大學叢書

非歐派幾何學

陳藎民著
胡文耀校

商務印書館發行

目　錄

第一編　緒論

第二編　雙曲式幾何學

第三編 橢圓式幾何學

第四編 結論

秦序

余友陳君藎民力學士也.早歲游學歐西,專攻數理之學.歸國後,任南北各大學教授,主講非歐派幾何學迨將十年.今本其教學經驗所得著爲是書,取材簡要,說理精神,不可多得之作也.學者每視非歐派幾何爲玄妙之學,而其理論之進展,則甚可驚,誠如陳君所言,蓋非歐學理不僅僅爲數學上重要之一科,卽對於全部數學之基礎,相對論之考證及宇宙之觀念關係均鉅.以極深奧之理論而進展又如此之速,亦何怪學生有艱澀難通之感乎?陳君獨能以淸靈之筆,闡淵深之理,俾初學者讀之亦得窺門徑,而升堂入室,其有功士林,豈淺鮮哉.

民國二十四年六月　秦汾序.

自序

非歐派幾何學,在一百年以前,是沒有人知道的;在二十年以前,以爲他是少數算學家抽象的研究,無俾實用的;但是現在,無論在純粹算學上,或應用算學上都佔着重要的地位了,就是歐氏幾何學也不過是他的特例而已,

歐美各國,不但認這門幾何學爲專攻算學的人應當要知道,就是哲學家,自然科學家及中等學校的算學教師也應當要知道.可惜一般人都認這門幾何學是高深難解的科學,每每望而生畏;其實這門幾何學也可以仿歐氏幾何學一樣的由淺而深的講,並不像一般人所想像那樣困難的.

我們研究非歐派幾何學約有四種方法.第一種,就是初等幾何學上所用的綜合法,也就是歐几里得的初步幾何學的方法.第二種,就是應用微分幾何學的方法.第三種,就是應用投影幾何學的方法.第四種,就是應用形式論理學的方法.第一第四兩種都是一般人最容易懂的方法,我現在就用這兩種方法來編這本書,作爲非歐派幾何學的入門.

本書大部分是根據我個人前在北京大學數學系

所編非歐派幾何學講義譯出來的；但是高深部分都刪去了.本書內容共分四編十四章,前七章及第十章都是高中學生可以看得懂的,其餘各章都是大學理學院二年級以上的學生可以看得懂的,所以本書可以作爲大學課本用,也可以作爲中等學校的算學教師和學生參考之用.

本書有許多名詞的定義,因爲他和歐氏幾何學上的定義一樣,所以沒有一一寫出來.又爲減少篇幅起見,有許多簡單的幾何圖也沒有畫出來.其實幾何圖是理想的,不是人力可以畫得出來的,我們研究幾何學,所以要畫圖,這是因爲圖是有形的東西,他能夠幫助我們說明我們的理想,也能幫助他人集中注意力容易了解我們所說的理想,並不是所畫的圖,就是幾何學上的圖,所以畫圖與不畫圖對於幾何學的本身是沒有關係的.

一般人所謂非歐派幾何學都是指雙曲式幾何學及橢圓式幾何學而言,所以本書也祇論及這兩種幾何學.至於最近所謂非黎曼幾何學(Non Riemannian geometry)要用無窮小的平行移動(Infinitesimal parallel displacement)的觀念來講,這又是涉及高深部分,這裏也不提了.

本書承上海市務本女子中學教員王祖舜君及暨

南大學助教沈振年君襄助,得能早日完成,這是很感謝的.惟本書的系統全憑個人管見所擬,不周密處,在所難免,尙希讀者予以指正,俾再版時得以修改是幸.

民國二十四年五月天台陳藎民序於暨南大學.

羅波切夫斯基像

雙曲式幾何學發明者

羅氏爲俄國人,生於1793年,

死於1856年. 1826年發表虛幾何學

黎曼像.

橢圓式幾何學發明者.

黎氏爲德國人,生於1826年,
死於1866年.1854年發明黎
曼幾何學

非歐派幾何學

第一編 緒論

第一章 幾何學之眞諦

幾何學三字的來歷

§1. 幾何學命名的來歷,已不得其詳了.以現在所知道的,只是明徐光啓(1)翻譯幾何原本時候,譯 Geometry(2) 爲幾何;所以幾何兩字實由 Geo 音譯而來.我們中國所謂幾何學,在英國美國叫做 Geometry, 在法國叫做 Géométrie, 在德國叫做 Geometrie, 意大利叫做 Geometria,……各國命名雖各不同,總之都從希臘文 Geometria(3)一字蛻化而來.現在把這個字義分析起來講: Geo 的意義是"地"; Metria 的意義是"量";把他合起來講: Geometria 就是測地術.所以幾何學在初起的時候,不過是測地術的意思;後來經過許多數學家的努力探討,一天一天的進化,到了現在,遂成爲輝煌燦

---

(1) 見第二章 §4.

(2) Geometry 也有人譯爲形學,但是這個名詞不常用.

(3) 西洋文化發源於希臘,所以他們的科學名詞,有許多都從希臘文變來.幾何學在希臘文爲 γεωμετρια, 現爲閱者便於認識起見,用拉丁字母寫爲 Geometria.

爛的幾何學,遠非簡單的測地術可比了.

何謂幾何學?

§2. 幾何學和其他科學一樣,由許多簡單的和複雜的命題集合而成的;也和數學中其他各門一樣,是一部演譯的科學.一部幾何學,就是一串的命題.試將中學校幾何學教科書翻開一看,開端的就是公理(1),其次就是公法(2)又其次爲定理(3)和作圖題(4):這四種,我們統稱爲命題(5).幾何學的命題是用論理學的方法排列起來的.換句話說:卽後面的命題是根據前面的命題證明後而成立的;而前面的命題,又是根據更前面的命題證明後而成立的.我們想:照這樣的方法,卽以命題證明他命題的方法,到了最後,一部幾何學總有幾個開始的命題,因爲前面沒有命題再給他做證明的根據,所以不能證明,祇讓學者自己明白的.這種開始的,不能證明而祇可以讓學者自明的命題,我們叫做公理.又

公理

(1) Axiom. (2) Postulate. (3) Theorem. (4) Problem. (5) Proposition.

公理與公法,在從前是有區別的,而區別的方法有三種:

第一種區別法:公理與公法之不同,猶如定理與作圖題之不同一樣.

第二種區別法:公理是算術與幾何學公用的命題.如"等量加等量,其結果仍相等".這個命題在算術和幾何學上都通用的.公法僅用在幾何方面的命題.如"通過兩點可作一直線"這個命題,是僅用於幾何一方面的.

第三種區別法:公理是自明自眞的.公法雖然不是像公理那樣可以自明的,但是也可以不證明就承認他是眞的.近來數學家都祇用公理一個名詞來包括從前所謂公理及公法,並不像上邊那樣的區別了.

幾何學上所用的名詞也是用論理學的方法下以定義的. 即以簡單的名詞解釋繁複的名詞, 以繁複的名詞解釋更繁複的名詞. 換句話說: 就是那個繁複的名詞拿這個簡單的名詞來解釋, 這個簡單的名詞, 又拿別個簡單的名詞來解釋, 別個簡單的名詞又拿別個更簡單的名詞來解釋. 我們想這樣以名詞解釋名詞的方法, 往下推去, 一部幾何學總有幾個開始的名詞, 不能再解釋, 不能再下定義的. 這種不能再解釋, 再下定義的簡單名詞, 我們叫做幾何學上的基本概念[1]. 應用基本概念, 寫出一組十全的, 不相矛盾的, 各自獨立的公理[2]; 根據這組公理, 用論理學的方法, 演出一串的命題: 這一串的命題就是幾何學.

基本概念

§3. 由上面看來, 可知: 祇要有一組十全的, 不相矛盾的, 各自獨立的公理, 就可以演出一部幾何學來. 簡單的說, 祇要有一組完善的公理, 就有一部幾何學. 所以若有千百組不同的完善的公理, 就可以有千百種不同的幾何學. 但是在一百年前, 我們祇知道一種幾何學, 即歐几里得幾何學. 並且以爲除歐几里得幾何學

(1) Tundemental conceptions.

(2) 一組公理, 要是其中沒有一個公理能根據其他公理可以證明的, 我們就說這一組公理是各自獨立的. 反之: 要是其中有一個公理可以根據其他公理證明, 這個被證明的公理就失了公理的資格而變爲定理了. 而這組公理也不是各自獨立的了.

以外，不能再有其他幾何學.到了1830年，俄國算學家羅波切夫斯基[1]發表他的虛幾何學(即現在稱爲雙曲線幾何學是)纔知道有第二種幾何學；但是還不知道有第三種幾何學，到了1854年德國數學家黎曼[2]發現他的新幾何學，纔知道有第三種幾何學；但是還不知道有第四種或多至無窮種.幾何學的種類可以多至無窮，不過是近二三十年來的事情.

幾何學的種類可以多至無窮

(1) Lobatchevsky 看 38 頁

(2) Riemann 看 42 頁

第二章

歐几里得幾何學與歐几里得

歐几里得與幾何學要論

§4. 歐几里得[1]爲紀元前第三世紀上半期的希臘幾何學家. 大約生於紀元前315年, 死於紀元前255年. 至於確實的生死年月, 還沒有人能考查出來. 他曾編了一部幾何學,叫做幾何原本[2]因此希臘人就尊稱他爲"幾何原本的父". 其實在歐氏之前,如依波克萊脫[3]李昂[4]德稠[5]都編過幾何原本的;就時間講,歐氏並不是編釋幾何原本的創始人;不過他所編[6]的是集前人之大成. 不僅內容豐富而且組織也很嚴密; 所以後來的幾何學家都奉歐氏的幾何原本爲金科玉律. 自紀元前到於今二千餘年, 各國所用的幾何學教科書, 何啻幾千萬種; 但是本本都要落他的窠臼. 因此中學校

---

(1) Euclid. (2) Elements. (3) Hippocrates of chios. (4) Leon.

(5) Theudius.

(6) 歐氏的幾何原本,共計十五卷. 相傳:其後兩卷,係第二世紀幾何學家 Hypsicles 著的. 但是近來又有人考證出來: 第十四卷,係 Hypsicles 所續; 第十五卷係紀元後二三世紀的人所續的. 現在大家公認歐氏著的祇有十三卷. 明末萬歷年間, 意大利教士利瑪竇來華曾口譯幾何原本,前六卷由徐光啓筆記. 清咸豐年間, 李善蘭與偉利亞得續譯後九卷.

所用的幾何學就叫做歐几里得,而歐几里得不僅是幾何原本的作家,簡直是幾何學界的"至聖大成".他的名字也成爲幾何學的代名詞.在英國雖是一個小學生也知道歐几里得就是幾何學.但是現在幾何學的種類多了.像幾何原本這樣的幾何學,我們叫做歐几里得幾何學或歐派幾何學,其他與歐氏幾何學不同的幾何學都叫做非歐几里得幾何學,或非歐派幾何學.現在歐几里得祇可以做歐派幾何學的代名詞,不能再做幾何學的代名詞了.

歐几里得幾何學與非歐派幾何學

§5. 十五世紀以前,印刷術尙未發明,歐氏的幾何原本,經人展轉傳抄,頗有出入,因此後來印刷出來的版本也有許多種:在歐洲最著名的是1594年的羅馬版;1703年的奧斯福版;及1816年印於巴黎的希臘,拉丁,法蘭西三種文字並記版.最近經過科學的整理而翻印的,又有獅氏(1)與梅氏(2)的1883—1899年版;惟此版係希臘和拉丁文,因此海氏(3)又將此版譯成英文於1908年出版,分訂三册.海氏版或獅梅二氏的版,是現在一般人認爲幾何原本的標準的版本.

幾何原本的標準版本

原本的內容

§6. 幾何原本分爲十三卷.前六卷論平面圖的性質.七,八,九三卷論數之性質.第十卷論不可度量.後三卷爲立體幾何學.據海氏版本,第一卷開端是二十三

(1) Heiberg. (2) Menge. (3) Heath.

個定義,其次是五個公法和五個普通觀念[1]再其次就是根據定義公理公法演譯出來的命題.

平行線定義

§7. 平行線命題和平行線定義,對於非歐派幾何學的發明是有深遠的歷史和密切的關係的.現在爲便於以後查閱起見,由原本裏面摘錄於下:

原本中對於平行線所下的定義是"兩條直線同在一平面上,若各向兩端無窮的延長而永不相遇,則此兩直線叫做平行線"(原本卷一定義23.)

原本中關於平行線的命題有:"一直線與其他兩直線相交,若錯角相等;則此兩直線互相平行."(卷一命題27)"一直線與其他兩直線相交,若同位角相等,或同傍兩內角互爲補角;則此兩直線互相平行."(卷一命題28.)

歐氏因爲要說明上面兩個命題的逆命題,就是要證明:"一直線若與兩平行線相交;則錯角相等,同位角相等,同傍兩內角互爲補角"(卷一命題29)於是想出下面一個公理來作爲論證的根據:

"一直線與兩直線相交,若該直線之一傍,其兩內角之和小於兩直角;則兩直線無窮的延長必在此傍相交於一點"(據海氏版即第五公法).第五公法現在一般人

(1) Common notion 普通觀念係歐氏所用的名詞,但是希臘其他幾何學家都稱爲公理(axiom),所以現在一般人也用公理這個名詞了.

平行公理

都稱爲歐氏的平行公理.這個平行公理,因爲原本的版本不同,有人說是第十三公理(1),也有人說是第十二公理,也有人說是第十一公理;但是現在一般的人,以海氏的版本爲標準,就稱爲第五公理.

關於平行線的命題,在第一卷中還有下面幾個:

"若有兩直線各平行於第三條直線則此兩直線互相平行".(命題30.)

"通過已知直線外一點祇能作一條直線與已知直線平行".(命題31.)

"三角形的外角等於兩內對角之和,三內角之和等於兩直角".(命題32).

"若 $AB \parallel A'B'$,而且 $AB = A'B'$;則 $AA' \parallel BB'$ 而 $AA' = BB'$"(命題33)

---

(1) 在 Clavins 版中爲第十三公理, Simpson 稱爲第十二公理, Bolyai Tános 稱爲第十一公理.

第三章

歐几里得幾何學的公理

§8. 歐几里得所著的幾何原本,開端就是點,線,……等二十三個定義;其次就是十個公理(卽五個公理五個公法)又其次就是推演出來的命題.像這樣的編制,我們也覺得他是很妥當的;不過實際上,他所推演出來的命題,並不是僅以十個公理做根據的,還有其他公理做根據的.譬如 Pasch 公理[1] 和"直線的長是無窮的,"也暗中引爲推演的根據的.暗中引用論據,這是幾何原本的缺點.據現代幾何學家研究的結果:像歐派幾何學祇用十個公理做推演的根據,實在是不够的.德國幾何學家 D. Hilbert 所著的幾何原理[2] 和法國 A. Mac Leod 所著的非歐派幾何學[3].他們都把歐派幾何學所應有的基本概念及公理分爲五類,現在譯爲甲乙丙丁戊五類於下:

歐派幾何學的公理分爲五類

§9. 甲類: 結合公理[4].

甲類: 結合公理

(1) 參看本章§10公理乙$_4$. (2) The foundations of geometry.

(3) Introduction à la géometrie Non-Euclidienne.

(4) axioms of Connection.

§9.1. **基本概念甲.** 我們設想:幾何學上有三種東西,第一種叫做"點"(1)點以 A, B, C, D……等記號表之.第二種叫做"直線";直線是由點集合而成的,以 a, b, c……等記號表示之.第三種叫做"平面"平面也是由點集合成的,以 α, β, γ……等記號表示之.

我們有了點,線,面三種東西,於是再設想這三種東西有各種相互的關係,下面五類公理,就是規定他們的關係的.

§9.2 **公理甲$_1$** 若 A, B 為不同的兩點,則通過 A, B 可作一條直線,並且祇能作一條.

§9.3 **公理甲$_2$** A, B, C 三點若是不同在一直線上,於是通過 A, B, C 可以作一個平面,並且祇能作一個.

§9.4 **公理甲$_3$** 每一條直線至少有兩點存在;每一平面,至少有三點不在一直線上;在空間至少有四點,也不在一直線上,也不在一平面上.

§9.5 **公理甲$_4$** 若直線 a 有兩點在平面 α 上,則該直線 a 所有的點都在 α 平面上.

§9.6 **公理甲$_5$** α, β 兩平面,若有一點是公共的;則 α, β 至少還有一點是公共的.

---

(1) "點"既然是基本概念,我們就不能再拿別的名詞來解他的意義,所以什麼叫做點,這是不能回答的,要回答也祇有說:"點就是點,你把他想作有位置,無大小的東西"也好,如圓球的球也好,如圓環的圓周也好;祇須討論點的時候,對於點的概念始終一致就可以了.

§ 9.7 定理甲$_1$ 設有一直線a及一點A,若A不在a上;則通過a及A可作一平面,且祇能作一平面.

(證明) 設B, C爲直線a上面不同的兩點(公理甲$_3$),則通過A, B, C可作一平面α(公理甲$_2$).直線a既然有B, C兩點在平面α上,所以直線a完全在α上(公理甲$_4$).所以通過a和A的平面祇有一個.

乙類:次序公理

§ 10. 乙類 次序公理[1]

§ 10.1 基本概念乙$_1$ 直線上,A, B, C三點的位置都有一定的關係.幾何學上表示這種位置的關係,常用"介乎"[2]兩字.譬如表示A, B, C三點同在一直線上,其位置的關係,常用"B介乎A, C"或"B在A, C之間"一語表示之.本類公理就是規定這些位置的關係.

§ 10.2 公理乙$_1$ A, B, C三點同在一直線上.若B介乎A, C;則B也介乎C, A.

§ 10.3 公理乙$_2$ 若A, C爲直線上不同的兩點,則在該直線上至少有一點B在A, C之間;並且至少有一點D能令C在A, D之間.

〔注意〕 公理乙$_2$是說明:線段兩端之間有一點或數點存在,並且線段的兩端可以無窮的引長.

§ 10.4 定義乙$_1$ 設A, B爲直線a上面不同的兩點.於是A, B兩點及在A, B中間所有的點,總稱爲"線段

(1) Axioms of order. (2) between.

AB",並且用這個記號"(AB)"代表他.這個記號"(AB)"讀爲"線段 AB".直線 a 叫做 (AB) 的底線. A, B 兩點,叫做線段的兩端.在 A, B 中間的點,叫做線段的內部.通過 A, B 的直線,除 (AB) 的兩端及內部外,其餘的各點叫做線段的外部.

〔注意〕 依線段的定義,可知 (AB) 也可以寫爲 (BA).

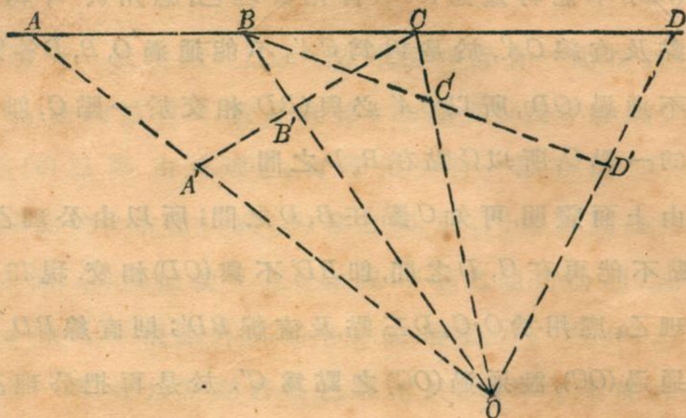
§10.5 **公理乙$_3$** 直線上任意三點,必有一點在其他兩點之間;且三點中祇有一點能在其他兩點之間.

§10.6 **公理乙$_4$** (卽 Pasch(1) 公理) 設 A, B, C 是不同在一直線上的三點. a 爲 ABC 平面上的直線(由公理甲$_2$ 通過 A, B, C 可作一平面).若 a 與 (AB) 相交,但是不通過 A 或 B, 或 C; 於是 a 若不與 (BC) 相交,必與 (AC) 相交;若不與 (AC) 相交,必與 (BC) 相交.

§10.7 **定理乙$_1$** 設 A, B, C, D 是直線上任意的四點,於是 (1) 若 C 在 A, D 之間, B 在 A, C 之間;則 C 在 B, D 之間, B 在 A, D 之間. (2) 若 C 在 B, D 之間, B 在 A, C 之間;則 C 在 A, D 之間.

(證明) 由公理甲$_3$, 在 AD 直線外至少有一點存在,現在命此點爲 O, 連結 OA, OB, OC, OD. 由公理乙$_2$, 在

(1) Pasch 是研究次序公理最早的幾何學家.公理乙$_4$ 完全是他研究出來的,所以也叫做 Pasch 公理.可參看他著的 vorlesungen über neuere geometrie, (Leipzig 1882)



第一圖

O, A 之間至少有一點存在,現在命此點爲 A'. 同理 O, D 之間至少有一點 D',連結 (CA') 及 (BD').

倘若 (CA') 通過 A 點,則由公理甲$_1$ CA' 與 CA 成爲一條直線,而 A' 在直線 CA 上面. 若是 A' 在直線 CA 上面,於是 AA' 與 CA 也成爲一條直線,而 O 點也在直線 CA 上面;但是原設 O 點不在直線 CA 上面,所以 CA' 不能通過 A 點. 依同樣道理. CA' 也不能通過 B 點或 D 點,更不能通過 O 點. 再依同樣理由,可知 (BD') 不能通過 A, C, D 或 O 點.

原設 B 點在 A, C 之間,並且由上面證明 (CA') 不通過 A, B, O 各點,也不能再與 (AB) 相交;所以由公理乙$_4$ 可知 (CA') 必與 (BO) 相交,設此交點爲 B'. 現在把公理乙$_4$ 應用於 O, A, D 三點及直線 CA';可知 CA' 已經通過 (OA)

及(AD),不能再通過(OD).再把公理乙$_4$應用於O, B, D三點及直線CA',於是因爲CA',不能通過O, B, D各點,也不通過(OD),所以CA'必與(BD)相交於一點C,卽原設的一點C,所以C點在B, D之間.

由上面證明,可知C點在B, D之間;所以由公理乙$_3$,B點不能再在C, D之間,卽BD'不與(CD)相交.現在把公理乙$_4$應用於O, C, D三點及直線BD';則直線BD'必定通過(OC),設通過(OC)之點爲C'.於是再把公理乙$_4$應用於O, A, C三點及直線BD',可知BD'不通過(OA);又應用於O, A, D三點及直線BD',可知(BD')與(AD)相交,但是(BD')與(AD)相交祇能有一點,所以這個交點就是原設的B點.所以B點在A, D之間.如此,則本定理的第一部分就完全證明了.至於第二部分也可以依同樣方法證明.

§ 10.8 定理乙$_2$ 假設直線a上面,有一點O是固定不動的,那麼a上面其他各點被O分爲兩羣,其性質如下[1]:

1. 若有兩點A_1, A_2是屬於同羣的,則O點在(A_1, A_2)的外部.

2. 若A_1, B_1兩點不是屬於同羣的,則O點在(A_1, B_1)的

(1) 這個定理曾經E. H. Moore首先證明,參看Transaction of The American Mathematical Society. 1902年, pp.142—156.

內部.

(證明)　在直線a上,除O點外,至少還有一點存在(公理甲$_3$)設此點爲O'.於是直線a的點被O及O'分爲(X), (Y), (Z)三羣.由公理乙$_2$每羣至少有一點存在.(X)羣的點能使O點在O'與(X)羣之間,而(Y)羣的點在O與O'之間;(Z)羣能使O'在O點與(Z)羣之間.由公理乙$_3$,直線a除O, O'兩點外,其他各點必屬於(X), (Y), (Z)三羣中之一羣;並且某點若是已經屬於(X)羣,卽不能再屬於(Y),或(Z)羣;若是已經屬於(Y)羣,卽不能再屬於(Z)或(X)羣;若是已經屬於(Z)羣,卽不能再屬於(X)或(Y)羣.現在命(X)羣所有的點爲(A)羣,命(Y), (Z)兩羣所有的點及O'點爲(B)羣.如此,則本定理所說直線a上兩羣的點,必定就是(A), (B)兩羣.現在再進一步,證明(A), (B)兩羣有下面(1), (2)兩種性質.

(1)　設A_1, A_2是(A)羣裏面的任意兩點,於是由上面,可知O點是在O'與A_1之間.現在比較A_1, A_2及O之位置於下:若A_1在A_2與O'之間,則A_1在O與A_2之間(定理乙$_1$);所以O點不在線段A_1A_2的內部.再說A_2若是在A_1與O'之間,則O點也不能在A_1與A_2之間;不然,A_2就要在O與O'之間了(定理乙$_1$),但是原設A_2不屬於(B)羣,卽A_2不在O與O'之間;所以O不在線段A_1A_2的內部而在(A_1A_2)的外部.

(2) 設 B_1, B_2 為 (B) 羣裏面任意兩點,於是依同樣道理,也可以證明 O 點不在 (B_1B_2) 的內部.現在設 A_1 是 (A) 羣裏面的一點, B_1 是 (B) 羣裏面的一點,於是 O 點在 (A_1B_1) 的內部.

§ 10.9 定義乙₂ 設 O, A 是不同的兩點,則通過 O, A 可作一直線 a, 而直線 a 上所有的點,被 O 分為兩羣,(§ 10.8 定理乙₂) 凡與 A 同羣的點,叫做半線 OA, 以 $\overrightarrow{OA}$ 表示之.這個記號"$\overrightarrow{OA}$"讀為"半線 OA",而直線 a 叫做"半線 OA 的底線".O 點叫做半線 OA 的原點.在底線 a 上面的點,除 O, A 兩點外,其他各點譬如 B 若在半線 OA 上面;我們就說"B 與 A 對於 O 為同傍".或 B 對於 O 為與 A 同傍.若 B 不在半線 OA 上面,但是在底線 a 上面,我們就說"B 與 A 對於 O 為不同傍".

§ 10.10 定理乙₃ 設平面 α 上有一直線 a; 於是該平面 α 上,除 a 所含各點外,其他所有的點都被 a 分為兩羣,其性質如下:

(1) 設有 A, B 兩點.若 A, B 是同羣的,那麼 (AB) 與 a 不相交.

(2) 若 A, B 是不同羣的兩點,那麼 (AB) 與 a 相交於一點.

(這個定理的證明與定理乙₂相似,所以就省略了)

§ 10.1 定義乙₃ 假設有一直線 a 與直線外一點 G,

則通過a, G可作一平面α. 於是平面α除a所含各點外,其他各點都被a分爲兩羣. 凡與G同羣的點,叫做半面,以(a, G)表示之. 這個記號"(a, G)"讀爲"半面a, G". 平面α叫做"半面的底面"直線a叫做'半面的原線". 半面a, G除a, G各點外,其他的點譬如F我們就說"F與G對於a爲同傍".

§10.12 **定理乙$_4$**　在平面α上,設有一直線a,由a上一點O引半線k. 若k不在直線a上,那麼k必在a之一傍.

(證明)　本定理祇須應用定理乙$_2$及定理乙$_3$卽可證明.

丙類: 疊合公理

§11. 丙類　疊合公理[1]

§11.1 **基本概念丙$_1$**.　$(AB)(A'B')$若是長短相等,就可以疊合在一處成爲一個線段. 像這樣的關係,在幾何學上叫做"(AB)能疊合於$(A'B')$". 以記號表之$(AB) \equiv (A'B')$. 這個記號讀爲"(AB)能疊合於$(A'B')$".

§11.2 **公理丙$_1$**　設A, B是直線a上面的兩點,A'也是a上面的一點,或另一直線a'上面的一點;於是在a或a'上,A'點之一傍,必有一點B'能合$(AB) \equiv (A'B')$並且祇有這一點B'能適合於這個條件.

〔注意〕 **公理丙$_1$**是允許線段引長,並且可以無窮的

(1)　axioms of congruence.

引長.

§11.3 **公理丙$_2$** 凡線段都可以與他自己疊合,即 $(AB)\equiv(AB)$ 或 $(AB)\equiv(BA)$.

§11.4 **公理丙$_3$** 若 $(AB)\equiv(A'B')$, $(AB)\equiv(A''B'')$; 則 $(A'B')\equiv(A''B'')$, 或 $(A''B'')\equiv(A'B')$.

§11.5 **公理丙$_4$** 設 (AB), (BC) 兩線段都是同在一條直線 a 上面, 他們除 B 點外, 並沒有其他公共點; 再設 $(A'B')$, $(B'C')$ 兩線段也是同在直線 a 上面, 或同在另一直線 a' 上面, 他們除 B' 外, 並無其他公共點: 於是若 $(AB)\equiv(A'B')$ 及 $(BC)\equiv(B'C')$, 則 $(AC)\equiv(A'C')$.

§11.6 **定理丙$_1$** 若 $(AB)\equiv(A'B')$, 則 $(A'B')\equiv(AB)$.

(證明) 由原設 $(AB)\equiv(A'B')$, 由公理丙$_1$ $(AB)\equiv(AB)$

$\therefore\ (A'B')\equiv(AB)$ (公理丙$_3$).

§11.7 **定義丙$_1$** 在平面 a 上,取一點 O. 由 O 引兩條半線 h, k. 由定理乙$_3$可知平面 a 被 h, k 分為大小兩部分. 小的部分我們給他一個名詞, 叫做內部, 大的部分叫做外部. 合 k, h 及內部, 總稱之曰"角". O 點叫做"頂角". h, k 叫做"角的兩邊"或"角邊". 因此內部又叫做"角的內部" 外部叫做"角的外部". 角的大小以記號 (h, k) 表示之. 這個記號"(h, k)"讀為"h, k 角", 或"角 h, k".

由這個定義,可知 (h, k) 與 (k, h) 兩個記號都是代表一個角,所以一個角 h, k, 可以寫為 (h, k) 或 (k, h).

§11.8 基本概念丙$_2$ (h, k)和(h', k')必定有一種大小的關係.當(h, k)和(h', k')可以疊合的時候,就用這記號$(h, k) \equiv (h', k')$表示之.這個記號讀爲"h, k角能疊合於h', k'角".

§11.9 公理丙$_5$ 設(h, k)爲平面α上之一角,O'爲α上之一點,或另一平面α'上之一點.現在由O'引一半線h',於是在h'之一傍必定有一條半線k'能令$(h, k) \equiv (h', k')$並且祇有一條半線k'適合於這個條件.

§11.10 公理丙$_6$ 凡角都可以與自己疊合;即$(h, k) \equiv (h, k)$,或$(h, k) \equiv (k, h)$.

§11.11 公理丙$_7$ 若$(h, k) \equiv (h', k')$, $(h', k') \equiv (h'', k'')$;則$(h, k) \equiv (h'', k'')$.

§11.12 定理丙$_2$ 若$(h, k) \equiv (h', k')$,則$(h', k') \equiv (h, k)$.

(這個定理的證明與定理丙$_1$相似,故略.)

§11.13 定義丙$_2$ 設A, B, C是不同在一直線上的三點,於是連結A, B, C三點可得(AB), (BC), (CA)三線段.這三個線段所成之形,叫做"三角形"A, B, C三點,叫做三角形的角點,或角頂.(AB), (BC), (CA)叫做三角形的邊.由A點通過B, C各引一半線h, k;於是(h, k)叫做(AB), (AC)兩線段的夾角,或BC的對角,普通以$\angle BAC$或(AB, AC)表示之.三角形ABC以$\triangle ABC$表示之.

§11.14 公理丙$_8$ 若是三角形ABC和三角形$A'B'C'$

有了這三種關係：$(AB)\equiv(A'B')$，$(AC)\equiv(A'C')$，$\sphericalangle BAC\equiv\sphericalangle B'A'C'$；那麼必定還有這兩種關係：$\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle A'B'C'$，$\sphericalangle ACB\equiv\sphericalangle A'C'B'$.

〔注意〕 公理丙$_3$並沒有說ABC，$A'B'C'$兩三角形可以疊合，至於這兩個三角形可以疊合尙須在第六章定理17中證明.

丁類：平行公理

§12 **丁類：** 平行公理[1]（也叫做歐几里得公理）.

§12.1 **公理丁** 在平面α上，設有一直線a及直線外一點B.通過B點可作一直線b不與a相交；並且通過B點不與a相交之直線祇有這一條直線b.

§12.2 **定義丁** 直線b叫做直線a的平行線.

戊類：連續公理

§13. **戊類：** 連續公理[2]（也叫做Dedekind[3]（公理）

§13.1 **公理戊** 線段AB上面的點可分爲(X)，(Y)兩羣，且有下面三種性質：

(1) (AB)上面所有的點必屬於二羣中之一羣；並且祇能屬於兩羣中之一羣，不能同時屬於(X)羣，又屬於(Y)羣.

(2) 線段AB之一端A，若屬於(X)羣，則B端屬於(Y)羣.每羣各有許多點存在.

(3) 若(X)羣中除A點外，還有一點A'；(Y)羣中除

(1) Axiom of Paralleles 或 Euclids' axiom.

(2) Axiom of continuity.

(3) Dedekind 德之近代算學家生於1831年死於1918年.

B 點外,還有一點 B';則 A' 在 A 及 B' 之間.

由此可知 (AB) 上面必有一點 C 能分 (AB) 上面的點爲兩羣;而 C 點屬於兩羣中之一羣. A, C 中間的點同屬於一羣;C, B 中間的點又同屬於其他一羣.

§14. 上面五類公理不僅各自獨立,不相矛盾,並且也是十全的.這可以參考 Hibbert 所編的幾何原理和 MacLeod 所編的非歐派幾何學就知道了.至於根據這五類公理如何演出歐氏幾何學來,可參考 Habsted 所編的 Rational Geometry 也就知道了.

第四章

非歐派幾何學的公理

§15. 前章的五類公理是一組完善的公理,由他演譯出來的幾何學.是歐氏幾何學.這些話前面都已說過了.現在我們要問:若是把這五類公理換了幾個新的,與原來不同的,或簡直與原來相矛盾的公理.他們還能成爲一組完善的公理麽?根據第一章的公理論,這自然是可能的;不過新演出來的幾何學不是歐几里得的及是非歐几里得的了.現在舉 A, B, C 三個例如下:譬如五類公理中,

(A) 要是把丁類平行公理換爲:"通過已知直線外一點可作兩條直線與已知直線平行."而其餘公理都不變更,這樣仍舊是五類公理,也仍舊是一組完善的公理.(1) 根據這一組公理演出來的幾何學叫做變曲線幾何學.(2) 這一種幾何學是俄國數學家羅波切夫

變曲線幾何學

踳圓幾何學

(註 1) 參看 MacLeod 編的 Introduction à la géométrie non-euclidienne p.(30). (註 2) Hyperbolic geometry.

斯基[1]和匈牙利數學家龐禮愛約翰.[2] 兩人於1830年左右,不約而同發明的;所以也叫做羅波切夫斯基龐禮愛幾何學,又因羅氏所發表的內容最完備,也單稱爲羅波切夫斯基幾何學或羅氏幾何學.

(*B*) 要是把丁類平行公理換爲:"通過已知直線外一點不能作一直線與已知直線平行."即"同在一平面上的兩直線,至少有一點是公共的".而其他四類又按着下面的標準修改:"直線的長是有限的".即"由直線上任意一點*A*,向着一端延長,要是繼續的永久的延長就仍舊回到出發點*A*來".即"直線是閉線"好像球面上大圓一樣,他的長是有限的,但是無涯際,無止境的.經過這樣變更後,所得的一組公理仍舊是完善的.[3] 由他演譯出來的幾何學就是橢圓幾何學[4] 這一種幾何學是德國算學家黎曼[5] 於1854年發明的,所以也叫做黎曼幾何學或黎氏幾何學.

(*C*) 要是取消丁類平行公理,將戊類連續公理塡

(1) Lobatchevsky 1793—1856. (2) Bolyai Tános 1802—1860. (3) 參看 Mac Leod 的非歐幾何學, p.31. (4) Elliptic Geometry 由解析幾何,可知雙曲線有兩個無窮遠點,拋物線祇有一個無窮遠點,橢圓沒有無窮遠點,德國幾何學家 Klein 因爲羅氏幾何學的直線有兩個無窮遠點,歐氏幾何學的直線祇有一個無窮遠點,黎曼幾何學沒有無窮遠點,此種情形恰與雙曲線,拋物線,橢圓相似,所以就把羅氏,歐氏,黎氏三種幾何學名爲雙曲線幾何學,拋物線幾何學,橢圓幾何學. (5) Riemann. 1826—1866.

入丁類,删去公理丙$_1$的注意,並且把公理丙$_1$改爲:"設(AB)及$(A'B')$爲已知兩線段,則(AB)與$(A'B')$必有下面三種關係之一種:

1. $(AB)\equiv(A'B')$.

2. 在A, B中間必有一點C,且祇有一點C能使$(AC)\equiv(A'B')$.

3. 在A', B'中間必有一點C',且祇有此點C'能使$(AB)\equiv(A'C')$."

經過這樣修改後,所得甲,乙,丙,丁四類一組的新公理,在歐氏,羅氏幾何學的公理中,仍舊是眞的;所以仍舊是一組不相矛盾的,各自獨立的公理;不過因爲公理的數目減少了,所以不是十全的.因爲他不是十全的,所以由他推演出來的幾何學不是一種的幾何學,他是包含歐氏,羅氏,黎氏三種幾何學的,因此這一種幾何學叫做有節制的三相幾何學,或簡稱爲三相幾何學.

三相幾何學

§16. 由上面可知:三相幾何學的公理是由歐氏,羅氏幾何學的公理摘出來的;所以三相幾何學的定理,在歐氏,羅氏幾何學中都是眞的.三相幾何學的公理丙$_1$沒有說直線可以延長到無窮遠,而歐氏,羅氏的公理丙$_1$都允許直線可以延長到無窮遠,因此三相幾何學不能代表歐氏,羅氏空間的全部.而祇能代表其

三相幾何學與歐氏羅氏幾何學

一部份；也因此三相幾何學的直線之長不必有節制，其定理在歐氏，羅氏幾何學中都是眞的.

三相幾何學與黎氏幾何學

三相幾何學的公理與黎氏幾何學的公理. 兩者不同之處: 除前者無平行公理，後者有平行公理以外，還有線段的延長，前者祇允許延長，而不說可以無窮的延長，或無止境的延長，而後者說可以無止境的延長；所以祇要線段的延長有節制，即直線之長有節制，三相幾何學的公理可以包含於黎氏幾何學的公理中. 因此三相幾何學的直線，祇要其長有節制；他的定理在黎氏幾何學中也是眞的；而三相幾何學可以代表黎氏空間的一部份. 由此可知三相幾何學在有節制的空間內，是一體三相的，可以代表歐氏，羅氏，黎氏三種幾何學空間的一部份的.

在歐氏，羅氏幾何學中的公理中，如公理丙$_1$是允許線段可以向兩端延長，並且可以無窮的延長. 在黎氏幾何學的公理中，也是允許線段向兩端延長，但是無論如何延長，直線的長有一定. 在三相幾何學公理中，也是允許線段延長，但是並沒有說可以或不可以延長到無窮之遠，祇是允許延長；所以三相幾何學的線段，祇要他的延長有節制，他就是歐氏，羅氏，黎氏三種幾何學的線段，而他的空間，也是歐氏，羅氏，黎氏三種空間

三相幾何學是代表三種幾何學的一部分空間

公共的一部份.這一部份空間好像是被一個閉曲面(1)圍繞着的,在這閉曲面以內的部分就是三相幾何學的空間(在這閉曲面的面上或外部就不屬於三相幾何學的空間了),所以三相幾何學應當稱為有節制的三相幾何學.

§17. 上面說過:三相幾何學的公理,雖然是不相矛盾的,各自獨立的,但是不是十全的.因為他不是十全的,所以由他演出來的幾何學也不是單獨的,一定的,他是包含歐氏,羅氏,黎氏三種幾何學的.因此我們就稱他為三相幾何學.羅氏,黎氏兩種幾何學的公理都是完善的,所以推演出來的幾何學也都是單獨的,一定的.一是雙曲線幾何學,一是橢圓幾何學,這兩種幾何學,在非歐派幾何學中,內容最豐富,與歐氏幾何學也最相似最接近;所以現在一般所謂非歐派幾何學都是指這兩種幾何學或三相幾何學而講的.本書所研究的非歐派幾何學因此也祗限於此.

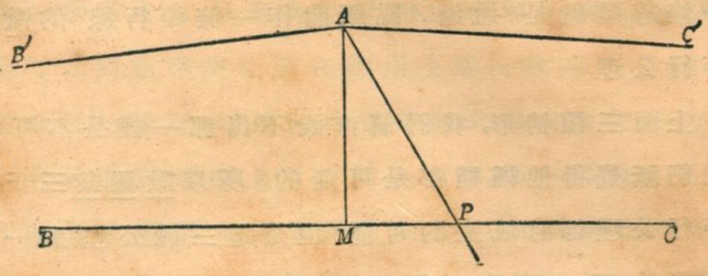
非歐派幾何學即羅氏黎氏幾何學

三種平行公理可以能成立?

§18. 歐,羅,黎三氏幾何學的公理都在前面說過,其中不同之處,最重要的就是平行公理,即"通過直線外一點,作平行線歐氏公理可作一條;羅氏公理可作兩線;黎氏公理一條也不能作"這三種情形都有成立的可能麼?要知道他的究竟,須看下面的說明.

設有一直線BC,由BC外面一點A作AM垂直於BC.

(1) Closed Surface.



第 二 圖

在 BC 上面任取一點 P, 連結 AP, 於是 AP 與 BC 相交於 P 點. 現在若令 P 點沿着 BC 向 $\overrightarrow{MB}$ 或 $\overrightarrow{MC}$ 方向移動, 則 AP 與 BC 的關係就有下面三種不同的情形, 這三種情形, 都有成立的可能:

1. 無論 P 點向着 $\overrightarrow{MB}$ 或 $\overrightarrow{MC}$ 方向移動, 移動若干距離以後, P 點仍舊回到原位置來, 即 AP 與 BC 永遠相交, 這就是"通過 A 點不能作平行線"的黎氏公理.

2. 無論 P 點向着 $\overrightarrow{MB}$ 或 $\overrightarrow{MC}$ 移動任何遠的距離, P 點也不能回到原位置; 迨 P 點移到無窮遠處, PA 就移到一個極限的位置如 AB' 或 AC' (此時 AB', AC' 各與 BC 相交於無窮遠處)的位置, 於是 AB' 與 AC' 即平行於 BC 的平行線. 這兩條平行線, 也許同在一條直線上, 也許不同在一條直線上. 要是不同在一條直線上, 這就是"通過 A 點可作兩條直線 AB', AC' 平行於 BC"的羅氏平行公理.

3. 要是 AB' 與 AC' 同在一條直線上, 即 AB' 與 AC' 為

一條線,這就是"通過A點祇能作一條平行線"的歐氏平行公理.

上面三種情形,我們簡直說不出那一種是不可能,我們祇覺得他種種都是可能的;所以歐,羅,黎三氏的平行公理都有成立的可能.但是這三種公理,那一種是眞的,那一種是假的呢?依我們的經驗,一定以爲歐氏的公理是眞的,其餘兩種公理是假的,其實並不如此.法國算理學家邦家海[1]說"幾何學的公理並不是由經驗得來的,譬如幾何學上所謂直線,圓等概念,都不是經驗上所有的"幾何學的公理旣然是超乎經驗的,怎麼可以用經驗來判斷他的眞假呢?所以幾何公理的眞假是不能拿經驗來判斷的.幾何公理不過是一種約言或變相的定義.[2] 許多定義(或公理)之中我們可以用經驗來選擇其一個,使他不和其他已經有的公理發生矛盾;但是不能用驗經來判斷誰眞誰假.所以問上面三個平行公理那一個是眞的,這是沒法回答的.那麼歐,羅,黎三種幾何學那一種是眞的呢?邦家海又說:"幾何學無所謂眞假,要問那一種幾何學是眞的,這簡直是無意識,無意思的問話"我們問這幾種幾何學的眞假,這猶之乎問毛筆與鉛筆,那一種筆是眞的

那一種幾何學是眞的?

(1) 看 Poincarê 的 La Science et l' Hypothèse 65—66 頁.

(2) 看 Poincarê 的 La Science et l' Hypothèse 66—67 頁

筆,一樣沒意思.鉛筆與毛筆都是筆,無所謂眞假.我們祇可以問鉛筆與毛筆在應用上那一種來得方便?寫起來那一種好寫?幾何學也是如此,祇有方便不方便,無所謂眞假.那麼上面三種幾何學,那一種最方便呢?邦家海說"歐氏幾何學最方便.第一:因爲他比別的幾何學來得簡單,所謂簡單.不祇是我們腦筋的習慣或直覺的經驗覺得他是簡單;實在是他自己的組織來得簡單,好似一次多項式要比二次多項式來得簡單一樣.也像平面三角公式要比球面三角公式來得簡單一樣.第二:因爲他同我們周圍的自然物的性質來得接近些".

歐氏幾何學在日常生活上用起來,固然要比羅氏黎氏幾何學來得方便;但是在相對論上,就有許多地方要用羅氏幾何學來得方便了.

第五章

非歐派幾何學略史

§19. 要徹底的明白非歐派幾何學的眞相,就不可不知道他的歷史;但是他的歷史決不是數頁或數十頁可以寫得完的.[1] 以本書的篇幅祇能把他所以發生的起源和進展成立的大概情形約略說一說.

非歐派幾何學的發明,爲二千年來幾何學家求證歐氏的平行公理之結果;所以我們現在要講非歐派幾何學的歷史,就要從歐氏的平行公理講起;更要從古代幾何學家對於公理的態度講起.

古代幾何學家對於公理的態度

古代幾何學家也知道:幾何學的公理和幾何學是很有關係的;所以對於公理也是十二分注意的,他們所謂公理,就是大家公認的道理.這個道理,各人自己可以明白,不必待證明而後明白的;並且這個道理,不證明也不會錯的;他們對於幾何原本的公理,覺得都

(1) 要知道非歐幾何學詳細的歷史,可看 Bonola 的 La Geometria non-enclidea 英文譯本: Bonolás non-Euclidean Geometry.

是很明白的,不必證明的;惟其中平行公理似乎欠明白,似乎需要證明.所以他們就想根據其他命題證明他.——其實,平行公理是不能根據其他公理證明的.

非歐派幾何學史分爲三個時代

自有幾何原本以來,不知道有多少數學家要想證明歐氏的平行公理.在十七世紀以前,大家的思想是呆板的,祇想要證明平行公理,所以除了失敗以外,並無其他結果:這是平行公理試證時代.到了十八世紀,一方面因爲前人的研究,已經到了很深的程度了,一方面思想也活潑了,於是添加了新的假設來求證.雖然求證也失敗了,但是因爲添加新的假設,而得到許多零星的非歐派幾何學的定理.這些定理在當時數學家還不知道是非歐派幾何學的定理.所以十八世紀時候,可以說是非歐派幾何學胚胎時代.到了十九世紀,大家對於這個問題的研究,就一天一天的精深了,各種非歐派幾何學的研究也成爲有系統了,於是各種非歐派幾何學就陸續的成立起來,爲數學界放一異彩.所以十九世紀,可以說是非歐派幾何學誕生時代.以上三個時代再分別說明於下.

第一節　平行公理試證時代

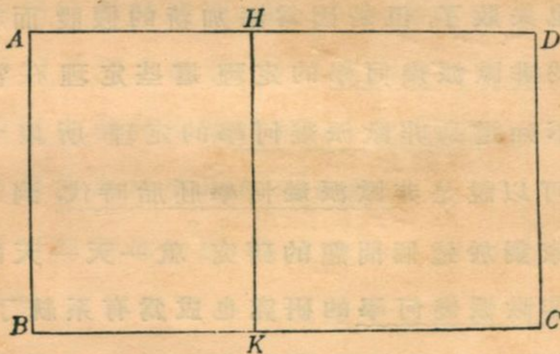
平行公理試證時代

§ 20. 十七世紀以前,是平行公理試證時代.在這個時代,如紀元前第一世紀的數學家 Posidonius, 紀元後

第二世紀的數學家 Ptolemy, 第五世紀的 Proclus 第十三世紀的 Nasir-Eddîm, 第十六世紀的 Commandino 及 Clavio, 第十七世紀的 Cataldi, Berelli, Giordano Vitale, Wallis, 都是試證平行公理而失敗者.

Posidonius 想要證明平行公理, 就把平行線定義改為:"等距離的兩條直線, 叫做平行線,"(此定義係受幾何原本命題33的影響而來.)

Giordano Vitale 應用 Posidonius 的平行線定義, 試證平行公理, 雖然失敗了; 但是他曾演出一個定理與後



第三圖

來的試證者, 頗有關係, 所以也特別寫出來:

"設 $ABCD$ 為四邊形, $AB=CD$; B,C 兩角都是直角. 由 AD 邊上任意一點 H 作 $HK \perp BC$. Giordano 曾證明: (1) A,D 兩角相等, (2) 若 $HK=AB$, 則 A,D 兩角各為直角, 並且 AD 離 BC 為等距離".

第二節　非歐派幾何學胚胎時代

非歐派幾何學胚胎時代

§21. 十八世紀是非歐派幾何學胚胎時代在這個時代,像意大利的薩雪禮[1],瑞士的倫柏德[2],法國的勒霜德[3],都是非歐派幾何學種子的播種者.他們因為要試證平行公理,而不知不覺中告訴了我們:平行公理是不能根據歐氏其他的公理證明的;也在不知不覺中引出兩種非歐派幾何學的公理及定理來.這些公理和定理,在他們自己還想不到是非歐派幾何學誰知道非歐派幾何學的雛形就從此造成了.現在分述這時代三個重要數學家薩雪禮,倫柏德,勒霜德於下.

薩氏三種假設

§22. 薩雪禮一方面受"平行線是等距"的影響,一方面又覺得這個觀念不妥當,於是他再設想:

在 BC 上作兩條等長的垂直線 AB, CD. 若連結 AD 就成為 $ABCD$ 四邊形,這個四邊形叫做薩氏四邊形.在薩氏四邊形上,A, D 兩角相等,這是很容易證明的;但是他們都是直角嗎?薩氏想:他們不一定是直角,他們應當有三種的可能,即:

(1)　A,D 都是直角,這個假設,薩氏叫做直角假設.

(2)　A,D 都是鈍角.這個假設,薩氏叫做鈍角假設.

(1) Gerolamo saccheri (1667—1733)

(2) Lambert (1728—1777)

(3) Legendre (1752—1833)

由三種假設所推得的定理

(3) A,D 都是銳角,這個假設,薩氏叫做銳角假設.

§23. 薩氏於 1733 年出版一書: Euclides ab omni Vindicatus 專論上面三種假設.他這本書的目的是想證明銳角,鈍角兩種假設都是不對,祇有直角假設是對的,(因爲他信服平行公理是對的).在他這本書裏,除第十四定理證明鈍角假設不能成立,及第三十三定理證明銳角假設也不能成立外,還證明許多其他定理,這些定理在非歐派幾何學上都是很有價值的,如:

"若直角假設是對的,則 $BC=AD$"

"若鈍角假設是對的,則 $BC>AD$".

"若銳角假設是對的,則 $BC<AD$".

"若 $BC=AD$, 則 A,D 都是直角".

"若 $BC>AD$, 則 A,D 都是鈍角".

"若 $BC<AD$, 則 A,D 都是銳角".

"若直角假設是對的,則三角形三內角之和等於兩直角"

"若鈍角假設是對的,則三角形三內角之和大於兩直角"

"若銳角假設是對的,則三角形三內角之和小於兩直角"

"若直角假設是對的,則通過已知直線外一點祇能作一條直線與已知直線平行."

"若鈍角假設是對的,則通過已知直線外一點不能作任何直線與已知直線平行 (卽在平面上任何兩直線都是要相交的)".

"若銳角假設是對的,則通過已知直線外一點可作許多直線與已知直線平行".

"離已知直線等距離的軌跡,在直角假設之下,是兩條直線與已知直線平行".

"離已知直線等距離之軌跡,在鈍角假設之下,是兩條曲線背着已知直線而曲的".

"離已知直線等距離的軌跡,在銳角假設之下,也是兩條曲線,但是向着已知直線而曲的".

倫柏德的三種假設

§24. 十八世紀中葉,瑞士數學家倫柏德也設想一個四邊形.這個四邊形有三個角都是直角的 (這樣四邊形叫做倫氏四邊形或三直角四邊形),但是第四角是不是直角呢?他想:這第四角不一定是直角,應當有三種假設:(1)直角假設,(2)鈍角假設,(3)銳角假設.倫柏德的假設,雖然和薩雪禮相似;但是他的研究要比薩氏更精深一些.他知道:鈍角假設在球面幾何上可以成立的;銳角假設在虛半徑的球面 (Imaginary sphere) 上可以成立的,在虛半徑的球面上可以找出一個絕對不變的長來作爲測長的單位;並且證明:

"倘若承認鈍角假設是眞的,則三角形面積的大小

與三角形的角盈(1)成正比例".

"倘若承認銳角假設是眞的,則三角形面積的大小與三角形的角朒(2)成正比例".

勒霸德的二種幾何學

§25. 十八世紀末葉法國數學家勒霸德,不用歐氏的平行公理祇根據歐氏其他公理和定義演出許多定理來.其中有一個很重要的定理是:"三角形三內角之和不能大於兩直角".這個定理就是告訴我們:歐氏幾何學的公理要是把平行公理除外,就包含兩種幾何學,一是三角形三內角之和等於兩直角;一是三內角之和小於兩直角.

第三節 非歐派幾何學誕生時代

非歐幾何學誕生時代的四個時期

§26. 從十九世紀一直到現在可以算是非歐派幾何學誕生時代,在誕生時代,因爲各發明家所用爲研究的方法不同,又可以分爲四個時期.第一時期就是高斯(Gauss 1777—1855),羅波切夫斯基,(1793—1856)龐禮愛(1775—1856)時期,他們是用綜合法(卽初等幾何的方法)發見雙曲線幾何學的.第二時期就是黎曼(1826-

(1) 三角形三內角之和大於兩直角的時候,由三內角之和減去兩直角,所剩下來的角度,叫做三角形的角盈(Excess).

(2) 三角形三內角之和小於兩直角時候,由兩直角減去三角形三內角之和,所剩下來的角度,叫做三角形的角朒(Defect).

1866) 海姆霍芝 (Helmholtz 1821—1894) 蘇斐禮 (Sophus Lie), 裴兒脫米 Beltrami 1835—1900) 時期 他們是用微分幾何的方法來研究非歐派幾何學的.第三時期就是葛萊 (Cayley 1821—1895) 時期.他是用純正投影幾何學的方法來研究非歐派幾何學的.第四時期就是柏吹 (Pasch), 希裴脫 (Hilbert), 批霞娜 (Peano) 批禮 (Pieri 1860—1904), 魏勃然 (Veblen) 時期.他們把何幾學看作是:根據一組完美的公理,用論理學的方法演譯出來的一串命題現在爲節省篇幅起見祇將雙曲線與橢圓兩種幾何學的發明者:羅波切夫斯基,龐禮愛,黎曼,三人分述於下.

§27. 十九世紀初葉,各國數學家對於平行線已漸漸的研究到精深了.如高斯,羅波切夫斯基,龐禮愛約翰,都不約而同的覺得除歐几里得幾何學以外,還有一種幾何學:通過已知直線外一點可作兩條平行線與已知直線平行;並且三角形三內角之和小於兩直角.這種幾何學要比歐氏幾何學廣博.歐氏幾何學不過是此種幾何學的特例而已.

高斯 §28. 高斯雖然沒有專書出版討論非歐派幾何學,但是從他的信札裏,知道:他在 1820 年左右已經有許多非歐派幾何學的定理;並且對於非歐派幾何學的觀念,在那時候也十二分的清楚了.現在所用的非歐

派幾何學這個名詞就是他定的.(1)

羅波切夫斯基 §29. 羅波切夫斯基(Nicolans Lobatchevsky)是 Kasan 大學數學和物理學教授. 他研究平行線是從 1815 年起的.讀他編的幾何學講義(2), 知道:他從1823年以後.就研究他的新幾何學了.到了 1826 年,他在大學數理學會演講幾何學原理大綱(3),在這大綱裏,敍述他有一種新幾何學,叫做虛幾何學 Imaginary geometry);要比歐氏幾何學來得廣博: 通過已知直線外一點可作兩條直線與已知直線平行;三角形 內角之和常小於兩直角 1829 年到 1830年,羅氏出版幾何學原理這是根據從前的大綱再加以新的理論的.所以我們要是不承認 1826 年是他的發明雙曲式幾何學的一年,就應當承認 1830 年是他完成雙曲式幾何學的一年,他的幾何學原理約計七十頁,前七節都是平常的點線面,距離 …… 等定義,第八節是關於平行線的性質,其大要如下:

"我們已經知道三角形三內角之和是不能大於兩

(1) 高斯於 1824 年十一月八日寫信給 Taurinus 就用非歐幾何學這個名詞的. (2) 幾何學講義是1823年整理完全畢的,當時保存在 Kasan 大學,並沒有出版,也沒有人注意,到了1898年經人無意中發覺了,又遲到 1909 年付印. (3) Exposition succincte des Principles de la géomdtrie avec une dêmonstration Rigoureuse du Théorême des parallèles. 此稿並沒有付印,也早已失落了.

直角的,(Legendre 早已證明)所以三角形三內角之和有兩個假設:(一)等於兩直角,(二)小於兩直角.等於兩直角的假設的幾何學,就是歐派幾何學這是適合於實用的.小於兩直角的假設的幾何學,可以叫做虛幾何學.這虛幾何學要比歐派幾何學來得廣博,所以學起來也要難一些".

"無論在虛幾何學上,或歐派幾何學上,一直線與兩直線相交,若同傍兩內角之和等於兩直角;則此兩直線是永遠不相交的"

"在平面上,通過已知直線外一點的直線,可以分為兩羣:一羣是和已知直線相交的,一羣是和已知直線不相交的.這兩羣直線分界的兩條直線,就是虛幾何學上的兩條平行線"

"由已知直線 a 外一點 P,至 a 作垂線 PM.設 PM 之長為 p.令這記號 $F(p)$ 代表 P 點的平行線與 PM 所夾的角.於是就很容易證明:在歐氏幾何學上 $F(p)$ 永遠等於 $\frac{\pi}{2}$;在虛幾何學上 $F(p)$ 的大小,隨 p 的長短而變的.要是 p 漸漸的減少,減少到零,則 $F(p)$ 就漸漸的增加到 $\frac{\pi}{2}$.倘若 p 是負的,則 $F(-p)=\pi-F(p)$.要是 p 漸漸增加,增加到無窮大;$F(p)$ 就漸漸的減少,減少到零".

"平行線在虛幾何學與歐派幾何學上,都有下面幾種性質:

(1) 通過兩平行線的兩平面所交的直線平行於兩平行線.

(2) 兩條直線各與第三條直線平行,則此三條直線互相平行.

(3) 三個平面相交的三條直線,要是互相平行,則此三平面所夾之角之和等於兩直角".

羅氏的著作

§30. 羅氏對於雙曲式幾何學的著作是很豐富的除了上面巳經說過的兩種外,

1853年有: Imaginary geometry.

1836年有: The applications of the imaginary geometry to some integrals.

1837年有: Géométrie imaginare.

1838—1838 年有: New principles of geometry, with a clemplete theory of parallels

1840年有: Geometrische untersuchungen zur theorie der parallelinien

1855年有: Pangéonétrie.

這本泛幾何學(Pangéométrie)是羅氏死的前一年的作品,也是他的新幾何學的精粹. 當時羅氏的眼巳經失明了,所以這本書是他口授付印的.

龐禮愛約翰的絕對幾何學

§31. 龐禮愛約翰(Bolyai-jános 1802—1860)是龐禮愛發克(Bolyai Farkes 1775—1856) 的兒子. 發克在德國葛

庭根(Göttingen)大學做學生時候(1796—99)就研究平行線了. 1804 年把他所著的平行線論送給高斯看. 高斯指出他裏面所證:"離一直線等距離的直線"一節是:"似是而非的". 於是發克又繼續研究. 約翰受他父親的影響在維也納 (Vienna) 工程學校學生時候,(1817—1822) 也就研究平行線了. 他起初也和從前數學家一樣,先求證平行線公理,後來研究得精深了,纔發現一種新幾何學,就是他自命爲絕對幾何學(1),在 1823 年他推演出這個公式: $l^{-\frac{a}{k}}=\tan\frac{\pi(a)}{2}$ 以後,對於絕對幾何學的性質就十分的明瞭了;但是彼時還沒有經過有系統的整理. 所以遲到 1832 年纔把絕對幾何學附印在他父親所著的 Tentamen 後面. 現在摘其要點如下:——

(1) 平行線的定義: 設 AM, BN 是兩條直線同在一平面上的. 若 AM 與 BN 有下面兩種關係:

(a) 凡通過 A 點的直線在 BAM 角內的都與 BN 相交.

(b) 但 AM 與 BN 不相交.

那麼我們就說: AM 平行於 BN 或 AM 漸近於 BN 以記號表之卽 $AM \parallel\!| BN$.

約翰常用"平行"(Parallel)兩字和這個記號"‖"表示

(1) Absolute Geometry.

兩條直線等距離的意思:又用"漸近"(Asymptote)兩字和這個記號"Ⅲ"表示他自己所說的平行的意思.

(2) 無窮大的球和圓的性質. 證明半徑無窮大的球面上的幾何學與歐派幾何學是一樣的.

(3) 應用無窮大的球,求出非歐派三角法上各種公式.

(4) 解決幾何學上許多難題. 如求作一正方形其面積等於已知的圓面積.

約翰說,"我所得的結果是絕對的眞的,並且這些結果都是構成絕對幾何學的主要部份".

§32. 羅波切夫斯基和龐禮愛約翰祇把歐氏的平行公理改爲"通過已知直線外一點可作兩條直線與已知直線平行".其他公理並沒有修改;所以他們祇能證明薩雪禮的銳角假設是對的, 因此也祇能發明雙曲線幾何學,到了十九世紀中葉,德國數學家黎曼不但把平行公理改變了, 並且把從前幾何學常用的公理"直線的長是無窮的",也像平行公理一樣的認眞的研究改爲"直線是無止境的"無止境的直線,好像球面上的大圓一樣:他的長是有限的,如若有人沿着他向前進,就可以永遠的.向前走而永無止境的.歐氏的公理,經黎曼這樣的修改;於是薩雪禮的鈍角假設也成立了. 1854 年黎曼在葛庭根大學哲學科教授會宣讀

黎曼

他的研究,講題是"論幾何學基礎(1)上所用的假設"當時聽講的人大多數都不是數學家,所以他沒有用高深的數學.但是他自已是用微分幾何學的方法研究的.他的出發點和從前的幾何學家是完全不同的他不設想幾何的圖形,也不設想我們的空間;他先用一組的變數代表兩點間的距離,再研究這一組變數的函數的性質如何?於是求出這個函數最簡單的形式是: $ds^2=\dfrac{dx^2+dy^2+dz^2}{1+\frac{K}{4}(x^2+y^2+z^2)}$. 這個式子裏面的$K$為空間的曲率(2)若$K=0$,就是歐氏幾何學的面;若$K>0$,就是他的新幾何學的面.但是他還沒有想到:若$K<0$就是羅氏幾何學的面;後來海姆霍芝,蘇斐禮,斐兒脫米繼續研究,纔得一個確定的結論:三種等曲率的面上各有一種幾何學:(1)零等曲率的面上幾何學,就是歐派幾何學.(2)正等曲率的面上幾何學,是黎氏幾何學.( )負等曲率的面上就是羅氏幾何學.這三種幾何學在等曲率面上各能成立的.

§33. 黎曼幾何學不但黎曼自己想他像球面幾何一樣;就是斐兒脫米也是這樣想的,但是球面上兩大

---

(1) Uber die Hypothese welche der geometrie zu grunde liegen, 這篇演稿是 1866 年黎曼死後纔付印的.

(2) Curvature of space.

圓相交可以有兩點.這兩點倘若看作是不同的兩點,就是球面幾何學或雙式橢圓幾何學,倘若看作是相同的,合成一點的,就是單式橢圓幾何學了.所以在1871年,克萊恩就首先把這兩種不同的地方區別出來,並且指出橢圓幾何學在非歐派幾何學上的重要.

第六章

三相幾何學的簡單定理

§34. 在§16說過:祇要直線的長有節制不超過某定長;三相幾何學的定理在橢圓幾何學中都是眞的;又三相幾何學的定理在雙曲線幾何學中直線的長雖無節制也是眞的.所以這裏把他的簡單定理寫出來,預備以後講述雙曲線與橢圓幾何學時候應用.本章所述都是很簡單的定理,其中有許多特別容易證明的定理爲節省篇幅計,就不證明了.

第一節 關於次序的定理

§35. 下面十六個定理是用於解決:直線上各點的次序,平面上半線(由一點引出來的線)的次序以及三角形周界與直線相交等問題.

§36. 定理1. 兩條直線倘若有一點是公共的;那麽通過這兩條直線可作一平面,且祇能作一個平面.

〔注意〕 本定理由公理甲$_3$及公理甲$_2$就證明了.此處所謂公理甲$_3$,公理甲$_2$以及本章以後所引的公理都

1354 6.28

是第四章§15(c)的三相幾何學公理.

§37. **定理2.** 直線上兩點之間,尚有點無窮之多.

(證明) 設A, B是直線上不同的兩點,由公理乙$_2$在A, B之間應當有一點C存在.再由公理乙$_2$在A, C之間應當有一點D存在並且由定理乙$_1$ D是在A, B中間的.由此,在A, B之間有C, D兩點.倣此繼續推演下去就得A, B中間的點有無窮之多.

§38. **定理3.** 倘若A, D是直線上不同的兩點; B, C是在A, D之間; 則C必在A, B或B, D之間.

(證明) 先比較A, B, C之順序:若A在B, C之間,則由定理乙$_1$, A也在C, D之間.但是這個是不對的,所以A不在B, C之間.於是C在A, B之間.若C不在A, B之間,則由公理乙$_3$, B介乎A, C之間,再由定理乙$_1$, C在B, D之間,所以C必在A, B或B, D之間.

§39. **定理4** 倘若直線a與三角形ABC之一邊BC的延長線相交,又與第二邊AC相交,但不交在A點或C點,則此線a必再與AB相交,並且不交在A點,或B點.

(證明) 由原設可知直線a不通過A或C點.由公理甲$_1$可知a也不通過B點,要是通過B點,則A, B, C三點就在一直線上了.所以a不通過A, B或C點而與(AB)相交於一點(公理乙$_1$).

§40. 定理5. 在三角形 ABC 的各邊上若有一點 A' 是在 B, C 之間, B' 在 A, C 之間; 則 A', B', C' 不能同在一直線上.

§41. 定理6. 假設 ABC 是一個三角形, a 是在 ABC 平面上的直線, 若 a 不通過三角形的角點 A, B, C 而通過三邊之一邊譬如 AB; 於是 a 必再通過第二邊 BC 或 AC.

§42. 定義. 在三角形 ABC 各角以內所有的點叫做三角形內部. ABC 平面上除三角形內部和三角形的三邊以外, 其他所有的點叫做三角形外部.

§43. 定理7. 在三角形 ABC 的平面上, 假設有一條直線 a 通過三角形 ABC 內部之一點 P; 則 a 必與三角形的周界相交於不同的兩點並且祇有兩點.

(證明) 設 A' 是 (BC) 上面的一點, 介乎 B, C 之間的; 又設 P 是在線段 (AA') 上面的, 於是 (1) 若 a 通過 A 點, 則 a 必與 BC 相交於 A' 點, 這樣本定理就證明了. (2) 若 a 通過 B 點, 則應用定理 4 於 $\triangle AA'C$ 及直線 a, 就可以斷定 a 與 AC 必定相交於一點, 這樣本定理也證明了. (3) 若 a 通過 C 點, 則與 (2) 同理本定理也是一樣的證明了. (4) 若 a 不通過 A, A', B 或 C 則應用公理乙$_4$ 於 $\triangle AA'B$ 及直線 a 就可斷定 a 必與 (AB) 或 ~~$(A'B')$~~ 相交. 再應用定理 6, 本定理就完全證明了

$(A'B)$

§44. **定理8.** 假設P點是在三角形ABC的內部;則連結P與任意一角點C的直線PC必定與(AB)相交於一點C',且此點C'不與A或B相同,而P點在C,C'之間.

§45. **定理9.** 一個平面α在空間,於是空間的點除平面α以外,其他所有的點都被α分爲兩羣,其性質如下:假設有兩點A,B是同羣的,則(AB)不與α相交.假設這兩點A,B是不同羣的;則(AB)與α相交於一點.

§46. **定義.** 一條直線被一點O分爲兩個半線$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,則$\overrightarrow{OA}$叫做$\overrightarrow{OB}$的反向半線,而$\overrightarrow{OB}$也叫做$\overrightarrow{OA}$的反向半線,$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$叫做同底的反向半線.

§47. **定義.** 設(h,k)是一個已知的角,直線$h'k'$各是半線h,k的底線;α是通過直線h',k'的平面.設(A)是代表α上面對於h'爲與k同側的點;(B)是代表α上面對於k'爲與h同側的點;於是(A),(B)兩羣公共的點,叫做(h,k)角的內部.α上面除去h,k及(h,k)角的內部,其他所有的點,叫做(h,k)角的外部.

§48. **定理10.** 假設有一個角(h,k),他的角點是O.在h,k的平面上,由O點引半線l.若l有一點是屬於$(h\ k)$角的內部;則l上面的點除O外,其他所有的點也屬於(h,k)角的內部,而l的反向半線上面的點除O外其他的點都屬於(h,k)角的外部.

§49. **定義.** 半線l要是在(h,k)角的內部的時候,我們就說:"l在h,k之間"以表示h,l,k三個半線的位置關係.若l在h,k之間則l也在k,h之間.

§50. **定理11.** 若l是由(h,k)角的角點O引出來的半線,並且是在(h,k)角的內部,則凡一端在h上面,一端在k上面的線段,都與l相交於一點.

(證明)設A是h上面與O不同的一點,B是k上面與O不同的一點,則l與(AB)的交點必定是在A,B之間.這個可以用間接證明法證明於下:

設h',k',l'是h,k,l的底線;在底線h'上面取一點A',這一點A'能使O在A,A'之間的.現在連結$A'B$.應用定理6於$\triangle AA'B$及直線l'可知l'必與$(A'B)$或(AB)相交於一點.設此點爲C,則無論C在$(A'B)$或(AB)上面,對於h'爲與B同側.而底線l'的點對於h'與B同側的祗有半線l,所以C點是在l上面的.由原設l是在(h,k)角的內部,所以C也是在(h,l)角的內部,而C在A,B之間.

§51. **定理12.** 設h,k,l是三條不同的半線,都是由O點引出來的.若是半線l與一端在h上面一端在k上面的線段相交於一點;則半線l在(h,k)角的內部.

§52. **定理13.** 假設有一個角(h,k),他的角點是O.於是(1)在h,k所在的平面上由O點可以引一條直線a使h,k兩半線同在a之一側,(2)若h,k同在a之一側,

則以a為底點的兩半線都在(h, k)角的外部.

(證明) (1) 設l是h或k的反向半線,譬如是h的反向半線,那就可以在(l, k)角的內部取一點A,通過O, A作一直線a.此直線a,就是本定理所說的直線a了

(2) 由定理11,也很容易證明的.

§53. 理定14. 設a', a''是由O點引出來的兩條同底反向半線,其底線為a; b'也是由O點引出來的另一半線.在a', b'平面上再由O點引一半線k',於是(1)若半線k'與b'對於a是同在一側的;那麼k'必在a', b'之間或a'',b'之間,(2)譬如k'在a' b'之間,則b'在k', a''之間

(證明) (1) 設A', A'', B'三點各在a', a'', b'上面並且不與O點相同.於是應用定理6於$\triangle A'A''B'$及直線k'則k'必與$(A'B')$或$(A''B')$相交於一點.再由定理12可知k'必在a', b'之間或$a''b'$之間.

(2) 由原設b',k'是同在a'的底線的一側的所以由本定理(1)可知b'必在a', k'或$a''k'$之間.但是原設k'是在a', b'之間,則b'不能在a', k'之間,所以b'在a'',k'之間.

§54. 定理.15. 定理乙$_1$和§38定理3不但對於點是眞的,對於半線也是眞的.

§55. 定義. 設a, b兩直線相交於O點,a被O分為兩個半線a',a''; b被O分為兩個半線b', b'',這四個半線a',

a'', b', b''形成四個角(a', b') (a', b'') $(a''b')$, $(a''b'')$, 其中$(a'b')$與$(a''b'')$或$(a'b'')$與$(a''b')$叫做對頂角,其中$(a'b')$與$(a'b'')$或$(a''b')$與$(a''b'')$叫做隣角.

§56. **定理16.** 假設有一點O分直線a為兩個反向半線a',a'',又分直線b為兩個反向半線b', b''.若在a, b平面上由O點另外再引半線k';則k'的反向半線k''必定要在k'所在的角的對頂角裏面.

(證明) 半線k'對於直線a不是與b'同側,必定是和b''同側.若k'對於a是與b'同側的,則k'必定是在a', b'或b', a''之間(定理14).同理,若k對於a是與b''同側的,則k'必定是在a', b''或a'', b'之間.

現在設想k'對於a是與b'同側的,並且是在a', b'之間的.則因k',k''是各在a的一側;b', b''也各在a的一側,所以k''對於a是與b''同在一側.同理k''對於b是與a''同在一側.這就是k''在(a',b')的對頂角(a'', b'')內.

第二節 關於疊合的定理

§57. 下面的定理都是研究角,與角線段與線段相疊合的性質.

§58. **定理17.** 假設有兩個三角形ABC, $A'B'C'$.若$(AB)\equiv(A'B')$, $(AC)\equiv(A'C')$, $\measuredangle BAC\equiv\measuredangle B'A'C'$;則$\measuredangle ABC\equiv\measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle ACB\equiv\measuredangle A'C'B'$ ....(1)

$$(BC) \equiv (B'C') \cdots\cdots (2)$$

(證明)　由公理丙$_3$ (1) 是眞的，至於 (2) 可以用下面的間接法證明.

由公理丙$_1$ (BC) 與 $(B'C')$ 的關係不出於下面三種情形：(I) B, C 中間有一點 D 能合 $(DC) \equiv (B'C')$，(II) $B'C'$ 中間有一點 D 能合 $(BC) \equiv (D'C')$，(III) $(BC) \equiv (B'C')$. 假設 (BC) 與 $(B'C')$ 的關係是第一種的情形，則連結 AD 卽得 $\measuredangle \cancel{BAD}$ CAD $\equiv \measuredangle B'A'C'$ (§ 11 公理丙$_3$). 但是兩條半線 AB, AD 同在 AC 之一側與 AC 形成兩個角都與 BAC 角相合，這是不可能的，所以 (BC) 與 $(B'C')$ 的關係不是屬於第一種情形，同理也不是屬於第二種的情形，所以 $(BC) \equiv (B'C')$.

§ 59.　**定理 18.**　ABC 和 $A'B'C'$ 兩個三角形，若 $(AB) \equiv (A'B')$，$\measuredangle CAB \equiv \measuredangle C'A'B'$，$\measuredangle CBA \equiv \measuredangle C'B'A'$；則 $(AC) \equiv (A'C')$，$(BC) \equiv (B'C')$；$\measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$.

(證明)　祇要證明 $(AC) \equiv (A'C')$ 是對的，其餘就可以利用定理 17 也是對的了. 現在要證明 $(AC) \equiv (A'C')$ 其方法與定理 17 證明 $(BC) \equiv (B'C')$ 一樣的.

§ 60.　**理定 19.**　三角形 ABC 裏要是 $(AC) \equiv (BC)$；則 $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle BAC$；反而言之：要是 $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle BAC$，則 $(AC) \equiv (BC)$.

(證明)　把 ABC 一個三角形想作是 ABC 和 BAC 兩個三角形；於是因爲原設 $(AC) \equiv (BC)$，又據定理丙$_1$ $(BC) \equiv$

(AC),公理丙$_6$ $\measuredangle ACB \equiv \measuredangle BCA$ $\therefore$ $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle BAC$ (定理17)

依同樣的方法應用定理18也可以證明$(AC)\equiv(BC)$.

§61. **定理20.** 二等邊三角形的頂角平分線與底邊垂直,並且平分底邊.

§62. **定理21.** 假設$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}$是兩條半線.若半線$\overrightarrow{OA}$上面有一點$B$,則半線$\overrightarrow{O'A'}$上面必定也有一點$B'$適合於這個條件$(OB)\equiv(O'B')$

(證明) 由公理丙$_1$,卽可證明.

§63. **定理22.** 假設有兩個角$\measuredangle DBC$, $\measuredangle D'B'C'$各爲$\measuredangle ABC$, $\measuredangle A'B'C'$兩個角的隣角:若$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$;則$\measuredangle DBC \equiv \measuredangle D'B'C'$.

(證明) 由§62定理21,我們可以有六點A, C, D, A' C', D'能令$(BA)\equiv(B'A')$, $(BC)\equiv(B'C')$, $(BD)\equiv(B'D')$連結$AC, DC, A'C', D'C'$應用定理17於三角形ABC和$A'B'C'$,則$(AC)\equiv(A'C')$,$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$.由公理丙$_3$可知$(AD)\equiv(A'D')$;於是三角形$ADC$與$A'D'C'$應當有這兩種關係$(CD)\equiv(C'D')$, $\measuredangle CDA \equiv \measuredangle C'D'A'$ (定理17).由此三角形BCD與$B'C'D'$應當有這樣一個關係$\measuredangle DBC \equiv \measuredangle D'B'C'$ (定理17).

§64. **定理23.** AOB角與BOC角若有一邊BO是公共的,角點O也是公共的,並且$\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \pi$;則$AO$

與CO同在一直線上.

§65 **定理24.** 若兩角爲對頂角;則此兩角可以疊合.

(證明) 設AOB與$A'OB'$是兩個對頂角,則此兩角都是AOA'的隣角,由定理22,可知$\measuredangle AOB \equiv \measuredangle A'OB'$.

§66. **定理25.** 若$(AC) \equiv (A'C')$,且(AC)上面有一已知點B;則在$(A'C')$上面也有一點B',並且祇有這一點B'能令$(AB) \equiv (A'B')$,$(BC) \equiv (B'C')$.

(證明) 這個定理應用公理丙$_3$就可以證明了.

§67. **定理26.** 假設A, B, C是同在一直線上的三點,A', B', C'也是同在一直線上的三點,若$(AB) \equiv (A'B')$ $(BC) \equiv (B'C')$,並且B是在A,C之間,則B'也在$A,'C'$之間.

(證明) 由定理25在A', C'之間可以有一點B''能令$(AB) \equiv (A'B'')$,$(BC) \equiv (B''C')$,假設B'與B'是不相同的兩點,那麼B'就不在A', C'之間而在半線$\overrightarrow{B''A'}$或$\overrightarrow{B''C'}$上面了.譬如B'在半線$\overrightarrow{B''C'}$上面,則B''在A', B'之間,但這是不可能的(公理丙$_3$).所以B'與B''必是相同的點.

§68. **定理27.** 設AOB與$A'O'B'$是可以疊合的兩個角.若AOB角的內部有一半線$\overrightarrow{OC}$:於是$A'O'B'$角的內部必定也有一條半線$\overrightarrow{O'C'}$,並且祇有$\overrightarrow{O'C'}$一條適合於這兩個條件$\measuredangle AOC \equiv \measuredangle A'O'C'$,$\measuredangle COB \equiv \measuredangle C'O'B'$.

(證明) 由定理21在半線a, c, a', c'上各有一點$A, C,$

A', C' 能令 $(OA)\equiv(O'A')(OC)\equiv(O'C')$, 連結 A, C 及 A', C', 則 $(AC)\equiv(A'C')$ $\measuredangle CAO\equiv\measuredangle C'A'O'$ (定理17). 由定理11半線 b 與 AC 必相交於一點,設此點爲 B, 則 B 在 A, C 之間. 由定理25可知 A', C' 之間有一點 B' 能令 $(AB)\equiv(A'B')$, 連結 $O'B'$ 設半線 $O'B'$ 爲 b', 則 b' 介乎 a', c' 之間(定理12), 應用定理17於 $\triangle AOB$ 及 $\triangle A'O'B'$, 則 $(a, b)\equiv(a', b')$, 在 $A'C'$ 之間祇有一點 B' 能令 $(AB)\equiv(A'B')$ (定理25), 所以 a', c' 之間也祇有一條半線 b', 依同理 $(b, c)\equiv(b', c')$.

§69. **定理28.** 設 a, b, c 是同在一平面上由一點 O 引出來的半線, 並且 b 在 a, c 之間. 再設 a', b', c', 是在另一個平面上由一點 O' 引出來的半線, 並且 b' 在 $a'c'$ 之間. 於是若 $(a, b)\equiv(a', b')$, $(b, c)\equiv(b', c')$; 則 $(a, c)\equiv(a', c')$.

(證明) 由定理21在半線 a, a' 上各有一點 A, A' 能令 $(OA)\equiv(O'A')$. 在半線 c, c' 上面任意各取一點 C_1, C'_1 連結 AC_1, $A'C'_1$ 則半線 b 與 AC_1 相交於一點 B_1, 半線 b' 與 $A'C_1'$ 相交於一點 B'_1 (定理11) 由定理21在 (OB_1), $(O'B_1')$ 上面各有一點 B, B' 能令 $(OB)\equiv(O'B')$, 如此則 AB 交 c 於 C, $A'B'$ 交 c' 於 C' (定理4), 並且 B 是在 A, C 之間, B' 是在 A', C' 之間, (定理11), 應用定理17於 $\triangle AOB$ 及 $\triangle A'O'B'$, 則得 $(AB)\equiv(A'B')$, $\measuredangle BAO\equiv\measuredangle B'A'O'$, $\measuredangle ABO\equiv\measuredangle A'B'O'$, 再應用定理22, 則得 $\measuredangle CBO\equiv\measuredangle C'B'O'$. 由 $\triangle BOC$ 及 $\triangle B'O'C'$ 得 $(BC)\equiv(B'C')$ $\therefore$ $(AC)\equiv(A'C')$(公理丙$_4$), 再由 $\triangle CAO$ 及

$\triangle C'A'O'$, 則得$\measuredangle COA \equiv \measuredangle C'O'A'$.

§ **70**. **定理29**. 設a, b, c是同在一個平面上由一點O引出來的半線. 再設a', b', c'是同在另一個平面上由一點O'引出來的半線, 若$(a, b) \equiv (a', b')$, $(b, c) \equiv (b', c')$, $(a, c) \equiv (a', c')$, 並且b在a, c之間; 則b'必在a', c'之間.

(證明) 由定理27, 可知在a', c'的平面上, 由O'點可引一半線b_1介乎a', c'之間, 並且能令$(a, b) \equiv (a', b_1)$ $(b, c) \equiv (b_1, c')$. 現在要證明本定理祇要證明b_1與b'是一條線就成了. 假設b_1與b'不是一條線, 是兩條不同的線, 則可以由下面證明他不對. 設a'', c''各是a', c'的反向半線, 則b'既然與b_1, a', c', a'', c''不相同, 由定理27可知b'不在a', c'之間, 由§4(C)公理丙$_4$也不在a'', c'之間也不在a', c''中間, 所以b'應當在a'', c''之間(定義), ∴ $(a', b_1) \equiv (a', b')$ {§4(C)公理丙$_5$}, ∴ $(a'', b_1) \equiv (b', a'')$(定理22), C'是介乎b_1, a''之間(定理14), 由定理27在a'', b'之間有一半線d'能令$(b', d') \equiv (b_1, c')$由定理15可知$a''$是介乎$b', c'$之間$d'$是介乎$b', c'$之間, 並且

$$(b', c') \equiv (b, c), \quad (b', d') \equiv (b_1, c') \equiv (b, c)$$

但是這兩個式子不能同時存在, 因爲原設d'是在b', c'之間, 並且對於b'的底線是與c'同側的.

§ **71**. **定理30**. 設a, b, c, 是同在一個平面上由O點引出來的半線. 又設a', b', c'是同在另一平面上由O'點

引出來的半線,倘若$(a, b)\equiv(a', b')$, $(b, c)\equiv(b', c')$並且b在a, c之間, a', c'各在b'的底線的兩側;於是b'在a', c'之間.

(證明) 設a_1是半線a的反向半線, a'_1是半線a'的反向半線,則$(a_1, b)\equiv(a'_1, b')$(定理22), c在b, a_1之間(定理14),由定理27在a', b'的平面上由O'點可引一半線C''介乎b', a'_1之間,並且能令$(b, c)\equiv(b', c'')$, $(c, a_1)\equiv(c'', a'_1)$. b'是在a', c''之間所以a', c''各在b'的底線的兩側(定理11), c' a'也各在b'的底線的兩側;所以c', c''同在b'的底線之一側.這兩個角(b', c''), (b', c')都相合於(b, c);所以c'與c''兩半線相合爲一個半線(公理丙$_4$),由是a', c'形成一個角,而b'在此角(a', c')之內部.

§72. **定理31.** 兩個三角形ABC和$A'B'C'$若$(AB)\equiv(A'B')$, $(AC)\equiv(A'C')$, $(BC)\equiv(B'C')$, 則 $\measuredangle ABC\equiv\measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle BCA\equiv\measuredangle B'C'A'$, $\measuredangle CAB\equiv C'A'B'$ 或略寫爲 $\measuredangle B\equiv\measuredangle B'$, $\measuredangle C\equiv\measuredangle C'$, $\measuredangle A\equiv\measuredangle A'$.

(證明) 假設本定理是不對的,那麼這三個式子$\measuredangle B\equiv\measuredangle B'$, $\measuredangle C\equiv\measuredangle C'$, $\measuredangle A\equiv\measuredangle A'$,就沒有一個是對的;要是有一個是對的,那麼由定理17其他兩個也是對了,所以$\measuredangle A$與$\measuredangle A'$的關係不出乎$\measuredangle A>\measuredangle A'$,或$\measuredangle A<\measuredangle A'$,同樣道理$\measuredangle B\gtrless\measuredangle B'$, $\measuredangle C\gtrless\measuredangle C'$,並且$A, B, C, A, 'B, 'C'$六個角的關係必屬於下面六種情形之一種.

$$\sphericalangle A > \sphericalangle A' \begin{cases} \sphericalangle B > \sphericalangle B' & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\ ) \\ \sphericalangle B < \sphericalangle B' \begin{cases} \sphericalangle C > \sphericalangle C' & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \sphericalangle C < \sphericalangle C' & \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases} \end{cases}$$

$$\sphericalangle A < \sphericalangle A' \begin{cases} \sphericalangle B > \sphericalangle B' \begin{cases} \sphericalangle C > \sphericalangle C' & \cdots\cdots\cdots\cdots(4) \\ \sphericalangle C < \sphericalangle C' & \cdots\cdots\cdots\cdots(5) \end{cases} \\ \sphericalangle B < \sphericalangle B' & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6) \end{cases}$$

在這六種情形中,無論就那一種說,一個三角形總有兩個角比其他三角形兩個角大,所以我們可以命A, B代表第一個三角形的兩個角,A', B'代表第二個三角形的兩角.因此我們祇須研究(1)就成了.

在(AB)與(AC)之間有一半線AD存在能令$(AB, AD) \equiv \sphericalangle A'$,半線$AD$必與$(BC)$相交於一點,命此點爲$D$.$D$在$B, C$之間.同理在$BA$及$BC$中間有一半線$BE$能令$(BA, BE) \equiv \sphericalangle B'$,半線$BE$必與$(AD)$相交於一點,命此點爲$C''$.而$C''$在$A, D$之間.並且在三角形$ABC$的內部.半線$CC''$與$(AB)$相交於一點$F$而$C''$在$C, F$之間.(定理8)半線$BC''$與$(AC)$相交於一點$E$而$E$,在$A, C$之間.$C''$在$B, E$之間.由此$(AC'') \equiv (A'C')$(定理18),而$(AC'') \equiv (AC)$ (§ 4, C, 丙$_2$).

同理$(BC'') \equiv (BC)$,所以由定理19 $\sphericalangle ACC'' \equiv \sphericalangle AC''C$ $\sphericalangle BCC'' \equiv \sphericalangle BC''C$.

半線CC''是在CA, CB之間,$C''A$與$C''B$在$C''C$的底線

的兩側,所以 $C''C$ 在 $C''A, C''B$ 之間(定理30),由此 $C''C$ 必與 (AB) 相交,並且祇交於 F 點,所以 F 點在半線 $C''C$ 上面,但是上面的,推論 F 不在 $C''C$ 上面,所以這個推論是矛盾的,所以本定理是對的.

§73. **定義.** 兩個角 ACB, ACD 倘若是互爲隣角,並且又可以疊合的,於是 ACB 或 ACD 叫做直角.三角形有一個角是直角,則此三角形叫做直角三角形.

§74. **定理32.** 凡直角都可以疊合.

(證明) 設 (OB, OA) 與 (OB, OC) 是可以相合的兩隣角,又設 $(O'B', O'A')$ 與 $(O'B', O'C')$ 是可以相合的兩隣角,這四個角都是直角.現在要求證.

$$(OB, OA)\equiv(O'B', O'A')$$

假設本定理是不對的,那麼在 OA, OB 平面上由 O 點可以引一條半線 OB'' 對於 OA 的底線是與 OB 同側,並且能令 $(OA, OB'')\equiv(O'A', O'B')$. OB'' 旣然與 OB 是不同的兩條半線,所以 OB'' 必在 OA, OB 之間或 OB, OC 之間,假設 OB'' 是在 OA, OB 之間,則 $(OB'', OC)\equiv(O'B', O'C')\equiv(O'A', O'B')\equiv(OA, OB'')$,並且也有這樣一個式子. $(OA, OB)>(OA, OB'')\equiv(OB'', OC)>(OB, OC)$, 但是原設 $(OA, OB)\equiv(OB, OC)$ 所以我們同時有這兩個式子. $(OA, OB)\equiv(OB, OC)$ $(OA, OB)>(OB, OC)$,這是不可能的,所以 $(OB, OA)\equiv(O'B', O'A')$.

§74.1. 系1. 兩個隣角若不是直角,必定有一個是銳角,一個是鈍角.

§74.2. 系2. 兩個隣角,若有一個是直角,其他一個也是直角.

§75. 定理.33. 任何角都可以分爲兩個能疊合的角並且祇有一個分法.

(證明) 設ABC爲已知的一個角,本定理就是要證明在BA, BC之間,由B點可以引一半線與BA, BC夾成兩個相合的角.在BA, BC,上面各取一點A,C能令$(BA)\equiv(BC)$;在A, B中間取一點A';B, C中間取一點C'能令$(BA')\equiv(BC')$,連結CA',$C'A$則CA'與$C'A$相交於一點M,這一點M是在C, A'之間也在C', A之間,並且在$\triangle ABC$的內部.由$\triangle CA'B$及$\triangle C'AB$得$\measuredangle BCA'\equiv\measuredangle BAC'$, $\measuredangle BC'A\equiv\measuredangle BA'C$所以$\measuredangle CC'A\equiv\measuredangle AA'C$. 由$\triangle CC'M$及$\triangle AA'M$得$(CM)\equiv(AM)$.由$\triangle CBM$及$\triangle ABM$得$\measuredangle CBM\equiv\measuredangle ABM$,這就是半線$BM$要分$\measuredangle ABC$爲兩個相合的角.要證明祇有一個分法可以仿前定理的間接證明法證明.

§76. 定理34. 由已知直線p上一點O可作一條半線與p垂直,但是在p之一側祇能作一條垂直半線.

(證明) 直線p被O點分爲兩個半線,假設這兩個半線爲p', p'',在平面α上,由O點引一半線a',則a'與p', p''所夾的兩角或可以相合或不可以相合.若是可以相合,

則a'與p垂直;若是不可以相合,那麼其中必有一大一小.假設$(a',p'')>(p',a')$,那麼在a',p''中間有一個半線a''存在,能合$(p'',a'')\equiv(p',a')$.由此a'在p',a''之間.由定理33可作一半線q'分$(a'a'')$角爲兩個可以相合的角,a'在p',q'之間,a''在q',p''之間所以$(p',q')\equiv(p'',q')$(定理 8),即q'與p互相垂直.仿定理32的間接證明法可以證明祇有一條垂線可以作.

§77. 定理.35. 由已知直線外一點P,可作一條垂線垂直於已知直線,但是祇能作一條.

(證明) 設AB爲已知直線,由AB上面任意取一點M.連結PM,若$\measuredangle PMB$爲直角,則$PM\perp AB$,若$\measuredangle PMB$不是一直角,則由M點作$\measuredangle P'MB\equiv\measuredangle PMB$截取$(P'M)\equiv(PM)$(公理丙$_5$及§62),連結$PP'$則$PP'$必與$AB$交於一點$C$(§50),由§58即得$\measuredangle MCP\equiv\measuredangle MCP'$ $\therefore(PC)\perp(AB)$,由P點祇能作一條線垂直於AB,若是還有一條PC'可以作,延長PC'交MP'於P'',於是MC'爲$\triangle MC'P$及$\triangle MC'P''$的公邊,$\measuredangle PMC'\equiv\measuredangle P''MC'$(作圖),$\measuredangle PC'M\equiv\measuredangle P''C'M$(§74定理32).$\therefore(PM)\equiv(P''M)$(§59),由上面證明$(PM)\equiv(P'M)$.所以由公理丙$_3$$(P'M)\equiv(P''M)$,但這是不可能的,所以由$P$要引兩條垂線至$AB$也是不可能的.

§77.1. 系1. 兩個直角三角形MPC,$MP'C$若斜邊MP,MP'能疊合,銳角~~CMP, CMP'~~也能疊合,那麼這兩個直

MCP. MCP'

角三角形也能疊合.

§77.2 系2. 直角三角形,可以由他的斜邊及一銳角決定之.

§77.3. 系3. 角的平分線,離角的兩邊是等距離的.

§78. **定理36.** 凡線段都能分為兩個可以疊合的線段;但是祇有一種分法.

(證明) 設(AB)為已知線段,求證AB中間有一點M能令$(AM)\equiv(MB)$.但是像這樣的點M祇有一點.假設C是不在直線AB上面的一點,連結CA, CB於是$\measuredangle CAB$與$\measuredangle CBA$兩角可以相合或不可以相合.若是不相合必定有一大一小;假設CBA角大於CAB角,即$\measuredangle CBA>\measuredangle CAB$,則在$BC$及$BA$中間應當有一半線$BC'$能令$\measuredangle C'BA\equiv\measuredangle CAB$,並且$BC'$必與$AC$相交於一點,命此點為$C'$.如此,由定理19$(AC')\equiv(BC')$.由定理33可知在$C'A$及$C'B$中間應當有一半線平分$AC'B$角為兩個等角,並且此半線與$AB$相交於一點.設此點為$M$,則$(AM)\equiv(BM)$,並且像這樣的點祇有$M$點.

§79. **定理37.** 在平面內離A, B兩點等距離的軌跡是一條垂直於AB中點的直線.

§79.1. 系. 三角形各邊垂直平分線相交於一點.

§80. **定義.** 在α平面上假設有n點$A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots A_{n-1}, A_n$;則由線段$(A_1A_2)(A_2A_3)(A_3A_4)\cdots\cdots(A_{n-1}A_n)(A_nA_1)$

所圍繞成的平面形,我們叫做多角形,而各線段(A_1A_2) (A_2A_3)………(A_nA_1)叫做多角形的邊.由某一邊延長出來的直線叫做某一邊的底線.譬如由(A_2A_3)邊引出來直線叫做(A_2A_3)的底線.多角形所有的邊叫做周界.這些點$A_1, A_2, A_3,$………A_n叫做多角形的角點.在多角形上,任取一邊的底線爲標準,若其他各邊都同在這底線的一側,那麼這多角形叫做凸多角形;若分在這底線的兩側,就叫這多角形爲凹多角形.本書祇論凸多角形,以後凸多角形都簡稱爲多角形.設A_j, A_{j+1}, A_{j+2}爲多角形上連近的三個角點,則$\measuredangle A_j A_{j+1} A_{j+2}$叫做多角形的角.祇有四邊的多角形叫做四邊形.

§81. **定理38.** 一條直線與多角形的周界相交,若該直線不是多角形任何邊的底線,則相交之點至多祇有兩點.

(證明) 假設直線a不是多角形任何邊的底線而與多角形的周界相交不祇有兩點.譬如有三點,現在命這三點爲A, B, C,於是B點自然要在多角形的某一邊上.設這某一邊的底線爲b,並且設想B點是在A, C中間的(公理乙$_3$).原設b是多角形某一邊的底線,而a不是任何邊的底線,所以a, b是兩條不同的直線,所以A, C不在直線b上面而在b的兩側,所以A或C必有一點不在多角形的邊上(定義).

§82. **定理39.** 不通過多角形角點的直線與多角形的周界相交,必定有兩點.

(證明) 設 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$ 爲凸多角形, a 爲不通過凸多角形角點的直線,若 a 交多角形之一邊 A_1A_2 於 B 點,則由定理 6 直線 a 必再與 A_1A_3 或 A_2A_3 相交於一點.假設 a 與 A_1A_3 相交於一點,則由定理6, a 必再與 A_1A_4 或 A_3A_4 相交於一點.依這樣推下去, a 與多角形的周界相交除 B 點外必定還有一點 C. 並且由定理38可知 a 與多角形相交衹有 B, C 兩點.

§83. **定義.** 連結多角形周界上任意兩點所成的一切線段的內部,叫做多角形的內部.

§84. **定理40.** 若 B 點是在多角形的內部,則通過 B 點的直線必與多角形的周界相交於兩點,並且這兩點在 B 點的兩側.

(證明) 由§83內部的定義即可證明.

§85. **定理41.** 在平面上假設有兩點 A,B, 通過 A,B 各有一直線 a, b. 若線段 AB 不在 a 或 b 上面,於是在 AB 的一側,由 a 上面可以找出一點 A_1, 能使線段 AA_1 不與 b 相交;由 b 上面也可以找出一點 B_1 能使線段 BB_1 不與 a 相交,像這樣找出來的 A_1B_1 和 AB 合起來就成爲凸四邊形 ABB_1A_1.

(證明) 在線段 AB 之一側若 a 與 b 沒有公共點,那麼

本定理所說的A_1, B_1就立刻可以找出來.若a與b有一公共點C,則在AC, BC上面也可以找出本定理所說的A_1B_1來(定理2及公理甲$_1$).(AA_1)與(BB_1)既然不相交,所以A, A_1必在(BB_1)之一側,而B, B_1必在(AA_1)之一側.又原設A_1B_1在AB之一側,所以A_1B_1不與AB相交,而A,B也在(A_1B_1)之一側.由是ABB_1A_1為凸四邊形.

§86. **定理42.** 四邊形的兩對角線,必有一公共點.

(證明) 設$ABCD$為四邊形.E點在DAB角內,則(BD)上必有一點是屬於(AC)的.同理,(AC)上也必有一點是屬於(BD)的,所以(AC)與(BD)有一公共點.

§87. **定理43.** 凡平面上都有薩氏四邊形(看§220)

(證明) 在平面上取A, B兩點,由這兩點向線段AB之一側各引一直線垂直於(AB).於是在這兩條垂線上可以各有一點A', B'能使AA'不與BB'相交(定理41),並且A', B'還能够使$(AA')\equiv(BB')$,所以$ABB'A'$是凸四邊形(定理41),也是薩氏的四邊形.

§88 **定理44.** 設$ABB'A'$為薩氏四邊形,A,B兩角各為直角;於是$\measuredangle A'\equiv\measuredangle B'$,而$(AB)$中點的垂線必通過$(A'B')$的中點,並且也垂直於$(A'B')$.

(證明) 設(AB),$(A'B')$的中點各為M,M'則M,M'同在AA'之一側.$ABB'A'$既然是凸四邊形,則(AB)與$(A'B')$沒有公共點所以(AM)與$(A'M')$也沒有公共點,而$AMM'A'$

爲凸四邊形(定理41),同理$MBB'M'$爲凸四邊形.

由$\triangle AA'M$及$\triangle BB'M$可以求得$\measuredangle AA'M\equiv\measuredangle BB'M$, $\measuredangle AMA'\equiv\measuredangle BMB'$及$(A'M)\equiv(B'M)$. 再由$\triangle A'MM'$及$\triangle B'MM'$可以求得$\measuredangle A'M'M\equiv\measuredangle B'M'M$. $\measuredangle MA'M'\equiv\measuredangle MB'M'$及$\measuredangle A'MM'\equiv\measuredangle B'MM'$,所以$MM'$垂直於$A'B'$. $AMM'A'$和$MBB'M'$既然是凸四邊形,那麼$A'M$在$A'M'$與$A'A$之間,$B'M$在$B'M'$與$B'B$之間;而MA'在MA與MM'之間, MB'在MB與MM'之間. 所以$\measuredangle AA'B'\equiv\measuredangle BB'A'$, $\measuredangle AMM'\equiv\measuredangle BMM'$,由此$MM'$垂直於$AB$但是在$ABB'A'$平面上由$M$點祇能引一條線垂直於$AB$. 所以$AB$的垂線$MM'$垂直於$A'B'$.

§88.1. 系. AA'與BB',對於AB的垂直平分線爲對稱.

§89. 下面的定理,都是關於立體幾何方面的定理.

§89.1. 定理45. 兩條直線a, b若是同時都與直線p垂直於P點;那麼凡在a, b平面內通過P點的直線c必定都與p垂直.

(證明) 設a_1, b_1, c_1,是各在直線a, b, c上面由P點引出來的半線. c_1既然是在c上面,則c_1必定要在a, b兩線所夾四角中之一角內,譬如在(a_1, b_1)角內. 現在,在直線a, b上面P點的兩側各取一點A, A'及B, B'適合於這條件. $(PA)\equiv(PA')$, $(PB)\equiv(PB')$,連結A, B兩點又連結A',

B' 兩點,則線段 AB 必與半線 c_1 交於一點 C, 線段 $A'B'$ 必與 c_1 的反向半線交於一點 C'. 現在再由直線 p 上面任取一點 Q. 連結 Q 於 A, B, C, A', B', C', 則得 $(AB)\equiv(A'B')$, $\measuredangle ABP\equiv\measuredangle A'B'P$, $(BC)\equiv(B'C')$, $(PC)\equiv(P'C')$, $(AQ)\equiv(A'Q)$, $(BQ)\equiv(B'Q)$, $\measuredangle QBA\equiv\measuredangle QB'A'$, $(CQ)\equiv(C'Q)$, $\measuredangle QPC\equiv\measuredangle QPC'$

$\therefore$ 直線 c 垂直於直線 p.

§89.2 **定理46.** 凡由直線上已知一點所引的垂線,都同在一平面內.

(證明) 設 P 是直線 p 上面已知的一點, a, b, c 是由 P 引出與 p 垂直的直線. 現在求證 a, b, c 同在一平面內, 即求證 b 在 ac 平面內. pb 與 ac 是兩個不相同的平面,所以 pb 與 ac 必相交於一直線,現在設此相交直線為 b', 則 b' 垂直於 p (定理44), 並且與 b 合而為一 (定理32), 所以 b 在 ac 平面內.

§89.3. **定義1.** 設有一直線 a 與一平面 α 相交於一點 P, 若是在 α 內通過 P 點的直線都與 a 垂直; 那麼我們就說"直線 a 與平面 α 垂直"或"a 垂直於 α"或"α 垂直於 a," P 點叫做垂足.

§89.4. **定理47.** 由直線上已知一點可以引一平面垂直於該直線,但是祇能引一個平面.

(證明) 應用定理45及46即證明.

§89.5. **定理48.** 由 α 平面內一點 P 可以引一條直

線與該平面α垂直；但是祇能引一條直線,

(證明) 在平面α內,由P點任意引兩條直線a, b,再通過P點作兩個平面各與a, b垂直(定理47),如此應用前面定理,本定理就很容易證明了.

§89.6. **定4理9.** 假設有一直線AB與一平面α垂直於B點；在α平面內通過B點引一直線BC,再通過C點引CD垂直於BC；於是直線CD與平面ABC垂直.(證法與歐氏幾何同).

§89.7. **定理50.** 離A,B兩點等距離的軌跡是一個垂直於(AB)中點的平面.

§89.8 **定理51.** 假設有兩條直線同時垂直於一平面,則此兩直線必在另一平面內.

(證明) 假設直線a, b是與平面α垂直於A點,B點的.於是連結AB,在平面α內通過A點作AP垂直於AB,由定理46直線b上面任意一點B'與A連結所得的線段$B'A$必與PA垂直原設a垂直於PA,所以a是在(AB'),(AB)兩線段的平面內(定理43),而a, b同在一平面內.

§89.9. **定義2.** 假設有兩個平面相交於一直線p,則此兩平面被p分爲四個半面.這四個半面中任意兩個半面(譬如α, β)所形成的圖形,我們叫做"二面角"α, β叫做"二面角的面",p叫做"二面角的稜".假設P是p上面任意的一點,在α, β平面內由P點各引一半

線 a, b 垂直於 p, 於是這個角 (a, b) 叫做"二面角的平面角.

§89.10. **定理52.** 一個已知的二面角有許多平面角,這些平面角皆能疊合.

(證明) 由定義可知一個二面角有許多平面角. 設 $\measuredangle APB$ 和 $\measuredangle A'P'B'$ 都是二面角 (α, β) 的平面角. 設想 A, A' 同在 α 平面內, B, B' 同在 β 平面內, PP' 是二面角的稜,再設想 A, A', B, B' 四點是能使 $(PA)\equiv(P'A'), (PB)\equiv(P'B')$, 幷且 (PA) 與 $(P'A')$ 是沒有公共點的, (PB) 與 $(P'B')$ 也是沒有公共點的,如此 $PP'A'A$ 與 $PP'B'B$ 都是薩氏四邊形,而直角都在 P 點和 P' 點. 設 M 是 PP' 的中點, A'', B'' 各是 $A'A, B'B$ 的中點,則 MA'' 垂直於 AA' 和 PP', 而 MB'' 垂直於 BB' 和 PP' (定理44). 所以 $\measuredangle A''MB''$ 也是二面角 (α, β) 的平面角(定義).

連結 $AB, A'B', A''B''$ 在 A'' 點作一條垂線垂直於平面 $A''MB''$ (定理48). 因 $P'M$ 也是垂直於平面 $A''MB''$, 所以這條垂線應當在平面 $A''MP'$ 內 (定理51), 但是 $A'A''$ 也是在平面 $A''MP'$ 內,並且垂直於線段 $A''M$. 所以在 A'' 點所作的垂線非和 $A'A''$ 相合不可. 由是 $A'A''$ 垂直於平面 $MA''B''$, 也垂直於線段 $(A''B'')$, 同理在 $B'B''$ 垂直於 $A''B''$, 因爲 $A'A''$ 和 $B'B''$ 都垂直於平面 $MA''B''$, 所以 $A'A''$ 和 $B'B''$ 同在一平面內. 平面 APP' 和平面 BPP' 的公共

點都在 PP' 上面，所以 (AA') 和 (BB') 沒有公共點，而 $A''B''BA$ 和 $A''B''B'A'$ 都是凸四邊形(定理41)，由定理44可知 $(A''B)\equiv(A''B')$，$\measuredangle BA''B''\equiv\measuredangle B'A''B''$，$\measuredangle BA''A\equiv\measuredangle B'A''A'$，$(AB)\equiv(A'B')$，再由三角形 ABP 及 $A'B'P'$ 得 $\measuredangle APB\equiv\measuredangle A'P'B'$.

§89.11. **定義3.** 二面角 (α,β) 的平面角，和二面角 (α',β') 的平面角要是可以疊合，我們就說"這兩個二面角可以疊合"

§89.12. **定義4.** 二面角的平面角倘若是直角，這個二面角就叫做"直角二面角"．兩平面相交有四個角，要是有一個角是直角，其他三角也是直角．像這樣的兩平面，我們就說"他們是互相垂直"．

§89.13. **定理53.** 直線 p 要是垂直於平面 α，那麼通過直線 p 的平面都垂直於 α.

§89.14. **定理54.** 假設 α 與 β 是兩個互相垂直的平面，相交於一直線 p．現在(1)要是在平面 α 或 β 內作一條直線垂直於 p，那麼這所作的垂線必定要垂直於 β 或 α；(2)要是由 p 上任意一點引一直線垂直於 α 或 β，那麼這所引的垂線必定在 β 或 α 內.

(1)由定理45推出(2)由定理46用反证之

§98.15. **定理55.** 假設有兩個相交的平面 α,β 各垂直於平面 γ；則此兩平面的交線也垂直於平面 γ.

§89.16 **定理56.** 由 β 平面外一點 D 可引一垂線垂

直於平面β；但是祇能引一條.

(證明)　在已知平面β內任意引一條直線AB,由平面外D點作$DB \perp AB$(定理35),設垂足爲B,由B點引$BC \perp AB$(定理34),於是AB與平面BCD垂直於B點(定理45及§89.3定義).現在由D點作垂線DE垂直於BC(定理35),卽$BC \perp ED$,由定理49可知ED與平面ABC垂直,所以ED卽所求的垂線,此等所求的線祇有一條.

因線外一点只能作一垂線于已知線.故所求之線祇有一條.

第二編　雙曲式幾何學

§90. 本編分雙曲式幾何學爲幾何之部,三角之部,及解析之部三章研究之,卽:

$$雙曲式幾何學\begin{cases}第七章\quad 幾何之部\\ 第八章\quad 三角之部\\ 第九章\quad 解析之部\end{cases}$$

第七章　幾何之部

第一節　平面幾何

§91. 雙曲式幾何學的定理可以分爲兩類:一類與平行公理有關係的其他一類與平行公理沒有關係的.據 §15,雙曲式幾何學的公理與歐派幾何學的公理除平行公理以外,其餘都是相同的;所以與平行公理沒有關係的定理,祇需由歐派幾何學上照抄(1),這裏可以不必推演.這裏要推演的,祇須限於與平行公理有關係的定理.

---

(1) 第六章的定理就是屬於這一類的,所以本編可以隨意引用.

§92. 平行公理和平行線定義,在前編已經講過,現在似乎可以不必再講了;但是因爲他們在本編佔着極重要的地位,爲研究方便計,所以再述一次.

§92.1. 平行公理. 設 A 是直線 BC 外面的一點(第二圖),P 是 BC 上面的一點.連結 AP, 則 AP 與 BC 相交於一點 P. 現在若令 P 沿着 $\overrightarrow{BC}$ 或 $\overrightarrow{CB}$ 移動(1), 無窮遠的移動,於是 AP 就移到一個極限的位置, AC' 或 AB', 而 AC', AB' 各與 BC 相交於極遠處.此時半線 AB', AC' 卽通過 A 點平行於 BC 的兩平行線.

〔注意〕 由平行公理可知每一直線有兩個極遠點,也有兩個平行方向, 卽 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$.

§93 平行線定義. 由平行公理可得一個明確的平行線定義於下:設 AC' 爲通過 A 點的直線,若 AC' 與另一直線 BC 能適合於下面三種關係,(第二圖):

(1) AC' 與 BC 同在一個平面內;

(2) AC' 與 BC 無論如何延長也不相交;

(3) 在 BC 上面任取一點 P, 連結 AP. 凡在 PAC' 角的內部通過 A 點的半線,都與 BC 相交.

這樣,我們就說: AC' 通過 A 點平行於 $\overrightarrow{BC}$. 或者說: AC' 上面一點 A 對於 $\overrightarrow{BC}$ 有平行性.以記號表之卽 $AC' \parallel\!| BC$.

(1) $\overrightarrow{BC}$ 這個記號是表示由 B 向 C 的方向, 而 $\overrightarrow{CB}$ 是表示由 C 向 B 的方向.

§94　**定義.**　由A點(第二圖)到BC作垂線AM. 平行線AB'與AM所夾的角叫做"左平行角"(1); AB'叫做"A點對於BC的左平行線"(2). 同樣, AC'與AM所夾的角叫做"右平行角"(3); AC'叫做"A點對於BC的右平行線"(4). 垂線AM叫做"平行線上面, A點的平行距離". 左右兩平行角的全部$B'AC'$叫做A點的平行全角.

§95　**定理1.**　凡一點的左右兩平行角可以互相疊合.

(假設)　設A爲已知點(第二圖), BC爲已知直線. 由A作AM垂直於BC, AB', AC'各平行於$\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}$, 則$\measuredangle MAB'$, $\measuredangle MAC'$爲A點對於BC的兩個平行角.

(求證)　$\measuredangle MAB' \equiv \measuredangle MAC'$.

(證明)　MAB'角與MAC'角能相合, 或不能相合, 二者必居其一. 若是能相合, 那麼本定理就證明了. 若是不能相合, 那麼兩角之中必定有一大一小. 現設MAC'角是大的, 於是在MAC'角內可作一個角MAP能與其他一角相合, 即

$$\measuredangle MAP \equiv \measuredangle MAB' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(1) Left-handed angle of parallelism, 或 Left handed parallel-angle.

(2) Left-handed parallel.

(3) Right-handed parallel-angle.

(4) Right-handed parallel.

半線 AP 係在平行角 MAC' 之內,應當與 MC 相交於一點(平行線定義),現設此點為 P, 在 MB 平面取一線段 MP' 能與 MP 相合,連結 AP', 則 $\measuredangle AMP \equiv \measuredangle AMP'$ (§74, 定理, 32),$(AM) \equiv (AM)$(公理丙$_2$).

$$\therefore \quad \measuredangle MAP \equiv \measuredangle MAP' \text{ (§58 定理 17)} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)及(2)得 $\measuredangle MAB' \equiv \measuredangle MAP' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由此式可知 AP' 與 AB' 應當合成一條線;但是由原設及作圖,他們是兩條線.所以(3)式不能成立,即 $\measuredangle MAB'$ 與 $\measuredangle MAC'$ 不能不相合,

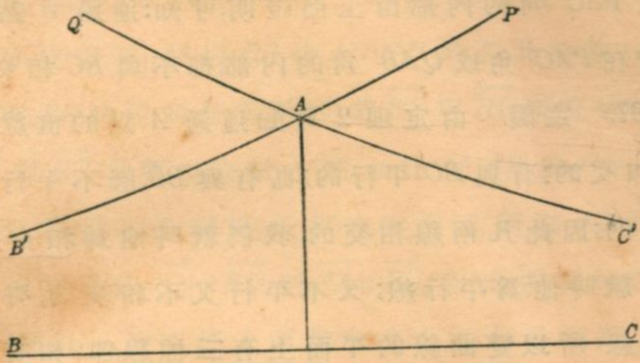
$$\therefore \quad \measuredangle MAB' \equiv \measuredangle MAC'.$$

〔注意〕 由本定理,可知左右兩平行角可以疊合的,並且以 AM 為軸而成為對稱的,所以此後要研究左右兩平行角,祇須研究其一角就够了;要研究左右兩平行線,也祇須研究其一線就够了.因此以後就以平行角代表左平行角及右平行角;平行線代表左平行線及右平行線.

又 A 點的兩平行線對於 BC 也是對稱的,因此以後討論平行性質也祇須討論 BC 之一傍就够了.

§96. 定理 2 設 AB' 或 AC' 各與 BC 平行,則凡通過 A 點的直線,其在平行全角的內部,或平行全角的對頂角的內部的,都與 BC 相交;其在平行全角的隣角的內部的,都與 BC 不相交.

(假設) 如第四圖設 $B'AC'$ 爲 A 點的平行全角,則平行全角的對頂角爲 PAQ,而隣角爲 PAC' 及 QAB'.



第四圖

(求證) I. 通過 A 點的直線,若在 $B'AC'$ 角或 QAP 角的內部,都與 BC 相交.

II. 通過 A 點的直線若在 PAC' 角或 QAB' 角的內部,都與 BC 不相交.

(證明) 由平行線定義,可知:通過 A 點的直線若在 $B'AC'$ 角的內部,則與 BC 相交;若在 PAQ 角的內部,則由 §56, 定理 16 也在 $B'AC'$ 角的內部,所以也與 BC 相交.

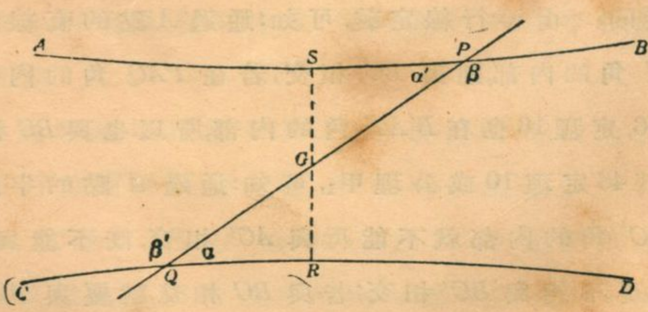
由 §48 定理 10 或公理甲$_1$, 可知:通過 A 點的半線若在 PAC' 角的內部就不能再與 AC' 相交,既不能與 AC' 相交,更不能與 BC' 相交;若與 BC 相交,就要與 AC' 相交(定理乙$_3$),但是不能與 AC' 相交,所以更不能與 BC 相交.同理,通過 A 點的半線若在 QAB' 角的內部也不

能與 BC 相交. 由 §56 定理 16, 凡通過 A 點的半線若在 PAC' 角或 QAB' 角的內部,則他的反向半線就在 QAB' 角或 PAC' 角的內部. 由上面證明,可知:通過 A 點的半線若在 PAC' 角或 QAB' 角的內部,都不與 BC 相交.

§**97**. **定義**. 由定理 2 可知通過 A 點的直線有與 BC 相交的;有與 BC 平行的;也有與 BC 既不平行亦不相交的;因此凡兩線相交的,我們就叫他為相交線;平行的就叫他為平行線;又不平行又不相交的,叫他為不交線. 所以雙曲線的平面上有三種線,即:相交線(1),不交線(2),平行線(3).

§**98**. **定理 3**. 設直線 PQ 與直線 AB, CD 交於 P 點及 Q 點. 同在直線 PQ 一側的兩內角 α, β 之和,若等於兩直角,則 AB 與 CD 為不交線.

(證明) 由 (PQ) 的中點 G 作 $GR \perp CD$, $GS \perp AB$. 由直



第五圖

(1) Intersecting lines (2) Non-intersecting lines (3) Parallel lines

角三角形 GRQ 及 GSP 內 $\because$ $\alpha\equiv\alpha'$ (既然 $\alpha+\beta=\pi=\alpha'+\beta$), $(GP)\equiv(GQ)$, $\therefore$ $\triangle GRQ\equiv\triangle GSP$ (§ 77.1 系 1).

由此 $\measuredangle QGR+\measuredangle QGS=\pi$, $\therefore$ GR 與 GS 同在一直線上面(§ 64, 定理23), 所以 RS 是 AB, CD 的公共垂線以 RS 為軸在 RS 的兩側是對稱的. 若 $\overrightarrow{SB}$ 與 $\overrightarrow{RD}$ 相交於一點, 則 $\overrightarrow{SA}$ 與 $\overrightarrow{RC}$ 也要相交於一點. 如此, 則 AB 與 CD 相交有兩點了, 這和公理甲$_1$ 及原設衝突了, 所以 AB 與 CD 不能相交. 又若 $\overrightarrow{SB}\parallel\!\parallel\overrightarrow{RD}$, 則 $\overrightarrow{SA}\parallel\!\parallel\overrightarrow{RC}$, 如此兩平行線 $\overrightarrow{SB}$ 與 $\overrightarrow{SA}$ 同在一條直線上面, 就和 § 92 平行公理衝突了. 所以 AB 不能與 CD 平行. 由此 AB 與 CD 為不交線.

§ 99. **定理 4.** 三角形 ABC 的外角大於內對角.

(假設) 把三角形 ABC 任意一邊 BC 延長到 D.

(求證) 求證 ACD 角 $>ABC$ 角或 BAC 角.

(證明) ACD 與 ABC 兩角大小的關係可分為三種: (1) $\measuredangle ACD>\measuredangle ABC$, (2) $\measuredangle ACD\equiv\measuredangle ABC$, (3) $\measuredangle ACD<\measuredangle ABC$. 若能證明 (2), (3) 兩種不合於理, 則 (1) 種成立, 而本定理就算證明了. 現在就本此目的證明於下:

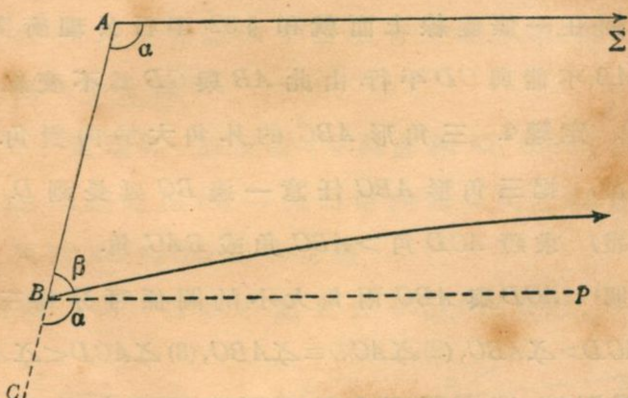
若是 $\measuredangle ACD\equiv\measuredangle ABC$, 則 $\measuredangle ABC+\measuredangle ACB=\pi$, 由定理 3 BA 與 CA 為不交線, 這與原設 ABC 是三角形衝突了, 所以 (2) 是不合於理的.

若是 $\measuredangle ACD<\measuredangle ABC$, 則在 ABC 角的內部可以作一個角 $A'BC$ 等於 ACD 角, 而 BA' 必與 CA 相交於一點 A',

並且 $\measuredangle A'BC+\measuredangle A'CB=\pi$. 如是由定理3, BA' 與 CA 不能相交,又發生矛盾,所以(3)也是不合於理:於是(1)是合於理的.依同樣的方法也可以證明 ACB 角大於 BAC 角.

§100. **定理5.** 凡直線與兩平行線相交,其與平行方向同側的兩內角之和,常小於兩直角.

(假設) 設 $\overrightarrow{A\Sigma}$ 與 $\overrightarrow{B\Sigma}$ 是互相平行的平行線(1). AB 是和他們相交的截線,α, β 是和平行方向同側的兩內角.



第六圖

(求證) 求證 $\alpha+\beta<\pi$.

(證明) 延長 AB 到 C, 由 B 點引一直線 BP.

令 PBC 角能與 α 角相合,則 $\alpha+\measuredangle ABP=\pi$, 由此直線 BP 與 $A\Sigma$ 既不相交也不平行(§98定理3),所以 BP 不

(1) 在§92平行公理曾經說過:平行的直線可以看作相交於極遠處,以後平行線的交點,都用希臘字母Σ代表之.

能在 $B\Sigma$ 上面,也不能在 $AB\Sigma$ 角的內部,祇能在 $CB\Sigma$ 角的內部.

$$\therefore\ \beta<\measuredangle ABP \qquad \therefore\ \alpha+\beta<\pi$$

§100.1. 系1. 凡平行角都是銳角.

§100.2. 系2. 凡直角三角形除直角外其他兩角各爲銳角.

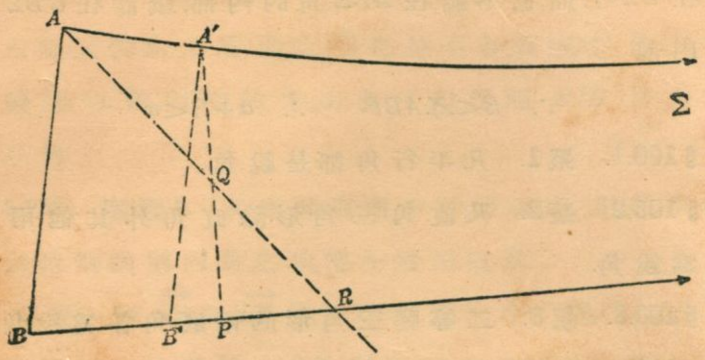
§100.3. 系3. 二等腰三角形的兩底角各爲銳角.

§101. 雙曲線幾何學的平行線,很像歐派幾何學的平行線,有下面三種要性:

§101.1. 平行遍有性. 定理6. 若半線 $\overrightarrow{A\Sigma}$ 有一點 A 對於 $\overrightarrow{B\Sigma}$ 有平行性;則 $\overrightarrow{A\Sigma}$ 的底線上任何點對於 $\overrightarrow{B\Sigma}$ 也有平行性.

(證明) 本定理可以分爲兩部分來證明:(一)證明 $\overrightarrow{A\Sigma}$ 上面任何點都有平行性;(二)證明 $\overrightarrow{A\Sigma}$ 的反向半線上任何點都有平行性.(一)如第七圖設 A' 是 $A\Sigma$ 上面任意的一點,B' 是 $B\Sigma$ 上面任意的一點.

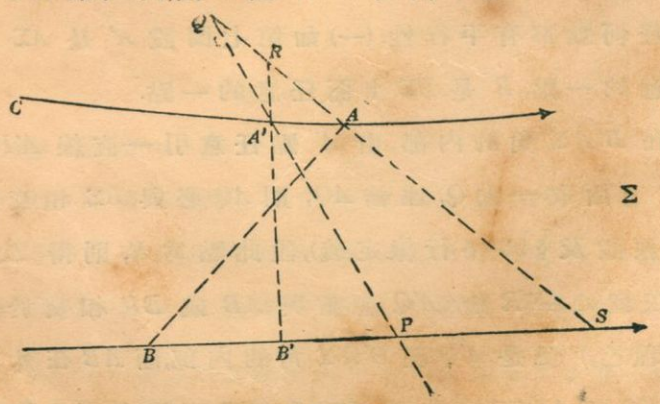
在 $B'A'\Sigma$ 角的內部,由 A' 點任意引一直線 $A'P$. 在 $A'P$ 上面取一點 Q, 連結 AQ, 則 AQ 必與 $B\Sigma$ 相交於一點(原設及§93平行線定義),設此點爲 R, 則得 $\triangle ABR$ 現在就 $\triangle ABR$ 論, $A'Q$ 應當與 AB 或 BR 相交於一點(公理乙$_4$), 但是 $A'Q$ 在 $B'A'\Sigma$ 角的內部,而 AB 在外部,因此 $A'Q$ 與 AB 不能有公共點,卽 $A'Q$ 不能與 AB 相交,所



第七圖

以 $A'Q$ 必與 BR 相交於某點 P. 同理,得一結論:凡在 $B'A'\Sigma$ 角的內部,由 A' 引出來的半線都與 $B\Sigma$ 相交.原設 $A'\Sigma$ 與 $B'\Sigma$ 都在一個平面內,並且不相交.所以 A' 對於 $B\Sigma$ 有平行性(§93平行線定義),但 A' 是 $A\Sigma$ 上面任意的一點,所以 $A\Sigma$ 上面任何點對於 $B\Sigma$ 有平行性.

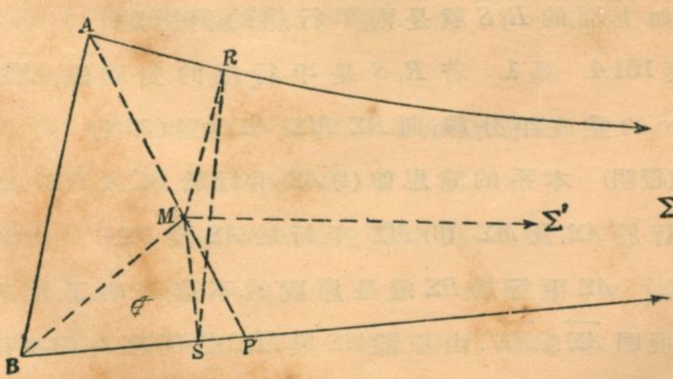
(二)如第八圖,設 A' 是 $A\Sigma$ 的反向半線 AC 上面任意



第八圖

的一點. B' 是 $B\Sigma$ 上面任意的一點. 連結 $A'B'$. 在 $B'A'\Sigma$ 角的內部,由 A' 引一半線 $A'P$, 在 $A'P$ 的反向半線上取一點 Q. 連結 QA 則得三角形 QAA'. 延長 $B'A'$ 與 QA 相交於一點 R(§ 56 及 § 44). 延長 RA 與 $B\Sigma$ 相交於一點 S(§56, 原設, § 93) 又得一個三角形 $RB'S$. 就 $\triangle RB'S$ 論. $A'P$ 應當與 $B\Sigma$ 相交於一點 (§ 39), 依同樣的道理可以證明: 凡在 $B'A'\Sigma$ 角的內部通過 A' 點的半線都要與 $B\Sigma$ 相交. 原設 $A'\Sigma$ 與 $B\Sigma$ 是同在一個平面上的, 并且任何延長兩不相交的; 所以 A' 對於 $B\Sigma$ 有平行性 (§ 93). 上面作圖原來假設 A' 是 AC 上面任意的一點. 所以我們可以說 $A\Sigma$ 的反向半線 AC 上面任何點都有平行性.

101.2 平行對應性. 定理7. 若 $\overrightarrow{A\Sigma}$ 平行於 $\overrightarrow{B\Sigma}$, 則 $\overrightarrow{B\Sigma}$ 也平行於 $\overrightarrow{A\Sigma}$ (第九圖).



第九圖

(證明) 連結 AB(AB 各為 $A\Sigma$, $B\Sigma$ 上面任意之點), 則

因 $\overrightarrow{A\Sigma} /\!\!/\!\!/ \overrightarrow{B\Sigma}$, ∴ $BA\Sigma$ 角的平分線 AP 必與 $B\Sigma$ 相交於一點(平行線定義),設此點為 P. 又 $AB\Sigma$ 角的平分線 BM 必與 (AP) 相交於一點(§ 75 及 § 50),設此點為 M, 由 M 作 MR, MS 各垂直於 $A\Sigma$, $B\Sigma$, 則 $(MR)\equiv(MS)$(§ 77.3 系 3), 連結 RS, 因 $\measuredangle MRS\equiv\measuredangle RSM$(§60), $\measuredangle MRA\equiv\measuredangle MSB$(§ 74 定理 32) ∵ $\measuredangle SR\Sigma\equiv\measuredangle RS\Sigma$.

作 RMS 角的平分線 $M\Sigma'$, 則 $M\Sigma'$ 是 SR 的垂直平分線(§ 61 定理 20). 如是則以 $M\Sigma'$ 為軸,把 $B\Sigma$ 可以轉到 $A\Sigma$ 的位置上,而 $A\Sigma$ 也可以轉到 $B\Sigma$ 的位置上. 所以

$$\text{若}\quad \overrightarrow{A\Sigma} \parallel\!| \overrightarrow{B\Sigma}, \qquad \text{則}\quad \overrightarrow{B\Sigma} \parallel\!| \overrightarrow{A\Sigma}.$$

§ 101.3. 定義. 直線 a 上面有一點 A, 直線 b 上面有一點 B. 連結 A, B 所得的線段 (AB) 與直線 a, b 所夾的兩角,若能疊合,則 A, B 兩點叫做 a, b 上面的對應點. 譬如上面的 R, S 就是兩平行線的對應點.

§ 101.4. 系 1. 若 R, S 是平行線的對應點, $M\Sigma'$ 是 (RS) 的垂直平分線;則 $R\Sigma$, $M\Sigma'$, $S\Sigma$ 互相平行.

(證明) 本系的意思即 (1) $A\Sigma$ 平行於 $B\Sigma$ 及 $M\Sigma'$. (2) $B\Sigma$ 平行於 $A\Sigma$ 及 $M\Sigma'$. (3) $M\Sigma'$ 平行於 $A\Sigma$ 及 $B\Sigma$.

(1) $A\Sigma$ 平行於 $B\Sigma$ 這是原設的,不必證明了. 現在祇要證明 $\overrightarrow{A\Sigma} \parallel\!| \overrightarrow{M\Sigma'}$. 由原設 $A\Sigma$ 與 $M\Sigma'$ 是同在一個平面內的, $M\Sigma'$ 是 $A\Sigma$, $B\Sigma$ 的對稱軸;所以 $M\Sigma'$ 與 $A\Sigma$ 無論如何延長是不相交的;若是相交,則 $B\Sigma'$, $A\Sigma$, $B\Sigma$ 非同交於

一點不可,但是如此,則與原設$A\Sigma$平行於$B\Sigma$兩不相交有衝突,又在$MA\Sigma$角的內部凡通過A點的半線因爲與$B\Sigma$要相交,所以與$M\Sigma'$也要相交(原設及定理乙$_3$).綜合上面三層的意思可知$\overrightarrow{A\Sigma} \parallel \overrightarrow{M\Sigma'}$.

(2) 由本定理 $\because$ $\overrightarrow{A\Sigma} \parallel \overrightarrow{B\Sigma}$ $\therefore$ $\overrightarrow{B\Sigma} \parallel \overrightarrow{A\Sigma}$, 與(1)同理 $\overrightarrow{B\Sigma} \parallel \overrightarrow{M\Sigma'}$

(3) $\because$ $\overrightarrow{A\Sigma} \parallel \overrightarrow{M\Sigma'}$　$\therefore$ $\overrightarrow{M\Sigma'} \parallel \overrightarrow{A\Sigma}$　(本定理)

$\because$ $\overrightarrow{B\Sigma} \parallel \overrightarrow{M\Sigma'}$　$\therefore$ $\overrightarrow{M\Sigma'} \parallel \overrightarrow{B\Sigma}$　(本定理)

§101.5. 系2. 假設A,B爲$A\Sigma, B\Sigma$兩平行線的對應點;A', B'也是該兩平行線的對應點;並且A', B'同在AB之一側;如是:則$(AA') \equiv (BB')$.

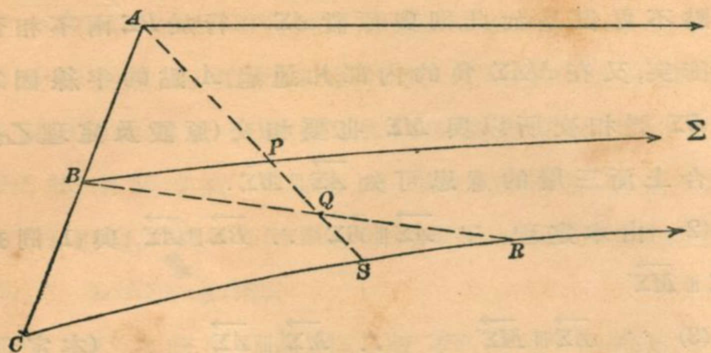
§101.6 系3. 若A, B各爲$A\Sigma, B\Sigma$兩平行線的對應點;則$A\Sigma$與$B\Sigma$對於(AB)的垂直平分線爲對稱.

§101.7 **平行傳遞性. 定理8.** 若$\overrightarrow{A\Sigma} \parallel \overrightarrow{B\Sigma}, \overrightarrow{B\Sigma} \parallel \overrightarrow{C\Sigma}$;則$\overrightarrow{A\Sigma} \parallel \overrightarrow{C\Sigma}$.

(證明) 本定理應分爲兩種情形研究之.

I. 如第十圖$B\Sigma$在$A\Sigma$與$C\Sigma$之間.

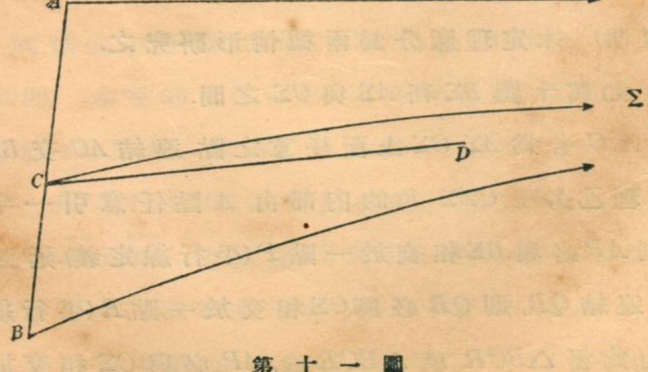
設A, C各爲$A\Sigma, C\Sigma$上面任意之點.連結AC交$B\Sigma$於B(定理乙$_3$),在$CA\Sigma$角的內部由A點任意引一半線AP,則AP必與$B\Sigma$相交於一點P(平行線定義).延長AP至Q,連結QB,則QB必與$C\Sigma$相交於一點R(平行線定義);由此得$\triangle BCR$.就$\triangle BCR$論,AP必與$C\Sigma$相交於某



第十圖

點 S(§39). 依同樣的道理可知:凡在 $CA\Sigma$ 角的內部,由 A 點所引的半線都與 $C\Sigma$ 相交於一點. 再由原設 $A\Sigma$ 與 $C\Sigma$ 同在一個平面內,並且 $A\Sigma$ 與 $C\Sigma$ 無論如何長不能相交.(若 $A\Sigma$ 與 $C\Sigma$ 兩線相交,則此兩線非有一線與 $B\Sigma$ 相交不可;但是 $A\Sigma$ 或 $C\Sigma$ 都不與 $B\Sigma$ 相交,所以 $A\Sigma$ 也不能與 $C\Sigma$ 相交),所以 $\overrightarrow{A\Sigma} \parallel \overrightarrow{C\Sigma}$.

II. 如第十一圖 $B\Sigma$ 不在 $A\Sigma, C\Sigma$ 之間.



第十一圖

設A, B各爲$A\Sigma, B\Sigma$上面任意之一點,連結AB交$C\Sigma$於C點(定理乙$_3$). 在$BA\Sigma$角的內部,凡通過A點的半線都與$B\Sigma$相交(原設及平行線定義);所以也與$C\Sigma$相交(定理乙$_3$). 再由原設,$A\Sigma$與$C\Sigma$是同在一個平面內的,並且無論如何延長,他們也不相交的,(若要相交於一點,則通過此點向着一個方向可作$\overrightarrow{A\Sigma}, \overrightarrow{C\Sigma}$兩條線平行於$B\Sigma$,這與平行公理不合),所以$\overrightarrow{A\Sigma} \parallel \overrightarrow{C\Sigma}$

§ 101 8. 系 1. 在兩平行線之間可引一直線與兩平行線平行.若不平行,必與兩平行線之一線相交於一點.

(證明) 如第十一圖在$A\Sigma, B\Sigma$之間任意取一點C,由C點可引$C\Sigma$平行於$B\Sigma$(平行公理),因此也平行於$A\Sigma$(本定理).

由C所引之半線CD若是不平行於$A\Sigma$或$B\Sigma$,則CD必在$C\Sigma$之一側,如第十一圖與$B\Sigma$同側.由平行線定義可知他非與$B\Sigma$相交於一點不可.

§ 101 9. 系 2. 在已知兩平行線之間,任意取一點P.與無窮遠點Σ連結;則$P\Sigma$平行於已知兩平行線.

§ 101.10. 系 3. 由直線$A\Sigma$外面取一點P與無窮遠點Σ連結;則$\overrightarrow{P\Sigma} \parallel \overrightarrow{A\Sigma}$.

§ 102. 有兩邊平行的三角形$AB\Sigma$,可以看作有一角點在無窮遠處的三角形.他的性質和普通三角形

的性質有許多是相似的,並且和歐派幾何學的三角形也有許多是相似的.下面的定理就是要研究此等三角形的性質.

§ 102.1. **定理9** 凡在三角形 $AB\Sigma$ 的內部,任意取一點 P 與任意一角點連結,其所得的半線 AP, BP 或 ΣP 必與該角點的對邊 $B\Sigma$, $A\Sigma$ 或 AB 相交於一點.

(證明) $A\Sigma$ 旣然和 $B\Sigma$ 平行,則由平行線定義可知 AP 必與 $B\Sigma$ 相交於一點 C. 同理: BP 必與 $A\Sigma$ 相交於一點 C'. 就 $\triangle ABC$ 論, ΣP 必與 (AB) 或 (BC) 相交(公理乙$_4$). 但 ΣP 不與 BC 相交(§ 101.9 系 2),所以 ΣP 必與 (AB) 相交.

102.2. **定理10.** 在三角形 $AB\Sigma$ 的平面上,若有一直線與該三角形的三邊之一邊相交,則必再與其他兩邊之一邊相交.

(假設) 如第十二圖,假設有一直線 a 與 AB 相交於一點 C. 又一直線 b 與 $A\Sigma$ (或 $B\Sigma$) 相交於一點 C'.

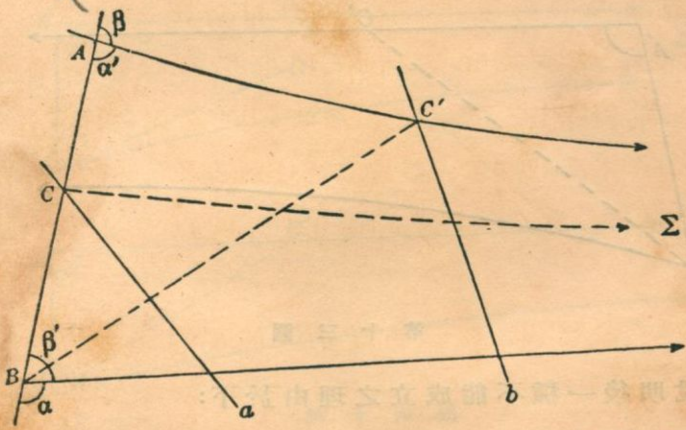
(求證) I. 求證 a 與 $A\Sigma$ 或 $B\Sigma$ 相交.

II. 求證 b 與 AB 或 $B\Sigma$ 相交.

(證明) I. 連結 $C\Sigma$, 則 $C\Sigma$ 平行於 $A\Sigma$ 及 $B\Sigma$ (§ 101.9 系 2),而直線 a 必在 $C\Sigma$ 之一側. 若 a 對於 $C\Sigma$ 是與 $B\Sigma$ 同側的, 則 a 必與 $B\Sigma$ 相交(平行線定義),若 a 對於 $C\Sigma$ 是與 $A\Sigma$ 同側的, 則 a 必與 $A\Sigma$ 相交(平行線定義).

II. 連結 BC' 則直線 b 必在 $C'A$ 與 $C'B$ 之間或 $C'B$ 與 $C'\Sigma$ 之間(§53,定理14)若在 $C'A$ 與 $C'B$ 之間則就 $\triangle ABC'$ 論必與 AB 相交(§44),若在 $C'B$ 與 $C'\Sigma$ 之間,則由平行線定義必與 $B\Sigma$ 相交.

§ 102.3. 定理 11. 如第十二圖三角形 $AB\Sigma$ 的外角



第十二圖

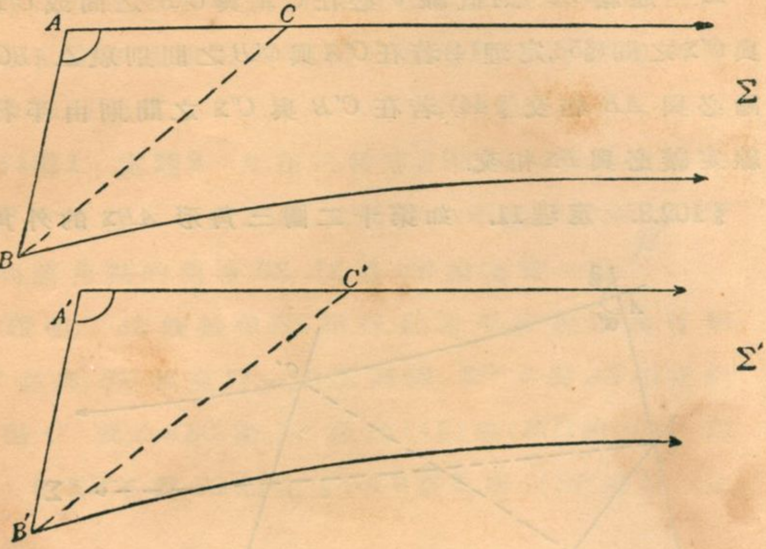
α (或 β) 常大於內對角 α' (或 β').

(證明) $\alpha'+\beta'<\pi$ (§100,定理5), $\alpha+\beta'=\pi$.

$\therefore\quad \alpha'+\beta'<\alpha+\beta'$ 卽 $\alpha'<\alpha$, 卽 $\alpha>\alpha'$

§ 102.4. 定理 12. 兩個三角形 $AB\Sigma$ 及 $A'B'\Sigma'$ (第十三圖),若 $(AB)\equiv(A'B')$, $\measuredangle A\equiv\measuredangle A'$,則 $\measuredangle B\equiv\measuredangle B'$.

(證明) B 和 B' 兩角大小的關係,必於相合與不相合兩種情形中居其一種.我們要是能證明後一種不能成立,則前一種就要成立,而本定理也就證明了.現



第十三圖

在說明後一種不能成立之理由於下:

B 和 B' 若是不相合,則其中必有大小.假設 B 角是大於 B' 角,則在 B 角的部可作一半線 BC,能令

$$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle B' \quad \cdots\cdots (1)$$

並且 BC 必與 $A\Sigma$ 相交於某點 C.現在由 $A'\Sigma'$ 上面取一點 C',令 $(A'C') \equiv (AC)$.連結 $B'C'$,則

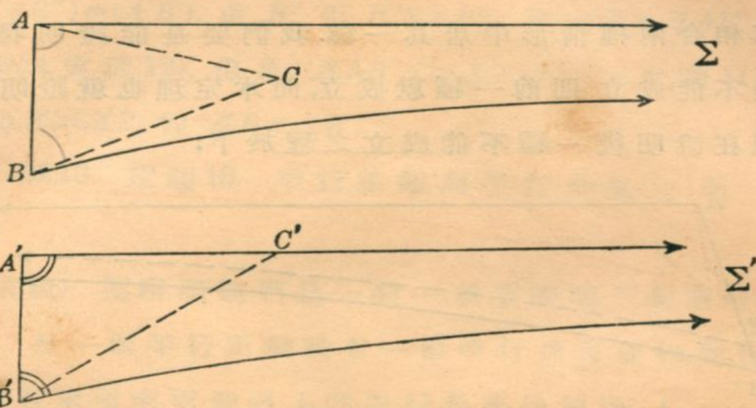
$$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C' \quad \cdots\cdots (2)$$

(§58,定理17)由(1)及(2)得 $\measuredangle B' \equiv \measuredangle A'B'C'$,但是 B' 角能合於 $A'B'C'$ 角於理不合.所以上面假設 B 與 B' 兩角不能相合,也是於理不合了.

§ 102.5. 系 1. 凡能疊合的平行距離,其平行角也能疊合.

§ 102.6. 定理 13. 兩個三角形 $AB\Sigma$, $A'B'\Sigma'$ (第十四圖), 若 $\measuredangle A \equiv \measuredangle B$, $\measuredangle A' \equiv \measuredangle B'$, 並且 $(AB) \equiv (A'B')$., 則

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle A' \equiv \measuredangle B \equiv \measuredangle B'.$$



第十四圖

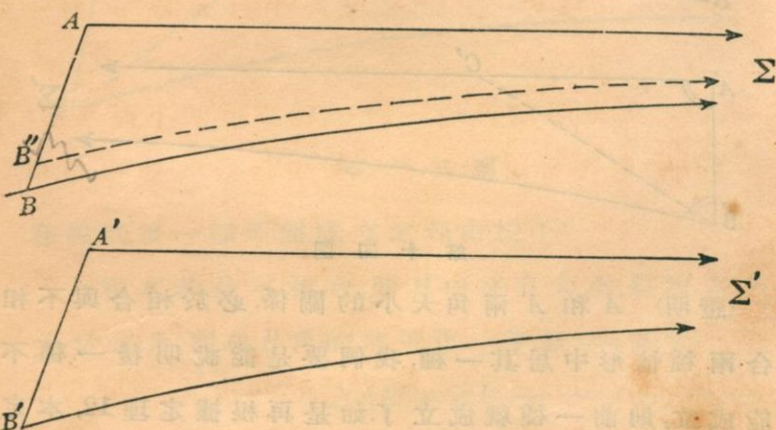
(證明) A 和 A' 兩角大小的關係,必於相合與不相合兩種情形中居其一種,我們要是能說明後一種不能成立,則前一種就成立了.如是再根據定理 12, 本定理就證明了.現在說明後一種不能成立之理於下:

若是 A 與 A' 不相合,則其中必有一大一小,設 A 大於 A', 則 B 也大於 B'. 由 A 角的內部可作 $\measuredangle CAB \equiv \measuredangle A'$, 由 B 角的內部也可以作 $\measuredangle CBA \equiv \measuredangle A'$, 而 CA 與 CB 相交於一點 C. 在 $A'\Sigma'$ 上面取一點 C', 令 $(A'C') \equiv (AC)$, 連結 $B'C'$, 則 $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$ (§ 58, 定理 17), 但是由作圖

$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'$, 由原設 $\measuredangle A' \equiv \measuredangle B'$, $\therefore \measuredangle A'B'C' \equiv \measuredangle B'$, 這個結果於理是不合的,所以 A 與 A' 非相合不可.

§ 102.7. **定理14.** 兩個三角形 $AB\Sigma$, $A'B'\Sigma'$ (第十五圖),若 $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$, $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$, 則 $(AB) \equiv (A'B')$.

(證明) AB 與 $A'B'$ 兩線段大小的關係,必於相合與不相合兩種情形中居其一種.我們要是能證明後一種不能成立,則前一種就成立,而本定理也就證明了.現在說明後一種不能成立之理於下:



第十五圖

AB 與 $A'B'$ 若是不能相合,則其中必有一大一小.設 (AB) 大於 $(A'B')$,於是在 (AB) 上面可以截取 $(AB'') \equiv (A'B')$ 由 B'' 點引 $B''\Sigma \parallel B\Sigma$,如是則 $\measuredangle AB''\Sigma \equiv \measuredangle B'$ (§ 102.4 定理12),但是原設 $\measuredangle B' \equiv \measuredangle B$ $\therefore \measuredangle AB''\Sigma \equiv \measuredangle B$ 由 § 102.3 定理11 可知這個結果是不對的,卽 (AB) 與 $(A'B')$ 不相合是錯的.

§ **102.8.** 系. 凡能疊合的平行角,其平行距離也能疊合.

§ **102.9.** **定理 15.** 兩個三角形 $AB\Sigma$, $A'B'\Sigma'$ (第十五圖),若 $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$, $(AB) > (A'B')$, 則 $\measuredangle B < \measuredangle B'$.

(證明) (AB) 既然大於 $(A'B')$,則在 (AB) 上面可以截取 $(AB'') \equiv (A'B')$. 由 B'' 引 $B''\Sigma \parallel B\Sigma$, 則 $\measuredangle B' \equiv \measuredangle AB''\Sigma$ (§ 102.4 定理 12), 但是, $\measuredangle AB''\Sigma > \measuredangle B$ (§ 102.3 定理 11), $\therefore \measuredangle B' > \measuredangle B$, 即 $\measuredangle B < \measuredangle B'$.

§ **102.10.** **定理 16.** 平行距離與平行角是"一對一的".

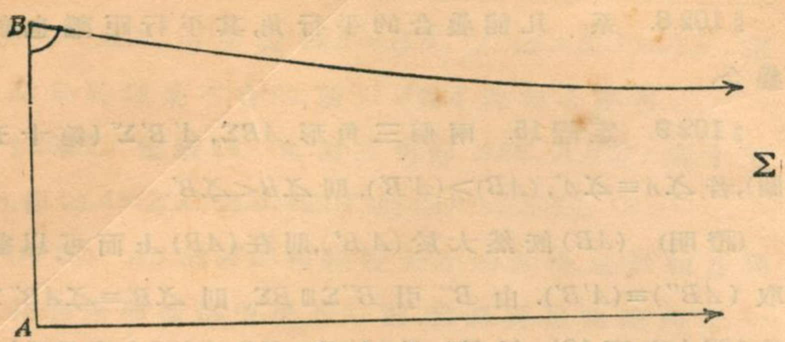
(求證) 要證明他們是一對一,就要證明下面兩層:

I. 有一個平行距離就有一個平行角與他相應,但不能有兩個或兩個以上的平行角與他相應;

II. 有一個平行角,就有一個平行距離與他相應,但不能有兩個或兩個以上的平行距離與他相應.

(證明) I. 假設平行距離是已經知道了,那麼在直線 $A\Sigma$ 上面一點 A, 作一條垂線 $BA \perp A\Sigma$ (第十六圖),令 BA 之長等於已知平行距離,於是由 B 點引 $B\Sigma \parallel A\Sigma$. 如是則 $AB\Sigma$ 角即平行距離 (BA) 的平行角. (BA) 的平行角祇有一個不能有兩個,若是有兩個大小不同的角就與 § 102.4 定理 12 衝突.

II. 像 $AB\Sigma$ 那樣一個平行角,就祇有一個平行距離

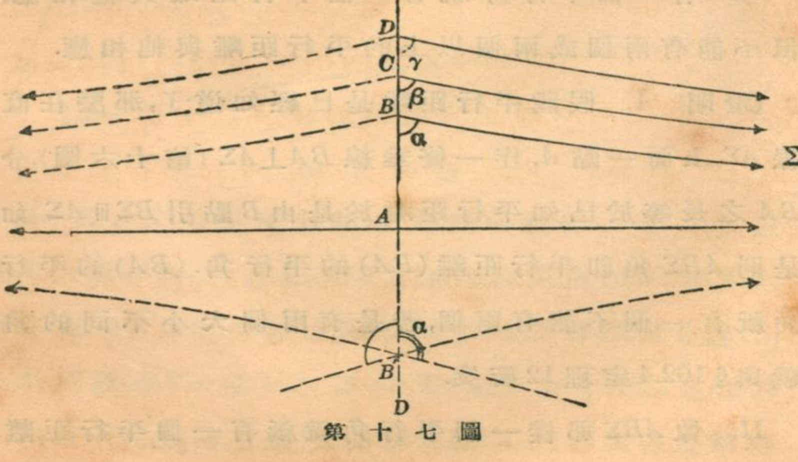


第十六圖

(BA)不能有兩個.若是有兩個大小不同的距離,則與§102.7定理14衝突.由I及II可知平行距離與平行角是一對一的.

§102.11. 定理17. 平行距離,若是漸漸的增加或減少;則平行角就漸漸的減少或增加.反之:平行角若漸漸的增加或減少;則平行距離就漸漸的減少或增加.

(證明) 如第十七圖由$A\Sigma$上面一點A,作$AE \perp A\Sigma$,



第十七圖

在 AB 上面取 B, C, D……點,命 $(AB)<(AC)<(AD)$……,由 B, C, D,……各點引 $\overrightarrow{B\Sigma}, \overrightarrow{C\Sigma}, \overrightarrow{D\Sigma}$,……平行於 $\overrightarrow{A\Sigma}$. 命 (AB), (AC), (AD),……的平行角為 α, β, γ……如是則由 § 102.3 定理 11, $\alpha>\beta>\gamma$……. 卽平行距離漸漸的繼續的增加或減少,則平行角就繼續的漸漸的減少或增加.

假設 α, β, γ,……為已知平行角,而 $\alpha>\beta>\gamma$……. 如第十七圖,設 γ 角的平行距離為 (DA), 則 β 角的平行距離 (CA) 的 C 點非在 (DA) 線段以內不可,卽非 $(CA)<(DA)$ 不可. 若在 (DA) 線段以外,譬如在 D, E 之間,則由 § 102.3 定理 11, β 角就要小於 γ 角. 這就和原設衝突了. 至於 C 點若在 AD 的反向半線 AD' 上面,則因 AD 與 AD' 對於 $A\Sigma$ 是對稱, AD' 的性質與 AD 是一樣的,所以不必再多說了. 依同樣道理, α 角的平行距離 (BA) 非小於 β 角的平行距離 (CA) 不可. 所以若 $\alpha>\beta>\gamma$……, 則 $(BA)<(CA)<(DA)$……,卽平行角若漸漸的繼續的增加或減少;則平行距離就漸漸的繼續的減少或增加.

§ 103. **定義 1**. 由 § 102.11 定理 17 可知平行角的大小是隨着平行距離而變的,所以平行角是平行距離的函數,如第十七圖. 設平行距離 $(AB)=p$, 則 p 的平行角 α 可以用這個記號 $\pi(p)$ 代表之. 這個記號 $\pi(p)$ 讀為 "π 的 p".

由 § 102.10 定理 16 若給 p 一個數值,則 $\pi(p$ 也有一個

數值,並且祇有一個,所以 $\pi(p)$ 是單值函數.再由 §102.11 定理17,可知 $\pi(p)$ 是遞降函數.若 B 由 A 向 AD 方向移動,則 p 由零漸漸增加,而 $\pi(p)$ 由 $\frac{\pi}{2}$ 漸漸減少;即: $\pi(0)=\frac{\pi}{2}, \pi(\infty)=0$.

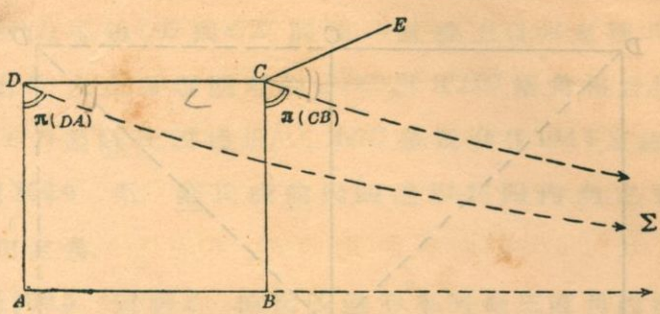
若 B 向 AD' 方向移動,則因 AD' 與 AD 的方向相反,所以 p 的數值是負的,而這個記號 $\pi(-p)$ 在事實上就不能再代表 α 角了.但是爲以後研究方便起見,又不能不給他一個適當的意義.由數學家研究的結果,知道他的意義最適當的是莫過於代表 α 角的補角了,即 $\pi(-p)+\pi(p)=\pi$. 由 §100.1 系1,可知 $\pi(p)$ 常常是銳角,所以 $\pi(-p)$ 常常是鈍角.

§103.1 定義2. 設 A, B 兩角互爲餘角,若 A 角的平行距離爲 a, 則 B 角的平行距離,常用 a' 代表之.即 $\pi(a)+\pi(a')=\frac{\pi}{2}$. 於是 a 與 a' 互爲餘線段.

§104. 在 §22, §24 講過,薩倫兩氏的四邊形各有三種假設;但是他們在雙曲線幾何學上是屬於那一種假設呢?其性質如何呢?這些問題前面並沒有談到,現在研究於下:

§104.1. 定理18. 薩氏四邊形在雙曲線幾何學上是屬於銳角假設的四邊形.

(假設) 如第十八圖設 $ABCD$ 是薩氏四邊形, A 與 B 爲直角 $(AD)\equiv(BC)$, $\measuredangle ADC\equiv\measuredangle BCD$.



第十八圖

(求證)　求證 BCD 角是銳角.

(證明)　由 D 及 C 各作 $D\Sigma, C\Sigma$ 平行於 $\overrightarrow{AB\Sigma}$, 就有兩個平行角 $\pi(DA)$ 及 $\pi(CB)$. 這兩個平行角因 $(DA)\equiv(CB)$ (原設)　　$\therefore\ \pi(DA)\equiv\pi(CB)$ ……………………(1)

(§ 102.4 定理 12). 由 § 102.3 定理 11

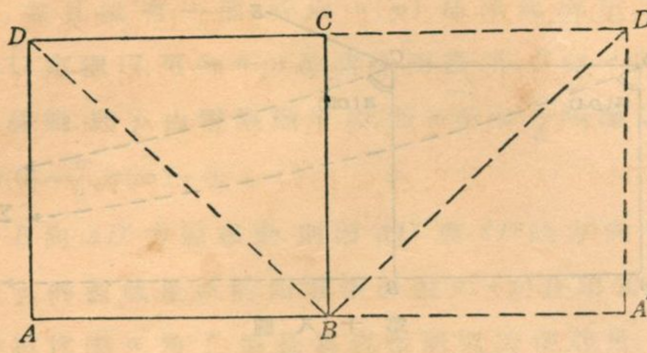
$$\measuredangle EC\Sigma > \measuredangle CD\Sigma \text{ ……………………(2)}$$

由 (1) 及 (2), $\pi(DA)+\measuredangle CD\Sigma<\pi(CB)+\measuredangle EC\Sigma$.

即 $\measuredangle ADC<\measuredangle BCE$, 但 $\measuredangle ADC\equiv\measuredangle BCD$(§ 88)　$\therefore\ \measuredangle BCD<\measuredangle BCE$. 由這個結果及 $\measuredangle BCD+\measuredangle BCE=\pi$, 可知 BCE 必定是鈍角而 BCD 也是銳角 (§ 74.1. 系 1).

§ 104.2.　定義 1.　薩氏四邊形 $ABCD$ 也叫做雙直角等腰四邊形, 如第十八圖. 其相等的兩邊 (DA) 及 (CB) 叫做薩氏四邊形的腰, (AB) 叫做他的直角邊. (DC) 叫做他的銳角邊

§104.3.　定理 19.　倫氏四邊形在雙曲線幾何學上



第十九圖

是屬於銳角假設的四邊形.

(假設) 如第十九圖假設$ABCD$是倫氏四邊形, DAB, ABC, BCD三角都爲直角.

(求證) 求證ADC角是銳角.

(證明) 延長AB到A', 令$(A'B)\equiv(AB)$. 在A'點作$A'D'\perp A'B$, 並且使$(A'D')\equiv(AD)$. 連結CD', BD'及BD, 則由ABD及$A'BD'$兩個三角形, 因$(AB)\equiv(A'B)$, $(AD)\equiv(A'D')$, $\measuredangle DAB\equiv\measuredangle D'A'B$.

$\therefore$ $(BD)\equiv(BD')$, $\measuredangle ABD\equiv\measuredangle A'BD'$, $\measuredangle BDA\equiv\measuredangle BD'A'$ (§58), 再由原設$\measuredangle ABC\equiv\measuredangle A'BC$, $\therefore$ $\measuredangle CBD=\measuredangle CBD'$. 由三角形$BCD$及$BCD'$, 因$(BC)\equiv(BC)$, $(BD)\equiv(BD')$, $\measuredangle CBD\equiv\measuredangle CBD'$

$$\therefore\ \measuredangle BDC\equiv\measuredangle BD'C \cdots\cdots(1)$$

及 $$\measuredangle BCD\equiv\measuredangle BCD' \cdots\cdots\cdots(2)\ (\S 58)$$

由(2)可知CD與CD'同在一直線上(§ 64 定理 23)

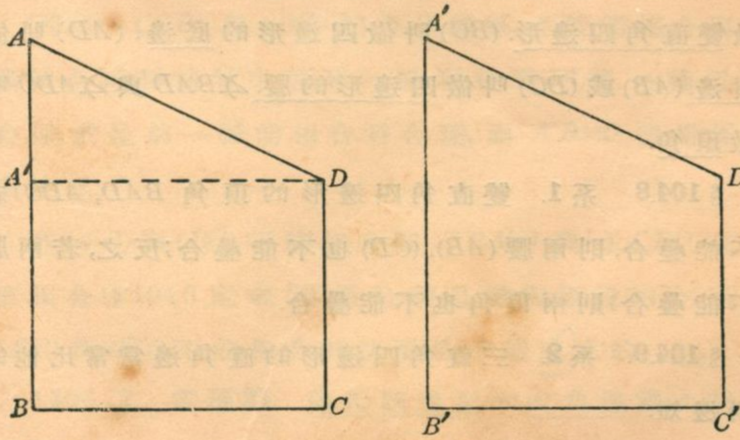
由(1)及上面證明可知ADC與$A'D'C$兩角相合,所以$AA'D'D$是薩氏四邊形, ∴ ADC是銳角(§ 104.1 定理 18).

§ 104.4 系. 薩氏或倫氏四邊形,其四內角之和小於四直角.

§ 104.5. 定義 2. 倫氏四邊形也叫做三直角四邊形. 如第十九圖, (AB)及(BC)叫做直角邊, (CD)叫做直角邊(AB)的對邊, 或直角邊(BC)的隣邊. (AD)叫做直角邊(BC)的對邊或直角邊(AB)的隣邊.

§ 104.6. 定理 20. 假設AB與DC同時垂直於BC之一側,如第二十圖甲.若$(AB)>(CD)$, 則$\measuredangle BAD<\measuredangle ADC$; 反之,若$\measuredangle BAD<\measuredangle ADC$, 則$(AB)>(CD)$.

甲圖 乙圖



第二十圖

(證明) 在 (AB) 上面截取 $(A'B)\equiv(DC)$, 則 $\measuredangle BA'D\equiv\measuredangle CDA'$ (§ 88), $\measuredangle BA'D>\measuredangle BAD$ (§ 99, 定理 4); $\therefore \measuredangle BAD<\measuredangle CDA'$, 但是 $\measuredangle CDA'<\measuredangle ADC$, $\therefore\ \measuredangle BAD<\measuredangle ADC$.

(AB) 與 (CD) 的大小關係不外乎三種 (1) $(AB)>(CD)$, (2) $(AB)\equiv(CD)$, (3) $(AB)<(CD)$. 現在要是能證明 (2), (3) 兩種不合於理, 則 (1) 種就要成立, 而本定理後面的部分也就證明了. 現在說明 (2), (3) 兩種不合理之原因於下:

若 $(AB)\equiv(CD)$, 則 $ABCD$ 是薩氏四邊形, BAD 角與 ADC 角非相合不可 (§ 88); 但是這個話與原設衝突.

若 $(AB)<(CD)$, 則由上面證明應得 $\measuredangle BAD>\measuredangle ADC$; 但是這式子又與原設衝突. 所以 (2), (3) 都不合於理.

§ 104.7. **定義 3.** 上面定理所說的四邊形 $ABCD$, 叫做雙直角四邊形. (BC) 叫做四邊形的底邊. (AD) 叫做頂邊. (AB) 或 (DC) 叫做四邊形的腰. $\measuredangle BAD$ 與 $\measuredangle ADC$ 叫做頂角.

§ 104.8 **系 1.** 雙直角四邊形的頂角 BAD, ADC 若不能疊合, 則兩腰 (AB), (CD) 也不能疊合; 反之, 若兩腰不能疊合; 則兩頂角也不能疊合.

§ 104.9. **系 2.** 三直角四邊形的直角邊常常比他的對邊短.

§ 104.10. **定理 21.** 兩個雙直角四邊形 $ABCD$ 及

$A'B'C'D'$,如第二十圖甲及乙.若有一腰$(AB)\equiv(A'B')$,及頂邊$(AD)\equiv(A'D')$,並且腰與頂邊所夾的角$\measuredangle BAD\equiv\measuredangle B'A'D'$;於是這兩個雙直角四邊形可以疊合.

(證明) 因為$(AB)\equiv(A'B')$, $\measuredangle BAD\equiv\measuredangle B'A'D'$, $(AD)\equiv(A'D')$,所以我們可以把四邊形$A'B'C'D'$的邊$(A'B')$放在(AB)上面,$(A'D')$放在(AD)上面,並且B'點落在B上面,D'點落在D上面.又因$\measuredangle ABC\equiv\measuredangle A'B'C'$(§74定理32),所以$(B'C')$落在$(BC)$上面;於是$C'$點或者落在$C$點上面,或者不落在$C$點上面.若不落在$C$點上面,則由$D$點($D'$點已在$D$上面)至$BC$可作兩條垂線於理不合(§77,定理35),所以$C'$落在$C$上面,而兩四邊形也相合了.

§104.11. 定理22. 雙直角四邊形的兩個頂角,若能疊合,則兩腰也能疊合,成為薩氏四邊形(第二十圖).

(證明) $(A'B)$與(DC)相合的關係,必於能相合與不能相合兩種情形中居其一種.現在證明後一種為不合理,於是前一種能相合為合理,而$A'BCD$即為薩氏四邊形.

若$(A'B)$與(DC)不能相合,則$\measuredangle BA'D$與$\measuredangle A'DC$也不能相合(§104.6定理20,系1),但是這與原設不合,所以$(A'B)$與(DC)不能相合的情形是不能成立的.

§104.12. 定理23. 薩氏四邊形的直角邊當小於銳角邊.

(假設) 如第十九圖假設 $DAA'D'$ 爲薩氏四邊形.

(求證) 求證 $(AA')<(DD')$.

(證明) 設 AA' 及 (DD') 之中點各爲 B, C, 連結 BC 則 (BC) 爲 (AA') 及 (DD') 的公垂線(§ 88), 如此則 $ABCD$ 及 $BCD'A'$ 都是三直角四邊形,

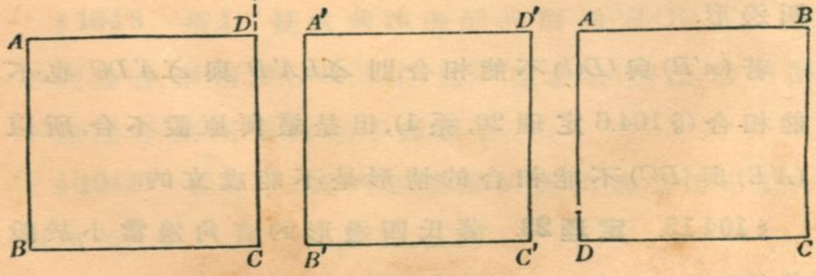
$\therefore$ $(AB)<(DC)$……………(1) (§ 104.9 系 2)

$(BA')<(CD')$……………(2) (§ 104.9 系 2)

由 (1) 及 (2) $(AB)+(BA')<(DC)+(CD')$, 即 $(AA')<(DD')$

§ 104.13. 定理24. 設有甲, 乙兩個倫氏四邊形. (I) 若甲的兩條直角邊各與乙的兩條直角邊能疊合, 則甲, 乙兩四邊形可以疊合. (II) 若甲四邊形有一條直角邊及其隣邊各與乙四邊形一條直角邊及其隣邊能疊合, 則甲乙兩四邊形可以疊合.

(假設) 如第二十一圖甲, 設 $ABCD$ 及 $A'B'C'D'$ 爲甲乙兩個倫氏四邊形, A 及 A' 角爲銳角.



甲圖　　第二十一圖　　乙圖

(求證) I. 若 $(BC)\equiv(B'C')$, $(CD)\equiv(C'D')$. 求證

$$ABCD\equiv A'B'C'D'.$$

II. 若 $(AB)\equiv(A'B')$, $(BC)\equiv(B'C')$ 或 $(AD)\equiv(A'B')$, $(DC)\equiv(B'C')$ 求證 $ABCD\equiv A'B'C'D'$. (第二十一圖乙),

(證明) I. 因為 (BC) 與 $(B'C')$ 能相合(原設),所以我們可以把 $(B'C')$ 疊在 (BC) 上面使 B' 落在 B 上面, C' 落在 C 上面,又因 C 及 C' 都是直角能相合,所以 $(C'D')$ 落在 CD 上面,又原設 $(C'D')$ 能與 (CD) 相合,所以 D' 點落在 D 上面.又因 B 與 B', D 與 D' 都是直角(原設),他們是能相合的所以 $(B'A')$ 落在 (BA) 上面, $(D'A')$ 落在 (DA) 上面;因此 $B'A'$ 與 BA 成為一條直線, $D'A'$ 與 DA 也成為一條直線.兩條直線相交祇有一點,所以 A' 點與 A 點也是成為一點,於是 $ABCD\equiv A'B'C'D'$.

II. 仿上面的分法因為 $(AB)\equiv(A'B')$, $\measuredangle B\equiv\measuredangle B'$, $(BC)\equiv(B'C')$.

(原設) 所以我們可以把 $A'B'C'$ 疊在 ABC 上面,使 A' 點落在 A 上, C' 點落在 C 上.因為 $\measuredangle C\equiv\measuredangle C'$ 所以直線 $C'D'$ 落在 CD 上面,成為一條直線 CE,現在由 A 點或 A' 作垂線 AD 或 $A'D'$ 垂直於 CE. 但是 A' 點是在 A 點上面,所以垂線 $A'D'$ 與 AD 是一條直線,所以 $ABCD$ 與 $A'B'C'D'$ 相合.

若 $(AD)\equiv(A'B')$, $(DC)\equiv(B'C')$, 我們可以把 $ABCD$ 反過

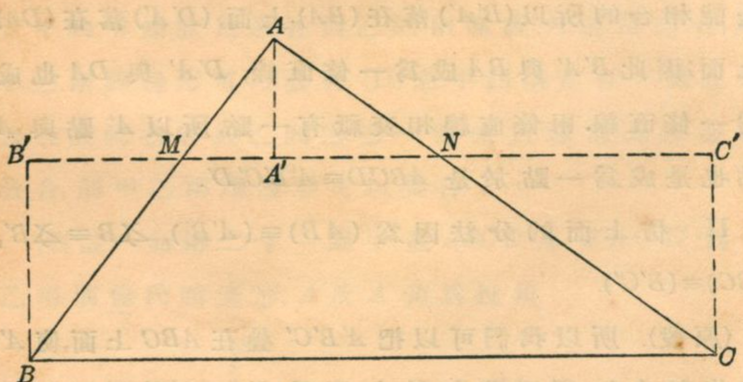
來成爲乙圖的 $ADCB$. 於是由上面的證明 $ADCB$ 與 $A'B'C'D'$ 可以相合, 即 $ABCD$ 與 $A'B'C'D'$ 可以相合.

§ 104.14. 系. 三直角四邊形可以由他的兩條直角邊, 或一條直角邊及其隣邊決定之.

§ 105. 下面定理所研究的是直線形的內角與其面積之關係.

§ 105.1. **定理 25** 三角形三內角之和小於兩直角.

(證明) 如第二十二圖設 ABC 爲三角形. M, N 爲任意兩邊之中點, 通過 MN 作一直線 MN. 由 A, B, C 至



第二十二圖

MN 作垂線 AA', BB', CC'; 則因直角三角形 $AA'M$ 與 $BB'M$ 能相合 (原設 § 65, 定理 24, § 77.1 系 1),

$\therefore\quad \measuredangle A'AM \equiv \measuredangle B'BM$. 同理, $\measuredangle A'AN \equiv \measuredangle C'CN$.

$\therefore\quad \measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC = \measuredangle B'BC + \measuredangle C'CB$; 但是 $\measuredangle B'BC$ 與 $\measuredangle C'CB$ 之和小於兩直角 (§ 104.1 定理 18).

所以 $\measuredangle ABC+\measuredangle ACB+\measuredangle BCA$ 之和也小於直角.即三角形三內角之和小於兩直角.

§ 105.2. **定理 26.** n 邊的多角形其內角之和常小於 $(n-2)$ 平角,或 $2(n-2)$ 直角.

(證明) 在多角形的內部取一點 P 與各角點連結,則得 n 個三角形,由此應用上面定理即可證明.

§ 105.3. **定義.** 三角形三內角之和常小於兩直角,其所小的角度叫做三角形的角朒[1]多角形內角之和常小於 $(n-2)$ 平角,其所小的角度,叫做多角形的角朒.

§ 105.4. **定理 27.** 甲乙兩三角形,若甲三角形的內角各能疊合於乙三角形的內角;則甲乙兩三角形可以疊合.

(假設) 設 ABC 與 $A'B'C'$ 為甲乙兩三角形.

$$\measuredangle A\equiv\measuredangle A',\ \measuredangle B\equiv\measuredangle B',\ \measuredangle C\equiv\measuredangle C'.$$

(求證) $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

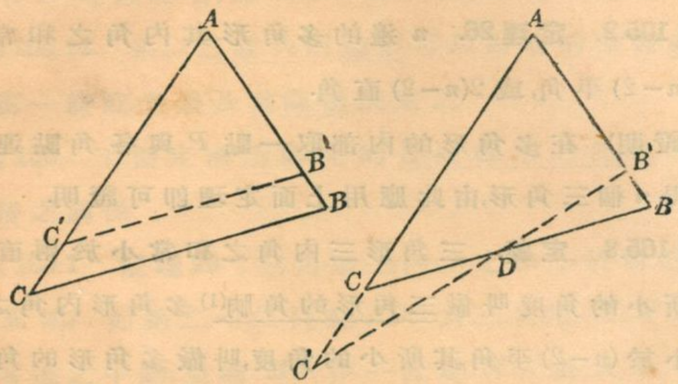
(證明) 因 $\measuredangle A\equiv\measuredangle A'$, 所以把 A' 點可以放在 A 點上面使 $A'B'$ 落在 AB 上面, $A'C'$ 落在 AC 上面. 而 B' 與 C' 也許各與 B 點 C 點相合, 也許都落在 BC 之一側, 也許分落於 BC 之兩側. 若 B' 與 C'. 都落在 BC 之一側如第二十三圖甲,則 $BCC'B'$ 為四角形,由原設 $\measuredangle AB'C'\equiv\measuredangle ABC$

$$\therefore\ \measuredangle ABC+\measuredangle BB'C'=\text{平角}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) The defect of the triangle.

同理 $\measuredangle ACB+\measuredangle CC'B'=$平角……………………(2)

甲圖　　　乙圖



第二十三圖

由(1)及(2)得 $BCC'B'$ 四角形內角之和等於兩平角,這與§105.2定理26不合,所以 B' 與 C' 不能同落於 BC 之一側.

若 B' 與 C' 分落於 BC 之兩側如乙圖,則 $B'C'$ 必與 BC 相交於一點(§10定理乙$_3$),設此點爲 D,則得兩個三角形 CDC',及 BDB'. 因原設 $\measuredangle ACB\equiv\measuredangle AC'B'$

$\therefore\ \measuredangle AC'B'+\measuredangle DCC'=$平角

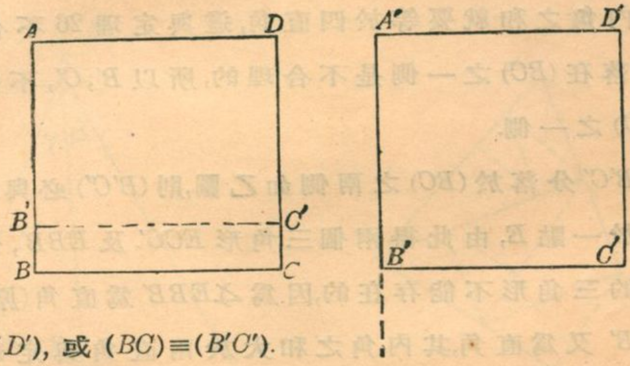
$\therefore\ \measuredangle AC'B'+\measuredangle DCC'+\measuredangle C'DC>$平角.即 $\triangle CDC'$ 三內角之和大於兩直角,這與定理25不合.

由上面研究的結果,B' 與 C' 不能落在 BC 之一側,也不能各在 BC 之兩側,所以祇有 B',C',各與 B,C 相合了.如此 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 相合,即 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

§105.5. 定理28. 兩個雙直角等腰四邊形,若是角腑相等,並且有一邊能疊合;這兩個四邊形可以疊合.

(假設) 如第二十四圖設兩個雙直角等腰四邊形爲 $ABCD$ 與 $A'B'C'D'$; B, C, B', C' 各爲直角,其角腑相等,並且有一邊 $(AD)\equiv(A'D')$, 或 $(AB)\equiv(A'B')$, 或 (CD)

甲　圖



$\equiv(C'D')$, 或 $(BC)\equiv(B'C')$.

(求證) 求證 $ABCD$ 與 $A'B'C'D'$ 能疊合.

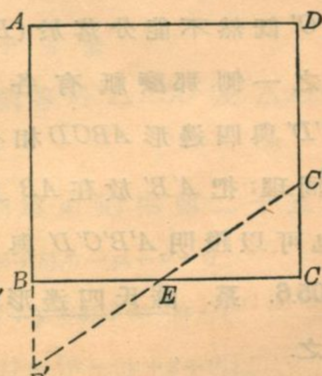
(證明) 因角腑相等,所以

$\measuredangle BAD+\measuredangle CDA=\measuredangle B'A'D'$
$\quad+\measuredangle C'D'A'$

但 $\measuredangle BAD\equiv\measuredangle CDA$, $\measuredangle B'A'D'$
$\quad\equiv\measuredangle C'D'A'$.

$\therefore\quad 2\measuredangle CDA=2\measuredangle C'D'A'$

乙　圖



第二十四圖

$$\therefore\ \measuredangle CDA = \measuredangle C'D'A'.$$

$$\therefore\ \measuredangle BAD \equiv \measuredangle CDA \equiv \measuredangle B'A'D' \equiv \measuredangle C'D'A'$$

因此要是把 $A'D'$ 放在 AD 上面，$A'B'$ 就落在 AB 上面，$D'C'$ 也就落在 DC 上面，而 B' 與 C' 點也許各與 B, C 相合，也許落在 (BC) 之一側，也許分落於 (BC) 之兩側，若是落在 (BC) 之一側如甲圖，則得 $BB'C'C$ 四邊形，而這四邊形內角之和就要等於四直角，這與定理 26 不合，即 B', C' 落在 (BC) 之一側是不合理的，所以 B', C'，不能落在 (BC) 之一側.

若 $B'C'$ 分落於 (BC) 之兩側如乙圖，則 $(B'C')$ 必與 (BC) 相交於一點 E，由此得兩個三角形 ECC' 及 EBB'，但是這樣的三角形不能存在的，因為 $\measuredangle EBB'$ 為直角(原設)，$\measuredangle EBB'$ 又為直角，其內角之和大於兩直角與定理 25 不合. 所以 B', C' 不能分落於 (BC) 之兩側.

B', C' 旣然不能分落於 (BC) 之兩側，又不能同落於 (BC) 之一側，那麼祇有各與 B, C 相合，即四邊形 $A'B'C'D'$ 與四邊形 $ABCD$ 相合.

依同理：把 $A'B'$ 放在 AB 上面，或 $C'D'$ 放在 CD 上面……也可以證明 $A'B'C'D'$ 與 $ABCD$ 相合.

§ 105.6. 系. 薩氏四邊形完全由其銳角及銳角邊決定之.

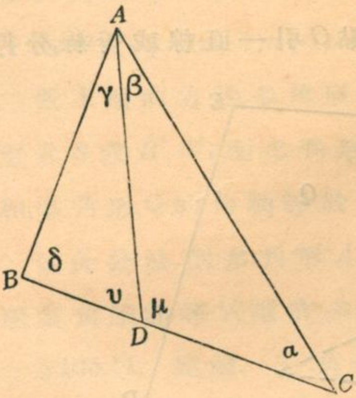
§ 105. 7. **定理 29.** 兩個三直角四邊形，若是角胸

相等,並且有一邊能疊合;這兩個三直角四邊形可以疊合,證明方法與定理28同.

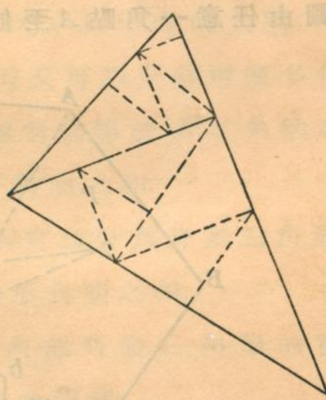
§105.8. **定理30.** 一個三角形分爲兩個小三角形,這兩個小三角形角朒之和與原三角形角朒相等.

(假設) 如第二十五圖甲,設 ABC 三角形被 AD 分爲 ADC 及 ADB 兩三角形.

甲 圖



乙 圖



第 二 十 五 圖

(求證) 求證 ABC 的角朒等於 $\triangle ADC$ 及 $\triangle ADB$ 角朒之和.

(證明) 設 $\triangle ABC$ 的角朒爲 d, 則由第二十五圖甲

$$d=\pi-(\alpha+\beta+\gamma+\delta),\pi-\mu-\nu=0$$

$$\therefore\ d=\pi-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\pi-\mu-\nu$$

即 $$d=\{\pi-(\alpha+\beta+\mu)\}+\{\pi-(\gamma+\delta+\nu)\}.$$

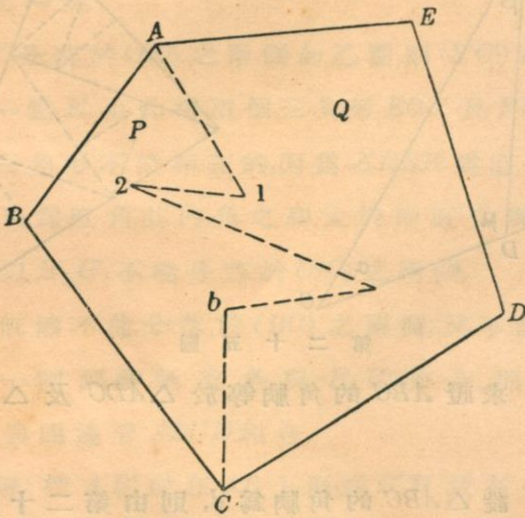
即 $\triangle ABC$ 的角朒等於 $\triangle ADC$ 的角朒與 $\triangle ABD$ 角朒

之和.

§ 105.9. 系. 一個三角形,無論分爲若干個小三角形,所分得小三角形角朒之和必與原三角形角朒相等(第二十五圖乙).

§ 105.10. 定理 31. 分多角形爲若干個三角形,這若干個三角形角朒之和與原多角形角朒相等.

(證明) 設 $ABCDE$ 多角形的邊數爲 n, 如第二十六圖由任意一角點 A 至他角點 C 引一直線或折線,分原



第二十六圖

多角形爲 P, Q 兩個多角形. 設折線的折點有 b 點,則 P, Q 兩多角形有 $(b+1)$ 邊是公共的. 設多角形 P 的邊數爲 $n'+b+1$, 則多角形 Q 的邊數爲 $n-n'+b+1$. 設多

角形 P 內角之和爲 p, Q 內角之和爲 q, 則原多角形 $ABCDE$ 內角之和爲 $p+q-2b\pi$.

而　$ABCDE$ 的角朒 $=(n-2)\pi-(p+q-2b\pi)$ ……………(1)

P 的角朒 $=\{(n'+b+1)-2\}\pi-p$ ……………………………(2)

Q 的角朒 $=\{(n-n'+b+1)-2\}\pi-q$ …………………………(3)

$\therefore$ (P 的角朒)+(Q 的角朒) $=(n'+b-1)\pi-p+(n-n'+b-1)\pi-q=(n'+b-1+n-n'+b-1)\pi-p-q=(n-2)\pi+2b\pi-p-q=(n-2)\pi-(p+q-2b\pi)=ABCDE$ 的角朒.

做上面的方法,多角形 P 或 Q 又可以分爲兩個多角形 R, S 或 R', S'; 而多角形 P 的角朒等於 R, S 角朒之和,多角形 Q 的角朒等於 R', S' 角朒之和.

依此分法,則多角形 $ABCDE$ 可以分爲許多三角形,而其角朒卽等於這許多三角形角朒之和.

§105.11. 定義. 三角形的內部叫做三角形的面積;多角形的內部,叫做多角形的面積.

§105.12. 定義. 甲,乙兩多角形,各分爲若干個三角形,要是甲的三角形各與乙的三角形兩兩能疊合;則甲與乙等積卽:甲的面積與乙的面積相等.甲乙兩形叫做等積形.如第二十二圖三角形, ABC 與四邊形 $BCC'B'$ 爲等積形就是一例.

§105.13. 定理32. 多角形 P_1, P_2 各與多角形 P_3 等積,則 P_1 與 P_2 等積.

(證明) P_1 與 P_3 既然是等積,則由等積定義 P_1 與 P_3 可以分爲若干個三角形兩兩相合.同理,P_2 與 P_3 也可以分爲若干個三角形兩兩相合.如此,P_3 有兩組三角形,一組與 P_1 的三角形相合,一組與 P_2 的三角形相合.這兩組三角形,第一組的邊各與第二組的邊相交.又分 P_3 爲若干個多邊形,現在再把這若干個多邊形分爲若干個三角形.如此 P_3 就分爲一組三角形,由原設 P_1 與 P_2 各與 P_3 等積,於是這一組三角形也能夠與 P_1 的一組三角形兩兩相合,也能夠與 P_2 的一組三角形兩兩相合.因此 P_1 的一組三角形與 P_2 的一組三角形兩兩相合,所以 P_1 與 P_2 等積.

§ **105.14. 定理 33.** 每一個三角形都可以和一個相當的薩氏四邊形等積.所謂相當的薩氏四邊形,卽以三角形的角朒爲角朒,以三角形之一邊爲銳角邊(參看第二十二圖卽可證明).

§ **105.15. 定理 34.** 兩個三角形,要是角朒相等,並且有一邊能疊合;這兩個三角形等積.

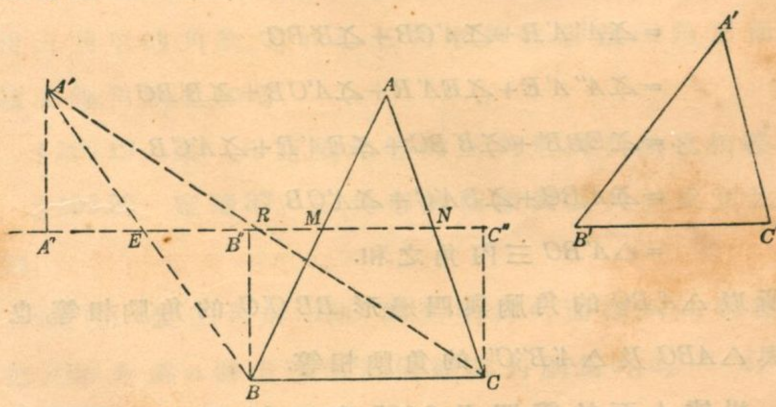
(證明) 設 ABC, $A'B'C'$ 是兩個三角形角朒相等,並且 $(AB) \equiv (A'B')$. 由定理 33 三角形 ABC 可以和一個相當的薩氏四邊形 S 等積,三角形 $A'B'C'$ 也可以和 S 等積;所以 ABC 與 $A'B'C'$ 等積(定理 32).

§ **105.16. 定理 35.** 兩個三角形若角朒相等,則面積

也相等.

(證明)　假設這兩個三角形為 ABC 及 $A'B'C'$. 現在要證明他們等積可以分為兩種情形. 第一種情形, 除角朒相等外, 還有一邊能相合. 要是這樣, 由定理34, 這兩個三角形等積. 第二種情形, 除角朒相等外, 沒有一邊能相合. 譬如有一邊 $(A'B')$ 大於 (AB), 要是這樣, 可由下面的方法證明他們是等積.

如第二十七圖設 M, N 各為 $(AB), (AC)$ 的中點, 通過 M, N 作一直線 MN, 由 B, C 各作 BB'', CC'' 垂直於 MN; 於是 $BB''CC''$ 為薩氏四邊形, 其角朒與 $\triangle ABC$ 的角朒相等(§105.1 定理25證明), BB'' 不能大於 BM, 即不能大



第二十七圖

於 $\frac{1}{2}(AB)$, 更不能大於 $\frac{1}{2}(A'B')$, 因此以 $\frac{1}{2}(A'B')$ 為半徑, 以 B 為中心作一弧, 必與 MN 相交於一點 E. 延長 E 至 A', 令 $(BE)\equiv(EA')$, 連結 $A'C$ 交 MN 於 R, 則三角形 $A'BC$ 有

一邊 (BC) 與 $\triangle ABC$ 的邊 (BC) 相合，有一邊 $(A'B)$ 與 $\triangle A'B'C'$ 的邊 $(A'B')$ 相合.

由 A' 作 $A'A''$ 垂直於 MN，則直角三角形 $A'A''E$ 及 $BB''E$ 因爲 $(A'E)\equiv(BE)$，$\measuredangle A'EA''\equiv\measuredangle BEB''$. 由 §77.1 系1 得：

$$\measuredangle EBB''\equiv\measuredangle EA'A'' \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$(B''B)\equiv A'A''$，但 $(B''B)\equiv(C''C)$ $\therefore$ $(A'A'')\equiv(C''C)$

又 $\measuredangle A'RA''\equiv\measuredangle C'RC$ $\therefore$ $\triangle A'A''R\equiv\triangle CC'R$,

$$\measuredangle A''A'R\equiv\measuredangle C'CR \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

應用 (1) 及 (2)，四邊形 $BB'C'C$ 兩銳角之和

$=\measuredangle C'CB+\measuredangle B'BC$

$=\measuredangle C'CR+\measuredangle A'CB+\measuredangle B'BC$

$=\measuredangle A''A'R+\measuredangle A'CB+\measuredangle B'BC$

$=\measuredangle A''A'E+\measuredangle EA'R+\measuredangle A'CB+\measuredangle B'BC$

$=\measuredangle EBB'+\measuredangle B'BC+\measuredangle EA'R+\measuredangle A'CB$

$=\measuredangle A'BC+\measuredangle BA'C+\measuredangle A'CB$

$=\triangle A'BC$ 三內角之和.

所以 $\triangle A'BC$ 的角朒與四邊形 $BB'C'C$ 的角朒相等，也與 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B''C''$ 的角朒相等.

根據上面的證明及 §105 定理 34，可知 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B''C''$ 各與 $\triangle A'BC$ 等積；由 §105 定理 32，可知 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B''C''$ 等積，所以角朒相等的兩個三角形面積也相等.

§ **105.17.** 系. 凡角朒相等的三角形互爲等積形.

§ **105.18.** **定理36.** 兩個三角形,要是面積相等,角朒也相等.

(證明) 甲乙兩三角形,旣然是等積,由等積定義可以各自分爲若干個小三角形,兩兩相合,能相合的兩個小三角形的角朒自然是相等的.現在由甲三角形所分得的小三角形命爲甲組,由乙三角形所分得的小三角形命爲乙組.如此則甲組三角形的角朒各與乙組的角朒相等,所以甲組角朒之和與乙組角朒之和相等.由§105.9系甲組角朒之和等於原三角形甲的角朒,乙組角朒之和等於原三角形乙的角朒,所以甲三角形的角朒,等於乙三角形角朒,即兩三角形面積相等,角朒也相等.

§ **105.19.** 系. 凡面積相等的三角形,其角朒也相等.

§ **105.20.** **定理37.** 三角形的面積與其角朒成正比例.

(證明) 設三角形 ABC 的角朒爲 d, 面積爲 A. 現在把 ABC 分爲 n 個小三角形,假設其角朒爲 $d_1, d_2, \cdots\cdots d_n$; 其面積爲 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$.

於是 $$A = A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_n$$

$$d = d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_n \qquad (§\,105.9\text{ 系})$$

要是 $$d_1 = d_2 = d_3 = \cdots\cdots = d_n$$

則 $$A_1=A_2=A_3=\cdots\cdots\cdots=A_n$$

$$\therefore\quad A=nA_1\qquad d=nd_1$$

$$\therefore\quad \frac{A}{d}=\frac{nA_1}{nd_1}=\frac{A_1}{d_1}$$ 現在設 $\frac{A_1}{d_1}=\lambda.$

則 $\frac{A}{d}=\lambda$, 此處 λ 的數值隨 A_1 及 d_1 而定,卽隨面積的單位及角的單位而定,要是角的單位有一定,卽以直角爲單位;則 λ 祇隨面積的單位而定.面積的單位有一定,則 λ 也有一定,而 A 與 d 成正比例.

§ **105.21.** 系. 兩個三角形面積之比等於其朒角之比.

§ **105.22.** **定理 38.** 多角形的面積與其角朒成正比例.

(證明) 設多角形的面積爲A,角朒爲d,分多角形爲 n 個三角形,其面積爲 $A_1, A_2,\cdots\cdots\cdots A_n$, 其角朒爲 $d_1, d_2, d_3\cdots\cdots\cdots d_n$ 要是面積與角的單位有一定,由上面定理,則

$$\lambda=\frac{A_1}{d_1}=\frac{A_2}{d_2}=\frac{A_3}{d_3}\cdots\cdots\cdots=\frac{A_n}{d_n}=\frac{A_1+A_2+\cdots\cdots\cdots+A_n}{d_1+d_2+\cdots\cdots\cdots+d_n}=\frac{A}{d}.$$

卽 $\frac{A}{d}=\lambda$, 卽多角形面積與其角朒成正比例.

§ **105.23.** 系 **1.** 兩個多角形面積之比,等於其角朒之比.

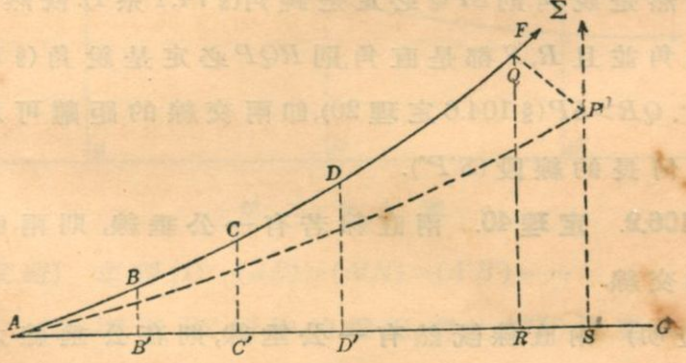
§ **105.24.** 系 **2.** 一個多角形可以與一個薩氏四邊形等積.

§ **106.** 前面已經講過,兩條直線同在一個平面上,

也可以平行,也可以相交,也可以不相交.下面的定理,就是研究兩條直線在這三種情形時候,彼此相距的遠近.

§106.1. **定理39.** 兩條相交線愈延長;則彼此相距愈遠,其距離由零而漸漸增加;能增加到長於任何長的線段.

(假設) 如第二十八圖,假設AF與AG相交於A點,由AF上面$B, C, D,$……等點各引$BB', CC', DD',$……等線垂直於AG. 又設$(P'S')$是非常長的線段.



第二十八圖

(求證) I. 求證$(BB')<(CC')<(DD')$…….

II. 並且求證其中有一垂線QR能長於任何長的線段$(P'S')$.

(證明) I. 由§100.2系2, $\measuredangle ABB'$, $\measuredangle ACC'$, $\measuredangle ADD'$, ……都是銳角. $\measuredangle ABB'$既然是銳角,則$\measuredangle B'BC$必定是鈍

角(§ 74.1 系 1). 由 $BB'C'C$ 四邊形,可知 $(BB')<(CC')$(§ 104.6 定理 20),同理 $(CC')<(DD')$.

$$\therefore\quad (BB')<(CC')<(DD')\cdots\cdots.$$

若 B 在 A 點,則 (BB') 之長爲零,所以 AF 與 AG 的距離是由零而漸漸增大.

II. 假設 FAG 角的平行距離是 (AS). 由 S 作 $S\Sigma\perp AG$. 則 $\overrightarrow{S\Sigma}\parallel\overrightarrow{AF}$ 由 $S\Sigma$ 上面截取 $(FS)\equiv(P'S')$. 連結 AP, 在 $AP\Sigma$ 角的內部,引一半線 PQ 與 $P\Sigma$ 作一銳角 $QP\Sigma$ 則 PQ 必與 $A\Sigma$ 相交於一點 Q (平行線定義) 由 Q 作 $QR\perp AG$. $QP\Sigma$ 角既然是銳角.則 SPQ 必定是鈍角(§ 74.1 系 1). 既然 SPQ 是鈍角並且 R, S 都是直角,則 RQP 必定是銳角 (§ 104.4 系), $\therefore QR>SP$ (§ 104.6 定理 20),卽兩交線的距離可以長於任何長的線段 $(S'P')$.

§ 106.2. 定理 40. 兩直線若有一公垂線,則兩直線爲不交線.

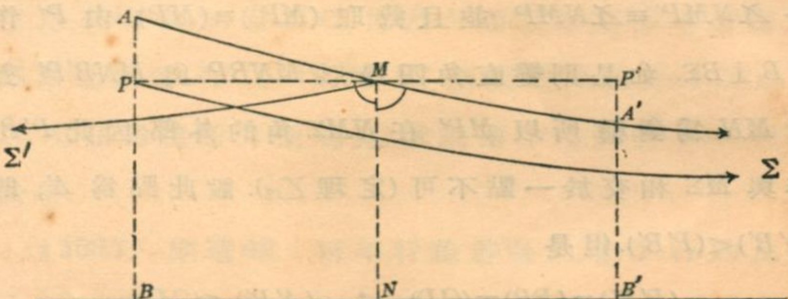
(證明) 兩直線既然有一公垂線,則在公垂線之一側兩內角之和等於兩直角,由 § 98 定理 3, 兩直線爲不交線.

§ 106.3. 系 **1.** 薩氏四邊形的直角邊及銳角邊各在兩條不交線上,又其兩腰也各在兩條不交線上.

§ 106.4. 系 **2.** 許多直線若同時垂直於一直線,那麽這許多直線都是不交線.

§ 106.5. **定理41.** 兩平行線向着平行方向延長;則彼此漸漸接近.愈延長則愈接近;若是無窮的延長,則其距離能短於任何短的線段;而所夾的角也小於任何小的角.

(假設) 如第二十九圖假設 $\overrightarrow{A\Sigma}$ 及 $\overrightarrow{B\Sigma}$ 爲平行線,由 $A\Sigma$ 上面 A, M, A',……各點作 $AB, MN, A'B'$,……等線垂直於 $B\Sigma$. 又設 (CD) 是非常短的線段, ϵ 是非常小的角.



第二十九圖

(求證) 求證(1) $(AB)>(MN)>(A'B')$………

(2) 從 $A\Sigma$ 至 $B\Sigma$ 所作的垂線.有比 (CD) 還要短的.

(3) $A\Sigma$ 與 $B\Sigma$ 所夾的角比 ϵ 還要小.

(證明) (1) $\measuredangle BAM$ 及 $\measuredangle NM\Sigma$ 都是銳角(§ 100.1 系 1) 而 $\measuredangle NMA$ 爲鈍角 (§ 74.1 系 1), 因此 $\measuredangle BAM < \measuredangle NMA$.

$\therefore$ $(AB)>(MN)$ (§ 104. 定理 20), 同理 $(MN)>(A'B')$

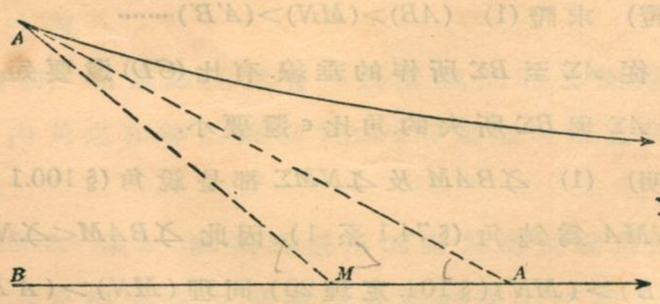
$$\therefore \quad (AB)>(MN)>(A'B')\cdots\cdots.$$

(2) 由 $A\Sigma$ 上面任意取一點 A 至 $B\Sigma$ 作垂線 (AB), 若

$(AB)<(CD)$, 則 (2) 就證明了.若 $(AB)>(CD)$, 則在 (AB) 上面截取 $(PB)\equiv(CD)$. 由 P 作 $PM\perp AB$, 作 $\overrightarrow{P\Sigma}\parallel\overrightarrow{A\Sigma}\parallel\overrightarrow{B\Sigma}$; 則因 $AP\Sigma$ 是鈍角(§100.1 系 1, 及 §74.1 系 1) 半線 PM, 必在 $AP\Sigma$ 角的內部, 所以與 $A\Sigma$ 相交於一點(§102.1 定理 9) 設此點爲 M, 由 M 作 $MN\perp B\Sigma$ 作 $\overrightarrow{M\Sigma'}\parallel\overrightarrow{NB}$ 則因 PM 與 BN 是不交線(作圖及 §106.2 定理 40) PM 不在 $NM\Sigma'$ 角的內部, 所以 $\measuredangle NMP>\measuredangle NM\Sigma'$. 再由 M 作一半線 MP' 令 $\measuredangle NMP'\equiv\measuredangle NMP$, 並且截取 $(MP')\equiv(MP)$, 由 P' 作 $P'B'\perp B\Sigma$. 如是則雙直角四邊形 $MNBP$ 與 $MNB'P'$ 對於 MN 爲對稱. 所以 MP' 在 $NM\Sigma$ 角的外部. 因此 $P'B'$ 非與 $M\Sigma$ 相交於一點不可(定理乙$_3$). 設此點爲 A', 則 $(A'B')<(P'B')$. 但是

$$(P'B')\equiv(PB)\equiv(CD)\quad\therefore\quad(A'B')<(CD).$$

(3) 如第三十圖假設 $A\Sigma$ 與 $B\Sigma$ 爲平行線, 由 $B\Sigma$ 上



第三十圖

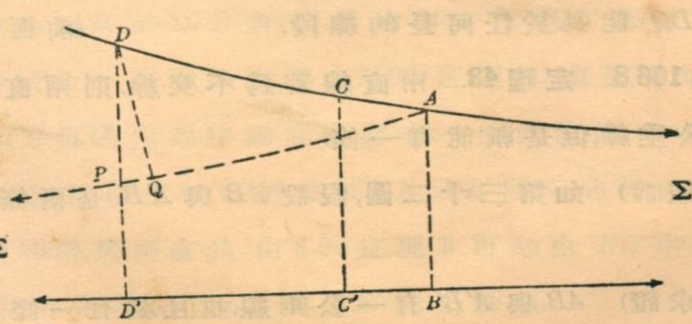
面取一點 M, 連結 AM. 若 M 沿着 $\overrightarrow{B\Sigma}$ 向平行方向移動,

等到 AM 移動,到 $A\Sigma$ 的位置上則 $\measuredangle MA\Sigma=0$. 所以我們可以使 $MA\Sigma$ 角小於非常小的角 ϵ, 即 $\measuredangle MA\Sigma<\epsilon$. 在 $\overrightarrow{M\Sigma}$ 上面截取 $(MA')\equiv(MA)$(§ 62 定理 21). 連結 AA', 則 $\measuredangle MAA'\equiv\measuredangle MA'A$ (§ 60). 而 $\measuredangle MAA'<\measuredangle MA\Sigma<\epsilon$ $\therefore$ $\measuredangle MA'A<\epsilon$. 但是 $A\Sigma$ 與 $B\Sigma$ 所夾之角比 $\measuredangle MA'A$ 還要小,所以比 ϵ 更要小.

§ 106.6. **注意.** 由上面證明,可知 $A\Sigma$ 與 $B\Sigma$ 所夾的角能比 $MA\Sigma$ 角小,而 $MA\Sigma$ 角因 M 漸漸向無窮遠移動,而漸漸近於零.所以 $A\Sigma$ 與 $B\Sigma$ 所夾的角也要漸漸近於零.現在爲說話方便起見,就說兩平行線所夾的角等於零.

§ 106.7. **定理 42.** 兩平行線若是向着平行的反對方向延長;則彼此漸漸遠離.愈延長,則愈遠離;若是無窮的延長,則其距離能長於任何長的線段.

(假設) 如第三十一圖,假設兩平行線爲 $A\Sigma, B\Sigma$, 由



第三十一圖

$A\Sigma$ 的反向半線上面 $A, C, D, \cdots\cdots$ 各點作 AB, CC', DD' 垂直於 $B\Sigma$ 的底線.

(求證) (1) $(AB)<(CC')<(DD')\cdots\cdots$

(2) 其中有一垂線譬如 (DD') 能長於任何長的線段.

(證明) (1) $BA\Sigma$ 與 $C'C\Sigma$ 兩角都是平行角(原設)所以也是銳角(§ 100.1 系 1). $BA\Sigma$ 既是銳角,則 BAC 角是鈍角,即 $\measuredangle BAC > \measuredangle C'C\Sigma \quad \therefore (AB)<(CC')$ (§ 104.6 定理 20).
同理 $(CC')<(DD')$. $\therefore (AB)<(CC')<(DD')\cdots\cdots$

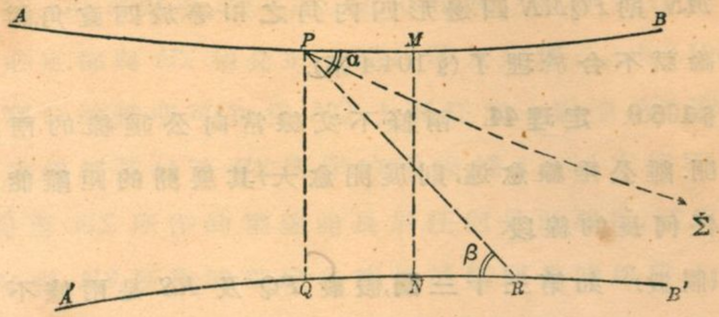
(2) 由 A 點引 $\overrightarrow{A\Sigma'} \parallel \overrightarrow{B\Sigma'}$, 則凡由 $A\Sigma$ 的反向半線上至 $B\Sigma$ 的底線上所作的垂線必定都與 $A\Sigma'$ 相交於一點(定理乙$_3$).譬如垂線 DD' 與 $A\Sigma'$ 相交於某點 P(定理乙$_3$). DD' 既然垂直於 $B\Sigma'$, 就不能再與 $A\Sigma'$ 垂直,否則 $A\Sigma'$ 與 $B\Sigma'$ 就成為不交線了.所以 DD', 或 DP 不能與 $A\Sigma'$ 垂直.現在由 D 至 $A\Sigma'$ 作 $DQ \perp A\Sigma'$, 則 $(DP)>(DQ)$ $\therefore (DD')>(DQ)$.
但 (DQ) 能長於任何長的線段. (前面定理)

§ **106.8. 定理 43.** 兩直線若為不交線,則兩直線有一公垂線,但是祇能有一條.

(假設) 如第三十二圖,假設 AB 與 $A'B'$ 是兩條不交線

(求證) AB 與 $A'B'$ 有一公垂線,並且祇有一條.

(證明) 由 AB 上面任意一點 P 作 $PQ \perp A'B'$. 若 PQ



第三十二圖

不是公垂線,則 QPA 與 QPM 兩角中必有一角是銳角(§74.1 系 1). 假設 QPM 是銳角.即 $\measuredangle QPM<\frac{\pi}{2}$.

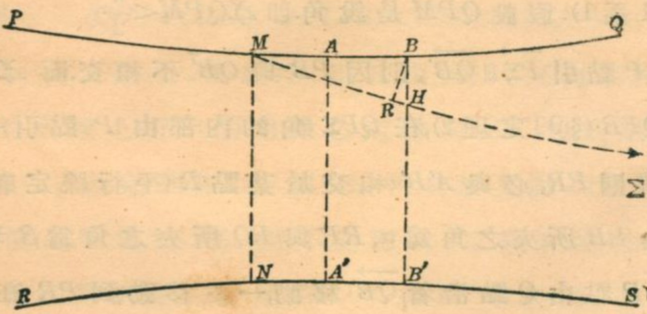
由 P 點引 $\overrightarrow{P\Sigma}\parallel\overrightarrow{QB'}$, 則因 PB 與 QB' 不相交,而 $\measuredangle QP\Sigma<\measuredangle QPB$ (§96 定理 2),在 $QP\Sigma$ 角的內部由 P 點引一半線 PR 則 PR, 必與 $A'B'$ 相交於某點 R (平行線定義).設 PR 與 PB 所夾之角為 α, RP 與 RQ 所夾之角為 β. 現在若使 R 點由 Q 點沿着 $\overrightarrow{QB'}$ 移動,一直移動到 PR 在 $P\Sigma$ 的位置上;則 α 角由銳角 QPB 那樣大而漸漸減少,一直減少到等於 ΣPB 角;而 β 角由直角 PQA' 那樣大而漸漸減少,一直減少到零(§106.5 定理 41),由是可知 PR 在 $QP\Sigma$ 角的內部移動其中必有一位置能使 $\alpha\equiv\beta$, 即 PR 在這個位置的時候與 AB 及 $A'B'$ 所夾的同側兩內角之和等於兩直角.由 §98 定理 3 可知由 PR 中點至 AB 所作的垂線,即 AB 與 $A'B'$ 的公垂線.

AB 與 $A'B'$ 的公垂線衹能有一條,若是有兩條如 PQ

及 MN，則 $PQMN$ 四邊形四內角之和等於四直角，這個結論就不合於理了（§ 104.4 系）.

§ 106.9. **定理 44.** 兩條不交線常向公垂線的兩側展開．離公垂線愈遠，則展開愈大；其展開的距離能長於任何長的線段.

（假設） 如第三十三圖，假設 PQ 及 RS 是兩條不交線，MN 是牠們的公垂線，在 MN 之一側由 MQ 上面 $A, B,$ ……各點至 NS 作垂線 $AA', BB',$ ……，等



第三十三圖

（求證） 求證 I. $(MN)<(AA')<(BB')$……．

II. MQ 離 NS 的距離能長於任何長的線段.

（證明） I. 原設 $MNA'A$ 是三直角四邊形，所以 MAA' 角是銳角（§ 104.3 定理 19），並且 $(MN)<(AA')$（§ 104.9 系 2）.
MAA' 角既然是銳角，則 $A'AB$ 角是鈍角（§ 74.1 系 1）.

$$\therefore \quad (AA')<(BB') \qquad (\S\ 104.6 \text{ 定理 } 20)$$

同理　$(MN)<(AA')<(BB')<$……．

II. 由 M 點引 $\overrightarrow{M\Sigma} ||| \overrightarrow{NS}$, 則凡由 MQ 至 NS 所作的垂線必定都與 $M\Sigma$ 相交於一點(§ 96 及定理乙$_3$).由 § 106.7 定理42的證明,可知從 MQ 上面任意一點至 NS 所作的垂線都長於至 $M\Sigma$ 所作的垂線.據 § 106.1 定理39, 由 MQ 至 $M\Sigma$ 所作的垂線能長於任何長的線段,所以自 MQ 至 NS 所作的垂線也能長於任何長的線段.以上證明都是屬於公垂線一側之性質,至於其他一側,因與此側成對稱,其性質與此側相同,所以不必再證明了.

§ **106.10**. 系. 兩條不交線,其間最短的距離,即公垂線.

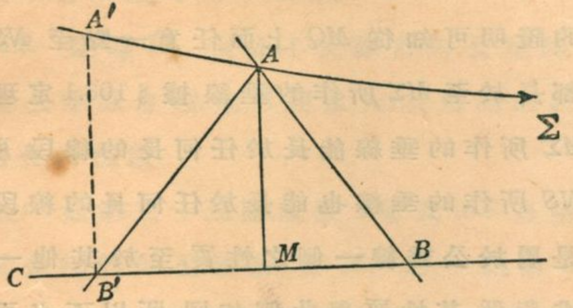
§ **106.11**. **定理45**. 兩條平行線或相交線都沒有公垂線.

(證明) 由兩平行線中之一線上任意一點作垂線與其他一線相夾的角即平行角,凡平行角都是銳角(§ 100.1 系 1) 所以兩平行線沒有公垂線;若有公垂線,就不是平行線了(§ 106.2 定理40).兩條相交線由其一線上任意一點作垂線與其他一線相交,即得直角三角形,直角三角形祇有一角是直角,其他兩角都是銳角(§ 100.2 系 2).所以兩相交線沒有公垂線.

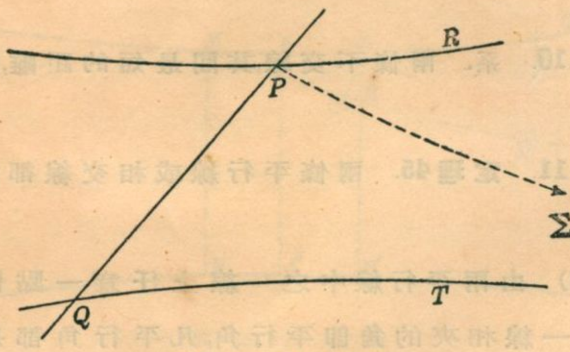
§ **106.12**. **定理46**. 一直線與兩條平行線或兩條不交線相交,其同側兩內角之和常大於一直角.

(假設) 如第三十四圖,設 $A\Sigma$, $B\Sigma$ 爲平行線(甲圖),

甲圖



乙圖



第三十四圖

PR, QT 爲不交線(乙圖).假設直線 AB 交平行線於 A, B. 直線 PQ 交 PR 及 QT 於 P, Q.

(求證) I. 求證 AB 之一側兩內角之和大於 $\frac{\pi}{2}$.

II. PQ 之一側兩內角之和大於 $\frac{\pi}{2}$.

(證明) I. 由 A 點作 $AM \perp B\Sigma$, 若 AB 在 AM 上面,則因

$\measuredangle AM\Sigma = \frac{\pi}{2}$, $\quad\therefore\ \measuredangle AM\Sigma + \measuredangle MA\Sigma > \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore\ \measuredangle AMB'+\measuredangle MAA'>\frac{\pi}{2}.$$

若 AB 在 AM 之一側，與平行方向同側，如圖上的位置，則 $\measuredangle AB\Sigma>\measuredangle AMB$(§99 定理 4)． $\therefore\ \measuredangle AB\Sigma+\measuredangle BA\Sigma>\frac{\pi}{2}$.

但 $$\measuredangle AB\Sigma+\measuredangle BA\Sigma<\pi \qquad (\S 100\ 定理\ 5)$$

$$\therefore\ \measuredangle ABM+\measuredangle BAA'>\frac{\pi}{2}.$$

若 AB 在 AM 之他側，如 AB' 的位置，則由 B' 作 $B'A'\perp B'B$，於是 AM 與 $A'B'$ 為不交線(§1 6.4 系 2)．所以 $A'B'$ 與 $A\Sigma$ 相交之點 A' 必定在 AM 之一側，並且與 AB' 同側．由 §98 定理 4 得 $\measuredangle B'A\Sigma>\measuredangle A'B'A$，由作圖 $\measuredangle A'B'A+\measuredangle AB'M=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \measuredangle B'A\Sigma+\measuredangle AB'M>\frac{\pi}{2}$ 但 $\measuredangle B'A\Sigma+\measuredangle AB'M<\pi$ (§100 定理 5)． $\therefore\ \measuredangle A'AB'+\measuredangle AB'C>\frac{\pi}{2}$.

II. 由 P 點引一直線 $\overrightarrow{P\Sigma}\parallel\overrightarrow{QT}$，則由上面 $\measuredangle PQT+\measuredangle QP\Sigma>\frac{\pi}{2}$， $\therefore\ \measuredangle PQT+\measuredangle QPR>\frac{\pi}{2}$，依同樣的方法 PQ 的他側兩內角之和也大於 $\frac{\pi}{2}$.

§107. 直角三角形與三直角四邊形之關係． 這個關係可依下面三個步驟求之．

§107.1. (第一) 直角三角形,各部之關係．

設 ABC 為直角三角形其三邊之長為 a, b, c，其銳角 A, B 的平行距離為 l, m，即 $A=\pi(l), B=\pi(m)$，於是直角三角形除直角 C 為已知外，其他 a, b, c 及 l, m 五部分為未知之值．現在求這五部分的關係於下．

如第三十五圖甲,延長 BA 至 L, 令 $(AL)=l$, 由 L 點及 B 點引 $\overrightarrow{L\Sigma}$ 及 $\overrightarrow{B\Sigma}$ 平行於 $\overrightarrow{CA}$, 即得

$$\pi(c+l)=\pi(a)-B.$$

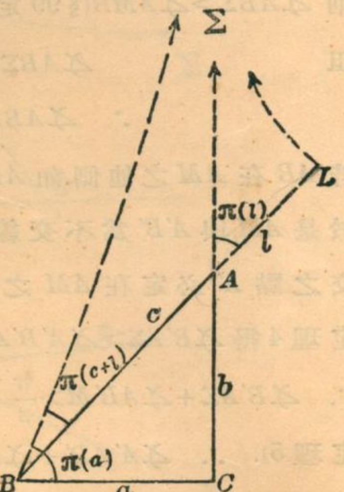
即 $\pi(c+l)=\pi(a)-\pi(m)\cdots\cdots(1)$

由乙圖依同樣的道理得

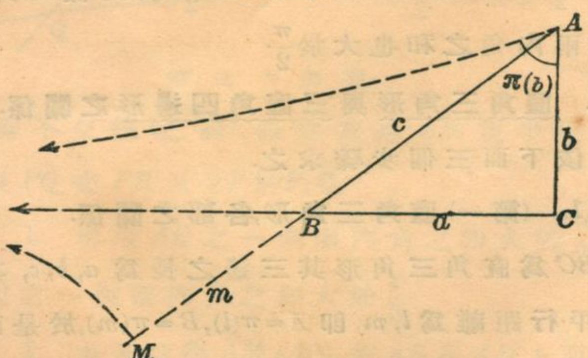
$$\pi(c+m)=\pi(b)-\pi(l)\cdots\cdots(1')$$

如第三十六圖,甲在斜邊 AB 上面截取 $(AL)=l$, 由 L 點作 $L\Sigma$ 垂直於 AB; 於是 $\overrightarrow{L\Sigma} \parallel \overrightarrow{AC}$. 因 $l<c$, 或 $l=c$, 或 $l>c$ 三種情形之不同, L 點在 A, B 中間,或在 B 點上面,或在 (AB) 的延長線上面,若 $l<c$ 由圖得

甲　圖

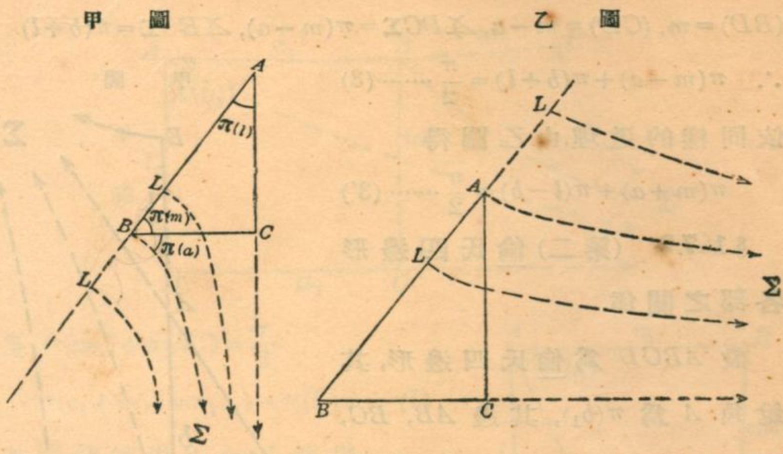


乙　圖



第　三　十　五　圖

$$\pi(c-l)=\pi(a)+\pi(m)\cdots\cdots$$



第三十六圖

若 $l=c$ 則 $\pi(a)+\pi(m)=\frac{\pi}{2}$, 而 $\pi(c-l)=\pi(0)=\frac{\pi}{2}$ (§102.11 定理17) 所以仍舊得 $\pi(c-l)=\pi(a)+\pi(m)$. 若 $l>c$, 由圖得 $\pi(l-c)=\pi-\pi(a)-\pi(m)$, 即 $\pi(a)+\pi(m)=\pi-\pi(l-c)$.

但是由 §103 定義得

$$\pi-\pi(l-c)=\pi\{-(l-c)\}=\pi(c-l).$$

所以仍舊得 $\pi(c-l)=\pi(a)+\pi(m)$. 由上面看來,可知無論 $l<c$, 或 $l=c$, 或 $l>c$ 所得的式子是一個形式.

即 $$\pi(c-l)=\pi(a)+\pi(m)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

依同樣的道理, 如乙圖得

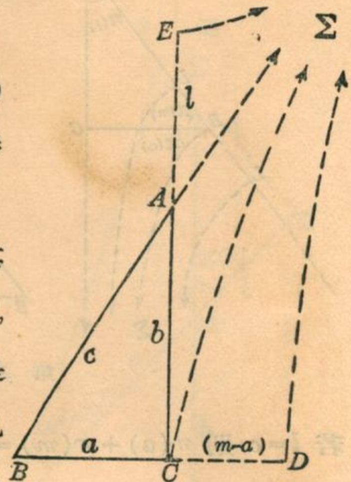
$$\pi(c-m)=\pi(b)+\pi(l)\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$

如第三十七圖甲,作 $\overrightarrow{D\Sigma}$ 垂直於 BC, 並且平行於 $\overrightarrow{BA}$, 又作 $\overrightarrow{E\Sigma}$ 垂直於 CA, 並且平行於 $\overrightarrow{BA}$, 於是 $(AE)=l$,

$(BD)=m,\ (CD)=m-a,\ \measuredangle DC\Sigma=\pi(m-a),\ \measuredangle EC\Sigma=\pi(b+l).$

$\therefore\quad \pi(m-a)+\pi(b+l)=\dfrac{\pi}{2}$ ……(3)

甲　圖



依同樣的道理,由乙圖得

$$\pi(m+a)+\pi(l-b)=\frac{\pi}{2} \text{ ……(3')}$$

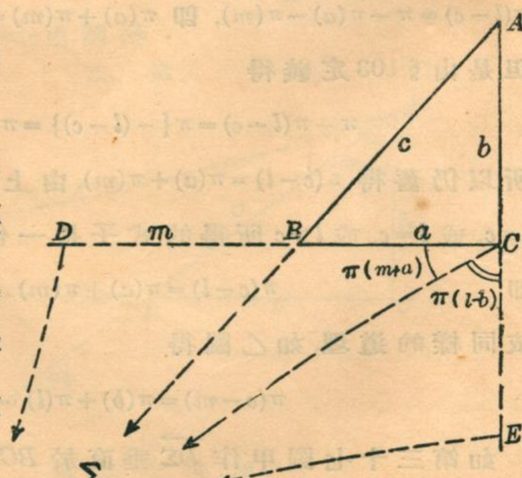
§107.2.　(第二)倫氏四邊形各部之關係.

設 $ABCD$ 爲倫氏四邊形,其銳角 A 爲 $\pi(b_1)$,其邊 AB, BC, CD DA 各爲 c_1, m'_1, a_1, l_1;於是倫氏四邊形,除三個直角爲已知外,其他五部分 b_1, c_1, m'_1, a_1, l_1 爲未知之值.現在求這五部分之關係於下:

如第三十八圖甲,由 B 點引 $\overrightarrow{B\Sigma}$ ⫴ $\overrightarrow{DC}$,在 AB 的延長線上一點 P 作 $\overrightarrow{P\Sigma}$ ⫴ $\overrightarrow{B\Sigma}$ 並且垂直於 AB.

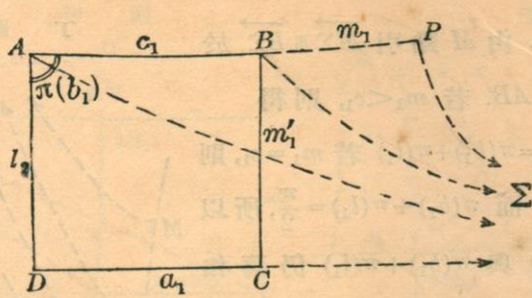
設 $(BP)\equiv m_1$,於

乙　圖



第三十七圖

甲圖



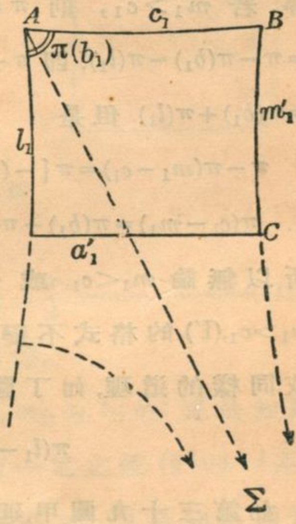
是 $\pi(m_1)+\pi(m_1')=\frac{\pi}{2}$.

$$\pi(c_1+m_1)=\pi(b_1)-\pi(l_1)\cdots\cdots\text{(I)}$$

依同樣的道理如乙圖得

$$\pi(l_1+a'_1)=\pi(b_1)-\pi(c_1)\cdots\cdots\text{(II)}$$

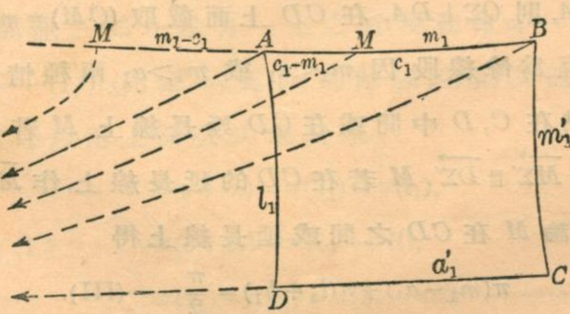
乙圖



此處 a_1' 與 a_1 互為餘線段.

如丙圖在 AB 上面截取 $(BM)=m_1$, m_1 與 m_1' 互為餘線段. 於是因 $m_1<c_1$, 或 $m_1=c_1$, 或 $m_1>c_1$, M 點在 B, A 中間或在 A 上或在 BA 的延長線上, 由 B 點引

丙圖



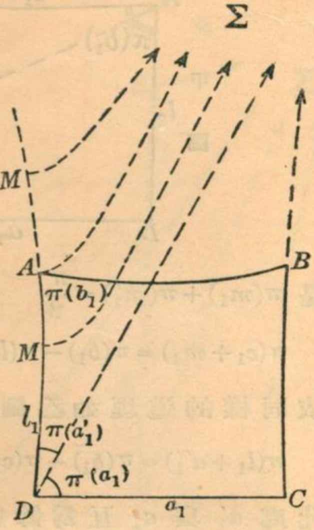
$\overrightarrow{B\Sigma} \parallel \overrightarrow{CD}$, 由 M 點引 $\overrightarrow{M\Sigma} \parallel \overrightarrow{B\Sigma}$, 於是 $M\Sigma \perp AB$. 若 $m_1 < c_1$, 則得 $\pi(c_1 - m_1) = \pi(b_1) + \pi(l_1)$. 若 $m_1 = c_1$, 則 $\pi(0) = \frac{\pi}{2}$, 而 $\pi(b_1) + \pi(l_1) = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\pi(c_1 - m_1)$ 與 $\pi(b_1) + \pi(l_1)$ 仍舊相等. 若 $m_1 > c_1$, 則 $\pi(m_1 - c_1) = \pi - \pi(b_1) - \pi(l_1)$, 即 $\pi - \pi(m_1 - c_1) = \pi(b_1) + \pi(l_1)$. 但是

$$\pi - \pi(m_1 - c_1) = \pi\{-(m_1 - c_1)\}$$

$$\therefore \quad \pi(c_1 - m_1) = \pi(b_1) + \pi(l_1) \cdots\cdots (\mathrm{I}')$$

所以無論 $m_1 < c_1$, 或 $m_1 = c_1$, 或 $m_1 > c_1$, (I′) 的格式不變.

丁圖



第三十八圖

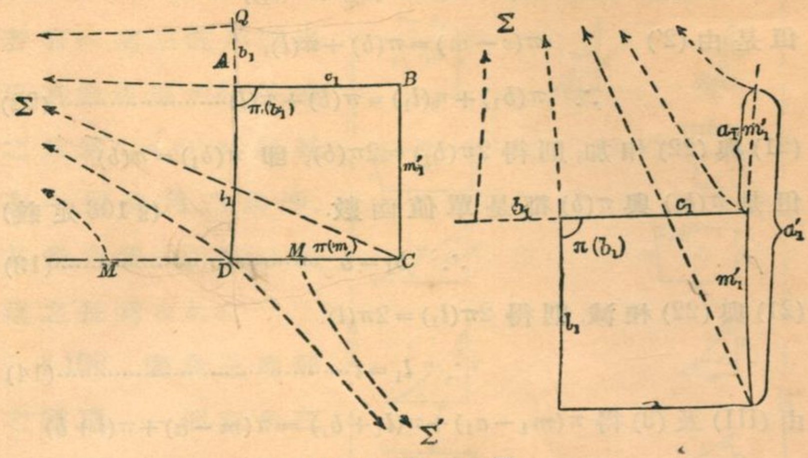
依同樣的道理, 如丁圖得

$$\pi(l_1 - a_1') = \pi(b_1) + \pi(c_1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II}')$$

如第三十九圖甲, 延長 DA 至 Q, 令 $(AQ) = b_1$, 由 Q 點引 $\overrightarrow{Q\Sigma} \parallel \overrightarrow{BA}$, 則 $Q\Sigma \perp DA$. 在 CD 上面截取 $(CM) = m_1$, 而 m_1 與 m_1' 互爲餘線段. 因 $m_1 < a_1$ 或 $m_1 > a_1$ 兩種情形之不同, M 點在 C, D 中間或在 CD 延長線上 M 若在 C, D 之間。作 $\overrightarrow{M\Sigma'} \parallel \overrightarrow{D\Sigma'}$. M 若在 CD 的延長線上, 作 $\overrightarrow{M\Sigma} \parallel \overrightarrow{D\Sigma}$. 由是無論 M 在 CD 之間或延長線上得

$$\pi(m_1 - a_1) + \pi(l_1 + b_1) = \frac{\pi}{2} \cdots\cdots (\mathrm{III}).$$

甲　圖　　　　　　乙　圖



第三十九圖

依同樣的道理.如乙圖得

$$\pi(a_1'-m_1')+\pi(c_1+b_1)=\frac{\pi}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III}')$$

§107.3. (第三)兩形各部之關係.

倫氏四邊形未知的五部分 c_1, m_1', a_1, l_1, b_1; 要是知道 c_1, m_1' 兩部分,則其他三部分就有一定之值.(§104.14系).直角三角形未知的五部分 a, b, c, l, m; 要是知道兩部分 c, m, 其他三部分就有一定之值.現在命 $c_1=c\cdots\cdots(11)$, $m_1=m\cdots\cdots(12)$, (此處 m_1 爲 m_1' 的餘線段),則其他各部分之關係,可以由上面公式求出來.

由 (I)　　$\pi(c+m)=\pi(b_1)-\pi(l_1)$,

但是由 (1′)　　$\pi(c+m)=\pi(b)-\pi(l)$,

$\therefore\ \pi(b_1)-\pi(l_1)=\pi(b)-\pi(l)\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$

由 (I′) $$\pi(c-m)=\pi(b_1)+\pi(l_1),$$

但是由 (2′) $$\pi(c-m)=\pi(b)+\pi(l),$$

$$\therefore\quad \pi(b_1)+\pi(l_1)=\pi(b)+\pi(l) \cdots\cdots\cdots(22)$$

(21) 與 (22) 相加, 則得 $2\pi(b_1)=2\pi(b)$, 即 $\pi(b_1)=\pi(b)$.

但是 $\pi(b_1)$ 與 $\pi(b)$ 都是單值函數. (§ 103 定義)

$$\therefore\quad b_1=b \cdots\cdots\cdots(13)$$

(21) 與 (22) 相減, 則得 $2\pi(l_1)=2\pi(l)$.

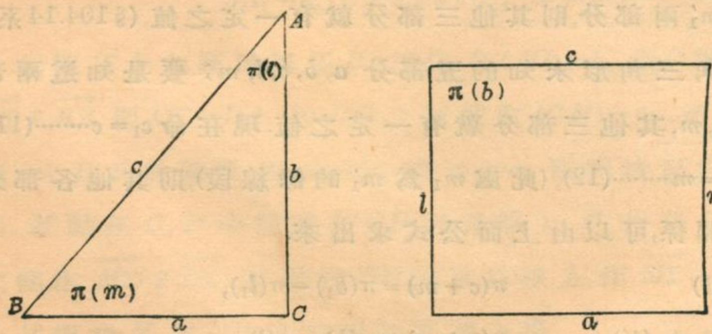
$$\therefore\quad l_1=l \cdots\cdots\cdots(14)$$

由 (III) 及 (3) 得 $\pi(m_1-a_1)+\pi(l_1+b_1)=\pi(m-a)+\pi(l+b)$,

即 $\pi(m-a_1)=\pi(m-a)$, $\therefore\quad a_1=a \cdots\cdots\cdots(15)$

由上面 (11), (12), (13), (14), (15) 的結果得一定理如下:

§ 107.4. 定理 47. 直角三角形與三直角四邊形是互相對應的(如第四十圖);換言之:倘若有一個直角三角形存在,其銳角為 $\pi(l)$, $\pi(m)$, 各邊之長為 a, b, c, 那就

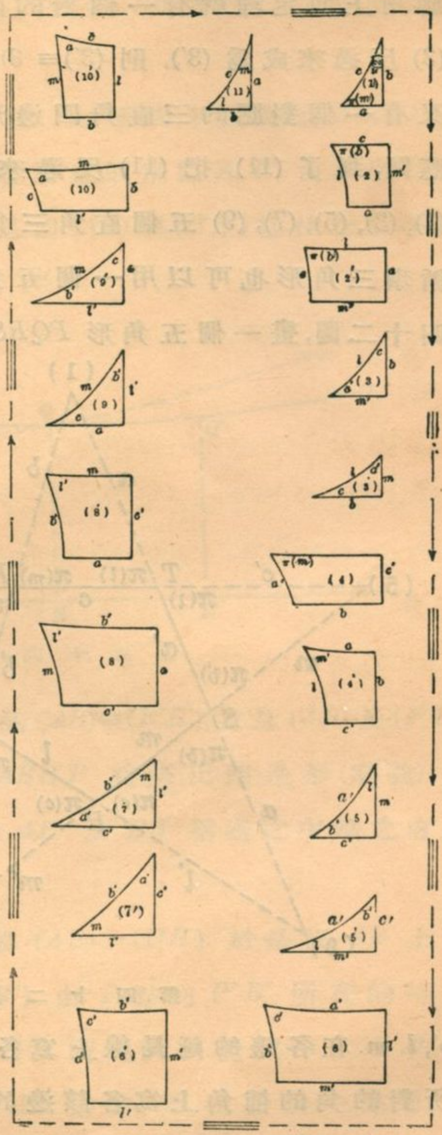


第四十圖

有一個三直角四邊形存在,其銳角為 $\pi(b)$, 各邊之長

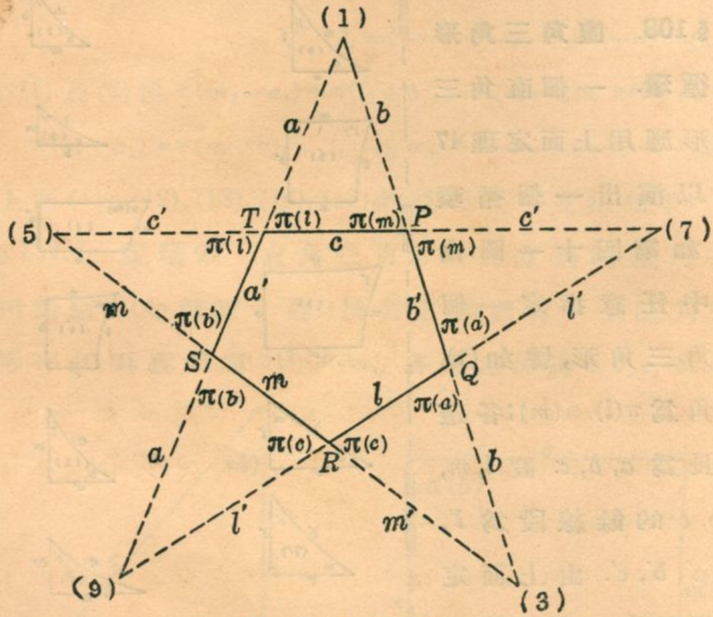
爲 l, a, m', c. 反言之:倘若有一個三直角四邊形,其銳角爲 $\pi(b)$, 各邊之長爲 $l, a\ m', c$, 那就有一個直角三角形,其銳角爲 $\pi(l), \pi(m)$, 各邊之長爲 a, b, c.

§ 108. 直角三角形之循環. 一個直角三角形應用上面定理 47 可以演出一個循環來, 如第四十一圖. 由圖中任意指定一個直角三角形, 譬如 (1). 銳角爲 $\pi(l), \pi(m)$; 各邊之長爲 a, b, c. 設 l, m, a, b, c 的餘線段爲 l', m', a', b', c'. 由上面定理 47 就有一個對應的三直角四邊形 (2). 現在把 (2) 反過來成爲 (2′); 則 (2)≡(2′), 由 (2′)



第四十一圖

應用上面定理就有一個對的直角三角形(3),現在把(3)反過來成爲(3′),則(3′)≡3).由(3′)應用上面定理又有一個對應的三直角四邊形(4).依此繼續的求對應圖,到了(11),把(11)反過來就是原來的(1).所以(1),(3),(5),(7),(9)五個直角三角形是循環的.這五個循環三角形也可以用一個五角形的圖求出來,如第四十二圖,畫一個五角形 $PQRST$,命各邊之長爲 $a', c,$

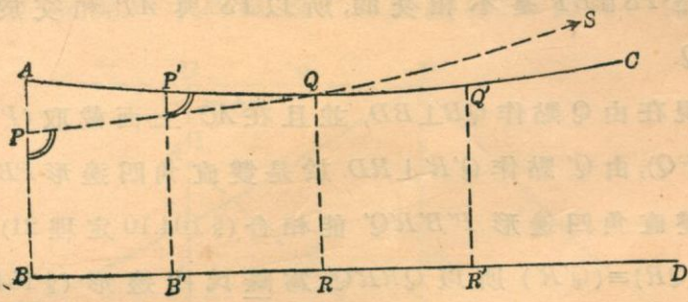


第四十二圖

b', l, m.在各邊的延長線上寫各該邊的餘線段,在各邊所對的角的補角上寫各該邊的平行角,於是將各邊上三角形的邊上字母互相對調如乙圖,卽得上面所

說的循環三角形(1), (3), (5), (7), (9). 各邊延長線所交的角,係代表直角.

§109. **公垂線之作法.** 如第四十三圖,設 AC, BD 是兩條不交線. 在 AC 上面任意取兩點 A, P'. 由 A 及 P' 作 $AB \perp BD$, $P'B' \perp BD$. 於是因 (AB) 與 $(P'B')$ 能相合或不能相合,分為兩種作法於下:



第四十三圖

I. $(AB) \equiv (P'B')$. 既然 $(AB) \equiv (P'B')$, 並且 (AB) 及 $(P'B')$ 都與 BD 垂直, 所以 $ABB'P'$ 為薩氏四邊形(定義). 由 §88 定理44 可知連結 AP' 及 BB' 兩邊之中點之直線 MN 即公垂線.

II. $(AB) \neq (P'B')$. 設 $(AB) > (P'B')$. 於是在 AB 上面可以截取 $(PB) \equiv (P'B')$. 由 P 點向 $P'B'$ 所在的一側引直線 PS, 令 PS 與 PB 所夾的角能與 $B'P'C$ 角相合. 現在我們先證明 PS 必與 AC 相交於一點 Q, 然後再述公垂線之作法. 由 B 點引 $\overrightarrow{BS'} \parallel \overrightarrow{PS}$, 由 B' 點引

$\overrightarrow{B'C'} \parallel \overrightarrow{AC}$, 於是 $\measuredangle PBS' \equiv \measuredangle P'B'C'$ (§ 102.4 定理 12). 但是 $\measuredangle ABB' \equiv \measuredangle P'B'D$ (作圖) $\therefore$ $\measuredangle S'BB' \equiv \measuredangle C'B'D$ $\therefore$ $\measuredangle S'BB' + \measuredangle BB'C' = \pi$, $\therefore$ BS' 與 $B'C'$ 爲不交線(§ 98 定理 3).但是 BS' 在 $B'C'$ 及 AC 兩平行線之間,所以 BS' 必與 AC 相交於一點(§ 101.8 系 1).設此點爲 T,於是得一 $\triangle ABT$. 由 § 41 定理 6 可知 PS 必與 AT 或 BT 相交;但是 $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{BT}$ 是不相交的,所以 PS 與 AT 相交於一點 Q.

現在由 Q 點作 $QR \perp BD$, 並且在 AC 上面截取 $(P'Q') \equiv (PQ)$, 由 Q' 點作 $Q'R' \perp RD$. 於是雙直角四邊形 $PBRQ$ 與雙直角四邊形 $P'B'R'Q'$ 能相合(§ 104.10 定理 21), 所以 $(QR) \equiv (Q'R')$ 所以 $QRR'Q'$ 爲薩氏四邊形 (§ 104.11 定理 22).由 § 88 定理 44 可知連結 (QQ') 及 (RR') 兩線段的中點的直線,卽爲不交線 AC, BD 的公垂線.

§ 110. 平行線之作法. 平行線的作法,因爲已知的條件之不同,分爲兩個問題,卽:

I. 已知平行距離 p, 求作平行線.

II. 已知平行角 $\pi(p)$, 求作平行線.

換言之,卽:

I'. 通過直線外已知一點作平行線.

II'. 在銳角之一邊上作垂線平行於其他一邊.

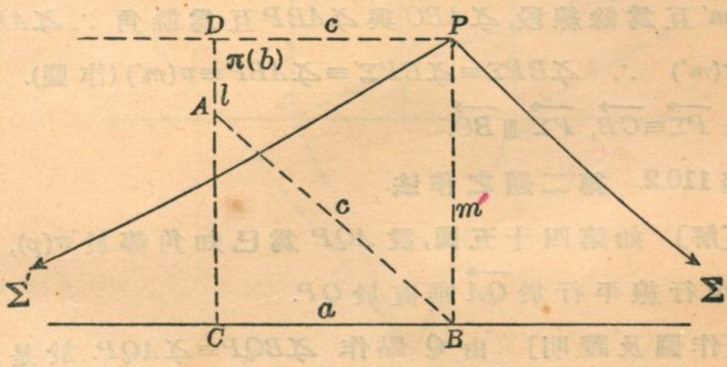
再換句話說,卽:

I″. 知道 p 求 $\pi(p)$.

II″. 知道 $\pi(p)$ 求 p.

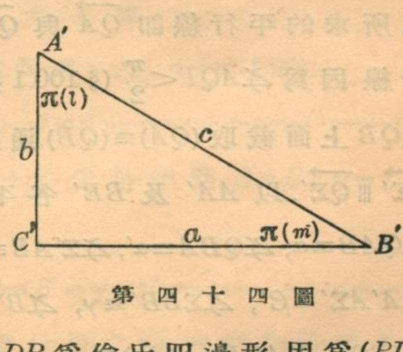
§110.1. 第一題之作法. 第一題的作法,是根據§107.4定理47直角三角形與倫氏四邊形之對應而成立的;可是根據他們的對應可以有許多不同的作法,不過道理是一樣的,所以現在祇舉其一例如下:

(解) 如第四十四圖,設 P 爲直線 BC 外面的一點,離



BC 的距離爲 PB. 現在求作直線通過 P 點平行於 BC.

(作圖) 通過 P 點作 $PB\perp BC$, $PD\perp PB$ (第四十四圖). 由 PD 上面任意一



第四十四圖

點 D 作 $DC\perp BC$. 於是 $BCDP$ 爲倫氏四邊形,因爲 $(PD)>(BC)$(§104.9定理20系2),所以拿 PD 爲半徑,B 點爲中

心,作一圓弧,必與(CD)相交於一點.設此點為A,於是$\measuredangle ABP\equiv\pi(PB)$.在$P$點作$\measuredangle\Sigma PB\equiv\measuredangle ABP$,及$\measuredangle\Sigma' PB\equiv\measuredangle ABP$.於是$\overrightarrow{P\Sigma}$及$\overrightarrow{P\Sigma'}$即所求的平行線各平行於$\overrightarrow{CB}$及$\overrightarrow{BC}$.

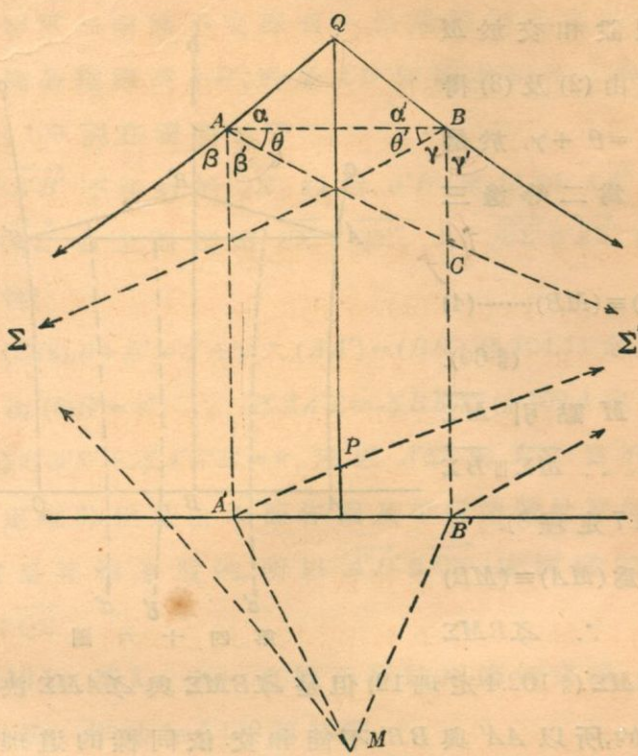
(證明) 設四邊形$BCDP$的五部分為$\pi(b), l, a, m', c$.由§107.4定理47,就有一個直角三角形$A'B'C'$與他相應,其銳角為$\pi(l), \pi(m)$,各邊之長為a, b, c.現在因$(AB)\equiv(A'B'), (BC)\equiv(B'C')$ $\therefore$ $\measuredangle ABC\equiv\pi(m)$(§77.1系1).但是$m$與$m'$互為餘線段,$\measuredangle ABC$與$\measuredangle ABP$互為餘角,$\therefore$ $\measuredangle ABP=\pi(m')$ $\therefore$ $\measuredangle BP\Sigma\equiv\measuredangle BP\Sigma'\equiv\measuredangle ABP\equiv\pi(m')$(作圖).
$\therefore$ $\overrightarrow{P\Sigma}\equiv\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{P\Sigma'}\parallel\overrightarrow{BC}$.

§110.2. 第二題之作法.

[解] 如第四十五圖,設AQP為已知角等於$\pi(p)$,求作平行線平行於$\overrightarrow{QA}$垂直於QP.

[作圖及證明] 由Q點作$\measuredangle BQP\equiv\measuredangle AQP$.於是本題所求的平行線即$\overrightarrow{QA}$與$\overrightarrow{QB}$兩條相交線的公共平行線因為$\measuredangle AQP<\frac{\pi}{2}$(§100.1系1),$\therefore$ $\measuredangle AQB<\pi$.在QA及QB上面截取$(QA)\equiv(QB)$,通過B, A兩點各引$\overrightarrow{B\Sigma}\parallel\overrightarrow{Q\Sigma}$, $\overrightarrow{A\Sigma'}\parallel\overrightarrow{Q\Sigma'}$.以$AA'$及$BB'$各平分$\measuredangle\Sigma A\Sigma'$及$\measuredangle\Sigma B\Sigma'$,設$\measuredangle QAB\equiv\alpha$, $\measuredangle QBA\equiv\alpha'$, $\measuredangle\Sigma' AB\equiv\theta$, $\measuredangle\Sigma BA\equiv\theta'$, $\measuredangle\Sigma AA'\equiv\beta$, $\measuredangle A'A\Sigma'\equiv\beta'$, $\measuredangle\Sigma BB'\equiv\gamma$, $\measuredangle B'B\Sigma'\equiv\gamma'$;於是因為$(AQ)\equiv(BQ)$, $\measuredangle AQP\equiv\measuredangle PQB$.

$\therefore$ $\alpha+\theta=\alpha'+\theta'$……………(1) (§102.4定理12)



第四十五圖

但是 QAB 爲二等邊三角形 $\therefore\ \alpha\equiv\alpha'$(§ 60).

$$\therefore\ \theta\equiv\theta' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)式可知 $\beta+\beta'=\gamma+\gamma'$. 但是作圖 $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$

$\therefore\ 2\beta=2\gamma$,

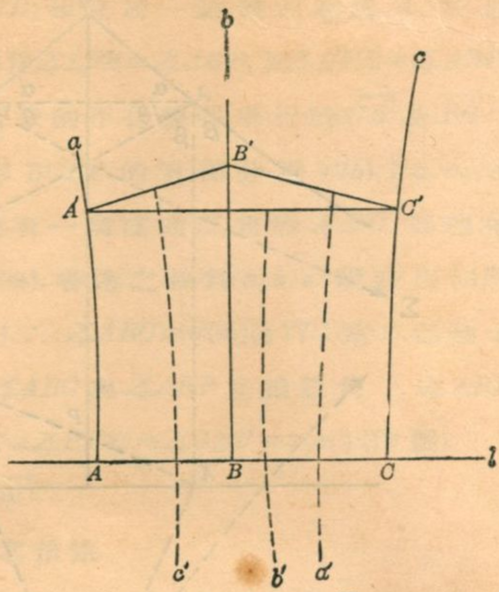
$$\therefore\ \beta=\beta'=\gamma=\gamma' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

未作 QA, QB 的公共平行線之前,我們先證明平分線 AA' 與 BB' 是兩條不交線. 若 AA' 與 BB' 是兩條相交

線,假設相交於M點;則由(2)及(3)得$\theta+\beta'=\theta'+\gamma$,於是$MAB$爲二等邊三角形

$$(MA)\equiv(MB)\cdots\cdots\cdots(4)$$

(§ 60).



第四十六圖

由M點引$\overrightarrow{M\Sigma}\parallel\overrightarrow{A\Sigma}$. $\therefore$ $\overrightarrow{M\Sigma}\parallel\overrightarrow{B\Sigma}$ (§ 101.7 定理8).

因爲$(MA)\equiv(MB)$ $\beta\equiv\gamma$ $\therefore$ $\measuredangle BM\Sigma\equiv\measuredangle AM\Sigma$ (§ 102.4 定理12) 但是$\measuredangle BM\Sigma$與$\measuredangle AM\Sigma$決不能相合的,所以AA'與BB'不能相交.依同樣的道理也可以知道AA'與BB'的反向半線也是不能相交,又若$\overrightarrow{AA'}\parallel\overrightarrow{BB'}$;則因$BB'$在$\measuredangle AB\Sigma'$的內部,由平行線的定義$BB'$必與$A\Sigma'$相交於一點,設此點爲$C$. 由(3) $\gamma'=\beta'$, 又由 § 65 $\measuredangle ACB'\equiv\measuredangle BC\Sigma'$ $\therefore$ $(BC)\equiv(AC)$ (§ 102.7 定理14).
$\therefore$ $\theta'+\gamma=\theta$ (§ 60).

由(2),(3)可知這是不可能的.所以$\overrightarrow{AA'}$不能平行於$\overrightarrow{BB'}$.依同樣的道理,也可以證明$\overrightarrow{A'A}$不能平行於$\overrightarrow{B'B}$. AA'與BB'旣不平行又不相交,所以是不交線.由 § 106.8

定理43可知兩條不交線有一公垂線,並且祇有一條;設此條公垂線爲$A'B'$,於是$A'B'$即所求的平行線,其作法如§109. 現在證明於下:

若$\overrightarrow{A'B'}$不平行於$\overrightarrow{Q\Sigma'}$,則由$A'B'$可以引$\overrightarrow{A'\Sigma'} \parallel \overrightarrow{Q\Sigma'}$, $\overrightarrow{B'\Sigma'} \parallel \overrightarrow{Q\Sigma'}$由上面作圖$\overrightarrow{A\Sigma'} \parallel \overrightarrow{Q\Sigma'}$, $\therefore$ $\overrightarrow{A'\Sigma'} \parallel \overrightarrow{A\Sigma'}$ (平行傳遞性).

由(2)(3), $\theta+\beta'=\theta'+\gamma$ $\therefore (AA')=(BB')$ (§104.11 定理22).

再由(3)$\beta'=\gamma'$ $\therefore$ $\measuredangle AA'\Sigma \equiv \measuredangle BB'\Sigma'$ (§102.4 定理12)

$\therefore$ $\measuredangle B'A'\Sigma'+\measuredangle A'B'\Sigma'=\pi$. 所以$A'\Sigma'$與$B'\Sigma'$爲不交線(§98 定理3). 但是由上面作圖及平行傳遞性又是平行線. 這是互相矛盾的,所以$\overrightarrow{A'B'} \parallel \overrightarrow{Q\Sigma'}$依同樣的道理$\overrightarrow{B'A'} \parallel \overrightarrow{Q\Sigma}$.

§110.1. 系1. 作一直線平行於兩條相交線.

(作法) 作法如§110第二題.

§110.2. 系2. 作一直線平行於兩條平行線.

(作法) 設$\overrightarrow{A\Sigma}$, $\overrightarrow{B\Sigma}$爲已知的兩條平行線,其反向半線各爲$A\Sigma_1$, $B\Sigma_2$. 求作一直線$\Sigma_1C\Sigma_2$能使$\overrightarrow{C\Sigma_1} \parallel \overrightarrow{A\Sigma_1}$, $\overrightarrow{C\Sigma_2} \parallel \overrightarrow{B\Sigma_2}$. 現在由$A\Sigma_1$上面任意取一點$A$,引$\overrightarrow{A\Sigma_2} \parallel \overrightarrow{B\Sigma_2}$ (§110第一題),由系1可作$\Sigma_1C\Sigma_2$平行於$A\Sigma_1$, $A\Sigma_2$,於是$\Sigma_1C\Sigma_2$平行於$A\Sigma_1$, $B\Sigma_2$, (平行傳遞性).

§110.3. 系3. 作一直線平行於兩條不交線.

§111. 三角形各邊垂直平分線及其內角平分線之

研究.

§111.1. **定理48.** 在雙曲線幾何學的平面上有一種三角形,各邊垂直平分線是三條不交線.

(作圖) 如第四十六圖:假設有一直線l,作垂線a, b, c垂直於l,其垂足為A, B, C.在l之一側,由a, b, c上面截取$(AA')\equiv(BB')\equiv(CC')$.連結$A', B', C'$,則$A'B'C'$就是本定理所說的三角形.

(證明) $ABB'A'$及$BCC'B'$都是薩氏四邊形(作圖及定義).所以$\measuredangle A'B'B$及$\measuredangle C'B'B$都是銳角(§104.1定理18)因此$A'B'$與$B'C'$不能同在一直線上,即A', B', C'三點不能同在一直線上.所以連結A', B', C'三點成為三角形.

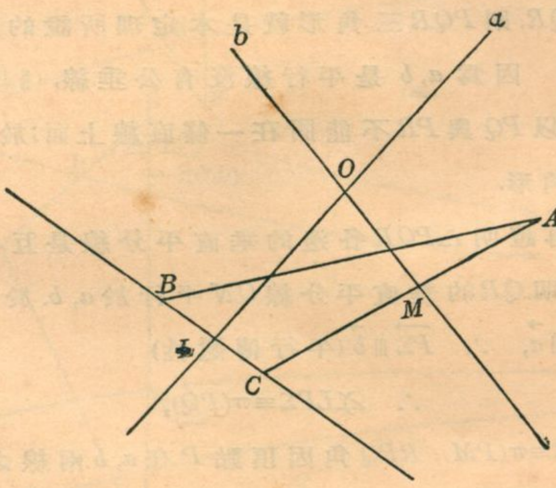
現在再證明$\triangle A'B'C'$各邊的垂直平分線是三條不交線.由作圖$ABB'A'$是薩氏四邊形,所以(AB)與$(A'B')$有一公共的垂直平分線c' (§88定理44).依同樣的道理:(BC)與$(B'C')$, (AC)與$(A'C')$也各有一條公共的垂直平分線a', b'.於是a', b', c'就是$\triangle A'B'C'$各邊的垂直平分線.並且同時垂直於直線l,所以也是三條不交線.(§106.4系2)所以$A'B'C'$三角形各邊垂直平分線是三條不交線.

在l之一側,由a, b, c三條不交線上祇須各取一點離l等距離,連結起來就是本定理所說的三角形,所以這種三角形有無窮之多.依同樣的道理,在l其他一

旁也可以得許多同樣的三角形.

§111.2. **定理49.** 在雙曲線幾何學上有一種三角形,各邊垂直平分線相交於一點.

(作圖) 如第四十七圖,設a, b兩直線相交於一點O. 在直線a上面一點L作垂線BC,在直線b上面一點M作垂線AC交BC於C點.截取$(BL)\equiv(LC)$,$(AM)\equiv(CM)$連結A, B於是ABC即本定理所說的三角形.



第四十七圖

(證明) 直線a, b不能有公垂線(§106.11 定理45)所以垂線BC, AC不能在一條直線上面,即A, B, C三點不同在一直線上面,所以ABC爲三角形. O點離A, B, C三點是等距離的(§79 定理37)所以O點必在AB的垂直平分線上面而AB的垂直平分線必須通過O點.所

以$\triangle ABC$各邊垂直平分線相交於一點O.

§111.3. **定理50.** 在雙曲線幾何學上有一種三角形,其各邊垂直平分線是三條平行線.

(作圖) 設如第四十八圖甲及乙:設a, b爲平行線,由兩平行線中間(甲圖),或外部(乙圖)取一點P.由P點作PQ與a垂直於L點,PR與b垂直於M點.截取$(MR)\equiv(MP)$, $(QL)\equiv(LP)$.

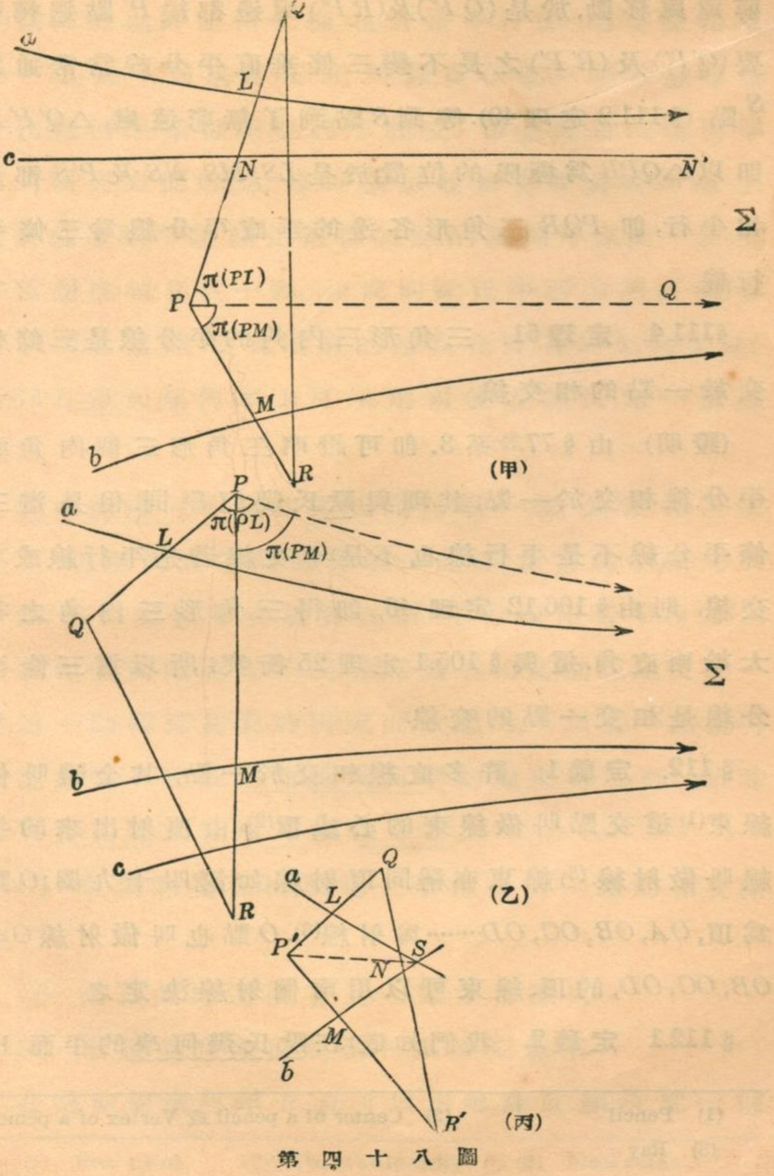
連結QR,則PQR三角形就是本定理所說的三角形.

(證明) 因爲a, b是平行線沒有公垂線,(§106.11定理45)所以PQ與PR不能同在一條直線上面;於是PQR成爲三角形.

現在再證明$\triangle PQR$各邊的垂直平分線是互相平行的.即證明QR的垂直平分線CN平行於a, b.於是由P點引$\overrightarrow{P\Sigma}\parallel\vec{a}$, $\therefore\ \overrightarrow{P\Sigma}\parallel\vec{b}$(平行傳遞性)

$$\therefore\ \measuredangle LP\Sigma\equiv\pi(PQ),$$

$\measuredangle MP\Sigma\equiv\pi(PM)$. RPQ角因頂點P在a, b兩線之間(甲圖)或外部,故其大小將等於$\pi(PL)$與$\pi(PM)$兩角之和或差.現在使RPQ角漸漸減少.PQ與PR之長不變,假設PQ與PR的垂直平分線相交於一點S,祇要S點離PQ, PR的距離大於$\frac{(PQ)}{2}$, $\frac{(PR)}{2}$,則RPQ角可以任意減少,如丙圖的$R'P'Q'$.連結$P'S$,由§111.2定理49可知$(Q'R')$的垂直平分線NS也通過S點.現在使S點沿直線$P'S$向無



第四十八圖

窮遠處移動,於是(QP')及$(R'P')$兩邊都繞P'點迴轉,祇要$(Q'P')$及$(R'P')$之長不變,三條垂直平分線常常通過S點(§111.2 定理49).等到S點到了無窮遠處,$\triangle Q'P'R'$即以$\triangle QPR$為極限的位置;於是LS, MS, NS及$P'S$都互相平行,即PQR三角形各邊的垂直平分線爲三條平行線.

§111.4. **定理51.** 三角形三內角的平分線是三條相交於一點的相交線.

(證明) 由§77.3 系3.即可證明三角形三個內角的平分線相交於一點,其理與歐氏幾何學同.但是這三條平分線不是平行線也不是不交線.若是平行線或不交線,則由§106.12 定理46,即得三角形三內角之和大於兩直角.這與§105.1 定理25衝突;所以這三條平分線是相交一點的交線.

§112. **定義1.** 許多直線相交於一點,其全體叫做線束[1]這交點叫做線束的心或頂[2].由頂射出來的半線叫做射線.[3]線束亦稱同頂射線.如第四十九圖:O點爲頂,OA, OB, OC, OD……爲射線[3].O點也叫做射線OA, OB, OC, OD,的頂.線束可以用兩個射線決定之.

§112.1 **定義2.** 我們知道:在歐氏幾何學的平面上,

---

(1) Pencil (2) Center of a pencil 或 Vertex of a pemcil

(3) Ray

兩條直線也許是相交線,也許是平行線.相交線相交於一點,這一點是實在的,叫做實在點(1).平行線雖然古代幾何學家都說他們不相交;但是近世的幾何學家爲研究方便起見,每每也想他相交於極遠的地方,交於極遠點(2).這樣把兩條直線的關係可以統一起來,常常想他相交於一點.如此則歐氏平面上的直線都可以看作是線束.其頂有的是實在點,有的是極遠點;所以在歐氏幾何學上可以用兩條直線決定一個線束.

雙曲線幾何學也和歐氏幾何學一樣,爲研究方便起見,把兩條直線的關係統一起來,常常想他相交於一點.凡相交線相交於實在點.平行線向着平行方向伸長相交於極遠點.不交線雖然不相交,也想他交於一點,這一點純粹爲便於研究而設想的;所以這一點就叫做意象點(3).因此雙曲線幾何學的線束有三種:卽其頂爲實在點或極遠點或意象點.

(1) 若頂爲實在頂,就是一羣相交於一點的相交線束

(2) 若頂爲極遠頂,就是一羣平行線束.

(3) 若頂爲意象頂,就是一羣不交線束.

在雙曲線幾何學上,也可以用兩條直線決定一個

(1) Real point (2) Point at infinity (3) Ideal point

線束;但是由前面定理,凡一羣不交線都有一條公垂線,並且祇有一條,所以這一羣不交線的線束祇須用他的公垂線決定他,這一條公垂線叫做線束的示線[1]或這一羣不交線的示線.上面所說的三種點,譬如實在點,本書以後常用英文字母 $A, B, C,$……等代表他;極遠點常用希臘字母 Σ, Ω……等代表他;意象點常用 Γ_a, Γ_b,……等代表他,Γ 右傍的 $a, b,$……等就是示線 a, 示線 b, 因爲一條示線可以決定一羣不交線,而一羣不交線又可以決定一個意象點,所以示線也可以表示意象點,因此 Γ 的右傍加上示線的記號 $a, b,$……等代表意象點.

§ 113. 直線通過兩點之作法.

由前節可知雙曲線幾何學有三種點,即實在點,極遠點,意象點.實在點可以用實在的點代表他,極遠點可以用一條直線代表他,意象點可以用線束的示線代表他.現在求通過兩點之直線之作法如下:

§ 113.1. 求作直線通過 A, B 兩點. 通過實在點 A, B 的直線,由公理甲$_1$ 這是可以作的.

§ 113.2 求作直線通過 A, Σ 兩點. 極遠點 Σ 可以用直線 $B\Sigma$ 代表他.由 §110 通過 A 點可作 $A\Sigma \parallel B\Sigma$;於是 $A\Sigma$ 即所求之直線

(1) Representative line of a pencil

§113.3. 求作直線通過A, Γ_a兩點. 意象點Γ_a可以用示線a代表他,由A至a所作之垂線即通過A, Γ_a兩點之直線.

§113.4. 求作直線通過Σ, Σ'兩點. 用兩條直線$Q\Sigma$, $Q\Sigma'$代表極遠點Σ, Σ';於是求作直線通過Σ, Σ',即求作一直線平行於$Q\Sigma$, $Q\Sigma'$. 其作法見§110.1系1.

極遠點Σ, Σ'若是漸漸的接近,於是$\Sigma Q\Sigma'$角也漸漸的減少而QP之長漸漸增加(第四十五圖),等到Σ與Σ'相合,則$\Sigma Q\Sigma'$的角度爲零.QP之長爲無窮長,而直線$\Sigma\Sigma'$在無窮遠處.

§113.5 求作直線通過Σ, Γ_a兩點. 用直線$A\Sigma$代表極遠點Σ,示線a代表意象點Γ_a.於是因爲Σ在示線a上面或不在a上分爲兩種情形:

I. 設Σ不在a上面,於是所求直線$\Sigma\Gamma_a$即平行於$A\Sigma$垂直於a之直線.其作法詳§110.

II. 設Σ在a上面,於是直線$\Sigma\Gamma_a$在無窮遠處,所以不能作.

§113.6. 求作直線通過Γ_a, Γ_b兩點. 示線a代表Γ_a點,示線b代表Γ_b點. 因爲a與b爲不交線或平行線或相交線分爲三種情形如下.

I. 設a, b爲不交線. 若a, b爲不交線,則a, b的公垂線,即所求的直線,其作法如§109.

II. 設 a, b 爲平行線. 若 a, b 爲平行線, 則所求之直線在無窮遠處, 叫做無窮遠線, 所以不能作.

III. 設 a, b 爲相交線. 若 a, b 爲相交線, 則所求之直線爲意象線. 卽該直線上面的點都是意象點, 所以不能作.

§114. 線束之對應點

§114.1. 定理52. 兩條同頂射線的對應點是一對一的.

(求證) 設 a, b 爲射線, O 點爲 a, b 的頂, 若 a 上面有一點 A, 則.

(1) b 上面也有一點 B 與 A 爲對應點.

(2) 並且在 b 上面與 A 對應的點祇有這一點 B.

(證明) 因爲射線有三種不同的頂, 卽實在頂, 極遠頂, 意象頂; 所以這裏證明也分爲三種情形:

(一) 設 a,b 的頂 O 爲實在點. 由公理丙$_1$可知射線 b 上面有一點 B 能令 $(OB)\equiv(OA)$. 連結 AB, 則 $\measuredangle OAB\equiv\measuredangle OBA$ (§60 定理19) $\therefore$ A 與 B 爲對應點 (§101.3 定義) 由公理丙$_1$可知射線 b 上面祇有一點 B 能令 $(OB)\equiv(OA)$. 所以射線 b 祇有一點 B 與 A 爲對應點.

(二) 設 a,b 的頂 O 爲極遠點, 由 §101.2 定理7裏面的作圖卽可證明.

(三) 設 a, b 的頂爲意象點, 又設直線 PQ 爲 a,b 的示線,

交 a, b 於 P 點 Q 點. 由 b 上面取一點 B, 令 B 與 A 同在 PQ 之一側, 並且令 $(BQ)\equiv(AP)$(公理丙$_1$). 連結 AB, 則 $ABQP$ 爲薩氏四邊形, $\measuredangle QBA\equiv\measuredangle PAB$(§ 88 定理 44) $\therefore$ B 與 A 爲對應點.

並且 b 上面祇有一點 B 與 A 爲對應點.

§ 114.2. **系** 同頂射線 a, b, c, d, e………等, 若 a 上面有一點 A, 則 $b, c, d, c,$………等上面也各有一點 B, C, D, E………與 A 爲對應點.

§ **114.3.** **定理 53.** 假設有三條同頂射線 a, b, c 若 a, b 上面各有一點 A, B 與 c 上面一點 C 是對應點; 則 A, B 也是對應點.

(證明) 本定理也分爲三種情形卽:

(一) 頂爲實在點.

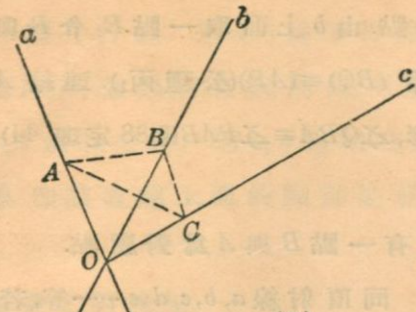
如第四十九圖甲, $\measuredangle OAC\equiv\measuredangle OCA$ (原設)

$\therefore$ $(OA)\equiv(OC)$(§ 60 定理 19). 同理 $(OB)\equiv(OC)$

$\therefore$ $(OA)\equiv(OB)$(公理丙$_3$). $\therefore$ $\measuredangle OAB\equiv\measuredangle OBA$. 卽 A, B 爲對應點.

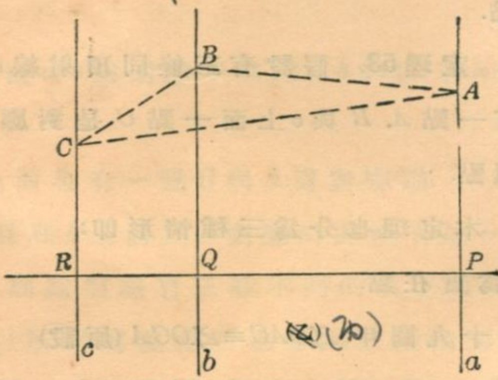
(二) 頂爲極遠點.

如第四十九圖乙, 原設 A, C 是對應點, 所以 (AC) 的垂直平分線 $L\Sigma \parallel \vec{a}, \parallel \vec{c}$(§ 101.4 系 1) 依同樣的道理 (BC) 的垂直平分線 $\overrightarrow{N\Sigma} \parallel \vec{c}, \parallel \vec{c}$ 因此 (AB) 的垂直平分線 $\overrightarrow{M\Sigma} \parallel \vec{a}, \parallel \vec{b}$(§ 111.3 定理 50).



(甲)

畫(21) 排偏



(乙)

第四十九圖

$\therefore\ \measuredangle AB\Sigma=\pi\left(\frac{AB}{2}\right)=\measuredangle BA\Sigma$ 所以 A 與 B 爲對應點.

(三)頂爲意象點.

如第四十九圖丙,設 PQ 爲 a, b, c 的公垂線交 a, b, c 於 P, Q, R. 於是因 A 與 C 及 B 與 C 爲對應點,所以 $(AP)\equiv(CR)$,$(BQ)\equiv(CR)$(§104.11 定理22). $\therefore (AP)\equiv(BQ)$(公理丙$_3$)

$\therefore\ \measuredangle PAB\equiv\measuredangle ABQ$(§88) 所以 A 與 B 爲對應點.

§114.4. 系. 線束的射線各有一點互爲對應點.

§114.5. 定理54. 線束的對應點不能有三點同在一直線上.

(證明) 本定理分爲三種情形證明於下.

(一) 頂爲實在點.

如第四十九圖甲,設 A, B, C 三點爲對應點,連結 AB, BC,則得二等腰三角形 OAB, OBC 由 §100.3 系 3. $\measuredangle ABO$ 及 $\measuredangle CBO$ 都是銳角. $\therefore \measuredangle ABO$ 與 $\measuredangle CBO$ 之和不能等於兩直角,所以 (AB) 與 (BC) 不能同在一直線上面,卽 A, B, C 三點不能同在一直線上面.

(二) 頂爲極遠點.

如第四十九圖乙. $\measuredangle AB\Sigma \equiv \measuredangle BA\Sigma$ (原設), $\measuredangle AB\Sigma + \measuredangle BA\Sigma < \pi$(§ 100, 定理 5).

$$\therefore \quad 2\measuredangle AB\Sigma < \pi \text{ ,卽 } \measuredangle AB\Sigma < \frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

同理 $$\measuredangle CB\Sigma < \frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1) 及 (2) 得 $\measuredangle AB\Sigma + \measuredangle CB\Sigma < \pi$. 所以 (AB) 與 (BC) 不同在一直線上, 卽 A, B, C, 三點不同在一直線上.

(三) 頂爲意象點.

如第四十九圖丙,因 A, B, C 爲對應點, 所以 $APQB$ 及 $BQRC$ 爲薩氏四邊形(原設及 § 104.11 定理 22). $\therefore \measuredangle ABQ$ 及 $\measuredangle CBQ$ 都是銳角 (§ 104.1 定理 18). $\therefore \measuredangle ABQ + \measuredangle CBQ < \pi$. 所以 (AB) 與 (BC) 不同在一直線上.

§ 114.6. 系. 線束的對應點不能有三點以上同在一直線上.

§ 114.7. 定理 55 設 A, B, C 爲同頂射線 a, b, c 的對應點,若 b 在 a, c 之間並且頂是實在點或極遠點則 B 與頂各在 (AC) 之一側.

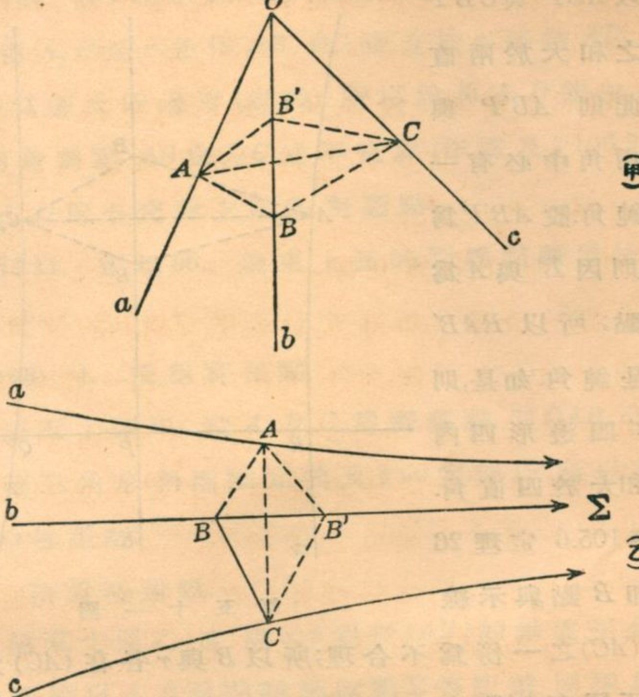
(證明) (一) 頂爲實在點

設射線的頂爲 O 如第五十圖甲 O 與 B 的位置關係,必於同在 (AC) 之一側,與不同在 (AC) 之一側,兩種情形中居其一種若同在 (AC) 之一側爲不合理,則不同在 (AC) 之一側爲合理,於是本定理卽爲證明.所以現在祇說明同在一側不能成立之理於下:

若 B 與 O 同在 (AC) 之一側譬如在 B' 的位置上,則 $AB'C$ 爲三角形而 $AB'C$ 角小於兩直角,而 $OB'C$ 與 $OB'A$ 兩角之和必定大於兩直角.如此 $OB'C$ 與 $OB'A$ 兩角中必有一角爲鈍角.譬如 $OB'C$ 角爲鈍角,則因原設 C 點與 B' 點爲對應點,所以 OCB' 角也是鈍角,於是 $\triangle OB'C$ 三內角之和大於兩直角.這與 § 105.1 定理 25 不合,所以 B 在 B' 的位置上是不合理的,卽 B 與 O 同在 (AC) 之一傍爲不合理

(二) 頂爲極遠點.

如第五十圖乙,設極遠頂爲 Σ,其證明方法與上面同,若 B 與 Σ 同在 (AC) 之一傍則與 § 100 定理 5 衝突,所以



第五十圖

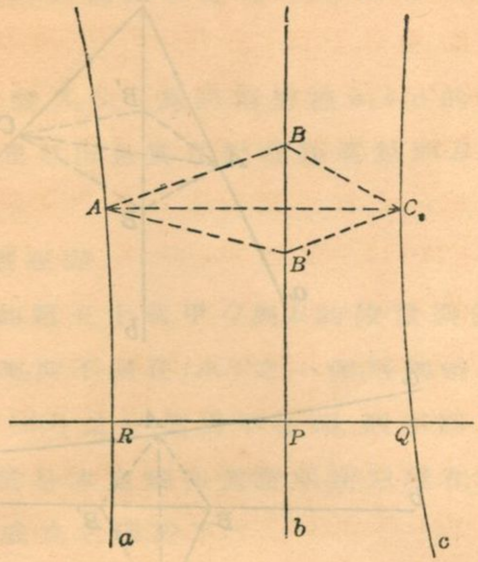
B 與 Σ 不同在 (AC) 之一側.

§ 114.8. 定理 56. 設 A, B, C 爲同頂射線 a, b, c 的對應點. 若 b 在 a, c 之間, 並且頂爲意象點, 則 B 點與示線各在 (AC) 之一側.

(證明) 本定理證明方法和定理55是一樣的

如第五十一圖, 若 B 與示線 r 同在 (AC) 之一側, 譬如在 B' 的位置上; 則 $AB'C$ 爲三角形, 而 $AB'C$ 角不能大於兩直

角,所以ABP'與$CB'P$兩角之和大於兩直角,如此則$AB'P$與CBP'兩角中必有一角爲鈍角.設$AB'P$爲鈍角,則因B'與A爲對應點;所以RAB'角也是鈍角.如是,則$ARPB'$四邊形四內角之和大於四直角.這與§105.6定理26衝突.即B點與示線r同在(AC)之一傍爲不合理;所以B與r各在(AC)之一側,即不同在(AC)之一側.



第五十一圖

§114.9. **定理57.** 凡不交線的對應點都離示線等距離.

(證明) 如第五十一圖,設A, B, C爲不交線a, b, c的對應點,r爲不交線的示線.如是,則因$\measuredangle RAB \equiv \measuredangle ABP$,(對應點定義),所以$A, B$離示線$r$等距離(§104.11定理22)同理$B$與$C$離$r$等距離,所以$A, B, C$離$r$爲等距離.

§114.10. **定理.58.** 離示線等距離的點都是不交線上的對應點.

(證明)　設 r 爲示線; A, D 爲離 r 等距離的點中任意兩點. 由 A, D 至 r 各作 AB, DC 垂直於 r. 連結 AD, 於是 $ABCD$ 爲薩氏四邊形(定義). 所以銳角 A, D 能相合, 即 A, D 爲對應點 AB 與 DC 爲不交線(作圖及§106.3系1) 所以 A, D 爲不交線上面的對應點.

§114.11. **定理59.** 線束上面的對應點離頂是等距離的.

(證明) I. 頂爲實在點

如第五十圖甲: 設 A, B, C 爲對應點. 則 OAB, OBC 都是等腰三角形(對應點定義及§60定理19),所以 A, B, C 離頂 O 等距離.

II. 頂爲極遠點.

如第五十圖乙: 直線 a, b 對於 (AB) 的垂直平分線是對稱的. 所以 A, B 兩點離極遠點 Σ 等距離. 同理 B, C 離 Σ 也是等距離, 所以 A, B, C 離 Σ 都是等距離.

III. 頂爲意象點.

如第五十一圖: a, b 兩線對於 (RP) 的垂直平分線爲對稱(§88.1系), 所以 A, B 離意象點爲等距離, 同理 B, C 意象點爲等距離, 所以 A, B, C 離意象點等距離.

§115. **定義1** 離已知直線 a 等距離的軌跡叫做等距曲線(1), a, 叫做等距曲線的軸(2).

(1) Equidistant-curve　2. Axis of equidistant-curve

等距曲線含有兩支曲線各在軸之一側.這兩支曲線對於軸是對稱的;所以要研究等距曲線祇須研究其一支就夠了.現在要是把軸看作線束的示線,那麼等距曲線就可以看作是意象頂的線束上對應點的軌跡(§ 114.9 定理 57,58),也可以看作是離意象點等距離的軌跡(§ 114.11 定理 59)

等距曲線是兩支曲線各自向着軸彎曲的,不像歐氏幾何學上離一直線等距離的軌跡是兩條直線.

等距曲線離軸的距離要是短至無窮短,就變成爲兩條直線,差不多與軸合而爲一.

§ 115.1. **定義 2.** 連結線束上面對應點所成的曲線,叫做圓.若線束的頂爲極遠點,叫做極大圓(1).若爲實在點,叫做實在圓(2),或簡稱爲圓.

由上面定理及定義,可知實在圓,極大圓和等距曲線,都是線束的對應點之軌跡,也是離已知一點等距離的軌跡.這已知一點(卽線束的頂)叫做圓的中心.由中心射出的射線叫做圓的射徑.所以在雙曲線幾何學上有三種圓,卽:(1)若中心爲實在點,則爲實在圓.(2)若中心爲極遠點,則爲極大圓;(3)若中心爲意象點則爲意象圓或等距曲線

§ 115.2. **定義 3.** 圓的一部分曲線叫做弧,連結弧

(1) Horocycle 或 oricycle (2) Propre cicle

的兩端的線段叫做弦.

§115.3. **注意.** 由第二十二圖及§111.2, §111.3 §111.1 可知每一個三角形有四個外接圓 (即通過三角形三個角點的圓), 其中有三個是意象圓, 其他一個也許是實在圓, 也許是極大圓, 也許是意象圓.

§116. **極大圓之特性.** 下面一章, 講到三角公式時候, 常常要用到極大圓的性質的, 現在把極大圓的重要性質先研究於下:

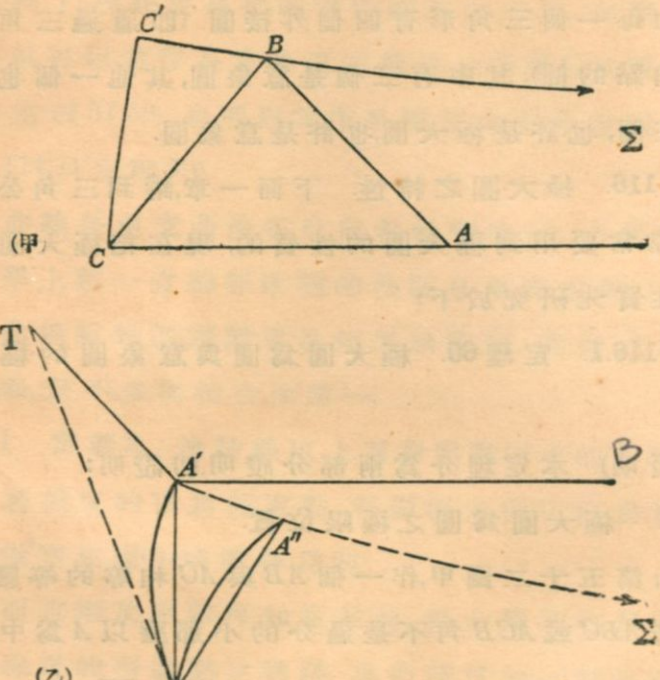
§116.1. **定理60.** 極大圓為圓與意象圓的極限位置.

(證明) 本定理分為兩部分證明, 即證明:

1. 極大圓為圓之極限位置.

如第五十二圖甲, 作一個 AB 與 AC 相等的等腰三角形, 若 ABC 或 ACB 角不是過分的小, 那麼以 A 為中心通過 B, C 可以畫一個圓. 通過 B 點作 $\overrightarrow{B\Sigma} \parallel \overrightarrow{A\Sigma}$. 在 $B\Sigma$ 上面求作 C 的對應 C' (其求法如第九圖先求出 $A\Sigma, B\Sigma$ 的對稱軸 $M\Sigma$, 次由 C 點作垂線 $CM \perp CA$, 交 CM 於 M, 由 M 至 $B\Sigma$ 作垂線交 $B\Sigma$ 於 C' 點, 則 C' 即 C 的對應點) 於是 $\measuredangle ACC' \equiv \measuredangle BC'C$. 現在使 ABC 角漸漸增大, 即使 B 點漸漸向 C' 點移動, 於是 ABC 三角形祇要 A 點向 $\overrightarrow{A\Sigma}$ 方向移動仍舊是等腰三角形, 等到 B 點移到 C' 的位置即 $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle BC'C$, 於是 BA 在 $B\Sigma$ 的位置上與 $A\Sigma$ 平行. 此時通

過 B, C 的圓也成爲通過 C, C' 的極大圓,所以極大圓是圓之半徑極大時候的極限位置.



第五十二圖

2. 極大圓爲意象圓的極限位置.

如第五十二圖乙,設 $A\Sigma$, $A'B$ 是兩條不交線, A 與 A' 是對應點,即 $\measuredangle AA'B \equiv \measuredangle A'A\Sigma$ ....(1)

於是通過 A, A' 可以作一個意象圓,由 A' 點引 $A'\Sigma \parallel A\Sigma$,由 §96 定理 2 可知 $A'\Sigma$ 必在 $A'B$ 與 $A\Sigma$ 之間.

$$\therefore\quad AA'B > AA'\Sigma \text{ ....(2)}$$

設 $A'\Sigma$ 上面與 A 相對應的一點爲 A'', 即 $\measuredangle AA'\Sigma \equiv \measuredangle A''A\Sigma$. 此點 A'' 不能在 $A'\Sigma$ 的反向半線上面,若在反向半線上面如 T 點,則 $\measuredangle AT\Sigma \equiv \measuredangle TA\Sigma$ (對應點定義). $\measuredangle TA\Sigma > \measuredangle A'A\Sigma$, 即 $\measuredangle AT\Sigma > \measuredangle A'A\Sigma$.

但是 $\measuredangle A'A\Sigma \equiv \measuredangle AA'B$, $\therefore$ $\measuredangle AT\Sigma > \measuredangle AA'B$.

但是 $\measuredangle A'A\Sigma > AA'\Sigma$, $\therefore$ $\measuredangle AT\Sigma > \measuredangle AA'\Sigma$ ………… (3)

但是由 § 99 定理 4, $\measuredangle AT\Sigma < \measuredangle AA'\Sigma$ 這與 (3) 式衝突,所以 A'' 不能在 $A'\Sigma$ 的反向半線上面,也不能在 A' 點上面. 必定在 $\overrightarrow{A'\Sigma}$ 上面. 即 $\measuredangle A'A\Sigma > \measuredangle A''A\Sigma$.

現在使 $A'A\Sigma$ 角漸漸減少,並且使 AA' 與 $A\Sigma$, $A'B$ 所夾的角能相合. 等到 $A'A\Sigma$ 角與 $A''A\Sigma$ 角相合,則 AA' 落在 AA'' 上面, $A'B$ 落在 $A''\Sigma$ 上面. 於是通過 A, A' 的意象圓就在 A, A'' 的極大圓上面,所以極大圓爲意象圓的極限位置.

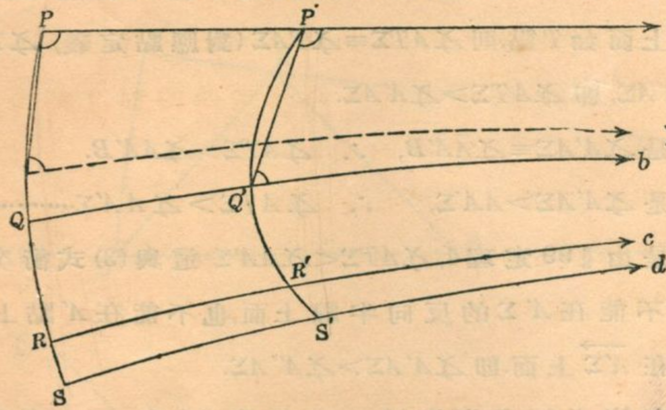
§ 116.2. 注意. 極大圓爲圓與意象圓的極限位置,所以極大圓也叫做極限曲線(1)或界線(2), 極大圓的弧叫做極限弧.

§ 116.3. 定理 61. 凡同心極大圓都能疊合.

(說明) 如第五十三圖: 設 a, b, c, d 爲平行線束; P, P' 爲 a 上面的任意兩點. 通過 P 點的極大圓交射線 b, c, d, 於 Q, R, S, 通過 P' 點的極大圓交射線 b, c, d 於 Q', R', S'

(1) Limiting-curve　(2) Boundary curve

P點與P'點的極大圓即同心極大圓．本定理所謂這兩個圓能相合，即：



第五十三圖

若P'點的極大圓上面有Q', R', S'……等點，則P點的極大圓上面必定也有Q'', R'', S''等點能使$(P'Q')\equiv(PQ'')$ $(Q''R'')\equiv(P'R')$……

（求證） 求證$(P'Q')\equiv(PQ''), (Q''R'')\equiv(P'R')$……

（證明） 在P點作$\measuredangle Q''P\Sigma\equiv\measuredangle Q'P'\Sigma$，並且截取$(PQ'')\equiv(P'Q')$通過$Q''$點引$\overrightarrow{Q''\Sigma}\parallel\overrightarrow{P\Sigma}$，於是由§102定理12得$\measuredangle PQ''\Sigma\equiv\measuredangle P'Q'\Sigma$，但原設$P'$與$Q'$為對應點，所以$P$與$Q''$也是對應點，因此$Q''$點非在$P$點的極大圓上面不可，所以$P$點的極大圓上面有一點$Q''$能使$(PQ'')\equiv(P'Q')$同理$(Q''R'')\equiv(Q'R')$，……即$P$點的極大圓與$P'$點的極大圓能相合．

同理，凡同心極大圓都能相合．

§116.4. 系1. 凡極大圓都能疊合.

§116.5. 系2. 凡能疊合的極大弧,其所乘的弦也能疊合.反之:能疊合的弦,其所乘之弧也能疊合.

§116.6. 系3. 極大圓各部分彎曲的程度都是相等的.即極大圓爲等屈率的曲線.

§116.7. 系4. 長弦所乘之弧長於短弦所乘之弧.反之長弧所對之弦長於短弧所對之絃.

§116.8. 定理62. 兩個同心極大圓,彼此相隔的距離是相等的.

(假設) 設$\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$爲同心極大圓,各與射徑 a, b 相交於 A, B, A', B'.

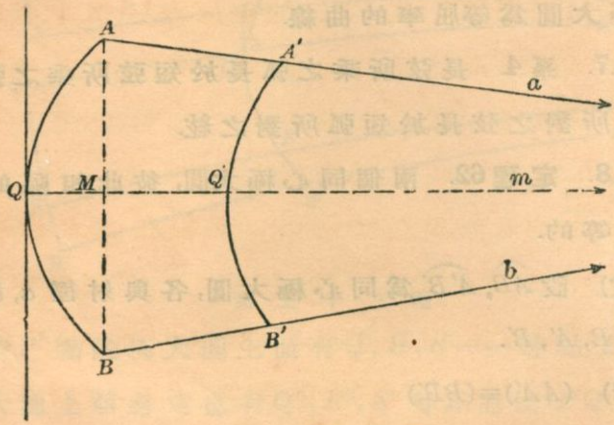
(求證) $(AA')\equiv(BB')$

(證明) 原設 A 與 B 爲對應點, A' 與 B' 也是對應點由 §101.4 系1可知 $(AA')\equiv(BB')$.

§116.9 定理63. 極大圓與其射徑成直角.

(證明) 如第五十四圖,設 AQB 爲極大圓,假設通過 A, B 的射徑爲 $a\,b$,在 $(A'B')$ 的中點 M 作垂直平分線 $M\Sigma$,與極大圓交於 Q' 點.於是 $Q'\Sigma$ 也是極大圓的射徑(§101.4 系1),並且 $A'\Sigma$ 與 $B'\Sigma$ 對於 $Q'\Sigma$ 爲對稱.現在使 M 點漸漸向着 Q' 點移動,並且移動的時候,使直線 $A'B'$ 與 $Q'\Sigma$ 時時刻刻保持垂直的關係,等到 (MQ') 的長爲無窮短的時候,則直線 $A'B'$ 與 $\widehat{A'QB'}$ 相切於 Q' 點.並且與

射徑 $Q'\Sigma$ 垂直. 但是極大圓 Q' 點的方位常用 Q' 點的切線 $A''B''$ 的方位爲方位, 所以切線 $A''B''$ 與射徑 $Q'\Sigma$ 垂直, 卽極大圓與射徑 $Q'\Sigma$ 垂直. 依同樣道理, 可以證明極大圓上面無論那一點都與該點的射徑垂直.



第五十四圖

§116.10. 系1. 極大圓上面一點 Q 的射徑與 Q 點的切線垂直.

§116.11. 系2. 與 Q 點射徑垂直於 Q 的直線爲極大圓上 Q 點之切線.

第二節　立體幾何學

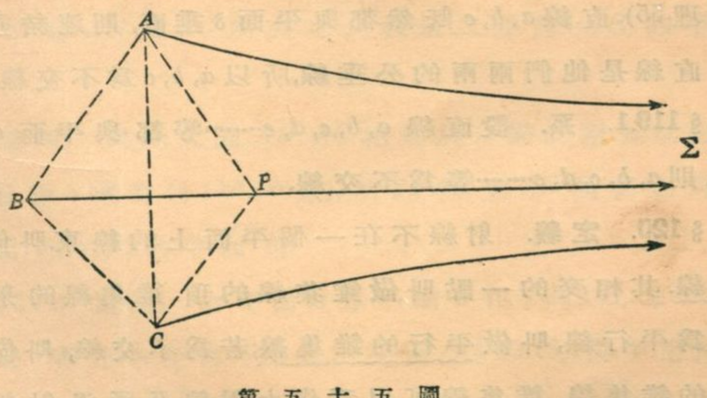
§117. 立體的雙曲線幾何學的定理. 也像平面的雙曲線幾何學一樣, 可以分爲兩類: 一類是和平行公理沒有關係的, 如同 §89 所述的定理卽是; 一類是和平行公理有關係的, 這一類就是我們要研究的. 現在爲

讀者易於了解起見，祇擇其與三角之部有關係的研究於下.

§118. **定理64.** 若$\overrightarrow{A\Sigma}$, $\overrightarrow{C\Sigma}$各與$\overrightarrow{B\Sigma}$平行，則$\overrightarrow{A\Sigma}$平行於$\overrightarrow{C\Sigma}$.(空間平行傳遞性)

(證明) 若是$\overrightarrow{A\Sigma}$, $\overrightarrow{B\Sigma}$, $\overrightarrow{C\Sigma}$三條線同在一個平面內，這在平面幾何裏面已經證明了.現在要證明的，就是這三條線不同在一個平面內.

如第五十五圖，在這三條線上各取一點A, B, C, 並且在$\overrightarrow{B\Sigma}$上面再取一點P, 連結AP, CP. 現在令P沿着$\overrightarrow{B\Sigma}$上面移動；於是平面PAC就同時繞着AC迴轉.等到P點達到無窮遠處，因為$\overrightarrow{A\Sigma} \parallel\!| \overrightarrow{B\Sigma}$, 所以$\overrightarrow{AP}$與$\overrightarrow{A\Sigma}$疊合.又因為$\overrightarrow{C\Sigma} \parallel\!| \overrightarrow{B\Sigma}$, 所以$\overrightarrow{CP}$與$\overrightarrow{C\Sigma}$疊合.但$\overrightarrow{CP}$與$\overrightarrow{AP}$同在一個平面內，所以$\overrightarrow{C\Sigma}$與$\overrightarrow{A\Sigma}$也同在一個平面內.



第五十五圖

依同樣方法，令A點沿着$\overrightarrow{A\Sigma}$上面移動，同時平面

APC繞着PC迴轉,等到A移到無窮遠處,則因$\overrightarrow{A\Sigma} \parallel \overrightarrow{P\Sigma}$,所以$\overrightarrow{PA}$與$\overrightarrow{P\Sigma}$疊合,同時平面$APC$也落在平面$PC\Sigma$上面,又同時,因爲$CA$爲平面$CAP$與平面$CA\Sigma$的交線,所以$\overrightarrow{CA}$與$\overrightarrow{C\Sigma}$疊合,所以$\overrightarrow{C\Sigma} \parallel \overrightarrow{A\Sigma}$.

§118.1. 系. 設α, β, γ三個平面,兩兩相交於$\overrightarrow{A\Sigma}, \overrightarrow{B\Sigma}, \overrightarrow{C\Sigma}$若是$\overrightarrow{A\Sigma}$與$\overrightarrow{B\Sigma}$爲平行線,則$\overrightarrow{A\Sigma}, \overrightarrow{B\Sigma}, \overrightarrow{C\Sigma}$爲平行線.

§119. **定理65.** 設α, β, γ三平面,兩兩相交於a, b, c.若是a, b爲不交線.則a, b, c爲不交線.

(證明) 設a, b所在之平面爲α; a, b的公垂線爲p.通過直線p作平面δ垂直於a, b的平面α,於是直線a,b垂直於平面δ(§89.14定理54) 所以a, c平面也垂直於平面δ(§89.13定理53).依同樣的道理b,c所在的平面也垂直於平面δ.所以a,c與b, c兩平面的交線c與平面δ垂直(§89.15定理55).直線a, b, c既然都與平面δ垂直,則連結垂足的直線是他們兩兩的公垂線,所以a, b, c爲不交線.

§119.1. 系. 設直線a, b, c, d, e……等都與平面α垂直,則a, b, c, d, e……等爲不交線.

§120. **定義.** 射線不在一個平面上的線束.叫做錐集線.其相交的一點叫做錐集線的頂.錐集線的射線若爲平行線,叫做平行的錐集線;若爲不交線,叫做不交的錐集線.錐集線可以看作由射線及通過射線之平面集合而成,如若作如此看法;則錐集線稱爲錐集

面線.

§121. **定義** 錐集線上對應點的軌跡叫做球面.錐集線的頂叫做球面中心,射線叫做球面射徑.球面的中心若爲無窮遠點,則該球面叫做極大球面或界面,中心若爲意象點,則該球面叫做等距曲面.

§122. **定理66.** 若直線a爲極大球面的射徑,則通過a的平面與極大球面相交的曲線爲極大圓.

(證明) 假設通過直線a的平面爲α,設α與極大球面相交的曲線爲AB,則AB爲射徑上對應點的軌跡,所以AB是極大圓.

§122.1. 系. 凡同心極大球面都可以疊合.

§123. **定理67.** 設α,β兩平面的交線a爲極大球面的射徑,又α及β與極大球面相交的極大圓各爲AB,AC,於是AB與AC所夾之角就是二面角(α,β)的平面角.

(證明) 與極大圓AB,AC相切於A點的兩條切線都與直線a垂直(§116.10系),所以AB與AC所夾之角卽二面角(α,β)的平面角.

§124. **定義.** 由平面β外一點D作$DM\perp\beta$,(§89.16),通過DM作一平面α垂直於平面β(§89.13),與平面β相交於一直線$\overrightarrow{M\Sigma}$.在平面α內,由D點引$\overrightarrow{D\Sigma}\parallel\overrightarrow{M\Sigma}$;於是我們說直線$\overrightarrow{D\Sigma}$與平面$\beta$平行.$\overrightarrow{D\Sigma}$與$\beta$相交於無窮遠處.

由D點作DN垂直於平面$DM\Sigma$,於是我們就說平面$DN\Sigma$與平面β平行.平行的兩平面,相交於無窮遠線上.

§125. **定理68.** 若直線$\overrightarrow{D\Sigma}$與平面β平行,則通過$\overrightarrow{D\Sigma}$祇能作一個平面與β平行.

(證明) 由平面平行於平面的定義,§98.5及§36定理即證明.

§126. **定理69.** 兩個平面同時垂直於一直線,則此兩平面相交於意象線.

(證明) 設α,β兩平面同時垂直於直線AB,於是通過直線AB的平面都與α,β垂直(§89.13定理13),並且與α及β相交的兩條線都因為以AB為公垂線,所以是不交線.所以α與β相交之點都是意象點.所以他們所交的直線是意象線.

§126.1. **定義.** 兩個平面相交,因其交線為實在線,或無窮遠線,或意象線之不同,這兩個平面,叫做相交面,平行面,及不交面.

§126.2. **定義.** 一羣的平面都相交於一直線上,這一羣平面叫做束面.其公共的交線叫做頂線.

束面的頂線若為無窮遠線,則束面為平行束面;其頂線若為意象線,則束面為意象束面.

§127. **定理70** 兩個不交面祇有一條公垂線

(證明) 由§126及§126.1可知兩個不交面α, β可以有一條公垂線但是這樣公垂線衹能有一條;若是有兩條譬如AB, CD,則AB與CD同在一平面內(§89.8定理51).而$ABCD$四邊形四內角之和爲四直角,則與本幾何學矛盾.所以α, β兩平面不能有兩條公垂線,至多衹能有一條.

§127.1. **定理71.** 兩個不交面可以有許多公垂面

(證明) 設AB是α, β兩平面的公垂面,則通過AB可作許多平面.而這許多平面都與α, β垂直,(§89.13定理53).

§128. **定理72.** 倘若直線a與平面α之交點爲意象點,於是垂直於a及α之平面衹有一個.

(證明) 由直線a上面任意一點A至平面α作垂線AM(§89.16定理)於是通過AM及a可作一平面β(§36定理)設β與α相交之直線爲b.於是a, b兩直線都在平面β內,因直線a與平面相交之點爲意象點,所以a與b相交之點爲意象點.因此a與b有一公垂線(§106.8).設此公垂線爲p;通過p作一軸γ垂直於a,於是平面γ也垂直於平面α(§89.13定理53),卽γ爲a及α的公垂面.但是通過p與a垂直的平面衹有一個(§89.4定理及§89.2定理).所以垂直於a與α的平面也衹有一個.

§128.1. **定理73.** 若直線a與平面α相交於意象點,

則通過直線a可作兩個平面與α平行.

(證明) 設β是直線a與平面α的公垂面(§128.1定理72)設公垂面β與a相交之點為A,與α相交之線為BC;於是在公垂面β內由A點引$\overrightarrow{A\Sigma} \parallel \overrightarrow{BC}$,引$\overrightarrow{A\Sigma'} \parallel \overrightarrow{CB}$(平行公理).因為直線$a$與平面$\beta$垂直於$A$點,所以直線$a$與$\overrightarrow{A\Sigma}$, $\overrightarrow{A\Sigma'}$垂直於是直線$a$及直線$\overrightarrow{A\Sigma}$所在之平面與平面$\alpha$平行(§124.2定義2).同樣$a$及$\overrightarrow{A\Sigma'}$所在之平面與平面$\alpha$平行.所以通過直線$a$可作兩個平面與$\alpha$平行.

§**129**. **定理74.** 極大球面上的幾何學是歐几里得的平面幾何學;等距曲面上的幾何學是雙曲線的平面幾何學.

(證明) 我們知道:在歐几里得或雙曲線的平面幾何學上有"點","線","兩點間的距離",及"兩線所夾之角"四種東西;又在錐集面線(通過一點O的錐集面線)上有"射線","射面","兩射線所夾之角",及"二面角"四種東西.現在要是把平面幾何上所有的"公理","定義"及"定理"都按着下面的表來修改,即得錐集面線的幾何學的公理,定義及定理.

平面幾何上的"點"……改為……"射線"(通過頂點O的).

平面幾何上的"直線"……改為……"射面"(通過頂點O的).

平面幾何上的"兩點間距離"……改為……"兩射線所夾之角"

平面幾何上的"兩線所夾之角"……改為……"兩射面所夾之二面角"

平面幾何上的"平行線"……改為……"平行射面".

譬如平面幾何的公理甲$_1$,"若 A, B 為不同的兩點,則通過 A, B 可作一條直線,且祇能作一條".照上面的表改為"若 a, b 為不同的兩射線,則通過 a, b 可作一個射面,且祇能作一個"這就是錐集面線的幾何學的公理.其餘類推.

又如歐几里得的平行公理:"在平面上,通過直線外一點祇能作一條直線與已知直線平行".若是照上面的表來修改卽為"在錐集面線上,通過射面外一射線祇能作一個射面與已知射面平行"這個公理當錐集面線是平行的錐集面線時候是眞的(§125 定理68).依此類推,可知:平行的錐集面線的幾何學就是歐几里得的平面幾何學.現在我們再看極大球面與平行的錐集面線的關係.凡平行的錐集面線上有"射線","射面""兩射線所夾之角",及"二面角"四種東西,則極大球面上就有"點","極大圓""兩點間的極大弧",及"兩個極大圓所夾之角"四種東西相對應.所以極大球面上的幾何學就是平行的錐集面線或歐几里得的幾何學.

當錐集面線的頂是意象頂的時候，則由§128.2定理73得“在錐集面線上通過射面外一射線可作兩個射面與已知射面平行”．所以在意象的錐集面線上的幾何學是雙曲線的平面幾何學．現在再把等距曲面同意象的錐集面線相比較，即得等距曲面上的幾何學是雙曲線的平面幾何學．

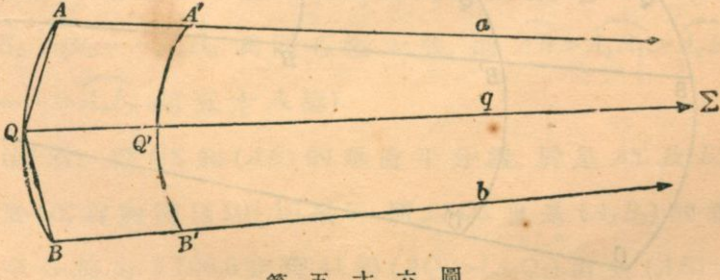
第八章

三角之部

§130. **歐几里得的三角函數.** 係利用相似三角形的關係引導出來，這是因為歐氏幾何學有相似的直線形，可以做三角函數的基礎，現在羅氏幾何學並沒有相似的直線形，他的三角函數自然要用別的方法來求了.羅氏曾用極大圓及極大球面求出他的三角函數來，所以本章就從極大圓講起.

第一節　極大圓之要性

§131. **定理 75.** 假設 AQB 與 $A'Q'B'$ 為同心極大弧.若 Q 與 Q' 各為 $\widehat{AQB}$ 及 $\widehat{A'Q'B'}$ 之中點，則連結 Q,Q' 兩點之直線必定是極大圓的射徑(第五十六圖)



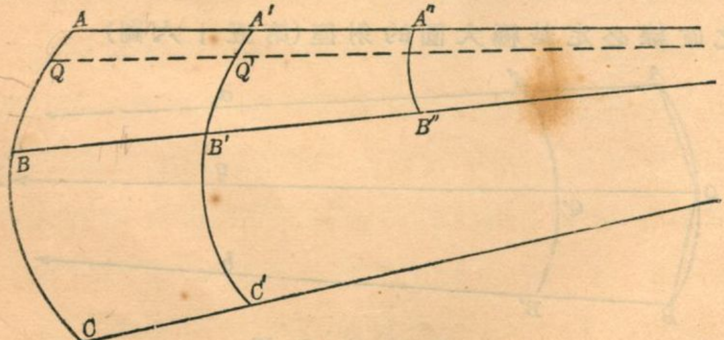
第五十六圖

（證明） 原設 $\widehat{AQ}\equiv\widehat{BQ}$,所以 $(AQ)\equiv(BQ)$,(§ 116.5 系 2).同理 $(A'Q')\equiv(B'Q')$. 於是直線 QQ' 為直線 AA', BB' 的對稱軸,所以 QQ' 必在射徑 $Q\Sigma$ 上面,因此直線 QQ' 為極大圓 AQB 的射徑.

§ 131.1. 系 1. 設 $\widehat{AQB}$ 與 $\widehat{A'Q'B'}$ 為同心極大圓的弧.若射徑 a………p, q,………b 截 $\widehat{AQB}$ 為 n 等分,則 $\widehat{A'Q'B'}$ 也被 a,………p, q………b 截為 n 等分.

§ 132. **定理 76.** 兩個同心極大圓各與其射徑 a, b, c 相交於 A, B, C 及 A', B', C' 各點(第五十七圖).於是 $\widehat{AB}:\widehat{AC}=\widehat{A'B'}:\widehat{A'C'}$.

（證明） 如第五十七圖: 假設 $\widehat{AB}$ 與 $\widehat{AC}$ 為可約量,即 $\widehat{AB}$ 與 $\widehat{AC}$ 有一個公共的單位.譬如 $\widehat{AQ}$ 是他們的公共單位,於是用 $\widehat{AQ}$ 量 $\widehat{AB}$,一定是量得盡的;設 $\widehat{AB}$ 是 $\widehat{AQ}$ 的 m 倍.同理:設 $\widehat{AC}$ 是 $\widehat{AQ}$ 的 n 倍.即 $\widehat{AB}=m\widehat{AQ}$, $\widehat{AC}$ =



第五十七圖

$n\widehat{AQ}$.由此 $\widehat{AB}:\widehat{AC}=m:n$.現在由上面 §131.1 系 1. 可知 $\widehat{A'B'}:\widehat{A'C'}=m:n$,所以 $\widehat{AB}:\widehat{AC}=\widehat{A'B'}:\widehat{A'C'}$. 若 AB 與 AC 為不可約量,可用極限證明,其法與歐氏幾何同.

§ **132.1.**　**系 1.**　$\widehat{AB}:\widehat{BC}=\widehat{A'B'}:\widehat{B'C'}$ (五十七圖)

§ **132.2.**　**系 2.**　$\widehat{AB}:\widehat{A'B'}=\widehat{BC}:\widehat{B'C'}$

§ 133.　**定理 77.** 假設 $\widehat{AB}, \widehat{A'B'}, \widehat{A''B''}$ 是同心的極大弧(第五十七圖). 若 A', B' 各為 (AA'') 及 (BB'') 之中點; 則 $\widehat{A'B'}$ 為 $\widehat{AB}$ 及 $\widehat{A''B''}$ 之比例中項.

即　$$\widehat{AB}:\widehat{A'B'}=\widehat{A'B'}:\widehat{A''B''}.$$

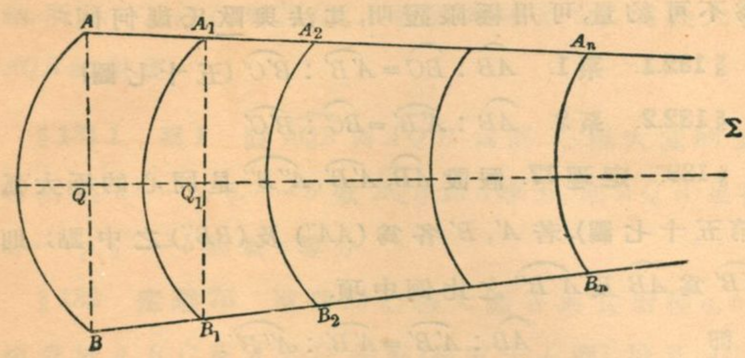
(證明)　如第五十七圖,因為 $\widehat{AB}$ 與 $\widehat{A'B'}$ 彼此相隔是等距離的 (§ 116.8 定理 62), 所以 $(AA')\equiv(BB')$;又因原設 $(AA')\equiv(A'A'')$; 所以 $(A'A'')\equiv(BB')$. 現在若是把 $(A'A'')$ 疊在 (BB') 上面,則 $\widehat{A'B'}$ 落在 $\widehat{BC}$ 上面, $\widehat{A''B''}$ 落在 $\widehat{B'C'}$ 上面, (§ 116.3 定理 61); 於是由上面 § 132.1 系 1 得 $\widehat{AB}:\widehat{A'B'}=\widehat{A'B'}:\widehat{A''B''}$.

§ **134.**　**定理 78.**　設 $A\Sigma, B\Sigma$ 為同頂射線, 若 $\widehat{AB}, \widehat{A_1B_1}, \widehat{A_2B_2}, \widehat{A_3B_3}\cdots\cdots\widehat{A_nB_n}$ 為同心極大弧, 則 $\widehat{AB}>\widehat{A_1B_1}>\widehat{A_2B_2}>\cdots\cdots>\widehat{A_nB_n}$ (第五十八圖).

(證明)　設 $Q\Sigma$ 為 (AB) 的垂直平分線, 於是 $A\Sigma$ 及 $B\Sigma$ 對於 $Q\Sigma$ 為對稱 (§ 101.10 系 3). 所以 $Q\Sigma$ 也是 (A_1B_1) 的垂直平分線,由 § 106.5 定理 41 得 $(AQ)>(A_1Q_1)$. 由是 $(AB)>(A_1B_1)$. 所以 $\widehat{AB}>\widehat{A_1B_1}$ (§ 116.7 系 4). 同理 $\widehat{A_1B_1}>\widehat{A_2B_2}$, $\widehat{A_2B_2}$

$>\widehat{A_3B_3}$.........

$$\therefore \quad \widehat{AB}>\widehat{A_1B_1}>\widehat{A_2B_2}>\cdots\cdots>\widehat{A_nB_n}.$$



第 五 十 八 圖

§ 135. 定理 79. 假設, $A\Sigma$, $B\Sigma$ 是兩條同頂射線; 又設 $\widehat{AB}$, $\widehat{A_1B_1}$, $\widehat{A_2B_2}$ $\widehat{A_3B_3}$,.........$\widehat{A_nB_n}$ 爲同心極大弧,其長各爲 $s, s_1, s_2,\cdots\cdots s_n$. (第五十九圖).

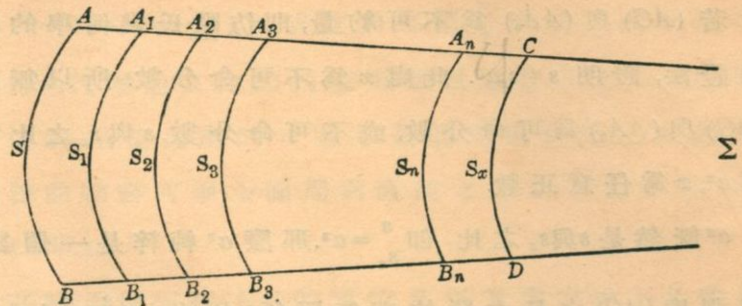
若 $(AA_1)\equiv(A_1A_2)\equiv(A_2A_3)\equiv\cdots\cdots\equiv(A_nB_n)$, 即若 (AA_n) 之長爲 (AA_1) 之長 n 倍, 則 s 與 s_n 之比爲 a^n, 即 $s=s_na^n$. 此處 n 爲正整數. a 爲常數其值大於1.

(證明) 如第五十九圖. 命 s 與 s_1 之比爲 a, 即 $\frac{s}{s_1}=a$, 現在 (AA_1) 之長若是不變, 則 s 與 s_1 之比也不變, 即 a 爲不變之常數. 由 § 134 定理 78 得 $s>s_1$ 即 $\frac{s}{s_1}>1$.

$$\therefore \quad a>1.$$

由原設及 § 133 定理 77 得 $s : s_1 = s_1 : s_2$.

$$\therefore \quad \frac{s}{s_1}=\frac{s_1}{s_2}=a, \text{ 同理 } \frac{s_1}{s_2}=\frac{s_2}{s_3}.$$



第五十九圖

$$\therefore \frac{s}{s_1}=\frac{s_1}{s_2}=\frac{s_2}{s_3}=a.$$

仿此得 $$\frac{s}{s_1}=\frac{s_1}{s_2}=\frac{s_2}{s_3}=\frac{s_3}{s_4}=\cdots\cdots=a$$

由是 $$s=s_1a=s_2a^2=s_3a^3=\cdots\cdots=s_na^n.$$

即 $$s=s_na^n.$$

§136. **定理80.** 若 $\widehat{AB}, \widehat{CD}$ 是在兩條同頂射線之間的極大弧(第五十九圖); 則 $\widehat{AB}$ 與 $\widehat{CD}$ 之比爲 a^x 或 $e^{\frac{x}{k}}$, 此處 a 爲大於一的常數, x 爲任意正數, e 爲納氏對數的底, k 爲常數.

(證明) 如第五十九圖: 在 $A\Sigma$ 上面任意取一點 A_n. 若 (AC) 與 (AA_n) 爲可約量,即 (AC) 與 (AA_n) 有一個公共的單位,設此公共的單位爲 (AA_1),命 $(AA_n)=n(AA_1)$, 又命 $(AC)=x(AA_1)$; 於是 $(A_nC)=(x-n)(AA_1)$. 由 §135 定理 79 得 $s=s_na^n$, $s_n=s_xa^{x-n}$. 由這兩個式子得 $s=s_xa^x$. 此處 x 爲可命分數.

若 (AC) 與 (AA_n) 爲不可約量,則仿歐氏幾何學的極限證法,證明 $s=s_xa^x$. 此處 x 爲不可命分數. 所以無論 (AC) 與 (AA_n) 爲可命分數,或不可命分數. s 與 s_x 之比常爲 a^x, x 爲任意正數.

a^x 既然是 s 與 s_x 之比,即 $\frac{s}{s_x}=a^x$.那麼 a^x 純粹是一個數,與測度 (AC) 之長之單位毫無關係;因此 $\log\frac{s}{s_x}$ 或 $\log a^x$ 或 $x\log a$,仍舊是與長之單位無關係的一個數:所以 $\log a$ 一定是所選長的單位的倒數. 設 $\log a=\frac{1}{k}$, 於是 $\log\frac{s}{s_x}=\frac{x}{k}$, 即 $\frac{s}{s_x}=e^{\frac{x}{k}}$,即 $s=s_xe^{\frac{x}{k}}$.此處的 e 即納氏對數的底, k 爲常數, k 的數值隨長的單位而定.

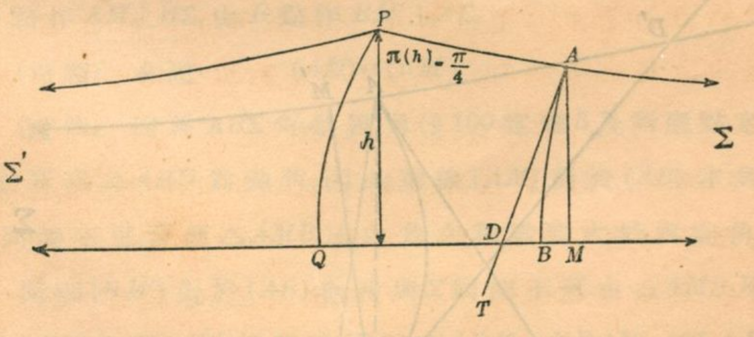
§136.1. **定義.** 上面所說的 k 叫做空間常數(1),他的數值隨所選長的單位而定.要是長的單位沒有確定,他的數值也不能有一定.所以 k 是隨單位變的自由常數(2).

§136.2. **角的單位與長的單位.** 角的測度與平行公理是沒有關係的,所以無論在歐氏羅氏或黎氏幾何學上,兩條相交線所成的四個角之和,總是一定不變的定量.現在要是把他分爲四等分,取其一分來作爲角的單位,即一直角;於是直角就是天然的不變的絕對的單位.(3) 在雙曲線幾何學上,直角也用 $\frac{\pi}{2}$ 代表

(1) Space-constant.　(2) Arbitrary constant.　(3) Absolute unit

他 ($\pi=3.14159\cdots\cdots$),半個直角也用 $\frac{\pi}{4}$ 代表他,兩個直角也用 π 代表他,其他的角依此類推.這是和歐氏幾何學一樣的.但是此處的 π 並不是圓周與直徑之比.因爲在雙曲線幾何學上圓周與直徑之比並不是常數.(參看§135.1).

在歐氏幾何學上.長的單位是任意選定的,不是像角的單位,有一個固定的量可以作爲選擇的標準的.所以在歐氏幾何學是沒有長的絕對單位的.但是在雙曲線幾何學上,就不然了,長的單位也像角一樣的有絕對單位.我們知道:雙曲線幾何學上有一個極大弧 PQ (第六十圖) 其長有一定,即 PQ 之一端 P 點的切線 $\overrightarrow{P\Sigma'}$ 平行於其他一端 Q 點的射線 $\overrightarrow{Q\Sigma'}$.這是雙曲線幾何



第六十圖

學的特點.再由後面§154可知空間常數 $k=\widehat{PQ}$,現在要是拿 $\widehat{PQ}$ 之長作爲長的單位,即 $\widehat{PQ}=k=1$.於是這個式子 $s=s_x e^{\frac{x}{k}}$ 可以寫爲 $s=s_x e^x$.所以上面§136定理80可以

改爲下面一個系.

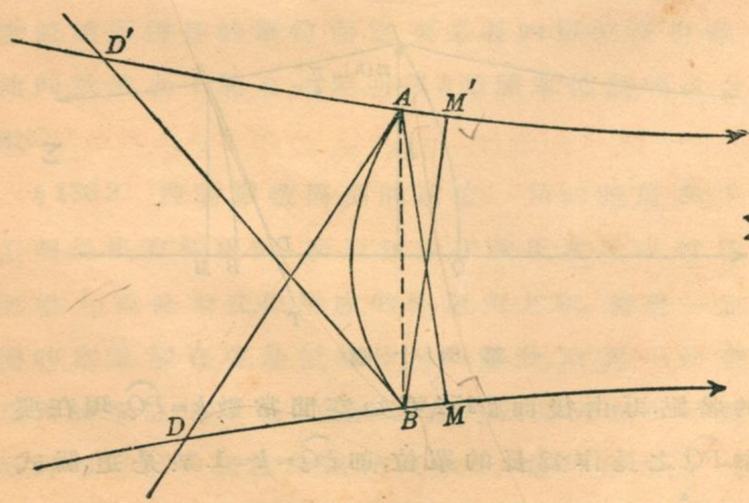
§ 136.3. **系 1** 設 $\widehat{AB}$: $\widehat{CD}$ 是在 $\overrightarrow{A\Sigma}$, $\overrightarrow{B\Sigma}$ 兩射線之間的同心極大弧;

則 $\widehat{AB}:\widehat{CD}=e^x$, 或 $s:s_x=e^x$, 或 $s=s_xe^x$.

§ 136.4. **定義.** 極大弧 PQ 其一端 P 點的切線若是平行於他端 Q 點的射線, 則 $\widehat{PQ}$ 之長有一定. 這樣一定長的極大弧 PQ 叫做標準弧, 常用 S 代表他.

§ 136.5 **定義.** 極大弧 AB 若是短於標準弧 S (第六十圖), 則由 A 點所引之切線 AT 必與 B 點之射徑相交於一點 D. 於是 (AD) 叫做極大弧 AB 的一端 A 切線之長.

§ 137. **定理 81.** 極大弧 AB, 若是短於標準弧 S, 則其兩端切線之長可以疊合.



第六十一圖

(假設)　如第六十一圖：設(AD)爲A點的切線,(BD')爲B點的切線.

(求證)　求證　　$(AD)\equiv(BD')$

(證明)　連結AB,由$\triangle ABD$及$\triangle BAD'$內,因A,B兩點爲對應點,所以$\measuredangle ABD\equiv\measuredangle BAD'$, $\measuredangle AB\Sigma\equiv\measuredangle BA\Sigma$(§ 101.3定義)原設$AD$及$BD'$各爲$A$, B的切線,所以$\measuredangle DA\Sigma\equiv\measuredangle D'B\Sigma$(§ 116.10系及§ 74定理32)由是$\measuredangle DA\Sigma-\measuredangle BA\Sigma=\measuredangle D'B\Sigma-\measuredangle AB\Sigma$,$\measuredangle DAB\equiv\measuredangle D'BA$.$(AB)$爲兩三角形的公邊.

$\therefore$　$(AD)\equiv(BD')$(§ 59定理18)

§ 138.　**定理82.**　設A,B爲極大弧AB的兩端,於是A端離B端射線的距離等於B端離A端射線的距離.

(假設)　設$\widehat{AB}$爲任何長的極大弧,如第六十一圖,由A點作$AM\perp B\Sigma$,由B點作$BM'\perp A\Sigma$,

(求證)　求證　　$(AM)\equiv(BM')$

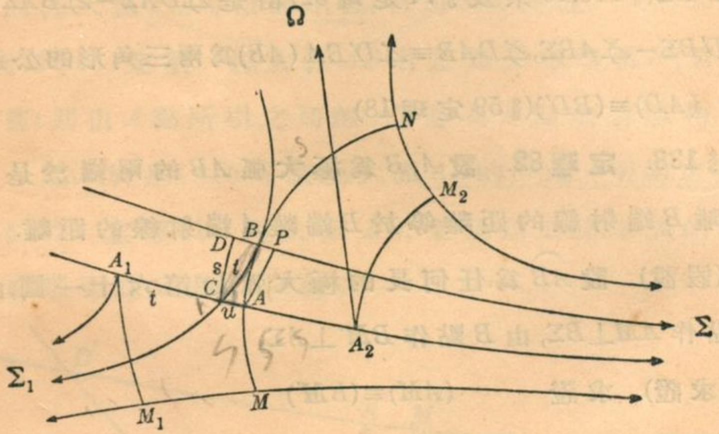
(證明)　因爲$AB\Sigma$角是銳角(§ 100定理5及對應點定義)所以$\measuredangle ABD$爲鈍角,因此垂線(AM)對於(AB)非與Σ同側不可,否則$\triangle AMB$三內角之和就要大於兩直角.

同理(BM')對於(AB)也非與Σ同側不可.由$\triangle AMB$及$\triangle BM'A$內,因(AB)爲公邊,又因$\measuredangle ABM\equiv\measuredangle BAM'$.(因$A,B$爲對應點)$\therefore$ $(AM)\equiv(BM')$(§ 77.1系1).

§ 139.　**定理83.**　設極大弧AB之長爲s,若s短於標準弧S.其一端切線之長爲t,於是s, S,t之關係爲:

$$s=S\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}},\text{即 } s=Stht.$$

(證明) 如第六十二圖：因 $s<S$, 所以 B 點切線 $\overrightarrow{B\Sigma_1}$ 與射線 $\overrightarrow{A\Sigma}$ 相交於一點 C, 於是由原設 $(BC)=t$, $\measuredangle BCA=\pi(t)$, 延長 BA 至 M, 使 $\widehat{BM}=S$; 於是 $\widehat{AM}=S-s$. 通過 M 點作射徑 $\Sigma_1\Sigma$, 因 $\widehat{BM}$ 爲標準弧 (作圖) 所以 B 點的切線 $\overrightarrow{B\Sigma_1}\parallel\overrightarrow{M\Sigma_1}$ (標準弧定義). 現在由 $A\Sigma$ 的反向半線上一點



第六十二圖

A_1 作 $\overrightarrow{A_1\Sigma_1}\parallel\overrightarrow{C\Sigma_1}$. 並且垂直於 $A_1\Sigma$; 於是 $\measuredangle A_1C\Sigma_1=\pi(A_1C)$, 但是 $\measuredangle A_1C\Sigma_1\equiv\measuredangle BCA$(§65 定理 24), $\therefore\ \pi(t)=\pi(A_1C)$, $\therefore (A_1C)=t$. 因爲 $\overrightarrow{A_1\Sigma_1}\parallel\overrightarrow{C\Sigma_1}$ (作圖), 而 $\overrightarrow{C\Sigma_1}\parallel\overrightarrow{M\Sigma_1}$ (作圖), $\therefore$ $\overrightarrow{A_1\Sigma_1}\parallel\overrightarrow{M\Sigma_1}$(§101.7 平行傳遞性), 所以通過 A_1 點所作的極大弧 $\widehat{A_1M_1}=S$. 現在命 $(AC)=u$, 根據 §136.3 系 1 得 $\widehat{A_1M_1}:\widehat{AM}=e^{u+t}$, 即 $\widehat{AM}=\widehat{A_1M_1}e^{-u-t}$.

即 $$S-s=Se^{-u-t}\quad\cdots\cdots(1)$$

現在再把極大弧 AB 延長到 N 點，使 $BN=S$；於是 $\overset{\frown}{AN}=S+s$. 通過 N 點作射徑 $\Omega\Sigma$，因 $\overset{\frown}{BN}$ 爲標準弧，所以 B 點的切線 $\overrightarrow{B\Omega}\parallel\overrightarrow{N\Omega}$. 現在由 $A\Sigma$ 上面一點 A_2 作 $\overrightarrow{A_2\Omega}\equiv\overrightarrow{C\Omega}$，並且垂直於 $A_2\Sigma$，於是 $\measuredangle A_2CB=\pi(A_2C)$. 但是 $\measuredangle A_2CB=\pi(t)$，$\therefore\ \pi(A_2C)=\pi(t)$ $\therefore\ (A_2C)=t$. 因爲 $\overrightarrow{A_2\Omega}\parallel\overrightarrow{C\Omega}$，而 $\overrightarrow{C\Omega}\parallel\overrightarrow{N\Omega}$，$\therefore\ \overrightarrow{A_2\Omega}\parallel\overrightarrow{N\Omega}$，所以通過 A_2 點的極大弧 $\overset{\frown}{A_2M_2}=S$，由此 $\overset{\frown}{AN}:\overset{\frown}{A_2M_2}=e^{t-u}$.

即 $$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{A_2M_2}e^{t-u}，\text{即 } S+s=Se^{t-u} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

若 (1) 與 (2) 相加，則得 $2S=Se^{-u}(e^t+e^{-t})$.

即 $$e^u=\tfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})=cht \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以此值代入 (1) 式，則得 $s=S(1-e^{-u-t})=S\left(1-\dfrac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\right)$,

即 $s=S\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=Stht.$

§ 139.1. **系 1.** u 與 t 之關係爲 $e^u=cht$.

§ 140. **定理 84.** 設極大弧 CD 之長爲 s'，又設其一端 C 至他端之射徑之距離爲 y，於是 s' 與 y 之關係爲 $s'=Sshy$. 此處 S 爲標準弧.

(證明) 如第六十二圖，命 $\overset{\frown}{CD}=s'$，由 C 點作 $(CB)\perp B\Sigma$，於是 $(CB)=y$，通過 B 點作極大弧 BA，於是 $\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{AB}=e^u$ (§ 136.3 系 1).

即 $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}e^u$. 但是 $\overset{\frown}{AB}=Sthy$ (§ 139 定理 83)

$$\therefore\ \overset{\frown}{CD}=Sthy.\ \text{原設}\ \overset{\frown}{CD}=s',$$

$$\therefore\quad s'=Sthy.$$

§ 140.1. 系 1. 假設有極大弧 AB, 其長爲 s. 又設其一端 B 點切線之長爲 $(BC)=t$, 他端 A 至射徑 $B\Sigma$ 之垂線 $(AP)=y$, 如第六十二圖.

於是 s 與 t 之關係爲 $s=Stht$.

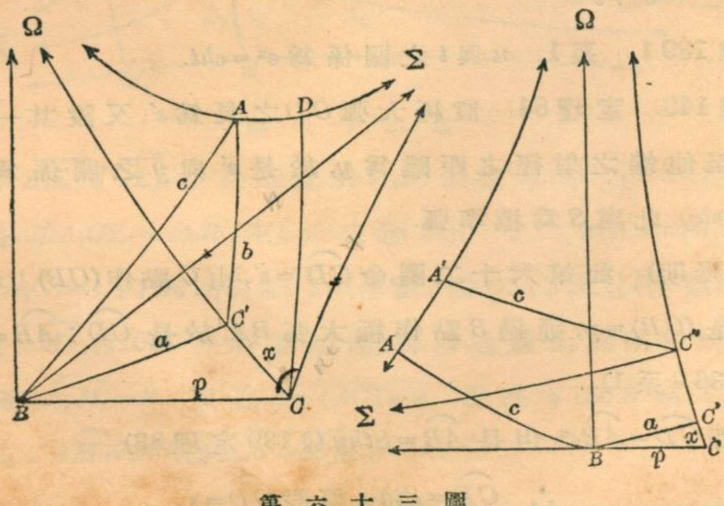
又 s 與 y 之關係爲 $s=Sshy$.

此處標準弧 S 爲有一定長的定量.

第二節　角與線段之關係

§ 141. 定理 85. 若 p 爲某線段之長, 則某線段就有一個相應的平行角 $\pi(p)$. 這個平行角與 p 的關係如下式: $tg\frac{1}{2}\pi(p)=e^{-p}$.

(證明) 如第六十三圖甲, 假設 $\overrightarrow{B\Sigma}, \overrightarrow{C\Sigma}$ 是兩條平行



第六十三圖

線由$B\Sigma$上面任意取一點B至$C\Sigma$作$BC\perp C\Sigma$; 於是卽得$\triangle BC\Sigma$. 命$(BC)=p$. 在B點作$B\Omega$垂直於平面$BC\Sigma$(§ 89.5 定理48).

由C點作$C\Omega \parallel\!\!\parallel B\Omega$, 又作$\Sigma\Omega$平行於$\overrightarrow{B\Omega}$, 及$\overrightarrow{B\Sigma}$ (§ 110 平行線之作法). 現在 $\because\ \overrightarrow{B\Omega} \parallel\!\!\parallel \overrightarrow{C\Omega},\ \overrightarrow{\Sigma\Omega} \parallel\!\!\parallel \overrightarrow{B\Omega}$, 所以 $\overrightarrow{\Sigma\Omega} \parallel\!\!\parallel \overrightarrow{C\Omega}$ (§ 118 定理64).

以Ω爲中心, 通過B點作極大球面交$C\Omega$於C'點, 交$\Omega\Sigma$於A點.

設 $(CC')=x,\ \widehat{AC'}=b,\ \widehat{AB}=c,\ \widehat{BC'}=a.$

因$B\Omega$垂直於平面$BC\Sigma$(作圖); 所以$B\Omega\perp BC, B\Omega\perp B\Sigma$ (§ 89 定義1) 所以$BC, B\Sigma$各爲極大弧$\widehat{BC'}$及$\widehat{BA}$之切線 (§ 116.11 系2).

$\therefore\ \measuredangle ABC'=\measuredangle\Sigma BC$. 由上面作圖及平行角定義得$\measuredangle\Sigma BC=\pi(BC)=\pi(p)\ \therefore\ \measuredangle ABC'=\pi(p)$. 因$B\Omega\perp$平面$BC\Sigma$, 而$BC\perp C\Sigma$(作圖); 所以$C\Sigma\perp$平面$BC\Omega$(§ 89.6 定理49). 因此通過$C\Sigma$的平面$C\Sigma\Omega$垂直於平面$BC\Omega$ (§ 89.13 定理53). 卽$C\Sigma\Omega$及$BC\Omega$兩平面互相垂直.

所以$\measuredangle AC'B=\dfrac{\pi}{2}$. 又因爲在極大球面上的幾何學是歐派的平面幾何學.(§ 129 定理74); 所以$\measuredangle A=\dfrac{\pi}{2}-\measuredangle B=\dfrac{\pi}{2}-\pi(p)$. 由此在直角三角形$ABC'$內得

$c^2-a^2=b^2, \cos\measuredangle B=\dfrac{a}{c}.$

$$\therefore \quad tg\frac{1}{2}\measuredangle B=\sqrt{\frac{1-\cos\measuredangle B}{1+\cos\measuredangle B}}=\sqrt{\frac{1-\frac{a}{c}}{1+\frac{a}{c}}}=\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{(c+a)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{b^2}{(c+a)^2}}=\frac{b}{a+c}.$$

即 $$tg\frac{1}{2}\pi(p)=\frac{b}{a+c} \quad \cdots\cdots(1)$$

現在以Ω為中心通過c點作CD極大弧, 命$(CC')=x$; 於是$CD=be^x$(§ 136. 3系1)因為$C\Sigma$垂直於平面$BC\Omega$; 所以$C\Sigma\perp C\Omega$(§ 89.3 定義1).因此$C\Sigma$與$\overset{\frown}{CD}$相切於C點(§ 116. 11系2). 又因$C\Sigma$平行於$D\Sigma$; 所以$\overset{\frown}{CD}$為標準弧(標準弧定義).

依同理$B\Omega\perp$平面$BC\Sigma$(作圖). 因此$B\Sigma\perp B\Omega$; 所以$B\Sigma$與$\overset{\frown}{AB}$相切於B點, 由作圖$\overrightarrow{B\Sigma}\parallel\overrightarrow{A\Sigma}$; 所以$\overset{\frown}{AB}$為標準弧. 由此$\overset{\frown}{AB}\equiv\overset{\frown}{CD}$

$$\therefore \quad c=be^x, \text{即} \frac{c}{b}=e^x \quad \cdots\cdots(2)$$

現在使平面$B\Sigma\Omega$繞$B\Omega$轉到$BC\Omega$平面上,如第六十三圖乙.在銳角$BC\Omega$之一邊$C\Omega$上面作$C''\Sigma$平行於其他一邊$C\Sigma$ (§110 平行線作法II'); 於是$\measuredangle BCC''=\pi(CC'')$, 但$\measuredangle BCC''=\pi(p)$.

$$\therefore \quad \pi(CC'')=\pi(p), \qquad \therefore (CC'')=p, \qquad \therefore (C'C'')=p-x.$$

以Ω為中心通過C''作極大弧$C''A'$; 於是$C''A'$為標準弧, 所以$(A'C'')=c$. 由是$\overset{\frown}{ABC'}=\overset{\frown}{A'C''}e^{p-x}$. 即 $a+c=ce^{p-x}$

(§ 136.3 系 1).

即 $$\frac{a+c}{c}=e^{p-x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以 (2) 與 (3) 相乘, 即得 $\frac{a+c}{b}=e^{p}$, 即 $e^{-p}=\frac{b}{a+c}$.

以 $\frac{b}{a+c}$ 之值代入 (1) 式, 則得 $tg\,\frac{1}{2}\pi(p)=e^{-p}$.

§ 141.1. 系. 平行距離 p 與平行角 $\pi(p)$ 之關係, 也可以用雙曲線函數表示出來,

即: 1.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots shp=\cot\pi(p)$

2.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots chp=\csc\pi(p)$

3.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots thp=\cos\pi(p)$

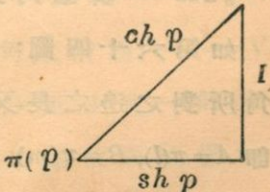
4.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \cot hp=\sec\pi(p)$

5.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \sec hp=\sin\pi(p)$

6.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \csc hp=tg\,\pi(p)$

(證明) $$shp=\frac{e^{p}-e^{-p}}{2}=\frac{1-e^{-2p}}{2e^{-p}}=\frac{1-tg^{2}\frac{1}{2}\pi(p)}{2tg\frac{1}{2}\pi(p)}=\cot\pi(p)$$

餘類推. 上面六個公式很不好記憶, 但是後面却又要用他. 現在爲方便起見, 畫出一個三角形來, 祇要記住這個三角形, 把他看作是歐派的直角三角形, 用歐派的三角函數定義寫出即得上面六個公式



第六十三圖

§ 142. 定理 86. 設 x 與 x' 互爲餘線段, 則 x 與 x' 之關

係爲 $shx\,shx'=1$, 或 $chx\,thx'=1$

(證明) x 與 x' 互爲餘線段. 所以 $\pi(x)+\pi(x')=\frac{\pi}{2}$ (餘線段定義). 由 § 141.1 系第一公式得

$$shx=\cot\pi(x)=\cot\left\{\frac{\pi}{2}-\pi(x')\right\}=tg\pi(x')$$

但是由第六公式得 $tg\pi(x')=\operatorname{csch}x'=\frac{1}{shx'}$

$$\therefore\quad shx=\frac{1}{shx'},\ \text{即}\ shx\,shx'=1$$

由第二公式得

$$chx=\csc\pi(x)=\sec\pi(x')=\frac{1}{\cos\pi(x')}.$$

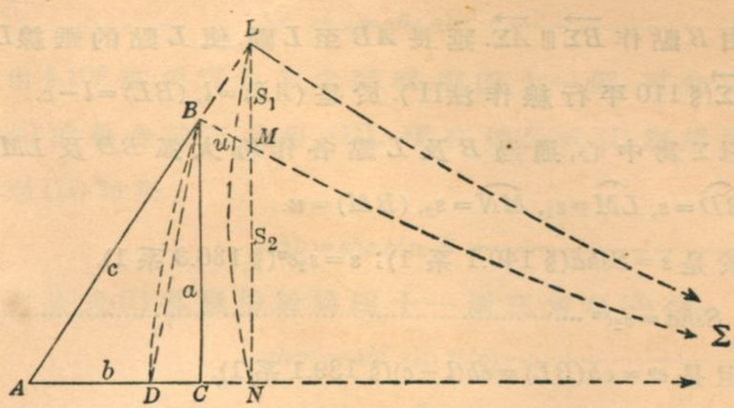
但是由第三公式 $\cos\pi(x')=thx'$.

$$\therefore\quad chx=\frac{1}{thx'},\ \text{即}\ chx\,thx'=1.$$

第三節 三角公式

§ 143——解直角三角形的公式.

如第六十四圖: 設 ABC 爲直角三角形; a, b, c 爲各角所對之邊之長. 又設與銳角 A, B 相應的線段爲 l, m. 即 $A=\pi(l)$, $B=\pi(m)$. 於是一個直角三角形就有 a, b, c 及 A, B 或 l, m 五部分. 這五部分中若有兩部分知道則其他三部分可以用下面十個公式算出.



第六十四圖

$sha\ =shc\sin A$ ……………………………………………(I)

$shb\ =shc\sin B$ (斜邊,銳角,及其所對之邊) …………(I′)

$chc\ =\cot A\cot B$ (斜邊及兩銳角)………………………(II)

$sha\ =thb\cot B$ ……………………………………………(III)

$shb\ =tha\cot A$ (兩邊及一銳角) …………………………(III′)

$chc\ =cha\, chb$ (三邊) ……………………………………(IV)

$\cos A=cha\sin B$……………………………………………(V)

$\cos B=chb\sin A$ (兩個銳角及一銳角所對之邊)….(V′)

$thb\ =thc\cos A$ ……………………………………………(VI)

$tha\ =thc\cos B$ (銳角及夾此銳角之兩邊)…………(VI′)

在歐派幾何學上已知的兩部分至少有一部分是邊;但是在非歐派幾何學上並沒有這個限制,譬如公式(II)知道A, B兩角,斜邊c就可以算出來,現在把上面十個公式分別證明於下:

由 B 點作 $\overrightarrow{B\Sigma} ||| \overrightarrow{A\Sigma}$. 延長 AB 至 L 點, 使 L 點的垂線 $\overrightarrow{L\Sigma}$, $||| \overrightarrow{A\Sigma}$ (§ 110 平行線作法II'). 於是 $(AL)=l$, $(BL)=l-c$.

以 Σ 為中心, 通過 B 及 L 點各作極大弧 BD 及 LMN. 設 $\widehat{BD}=s$, $\widehat{LM}=s_1$, $\widehat{MN}=s_2$, $(BM)=u$.

於是 $s=Ssha$ (§ 140.1 系 1); $s=s_2e^u$ (§ 136.3 系 1).

$\therefore \quad Ssha=s_2c^u$ ……………………………………(1)

但是 $e^u=ch(BL)=ch(l-c)$ (§ 139.1 系 1),

即 $\quad e^u=ch(l-c)$ ……………………………………(2)

又 $\quad s_1+s_2=Sthl$ (§ 139 定理 83).

$s_1=Sth(BL)=Sth(l-c)$ (§ 139 定理 83).

$\therefore \quad s_2=Sthl-s_1=Sthl-Sth(l-c)$.

即 $\quad s_2=S\{thl-th(l-c)\}$ ……………………………………(3)

以 (2) 及 (3) 之值代入 (1) 式得

$$Ssha=S\{thl-th(l-c)\}ch(l-c).$$

即

$$sha=\{thl-th(l-c)\}ch(l-c)$$

$$=\left(\frac{shl}{chl}-\frac{sh(l-c)}{ch(l-c)}\right)ch(l-c)$$

$$=\frac{shlch(l-c)-sh(l-c)chl}{chl}$$

$$=\frac{shc}{chl}.$$

即

$$sha=shc\cdot sechl.$$

但是 $\quad sechl=\sin\pi(l)=\sin A$ (§ 141.1 系)

$$\therefore\ sha = shc \sin A \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

由§108直角三角形之循環，第四十一圖，可知三角形(I)能疊合於三角形(II). 現在把公式(I)應用於三角形(II)卽得.

$$shb = shc \sin B \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I}')$$

把公式(I)再應用於第四十一圖三角形(3)得.

$$shm' = shl \sin \pi(c) \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

但是 $shm' = \frac{1}{shm} = \frac{1}{\cot \pi(m)} = \frac{1}{\cot B}$ (§142定理86及§141.1系).

$$shl = \cot \pi(l) = \cot A \ (\S\ 141.1\ 系)$$

$$\sin \pi(c) = sechc = \frac{1}{chc} (\S\ 141.1\ 系)$$

將上面各值代入(4)式卽得

$$\frac{1}{\cot B} = \cot A \cdot \frac{1}{chc}$$

卽 $$chc = \cot A \cot B \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

把公式(II)應用於第四十一圖三角形(5)得

$$cha' = \cot \pi(l) \cot \pi(b') = \cot A tg\, \pi(b) \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

但是 $$cha' = \frac{1}{tha} (\S\ 142\ 定理86)$$

又 $$tg\, \pi(b) = \mathrm{csch} b = \frac{1}{shb} (\S\ 141.1\ 系)$$

所以(5)式變爲 $$\frac{1}{tha} = \cot A \frac{1}{shb}$$

即 $$shb = tha \cot A \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III}')$$

與公式(III′)同理得 $$sha = thb \cot B \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

由公式 (II) $$chc = \cot A \cot B \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

但是由公式(III′)及(III), $\cot A = \dfrac{shb}{tha} = \dfrac{cha\,shb}{sha}$,

$\cot B = \dfrac{sha}{thb} = \dfrac{chb\,sha}{shb}$, 所以(6)變爲

$$chc = \frac{cha\,shb}{sha} \times \frac{chb\,sha}{shb} = cha\,chb$$

即 $$chc = cha\,chb \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

由(I)及(I′)得 $$\frac{sha}{\sin A} = \frac{shb}{\sin B} \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

由(III′)得 $shb = \dfrac{sha}{cha} \times \dfrac{\cos A}{\sin A}$, 即 $\dfrac{sha}{\sin A} = \dfrac{shb\,cha}{\cos A}$

$$\therefore \quad \frac{shb}{\sin B} = \frac{shb\,cha}{\cos A} \text{ 即 } \frac{1}{\sin B} = \frac{cha}{\cos A}$$

即 $$\cos A = cha \sin B \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

與求(II′)同理得

$$\cos B = chb \sin A \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{V}')$$

由(II)得 $$chc = \cot A \cot B = \frac{\cos A}{\sin A} \cdot \cot B \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

但是由(I) $\dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{shc}{sha}$, 由(III′) $\cot B = \dfrac{sha}{thb}$

所以(8)式成爲 $chc = \cos A \cdot \dfrac{shc}{sha} \times \dfrac{sha}{thb}$

即 $$chc = \frac{shc}{thb} \cos A$$

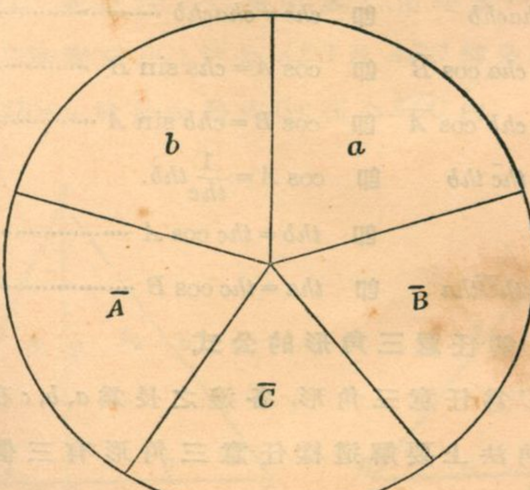
即 $$thb = thc \cos A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(VI)}$$

與求(II′)同理得

$$tha = thc \cos B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(VI′)}$$

§143.1. **注意.** 上面十個公式每一個都含有三角形五部分中的任意三部分，很像歐派的球面三角一樣.在歐派的球面上，照納氏[1]的規則，把 $a, b, \overline{A}, \overline{C}, \overline{B}$ 五部分按着次序排列起來如第六十五圖，再應用這個公式：sin (中部) = cos (左對部). cos (右對部)

= tg (左鄰部) tg (右鄰部).



第六十五圖

就可以把直角弧三角形的十個公式寫出來.現在

1. Napiear's rules 參看球面三角法

我們的十個公式也可以照納氏的規則寫出來，不過稍有不同的就是遇着邊要寫雙曲線函數.

並且 $ch\bar{c}=shc$,……$\cos\bar{A}=\sin A$ $tg\bar{A}=\cot A$,……

現在照這個規則求出上面十個公式來:

$sha=\cos\bar{A}ch\bar{c}$ 卽 $sha=\sin A shc$ ……(I)

$shb=ch\bar{c}\cos\bar{B}$ 卽 $shb=shc\sin B$ ……(I′)

$sh\bar{c}=tg\bar{A}tg\bar{B}$ 卽 $chc=\cot A\cot B$……(II)

$sha=thbtg\bar{B}$ 卽 $sha=thb\cot B$……(III)

$shb=thatg\bar{A}$ 卽 $shb=tha\cot A$……(III′)

$sh\bar{c}=chachb$ 卽 $chc=chachb$ ……(IV)

$\sin\bar{A}=cha\cos\bar{B}$ 卽 $\cos A=cha\sin B$ ……(V)

$\sin\bar{B}=chb\cos\bar{A}$ 卽 $\cos B=chb\sin A$ ……(V′)

$\sin\bar{A}=th\bar{c}\,thb$ 卽 $\cos A=\frac{1}{thc}thb.$

卽 $thb=thc\cos A$ ……(VI)

$\sin\bar{B}=th\bar{C}tha$ 卽 $tha=thc\cos B$ ……(VI′)

§144. 解任意三角形的公式

設 ABC 爲任意三角形，各邊之長爲 a, b, c 在歐派的球面三角法上要解這樣任意三角形有三個基本定律:

(I) 正弦定律卽 $\dfrac{\sin a}{\sin A}=\dfrac{\sin b}{\sin B}=\dfrac{\sin c}{\sin C}$

(II) 邊的餘弦定律，卽

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

(III)　角的餘弦定律,即

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a.$$

現在,在雙曲線幾何學的平面三角法上,要解一個任意三角形,也有相似的三個基本定律:即.

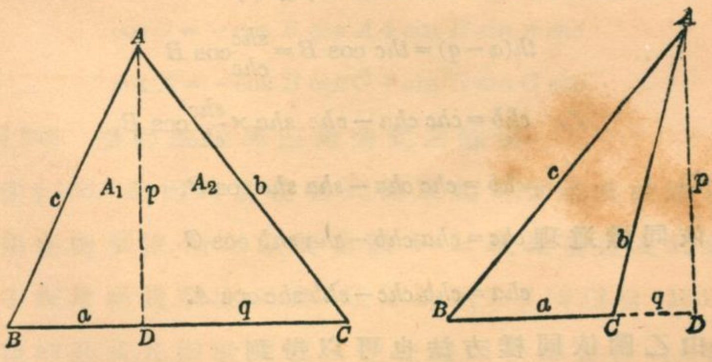
(I)　$\dfrac{sha}{\sin A} = \dfrac{shb}{\sin B} = \dfrac{shc}{\sin C}.$

(II)　$cha = chb\, chc - shb\, shc\cos A$

(III)　$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\, cha.$

這三個定律證明如下:

(證明I)　如第六十六圖甲,或乙,由任意一角點 A 至 BC 作 AD 垂直於 BC; 於是 ADB 及 ADC 都是直角三角形. 設 $(AD) = p$, 於是由公式(I), 在 $\triangle ADC$ 內,



第六十六圖

得　　$shp = shb\sin C;$

又在 $\triangle ADB$ 內,得 $shp = shc\sin B;$

$$\therefore \quad shb \sin C = sh\, c \sin B, \text{ 即 } \frac{sh\, b}{\sin B} = \frac{shb}{\sin C}$$

依同樣的道理,由C點至AB作垂線,得

由是 $$\frac{sha}{\sin A} = \frac{shb}{\sin B}, \quad \frac{sha}{\sin A} = \frac{shb}{\sin B} = \frac{shc}{\sin C}.$$

(證明II) 如第六十六圖甲,設$(DC) = q$應用公式(IV)於$\triangle ADC$,得$chb = chpchq$.

但是由$\triangle ADB$得 $chp = \dfrac{chc}{ch(a-q)}$,

$$\therefore \quad chb = \frac{chc}{ch(a-q)} \times chq = \frac{chcch\{a-(a-q)\}}{ch(a-q)}$$

$$= \frac{chc[chach(a-q) - shash(a-q)]}{ch(a-q)}$$

$$= chc\, cha - chc\, sha\, th(a-q);$$

但是應用公式VI於$\triangle ADB$,即得

$$th(a-q) = thc \cos B = \frac{shc}{chc} \cos B$$

$$\therefore \quad chb = chc\, cha - chc\, sha \times \frac{shc}{chc} \cos B,$$

即 $$chb = chc\, cha - sha\, shc \cos B.$$

依同樣道理 $$chc = cha\, chb - sha\, shb \cos C$$

$$cha = chb\, chc - shb\, shc \cos A.$$

由乙圖依同樣方法也可以得到

$$cha = chb\, chc - shb\, shc \cos A.$$

(證明III) 應用公式V於三角形ADB,即得

$$\cos B = chp \sin A_1 = chp \sin (A - A_2)$$

即 $\cos B=\sin A chp\cos A_2-\cos A chp\sin A_2$ ....(1)

但是由 $\triangle ADC$, $\cos C=chp\sin A_2$ ....(2)

即 $chp=\dfrac{\cos C}{\sin A_2}$ 即 $chp\cos A_2=\dfrac{\cos C}{\sin A_2}\cos A_2$

即 $chp\cos A_2=\cos C\cot A_2$

但是 $\cot A_2=\dfrac{chb}{\cot C}$ (公式 II)

$$\therefore\quad chp\cos A_2=\cos C\frac{chb}{\cot C}.$$

即 $chp\cos A_2=\sin C chb$ ....(3)

現在把(3)及(2)代入(1)式內,得

$$\cos B=\sin A\sin C chb-\cos A\cos C$$

即 $\cos B=-\cos A\cos C+\sin A\sin C\, chb$

依同理得

$$\cos C=-\cos B\cos A+\sin B\sin A\, chc$$

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\, cha$$

§145. 長的單位與三角公式之關係.

從§136.3起,因爲要使公式簡單起見,曾將長的單位採用絕對單位,所以空間常數 $k=1$. 現在要是長的單位不採用絕對單位,那麽 k 就不等於1了.所以自§136.3以後的公式,凡指數函數及雙曲線函數都要含有 k,即 e^p, sh^p, ch^p, th^p 等應當改爲 $e^{\frac{p}{k}}$, $sh^{\frac{p}{k}}$, $ch^{\frac{p}{k}}$, $th^{\frac{p}{k}}$. 譬如§141定理85的公式 $tg\frac{1}{2}\pi(p)=e^{-p}$ 應當寫爲 $tg\frac{1}{2}\pi(p)=e^{-\frac{p}{k}}$

又直角三角形的公式應當寫爲.

$$sh\frac{a}{k}=sh\frac{c}{k}\sin A \cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$sh\frac{b}{k}=sh\frac{c}{k}\sin B \cdots\cdots(\mathrm{I}')$$

$$ch\frac{c}{k}=\cot A\cot B \cdots\cdots(\mathrm{II})$$

$$sh\frac{a}{k}=th\frac{b}{k}\cot B \cdots\cdots(\mathrm{III})$$

$$sh\frac{b}{k}=th\frac{a}{k}\cot A \cdots\cdots(\mathrm{III}')$$

$$ch\frac{c}{k}=ch\frac{a}{k}ch\frac{b}{k} \cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

$$\cos A=ch\frac{a}{k}\sin B \cdots\cdots(\mathrm{V})$$

$$\cos B=ch\frac{b}{k}\sin A \cdots\cdots(\mathrm{V}')$$

$$th\frac{b}{k}=th\frac{c}{k}\cos A \cdots\cdots(\mathrm{VI})$$

$$th\frac{a}{k}=th\frac{c}{k}\cos B \cdots\cdots(\mathrm{VI}')$$

又任意三角形的三個定律應當寫爲.

第一定律 $$\frac{sh\frac{a}{k}}{\sin A}=\frac{sh\frac{b}{k}}{\sin B}=\frac{sh\frac{c}{k}}{\sin C}$$

第二定律 $$ch\frac{a}{k}=ch\frac{b}{k}ch\frac{c}{k}-sh\frac{b}{k}sh\frac{c}{k}\cos A$$

$$ch\frac{b}{k}=ch\frac{a}{k}ch\frac{c}{k}-sh\frac{a}{k}sh\frac{c}{k}\cos B$$

$$ch\frac{c}{k}=ch\frac{a}{k}ch\frac{b}{k}-sh\frac{a}{k}sh\frac{b}{k}\cos C$$

第三定律　$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C ch\frac{a}{k}$

$$\cos B=-\cos A\cos C+\sin A\sin C ch\frac{b}{k}$$

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B ch\frac{c}{k}$$

§ 146. **雙曲線幾何學與歐派幾何學之關係.**

上面所說的空間常數k,在歐派與非歐派幾何學上是很重要的,現在若是命k為無窮大,則雙曲線幾何學就變為歐派幾何學. 譬如直角三角形的十個公式,若命k為無窮大,就變為歐派三角形的公式即

$$\sin A=\frac{sh\frac{a}{k}}{sh\frac{c}{k}}=\frac{\frac{a}{k}+\frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{a}{k}\right)^3+\frac{1}{\lfloor 5}\left(\frac{a}{k}\right)^5+\cdots\cdots}{\frac{c}{k}+\frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{c}{k}\right)^3+\frac{1}{\lfloor 5}\left(\frac{c}{k}\right)^5+\cdots\cdots}$$

$$=\frac{a+\frac{1}{\lfloor 3}\frac{a^3}{k^2}+\frac{1}{\lfloor 5}\frac{a^5}{k^4}+\cdots\cdots}{c+\frac{1}{\lfloor 3}\frac{c^3}{k^2}+\frac{1}{\lfloor 5}\frac{c^5}{k^4}+\cdots\cdots}$$ 若k為無窮大,則

$$\sin A=\frac{a}{c},$$

同理　公式(I′)變為 $\sin B=\frac{b}{c}$

公式(II)變為 $\cot A\cot B=1$

公式(III)變為 $\cot B=\frac{a}{b}$

$$\cot A=\frac{b}{a}$$

公式(IV)變為 $c^2=a^2+b^2$

公式(V)變為 $\cos A=\sin B$

公式(V′)變為 $\cos B=\sin A$

公式(VI)變為 $\cos A=\frac{b}{c}$

公式(VI′)變為 $\cos B=\frac{a}{c}$

第一定律變為 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

第二定律變為 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

第三定律變為 $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C$

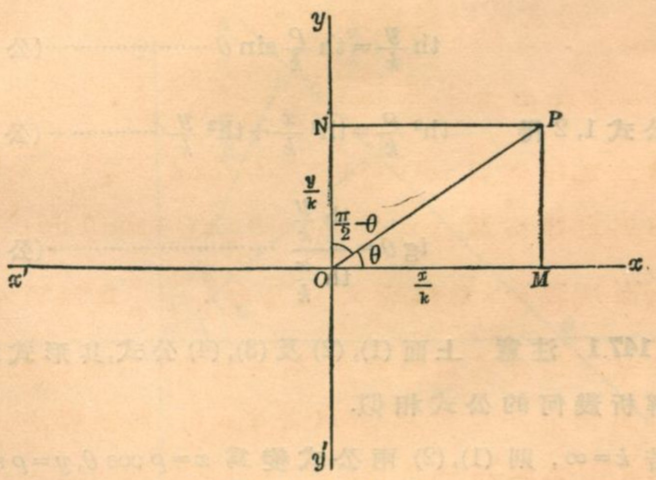
上面所說命k為無窮大,就是命$\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$為無窮小;但是要這三個分式為無窮小,不一定要$k$為無窮大,祇要$a, b, c$為無窮小也可以.所以若是$a, b, c$為無窮小,則三角形$ABC$為歐派三角形.

由此可知雙曲線幾何學上無窮小的圖.就是歐派幾何學的圖,而歐派的空間,就是雙曲線空間的無窮小部分.凡雙曲線空間的無窮小幾何學,就是歐氏幾何學.

第 九 章

解 析 之 部

§147. 極坐標系與直角坐標之關係. 這兩種坐標系的關係很和歐氏幾何相似,現在求其關係於下:如第六十七圖,設 $x'x$, $y'y$ 為直角坐標系的兩軸.設 P 為平



第 六 十 七 圖

面上任意一點.由 P 點至 x 軸及 y 軸上各作一垂線 PM, PN. 連結 OP 命

$$(OP)=\frac{\rho}{k},\ \measuredangle MOP=\theta;$$

$$(OM)=\frac{x}{k},\ (ON)=\frac{y}{k},$$

此處 k 爲空間常數,其值隨長之單位而定.(§136 及 §136.1) 於是 P 點的極坐標爲 $\left(\frac{\rho}{k},\theta\right)$;$P$ 點的直角坐標爲 $\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\right)$.

現在由直角三角形 OMP 及 ONP 得極坐標系與直角坐標系之關係公式如下:

$$\operatorname{th}\frac{x}{k}=\operatorname{th}\frac{\rho}{k}\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }1)$$

$$\operatorname{th}\frac{y}{k}=\operatorname{th}\frac{\rho}{k}\sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }2)$$

由公式 1, 2 得 $$\operatorname{th}^2\frac{\rho}{k}=\operatorname{th}^2\frac{x}{k}+\operatorname{th}^2\frac{y}{k} \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }3)$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\operatorname{th}\frac{y}{k}}{\operatorname{th}\frac{x}{k}} \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }4)$$

§147.1 注意 上面 (1), (2) 及 (3), (4) 公式,其形式和歐氏解析幾何的公式相似.

若 $k=\infty$, 則 (1), (2) 兩公式變爲 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$. (3) 及 (4) 兩公式變爲 $\rho^2=x^2+y^2$, $\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$ 這就是歐氏解析幾何的公式:所以祇要對於歐氏解析幾何的公式很熟,這裏公式也很容易記憶.

§148. 通過原點的直線方程式 通過原點的直線方程式,若用極坐標系,其方程式爲: $\theta=a$, 此處 a 爲常

數.若用直角坐標系,其方程式爲:

$$\operatorname{th}\frac{y}{k}=\operatorname{tg}\theta\operatorname{th}\frac{x}{k}\ (\S\,147,\text{公式}\ 4)$$

設 $\operatorname{tg}\theta=m$, 則

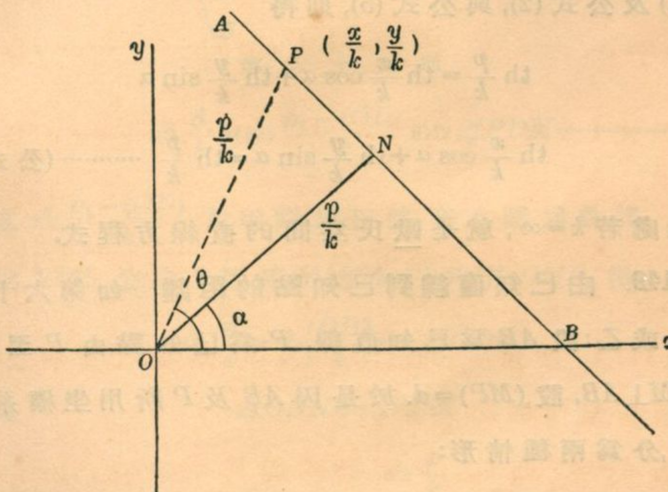
$$\operatorname{th}\frac{y}{k}=m\operatorname{th}\frac{x}{k}.$$

此式的 k 若爲 ∞, 則變爲

$$y=mx,$$

這就是歐氏幾何上的一直線通過原點的方程式.

§ 148 1　極坐標系的直線方程式. 如第六十九圖,



第六十八圖

設 AB 爲任意一直線,由原點 O 至 AB 作一垂線 ON, 設

$$(ON)=\frac{p}{k},\ \measuredangle NOB=\alpha$$

若 $\frac{p}{k}$ 及 α 爲已知數,則直線 AB 之位置就有一定.現

在由 AB 上面任意取一點 P, 設 P 的坐標為 $\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)$, $\measuredangle POB=\theta$, 於是應用 §145 公式 VI 於直角三角形 ONP 得:

$$\operatorname{th}\frac{p}{k}=\operatorname{th}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha)\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }5)$$

此處 α, 及 $\frac{p}{k}$ 為已知數, $\left(\frac{\rho}{k}, \theta\right)$ 為 p 點的極坐標;所以公式(5)是直線 AB 的極坐標系的方程式.

§148.2 **直角坐標系的直線方程式.** 應用 §147 公式(1)及公式(2), 與公式(5), 則得

$$\operatorname{th}\frac{p}{k}=\operatorname{th}\frac{x}{k}\cos\alpha+\operatorname{th}\frac{y}{k}\sin\alpha$$

即

$$\operatorname{th}\frac{x}{k}\cos\alpha+\operatorname{th}\frac{y}{k}\sin\alpha=\operatorname{th}\frac{p}{k}\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }6)$$

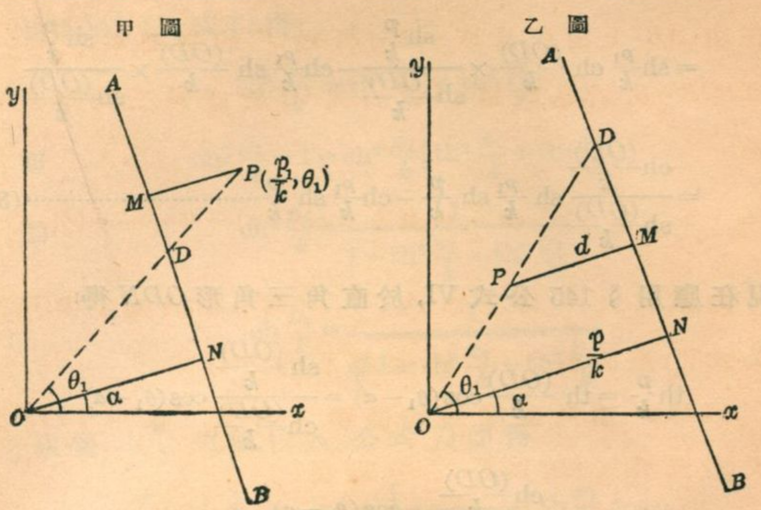
此處若 $k=\infty$, 就是歐氏空間的直線方程式.

§149. **由已知直線到已知點的距離.** 如第六十九圖,甲或乙:設 AB 為已知直線, P 為已知點.由 P 至 AB 作 $PM\perp AB$, 設 $(MP)=d$. 於是因 AB 及 P 所用坐標系之不同,分為兩種情形:

I. **極坐標系.** 若 AB 之方程式為: $\operatorname{th}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha)=\operatorname{th}\frac{p}{k}$, P 點的坐標為 $\left(\frac{\rho_1}{k}, \theta_1\right)$; 則 d 值之求法如下:

連結 OP, 設 OP(甲圖)或 OP 的延長線(乙圖)交 AB 於 D 點.

於是應用 §145 公式 I, 於直角三角形 DMP, 則得



第六十九圖

$$\operatorname{sh}\frac{d}{k}=\operatorname{sh}\frac{\rho_1-(OD)}{k}\sin\measuredangle PDM\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此處 $\operatorname{sh}\frac{\rho_1-(OD)}{k}$ 在甲圖爲正值,在乙圖爲負值.

再把 §145 公式 I 應用於直角三角形 OND, 得:

$$\operatorname{sh}\frac{p}{k}=\operatorname{sh}\left(\frac{OD}{k}\right)\sin\measuredangle ODN.$$

但是　　$\measuredangle ODN\equiv\measuredangle PDM$

$$\therefore\quad \sin\measuredangle PDM=\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{k}}{\operatorname{sh}\frac{(OD)}{k}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

將(2)式入(1)式即得

$$\operatorname{sh}\frac{d}{k}=\operatorname{sh}\frac{\rho_1-(OD)}{k}\times\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{k}}{\operatorname{sh}\frac{(OD)}{k}}$$

$$=\operatorname{sh}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{ch}\frac{(OD)}{k}\times\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{k}}{\operatorname{sh}\frac{(OD)}{k}}-\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{sh}\frac{(OD)}{k}\times\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{k}}{\operatorname{sh}\frac{(OD)}{k}}$$

$$=\frac{\operatorname{ch}\frac{(OD)}{k}}{\operatorname{sh}\frac{(OD)}{k}}\operatorname{sh}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{sh}\frac{p}{k}-\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{sh}\frac{p}{k}\cdots\cdots\cdots(3)$$

現在應用§145公式VI,於直角三角形ODN得:

$$\operatorname{th}\frac{p}{k}=\operatorname{th}\frac{(OD)}{k}\cos(\theta_1-\alpha)=\frac{\operatorname{sh}\frac{(OD)}{k}}{\operatorname{ch}\frac{(OD)}{k}}\cos(\theta_1-\alpha)$$

即
$$\frac{\operatorname{ch}\frac{(OD)}{k}}{\operatorname{sh}\frac{(OD)}{k}}=\frac{\cos(\theta_1-\alpha)}{\operatorname{th}\frac{p}{k}}\cdots\cdots\cdots(4)$$

此處無論θ_1大於α,或小於α, $\cos(\theta_1-\alpha)$的數值總是正的.現在把(4)式代入(3)式得:

$$\operatorname{sh}\frac{d}{k}=\frac{\cos(\theta_1-\alpha)}{\operatorname{th}\frac{p}{k}}\operatorname{sh}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{sh}\frac{p}{k}-\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{sh}\frac{p}{k}$$

即
$$\operatorname{sh}\frac{d}{k}=\operatorname{ch}\frac{p}{k}\operatorname{sh}\frac{\rho_1}{k}\cos(\theta_1-\alpha)-\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{sh}\frac{p}{k}$$

$$\therefore\quad\operatorname{sh}\frac{d}{k}=\operatorname{ch}\frac{p}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\left\{\operatorname{th}\frac{\rho_1}{k}\cos(\theta_1-\alpha)-\operatorname{th}\frac{p}{k}\right\}\cdots\text{(公式7)}$$

II.　直角坐標系　若AB的方程式爲

$$\operatorname{th}\frac{x}{k}\cos\alpha+\operatorname{th}\frac{y}{k}\sin\alpha-\operatorname{th}\frac{p}{k}=0,$$

又P點的坐標爲$\left(\frac{x_1}{k},\frac{y_1}{k}\right)$,則求$d$之公式如下:

由 §147, (公式 3) 得

$$\operatorname{th}^2\frac{\rho_1}{k}=\operatorname{th}^2\frac{x_1}{k}+\operatorname{th}^2\frac{y_1}{k}$$

即
$$\operatorname{ch}^2\frac{\rho_1}{k}-1=\operatorname{ch}^2\frac{\rho_1}{k}\left(\operatorname{th}^2\frac{x_1}{k}+\operatorname{th}^2\frac{y_1}{k}\right)$$

即
$$\operatorname{ch}^2\frac{\rho_1}{k}=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2\frac{x_1}{k}-\operatorname{th}^2\frac{y_1}{k}},$$

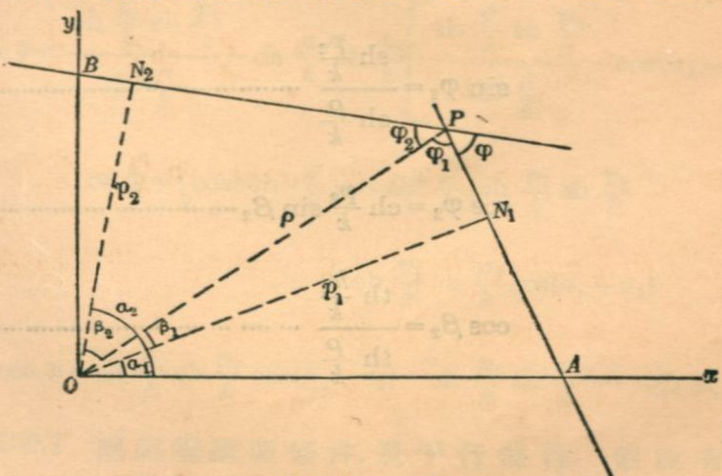
$$\therefore\quad \operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\frac{x_1}{k}-\operatorname{th}^2\frac{y_1}{k}}}$$

現將 $\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}$ 之值代入(公式 7)即得

$$\operatorname{sh}\frac{d}{k}=\operatorname{ch}\frac{p}{k}\,\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\frac{x_1}{k}-\operatorname{th}^2\frac{y_1}{k}}}\left\{\operatorname{th}\frac{x_1}{k}\cos\alpha\right.$$

$$\left.+\operatorname{th}\frac{y_1}{k}\sin\alpha-\operatorname{th}\frac{p}{k}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }10)$$

§150. **求兩條直線所夾之角.** 如第七十圖，假設



第七十圖

PA, PB, 是兩條已知直線,離原點 O 的距離各爲 (ON_1), (ON_2); 現命 $(ON_1)=p_1$, $(ON_2)=p_2$, $\measuredangle N_1OA=\alpha_1$, $\measuredangle N_2OA=\alpha_2$ 若 p_1, α_1; p_2, α_2 有一定,則 PA, PB 兩直線之位置有一定,卽其所夾之角有一定,設此角爲 φ,現在求 φ 之值於下:

把 §145 公式 I, V, VI, 應用於直角三角形 ON_1P 得:

$$\sin\varphi_1=\frac{\operatorname{sh}\frac{p_1}{k}}{\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\cos\varphi_1=\operatorname{ch}\frac{h_1}{k}\sin\beta_1 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\cos\beta_1=\frac{\operatorname{th}\frac{p_1}{k}}{\operatorname{th}\frac{\rho}{k}} \quad \cdots\cdots(3)$$

依同樣道理,在直角三角形 ON_2P 內得:

$$\sin\varphi_2=\frac{\operatorname{sh}\frac{p_2}{k}}{\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}} \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\cos\varphi_2=\operatorname{ch}\frac{p_2}{k}\sin\beta_2 \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\cos\beta_2=\frac{\operatorname{th}\frac{h_2}{k}}{\operatorname{th}\frac{\rho}{k}} \quad \cdots\cdots(6)$$

現因

$$\cos\varphi=-\cos(\pi-\varphi)=-\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

即 $$\cos\varphi=\sin\varphi_1\sin\varphi_2-\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \cdots\cdots(7)$$

將(1), (2), (4), (5)各值代入(7)式得

$$\cos\varphi=\frac{\operatorname{sh}\frac{p_1}{k}}{\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}}\times\frac{\operatorname{sh}\frac{p_2}{k}}{\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}}-\operatorname{ch}\frac{p_1}{k}\operatorname{ch}\frac{p_2}{k}\sin\beta_1\sin\beta_2 \cdots\cdots(8)$$

但是 $\cos(\alpha_2-\alpha_1)=\cos(\beta_1+\beta_2)=\cos\beta_1\cos\beta_2-\sin\beta_1\sin\beta_2$

$$=\frac{\operatorname{th}\frac{p_1}{k}}{\operatorname{th}\frac{\rho}{k}}\times\frac{\operatorname{th}\frac{p_2}{k}}{\operatorname{th}\frac{\rho}{k}}-\sin\beta_1\sin\beta_2$$

即 $$\sin\beta_1\sin\beta_2=\frac{\operatorname{th}\frac{p_1}{k}}{\operatorname{th}\frac{\rho}{k}}\times\frac{\operatorname{th}\frac{p_2}{k}}{\operatorname{th}\frac{\rho}{k}}-\cos(\alpha_2-\alpha_1) \cdots\cdots(9)$$

將(9)式之值代入(8)式得

$$\cos\varphi=\frac{\operatorname{sh}\frac{p_1}{k}\operatorname{sh}\frac{p_2}{k}}{\operatorname{sh}^2\frac{\rho}{k}}-\operatorname{ch}\frac{p_1}{k}\operatorname{ch}\frac{p_2}{k}\left[\frac{\operatorname{th}\frac{p_1}{k}\operatorname{th}\frac{p_2}{k}}{\operatorname{th}^2\frac{\rho}{k}}-\cos(\alpha_2-\alpha_1)\right]$$

即 $$\cos\varphi=\left(\operatorname{cosech}^2\frac{\rho}{k}-\operatorname{coth}^2\frac{\rho}{k}\right)\operatorname{sh}\frac{p_1}{k}\operatorname{sh}\frac{p_2}{k}$$

$$+\operatorname{ch}\frac{p_1}{k}\operatorname{ch}\frac{p_2}{k}\cos(\alpha_2-\alpha_1)$$

$$\therefore\ \cos\varphi=\operatorname{ch}\frac{p_1}{k}\operatorname{ch}\frac{p_2}{k}\cos(\alpha_2-\alpha_1)-\operatorname{sh}\frac{p_1}{k}\operatorname{sh}\frac{p_2}{k} \cdots\cdots(\text{公式}11)$$

§150.1 兩直線垂直條件,及平行條件. 假設有兩條直線,其方程式為:

$$\mathrm{th}\,\frac{x}{k}\cos\alpha_1+\mathrm{th}\,\frac{y}{k}\sin\alpha_1=\mathrm{th}\,\frac{p_1}{k}$$

及

$$\mathrm{th}\,\frac{x}{k}\cos\alpha_2+\mathrm{th}\,\frac{y}{k}\sin\alpha_2=\mathrm{th}\,\frac{p_2}{k}$$

I. 垂直條件: 這兩條直線,若是互相垂直,則由上面公式(11),其條件如下:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_1\sin\alpha_2=\mathrm{th}\,\frac{p_1}{k}\,\mathrm{th}\,\frac{p_2}{k}$$

II. 平行條件: 這兩條直線若是平行,其條件如下:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_1\sin\alpha_2=\sqrt{1-\mathrm{th}^2\frac{p_1}{k}}\sqrt{1-\mathrm{th}^2\frac{p_2}{k}}$$

$$+\mathrm{th}\,\frac{p_1}{k}\,\mathrm{th}\,\frac{p_2}{k}$$

§151. 兩點間距離. 設 P_1, P_2 爲已知兩點,命 $(P_1P_2)=d$.

於是 d 之值因 P_1, P_2 的坐標之不同分爲兩種情形.

I. 極坐標系. 設 P_1, P_2 的極坐標各爲 $(\rho_1, \theta_1), (\rho_2, \theta_2)$ 連結 OP_1, OP_2, 由三角形 OP_1P_2 內得:

$$\mathrm{ch}\,\frac{d}{k}=\mathrm{ch}\,\frac{\rho_1}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{\rho_2}{k}-\mathrm{sh}\,\frac{\rho_1}{k}\,\mathrm{sh}\,\frac{\rho_2}{k}\cos(\theta_2-\theta_1) \quad \cdots\text{(公式 12)}$$

II. 直角坐標系. 設 P_1, P_2 的坐標各爲 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 由 §147, 公式 1, 公式 2 得:

$$\mathrm{sh}\,\frac{\rho_1}{k}\cos\theta_1=\mathrm{ch}\,\frac{\rho_1}{k}\,\mathrm{th}\,\frac{x_1}{k^2},\quad \mathrm{sh}\,\frac{\rho_2}{k}\cos\theta_2=\mathrm{ch}\,\frac{\rho_2}{k}\,\mathrm{th}\,\frac{x_2}{k}$$

$$\operatorname{sh}\frac{\rho_1}{k}\sin\theta_1=\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{th}\frac{y_1}{k},\quad \operatorname{sh}\frac{\rho_2}{k}\sin\theta_2=\operatorname{ch}\frac{\rho_2}{k}\operatorname{th}\frac{y_2}{k}$$

將這些值代入公式 12, 得

$$\operatorname{ch}\frac{d}{k}=\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho_2}{k}-\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho_2}{k}\operatorname{th}\frac{x_1}{k}\operatorname{th}\frac{x_2}{k}$$

$$-\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho_2}{k}\operatorname{th}\frac{y_1}{k}\operatorname{th}\frac{y_2}{k}$$

即 $$\operatorname{ch}\frac{d}{k}=\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho_2}{k}\left(1-\operatorname{th}\frac{x_1}{k}\operatorname{th}\frac{x_2}{k}-\operatorname{th}\frac{y_1}{k}\operatorname{th}\frac{y_2}{k}\right)$$

$$\therefore\quad \operatorname{ch}\frac{d}{k}=\frac{1-\operatorname{th}\frac{x_1}{k}\operatorname{th}\frac{x_2}{k}-\operatorname{th}\frac{y_1}{k}\operatorname{th}\frac{y_2}{k}}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\frac{x_1}{k}-\operatorname{th}^2\frac{y_1}{k}}\sqrt{1-\operatorname{th}^2\frac{x_2}{k}-\operatorname{th}^2\frac{y_2}{k}}}$$

§ 152. 圓周方程式.

I. 中心在原點上的圓: 設圓的半徑爲 R, 於是

1. 圓的極坐標系方程式:

$$\rho=R \text{ ……………………………(公式 14)}$$

2. 圓的參數方程式:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{th}\frac{x}{k}&=\operatorname{th}\frac{R}{k}\cos\theta\\ \operatorname{th}\frac{y}{k}&=\operatorname{th}\frac{R}{k}\sin\theta\end{aligned}\right\}\text{ ……………………(公式 15)}$$

3. 圓的直角坐標系方程式:

$$\operatorname{th}^2\frac{x}{k}+\operatorname{th}^2\frac{y}{k}=\operatorname{th}^2\frac{R}{k}\text{ ……………………(公式 16)}$$

II. 中心不在原點上的圓: 設圓的中心爲 (ρ_1, θ_1),

或 (x_1, y_1), 於是

1. 圓的極坐標系方程式:

$$\operatorname{ch}\frac{R}{k}=\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}-\operatorname{sh}\frac{\rho_1}{k}\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\theta_1) \cdots\text{(公式 17)}$$

2. 圓的直角坐標系方程式:

$$\operatorname{ch}^2\frac{R}{k}\left(1-\operatorname{th}^2\frac{x_1}{k}-\operatorname{th}^2\frac{y_1}{k}\right)\left(1-\operatorname{th}^2\frac{x}{k}-\operatorname{th}^2\frac{y}{k}\right)$$

$$=\left(1-\operatorname{th}\frac{x_1}{k}\operatorname{th}\frac{x}{k}-\operatorname{th}\frac{y_1}{k}\operatorname{th}\frac{y}{k}\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式 18)}$$

§152.1 等距曲線的方程式.

I. 極坐標系方程式. 設已知直線的方程式爲

$$\operatorname{th}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha)-\operatorname{th}\frac{p}{k}=0,$$

於是離此線的距離爲 d 的等距曲線方程式,就是

$$\operatorname{sh}\frac{d}{k}=\operatorname{ch}\frac{p}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}\left\{\operatorname{th}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha)-\operatorname{th}\frac{p}{k}\right\} \cdots\text{(公式 19)}$$

式中的 d, p, α 爲已知定數; ρ, θ 爲流動坐標.

II. 直角坐標系方程式: 設已知直線的方程式爲

$$\operatorname{th}\frac{x}{k}\cos\alpha+\operatorname{th}\frac{y}{k}\sin\alpha=\operatorname{th}\frac{p}{k}$$

於是等距曲線方程式,就是

$$\left(1-\operatorname{th}^2\frac{x}{k}-\operatorname{th}^2\frac{y}{k}\right)\operatorname{sh}^2\frac{d}{k}=\operatorname{ch}^2\frac{p}{k}\left(\operatorname{th}\frac{x}{k}\cos\alpha\right.$$

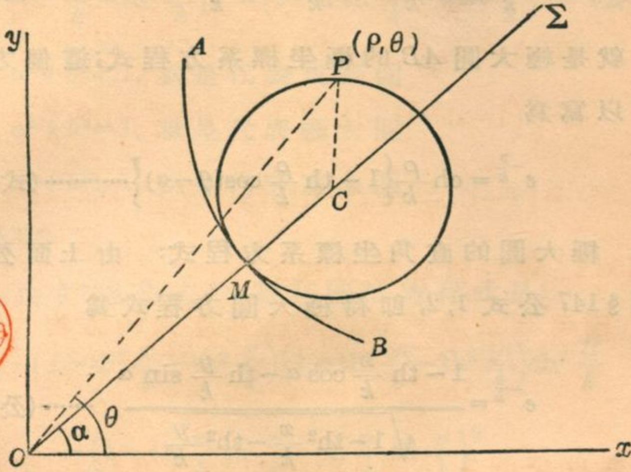
$$\left.+\operatorname{th}\frac{y}{k}\sin\alpha-\operatorname{th}\frac{p}{k}\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式 20)}$$

式中 d, p, α 爲已知數; x, y 爲流動坐標.

§152.2 極大圓方程式:

I. 極坐標系方程式:

如第七十一圖,設 AB 爲極大圓, $O\Sigma$ 爲極大圓的射



第七十一圖

徑,交極大圓於 M 點.假設此射徑與 $x-$ 軸所夾的角爲 α, (OM) 之長爲 p, 在 $O\Sigma$ 上面取一點 C, 以 C 爲中心,以 (CM) 爲半徑作一圓,此圓與 AB 相切.在圓周上任意取一點 P, 命 P 的極坐標爲 (ρ, θ). 於是由三角形 OPC 內得圓的方程式爲:

$$\operatorname{ch}\frac{(OC)-p}{k}=\operatorname{ch}\frac{(OC)}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}-\operatorname{sh}\frac{(OC)}{k}\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha)$$

把左邊展開,以 $\operatorname{ch}\frac{(OC)}{k}$ 除兩邊,卽得

$$\operatorname{ch}\frac{p}{k}-\operatorname{th}\frac{(OC)}{k}\operatorname{sh}\frac{p}{k}=\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}-\operatorname{th}\frac{(OC)}{k}\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha)\cdots\cdots(1)$$

現在使圓心C,沿着$O\Sigma$移動到無窮遠處,於是圓的極限的位置,就是極大圓AB的位置,(1)式變爲:

$$\operatorname{ch}\frac{p}{k}-\operatorname{sh}\frac{p}{k}=\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}-\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha)\ \cdots\text{(公式 21)}$$

這就是極大圓AB的極坐標系方程式;這個方程式也可以寫爲

$$e^{-\frac{p}{k}}=\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}\left\{1-\operatorname{th}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(式公 22)}$$

II. 極大圓的直角坐標系方程式: 由上面公式22應用§147公式1, 2, 即得極大圓方程式爲

$$e^{-\frac{p}{k}}=\frac{1-\operatorname{th}\frac{x}{k}\cos\alpha-\operatorname{th}\frac{y}{k}\sin\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{k}-\operatorname{th}^2\frac{y}{k}}}\ \cdots\cdots\text{(公式 23)}$$

§152.3 通過原點以x軸爲軸的極大圓方程式 此等極大圓, $\alpha=0, p=0$. 由公式22, 及23得極大圓之方程式如下:

I. $$1=\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}-\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\cos\theta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式 24)}$$

II. $$1-\operatorname{th}^2\frac{x}{k}-\operatorname{th}^2\frac{y}{k}=\left(1-\operatorname{th}\frac{x}{k}\right)^2\ \cdots\cdots\cdots\text{(公式 25)}$$

§152.4 三種圓之比較. 在第七章已經講過: 實在圓, 極大圓及等距曲線, 都是圓. 現在這三種圓的方程式已經求出來了, 試問這三種圓有沒有一個共通的方程式;既然他們都是圓, 應當有一個統一的共通的

方程式.現在得一定理如下:

定理1. 設 a, b, c 爲參數,於是這個方程式.

$$\left(1-\mathrm{th}^2\frac{x}{k}-\mathrm{th}^2\frac{y}{k}\right)c^2=\left(1-a\,\mathrm{th}\frac{x}{k}-b\,\mathrm{th}\frac{y}{k}\right)^2 \cdots\cdots \text{(公式 26)}$$

若 $a^2+b^2<1$, 就是代表實在圓

若 $a^2+b^2=1$, 就是代表極大圓

若 $a^2+b^2>1$, 就是代表意象圓

(證明)

I. 由 §152 公式 18, 實在圓的方程式是:

$$\left(1-\mathrm{th}^2\frac{x}{k}-\mathrm{th}^2\frac{y}{k}\right)\left(1-\mathrm{th}^2\frac{x_1}{k}-\mathrm{th}^2\frac{y_1}{k}\right)\mathrm{ch}^2\frac{R}{k}$$

$$=\left(1-\mathrm{th}\frac{x_1}{k}\mathrm{th}\frac{x}{k}-\mathrm{th}\frac{y_1}{k}\mathrm{th}\frac{y}{k}\right)^2$$

若公式 26 是代表實在圓,則得:

$$c^2=\left(1-\mathrm{th}^2\frac{x_1}{k}-\mathrm{th}^2\frac{y_1}{k}\right)\mathrm{ch}^2\frac{R}{k}=\left(1-\mathrm{th}^2\frac{\rho_1}{k}\right)\mathrm{ch}^2\frac{R}{k}\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

因爲無論 ρ_1 的值如何, $\mathrm{th}^2\frac{\rho_1}{k}$ 常常小於 1, 所以 (1) 式能成立,

又
$$a^2+b^2=\mathrm{th}^2\frac{x_1}{k}+\mathrm{th}^2\frac{y_1}{k}=\mathrm{th}^2\frac{\rho_1}{k}<1$$

所以公式 26, 祇要 $a^2+b^2<1$, 他就是實在圓的方程式.

II. 由 §152.2 公式 23, 極大圓的方程式爲:

$$e^{-\frac{p}{k}}=\frac{1-\mathrm{th}\frac{x}{k}\cos\alpha-\mathrm{th}\frac{y}{k}\sin\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\frac{x}{k}-\mathrm{th}^2\frac{y}{k}}}$$

即 $$\left(1-\mathrm{th}^2\frac{x}{k}-\mathrm{th}^2\frac{y}{k}\right)e^{\frac{-2p}{k}}=\left(1-\cos\alpha\,\mathrm{th}\frac{x}{k}-\sin\alpha\,\mathrm{th}\frac{y}{k}\right)^2$$

若公式26是極大圓的方程式,則

$$c^2=e^{\frac{-2p}{k}},\ a^2+b^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

所以若 $a^2+b^2=1$, 則公式26爲極大圓方程式.

III. 由§152.1,公式20等距離曲線的方程式爲:

$$\left(1-\mathrm{th}^2\frac{x}{k}-\mathrm{th}^2\frac{y}{k}\right)\mathrm{sh}^2\frac{d}{k}=\mathrm{ch}^2\frac{p}{k}\left(\mathrm{th}\frac{x}{k}\cos\alpha+\mathrm{th}\frac{y}{k}\sin\alpha-\mathrm{th}\frac{p}{k}\right)^2$$

即 $$\left(1-\mathrm{th}^2\frac{x}{k}-\mathrm{th}^2\frac{y}{k}\right)\mathrm{sh}^2\frac{d}{k}$$

$$=\mathrm{ch}^2\frac{p}{k}\,\mathrm{th}^2\frac{p}{k}\left(1-\frac{\cos\alpha}{\mathrm{th}\frac{p}{k}}\mathrm{th}\frac{x}{k}-\frac{\sin\alpha}{\mathrm{th}\frac{p}{k}}\mathrm{th}\frac{y}{k}\right)^2$$

$$\therefore\ \left(1-\mathrm{th}^2\frac{x}{k}-\mathrm{th}^2\frac{y}{k}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}\frac{d}{k}}{\mathrm{sh}\frac{p}{k}}\right)^2$$

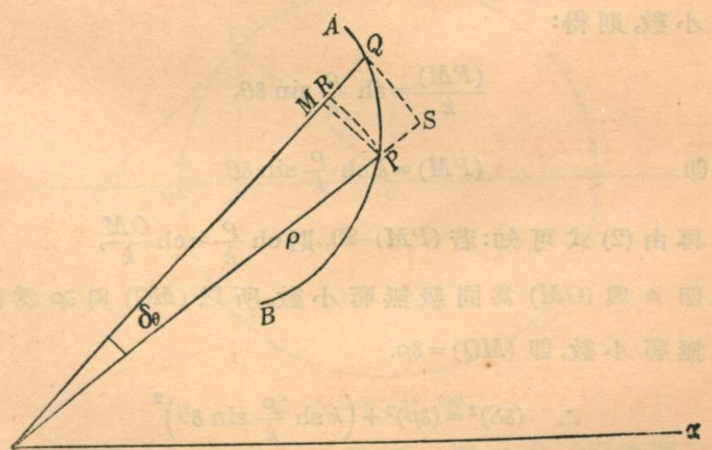
$$=\left(1-\frac{\cos\alpha}{\mathrm{th}\frac{p}{k}}\mathrm{th}\frac{x}{k}-\frac{\sin\alpha}{\mathrm{th}\frac{p}{k}}\mathrm{th}\frac{y}{k}\right)^2$$

若公式26是意象圓的方程式;則

$$c^2=\left(\frac{\mathrm{sh}\,\frac{d}{k}}{\mathrm{sh}\,\frac{p}{k}}\right)^2,\quad a^2+b^2=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\mathrm{th}^2\,\frac{p}{k}}=\frac{1}{\mathrm{th}^2\,\frac{p}{k}}$$

無論 p 為任何值, $\mathrm{th}^2\frac{p}{k}$ 常常小於1, 所以 $\frac{1}{\mathrm{th}^2\frac{p}{k}}$ 常常大於1, 即 $a^2+b^2>1$. 所以若 $a^2+b^2<1$, 則公式26是意象圓的方程式.

§153. **弧的微分:** 如第七十二圖, 假設有一曲線 AB, 其方程式為 $\rho=f(\theta)$. 現在求此曲線的弧的微分於下:



第七十二圖

設 P, Q 的極坐標各為 (ρ_1,θ); $(\rho+\delta\rho,\theta+\delta\theta)$. 由 P 點至

OQ 作垂線 $PM\perp OQ$, 設 $\widehat{PQ}$ 之長爲 δS, 於是此處也和歐氏幾何一樣,所設曲線之長,就是許多無窮短的弦長之和,并且也設想:弦與弧是同級的無窮小,所以由直角三角形 PMQ 及§146得:

$$(\delta S)^2=(PM)^2+(MQ)^2$$

現在求 (PM) 及 (MQ) 之值如下:由直角三角形 OMP 得

$$\operatorname{sh}\frac{(PM)}{k}=\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\sin\delta\theta, \quad\cdots\cdots(1)$$

及
$$\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}=\operatorname{ch}\frac{(OM)}{k}\operatorname{ch}\frac{(PM)}{k} \quad\cdots\cdots(2)$$

現在若把 (1) 式的左邊展開,并且祇取最低級的無窮小數,則得:

$$\frac{(PM)}{k}=\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\sin\delta\theta,$$

即
$$(PM)=k\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\sin\delta\theta$$

再由 (2) 式可知:若 $(PM)\to 0$, 則 $\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}=\operatorname{ch}\frac{OM}{k}$,

即 ρ 與 (OM) 爲同級無窮小數,所以 (MQ) 與 $\delta\rho$ 爲同級無窮小數,即 $(MQ)=\delta\rho$.

$$\therefore\quad(\delta S)^2=(\delta\rho)^2+\left(k\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\sin\delta\vartheta\right)^2$$

但是 $\sin\delta\theta$ 與 $\delta\theta$ 也是同級無窮小.

所以
$$ds^2=d\rho^2+k^2\operatorname{sh}^2\frac{\rho}{k}d\theta^2 \quad\cdots\cdots(\text{公式 }27)$$

§153.1　**圓周之長：** 假設圓的半徑爲R,圓心在極點上,於是圓的極坐標系方程式爲：$\rho=R$. 由公式27得圓周之長如下：

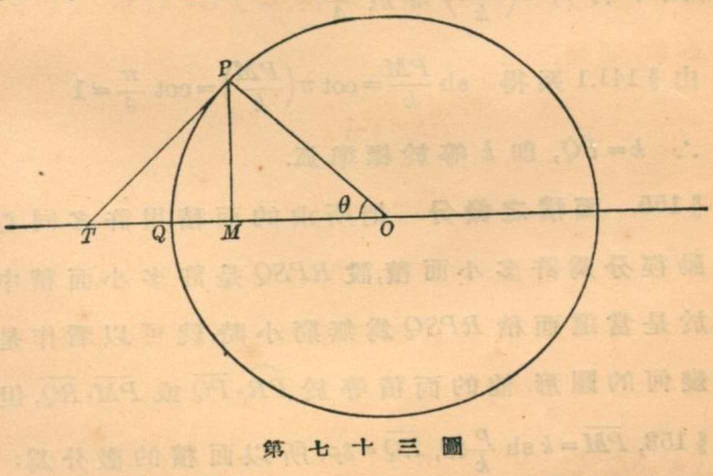
$$S=\int_0^{2\pi}k\,\mathrm{sh}\frac{R}{k}d\theta=k\,\mathrm{sh}\frac{R}{k}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi k\,\mathrm{sh}\frac{R}{k}$$

即 $\dfrac{S}{k}=2\pi\,\mathrm{sh}\dfrac{R}{k}$. 由此得一定理如下：

§153.2　**定理：** 圓弧與其所對之中心角之比等於 $\mathrm{sh}\dfrac{R}{k}$.

§154.　**定理**　空間常數k等於標準弧.

(證明)　如第七十三圖,假設有一實在圓,其中心爲



第七十三圖

O,半徑爲OQ. 由圓上任意取一點P,作PT與圓相切於P點,由P點作PM垂直於OQ. 在直角三角形OMP內得：

$$\mathrm{sh}\left(\frac{PM}{k}\right)=\mathrm{sh}\,\frac{(PO)}{k}\sin\theta$$

但是由 § 153.2 定理: $\mathrm{sh}\,\dfrac{(PO)}{k}=\dfrac{\widehat{PQ}}{k\theta}$

$$\therefore\quad \mathrm{sh}\,\frac{(PM)}{k}=\frac{\widehat{PQ}}{k}\,\frac{\sin\theta}{\theta},$$

卽
$$k\,\mathrm{sh}\,\frac{(PM)}{k}=\widehat{PQ}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

現在使圓心 O 沿着 QO 向無窮遠處移動,於是原來的圓就變成極大圓, $\theta\to0$, 所以 $\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$; 若 $\widehat{PQ}$ 為標準弧, 則平行角 $\pi\left(\dfrac{PM}{k}\right)$ 等於 $\dfrac{\pi}{4}$

由 § 141.1 系得 $\mathrm{sh}\,\dfrac{PM}{k}=\cot\pi\left(\dfrac{PM}{k}\right)=\cot\dfrac{\pi}{4}=1$

$\therefore\ k=\widehat{PQ}$, 卽 k 等於標準弧.

§ 155. 面積之微分. 把所求的面積用許多同心圓及動徑分為許多小面積,設 $RPSQ$ 是許多小面積中之一,於是當這面積 $RPSQ$ 為無窮小時,就可以看作是歐氏幾何的圖形, 他的面積等於 $\widehat{PR}\cdot\overline{PQ}$ 或 $\overline{PM}\cdot\overline{RQ}$, 但是由 § 153, $\overline{PM}=k\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\rho}{k}\delta\theta$, $\overline{RQ}=\delta\rho$, 所以面積的微分為:

$$k\,\mathrm{sh}\,\frac{\rho}{k}d\theta d\rho.$$

§ 155.1 圓的面積. 設圓的極坐標方程式為:

$\rho=R$, 其面積爲 A; 於是

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^R k\,\mathrm{sh}\,\frac{\rho}{k}\,d\theta d\rho=\int_0^{2\pi}\left[k^2\,\mathrm{ch}\,\frac{\rho}{k}\right]_0^R d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(k^2\,\mathrm{ch}\,\frac{R}{k}-k^2\right)d\theta$$

$$=2\pi k^2\left(\mathrm{ch}\,\frac{R}{k}-1\right)=\pi\left(2k\,\mathrm{sh}\,\frac{R}{2k}\right)^2$$

第三編　橢圓式幾何學

第十章　幾何之部

§156. **導言** 橢圓幾何學的公理在§15已經講過，他和歐氏公理不同的地方，就是：

A. 平面上的直線都是兩兩相交於一點.

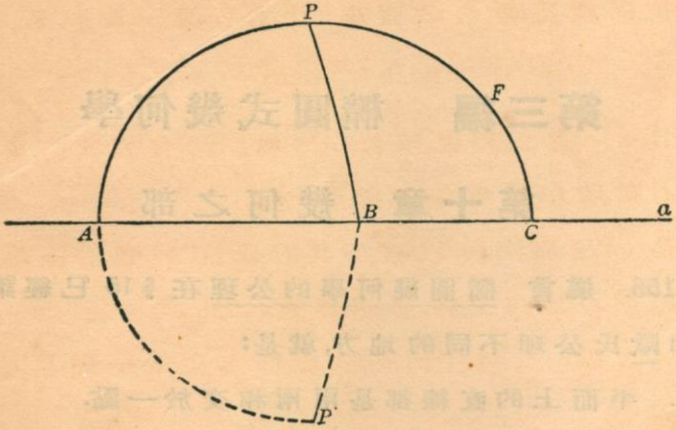
B. 直線的長，是有限的，但是無涯際的.

除了這兩點，其餘都是相同的；根據相同的公理所推演出來的定理，自然和歐氏幾何相同. 本編可以不必研究. 本編所研究的，係屬於不相同的部分. 這是要讀者注意的.

根據*A*，可知橢圓幾何學沒有平行線，也沒有不交線. 所以本編所研究的對象比雙曲線幾何學要少一些.

§157. **定理1.** 由直線上各點所作之垂線均相遇於一點，并且其長相等.

(證明) 如第七十四圖在直線a上面，任取兩點，A，B各作一垂線；則此兩垂線必相交於一點(§156 *A*). 設此點為P. 於是因為



第七十四圖

$$\measuredangle PAB \equiv \measuredangle PBA$$ (§74 定理 32)

$$\therefore \quad (PA) \equiv (PB)$$ (§60 定理 19)

現在,在 P 點作 $\measuredangle BPF \equiv \measuredangle BPA$ (公理 5), 延長 PF 交直線 a 於 C 點, (§156, A).

於是 $(AB) \equiv (BC)$, $(PA) \equiv (PC)$, $\measuredangle PCB \equiv \measuredangle PAB$(§59 定理 18). 所以 PC 垂於直線 a, 并且 $(PC) \equiv (PB) \equiv (PA)$.

反之: 若直線 a 上面一點 C, 能令 $(BC) \equiv (AB)$, 則在 C 點所作之垂線必與 CP 相疊合, 否則 C 點就可以作兩條垂直線了. 所以 C 點的垂線與 A, B 兩點的垂線都相交於一點 P, 并且 PA, PB, PC 之長相等.

依同樣道理, 可知 (AB) 的延長線上一點 C, 若能令

$$(AC) = m(AB),\ m \text{ 爲正整數},$$

則 C 點的垂線與 AP, BP 相等, 并且相交於一點 P.

再依同樣道理,可知直線 a 上面任意一點 D,若

$$(AD)=\frac{m}{n}(AB)$$

并且 m, n 爲正整數,卽若 (AD) 與 (AB) 有公共的單位.則在 D 點所作的垂線都通過 P 點.

若是 (AD) 與 (AB) 沒有公共的單位,那麼用極限,也可以證明 D 點的垂線,必須通過 P 點.

由此直線 a 上面任何的垂線都相交於一點 P,并且其長相等.

§ 157.1. **定義** 由上面的定理,可知直線 a 上各點所作的垂線都相遇於一點 P,并且此等垂線之長相等.現在爲研究便利起見,給 P, a 各一名詞.P 點叫做 a 的絕對極點(1);a 叫做 P 的絕對極線(2) 絕對極點 P 離絕對極線 a 的距離,叫做象限(3),凡兩點其距離若是等於一象限,則此兩點叫做絕對配合點.(4) 線段 AB 兩端的垂線所夾的角 APB,叫做線段的極點角.

§ 157.2. **系 1.** 若兩線段之長相等,則兩線段所乘之極點角也相等.

§ 157.3 **系 2.** 假設有兩條直線 a b.若 a 的極點 A 在 b 上,則 b 的極點 B 在 a 上.a, b 兩直線的交點爲通過 A, B 的直線之極點.

---

(1) Absolute pole of a　(2) Absolute polar of p

(3) Quadrant　(4) Absolute conjugate points

§ 157.4. 橢圓幾何學與球面幾何學.

如七十四圖：若是把 PA, PB, PC 等垂線延長,就像上面定理一樣的理由,可知此等延長線也相交於一點,設此點爲 P', P' 與 P 叫做對極點[1].現在對極點 P' 與 P 是不同的兩點呢?抑是相同的一點呢?這是一個兩可問題.若是假設他是不相同的兩點;那麼兩條直線相交就有兩點,卽兩直線相交於對極點,這兩個對極點的距離等於兩象限,全直線的長等於四象限.像這樣的幾何學,叫做球面幾何學[2]或雙式橢圓幾何學.球面上的大圓就是直線,通過兩點,可以作一直線,若此兩點爲對極點,就可以作許多直線,三角形就是球面三角形,其三內角之和大於兩直角,……….若是假設對極點 P' 與 P 是相同的一點;於是兩條直線相交祇有一點,通過已知兩點祇可以作一直線,直線的長等於兩象限.像這樣的幾何學叫做單式橢圓幾何學[3].

雙式橢圓幾何學的平面叫做雙橢圓面[4]或球面.單式橢圓幾何學的平面,叫做單橢圓面[5]或橢面.從前一般人,都把雙式的及單式的橢圓幾何學合稱爲橢圓

(1) Antipodal points

(2) Spherical geometry 或 elliptic geometry in double form

(3) Elliptic geometry in single form

(4) Double elliptic plane 或 spherical plane

(5) Single elliptic plane 或 elliptic plane

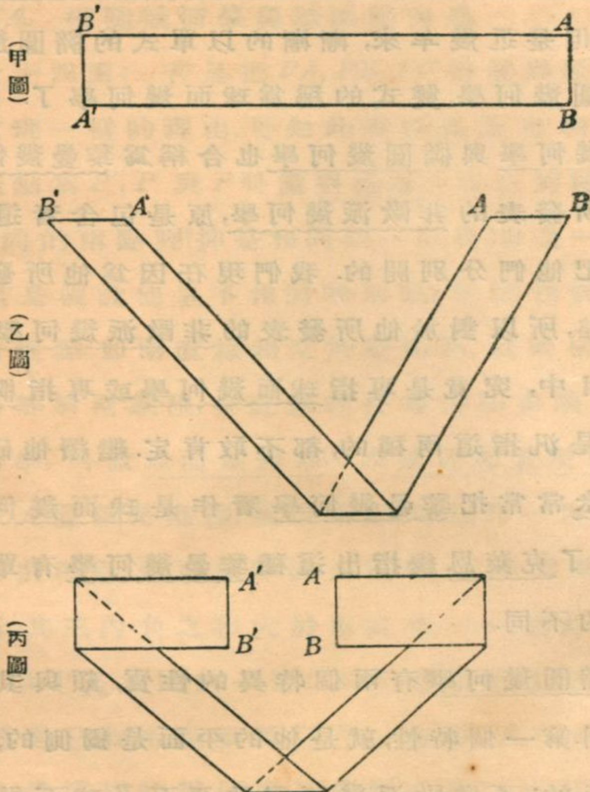
幾何學.但是近幾年來,漸漸的以單式的橢圓幾何學稱爲橢圓幾何學.雙式的稱爲球面幾何學了.

球面幾何學與橢圓幾何學也合稱爲黎曼幾何學,因爲黎曼所發表的非歐派幾何學,原是包含着這兩種,並沒有把他們分別開的.我們現在因爲他所發表的過於簡略,所以對於他所發表的非歐派幾何學,在他自己心目中,究竟是專指球面幾何學或專指橢圓幾何學,或是汎指這兩種的,都不敢肯定.繼續他研究的裴兒脫米常常把黎曼幾何學看作是球面幾何學來研究.到了克萊恩纔指出這種黎曼幾何學有單式的與雙式的不同.

單式橢圓幾何學有兩個特異的性質,頗與其他幾何學不同.第一個特性,就是他的平面是獨側的,沒有正反兩面的;不像歐派幾何學的平面及球面幾何學的球面有正反兩面的.

譬如一張紙片 $ABA'B'$ (如第七十五圖甲).若是一面塗紅色,其他一面塗綠色,就有紅綠兩面.現在若是把他先摺成乙圖,再摺成丙圖,用膠水使 AB 與 $A'B'$ 黏在一處.於是紅綠兩面都在一面就成爲獨側的面[1]

(1) 這個獨側的面是.由德國數學家 Möbius(1790—1868) 想出來的,所以叫做 Möbius leaf



第七十五圖

第二個特性：就是他的平面不被直線分爲兩部分，換句話說：就是在橢面上，假設有兩點A，B及任意一直線a，由A點沿着橢面移動，可以不經過直線a達到B點.

由這上面的特性看來，似乎橢圓與球面兩種幾何學，前者不及後者來得通俗易懂，但是實際上，後者不及前者和歐派幾何學來得接近. 譬如：在橢面上，通過

兩點祇能作一直線；兩條直線相交,祇有一點；直線上各點的垂線都相交於一點.(此等垂線,在歐派幾何學上,相交於無窮遠處)……此等性質都與歐派幾何學相同,所以橢圓幾何學在非歐派幾何學上的地位要比球面幾何學來得重要.

§157.5. 系3. 若線段AB之長爲一象限,則AB所乘之極點角APB等於一直角,若AB之長爲兩象限,則AB所乘之極點角爲π,即直線所乘之極點角爲π.圓周與直徑之比,並不等於π,所以此處π的意義與§136.2相同,祇代表一個數3.14159…….

§158. **定理2.** 兩線段之比等於兩線段所乘之極點角之比.

(假設) 如第七十四圖,設AB, AC爲已知兩線段,其所乘之極點角爲APB, APC.

(求證) $(AB):(AC)=\measuredangle APB:\measuredangle APC$.

(證明) 分(AB)爲n等份,設其一份之長爲(AA_1)；在各分點上各作垂線,於是APB角被此等垂線分爲n等份,其一份之大爲APA_1角.

$$\therefore\quad (AB)=n(AA_1),\quad \measuredangle APB=n\measuredangle APA_1$$

現在(AB)與(AC)若是可命分量,則(AB)與(AC)有一公共單位,設此公共單位爲(AA_1),設

$$(AC)=m(AA_1),\text{於是}\ \measuredangle APC=m\measuredangle APA_1.$$

$$\therefore\quad (AB):(AC)=n(AA_1):m(AA_1)=n:m$$

$$\measuredangle APB:\measuredangle APC=n\measuredangle APA_1:m\measuredangle APA_1=n:m$$

$$\therefore\quad (AB):(AC)=\measuredangle APB:\measuredangle APC.$$

(AB) 與 (AC) 若是不可命分量,則用極限的方法求得

$$(AB):(AC)=\measuredangle APB:\measuredangle APC.$$

極限證法與歐派幾何學同,故略.

§158.1. **系1.** 設線段之長爲 d, 所乘之極點角爲 α, 直線之長爲 $2q$; 於是 $d=\frac{2q}{\pi}\alpha$

§158.2. **系2.** 若是長的單位按着 $q=\frac{\pi}{2}$ 決定, 於是 $d=\alpha$, 卽線段之長, 可用所乘之極點角測度之. 若是長的單位按着 $q=\frac{\pi}{2}k$ 決定,則 $d=k\alpha$. 此處 k 隨長的單位而定.

§158.3. **系3.** 如七十四圖, APB 的面積與 APC 的面積之比等於 (AB) 與 (AC) 之比,或等於 $\measuredangle APB$ 與 $\measuredangle APC$ 之比.

§158.4. **系4.** 設 APB 的面積爲 A, (AB) 所乘之極點角爲 α, 則 $A:\alpha=$ 常數, 設此常數爲 $2k^2$(1), 則 $A=2k^2\alpha$.

§158.5. **系5.** 因爲直線所乘之極點角爲 π,所以全平面的面積爲 $2k^2\pi$.

§159. **定理3.** 凡兩點常有兩個不同的距離, 若其

(1) 此處的 k 與 §158.2 的 k 同, 參看後兩章卽知.

一為d,則其他為$2q-d$.

(證明)　凡橢面上的直線,都是閉線(1),其全長為兩象限,卽$2q$.所以在閉線上若有兩點,則此兩點的距離為d,或$2q-d$.

§160. 定理4.　設ABC為直角三角形,C角為直角,若(BC)大於或等於或小於一象限q,則A角也大於或等於或小於一直角,反之:若A角大於或等於或小於一直角,則(BC)也大於或等於或小於一象限q.

(證明)　設P為(AC)的極點,於是P必在BC上面,幷且$(CP)=q$.連結AP,則$(AP)=q$,幷且$\measuredangle PAC$等於一直角.

現在若(BC)大於(PC),則$\measuredangle BAC>\measuredangle PAC$,卽$A$角大於一直角.

若(BC)等於(PC),則B點與P點疊合在一處,卽A角等於一直角.

若(BC)小於(PC),則B在C,P之間,卽A角小於一直角.

以上所述,反言之也是眞的.

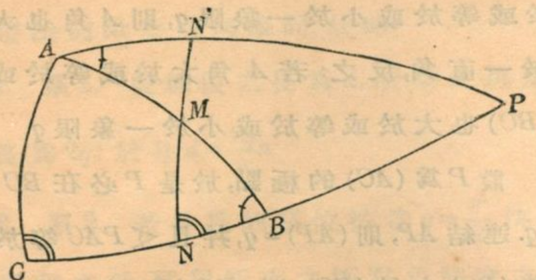
本定理也可以應用§158.1系1證明,幷且比上面證明簡捷.

§160.1. 系　直角三角形ABC,若有一股(AC)或(BC)大於q或等於q,則A,B,C三內角之和大於兩直角.

(1) Closed line.

§ 161. **定理 5.** 直角三角形,其三內角之和大於兩直角.

(證明) 如第七十六圖,設 ABC 爲直角三角形,C 角爲直角.若有一股 (AC) 或 (BC) 大於或等於 q,則三內角之和大於兩直角(§ 160.1 系 1)



第七十六圖

若 (AC) 與 (BC) 都小於 q. 則由 (AB) 的中點 M 可作 $MN \perp BC$. 設 P 爲 MN 的極點,於是 P 點必在 BC 的延長線上面,延長 NM 至 N',使 $(N'M)=(NM)$.

連結 AN' 及 $N'P$ 於是 $\triangle AMN' \equiv \triangle BMN$,

$$\sphericalangle BNM \equiv \sphericalangle AN'M,$$

$$\sphericalangle N'AM \equiv \sphericalangle B.$$

$$\therefore \quad \sphericalangle AN'M = \frac{\pi}{2}.$$

因 P 點爲 NN' 的極點,所以 $\sphericalangle PN'M = \dfrac{\pi}{2}$.

由此　　$\sphericalangle AN'M + \sphericalangle PN'M = \pi$

所以 $AN'P$ 爲直線. 由 $\triangle ACP$ 內,因 $(cp) \geqq q$

$$\therefore\quad \measuredangle CAP>\frac{\pi}{2}$$

即
$$\measuredangle A+\measuredangle MAN'>\frac{\pi}{2},$$

即
$$\measuredangle A+\measuredangle B>\frac{\pi}{2}.$$

但是C為直角,所以A, B, C三內角之和大於兩直角

§ 161.1. **系** 直角三角形 ABC, 除直角C外, 其他兩內角A, B之和大於一直角.

§ 162. **定理 6.** 三角形三內角之和大於兩直角.

(證明) 設 ABC 爲任意三角形.這個三角形若是有三個角或兩個角是鈍角或直角,那麼他的內角之和,自然大於兩直角;若是祇有一個角 A是鈍角或直角其他B, C兩角都是銳角,於是由頂點A_1至對邊 BC 作$AM\perp BC$,則將ABC分爲兩個直角三角形.

$$\measuredangle ABM+\measuredangle BAM>\frac{\pi}{2}\ (\S\,161.1\ 系)$$

$$\measuredangle CAM+\measuredangle MCA>\frac{\pi}{2}\ (\S\,161.1\ 系)$$

$$\therefore\quad \measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C>\frac{\pi}{2}$$

§ 162.1. **系** 三角形三外角之和小於四直角.

§ 162.2. **定義** 三角形三內角之和大於兩直角,其所大之數,叫做角盈(1) 設三角形的內角爲 A, B, C; 外

(1) Excess

角爲 A_1, B_1, C_1, 於是三角形的角盈 $=A+B+C-\pi=2\pi-A_1-B_1-C_1$.

§162.3. 定理7. n邊的多角形,其內角之和大於$(n-2)\pi$, 或$2(n-2)$直角.

(證明) 在多角形內部取一點與各角點連結,得n個三角形.應用§162定理卽可證明.

§162.4. 定義 n邊的多角形,其內角之和大於$(n-2)\pi$, 所大之數,叫做多角形的角盈.

§162.5. 系 四邊形四內角之和大於四直角.

§163. 定理8. 薩氏四邊形,在橢圓幾何學上,是屬於鈍角假設的四邊形.

(證明) 由§88定理44, 設$ABB'A'$爲薩氏四邊形; A,B, 各爲直角,於是$\measuredangle A'\equiv\measuredangle B'$. 由§162.5系可知 $\measuredangle A'+\measuredangle B'>\pi$.

所以A'角或B'角爲鈍角,所以薩氏四邊形爲鈍角假設的四邊形.

§164. 定理8. 倫氏四邊形,在本幾何學上,是屬於鈍角假設的四邊形.

§165. 定理9. 倫氏四邊形的鈍角的兩邊都比對邊短.

(假設) 設$ABCD$爲倫氏四邊形, A,B,C各爲直角, D爲鈍角.

(求證)　$(AD)<(BC)$

$(DC)<(AB)$

(證明)　我們現在祇須證明

$(AD)\equiv(BC)$

及　$(AD)>(BC)$

爲不合理，則 $(AD)<(BC)$ 就成立了.

若 $(AD)\equiv(BC)$，則由 §88 定理44，得 $\measuredangle BCD\equiv\measuredangle ADC$. 但 $\measuredangle BCD$ 爲直角，$\measuredangle ADC$ 爲鈍角，不能疊合的，所以

$(AD)\equiv(BC)$

不能成立.

若 $(AD)>(BC)$，則在 (AD) 上面可以取一點 E，令

$(AE)\equiv(BC)$,

連結 E, C. 於是 $ABCE$ 爲薩氏四邊形，

$\measuredangle BCE\equiv\measuredangle AEC$

但是 $\measuredangle BCE$ 爲銳角，$\measuredangle AEC$ 爲鈍角不應當能疊合，所以

$(AD)>(BC)$

不能成立.

所以祇有 $(AD)<(BC)$ 能成立. 把 $ABCD$ 四邊形旋轉一百八十度，根據上面證明卽得

$(DC)<(AB)$,

§166.　定理10.　雙直角等腰四邊形，其底邊長於頂

邊.

(證明) 連結底邊及頂邊的中點,分雙直角等腰四邊形爲兩個倫氏四邊形,由§165定理9即可證明.

§167. **定理11.** 平面上,兩條直線祇有一條公垂線.

(證明) 若有兩條公垂線,則四邊形四內角之和等於四直角,於本幾何之理不合.

§168. **定理12.** 設AB, CD兩直線垂直於AC, 在AB上面任意取兩點P, Q, 由P, Q各作垂線PM, QN垂直於CD, 於是 $\measuredangle BAC>\measuredangle BPM>\measuredangle BQN$·······

(證明) 由原設,知$ACMP$爲倫氏四邊形,所以$\measuredangle MPA$爲鈍角.

$\measuredangle MPA$與$\measuredangle MPQ$互爲補角,所以$\measuredangle MPQ$爲銳角,即BPM爲銳角,

$$\therefore\ \measuredangle BAC>\measuredangle BPM \qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$

由雙直角四邊形$MNQP$得

$$\measuredangle MPQ+\measuredangle NQP>\pi,$$

由直線PQB得

$$\measuredangle NQP+\measuredangle NQB=\pi$$

把這兩個式子相減,得

$$\measuredangle MPQ-\measuredangle NQB>0,\ 即\ \measuredangle BPM-\measuredangle BQN>0$$

即 $$\measuredangle BPM>\measuredangle BQN \qquad\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)及(2)得

$\measuredangle BAC > \measuredangle BPM > \measuredangle BQN$. 其餘依此類推.

§ 168.1. **系 1.** 三直角四邊形, 其直角邊愈長, 則其鈍角愈大.

§ 168.2. **系 2.** 設 AB, CD 兩直線相交於 O 點, 由直線 AB 上面任意三點 P, Q, R 至 CD 作垂線 PL, QM, RN. 若

$(OR) < (OQ) < (OP) < q$,

則　　　$\measuredangle ORN < \measuredangle OQM < \measuredangle OPL <$ 直角.

§ 169 **定理 13.** 設 AB, CD 兩直線垂直於 AC, 在 AB 上面任意取兩點 P, Q. 由 P, Q 各作垂線 PM, QN 垂直於 CD; 於是 $(AC) > (PM) > (QN) \cdots\cdots$

(證明) 因為 $ACMP$ 是倫氏四邊形, 所以 $(AC) > (PM)$ 現在用間接證明法證明 $(PM) > (QN)$ 於下:

若 $(PM) \equiv (QN)$, 則 $\measuredangle MPQ \equiv \measuredangle NQP$, 由 § 168 定理 12, 可知這個式子是不能成立的.

若 $(PM) < (QN)$, 於是在 (QN) 上面取一點 Q'. 令 $(Q'N) \equiv (PM)$. 連結 $Q'P$, 則 $\measuredangle MPQ' \equiv \measuredangle NQ'P$ 但 $\measuredangle MPQ'$ 小於一直角, 所以 $\measuredangle MPQ'$ 與 $\measuredangle NQ'P$ 為兩個疊合的銳角. 於本幾何之理不合. 所以 $(PM) < (QN)$ 不能成立. 由此得

$$(AC) > (PM) > (QN) \cdots\cdots$$

§ 169.1. **系 1.** 設 AB, CD 兩直線相交於一點 O, 在直線 ABO 上面任意取兩點 Q, P 由 Q, P. 各作垂線 PM, QN 垂直於 CD. 若 $(OQ) < (OP) < \cdots\cdots < q$, 則 $(QN) < (PM) < \cdots\cdots$

$<(AC)$

§ 169.2. 系 2. 兩條直線向公垂線的兩側延長,則彼此漸漸接近;愈延長愈接近,最後相遇.

§ 169.3. 系 3. 兩條直線,其間距離最大的爲公垂線.

§ 170. 定理 14. 三角形的外角大於內對角,祇有他的相應中線小於一象限時是眞的.若是相應中線等於一象限,則外角等於內對角.若是相應的中線大於一象限,則外角小於內對角.

(假設) 如第七十七圖設 ABC 爲任意三角形,延長 (BC) 至 E, (BC) 的中點爲 M, (AC) 的中點爲 N, 連結 AM, BN. 設一象限之長爲 q.

(求證) 1. 若 $(AM)<q$,

則 $\measuredangle ACE>\measuredangle ABC$

2. 若 $(AM)=q$,

則 $\measuredangle ACE\equiv\measuredangle ABC$

3. 若 $(AM)>q$

則 $\measuredangle ACE<\measuredangle ABC$

1′ 若 $(BN)<q$,

則 $\measuredangle ACE>\measuredangle BAC$.

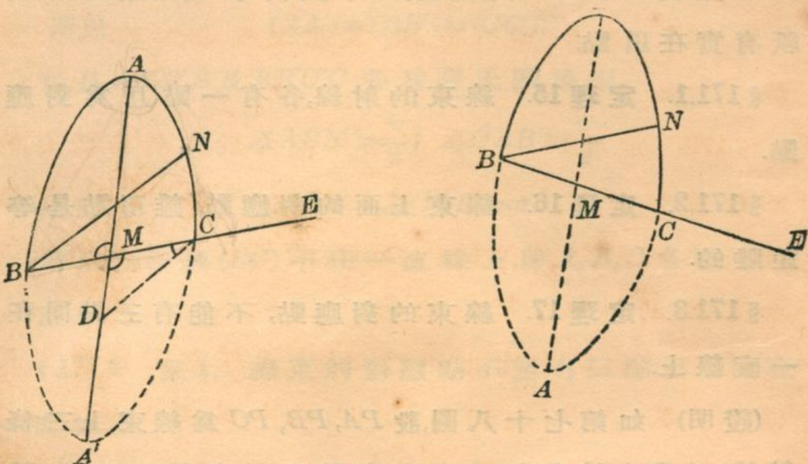
2′ 若 $(BN)=q$.

則 $\measuredangle ACE\equiv\measuredangle BAC$

3′ 若 $(BN)>q$

則 $\measuredangle A\ E<\measuredangle BAC$.

甲　圖　　　　乙　圖



第七十七圖

(證明) 如第七十七圖,甲圖.若$(AM)<q$,則延長AM至A',使AA'之長爲$2q$.於是A與A'爲對極點,延長AB,AC,交AA'於A'點,因$(AM)<q$,所以在MA'上面可以取一點D,使$(DM)\equiv(AM)$.連結DC,於是$\measuredangle DCM<\measuredangle A'CM$,即$\measuredangle DCM<\measuredangle ACE$.現在由$\triangle AMB$及$\triangle DMC$,得$\measuredangle ABC\equiv\measuredangle DCM$. $\therefore$ $\measuredangle ACE>\measuredangle ABC$.

如三角形$A'BC$,其相應中線$A'M$大於q,於是由上面證明因$\measuredangle ACE>\measuredangle ABC$,所以$\measuredangle A'CE<\measuredangle A'BC$.

如乙圖,若$(AM)=q$,於是$\triangle AMB\equiv\triangle A'MC$, $\measuredangle ABC\equiv\measuredangle A'CM\equiv\measuredangle ACE$, $\therefore$ $\measuredangle ACE\equiv\measuredangle ABC$. 1′, 2′, 3′依同樣方法

延長 BC, BA 卽證明.

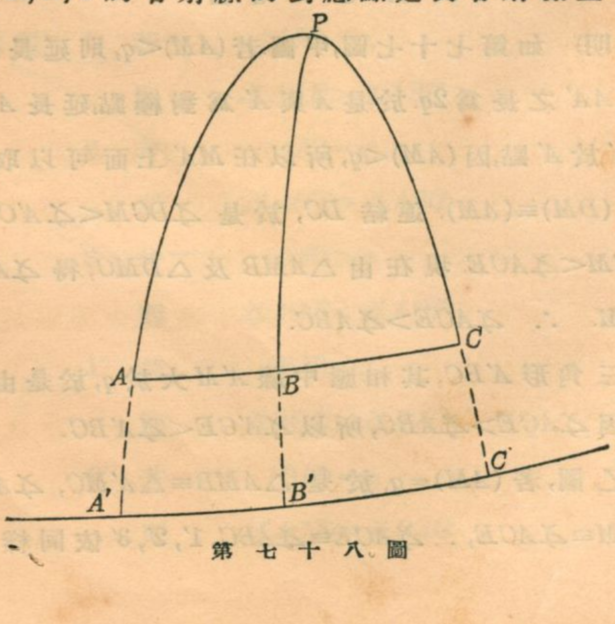
§171. **定義** 線束的定義與 §112 同, 線束上面對應點的定義與 §101.3 同, 但是, 在本幾何學上, 線束的頂點, 祇有實在頂點.

§171.1. **定理15.** 線束的射線, 各有一點互爲對應點.

§171.2. **定理16.** 線束上面的對應點, 離頂點是等距離的.

§171.3. **定理17.** 線束的對應點, 不能有三點同在一直線上.

(證明) 如第七十八圖, 設 PA, PB, PC 爲線束上三條射線; A, B, C 爲各射線的對應點. 延長各射線至 A', B',



第七十八圖

C' 令其長各爲 q. 於是 A', B', C' 都在 P 的極線上, PA', PB', PC' 都與直線 $A'B'C'$ 垂直. 連結 AB, BC.

因爲 $$(PA)\equiv(PB)\equiv(PC),$$

所以 $$(AA')\equiv(BB')\equiv(CC').$$

於是 $AA'B'B$ 及 $BB'C'C$ 各爲薩氏四邊形.

$$\therefore\quad \measuredangle ABB'>\frac{\pi}{2};\ \measuredangle CBB'>\frac{\pi}{2}.$$

由此 $$\measuredangle ABB'+\measuredangle CBB'>\pi.$$

所以 (AB) 與 (BC) 不在一直線上, 卽 A, B, C 各點不在一直線上.

§171.4. **系 1.** 線束的對應點不能有三點以上同在一直線上.

§171.5. **系 2.** 設 A, B, C 爲射線 PA, PB, PC 上面的對應點, 若 PB 在 PA 與 PC 之間, 則 B 點不與 P 點同在 (AC) 之一側.

§171.6. **系 3.** 離已知直線等距的軌跡是一個圓周圓周的中心在已知直線的極點上. 換言之, 等距曲線是背着已知直線彎曲的一個圓周.

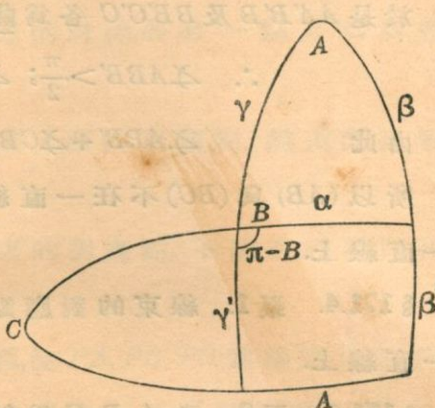
§171.7. **系 4.** 圓周的半徑若是等於一象限, 於是圓周成爲兩條直線, 疊在一處.

§172. **定理 18.** 有一個三直角四邊形存在, 就有一個直角三角形存在. 若是三直角四邊形的鈍角爲 $(\pi-B)$, 其他各邊爲 a, β', A, γ', 於是直角三角形的五部

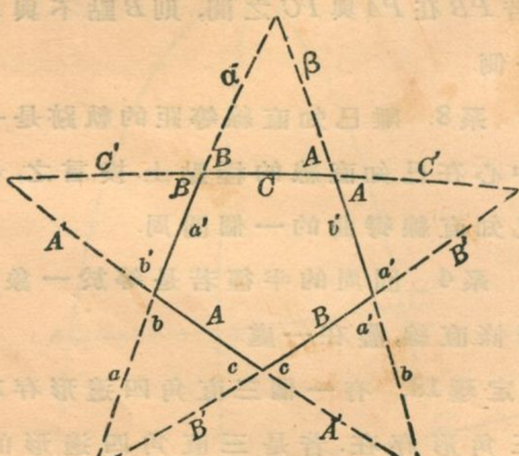
分，就是 $A, B, \alpha, \beta, \gamma$. 此處 $\alpha=\frac{a}{k}$, $\beta=\frac{b}{k}$, $\gamma=\frac{c}{k}$, $\beta'=\frac{\pi}{2}-\beta$, $\gamma'=\frac{\pi}{2}-\gamma$.

（證明）如第七十九圖，將三直角四邊形的兩對邊延長各相遇於直角邊的極點，卽證明.

§ 172.1　直角三角形之循環. 橢圓幾何學也像雙曲線幾何學一樣的有五個循環的直角三角形.這五個三角形各在五邊形的各邊上表示出來.如第八



第七十九圖



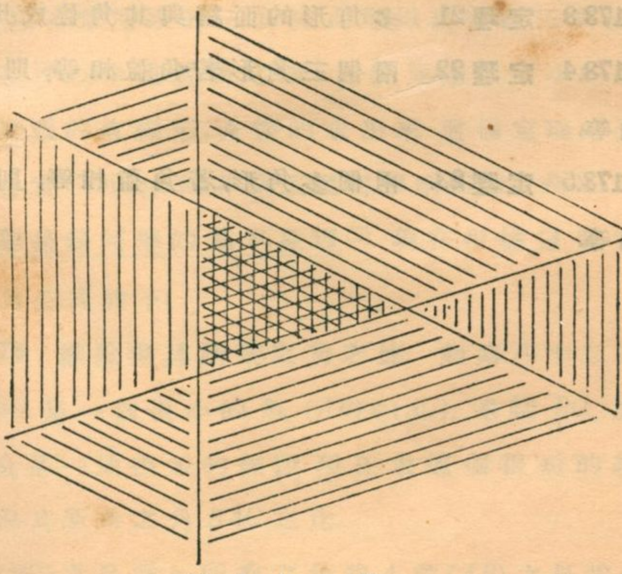
第八十圖

十圖五邊形各邊延長線所夾之角爲三角形的直角.

此處 $\alpha=\frac{a}{k}, \alpha'=\frac{\pi}{2}-\alpha; \beta=\frac{b}{k}, \beta'=\frac{\pi}{2}-\beta; \gamma=\frac{c}{k}, \gamma'=\frac{\pi}{2}-\gamma.$

§173. 定理19 三角形的面積. 與其角盈成正比例.

(證明) 設△爲任意三角形 ABC 的面積. A, B, C 各角所含之面積各畫以細線爲記號如第八十一圖. 於是由§158.4系4得:



第八十一圖

A 角所含之面積 $=2k^2A$

B 角所含之面積 $=2k^2B$

C 角所含之面積 $=2k^2C$

但是由§158.5系5, 全平面的面積 $=2k^2\pi$.

$$\therefore\quad 2k^2(A+B+C)=2k^2\pi+2\triangle$$

即 $\triangle=k^2(A+B+C-\pi)$. 此式即證明三角形面積與角盈成比例. 式中 k^2 爲常數. $(A+B+C-\pi)$ 爲角盈.

§ 173.1. 系. 設三角形的外角爲 A_1, B_1, C_1, 則

$$\triangle=k^2(2\pi-A_1-B_1-C_1)=k^2(A+B+C-\pi)$$

§ 173.2. 定理 20. 分多角形爲若干個三角形, 這若干個三角形角盈之和等於原多角形的角盈.

§ 173.3 定理 21. 多角形的面積與其角盈成比例.

§ 173.4 定理 22. 兩個三角形若角盈相等, 則面積也相等.

§ 173.5 定理 23. 兩個多角形, 若角盈相等, 則面積也相等.

第十一章

三角之部

§174. 導言. 在前一章曾經講過:歐派球面的對極點,若看作是一點,則歐派球面幾何學就是橢圓幾何學.所以本章所求的三角公式可以由球面三角抄來,但是也可以根據這個定理;即橢面上無窮小的直線形是歐派的直線形,直接的求出來.這個定理的證明可以參看Coolidge的非歐派幾何學第四章[1]或Mansion編的黎曼幾何學的基本原理[2].現在根據這個定理求三角公式於下:

§175. 線段與其所乘之角之比. 如第八十二圖,假設 BAC 是一個很小的角, $(AB)\equiv(AC)$, 連結 BC, 於是 (BC) 也是一個很短的線段.現在求這個很短的線段 (BC) 與其所乘之角 BAC 之比.

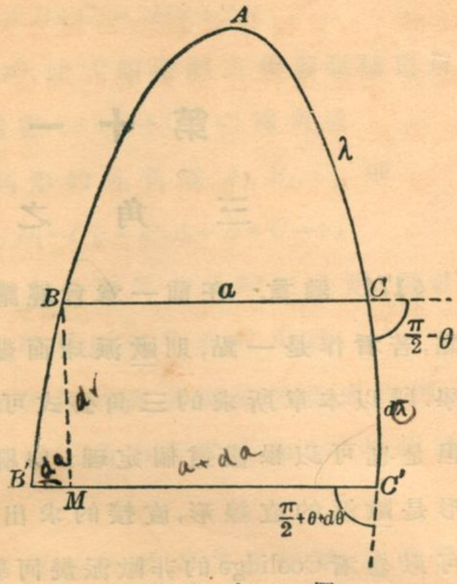
設 (BC) 之長爲 a, 所乘之角爲 A, 設 (AB) 之長爲 r 延長 AB, AC. 設 $(BB')\equiv(CC')=dr$, $(B'C')=a+da$.

---

(1) Coolidge: Non-Euclidean Geometry.

(2) Mansion: Principes fondamentaux de la géométrie non euclideanne de Riemann.

設 $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle ACB = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\measuredangle AB'C' \equiv \measuredangle AC'B' = \frac{\pi}{2} - (\theta + d\theta)$. 由 B 點作 BM, 使 $\measuredangle MBC \equiv \measuredangle ABC = \frac{\pi}{2} - \theta$. 現在要是把高級無窮小數略去不算,就得 $(MC') \equiv BC = a$, 由此, $(MB') = da$, $(MB) = dr$. 由 $\triangle BB'M$, 得



第八十二圖

$$\frac{da}{2} = dr \sin \frac{1}{2} \measuredangle MBB' = dr \sin \theta = dr\, \theta,$$

即 $\dfrac{da}{dr} = 2\,\theta$, 即 $\dfrac{d^2a}{dr^2} = 2\dfrac{d\theta}{dr}$,

四邊形 $BCC'B'$ 的面積 $= a\,dr$.

四邊形 $BCC'B'$ 的外角之和 $= 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \frac{\pi}{2} + \theta + d\theta\right)$

$= 2(\pi + d\,\theta)$. $\therefore\ a\,dr = k^2\{2\,\pi - 2(\pi + d\,\theta)\} = -k^2 2\,d\theta$.

即 $a = -k^2 2\dfrac{d\theta}{dr} = -k^2\dfrac{d^2a}{dr^2}$, 即 $\dfrac{d^2a}{dr^2} + \dfrac{a}{k^2} = 0$.

這是一個二級微分方程式,現在把他解了,即得

$$a = c_1 \sin\left(\frac{r}{k} + c_2\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

此處c_1, c_2爲積分常數,這兩個常數要用兩個已知條件纔能決定.現在設這兩個已知條件爲$r=0, a=0$,求c_1, c_2之値於下:

若 $r=0, a=0$, 則由(1)得

$$0=c_1\sin c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

再由$\triangle ABC$得$A+2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\pi$, 卽$A=2\theta$. 但是$2\theta=\frac{da}{dr}$

$=\frac{c_1}{k}\cos\left(\frac{r}{k}+c_2\right)$ $\qquad\therefore\quad A=\frac{c_1}{k}\cos c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

由(2)及(3)得 $c_1=Ak, c_2=0 \quad \therefore \quad a=Ak\sin\frac{r}{k}$.

§175.1. **圓周之長.** 設圓之半徑爲r,設A是一個很小的中心角,又設A所乘的弦爲a.因爲A是很小的角,a是很短的線段,所以a可以看作是圓周上一段很短的弧,於是圓周之長$=2\pi k\sin\frac{r}{k}$.

§176. **直角三角形的三角公式.** 設ABC爲直角三角形,如第八十三圖,延長CA至A',設

$$(AA')=db,\ \measuredangle ABA'=dB,\ \measuredangle BA'C=A+dA,\ (A'M)=dc.$$

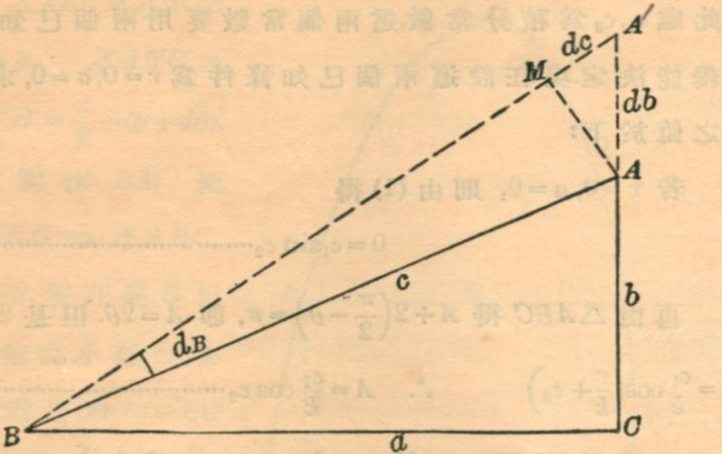
於是 $$dc=db\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$kdB\sin\frac{c}{k}=(AM)=db\sin A \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

用積分的方法得

$\triangle ABA'$的面積$=\int_0^c k\sin\frac{c}{k}\,dB\,dc=k^2dB\left(1-\cos\frac{c}{k}\right)$.

再用§173.1系的方法得



第八十三圖

$$dA = -\cos\frac{c}{k}\,dB \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由 (1), (2), (3) 消去 dB, db, 得

$$\frac{\cos A\,dA}{\sin A} + \frac{\cos\frac{c}{k}dc}{k\sin\frac{c}{k}} = 0,$$

這是微分方程式,現在把他解了,得

$$\sin\frac{c}{k}\sin A = \lambda,$$

此處 λ 為積分常數.

若令 $A = \frac{\pi}{2}$, 則 $a = c$, 得 $\lambda = \sin\frac{a}{k}$.

$$\therefore\quad \sin\frac{a}{k} = \sin\frac{c}{k}\sin A \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 I})$$

依同樣方法,延長 CB, 得

$$\sin\frac{b}{k} = \sin\frac{c}{k}\sin B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 I}')$$

設 $\alpha=\frac{a}{k}$, $\beta=\frac{b}{k}$, $\gamma=\frac{c}{k}$, 於是 I, I′ 成為

$$\sin\alpha=\sin\gamma\sin A\cdots\cdots\cdots\text{(公式1)}$$

$$\sin\beta=\sin\gamma\sin B\cdots\cdots\cdots\text{(公式1′)}$$

現在把公式I應用於第八十圖第二個直角三角形

得: $$\sin\gamma'=\sin\alpha'\sin\beta'.$$

即 $$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta\cdots\cdots\cdots\text{(公式2)}$$

$$\therefore\quad\cos\frac{c}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}\cdots\cdots\cdots\text{(公式II)}$$

同理 $$\sin A'=\sin B\sin\alpha'$$

即 $$\cos A=\sin B\cos\alpha\cdots\cdots\cdots\text{(公式3)}$$

$$\cos B=\sin A\cos\beta\cdots\cdots\cdots\text{(公式3′)}$$

$$\therefore\quad\cos A=\cos\frac{a}{k}\sin B\cdots\cdots\cdots\text{(公式III)}$$

$$\cos B=\cos\frac{b}{k}\sin A\cdots\cdots\cdots\text{(公式III′)}$$

由公式2, 3, 3′得

$$\cos\gamma=\cot A\cot B\cdots\cdots\cdots\text{(公式4)}$$

$$\therefore\quad\cos\frac{c}{k}=\cot A\cot B\cdots\cdots\cdots\text{(公式IV)}$$

由公式1, 1′, 3′得

$$\sin\alpha=\text{tg}\,\beta\cot B\cdots\cdots\cdots\text{(公式5)}$$

$$\sin\beta=\text{tg}\,\alpha\cot A\cdots\cdots\cdots\text{(公式5′)}$$

$$\therefore\quad\sin\frac{a}{k}=\text{tg}\frac{b}{k}\cot B\cdots\cdots\cdots\text{(公式V)}$$

$$\sin\frac{b}{k}=\text{tg}\frac{a}{k}\cot A\cdots\cdots\cdots\text{(公式V′)}$$

由公式3, 2, 1′得

$$\cos A=\operatorname{tg}\beta\cot\gamma \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式}6)$$

$$\cos B=\operatorname{tg}\alpha\cot\gamma \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式}6')$$

$$\therefore\quad \cos A=\operatorname{tg}\frac{b}{k}\cot\frac{c}{k} \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式VI})$$

$$\cos B=\operatorname{tg}\frac{a}{k}\cot\frac{c}{k} \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式VI}')$$

上面公式1, 1′, 2, 3, 3′, 4, 5, 5′, 6, 6′等十個公式完全和球面三角公式一樣,把這些公式的α, β, γ代以$\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$即得橢面的十個三角公式I, I′,……VI, VI′.

§177. 斜三角形的公式. 斜三角形的公式可以應用直角三角形公式演出來,也可以由歐派的球面三角抄來,夾入一個常數k.

現在把重要的三類基本公式寫在下面.

$$\frac{\sin\frac{a}{k}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{k}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{c}{k}}{\sin C} \cdots\cdots\cdots(\text{公式VII})$$

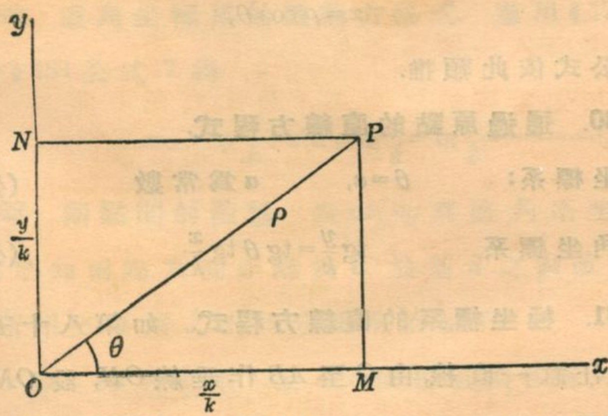
$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{k}&=\cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k}+\sin\frac{b}{k}\sin\frac{c}{k}\cos A\\ \cos\frac{b}{k}&=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}+\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}\cos B\\ \cos\frac{c}{k}&=\cos\frac{b}{k}\cos\frac{a}{k}+\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}\cos C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(\text{公式VIII})$$

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\frac{a}{k}\\ \cos B&=-\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos\frac{b}{k}\\ \cos C&=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\frac{c}{k}\end{aligned}\right\}\cdots(\text{公式IX})$$

第十二章

解析之部

§178. 極坐標系與直角坐標系之關係. 如第八十四圖:設 ox, oy 爲直角坐標軸,P 爲平面上任意一點.由 P 點至 x, y 軸各作垂線 PM, PN. 設 P 的極坐標爲 (ρ, θ), P 的直角坐標爲 x, y. 於是應用 §176 公式 VI 於三角形 OMP 及 ONP 得



第八十四圖

$$\operatorname{tg}\frac{x}{k} = \cos\theta \operatorname{tg}\frac{\rho}{k} \quad \text{……………………(公式1)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{k} = \sin\theta \operatorname{tg}\frac{\rho}{k} \quad \text{……………………(公式2)}$$

由此得　　　$$\operatorname{tg}^2\frac{\rho}{k}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{k}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{k}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }3)$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\operatorname{tg}\frac{y}{k}}{\operatorname{tg}\frac{x}{k}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }4)$$

§ **179.** 〔注意〕 本章公式,若命 k 爲無窮大,就變爲歐派解析幾何的公式.

譬如公式 1,

$$\cos\theta=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{k}}{\operatorname{tg}\frac{\rho}{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sec^2\frac{x}{k}}{\sec^2\frac{\rho}{k}}\times\frac{-\frac{x}{k^2}}{-\frac{\rho}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sec^2\frac{x}{k}}{\sec^2\frac{\rho}{k}}\cdot\frac{x}{\rho}=\frac{x}{\rho}.$$

即　　　$$x=\rho\cos\theta,$$

其餘公式依此類推.

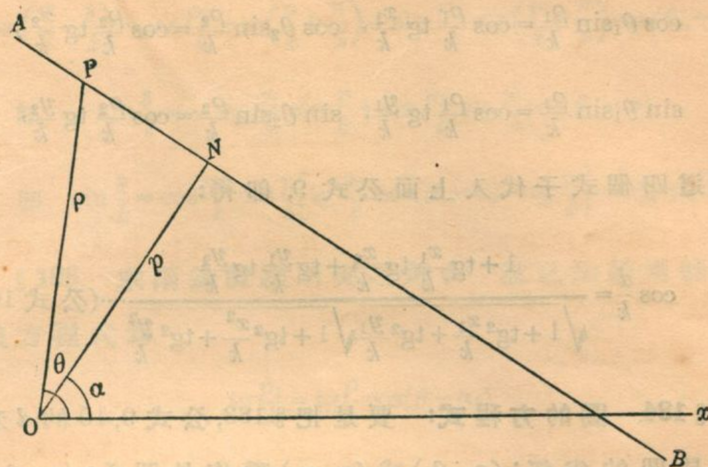
§ **180. 通過原點的直線方程式.**

極坐標系:　　$\theta=\alpha$,　　α 爲常數　　(公式 5)

直角坐標系　　$\operatorname{tg}\frac{y}{k}=\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{x}{k}.$　　(公式 6)

§ **181. 極坐標系的直線方程式.** 如第八十五圖,設 AB 爲任意一直線,由 O 至 AB 作垂線 ON,設 ON 之長爲 p, ON 的傾斜角爲 α, 在 AB 上面任意取一點 P. 設 P 的極坐標爲 ρ,θ. 於是應用 § 176 公式 VI 於直角三角形 ONP, 得　　$$\cos(\theta-\alpha)=\operatorname{tg}\frac{p}{k}\cot\frac{\rho}{k}.$$

即　　$$\operatorname{tg}\frac{p}{k}=\operatorname{tg}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha)\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }7)$$



第八十五圖

§182. **直角坐標系的直線方程式.** 應用§178公式1,2於§181公式7得

$$\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{x}{k}+\sin\alpha\,\mathrm{tg}\frac{y}{k}=\mathrm{tg}\frac{p}{k}\text{……………(公式 8)}$$

§183. **兩點間的距離.** 設 ox, oy 爲直角系坐標軸, AB 爲已知兩點,其間距離爲 d, 於是 d 之數値因 A, B 兩點所用坐標系之不同分爲兩款如下.

第一款. 極坐標系. 設 A, B 的極坐標各爲 $\rho_1\theta_1, \rho_2\theta_2$ 應用§177公式VIII於三角形 OAB 得:

$$\cos\frac{d}{k}=\cos\frac{\rho_1}{k}\cos\frac{\rho_2}{k}+\sin\frac{\rho_1}{k}\sin\frac{\rho_2}{k}\cos(\theta_1-\theta_2)\text{····(公式 9)}$$

第二款 直角坐標系. 設 A, B 的直角坐標各爲 $(x_1\,y_1), (x_2, y_2)$, 應用§178公式1, 2得:

$$\cos\theta_1\sin\frac{\rho_1}{k}=\cos\frac{\rho_1}{k}\operatorname{tg}\frac{x_1}{k},\quad \cos\theta_2\sin\frac{\rho_2}{k}=\cos\frac{\rho_2}{k}\operatorname{tg}\frac{x_2}{k};$$

$$\sin\theta_1\sin\frac{\rho_1}{k}=\cos\frac{\rho_1}{k}\operatorname{tg}\frac{y_1}{k},\quad \sin\theta_2\sin\frac{\rho_2}{k}=\cos\frac{\rho_2}{k}\operatorname{tg}\frac{y_2}{k},$$

把這四個式子代入上面公式 9, 即得:

$$\cos\frac{d}{k}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x_1}{k}\operatorname{tg}\frac{x_2}{k}+\operatorname{tg}\frac{y_1}{k}\operatorname{tg}\frac{y_2}{k}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x_1}{k}+\operatorname{tg}^2\frac{y_1}{k}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x^2}{k}+\operatorname{tg}^2\frac{y^2}{k}}}\cdots\text{(公式 10)}$$

§184. 圓的方程式: 要是把 §183, 公式 9, 10 的 d 看作是圓的半徑; (ρ_1, θ_1) 或 (x_1, y_1) 看作是圓心; (ρ_2, θ_2), (x_2, y_2) 各換以流動坐標, 即得圓的方程式於下,

極坐標系: $$\cos\frac{d}{k}=\cos\frac{\rho_1}{k}\cos\frac{\rho}{k}+\sin\frac{\rho_1}{k}\sin\frac{\rho}{k}\cos(\theta_1-\theta)\cdots\cdots\text{(公式 11)}$$

直角坐標系: $$\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x_1}{k}+\operatorname{tg}^2\frac{y_1}{k}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{k}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{k}\right)\cos^2\frac{d}{k}=\left(1+\operatorname{tg}\frac{x_1}{k}\operatorname{tg}\frac{x}{k}+\operatorname{tg}\frac{y_1}{k}\operatorname{tg}\frac{y}{k}\right)^2\cdots\text{(公式 12)}$$

§185. 由已知直線到已知點的距離. 設 $\operatorname{tg}\frac{p}{k}=\operatorname{tg}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha)$ 爲已知直線方程式, 於是這條已知直線的極點的坐標爲 $p+\frac{\pi}{2}k, \alpha$. 設 (ρ_1, θ_1) 爲直線外已知一點的極坐標. 設由已知直線到已知點的距離爲 δ, 於是 (ρ_1, θ_1) 及 $\left(p+\frac{\pi}{2}k, \alpha\right)$ 兩點間距離爲 $\frac{\pi}{2}k-\delta$, 由 §183 公式 9 得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{k}\right)=\cos\frac{\rho_1}{k}\cos\left(\frac{p}{k}+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\rho_1}{k}\sin\left(\frac{p}{k}+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta_1-\alpha)$$

即 $$\sin\frac{\delta}{k}=-\cos\frac{\rho_1}{k}\sin\frac{p}{k}+\sin\frac{\rho_1}{k}\cos\frac{p}{k}\cos(\theta_1-\alpha)$$

即 $$\sin\frac{\delta}{k}=\cos\frac{\rho_1}{k}\cos\frac{p}{k}\left[\operatorname{tg}\frac{\rho_1}{k}\cos(\theta_1-\alpha)-\operatorname{tg}\frac{p}{k}\right]\cdots\cdots(\text{公式 }13)$$

§186. 求兩條直線所夾之角 ϕ. 設已知的兩條直線方程式爲

$$\operatorname{tg}\frac{p_1}{k}=\operatorname{tg}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha_1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{p_2}{k}=\operatorname{tg}\frac{\rho}{k}\cos(\theta-\alpha_2)$$

這兩條直線的極點各爲 $\left(p_1+\frac{\pi}{2}k,\alpha_1\right)$, $\left(p_2+\frac{\pi}{2}k,\alpha_2\right)$.

設這兩極點的距離爲 d, 於是 $\varphi=\frac{d}{k}$,

由 §183 公式 9 得

$$\cos\varphi=\sin\frac{p_1}{k}\sin\frac{p_2}{k}+\cos\frac{p_1}{k}\cos\frac{p_2}{k}\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cdots\cdots(\text{公式 }14)$$

§187. 弧的微分. 如第八十六圖甲, 由 §175 得

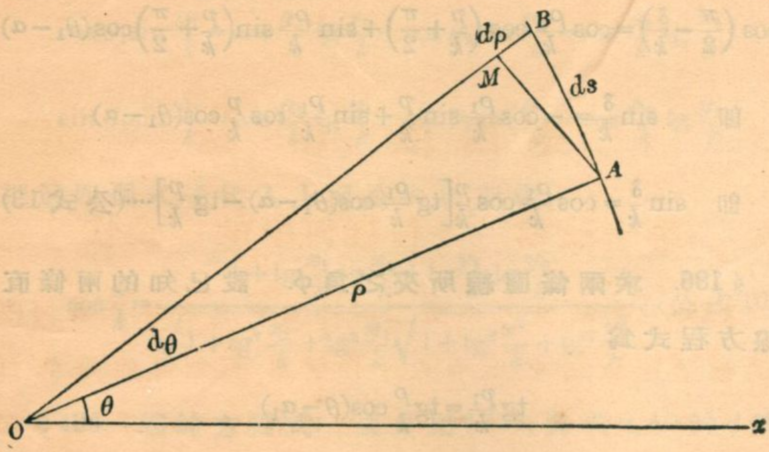
$$(AM)=d\cdot\theta\, k\sin\frac{\rho}{k},$$

設 $$(AB)=ds,$$

$$\therefore\quad ds^2=d\rho^2+k^2\sin^2\frac{\rho}{k}d\theta^2.$$

設圓的方程式爲 $\rho=r$, r 爲圓的半徑, 於是圓周

$$s=\int_0^{2\pi}k\sin\frac{\rho}{k}d\theta=2\pi k\sin\frac{\rho}{k}.$$



第八十六圖

§188 **面積的微分.** 如第八十六圖乙,設 $CDEF$ 的面積爲 dA,於是

$$dA = d\rho(CD) = d\rho\, k \sin\frac{\rho}{k}\, d\theta,$$

$$\therefore \quad dA = k \sin\frac{\rho}{k}\, d\rho\, d\theta.$$

若圓周的半徑爲 r,於是圓的面積

$$A = k\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \sin\frac{\rho}{k}\, d\rho\, d\theta = 2\pi k^2\left(1-\cos\frac{r}{k}\right).$$

第四編　結　論

第十三章　各種幾何學的一致性

§189. 非歐幾何學圖形的性質,若是和歐氏幾何學的圖形比較起來,就令人十分驚異,不知道他果能自成一說與否?我們根據前面幾章推演的結果,可知無論雙曲式幾何學,或是橢圓式幾何學,都能各自一致,並沒有自相矛盾的地方.不過現在要是再繼續推演下去,是否仍不發生矛盾?倒是一個問題,關於這個問題,就是發明雙曲線幾何的羅波切夫斯基與龐禮愛也曾經注意過.

羅龐兩氏曾經證明雙曲線幾何學的平面三角公式,與歐氏幾何裏虛球面的三角公式是一樣的,所以若是歐氏幾何學的球面三角公式,無論如何推演,始終是一致的話,那末歐氏幾何學的虛球面三角公式也應當是一致的,因此雙曲線幾何也是一致的.

自羅龐兩氏以後,算學家對於非歐幾何學的一致性的證明,貢獻了許多,如裴兒脫米,葛萊克萊恩,邦家海等,都各有不同的研究,現在先把最淺近而最明白的,

邦家海的辭典法,寫在下面.

§190. "非歐幾何學一致性的證明一". 邦家海說:我們設想有一個平面,這個平面,叫做基本平面.我們並且另外再編一種辭典,這辭典的內容,有兩類不同的名詞,把這兩類不同的名詞,好像平常兩種語言的字典一樣的辦法,排成兩項,每項一個一個的對照起來,如:

空間	基本平面以上的空間之部分.
平面	與基本平面成直交的球面.
線	與基本平面成直交的圓周.
球	球
圓	圓
角	角
兩點間的距離	卽此兩點,及經過這兩點與基本平面成直交的圓的交點;共計四點的調和比的對數.
其他………	其他………

現在我們要是拿這本字典來翻譯雙曲線幾何學的定理,就立刻可以得到歐氏幾何學的定理.譬如雙曲線幾何學有定理"三角形三內角之和,小於兩直角".根據這本辭典可以譯爲"與基本平面成直交的圓,所成的三角形,(卽以此等圓弧爲邊的三角形).其

三內角之和,小於兩直角"現在若是雙曲線幾何學上有兩個問題是互相矛盾的,那末用上面辭典所譯出來的兩個相應的定理也應當是互相矛盾的.但是這種翻譯出來的定理,正是歐氏幾何學的定理,而歐氏幾何學又是大家無疑的相信他的內容是一致的,幷不自相矛盾的;所以雙曲線幾何學也是一致的,並不自相矛盾的.

又拿同樣的方法證明橢圓幾何學也是一致的.

§191. "非歐幾何學一致性的證明二". 我們設想在歐氏的空間有一個平面,這個平面叫做基本平面,在基本平面上,再設想有一個已知圓,這個已知圓,我們叫做基本圓,他是以一定點 O 爲中心,以一定值 k 爲半徑.再在基本平面上,設想有三組圓,一組是通過 O 點的,我們叫他爲甲組圓.一組是與基本圓成直交的,我們叫他爲乙組圓,其他一組是以基本圓的直徑爲弦的,叫他爲丙組圓.由此甲組圓對於 O 點的冪 (power) 爲零,乙組圓對於 O 點的冪 (power) 爲 k^2,丙組圓的冪 (power) 爲 $-k^2$.這三組圓的幾何學,由下面各節研究的結果,可知他們恰好各與歐氏,雙曲線及橢圓的平面幾何相似.要是把基本圓換爲基本球,再把這三組圓換爲三組球,那末這三組球的幾何學就與歐氏,雙曲線,橢圓的立體幾何學相似,現在把甲,乙,丙三組圓

的幾何學分別討論如下:

§192. **甲組圓的幾何學與歐氏幾何學.** 在基本平面上,設有一組直線,這一組直線,對於 O 點用反形法反轉來,就得一組經過 O 點的圓,由此,這許多圓中的每一個圓,都有一個相應的直線,而每一直線,也都有一個相應的圓.並且這許多圓所相交的角,正與這許多線所相交的角,各各相等.所以這一組圓的性質,可以從這一組線的性質推演出來.並且凡關於點與線的問題,都可以由點與圓的問題表出來.

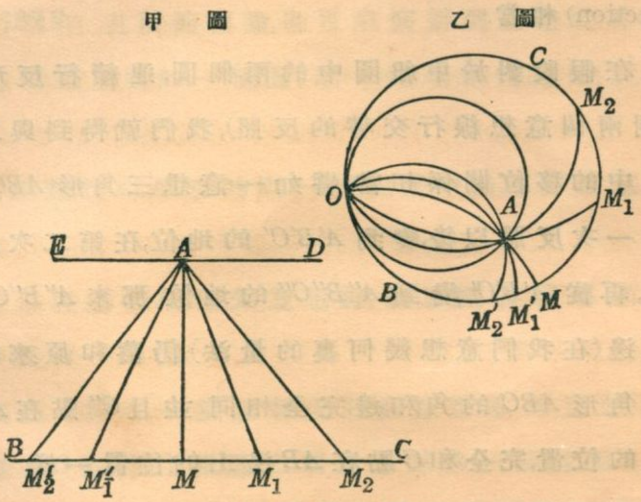
I. 意想的點線. 假設有兩點 A 與 B, 是已知的,那末經過 A, B 及 O 點,可以作一個圓.並且這樣的圓,祇有一個.因爲經過三點,祇能作一個圓的緣故.我們稱這種圓爲"意想線".意想線所在的平面上(卽基本平面)的點爲"意想點",但 O 點不算意想點.

II. 兩點可以決定一條線. 由上面的規定,可知在基本平面上兩個相異的意想點 A 與 B, 常常可以決定一條意想線.這正像歐氏幾何學中,兩相異的點常常可以決定一直線一樣.

III. 次序公理. 意想點與意想線,也適合"次序公理"的.

IV. 意想平行線. 如第八十七圖甲,設 BC 爲已知直線, A 爲 BC 外面已知的一點,由 A 作 AM 垂直於 BC,

再在 A 點作 AD 垂直於 AM. 據歐氏公理, 通過 A 點的直線, 被 ED 分爲兩羣, 一羣與 MC 相交於 $M_1, M_2, \cdots\cdots$; 一羣與 MB 相交於 $M'_1, M'_2\cdots\cdots$, 而 ED 自己不與 MC 或 MB 相交, 這一條直線, ED 就是歐氏幾何學上所謂平行於 BC 的平行線. 乙圖是與甲圖相應的, 設 OBC 爲已



第八十七圖

知意想線, A 爲 OBC 外面的已知點. 由 A 作意想線 OAM 垂直於 OBC, 通過 A 點作一意想線 OAD 與 OBC 相切於 O 點, 於是凡通過 A 點的意想線都被 OAD 分爲兩羣. 一羣與 MB 相交, 一羣與 MC 相交. 由此 OAD 與甲圖的 ED 相當, OAD 爲平行於 OBC 的意想平行線. 所以歐氏幾何的平行公理在甲組的幾何學上也是成立的.

§ 192.1　**長度的量法及意想移位**　意想線上一部

分的弧,叫做意想線段.意想線段的長,叫做意想長度.

從上面的定義很容易證明:若一意想線段,對於甲組圓中的一圓行反形法(inversion),他的意想長度是不變的,並且這種反形法,與所有意想點及意想線,在和反形圓(circle of inversion)相重合的一意想線上的反照(reflection)相當.

現在假設對於甲組圓中的兩個圓,連續行反形法,(即對兩個意想線行交替的反照),我們就得到與二次空間中的移位關係相當.譬如一意想三角形 ABC,他在第一次反照以後,變到 $A'B'C'$ 的地位,在第二次反照以後,再從 $A'B'C'$ 變到 $A''B''C''$ 的地位.那末 $A''B''C''$ 的角和邊(在我們意想幾何裏的量法)仍舊和原來的意想三角形 ABC 的角和邊,完全相同.並且 C'' 點在 $A''B''$ 邊上的位置,完全和 C 點在 AB 邊上的位置一樣.

此外,我們還可以指定兩個反形法,使一個在意想線段 AB 上面的一點 A 變到 A' 點,並且使 AB 的位置移到一個經過 A' 點的意想線上.要達到這個目的,我們先設想一個垂直平分意想線 AA' 的圓,對於這樣的圓行反形法.由這個反形法,就把 AB 變到 $A'B''$ 的位置.於是再設想本組有一個圓,他是平分 $A'B''$ 與經過 A' 點的意想線間所夾的角的,若是對於這樣的圓,再行反形法,那麼,意想線段 AB 就可以移到所要求的地位了

所以在本組的幾何學中,重疊的方法也可以利用的我們假使那意想點,意想線,和意想平行線等名詞,來代替平常歐氏幾何學中的點,線和平行線等名詞,那末一部歐氏幾何學的理論,可以譯成甲組的幾何學.即歐氏幾何學與甲組幾何學相當.

§ **192.2.** 上面的理論,也可以擴張到立體幾何裏.不過必須把上面的一組圓,拿一組球來代替他,於是所謂:

意想點,就和平常的點一樣,但是 O 點不算在意想點以內.

所謂經過兩個已知意想線,就是經過這兩意想點及 O 點的一個圓.

經過不同在一意想線上三個意想點的意想面,就是經過 O 點,並且經過三個意想點的一個球面.

經過已知意想點 A 與已知意想線 BC 平行的意想線,就是經過 A 點的一個圓,這個圓是在一個球面上的,這個球面是通過 O, A, B, C 四點的.並且這個圓與 OBC 圓相切於 O 點的.

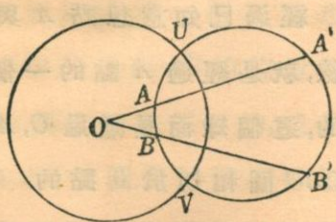
所以兩個意想點,可以決定一條意想線,正像歐氏幾何中,兩點可以決定一直線一樣.不在一意想線上的三個意想點,可以決定一意想面.也正如歐氏幾何學中,不在同一直線上的三點,決定一平面一樣,並且

假使一條意想線有兩個意想點在一個意想面上,那末這個意想線上所有的意想點,都在這意想面上.其他如兩個意想面,相交成一個意想線,……等等,完全和通常歐氏幾何一樣的.

這裏所有意想角及意想長度等的量法,和上面兩節所講是完全一樣的.其他如對於經過O點的一個意想球行反形法,也和與這個相重合的意想面的反照一樣.

於是,這種意想點,線,面的幾何學,與平常歐氏幾何學完全相合.所以我們可以從這種幾何的定理,譯到那一種的幾何定理,而且由那一種的幾何也可以推想到這種的幾何.

§193. 乙組圓的幾何學與雙曲線幾何學. 現在我們討論與基本圓相直交的一組圓,這組圓我們叫做乙組圓的幾何學的意想線.



第八十八圖

如第八十八圖,設基本圓的中心爲O,半徑爲k,於是乙組圓對於O點的羃爲k^2.

設A與B(見第八十八圖)是在基本圓以內的任意兩點,A'與B'爲A與B對於基本圓的反點.所以A, A', B, B'四點同在一圓周上.並且這個圓與基本圓成直交.也就是意想線.凡在基本

圓以內的點,我們叫做意想點,但是O點及在基本圓周上的點,不算爲意想點.

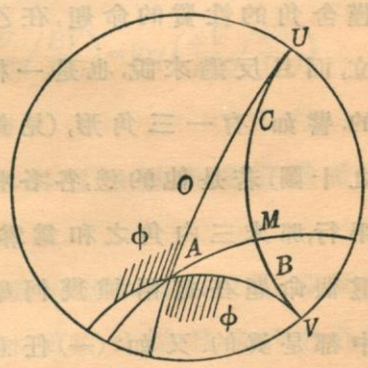
由歐氏幾何的定理,可知在乙組幾何學中,經過兩個意想點,祇能作一條意想線.這正像歐氏幾何學中,經過兩點祇能作一條直線一樣.

意想點和意想線,也服從"次序公理"的.

我們所謂兩條意想線,所夾的角,就是和這兩條意想線相重的兩個圓所夾的角.

現在所再要討論的,就是意想平行線的問題.

設AM(見第八十九圖)是經過A點,並且與意想線BC相垂直的一條意想線.換句話說,就是與BC相直交的一組圓中經過A點的一個圓.我們設想AM繞A點旋轉起來,而使經過A點的意想線與意想線BC相交的角度逐漸減小.而經過A點與BC相切於U及V地方的兩個圓,就是這個體系中的兩個意想線.這兩個意想線把經過A點的意想線分成兩組:一組是與BC相交的,其他一組是不與BC相交的.在圖中我們可以看出在ϕ角以內的一組線,都

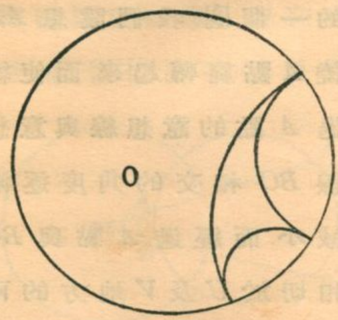


第八十九圖

不與 BC 相交; 在 ψ 角內(沒有線劃的)的一組線, 皆與 BC 相交. 所以上面這兩個意想線的性質, 正與雙曲線幾何的平行公理相同, 因此我述意想平行線的定義如下: 所謂經過意想點 A, 與已知意想線 BC 平行的意想平行線, 就是經過 A 點的兩個圓, 這兩個圓一方面與基本圓相直交, 一方面與 BC 相切於基本圓上 U 點及 V 點.

所以在這種意想幾何中, 我們有兩個平行線, (一個在左邊, 一個在右邊) 他把一組意想線束分成與已知線相交及不相交的兩類.

在這樣情形之下, 我們可以說, 在雙曲線幾何中, 凡僅含角的性質的命題, 在乙組圓的幾何學中, 都能成立, 而且反過來說, 也是一樣的. 譬如: 有一三角形, (見第九十圖) 若是他的邊, 各各相平行, 那末三內角之和為零; 這個命題在這兩種幾何學中都是眞的. 又如: (一) 任意意想三角形的三內角之和小於兩直角; (二) 與兩個不相交的圓相直交的圓祇有一個. 這與雙曲線幾何學中, 三角形三內角之和小於兩直角, 兩條不相交的直線祇有一條公垂線的定



第九十圖

理一樣的.

§193.1. **意想長度和意想移位.** 意想線段的意想長度的量法,我們定爲:

任何意想線段 AB 的意想長度,等於

$$\log\left(\frac{AV}{AU}\Big/\frac{BV}{BU}\right).$$

此處 U 與 V 爲意想線 AB, 與基本圓相交的交點(見第八十八圖).

由這個定義講來, AB 的意想長度與 BA 的意想長度是相同的,並且全線的意想長度也是無限的. 假設 C 是意想長度線段 AB 中間的一點,那末 AB 的意想長度,等於 AC 及 CB 的意想長度之和, 因爲

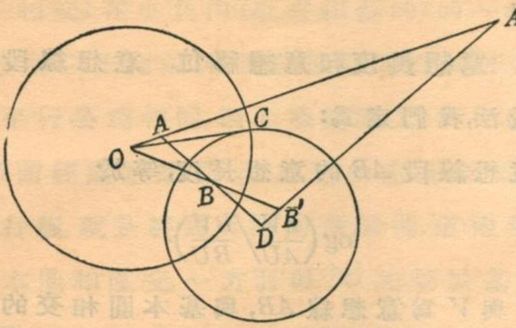
$$\log\left(\frac{AV}{AU}\Big/\frac{CV}{CU}\right)+\log\left(\frac{CV}{CU}\Big/\frac{BV}{BU}\right)=\log\left(\frac{AV}{AU}\Big/\frac{BV}{BU}\right)$$

這是合乎通常加法法則的.

我們現在再討論意想點與意想圓對於這種體系中的一圓, 所行反形法的結果.

設 A 爲意想點, A' 爲 A 對於基本圓的反點, 設反形圓 (circle of inversion) 遇基本圓於 C 點, 且他的中心在 D 點(見第九十一圖). 設 A 與 A' 兩點,對於反形圓行反形法得兩反形點 B 與 B'.

因反形圓與 $AA'C$ 圓切於基本圓上的 C 點,所以 $AA'C$ 圓的反形也切於 C 點; 但是 A, A', B, B' 等同在一個圓



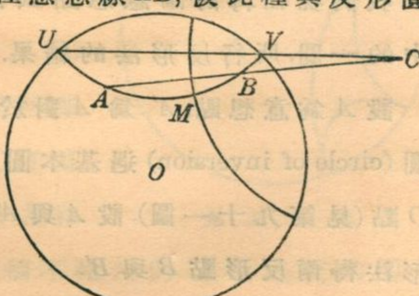
第九十一圖

周上,並且 $AA'C$, $BB'C$ 及 $AA'BB'$ 三圓的根軸交於一點

所以 BB' 經過 O 點,並且 $OB\cdot OB'=OC^2$. 於是 $AA'BB'$ 圓與基本圓以及反形圓皆爲直交,且意想點仍舊反形爲意想點.

因此得:若有一意想點 A, 對於此種體系中的圓行反形法而變至 B 點,則聯 A 與 B 的意想線,與相重於反形圓的意想線相垂直.

我們現在將證明這種意想線 AB, 被此種與反形圓相重合的意想線所平分.



第九十二圖

設經過 A, B, B' 與 A' 點的圓,與反形圓遇於 M 點,與基本圓遇於 U 及 V 兩點(第九十二圖).

於是 U 與 V 對於反形圓,互爲反點.

由此得

$$\frac{BV}{AU}=\frac{CV}{CA},$$

$$\frac{AV}{BU}=\frac{CV}{CB},$$

所以

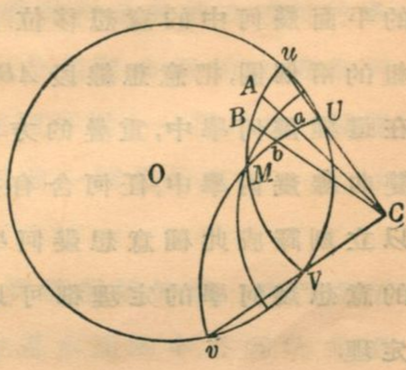
$$\frac{AV}{AU}\cdot\frac{BV}{BU}=\frac{CV^2}{CA\cdot CB}=\frac{CV^2}{CM^2}=\left(\frac{MV}{MU}\right)^2$$

$$\therefore\ \frac{AV}{AU}\Big/\frac{MV}{MU}=\frac{MV}{MU}\Big/\frac{BV}{BU}.$$

卽 AM 的意想長度與 BM 的意想長度相等,於是得一結論如下:

對於本組任何圓,用反形法將任何意想點 A 變到 B,則凡與反形圓相重合的意想線必將意想線段 AB 垂直的平分爲二等分.

現在再考查此種反形法在意想線上所發生的結果.因爲凡與基本圓成直交的圓,反形後仍舊是一個圓,並且仍舊與基本圓成直交的.所以意想線段 AB 反形後,就成爲意想線段 ab 設 AB 與基本圓相交的點爲 U 及 V, 又 ab 與基本圓相交的點爲 u 及



第九十三圖

v(見第九十三圖).

當反形圓與意想線相交時,AB與ab必在反形圓上相遇,現在若是設相遇的點爲M,則AM與BM的意想長度各與aM及bM的意想長度相等.即AB的意想長度與ab的意想長度相等.也就是AB對於本組中任意一圓行反形法,其意想長度是仍舊不變的.

上面所說的是:反形圓與意想線相交時候的情形,現在就是他們不相交,我們也可以仿照上面的方法得到與上面同樣的結果.

上面所得的結果,總括起來說:意想點和意想線對於本組中任何一圓行反形法,其結果與意想點和意想線在相重於反形圓的意想線上行反照(reflection)一樣.

所以對於本組兩個圓連續行反形法,相當於意想的平面幾何中的意想移位.因爲我們常常能指定本組的兩個圓,把意想線段AB變到一個新的位置,所以在這種幾何學中,重疊的方法,是可以利用的,並且在雙曲線幾何學中,任何含有適宜於線段的定理;都可以立刻譯成此種意想幾何學的定理;反過來說,本組的意想幾何學的定理都可以譯成雙曲線幾何學的定理.

§ 193.2 上面的方法,自然可以應用到立體幾何裏

面,不過我們必須把基本圓換爲以O爲中心,以k爲半徑的一個球,(這個球叫做基本球)並且把一組與基本圓相直交的圓,換成一組與基本球相直交的球,於是所謂:意想點,就是在基本球以內的點,但是球心及球面上的點不算爲意想點.

經過兩個意想點的意想線,就是經過這兩個意想點並且與基本球成直交的一個圓弧.

經過不在同一意想線上的三個意想點的意想面,就是經過這三個意想點,並且與基本球成直交的一個球面.

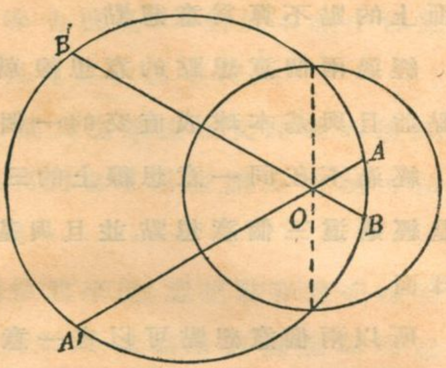
所以兩個意想點可以定一意想線;三個意想點定一意想面,以及兩個意想面決定一個意想線等,完全和雙曲線幾何學是一樣的.

其他如意想角,意想長度及意想移位(ideal displacement)等再給以適當的定義就得意想的立體幾何學.此種意想的立體幾何學,完全與雙曲線的立體幾何學相似,前一種幾何學的定理可以一一譯爲後一種幾何學的定理,因爲我們知道前一種幾何學是一致的,所以後一種幾何學也是一致的.

§194　丙組圓的幾何學與橢圓幾何學. 我們現在再討論丙組圓的幾何學.設基本圓的中心爲O,半徑爲k,於是丙組圓與基本圓相交的交點都在基本圓直

徑的兩端的端點上,丙組圓中任何一圓對於 O 點的冪都等於 $-k^2$.

在基本圓內,任意取兩點 A, B. 在 OA 上面取一點 A', OB 上面取一點 B', 使 $OA\cdot OA'=-k^2$ 及 $OB\cdot OB'=-k^2$. 於是 A, A', B, B' 四點都同在一個圓周上,而經過這四點的圓周就是以基本圓的直徑為弦的圓,也就是丙組圓(見第九十四圖)丙組圓在丙組的意想幾何學上叫做意想線. 經過基本圓內兩個不同的點祇能作一條意想線.



第九十四圖

現在討論丙組圓的幾何學,可以分為兩種不同的情形. 第一種: 我們限定以基本圓周上及基本圓以內的點為意想點,並且把基本圓的直徑的兩端點作為一個意想點看待. 第二種: 把意想點的領域擴張到基本圓以外,以至於無窮遠的地方. 並且基本圓直徑的端點仍舊看作是兩點. 換句話說: 就是基本圓所在的平面上的點都認為意想點.

上面兩種不同的意想幾何學. 恰好相當於黎曼幾

何學的兩種形式,即橢圓幾何學與球面幾何學.在第一種幾何學裏,兩條意想線相交僅有一個意想點.在第二種幾何學裏,兩條意想線相交常常有兩個意想點.在第一種幾何學裏,兩個相異的意想點 A, B 常常可以決定一條意想線.但在第二種幾何學裏,兩個相異的意想點 A, B 不一定常常可以決定一條意想線.譬如 A, B 在基本圓直徑的兩端,就不能決定一條意想線;因爲經過 A, B 可以作許多圓,就是可以作許多意想線.又譬如 A, B 兩點同在經過 O 點的直線上,並且適合於這個條件: $OA \cdot OB = -k^2$, 那末通過 A, B 也可以作許多意想線.

丙組圓的度量性質,雖然不能像乙組圓那樣容易討論;但是前面的理論仍舊可以引用到這裏來,不過在意想長度的定義中,必須引用與虛圓相交的觀念.我們知道:丙組圓的第一種及第二種幾何學都是各自一致的;所以橢圓幾何學及球面幾何學也是一致的.

上面的方法祇要把基本圓換爲基本球面,意想線換爲意想球面,也可以證明立體的橢圓幾何學也是一致的.

§195. 非歐幾何學的一致性,除了上面的證明外,還有許多別的證明法,現在再摘要說明於下:

在歐氏的空間,用具體的面來表示非歐幾何學,要算是裴兒脫米爲最早了.他首先證明雙曲線的平面幾何學就是假球面 (pseudo sphere) 上的幾何學.假球面的幾何學不過是歐氏幾何學的一分支,這是大家認爲他是一致的,所以雙曲線的平面幾何也是一致的.我們從第十一章橢圓幾何學的三角公式看來,知道:他的形式完全和歐氏幾何學球面上的三角公式一樣.所以橢圓的平面幾何學也可以拿歐氏的球面幾何學來表示他.我們又知道:球面三角公式除掉三角形特有的性質外,更含有球的性質,換句話說:球面三角形的公式與球面的曲率 (curvature) 有關係.我們現在根據假球面及球面兩種事實,引入一種所謂空間曲率的觀念,把非歐幾何學與歐氏幾何學統一起來.我們又從球面三角形的公式裏,知道球面的曲率半徑,就是空間常數 k (見 § 136.1) 因此我們就假定橢圓幾何的空間曲率爲 k^{-2}, 雙曲線幾何的空間曲率爲 $-k^{-2}$, (此値由比較雙曲線幾何的三角公式與橢圓幾何學的三角公式而來.我們在另一方面,也可以用高等算學證明橢圓幾何的空間曲率爲 k^{-2}, 雙曲線幾何的空間曲率爲 $-k^{-2}$, 見 Coolidge: Non-Enclidian Geometry). 由此歐氏幾何學的空間自然是零.所以我們可以說:歐氏幾何學不過是非歐幾何學的一個特別例子.見(§ 146)

而我們還可以用凹面上的幾何表示雙曲線幾何,(因爲凹面的曲率是負的)用凸面上的幾何表示橢圓幾何.(因爲凸面的曲率是正的)而歐氏幾何爲不凹不凸的面上的幾何.由此非歐幾何學在歐氏幾何中有了具體的表示.卽二次的非歐幾何學可以用三次的歐氏的幾何學來表示;三次的非歐幾何學,可以用四次的歐氏幾何學來表示.於是非歐幾何學的內容是否是一致,自然藉歐氏幾何而無疑的證明了.

葛萊與克萊恩曾用射影的方法,引入所謂無限界(absolute)的觀念,因無限界有虛的,實的和退縮的區別;所以幾何也分成三種,這三種就是橢圓幾何學,雙曲線幾何學和歐氏幾何學.於是歐氏幾何學與非歐幾何學,又從另一方面找得統一的理論.

近世關於此種理論的說法很多,像 Pasch, Hilbert, Peano, Pieri, Veblen, Russell 等都有很奇妙的理論,因爲限於程度,這裏也不多說了.

第十四章

我們宇宙的幾何形式

§196. **導言** 幾何學既然有許多種,並且各種都能自成一說;那麼我們宇宙的幾何形式究竟是屬於那一種呢?

1. 我們可以仿物理學的實驗法,用實驗來證明他是屬於那一種麼?換句話說:我們可以用經驗來判斷他是屬於那一種麼?

2. 假設經驗不能判斷,那麼由哲學的立場,可以斷定他是屬於那一種麼?

3. 假使經驗與哲學都不能判斷他是屬於那一種,那麼這個問題還能有答案麼?

現在我把這三層的疑問,分別研究於下:

§197. 經驗能解答這個問題嗎?我們知道:無論在物理學上,結晶學上,或其他技術科學上,我們所想像的線,面,等,常常和歐氏幾何學上所說的線,面一樣的;並且這些線面的幾何形式,也常常服從歐氏幾何學的定理的.譬如一個三角形,由實地的測量,總覺得三

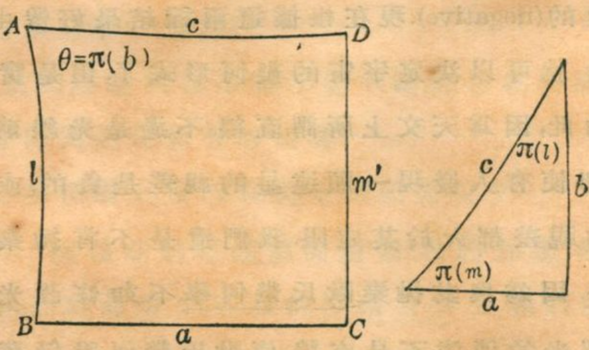
角形三內角之和等於兩直角.所以據經驗看來,我們宇宙的幾何形式似乎是屬於歐几里得的;但是仔細一想,我們所能直接測量的三角形的角朒或角盈都是很小的(§105.20定理37及§173定理19),並且所用的測量儀器也不見得很精密,有這兩種原因,我們就很難發覺這樣小的三角形三內角之和究竟是大於,等於或小於兩直角;所以在地球表面上要實驗出,我們宇宙的幾何學形式是屬於那一種,這是不可能的.那麼在天文上是可能的麼?這也有人研究過,知道:(一)倘若我們宇宙的幾何形式是屬於羅波切夫斯基的,那麼一顆很遠的恆星的視差(parallan),應當是有限的.(二)倘若是屬於黎曼的,那麼一顆很遠的恆星的視差,應當是負的(negative).現在根據這兩種結果,好像由天文的實驗,就可以決定宇宙的幾何形式了,但是實際上,並不如此,因爲天文上所謂直線,不過是光線前進的路程,卽使有人發現一顆遠星的視差是負的,或所有遠星的視差都大於某定限.我們還是不肯拋棄歐氏幾何學.因爲與其拋棄歐氏幾何學,不如修改光學的定律,認光的傳達不是直線,使歐氏幾何學仍舊可以適用來得便利.所以在天文上,也沒有法子斷定我們宇宙的幾何形式究竟是屬於那一種.

再由另一方面看來,用實驗的方法,不但不能確定

我們宇宙的幾何學形式是屬於那一種,並且覺得屬於任何一種都是一樣的.我說這話,一定有人覺得詫異.以為我們的宇宙怎樣屬於任何一種,都是一樣的呢?這話豈不是不合邏輯麼?現在要知道這話的來因,且看下面的實驗.

假設我們宇宙的幾何學形式是屬於羅波切夫斯基的.於是在一張很平的紙上,用很精密的儀器,畫一個三直角四邊形 $ABCD$. BC, CD 都是直角邊. BC, CD 的長為 1 粎 (mètre) 設空間常數的單位也是用"粎"表示出來,於是由第九十五圖及三角公式得

$$\cos\theta = \mathrm{sh}^2\frac{1}{k}$$

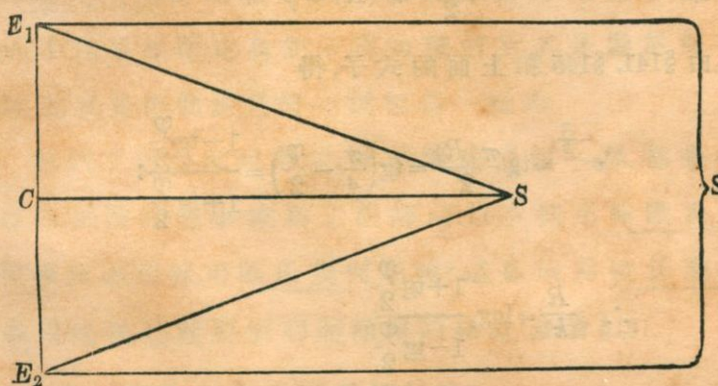


第九十五圖

由這個算式,可知空間常數 k 若是大於 5000 粎以上, θ 與 $90°$ 之差就不到 $\frac{1}{100}$ 秒.若 k 比 500 公尺還要大

得多，θ 與 90° 之差就要更小，我們就更難用實驗來證明 θ 不等於 90° 了.

現在由天文上測定 k 的數值於下：設 S 是一顆遠星所在的位置，(見第九十六圖) E_1, E_2 是地球軌道的直徑的兩端點，C 是太陽所在的位置，設 $E_1C=R$，又 $CS\perp E_1E_2$，於是 E_1SC 角就是遠星 S 的視差.



第九十六圖

現在要測定視差 E_1SC 有兩個方法：即直接法與 Bessel 的方法. 直接法就是用"中星儀"直接測出 SE_1C 角，於是 S 星視差 E_1SC 若在歐氏假設之下，應當等於 $\frac{\pi}{2}-\angle SE_1C$. Bessel 的方法. 就是根據星的亮度的暗淡和其他的情形，選定一顆比 S 更遠的遠星 S'. 設現 S' 在無窮遠處. 於是假設我們宇宙是歐几里得的，即 $E_1S'\parallel CS$. 因此視差 E_1SC 等於 $S'E_1C$ 角.

但是我們的宇宙若是屬於羅波切夫斯基的,那麼這兩種方法所得的結果,就因爲$\angle SE_1C+\angle S'E_1S$不等於$\frac{\pi}{2}$,祇等於平行角$\pi(E_1C)=\pi(R)$而不同了.現在假設這兩種方法所得結果的差數爲$\varphi$,即

$$\left(\frac{\pi}{2}-\angle SE_1C\right)-\angle S'E_1S=\varphi$$

即 $$\frac{\pi}{2}-\pi(R)=\varphi$$

由§141, §145和上面的式子,得

$$e^{-\frac{R}{k}}=\operatorname{tg}\frac{\pi(R)}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}};$$

$$\therefore\quad \frac{R}{k}=\log_e\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

即$\frac{R}{k}$差不多等於$2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$

現在爲求一顆遠星的視差起見,選定一顆遠星,叫做天南星或南門二(α centauri),這顆天南星的視差有人用直接法求得爲1.14″,又用Bessel的方法,求得爲0.76″±0.01″,所以$\varphi=1.14''-0.76''=0.38''$,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{92}{10^8},$$

於是 $$\frac{R}{k}\doteq\frac{184}{10^8},$$

即 k 差不多是550000倍於 R, 即差不多要五十萬倍於地球軌道的半徑. 因爲有這樣大的 k 所以我們不但不能測出第九十五圖那樣小的三直角四邊形的 θ 不等於90°, 就是任何大的三角形, 祇要他是在我們宇宙裏, 都很難測出他的三內角之和不等於兩直角.

所以在實用上, 我們把宇宙看作歐儿里得的或非歐儿里得的都是一樣的, 因此上面說: 用實驗的方法, 不但不能斷定我們宇宙的幾何形式是屬於那一種, 並且覺得屬於任何一種都是一樣的.

我們宇宙的幾何形式, 旣然屬於任何一種, 都是一樣的, 那麼物理學家與工程師何以不採用非歐氏幾何學而必須採用歐氏幾何學呢? 這是因爲歐氏幾何學用起來, 比較要便利而簡單的緣故(參看§18).

§198. 哲學能解決這個問題麼?

經驗不能解決這個問題, 上面已經說過了. 現在再看哲學能解決這個問題不? 我們知道: 幾何學所研究的對象是空間, 試看哲學家對於空間的意見如何. 康德(1)說:「"空間"這個概念, 不是從經驗得來的. 他是吾人心中固有的格式(framework), 人類沒有這種格式就不能形成外界的現象」. 邦家海說:「歐儿里得的空間與

(1) I Kant: Critigue of pure reason, Chapter 1.

(2) H. Poincare: La science et l' Hypothese.

非歐的空間,都是由無定形連續體抽象出來的.我們由這種連續體,可以抽出歐几里得的空間,也可以抽出非歐的空間,這猶之乎,未刻度的寒暑表,祇要適當的分度,可以造成華氏表,也可以造成列氏表」.邦家海又說:「幾何學所研究的空間與經驗的空間是大不相同的.幾何學的空間是:連續的,無窮的,三度的,同質的(卽各點都是相同的),同位的.(卽經過一點的各線都是相同的).經驗的空間是由視覺的空間 (visnal space),觸覺的空間 (tactual space) 動覺空間 (motor space), 結合而成的.這三種空間都與幾何學的空間不相同的.譬如視覺的空間,因爲眼膜上各點的作用不相同,所以不是同質的,並且由眼膜形成印象都是二度的.總而言之:經驗的空間不是同質的也不是同位的,並且也不能說他是三度的,他和美麗的幾何學空間是大不相同的"」.

根據邦家海的研究,可知幾何學的空間不是經驗的空間,所以幾何學的公理,也不是經驗的事實.而幾何學也不是經驗的科學或實驗的科學.所以我們不能由實驗來證明那一種幾何學就是我們宇宙的幾何形式.

邦家海又說:「幾何學的公理也不是康德所謂先驗

的綜合判斷(1),如若是先驗的綜合判斷,那麼平行公理就不能有三種的可能(§18),我們也沒有三種不同的幾何學了」.

根據哲學的研究,可知幾何學的公理不是先驗的綜合判斷,也不是經驗的事實,乃由人類思想所產生的公約(Convention)或戴假面具的定義.公約與定義原來可以自由產生的,所以幾何學可以有許多種,這許多種幾何學都與經驗毫無關係的,因此也就不知道那一種幾何學與經驗的宇宙吻合的.

就歷史上看來,經驗與幾何學確實有密切的關係的.經驗在幾何學的萌芽上,確實佔着重要的地位的(§1).但是幾何學,自從幾何原本誕生以後,一方面受論理學的影響,就不知不覺的脫離了經驗;一方面因爲大家都很信仰經驗,所以也不覺得幾何學與經驗是兩件事.甚至於有人竟根據直覺的經驗而斷言:"凡曲線既然有切線,那麼連續函數也應當有微分係數,

(1) 像下面的命題,眞正是先驗的綜合判斷:"一個命題若是對於一是眞的,并且證明對於 $n+1$ 也是眞的,那麼這個命題對於一切的正整數都是眞的.(這就是算學的歸納法)"凡屬於先驗的綜合判斷的命題都不會有他命題與他相反的,更不能在這相反的命題上建立一種理論.所以幾何學的公理若是屬於一種先驗的綜合判斷,那麼羅氏及黎氏的平行公理就不能存在,非歐派幾何學也更不能存在.

即連續函數應當可以微分的(differentiable)"不料互亞斯特拉斯(Weierstrass)於1861年發現連續函數也有不能微分的,於是經驗就大受打擊,從此信用掃地,而算學家也從此力謀改革算學的立論,使他脫離經驗以達到他永遠是眞美的科學.

幾何學既然是人類思想的產物,不是經驗的科學;那麽,何以應用到天文學上,物理學上及一切實物上,毫不發生問題呢;這豈不是,不必經驗,祇須人類的推理就可以發現實物的性質了麽?這又不然,幾何學應用到我們宇宙裏,常常要借重經驗的.譬如許多種幾何學呈現在我們腦中,我們要把他應用到我們宇宙裏,自然的,要選擇最便利而最簡明的一種來應用.舉行這個選擇,就需要經驗來指導了.所以經驗雖不能斷定我們宇宙的形式是屬於那一種幾何學;但是能辨別那一種幾何學應用到我們宇宙裏來得最便利而最簡明(§18).

愛恩斯坦(1)(Albert Einstein)把應用於宇宙的幾何學叫做實用幾何學(Practical geometry).其與經驗無關的幾何學叫做純公理幾何學(Pure axiomatical geometry)實用幾何學也是應用算學之一門,也是自然科學之一種,這和從前的哲學家主張:算學是自然科學之一

(1) 見 La gèométrie et l'experience.