}1$

⑦ $\tan A=\frac{1}{5}$，$\tan B=\frac{1}{4}$，$\tan 2A=\frac{5}{12}$，$\tan(2A+B)=\frac{32}{43}$

故 $2A+B=\tan^{-1}\frac{32}{43}$

⑧ $\sin A=\frac{1}{\sqrt{82}}$，$\cos A=\frac{9}{\sqrt{82}}$，$\sin B=\frac{4}{\sqrt{41}}$，$\cos B=\frac{5}{\sqrt{41}}$

$\cos(A+B)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$A+B=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

⑨ $\tan A=\frac{4}{3}$，$\tan B=\frac{3}{5}$，$\tan C=\frac{8}{19}$，$\tan(A+B)=\frac{27}{11}$

$\tan(A+B+C)=\frac{\tan(A+B)-\tan C}{1+\tan(A+B)\tan C}=1$，

$A+B+C=\tan^{-1}1$

⑩ $\tan A=\frac{1}{3}$，$\tan B=\frac{1}{5}$，$\tan C=\frac{1}{7}$，$\tan D=\frac{1}{8}$

$\tan(A+B)=\frac{4}{7}$，$\tan(C+D)=\frac{3}{11}$

$\therefore\ \tan(A+B+C+D)=1\quad\therefore\ A+B+C+D=\tan^{-1}1$

⑪ $\tan A=a$，$\tan B=b$，因 $\tan(A-B)=\frac{a-b}{1+ab}$

則 $A-B=\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}$ 同理 $\tan^{-1}b-\tan^{-1}c=\frac{b-c}{1+bc}$

$\tan^{-1}a=\tan^{-1}a-\tan^{-1}b+\tan^{-1}b-\tan^{-1}c+\tan^{-1}c$

$=\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c$

⑫ $\sin A=\frac{4}{5}$，$\sin B=\frac{5}{13}$，$\sin C=\frac{16}{65}$，$\cos A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{12}{13}$

$\cos C=\frac{63}{65}$，$\sin(A+B)=\frac{63}{65}$，$\cos(A+B)=\frac{16}{15}$，

$\sin(A+B+C)=1\quad\therefore\ A+B+C=\sin^{-1}1$

⑬ $\sin A=x$，$\cos A=\sqrt{1-x^2}$，

$$\frac{2\sin A\cos A}{1-2\sin^2 A}=\tan 2A=\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$

⑭ 左邊 $=\sin\cot^{-1}\cos\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sin\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\sin\sin^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}=$ 右邊

⑮ $\tan A=2+\sqrt{3}$，$\tan B=2-\sqrt{3}$ $\therefore\ \tan(A-B)=\sqrt{3}$

設 $\sec^{-1}2=C$，則 $\sec C=2$，$\tan C=\sqrt{\sec^2 C-1}=\sqrt{3}$

$\therefore\ A-B=C$，

⑯ $\sin A=x$，$\sin[\sin^{-1}(3x-4x^3)]=3x-4x^3=3\sin A-4\sin^3 A$

$=\sin 3A=\sin(3\sin^{-1}x)$

⑰ 令 $\tan^{-1}(\tan^3 a)=b$，則 $\tan^3 a=\tan b$，故原題爲

$\tan^{-1}2\tan(a+b)=2a$ 即：$\tan(a+b)=\tan 2a$，

其左邊 $=\frac{2(\tan a+\tan b)}{1-\tan a\tan b}=\frac{2(\tan a+\tan^3 a)}{1-\tan^4 a}$

$$=\frac{2\tan a(1+\tan^2 a)}{1-\tan^4 a}=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\tan 2a$$

⑱ $\tan\alpha=x$，$\tan\beta=y$ 但 $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{x\pm y}{1\mp xy}$，

$\alpha\pm\beta=\tan^{-1}x\pm\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x\pm y}{1\mp xy}$

⑲ $\tan A=(\sqrt{2}+1)\tan\alpha$，$\tan B=(\sqrt{2}-1)\tan\alpha$，

$\therefore\ \tan(A-B)=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha/\cos\alpha}{\sec^2\alpha}$

$=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha\quad\therefore\ A-B=\tan^{-1}(\sin 2\alpha)$

⑳ 設二角爲α，β，再求 $\cos(\alpha-\beta)$ 即得

㉑ 設 $\cos^{-1}\frac{a}{b}=\alpha$, 則 $\cos\alpha=\frac{a}{b}$

∴ 右邊$=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})+\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{(1-\tan\frac{\alpha}{2})^2+(1+\tan\frac{\alpha}{2})^2}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(1+\tan^2\frac{\alpha}{2})}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{2}{\cos\alpha}=\frac{2b}{a}\qquad [\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha]$$

㉒ 設第一、二、三角各為 α; β, γ, 又 $\tan^{-1}x=\delta$

則 $\tan\beta=x-1$; $\tan\gamma=x+1$; $\tan\alpha=2x/(2+x^2+x^4)$

故 $\tan(\beta+\gamma)=\frac{2x}{2-x^2}$, $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{2x}{1-x^2}$

又 $\tan2\delta=\frac{2x}{1-x^2}$ ∴ $\alpha+\beta+\gamma=2\delta$

● 設三角各為 A,B,C, 則 $\tan A=\frac{1}{2}\tan2\alpha=\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

今 $\tan(B+C)=\frac{\cot\alpha+\cot^3\alpha}{1-\cot^4\alpha}=\frac{\cot\alpha}{1-\cot^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha-1}$

$=-\tan A=\tan(-A)$

∴ $B+C=-A$, 即 $A+B+C=0$

● 設二角為 α,β, 則 $\sin\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\cos\alpha=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

∴ $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2(ac-bd)(bc+ad)}{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}$

∴ $\alpha+\beta=\sin^{-1}\frac{2xy}{x^2+y^2}$

● 設 $\tan^{-1}\frac{a}{b}=2\alpha$, $\tan^{-1}\frac{b}{a}=2\beta$, 則 $\tan2\alpha=\frac{a}{b}$,

$\tan2\beta=\frac{b}{a}$, $\cos2\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

∴ $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

∴ $\sec^2\alpha=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+b}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}(\sqrt{a^2+b^2}-b)$

同理 $\csc^2\beta=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)$, 今原式左邊

$=\frac{a^3}{2}\sec^2\alpha+\frac{b^3}{2}\csc^2\beta=[a(\sqrt{a^2+b^2}-b)+b(\sqrt{a^2+b^2}$

$+a)]\sqrt{a^2+b^2}=(a+b)(a^2+b^2)$

● 設 $\frac{2\pi}{3}+\cos^{-1}\frac{a}{b}=\alpha$, $\frac{2\pi}{3}-\cos^{-1}\frac{a}{b}=\beta$, 則

原式左邊$=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=-\cos(\alpha+\beta)$

$=-\cos\frac{4\pi}{3}=-[-\cos\frac{\pi}{3}]=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

● 設 $\tan^{-1}x=\alpha$, 則 $\tan\alpha=x$,

∴ $\tan^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}=x^2$, 故 $\cos2\alpha=\frac{1-x^2}{1+x^2}$,

今 $\cos6\alpha=4\cos^32\alpha-3\cos2\alpha$, 代入即得。

6. 雜　題

〔例1〕 若 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$, 試證 $x+y+z=xyz$

〔證〕 設 $\tan^{-1}x=A$, $\tan^{-1}y=B$, $\tan^{-1}z=C$

則 $\tan A=x$, $\tan B=y$, $\tan C=z$

$\tan(A+B)=-\tan C$ 〔∵ $A+B+C=\pi$〕

即 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

$\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

故 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

即 $x+y+z=xyz$

〔例2〕 設 $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2c-x}=\theta$, $\tan^{-1}\frac{2x-c}{c\sqrt{3}}=\phi$,

則 $\theta-\phi=\dfrac{\pi}{6}$

（證） ∵ $\theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}x}{2c-x}$ ∴ $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}x}{2c-x}$

∴ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{2x-c}{\sqrt{3}c}$ ∴ $\tan\phi=\dfrac{2x-c}{\sqrt{3}c}$

則 $\tan(\theta-\phi)=\dfrac{\tan\theta-\tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}x}{2c-x}-\dfrac{2x-c}{\sqrt{3}c}}{1+\dfrac{\sqrt{3}x}{2c-x}\cdot\dfrac{2x-c}{\sqrt{3}c}}$

$=\dfrac{3cx-(2x-c)(2c-x)}{(2c-x)\cdot\sqrt{3}c+\sqrt{3}x(2x-c)}$

$=\dfrac{3cx-4cx+2c^2+2x^2-cx}{\sqrt{3}(2c^2-cx+2x^2-cx)}$

$=\dfrac{2(c^2-cx+x^2)}{\sqrt{3}\cdot 2(c^2-cx+x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

∴ $\theta-\phi=\dfrac{\pi}{6}$

※〔例 3〕 設 $x^2=a^2+b^2+ab$, $\tan^2\phi=2\csc(2\tan^{-1}\dfrac{a}{b})$,

則 $x=\sqrt{ab}\sec\phi$

（證） 設 $\tan^{-1}\dfrac{a}{b}=A$, 則 $\tan A=\dfrac{a}{b}$

今 $\tan^2\phi=2\csc 2A=\dfrac{2}{\sin 2A}=\dfrac{1}{\sin A\cos A}$

$=\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}=\tan A+\cot A=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

$=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

∴ $\sec^2\phi=\dfrac{a^2+b^2+ab}{ab}=\dfrac{x^2}{ab}$

∴ $x=\sqrt{ab}\sec\phi$

※〔例 4〕 若 $\cot^{-1}p-\tan^{-1}q=\pi$, 求 p,q 之關係。

（解） 設 $\cot^{-1}p=\alpha$, $\tan^{-1}q=\beta$

則 $\cot\alpha=p$, $\tan\beta=q$

但 $\alpha=\pi+\beta$, $\cot\alpha=\cot(\pi+\beta)=\cot\beta=\dfrac{1}{\tan\beta}$

故 $p=\dfrac{1}{q}$, 即 $pq=1$

※〔例 5〕 若 a, b, c 爲 $x^3+px^2+qx+p=0\ (q\neq 1)$ 之根,

則 $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b+\tan^{-1}c=n\pi$

（證） 設 $\tan^{-1}a=\alpha$, $\tan^{-1}b=\beta$, $\tan^{-1}c=\gamma$

則 $\tan\alpha=a$, $\tan\beta=b$, $\tan\gamma=c$

故 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=-p$

$\tan\alpha\cdot\tan\beta+\tan\beta\cdot\tan\gamma+\tan\gamma\cdot\tan\alpha=q$

$\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma=-p$

又因 $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{-p-(-p)}{1-q}=0$

故 $\alpha+\beta+\gamma=\tan^{-1}0=n\pi$,

即 $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b+\tan^{-1}c=n\pi$

習題三十一

(1) 若 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\dfrac{\pi}{2}$,

試證 $yz+zx+xy=1$

(2) 若 $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$,

試證 $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$

※(3) 若 $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b+\tan^{-1}c+\tan^{-1}d=2\pi$,

試證 $a+b+c+d=abc+bcd+cda+dab$

※(4) 若 $u=\cot^{-1}\sqrt{\cos\alpha}-\tan^{-1}\sqrt{\cos\alpha}$,

試證 $\sin u=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$

※(5) 若 $\tan(\theta-\alpha)\tan(\theta-\beta)=\tan^2\theta$,
試證 $\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

※(6) 若 $\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma$ 爲 $\tan 2x=\lambda\tan(x+\theta)$ 之三根
試證 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=n\pi$

習題略解

(1) 設 $\tan^{-1}x=A,\ \tan^{-1}y=B,\ \tan^{-1}z=C$, 則 $\tan A=x$,
$\tan B=y,\ \tan C=z,\ A+B+C=\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{\tan(A+B)}=\tan C$,
即 $\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\tan C$
$\tan A\tan C+\tan B\tan C+\tan A\tan B=1$ ∴ 得證

(2) $\cos A=x,\ \cos B=y,\ \cos C=z,\ A+B+C=\pi$,
$\cos A=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$,
$x=\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}-yz$ ∴ $x^2+y^2+z^2+2xyz=$

(3) 由 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$, 得 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta$
$=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma+\tan\beta\tan\gamma\tan\delta+\tan\gamma\tan\delta\tan\alpha$
$+\tan\delta\tan\alpha\tan\beta$

(4) 設 $\cot^{-1}\sqrt{\cos\alpha}=\theta,\ \tan^{-1}\sqrt{\cos\alpha}=\phi$, 則 $\cot\theta=\tan\phi=\sqrt{\cos\alpha}$
故得 $\sin\theta=\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{1+\cos\alpha}}$ • $\cos\theta=\sin\phi=\sqrt{\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
但 $\sin u=\sin(\theta-\phi)=\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi$
$=\frac{1}{1+\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan^2\frac{\alpha}{2}$

(5) $\tan^2\theta=\frac{(\tan\theta-\tan\alpha)(\tan\theta-\tan\beta)}{(1+\tan\theta\tan\alpha)(1+\tan\theta\tan\beta)}$ 去分母及公因式得
$\tan\theta(\tan\alpha+\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta(\tan^2\theta-1)=0$
$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ 即
$\tan 2\theta=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, 故 $\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

6. 因 $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{\lambda(\tan x+\tan\theta)}{1-\tan\theta\cdot\tan x}$ 即 $\lambda\tan^3 x+(\lambda-2)\tan\theta$
$\tan^2 x+(2-\lambda)\tan x-\lambda\tan\theta=0$, 故 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$
$=\frac{-(\lambda-2)\tan\theta}{\lambda}$, $\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\cdot\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha$
$=\frac{2-\lambda}{\lambda}$, $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=\tan\theta$, 但 $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=-\tan\theta$
故 $\alpha+\beta+\gamma=\tan^{-1}(-\tan\theta)=n\pi-\theta$
即 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=n\pi$

7. 三角方程式

方程式之含有未知角之三角函數者，稱爲三角方程式。普通分三角函數方程式（統稱三角方程式）與反三角函數方程式。

在通常方程式中只含一個未知量者稱之爲一元三角方程式。

例如: $\sin x+\cos x=0$

又方程式中，含二個或二個以上之未知量，此種方程式，稱之爲多元三角方程式。

例如: $\sin x+\cos y=a$ 爲二元 (x, y) 三角方程式。

在一三角方程式中，其未知角得取之值，稱爲該方程式之解(*Solution*)或根(*Root*)。

本節所討論之三角方程式爲一元三角方程式，聯立方程式及反三角方程式分述於後。

8. 三角方程式之解法

解三角方程式本無通則，但下列各項所指示，或者對於方程式的求解有所幫助，今述其步驟如下：

(1) 若方程式中含有倍角，分角或角之和差之函數，則將全部化成單角函數或同角函數爲宜。
(2) 所化成之方程式，使其只含有一種函數。
(3) 如有含未知角之分母或根式，宜在適宜之階段，將其化去，但應注意方程之增根或減根。

(4) 化爲餘角函數。

(5) 將函數和或差化爲函數積。

(6) 最後用代數方法，解出方程中所含的一種值，再依第三節之通值公式，求未知角之一般值。

公式

適合於 $\sin\theta=a$ 之 θ 之值爲 $\theta=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}a$
適合於 $\cos\theta=a$ 之 θ 之值爲 $\theta=2n\pi\pm\cos^{-1}a$
適合於 $\tan\theta=a$ 之 θ 之值爲 $\theta=n\pi+\tan^{-1}a$

上爲基本三角方程式之一般解，極爲重要，讀者必須記憶。其證明可參考第三節。

〔例1〕 解下列各式:

(i) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iv) $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(解) (i) 設 a 爲正弦爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 之角 θ 的一個值，則

$a=60^\circ$ 或 $a=\frac{\pi}{3}$，代入公式，得

$\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$ 或 $\theta=180^\circ\times n+(-1)^n\times 60^\circ$

(ii) 因餘弦爲 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 之角 θ 之一個值爲 $45^\circ=\frac{\pi}{4}$

故 $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

(iii) 因正切爲 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 之角 x 之一個值爲 $30^\circ=\frac{\pi}{6}$

故 $x=n\pi+\frac{\pi}{6}$

(iv) 因正弦爲 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 之角 θ 之一個值爲 $45^\circ=\frac{\pi}{4}$，而因第四象限內之正弦爲負，故所求之一角爲 $-45^\circ=-\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{4}$

〔例2〕 解下列各式:

(i) $\sin 2\theta=\frac{1}{2}$ $\sin 3\theta=1$

(解) (i) 設 $2\theta=x$，則正弦之值爲 $\frac{1}{2}$ 之角 2θ，即 x 之一個值爲 30°，故 $2\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}\left[\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right]$

(ii) 設 $3\theta=x$，按上題，得角 3θ 之一個值爲 $90^\circ=\frac{\pi}{2}$，

$3\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$ $\therefore\ \theta=\frac{1}{3}\left[n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\right]$

〔例3〕 解 $\tan(2\theta-45^\circ)=\tan 25^\circ$

(解)

$$2\theta-45^\circ=n\pi+\frac{5\pi}{36}$$

$$2\theta=n\pi+\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}n\pi+\frac{14}{36}\pi$$

(註) 例1至例3爲三角方程式之基本題，讀者必須注意。

〔例4〕 求解 $\sin 3\theta=2\sin\theta$

(解一) $\because\ \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$\therefore\ 3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta$

$\sin\theta(4\sin^2\theta-1)=0$

若 $\sin\theta=0$ $\therefore\ \theta=0$ $\therefore\ \theta=n\pi$

若 $4\sin^2\theta-1=0$ $\therefore\ \sin\theta=\pm\frac{1}{2}$， $\therefore\ \theta=\pm\frac{\pi}{6}$

$\therefore\quad \theta=n\pi+(-1)^n\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)$

故知比 360° 小之正角爲 0°, 180°, 30°, 150°, 210°, 330°

〔解二〕 $\sin 3\theta-\sin\theta=\sin\theta,\quad \therefore\ 2\cos 2\theta\sin\theta=\sin\theta$

$2\cos 2\theta\sin\theta-\sin\theta=0,\quad \sin\theta(2\cos 2\theta-1)=0$

若 $\sin\theta=0\quad\therefore\quad\theta=0\quad\therefore\quad\theta=n\pi$

若 $2\cos 2\theta-1=0$, 即 $\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}$

$$2\theta=\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},\quad \theta=\frac{\pi}{3}$$

$$2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},\quad\therefore\quad\theta=\frac{1}{2}\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

〔例5〕 解 $2\cos^2\theta+3\sin\theta=3$

〔要點〕 凡原式含有二個以上之三角函數時應設法改用一種函數表示

本題即爲利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

改爲 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ 代入原式即得。

〔解〕 $\therefore\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ 故原式可變形爲

$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta=3$

$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

即 $(2\sin\theta-1)(\sin\theta-1)=0$

$\therefore\quad \sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin\theta=1$

解 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$, 得 $\theta=180°\times n+(-1)^n\,30°$

解 $\sin\theta=1$, 得 $\theta=180°\times n+(-1)^n\,90°$

〔例6〕 解 $\cos 2\theta-5\cos\theta+3=0$

〔解〕 因 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ 將原式變形爲

$2\cos^2\theta-1-5\cos\theta+3=0$

即 $2\cos^2\theta-5\cos\theta+2=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta-2)=0$

$\therefore\quad \cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=2$

因餘弦之值不能爲 2, 故棄去 $\cos\theta=2$, 而解 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,

得 $\theta=360°\times n\pm 60°$

〔例7〕 解 $3\tan\theta+\cot\theta=5\csc\theta$

〔要點〕 將 tan, cot 改用以 sin, cos 表示。

〔解〕 將原式變形爲

$$\frac{3\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{5}{\sin\theta}$$

去分母 $3\sin^2\theta+\cos^2\theta=5\cos\theta$

$3(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta=5\cos\theta$

$2\cos^2\theta+5\cos\theta-3=0$

$\therefore\quad \cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=-3$

棄去 $\cos\theta=-3$

$\therefore\quad \theta=360°\times n\pm 60°$

〔例8〕 解 $\cos 2\theta+\sin\theta+\cos^2\theta=\dfrac{7}{4}$

〔要點〕 原 $\sin\theta$ 爲一次，故將其函數改爲正弦表示較便，即將 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ 代入原式。

〔解〕 因 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ 將原式變形爲

$$1-2\sin^2\theta+\sin\theta+1-\sin^2\theta=\frac{7}{4}$$

整理之，得 $12\sin^2\theta-4\sin\theta-1=0$

$(2\sin\theta-1)(6\sin\theta+1)=0$

$\therefore\quad \sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin\theta=-\dfrac{1}{6}$

由是從 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 得 $\theta=180°\times n+(-1)^n\,30°$

解 $\sin\theta=-\dfrac{1}{6}$, 因在特別角中找不出正弦爲$\dfrac{1}{6}$之角，故須依表求之。今設此角爲 α,

則 $\theta=180°\times n-(-1)^n\,\alpha$

〔例9〕 解 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\dfrac{7}{8}$

（解） $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$$=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=1-\frac{1-\cos 4\theta}{4}$$

故原式 $1-\frac{1-\cos 4\theta}{4}=\frac{7}{8}$ $\therefore$ $\cos 4\theta=\frac{1}{2}$

於是 $4\theta=360°\times n\pm 60°$

$\therefore$ $\theta=90°\times n\pm 15°$

〔例10〕 解 $2\sin x+3\cot x=3+2\cos x$

（解） $2\sin x+\frac{3\cos x}{\sin x}=3+2\cos x$

$2\sin^2 x+3\cos x=3\sin x+2\sin x\cos x$

$2\sin^2 x-2\sin x\cos x+3\cos x-3\sin x=0$

$2\sin x(\sin x-\cos x)-3(\sin x-\cos x)=0$

即 $(2\sin x-3)(\sin x-\cos x)=0$

$2\sin x-3=0$ 或 $\sin x-\cos x=0$

$\therefore$ $\sin x=\frac{3}{2}>1$ 此根不合 $\sin x=\cos x$

即 $\tan x=1$ $\therefore$ $x=\frac{1}{4}\pi$ 或 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$

習題三十二

試解下列各方程式:

（1） $\sin^2 x=1$　　（2） $2\cos x=\sec x$

（3） $\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{1}{2}$　　（4） $\csc x=2$

（5） $\csc^2 x=3\cot^2 x-1$　　（6） $\sec^2 x+\tan^2 x=7$

（7） $\tan^2 x+\cot^2 x=2$

（8） $2\sin^2 x-5\cos x-4=0$

（9） $\sqrt{3}\csc^2 x=4\cot x$　　（10） $\sin^3 x+\cos^2 x=0$

（11） $6\sin x+\csc x=5$　　（12） $2\sin x\sin 3x=1$

（13） $\sin 4x+\sin x=0$

（14） $\tan x+\tan(\frac{\pi}{4}+x)=2$　　（15） $2\cos x+2\sqrt{2}=3\sec x$

（16） $\sin x=\cos 2x$　　（17） $\tan 2x\tan x=1$

（18） $\cot x+2\csc x=\cos 2x\csc x$

（19） $6\tan x-5\sqrt{3}\sec x+12\cot x=0$

（20） $7\cos 3x=\sin^2 x+\cos 2x$　　（21） $\tan^2 x+\cot^2 x=2$

（22） $2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+1=0$

習題略解

（1） $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$ 或 $x=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{2}$

（2） $\cos^2 x=\frac{1}{2}$, $x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

（3） $\cos 2x=\frac{1}{2}$ $\therefore$ $2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$　答: $x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$

（4） $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

（5） $1+\cot^2 x=3\cot^2 x-1$　答: $x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

（6） $1+\tan^2 x+\tan^2 x=7$　答: $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

（7） $(\tan^2 x-1)^2=0$　答: $x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

（8） $2(1-\cos^2 x)-5\cos x-4=0$, $(2\cos x+1)(\cos x+2)$

$\therefore$ $x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

（9） $\sqrt{3}(1+\cot^2 x)-4\cot x=0$ $\therefore$ $\cot x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 $\cot x=\sqrt{3}$

答: $n\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $n\pi+\frac{\pi}{6}$

（10） 兩邊除以 $\cos^3 x$, 得 $\tan^3 x=-1$　答: $x=n\pi-\frac{\pi}{4}$

（11） $6\sin x+\frac{1}{\sin x}-5=0$ $\therefore$ $\sin x=\frac{1}{2}$ 或 $\sin x=\frac{1}{3}$

答: $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ 或 $n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\frac{1}{3}$

(12) $\cos 2x-\cos 4x-1=0$ ∴ $\cos 2x-(2\cos^2 2x-1)-1=0$

$\cos 2x(2\cos 2x-1)=0$ ∴ $\cos 2x=0$ 或 $\cos 2x=\frac{1}{2}$

答: $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 或 $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$

(13) $2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0$ ∴ $\sin\frac{5}{2}x=0$ 或 $\cos\frac{3x}{2}=0$

答: $\frac{2n\pi}{5}$ 或 $\frac{4n\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}$

(14) $\tan x+\frac{1+\tan x}{1-\tan x}-2=0$, $\tan^2 x-4\tan x+1=0$

∴ $\tan x=2\pm\sqrt{3}$, 答: $x=n\pi+\frac{\pi}{12}$ 或 $x=n\pi+\frac{\pi}{12}$

(15) $2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x-3=0$ ∴ $\cos x=\sqrt{2}$ 答: $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

(16) $\sin x=1-2\sin^2 x$ ∴ $\sin x=\frac{1}{2}$ 或 $\sin x=-1$

答: $x=n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{6}$ 或 $x=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{2}$

(17) $\frac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}=1$ $\tan x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 答: $x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$

(18) $\cos x+2=2\cos^2 x-1$ ∴ $\cos x=\frac{3}{2}$(不合) 或 $\cos x=-1$

答: $x=2n\pi\pm\pi$

(19) $\cos x(6\tan x-5\sqrt{3}\sec x+12\cot x)=0$

$\sin x(6\sin x-5\sqrt{3}-12\frac{\cos^2 x}{\sin x})=0$

即 $(2\sqrt{3}\sin x-3)(\sqrt{3}\sin x+4)=0$

∴ $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 答: $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$

(20) $7(4\cos^3 x-3\cos x)-2\cos^2 x+1-1+\cos^2 x=0$

$\cos x(28\cos^2 x-\cos x-21)=0$, $\cos x=0$

或 $28\cos^2 x-\cos x-21=0$

答: $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $x=2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{1\pm\sqrt{2353}}{56}$

(21) $\tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}=2$ ∴ $(\tan^2 x-1)^2=0$ ∴ $\tan x=1$

或 $\tan x=-1$ 答: $x=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

(22) $2(1-\cos^2 x)+\sqrt{3}\cos x+1=0$, $(\cos x-\sqrt{3})(2\cos x+\sqrt{3})=0$

$\cos x=\sqrt{3}$ (不合), $2\cos x+\sqrt{3}=0$,

$x=\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{5}{6}\pi$ 答: $x=2n\pi\pm\frac{5}{6}\pi$

9. 雜題

〔例 1〕 解 $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

(要點) 左邊爲三項式，照三項式之變形法，化和爲積。

(解) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$

$\sin 2x(2\cos x+1)=0$

∴ $\sin 2x=0$, 或 $2\cos x+1=0$

若 $\sin 2x=0$, $2x=0°$, $x=0°$

$2x=n\pi$ ∴ $x=\frac{1}{2}n\pi$

若 $2\cos x+1=0$, $\cos x=-\frac{1}{2}$ $x=\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

∴ $x=\frac{2}{3}\pi$ ∴ $x=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$

〔例 2〕 解 $\cos 3x\cos x=\cos 7x\cos 5x$

(要點) 原式爲乘積之形式，而並無公因式，這時化積爲和之形式。然後考慮其是否能因式分解。

(解) $\cos 3x\cos x=\cos 7x\cos 5x$

兩邊乘 2，然後變爲和之形式，則

$\cos 4x+\cos 2x=\cos 12x+\cos 2x$

∴ $\cos 4x=\cos 12x$ ∴ $12x=2n\pi\pm 4x$

由是 $8x=2n\pi$ 或 $16x=2n\pi$

∴ $x=\dfrac{n\pi}{4}$ ∴ $x=\dfrac{n\pi}{8}$

因 $\dfrac{n\pi}{4}$ 被 $\dfrac{n\pi}{8}$ 包括在內，故答爲 $\dfrac{n\pi}{8}$

〔例3〕 解下列各方程式：

(i) $\cos 3x=\cos x$ (ii) $\cos 3x=\sin x$

(iii) $\tan 3x=\cot x$

（解） (i) $\cos 3x=\cos x$ ∴ $3x=360°\times n\pm x$

取＋號，得 $2x=360°\times n$ ∴ $x=180°\times n$

取－號，得 $4x=360°\times n$ ∴ $x=90°\times n$

(ii) $\cos 3x=\sin x=\cos(90°-x)$，

∴ $3x=360°\times n\pm(90°-x)$

由 $3x=360°\times n+(90°-x)$，得 $x=90°\times n+22.5°$

由 $3x=360°\times n-(90°-x)$，得 $x=180°\times n-45°$

(iii) $\tan 3x=\cot x=\tan(90°-x)$

∴ $3x=180°\times n+(90°-x)$

∴ $x=45°\times n+22.5°$

〔例4〕 解 $\cos\theta+\cos 2\theta=\sin 3\theta$

（解） $\cos\theta+\cos 2\theta-\sin 3\theta=0$

$2\cos\dfrac{3\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}-2\sin\dfrac{3\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}=0$

$\cos\dfrac{3\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{3\theta}{2}\right)=0$

∴ $\cos\dfrac{3\theta}{2}=0$ 或 $\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{3\theta}{2}=0$

由 $\cos\dfrac{3\theta}{2}=0$，得 $\dfrac{3\theta}{2}=180°\times n+90°$

∴ $\theta=120°\times n+60°$

由 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\sin\dfrac{3\theta}{2}$，先變形爲

$\cos\dfrac{\theta}{2}=\cos\left(90°-\dfrac{3\theta}{2}\right)$

則 $\dfrac{\theta}{2}=360°\times n\pm\left(90°-\dfrac{3\theta}{2}\right)$

於是因 $\dfrac{\theta}{2}=360°\times n+90°-\dfrac{3\theta}{2}$ ∴ $\theta=180°\times n+45°$

因 $\dfrac{\theta}{2}=360°\times n-90°+\dfrac{3\theta}{2}$ ∴ $\theta=-360°\times n+90°$

$=360°\times n+90°$

〔例5〕 解 $\sin\theta\sin 3\theta=\dfrac{1}{2}$

（解） 去分母，得 $2\sin\theta\sin 3\theta=1$

$\cos 2\theta-\cos 4\theta=1$

$\cos 2\theta=1+\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta$

$\cos 2\theta(2\cos 2\theta-1)=0$

∴ $\cos 2\theta=0$ 或 $\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}$

$\theta=90°\times n+45°$，或 $\theta=180°\times n\pm 30°$

〔例6〕 解 $\tan x+\tan 3x=2\tan 2x$

（解） $\tan x+\tan 3x=2\tan 2x$

∴ $\tan 3x-\tan 2x=\tan 2x-\tan x$

∴ $\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}-\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}=\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}$

∴ $\dfrac{\sin 3x\cos 2x-\cos 3x\sin 2x}{\cos 3x\cos 2x}=\dfrac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}$

∴ $\dfrac{\sin(3x-2x)}{\cos 3x\cos x}=\dfrac{\sin(2x-x)}{\cos 2x\cos x}$

∴ $\dfrac{\sin x}{\cos 3x\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos 2x\cos x}=0$

∴ $\dfrac{\sin x(\cos x-\cos 3x)}{\cos 3x\cos 2x\cos x}=0$ $\dfrac{2\sin^2 x\sin 2x}{\cos 3x\cos 2x\cos x}=0$

∴ $\dfrac{4\sin^3 x\cos x}{\cos 3x\cos 2x\cos x}=0$ 變爲既約分數

則 $\dfrac{\sin^3 x}{\cos 3x\cos 2x}=0$ 置分子等於零，

則 $\sin x=0$ ∴ $x=n\pi$ 此値適合原式 答: $x=n\pi$

〔例 7〕 解 $\dfrac{\tan(\theta-15°)}{\tan(\theta+15°)}=\dfrac{1}{3}$

（解） 即 $\dfrac{\tan(\theta+15°)+\tan(\theta-15°)}{\tan(\theta+15°)-\tan(\theta-15°)}=\dfrac{3+1}{3-1}$

即 $\dfrac{\dfrac{\sin(\theta+15°)}{\sin(\theta+15°)}+\dfrac{\sin(\theta-15°)}{\cos(\theta-15°)}}{\dfrac{\sin(\theta+15°)}{\cos(\theta+15°)}-\dfrac{\sin(\theta-15°)}{\cos(\theta-15°)}}=2$

即 $\dfrac{\sin(\theta+15°)\cos(\theta-15°)+\cos(\theta+15°)\sin(\theta-15°)}{\sin(\theta+15°)\cos(\theta-15°)-\cos(\theta+15°)\sin(\theta-15°)}=2$

即 $\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 30°}=2$ ∴ $\sin 2\theta=1$

∴ $\theta=\dfrac{1}{2}[180°\times n+(-1)^n\times 90°]=n\times 90°+(-1)^n\times 45°$

〔例 8〕 解 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=2$

（解） 將原方程式變形爲

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$$

去分母，$\cos^2\theta+\sin\theta(1+\sin\theta)=2\cos\theta(1+\sin\theta)$

$\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta=2\cos\theta(1+\sin\theta)$

$1+\sin\theta=2\cos\theta(1+\sin\theta)$.

移項後分解因式得 $(1+\sin\theta)(2\cos\theta-1)=0$

添上所去之分母 $(1+\sin\theta)\cos\theta$ 而化爲最簡分數，則

$$\frac{2\cos\theta-1}{\cos\theta}=0$$

∴ $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ ∴ $\theta=360°\times n\pm 60°$

〔例 9〕 試解 $a\sin x+b\cos x=c$

（解一） 設 $a=k\cos\theta$, $b=k\sin\theta$, 則 $k^2=a^2+b^2$, $k=\sqrt{a^2+b^2}$

$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$, $\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

$k\cos\theta\sin x+k\cos x\sin\theta=c$, $k\sin(x+\theta)=c$,

$\sin(x+\theta)=\dfrac{c}{k}=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

但 $\dfrac{c}{k}$ 必 $-1\leq\dfrac{c}{k}\leq+1$, 即不能小於 c,

∴ $\theta+x=\sin^{-1}\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

∴ $x=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

（解二） 用半角之正切表示正弦及餘弦

∴ $\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ 及 $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

∴ $a\cdot\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+b\cdot\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=c$

$a\cdot 2\tan\frac{x}{2}+b(1-\tan^2\frac{x}{2})=c(1+\tan^2\frac{x}{2})$

$(b+c)\tan^2\frac{x}{2}-2a\tan\frac{x}{2}+(c-b)=0$

∴ $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$

$\tan\frac{x}{2}$ 必有二實根之條件爲

$(-2a)^2-4(c-b)(c+b)\geqq 0$

即 $c^2\leqq a^2+b^2$ 爲此方程式有解之條件

（註） 本題可當作公式

〔例10〕 解 $(1-\tan\theta)(1+\sin 2\theta)=1+\tan\theta$

（解） 先去括號，得

$1-\tan\theta+\sin 2\theta(1-\tan\theta)=1+\tan\theta$

$\sin 2\theta(1-\tan\theta)=2\tan\theta$ ……………………(1)

因 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ 代入(1)

$$\frac{2\tan\theta(1-\tan\theta)}{1+\tan^2\theta}=2\tan\theta$$

$$\frac{\tan^2\theta(\tan\theta+1)}{1+\tan^2\theta}=0$$

$\tan\theta=0$ 或 $\tan\theta=-1$

∴ $\theta=180°\times n$ 或 $\theta=180°\times n+135°$

〔例11〕 解 $\tan\theta+\tan 2\theta=\tan 3\theta$

（解） 因 $\tan 3\theta=\tan(2\theta+\theta)=\dfrac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan^2\theta\tan\theta}$

故原方程式得變形為

$$\tan\theta+\tan 2\theta=\frac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}$$

$$(\tan 2\theta+\tan\theta)\left(1-\frac{1}{1-\tan 2\theta\tan\theta}\right)=0$$

由是 $\tan 2\theta+\tan\theta=0$，或 $1-\dfrac{1}{1-\tan 2\theta\tan\theta}=0$

由 $\tan 2\theta=-\tan\theta=\tan(-\theta)$ 得

$2\theta=180°\times n-\theta$，即 $3\theta=180°\times n$ ∴ $\theta=60°\times n$

由 $1-\dfrac{1}{1-\tan 2\theta\tan\theta}=0$，得

$$\frac{\tan 2\theta\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}=0$$

令 $\tan 2\theta=0$， 或 $\tan\theta=0$

$2\theta=180°\times n$， 或 $\theta=180°\times n$

∴ $\theta=90°\times n$， 或 $\theta=180°\times n$

※〔例12〕 解 $16^{\cos^2 x+2\sin^2 x}+4^{2\cos^2 x}=40$

（解） ∵ $\cos^2 x+2\sin^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)-\cos^2 x=2-\cos^2 x$

及 $4^{2\cos^2 x}=(4^2)^{\cos^2 x}=16^{\cos^2 x}$

故原式為 $16^{2-\cos^2 x}+16^{\cos^2 x}=40$

即 $256\cdot 16^{-\cos^2 x}+16^{\cos^2 x}=40$

即 $(16^{\cos^2 x})^2-40\times 16^{\cos^2 x}+256=0$

即 $(16^{\cos^2 x}-8)(16^{\cos^2 x}-32)=0$

若 $16^{\cos^2 x}=8$，即 $2^{4\cos^2 x}=2^3$ 即 $4\cos^2 x=3$

$$\cos x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

∴ $x=2n\pi\pm\frac{1}{6}\pi$，$x=2n\pi\pm\frac{5}{6}\pi$

若 $16^{\cos^2 x}=32$，即 $2^{4\cos^2 x}=2^5$ 即 $4\cos^2 x=5$

$\cos x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{4}}$ 不可能，

習題三十三

試解下列各方程式

（1） $\cos\theta+\cos 7\theta=\cos 4\theta$ （2） $\sin 5\theta-\sin 3\theta=2\cos 4\theta$

（3） $\cos 3x\cos x-\cos 6x\cos 2x=0$

（4） $\sin x+\sin 2x=\sin 3x+\sin 4x$

（5） $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$

（6） $\sin x\tan\dfrac{x}{2}=\cos x$

（7） $1+\sin x+\sin 2x-\sin 3x=\cos x-\cos 2x+\cos 3x$

（8） $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

（9） $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$

（10） $\cos 2x+\cos x=-1$

習題略解

（1） $2\cos 4\theta\cos 3\theta=\cos 4\theta$，$\cos 4\theta(2\cos 3\theta-1)=0$

∴ $\theta=\dfrac{n\pi}{2}\pm\dfrac{\pi}{8}$ 或 $\theta=\dfrac{2n\pi}{3}\pm\dfrac{\pi}{9}$

（2） $2\cos 4\theta\sin\theta=2\cos 4\theta$， $2\cos 4\theta(\sin\theta-1)=0$，

$\therefore\ \theta=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8}$， 或 $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$

(3) $\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x-\cos 8x-\cos 4x)=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)=0$

$2\cos^2 4x-\cos 4x-1=0\ \ (2\cos 4x+1)(\cos 4x-1)=0$

$\therefore\ x=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}$，或 $x=\frac{\pi n}{2}$

(4) $2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}\ \ \therefore\ \cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{7x}{2}\right)=0$

$\therefore\ \cos\frac{x}{2}=0\ \ \therefore\ x=(2n+1)\pi$， 或 $\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{7x}{2}=0$,

$2\cos\frac{5x}{2}\sin x=0\ \ \therefore\ \cos\frac{5x}{2}=0\ \ \therefore\ x=\frac{2n\pi}{5}+\frac{\pi}{5}$ 若 $\sin x=0$

則 $x=n\pi$

(5) $(1+\cos 2x)+(\cos x+\cos 3x)=0\ \therefore\ 2\cos^2 x+2\cos 2x\cos x=0$

$\therefore\ 2\cos x(\cos x+\cos 2x)=0\ \therefore\ \cos x=0$ 或 $\cos x+\cos 2x=0$

$\therefore\ x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$， $x=(2m+1)\pi$

(6) $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=1-2\sin^2\frac{x}{2}\ \ \therefore\ 2\sin^2\frac{x}{2}=1-2\sin^2\frac{x}{2}$

$\therefore\ \sin\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{2}\ \therefore\ x=2n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$ 或 $x=2n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{3}$

(7) $\sin 2x-(\sin 3x-\sin x)=(\cos 3x+\cos x)-(1+\cos 2x)$

$2\sin x\cos x-2\cos 2x\sin x=2\cos 2x\cos x-2\cos^2 x$

$\sin x(\cos x-\cos 2x)=-\cos x(\cos x-\cos 2x)$

$(\cos x-\cos 2x)(\sin x+\cos x)=0$

$x=2m\pi=\frac{2m\pi}{3}$， 或 $x=n\pi-\frac{\pi}{4}$

(8) $x=(2n+\frac{1}{4})\pi$， (9) $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$

(10) $x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

10. 反三角函數方程式

方程式中含有反三角函數之未知數，稱爲反三角函數方程式，解反三角函數方程式，應先將反三角函數所表之角一一代以 α，β，如此做來，便容易引用普通三角公式，併可免除許多無謂之麻煩。

但困難者往往在等式兩邊不是同一之反三角函數，究竟用何種之函數，事前須加以考慮，總以容易化出，及能化得一最低次數之方程式爲原則。但解反三角函數方程式以反正切化簡最易。

〔例1〕 試解 $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$

(解) 設 $\tan^{-1}2x=\alpha$, $\tan^{-1}3x=\beta$,

則 $\tan\alpha=2x\quad \tan\beta=3x$

今 $\alpha+\beta=n\pi+\frac{3}{4}\pi$， 故

$\tan(\alpha+\beta)=\tan(n\pi+\frac{3}{4})\pi=\tan\frac{3}{4}\pi=-1$

$\therefore\ \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-1$ 即 $\frac{2x+3x}{1-6x^2}=-1$

即 $6x^2-5x-1=0$ 故 $(6x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1$ 或 $-\frac{1}{6}$

〔例2〕 解 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\frac{1}{2}x=120°$

(解) 設 $\sin^{-1}x=\alpha$, $\sin^{-1}\frac{1}{2}x=\beta$,

則 $\sin\alpha=x$, $\sin\beta=\frac{1}{2}x$

即 $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$

今 $\alpha+\beta=120°$

則 $\cos(\alpha+\beta)=\cos 120°$

$\therefore\ \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$

即 $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}$

即 $\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}=-(1-x^2)$

即 $(1-x^2)(4-x^2)=(1-x^2)^2$

即 $3(x^2-1)=0 \quad \therefore \quad x=\pm 1$

〔例 3〕 解 $\sin^{-1}x+3\cos^{-1}x=210°$

（解） 從公式 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=90°$

相減得 $2\cos^{-1}x=120°$

$\therefore \quad \cos^{-1}x=60° \quad \therefore \quad x=\cos 60°=\frac{1}{2}$

〔例 4〕 求解下式中之有理根

$$\tan^{-1}\frac{1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{x+2}+\tan^{-1}\frac{1}{x+3}=\frac{\pi}{4}$$

（解） 設 $\tan^{-1}\frac{1}{x-2}=\alpha, \tan^{-1}\frac{1}{x}=\beta, \tan^{-1}\frac{1}{x+2}=\gamma, \tan^{-1}\frac{1}{x+3}=\delta$

則 $\tan\alpha=\frac{1}{x-2}, \quad \tan\beta=\frac{1}{x}, \quad \tan\gamma=\frac{1}{x+2}, \quad \tan\delta=\frac{1}{x+3}$

今 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{1}{4}\pi \quad \therefore \quad \alpha+\beta=\frac{1}{4}\pi-(\gamma+\delta)$

即 $\tan(\alpha+\beta)=\tan[\frac{1}{4}\pi-(\gamma+\delta)]=\dfrac{\tan\frac{1}{4}\pi-\tan(\gamma+\delta)}{1+\tan\frac{1}{4}\pi\tan(\gamma+\delta)}$

但 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x(x-2)}}=\dfrac{2x-2}{x^2-2x-1}$

又 $\tan(\gamma+\delta)=\dfrac{\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}}{1-\frac{1}{(x+2)(x+3)}}=\dfrac{2x+5}{x^2+5x+5}$

因 $\tan\frac{1}{4}\pi=1$

故 $\dfrac{2x-2}{x^2-2x-1}=\dfrac{1-\frac{2x+5}{x^2+5x+5}}{1+\frac{2x+5}{x^2+5x+5}}=\dfrac{x^2+3x}{x^2+7x+10}$

即 $(2x-2)(x^2+7x+10)=(x^2+3x)(x^2-2x-1)$

即 $x^4-x^3-19x^2-9x+20=0$

或 $(x-5)(x^3+4x^2+x-4)=0$

故 x 之有理根爲 5。

〔例 5〕 解 $\sin 2\cos^{-1}\cot 2\tan^{-1}x=0$

（解） 設 $atn^{-1}x=\alpha$, 則 $\tan\alpha=x$

$\therefore \quad \cot 2\alpha=\dfrac{1}{\tan 2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}=\dfrac{1-x^2}{2x}$

又設 $\cos^{-1}\cot 2\alpha=\beta$, 則 $\cos\beta=\cot 2\alpha=\dfrac{1-x^2}{2x}$

故 $\sin\beta=\sqrt{1-\dfrac{(1-x^2)^2}{4x^2}}=\dfrac{\sqrt{6x^2-x^4-1}}{2x}$

今 $\sin 2\beta=0$

即 $\dfrac{2(1-x^2)}{2x}\cdot\dfrac{\sqrt{6x^2-x^4-1}}{2x}=0$, 故得

(1) $1-x^2=0 \quad \therefore \quad x=\pm 1$

(2) $\sqrt{6x^2-x^4-1}=0$, 即 $(1-x^2)^2-4x^2=0$

即 $(1-x^5-2x)(1-x^2+2x)=0$

$\therefore \begin{cases} x^2+2x-1=0 & \therefore \quad x=-1\pm\sqrt{2} \\ x^2-2x-1=0 & \therefore \quad x=1\pm\sqrt{2} \end{cases}$

習題三十四

解下列各方程式:

(1) $\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}\frac{x-1}{x}=\tan^{-1}(-7)$

(2) $\tan^{-1}(x+1)+\cot^{-1}(x-1)=\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{3}{5}$

(3) $\tan^{-1}(\lambda+1)=3\tan^{-1}(\lambda-1)$

(4) $\tan^{-1}(x+1)\sqrt{2}-\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{2}}=\cot^{-1}4\sqrt{2}$

(5) $\cos^{-1}x-\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{3}x$

(6) $\tan^{-1}x+2\cot^{-1}x=135°$

(7) $\cos 2 \sin^{-1} \tan 2 \cot^{-1} x=0$

(8) $\sin \cot^{-1}\frac{1}{2}=\tan \cos^{-1}\sqrt{x}$

(9) $\tan^{-1} x+m \cot^{-1} x=135°$

(10) $\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2 \tan^{-1} x$

習 題 略 解

(1) 左邊$=\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x}\right)/\left\{1-\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}\right\}=\tan^{-1}\frac{2x^2-x+1}{1-x}$

故 $\frac{2x^2-x+1}{1-x}=-7$ ∴ $x^2-4x+4=0$ ∴ $x=2$ 或 2

(2) 設四個角依次爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 則 $\alpha+\beta=\gamma+\delta$,

∴ $\tan(\alpha+\beta)=\tan(\gamma+\delta)$ 即 $7x^2=48$ ∴ $x=\pm\frac{4}{7}\sqrt{21}$

(3) 兩邊取正切，則 $\lambda+1=[3(\lambda-1)-(\lambda-1)^3]/[1-3(\lambda-1)^2]$

則 $\lambda^3-2\lambda=0$ 即 $\lambda(\lambda^2-2)=0$ ∴ $\lambda=0,\ \pm\sqrt{2}$

(4) 因左邊$=\tan^{-1}\dfrac{(x+1)\sqrt{2}-\frac{x-1}{\sqrt{2}}}{1+(x+1)\sqrt{2}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{2}}}=\tan^{-1}\frac{x+2}{\sqrt{2}x^2}$

故 $\frac{3+x}{\sqrt{2}x^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$

即 $x^2-4x-12=0$ ∴ $x=-2$, 或 6

(5) 設 $\cos^{-1} x=\alpha$, $\sin^{-1} x=\beta$, 則 $\cos\alpha=\sin\beta=\pm\sqrt{1-x^2}$

但 $\cos(\alpha-\beta)=\pm x\sqrt{1-x^2}\pm x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}x$

故 $2x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}x$, $4x^2-1=0$ ∴ $x=\pm\frac{1}{2}$ 或 0, 0

(6) 因 $\tan^{-1} x+\cot^{-1} x=\frac{\pi}{2}$ 故 $\cot^{-1} x=45°$ ∴ $x=\cot 45°=1$

(7) 左式$=\cos 2 \sin^{-1} \tan 2 \tan^{-1}\frac{1}{x}=\cos 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)/\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

$=\cos 2\cdot\sin^{-1}\frac{2x}{x^2-1}=1-2\left[\frac{2x}{x^2-1}\right]^2$ 故 $1-2\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2=0$

∴ $x=\pm(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})$

(8) 因 $\sin\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\tan\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ 故 $\frac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ∴ $x=\frac{5}{9}$

(9) $\tan^{-1} x+m \cot^{-1} x=135°$ $\tan^{-1} x+\cot^{-1} x=90°$ 相減

$(m-1)\cot^{-1} x=45°$, $\cot^{-1} x=\frac{45°}{m-1}$ ∴ $x=\cot\frac{45°}{m-1}$

(10) 因 $\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}-\tan^{-1}\frac{2b}{1-b^2}=2\tan^{-1} x$, $2\tan^{-1} a-2\tan^{-1} b$

$=2\tan^{-1} x$, $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}=\tan^{-1} x$ 故 $x=\frac{a-b}{1+ab}$

11. 三角聯立方程式

三角聯立方程式解法之原理與代數學中之聯立方程式之解法相同。均爲設法逐漸消去其中之元（未知數）至得一元方程式解之，再代入其他各式中以求其全解。但解三角聯立方程式，較爲麻煩，其應行注意事項如下：

(1) 元之消去無一定之方法，公式運用純熟，併多做多看。

(2) 求得之解，須一組一組分別清楚，照理更應逐一代入原方程式中驗之，不合者除去。

(3) 求得之解有兩種限制，應注意。

(i) 如遇 $\sin x+\cos y=a$ 時，則 a 之值必須小於 2，（因正弦，餘弦之值均比 1 小），又如遇 $\sec^{-1} y$，則 y 必須大於 1 等。

(ii) 三角方程式之解，通常都假定其爲實數。

〔例1〕 解 $\begin{cases}\sin(x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \cdots\cdots\cdots(1)\\ \cos(x-y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

〔要點〕 $x+y$，$x-y$ 分別視作一數。

〔解〕 由(1)及(2)，得

$x+y=180°\times n+(-1)^n\ 60°$ ………(3)

$x-y=360°\times m\pm 45°$ ………………(4)

(1)+(2)　$2x=180°\times n+360°\times m+(-1)^n\ 60°\pm 45°$

(1)−(2)　$2y=180°\times n-360°\times m+(-1)^n\ 60°\mp 45°$

∴　$x=90°\times n+180°\times m+(-1)^n\ 30°\pm 22.5°$

$y=90°\times n-180°\times m+(-1)^n\ 30°\mp 22.5°$

於是所求之根有兩組如下:

$$\begin{cases} x=90°(n+2m)+(-1)^n\ 30°+22.5° \\ y=90°(n-2m)+(-1)^n\ 30°-22.5° \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=90°(n+2m)+(-1)^n\ 30°-22.5° \\ y=90°(n-2m)+(-1)^n\ 30°+22.5° \end{cases}$$

〔例 2〕 解 $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\pi}{6} \cdots\cdots(1) \\ \tan x+\tan y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

（解） 由 (2) $\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin y}{\cos y}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

∴ $\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

∴ $\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

將 (1) 式代入此式，得

$\dfrac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos x\cos y}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ∴ $2\cos x\cos y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\cos(x+y)+\cos(x-y)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\cos\dfrac{5}{6}\pi+\cos(x-y)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\cos(x-y)=0$ ∴ $x-y=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ………(3)

$\dfrac{(1)+(3)}{2}$ 得 $x=\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{3}$

$\dfrac{(1)-(3)}{2}$ 得 $y=-\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}$

答 $\begin{cases} x=\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{3} \\ y=-\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

〔例 3〕 解 $\begin{cases} \sin x+\sin y=a \cdots\cdots(1) \\ \cos x+\cos y=b \cdots\cdots(2) \end{cases}$

（解一） 由 (1) $2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=a$ ………………(3)

由 (2) $2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=b$ ………………(4)

(3)÷(4) $\tan\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{a}{b}$

∴ $x+y=2\tan^{-1}\dfrac{a}{b}$ ………………(5)

$(3)^2+(4)^2$ $4\cos^2\dfrac{x-y}{2}=a^2+b^2$

$\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

∴ $x-y=2\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ ………………(6)

(5)+(6) $x=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}+\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

(5)−(6) $x=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}-\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

（解二） $(1)^2+(2)^2$ $2+2(\sin x\sin y+\cos x\cos y)=a^2+b^2$

∴ $\cos(x-y)=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-2)$

∴ $x-y=\cos^{-1}\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-2)$ ………………(3)

(1)×(2) $\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2y)+\sin(x+y)=ab$

$\sin(x+y)[\cos(x-y)+1]=ab$

$\sin(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

$x+y=\sin^{-1}\frac{2ab}{a^2+b^2}$ ……(4)

聯立 (3) (4) 解得

$x=\frac{1}{2}[\sin^{-1}\frac{2ab}{a^2+b^2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}(a^2+b^2-2)]$

$y=\frac{1}{2}[\sin^{-1}\frac{2ab}{a^2+b^2}-\cos^{-1}\frac{1}{2}(a^2+b^2-2)]$

〔例 4〕 解 $\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=a \quad\cdots\cdots(1)\\ \cos^2 x-\cos^2 y=b \quad\cdots\cdots(2)\end{cases}$

〔解〕 (1)+(2) $1+\sin^2 y-\cos^2 y=a+b$

∴ $\sin^2 y=\frac{a+b}{2}$ ∴ $\sin y=\pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}$

故 $0\leqq\frac{a+b}{2}\leqq 1$ 方有解

∴ $y=n\pi\pm\sin^{-1}\sqrt{\frac{a+b}{2}}$

(1)−(2) $\sin^2 x-\cos^2 x+1=a-b$

∴ $\sin^2 x=\frac{a-b}{2}$ ∴ $\sin x=\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$

故 $0\leqq\frac{a-b}{2}\leqq 1$ 方有解

∴ $x=n\pi\pm\sin^{-1}\sqrt{\frac{a+b}{2}}$

〔例 5〕 解 $\begin{cases}\sin x+\sin y=1 \quad\cdots\cdots(1)\\ \cos x\cos y=-\frac{3}{4} \quad\cdots\cdots(2)\end{cases}$

〔解〕 $(1)^2$ $\cos^2 x\cos^2 y=\frac{9}{16}$

即 $(1-\sin^2 x)(1-\sin^2 y)=\frac{9}{16}$

$1-\sin^2 x-\sin^2 y+\sin^2 x\sin^2 y=\frac{9}{16}$ ……(3)

$(3)+(1)^2$ 化簡得

$\sin^2 x\sin^2 y+2\sin x\sin y-\frac{9}{16}=0$

$(\sin x\sin y-\frac{1}{4})(\sin x\sin y+\frac{9}{4})=0$

$\sin x\sin y=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{-9}{4}$(此根不合理)

∴ $4\sin x\sin y=1$ ……(4)

$(1)^2-(4)$ $\sin^2 x-2\sin x\sin y+\sin^2 y=0$

$\sin x-\sin y=0$ ……(5)

$\frac{[(1)+(5)]}{2}$ $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=\sin^{-1}\frac{1}{2}=30°$

∴ $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\frac{[(1)-(5)]}{2}$ $\sin y=\frac{1}{2}$, $y=\sin^{-1}\frac{1}{2}=30°$

∴ $y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

但從 (2) 知 $\cos x$, $\cos y$爲負數，故知 x, y 不在同一象限

答 $\begin{cases}x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\\ y=n\pi+(-1)^n\frac{5\pi}{6}\end{cases}$ $\begin{cases}x=n\pi+(-1)^n\frac{5}{6}\pi\\ y=n\pi+(-1)^n\frac{5}{6}\pi\end{cases}$

〔例 6〕 解 $\begin{cases}x+y+z=\pi \quad\cdots\cdots(1)\\ \frac{\tan x}{m}=\frac{\tan y}{n}=\frac{\tan z}{p} \quad\cdots\cdots(2)\end{cases}$

〔解〕 令 (2) 之比值爲 t，則

$\tan x=mt$, $\tan y=nt$, $\tan z=pt$ ……(1)

因 $x+y+z=\pi$,

則 $\tan x+\tan y+\tan z=\tan x\tan y\tan z$

即 $mt+nt+pt=mnpt^3$

$\therefore\ t[mnpt^2-(m+n+p)]=0$

$\because\ t\neq 0,\ \therefore\ pmnt^2=(m+n+p)$

即 $t=\sqrt{\dfrac{m+n+p}{mnp}}$

$\therefore\ \tan x=m\sqrt{\dfrac{m+n+p}{mnp}}\quad \therefore\ x=\tan^{-1}\left[m\sqrt{\dfrac{m+n+p}{mnp}}\right]$

$\therefore\ \tan y=n\sqrt{\dfrac{m+n+p}{mnp}}\quad \therefore\ y=\tan^{-1}\left[n\sqrt{\dfrac{m+n+p}{mnp}}\right]$

$\therefore\ \tan z=p\sqrt{\dfrac{m+n+p}{mnp}}\quad \therefore\ z=\tan^{-1}\left[p\sqrt{\dfrac{m+n+p}{mnp}}\right]$

〔例 7〕 解 $\begin{cases}\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\dfrac{2}{3}\pi\cdots\cdots(1)\\ \cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\dfrac{1}{3}\pi\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(解) (1)−(2) $\sin^{-1}x-\cos^{-1}x+\sin^{-1}y+\cos^{-1}y=\dfrac{1}{3}\pi$

但 $\sin^{-1}y+\cos^{-1}y=\dfrac{1}{2}\pi\cdots\cdots(3)$

(3) 代入上式，得 $\cos^{-1}x-\sin^{-1}x=\dfrac{1}{6}\pi\cdots\cdots(4)$

又因 $\cos^{-1}x+\sin^{-1}x=\dfrac{1}{2}\pi\cdots\cdots(5)$

(4)+(5) $2\cos^{-1}x=\dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore\ \cos^{-1}x=\dfrac{1}{3}\pi\cdots\cdots(6)$

(6) 代入 (2) $\cos^{-1}y=0\quad \therefore\ x=\cos\dfrac{1}{3}\pi=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ y=1$

〔例 8〕 解 $\begin{cases}\sqrt{x(1-y)}+\sqrt{y(1-x)}=a\\ \sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}=b\end{cases}$ 式中，a, b 爲實數值。

(解) 因，a, b 爲實數值，故知 $|x|<1,\ |y|<1$

令 $x=\sin^2\theta,\ y=\sin^2\phi$，則原式化爲

$\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi=\sin(\theta+\phi)=a\cdots\cdots(1)$

$\sin\theta\cos\theta+\sin\phi\cos\phi=\dfrac{\sin 2\theta+\sin 2\phi}{2}=b\cdots(2)$

由 (2) 得 $\sin(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)=b\cdots\cdots(3)$

(3)÷(1) 得 $\cos(\theta-\phi)=\dfrac{b}{a}$

由 (1) 及 (4) 得 $\begin{cases}\theta+\phi=\sin^{-1}a\\ \theta-\phi=\cos^{-1}\dfrac{a}{b}\end{cases}$

解此方程式得 $\theta=\dfrac{1}{2}\left(\sin^{-1}a+\cos^{-1}\dfrac{b}{a}\right)$

$\phi=\dfrac{1}{2}\left(\sin^{-1}a-\cos^{-1}\dfrac{b}{a}\right)$

故 $x=\sin^2\dfrac{1}{2}\left(\sin^{-1}a+\cos^{-1}\dfrac{b}{a}\right)$

$y=\sin^2\dfrac{1}{2}\left(\sin^{-1}a-\cos^{-1}\dfrac{b}{a}\right)$

習題三十五

解下列聯立方程式

(1) $\begin{cases}\sin x+\sin y=a\cdots\cdots(1)\\ \cos x+\cos y=b\cdots\cdots(2)\end{cases}$ (武漢大學)

(2) $\begin{cases}x+y=\alpha\cdots\cdots(1)\\ \cos x+\cos y=a\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(3) $\begin{cases}p\cos\theta=a\cdots\cdots(1)\\ p\sin\theta=b\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\sin x+\sin y=\sin\alpha\\ \cos x+\cos y=1+\cos\alpha\end{cases}$

※(5) $\begin{cases}\cos(\theta+3\phi)=\sin(2\theta+2\phi)\cdots\cdots(1)\\ \sin(3\theta+\phi)=\cos(2\theta+2\phi)\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(6) $\begin{cases} a\sin^4\theta - b\sin^4\phi = a \cdots\cdots(1) \\ a\cos^4\theta - b\cos^4\phi = b \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+y=90^\circ \cdots\cdots(1) \\ \sin x + \cos y = \sqrt{3} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

習題略解

(1) $(1)^2+(2)^2$ $2+2\{2\cos^2\frac{x-y}{2}-1\}=a^2+b^2$, $4\cos^2\frac{x-y}{2}=a^2+b^2$

$\frac{x-y}{2}=2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdots\cdots③$ $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ $=a\cdots\cdots④$ $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b\cdots\cdots⑤$ 由 ④÷⑤

$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}$ 故 $\frac{x+y}{2}=n\pi+\tan^{-1}\frac{a}{b}\cdots\cdots⑥$ ③+⑧

$x=3n\pi+\tan^{-1}\frac{a}{b}\pm\cos^{-1}\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$,

⑧−⑥ $y=n\pi-\tan^{-1}\frac{a}{b}\pm\cos^{-1}\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

(2) 由 (2) $2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=a$, $\cos\frac{1}{2}(x-y)$ $=a/2\cos\frac{\alpha}{2}$ $\frac{1}{2}(x-y)=2n\pi\pm\cos^{-1}a/2\cos\frac{\alpha}{2}\cdots\cdots(3)$,

由 $\frac{(1)}{2}+(3)$ $x=\frac{\alpha}{2}+2n\pi\pm\cos^{-1}a/2\cos\frac{\alpha}{2}$, 由 $\frac{(1)}{2}-(3)$

$y=\frac{\alpha}{2}-2n\pi\mp\cos^{-1}2/2\cos\frac{\alpha}{2}$

(3) $(1)^2+(2)^2$ $p^2=a^2+b^2$, $p=\sqrt{a^2+b^2}$, $(1)\div(2)$ $\cot\theta=a/b$, $\therefore$ $\theta=\cot^{-1}a/b$

(4) 由 (1) $2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=\sin\alpha\cdots\cdots(3)$

由 (2) $2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=1+\cos\alpha\cdots\cdots(4)$

$(3)\div(4)$ $\tan\frac{1}{2}(x+y)=\tan\frac{1}{2}\alpha$ $\therefore$ $x+y=\alpha$, 代入 (3)

$$\cos\frac{1}{2}(x-y)=\frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}=\cos\frac{1}{2}\alpha$$

$\therefore$ $x-y=\pm\alpha$, 二組主值爲 $\alpha, 0$; $0, \alpha$

(5) 即 $\begin{cases} \theta+3\phi=\frac{1}{2}\pi-(2\theta+2\phi) \\ 3\theta+\phi=\frac{1}{2}\pi-(2\theta+2\phi) \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3\theta+5\phi=\frac{1}{2}\pi \\ 5\theta+3\phi=\frac{1}{2}\pi \end{cases}$

即 $\theta=\phi=\frac{\pi}{16}$, 故 θ, ϕ 一組解爲 $\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{16}$

(6) 由 $(2)-(1)$, $a(\cos^4\theta-\sin^4\theta)-b(\cos^4\phi-\sin^4\phi)=b-a$

即 $a\cos 2\theta-b\cos 2\phi=b-a$ 即 $a(2\cos^2\theta-1)-b(2\cos^2\phi-1)$ $=b-a$, $\therefore$ $b\cos^2\phi=a\cos^2\theta$,

故 $\cos^2\phi=a(\cos^2\theta)/b\cdots\cdots(3)$, 代入 (2) 得 $\cos\theta$ $=\sqrt[4]{\frac{b^2}{ab-a^2}}$ $\therefore$ $\theta=\cos^{-1}\sqrt[4]{\frac{b^2}{ab-a^2}}$, 代入 (3), $\cos\phi=\sqrt[4]{\frac{a}{b-a}}$

$\therefore$ $\phi=\cos^{-1}\sqrt{\frac{a}{b-a}}$ 但 $\left|\pm\sqrt{\frac{b^2}{a(b-a)}}\right|$ 及 $\left|\pm\sqrt{\frac{a}{b-a}}\right|\leqq 1$ 方有解。

(7) 由 (1) $y=90^\circ-x$ 代入 (2), 則 $\sin x+\cos(90^\circ-x)=\sqrt{3}$

$\therefore$ $\sin x+\sin x=\sqrt{3}$ $\therefore$ $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$ $x=180^\circ\times n+(-1)^n 60^\circ$, $y=90^\circ-x$

綜合習題四

（1） 求 $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\tan^{-1}\frac{1}{3})$ 之值。 答：$\frac{1}{\sqrt{2}}$

（2） 求 $\csc 2\tan^{-1}\cot x$ 之值。 答：$\csc 2x$

（3） 求 $\sin 2\cos^{-1}\cot 2\tan^{-1}x$ 之值。 答：$\frac{(1-x^2)\sqrt{6x^2-x^4-1}}{2x^2}$

（4） 求 $\tan(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2})$ 答：$\frac{x+y}{1-xy}$

求證下列各式：

（5） $\cos\sin^{-1}x=\sin\cos^{-1}x$

（6） $\sin^{-1}(-\sin x)=-\sin\sin^{-1}x$

（7） $\sec^{-1}\frac{y}{x}+\sin^{-1}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\pi$

（8） $2\sin^{-1}x=\cos^{-1}(1-2x^2)$

（9） $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}[(3x-x^3):(1-3x^2)]$

（10） $\tan^{-1}\frac{3}{5}-\cot^{-1}\frac{7}{3}=\cot^{-1}\frac{22}{3}$

（11） $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{11}{29}=\frac{1}{4}\pi$

（12） $\cot^{-1}(a^3+a^2+a)^{\frac{1}{2}}+\cot^{-1}(a+a^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}$
$=\tan^{-1}(a^{-3}+a^{-2}+a^{-1})^{\frac{1}{2}}$

（13） $\cos^{-1}\frac{20}{29}-\tan^{-1}\frac{16}{63}=\cos^{-1}\frac{1596}{1885}$

（14） $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

（15） $\tan^{-1}(1+\frac{2}{x})+\tan^{-1}(1-\frac{2}{x})+\tan^{-1}(1+x)+\tan^{-1}(1-x)$
$=\frac{1}{2}(2n+1)\pi$

（16） $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{\pi}{4}$

（17） $\tan^3[\frac{\sin^{-1}(3\sin x)+x}{4}]=\tan[\frac{\sin^{-1}(3\sin x)-3x}{4}]$

（18） $\sin 2\cos^{-1}\tan 3\cot^{-1}x$
$=\frac{2(3x^2-1)\sqrt{x^6-15x^4+15x^2-1}}{x^2(x^2-3)^2}$

（19） $\tan^{-1}(\cot x)+2x=\tan^{-1}(\tan x)+\frac{1}{2}(2n+1)\pi$

（20） $\operatorname{vers}^{-1}a+\operatorname{vers}^{-1}b$
$=\operatorname{vers}^{-1}\{a+b-ab+\sqrt{(2a^2-a^2)(2b-b^2)}\}$

（21） 設 $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b+\tan^{-1}c=\pi$，則 $a+b+c=abc$

※（20） 問 $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{12}{13}$ 能等於 $\sin^{-1}\frac{16}{65}$ 否？試答並證之。（交通大學）

※（23） 若 $u=\cot^{-1}\sqrt{\cos\alpha}-\tan^{-1}\sqrt{\cos\alpha}$，試證
$\sin u=\tan^2\frac{\alpha}{2}$

※（24） 設 $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$，則 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha$

※（25） 若 $\tan(\theta-\alpha)\tan(\theta-\beta)=\tan^2\theta$，試證
$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

※（26） 設 $\sin^2\theta+\sin^2\phi=\frac{1}{2}$，則
$\sin^{-1}(\sin\theta+\sin\phi)+\sin^{-1}(\sin\theta-\sin\phi)=\frac{1}{2}\pi$

※（27） 設 $\theta=\tan^{-1}\frac{x\sqrt{3}}{2c-x}$，$\phi=\tan^{-1}\frac{2x-c}{c\sqrt{3}}$，則 $\theta-\phi=\frac{1}{6}\pi$

※（28） 若 $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$，試證
$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$

※（29） 若 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$，試證
$yz+zx+xy=1$

※(30) 若 $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b+\tan^{-1}c+\tan^{-1}d=2\pi$,試證
$a+b+c+d=abc+bcd+cda+dab$

※(31) 若 a, b, c 為 $x^3+px^2+qx+p=0\ (q\neq 1)$ 之根
則 $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b+\tan^{-1}c=n\pi$

※(32) 若 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ 為 $\tan 2x=\lambda\tan(x+\theta)$ 之三根,
試證 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=n\pi$

解下列各方程式:

(33) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ 答: $x=(2n+\frac{1}{4})\pi$

(34) $(1-\tan x)\cos 2x=a(1+\tan x)$

答: $x=\frac{1}{2}[n\pi+(-1)^n\sin^{-1}(1-a)]$

(35) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{12}\sin^2 2x$ 答: $x=n\cdot 90°\pm 30°$

(36) $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$ 答: $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$

(37) $a\sin\theta+b\cos\theta=c$

答: $\theta=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\alpha$

討論: 若 $a=b=0$ 時 $c=0$ 不定, 若 $c\neq 0$ 矛盾, 若 a 和 b 有一不為 0, 則無解。

(38) $\cos 2x+\cos x=-1$ 答: $x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

(39) $2\cos^2 x-7\sin x+2=0$

答: $x=\sin^{-1}(-4)$……無解

(40) $\tan x\tan 3x=-\frac{3}{5}$ 答: $x=n\cdot 180°\pm 54°44'$

(41) $\sin(x+12°)\cos(x-12°)=\cos 33°\ \sin 57°$

答: $x=n\cdot 90°+(-1)^n\cdot 45°$

(42) $\sin^2\theta+\sin\theta=\cos^2\theta+\cos\theta$

答: $\theta=n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}$

(43) $\sin(\frac{\pi}{3}-x)-\sin(\frac{\pi}{3}+x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

答: $x=n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}$

(44) $\sin x\cos 2x\tan x\cot 2x\sec x\csc 2x=1$

答: $x=n\pi, \frac{1}{3}n\pi$

(45) $3\tan(y-15°)=tnn(x+15°)$

答: $x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}$

(46) $2\cos 2\theta+2(\sqrt{3}+1)\sin\theta-\sqrt{3}-2=0$

答: $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$

(47) $\cot x\cdot\tan 2x=\sec 2x$

答: $x=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$

(48) $\sin 2x=2\sin x(\sin x-1)$

答: $x=n\pi$

(49) $\cos n\theta=\cos(n-2)\theta+\sin\theta$

答: $\theta=\frac{1}{n-1}[m\pi+(-1)^m\cdot\frac{7\pi}{6}]$

(50) $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=2\cos x$

答: $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

(51) $\cos 9x=\cos 5x-\cos x$

答: $x=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}$

(52) $\tan\theta+2\cot 2\theta=\sin\theta(1+\tan\theta\tan\frac{1}{2}\theta)$

答: $\theta=\frac{1}{4}(2n+1)\pi$

(53) $\sin(\theta+\alpha)=\cos(\theta-\alpha)$ 答: $\theta=\frac{1}{4}(4n+1)\pi$

(54) $\tan(\theta+45°)\tan\theta=2$ 答：$\theta=n\cdot180°+105°41'$

(55) $\cos3\theta+\sin3\theta=\cos\theta+\sin\theta$

答：$\theta=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

(56) $\sin x+\sin2x+\sin3x=0$

答：$x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

(57) $\sin x+\sin2x+\sin3x+\sin4x=0$

答：$x=4n\pi\pm\pi$

(58) $\tan\theta+\tan2\theta+\tan3\theta=0$

答：$\theta=\tan^{-1}\frac{\pm1}{\sqrt{2}}$

(59) $\cos\theta+\cos3\theta+\cos5\theta+\cos7\theta=0$

答：$\theta=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8}$

(60) $\frac{1}{\sin3\theta}+\frac{1}{\sin2\theta}=\frac{\sin2\theta}{\sin\theta\sin3\theta}$

答：$\theta=2k\pi$ 或 $\frac{1}{3}(2n+1)\pi$

(61) $16\cos^5\theta=\cos5\theta$ 答：$\theta=2n\pi\pm90°, 2n\pi\pm60°\ 2n\pi\pm120°$

(62) $\sin5\theta+\sin3\theta\pm\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta=0$

答：$\theta=n\cdot240°\pm60°+15°$

(63) $\cos^2\theta-\cos^2\alpha=2\cos^3\theta(\cos\theta-\cos\alpha)-2\sin^3\theta(\sin\theta-\sin\alpha$

答：$\theta=\frac{1}{3}(2n\pi-\alpha)$，$\theta=2n\pi+\alpha$

(64) $2\cos\frac{1}{3}x-\sin\frac{1}{2}x=2$ 答：[illegible]$k\pi$ 或 $6k\pi-(-1)^k\pi$

(65) $\tan\theta+\tan2\theta+\sqrt{3}\tan\theta\tan2\theta=\sqrt{3}$

答：$\theta=\frac{1}{3}(n+\frac{1}{3})\pi$

(66) $\tan^2(\alpha+\theta)-\tan^2(\alpha-\theta)=\tan\alpha\tan\theta$

答：$\theta=n\pi$ 或 $\theta=\cos^{-1}(1\pm\cos\alpha)$

(67) $\tan^2\theta=2\tan\alpha\tan\beta\sec\theta+\tan^2\alpha+\tan^2\beta$

答：$\theta=\sec^{-1}(\tan\alpha\tan\beta\pm\sec\alpha\sec\beta)$

(68) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(a^2-x+1)=\cot^{-1}(a-1)$

答：$x=a,\ a^2-a+1$

(69) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\cos^{-1}x\sqrt{3}$ 答：$x=0,\ \pm\frac{1}{2}$

(70) $\tan^{-1}(x+1)\sqrt{2}-\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{2}}=\cot^{-1}4\sqrt{2}$

答：$x=-2,\ 6$

(71) $\cos^{-1}x-\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{3}x$ 答：$x=0,\ 0$

(72) $\frac{\sin^{-1}2x}{(1+x^2)}+\frac{\cos^{-1}(1-x^2)}{(1+x^2)}=\frac{1}{4}\pi$ 答：$x=\tan\frac{\pi}{16}$

(73) $3\sin^{-1}\lambda-2\cos^{-1}\lambda=\frac{2}{3}\pi$ 答：$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(74) $\tan^{-1}\frac{1}{4}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{6}+\frac{\tan^{-1}1}{x}=\frac{1}{4}\pi$ 答：$x=-\frac{461}{9}$

(75) $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$

答：$x=0,\ \pm\frac{1}{2}$

(76) $\tan^{-1}x+2\cot^{-1}x=135°$ 答：$x=1$

(77) $2\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\cot^{-1}(\frac{-1}{2})$ 答：$x=\frac{1}{\sqrt{5}}$

(78) $\cos2\sin^{-1}\tan2\cot^{-1}x=0$

答：$x=\pm(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})$

(79) $\sin\cot^{-1}\frac{1}{2}=\tan\cos^{-1}\sqrt{x}$ 答：$x=\frac{5}{9}$

※(80) $\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$ 答：$x=\frac{a-b}{1+ab}$

※(81) $\cos^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}+\tan^{-1}\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2}{3}\pi$ 答：$x=2-\sqrt{3}$

※(82) $\tan\cos^{-1}\theta=\sin\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 答：$\theta=\frac{2}{7}\sqrt{7}$

※(83) $x=\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\cot^2 x\right)-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3\sin 2x}{5+4\cos 2x}$ 答：$x=2\theta$

※(84) $\sin^{-1}\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|+\cos^{-1}\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+\tan^{-1}\left|\frac{2x}{x^2-1}\right|=\pi$

答：$x=\pm\sqrt{3},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

※(85) 若 $\tan(\pi\cot\theta)=\cot(\pi\tan\theta)$，則

$\tan\theta=\frac{1}{4}\{2n+1\pm\sqrt{4n^2+4n-15}\}$，但 n 大於 $\frac{3}{2}$ 小於 $-\frac{5}{2}$。

※(86) 設 $\sin 2\theta-m\cos\theta-n\sin\theta+k=0$ 之四根為 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$，則 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=m$。

※(87) 設 $x^4+\frac{x^2}{3}\sin\alpha+\frac{1}{200}\cos\frac{\pi}{3}=0$ 之根成 $A.P.$，解此式並求 α 之值。

(88) 試證 $\tan^3 x\tan\frac{x}{2}=1$ 中之一切值均適合于 $\cos 2x=-2-\sqrt{5}$。

(89) 設 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\tan\theta+m-1}{\tan\theta+m-1}$，試證 m 之值不在 (-1) 與 $(+1)$ 之間。

(90) 設 β,γ 為 $\sin(x+\alpha)=m\sin\alpha$ 中之 x 之兩根，求證 $\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)-m\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=0$

(91) 解 $\begin{cases}x+y=\alpha\\ \cos x+\cos y=a\end{cases}$ 答：$\begin{cases}x=\frac{\alpha}{2}+2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\\ y=\frac{\alpha}{2}-2n\pi\mp\cos^{-1}\frac{2}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\end{cases}$

(92) 解 $\begin{cases}a\sin^4\theta-b\sin^4\phi=a\\ a\cos^4\theta-b\cos^4\phi=b\end{cases}$

答：$\begin{cases}\theta=2n\pi\pm\cos^{-1}\left\{\mp\sqrt{\frac{b^2}{a(b-a)}}\right\}\\ \phi=2n\pi\pm\cos^{-1}\left\{\pm\sqrt{\frac{a}{b-a}}\right\}\end{cases}$

(93) 解 $\begin{cases}\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2\pi}{3}\\ \cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ 答：$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$

(94) 解 $\begin{cases}\sqrt{x(1-y)}+\sqrt{y(1-x)}=a\\ \sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}=b\end{cases}$（式中 a, b 為實數）

答：$\begin{cases}x=\sin^2\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}a+\cos^{-1}\frac{b}{a}\right)\\ y=\sin^2\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}a-\cos^{-1}\frac{b}{a}\right)\end{cases}$

(95) 解 $\begin{cases}\rho\cos\phi\sin\theta=a\\ \rho\cos\phi\cos\theta=b\\ \rho\sin\phi=c\end{cases}$ 答：$\begin{cases}\rho=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\\ \theta=\tan^{-1}\frac{a}{b}\\ \phi=\tan^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

(96) 解 $\begin{cases}\cos(\theta+3\phi)=\sin(2\theta+2\phi)\\ \sin(3\theta+\phi)=\cos(2\theta+2\phi)\end{cases}$ 答：$\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{16}\\ \phi=\frac{\pi}{16}\end{cases}$

(97) 解 $\begin{cases}\sin x\sin y=a\\ \cos x+\cos y=b\end{cases}$ 答：$\begin{cases}x=\cos^{-1}z+\cos^{-1}t\\ y=\cos^{-1}z-\cos^{-1}t\end{cases}$

但 $\cos\frac{1}{2}(x+y)=z,\ \cos\frac{1}{2}(x-y)=t$

(98) 解 $\begin{cases}\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\frac{1}{4}\pi\\ \sin^{-1}x+\cos^{-1}y=\pi\end{cases}$

答：$\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\begin{cases}0\\ 1\end{cases}\begin{cases}\frac{1}{2}(-3\pm i\sqrt{7})\\ \frac{1}{2}(-3\mp i\sqrt{7})\end{cases}$

(99) 解 $\begin{cases}\tan 3\theta+\tan 3\phi=2\\ \tan\theta+\tan\phi=4\end{cases}$

答：$\begin{cases}\theta=tan^{-1}(2\pm\sqrt{11})\\ \phi=tan^{-1}(2\mp\sqrt{11})\end{cases}\begin{cases}\frac{\pi}{12}\\ \frac{5\pi}{12}\end{cases}\begin{cases}\frac{5\pi}{12}\\ \frac{\pi}{12}\end{cases}$

(100) 解 $\begin{cases}x+y+z=\pi\\ \frac{tan\ x}{1}=\frac{tan\ y}{2}=\frac{tan\ z}{3}\end{cases}$

答：$\begin{cases}x=\pi\\ y=0\\ z=0\end{cases}\begin{cases}0\\ \pi\\ 0\end{cases}\begin{cases}0\\ 0\\ \pi\end{cases}\begin{cases}tan^{-1}1\\ tan^{-1}2\\ tan^{-1}3\end{cases}$

第八章　代數學上之應用

1. 消　去　法

含有 n 個未知量之一組 $n+1$ 個方程式中，設有一共同之解時，則其係數之間，必有一特別之關係，此關係式稱爲消去式，求消去式之方法，稱爲消去法。

三角消去法並無一定之規則，其原理與代數相同，惟其變化較代數學大爲繁複。玆舉其最普通之三種法則如下：

(1) 應用三角學固有之恒等式如 $sin^2\theta+cos^2\theta=1$，$sec^2\theta-tan^2\theta=1$ 等公式。

(2) 應用代入法。

(3) 應用比較法，即應用 $A=B$，$B=C$，則 $A=C$ 之原理。

〔例 1〕 消去 θ $\begin{cases}sin\ \theta=a\\ cos\ \theta=b\end{cases}$

〔解〕 $sin\ \theta=a$，$cos\ \theta=b$ 代入公式 $sin^2\theta+cos^2\theta=1$

則 $a^2+b^2=1$

〔例 2〕 從 $\begin{cases}a\ sin\ \theta+b\ cos\ \theta=c\cdots\cdots\cdots(1)\\ p\ sin\ \theta+q\ cos\ \theta=r\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$ 消去 θ

〔解〕 由 (1)，(2) 兩式解 $sin\ \theta$，$cos\ \theta$，則

$$sin\ \theta=\frac{cq-br}{aq-bp},\quad cos\theta=\frac{ar-cp}{aq-bp}$$

將此代入 $sin^2\theta+cos^2\theta=1$ 中，則得

$$(\frac{cq-br}{aq-bp})^2+(\frac{ar-cp}{aq-bp})^2=1$$

$$\therefore\ (cq-br)^2+(ar-cp)^2=(aq-bp)^2$$

〔例 3〕 從 $\begin{cases}ax\ sin\ \theta-by\ cos\ \theta=(a^2-b^2)sin\ \theta\ cos\ \theta\cdots\cdots(1)\\ ax\ sin^2\theta+by\ cos^2\theta=0\cdots\cdots(2)\end{cases}$ 消去 θ

〔要點〕 先求出 $sin\ \theta$ 及 $cos\ \theta$ 之值，代入 $sin^2\theta+cos^2\theta=1$ 則可消去 θ。

（解） (1)×cos θ+(2) $ax\sin\theta=(a^2-b^2)\sin\theta\cos^2\theta$

$$\therefore\quad \cos^2\theta=\frac{ax}{a^2-b^2}\cdots\cdots(3)$$

(1)×sin θ−(2) $-by\cos\theta=(a^2-b^2)\sin^2\theta\cos\theta$

$$\therefore\quad \sin^2\theta=\frac{-by}{a^2-b^2}\cdots\cdots(4)$$

將(3)及(4)代入 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，得

$$\left(\frac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{by}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

$$\therefore\quad (ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$$

〔例4〕 消去 θ $\begin{cases} x=a\tan(\theta+\alpha)\cdots\cdots(1)\\ y=b\tan(\theta+\beta)\cdots\cdots(2)\end{cases}$

但 $ab\neq0$, $\alpha\neq\beta\neq k\pi$,（k 爲常數）

（解） 由(1)得 $x=\dfrac{a(\tan\theta+\tan\alpha)}{1-\tan\theta\tan\alpha}$

即 $\tan\theta(a+x\tan\alpha)=x-a\tan\alpha$

同理得 $\tan\theta(b+y\tan\beta)=y-b\tan\beta$

故 $\dfrac{a+x\tan\alpha}{b+y\tan\beta}=\dfrac{x-a\tan\alpha}{y-b\tan\beta}$, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{bx-ay}{ab+xy}$

〔例5〕 消去 θ $\begin{cases} x=\cot\theta+\tan\theta\cdots\cdots(1)\\ y=\sec\theta-\cos\theta\cdots\cdots(2)\end{cases}$

（解） $x=\dfrac{1}{\tan\theta}+\tan\theta=\dfrac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}=\dfrac{\sec^2\theta}{\tan\theta}\cdots\cdots(3)$

$y=\sec\theta-\dfrac{1}{\sec\theta}=\dfrac{\sec^2\theta-1}{\sec\theta}=\dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta}\cdots\cdots(4)$

(3)²×(4) $x^2y=\sec^3\theta$ $\therefore$ $\sec\theta=\sqrt[3]{x^2y}=(x^2y)^{\frac{1}{3}}$

(3)×(4)² $xy^2=\tan^3\theta$ $\therefore$ $\tan\theta=\sqrt[3]{xy^2}=(xy^2)^{\frac{1}{3}}$

$\because$ $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ $\therefore$ $(x^2y)^{\frac{2}{3}}-(xy^2)^{\frac{2}{3}}=1$

〔例6〕 消去 θ $\begin{cases} x\sin\theta+y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}\cdots\cdots(1)\\ \dfrac{\cos^2\theta}{b^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{a^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdots\cdots(2)\end{cases}$

（解） 由(1)² 得 $x^2\sin^2\theta-2xy\sin\theta\cos\theta+y^2\cos^2\theta$

$$=x^2+y^2\cdots\cdots(3)$$

設 $\tan\theta=t$ 則 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+t^2}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{t^2}{1+t^2}$ 代入(3)及(2)

得 $y^2t^2+2xyt+x^2=0\cdots\cdots(4)$

及 $b^2(x^2+y^2-a^2)t^2+a^2(x^2+y^2-b^2)=0\cdots(5)$

由(4)得 $(yt+x)^2=0$ $\therefore$ $t=-\dfrac{x}{y}$

代入(5)得 $b^2(x^2+y^2-a^2)\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2+a^2(x^2+y^2-b^2)=0$

去分母整理之，得 $(x^2+y^2)(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)=0$

然 $x^2+y^2\neq0$ 〔$\because$ (2)式之右邊分母爲 x^2+y^2〕

$\therefore$ $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$

即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

〔例7〕 消去 θ,ψ $\begin{cases} \sin\theta+\sin\psi=a\cdots\cdots(1)\\ \cos\theta+\cos\psi=b\cdots\cdots(2)\\ \cos(\theta-\psi)=c\cdots\cdots(3)\end{cases}$

（解） (1)² $\sin^2\theta+2\sin\theta\sin\psi+\sin^2\psi=a^2\cdots\cdots(4)$

(2)² $\cos^2\theta+2\cos\theta\cos\psi+\cos^2\psi=b^2\cdots\cdots(5)$

(4)+(5) $2+2\cos(\theta-\psi)=a^2+b^2\cdots\cdots(6)$

將(3)代入(6)得 $2+2c=a^2+b^2$

$\therefore$ $a^2+b^2=2(1+c)$

※〔例8〕 消去下式中之 θ 及 ϕ: （設 $a\neq b$）

$$\begin{cases} a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=x\cdots\cdots(1)\\ b\sin^2\phi+a\cos^2\phi=y\cdots\cdots(2)\\ a\tan\theta=b\tan\phi\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

(解一) 由(1) $a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=x(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

即 $(a-x)\sin^2\theta=(x-b)\cos^2\theta$

∴ $\tan^2\theta=\dfrac{x-b}{a-x}$

由(2) $b\sin^2\phi+a\cos^2\phi=y(\sin^2\phi+\cos^2\phi)$

∴ $\tan^2\phi=\dfrac{y-a}{b-y}$

由(3) $\dfrac{a^2(x-b)}{a-x}=\dfrac{b^2(y-a)}{b-y}$

即 $a^2(bx-b^2-xy+by)=b^2(ay-a^2-xy+ax)$

∴ $abx(a-b)+aby(a-b)=xy(a^2-b^2)$

因 $a\neq b$, 則 $abx+aby=xy(a+b)$

∴ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

(解二) 由(1) $x-a=b\cos^2\theta-a(1-\sin^2\theta)=(b-a)\cos^2\theta$ ……(3)

又由(1) $x-b=a\sin^2\theta-b(1-\cos^2\theta)=(a-b)\sin^2\theta$ …(4)

$\dfrac{(5)}{(4)}$ $\tan^2\theta=\dfrac{x-b}{a-x}$

同理由(2),得 $\tan^2\phi=\dfrac{y-a}{b-y}$

以後做同(解一)

※[例9] 設
$$\begin{cases} x\cos\theta+y\cos\phi+z\cos\psi=0 \cdots\cdots(1)\\ x\sin\theta+y\sin\phi+z\sin\psi=0 \cdots\cdots(2)\\ x\sec\theta+y\sec\phi+z\sec\psi=0 \cdots\cdots(3)\end{cases}$$

則 $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2=0$

(解一) 由(1) $\cos\psi=-\dfrac{x\cos\theta+y\cos\theta}{z}$ ……(4)

由(3) $\cos\psi=\dfrac{-z\cos\theta\cos\phi}{x\cos\phi+y\cos\theta}$ ……(5)

∴ $(x\cos\theta+y\cos\phi)(x\cos\phi+y\cos\theta)=z^2\cos\theta\cos\phi$

即 $(x^2+y^2-z^2)\cos\theta\cos\phi+xy(\cos^2\theta+\cos^2\phi)=0$ ……(6)

由(2) $x\sin\theta+y\sin\phi=-z\sin\psi$ ……(7)

(7)² 得 $x^2\sin^2\phi+y^2\sin^2\phi+2xy\sin\theta\sin\phi=z^2\sin^2\psi$

即 $x^2+y^2-z^2-x^2\cos^2\theta-y^2\cos^2\phi+z^2\cos^2\psi$

$=-2xy\sin\theta\sin\phi$ ……(8)

(8)²,得 $[x^2+y^2-z^2-x^2\cos^2\theta-y^2\cos^2\phi+(x\cos\theta+y\cos\phi)^2]^2$

$=4x^2y^2(1-\cos^2\theta)(1-\cos^2\phi)$

$(x^2+y^2-z^2+2xy\cos\theta\cos\phi)^2$

$=4x^2y^2(1-\cos^2-\cos^2\phi+\cos^2\theta\cos^2\phi)$

$(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2+4xy[(x^2+y^2-z^2)\cos\theta\cos\phi$

$+xy(\cos^2\theta+\cos^2\phi)]=0$

以(6)代入得 $(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2=0$

即 $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2=0$

(解二) 消去 x,y,z 即設 其有解,則

$$\begin{vmatrix}\sin\theta & \sin\phi & \sin\psi\\ \cos\theta & \cos\phi & \cos\psi\\ \sec\theta & \sec\phi & \sec\psi\end{vmatrix}=\sin(\theta-\phi)\sin(\phi-\psi)\sin(\psi-\theta)=0$$

即 $\sin(\theta-\phi)=0,\ \sin(\phi-\psi)=0,\ \sin(\psi-\theta)=0$

由 $(1)^2+(2)^2$ 得 $x^2+y^2+2xy\cos(\theta-\phi)=z^2$

但 $\sin^2(\theta-\phi)=1-\cos^2(\theta-\phi)=\dfrac{4x^2y^2-(z^2-x^2-y^2)^2}{4x^2y^2}=0$

故 $4x^2y^2-(z^2-x^2-y^2)^2=0$

即 $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2=0$

習題三十六

消去下列各式中之 θ:

(1) $\begin{cases} x=k+a\cos\theta\\ y=k+b\sin\theta\end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\sin\theta+\cos\theta\\ y=\sin\theta-\cos\theta\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x\cos\theta+y\sin\theta=a\sin\theta \cdots\cdots(1)\\ y\cos\theta=x\sin\theta+a(\cos^2\theta\sin^2\theta) \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=\sin\theta+\cos\theta \cdots\cdots(1) \\ y=\tan\theta+\cot\theta \cdots\cdots(2) \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x=r(\theta-\sin\theta) \cdots\cdots(1) \\ y=r(1-\cos\theta) \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x=a\cos\theta+a\cos(120^\circ-\theta) \cdots(1) \\ y=a\sin(120^\circ-\theta) \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=a(\sin\theta+\cos\theta\sin 2\theta) \cdots\cdots(1) \\ y=a(\cos\theta+\sin\theta\sin 2\theta) \quad (2) \end{cases}$

(8) $\begin{cases} \sin\theta+\cos\theta=a \cdots\cdots(1) \\ \sin 2\theta+\cos 2\theta=b \cdots\cdots(2) \end{cases}$

消去下列各式中之 ϕ 及 θ:

(9) $\begin{cases} \cos\theta\sin\phi=a \cdots\cdots(1) \\ \cos\theta\cos\phi=b \cdots\cdots(2) \\ \sin\theta=c \cdots\cdots(3) \end{cases}$ (10) $\begin{cases} a\cos\theta+b\cos\phi=c \cdots(1) \\ a\sin\theta+b\sin\phi=c \cdots(2) \\ \theta+\phi=n\pi \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(11) $\begin{cases} \tan\theta+\tan\phi=a \cdots\cdots(1) \\ \cot\theta+\cot\phi=b \cdots\cdots(2) \\ \theta-\phi=\alpha \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(12) $\begin{cases} \dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1 \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x\cos\phi}{a}+\dfrac{y\sin\phi}{b}=1 \cdots\cdots(2) \\ \theta-\phi=\dfrac{\pi}{2} \cdots\cdots(3) \end{cases}$

習 題 略 解

(1) $\cos\theta=\frac{x-k}{a}$, $\sin\theta=\frac{y-k}{b}$ 代入 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$,

得 $\left(\frac{x-k}{a}\right)^2+\left(\frac{y-k}{b}\right)^2=1$

(2) $x^2+y^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

(3) 由(1)得 $\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{a-y}$, 故 $\frac{\sin^2\theta}{x^2}=\frac{\cos^2\theta}{(a-y)^2}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{x^2+(a-y)^2}$

$=\frac{1}{x^2+(a-y)^2}$ 即 $\sin^2\theta=\frac{x^2}{x^2+(a-y)^2}$, $\cos^2\theta=\frac{(a-y)^2}{x^2+(a-y)^2}$

代入(2)再化簡 $\{y(a-y)-x^2\}^2\{x^2+(a-y)^2\}=a^2\{(a-y)^2-x^2\}^2$

(4) 由(2) $y=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$, $\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{y}$, 由(1)

$x^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=2\sin\theta\cos\theta+1=1+\frac{2}{y}$, 故 $y(x^2-1)=2$

(5) 由(2) $\cos\theta=\frac{r-y}{r}$ ∴ $\theta=\cos^{-1}\frac{r-y}{r}$,

又 $\sin\theta=\sqrt{1-\frac{(r-y)^2}{r^2}}=\frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r}$

代入(1)得 $x=r\cos^{-1}\frac{r-y}{r}-\sqrt{2ry-y^2}$

(6) 由(1) $x=a\cos\theta+a\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\theta\right)$

$=\frac{1}{2}a(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)$

由(2) $y=\frac{1}{2}a(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)$

∴ $x^2+y^2=a^2(1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)$

又 $xy=a^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}+\sin\theta\cos\theta\right)$

即 $\sqrt{3}xy=a^2\left(\frac{3}{4}+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right)$

故 $x^2-\sqrt{3}xy+y^2=\frac{1}{4}a^2$

(7) 由(1) $\frac{x}{a}=\sin\theta(1+2\cos^2\theta)\cdots(3)$, 由(2) $\frac{y}{a}=\cos\theta(1+2\sin^2\theta)$

$\cdots\cdots(4)$, 由(3)+(4)得 $\frac{x+y}{a}=\cos\theta(1+2\sin^2\theta)+\sin\theta$

$(1+2\cos^2\theta)=\sin\theta(\sin^2\theta+3\cos^2\theta)+\cos\theta(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)$

$=\sin^3\theta+3\sin^2\theta\cos\theta+3\sin\theta\cos^2\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3$

即 $\frac{x+y}{a}=(\sin\theta+\cos\theta)^3\cdots\cdots(5)$, $\frac{x-y}{a}=(\sin\theta-\cos\theta)^3\cdots\cdots(6)$

由 $(5)^{\frac{2}{3}}+(6)^{\frac{2}{3}}$ 得 $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$

(8) 由 $(1)^2$ $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$, 即 $1+\sin 2\theta=a^2$

$\therefore$ $\sin 2\theta=a^2-1$……(3) 代入 (2) 得 $\cos 2\theta=b-a^2+1$…(4)

$(3)^2+(4)^2$ $(a^2-1)^2+(b-a^2+1)=1$

(9) $(1)^2+(2)^2$ $\cos^2\theta=a^2+b^2$……(4), $(3)^2+(4)^2$ $a^2+b^2+c^2=1$

(10) $\because$ $\phi=n\pi-\theta$ $\therefore$ $\cos\phi=\pm\cos\theta$, $\sin\phi=\mp\sin\theta$ 代 (1), (2)

得 $(a\pm b)\cos\theta=(a\mp b)\sin\theta=c$

$\therefore$ $\frac{c^2}{(a\pm b)^2}+\frac{c^2}{(a\mp b)^2}=1$

即 $2c^2(a^2+b^2)=(a^2-b^2)^2$

(11) 由 (2) $\frac{\tan\theta+\tan\phi}{\tan\theta\tan\phi}=b$……(4), (1) 代入 (4) $\tan\theta\tan\phi=\frac{a}{b}$

……………(5) 由 $(1)^2-4\times(5)$ 得 $(\tan\theta-\tan\phi)^2=a^2-\frac{4a}{b}$.

由 (3) 得 $\tan^2\alpha=\tan^2(\theta-\phi)=\frac{(\tan\theta-\tan\phi)^2}{(1-\tan\theta\tan\phi)^2}$

$$=\left(a^2-\frac{4a}{b}\right)\Big/\left(1+\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2b^2-4ab}{(a+b)^2}$$

故 $ab(ab-4)=(a+b)^2\tan^2\alpha$

(12) 依 (1) 且由 (3) 得 $\left(\frac{-x}{a}\right)\sin\phi+\left(\frac{y}{b}\right)\cos\phi=1$………(4),

由 $(2)^2+(4)^2$ 得 $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

2. 三角不等式

本節中之文字所表之數均假定爲實數計算。故 x^2 必大於零，即恒爲正。茲將不等式之重要定理舉出如下:

(一) 設 $A>B$, 則 $A\pm C>B\pm C$

(二) 設 $A>B$, 則

若 $m>0$ 時，則(ii)若 $m<0$ 時，則

$\begin{cases} mA>mB \\ \frac{A}{m}>\frac{B}{m} \end{cases}$　　$\begin{cases} mA<mB \\ \frac{A}{m}<\frac{B}{m} \end{cases}$

(三) 在 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 式中， 設 $a>0$, 且 $\alpha<\beta$.

則 $y>0$ 時 $x>\alpha$ 或 $x<\beta$.

又 $y<0$ 時 $\alpha>x>\beta$

(四) 在方程式中，$ax^2+bx+c=0$ 中，若 x 有實解（即實根），則其判別式 $b^2-4ac\geqq 0$

(i) 絕對不等式

〔例 1〕 試證 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta>2(\sin\alpha+\sin\beta-1)$

（要點） 本題爲絕對不等式，按標準高等代數學上冊知先化爲平方形或平方和形，即得證。

（證） 取原式兩邊之差而變形，則

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2(\sin\alpha+\sin\beta-1)$

$=\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1+\sin^2\beta-2\sin\beta+1$

$=(\sin\alpha-1)^2+(\sin\beta-1)^2$……………(1)

由是因上式之右邊常爲正

$\therefore$ $\sin^2\alpha+\sin^2\beta>2(\sin\alpha+\sin\beta-1)$

〔例 2〕 設 A, B, C 均爲正銳角，求證

$\sin A+\sin B+\sin C>\sin(A+B+C)$

（證） 取兩邊之差而變形，則

$\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B+2C}{2}$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B+2C}{2}\right)$

$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$

因 A, B, C 均爲正銳角，故

$\frac{A+B}{2}$, $\frac{A+C}{2}$, $\frac{B+C}{2}$ 均爲正，故上式之右邊爲正

$\therefore$ $\sin A+\sin B+\sin C>\sin(A+B+C)$

〔例 3〕 在 $\triangle ABC$ 中，設 $C>\frac{\pi}{2}$，求證 $\tan A\tan B<1$

(證) 取兩邊之差而變形，則

$$\tan A\tan B-1=\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}-1=\frac{\sin A\sin B-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}$$

$$=\frac{-\cos(A+B)}{\cos A\cos B}=\frac{\cos C}{\cos A\cos B}\ [\because\ A+B+C=180^\circ]$$

因 $C>90^\circ$，故 A, B 均爲銳角，故 $\cos A$, $\cos B$ 均爲正，而 $\cos C<0$，因此上式之右邊爲負

$\therefore\ \tan A\tan B<1$

(ii) 條件不等式

〔例 4〕 解 $\sin x>\cos x$，但設 $360^\circ>x>0^\circ$

(解) 因 $\sin x>\cos x$，故 $\sin x-\cos x>0$

將此變形爲積，則

$\sin x-\tan 45^\circ\cos x>0$,

$$\frac{\sin x\cos 45^\circ-\sin 45^\circ\cos x}{\cos 45^\circ}>0$$

$$\frac{\sin(x-45^\circ)}{\cos 45^\circ}>0$$

因 $\cos 45^\circ>0$，故 $\sin(x-45^\circ)>0$

因正弦在第一及第二象限爲正，故

$180^\circ>x-45^\circ>0\quad\therefore\quad 225^\circ>x>45^\circ$

〔例 5〕 解 $2\sin x\sin 3x>\sin^2 2x$

(要點) 因原式有 2 倍角及 3 倍角之函數，故應用公式

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$

改爲單角之函數即得。

(解) $2\sin x\sin 3x>\sin^2 2x$,

$2\sin x(3\sin x-4\sin^3 x)>4\sin^2 x\cos^2 x$

$6\sin^2 x-8\sin^4 x-4\sin^2 x(1-\sin^2 x)>0$

$\therefore\ \sin^2 x(1-2\sin^2 x)>0$………………(1)

然 $\sin^2 x\geqq 0$，若設 $\sin^2 x=0$，則左邊 $=0$

即 (1) 式不能成立。故 $\sin^2 x>0$

兩邊以 $\sin^2 x>$ 除之。

$1-2\sin^2 x>0$, 即 $\cos 2x>0$

故 $2n\pi-\frac{\pi}{2}<2x<2n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ n\pi-\frac{\pi}{4}<x<n\pi+\frac{\pi}{4}$

但在此範圍內 $x=n\pi$ 除外

答 $n\pi-\frac{\pi}{4}<x<n\pi+\frac{\pi}{4}$，但 $x=n\pi$ 除外

※〔例 6〕 設 x 在第一象限內，求解 $\frac{\tan x(3-\tan^2 x)}{1-\tan^2 x}>0$

(解) $$\frac{\tan x(\sqrt{3}+\tan x)(\sqrt{3}-\tan x)}{(1-\tan x)(1+\tan x)}>0$$

$\therefore\ x<\frac{1}{2}\pi\quad\therefore\quad \tan x>0,\ 1+\tan x>0,\ \sqrt{3}+\tan x>0$

即 $$\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1-\tan x}>0$$

因 $(1-\tan x)^2>0$，兩邊乘以 $(1-\tan x)^2$，則

$(\sqrt{3}-\tan x)(1-\tan x)>0$

即 $(\tan x-\tan\frac{1}{3}\pi)(\tan x-\tan\frac{1}{4}\pi)>0$

因 $\tan x$ 隨 x 而增加，又 $\tan\frac{1}{3}\pi>\tan\frac{1}{4}\pi$

故 $\tan x>\tan\frac{1}{3}\pi$，或 $\tan x<\tan\frac{1}{4}\pi$

故 $\frac{1}{2}\pi>x>\frac{1}{3}\pi$ 或 $\frac{1}{4}\pi>x>0$

※〔例 7〕 設 $\sin^2 x+2\sin x\cos x-2\cos^2 x=m$，恆有實解，則 m 之值若何？

(解) 原方程式可化爲

$\sin^2 x+2\sin x\cos x-2\cos^2 x=m(\sin^2 x+\cos^2 x)$

兩邊除以 $\cos^2 x$ 並整理之，得

$(1-m)\tan^2 x+2\tan x-(2+m)=0$

如上式恆有實解，則 $\triangle\geqq 0$，即

$4[1+(1-m)(2+m)]\geqq 0$ 即 $m^2+m-3\leqq 0$

即 $(m+\frac{1+\sqrt{13}}{2})(m+\frac{1-\sqrt{13}}{2})\leqq 0$

即 $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})\leqq m\leqq -\frac{1}{2}(1-\sqrt{13})$

※〔例 8〕 設 $\tan\frac{1}{2}\theta=\frac{\tan\theta+m-1}{\tan\theta+m-1}$，試證 m 之值不能在 -1 與 1 之間

（證一） 設 $\frac{1}{2}\theta=x$，再從比例中分合比之定理，得

$$\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\tan 2x+m=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+m$$

$$=\frac{2\tan x+m-m\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

設 $\tan x\neq -1$，則 $(1+\tan x)^2=2\tan x+m-m\tan^2 x$

即 $(1+m)\tan^2 x=m-1$，$\tan^2 x=\frac{m-1}{1+m}$

因 x 爲實數，則 $\tan^2 x>0$ 即 $\frac{m-1}{1+m}>0$

則 $(m-1)(m+1)>0$〔用 $(1+m)^2$ 乘上式兩邊〕

∴ $m>1$ 或 $m<-1$，即 m 不能在 1 與 -1 之間

（證二） 從比例中分合比之理得

$$\frac{1+\tan\frac{1}{2}\theta}{1-\tan\frac{1}{2}\theta}=\tan\theta+m$$

即 $\tan(\frac{1}{2}\theta+45^\circ)=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+m$

但 $\tan(\frac{1}{2}\theta+45^\circ)=\tan\frac{1}{2}(\theta+90^\circ)=\frac{\sin(\theta+90^\circ)}{1+\cos(\theta+90^\circ)}$

$$=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

故得 $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+m$

即 $\cos^2\theta=\sin\theta-\sin^2\theta+m\cos\theta(1-\sin\theta)$

即 $1-\sin\theta-m\cos\theta(1-\sin\theta)=0$

即 $(1-m\cos\theta)(1-\sin\theta)=0$

設 $1-\sin\theta\neq 0$，則 $1-m\cos\theta=0$ ∴ $\cos\theta=\frac{1}{m}$

∵ $|\cos\theta|<1$， ∴ $|\frac{1}{m}|<1$， 即 $|m|>1$

故 m 不能在 1 與 -1 之間。

習題三十七

（1） 求證 $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma$
$>\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha\tan\gamma+\tan\beta\tan\gamma$

（2） 設 A 爲正銳角，而 $\sec A>\csc A$，求證 $A>45^\circ$

（3） 設 A, B, C 爲三角形之三內角，求證
$\sin A+\sin B+\sin C\geqq\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

（4） 解 $2\sin x<\sin 3x$

（5） 解 $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x>1$

（6） 解 $\sin^2 x>\cos^2 x$，但設 $360^\circ>x>0^\circ$

（7） 設 $0<x<\pi$ 而 $x\neq\frac{\pi}{2}$，證 $\cot\frac{x}{2}>1+\cot x$

※（8） 設 $x<2\pi$，求解
$4\cos^2 x-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cos x+\sqrt{6}<0$

※（9） 設 x 爲實數，則 $\frac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$ 之值介於

$\frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\sin^2\frac{1}{2}\beta}$ 及 $\frac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}$ 之間。

習題略解

(1) 取原式兩邊之差，得$\frac{1}{2}[(\tan\alpha-\tan\beta)^2+(\tan\alpha-\tan\gamma)^2+(\tan\beta-\tan\gamma)^2]$ 故得證。

(2) ∵ $\sec A>\csc A$ 故 $\frac{1}{\cos A}>\frac{1}{\sin A}$，兩邊乘以 $\sin A$，得 $\tan A>1$ 故 $A>45°$。

(3) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$，

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C=2\sin C[\cos(A-B)+\cos C]$

$=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]=4\sin C\sin A\sin B$

∴ $\sin A+\sin B+\sin C-\sin 2A-\sin 2B-\sin 2C$

$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-4\sin A\sin B\sin C$

$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-32\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}(1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})$ ∴ $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq 1$ 故得證。

(4) $2\sin x-(3\sin x-4\sin^3 x)<0$

∴ $\sin x(\sin x-\frac{1}{2})(\sin x+\frac{1}{2})<0$

故得解 (i) $2n\pi+\frac{7\pi}{6}<x<2n\pi+\frac{11\pi}{6}$

(ii) $2n\pi+\frac{5\pi}{6}<x<(2n+1)\pi$

(5) 兩邊除以 2，得 $\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x>\frac{1}{2}$

$\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}>\frac{1}{2}$，$\sin(2x+\frac{\pi}{3})>\frac{1}{2}$

∴ $2n\pi+\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{3}<2n\pi+\frac{5\pi}{6}$ ∴ $n\pi-\frac{\pi}{12}<x<n\pi+\frac{\pi}{4}$

(6) $\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)-\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=-\cos 2x$

∴ $-\cos 2x>0$ ∴ $\cos 2x<0$，故 $135°>x>45°$ 或 $315°>x>225°$

(7) $\cot\frac{x}{2}-(1+\cot x)=\cot\frac{x}{2}-\cot x-1=(\cos\frac{x}{2}/\sin\frac{x}{2})-\frac{\cos x}{\sin x}-1$

$=(\sin x\cos\frac{x}{2}-\cos x\sin\frac{x}{2})/\sin\frac{x}{2}\sin x-1$

$=\sin(x-\frac{x}{2})/\sin\frac{x}{2}\sin x-1=\frac{1}{\sin x}-1$ 由假設故 $0<\sin x<1$

∴ $\frac{1}{\sin x}>1$ ∴ $\frac{1}{\sin x}-1>0$ ∴ $\cot\frac{x}{2}>1+\cot x$

(8) 因 $(2\cos x-\sqrt{3})(2\cos x-\sqrt{2})<0$，

故 $\frac{1}{2}\sqrt{3}>\cos x>\frac{1}{2}\sqrt{2}$

今 $\cos x$ 必爲正，故得解如下：

① 設 x 在第一象限內 因 $\cos 30°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$，$\cos 45°=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

故 x 介於 30° 與 45° 之間。

② 設 x 在第四象限內 因 $\cos 330°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$，$\cos 315°=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

故 x 介於 315° 及 330° 之間。

(9) 令 $y=\frac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$ 則

$x^2(y-1)+2x(\cos\alpha-y\cos\beta)+(y-1)=0$

因 x 爲實數，故 $(\cos\alpha-y\cos\beta)^2-(y-1)^2>0$，即

$(y-1)^2-(\cos\alpha-y\cos\beta)^2<0$，$[y(1+\cos\beta)-(1+\cos\alpha)]$ $[y(1-\cos\beta)-(1-\cos\alpha)]<0$，故介于

$\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\beta}$ 及 $\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}$ 之間。今因

$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{1}{2}\alpha$，$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$，故得證。

3. 極大，極小

正弦及餘弦之值小於1而大於 −1，即

$$1\geqq\sin\theta\geqq-1,\ 及\ 1\geqq\cos\theta\geqq-1$$

因此可說 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 之極大值爲1，而極小值爲 −1。正切之值在 $+\infty$ 與 $-\infty$ 之間，故無極大，極小之值。三角法中所述之極大極小之問題，以上述事項爲基礎。因此求解此類問題，注重設法改用以 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 之形式表示。本節所述亦此程度爲範圍。

〔例1〕 試求 $\tan\theta+\cot\theta$ 之值爲極小時之最小正角 θ。

（要點） 設法將 $\tan\theta+\cot\theta$ 變形而以正弦或餘弦之項表示。

（解） $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{2}{\sin2\theta}$$

因右邊之分子2爲常數，故欲使 $\tan\theta+\cot\theta$ 之值爲極小，則必須使分母 $\sin2\theta$ 爲極大。而 $\sin2\theta$ 之極大值爲1，故 $\tan\theta+\cot\theta=2$ 時極小。此時最小正角 θ，可從 $\sin2\theta=1$，求出即 $2\theta=90°$ $\therefore$ $\theta=45°$

〔例2〕 求 $\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 之極大及極小值。

（解） $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sin x-\tan60°\cos x$

$$=\frac{\sin x\cos60°-\sin60°\cos x}{\cos60°}=\frac{\sin(x-60°)}{\cos60°}=2\sin(x-60°)$$

上式在右邊之 $\sin(x-60°)=1$ 時爲極大，在 $\sin(x-60°)=-1$ 時極小，因此知

極大值爲 $x=360°\times n+150°$ 時之 2

極小值爲 $x=360°\times n-30°$ 時之 −2

〔例3〕 設 $x+y=\alpha$，$0<\alpha<2\pi$，求 $\sin x+\sin y$ 之最大值。

（解） $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

然因 $0<\dfrac{\alpha}{2}<\pi$，故 $2\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$

由是 $x-y=0$ 時 $\sin x+\sin y$ 爲最大，即 $\sin x+\sin y$ 於 $x=y=\dfrac{\alpha}{2}$ 時爲最大，而其最大值爲 $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$。

〔例4〕 設 $\triangle ABC$ 中其三角各爲 A, B, C，求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 之最大值。

（解） $A+B+C=\pi$ $\quad\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$

$\therefore$ $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\sin C$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$

此時假定 C 爲一定，則此右邊於 $\dfrac{A-B}{2}$ 爲最大時最大，即 $A=B$ 時爲最大，換句話說 A, B, C 三角中，如有不等二角，則使此二角爲相等時，式之值會增大，由是

$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 時爲最大，而其值爲 $3\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

〔例5〕 求使 $\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 爲極大之 x 之值。

（解） $\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\dfrac{\sin x\cos x}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1-\cos x}{2}=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x-1)\cdots\cdots\cdots(1)$$

由是上式在右邊之 $\sin x+\cos x$ 之值爲極大時爲極大，而

$$\sin x+\cos x=\sin x+\tan45°\cos x$$

$$=\frac{\sin(x+45°)}{\cos45°}=\sqrt{2}\sin(x+45°)$$

即 $\sin(x+45°)=1$ 時，$\sin x+\cos x$ 之值取極大值$\sqrt{2}$，

由是從 (1) 得原式之極大值為 $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$，而對此極大值之 x 之值，從 $(\sin x+45°)=1$ 得

$x+45°=360°\times n+90°$， $\therefore$ $x=360°\times n+45°$

習題三十八

（1） 求 $3\sin x+4\cos x$ 之最大及最小值。

（2） 求 $\sin x\cos x$ 之最大及最小值。

（3） 求 $3+5\sin x-2\sin^2 x$ 之最大值。

（4） 求 $(5-\sin x)(2+\sin x)$ 之極大值。

（5） 設 A, B 及 $A+B$ 皆為銳角，且 $A+B$ 為一定，求證 $A=B$ 時，下列各式取最大值。

（i） $\sin A+\sin B$ (ii) $\cos A+\cos B$

(iii) $\sin A\sin B$ (iv) $\cos A\cos B$

（v） $\tan A\tan B$

（6） 設 A, B 及 $A+B$ 皆為銳角，且 $A+B$ 為一定，求證 $A=B$ 時，下列各函數取最小值。(i) $\tan A+\tan B$ (ii) $\cot A+\cot B$

（7） 試證於 $\triangle ABC$, $A=B=C$ 時，下列各式取最大值。

（i） $\cos A+\cos B+\cos C$

(ii) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

(iii) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

(iv) $\sin A\sin B\sin C$

（v） $\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$

習題略解

（1） $y=3\sin x+4\cos x=\sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin x+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos x\right)$

$=5(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x)$， 設 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，則 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

$\therefore$ $y=5(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha)=5\sin(x+\alpha)$

（i） $x+\alpha=2m\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=2m\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha$ 時，y 為最大，其最大值為5。 (ii) $x+\alpha=2m\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $x=2m\pi-\frac{\pi}{2}-\alpha$ 時，y 為最小，其最小值為-5。

（2） $y=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$， 故 （i） $2x=2mx+\frac{\pi}{2}$，即 $x=m\pi+\frac{\pi}{4}$時，y 取最大值$\frac{1}{2}$， (ii) $2x=2m\pi-\frac{\pi}{2}$， 即 $x=m\pi-\frac{\pi}{4}$時，y 取最小值 $-\frac{1}{2}$。

（3） $y=3+5\sin x-2\sin^2 x=-2(\sin^2 x-\frac{5}{2}\sin x+\frac{25}{16})+3+\frac{25}{8}$ $=-2(\sin x-\frac{5}{4})^2+\frac{49}{8}$，即 $\sin x-\frac{5}{4}$之絕對值最小時，y 之值最大。因 $\sin x=1$ 時 $\sin-\frac{5}{4}$之絕對值為最小，故 $x=2m\pi+\frac{\pi}{2}$時，y 為最大，其最大值為 $-2(1-\frac{5}{4})^2+\frac{49}{8}=6$。

（4） $y=(5-\sin x)(2+\sin x)$，因二因式之和等於 7 為一定，故 $5-\sin x$ 與 $2+\sin x$ 之差最小時，y 為最大，由是 $\sin x=1$，即 $x=2m\pi+\frac{\pi}{2}$時，y 為最大。

（5） 設 $A+B=\alpha$， （i） $y=\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ $=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ 故 $\cos\frac{A-B}{2}$取最大值時 y 為最大 ($\because$ $\sin\frac{\alpha}{2}>0$)，然 $A=B$ 時 $\cos\frac{A-B}{2}$取最大值 1 ($\because$ $\cos 0°=1$)

故 $A=B$ 時 y 為最大。

（其最大值為 $2\sin\frac{\alpha}{2}$） (ii) 略，最大值為 $2\cos\frac{\alpha}{2}$

(iii) $y=\sin A\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]=\frac{1}{2}$ $[\cos(A-B)-\cos\alpha]$ 故 $\cos(A-B)$ 取最大值時，y 為最大。然 $A=B$ 時 $\cos(A-B)$ 取最大值 1。故 $A=B$ 時，y 取最大。〔其最大值為 $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$〕 (iv) 略，最大值 $\frac{1}{2}(\cos\alpha+1)$〕

(v) $y=\tan A\tan B=\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=\frac{\sin A\sin B-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}+1=\frac{-\cos(A+B)}{\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}+1=1-\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos(A-B)}$

故 $\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos(A-B)}$ 取最小值時 y 取最大值。

然 $A=B$ 時，$\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos(A-B)}$ 取最小值（∵ 其分母為最大而分子為一定）故 $A=B$ 時 y 取最大值。

(6) (i) $\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}$ $=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos(A-B)}$ 故 $\cos(A-B)$ 取最大值時 y 為最小。然 $A=B$ 時 $\cos(A-B)$ 取最大值 1，故 $A=B$ 時 y 取最小值。

(ii) $y=\cot A+\cot B=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}$

$$=\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]}=\frac{2\sin\alpha}{\cos(A-B)-\cos\alpha}$$

故 $\cos(A-B)$ 取最大值時 y 為最小。然 $A=B$ 時 $\cos(A-B)$ 取最大值 1。故 $A=B$ 時，取最小值。

(7) (i) $y=\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$

$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$。若 C 為一定，則 $\cos\frac{A-B}{2}$ 取最大值時，y 也取最大值。∴ $A-B=0$ 時，y 為最大。

由是 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 時 y 為最大，其值為 $3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$

(ii) $y=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ $+\sin\frac{C}{2}$ 若 C 為一定，則 $\sin\frac{A+B}{4}$ 亦為一定。故 $\cos\frac{A-B}{2}$ 為最大時，y 取最大值。即 $A=B$ 時 y 為最大。由此可判定 $A=B=C$ 時 y 取最大值。

(iii) 略 最大值為 $3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{2}}{3}$

(iv) $y=\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\sin C$ 若 C 為一定，則 $\cos(A+B)$ 亦為一定。故 $\cos(A-B)$ 取最大值時 y 為最大。即 $A=B$ 時 y 為最大。

(v) $y=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}]$ $\sin\frac{C}{2}$ 若 C 為一定，則 $\cos\frac{A+B}{2}$ 亦為一定。故 $\cos\frac{A-B}{2}$ 取最大值時 y 為最大，即 $A=B$ 時為最。故 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 時 y 為最大。其最大值為 $(\sin\frac{\pi}{6})^3=\frac{1}{8}$

4. 含三角函數之級數和

一函數數列中，若其連續之各項，係按照某種規則形成者，稱此式為三角函數級數，級數之項數有限者，稱為有限級數。若其項數無限，稱為無限級數。級數得以次之形式表之。

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_{n-1}+u_n+u_{n+1}+\cdots\cdots$$

其中第 n 項 u_n 稱為公項，若公項已知，則任何項均可書出。

〔例 1〕 求下列級數 n 項之和：

(i) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots$
$\cdots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

(ii) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots$
$\cdots+\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

(要點) (i) 求級數之和大約有一定之方法，即於三角級數，將各項改爲同名函數之差即得。

今欲將各項改爲同名函數之差，必須想起化積爲差之公式。

即 $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)\cdots\cdots(1)$

今於首項乘以 $2\sin\frac{\beta}{2}$ 而適用公式 (1) 則

$$2\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}=\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})-\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})$$

同理 $2\cos(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin(\alpha+\frac{3}{2}\beta)-\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$2\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)-\sin(\alpha+\frac{2n-3}{2}\beta)$$

若邊邊相加，則知只剩右邊之上一項與左邊下一項，而其他各項皆可消去。

今設級數之和爲 S，則

$$2S\sin\frac{\beta}{2}=\sin(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)-\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})$$

再就 S 解之再化簡即得所求。

(ii) 可由 (i) 類推

(證) (i) 設 $S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

依公式 $2\cos(\alpha+k\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin(\alpha+\frac{2k+1}{2}\beta)-\sin(\alpha+\frac{2k-1}{2}\beta)$

當 $k=0$ 時，$2\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}=\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})-\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})$

當 $k=1$ 時，$2\cos(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin(\alpha+\frac{3\beta}{2})-\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})$

當 $k=2$ 時，$2\cos(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin(\alpha+\frac{5\beta}{2})-\sin(\alpha+\frac{3\beta}{2})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

當 $k=n-1$ 時，$2\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)-\sin(\alpha+\frac{2n-3}{2}\beta)$

+)

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cdot S=\sin(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)-\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})$$

$\sin\frac{\beta}{2}\neq0$ 時 $S=\dfrac{\sin(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)-\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})}{2\sin\frac{\beta}{2}}$

$=\dfrac{2\cos(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}}$ 即 $S=\dfrac{\cos(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

(ii) 由 (i) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots\cdots\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

$=\dfrac{\cos(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$ 以 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 代替 α，得

$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta)+\cdots+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha+\overline{n-1}\beta)$

$$=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha+\frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$\therefore\quad -\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)-\cdots\cdots-\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

$$=\frac{-\sin(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$\therefore\quad \sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

$$=\frac{\sin(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

(ii) 設 $S=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$+\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

各乘以 $2\sin\frac{\beta}{2}$，則

$$2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}=\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})-\cos(\alpha+\frac{\beta}{2})$$

$$2\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\cos(\alpha+\frac{\beta}{2})-\cos(\alpha+\frac{3}{2}\beta)$$

$$2\sin(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\cos(\alpha+\frac{3}{2}\beta)-\cos(\alpha+\frac{5}{2}\beta)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\cos(\alpha+\frac{2n-\beta}{2}\beta)-\cos(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)$$

邊邊相加，得

$$2S\sin\frac{\beta}{2}=\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})-\cos(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)$$

$$\therefore\quad S=\frac{\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})-\cos(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{3}{2}}$$

〔例 2〕 求下級之和

$\csc\alpha+\csc 2\alpha+\csc 4\alpha+\cdots\cdots+\csc 2^{n-1}\alpha$

（解） $\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}=\frac{\sin(\alpha-\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}$$

故 $\csc\alpha=\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha$，今以 2α 代 α，得

$\csc 2\alpha=\cot\alpha-\cot 2\alpha$

同理 $\csc 4\alpha=\cot 2\alpha-\cot 4\alpha$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\csc 2^{n-1}\alpha=\cot 2^{n-2}-\cot 2^{n-1}\pi$,

相加 $S_n=\cot\frac{\alpha}{2}-\cot 2^{n-1}\alpha$

〔例 3〕 求下級數之和

$\cos x\cos 2x+\cos 2x\cos 3x+\cdots\cdots+\cos x\cos(n+1)x$

（解） 設所求級數之和爲 S

$2\cos x\cos 2x=\cos 3x+\cos x$

$2\cos 2x\cos 3x=\cos 5x+\cos x$

$2\cos 3x\cos 4x=\cos 7x+\cos x$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$2\cos nx\cos(n+1)x=\cos(2n+1)x+\cos x$

相加，得 $2S=[\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x+\cdots\cdots$
$-\cdots+\cos(2n+1)x]+n\cos x$

$$=\frac{\cos(3x+\frac{n-1}{2}\cdot 2x)\sin(\frac{n}{2}\cdot 2x)}{\sin x}+n\cos x$$

$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\{\frac{\cos(n+2)x\sin nx}{\sin x}+n\cos x\}$

〔例 4〕 求下列級數項之和

(i) $\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha+2\beta)+\cdots$

(ii) $\cos^3\alpha+\cos^2 3\alpha+\cos^3 5\alpha+\cdots\cdots+\cos^3(2n-1)\alpha$

〔要點〕 成等差級數之一群角之正餘弦平方及立方之和，可利用下列恒等式以求之。

$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$，$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$

$4\sin^3\alpha=\sin\alpha-\sin 3\alpha$，$4\cos^3\alpha=3\cos\alpha+\cos 3\alpha$

（解） (i) $S_n=\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+\sin^2[\alpha+(n-1)\beta]$

$2S_n=2\sin^2\alpha+2\sin^2(\alpha+\beta)+2\sin^2(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+2\sin^2[\alpha+(n-1)\beta]$

$=[1-\cos 2\alpha]+[1-\cos(2\alpha+2\beta)]+[1-\cos(2\alpha+4\beta)]+\cdots\cdots+[1-\cos(2\alpha+\overline{2n-2}\beta)]$

$=n-[\cos 2\alpha+\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha+4\beta)+\cdots\cdots+[\cos(2\alpha+\overline{2n-2}\beta)]$

$=n-\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}(\cos 2\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot 2\beta)$

$\therefore\quad S=\frac{n}{2}-\frac{\sin n\beta}{2\sin\beta}\cos[2\alpha+(n-1)\beta]$

(ii) $4S=(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)+(3\cos 3\alpha+\cos 9\alpha)+(3\cos 5\alpha+\cos 15\alpha)+\cdots\cdots+3\cos(2n-1)\alpha]+\cos 3\alpha(2n-1)\alpha]$

$=3[\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots\cdots+\cos(2n-1)\alpha]+[\cos 3\alpha+\cos 9\alpha+\cos 15\alpha+\cdots\cdots+\cos 3(2n-1)\alpha]$

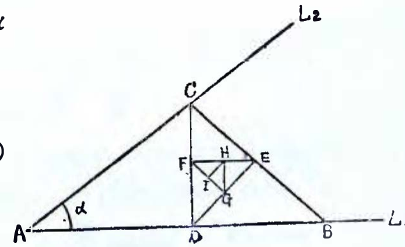
$=\frac{3\sin n\alpha}{\sin\alpha}\cos[\frac{\alpha+(2n-1)\alpha}{2}]$

$+\frac{\sin 3n\alpha}{\sin 3\alpha}\cos[\frac{3\alpha+(2n-1)3\alpha}{2}]$

$\therefore\quad S_n=\frac{3\sin n\alpha\cos n\alpha}{4\sin\alpha}+\frac{\sin 3n\alpha\cos 3n\alpha}{4\sin 3\alpha}$

〔例 5〕 兩定直線 L_1 與 L_2 相交于 A，其夾角爲 α，茲于 L_1 上 B 點，向 L_2 作垂線，設垂足爲 C，由 C 作 AB 之垂線，設垂足爲 D，由 D 作 BC 之垂線，設垂足爲 E，餘照此類推若 $AB=a$，試求 $BC+CD+DE+\cdots\cdots$ 之和。

（解） 由右圖得 $BC=a\sin\alpha$



$CD=\overline{BC}\cos\alpha$

$=a\sin\alpha\cos\alpha$

$DE=CD\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

$=a\sin^2\alpha\cos\alpha$

$EF=DE\cos\alpha$

$=a\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

……………………………

故 $BC+CD+DE+EF+\cdots\cdots=a\sin\alpha+a\sin\alpha\cos\alpha+a\sin^2\alpha\cos\alpha+a\sin^2\alpha\cos^2\alpha+a\sin^3\alpha\cos^2\alpha+\cdots\cdots$

$=a\sin\alpha(1+\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cdots\cdots)+a\sin\alpha\cos\alpha(1+\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cdots\cdots)$

$=(a\sin\alpha+a\sin\alpha\cos\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cdots\cdots)$

$=a\sin\alpha(1+\cos\alpha)\times\frac{1}{1-\sin\alpha\cos\alpha}\quad(\because\ \sin\alpha\cos\alpha<1)$

$=\frac{a\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\sin\alpha\cos\alpha}$

習 題 三 十 九

求下列級數項之和：

(1) $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots\cdots$

（2） $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots\cdots$

（3） $\sin\theta\cos\theta+\sin 2\theta\cos 2\theta+\sin 3\theta\cos 3\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta\cos n\theta$

（4） $\sin\theta\sin 3\theta+\sin 2\theta\sin 6\theta+\sin 4\theta\sin 12\theta+\cdots\cdots$

（5） $\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha+3\beta)+\cdots\cdots$

（6） $\tan\theta+2\tan 2\theta+2^2\tan 2^2\theta+\cdots\cdots$

（7） $\tan\theta+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\cdots\cdots$

（8） $\tan^{-1}\frac{x}{1+1\cdot 2x^2}+\tan^{-1}\frac{x}{1+2\cdot 3x^2}+\cdots\cdots+\tan^{-1}\frac{x}{1+n(n+1)\alpha^2}$

習題略解

（1） $S=\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots\cdots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\cdot 2\alpha)$

因 $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

$$=\frac{\cos(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

以 2α 代入上式之 β，則

$$S=\frac{\cos(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot 2\alpha)\sin\frac{n\cdot 2\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha n\sin n\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin n\alpha}$$

（2） $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots\cdots+\sin(\alpha+\overline{n-1}\cdot 2\alpha)$

$$=\frac{\sin(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot 2\alpha)\sin\frac{n\cdot 2\alpha}{2}}{\sin\frac{2\alpha}{2}}=\frac{\sin n\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$$

（3） $S=\frac{1}{2}(\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 6\theta+\cdots\cdots+\sin 2n\theta)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2\theta+\frac{n-1}{2}\cdot 2\theta)\sin\frac{n\cdot 2\theta}{2}}{\sin\frac{2\theta}{2}}=\frac{\sin(n+1)\theta\sin n\theta}{2\sin\theta}$$

（4） $S=\frac{1}{2}[\{\cos(3\theta-\theta)-\cos(3\theta+\theta)\}+\{\cos(6\theta-2\theta)-\cos(6\theta+2\theta)\}+\cdots\cdots+\{\cos(3\cdot 2^{n-1}\theta-2^{n-1}\theta)-\cos(3\cdot 2^{n-1}\theta+2^{n-1}\theta)\}]$

$=\frac{1}{2}(\cos 2\theta-\cos 4\theta+\cos 4\theta-\cos 8\theta+\cdots\cdots+\cos 2^n\theta$

$-\cos 2^{n+1}\theta)$

$=\frac{1}{2}(\cos 2\theta-\cos 2^{n+1}\theta)$

（5） 化原式爲 $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta+\pi)+\cos(\alpha+2\beta+2\pi)+\cos(\alpha+3\beta+3\pi)+\cdots\cdots$

此級數中角之公差爲 $\beta+\pi$，代〔例1〕即得

$S_n=\frac{1}{2}\sin n(\beta+\pi)/\sin\frac{\beta+\pi}{2}$

$=\left\{\cos[\alpha+\frac{(n-1)(\beta+\pi)}{2}]\sin\frac{n(\beta+\pi)}{2}\right\}/\sin\frac{\beta+\pi}{2}$

$=\cos[\alpha+\frac{(n-1)(\beta+\alpha)}{2}]$

（6） $\tan 2\theta=\cot\theta-2\cot 2\theta$，$2\tan 2\theta=2\cot 2\theta-2^2\cot 2^2\theta$

$2^2\tan 2^2\theta=2^2\cot 2^2\theta-2^3\cot 2^3\theta\cdots\cdots\cdots\cdots$

$2^{n-1}\tan 2^{n-1}\theta=2^{n-1}\cot 2^{n-1}\theta-2^n\cot 2^n\theta$

邊邊相加，則

$S=\cot\theta-2^n\cot 2^n\theta$

（7） $\tan\theta=\cot\theta-2\cot 2\theta$

$\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cot\theta-\cot\theta$

$\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}=\frac{1}{2^2}\cot\frac{\theta}{2^2}-\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2},\cdots\cdots\cdots$

$\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{\theta}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\theta}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-2}}\cot\frac{\theta}{2^{n-}}$

邊邊相加，則

$S=\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\theta}{2^{n-1}}-2\cot 2\theta$

（8） 因 $\tan^{-1}\frac{x}{1+r(r+1)x^2}=\tan^{-1}(r+1)x-\tan^{-1}rx$

$\therefore\ S_n=\tan^{-1}(n+1)x-\tan^{-1}x$

標準高中三角學

編著者　陳　明　哲

發行人　張　[illegible]　[illegible]

發行者

鴻光書店

HUNG KWONG BOOK STORE

葵涌葵豐街25－31號華業大厦A座9樓K

K, 9/F., Marvel Industrial Bldg., Block A,
25-31 Kwai Fung Crescent, Kwai Chung,
Tel: 0-258902