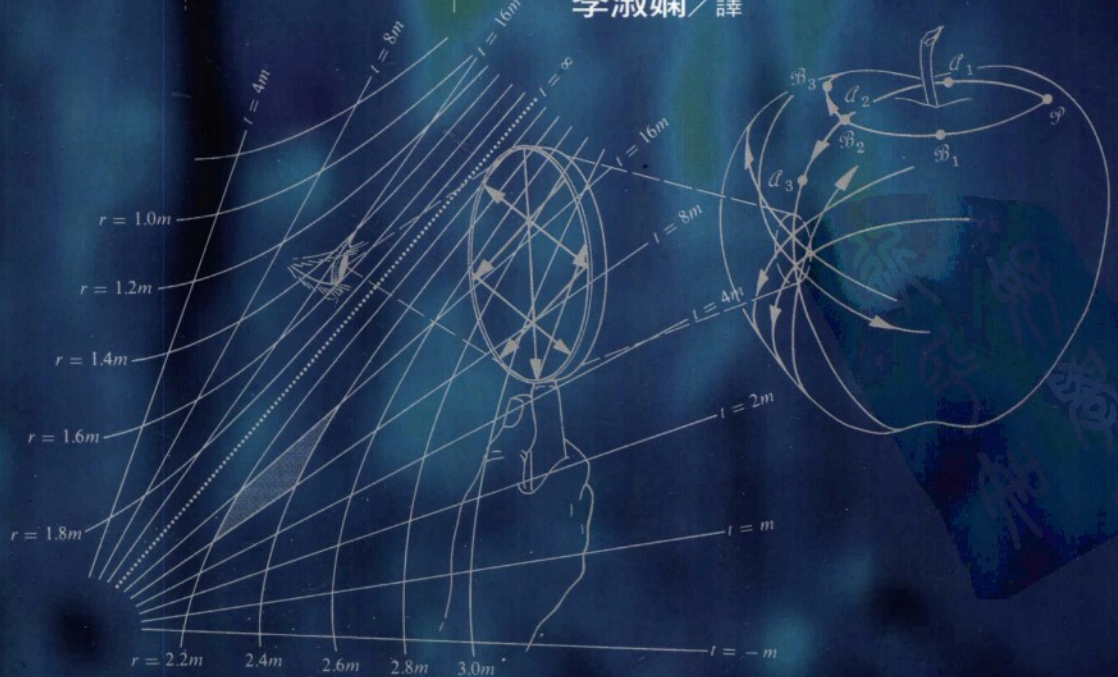
GRAVITATION

引力論

Charles W. MISNER
Kip S THORNE
John Archibald WHEELER／著
陳秉乾
馬　駧
陳熙謀
李淑嫻／譯



引力論

GRAVITATION

ISBN 957-09-1133-6 (321)

01350

9 789570 911336

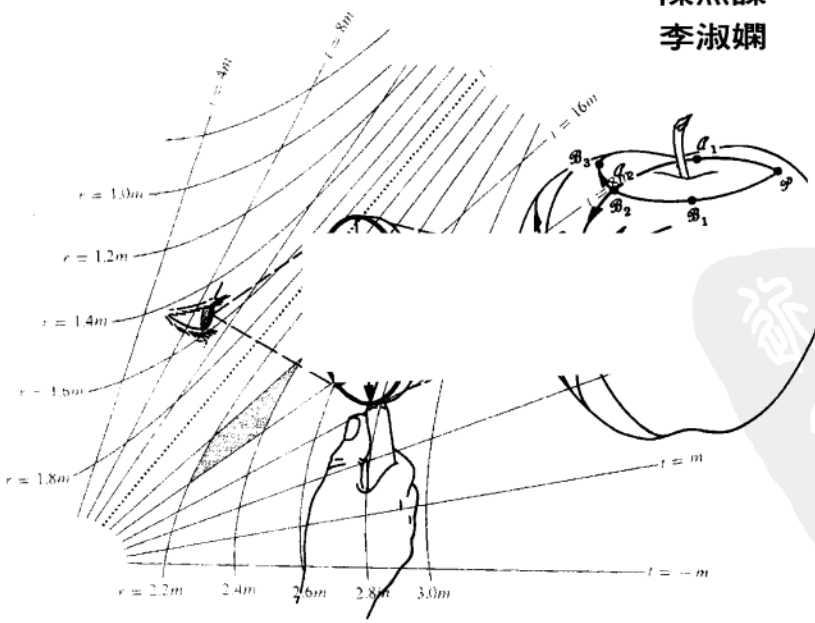
GRAVITATION
引力論

作者 / C. W. 麥思納
Charles W. Misner

K. S. 索恩
Kip S. Thorne

J. A. 惠勒
John Archibald Wheeler

譯者 / 陳秉乾
馬駧
陳熙謀
李淑嫻



國家圖書館出版品預行編目資料

引力論／李淑嫻等譯 .--臺初版 .--臺北市
：正中，民86
面； 公分.
含參考書目及索引
譯自：Gravitation
ISBN 957-09-1133-6(平裝)

1.引力

321.1 86014121

引力論《大學用書》

作　　者◎C.W.麥思納 · K.S.索恩 · J.A.惠勒
譯　　者◎陳秉乾 · 馬駰 · 陳熙謀 · 李淑嫻
總 編 輯◎陳怡廣
責任編輯◎呂佩俐
封面設計◎黃馨玉

發 行 人◎單小琳
出版發行◎正中書局股份有限公司
地　　址◎台北縣(231)新店市復興路43號4樓
電　　話◎(02)8667-6565
傳　　真◎(02)2218-5172
郵政劃撥◎0009914-5
網　　址◎http://www.ccbc.com.tw
E-mail:service@ccbc.com.tw
門 市 部◎台北市(100)衡陽路20號3F
電　　話◎(02)2382-1153 · 2382-1394
傳　　真◎(02)2389-2523
香港分公司◎集成圖書有限公司—香港九龍油麻地北海街七號
TEL：(852)23886172-3 · FAX：(852)23886174
歐洲分公司◎英華圖書公司—14,Gerrard Street,London,W1V 7LJ U.K.
TEL：(0207)4398825 · FAX：(0207)4391183
泰國分公司◎集成圖書公司—曼谷耀華力路233號
TEL：2226573 · FAX：2235483
美國辦事處◎中華書局—135-29 Roosevelt Ave. Flushing, NY 11354 U.S.A.
TEL：(718)3533580 · FAX：(718)3533489
日本總經銷◎光儒堂—東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地
TEL：(03)32914344 · FAX：(03)32914345

總 經 銷◎紅螞蟻圖書有限公司 TEL：(02)2795-3656 · FAX：(02)2795-4100
行政院新聞局局版臺業字第0199號 (9161)
分類號碼◎321.00.001 (祥新)
出版日期◎西元1997年12月臺初版
西元2002年11月臺初版第2次印行

ISBN 957-09-1133-6
定價／1350元

版權所有 · 翻印必究 Printed in Taiwan

國際中文版授權 © W.H.FREEMAN and COMPANY PUBLISHERS
"Copyright © 1970 and 1971 by Charles W.Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler. Chinese language edition. All Right Reserved".
Chinese language copyright © 1997 CHENG CHUNG BOOK CO., LTD.

符號約定表

文獻	g 符號	Riemann	Einstein	空時四維	空時指標
Landau, Lifshitz (1962)「類空約定」	+	+	+		拉丁
Landau, Lifshitz (1971)「類時約定」	−	+	+		拉丁
Misner, Thorne, Wheeler (1973，本書)	+	+	+	希臘	
Adler, Bazin,Schiffer (1965)	−	−	−	希臘	
Anderson (1967)	−	−	− b	希臘	
Bergmann (1942)	−	− a	−	希臘	
Cartan (1946)		−	−		
Davis (1970)	−	+	−		拉丁
Eddington (1922)	−	+	−	希臘	
Ehlers (1971)	+	+	+		拉丁
Einstein (1950)	−	+	−	希臘	
Eisenhart (1926)		+	−		
Fock (1959)	−	− a	−	希臘	
Fokker (1965)	−	−	+		拉丁
Hawking 和 Ellis (1973)	+	+	+		拉丁
Hicks (1965)		+	+		
Infeld, Plebanski (1960)	−	+	+	希臘	
Lichnerowicz (1955)	−	+	+	希臘	

McVittie (1956)	−	+	−	希臘	
Misner (1969 a)	+	+	+	希臘	
Moller (1952)	+	−	−		拉丁
Pauli (1958)	+	−	−		拉丁
Penrose (1968)	−	−	−		拉丁
Pirani (1965)	−	−	−		拉丁
Robertson, Noonan (1968)	+	+	−		拉丁
Sachs (1964)	±	+	+		拉丁
Schild (1967)	−	+	−		拉丁
Schouten (1954)		−	+		
Schroedinger (1950)	−	+	−		拉丁
Synge (1960 b)	+	+	−		拉丁
Thorne (1967)	−	+	+	希臘	
Tolman (1934 a)	−	+	−	希臘	
Trautman (1965)	−	−	−		拉丁
Weber (1961)	+	+	+	希臘	
Weinberg (1972)	+	−	−	希臘	
Weyl (1922)	−	+	+		拉丁
Wheeler (1964 a)	+	+	+	希臘	

[a] 置於各 **Riemann** 分量上的非常用指標對 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 給予不同的符號。

[b] 注意：它的 $\kappa<0$ ，爲引力常數之負值。

符 號 約 定

本書遵循「Landau-Lifshitz 類空約定」(LLSC)。下述各箭頭所標明之符號均爲「+」。前表則指出其他作者採用之符號。

$$+\mathbf{g}=-(\boldsymbol{\omega}^0)^2+(\boldsymbol{\omega}^1)^2+(\boldsymbol{\omega}^2)^2+(\boldsymbol{\omega}^3)^2$$

g 符 號
(第二列)

$$\longrightarrow +\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}-\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}-\nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}$$

$$\longrightarrow +R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}=\partial_\alpha\Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}-\partial_\beta\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}+\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta}-\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}$$

Riemann 符號
(第三列)

$$+R_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$$

Einstein和 ***Riemann***
符號之商

$$\textit{Einstein}=+8\pi\mathbf{T}$$

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=+8\pi T_{\mu\nu}$$

Einstein 符號
(第四列)

$$T_{\hat{0}\hat{0}}=\mathbf{T}(\mathbf{e}_{\hat{0}},\mathbf{e}_{\hat{0}})>0$$

所有作者都同意此
「正能密度」符號

上述 ***Riemann*** 符號之選擇對於無坐標方法而言是方便的，例如上述曲率算符 $\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{v})$，例如曲率2-形式 (14.19式)，以及矩陣運算 (練習14.9)。Ricci 和 Einstein 的定義連同上面選用的符號，使得它們對於具有正定度規之標準球的本徵值 (和 $R\equiv R^{\mu}{}_{\mu}$) 爲正。

作者 J. A. Wheeler 專為中文版寫的前言

自從本書1973年問世以來，引力物理的進展充分說明了它是何等的重要。新效應的檢驗和老效應的更精確檢驗，都證實了 Einstein 理論的充滿活力的預言，這一理論從1915年起就久經論戰的考驗，但至今仍是標準的理論。有希望的努力是正在進行中的探察和測量旋轉質量所產生的廻轉引力，這個力與靜引力的關係正如磁與電的關係一樣。

Einstein 的理論告訴我們，引力並不是外來的、穿越空間傳佈的實體的力，而是空間曲率的表現，它還告訴我們，在全宇宙內黑洞是最簡單，最理想的質量負荷者。這樣，引力理論就把兩個表面上似乎相距很遠的領域聯繫起來了。一個是當今奇妙非凡的天體物理，它長於研究散布在天空各處的黑洞對氣體的吸積並確定其位置。另一個是以黑洞表面積量度的信息或熵。Einstein 把引力翻譯成幾何，開闢了一個思維境界。黑洞物理把幾何翻譯成信息－理論的語言，開闢了當今一個激動人心的新的思維境界。

我們是否可以認爲有三個物理時代？第一個時代，從 Galileo 的拋物線、Kepler 的橢圓算起，這是運動沒有得到解釋的時代？第二個時代，從 Newton的力學、Maxwell的電動力學以及 Einstein 的幾何動力學一直延續到現代電動力學和弦理論，這是定律沒有得到解釋的時代？而正在到來的第三個時代，它具有某種比運動比定律更深刻的東西作爲核心概念，即信息本身？

Cartan 揭示出的 Einstein 理論的結構所給予的推進是無以倫比的，它促使我們去思考，物理定律是建立在某種比物理定律更深刻的事物之上的，這種考慮，在第15章中表述爲，在一個小的三維區域中能量－動量的總和由該區域邊界上的轉矩（與曲率有關）之和給出。這個結構利用了「一個三維區域的二維邊界的一維邊界自動爲零」的原理。顯然，自然界不需要大、小齒輪，或錯綜複雜的接線圖或精緻的結構。在電動力學、色動力學及弦理論中，自然界又令人驚異地兩次以上同樣地使用了「邊界的邊界是零」（1-2-3和2-3-4）的原理。這使我們相信，當我們認識到宇宙是多麼奇特時，我們也正開始懂得宇宙是多麼簡單。

在我們沉思於這些大問題的同時，我們還利用引力從太空中，從鑽孔裏發掘新材料，利用引力駕馭潮汐，導引人造衛星。多麼偉大的課題，何等漫長的歷程！

Charles W. Misner
Kip S. Thorne
John Archibald Wheeler

1986年 5 月29日

蟹狀星雲（NGC 1952），1054年7月超新星之遺迹，這一事件是宋朝國家天文臺（司天監）在開封觀測和記錄的。迄今900年間，爆發的碎片已向外運動了約三光年，即碎片之運動速度約爲光速的1/300。1934年，Walter Baade 和 Fritz Zwicky 預言超新星爆發應產生中子星。在1968年發現的第一批半打脈衝星中，有一個就在蟹狀星雲的中央。它每秒脈動30次，對此，當今除中子星自轉外，別無可以接受的解釋。本照片所示之中國歷史記載列舉了北宋觀測到的異常天文現象，它引自1340年首次出版的宋史志卷九第五十六的「天文志」。按本圖剪輯之標準記錄照片是從大英博物館董事會複製的，非經他們允許，不得翻印。

蟹狀星雲圖

我們把這本書，

獻給我們的同胞。

他們熱愛真理，

節衣縮食，

付出捐稅，饋贈禮品。

還不時派遣，

他們中間的成員，

作為獻身的僕從，

來推進這項研究工作——

研究我們的「家」

陌生而美妙的宇宙。

揭開它的奧秘！

顯出它絕妙的單純！

序

本書是引力物理學（ Einstein 的「廣義相對論」或「幾何動力學」）的教科書。貫穿這個題目，本書提供了兩個階段。初階致力於關鍵的物理概念。它只需要矢量分析和簡單的偏微分方程爲數學準備。它適用於三年級或四年級水平或研究院中的一學期課程；並且，作者認爲，它構成了引力理論必不可少的核心，這是每個攻讀物理學的高年級學生都應當學習的。對本書中包含的初階內容，都在其每一頁的上角外側以灰色 1 畫出輪廓①，由此讀者一眼卽可辨出初階的有關章節。在目錄中，爲了同樣目的，在有關的節、框或圖號旁畫一條灰色槓。

本書的其餘部分把初階擴展到高階。作爲加深部分的材料，請讀者和教師選擇高階中他們最感興趣的那部分內容。除幾章外，讀者只需學過前面初階的內容，卽可理解高階的任何一章。這些例外，凡在高階每章開始之處，或在一章內每從初階過渡到高階之處，都以「附帶聲明」明確的詳加說明。

全書（初階的全部內容與高階的全部內容之和）是爲研究生水平的嚴格的全年課程設計的，雖則許多講授全年課程的教師可能寧願採取較爲從容的速度而略去高階的某些材料。全書試圖給予讀者在引力物理學方面的能力，可與一般電磁學哲學博士所具有的能力相比擬。當學生獲得此種能力時，他知道在平直空時中的物理學定律（第1—7章）。他能夠預告量級。他還能應用現代微分幾何的主要工具作計算（第 8—15 章），並且能夠在各種有關的精度水平上作出預告。他懂得物理學的 Einstein 幾何之輪廓（第16—22章）。他知道當今最偉大的有趣應用：脈衝量和中子量（第23—26章）；宇宙論（第27—30章）；Schwarzschild 幾何和引力坍縮（第31—34章）；以及引力波（第35—37章）。他查究了 Einstein 理論的實驗檢驗（第38—40章）。他將能閱讀有關微分幾何的現代數學文獻，以及刊載在物理學和天體物理學雜誌上的有關幾何動力

① 中文版只在目錄中加上黑色黑線，表示初階內容，其餘的爲二階內容，不每頁標明。

學及其應用的最新文獻。如果他希望超出場方程，四個主要應用及檢驗的範圍，他可在本書的末尾（第41—44章）找到廣義相對論中若干前沿課題的簡要述評。在此處提到的這些課題中，超空間和量子幾何動力學得到了特別的關注。從這些章可以辨明當今所追索的某些突出的物理論題以及研究路線。

無論物理系，天體物理系或數學系，越來越多的學生（在追求廣義相對論時，總是希望不限於單純的對話。他們渴望獲悉敍述清晰的廣義相對論主要論文。他們希望知道他們自己應該怎樣去「搖動廣義相對論情報泵的手柄」。很多大學用一系列 Einstein 標準的1915年幾何動力學課程作爲回答。這眞是 Maxwell 標準的1864年電動力學的鮮明對照！1897年，當 Einstein 在蘇黎世作學生時，甚至有半數歐洲大學都不把電動力學列入教學日程！[1] Einstein 的一個同班同學說：「我們徒然地等待着對 Maxwell 理論的解釋」，「最感失望的是 Einstein[2]，因爲他認爲電動力學是「當時最迷人的課題」[3]——這正是今天許多學生對 Einstein 理論的評價。

就花費時間贏得承認而言，使人們從 Maxwell 理論想起 Einstein 理論。甚至遲至1904年，在像 William Thomson, Kelvin 爵士這麼偉大的研究者所寫的書中，竟然還出現這樣的話：「所謂『光的電磁理論』，迄今爲止對我們並無幫助，……依我看，倒不如說它倒退了一步……在我看來，對此有一點似乎是可以理解的，但我並不認爲是可以採納的……即在垂直於傳播的方向上應當有電位移。」[4] 大西洋電纜的首創者終於對 Maxwell 電動力學作出了極爲豐碩的貢獻——從測量的單位和原理，以至金屬引導波的理論——這是否正因爲他自己對此課題早先就遇到了很多困難呢？因此，當今研究 Einstein 幾何動力學的許多人應該滿懷希望！由於二十年代的一些重大進展：從 Kelvin 的電纜到 Marconi 的無線電，從 Rutherfold 和 Bohr 的原子到高頻電路的新技術，產生了對 Maxwell 理論正確性的普遍信任。懷疑減少了，信任等導致應用，應用又導致信任。

許多人在開始接受廣義相對論時也很遲緩，因爲它似乎絕少應用。今天 Einstein 理論引起許多人的興趣也正因爲它具有廣泛的應用。已經不再限於注意三個著名而又貧乏的實驗：引力紅移，太陽造成的光線彎曲，以及水星近日點的繞日運動。雷達測距與廣義相對論的結合，正在一步一步地把老一代的太陽系天體力學轉變爲具有新的精度水平，新的效應和新的前景的全新課題。1968年所發現的脈衝星，除了1934年預言過的中子星外還沒有找到其它可以接受的解釋，中子星的中心密度極高（$\sim 10^{14}$克/厘米^3），對此 Einstein 的質

[1] G. Holton (1965)。引文可在書目（本書末）中查到。

[2] L. Kolbros (1956)。

[3] A. Einstein (1949 a)。

[4] W. Thomson (1904)。

量估計與 Newton 的估計相差達百分之十至百分之百。並且，有關進一步的密度增加以及最終的連續引力坍縮， Newton 理論一無可言。與此相反，Einstein的標準，1915年幾何動力學在1939年已預言了完全坍縮天體，即「凍結（3的）星」或「黑洞」的性質。1966年已有詳細的數字計算描述具有白矮星核的一恒星坍縮而形成這種天體的過程。今天，發現第一個黑洞的願望正成爲推動下述幾個研究項目的重要力量：旋轉怎樣影響黑洞的性質？黑洞形成時將產生何種形式的引力輻射脈衝？當伴星氣體堆積在通向黑洞的路上時將產生什麼樣的X射線譜？[5]所有這一切研究以及其他研究都是建立在 Einstein 場方程的 Schwarzschild 標準的1916年靜態和球對稱解基礎上的，它在1960年才第一次在現代的意義上得到了眞正的了解，並在1963年推廣至賦有角動量的黑洞。

幾何動力學（與電動力學相比！）就這個詞的全部含義而言，超出了相對論在太陽系的檢驗和應用的範圍，超出了脈衝星、中子星和黑洞的範圍，超出了幾何靜力學（與靜電學相比！）和穩態幾何學（與穩恒電流產生的磁場相比！）的範圍。 Einstein 的偉大概念在這裏比任何其它地方都更出色而明白：空間的幾何是具有自由度，具有其自身動力學的新的物理實體。 Einstein 在1918 年預言 ，空間幾何的形變可以把能量從一處輸送到另一處。今天，感謝 Joseph Weber 的發起，建起了這種引力輻射的探測器，並用來給出能以選定頻率通過地球的能流上限。以前從未有人認識到，可以期望這麼多種重要的引力輻射過程。正以前所未有的巨大興趣探測這種新型信號，並用以診斷遠方的種種事件。前所未有的推動力，推動着不只一個實驗室提高儀器的靈敏度，直到使引力輻射成爲對宇宙的一個常用的新窗口。

宇宙的膨脹是對 Einstein 幾何動力學的全部檢驗中最重大的檢驗，而宇宙論則是各種應用中最重大的應用。早在宇宙膨脹被觀測到（1929年）之前很多年，理論就預言了它，在當時，這一預言甚至連作者自己都覺得太荒誕而不敢相信。在 Hubble 得出膨脹的短時間尺度所造成的紛亂面前，不顧各種「理論」（「穩恒態」、「連續創造」）對這種短時間尺度的歡迎和運用，標準的廣義相對論堅決地堅持長的時間尺度，數十年之後，天體物理才發現（1952）Hubble 的距離和時間尺度是錯誤的，必須擴充五倍以上。與近至 1958 年根據天體物理學證據推演得出的宇宙平均質量-能量密度相差三十倍左右，現在，Einstein 理論與過去一樣論證應有更高的密度，宣布「迷失物質之謎」，並鼓勵天體物理學在年復一年的不斷搜索中，去發現在星系間空間中物質存在的新迹象。在原始宇宙火球輻射發現之前十七年，廣義相對論就預言了它，並且甚至還預報了它現在溫度的近似值。這一輻射帶來了早先宇宙的信息，當時的宇宙比今天宇宙的線性尺度小一千倍，體積小十億倍。1963年發現的類星體提供

[5] 1973年4月，有重要的迹象表明天鵝座 X-1 和其他緻密 X 射線源可能是黑洞。

譯 後 序

當我終於結束這本書的最後一個字的校訂時，我長長地舒了一口氣，爲我的朋友們，也爲我自己。看來，我們十數年的堅持不懈的努力不至於付諸東流。

中國古代有「十年磨一劍」的故事，誰料想在當今會有「十年譯一書」的故事呢？

中國大陸各高等學校，在停止正常教學科研十年之後，於1977年重新開始恢復招生，到1980年代初，剛剛招齊了各年級的學生，各類課程也得以正式開課，此時我從北京外文書店「內部影印部」買到這本厚書。在書的正文開始之前的扉頁上，赫然印著木刻版的中文，那是「宋史志卷九」中的一頁。九百多年之前，宋朝國家天文臺（司天監）的中國天文學家，準確細緻而生動地記載了一些異常的天文現象。近代的天體物理，認證了其中的一些客星是超新星的爆發。至今，在國際天文界，這些超新星遺迹仍然沿用當時的年代來命名；而那些中國古代的記錄在科學研究中也仍然有不可取代的價值。此事深深地打動了我。

1981年的金秋，本書作者之一，John Archibald Wheeler 教授訪問中國，在中國各大學做了一系列精彩演講。他的演講和風趣的答問在北大引起我的興趣，而在中國系統講授廣義相對論的書並不太多，我們決定翻譯此書。

此書取材豐富，旁證博引，翻譯有相當的難度；我們每人又都有繁重的教學科研任務，但工作進程順利。1986年完成主要部分的初稿， Wheeler 教授爲中文版寫了前言，北京高等教育出版社欣然接受出版，1988年該出版社的理論物理編輯楊再石先生已對本書的上册約50萬字作完編輯加工及製圖的準備，預期第二年見書。

第二年是多事的1989，北京高等教育出版社正式退稿，繼之我離開了中國，離開了我從事33年教學的北京大學。

在我和我的丈夫方勵之離國的第一站，英國劍橋大學的校園裏，正中書局總經理黃肇珩來訪，當她知道這個故事後，熱情接受出版此書。我們的朋友

湯敦序博士，不辭勞苦也不怕可能遇到的麻煩，把 100 多萬字足有十磅重的譯稿，輾轉從中國大陸悄悄帶出，直接送到劍橋我們的住處。

經歷一年多的奔波遷徙，當我們安定下來，我正對譯稿作最後的統一校改定稿時，正中書局告訴我有關新近提出的智慧財產權的問題。我能夠理解正中書局面臨的難處。

其實，在我們決定譯此書時就明確地知道，儘管這是一本極有價值的科學專著，一本極佳的教材，但它的銷量是極有限的。它已經培育了幾代有志於研究宇宙奧秘的人，它也將以人類智慧的一個時期的記錄而流傳下去，但讀者卻是可數的。簡言之：這是一本好書，但不是一本賺錢的書。

1981年 Wheeler 教授剛知道我們要譯此書時就激動地說：「我非常高興我們的書有機會用中文出版，這是我們的光榮，因爲世界上有最多的人口使用中文或說華語」。1991年我訪問馬里蘭大學 (University of Maryland) ，當 Misner 教授知道我正在爲此書中文版努力，他興奮之餘把他的新著又送給我。爲了推進此書的順利問世，1993年 Wheeler 教授不顧高齡來往於幾位著者和原出版公司之間，最後得到一致同意。三位著者一致簽署，授權正中書局出版我們所譯的本書中文版；原美國出版公司 W. H. FREEMAN AND COMPANY 極其友好地表示：遵照幾位原著者的意願，授權正中書局出版由我們所譯的 GRAVITATION 中文版，且免去本應給公司的版稅。

在各國維護自身合理且合法利益的商業競爭中，這是一個例外。然而，在國際科學界，例外的事時有發生，因爲，在人類的這個群體中，還有更高的原則與追求。

Wheeler 教授在得知此書終將面世時，問過我：「中國大陸的學生和學者能看見或買到這個中文版嗎？」我毫不猶疑地回答：「一定能！」因爲我相信世界的進步潮流，而中國人必然在此潮流之中。科學發端於人類理性的交融，她需要自由的思想，自由的交流，她屬於全人類；她使人類生活得更有智慧，更有尊嚴也更加文明，使世界更美好。當今的信息發展爲交流插上了翅膀，沒有任何力量能阻隔它。

此書經過如此長的歷程，終于能和讀者見面，要感謝所有幫助過我的朋友。尤其是三位原著者 Charles W. Misner 教授，Kip S. Thorne 教授，John Archibald Wheeler 教授，感謝 W. H. Freeman and Company 公司，感謝湯敦序博士。

還要特別提到的是，在這本譯作幾近夭折時，正中書局熱情接下它，幾年來歷任編輯勤懇認眞地對它加工。爲了讀者在閱讀中查找方便，每一頁都比照原文格式排版。這在譯作中並不多見。如今，這本名著能以現在的風貌呈現在讀者面前，正中書局以及爲它辛勞的編輯是功不可沒的。在此一併致謝。

最後，我祝願：不要再重覆我們的故事。

李淑嫻 1995年年3月於 Tucson. Arizona, USA

引　力　論

目　次

第一篇　空時物理學 1

第一章　幾何動力學概要 3

§1. 1 蘋果的寓言 3
§1. 2 帶坐標和不帶坐標的空時 5
§1. 3 失重 13
§1. 4 帶坐標和不帶坐標的局域 Lorentz 幾何 19
§1. 5 時間 23
§1. 6 曲率 29
§1. 7 物質對幾何的效應 37

第二篇　平直空時中的物理學 45

第二章　狹義相對論基礎 47

§2. 1 概論 47
§2. 2 幾何客體 48
§2. 3 矢量 49
§2. 4 度規張量 51
§2. 5 微分形式 53
§2. 6 梯度和方向微商 59
§2. 7 幾何客體的坐標表述 60
§2. 8 離心機和光子 63
§2. 9 Lorentz 變換 66
§2.10 碰撞 69

第三章　電磁場 71

§3. 1 Lorentz 力和電磁場張量 71
§3. 2 普遍意義下的張量 74

§3. 3 3+1觀點與幾何觀點的比較 78
§3. 4 Maxwell 方程 79
§3. 5 用張量運算 81

第四章 電磁學和微分形式 90

§4. 1 外微分 90
§4. 2 電磁2-形式和 Lorentz 力 99
§4. 3 諸形式說明電磁學以及電磁學說明諸形式 105
§4. 4 輻射場 110
§4. 5 Maxwell 方程組 112
§4. 6 外微分和閉合形式 114
§4. 7 來自局域定律的超距作用 120

第五章 脅强-能量張量和守恒定律 130

§5. 1 初階概述 130
§5. 2 三維體積和脅强-能量張量的定義 130
§5. 3 脅强-能量張量的分量 137
§5. 4 粒子羣的脅强-能量張量 138
§5. 5 理想流體的脅强-能量張量 139
§5. 6 電磁脅强-能量 140
§5. 7 脅强-能量張量的對稱性 141
§5. 8 四維動量守恒：積分公式 142
§5. 9 四維動量守恒：微分公式 146
§5.10 $\nabla \cdot T = 0$ 的應用舉例 152
§5.11 角動量 156

第六章 加速的觀測者 163

§6. 1 加速的觀測者可用狹義相對論分析 163
§6. 2 雙曲運動 166
§6. 3 對加速參照系大小的限制 168
§6. 4 均勻加速觀測者所携帶的四重軸 169
§6. 5 具有任意加速度的觀測者作了的 Fermi-Walker 遷移的四重軸 170
§6. 6 加速觀測者的局域坐標系 172

第七章 引力* 與狹義相對論的不相容性 177

§7. 1 把引力併入狹義相對論的嘗試 177
§7. 2 由能量守恒導出引力紅移 187

*在經典力學中常譯為「重力」此二種譯法是等同的

§7. 3　引力紅移意味着空時彎曲　187
§7. 4　作爲等效原理證據的引力紅移　189
§7. 5　局域平直，整體彎曲　190

第三篇　彎曲空時的數學　193

第八章　微分幾何：概論　195

§8. 1　第三篇概述　195
§8. 2　初階和高階的比較：觀點和功用上的差異　197
§8. 3　幾何學的三方面：圖示、抽象和分量　198
§8. 4　彎曲空時中的張量代數　201
§8. 5　平行移動，協變微商，聯絡係數，短程線　207
§8. 6　局域 Lorentz 系：數學推論　217
§8. 7　短程線偏離和 Riemann 曲率張量　218

第九章　微分拓樸　225

§9. 1　在無度規無短程線空時中的幾何客體　225
§9. 2　「矢量」和「方向微商」改善爲切向矢量　226
§9. 3　矢量的基，分量和變換定律　230
§9. 4　1-形式　231
§9. 5　張量　233
§9. 6　對易算符和圖示技術　235
§9. 7　流形和微分拓樸學　240

第十章　仿射幾何學：短程線、平行移動和協變微商　244

§10. 1　短程線和等效原理　244
§10. 2　平行移動和協變微商：圖示方法　245
§10. 3　平行移動和協變微商：抽象方法　247
§10. 4　平行移動和協變微商：分量方法　258
§10. 5　短程線方程　262

第十一章　短程線偏離和空時曲率　265

§11. 1　曲率壓軸戲　265
§11. 2　鄰近短程線的相對加速度　265
§11. 3　潮汐引力和 Riemann 曲率張量　270
§11. 4　繞閉合曲線的平行移動　277
§11. 5　平直性等階於 Riemann 曲率爲零　283

§11. 6 Riemann 簡正坐標 285

第十二章 用彎曲空時語言表示的 Newton 重力 289

§12. 1 Newton 重力概要 289
§12. 2 Newton 空時的層理 291
§12. 3 Galileo 坐標系 292
§12. 4 Newton 重力的、幾何的、無坐標的闡述 298
§12. 5 物理學的幾何觀點：評論 302

第十三章 Riemann 幾何：度規作爲一切的基礎 304

§13. 1 狹義相對論的局域有效性影響幾何的新特徵 304
§13. 2 度規 305
§13. 3 彎曲空時幾何的短程線與局域 Lorentz 幾何的直線之間的一致性 312
§13. 4 短程線作爲致極原時的世界線 315
§13. 5 ***Riemann*** 的由度規導致的性質 324
§13. 6 加速觀測者的固有參照系 327

第十四章 曲率的計算 333

§14. 1 曲率作爲理解物理學的手段 333
§14. 2 構成 Einstein 張量 343
§14. 3 更有效的計算 344
§14. 4 短線程 Lagrange 函數方法 344
§14. 5 曲率2-形式 348
§14. 6 用外微分形式計算曲率 354

第十五章 Bianchi 恒等式和邊界的邊界 364

§15. 1 Bianchi 恒等式概要 364
§15. 2 Bianchi 恒等式 $d\mathcal{R}=0$ 作爲「邊界的邊界＝0」的表現形式 372
§15. 3 轉矩：縮並 Bianchi 恒等式的關鍵 373
§15. 4 轉矩的計算 375
§15. 5 從「邊界的邊界爲零」查看轉矩的守恒 377
§15. 6 用微分形式表示的轉矩守恒 378
§15. 7 從轉矩守恒到 Einstein 幾何動力學：預演 379

第四篇 Einstein的引力幾何理論 383

第十六章 等效原理和「引力場」的測量 385

§16. 1 概述 385
§16. 2 彎曲空時中的物理學定律 385
§16. 3 等效原理中的因子順序問題 388
§16. 4 用以測量空間和時間間隔的杆和鐘 393
§16. 5 引力場的測量 399

第十七章 質量-能量怎樣產生曲率 404

§17. 1 作爲場方程表述中心思想的源的自動守恒 404
§17. 2 源的自動守恒：動力學的必然 408
§17. 3 宇宙常數 409
§17. 4 Newton 極限 412
§17. 5 把 Einstein 理論公理化嗎？ 416
§17. 6 「沒有前幾何」：Einstein 理論與其他重力理論的重大區別 429
§17. 7 領略 Einstein 方程的歷史 431

第十八章 弱引力場 435

§18. 1 重力的線性理論 435
§18. 2 引力波 442
§18. 3 重力對物質的效應 442
§18. 4 近 Newton 引力場 445

第十九章 引力系統的質量和角動量 448

§19. 1 弱引力源的外場 448
§19. 2 質量和角動量的測量 450
§19. 3 完全相對論性的質量和角動量 451
§19. 4 閉宇宙的質量和角動量 457

第二十章 四維動量和角動量守恒定律 460

§20. 1 概述 460
§20. 2 四維動量和角動量的 Gauss 流量積分 461
§20. 3 四維動量和角動量的體積分 464
§20. 4 爲什麼引力場的能量不能局域化 466
§20. 5 總四維動量和角動量守恒定律 468
§20. 6 從場方程導出運動方程 471

第二十一章 變分原理和初值數據 484

§21. 1 動力學需要初值數據 484
§21. 2 Hilbert 作用量原理和 Palatini 變分法 491

§21. 3 物質的 Lagrange 函數和脅强-能量張量 504
§21. 4 把空時分割爲空間和時間 505
§21. 5 內稟曲率和外賦曲率 509
§21. 6 Hilbert 作用量原理和在空間加時間分割時 Arnowitt-Deser-Misner 對它的修正 519
§21. 7 幾何動力學的 Arnowitt, Deser, Misner 表述 520
§21. 8 隨時間向前積分 526
§21. 9 薄夾層表述中的初值問題 528
§21.10 時間對稱和時間反對稱初值問題 535
§21.11 York 確定四維幾何的諸「把手」 539
§21.12 Mach 原理和慣性的起源 543
§21.13 連接條件 551

第二十二章 熱力學，流體動力學，電動力學，幾何光學，和動力論 557

§22. 1 本章的原由 557
§22. 2 彎曲空時中的熱力學 557
§22. 3 彎曲空時中的的流體動力學 562
§22. 4 彎曲空時中的電動力學 568
§22. 5 彎曲空時中的幾何光學 570
§22. 6 彎曲空時中的動力論 583

第五篇 相對論性恒星 591

第二十三章 球狀恒星 593

§23. 1 序言 593
§23. 2 靜止球狀系統的坐標和度規 594
§23. 3 Schwarzschild 坐標的物理解釋 595
§23. 4 恒星內部物質的描繪 597
§23. 5 結構方程 600
§23. 6 外部的引力場 607
§23. 7 如何建立恒星模型 608
§23. 8 靜止恒星的空時幾何 612

第二十四章 脈衝星和中子星；類星體和超大質量恒星 618

§24. 1 概述 618
§24. 2 恒星演化的終點 621
§24. 3 脈衝星 627

§24. 4 超大質量恒星和恒星的不穩定性 630
§24. 5 類星體和星系核的爆發 634
§24. 6 相對論性星團 634

第二十五章 「勢凹陷」作爲在 Schwarzschild 幾何中運動的主要新特徵 636

§25. 1 從 Kepler 定律到在 Schwarzschild 幾何中運動的有效勢 636
§25. 2 對稱性和守恒定律 650
§25. 3 Schwarzschild 幾何中的運動守恒量 655
§25. 4 引力紅移 659
§25. 5 粒子的軌道 659
§25. 6 在 Schwarzschild 幾何中光子，中微子或引力子的軌道 672
§25. 7 球狀星團 679

第二十六章 恒星的脈動 688

§26. 1 動機 688
§26. 2 提出問題 689
§26. 3 Euler 微擾與 Lagrange 微擾的比較 690
§26. 4 初值方程 691
§26. 5 動力學方程和邊界條件 693
§26. 6 結論的概要 694

第六篇 宇　宙 701

第二十七章 理想化的宇宙學 703

§27. 1 宇宙的均勻性和各向同性 703
§27. 2 理想化爲流體的宇宙的脅强-能量含量 711
§27. 3 均勻和各向同性的幾何含義 713
§27. 4 宇宙的共動、同步坐標系 715
§27. 5 膨脹因子 718
§27. 6 均勻超曲面的可能的三維幾何 720
§27. 7 流體的運動方程 726
§27. 8 Einstein 場方程 728
§27. 9 時間參量和 Hubble 常數 730
§27.10 閉宇宙的初等 Friedmann 宇宙學 733
§27.11 違背 Einstein 宇宙學概念的均勻各向同性宇宙模型 742

第二十八章 宇宙演化到它目前的狀態 763

§28. 1 宇宙的「標準模型」 763
§28. 2 以原始混沌修正的標準模型 769
§28. 3 在初始奇點「之前」是什麼？ 769
§28. 4 其他的宇宙學理論 770

第二十九章 宇宙目前的狀態和將來的演化 771

§29. 1 確定宇宙命運的參量 771
§29. 2 宇宙學紅移 772
§29. 3 距離-紅移關係式；Hubble 常數的測量 780
§29. 4 星等-紅移關係式；減速參量的測量 782
§29. 5 宇宙「透鏡效應」的探索 795
§29. 6 宇宙今天的密度 796
§29. 7 目前有關宇宙學參量知識的總結 797

第三十章 各向異性的和非均勻的宇宙學 800

§30. 1 爲什麼宇宙是如此的均勻和各向同性？ 800
§30. 2 各向異性宇宙的 Kasner 模型 801
§30. 3 各向異性的絕熱冷却 802
§30. 4 各向異性的粘滯耗散 802
§30. 5 各向異性宇宙中粒子的創生 803
§30. 6 非均勻的宇宙學 804
§30. 7 混主宇宙 805
§30. 8 微波背景的視界和各向同性 815

第七篇 引力坍縮和黑洞 817

第三十一章 Schwarzschild 幾何 819

§31. 1 大質量恒星的坍縮是不可避免的 819
§31. 2 引力半徑的非奇異性 820
§31. 3 在 $r=2M$ 處 Schwarzschild 坐標的行爲 823
§31. 4 幾種表現良好的坐標系 826
§31. 5 Kruskal-Szekeres 坐標與 Schwarzschild 坐標之間的關係 833
§31. 6 Schwarzschild 幾何的動力學 836

第三十二章 引力坍縮 842

§32. 1 Schwarzschild 幾何的適用性　842
§32. 2 Birkhoff 定理　843
§32. 3 坍縮恒星的外部幾何　846
§32. 4 密度均勻壓力爲零的恒星的坍縮　851
§32. 5 具有內壓力時的球對稱坍縮　857
§32. 6 落入 $r=0$ 奇點的人的命運　860
§32. 7 現實的引力坍縮——概述　862

第三十三章　黑洞　872

§33. 1 爲什麼是「黑洞」？　872
§33. 2 黑洞的引力場和電磁場　875
§33. 3 質量，角動量，電荷和磁矩　891
§33. 4 對稱性和參照系拖曳　892
§33. 5 試驗粒子的運動方程　897
§33. 6 主零線滙　901
§33. 7 黑洞能量的存儲和遷移　904
§33. 8 可逆變換與不可逆變換　907

第三十四章　整體技巧，視界和奇點定理　916

§34. 1 整體技巧與局域技巧　916
§34. 2 在漸近平直空時中的「無窮遠」處　917
§34. 3 因果律和視界　922
§34. 4 視界的整體結構　924
§34. 5 黑洞動力學第二定律的證明　931
§34. 6 關於奇點的定理和「最後狀態的論點」　934

第八篇　引力波　941

第三十五章　引力波的傳播　943

§35. 1 觀點　943
§35. 2 眞空中「線性理論」的回顧　944
§35. 3 線性理論中的平面波解　945
§35. 4 橫向無迹（TT）規範　946
§35. 5 線性引力波中的短程線偏離　950
§35. 6 平面波的偏振　952
§35. 7 引力波携帶的脅强-能量　955
§35. 8 廣義相對論完備理論中的引力波　956

§35. 9 嚴格的平面波解 957
§35.10 嚴格平面波的物理性質 960
§35.11 嚴格的電磁平面波與引力平面波的比較 961
§35.12 關於嚴格平面波的新觀點 962
§35.13 短波近似 964
§35.14 背景曲率對波傳播的效應 967
§35.15 引力波的脅强-能量張量 969

第三十六章 引力波的產生 974

§36. 1 引力波的四極性 974
§36. 2 用內功率流表示輻射功率 978
§36. 3 引力波的實驗室發生器 979
§36. 4 引力波的天體物理源：一般討論 980
§36. 5 引力坍縮，黑洞，超新星和脈衝星作爲引力波源 981
§36. 6 雙星作爲引力波源 986
§36. 7 近 Newton 慢運動源的輻射公式 989
§36. 8 慢運動源的輻射反作用 993
§36. 9 推導輻射公式的基礎 995
§36.10 在慢運動近似下輻射場的估算 996
§36.11 輻射反作用勢的導出 1001

第三十七章 引力波的探測 1004

§377 1 坐標系和衝擊波 1004
§37. 2 機械探測器的加速度 1006
§37. 3 機械探測器的類型 1012
§37. 4 振動的機械探測器：介紹性評述 1019
§37. 5 穩定通量單色波激發的理想化的波爲主探測器 1022
§37. 6 由任意通量的輻射激發的理想的，以波爲主的探測器 1026
§37. 7 由任意通量的輻射激發的一般的，以波爲主的探測器 1028
§37. 8 噪聲探測器 1036
§37. 9 非機械探測器 1040
§37.10 展望未來 1040

第九篇 廣義相對論的實驗檢驗 1045

第三十八章 檢驗相對論的基礎 1047

§38. 1 在太陽系中的檢驗要比在遙遠的空間容易一些 1047

§38. 2 廣義相對論分析檢驗的理論框架 1048
§38. 3 自由下落唯一性原理的檢驗：Eötvös-Dicke 實驗 1050
§38. 4 檢驗是否存在着支配長度和時間測量以及支配粒子運動學的度規 1054
§38. 5 短程線運動的檢驗：引力紅移實驗 1055
§38. 6 等效原理的檢驗 1060
§38. 7 檢驗是否存在着未知的長程場 1063

第三十九章 其他引力理論和後 Newton 近似 1066

§39. 1 其他理論 1066
§39. 2 引力的度規理論 1067
§39. 3 後 Newton 極限與 PPN 表述 1068
§39. 4 PPN 坐標系 1073
§39. 5 描述太陽系中的物質 1074
§39. 6 後 Newton 展開的性質 1075
§39. 7 Newton 近似 1077
§39. 8 PPN 度規係數 1080
§39. 9 PPN 坐標相對於「宇宙靜止系」的速度 1083
§39.10 PPN 脅强-能量張量 1086
§39.11 PPN 運動方程 1087
§39.12 PPN 坐標與周圍宇宙的關係 1091
§39.13 PPN 表述的總結 1091

第四十章 太陽系實驗 1096

§40. 1 爲了把廣義相對論與已提出的引力度規理論相區別而開展的許多實驗 1096
§40. 2 利用光線和射電波檢驗引力 1099
§40. 3 「光」偏轉 1101
§40. 4 雷達傳播的時間延遲 1103
§40. 5 短程線軌道中的近日點移動和周期性微擾 1110
§40. 6 月球軌道中的三體效應 1116
§40. 7 慣性系的拖曳 1117
§40. 8 引力常數是恒定不變的嗎？ 1121
§40. 9 行星和太陽在短程線上運動嗎？ 1126
§40.10 廣義相對論實驗檢驗總結 1131

第十篇 前　沿 1133

第四十一章 旋量 1135

§41. 1 反射，旋轉和旋轉的組合 1135
§41. 2 無窮小旋轉 1140
§41. 3 以旋量代數表示 Lorentz 變換 1142
§41. 4 以旋量代數表示 Thomas 運動 1145
§41. 5 旋量 1148
§41. 6 矢量與旋量之間的對應關系 1150
§41. 7 旋量代數 1151
§41. 8 自旋空間及其基旋量 1156
§41. 9 把旋量看作旗杆加上旗加上指向-纏繞關係 1157
§41.10 夜空的景象：旋量的一個應用 1160
§41.11 作爲引力理論有力工具的旋量 1164

第四十二章 REGGE 計算法 1166

§42. 1 爲什麼討論 Regge 計算法 1166
§42. 2 Regge 計算法簡介 1166
§42. 3 單形和虧損角 1167
§42. 4 場方程的骨架形式 1169
§42. 5 格子結構的選擇 1173
§42. 6 邊長的選擇 1177
§42. 7 Regge 計算法過去的應用 1178
§42. 8 Regge 計算法的未來 1179

第四十三章 超空間：幾何動力學的競技場 1180

§43. 1 區別空間，超空間和空時 1180
§43. 2 用 $^{(3)}\mathcal{G}$ 的超空間語言描述幾何動力學 1184
§43. 3 Einstein-Hamilton-Jacobi 方程 1185
§43. 4 幾何的漲落 1190

第四十四章 超越時間的終點 1196

§44. 1 引力坍縮是物理學有史以來最大的危機 1196
§44. 2 對預言坍縮理論的評價 1198
§44. 3 眞空起伏，它的普遍性和最後的統治地位 1202
§44. 4 有魔力的建築材料不是幾何而是前幾何 1203
§44. 5 作爲命題算法的前幾何 1208
§44. 6 黑盒子：宇宙的再加工 1209

文獻目錄和人名索引 1221
標題索引 1255
附錄 1295

框　目①

1.1 事件，坐標和矢量的數學符號 9
1.2 加速度與成分無關 16
1.3 局域 Lorentz 幾何與局域 Euclid 幾何 20
1.4 今日的時間 28
1.5 平直性的檢驗 30
1.6 何者之曲率？ 32
1.7 Lorentz力方程和短程線偏離方程的比較 35
1.8 幾何學單位 36
1.9 Galileo Galilei 38
1.10 Isaac Newton 40
1.11 Albert Einstein 42

2.1 別了「ict」 51
2.2 應用度規的運算練習 54
2.3 微分 63
2.4 Lorentz 變換 67

3.1 Lorentz 力定律定義場，預言運動 72
3.2 用不同語言描述度規 77
3.3 指標體操的技巧 85

4.1 微分形式和外微分概要 91
4.2 由蜂房抽象出 2 形式 102
4.3 2 形式的對偶性 108
4.4 形式和外微分的系列 115
4.5 度規結構與 Hamilton 算符或 「 耦對結構 」 126
4.6 Stokes 定理的誕生 127

5.1 協强-能量概述 131
5.2 三維體積 135
5.3 用分量符號表示體積分，面積分和 Guass 定理 147
5.4 用形式的語言表示積分和 Guass 定理 150
5.5 Newton 流體動力學概述 153
5.6 角動量 157

6.1 廣義相對論建築在狹義相對論上 164
6.2 加速觀測者簡述 164

7.1 在平直空時中用對稱張量場描述引力的嘗試 181

8.1 關於微分幾何學的書籍 196
8.2 Elie Cartan 198
8.3 微分幾何學的圖示，抽象和分量處理 199
8.4 任意基中的局域張量代數 202
8.5 George Friedrich Bernhard Riemann 220
8.6 協變微商和曲率的基本公式 223

9.1 切向矢量和切向空間 227
9.2 對易算符看作四邊形的閉合邊 236

10.1 短程線 246
10.2 用 Schild 階梯表示平行移動和協變微分法 248
10.3 協變微商：機器及其部件 254

11.1 短程線偏離和曲率概要 266
11.2 短程線偏離表爲箭頭 268
11.3 有關二階微商的箭頭 270
11.4 相對加速度的 Newton 分析法和幾何分析法 272

①本書有部分內容，用加框辦法來表示其不同於一般內容，我們在此統稱爲框。

11.5 Riemann 曲率張量的定義 273
11.6 短程線偏離與沿閉合曲線的平行移動作爲同一結構的兩個方面 279
11.7 關於閉合曲線的平行移動定律 281

12.1 Newton 空時中的短程線偏離 293
12.2 Newton 空時，Minkowski 空時，和 Einstein 空時 296
12.3 按 Cartan 的 Newton 引力的論述，和 Einstein 的引力論述 297
12.4 Newton 引力的幾何闡述和標準闡述 300

13.1 從距離提煉出度規 306
13.2 「短程線」與「致極世界線」比較 322
13.3 短程線的「動力學」變分原理 322

14.1 曲率縱橫觀 335
14.2 直截了當的曲率計算 340
14.3 計算機的解析計算 342
14.4 短程線 Lagrange 函數方法縮短了某些曲率的計算 346
14.5 用外微分形式計算曲率 (Friedmann 宇宙論度規) 355

15.1 邊界的邊界爲零 365
15.2 轉矩和引力源的數學表述 379
15.3 曲率所滿足的其它恆等式 381

16.1 等效原理應用中的因子順序和曲率耦合 390
16.2 擺鐘分析 394
16.3 鐘對於加速度的響應 396
16.3 由短程世界線建造理想的桿和鐘 497
16.5 測量 Riemann 曲率的重力陡度計 401

17.1 對應原理 412
17.2 引向 Einstein 幾何動力學定律的 6 條路線 417
17.3 關於前幾何的一個實驗 430

18.1 從前幾何觀點和自旋 2 觀點導出廣義相對論 437
18.2 線性化理論中的規範變換和坐標變換 439

19.1 孤立系統的質量-能量、四維動量和角動量 454
19.2 在所選天體附近的度規修正項 459

20.1 本徵 Lorentz 變換和對偶旋轉 482
20.2 在局域慣性系中一般電磁場張量的變換 483

21.1 作爲色散關係的 Hamilton 函數 493
21.2 電磁場自由度的計數 530

22.1 選擇熱力學勢 561
22.2 彎曲空時中理想流體的熱力學和流體動力學 564
22.3 電磁波列的幾何學 574
22.4 彎曲空時中的幾何光學 578
22.5 相空間中的體積 585
22.6 相空間中的體積守恒 586

23.1 半徑 r 內的質量-能量 603
23.2 均勻密度的恒星模型 609
23.3 球對稱線元的嚴格推導 616

24.1 相對論效應起重要作用的恒星位形 619
24.2 Newton 恒星的振盪 630

25.1 由平均角頻率和半長軸得出質量 638
25.2 對於 Einstein 幾何動力學的重要應用，把在 Schwarzschild 幾何中的運動看作中心出發點 640
25.3 運動的 Hamilton-Jacobi 描述：由量子原理確認爲自然的描述 641
25.4 用 Hamilton-Jacobi 方法分析在 Schwarzschild 幾何中的運動 644
25.5 Killing 矢量和同規 652

25.6 Schwarzschild 幾何中粒子的運動 660
25.7 Schwarzschild 幾何中光子的運動 674
25.8 球狀星團的結構方程 683
25.9 等溫的星團 685

26.1 簡正模式脈動的本徵值問題和變分原理 695
26.2 近 Newton 恒星的臨界絕熱指數 697

27.1 宇宙學概要 704
27.2 均勻超曲面的三維幾何 723
27.3 物質佔優勢和輻射佔優勢的模型宇宙的 Friedmann 宇宙學 734
27.4 與天文觀測相符的典型宇宙學模型 738
27.5 Λ的選擇和開閉的選擇對預測宇宙學過程的影響 746
27.6 Alexander Alexandrovitch Friedmann 751
27.7 宙宇學簡史 752

28.1 類星體族的演化 767

29.1 觀測參量與相對論參量的比較 773
29.2 原始輻射的紅移 779
29.3 用紅移表徵距離和時間 779
29.4 Hubble 常數和減速參量的測量 785
29.5 Edwin Powell Hubble 792

30.1 混主宇宙學 806

31.1 Schwarzschild 奇異性：歷史評述 822
31.2 引入Kruskal-Szekeres 坐標之緣由 828

32.1 具有 Friedmann 內部和 Schwarzschild 外部的坍縮恒星 854
32.2 非球形擾動的坍縮 864
32.3 一維與二維的坍縮 867

33.1 黑洞沒有頭髮 876
33.2 Kerr-Newman 幾何和電磁場 878
33.3 黑洞的天體物理學 883
33.4 黑洞動力學定律 887
33.5 在 Kerr-Newman 黑洞「赤道平面」的軌道 911

34.1 視界是由不終止的零短程線產生的 926
34.2 Roger Penrose 936
34.3 Stephen W. Hawking 938

35.1 波的橫向無跡部分 948

36.1 來自脈動中子星的引力波 984
36.2 分析來自脈動事件的輻射爆 987
36.3 來自幾個雙星系統的輻射 990

37.1 導出探測器的運動方程 1007
37.2 引力波加速度的力線 1011
37.3 波爲主探測器截面的應用 1020
37.4 任意形狀的振動的共振探測器 1031
37.5 來自天體物理源的錘擊波的可探測性 1041
37.6 非機械探測器 1043

38.1 二十世紀七十年代面對相對論現象的技術 1048
38.2 Baron Lorand von Eötvös 1051
38.3 Robert Henry Dicke 1053

39.1 Dicke-Brans-Jordan的理論和 Ni 的理論 1070
39.2 十個後 Newton 參量的啓發性描述 1072
39.3 度規系數的後 Newton 展開 1077
39.4 PPN 表述的總結 1092
39.5 文獻中採用的 PPN 參量：轉換者的指南 1093

40.1 光和射電波偏轉的實驗結果 1104
40.2 雷達時間延遲的實驗結果 1109
40.3 近日點移動的實驗結果 1112
40.4 實驗的目錄 1129

41.1 簡單張量的旋量表示 1154

42.1 絞鏈，其中「嘎聲角」集中在二、三和四維 1169
42.2 Regge 計算法的流程圖 1171
42.3 由低維骨架幾何合成高維骨架幾何 1176

43.1 幾何動力學與粒子動力學的比較 1181

44.1 宇宙坍縮與原子坍縮的比較和對照 1197
44.2 引力坍縮的三種水平 1201
44.3 自旋$\frac{1}{2}$與幾何動力學的關係 1204
44.4 前幾何的「灰塵桶」概念 1205
44.5 作爲命題算法的前幾何 1211

插圖目次

1.1 空時與蘋果表面的比較 4
1.2 交叉的世界線標示事件 6
1.3 同樣事件的兩個坐標系 7
1.4 單純的坐標奇點 11
1.5 二維球面上的坐標奇點 12
1.6 Roll-Krotkov-Dicke 實驗 15
1.7 局域慣性參照系的檢驗 18
1.8 一次古代的日全蝕帶 25
1.9 好鐘與壞鐘 27
1.10 相鄰短程線的「間隔加速度」 31
1.11 三維流形中短程線的分離 31
1.12 衛星周期和地球密度 39

2.1 從雙局域矢量到切向矢量 49
2.2 不同的曲線，同樣的切向矢量 50
2.3 速度四維矢量分解爲分量 52
2.4 1-形式被矢量穿透 55
2.5 梯度作爲 1-形式 56
2.6 1-形式的相加 57
2.7 矢量及其相應的 1-形式 58
2.8 Lorentz 基 60
2.9 離心機和光子 63

4.1 ***Faraday*** 2-形式 100
4.2 ***Faraday*** 形式從四維速度中產生 1-形式 104
4.3 通過 ***Faraday*** 的類空薄片 106
4.4 ***Faraday*** 及其對偶 ***Maxwell*** 107
4.5 靜止電荷的 ***Maxwell*** 2-形式 109
4.6 軸射機制 111
4.7 簡單類型的 1-形式 123

5.1 由不同的三維體積了解四維動量之河 133
5.2 Faraday 脅强使鋁環升起 141
5.3 能量-動量的積分守恒定律 143

6.1 雙曲運動 167
6.2 加速觀測者的世界線 169
6.3 垂直於彎曲世界線的超平面 172
6.4 作雙曲運動的觀測者的局域坐標系 173

7.1 相繼光脈沖的世界線的一致 188

8.1 Kepler 軌道的基矢 200
8.2 協變微商 209
8.3 作爲飛行員轉向系數的聯接系數 212
8.4 短程線簇的選擇參量和仿射參量 219

9.1 由坐標系引出基矢 231
9.2 基矢和對偶基 1 形式 232
9.3 S^2 的三種表示 241

10.1 筆直的平行移動 245
10.2 通過平行移動把鄰近的切向空間聯系起來 252

11.1 短程線的單參量族 267
11.2 沿閉合曲線平行移動 278

12.1 地球衛星携帶的坐標 298

13.1 距離確定幾何 309
13.2 兩個事件以多於一條短程線相聯系 318
13.3 在全部過程的截斷空間中的坐標 320
13.4 加速觀測者的固有參照系 328

15.1 與全部 6 個表面相聯系的旋轉相加爲零 372

18.1 原始的引力波探測器 445

20.1 「世界管」 473
20.2 「緩衝帶」 477

21.1 動量和能量作爲「動力學位相」的變化率 487
21.2 構成薄夾層的四維幾何 506
21.3 外賦曲率 511
21.4 Schwarzschild 幾何的類空薄片 528
21.5 Einstein 感謝 Mach 544
21.6 Gauss 簡正坐標 552

22.1 一束光線的幾何學 581
22.2 光子數密度和特定强度 589

23.1 恒星內部和周圍的幾何 614

24.1 關於黑洞和中子星的第一個出版物 622
24.2 冷的被催化了的 Harrison-Wheeler 狀態方程和 Harrison-Wakano-Wheeler 恒星模型 625
24.3 坍縮、追踪，並納入劇本 629

25.1 逐夜跟踪木星的衛星 637
25.2 Schwarzschild 幾何中運動的有效勢 639
25.3 對於筆直下落，r 和 t 之間的擺線關係 664
25.4 作爲龜坐標函數的有效勢 666
25.5 共動觀測者和遠處觀測者描述的落向黑洞 667
25.6 Schwarzschild 幾何中的光子軌道 677
25.7 作爲碰撞參量函數的光子偏轉 678

27.1 宇宙的共動、同步坐標系 716
27.2 膨脹宇宙的膨脹氣球模型 719
27.3 許多 Schwarzschild 帶密接在一起構成閉宇宙 739
27.4 用弧參量時間和超極角表述的 Friedmann 宇宙學 741
27.5 Friedmann 動力學的有效勢 748

28.1 標準大爆炸模型的溫度和密度隨時間的變化 764

29.1 作爲駐波效應的紅移 776
29.2 角度-有效距離隨紅移的變化 796

31.1 在 Schwarzschild 坐標系中畫出的徑向短程線 825
31.2 Schwarzschild 幾何的 Novikov 坐標 827
31.3 從 Schwarzschild 坐標系變換到 Kruskal-Szekeres 坐標系 834
31.4 在 Schwarzschild 坐標系和 Kruskal-Szekeres 坐標系中表示徑向短程線的變化 835
31.5 在時間對稱的瞬時，Schwarzschild 幾何的鑲嵌圖 837
31.6 Schwarzschild 喉管的動力學 839

32.1 恒星的自由下落坍縮 848

33.1 坍縮恒星的最後影響面 873
33.2 作爲垃圾場和能源的黑洞 908
33.3 Kerr 黑洞附近粒子的能量 910

34.1 未來零無窮和超新星爆發輻能的能量 918
34.2 在把無窮遠取作有限值的坐標系中描繪 Minkowski 空時 919
34.3 Schwarzschild 空時 920
34.4 在把無窮遠取作有限值的坐標系中描繪 Reissner-Nordstrøm 空時 921
34.5 選定因果關係的空時圖 922
34.6 漸近平直空時中的黑洞 924
34.7 恒星球形坍縮產生的視界 925

34.8 用於證明黑洞動力學第二定律的空時圖 932

35.1 平面電磁波 952
35.2 平面引力波 953
35.3 嚴格的平面波解 959

36.1 爲什麼引力輻射通常很微弱 976
36.2 正面投入 Schwarzschild 黑洞時發出的譜 983
36.3 慢運動源 997

37.1 振動棒探測器的參照系 1005
37.2 探測器的類型 1013
37.3 響應引力波的短程線之間的分離 1014
37.4 響應線性偏振輻射的振子 1022
37.5 噪聲探測器上的引力波錘擊 1037

38.1 地球上引力紅移的 Pound-Rebka-Snider 測量 1057
38.2 太陽鈉 D_1 線紅移的 Brault 測量 1059
38.3 Turner-Hill 尋找固有鐘連率與相對遙遠物質速度的依賴關係 1065

40.1 太陽附近軌道的彎曲 1100
40.2 用於計算光偏轉的坐標 1101
40.3 計算相對論性時間延遲的坐標 1106
40.4 地-月距離的雷達測量 1130

41.1 繞分開 90° 的各軸作 90° 旋轉的組合 1136
41.2 把旋轉描述爲兩次反射 1137
41.3 從反射看兩次旋轉的合成 1138
41.4 用球面三角形體現旋轉合成規律 1139
41.5 立方體與其周圍之間的「指向-纏繞關係」 1148
41.6 720° 旋轉等價於無旋轉 1149
41.7 旋量作爲旗杆加旗子 1157
41.8 在複平面上表示空間的方向 1161

42.1 用多面體接近二維幾何 1168
42.2 與單個絞鏈相聯系的一圈積木塊 1170

43.1 單形近似下的超空間 1182
43.2 空間、空時和超空間 1183
43.3 電子運動受場漲落的影響 1190

44.1 電荷的蛀孔圖 1200
44.2 引力作爲空間的度規彈性 1207
44.3 前幾何不是什麼 1210
44.4 宇宙再加工的黑盒子模型 1213
44.5 充滿幾何動力學的頭腦 1219

第一篇

空時物理學

本篇不求助於完美的數學指導，先較快地（§1.1）再稍慢地把讀者引向Einstein幾何動力學的主幹及若干細節。

PDG

第一章　幾何動力學概要

§1.1　蘋果的寓言

> 1666年的某一天，Newton 來到了鄉間，看見一只蘋果掉下來，正如他的侄女告訴我的那樣，這使他陷入了沉思：究竟是什麼原因使每一個物體都沿着一條其延長線幾乎通過地球中心的直線被拉下來呢？
>
> Voltaire (1738)

從前，有一個學生躺在花園裏的一株蘋果樹下，思索着Einstein和Newton關於引力* 的見解之間的差異。他爲附近掉下的一個蘋果所驚動。當他注視着這個蘋果時，他注意到一些螞蟻開始沿着蘋果表面爬行（圖 1.1）。好奇心驅使他想研究螞蟻所遵循的導航原理。他用放大鏡仔細地記下了一條足跡，又取出小刀，在蘋果皮上這條足跡一側一毫米處切了一刀，在它另一側一毫米處也切了一刀。他削下蘋果皮上這條小小的路徑，並把它舖平在他的書面上。螞蟻沿着這條路徑的足跡像激光束那樣筆直。要走過這一窄條從頭至尾長十厘米的蘋果皮，螞蟻再也找不出比這更簡捷的道路了。沿着這條削下的蘋果皮，從起點到終點，路徑的任何曲折或甚至任何光滑的彎曲，都會增加它的長度。

「多麼美妙的一條短程線啊」，學生贊嘆地說。

他的視線落在從同一點$\mathcal{P}$沿稍稍不同方向出發的兩隻螞蟻上。它們的路徑恰能使它們從兩側經過蘋果頂端的下凹區域。每一隻螞蟻都認眞地追隨着它的短程線，並盡其所能，在蘋果皮的窄條上直走。而且由於下凹處自身的彎曲，

＊在經典力學中常譯為「重力」此二種譯法是等同的

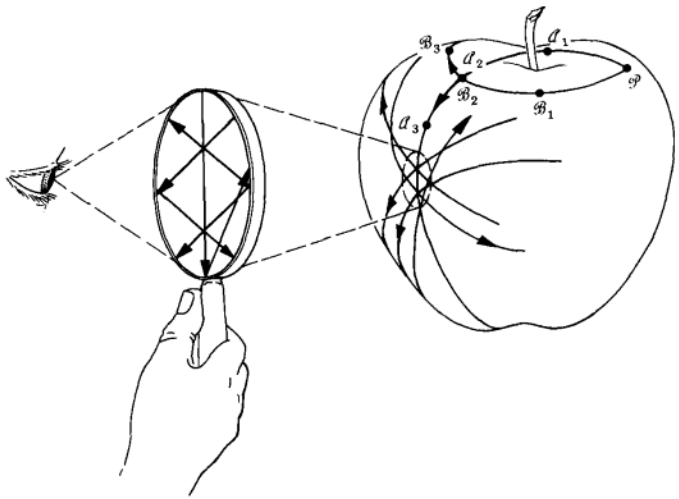


圖 1.1

這裏，以蘋果表面的二維幾何代表廣義相對論空時的 Riemann幾何。以螞蟻在蘋果表面爬行的短程線足跡代表一自由粒子經過空時所循的世界線 。 在任何充分地局域化的空時區域內，正如在蘋果的二維表面上， 用放大鏡看到的直線足跡所表徵的那樣， 幾何學可以理想化爲平直的（空時幾何學的「局域 Lorentz 性質」）。在一個更大的延展區域內，可以感受到流形的彎曲 （在實際的物理世界是四維空時， 在蘋果的情形是彎曲的二維幾何學）。兩條足跡 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，起初從同一點 $\mathcal{P}$ 散開， 然後接近，交叉， 再沿極爲不同的方向分開。根據 Newton 的理論，這個效應是由於吸引中心的超距引力作用所致，此處吸引中心由蘋果柄表徵。根據 Einstein 的理論，一個粒子只能局域地，即從它所在處的空時幾何，得到它的運動指令。這指令很簡單： 儘可能走一條最直的徑迹 （短程線）。物理學的簡單正在於它可以是局域的。 只是因爲在大範圍內空時是彎曲的，徑迹才相交。 扼要地說，幾何動力學就是幾何對物質的效應 （使起初分開的短程線相交） 以及物質對幾何的效應（質量集中引起的空時彎曲，此處以蘋果柄對其附近蘋果表面的效應表示）的雙重故事。

兩條足跡不僅交叉，還顯示出很不同的方向。

Einstein的物理學局域觀點與 Newton 的『超距作用』形成對比。

「對於Einstein的重力的幾何理論，人們可能祈求什麼樣的更爲恰當的說明呢？」學生喃喃地說。「螞蟻似乎在蘋果柄的吸引下移動。人們也許曾經相信過 Newton 的超距作用力。然而，除了根據螞蟻足跡沿線的局域幾何外，螞蟻是無從獲得它的運動指令的。這確實是 Einstein 的概念 ，即全部物理學都是『局域作用』形成的。這和 Newton物理學的『超距作用』觀點多麼不同啊！現在，對這本書的含義，我理解得更清楚了。」

僅當局域分析時，物理學才是簡單的。

他一邊說，一邊打開他的書朗讀起來。「描寫運動時，無須涉及遠處物體。僅當局域分析時，物理学才是簡單的。局域地說，與任何世界線一樣，一個

衛星（在圍繞地球的空時中）所循的世界線也總是直線。忘掉所有關於『偏轉』和『引力』的談論吧。我在一艘宇宙飛船內，或者在飛船外邊附近浮動時，是否感受到任何『引力』呢？一點都沒有。宇宙飛船是否感受到這樣一個力呢？也沒有。那麼，爲什麼還要談論它呢？應該認識到宇宙飛船和我都遨遊在沒有任何力的空時區域，應該承認經過該區域的運動已經是理想的直線了。

吃飯鈴響了，但學生仍舊坐在那裏，獨自思忖：「讓我想一下，是否可以把Einstein的重力幾何理論概括爲三個觀念：(1)局域地說，短程線是直線；(2)在較爲寬廣的空間和時間範圍內，原先彼此分離的短程線開始以空時曲率所規定的速率互相靠近，而對於物質的這種幾何效應就是今天我們用古老的『引力』一詞所表達的意思。(3)反過來，物質又使幾何彎曲。蘋果上出現下凹，是由於果柄在那裏。我想，我懂得怎樣更爲扼要地敍述整個故事了：空間作用於物質，決定了物質如何運動。而物質又反過來作用於空間，決定了空間怎樣彎曲。換句話說，這裏的物質」他拿住果柄，拾起蘋果繼續說，「使這裏的空間彎曲，而使這裏的空間彎曲就會迫使那裏的空間也彎曲。」這時他注視着一隻徘徊不去的螞蟻，在離果柄一指寬處忙碌地沿其短程線爬行，並接着說：「因而，這裏的物質影響着那裏的物質，這就是Einstein對『引力』的解釋。」

空間決定物質如何運動。

物質決定空間怎樣彎曲。

爾後，吃飯鈴靜下來，他帶着書、放大鏡以及蘋果離開了。

§1.2　帶坐標和不帶坐標的空時

> 現在，我想到：……引力加速度與落體的性質無關，可表述如下：在（空間廣延很小的）引力場中，事物的行為與在無引力的空間中一樣……這種想法產生於1908年。為什麼還要花費七年時間才完成廣義相對論呢？主要原因是人們難以擺脫坐標必須具有直接度規意義的觀念。
>
> Einstein (1949)

在這個陌生的領域中，初次接觸「彎曲空時」概念時，最令人苦惱的是擔心每一種簡單的測量方法都會失去功效。試設想，在波濤洶湧的海面上，有人站在巔簸的划艇中，手中拿着一根米尺，面臨着測量既龐大又刻蝕成奇形怪狀的冰山形狀的任務。如果要測量划艇本身的形狀，辦法很簡單。把划艇拉上海岸，翻過來，在它表面各關鍵點輕輕地釘上一些平頭釘。記下測出的各平頭釘之間的距離，即可顯示其表面形狀。任意地增加平頭釘的數目，即可使測量精度任意地提高。而想在高聳的冰山上釘上一些作爲標誌的爬山釘，就需要更大的勇氣。但是，即使具有人世間的全部勇氣，又怎樣把釘子釘入空時以標誌一

問題：在彎曲空時中，如何進行測量。

圖 1.2
在裝滿乾草的穀倉中稻草的交叉，對於充滿空時的世界線而言，是一種象徵。這些世界線，利用它們的交叉和彎曲，完全不需要坐標系和坐標，就可以唯一地標明一些事件。圖中，從左到右用黑點標出的典型事件是：光子的吸收；光子的再發射；粒子和粒子的碰撞；光子和粒子的碰撞；光子和粒子的另一次碰撞；爆竹的爆炸；以及外來粒子與該爆竹碎片的碰撞。

規定：用那裏發生的事來表徵事件。

個點呢？幸而，正如Einstein首先强調指出的那樣，自然界本身提供了定域空時中一點的方法。即用某處發生的事來表示該點的特徵！給空時中的點定名爲「事件」。事件所在的位置是清晰分明的（圖 1.2），正如在充滿乾草的穀倉裏，兩根稻草彼此交叉的位置一樣。指出事件標誌了某某光子與某某粒子的一次碰撞，就足以識別了。該光子和該粒子的世界線都根植於過去，並延伸到未來。它們與附近的世界線聯成一幅富麗的網。而附近的這些世界線又以成千上百種方式聯繫着更遠的世界線。那麼，人們怎樣指出一個事件的位置呢？首先，指出哪些世界線參與了這個事件。其次，跟踪這些世界線中的每一根，爲它們所遇到的另外一些事件命名。這些事件可以挑出更遠的世界線。最後，整個裝草的谷倉都被編目。每一個事件均被命名。正像市民能選出到聖詹姆斯街和

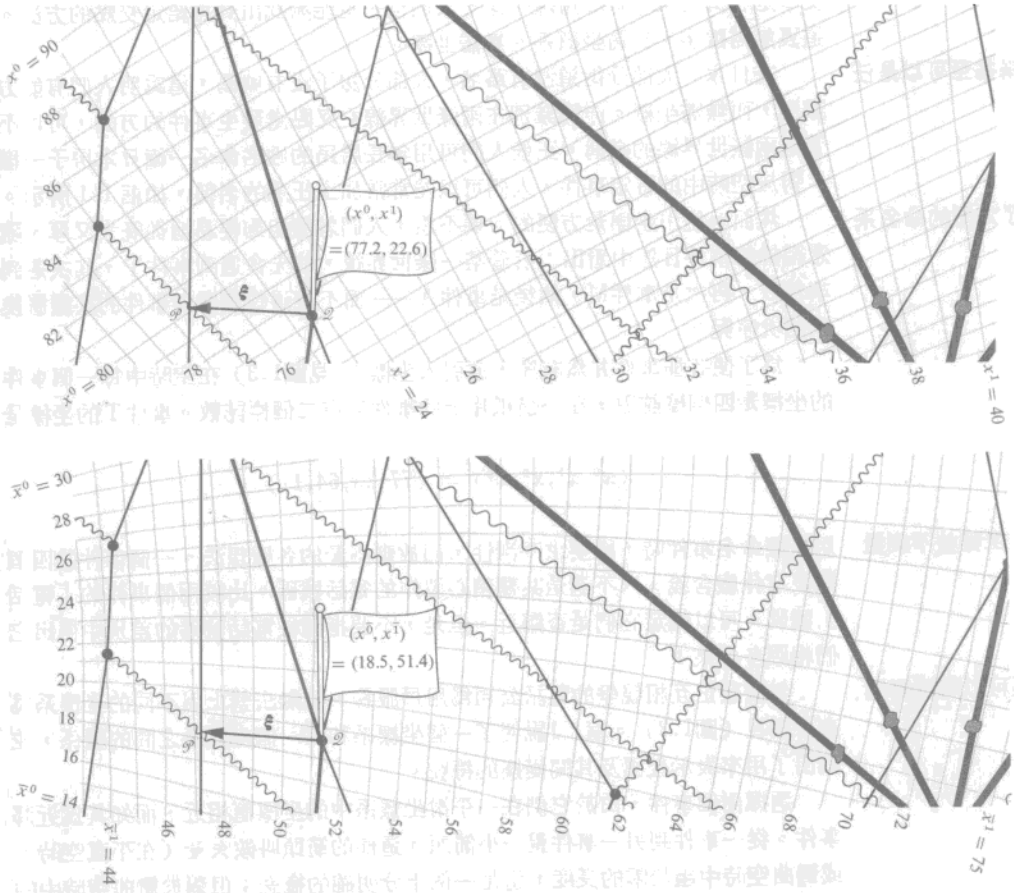


圖 1.3

上圖：利用坐標系，規定各事件的「電話號碼」。所謂坐標系是「平滑」的，意即幾乎在同一地點的各事件應具有幾乎同樣的坐標。

下圖：利用不同坐標系：同樣可把同一組事件編成很好的次序。這裏，特別挑出兩個鄰近的事件，「$\mathcal{Q}$」事件，其坐標爲 $(x^0,x^1) = (77.2,22.6)$ 和 $(x^0,x^1) = (18.5,51.4)$；「$\mathcal{P}$」事件，其坐標爲 $(x^0,x^1) = (79.9,20.1)$ 和 $(x^0,x^1) = (18.4,47.1)$。事件 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{P}$ 通過間隔「矢量」ξ 相聯。（在彎曲空時中，矢量的精確定義要求取兩點的間隔爲無限小的數學極限［間隔 $\mathcal{P}-\mathcal{Q}$ 的 N 重縮併］，並且，在所得的局域平坦空間中，將間隔乘以因子 N［$\lim\ N\to\infty$；「切向空間」；「切向矢量」］。這裏，我們摒棄了描述事物的固有方法，摒棄了完全的精確度，因而「矢量」這個詞加上了引號。）在每一種坐標系中，間隔矢量 ξ 用「分量」（$\mathcal{P}$，$\mathcal{Q}$ 各坐標值之差）表徵：

$$(\xi^0,\xi^1) = (79.9-77.2,20.1-22.6) = (2.7,-2.5)\ ,$$
$$(\xi^0,\xi^1) = (18.4-18.5,47.1-51.4) = (-0.1,-4.3)\ .$$

關於事件、坐標和矢量的詳述，參看框1.1。

皮卡廸利街的叉路口的路線一樣，人們也一定能夠找出到達給定交點的方法。這裏無需數字。無需坐標系。無需坐標。

事件的名稱甚至可以是任意的

在日本，大部分街道沒有路名，大部分房子沒有號碼，這說明人們有能力識別，而無需坐標。作爲識別在兩條世界線交叉點處發生事件的方法，可以不管這兩條世界線的名稱。正像人們可用年長居民的姓名命名一幢日本房子一樣，對於空時中的特定事件，人們可以並常常加上任意的名稱，如框 1.1 所示。

坐標提供了方便的命名系統

然而，使用坐標是方便的。要不然，人們怎麼能夠輕易地從既大又厚、隨意編排的事件目錄中看出：沿着某一條世界線，首先會遇到事件T，其次遇到事件B，再次是事件M，然後是事件A——而不是這幾個同樣事件的某種置換了的次序呢？

爲了使各種事件井然有序，應引入坐標！(見圖1.3) 在空時中每一個事件的坐標是四個標誌數，在一張紙片上的事件只有二個標誌數。事件T的坐標是

$$(x^0,x^1,x^2,x^3) = (77,23,64,11) \text{ 。}$$

一般說來，坐標並不測量長度

用坐標命名事件時，應要求平滑性，而放棄測量的各種想法。一個事件的四個數沒有什麼含義，只不過是某類精心製作的電話號碼。比較兩個事件的「電話」號碼，可以確定它們是否鄰近。但是，不要指望從電話號碼的差別中得出它們相距多少來！

幾種坐標系可以同時使用

無法禁止互相競爭的電話公司爲用戶服務，也無法禁止用不同的坐標系爲事件編目（圖1.3）。框1.1說明了一個坐標系和另一個坐標系之間的關係，並列出了用來表示坐標及其間變換的符號。

矢量

選擇兩個事件，由於它們在一平滑坐標系中的坐標值相近，而知其爲近鄰事件。從一事件到另一事件畫一小箭頭。這樣的箭頭叫做矢量（在平直空時，或彎曲空時中趨於零的長度，這是一個十分明確的概念；但對於彎曲空時中的有限長度，必須在新的名稱「切向矢量」下予以改進並精確化，參看第九章）。這一矢量，像事件一樣，可以命名。但無論命名爲J、C或K，它只是一個單值的十分明確的幾何對象。使用名稱固然有方便之處，但即使不用名稱，矢量仍然存在。

正如四個坐標

$$(x^0,x^1,x^2,x^3) = (77,23,64,11)$$

對於事件「T」是特別有用的名稱一樣（它可用來辨別哪些其它事件是鄰近的），因此四個「分量」

$$(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3) = (1.2,-0.9,0,2.1)$$

框 1.1 事件，坐標和矢量的數學符號

事件用一個大寫草體拉丁字母表示，如： 有時還加用下角標	$\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{A}, \mathcal{B},$ $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{B}_6$。
事件$\mathcal{P}$的坐標表爲 或表爲 或更簡單地表爲 其中，希臘文指標理解爲可取 0，1，2，3 中的任何值。	$t(\mathcal{P}), x(\mathcal{P}), y(\mathcal{P}), z(\mathcal{P}),$ $x^0(\mathcal{P}), x^1(\mathcal{P}), x^2(\mathcal{P}), x^3(\mathcal{P}),$ $x^\mu(\mathcal{P})$或$x^\alpha(\mathcal{P})$。
時間坐標（設已選定四個坐標之一擔任此角色）	$x^0(\mathcal{P})$。
空間坐標爲 有時表爲 拉丁文指標理解爲可取值 1，2 或 3 中的任何值。	$x^1(\mathcal{P}), x^2(\mathcal{P}), x^3(\mathcal{P}),$ $x^j(\mathcal{P})$或$x^k(\mathcal{P})$或……
簡化符號：人們不久就會厭倦已明顯地寫出坐標的函數依賴關係$x^\beta(\mathcal{P})$；因此，對於事件 $\mathcal{P}$ 的坐標，採用簡化符號 對於事件 $\mathcal{P}$的空間坐標，採用簡化符號 人們甚至一開始就想用x^β來表示事件 $\mathcal{P}$本身，但必須提醒自己：x^0, x^1, x^2, x^3 的值不僅取決於 $\mathcal{P}$ 的選擇，還取決於坐標的任意選擇！	x^β x^j
其它坐標：對同一事件 $\mathcal{P}$的其它坐標可表爲 例：圖1.3中 $(x^0, x^1) = (77.2, 22.6)$ 和 $(x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}) = (18.5, 51.4)$ 指的是同一事件。用橫線，撇，帽號把某一個坐標系與其他坐標系區別開來；把它們加在指標上，而不加在 x 上，是爲了簡化後者的符號。	$x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{P})$或$x^{\bar{\alpha}}$, $x^{\alpha'}(\mathcal{P})$或$x^{\alpha'}$, $x^{\hat{\alpha}}(\mathcal{P})$或$x^{\hat{\alpha}}$。
變換：從一個坐標系到另一個坐標系的變換可用四個函數來完成 它們可更簡潔的表爲	$x^{\bar{0}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^{\bar{1}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^{\bar{2}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^{\bar{3}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^{\bar{\alpha}}(x^\beta)$。
間隔矢量*：從一個事件 $\mathcal{Q}$ 到鄰近事件$\mathcal{P}$的間隔矢量（小箭頭）可簡要的表爲 也可以用$\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$ 的坐標值之差†(稱爲矢量的「分量」)表示	$\boldsymbol{u}$ 或 $\boldsymbol{v}$ 或 $\boldsymbol{\xi}$ 或$\mathcal{P}-\mathcal{Q}$。 $\xi^\alpha \equiv x^\alpha(\mathcal{P}) - x^\alpha(\mathcal{Q})$, $\xi^{\bar{\alpha}} \equiv x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{P}) - x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{Q})$。
分量的變換：因爲 $\xi^{\bar{\alpha}} = x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{P}) - x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{Q}) = (\partial x^{\bar{\alpha}}/\partial x^\beta)\,[x^\beta(\mathcal{P}) - x^\beta(\mathcal{Q})]$†， 所以從一個坐標系到另一個坐標系，矢量分量的變換可用變換方程的偏微商來完成	$\xi^{\bar{\alpha}} = \dfrac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^\beta}\xi^\beta$。
Einstein求和慣例：在此採用Einstein求和慣例，即在乘積中任何重複的指標自動求和	$\dfrac{\partial \chi^{\bar{\alpha}}}{\partial \chi^\beta}\xi^\beta \equiv \sum_{\beta=0}^{3} \dfrac{\partial \chi^{\bar{\alpha}}}{\partial \chi^\beta}\xi^\beta$。

* 矢量的這一定義只適用於平直空時。在彎曲空時中的改進定義（「切向矢量」）現在還寫不出來（見第九章），但當兩個點充分接近時，即使在彎曲幾何中也可以把平直幾何的概念作爲很好的近似來使用。

† 僅當所考慮的空時區域是平直的，且坐標是Lorentz坐標時，這些公式才是精密準確的。否則，它們是近似的，不過當點的間隔和矢量長度任意變小時，它們變得任意精確。

對於從

$$(x^0,x^1,x^2,x^3) = (77,23,64,11)$$

引到

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (78.2,\ 22.1,\ 64.0,\ 13.1)$$

的矢量 J 也是方便的名稱。框 1.1 討論了一個矢量的分量如何起作用。

坐標奇點常常是不可避免的

對此，有許多做法，其中坐標系可能是不完全的。圖1.4 說明了一個坐標奇點。作爲另一個坐標奇點的例子，試沿地球儀表面瀏覽到北極，注意到許多子午線在這裏會合（「鷄蛋框的小方格塌縮到容積爲零」）。人們是否能做得更好呢？人們是否能找到一種簡單的坐標系覆蓋地球儀而無奇點呢？有一條定理斷定：不能！要求無奇點地覆蓋二維球面的「佈片」的最小數目爲 2（圖 1.5)。這一情況再次强調，點和事件是第一性的，而坐標只不過是一種記錄手段而已。

空時的連續性

圖1.2和圖1.3僅畫出少數幾根世界線和事件。更詳細的圖將使世界線、光線以及它們的相交點顯得十分迷亂。從這樣的圖象出發，可以想像理想化的極限情形，即光線和無限小試驗粒子的世界線無限密集。根據這一理想化的物理極限，連續四維「流形」（具有一定的平滑性質的四維空間）的數學概念就有了一一對應；並且，在此極限下，可運用連續、可微的（即平滑的）坐標系。因此，數學提供了推演物理學的工具。

應用於空時物理學的流形數學

空時的維數

簡單地倒着數可以揭示流形的維數。在 n 維流形中取一點 $\mathscr{P}$，其鄰域是 n 維球(即表面爲 n-1 維的球形內部)。選擇此球使其邊界是一平滑流形。這一流形的維數是（n-1）。在此（n-1）維流形中挑選一點 $\mathscr{Q}$，其鄰域是一個（n-1）維球。選擇此球使得……等等。按這種方法最後會得到二維流形，但却並不知道是否就是二維的流形（二維球）。在此二維流形中挑選一點 $\mathscr{R}$。其鄰域是二維球（「圓盤」）。選擇此圓盤使其邊界是平滑的流形（圓）。在此流形中挑選一點 $\mathscr{S}$。它的鄰域應是一維球，但並不知道是否就是一維的（「線段」）。這一對象的邊界是兩個點。這種情況表明插在兩點之間的流形是一維的，因此前一個流形是二維的，等等。原始流形的維數等於在此方法中所使用的點的數目。對於空時來說，維數是 4。

如果根據高能（相應的 de Broglie 波長爲 10^{-16} 厘米）量子電動力學的預言和觀測的符合一致來判斷，那麼，維數的這種數學論證對於日常的距離尺度、原子距離（10^{-8}厘米），核線度（10^{-13}厘米）以及甚至更小幾個量級的長度，都有完善的意義。此外，經典廣義相對論把空時流形看作是一種決定論的

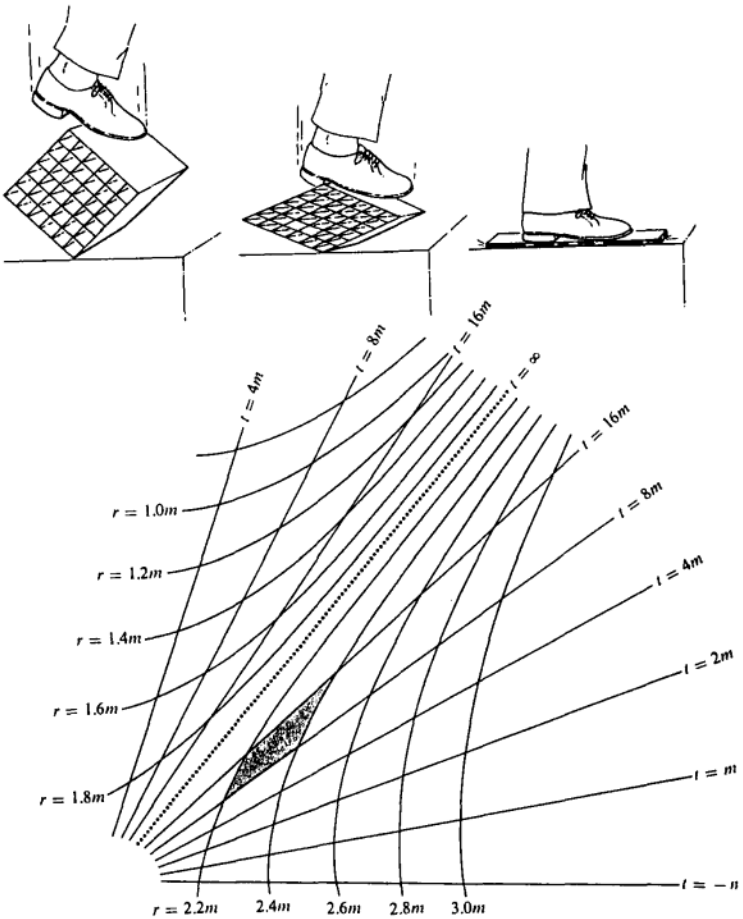


圖 1.4

單純的坐標奇點是如何發生的。上圖：當「鷄蛋框的小方格」壓扁到體積爲零時，坐標系變成奇異的。下圖：顯示 Schwarzschild 坐標r，t中這種奇點的一個例子，它常用來描述黑洞周圍的幾何（第三十一章）。爲簡單起見，刪去了角坐標 θ，ϕ。奇點本身可用兩種方法表示。其一，虛線上彼此完全不同的全部點都用同一對 (r, t) 值，即 $r=2m$，$t=\infty$ 來表示。此坐標無法區分這些點。其二，「鷄蛋框的小方格」（圖中，小方格之一用灰色表示）在虛線上塌縮到容積爲零。總之，虛線上的幾何並不陌生，全部奇點都取決於坐標系（「拙劣的電話號碼系統」）。坐標 t 沿虛線取無限大值的偶然情形，不應引起混亂。如果定義

$$(t/2m) = \tan(\bar{t}/2m) ,$$

用新坐標 $\bar{t}$ 來代替 t，那麼，這類無限大就不會發生。當 $t=\infty$ 時，新坐標 $\bar{t}=\pi m$。坐標 r，$\bar{t}$ 仍無法區分虛線上的點。它們仍然給出「鷄蛋框的小方格」沿虛線塌縮到容積爲零。

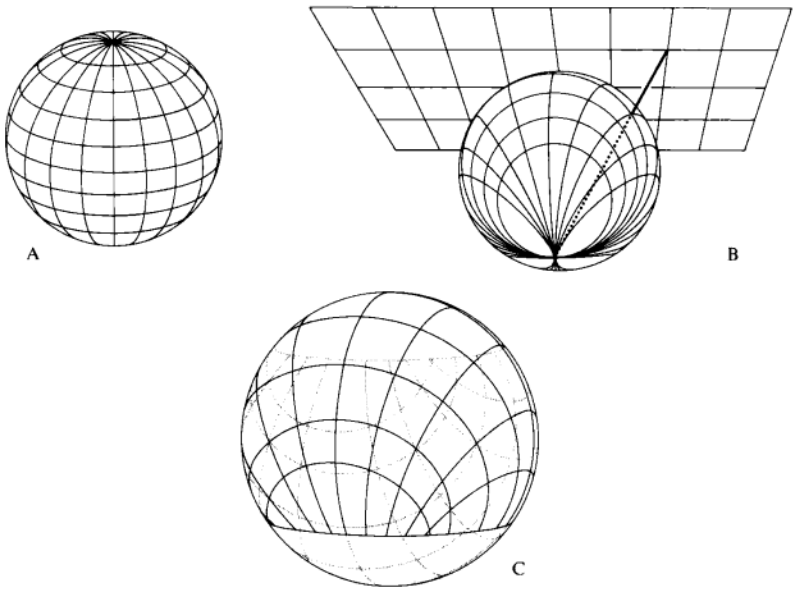


圖 1.5

在二維球面上通常坐標的奇點可用兩個交迭的坐標佈片覆蓋球面來消除。A. 球極坐標，奇異性在南北極，不連續性在國際日界線。 B. Euclid 二維平面與球面在北極相切，通過引向南極的直線，平面上的 Euclid 坐標投影於球面，坐標奇點在南極。C. 採用兩個交迭坐標佈片的二維球面的覆蓋層。 按照B那樣做法， 一片無奇點地覆蓋北半球以及直到回歸線的南部熱帶區，另一片（灰線）也可以無奇點地覆蓋整個熱帶區以及南半球。

在 Planck 長度上空時的平滑性遭到破壞

結構，這種結構直到任意小的距離都定義得很完善。與之不同，量子廣義相對論或「量子幾何動力學」預言，在 Planck 長度

$$\begin{aligned} L^* &= (\hbar G/c^3)^{1/2} \\ &= [(1.054\times10^{-27}\text{克}\cdot\text{厘米}^2/\text{秒})\ (6.670\times10^{-8}\text{厘米}^3/\text{克}\cdot\text{秒}^2)]^{1/2} \\ &\qquad \times(2.998\times10^{10}\text{厘米}/\text{秒})^{-3/2} \qquad (1\cdot1) \\ &= 1.616\times10^{-33}\text{厘米} \end{aligned}$$

量級的距離上幾何形狀有激烈的起伏。沒有人找到擺脫這一預言的任何方法。在尚可估計的鄰域內，這些起伏賦於空間在小距離上一種「多連通的」或「類泡沫的」特性。在 Planck 距離的尺度上，這種平滑性的喪失甚至完全剝奪了任何意義下的維數概念本身。這一論點的進一步研究，引導到 Einstein 理論

的前沿（第四十四章）。

如果空時在小距離上離開連續流形的數學模型很遠，那麼，在較大的距離上，數學的理想化和物理的現實之間不是也會有很大的差距嗎？光線的無限密集以及無限小試驗粒子的世界線的無限密集定義了流形的全部點；它們確實超出了實際的眞實。從來沒有人見到過在類時世界線上運動的粒子（有限靜止質量）比電子還要輕。電子的集合，即使其電荷密度爲零（e^+和e^-的世界線數相等），仍具有質量密度。這一密度將使所研究的眞實流形彎曲。無限細緻的研究意味着密度不受限制，幾何的干擾不受限制。

在經典的距離上定義幾何學還有困難嗎？

然而，正像在電動力學或氣體動力學中那樣，在剛才所述意義下，無限細緻可研究性的要求，在廣義相對論中也是不適當的。電動力學討論空間每一點以及每一時刻的電磁場强度。爲了測量那些場值，可以設想把無限小試驗粒子按隨意密集程度分散於各處。然而，根本毋需這些試驗粒子來得出該處的眞實場。不論有無無限小的試驗粒子，場處處都有確定值，並必將連續進行其確定的動力學演化。空間的幾何學與之類似。

不；必須承認經典距離的幾何學是有深遠意義的

最後，在經典物理範圍內研究空時的時候，應承認(1)「無限小試驗粒子」的觀念，(2)可區別事件的總體可以理想化爲四維連續流形。僅在本書的結尾，在按某種方式論述和分析空時的時候，再給出量子原理所引起的某些限制的概貌。

§1.3 失　　重

「重力是一個巨大的謎。丟下一塊石頭，看着它下落，聽見它落地。可誰也不明白是什麼道理。」多麼令人迷惑的談吐！下落難道還是個謎？石塊不下落還能怎麼樣呢？下落是正常的。反常的倒是有物體擋在石塊下落的路上。如果有人希望揭開「謎」底，他無需跟踪石塊下落的軌迹，而應當去觀察撞擊，並且研究是什麼力把石塊從它的自然的「世界線」（即它通過空時的自然軌迹）推開了。這將導致一個有趣的固體物理學問題，但已不是此處所談的題目。此處涉及的是下落。自由下落是失重的同義語：沒有任何力把物體推離它通過空時的正常軌迹。爲了體驗失重，可以乘坐自由下落的升降機，或者乘坐筆直落向地球的宇宙飛船。或者更愉快地乘坐沿圓軌道運行的平穩地落向地球的宇宙飛船。在這些情況下，人們都是循着一條通過空時的自然軌迹運動。

自由下落是運動的自然狀態

旅行者具有一種化學組成，宇宙飛船具有另一種化學組成，但是它們在一起旅行，旅行者在其運動之家中失重。根據 Roll, Krotkov 和 Dicke 在1964年所作的實驗，這一實驗在全部物理學中是最重要的示零實驗之一，參看圖1.6，由諸如鋁和金之類不同核成分組成的物體，其下落加速度之間的相符優於 10^{11}分之一。各個分子也與宏觀物體下落的步調一致 [Estermann, Simpson,和Stern (1938)] ；各個中子 [Dabbs, Harvey, Paya, 和 Horstmann (1965)] ，各個電子 [Witteborn和Fairbank (1967)]，以及各個 μ 子 [Beall (1970)] 也

所有物體以同樣的加速度下落

圖 1.6

Roll-Krotkov-Dicke 實驗的原理。此實驗表明，金和鋁引力加速度的一致達到或優於 10^{11} 分之一（普林斯頓， 1964）。如圖左上角所示， 質量相等的金和鋁懸掛在一根支撐棒的兩端，棒則在其中點受到支撐。若兩物體以相同加速度 $g=0.59$厘米／秒^{2}落向太陽，則棒不旋轉。若金得到較大的加速度$g+\delta g$，則在固定於地球的參照系中看來，棒的金端將向太陽方向旋轉。十二小時後，因太陽處在另一側， 故從反向拉棒。 由於這個交變的力矩具有精確的 24 小時周期，因而很容易從背景噪聲中證認出來。令人不快的是，近處任何相當大的質量，如M處的實驗者，都將產生一個力矩，它會淹沒所尋找的效應。 因此， 實際的安排如圖中主體部分所示。 一金製重物和二鋁製重物置於水平等邊三角形的三個頂點， 三角形邊長爲 6 厘米，（三重對稱軸，對於引力場中一切最簡單的非均勻性都無響應）。又，觀測者在遠處進行一切操作，以消除自身的引力效應*。爲了在不影響平衡的情況下探測到扭秤小至 10^{-9} 弧度的轉動，Roll, Krotkov 和 Dicke 從石英三角形的光學平的背面反射一束非常弱的光線。 源狹縫的像落在大小與狹縫像相近的金屬絲上。 越過金屬絲的光線落在光電倍增管上。一個單獨的振蕩電路以 3000 赫的頻率推動金屬絲來回掃過該像。當像恰好處於中間時，光的強度中只出現振蕩頻率的偶次諧波。 而當像稍稍偏向一邊時， 基頻將要在光的強度中出現。這時光電倍增管的電輸出將包含 3000 赫的成份。自動地測定這個成份的量值和符號， 同樣自動地在如圖所示的電極上施加一個與之成比例的直流電壓。 它使扭秤恢復到初始位置。 自動記錄使扭秤恢復其初始位置的直流電壓值， 以此量度作用於擺的力矩。對多日的力矩作 Fourier 分析。以24小時爲周期的 Fourier 分量的量值表明比值 $\delta g/g=(0.96\pm1.04)\times10^{-11}$。 因此，儘管金和鋁有如下表所列的重要不同，却是以同樣加速度下落的。

比　　值	鋁	金
$\frac{\text{中子數}}{\text{質子數}}$	1.08	1.5
$\frac{\text{K殼層電子的動能質量}}{\text{電子靜止質量}}$	0.005	0.16
$\frac{\text{核的靜電質-能}}{\text{原子質量}}$	0.001	0.004

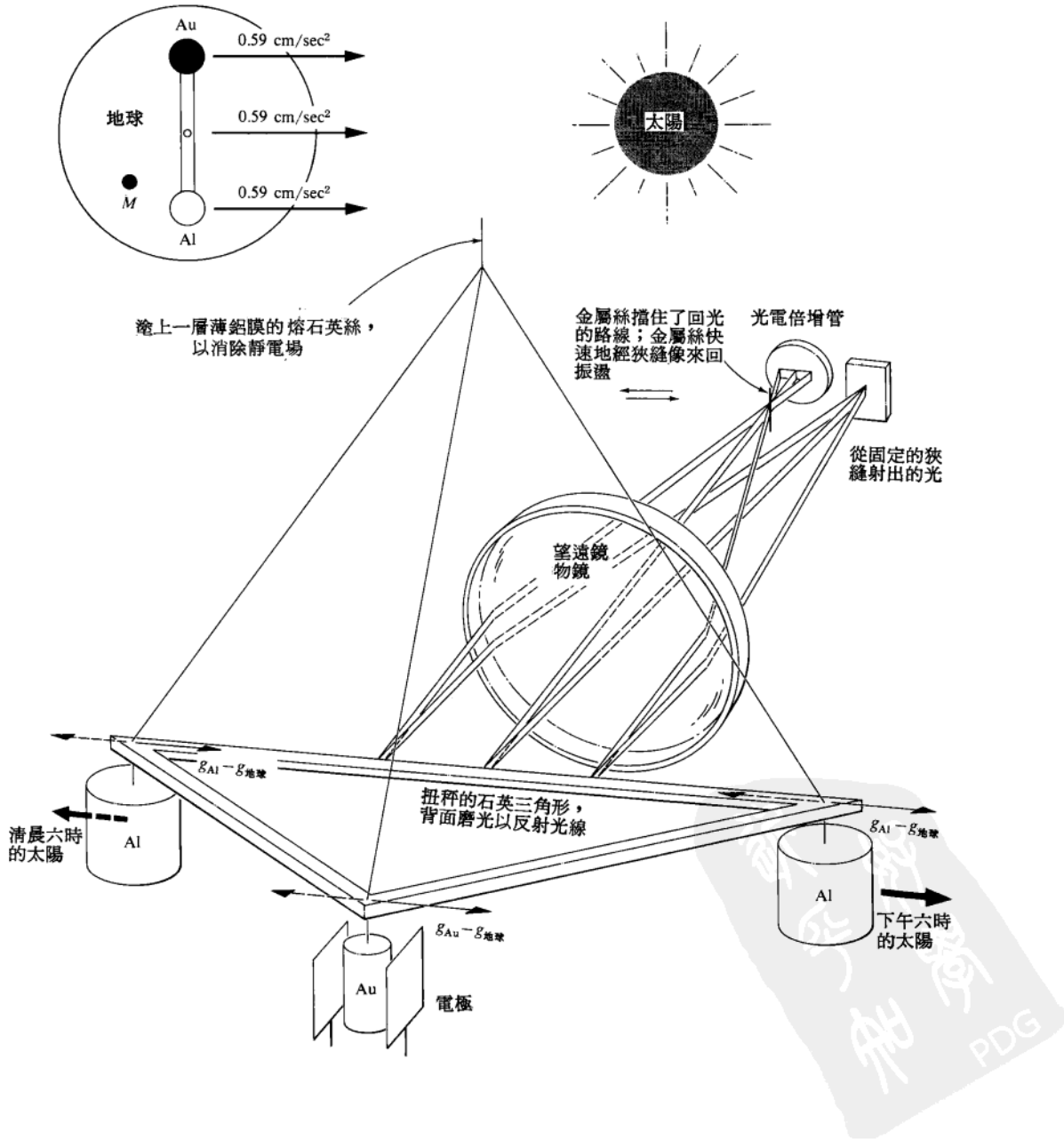
本實驗的理論含意將在第十六章和第三十八章詳加討論。

莫斯科大學的Braginsky和Panov (1971) 曾作過一個實驗，其原理與 Roll-Krotkov-Dicke 的相同，而實驗裝置有所改進。比較了白金和鋁（而不是金和鋁）的加速度，他們宣稱

$$\delta g/g\leq1\times10^{-12}。$$

---

* 其他干擾必須防止，也已經防止了。(1)扭秤邊上 10^{-3}厘米大小的一點點鐵，就會在地磁場中產生出比所測力矩大百倍的力矩。(2)只要物體兩側的溫度差超過10^{-4}°K，則兩側的不同輻射壓就會產生大得不可容許的干擾。(3)從物體一側散發的氣體就像火箭一樣推動此物體。當氣體散發的速度大到10^{-8} 克／日時，計算表明力可達10^{-7}克·厘米／秒^2，足以影響測量結果。(4)旋轉是相對於支承整個裝置的墩子測出的。爲了保證墩子本身不轉動，把它固定在岩床上。(5)應消除靜電力，不然它們會干擾平衡。


Au
0.59 cm/sec²
地球
0.59 cm/sec²
M
0.59 cm/sec²
Al
太陽
塗上一層薄鋁膜的熔石英絲，
以消除靜電場
金屬絲擋住了回光
的路線；金屬絲快
速地經狹縫像來回
振盪
光電倍增管
從固定的狹
縫射出的光
望遠鏡
物鏡
$g_{Al}-g_{地球}$
扭秤的石英三角形，
背面磨光以反射光線
清晨六時
的太陽
Al
$g_{Al}-g_{地球}$
Al
下午六時
的太陽
$g_{Au}-g_{地球}$
Au
電極

都是這樣。不僅如此，這些物體中沒有哪一個必須觀看遠處的空間才能知道自己應如何運動。

注視一個宇宙飛船的內部，注視偶然地或按計劃自由放置在飛船內部的鎖匙、硬幣、核桃或豌豆。它們因飛船艙壁而與船外邊的世界隔開，但是每個物體相對飛船而言保持靜止，或者在室內作勻速直線運動。這就是經驗的大聲告誡。

不要再講到加速度！「所有物體都以同樣加速度下落」這一教義是荒謬的。歸根到底，那些加速度應歸咎於誰呢？加速度來自允許一個地面觀測者在場。地面觀測者由於脚下地面的推舉而偏離了自己的自然世界線。由於安排中的

框 1.2 不同成份的物質以同樣的加速度下落（「標準世界線」）

Aristotle:「金，鉛，或任何其它被賦與重量的物體，它們的向下運動將隨其尺度的增大而加快。」

Galileo 以前的文獻記載：「金屬或木製重物以同樣的速度下落。」

Galileo: (1)「金，鉛，銅，斑岩及其他重物的球在空氣中的速度之差甚微；下落100腕尺（約46米），金球確實不超過銅球四指。據此觀測我得出下述結論：在全無阻力的介質中，所有物體將以同樣速度下落。」(2)此後一些精度更高的實驗「沖淡了引力」，並發現不同物體沿斜面下滑的時間相同。

Newton: 用擺錘的弧線代替斜面，通過比較兩種不同物質擺錘的振盪時間來確定不同成份物體的「下降時間」。這種實驗的精度最終只受測定有效擺長的限制：（加速度）$=2\pi/(\text{周期})^2(\text{長度})$。

Lorand von Eötvös，布達佩斯，1889年和1922年：在轉動的地球上比較由兩種不同物質的鉛錘所確定的兩條垂線。由兩根線支承着的兩個懸掛物應引向同一空時世界線。（在 Eötvös 實驗室的中央！）。若切斷懸線使物體自由，它們是否會經過空時中同一條軌跡呢（「試驗物質的正常世界線」）？若確是如此，則由通常的自由下落世界線所劃出實際世界線的加速度將取標準值 $\boldsymbol{a}$。Eötvös 實驗並不試圖檢驗兩物體加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小是否一致。作這種檢驗需要(1)切斷懸線(2)追隨兩個物體的下落。Eötvös 放棄這個方法而採用更精確的靜態觀測法，即比較兩個物體加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向。他的證據是：懸線的方向顯示了把物體從其「自由下落」的或「失重」的正常世界線拉開的方向。這一加速度是以下兩者的矢量合成：(1)與所謂重力反向外指的大小爲 g 的加速度，(2)指向地球自轉軸，大小爲 $\omega^2 R\sin\theta$ 的加速度（ω，角速度；R，地球半徑；θ，從北極到實驗所在處的極角）。這個向心加

這一弊病，他便需對所有這些加速度負責。把他放入空間，並用皮帶把火箭捆在他的腿上。毫無差別* ！他仍需對他所見到的負責。他再一次注意到「一切物體都以相同的加速度下落」。由噴汽發動機推動的觀測者和站在地面的觀測者看來，物理學是同樣複雜的。取消這兩類觀測者，代之以乘坐自由運動的宇宙飛船旅行，就使得物理學看起來簡單明瞭。這時沒有什麼能比他所看見的更爲自然了：每一個自由物體都作勻速直線運動。這就是研究物理學的方法！在

*「毫無差別」說明了 Einstein (1911) 關於「引力場」和加速度之間局域等效這一原理的全部內容。「如果假設參照系K和K'在物理上完全等效，即假設可以同樣認爲K系也處在無引力場的空間之中，從而可以認爲K系也是均勻加速的，那麼，我們就得到了對此實驗定律的極爲令人滿意的解釋。上述物理上完全等效的假設，使我們不能再談參照系的絕對加速度，正如通常的相對論禁止談論一個系統的絕對速度一樣，這使得引力場中所有物體應同樣下落的結論是理所當然的。」

速度有一過小的垂直分量 $-\omega^2 R\sin^2\theta$ ，可不予討論。重要的是指向北方並與地球表面平行的分量 $\omega^2 R\sin\theta\cos\theta$ ，它使得懸線偏離連接地心與支點的直線一角度：

$$\frac{\text{水平加速度}}{\text{垂直加速度}}=\frac{\omega^2 R\sin\theta\cos\theta}{g}$$

$$=\frac{3.4\text{厘米/秒}^2}{980\text{厘米/秒}^2}\sin\theta\cos\theta$$

$$=1.7\times10^{-3}\text{弧度(當}\theta=45°\text{時)。}$$

在布達佩斯 （$\theta=42.5°$），由於懸掛兩種不同物質造成 g 的10^8分之一的改變 δg 將使擺錘懸線的角度產生1.7×10^{-11}弧度的差異。Eötvös 指出 $\delta g/g$ 小於10^9分之幾。

Roll, Krotkov 和 Dicke，普林斯頓，1964 年：實驗中用作基準加速度的，不再是由於地球自轉在 $\theta=45°$ 處產生的穩定的水平加速 度1.7 厘米/秒^2 ， 而是由太陽引力產生的逐日變化的加速度 0.59厘米/秒^2。 得出$|g(\text{金})-g(\text{鋁})|/g$小於 1×10^{-11}。見圖1.6。

Braginsky 和 Panov，莫斯科，1971年：與 **Roll, Krotkov 和 Dicke** 一樣，採用太陽引力作爲基準加速度。得出$|g(\text{鉑})-g(\text{鋁})|/g$小於 1×10^{-12}。

Beall ，1970 年：在地球或太陽引力場中偏轉小於光子的粒子，其有效運動比光更快。如果它們是帶電粒子或具有其它電磁結構，則將發出Čerenkov 輻射，從而它的速度在小於 1 微米的距離降低到閾值以下。閾值能量約爲 10^3 mc^2。宇宙線簇射中的極端相對論性粒子難於證認，但是 10^{13}電子伏 μ 子的觀測表明，μ 介子並不「太輕」而有 5×10^{-5}那麼多。相反，若粒子P的重力約束比光子更强，則它將輸送在亞微型衰變長度內出現粒子偶 $\gamma\rightarrow P+\bar{P}$ 所需的動量。存在能量大於 10^{13}電子伏的光子表明$e^{\pm}$都並「不重」於 5×10^{-9}，$\mu^{\pm}$ 不重於 2×10^{-4}，Λ，Ξ^-，Ω^-不重於百分之幾。

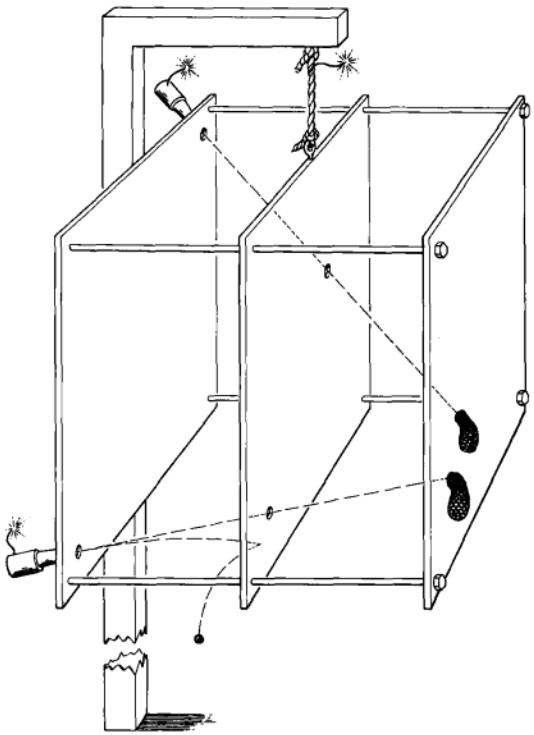


圖 1.7

用失重檢驗局域慣性參照系（「Lorentz參照系」）。當框架無旋轉地自由下落（「通過空時的正常世界線」）時，每個彈簧砲都能成功地把它的彈丸，一顆鋼球，經留西特(lucite)板上排成直線的幾個洞口，射入網袋之中。發砲時，若框架如圖所示那樣懸掛着（「框架被繩子從其通過空時的正常世界線拉開」），則發射將失敗（在圖下部彈道彎曲並彈跳）。普林斯頓的 Harold Waage 曾用約一米見方的留西特板作成一個這樣的慣性參照系模型。其中，用繼電器代替象徵時間延遲的「熔斷器」。當框架(1)旋轉(2)加速(3)上兩者的任意組合，穿透都會失敗。很難引述任何其它能更清楚地闡明「局域 Lorentz 參照系」的含義而又易於實現的裝置了。

選擇局域慣性參照系以消除加速度

一個非常特殊的坐標系中從事工作；這就是一個失重的坐標系，即*局域慣性參照系*。或者計算一下物體在這種參照系中看起來會如何運動，或者——如果觀測者被迫處於地面參照系時——利用一個運動得很快的粒子，並且路徑的長度很有限，則理想的自由下落的參照系與實際的地面參照系偏離准直的總量在實驗的尺度上可以忽略。［例如給定1500米長的直線加速器，以及一個一京電子伏的電子，則飛行時間$\simeq$(1.5×10^5 厘米)/ (3×10^{10}厘米/秒)=0.5×10^{-5}秒；在這段時間內自由下落的距離 $\sim \frac{1}{2} gt^2$ = (490厘米/秒^2) (0.5×10^{-5}秒)$^2 \approx 10^{-8}$ 厘米。］

在局域慣性參照系中分析物理學時，或者沿着一小條蘋果皮追踪螞蟻時，放棄各個遠離的參照系就贏得了簡明性。只有局域地觀察時，物理學才是簡單的！這就是 Einstein 的至關重大的告誡。

Newton 的絕對空間是不可觀測的，不存在的

Newton 與此不同地說過：「絕對空間，按照其自身的性質，與任何外界事物無關，永遠保持同一和靜止」。但是，人們應如何賦於 Newton 的絕對空間以含義，如何找出它的基石，並標誌出它的直線呢？在實際的引力世界中，從來沒有一個粒子沿着一條 Newton 的直線運動。Newton 的理想幾何學超越於觀測之外。「一顆彗星經過太陽旁邊時偏離了理想的直線」。不對。不存在一條可以標誌出該直線的路面。所謂「理想的直線」只是一個神話。它從來沒有存在過，將來也不會存在。

> 「（對於 Newton 來說）爲了得到發展理論所不可缺少的，獨立而絕對的空間概念，曾經經歷了一番激烈的鬥營……。Newton 的決定，在當時的科學狀況下，是唯一可能的決定，而且特別也是唯一有成效的決定。但是這問題以後的發展，却循着一條當時誰也無法預見到的曲折道路前進，它表明 Leibniz 和 Huygens 的那種直覺上有根據的，但以不適當的論據來支持的抵制，實際上是正當的。……爾後，人們仍舊需要付出同樣艱巨的努力來戰勝這個［絕對空間的］概念。」
>
> ［A. Einstein (1954)］.

但是Einstein的局域慣性參照系是存在的，而且是簡單的

按照 Einstein 的意見，直接、簡單而有意義的是每一個局域慣性參照系中幾何學的特徵。在局域慣性系中每一個粒子都作匀速直線運動。定義局域慣性系使得第一批少數粒子具有這種簡明性（圖 1.7）。則在這樣定義的參照系中，觀測到每一個其它的自由粒子也都作匀速直線運動。碰撞和蛻變過程遵從狹義相對論的動量和能量守恒定律。爲基本粒子物理學中成千上萬次觀測所證實的所有這些奇蹟的出現，證明了世界這部機器的內在作用。這些啓示很容易概括如下：(1)物理學始終而且處處是局域 Lorentz 的，即局域而言特殊相對論的規律適用；(2)這種簡明性最清楚地表現在局域 Lorentz 參照系中（「慣性參照系」；圖 1.7）；(3)爲了檢驗局域 Lorentz 參照系，可以檢驗失重！

在局域慣性參照系中，物理學是 Lorentz 的

§1.4　帶坐標和不帶坐標的局域 Lorentz 幾何

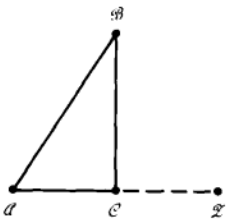
局域 Lorentz幾何是局域 Euclid幾何在空時中的類似之物

在拇指印大小的一塊蘋果表面上，幾何是 Euclid 幾何（圖 1.1；用放大鏡看）。在範圍有限的空時內，幾何是 Lorentz 幾何。在蘋果上，點與點的距離合乎 Euclid 諸定理。在空時中，事件與事件的間隔（「固有距離」，「原時」）滿足 Lorentz-Minkowski 幾何中相應的諸定理（框 1.3）。這些定理要在適當的非常特殊的坐標系中受到經驗的檢驗，這些特殊的坐標系是：Euclid 幾何中的 Euclid 坐標；物理學的局域 Lorentz 幾何中的 Euclid 坐標系自然推廣的坐標系（局域 Lorentz 坐標系；局域慣性坐標系）。（然而，諸定理就其內容而言凌駕於一切坐標系之上。它們涉及間隔或距離。今天與 Euclid時代不同，這些距離，就其定義來說，不再依賴於坐標系。一堆乾草中的許多點就是空時，這些點之間的距離就是幾何。無論用包含坐標的語言，或不包含坐標的語言加以陳述，它們都並無二致（框 1.3）。

框 1.3 帶坐標和不帶坐標的局域Lorentz幾何與局域Euclid幾何

I. 局域 Euclid 幾何

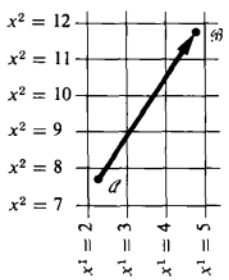
所謂在拇指印大小的蘋果表皮上，幾何是 Euclid 幾何，其含意是什麼？



A. 無坐標的語言（Euclid）：
給定一線段 $\mathcal{AC}$，將它延伸同樣的距離 $\mathcal{CZ}$。令 $\mathcal{B}$ 爲 $\mathcal{AZ}$ 外一點，且與 $\mathcal{A}$, $\mathcal{Z}$ 等距離，則。

$$s_{\mathcal{AB}}^2 = s_{\mathcal{AC}}^2 + s_{\mathcal{BC}}^2 \text{。}$$

（Pythagoras定理；以及 Euclid 的其它定理。）



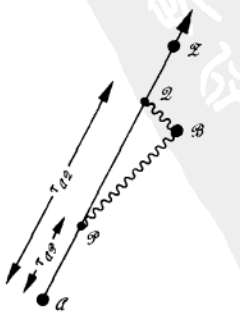
B. 有坐標的語言（Descartes）：
從任一點 $\mathcal{A}$ 至另外任一點 $\mathcal{B}$，在適當的（Euclid 的）坐標中給出其距離 s 爲

$$s_{\mathcal{AB}}^2 = [x^1(\mathcal{B}) - x^1(\mathcal{A})]^2 + [x^2(\mathcal{B}) - x^2(\mathcal{A})]^2 \text{。}$$

如果能夠找到任一坐標系，使得在該坐標系中，對拇指印內所有 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 點，上式均成立，則可確信：(i)該坐標是局域 Euclid 的坐標系，(ii)蘋果表面的幾何是局域 Euclid的（幾何）。

II. 局域 Lorentz 幾何

所謂在實際的物理世界中，空時的足夠有限區域的幾何爲 Lorentz 幾何，其含意是什麼？

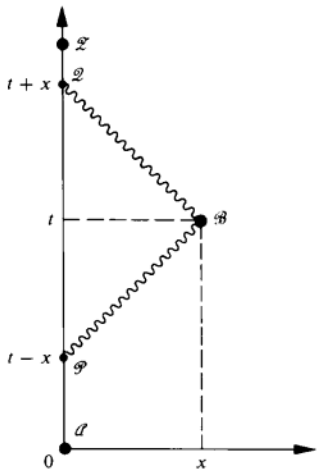


A. 無坐標的語言（Robb, 1936）：
令 $\mathcal{AZ}$ 爲一自由粒子的世界線。令 $\mathcal{B}$ 爲在此世界線之外的一個事件。令一光線從 $\mathcal{B}$ 出發，在事件 $\mathcal{Q}$ 擊中 $\mathcal{AZ}$。令另一光線從 $\mathcal{AZ}$ 上稍早些的事件 $\mathcal{P}$ 出發而達到 $\mathcal{B}$。則，$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 兩事件的固有距離 $S_{\mathcal{AB}}$（類空間隔）或原時 $\tau_{\mathcal{AB}}$（類時間隔）爲

$$s_{\mathcal{AB}}^2 \equiv -\tau_{\mathcal{AB}}^2 = -\tau_{\mathcal{AQ}}\,\tau_{\mathcal{QP}} \text{。}$$

在粒子保持靜止的局域 Lorentz 參照系中，用坐標方法可以證明局域 Lorentz 幾何的上述判據：

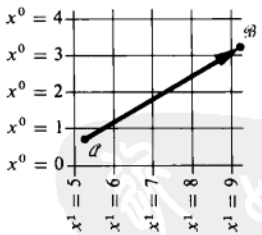
$$\tau_{\mathscr{A}\mathscr{B}}^2 = t^2 - x^2 = (t-x)(t+x)$$
$$= \tau_{\mathscr{A}\mathscr{P}}\,\tau_{\mathscr{A}\mathscr{Q}}。$$



B. 有坐標的語言（Lorentz, Poincaré, Minkowski, Einstein）：

從任一事件 $\mathscr{A}$ 到任一其它鄰近事件 $\mathscr{B}$，其固有距離 $s_{\mathscr{A}\mathscr{B}}$ 或原時 $\tau_{\mathscr{A}\mathscr{B}}$ 可用適當的（局域 Lorentz）坐標表爲：

$$s_{\mathscr{A}\mathscr{B}}^2 = -\tau_{\mathscr{A}\mathscr{B}}^2 = -[x^0(\mathscr{B}) - x^0(\mathscr{A})]^2$$
$$+[x^1(\mathscr{B}) - x^1(\mathscr{A})]^2$$
$$+[x^2(\mathscr{B}) - x^2(\mathscr{A})]^2$$
$$+[x^3(\mathscr{B}) - x^3(\mathscr{A})]^2。$$



如果能夠找到任一坐標系，使得在其中對所有鄰近事件 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 上式都局域成立，則可以確定 (i)該坐標系是局域 Lorentz 坐標系，(ii) 空時幾何爲局域 Lorentz的（幾何）。

III. 事實的陳述

蘋果表面的幾何處處是局域 Euclid 的(幾何)。空時幾何處處是局域 Lorentz的（幾何）。

IV. 用現代數學語言表述局域幾何

A. 任意流形的度規：

對蘋果表面上每一點，對空時中每一事件，事實上，對任意「Riemann流形」的每一點，都存在着一個稱爲*度規張量* $\mathbf{g}$ 的幾何客體。它是一個具有兩個輸入空位的機器，其間可插入兩個矢量：

$$\mathbf{g}(\ \ \ ,\ \ \ )。$$

（空位1、空位2 分別指向兩個空位）

若將相同矢量 $\mathbf{u}$ 插入兩空位，則可得矢量 $\mathbf{u}$ 的長度平方：

$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\ \mathbf{u})=\mathbf{u}^2。$$

若插入兩個不同矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$（與其順序無關！），人們可得出稱爲「$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 標積」並記爲 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 的數：

$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=\mathbf{g}(\mathbf{v},\ \mathbf{u})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}。$$

度規是一種線性的機器：

$$\mathbf{g}(2\mathbf{u}+3\mathbf{w},\ \mathbf{v})=2\mathbf{g}(\mathbf{u},\ \mathbf{v})+3\mathbf{g}(\mathbf{w},\ \mathbf{v}),$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\ a\mathbf{v}+b\mathbf{w})=a\mathbf{g}(\mathbf{u},\ \mathbf{v})+b\mathbf{g}(\mathbf{u},\ \mathbf{w})。$$

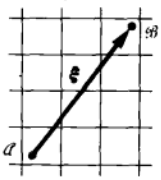
所以，在任意給定的（任意）坐標系中，度規對兩個矢量的運算可以用它們的諸分量寫成雙線性表達式：

$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=g_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta\ （對\alpha,\beta 求和）$$
$$=g_{11}u^1v^1+g_{12}u^1v^2+g_{21}u^2v^1+\cdots。$$

量 $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$，（在空時中 α，β 取0至3各值，在蘋果表面 α，β 取1和2），稱爲 $\mathbf{g}$ 在給定坐標系內的分量。

B. 在局域 Lorentz 參照系和局域 Euclid 參照系中度規的諸分量：

爲了把度規與前述局域幾何的描述聯系起來，引入局域 Euclid 坐標（在蘋果上）或局域 Lorentz 坐標（在空時中）。令 $\boldsymbol{\xi}$ 爲從 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的分離矢量，則在局域 Euclid的（Lorentz）坐標中其分量爲



$$\xi^\alpha=x^\alpha(\mathcal{B})-x^\alpha(\mathcal{A})$$

（見框 1.1）。那麼，$\mathbf{u}_{\mathcal{AB}}$ 的長度平方與從 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 距離的平方相同，應爲（參看上述I. B.和II. B.）

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}=\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\xi})=g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta=s_{\mathcal{AB}}^2$$
$$=(\xi^1)^2+(\xi^2)^2，在蘋果上$$
$$=-(\xi^0)^2+(\xi^1)^2+(\xi^2)^2+(\xi^3)^2，在空時中。所以，度規諸分量爲$$

$$g_{11}=g_{22}=1,\ g_{12}=g_{21}=0;$$

即

$$g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}，在蘋果上，局域 Euclid坐標；$$
$$g_{00}=-1,\ g_{0k}=0,\ g_{jk}=\delta_{jk}\ 在空時中，局域\ Lorentz\ 坐標。$$

在局域 Lorentz 坐標中度規的這些特定分量，在此處和以後記爲 $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 或 $\eta_{\alpha\beta}$，與克朗內克（Kronecker）符號 $\delta_{\alpha\beta}$ 相似。寫成矩陣形式，爲

$$\|g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\|=\|\eta_{\alpha\beta}\|=\begin{array}{c|c||cccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

（α 向下，β 向右）

§1.5 時　　間

時間的定義應使運動看起來單純。

萬物沉睡時，時間猶覺醒。
萬物皆可逝，時間永挺立。
倜儻不受拘，萬物含其中。
古今與未來，皆由時間生。
理性兮理性，汝宜作見證；
理性兮理性，汝宜永堅定。
廣博仙人，摩訶婆羅多
（約公元400年）

相對於局域 Lorentz 參照系，一個自由粒子「以勻速沿直線運動」。「直線」的含義，在圖 1.7所示的慣性參照系模型中已很清楚。但是，「勻速」從何而來？或者，「速度」何以表示呢？圖中甚至連一個鐘也沒有！

改進的完善的 Lorentz 參照系模型不僅如圖 1.7一樣有洞，而且在每個洞上都有鐘控制的活門。僅當彈丸(1)通過空間中的正確區域，且(2)在正確的時間間隔（「時間窗口」）內穿過洞口時，才能擊中目標。於是，時間應如何定義呢？時間的定義應使運動看起來單純！

局域Lorentz參照系的時間坐標的定義，應使運動看起來單純

廣泛應用的時間標準是日，即從某日正午到次日正午的時間。然而，若取日爲時間標準，人們發現每一個好的鐘或表都與之發生衝突。理由很簡單：地球繞本身的軸自轉，同時繞太陽沿軌道公轉。太陽在天空的運行並非單單來源於上述任何一個效應，而是來源於兩者的組合，盡管兩者的量值有所不同。地球繞軸自轉的角速度較快（約每年366.25圈），其之均勻令人詫異。太陽相對地球中心的視角速度（約每年一圈）却並不均勻。地球在橢圓軌道(橢率0.017）上運動時，若它與太陽的距離比平均距離小百分之一，則太陽視角速度將比其平均值大百分之二，若地球與太陽的距離比平均距離大百分之一，則太陽視角速度將比其平均值小百分之二（Kepler定律）。對於前者，若以每年圈數表示，則太陽在天空運行的瞬時轉動速度約爲

$$366.25-(1+0.02);$$

對於後者，約爲

$$366.25-(1-0.02)。$$

「平均太陽日」包含 $24\times3,600=86,400$ 標準秒，可見，當地球與太陽的距離比平均值小百分之一（或大百分之一）時，從某日正午到次日正午的標準秒數將比通常值大（或小）

$$\frac{0.02\text{（年減少圈數）}}{365.25\text{（年平均圈數）}}\times86,400\text{秒}\sim4.7\text{秒}。$$

這就是從正午到正午的時間賬。一個逐月變化如此之大的時間標準是不能接受的。否則，光速竟也會逐月變化！

一旦認識到（古人已經認識到這一點）缺少這種均勻性，人們便被迫放棄以太陽日爲時間標準，因爲太陽日不能使運動看起來簡單。於是轉向新的時間標準，不管地球繞太陽的公轉而注目於地球繞軸的自轉；恒星日，卽恒星接連兩次到達天頂的時間。新標準很好！或者，更確切的說，當測量的精度還不足以察覺地球固有角速度的變化時，這個新時間標準是好的。哪個鐘膽大妄爲，敢於向地球自轉的準確性挑戰呢？這可是天國的機器。

Halley（1963）以及 Kant（1754）等後人因下述事實懷疑這個時間標準有毛病，卽根據 Newton 引力理論，採用當時的時間標準推算的日全食帶，與古代希臘羅馬人在該日蝕期間實際記錄的位置之間存在着明顯的差別。月亮在空間撒下了運動着的陰影。在日蝕那天，月影在自轉的地球表面抹上了黑刷狀的一筆，它往往長數千公里，而寬度則一般遠小於百公里。凡講到盡人皆知的地球並欲使月影正好落在地球之上者，必須非常仔細地往回計算以便確定兩個關鍵項：⑴在所涉古代某日的每一時刻，相對於地球和太陽而言，月球位於何處；⑵從那時起到現在，地球已經轉過了多少角度。以公元 484年 1 月14日的日蝕爲例（圖 1.8），若假設在其間的十五個世紀中，地球的自轉角速度都與1900年（天文參照點）時相同，則所得結果是錯誤的。地球必須回撥 30°（或月亮離開其計算所得位置，或是兩種效應的某種組合），才能使雅典人處於黑影之下。爲了補上這 30°之差（或者，若部分效應起源於月亮角動量的緩慢改變，則小於 30°），當年地球之自轉應快於今日。若將上述差別之絕大部分歸於地球的自轉減慢（自轉減慢的速率與現代原子鐘證實的結果一致），並假定從那時到現在的減慢速率是均勻的（角速度修正正比於所經時間的一次方，角度修正則正比於所經時間的平方），可以估計出修正量爲：

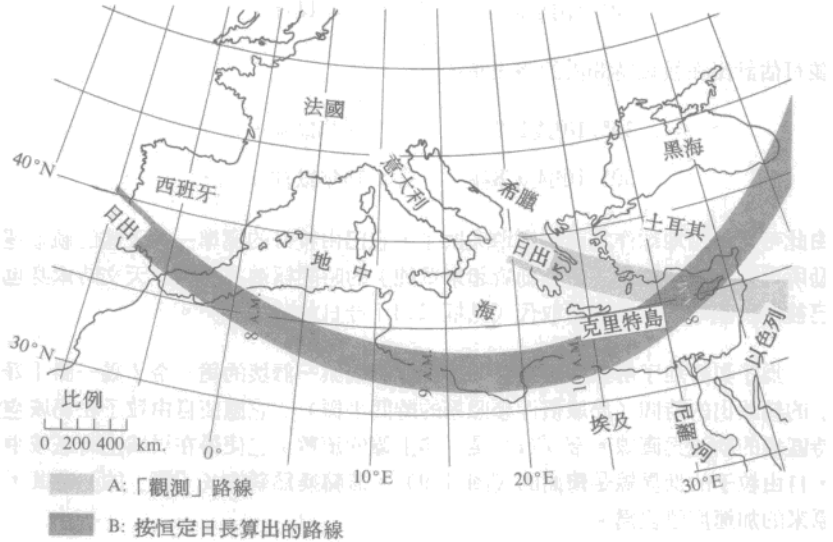


圖 1.8

計算的公元 484 年 1 月14日全食帶(左側；計算是以地球相應於其1900年角速度無自轉減慢爲根據的) 與前移到使全食中心 (日出處) 位於雅典的全蝕帶之對比［位移近 30°，在計算中所取的實際減速值爲32.75角秒／(世紀)^2］。根據泰恩(Tyne)市紐卡斯爾(Newcastle)大學地球物理和行星物理系 F. R. Stephenson 博士的意見，這次日蝕「無疑是所有古代歐洲日蝕中最可靠的一次」。他特意爲本書準備了這幅插圖，並寄來了那不勒斯 (Naples) Marinus 所撰原始希臘文的雅典 Proclus (公元485年死於雅典) 傳記之一節，其中寫道：「在他死的前一年，並未預料這些不祥之兆；例如如此偉大的日蝕，使得夜晚在大白天突然降臨。黑暗是如此深沉，甚至星星都在天空中出現了。這件事發生在東部的天空上，當時太陽居於摩羯宮」［轉引自 Westermann 和 Boissonade 1878 年譯本］。

這次日蝕的 30° 之差，連同其它日蝕的相應量，是否能代表「正確」的修正量呢？「正確」可不是簡單的字眼。在地中海區域，一次日全蝕和下一次往往相隔許多年。希臘和羅馬各省之間，既遠不具有和平與安定生活的同樣水平，更遠沒有觀測日蝕並爲後代記錄下來的共同標準。如果說過去的記錄是令人不快地支離破碎，那麼，更加令人不快的是：現代一些毫無鑑別能力的「研究者」的蜂湧而入，以及隨心所欲地把這個或那個歷史事件證認爲所計算的這個或那個日蝕。幸而，關於地球自轉的長期減速，現在已有一大批經批判識別而可靠地流傳下來的文獻 (包括天文學和歷史學文獻) 可資利用。除了 O. Neugebauer(1959), Munk 和 Mac Donald (1960) 的書外，還有 Curott (1966) 的文章，以及由上述諸作者引述的一些文目，關鍵文目如下 (我們感謝 Otto Neugebauer 教授對這些文目的介紹——此事與下面引述的另一位 Neugebauer 無關)：關於古代記錄和古代日蝕帶的計算，見 F. K. Ginzel (1882, 1883, 1884)；計算日蝕帶的表，見 Oppolzer (1887) 和 Ginzel (1899)；對證據的批判性分析，見P. V. Neugebauer (1927, 1929,和 1930)。本圖不選其它日蝕而選如上的特定日蝕的原因是它的歷史記載極爲可靠。

30°或兩小時　　1500年以前

並可估計出在較短時間內的修正量如下：

30°/10^2或1.2分　　150年以前，

30°/10^4或0.8秒　　15年以前。

由此可見，用地球作爲計時標準失敗了，它已由較好的標準——天體的軌道運動所代替，這是更能「使運動看起來單純」的時間標準。今天，天文時本身也已被作爲基準的原子時所取代（見框 1.4「今日的時間」）。

好的鐘應使自由粒子的空時軌迹爲直線

爲了更好地了解如何定義時間，讓我們觀察一個壞的鐘。令 t 爲一個「好」的鐘給出的時間（局域慣性參照系的時間坐標）；它應使自由粒子在局域空時區域的軌迹爲直線。令 $T(t)$ 是「壞」鐘的讀數；它使得在局域空時區域中，自由粒子的世界線是彎曲的（圖 1.9）。若轉換爲新的（「壞」的）時間，原來的加速度值變爲。

$$0=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\ \frac{dx}{dT}\right)$$

$$=\frac{d^2T}{dt^2}\ \frac{dx}{dT}+\left(\frac{dT}{dt}\right)^2\frac{d^2x}{dT^2}。$$

爲了解釋粒子的這種視加速度，新時間的採用者引入一虛擬力：

$$F_x=m\frac{d^2x}{dT^2}=-m\frac{\left(\frac{dx}{dT}\right)\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dT}{dt^2}\right)^2}。\qquad(1.2)$$

通過這個「壞」時間的例子可以清楚看出，當 Newton 提出「時間均勻地流動」($d^2T/dt^2=0$）這一原則時，他想像的是一個「好」的時間。時間的定義應使得運動看起來單純！

我們對計時單位的選擇：幾何動力學的厘米

由時間定義本身得出的均勻性原則，應允許時間尺度自由變化。量 $T=at+b$ 和 t 本身一樣滿足上述要求。時計的歷史表明，對時間的單位和原點曾有多種選擇。每一種選擇都需要人們的某些活動來加以贊許，從法者的經諭到某個委員會的公告等等。本書取光傳播一厘米所需要的時間爲時間單位來計時。類空間隔和類時間隔都用同一幾何單位厘米量度。任何其它選擇都會使得對自然界中簡單事物的分析複雜化。沒有別的選擇能夠實現 Minkowski 的格言，「從此以後，空間本身和時間本身，都注定要消逝成只剩影子，而只有兩者的某種組合能保持其獨立的現實性。」

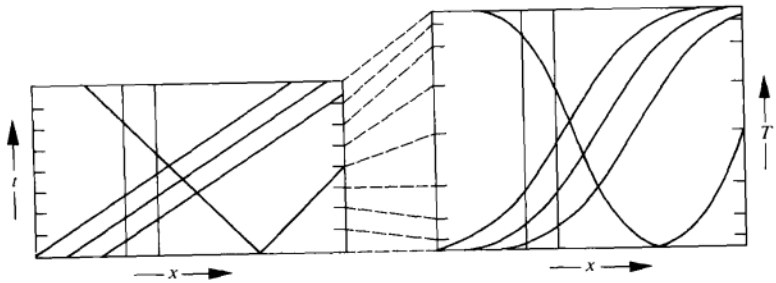


圖 1.9

如圖，好鐘（左）與壞鐘（右）描繪同樣一些自由粒子經過同一空時區域。右圖所描繪的世界線給人有力作用的印象。時間的恰當定義應消除此類虛擬力。虛線把兩種時間尺度的相應時刻連接起來。

今天，時間可以比距離更精確地測量。這是否成爲反對取厘米爲基本單位的理由呢？不，只要採取下述新的厘米定義就行了；幾何動力學的標準厘米定義為以 1900.0 回歸年為界限的兩「有效二分點」之間隔的下述分數。

$$1/(9.460546\times10^{17}) \tag{1.3}$$

1900.0回歸年因其衆所周知的確定性和準確性，被國際公認爲基準年。標準委員會定義了歷史秒，即使標準間隔爲 31,556,925.974 秒。如果當時能足夠精確地知道光速，標準委員會原有可能同時給出此標準間隔內的厘米數。但未能作到，因爲當時光速只能準到 6 位數字。此外，以 Kr^{86} 桔紅色譜線波長定義的國際厘米，只有 9 位數字（16,507.6373 個波長爲 1 國際厘米）。然而標準秒却給到 11 位數字。定義幾何動力學標準厘米使之與標準秒相配，即規定 1900.0標準回歸年包含

$$9.4605460000\times10^{17}$$

個標準厘米。於是，光速嚴格地等於

$$\frac{9.4605460000\times10^{17}}{31,556,925.974}\text{幾何動力學厘米／秒。} \tag{1.4}$$

這一結果與1967年所知的，以「國際厘米／秒」爲單位的光速值

$$29,979,300,000\pm30,000 \quad \text{國際厘米／秒。}$$

框 1.4 今日的時間

1956年以前，秒定義爲平均太陽日的1/86,400。

1956年到1967年，「秒」意指曆書秒，定義爲從 1899 年12月31日00時00分00秒開始的曆書年的1/(31,556,925.9747)。

1967年以來標準秒指的是 SI （國際單位制）秒，定義爲 Cs^{133} 基態兩超精細能級間無擾微波躍遷的 9,192,631,770個周期。

與前述時間間隔單位的演變相近，時間坐標的演變也經歷過幾個階段。

世界時，UTO，基於歷史上出現過的日子數；換言之，基於地球繞其軸的實際自轉數；歷史地說，即基於格林威治天文臺定的平均太陽時（太陽位置須經「時間方程」修正，即地球在接近太陽時的運動，比遠離太陽時要快一些）。

UT1，「航海時標」，是與 UTO 相同的時間，但經過地球在其軸上擺動的修正(Δt～0.05秒)。

UT2，是 UT1 經周期性起伏修正所得，這種起伏的起因不明，以一年半和一年爲周期 （Δt～0.05秒；在1日內可測出爲3毫秒）。

曆書時 ET（根據引力理論，天文觀測和計算定義），本質上取決於地球繞太陽的公轉。「測量的不準確限制了曆書時的精度，每九年平均約相差0.05秒」。

協調世界時（UTC），通過 WWV 等電臺播放。1971年2月國際一致同意自1972年1月1日起生效。鐘的速度受原子鐘控制，使之在一年中盡可能地均勻（原子鐘可在一分鐘內測至 0.1微秒，大量原子鐘總體的彌散速度爲 0.1微秒／每天）。但是偶爾要增加或減少一秒鐘——稱爲「閏秒」，使UTC時與航海時（UT1）之差永不超過0.7秒。

時間中止一秒鐘

6月30日午夜，在全世界，時間將中止一秒鐘。所有的無線電時間信號都將插入一「閏秒」，以便格林威治平均時與地球每日損失的3000分之一秒相符。

在格林威治平均時 （GMT）的午夜（即BST時間7月1日1時），從皇家格林威治天文臺送往廣播臺的信號將先是6個短聲，表示55秒至60秒，隨後一秒鐘接着播發一個延長了的信號來標誌新的一分鐘。

泰晤士報
1972.6.21
星期三

以上敍述摘自 J. A. Barnes（1971年）一文。下列數字取自科羅拉多州 （Colorado） 博爾德（Boulder）市美國國家標準局時間頻率司好意提供的一張表（收到時爲非正式的）

一些常見鐘的記時能力如下：

音叉手錶（1960），1分／月

石英晶體鐘(1921-1930)，1微秒／日，1秒／年。

石英晶體手表（1971），0.2秒／2個月，1秒／年。

銫束（原子共振，Cs^{133}（1952-1955），0.1微秒／日，0.5 微秒／月。

銣氣室（Rb^{87} 共振）（1957），0.1微秒／日，1-5 微秒／月。

氨微波激轉器（1960），0.01 微秒／2時，0.1微秒／日。

甲烷穩定激光器（1969），0.01 微秒／100秒。

相容。近代測量［Evenson 等（1972）］改變了前述1967年論據的一些細節，但原則不變。

§1.6 曲　　率

引力似乎已經消失。各處的空時幾何都是局域 Lorentz 幾何。而在Lorentz 幾何中，粒子是以勻速沿直線運動的。其中哪裏能見到任何引力的偏轉呢？回答是，且回到蘋果上來（圖 1.1）。重新觀察螞蟻在蘋果表面上的短程線徑跡。注意原來從同一點分出的兩條鄰近短程線的重新會合。在眞實的物理世界中，何者與此類似？什麼概念能符合 Einstein 關於物理學僅當局域分析時才是簡單的這一訓諭呢？不要查看宇宙飛船到地球的距離。而去查看該宇宙飛船到鄰近宇宙飛船的距離！或者，爲了避免可能涉及到兩個宇宙飛船之間的任何引力，查看在繞地軌道上的兩個鄰近的試驗粒子。在這種情況下，爲了避免非局域因素（地球）的分心，可在繞地軌道上的宇宙飛船內部研究。但是，這個區域已被當作局域慣性參照系了！在這裏，能對引力物理學有所了解麼？一無所知。在所考慮的測量精度內，這兩個試驗粒子相對於宇宙飛船以勻速作直線運動，從而，彼此也相對作勻速直線運動（見框 1.5，平直性的檢驗）。現在，問題的關鍵開始顯露了：測量精度。增加測量精度，直到能測出使試驗粒子彼此分離的加速度——如果它們位於通過地球中心同一半徑上的話；或者，測出其間彼此靠近的加速度——如果它們的連線垂直上述半徑的話。用 Newton 的語言，這些加速度起源於地球的潮汐作用。然而，對宇宙飛船中的觀測者來說，用不着去看地球。而且，根據 Einstein 的理論，他懂得重要的是局域地分析運動。他用矢量 ξ^k（$k=1, 2, 3$, 是局域 Lorentz 參照系中測定的三分量）表示新的試驗粒子與基準試驗粒子的分離。至於這個分離的加速度，他知道根據 Newton 物理學，可以得出的是：若取徑向方向沿 Descartes（笛卡兒）坐標 z 軸，則

引力在鄰近試驗粒子之間的相對加速度中顯示出來

$$\frac{d^2\xi^x}{dt^2}=-\frac{Gm_{約定}}{c^2r^3}\,\xi^x;$$

$$\frac{d^2\xi^y}{dt^2}=-\frac{Gm_{約定}}{c^2r^3}\,\xi^y; \tag{1.5}$$

$$\frac{d^2\xi^z}{dt^2}=\frac{2Gm_{約定}}{c^2r^3}\,\xi^z。$$

證明：在 Newton 物理學中，單個粒子指向地球中心的加速度，用約定的時間單位，是$Gm_{約定}/r^2$，其中$G=6.670\times10^{-8}$厘米^3／克·秒^{2}是 Newton 引力常數，$m_{約定}$ 是以約定的克爲單位的地球質量。採用幾何學的時間單位（光行

1厘米的時間），加速度爲 $Gm_{約定}/c^2r^2$。當兩個粒子在垂直 r 的方向上分開距離 ξ 時，其中一個粒子的向下加速度與另一粒子的向下加速度偏離 ξ/r 角。於是，一個粒子向另一粒子以上述數量加速。當兩粒子的分離平行 r 時，計算 r 處及 $r+\xi$ 處的 Newton 加速度，並取其差（ξ 乘以 d/dr），即可給出相對加速度。由此得證。總而言之，Newton 引力理論的「局域潮汐加速度」提供了 Einstein 囑咐人們去尋找的引力局域描述。

相對加速度是由曲率引起的

這個潮汐加速度與曲率有何關係呢？（見框 1.6）再次查看那個蘋果，或者最好查看一個半徑爲 a 的球（圖1.10）。鄰近短程線之間的間隔滿足「短程線偏離方程」

$$\frac{d^2\xi}{ds^2}+R\xi=0\ 。 \tag{1.6}$$

式中 $R=1/a^2$ 是所謂表面的 Guass 曲率。對於蘋果表面，此方程仍適用，差別只是蘋果表面各處的曲率 R 不同。

框 1.5 平直性的檢驗

1. 規定所研究區域的空間延展爲 L（厘米或米），時間延展爲 T（光通行時間，以厘米或米爲單位）。

2. 規定在此區域中對試驗粒子分離的測量精度爲 $\delta\xi$。

3. 跟踪在此空時區域中沿初始時互相平行的世界線運動的一些試驗粒子。

4. 對所有的運動方向，若這些世界線在 $\delta\xi$ 的精度內保持平行，則謂「在此有限區域內，在規定的測量精度內，空時是平直的」。

例：正在地球表面之上 100米×100米×100米（空間延展）的區域內，跟踪 10^9 米的光通行時間（$T_{約定}\sim 3$ 秒）。地球的質量爲 $m_{約定}=5.98\times10^{27}$ 克，$m=(0.742\times10^{-28}$ 厘米／克$)\times(5.98\times10^{27}$ 克$)=0.444$ 厘米［見(1.12) 式］。潮汐產生的加速度 $R^{t}{}_{0t0}$（兩初始靜止、彼此之垂直高度分離爲1厘米的試驗粒子，在 z 方向的相對加速度）爲

$$\begin{aligned}(d/dr)\,(m/r^2)&=-2m/r^3\\&=-0.888\text{ 厘米}/(6.37\times10^8\\&\quad\text{厘米})^3\\&=-3.44\times10^{-27}\text{ 厘米}^{-2}\end{aligned}$$

（「垂直分離爲1厘米，光通行時間之平方爲1厘米平方時，相對位移的厘米數」）。垂直分離爲 $\xi^t=10^4$ 厘米的兩個試驗粒子，在 $t=10^{11}$ 厘米的時間內（對如此緩慢運動的試驗粒子來說，時間和原時之差可以忽略），相對位移達

$$\begin{aligned}\delta\xi^t&=-\tfrac{1}{2}R^t{}_{0t0}t^2\xi^t\\&=1.72\times10^{-27}\text{厘米}^{-2}(10^{11}\text{厘米})^2 10^4\text{厘米}\\&=1.72\text{毫米}。\end{aligned}$$

（對於其它運動方向，相對間隔略小一些）。若在100米高空，測量所達的最小不確定性 $\delta\xi$「劣」於此數（即大於1.72毫米），則在這個精度水平上，所考慮的空時區域可按平直處理。若測量的不確定性「優」於（即小於）1.72毫米，則須限在較小的空時區域，或較短的時間間隔，或兩者兼而有之，以尋找一個在該測量精度內可以看作平直的空時區域。

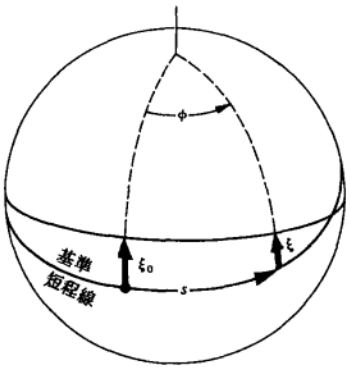


圖 1.10

用兩相鄰短程線的「分離加速度」表示曲率。兩條原先互相平行的分離距離（「短程線偏離」）爲 ξ_0 的短程線，經過距離 s 後不再平行了。其間的分離爲 $\xi=\xi_0\cos\phi=\xi_0\cos(s/a)$, 式中 a 是球的半徑。該分離滿足簡諧運動方程 $d^2\xi/ds^2+(1/a^2)\xi=0$（「短程線偏離方程」）。

分離矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 的方向因它垂直於基準短程線而完全固定。因此，在短程線偏離方程中毋需涉及 $\boldsymbol{\xi}$ 的方向，其中只出現 $\boldsymbol{\xi}$ 的大小 ξ，即只出現相對加速度的大小而不涉及其方向。

在二維以上的空間中，可用同樣的、而形式更爲普遍的方程，但有一些差別。在二維情形，一短程線相對於鄰近基準短程線的加速度的方向，因其間的間隔矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 應與基準短程線垂直而唯一確定（見圖1.10）。但在三維或更高維情形則並非如此。其中 $\boldsymbol{\xi}$ 仍垂直於基準短程線，同時繞它旋轉（圖1.11）。因此，爲了唯一地確定其相對加速度，不僅需要給出它的大小，還需要給出它的方向。

於是，在三維和更高維情形，相對加速度是一個矢量。稱之爲「$D^2\boldsymbol{\xi}/ds^2$」，並稱其四個分量爲「$D^2\xi^\alpha/ds^2$」。爲什麼用大寫字母「D」，爲什麼不用「$d^2\xi^\alpha/ds^2$」呢？因爲我們的坐標系是完全任意的（參看 §1.2）。即使矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 完全沒有變化，坐標線的扭曲或轉動仍會引起 $\boldsymbol{\xi}$ 的分量 ξ^α 各處不同。因此，一般說來，分量爲 $d^2\xi^\alpha/ds^2$ 的加速度並不等於加速度的分量 $D^2\xi^\alpha/ds^2$！

用 Riemann 張量表征曲率

然而，在彎曲空時中，人們能否確定相對加速度的分量 $D^2\xi^\alpha/ds^2$ 呢？爲此要採用短程線偏離方程（1.6）的更爲複雜的型式。微分幾何（本書第三編）提供給我們一個稱爲 *Riemann* 曲率張量「***Riemann***」的幾何客體。***Riemann*** 是蘋果表面 Guass 曲率的 R 一個更高維對應量。

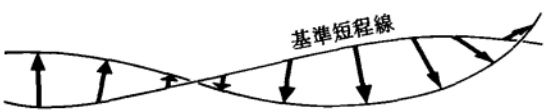
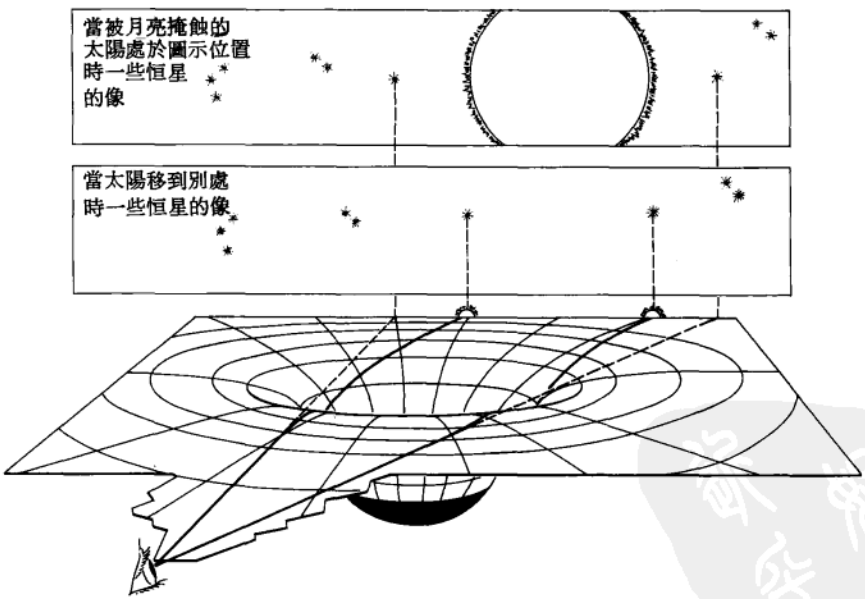


圖 1.11

在彎曲的三維流形中，兩短程線間的分離矢量 $\boldsymbol{\xi}$。此處，從一點到另一點，不僅 $\boldsymbol{\xi}$ 的長度可以變化，還可以不同的速度繞基準短程線旋轉。因此，除了用大小外，還必須用方向來表徵短程線的相對加速度，即它必須是一個矢量 $D^2\boldsymbol{\xi}/ds^2$。

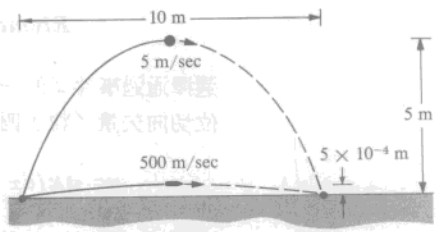
框 1.6 何者之曲率？

初看起來，最有吸引力的莫過於下述想法：引力是空間曲率的一種表示(A)，然而，再一想，最荒謬的想法竟莫過於此(B)。如果彎曲來自空間的幾何，爲什麼球和子彈軌迹的彎曲如此不同呢？偉大的 Riemann 沒有給世界提供一種引力的幾何理論，這是不足爲怪的。的確，他在28歲時(1854年6月10日）向世界呈獻出定義和計算曲率的數學工具（度規和 Riemann 幾何）。的確，在他40歲垂危之際，仍耗盡心血尋求電和引力的統一計算。但是，爲什麼他未能找到引力和曲率的決定性連繫呢？也許超乎其他一切的理由是，他想的只是空間和空間的曲率，而不是空時和空時的曲率。爲邁出這一步並達到狹義相對論，花了四十年（1905年；時間與空間處於同等地位），下一步又是十年（1915年；廣義相對論）。在空時(C)中描述時，球和子彈的軌迹似乎有可相比擬的曲率。但是，實際上，兩條軌迹都沒有任何彎曲。兩者在(C)中看起來都彎曲，這只是因爲人們忘記了他們所居住的空時本身是彎曲的——彎曲得足以使這些軌迹成爲現有的最直的直線（「短程線」）。

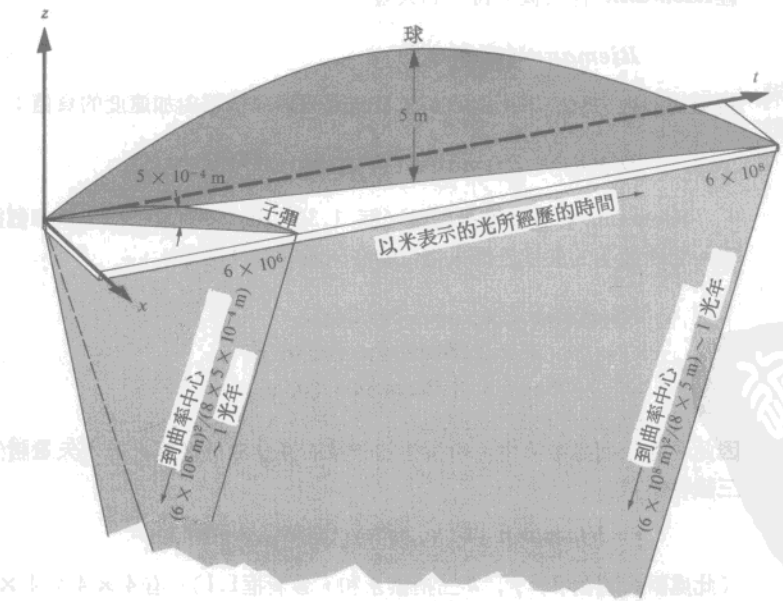


A. 把光線因太陽而彎曲描述爲太陽附近空間彎曲的結果。光線追隨短程線，但是，光行進於其中的幾何是彎曲的（實際的行進發生在空時中，而不是在空間中，正確的偏轉應是上述簡單圖像的兩倍）。偏轉反比於恒星和日心的角距。在日蝕時實際觀測到的偏轉可參看框40.1。

如果說最初看到曲率（此處指空時的曲率）以如此直截了當的方式湧現出來頗爲滿意，那麼，稍加思索後則痛感尚待補充。曲率乃相對何者而言？曲率並非相對於實驗室而言。在適當的討論中，在地球上的實驗室並不具有任何簡單地位。首先，它不是 Lorentz參照系。其次，提到地球甚至會使人們想到引力超距作用的某種說法（指地心至球或子彈的距離）。與此相反，Einstein 的整個論點是物理學只在局域分析時才看起來簡單。但是，考慮局域物理學，意味着將一個試驗粒子的短程線與另一個試驗粒子的短程線相比較，後者(1)在前者附近行進；(2)以幾乎同樣的方向行進；(3)以幾乎相同的速度行進。因此人們可以「查看這兩個鄰近試驗粒子之間的間隔，並以這些間隔的二階時間變化率和『短程線偏差方程』（1.8 式）得出空時的曲率。」



B. 在實驗室中看到的球與子彈通過空間的軌迹，具有極爲不同的曲率。



C. 在實驗室中記錄的球與子彈通過空時的軌迹，具有可相比擬的曲率。軌迹比作圓弧，則（半徑）＝（水平距離）²/8（升高距離）。

Riemann 是空時中彎曲和扭翹的數學體現。
Riemann 也是一個媒介物，通過它，彎曲和扭翹（空時的曲率）產生出短程線間的相對加速度。

Riemann，與框1.3中的度規張量 ***g*** 一樣，可以看作一族機器。在空時中每個事件上都有這樣一部機器。每一部機器有三個空位，可以插入三個矢量：

空位 1　空位 2　空位 3
↓　↓　↓
Riemann (　　,　　,　　)。

選擇通過事件 *2* 的一短程線（自由粒子世界線）爲基準線，並將其在那裏的單位切向矢量（粒子四維矢量）表爲

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{dx}/d\tau\text{；其分量 }u^{\alpha}=dx^{\alpha}/d\tau\text{。} \tag{1.7}$$

選擇另一鄰近的短程線，並用 $\boldsymbol{\xi}$ 表示它與基準短程線的垂直距離。然後將 $\boldsymbol{u}$ 插入 *2* 處 ***Riemann*** 的第一個空位，$\boldsymbol{\xi}$ 插入第二個空位，$\boldsymbol{u}$ 插入第三個空位。經***Riemann*** 作用後，得一新矢量，

$$\boldsymbol{Riemann}\ (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{u})\text{。}$$

Riemann 張量，通過短程線偏離方程，產生相對加速度

短程線偏離方程表明，這個新矢量是兩個短程線相對加速度的負值：

$$D^2\boldsymbol{\xi}/d\tau^2+\boldsymbol{Riemann}\ (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{u})=0\text{。} \tag{1.8}$$

Riemann 張量與度規張量（框 1.3）和其它張量一樣，是一個線性的機器。它所產生的矢量是插入空位的各矢量的線性函數：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Riemann}\ (2\boldsymbol{u},\ a\boldsymbol{w}+b\boldsymbol{v},\ 3\boldsymbol{r})\\&\quad=2\times a\times 3\,\boldsymbol{Riemann}\ (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{r})\\&\qquad+2\times b\times 3\,\boldsymbol{Riemann}\ (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{r})\text{。}\end{aligned} \tag{1.9}$$

因此，在任何坐標系中，所產生的矢量的諸分量可以寫成插入矢量諸分量的「三線性函數」：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{Riemann}\ (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})\Leftrightarrow r^{\alpha}=R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}u^{\beta}v^{\gamma}w^{\delta}\text{。} \tag{1.10}$$

（此處隱含着對 β，γ，δ 三指標求和，參看框1.1）。有 $4\times4\times4\times4=256$ 個數的 $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ 稱爲「在給定坐標系中 Riemann 張量的分量」。短程線偏差方程可以用分量形式表爲

$$\frac{D^2\xi^{\alpha}}{d\tau^2}+R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\xi^{\gamma}\frac{dx^{\delta}}{d\tau}=0\text{。} \tag{1.8′}$$

短程線偏離方程類似於 Lorentz 力定律

在 Einstein 的引力幾何理論中，短程線偏差方程概括了幾何對物質的全部效應。它在引力物理學中的作用，就像 Lorentz 力方程

$$\frac{D^2x^\alpha}{d\tau^2}-\frac{e}{m}F^\alpha{}_\beta\frac{dx^\alpha}{d\tau}=0, \tag{1.11}$$

在電磁學中的作用一樣。參看框 1.7。

幾何單位

在空時中，曲率的測量單位爲厘米$^{-2}$，與蘋果表面一樣。爲了使這些單位甚爲清楚，只需把質量也用「幾何單位」表示：

$$\begin{aligned} m\text{（厘米）}&=(G/c^2)m_{\text{約定}}\text{（克）}\\ &=(0.742\times10^{-28}\text{厘米／克})m_{\text{約定}}\text{（克）}。\end{aligned} \tag{1.12}$$

框 1.7　在引力場以及在電磁場影響下的運動方程，比較與對照

	電磁 ［Lorentz力，（1.11）式］	引力 ［短程線偏離方程，(1.8′)式］
加速度是否對單個粒子定義的？	是	否
加速度如何定義？	實際世界線與不帶電的「基準」試驗粒子相比較，兩粒子以相同的四維速度經過空時同一點。	試驗粒子已是中性的，它不能相對自己加速！加速度是相對於作爲基準的鄰近試驗粒子測出的。
加速度是否依賴於粒子四維速度的全部四個分量？	是	是
所有位置相同四維速度相同的試驗粒子是否具有共同的加速度？	否，應正比於e/m	是
驅動場	電磁場	Riemann曲率張量
驅動場的分量總數	$4\times4=16$	$4^4=256$
考慮到張量對稱性後的實際分量數	6	20
這些分量的熟知的名稱	3個電分量 3個磁分量	局域Newton潮汐加速度的6個分量

利用比值

$$G/c^2=0.742\times10^{-28}\text{厘米／克}$$

把克轉換爲厘米，這與利用比值

$$c=\frac{9.4605460000\times10^{17}\text{厘米}}{31\ 556\ 925.974\text{秒}}$$

把秒轉換爲厘米完全類似（參看框 1.5之末）。太陽的質量，用約定單位表示，爲$m_{\text{約定}}=1.989\times10^{33}$克，用幾何單位表示，爲 1.477公里。框 1.8 作了進一步的討論。

由緩慢運動粒子之間的相對加速度可算出Riemann張量的諸分量

利用幾何單位，並利用 Newton 引力理論，很容易算出接近地球或接近太陽處 Riemann 曲率張量的9個最有意義的分量。這種方法是，將通過測量緩慢運動試驗粒子加速度來確定電場强度的方法，類推到引力場。考慮在距地

框 1.8 幾何學單位

本書採用「幾何學單位」，其中光速 c，Newton引力常數G，以及 Boltzmann 常數k都等於 1。此數 1.0用下述不同方式表示時具有很大的價值：

$1.0=c=2.997930\cdots\times10^{10}$厘米／秒
$1.0=G/c^2=0.7425\times10^{-28}$厘米／克；
$1.0=G/c^4=0.826\times10^{-49}$厘米／爾格；
$1.0=Gk/c^4=1.140\times10^{-65}$厘米／開；
$1.0=c^2/G^{1/2}=3.48\times10^{24}$厘米／高斯$^{-1}$。

可將以上任何一種方式表示的因子 1 乘入任何方程的任一項中，該方程仍有效。由此，可將測量單位從克轉換爲厘米，或秒，或爾格，等等。例如：

$$\begin{aligned}\text{太陽質量}=M_\odot&=1.989\times10^{33}\text{克}\\&=(1.989\times10^{33}\text{克})\times(G/c^2)\\&=1.477\times10^{5}\text{厘米}\\&=(1.989\times10^{33}\text{克})\times(c^2)\\&=1.788\times10^{54}\text{爾格}。\end{aligned}$$

在本書中，用厘米爲標準單位來測量所有的量。但是，偶而也使用約定單位，在這種情況下，有時加下標「約定」於所測之量，但並非永遠如此：

$M_{\odot\text{約定}}=1.989\times10^{33}$克。

球或太陽 r 處，兩個鄰近而緩慢運動（$v \ll c$）粒子的短程線之間的分離。在天體力學作爲標準的近似慣性的坐標系中，基準試驗粒子四維速度的諸分量，除 $dx^0/d\tau = 1$ 外，餘均可略。短程線偏差方程的諸空間分量可表爲

$$d^2\xi^k/d\tau^2 + R^k{}_{0j0}\xi^j = 0 \text{ 。} \tag{1.13}$$

與 Newton 理論的結論，即（1.5）式比較，可得出有關質心附近空時曲率的下述知識：

$$\begin{Vmatrix} R^i{}_{0i0} & R^j{}_{0i0} & R^i{}_{0i0} \\ R^i{}_{0j0} & R^j{}_{0j0} & R^i{}_{0j0} \\ R^i{}_{0i0} & R^j{}_{0i0} & R^i{}_{0i0} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m/r^3 & 0 & 0 \\ 0 & m/r^3 & 0 \\ 0 & 0 & -2m/r^3 \end{Vmatrix} \tag{1.14}$$

（單位爲厘米$^{-2}$）。此處及以後所用的脫字符或「帽」號（^）表示矢量或張量在局域 Lorentz參照系中的分量（即「物理分量」，以有別於在一般參照系中的諸分量）。Einstein 理論可以確定曲率其它分量的值（如$R^i{}_{jij} = -m/r^3$）；但是這九項在引力理論的許多應用中是主要有關的量。它們類似於 Lorentz 運動方程中的電場諸分量。沒有計算的許多項則類似於磁場諸分量——除了源快速運動的情況外，它們通常是較弱的。

這就是幾何對物質的效應的概述（蘋果的曲率使短程線交叉的效應——在蘋果頂部的下凹處附近，這一效應特別顯著，正如在引力吸引中心附近，空時曲率特別大一樣）。現在，讓我們再來討論物質對幾何的效應（「蘋果梗引起下凹的效應）！

§1.7　物質對幾何的效應

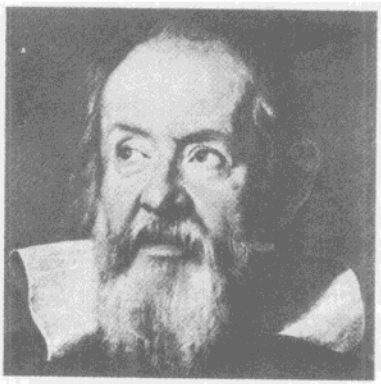
> 在距世界中心特定距離處，任何已知重量的重物，其重量將隨它到中心距離的變化而變化；由此，每當把它從中心移遠時，會變得重些，而移近時則輕一些。據此，各引力間的關係就是距中心的各距離間的關係。
>
> AL KHĀZINĪ (Merv, 公元 1115年），智慧的平衡之書

圖 1.12 示出一密度均勻之球，其密度爲地球之平均密度 $\rho = 5.52$克／厘米^3。一洞貫穿此球。兩試驗粒子 A 和 B 在此洞中以84分的周期作簡諧運動。因此，它們的短程線的間隔 ξ，不管其指向如何，也應以同樣的84分周期作簡單周期運動：

$$d^2\xi^j/d\tau^2 = -\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\xi^j, \quad j = x \text{或} y \text{或} z \text{ 。} \tag{1.15}$$

框 1.9 Galileo Galilei

比薩，1564年2月15日——阿切特里，佛羅倫薩，1642年1月8日



烏菲爾(Uffizi)畫廊，佛羅倫薩

「在科學問題上，一千個權威還不如單獨一個人的謙遜推理有價值」。

Galileo Galilei (1632)

「從靜止開始以勻加速運動下落的物體所經過的距離，與它經過此距離所用時間的平方成正比」。

Galileo Galilei (1638)

「依我之見，他人過去（關於潮汐）所作之一切陳述及設想是全然不正確的。但是，在曾對此自然界的神秘效應作過哲學探討的那些偉人當中，最使我感到驚異的是 Kepler。超乎他人之上，Kepler 是一個有主見的天才，他機敏，又掌握地球的運動。後來，他側耳傾聽，變得感興趣於月亮對水的作用，和其它超自然現象，以及類似的孩子氣的想法」。

Galileo Galilei (1632)

「（用新的望遠鏡）觀看月亮本體眞是嘆爲觀止，令人愉快。……月亮無疑並不具有平坦而光滑的表面，它的表面粗糙不平，……充滿了巨大的隆起，深深的裂口和蜿蜒起伏……。難以數清的恒星，都是前所未見的，其數目超過古老的、先前已知的恒星十倍以上。我發現了四顆行星，對此，在我之前的天文學家既不知道也未曾觀察到，……。擺脫關於星雲或銀河的爭論吧，雖然還不能說理解了它，但可以在根本的意義上弄清它的性質……，銀河不外是大量的明亮星星，一團團地聚在一起……小星星的數目更是難以數清——迄今爲止，被所有天文學家叫作星雲的那些星是一羣以奇特的方式密集在一起的小星」。

Galileo Galilei 於 Sidereus Nuncius (1610)

「因此，本論文所提出的諸原理一旦爲富於思索的頭腦所接受，必將導致許多其它非凡的結果；這是必然的，毋庸置疑，原因在於論題的高貴，超乎自然界的一切其它論題之上」。

Galileo Galilei (1638)

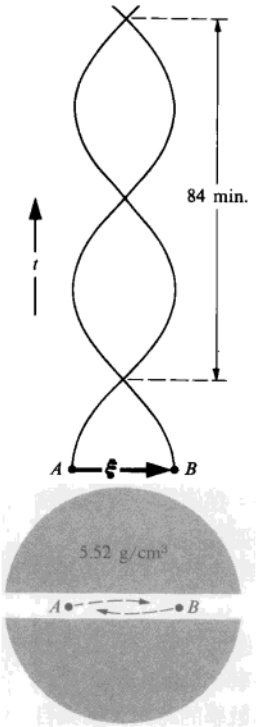


圖 1.12

試驗粒子 A 和 B 在貫穿地球的洞中上下運動，設地球密度均勻。在半徑 r 處，粒子受到的 Newton 加速度爲

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=\frac{1}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2_{約定}}$$
$$=-\frac{G}{c^2}\frac{(半徑\,r\,內的質量)}{r^2}$$
$$=-\left(\frac{G}{r^2c^2}\right)\left(\frac{4\pi}{3}\rho_{約定}r^3\right)=-\omega^2r\,。$$

於是每個粒子按簡諧運動振蕩著，其角頻率與通過圓軌道繞地球模型運動的衛星嚴格相同：

$$\omega^2(厘米^{-2})=\frac{4\pi}{3}\rho(厘米^{-2}),$$
$$\omega^2_{約定}\,(秒^{-2})=\frac{4\pi G}{3}\rho_{約定}\,(克/厘米^3)\,。$$

地球內部的 Riemann 張量

對於在近似的慣性系中緩慢運動的粒子，將其實際的運動與短程線偏差方程（1.13）式相比較，可以得出在此模型地球內部的一些曲率分量。

$$\begin{Vmatrix} R^i{}_{0i0} & R^j{}_{0i0} & R^k{}_{0i0} \\ R^i{}_{0j0} & R^j{}_{0j0} & R^k{}_{0j0} \\ R^i{}_{0k0} & R^j{}_{0k0} & R^k{}_{0k0} \end{Vmatrix}=\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (1.16)$$

這個例子說明空時曲率是如何與物質分布相聯繫的。

引力波對 Riemann 張量的效應

設有一來自超新星的引力波通過地球。理想化地認爲地球物質幾乎不可壓縮，即其密度實際上保持不變。波可用空時曲率上的波紋以及以光速傳播來表徵。該波紋通過 Riemann 張量的分量 $R^j{}_{0k0}$ 以及兩試驗粒子的相對加速度顯示出來。(1.16)式的左側是波紋，而右側不是。故（1.16）式失效。Riemann 曲率不再直接地、單一地由地球物質產生。

雖然如此，Einstein 告訴我們，(1.16)式的一部份，即它的迹

$$R_{\hat{0}\hat{0}} \equiv R^{\hat{i}}{}_{\hat{0}\hat{i}\hat{0}} + R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}} + R^{\hat{i}}{}_{\hat{0}\hat{i}\hat{0}} = 4\pi\rho, \tag{1.17}$$

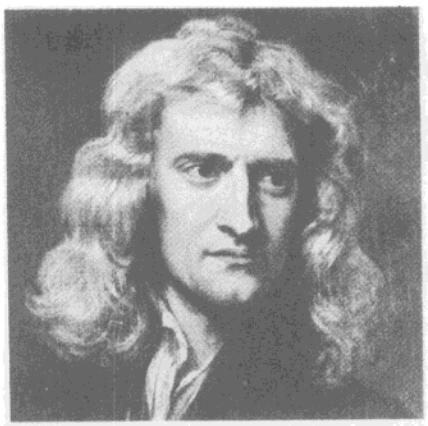
不受波的擾亂。甚至在地球外的眞空中上式也成立；因在眞空中上式等號兩側均爲零［見(1.14)式］。

引入Einstein張量

更普遍地說，Riemann 張量的一個確定部份，稱爲 ***Einstein*** 張量，表爲 ***Einstein*** 或 **G**，它永遠由物質的局域分布產生。***Einstein*** 是把 (1.17) 式左側的 $R_{\hat{0}\hat{0}}$ 加以普遍化而得到的一個幾何客體。與 $R_{\hat{0}\hat{0}}$ 一樣，***Einstein*** 是

框 1.10 Isaac Newton

英國林肯郡，Woolsthorpe, 1642年12月25日——倫敦， Kensington, 1726年 3 月20日



「幾何學是依據直線和圓建立起來的，而對它們的描繪却屬於力學。幾何學並未告訴我們如何畫這些線，但却需要畫出這些線」。

Newton「原理」第一版 (1687) 序言

「絕對空間，按其自身的性質，永遠保持同一和靜止，與任何外界事物無關」。

「絕對的、眞實的和數學的時間，就其自身和按其自身的性質而言，平穩地流動著，與任何外界事物無關」。

引自「原理」的附注

「我未能從現象中發現引力這些性質的起因，我也沒有杜撰假說；凡是並不從現象中引出的結論可稱爲假說；而假說……在經驗哲學中是沒有地位的……對於我們來說，引力是確實存在的，它按照我們已經說明過的規律起作用，並完全適用於計算天體和海洋的各種運動，這就足夠了。」

引自「原理」1713年第二版第三册末尾加的一般附注。此引文特別有名，常以 Newton 原用的拉丁文形式 "Hypotheses non Fingo" 被引用。

「在這同一年（1665或1666年），我開始想到引力可以延伸到月亮軌道上，並且發現了……。這一切都是在災疫流行的1665和1666兩年中，因爲在這些日子裏，我正處於發明創造的最好年齡，並且比此後任何時候都更關心數學和哲學。」

引自 Newton 手稿中的備忘錄，其內容是 Newton 在微積分，二項式定理，光學，動力學以及引力等等方面的發現。據信寫於 1714 年左右，這是1887年 Adams 在 Newton 的「朴次茅斯 (Portsmouth) 文集」中發現的。

Riemann 在所有方向的某種平均。(1.16)式右側的普遍化，即產生 ***Einstein*** 的幾何客體稱爲物質的「**脅強-能量張量**」，表爲 T 。不需用坐標來定義 ***Riemann*** 或 T；與Riemann 張量 ***Riemann*** 以及度規張量 g 一樣，它們在完全沒有坐標時就存在。而且，實際上除因子 8π 外， ***Einstein*** 與 T 永遠相等：

引入脅強-能量張量

$$\textbf{Einstein} \equiv G = 8\pi T 。 \qquad (1.18)$$

「假說應當……解釋事物的性質，而不能試圖預先確定事物的性質，除非就此而言假說能對實驗有所幫助。」

引自 Newton 致 I. M. Pardies 的信， 1672 年。轉引自 Cajori 在 Newton (1687年) 書中末尾第 673頁注釋。

「我認爲，沒有任何其他事物作媒介，一個物體可以超距地越過眞空作用於另一物體，且不憑借和通過它，可以將作用和力從一物體傳遞到另一物體的看法眞是極爲荒謬，我相信不會有任何在哲學問題上具有足夠思考能力的人會沉迷其中。

這一段話常被 Faraday 引用，他取自 Newton 致 R. Bently 的信，(1692-1693) 轉引自 Newton (1687) 書 Cajori 版第643頁的注釋。

「重力，磁和電的引力能達到易於察覺的距離，由此它們已被觀測到……；可能有其它的力，它們只能達到很近的距離，以至迄今尙未被觀測到；……有些力，在直接接觸時非常强，能在很短的距離上進行上述化學反應，但對離粒子較遠的地方，這些力就不能產生任何可以察覺的效應。」

引自 Newton **光學** (1730年) 末尾的問題31。

「在幾乎空無一物的地方有什麼呢？由於什麼原因太陽和行星彼此互相吸引，而其間並沒有稠密的物質？爲什麼自然界不作徒勞無功的事，我們在世界上所見到的這一切次序和美麗又來自何方呢？什麼是彗星的結局呢，爲什麼各行星總是以一種同樣的方式在各同心圓軌道上運動，而彗星却能以各種可能的方式在非圓的軌道上運動呢？是什麼阻止了固定的恒星掉到其它恒星上去呢？」

引自問題28。

「他不是永生的或無所不在的，但却是不朽的、無限的；他並非時間或空間，但他能持續和呈現。他永遠持續，他到處呈現；他無時無處不存在，他構成了時間和空間……因而與上帝極有關係；從事物的外表來論述他，必定屬於自然哲學。」

引自**原理**(1687)末尾的一般附注。

Einstein場方程：物質怎樣產生曲率

Einstein 場方程可用它在任意坐標系中的分量重寫爲：

$$G_{\alpha\beta}=8\pi T_{\alpha\beta}。 \tag{1.19}$$

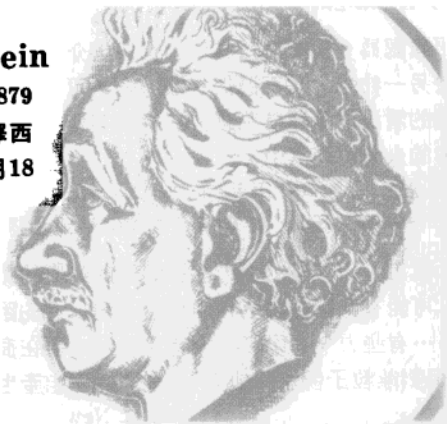
Einstein 場方程優雅而豐實，它是如此簡單，而又蘊藏着大量應用與碩果的寶庫，物理學的方程無出其右者。

Einstein場方程的結果

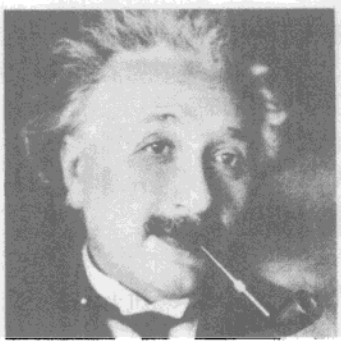
場方程表明物質的脅强-能量怎樣在其鄰域中產生一個平均曲率（**Einstein** $\equiv$ **G**）。同時，對於曲率的保持各向異性部份，場方程是一個傳播方程：它控制着靜止源（地球）的外部空時曲率；它通過運動着的脅强-能量控制着引力波的產生（空時曲率中的波紋）；並且，它還控制着這些波在宇宙中的傳播。甚至，對於由脅强-能量產生曲率的物質而言，場方程自身就包含着運動方程（「力＝質量×加速度」）。

1.11 Albert Einstein

德國，烏爾姆市 (Ulm), 1879年3月14日——美國，新澤西州，普林斯頓，1955年4月18日



E.T. Hochschule 圖書館，蘇黎士



科學院，巴黎

加州理工學院檔案館

封印：承蒙 Lewis 和 Rosr Srtauss 基金會及普林斯頓(Princeton)大學出版社的好意提供，謹此致謝。

這些就是 $G=8\pi T$ 的一些結果。現在來看它的一些應用。

Enstein 場方程的應用

場方程控制着太陽系中行星的運動；它控制着太陽近旁的光偏折；它控制着恒星坍縮並形成黑洞；它唯一地決定了黑洞的外部空時幾何（「黑洞是沒有毛的」）；它控制着在坍縮終點空時奇點的演化；它控制着宇宙的膨脹和再收縮。以及其它許多許多的應用。

爲了理解這個簡單的方程 $G=8\pi T$ 怎麼能有如此無所不在的威力，需要回過頭去，花幾章的篇幅重新勾畫關於空時，它的曲率，以及它的規律的整個畫卷，那時應更加小心，更爲詳盡，用更多的數學。

在此，我們結束關於幾何對物質的效應以及物質對幾何反作用的概述，圓滿地結束了蘋果的比喻。

「眞正使我感興趣的是，上帝創造世界時是否有任何選擇。」

Einstein 對助手的談話，G. Holton 引述 (1971)，第20頁。

「但是，在黑暗中焦急地探索着的這些歲月裏，人們滿懷着熱望，時而信心十足，時而精疲力盡，最後，光明終於出現——只有那些親身經歷的人才能理解這一切。」

Einstein, M. Klein 引述 (1971)，第1315頁。

「對於所有我們可以加入的團體，沒有一個是我願意把自己呈獻給它的，只有眞正探索者的團體除外，而探索者的團體在任何時候都只有極少數活着的成員。」

Einstein 致 Born 信 Born (1971) 引述第82頁。

「我正在研究你的偉大著作，並且——當我在不論何處被難住時——我就會快活地看到你友好而年輕的面容出現在我面前，微笑着作出解釋。」

Einstein, 1920年5月2日會見 N. Bohr 後的信。

「當數學定律涉及實際事物時，它們是不確定的，而當它們是確定的時候，則並不涉及實際事物。」

Einstein (1921) 第28頁。

「對於世界，最不可理解的事情就是：它是可以理解的。」

Einstein, 在 Schilpp (1949)中，第112頁。

練習 1.1 圓柱體的曲率

試證明圓柱體表面上各短程線（不纏捲!!）無短程線偏差，並由此證明圓柱體表面的 Guass 曲率 R 爲零。再利用公式 $R=1/\rho_1\rho_2$ 獨立地證明上述結論，式中 ρ_1和ρ_2是題中相對於圓柱所在的三維 Euclid 空間的主曲率半徑。

練習 1.2 春潮與小潮

試用約定單位以及幾何單位計算(1)月亮（$m_{約定}=7.35\times10^{25}$克，$r=3.84\times10^{10}$厘米）和(2)太陽($m_{約定}=1.989\times10^{33}$克，$r=1.496\times10^{13}$厘米）在地球上所產生的 Newton 潮汐加速度$R^m{}_{0n0}(m, n=1, 2, 3)$之大小。並估計對春潮所得之結果應超過小潮多少倍。

練習 1.3 被包圍在裏面的 Kepler

一小衛星繞質量爲m（厘米）之中心物體，在半徑爲 r 的軌道上，以圓頻率 ω（厘米$^{-1}$）運動。試證明，由已知的 ω 值，不可能單獨確定 r 或 m 的值，而只能得到物體的有效“Kepler 密度”，即以軌道半徑爲半徑的球體平均密度。給出以 Kepler 密度表示的ω^2的公式。

Kepler 與 Galileo （框 1.9）之間的書信往來使我們想到歷史的連續性，Galileo 逝世的那一年正好 Newton（框 1.10）誕生。Newton 之後，首先戲劇性地重新綜合引力定律的是Einstein（框 1.11）。

死者生前沒有吐露的事情，
在他們死後會告訴你；
死者用火的舌頭講話，
與生者的語言全然不同。
T. S. Eliot,「輕度眩暈」(1942年)

我曾量度過天穹，
現在，我量度幽冥，
天上有我的靈魂，
地上是我的軀體。
Johannes Kepler, 1630年11月15日他用拉丁文爲自己寫的墓誌銘，由 Coleman 譯成英文 (1967)，第109頁。

那裏有物質，那裏就有幾何。
Ubi materia, ibi geometria. J. Kepler

第二篇

平直空時中的物理學

在本編中，讀者遇到了老相識：狹義相對論，她已用現代服飾裝扮一新，並以其魅力變得更加熟識可親。

PDG

第二章　狹義相對論基礎

就幾何學和物理學的應用而言，結果往往表明，一個量的特徵不僅可用其張量的階數表示，而且還可以用其對稱性表示。

Herman Weyl (1925)

毫無疑問，在以往的2000年中，幾何學的最顯著進展是「幾何客體」概念的持續擴展，起初，這個概念只包括希臘綜合幾何的少數曲線和面；文藝復興時期，它延伸到涉及解析幾何所定義的各種幾何客體的全部；近代，它已擴展到涵及由點集理論處理的茫無邊際的宇宙。

Karl Menger (1949) p. 466

§2.1 概　　論

幾何學中的曲率憑借引力顯示自己。引力造成了鄰近粒子世界線的分離。反之，粒子和其它的質量-能量源又是幾何中曲率的起因，如何打破幾何對物質作用以及物質對幾何反作用的這一閉合循環呢？最好這樣開始，即將後者限制爲可以看作是平直的空時區域內，分析粒子的運動和場的動力學。(見框1.5「平直性的檢驗」)

假定讀者具有的知識背景

第二章到第六章把平直空時的觀點展開了（狹義相對論）。假定讀者對狹義相對論已有某些了解* 一般的四維矢量；能量-動量四維矢量；Lorentz 變換初步；帶電粒子所受作用力的 Lorentz 定律；至少在一本書的某個方程中

* 例如，參看 Goldstein (1959), Leighton (1959), Jackson (1962) 的著作或對於幾何地表述物理觀點，參看 Taylor 和 Wheeler (1966). 的著作。

看到過電磁場張量 $F_{\mu\nu}$；並了解空時圖形的定性特徵，其要點是：(1)未來與過去的光錐，(2)因果關係（「過去的」，「將來的」、「中性的」，或「在類空關係中」），(3)Lorentz 收縮，(4)時間膨脹，(5)不存在普適的同時概念，以及(6)在框 2.4中，$\bar{t}$ 軸和 $\bar{Z}$ 軸永遠是垂直的這一事實，儘管看起來並非如此。在這些章中，讀者將發現，新的東西是：(i) 關於狹義相對論的一種新觀點，强調無坐標的概念和强調易於推廣到彎曲空時的符號（在第二章到第四章討論「幾何客體」，看作機器的張量）；或(ii) 狹義相對論中不很熟悉而對以後解釋引力理論關係重大的一些論題（第五章「脅强 - 能量張量和守恒定律」，第六章「加速的觀測者」）。

§ 2.2 幾何客體

每一個物理量都可用一個幾何客體來描述

一切物理規律都可以幾何地表述

在空時中進行的一切都有其幾何描述，並且，幾乎每一種幾何描述都易於從平直空時推廣到彎曲空時。一個幾何客體與另一個幾何客體的最大差別是它的範圍：描述處於特定歷史階段的一特定粒子動量的單個幾何客體是矢量，與此大不相同，擴展的幾何客體可以描述在全部空間和時間中定義的電磁場(「反對稱的二秩張量場」或簡稱爲「2-形式場」）。每一個物理量必定可以用一個幾何客體來描述的觀念，以及物理學的各種規律必定都可以表爲這些幾何客體之間的幾何關係的觀念，在 Felix Klein (1872)所著「Erlanger 綱領」中已經呈現出理性的端倪；繼而，在 Einstein 的「廣義協變性原理」和 Herman Weyl (1925) 的著作中，這一觀念已更接近於物理學；首先清晰而系統地表述這一觀念的是 Veblen 和 Whitehead (1932)；今天，這一觀念已遍及包括狹義相對論和廣義相對論在內的整個相對論中。

A. Nijenhuis (1952) 和 S. S. Chern (1960, 1966, 1971) 曾詳細闡明了幾何客體的數學理論。但是，爲了理解或研究幾何動力學，並不需要精通這個雅致而優美的課題。需要知道的只是：空時中的幾何客體是獨立於坐標系或參照系而存在的實體。空時中的一點（「事件」）是幾何客體。在平直空時中連接兩相鄰事件的箭頭（「矢量」）是幾何客體，而它的推廣，「切向矢量」，即使空時彎曲仍是幾何客體。「度規」（產生出任意矢量長度平方的機器，見框1.3) 是幾何客體，完全不需要坐標來定義這些概念中的任何一個。

下面幾節將引入若干幾何客體，並指出它們作爲平直空時中物理量代表所起的作用。

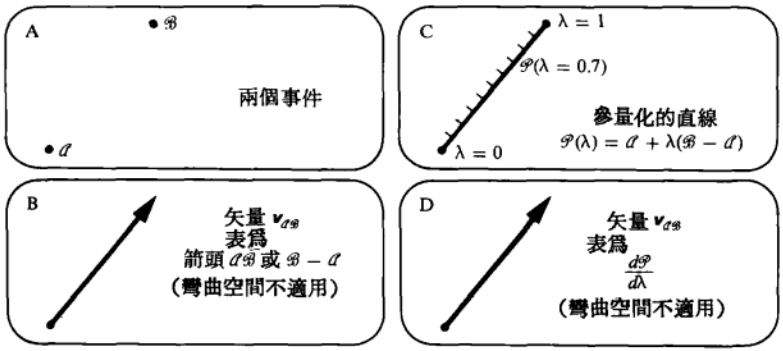


圖 2.1
從作爲兩點連線的矢量到作爲微商的矢量（「切向矢量」是局域量而不是雙局域量）。

§2.3 矢　　量

定義矢量的方法：作爲箭頭

從最簡單的矢量概念開始（圖2.1B）：從某一空時事件$\mathscr{A}$（「尾」）引伸到另一事件$\mathscr{B}$（「頭」）的箭頭。此矢量寫爲

$$\mathbf{v}_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = \mathscr{B} - \mathscr{A} \text{（或}\mathscr{A}\mathscr{B}\text{）。}$$

作爲參量化的直線

在很多場合（包括以後推廣到彎曲空時），另一種完全等效的討論矢量的方式更爲方便，用參量化的直線 $\mathscr{P}(\lambda) = \mathscr{A} + \lambda(\mathscr{B} - \mathscr{A})$ 代表此箭頭，$\lambda = 0$ 是箭頭之尾，$\lambda = 1$ 是它的頭。對$\mathscr{P}(\lambda)$ 的這一簡單線性表達式作微商：

$$(d/d\lambda)[\mathscr{A} + \lambda(\mathscr{B} - \mathscr{A})] = \mathscr{B} - \mathscr{A} = \mathscr{P}(1) - \mathscr{P}(0) \equiv (\text{頭}) - (\text{尾}) \equiv \mathbf{v}_{\mathscr{A}\mathscr{B}} \text{。}$$

這個結果使得我們可以把矢量概念作爲一個1-點客體（「切向矢量」，局域），以代替把矢量作爲一個2-點客體（「雙局域」）的想法：

$$\mathbf{v}_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = (d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=0} \text{。} \tag{2.1}$$

作爲曲線上某一點的微商

例：若 $\mathscr{P}(\tau)$ 是以原時爲參量的某一自由粒子的筆直世界線，則在原時 1 秒間隔內出現的位移給出箭頭$\mathbf{u} = \mathscr{P}(1) - \mathscr{P}(0)$，此箭頭很易在空時圖上畫出，它準確地表示了粒子的四維速度。然而，如計算此同一位移的微商公式 $\mathbf{u} = d\mathscr{P}/d\tau$ (1)對於速度概念更有啓發性，(2)也適用於加速運動的情況。因此，若給定的世界線 $\mathscr{P}(\tau)$ 不是直線，如圖 2.2 所示，則必須先構成 $d\mathscr{P}/d\tau$，在此之後才能畫出沿箭頭 $\mathbf{u} = d\mathscr{P}/d\tau$ 方向的直線 $\mathscr{P}(0) + \lambda(d\mathscr{P}/d\tau)_0$，來表示其四維速度 。

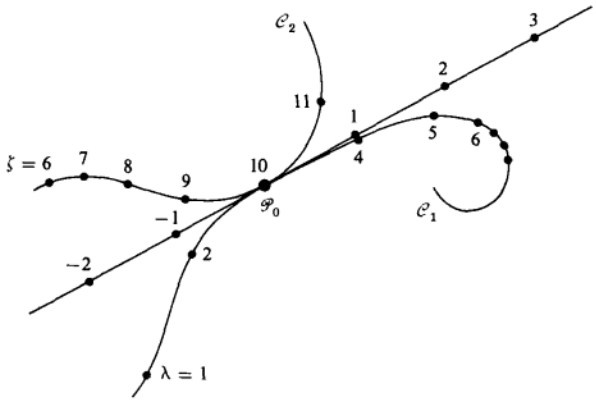


圖 2.2
由兩條很不相同的曲線得出的同樣切向矢量，還畫出了在 $\mathscr{P}_0$ 處與這兩條曲線最佳擬合的參量化直線。切向矢量沿此直線從 0 到 1。

矢量的分量

讀者可能並不熟悉這種觀點，也許更熟悉在特定 Lorentz 參照系中四維速度的諸分量：

$$u^0=\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,,\qquad u^j=\frac{dx^j}{d\tau}=\frac{v^j}{\sqrt{1-v^2}}\,, \tag{2.2}$$

式中

$$v^j=dx^j/dt=\text{「普通速度」的分量，}$$
$$v^2=(v^x)^2+(v^y)^2+(v^z)^2\text{。}$$

如果讀者習慣於在矢量的第四個分量上乘以因子 $i=\sqrt{-1}$，則對 (2.2) 式所表示的四維速度的諸分量也許會有點不熟悉。如果確是這樣，他應該使自己適應這種新的符號。（參看框 2.1「別了"ict"」）。

矢量本身比矢量的諸分量更爲基本，它是具有一定意義的獨立於一切坐標的幾何客體。一個粒子具有一條世界線 $\mathscr{P}(\tau)$和一個四維速度 $\mathbf{u}=d\mathscr{P}/d\tau$，這兩者都與任何坐標無關。當用計算機分析時（它拒絕矢量；接受數字），才需要坐標進入畫面。爲此，採用正交歸一基矢量（圖 2.3）爲 $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 的 Lorentz 參照系。相對於此參照系的原點 $\mathscr{O}$ 世界線的坐標描述爲

基矢量

$$\mathscr{P}(\tau)-\mathscr{O}=x^0(\tau)\mathbf{e}_0+x^1(\tau)\mathbf{e}_1+x^2(\tau)\mathbf{e}_2+x^3(\tau)\mathbf{e}_3=x^\mu(\tau)\mathbf{e}_\mu\text{。}$$

相對於同一 Lorentz 參照系，粒子的四維速度表爲：

$$\mathbf{u}=d\mathscr{P}/d\tau=(dx^\mu/d\tau)\mathbf{e}_\mu=u^0\mathbf{e}_0+u^1\mathbf{e}_1+u^2\mathbf{e}_2+u^3\mathbf{e}_3\text{。} \tag{2.3}$$

框 2.1　別了「ict」

對狹義相對論有所涉獵者必須把「$x^4=ict$」置於死地。發明這個虛坐標是爲了使空時幾何和 Euclid 空間幾何之差別從形式上看起來盡可能小；是爲了使 Lorentz 變換在紙面上看來像是一個旋轉；並省去人們在不用它時必須對帶有上標的量（如能量-動量矢量的諸分量 p^α）和帶有下標的量（如能量-動量1-形式的諸分量 p_μ）所作的區分。然而，省略這後一種區分並非好事。沒有這種區分，就不知道指的是矢量（§2.3），還是極爲不同的幾何客體即1-形式（§2.5）。此外，在角度（一切周期性地依賴於它，如旋轉）與另一參量（隨着它的增加總是導致加大動量的差別，如 Lorentz 變換的「速度參量」，見框 2.4）之間有重大的區別。如果說虛擬的時間坐標掩蓋了正在研究的幾何客體的性質以及參量在變換中的性質，那麼，它甚至還作了某些更爲嚴重的事情：它掩蓋了＋＋＋幾何的度規結構（§2.4）和－＋＋＋幾何的度規結構之間的完全不同。在 Euclid 幾何中，當兩點間的距離爲零時，這兩點必爲同一點。而在Lorentz-Minkowski 幾何中，當兩事件之間隔爲零時，可能一個事件發生在地球上，而另一個事件則發生在河外星系M31里的一個超新星上，但是它們的分離必須是零射線（光錐的一部分）。在給定事件處的後向光錐包括一切能影響該事件的事件。前向光錐包括一切能受到該事件影響的事件。從空時的所有事件爲出發點的大量雙光錐形成了一個相互連鎖的因果結構。這個結構使得物理世界的機器按目前那樣運轉（對此結構的進一步評述，見 Wheeler和Feynman 1945, 1949, 以及 Zeeman 1964的著作）。如果在一個區域中空時是平直的，則寫出

$$(\Delta s)^2=(\Delta x^1)^2+(\Delta x^2)^2+(\Delta x^3)^2+(\Delta x^4)^2,$$

取 $x^4=ict$ 即可掩蓋住這一因果結構，但是，在一般的彎曲空時流形中找不到使虛擬坐標起作用的途徑。既然該處 "$x^4=ict$" 不能用，我們在此處就不用它。在本章和以後，與全部廣義相對論的文獻一樣，採用實數的時間坐標 $x^0=t=ct$約定。（用上標 0 而不用上標 4），以避免與虛的時間坐標混淆）。

在此參照系中，任何另一矢量$\mathbf{w}$的諸分量w^α，可以同樣定義爲下述展開中的係數　**矢量用基矢展開**

$$\mathbf{w}=w^\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{2.4}$$

注意：$\mathbf{e}_\alpha$ 的下標 α 告訴我們是哪一個矢量，並非告訴我們是哪一個分量！

§2.4　度規張量

回顧框 1.3 第 IV 部分，度規張量是計算單個矢量長度平方或兩個不同矢量標積的機器。更準確地說，度規張量 $\mathbf{g}$ 是一部具有兩個可以插入矢量的空位的機器。　**度規定義爲計算矢量標積的機器**

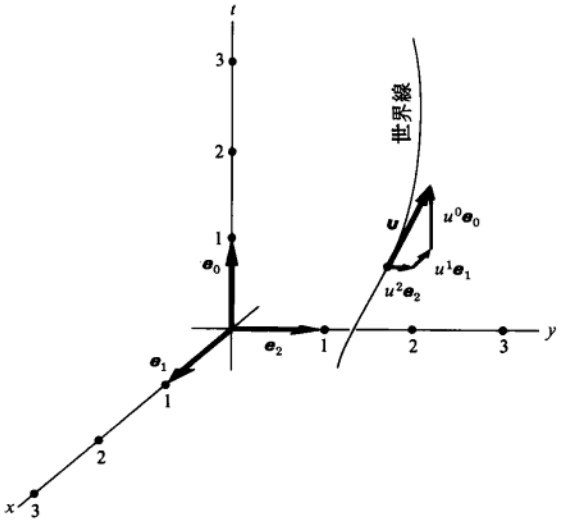


圖 2.3
平直空時中粒子的四維速度。四維速度 u 是與粒子世界線相切的單位矢量(箭頭)——在世界線上，對每一個事件有一個切矢量。在給定的Lorentz坐標系中，沿着四個坐標軸有四個單位長度的基矢量：e_0, e_1, e_2, e_3，四維速度與任何矢量一樣，可表爲沿基矢量方向的諸分量之和：

$$u=u^0e_0+u^1e_1+u^2e_2+u^3e_3=u^\alpha e_\alpha。$$

空位 1　　空位 2

$$g(\quad,\quad)。\tag{2.5}$$

插入之後，機器吐出一個實數：

$g(u,v)$＝「u 和 v的標積」，也可記爲 $u\cdot v$。　(2.6)

$g(u,u)$＝「u長度的平方」，也可記爲 u^2。

此外，這個實數與矢量插入的次序無關（「度規張量的對稱性」）

$$g(u,v)=g(v,u);\tag{2.7}$$

而且，它對插入的矢量而言是線性的

$$g(au+bv,w)=g(w,au+bv)=ag(u,w)+bg(v,w)。\tag{2.8}$$

因爲度規「機器」是線性的，所以，如果已知它對 Lorentz 參照系中基

矢量$\mathbf{e}_\alpha$是如何作用的，則對任何輸入，可計算其輸出如下。

(1)定義符號（「度規係數」）$\eta_{\alpha\beta}$ 爲　　**度規係數**

$$\eta_{\alpha\beta}\equiv \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta)$$
$$=\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta。 \qquad (2.9)$$

(2)由已知的兩事件之間分離矢量 $\boldsymbol{\xi}=\Delta x^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ 的長度平方，可計算度規係數的數值：

$$(\Delta s)^2=-(\Delta x^0)^2+(\Delta x^1)^2+(\Delta x^2)^2+(\Delta x^3)^2$$
$$=\mathbf{g}(\Delta x^\alpha \mathbf{e}_\alpha,\Delta x^\beta \mathbf{e}_\beta)$$
$$=\Delta x^\alpha \Delta x^\beta \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta)$$
$$=\Delta x^\alpha \Delta x^\beta \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{對任意選擇的 } \Delta x^\alpha$$
$$\Longrightarrow \|\eta_{\alpha\beta}\|\equiv \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{對任何Lorentz參照系。} (2.10)$$

(3)根據下式計算任意兩矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的標積

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{g}(u^\alpha \mathbf{e}_\alpha,v^\beta \mathbf{e}_\beta)=u^\alpha v^\beta \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta);$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u^\alpha v^\beta \eta_{\alpha\beta}$$
$$=-u^0v^0+u^1v^1+u^2v^2+u^3v^3。 \qquad (2.11)$$

由於度規係數 η_{00} 上的負號，人們有可能把空時中的方向和矢量分類爲：「類時」矢量（長度平方爲負），「類空」矢量（長度平方爲正），以及「零」矢量或「類光」矢量（長度平方爲零）。　　**由矢量的分量計算標積**

框 2.2將上述概念和符號用於狹義相對論的兩個初等問題。

§2.5　微分形式

由第一章和狹義相對論的初等教程，矢量和度規張量是已很熟悉的兩個幾何客體；雖不很熟悉，但同樣重要的第三個幾何客體是「*微分形式*」或「1-*形式*」。

考慮一個粒子（例如一個電子）的四維動量 $\mathbf{p}$，爲了詳細說明一種動量概念，我們從此電子的四維速度 $\mathbf{u}=d\mathcal{P}/d\tau$ 出發（「沿着接近世界線的直線，在單位原時的空時位移」）。這是一個單位長度的矢量，乘以粒子質量m得*動量矢量*

$$\mathbf{p}=m\mathbf{u}。$$

但是，物理學還給出了很不同的另一種動量概念，它與每個粒子的de Broglie波相聯繫。而 de Broglie 波具有最直接可能的物理意義。de Broglie 波從　　**用 de Broglie 波說明1-形式**

框 2.2 應用度規的運算練習

練習：試證明一試驗粒子的四維速度 $\boldsymbol{u}$ 的長度平方爲 -1。

解：在任意 Lorentz 系中，利用(2.2)式的分量，計算如下：

$$\boldsymbol{u}^2=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta}=-(u^0)^2+(u^1)^2+(u^2)^2+(u^3)^2$$
$$=-\frac{1}{1-v^2}+\frac{v^2}{1-v^2}=-1。$$

練習：試證明一粒子的靜質量與其能量和動量由下述著名的公式聯繫起來：

$$(mc^2)^2=E^2-(pc)^2$$

或，等價地（用幾何單位）表爲

$$m^2=E^2-p^2。$$

解一：四維動量定義爲 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{u}$，其中 $\boldsymbol{u}$ 爲四維速度，m爲靜質量，因此，其長度平方爲

$$\boldsymbol{p}^2=m^2\boldsymbol{u}^2=-m^2$$
$$=-(mu^0)^2+m^2\boldsymbol{u}^2$$
$$=-\underbrace{\frac{m^2}{1-v^2}}_{\uparrow E^2}+\underbrace{\frac{m^2v^2}{1-v^2}}_{\uparrow p^2}。$$

解二：在測定能量E和動量$\boldsymbol{p}$的觀測者坐標系中，四維動量分爲時間部分和空間部分：

$$p^0=E,\ p^1\mathbf{e}_1+p^2\mathbf{e}_2+p^3\mathbf{e}_3=\boldsymbol{p};$$

因此，其長度平方爲

$$\boldsymbol{p}^2=-E^2+\boldsymbol{p}^2。$$

但是，在粒子靜止系中，$\boldsymbol{p}$分爲

$$p^0=m,\ p^1=p^2=p^3=0;$$

因此，其長度平方爲 $\boldsymbol{p}^2=-m^2$，但長度平方是獨立於任何坐標系定義的幾何客體；故無論用什麼方法計算，所得結果應相同：

$$-\boldsymbol{p}^2=m^2=E^2-\boldsymbol{p}^2。$$

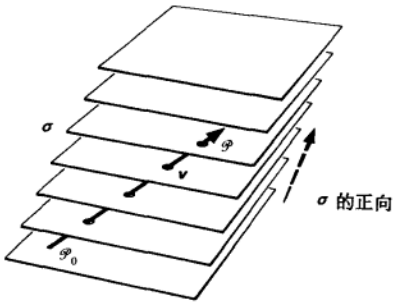


圖 2.4
兩鄰近事件 $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_0$ 之間的分離矢量 $\boldsymbol{v}=\mathscr{P}-\mathscr{P}_0$; 1-形式 $\boldsymbol{\sigma}$; 以及 $\boldsymbol{\sigma}$ 被 $\boldsymbol{v}$ 穿透的數目

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}\rangle = (\text{被穿透的面的數目}) = 4.4$$

(4.4次「鈴響」)。若 $\boldsymbol{\sigma}$ 由電子 de Broglie 波的等位相面 $\phi=17$, $\phi=18$, $\phi=19$, ……構成，則 $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}\rangle$ 是事件 $\mathscr{P}_0$ 和 $\mathscr{P}$ 之間的位相差，注意 $\boldsymbol{\sigma}$ 不能由這些面完全確定；還需要知道指向。即從一個面到另一個面，沿什麼方向是「正」的，也就是說沿什麼方向 ϕ 增加？

晶體點陣衍射，由衍射圖樣不僅可以確定 de Broglie 波長，而且還可以確定整數等位相 ($\phi=7$, $\phi=8$, $\phi=9$, ...) 面在空間的圖樣。取名爲「$\tilde{\boldsymbol{k}}$」的這些面的圖樣，提供了易於找到的對1-形式的最簡單說明。

矢量穿透1-形式

這種1-形式在空時中構成了這些面的圖樣，它有什麼用處呢？在空時中取兩鄰近點 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{P}_0$. 從 $\mathscr{P}_0$ 到 $\mathscr{P}$ 作箭頭 $\boldsymbol{v}=\mathscr{P}-\mathscr{P}_0$。此箭頭將穿透一定數目的 de Broglie 波的整數位相面，每穿透一個面伴隨着一次假想的鈴響，被穿透的面的數目（「鈴響」次數）記爲

$$\langle \tilde{\boldsymbol{k}},\ \boldsymbol{v}\rangle;$$

被穿透的1-形式　　穿透它的矢量

在這個例子中它等於矢量$\boldsymbol{v}$的尾($\mathscr{P}_0$)和頭($\mathscr{P}$)之間的位相差，

$$\langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{v}\rangle = \phi(\mathscr{P}) - \phi(\mathscr{P}_0)。$$

參看圖 2.4。

通常 $\mathscr{P}_0$ 和 $\mathscr{P}$ 都不是位於整數位相面上的點。因此，可以設想，有無數具有各種中間位相值的面均勻地插在各整數位相面之間那樣。借助於它們，可以準確地定 $\tilde{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{v}\rangle = \phi(\mathscr{P}) - \phi(\mathscr{P}_0)$ 的值。

把1-形式看作平直、等間距的面族

爲了使數學簡單起見，不把 $\tilde{\boldsymbol{k}}$ 看作 de Broglie 波面的總體圖樣，而把它看作在空時中某指定點附近的局域圖樣，正如矢量 $\boldsymbol{u}=d\mathscr{P}/d\tau$ 代表一個粒子世界線（一般情形爲曲線的線性近似）的局域行爲一樣，1-形式代表 de

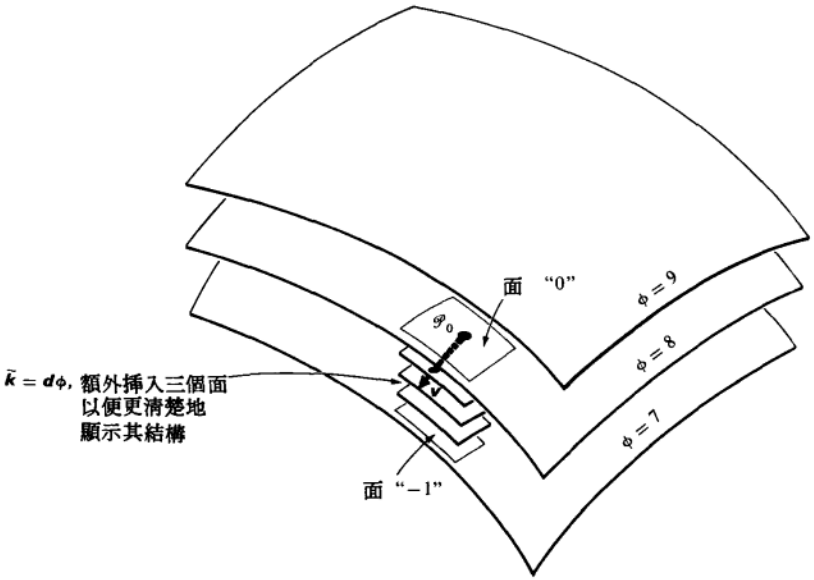


圖 2.5
本圖有雙重目的。(a) 它說明在事件 $\mathscr{P}_0$ 處的 de Broglie 波 1-形式 $\tilde{\mathbf{k}}$（近似爲等位相面的等間距的平直面族，或「超平面」族）。(b) 它說明函數 ϕ 的梯度 $d\phi$（這個概念將在 §2.6 中定義），它是有同樣指向的平直面族。

$$\tilde{\mathbf{k}}=d\phi。$$

在不同事件處，$\tilde{\mathbf{k}}=d\phi$ 是不同的——面的指向不同和間距不同，ϕ 在極短矢量 $\mathbf{v}$ 頭尾間的變化等於 $\mathbf{v}$ 所穿透的 $d\phi$ 面的數目 $\langle d\phi, \mathbf{v}\rangle$；本圖中爲−0.5。

Broglie 波面（線性近似；面平直和等間距；見圖 2.5）的局域形式。

把1-形式 $\tilde{\mathbf{k}}$ 看作一部機器，矢量插入其中即可得出數目，插入矢量 $\mathbf{v}$，輸出 $\langle\tilde{\mathbf{k}},\mathbf{v}\rangle$，因爲 $\tilde{\mathbf{k}}$ 的面族是平直和等間距的，故輸出是輸入的線性函數。

$$\langle\tilde{\mathbf{k}},a\mathbf{u}+b\mathbf{v}\rangle=a\langle\tilde{\mathbf{k}},\mathbf{u}\rangle+b\langle\tilde{\mathbf{k}},\mathbf{v}\rangle。 \tag{2.12a}$$

1-形式看作矢量的線性函數

事實上，這就是1-形式的數學定義：*1-形式是矢量的線性實函數*；即接受矢量而給出數字的線性機器。給定機器 $\tilde{\mathbf{k}}$，它直接畫出空時中相應的面，取此機器所在處爲點 $\mathscr{P}_0$，通過 $\mathscr{P}_0$ 的 $\tilde{\mathbf{k}}$ 的面包括使 $\langle\tilde{\mathbf{k}},\mathscr{P}-\mathscr{P}_0\rangle=0$ 的各 $\mathscr{P}$ 點（無鈴響之點）。其他各面分別包括使 $\langle\tilde{\mathbf{k}},\mathscr{P}-\mathscr{P}_0\rangle=\pm1, \pm2, \pm3, \cdots\cdots$ 的各 $\mathscr{P}$ 點。

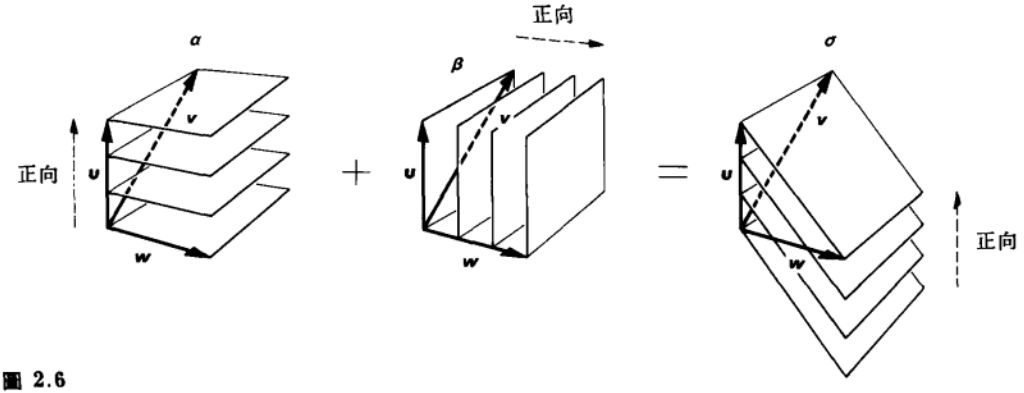


圖 2.6
兩個1-形式 α 和 β 相加得出1-形式 σ。要求用作圖法，即先畫出 α, β 的面，如 $\langle\alpha, \mathscr{P}-\mathscr{P}_0\rangle=\cdots, -1, 0, 1\ 2, \cdots$，再由此畫出 $\sigma=\alpha+\beta$ 的面。根據相加的線性性質 (2. 12b) 式，作圖如下：
(1)取若干矢量 u, v,…，它們在平行於 β 的面上（未穿透！），但準確地穿透了 α 的三個面；則上述每一個矢量必將準確地穿透 σ 的三個面：

$$\langle\sigma,u\rangle=\langle\alpha+\beta, u\rangle = \langle\alpha,u\rangle=3\text{。}$$

(2)另選取若干矢量 w,……，它們在平行於 α 的面上，但準確地穿透了 β 的三個面；則它們也將準確地穿透 σ 的三個面。(3)畫出唯一的等間距面族，使得所有 u, v, …, w,…等矢量的尾都在一個面上，而它們的頭都在該面之後的第三個面上。

有時用黑體無襯線的拉丁字母上加波紋線表示 1-形式，如 $\tilde{\boldsymbol{k}}$，但更常用的是黑體希臘字母，如 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\sigma}$。當矢量插入 1-形式 $\boldsymbol{\sigma}$ 時，輸出稱爲「$\boldsymbol{\sigma}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 上的值」或「$\boldsymbol{\sigma}$ 與 $\boldsymbol{u}$ 的縮併」。

1-形式的相加

而且，與其他類型的函數一樣，1-形式也可以相加，1-形式 $a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}$ 是這樣一部機器（或面族），當輸入矢量 $\boldsymbol{u}$ 時，輸出以下數值：

$$\langle a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{u}\rangle=a\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{u}\rangle+b\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{u}\rangle\text{。}\qquad(2.12b)$$

圖 2.6 用面族說明這種相加。

可以證明，用抽象代數的術語來說，在給定事件處所有1-形式的集合構成了一個「矢量空間」。

回到粒子及其 de Broglie 波。正如箭頭 $\mathbf{p}=md\mathscr{P}/d\tau$ 代表在 $\mathscr{P}_0$ 附近粒子實際世界線的最佳線性近似，1-形式 $\tilde{\boldsymbol{k}}$ 的平直面也提供了粒子 de Broglie 波彎曲面的最佳線性近似，並且，$\tilde{\boldsymbol{k}}$ 本身是最近似於 $\mathscr{P}_0$ 附近 de Broglie 位相 ϕ 的線性函數：

$$\phi(\mathscr{P})=\phi(\mathscr{P}_0)+\langle\tilde{\boldsymbol{k}},\mathscr{P}-\mathscr{P}_0\rangle$$
$$+(\mathscr{P}-\mathscr{P}_0)\text{ 的高階項。}\qquad(2.13)$$

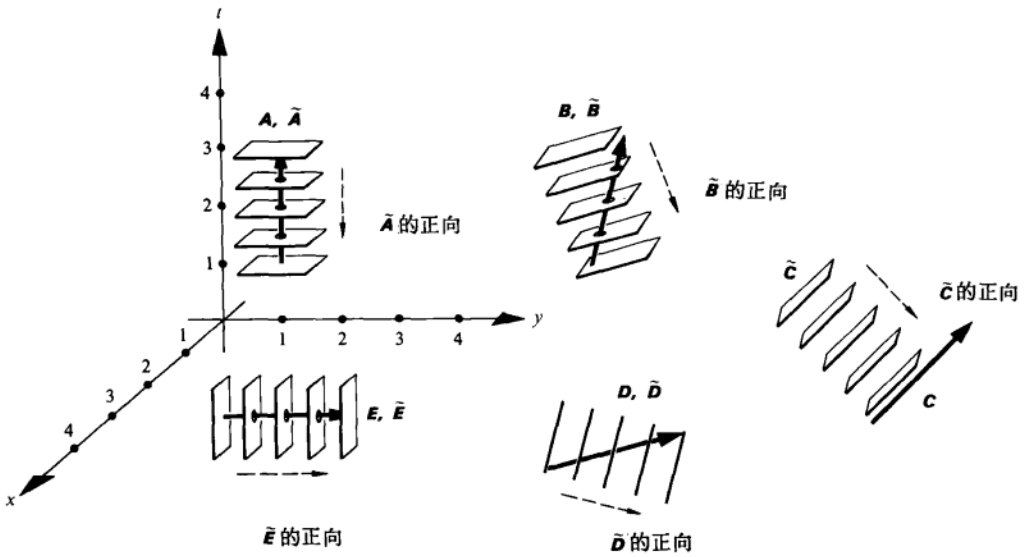


圖 2.7
幾個矢量 **A**, **B**, **C**, **D**, **E** 和相應的1-形式 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, $\tilde{E}$。給定矢量 **U**，畫出相應的 $\tilde{U}$ 的過程是很簡單的。(1)使 $\tilde{U}$ 的面垂直於矢量 **U**。（爲什麼？因爲任何垂直於 **U** 的矢量 **V** 都不能穿透 $\tilde{U}$ 的面（$0=\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}=\langle\tilde{U},\mathbf{V}\rangle$，從而必定位於 $\tilde{U}$ 的一個面內。）(2)確定 $\tilde{U}$ 的各個面之間的距離，使得任意矢量 **Y**（例如 $\mathbf{Y}=\mathbf{U}$，）穿透的面的數目等於 $\mathbf{Y}\cdot\mathbf{U}$。

注意，圖中 $\tilde{B}$ 的那些面確實是垂直於 **B** 的，$\tilde{C}$ 的那些面確實是垂直於 **C** 的，等等。如果看起來不像，那是因爲讀者把空時圖歸於 Euclid 幾何而不是 Lorentz 幾何。應當記住，例如，因爲 **C** 是一個零矢量，它垂直於它自己（$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}=0$），所以它本身必定位於1-形式 $\tilde{C}$ 的一個面內。遇到困惑的讀者可以在較爲初等的教科書，例如，在 Taylor 和 Wheeler (1966)的著作中複習一下空時圖。

1-形式與矢量之間的物理一致性

實際上，de Broglie 1-形式 $\tilde{k}$ 和動量矢量 **P** 包含完全同樣的物理學（經由量子理論）信息和數學信息。爲了看清其間的關係，用 $\hbar\times$位相重新表示 $\tilde{k}$ 的面，從而得到「*動量1-形式*」$\tilde{p}$。用任意矢量 **v** 穿透此1-形式，得出下述結果（練習 2.1）

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}=\langle\tilde{p},\mathbf{v}\rangle。 \tag{2.14}$$

總之，**v** 在四維動量矢量 **p** 上的投影等於它穿透的四維動量1-形式 $\tilde{p}$ 的面的數目。例：若矢量 **v** 在 $\tilde{p}$ 的一個面上（未穿透）是垂直於 **p** 的（無投影）；而 **p** 本身穿透了 $\tilde{p}$ 的面數爲 $p^2=-m^2$。

1-形式與矢量間的數學一致性

相應於任一矢量 **p**，存在着由(2.14)式定義的唯一的一個1-形式 $\tilde{p}$（矢量的線性函數）。又，相應於任意一個1-形式 $\tilde{p}$，存在唯一的一個矢量 **p**，**p** 是按（2.14）式由它在所有其他矢量上的投影定義的。圖 2.7示出幾個矢量和它們所對應的1-形式。

一個物理量可以用矢量 $\mathbf{p}$ 描述，亦可以用相應的 1- 形式 $\tilde{\mathbf{p}}$ 同樣好地描述。有時矢量描述最爲簡單也最自然；有時1-形式描述更好，例：考慮某1-形式，它代表指向未來的 Lorentz 時間坐標，它的面是 $x^0=\cdots, 7, 8, 9, \cdots\cdots$。則相應的矢量指向過去［見圖 2.7 或 (2.14)式］；它不適於描述時間的向前推移！

通常省略掉相應於矢量 $\mathbf{p}$ 的1-形式 $\tilde{\mathbf{p}}$ 上的波紋號，兩者都用同樣的符號 $\mathbf{p}$。這樣用是正確的，因爲 $\tilde{\mathbf{p}}$ 和 $\mathbf{p}$（在數學和物理學兩方面）一一對應。

練習 2.1　　**練習**

試證明 (2.14) 式與 de Broglie 波的量子力學性質一致

$$\psi=e^{i\phi}=\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)]。$$

---

§ 2.6　梯度和方向微商

作爲1-形式的函數梯度

沒有比函數 f 的梯度「$\mathbf{d}f$」更簡單的1-形式了。梯度是1-形式嗎？怎麼會這樣呢？人們不是一直認爲梯度是一個矢量嗎？是的，確實如此，但這只是因爲對更適當的1-形式概念不熟悉的緣故。更熟悉的梯度是經由 (2.14) 式與1-形式梯度相對應的矢量。在 $\mathcal{P}_0$ 點表示 $\mathbf{d}f$ 的超平面正是 f 本身的等位面，只是前者是平直的和等間距排列的。（圖 2.5；此處的 f 與該圖的 ϕ 等同）。更確切地說，表示 $\mathbf{d}f$ 的超平面是在 $\mathcal{P}_0$ 點附近無限小鄰域內近似於 f 的線性函數的等位面。

爲什麼用「梯度」的名稱呢？因爲 $\mathbf{d}f$ 描述在 $\mathcal{P}_0$ 鄰域內 f 的一階變化：

$$f(\mathcal{P})=f(\mathcal{P}_0)+\langle\mathbf{d}f,\mathcal{P}-\mathcal{P}_0\rangle+\text{（非線性項）}。\qquad(2.15)$$

［試與某量的「微商」這一基本概念相比較，它是「該量在某點的最佳線性近似」，這一概念甚至在函數的值和變量爲無限維矢量時仍然成立！參看，例如，Dieudonné (1960) 的文獻。］

取任一矢量 $\mathbf{v}$；畫出由 $\mathcal{P}(\lambda)-\mathcal{P}_0=\lambda\mathbf{v}$ 定義的曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$；沿此曲線對函數 f 求微分：

$$\partial_{\mathbf{v}}f=(d/d\lambda)_{\lambda=0}f[\mathcal{P}(\lambda)]=(df/d\lambda)_{\mathcal{P}_0}。\qquad(2.16a)$$

作此微分運算的「微分算符」

$$\partial_{\mathbf{v}}=(d/d\lambda)_{\text{在}\lambda=0\text{處，沿曲線 }\mathcal{P}(\lambda)-\mathcal{P}_0=\lambda\mathbf{v}},\qquad(2.16b)$$

定以方向微商算符

稱爲「沿矢量 $\boldsymbol{v}$ 的方向微商算符」。把 $\partial_{\boldsymbol{v}}$ 作用於 (2.15) 式，並算出在$\mathscr{P}_0$點的結果：

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f = \langle \boldsymbol{df}, \boldsymbol{d}\mathscr{P}/d\lambda \rangle = \langle \boldsymbol{df}, \boldsymbol{v} \rangle 。 \tag{2.17}$$

由此可見，方向微商 $\partial_{\boldsymbol{v}} f$ 和梯度 $\boldsymbol{df}$ 是緊密相關的。這一結果可用文字表述如下：$\boldsymbol{df}$ 是計算 f 在任意所需矢量 $\boldsymbol{v}$ 方向上變化率的線性機器。把 $\boldsymbol{v}$ 插入 $\boldsymbol{df}$ ，輸出（「被穿透的面數；鈴響的次數」）即爲 $\partial_{\boldsymbol{v}} f$ ；當 $\boldsymbol{v}$ 足夠小時，$\partial_{\boldsymbol{v}} f$ 就是在 $\boldsymbol{v}$ 矢量頭、尾處的 f 之差。

§2.7 幾何客體的坐標表述

在平直空時中，應特別注意 Lorentz 坐標系。Lorentz 坐標系的各坐標 $x^0(\mathscr{P})$, $x^1(\mathscr{P})$, $x^2(\mathscr{P})$, $x^3(\mathscr{P})$ 都是函數；可以計算它們的梯度。得出的每一個「1-形式的基」爲

1-形式的基

$$\boldsymbol{\omega}^\alpha = \boldsymbol{dx}^\alpha , \tag{2.18}$$

每個基的超平面是坐標面 x^α＝常數；見圖2.8。因此，基矢量 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 準確地穿透

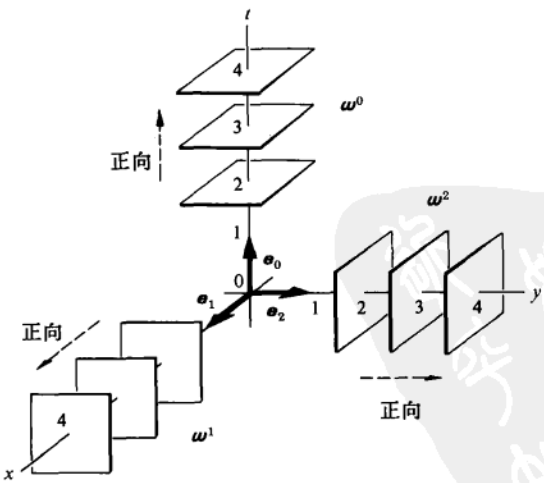


圖 2.8
一個特定的 Lorentz 坐標系的基矢量和1-形式。
1-形式基的放置使

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta 。$$

1-形式基 $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ 的一個面，而其他三個基矢量則平行於 $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ 的面而並不穿透它：

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta 。 \tag{2.19}$$

（具有以上性質的1-形式基的集 $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ 和基矢量的集 $\{\mathbf{e}_\beta\}$ 被稱爲是彼此「對偶」的。）

1-形式用基展開

正如任一矢量可以用基 $\mathbf{e}_\beta$ 展開爲 $\mathbf{v}=v^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ 任意1-形式也可用 $\boldsymbol{\omega}^\beta$ 展開爲

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta 。 \tag{2.20}$$

展開系數 σ_β 稱爲「$\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\boldsymbol{\omega}^\beta$ 上的分量」。

矢量與1-形式分量的計算和使用

這些定義產生了優美的計算形式，可計算基矢量 $\mathbf{e}_\alpha$ 穿透了多少個 $\boldsymbol{\sigma}$ 的面；由 (2.19) 式和 (2.20) 式，答案是

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \langle \sigma_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \sigma_\beta \langle \boldsymbol{\omega}^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \sigma_\beta \delta^\beta{}_\alpha ;$$

即

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \sigma_\alpha 。 \tag{2.21a}$$

同樣，對任意矢量 $\mathbf{v}=\mathbf{e}_\beta v^\beta$，可計算 $\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{v} \rangle$ 結果爲

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{v} \rangle = v^\alpha 。 \tag{2.21b}$$

以 v^α 乘 (2.21a) 式並求和，或以 σ_α 乘 (2.21b) 式並求和，在兩種情形下結果均爲

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = \sigma_\alpha v^\alpha 。 \tag{2.22}$$

這就提供了用諸分量計算獨立於坐標的 $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle$ 值的一種方法。

每一個 Lorentz 坐標系對於任意幾何客體或幾何關係都給出一個依賴於坐標的表述：$\mathbf{v}$ 用它的諸分量 v^α 表述；$\boldsymbol{\sigma}$ 用它的諸分量 σ_α 表示；點 $\mathcal{P}$ 用它的坐標 x^α 表示；關係式 $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = 17.3$ 用 $\sigma_\alpha v^\alpha = 17.3$ 表示。

爲了找到方向微商算符 $\partial_{\mathbf{v}}$ 的坐標表述，利用初等微積分把 (2.16b) 式重寫爲

$$\partial_{\mathbf{v}} = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\mathcal{P}_0} = \underbrace{\left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right)_{\text{在}\mathcal{P}_0\text{點沿}\mathcal{P}(\lambda)-\mathcal{P}_0=\lambda\mathbf{v}}}_{v^\alpha;\ \text{見(2.3)式}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right);$$

結果爲

$$\partial_{\mathbf{v}} = v^\alpha \partial / \partial x^\alpha 。 \tag{2.23}$$

方向微分用坐標表示

特別是，沿基矢量 $\mathbf{e}_\alpha$ 的方向微商（分量 $[\mathbf{e}_\alpha]^\beta = \langle \boldsymbol{\omega}^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \delta^\beta{}_\alpha$）爲

$$\partial_\alpha \equiv \partial_{\mathbf{e}_\alpha} = \partial / \partial x^\alpha 。 \tag{2.24}$$

由圖 2.8，這個結果也是顯然的，

梯度的分量

梯度1-形式 $\mathbf{d}f$ 的分量，記爲 $f_{,\alpha}$

$$\mathbf{d}f = f_{,\alpha}\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \tag{2.25a}$$

很容易用上述公式計算出來：

$$\begin{aligned} f_{,\alpha} &= \langle \mathbf{d}f, \mathbf{e}_{\alpha} \rangle \text{ [計算分量的標準方法；(2.21a) 式]} \\ &= \partial_{\alpha} f \text{ [利用方向微商和梯度之間的關係 (2.17) 式]} \\ &= \partial f / \partial x^{\alpha} \text{ [利用 (2.24) 式]} 。 \end{aligned}$$

因此，與初等微積分的梯度概念一樣，$\mathbf{d}f$ 的分量正是沿坐標軸的偏微商：

$$f_{,\alpha} = \partial f / \partial x^{\alpha}; \text{ 即 } \mathbf{d}f = (\partial f / \partial x^{\alpha})\mathbf{d}x^{\alpha} 。 \tag{2.25b}$$

（記住：$\boldsymbol{\omega}^{\alpha} = \mathbf{d}x^{\alpha}$）公式 $\mathbf{d}f = (\partial f / \partial x^{\alpha})\mathbf{d}x^{\alpha}$ 正確地提醒我們：$\mathbf{d}f$ 是初等微積分中「微分」的嚴格形式；見框 2.3。

下面幾個練習中將研究幾何關係的其他重要坐標表述。

練習

導出下述有用的計算公式：

練習 2.2 用降指標得出與矢量對應的1-形式

與矢量 $\mathbf{u}$ 對應的1-形式 $\tilde{\mathbf{u}}$ 的諸分量 u_{α}，可以利用度規系數 $\eta_{\alpha\beta}$「降低指標」得到

$$u_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}u^{\beta} \text{ ；即 } \quad u_0 = -u^0,\ u_k = u^k 。 \tag{2.26a}$$

練習 2.3 用升指標回復矢量

通過升指標可以恢復 $\mathbf{u}$ 的諸分量

$$u^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}u_{\beta}; \tag{2.26b}$$

矩陣 $\|\eta^{\alpha\beta}\|$ 定義爲 $\|\eta_{\alpha\beta}\|$ 的逆矩陣，它剛好等於 $\|\eta_{\alpha\beta}\|$：

$$\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma}; \quad \eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \text{ 對一切 } \alpha, \beta 。 \tag{2.27}$$

練習 2.4 得到標積的不同途經

可以用下述任何一種方式計算 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的標積：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u^{\alpha}v^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = u^{\alpha}v_{\alpha} = u_{\alpha}v_{\beta}\eta^{\alpha\beta} 。 \tag{2.28}$$

框 2.3　微分

函數 f 的「外微商」或「梯度」 $\mathbf{d}f$ 是對基本概念「微分」的更嚴格敍述。

在初等教科書中，一種說法是：微分 df 是與點 $\mathcal{P}$ 某些無限小位移相聯系的「函數 $f(\mathcal{P})$ 的無限小變化」，但須記住 $\mathcal{P}$ 的位移雖是無限小，却是任意的。因此 df 表示 f 在某個非特定方向上的變化。

但是，外微分 $\mathbf{d}f$ 代表什麼是很確切的。在 $\mathcal{P}$ 點選擇一個特殊的長度爲無限小的位移 $\mathbf{v}$。設位移矢量 $\mathbf{v}$ 穿透 $\mathbf{d}f$ 的數目爲 $\langle \mathbf{d}f, \mathbf{v}\rangle = \partial_{\mathbf{v}} f$。則該數目卽是 f 從 $\mathbf{v}$ 的尾到頭的變化。因此，在給出 $\mathbf{d}f$ 被穿透的數目之前，$\mathbf{d}f$ 表示 f 在某一非特定方向的變化。$\mathbf{v}$ 穿透 $\mathbf{d}f$ 的行動就是使方向明確化的行動，該方向卽是測量變化的方向。教科書中表述的唯一缺點在於它暗示 $\mathbf{d}f$ 是標量或數目；明確承認需要規定一個 $\mathbf{v}$ 的方向以簡化 $\mathbf{d}f$ 爲一個數 $\langle \mathbf{d}f, \mathbf{v}\rangle$，這表明 $\mathbf{d}f$ 實際上是一種 1-形式，是 f 是的梯度。

§ 2.8　離心機和光子

矢量，度規，1-形式，函數，梯度，方向微商；所有這些以及其他幾何客體都是在平直空時中用來代表物理量的；並且所有物理規律都必須用這些幾何客體來表述。

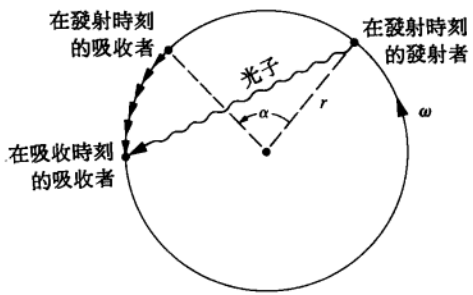


圖 2.9
離心機和光子

行動中的幾何客體、離心機和光子的例子

作爲一個例子，考慮利用 Mössbauer 效應所作的高精度紅移實驗(圖2.9)。光子的發射者和吸收者都固定在離心機的邊緣，在慣性實驗室中測出兩者的分離角度爲 α，且均位於半徑 r 處，離心機以角速度 ω 旋轉。問題：測出的紅移

$$z = (\lambda_{\text{吸收}} - \lambda_{\text{發射}})/\lambda_{\text{發射}}$$

是多少？用 ω、r 和 α 表示。

解：設 u_e 是在發出一給定光子的事件處發射者的四維速度，設 u_a 是在吸收事件處吸收者的四維速度，設 p 爲光子的四維動量。三個量都是沒有用坐標系定義的矢量。同樣，由發射者和吸收者分別測定的光子能量 E_e 和 E_a 也與坐標無關。描述下述事實是毋需坐標的：一特定發射者發射一特定光子並賦予能量 E_e；在 E_e 的幾何公式

$$E_e=-\mathbf{p}\cdot u_e \tag{2.29}$$

中也毋需坐標。［上式很易證明，記得在發射者參照系中，$u_e^0=1$, $u_e^j=0$, 故

$$E_e=-p_a u_e^a=-p_0=+p^0$$

與證明「（四維動量的時間分量）＝（能量）」一致］。吸收能量的純幾何公式

$$E_a=-\mathbf{p}\cdot u_a$$

與 (2.29) 式類似。

吸收波長與發射波長之比爲能量之比的倒數（因爲 $E=h\nu=hc/\lambda$）：

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_e}=\frac{E_e}{E_a}=\frac{-\mathbf{p}\cdot u_e}{-\mathbf{p}\cdot u_a}。$$

在慣性實驗室參照系中很容易計算此比值：

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_e}=\frac{p^0u_e^0-p^ju_e^j}{p^0u_a^0-p^ju_a^j}\equiv\frac{p^0u_e^0-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_e}{p^0u_a^0-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_a}。 \tag{2.30}$$

（此處和以後黑體拉丁字母表示在給定 Lorentz 參照系中的三維矢量；並按三維 Euclid 矢量分析的通常符號和公式來使用它們。）因爲離心機邊緣速度的大小 $v=\omega r$ 不隨時間變化，所以 u_e^0 和 u_a^0 相等，而且 $\mathbf{u}_e$ 和 $\mathbf{u}_a$ 的大小——不是方向——也相等：

$$u_e^0=u_a^0=(1-v^2)^{-1/2},\ |\mathbf{u}_e|=|\mathbf{u}_a|=v/(1-v^2)^{1/2}。$$

由圖 2.9 的幾何可見 $\mathbf{u}_e$ 與 $\mathbf{p}$ 的夾角和 $\mathbf{u}_a$ 與 $\mathbf{p}$ 的夾角相同。因此，$\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_e=\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_a$, 從而 $\lambda_{吸收}/\lambda_{發射}=1$。沒有紅移！

注意，這個解法並不涉及任何 lorentz 變換——在本書中它們尚未論及！幾何的和無坐標的觀點之威力是顯而易見的！

爲了應用幾何觀點，必須在理論和實驗之間建立種種無坐標的聯繫。對於光子的能量，和由四維速度爲 $\boldsymbol{u}$ 的觀測者所測定的四維動量 $\boldsymbol{p}$ 而言，方程 $E=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}$ 就是這樣一種聯繫。試證明下述其他相聯繫之處。

練習

練習 2.5 從四維動量求能量和速度

四維速度爲 $\boldsymbol{u}$ 的觀測者考察靜質量爲 m，四維動量爲 $\boldsymbol{p}$ 的一個粒子。試證明，當

(a) 他測出的能量是

$$E=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}\,; \tag{2.31}$$

(b) 他也以爲粒子的靜質量爲

$$m^2=-\boldsymbol{p}^2\,; \tag{2.32}$$

(c) 他測出的動量的大小爲

$$|\boldsymbol{p}|=[(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u})^2+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})]^{1/2}\,; \tag{2.33}$$

(d) 他測出的通常速度的大小爲

$$|\boldsymbol{v}|=\frac{|\boldsymbol{p}|}{E}\,, \tag{2.34}$$

式中 $|\boldsymbol{p}|$ 和 E 由以上公式給出；(e) 在觀測者的 Lorentz 參照系中分量爲

$$v^0=0\,,\ v^j=(dx^j/dt)\ \text{對粒子=通常速度}$$

的四維矢量 $\boldsymbol{v}$ 由下式給出

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}}{-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}}\,。 \tag{2.35}$$

練習 2.6 溫度梯度

對於太陽內每一個事件 $\mathcal{Q}$，可以認爲都具有一個溫度 $T(\mathcal{Q})$，此溫度是由在熾熱氣體中靜止於該處的溫度計測出的。則 $T(\mathcal{Q})$ 是一個函數，定義和討論它都不需要坐標。一宇宙線從外空間以四維速度 $\boldsymbol{u}$ 穿越太陽。試證明，用宇宙線的鐘測量，在它附近溫度的時間微商爲

$$dT/d\tau=\partial_{\boldsymbol{u}}T=\langle \boldsymbol{d}T,\ \boldsymbol{u}\rangle\,。 \tag{2.36}$$

在太陽內部的局域 Lorentz 參照系中，上式可以寫爲

$$\frac{dT}{d\tau}=u^\alpha\frac{\partial T}{\partial x^\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{v^j}{\sqrt{1-v^2}}\frac{\partial T}{\partial x^j}\,。 \tag{2.37}$$

爲什麼這個結果是合理的？

§2.9 Lorentz 變換

爲了簡化計算，常常採用矢量和1-形式的諸分量，而不用無坐標的語言。這種分量的處理有時包含着從一個 Lorentz 參照系到另一個 Lorentz 參照系的變換。讀者已經熟知這種 Lorentz 變換；但是框 2.4 中的簡短復習將會恢復他們的記憶，並使之熟悉本書所用的符號。

Lorentz 變換：關於坐標

Lorentz 變換的關鍵實體是矩陣 $\|\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\|$ 和 $\|\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\|$，第一個矩陣將不帶撇的坐標系變換到帶撇的坐標系，第二個矩陣則將帶撇的變換到不帶撇的

$$x^{\alpha'}=\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}x^{\beta}, \qquad x^{\beta}=\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}x^{\alpha'}。 \tag{2.38}$$

因爲兩個矩陣從相反的方面起作用，故彼此互爲逆矩陣：

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\gamma'}=\delta^{\alpha'}{}_{\gamma'}; \qquad \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\Lambda^{\alpha'}{}_{\gamma}=\delta^{\beta}{}_{\gamma}。 \tag{2.39}$$

由四維速度 $\mathbf{u}=(dx^{\alpha}/d\tau)\mathbf{e}_{\alpha}$ 與坐標無關的性質，容易導出下述表達式

$$\mathbf{e}_{\alpha'}=\mathbf{e}_{\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}, \qquad \mathbf{e}_{\beta}=\mathbf{e}_{\alpha'}\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} \tag{2.40}$$

關於基矢量

將一個參照系中的基矢量用另一個參照系的基矢量表示；再由其他幾何方程，如

$$\mathbf{v}=\mathbf{e}_{\alpha}v^{\alpha}=\mathbf{e}_{\beta'}v^{\beta'},$$
$$\langle\boldsymbol{\sigma},\mathbf{v}\rangle=\sigma_{\alpha}v^{\alpha}=\sigma_{\beta'}v^{\beta'},$$
$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_{\alpha}\omega^{\alpha}=\sigma_{\beta'}\omega^{\beta'},$$

可以導出以下變換規律

關於1-形式基

$$\omega^{\alpha'}=\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\omega^{\beta}, \qquad \omega^{\beta}=\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\omega^{\alpha'}; \tag{2.41}$$

關於諸分量

$$v^{\alpha'}=\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}v^{\beta}, \qquad v^{\beta}=\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}v^{\alpha'}; \tag{2.42}$$

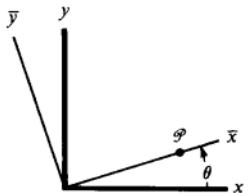
$$\sigma_{\alpha'}=\sigma_{\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}, \qquad \sigma_{\beta}=\sigma_{\alpha'}\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}。 \tag{2.43}$$

根本無需記住這些變換規律中指標的位置，只需把指標按下述規則排好：(1)方程兩側的自由指標要放在同樣的位置上；(2)求和指標在上方出現一次，在下方出現一次，這樣，就一切都對了！（注：Λ的指標總是「從西北往東南寫」）。

框 2.4　Lorentz 變換

參照系在 x-y 平面內旋轉 θ 角

斜率 $s=\tan\theta$;　$\sin\theta=\dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}}$;　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$



$$t=\bar{t}$$
$$x=\bar{x}\cos\theta-\bar{y}\sin\theta$$
$$y=\bar{x}\sin\theta+\bar{y}\cos\theta$$
$$z=\bar{z}$$

$$\bar{t}=t$$
$$\bar{x}=x\cos\theta+y\sin\theta$$
$$\bar{y}=-x\sin\theta+y\cos\theta$$
$$\bar{z}=z$$

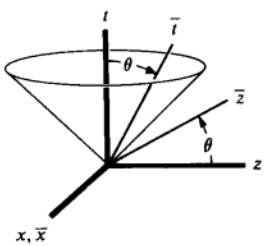
所有的正負都由此項的符號決定。觀察 $\mathscr{P}$ 點而知其爲正。

兩個旋轉的合成

$$s=\frac{s_1+s_2}{1-s_1s_2}\quad\text{或}\quad\theta=\theta_1+\theta_2$$

在 x-t 平面內用速度參量 α 推動參照系

速度 $\beta=\tanh\alpha$;　$\sinh\alpha=\dfrac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}}$;　$\cosh\alpha=\dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}=$"$\gamma$"



tanθ＝速度 β
＝tanh α

$$t=\bar{t}\cosh\alpha+\bar{z}\sinh\alpha$$
$$x=\bar{x}$$
$$y=\bar{y}$$
$$z=\bar{t}\sinh\alpha+\bar{z}\cosh\alpha$$

$$\bar{t}=t\cosh\alpha-z\sinh\alpha$$
$$\bar{x}=x$$
$$\bar{y}=y$$
$$\bar{z}=-t\sinh\alpha+z\cosh\alpha$$

所有的正負都由此項的符號決定，它爲正，因爲在火箭參照系中 $\bar{z}=0$ 處靜止的物體，在實驗室參照系中沿 z 增加的方向運動。

矩陣符號：$x^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$,　$x^\nu=\Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$

$$\|\Lambda^\mu{}_\nu\|=\begin{Vmatrix}\cosh\alpha & 0 & 0 & \sinh\alpha\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \sinh\alpha & 0 & 0 & \cosh\alpha\end{Vmatrix},\quad \|\Lambda^\nu{}_\mu\|=\begin{Vmatrix}\cosh\alpha & 0 & 0 & -\sinh\alpha\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\sinh\alpha & 0 & 0 & \cosh\alpha\end{Vmatrix}$$

能量-動量四維矢量	電荷密度-電流四維矢量
$E=\bar{E}\cosh\alpha+p^{\bar{z}}\sinh\alpha$	$\rho=\bar{\rho}\cosh\alpha+j^{\bar{z}}\sinh\alpha$
$p^x=p^{\bar{x}}$	$j^x=j^{\bar{x}}$
$p^y=p^{\bar{y}}$	$j^y=j^{\bar{y}}$
$p^z=\bar{E}\sinh\alpha+p^{\bar{z}}\cosh\alpha$	$j^z=\bar{\rho}\sinh\alpha+j^{\bar{z}}\cosh\alpha$

光行差，入射光子：

$$\sin\theta=\frac{-p_\perp}{E}=\frac{(1-\beta^2)^{1/2}\sin\bar{\theta}}{1-\beta\cos\bar{\theta}} \qquad \sin\bar{\theta}=\frac{-\bar{p}_\perp}{E}=\frac{(1-\beta^2)^{1/2}\sin\theta}{1+\beta\cos\theta}$$

$$\cos\theta=\frac{-p^z}{E}=\frac{\cos\bar{\theta}-\beta}{1-\beta\cos\bar{\theta}} \qquad \cos\bar{\theta}=\frac{-\bar{p}^{\bar{z}}}{\bar{E}}=\frac{\cos\theta+\beta}{1+\beta\cos\theta}$$

$$\tan(\theta/2)=e^{\alpha}\tan(\bar{\theta}/2) \qquad \tan(\bar{\theta}/2)=e^{-\alpha}\tan(\theta/2)$$

同一方向上兩次推動的合成

$$\beta=\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \quad \text{或} \quad \alpha=\alpha_1+\alpha_2\,。$$

推動和旋轉的一般組合

第四十一章的旋量公式

Poincaré 變換

$$x^\mu=\Lambda^\mu{}_{\alpha'}x^{\alpha'}+a^\mu\,。$$

這個變換的 Lorentz 部份需要滿足的條件是：

$$ds'^2=\eta_{\alpha'\beta'}dx^{\alpha'}dx^{\beta'}=ds^2=\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_{\alpha'}\Lambda^\nu{}_{\beta'}dx^{\alpha'}dx^{\beta'}$$

或 $\Lambda^T\eta\Lambda=\eta$（矩陣方程，$T$ 表示「轉置」或行列互換）。

對其他量作變換的結果是：

$u^\mu=\Lambda^\mu{}_{\alpha'}u^{\alpha'}$	（四維矢量）	$u_{\alpha'}=u_\mu\Lambda^\mu{}_{\alpha'}$；
$p^\mu=\Lambda^\mu{}_{\alpha'}p^{\alpha'}$	（四維動量）	$p_{\alpha'}=p_\mu\Lambda^\mu{}_{\alpha'}$；
$F^{\mu\nu}=\Lambda^\mu{}_{\alpha'}\Lambda^\nu{}_{\beta'}F^{\alpha'\beta'}$	（電磁場）	$F_{\alpha'\beta'}=F_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_{\alpha'}\Lambda^\nu{}_{\beta'}$；
$\mathbf{e}_{\alpha'}=\mathbf{e}_\mu\Lambda^\mu{}_{\alpha'}$	（基矢量）	
$\omega^{\alpha'}=\Lambda^{\alpha'}{}_\mu\omega^\mu$	（1-形式基）	
$\mathbf{v}=\mathbf{e}_{\alpha'}u^{\alpha'}=\mathbf{e}_\mu u^\mu=\mathbf{v}$	（四維速度矢量）	

練習 2.7 任意方向的推動　　練習

一個特別有用的 Lorentz 變換的矩陣分量爲

$$\begin{aligned}
&\Lambda^{0'}{}_0=\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\\
&\Lambda^{0'}{}_j=\Lambda^{j'}{}_0=-\beta\gamma n^j,\\
&\Lambda^{j'}{}_k=\Lambda^{k'}{}_j=(\gamma-1)n^jn^k+\delta^{jk},\\
&\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}=(\text{與}\Lambda^{\nu'}{}_{\mu}\text{ 相同，只是把 }\beta\text{ 改爲}-\beta)\ ,
\end{aligned}\tag{2.44}$$

式中β, n^1, n^2, n^3 爲參量，$n^2\equiv(n^1)^2+(n^2)^2+(n^3)^2=1$。試證明，(a) 此變換滿足 Lorentz 變換所要求的條件 $\Lambda^T\eta\Lambda=-\eta$（見框 2.4）；(b) 從不帶撇參照系看，帶撇參照系以通常的速度 $\beta\boldsymbol{n}$ 運動；(c) 從帶撇參照系看，不帶撇參照系以通常的速度$-\beta\boldsymbol{n}$ 運動（即 $v^{1'}=-\beta n^1$, $v^{2'}=-\beta n^2$, $v^{3'}=-\beta n^3$）；和 (d) 對於在 z 方向的運動，變換矩陣簡化爲下述熟知的形式

$$\|\Lambda^{\nu'}{}_{\mu}\|=\begin{Vmatrix}\gamma&0&0&-\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\beta\gamma&0&0&\gamma\end{Vmatrix},\quad\|\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\|=\begin{Vmatrix}\gamma&0&0&\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\beta\gamma&0&0&\gamma\end{Vmatrix}。\tag{2.45}$$

§2.10 碰　　撞

無論何種物理實體：單個運動的質點，或流體的急流，或力場，或空間幾何本身，在經典廣義相對論中都作爲具有其自身特點的那類幾何客體加以描述。每一個這種幾何客體或是直接確立的，或者由可認爲相同的一些點抽象而得，爲了表示這些幾何客體並不需要坐標。我們已經指出，如何把無坐標的描述化爲坐標和分量的語言，以及如何由坐標和分量的語言變成無坐標的描述，還指出了在局域 Lorentz 參照系中諸分量在 Lorentz 變換下應如何變化。現在研究這種數學工具對運動質點的兩個初等應用。其一與短程力（碰撞，本節）有關；另一與長程電磁力（Lorentz 力定律，下一章）有關。

在碰撞中，一切動量的變化都集中發生在比觀測時間短得多的時間內。而且，通常靶非常小，量子力學很重要，故概率描述是正確的。量　　粒子的散射

$$d\sigma=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta}d\Omega\tag{2.46}$$

給出散射到偏轉角 $\boldsymbol{\theta}$ 的立體角元 $d\Omega$ 內的散射截面（厘米²）；更複雜的表達式給出入射粒子進到在給定極角 θ 和方位角 ϕ 處的立體角$d\Omega$內，並有E到$E+dE$

能量的幾率，同時反應產物出現在特定的能量範圍並進入特定角孔徑，盡管這是原子物理學中一個迷人的分支，但計算這種截面已超出此處的範圍。注意到截面是垂直於入射粒子運動方向的一個面積就夠了。因此在該方向上推動觀察者時，只要按照推動的大小，對出射粒子的能量和角度作出變換，截面就不受影響（「在不同的參照系中觀察同樣事件」）。

碰撞中能量-動量守恒

此外，以下由局域動力學分析對碰撞所作的任何詳細討論，都堅持能量-動量守恒定律：

$$\sum_{\substack{\text{入射}\\ \text{粒子，J}}} p_J = \sum_{\substack{\text{出射}\\ \text{粒子，K}}} p_K 。 \tag{2.47}$$

由此關係式出發，不需要進一步的分析就可以得出下述簡單結果。(1)作爲平面波通過眞空的光子不能分裂（對聚焦的光子不成立！）。(2)若高能電子與一靜止電子彈性碰撞，且碰後兩者均分能量，則它們的運動方向之間的夾角小於 90° 的 Newton 值，而且這個差額給出了入射電子能量的簡單量度。(3)當一電子與一質子作彈性正碰撞時，被轉移的動能的公式對電子能量爲非相對論性的、相對論性的、或極端相對論性的三種情況，有頗爲不同的極限形式。(4)在大質量核的力場中，一個光子產生一個電子、正電子（e^-, e^+）對的閾值是 $2m_e$。(5)光子與靜止電子碰撞而產生電子、正電子（e^-, e^+）對的閾值是 $4m_e$（或，當考慮到極輕「分子」中 $e^+e^-e^-$ 系統的束縛時，應爲 $4m_e-\epsilon$），所有這些結果（與計畫無關的論題！）以及更多的結果都可以從能量-動量守恒定律導出，對這個問題的詳盡討論可參看 Blaton (1950)、Hagedorn (1964)，以及 Sard (1970) 著作的第四章和第五章的最後部分。

第三章　電　磁　場

在這電的時代，每一臺發電機和每一臺電動機的旋轉電樞，始終不渝地向一切聽衆宣揚著相對論的真理。

Leigh, Page (1941)

§3.1　Lorentz 力和電磁場張量

與碰撞時動量突然改變（第二章最後一個論題）相反的極端是帶電粒子在電力和磁力作用下動量的逐漸變化（此處討論的問題）。

Lorentz 力作爲場的定義者和運動的預言者

設電場和磁場作用於一帶電粒子的系統。粒子的加速度顯示了電場和磁場的强度。換言之，Lorentz 力定律，加上對試驗粒子加速度諸分量的測定，可以看作是對電場和磁場諸分量的定義。一旦從幾個試驗粒子的加速度得出場的諸分量，便可用它們來預言其他試驗粒子的加速度(框 3.1)。因此， Lorentz 力定律起了兩種作用(1)作爲場的定義者，以及(2)作爲運動的預言者。

正如 Henri Poincaré 著重強調的那樣，在此處和自然科學的其它地方，過去常說的「在繼續前進之前應先定義你的術語」已經過時了。物理學的全部定律和理論，包括 Lorentz 力定律在內，都具有一個深刻而微妙的特點，就是一面定義它們所使用的概念（此處是$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{E}$），同時闡述這些概念。相反，缺少理論、定律和原則的某些實體，就喪失了適當地定義概念或甚至使用概念的一種手段。從這個意義上說，人類知識的任何進步都是真正的創造：理論，概念，定律和測量方法——永遠不可分割——是一起誕生到世界上來的。

框 3.1 作爲場的定義者和運動的預言者的 Lorentz 力定律

對於電磁學和引力論而言，如何通過測定加速度來確定場的分量，在原則上並無區別。試比較這兩種情況下的方程：

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=\frac{e}{m}F^\alpha{}_\beta u^\beta \text{ 在 Lorentz 坐標系中，} \quad (1)$$

和

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{d\tau^2}=-R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}u^\beta\xi^\gamma u^\delta \text{ 在任何坐標系中} \quad (2)$$

爲明確起見，電磁學中較爲簡單的步驟概括地指出了應如何類似地確定引力中 $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ 的所有分量。首先要問的是，爲了確定在所研究鄰近區域內的三個 $\boldsymbol{B}$ 分量和三個 $\boldsymbol{E}$ 分量，需要多少個試驗粒子。對於一個粒子，可測定三個加速度分量；對第二個粒子，又有三個可測定的量。夠了嗎？不夠！從一個粒子得到的信息與從另一個粒子得到的信息部分相重複。如何證明？不管第一個試驗粒子的運動狀態如何，選取與它以同樣方式運動的一個 Lorentz 系。在此參照系中粒子具有零速度，對任何磁場均無響應。只有電場作用在這個粒子上。它的加速度的三個分量直接給出了電場的三個分量 E_x, E_y, E_z。如果要求第二個粒子不只是重複第一個粒子所提供的信息，它就不能也是靜止的。使參照系的 x 軸平行於第二個粒子的運動方向，則第二個粒子將響應，並測定磁場的 B_y 和 B_z 分量。但測不出 B_x！它在 x 方向的加速度只是測量了已經測量過一次的 E_x。爲了求出 B_x 的值，需要第三個試驗粒子，但它又會重複地給出關於其它場分量的信息。有無其它可供選擇的辦法呢？同時應用全部 N 個粒子，並按同等地位，用最小二乘法求得六個 $F_{\alpha\beta}$ 的值和檢測 Lorentz 力。於是，將第 K 個粒子的預計加速度和觀測加速度之差寫爲下述形式

$$\dot{u}_\alpha{}^K-\frac{e}{m}F_{\alpha\beta}u^{\beta}{}_{;K}=\delta a_\alpha{}^K。 \quad (3)$$

取差值大小之平方，並對全部粒子求和，得

$$S=\sum_K \eta^{\alpha\beta}\delta a_\alpha{}^K\delta a^K{}_\beta。 \quad (4)$$

在此表達式中，除了六個 $F_{\alpha\beta}$ 外，其它一切量都看作已知量。對六個未知量求其極小值。用這個方法得出了 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分量的六個方程。這些方程一旦解出，即可代回(3)式檢驗 Lorentz 力定律。

若只有兩個試驗粒子，則 $F_{\alpha\beta}$ 方程中的 6×6 階系數行列式自動變爲零。根據同樣的論證方法，可以確定爲了得出 Riemann 曲率張量的全部分量所需的最少試驗粒子數目。

Lorentz 力定律的三維形式

用熟悉的三維符號：$\boldsymbol{E}$＝電場，$\boldsymbol{B}$＝磁場，$\boldsymbol{v}$＝粒子的通常速度，$\boldsymbol{p}$＝粒子的動量，e＝粒子的電荷，把 Lorentz 力定律寫爲

$$(d\boldsymbol{p}/dt)=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})。\tag{3.1}$$

儘管方程的這種形式可能有用，但却離 Einstein 幾何學的眞諦甚遠，完全的幾何學方程應包括試驗粒子的能量-動量四維矢量 $\mathbf{p}$，而不只是在特定Lorentz參照系所測出的空間部分 $\boldsymbol{p}$；還要求不由特定 Lorentz 系的觀測者測量動量變化率 (d/dt)，而應按照問題中事先存在的唯一的鐘——試驗粒子自己的鐘來測量 $(d/d\tau)$。於是，完全的幾何方程的左側爲

$$d\mathbf{p}/d\tau=\ 。$$

右側的 Lorentz 四維力也必須是與坐標系統無關的客體。它應是粒子四維速度 $\mathbf{u}$ 的線性函數，因爲與坐標系有關的表達式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{e}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=e(u^0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\tag{3.2a}$$

對於 $\mathbf{u}$ 的分量是線性的。因此，必須有一個稱爲 **Faraday**，或 **F**，或「電磁場張量」的線性機器，它具有一個空位，可插入試驗粒子的四維速度。這個機器的輸出乘上粒子的電荷，必定是該粒子感受到的電磁四維力，寫爲

定義電磁場張量

Lorentz 力定律的幾何學形式

$$d\mathbf{p}/d\tau=e\mathbf{F}(\mathbf{u})。\tag{3.3}$$

將此幾何學方程與原來的 Lorentz 力定律 (3.2a) 式和能量變化定律

$$\frac{dp^0}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}\frac{dE}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}=e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}\,,\tag{3.2b}$$

相比較，可以得出在特定 Lorentz 參照系中 **F** 的諸分量。$d\mathbf{p}/d\tau$ 的諸分量爲 $dp^\alpha/d\tau$，$e\mathbf{F}(\mathbf{u})$ 的諸分量可以寫爲 $eF^\alpha{}_\beta u^\beta$（$F^\alpha{}_\beta$的定義！）。因此

$$\frac{dp^\alpha}{\mathrm{d}\tau}=eF^\alpha{}_\beta u^\beta\tag{3.4}$$

一定可以簡化爲 (3.2a,b) 式。只要證認

電磁場張量的分量

$$\|F^\alpha{}_\beta\|=\begin{array}{c}\\ \alpha=0\\ \alpha=1\\ \alpha=2\\ \alpha=3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\beta=0 & \beta=1 & \beta=2 & \beta=3\end{array}\\ \left\|\begin{array}{cccc}0 & E_x & E_y & E_z\\ E_x & 0 & B_z & -B_y\\ E_y & -B_z & 0 & B_x\\ E_z & B_y & -B_x & 0\end{array}\right\|\end{array}。\tag{3.5}$$

就的確如此。在文獻中更常見到的是由度規的分量將一個指標降下後所得之「協變分量」

$$F_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\tau}F^{\tau}{}_{\beta}; \tag{3.6}$$

$$\|F_{\alpha\beta}\|=\begin{Vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{Vmatrix}。 \tag{3.7}$$

這個矩陣方程表明電場和磁場的統一性。$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$中的任何一個量本身都不是獨立於坐標系的幾何實體。但兩者合併而成的單一實體 $\boldsymbol{F}=$ **Faraday** 獲得了超越坐標系和參照系的意義和重要性。

練習

練習 3.1

比較 (3.4) 式與 (3.2a, b) 式，並應用定義 (3.6) 式，導出對 **Faraday** 諸分量的等式 (3.5) 式和 (3.7) 式。

---

§3.2 普遍意義下的張量

張量的例子

講幾句題外話是適宜的。現在出場的是幾個不同的張量：度規張量 $\boldsymbol{g}$(§2.4), Riemann 曲率張量 **Riemann** (§1.6)，電磁場張量 **Faraday** (§3.1)。上述每一個張量都已定義爲具有輸入矢量空位，並可輸出實數 [如 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$] 或矢量 [如 **Riemann** $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ 和 **Faraday** $(\boldsymbol{u})$] 的線性機器。

是否需要區別輸出標量和輸出矢量的張量呢？不需要！輸出矢量的張量可以簡單地重新解釋爲輸出標量的張量。以 $\boldsymbol{Faraday}=\boldsymbol{F}$ 爲例。增加一個可以插入任意1-形式 $\boldsymbol{\sigma}$ 的新空位，加上齒輪和輪子以確保輸出爲

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u})=\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\rangle=\text{實數}。 \tag{3.8}$$

然後，使用者可以選擇：或者是只插入一個矢量，並得到一個矢量 $\boldsymbol{F}(\ldots,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$；或者是插入一個1-形式和一個矢量，並得到一個數 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u})$。同一個機器會作兩種工作。而且，用給定的 Lorentz 系中的分量，這兩種工作都很容易實現：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}(\ldots,\boldsymbol{u})\text{ 是一個矢量，其分量爲 } F^{\alpha}{}_{\beta}u^{\beta}; \\ &\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u})\text{ 是一個數目 } \langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{F}(\ldots,\boldsymbol{u})\rangle=\sigma_{\alpha}F^{\alpha}{}_{\beta}u^{\beta}。 \end{aligned} \tag{3.9}$$

與此類似，最普遍的張量 $\boldsymbol{H}$ 及其秩 $\binom{n}{m}$ 可定義如下： $\boldsymbol{H}$ 是一個線性機器，它具有 n 個輸入空位可以輸入 n 個1-形式，它還具有 m 個輸入空位可以輸入 m 個矢量；給定所需輸入的量之後，它輸出一個實數，記爲

張量定義爲把矢量和1-形式轉換爲數目的線性機器

$$\boldsymbol{H}(\underbrace{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\lambda},\ldots,\boldsymbol{\beta}}_{n\text{個1-形式}},\underbrace{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}}_{m\text{個矢量}})。\tag{3.10}$$

對於絕大多數張量，當兩個輸入矢量或兩個輸入1-形式交換位置時，輸出量將會發生變化，

$$\textbf{Riemann}\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\neq\textbf{Riemann}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})。\tag{3.11}$$

選擇一特定張量 $\boldsymbol{S}$，爲了明確起見，取其秩爲 $\binom{2}{1}$。把特定 Lorentz 坐標系的基矢量和1-形式基插入 $\boldsymbol{S}$ 的各空位之中。輸出就是「$\boldsymbol{S}$ 在該坐標系中的分量」：

$$S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\equiv\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\boldsymbol{\omega}^{\beta},\mathbf{e}_{\gamma})。\tag{3.12}$$

張量的分量

這就定義了諸分量。若已知在特定坐標系中的分量，很容易算出輸入任意1-形式和矢量後所得之輸出：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{v})&=\boldsymbol{S}(\sigma_{\alpha}\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\rho_{\beta}\boldsymbol{\omega}^{\beta},v^{\gamma}\mathbf{e}_{\gamma})=\sigma_{\alpha}\rho_{\beta}v^{\gamma}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\boldsymbol{\omega}^{\beta},\mathbf{e}_{\gamma})\\&=S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\sigma_{\alpha}\rho_{\beta}v^{\gamma}。\end{aligned}\tag{3.13}$$

用分量表示張量機器的作用

而且，若已知 $\boldsymbol{S}$ 在某一 Lorentz 坐標系（不帶撇）中的分量，加上將坐標系與另一坐標系（帶撇）相聯繫的 Lorentz 變換矩陣 $\|\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\|$ 和 $\|\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\|$，即可算出在新的（帶撇）坐標系中的分量。如練習 3.2 所示，只需對 $\boldsymbol{S}$ 的每一個指標用一個矩陣，並把矩陣的指標按邏輯方式排列起來即可

$$S^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'}=S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta'}{}_{\beta}\Lambda^{\gamma}{}_{\gamma'}。\tag{3.14}$$

分量的 Lorentz 變換

將張量內的齒和輪稍加改變，就能使它的1-形式空位之一接受一個矢量。所需的一切是一種裝置，它能把輸入矢量 $\boldsymbol{n}$ 轉換爲其相應的1-形式 $\tilde{\boldsymbol{n}}$，再把此1-形式輸入老機器。於是，改造後的張量與原來的張量用同樣的符號 $\boldsymbol{S}$ 表示，但要求

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{n},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma},\tilde{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{v});\tag{3.15}$$

改造一個張量，使得它的每個空位既可接受矢量又可接受1-形式

或者，用分量符號

$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha}n^{\beta}v^{\gamma}=S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\sigma_{\alpha}n_{\beta}v^{\gamma}。\tag{3.15'}$$

要達到這一點，只需利用度規分量把 $\boldsymbol{S}$ 的指標上升和下降即可：

$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=\eta_{\beta\mu}S^{\alpha\mu}{}_{\gamma},\quad S^{\alpha\mu}{}_{\gamma}=\eta^{\mu\beta}S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}。\tag{3.16}$$

指標的上升和下降

（參看下面的練習 3.3）對原來的張量和改造後的張量採用同一個符號 $\boldsymbol{S}$，就

使每一個空位既可接受一個1-形式，又可接受一個矢量，因此，可以不管 $\boldsymbol{S}$ 是 $\binom{2}{1}$ 張量，還是 $\binom{1}{2}$ 張量，或 $\binom{3}{0}$ 張量，或 $\binom{0}{3}$ 張量，而只能區分它的總秩爲 3 。術語：「上指標」稱爲「反協變」指標，「下指標」稱爲「協變」指標。即在 $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ 中 "α" 是反協變指標，"β" "γ" 是協變指標。

因爲張量只不過是函數，它們可以按通常的方式相加（只要它們具有相同的秩！）和數乘：若輸入矢量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, 則三秩張量 $a\boldsymbol{S}+b\boldsymbol{Q}$ 的輸出爲

$$(a\boldsymbol{S}+b\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\equiv a\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+b\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})。 \tag{3.17}$$

在下面的練習中將要研究張量的若干其他重要運算。它們以及練習中的結果，在今後的內容中將自由地引用。

練習

練習 3.2 張量分量的變換定律

試由矢量和1-形式的分量變換定律導出變換定律 (3.14) 式。

練習 3.3 指標的上升和下降

試由 (3.15′) 式加上從矢量 $\boldsymbol{n}$ 分量得出其相應 1- 形式 $\tilde{\boldsymbol{n}}$ 分量的規律 $n_{\alpha}=\eta_{\alpha\beta}n^{\beta}$ ，導出 (3.16) 式

練習 3.4 張量積

由任意給定的兩個矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 定義的二秩張量 $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ （「$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的張量積」）是一個具有兩個輸入空位的機器，當插入1-形式 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 時，其輸出爲數目

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\lambda})=\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{v}\rangle, \tag{3.18}$$

試證明 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ 的分量是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分量的乘積

$$T^{\alpha\beta}=u^{\alpha}v^{\beta},\quad T_{\alpha}{}^{\beta}=u_{\alpha}v^{\beta},\quad T_{\alpha\beta}=u_{\alpha}v_{\beta}。 \tag{3.19}$$

將上述定義推廣到若干個矢量和1-形式，爲

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{n},\boldsymbol{\zeta})=\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{v}\rangle\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n}\rangle\langle\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{w}\rangle, \tag{3.20}$$

試證明分量的乘積法則仍然成立：

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{w}\text{ 的分量爲}\quad S^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\zeta}=u^{\mu}v^{\nu}\beta_{\lambda}w^{\zeta}。 \tag{3.21}$$

練習 3.5 基張量

試證明在給定 Lorentz 坐標系中分量爲 $M^{\alpha\beta}{}_{\gamma}{}^{\delta}$ 的張量 $\boldsymbol{M}$ 可由其分量以及該坐標系的基1-形式和基矢量按下述方式重新構成：

$$\boldsymbol{M}=M^{\alpha\beta}{}_{\gamma}{}^{\delta}\boldsymbol{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\gamma}\otimes\boldsymbol{e}_{\delta}。 \tag{3.22}$$

（它的一個特殊情況，見框 3.2）

框 3.2　用不同語言描述度規

A. 幾何語言

$\mathbf{g}$ 是一個具有兩個可以插入矢量的空位的線性對稱機器。插入矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 後，$\mathbf{g}$ 的輸出是它們的標積：

$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}。$$

B. 分量語言

$\eta_{\mu\nu}$ 是度規的分量。利用它們，在給定的 Lorentz 坐標系中，可由矢量的分量計算兩個矢量的標積：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\eta_{\mu\nu}u^{\mu}v^{\nu}。$$

C. 基於坐標的幾何語言

度規可以用特定 Lorentz 坐標系中的基1-形式寫爲

$$\mathbf{g}=\eta_{\mu\nu}\boldsymbol{\omega}^{\mu}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\nu}=\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^{\mu}\otimes\mathbf{d}x^{\nu}$$

［見（2.18）式和（3.22）式］。

D. 與基本概念線元的聯繫

框 2.3 表明函數梯度 $\mathbf{d}f$ 與在某非特定方向上 f 的微分 df 這一基本概念之間的對應關係。在度規 $\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^{\mu}\otimes\mathbf{d}x^{\nu}$ 與基本概念「線元」$ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ 之間也存在着類似的對應關係。在許多狹義相對論的教科書中，把基本概念線元解釋爲在某非特定方向上位移 "dx^{μ}" 長度的平方。度規 $\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^{\mu}\otimes\mathbf{d}x^{\nu}$ 的含義與此相同。選取一個特定的無限小位移矢量 $\boldsymbol{\xi}$，把它插入 $\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^{\mu}\otimes\mathbf{d}x^{\nu}$ 的空位中。輸出將是 $\boldsymbol{\xi}^2=\eta_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}$，即位移長度的平方。在插入 $\boldsymbol{\xi}$ 之前，$\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^{\mu}\otimes\mathbf{d}x^{\nu}$ 具有告訴任何矢量長度平方的潛力；插入 $\boldsymbol{\xi}$ 把這種潛力變成了現實；得到了 $\boldsymbol{\xi}^2$ 的數值。

由於度規 $\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^{\mu}\otimes\mathbf{d}x^{\nu}$ 與線素 $ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ 在表示非特定無限小位移的長度平方上起着同樣的作用，在它們之間沒有任何概念上的差別。有時可用符號 $\mathbf{d}s^2$ 表示度規；有時省略「⊗」符號，將它縮寫成 $\mathbf{d}s^2=\eta_{\mu\nu}\mathbf{d}x^{\mu}\mathbf{d}x^{\nu}$；有時甚至壓縮到使用非黑體字，因此度規和基本線元之間在符號上也完全沒有差別了：

$$\mathbf{g}=\mathbf{d}s^2=ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}。$$

練習 3.6 工作中的 *Faraday* 機器

具有四維速度 $\boldsymbol{u}$ 的觀測者，在空時中選定了三個方向：這些方向從他所在的坐標系中看來是正交的和純空間的（無時間部分）。設 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是在三個方向上的單位矢量，並規定它們的指向遵從右旋方式（用三維語言，爲 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=+1$）。爲什麼下述關係式成立？

$$\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{u}=0, \qquad \boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k=\delta_{jk}。$$

爲了得出觀測者沿 $\boldsymbol{e}_j$ 方向測出的電場，需要把哪兩個矢量挿入電磁場張量 *Faraday* 的兩個空位之中呢？若要得出他沿 $\boldsymbol{e}_j$ 方向測出的磁場，又需要挿入哪些矢量呢？

§3.3 3+1 觀點與幾何觀點的比較

物理學幾何觀點的威力

Einstein 關於物理學的幾何見解中包含有巨大的計算上的威力和概念上的威力。從日常的「空間加時間」或「3+1」方式看來似乎很複雜的觀念，如果看作四維空時中幾何客體間的關係，就會變得優雅而單純。在 3+1 語言中很困難的推導，在幾何語言中簡化了。

電磁學的例子

電磁場是一個很好的例子。用幾何語言，它可由二秩反對稱張量（「2-形式」）$\boldsymbol{F}$ 描述，不需要用坐標來定義它。這個張量施與任意帶電粒子的四維力由下式給出

$$d\boldsymbol{p}/d\tau=e\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})。$$

一切都如此地簡單。

對比之下，考慮「3+1」觀點。在一給定的 Lorentz 坐標系中，有一個電場 $\boldsymbol{E}$ 和一個磁場 $\boldsymbol{B}$。它們按照下式推動粒子

$$d\boldsymbol{p}/dt=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})。$$

電場和磁場的變換規律

但是，從給定的 Lorentz 坐標系過渡到新的坐標系時，所有的 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 值都變了。例如，從火箭飛船（「帶橫」的坐標系）觀察的電場和磁場與從實驗室（「不帶橫」的坐標系）觀察的場之間的關係爲

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{E}}_{\parallel}&=\boldsymbol{E}_{\parallel}, \qquad \bar{\boldsymbol{E}}_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\boldsymbol{E}_{\perp}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}_{\perp}),\\ \bar{\boldsymbol{B}}_{\parallel}&=\boldsymbol{B}_{\parallel}, \qquad \bar{\boldsymbol{B}}_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\boldsymbol{B}_{\perp}-\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}_{\perp})。\end{aligned} \tag{3.23}$$

（式中「$\parallel$」指的是沿火箭運動方向的分量；「$\perp$」指的是垂直分量；$\beta^j=dx^j{}_{\text{火箭}}/dt$ 是平常意義下的火箭速度。）爲了保持在所有坐標系中 Lorentz力定律都有效——從「3+1」觀點看來，好像變魔術一樣——對於粒子的動量 $\boldsymbol{p}$，

通常的速度 v 和坐標時間 t，所有的量湊在一起，都需要類似的變換規律。

幾何觀點不只是比「3+1」觀點簡單得多，它甚至可以比「3+1」觀點本身更容易導出「3+1」的方程。例如，考慮電、磁場的變換規律 (3.23) 式。它可用幾何觀點導出如下：(1)確定兩個坐標系各軸的指向，使得它們的相對運動沿 z 方向。(2)對電磁場張量的諸分量進行簡單的 Lorentz 變換[(2.45)式]：

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\parallel}&=\bar{E}_z=F_{\bar{3}\bar{0}}=\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{3}}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{0}}F_{\alpha\beta}=\gamma^2F_{30}+\beta^2\gamma^2F_{03}\\&=(1-\beta^2)\gamma^2F_{30}=F_{30}=E_z=E_{\parallel},\\\bar{E}_x&=F_{\bar{1}\bar{0}}=\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{1}}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{0}}F_{\alpha\beta}=\gamma F_{10}+\beta\gamma F_{13}=\gamma(E_x-\beta B_y),\end{aligned}\tag{3.24}$$

等等。

與此相比，3+1 觀點要作的事多得多。標準的方法是基於 Lorentz 力定律，以及稍加修改的能量變化定律 (3.2a,b)

$$m\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2}=e\left(\bar{E}_x\frac{d\bar{t}}{d\tau}+0\,\frac{d\bar{x}}{d\tau}+\bar{B}_z\frac{d\bar{y}}{d\tau}-\bar{B}_y\frac{d\bar{z}}{d\tau}\right),\tag{3.25}$$

…（另外的三個方程）…。

按如下步驟進行（因爲過於冗長，而略去細節！）

(1)取代 $d^2\bar{x}/d\tau^2$，等等，把這些量表示成 $d^2x/d\tau^2,\ldots$（Lorentz 變換）。

(2)取代 $d^2x/d\tau^2,\ldots$，把這些加速度表示成實驗室的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$（Lorentz 力定律）。

(3)在這些表達式中，不論何處出現了實驗室坐標系中四維速度的分量 $dx/d\tau$，都用火箭坐標系中的四維速度代替它們（逆 Lorentz 變換）。

(4)作了這樣的變換之後，要求 (3.25) 式的左側與右側對於所有 $d\bar{x}/d\tau$ 的值相等（對全部試驗粒子都適用）。

(5)用這種辦法得出用 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 表示的 $\overline{\boldsymbol{E}}$，$\overline{\boldsymbol{B}}$ 的表達式 (3.23) 式。

難度差別之懸殊，顯而易見！

§3.4 Maxwell 方程

現在從場對電荷的作用轉向問及電荷對場的作用，或者，更一般地，問及有電荷或無電荷的電磁場動力學。從特定 Lorentz 坐標系中最簡單的Maxwell

從靜磁學導出磁動力學

方程出發，其中無自由磁極：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} \equiv \operatorname{div} \boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 。 \tag{3.26}$$

這一表述必須對一切 Lorentz 坐標系都成立。因此，在火箭坐標系也成立：

$$\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{z}} = 0 。 \tag{3.27}$$

對於 x 方向的一個無限小 Lorentz 變換（非相對論性速度 β），有（見框2.4和 3.23 式）

$$\bar{B}_x = B_x , \quad \bar{B}_y = B_y + \beta E_z , \quad \bar{B}_z = B_z - \beta E_y ; \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial t} , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial y} , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} 。 \tag{3.29}$$

代入火箭坐標系中的零散度條件。恢復原來在實驗室坐標系中的零散度條件，再加上下述附加信息（要求包含任意小速度 β 的係數變爲零）：

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 。 \tag{3.30}$$

如果變換速度指向 y 方向或 z 方向，對於 $\partial B_y/\partial t$ 或 $\partial B_z/\partial z$ 可以得到類似的方程。用三維矢量的語言，這三個方程縮減爲一個方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{curl} \boldsymbol{E} = 0 。 \tag{3.31}$$

磁動力學和靜磁學統一爲一個幾何定律

(1)協變性原理（每一個 Lorentz 參照系中，物理規律完全相同。這等價於物理學的幾何觀點），加上(2)磁力線管永不中止，給出了(3)磁場的時間變化率的 Maxwell 動力學定律，多麼漂亮！它提醒我們靜磁學定律 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 和磁動力學定律 $\partial \boldsymbol{B}/\partial t + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 必定可以用單一的與坐標系無關的幾何定律統一表示。用場張量 $\boldsymbol{F}$ 的分量表示，該幾何定律應爲

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0 , \tag{3.32}$$

因爲，取 $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$ 時，此式簡化爲 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$；取其中任一指數（例如 α）爲零時，簡化爲 $\partial \boldsymbol{B}/\partial t + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$（見下面的練習 3.7）。用與坐標系無關的幾何語言，這個定律可寫爲（有關符號可參看 §3.5，練習 3.14；以及第四章）：

$$d\mathbf{F}=0,\ \text{或等效地表爲}\ \nabla\cdot{}^*\mathbf{F}=0; \tag{3.33}$$

它表明『取電磁2-形式 $\mathbf{F}$（不存在坐標時也可以定義的幾何客體）；從它構成一新的幾何客體 $d\mathbf{F}$（稱爲「$\mathbf{F}$ 的外微商」）；$d\mathbf{F}$ 必爲零』。這一無坐標過程的詳細內容將在練習 3.15 和 §4.5（高階）中詳加說明。

剩下的兩個 Maxwell 方程是：靜電學方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho, \tag{3.34}$$

和電動力學方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\nabla\times\boldsymbol{B}=-4\pi\boldsymbol{J}。 \tag{3.35}$$

電動力學和靜電學統一爲一個幾何定律

它們，像靜磁學和磁動力學方程一樣，實際上是單一幾何定律的兩個不同部分。這個定律可用場分量寫爲

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=4\pi J^{\alpha}, \tag{3.36}$$

式中「四維電流」$\boldsymbol{J}$ 的分量爲

$$\begin{aligned}&J^0=\rho=\text{電荷密度},\\&(J^1,J^2,J^3)=\text{電流密度的分量}。\end{aligned} \tag{3.37}$$

這個電動力學定律可用無坐標的幾何語言表爲

$$d^*\mathbf{F}=4\pi{}^*\mathbf{J},\ \text{或等效地表爲}\ \nabla\cdot\mathbf{F}=4\pi\mathbf{J}。 \tag{3.38}$$

（充分的討論，可參看練習 3.15 和 §4.5，這些也是高階的內容。）

練習

練習 3.7　Maxwell 方程組

試通過對各分量的明顯檢驗證明，幾何定律

$$F_{\alpha\beta,\gamma}+F_{\beta\gamma,\alpha}+F_{\gamma\alpha,\beta}=0,\quad F^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=4\pi J^{\alpha},$$

的確如上面所聲稱的那樣還原爲 Maxwell 方程組 (3.26) 式，(3.31) 式，(3.34) 式，(3.35) 式。

---

§3.5　用張量運算

還需要講一些有關數學的題外話。給定任意秩的任一張量場 $\mathbf{S}$（爲了具體化，選取秩＝3），則通過各種不同的運算可以構成一些新的張量場。

由原先的張量得出新張量的種種方法：

一種運算是**梯度**∇。（保留符號 d，一則用於標量的梯度，在這種情況下 $\nabla f\equiv df$；二則用於「微分形式的外微商」，這是高階的一個概念，參看 §4.5

梯度

。）與 $\boldsymbol{S}$ 一樣，$\nabla\boldsymbol{S}$ 也是一個機器。它有四個空位，而 $\boldsymbol{S}$ 只有三個空位。它描述 $\boldsymbol{S}$ 從一點到另一點如何變化。具體地說，如果想知道對於固定的 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, 在位移 $\boldsymbol{\xi}$ 後，數 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ 如何變化，只需把 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{\xi}$ 插入 $\nabla\boldsymbol{S}$ 的四個空位即可：

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi}) &\equiv \partial_{\xi}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\ \text{對於固定的 } \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}\\ &\simeq +[\text{在 } \boldsymbol{\xi} \text{ 頭部的 } \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \text{ 值}]\\ &\quad -[\text{在}\boldsymbol{\xi}\text{尾部的 } \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \text{ 值}]。\end{aligned} \tag{3.39}$$

在 Lorentz 坐標系中，用分量符號表爲

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi}) &\equiv \partial_{\xi}(S_{\alpha\beta\tau}u^{\alpha}v^{\beta}w^{\tau}) = \left(\frac{\partial S_{\alpha\beta\tau}}{\partial x^{\delta}}\xi^{\delta}\right)u^{\alpha}v^{\beta}w^{\tau}\\ &= S_{\alpha\beta\tau,\delta}u^{\alpha}v^{\beta}w^{\tau}\xi^{\delta}。\end{aligned}$$

因此，$\nabla\boldsymbol{S}$ 在 Lorentz 坐標系的分量只不過是 $\boldsymbol{S}$ 諸分量的偏微商 。注意：梯度使張量的秩增加 1.（對於 $\boldsymbol{S}$，從 3 增爲 4 ）。

縮併

縮併是由原先的張量得出新張量的另一種方法。它把原先張量的兩個空位封鎖（「縮併」）了，從而使其秩下降 2 。具體地說，如果 $\boldsymbol{R}$ 是四秩張量，把 $\boldsymbol{R}$ 的第一和第三空位縮併得到 $\boldsymbol{M}$，則 $\boldsymbol{M}$ 的輸出爲（定義！）

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{\alpha=0}^{3}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_{\alpha},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\boldsymbol{v})。 \tag{3.40}$$

式中 $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\omega}^{\alpha}$ 是特定的任意 Lorentz 坐標系的基矢量和1-形式基 。選取哪個坐標系都不會造成差別，結果總是相同的（見下面的練習 3.8）。利用在任意 Lorentz 坐標系中的分量，把 (3.40) 式表爲（練習 3.8）

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = M_{\mu\nu}u^{\mu}v^{\nu} = R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}u^{\mu}v^{\nu},$$

因此

$$M_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}。 \tag{3.41}$$

用分量的術語來說，縮併就是把一個指標放到上角去，而把另一個指標放到下角，然後再對它們求和。

散度

散度是由原先的張量產生新張量的第三種方法。取原先張量的梯度，再將梯度的空位與原來的一個空位縮併，即可完成求散度的過程：

（$\boldsymbol{S}$ 對第一個空位的散度）$\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{S}$ 是一部機器，它使

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_{\alpha}) = S^{\alpha}{}_{\beta\tau,\alpha}u^{\beta}v^{\tau}; \tag{3.42}$$

即 $\nabla\cdot\boldsymbol{S}$ 的分量爲 $S^{\alpha}{}_{\beta\tau,\alpha}$。

轉置是建立新張量的第四種方法，但較爲次要。它只是把兩個空位互換：　**轉置**

把 S 的第二和第三空位轉置而得的 $N\Longrightarrow$

$$N(u,v,w)=S(u,w,v)。\qquad(3.43)$$

對稱化和反對稱化是從原先的張量得出新張量的第五、第六種方法。一個張量的輸出若不受兩個輸入矢量或兩個輸入1-形式互換的影響，則它是完全對稱的：　**對稱化和反對稱化**

$$S(u,v,w)=S(v,u,w)=S(v,w,u)=...。\qquad(3.44a)$$

如果其輸出因輸入的每一次互換而改變符號，則它是完全反對稱的，

$$S(u,v,w)=-S(v,u,w)\ =+S(v,w,u)=...。\qquad(3.44b)$$

取任意張量及其轉置的適當線性組合，可將該張量對稱化或反對稱化；參看練習3.12。

劈積是由原先的張量得出新張量的第七種方法。它僅僅是一個反對稱化的張量積：給定兩個矢量 u 和 v，它們劈積，即「二重矢量」$u\wedge v$ 定義爲　**劈積**　**二重矢量**

$$u\wedge v\equiv u\otimes v-v\otimes u;\qquad(3.45a)$$

與此類似，由兩個1-形式可以構成「2-形式」$\alpha\wedge\beta$　**2-形式**

$$\alpha\wedge\beta\equiv\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha。\qquad(3.45b)$$

由三個矢量 u, v, w 可以構成「三重矢量」　**三重矢量**

$$\begin{aligned}u\wedge v\wedge w&\equiv(u\wedge v)\wedge w\equiv u\wedge(v\wedge w)\\&=u\otimes v\otimes w+\text{保證完全反對稱的各項}\\&=u\otimes v\otimes w+v\otimes w\otimes u+w\otimes u\otimes v\\&\quad-v\otimes u\otimes w-u\otimes w\otimes v-w\otimes v\otimes u。\end{aligned}\qquad(3.45c)$$

由1-形式 α, β, γ 可以同樣構成「3-形式」$\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ 。劈積給出了一個簡單的檢驗矢量共面性（線性相關）的辦法：如果 u 和 v 是共線的，即 $u=av$，則

$$u\wedge v=av\wedge v=0\ \text{（由“}\wedge\text{”的反對稱性）。}$$

如果 w 與 u, v 共面，即 $w=au+bv$（「壓平的盒子」），則

$$w\wedge u\wedge v=au\wedge u\wedge v+bv\wedge u\wedge v=0。$$

符號“$\wedge$”稱爲「帽」或「劈」或「外積符號」。它的性質將在第四章研究。

取對偶是構成新張量的第八種方法。它在本書高階的內容中起着基本的作用，由於在初階的內容中不需要它，因此它的定義和性質都只放在練習（3.14和3.15）中論述。　**對偶**

因爲與坐標系無關的幾何符號多少有點含混（哪個空位縮併了？對哪個空位取散度？哪些空位轉置了？），因此通常採用分量符號來表示幾何客體之間的、與坐標無關的幾何關係。例如

$$J_{\beta\tau}=S^{\alpha}{}_{\beta\tau;\alpha}$$

表示「**J** 是對張量 **S** 的第一個空位取散度所得出的張量」。又

$$v^{\tau}=(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^{;\tau}\equiv(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})_{,\beta}\eta^{\beta\tau}$$

表示「**v** 是經以下步驟所得之矢量：(1)作張量 **F** 及其自身的張量積 **F**⊗**F**，(2)縮併 **F**⊗**F** 的第一和第三空位，再縮併其第二和第四空位，(3)對所得標量函數取梯度，(4)把該梯度（它是一個1-形式）轉換爲相應的矢量」。

指標體操

如果希望在狹義相對論或廣義相對論中作複雜的計算，就必須掌握「指標體操」，這是一種技巧：它在分量符號下操作，並按要求重新排列其指標，以便從幾何方程中提取其內容。框 3.3 闡明了指標體操中的某些捷徑，練習 3.8—3.18 則提供了一些實例。

練習

練習 3.8 縮併與坐標系無關

試證明由 (3.40) 式定義的縮併與 $\mathbf{e}_\alpha$ 和 ω^α 取自哪一個 Lorentz 坐標系無關。並證明 (3.40) 式意指

$$\mathbf{M}(\mathbf{u},\mathbf{v})=R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}u^{\mu}v^{\nu}。$$

練習 3.9 微分法

(a) 試通過考慮特殊情況 $\mu=0$, $\nu=1$, 證明下式正確

$$d(u_\mu v^\nu)/d\tau=(du_\mu/d\tau)v^\nu+u_\mu(dv^\nu/d\tau)。$$

(b) 試解釋爲什麼

$$(T^{\alpha\beta}v_\beta)_{,\mu}=T^{\alpha\beta}{}_{,\mu}v_\beta+T^{\alpha\beta}v_{\beta,\mu}。$$

練習 3.10 另外的微分法

(a) 試通過寫出求和 $u^\mu u_\mu\equiv\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ 的顯式，證明下式正確

$$d(u^\mu u_\mu)/d\tau=2u_\mu(du^\mu/d\tau)。$$

(b) 設 δ 表示變分或微小的變化，試證明下式正確

$$\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})=2F_{\alpha\beta}\delta F^{\alpha\beta}。$$

(c) 計算 $(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})_{,\mu}=?$

框 3.3　指標體操的技巧

方　　程	名稱和討論
$S^{\alpha}{}_{\beta\tau}=S(\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\mathbf{e}_{\beta},\mathbf{e}_{\tau})$	計算分量。
$S^{\alpha\beta}{}_{\tau}=S(\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\boldsymbol{\omega}^{\beta},\mathbf{e}_{\tau})$	計算另一些分量。
$\boldsymbol{S}=S^{\alpha}{}_{\beta\tau}\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\tau}$	重新構成 $\boldsymbol{S}$ 的 $\binom{1}{2}$ 秩形式。
$\boldsymbol{S}=S^{\alpha\beta\tau}\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\mathbf{e}_{\beta}\otimes\mathbf{e}_{\tau}$	重新構成 $\boldsymbol{S}$ 的 $\binom{3}{0}$ 秩形式。［記住：這些不同形式通常不加區分，見 (3.15) 式及有關討論。］
$S^{\alpha\beta}{}_{\tau}=\eta^{\beta\mu}S^{\alpha}{}_{\mu\tau}$	升高一個指標。
$S^{\alpha}{}_{\mu\tau}=\eta_{\mu\beta}S^{\alpha\beta}{}_{\tau}$	下降一個指標。
$M_{\mu}=S^{\alpha}{}_{\mu\alpha}$	縮併 $\boldsymbol{S}$ 形成新張量 $\boldsymbol{M}$。
$T^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}=S^{\alpha\beta}{}_{\mu}M_{\nu}$	$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的張量積形成了一個新張量 $\boldsymbol{T}$。
$\boldsymbol{A}^2=A^{\alpha}A_{\alpha}$	取張量積 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}$，再縮併得出矢量 $\boldsymbol{A}$ 的長度平方，這和先取相應的1-形式 $\tilde{\boldsymbol{A}}$，再穿透的結果相同：$\boldsymbol{A}^2=\langle\tilde{\boldsymbol{A}},\boldsymbol{A}\rangle=A^{\alpha}A_{\alpha}$。
$\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\tau}=\delta_{\alpha}{}^{\tau}$	由度規的「協變分量」組成的矩陣 $\|\eta_{\alpha\beta}\|$，是由其「反變分量」構成的矩陣 $\|\eta^{\alpha\beta}\|$ 的逆矩陣。與此等效，升高度規 $\eta_{\alpha\beta}$ 的一個指標即得出 Kronecker δ 符號。
$S^{\alpha}{}_{\beta\tau}=N^{\alpha}{}_{\beta,\tau}$	$\boldsymbol{N}$ 的梯度構成新張量 $\boldsymbol{S}$。
$R_{\beta}=N^{\alpha}{}_{\beta,\alpha}$	$\boldsymbol{N}$ 的散度構成新張量 $\boldsymbol{R}$。
$N^{\alpha}{}_{\beta,\tau}=(\eta_{\beta\mu}N^{\alpha\mu})_{,\tau}=\eta_{\beta\mu}N^{\alpha\mu}{}_{,\tau}$	求梯度和升、降指標是可交換的運算。
$N^{\alpha}{}_{\beta}{}^{,\nu}\equiv N^{\alpha}{}_{\beta,\mu}\eta^{\mu\tau}$	梯度上的反變指標是將其協變指標升高得到的。
$(R_{\alpha}M_{\beta})_{,\tau}=R_{\alpha,\tau}M_{\beta}+R_{\alpha}M_{\beta,\tau}$	張量積的梯度；$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{M})=(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{M})$ 的轉置 $+\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{M}$。
$G_{\alpha\beta}=F_{[\alpha\beta]}\equiv\frac{1}{2}(F_{\alpha\beta}-F_{\beta\alpha})$	張量 $\boldsymbol{F}$ 反對稱化得出新張量 $\boldsymbol{G}$。
$H_{\alpha\beta}=F_{(\alpha\beta)}\equiv\frac{1}{2}(F_{\alpha\beta}+F_{\beta\alpha})$	張量 $\boldsymbol{F}$ 對稱化得出新張量 $\boldsymbol{H}$。
$^{*}J_{\alpha\beta\tau}=J^{\mu}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}$	矢量的對偶形成三秩張量（練習3.14）。
$^{*}F_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$	給定的 2 秩反對稱張量的對偶，形成 2 秩反對稱張量（練習3.14）。
$^{*}B_{\alpha}=\frac{1}{6}B^{\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}$	三秩反對稱張量的對偶，形成1-形式（練習3.14）。

練習 3.11 對稱性

設 $A_{\mu\nu}$ 爲反對稱張量，即 $A_{\mu\nu}=-A_{\nu\mu}$；設 $S^{\mu\nu}$ 爲對稱張量，即 $S^{\mu\nu}=S^{\nu\mu}$。

(a) 試用下述兩種方式證明方程 $A_{\mu\nu}S^{\mu\nu}=0$，第一：寫出求和的顧式（全部十六項），再證明求和中這些項成對相消；第二：提出證據，證明下面一行中每一個等號都成立：

$$A_{\mu\nu}S^{\mu\nu}=-A_{\nu\mu}S^{\mu\nu}=-A_{\nu\mu}S^{\nu\mu}=-A_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}=-A_{\mu\nu}S^{\mu\nu}=0。$$

(b) 對於任意一個張量 $V_{\mu\nu}$，證明以下兩個恒等式：

$$V^{\mu\nu}A_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(V^{\mu\nu}-V^{\nu\mu})A_{\mu\nu}, \qquad V^{\mu\nu}S_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(V^{\mu\nu}+V^{\nu\mu})S_{\mu\nu}。$$

練習 3.12 對稱化和反對稱化

爲了使一個張量「對稱化」，可對它的所有轉置矩陣求平均。新的對稱張量的諸分量加圓括號以示區別。

$$\begin{aligned} &V_{(\mu\nu)}\equiv\frac{1}{2}(V_{\mu\nu}+V_{\nu\mu})；\\ &V_{(\mu\nu\lambda)}=\frac{1}{3!}(V_{\mu\nu\lambda}+V_{\nu\lambda\mu}+V_{\lambda\mu\nu}+V_{\nu\mu\lambda}+V_{\mu\lambda\nu}+V_{\lambda\nu\mu})。\end{aligned} \tag{3.46}$$

同樣可使一個張量「反對稱化」（加方括號）如下：

$$\begin{aligned} &V_{[\mu\nu]}\equiv\frac{1}{2}(V_{\mu\nu}-V_{\nu\mu})；\\ &V_{[\mu\nu\lambda]}\equiv\frac{1}{3!}(V_{\mu\nu\lambda}+V_{\nu\lambda\mu}+V_{\lambda\mu\nu}-V_{\nu\mu\lambda}-V_{\mu\lambda\nu}-V_{\lambda\nu\mu})。\end{aligned} \tag{3.47}$$

(a) 試證明這些對稱化張量和反對稱化張量，在插入其空位的矢量互換時，確實是對稱的和反對稱的：

$$\begin{aligned} &V_{(\alpha\beta\gamma)}u^{\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}=+V_{(\alpha\beta\gamma)}v^{\alpha}u^{\beta}w^{\gamma}=\cdots,\\ &V_{[\alpha\beta\gamma]}u^{\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}=-V_{[\alpha\beta\gamma]}v^{\alpha}u^{\beta}w^{\gamma}=\cdots。\end{aligned}$$

(b) 試證明一個二秩張量可由其對稱化和反對稱化部分重新構成如下：

$$V_{\mu\nu}=V_{(\mu\nu)}+V_{[\mu\nu]}, \tag{3.48}$$

但三秩張量不能如此；因 $V_{(\alpha\beta\gamma)}$ 和 $V_{[\alpha\beta\gamma]}$ 加在一起所包含的信息比 $V_{\alpha\beta\gamma}$ 少。「Young 圖」（參看，例如，Messiah [1961]，附錄D）描述了另一些對稱量，比以上這兩種更爲精巧，它們包含了失去的信息。

(c) 試證明電磁場張量滿足

$$F_{(\alpha\beta)}=0, \qquad F_{\alpha\beta}=F_{[\alpha\beta]}。 \tag{3.49a}$$

(d) 試證明 Maxwell「磁」方程

$$F_{\alpha\beta,\gamma}+F_{\beta\gamma,\alpha}+F_{\gamma\alpha,\beta}=0$$

可以改寫爲以下形式

$$F_{[\alpha\beta,\gamma]}=0。 \tag{3.49b}$$

練習 3.13 Levi-Civita 張量

空時中的 "Levi-Civita 張量" ε 是一個四秩完全反對稱張量：

$$\varepsilon(n,u,v,w)\text{ 中任意兩個矢量互換時它改變符號。} \tag{3.50a}$$

選擇一個任意的特定 Lorentz 坐標系，其中 e_0 指向未來，e_1, e_2, e_3 爲空間基矢量的右手集。在此坐標系中 ε 的協變分量爲

$$\varepsilon_{0123}=\varepsilon(e_0, e_1, e_2, e_3)=+1。 \tag{3.50b}$$

[注意：在 n 維空間中，ε 是類似的完全反對稱 n 秩張量。它的分量爲

$$\varepsilon_{12\cdots n}=\varepsilon(e_1, e_2,\ldots, e_n)=+1\,, \tag{3.50c}$$

計算時，以正交基 e_1, e_2,..., e_n 爲「正指向」。]

(a) 試用反對稱性證明

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=0，\text{除非 } \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ 都不相同，} \tag{3.50d}$$

$$\varepsilon_{\pi 0\pi 1\pi 2\pi 3}=\begin{cases}+1，\text{對於 } 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ 的偶排列，}\\ -1，\text{對於 } 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ 的奇排列。}\end{cases} \tag{3.50e}$$

(b) 試證明

$$\varepsilon^{\pi 0\pi 1\pi 2\pi 3}=-\varepsilon_{\pi 0\pi 1\pi 2\pi 3}。 \tag{3.50f}$$

(c) 試用 Lorentz 變換證明，在任意另一 Lorentz 坐標系中 $\varepsilon^{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma\bar\delta}$ 和 $\varepsilon_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma\bar\delta}$ 具有同樣的值，該坐標系中 e_0 指向未來，且 e_1, e_2, e_3 爲右手集。提示：證明

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta=-\det|\Lambda^{\bar\mu}{}_\nu|\,; \tag{3.50g}$$

由 $\Lambda^T\eta\Lambda=\eta$，證明 $\det|\Lambda^{\bar\mu}{}_\nu|=\pm1$；並證明對於兩個坐標系之間的 Lorentz 變換，上述行列式爲+1，在這兩個坐標系中，e_0, $e_{\bar 0}$, 指向未來，e_1, e_2, e_3 和 $e_{\bar 1}$, $e_{\bar 2}$ $e_{\bar 3}$ 都是右手的。

(d) 在 $e_{\bar 0}$ 指向過去，$e_{\bar 1}$, $e_{\bar 2}$, $e_{\bar 3}$ 爲左手的 Lorentz 坐標系中 ε 的諸分量是什麼？

(e) 由 Levi-Civita 張量可以構成幾個「排列張量」，用指標符號表示，爲

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\mu\nu\lambda}\equiv-\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,; \tag{3.50h}$$

$$\delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\,\delta^{\alpha\beta\lambda}{}_{\mu\nu\lambda}=-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,; \tag{3.50i}$$

$$\delta^{\alpha}{}_{\mu}\equiv\frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\beta}=\frac{1}{6}\,\delta^{\alpha\beta\lambda}{}_{\mu\beta\lambda}=-\frac{1}{6}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\beta\lambda\rho}。 \tag{3.50j}$$

試證明：

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\mu\nu\lambda}=\begin{cases}+1，\text{若 } \alpha\beta\gamma \text{ 是 } \mu\nu\lambda \text{ 的偶排列，}\\ -1，\text{若 } \alpha\beta\gamma \text{ 是 } \mu\nu\lambda \text{ 的奇排列}\\ \ 0，\text{其他；}\end{cases} \tag{3.50k}$$

$$\delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}=\delta^{\alpha}{}_{\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu}-\delta^{\alpha}{}_{\nu}\delta^{\beta}{}_{\mu}$$

$$=\begin{cases}+1, \text{若 } \alpha\beta \text{ 是 } \mu\nu \text{ 的偶排列},\\ -1, \text{若 } \alpha\beta \text{ 是 } \mu\nu \text{ 的奇排列},\\ 0, \text{其他};\end{cases} \tag{3.50l}$$

$$\delta^{\alpha}{}_{\mu}=\begin{cases}+1, \text{若 } \alpha=\mu,\\ 0, \text{其他}。\end{cases} \tag{3.50m}$$

練習 3.14 對偶

由任意矢量 $\boldsymbol{J}$，任意二秩反對稱張量 $\boldsymbol{F}$（$F_{\alpha\beta}=F_{[\alpha\beta]}$），和任意三秩反對稱張量 $\boldsymbol{B}$（$B_{\alpha\beta\gamma}=B_{[\alpha\beta\gamma]}$），可以構成一些新的張量，其定義如下：

$$*J_{\alpha\beta\gamma}=J^{\mu}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma},\quad *F_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta},\quad *B_{\alpha}=\frac{1}{3!}B^{\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}。 \tag{3.51}$$

$*\boldsymbol{J}$ 稱爲 $\boldsymbol{J}$ 的「對偶」，$*\boldsymbol{F}$ 稱爲 $\boldsymbol{F}$ 的對偶，$*\boldsymbol{B}$ 稱爲 $\boldsymbol{B}$ 的對偶。［以前「對偶」一詞的用法完全不同（§2.7），即若基1-形式的集 $\{\boldsymbol{\omega}^{\alpha}\}$ 與基矢量的集 $\{\boldsymbol{e}_{\alpha}\}$ 滿足 $\langle\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\boldsymbol{e}_{\beta}\rangle=\delta^{\alpha}{}_{\beta}$，則稱 $\{\boldsymbol{\omega}^{\alpha}\}$ 爲 $\{\boldsymbol{e}_{\alpha}\}$ 的對偶。幸而，這兩種對偶沒有混淆的餘地。其一把矢量集和1-形式集聯系起來。另一則把 p 秩反對稱張量與 $(4-p)$ 秩反對稱張量聯繫起來。］

(a) 試證明

$$**\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J},\quad **\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F},\quad **\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}。 \tag{3.52}$$

因此（除符號外）由任一完全反對稱張量 $\boldsymbol{H}$ 的對偶 $*\boldsymbol{H}$，再次取對偶 $**\boldsymbol{H}$ 即可恢復 $\boldsymbol{H}$ 本身。這表明 $\boldsymbol{H}$ 與 $*\boldsymbol{H}$ 精確地包含着同樣的信息。

(b) 用 A^{α} 寫出 $*A^{\alpha\beta\gamma}$ 的分量，用 $F^{\alpha\beta}$ 寫出 $*F^{\alpha\beta}$ 的分量，再用 $B^{\alpha\beta\gamma}$ 寫出 $*B^{\alpha}$ 的分量，使得它們包含同樣信息的事實明顯化。

練習 3.15 Maxwell 方程的幾何形式

試證明，如果 $\boldsymbol{F}$ 是電磁場張量，則 $\boldsymbol{\nabla}\cdot*\boldsymbol{F}=0$ 是下述 Maxwell 方程的與坐標系無關的幾何形式

$$F_{\alpha\beta;\gamma}+F_{\beta\gamma;\alpha}+F_{\gamma\alpha;\beta}=0。$$

同樣，證明 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}=4\pi\boldsymbol{J}$（對 $\boldsymbol{F}$ 的第二個空位取散度）是 $F^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=4\pi J^{\alpha}$ 的幾何形式。

練習 3.16 電荷守恒

由 Maxwell 方程 $F^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=4\pi J^{\alpha}$ 導出「電荷守恒方程」

$$J^{\alpha}{}_{,\alpha}=0。 \tag{3.53}$$

試證明這個方程確實相應於電荷守恒。它將在第五章進一步討論。

練習 3.17 矢勢

電磁理論的矢勢 $\boldsymbol{A}$ 經下述幾何方程產生出電磁場張量

$$\boldsymbol{F}=-(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}\text{ 的反對稱部分}), \tag{3.54}$$

即

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}。 \tag{3.54'}$$

(a) 試證明在特定 Lorentz 坐標系中的電場和磁場由下式給出

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\qquad \boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{A}/\partial t-\nabla A^0。\tag{3.55}$$

(b) 試證明當且僅當 $\boldsymbol{A}$ 滿足

$$A^{\alpha,\mu}{}_{,\mu}-A^{\mu}{}_{,\mu}{}^{,\alpha}=-4\pi J^{\alpha}\tag{3.56}$$

時，$\boldsymbol{F}$ 滿足 Maxwell 方程。

(c) 試證明「規範變換」

$$\boldsymbol{A}_{\text{新}}=\boldsymbol{A}_{\text{老}}+\boldsymbol{d}\phi,\qquad \phi=\text{任意函數},\tag{3.57}$$

不影響 $\boldsymbol{F}$。

(d) 試證明可以調整規範使得

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0，\ (「\text{Lorentz 規範}」)，\tag{3.58a}$$

$$\Box\boldsymbol{A}=-4\pi\boldsymbol{J}。\tag{3.58b}$$

式中□是波算符（「d'Alembert 算符」）：

$$\Box\boldsymbol{A}=A^{\alpha,\mu}{}_{,\mu}\boldsymbol{e}_{\alpha}。\tag{3.59}$$

練習 3.18 電磁脅强-能量張量的散度

由電磁場張量 $\boldsymbol{F}$ 構成一個二秩對稱張量 $\boldsymbol{T}$（「脅强-能量張量」，將在第五章研究）如下：

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\nu}F^{\nu}{}_{\alpha}-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)。\tag{3.60}$$

作爲指標體操的練習：

(a) 試證明 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}$ 的分量爲

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=\frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\alpha}{}_{,\nu}F^{\nu}{}_{\alpha}+F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha,\nu}-\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}{}^{,\mu}F^{\alpha\beta}\right]。\tag{3.61}$$

(b) 把上述表達式改爲下述形式

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}=\frac{1}{4\pi}\left[-F_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu}{}_{,\nu}-\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(F_{\alpha\beta,\mu}+F_{\mu\alpha,\beta}+F_{\beta\mu,\alpha})\right]；\tag{3.62}$$

注意：(3.62) 式的第一項直接來自 (3.61) 式的第二項。

(c) 用 Maxwell 方程得出下述結論

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=-F^{\mu\alpha}J_{\alpha}。\tag{3.63}$$

第四章　電磁學和微分形式

在他的攪動下，以太以如此熟悉的方式顫動，以致我只需要說，按照Maxwell的六個方程，它引起很遠處人眼的視覺。

你能夠感覺它行事的方式，你可以跟踪它奔跑的足跡——

dγ乘dy減去dβ乘dz等於 KdX/dt……

而 (X,Y,Z) 的旋度是矢量 (a,b,c) 的d/dt加上負號。

引自A. A. Robb撰寫的「微粒的革命」。（「多管閒事的鸚鵡之聲」）。在古典數學的日子裏，爲 Cavendish 實驗室研究生的一次宴會而作。

本章全部是高階的內容。它是 §14.5, 14.6（用微分形式計算曲率）和第十五章（Bianchi恆等式和邊界的邊界）所需的準備知識，但對本書其餘部分則並非必需。

§4.1　外 微 分

唯有單獨地或交叉地構成「蜂房」、「鷄蛋筐」和其它此類結構（「微分形式」）的表面堆梁，才能洞察電磁和引力的幾何學。然而，達到這種洞察力需要時間。因此，大多數讀者在第一次閱讀本書時，應當跳過這一章以及後面與此有關的材料。

解析地說，微分形式是完全反對稱張量；形象地說，它們是交叉的表面堆梁。能夠容易地處理微分形式的數學形式稱爲「外微分」，在框 4.1中作了簡要的概括；它的基本特點將在本章的其餘部分，通過將電磁理論改寫爲它的語言來形象地說明。把握本章的一種有效方式或許是(1)劉覽框 4.1，初品這種形式的韻味；(2)詳細閱讀本章其餘部分；(3)仔細地再一次研究框 4.1；(4)通過作練習獲得處理這種形式的實踐*。

---

* 遠比此處更爲詳盡地討論「外微分」的有：*É.* Cartan (1945): de Rham (1955); Nickerson, Spencer, 和 Steenrod (1959): Hauser (1970); Israel (1970)；則是 Flanders (1963, 相對而言容易一些，有很多應用)；Spivak (1965, 大學二、三年級水平，但與現代數學完全一致)；H. Carton (1970) 和 Choquet-Bruhat (1968a)。

框 4.1　微分形式和外微分概要

本框概括了外微分的基本定義和公式，以備參考。每一條目包括一般敍述（在每頁的左側）加上主要的應用（在每頁的右側）。這種形式不僅可用於空時，也可用於更一般的幾何系統(見每節的標題)。本框既不準備說明這種形式的內在一致性，也不準備由任何定義和公理集導出它。有關這些內容的系統論述可以參看，例如，Spivak (1965) 或 Misner 和 Wheeler (1957)的著作。

A. 代數 I（用於任意矢量空間）

1. 1-形式基

a. 坐標基 $\boldsymbol{\omega}^j=\boldsymbol{dx}^j$

（j 指的是哪一個1-形式，而不是指哪一個分量）。

b. 一般基 $\boldsymbol{\omega}^j=L^j{}_{j'}\,\boldsymbol{dx}^{j'}$。

一個應用

用於分析圍繞着靜止球對稱吸引中心的 Schwarzschild 幾何的簡單1-形式基：

$$\boldsymbol{\omega}^0=(1-2m/r)^{1/2}\boldsymbol{dt};$$
$$\boldsymbol{\omega}^1=(1-2m/r)^{-1/2}\boldsymbol{dr};$$
$$\boldsymbol{\omega}^2=r\boldsymbol{d\theta};$$
$$\boldsymbol{\omega}^3=r\sin\theta\boldsymbol{d\phi}。$$

2. 一般的p-形式（或p-矢量）是 $\binom{0}{p}$ [或 $\binom{p}{0}$] 秩的完全反對稱張量。它可以用劈積展開爲

（見§3.5和練習4.12）

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{p!}\alpha_{i_1i_2\cdots i_p}\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p}$$
$$\equiv\alpha_{[i_1i_2\cdots i_p]}\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p}。$$

（注意：指標兩邊的豎直線意指只對 $i_1<i_2<\cdots<i_p$ 的各項求和。）

兩個應用

能量-動量1-形式的型式是 $\boldsymbol{\alpha}=\alpha_i\boldsymbol{\omega}^i$ 或

$$\boldsymbol{p}=-E\boldsymbol{dt}+p_x\boldsymbol{dx}+p_y\boldsymbol{dy}+p_z\boldsymbol{dz}。$$

Faraday 是 2-形式，它的型式是 $\boldsymbol{\beta}=\beta_{[\mu\nu]}\boldsymbol{\omega}^\mu\wedge\boldsymbol{\omega}^\nu$ 或在平直空時中，爲

$$\boldsymbol{F}=-E_x\boldsymbol{dt}\wedge\boldsymbol{dx}-E_y\boldsymbol{dt}\wedge\boldsymbol{dy}-E_z\boldsymbol{dt}\wedge\boldsymbol{dz}$$
$$+B_x\boldsymbol{d_y}\wedge\boldsymbol{d_z}+B_y\boldsymbol{dz}\wedge\boldsymbol{dx}+B_z\boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dy}。$$

3. 劈積

所有熟知的加法和乘法法則均適用，如

$$(a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta})\wedge\boldsymbol{\gamma}=a\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\gamma}+b\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\gamma},$$
$$(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})\wedge\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\wedge(\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\gamma})\equiv\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\gamma},$$

但一p-形式$\boldsymbol{\alpha}$和一q-形式$\boldsymbol{\beta}$間修改的交換定律除外：

$$\underset{p}{\boldsymbol{\alpha}}\wedge\underset{q}{\boldsymbol{\beta}}=(-1)^{pq}\underset{q}{\boldsymbol{\beta}}\wedge\underset{p}{\boldsymbol{\alpha}}。$$

用於1-形式 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$：

$$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\alpha}=0;$$
$$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}=(\alpha_j\boldsymbol{\omega}^j)\wedge(\beta_k\boldsymbol{\omega}^k)=\alpha_j\beta_k\boldsymbol{\omega}^j\wedge\boldsymbol{\omega}^k$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha_j\beta_k-\beta_j\alpha_k)\boldsymbol{\omega}^j\wedge\boldsymbol{\omega}^k。$$

4. p-形式與p-矢量的縮併

$$\underset{p}{\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}\rangle}_{q}$$
$$=\alpha_{|i_1\cdots i_p|}A^{|j_1\ \ j_p|}\underbrace{\langle\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p},\mathbf{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{j_p}\rangle}_{[\equiv\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}(\text{見練習3.13和4.12})]}$$

$$=\alpha_{|i_1\cdots i_p|}A^{i_1\ \ i_p}。$$

四個應用

a. 粒子的能量-動量1-形式 $\mathbf{p}=p_\alpha\boldsymbol{\omega}^\alpha$ 與觀測者的四維速度$\mathbf{u}=u^\alpha\mathbf{e}_\alpha$（1-矢量）的縮併

$$-\langle\mathbf{p},\mathbf{u}\rangle=-p_\alpha u^\alpha=\text{粒子能量}。$$

b. **Faraday** 2-形式 $\mathbf{F}$ 與二重矢量 $\delta\mathscr{P}\wedge\Delta\mathscr{P}$ 的縮併［其中 $\delta\mathscr{P}=(d\mathscr{P}/d\lambda_1)\Delta\lambda_1$ 和$\Delta\mathscr{P}=(d\mathscr{P}/d\lambda_2)\Delta\lambda_2$ 是在2-面 $\mathscr{P}(\lambda_1,\lambda_2)$ 上的兩個無限小量，二重矢量代表它們所張的面元］是通過該面元的磁通量 $\Phi=\langle\mathbf{F},\delta\mathscr{P}\wedge\Delta\mathscr{P}\rangle$。

c. 更一般地說，以矢量 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_p$ 爲邊的 p-維平行多面體所具有的定向體積可用「簡單的」p-矢量 $\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_p$ 描述（定向是因爲兩邊交換時符號要改變）。以 p 個不同1-形式 $\boldsymbol{\sigma}^1$, $\boldsymbol{\sigma}^2$,..., $\boldsymbol{\sigma}^p$ 的超平面爲

牆的「鷄蛋筐」結構，可用「簡單的」p-形式 $\sigma^1\wedge\sigma^2\wedge\cdots\wedge\sigma^p$ 描述。$\sigma^1\wedge\sigma^2\wedge\cdots\wedge\sigma^p$ 被無限小p-體積 $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_p$ 切成的小格數目爲

$$\langle\sigma^1\wedge\sigma^2\wedge\cdots\wedge\sigma^p,\ \alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_p\rangle。$$

d. p 個函數 $f^i(x^1,\ldots,x^n)$ 的集相對於 p 個自變量的 Jacobi 行列式爲

$$\left\langle df^1\wedge df^2\wedge\cdots\wedge df^p,\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x^1}\wedge\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x^2}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x^p}\right\rangle$$
$$=\det\left\|\left(\frac{\partial f^i}{\delta x^j}\right)\right\|\equiv\frac{\partial(f^1,f^2,\ldots,f^p)}{\partial(x^1,x^2,\ldots,x^p)}。$$

5. 簡單的形式

a. 一個簡單的p-形式是一個可以寫成 p 個 1-形式劈積的p-形式：

$$\underset{p}{\sigma}=\underbrace{\alpha\wedge\beta\wedge\cdots\wedge\gamma}_{p\text{ 個因子}}。$$

b. 一個簡單的p-形式 $\alpha\wedge\beta\wedge\cdots\wedge\gamma$ 可以表爲交叉的面族 $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$（鷄蛋筐結構）加上一個循環方向（指向）。

應用

a. 在四維情況下（如空時）所有0-形式，1-形式，3-形式和4-形式都是簡單的。2-形式 F 一般說來是兩個簡單形式之和，如 $F=-edt\wedge dx+hdy\wedge dz$; 當且僅當 $F\wedge F=0$ 時，它才是簡單的。

b. 當且僅當 $\alpha\wedge\beta\wedge\cdots\wedge\gamma=0$（壓平的鷄蛋筐）時，1-形式 α, β, …, γ 的集是線性相關的（其中一個爲其它諸量的線性組合）。

B. 外微分（適用於任何有度規或無度規的「微分流形」）

1. d可以從一個p-形式σ產生一個$(p+1)$-形式$d\sigma$。
2. 把df的定義［（第二章），f 是一個函數（0-形

式）］和下式歸納起來，就可以確定d的效果

$$d(\underset{p}{\alpha}\wedge\underset{q}{\beta})=d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta,$$

$$d^2=dd=0。$$

兩個應用

$$d(\alpha\wedge d\beta)=d\alpha\wedge d\beta。$$

對於p-形式Φ，若

$$\Phi=\phi_{|i_1\cdots i_p|}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p},$$

則有（$d\Phi$的另一種等效的定義）

$$d\Phi=d\phi_{|i_1\cdots i_p|}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}。$$

C. 積分法（適用於任何有度規或無度規的「微分流形」）

1. *形象的解釋*

第四章的課文和插圖把$\int\alpha$（特定的1-形式α沿特定曲線從特定起點到特定終點的積分）解釋爲「在該路徑上穿透α-面的數目」。同樣把$\int\Phi$（特定的2-形式Φ在特定小面上沿指定循環方向或「指向」的積分）解釋爲被該面穿過的蜂房狀的Φ格子結構的數目；同樣，鴕蛋筐式結構可以代表3-形式；等等。

2. *積分的計算法則*

一p-形式

$$\alpha=\alpha_{|i_1\cdots i_p|}(x^1,\ldots,x^n)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

在p-維面上積分的計算可以分兩步進行。

a. 把參量化的面

$$x^k(\lambda^1,\ldots,\lambda^p)$$

代入α，並將各項聚集成下述形式

$$\alpha=a(\lambda^j)d\lambda^1\wedge\cdots\wedge d\lambda^p$$

（這就是在p-維面內看作p-形式的α）；

b. 用積分的基本定義求積分

$$\int \boldsymbol{a}=\int a(\lambda^i)d\lambda^1 d\lambda^2\cdots d\lambda^p$$

例：見（4.12）式到（4.14）式。

3. 積分的微分幾何

對於一個p-形式 $\boldsymbol{a}$，$\int \boldsymbol{a}$ 的計算如下。

a. 選定在其上積分的p-維面S。

b. 給出 S 的參量化表示，即把面上全部點用參量函數 $\mathcal{P}(\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^p)$ 給出。這就固定了指向。同樣的函數 $\mathcal{P}(\lambda^2,\lambda^1,\ldots,\lambda^p)$，其中$\lambda^1$與 λ^2 互換（$\lambda^1\leftrightarrow\lambda^2$），描述一個不同的（即指向相反的）面$-S$。

c. 無限小平行多面體

$$\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^1}\Delta\lambda^1\right)\wedge\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^2}\Delta\lambda^2\right)\wedge\cdots\wedge\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^p}\Delta\lambda^p\right)$$

與面相切。它切割的$\boldsymbol{a}$格子數目爲

$$\left\langle \boldsymbol{a},\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^p}\right\rangle\Delta\lambda^1\ldots\Delta\lambda^p。$$

當兩個矢量 $\partial\mathcal{P}/\partial\lambda^i$ 交換時，即面的指向相反時，這個數目改變符號。

d. 以上所提供的解釋誘發了下述定義

$$\int\boldsymbol{a}\equiv\int\!\!\int\cdots\int\left\langle \boldsymbol{a},\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^1}\wedge\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^2}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^p}\right\rangle d\lambda^1 d\lambda^2\ldots d\lambda^p。$$

這個定義與上節（C. 2）練習 4.9 中的計算法則相同。

一個應用

梯度 $\boldsymbol{df}$ 沿曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ 從 $\mathcal{P}(0)$ 到 $\mathcal{P}(1)$ 的積分爲：

$$\int\boldsymbol{df}=\int_0^1\langle\boldsymbol{df},d\mathcal{P}/d\lambda\rangle d\lambda=\int_0^1(df/d\lambda)d\lambda$$
$$=f[\mathcal{P}(1)]-f[\mathcal{P}(0)]。$$

e. 符號"d"的三種不同用法：第一種，在明顯的微分表示式，如 d/da 或 df/da 或 $d\mathcal{P}/da$

中的細體字 d，無論單獨的分子或單獨的分母都沒有任何意義，只有完整的一串符號才有意義。第二種，在積分號內的細體字 d，如 $\int f da$. 這是一個進行積分的指示，沒有積分符號就沒有任何意義。"$\int \ldots d \ldots$" 作爲一個不可分割的單位而存在。第三種，等線黑體的 $\mathbf{d}$，如單獨的 $\mathbf{d}$，或 $\mathbf{d}f$ 或 $\mathbf{d}\alpha$。這是一個外微分，它把一個 p- 形式轉變爲 $(p+1)$- 形式。有時細體字 d 也用於同樣場合。因此，單獨的 d 或 df 或 dx，除非配上 $\int$ 符號（第二種用法）或者配上/號（第一種用法），總是表示外微分的。

4. 推廣的 Stokes 定理（見框4.6）

a. 令 $\partial\mathcal{V}$ 是一個 $(p+1)$ 維面 $\mathcal{V}$ 的閉合 p 維邊界。令 σ 爲在全部 $\mathcal{V}$ 定義的 p- 形式。則

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{d}\sigma = \int_{\partial\mathcal{V}} \sigma}$$

[p-形式 σ 在邊界 $\partial\mathcal{V}$ 上的積分等於 $(p+1)$-形式 $\mathbf{d}\sigma$ 在 $\mathcal{V}$ 內部的積分]。

b. 爲了得出正確的符號，$\mathcal{V}$ 和 $\partial\mathcal{V}$ 的指向必須在下述意義下一致：在 $\mathcal{V}$ 的一部分選擇坐標 $y^0, y^1, \ldots, y^p$，並使得在 $\mathcal{V}$ 內 $y^0 \leq 0$，在邊界 $\partial\mathcal{V}$ 上 $y^0 = 0$；則 $\mathcal{V}$ 的指向爲

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y^0} \wedge \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y^p}$$

時，要求 $\partial\mathcal{V}$ 的指向爲

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y^p}$$

c. 注意：對於一無指向面，例如 Möbius 帶，其中不可能自洽地和連續地選擇指向，爲了使 Stokes 定理成立，需要用更複雜的數學來定義 "∂"。

應用：包括下述特殊情況：在有度規或無度規的任意維空間中任意維面的所有積分定理；推廣的 Stokes

定理和 Gauss 定理的所有型式。例如：

a. $\mathcal{V}$是一條曲線，$\partial\mathcal{V}$ 是它的端點，$\sigma=f$ 是0-形式（函數）：

$$\int_{\mathcal{V}} df=\int_0^1 (df/d\lambda)d\lambda=\int_{\partial\mathcal{V}} f=f(1)-f(0)。$$

b. $\mathcal{V}$ 是三維空間中的2-維面，$\partial\mathcal{V}$ 是其閉合曲線邊界，$\boldsymbol{v}$爲1-形式；轉換爲 Euclid 矢量符號，這兩個積分爲

$$\int_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{v}=\int_{\mathcal{V}} (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot d\boldsymbol{S};\quad \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{v}=\int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}。$$

c. 其他應用，見§5.8, §20.2, §20.3, §20.5, 和練習4.10, 4.11, 5.2 和下面。

D. 代數 II（適用於有度規的任意矢量空間）

1. p-形式的模方

$\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\equiv\alpha_{|i_1\cdots i_p|}\alpha^{i_1\cdots i_p}$。

兩個應用：1-形式的模方等於它的長度平方，$\|\boldsymbol{\alpha}\|^2=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}$。電磁2-形式或 **Faraday** 的模方：$\|\boldsymbol{F}\|^2=\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{E}^2$。

2. p-形式的對偶

a. 在 n 維空間中，p-形式$\boldsymbol{\alpha}$的對偶爲 $(n-p)$-形式 $^*\boldsymbol{\alpha}$, 其分量爲

$$(^*\alpha)_{k_1\cdots k_{n-p}}=\alpha^{|i_1\cdots i_p|}\epsilon_{i_1\cdots i_p k_1\cdots k_{n-p}}。$$

b. 對偶的性質：

$$^{**}\boldsymbol{\alpha}=(-1)^{p-1}\boldsymbol{\alpha}\quad \text{在空時中；}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\wedge{}^*\boldsymbol{\alpha}=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\boldsymbol{\varepsilon}\quad \text{一般情況。}$$

c. 注意：$\boldsymbol{\varepsilon}$的定義（練習 3.13）需要選擇空間的指向，即決定哪個正交基(1)是「右手的」並由此(2)有 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)=+1$。

應用

a. 對於一個 0-形式 f, $^*f=f\boldsymbol{\varepsilon}$, 及 $\int f d$（體積）$=\int {}^*f$。

b. 電荷-電流1-形式 $\boldsymbol{J}$ 的對偶是電荷-電流3-形式$^*\boldsymbol{J}$。在三維超面區域S內的總電荷Q爲

$$Q(S)=\int_S {}^*\boldsymbol{J}。$$

電荷守恆可以局域地表述爲 $d^*J=0$. Stokes 定理把此微分守恆定律變爲積分守恆定律

$$0=\int_{\tau} d^*J=\int_{\partial\tau} {}^*J。$$

當 $\partial\mathcal{V}=S_2-S_1$ 由空時區域中過去的邊界 S_1和未來的邊界 S_2所組成時，這個定律特別重要，在這種情況下它表爲 $Q(S_2)=Q(S_1)$; 見練習5.2。

c. 電磁場張量 $F=$ **Faraday** 的對偶是 $^*F=$ **Maxwell**。由 Maxwell 方程 $d^*F=4\pi{}^*J$ 得出 $4\pi Q=4\pi\int_S {}^*J=\int_S d^*F=\int_{\partial S} {}^*F$。

3. 再談簡單形式

a. 簡單形式的對偶是簡單的。

b. 在下述意義上，鷄蛋筐 $^*\sigma$ 垂直於鷄蛋筐 $\sigma=\alpha\wedge\beta\wedge\cdots\wedge\mu$。

(1)選出處於各 σ 面交界處的任一矢量 V $(\langle\alpha,V\rangle=\langle\beta,V\rangle=\ldots=\langle\mu,V\rangle=0)$;

(2)選出處於各 $^*\sigma$ 面交界處的任一矢量 W;

(3)則 V 和 W 必定相互垂直：$V\cdot W=0$。

例：$\sigma=3dt$ 是空時中一個簡單的1-形式。

a. $^*\sigma=-3dx\wedge dy\wedge dz$ 是簡單的3-形式。

b. 在 σ 面內的一般矢量爲

$$V=V^1e_x+V^2e_y+V^3e_z。$$

c. 在各 $^*\sigma$ 面交界處的一般矢量爲

$$W=W^4e_t。$$

d. $W\cdot V=0$。

§4.2　電磁2-形式和 Lorentz 力

電磁場張量 **Faraday**$=\mathbf{F}$ 是一個反對稱的二秩張量（即2-形式）。不把外微分展爲基1-形式的張量積

$$\mathbf{F}=F_{\alpha\beta}\mathbf{d}x^{\alpha}\otimes\mathbf{d}x^{\beta},$$

而寧願把它展爲反對稱張量積（「外積」，練習 4.1）：

電磁2-形式表爲外積

$$\mathbf{F}=\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\mathbf{d}x^{\alpha}\wedge\mathbf{d}x^{\beta}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{d}x^{\alpha}\wedge\mathbf{d}x^{\beta}\equiv\mathbf{d}x^{\alpha}\otimes\mathbf{d}x^{\beta}-\mathbf{d}x^{\beta}\otimes\mathbf{d}x^{\alpha}。 \tag{4.2}$$

任何2-形式（反對稱的二秩張量）都可以這樣展開。符號「∧」的各種稱呼是「劈」，「帽」，或「外積符號」；而 $\mathbf{d}x^{\alpha}\wedge\mathbf{d}x^{\beta}$是給定 Lorentz 坐標系中的「基2-形式」（見 §3.5，練習 3.12，和框 4.1）。

說明電磁場這種2-形式表示的最簡單方式，是考慮 x 方向的磁場：

$$\begin{aligned}&F_{yz}=-F_{zy}=B_x,\\ &\mathbf{F}=B_x\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z。\end{aligned} \tag{4.3}$$

1-形式 $\mathbf{d}y=\text{grad}\ y$ 是面 $y=18$（所有的 t, x, z），$y=19$（所有 t, x, z），$y=20$（所有 t, x, z），等等，以及均勻地插在它們之間的面（實際上是超曲面）的集合。1-形式 $\mathbf{d}z$ 也是這樣。這兩個面集的交叉產生一個蜂房狀結構。當再指定每個蜂房管「環流指向」（見圖 4.1中的箭頭）後［(4.2) 式「劈積」中各矢量的次序；$\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z=-\mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}y$］，這個結構就變成了「2-形式」。例中的2-形式 $\mathbf{F}$ 與「基2-形式」$\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z$ 的差別僅在於 $\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z$ 有一個管，而場2-形式有許多 B_x 管。

2-形式作爲具有一定環流指向的蜂房管

當考慮一個在通過空時的路上扭轉和彎曲的管狀結構時，必須用更多的分量去描述它。一般電磁場的2-形式可以寫爲

$$\begin{aligned}\mathbf{F}=&E_x\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}t+E_y\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}t+E_z\mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}t+B_x\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z\\ &+B_y\mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x+B_z\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y\end{aligned} \tag{4.4}$$

（六個分量，六個基2-形式）。

1-形式是由一個矢量產生一個數目的機器（即矢量穿透一系列面的鈴響聲）。2-形式是由一個定向面（標明環流指向的面：圖 4.1右下）產生出一個數目的機器。此處的含義與初等磁學中一樣清楚：被該面切割的 Faraday 管的

2-形式作爲由一個定向面產生一個數目的機器

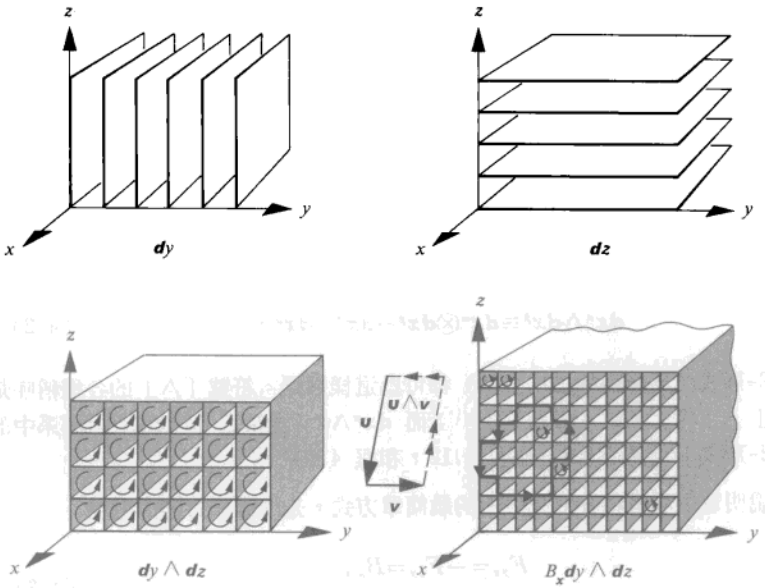


圖 4.1
由1-形式dy和dz的「劈乘法」，作電磁場2-形式 $F=B_x dy \wedge dz$ 的圖（形成用箭頭指明其循環指向的蜂房狀結構）。一個 2-形式是「從一個定向面構造出一個數目的機器」（用右下圖箭頭所包圍的面爲例來說明；與此面交叉的管數目爲

$$\int_{(這個面)} F = 18;$$

即 Faraday 的「磁通量」概念)。這種2-形式機器的概念與第三章中「張量作爲機器」的概念可以相互聯繫如下：對F作積分的定向面的形狀（對於很小的面積而言）是無關緊要的，能影響 $\int F$ 的只是面的面積和它的指向。選擇處於該面內的兩個矢量u和v。它們形成平行四邊形的兩邊，其方向（u，接着是v）和面積都已包括在外積$u \wedge v$之中。調整u和v的長度，使平行四邊形$u \wedge v$的面積與積分面的面積相同。則

$$\underbrace{\int_{面} F}_{\text{本章的機器概念}} = \underbrace{\int_{u \wedge v} F}_{\text{第三章的機器概念}} = F(u, v)。$$

練習：對於無限小面 $u \wedge v$ 和對於一般的 F，利用框 4.1 的公式導出上述結果。

數目。由這種「管狀結構」（適當地抽象，框 4.2）描述的電磁 2-形式 $\mathbf{F}$ 或 **Faraday**，在空間是眞實的和定位的，它與一切坐標系、與一切「電」場和「磁」場間的人爲區分無關。而且，這些管對於電磁場作用於帶電粒子的機制，提供了迄今爲止最直接的幾何表述。取一電荷爲 e，四維速度爲

$$\mathbf{u}=\frac{dx^\alpha}{d\tau}\mathbf{e}_\alpha \tag{4.5}$$

的粒子。設此粒子通過圖 4.1 中由2-形式

$$\mathbf{F}=B_x\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z \tag{4.6}$$

描述的電磁場區域。則作用於粒子上的力（看作1-形式）是該2-形式與四維速度（乘以電荷）的縮併；

Lorentz 力作爲電磁2-形式與粒子四維速度的縮併

$$\dot{\mathbf{p}}=d\mathbf{p}/d\tau=e\mathbf{F}(\mathbf{u})\equiv e\langle\mathbf{F},\mathbf{u}\rangle\,, \tag{4.7}$$

這可由直接計算看到，即將2-形式中兩個矢量依次與切向矢量 $\mathbf{u}$ 作用，得：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}&=eB_x\langle\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z,\mathbf{u}\rangle\\&=eB_x\{\mathbf{d}y\langle\mathbf{d}z,\mathbf{u}\rangle-\mathbf{d}z\langle\mathbf{d}y,\mathbf{u}\rangle\}\\&=eB_x\{\mathbf{d}y\langle\mathbf{d}z,u^\nu\mathbf{e}_\nu\rangle-\mathbf{d}z\langle\mathbf{d}y,u^\nu\mathbf{e}_\nu\rangle\}\end{aligned}$$

或

$$\dot{p}_\alpha\mathbf{d}x^\alpha=eB_xu^\nu\mathbf{d}y-eB_xu^\nu\mathbf{d}z\,。 \tag{4.8}$$

比較方程兩側各基1-形式的系數，即可重新得出磁場 B_x 所施加的 Lorentz 力的全部細節：

$$\begin{aligned}\dot{p}_y&=\frac{dp_y}{d\tau}=eB_x\frac{dz}{d\tau}\,,\\\dot{p}_z&=\frac{dp_z}{d\tau}=-eB_x\frac{dy}{d\tau}\,。\end{aligned} \tag{4.9}$$

把這種推論的思路簡單地推廣到一般電磁場，得出動量（1-形式）的時間變化率等於電荷乘以 **Faraday** 與四維速度的縮並。圖 4.2用圖說明2-形式 $\mathbf{F}$ 作爲一個機器，如何從切向矢量 $e\mathbf{u}$ 產生出1-形式 $\dot{\mathbf{p}}$。

（接第105頁）

框 4.2 在三維空間和空時中由「蜂房狀結構」的概念抽象出2-形式

打開裝有一打瓶子的紙板箱，觀察把這些瓶子分隔開的由南北和東西紙板交叉而成的蜂房狀結構。這些「管」（「放瓶子的槽」）的蜂房結構是在日常三維空間情況下，對2-形式的一個很恰當的說明。對於每一個選定的切割該三維結構的光滑二維面元，均可得出一個數目（切割的管數）。然而，交叉的分隔紙板過於特殊。一個眞正的2-形式所能夠給出的全部，只是切開的管的數目，而不能給出管的「形狀」。把紙板箱在地板上旋轉45°。則一半分隔紙板沿西北-東南方向，另一半沿東北-西南方向，但是通過固定在三維空間的一小塊給定的二維面的管數不變。因此，必須小心地使想像中的管的概念足夠抽象，即只研究管的方向（例中爲竪直方向）和管的密度，而不考慮管壁的任何特定位置或指向。這樣，所有下述表示都給出同一個2-形式 σ：

$$\sigma = B\,dx \wedge dy;$$

$$\sigma = B(2dx) \wedge \left(\frac{1}{2}dy\right)$$

（南北紙板的間距比前述加密一倍；東西紙板的間距則比前述稀一倍）；

$$\sigma = B\,d\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) \wedge d\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$$

（紙板旋轉45°）；

$$\sigma = B\frac{\alpha dx + \beta dy}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^{1/2}} \wedge \frac{\gamma dx + \delta dy}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^{1/2}}$$

（「紙板」的指向和間距兩者，因全部四個與位置有關的函數 α, β, γ, δ而逐點變化）。

具有物理眞實性以及構成眞實幾何客體的東西，並不是單獨遇到的任何一個1-形式，而只是2-形式 σ 本身。這一情況有助於說明爲什麼在物理文獻中有時提到「力管」，而有時又提到「力線」。對於同一結構，這兩個術語的共同性在於，當它們被一小塊面切割時，各自產生一個數目。力線圖象的優點是不需要把「紙板」的任何特定結構強加上去，也就是說，不考慮2-形式產生1-形式的任何特定的分解。然而，這個特點也正是一個缺點，因爲在計算中常常會發現，把2-形式表爲確定的1-形式的劈積是有用的。而且，這種管的圖象，盡管爲了使它眞實必須是抽象的，還是有優點的，即各基本管的指向（例如圖 4.1 和 4.5 中用箭頭標明的循環方向）會使它本身形象化。因此，在本書所畫的全部圖中都把管的「牆壁」保留下來，以便提醒我們2-形式可以由1-形式建立起來；但是，在此處和以後都應了解，對於各個1-形式有多少種可能的選擇！

現在從三維轉向四維，我們發現必須使「蜂房狀結構」的概念更加抽象。在三維情況下，2-形式分解爲1-形式的任意性表現在「紙板」的傾斜和堆積上，而不影響「瓶子槽」的竪直性（「Faraday 力線或力管的方向」）；但在四維情況

下，或至少在四維的一般情況下並非如此。

在特殊情況下，四維情形幾乎與三維一樣簡單。特殊情況的一個例子還是2-形式 $\sigma=Bdx\wedge dy$，它分解爲1-形式具有前已提及的全部選擇，但是每一種選擇都應給出同樣的管的「方向」。如果說現在「方向」一詞的地位從「不被沿 z 增加方向的運動所穿透的管壁」上升爲「既不被沿 z 增加方向的運動所穿透，也不爲沿 t 增加方向的運動所穿透，也不爲這兩種運動的任何線性組合所穿透的管壁」，那麼，這是增加新的一維的極爲自然的結果。而且，對於電磁的平面波也同樣簡單。例如，設波沿 z 方向前進，並設電偏振指着 x 方向；則對單色波，有

$$E_x=B_y=E_0\cos\omega(z-t)=-F_{01}=F_{31}，$$

而所有其他分量都等於零。**Faraday** 是

$$\begin{aligned}\mathbf{F}&=F_{01}dt\wedge dx+F_{31}dz\wedge dx\\&=E_0\cos\omega(z-t)d(z-t)\wedge dx，\end{aligned}$$

它再次表爲兩個1-形式的單一劈積。

一般情況並非如此！在四維時，一般的2-形式由六個不同的劈積組成

$$\mathbf{F}=F_{01}dt\wedge dx+F_{02}dt\wedge dy+\cdots+F_{23}dy\wedge dz。$$

在一般情況下，若要想把上述表達式簡化爲兩個1-形式的單一劈積（「簡單的」2-形式），那是奢望。說它將來會做到也是不眞實的。值得注意的只是，它能從六個外積簡化爲兩個（詳見練習 4.1）；這樣

$$\mathbf{F}=\eta^1\wedge\xi^1+\eta^2\wedge\xi^2。$$

每一個積 $\eta^i\wedge\xi^i$ 可以單獨地設想爲如圖4.1, 4.2, 4.4和4.5所描寫的蜂房狀結構。每一個這種結構可以單獨地畫成由交叉的板（1-形式）所構成，但是這些1-形式的傾斜和堆積等等細節都要抽象掉。當每一個這種結構被一面元切割時，就單獨給出一個數。然而，對2-形式 $\mathbf{F}$ 的計數，既不是面切割 $\eta^1\wedge\xi^1$ 管的數目，也不是面切割 $\eta^2\wedge\xi^2$ 管的數目，而只是這兩者之和。這個和才是在正文中所說的被面切割的「$\mathbf{F}$ 的管數」。任何一個劈積單獨的貢獻都是不完全確定的，理由很簡單，盡管六個劈積的客體分解爲兩個劈積，看來似乎是難以置信的，但實際上却決不是唯一的（詳見練習 4.2）。

與用兩個1-形式的積表示一般的2-形式的需要相一致，應注意 $d\mathbf{F}$ 變爲零（「無磁荷」）並不自動地意味着 $d(\eta^1\wedge\xi^1)$ 或 $d(\eta^2\wedge\xi^2)$ 分別變爲零。還應注意任何通過一般2-形式 $\mathbf{F}$ 的類空切割（從四維減少爲三維）總可以用蜂房狀結構表示（三維空間中「簡單的」2-形式；磁力管的 Faraday 圖象）。

盡管在普遍地觀察什麼是2-形式時不斷地進行了抽象，但是，並不妨礙在更寬的意義上繼續用「蜂房狀結構」來描寫這一客體，這正是此處和以後所作的事情。

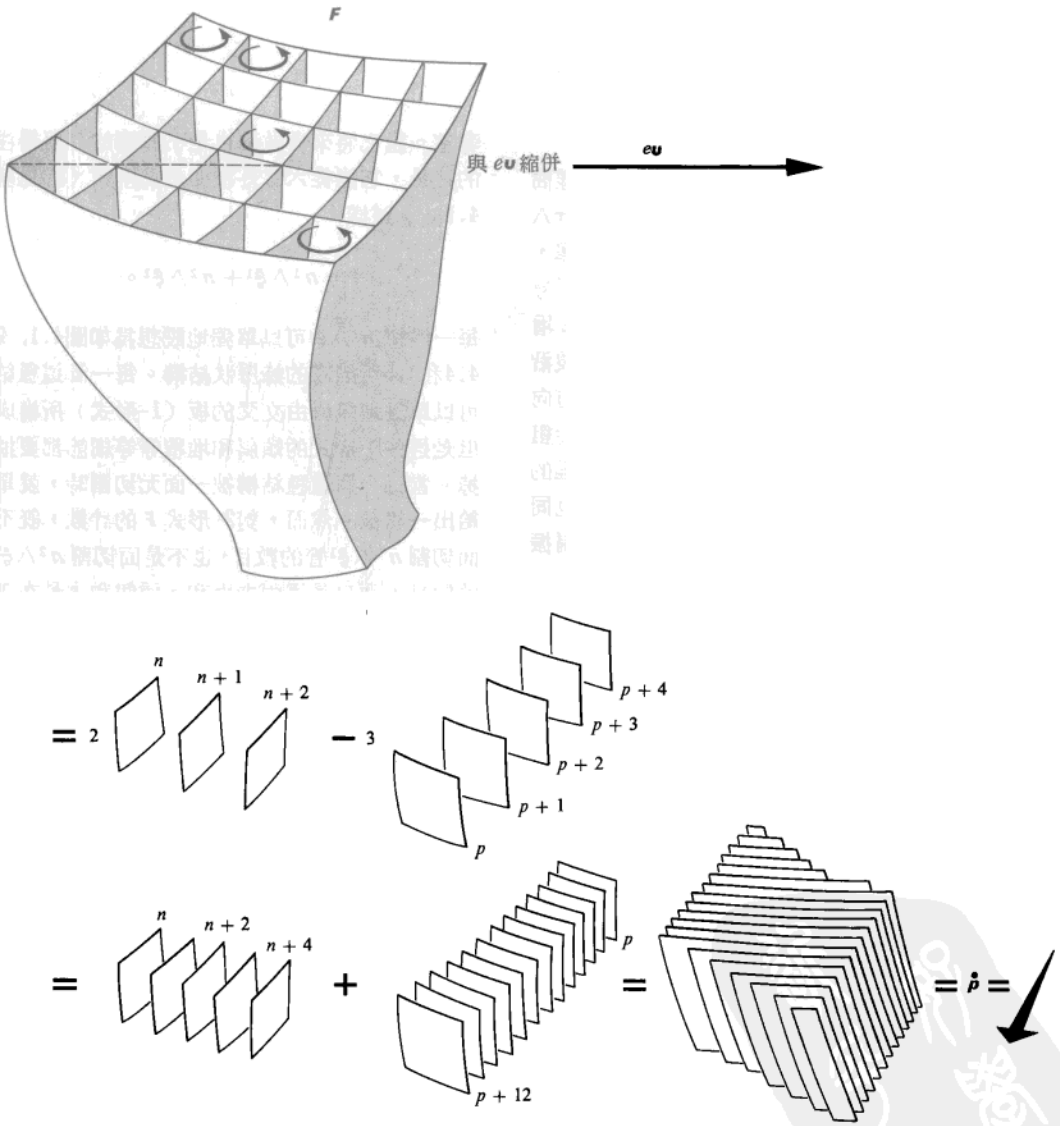


圖 4.2
電磁場的 ***Faraday*** 或2-形式 ***F*** 是由切向矢量(粒子電荷 ***e*** 與其四維速度 ***u*** 的乘積)產生出1-形式（帶電粒子動量的時間變化率 $\dot{p}$）的機器。在空時中，一般的2-形式是如本圖頂部所示的兩種結構的「迭加」（見框 4.2），第一種結構的管如圖所示是傾斜的和堆積的，第二種結構的管向另一方向傾斜並具有不同的堆積密度。

§4.3　諸形式說明電磁學以及電磁學說明諸形式

無論空時是彎曲的還是平直的，全部電磁學都可以用2-形式的語言，即充滿整個空時的管的蜂房狀「結構」（仍採用框 4.2 所述的「結構」的抽象意義）來概括。簡言之，有兩個這種結構，一是 ***Faraday*** $=\boldsymbol{F}$，另一個是 ***Maxwell*** $=*\boldsymbol{F}$，兩者互爲對偶（「垂直」，唯一需要用度規討論之處），且各自滿足一個基本方程：

$$\boldsymbol{dF}=0 \tag{4.10}$$

（「***Faraday*** 管不終止」）以及

$$\boldsymbol{d}*\boldsymbol{F}=4\pi*\boldsymbol{J} \tag{4.11}$$

（「終止於元體積中的 ***Maxwell*** 管數等於該體積中的總電荷」）。爲了詳細了解此機械如何作用，依次考察(1)2-形式的定義；(2)一給定電磁場作爲 ***Faraday*** 和作爲 ***Maxwell*** 的外觀；(3)一靜止點電荷的 ***Maxwell*** 結構；(4)一運動點電荷的 ***Maxwell*** 結構；(5)除加速的短暫瞬間外，一勻速運動電荷的場的性質；(6)一振盪偶極子的場的 ***Faraday*** 結構；(7)外微分概念；(8)用諸形式表述的 Maxwell 方程組；和(9)在平直空時中用1-形式 $\boldsymbol{A}$ 解 Maxwell 方程組，由此 Liénard-Wiechert 2-形式 $\boldsymbol{F}$ 也可以通過 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{dA}$ 算出。

電磁學要點初探

如圖 4.1 所示，2-形式是從任一「定向的二維面」（標有「循環指向」的二維面）構造出一數目（「淨被切管數」）的機器：

2-形式作爲被切管數的機器

$$\begin{pmatrix}\text{被}\quad\text{切}\\ \text{管}\quad\text{數}\end{pmatrix}=\int_{\text{面}}\boldsymbol{F}\text{。} \tag{4.12}$$

例如，設2-形式如圖4.1所示，

計算被切管數的一例

$$\boldsymbol{F}=B_x\boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz}\text{，}$$

並設積分面爲二維球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$t=$常數的一部分，並界於 $\theta=70°$ 和 $\theta=110°$，以及 $\varphi=0°$ 和 $\varphi=90°$ 之間（「熱帶大西洋區域」）。寫出

$$\begin{aligned}y&=a\sin\theta\sin\varphi\text{，}\\ z&=a\cos\theta\text{，}\\ \boldsymbol{dy}&=a(\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{d\theta}+\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{d\varphi})\text{，}\\ \boldsymbol{dz}&=-a\sin\theta\boldsymbol{d\theta}\text{，}\\ \boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz}&=a^2\sin^2\theta\cos\varphi\boldsymbol{d\theta}\wedge\boldsymbol{d\varphi}\text{。}\end{aligned} \tag{4.13}$$

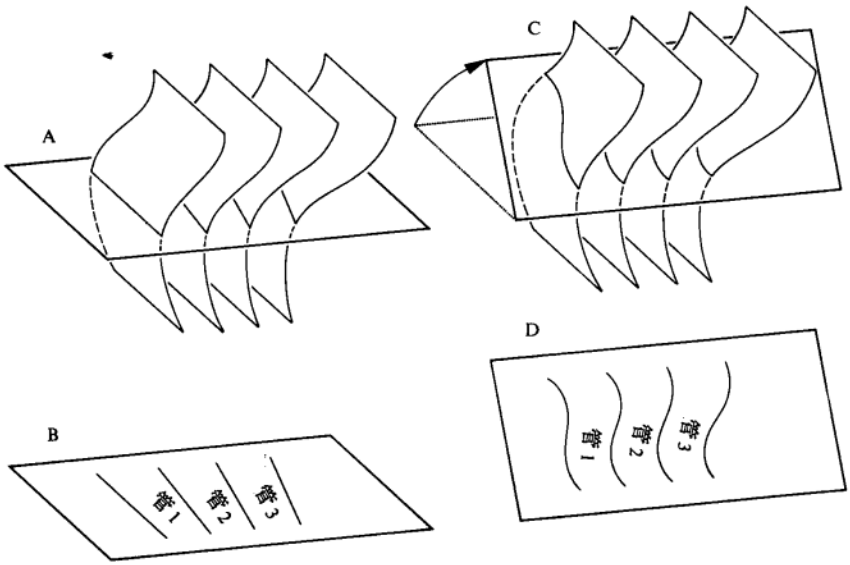


圖 4.3
通過 ***Faraday***，電磁2-形式，一幾何客體，充滿了全部空時的蜂房管的一些類空薄片（「蜂房」按框4.2更確切地詳細說明的抽象含義）。圖中的面看起來不像2-形式（「蜂房」），這是因爲構成蜂房的在空間方向上延展的第二族面在圖中隱匿了。圖A示出穿過2-形式的一個類空薄片（在圖中，向上時間增加）。圖B，2-形式在類空超面的投影給出在此三維幾何中的 ***Faraday*** 磁力管（若恢復隱匿的那一維，管將確爲管，而不是線間的溝）。圖C示出另一種類空薄片（對不同 Lorentz 參照系中的觀察者，同時性的超面）。圖D示出在此參照系中磁管的極爲不同的圖樣。對於每一個穿過 ***Faraday*** 的類空薄片，一再重複要求磁力管不終止（$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$），則在各處給出 $\partial\boldsymbol{B}/\partial t=-\nabla\times\boldsymbol{E}$ 的結果。於是，（靜磁學）＋（協變性）→（磁動力學）。 同樣 （見第17章和第21章），（靜幾何學）＋（協變性）→（幾何動力學）。

結構 $d\theta\wedge d\theta$ 看起來像「坍縮的蛋筐」（圖1.4，右上方），α與β相等時$\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$ 爲零，由此從形式上顯而易見 $d\theta\wedge d\theta$ 爲零。設 B_* 爲常數，則積分結果爲

$$\int_{\text{面}}\boldsymbol{F}=a^2B_*\int_{70°}^{110°}\sin^2\theta\,d\theta\int_{0°}^{90°}\cos\varphi d\varphi\,。\qquad(4.14)$$

通過2-形式 $\boldsymbol{F}$ 想像純電場（圖4.4，左）不像通過2-形式 $\boldsymbol{F}$ 想像純磁場（圖4.1，4.2，4.3）那麼容易。有沒有從相近的立足點上處理這兩種場的辦法呢？有的，構造2-形式 $^*\boldsymbol{F}$（圖 4.4右），它是 $\boldsymbol{F}$ 的對偶（「垂直」；框4.3；練習3.14）。

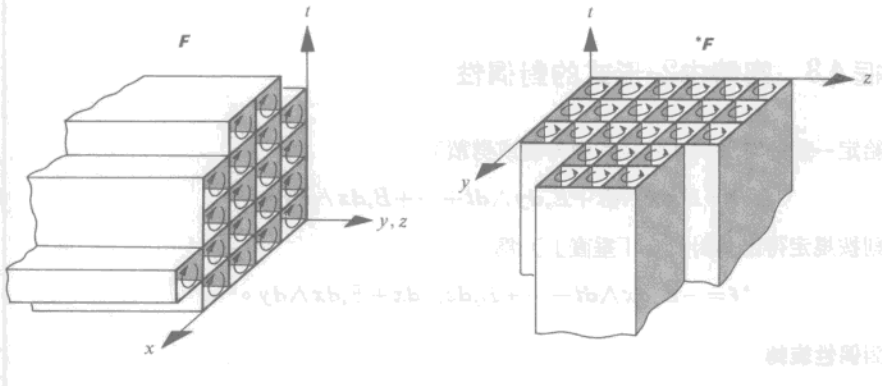


圖 4.4
與 x 方向電場相聯繫的 **Faraday** 結構

$$\mathbf{F}=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathbf{d}x^{\mu}\wedge\mathbf{d}x^{\nu}=\frac{1}{2}F_{01}\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}x+\frac{1}{2}F_{10}\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}t=E_x\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}t$$

以及對偶的（「垂直的」）**Maxwell** 類蜂房2-形式

$$^*\mathbf{F}=\frac{1}{2}{}^*F_{\mu\nu}\mathbf{d}x^{\mu}\wedge\mathbf{d}x^{\nu}={}^*F_{23}\mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^3=F^{01}\mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^3=F_{10}\mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^3=E_x\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z\,。$$

用幾何形式表示靜止在原點的電荷爲 e 的點電荷場。在平直空間中運用球極坐標：

$$\begin{aligned}ds^2&=-d\tau^2=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}\\&=-dt^2+dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\,。\end{aligned}\qquad(4.15)$$

r 方向的電場爲 $E_r=e/r^2$，由此2-形式 **F** 或 **Faraday** 爲

$$\mathbf{F}=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathbf{d}x^{\mu}\wedge\mathbf{d}x^{\nu}=-E_r\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}r=-\frac{e}{r^2}\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}r\,。\qquad(4.16)$$

按照練習3.14的規定，其對偶爲 **Maxwell**：

靜止點電荷對偶結構 Maxwell 中管的樣式

$$\mathbf{Maxwell}={}^*\mathbf{F}=e\sin\theta\mathbf{d}\theta\wedge\mathbf{d}\varphi\,,\qquad(4.17)$$

如圖 4.5 所示。

圍繞如圖4.5所示的球表面一個區域的正向走一圈。這一路線所圍繞的 ***F** 的管的數目正好等於

$$\text{（管數）}=e\ \text{（立體角）}\,。$$

從整個球面露出的 ***F** 管的總數爲 $4\pi e$，與 Faraday 力線的圖象一致。

框 4.3 空時中2-形式的對偶性

給定一般的2-形式（包括六個外積或劈積）

$$\mathbf{F}=E_x\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt}+E_y\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dt}+\cdots+B_x\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy},$$

則按規定得出其對偶（「垂直」）爲

$$^*\mathbf{F}=-B_x\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt}-\cdots+E_y\mathbf{dz}\wedge\mathbf{dx}+E_z\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy}。$$

對偶性旋轉

注意，對偶之對偶爲原始2-形式的負值，即

$$^{**}\mathbf{F}=-E_x\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt}-\cdots-B_z\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy}=-\mathbf{F}。$$

在這個意義上 * 與虛數 i 具有同樣的性質：$^{**}=ii=-1$。從而可寫出：

$$e^{^*\alpha}=\cos\alpha+{}^*\sin\alpha。$$

作用於 **F** 的這個運算把注意力從最簡單表示的一般2-形式（見練習4.1）

$$\mathbf{F}=E_x\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt}+B_x\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}$$

移到另一個「對偶旋轉電磁場」

$$e^{^*\alpha}\mathbf{F}=(E_x\cos\alpha-B_x\sin\alpha)\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt}+(B_x\cos\alpha+E_x\sin\alpha)\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}。$$

如果原來的場滿足 Maxwell 的眞空方程，則新場也滿足該方程。適當選擇「複指數」(complexion)α，可在空時中任意選定點取消兩個劈積之一，並使另一個劈積爲

$$(B_x^2+E_x^2)^{1/2}\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}。$$

運動點電荷的場

如何確定與一勻速運動點電荷相聯繫的管的結構呢？首先在與粒一起運動的直角坐標系中表示 $^*\mathbf{F}$（在這個一起運動的「火箭」參照系中，用帶橫線的坐標表示；接着對實驗室參照系，用不帶橫線的坐標表示）。有關步驟羅列如下：

(a)

$$^*\mathbf{F}=e\sin\bar\theta\mathbf{d}\bar\theta\wedge\mathbf{d}\bar\varphi=-e(\mathbf{d}\cos\bar\theta)\wedge\mathbf{d}\bar\varphi;$$

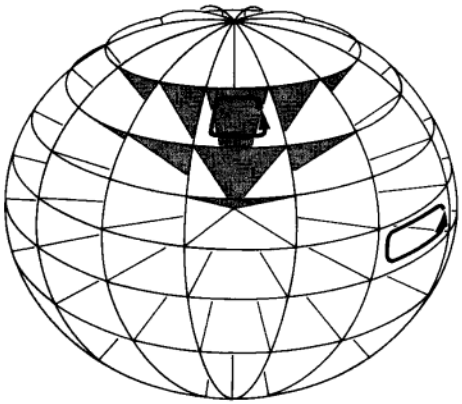


圖 4.5
2-形式的場 $\boldsymbol{Maxwell}=*\boldsymbol{F}=e\sin\theta d\theta\wedge d\phi$，它描述了靜止在原點的電荷 e 的電磁場。此圖實際上是$*\boldsymbol{F}$與時間恆定的三維面的交面；即圖中隱匿了時間方向。

(b)

$$\bar{\varphi}=\arctan\frac{\bar{y}}{\bar{x}};\quad \boldsymbol{d}\bar{\varphi}=\frac{\bar{x}\boldsymbol{d}\bar{y}-\bar{y}\boldsymbol{d}\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2};$$

(c)

$$\cos\bar{\theta}=\frac{\bar{z}}{\bar{r}};\qquad -\boldsymbol{d}(\cos\bar{\theta})=\frac{-\boldsymbol{d}\bar{z}}{\bar{r}}+\frac{\bar{z}}{\bar{r}^3}(\bar{x}\boldsymbol{d}\bar{x}+\bar{y}\boldsymbol{d}\bar{y}+\bar{z}\boldsymbol{d}\bar{z});$$

(d)綜上可得

$$*\boldsymbol{F}=(e/\bar{r}^3)(\bar{x}\boldsymbol{d}\bar{y}\wedge\boldsymbol{d}\bar{z}+\bar{y}\boldsymbol{d}\bar{z}\wedge\boldsymbol{d}\bar{x}+\bar{z}\boldsymbol{d}\bar{x}\wedge\boldsymbol{d}\bar{y}) \qquad (4.18)$$

（在一起運動的 Descartes 坐標系中點電荷的電磁場；球對稱的）。現在變換到實驗室坐標系：

速度參量 α

速度 $\beta=\tanh\alpha$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\cosh\alpha,\qquad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\sinh\alpha$$

(a)
$$\begin{cases}\bar{t}=t\cosh\alpha-x\sinh\alpha,\\ \bar{x}=-t\sinh\alpha+x\cosh\alpha,\\ \bar{y}=y,\quad \bar{z}=z;\end{cases}$$

(b) $$\bar{r}=[(x\cosh\alpha-t\sinh\alpha)^2+y^2+z^2]^{1/2};$$

(c) $$*\boldsymbol{F}=(e/\bar{r}^3)[(x\cosh\alpha-t\sinh\alpha)\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z+y\boldsymbol{d}z\wedge$$
$$(\cosh\alpha\,\boldsymbol{d}x-\sinh\alpha\,\boldsymbol{d}t)+z(\cosh\alpha\,\boldsymbol{d}x-\sinh\alpha\,\boldsymbol{d}t)\wedge\boldsymbol{d}y];\quad (4.19)$$

(d)與一般的對偶2-形式比較

$$*F=E_x dy\wedge dz+E_y dz\wedge dx+E_z dx\wedge dy$$
$$+B_x dt\wedge dx+B_y dt\wedge dy+B_z dt\wedge dz;$$

可得出所求的各個場分量

$$\text{(e)}\quad\begin{cases}E_x=(e/\bar{r}^3)(x\cosh\alpha-t\sinh\alpha), & B_x=0,\\ E_y=(e/\bar{r}^3)y\cosh\alpha, & B_y=-(e/\bar{r}^3)z\sinh\alpha,\\ E_z=(e/\bar{r}^3)z\cosh\alpha, & B_z=(e/\bar{r}^3)y\sinh\alpha。\end{cases}\tag{4.20}$$

可以證明，不變量

$$B^2-E^2=\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta},\tag{4.21}$$

$$E\cdot B=\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}{}^*F^{\alpha\beta}\tag{4.22}$$

正如所要求的那樣，在實驗室參照系與在火箭參照系中有相同的值。注意，從火箭參照系到實驗室參照系，微分形式的蜂房結構不變化。變化的只是描述它的數學公式。

§4.4 輻 射 場

加速怎樣引起了輻射

與勻速運動電荷相聯繫的 **Maxwell** 管狀結構比初看時更值得注意，這不僅是因爲在運動方向上管的 Lorentz收縮。任意遠處的管與在它們中心的電荷以整齊的步伐一起運動，而不管「此時」電荷「發出」的信息沒有時間傳到「此時」的遠處管中去。因此，「此時」遠處管的結構應由較早時刻沿直線軌道作勻速運動的電荷導出。沒有什麼能比在一短暫的時間 $\Delta\tau$ 內，由於從一均勻速度突然變到另一均勻速度時（圖 4.6）場所發生的事情更清楚地顯示這一情形了。對於這兩種運動狀態，管都具有標準的圖樣，一個圖樣在半徑爲 r 的球內，另一圖樣在此球之外，此處 r 等於從出現加速度以來的時間（「光行時間的厘米數」）。兩個圖樣在厚度爲 $\Delta r=\Delta\tau$ 的過渡帶內應擬合在一起的要求，迫使該處的場應乘以與 r 成正比的「伸長因子」。衆所周知，輻射力僅僅按與距離的一次方成反比的方式衰減，因此，這個因子是可靠的（圖 4.6）。

當電荷的運動狀態連續變化時，電磁場的結構雖然還是基於如圖 4.6 所示的簡單原理，但是看起來要複雜得多。平行於 z 軸上下振盪的、大小爲 p_1 的電

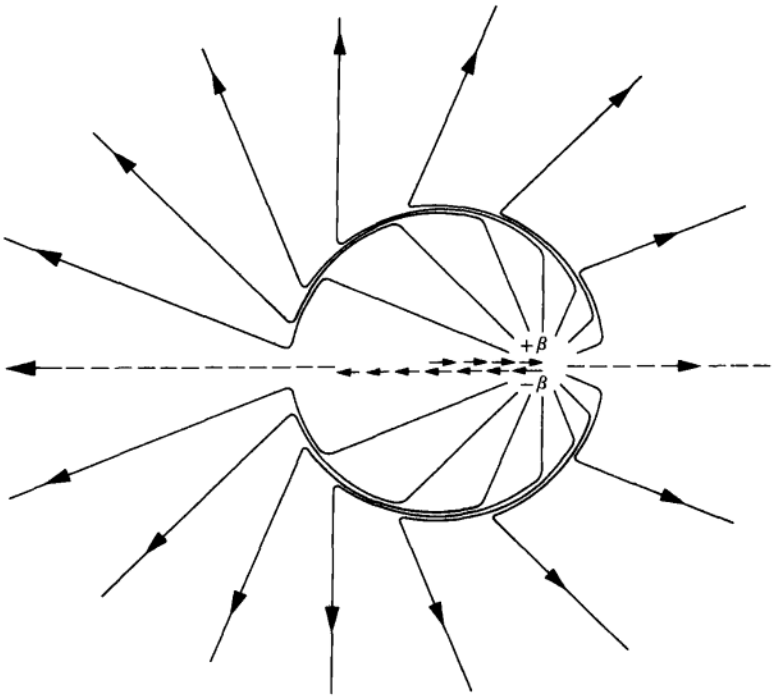


圖 4.6
輻射機制。用 J. J. Thomson 的方式理解爲什麼電磁波强度只按與距離 r 的一次方成反比的方式衰減，以及爲什麼波的振幅（低速情形）按 $\sin\theta$ 變化（在垂直於加速路線的平面內爲極大）。電荷以勻速向左側運動。離電荷很遠處的力線，按照此均勻速度似乎能永遠持續下去那樣在繼續運動（緩慢運動點電荷的 Coulomb場）。然而，在近處的場是勻速向右運動的點電荷的場（强度對距離的依賴是 $1/r^2$）。從一種場圖樣到另一種的變化限於距加速點 r 處厚度爲 $\Delta\tau$ 的殼層之內（場因「伸長因子」$r\sin\theta\,\Delta\beta/\Delta\tau$ 而放大；見課文）。感謝 C. Teitelboim 繪製本圖。

偶極子場的 ***Faraday*** 2-形式爲：

振盪偶極子的場

$$\mathbf{F}=E_r\,dx\wedge dt+\cdots+B_\phi\,dy\wedge dz+\cdots=\{p_1 e^{i\omega r-i\omega t}$$

$$\underbrace{\left[2\cos\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{r^2}\right)dr\wedge dt\right.}_{\text{給出}E_r}+\underbrace{\sin\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)r\,d\theta\wedge dt}_{\text{給出}E_\theta}$$

$$\underbrace{+\sin\theta\left(\frac{-i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)dr\wedge r\,d\theta\left.\right]}_{\text{給出}B_\phi}\}\ \text{的實部} \tag{4.23}$$

其對2-偶形式 **Maxwell**$=*\boldsymbol{F}$ 是

$$*\boldsymbol{F}=-B_x\boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dt}-\cdots+E_x\boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz}+\cdots=\{p_1e^{i\omega r-i\omega t}$$

$$\underbrace{[\sin\theta\left(\frac{-i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)\boldsymbol{dt}\wedge r\sin\theta\,\boldsymbol{d\phi}}_{\text{給出}B_\phi}$$

$$\underbrace{+2\cos\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{r^2}\right)r\,\boldsymbol{d\theta}\wedge r\sin\theta\boldsymbol{d\phi}}_{\text{給出}E_r}$$

$$\underbrace{+\sin\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)r\sin\theta\boldsymbol{d\phi}\wedge\boldsymbol{dr}]\}}_{\text{給出}E_\theta}\text{的實部。}\qquad(4.24)$$

§4.5 Maxwell 方程組

一般的2-形式 $\boldsymbol{F}$ 可寫爲劈積的迭加，並帶有因子$\frac{1}{2}$，

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\boldsymbol{dx}^\mu\wedge\boldsymbol{dx}^\nu,\qquad(4.25)$$

這是因爲典型項出現了二次，一次爲 $F_{x\nu}\boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dy}$ 而第二次是 $F_{\nu x}\boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dx}$，且有 $F_{\nu x}=-F_{x\nu}$ 及 $\boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dx}=-\boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dy}$。

如果說微分（「取梯度」；算符 $\boldsymbol{d}$）可以從標量中產生出1-形式，那麼，微分（還是算符 $\boldsymbol{d}$，但現在通常用 Cartan 的「外微分」的名稱）從一般的1-形式中產生出2-形式也是對的；而且，它用於2-形式可產生3-形式；用於3-形式可產生4-形式，即空時能包容的最高秩形式。一般的f-形式寫爲

$$\Phi=\frac{1}{f!}\phi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_f}\boldsymbol{dx}^{\alpha_1}\wedge\boldsymbol{dx}^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{dx}^{\alpha_f}\qquad(4.26)$$

取外微分

式中係數 $\phi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_f}$ 與其後的劈積一樣，在交換任意兩個指標時是反對稱的。於是 ϕ 的外微分爲

$$\boldsymbol{d}\Phi\equiv\frac{1}{f!}\frac{\partial\phi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_f}}{\partial x^{\alpha_0}}\boldsymbol{dx}^{\alpha_0}\wedge\boldsymbol{dx}^{\alpha_1}\wedge\boldsymbol{dx}^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{dx}^{\alpha_f}。\qquad(4.27)$$

按此規則取 **Faraday** 的外微分，則發現它不僅在偶極振子的特殊情況下爲零，而且對於一般電磁場也爲零。於是，在局域 Lorentz 參照系的適當的坐標中，有

$$\begin{aligned}\mathbf{dF}&=\mathbf{d}(E_x\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt}+\cdots+B_x\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}+\cdots)\\&\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\mathbf{dt}+\frac{\partial E_x}{\partial x}\mathbf{dx}+\frac{\partial E_x}{\partial y}\mathbf{dy}+\frac{\partial E_x}{\partial z}\mathbf{dz}\right)\wedge\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt}\\&+\cdots\text{（5項，每一項都是這樣的四項一組）}\cdots\end{aligned}\tag{4.28}$$

注意，諸如 $\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}$ 之類的項自動爲零（「踩平的鷄蛋筐的元胞」）。把不爲零的項集中起來，得

$$\begin{aligned}\mathbf{dF}=&\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}\\&+\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}\\&+\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dz}\wedge\mathbf{dx}\\&+\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy}。\end{aligned}\tag{4.29}$$

由 Maxwell 方程

$$\text{div}\ \boldsymbol{B}=\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

和

$$\text{curl}\ \boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dot{\boldsymbol{B}}。$$

（4.29）式的每一項都是熟悉的。每一項均爲零，由此可見 **Faraday** 本身的外微分爲零：

$$\mathbf{dF}=0。\tag{4.30}$$

換言之，「**Faraday** 是閉合的2-形式」；「**F** 的管無論在何處都不終止」。

Faraday 結構：管不終止

對於對偶2-形式 **Maxwell** 的外微分，作同樣的計算，結果是

$$\begin{aligned}\mathbf{d^*F}&=\mathbf{d}(-B_x\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dt}-\cdots+E_x\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}+\cdots)\\&=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}\\&\quad+\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial B_z}{\partial y}+\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}\\&\quad+\cdots\\&=4\pi(\rho\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}\\&\quad-J_x\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dy}\wedge\mathbf{dz}\\&\quad-J_y\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dz}\wedge\mathbf{dx}\\&\quad-J_z\mathbf{dt}\wedge\mathbf{dx}\wedge\mathbf{dy})=4\pi^*\mathbf{J};\end{aligned}$$

$$\mathbf{d^*F}=4\pi^*\mathbf{J}。\tag{4.31}$$

Maxwell結構：電荷-電流3-形式給出管終點的密度

在眞空中此外微分也變爲零；眞空中的 ***Maxwell*** 是閉合的2-形式；***F**的管與 **F** 的管一樣，無論在何處都不終止。

在有電荷的區域，情況不同。 ***Maxwell*** 的管以該區域爲起點。管終點的密度由3-形式 $*J=$ ***charge***，卽沿世界線束收集的「蛋筐格的集合」描述。

這兩個方程

$$dF=0$$

和

$$d*F=4\pi*J$$

用幾何語言概括了 Maxwell 方程組的全部內容。形式 $F=$ ***Faraday*** 和 $*F=$ ***Maxwell*** 可以在任何想用的坐標系中加以描述，或者也可用不涉及任何坐標系的語言（蜂房和蛋筐結構）來描述。值得注意的是，沒有一個方程涉及任何度規。正如 Hermann Weyl 最有力地强調指出的那樣（見第八章和第九章），形式和外微分概念與度規無關。度規出現的唯一場所是對偶（「垂直」）概念，它把注意力從 **F** 轉向它的對偶結構 $*F$。

對偶性：在電磁學中需要引入度規的唯一場所

§ 4.6 外微分和閉合形式

「蜂房」和「蛋筐」兩詞可能已經給予人們與電動力學一致的幾何學的某些感覺。現在，以電動力學爲主題，更清楚、詳細地解釋這些概念，並用幾何術語說明電動力學中所謂「外微分」的含義是什麼。圍繞着邊界行進，是的；但是如何行進，爲什麼要行進，以及會帶來什麼後果呢？回到函數和1-形式，並把它們和2-形式 ***Faraday*** 和 ***Maxwell*** 以及3-形式 ***charge*** 都看作有序系列的一部分是有益的（見框 4.4）。在此框中可以看到2-形式有兩種類型：(1)一類稱爲「閉合」2-形式的特殊2-形式，它具有使進入閉合2-面的管數與從其中出去的管數一樣多的性質（2-形式的外微分爲零，除了無足輕重的零3-形式外，無法由它推出3-形式！）；和(2)一般的2-形式，它發出非零的淨管數穿過閉合2-面，因此允許定義一個並非無關緊要的3-形式（「2-形式的外微分」），使得這個 3-形式在任何閉合 2-面中所具有的蛋筐格數與 2-形式在同一閉合2-面中生出的淨管數嚴格相等（Faraday 力管概念在平直和彎曲空時世界的推廣）。

閉合2-形式與一般2-形式的對比

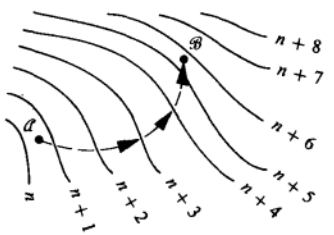
（接第120頁）

框 4.4　形式和外微分的系列

0-形式或標量，f

在三維空間和 Newton 物理學方面的一個例子是溫度 $T(x, y, z)$，在空時方面的例子是標量勢 $\phi(t, x, y, z)$。

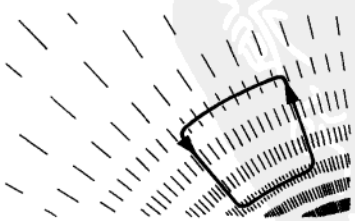
從標量到1-形式



取標量 f 的梯度或「外微分」可得特殊的1-形式，$\gamma = df$。注：(a) f 中任何可加常數在微分過程中將被除去；左圖中的量 n 是未知的和無關的。(b) 1-形式 γ 的特殊性在於某一個區域的面應與相鄰區域的面「吻合」(「閉合1-形式」)。(c)對於在連續變形下彼此等價的任何類型的路徑，線積分 $\int_a^b df$ 與路徑無關。(d) 1-形式是從一位移（與切向矢量概念相近）產生一個數（隨着相繼的每一個積分面被穿過時的「鈴響」數）的機器。

一般的1-形式 $\beta = \beta_\alpha dx^\alpha$

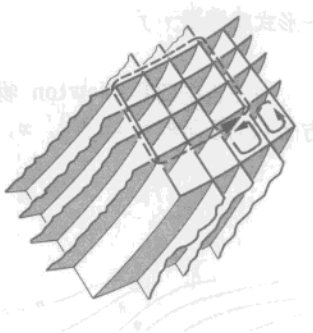
在圖所示的是面的圖樣；即是由一個矢量產生一個數(「鈴響」；$\langle \beta, u \rangle$)的機器。1-形式在空間中具有實在性和位置而與任何坐標選擇無關。各面通常不吻合。繞圖示閉合回路的積分 $\int \beta$ 不爲零（「鈴聲多於反鈴聲」）。



1-形式到2-形式 $\xi = d\beta = \frac{\partial \beta_\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^\alpha$

ξ 是蜂房狀小格的圖樣，每格標出了循環方向

，安排得使圖中閉合虛線路徑所包圍的格數與在上述 β 圖中對同一路徑的淨貢獻（鈴聲超過反鈴聲的數目）相等。「外微分」是這樣定義的，故它也應如此；廣義 Stokes 定理整理了它。用「外」字是因爲路徑圍繞着待分析區域的四周。因而，2-形式是由標有循環指向的一些面（$u\wedge v$）給出數目（管數，$\langle \xi,\ u\wedge v\rangle$）的機器。這樣定義的2-形式的特殊性在於：由虛線或任何其他閉合曲線「支撐其邊緣」的橡皮片，當：(a) 中間突出；(b) 中間凹陷；(c) 經歷任何連續變形時，穿過的管數相同。**Faraday**，或電磁2-形式 F 總可表爲 $F=dA$（A＝四維勢，是1-形式），而且也總具有這種特殊性質（「管數守恆」）。



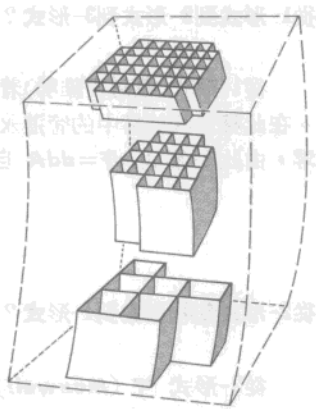
0-形式到1-形式到2-形式？不行！

從標量 f 到1-形式 $\gamma=df$，下一步到2-形式 α 是沒有意義的。圍繞閉合虛線路徑的線積分 $\int\gamma$ 的淨貢獻自動爲零。重新得出該零積分的結果要求零2-形式。因此，$\alpha=d\gamma=ddf$ 必須是零2-形式。這一結果是普遍結果 $dd=0$ 的特殊情況。

一般的2-形式 $\sigma=\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}dx^{\alpha}\wedge dx^{\beta}$，其中 $\sigma_{\alpha\beta}=-\sigma_{\beta\alpha}$

同樣，這也是一個蜂房狀結構，也是從一個標有循環指向的面（$u\wedge v$）產生數目（管數，$\langle\sigma,\ u\wedge v\rangle$）的機器。它的一般性在於某一個區域的蜂房結構通常並不與鄰域的相吻合。

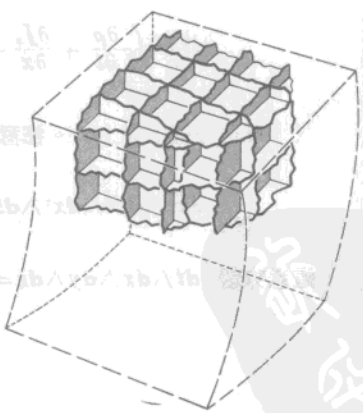
結果，閉合的二維面，例如，如右圖虛線所示的盒子狀面，通常要被非零的管數穿過。然而，當2-形式是1-形式的外微分時，由這樣的閉合二維面中出來的淨管數嚴格爲零。



從2-形式到3-形式 $\mu=d\sigma=\frac{\partial\sigma_{[\alpha\beta]}}{\partial x^{\nu}}dx^{\gamma}\wedge dx^{\alpha}\wedge dx^{\beta}$，

其中 $dx^{\gamma}\wedge dx^{\alpha}\wedge dx^{\beta}\equiv 3!\,dx^{[\gamma}\otimes dx^{\alpha}\otimes dx^{\beta]}$

這個蛋筐型的結構是從一個體積（計算體積 $u\wedge v\wedge w$ 中的小格數）得出一個數目（小格數 $\langle\mu,u\wedge v\wedge w\rangle$）的機器。更完全的圖應給出每一個小格，以及給定指向（類似於2-形式小格上畫出的循環箭頭）時，其本身的積分體積。一給定小格對小格數的貢獻，根據所示指向相同或相反，而取爲＋1或－1。在任何給定體積（例如圖中虛線所示的體積）中 $\mu=d\sigma$ 的蛋筐小格數，特製成與從該體積出來的2-形式 σ（上圖）的淨管數嚴格相等（廣義 Stokes 定理）。對於電磁學，*Faraday* 或2-形式 F 的外微分給出零3-形式，但 *Maxwell* 或2-形式 $^*F$ 的外微分爲電荷的3-形式 $^*J$ 的 4π 倍：



$$^*J=\rho dx\wedge dy\wedge dz-J_x dt\wedge dy\wedge dz$$
$$-J_y dt\wedge dz\wedge dx-J_z dt\wedge dx\wedge dy。$$

從1-形式到2-形式到3-形式？不行！

從1-形式(電磁四維勢)着手，構造它的外微分，2-形式 $F=dA$(*Faraday*)。在此蜂房狀結構中的管道永不終止。因此在任意元體積中的管端點數自動爲零，由此 3-形式 $dF=ddA$ 自動爲零。這是普遍結果 $dd=0$的又一特例。

從2-形式到3-形式到4-形式？不行！

從2-形式 $^*F$ (*Maxwell*) 着手，構造它的外微分，3-形式 $4\pi{}^*J$。在此蛋筐狀結構中的小格延伸到第四維（「超管」）。這些在任何元四維體積中終止的超管數自動爲零，由此4-形式

$$d(4\pi{}^*J)=dd{}^*F,$$

亦自動爲零，仍是普遍結果$dd=0$的又一特例。這一結果指出

$$d{}^*J=\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}\right)dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz=0$$

（「電荷守恆定律」）。注意：

$$dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma\wedge dx^\delta\equiv 4!\,dx^{[\alpha}\otimes dx^\beta\otimes dx^\gamma\otimes dx^{\delta]}。$$

這意味着 $dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz=\varepsilon$。

從3-形式到4-形式 $\tau=d\nu=\frac{\partial\nu_{[\alpha\beta\gamma]}}{\partial x^\delta}dx^\delta\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma$

這個四維「超蛋筐」式的結構是從一四維體積 $n\wedge u\wedge v\wedge w$ 得出一數目（小格數，$\langle T,n\wedge u\wedge v\wedge w\rangle$）的機器。

從4-形式到5-形式？不行！

四維空時不能容納五維蛋筐結構。在式

$$dx^{\alpha}\wedge dx^{\beta}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}\wedge dx^{\epsilon}$$

中至少有兩個 dx^{μ} 必須相同；故由"∧"的反對稱性，此「5-形式基」必爲零。

外微分的結果，總結

0-形式	f				
1-形式	df	A			
2-形式	$ddf\equiv 0$	$F=dA$	$^*F$		
3-形式		$dF=ddA\equiv 0$	$4\pi{}^*J=d{}^*F$	ν	
4-形式			$d(4\pi{}^*J)=dd{}^*F\equiv 0$	$\tau=d\nu$	μ
5-形式？	沒有！			$d\tau\equiv 0$	$d\mu\equiv 0$

通過取對偶由老形式得新形式（見練習3.14）

標量 f 的對偶是4-形式：$^*f=f dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3=f\varepsilon$。

1-形式 J 的對偶是3-形式：$^*J=J^0 dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3-J^1 dx^2\wedge dx^3\wedge dx^0$
$+J^2 dx^3\wedge dx^0\wedge dx^1-J^3 dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2$。

2-形式 F 的對偶是2-形式：$^*F=F^{|\alpha\beta|}\varepsilon_{\alpha\beta|\mu\nu|}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}$，式中
$F^{\alpha\beta}=\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\delta}F_{\lambda\delta}$。

3-形式 K 的對偶是1-形式：$^*K=K^{012}dx^3-K^{123}dx^0+K^{230}dx^1-K^{301}dx^2$，
式中 $K^{\alpha\beta\gamma}=\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\lambda}K_{\mu\nu\lambda}$。

4-形式 L 的對偶是標量：$L=L_{0123}dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$；
$^*L=L^{0123}=-L_{0123}$。

注意 1：一個形式與另一個形式之間對偶的概念與在給定坐標系中基矢 $\mathbf{e}_{\alpha}$ 和1-形式基 ω^{α} 之間對偶的概念不同。這兩種類型的對偶彼此沒有任何關係！

注意 2：在空時中，兩次取對偶運算，奇階的形式將恢復其原來的形式，偶階的形式將變負。在 Euclid 三維空間，則不管其階數如何，兩次取對偶將重新得出原來的形式。

對偶加外微分

從標量 ϕ 開始。它的梯度 $d\phi$ 是1-形式。取其對偶，得3-形式 $*d\phi$。取其外微分，得 4-形式 $d*d\phi$，取其對偶，得標量 $\Box\phi \equiv -*d*d\phi$。用指標運算可以證明此處定義的□是波算符；即在任何 Lorentz 參照系中，$\Box\phi = \phi_{,\alpha}{}^{,\alpha} = -(\partial^2\phi/\partial t^2) + \nabla^2\phi$。

從1-形式 $\mathbf{A}$ 開始。得到2-形式 $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$，取其對偶 $*\mathbf{F} = *d\mathbf{A}$，仍爲2-形式。取其外微分，得3-形式 $d*\mathbf{F}$（在電磁學中取值 $4\pi*\mathbf{J}$）。取其對偶，得1-形式 $*d*\mathbf{F} = *d*d\mathbf{A} = 4\pi\mathbf{J}$（「電磁四維勢的波方程」）。用指標符號簡化爲

$$F_{\mu\nu}{}^{,\nu} = A_{\nu,\mu}{}^{,\nu} - A_{\mu,\nu}{}^{,\nu} = 4\pi J_\mu 。$$

［進一步參看 Flanders (1963) 或 Misner 和 Wheeler (1957)；再參看練習3.17。］

§ 4.7 來自局域定律的超距作用

各種微分形式是電磁理論中的有力工具，但要發揮全部威力還需要掌握其他工具。超距作用技巧（「Green 函數」，「傳播函數」）具有特殊的重要性。而且，以 Maxwell 場方程到電磁超距作用的過渡，預演了如何由 Einstein 局域方程（近似地）再現 Newton 的 $1/r^2$ 定律。

在平直空時和在 Lorentz 坐標系中，把粒子 A 的坐標表爲其原時 α 的函數，即，

$$a^\mu = a^\mu(\alpha), \quad \frac{da^\mu}{d\alpha} = \dot{a}^\mu(\alpha), \quad \frac{d^2a^\mu}{d\alpha^2} = \ddot{a}^\mu(\alpha)。 \tag{4.32}$$

Dirac 發現，把電荷爲 e 並按上式運動的粒子的電荷和電流分布表爲瞬間閃現並隨即消逝的電荷之迭加是有好處的。任何這種閃現具有空間和時間的局域性

把電荷的世界線看爲相繼的電荷閃現和消逝

，從而可以寫爲四個 Dirac δ 函數之乘積［參看，例如，Schwartz (1950–1951), Lighthill (1958)］：

$$\delta^4(x^\mu-\alpha^\mu)=\delta[x^0-a^0(\alpha)]\delta[x^1-a^1(\alpha)]\\ \delta[x^2-a^2(\alpha)]\delta[x^3-a^3(\alpha)]。 \tag{4.33}$$

式中任一 Dirac 函數 $\delta(x)$（「符號函數」；「分布」；作爲寬度無限窄，峯值無限高，而積分值永爲 1 的「Guass 誤差函數的極限」）既有(1) $x\neq 0$ 時 $\delta(x)$爲零，又有(2)積分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$。用此術語描述，粒子的電流密度矢量的值爲（「閃現之迭加」）

$$J^\mu=e\int\delta^4[x^\nu-a^\nu(\alpha)]\dot{a}^\mu(\alpha)d\alpha。 \tag{4.34}$$

電流密度(4.34)式激勵了電磁場 $\mathbf{F}$。寫成 $\mathbf{F}=\mathbf{dA}$ 使之自動滿足 Maxwell 方程組的一半（$\mathbf{dF}=\mathbf{ddA}\equiv 0$）：

$$F_{\mu\alpha}=\frac{\delta A_\alpha}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha}。 \tag{4.35}$$

在平直空時中，其餘的 Maxwell 方程組（$\mathbf{d}^*\mathbf{F}=4\pi^*\mathbf{J}$）變爲

$$\frac{\partial F_\mu{}^\nu}{\partial x^\nu}=4\pi J_\mu$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu}-\eta^{\nu\alpha}\frac{\delta^2 A_\mu}{\partial x^\nu\partial x^\alpha}=4\pi J_\mu。 \tag{4.36}$$

利用選擇四維勢A^ν中的自由度，要求

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu}=0 \tag{4.37}$$

（Lorentz 規範條件；見練習3.17）。於是得到

$$\Box A_\mu=-4\pi J_\mu。 \tag{4.38}$$

電磁波方程

電流密度是「閃現」的迭加，故此電流密度的效應（$\mathbf{A}$）也可表爲元閃現效應E的迭加；即

$$A^\mu(x)=\int E[x-a(\alpha)]\dot{a}^\mu(\alpha)d\alpha, \tag{4.39}$$

波方程的解

式中「元效應」E（「核」；「Green函數」）滿足方程

$$\Box E(x)=-4\pi\delta^4(x)。 \tag{4.40}$$

一個解是「一半超前加上一半推遲的勢」，

$$E(x)=\delta(\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta)。 \tag{4.41}$$

這個解，除了在向前和向後光的錐上具有等强度外，處處爲零。通常更有用的是推遲解，

$$R(x)=\begin{cases}2E(x), & \text{若 } x^0>0,\\ 0, & \text{若 } x^0<0,\end{cases} \tag{4.42}$$

它是這樣得到的，卽在向前的光錐區域把（4.41）式加倍，而在向後的光錐區域取消它。全部電動力學（Coulomb 力，Ampère 定律，電磁感應，輻射）都可由矢勢的簡單表達式（4.39）式得出［參看，例如，Wheeler 和 Feynman (1945) 和 (1949)，以及 Rohrlich (1965)］。

練習

練習 4.1 表爲最簡形式的一般局域電磁場

在實驗室 Lorentz 參照系中，電場爲 $\boldsymbol{E}$，磁場爲 $\boldsymbol{B}$。特殊情況是指：(1)純電場（$\boldsymbol{B}=0$）；(2)純磁場（$\boldsymbol{E}=0$）；和(3)「輻射場」或「零場」（$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$大小相等，方向垂直）。除(1)，(2)和(3)外的全部情況都是「一般的」情況。在一般情況下，計算 Poynting 能流密度 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/4\pi$ 和能量密度 $(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi$。用能流和能量密度之比，定義單位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向和速度參量 α 的大小：

$$\boldsymbol{n}\tanh 2\alpha=\frac{2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2}。$$

在以速度參量 α（不是 2α；因子 2 的出現是因爲能流和能量密度不是矢量的分量，而是張量的分量）沿 $\boldsymbol{n}$ 方向運動的火箭參照系中，觀察同一電磁場。試利用 Lorentz 變換公式 (3.23) 式或其他，證明在火箭參照系中能流變爲零，由此 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{B}}$ 互相平行。不能阻止把 $\bar{z}$ -軸取在 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{B}}$ 的共同方向上。試證明在這樣選定方向時 **Faraday** 變爲

$$\boldsymbol{F}=\bar{E}_x d\bar{z}\wedge d\bar{t}+\bar{B}_x d\bar{x}\wedge d\bar{y}$$

（只需兩個劈積卽可表示一般局域場；「正則表述」；在一個參照系中適用，就在任何參照系中都適用）。

練習 4.2 一般局域場正則表述中，選擇1-形式的自由度

討論一個很小的區域，使從一處到另一處場的變化可以忽略。把 **Faraday** 的正則表述寫成下述形式

$$\boldsymbol{F}=dp_I\wedge dq^I+dp_{II}\wedge dq^{II},$$

式中 p_A（$A=I$ 或 II）和 q^4 是空時中位置的標量函數。通過「變換方程」

$$p_A dq^4=dS+p_{\bar{A}}dq^{\bar{A}},$$

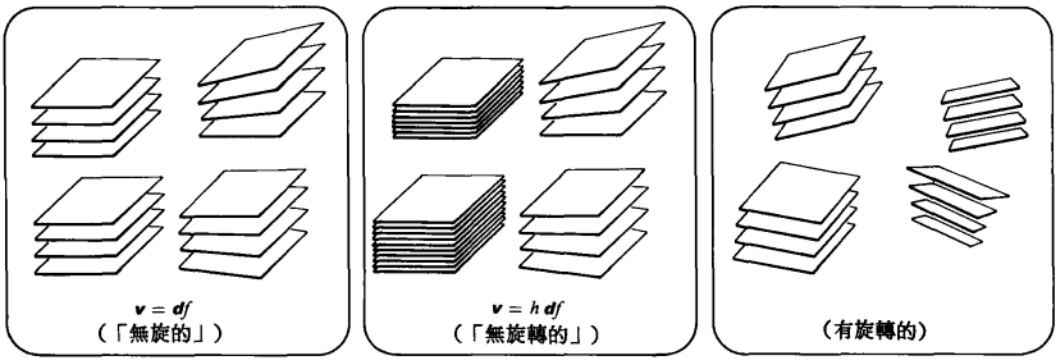


圖 4.7
一些簡單類型的1-形式的比較和對照。

定義變換到新的位置標量函數 $p_{\bar{A}}$ 和$q^{\bar{A}}$的「正則變換」，式中變換的「生成函數」S 是q^A和$q^{\bar{A}}$的任意函數：

$$dS=(\partial S/\partial q^A)dq^A+(\partial S/\partial q^{\bar{A}})dq^{\bar{A}}。$$

(a)由變換方程兩側各 dq^I, dq^{II}, $dq^{\bar{I}}$, $dq^{\bar{I}\bar{I}}$ 系數分別相等，導出用S表示的兩個p_A和兩個$p_{\bar{A}}$的表達式。

(b)用這些$p_{\bar{A}}$和p_A的表達式，證明 $\mathbf{F}=\mathbf{d}p_A\wedge dq^A$ 和 $\bar{\mathbf{F}}=\mathbf{d}p_{\bar{A}}\wedge\mathbf{d}q^{\bar{A}}$ 盡管表面上不同，實際上是用不同的1-形式集表述的同一個2-形式。

練習 4.3　閉合的或無旋的1-形式是梯度

給定1-形式σ使得 $d\sigma=0$，試證明σ可以表爲 $\sigma=df$，其中 f 是某個標量。這個1-形式σ稱爲「無旋的」1-形式，它是比下一個練習的「無旋轉的」1-形式（可表爲 $\sigma=hdf$）屬於更窄範圍的一類1-形式，而「無旋轉的」1-形式本身又是比「有旋轉的 1-形式」（不能表爲$\sigma=hdf$）更爲狹窄的一類1-形式。當1-形式σ用1-形式基 dx^α 乘上相應的分量σ_α表示時，試證明「無旋的」1-形式意味着 $\sigma_{[\alpha,\beta]}=0$。

練習 4.4　無旋轉的1-形式的正則表述

在三維情形，一繞 z 軸以角速度ω旋轉的剛體的速度分量爲 $v_y=\omega x$ 和 $v_x=-\omega y$。其旋度 $v=\nabla\times v$的 z 分量等於2ω，其他分量爲零。因此，v和 curl v 的標積爲零：

$$v_{[i,j}v_{k]}=0。$$

同樣的概念可推廣到四維，

$$v_{[\alpha,\beta}v_{\gamma]}=0,$$

並適於表爲無坐標的語言，它要求某個3-形式應爲零：

$$\mathbf{d}v\wedge v=0。$$

任何滿足此條件的1-形式稱爲「無旋轉的」1-形式。試證明當且僅當1-形式可表爲

$$\mathbf{v}=h\,df$$

時，它才是無旋轉的，式中h，f爲位置的標量函數（「Frobenius 定理」）。

練習 4.5 賦予極奇點的形式

列出如何表述這些形式的主要結果，例如

$$\Phi_1=\frac{dS}{S}\wedge\Psi_1+\theta_1,$$

以及它們可以使用的條件［這一個練習的意義和答案，見 Lascoux (1968)］。

練習 4.6 振蕩偶極子的場

試證明 (4.23) 式和 (4.24) 式所給出的振盪偶極子電磁場的表達式，處處滿足$dF=0$，除原點外處處滿足 $d^*F=0$。

練習 4.7 把2-形式機器轉換爲張量機器

這個練習寫在圖 4.1說明的末尾。

練習 4.8 扁平 Coulomb 場

圖4.5示出一類空薄片，$t=$常數，通過靜止點電荷的 ***Maxwell***。試按下述作圖步驟，證明從一運動 Lorentz 參照系看來，電場線被壓縮在橫向：(1)畫出一通過 $\textbf{\textit{Maxwell}}={}^*F$ 的赤道薄片（$\theta=\frac{\pi}{2}$; t, r, ϕ 可變）之圖。(2)畫出通過所得幾何結構，在不同 Lorentz 參照系中相應於恆定時間的不同類空薄片。(3)按圖 4.3 的方式解釋 $\textbf{\textit{Maxwell}}={}^*F$ 和每一個 Lorentz 薄片的交界面。

練習 4.9 面積分的計算

框4.1中給出，在n維空間中 p-形式 α 在p維面 $\mathcal{P}(\lambda^1,\ldots,\lambda^p)$ 上積分的定義爲

$$\int\alpha=\int\cdots\int\left\langle\alpha,\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^p}\right\rangle d\lambda^1\ldots d\lambda^p。$$

據此證明下述計算法則（也在框 4.1 中給出）成立：(1)把面的方程

$$x^k=x^k(\lambda^1,\ldots,\lambda^p),$$

代入α，再併項，得

$$\alpha=a(\lambda^1,\ldots,\lambda^p)d\lambda^1\wedge\ldots\wedge d\lambda^p;$$

(2)應用積分的基本定義，作積分

$$\int\alpha=\int\ldots\int a(\lambda^1.\ldots.\lambda^p)d\lambda^1\ldots d\lambda^p。$$

練習 4.10　Whitaker 的 Calumoid 或環的壽命

取一形成二維面S邊界的閉合環路。它網羅了一定的 **Faraday** 流量 $\Phi_F=\int_S \mathbf{F}$（「磁管」，magnetic tubes），和一定的 **Maxwell** 流量 $\Phi_M=\int_S {}^*\mathbf{F}$（「電管」，electric tubes）。

(a)試證明當且僅當 $d\mathbf{F}=d{}^*\mathbf{F}=0$（無磁荷，無電荷）時，流$\Phi_F$和$\Phi_M$只與環的選取有關，而與以環爲邊界的面$S$的選取無關。提示：用廣義 Stokes 定理，框4.1和4.6。

(b)在空間和時間中移動環，並使它仍網羅同樣的兩個流量。於是此處多移動一點，彼處就得少移動一點才行。用此方法劃出一個二維面（"Calumoid"；見 E. T. Whitaker, 1904）$\mathscr{P}=\mathscr{P}(a,b)$；$x^\mu=x^\mu(a,b)$。試證明，在這個面上的元雙矢 $\boldsymbol{\Sigma}=\partial\mathscr{P}/\partial a\wedge\partial\mathscr{P}/\partial b$滿足 $\langle\mathbf{F},\boldsymbol{\Sigma}\rangle=0$ 和 $\langle{}^*\mathbf{F},\boldsymbol{\Sigma}\rangle=0$。

(c)若 $d\mathbf{F}=0$ 和 $d{}^*\mathbf{F}=0$（無磁荷，無電荷），試證明對於由環的初始位置所給定的初條件 $x^\mu=x^\mu(a,0)$, $x^\mu(a,b)$ 的這些微分方程有解。

(d)考慮靜態均勻電場 $\mathbf{F}=-E_x dt\wedge dx$。試求解方程 $\langle\mathbf{F},\boldsymbol{\Sigma}\rangle=0$ 和 $\langle{}^*\mathbf{F},\boldsymbol{\Sigma}\rangle=0$，以找出最普遍的 Calumoid 的方程 $\mathscr{P}(a,b)$。[答案：$y=y(a)$, $z=z(a)$, $x=x(b)$, $t=t(b)$]。列出兩種特殊情況：(i) 完全置於時間恆定的超面內的 Calumoid〔環以無窮大速度運動；類似於剪刀兩刃交叉點的超光速〕；(ii) 其環在 t, x, y, z Lorentz 參照系中永遠保持靜止的 Calumoid。

練習 4.11　微分形式和 Hamilton 力學

考慮被賦予兩個自由度的動力學系統。爲了把這個系統定義作 Hamilton 系統（特殊情況：此處的 Hamilton 算符與時間無關），需要(1)定義正則變量（見框4.5），和(2)給出 Hamilton 算符H，作爲坐標 q^1,q^2 和其正則共軛動量 p_1, p_2 的函數。爲了導出力學定律，考慮 p_1, p_2, q^1, q^2, t 的五維空間，和在此空間中從五個坐標的初值（下標A）引到終值（下標B）的一條曲線，以及沿此路徑取積分 I 的值

$$I=\int_A^B p_1 dq^1+p_2 dq^2-H(p,q)dt=\int_A^B \omega。$$

根據 Stokes 定理（框4.1和4.6），對包圍一個二維區域S的兩條「相鄰」路徑所作的積分之差爲

$$\delta I=\oint_{\partial S}\omega=\int_S d\omega。$$

最小作用原理（「極端歷程」原理）指出，系統的代表點應在此五維流形中行經這樣一條路徑（具有切向矢量 $d\mathscr{P}/dt$ 的路徑），使得對此路徑的變化爲零；即

$$d\omega(\ldots,d\mathscr{P}/dt)=0$$

（只有一個矢量變數被提供，而左邊其他空位未被填入的2-形式 $d\omega$，給出在五維空間中的1-形式，它必定爲零）。這只是固定了$d\mathscr{P}/dt$的方向；它的大小可通過要求 $\langle dt,d\mathscr{P}/dt\rangle=1$ 而歸一化。

(a)由表達式 $\omega=p_j dq^j-H dt$ 計算$d\omega$。

(b)令 $d\mathscr{P}/dt=q^j(\partial\mathscr{P}/\partial q^j)+p_j(\partial\mathscr{P}/\partial p_j)+i(\partial\mathscr{P}/\partial t)$, 把 $d\omega(\ldots,d\mathscr{P}/dt)=0$ 用基 $\{dp_j,dq^k,dt\}$ 展開。

框 4.5 度規結構與 Hamilton 算符或「耦對結構（或直譯為辛結構）」的比較和對照

	度規結構	耦對結構
1. 物理應用	空時幾何	Hamilton 力學
2. 正則結構	$(\ldots\cdot\ldots)=$"ds^2"$=-dt\otimes dt+dx\otimes dx+dy\otimes dy+dz\otimes dz$	$\Theta=dp_1\wedge dq^1+dp_2\wedge dq^2$
3.「度規」性質	對稱	反對稱
4. 給定坐標系和任何其他坐標集合（其中度規的形式相同）的名稱	Lorentz 坐標系	「正則」（或「動力學」）共軛坐標系
5. 對此度規的場方程	$R_{\mu\nu\alpha\beta}=0$（零 Riemann 曲率；平直空時）	$d\Theta=0$（「閉合2-形式」，由上述表達式自動滿足的條件）
6. 四維流形	空時	相空間
7. 此流形結構的無坐標表述	$Riemann=0$	$d\Theta=0$
8. 不同於其他（可允許但較複雜）坐標的正則坐標	度規取上述形式（第二條）	度規取上述形式（第二條）

(c)試證明此五維方程可以在四維相空間 $\{q^j,p_k\}$ 中寫爲

$$\Theta(\ldots,d\mathcal{P}/dt)=dH,$$

其中Θ是在框4.5中定義的2-形式。

(d)試證明 $\Theta(\ldots,d\mathcal{P}/dt)=dH$ 在 $\{q^j,p_k\}$ 坐標系中的分量是熟知的 Hamilton 方程。注意此結論只依賴於所取的Θ的形式，因此，對於

$$\Theta=d\bar{p}_1\wedge d\bar{q}^1+d\bar{p}_2\wedge d\bar{q}^2,$$

可得出用相空間坐標 $\{\bar{q}^j,\bar{p}_k\}$（「正則變數」）表示的標準 Hamilton 方程。

練習 4.12 作爲張量的對稱算符

我們把包括一組指標的方括弧與圓括弧的含義定義如下：

$$V_{(\alpha_1\cdots\alpha_p)}\equiv\frac{1}{p!}\Sigma V_{\alpha_{\pi 1}\cdots\alpha_{\pi p}},\qquad V_{[\alpha_1\cdots\alpha_p]}\equiv\frac{1}{p!}\Sigma(-1)^{\pi}V_{\alpha_{\pi 1}\cdots\alpha_{\pi p}}。$$

框 4.6　Stokes 定理的誕生

電磁學的數學公式的中心是Gauss定理（在第五章處理）和 Stokes定理。今天，當用形式的語言表示時，兩者作爲一個整體出現了。早先，這種統一性是不明顯的。Everitt(1970) 回顧Stokes定理的歷史時指出：「由G. C. Stokes [Lucasian 數學教授] 設立，而被 Maxwell 在1854年［2月］獲得的Smith 獎的論文…

5.給定橢圓的中心和兩點，以及主軸的長度，用幾何作圖法求主軸方向。

6.對微分方程

$$(a^2-x^2)dy^2+2xydydx+(a^2-y^2)dx^2=0。$$

作積分，它有奇異解嗎？

7.在有雙曲率的雙曲線系統中，總可以在一動點P畫出切線；試證明，當P從任意固定點Q移開時，為了使得相鄰的切線最後相交，P必須沿著以Q為錐頂的橢圓錐的母線開始運動，但是，這個問題的各種條件也許是不可能的。

8.若X, Y, Z是直角坐標x, y, z的函數，dS是任意有限面元，l, m, n為dS的法線與各軸傾角之餘弦，ds是邊界線元，試證明

$$\iint\left\{l\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+m\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+n\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\right\}dS$$
$$=\int\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

X, Y, Z 的微分系數為偏微分，而一重積分應繞面的邊界一周。

這首次鉛印發表了當今稱爲 Stokes 定理（把線積分與面積分聯繫起來的公式）的公式。它對 Maxwell 電磁理論的發展極爲重要。這個定理的最早明確證明是在 1850 年 7 月 2 日 Thomson 寫給 Stokes 的信中給出的」。［引自 Campbell 和 Garnett (1882) 第186-187頁］。

此處（求和是對）數字 1, 2,..., p的所有排列π進行的，而 $(-1)^{\pi}$爲+1或−1則取決於排列的奇或偶。V可以具有除了$\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_p$ 等 p 個指標以外的、此處沒有指明的其他指標，但只有這組指標受此處所給出的運算的影響。數字 $\pi_1, \pi_2,..., \pi_p$ 是數字 1, 2,..., p按照π的排列重新安排的。（$p=2,3$ 的情況已在練習 3.12中討論過）。因此，我們有了一部機器，它能把分量爲 $V_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$ 的任一p秩張量轉換爲分量爲

$$[\mathbf{Alt}(\mathbf{V})]_{\mu_1\cdots\mu_p}=V_{[\mu_1\cdots\mu_p]}$$

的新張量。因爲這部機器 **Alt**是線性的，所以它也可看作一個張量，它可以因給定的適當變量 $\mathbf{u}, \mathbf{v},..., \mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta},..., \boldsymbol{\gamma}$ 產生一個數

$$u^{\mu}v^{\nu}...w^{\lambda}\alpha_{[\mu}\beta_{\nu}...\gamma_{\lambda]}。$$

(a)試證明此張量的分量爲

$$(\mathbf{Alt})_{\beta_1\cdots\beta_p}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_p}=(p!)^{-1}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_p}$$

（注意：δ 的指標幾乎不會上升或下降，因此這個符號不會引起混亂。）

式中

$$\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_p}=\begin{cases}+1, \text{ 若 } (\alpha_1,...\alpha_p) \text{ 是 } (\beta_1,...,\beta_p) \text{ 的偶排列，}\\ -1, \text{ 若 } (\alpha_1,...,\alpha_p) \text{ 是 } (\beta_1,...,\beta_p) \text{ 的奇排列，}\\ 0, \text{ 若 (i) 任意兩個}\alpha\text{相同，}\\ 0, \text{ 若 (ii) 任意兩個}\beta\text{相同，}\\ 0, \text{ 若 (iii) }\alpha\text{和}\beta\text{是不同的整數集。}\end{cases}$$

注意，上述證明並由此上述分量值在任何坐標系中都是正確的。

(b)試證明對於任何「交錯」（即「完全反對稱」）張量 $A_{\alpha_1\cdots\alpha_p}=A_{[\alpha_1\cdots\alpha_p]}$，有

$$\frac{1}{p!}A_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p\beta_1\cdots\beta_q}_{\gamma_1\cdots\gamma_p\gamma_{p+1}\cdots\gamma_{p+q}}$$

$$=\sum_{\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p}A_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p\beta_1\cdots\beta_q}_{\gamma_1\cdots\gamma_{p+q}}$$

$$\equiv A_{[\alpha_1\cdots\alpha_p]}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p\beta_1\cdots\beta_q}_{\gamma_1\cdots\gamma_{p+q}}。$$

最後一行介紹了對兩條豎線所包圍的各指標求和的慣例，即只包括其指標按次序增加的那些項。由此或同樣證明，得

$$\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p\beta_1\cdots\beta_q}_{\gamma_1\cdots\gamma_{p+q}}\delta^{\mu_1\cdots\mu_q}_{[\beta_1\cdots\beta_q]}=\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p\mu_1\cdots\mu_q}_{\gamma_1\cdots\gamma_{p+q}}。$$

(c)定義任意兩個交錯張量的外（「劈」）積爲

$$(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+q}}=\delta^{\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_q}_{\lambda_1\cdots\lambda_p\lambda_{p+1}\cdots\lambda_{p+q}}\alpha_{[\mu_1\cdots\mu_p]}\beta_{[\nu_1\cdots\nu_q]};$$

同樣

$$(\mathbf{U}\wedge\mathbf{V})^{\lambda_1\cdots\lambda_{p+q}}=\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_p\lambda_{p+1}\cdots\lambda_{p+q}}_{\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_q}U^{[\mu_1\cdots\mu_p]}V^{[\nu_1\cdots\nu_q]}。$$

證明此式已包括了 (3.45b) 式。試證明

$$
\begin{aligned}
&[(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma]_{\sigma_1\cdots\sigma_{p+q+r}}\\
&=\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_p\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_r}_{\sigma_1\cdots\sigma_{p+q+r}}\alpha_{[\lambda_1\cdots\lambda_p]}\beta_{[\mu_1\cdots\mu_q]}\gamma_{[\nu_1\cdots\nu_r]}\\
&=[\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)]_{\sigma_1\cdots\sigma_{p+q+r}}\ ;
\end{aligned}
$$

並由此建立外積（劈積）的結合律，並證明當α, β, γ都是1-形式時，此式簡化爲 (3.45c) 式的3-形式表示。

(d)導出下述p個矢量外積分量的公式

$$
\begin{aligned}
(u_1\wedge u_2\wedge\cdots\wedge u_p)^{\alpha_1\cdots\alpha_p}&=\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\mu\cdots\nu}(u_1)^{\mu}\cdots(u_p)^{\nu}\\
&=p!\,u_1^{[\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\cdots u_p^{\alpha_p]}\\
&=\delta^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{12\cdots p}\det[(u_\mu)^\lambda]\,。
\end{aligned}
$$

第五章　脅强-能量張量和守恆定律

§ 5.1　初階概述

「幾何告訴物質如何運動，而物質則告訴幾何怎樣彎曲。」但是，只有找到一種確定單位體積內有多少質量-能量的工具以後，考查曲率（第三編）和由質量-能量產生曲率的Einstein定律才有益處。這個工具就是脅强-能量張量。它是本章注意的焦點。

爲了有利於渴望盡快地進入引力物理學的讀者，在框5.1中概括了脅强-能量張量的本質特徵。這些讀者可以經框 5.1 直接進入第六章——儘管這樣一來，他就把高階的若干後面部分拒之門外了，因爲後面這些部分在很大程度上依賴於本章討論的材料。

初階
高階

本章的其餘部分屬於高階的內容。它不依賴於前面的高階內容。它作爲第20章（質量守恆定律和角動量守恆定律）的準備是必需的。它對引力理論的全部應用（第18—40章）極有裨益

§ 5.2　三維體積和脅强-能量張量的定義

空時相當於一條流動着的四維動量之「河」。每一個粒子沿着它的世界線隨身携帶着自身的四維動量矢量。用抹平的方式（連續近似）觀察在許多世界線上的許多粒子，就產生了一個連續流——一條四維動量河。電磁場，中微子場和介子場都對這條河作出了貢獻。

怎樣才能把河的流動定量化呢？這就要借助於線性機器：脅强-能量張量 $\boldsymbol{T}$。

在空時中，選取以矢量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 爲邊的很小的三維平行六面體（圖5.1）。試問有多少四維動量沿正向（即由它的「負側」指向它的「正側」）穿過該

框 5.1　第五章總結

A. 作爲機器的脅强-能量張量

在空時中每一事件處，都有一個脅强-能量張量。它是一部機器，包含着在該事件處由任何觀測者和所有觀測者測出的能量密度、動量密度和脅强等知識。它所包含的是與所有形式的物質以及與所有非引力的場的能量、動量和脅强。

脅强-能量張量是一部具有可以插入兩個矢量的空位的線性對稱機器：$\boldsymbol{T}(\ldots,\ldots)$。對於給定的輸入，它的輸出可以概括如下。

(1)把觀測者的四維速度 $\boldsymbol{u}$ 插入一個空位，另一個空位空着。輸出是

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\ldots)=\boldsymbol{T}(\ldots,\boldsymbol{u})=-\left(\begin{array}{l}\text{在 } \boldsymbol{T} \text{ 被選定的事件處由}\\ \text{觀測者的 Lorentz 參照}\\ \text{系中測出的四維動量密}\\ \text{度 “}\boldsymbol{dp/dV}\text{”，即單位三}\\ \text{維體積的四維動量}\end{array}\right);$$

即，對於四維速度爲 u^α 的觀測者 $T^\alpha{}_\beta u^\beta=T_\beta{}^\alpha u^\beta=-(dp^\alpha/dV)$

(2)把觀測者的四維速度插入一個空位，把任意單位矢量 $\boldsymbol{n}$ 插入另一空位。輸出是

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u})=-\left(\begin{array}{l}\text{在觀測者的 Lorentz 參}\\ \text{照系中測出的沿 } \boldsymbol{n} \text{ 方向}\\ \text{的四維動量密度分量，}\\ \text{“}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{dp/dV}\text{”}\end{array}\right);$$

即，$T_{\alpha\beta}u^\alpha n^\beta=T_{\alpha\beta}n^\alpha u^\beta=-n_\mu dp^\mu/dV$。

(3)把觀測者的四維速度插入兩個空位。輸出爲觀測者在他的 Lorentz 參照系中測出的質量-能量密度：

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\left(\begin{array}{l}\text{在四維速度爲 } \boldsymbol{u} \text{ 的參照系中測出的單}\\ \text{位體積質量-能量}\end{array}\right)。$$

(4)選定一觀測者及其 Lorentz 參照系的兩個類空基矢 $\boldsymbol{e}_j$ 和 $\boldsymbol{e}_k$。把 $\boldsymbol{e}_j$ 和 $\boldsymbol{e}_k$ 插入 $\boldsymbol{T}$ 的兩個空位中。輸出爲觀測者測出的脅强的 j, k 分量

$$T_{jk}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)=\boldsymbol{T}_{kj}=T(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_j)$$

$$=\left(\begin{array}{l}\text{通過垂直}\boldsymbol{e}_k\text{方向的單位}\\ \text{面積由 } (x^k-\varepsilon) \text{ 一側作}\\ \text{用於 } (x^k+\varepsilon) \text{ 一側的力}\\ \text{的 } \boldsymbol{j} \text{ 分量}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{l}\text{通過垂直}\boldsymbol{e}_j\text{方向的單位}\\ \text{面積由 } (x^j-\varepsilon) \text{ 一側作}\\ \text{用於 } (x^j+\varepsilon) \text{ 一側的力}\\ \text{的 } \boldsymbol{k} \text{ 分量}\end{array}\right)。$$

B. 理想流體的脅强-能量張量

在本書後面部分將廣泛研究的一類物質是「理想流體」。理想流體是液體或氣體，(1)它以四維速度 $\boldsymbol{u}$ 通過空時運動，$\boldsymbol{u}$ 在各事件處可以不同，以及(2)在每一個流體元的靜止參照系中呈現出一個質量－能量密度 ρ 和各向同性壓力 p。切脅强，各向異性壓力和粘滯性均不應存在，否則就不是理想流體。理想流體在給定事件處的脅强-能量張量可以由度規張量 $\boldsymbol{g}$，四維速度 $\boldsymbol{u}$，和靜止參照系中的密度 ρ 和壓力 p 構成：

$$\boldsymbol{T}=(\rho+p)\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+p\boldsymbol{g},\ \text{或}\ T_{\alpha\beta}=(\rho+p)u_\alpha u_\beta+pg_{\alpha\beta}。$$

在流體靜止參照系中，脅强－能量張量的分量具有下述預期形式（當作觀測者四維速度插入 $\boldsymbol{T}$ 的一個空位的是流體的四維速度）：

$$T^\alpha{}_\beta u^\beta=[(\rho+p)u^\alpha u_\beta+p\delta^\alpha{}_\beta]u^\beta=-(\rho+p)u^\alpha+pu^\alpha=-\rho u^\alpha;$$

即

$$T^0{}_\beta u^\beta=-\rho=-\text{（質量-能量密度）}=-dp^0/dV,$$
$$T^j{}_\beta u^\beta=0=-\text{（動量密度）}=-dp^j/dV;$$

又

$$T_{jk}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)=p\delta_{jk}=\text{脅强張量分量}。$$

C. 能量-動量守恆

在電動力學中，電荷守恆可以表爲微分方程

$$\partial(\text{電荷密度})/\partial t+\nabla\cdot(\text{電流密度})=0;$$

即

$$J^0{}_{,0}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0;\ \text{即}\ J^\alpha{}_{,\alpha}=0;\ \text{即}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}=0。$$

同樣，能量-動量守恆可以表爲基本的幾何定律

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0。$$

（因爲 $\boldsymbol{T}$ 是對稱的，故對那個空位取散度沒有關係。）這個定律在引力理論中起着重要的作用。

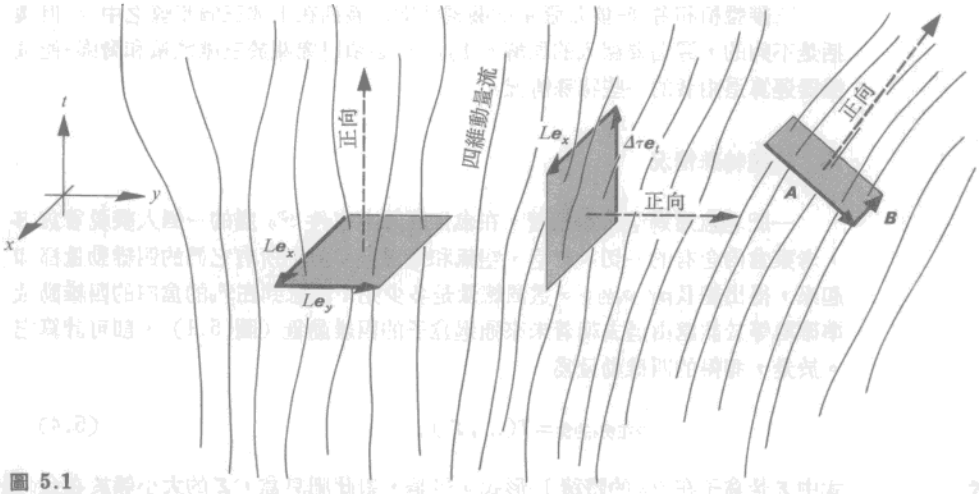


圖 5.1

流過空時的四維動量之「河」和它所流過的三個不同的三維體積。（有一維在圖中被隱匿了，因而三維體積看起來像二維體積。）第一個三維體積是在所描繪 Lorentz 參照系中瞬時靜止的立方肥皂盒的內部。它的邊界是 Le_x, Le_y, Le_z；它的體積1-形式（其「正」向指着未來：「標準指向」）是 $\boldsymbol{\Sigma}=L^3\boldsymbol{dt}=-V\boldsymbol{u}$（$V=L^3$=靜止參照系中測出的體積；$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{dt}$=盒子的四維速度）。第二個三維體積是在第二個立方盒的蓋子在時間 $\Delta\tau$ 內掃過的「世界片」。盒蓋的邊爲 Le_x 和 Le_z；它的體積1-形式（其「正」向沿 y 增加方向離開盒的內部）爲 $\boldsymbol{\Sigma}=L^2\Delta\tau\boldsymbol{dy}=\mathcal{A}\Delta\tau\boldsymbol{\sigma}$（$\mathcal{A}=L^2$=盒蓋面積；$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{dy}$=包括世界管的單位1-形式）。第三個三維體積是任意的，邊界爲 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, 它的體積1-形式爲 $\Sigma_\mu=\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma$.

體積。爲了算出答案：(1)構造「體積1-形式」

三維體積的數學表述

$$\Sigma_\mu=+\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma; \tag{5.1}$$

這個平行六面體置於1-形式的一個面上，而穿過平行六面體的正向定義爲1-形式 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的正向。(2)把體積 1-形式插入脅强-能量張量 $\boldsymbol{T}$ 的第二個空位中。結果爲

用脅强-能量張量算出穿過三維體積的動量

$$\boldsymbol{T}(\ldots,\boldsymbol{\Sigma})=\boldsymbol{p}\quad\text{（從負側指向正側的動量）。} \tag{5.2}$$
$$\uparrow$$
空的空位

(3)爲了得出四維動量沿矢量 $\boldsymbol{w}$ 或1-形式 $\boldsymbol{\alpha}$ 的投影，把體積1-形式 $\boldsymbol{\Sigma}$ 插入第二個空位，並把 $\boldsymbol{w}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}$ 插入第一個空位：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\Sigma})=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{p},\\&\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\Sigma})=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{p}\rangle。\end{aligned} \tag{5.3}$$

由此定義脅强-能量張量。

三維體積和脊張-能量張量的關鍵特徵已囊括在上述三個步驟之中。但囊括是不夠的，還需要深入的理解。爲此，必須研究關於三維體積和脊張-能量機器運算這兩者的一些特殊情況。

一種特殊情況

肥皂盒內部

一肥皂盒通過空時運動着。在盒世界線上事件 $\mathcal{P}_0$ 處的一個人凝視着盒內，考察盒內含有的一切，肥皂、空氣和電磁場。他把所有它們的四維動量都加起來，得出總量$\mathbf{p}_{\text{在}\mathcal{P}_0\text{的盒}}$。這個總量是多少呢？注意到在$\mathcal{P}_0$的盒內的四維動量準確地等於該處由過去朝着未來通過盒子的四維動量（圖 5.1），即可計算它。於是，測得的四維動量爲

$$\mathbf{p}_{\text{在}\mathcal{P}_0\text{的盒}}=\boldsymbol{T}(\ldots,\boldsymbol{\Sigma}), \tag{5.4}$$

它的體積1-形式

式中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是盒子在 $\mathcal{P}_0$ 的體積 1-形式。但是，對此肥皂盒，$\boldsymbol{\Sigma}$ 的大小等於在盒瞬時靜止參照系中測得的盒體積 V，並且盒本身置於 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的一超平面內；即

$$\boldsymbol{\Sigma}=-V\boldsymbol{u}, \tag{5.5}$$

它的四維動量含量

式中 $\boldsymbol{u}$ 是肥皂盒在 $\mathcal{P}_0$ 的四維速度（取負號是因爲作爲 1-形式的 $\boldsymbol{u}$ 的正向是指着過去的，$u_0<0$）；見框5.2。因此，盒內的總四維動量爲

$$\mathbf{p}_{\text{在}\mathcal{P}_0\text{的盒}}=\boldsymbol{T}(\ldots,-V\boldsymbol{u})=-V\boldsymbol{T}(\ldots,\boldsymbol{u}), \tag{5.6}$$

或，表爲分量

$$(p^\alpha)_{\text{在}\mathcal{P}_0\text{的盒}}=-VT^{\alpha\beta}u_\beta。 \tag{5.6'}$$

在盒靜止參照系中測出的盒內能量是四維動量在盒四維速度上投影的負值：

$$E=-\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{p}_{\text{在}\mathcal{P}_0\text{的盒}}=+VT^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta=V\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})；$$

它的能量密度

因此，

$$\begin{pmatrix}\text{在盒靜止參照系中}\\ \text{測出的能量密度}\end{pmatrix}=\frac{E}{V}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})。 \tag{5.7}$$

另一種特殊情況

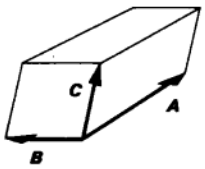
肥皂盒的蓋

騎在同一肥皂盒上的人打開盒蓋並倒出一些肥皂。在極爲短暫的時間間隔 $\Delta\tau$內，有多少總四維動量流出盒子呢？爲了回答這個問題，考慮在 $\Delta\tau$ 內通過盒子打開的二維盒（「蓋的世界片」）掃出去三維體積。所求的四維動量就是

框 5.2　三維體積

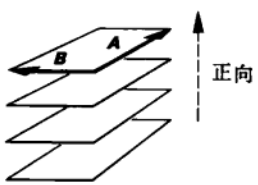
A. 一般的平行六面體

1. 平行六面體的邊是三個矢量 **A**, **B**, **C**。必須排好各邊的次序：例如"**A** 後面跟着**B**，後面再跟着**C**"。



（此處，與平行六面體正交的一維隱匿了。）

2. 體積三維矢量定義爲 $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$。它涉及複雜的體積理論（第四章），但在基本理論中用得不多。
3. 體積1-形式定義爲 $\Sigma_\mu=\epsilon_{\mu\alpha\beta\tau}A^\alpha B^\beta C^\tau$。（此處 **A**, **B**, **C** 必須以步驟 1. 所選定的標準次序出現。）注意，「相應於」 Σ 的矢量與體積三矢的關係是 $\Sigma=-{}^*(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})$。
4. 體積方向的定義與其1-形式 Σ 的方向一致。更明確地說：邊 **A**, **B**, **C** 位於超平面 $\Sigma(\langle\Sigma,\mathbf{A}\rangle=\langle\Sigma,\mathbf{B}\rangle=\langle\Sigma,\mathbf{C}\rangle=0$;無「鈴響」）內。於是體積本身是 Σ 的超平面之一！離開體積的正向定義爲 Σ 的正向。注意：若 **A**, **B**, **C** 的次序顚倒了，則正向也要顚倒過來！



（此處，沿着**C**延伸的那一維隱匿了。）

5. 類空三維體積的「標準方向」是指向未來的 1- 形式 Σ 的正向，相應於 **A**, **B**, **C** 形成右手三矢量。

B. 任意形狀的三維體積

可以把它分解爲平行六面體的集合進行分析。

C. 肥皂盒的內部（例）

1. 在肥皂盒靜止參照系中分析：在盒的世界線上選定一事件。在盒的三條邊上有三個特定的矢量 **A**, **B**, **C**。在盒靜止參照系中，它們是純空間矢量：$A^0=B^0=C^0=0$。因此，體積1-形式具有分量 $\Sigma_j=0$，和

$$\Sigma_0=\epsilon_{0ijk}\,A^i\,B^j\,C^k=\det\begin{Vmatrix}A^1 & A^2 & A^3\\ B^1 & B^2 & B^3\\ C^1 & C^2 & C^3\end{Vmatrix}$$

$=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，按三維矢量分析的標準符號；

$=+V$（V＝盒體積），若（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$）是右手順序（$\boldsymbol{\Sigma}$的正向指着未來；標準指向）；

$=-V$（V＝盒體積），若（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$）是左手順序（$\boldsymbol{\Sigma}$的正向指着過去）。

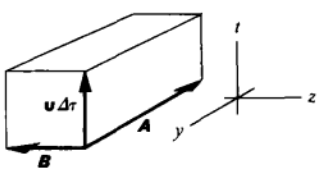
2. 這個結果可用幾何語言重新表述：設在盒靜止參照系中測出盒的四維速度爲$\boldsymbol{u}$，盒體積爲V，則，或者是

$\boldsymbol{\Sigma}=-V\boldsymbol{u}$，若盒三維面的「正側」在未來側，且各邊按右手順序——標準指向；

或者是

$\boldsymbol{\Sigma}=+V\boldsymbol{u}$，若盒三維面的「正側」在過去側，各邊按左手順序。

D. 肥皂盒的二維蓋在 $\Delta\tau$ 時間內掃出的三維體積（例）



1. 在盒靜止參照系中分析：在盒世界線上選定一事件。盒蓋的兩邊是矢量 $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$。在盒靜止參照系中，選擇坐標軸指向使$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$處於 y-z 平面內。在原時間隔 $\Delta\tau$ 內，盒蓋掃過的三維體積的第三邊爲 $\boldsymbol{u}\Delta\tau$（$\boldsymbol{u}$是盒的四維速度），在以「$\boldsymbol{A}$後面跟$\boldsymbol{B}$，後面再跟 $\boldsymbol{u}\Delta\tau$」爲序的盒靜止參照系中，體積1-形式的各分量爲

$\Sigma_0=\Sigma_2=\Sigma_3=0$，以及

$\Sigma_1=\epsilon_{1jk0}\,A^j\,B^k\,\Delta\tau u^0$

$=-\epsilon_{01jk}\,A^j\,B^k\,\Delta\tau$

$=-\mathcal{A}\Delta\tau$（$\mathcal{A}$＝盒蓋面積），若（$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$）爲右手順序

$=+\mathcal{A}\Delta\tau$（$\mathcal{A}$＝盒蓋面積），若（$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$）爲左手順序

（注意：在這種情況下不能定義標準指向，因爲經純空間旋轉，$\boldsymbol{\Sigma}$可以連續地變爲$-\boldsymbol{\Sigma}$。）

2. 用幾何語言重新表述這個結果：設$\mathcal{A}$爲在盒靜止參照系中測出的盒蓋面積；並設$\boldsymbol{\sigma}$爲單位1-形式，它的一個面包括盒蓋及其四維速度（即包括盒蓋的「世界片」）。確定$\boldsymbol{\sigma}$的正向與（任意選定的）盒蓋三維體積的正向一致。則

$$\boldsymbol{\Sigma}=\mathcal{A}\ \Delta\tau\ \boldsymbol{\sigma}。$$

沿正向通過此世界片的四維動量（見圖 5.1）；因此，爲

$$\mathbf{p}_{\text{流出}}=\boldsymbol{T}(\ldots,\boldsymbol{\Sigma}),\tag{5.8}$$

式中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是世界片的體積1-形式。設 $\mathcal{A}$ 爲盒蓋面積，$\boldsymbol{\sigma}$ 爲外指的單位1-形式，它的表面包括世界片（即包括盒蓋和它的瞬時四維速度矢量）。則

它的體積1-形式

$$\boldsymbol{\Sigma}=\mathcal{A}\Delta\tau\boldsymbol{\sigma}\tag{5.9}$$

（見框5.2）；因此，在 $\Delta\tau$ 內流出的四維動量

流過它的四維動量

$$\mathbf{p}_{\text{流出}}=\mathcal{A}\Delta\tau\boldsymbol{T}(\ldots,\boldsymbol{\sigma})。\tag{5.10}$$

§ 5.3　脅强-能量張量的分量

與所有其他張量一樣，脅强-能量張量是一部機器，它的定義和意義都超越了坐標系和參照系之上。但是，鎖在某一個 Lorentz 參照系中的任何一個觀測者，却更注意 $\boldsymbol{T}$ 的分量而不是 $\boldsymbol{T}$ 本身。他賦與每一個分量以特定的物理意義。或許，最感興趣的是「時間-時間」分量。它是在觀測者的 Lorentz 參照系中測出的總質量-能量密度：

脅强-能量張量諸分量的物理解釋

$$T_{00}=-T_0{}^0=T^{00}=\boldsymbol{T}(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_0)=\text{質量-能量密度}\tag{5.11}$$

T^{00}：能量密度

［參看(5.7)式，用基矢 $\mathbf{e}_0=\boldsymbol{u}$ 代替觀測者的四維速度 $\boldsymbol{u}$］。

考慮在觀測者參照系中靜止的肥皂盒內部，可以解釋「空時」分量 T^{j0}。若盒體積爲 V，則其體積1-形式爲 $\boldsymbol{\Sigma}=-V\boldsymbol{u}=+V\boldsymbol{dt}$；且在其內部四維動量的 μ 分量爲

$$\begin{aligned}p^\mu&=\langle\boldsymbol{dx}^\mu,\mathbf{p}\rangle=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{dx}^\mu,\boldsymbol{\Sigma})\\&=V\boldsymbol{T}(\boldsymbol{dx}^\mu,\boldsymbol{dt})=VT^{\mu0}。\end{aligned}$$

於是，單位體積的四維動量爲

$$p^\mu/V=T^{\mu0},\tag{5.12a}$$

或等價地表爲

$$T^{00}=\text{質量-能量密度（單位：克/厘米}^3\text{，或爾格/厘米}^3\text{，或厘米}^{-2}\text{）；}\tag{5.13a}$$

$$T^{j0}=\text{動量 }j\text{ 分量的密度（單位：克(厘米/秒）厘米}^{-3}\text{，或厘米}^{-2}\text{）。}\tag{5.13b}$$

T^{j0}：動量密度

利用在觀測者參照系中靜止，且正法向指着 $\boldsymbol{k}$ 方向的、面積爲 $\mathcal{A}$ 的二維面，即可解釋分量 $T^{\mu k}$。在時間間隔 Δt 內，此二維面掃過的三維體積的體積1-形

式爲 $\boldsymbol{\Sigma}=\mathscr{A}\ \Delta t\ d\boldsymbol{x}^k$（見框 5.2）。在 Δt 時間通過二維面的四維動量的 μ 分量爲

$$p^\mu=\boldsymbol{T}(d\boldsymbol{x}^\mu,\boldsymbol{\Sigma})=\mathscr{A}\ \Delta t\ \boldsymbol{T}(d\boldsymbol{x}^\mu,d\boldsymbol{x}^k)$$
$$=\mathscr{A}\ \Delta t\ T^{\mu k}。$$

於是，四維動量流量（在單位時間內通過垂直於$\boldsymbol{e}_k$的單位面積的四維動量）爲

$$(p^\mu/\mathscr{A}\Delta t)_{\text{通過垂直於}\boldsymbol{e}_k\text{的面}}=T^{\mu k},\qquad(5.12b)$$

或等價地寫爲：

T^{0k}：能流

T^{0k}＝能流的 k 分量 (5.13c)

（單位：爾格／厘米²・秒，或厘米⁻²）；

T^{jk}：脅强

T^{jk}＝「脅强」的 j, k 分量

≡動量 j 分量流的 k 分量 (5.13d)

≡通過垂直於$\boldsymbol{e}_k$的單位面積，在$(x^k-\varepsilon)$處的場和物質作用於$(x^k+\varepsilon)$處場和物質的力的 j 分量

（單位：達因／厘米²，或厘米⁻²）。

（憶及「每秒傳遞的動量」與「力」相同）。

脅强-能量張量必須是對稱的，$T^{\alpha\beta}=T^{\beta\alpha}$；但其證明將推遲到考察了若干實例之後給出。

§5.4 粒子羣的脅强-能量張量

考慮一羣粒子。在羣內選取某事件$\mathscr{P}$，把$\mathscr{P}$附近的粒子分爲幾類，$A=1,2,\ldots$，使得同一類中的所有粒子都具有同樣的性質：

$m_{(A)}$， 靜止質量；

$\boldsymbol{u}_{(A)}$， 四維速度；

$\boldsymbol{p}_{(A)}=m_{(A)}\ \boldsymbol{u}_{(A)}$， 四維動量。

定義粒子羣的數流矢量

設$N_{(A)}$爲在粒子自身靜止參照系中測出的單位體積內A類粒子數。則由

$$\boldsymbol{S}_{(A)}\equiv N_{(A)}\ \boldsymbol{u}_{(A)}\qquad(5.14)$$

定義的「數流矢量」$\boldsymbol{S}_{(A)}$的分量具有簡單的物理意義。在A類粒子具有通常速度 $\boldsymbol{v}_{(A)}$ 的參照系中，$\boldsymbol{S}_{(A)}$的含義爲：

$$S^0_{(A)} = N_{(A)}\ u^0_{(A)} = N_{(A)}\ [1-\underbrace{v_{(A)}{}^2}]^{-1/2} = \text{數密度}; \qquad (5.15a)$$

在粒子靜止參照系中的數密度　　體積的 Lorentz 收縮因子

$$\boldsymbol{S}_{(A)} = N_{(A)}\ \boldsymbol{u}_{(A)} = S^0_{(A)}\ \boldsymbol{v}_{(A)} = \text{粒子流} \qquad (5.15b)$$

結果，四維動量密度的分量爲

$$T^{\mu 0}_{(A)} = p^{\mu}_{(A)} S^0_{(A)} = m_{(A)} u^{\mu}_{(A)} N_{(A)} u^0_{(A)}$$
$$= m_{(A)} N_{(A)} u^{\mu}_{(A)} u^0_{(A)};$$

而通過與$\mathbf{e}_j$方向垂直的面的動量之 μ 分量流爲

$$T^{\mu j}_{(A)} = p^{\mu}_{(A)} S^j_{(A)} = m_{(A)} u^{\mu}_{(A)} N_{(A)} u^j_{(A)}$$
$$= m_{(A)} N_{(A)} u^{\mu}_{(A)} u^j_{(A)}。$$

這些方程就是與參照系無關的幾何方程

$$\boldsymbol{T}_{(A)} = m_{(A)} N_{(A)} \boldsymbol{u}_{(A)} \otimes \boldsymbol{u}_{(A)} = \boldsymbol{p}_{(A)} \otimes \boldsymbol{S}_{(A)} \qquad (5.16)$$

粒子羣的脅强-能量張量

的 μ, 0 和 μ, j 分量。粒子羣中所有在 $\mathcal{P}$ 附近的粒子的總數流矢量、和脅强-能量張量，由上述結果對所有粒子類求和得出，爲

$$\boldsymbol{S} = \sum_A N_{(A)} \boldsymbol{u}_{(A)}; \qquad (5.17)$$

$$\boldsymbol{T} = \sum_A m_{(A)} N_{(A)} \boldsymbol{u}_{(A)} \otimes \boldsymbol{u}_{(A)} = \sum_A \boldsymbol{p}_{(A)} \otimes \boldsymbol{S}_{(A)}。 \qquad (5.18)$$

§ 5.5　理想流體的脅强-能量張量

定義理想氣體

流體的最簡單例子是粒子速度各向同性分布的、無相互作用的粒子的氣體（「理想氣體」）。在粒子速度爲各向同性分布的 Lorentz 參照系中，對稱性要求脅强-能量張量的對角空間-空間分量彼此相等，即

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = \sum_A \frac{m_{(A)} v_{x(A)}}{(1-v_{(A)}{}^2)^{1/2}} \frac{N_{(A)} v_{x(A)}}{(1-v_{(A)}{}^2)^{1/2}}, \qquad (5.19)$$

並要求其全部非對角分量爲零。而且，(5.19) 式代表一個乘積，即單位體積的粒子數乘以 x 方向的速度（給出了 x 方向的流量），再乘以 x 方向的動量，給出了壓力 p 的標準分子運動論表述。因此，脅强-能量張量在這個特殊的

Lorentz 參照系——氣體「靜止參照系」中的形式爲

$$T_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix}\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & p\end{Vmatrix} \tag{5.20}$$

此處量 ρ 與組成粒子的靜止質量毫無直接關係。它量度這些粒子的靜止-加上-運動能量的密度。

在氣體靜止參照系中，用流體的四維速度 $u^\alpha=(1,0,0,0)$改寫(5.20)式，得

$$T_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix}\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & p\end{Vmatrix}$$

$$=\rho u_\alpha u_\beta+p(\eta_{\alpha\beta}+u_\alpha u_\beta),$$

理想氣體或理想流體的脅强-能量張量

或，用與參照系無關的幾何語言表爲

$$\boldsymbol{T}=p\boldsymbol{g}+(\rho+p)\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}。 \tag{5.21}$$

定義理想流體

(5.21)式有廣泛的應用。對剛才討論的「理想氣體」它是嚴格的。對於任何「理想」的流體，它也是嚴格的，此處「理想」的含義是沒有諸如熱傳導和粘滯性等輸運過程，以及從而（在靜止參照系中）也沒有切脅强（對角的脅强張量；各對角分量應相等，否則參照系的旋轉會顯示出切脅强）。然而，對於一般的理想流體，在流體靜止參照系中測出的質量-能量密度 ρ 不僅包括粒子的靜止質量和動能，還包括壓縮能，核結合能以及一切其他的質量-能量源［總的質量-能量密度可以通過例如圖 1.12 所描繪的理想實驗來確定，實驗中樣品質量位於球的中心，實驗粒子圍繞着該位置以角頻率 $\omega^2=(4\pi/3)\rho$作小幅度的振盪］。

§ 5.6 電磁脅强-能量

Faraday 用他的在沿力線方向有張力而與其垂直方向有壓力的圖象（圖 5.2），洞察了電磁學的新特徵。除了沿力線方向的張力$\boldsymbol{E}^2/8\pi$（或$\boldsymbol{B}^2/8\pi$）和與之成直角的同樣大的壓力以外，還有 Poynting 流$(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})/4\pi$ 以及能量密度的 Maxwell 表達式$(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi$。所有這些量在定義如下式的 Maxwell

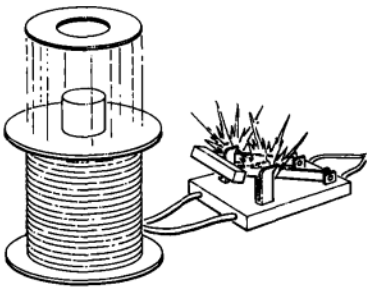


圖 5.2
Faraday 脅强正在起作用。當電磁鐵接上交流電時，鋁環飛向空中。

脅强-能量張量中都佔有一定地位。

$$4\pi T^{\mu\nu}=F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha}-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}。\qquad(5.22)$$

電磁場的脅强-能量張量

練習 5.1　　**練習**

試證明，在一 Lorentz 坐標系中計算 (5.22) 式，得

$$T^{00}=(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi,\quad T^{0j}=T^{j0}=(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^j/4\pi,$$
$$T^{jk}=\frac{1}{4\pi}\left[-(E^jE^k+B^jB^k)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)\delta^{jk}\right]。\qquad(5.23)$$

試證明這個脅强張量確如上文所述，描述一沿場線的張力 $(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi$ 和垂直於場線的壓力 $(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi$。

---

§ 5.7　脅强-能量張量的對稱性

以上研究過的所有脅强-能量張量都是對稱的。它們不可能有其他情況，理由如下。

在一特定的 Lorentz 參照系中作計算。首先考慮動量密度（T^{j0}分量）和能流（T^{0j}分量）。它們應相等，因爲能量＝質量（"$E=MC^2=M$"）：

證明脅强-能量張量是對稱的

$$\begin{aligned}T^{0j}&=\text{（能流）}\\&=\text{（能量密度）}\times\text{（能量流的平均速度）}^j\\&=\text{（質量密度）}\times\text{（質量流的平均速度）}^j\\&=\text{（動量密度）}=T^{j0}。\end{aligned}\qquad(5.24)$$

只剩下了脅强張量T^{jk}。對此，可以採用 Newton 理論中所使用的同樣的標準論證。考慮一個很小的立方體，邊長爲 L，質量-能量爲 $T^{00}L^3$，轉動慣量

$\sim T^{00}L^5$。取原點在立方體中心的空間坐標系，立方體周圍施予立方體的力矩的 z 分量的表達式爲

$$\tau^z = \underbrace{(-T^{yz}L^2)}_{\left\{\begin{array}{l}\text{作用於}+x\\ \text{面的力的}\\ y\text{分量}\end{array}\right.}\underbrace{(L/2)}_{\left\{\begin{array}{l}\text{到}+x\\ \text{面的}\\ \text{力臂}\end{array}\right.} + \underbrace{(T^{yz}L^2)}_{\left\{\begin{array}{l}\text{作用於}-x\\ \text{面的力的}\\ y\text{分量}\end{array}\right.}\underbrace{(-L/2)}_{\left\{\begin{array}{l}\text{到}-x\\ \text{面的}\\ \text{力臂}\end{array}\right.}$$

$$- \underbrace{(-T^{xy}L^2)}_{\left\{\begin{array}{l}\text{作用於}+y\\ \text{面的力的}\\ x\text{分量}\end{array}\right.}\underbrace{(L/2)}_{\left\{\begin{array}{l}\text{到}+y\\ \text{面的}\\ \text{力臂}\end{array}\right.} - \underbrace{(T^{xy}L^2)}_{\left\{\begin{array}{l}\text{作用於}-y\\ \text{面的力的}\\ x\text{分量}\end{array}\right.}\underbrace{(-L/2)}_{\left\{\begin{array}{l}\text{到}-y\\ \text{面的}\\ \text{力臂}\end{array}\right.}$$

$$=(T^{xy}-T^{yx})L^3。$$

由於隨着 L 的減小，力矩按 L^3 減小，同時轉動慣量按 L^5 減小，所以力矩將使任意小的立方體具有任意大的角加速度——這顯然是荒謬的。爲了避免這個結果，脅强的分布應使力矩爲零：

$$T^{yz}=T^{xy}。$$

換言之，如果脅强不如此分布，則所得無限大角加速度將立卽使之重新回復到平衡。這個力矩平衡條件（對於所有其他的一對對方向均可重複同樣的證明），等價於脅强的對稱性。

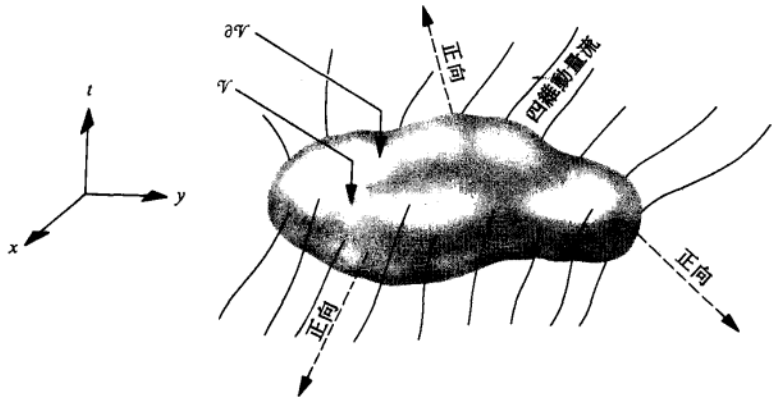
$$T^{jk}=T^{kj}。 \tag{5.25}$$

§ 5.8 四維動量守恒：積分公式

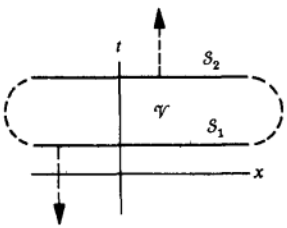
一個多世紀以來，能量-動量守恒一直是物理學的基石。沒有任何地方能像它的Einstein幾何公式那樣，把它的本質清晰地顯現出來（圖5.3a）。考察以閉合三維面$\partial\mathcal{V}$爲邊界的四維空時區域$\mathcal{V}$，隨着粒子和場流入$\mathcal{V}$以後又流出，它們都携帶着四維動量。在$\mathcal{V}$內，粒子發生碰撞、分裂、輻射；輻射會傳播，擾動粒子，產生着粒子對。但是，在這些物理過程複雜迷宮的每一階段，總能量-動量是守恒的。粒子失去的能量-動量爲場所有；場失去的能量-動量爲粒子所有。因此，最後當四維動量之「河」從$\mathcal{V}$流出時，它帶出的能量-動量與它帶入的能量-動量是精確相同的。

四維動量的積分守恒定律：$\oint_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}=0$

找出穿過 $\partial\mathcal{V}$ 外流的總四維動量流，卽可再得到這個等式。認爲流入的四維動量爲負值。則「流入等於流出」意卽「總的流出量爲零」。

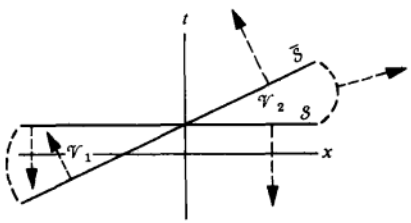


(a)



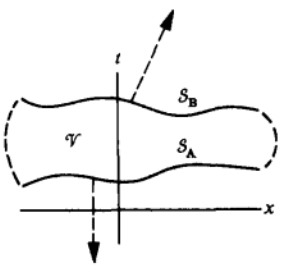
$\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1$

(b)



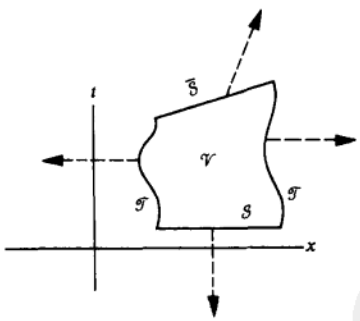
$\partial\mathcal{V} = \partial(\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1) = \bar{\mathcal{S}} - \mathcal{S}$

(c)



$\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}_B - \mathcal{S}_A$

(d)



$\partial\mathcal{V} = \bar{\mathcal{S}} - \mathcal{S} + \mathcal{T}$

(e)

圖 5.3

(a)以閉合三維面$\partial\mathcal{V}$爲邊界的四維空時區域 $\mathcal{V}$. $\partial\mathcal{V}$ 的正向定義爲處處向外（離開$\mathcal{V}$）。能量-動量守恒要求經 $\partial\mathcal{V}$ 流入 $\mathcal{V}$ 內的每一點四維動量都必須在某個地方流出去；一點也不能留在$\mathcal{V}$內；內部沒有「壑」。這等價於說，四維動量在正向（向外）通過 $\partial\mathcal{V}$ 的總通量必爲零：

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} T^{\mu\alpha} d^3\Sigma_\alpha = 0 。$$

圖 (b), (c), (d) 和 (e) 描繪了課文中應用四維動量守恒定律的一些例子。這些圖中的全部符號$\mathcal{V}$（或 $\mathcal{S}$）都是具有標準指向的空時體積（或類空三維體積）。虛線箭頭標明了課文中討論四維動量守恒所用之閉合面$\partial\mathcal{V}$的正向。圖下端的公式指出了怎樣由面$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$構成$\partial\mathcal{V}$。例如，在圖(b)的情況下，$\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1$ 意味着 $\partial\mathcal{V}$ 是由具有標準指向的$\mathcal{S}_2$與具有反指向的$\mathcal{S}_1$連在一起構成的。

經閉合三維面外流的總四維動量流必為零。 (5.26)

爲了用最基本的方式計算總外流量，用大量正向外指（指向$\mathcal{V}$之外）的平直三維體積（「鍋爐鋼板」）近似表示閉合三維面$\partial\mathcal{V}$。則

$$\mathbf{P}_{\text{總輸出}}=\sum_{\text{鍋爐鋼板}A}\mathbf{T}(\ldots,\boldsymbol{\Sigma}_{(A)})=0, \tag{5.27}$$

式中$\boldsymbol{\Sigma}_{(A)}$爲鍋爐鋼板$A$的體積1-形式。等價地用分量符號表爲

$$p^{\mu}{}_{\text{總輸出}}=\sum_{A}T^{\mu\alpha}\Sigma_{(A)\alpha}。 \tag{5.27'}$$

爲了計算更爲完善，取鍋爐鋼板的數目趨於無窮大而其大小趨於零的極限。結果是一個積分（本節末，框5.3），

$$p^{\mu}{}_{\text{總輸出}}=\oint_{\partial\mathcal{V}}T^{\mu\alpha}d^3\Sigma_{\alpha}=0。 \tag{5.28}$$

此式（像所有的分量方程一樣）可以被看作是與坐標無關的方程：

$$\mathbf{P}_{\text{總輸出}}=\oint_{\partial\mathcal{V}}\mathbf{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}=0。 \tag{5.29}$$

的方便的表示方法。爲了更完善（在初讀本書時並不推薦讀者閱讀），且在實際情況中簡化計算，把被積函數解釋爲外微分形式（框5.4，本節末）。

但是，無論怎樣計算，也無論怎樣解釋被積函數，結論的表述是很簡單的：經閉合三維面外流的總四維動量流應爲零。

積分守恒定律的一些特殊情況

如圖 5.3 所示的「積分守恒定律」的若干特殊情況是有啓發性的。除一般情況(a)外，圖中還指出：

情況(b)

閉合三維面$\partial\mathcal{V}$是由在特定的 Lorentz 參照系中取恒定時間 t 的兩薄片，加上把兩薄片在「無窮遠」處連在一起的類時面組成的。如果脅强-能量張量在無窮遠處衰減得足夠快，則在無窮遠的各面對$\oint_{\partial\mathcal{V}}T^{\mu\alpha}d^3\Sigma_{\alpha}$無貢獻。根據定義，具有標準取向的四維體積$\mathcal{V}$的邊界是$\partial\mathcal{V}$，它的正向是離開$\mathcal{V}$的。正如$\partial\mathcal{V}=S_2-S_1$所指出，這就要求$S_1$具有非標準取向（正向指着過去）；這在計算

超面積分時產生一符號的改變

$$0=\oint_{\partial\mathcal{V}} T^{\alpha\mu}d^3\Sigma_\mu=-\int_{S_1} T^{\alpha 0}dxdydz+\int_{S_2} T^{\alpha 0}dxdydz\,。$$

因爲$T^{\alpha 0}$是四維動量密度，上式表明

$$\begin{pmatrix}\text{在時刻 } t_1 \text{ 全空間}\\ \text{的總四維動量}\end{pmatrix}=\int_{S_1} T^{\alpha 0}dxdydz$$

總四維動量不隨時間變

$$=\begin{pmatrix}\text{在時刻 } t_2 \text{ 全空間}\\ \text{的總四維動量}\end{pmatrix}=\int_{S_2} T^{\alpha 0}dxdydz\,。\qquad(5.30)$$

情況(c)

此處，希望比較在S和$\bar{S}$上的超面積分，S和$\bar{S}$分別是在兩個不同 Lorentz參照系中，$t=$常數和$\bar{t}=$常數的薄片。爲了形成一個閉合超面，加上在無窮遠處的類時超面，並假設它對積分無貢獻。僅當取 $\mathcal{V}=\mathcal{V}_2-\mathcal{V}_1$，即僅當 $\mathcal{V}_1$ 採用非標準的四維體積指向時，各面的指向才能光滑地密接在一起，形成一閉合面

$$\partial\mathcal{V}=\bar{S}-S+\text{（無窮遠處的面）}\,。$$

（參看框 5.3 的A. 1 部分關於「標準」與「非標準」指向的對照。）這時積分守恒定律給出

$$0=\int_{\bar{S}} \boldsymbol{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}-\int_S \boldsymbol{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}\,,$$

或等價地，

$$\int_{\bar{S}} \boldsymbol{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\text{在}\bar{S}\text{上的總}\\ \text{四維動量}\boldsymbol{p}\end{pmatrix}$$

在所有的 Lorentz參照系中，總四維動量相同

$$=\int_S \boldsymbol{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\text{在}S\text{上的總}\\ \text{四維動量}\boldsymbol{p}\end{pmatrix}\,。\qquad(5.31)$$

上式表明，在不同 Lorentz 參照系中的觀測者測出的總四維動量$\boldsymbol{p}$相同。但這並不意味着他們測出的各個分量也相等（$p^\alpha\neq\bar{p}^{\bar{\alpha}}$）；倒不如說，這意味着他們測的是相同的幾何矢量

$$\boldsymbol{p}\text{在}S\text{上}=p^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha=\boldsymbol{p}\text{在}\bar{S}\text{上}=\bar{p}^{\bar{\alpha}}\boldsymbol{e}_{\bar{\alpha}}\,,$$

而這個矢量在各 Lorentz參照系中的分量，由通常的 Lorentz 變換定律聯繫在一起

$$\bar{p}^{\bar{\alpha}}=\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_\beta p^\beta\,。\qquad(5.32)$$

情況(d)

此處，對積分的貢獻完全來自切過整個空時的兩個任意類空超面S_A和S_B。如情況(a)和情況(b)一樣，守恒定律的積分形式爲

總四維動量與測量它的超面在何處無關

$$\boldsymbol{P}\text{在}S_A\text{上}=\boldsymbol{P}\text{在}S_B\text{上}; \tag{5.33}$$

即，在通過空時的類空薄片上的總四維動量與特定薄片的選取無關——只要通過連接S_A與S_B的在「無窮遠處的超面」的能量-動量流爲零。

情況(e)

這種情況涉及到隨着時間的流逝盒壁在振盪和加速的盒子。其三維邊界$\partial\mathcal{V}$由下述三部分組成：(1)在盒的初始 Lorentz參照系中，在初始時刻$t=$常數，取非標準指向的盒內部S；(2)在盒的終態 Lorentz 系中，在$\bar{t}=$常數時，取標準指向的盒內部$\bar{S}$；(3)在初態與終態之間，盒的二維面所掃過的正向外指的三維體積$\mathcal{T}$，積分守恒定律$\int_{\partial\mathcal{T}}\boldsymbol{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}=0$表明

盒中四維動量隨時間的改變等於通過其表面的四維動量流

$$\begin{pmatrix}\text{盒內在}\bar{S}\text{處的}\\ \text{總四維動量}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{盒內在}S\text{處的}\\ \text{總四維動量}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{通過}S\text{態和}\bar{S}\text{態之間的表面}\\ \text{進入盒中的總四維動量}\end{pmatrix}。 \tag{5.34}$$

§5.9 四維動量守恒：微分公式

具有同樣信息含量的「微分守恒定律」是對任何「平直空時中積分守恒定律」的補充。其間的往返變換可用Guass定理。

應用於四維動量守恒的四維 Guass 定理把$T^{\mu\alpha}$的面積分轉換爲$T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}$的體積分：

$$0=\oint_{\partial\mathcal{T}}T^{\mu\alpha}d^3\Sigma_\alpha=\int_{\mathcal{T}}T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}dtdxdydz。 \tag{5.35}$$

（初步的討論見框5.3，完善的討論見框5.4。）如果按要求，在每一任意四維體積$\mathcal{V}$中，$T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}$的積分都爲零，則$T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}$本身必定在空時中處處爲零：

四維動量的微分守恆定律：$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$

$$T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}=0;\quad \text{即處處}\ \nabla\cdot\boldsymbol{T}=0。 \tag{5.36}$$

（接第152頁）

框 5.3　用分量符號表示體積分，面積分和 Guass 定理

A. 空時中的體積分

1. 類似於三維空間，以矢量 **A**, **B**, **C**, **D** 爲邊的「超平行六面體」的體積爲

$$\text{四維體積} \equiv \Omega \equiv \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta$$
$$= \det \begin{Vmatrix} A^0 & A^1 & A^2 & A^3 \\ B^0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ C^0 & C^1 & C^2 & C^3 \\ D^0 & D^1 & D^2 & D^3 \end{Vmatrix}$$
$$= {}^*(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) \circ$$

與三維體積一樣，上式的指向是重要的；若交換任意兩條邊，則 Ω 的符號相反。任何四維體積的標準指向是使 Ω 爲正的指向；因此，如果 $\mathbf{e}_0$ 指向未來，且 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 爲按右手排列的三個基矢，則 $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ 具有標準指向。

2. 按照上述定義，在特定的標準指向 Lorentz 參照系中，各邊爲

$$A^\alpha = (\Delta t, 0, 0, 0), \quad B^\alpha = (0, \Delta x, 0, 0),$$
$$C^\alpha = (0, 0, \Delta y, 0), \quad D^\alpha = (0, 0, 0, \Delta z)$$

的「體元」的四維體積爲

$$\Delta^4\Omega = \epsilon_{0123} \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$$
$$= \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z \circ$$

3. 因此，以

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\substack{\text{元體積數} \\ \to\infty}} \sum_{\substack{\text{在}\mathcal{V}\text{中的各} \\ \text{元體積}\mathcal{A}}} \mathbf{S}_{\text{在}\mathcal{A}\text{的中心}} \ (\mathcal{A}\text{的體積}),$$

定義的張量 **S** 在空時四維體積區域 $\mathcal{V}$ 上的體積分，在 Lorentz 參照系中可由下式計算：

$$M^\alpha{}_{\beta\gamma} = \int_{\mathcal{V}} S^\alpha{}_{\beta\gamma} d^4\Omega = \int_{\mathcal{V}} S^\alpha{}_{\beta\gamma} dt dx dy dz \circ$$

B. 空時中的三維面積分

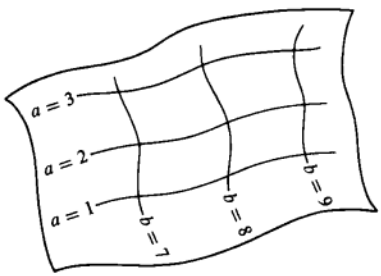
1. 在三維面上引入任意坐標 a, b, c。以坐標面

$a_0<a<a_0+\Delta a$, $b_0<b<b_0+\Delta b$, $c_0<c<c_0+\Delta c$,

爲邊界的元體積的各邊爲

$$A^\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial a}\Delta a,\ B^\beta=\frac{\partial x^\beta}{\partial b}\Delta b,$$

$$C^\gamma=\frac{\partial x^\gamma}{\partial c}\Delta c;$$



故其體積1-形式爲

$$\Delta^3\Sigma_\mu=\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial a}\frac{\partial x^\beta}{\partial b}\frac{\partial x^\gamma}{\partial c}\Delta a\,\Delta b\,\Delta c。$$

2. 因此，張量S在三維面S上積分的各分量爲

$$N^\alpha{}_\beta=\int_S S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma=\int_\alpha S^\alpha{}_\beta{}^\gamma\epsilon_{\gamma\mu\nu\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial a}\frac{\partial x^\nu}{\partial b}\frac{\partial x^\lambda}{\partial c}dadbdc。$$

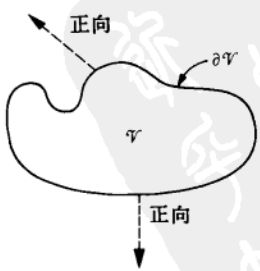
也常採用含有 Jacobi 行列式的等效公式（見練習5.5）：

$$N^\alpha{}_\beta=\int_S S^\alpha{}_\beta{}^\gamma\frac{1}{3!}\epsilon_{\gamma\mu\nu\lambda}\frac{\partial(x^\mu,x^\nu,x^\lambda)}{\partial(a,b,c)}dadbdc。$$

C. Guass 定理的表述

1. 考慮閉合邊界爲 $\partial\mathcal{V}$ 的有界空時四維區域 $\mathcal{V}$。規定 $\partial\mathcal{V}$ 上體積1-形式的「正向」是離開$\mathcal{V}$的。
2. 選取一張量場 S，把它的散度在 $\mathcal{V}$ 上積分，而把它自身在 $\partial\mathcal{V}$ 上積分，則結果應相同（Guass定理）

$$\int_{\mathcal{V}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_{,\gamma}d^4\Omega=\oint_{\partial\mathcal{V}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma。$$



D. Guass 定理的證明

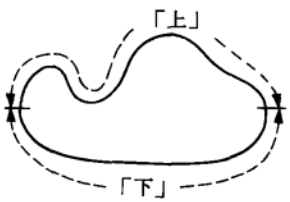
1. $S^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}$ 的指標 α, β，「是自由選取的」，因此，證明時可以隱匿。於是，要推導的方程是

$$\int_{\mathcal{V}} S^{\gamma}{}_{,\gamma}\, dt\, dx\, dy\, dz = \oint_{\partial\mathcal{V}} S^{\gamma} d^3\Sigma_{\gamma}。$$

2. 因爲微商的積分正是原來的函數，所以 $S^{0}{}_{,0}$ 的體積分是

$$\int_{\mathcal{V}} S^{0}{}_{,0} dt\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{「上方」} S^{0} dx\, dy\, dz - \int_{「下方」} S^{0} dx\, dy\, dz。$$



3. 可以把面積分 $\int_{\partial\mathcal{V}} S^{0} d^3\Sigma_0$ 化成一些同樣的項：

a. 採用 x, y, z 爲 $\partial\mathcal{V}$ 上的坐標。在「上方」，爲了使「正」向指着離開$\mathcal{V}$的方向，$d^3\Sigma_0$應爲正，所以（見上述B部分）

$$d^3\Sigma_0 = \epsilon_{0\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial z} dx\, dy\, dz$$

$$= \epsilon_{0123} dx\, dy\, dz = dx\, dy\, dz。$$

b. 在「下方」，$d^3\Sigma_0$ 應爲負值，所以

$$d^3\Sigma_0 = -dx\, dy\, dz。$$

c. 因此，

$$\int_{\partial\mathcal{V}} S^{0} d^3\Sigma_0 = \int_{「上方」} S^{0} dx\, dy\, dz - \int_{「下方」} S^{0} dx\, dy\, dz。$$

4. 用同樣的方式，可以證明其他分量的等式。各分量相加即得所需之結果：

$$\int_{\mathcal{V}} S^{\gamma}{}_{,\gamma} d^4\Omega = \oint_{\partial\mathcal{V}} S^{\gamma} d^3\Sigma_{\gamma}。$$

對於已經讀過第四章的讀者

框 5.4 I. 每一個積分都是某一形式的積分，II. 用形式語言表述的 Guass 定理。

I．第五章所遇到的每一個積分都可以解釋爲外微分形式的積分。例如，在三維和四維積分中，這種情況表明

$$d^4\Omega = \boldsymbol{\epsilon} = {}^*1 = \varepsilon_{0123}\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z$$

和

$$d^3\Sigma_\mu = \varepsilon_{\mu|\alpha\beta\gamma|}\mathbf{d}x^\alpha\wedge\mathbf{d}x^\beta\wedge\mathbf{d}x^\gamma$$

是4-形式基和3-形式基。（記住：在兩條豎直線之間的指標 $\alpha\beta\gamma$ 只對 $0\leq\alpha<\beta<\gamma\leq 3$求和。）更廣泛的符號術語可在下面的 C 部分找到。

II．平直空間中張量積分的Guass定理對任意張量，如 $\boldsymbol{S}=S^\alpha{}_\beta{}^\gamma\mathbf{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta\otimes\mathbf{e}_\gamma$（分量形式見框5.3），有

$$\int_\mathcal{T}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S})d^4\Omega = \oint_{\partial\mathcal{T}}\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\Sigma}。$$

這是廣義 Stokes 定理（框 4.1）的一個應用，並取決於下述事實，即總體的 Lorentz 參照系的基矢 $\mathbf{e}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{\omega}^\beta$ 是常數，即與 x 無關。定義如A；證明見B。

A.張量值積分可以在平直空間中定義，是因爲所用基矢爲常數。於是，對如下已給秩的張量，可定義爲

$$\int\boldsymbol{S}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta\int S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma。$$

因爲基矢和形式是常數，與空時中的位置無關，可以把它們提到積分號之外。如框4.1所述，把在超面上任一適當指向的參量代入 3-形式 $S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma$（在這部分計算中，任意曲線的參量化不包括在「自由指標」α 和 β 之內），即可計算出每一個數 $\int S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma$（$\alpha,\beta=0,1,2,3$）。換言之，把 $\boldsymbol{S}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}=\mathbf{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta\otimes S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma$ 看作「張量值3-形式」。在積分號內，它和與積分三維面 $\mathcal{P}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)$相切的超平面元縮併成下述積分

$$\begin{aligned}\int\boldsymbol{S}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} &= \int\left\langle \boldsymbol{S}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}, \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^1}\wedge\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^2}\wedge\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda^3}\right\rangle d\lambda^1 d\lambda^2 d\lambda^3 \\ &= \mathbf{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta\int S^\alpha{}_\beta{}^\gamma\,\varepsilon_{\gamma|\lambda\mu\nu|}\underbrace{\frac{\partial(x^\lambda,x^\mu,x^\nu)}{\partial(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)}}_{\substack{\text{Jacobi}\\ \text{行列式}}}d\lambda^1 d\lambda^2 d\lambda^3。\end{aligned}$$

這裏，盡管恆定基矢 $\mathbf{e}_\alpha$，$\boldsymbol{\omega}^\beta$，由直角坐標系導出這一點是重要的，但是完全一般的超面參量也是可以採用的。

B. Guass 定理的證明是下述計算：

$$\oint_{\partial\mathcal{T}} \mathbf{S}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta \oint_{\partial\mathcal{T}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma \qquad (\mathbf{e}_\alpha,\boldsymbol{\omega}^\beta\text{是常數})$$

$$= \mathbf{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta \int_{\mathcal{T}} \mathbf{d}(S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma) \qquad (\text{Stokes定理})$$

$$= \mathbf{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta \int_{\mathcal{T}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_{,\gamma} {}^*1 \qquad (\text{見下面})$$

$$= \int_{\mathcal{T}} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S}) d^4\Omega\,。 \qquad (\text{僅僅是符號})$$

上面省去的計算步驟是

$$\mathbf{d}(S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma) = (\partial S^\alpha{}_\beta{}^\gamma/\partial x^\rho)\mathbf{d}x^\rho\wedge d^3\Sigma_\gamma$$
$$= (\partial S^\alpha{}_\beta{}^\gamma/\partial x^\gamma){}^*1\,。$$

此處第一步用到 $\mathbf{d}(d^3\Sigma_\gamma)=0$（它是由平直空時中 $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}=$常數導出的）。第二步用到

$$\mathbf{d}x^\rho\wedge d^3\Sigma_\gamma = \delta^\rho_\gamma {}^*1\,。$$

[把這個等式的左側寫爲 $\varepsilon_{\gamma[\mu\nu\lambda]}\mathbf{d}x^\rho\wedge\mathbf{d}x^\mu\wedge\mathbf{d}x^\nu\wedge\mathbf{d}x^\lambda$，對 $\mu\nu\lambda$ 求和中唯一可能的非零項是 $\mu<\nu<\lambda$ 且均不等於 ρ 的項。上式右側就是這一項的值。]

C. 符號術語

電荷密度3-形式：

$${}^*\mathbf{J} = J^\rho d^3\Sigma_\rho = \mathbf{J}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}$$
$$= J^\rho\varepsilon_{\rho\alpha\beta\gamma}\mathbf{d}x^\alpha\wedge\mathbf{d}x^\beta\wedge\mathbf{d}x^\gamma/3!\,。$$

$(*J)_{\alpha\beta\gamma}$　　$d^3\Sigma_\rho$

Maxwell 和 Faraday 2-形式：

$${}^*\mathbf{F} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}d^2S_{\mu\nu}\,;$$
$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathbf{d}x^\mu\wedge\mathbf{d}x^\nu\,。$$

2-形式基：

$\mathbf{d}x^\alpha\wedge\mathbf{d}x^\beta$；　　（標號的一種方式）

$d^2S_{\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu[\alpha\beta]}\mathbf{d}x^\alpha\wedge\mathbf{d}x^\beta$。　　（標號的對偶方式）

能量-動量密度3-形式：

$$\mathbf{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} \equiv \mathbf{e}_\mu T^{\mu\nu}d^3\Sigma_\nu \equiv {}^*\mathbf{T}\,;$$

最後指標的對偶，$(*T)^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}=T^{\mu\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}$。

角動量密度3-形式

$$\mathcal{J}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{e}_\mu\wedge\mathbf{e}_\nu\mathcal{J}^{\mu\nu\alpha}d^3\Sigma_\alpha \equiv {}^*\mathcal{J}\,;$$
$$(*\mathcal{J})^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{J}^{\mu\nu\lambda}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma}\,。$$

（在與坐標無關的方程$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$中，毋需擔心對$\boldsymbol{T}$的哪一個空位取散度；因爲兩空位是對稱的，哪一個都可以用。）

方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 是四維動量守恒定律的微分形式。它也稱爲脅強-能量的運動方程，因爲它限制了脅强-能量張量的動力學演化。對於簡單的系統，考察這些限制就可以認識到方程$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$的美妙和威力。

§5.10 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 的應用舉例

Newton流體以 $|v^j|\ll 1$, $p\ll\rho$爲特徵

當應用於近似的 Newton 流體時，運動方程$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$與經典（Newton）流體動力學方程相聯繫。這種流體相對於所用的 Lorentz 參照系的速度很低 $|v^j|\ll 1$；並且在流體靜止參照系中，它的壓力比它的質量-能量密度小得多 $p/\rho=p/\rho c^2\ll 1$。例如，颶風中的空氣，有

$$|v^j|\sim 100\text{公里}/\text{時}\sim 3{,}000\text{厘米}/\text{秒}\sim 10^{-7}c=10^{-7}\ll 1。$$

$$\frac{p}{\rho}\sim\frac{1\text{大氣壓}}{10^{-3}\text{克}/\text{厘米}^3}\sim\frac{10^6\text{達因}/\text{厘米}^2}{10^{-3}\text{克}/\text{厘米}^3}=10^9\,\frac{\text{厘米}^2}{\text{秒}^2}\sim 10^{-12}c^2=10^{-12}\ll 1。$$

Newton 流體的脅强-能量張量和運動方程

這種流體的脅强-能量張量的分量爲

$$T^{00}=(\rho+p)u^0u^0-p\approx\rho\,,\tag{5.37a}$$

$$T^{0j}=T^{j0}=(\rho+p)u^0u^j\approx\rho v^j\,,\tag{5.37b}$$

$$T^{jk}=(\rho+p)u^ju^k+p\delta^{jk}\approx\rho v^jv^k+p\delta^{jk}\,;\tag{5.37c}$$

運動方程$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$的分量爲

$$T^{00}{}_{,0}+T^{0j}{}_{,j}=\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0\tag{5.38a}$$

（「連續性方程」）；

和

$$T^{j0}{}_{,0}+T^{jk}{}_{,k}=\partial(\rho v^j)/\partial t+\partial(\rho v^jv^k)/\partial x^k+\partial p/\partial x^j=0\,,$$

或等效地（與連續性方程合在一起），

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p\quad\text{（「Euler方程」）。}\tag{5.38b}$$

框5.5按 Newton 的觀點導出並討論了這些結果。

$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$應用於帶電的振盪橡皮塊

作爲 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 的第二個應用，考慮一復合系統：和電磁場相互作用的嵌有帶電珠子的橡皮塊。橡皮塊振動着，其中加速的珠子輻射電磁波；同時，入射電磁波推動這些珠子，改變了橡皮塊振動的樣式。這種相互作用使得四維動量在嵌有珠子的橡皮和電磁場之間往返。橡皮塊和場的四維動量都不守恆；

框 5.5 Newton 流體動力學概述

考慮經典的非相對論性理想流體。把 Newton 定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 用於一「流體粒子」；即用於隨着在空間運動的流體中的一微小固定質量上：

$$\frac{d}{dt}\text{（單位質量的動量）}=\text{（單位質量所受的力）}$$

$$=\frac{\text{（單位體積所受的力）}}{\text{（密度）}}=\frac{-\text{（壓力梯度）}}{\text{（密度）}}$$

或

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p。\tag{1}$$

把跟隨流體的時間變化率轉換爲在一固定位置測出的時間變化率，得：

$$\begin{pmatrix}\text{跟隨流體的}\\ \text{時間變化率}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{在固定位置的}\\ \text{時間變化率}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{流體}\\ \text{速度}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{位置的}\\ \text{變化率}\end{pmatrix}$$

或

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p\tag{2}$$

或

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_{i,k}v_k=-\frac{1}{\rho}p_{,i}。$$

（拉丁指標取 1 到 3；求和慣例；在平直空間，上、下指標對於空間維數可以無區別地應用！）這是理想流體的流體動力學 Euler 基本方程。

爲了完成對理想流體的描述，還需要另外兩個方程。其一是指熱傳導不存在，這由要求每一流體「粒子」的比熵（單位質量的熵）是常數來表示：

$$\frac{ds}{dt}=0,\ \text{或}\ \frac{\partial s}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)s=0。\tag{3}$$

最後一個方程表示質量守恆：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0,\tag{4}$$

或

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho v_k)_{,k}=0;$$

它在各方面都類似於電動力學中表示電荷守恆的方程，從而有同樣的名稱「連續性方程」。

Newton脅强-能量張量，和它的相對論性對應張量一樣，是與動量和質量守恆相聯繫的。因此，考察單位體積內流體動量密度 ρv_i 的時間變化率；得，

$$\partial(\rho v_i)/\partial t = -(\rho v_i v_k)_{,k} - p_{,i} 。 \tag{5}$$

動量從小體積元的左側（「力等於動量的時間變化率」）流入，再從右側流出；其他各面類似。因此，(5)式右側應代表動量流的散度：

$$\partial(\rho v_i)/\partial t = -T_{ik,k} 。 \tag{6}$$

結果，可把動量流本身取爲

$$T^{ik} = T_{ik} = \underbrace{\rho v_i v_k}_{\text{「對流」}} + \underbrace{\delta_{ik} p}_{\text{「推力」}} 。 \tag{7}$$

對於動量密度，Newton 值爲

$$T^{0i} = T^{i0} = \rho v_i 。 \tag{8}$$

用這個符號，動量的時間變化率方程變爲

$$\partial T^{i\mu}/\partial x^{\mu} = 0 ; \tag{9}$$

又因 $T^{00} = \rho$, 連續性方程爲

$$\partial T^{0\mu}/\partial x^{\mu} = 0 。 \tag{10}$$

結論：Newton 的這些研究是相對論性脅强-能量張量的合理近似：

$$\left\| \begin{array}{c:c} \rho & \rho v^j \\ \hdashline \rho v^i & \rho v^i v^j + \delta^{ij} p \end{array} \right\| \simeq \left\| \begin{array}{c:c} (p+\rho) u^0 u^0 - p & (p+\rho) u^0 u^j \\ \hdashline (p+\rho) u^0 u^i & (p+\rho) u^i u^j + \delta^{ij} p \end{array} \right\| \tag{11}$$

$\nabla \cdot \boldsymbol{T}$（橡皮塊）和$\nabla \cdot \boldsymbol{T}$（電磁場）都不爲零。但是總的四維動量應守恆，所以

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{T}(\text{橡皮塊})+\boldsymbol{T}(\text{電磁場}))\text{爲零。} \tag{5.39}$$

對於與任何源相互作用的一般電磁場，$\nabla \cdot \boldsymbol{T}$(電磁場)的形式爲

$$T^{\mu\nu}{}_{(\text{電磁場}),\nu}=-F^{\mu\alpha}J_{\alpha}。 \tag{5.40}$$

（上式是在練習3.18中，把 $T^{\mu\nu},_{\nu}=0$ 和電磁脅强-能量張量的表達式(5.22)式以及 Maxwell 方程組聯合在一起導出的。）對於嵌有珠子的橡皮塊，$\boldsymbol{J}$是與振動帶電珠子相聯繫的四維電流，而$\boldsymbol{F}$是電磁場張量。(5.40)式的時間分量爲

$$\begin{aligned} T^{0\nu}{}_{(\text{電磁場}),\nu}&=-F^{0k}J_{k}=-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} \\ &=-\begin{pmatrix}\text{電場}\boldsymbol{E}\text{對單位體積帶}\\ \text{電珠子作功的速率}\end{pmatrix}。 \end{aligned} \tag{5.41}$$

作爲比較，$T^{00}{}_{(\text{橡皮塊}),0}$ 是橡皮塊能量密度隨時間的變化率，$-T^{0j}{}_{(\text{橡皮塊}),j}$ 是橡皮塊能流對此能量密度變化率的貢獻，由此，它們之差 $T^{0\nu}{}_{(\text{橡皮塊}),\nu}$ 的意義爲

$$T^{0\nu}{}_{(\text{橡皮塊}),\nu}=\begin{pmatrix}\text{除了橡皮塊各部分間的內部}\\ \text{機械力作用外，由其他作用}\\ \text{所引起的單位體積橡皮塊質}\\ \text{量-能量增加的速率}\end{pmatrix}。 \tag{5.42}$$

所以，守恆定律

$$(T^{0\nu}{}_{(\text{電磁場})}+T^{0\nu}{}_{(\text{橡皮塊})}),_{\nu}=0$$

表明橡皮塊質量-能量增加的速率與電場對珠子作功的速率精確相同。對於動量，有類似的結果：

$$\begin{aligned} T^{k\nu}{}_{(\text{電磁場}),\nu}\boldsymbol{e}_{k}&=-F^{k\nu}J_{\nu}\boldsymbol{e}_{k}=-(J^{0}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}) \\ &=-\begin{pmatrix}\text{作用於單位體積}\\ \text{珠子的Lorentz力}\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$T^{k\nu}{}_{(\text{橡皮塊}),\nu}\ \boldsymbol{e}_{k}=\begin{pmatrix}\text{除了橡皮塊自身的脅强}\\ \text{外，由其他作用所引起}\\ \text{的單位體積橡皮塊動量}\\ \text{增加的速率}\end{pmatrix}; \tag{5.44}$$

因此，守恆定律

$$(T^{k\nu}{}_{(\text{電磁場})}+T^{k\nu}{}_{(\text{橡皮塊})}),_{\nu}=0$$

表明橡皮塊的動量變化率等於電磁場作用於橡皮塊內珠子上的力。

§5.11 角動量

定義角動量並導出它的積分守恒定律

脅强-能量張量的對稱性$T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu}$使得人們可以定義一個類似於線動量 p^α 的守恆的角動量$J^{\alpha\beta}$。角動量是相對於特定的任意原點（事件$\mathcal{O}$）定義的，事件$\mathcal{O}$在一特殊 Lorentz 參照系中的坐標爲

$$x^\alpha(\mathcal{O})=a^\alpha。 \tag{5.45}$$

相對於$\mathcal{O}$的角動量是用張量

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma}=(x^\alpha-a^\alpha)T^{\beta\gamma}-(x^\beta-a^\beta)T^{\alpha\gamma} \tag{5.46}$$

定義的。（注意，$x^\alpha-a^\alpha$是從「原點」$\mathcal{O}$ 到「場點」x^α 的矢量分離；式中 $T^{\alpha\gamma}$ 是在「場點」計算的。）由於$\boldsymbol{T}$的對稱性，$\mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma}$的散度爲零：

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma}=\delta^\alpha{}_\gamma T^{\beta\gamma}+(x^\alpha-a^\alpha)\underbrace{T^{\beta\gamma}{}_{,\gamma}}_{0}-\delta^\beta{}_\gamma T^{\alpha\gamma}-(x^\beta-a^\beta)\underbrace{T^{\alpha\gamma}{}_{,\gamma}}_{0}$$

$$=T^{\beta\alpha}-T^{\alpha\beta}=0。 \tag{5.47}$$

由此，它對任意閉合三維面的積分爲零

$$\oint_{\partial\mathcal{T}}\mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma}d^3\Sigma_\gamma=0 \tag{5.48}$$

（「角動量守恆定律的積分形式」）

在恒定時間 t 的類空面上的積分是

$$J^{\alpha\beta}=\int\mathcal{J}^{\alpha\beta0}dx\,dy\,dz=\int[(x^\alpha-a^\alpha)T^{\beta0}-(x^\beta-a^\beta)T^{\alpha0}]dx\,dy\,dz。 \tag{5.49}$$

記住，$T^{\beta0}$ 是動量密度，可以看出(5.49)式與 Newton 理論中的 "$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$" 方程有同樣的形式。所以 $J^{\alpha\beta}$ 取名爲「總角動量」。這個守恒角動量的各個方面，包括它與 Newton 角動量的聯繫，將在框 5.6中研究。

練習

練習 5.2 電荷守恒

練習3.16揭示出電荷-電流四維矢量 $\boldsymbol{J}$ 滿足微分守恒定律$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$。試寫出相應的積分守恒定律，並在圖5.3的四個閉合面情況下解釋此定律。

練習 5.3 粒子的產生

在高度演化的大質量恒星內部， 溫度非常高，以致連續的產生和消滅電子-正電子對。設 $\boldsymbol{S}$ 是電子和正電子的數流矢量，並把它的散度記爲

$$\epsilon\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{S}。 \tag{5.50}$$

框 5.6　角 動 量

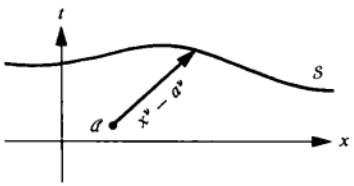
A. 角動量的定義

(a)選取一任意類空超面S和一坐標爲 $x^\alpha(\mathcal{O})\equiv a^\alpha$ 的任意事件 $\mathcal{O}$。（自始至終採用總體慣性坐標系）。

(b)定義「在S上對於$\mathcal{O}$的總角動量」爲

$$J^{\mu\nu}=\int_S \mathcal{J}^{\mu\nu\alpha}d^3\Sigma_\alpha,$$

$$\mathcal{J}^{\mu\nu\alpha}\equiv(x^\mu-a^\mu)T^{\nu\alpha}-(x^\nu-a^\nu)T^{\mu\alpha}。$$



(c)若S爲恆定時間 t 的超面，則上述定義變爲

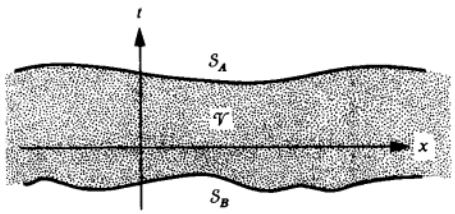
$$J^{\mu\nu}=\int \mathcal{J}^{\mu\nu0}dx\,dy\,dz。$$

B. 角動量守恆

(a) $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ 包括了 $\mathcal{J}^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha}=0$。

(b)這意味著 $J^{\mu\nu}$ 與它在其上作計算的超面S無關（Guass定理）

$$\begin{aligned}&J^{\mu\nu}(S_A)-J^{\mu\nu}(S_B)\\&=\int_{\partial\mathcal{V}}\mathcal{J}^{\mu\nu\alpha}d^3\Sigma_\alpha\\&=\int_{\mathcal{V}}\mathcal{J}^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha}d^4x=0。\end{aligned}$$



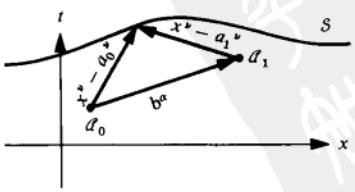
（注意：$\partial\mathcal{V}\equiv$($\mathcal{V}$的邊界）包括 S_A, S_B 以及在空間無窮遠處的類時面；後者的貢獻棄去——局域源）。

C. 改變對之計算角動量的點

設 b^α 爲從 $\mathcal{O}_0$ 到 $\mathcal{O}_1$ 的矢量：$b^\alpha=a_1{}^\alpha-a_0{}^\alpha$。則

$$\begin{aligned}&J^{\mu\nu}(\text{對}\mathcal{O}_1)-J^{\mu\nu}(\text{對}\mathcal{O}_0)\\&=-b^\mu\int_S T^{\nu\alpha}d^3\Sigma_\alpha+b^\nu\int_S T^{\mu\alpha}d^3\Sigma_\alpha\\&=-b^\mu p^\nu+b^\nu p^\mu,\end{aligned}$$

式中 p^μ 是總四維動量。



D. 內稟角動量

(a)暫時地在系統靜止的參照系中來看，對這一參照系

$$P^0=M,\quad P^j=0,\quad x_{\text{質心}}{}^j=\frac{1}{M}\int x^j T^{00}\,d^3x=\text{質心位置}$$

內稟角動量定義爲對於在質心世界線上的任意事件 $(a^0, x_{\text{質心}}{}^j)$ 的角動量。其分量記爲 $S^{\mu\nu}$，算出爲

$$S^{0j}=0,\quad S^{jk}=\epsilon^{jkl}S^l,$$

其中

$$\boldsymbol{S}\equiv\int(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\text{質心}})\times(\text{動量密度})\,d^3x$$
$$\equiv\text{「內稟角動量矢量」}。$$

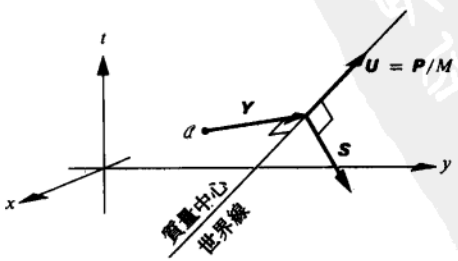
(b)「內稟角動量四維矢量」S^μ 定義爲在靜止參照系中分量爲 $(0,\boldsymbol{S})$ 的四維矢量。則上式表明

$$S^{\mu\nu}=U_\alpha S_\beta\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu},$$
$$U_\beta\equiv P_\beta/M=\text{質心的四維速度},$$
$$U_\beta S^\beta=0。$$

E. 角動量分解爲內稟角動量和軌道角動量

(a)選取任意事件 $\mathcal{A}$，從質心世界線到它的垂直位移爲 $-Y^\alpha$，所以

$$U_\beta Y^\beta=0。$$



(b) 那麼，由C，對於$\mathcal{C}$的角動量爲

$$J^{\mu\nu}=\underbrace{U_\alpha S_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}}_{S^{\mu\nu}\text{(內稟的)}}+\underbrace{Y^\mu P^\nu - Y^\nu P^\mu}_{L^{\mu\nu}\text{(軌道的)}}。$$

(c) 已知對於$\mathcal{C}$的角動量和四維動量（以及由此可知的四維速度），可以計算從$\mathcal{C}$到質心世界線的矢量

$$Y^\mu = -J^{\mu\nu}P_\nu/M^2,$$

以及內稟角動量

$$S_\rho = \frac{1}{2}U^\sigma J^{\mu\nu}\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}。$$

試用Guass定理證明ϵ是在空時中單位四維體積中粒子產生的數目（減去消滅的數目）。

練習 5.4　單位體積的慣性質量

考慮相對一特定 Lorentz 參照系以普通的速度 $|v|<1$ 運動的受壓介質。

(a) 試用 Lorentz 變換證明動量密度的空間分量爲

$$T^{0j}=\sum_k m^{jk}v^k, \tag{5.51}$$

式中

$$m^{jk}=T^{00}\delta^{jk}+T^{jk} \tag{5.52}$$

$T^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ 是在介質靜止參照系中脅强-能量張量的分量。因在整個太陽系內 $T^{00}>|T^{\bar{j}\bar{k}}|$（參看，例如，§5.10對颶風的討論），所以習慣於寫成 $T^{0j}=T^{00}v^j$，即「(動量密度)=(靜質量密度)×(速度)」。但在中子星內部 T^{00} 可能與 T^{jk} 同量級，所以應以低速的方程(5.51)式和(5.52)式代替「(動量密度)=(靜質量密度)×(速度)」。

(b) 試由 Newton 的考慮加上質量與能量的等價性導出 (5.51)式和 (5.52) 式。（提示：體積爲 V 的介質經過觀測者時所携帶的總質量-能量包括靜質量 $T^{00}V$ 以及當該體積被「推」開一段距離時，作用於體積各面上的力所做的功兩者。）

(c) 由關係式(5.51)式，爲了使相對於施力者靜止的受壓介質產生加速度 dv^k/dt，所需的單位體積作用力爲

$$F^j=dT^{0j}/dt=\sum_k m^{jk}dv^k/dt。 \tag{5.53}$$

這個方程暗示我們，應稱m^{jk}爲靜止受壓介質的「單位體積慣性質量」。通常，m^{jk}是一個對稱的3-張量。對於理想流體的特殊情況，它將變成什麼？

(d) 考慮在實驗室參照系中靜止和平衡 ($T^{\alpha\beta}{}_{,0}=0$) 的孤立受壓物體。試證明定義爲

$$M^{ij}=\int_{\text{受壓物體}} m^{ij}\,dx\,dy\,dz \tag{5.54}$$

的物體總慣性質量是各向同性的並等於物體的靜質量

$$M^{ij}=\delta^{ij}\int T^{00}\,dx\,dy\,dz。 \tag{5.55}$$

練習 5.5 行列式和 Jacobi 行列式

(a) 用顯式寫出定義 d^2S_{01} 之和爲

$$d^2S_{\mu\nu}\equiv\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial a}\frac{\partial x^\beta}{\partial b}da\,db。$$

藉此建立公式

$$d^2S_{\mu\nu}=\epsilon_{\mu\nu[\alpha\beta]}\frac{\partial(x^\alpha,x^\beta)}{\partial(a,b)}dadb=\frac{1}{2!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{\partial(x^\alpha,x^\beta)}{\partial(a,b)}da\;db。$$

（這些表達式應該只在積分號下出現。在本練習中可以在任何需要的地方補加以$\int\ldots$，或者用外微積分來解釋這些微分，$dadb\longrightarrow\mathbf{d}a\wedge\mathbf{d}b$ 見框5.4。）此處所用的 Jacobi 行列式的符號是

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(a,b)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial a} & \dfrac{\partial f}{\partial b}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial a} & \dfrac{\partial g}{\partial b}\end{vmatrix}。$$

(b) 試由考察一特殊情況，證明

$$d^3\Sigma_\mu\equiv\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial a}\frac{\partial x^\beta}{\partial b}\frac{\partial x^\gamma}{\partial c}dadbdc=\frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\frac{\partial(x^\alpha,x^\beta,x^\gamma)}{\partial(a,b,c)}dadbdc。$$

(c) 引用把行列式的值表爲一些項 (帶有適當交替的符號) 之和的精確定義，其中的每一項是每行一因子與每列一因子之乘積。試證明此定義可表爲（在 4×4 情況下，顯然可推廣到$p\times p$情況）：

$$\det A\equiv\det\|A^i{}_\rho\|=\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}A^\alpha{}_0A^\beta{}_1A^\gamma{}_2A^\delta{}_3。$$

(d) 試證明

$$\det A=\frac{1}{4!}\delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta}A^\alpha{}_\mu A^\beta{}_\nu A^\gamma{}_\rho A^\delta{}_\sigma$$

($\delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta}$的定義見練習3.13和4.12)。

(e) 試用 δ 符號的性質證明矩陣A之逆矩陣 A^{-1} 的各項 $(A^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}$ 爲

$$(A^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(\det A)=\frac{1}{3!}\delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta}A^{\beta}{}_{\nu}A^{\gamma}{}_{\rho}A^{\delta}{}_{\sigma}。$$

(f) 通過「指標力學」的計算，由 (d) 中的 $\det A$ 公式導出行列式對數微分的下述表達式

$$\boldsymbol{d}\ln|\det A|=(A^{-1}\boldsymbol{d}A)\text{ 的迹。}$$

式中 $\boldsymbol{d}A$ 是各項均爲1-形式的矩陣 $\|\boldsymbol{d}A^{\alpha}{}_{\mu}\|$。

練習 5.6　矩心和大小

考慮脊强-能量張量爲 $T^{\mu\nu}$，總四維動量 P^{α}，四維動量的大小爲 $M=(-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P})^{1/2}$，內稟角動量張量爲 $S^{\alpha\beta}$，以及內稟角動量矢量爲 S^{α}的孤立系統。（見框5.6）具有四維速度爲u^{α}的觀測者在他的 Lorentz 時間 $x^0=t$ 和在他自身的 Lorentz 參照系中，定義系統的矩心爲

$$X^{j}_{\boldsymbol{u}}(t)=(1/p^0)\int_{x^0=t}x^jT^{00}\,d^3x\quad\text{在}\boldsymbol{u}=\partial\mathscr{P}/\partial x^0\text{的 Lorentz 參照系中。}\quad(5.56)$$

這個矩心取決於(i)所研究的特殊系統，(ii)觀測者的四維速度$\boldsymbol{u}$，(iii)觀測系統的時間t。

(a) 試證明矩心以匀速

$$dX^{j}_{\boldsymbol{u}}/dt=P^j/P^0,\qquad(5.57)$$

運動，相應的四維速度爲

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}/M。\qquad(5.57')$$

注意，這個「矩心四維速度」與定義矩心時所用的四維速度 $\boldsymbol{u}$ 無關。

(b) 與系統靜止參照系相聯繫的矩心（即當 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{U}$ 時定義的矩心）稱爲質心；見框5.6，設 $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{u}}$ 爲從質心世界線上任意事件到與四維速度 $\boldsymbol{u}$ 相聯繫的矩心世界線上任意事件的矢量：則在任意坐標系中 $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{u}}$ 的分量爲

$$\xi^{\alpha}_{\boldsymbol{u}}=X^{\alpha}_{\boldsymbol{u}}-X^{\alpha}_{\boldsymbol{U}}。\qquad(5.58)$$

試證明 $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{u}}$ 滿足方程

$$[(\xi^{\alpha}_{\boldsymbol{u}}P^{\beta}-P^{\alpha}\xi^{\beta}_{\boldsymbol{u}})-S^{\alpha\beta}]u_{\beta}=0。\qquad(5.59)$$

［提示：在 $\boldsymbol{u}=\partial\mathscr{P}/\partial x^0$ 的 Lorentz 參照系中計算。］

(c) 試證明，若在任何給定時刻從系統靜止參照系中觀察，則上式簡化爲三維 Euclid 方程

$$\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{u}}=-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{S})M,\qquad(5.59')$$

式中 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}/u^0$ 是與矩心相聯繫的參照系的普通速度。

(d) 假設在空時中任何地方由任何觀測者所測出的能量密度是非負的（對於所有類時的

，$u\cdot T\cdot u\geq 0$)。在系統靜止參照系中，作一平行於 S且包括整個系統的盡可能小的圓柱體（在圓柱外處處有 $T_{\alpha\beta}=0$）。試證明這個圓柱體的半徑r_0受下式限制，

$$r_0\geq |S|/M。 \tag{5.60}$$

因此，一給定內稟角動量S和給定質量M的系統，在它的靜止參照系中可能的極小尺寸爲

$$r_{0\text{極小}}=|S|/M。$$

第六章　加速的觀測者

客觀世界樸素地存在着，它並不是偶然發生的。只是在沿着我肉體的生命線［世界線］徐徐而上的我的意識的注視之下，這個世界的一部分，才作為隨時間不斷變化的、在空中疾馳的映象而得以甦醒。

Herman Weyl (1949年，第116頁)

§ 6.1　加速的觀測者可用狹義相對論分析

在分析引力時，以加速度模擬重力是有好處的。當我們把注意力都集中在遠離任何吸引物質、又毫無擾動的區域時，可以認爲在這些區域（在所提出的某種程度內）中空時是平直的，並有 Lorentz 幾何。讓觀測者感覺到他正受到重力的作用，這或者是由於把火箭噴管綁在他腿上，或者是由於他置身於用火箭推進的宇宙飛船內。在他看來，物理學是什麼樣的呢？

誰敢於來回答這個問題？在本書的這個初期階段，由一個實際上在加速的宇宙飛船內而他却自認爲在引力場中的觀察者，來預言他將測出的物理效應，這不是對引力物理學太無知了嗎？恰正相反，狹義相對論的進展準確地預言了加速物體的物理學——例如，來自加速電荷的輻射。甚至束縛在核中的中子所受到的大得難以置信的加速度

加速運動和加速觀測者可以用狹義相對論來分析

$$a_{核} \sim v^2/r \sim 10^{31}\text{厘米/秒}^2 \sim 10^{28}\text{個「地球重力」}$$

以及在高能粒子散射事件中遇到的甚至更大的加速度，都可以在狹義相對論的範圍內例行地和精確地加以處理。把狹義相對論自信地用於反質子湮沒和奇異

框 6.1 廣義相對論是建築在狹義相對論之上的

一個在裝有發動機的行星際火箭上的旅遊者感覺到了「重力」，物理學家能用局域效應使他相信這「重力」是僞造的嗎？Einstein關於重力和加速度的局域等效原理指出，這絕不可能。但是，如果物理學家自欺欺人地用由加速度所引起的局域假像來處理眞實的重力，那麼，他並沒有犯錯誤。在這種錯覺下，他一往直前，並用狹義相對論來解決引力問題：如果他足夠聰明，能把每一個問題分解爲一系列的局域問題，而在這種錯覺下，每一個局域問題都是可以解決的話，那麼，他就可以算出任何引力場的全部影響。基本原理只有三條：狹義相對論物理學，等效原理，以及物理學的局域性質。它們是簡單而清楚的。然而，要應用它們，就面臨着雙重任務：(1)把空時分成很多局域平直的小塊（其中各原理適用）；(2)把這些小塊重新合在一起，構成一幅可以理解的圖畫。從事這種解剖和重新組合，查看彎曲動力學空時必然採取的形式，以及查看物理後果：這就是廣義相對論。

粒子共振的理論家是不會被純屬火箭旅客（他們輕信小册子大肆宣揚的「一路上的地球重力」）的錯覺弄得驚慌失措的。當空時平直時，不管如何運動，狹義相對論能夠處理這種問題。（它還能處理更大的工作，見框6.1）。在框6.2中概括了狹義相對論如何處理此工作的本質特徵，這是爲了有利於跳過本章其餘部分的初階讀者，也是爲了有利於高階讀者，他們會發現這是本章其餘部分的有用的背景。

框 6.2 加速觀測者簡述

加速的觀測者可以隨身携帶鐘和測量桿，並且可以利用它們在他的鄰域中建立一個參照系（坐標系）。

小心地選擇鐘，使它的結構所受加速度的影響可以忽略（例如原子鐘），那麼，他的鐘就可以像瞬間隨他一起運動的非加速鐘以同樣的快慢計時：

$$\Delta\tau \equiv \begin{pmatrix} \text{觀測者沿其世界線移動} \\ \text{了一位移矢量 } \boldsymbol{\xi} \text{ 時，他} \\ \text{的鐘記下的時間間隔} \end{pmatrix} = [-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})]^{1/2}。$$

並且，選擇足夠剛硬的測量桿，使它測出的長度與瞬間隨他一起運動的非加速

桿測出的長度相同。（進一步的討論，參看§16.4，以及框16.2到16.4）

設觀測者坐標系是桿和鐘的 Descartes 格子，且格子的原點總在觀測者的世界線上。觀測者應使他的格子總是很小：

$$l \equiv \begin{pmatrix}\text{格子的空}\\ \text{間尺度}\end{pmatrix} \ll \begin{pmatrix}\text{他所携帶的加速度}\\ \text{計測出的加速度}\end{pmatrix}^{-1} \equiv \frac{1}{g}。$$

在距離他的世界線 l 處，他的格子發生了一些奇怪的事情，其無量綱大小爲 gl——即加速度計測出的加速度與 g 差一個小量 $\sim gl$（練習 6.7）；又，起初與在其世界線上的鐘同步的鐘，它的步伐也偏離了（以不同速率計時）一個小量 $\sim gl$（練習 6.6）。（注意，一個「地球重力」的加速度相應於

$$g^{-1} \sim 10^{-3} \text{ 秒}^2/\text{厘米} \sim 10^{18} \text{厘米} \sim 1 \text{ 光年},$$

所以 $l \ll \frac{1}{g}$ 的限制通常並不苛刻。）

爲了推出加速觀測者所作實驗和觀測的結果，可以用與坐標無關的幾何術語來分析，然後把結果投影到他的加速參照系的基矢上去。另一方面，可以在 Lorentz 參照系中分析實驗和觀測，然後再變換到加速參照系。

正如用這種方式所推出的那樣，由加速觀測者局域地（在 $l \ll 1/g$ 處）做的實驗的結果，與在 Lorentz 參照系中所做的同樣實驗的結果，只有三方面不同：

(1)存在着上面提到的、量級爲 $gl \ll 1$ 的複雜的小差別，但使加速參照系足夠小即可把它略去。

(2)存在着與 Newton 理論中所遇到的完全同類的 Coriolis 力（練習6.8）。觀察者擺脫它的辦法是小心地防止其格子旋轉——即把它綁在陀螺上，使得觀測者借助於作用在他質心上的力（無力矩！）來加速自己。這種非旋轉格子具有「Fermi-Walker 遷移」基矢（§6.5），

$$\frac{d\boldsymbol{e}_{\alpha'}}{d\tau} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_{\alpha'}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{\alpha'}), \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{u}$＝四維速度，$\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{u}/d\tau$＝四維加速度。

(3)存在着與 Newton 理論中所遇到的完全同類的慣性力（練習 6.8）。這是由觀測者的加速所引起的，除非停止加速，否則無法擺脫它們。

初階
高階

本章的其餘內容屬於高階。

它不依賴於前面的高階內容。

它作爲下述內容的準備是必需的：

(1)在彎曲空時中陀螺的數學分析（練習19.2, §40.7）

(2)加速觀測者固有參照系的數學理論（§13.6）。

它將有助於引力理論的許多應用（第十八章到第四十章）。

§6.2 雙曲運動

研究一個因在平直空時中被加速而感覺到「重力」的火箭旅客。首先描述他相對於慣性參照系的運動。它的四維速度滿足條件 $\boldsymbol{u}^2=-1$。所謂速度的大小固定不變是指四維加速度，

$$\boldsymbol{a}=d\boldsymbol{u}/d\tau\,, \tag{6.1}$$

垂直於四維速度：

$$0=(d/d\tau)(-1/2)=(d/d\tau)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\right)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}\,。 \tag{6.2}$$

這個方程意味着在旅客靜止參照系（它是 Lorentz 參照系，其中，在問題所涉及的時刻，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_0$）中 $a^0=0$；在此參照系中，a^μ 的空間分量簡化爲通常定義的加速度 $a^i=d^2x^i/dt^2$。於是，由靜止參照系中的各分量 $a^\mu=(0,a^i)$ 可見，在靜止參照系中加速度的大小可作爲簡單的不變量算出

$$\boldsymbol{a}^2=a^\mu a_\mu=(d^2\boldsymbol{x}/dt^2)^2\text{在靜止參照系中測量。}$$

爲了簡單起見，考慮一個總是感覺到恒定加速度 g 的觀測者。把加速度取在某個慣性參照系的 x^1 方向，並取 $x^2=x^3=0$。在該慣性參照系中，觀測者的運動方程變爲

$$\frac{dt}{d\tau}=u^0,\quad \frac{dx}{d\tau}=u^1;\quad \frac{du^0}{d\tau}=a^0,\quad \frac{du^1}{d\tau}=a^1\,。 \tag{6.3}$$

寫下三個代數方程

$$u^\mu u_\mu=-1\,,$$
$$u^\mu a_\mu=-u^0a^0+u^1a^1=0\,,$$

以及

$$a^\mu a_\mu=g^2\,。$$

解出加速度，得

$$a^0=\frac{du^0}{d\tau}=gu^1,\quad a^1=\frac{du^1}{d\tau}=gu^0\,。 \tag{6.4}$$

這些線性微分方程可以立即解出。適當選擇原點，解出

$$t=g^{-1}\sinh g\tau,\qquad x=g^{-1}\cosh g\tau\,。 \tag{6.5}$$

均勻加速的觀測者在空時圖中沿雙曲線運動

注意，$x^2-t^2=g^{-2}$. 在空時圖上，世界線是雙曲線（「雙曲運動」；圖 6.1）。這個運動的一些有趣方面將在練習中討論。設此恒定加速度的大小 g 就是在

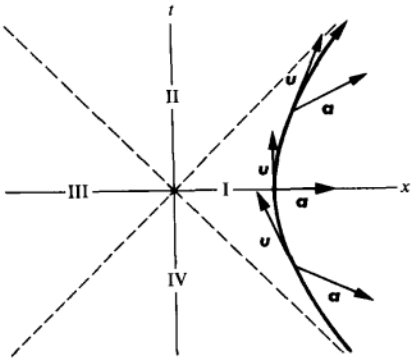


圖 6.1
雙曲運動。物體（或觀測者）的世界線，該物體（或觀測者）相對於瞬時與它（或他）一起運動的慣性參照系（在不同時刻是不同的慣性參照系！）永遠經受着一個固定的加速度 g。四維加速度 $\mathbf{a}$ 處處垂直（Lorentz 幾何！）於四維速度 $\mathbf{u}$。

地球上所經受的重力加速度，$g=980$ 厘米/秒²：$g\approx(10^3$ 厘米/秒²$)/(3\times10^{10}$ 厘米/秒²$)^2=(3\times10^7$ 秒$\times3\times10^{10}$ 厘米/秒$)^{-1}=(1$光年$)^{-1}$.。於是，觀測者若能在其自身原時 1 年左右的時間內維持此加速度，他就可以達到相對論性的速度。如果他有能力啓程 1 光年或更久，他就可以超過光子。

練習

練習 6.1　到銀河去旅行

試計算火箭飛船的占有者從地球到銀河中心旅行 ~30,000 光年所需的原時。假設在一半行程中維持一「地球重力」的加速度（10^3 厘米/秒²），然後，在剩下的一半行程按地球重力減速。

練習 6.2　火箭有效負載

在練習 6.1 所討論的旅行中，火箭初始質量的多大部分是有效負載？假設火箭是理想的，即它能以百分之百的效率把靜止質量轉化爲輻射，並把所有的輻射完全準直地拋向火箭的背後。

練習 6.3　雙生子佯謬

(a) 試證明，在連接兩事件 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的全部類時世界線中，具有最長原時間隔的一條世界線就是無加速的那一條。（提示：在無加速世界線的慣性參照系中作計算。）

(b) 雙生子之一沿着無加速世界線從 $\mathcal{A}$ 運動到 $\mathcal{B}$。試證明另一雙生子，靠適當地選擇加速度，可以在任意短的原時中從 $\mathcal{A}$ 到達 $\mathcal{B}$。

(c) 如果第二個雙生子願意舒適地旅行，使他所感受到的加速度決不超過地球重力 g，則他從 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 所需的最短原時間隔是多少？答案用 g 和無加速雙生子測出的原時間隔 $\Delta\tau$ 表示。

(d) 對若干有趣的旅行，算出數值答案。

練習 6.4 雷達速度指示器

雷達裝置通過發射標準頻率的信號，並把它和被其他物體所反射的信號頻率作比較，來測量速度。這個紅移測量隨後就用標準的狹義相對論公式轉化爲相應的速度，並由雷達讀出此速度。對於均勻加速的觀測者，作爲速度測量裝置的這個雷達裝置有多少用處呢？

(a) 首先，考慮此問題的特殊情況：在雷達脈衝反射的瞬間，物體與雷達裝置彼此相對靜止。計算在此情況下雷達裝置測出的紅移 $1+z=\omega_e/\omega_0$，以及由此推論所得的（不正確的）速度。利用這種情況下的對稱性簡化推導。

(b) 現在，考慮在物體反射雷達脈衝的瞬間，在觀測者瞬時靜止參照系中，物體具有非零速度的情況。計算實際相對速度與雷達裝置讀出速度之比值。

練習 6.5 雷達距離指示器

把雷達用作距離測量裝置。雷達裝置測出了它發出脈衝的瞬間和稍後它接收到反射脈衝的瞬間之間的原時 τ。隨後作簡單的計算 $L_0=\tau/2$，並給出了作爲輸出的「距離」L_0。當均勻加速的觀測者用此雷達裝置時，爲測量物體的實際距離 L，雷達裝置輸出讀數的準確性如何？（L 定義爲在脈衝被反射的瞬間，在觀測者瞬時靜止參照系中的距離，即在發射和接收脈衝時觀測者原時的中間時刻。）試給出把 $L_0\equiv\tau/2$ 與實際距離 L 聯繫起來的正確公式。並證明，當 L 趨近 g^{-1} 時，讀數 L_0 變爲無窮大，此處 g 爲觀測者用他所携帶的加速度計測出的加速度。

§ 6.3 對加速參照系大小的限制

構成「加速觀測者的坐標系」的種種困難

把「加速觀測者的坐標系」這些字放在一起是很容易的，但是，要找到這些字所言及的概念就困難得多了。對於這些字，人們可能作出的最有用的第一個評論是，認眞地說，它們是自相矛盾的。這個詞組中的定冠詞 "the" 暗示人們考慮的是自然地與某一特定的加速觀測者（例如，其世界線由(6.5)式給出的觀測者）相聯繫的某個唯一的坐標系。如果坐標系確是自然的，那麼人們就可以期望，通過一個足夠機敏的觀測者發出和接收光信號，即可確定任意事件的坐標。但是，圖 6.1 清楚地表明，組成全部空時四分之一的那些事件（Ⅲ區），既不能向特定的觀測者發出光信號，也不能接收光信號。空時的另一半在這方面較少地受到無能之苦：Ⅱ區不能向觀測者發信號，Ⅳ區不能接收來自觀測者的信號。很難看出觀測者怎麼能用任何自然的方式定義一個坐標系，使之能覆蓋那些同他無因果關係的，那些他無法看見的，以及那些看不見他的事件。

觀測者和事件之間的通訊，在距離 $l>$(加速度)$^{-1}$ 處破壞了

困難還出現在當人們考慮一個開始靜止在某個參照系中的觀測者。他在一段時間中被加速，此後維持恒定的速度而在某另一慣性坐標系中靜止。他的運

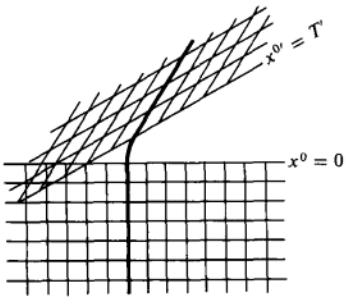


圖 6.2
經受短期加速的觀測者的世界線。勻速運動的每一個階段，都可以建立一個慣性坐標系。然而，沒有辦法使得重迭區域（從加速區之左 g^{-1} 的距離處開始）中兩個不一致的坐標一致起來。

動能以任何自然的方式定義一個坐標系嗎？若能，則此坐標系(1)應是慣性坐標系 x''，在時間 x^0 小於零時，他在其中是靜止的，和(2)在 $x^{0\prime} > T'$ 時應是另一個慣性參照系 $x''^{\prime}$，他在其中相對於另一參照系靜止。顯然，爲了決定在未被這兩個條件所確定的區域內怎樣定義坐標（圖 6.2），還需要進一步的思考。然而，更嚴重的是，在同時滿足 $x^0 < 0$ 和 $x^{0\prime} > T'$ 的空時區域內，這兩個條件是不一致的。在兩個加速運動的例子中（圖 6.1 和圖 6.2），定義坐標系的嚴重困難只是在距加速觀測者世界線有限距離 g^{-1} 處開始的。顯然，在到世界線的距離大於 g^{-1} 的地方，問題是無解的。而在觀測者最接近的近鄰則具有自然的解。這個解的名稱是「Fermi-Walker 遷移正交四重軸」。適用於雙曲運動的本質思想簡單說明如下。

自然的坐標在距離 $l >$（加速度）$^{-1}$ 處不一致

§ 6.4　均勻加速觀測者所携帶的四重軸

均勻加速觀測者所携帶的基矢正交四重軸

「四重軸」或「運動參照系」（Cartan 的 "repère mobile" 活動的標誌）或基矢 $\boldsymbol{e}_{0'}$, $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$（下標表示哪一個矢量，而不是表示矢量的哪一個分量）的集合提供了一種無限小型式的坐標系。設時間軸是觀測者在其中瞬時靜止的共動慣性系的時間軸。則第零個基矢與其四維速度等同；$\boldsymbol{e}_{0'} = \boldsymbol{u}$。空間軸 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 不受 1 方向上 Lorentz 變化的影響。因此，取 $\boldsymbol{e}_{2'}$ 和 $\boldsymbol{e}_{3'}$ 爲所有包圍 Lorentz 參照系的單位基矢，觀測者相對於它們的雙曲運動已由 (6.5) 式描述：$\boldsymbol{e}_{2'} = \boldsymbol{e}_2$; $\boldsymbol{e}_{3'} = \boldsymbol{e}_3$. 剩下的與其他三個基矢垂直的基矢 $\boldsymbol{e}_{1'}$，平行於加速度矢量，$\boldsymbol{e}_{1'} = g^{-1}\boldsymbol{a}$ [見 (6.4) 式]。有一種更令人滿意的表示此運動參照系特徵的方式：時間軸 $\boldsymbol{e}_{0'}$ 是觀測者的四維速度，故觀測者在此參照系中永遠靜止；再選擇另外三個矢量 $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$，使之(1)相互正交，(2)不旋轉

。這些基矢是：

$$(e_{0'})^{\mu}=(\cosh\ g\tau;\ \sinh\ g\tau,\ 0,\ 0);$$
$$(e_{1'})^{\mu}=(\sinh\ g\tau;\ \cosh\ g\tau,\ 0,\ 0);$$
$$(e_{2'})^{\mu}=(0;\ 0,\ 1,\ 0);$$
$$(e_{3'})^{\mu}=(0;\ 0,\ 0,\ 1)。 \tag{6.6}$$

有一種簡單地得到這四個基矢的規則。取原先整體 Lorentz 參照系的四個基矢 e_0, e_1, e_2, e_3，並在 1 方向上簡單地推動一下它們，使得 $e_{0'}$ 的大小與觀測者的四維速度相一致。所有這些矢量彼此相互正交，並且具有單位大小這一事實可以形式地表爲下式

$$e_{\mu'}\cdot e_{\nu'}=\eta_{\mu'\nu'}。 \tag{6.7}$$

§ 6.5 具有任意加速度的觀測者作了 Fermi-Walker 遷移的四重軸

任意加速觀測者的正交四重軸；應當「不旋轉」

現在，從作雙曲運動的觀測者或物體，轉向其加速度始終有限並隨時間任意變動的觀測者。這裏，我們也對運動的、無限小的參照系，或四重軸，提出三個判據：(1)四重軸的基矢 $e_{\mu'}$ 必須保持正交［(6.7) 式］；(2)各基矢應在每一瞬間構成一觀測者的靜止參照系（$e_{0'}=u$）；和(3)四重軸應當「不旋轉」。

最後一個判據需要討論一下。在任意原時τ，四重軸的基矢應通過Lorentz變換 $e_{\mu'}(\tau)=\Lambda^{\nu}{}_{\mu'}(\tau)e_{\nu}$ 與某一給定慣性參照系的基矢 e_0, e_1, e_2, e_3 相聯繫。因此，在兩個相繼瞬間的兩組基矢也應通過 Lorentz變換彼此聯繫起來。但是 Lorentz 變換可以看作空時中的「旋轉」。始終具有單位大小的四維速度 u 改變了方向。所以眞正的加速度概念意味着速度四維矢量的「旋轉」。那麼，無旋轉的要求如何解釋呢？要求不同時刻四重軸 $e_{\mu'}(\tau)$ 的變化準確地相當於 $u=e_{0'}$ 的變化率，而沒有任何附加的旋轉。換言之，(1)接受在由速度四維矢量和加速度定義的類時平面內的不可避免的僞旋轉，但是(2)排除三維空間矢量的任何普通的旋轉。

「無旋轉」意味着只在四維速度和四維加速度的類時平面內有旋轉

三維空間內旋轉的數學

非相對論性的物理學用瞬時角速度矢量（分量 ω_i）描述矢量（分量 v_i）之旋轉。這個角速度出現在有關 v 變化率的公式中，

$$(dv_i/dt)=(\omega\times v)_i=\varepsilon_{ijk}\omega_j v_k。 \tag{6.8}$$

推廣到四維空時，把旋轉看作出現在垂直於角速度矢量 ω的平面是有好處的。

於是，把（6.8）式改寫爲

$$dv_i/dt=-\Omega_{ik}v_k\,, \tag{6.9}$$

式中

$$\Omega_{jk}=-\Omega_{kj}=\omega_i\varepsilon_{ijk} \tag{6.10}$$

僅在轉動平面內有非零分量。換言之，論及「(1,2) 平面內的旋轉」比論及繞 3 軸的旋轉更爲有用。把「旋轉平面」的概念引伸到四維。此時，在 (1,2) 平面內的旋轉將不僅保持速度的 v_3 分量恒定，並且還保持速度的 v_0 分量恒定。旋轉的四維定義是

空時中旋轉的數學

$$\frac{dv^\mu}{d\tau}=-\Omega^{\mu\nu}v_\nu,\quad 有\ \Omega^{\mu\nu}=-\Omega^{\nu\mu}。 \tag{6.11}$$

爲了考察推廣的旋轉定義或無限小 Lorentz 變換的適用性，證明它保持四維速度矢量的長度不變：

$$\frac{d(v_\mu v^\mu)}{d\tau}=2v_\mu\frac{dv^\mu}{d\tau}=-2\Omega^{\mu\nu}v_\mu v_\nu=0。 \tag{6.12}$$

最後的表達式爲零是因爲 $\Omega^{\mu\nu}$ 反對稱，而 $v_\mu v_\nu$ 是對稱的。還請注意，反對稱張量 $\Omega^{\mu\nu}$（「旋轉矩陣」；「無限小 Lorentz 變換」）具有 $4\times3/2=6$ 個獨立分量。這個數目與有限 Lorentz 變換中的分量數一致（三個旋轉參量加上關於推動分量的三個參量）。這裏的「無限小 Lorentz 變換」必須(1)在四維速度和四維加速度所跨越的類時平面內產生適當的 Lorentz 變換；(2)排除在任何其他平面內，特別是在任何類空平面內的旋轉。滿足這些需要的唯一答案是

$$\Omega^{\mu\nu}=a^\mu u^\nu-a^\nu u^\mu;\quad 即\ \Omega=\mathbf{a}\wedge\mathbf{u}。 \tag{6.13}$$

把這個旋轉用於與 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{a}$ 都垂直（$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=0$ 和 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}=0$）的類空矢量 $\mathbf{w}$ 上，即可算出$\Omega^{\mu\nu}w_\nu=0$。從而證明不存在任何空間旋轉。現在，檢驗一下(6.13)式中 $\Omega^{\mu\nu}$ 的總體歸一化。把無限小 Lorentz 變換用於觀測者的速度四維矢量 $\mathbf{u}$，把 $v^\mu=u^\mu$ 代入（6.11）式。得

$$\frac{du^\mu}{d\tau}\equiv a^\mu=u^\mu(a^\nu u_\nu)-a^\mu(u^\nu u_\nu)=a^\mu。$$

這個結果是一個恒等式，因爲 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=-1$ 和 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}=0$。

經過上述無限小 Lorentz 變換

加速觀測者所攜帶的「非旋轉」四重軸基矢的 Fermi-Walker 遷移定律

$$dv^\mu/d\tau=(u^\mu a^\nu-u^\nu a^\mu)v_\nu\,, \tag{6.14}$$

的矢量 $\mathbf{v}$，稱爲經歷了沿觀測者世界線的「Fermi-Walker 遷移」。與加速觀

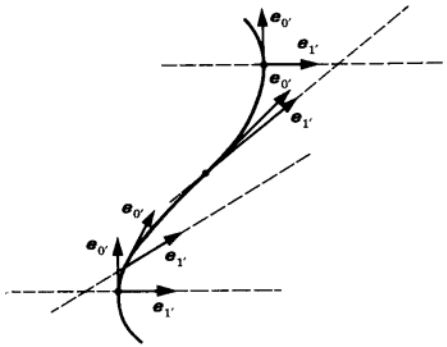


圖 6.3
在一些選定時刻，沿著加速粒子的世界線（實線），作垂直於該世界線的一些類空超平面（虛線）。注意，在與世界線相距爲 $g^{-1}(\tau)$（加速度依賴於時間！）處，超平面相交叉。

測者相聯繫的自然的運動參照系是由四個正交矢量組成的，其中每一個矢量都沿着世界線受到 Fermi-Walker 遷移，並且其中之一為 $\mathbf{e}_{0'}=\mathbf{u}$（觀測者的四維速度）。實際上把空間基矢 $\mathbf{e}_{j'}$ 附在陀螺上即可完成它們的 Fermi-Walker 輸運（見框 6.2 和練習 6.9）。

§ 6.6 加速觀測者的局域坐標系

用來構成「加速觀測者局域坐標系」的四重軸

把運動參照系或「無限小坐標系」擴展爲覆蓋有限區域的「局域坐標系」。這種局域坐標系並不能避開「雙曲運動」（圖 6.1）或「短暫加速運動」（圖 6.2）所遇到的任何問題。因此，局域坐標系必須限於與觀測者相距在 g^{-1} 之內的，不發生這些問題的區域。圖 6.3 說明了局域坐標系 $\xi^{\mu'}$ 的構成。在任意給定原時 τ，觀測者位於其世界線上的特定事件 $\mathcal{P}(\tau)$ 處。設從原來慣性坐標系原點到他所在位置 $\mathcal{P}(\tau)$ 的位移矢量爲 $\mathbf{z}(\tau)$，在 $\mathcal{P}(\tau)$ 的觀測者有三個類空基矢 $\mathbf{e}_{1'}(\tau)$, $\mathbf{e}_{2'}(\tau)$, $\mathbf{e}_{3'}(\tau)$. 點 $\mathcal{P}(\tau)$ 加上這些基矢定義了一類空超平面。這個超平面上的典型點可以表爲如下形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\xi^{1'}\mathbf{e}_{1'}(\tau)+\xi^{2'}\mathbf{e}_{2'}(\tau)+\xi^{3'}\mathbf{e}_{3'}(\tau)+\mathbf{z}(\tau)\\&=(\text{起自原來慣性參照系原點的位移矢量})。\end{aligned}\tag{6.15}$$

此處三個數 $\xi^{k'}$ 起着超平面中 Euclid 坐標的作用。該超平面隨着原時的展開而前進。最後，超平面與用以確定坐標的事件 $\mathcal{P}_0$ 相交。指定 $\xi^{0'}=\tau$，和由 (6.15) 式給出的 $\xi^{k'}$ 等數為此事件的坐標。把這四個數稱為「相對於加速觀

測者的坐標」。更詳細地說，規定這四個坐標由下述四個方程組成

$$x^\mu=\xi^{\hat{\lambda}'}[e_{\hat{\lambda}'}(\tau)]^\mu+z^\mu(\tau), \tag{6.16}$$

其中，x^μ 認爲是已知的，而坐標τ，$\xi^{\hat{\lambda}'}$ 認爲是未知的。

在距加速世界線一定距離處，相繼的類空超平面，不隨着 τ 的增加而前進，反而後退。在此距離和更遠處，「相對於加速觀測者的坐標」的概念變得含混了，因而必須拋棄。爲了計算這個距離，注意到世界線的任何足夠短的部分都可以用一雙曲線（加速度爲g 的雙曲運動）近似表示，其中依賴於時間的加速度 $g(\tau)$ 由方程 $g^2=a^\mu a_\mu$ 給出。

均勻加速觀測者的局域坐標系

應用上述雙曲運動的一般規定，得出方程

$$\begin{aligned}
x^0&=(g^{-1}+\xi^{1'})\sinh(g\xi^{0'}),\\
x^1&=(g^{-1}+\xi^{1'})\cosh(g\xi^{0'}),\\
x^2&=\xi^{2'}\\
x^3&=\xi^{3'}。
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$\xi^{0'}$ 爲常數的面就是滿足 $x^0/x^1=\tanh g\xi^{0'}$ 的超平面，草繪如圖6.4。把(6.17)式代入 Minkowski 的線元公式，得

$$\begin{aligned}
ds^2&=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\\
&=-(1+g\xi^{1'})^2(d\xi^{0'})^2+(d\xi^{1'})^2+(d\xi^{2'})^2+(d\xi^{3'})^2。
\end{aligned} \tag{6.18}$$

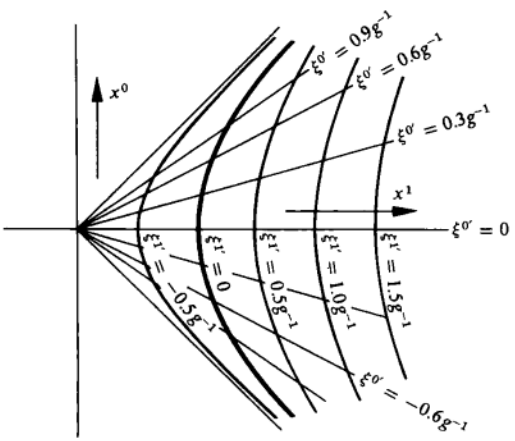


圖 6.4
與作雙曲運動的觀測者相聯繫的局域坐標系（粗黑線爲世界線）。當 $\xi^{1'}$ 小於 $-g^{-1}$ 時，局域坐標系失效。

這個表達式中 $d\xi^{\mu'}d\xi^{\nu'}$ 的系數不是標準 Lorentz 度規的分量。理由很清楚。$\xi^{\mu'}$ 並不形成一慣性坐標系。然而，在觀測者的位置上，$\xi^{1'}=0$，這些系數簡化爲標準形式。因此，在觀測者最接近的鄰域內，這些「局域坐標」近似爲 Lorentz 坐標系。

練習

練習 6.6 加速坐標系中的鐘速與坐標時間

設在加速觀測者局域坐標系的每一個格點 $(\xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'})$=常數上，放一個鐘。爲了簡單起見，假設觀測者作雙曲運動。試用 (6.18) 式證明，格子上的鐘所測出的原時與在該格點的坐標時間不同：

$$d\tau/d\xi^{0'}=1+g\xi^{1'}。$$

（當然，在 $\xi^{1'}\ll g^{-1}$ 處，即在非常接近觀測者處，這個差別可以忽略。）

練習 **6.7** 在加速坐標系中格點的加速

設在作雙曲運動的觀測者局域坐標系的每一個格點上附一加速度計。試計算在 $(\xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'})$ 處加速度計測出的加速度的大小。

練習 6.8 具有旋轉四重軸的觀測者

沿任一加速世界線運動的觀測者對其四重軸不選 Fermi-Walker 遷移。相反，却允許它旋轉，則進入他的遷移定律

$$d\mathbf{e}_{\alpha'}/d\tau=-\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{e}_{\alpha'} \tag{6.19}$$

的反對稱旋轉張量 $\boldsymbol{\Omega}$ 可分解爲一 Fermi-Walker 部分加上一空間旋轉部分：

$$\Omega^{\mu\nu}=\underbrace{a^{\mu}u^{\nu}-a^{\nu}u^{\mu}}_{\Omega^{\mu\nu}_{(FW)}}+\underbrace{u_{\alpha}\omega_{\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}}_{\Omega^{\mu\nu}_{\text{(空間旋轉)}}} \tag{6.20}$$

ω=與四維速度 $\mathbf{u}$ 正交的矢量。

(a) 觀測者選取其時間基矢爲 $\mathbf{e}_{0'}=\mathbf{u}$。試證明這一選擇是其遷移定律 (6.19) 式，(6.20) 式所允許的。

(b) 試證明 $\Omega^{\mu\nu}{}_{\text{(空間旋轉)}}$ 在垂直於 $\mathbf{u}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的平面內產生一旋轉——即

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{(空間旋轉)}}\cdot\mathbf{u}=0,\quad \boldsymbol{\Omega}_{\text{(空間旋轉)}}\cdot\boldsymbol{\omega}=0。 \tag{6.21}$$

(c) 假設此加速觀測者 Fermi-Walker 遷移了第二個正交四重軸 $\mathbf{e}_{\alpha'}$。試證明他的第一個四重軸的空間矢量相對於他的第二個四重軸的空間矢量旋轉的角速度矢量等於 $\boldsymbol{\omega}$。提示：在兩個四重軸重合的瞬間，證明（用與觀測者世界線垂直的三維空間所適用的三維符號）：

$$d(\mathbf{e}_{\beta'}-\mathbf{e}_{\beta m})/d\tau=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_{\beta'}。 \tag{6.22}$$

(d) 觀測者用與其 Fermi-Walker 四重軸同樣的規定［(6.16) 式］，在他的旋轉四重軸的基礎上建立起局域坐標。在觀測者的世界線上選定事件 $\mathcal{Q}$，設該處的 $\tau=0$，並選取規定 (6.16) 式的原先的慣性參照系，使得(1)它與 $\mathcal{Q}$ 處的加速觀測者一起運動，(2)它的原點在 $\mathcal{Q}$，以及(3)它的軸與 $\mathcal{Q}$ 處的加速軸重合。試證明，這些條件轉換爲

$$z^{\mu}(0)=0, \qquad \mathbf{e}_{\alpha'}(0)=\mathbf{e}_{\alpha}。 \tag{6.23}$$

(e) 試證明，在 $\mathcal{Q}$ 附近，對於旋轉的加速坐標系，(6.16) 式簡化爲

$$\begin{aligned} x^0&=\xi^{0'}+a_{k'}\xi^{k'}\xi^{0'}+0([\xi^{\alpha'}]^3);\\ x^j&=\xi^{j'}+\frac{1}{2}a^{j'}\xi^{0'2}+\epsilon^{jkl}\omega^k\xi^{l'}\xi^{0'}+0([\xi^{\alpha'}]^3)。\end{aligned} \tag{6,24}$$

(f) 一自由運動粒子以慣性參照系測出的普通速度 v 經過事件 $\mathcal{Q}$，通過把它的直線世界線 $x^j=v^jx^0$ 轉換到加速的旋轉坐標系中，證明在該處它的坐標速度與加速度爲

$$\begin{aligned} &(d\xi^{j'}/d\xi^{0'})_{在\mathcal{Q}}=v^j;\\ &(d^2\xi^{j'}/d\xi^{0'2})_{在\mathcal{Q}}=\underbrace{-a^j}_{\text{慣性加速度}}\underbrace{-2\epsilon^{jkl}\omega^kv^l}_{\text{Corioles 加速度}}\underbrace{+2v^ja^kv^k}_{\text{慣性加速度的相對論修正}}。\end{aligned} \tag{6.25}$$

練習 6.9　Thomas 進動

考慮一自轉物體（陀螺，電子，……），它因有力作用在質心上而加速。這些力不產生力矩；因此，除了爲保持 $\mathbf{S}$ 垂直於四維速度 $\mathbf{u}$ 所需之唯一的在 $\mathbf{u}\wedge\mathbf{a}$ 平面內的旋轉外，物體的內稟角動量矢量 $\mathbf{S}$ 維持不變。從數學上說，物體 Fermi-Walker 輸運了它的角動量（在 $\mathbf{u}\wedge\mathbf{a}$ 以外的平面上無旋轉）：

$$d\mathbf{S}/d\tau=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{a})\cdot\mathbf{S}。 \tag{6.26}$$

這個輸運定律適用於在半徑爲 r 的圓軌道上繞原子核運動的自旋電子。正如在實驗室參照系看到的那樣，電子在 x, y 平面內以勻角速度 ω 運動。在 $t=0$ 時刻，電子位於 $x=r$，$y=0$；其自旋（經典處理）分量爲。

$$S^0=0, \quad S^x=\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar, \quad S^y=0, \quad S^z=\frac{1}{2}\hbar。$$

計算此後自旋的行爲，把它寫成實驗室時間的函數 $S^{\mu}(t)$，答案：

$$\begin{aligned} S^x&=\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\,(\cos\omega t\cos\omega\gamma t+\gamma\sin\omega t\sin\omega\gamma t);\\ S^y&=\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\,(\sin\omega t\cos\omega\gamma t-\gamma\cos\omega t\sin\omega\gamma t).\\ S^z&=\frac{1}{2}\hbar; \quad S^0=-\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\,v\gamma\sin\omega\gamma t;\\ v&=\omega\gamma; \quad \gamma=(1-v^2)^{-1/2}。\end{aligned} \tag{6.27}$$

上式依賴於時間的空間部分可重新寫爲

$$S^x+iS^y=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}[e^{-i(\gamma-1)\omega t}+i(1-\gamma)\sin(\omega\gamma t)e^{i\omega t}]。\tag{6.28}$$

第一項以與角速度相反的方向穩定的旋轉，

$$\begin{aligned}\omega_{\text{Thomas}}&=(\gamma-1)\omega\\&\approx\frac{1}{2}v^2\omega\ll\omega,\ \text{若 } v\ll1。\end{aligned}\tag{6,29}$$

它稱爲 Thomas 進動。第二項在一部分軌道上 $(0<\omega\gamma t<\pi)$ 以右旋方式旋轉，在軌道的其餘部分 $(\pi<\omega\gamma t<2\pi)$ 以左旋方式旋轉。對時間平均，就沒有旋轉了。而且，在原子中它是很小的 $(\gamma-1\ll1)$。爲了保持

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}-S^0u^0=0,\tag{6.30}$$

和

$$\boldsymbol{s}^2=\boldsymbol{S}^2-(S^0)^2=\frac{3\hbar^2}{4}=\text{常數}。\tag{6.31}$$

該項必須存在，並疊加在 Thomas 進動上。當 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}$ 爲負時，它右旋的旋轉起來；當 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}=0$ 時，它不起作用；當 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}$ 變爲正時，它又回復左旋轉。

Thomas 進動也可理解爲由方向稍有不同的連續推動的合成所引起的空間旋轉。［參看，例如，Taylor 和 Wheeler (1966) 練習 103。］另一種由「旋量形式」導出Thomas 進動 (6.29) 式的方法，見 §41.4。

第七章　引力與狹義相對論的不相容

§7.1　把引力併入狹義相對論的嘗試

本章全部是高階的內容。

它不依賴於前面的高階內容。

並不需要它作爲以後任何一章的準備，但它對第十八章（弱引力場），第三十八章和第三十九章（實驗檢驗和重力的其他理論）是有幫助的。

到目前爲止，狹義相對論的討論始終假設不存在引力場。爲什麼在狹義相對論中必須不顧引力呢？本章描述引力場在狹義相對論基礎上造成的困難。應付了這些困難之後，人們就能夠充分地欣賞 Einstein 爲了克服這些困難而引入的彎曲空時的方法。

那麼，從人們對於引力已知的東西談起吧。引力定律的 Newton 公式爲：

$$d^2x^i/dt^2=-\partial\Phi/\partial x^i, \tag{7.1}$$

$$\nabla^2\Phi=4\pi G\rho。 \tag{7.2}$$

Newton 引力定律必須修改爲四維的幾何的形式

這些方程不能以這種樣子並入狹義相對論。一粒子的運動方程 (7.1) 式是三維形式而不是四維形式；它需要修改爲 $d^2x^\mu/d\tau^2$ 的四維矢量方程。同樣，場方程 (7.2) 式並非 Lorentz 不變式，因爲出現的是三維 Laplace 算符，而不是四維 d'Alembert 算符，這意味着勢 Φ 可以對任意遠距離處密度 ρ 的變化作出瞬時的響應。簡言之，Newton 的引力場是以無窮大速度傳播的。

所有直接的修改都不能令人滿意

人們對於這些問題的第一個反應或許會想到它們可以相對直接地予以改正。本節末的一些練習研究了對這些方程的某些相對直接的普遍化處理，其中首先把引力勢 Φ 取爲標量，然後取爲矢量，最後取爲對稱的張量場。每一個這類理論都有重大的缺點，而且全都與觀測不符，其中最好的是張量理論（練習 7.3，框 7.1），但它內部也不自洽並且無嚴格解。近來，着手處理這種困難的

最好的修改（平直空時中的張量理論）內部不自洽；若加以糾正，它就變成了廣義相對論

有 Gupta (1954, 1957, 1962), Kraichnan (1955), Thirring (1961), Feynman (1963), Weinberg (1965), Deser (1970). 他們闡明了怎樣在當今相對論性場論的精神內修改平直空間的張量理論以克服這些不自洽。通過這種場論方法（框 17.2 的第 5 部分），他們唯一地達到了 1915 年標準的廣義相對論。只是在達到終點之後，人們才終於從方程的數學形式認識到，表面上從平直空間重力理論開始的那些結論，實際上就是把引力作爲空時彎曲表現形式的 Einstein 理論。本書遵循 Einstein 的推理路線，因爲它保持物理學站在科學的前沿。

練習

關於平直空時重力理論的練習

以下三個練習提出了實在的挑戰。幸運的是，所有這三個練習都需要類似的技巧，而且最困難一個（練習 7.3）的解已經在框 7.1 中給出。因此，合理的步驟如下，(a) 作練習 7.1（重力的標量理論）或練習 7.2（重力的矢量理論），每當發生困難時，瀏覽一下練習 7.3 和框 7.1（重力的張量理論）的要點和方法而不是細節。(b) 與已經仔細作過另一個練習（7.2 或 7.1）的同學討論一下該練習，以便熟悉它的結果。(c) 詳細閱讀框7.1 提供的練習 7.3 的解答，並與另外兩種理論的計算結果比較。(d) 與框 7.1 核對一些計算細節，以提高計算能力。

練習 7.1 標量引力場 ϕ

A. 考慮變分原理 $\delta I=0$，其中

$$I=-m\int e^{\phi}\left(-\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^{\alpha}}{d\lambda}\frac{dz^{\beta}}{d\lambda}\right)^{1/2}d\lambda, \tag{7.3}$$

對於在標量引力場 ϕ 中的試驗粒子，式中 $m=$（靜止質量），和 $z^{\alpha}(\lambda)=$（參量化的世界線）。試通過改變粒子的世界線，導出支配粒子運動的微分方程。用粒子的原時作爲路徑參量寫出方程，

$$d\tau=\left(-\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^{\alpha}}{d\lambda}\frac{dz^{\beta}}{d\lambda}\right)^{1/2}d\lambda,$$

使得 $u^{\alpha}=dz^{\alpha}/d\tau$ 滿足 $u^{\alpha}u^{\beta}\eta_{\alpha\beta}=-1$。

B. 應用變分原理 $\delta I=0$ 得出 $\phi(x)$ 的場方程，其中 $I=\int\mathcal{L}d^4x$, 而

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{8\pi G}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}-\int me^{\phi}\delta^4[x-z(\tau)]d\tau。 \tag{7.4}$$

並證明式中第二項的積分與A部分研究的積分相同（7.3 式）。

討論：得到的場方程描述了質量爲 m 的單個粒子如何產生標量場。如果有許多粒子，則在 $\mathcal{L}$ 中，對於每個粒子都應包括一項 $-\int me^{\phi}\delta^4[x-z(\tau)]d\tau$。

C. 假設單個源粒子是靜止的，解出B部分的場方程。再假設在粒子鄰域中 $e^{\phi}=1$ 是合適的近似。然後從所得出的解核對此假設，即在地球表面應賦與 e^{ϕ} 什麼值：（始終採用 $c=1$ 的單位制，如果願意也可令 $G=1$）

D. 現在，把C部分的靜態球對稱場 ϕ 取爲太陽場，作爲A部分變分原理中的給定外場，研究由此變分原理所確定的行星運動。由於球對稱性和被積函數與時間無關，運動常數是現成的。採用球坐標，並假設在平面上運動。導出行星近日點進動的公式。

E. 轉向A部分運動方程中零靜止質量的極限情形，爲此，採用不同於原時的參量 λ，選取 $k^\mu=dx^\mu/d\lambda$ 爲能量-動量矢量，並取極限 $m\longrightarrow 0$ 以保持 $k^0=\gamma m=E$ 有限（故 $u^0=\gamma\longrightarrow\infty$）。試用這些方程證明，量 $q^\mu=k^\mu e^\phi$ 是運動常數，並由此導出在此標量理論中不存在太陽引起的光線彎曲。

練習 7.2　矢量引力場 Φ_μ

A. 試證明，變分原理 $\delta I=0$ 可通過變化 $z^\mu(\tau)$ 給出 Lorentz 力定律，只要令

$$I=\frac{-1}{16\pi}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,d^4x+\frac{1}{2}m\int\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz_\mu}{d\tau}d\tau+e\int\frac{dz^\mu}{d\tau}A_\mu(z)d\tau。\qquad(7.5)$$

式中 $F_{\mu\nu}$ 是 $A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu}$ 的縮寫。提示：爲變化 $A_\mu(x)$，如同練習 7.1 的 A, B 部分那樣，引入 δ 函數 $\delta^4[x-z(\tau)]$，把最後一項改寫爲空時積分。

B. 與A部分類似，用變分原理定義矢量引力場 Φ_μ，令 $G_{\mu\nu}\equiv\Phi_{\nu,\mu}-\Phi_{\mu,\nu}$，和

$$I=+\frac{1}{16\pi G}\int G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}d^4x+\frac{1}{2}m\int\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz_\mu}{d\tau}d\tau+m\int\Phi_\mu\frac{dz^\mu}{d\tau}d\tau。\qquad(7.6)$$

（注意：若存在許多粒子，必須在 I 中對每個粒子增加 $\frac{1}{2}m\int(dz^\mu/d\tau)(dz_\mu/d\tau)d\tau+m\int\Phi_\mu(dz^\mu/d\tau)d\tau$ 項。）從這個理論中得出 "Coulomb" 定律，並證明變分原理中各項的系數需要合理選擇。

C. 計算在此理論中的近日點進動。

D. 計算在此理論中光線經過太陽時，由於太陽的 Φ_μ 場所造成的光線彎曲（即極端相對論性粒子 $u^0=\gamma\longrightarrow\infty$ 的散射）。

E. 得出相應於B部分中隱含的 Lagrange 算符的總場能公式。採用 Hamilton 力學的標準方法，取

$$I_{\text{場}}=\frac{1}{16\pi G}\int G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\,d^4x\equiv\int\mathcal{L}d^4x;$$

$\mathcal{L}$ 是 Lagrange 密度，$L\equiv\int\mathcal{L}d^3x$ 是 Lagrange 算符。相應的 Hamilton 密度（≡能量密度），爲

$$\mathcal{H}=\sum_\mu\Phi_{\mu,0}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_{\mu,0}}-\mathcal{L}。$$

證明矢量引力波攜帶負能量。

練習 7.3　對稱的張量引力場，$h_{\mu\nu}=h_{\nu\mu}$

與矢量場一樣，此處的作用量原理爲 $\delta I=0$，其中 $I=I_{\text{場}}+I_{\text{粒子}}+I_{\text{相互作用}}$。$I_{\text{粒子}}$與矢量場時相同：

$$I_{\text{粒子}}=\frac{1}{2}m\int\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz_\mu}{d\tau}d\tau。\qquad(7.7)$$

但是，$I_{\text{場}}$ 和 $I_{\text{相互作用}}$ 不同：

$$I_{\text{場}}=\int \mathcal{L}_{\text{場}} d^4x, \tag{7.8a}$$

$$\mathcal{L}_{\text{場}}=\frac{-1}{32\pi G}\left(\frac{1}{2}h_{\nu\beta,\alpha}\bar{h}^{\nu\beta,\alpha}-\bar{h}_{\mu\alpha,\beta}\bar{h}^{\mu\beta,\alpha}\right) \tag{7.8b}$$

〔注意式中有一個並非 $\bar{h}$ 的 h〕，

其中

$$\bar{h}_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma}; \tag{7.8c}$$

$$I_{\text{相互作用}}=\frac{1}{2}\int h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}d^4x。 \tag{7.9}$$

式中 $T^{\mu\nu}$ 是存在的全部非引力場和物質的脅強－能量張量。對於點粒子系統（本練習中始終用到這一點）。

$$T^{\mu\nu}(\boldsymbol{x})=\int m\frac{dz^{\mu}}{d\tau}\frac{dz^{\nu}}{d\tau}\delta^4[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(\tau)]d\tau。 \tag{7.10}$$

A. 通過變化 $\delta(I_{\text{粒子}}+I_{\text{相互作用}})=0$ 中的 $z^{\mu}(\tau)$ 得出粒子的運動方程。並用由張量引力勢 $h_{\mu\nu}=h_{\nu\mu}$ 導出的「引力場」

$$\Gamma_{\nu\alpha\beta}=\frac{1}{2}(h_{\nu\alpha,\beta}+h_{\nu\beta,\alpha}-h_{\alpha\beta,\nu}) \tag{7.11}$$

來表示計算結果。

B. 由 $\delta(I_{\text{場}}+I_{\text{相互作用}})=0$ 得出場方程；並用

$$-H^{\mu\alpha\nu\beta}\equiv\bar{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}+\bar{h}^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}-\bar{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta}-\bar{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu} \tag{7.12}$$

表示它們。討論規範不變性，以及條件 $\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}=0$。

C. 找出太陽（作爲點質量處理）的張量引力勢 $h_{\mu\nu}$。

D. 計算近日點進動。

E. 計算光線彎曲。

F. 考慮引力波。

$$\bar{h}^{\mu\nu}=A^{\mu\nu}\ \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha})。 \tag{7.13}$$

場方程要求什麼條件？規範條件

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}=0 \tag{7.14}$$

要求什麼？證明，通過保持 $\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}=0$ 限制的進一步規範變換

$$h_{\mu\nu}\longrightarrow h_{\mu\nu}+\xi_{\mu,\nu}+\xi_{\nu,\mu} \tag{7.15}$$

可以加上更多的條件

$$u_{\alpha}\bar{h}^{\alpha\mu}=0,\qquad \bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha}=0, \tag{7.16}$$

式中 u^{α} 是固定的類時矢量。適當選擇參照系，使 $u^{\alpha}=(1;\ 0,\ 0,\ 0)$ 和 $k^{\alpha}=(\omega;\ 0,\ 0,\ \omega)$，考慮這種情況就够了。

G. 從場的 Hamilton 密度

$$\mathcal{H}\equiv\dot{h}_{\mu\nu}(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{h}_{\mu\nu})-\mathcal{L} \tag{7.17}$$

證明F部分所考慮的波的能量密度爲正。

H. 對於在作用量積分中出現的粒子脅强-能量張量 $T^{\mu\nu}$，計算 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$。$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ 爲零嗎（例如，對於在繞日軌道上運行的地球）？爲什麼？證明從 $\delta I=0$ 得出的場和粒子的耦合方程無解。

（接第187頁）

框 7.1　在平直空時中用對稱張量場描述引力的嘗試［練習 7.3 的解答］

在狹義相對論框架內描述引力的嘗試，很自然地從把引力場考慮爲如同 Newton 理論中的標量（練習 7.1），或者與電磁理論中類似的矢量（練習 7.2）開始。只是在發現這些都有缺點之後（例如，在兩種理論中都沒有光線彎曲；在矢量理論中出現負能波），才會面對計算上較爲複雜的對稱的張量引力勢 $h_{\mu\nu}=h_{\nu\mu}$，它具有更多的指標。

在練習 7.3，一開始就展現了平直空時中所有引力張量理論的最令人滿意的基礎。在那裏，Lagrange 算符的選擇［(7.8)式］取決於 $h_{\mu\nu}$ 爲「Lorentz 協變的無質量的雙自旋場」的要求。這個要求的含義，以及把它轉換成一組場方程所需之狹義相對論技巧，通常可在基本粒子物理學或量子場論的書中找到；參看，例如，Wentzel (1949), Feynman (1963) 或 Gasiorowicz (1966)。Fierz 和 Pauli (1939) 是寫出這個 Lagrange 算符，並研究所得理論的創始人。這裏，以練習 7.3 解答的形式，詳細給出此理論的結果。

A. 試驗粒子的運動方程（練習 7.3A）

用粒子脅强-能量張量的方程 (7.10) 式，作 (7.9) 式的積分，找出

$$I_{\text{粒子+相互作用}}\equiv I_{\text{粒子}}+I_{\text{相互作用}}=\frac{1}{2}m\int(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})\dot{z}^{\mu}\dot{z}^{\nu}d\tau\,, \qquad (1)$$

式中

$$\dot{z}^{\mu}\equiv dz^{\mu}/d\tau\,。$$

然後，計算 $\delta I_{\text{粒子+相互作用}}$，發現當且僅當

$$(d/d\tau)[(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})\dot{z}^{\nu}]-\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,\mu}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}=0\,。$$

時，在路徑 δz^{μ} 中任意變化的系數爲零。把這個運動方程重新寫爲下述形式

$$(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})\ddot{z}^{\nu}+\Gamma_{\mu\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}=0\,, \qquad (2)$$

式中 $\Gamma_{\mu\alpha\beta}$ 由 (7.11) 式定義。

B_1. 場方程（練習 7.3B）

採用 (7.8) 式和 (7.9) 式給出的 $I_{\text{場}}$ 和 $I_{\text{相互作用}}$的形式；但是，爲了盡快地毫不混亂地導出場方程，不採用標準的 Euler-Lagrange方程。代之以直接計算場的微小變化 $\delta h_{\alpha\beta}$ 所產生的一階變化量 $\delta\mathcal{L}_{\text{場}}$。對於 $\mathcal{L}_{\text{場}}$ 的第二項，已

經清楚（如果需要，重新加上虛擬指標）改變每一個因子都給出同樣結果，因此，由乘法規則這兩項可以合併爲：

$$\delta(\bar{h}_{\mu\alpha,\sigma}\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta})=2\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\bar{h}_{\mu\alpha,}{}^{\sigma}。$$

鑒於等式 $a_{\mu\nu}\bar{b}^{\mu\nu}=\bar{a}_{\mu\nu}b^{\mu\nu}$ 對（7.8）式的加「橫」運算成立，對於 $\mathcal{L}_{場}$ 的第一項，類似的結果也成立；此處每邊剛好是 $a_{\mu\nu}b^{\mu\nu}-\frac{1}{2}a^{\mu}{}_{\mu}b^{\nu}{}_{\nu}$。因而，

$$-(32\pi G)\delta\mathcal{L}_{場}=\bar{h}^{\nu\beta,\sigma}\delta h_{\nu\beta,\alpha}-2\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\bar{h}_{\mu\alpha,}{}^{\sigma}。\qquad(3)$$

再一次把這個表達式用於 $\delta I_{場}$；再作分部積分，把微商從 $\delta h_{\mu\nu}$ 移開，給出

$$\delta I_{場}=(32\pi G)^{-1}\int[\bar{h}^{\nu\beta,\sigma}{}_{,\alpha}\delta h_{\nu\beta}-2\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}{}^{\sigma}\delta\bar{h}_{\mu\alpha}]d^4x。$$

爲了求出在這個表達式中 $\delta h_{\mu\nu}$ 的系數，寫出［由（7.8c）式］

$$\delta\bar{h}_{\alpha\beta}=(\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta_{\nu\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu})\delta h_{\mu\nu}；$$

然後，重新整理和重新加上虛擬（求和）指標得出

$$\delta I_{場}=(32\pi G)^{-1}\int[\bar{h}^{\mu\beta,\sigma}{}_{,\alpha}\delta h_{\nu\beta}-2\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}{}^{,\sigma}\delta\bar{h}_{\mu\alpha}]d^4x.。$$

把此式與 $\delta I_{相互作用}=\frac{1}{2}T^{\mu\nu}\delta h_{\mu\nu}d^4x$ 合併，再利用對稱性$\delta h_{\mu\nu}=\delta h_{\nu\mu}$，得

$$-\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}{}^{,\sigma}-\eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}+\bar{h}^{\mu\sigma}{}_{,\alpha}{}^{,\nu}+\bar{h}^{\nu\sigma}{}_{,\alpha}{}^{,\mu}=16\pi GT^{\mu\nu}。\qquad(4)$$

（7.12）式所作的定義使得上式可改寫爲

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}=16\pi GT^{\mu\nu}。\qquad(4')$$

B_2. 規範不變性（練習 7.3B 續）

$H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 的對稱性，

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}=H^{[\mu\alpha][\nu\beta]}=H^{\nu\beta\mu\alpha},$$

意味著與電磁學中的等式 $F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu}\equiv 0$ 類似，有

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta\nu}=H^{\mu\alpha[\nu\beta]}{}_{,\alpha(\beta\nu)}\equiv 0。$$

因而，$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ 是源的要求，正如電磁學中 $J^{\mu}{}_{,\mu}=0$（練習 3.16）那樣。這個等式使得場方程（4'）式對於完全確定 $h_{\mu\nu}$ 來說是太弱了。特別是，直

接代入(4)式，即可證明任何解都可以加上一個規範場

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}\text{(規範)} &= \xi_{\mu,\nu}+\xi_{\nu,\mu}, \\ \bar{h}_{\mu\nu}\text{(規範)} &= \xi_{\mu,\nu}+\xi_{\nu,\mu}-\eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}, \end{aligned} \tag{5}$$

而不改變 $T^{\mu\nu}$。

設 ξ_μ 在某個有限的空時體積之外爲零，而在其他地方爲任意值。則對於同樣的源 $T^{\mu\nu}$ 和同樣的無窮遠邊界條件， $h_{\mu\nu}$ 和 $h_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$(規範) 兩者都滿足源方程(4)式。因此，我們可以預期它們在物理上是等價的。

由於類似於電磁學中 "Lorentz" 限制 $A^{\alpha}{}_{,\alpha}=0$ (練習 3.58*a*; 練習 3.17) 的規範限制，應加上條件

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}=0。 \tag{6}$$

它把場方程(4)式簡化爲簡單的 d'Alembert 形式

$$\Box\bar{h}^{\mu\nu}\equiv\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha}=-16\pi T^{\mu\nu} \tag{7}$$

(見練習 18.2)。此處和今後均令 $G=1$ (「幾何單位制」)。

C. 點質量的場 (練習 7.3C)

對一靜源，波方程(7)式簡化爲 Laplace 方程

$$\nabla^2\bar{h}_{\mu\nu}=-16\pi T_{\mu\nu}。$$

靜點質量的脅强-能量張量 [(7.10) 式] 是 $T^{00}=M\delta^3(x)$ 和 $T^{\mu k}=0$. 把它引入 Laplace 方程，解出 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 並用 (7.8c) 式得出 $h_{\mu\nu}$. 結果是：

$$h_{00}=2M/r;\quad h_{0k}=0;\quad h_{ik}=\delta_{ik}(2M/r) \tag{8}$$

[見 (18.15a) 式]。

D. 近日點進動 (練習 7.3D)

直接把勢(8)式代入運動方程(2)式是冗長乏味的也不很有益。變分原理在力學中是受人歡迎的，因爲它們簡化了這種計算。回到基本的變分原理 $\delta I_{\text{粒子+相互作用}}=0$ [(1) 式] 並把勢(8)式作爲太陽勢代入。改變球坐標的指向使軌道位於赤道 ($\theta=\pi/2$) 平面：

$$I_{(\text{粒子+相互作用})}=\int L\,d\tau; \tag{9}$$

$$L=\frac{1}{2}m[-(1-2Mr^{-1})\dot{t}^2+(1+2Mr^{-1})(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2)]。 \tag{10}$$

由L中不顯含 t, ϕ 和τ，可得三個運動常數：正則動量

$$P_t \equiv -m\gamma = \partial L/\partial \dot{t}$$

（此式定義γ），和

$$P_\phi \equiv m\alpha = \partial L/\partial \dot{\phi}$$

（此式定義α）；和 Hamilton 函數

$$H = \dot{x}^\mu(\partial L/\partial \dot{x}^\mu) - L\,,$$

把路徑參量τ適當歸一化可使它等於$-\frac{1}{2}m$. 由這些運動常數，導出軌道方程如下：(1)用 r, $\dot{r}$, $\dot{\phi}$, 和 $\dot{t}$ 計算 $H=\frac{1}{2}m$; (2)用常數γ和α消去 $\dot{t}$ 和 $\dot{\phi}$; (3)與 Newton 軌道問題一樣，定義 $u=M/r$，並寫出

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{\dot{u}}{\dot{\phi}} = -\frac{M\dot{r}}{r^2\dot{\phi}} = -\frac{M}{\alpha}(1+2u)\dot{r}\,;$$

(4)在H中，用 $du/d\phi$ 經上式消去 $\dot{r}$，並用 u 消去 $\dot{r}$；(5)解出 $du/d\phi$. 結果爲

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = (\gamma^2 - 1 + 2u)\frac{M^2}{\alpha^2}\left[\frac{1+2u}{1-2u}\right]。 \tag{11}$$

忽略此方程中 $u=GM/c^2r\sim(1-\gamma^2)$ 的三階項和更高階項，導出近日點漂移。（方法的細節可參看練習40.4，其中，本框所用的γ和α重新取名爲$\tilde{E}$和$\tilde{L}$，並在該練習中分別取γ和β等於1和0）。所得每一軌道漂移爲

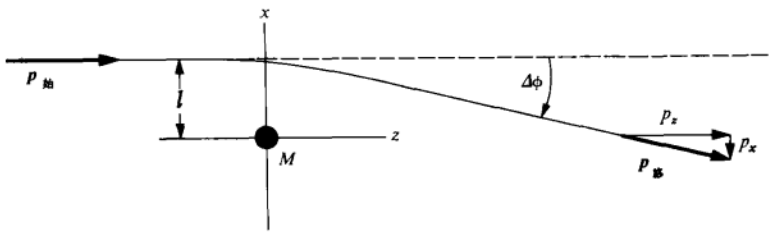
$$\Delta\phi = 8\pi M/r_0 + O([M/r_0]^2)。 \tag{12}$$

這是廣義相對論預言值的$\frac{4}{3}$，它與水星觀測不符（見框40.3）。

E. 光線的彎曲（練習 7.3 E）

光線經過太陽時的偏轉角，就量網而言是一個很小的量，$\Delta\phi\sim M_\odot/R_\odot\sim 10^{-6}$；從一開始人們就在這個小量的基礎上作出近似。一幅在 x, z 平面內的光子軌道圖表明，對平行於 z 軸的初始運動，偏轉角可用最終的動量表爲$\Delta\phi = p_x/p_z$。用沿軌道的積分算出最終的 p_x 爲，

$$p_x = \int_{-\infty}^{+\infty}(dp_x/dz)dz\,,$$



把 p_μ 基本上當作常數處理。這個計算需要把運動方程(2)式推廣到零靜止質量的情況。爲了討論 $m\longrightarrow 0$ 的極限，引入一新參量 $\lambda=\tau/m$；則 $p^\mu=m(dz^\mu/d\tau)=dz^\mu/d\lambda$。再定義 $p_\mu=(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})p^\nu$，因爲此量在(2)式中看來是簡單的，並且在人們所需計算的 $r\longrightarrow\infty$ 處的極限與 p_μ 一致。因而，對於任何 m，包括 $m=0$ 在內，(2) 式表爲

$$\frac{dP_\mu}{d\lambda}=\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,\mu}p^\alpha p^\beta。$$

上式右側，因 $h_{\alpha\beta,\mu}$ 很小，對 p^μ 的粗略近似是足夠的；$p^1=p^2=0$, $p^0=p^3=dz/d\lambda=\omega=$常數。於是

$$\frac{dP_1}{d\lambda}=\frac{1}{2}(h_{00}+2h_{03}+h_{33}),_1\omega^2$$

和

$$\frac{1}{p_3}\frac{dP_1}{dz}=\frac{1}{2}(h_{00}+2h_{03}+h_{33}),_1。$$

對於太陽，$h_{00}=h_{33}=2M/r$, $h_{03}=0$ [(8) 式]，故

$$\Delta\phi=-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)_{終}=-\left(\frac{P_1}{p_3}\right)_{終}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2Mldz}{(l^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{2M}{l}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^{3/2}}=\frac{4M}{l}。\qquad(13)$$

對於掠過太陽的光，$l=R_\odot$ 上式給出 $\Delta\phi=4M_\odot/R_\odot$ 弧度$=1''.75$，這也是廣義相對論的預計值，與觀測一致（見框40.1）

F. 引力波（練習 7.3F）

當今平直空時理論的場方程(4)式和規範性質(5)式與 Einstein「線性化理論」的有關方程相同。因此，在 §18.2, §35.3, 和 §35.4 介紹的用線性化理論對引力波的處理，也可用於此處。

G. 波的正能量（練習 7.3G）

從 (7.17) 式算出$\mathcal{H}$的一般公式是冗長乏味的，但是，只考慮平面波的特

殊情況 [(7.13) 式] ——或更好地，考慮只有 $h_{12}=h_{21}=f(z-t)$ 的平面波——就足夠了。任何引力波都可以看作是由這種平面波迭加而成的。首先計算這種情況下的 Lagrange 函數。根據 (7.8) 式，得

$$\mathcal{L}_{\text{場}}=(32\pi)^{-1}[(h_{12,0})^2-(h_{12,3})^2]。$$

現在，$\mathcal{H}$的定義 (7.17) 式的全部內容確切地如下所述：從 Lagrenge 函數開始；保留全部時間微商的二次項；忽略全部時間微商的線性項；改變不含時間微商的各項的符號。結果爲

$$\mathcal{H}=(32\pi)^{-1}[(h_{12,0})^2+(h_{12,3})^2], \tag{14}$$

它是正的。

H. 理論的不自洽（練習 7.3H）

從 (7.10) 式，找出

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=m\int\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta^4[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(\tau)]d\tau。$$

但是，$\delta^4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})$ 只取決於差 $x^\mu-z^\mu$，因此，當 $\partial/\partial x^\nu$ 作用於 δ 函數時，可以用 $-\partial/\partial z^\nu$ 代替。注意到

$$\frac{dz^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial z^\nu}\delta^4[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(\tau)]=\frac{d}{d\tau}\delta^4[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(\tau)],$$

把 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ 改寫爲

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=-m\int\dot{z}^\mu(d/d\tau)\delta^4[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(\tau)]d\tau=+m\int\ddot{z}^\mu\delta^4[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(\tau)]d\tau。$$

（最後一步是作分部積分得出的。）因此，當且僅當 $\ddot{z}^\mu=0$ 時，$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ 才成立，但是 $\ddot{z}^\mu=0$ 意味著引力場對粒子的運動沒有影響。而這與從理論的變分原理得出的運動方程 (2) 式相矛盾。因而，這種重力的張量理論不自洽。[簡單地說，(4) 式要求 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$，而 (2) 式却拒絕它。]

在這個理論中，引力作用著的物體却不能受重力影響這一事實，對於具有任意脅强-能量的物體（例如橡皮球或地球）都成立。因爲所有物體都受到引力的作用，因爲場方程要求 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$，又因爲「脅强-能量運動方程」要求物體的總四維動量 $P^\mu=\int T^{\mu 0}d^3x$ 守恒，所以沒有物體能被重力加速。地球不能被太陽吸引；它必須飛往星際空間中去！

補救理論中這種不自洽性的直接步驟，不可抗拒地導致廣義相對論（見框 17.2，第 5 部分），在採用廣義相對論作爲這種重力理論之後，人們就可以把目前的平直空時理論作爲它的近似來用（「線性化的廣義相對論」，將在第十八章，第十九章和第三十五章討論，特別是可參看一下 §18.3 末尾的討論）。

§7.2　由能量守恆導出引力紅移

Einstein 反對像 Newton 理論所採用的那類任意的理想的直線參照系。他强調指出，在自然的運動狀態中，甚至光子，都沒有提供任何這類理想直線存在或所在位置的證據。

由能量考慮導出引力紅移

Einstein (1911) 根據 Newton 引力理論所應用的能量守恒定律指出光子一定受到引力場的影響。設靜止質量爲m的粒子在引力場g中，從點$\mathcal{A}$由靜止開始自由下落一段距離h後到達點$\mathcal{B}$，它得到了動能mgh，它的總能量包括靜止質量在內，變爲

$$m+mgh。 \tag{7.18}$$

現在，設粒子在$\mathcal{B}$湮滅，把它的總靜止質量加上動能都轉換爲具有同樣總能量的光子。設此光子在引力場中向上運動到$\mathcal{A}$，如果光子與重力不發生相互作用，則當它到達$\mathcal{A}$時應具有它原來的能量。在$\mathcal{A}$點，可以用適當的裝置把它轉化爲另一個靜止質量爲m的粒子（爾後，它可以重複整個過程）加上剩餘的能量 mgh，後者是不付任何代價產生的。爲了避免與能量守恒定律（它也可用純經典的術語表述）矛盾，Einstein 看出該光子一定經歷了紅移。光子能量必定減少，正像粒子在引力場中往上升時能量要減少一樣。因此，在經過引力場的光子路徑上，頂部與底部的光子能量應有下述關係

$$E_{底}=E_{頂}(1+\mathrm{gh})=E_{頂}(1+g_{約定}h/c^2)。 \tag{7.19}$$

由於反對引力作功所造成的能量下降，意味着頻率下降，波長增加（紅移；傳統上用紅移參量 $z=\Delta\lambda/\lambda$ 表述）；於是

$$1+z=\frac{\lambda_{頂}}{\lambda_{底}}=\frac{h\nu_{底}}{h\nu_{頂}}=\frac{E_{底}}{E_{頂}}=1+gh。 \tag{7.20}$$

Pound 和 Snider (1964,1965) 改進了 Pound 和 Rebka (1960) 的實驗，證明上式所預計的紅移正確到百分之一。

§7.3　引力紅移意味着空時彎曲

Schild (1960, 1962, 1967) 的論證得出了一個重要結論：存在引力紅移表明，自洽的重力理論無法在狹義相對論的框架內構成。

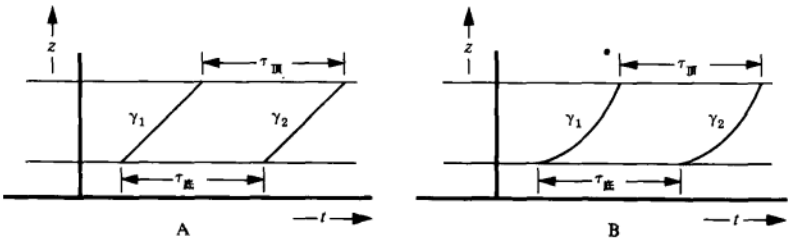


圖 7.1
從 z_1 高度發出的相繼光脈衝，反着地球的引力場達到 $z_2=z_1+h$ 高度。無論是斜率爲 45°（左圖），或是有變化的斜率（右圖）路徑 γ_1 和 γ_2 一定嚴格相等。

假設重力可以用平直空時中（非特定的）場描述

Einstein 的論證（最後一節）是在 Newton 理論中系統闡述的，而 Schild 的論證却是在狹義相對論中系統闡述的。它採用束縛於地球中心的整體 Lorentz 參照系，分析了在地球場中的引力紅移實驗。它並不要求在此整體 Lorentz 參照系中最初靜止的自由粒子保持靜止（遠離地球處除外，該處重力可以忽略）。相反，它要求自由粒子因地球引力場的作用而相對於 Lorentz 參照系加速。場的數學性質（標量、矢量、張量……）並無二致，但是它堅持引力加速度應與實驗相符。並且，當然，它還要求靜長度和原時由狹義相對論的度規決定。

Schild 的論證步驟如下，考慮一個觀測者在地球表面上高 z_1 處靜止，第二個觀測者在地球表面上高 $z_2=z_1+h$ 處（圖 7.1）。觀測者通過，例如，雷達探測靜止在地球參照系中而遠在地球引力場之外的自由粒子，可以證明他們彼此是相對靜止的，並且他們相對於地球 Lorentz 參照系也是靜止的。然後，在下面的實驗者發出具有固定標準頻率 ω_b 的電磁信號，它被在頂上的實驗者接收到。爲了確切，設信號爲嚴格 N 個周期長的脈衝。則發射此脈衝所需的時間間隔 $^*\delta\tau_{底}$ 由 $2\pi N=\omega_b\delta\tau_{底}$ 給出。然後，頂上的觀測者接收到這些同樣的 N 個周期的電磁波脈衝，並測出所需時間間隔 $^*\delta\tau_{頂}$。由「頻率」的定義，它應滿足 $2\pi N=\omega_t\delta\tau_{頂}$。由實驗（對於我們）或由能量守恆（對於 Einstein）確立的紅移效應表明 $\omega_t<\omega_b$；結果時間間隔也不同了，$\delta\tau_{頂}>\delta\tau_{底}$。把這個信息轉換到實驗的狹義相對論空時圖（圖 7.1）上去。波是光線；因此可以證明它們在空時圖中沿 45° 的零線移動（圖 7.1A）。在這種簡單而稍感不足的論

* 對於兩個觀測者的原時都等於 Lorentz 坐標時間，因爲他們在地球 Lorentz 參照系中靜止。

這個假設與引力紅移不相容

證形式中，有一個矛盾，即注意到此處人們已在 Minkowski 空時中畫了一個平行四邊形，它的兩對邊不等，$\tau_{頂} > \tau_{底}$，而在平直的 Minkowski 空時中的平行四邊形，不可能有不等的對邊。結論是，在任何足夠擴展的區域中狹義相對論不成立。盡管 Lorentz-Minkowski 平直性很適合於局域的物理學，但整體說來，正如光線和實驗粒子軌迹所探測的那樣，空時是偏離平直性的（「曲率」，本書第三編和第四編）。

圖 7.1B，通過確認光的傳播要受到引力場的影響，修正了這種論證中過於簡單化的地方。因此，光子不應遵循圖中的直線。結果，相繼脈衝的世界線 γ_1 和 γ_2 彎曲了。然而，引力場還是靜止的，實驗者也並未移動。因此，實驗裝置中沒有任何東西隨時間變化。無論什麼樣的路徑 γ_1 和路徑 γ_2 都必須是形狀嚴格相同的全等的路徑，只是在不同時刻而已。基於這種全等以及觀測者在平行世界線上運動的事實，人們再次斷定，如果平直Minkowski幾何成立，則$\tau_{底} = \tau_{頂}$，從而與觀測到的紅移實驗矛盾。實驗者毋需懂得光在引力場中的傳播。他們只需利用他們的雷達裝置證明下述事實，即他們彼此是相對靜止的，並且相對於引力場的源也是靜止的。他們知道，不管引力場怎樣影響他們的雷達裝置，這總是一種與時間無關的影響。另外，他們並不一定要知道怎樣計算他們的分離，以便證明這種分離保持不變。他們只需證明，他們測出的相互發出並返回的雷達脈衝所需的往返時間在任何時刻均相同即可。

結論：空時是彎曲的

Schild 的紅移論證既沒有揭示出哪一類曲率一定存在，也沒有揭示出曲率是存在於觀測設備的附近還是存在於離觀測設備一定距離的地方。然而，它毫不含糊的指出，狹義相對論的平直空時不適於描述這種情況，因此，刺激人們從事於曲率的數學分析（第三編）。

§7.4　作爲等效原理證據的引力紅移

等效原理：均勻引力場和參照系的均勻加速不可區分

Einstein (1908, 1911) 把引力相互作用普遍性的概念提高到基本等效原理的地位，即均勻引力場的全部效應與坐標系均勻加速的效應等同。這個原理把 Newton 引力理論的一個結果普遍化了：在 Newton 引力理論中，(7.1) 式中坐標系的均勻加速引起了一個附加的均勻引力場。然而，Newton 理論只對粒子力學給出了此結果。Einstein 的等效原理則斷言，同樣的對應性對於一切物理定律（包括電磁場的 Maxwell 方程）都成立。

遊戲規則——「科學方法」——要求對任何新的理論或原理找到實驗的支持， Einstein 可以把引力紅移作爲其等效原理的相應實驗證實來處理。這種證實包括兩步：第一，理論或原理必須預言一種效應（下一節將描述等效原理怎樣意味着紅移）；第二，這種預言的效應必須被觀測到。由於有了 Pound-Rebka-Snider 實驗，對於第二步來說，今天我們所處的情況比之 Einstein 當時是好多了。Einstein 本人必須依靠支持能量守恒普遍概念的實驗，再加上用紅移保持能量守恒的必要性，以代替直接的實驗驗證。

由等效原理導出引力紅移

考慮在維持恒定加速度 g 的火箭飛船上的兩個實驗者，即可從等效原理導出存在引力紅移。設這兩個觀測者之間在加速度方向上的距離爲 h，爲了確定起見，假設當在下面的觀測者發出一光子時，火箭飛船在某慣性參照系中靜止。則當光子到達上面的觀測者時，所需時間 $t=h$，在那個時刻，上面觀測者達到的速度爲 $v=gt=gh$，因此，他將探測到該光子，並觀測到 Doppler 紅移 $z=v=gh$，從而此處所得結果與 (7.20) 式相同。當然，等效原理要求，如果紅移是在無引力場但有均勻加速的條件下所作實驗中觀測到的，那麼，同樣的紅移也應該在有均勻引力場但無加速的條件下所作的實驗中觀測到。因此，由等效原理，可以導出適用於引力情況下的方程 (7.20) 式。

§7.5 局域平直，整體彎曲

等效原理幫助人們認識空時彎曲的性質，而存在空間彎曲已爲 Schild 的論證所斷定。在一個加速參照系中的物理學與束縛在地球表面實驗室中的物理學是同樣的。因而，束縛於地球的實驗室可以看作是相對於地球附近* 的 Lorentz 參照系以加速度 g 向上加速的。等效地說，相對於實驗室和地球表面，所有 Lorentz 參照系必定都是向下加速的。但是，在不同的經度和緯度處，向下（徑向）的方向不同。所以，開始彼此相對靜止但處於地球兩側的局域 Lorentz 參照系，以後將落向地球中心並且彼此對飛過去。顯然，它們不能像 Schild 的論證中所假設的那樣，互相吻合起來形成一個束縛於地球的單一整體 Lorentz 參照系。這種局域 Lorentz 參照系的不相吻合，就像在彎曲二維面上局域 Descartes 坐標系的不相吻合一樣，是空時彎曲的明白無誤的證明。

等效原理意味着地球附近的一些局域 Lorentz 參照系不相吻合（空時彎曲！）

地理學家在畫地球表面圖時遇到了同樣的問題。對很小的面積，如一個區或一個縣，很容易用標準的直角坐標系。然而，當畫兩個相當大的區域時，兩

* 這種實驗室的向上加速度，加上加速坐標系中線元的方程 (6.18) 式，解釋了圖 7.1 中平行四邊形底邊和頂邊的不等。

個區域各有一指向北方的坐標，人們發現若將兩圖以小角度放置，則兩圖的邊緣彼此極好地搭接起來（空時類似；兩個局域 Lorentz 參照系的相對速度在地球中心相會）。從球整體的圖畫出發，討論可以用多小的平面圖來作爲它的一部分的良好近似，這比起從大量很小的圖開始，再試圖把它們拼在一起以構成一幅整體的圖畫要容易得多。因此，本書對空時幾何的解釋採取第一種方法。現在，人們認識到問題在於把物理學的局域平直空時描述配合起來以得到宇宙的全部圖象，在下一章，人們將會愉快地轉入幾何學的廣泛研究。根據這個更先進的觀點，人們就可以面對這樣的問題：討論適合於引力場稍有不同的兩個相鄰區域採用的局域慣性參照系之間的關係。

局域 Lorentz 參照系的不相吻合刺激了幾何學的研究

幾何學進入廣義相對論有兩種不同的方式。一種是從狹義相對論度規結構 ds^2 繼承下來的四維空時中長度和角度的幾何。Schild的論證已經指出(沒有直接應用等效原理），狹義相對論的長度和角度觀念必須修正。修正的度規結構概念導致 Riemann 幾何，將在第八章和第十三章中討論。然而，由於等效原理，幾何學也進入了廣義相對論。在沒有引入空時度規概念，而只有三維空間 Euclid 度規結構的 Newton 引力理論中，已經可以表述等效原理了。Newton 理論的等效原理觀點再次堅持局域的標準參照系是自由下落粒子。這一要求導致空時幾何的研究，其中自由下落粒子的彎曲世界線局域的定義爲直線。這些彎曲世界線在彎曲空時幾何中的作用，正與直線在平直空時中的作用相當。這種「仿射幾何」將在第十到十二章中研究。它導致「協變微商」、「曲率」和甚至「Newton 空時曲率」等概念的定量公式！

與空時有關的兩類幾何學

Riemann 幾何（長度和角度）

仿射幾何（「直線」和曲率）

第三篇

彎曲空時的數學

這裏，讀者面臨着一個新的妖婦——現代微分幾何——的誘惑，並需作出抉擇：爲了整整八章接受它，還是在領略之後逃避它。

第八章　微分幾何：概論

我愈來愈確信，我們的幾何學的必要性是無法論證的，至少就不能由人類的聰明才智，也不能為了人類的聰明才智，……，幾何學不應與純粹先驗的算術並列，而應與力學並列。
(1817)

我們必須十分謙卑地承認，雖然數只是我們心智的產物，而空間却是存在於精神之外的現實，我們不能完全規定其法則。　(1830)

Carl Friedrich Gauss

§ 8.1　第三篇概述

引力是空時曲率的表現形式，而空時曲率在一條短程線偏離鄰近的短程線（「試驗粒子的相對加速度」）中顯露出來。很明顯，本書這一編的中心問題是，如何將「彎曲」空時中兩條「短程線」的「間隔」，以及「間隔」的「變化率」定量化？清晰而準確地回答要求新概念。

第三篇中發展的概念

短程線之間的「間隔」意味着「矢量」。但是，過渡到彎曲空時，平直 Lorentz 空時中所使用的矢量概念（雙重局域物：起點和終點）必須强化爲切向矢量的局域概念。第九章再作這種强化。還要揭示向彎曲空時的過渡如何影響 1 形式和張量。

切向矢量

採用一種方法（彎曲幾何學中的矢量，第九章）像矢量一樣清晰地定義「間隔」；採用另一種方法（彎曲空時中的平行移動，第十章）比較鄰近點的間

短程線

隔矢量並定義「間隔的變化率」。沒有移動，就無法比較；沒有比較，「變化率」這一術語就沒有意義！平行移動觀念根據的是「*短程線*」，即自由下落粒子的世界線概念。短程線的特殊數學性質，在第十章探討，該章用短程線定義平行移動，用平行移動定義*協變微商*，用協變微商來描述短程線——完成循環。

協變微商

短程線偏差
空時曲率

第十一章面臨的中心問題是*短程線偏差*（「兩條短程線之間間隔矢量的變化率」）以及它在定義*空時曲率*上的應用。

但是，定義曲率還不夠。想深入理解重力的讀者還必須看到曲率在起作用，它在 Newton 空時中產生粒子的加速度（第十二章）；他還必須學習在 Einstein 空時中距離（度規）如何完全確定曲率，以及平行移動的規律（第十三章）；他必須精通計算曲率的有力工具（第十四章）；並且他還必須掌握曲率的代數對稱性以及微分對稱性的幾何意義（第十五章）。

本章：微分幾何學的初階概述

很遺憾，這樣深入的理解需要時間。——比起在10個星期或15個星期的課程中所花的時間要多得多，比起讀者獨自首次通讀本書所願化的時間要多得多。爲了必須作快速突擊的讀者，本章包含了基本數學方法的初階概述（§§8.4—8.7）。雖然不夠深入，讀者從中已能適當理解空時曲率，潮汐引力以及彎曲空時的數學。這一概述也打算給高階讀者使用，他可感受一下即將到來的內容。有雄心的讀者可能還想查閱微分幾何學的其它入門書籍（參看框 8.1）。

框 8.1 關於微分幾何學的書籍

爲了更詳盡而廣泛地討論現代微分幾何學，按照這裏提供的線索，可查閱幾種數學教科書。Bishop 和 Goldberg (1968) 是首屈一指的參考書。Hicks(1965)可選作流行的標準研究生水平教科書，大學生水平的可選用O'Neill (1966)，後者介紹了許多相同的論題而考慮到讀者會對於由純數學家思考和書寫的流行文體感到困難。在稍高水平上的 Auslander和MacKenzie(1963)也可供那些對微分方程比起同態 (homomorphisms) 更爲熟悉的讀者使用。Willmore (1959) 易於閱讀，但沒有挑戰，而且在適應流行數學文體上無所進步。Trautman (1965) 和 Misner (1964a, 1969a) 除去降低圖的重要性之外，是與本書有些類似的入門書，同本書一樣，它們的對象是攻讀相對論的學生。Flanders (1963) 是易讀的，並在介紹外微分形式方面是有用的；它還給出外微分形式在物理學和工程學的廣泛多樣論題中應用的例子。

§8.2　初階和高階的比較：觀點和功用上的差異

關於 Einstein 的重力論與 Newton 理論之間的關係，再沒有比下述 Cartan (1923, 1924) 所揭示的更爲精彩了：兩種理論都適於用曲率描述；在兩種理論中曲率都取決於質量－能量密度；曲率無需應用或參考任何度規概念便可自行定義並測量。這兩種理論的差別表現在： Einstein 理論最終（或者一開始，取決於如何提出它！）可定義每一事件與每一鄰近事件的間隔；Newton 理論不僅不能，而且甚至可以說，談論空時間隔的任何企圖都違背 Newton 定律。情況既然這樣，高階要暫時放棄（第九到第十二章）空時度規（「Einstein 間隔」）的任何使用。它將從空時曲率的非度規描述中提取可能的一切（Newton 理論的全部；Einstein 理論的重要部分）。

高階微分幾何學的預展

短程線偏差是曲率的測量者和定義者，但是禁止旁觀者將間隔的矢量描述化爲距離的數字測量（在分析的這一階段沒有度規）：多麼不可思議的情況啊！儘管如此，這確實是第九章到第十五章涉及的情況：如何完成沒有度規的幾何學。從物理上說，在這一階段，可不管如下事實，即物理世界的幾何學常常和處處都是局域 Lorentz 的，且賦予一光錐，但是人們可利用最完美的 Galileo-Einstein 等效原理：在任意給定的地點，找到這樣的參考系，其中任一中性試驗粒子不管它的速度如何，是無加速度的。這些中性試驗粒子的徑迹確定了幾何上的短程線。這些短程線提供的工具可用以定義平行移動（第十章），定義協變微商（第十章），將短程線偏離定量化（第十一章），定義空時曲率（第十一章）以及考查 Newton 的重力（第十二章）。只有在充分考查這些無度規短程線之後，高階才容許 Einstein 度規登場（第十三到第十五章）。

但是，放棄使用度規的代價昂貴，非初階所能負擔；留給相對論星體、宇宙學、黑洞、引力波、實驗檢驗以及幾何動力學的時間則太少了。因此本章初階概述全部保留 Einstein 度規。但是這樣做要付出沉重的代價：(1)不可能理解曲率在 Newton 空時中起的作用(第十二章)；(2)不可能比較和對比Newton 空時（第十二章）和 Einstein 空時（第十三章）的幾何結構，從而不可能充分領會導致 Einstein 場方程的基於 Newton 的推動（第十七章）；(3)不可能充分理解「短程線」、「平行移動」、「協變微商」、「曲率」以及「度規」在數學上的相互關係（第九、十、十一、十三章）；(4)不可能引入數學科目「*微分拓撲*」（沒有度規或沒有協變微商的幾何學，第九章）和「*仿射幾何*」

初階讀者將失去什麼

（具有協變微商而無度規的幾何學，第十、十一章），它們在下述各方面可找到主要的應用：現代分析力學［例如參看 Arnold 和 Avez (1968)；也可參看本書練習4.11］，Lie 羣理論以及它在基本粒子物理中的深刻推斷［例如參看 Herman (1966)；也可參看本書練習 9.12, 9.13, 10.16 和 11.12］，偏微分方程的理論和求解［例如參看 Sternberg (1969)］，以及當然還有引力論。

§8.3 幾何學的三方面，圖示、抽象和分量

幾何學的三種觀點：圖示，抽象，分量

從 §8.4 和第九章可獲得討論彎曲空時中切向矢量、1形式和張量的功用；從 §8.5 和第十章可獲得平行移動矢量、對它們求微分以及討論短程線的功用；在 §8.7 和第十一章運用這些功用討論短程線偏差、定義曲率；……，但是只有在圖示、抽象符號和分量符號三方面（框 8.3）得到訓練，才會有充分的能力。Élie Cartan（框 8.2)給予 Newton 的重力(第十二章)和 Einstein

框 8.2 Èlie Cartan 1869-1951

Élie Cartan 是近代數學史上最值得注意的人物，從關於他的訃告［Chern 和 Chevalley (1952)］中獲悉，他出身於法國南部，是一個鐵匠的兒子，1912年他43歲時正式提升爲巴黎大學文理學院的教授，這證明他受到政府獎學金資助是有價值的。32歲時，他創立外微商［Cartan (1901)］，然後將它大量用於微分方程和 Lie羣理論，作出重要貢獻。當他開始將它應用於幾何學時，已經大約50歲了；在 Riemann 幾何明確成爲這一研究對象之前，他已經60歲。這一研究包括在他的教科書中［Cartan (1928)］，這本教科書至今仍在再版並富有研究價值。雖然他的工作得到了普遍的承認，但直到 1940 年前後他快要退休時，還沒有找到響應的讀者。當時，法國數學家 "Bourbaki" 這一代開始爲(其中包括)Cartan的見解和方法提供一種概念框架 這就使得 Cartan 不像他自己的著作那樣，而是可傳授和便於講授的了，因此到1951年他82歲逝世時，他的影響顯著地支配着他原來工作過的所有領域（Lie 羣，微分方程和微分幾何學）內積極進行的各種變革。

本書廣泛採用現代的、抽象的、不用坐標的幾何學研究方法，這主要應歸功於 Cartan。他還發現了研究 Newton 重力的幾何方法。這將在第十二章予以發展和利用。

框 8.3　微分幾何學的三種等級

(1)幾何學的純圖示處理

切向矢量用兩點在無限靠近的極限下的間隔來表達；

像在平直空間內一樣，矢量可局域地相加和相減；

不同點的矢量通過由一點到另一點的平行移動來比較；

這一平行移動可通過短程線的「Schild 階梯結構」（框10.2）來完成；

用圖，不用代數；

概念上儘可能緊密地聯繫到試驗粒子的世界和測量。

(2)抽象的微分幾何學

切向矢量憑本身的資格存在，無需分爲分量處理，

$$\mathbf{A}=A^0\mathbf{e}_0+A^1\mathbf{e}_1+A^2\mathbf{e}_2+A^3\mathbf{e}_3,$$

正好像現今在電磁學中對電矢量 $\boldsymbol{E}$ 的處理已習慣於不寫出它的分量。

它採用類似的微分方法（與初等矢量分析中的梯度算符 ∇ 比較，區別在於後者依賴於坐標的各個成分如 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 等）；

大家知道，它是微分幾何學中導出普遍結果的最快最簡單的數學方案。

(3)用分量語言表示的微分幾何學

對於計算者來說，爲大部分廣義相對論編製程序，這是必不可少的；

當甚至在初等代數水平上研究相對論的許多最簡單應用時（從 Friedmann 宇宙的膨脹到靜態吸引中心周圍的彎曲），這或者是方便的，或者是必要的，或者兩者兼而有之。

場方程重要的幾何簡單性（第十五章）兩者以新的見識，因爲他完全精通從事微分幾何學研究的全部三種方法。今天，不用全部三種語言來表述是不能就這一題目同別人完善地互通信息的。因此，三種表述方式之間是相互影響的，現說明如下。

行星軌道作爲三種觀點的例子

教科書中關於行星繞太陽作 Kepler 運動的速度和加速度的處理表明，反復使用這三種語言並不是新鮮事，速度可寫爲

$$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i+v^{\hat{i}}\boldsymbol{e}_{\hat{i}}。\tag{8.1}$$

（$\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_{\hat{i}}$ 上的尖帽號“^”表示這些是單位矢量。）加速度爲

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv^i}{dt}\boldsymbol{e}_i+\frac{dv^{\hat{i}}}{dt}\boldsymbol{e}_{\hat{i}}+v^i\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}+v^{\hat{i}}\frac{d\boldsymbol{e}_{\hat{i}}}{dt}。\tag{8.2}$$

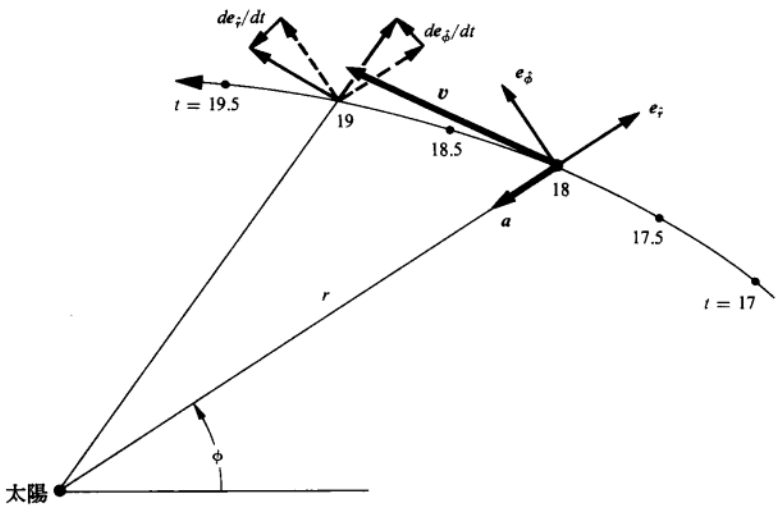


圖 8.1
太陽引力場中的 Kepler 軌道，用 Newton 重力的標準 Euclid 空間形式來處理。沿着軌道，基矢逐點改變［(8.3)式］。本圖說明微分幾何的圖示方面。以後（練習 8.5）要說明「協變微商」和「聯接係數」的概念。

單位矢量以角速度$\omega = d\phi/dt$旋轉（圖 8.1）；所以

$$\frac{de_i}{dt} = \omega e_{\hat{\imath}} = \frac{d\phi}{dt} e_{\hat{\imath}}, \qquad \frac{de_{\hat{\imath}}}{dt} = -\omega e_i = -\frac{d\phi}{dt} e_i 。 \tag{8.3}$$

因此，加速度各分量的值爲

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} - v^{\hat{\imath}} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \tag{8.4a}$$

和

$$a^{\hat{\imath}} = \frac{dv^{\hat{\imath}}}{dt} + v^i \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\phi}{dt}\right) + \frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} 。 \tag{8.4b}$$

這裏加速度是用分量語言表述的；$\boldsymbol{a}$是抽象語言的加速度；圖 8.1用箭頭表示加速度。在以下章節，這三種語言的每一種都將從二維平直空間（用曲線坐標）自然地推廣到四維彎曲空時，並進而推廣到更普遍的流形（關於流形可參看§9.7）。

現在轉到微分幾何學的初階概述。

§ 8.4　彎曲空時中的張量代數

張量代數：

(1)在事件的無限小鄰域內出現

(2)在彎曲空時和平直空時中是相同的

爲了弄清楚空時曲率起的作用，可考察潮汐引力（短程線偏差）；爲了探測這些力，可在有限尺度的實驗室中進行測量。把實驗室壓縮到無限小的尺寸，則空時曲率的所有效應都變爲無限小；物理學家不可能說明他是處於平直空時還是處於彎曲空時。數學家，在他所關注的範圍壓縮到單一事件 $\mathscr{P}_0$ 的極限下，同樣也不能作出選擇。

在事件 $\mathscr{P}_0$ （無限小實驗室內的），物理學家和數學家都可談論矢量、1形式、張量；而空時曲率的大小不可能强行討論偏離其平直空間形式的變化。在$\mathscr{P}_0$ 處的粒子具有四維動量 $\mathbf{p}$ ，其平方長度爲

$$\mathbf{p}^2=\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=\mathbf{g}(\mathbf{p},\mathbf{p})=-m^2。$$

平方長度總是通過將 $\mathbf{p}$ 插入 $\mathscr{P}_0$ 處的度規 $\mathbf{g}$ 這一線性機構的兩個空位來計算的。粒子在 $\mathscr{P}_0$ 也有四維加速度 $\mathbf{a}$ ；如果粒子帶電並自由運動，則 $\mathbf{a}$ 由電磁場張量 $\mathbf{F}$ 產生：

$$m\mathbf{a}=e\mathbf{F}(\ldots,\ \mathbf{u})。$$

曲率決不會影響這一局域的無坐標的幾何關係。它也決不會阻止在 $\mathscr{P}_0$ 點引入局域 Lorentz 系，根據標準的做法，在局域 Lorentz 系中，平直空間指標操作爲

$$\mathbf{p}=p^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha},\qquad \mathbf{p}^2=p^{\alpha}p^{\beta}\eta_{\alpha\beta}=p^{\alpha}p_{\alpha},\qquad ma^{\alpha}=eF^{\alpha\beta}u_{\beta}。$$

但是，局域 Lorentz 系對於想要在彎曲空時中作計算的人來說是不夠的。非 Lorentz 系（非正交基矢 $\{\mathbf{e}_{\alpha}\}$ 常使計算簡化。很幸運，在固定事件$\mathscr{P}_0$ 的任意基矢中完全無需精通「指標機構」的規則。這些規則與平直空時中的規則是相同的，不過以下幾點除外：

(3)當採用非正交基時，分量操作的規則變化很小

(1)度規的協變 Lorentz 分量 $\eta_{\alpha\beta}$ 代之以

$$g_{\alpha\beta}\equiv\mathbf{e}_{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\beta}\equiv\mathbf{g}(\mathbf{e}_{\alpha},\mathbf{e}_{\beta});\qquad(8.5)$$

度規分量

(2)逆變分量 $\eta^{\alpha\beta}$ 用 $g^{\alpha\beta}$ 代替，其中

$$\|g^{\alpha\beta}\|\equiv\|g_{\alpha\beta}\|^{-1}\text{（逆矩陣）；}\qquad(8.6)$$

即

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}=\delta_{\alpha}{}^{\gamma};\qquad(8.6')$$

(3)Lorentz 變換矩陣 $\|\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\|$ 及其逆矩陣 $\|\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\|$ 用一任意的但非奇異的變換矩陣 $\|L^{\alpha'}{}_{\beta}\|$ 及其逆矩陣 $\|L^{\beta}{}_{\alpha'}\|$ 代替，

$$\mathbf{e}_{\beta}=\mathbf{e}_{\alpha'}L^{\alpha'}{}_{\beta},\qquad p^{\beta}=L^{\beta}{}_{\alpha'}p^{\alpha'},\qquad(8.7)$$

基的變換

$$\|L^{\beta}{}_{\alpha'}\|=\|L^{\alpha'}{}_{\beta}\|^{-1};\qquad(8.8)$$

(4)在「坐標基」$\mathbf{e}_\alpha=\partial\mathscr{P}/\partial x^\alpha$, $\mathbf{e}_{\beta'}=\partial\mathscr{P}/\partial x^{\beta'}$ 的特殊情形下，

$$L^{\alpha'}{}_{\beta}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}, \qquad L^{\beta}{}_{\alpha'}=\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}}; \tag{8.9}$$

(5) Levi-Civita 張量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 像度規張量一樣，其分量取決於基是什麼樣的非正交基（見練習 8.3）：如果 $\mathbf{e}_0$ 指向未來，$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 是右旋系，則

Levi-Civita 張量的分量

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=(-g)^{1/2}[\alpha\beta\gamma\delta],$$
$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=g^{-1}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=-(-g)^{-1/2}[\alpha\beta\gamma\delta], \tag{8.10a}$$

式中 $[\alpha\beta\gamma\delta]$ 是完全反對稱符號

$$[\alpha\beta\gamma\delta]\equiv\begin{cases}+1, & \text{如果 } \alpha\beta\gamma\delta \text{ 是 0123 的偶置換},\\ -1, & \text{如果 } \alpha\beta\gamma\delta \text{ 是 0123 的奇置換},\\ 0, & \text{如果 } \alpha\beta\gamma\delta \text{ 並不是都不同},\end{cases} \tag{8.10b}$$

式中 g 是矩陣 $\|g_{\alpha\beta}\|$ 的行列式

$$g\equiv\det\|g_{\alpha\beta}\|\equiv\det\|\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta\|。 \tag{8.11}$$

爲了充分地討論和證明，可閱讀框 8.4 ； 較充分的理解和精通之後可做練習 8.1。

在這一段的討論中掩蓋了若干危險。在平直空時內，通常不用操心矢量、1形式或張量是局域於何處的。將幾何客體由一事件自由地移到另一事件甚至無須思考。當然，未寫出的移動規則是：在移動時保持全部長度和方向固定不變，即保持全部 Lorentz 系的分量固定不變，亦即「平行移動」幾何客體。

框 8.4 任意基中固定事件的張量代數

A. 基

切向矢量基：可任意選取在 $\mathscr{P}_0$ 的 $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ —— 但堅持它們是線性獨立的。

1-形式的「對偶基」：基 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 通過

$$\langle\boldsymbol{\omega}^\alpha,\mathbf{e}_\beta\rangle=\delta^\alpha{}_\beta$$

確定1-形式基 $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$（它的「對偶基」）［見 (2.19) 式］。

幾何解釋（圖 9.2）：$\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_0$ 平行於 $\boldsymbol{\omega}^1$ 的表面；$\mathbf{e}_1$ 正好穿透 $\boldsymbol{\omega}^1$ 的一個表面。

功用說明：$\langle\boldsymbol{\omega}^\alpha,\mathbf{e}_\beta\rangle=\delta^\alpha{}_\beta$ 確定 $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ 在任意矢量 $\mathbf{v}=v^\beta\mathbf{e}_\beta$ 上的值（當 $\mathbf{v}$ 穿透 $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ 時的「鈴響」數）：

$$\langle \omega^\alpha, \mathbf{u} \rangle = \langle \omega^\alpha, u^\beta \mathbf{e}_\beta \rangle = u^\beta \langle \omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = u^\beta \delta^\alpha{}_\beta = u^\alpha 。$$

特殊情形：坐標基。選擇任意坐標系 $\{x^\alpha(\mathscr{P})\}$，在 $\mathscr{P}_0$ 選定 $\mathbf{e}_\alpha = \partial \mathscr{P}/\partial x^\alpha$ 爲基矢，則對偶基爲 $\omega^\alpha = \mathbf{d}x^\alpha$. 證明：普遍的無坐標關係 $\langle \mathbf{d}f, \mathbf{v} \rangle = \partial_{\mathbf{v}} f$ [(2.17式)]，取 $f = x^\alpha$ 和 $\mathbf{v} = \partial \mathscr{P}/\partial x^\beta$，則

$$\langle \mathbf{d}x^\alpha, \partial \mathscr{P}/\partial x^\beta \rangle = (\partial/\partial x^\beta) x^\alpha = \delta^\alpha{}_\beta 。$$

B. 切向矢量和 1 形式的代數

當轉到任意基時，(2.19) 到 (2.22) 式的 Lorentz 系討論完全不變，結論是

展開式，$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\alpha u^\alpha$，　$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\alpha \omega^\alpha$；
分量計算，$u^\alpha = \langle \omega^\alpha, \mathbf{u} \rangle$，　$\sigma_\alpha = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_\alpha \rangle$；
形式在矢量上的值，$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle = \sigma_\alpha u^\alpha$。
應用於函數的梯度：
展開式，$\mathbf{d}f = f_{,\alpha} \omega^\alpha$ [定義 $f_{,\alpha}$]；
分量計算，$f_{,\alpha} = \langle \mathbf{d}f, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \partial_{\mathbf{e}_\alpha} f$ [見 (2.17式)]。
指標的升降用 $g_{\alpha\beta}$ 和 $g^{\alpha\beta}$ 來完成 [(8.5) 和 (8.6)式]。證明：
$\tilde{\mathbf{u}}$，即相應於 $\mathbf{u}$ 的1-形式，由 $\langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 對全部 $\mathbf{v}$ 來定義；
因此，$u_\alpha \equiv \langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\alpha = u^\beta \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = u^\beta g_{\beta\alpha}$；
倒置此式得 $u^\beta = g^{\beta\alpha} u_\alpha$。

C. 基的變換

如果用任意的但非奇異的矩陣 $\|L^{\alpha'}{}_\beta\|$ [(8.7)，(8.8) 式] 替換 $\|\Lambda^{\alpha'}{}_\beta\|$，則 (2.39) 到 (2.43) 式的 Lorentz 變換討論可用於基的普遍變換。結論是：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{\alpha'} = \mathbf{e}_\beta L^\beta{}_{\alpha'}, \qquad && \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_\beta ; \\
&\omega^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_\beta \omega^\beta, && \omega^\beta = L^\beta{}_{\alpha'} \omega^{\alpha'} ; \\
&v^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_\beta v^\beta, && v^\beta = L^\beta{}_{\alpha'} v^{\alpha'} ; \\
&\sigma_{\alpha'} = \sigma_\beta L^\beta{}_{\alpha'}, && \sigma_\beta = \sigma_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_\beta 。
\end{aligned}$$

當兩組基都是坐標基時，則 $L^\beta{}_{\alpha'} = \partial x^\beta/\partial x^{\alpha'}$，$L^{\alpha'}{}_\beta = \partial x^{\alpha'}/\partial x^\beta$。證明：

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \mathbf{e}_\beta ; \qquad \text{類似有 } \mathbf{e}_\beta = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \mathbf{e}_{\alpha'} 。$$

D. 張量代數

§3.2 [(3.8) 到 (3.22) 式] 和 §3.5 (包括梯度和散度) 中給出的張量代數討論都不變，只要

$$\eta_{\alpha\beta}\longrightarrow g_{\alpha\beta},\qquad \eta^{\alpha\beta}\longrightarrow g^{\alpha\beta},\qquad \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\longrightarrow L^{\alpha'}{}_{\beta},\qquad \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\longrightarrow L^{\beta}{}_{\alpha'};$$

Levi-Civita 張量的分量由 (3.50) 式變換爲 (8.10) 式 [見練習8.3] 。

主要的結論是：

展開式，$\mathbf{S}=S^{\alpha}{}_{\beta\tau}\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\omega^{\beta}\otimes\omega^{\tau}$；

分量，$S^{\alpha}{}_{\beta\tau}=\mathbf{S}(\omega^{\alpha},\mathbf{e}_{\beta},\mathbf{e}_{\tau})$；

指標的提升和降低，$S_{\mu\beta}{}^{\nu}=g_{\mu\alpha}g^{\nu\tau}S^{\alpha}{}_{\beta\tau}$；

基的變換，$S^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'}=L^{\lambda'}{}_{\alpha}L^{\beta}{}_{\mu'}L^{\tau}{}_{\nu'}S^{\alpha}{}_{\beta\tau}$；

機構操作，$\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u},\mathbf{v})=S^{\alpha}{}_{\beta\tau}\sigma_{\alpha}u^{\beta}v^{\tau}$；

張量積，$\mathbf{T}=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\Longleftrightarrow T^{\alpha\beta}=u^{\alpha}u^{\beta}$；

縮併，「$\mathbf{M}=\mathbf{R}$ 在空位 1 和空位 3 的縮併」$\Longleftrightarrow M_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$；

劈積，$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}$ 的分量爲 $\alpha^{\mu}\beta^{\nu}-\beta^{\mu}\alpha^{\nu}$；

對偶，$^{*}J_{\alpha\beta\tau}=J^{\mu}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\tau}$，$^{*}F_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$，$^{*}B_{\alpha}=\frac{1}{6}B^{\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}$。

E. 對易算符 (練習 8.2; §9.6; 框 9.2)

如果 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是切向矢量場，可考察 $\mathbf{u}=\partial_{\mathbf{u}}$ 和 $\mathbf{v}=\partial_{\mathbf{v}}$，並定義

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]\equiv[\partial_{\mathbf{u}},\partial_{\mathbf{v}}]\equiv\partial_{\mathbf{u}}\partial_{\mathbf{v}}-\partial_{\mathbf{v}}\partial_{\mathbf{u}}。$$

這一對易算符本身是切向矢量場。

在坐標基中的分量爲：

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]=(u^{\beta}v^{\alpha}{}_{,\beta}-v^{\beta}u^{\alpha}{}_{,\beta})(\partial/\partial x^{\alpha})。$$

$$\uparrow\text{——}[=\mathbf{e}_{\alpha}]。$$

基的對易系數爲：

$$[\mathbf{e}_{\alpha},\mathbf{e}_{\beta}]\equiv c_{\alpha\beta}{}^{\tau}\mathbf{e}_{\tau},\qquad c_{\alpha\beta\mu}\equiv c_{\alpha\beta}{}^{\tau}g_{\tau\mu}。$$

坐標基 (「完整的」) $c_{\alpha\beta}{}^{\tau}=0$；

非坐標基 (「非完整的」) 某些 $c_{\alpha\beta}{}^{\tau}\neq0$ (見練習 9.9) 。

但是，在彎曲空時中不存在保持分量固定不變的整體 Lorentz 坐標系；客體起初是平行的，沿不同曲線「平行移動」之後不再平行（「短程線偏差」；地球的子午線在赤道彼此平行，在南北極相交）。因此，在彎曲空時中，不應輕率地將幾何客體從一點移到另一點，而不注意指明如何移動和按哪一條路徑移動。每個局域的幾何客體有它自己認可的駐留地（事件 $\mathcal{P}_0$）；它可與駐留該處的其他客體相互作用（張量代數）；但是直到它被謹慎地從 $\mathcal{P}_0$ 點移動到另一事件 2 點，它才能與 2 處的任意客體相互作用。

矢量和張量不能輕率地由一點移到另一點

往前繼續下去，這一推理路線導致提到每一事件的「切向空間」，事件的矢量（箭頭）和 1 形式（曲面簇）處於其中，事件的張量（線性機構）在其中起作用。甚至還可畫出切向空間的富有啓發性的圖形，如圖9.1（第231頁）。

定義切向空間

彎曲空時中的另一種危險是誤把矢量看作聯繫兩個事件（「起點和終點」）的箭頭——即把圖 9.1的切向空間看作空時本身所在之處。這種作法對於啓發性目的可能是有用的，但它與整個數學上的嚴謹性是不相容的。（切向空間如何鑄造成翹曲的曲面呢？）圖 2.1（第49頁）曾給出矢量的四種定義：三種定義依賴「起點和終點」；一種定義「$d\mathcal{P}/d\lambda$」純粹是局域的。只有局域定義在彎曲空時中才是完全可行的。在數學家的眼裏，它還要按照下面所述的方法改善。

彎曲空時中矢量的定義：(1)是 $d\mathcal{P}/d\lambda$

矢量 $\boldsymbol{u}$ 和方向微商 $\partial_{\boldsymbol{u}}$ 之間有一對一的對應關係（完全「同構」）。矢量概念有一點含糊，而「方向微商」已完全明確地定義了。爲了免除所有的含混，徹底地利用同構：**定義**切向矢量 $\boldsymbol{u}$ 等於相應的方向微商：

(2)是方向微商

$$\boldsymbol{u} \equiv \partial_{\boldsymbol{u}}。 \tag{8.12}$$

（這一作法對物理學家而言起初可能是陌生的，但它具有數學上的功能，所以本書將經常使用它。更完善的討論見 §9.2.）

練習 8.1　張量代數練習

練習

設 t, x, y, z 是平直空時的 Lorentz 坐標，並設

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \quad \theta=\cos^{-1}(z/r), \quad \phi=\tan^{-1}(y/x)$$

是相應的球坐標。另外

$$\mathbf{e}_0=\partial\mathcal{P}/\partial t, \quad \mathbf{e}_r=\partial\mathcal{P}/\partial r, \quad \mathbf{e}_\theta=\partial\mathcal{P}/\partial\theta, \quad \mathbf{e}_\phi=\partial\mathcal{P}/\partial\phi$$

是坐標基，

$$\mathbf{e}_{\hat{0}}=\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t}, \quad \mathbf{e}_{\hat{r}}=\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_{\hat{\theta}}=\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}, \quad \mathbf{e}_{\hat{\phi}}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\phi}$$

是非坐標基。

(a) 畫出 t, r 爲常數的球上幾個不同點的 $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$ 和 $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ 的圖形。[對 $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ 的回答應類似於圖 9.1]

(b) 與這些切向矢量基對偶的1-形式基 $\{\omega^\alpha\}$ 和 $\{\omega^{\hat{\alpha}}\}$ 是什麼？[答案： $\omega^0=dt$, $\omega^r=dr$, $\omega^\theta=d\theta$, $\omega^\phi=d\phi$; $\omega^{\hat{0}}=dt$, $\omega^{\hat{r}}=dr$, $\omega^{\hat{\theta}}=rd\theta$, $\omega^{\hat{\phi}}=r\sin\theta d\phi$。]

(c) 把原 Lorentz 系和球坐標系 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 相聯系的變換矩陣是什麼？[答案：非零分量爲

$$L^t{}_0=1, \qquad L^x{}_r=\frac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta, \qquad L^x{}_\theta=\frac{\partial z}{\partial\theta}=-r\sin\theta,$$
$$L^x{}_r=\sin\theta\cos\phi, \qquad L^x{}_\theta=r\cos\theta\cos\phi, \qquad L^x{}_\phi=-r\sin\theta\sin\phi,$$
$$L^y{}_r=\sin\theta\sin\phi, \qquad L^y{}_\theta=r\cos\theta\sin\phi, \qquad L^y{}_\phi=r\sin\theta\cos\phi。$$

]

(d) 用這個變換矩陣計算球坐標基中的度規分量 $g_{\alpha\beta}$ ，並倒置所得矩陣求得 $g^{\alpha\beta}$ 。[答案：

$$g_{00}=-1, \quad g_{rr}=1, \quad g_{\theta\theta}=r^2, \quad g_{\phi\phi}=r^2\sin^2\theta \quad \text{所有其他 } g_{\alpha\beta}=0。$$
$$g^{00}=-1, \quad g^{rr}=1, \quad g^{\theta\theta}=r^{-2}, \quad g^{\phi\phi}=r^{-2}\sin^{-2}\theta, \quad \text{所有其他 } g^{\alpha\beta}=0。$$

]

(e) 試證明非坐標基 $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$ 處處正交，即證明 $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=\eta_{\alpha\beta}$，亦即證明

$$\mathbf{g}=-\omega^{\hat{0}}\otimes\omega^{\hat{0}}+\omega^{\hat{r}}\otimes\omega^{\hat{r}}+\omega^{\hat{\theta}}\otimes\omega^{\hat{\theta}}+\omega^{\hat{\phi}}\otimes\omega^{\hat{\phi}}。$$

(f) 用球坐標基和非坐標基寫出函數 f 的梯度。[答案：

$$\begin{aligned}\mathbf{d}f&=\frac{\partial f}{\partial t}\mathbf{d}t+\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{d}r+\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathbf{d}\theta+\frac{\partial f}{\partial\phi}\mathbf{d}\phi\\&=\frac{\partial f}{\partial t}\omega^{\hat{0}}+\frac{\partial f}{\partial r}\omega^{\hat{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\omega^{\hat{\theta}}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\omega^{\hat{\phi}}。\end{aligned}$$

]

(g) 在球坐標和非坐標基中， Levi-Civita 張量的分量是什麼？[對於坐標基的答案：

$$\varepsilon_{0r\theta\phi}=-\varepsilon_{r0\theta\phi}=+\varepsilon_{r\theta0\phi}=\cdots=r^2\sin\theta,$$
$$\varepsilon^{0r\theta\phi}=-\varepsilon^{r0\theta\phi}=+\varepsilon^{r\theta\phi0}=\cdots=-r^{-2}\sin^{-1}\theta。$$

]

練習 8.2 對易算符

按照數學家的觀點，切向矢量和方向微商是同一個東西 $\mathbf{u}\equiv\partial_{\mathbf{u}}$ ，令 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是兩個矢量場，用量子力學中熟悉的方式定義它們的對易算符

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]\equiv[\partial_{\mathbf{u}},\partial_{\mathbf{v}}]\equiv\partial_{\mathbf{u}}\partial_{\mathbf{v}}-\partial_{\mathbf{v}}\partial_{\mathbf{u}}。\tag{8.13a}$$

(a) 導出 $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ 在任意坐標基中都正確的下述表示式

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]=(u^\beta v^\alpha{}_{,\beta}-v^\beta u^\alpha{}_{,\beta})\mathbf{e}_\alpha。\tag{8.13b}$$

因此，不管它看起來像一個二階微分算符，實際上 $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ 是一階的，即它是一切向矢量。

(b) 對於任意基 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ ，可定義「對易系數」$c_{\beta\gamma}{}^\alpha$ 和 $c_{\beta\gamma\alpha}$ 如下

$$[\mathbf{e}_\beta,\mathbf{e}_\gamma]\equiv c_{\beta\gamma}{}^\alpha\mathbf{e}_\alpha; \qquad c_{\beta\gamma\alpha}\equiv g_{\alpha\mu}c_{\beta\gamma}{}^\mu。\tag{8.14}$$

試證明，對於任意基，$c_{\beta\gamma}{}^\alpha=c_{\beta\gamma\alpha}=0$。

(c) 對於練習 8.1 的球面非坐標基，計算 $c_{\hat{b}\hat{r}}{}^{\hat{a}}$ [答案：除下述量外均爲零

$$c_{\hat{r}\hat{\theta}}{}^{\hat{\theta}}=-c_{\hat{\theta}\hat{r}}{}^{\hat{\theta}}=-1/r,$$
$$c_{\hat{r}\hat{\phi}}{}^{\hat{\phi}}=-c_{\hat{\phi}\hat{r}}{}^{\hat{\phi}}=-1/r,$$
$$c_{\hat{\theta}\hat{\phi}}{}^{\hat{\phi}}=-c_{\hat{\phi}\hat{\theta}}{}^{\hat{\phi}}=-\cot\theta/r。$$]

練習 8.3　在非正交系中的 Levi-Civita 張量的分量

(a) 試證明 (8.10) 式是 $\mathbf{e}_0$ 指向將來，$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 爲右手系的任意基中 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的分量。[提示：(1)複習在練習3.13給出的關於 Lorentz 系中 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的討論。(2)用局域 Lorentz 系 $\{\mathbf{e}_{\hat{\mu}}\}$ 的變換計算 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 和 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$，例如

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=L^{\hat{\mu}}{}_{\alpha}L^{\hat{\nu}}{}_{\beta}L^{\hat{\lambda}}{}_{\gamma}L^{\hat{\rho}}{}_{\delta}\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\rho}}。$$

(3)試證明此式可化爲

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=\det\|L^{\hat{\mu}}{}_{\nu}\|\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\rho}},\quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=\det\|L^{\nu}{}_{\hat{\mu}}\|\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\rho}}。$$

(4)根據度規分量的變換定律證明

$$(\det\|L^{\nu}{}_{\hat{\mu}}\|)^2\det\|g_{\alpha\beta}\|=-1。$$

(5)合併這些結果得 (8.10) 式。]

(b) 證明置換張量 [由 (3.50*h*)-(3.50j)式定義的] 在任意系中與在 Lorentz 系中一樣具有相同的值 [(3.50k)-(3.50m)式]。

關於張量代數的附加練習：練習 9.3 和 9.4 (第 234 頁)。

---

§8.5　平行移動，協變微商，聯絡係數，短程線

等效原理是平直空時與彎曲空時之間的媒介

從經典力學到量子力學的媒介是對應原理，類似地，平直空時與彎曲空時之間的媒介是等效原理：「在彎曲空時任一局域 Lorentz 系中的物理定律，與在平直空時整體 Lorentz 系中的物理定律是相同的。」但是爲了應用等效原理，必須首先有局域 Lorentz 系的數學表示，顯而易見的選擇是：*在給定事件 $\mathcal{P}_0$ 處的局域 Lorentz 系最接近於該事件處的整體 Lorentz 系*，即它是使

局域 Lorentz 系的數學表示

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0)=\eta_{\mu\nu},\tag{8.15a}$$

的坐標系，且其中在 $\mathcal{P}_0$ 的鄰域 $g_{\mu\nu}$ 盡可能緊密地保持爲 $\eta_{\mu\nu}$，

$$g_{\mu\nu,\alpha}(\mathcal{P}_0)=0。\tag{8.15b}$$

一般說來，不可能比這更緊密了 [不能令 $g_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathcal{P}_0)$爲零]：空時曲率迫使它變化 [將 §11.5 與(8.24) 和 (8.44)式結合起來]。

定義平行移動

在彎曲空時的局域 Lorentz 系中的觀察者可以比較在鄰近事件處的矢量和張量，就像在平直空時中他也能比較一樣。但是爲了作這種比較，必須將它們平行移動到共同的事件。對於他來說，平行移動的動作是簡單的：像在平直空時中那樣，保持全部 Lorentz 系分量都固定。但是對於非局域 Lorentz 系——或許根本無坐標系或根本無基矢——中的人來說，平行移動則不太平常。他必須向 Lorentz 系中的朋友詢問結果，或者他必須採用更爲牽强的技術。他可能採用的一種技術是 「Schild 階梯」， 它不需要坐標和基矢，這將在 §10.2 和框 10.2 中描述。但是初階讀者不需要精通 Schild 階梯。他總可詢問局域 Lorentz 觀察者，任意給定的平行移動的結果是什麼，或者他可採用普遍公式計算如下。

用平行移動作比較是建立張量場梯度 $\nabla \boldsymbol{T}$的基礎。在 §3.5 沒有提到平行移動，在那裏首先定義梯度，但是平行移動是隱含着的：定義 $\nabla \boldsymbol{T}$使它的分量爲 $T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}=\partial T^{\alpha}{}_{\beta}/\partial x^{\gamma}$ [對 $\boldsymbol{T}a\binom{1}{1}$張量] ；即要求 $\nabla \boldsymbol{T}$量度 $\boldsymbol{T}$ 的 Lorentz 系分量逐點有多少變化。但是「Lorentz 分量不變」意味着「平行移動」，所以已經隱含着要求 $\boldsymbol{T}$ 的變化是相對於純平行移動之後的 $\boldsymbol{T}$ 的變化。

定義協變微商

用抽象符號整理這一微分概念如下。首先定義 $\boldsymbol{T}$ 沿曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的「協變微商」$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T}$，其切向矢量爲 $\boldsymbol{u}=d\mathcal{P}/d\lambda$：

$$(\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T})_{\text{在}\mathcal{P}(0)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\boldsymbol{T}[\mathcal{P}(\varepsilon)]_{\text{平行移動到}\mathcal{P}(0)}-\boldsymbol{T}[\mathcal{P}(0)]}{\varepsilon}\right\}。\quad (8.16)$$

定義梯度

（對於 $\boldsymbol{T}$ 是矢量場 $\boldsymbol{v}$ 的特殊情形，參見圖 8.2。）然後定義 $\nabla \boldsymbol{T}$ 爲線性機器，把 $\boldsymbol{u}$ 插入它的最後的空位，它給出 $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T}$:

$$\nabla \boldsymbol{T}(\ldots,\ldots,\boldsymbol{u})\equiv\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T}。\quad (8.17)$$

這一結果與 §3.5 中所定義的是同一物（「梯度」）（證明可見練習 8.8）。但是這個不同的定義清楚地聯繫到平行移動，它包含的事實是

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T}=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{T}\text{ 沿 }\boldsymbol{u}=d\mathcal{P}/d\lambda\text{ 作平行移動。}\quad (8.18)$$

在局域 Lorentz 系中，$\nabla \boldsymbol{T}$ 的分量是 $\boldsymbol{T}$ 分量的方向微商：$T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}$。在普遍基中並不如此。如果 $\{\boldsymbol{e}_{\beta}(\mathcal{P})\}$ 是逐點作的任意的光滑變化的基，$\{\boldsymbol{\omega}^{\alpha}(\mathcal{P})\}$ 是它的對偶基，則 $\nabla \boldsymbol{T}=\nabla\ (T^{\beta}{}_{\alpha}\boldsymbol{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\alpha})$ 將既含有來自 $\nabla \boldsymbol{e}_{\beta}$ 和 $\nabla \boldsymbol{\omega}^{\alpha}$ 的貢獻，又含有來自 $\nabla T^{\beta}{}_{\alpha}\equiv \boldsymbol{d}T^{\beta}{}_{\alpha}=T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}\boldsymbol{\omega}^{\gamma}$ 的貢獻。

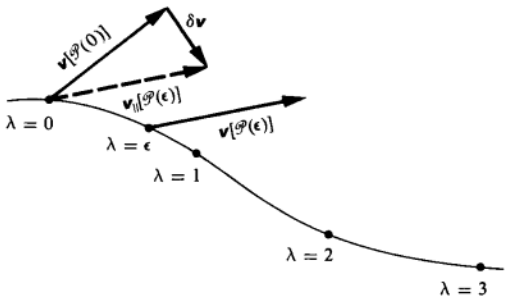


圖 8.2

定義矢量場 $\mathbf{v}$ 沿具有切向矢量 $\mathbf{u}\equiv d\mathscr{P}/d\lambda$ 的曲線 $\mathscr{P}(\lambda)$ 的協變微商「$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$」：(1)選擇曲線上的一點 $\mathscr{P}(0)$，求該點 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ 的值。(2)在曲線上選擇鄰近點 $\mathscr{P}(\varepsilon)$。(3)沿曲線將 $\mathbf{v}[\mathscr{P}(\varepsilon)]$ 平行移動回到 $\mathscr{P}(0)$，得矢量 $\mathbf{v}_{\|}[\mathscr{P}(\varepsilon)]$。(4)取差值 $\delta\mathbf{v}\equiv\mathbf{v}_{\|}[\mathscr{P}(\varepsilon)]-\mathbf{v}[\mathscr{P}(0)]$。(5)然後 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ 由下式定義

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\equiv\underset{\varepsilon\to0}{\mathrm{Lim}}\ \frac{\delta\mathbf{v}}{\varepsilon}=\underset{\varepsilon\to0}{\mathrm{Lim}}\left\{\frac{\mathbf{v}_{\|}[\mathscr{P}(\varepsilon)]-\mathbf{v}[\mathscr{P}(0)]}{\varepsilon}\right\}。$$

爲了給 $\nabla\mathbf{e}_\beta$ 和 $\nabla\omega^\alpha$ 的貢獻定量化，即給基矢和1形式的扭轉、旋轉、膨脹和收縮定量化，可定義「聯絡系數」：

定義聯絡係數

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\equiv\langle\omega^\alpha,\underbrace{\nabla_\gamma\mathbf{e}_\beta}_{[\equiv\nabla_{\mathbf{e}_\gamma}]}\rangle\quad\left[\begin{array}{l}\text{說明交換}\beta\text{和}\gamma\text{使微}\\\text{分指標最終落到}\Gamma\text{上}\end{array}\right]\tag{8.19a}$$

$$=\left(\begin{array}{l}\text{相對於沿 }\mathbf{e}_\gamma\text{ 的平行移}\\\text{動，}\mathbf{e}_\beta\text{的}\alpha\text{分量的變化}\end{array}\right),$$

可以證明（練習 8.12）

$$\langle\nabla_\gamma\omega^\alpha,\mathbf{e}_\beta\rangle=-\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}。\tag{8.19b}$$

通過這些系數以及

$$T^{\beta\ldots}{}_{\alpha\ldots;\gamma}\equiv\nabla_\gamma T^{\beta\ldots}{}_{\alpha\ldots}\equiv\partial_{\mathbf{e}_\gamma}T^{\beta\ldots}{}_{\alpha\ldots}\equiv\partial_\gamma T^{\beta\ldots}{}_{\alpha\ldots},\tag{8.20}$$

梯度分量記爲 $T^{\beta\ldots}{}_{\alpha\ldots;\gamma}$，則

在任意系中的梯度分量

$$T^{\beta\ldots}{}_{\alpha\ldots;\gamma}=T^{\beta\ldots}{}_{\alpha\ldots,\gamma}+\Gamma^\beta{}_{\mu\gamma}T^{\mu\ldots}{}_{\alpha\ldots}-\Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma}T^{\beta\ldots}{}_{\mu\ldots}\tag{8.21}$$

（見練習 8.13）。如果要計算 $\nabla\mathbf{T}$ 的事件的基是局域Lorentz系，則 $\nabla\mathbf{T}$ 的分量會只是 $T^{\beta\ldots}{}_{\alpha\ldots,\gamma}$。因爲情況並不如此，所以必須修正基矢和1形式扭轉、旋轉、膨脹和收縮的「Lorentz系」值。（8.21）式中的「ΓT」項是對 $\mathbf{T}$ 的每個指標的必要修正。這些修正項的樣式是容易記住的：(1)如果作修正的指標在面，則修正項爲「＋」，如果作修正的指標在下面，則修正項爲「－」；(2)微上分指標（上述情形爲 γ）總是在 Γ 的末尾；(3)作修正的指標（在第一項中爲 β，在第二項中爲 α）從 T 移到 Γ 上，並在 T 上用求和指標(μ)代替。

已知梯度的分量（8.21）式，通過把它簡單地縮併爲 u^τ [見（8.17）式] 即可計算協變微商 $\nabla_u T$ 的分量：

$$\nabla_u T=(T^\beta{}_{\alpha;\tau}u^\tau)\mathbf{e}_\beta\otimes\omega^\alpha。 \tag{8.22}$$

協變微商分量

當 u 是曲線 $\mathscr{P}(\lambda)$ 的切向矢量，即 $u=d\mathscr{P}/d\lambda$ 時，對於 $\nabla_u T$ 的分量可採用符號 $DT^\beta{}_\alpha/d\lambda$：

$$\frac{DT^\beta{}_\alpha}{d\lambda}\equiv T^\beta{}_{\alpha;\tau}u^\tau=T^\beta{}_{\alpha;\tau}\frac{dx^\tau}{d\lambda}$$

[如果基爲坐標基，則 $u^\tau=dx^\tau/d\lambda$]

$$=(T^\beta{}_{\alpha,\tau}+\text{「}\Gamma T\text{」修正項})\frac{dx^\tau}{d\lambda}$$

$$=\frac{dT^\beta{}_\alpha}{d\lambda}+(\Gamma^\beta{}_{\mu\tau}T^\mu{}_\alpha-\Gamma^\mu{}_{\alpha\tau}T^\beta{}_\mu)\frac{dx^\tau}{d\lambda}。 \tag{8.23}$$

$T^\beta{}_{\alpha;\tau}$ 中的「；」提醒人們用「ΓT」項修正 $T^\beta{}_{\alpha,\tau}$；同樣，$DT^\beta{}_\alpha/d\lambda$ 中的「D」提醒人們用「ΓT」項修正 $dT^\beta{}_\alpha/d\lambda$。

根據度規和對易算符計算聯絡系數

以上全都很完美，但是對於給定的基如何計算出聯絡係數呢？答案在練習8.15中導出。它說：(1)取給定基中的度規係數；(2)計算它們沿基方向的方向微商

$$g_{\beta\tau,\mu}\equiv\partial_\mu g_{\beta\tau}\quad(\equiv\partial_{\mathbf{e}_\mu})\quad=\partial g_{\beta\tau}/\partial x^\mu;\quad(\text{如果採用坐標基 }\mathbf{e}_\mu=\partial\mathscr{P}/\partial x^\mu) \tag{8.24a}$$

(3)計算基的對易系數［在普遍情形下爲（8.14）式；在坐標基的特殊情形下，$c_{\mu\beta\tau}=0$］；(4)計算「協變聯絡係數」

$$\Gamma_{\mu\beta\tau}=\frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\tau}+g_{\mu\tau,\beta}-g_{\beta\tau,\mu}+\underbrace{c_{\mu\beta\tau}+c_{\mu\tau\beta}-c_{\beta\tau\mu}}_{\text{對於坐標基這些項爲零}});\tag{8.24b}$$

(5)提升指標得聯絡係數

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\tau}=g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\tau}。 \tag{8.24c}$$

［術語注釋：坐標基總有 $c_{\alpha\beta\tau}=0$，有時稱爲完整的，非坐標基總有某些$c_{\alpha\beta\tau}$不爲零，有時稱爲非完整的。在完整的情形，聯絡係數有時稱爲 Christoffel 符號。］

帶有分號、逗號以及D的分量符號，聯絡係數等等起初看來有些龐雜，但是它具有巨大的計算功能。當你繼續學下去深入到引力理論就會看出來；並且

它的操作規則足夠簡單很容易學到手。相反，抽象符號（$\nabla \mathbf{T}$，$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$ 等）很少適用於複雜計算；但是它具有巨大的概念功能。

這一對比清楚地表明這兩種符號都可處理**短程線**概念。空時的短程線是一條曲線，當沿着它的路線在每一個局域 Lorentz 系中測量時，它是直的，並且是均勻參量化的。如果短程線是類時的，則對於自由下落的粒子，它是一條可能的世界線，而且描述其均勻滴答的參量 λ（叫做「**仿射參量**」）是粒子原時的倍數，$\lambda = a\tau + b$ （等效原理：試驗粒子在局域 Lorentz 系的直線上運動，每個粒子的鐘象任意 Lorentz觀察者所測量的一樣以均勻的速率滴答着）。這一短程線的定義容易翻譯爲抽象的無坐標語言：短程線是一條曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$，沿着曲線平行移動它的切向矢量 $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ 有

定義短程線和仿射參量

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0。 \tag{8.25}$$

（見圖10.1）。在概念上什麼是更簡單的呢？爲了計算短程線，這裏給出起始事件 $\mathcal{P}_0$ 和起始切向矢量 $\mathbf{u}(\mathcal{P}_0)$，必須採用分量形式。引入坐標系 $x^\alpha(\mathcal{P})$，其中$u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$，寫出（8.25）式的分量形式爲

$$0 = \frac{D(dx^\alpha/d\lambda)}{d\lambda} = \frac{d(dx^\alpha/d\lambda)}{d\lambda} + \left(\Gamma^\alpha{}_{\mu\tau}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)\frac{dx^\tau}{d\lambda}$$

［見（8.23）式，在T上還有一個下指標］；即

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\tau}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\tau}{d\lambda} = 0。 \tag{8.26}$$

短程線方程

當初始數據［在 $\lambda = \lambda_0$ 的 x^α 和 $dx^\alpha/d\lambda$］給定時，由這一**短程線方程**可以解出（在原則上）短程線坐標 $x^\alpha(\lambda)$。

地球表面的短程線（大圓）作爲陪襯，可以使得聯絡系數形象化；見圖8.3。

本節的材料顯得較爲深奧，在第十章和第十三章將從不同觀點予以介紹。打算學習那些章的高階讀者可以不管下述練習。打算跳過第九一十五章的初階讀者通過作練習 8.4—8.7 將獲得分量形式的必要經驗。練習8.8—8.15對於初階讀者不太重要，但還是有價值的，它們把協變微商和聯絡系數的形式發展爲系統的方法。這些練習的最重要結果概括在框 8.6（第 223 頁到第 224 頁）中。

練習 8.4　寫出梯度分量的練習

練習

用通常的微商（$f_{,\tau} \equiv \partial_{e_\tau} f \equiv \nabla_\tau f$）以及「$\Gamma T$」修正項重新寫出下列各量：(a) $T_{;\tau}$ 其中 T 是函數。(b) $T^\alpha{}_{;\tau}$ 其中 $\mathbf{T}$ 是矢量。(c) $T_{\alpha;\tau}$ 其中 $\mathbf{T}$ 是1形式。(d) $T^{\alpha\beta\epsilon}{}_{;\tau}$，［答案；

(a) $T_{;\tau} = T_{,\tau}$。　(b) $T^\alpha{}_{;\tau} = T^\alpha{}_{,\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\tau}T^\mu$。(c) $T_{\alpha;\tau} = T_{\alpha,\tau} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\tau}T_\mu$。
(d) $T^{\alpha\beta\epsilon}{}_{;\tau} = T^{\alpha\beta\epsilon}{}_{,\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\tau}T^{\mu\beta\epsilon} - \Gamma^\mu{}_{\beta\tau}T^{\alpha\mu\epsilon} - \Gamma^\mu{}_{\delta\tau}T^{\alpha\beta\mu} + \Gamma^\epsilon{}_{\mu\tau}T^{\alpha\beta\delta}$。　］

圖 8.3

用圖解說明聯絡係數。飛行員從北京到溫哥華走大圓航線，雖然他正航行在一條完全對他開放的最直的航線（短程線）上，却發現自己起初向北而後來向南飛行。方向上的明顯變化說明在轉向，但這不是指他的航線，而是指用來描述其航線的坐標系。他的速度矢量$\mathbf{v}$（不是在空時而是在地球的二維曲面上定義的矢量）通過平行移動從早先時刻推進到後一時刻，與他正在飛行的速度一致；或者用無坐標微分幾何的抽象語言來說，沿着這條航線協變微商 $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$ 爲零（「短程線方程」）。雖然在這個意義上，$\mathbf{v}$ 是常數，但航行家所考慮的建立這個矢量的各個部分 $\mathbf{v}=v^\theta\mathbf{e}_\theta+v^\phi\mathbf{e}_\phi$ 並不是常數。

用分量的語言來說，沿着這條航線，量 v^θ 和 v^ϕ 的變化有一定的快慢，以保證 $\mathbf{v}$ 的協變微商爲零，所以

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}=\mathbf{a}=a^\phi\mathbf{e}_\phi+a^\theta\mathbf{e}_\theta=0\,,$$

或

$$0=a^\theta=\frac{dv^\theta}{dt}+\Gamma^\theta{}_{mn}v^m v^n\,,$$

$$0=a^\phi=\frac{dv^\phi}{dt}+\Gamma^\phi{}_{mn}v^m v^n\,。$$

在這個意義上，聯絡係數 $\Gamma^i{}_{mn}$ 起「轉向係數」作用，它說明爲保持矢量爲常數，該矢量的分量應以多快的速度「轉向」（抵消基矢的轉向影響）。

另外，航行家還可採用「自動導航系統」，它將它自己的基矢沿飛機的航線平行移動：

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_{\theta'}=\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_{\phi'}=0\,;$$

在 $\mathcal{A}$ 點的實矢量變到 $\mathcal{B}$ 點的虛矢量。於是 $\mathbf{v}$ 的分量必須保持固定以實現大圓航線，

$$\frac{dv^{\theta'}}{dt}=\frac{dv^{\phi'}}{dt}=0\,;$$

轉向系數用來描述經緯線相對於這一平行移動基的轉向：

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_\theta=\mathbf{e}_m\Gamma^m{}_{\theta n}v^n\,,$$

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_\phi=\mathbf{e}_m\Gamma^m{}_{\phi n}v^n\,。$$

同一轉向系數涉及兩種觀點。唯一的區別是如何用這些系數。

練習 8.5　採用極坐標的一張紙

一張平展的紙採用極坐標 (r,θ)，二維度規爲 $ds^2=dr^2+r^2d\phi^2$，或用現代符號，$\mathbf{g}=\mathbf{dr}\otimes\mathbf{dr}+r^2\mathbf{d}\phi\otimes\mathbf{d}\phi$。

(a)用 (8.24) 式計算聯絡係數。［答案：$\Gamma^r{}_{\phi\phi}=-r$；$\Gamma^\phi{}_{r\phi}=\Gamma^\phi{}_{\phi r}=1/r$，餘皆爲零。］

(b) 寫出坐標 (r,ϕ) 中的短程線方程。［答案：$d^2r/d\lambda^2-r(d\phi/d\lambda)^2=0$; $d^2\phi/d\lambda^2+(2/r)(dr/d\lambda)(d\phi/d\lambda)=0$。］

(c) 對 $r(\lambda)$ 和 $\phi(\lambda)$ 求解短程線方程，並證明解是均勻參量化的直線（對於某些 a 和 b，$x\equiv r\cos\phi=a\lambda+b$；對於某些 j 和 k, $y\equiv r\sin\phi=j\lambda+k$）。

(d) 試證明非坐標基 $\mathbf{e}_{\hat r}\equiv\mathbf{e}_r=\partial\mathscr{P}/\partial r$, $\mathbf{e}_{\hat\phi}\equiv r^{-1}\mathbf{e}_\phi=r^{-1}\partial\mathscr{P}/\partial\phi$, $\boldsymbol{\omega}^{\hat r}=\mathbf{dr}$, $\boldsymbol{\omega}^{\hat\phi}=r\mathbf{d}\phi$ 是正交的，且有 $\langle\boldsymbol{\omega}^{\hat\alpha},\mathbf{e}_{\hat\beta}\rangle=\delta^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta}$，然後根據與坐標基有關的知識［(a)］計算此基的聯絡係數。［答案：

$$\begin{aligned}\Gamma^{\hat\phi}{}_{\hat\phi\hat r}&=\langle\boldsymbol{\omega}^{\hat\phi},\boldsymbol{\nabla}_{\hat r}\mathbf{e}_{\hat\phi}\rangle=\langle r\mathbf{d}\phi,\boldsymbol{\nabla}_r(r^{-1}\mathbf{e}_\phi)\rangle\\&=r\langle\mathbf{d}\phi,(\boldsymbol{\nabla}_r r^{-1})\mathbf{e}_\phi+r^{-1}(\boldsymbol{\nabla}_r\mathbf{e}_\phi)\rangle\\&=r\langle\mathbf{d}\phi,-r^{-2}\mathbf{e}_\phi\rangle+\langle\mathbf{d}\phi,\boldsymbol{\nabla}_r\mathbf{e}_\phi\rangle\\&=-r^{-1}+\Gamma^\phi{}_{\phi r}=-r^{-1}+r^{-1}=0;\end{aligned}$$

類似地，$\Gamma^{\hat\phi}{}_{\hat r\hat\phi}=+1/r$, $\Gamma^{\hat r}{}_{\hat\phi\hat\phi}=-1/r$，餘皆爲零。］

(e) 把圖 8.1 和 §8.3 的 Kepler 軌道考慮爲太陽的二維 Euclid 赤道平面內的非短程曲線。採用新的符號 $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf v}\mathbf v$, $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf v}\mathbf{e}_{\hat i}$ 等代替舊的符號 $\mathrm{d}\mathbf v/dt$, $d\mathbf{e}_{\hat i}/dt$ 等等。於是 $\mathbf v=d\mathscr{P}/dt$ 是軌道的切線，$\mathbf a=\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf v}\mathbf v$ 是加速度，用正交基中的分量操作和聯絡係數，導出 $a^{\hat r}$ 和 $a^{\hat\phi}$ 的 (8.4) 式。

練習 8.6　平直空時中的球坐標

練習 8.1 的非球坐標基 $\{\mathbf{e}_{\hat\alpha}\}$ 是正交的，$g_{\hat\alpha\hat\beta}=\eta_{\hat\alpha\hat\beta}$，但存在非零的對易系數［練習 8.2 (c)］。

(a) 用 (8.24) 式計算這個基的聯絡係數。［答案：

$$\Gamma^{\hat\theta}{}_{\hat r\hat\theta}=\Gamma^{\hat\phi}{}_{\hat r\hat\phi}=-\Gamma^{\hat r}{}_{\hat\theta\hat\theta}=-\Gamma^{\hat r}{}_{\hat\phi\hat\phi}=1/r;$$
$$\Gamma^{\hat\phi}{}_{\hat\theta\hat\phi}=-\Gamma^{\hat\theta}{}_{\hat\phi\hat\phi}=\cot\theta/r;$$

餘皆爲零。］

(b) 用 $\mathbf{e}_{\hat i}$ 寫出 $\boldsymbol{\nabla}_{\hat\alpha}\mathbf{e}_{\hat\beta}$ 的表示式，並通過在 t 和 r 爲常數的球上繪製基矢草圖，論證這些表示式的正確性。〔答案：

$$\boldsymbol{\nabla}_{\hat r}\mathbf{e}_{\hat r}=r^{-1}\mathbf{e}_{\hat\theta},\quad \boldsymbol{\nabla}_{\hat\theta}\mathbf{e}_{\hat\theta}=-r^{-1}\mathbf{e}_{\hat r},\quad \boldsymbol{\nabla}_{\hat\phi}\mathbf{e}_{\hat r}=r^{-1}\mathbf{e}_{\hat\phi},$$
$$\boldsymbol{\nabla}_{\hat\phi}\mathbf{e}_{\hat\theta}=(\cot\theta/r)\mathbf{e}_{\hat\phi},\quad \boldsymbol{\nabla}_{\hat\phi}\mathbf{e}_{\hat\phi}=-r^{-1}\mathbf{e}_{\hat r}-(\cot\theta/r)\mathbf{e}_{\hat\theta}。$$

餘皆爲零。］

(c) 在這一基中計算矢量的散度 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf A=A^{\hat\alpha}{}_{;\hat\alpha}$，［答案：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf A&=A^{\hat t}{}_{,\hat t}+r^{-2}(r^2A^{\hat r})_{,\hat r}+(\sin\theta)^{-1}(\sin\theta A^{\hat\theta})_{,\hat\theta}+A^{\hat\phi}{}_{,\hat\phi}\\&=\frac{\partial A^{\hat t}}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A^{\hat r})}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A^{\hat\theta})}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A^{\hat\phi}}{\partial\phi}。\end{aligned}$$

根據平直空間的矢量分析，此答案應是熟悉的。］

練習 8.7　聯絡係數的對稱性

根據 (8.24b) 式，度規的對稱性和對易係數的反對稱性 $(c_{\beta\gamma\mu}=-c_{\gamma\beta\mu})$，試證明在坐

標基中 $\Gamma_{\alpha[\beta\gamma]}=0$（後兩指標是對稱的），在整體正交基 $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=\eta_{\alpha\beta}$ 中 $\Gamma_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})\hat{\gamma}}=0$（前兩指標是反對稱的）。

系統地導出§8.5中的結果。

練習 8.8 ∇T 的新定義與舊定義的比較

(8.16) 和 (8.17) 式給出了 ∇T 的新定義。利用平行移動保持局域 Lorentz 分量不變的事實，從 (8.16) 式導出 Lorentz 系公式 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}=T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}\mathbf{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\alpha}$。由此式與 (8.17) 式推論 ∇T 的 Lorentz 系分量爲 $T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}$，它與 ∇T 的舊定義一致。

練習 8.9 $\nabla_{\mathbf{u}}T$ 的鏈式法則

(a) 採用局域 Lorentz 系的計算證明「$\nabla_{\mathbf{u}}$」遵從微商的標準鏈式法則：

$$\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=(\nabla_{\mathbf{u}}f)\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}+f(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{A})\otimes\mathbf{B}+f\mathbf{A}\otimes(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{B})。\tag{8.27}$$

其中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是任意矢量，1形式或張量；f 是任意函數。［提示：具體假設 $\mathbf{A}$ 是(¦)張量，$\mathbf{B}$ 是矢量。則這一公式用 Lorentz 系分量符號爲

$$(fA^{\alpha}{}_{\beta}B^{\gamma})_{;\delta}u^{\delta}=(f_{;\delta}u^{\delta})A^{\alpha}{}_{\beta}B^{\gamma}+f(A^{\alpha}{}_{\beta;\delta}u^{\delta})B^{\gamma}+fA^{\alpha}{}_{\beta}(B^{\gamma}{}_{;\delta}u^{\delta})。\quad]\tag{8.27'}$$

(b) 用任意基中的分量符號重新寫出 (8.27) 式。［答案：除了在處處用「;」代替「,」外，與 (8.27′) 式相同。但要指出 $f_{;\delta}u^{\delta}=f_{,\delta}u^{\delta}$，因爲函數 f「沒有修正分量」。］

練習 8.10 協變微商與縮併對易

令 $\mathbf{S}$ 是 $\binom{1}{2}$ 張量，用局域 Lorentz 系中的分量證明

$$\nabla_{\mathbf{u}}\ (\mathbf{S}\text{的空位1與空位2縮併})=(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S}\ \text{的空位1與空位2縮並})。\tag{8.28}$$

［提示：在局域 Lorentz 系中這個公式通常表述爲

$$\Big(\sum_{\alpha}S^{\alpha}{}_{\alpha\beta}\Big)_{;\gamma}u^{\gamma}=\sum_{\alpha}(S^{\alpha}{}_{\alpha\beta;\gamma}u^{\gamma})。\quad]$$

練習 8.11 ∇ 的代數性質

用局域 Lorentz 系中的計算證明對於全部切向矢量 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 和數 a,b

$$\nabla_{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}}\mathbf{S}=a\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S}+b\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{S};\tag{8.29}$$

證明對於同秩的兩個任意張量場 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{M}$,

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}+\mathbf{M})=\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S}+\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{M};\tag{8.30}$$

證明對於任意兩個矢量場 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{w}$,

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}-\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u}=[\underbrace{\mathbf{u},\mathbf{w}}]。\qquad(8.31)$$

（$\mathbf{u}$和$\mathbf{w}$的對易算符，在練習8.2中討論過）

練習 8.12　1 形式基的聯絡系數

試證明同一聯絡系數 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ 除了符號改變之外，既描述了 $\{\mathbf{e}_\beta\}$ 的逐點變化［定義（8.19a）式］，也描述了$\{\omega^\alpha\}$ 的變化［（8.19b）式］。{答案：(1) $\langle\omega^\alpha,\mathbf{e}_\beta\rangle=\delta^\alpha{}_\beta$ 是常數函數（0 或 1，取決於是否 $\alpha=\beta$）。(2)於是 $\nabla_\gamma(\omega^\alpha,\mathbf{e}_\beta)=\partial_{\mathbf{e}_\gamma}\langle\omega^\alpha,\mathbf{e}_\beta\rangle=0$。(3)但是 $\langle\omega^\alpha,\mathbf{e}_\beta\rangle$ 是 $\omega^\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta$ 的縮併，所以（8.28）式暗含 $0=\nabla_\gamma(\omega^\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta$ 的縮併）$=[\nabla_\gamma(\omega^\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta)]$ 的縮併。(4)應用鏈式規則（8.27）式得

$$\begin{aligned}0&=[(\nabla_\gamma\omega^\alpha)\otimes\mathbf{e}_\beta+\omega^\alpha\otimes(\nabla_\gamma\mathbf{e}_\beta)]\text{的縮併}\\&=\langle\nabla_\gamma\omega^\alpha,\mathbf{e}_\beta\rangle+\langle\omega^\alpha,\nabla_\gamma\mathbf{e}_\beta\rangle。\end{aligned}$$

(5)最後，利用定義（8.19a）式得出所要求的結果（8.19b）式。}

練習 8.13　$T^\beta{}_{\alpha;\gamma}$ 的「ΓT」修正項

先對任意 $\mathbf{u}$ 計算 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$ 的分量，導出在任意基中 $T^\beta{}_{\alpha;\gamma}$的（8.21）式，然後用（8.17）式推斷 $\nabla\mathbf{T}$ 的分量。［答案：(1)用鏈式法則（8.27）式得

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}&=\nabla_{\mathbf{u}}(T^\beta{}_\alpha\mathbf{e}_\beta\otimes\omega^\alpha)\\&=(\nabla_{\mathbf{u}}T^\beta{}_\alpha)\mathbf{e}_\beta\otimes\omega^\alpha+T^\beta{}_\alpha(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_\beta)\otimes\omega^\alpha+T^\beta{}_\alpha\mathbf{e}_\beta\otimes(\nabla_{\mathbf{u}}\omega^\alpha)。\end{aligned}$$

(2)用分量寫出 $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}=u^\gamma\mathbf{e}_\gamma$；由（8.29）式利用 $\nabla_{\mathbf{u}}$ 在 $\mathbf{u}$ 中的線性得 $\nabla_{\mathbf{u}}=u^\gamma\nabla_\gamma$；並把它用在 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}=u^\gamma\{T^\beta{}_{\alpha;\gamma}\mathbf{e}_\beta\otimes\omega^\alpha+T^\beta{}_\alpha(\nabla_\gamma\mathbf{e}_\beta)\otimes\omega^\alpha+T^\beta{}_\alpha\mathbf{e}_\beta\otimes(\nabla_\gamma\omega^\alpha)\}。$$

(3)用（8.19a,b）式，重寫爲

$$\nabla_\gamma\mathbf{e}_\beta=\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}\mathbf{e}_\mu,\qquad\nabla_\gamma\omega^\alpha=-\Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\omega^\mu,\qquad(8.32)$$

將 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}$ 表爲

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}=u^\gamma\{T^\beta{}_{\alpha;\gamma}\mathbf{e}_\beta\otimes\omega^\alpha+\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}T^\beta{}_\alpha\mathbf{e}_\mu\otimes\omega^\alpha-\Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}T^\beta{}_\alpha\mathbf{e}_\beta\otimes\omega^\mu\}。$$

(4)改變求和指標，以便基本張量 $\mathbf{e}_\beta\otimes\omega^\alpha$ 可以作爲因子提出：

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}=u^\gamma\{T^\beta{}_{\alpha;\gamma}+\Gamma^\beta{}_{\mu\gamma}T^\mu{}_\alpha-\Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma}T^\beta{}_\mu\}\mathbf{e}_\beta\otimes\omega^\alpha。$$

(5)與

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}=\nabla\mathbf{T}(\ldots,\ldots,\mathbf{u})=(T^\beta{}_{\alpha;\gamma}u^\gamma)\mathbf{e}_\beta\otimes\omega^\alpha$$ 比較，辨認出 $T^\beta{}_{\alpha;\gamma}$ 的值。］

練習 8.14　度規是協變不變的

在物理基礎上證明（利用局域 Lorentz 系的性質）

$$\nabla\mathbf{g}=0\qquad(8.33)$$

或等價地證明對於任意矢量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g}=0$, 然後作爲數學結論推演顯然合適的乘積規則

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{B})。$$

[答案：(1)當討論下述 (8.18) 式時，在局域 Lorentz 系中 $\boldsymbol{\nabla g}$ 的分量是 $g_{\mu\nu;\alpha}$ ，在討論中正是用 $\boldsymbol{g}$ 代替 $\boldsymbol{T}$，但是由於 (8.15b) 式，這些分量全部爲零。所以 (8.33) 式在此參照系中成立，且由於是張量方程 ， 在全部參照系中都成立。(2)乘積規則也是張量方程，通過局域 Lorentz 系中的分量即可知其成立。(3)證明乘積規則是很困難的，因爲要指出 (8.33) 式加在何處。利用練習 8.9 的鏈式規則寫出

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g})\otimes\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{g}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{B})。$$

利用 (8.33) 式棄去一項，然後縮併，形成

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\text{縮併}\ (\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})$$

以及其他內乘。利用練習 8.10 證明，在等式左邊把縮併和 $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}$ 兩者對易是正確的。]

練習 8.15 用度規表示聯絡係數

利用度規是協變不變的 [(8.33) 式] 這一點，導出聯絡係數的 (8.24b) 式。論述 (8.24c) 式是用 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ 表示的 $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$ 的定義。[答案：(1)計算在任意系中 $\boldsymbol{\nabla g}$ 的分量：

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta;\gamma}=0&=g_{\alpha\beta,\gamma}-\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}g_{\mu\beta}-\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}g_{\mu\alpha}\\&\equiv g_{\alpha\beta,\gamma}-\Gamma_{\beta\alpha\gamma}-\Gamma_{\alpha\beta\gamma};\end{aligned}$$

由此得 $g_{\alpha\beta,\gamma}=2\,\Gamma_{(\alpha\beta)\gamma}$。(圓括號表示對稱部分。) (2)構成符合 $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$ 需要的度規項：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma}+g_{\mu\gamma,\beta}-g_{\beta\gamma,\mu})&=\Gamma_{(\mu\beta)\gamma}+\Gamma_{(\mu\gamma)\beta}-\Gamma_{(\beta\gamma)\mu}\\&=\frac{1}{2}[\Gamma_{\mu\beta\gamma}+\Gamma_{\beta\mu\gamma}+\Gamma_{\mu\gamma\beta}+\Gamma_{\gamma\mu\beta}-\Gamma_{\beta\gamma\mu}-\Gamma_{\gamma\beta\mu}]\\&=\Gamma_{\mu\beta\gamma}+(-\Gamma_{\mu[\beta\gamma]}+\Gamma_{\beta[\mu\gamma]}+\Gamma_{\gamma[\mu\beta]})。\end{aligned}$$

(3)根據 (8.31) 式，將 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 選爲兩個基矢 ($\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_{\mu}, \boldsymbol{w}=\boldsymbol{e}_{\nu}$) ，推斷

$$\begin{aligned}c_{\mu\nu}{}^{\rho}\boldsymbol{e}_{\rho}\equiv[\boldsymbol{e}_{\mu},\boldsymbol{e}_{\nu}]&=\boldsymbol{\nabla}_{\mu}\boldsymbol{e}_{\nu}-\boldsymbol{\nabla}_{\nu}\boldsymbol{e}_{\mu}\\&=(\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu})\boldsymbol{e}_{\rho}\\&=2\Gamma^{\rho}{}_{[\nu\mu]}\boldsymbol{e}_{\rho};\end{aligned}$$

即

$$\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]}=-\frac{1}{2}c_{\mu\nu}{}^{\rho};\quad \Gamma_{\rho[\mu\nu]}=-\frac{1}{2}c_{\mu\nu\rho}。\tag{8.34}$$

(4)上式與(2)結合，得出所求的 $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$ 的公式。]

§ 8.6　局域 Lorentz 系：數學推論

一個在彎曲空時中自由降落的觀察者在他的局域 Lorentz 系中進行測量。他所看到的都已在本書第一編和第二編廣泛地討論過。現在，試根據上節的形式體系導出他的基本發現。

局域 Lorentz 系

在觀察者的世界線上取一事件 $\mathcal{P}_0$，在他的局域 Lorentz 系中設立一坐標系 x^α ($\mathcal{P}$)，其中

$$\text{在 } \mathcal{P}_0,\ g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \equiv \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{8.35a}$$

($\mathcal{P}_0$ 的 Lorentz 度規)，且

$$\text{在 } \mathcal{P}_0,\ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0 \tag{8.35b}$$

(在盡可能靠近 $\mathcal{P}_0$ 處度規是 Lorentz 度規)。[見 (8.15) 式]。此外，根據 (8.24) 式，

$$\text{在 } \mathcal{P}_0,\ \ \Gamma^\alpha{}_{\beta\tau} = 0 \tag{8.36}$$

(在協變微商中沒有「修正項」)。當然，觀察者在他的局域 Lorentz 系中必須是靜止的，即他的世界線必須爲

$$x^j = x^j(\mathcal{P}_0) = \text{常數};\ \ x^0 \text{ 變化}。 \tag{8.37}$$

問題：(8.35) 式到 (8.37) 式保證觀察者在局域 Lorentz 系中是靜止的。這些方程式是否含有觀察者自由下降的意思？(應該是！)**回答**：計算觀察者的四維加速度 $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/d\tau$ (第六章符號) $= \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ (本章符號)。根據 (8.37) 式計算出觀察者的四維速度爲

原點沿短程線自由下落

$$\mathbf{u} = (dx^\alpha/d\tau)\mathbf{e}_\alpha = (dx^0/d\tau)\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0;\tag{8.38}$$

[因爲 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{e}_0$ 兩者都具有單位長度]

所以他的四維加速度爲

$$\text{在 } \mathcal{P}_0,\ \ \mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{0}}\mathbf{e}_0 = \Gamma^\alpha{}_{00}\mathbf{e}_\alpha = 0。 \tag{8.39}$$

因此他確實是自由下落的 ($\mathbf{a}=0$)；且沿短程線運動 ($\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0$)。

問題：在 $\mathcal{P}_0$ 處觀察者的局域 Lorentz 系中，自由下落的粒子是否沿直線運動 ($d^2x^\alpha/d\tau^2=0$)？(應該是！) **回答**：自由下落的粒子經歷的四維加速度爲零

自由下落的粒子沿直線運動

$$\mathbf{a}_{\text{粒子}} = \nabla_{\mathbf{u}_{\text{粒子}}}\mathbf{u}_{\text{粒子}} = 0;$$

即它平行移動其四維速度，亦即它沿著仿射參量等於其原時的空時短程線運動

。在局域 Lorentz 系中，對於粒子的世界線，短程線方程爲

$$在\ \mathscr{P}_0,\ \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=-\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0。$$

粒子的世界線在 $\mathscr{P}_0$ 確實是直線。

在原點的基矢作 Fermi-Walker 輸運

問題：自由下落的觀察者是否可以將他的空間基矢$\mathbf{e}_j$作 Fermi-Walker輸運？即他是否可以將它們附著在他所携帶的陀螺上？（他應該可以！）回答：Fermi-Walker 輸運（框 6.2）可表爲

$$\frac{d\mathbf{e}_j}{d\tau}\equiv\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_j=\mathbf{u}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_j)-\mathbf{a}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_j)。$$

↑ ↑

舊符號 新符號

但是，對於觀察者，$\mathbf{u}=\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_j=0$ 以及 $\mathbf{a}=0$；因此在這種情形下，Fermi-Walker 輸運化爲沿 $\mathbf{e}_0$ 的平行移動：於是 $\nabla_0\mathbf{e}_j=0$。確實，這就是 $\mathbf{e}_j$ 如何通過 $\mathscr{P}_0$ 移動的，因爲

$$在\ \mathscr{P}_0,\ \nabla_0\mathbf{e}_j=\Gamma^\alpha{}_{j0}\mathbf{e}_\alpha=0。$$

§ 8.7 短程線偏離和 Riemann 曲率張量

「引力是空時曲率的表現形式，而空時曲率在一條短程線偏離鄰近的短程線（試驗粒子的相對加速度）中顯露出來」。爲了使這一敍述精確化，首先要把鄰近短程線的「偏離」或「相對加速度」定量化。

集中注意力到一簇短程線 $\mathscr{P}(\lambda, n)$；參看圖 8.4。光滑地變動參量 n（「選擇者參量」）可將一條短程線與另一條短程線區別開來。固定 n, $\mathscr{P}(\lambda,n)$ 是具有仿射參量 λ 和具有切向矢量

$$\mathbf{u}=\partial\mathscr{P}/\partial\lambda \tag{8.40}$$

的短程線；於是 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0$（短程線方程）。矢量

$$\mathbf{n}\equiv\partial\mathscr{P}/\partial n \tag{8.41}$$

量度了鄰近短程線上具有相同 λ 值的兩點之間的間隔。

沿著「基準短程線」 $n=0$ 自由下落的觀察者注視一試驗粒子沿「試驗短程線」 $n=1$ 下落。他用 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}$ 定量的確定試驗粒子相對於他的速度。這一相

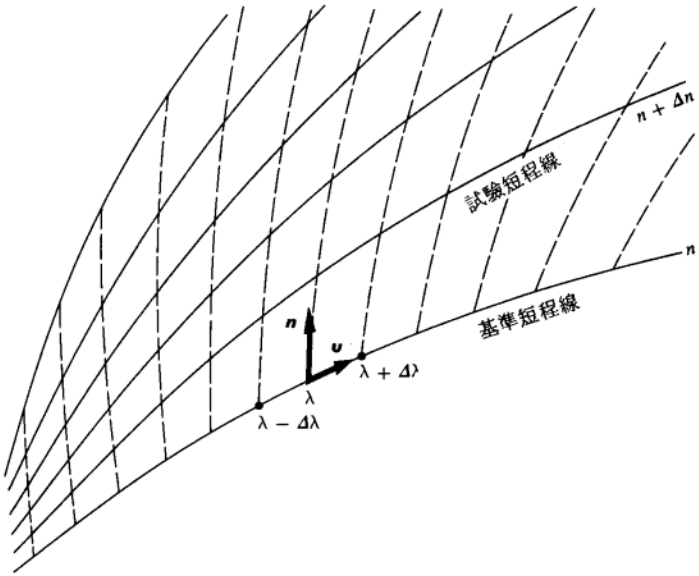


圖 8.4
短程線族 $\mathscr{P}$ (λ, n)。選擇者參量 n 說明是「哪一條」短程線；仿射參量λ說明在給定短程線上的「哪一點」。沿基準短程線 $n=0$ 上點 $\mathscr{P}$ (λ, 0) 的間隔矢量 $\mathbf{n}\equiv\partial\mathscr{P}/\partial n$ 指向（近似地）試驗短程線 $n=1$ 上具有相同 λ 值的點 $\mathscr{P}$ (λ,1)。

對速度象間隔矢量 **n** 一樣，是任意的「初條件」。然而，試驗粒子相對於觀察者的「相對加速度」$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}$ 並不是任意的（見框 11.2和 11.3）。在平直空時中它爲零，在彎曲空時中，它由

用短程線的相對加速度定義 Riemann 曲率張量

$$\nabla_{\mathbf{u}}\ \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}+\mathbf{Riemann}(\ldots,\mathbf{u},\mathbf{n},\mathbf{u})=0 \tag{8.42}$$

給出，或者用分量符號，由

$$\frac{D^2n^\alpha}{d\lambda^2}+R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}u^\beta n^\gamma u^\delta=0 \tag{8.43}$$

給出。

這一方程提供了「Riemann 曲率張量」的定義，它還可用來導出 ***Riemann*** 分量在坐標基中的下述表示式

Riemann 的分量

$$\begin{aligned}R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}&=\langle d\mathbf{x}^\alpha,\ [\nabla_\gamma,\ \nabla_\delta]\mathbf{e}_\beta\rangle\\&=\frac{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}。\end{aligned} \tag{8.44}$$

（爲了證明它，可按順序閱讀框 11.4，11.5 和練習 11.3）框 8.5 可供首次分析三維和多維空間曲率的讀者瀏覽之用。

曲率的效應

空時曲率不僅引起短程線偏離，而且也引起了在平行移動中對路徑的依賴（沿閉合曲線平行移動會改變矢量或張量——框11.7）；它使協變微商無法計算［(8.44)式］；並且它排除了整體 Lorentz 坐標系存在的可能性（§11.5）。

初看起來，可能想到 ***Riemann*** 有 $4\times4\times4\times4=256$ 個獨立分量。但是更仔細的考查（§ 13.5）顯示出多種對稱性

Riemann 的對稱性

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}=R_{[\gamma\delta][\alpha\beta]}, \qquad R_{[\alpha\beta\gamma\delta]}=0, \qquad R_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0 \qquad (8.45)$$

框 8.5 Georg Friedrich Bernhard Riemann

1826年 9 月17日生於漢諾威的 Breselenz, 1866年 7 月20日逝世於 Selasca, Lake Maggiore.

Riemann 以他 1851年著名的博士論文「單複變函數一般理論的基礎」創立了現代數學的一個分支(Riemann曲面理論)，並以他三年後著名的講座創立了現代數學的另一個分支（Riemann幾何學）。這些以及其他著作都可在 Weber (1953)編輯的 Riemann 選集中找到。

「把空間和其他可想像的三重延展量相區別的性質只能從經驗中推演出來。……只要空間每一可測量區域的有效曲率不是顯著地與零不同，則在每一點，曲率在三個方向上的測量都可具有任意值」。［G. F. B. Riemann「關於幾何學基礎的假設」，1854年 6 月10日取得大學講師資格的演講，載入 Göttingen 大學哲學系。］

Riemann於十二年後死於結核病，他曾試圖

（前兩個指標反對稱，後兩個指標反對稱，交換第一對指標和第二對指標時爲對稱，完全反對稱部分爲零）。這些將 ***Riemann*** （四維）的256個分量減少爲20個獨立分量。

除了這些代數對稱性外， ***Riemann*** 還具有叫做「Bianchi 恒等式」的微分對稱性

$$R^{\sigma}{}_{\beta[\lambda\mu;\nu]}=0, \qquad (8.46)$$

Bianchi 恒等式

它具有深刻的幾何意義（第十五章）。

利用縮併，從 ***Riemann*** 可形成幾個其他的曲率張量。最容易形成的是「*Ricci* 曲率張量」

統一解釋重力和電磁，他寫信給 Betti 闡述了他的多連通拓撲學的特徵體系（它開闢了將電荷看作「在空間拓撲俘獲的力線」的渠道），其中使用了一些數，它們在 Betti 之後的今天已被命名，且與表示對 Riemann 敬意的記號 R_n 等同。

「對曲面更詳盡而精細的研究揭示出，我們曾經認爲是基本部分的那些東西，實際上很少是屬於它的，這一點改變了基本部分的連通性質，並且，還揭示出放大率更高的顯微鏡將無限地展現這類更新的拓撲複雜性。Riemann 觀點所允許的拓撲條件（對於實在空間也如此）完全不同於 Euclid 空間實現的拓撲條件。我相信，只有基於上世紀數學發展已闡明的更自由更普遍的幾何學概念，加上已經顯露出來的富於想像力的具有各種可能性的開放思想，才能夠在哲理上富有成效地解決空間問題」。H. Weyl(1949，91頁)。

「但是……物理學家仍遠遠地排除這種思想方法；對於他們，空間仍然是剛性的均勻的某種東西，不容許變化和條件。只是由於孤獨而且不被理解的 Riemann 的天才，到了上世紀中才打通了走向新空間概念的坦途，其中剝奪了空間的剛性，而且其中盡可能地認識到空間參與物理事件的能力」。A. Einstein（1934年，68頁）

Riemann 系統闡述了第一個熟知的超空間模型(參看第43章)，然而，超空間不是由具有正定型Riemann 度規(Einstein 廣義相對論的活動舞臺）的全部三維幾何學的全體構成的，而是由相同拓撲的全部保形等價且閉合的Riemann二維幾何構成的。這類超空間今天稱爲 Teichmüller 空間。關於Riemann對此的其他貢獻以及後來的發展可參看L. Bers 和 J.A. Wheeler 在 Gilbert 和 Newton（1970）一書中的一些章節。

Ricci 曲率張量

$$R_{\mu\nu}\equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}=\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu}+\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}, \quad (8.47)$$

[在坐標系中]

和「標量曲率」

標量曲率

$$R\equiv R^{\mu}{}_{\mu}。 \quad (8.48)$$

但有較大幾何意義的是「Einstein 曲率張量」

Einstein 曲率張量

$$G^{\mu}{}_{\nu}\equiv\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\tau}R_{\beta\tau}{}^{\rho\sigma}\frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\alpha\rho\sigma}=R^{\mu}{}_{\nu}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}R。 \quad (8.49)$$

縮併 ***Riemann*** 可形成全部二秩曲率張量，只有 ***Einstein*** $=G$保留 Bianchi 恒等式 (8.46) 式的一部分：它滿足

縮併的 Bianchi 恒等式

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0。 \quad (8.50)$$

這些「縮併 Bianchi 恒等式」的優美的幾何意義（邊界的邊界爲零），可參看第十五章。

框 8.6 概括了描述曲率的上述公式以及協變微商的基本公式。

練習

[下述高階練習適合於希望鞏固地理解曲率的初階讀者：11.6, 11.9, 11.10, 13.7-11 和 14.3]

練習 8.16 在坐標系中若干有用的公式

在任意坐標系中，定義 g 是矩陣 $g_{\alpha\beta}$ 的行列式 [(8.11) 式]。試導出下述在任意坐標系中均成立的關係式。

(a) 聯絡系數的縮併

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}=(\ln\sqrt{-g})_{,\beta}。 \quad (8.51a)$$

[提示：用練習 5.5 的結果。]

(b) Ricci 張量的分量

$$R_{\alpha\beta}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta})_{,\mu}-(\ln\sqrt{-g})_{,\alpha\beta}-\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}。 \quad (8.51b)$$

(c) 矢量 A^{α} 或反對稱張量 $F^{\alpha\beta}$ 的散度：

$$A^{\alpha}{}_{;\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^{\alpha})_{,\alpha}, \quad F^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})_{,\beta}。 \quad (8.51c)$$

(d) 標量場 Ψ 對於四維區域 $\mathcal{V}$ 的固有體積的積分：

$$\int_{\mathcal{V}}\Psi d\ (\text{固有體積})=\int_{\mathcal{V}}\Psi\sqrt{-g}dtdxdydz。 \quad (8.51d)$$

［提示：在局域 Lorentz 系中，d（固有體積）$=d\hat{t}d\hat{x}d\hat{y}d\hat{z}$，用 Jacobi 行列式把此體積元變換到給定的坐標系，並從變換定律

$$g_{\alpha\beta}=\frac{\partial\hat{x}^{\hat{\mu}}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\hat{x}^{\hat{\nu}}}{\partial x^{\beta}}\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$$

證明其 Jacobi 行列式等於$\sqrt{-g}$。］

框 8.6　協變微商和曲率：基本公式

實　體	抽　象　符　號	分　量　符　號
協變微商	$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}=\nabla\mathbf{T}(\ldots,\ldots,\mathbf{u})$	$T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}=DT^{\beta}{}_{\alpha}/d\lambda \quad (\mathbf{u}=d\mathcal{P}/d\lambda)$ $=\dfrac{dT^{\beta}{}_{\alpha}}{d\lambda}+(\Gamma^{\beta}{}_{\nu\mu}T^{\nu}{}_{\alpha}-\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}T^{\beta}{}_{\nu})u^{\mu}$
	$\nabla_{\mathbf{u}}f=\partial_{\mathbf{u}}f=\langle df,\mathbf{u}\rangle$	$f_{;\alpha}u^{\alpha}=f_{,\alpha}u^{\alpha}$
代數性質（練習8.11）	$\nabla_{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}}\mathbf{T}=a\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{T}+b\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{T}$	$T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}(au^{\gamma}+bv^{\gamma})=aT^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}+bT^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}v^{\gamma}$
	$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}+\mathbf{M})=\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S}+\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{M}$	$(S^{\beta}{}_{\alpha}+M^{\beta}{}_{\alpha})_{;\gamma}u^{\gamma}=S^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}+M^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}$
	$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}-\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u}=[\mathbf{u},\mathbf{w}]$ 對矢量場 $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ 兩者	$\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]}=-\dfrac{1}{2}c_{\mu\nu}{}^{\rho}$［(8.34)式］
鏈式法則	$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{A})\otimes\mathbf{B}+\mathbf{A}\otimes(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{B})$	$(A^{\alpha}{}_{\beta}B_{\gamma})_{;\mu}u^{\mu}=A^{\alpha}{}_{\beta;\mu}B_{\gamma}u^{\mu}+A^{\alpha}{}_{\beta}B_{\gamma;\mu}u^{\mu}$
	$\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{A})=(\nabla_{\mathbf{u}}f)\mathbf{A}+f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{A}$	$(fA^{\alpha}{}_{\beta})_{;\mu}u^{\mu}=f_{,\mu}A^{\alpha}{}_{\beta}u^{\mu}+fA^{\alpha}{}_{\beta;\mu}u^{\mu}$
$\nabla_{\mathbf{u}}$ 和縮併的對易	$\nabla_{\mathbf{u}}$（$\mathbf{S}$的縮併）$=$（$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S}$ 的縮併）	$\left(\sum_{\alpha}S^{\alpha}{}_{\alpha\gamma}\right)_{;\mu}u^{\mu}=\sum_{\alpha}(S^{\alpha}{}_{\alpha\gamma;\mu}u^{\mu})$
*度規協變不變	$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g}=0$	$g_{\alpha\beta;\gamma}u^{\gamma}=0$
梯度	$\nabla\mathbf{T}$	$T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}=T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}+\Gamma^{\beta}{}_{\mu\gamma}T^{\mu}{}_{\alpha}-\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}T^{\beta}{}_{\mu}$
聯絡係數	$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=\langle\omega^{\alpha},\nabla_{\gamma}\mathbf{e}_{\beta}\rangle$ $=-\langle\nabla_{\gamma}\omega^{\alpha},\mathbf{e}_{\beta}\rangle$	$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma}$,* $\Gamma_{\mu\beta\gamma}=\dfrac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma}+g_{\mu\gamma,\beta}-g_{\beta\gamma,\mu}$ $+c_{\mu\beta\gamma}+c_{\mu\gamma\beta}-c_{\beta\gamma\mu})$* $c_{\beta\gamma\mu}=g_{\mu\alpha}c_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ $=g_{\mu\alpha}\langle\omega^{\alpha},[\mathbf{e}_{\beta},\mathbf{e}_{\gamma}]\rangle$*
*$\mathcal{P}_0$ 處的局域 Lorentz 系		具有 $g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0)=\eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0)=0$ 的坐標系
平行移動	$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S}=0$	$S^{\alpha}{}_{\beta;\gamma}u^{\gamma}=0$

實體	抽象符號	分量符號
短程線方程	$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=0$	$d^2x^\alpha/d\lambda^2+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda)=0$ 在坐標基中
Riemann 曲率張量	$\boldsymbol{Riemann}\,(\sigma,\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\equiv\langle\sigma,\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\rangle$ $\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\equiv[\nabla_{\boldsymbol{A}},\nabla_{\boldsymbol{B}}]-\nabla_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]}$ （不是初階的公式，見第11章）	$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}=\dfrac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma}-\dfrac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}$ $+\Gamma^\alpha_{\mu\gamma}\Gamma^\mu_{\beta\delta}-\Gamma^\alpha_{\mu\delta}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}$ 在坐標系中 ［在非坐標系中的公式見 (11.13) 式］
Ricci 曲率張量	$\boldsymbol{Ricci}=\boldsymbol{Riemann}$ 空位 1與空位3的縮併	$R_{\mu\nu}=R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}=\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha}-\Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu}+\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu}$ $-\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}$ 在坐標系中
*標量曲率	$R=(\boldsymbol{Ricci}$ 的縮併$)$	$R=R^\alpha{}_\alpha$
*Einstein 曲率張量	$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{Ricci}-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}R$	$G_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$ 對計算$G^\alpha{}_\beta$有用的公式(在§14.2中導出): $G^0{}_0=-(R^{12}{}_{12}+R^{23}{}_{23}+R^{31}{}_{31})$, $G^0{}_1=R^{02}{}_{12}+R^{03}{}_{13}$, $G^1{}_1=-(R^{02}{}_{02}+R^{03}{}_{03}+R^{23}{}_{23})$, $G^1{}_2=R^{10}{}_{20}+R^{13}{}_{23}$, 等等。
*曲率張量的對稱性		$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}=R_{[\gamma\delta][\alpha\beta]}$, $R_{[\alpha\beta\gamma\delta]}=0$, $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0$, $R_{\alpha\beta}=R_{(\alpha\beta)}$, $G_{\alpha\beta}=G_{(\alpha\beta)}$
Bianchi 恒等式		$R^\alpha{}_{\beta[\mu\nu;\lambda]}=0$
*縮併的Bianchi恒等式		$G^\alpha{}_{\beta;\beta}=0$
短程線偏離	$\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{Riemann}(\ldots,\boldsymbol{u},\boldsymbol{n},\boldsymbol{u})=0$	$\dfrac{D^2n^\alpha}{d\lambda^2}+R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}u^\beta n^\gamma u^\delta=0$
沿閉合曲線的平行移動 (§11.4)	如果 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 是曲線的邊，則 $\delta\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Riemann}(\ldots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$	$\delta A^\alpha+R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}A^\beta u^\gamma v^\delta=0$

* 如果沒有度規，這些帶星號的公式不能用公式表示。所有其他公式在度規不存在時仍是正確的。

第九章　微分拓樸

在解析幾何學中，有許多與任意坐標系無關的關係，必須相對於某個特殊坐標系才能表示出來。所以，更可取的是想出新的方法，它直接導致無需提到坐標的內稟性質。普遍空間和其中出現的客體的拓樸學的發展，以及普遍度規空間的幾何學的發展是這方面的重要步驟。

Karl Menger 引自 Schilpp (1949), 第467頁

本章完全屬於高階。

它並未依賴以前的高階材料。

它作爲以下兩方面的準備是必須的，

(1)第 10-13章（微分幾何，Newton重力）；

(2)框30.1（混主宇宙論）。

它在以下兩方面將是有用的。

(1)第14章（曲率計算）；

(2)第15章（Bianchi恒等式）。

§ 9.1　在無度規無短程線空時中的幾何客體

沒有度規或沒有短程線或沒有平行移動的彎曲空時，即「微分拓撲學」，是這易讀的一章的題目。它之易讀是因爲全部必要的幾何客體（事件、曲線、矢量、1 形式、張量）在平直空時中都已經熟悉。但它還是必要的，因爲當放棄了平直空時的Lorentz度規時，觀點還需提煉。

事件

事件 $\mathcal{P}$的原始概念（圖 1.2）無需改善。這裏的基本性質是可證認，它與空時的 Lorentz 度規結構無關。

曲線

放棄了度規幾何概念需要改善

無需改善。「曲線」 $\mathcal{P}(\lambda)$ 也是太原始了，以致不必關心空時是否有度規，只是不用度規時，沿曲線不存在「固有長度」的概念。這與牛頓的重力理論是一致的，其中可談到「空間」中曲線的長度，而決不論及「空時」中的曲線長度。

矢量

這裏需要改善。在狹義相對論中，有足夠多的代數裝飾可用來整理原始的（「可證認的」）事件，並用這些「代數」事件之差 $\mathcal{P}-\mathcal{Q}$ 論及矢量。現在，這種裝飾消逝了，矢量原來的雙局域（「起點與終點」）形式必須用純局域的形式(§9.2)替換。又，矢量不能在附近移動，每個矢量必須附屬於特定的事件(§9.2,§9.3)。

1-形式

幾乎無需改善，只是隨着度規的消逝，無法說到與給定矢量相對應的1-形式（無法提升和降低指標），並且，每個1-形式必須附屬於特定的事件(§9.4)。

張量

幾乎也無需改善，只是張量的每個空位是特指的：如果它接受矢量，就不能容納1-形式，反之亦然（不能提升和降低指標）；此外，每個張量也必須附屬於特定的事件(§9.5)。

§9.2 「矢量」和「方向微商」改善爲切向矢量

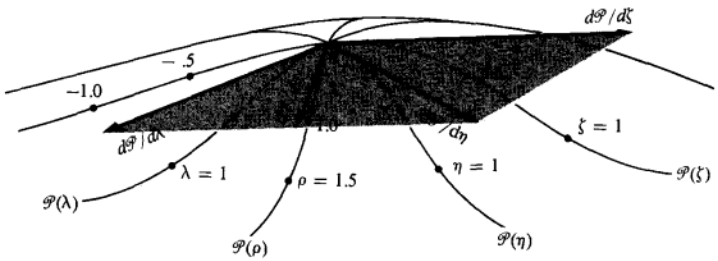
平直空時可容納矢量的幾種等價定義(§2.3)；矢量是事件 $\mathcal{P}_0$ 指向事件 $\mathcal{Q}_0$ 的箭頭；它是從 $\lambda=0$ 的 $\mathcal{P}_0$ 延伸到 $\lambda=1$ 的 $\mathcal{Q}_0$ 的參量化直線，$\mathcal{P}(\lambda)=\mathcal{P}_0+\lambda(\mathcal{Q}_0-\mathcal{P}_0)$；它是點 $\mathcal{P}(\lambda)$ 隨 λ 增大的變化率，$d\mathcal{P}/d\lambda$。

當放棄度規時，矢量原來的定義失效

不用 Lorentz 度規時，「箭頭」定義和「參量化直線」定義必定失效。用哪一條路線可以在 $\mathcal{P}_0$ 和 $\mathcal{Q}_0$ 之間佈置箭頭或線呢？直線的概念已不復存在；所有的路線都同等地是直的或彎曲的。

這種模糊迫使我們注意「點沿曲線的變化率」定義爲 $d\mathcal{P}/d\lambda$。對此，以

框 9.1　切向矢量和切向空間



切向矢量 $d\mathcal{P}/d\lambda$定義爲「當λ從 0 變到$1/N$時，$\mathcal{P}$ 的位移的N倍在$N \longrightarrow \infty$時的極限」。不能將最後的位移零看作橫臥在空時裏；不允許有這種模糊（沒有直的概念）。代替的是把$d\mathcal{P}/d\lambda$看作橫臥在「切向平面」或「切向空間」內。它僅在求 $d\mathcal{P}/d\lambda$ 值的事件 $\mathcal{P}(0)$處與空時相接觸。所有在$\mathcal{P}(0)$的其他切向矢量，例如 $d\mathcal{P}/d\rho$, $d\mathcal{P}/d\eta$, $d\mathcal{P}/d\zeta$ 都橫臥在同一切向空間內。

爲了使切向空間和切向矢量這些概念確切起見，可以把空時看作嵌在高於四維的平直空間內。於是採用平直嵌入空間內的直箭頭，可完成 $d\mathcal{P}/d\lambda$ 的取極限過程。這一結果是上述圖形的更高維類比。

但是這一處理是危險的。它錯誤地暗示了切向矢量 $d\mathcal{P}/d\lambda$ 和 $\mathcal{P}_0$ 處的切向空間依賴於如何嵌入，或者說它們的存在依賴於嵌入過程。但它們並不是這樣的。爲了弄清楚它們不是這樣的理由，一種動議是定義方向微商算符 "$d/d\lambda$" 爲切向矢量，而不採用 Cartan 的更圖形化的概念 "$d\mathcal{P}/d\lambda$"。

新的名稱「切向矢量」，在框 9.1 中簡短地予以考察，並在以下各節更深入地探討。

甚至 "$d\mathcal{P}/d\lambda$" 也是切向矢量的模糊定義，大多數數學家有爭議。他們建議，更可接受的是如下定義：曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的切向矢量 $\boldsymbol{u}$ 是沿該曲線的方向微商算符

最好的新定義：「切向矢量等於方向微商算符」 $\boldsymbol{u}=d/d\lambda$

$$\boldsymbol{u}=\partial_{\boldsymbol{u}}=(d/d\lambda)_{\text{沿曲線}}。 \tag{9.1}$$

切向矢量等於方向微商算符？多麼荒謬！矢量開始是當作從 $\mathcal{P}_0$到$\mathcal{Q}_0$的一次愉快而不必負責的旅行。到最後它却擔負着說明其他某種東西在 $\mathcal{P}_0$ 如何變化的責任。矢量在哪方面承擔了這一未預料的重任呢？並且，它是否像它似乎已經做出的那樣，確實改變了它的許多特性呢？爲了回答，回過頭來並按照下

述取極限的過程重新定義「點變化率」$d\mathcal{P}/d\lambda$：

0.選擇曲線$\mathcal{P}(\lambda)$，欲求它在$\lambda=0$的切向矢量$d\mathcal{P}/d\lambda$。
1.作出當λ從 0 到 1 時$\mathcal{P}$的位移；這不是$d\mathcal{P}/d\lambda$。
2.再次作出當λ從 0 到 $\frac{1}{2}$ 時$\mathcal{P}$的位移；這不是$d\mathcal{P}/d\lambda$。
N.第N次作出當λ從 0 到$1/N$時$\mathcal{P}$的位移；這不是$d\mathcal{P}/d\lambda$。
∞.作出當$N\longrightarrow\infty$時這一位移的極限；這才是$d\mathcal{P}/d\lambda$。

這一定義的優點是 $d\mathcal{P}/d\lambda$ 僅僅在點 $\mathcal{P}_0=\mathcal{P}(0)$的無限小鄰域內，而不是在從 $\lambda=0$ 到$\lambda=1$ 的大範圍內，描述了曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的性質，在該大範圍內曲線可能經歷了許多變化。

另一種定義，$v=d\mathcal{P}/d\lambda$，要求嵌入更高維的平直空間中

這一定義的缺陷是沒有指明 1 ，2 ，……，N，……各步的含義，所以再取極限也就沒有什麼意義。爲了使每一步「$\mathcal{P}$ 的位移」，在「極限」仍有意義的空間內，都成爲確定的數學對象，可以想像原來的流形是某個更高維平直空間內的低維平面。於是，$\mathcal{P}(1/N)-\mathcal{P}(0)$正是聯接兩點的直箭頭，即直線的一段，一般說來，它並不位於自身的曲面之內，——參看框 9.1，切向矢量產生的心理圖象使其本質特徵優美清晰，但這是以某些人工斧鑿爲代價的。這個圖象依賴於把感興趣的流形（無度規空時）嵌入外部平直空間這一特定的但是任意的方法。採用這個圖象時，應把依賴於嵌入特性的種種細節都置之不顧。必須像化學家那樣思考，他們用組合分子模型清晰地想像分子的許多基本性質，自然而然地不顧模型的人爲痕跡（原子的顏色，栓釘的直徑，其倒塌的傾向），這些人爲痕跡不能模擬量子力學的眞實性。

Élie Cartan 對微分幾何包括切向矢量的 $d\mathcal{P}/d\lambda$ 觀念的研究暗示，他常想到流形嵌入平直空間這種方法。 Cartan 的研究還依賴於如下的理解，他並不總是從它們細緻的嵌入關係系統地區分這些圖象的本質幾何學。他的計算方法很晚才被採納。數學家們懷疑是否有能力把事實從人爲痕跡中區分出來，爲了獲得承認，他們要求的代價是：禁止談論點本身的運動，僅僅着手處理發生在流形內部的具體可測的變化，以及當點運動時任意或全部標量函數f 的變化。於是極限過程爲

$d\mathcal{P}/d\lambda$ 改善爲 $d/d\lambda$

0.選擇曲線$\mathcal{P}(\lambda)$，欲求在$\lambda=0$的切向矢量。
1.計算數$f[\mathcal{P}(1)]-f[\mathcal{P}(0)]$，它量度了當點$\mathcal{P}(\lambda)$從 $\mathcal{P}_0=\mathcal{P}(0)$ 運動到$\mathcal{P}_0=\mathcal{P}(1)$時$f$ 的變化。
2.計算 $2\{f[\mathcal{P}(\frac{1}{2})]-f[\mathcal{P}(0)]\}$，它是當點從 $\mathcal{P}(0)$到$\mathcal{P}(\frac{1}{2})$時f 變化的兩倍。
N.計算 $N\{f[\mathcal{P}(1/N)]-f[\mathcal{P}(0)]\}$，它是當點從 $\mathcal{P}(0)$到$\mathcal{P}(1/N)$時f 變化的N倍。

∞.在$N\longrightarrow\infty$的極限下同樣有：（f的變化）$=df/d\lambda$。

0.矢量本身不是f的變化，它由運算 $d/d\lambda$ 代替，當作用於f時它給出變化$df/d\lambda$。因此，

$$\text{切向矢量}=d/d\lambda$$

［參看定義(9.1)式］。

很明顯，運算 $d/d\lambda$ 只不過包含極限過程中的最後幾步$N\longrightarrow\infty$，而且僅僅包含這幾步中與f無關的那些方面。但這意味着它包含了$\mathscr{P}$點的無限小位移，只此而已。

希望既保留與此處一致又不放棄 Cartan的深刻幾何洞察力（框9.1）這兩者的人，可設法在上述兩者之間保持有差別存在：

(A) 在 Cartan意義下切向矢量本身，點的位移 $d\mathscr{P}/d\lambda$；以及

(B)「切向矢量算符」或「方向微商算符」，它們說明函數在此位移中發生的是：（切向矢量算符）$=d/d\lambda$。

然而，現在習慣上在(B)中棄去（或者，願意的話，「模糊」）「算符」一詞，而對算符使用詞組「切向矢量」，本書今後也用這一慣例。在我們的思想中也應使觀念(A)和(B)模糊起來或彌合起來，因此當我們想像具有與曲面相切的箭頭的嵌入圖像時，我們總是使箭頭表徵着純粹發生在此曲面內的點的無限小運動$d\mathscr{P}/d\lambda$，並且當我們思考微商算符 $d/d\lambda$ 時，我們總是想像流形中的點作同樣的無限小運動，運動必定出現在任意微商 $df(\mathscr{P})/d\lambda$的構成中。在這個意義上，應把矢量 $d\mathscr{P}/d\lambda\equiv d/d\lambda$ 看成既是「從一點到另一點值得留意的位移」，又是「建築在點上且僅僅是建築在點上的純幾何客體」。

嗅覺遲鈍的物理學家可能仍然傾向於說「切向矢量等於方向微商算符麼？荒謬！」或許他安心於另一種議論。他挑出一事件 $\mathscr{P}_0$，在該事件，他選擇任意一組四個非共面矢量（對於他，用任何方法定義矢量似乎都是合理的），稱之爲 $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$；用它們作爲基，在$\mathscr{P}_0$的所有其他矢量都可以它們展開，

$$\mathbf{u}=u^\alpha\mathbf{e}_\alpha,\qquad \mathbf{v}=v^\alpha\mathbf{e}_\alpha。\tag{9.2}$$

他沿四個基矢構成四個方向微商算符 $\partial_\alpha\equiv\partial_{\mathbf{e}_\alpha}$，與在平直空時中一樣，此處也如此；出現在 $\mathbf{u}=u^\alpha\mathbf{e}_\alpha$ 中的同樣的展開係數也出現在方向微商的展開式中：

方向微商與矢量的同構

$$\partial_{\mathbf{u}}=u^\alpha\partial_\alpha,\qquad \partial_{\mathbf{v}}=v^\alpha\partial_\alpha。\tag{9.3}$$

所以，在 $\mathcal{P}_0$ 特定矢量之間的每個關係都在它們的微分算符之間誘導出同樣的關係：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}=a\mathbf{w}+b\mathbf{v} &\Longleftrightarrow u^\alpha=aw^\alpha+bv^\alpha \\ &\Longleftrightarrow \partial_{\mathbf{u}}=a\partial_{\mathbf{w}}+b\partial_{\mathbf{v}}。 \end{aligned} \tag{9.4}$$

這是矢量和相應的方向微商之間的完全「同構」。所以嗅覺遲鈍的物理學家怎能否認嗅覺遲鈍的數學家有權使每個切向矢量與它的方向微商完全同一呢？不會造成危害的；對任何計算，答案不會受到影響的。

定義切向空間

這一同構擴展爲「切向空間」概念。因爲在同一點 $\mathcal{P}_0$ 所求值的方向微商中的線性關係（如 $\partial_{\mathbf{u}}=a\partial_{\mathbf{w}}+b\partial_{\mathbf{v}}$）是有意義的，且它們遵從通常的相加相乘規則。所以這些微商算符形成抽象的（但爲有限維的）矢量空間，稱爲在$\mathcal{P}_0$的切向空間。在嵌入圖（框 9.1）中，可採用這些微商（作爲平直嵌入空間中的算符）以直箭頭的形式構成切向矢量 $\mathbf{u}=\partial_{\mathbf{u}}\mathcal{P}$，$\mathbf{v}=\partial_{\mathbf{v}}\mathcal{P}$。從而抽象切向空間與幾何上形象化的切向空間可視爲同一。

§9.3 矢量的基，分量和變換定律

定義誘導坐標基

在事件$\mathcal{P}_0$的切向空間中，特別有用的基是由任意坐標系 [四個函數$x^0(\mathcal{P})$, $x^1(\mathcal{P})$, $x^2(\mathcal{P})$, $x^3(\mathcal{P})$]誘導出來的：

$$\mathbf{e}_0\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)_{x^1,x^2,x^3}=\left(\begin{array}{l}\text{沿着 } x^1,\ x^2,\ x^3 \text{ 爲常數，}\\ \text{且具有參量 } \lambda=x^0 \text{ 的曲線}\\ \text{作方向微商}\end{array}\right)_{\text{在}\mathcal{P}_0\text{點}},$$

$$\mathbf{e}_1=\frac{\partial}{\partial x^1},\quad \mathbf{e}_2=\frac{\partial}{\partial x^2},\quad \mathbf{e}_3=\frac{\partial}{\partial x^3}。 \tag{9.5}$$

（見圖9.1）

基的變化：定義變換矩陣

在 $\mathcal{P}_0$ 的切向空間中，從一組基到另一組基的變換，像在任意矢量空間中基的任意變化一樣，由非奇異矩陣產生，

$$\mathbf{e}_{\alpha'}=\mathbf{e}_\beta L^\beta{}_{\alpha'}; \tag{9.6}$$

像通常那樣（包括平直空時的 Lorentz 系），矢量的分量用逆矩陣作變換，

$$u^{\alpha'}=L^{\alpha'}{}_\beta u^\beta; \tag{9.7}$$

$$\|L^{\alpha'}{}_\beta\|=\|L^\beta{}_{\gamma'}\|^{-1},\quad \text{即}\begin{cases} L^{\alpha'}{}_\beta L^\beta{}_{\gamma'}=\delta^{\alpha'}{}_{\gamma'}, \\ L^\beta{}_{\alpha'}L^{\alpha'}{}_\gamma=\delta^\beta{}_\gamma。\end{cases} \tag{9.8}$$

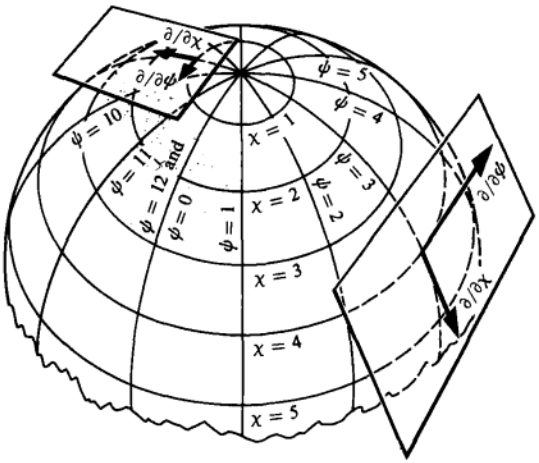


圖 9.1
通過坐標系，將基矢誘導爲每一事件的切向空間。圖中截頂二維空時（另外兩維已略去）用坐標$x(\mathcal{P})$和$\psi(\mathcal{P})$以及相應的基矢$\partial/\partial x$ $\partial/\partial\psi$和表示。

「逆」變換定律保證展開式 $u=e_{\alpha'}u^{\alpha'}$ 和 $u=e_\beta u^\beta$ 之間的一致性：

$$u=e_{\alpha'}u^{\alpha'}=(e_\gamma L^\gamma{}_{\alpha'})(L^{\alpha'}{}_\beta u^\beta)$$
$$=e_\gamma\delta^\gamma{}_\beta u^\beta=e_\beta u^\beta。$$

在誘導坐標基之間變換的特殊情形，變換矩陣具有簡單形式：

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}=\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\quad\text{（用通常的微分規則），}$$

因此

$$L^\beta{}_{\alpha'}=(\partial x^\beta/\partial x^{\alpha'})_{\text{在切向空間所在的事件}\mathcal{P}_0\text{處}}。\qquad(9.9)$$

（注意：它推廣了具有微分形式 $\Lambda^\beta{}_{\alpha'}=\partial x^\beta/\partial x^{\alpha'}$ 的 Lorentz 變換定律 $x^\beta=\Lambda^\beta{}_{\alpha'}x^{\alpha'}$；而且它也提供了一種記憶$\Lambda$矩陣符號的好方法。）

§9.4　1-形式

在空時中撤消了 Lorentz 度規之後，必須突出 1 形式 σ 的概念，堅持認爲它像任意切向矢量 u 一樣隸屬於空時中的特定事件 $\mathcal{P}_0$。表示 σ 的曲面簇屬於 $\mathcal{P}_0$ 處的切向空間，而不屬於空時本身。用箭頭 u 將 σ 的各個曲面貫穿起來產生數 $\langle\sigma,u\rangle$（「鈴聲」），它完全發生在切向空間裏。

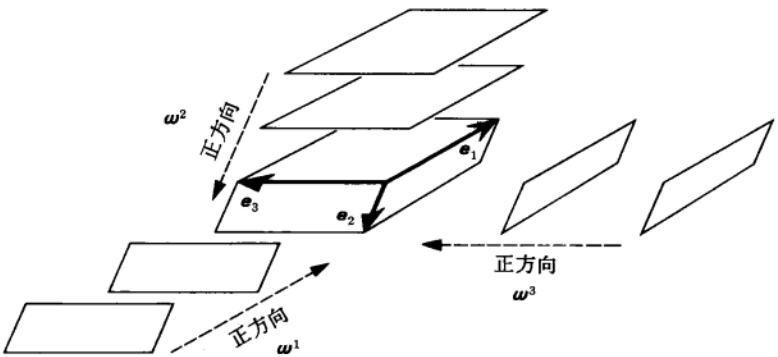


圖 9.2
在事件$\mathcal{P}_0$的切向空間內的基矢$\mathbf{e}_\alpha$和對偶基 1 形式ω^β。條件

$$\langle \omega^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \delta^\beta{}_\alpha$$

決定矢量$\mathbf{e}_2$和$\mathbf{e}_3$位於與ω^1平行的面內，$\mathbf{e}_1$從ω^1的一個面延伸向另一個面（嚴格地貫穿 1.00 個面）。

注意，此圖可極好地適應於X射線和結晶學的書籍。這裏， 矢量 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 是晶體元胞的邊；面 ω^1, ω^2, ω^3 是元胞的界面。此外，對於 X 射線衍射實驗，採用輻射波長以及適當調節晶體的取向，ω^1 的相繼各面產生 Bragg 反射。對於波長和取向的別種選擇，ω^2 或ω^3的各面產生 Bragg 反射。

定義 1 形式的對偶基

在事件$\mathcal{P}_0$給定任意一組基矢 $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ，可構成 1 形式的「對偶基」$\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3\}$，只要選擇 ω^β 的面滿足

$$\langle \omega^\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \delta^\beta{}_\alpha 。 \tag{9.10}$$

參看圖 9.2。於是，得出計算和處理切向矢量以及 1 形式的分量的極其簡單的形式關係：

分量操作公式

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\alpha u^\alpha \text{（}\mathbf{u}\text{的分量的定義）}， \tag{9.11a}$$
$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\beta \omega^\beta \text{（}\boldsymbol{\sigma}\text{的分量的定義）}， \tag{9.11b}$$
$$u^\alpha = \langle \omega^\alpha, \mathbf{u} \rangle \text{（計算}\mathbf{u}\text{分量的方法）}， \tag{9.11c}$$
$$\sigma_\beta = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_\beta \rangle \text{（計算}\boldsymbol{\sigma}\text{分量的方法）}， \tag{9.11d}$$
$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle = \sigma_\alpha u^\alpha \text{（用分量計算}\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle\text{的方法）}， \tag{9.11e}$$
$$\omega^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_\beta \omega^\beta \text{（相應於9.6式，1 形式基的變換定律）}， \tag{9.11f}$$
$$\sigma_{\alpha'} = \sigma_\beta L^\beta{}_{\alpha'} \text{（1 形式分量的變換定律）}。 \tag{9.11g}$$

（後面練習9.11證明這些公式是正確的。）

在度規不存在的情形下，無法在事件 $\mathcal{P}_0$ 處挑選出特定的 1 形式 $\tilde{\mathbf{u}}$，也無法說它對應於 $\mathcal{P}_0$ 處的特定切向矢量 $\mathbf{u}$，在平直空時，這種對應引起了

去掉矢量和 1 形式之間的對應關係

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{對全部} \mathbf{v},$$

當去掉了「·」之後，這一關係也去掉了。用分量的語言來說：因爲 $\eta^{\alpha\beta}$ 不存在，指標的提升 $u^\alpha = \eta^{\alpha\beta} u_\beta$ 是不可能的；同樣，指標的降低 $u_\beta = \eta_{\beta\alpha} u^\alpha$ 也是不可能的。

在 §2.6 中曾絕對與度規無關地引入 1 形式梯度 $\mathbf{d}f$。因此，它和它的數學形式在這裏不用度規和原來用度規是相同的，只是像所有其他的 1 形式那樣，$\mathbf{d}f$ 現在屬於切向空間而不屬於空間本身。例如，梯度投影和方向微商相聯繫的基本公式就沒有變化：

函數的梯度

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{u} \rangle = \partial_{\mathbf{u}} f = \mathbf{u}[f]。 \tag{9.12}$$

（[方向微商的原有符號] 連接 $\partial_{\mathbf{u}} f$；[新符號；回想 $\mathbf{u} = \partial_{\mathbf{u}}$] 連接 $\mathbf{u}[f]$）

類似地，分量公式也沒有變化，

$$\mathbf{d}f = f_{,\alpha} \boldsymbol{\omega}^\alpha \quad (\mathbf{d}f \text{在任意基中的展開式}) \tag{9.13a}$$

$$f_{,\alpha} = \partial_\alpha f = \mathbf{e}_\alpha[f] \quad (\text{計算} \mathbf{d}f \text{分量的方法}) \tag{9.13b}$$

$f_{,\alpha} = \partial f / \partial x^\alpha$ 如果 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 是坐標基，

除非它們在任意基中起作用，而不是剛好在 Lorentz 基中起作用。此外，像在 Lorentz 系中一樣，因而普遍地有：1 形式基 $\{\mathbf{d}x^\alpha\}$ 和切向矢量基 $\{\partial/\partial x^\alpha\}$ 彼此對偶，後者被同一坐標系誘導入切向空間內，

$$\langle \mathbf{d}x^\alpha, \partial/\partial x^\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta。 \tag{9.14}$$

（證明見練習9.2）。同樣，Cartan「外微積分學」的絕大部分（框4.1的 A, B, C）仍保留，而不受除去度規的影響。

§9.5 張　量

並 Lorentz 度規不存在的情形下，張量 $\mathbf{S}$ 與平直 Lorentz 空時的張量有兩方面不同：(1)$\mathbf{S}$ 必須屬於特定事件 $\mathcal{P}_0$，正像任意矢量和 1 形式所必須的那樣；(2) $\mathbf{S}$ 的每個空位是特定的；它接受矢量或 1 形式，但不接受兩者，因爲無法把1-形式 $\tilde{\mathbf{u}}$ 轉換成「對應矢量」$\mathbf{u}$，而後者通過它的線性機構傳送 $\tilde{\mathbf{u}}$。因此，如

張量空位的專一性

果$\boldsymbol{S}$是一個$\binom{1}{2}$張量，

$$\boldsymbol{S}(\ldots,\ldots,\ldots)， \tag{9.15}$$

這裏插入1形式 ↑ 這裏插入矢量 ↑ 這裏插入矢量

則它不可能通過的§3.2手續變換爲$\binom{2}{1}$張量或$\binom{3}{0}$張量或$\binom{0}{3}$張量。用分量的語言來說，$\boldsymbol{S}$的指標不可能提升和下降。

除了這兩個限制（隸屬於特定事件，空位的專一性），張量$\boldsymbol{S}$仍然是同一線性機構，而且分量操作的代數是相同的。

$$S^{\alpha}{}_{\beta\tau}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\mathbf{e}_{\beta},\mathbf{e}_{\tau})\quad(\boldsymbol{S},\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\mathbf{e}_{\beta}\text{ 必須全部隸屬於同一事件}) \tag{9.16}$$

$$\boldsymbol{S}=S^{\alpha}{}_{\beta\tau}\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\tau}, \tag{9.17}$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=S^{\alpha}{}_{\beta\tau}\sigma_{\alpha}u^{\beta}v^{\tau}。 \tag{9.18}$$

練習

練習 9.1 分量操作

通過(9.11g)式由(9.10), (9.11a,b), (9.6), (9.7)和(9.8)式導出(9.11c)式。

練習 9.2 梯度的分量和坐標基的對偶性

在任意基中，用展開式(9.13a)定義 $f_{,\alpha}$，然後結合(9.11d)和(9.12)式獲得計算 $f_{,\alpha}$ 的方法(9.13b)式。最後，結合(9.12)和(9.13b)式證明基$\{\mathbf{d}x^{\alpha}\}$和$\{\partial/\partial x^{\beta}\}$彼此對偶。

練習 9.3 操作切向矢量的練習

令$\mathscr{P}_0$點在三維空間的坐標爲($x=0$, $y=1$, $z=0$)，定義三條通過$\mathscr{P}_0$的曲線爲

$$\mathscr{P}(\lambda)=(\lambda,1,\lambda),$$
$$\mathscr{P}(\zeta)=(\sin\zeta,\cos\zeta,\zeta),$$
$$\mathscr{P}(\rho)=(\sinh\rho,\cosh\rho,\rho+\rho^3)。$$

(a) 計算函數 $f=x^2-y^2+z^2$ 在 $\mathscr{P}_0$ 點的 $(d/d\lambda)f$, $(d/d\zeta)f$ 和 $(d/d\rho)f$. (b) 用基 $\{\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z\}$ 計算 $\mathscr{P}_0$ 的切向矢量 $d/d\lambda$, $d/d\zeta$ 和 $d/d\rho$。

練習 9.4 切向矢量的進一步練習

在坐標(x,y,z)的三維空間中引入矢量場 $\boldsymbol{v}=y^2\,\partial/\partial x-x\,\partial/\partial z$ 和函數 $f=xy$, $g=z^3$. 計算

(a) $\boldsymbol{v}[f]$　(c) $\boldsymbol{v}[fg]$　(e) $\boldsymbol{v}[f^2+g^2]$
(b) $\boldsymbol{v}[g]$　(d) $f\boldsymbol{v}[g]-g\boldsymbol{v}[f]$　(f) $\boldsymbol{v}\{\boldsymbol{v}[f]\}$。

練習 9.5　由坐標誘導出基 1 形式的圖象

在圖9.1的切向空間中，畫出用 ϕ, χ 坐標系誘導的基 1 形式 $\mathbf{d}\phi$ 和 $\mathbf{d}\chi$。

練習 9.6　對偶基練習

在具有球坐標 r, θ, ϕ 的三維空間中，常不用基 $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial\phi$, 而喜歡用基

$$\mathbf{e}_{\hat{r}}=\frac{\partial}{\partial r},\qquad \mathbf{e}_{\hat{\theta}}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad \mathbf{e}_{\hat{\phi}}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}。$$

(a) 與這一切向矢量基對偶的 1 形式基 $\{\omega^{\hat{r}},\omega^{\hat{\theta}},\omega^{\hat{\phi}}\}$ 是什麼？

(b) 在球 $r=1$ 不，畫出基 $\{\partial/\partial r,\partial/\partial\theta,\partial/\partial\phi\}$, $\{\mathbf{e}_{\hat{r}},\mathbf{e}_{\hat{\theta}},\mathbf{e}_{\hat{\phi}}\}$, $\{\mathbf{d}r,\mathbf{d}\theta,\mathbf{d}\phi\}$ 和 $\{\omega^{\hat{r}},\omega^{\hat{\theta}},\omega^{\hat{\phi}}\}$ 的圖形。

---

§ 9.6　對易算符和圖示技術

僅在一點 $\mathcal{P}_0$ 給定矢量 $\mathbf{u}_0$ 就足以計算微商 $\mathbf{u}_0[f]\equiv\partial_{\mathbf{u}_0}f$。它就是簡單地與點$\mathcal{P}_0$ 相聯繫的數。可是矢量場 $\mathbf{u}$ 在空時的某一區域內的每一點 $\mathcal{P}$ 提供一個矢量$\mathbf{u}(\mathcal{P})$，它是微分算符 $\partial_{\mathbf{u}}(\mathcal{P})$。這一矢量場作用在一個函數上不是產生一個數，而是產生另一個函數 $\mathbf{u}[f]\equiv\partial_{\mathbf{u}}f$ 。第二個矢量場 $\mathbf{v}$ 可以很好地作用在這一新函數上，產生另一個函數

$$\mathbf{v}\{\mathbf{u}[f]\}=\partial_{\mathbf{v}}(\partial_{\mathbf{u}}f)。$$

這一函數與先用 $\mathbf{v}$ 再用 $\mathbf{u}$ 作用的結果是否相一致？相當於「對易算符」

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}][f]=\mathbf{u}\{\mathbf{v}[f]\}-\mathbf{v}\{\mathbf{u}[f]\}\qquad(9.19)$$

定義對易算符

是否爲零？

最簡單的特例是當 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 爲坐標系的基矢，$\mathbf{u}=\partial/\partial x^{\alpha}$, $\mathbf{v}=\partial/\partial x^{\beta}$，則對易算符爲零，因爲偏微商總是可對易的：

$$[\partial/\partial x^{\alpha},\partial/\partial x^{\beta}][f]=\partial^2 f/\partial x^{\beta}\partial x^{\alpha}-\partial^2 f/\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}=0。$$

但一般地對易算符不爲零，因爲從坐標基的計算可知

$$\begin{aligned}[\mathbf{u},\mathbf{v}]f&=u^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(v^{\beta}\frac{\partial f}{\partial x^{\beta}}\right)-v^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(u^{\beta}\frac{\partial f}{\partial x^{\beta}}\right)\\&=\left[\left(u^{\alpha}v^{\beta}{}_{,\alpha}-v^{\alpha}u^{\beta}{}_{,\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\right]f。\end{aligned}$$

兩個矢量場的對易算符是一個矢量場

然而，注意，對易算符 $[u,v]$ 像 u和v 本身一樣是一個矢量場，也就是每一事件處的線性微分算符：

$$[u,v]=(u[v^\beta]-v[u^\beta])\frac{\partial}{\partial x^\beta}=(u^\alpha v^\beta{}_{,\alpha}-v^\alpha u^\beta{}_{,\alpha})\frac{\partial}{\partial x^\beta}。\qquad(9.20)$$

從角動量算符的量子理論的形式（練習9.8）來看，這些結果是熟悉的。

幾何學的三種等級——圖示的，抽象的和分量的——對於對易算符得出三種不同的見解。(1)抽象表示$[u,v]$ 暗示密切聯繫於量子理論，並想起在量子理論中爲掌握算符發展了多種工具。但是去掉量子理論的算符不必是一階微分算符這一點。在熟悉的 Schrödinger 方程中，動能是二階的，而勢是零階的。只有一階算符才是矢量。(2)分量表示 $u^\alpha v^\beta{}_{,\alpha}-v^\alpha u^\beta{}_{,\alpha}$ 在任意坐標基中都有效，

對易算符看作「曲線的閉合邊」

它將對易算符納入指標力學的有力工具的範圍。(3) $[u,v]$ 的圖示（框9.2）顯露出它作爲「曲線閉合邊」的基本作用——這在第十一章曲率的分析中將是重要的。

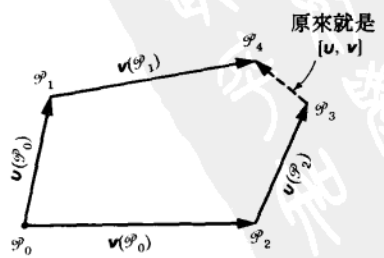
對易算符在誘導坐標基 $\{e_\alpha\}=\{\partial/\partial x^\alpha\}$ 與非坐標基的區別中找到了應用，因爲偏微商總是可以對易的，在任意坐標基中

$$[e_\alpha,e_\beta]=[\partial/\partial x^\alpha,\partial/x^\beta]=0。\qquad(9.21)$$

框 9.2 對易算符看作四邊形的閉合邊

A. 在平直空時內的圖表示

1. 爲了容易想像起見，考慮平直空時，因此兩個矢量場 $u(\mathscr{P})$ 和 $v(\mathscr{P})$ 可布置在空時內。
2. 選定事件$\mathscr{P}_0$，該處對易算符$[u,v]$可計算。
3. 圖中所畫的事件定名爲$\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$, $\mathscr{P}_4$。
4. 於是，量度四邊曲線離閉合差多少的矢量 $\mathscr{P}_4-\mathscr{P}_3$ 在坐標基中可表示爲

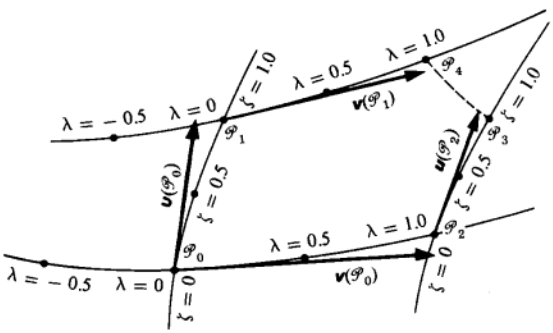


$$\begin{aligned}\mathcal{P}_4-\mathcal{P}_3&=[\boldsymbol{u}(\mathcal{P}_0)+\boldsymbol{v}(\mathcal{P}_1)]-[\boldsymbol{u}(\mathcal{P}_2)+\boldsymbol{v}(\mathcal{P}_0)]\\&=[\boldsymbol{v}(\mathcal{P}_1)-\boldsymbol{v}(\mathcal{P}_0)]-[\boldsymbol{u}(\mathcal{P}_2)-\boldsymbol{u}(\mathcal{P}_0)]\\&=(v^\beta{}_{,\alpha}u^\alpha\boldsymbol{e}_\beta)_{\mathcal{P}_0}-(u^\beta{}_{,\alpha}v^\alpha\boldsymbol{e}_\beta)_{\mathcal{P}_0}+\text{誤差}\\&=[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]_{\mathcal{P}_0}+\text{誤差}。\end{aligned}$$

↑[例如$v^\beta{}_{,\mu\nu}u^\mu u^\nu\boldsymbol{e}_\beta$之類的項]

5. 注意，如果將 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 處處減半，則$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$減小 4 倍，而上述誤差項下降 8 倍。因此在$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$充分短的極限下，$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$精確地代表了四邊曲線（「四邊形」）的間隙；即$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$是以矢量場 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 爲邊的「四邊形的閉合邊」。

B. 度規不存在時的圖表示或在具有度規的彎曲空時中的圖表示



1. 相同的圖可以用，但現在不敢（至少在開始）將矢量場布置在空時內。代替它可布置兩曲線簇：對於一簇曲線，$\boldsymbol{u}(\mathcal{P})$ 是切向矢量，對於另一簇曲線，$\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ 是切向矢量。
2. 四邊曲線中的間隙「$\mathcal{P}_4-\mathcal{P}_3$」可用任意函數在$\mathcal{P}_4$和$\mathcal{P}_3$的值之差 $f(\mathcal{P}_4)-f(\mathcal{P}_3)$來表徵。在坐標基中，這一差值爲

$$
\begin{aligned}
f(\mathcal{P}_4)-f(\mathcal{P}_3)=&[\underbrace{f(\mathcal{P}_4)-f(\mathcal{P}_1)}] \quad + \quad [\underbrace{f(\mathcal{P}_1)-f(\mathcal{P}_0)}]\\
&\left(f_{,\alpha}v^\alpha+\frac{1}{2}f_{,\alpha\beta}v^\alpha v^\beta\right)_{\mathcal{P}_1} \quad \left(f_{,\alpha}u^\alpha+\frac{1}{2}f_{,\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\right)_{\mathcal{P}_0}\\
&-[\underbrace{f(\mathcal{P}_2)-f(\mathcal{P}_0)}] \quad - \quad [\underbrace{f(\mathcal{P}_3)-f(\mathcal{P}_2)}]\\
&\left(f_{,\alpha}v^\alpha+\frac{1}{2}f_{,\alpha\beta}v^\alpha v^\beta\right)_{\mathcal{P}_0} \quad \left(f_{,\alpha}u^\alpha+\frac{1}{2}f_{,\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\right)_{\mathcal{P}_2}\\
=&[(f_{,\alpha}v^\alpha)_{,\beta}u^\beta-(f_{,\alpha}u^\alpha)_{,\beta}v^\beta]_{\mathcal{P}_0}+\text{「立方誤差」}\\
=&[(u^\beta v^\alpha{}_{,\beta}-v^\beta u^\alpha{}_{,\beta})\partial f/\partial x^\alpha]_{\mathcal{P}_0}+\text{「立方誤差」}\\
=&\{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}][f]\}_{\mathcal{P}_0}+\text{「立方誤差」}。
\end{aligned}
$$

其中無論什麼時候 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 減半時，$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]f$ 減小 4 倍，而「立方誤差」減小 8 倍。

3. 結果

$$f(\mathcal{P}_4)-f(\mathcal{P}_3)=\{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}][f]\}_{\mathcal{P}_0}+\text{「立方誤差」}$$

說明$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$是在$\mathcal{P}_0$的切向矢量，它描述了點$\mathcal{P}_3$和$\mathcal{P}_4$之間的間隔。當$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$任意縮短時，這種描述有任意的精度。因此，$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$閉合了四邊形，其邊爲$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$在空時中的投影。

C. 圖形的哲理

1. 圖形不能代替計算。更確切地說，其用途在於(a)啓示以前未曾料到而後來可用計算證明的幾何關係；(b)解釋新近學到的幾何結果。
2. 圖形的這一通常非計算的作用允許繪製圖時不必很認眞。當把切向矢量小心地移動到它們各自的切向空間，並只允許曲線處於空時之中時，在B部分不會獲得超過A部分所提供的本質上新的見解。此外，由於原來的圖形（A部分）更簡單，因而它更明了。
3. 這一點促使人們可以繪製切向矢量放置在空時內的「草圖」，只要當矢量的長度減半時，保持那些切向矢量很短，並且偶爾核對一下誤差的等級就行。

相反地，如果給定基矢場（「構架場」）$\{\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P})\}$，但並不知道坐標系$\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$是否存在，其中$\{\mathbf{e}_\alpha\}=\{\partial/\partial x^\alpha\}$，則可以用簡單的試驗弄清楚：計算全部$(4\times 3)/2=6$個對易算符$[\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta]$；如果它們全部爲零，則存在這樣的坐標系。如果不是這樣，則不存在這樣的坐標系。更簡明地說：*對於全部$\mathbf{e}_\alpha$和$\mathbf{e}_\beta$，當且僅當$[\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta]=0$時，$\{\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P})\}$才是誘導坐標基。*（證明見練習9.9；重要應用見§11.5）誘導坐標基有時叫做「*完整的*」基。在「*非完整基*」（非坐標基）中可用

對易算符爲零：坐標基的檢驗

定義對易系數

$$[\mathbf{e}_\mu,\mathbf{e}_\nu]=C_{\mu\nu}{}^\alpha\mathbf{e}_\alpha。\tag{9.22}$$

來定義對易系數$C_{\mu\nu}{}^\alpha$。它們參與任意矢量場$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$的對易算符的分量公式

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]=(u[v^\beta]-v[u^\beta]+u^\mu v^\nu C_{\mu\nu}{}^\beta)\mathbf{e}_\beta\tag{9.23}$$

（見練習9.10）。

物理學家的符號對數學家的符號

［*告誡！*在函數和場的符號中，數學家和物理學家常使用相同的記號表示對立的事物。當物理學家考慮他所設計的儀器中某個關鍵部分的長度時，可能寫成l；而當他分析它對溫度變化的響應時，可能換寫成$l(T)$。所以l是數，而$l(T)$是函數。相反地，數學家將函數寫成f，他可能把它看作某個無限維函數空間中的一個元素。一旦爲這一函數提供自變量數學家就考慮$f(x)$了，它僅僅是一個數：f在x點的值。爲了在物理派與數學派的這些對立程式之間保持清醒，作者採取的明確方針是兼容並包。通常採用物理派的敍述，如「在曲線$\mathcal{P}(\lambda)$上…」，讀者自己可將它翻譯爲數學上精確的語言「考慮一條曲線$\mathcal{C}$，其上代表點是$\mathcal{P}=\mathcal{C}(\lambda)$；在此曲線上…」。但是，有時讀者會遇到用數學派專門術語寫就的學究式段落（例如框23.3）。這些段落討論的概念和關係很複雜以致標準的物理用法會導致極端的混亂。它們還將阻礙讀者有條件地轉化爲物理用法，以致使讀者厭惡數學文獻。在這些數學文獻中。由於始終如一的信賴全部毫無含糊的符號，在思維的清沏和經濟上獲得了巨大的優越性。］

練習

練習 9.7　對易算符的計算

矢量場

$$\mathbf{e}_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad \mathbf{e}_\phi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

的對易算符$[\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\phi]$。將結果表示爲$\mathbf{e}_\theta$和$\mathbf{e}_\phi$的線性組合。

練習 9.8 角動量算符

在三維 Euclid 空間的笛卡兒坐標中，定義三個「角動量算符」（矢量場）$\boldsymbol{L}_j$ 爲

$$\boldsymbol{L}_j \equiv \epsilon_{jkl} x^k \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)。$$

畫出這三個矢量場的圖形。用作圖和分析兩種方法計算它們的對易算符。

練習 9.9 對易算符和誘導坐標基

令 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是空時中的矢量場。試證明在任意給定點的某一鄰域內，當且僅當 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 線性無關並可對易即

$$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=0$$

時，則存在下述坐標系

$$\boldsymbol{u}=\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial x^2}。$$

首先從框 9.2的第二圖使這一結果看來是可能的；然後在數學上證明它。注意：這一結果可推廣到四個任意矢量場 $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，當且僅當它們線性無關，並對每對 $\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu$ 有 $[\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu]=0$時，則存在 $\boldsymbol{e}_\alpha=\partial/\partial x^\alpha$ 的坐標系。

練習 9.10 對易算符在非坐標基中的分量

導出(9.23)式。

練習 9.11 Lie 微商

矢量場 $\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ 沿矢量場 $\boldsymbol{u}(\mathcal{P})$ 的「Lie微商」定義爲

$$\pounds_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} \equiv [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]。 \tag{9.24}$$

在一張紙上畫出充滿空間的曲線族（「線滙」）。在紙上畫出在任意點 $\mathcal{P}_0$ 的任意矢量 $\boldsymbol{v}$。利用「Lie遷移定律」$\pounds_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}=0$ 將矢量沿通過$\mathcal{P}_0$的曲線遷移，式中 $\boldsymbol{u}=d/dt$ 是曲線的切線。畫出沿曲線各點 $\mathcal{P}(t)$ 的終矢量 $\boldsymbol{v}$。

練習 9.12 與父親一模一樣的兒子

(a)試證明 Jacobi 恒等式

$$[\boldsymbol{u},[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]]+[\boldsymbol{v},[\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}]]+[\boldsymbol{w},[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]]=0, \tag{9.25}$$

只要挑出所有形爲 $\partial_{\boldsymbol{u}}\partial_{\boldsymbol{v}}\partial_{\boldsymbol{w}}$ 的項，證明它們相加爲零，然後從對稱性論證所有其他項，如 $\partial_{\boldsymbol{w}}\partial_{\boldsymbol{u}}\partial_{\boldsymbol{v}}$ 項亦應消去，即可。

(b) 將此恒等式表爲指標形式。

(c) 畫出相應於此恒等式的圖形（見框 9.2）。

§ 9.7 流形和微分拓撲學

空時不是本章概念可應用的唯一舞臺。點，曲線，矢量，1-形式和張量都

可在任意「可微流形」中存在。它們用於研究可微流形構成的數學分支稱爲「*微分拓撲學*」，這是本章標題的由來。

數學家常常通過引入某些非常基本的概念，如集合和集合的拓撲，在它們當中建立相當精心製作的框架結構，然後用這一框架結構定義可微流形的概念，從而發展微分拓撲學。但是大多數物理學家滿足於流形的較模糊的直覺定義：粗略地說，n維*可微流形*是連續地可微地聯繫在一起的「點」集，因此在任意充分小的區域內這些點可與 R^n 的點的開集一一對應［R^n 是 n 維的數空間，即有序的 n 重空間 $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$］。這一對應關係爲鄰域提供了坐標系。

「定義」可微流形

用幾個例子可以比這個定義更好地表達此概念。初等的例子（Euclid三維空間，球的表面）使人們從含義豐富的幾何學標準想起了更多的幾何觀念；因此迫使人們注意更複雜的事物。令 R^3 是具有普通高等微積分中連續性和可微性概念的三維數空間。R^3的點ξ是三重實數，$\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$. 令 R^3 中的*射線* $\mathcal{P}$是起於原點的任意半線，對於某一固定的 $\eta\neq 0$ 和全部正實數 $\lambda>0$，半線由形如 $\xi=\lambda\eta$ 的全部ξ組成。（參見圖 9.3）。於是，可微流形的一個好例子是全部不同射線的集合S^2。如果對於任意射線$\mathcal{P}$，f是具有特定值 $f(\mathcal{P})$的實值函數［因此寫作 $f:S^2\longrightarrow R:\mathcal{P}\longrightarrow f(\mathcal{P})$］，則應直覺（或甚至可證明）地明了，由於說 f 是連續或可微的即可確定我們的含義。在這一意義下，S^2本身是連續可微的。所以S^2是流形，而射線$\mathcal{P}$是S^2的點。存在著許多其他的流形，微分拓撲發現它們與S^2不可區分。最簡單的是二維球表面（二維球），它是S^2的標準表示；它是R^3中滿足 $(\xi_1)^2+(\xi_2)^2+(\xi_3)^2=1$ 的點ξ的集合。S^2 的不同點 $\mathcal{P}$（R^3 中的一條射線）顯然與這一標準二維球面的每一點相交，並且，在每一方向（射線到點，點到射線）上，對應關係是連續且可微的。對於 R^3 內包圍原點的任意橢球面以及包圍原點且有不同射線通過每一點的任意其他曲面，這

可微流形的例子

流形S^2

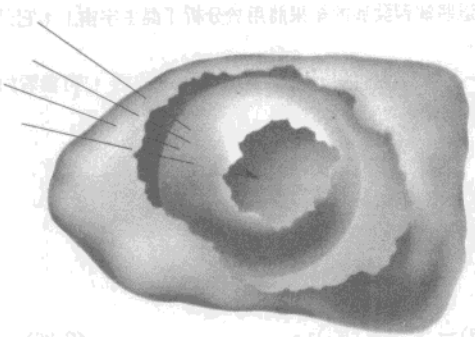


圖 9.3
可微流形S^2的三種不同表示。第一種是從原點發出的全部射線的集合；第二種是它們截出的球；第三種是每一射線嚴格相交一次的奇形閉合曲面。

同樣是正確的。它們每一種都使同一整體連續性和可微性概念具體化，它們代表了同一抽象可微流形S^2，二維球。它們，以及我們著手處理的射線束，在這幾何學的初級水平上，全都具有相同的幾何性質。在此水平上具有不同幾何結構（不同「可微結構」）的二維流形是環面 T^2 ，環形的表面。無法將這一曲面光滑地嵌入 R^3 使不同的射線 $\mathcal{P}\in S^2$ 與它的每一點相交；在T^2和S^2之間不存在可逆和可微的對應關係。

流形T^2

流形$SO(3)$（轉動羣）

流形的另一例子是轉動羣 $SO(3)$，它的點$\mathcal{P}$是單位行列式的全部3×3的正交矩陣。因此 $\mathcal{P}=\|P_{ij}\|$, 且 $\mathcal{P}^T\mathcal{P}=1$ 和 $\det\mathcal{P}=1$。這是一個三維空間（在計算中常用三個 Euler 角參量），其中微分概念（例如角速度）可使用；因此這是一個流形。所以是 Lorentz 羣。

流形的可微性（即其上定義可微函數的可能性）即使不是整體的也允許局域地引入坐標系，並且也允許引入曲線、切向空間、切向矢量，1 形式和張量，正象對空時所做的那樣。但是流形是可微的這一僅有的事實並不意味著其中存在諸如短程線，平行移動，曲率，度規或長度等概念。這些是某些流形所具有的結構的附加部分，而不是所有流形都具有的。粗略地說，每一流形具有光滑性質和拓撲，但是不具有無形和無尺度的附加結構。

定義仿射幾何學和Riemann幾何學

流形附加短程線、平行移動和曲率（形狀）的數學分支稱爲仿射幾何學；附加度規的數學分支稱爲 Riemann 幾何學。它們將在下面幾章予以研究。

練習

關於轉動羣的練習

在下面幾章，微分幾何學的解說變得愈來愈複雜了，作爲流形的例子，這些練習將一再回到轉動羣。另外，在框 30.1 中，這些練習發展的結果將用於分析「混主宇宙」，它是 Einstein 場方程的特別重要的宇宙解。

作這些練習之前，讀者希望複習一下轉動矩陣的 Euler 角參數化法的話，可參看如 Goldstein (1959) 第 107-109 頁上的論述。

練習 9.13 轉動羣：生成元

令 $\mathcal{K}_i$ 是分量爲 $(K_i)_{mn}=\epsilon_{imn}$ 的三個 3×3 矩陣。

(a) 寫出矩陣 $\mathcal{K}_1$, $(\mathcal{K}_1)^2$, $(\mathcal{K}_1)^3$ 和 $(\mathcal{K}_1)^4$。

(b) 求下列級數的和

$$\mathcal{R}_x(\theta)\equiv\exp(\mathcal{K},\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}(\mathcal{K}_1)^n。 \tag{9.26}$$

證明 $\mathcal{R}_x(\theta)$ 是轉動矩陣，並證明它產生繞 x 軸的角度爲 θ 的轉動。

(c)類似地證明 $\mathcal{R}_x(\phi)=\exp(\mathcal{X}_3\phi)$ 和 $\mathcal{R}_y(\chi)=\exp(\mathcal{X}_2\chi)$ 也是轉動矩陣，並證明它們分別產生繞 z 軸和 y 軸的角度爲ϕ和χ的轉動。

(d)解釋爲什麼對於轉動羣的生成元 $\mathcal{P}\in SO(3)$, $\mathcal{P}=\mathcal{R}_z(\psi)\mathcal{R}_x(\theta)\mathcal{R}_z(\phi)$定義了 Euler 角坐標 ψ, θ, ϕ。

(e)設 $\mathcal{C}$ 是通過單位矩陣的曲線 $\mathcal{P}=\mathcal{R}_x(t)$, $\mathcal{C}(0)=\mathcal{I}\in SO(3)$，計算 $\mathcal{C}(0)f_{12}$ 證明它的切線 $(d\mathcal{C}/dt)(0)\equiv\mathcal{C}(0)$ 不爲零，其中 f_{12} 是函數 $f_{12}(\mathcal{P})=P_{12}$，它的值是 $\mathcal{P}$ 的 12 矩陣元。

(f)設 $\mathbf{e}_3(\mathcal{P})$ 是曲線 $\mathcal{C}(t)=\mathcal{R}_z(t)\mathcal{P}$ 通過 $\mathcal{P}$ 的切線（在 $t=0$ 的），定義在 $SO(3)$ 上的矢量場 $\mathbf{e}_3$。證明 $\mathbf{e}_3(\mathcal{P})$ 處處不爲零。注意：$\mathbf{e}_3(\mathcal{P})$ 稱爲「關於 z 軸的轉動生成元」，因爲它從$\mathcal{P}$指向鄰近的轉動，$\mathcal{R}_z(t)\mathcal{P}$，而後者由於繞 z 軸轉動而與 $\mathcal{P}$ 有所不同。

(g)試證明 $\mathbf{e}_3=(\partial/\partial\psi)_{\theta\phi}$。

(h)導出下述對$t\ll 1$成立的公式：

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_z(t)\mathcal{R}_z(\psi)\mathcal{R}_x(\theta)\mathcal{R}_z(\varphi)\\&=\mathcal{R}_z(\psi-t\sin\psi\cot\theta)\mathcal{R}_x(\theta+t\cos\psi)\mathcal{R}_z(\phi+t\sin\psi/\sin\theta);\\&\mathcal{R}_y(t)\mathcal{R}_z(\psi)\mathcal{R}_x(\theta)\mathcal{R}_z(\phi)\\&=\mathcal{R}_z(\psi+t\cos\psi\cot\theta)\mathcal{R}_x(\theta+t\sin\psi)\mathcal{R}_z(\phi-t\cos\psi/\sin\theta)。\end{aligned}$$

(i)定義 $\mathbf{e}_1(\mathcal{P})$ 和 $\mathbf{e}_2(\mathcal{P})$ 分別爲曲線 $\mathcal{C}(t)=\mathcal{R}_x(t)\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{C}(t)=\mathcal{R}_y(t)\mathcal{P}$ 的切向矢量（在 $t=0$ 的）。試證明

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1&=\cos\psi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\psi\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\\mathbf{e}_2&=\sin\psi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cos\psi\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)。\end{aligned}$$

$\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 是「關於x軸和y軸的轉動生成元」。

練習 9.14　轉動羣：結構常數

用上一練習中所構成的三個矢量場

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1&=\cos\psi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\psi\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\\mathbf{e}_2&=\sin\psi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cos\psi\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\\mathbf{e}_3&=\frac{\partial}{\partial\psi},\end{aligned}\tag{9.27}$$

作爲轉動羣流形的基矢。上述公式用 Euler 角基表示「生成元的基」。試證明此基的對易系數爲

$$c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=-\epsilon_{\alpha\beta\gamma},\tag{9.28}$$

它在轉動羣中與位置$\mathcal{P}$無關。這些系數也稱爲轉動羣的結構常數。

第十章　仿射幾何學：短程線，平行移動和協變微商

Galilei 的慣性原理本身充分地確證；世界本質上是仿射的。

Hermann Weyl

本章完全屬於高階，第9章是它的必要準備。

它作爲以下三方面的準備是必須的

(1)第 11-13 章（微分幾何；Newton 重力）。

(2)第14章的後半部分（曲率的計算）以及

(3)第15章（Bianchi恒等式）的細節而非要旨。

§10.1　短程線和等效原理

自由下落粒子及其鐘

自由下落是「運動的自然狀態」，所謂自然，事實上就是自由下落的中性試驗物通過空時的路徑與它的結構和組成無關（Einstein, Eötvös, Dicke 的「弱等效原理」，參看框 1.2 和 §38.3）。

將空時想像爲充滿着自由落體的軌迹。選定一個事件。在那裏選定一個速度。它們確定了一條唯一的軌迹。

更確切地說，要找出與每一條軌迹密切聯繫的最大信息量。它僅僅是試驗物沿着下落的那些點的序列嗎？不，還有更多。每一個試驗物可携帶一只鐘（同類的鐘——即圖 1.9 意義的「好」鐘——不管試驗物的結構和組成如何）。這只鐘隨着物體的運動滴答運行，它以一個數標記物體軌迹上的每一個事件：在時間 λ，物體在那裏。結果：自由落體的軌迹不只是點的序列，而是參量化的序列，是一「曲線」$\mathcal{P}(\lambda)$。

然而，參量化是唯一的嗎？不完全。相當任意的是(1)時間原點 $\mathcal{P}(0)$ 的選擇，以及(2)測量鐘時 λ 的單位［厘米、秒、弗隆（furlong）*,...］，所以 λ 僅對於線性變換

$$\lambda_{新} = a\lambda_{老} + b \tag{10.1}$$

* furlong英國長度單位，等於$\frac{1}{8}$英里或 201. 167 米。（譯者注）

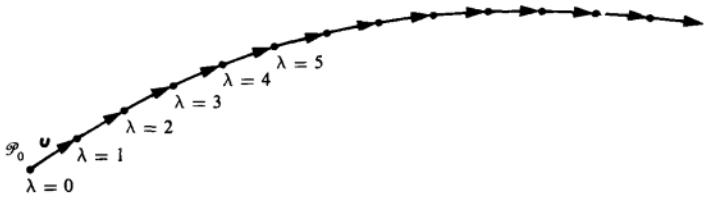


圖 10.1

短程線可視爲「筆直的平行移動」之尺規。選定一個事件 $\mathscr{P}_0$ 以及該點的切向矢量 $\boldsymbol{u}=d/d\lambda$。作出唯一的一條短程線 $\mathscr{P}(\lambda)$。它具備以下條件：(1)通過 $\mathscr{P}_0$：$\mathscr{P}(0)=\mathscr{P}_0$；(2)在該點以 $\boldsymbol{u}$ 作爲它的切向矢量：$(d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=0}=\boldsymbol{u}$。這條短程線可視爲在 $\mathscr{P}(0)$ 取 $\boldsymbol{u}$ 再以盡可能直的方式放到它的末端 $\mathscr{P}(1)$ 之規尺，得

$$\boldsymbol{u}_{\lambda=1}=(d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=1};$$

然後又取它，再盡可能直地放到 $\mathscr{P}(2)$，得

$$\boldsymbol{u}_{\lambda=2}=(d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=2};$$

如此等等。這一「盡可能直」的「首尾相接」移動的序列給出下述含義，$(d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=17}$ 和 $\boldsymbol{u}=(d\mathscr{P}/d\lambda)_{\lambda=0}$ 是沿着短程線在不同點上的「相同矢量」；或者等價於，其一可通過「筆直的平行移動」得自另一。

是唯一的，b（「鐘時的新原點」）是一個與該特定自由落體軌迹位置無關的數，a（「新單位與老單位之比）也是如此。

在 Einstein 的彎曲空時（以及在 Cartan-Newton 的彎曲空時，第12章）中，這些參量化的自由落體軌迹是所有可能曲線中最直的線，因此，人們給這些軌迹以相同的名稱，「短程線」，數學家用它來表示彎曲流形的直線；像數學家那樣，用「仿射參量」的名稱表示沿自由落體短程線的參量λ。(10.1) 式則說明「短程線的仿射參量對於線性變換來說是唯一的」。

短程線定義爲自由落體的軌迹

沿短程線的仿射參量（鐘時）與先驗的任何度規毫無關係。甚至度規消失（例如，在 Cartan-Newton 空時）時，它仍存在，它給出一種對短程線上事件之間的間隔作比較的方法（如果 $[\lambda_{\mathscr{B}}-\lambda_{\mathscr{A}}]=2[\lambda_{\mathscr{R}}-\lambda_{\mathscr{B}}]$，則 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{A}$ 相距爲 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{Q}$ 的兩倍）。但是仿射參量只能測量沿着自身短程線的相對間隔。離開短程線，它就沒有意義了。

仿射參量定義爲自由落體軌迹的鐘時

短程線的上述特徵以及其他等等均滙總於圖 10.1 和框 10.1 中。

§10.2　平行移動和協變微商：圖示方法

兩個試驗物起初在平行而鄰近的短程線上經空時下落，由於潮汐引力（空時曲率）的作用，彼此挨近或推開。爲了將這種敍述定量化，必須將「平行」和「彼此分離的加速度率」的概念定量化。讓我們從平行性開始。

框 10.1 短程線

短程線概要

給定一點，給定切向矢量；得唯一的仿射參量化曲線（「短程線」）。

短程線：引力物理的來龍去脈

中性試驗粒子的世界線（「Einstein 的重力幾何理論」，也是「Cartan 翻譯爲 Newton 重力理論的幾何術語」）：

(1)「給定一點」，這條世界線上的某個事件；

(2)「給定矢量」：矢量（「單位參量增量的位移」）在該事件定義的瞬間與世界線相切；

(3)「唯一的曲線」：每個中性試驗粒子以特定的初始位置和特定的初始速度沿同一世界線行進，與它的組成和質量無關（小；試驗質量！；「Einstein-Eötvös-Dicke 的弱等效原理」）；

(4)「仿射參量」：在 Cartan-Newton 理論中，Newton 的「宇宙時間」（它由「好」鐘測量）；在實在的物理世界中，沿類時短程線的「原時」（亦由「好」鐘測量）；

(5)「參量化曲線」：(a) 仿射參量唯一適用於 $\lambda \longrightarrow a\lambda + b$ 型的變換，其中 a 和 b 是常數（除了參量的零值和單位外，沿給定的短程線無任意性）；或等價於 (b) 在短程線上給定任意三個事件 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$，由十分確定的物理結構（「記時器」）可在短程線上找到唯一的第四個事件 $\mathcal{D}$，使 $(\lambda_{\mathcal{C}} - \lambda_{\mathcal{A}})$ 等於 $(\lambda_{\mathcal{B}} - \lambda_{\mathcal{A}})$; 或等價於 (c) [微分形式] 在點 $\mathcal{A}$ 給定分量爲 $(dx^\alpha/d\lambda)_{\mathcal{A}}$ 的切向矢量，由物理結構（還是「記時器」）可以在點 $\mathcal{C}$ 找到具有唯一確定分量 $(dx^\alpha/d\lambda)_{\mathcal{C}}$ 的「相同切向矢量」（矢量「相等」；由於 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 之間的任意基矢發生扭曲和轉向，分量通常不相等）。

通過平行移動比較在不同事件處的矢量

考慮兩個鄰近的且用曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ 聯繫的事件 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$、矢量 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 位於在 $\mathcal{A}$ 的切向空間，矢量 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 位於在 $\mathcal{B}$ 的切向空間。我們如何確定 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 是否平行呢？我們怎樣比較它們的長度？等效原理給出一種回答：觀察者（必要時利用火箭的力量）沿世界線 $\mathcal{P}(\lambda)$ 穿越空時，他携帶矢量 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 隨着他運動，並用平直空間 Newton 或 Minkowski 標準保持它總是不變（根據等效原理，

平直空間物理學是局域地成立的！）。到達時間$\mathcal{B}$時，觀察者將他的「平行移動矢量」$\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$與矢量$\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$相比較。如果它們相同，則原先的矢量$\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$（根據定義）與$\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$平行，且它們具有相同的長度。（沒有度規意味着沒有定量確定長度的方法；然而，平行移動給出了一種比較長度的方法！）

等效原理使這一討論涉及多少有些不熟悉的做法，它適用於可以被加速的觀察者，而不是自由下落的觀察者。但是我們不能僅僅由於面臨了複雜的應用而迴避一個基本原理。（靈巧的永動機象純樸的永動機一樣，是不可能的！）等效原理說明，對引力潮汐力不敏感的局域測量不可能檢測到平直空時和彎曲空時之間的任何區別。宇宙飛船的駕駛員有一個慣性制導系統（加速度計、羅盤、計算機）能夠把它維持在平直空時的慣性參照系中；並且，在平直空時中它能夠計算出宇宙飛船中任何物體相對於一給定慣性系的位置和速度。買主可指明他要一台以無重力 Newton 力學定律編制程序的制導計算機，還是要一台以狹義相對論物理定律編制的制導計算機。將這相同的制導系統——包括相同的計算機程序——用於彎曲空時，如果制導系統的計算機斷定沒有發生變化，則矢量正在作平行移動。

用慣性制導系統和等效原理定義平行移動

在這種方法中移動的結果與用來聯繫$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的曲線無關嗎？在無重力的空時中顯然是的，因爲這是慣性制導系統的買主可以要求製造廠的一個主要的性能標準，但是在彎曲空時中，回答是否定的。如果$\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$沿一條曲線平行移動之後與$\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$一致，則它沿另一條曲線平行移動之後必定與$\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$不一致。空時曲率造成了差異。但是在我們發展平行移動的數學形式之前，不準備研究這些差異並使之定量化（第11章），而且，隨着矢量$\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$沿曲線移動，在使「保持矢量$\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$總是不變的平直空間標準」精確化之前，平行移動的數學形式本身也不可能做出來。

平行移動的結果依賴於路線

在框 10.2 中，平直空間標準精確化了。它們導致：(1)爲完成平行移動的「Schild 階梯」結構；(2)矢量場$\mathbf{v}$沿具有切線$\mathbf{u}$的曲線的「協變微商」概念$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$；(3)短程線「運動方程」$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0$，它表明「短程線沿着自身平行移動其切向矢量」；以及(4)毗鄰事件的切向空間之間的聯繫（圖 10.2）。

完成平行移動的Schild階梯；它的結論

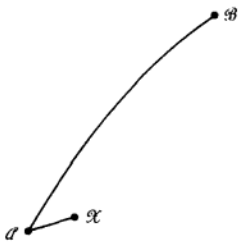
§10.3　平行移動和協變微商；抽象方法

從框 10.2 的“Schild 階梯”結構，我們學到空時協變微商的下述性質：

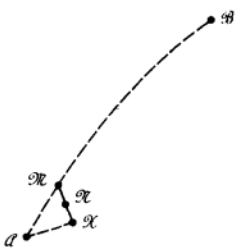
（接第252頁）

框 10.2 從短程線到平行移動到協變微分法到短程線到……

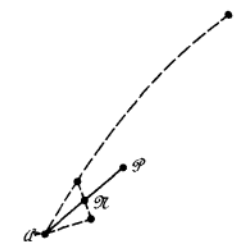
用短程線定義「平行移動」



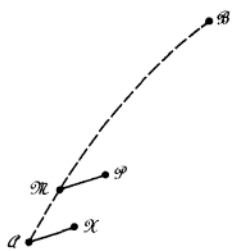
A. 曲線 $\mathcal{AX}$ 的任意充分短的直線段（即任意切向矢量）沿曲線 $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ 平行於自身移動到 $\mathcal{B}$ 可進行如下：



1. 沿 $\mathcal{AB}$ 靠近 $\mathcal{A}$ 取某一點 $\mathcal{Q}$，通過 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Q}$ 點取短程線 $\mathcal{XQ}$，取 $\mathcal{XQ}$ 的任意仿射參量化量 λ，並根據條件 $\lambda_{\mathcal{Q}}=\frac{1}{2}(\lambda_{\mathcal{X}}+\lambda_{\mathcal{Q}})$（「$\mathcal{XQ}$ 和 $\mathcal{QQ}$ 的時間相等」）定義一唯一的點 $\mathcal{Q}$。

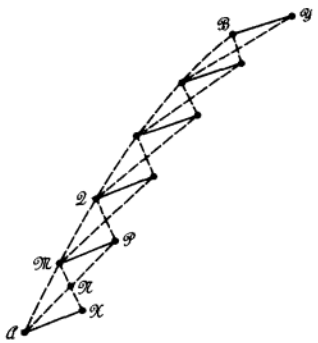


2. 取起於 $\mathcal{A}$ 且通過 $\mathcal{Q}$ 的短程線，並根據相等的參量增量延長到點 $\mathcal{P}$。



3. 曲線 $\mathcal{QP}$ 給出矢量 $\mathcal{AX}$ 平行於自身從 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Q}$ 的傳播（對於充分短的 $\mathcal{AX}$ 和 $\mathcal{AQ}$）。這種結構在（Newton 的或 Einstein 的）平直空時中顯然得出平行移動。此外它是局域的（矢量 $\mathcal{AX}$, $\mathcal{AQ}$ 等等非常短）。因此，它也應在彎曲空時中起作用（它體現了等效原理）。

4. 一再重複這一過程，並最後以 $\mathscr{A}\mathscr{X}$ 平行於自身從 $\mathscr{A}$ 傳播到 $\mathscr{B}$ 而告終。根據 Schild 的 (1970) 類似的結構，把這種結構叫做「Schild 階梯」。[亦可參看 Ehlers, Pirani, 和 Schild (1972)]。注意，曲線 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 不必是短程線。並不要求 $\mathscr{Q}2$ 是 $\mathscr{A}\mathscr{Q}$ 的直線延續，像短程線要求「十字交叉」中的 $\mathscr{Q}\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{A}\mathscr{Q}$ 的直線延續那樣。



"Schild 階梯"

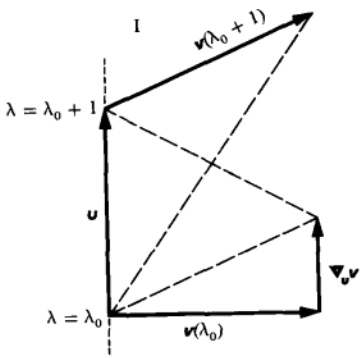
5. $\mathscr{A}\mathscr{X}$ 平行於自身從 $\mathscr{A}$ 傳播到 $\mathscr{B}$ 的結果取決於世界線 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 的選擇(「空時曲率的明證」)。

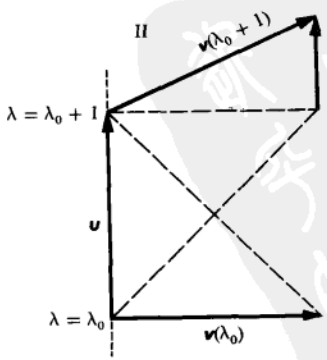
B. 試問矢量場 $\mathbf{v}$ 沿着一條切向矢量爲 $\mathbf{u}=d/d\lambda$ 的曲線變化有多快。答案是 $d\mathbf{v}/d\lambda \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \equiv$「$\mathbf{v}$ 相對於 λ 的變化率」≡「$\mathbf{v}$ 沿 $\mathbf{u}$ 的協變微商」，它是經過下述明顯步驟構成的：(1)取 $\lambda=\lambda_0+\varepsilon$ 的 $\mathbf{v}$。(2)將它平行移回到 $\lambda=\lambda_0$。(3)計算它與該處的 $\mathbf{v}$ 有多大區別。(4)被 ε 除（並取 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 的極限）：

通過平行移動定義「協變微分法」

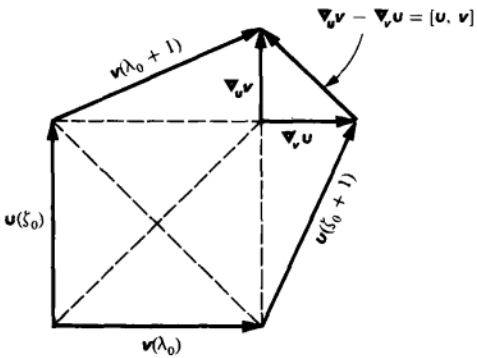
$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{[\mathbf{v}(\lambda_0+\varepsilon)]_{(\text{平行移動到}\lambda_0)}-\mathbf{v}(\lambda_0)}{\varepsilon}\right\}。$$

如果 $\mathbf{u}=d/d\lambda$ 比矢量場 $\mathbf{v}$ 中非均勻的尺度還要短，則 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ 可直接由圖 I 或同樣由圖 II 中看出。





協變微分法的「對稱性」



C. 取兩個矢量場。將關於 $\nabla_u v$ 和 $\nabla_v u$ 的兩個圖合而爲一，從而發現 $\nabla_u v - \nabla_v u$ 是 v-u-v-u 四邊形未能閉合的矢量，即（參看框 9.2）它是對易算符 $[u, v]$：$\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v]$。

術語：當 $\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v]$ 時，∇叫作「對稱的」或「無撓的 (torsion free)」協變微商。數學家所研究的其他類型的協變微商與以等效原理爲基礎的任何引力理論無關。

協變微分法的鏈式法則

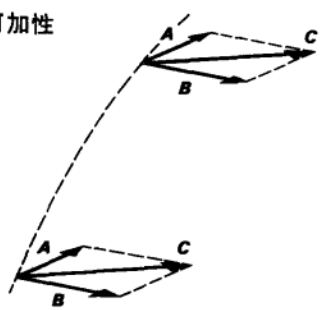
D. 用於定義 $\nabla_u v$ 的「取差值」和「取極值」的過程保證了它遵從通常的微商乘積法則：

$$\nabla_u(f v) = f \nabla_u v + (u[f])v$$

f：標量場；v：矢量場；「f 沿 u 的微商」在本書第一編中記爲 $\partial_u f$；其實如果 $u = d/d\lambda$，則等於 $df/d\lambda$；有時記爲 $\nabla_u f$。

（證明見練習 10.2）

協變微分法的可加性



E. 在眞實的物理世界中，不管是 Newton 的或相對論的，三角形的平行移動不會使其邊分開：(1) 起初 A, B, C 爲 $A+B=C$; (2) A, B, C 均被自由下落（慣性）的觀察者平行自身移動；(3)則總有 $A+B=C$。任何其他結果都將違背等效原理。

1. 由此（下面通過協變微商的定義並注意到任意矢量 u 可看作對於自由落體世界線的切向矢量即可得出）：
對於任意矢量 u 和任意矢量場 v 和 w，有

$$\nabla_u(v+w)=\nabla_u v+\nabla_u w。$$

2. 由此將協變微商的對稱性以及「四邊形的閉合邊」$[u,v]$ 的可加性結合起來，得：

$$\nabla_{u+n}v=\nabla_u v+\nabla_n v。$$

（見練習 10.1.）另外這一點還可以由等效原理推論出來：在局域慣性系中，正如在狹義相對論或 Newton 理論一樣，v 沿 $u+n$ 的變化應等於它沿 u 的變化與沿 n 的變化之和。

3. 由以上得出：選擇 n 爲 u 的倍數，則

$$\nabla_{au}v=a\nabla_u v。$$

F. 把對於平行移動的「Schild 階梯」構造過程（本框的開始）用於短程線的切向矢量（練習10.6）可確保：**短程線沿着自身將自己的切向矢量平行移動**。翻譯成協變微商的語言，爲：

通過平行移動或協變微分法定義短程線

$$\begin{pmatrix}u=d/d\lambda \text{ 是某一曲線的切向矢量，且}\\ \nabla_u u=0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}\text{該曲線是一條短程線}\end{pmatrix}。$$

於是，循環封閉了：短程線到平行移動到協變微商到短程線。

協變微商：基本性質

對稱性：對於任意矢量場 u 和 v

$$\nabla_u v-\nabla_v u=[u,v]; \tag{10.2a}$$

鏈式法則：對於任意函數 f，任意矢量場 v，和任意矢量 u

$$\nabla_u(fv)=f\nabla_u v+v\partial_u f; \tag{10.2b}$$

可加性：對於任意矢量場 v 和 w，以及任意矢量 u

$$\nabla_u(v+w)=\nabla_u v+\nabla_u w; \tag{10.2c}$$

對於任意矢量場 v，任意矢量或矢量場 u 和 n，以及任意數或函數 a 和 b。

$$\nabla_{au+bn}v=a\nabla_u v+b\nabla_n v。 \tag{10.2d}$$

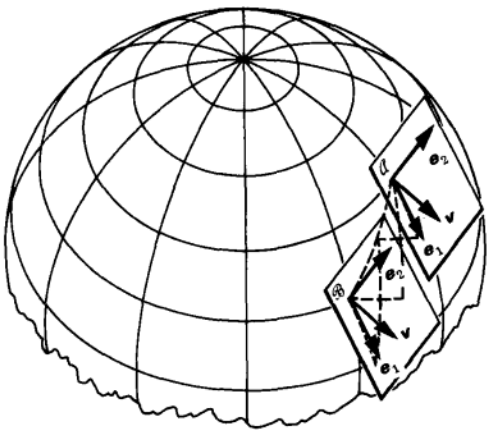
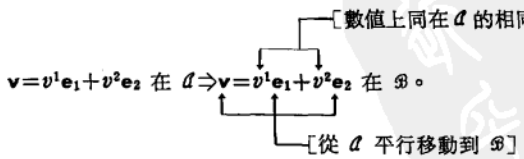


圖 10.2

鄰近點的切向空間之間的聯繫，有可能通過平行移動規則獲得。在事件 $\mathcal{A}$ 選擇基矢 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$。將它們平行移動到事件 $\mathcal{B}$（圖中示出 $\mathbf{e}_1$ 移動的 Schild 階梯）。然後從 $\mathcal{A}$ 平行移動到 $\mathcal{B}$ 的任意其他矢量 v 在兩個事件處都將具有相同的分量（平行移動不會斷開三角形的邊，參見框 10.2）：



所以，平行移動提供了 $\mathcal{A}$ 處的切向空間和 $\mathcal{B}$ 處的切向空間之間唯一的和完全的聯繫。它通過保持全部代數關係使 $\mathcal{A}$ 處每個矢量在 $\mathcal{B}$ 處有唯一的矢量與之等同。類似地（見§10.3），保持諸如 $\langle\sigma,v\rangle=19.9$ 和 $S(\sigma,v,w)=371$ 等全部代數關係，使 $\mathcal{A}$ 處每個1-形式在 $\mathcal{B}$ 處有唯一的1-形式與之等同並使 $\mathcal{A}$ 處每個張量在 $\mathcal{B}$ 處有唯一的張量與之等同。

實際上，所有這些只在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 彼此任意靠近的極限情形下才正確。當 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 靠近而不是任意靠近時，對不同路徑平行移動的結果稍有不同；所以切向空間之間的聯繫也有點不唯一。但是每當 $\mathcal{A}$ 與 $\mathcal{B}$ 之間的仿射參量距離減半時，這些差值就減少到 1/4；見第11章。

用來從原有的矢量場產生新的矢量場，且滿足這四個條件的任意「規則」∇被微分幾何學家叫做「對稱協變微商」。這種規則不是曲線、矢量、張量等較原始的概念（第 9 章）所固有的。在空時實驗室的舞臺上，存在着多種定義協變微商規則∇的方法，正好像引力場源可以重新布置一樣。不同的自由落體軌迹（短程線）起因於不同的質量分布。

給定空時或任意其他流形的短程線，我們可以由框 10.2 的 Schild 階梯程序構成一個唯一相應的協變微商。給定任意協變微商，我們可以通過方程

$$d\mathbf{v}/d\lambda \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}=0 \Longleftrightarrow \text{矢量場 } \mathbf{v} \text{ 沿矢量 } \mathbf{u}=d/d\lambda \text{ 平行移動；} \tag{10.3}$$

平行移動的方程

討論平行移動。並通過

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0 &\Longleftrightarrow \text{切向矢量爲 } \mathbf{u}=d/d\lambda \text{ 的曲線}\\ &\quad \mathscr{P}(\lambda) \text{ 平行移動它自己的切向矢量 } \mathbf{u}\\ &\Longleftrightarrow \mathscr{P}(\lambda) \text{ 是短程線。}\end{aligned}$$

我們可檢驗任意曲線是否爲短程線。所以全部短程線的知識完全等價於協變微商的知識。

全部短程線知識等價於協變微商的知識

協變微商∇將平直空間的梯度∇推廣到彎曲空時。就像它在平直空間中的地位那樣，它可看作從 1 形式 σ、矢量 $\mathbf{u}$ 和矢量場 $\mathbf{v}$ 產生出一個數$\langle\sigma,\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\rangle$的機器。這個機器的觀點在框 10.3 中予以確定。這裏指出一個重要事實：不管它的機器本性，∇不是張量；它是一個非張量的幾何客體。

協變微商
推廣平直空間的梯度

與在平直空時中一樣，在彎曲空時中∇不僅可以應用於矢量場，也可以應用於函數、1 形式場和張量場。它對函數的作用可用明顯的方法來定義：

$$\nabla f \equiv df; \qquad \nabla_{\mathbf{u}} f \equiv \partial_{\mathbf{u}} f \equiv \mathbf{u}[f] \equiv \langle df, \mathbf{u}\rangle。 \tag{10.5}$$

協變微商對函數、1 形式以及張量的作用

它對 1 形式場和張量場的作用是通過把（3.39）式推廣到彎曲空間來定義的：當「恒定」（即平行移動的）矢量插入它的空位中時，∇S 是逐點計算 S 輸出改變的線性機器，例如：$\binom{0}{1}$秩張量的梯度即 1 形式場 σ。選定一事件 $\mathscr{P}_0$；在 $\mathscr{P}_0$ 的切向空間選定兩個矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$；通過沿 $\mathbf{u}$ 方向的平行移動，$\mathbf{v}$ 構成「恒定」矢量場 $\mathbf{v}(\mathscr{P})$, $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}=0$，則 $\nabla\sigma$ 是 $\binom{0}{2}$ 秩張量，$\nabla_{\mathbf{u}}\sigma$ 是 $\binom{0}{1}$ 秩張量。它們是由

$$\nabla\sigma(\mathbf{v},\mathbf{u}) \equiv \langle \nabla_{\mathbf{u}}\sigma, \mathbf{v}\rangle \equiv \nabla_{\mathbf{u}}(\langle\sigma,\mathbf{v}\rangle) \equiv \frac{d}{d\lambda}\langle\sigma,\mathbf{v}\rangle, \tag{10.6}$$

在 $\mathscr{P}_0$ 處定義的，式中 $\mathbf{u}=d/d\lambda$。此式定義了 $\nabla\sigma$ 和 $\nabla_{\mathbf{u}}\sigma$，因爲對於任意

（接第257頁）

框 10.3 協變微商看作一種機器；聯絡系數作爲它的部件

A. 機器概述

1. 協變微商算符∇，像大多數其他幾何客體一樣，可看成是帶有一些空位的機器。在空時中每一事件 $\mathcal{P}_0$ 處都有一個這樣的機器。在 $\mathcal{P}_0$ 處的∇機器可簡要說明如下：

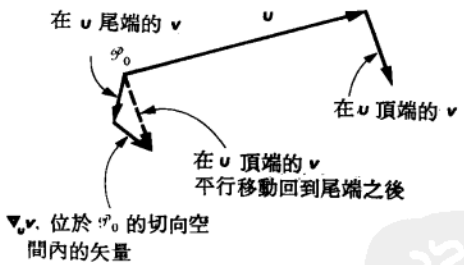
$$\nabla(\underset{\cdots}{\sigma},\ \underset{\cdots}{v(\mathcal{P})},\ \underset{\cdots}{u})\equiv\langle\sigma,\ \underbrace{\nabla_u v}\rangle。$$

第一個空位；插入一個位於 $\mathcal{P}_0$ 的切向空間內的1形式 σ	第二個空位；插入一個在 $\mathcal{P}_0$ 鄰域定義的矢量場 $v(\mathcal{P})$	第三個空位；插入一個位於 $\mathcal{P}_0$ 的切向空間內的矢量 u	一個新矢量；「矢量場」v 相對於 u 的協變微商

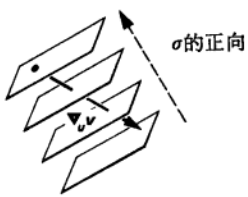
[注意：這種∇的空位符號，除了强調∇的「機器」本性外，無實用目的。本框是它被用到的唯一地方。]

2. 幾何上，機器的輸出 $\langle\sigma,\nabla_u v\rangle$ 可得出如下：

(a) 計算 v 沿矢量 u 的變化率 $\nabla_u v$；當 u 和 v 無限小時，此計算可用圖表示：



(b) 計算多少個1形式 σ 的面被矢量 $\nabla_u v$ 所穿透（穿透出現在 $\mathcal{P}_0$ 的切向空間內）。



$$\langle\sigma,\nabla_u v\rangle=-2.8\ 。$$

當把 σ, $v(\mathscr{P})$ 和 u 插入機器∇的空位時，這個數就是機器∇的輸出。

3.作爲機器的協變微商的另一種等價表述。讓第一個空位空着（不提到任何1形式 σ）；由原來的矢量場 v 得到一個新的矢量場：

$$\nabla(\sqcup, v(\mathscr{P}), u) \equiv \nabla_u v$$

空着

＝「矢量場 v 沿矢量 u 的協變微商」

4.第三種機器操作。讓第一個和第三個空位都空着（不提到任何1形式 σ；也不提到微商所沿的任意矢量 u）；由原來的矢量場 v 得到一個（$\binom{1}{1}$）秩張量場：

$$\nabla(\sqcup, v(\mathscr{P}), \sqcup) \equiv \nabla v$$

空着　　空着

＝矢量場 v 的「協變微商」或「梯度」。

這一張量場 ∇v，是把 §3.5 中研究的平直空間的 ∇v 推廣到彎曲空間。它有兩個空位（在它的定義中讓兩個都空着）。對於給定的輸入，其輸出是

$$\nabla v(\sqcup, u) = \nabla_u v$$

空着

$$\nabla v(\sigma, u) = \langle \sigma, \nabla_u v \rangle。$$

5.總結以上所定義的量：

(a) ∇是協變微商算符；插入 σ, $v(\mathscr{P})$ 和 u 可由它得到一個數；結果是 $\langle \sigma, \nabla_u v \rangle$。

(b) ∇v 是 v 的梯度；插入 σ 和 u，可由它得到一個數；結果爲 $\langle \sigma, \nabla_u v \rangle$ ［與 (a) 相同］。

(c) $\nabla_u v$ 是 v 沿 u 的協變微商；插入 σ，可由它得到一個數，結果爲 $\langle \sigma, \nabla_u v \rangle$［與 (a) 與 (b) 相同］。

B. 如何區別∇與張量

機器∇與張量的不同在兩方面：(1)∇的中間空位不接受矢量，它要求矢量場——可微的矢量場。(2)∇不是線性機器（而張量必須是線性的）：

$$\nabla(a\sigma, f(\mathscr{P})\mathbf{v}(\mathscr{P}), b\mathbf{u}) \equiv \langle a\sigma, \nabla_{b\mathbf{u}} f\mathbf{v}\rangle$$
$$= abf\langle\sigma, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\rangle + ab\langle\sigma, \mathbf{v}\rangle\nabla_{\mathbf{u}} f$$

如果∇是線性機器，則此項不存在。

C. 「聯絡系數」作爲∇的分量

給定一個 $(\frac{1}{2})$ 秩張量 $\boldsymbol{S}$，給定 $\boldsymbol{S}$ 所在的事件 $\mathscr{P}_0$ 處的切向矢量基 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 以及 1 形式對偶基 $\{\omega^\alpha\}$，則可定義 $\boldsymbol{S}$ 的分量爲

$$S^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv \boldsymbol{S}(\omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma)。$$

類似地可定義∇的分量，只是對於∇不僅需要在事件 $\mathscr{P}_0$ 處的基 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$，還需要在其鄰域中每一事件 $\mathscr{P}$ 處的基 $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathscr{P})\}$：

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv \nabla\text{的分量} = \nabla(\omega^\alpha, \mathbf{e}_\beta(\mathscr{P}), \mathbf{e}_\gamma)$$
$$\equiv \langle\omega^\alpha, \nabla_{\mathbf{e}_\gamma}\mathbf{e}_\beta\rangle$$
$$\simeq \begin{pmatrix}\text{當計算 } \mathbf{e}_\beta \text{ 時，從 } \mathbf{e}_\gamma \text{ 的尾端移向}\\ \text{頂端的基矢 } \mathbf{e}_\beta \text{ 中變化的 } \alpha \text{ 分量}\end{pmatrix}。$$

這些∇的分量叫做基 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 的「聯絡系數」。它們是協變微商算符∇的「坐標表示」。

協變微商算符∇和聯絡系數 $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ 提供了同一種幾何動物的不同數學表示嗎？荒謬！一種動物到處奔跑狂吠或撕咬（例如，在一處與在鄰近處的矢量場之間有所不同）。另一種動物有四十張面孔（見練習10.9）穩坐一處。對於兩種動物難於看出更多的差異。但是在任何與等效原理相容的世界裏，它們做着同一件事：(1)它們概括了通過所研究點的全部短程線的性質；這樣，(2)它們就提供了一種物理方法（平行移動）來比較兩個鄰近事件處矢量場和張量場的值。

給定的輸入矢量 u 和 v，它表明了它們的輸出是什麼。如果不强迫 $v(\mathscr{P})$ 沿 $u=d/d\lambda$ 是「恒定」的，則 v 的變化和 σ 的變化兩者都對 $(d/d\lambda)\langle\sigma,v\rangle$ 有貢獻：

$$\frac{d}{d\lambda}\langle\sigma,v\rangle\equiv\nabla_u\langle\sigma,v\rangle=\langle\nabla_u\sigma,v\rangle+\langle\sigma,\nabla_u v\rangle \tag{10.7}$$

（見練習 10.3）。

類似地，如果 S 是 $(\frac{1}{2})$ 秩張量場，則它的梯度 ∇S 是 $(\frac{1}{3})$ 秩張量場，定義如下。取一事件 $\mathscr{P}_0$；在 $\mathscr{P}_0$ 的切向空間取三個矢量 u, v, w和1形式 σ；通過平行移動（在 $\mathscr{P}_0$, $\nabla_u v=\nabla_u w=\nabla_u\sigma=0$）將 v, w 和 σ 轉化爲在 $\mathscr{P}_0$ 附近的「恒定」的矢量場和「恒定」的1形式場；然後定義

$$\begin{aligned}\nabla S(\sigma,v,w,u)&\equiv(\nabla_u S)(\sigma,v,w)\equiv\nabla_u[S(\sigma,v,w)]\\&=\partial_u[S(\sigma,v,w)]。\end{aligned} \tag{10.8}$$

練習

練習 10.1　協變微商的可加性

試證明對易算符（「四邊形的閉合邊」）是可加的：

$$[u,v+w]=[u,v]+[u,w];\quad [u+n,v]=[u,v]+[n,v]。$$

利用此結果、可加性條件 $\nabla_u(v+w)=\nabla_u v+\nabla_u w$，以及協變微商的對稱性 $\nabla_u v-\nabla_v u=[u,v]$，證明

$$\nabla_{u+n}v=\nabla_u v+\nabla_n v。$$

練習 10.2　協變微分法的鏈式法則

用圖，以及用 $\nabla_u v$ 的「取差值和取極限」定義（框 10.2）證明

$$\nabla_u(fv)=f\nabla_u v+v\partial_u[f]。 \tag{10.9}$$

練習 10.3　另一種鏈式法則

採用微商的「取差值和取極限」定義，導出 (10.7) 式。提示：取差值之前，將 $\sigma[\mathscr{P}(\lambda)]$ 和 $v[\mathscr{P}(\lambda)]$ 從 $\mathscr{P}(\lambda)$ 平行移動回到 $\mathscr{P}(0)$。

練習 10.4　又一種鏈式法則

試證明，像在平直空時中一樣，在彎曲空時中也有

$$\nabla_u(v\otimes w)=(\nabla_u v)\otimes w+v\otimes(\nabla_u w)。 \tag{10.10}$$

寫出平直空時中這一公式的更爲熟悉的分量形式。

練習前一部分的解：在所研究的事件 $\mathscr{P}_0$ 選擇1形式 σ 和 ρ，通過平行移動將它沿矢量 $u=d/d\lambda$ 延伸，$\nabla_u\rho=\nabla_u\sigma=0$ 則

$$[\nabla_u(v\otimes w)](\rho,\sigma)=\frac{d}{d\lambda}[(v\otimes w)(\rho,\sigma)] \qquad (\nabla_u \text{ 作用於張量的定義式})$$

$$=\frac{d}{d\lambda}[\langle\rho,v\rangle\langle\sigma,w\rangle] \qquad (\text{張量積「}\otimes\text{」的定義式})$$

$$=\frac{d\langle\rho,v\rangle}{d\lambda}\langle\sigma,w\rangle+\langle\rho,v\rangle\frac{d\langle\sigma,w\rangle}{d\lambda} \qquad (\text{微商的鏈式法則})$$

$$=\langle\rho,\nabla_u v\rangle\langle\sigma,w\rangle+\langle\rho,v\rangle\langle\sigma,\nabla_u w\rangle \quad (\text{由10.7式，取 } \rho,\sigma \text{ 爲恒量})$$

$$=[(\nabla_u v)\otimes w](\rho,\sigma)+[v\otimes(\nabla_u w)](\rho,\sigma)$$

(張量積“⊗”的定義式)

練習 10.5 還有一種鏈式法則

採用類似於練習 10.4 的技巧，證明

$$\nabla_u(\sigma\otimes\rho\otimes v)=(\nabla_u\sigma)\otimes\rho\otimes v+\sigma\otimes(\nabla_u\rho)\otimes v+\sigma\otimes\rho\otimes(\nabla_u v)。 \qquad (10.11)$$

練習 10.6 短程線方程

利用平行移動的“Schild 階梯”結構過程（框 10.2 的開頭），證明短程線將它自己的切向矢量沿着自身平行移動（框 10.2 的末尾）。

§10.4 平行移動和協變微商：分量方法

圖示方法促進了數學；抽象方法使圖示概念精確化；然而爲了實際地作複雜計算，通常我們必須採用分量方法。

爲了對分量起作用，我們需要一組基矢 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 和對偶的一組 1 形式基 $\{\omega^\alpha\}$。在平直空時中，單獨一組這種基就足夠了；全部事件都可用同樣的 Lorentz 基。在彎曲空時中則並非如此！每一個事件有它自己的切向空間，並且每一切向空間要求它自己的基。當我們從一事件移動到另一事件時，通過平行移動來比較它們的基，我們發現這些基扭曲和轉向。它們必定是這樣的。沒有其他的方法可使它們適應空時的曲率。在 $\mathcal{P}_0$ 點和 $\mathcal{P}$ 點的基，當沿着一條曲線通過平行移動來比較時，它們是相同的。但當沿着另一條曲線來比較時，它們必有差異（參看「曲率」，第11章）。

爲了使基矢 $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P})\}$ 和 1 形式 $\{\omega^\alpha(\mathcal{P})\}$ 的「場」的扭曲和轉向定量化，可採用協變微商。考查矢量場沿基矢 $\mathbf{e}_\beta$ 的變化，縮寫爲

$$\nabla_{\mathbf{e}_\beta}\equiv\nabla_\beta \qquad (\nabla_\beta \text{ 的定義})； \qquad (10.12)$$

特別是考查某一基矢的變化率：$\nabla_\beta\mathbf{e}_\alpha$。這一變化率本身是一個矢量，所以它可用基展開：

$$\nabla_\beta \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \quad (\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \text{ 的定義}) ; \tag{10.13}$$

定義聯接係數

注意 α 和 β 次序的顛倒！

作爲結果的「聯絡係數」$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ 可通過在基 1 形式上的投影來計算：

$$\langle \omega^\mu, \nabla_\beta \mathbf{e}_\alpha \rangle = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} 。 \tag{10.14}$$

（見練習 10.7；也可參看框 10.3。）因爲基 1 形式是被基矢「鎖定」的（$\langle \omega^\nu, \mathbf{e}_\alpha \rangle = \delta^\nu{}_\alpha$），所以這些相同的聯絡係數 $\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$ 告訴我們 1 形式基是如何逐點變化的：

$$\nabla_\beta \omega^\nu = -\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} \omega^\alpha , \tag{10.15}$$

$$\langle \nabla_\beta \omega^\nu, \mathbf{e}_\alpha \rangle = -\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} 。 \tag{10.16}$$

（見練習 10.8.）

聯絡係數還可以做得更多。它們還允許我們計算任意張量 $\mathbf{S}$ 的梯度分量。在平直空時的 Lorentz 系裏，令基矢 $\mathbf{e}_\alpha = \partial \mathscr{P} / \partial x^\alpha = \partial / \partial x^\alpha$ 作用於 $\mathbf{S}$ 的分量，可得 $\nabla \mathbf{S}$ 的分量。於是對於（$\frac{1}{2}$）秩張量場 $\mathbf{S}$，我們可得

$$\nabla \mathbf{S} \text{ 有分量 } S^\alpha{}_{\beta\tau,\delta} = \frac{\partial}{\partial x^\delta} [S^\alpha{}_{\beta\tau}] 。$$

在彎曲空時中則並非如此，甚至在平直空時的非 Lorentz 基中也並非如此。在那裏，基矢轉向、扭曲、擴張和收縮，所以即使 $\mathbf{S}$ 是恒量（$\nabla \mathbf{S} = 0$），它在扭曲基矢上的分量也是變化的。適當地應用聯絡係數，可以補償這種扭曲和轉向。正如我們在練習 10.10 中所學到的，$\nabla \mathbf{S}$ 的分量叫做 $S^\alpha{}_{\beta\tau;\delta}$，因此，用通常平直空間的方法，

張量場梯度的分量

$$\nabla \mathbf{S} = S^\alpha{}_{\beta\tau;\delta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \omega^\beta \otimes \omega^\tau \otimes \omega^\delta , \tag{10.17}$$

可通過 $\mathbf{S}$ 的那些量，加上在每一指標（即對每一基矢）上所作的修正來計算：

$$S^\alpha{}_{\beta\tau;\delta} = S^\alpha{}_{\beta\tau,\delta} + S^\mu{}_{\beta\tau} \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta} - S^\alpha{}_{\mu\tau} \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - S^\alpha{}_{\beta\mu} \Gamma^\mu{}_{\tau\delta} 。 \tag{10.18}$$

[修正上指標時用「＋」][交換並對被修正的指標求和]　[微分指標]

[修正下指標時用「－」]　[交換並對被修正的指標求和]　[微分指標]

其中

$$S^\alpha{}_{\beta\tau,\delta} \equiv \mathbf{e}_\delta [S^\alpha{}_{\beta\tau}] \equiv \partial_{\mathbf{e}_\delta} S^\alpha{}_{\beta\tau} 。 \tag{10.19}$$

(10.18) 式看來複雜，但是一旦領會了這張圖，它其實是很簡單的。

張量場協變微商的分量

正如對於 $\nabla \mathbf{S}$ 的分量我們可以使用特殊符號 $S^{\alpha}{}_{\beta\tau;\delta}$ 一樣，對於沿 $\mathbf{u}=d/d\lambda$ 的協變微商 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S}$ 的分量，我們也可以引入特殊符號 $DS^{\alpha}{}_{\beta\tau}/d\lambda$:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S}=(DS^{\alpha}{}_{\beta\tau}/d\lambda)\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\tau}; \tag{10.20}$$

$$\frac{DS^{\alpha}{}_{\beta\tau}}{d\lambda}=S^{\alpha}{}_{\beta\tau;\delta}u^{\delta}=(S^{\alpha}{}_{\beta\tau,\delta}+\text{修正項})u^{\delta}。$$

因爲對於任意 f 有

$$f_{,\delta}u^{\delta}=\partial_{\mathbf{u}}f=df/d\lambda$$

故可化爲

$$\frac{DS^{\alpha}{}_{\beta\tau}}{d\lambda}=\frac{dS^{\alpha}{}_{\beta\tau}}{d\lambda}+S^{\mu}{}_{\beta\tau}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}u^{\delta}-S^{\alpha}{}_{\mu\tau}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta}u^{\delta}-S^{\alpha}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\tau\delta}u^{\delta}。 \tag{10.21}$$

梯度的鏈式法則

當我們討論協變微商的鏈式法則時，分量方法的威力就清楚地顯示出來了。大量的抽象處理的鏈式法則（10.2b, 10.7, 10.10, 10.11 等式）都可濃縮到關於分量的一條法則：梯度運算「;」遵從普通微積分的標準偏微商鏈式法則。例如

$$(fv^{\alpha})_{;\mu}=f_{;\mu}v^{\alpha}+fv^{\alpha}{}_{;\mu} \tag{10.22a}$$

$$\uparrow\text{[}=f_{,\mu}\text{ 因爲 }f\text{ 沒有要修正的指標]}$$

（將它與 u^{μ} 縮併，得鏈式法則 10.2b）。另一例子是

$$(\sigma_{\alpha}v^{\alpha})_{;\mu}=\sigma_{\alpha;\mu}v^{\alpha}+\sigma_{\alpha}v^{\alpha}{}_{;\mu} \tag{10.22b}$$

$$\uparrow\text{[}=(\sigma_{\alpha}v^{\alpha})_{,\mu}\text{ 因爲 }\sigma_{\alpha}v^{\alpha}\text{ 沒有要修正的自由指標]}$$

（將它與 u^{μ} 縮併，得鏈式法則 10.7）。再例如：

$$(\sigma_{\mu}\rho_{\beta}v^{\tau})_{;\mu}=\sigma_{\alpha;\mu}\rho_{\beta}v^{\tau}+\sigma_{\alpha}\rho_{\beta;\mu}v^{\tau}+\sigma_{\alpha}\rho_{\beta}v^{\tau}{}_{;\mu} \tag{10.22c}$$

（將它與 u^{μ} 縮併，得鏈式法則10.11）。另外的例子參看下面的練習10.12。

練習

練習 10.7 聯絡係數的計算

試由 (10.13) 式導出 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ 的 (10.14) 式。

練習 10.8 對1形式基的聯絡

試由 (10.14) 式導出使 $\nabla_{\beta}\omega^{\tau}$ 和 $\Gamma^{\tau}{}_{\alpha\beta}$ 有關的 (10.15) 式和 (10.16) 式。提示：用 (10.7) 式。

練習 10.9　聯絡係數的對稱性

試證明空時的協變微商的對稱性（10.2a 式）與聯絡係數的下述對稱條件等價：

$$(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\text{ 的反對稱部分})\equiv\frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha})$$

$$\equiv\Gamma^{\mu}{}_{[\alpha\beta]}=-\frac{1}{2}\langle\omega^{\mu},\underbrace{[\mathbf{e}_{\alpha},\mathbf{e}_{\beta}]}_{\text{[基矢的對易算符]}}\rangle\equiv-\frac{1}{2}c_{\alpha\beta}{}^{\mu}\text{。}\qquad(10.23)$$

作爲一種特殊情形，當採用坐標基（$\mathbf{e}_{\alpha}=\partial/\partial x^{\alpha}$）時，$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ 對於 α 和 β 是對稱的。試證明在坐標基中此對稱性使每一事件的獨立聯絡係數的數目由 $4\times4\times4=64$ 個減爲 $4\times10=40$ 個。

練習 10.10　梯度的分量

試導出梯度分量 $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\delta}$ 的（10.18）式。提示：用給定基展開 $\boldsymbol{S}$，然後對任意矢量 $\boldsymbol{u}$，計算

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\gamma})\text{，}$$

右邊的值。應用鏈式法則（10.2b）和（10.11）式，將此結果與

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}=S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\delta}u^{\delta}\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\gamma}$$

相比較，讀出分量 $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\delta}$。

練習 10.11　散度

令 $\boldsymbol{T}$ 爲一 $\binom{2}{0}$ 秩張量場，用平直空時中同樣的處理，定義它的第二空位的散度：$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{T}$ 的縮併，即

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T})^{\alpha}=T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\text{。}\qquad(10.24)$$

用 $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$ 加上對 $\boldsymbol{T}$ 的兩個指標中每一個的修正項寫出分量 $T^{\alpha\beta}{}_{;\mu}$。

［答案：

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}T^{\mu\beta}+\Gamma^{\beta}{}_{\mu\beta}T^{\alpha\mu}\text{。}\qquad\text{］}$$

練習 10.12　鏈式法則的驗證

令 $S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$ 是 $\binom{2}{1}$ 秩張量場的分量，$M_{\beta}{}^{\gamma}$ 是 $\binom{1}{1}$ 秩張量場的分量。縮併這兩個張量場，得矢量場 $S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma}$，則這個矢量場的散度的鏈式法則爲

$$(S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})_{;\alpha}=S^{\alpha\beta}{}_{\gamma;\alpha}M_{\beta}{}^{\gamma}+S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma}{}_{;\alpha}\text{。}$$

用方向微商（$\partial_{\mathbf{e}_{\alpha}}$）加上聯絡係數修正，表示出此方程式的兩邊，以驗證這一鏈式法則的正確性。提示：左邊變爲

$$(S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})_{;\alpha}=(\underbrace{S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})_{,\alpha}}_{\text{［用方向微商的鏈式法則，}S^{\alpha\beta}{}_{\gamma,\alpha}M_{\beta}{}^{\gamma}+S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma}{}_{,\alpha}\text{］}}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}(S^{\mu\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})\text{。}$$

右邊有許多附加的修正項（對 $S^{\alpha\beta}{}_{\gamma;\alpha}$ 有三項，對 $M_\beta{}^\gamma{}_{;\alpha}$ 有兩項），但是它們必定彼此相消，僅剩下一項。

練習 10.13 聯絡係數的變換定律

令 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 和 $\{\mathbf{e}_{\alpha'}\}$ 是通過下述變換定律聯繫起來的兩組不同的基矢場

$$\mathbf{e}_{\alpha'}(\mathcal{P})=L^\alpha{}_{\alpha'}(\mathcal{P})\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P})。 \tag{10.25}$$

試證明相應的聯絡係數由下式相繫系

$$\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}=\underbrace{L^{\alpha'}{}_\alpha L^\mu{}_{\beta'}L^\nu{}_{\gamma'}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}}_{\text{張量分量的標準變換定律}}+L^{\alpha'}{}_\mu L^\mu{}_{\beta',\gamma'}。 \tag{10.26}$$

練習 10.14 平直二維空間的極坐標

在一張紙片上描繪 (r,ϕ) 極坐標系。在鄰近點描繪基矢 $\mathbf{e}_{\hat r}=\partial/\partial r$ 和 $\mathbf{e}_{\hat\phi}\equiv r^{-1}\partial/\partial\varphi$。(a) 用此圖以及平行移動的 Euclid 形式，證明下述關係式

$$\nabla_{\hat r}\mathbf{e}_{\hat r}=0,\quad \nabla_{\hat r}\mathbf{e}_{\hat\phi}=0,\quad \nabla_{\hat\phi}\mathbf{e}_{\hat r}=r^{-1}\mathbf{e}_{\hat\phi},\quad \nabla_{\hat\phi}\mathbf{e}_{\hat\phi}=-r^{-1}\mathbf{e}_{\hat r}。$$

(b) 由這些關係式寫出聯絡係數。(c) 令 $\mathbf{A}=A^{\hat r}\mathbf{e}_{\hat r}+A^{\hat\phi}\mathbf{e}_{\hat\phi}$ 是一矢量場，試證明它的散度 $\nabla\cdot\mathbf{A}=A^{\hat i}{}_{;\hat i}=A^{\hat i}{}_{,\hat i}+\Gamma^{\hat i}{}_{\hat j\hat i}A^{\hat j}$ 可用下述公式計算，

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial A^{\hat\phi}}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial(rA^{\hat r})}{\partial r}$$

（這是大多數讀者熟悉的公式）。

---

§10.5 短程線方程

短程線方程：抽象形式

短程線——自由下落粒子的參量化路徑——是本章的起點。從它們構造了平行移動（Schild 階梯，框 10.2），然後平行移動又產生協變微商及其聯絡係數。給定協變微商，我們重新獲得短程線：它們是其切向矢量 $\mathbf{u}=d\mathcal{P}/d\lambda$ 滿足 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0$ 的曲線（$\mathbf{u}$ 沿着自身作平行移動）。

給定坐標系 $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$。設它把基矢 $\mathbf{e}=\partial/\partial x^\alpha$ 引入在每一事件的切向空間。對於此「坐標基」給定聯絡係數 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$。則「短程線方程」$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0$ 的分量形式變爲對短程線 $x^\alpha(\lambda)$ 的微分方程

$$(1)\quad \mathbf{u}=\frac{d}{d\lambda}=\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Longrightarrow\mathbf{u}\text{ 的分量爲 }u^\alpha=\frac{dx^\alpha}{d\lambda};$$

(2) 於是 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0$ 的分量爲

$$0=u^{\alpha}{}_{;\beta}u^{\beta}=(u^{\alpha}{}_{,\beta}+\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}u^{\gamma})u^{\beta}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\right)\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}+\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\frac{dx^{\gamma}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda},$$

它化爲微分方程

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}+\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\frac{dx^{\gamma}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}=0。\qquad(10.27)$$

分量形式

如何由短程線知識構造平行移動定律

短程線方程的分量形式給出一種由短程線知識構造平行移動的分析方法 (Schild 階梯的「譯本」)。選擇一事件 $\mathcal{P}_0$ 並在其鄰域建立坐標系。注視着許多携帶時鐘的粒子通過 (或任意接近於) $\mathcal{P}_0$，對於每一質點讀出在 $\mathcal{P}_0$ 的 $d^2x^{\alpha}/d\lambda^2$ 值和 $dx^{\alpha}/d\lambda$ 值。將許多粒子的全部數據納入 (10.27) 式並求解聯絡係數。由此只有得出的 $\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$ 的對稱部分不受干擾；反對稱部分 $\Gamma^{\alpha}{}_{[\gamma\beta]}$在任意坐標系中恒爲零！(參看練習 10.9) 利用所知的 $\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$，可將任意所求矢量通過 $\mathcal{P}_0$ 沿任意所求曲線平行移動：

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}=0 \iff \frac{dv^{\alpha}}{d\lambda}+\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}v^{\gamma}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}=0。\qquad(10.28)$$

練習

練習 10.15　平行移動定律的分量

試證明 (10.28) 式是沿着切向矢量爲 $\mathbf{u}=d\mathcal{P}/d\lambda$ 的曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ 平行移動矢量 $\mathbf{v}$ 的定律的分量形式。

練習 10.16　極坐標下的短程線

在平直紙片上的直角坐標中，Euclid 直線 (短程線) 滿足 $d^2x/d\lambda^2=d^2y/d\lambda^2=0$。將此短程線方程變換到極坐標 ($x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$)；與 (10.27) 式相比較，讀出所得聯絡係數。這些是對於坐標基 $(\partial/\partial r,\partial/\partial\phi)$ 的聯絡係數。由它們計算對於基

$$\mathbf{e}_{\hat{r}}=\frac{\partial}{\partial r},\qquad \mathbf{e}_{\hat{\phi}}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}。$$

的聯絡係數。此答案應與練習 10.14(b) 的答案一致。提示：利用如下關係

$$\nabla_{\mathbf{e}_{\hat{\phi}}}\mathbf{e}_{\hat{r}}=\nabla_{(1/r)(\partial/\partial\phi)}(\partial/\partial r)=\frac{1}{r}\nabla_{(\partial/\partial\phi)}(\partial/\partial r)。$$

練習 10.17 轉動羣：短程線和聯絡係數

［練習 9.13 和 9.14 的繼續。］在討論轉動羣時，我們必須分清轉動矩陣在其中起作用的 Euclid 空間（坐標爲 x, y, z；基矢爲 $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$）以及其點 $\mathcal{P}$ 爲轉動矩陣的羣流形 $SO(3)$（坐標爲 ϕ, θ, ψ；坐標基爲 $\partial/\partial\phi, \partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi$；「生成元」的基爲 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$）。

(a) 在 Euclid 空間選取一矢量

$$\boldsymbol{n}=n^x\partial/\partial x+n^y\partial/\partial y+n^z\partial/\partial z。$$

試證明

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{n}}(t)\equiv\exp[(n^x\mathcal{X}_1+n^y\mathcal{X}_2+n^z\mathcal{X}_3)t] \tag{10.29}$$

是將 Euclid 空間的軸繞 $\boldsymbol{n}$ 方向轉過角度

$$t|\boldsymbol{n}|=t[(n^x)^2+(n^y)^2+(n^z)^2]^{1/2}$$

的轉動矩陣（$\mathcal{X}_j$ 是練習 9.13 中定義的矩陣）。

(b) 在羣流形 $SO(3)$ 中，選取一點（轉動矩陣）$\mathcal{P}$，並在 $\mathcal{P}$ 選取一切向矢量 $\boldsymbol{u}=u^\alpha\mathbf{e}_\alpha$。令 $\boldsymbol{u}$ 是 Euclid 空間中的矢量，它的分量與 $\boldsymbol{u}$ 在 $SO(3)$ 中所具有的分量相同：

$$\boldsymbol{u}=u^1\mathbf{e}_1+u^2\mathbf{e}_2+u^3\mathbf{e}_3;\qquad \boldsymbol{u}=u^1\partial/\partial x+u^2\partial/\partial y+u^3\partial/\partial z。 \tag{10.30}$$

試證明 $\boldsymbol{u}$ 是曲線

$$\mathcal{C}(t)=\mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}(t)\mathcal{P} \tag{10.31}$$

的切向矢量（在 $t=0$ 的）。

通過任意點 $\mathcal{P}$ 具有任意切向矢量 $\boldsymbol{u}=(d\mathcal{C}/dt)_{t=0}$ 的曲線 $\mathcal{C}(t)$ 是非常特殊的曲線：曲線上的每一點與 $\mathcal{P}$ 的不同在於繞同一方向 $\boldsymbol{u}$ 轉動了 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}(t)$。在具有「起始條件」$\{\mathcal{P}, \boldsymbol{u}\}$ 的 $SO(3)$ 中沒有其他的曲線具有這種優美的簡單性。所以，很自然地規定每條這樣的 $\mathcal{C}(t)$ 爲羣流形 $SO(3)$ 的短程線。這一規定在 $SO(3)$ 上加上了新的幾何結構；它將 $SO(3)$ 從微分流形變爲更特殊的東西：仿射流形。

我們不能保證在任意的流形中任意選擇曲線族都可規定爲短程線。大多數曲線族並不具備作爲短程線應有的正當幾何性質。它們還將導致違背一個或多個基本條件 (10.2) 的協變微商。爲了了解短程線的一種給定選擇是否可以接受，我們可嘗試導出相應於所選短程線的聯絡係數 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$（對於某些給定的基）。如果這種推導是成功的，則短程線的選擇是可以接受的一個。如果推導引起不自洽，則所選擇的曲線族作爲短程線具有不正確的幾何性質。

(c) 對於生成元的基 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$，試導出相應於 $SO(3)$ 中所選短程線 $\mathcal{C}(t)=\mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}(t)\mathcal{P}$ 的聯絡係數。提示：證明對於給定的短程線，切向矢量 $\boldsymbol{u}=d\mathcal{C}/dt$ 的分量 $u^\alpha=\langle\omega^\alpha,\boldsymbol{u}\rangle$ 與沿短程線的位置 $\mathcal{C}(t)$ 無關。然後用短程線方程 $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=0$, 按基 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 展開，計算聯絡的對稱部分 $\Gamma^\alpha{}_{(\beta\gamma)}$。最後用 (10.23) 式計算 $\Gamma^\alpha{}_{[\beta\gamma]}$。［答案：

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}, \tag{10.32}$$

式中 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 是完全反對稱記號 $\epsilon_{123}=+1$。此答案與 $SO(3)$ 中的位置 $\mathcal{P}$ 無關！］

第十一章　短程線偏離與空時曲率

§11.1　曲率壓軸戲

本章完全屬於高階。第九章和第十章是它的必要準備。

它作爲以下三方面的準備是必須的

(1)第十二和第十三章（Newton重力；Riemann幾何），

(2)第十四章（曲率的計算）後半部分，以及

(3)第十五章（Bianchi恒等式）的細節而非要旨。

本章概述

通過一條短程線對鄰近短程線的偏離（試驗質點的相對加速度），空時曲率表現爲引力。

設空時的短程線已知。於是協變微商 ∇ 和它的聯絡係數 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ 也已知。根據這些信息，我們如何定義、計算和理解短程線偏離和空時曲率呢？答案在本章逐漸闡明，並彙總於框11.1之中。爲了揭開答案，我們必須(1)定義「相對加速度矢量」$\nabla_u\nabla_u n$，它量度一條短程線對另一條短程線的偏離(§11.2)；(2)導出用∇或$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$表示的「Riemann 曲率張量」表達式，它產生短程線偏離（§11.3）；(3)看到 Riemann 曲率正在起作用，它使繞閉合回路平行移動的矢量產生變化(§11.4)；(4)看到 Riemann 曲率檢驗空時是否平直（§11.5）；以及(5)構成一特殊的坐標系，即「Riemann簡正坐標」，它以特殊的方式與 Riemann 曲率張量相聯繫(§11.6)。

§11.2　鄰近短程線的相對加速度

將注意力集中到一族短程線（圖11.1）。利用「選擇參量」n 的值把一條短程線與其他短程線相區別。此族不僅包含短程線 $n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$，而且也包含 n 的全部插入值的短程線。具有代表性的短程線上的代表點 $\mathcal{P}$ 是選擇參量 n

短程線族的幾何學

選擇參量

框 11.1 短程線偏離和 Riemann 曲率概要

「短程線間隔」 n 是從基準短程線上的點到由同一仿射參量值 λ 所表徵的鄰近短程線上的點的位移（切向矢量）。

短程線間隔相對於 λ 的變化率（即沿切向矢量 $u=d/d\lambda$ 的變化率）由**短程線偏離方程**

$$\nabla_u\nabla_u n+\mathbf{Riemann}(\ldots,u,n,u)=0$$

給出（二階方程；參見 §§1.6和1.7；圖1.10, 1.11, 1.12）。

用 Riemann 張量的分量可把驅動力（「潮汐引力」）表爲

$$\mathbf{Riemann}(\ldots,u,n,u)=e_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}u^\beta n^\gamma u^\delta。\quad(2)$$

Riemann曲率張量在坐標架中的分量可通過聯絡係數由下述公式給出，

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}=\frac{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}。\quad(3)$$

這個曲率張量不僅使「潮汐引力」的概念定量化，而且也列入「物質告訴空時如何彎曲」的 Einstein 定律。該定律在以後的章節中再研究，它在給定的坐標系中取下述運算形式：

(a)寫出度規系數 $g_{\mu\nu}$ 隨時間動力演變的嘗試公式。

(b)由下述公式計算聯絡係數

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}=g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\mu\nu};\quad(4)$$

$$\Gamma_{\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right)\quad(5)$$

（在第十三章導出）。

(c)由(3)式計算 Riemann 曲率張量。

(d)由下式計算 Einstein 曲率張量，

$$G_{\mu\nu}=R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\sigma\tau}R^\alpha{}_{\sigma\alpha\tau}\quad(6)$$

（幾何意義在第十五章討論）。

(e)代入 Einstein 方程「第十七章）：

$G_{\mu\nu}=0$（空的空間），

$G_{\mu\nu}=8\pi T_{\mu\nu}$（當存在質量-能量時）。

(f) 檢驗幾何動力演變的嘗試公式是否正確，如果不正確，修改使之正確。

仿射參量 和仿射參量 λ 的連續的雙重可微的函數，即

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}(\lambda,n)。\quad(11.1)$$

切向矢量 切向矢量

$$u=\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\lambda}\ (\text{Cartan 符號})$$

或

$$u=\frac{\partial}{\partial\lambda}\ (\text{本書符號})\quad(11.2)$$

在下述含義下沿任意給定短程線爲常數，即在任意點的矢量 u，沿着短程線平

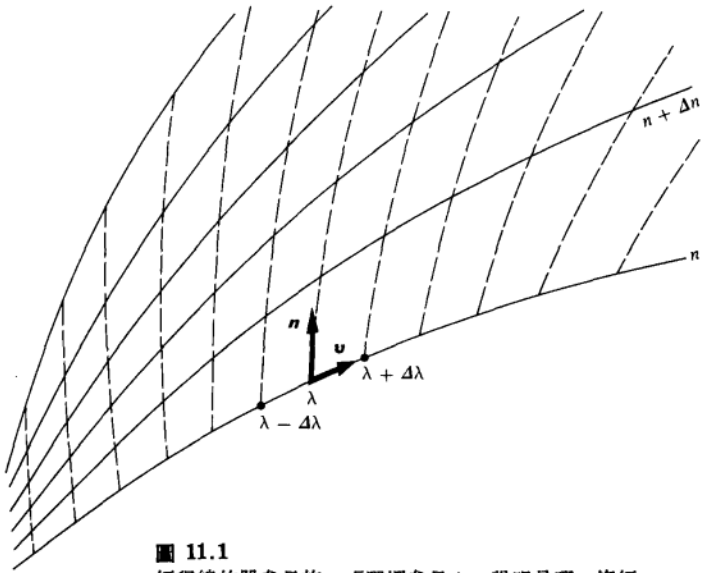


圖 11.1
短程線的單參量族。「選擇參量」n 說明是哪一條短程線。仿射參量 λ 說明在給定短程線上何處。圖中表示的兩個切向矢量是 $\boldsymbol{\upsilon}=\partial/\partial\lambda$ (Cartan: $\partial\mathscr{P}/\partial\lambda$) 和 $\mathbf{n}=\partial/\partial n$ (Cartan: $\partial\mathscr{P}/\partial n$)。

行於自身移動到達第二點時，若與已在該點的 $\boldsymbol{\upsilon}$ 的方向、長度均一致，則切向矢量沿此短程線爲常數。

「間隔矢量」　　**間隔矢量**

$$\mathbf{n}=\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial n}\ (\text{Cartan符號})$$

或

$$\mathbf{n}=\frac{\partial}{\partial n}\ (\text{本書符號}) \qquad (11.3)$$

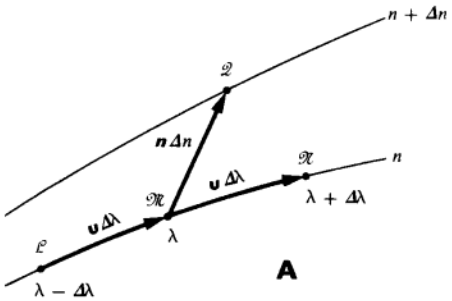
量度了作爲基準短程線的短程線 n 和典型的鄰近短程線 $n+\Delta n$ （對於很小的 Δn）之間的間隔，在這個意義下，

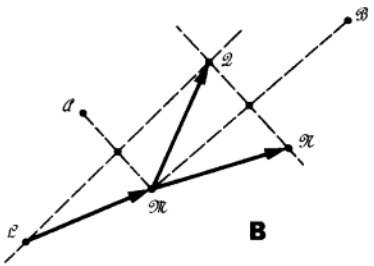
$$(\Delta n)\mathbf{n}=\left\{\begin{matrix}\Delta n\dfrac{\partial\mathscr{P}}{\partial n}\\ \Delta n\dfrac{\partial}{\partial n}\end{matrix}\right\}\text{量度了}\left\{\begin{matrix}\text{位}\quad\text{置}\\ \\ \text{任意函數}\end{matrix}\right\}\text{的變化。} \qquad (11.4)$$

它是在仿射參量 λ 爲固定值處，由於注意力從一短程線轉移到另一短程線而造成的。這一矢量在框 11.2 的第一圖中用箭頭 $\mathscr{Q}$ 表示。 (接第270頁)

框 11.2 短程線偏離表爲箭頭

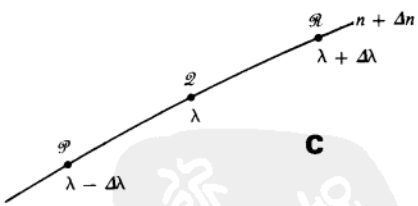
「基準短程線」n。間隔矢量 $n\Delta n = \mathscr{P}\mathscr{Q}$ 從其上的點$\mathscr{P}$引到鄰近的「試驗短程線」$n+\Delta n$上且具有相同仿射參量值λ（類時量）的點$\mathscr{Q}$。

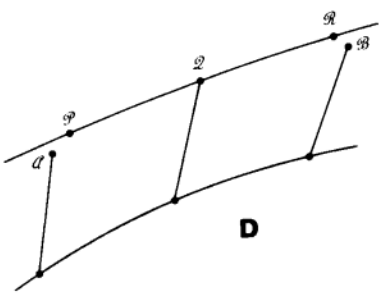




$\mathscr{P}\mathscr{Q}$通過「Schild 階梯結構」（框 10.2）平行移動到 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{L}\mathscr{A}$。如果試驗短程線 $n+\Delta n$ 與基準短程線 n 保持等間隔，則其示踪點當仿射參量值爲$(\lambda-\Delta\lambda)$時達 $\mathscr{A}$，當值爲$(\lambda+\Delta\lambda)$時達 $\mathscr{B}$。

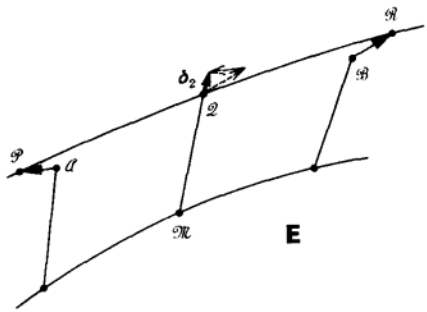
當類時仿射參量值爲$(\lambda-\Delta\lambda)$，λ 和 $(\lambda+\Delta\lambda)$時，試驗短程線示踪點的實際位置。

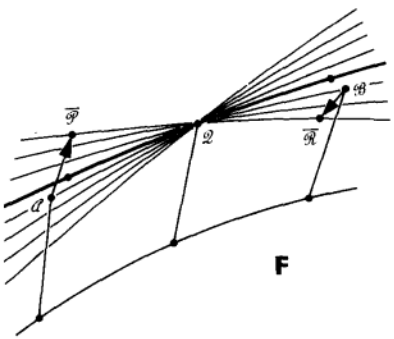




試驗短程線上示踪點的實際路線與「正則路線」之間的比較；所取的路線應與沿基準短程線移動的示踪點保持恒定間隔。

除了仿射參量標度上的均勻延伸之外，試驗短程線仍與以前的相同。對於短程線實際路線從正則路線($\mathcal{A}2\mathcal{B}$)偏離的任何量度是有用的，且應與這一延伸無關。所以，作爲短程線偏離的量度，既不是單獨取矢量$\mathcal{BR}$，也不是取矢量$\mathcal{AP}$，而是與延伸無關的組合 $\boldsymbol{\delta}_2=(\mathcal{BR})+(\mathcal{AP})$。其中加號意味着在相加前將這兩個矢量平行自身移動到共同點（圖中的 2點；$\mathfrak{M}$ 在微分計算中的極限爲 $\Delta n\longrightarrow 0$, $\Delta\lambda\longrightarrow 0$）。





通過 2可取$\boldsymbol{D}$ 的試驗短程線的其他路線（來自左邊的不同發散程度或指向右邊的不同會聚程度的短程線族）。仰角改變了各個$\mathcal{AP}$（至$\mathcal{A}\bar{\mathcal{P}}$）和$\mathcal{BR}$（至$\mathcal{B}\bar{\mathcal{R}}$）的值，但不改變總和 $\boldsymbol{\delta}_2=(\mathcal{BR})+(\mathcal{AP})$（「槓桿原理」）。

注意箭頭$\mathcal{BR}$爲 $\Delta\lambda$ 的一階和 Δn 的一階；$\mathcal{AP}$ 也如此；所以，組合 $\boldsymbol{\delta}_2$爲$\Delta\lambda$ 的二階和 Δn的一階。由此得出，在下述意義下箭頭 $\boldsymbol{\delta}_2/(\Delta\lambda)^2(\Delta n)$ 是所要求的短程線偏離的量度？

略去網格的大小（最終趨於零）；
略去試驗短程線的參量化；
略去試驗短程線的傾斜。

把這一箭頭叫做「相對加速度矢量」，通過更嚴密的考察（框11.3），發現對於它有公式

$$\boldsymbol{\delta}_2/(\Delta\lambda)^2(\Delta n)=\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}。$$

框11.2說明所謂短程線偏離意味着什麼。沿着基準短程線平行於自身移動的間隔爲 $n\Delta n=\mathscr{R}\mathscr{Q}$ 。如果這一矢量相對於基準示踪點保持恒定間隔，則其頂端描出的是鄰近示踪點必須追踪的正則路線。試驗短程線的實際路線偏離「正則」路線。這個偏離是矢量（框11.2中的 $\mathscr{A}\mathscr{P}$），它隨仿射參量（在$\mathscr{A}$點爲 $\mathscr{A}\mathscr{P}$，在$\mathscr{Q}$點爲零，在$\mathscr{B}$點爲 $\mathscr{B}\mathscr{R}$）變化。這一矢量相對於仿射參量的一階微商對於沿試驗短程線參量化的尺度以及對於其斜率是靈敏的（框 11.2, **F**）。二階微商則不同，它只依賴於基準短程線的切向矢量 $\mathbf{u}$，和間隔矢量 $\mathbf{n}\Delta n$，將偏離的二階微商除以 Δn 並命名爲「*相對加速度矢量*」。關於它的一個簡單公式爲（框11.3）

相對加速度矢量

$$(\text{相對加速度矢量})=\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}。\tag{11.5}$$

§11.3 潮汐引力與Riemann曲率張量

從現在定義的「相對加速度」，轉向產生它的「潮汐引力」（即「空時曲率」）。利用潮汐力的 Newton 分析法（框 11.4 的左半部）推動幾何的分析

框 11.3 短程線偏離：有關二階協變微商的箭頭

框11.2 中箭頭 $\boldsymbol{\delta}_2$ 所量度的不是試驗短程線 $n+\Delta n$ 與作爲基線的「正則路線」$\mathscr{A}\mathscr{Q}\mathscr{B}$的間隔的變化率，而是二階微商

$$(\lambda+\frac{1}{2}\Delta\lambda\text{ 的一階導數})=\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}=\frac{\mathscr{R}\mathscr{R}-\mathscr{R}\mathscr{B}}{\Delta\lambda\,\Delta n}=\frac{\mathscr{B}\mathscr{R}}{\Delta\lambda\,\Delta n};$$

$$(\lambda-\frac{1}{2}\Delta\lambda\text{ 的一階導數})=\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}=\frac{\mathscr{L}\mathscr{A}-\mathscr{L}\mathscr{P}}{\Delta\lambda\,\Delta n}=\frac{-\mathscr{A}\mathscr{P}}{\Delta\lambda\,\Delta n}。$$

移到共同的位置λ，取差值並除以$\Delta\lambda$，即得相對於矢量$\mathbf{u}$的二階協變微商；因此

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}=\frac{(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n})_{\lambda+\frac{1}{2}\Delta\lambda}-(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n})_{\lambda-\frac{1}{2}\Delta\lambda}}{\Delta\lambda}$$

$$=\frac{(\mathscr{B}\mathscr{R}+\mathscr{A}\mathscr{P})_{\text{矢量移到共同位置}}}{(\Delta\lambda)^2\Delta n}=\frac{\boldsymbol{\delta}_2}{(\Delta\lambda)^2\Delta n}$$

$$=\text{鄰近短程線的「相對加速度矢量」。}$$

法（框11.4的右半部）。從而得出值得注意的方程

$$\underbrace{\nabla_u\nabla_u n}_{\text{「相對加速度」}} + \underbrace{[\nabla_n,\nabla_u]u}_{\text{「產生潮汐的引力」}} = 0。 \qquad (11.6)$$

用對易算符表示產生潮汐的引力

這個方程是值得注意的，因爲乍看起來它有些古怪。$[\nabla_n,\nabla_u]u$ 項包含了 u 的二階微商和 ∇_n 的一階微商：

$$[\nabla_n,\nabla_u]u \equiv \nabla_n\nabla_u u - \nabla_u\nabla_n u。 \qquad (11.7)$$

因此它必定依賴於u和n如何逐點變化。但是已知它所產生的相對加速度$\nabla_u\nabla_u n$只依賴於在基準點處u和n的值 ， 而與u和n如何變化無關（參看框 11.2, F）。這怎麼可能呢？

全部微商必定由於某種原因從潮汐力的量 $[\nabla_n,\nabla_u]u$ 中隱退了。我們必定可將 $[\nabla_{\ldots},\nabla_{\ldots}]\ldots$看作具有三個空位的純局域的代數機器，它的輸出是一矢量。如果它是純局域的和不可微的，甚至是線性的（正如由∇的可加性看到的那樣），則它必定是一個張量。將此張量命名爲 ***Riemann*** ，並爲輸入 1 形式而給它第四個空位：

$$\begin{aligned} &\textit{Riemann}\,(\ldots,\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}) \equiv [\nabla_A,\nabla_B]\mathbf{C}; \\ &\textit{Riemann}\,(\sigma,\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}) \equiv \langle\sigma,[\nabla_A,,\nabla_B]\mathbf{C}\rangle。 \end{aligned} \qquad (11.8)$$

這只是 ***Riemann*** 的嘗試性定義。採納它之前必須證明它的確是一個張量。它是否確實只依賴於在所計算點處 A, B, C 的值，而與它們在該處如何變化無關嗎？答案（在框11.5中導出）是「幾乎如此」。它使試驗失敗了，但稍加修正即能通過。修正是用「曲率算符」，

定義曲率算符

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\mathbf{B}) \equiv [\nabla_A,\nabla_B] - \nabla_{[A,B]}$$

代替對易算符 $[\nabla_A,\nabla_B]$，式中$\nabla_{[A,B]}$爲沿矢量$[A,B]$（A和B的對易算符）的微商。（對於短程線偏離問題的場 $A=n$ 和 $B=u$ ，因爲 $[n,u]=0$，故 $\mathcal{R}(A,B)\equiv[\nabla_A,\nabla_B]$。）於是，修正的可接受的 Riemann 曲率張量的定義爲

定義Riemann曲率張量

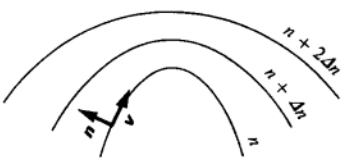
$$\begin{aligned} &\textit{Riemann}\,(\ldots,\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}) \equiv \mathcal{R}(\mathbf{A},\mathbf{B})\mathbf{C}; \\ &\textit{Riemann}\,(\sigma,\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}) \equiv \langle\sigma,\mathcal{R}(\mathbf{A},\mathbf{B})\mathbf{C}\rangle。 \end{aligned} \qquad (11.9)$$

總之，這樣定義的 ***Riemann*** 以及它的張量性質的證明（練習11.2），並未以任何方式告訴我們各處的曲率是什麼。爲了理解曲率，我們必須以各種觀點仔細考查 ***Riemann***。這是本章其餘部分的任務。 （接第275頁）

框 11.4 試驗粒子的相對加速度——仿照 Newton 分析法的幾何分析法

Newton 分析法

1. 在通常的三維空間中，研究一族試驗粒子的軌跡 $x^i(t,n)$:「t」是用粒子的鐘或任何鐘量度的時間；「n」是「選擇參量」。(selector parameter)



2. 每一條軌跡的運動方程爲

$$\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}\right)_n+\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}=0,$$

式中 Φ 是 Newton 勢。

3. 對於鄰近的軌跡 n 和 $n+\Delta n$，取運動方程之差，並取 $\Delta n\longrightarrow 0$ 的極限，卽取微商

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_t\left[\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}\right)_n+\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\right]=0。$$

4. 當 $\partial/\partial n$ 作用於第二項時，把它改寫爲

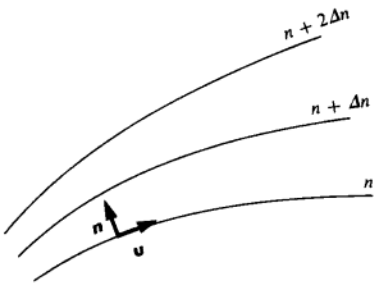
$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_t=\left(\frac{\partial x^k}{\partial n}\right)_t\frac{\partial}{\partial x^k}=n^k\frac{\partial}{\partial x^k};$$

因此得出

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_n\left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_n+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^k}n^k=0。$$

幾何分析法

1. 在空時中，研究一族試驗粒子的軌跡（短程線）$\mathcal{P}(\lambda,n)$:「λ」是仿射參量，卽用粒子的鐘量度的時間；「n」是「選擇參量」。



2. 每一條軌跡的運動方程爲

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=0。$$

[看起來像一階方程，其實是二階方程，因爲被微分的「$\boldsymbol{u}$」本身是一個微商 $\boldsymbol{u}=(\partial\mathcal{P}/\partial\lambda)_n$。]

3. 對鄰近短程線 n 和 $n+\Delta n$，取短程線方程之差，並取 $\Delta n\longrightarrow 0$ 的極限，卽取協變微商

$$\nabla_{\boldsymbol{n}}[\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}]=0。$$

4. 不存在第二項，所以方程的形式爲

$$\nabla_{\boldsymbol{n}}[\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}]=0。$$

5.爲了得出相對加速度的方程，將 $(\partial/\partial n)_t$ 移過兩個 $(\partial/\partial t)_n$ 項（因爲偏微商可對易，這是許可的）：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_n\left(\frac{\partial x^j}{\partial n}\right)_t+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}n^k=0。$$

它等價於

$$\left(\frac{\partial^2 n^j}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}n^k=0。$$

[「相對加速度」]　[「產生潮汐的引力」]

5.爲了得出相對加速度 $\nabla_u\nabla_u n$ 的方程，將 ∇_n 移過 ∇_u 和 $u=\partial\mathscr{P}/\partial\lambda$ 的 $\partial/\partial\lambda$:

a. 第一步：$\nabla_n\nabla_u u=0$ 中，將∇_n移過∇_u。結果爲：

$$(\nabla_u\nabla_n+[\underbrace{\nabla_n,\nabla_u}])u=0。$$

對易算符；必須包含它，以防 $\nabla_u\nabla_n\neq\nabla_n\nabla_u$ 的可能性。

b. 第二步：將∇_n移過 $u=\partial\mathscr{P}/\partial\lambda$的 $\partial/\partial\lambda$, 即寫爲

$$\nabla_n\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\lambda}=\nabla_n u=\nabla_u n=\nabla_u\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial n}$$

[u的定義]　[n的定義]

爲什麼？因爲協變微商的對稱性說明 $\nabla_n u-\nabla_u n=[n,u]$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial n},\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]=\frac{\partial^2}{\partial n\partial\lambda}-\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial n}=0。$$

c. 結果爲：

$$\nabla_u\nabla_u n+[\nabla_n,\nabla_u]u=0$$

「相對加速度」　「產生潮汐的引力」即「空時曲率」

框 11.5　Riemann 曲率張量

A. 由潮汐引力誘導出的 Riemann 的定義

1.潮汐力（空時曲率）產生試驗粒子（短程線）的相對加速度，可表爲

$$\nabla_u\nabla_u n+[\nabla_n,\nabla_u]u=0。\qquad(1)$$

2. 這引起定義

$$\textbf{Riemann}\,(\ldots,\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B})=[\nabla_{\mathbf{A}},\nabla_{\mathbf{B}}]\mathbf{C}\,。\qquad(2)$$

↑[爲插入一個 1 形式而空著的空位]

B. 這個定義的不足

1. 只有當 ***Riemann*** $(\ldots,\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B})$ 是線性機器，與 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ 如何逐點變化無關時，這個定義才可接受。
2. 部分的檢驗是：在事件 $\mathcal{P}_0$ 處，$\mathbf{C}$的變分改變了而$\mathbf{C}$本身不改變。

$$\mathbf{C}_{新}(\mathcal{P})=f(\mathcal{P})\mathbf{C}_{老}(\mathcal{P})\,。$$

↑[除$f(\mathcal{P}_0)=1$外的任意函數]

3. 這是否改變 $[\nabla_{\mathbf{A}},\nabla_{\mathbf{B}}]\mathbf{C}$ 呢？是的！練習11.1表明

$$\{[\nabla_{\mathbf{A}},\nabla_{\mathbf{B}}]\mathbf{C}_{新}\}_{在\mathcal{P}_0}-\{[\nabla_{\mathbf{A}},\nabla_{\mathbf{B}}]\mathbf{C}_{老}\}_{在\mathcal{P}_0}=\mathbf{C}_{老}\nabla_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}f\,。$$

C. 修正的 Riemann 定義

1. 引起麻煩的項是 $\mathbf{C}_{老}\nabla_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}f$，可從 ***Riemann*** 中減去一與它類似的「修正項」以消除它，即重新定義

$$\textbf{Riemann}\,(\ldots,\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B})\equiv\mathcal{R}(\mathbf{A},\mathbf{B})\mathbf{C}\,,\qquad(3)$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\mathbf{B})\equiv[\nabla_{\mathbf{A}},\nabla_{\mathbf{B}}]-\nabla_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}\,。\qquad(4)$$

2. 於是上述計算給出的結果與「修正函數」f 無關：

$$\{\mathcal{R}(\mathbf{A},\mathbf{B})\mathbf{C}_{新}\}_{在\mathcal{P}_0}=\{\mathcal{R}(\mathbf{A},\mathbf{B})\mathbf{C}_{老}\}_{在\mathcal{P}_0}\,。$$

D. 修正後的定義是否與潮汐引力方程相容？

1. 我們希望寫成 $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}+\textbf{Riemann}\,(\ldots,\mathbf{u},\mathbf{n},\mathbf{u})=0$。
2. 這對修正的 ***Riemann*** 定義的作用與對原來的定義的作用完全一樣，因爲

$$\mathscr{R}(\mathbf{n},\mathbf{u})=[\nabla_{\mathbf{n}},\nabla_{\mathbf{u}}]-\nabla_{[\mathbf{n},\mathbf{u}]}=[\nabla_{\mathbf{n}},\nabla_{\mathbf{u}}]\circ$$

$$\uparrow$$

$$[=0,\ \text{因爲}\ \mathbf{n}=(\partial/\partial n)_{\lambda}\ \text{與}\ \mathbf{u}=(\partial/\partial\lambda)_{n}\ \text{可對易}]$$

短程線偏離和潮汐力不能說明 $\mathscr{R}(\mathbf{n},\mathbf{u})$ 和 $[\nabla_{\mathbf{n}},\nabla_{\mathbf{u}}]$ 之間的區別，從而也就不能說明 ***Riemann*** 的老定義和新定義之間的區別。

E. 修正後的定義是否可接受？

即 ***Riemann*** $(\ldots,\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B})\equiv\mathscr{R}(\mathbf{A},\mathbf{B})\mathbf{C}$ 是不是這樣一個線性機器，它的輸出與在所計算的點鄰近 **A**, **B**, **C** 如何變化無關？是的！（參看練習11.2.）

首先，估量一下我們對 ***Riemann*** 曲率張量已經知道了什麼。(1) ***Riemann*** 是一個張量；盡管在它的定義(11.9)式中出現了∇，但實際上沒有微商作用在輸入矢量 **A**, **B** 和 **C** 上。(2) ***Riemann*** 是一個 $(\frac{1}{3})$ 秩張量；其第一空位接受1形式；其他空位接受矢量。(3) ***Riemann*** 完全由∇確定，或等價地由空時的短程線確定，或等價地由空時的平行移動定律確定；爲了確定 ***Riemann*** 的輸出，只需要∇，並輸入矢量和1形式。(4) ***Riemann*** 產生潮汐引力，它使短程線（試驗粒子軌迹）分離或把它們推到一起；也就是說它表徵「空時的曲率」：

用Riemann表示產生潮汐的引力

$$\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}+\textbf{\textit{Riemann}}\,(\ldots,\mathbf{u},\mathbf{n},\mathbf{u})=0\circ \qquad (11.10)$$

（這個「短程線偏離方程」可由 11.6, 11.8 和 11.9 式以及關係式 $[\mathbf{n},\mathbf{u}]=0$ 得到。）

Riemann 的所有這些方面都是圖示的（例如短程線偏離，參見框 11.2 和 11.3）或抽象的（例如用∇表示 ***Riemann*** 的 11.8和11.9式）。***Riemann*** 的分量方面

用聯絡係數表示Riemann的分量

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\equiv\textbf{\textit{Riemann}}(\omega^{\alpha},\mathbf{e}_{\beta},\mathbf{e}_{\gamma},\mathbf{e}_{\delta})\equiv\langle\omega^{\alpha},\mathscr{R}(\mathbf{e}_{\gamma},\mathbf{e}_{\delta})\mathbf{e}_{\beta}\rangle\,, \qquad (11.11)$$

通過下述方程與∇的分量方面相聯繫，在任何坐標基$\{\mathbf{e}_{\alpha}\}=\{\partial/\partial x^{\alpha}\}$中都成立：

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}\circ \qquad (11.12)$$

（推導見練習11.3，擴展到非坐標基見練習11.4）這些 ***Riemann*** 的分量無論哪裏都不帶任何微商符號，比起帶有不可微微商的定義(11.8)式給人們留下了好感！

練習

練習 11.1 $[\nabla_A,\nabla_B]C$ 取決於C的微商

（以框11.5爲根據。）令C新和C老爲以下式相聯繫的矢量場

$$C_{新}(\mathcal{P})=f(\mathcal{P})C_{老}(\mathcal{P})。$$

f：[任意函數，除去 $f(\mathcal{P}_0)=1$]

試證明

$$\{[\nabla_A,\nabla_B]C_{新}\}在\mathcal{P}_0-\{[\nabla_A,\nabla_B]C_{老}\}在\mathcal{P}_0=C_{老}\nabla_{[A,B]}f 。$$

練習 11.2 證明 *Riemann* 爲張量

由其定義 (11.8, 11.9) 證明 *Reimann* 是一個張量。［提示：採用下述步驟。

(a) 如果 $f(\mathcal{P})$ 是一個任意函數，證明

$$\mathcal{R}(A,B)fC=f\mathcal{R}(A,B)C。$$

(b) 類似地證明

$$\mathcal{R}(fA,B)C=f\mathcal{R}(A,B)C \quad 和 \quad \mathcal{R}(A,fB)C=f\mathcal{R}(A,B)C。$$

(c) 證明 $\mathcal{R}(A,B)C$ 是線性的；即

$$\mathcal{R}(A+a,B)C=\mathcal{R}(A,B)C+\mathcal{R}(a,B)C;$$
$$\mathcal{R}(A,B+b)C=\mathcal{R}(A,B)C+\mathcal{R}(A,b)C;$$
$$\mathcal{R}(A,B)(C+c)=\mathcal{R}(A,B)C+\mathcal{R}(A,B)c。$$

(d) 現在利用上述性質證明 $\mathcal{R}(A,B)\,C$ 的最關鍵的特徵：以任意方式修改 A,B 和 C 的變分（梯度）但保持 A,B,C 在 $\mathcal{P}_0$ 不變：

$$\left.\begin{aligned} A&\longrightarrow A+a^\alpha e_\alpha \\ B&\longrightarrow B+b^\alpha e_\alpha \\ C&\longrightarrow C+c^\alpha e_\alpha \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} a^\alpha(\mathcal{P}),\ b^\alpha(\mathcal{P}),\ c^\alpha(\mathcal{P}) \text{ 任意，只是在} \\ \mathcal{P}=\mathcal{P}_0 \text{ 它們均爲零} \end{array}$$

證明這一修改保持 $\mathcal{R}(A,B,)C$ 在 $\mathcal{P}_0$ 不變。

(e) 根據這些事實得出 *Riemann* 是一個張量。］

練習 11.3 *Riemann* 在坐標基中的分量

導出 *Riemann* 張量在坐標基中的分量的(11.12)式。

［解答：

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}&=\textit{Riemann}(\omega^\alpha,e_\beta,e_\gamma,e_\delta) && \left[\begin{array}{l}\text{計算分量的}\\ \text{標準方法}\end{array}\right] \\ &=\langle\omega^\alpha,\mathcal{R}(e_\gamma,e_\delta)e_\beta\rangle && [\text{由定義式(11.9)}] \\ &=\langle\omega^\alpha,(\nabla_\gamma\nabla_\delta-\nabla_\delta\nabla_\gamma)e_\beta\rangle && \left[\begin{array}{l}\text{由定義式(11.8)加上在}\\ \text{坐標基中 } [e_\gamma,e_\delta]=0\end{array}\right] \\ &=\langle\omega^\alpha,e_\mu\Gamma^\mu{}_{\beta\delta,\gamma}+(e_\nu\Gamma^\nu{}_{\mu\gamma})\Gamma^\mu{}_{\beta\delta}-e_\mu\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma,\delta}-(e_\nu\Gamma^\nu{}_{\mu\delta})\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}\rangle \\ &=(\Gamma^\mu{}_{\beta\delta,\gamma}-\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma,\delta})\langle\omega^\alpha,e_\mu\rangle+(\Gamma^\nu{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta}-\Gamma^\nu{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma})\langle\omega^\alpha,e_\nu\rangle。 \end{aligned}$$

它（利用 $\langle\omega^\alpha,e_\mu\rangle=\delta^\alpha{}_\mu$）化爲(11.12)式。］

練習 11.4　Riemann 在非坐標基中的分量

在具有(9.22)式所定義的替換係數的非坐標基中，導出 **Riemann** 分量的下述方程

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta,\gamma}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\delta}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}C_{\gamma\delta}{}^{\mu}。\tag{11.13}$$

§11.4　繞閉合曲線的平行移動

由於繞閉合曲線平行移動引起的矢量變化

與短程線偏離有關

空時曲率的效應是什麼？我們怎樣才能使之定量化？一種效應是由(11.10)式定量表示的短程線偏離（試驗物體的相對加速度）。另一種差不多同樣重要的效應是繞閉合曲線平行移動所引起的矢量變化。這一效應在同一問題，即在前者引起曲率的短程線偏離中表現得十分明顯。相對加速度矢量 $\nabla_{u}\nabla_{u}n$ 也是繞著以矢量 n 和 u 爲邊的曲線平行移動所引起的矢量 u 的變化 δu：

$$\nabla_{u}\nabla_{u}n=\delta u。$$

（證明見框11.6。）所以，在這種特殊情況，我們可以寫出

$$\delta u+\textbf{Riemann}\,(\ldots,u,n,u)=0。$$

顯而易見，可以指望的推廣是：選取以 $u\Delta a$ 和 $v\Delta b$ 爲邊的閉合四邊形（圖11.2；Δa 和 Δb 是小參量，在討論結束時趨於零）。繞著這一四邊形平行移動矢量 A，A 的總變化應滿足方程

$$\delta A+\textbf{Riemann}\,(\ldots,A,u\Delta a,v\Delta b)=0;\tag{11.14}$$

變化方程

或等價於

$$\delta A+\Delta a\Delta b\mathcal{R}(u,v)A=0;\tag{11.14'}$$

或更精確地爲

$$\lim_{\substack{\Delta a\to 0\\ \Delta b\to 0}}\left(\frac{\delta A}{\Delta a\Delta b}\right)+\textbf{Riemann}\,(\ldots,A,u,v)=0。\tag{11.14''}$$

這個證明是有啓發性的，因爲它顯示出曲率算符中修正項 $\nabla_{[u,v]}$ 的幾何緣由。

變化方程的偏離

移動的回路（圖11.2）是由兩個任意矢量場 $u\Delta a$ 和 $v\Delta b$ 構成的。然而由於簡單的理由，僅由這些場構成的回路中存在間隙。u 的大小處處改變着錯路。在四邊形底部從 v 的一條場線穿達 v 的另一條場線的位移 $u\Delta a$ 不可能聯

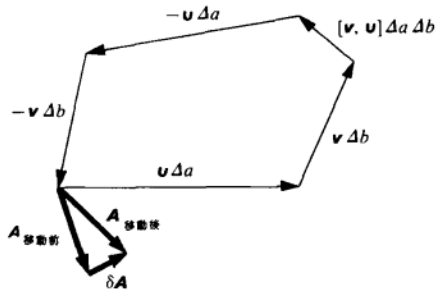


圖 11.2
矢量 A 的變化 δA 是沿閉合曲線平行移動的結果。曲線各邊是矢量場 $u\Delta a$ 和 $v\Delta b$ 再加上「四邊形的閉合邊」 $[v\Delta b, u\Delta a] = [v,u]\Delta a\Delta b$ (參見框9.2)。

接四邊形的頂部。同樣 v 場線亦處處改變着錯路去聯接 u 場線。爲了閉合間隙完成回路，須插入「四邊形閉合邊」 $[v\Delta b, u\Delta a] = [v,u]\,\Delta a\Delta b$。(這一矢量爲何能閉合間隙可參見框9.2。)

採用現在規定的路線，矢量 A 是繞著它移動的。這樣做的一種方法，即一再應用Schild階梯方法的「幾何結構」，是設計一個可能實驗的基礎。爲了設計一種抽象的無坐標的計算(根據現時實行的方法)，引入「基準場」，僅在計算的最後脫離它。*方案*：設想 A 不是在起步處單獨定義的局域矢量，而是一個矢量場(在整個路徑上定義的)。*目的*：提供一個參考的標準(把從原點移動的 A 與所述位置的 A 作比較)。*原理*：參考的標準最後抵消。*步驟*：

$$-\delta A = -\left(\begin{array}{l}\text{取原來位於回路起點的矢量 } A \text{ 以及將它繞閉合回路平行自身移}\\ \text{動的 } A \text{ (「運動的 } A \text{」) 之間的淨變化。由於沿此路徑沒有預}\\ \text{先存在的參考標準，這個量在回路結束之前是無法計算的。}\end{array}\right)$$

$$= +\left(\begin{array}{l}\text{一個量遵從對回路的每條邊所作的逐個分析。這個新的量的定}\\ \text{義是通過在整個全區域引入一個矢量場 } A^{(\text{場})}\text{，它是光滑變化}\\ \text{的，在起點與原先定位的 } A \text{ 相一致，但在別處可任意。因此這}\\ \text{個新的量等於起點處的 } A^{(\text{場})} \text{ (與起點處的 } A^{(\text{定位})} \text{ 相同) 減去}\\ \text{終點處的 } A^{(\text{運動})} \text{ (移動之後)。}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{\substack{\text{回路}\\ \text{各邊}}}\left(\begin{array}{l}\text{在沿指定邊的移動過程中 } A^{(\text{場})} \text{ 相對於 } A^{(\text{運動})} \text{ 的變化。任意}\\ \text{一條邊的值取決於 } A^{(\text{場})} \text{ 的任意選擇，但是由於回路的閉合，}\\ \text{這一任意性終將消去。}\end{array}\right)$$

$$
= \left\{ \begin{array}{l} \text{作爲參考標準的 } \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \text{ 相對於平行移動的 } \boldsymbol{A}^{(\text{運動})} \text{ 的變化是由} \\ \text{沿著圖11.2中下述邊的貢獻組成的：} \\ \quad \boldsymbol{v}\Delta b, \text{ 給出} \nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}^{(\text{場})}\ \Delta b \text{ (在由起點移動 } \boldsymbol{u}\Delta a \text{ 的線上)} \\ -\boldsymbol{v}\Delta b, \text{ 給出} -\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}^{(\text{場})}\ \Delta b \text{ (在通過起點的線上)} \\ -\boldsymbol{u}\Delta a, \text{ 給出} -\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A}^{(\text{場})}\ \Delta a \text{ (由起點移動 } \boldsymbol{v}\Delta b \text{ 的線上)} \\ +\boldsymbol{u}\Delta a, \text{ 給出} \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A}^{(\text{場})}\ \Delta a \text{ (在通過起點的線上)} \\ +[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]\Delta a\Delta b, \text{ 給出} \nabla_{[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]}\boldsymbol{A}^{(\text{場})}\ \Delta a\Delta b \end{array} \right.
$$

$$
= \{\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}} - \nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}} + \nabla_{[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]}\}\boldsymbol{A}^{(\text{場})}\ \Delta a\Delta b
$$

$$
= \textbf{Riemann}\ (\ldots, \boldsymbol{A}^{(\text{場})}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\Delta a\Delta b = \mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{A}^{(\text{場})}\ \Delta a\Delta b\text{。} \quad (11.15)
$$

淨得：曲率算符

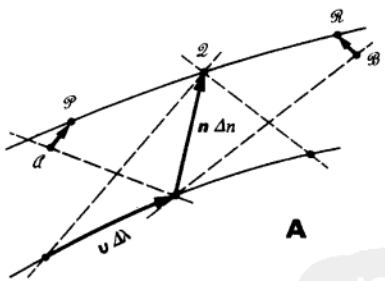
$$
\textbf{Riemann}\ (\ldots,\ldots,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = [\nabla_{\boldsymbol{u}}, \nabla_{\boldsymbol{v}}] - \nabla_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]},
$$

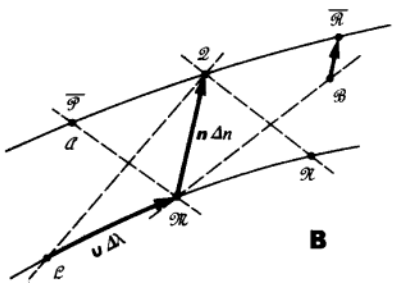
框 11.6　短程線偏離與沿閉合曲線的平行移動：同一結構的兩個方面

短程線偏離

$$
\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n} = \operatorname*{Lim}_{\substack{\Delta\lambda\to 0 \\ \Delta n\to 0}} \left\{ \frac{\mathcal{A}\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{R}}{(\Delta\lambda)^2 \Delta n} \right\}\text{。}
$$

（參見框11.2和11.3）





短程線偏離

相同結果；不同結構。爲了簡化與閉合曲線有關的移動，在 **A** 中，改變短程線 $\mathcal{P}2\mathcal{R}$ 的傾斜度，擴大短程線 $\mathcal{P}2\mathcal{R}$ 的參量。結果如在 **B** 中：其中 $\overline{\mathcal{P}}$ 與 $\mathcal{A}$ 重合。由框11.2的**F** 可知 $\mathcal{A}\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{R} = \mathcal{A}\overline{\mathcal{P}} + \mathcal{B}\overline{\mathcal{R}}$，即這族短程線的 $\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}$ 與原先的族相同

$$\nabla_u\nabla_u n=\lim_{\substack{\Delta\lambda\to 0\\ \Delta n\to 0}}\left\{\frac{\mathcal{B}\bar{\mathcal{R}}}{(\Delta\lambda)^2\Delta n}\right\}。$$

又，爲了簡化討論取 $\Delta n=\Delta\lambda=1$，假設 n 和 u 足夠小，以致不取極限卽可計算$\nabla_u\nabla_u n$:

$$\nabla_u\nabla_u n=\mathcal{B}\bar{\mathcal{R}}。$$

用相同的結構完成沿閉合曲線的平行移動

方案：沿曲線 $\mathcal{Q}\longrightarrow\bar{\mathcal{P}}\longrightarrow\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{R}\longrightarrow\mathcal{Q}$ 逆時針平行移動矢量 $u\Delta\lambda=\mathcal{Q}\bar{\mathcal{R}}$。執行：(1)命名移動矢量爲 $u^{(m)}$（「m」意爲「運動的」）。(2)在 $\mathcal{Q}$，$u^{(m)}=\mathcal{Q}\bar{\mathcal{R}}$。(3)在 $\bar{\mathcal{P}}$，$u^{(m)}=\bar{\mathcal{P}}\mathcal{Q}$，因爲 $\bar{\mathcal{P}}\mathcal{Q}\bar{\mathcal{R}}$ 是短程線，而 $u^{(m)}$ 是它的切向矢量。(4)在 $\mathcal{L}$，$u^{(m)}=\mathcal{L}\mathcal{R}$，根據圖形的 Schild 階梯。(5)在 $\mathcal{R}$，$u^{(m)}=\mathcal{R}\mathcal{R}$，因爲 $\mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{R}$ 是短程線，而 $u^{(m)}$ 現在是它的切向矢量。(6)在 $\mathcal{Q}$，$u^{(m)}=\mathcal{Q}\mathcal{B}$，根據 Schild 階梯。結果：$u^{(m)}$ 的變化爲 $-\mathcal{B}\mathcal{R}$。如果曲線沿反方向繞行（$\mathcal{L}\longrightarrow\bar{\mathcal{P}}\longrightarrow\mathcal{Q}\longrightarrow\mathcal{R}\longrightarrow\mathcal{L}$），則變化爲$+\mathcal{B}\mathcal{R}$:

$$(\delta u)_{\substack{\text{由於平行移動沿着 } n \text{ 向上，}\\ \text{沿着 } u \text{ 出來，沿着} -n \text{ 向下}\\ \text{，沿着} -u \text{ 回到起點}}}=\mathcal{B}\bar{\mathcal{R}}=\nabla_u\nabla_u n。$$

應用於矢量場 $A^{(場)}$ 給出定位矢量 $A^{(定位)}$（在移動狀態叫做 $A^{(運動)}$）沿閉合回路平行移動中變化的負值。由於 $A^{(場)}$ 在旅途的終點與起點有相同的值。它沒有給出橫斷該回路的 $A^{(場)}$ 的變化。(11.14′) 式通過便於計算的微分算符 $\mathcal{R}(u,v)=[\nabla_u,\nabla_v]-\nabla_{[u,v]}$ 表示了該變化。伴諺：被這一算符作用的量 $A^{(場)}$ 的變化既不需要也不可計算。決定因素：鑒於它作用在 A 上的特徵的表觀差別，算符**Riemann** $(\ldots,\ldots,u,v)=\mathcal{R}(u,v)$實際上是局域的。因此用完全不同但仍光滑變化的矢量場 $A^{(場，新)}$ 取代原先建議的光滑變化的矢量場 $A^{(場)}$。於是這兩個場只須在所討論的一點一致，以便它們在該點給出相同的輸出 **Riemann** $(\ldots,A,u,v)=\mathcal{R}(u,v)A$。這一點可從下述事實來理解，卽所計算的

量 δA 存在且具有與 A(場) 的選擇無關的值。這一點也可通過詳細計算來核實（練習11.2）。*功用*：雖然它們在對定位 A 的任意變化的響應中消除了，但曲率算符的幾個微分直接響應「定位的幾何變化率」（「短程線偏離」）。*延長的部分*：閉合曲線不必是四邊形。曲率算符說明了一個矢量在沿任意形狀小曲線平行移動時是如何變化的（框11.7）。

練習 11.5　閉合曲線的共面性　　**練習**

令 $\mathbf{f}_1$ 和 $\mathbf{f}_2$ 是兩個小型閉合曲線在同一事件處的二重矢量（參見框11.7）。試證明當且僅當 $\mathbf{f}_1=a\mathbf{f}_2$ 時（a是某個數），曲線共面。

框 11.7　關於閉合曲線的平行移動定律

A. 特殊情形

曲線是由矢量場 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 構成的閉合四邊形。

1.定律表述爲（用分量形式）

$$\delta A^{\alpha}+R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}A^{\beta}u^{\gamma}v^{\delta}=0。\tag{1}$$

2.這一點取決於閉合曲線的什麼特徵呢？

a. 注意 $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=-R^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma}$（後兩個指標是反對稱的；這在分量形式的（11.12)式中是顯然的；又因爲反轉曲線經過的方向，即交換 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，δA 的符號必須改變，所以也是顯然的）。

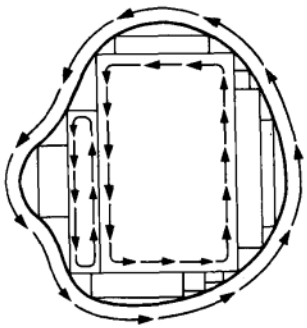
b. (1)式將 $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ 縮併爲這些反對稱的後兩指標。$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ 的對稱部分必須給出零值。只是反對稱的部分 $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}$ 有貢獻：

$$\delta A^{\alpha}+\frac{1}{2}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}A^{\beta}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})^{\gamma\delta}=0。\tag{2}$$

3.這個反對稱部分是一個「二重矢量」。它與曲線的形狀無關；它僅取決於(a) 曲線所在的平面，(b) 曲線所圍的面積。［雖然沒有度規的「面積」是毫無意義的，然而「在給定平面上一事件的相對面積」與「沿給定方向

一事件的相對長度」有同樣多的內容。如果同一事件的兩個矢量彼此成倍數，則它們位於同一線上；在這種情形，它們的相對長度是它們之比。同樣，如果同一事件的兩個小型閉合曲線的二重矢量彼此成倍數，則它們位於同一平面內（練習11.5）；在這種情形，它們的相對面積是它們的二重矢量之比。]

B. 一般情形



任意的小型閉合曲線。

1. 將曲線分解爲許多四邊形，它們和曲線位於同一平面內。
2. 按照沿曲線經過時同樣的方向，沿每個四邊形經過一次。結果：全部內部的邊沿相反方向經過兩次（沒有淨經過）；外部的邊（曲線本身）經過一次。
3. 於是，由於經過曲線引起的 $\delta \boldsymbol{A}$ 來自經過每個四邊形的 $\delta \boldsymbol{A}$ 的總和：

$$\delta A^{\alpha} = -\frac{1}{2} \sum_{\text{諸四邊形}} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} A^{\beta} (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \text{對給定四邊形})^{\gamma\delta} 。$$

定義曲線的二重矢量 $\boldsymbol{f}$ 爲它各部分的四邊形的二重矢量的總和：

$$\boldsymbol{f} \equiv \sum_{\text{諸四邊形}} (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})_{\text{四邊形}}$$

（「面積」相加，保持共面）。

4. 於是

$$\delta A^{\alpha} + \frac{1}{2} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} A^{\beta} f^{\gamma\delta} \equiv \delta A^{\alpha} + R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta]} A^{\beta} f^{\gamma\delta} = 0 。$$

C. 告誡

這一點只對小範圍的閉合曲線才正確：當面積加倍 $\delta \boldsymbol{A}$ 亦加倍；但是誤差增加一個因子～$2^{3/2}$ [在 §11.4 的計算中 $\delta \boldsymbol{A} \propto \Delta a \Delta b$；但誤差$\propto (\Delta a)^2 \Delta b$ 或 $\Delta a\,(\Delta b)^2$]。

§11.5　平直性等階於 Riemann 曲率爲零

定義流形的平直性

說空間、空時或任意其他流形是平直的，就是說存在着一種坐標系 $\{x^\alpha(\mathscr{P})\}$ 在其中所有短程線都顯示爲直線：

$$x^\alpha(\lambda)=a^\alpha+b^\alpha\lambda。\tag{11.16}$$

（例如：狹義相對論的 Lorentz 空時，其中，試驗物體沿這樣的直線運動。）當且僅當短程線方程

$$\frac{d^2x^\beta}{d\lambda^2}+\Gamma^\beta{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0\tag{11.17}$$

中的聯絡係數在同一坐標中表示時全部爲零：

$$\Gamma^\beta{}_{\mu\nu}=0,\tag{11.18}$$

平直性意味着 Riemann $=0$

這些短程線才顯得如此。由這些聯絡係數爲零，即可得出 (11.12) 式曲率張量的所有分量爲零：

$$R^\beta{}_{\gamma\mu\nu}=0。\tag{11.19}$$

[(11.16)⟶(11.18)⟶(11.19) 的幾何學的重新陳述：由於所有短程線在給定坐標系中是平直的意味着最初平行的短程線將保持它們的間隔；短程線偏離爲零；所以曲率爲零。]

逆定理是否成立？ Riemann 曲率爲零是否意味着存在一個坐標系，在其中全部短程線顯示爲直線？是的，按照下述結構可以看出。

證明 *Riemann*$=0$ 意味着平直性

一矢量平行自身從 $\mathscr{P}_0$ 移動到 2，再沿稍微不同的路徑從 2 回到 $\mathscr{P}_0$。由於 ***Riemann*** 處處爲零，故矢量返回起點時，大小和方向均沒有變化。因此基矢 $\mathbf{e}_\mu$ 從 $\mathscr{P}_0$ 平行移動到 2，在 2 點得出的基矢 $\mathbf{e}_\mu$，它在大小和方向兩方面都與移動路徑無關（因爲通過連續的變形順序可從其他路徑獲得一條路徑）。就 2 而論，正如就流形中的所有各點而論；就一個基矢 $\mathbf{e}_\mu$ 而論，正如就基矢的完全集（$\mu=0,1,2,3$）而論：基 $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathscr{P}_0)\}$ 的平行移動處處產生一標架的場（「標架場」），它的每一基矢在從任意點到任意鄰近點的平行移動中經受零變化（相對於標架場）。因此

$$\nabla\mathbf{e}_\mu=0;\tag{11.20}$$

或

$$\nabla_\nu\mathbf{e}_\mu(\equiv\nabla_{\mathbf{e}_\nu}\mathbf{e}_\mu)=0。\tag{11,21}$$

由於這些單個的微商爲零，任意兩基矢場的對易算符亦爲零：

$$[\mathbf{e}_\mu.\mathbf{e}_\nu]=\nabla_\mu\mathbf{e}_\nu-\nabla_\nu\mathbf{e}_\mu=0-0=0。\tag{11.22}$$

圖11.2（把那裏的「u」讀爲「$\mathbf{e}_\mu$」，「v」讀爲「$\mathbf{e}_\nu$」）中四邊形的間隙完全閉合。因此，可引入坐標x^μ，其中每一個隨着在對應矢量場方向上的運動而增加；而且適當標度這些坐標，可寫出

$$\mathbf{e}_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{11.23}$$

（參見練習9.9）。採用這一坐標基，可用公式

$$\nabla_\alpha \mathbf{e}_\beta=\mathbf{e}_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \tag{11.24}$$

計算聯絡係數。根據左邊的量爲零，可得出右邊的全部聯絡係數（「短程線偏離」）必爲零，所以空時確實是平直的。

概要：當且僅當 **Riemann**$=0$ 時，空時是平直的，即存在「平直坐標」，其中處處 $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}=0$，且短程線是直線，$x^\alpha(\lambda)=a^\alpha+b^\alpha\lambda$。

注意：在具有度規的 Einstein 空時中，在上述論證中可選擇在 $\mathcal{P}_0$ 的 $\{\mathbf{e}_\mu(\mathcal{P}_0)\}$ 是正交的，$\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu=\eta_{\mu\nu}$。於是所得的標架場將是處處正交的，且所得坐標系是 Lorentz 系。因此，在 Einstein 重力中，上述概要可重述爲：當且僅當**Riemann**$=0$ 時，空時是平直的（存在 Lorentz 坐標系）。

當且僅當 Riemann$=0$ 時，Lorentz坐標存在

告誡：平直性並不必然意味着 Euclid 拓撲結構。取一張紙，它是平直的。把它捲成一個圓筒，它本質上仍然是平直的。在它上面的短程線的徑跡沒有變化。鄰近點之間的距離沒有變化。就永遠限制在紙片上的一個觀察者而論，只是拓撲結構變了。（「外賦幾何學」，即紙片鑲嵌在周圍的三維空間的情形也發生了變化，但是在紙片上的觀察者對此毫無所知，這不是本章的論題。參見§21.5）

平直性並不意味 Euclid 拓撲結構

將這個圓筒彎過來，並將它的兩端粘在一起，而不改變它的平直內稟幾何學。如果圓筒仍保持鑲嵌在平直的三維 Euclid 空間內，這樣做是不可能的；如果它鑲嵌在四維 Euclid 空間內則完全可能。然而對於限制在圓筒的觀察者，鑲嵌一事並不重要，因爲他們曾測量的一切都是內稟幾何學；所以對於他們，全部事情在於圓筒兩端彼此的拓撲證認。結果是拓撲學上的環；但是短程線的徑跡仍沒有變化；內稟幾何學是平直的；**Riemann**爲零。

類似地取平直 Minkowskii 空時。選擇某 Lorentz 坐標系，並在其中選擇每邊爲10^{10}光年的立方體($0<x<10^{10}$光年；z和y同樣）。識別立方體相對的面，以便短程線穿過一個面出去，穿過另一面進入。結果是拓撲學上的三維環：具有有限體積的「閉宇宙」，它具有平直的 Minkowskii 幾何學，並且其形式完全不隨 Lorentz 時間 t 的流逝而改變（不膨脹，不收縮）。

§11.6 Riemann 簡正坐標

在彎曲空時中，我們絕不可能找到處處具有 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0$ 的坐標系。但是，我們總是可以在給定的事件 $\mathcal{P}_0$ 處構成局域慣性系；在此坐標系內考察時，至少局域地說，自由粒子必沿直線運動，即至少局域地說，它意味着 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ 必須爲零。

這樣一個局域慣性系的極爲特殊而有用的體現是 Riemann 簡正坐標系。選取一事件 $\mathcal{P}_0$，並在該處選取可爲慣性觀察者利用的一組基矢 $\{\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P}_0)\}$。像刺猬或豪猪的刺一樣，在 $\mathcal{P}_0$ 附近從 $\mathcal{P}_0$ 輻射出短程線，充滿空時。每一條短程線由它在 $\mathcal{P}_0$ 的切向矢量 $\boldsymbol{v}$ 確定；其上一般的點可表爲

Riemann簡正坐標：局域慣性系的體現

Riemann簡正坐標的幾何結構

$$\mathcal{P}=g(\lambda;\boldsymbol{v})。\tag{11.25}$$

[仿射參量，說明在短程線上「什麼位置」] ← λ　　v ← [$\mathcal{P}_0$ 處的切向矢量，說明「哪一條短程線」]

實際上，給出的短程線比需要的多。如果最初的切向矢量爲 $2\boldsymbol{v}$，則經參量長度 $\frac{1}{2}\lambda$ 後，我們所達到的點，與切向矢量爲 $\boldsymbol{v}$ 經參量爲λ後所到達的點相同：

$$g(\lambda;\boldsymbol{v})=g\left(\frac{1}{2}\lambda;2\boldsymbol{v}\right)=g(1;\lambda\boldsymbol{v})。$$

因此，固定λ=1，用各種可能的方法改變 $\boldsymbol{v}$，我們可在$\mathcal{P}_0$的某個鄰域內達到每一點。這是構成 Riemann 簡正坐標的基礎。選擇一事件 $\mathcal{P}$，在 $\mathcal{P}_0$ 處找出某切向矢量$\boldsymbol{v}$，對於它 $\mathcal{P}=g(1;\boldsymbol{v})$。通過選定的基展開$\boldsymbol{v}$，並稱它的分量爲 x^α：

$$\mathcal{P}=g(1;x^\alpha\mathbf{e}_\alpha)。\tag{11.26}$$

點$\mathcal{P}$唯一地確定x^α（如果$\mathcal{P}$足夠靠近 $\mathcal{P}_0$，則空時曲率不會引起短程線彼此相交）。同樣，x^α唯一地確定 $\mathcal{P}$。所以，x^α 可選作 $\mathcal{P}$ 的坐標——它的「以事件 $\mathcal{P}_0$ 和基 $\{\mathbf{e}(\mathcal{P}_0)\}$ 爲依據的 Riemann 簡正坐標」。

(11.26)式簡要地概括了 Riemann 簡正坐標。練習 11.9導出的其他公式概括了它們的有用性質：

Riemann簡正坐標的數學性質

$$\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P}_0)=(\partial/\partial x^\alpha)_{\mathcal{P}_0};\tag{11.27}$$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0)=0;\tag{11.28}$$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\mu}(\mathcal{P}_0)=-\frac{1}{3}(R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\mu}+R^{\alpha}{}_{\gamma\beta\mu})。\tag{11.29}$$

如果空時具有度規（像它實際上那樣），並且如果 $\mathcal{P}_0$ 處觀察者的參照系選爲正交系($\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta=\eta_{\alpha\beta}$)，則

$$g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}_0)=\eta_{\alpha\beta}\,, \tag{11.30}$$

$$g_{\alpha\beta\gamma\mu}(\mathcal{P}_0)=0\,, \tag{11.31}$$

$$g_{\alpha\beta\gamma\mu\nu}(\mathcal{P}_0)=-\frac{1}{3}(R_{\alpha\mu\beta\nu}+R_{\alpha\nu\beta\mu})$$

$$=-\frac{2}{3}J_{\alpha\beta\mu\nu}\,, \tag{11.32}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathcal{P}_0)=g_{\alpha\delta,\beta\gamma}(\mathcal{P}_0)-g_{\alpha\gamma,\beta\delta}(\mathcal{P}_0)\,。 \tag{11.32'}$$

其中 $J_{\alpha\beta\mu\nu}$ 是 Jacobi 曲率張量的分量（參見練習11.7）。

局域慣性系的其他代數體現

這是不是在 $\mathcal{P}_0$ 處爲局域慣性的（即在該處有 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0$）並與該處基矢 $\mathbf{e}_\alpha$（即在該處有 $\partial/\partial x^\alpha=\mathbf{e}_\alpha$）相聯繫的唯一的坐標系呢？否。但是所有這類坐標系（叫做「簡正坐標」）直到二級都是相同的：

$$x^\alpha{}_{新}(\mathcal{P})=x^\alpha{}_{老}(\mathcal{P})+(x^\alpha{}_{老})^3 \text{ 量級的修正。}$$

此外，只有那些相同到三級的，

$$x^\alpha{}_{新}(\mathcal{P})=x^\alpha{}_{老}(\mathcal{P})+(x^\alpha{}_{老})^4 \text{ 量級的修正，}$$

才能保持(11.29)和(11.32)式與 Riemann 張量的美妙聯繫。

練習

練習 11.6 *Riemann* 的對稱

（將在第十三章中討論）。試證明 **Riemann** 具有下述對稱性：

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta]} \quad \text{（後兩指標的反對稱性）} \tag{11.33a}$$

$$R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]}=0 \quad \text{（完全反對稱部分爲零）} \tag{11.33b}$$

練習 11.7 短程線偏離量度全部曲率分量

到現在，短程線偏離方程寫成下述形式

$$\nabla_u\nabla_u n+\textbf{Riemann}\,(\ldots,u,n,u)=0$$

或

$$\nabla_u\nabla_u n+\mathcal{R}(n,u)u=0\,,$$

它還可寫成 Jacobi 形式 $\nabla_u\nabla_u n+\mathcal{J}(u,u)n=0$，其中「Jacobi 曲率算符」$\mathcal{J}(u,v)$ 定義爲

$$\mathcal{J}(u,v)n\equiv\frac{1}{2}[\mathcal{R}(n,u)v+\mathcal{R}(n,v)u]\,, \tag{11.34}$$

並且，與「Jacobi 曲率張量」的關係爲

$$\textbf{Jacobi}\,(\ldots,n,u,v)\equiv\mathcal{J}(u,v)n\,, \tag{11.35}$$

它意味着

$$J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}=J^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}=\frac{1}{2}(R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta}+R^{\mu}{}_{\beta\nu\alpha})。\tag{11.36}$$

(a) 試證明 $J^{\mu}{}_{(\alpha\beta\gamma)}=0$ 可由 $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}=R^{\mu}{}_{\alpha[\beta\gamma]}$ 導出。

(b) 試證明通過研究短程線偏離（在 $\nabla_{u}\nabla_{u}n+\mathcal{R}(u,u)n=0$ 中允許任意的 u 和 n），我們可量度 ***Jacobi*** 的全部分量。

(c) 試證明 ***Jacobi*** 正好包含了和 ***Riemann*** 一樣多的信息。［提示：證明

$$R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta}=\frac{2}{3}(J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}-J^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu})；\tag{11.37}$$

加上關於 $J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ 的(11.36)式，證明具有「相同信息量」。］因此，研究短程線偏離，我們也能量度 ***Riemann*** 的全部分量。

(d) 對於 $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}=-R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}$，給出所建議的值，對此 $R^{\mu}{}_{[\nu\alpha\beta]}\neq 0$，並發現 $J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}=0$，由此證明 $R^{\mu}{}_{[\nu\alpha\beta]}=0$ 的對稱性本質上在於 ***Jacobi*** 和 ***Riemann*** 之間的等價性。

練習 11.8　短程線偏離的詳盡細節

在一個坐標系中寫出短程線偏離的分量形式。用普通微商（逗號）和Γ展開全部協變微商（分號），從而明確的展現出全部的Γ項和∂項。

練習 11.9　一般的 Riemann 簡正坐標

導出 ***Riemann*** 簡正坐標的性質 (11.27), (11.28), (11.29), (11.31), (11.32), 和 (11.32′)式。［提示：程序如下。

(a) 由定義式 (11.26) 導出 $(\partial\mathcal{P}/\partial x^{\alpha})_{\mathcal{P}_0}=e_{\alpha}$。

(b) 類似地由定義式 (11.26) 證明每條曲線 $x^{\alpha}=v^{\alpha}\lambda$ （其中 v^{α} 是常數）是通過 $\mathcal{P}_0$ 的仿射參量爲λ的短程線。

(c) 將 $x^{\alpha}=v^{\alpha}\lambda$ 代入短程線方程，證明 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0)=0$。

(d) 由於曲線 $x^{\alpha}=v^{\alpha}\lambda$ 對於參量 v^{α} 的每一種選擇都是短程線，因此，它們不僅提供了短程線切線 $u\equiv(\partial/\partial\lambda)_{v^{\alpha}}$，而且也提供了幾個偏離矢量 $N_{(\alpha)}\equiv(\partial/\partial v^{\alpha})_{\lambda}$，在 Riemann 簡正坐標系中計算這些矢量的分量，並代入練習 11.8 寫出的短程線偏離方程之中。

(e) 利用

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\Big|_{x^{\mu}=v^{\mu}\lambda}=\lambda v^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\mu}(\mathcal{P}_0)+O(\lambda^2)，$$

它是關於Γ的 Taylor 級數，令 (d)的短程線偏離方程中λ的零階和一階係數爲零。這樣得出用 Riemann 張量表示 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\mu}$ 的 (11.29) 式。

(f) 由 (11.28), (11.29)式以及用度規表示聯絡係數的 (8.24) 式導出 (11.31), (11.32) 以及 (11.32′) 各式。］

練習 11.10　Bianchi 恒等式

試證明 Riemann 曲率張量滿足下述「Bianchi 恒等式」。

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta;\varepsilon]}=0。\tag{11.38}$$

這些恒等式的幾何意義將在第十五章中討論。［提示：在 Riemann 簡正坐標系的原點進行計算。］

練習 11.11 作用於1-形式的曲率算符

令 $\mathcal{R}(u,v)$ 是作用於1-形式 σ（或其他張量）以及作用於切向矢量的算符 $\mathcal{R}(u,v)=[\nabla_u,\nabla_v]-\nabla_{[u,v]}$。試證明

$$\langle\mathcal{R}(u,v)\sigma,w\rangle=-\langle\sigma,\mathcal{R}(u,v)w\rangle。$$

練習 11.12 轉動羣：Riemann 曲率

［練習 9.13, 9.14 以及 10.17 的繼續。］對轉動羣流形 $SO(3)$，計算 Riemann 曲率張量的分量；採用生成元的基 $\{e_\alpha\}$。［答案：

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}=\frac{1}{2}\,\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}, \tag{11.39}$$

其中 $\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$ 是 (3.50ℓ) 式定義的置換符號

$$\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}\equiv(\delta^\alpha{}_\gamma\delta^\beta{}_\delta-\delta^\alpha{}_\delta\delta^\beta{}_\gamma)。$$

注意此答案與羣流形中的位置$\mathcal{P}$無關。］

第十二章　用彎曲空時語言表示的 Newton 重力

在公開開放的美術陳列館中，一幅現代繪畫顛倒懸掛而未被覺察竟長達47天之久。這是紐約現代藝術博物館中 Matisse 所畫的 Le Bateau（《船》）。在這段時間內有 116,000 人去過此美術陳列館。

McWhirster 和 McWhirster (1971)

§12.1　Newton 重力概要

本章全屬高階。第9至11章是它的必要準備。

它對以後各章並非必需，但却有益於

(1)第17章（Einstein 場方程）以及

(2)第38和39章（重力的實驗檢驗和其它理論）。

就 Einstein 對重力事實的描述而言，等效原理不是唯一的。對 Einstein 來說，不平凡的是等效原理和局域 Lorentz 幾何的結合。回到 Newton 世界，忘掉最近世紀中所發現的有關狹義相對論的每一件事，光錐，光的極限速率以及原時。回到前幾世紀的「世界時（universal time）t」採用世界時和直角「Galileo」空間坐標，Newton 理論給出中性試驗粒子的軌跡

$$\frac{d^2x^j}{dt^2}+\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}=0; \tag{12.1}$$

Φ（有時表爲$-U$）=Newton 勢。 (12.2)

Newton 重力：原來的形式

習慣上將這些方程解釋爲描述試驗粒子在 Euclid 空間（不是空時）內下落的「曲線路徑」$x^j(t)$。這些曲線路徑包括地球的圓軌道以及棒球的拋物線軌跡。Cartan (1923, 1924) 要求人們放棄這種觀點。他宣稱作爲替代，可將這些軌跡看作彎曲空時中的短程線 $[t(\lambda), x^j(\lambda)]$。（這一觀點的變化收錄在

Newton 重力：翻譯成彎曲空時的語言

框1.6的圖B和圖C之中）。由於「仿射地記時」，試驗粒子所携帶的Newton鐘指示世界時（或者它的某一倍數，$\lambda=at+b$），運動方程(12.1)式可改寫爲

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2}=0,\ \frac{d^2x^j}{d\lambda^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2=0。\tag{12.3}$$

與短程線方程

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}+\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\left(\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right)\left(\frac{dx^\gamma}{d\lambda}\right)=0,$$

比較，可看出聯絡係數的值爲：

$$\Gamma^j{}_{00}=\partial\Phi/\partial x^j；\ \text{所有其它}\ \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\ \text{均爲零。}\tag{12.4}$$

將這些代入 Riemann 張量分量的標準方程（11.12）式中，得（練習 12.1）

$$R^j{}_{0k0}=-R^j{}_{00k}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}；\ \text{所有其它}R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\text{均爲零。}\tag{12.5}$$

最後，Newton 勢的源方程

$$\nabla^2\Phi\equiv\sum_j\Phi_{,jj}=4\pi\rho\tag{12.6}$$

人們可借助於「Ricci曲率張量」

$$R_{\alpha\beta}\equiv R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}\ (\textbf{Riemann}\text{的縮併})\tag{12.7}$$

改寫爲幾何形（練習12.2）

$$R_{00}=4\pi\rho；\ \ \text{所有其它}R_{\alpha\beta}\text{均爲零。}\tag{12.8}$$

關於 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ 的(12.4)式，關於 $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ 的(12.5)式，關於 $R_{\alpha\beta}$的(12.8)式，加上短程線運動定律，是用幾何語言重寫的 Newton 重力的全部內容。

能很快地掌握這些分量操作是一回事。能從抽象方面和圖象方面充分地理解這些方程的意義以及 Newton 空時的結構則是另外一回事。提出這種理解並把 Newton 空時和 Einstein空時相比較是本章的目的，它是以 Cartan (1923, 1924), Trautman (1965) 以及 Misner (1969a)的工作爲基礎的。

練習

練習 12.1 Newton 空時的 Riemann 曲率

由關於 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ 的(12.4) 式導出關於 $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ 的 (12.5) 式。

練習 12.2 Newton 場方程

由 (12.5) 式經 (12.7) 式導出 Newton 場方程的幾何形 (12.8) 式。

---

§12.2　Newton 空時的層理（stratification）

Galileo 和 Newton 談到平直的 Euclid 的「絕對空間」和「絕對時間」，兩個概念是有區別的，而且是沒有聯繫的。Newton 物理學在絕對空間內發生；當它發生時，絕對時間在流逝。在這裏並未暗示空間和時間可能是一個單一實體，即彎曲「空時」的兩個方面——直到 Einstein 在相對論物理學中才統一起來，隨後 Cartan (1923) 用到 Newton 物理學中以便更清楚地理解 Einstein 的概念。

Newton空時的幾何學

怎樣使 Gallieo 和 Newton 的絕對空間以及他們的絕對時間與 Cartan 的「Newton空時」相適應呢？關鍵在於層理；層理由世界時坐標 t 產生。

「世界時」作爲一個標量場

將 t 看作在 Newton 空時中徹底定義的函數（標量場）

$$t=t(\mathscr{P})。\tag{12.9}$$

沒有它，空時不可能是 Newton 的，因爲「t」完全是內稟於 Newton 空時的，就好像度規「$\mathbf{g}$」完全內稟於 Lorentz 空時一樣。空時的各個薄層是各個恒定 t 的薄片——「空時薄片」，每一薄片都有相同的幾何結構，即原來的「絕對空間」。

採用 Cartan 觀點，要求哪一種幾何學可通過空時的外圍幾何導致每一空間薄片呢。根據 §12.1 的 Galileo 坐標，可賦予給定的空間薄片以基矢 $\mathbf{e}_j=\partial/\partial x^j$；這一基具有零聯絡係數 $\Gamma^i{}_{kl}=0$ [參看(12.4)式]。因此，每個空間薄片的幾何完全是平直的。

具有Euclid幾何的空間薄片

根據老的觀點，「絕對空間」在幾何上是 Euclid 的，Galileo 坐標是 Descartes（笛卡爾）的。翻譯成 Cartan 的語言，就是說：不僅每一空間薄片（t=常數）是平直的，且它的 Galileo 坐標具有零聯絡係數，而且每一空間薄片均可賦予三維度規，且它的 Galileo 坐標基是正交歸一的

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=(\partial/\partial x^i)\cdot(\partial/\partial x^j)=\delta_{ij}。\tag{12.10}$$

曲率在空時中起作用，在空間薄片中不起作用

如果空間薄片確實這樣平直，曲率和短程線偏離從何進入呢？它們是空時的性質。沿着完全位於空間薄片內的閉合曲線平行移動一矢量，它回到起點時將不發生變化。但是，把矢量在時間上向前移動 Δt，在空間上向北移動 Δx^k，再在時間上向後移動 $-\Delta t$，在空間上向南移動 $-\Delta x^k$ 回到它的起點，它將變化

$$\delta\mathbf{A}=-\mathscr{R}\left(\Delta t\frac{\partial}{\partial t},\Delta x^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\mathbf{A};$$

即

$$\delta A^0=0,\quad \delta A^j=-R^j{}_{0k0}A^0(\Delta t)(\Delta x^k)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}A^0(\Delta t)(\Delta x^k)。\tag{12.11}$$

起初平行的空間薄片的短程線（Euclid 直線）總是保持平行的。但是原來平行

的空時的短程線（自由下落粒子的軌跡）將由於空時曲率而撓開或推到一起，

$$\nabla_u\nabla_u n+\mathcal{R}(n,u)u=0,$$

或者等價於在 Galileo 坐標中

$$\text{原來的 } n^0=dn^0/dt=0\Longrightarrow\text{總有 } n^0=0; \tag{12.12a}$$

$$\frac{d^2n^j}{dt^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}n^k=0 \tag{12.12b}$$

（見框12.1和練習12.3）。

練習

練習 12.3 導出短程線偏離

製作框 11.4 的第三欄，在分量符號中採用 Newton 空時 Galileo聯絡係數 (12.4) 作「幾何分析」。從而更深入地理解幾何分析怎樣與原來的 Newton 分析相平行。

---

§12.3 Galileo 坐標系

狹義相對論的 Lorentz空時具有一種完全獨立於任意坐標系的實在和結構。但是它的幾何的特殊性質（零曲率）允許引入特殊類型的坐標（Lorentz 坐標），它以特殊的方式依附於空時

$$\text{處處 } (\partial/\partial x^\alpha)\cdot(\partial/\partial x^\beta)=\eta_{\alpha\beta}。$$

通過研究這些特殊的坐標系和它們之間的關係（Lorentz 變換），我們可以更好地獲悉空時本身的結構（同時性崩潰；Lorentz 收縮；時間膨脹；……）。

定義 Galileo 坐標

對於 Newton 空時亦類似。它的幾何的特殊性質（後面再作抽象的探索；框 12.4）允許引入特殊坐標（Galileo 坐標），它以下述特殊方式依附於空時

$$x^0(\mathcal{P})=t(\mathcal{P});$$

$$(\partial/\partial x^j)\cdot(\partial/\partial x^k)=\delta_{jk};$$

對於某標量場 Φ, $\Gamma^j{}_{00}=\Phi_{,j}$，而全部其他的 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ 均爲零。

爲了更深入地理解 Newton 空時，應研究這些 Galileo 坐標系之間的關係。

框 12.1　Newton 空時中的短程線偏離

用於計算的坐標系：Galileo 空間坐標 x^j 和世界時坐標 t，方程的普遍分量形式：

$$\frac{D^2n^\alpha}{d\lambda^2}+R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}n^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda}=0\text{。}$$

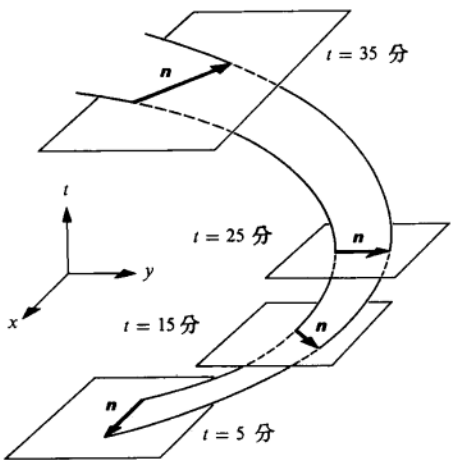
用於這種計算的特殊條件：設粒子的鐘（仿射參量）已經全部標準化，可讀出世界時$\lambda=t$。這意味着短程線之間的間隔矢量

$$n^\alpha=(\partial x^\alpha/\partial n)_t$$

具有零時間分量，$n^0=0$；即用抽象的語言，爲

$$\langle \mathbf{dt},\mathbf{n}\rangle=t_{,\alpha}n^\alpha=n^0=0\text{；}$$

亦即用幾何的語言，$\mathbf{n}$ 位於空間薄片（常數 t 的面）內。



計算協變微商：

$$\frac{Dn^\alpha}{D\lambda}=\frac{dn^\alpha}{d\lambda}+\underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}}_{\text{[0,除非}\beta=0\text{]}}n^\beta\frac{dx^\mu}{d\lambda}=\frac{dx^\mu}{d\lambda}\text{，}$$

（$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$：[0,除非 β 是空間指標（$n^0=0$）]）

$$\frac{D^2n^\alpha}{d\lambda^2}=\frac{d(Dn^\alpha/d\lambda)}{d\lambda}+\underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}}_{\text{[0,除非}\beta=0\text{]}}\frac{dn^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda}=\frac{d(Dn^\alpha/d\lambda)}{d\lambda}=\frac{d^2n^\alpha}{d\lambda^2}=\frac{d^2n^\alpha}{dt^2}\text{。}$$

（$\frac{dn^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda}$：[0,除非 β 是空間指標]；$\frac{d^2n^\alpha}{d\lambda^2}=\frac{d^2n^\alpha}{dt^2}$：[因爲$\lambda=t$]）

計算潮汐加速度：

$R^0{}_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}n^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda}=0$，因爲$R^j{}_{0k0}$和$R^j{}_{00k}$是僅有的非零分量。

$$\underbrace{R^j{}_{\beta\gamma\delta}}_{\text{[對於}\gamma\text{是空間指標：0, 除非}\beta=\delta=0\text{]}}\frac{dx^\beta}{d\lambda}n^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda}=R^j{}_{0k0}\frac{dt}{d\lambda}n^k\frac{dt}{d\lambda}=R^j{}_{0k0}n^k=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}n^k\text{。}$$

（n^γ：[0,除非 γ 是空間指標]）

合成短程線偏離方程：

$$\frac{d^2n^0}{dt^2}=0\qquad\left(\begin{array}{l}\text{與結果}n^0=0\text{總是一致的，它是由}\\\text{選擇所有粒子的}\lambda=t\text{得出的}\end{array}\right)$$

$$\frac{d^2n^j}{dt^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}n^k=0\qquad\left(\begin{array}{l}\text{與框11.4中Newton類型的計算}\\\text{一致；也可參看練習12.3}\end{array}\right)$$

原則的要點是，我們怎樣才能首先寫出 Galileo 坐標中的重力定律和空時性質(§12.1)，以後再把握住坐標系的性質及其不唯一性？答案（出自 §3.1 的引文，稍加修改）：「正如 Herni Poincaré 非常强調指出的那樣，在科學的各處，過去常說的『在着手之前應先定義你的術語』的見解是過時的。物理學的全部定律和理論，包括 Newton 重力定律在內，都有這種艱深而微妙的特性，即既定義了它們所用到的一些概念（在這裏是 Galileo 坐標）又作出了關於這些概念的陳述。」

在 Galileo 坐標系

$$x^0=t,\quad (\partial/\partial x^j)\cdot(\partial/\partial x^k)=\delta_{jk}$$

中寫出的 Newton 重力定律作出了關於空時幾何「$\Gamma^j{}_{00}=\Phi_{,j}$ 及全部其他 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}=0$」的表述。這一表述又給出了不同 Galileo 系之間關係的信息。設給定一個Galileo 系$\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$，尋找導致另一個 Galileo 系 $\{x^{\alpha'}(\mathcal{P})\}$ 的最普遍的坐標變換。存在下述限制：(1)$x^{0'}=x^0=t$（兩個時間坐標都必須是世界時）；(2)在固定的 t（即在一固定空間薄片）兩組空間坐標必須是 Euclid 的，因此它們應通過轉動和平移相聯繫：

$$x^{j'}=A_{j'k}x^k+a^{j'} \qquad (12.13a)$$

（$A_{j'k}$：[轉動矩陣，即$A_{j'l}A_{k'l}=\delta_{j'k'}$]；$a^{j'}$：[平移]）

$$x^k=A_{j'k}x^{j'}-a^k,\ \text{其中}\ a^k\equiv A_{j'k}a^{j'}。 \qquad (12.13b)$$

這一轉動和平移在不同的空間薄片上可能先驗地不同，$A_{j'k}=A_{j'k}(t)$和$a^j=a^j(t)$；但是(3)它們必須受到所要求的特殊形式的聯絡係數的制約。在原來坐標系中給定聯絡係數的形式，計算在新坐標系中的聯絡係數。結果（練習12.4）爲：

$$\Gamma^{j'}{}_{0'k'}=\Gamma^{j'}{}_{k'0'}=A_{j'l}\dot{A}_{k'l}\ \text{（產生「Coriolis力」）；}$$

$$\Gamma^{j'}{}_{0'0'}=\frac{\partial\Phi}{\partial x^{j'}}+A_{j'k}(\ddot{A}_{l'k}x^{l'}-\ddot{a}^k)； \qquad (12.14)$$

（$\ddot{A}_{l'k}x^{l'}$：[「離心力」]；$\ddot{a}^k$：[「慣性力」]）

全部其他的 $\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}$ 均爲零

（「Euclid」指標慣例；重複的空間指標表示求和，即使兩個指標都在下面也是如此；點表示時間微商）。當且僅當

$$\dot{A}_{j'k}=0,\quad \Phi'=\Phi-\ddot{a}^kx^k+\text{常數} \qquad (12.15)$$

（Φ'：[新坐標系中的 Newton 勢]；Φ：[原來坐標系中的 Newton 勢]）

時，上述結果才有標準的 Galileo 形式 (12.4)。

聯繫各 Galileo 坐標系的變換

這些結論可用文字重新表述爲：任意兩個 Galileo 坐標系用(1)空間网格的不依賴時間的轉動（在每一空間薄片上的同類轉動），和(2)空間网格的依賴時間的平移（在不同空間薄片上可能是不同的平移）聯繫起來

$$x^{j'}=A_{j'}{}_{k}x^{k}+a^{j'}(t)。\qquad(12.16)$$

[常數]　[與時間有關]

Newton勢依賴於Galileo坐標系的選擇

Newton 勢不是一個在空時中所定義的與所有坐標系無關的函數。（不存在測量它的無坐標的方法。）更確切地說，它的存在依賴於 Galileo 坐標的特殊選擇。如果這種選擇經過(12.16)式變化了，則 Φ的變化爲

$$\Phi'=\Phi-\ddot{a}^{k}x^{k}。\qquad(12.17)$$

（相反：假定存在與所有坐標無關的世界時$t(\mathcal{P})$和協變微商∇。）

定義絕對 Galileo 坐標

如果宇宙中的全部物質都集中在有限的空間區域，並被空虛所包圍（「島宇宙」），那麼我們可以利用球形邊界條件

$$當\ r\equiv(x^{k}x^{k})^{1/2}\longrightarrow\infty時，\ \Phi\longrightarrow0。\qquad(12.18)$$

聯繫各絕對 Galileo 坐標系的變換

利用唯一的普通 Newton 勢，這將挑選出一個 Galileo 坐標的子集（「絕對」Galileo 坐標）。從一個絕對 Galileo 坐標系到任意其他一個的變換爲

$$x^{j'}=A_{j'}{}_{k}x^{k}+a^{j'}+v^{j'}t\qquad(12.19)$$

[恒定轉動]　[恒定速度]　恒定位移

（「Galileo 變換」）。但是，(1)通過非局域的測量，我們總是可以從較廣泛的Galileo 坐標系集中區分出這些絕對 Galileo 坐標系來，（爲了區分，我們必需把局域可觀測量 $\Phi_{,j}=\Gamma^{i}{}_{00}$ 積分到無限），(2)天文資料否認眞實的宇宙是被空虛包圍的物質島。

把上面所描述的 Galileo 坐標和 Newton 空時同狹義相對論的 Lorentz 坐標和 Minkowski 空時作比較，並同廣義相對論的普遍坐標和 Einstein 空時作比較是有指導意義的；參看框 12.2 和 12.3。

（接第298頁）

框 12.2 Newton 空時，Minkowskii 空時和 Eistein 空時：比較和對照

提　問	Newton 空時	Minkowskii 空時（狹義相對論）	Einstein 空時（廣義相對論）
空時具有何種先驗的幾何結構？	(1)世界時函數 t， (2)協變微商∇， (3)空間度規「$\cdot$」，但不能定義空時度規（練習12.10）。	平直的空時度規（Riemann曲率爲零）。	空時度規。
存在何種優越的坐標系？	(1)普遍的 Galileo 坐標。 (2)在島宇宙中的絕對 Galileo 坐標（此處不考慮這種情形）。	Lorentz坐標。	普遍地說，每種坐標系同等優越（雖然在具有對稱性的特殊情形存在特殊的優越坐標）。
挑選出一種特殊的優越坐標系要求什麼？	(1)單一空間方位，通過整個空時相同（三個Euler角）。 (2)空間坐標原點的任意世界線（時間的三個函數）。	(1)單一空間方位，通過整個空時相同（三個Euler角） (2)坐標原點的位置（四個數）。 (3)空間坐標原點的速度（三個數）	全部四個位置函數$x^{\alpha}(\mathcal{P})$。
在什麼條件下，完善地定義了「$\mathcal{P}$和$\mathcal{Q}$是同時的」？	普遍；這是一個無坐標的幾何概念。	只有在選定 Lorentz參照系之後；「同時性」依賴於參照系的速度。	只有在任意選定了時間坐標之後。
在什麼條件下，完善地定義了「$\mathcal{P}$和$\mathcal{Q}$出現在空間的同一點」？	只有在選定 Galileo 坐標之後。	只有在選定 Lorentz坐標之後。	只有在任意選定了空間坐標之後。
在什麼條件下，完善地定義了「不同事件的 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 指向同一方向」？	只有當$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$是兩個空間矢量（$\langle \boldsymbol{dt}, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{dt}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$）；或者它們位於同一空間薄片中且爲任意矢量；或當存在聯繫它們位置的優越路徑，沿這條路徑可通過平行移動比較它們。	總是可以。	只有當各事件處的 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 彼此無限靠近；或當存在着聯繫它們位置的優越路徑（例如唯一的短程線），沿這條路徑可通過平行移動比較它們。
在什麼條件下，完善地定義了「$\mathcal{P}$和$\mathcal{Q}$之間的不變距離」？	只有當$\mathcal{P}$和$\mathcal{Q}$位於同一空間薄片中。	總是可以。	只有當 $\mathcal{P}$和$\mathcal{Q}$ 彼此充分靠近；或者當存在着聯繫它們的唯一優越世界線（例如短程線），沿着這條線可測量距離。

框 12.3　按 Cartan 的 Newton 重力，和 Einstein 重力：比較與對照

性　質	Newton-Cartan	Einstein
簡要的概念（極爲不同領域的等效原理的闡述）	在局域的，自由下落的，無轉動的參照系中自由粒子的運動定律與在無重力的Galileo參照系中表述的Newton運動定律相同。	在局域的，自由下落的，無轉動的參照系中的物理定律與在Lorentz參照系中以狹義相對論表示的物理定律相同。
甚至更簡要地表述的概念	在局域慣性系中的點力學是簡單的。	在局域慣性系中各種事物都是簡單的。
結論（通過Roll-Krotkov-Dicke實驗檢測到 10^{11}分之一）	不同組成的試驗粒子從相同初位置以相同初速度出發走相同的世界線（「短程線的定義」）。	不同組成的試驗粒子從相同初位置以相同初速度出發走相同的世界線（「短程線的定義」。
其他結論	在每個局部區域內存在一個局域參照系（「自由下落參照系」），其中全部短程線顯示爲直線（全部 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}=0$）。	在每個局部區域內存在一個局域參照系（「自由下落參照系」），其中全部短程線顯示爲直線（全部 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}=0$）。
在眞實物理世界中光線行進方式的後果？	不管或回避。全部光線有相同的速度嗎？速率依賴於光源的運動嗎？速率依賴於觀察者的運動嗎？是否可能很快地運動，足以趕上光線呢？這些問題的任何一個都還沒有滿意的見解。	空時總是處處具有局域Lorentz特性。
空時結構梗概	分成類空的薄片；在每一薄片內的幾何是 Euclid 的；每一薄片用世界時的值（短程線參量）表徵；一薄片相對於另一薄片的位移無法規定；沒有空時間隔這種東西。	不能分層。每一事件和每一鄰近事件之間的間隔定義完善；空時處處都存在具有局域參照系的局域 Lorentz 特性（特定的空間和時間軸），另一個（另一空間和時間軸）同樣完善；「均勻的」而不是分層的。
用數學語言表述這種結構	有諸 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$，而無空時度規 $g_{\mu\nu}$；$\Gamma^{i}{}_{00}=\frac{\partial\Phi}{\partial x^{i}}(i=1,2,3)$；全部其他的 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ 均爲零。	諸 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ 不獨立存在；全部由 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}=g^{\alpha\beta}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)$ 導出（「重力的度規理論」）。

練習

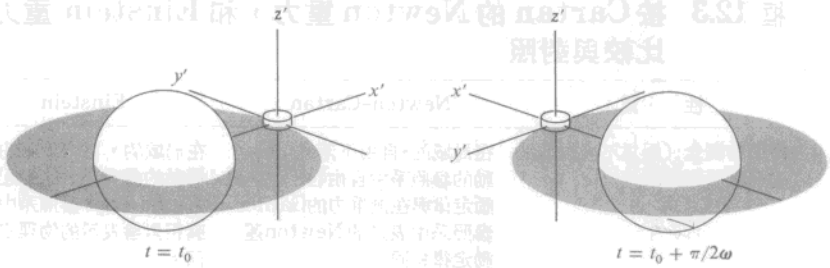


圖 12.1
軌道實驗室當它繞地球作圓軌道運動時携帶的坐標系。

練習 12.4 對於轉動、加速坐標的聯絡係數

從 Galileo 坐標系 $\{x^{\alpha}(\mathscr{P})\}$ 的聯絡係數 (12.4) 式開始，試導出 (12.13) 式坐標系 $\{x^{\alpha'}(\mathscr{P})\}$ 的聯絡係數 (12.14) 式。由此證明 (12.15) 式對於 $\{x^{\alpha'}(\mathscr{P})\}$ 爲 Galileo 坐標是必要的和充分的。

練習 12.5 Einstein 升降機

用本章的形式討論「Einstein 升降機」——即「重力」與參照系的加速度等效。「重力」的哪些方面與加速度等效，哪些方面不等效？

練習 12.6 地球上的短程線偏離

把一個載人的軌道實驗室放入繞地球的圓軌道中［軌道半徑$=r_0$，角速度$=\omega=(M/r_0^3)^{1/2}$——爲什麼？］。宇航員拋出一包廢料，注視着它沿着它的短程線路徑運動。他觀察它相對於（非 Galileo 的）空間坐標 $\{x^{j'}(\mathscr{P})\}$ 的運動。如圖 12.1 所示，這一空間坐標(1)在世界時的每一瞬間是 Euclid 的［$(\partial/\partial x^{j'})\cdot(\partial/\partial x^{k'})=\delta_{jk}$］，(2)原點設在實驗室的中心，(3) $\partial/\partial x'$ 的指向離開地球，(4) $\partial/\partial x'$ 和 $\partial/\partial y'$ 在軌道平面內。試用短程線偏離方程計算廢料包在此坐標系中的運動。考查實驗室和廢料的 Kepler 軌道，從而證實所得答案。提示：(1)通過張量分量的平庸變換在此坐標系中計算 $R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'}$。(2)利用 (12.14) 式計算在實驗室中心的（即在基準短程線上的）$\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}$。

§12.4 Newton 重力的、幾何的、無坐標的闡述

以與坐標無關的幾何語言重新表述 Newton 的重力理論是本章的主要目標。迄今，廣泛地依靠一類特殊的坐標系即 Galileo 坐標系的幫助，這一目標已經實現。脫離 Galileo 坐標採用完全無坐標的語言，在原則上是直截了當的。

我們只須從指標的符號過渡到抽象的符號。

例：以無坐標的語言重新表述 Galileo 坐標的條件 $\Gamma^0{}_{\alpha\beta}=0$。

解：寫出$\Gamma^0{}_{\alpha\beta}=-\langle\nabla_\beta dt, \mathbf{e}_\alpha\rangle$；它對全部 α 爲零意味着對全部 β，有$\nabla_\beta dt=0$；這也意味着對全部 $\mathbf{u}$，有 $\nabla_{\mathbf{u}}dt=0$。用文字表述：世界時的梯度是協變常數。

通過這一程序，我們可構成一組有關 Newton 空時的無坐標表述（框12.4），它完全等價於 Newton 引力理論的標準的非幾何形式。由標準的 Newton 理論，我們可演繹出這些幾何表述（練習12.7）；由這些當作公理的幾何表述，我們可演繹出標準的 Newton 理論（練習 12.8）。

Newton 重力理論的無坐標幾何公理系

練習

練習 12.7　從 Newton 到 Cartan

從 Newton 理論的標準公理（框 12.4 的後一部分）導出幾何公理（框 12.4 的前一部分）。*建議的步驟*：通過在 Galileo 坐標系中的計算，證實每個幾何公理。自由地利用 §12.1 中的計算和結果。

練習 12.8　從 Cartan 到 Newton

從 Newton 理論的幾何公理（框 12.4 的前一部分）導出標準公理（框 12.4 的後一部分）。*建議的步驟*：(1)在某一事件$\mathcal{P}_0$處取三個正交歸一的空間基矢（$\mathbf{e}_j$ 滿足$\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k=\delta_{jk}$）。通過任意路線將它們平行移動到空時的全部其他事件處。

(2)採用對於全部 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{n}$ 的條件 $\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{n})\mathbf{e}_j=0$［公理(3)］以及類似於 §11.5 的論證方法得出；(a)所得的矢量場$\mathbf{e}_j$與任何移動路線無關，(b)對於所得的場，$\nabla\mathbf{e}_j=0$，以及(c)$[\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k]=0$。

(3)取通過每一空間薄片（恒定 t的薄片）一次且僅通過一次的任意「時間線」。用 t 使之參量化並沿着時間線在每一事件處選定其切向矢量爲基矢 $\mathbf{e}_0$。通過任意路線平行移動每一$\mathbf{e}_0$遍及它的各個空間薄片。

(4)由公理(4)得出，所得的場與移動路線無關；並證明上述結構確保$\nabla_j\mathbf{e}_0=\nabla_0\mathbf{e}_j=0$。

(5)試證明對於四個基矢場的各對，有$[\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta]=0$，由此得出存在一坐標系（「Galileo 坐標」），其中 $\mathbf{e}_\alpha=\partial/\partial x^\alpha$（參看 §11.5 和練習 9.9）。

(6)試證明在此坐標系中處處 $\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k=\delta_{jk}$（空間坐標爲 Euclid 的），且聯絡係數的唯一非零分量爲 $\Gamma^j{}_{00}$；這裏，公理(6)和(2)是有用的。

(7)由 Jacobi 曲率算符的自伴（self-adjoint）性質（公理 7）證明 $R^j{}_{0k0}=R^k{}_{0j0}$；通過聯絡係數證明它可寫作 $\Gamma^j{}_{00,k}=\Gamma^k{}_{00,j}$；並由此得出存在勢 Φ，使 $\Gamma^j{}_{00}=\Phi_{,j}$。

(8)試證明幾何場方程（公理 5）可化爲 Poisson 方程 $\nabla^2\Phi=4\pi\rho$。

(9)試證明自由落體的短程線方程（公理 8）可化爲 Newton 運動方程 $d^2x^j/dt^2+\Phi_{,j}=0$。

（接第302頁）

框 12.4 Newton 重力：幾何闡述與標準闡述的對比

幾何闡述

Newton 重力理論和 Newton 空時的性質可由下述公理導出。（推導可參看練習12.8）：

(1)存在着稱爲「世界時」的函數 t 以及對稱的協變微商∇（具有相關的短程線，平行移動定律，曲率算符等等）。

(2)1-形式 dt 是協變地常數；即

$$\nabla_u dt = 0 \text{ 對全部 } u。$$

[結論：如果w是空間矢量場（即w處處在 t 爲常數的面內；亦即處處 $\langle dt, w\rangle = 0$），則 $\nabla_u w$ 對每個 u 也是空間矢量場，

$$\langle dt, \nabla_u w\rangle = \nabla_u \underbrace{\langle dt, w\rangle}_{\text{[總是零]}} - \langle \underbrace{\nabla_u dt}_{\text{[總是零]}}, w\rangle = 0。 \quad]$$

(3)繞無限小閉合曲線的平行移動不改變空間矢量；即

$$\mathcal{R}(u,n)w = 0，\text{如果 } w \text{ 是空間的，對每個 } u \text{ 和 } n。$$

(4)繞無限小空間閉合曲線的平行移動不改變全部矢量；即

$$\mathcal{R}(v,w) = 0，\text{對每一個空間的 } v \text{ 和 } w。$$

(5)Ricci 曲率張量，$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}$具有形式，

$$\mathbf{Ricci} = 4\pi\rho dt \otimes dt,$$

式中 ρ 是質量密度。

(6)存在僅限於空間矢量的度規「·」，它與協變微商在下述意義下是相容的：對於任何空間的 w 和 v 以及任何 u

$$\nabla_u(w\cdot v) = (\nabla_u w)\cdot v + w\cdot(\nabla_u v)。$$

[注意：公理(1)，(2)和(3)確保這樣一個空間度規可能存在；參看練習 12.9]。

(7)對任意矢量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{p}$，由

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})\boldsymbol{p}=\frac{1}{2}[\mathcal{R}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}+\mathcal{R}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}],$$

定義的 Jacobi 算符 $\mathcal{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})$，當作用於空間矢量上時是「自伴」的，即

$$\boldsymbol{v}\cdot[\mathcal{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})\boldsymbol{w}]=\boldsymbol{w}\cdot[\mathcal{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}]$$

對全部空間的 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$；

以及對任意的 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{n}$。

(8)「理想杆」量度的長度可用空間度規計算；「理想鐘」量度世界時 t（或它的某一倍數）；「自由下落粒子」沿∇的短程線運動。［注意：這可認爲是「理想杆」，「理想鐘」和「自由下落粒子」的定義。更完善的理論（例如，廣義相對論；參看 §16.4）將事先預言給定的物理杆和鐘是不是理想的，以及給定的眞實粒子是不是自由下落的。］

注意：另一組等價的公理，可參看 Trautman (1965) 第 106-107 頁。

標準的闡述

下述標準的公理與上面所述是等價的。

(1)存在世界時 t，一組 Cartan 空間坐標 x^j（叫做「Galileo 坐標」），以及 Newton 引力勢 Φ。

(2)質量密度 ρ 通過 Poisson 方程生成 Newton 勢。

$$\nabla^2\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^j}=4\pi\rho。$$

(3)自由下落粒子的運動方程爲

$$\frac{d^2x^j}{dt^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}=0。$$

(4)「理想杆」量度 Galileo 坐標長度；「理想鐘」量度世界時。

練習 12.9 其他公理所允許的空間度規

試證明框 12.4 的幾何公理(1)，(2)和(3)允許我們引入滿足公理(6)的空間度規。提示：在某一事件處取任意空間基 $\{\mathbf{e}_j\}$ 。限定它是正交歸一的，$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \equiv \delta_{jk}$。利用練習12.8(1)中的方法，將此基擴展到全部空時。限定此基在空時中處處有 $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \equiv \delta_{jk}$。然後證明所得的度規滿足公理(6)的相容性條件。

練習 12.10 其他公理禁用的空時度規

試證明在 Newton 空時中不可能構成一個在全部矢量上定義的非退化的空時度規。它與協變微商在下述意義上是相容的，

$$\nabla_u g(n,p) = g(\nabla_u n, p) + g(n, \nabla_u p)。 \tag{12.20}$$

注意：爲了證明這一點，要求掌握第 8 章或第13章的材料；因此，應付它之前應學習第 8 章或第13章。提示：假定存在這樣的 g。用練習12.8的方法證明在 Galileo 坐標系中空間分量 g_{jk} 與空時的位置無關。然後利用此結果和 Galileo 坐標中 $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ 的形式證明 R_{j0k0} 和 $-R_{0jk0}$ 不同，它同流形中與度規和協變微商相容的 Riemann 張量的對稱性［(8.45)式］相衝突。

§12.5 物理學的幾何觀點：評論

一段重要的離題話是適宜的。

普遍協變性原理沒有令人信服的內容

「每一個物理量必定可用一（無坐標的）幾何對象來描述，物理學的定律必定全部可以表述爲這些幾何對象之間的幾何關係」。這一物理觀點，有時稱爲「普遍的協變性原理」，是流行的二十世紀的思潮。但是，它有任何令人信服的內容嗎？根據一種可追溯到 Kretschmann (1917) 的觀點，回答是：沒有，全然沒有。任何原來在一種特殊坐標系中寫出的物理理論都可改造爲幾何的無坐標的語言。Newton 理論是一個很好的例子，它具有等價的幾何闡述和標準闡述（框12.4）。因此，要想篩析出可行的理論和不可行的理論，普遍協變性原理是無用的。

二十世紀的觀點是根據理論的幾何闡述的簡單性來判斷理論

Einstein重力理論是簡單的；Newton 重力理論是複雜的

但是另一種觀點是中肯的。它以稍加改造和稍嫌朦朧的原理的形式構成了强有力的箭：「自然界像理論一樣，當它用無坐標的幾何語言來描述時是簡單的。」*根據這個原理，自然界必定偏愛廣義相對論，而必定厭惡Newton理論。在物理學家構想出的全部理論中，廣義相對論具有最簡單最優美的幾何基礎［三個公理：(1)存在度規；(2)度規由 Einstein 場方程 $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$ 決定；(3)物理學的全部狹義相對論定律在度規的局域 Lorentz 系中成立］。相反，有哪一個

* 顯然，這一原理是擬人化的：二十世紀的物理學家偏愛這種理論，他們甚至發現它們在相關的觀測資料中是有效的。所以，自然界也必定偏愛它們！

聰明得着魔的物理學家會把具有像 Newton 理論這樣複雜的幾何基礎的理論强加給人類呢？

當然，從十九世紀觀點來看，這種作用是顚倒的。它考察坐標闡述來判定理論的簡單性。在 Galileo 坐標中，Newton 理論優美而簡單。在特定坐標系中將度規係數表示爲微分方程，Einstein 場方程（現在它們有10個！）似乎可怕地複雜。

二十世紀幾何的觀點由於它與實驗資料很好地符合一致（參看第 38-40 章），得以流行起來。在第 17章中它將無情地被用來使得 Einstein 場方程似乎是令人非相信不可的。

第十三章 Riemann 幾何：度規作爲一切的基礎

哲學已寫入這部鉅著（我這樣講的意思是指宇宙），它為我們翻看而永遠敞開着，可是除非人們首先學會如何領悟用以書寫它的語言和如何說明用於書寫它的符號，則書卷無法看懂，而其符號是三角形、圓，和其他幾何圖形，沒有它們，在人力所能及的範圍內甚至隻字不懂，沒有它們，人們徬徨於一片黑暗的迷宮之中。

Galileo Galilei (1623)

本章全屬高階。

第9~11章是本章的必要準備。本章作爲以下內容的準備知識是必需的

⑴第14章後半部份（曲率的計算），和

⑵第15章（Bianchi恒等式）的細節而非要旨。

§13.6 （固有參照系）對全部引力理論的應用（第18-40章）都是有用的。

§13.1 狹義相對論的局域有效性影響幾何的新特徵

狹義相對論强加在空時上的限制

自由下落的粒子（短程線）規定並探查了空時的結構。空時是彎曲的。引力是它的曲率的表現形式。迄今，採用 Cartan 翻譯爲幾何語言的 Newton 重力理論，相當滿意。然而，絕對不可接受的東西是 Cartan-Newton 觀點（第12章）的進一步結果：空時分成一些可滑行的薄片，一個薄片上的事件與另一薄片上的事件之間的空時間隔是沒有意義的。

物理學的全部基礎之中，沒有一個比狹義相對論所確立的那些更堅實的了；而狹義相對論的全部課程中，沒有什麼比這些基礎更出色的了。⑴空時遠非可分層，在整個任意小到足以忽略引力生潮效應（「空時曲率」）的區域（「局部區域」），空時是均勻的、各向同性的。⑵無論什麼樣的局域實驗都無法把一個局域慣性系與另一個區別開來。⑶在每一個局域慣性系中光速都是相同的。⑷不可能給出意味着時間間隔的獨立參照系［「無 Newton 層理（stratification）」］。⑸在每一事件及每一鄰近事件之間存在着一個與參照系無關與坐

標無關的空時間隔（「Riemann 幾何」）。(6)空時在性質上總是且處處是局域 Lorentz 的（「這一 Riemann 幾何的局域 Lorentz 特徵」）。

度規：强加限制的手段

什麼樣的數學能給出全部這些物理性質呢？一種度規；一種局域 Lorentz 的度規（§13.2 和 §13.6）。由此得出全部其它物理性質。特別是，度規破壞了Newton空時的分層結構以及它的引力勢和普遍的時間坐標。但是，Newton 重力最深刻的特徵並未破壞：(1)等效原理（置於自由落體運動的短程線描述中，§13.3 和 §13.4）；和(2)空時曲率（由生潮效應量度，§13.5）。

矢量、形式、張量（第 9 章），短程線，平行移動，協變微商（第10章），和曲率（第11章）的摩天大樓建立在碎裂的基礎上（Newton 物理學以及基於 Newton 物理學的短程線定律）。但是現在在問題所在處使用度規，整座摩天大樓可以轉移到新的基礎之上而不出現破綻。只需要作一個改變：短程線定律應按新的相對論性的方式選用；這種方式是基於度規的（§13.3和§13.4）。建立在度規的基礎之上，空時曲率獲得了附加的較强的性質（摩天大樓經過重新裝飾和擴展），這些性質在 §13.5 和第 14, 15 章研究，它們幾乎堅定不移地導致 Einstein 場方程。

§13.2 度　　規

空時度規；彎曲空時度規；局域 Lorentz 的彎曲空時度規。這是眞實物理世界中空時幾何的基礎。因此，稍微花一點時間回顧一下在三種不同的語言中「度規」究竟是什麼。

用三種語言描述度規

用初等幾何的語言，「度規」是一張表，它給出了每一事件與另一事件的間隔（框 13.1 和圖 13.1）。用坐標的語言，「度規」是位置的一組十個函數 $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$，它使表達式

$$\Delta s^2 = -\Delta\tau^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)\Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{13.1}$$

給出了任一事件 x^α 與任一鄰近事件 $x^\alpha + \Delta x^\alpha$ 的間隔。用抽象微分幾何的語言，度規是雙線性機構，$\mathbf{g} \equiv (\ldots \cdot \ldots)$，它從兩個切向矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 產生一個數［「標量積 $\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \equiv (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$」］。

抽象的機構觀點和具體的坐標觀點之間的聯繫是很容易顯示的。令切向矢量

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \Delta x^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \Delta x^\alpha (\partial/\partial x^\alpha)$$

表示兩鄰近事件間的位移。則抽象觀點給出這些事件的間隔爲

$$\Delta s^2 \equiv \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{g}(\Delta x^\mu \mathbf{e}_\mu, \Delta x^\nu \mathbf{e}_\nu) = \Delta x^\mu \Delta x^\nu \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu);$$

（接第310頁）

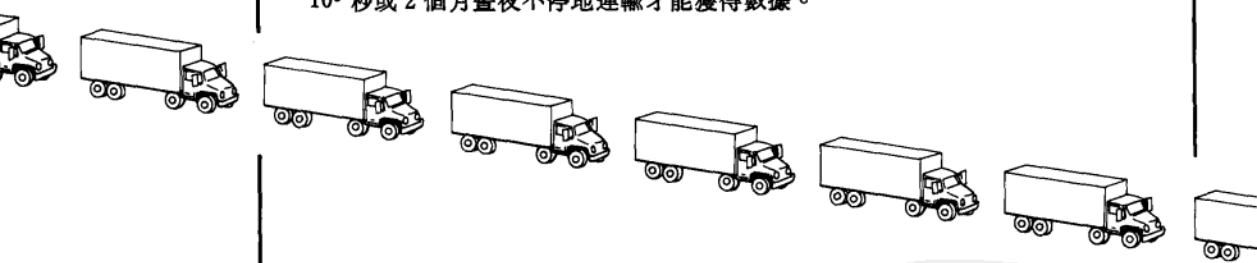
框 13.1 從距離提煉出度規

關於距離的原始數據

設地球的形狀如圖 13.1 所示，由某些主要的可識別點（浮標、船、冰山、燈塔、山峯、旗幟）之間的給定距離所描繪，這些點的總數爲 $n=2\times10^7$ 個。給出的距離總計 $n(n-1)/2=2\times10^{14}$ 個。每印出頁可打印 200 個距離，這

第一點	第二點	距離（海哩）	第一點	第二點
9,316,434	14,117,103	1410.316	9,316,434	
9,316,434	14,117,104	1812.717	9,316,434	
9,316,434	14,117,105	1629.291	9,316	
9,316,434				

意味着 10^{12} 頁，每頁重 6 克，總共 6×10^6 噸數據。以每輛卡車載重 6 噸，這意味着 10^6 輛載運數據的卡車；或以每 5 秒通過一輛卡車，這意味着需要 5×10^6 秒或 2 個月晝夜不停地運輸才能獲得數據。

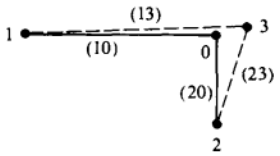


第一次提煉：只是到鄰近點的距離

把行程中走過的基本短邊的距離相加，可得出遠距離點之間的距離。將距離表壓縮，只給出每一點到一百個最近點之間的距離。現在，有$100n=2\times10^9$個距離，或 $2\times10^9/200=10^7$ 頁數據，或 60 噸資料，或 10 輛滿載的卡車。

第二次提煉：用度規表示鄰近點之間的距離

把地球表面理想化爲光滑的。則在任何充分限制的區域內，幾何是Euclid的。這種情況具有令人愉快的結果。即知道鄰近點之間的幾個距離，就足以確定鄰近點之間的全部距離。置點 2 使 (102) 爲直角三角形；



則 $(12)^2=(10)^2+(20)^2$。考慮靠近 0 的點 3。定義

$$x(3)=(13)-(10)$$

和

$$y(3)=(23)-(20)。$$

則距離 (03) 就無須獨立提供；它可由下式* 算出

$$(03)^2=[x(3)]^2+[y(3)]^2。$$

點 4 及其與局域原點 0 的距離 (04) 與此類似。靠近 0 的任意兩點 m 與 n 之間的距離 (mn) 也可同樣地算出：

$$(mn)^2=[x(m-x(n)]^2+[y(\mathrm{m})-y(n)]^2。$$

於是，對於靠近 0 的每一點 m $(m=3,4,\ldots,N+2)$，只要有了（從點 1）到它的距離 $(1m)$ 及（從點 2）到它的距離 $(2m)$，就能算出從靠近 0 的任一

---

* 如果距離 (03) 是任意給定的，則由此引起的四頂點圖將突出平面之外。作爲三維 Euclid 空間的四面體，它的體積由 Niccolo Fontana Tartaglie (1500-1557) 公式給出，當今 (Blumenthal 1953) 已推廣爲

$$\begin{pmatrix}\text{橫跨 (n+1) 個}\\ \text{點的 n 維單形}\\ \text{(simplex) 的}\\ \text{體積}\end{pmatrix}=\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)^{1/2}\frac{1}{n!}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 0 & (01)^2 & (02)^2 & \ldots & (0n)^2\\ 1 & (10)^2 & 0 & (12)^2 & \ldots & (1n)^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & (n0)^2 & (n1)^2 & (n2)^2 & \ldots & 0\end{vmatrix}^{1/2},$$

對於三個點，它化爲標準教科書中三角形面積的 Alexandria 的 Hero 公式（公元 62 年到 150 年），

$$\text{面積}=\{s[s-(01)]\,[s-(02)]\,[s-(12)]\}^{1/2},$$
$$2s=(01)+(02)+(12)。$$

反之，如果四個點都在二維 Euclid 空間之中，則四面體必坍縮到體積爲零。這要求給距離 (03) 提供一個條件。如上，取 (03) 很小並取 (102) 爲直角三角形，則對此條件的討論可簡化。然而，普遍原理與這種近似無關，可直接由推廣的 Hero-Tartaglia 公式導出。在 n 維局域 Euclid 或 Lorentz 空間中，爲了能够計算點 j, k, ...彼此的距離，記下 $(n+1)$ 個基準點 0, 1, 2,..., n, 並知道從這些基準點到另外任一點 j, k,... 的距離就足够了（「用坐標表示鄰近點之間的距離」；由距離數據提煉出度規）。

點 n 到它的距離。用來確定這 N 個鄰近點之間 $N(N-1)/2$ 個距離的這種規定用下面的話重新表述是很有利的：(1)每一點有二個坐標，x 和 y；(2)用這些坐標標準的 Euclid 度規給出距離，即

$$(\Delta s)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2。$$

在「距離幾何學」的基礎上繼續下去（有關這方面的更多內容，參看 Robb 1914 和 1936），就可以從一個小區域（Euclid 的）擴展到一個大區域（非 Euclid 的）。引入一對任意地光滑的處處獨立的曲線坐標 x^k，不僅以點 0 的近鄰表示距離，而且還依靠下式以表面每一點的近鄰表示距離（到另一坐標的必經之處除外；對於二維球至少需要兩小塊這樣的地方）

$$ds^2=g_{jk}dx^j dx^k。$$

因此，脫離鄰近點之間的距離表，現在已從每一點提煉出了五個數（兩個坐標 x^1, x^2，和三個度規係數 g_{11}, $g_{12}=g_{21}$, 和 g_{22}），把以前的數據減少了100/5＝20倍（現在需要三噸數據，或半輛滿載的卡車）。

第三次提煉：度規係數表爲坐標的解析函數

取代在表面的 2×10^7 點的每一點上給出的三個度規係數，用冪級數球諧函數的展開式或具有若干可調係數（例如 100 個）的其他函數形式，給出作爲二個坐標 x^1, x^2 的函數的度規係數。這樣，有關幾何本身的信息（與位於該幾何上 2×10^7 點的坐標不同）就把握在這三百個係數之中了，印出來不過一頁。再見吧載重汽車！扼要地說，度規提供了一種給出任一點及任一其他點之間距離的簡捷方法——但是，它的作用，合理性和含義正在於這些距離也僅在於這許許多多的距離。

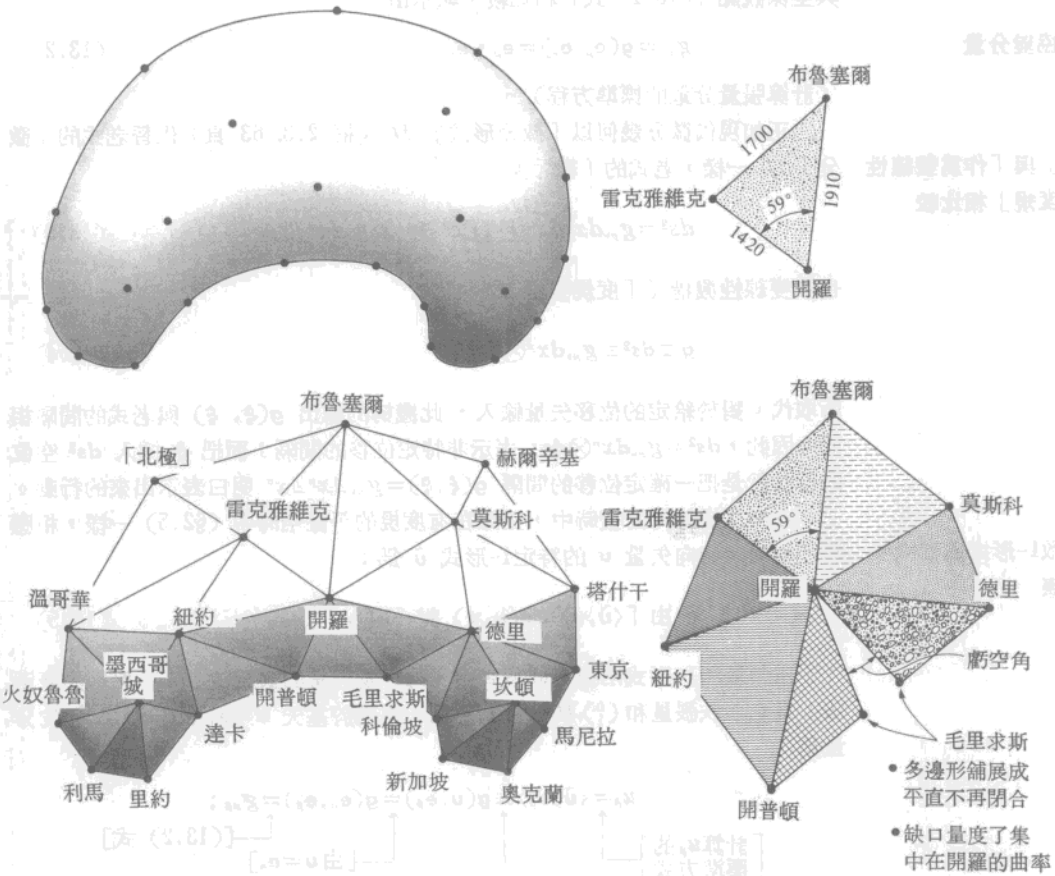


圖 13.1

距離確定幾何。上左：定時施加在地球上的足够大的潮汐力，使之變形爲淚珠狀。下左：此淚珠可由三角形構成的多面體逼近（「骨架幾何」）。使三角形的數目足够多，且每一個三角形的大小足够小，上述近似就可做得任意地好。上右：每一個三角形的幾何是Euclid的：給定三條邊的長度就確定了圖形的全部特徵，包括圖示的角度在內。下右：屬於一給定頂點的各三角形在平直的表面舖展開，不相會合。虧空的角度量度了在淚珠狀地球上集中在該頂點處的曲率數量。對於淚珠的全部頂點，這些虧空角度之和爲 4π。對於具有二維球拓撲的任何圖形，這個「Gauss-Bonnet 定理」都成立；對最簡單的圖形，四面體，四個頂點每個都需要 180° 的虧空角度——3 個三角形×每一個三角形的 60°=180° 虧空。簡要的說，在給定的骨架幾何的近似下，淚珠的形狀取決於它的 50 個可以看見的邊的長度，加上例如 32 個隱藏在圖後的邊的長度，或取決於總共 82 個邊的長度，別無其他（「距離決定幾何」）。「度規」告訴我們每一點與每一鄰近點之間的距離。如果火山活動升高了雷克雅維克，則冰島首都與鄰近各點之間的距離將相應地增大；距離再一次顯示了形狀。反之，在地球上冰島附近不存在大的隆起，地球現在也不具有淚珠形狀，通過在分布得足够好的網點上，分析從一點到另一點的距離的圖案，就可以毫不含糊地確立下來，除距離測量之外無需作任何觀測。

與坐標觀點［(13.1) 式］相比較，顯示出

度規的協變分量

$$g_{\mu\nu}=\mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu,\mathbf{e}_\nu)=\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu \tag{13.2}$$

（計算張量分量的標準方程）。

正如現代微分幾何以「微分形式」df（框 2.3, 63 頁）代替老式的「微分」df 一樣，老式的「線元」

「線元」與「作爲雙線性機構的度規」相比較

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=\text{（「}x^\mu\text{ 和 }x^\mu+dx^\mu\text{ 的間隔」）} \tag{13.3}$$

也被雙線性機構（「度規張量」）

$$\mathbf{g}\equiv d\mathbf{s}^2\equiv g_{\mu\nu}d\mathbf{x}^\mu\otimes d\mathbf{x}^\nu \tag{13.4}$$

所取代。對於給定的位移矢量輸入，此機構的輸出 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})$ 與老式的間隔相同。因此，$d\mathbf{s}^2=g_{\mu\nu}d\mathbf{x}^\mu\otimes d\mathbf{x}^\nu$ 表示非特定位移的間隔；而把 $\boldsymbol{\xi}$ 插入 $d\mathbf{s}^2$ 空位的行動就是把一確定位移的間隔 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=g_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu$ 明白表示出來的行動。

在有度規的彎曲空時中，正像在有度規的平直空時中（§2.5）一樣，相應於任何給定切向矢量 $\boldsymbol{u}$ 的特定1-形式 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 爲：

度規導致1-形式與切向矢量的對應

$$\tilde{\boldsymbol{u}}\text{ 由「}\langle\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{v}\rangle\equiv\mathbf{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\text{ 對一切 }\boldsymbol{v}\text{」定義} \tag{13.5}$$

（「在矢量和1-形式兩種不同型式中，同一物理量的表示法」；「對應的表示法」爲 $\binom{1}{0}$ 秩張量和 $\binom{0}{1}$ 秩張量）。例：相應於基矢 $\boldsymbol{u}=\mathbf{e}_\alpha$ 的1-形式 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 的分量爲

$$u_\beta=\langle\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{e}_\beta\rangle\equiv\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{e}_\beta)=\mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta)=g_{\alpha\beta}\text{；}$$

［計算 u_β 的標準方式］——［定義式(13.5)］

［由 $\mathbf{u}=\mathbf{e}_\alpha$］

［(13.2) 式］

因此，

$$g_{\alpha\beta}\omega^\beta\text{ 是相應於 }\mathbf{e}_\alpha\text{ 的1-形式 }\tilde{\mathbf{e}}_\alpha\text{。} \tag{13.6}$$

也像在平直空時中（§3.2）那樣，一個張量可以接受一個矢量或1-形式到任何給定空位之中

$$\mathbf{S}(\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{v})\equiv\mathbf{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{v})\text{。} \tag{13.7}$$

降低指標

等價地，用分量語言，張量的指標可以用度規的協變分量來降低

$$S_\alpha{}^\beta{}_\gamma=\mathbf{S}(\mathbf{e}_\alpha,\boldsymbol{\omega}^\beta,\mathbf{e}_\gamma)=\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{e}}_\alpha,\boldsymbol{\omega}^\beta,\mathbf{e}_\gamma)=\mathbf{S}(g_{\alpha\mu}\boldsymbol{\omega}^\mu,\boldsymbol{\omega}^\beta,\mathbf{e}_\gamma)=g_{\alpha\mu}S^{\mu\beta}{}_\gamma\text{。} \tag{13.8}$$

［$S_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ 的定義］——［由 (13.6) 式］

在每一事件處，基矢 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 可以任意選取。因此，度規的相應分量是完全任意的（雖則由於對稱：$g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$）。但混合分量 $g^\alpha{}_\beta$ 並非任意。特別是，(13.5) 和 (13.7) 式意味着

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v})\equiv\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v})\equiv\langle\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v}\rangle。\tag{13.9}$$

由此得出，混合表示的度規張量與單位矩陣相同：

度規的混合分量和逆變分量

$$g^\alpha{}_\beta\equiv\mathbf{g}(\omega^\alpha,\mathbf{e}_\beta)\equiv\langle\omega^\alpha,\mathbf{e}_\beta\rangle=\delta^\alpha{}_\beta。\tag{13.10}$$

度規的這個性質又確定了度規的逆變分量

$$g^{\alpha\mu}g_{\mu\beta}=g^\alpha{}_\beta=\delta^\alpha{}_\beta;\tag{13.11}$$

（[降低 $g^{\alpha\mu}$ 的一個指標]）

即

$$\|g^{\alpha\beta}\|\text{ 是 }\|g_{\alpha\beta}\|\text{ 的逆矩陣。}\tag{13.12}$$

這種倒易性使我們能以 $g^{\alpha\beta}$ 去消除張量指標的降低（即升高指標）：

升高指標

$$S^{\mu\beta}{}_\gamma=\delta^\mu{}_\alpha S^{\alpha\beta}{}_\gamma=g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}S^{\alpha\beta}{}_\gamma=g^{\mu\nu}S_\nu{}^\beta{}_\gamma。\tag{13.13}$$

後兩段可簡要概括爲：

(1) $g^\alpha{}_\beta=\delta^\alpha{}_\beta$；
(2) $\|g^{\alpha\beta}\|=\|g_{\alpha\beta}\|^{-1}$；
(3) 張量指標可用 $g_{\alpha\beta}$ 降低；
(4) 張量指標可用 $g^{\alpha\beta}$ 升高。

度規必須是局域 Lorentz 的

在這種度規和指標移來移去的公式中，有一個重要的問題需要注意：人們怎樣才能說度規是局域 Lorentz 的而不是局域 Euclid 的或局域的什麼別的東西呢？當然，一個判據（必要；但不充分！）是維數——局域 Lorentz 空時必須有四維。（回憶 §1.2 確定維數的方法。）因此限於注意四維流形。還應該要求什麼別的呢？必須要求在每一事件 $\mathcal{P}$ 處存在一個正交歸一系（一組正交歸一的基矢 $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$），其中度規的分量具有平直空時的形式

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\equiv\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\cdot\mathbf{e}_{\hat{\beta}}=\eta_{\alpha\beta}\equiv\text{對角的 }(-1,1,1,1)。\tag{13.14}$$

對此的檢驗是直截了當的（練習 13.1）。(1)尋求一類時矢量 $\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}<0$)。如果不存在，則空時不是局域 Lorentz 的。如果找到一個，則(2)檢驗全部垂直於 $\mathbf{u}$ 的非零矢量 $\mathbf{v}$。如果它們全都是類空矢量（$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}>0$），則空時是局域 Lorentz 的。要不然則不是。

練習

練習 13.1 檢驗空時是否局域 Lorentz 的

試證明，爲檢驗空時是否局域 Lorentz 的，上述兩個步驟的方法是有效的：即證明如果該方法說「是」，則存在一個正交歸一基，且在所述事件處 $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=\eta_{\alpha\beta}$；如果它說「不」，則不存在這種基。

練習 13.2 度規練習

一四維流形，坐標爲 v, r, θ, ϕ, 線元（老符號）爲

$$ds^2=-(1-2M/r)dv^2+2dvdr+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,,$$

相應的度規（新符號）爲

$$\mathbf{ds}^2=-(1-2M/r)\mathbf{dv}\otimes\mathbf{dv}+\mathbf{dv}\otimes\mathbf{dr}+\mathbf{dr}\otimes\mathbf{dv}+r^2(\mathbf{d\theta}\otimes\mathbf{d\theta}+\sin^2\theta\mathbf{d\phi}\otimes\mathbf{d\phi})\,,$$

式中M爲常數

(a) 求出在此坐標系中度規的「協變」分量 $g_{\alpha\beta}$ 和「逆變」分量 $g^{\alpha\beta}$. [答案：$g_{vv}=-(1-2M/r)$, $g_{vr}=g_{rv}=1$, $g_{\theta\theta}=r^2$, $g_{\phi\phi}=r^2\sin^2\theta$; 所有其他的 $g_{\alpha\beta}$ 均爲零；$g^{vr}=g^{rv}=1$, $g^{rr}=(1-2M/r)$, $g^{\theta\theta}=r^{-2}$, $g^{\phi\phi}=r^{-2}\sin^{-2}\theta$ 所有其他的 $g^{\alpha\beta}$ 均爲零。]

(b) 由下式定義一標量場 t

$$t\equiv v-r-2M\ \ln\left[(r/2M)-1\right]。$$

試問1-形式 $\tilde{\mathbf{u}}\equiv\mathbf{d}t$ 的協變分量和逆變分量（u_α 和 u^α）是什麼？相應矢量的長度平方 $\mathbf{u}^2\equiv\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ 是什麼？試證明在 $r>2M$ 區域內 $\mathbf{u}$ 是類時的。[答案：$u_v=1$, $u_r=-1/(1-2M/r)$, $u_\theta=u_\phi=0$; $u^v=-1/(1-2M/r)$, $u^r=0$, $u^\theta=u^\phi=0$; $\mathbf{u}^2=-1/(1-2M/r)$。]

(c) 求出在 $r>2M$ 區域與 $\mathbf{u}$ 正交的最普遍的非零矢量 $\mathbf{w}$，並證明它是類空的。由此得出，在 $r>2M$ 區域，空時是局域 Lorentz 的。[答案：因爲 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}=w_\alpha u^\alpha=-w_v/(1-2M/r)$, w_v 應爲零，但 w_r, w_θ, w_ϕ 是任意的，而 $\mathbf{w}^2=(1-2M/r)w_r^2+r^{-2}w_\theta^2+r^{-2}\sin^{-2}\theta w_\phi^2>0$。]

(d) 設 t, r, θ, ϕ 是空時的新坐標。求出在該坐標系中的線元。[答案：這是 "Schwarzschild" 線元

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-2M/r}+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2。$$

]

(e) 求出在 $r>2M$ 區域內 $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=\eta_{\alpha\beta}$ 的正交歸一基。[答案；$\mathbf{e}_{\hat{0}}\equiv(1-2M/r)^{-1/2}\partial/\partial t$, $\mathbf{e}_{\hat{r}}\equiv(1-2M/r)^{1/2}\partial/\partial r$, $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}\equiv r^{-1}\partial/\partial\theta$, $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}=(r\sin\theta)^{-1}\partial/\partial\phi$。]

§ 13.3 彎曲空時幾何的短程線與局域 Lorentz 幾何的直線之間的一致性

關於「度規」的數學機制和物理意義還可以說得更多，但是值得注意的是一個迫在眉睫的爭論。度規（或空時間隔）與短程線（或試驗粒子的世界線）

有什麼關係？答案是：等於同一物理對象（「試驗粒子的世界線」）的兩個數學對象（「局域 Lorentz 系中的直線」和「全部彎曲空時幾何的短程線」），必須彼此相等（「自洽性條件」）。作爲闡述這個自洽性要求的第一種方法，在給定事件 $\mathcal{P}_0$ 的領域內，考查試驗粒子世界線的這兩種數學表示。局域 Lorentz 表示說：

直線的局域Lorentz描述

「在 $\mathcal{P}_0$ 選取一局域 Lorentz 系。［按練習 13.3 的說明，這樣一個局域 Lorentz 系是最接近在$\mathcal{P}_0$的總體Lorentz系的；即它是一個坐標系，其中

$$g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}_0)=\eta_{\alpha\beta}\text{（平直空時度規）}，\tag{13.15a}$$

$$g_{\alpha\beta,\tau}(\mathcal{P}_0)=0,\tag{13.15b}$$

$$g_{\alpha\beta,\tau\delta}(\mathcal{P}_0)\neq 0\text{ 特殊情形除外，例如在平直空間。］}\tag{13.35c}$$

在該系中世界線具有零加速度

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=0\text{ 在 }\mathcal{P}_0\text{（「直線方程」）}，\tag{13.16}$$

式中 τ 是由粒子的鐘測出的原時。」

短程線表示說：

直線的短程線描述

「在局域 Lorentz 系中，正像在任何坐標系中一樣，世界線滿足短程線方程

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha{}_{\beta\tau}\left(\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^\tau}{d\tau}\right)=0\tag{13.17}$$

（τ 是仿射參量，因爲它是由試驗粒子的鐘測出的時間）。」

對於試驗粒子的全部選擇（在 $\mathcal{P}_0$，$dx^\alpha/d\tau$ 的全部選擇），這兩種表示的自洽性要求

自洽條件：在局域 Lorentz 系 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\tau}=0$

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\tau}(\mathcal{P}_0)=0\text{ 在任何局域 Lorentz 系}\ [\text{在 }\mathcal{P}_0\text{ 滿足 (13.15) 式的坐標系}]\text{ 中；}\tag{13.18}$$

即它要求每一個局域 Lorentz 系是局域慣性系。（關於局域慣性系可參看§11.6）在這樣一個參照系中，「引力」的全部局域效應都消失了。這是(13.18)式物理上的簡述。

當人們要求短程線（由 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\tau}$ 導出）和局域 Lorentz 幾何的直線（$g_{\mu\nu}$）等同時，並不需要以特定坐標系的語言來闡述。坐標的局域 Lorentz 特殊化可能是查看物理學的最直接方式（「引力無局域效應」），但却並不是以其全部普遍性和威力來闡明基本數學要求的正確方式。正確的方式要求

自洽性的重新表述：$\nabla\mathbf{g}=0$

$$\nabla\mathbf{g}=0\text{（「}\mathbf{g}\text{ 和 }\nabla\text{ 的相容性」）。}\tag{13.19}$$

用任意坐標系的語言來表述，這個要求是

$$g_{\alpha\beta;\tau}\equiv\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\tau}-\Gamma^\mu{}_{\alpha\tau}g_{\mu\beta}-\Gamma^\mu{}_{\beta\tau}g_{\alpha\mu}=0。\tag{13.19'}$$

這種協變性要求應在每一個坐標系中得到滿足，這是由它在一個坐標系即一局域 Lorentz 系中成立導出的。（在 $\mathcal{P}_0$ 的局域 Lorentz 系中，此式中第一項和後兩項應分別爲零——即物理學要求它們爲零。）由 $\nabla \mathbf{g}=0$ 可導出抽象的鏈式規則

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})=(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}) \tag{13.20}$$

用度規表示 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$

（練習13.4）並可導出在任何參照系中以(1)度規係數 $g_{\alpha\beta}=\mathbf{e}_{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\beta}$ 和(2)該參照系的協變對易係數

$$c_{\alpha\beta\gamma}\equiv c_{\alpha\beta}{}^{\mu}g_{\mu\gamma}\equiv\langle\omega^{\mu},[\mathbf{e}_{\alpha},\mathbf{e}_{\beta}]\rangle g_{\mu\gamma} \tag{13.21}$$

表示的下述聯絡係數的方程

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma}\ (\Gamma_{\mu\beta\gamma}\text{ 的定義}),\tag{13.22}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\beta\gamma}&=\frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma}+c_{\mu\beta\gamma}+g_{\mu\gamma,\beta}+c_{\mu\gamma\beta}-g_{\beta\gamma,\mu}-c_{\beta\gamma\mu})\\&=\frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma}+g_{\mu\gamma,\beta}-g_{\beta\gamma,\mu})\text{ 在任何坐標系。}\end{aligned}\tag{13.23}$$

（見練習 13.4）

方程（13.23）是使彎曲空時的短程線與局域 Lorentz 幾何的直線相符合所要求的聯絡係數的方程。並且，它們是唯一確定的；沒有聯絡係數的其他選擇能起這種作用！

總結：在具有局域 Lorentz 度規的彎曲空時中，下述似乎不同的表述實際上是等價的：(1)彎曲空時的短程線與局域 Lorentz 幾何的直線相符合；(2)每一個局域 Lorentz 系〔具有 $g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}_0)=\eta_{\alpha\beta}$，$g_{\alpha\beta,\gamma}(\mathcal{P}_0)=0$ 的坐標〕是一局域慣性系 $[\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0)=0]$；(3)度規和協變微商滿足相容性條件 $\nabla \mathbf{g}=0$；(4)協變微商遵循鏈式規則（13.20）式；(5)聯絡係數按（13.23）式的方式取決於度規。第六種等價的表述在下一節導出，爲(6)彎曲空時的短程線與致極原時的世界線重合。

練習

練習 13.3 局域 Lorentz 的數學表示

由定義，在給定事件 $\mathcal{P}_0$ 的局域 Lorentz 系是在該處最接近於整體 Lorentz 系的。因此，它應是具有 $g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0)=\eta_{\mu\nu}$，且在 $\mathcal{P}_0$ 盡可能多的 $g_{\mu\nu}$ 的微商爲零的坐標系。試證明該處存在坐標系，其中 $g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0)=\eta_{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu,\rho}(\mathcal{P}_0)=0$，但一般說來 $g_{\mu\nu,\rho\sigma}(\mathcal{P}_0)$ 不爲零。因此，這種坐標是局域 Lorentz 系的數學表示。［提示：設 $\{x^{\alpha'}(\mathcal{P})\}$ 是局域 Lorentz

系，設兩者的原點均在 $\mathcal{P}_0$，把兩者之間的坐標變換展爲 x^μ 的冪次

$$x^{\alpha'}=M^{\alpha}{}_{\mu}x^{\mu}+\frac{1}{2}N^{\alpha}{}_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}+\frac{1}{6}P^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}x^{\mu}x^{\nu}x^{\rho}+\cdots;$$

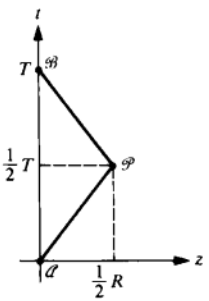
再用變換矩陣 $L^{\alpha'}{}_{\mu}\equiv\partial x^{\alpha'}/\partial x^{\mu}$ 得出用 $g_{\alpha'\beta'}$ 及其微商以及常數 $M^{\alpha}{}_{\mu}$, $N^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, $P^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}$ 表示的 $g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0)$, $g_{\mu\nu,\rho}(\mathcal{P}_0)$ 和 $g_{\mu\nu,\rho\sigma}(\mathcal{P}_0)$。試證明無論 $g_{\alpha'\beta'}$ 是什麼（只要它是非奇異的，則存在 $g^{\alpha'\beta}$！），總可以選取 16 個常數 $M^{\alpha}{}_{\mu}$ 使 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$（十個條件）；選取 $4\times10=40$ 個常數 $N^{\tau}{}_{\mu\nu}$ 使 $10\times4=40$ 個 $g_{\mu\nu,\rho}(\mathcal{P}_0)$ 爲零；但一般說來無法選取 $4\times20=80$ 個 $P^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}$ 使 $10\times10=100$ 個 $g_{\mu\nu,\rho\sigma}$ 爲零。］

練習 13.4　g和∇之間相容性的結論

(a) 由相容性條件 $\nabla\mathbf{g}=0$ 導出鏈式規則 (13.20) 式。

(b) 由相容性條件 $\nabla\mathbf{g}=0$ 和定義式 (13.21) 與 (13.22)，導出聯絡係數的 (13.23) 式。［答案：見練習 8.15, 216 頁。］

§13.4　短程線作爲致極原時的世界線



在局域 Lorentz 系中，很容易區分筆直的與不直的世界線。放置Lorentz系並定其方位使世界線的起點 $\mathcal{A}$ 位於原點，終點 $\mathcal{B}$ 位於 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=T$, 作當不直的世界線的一個例子，考慮勻速從 $\mathcal{A}$ 到坐標爲 $(\frac{1}{2}T;\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}R)$ 的 $\mathcal{P}$ 點，再從 $\mathcal{P}$ 以勻速到$\mathcal{B}$點的通路。從始到終，原時的間隔(lapse)（「世界線的長度」）爲

$$\tau=(T^2-R^2)^{1/2}。$$

因此，原時間隔從它的直線值減少了，並且無論R選在哪裏都是減少的，除非R爲零或直線值 $R=0$，就這個簡單的非直曲線而論，與任何其他非直曲線一樣：$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之間的原時間隔小於直線的間隔（練習 6.3）。因此，在平直空時，世界線的致極長度是直線性的標誌。

在平直空時，直線具有致極長度

眞實物理世界彎曲空時的任何局部區域在性質上是 Lorentz 的。在此局域 Lorentz 幾何中，很容易建立 Lorentz 坐標，並作致極長度的分析，以剛好大致說明直線和非直線之間的區別：

彎曲空時中的致極長度

$$\tau=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}d\tau=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(-\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu})^{1/2}$$

$$=\begin{pmatrix}\text{極大值，對於直線}\\ \text{與直線的任何變形}\\ \text{相比較而言}\end{pmatrix}。\qquad(13.24)$$

對直線性的這種檢驗，可以沿着世界線分別在每一個局域 Lorentz 區域中進行，或者以更高的效率可以同時對許許多多局域 Lorentz 區域進行，即在端點 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分開很遠的區域內沒有單一的 Lorentz 系能把兩者都包括在內。作這種分析，必須放棄局域 Lorentz 坐標。因此，引入普遍的曲線坐標系並得出

$$\tau=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}d\tau=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(-g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu})^{1/2}$$

$$=\begin{pmatrix}\text{極值，對於在其路徑上每個局域 Lorentz}\\ \text{系中直的類時世界線與這條世界線的任何}\\ \text{「鄰近」的變形相比較而言}\end{pmatrix}。\qquad(13.25)$$

在眞實的世界裏，τ 爲極值的路徑是每個局域 Lorentz 系中的直線，它必須是空時的短程線。

注意，(13.24) 式的「極大」一詞在 (13.25) 式的表述中已由「極值」取代。當 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分開很遠時，它們可通過具有不同原時間隔的若干條不同的短程線聯繫起來（圖 13.2）。每一條類時短程線極值 τ 是相對於它自己附近的變形而言的，但此極值並不必須是極大值。當若干條不同的短程線把兩個事件聯繫起來時，有典型性的一條短程線並不是局域極大值（「山峰」），而是如圖 13.2 或圖 13.3 中的鞍形點（「山谷」）。

證明致極長度的曲線爲短程線

局域直線（極值 τ 的線）和彎曲空時短程線之間的一致性，要求類時短程線具有致極固有長度。如果是這樣，則 $\mathcal{A}$（該處 $\lambda=0$）和 $\mathcal{B}$（該處 $\lambda=1$）間使 τ 爲極值的任何曲線 $x^{\mu}(\lambda)$ 應滿足短程線方程。通過比較時間，選取一條懷疑是否短程線的曲線，使之稍稍地任意變形：

$$\begin{aligned}&\text{原來的曲線，}x^{\mu}=a^{\mu}(\lambda);\\&\text{變形的曲線，}x^{\mu}=a^{\mu}(\lambda)+\delta a^{\mu}(\lambda)。\end{aligned}\qquad(13.26)$$

由此檢驗致極曲線。沿着每條曲線，原時間隔爲

$$\tau=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}d\tau=\int_0^1\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right)^{1/2}d\lambda。\qquad(13.27)$$

對確定的 λ，從一條曲線到另一條，度規係數 $g_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\lambda)]$ 的差別爲

$$\delta g_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\nu}[a^{\alpha}(\lambda)+\delta a^{\alpha}(\lambda)]-g_{\mu\nu}[a^{\alpha}(\lambda)]=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\delta a^{\sigma}(\lambda);\qquad(13.28)$$

而切向矢量的分量 $dx^{\nu}/d\lambda$ 的差別爲

$$\delta\left(\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right)\equiv\frac{d(a^{\nu}+\delta a^{\nu})}{d\lambda}-\frac{da^{\nu}}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}(\delta a^{\nu})。\qquad(13.29)$$

對確定的 λ, $g_{\mu\nu}$ 和 $dx^\nu/d\lambda$ 的這些改變引起了 (13.27) 式中原時間隔的相應改變：

$$\delta\tau=\int_0^1\left\{\frac{-g_{\mu\nu}(da^\mu/d\lambda)d(\delta a^\nu)/d\lambda-\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma}\delta a^\sigma)(da^\mu/d\lambda)(da^\nu/d\lambda)}{[-g_{\tau s}(da^\tau/d\lambda)(da^s/d\lambda)]^{1/2}}\right\}d\lambda\,。$$

分部積分第一項。因爲兩條路徑都必須經過 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ (對 $\lambda=0$ 和 $\lambda=1$, $\delta a^\mu=0$)，所以可刪去端點項。於是得

$$\delta\tau=\int_{\lambda=0}^{\lambda=1}f_\sigma(\lambda)\delta a^\sigma\left[-g_{\tau s}\frac{da^\tau}{d\lambda}\frac{da^s}{d\lambda}\right]^{1/2}d\lambda\,。\qquad(13.30)$$

式中被積函數中的 f_σ (「力項」) 是四個表達式的縮寫

$$f_\sigma(\lambda)=\frac{1}{\left[-g_{\tau s}\frac{da^\tau}{d\lambda}\frac{da^s}{d\lambda}\right]^{1/2}}\frac{d}{d\lambda}\frac{g_{\sigma\nu}\frac{da^\nu}{d\lambda}}{\left[-g_{\tau s}\frac{da^\tau}{d\lambda}\frac{da^s}{d\lambda}\right]^{1/2}}-\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{da^\mu}{d\lambda}\frac{da^\nu}{d\lambda}}{\left[-g_{\tau s}\frac{da^\tau}{d\lambda}\frac{da^s}{d\lambda}\right]}\,。\qquad(13.31)$$

當這四個量 f_σ 乘以 δa^σ 均爲零時，便得到了極值，且對於偏離最佳路徑 $x^\sigma=a^\sigma(\lambda)$ 的每一個一級變形 $\delta a^\sigma(\lambda)$，一級改變 $\delta\tau$ 爲零。於是得出了確定致極世界線的四個條件

$$f_\sigma(\lambda)=0\,。\qquad(13.32)$$

(關於致極的另一種觀點在圖 13.3 中說明。)

這四個方程是充分的，但由於一種「念珠議論 (bead argument)」(對於像念珠那樣，僅僅沿現存世界線滑行各點所引起的任何一組改變，$\delta\tau$ 自動爲零) 它們是不獨立的。純粹的「念珠滑動」的作用意味着微小變化

$$\delta a^\sigma(\lambda)=h(\lambda)\frac{da^\sigma}{d\lambda}\,,\qquad(13.33)$$

式中 $h(\lambda)$ 是沿着世界線的位置的任意函數 (「此處比彼處滑動得多」)。已經知道這種作用不會改變 τ，可以確保，當把(13.33)式的 δa^σ 代入，(13.30)式的被積函數應爲零；並且，無論選擇任何「滑動大小」因子 $h(\lambda)$，它均應爲零。這個條件意味着並要求標量積 $f_\sigma da^\sigma/d\lambda$ 應自動爲零；或換言之

$$f_\sigma\frac{da^\sigma}{d\tau}=0\,。\qquad(13.34)$$

無論是否討論最佳世界線，這個論證都適用，上式都成立。無論世界線是不是自由試驗粒子的可以容許的軌跡 (原時致極間隔的軌跡)，這類方程通稱爲恒

等式。(13.34)式在空時短程線領域是一個重要的恒等式，它是第15章Bianchi恒等式的適當的先驅：Bianchi 恒等式在空時曲率領域是最重要的恒等式。

利用「沿世界線滑動 λ 值」的自由度，用物理上更爲重要的原時參量本身來代替任意參量 λ，

$$d\tau=\left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^{\gamma}}{d\lambda}\frac{da^{\delta}}{d\lambda}\right]^{1/2}d\lambda。\tag{13.35}$$

圖 13.2

恒星穿過盤狀星系的平面往復振盪，可作爲兩事件 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 以多於一條短程線相聯繫的例子。上左：從邊緣看銀河系，劃出了（虛線）所述恒星的路徑，它涉及參與鄰近「盤狀星系」公轉且與之協同運動的局域參照系。上右：根據 Newton 引力理論，恒星所感受到的等效勢類似於從斜面滾下再從另一斜面滾上的球所經歷的勢（在此處所用的單位中「自由落向星系平面」的加速度 $g=\frac{1}{2}$）。三個主要的參照系：把兩個事件 $\mathcal{A}$（$t=0$ 時的銀河系平面）和 $\mathcal{B}$（$t=2$ 時的銀河系平面）聯繫起來的可能和不可能的恒星世界線。右：恒星從銀河系的平面以足够的速度拋出，使之正好在 $t=2$ 回到該平面上。左：以一半的速度把恒星拋出，它將在一半的時間內返回（與簡諧振盪的行爲相反，但與銀河系的 v 形狀的勢相符！），於是，在規定的時間內，能在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之間作兩次漂移。中：一條可以設想的世界線（可設想爲火箭推進！）但不是短程線。底：把這些與任何其他可近似地表爲下式的路徑比較

$$z=a_1\sin(\pi t/2)+a_2\sin(2\pi t/2)。$$

式中兩個可調整的參量 a_1 和 a_2 提供了兩維「函數空間」的坐標（近似於要求用來描述聯繫 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的全部可接受世界線所需的無限維函數空間；注意在右側中心系中單項Fourier近似與自由落體的嚴格拋物線定律之間的比較；左側中心系類似，其中兩條非常接近一致的曲線在圖中分開畫了）。細節：在廣義相對論中，取聯繫 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的任意世界線，計算其原時間隔，對另外的世界線重複一遍，則當一條給定的世界線的原時相對於全部鄰近世界線爲極值時，就說它代表一種可能的運動（「短程線」）。在 Newton 近似中，原時間隔和坐標時間隔（$t_{\mathcal{B}}-t_{\mathcal{A}}$）之間的差異是在下述「作用量積分」（在「單位質量基礎」上）形式中應注意的全部內容

$$I=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}[\text{（動能）}-\text{（勢能）}]\,dt$$

$$=\int\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2-|z|\right]dt$$

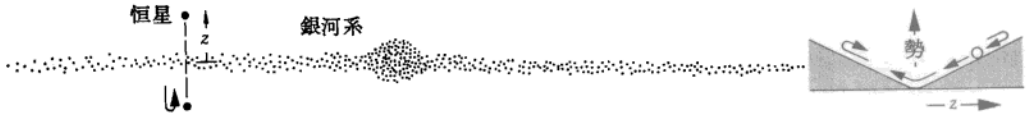
（極大值或其他極值，在原時中意味着極小值，或相應於作用量 I 的其他極值）。當 $|a_2|<\frac{1}{2}|a_1|$（一次漂移運動），積分給出

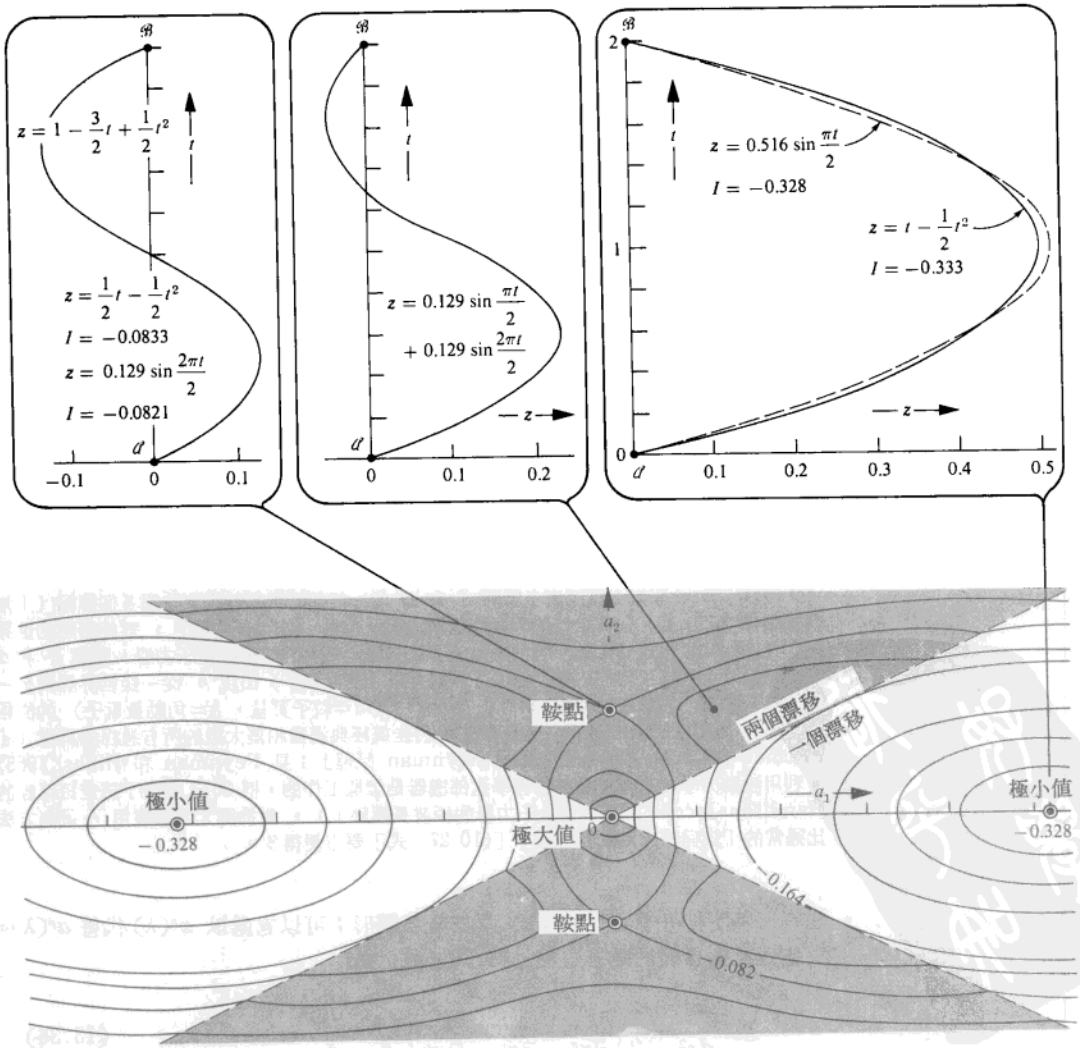
$$I=(\pi^2a_1^2/8)-(4|a_1|/\pi)+(\pi^2a_2^2/2),$$

當 $|a_2|>\frac{1}{2}|a_1|$（兩次漂移運動），爲

$$I=(\pi^2a_1^2/8)+(\pi^2a_2^2/2)-(4|a_2|/\pi)-(a_1^2/\pi|a_2|)。$$

一次漂移運動使作用量爲極小（原時間隔爲極大）。兩次漂移運動使作用量爲極值但不是極小（「鞍點」，地形學中的「山谷」）。Choquard (1955) 給出了其他的力學問題的例子，其中有一個以上的極值。Morse (1934) 以及 Morse 和 Gairns (1969) 給出了一個定理，把各類鞍點的數目與極大和極小值的數目聯繫了起來（「大規模變分計算的臨界點定理」）。


恒星
z
銀河系
勢
z


$z = 1 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2$
$z = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2$
$I = -0.0833$
$z = 0.129 \sin \frac{2\pi t}{2}$
$I = -0.0821$
$z = 0.129 \sin \frac{\pi t}{2}$
$+ 0.129 \sin \frac{2\pi t}{2}$
$z = 0.516 \sin \frac{\pi t}{2}$
$I = -0.328$
$z = t - \frac{1}{2}t^2$
$I = -0.333$
鞍點
兩個漸移
一個漸移
極小值
−0.328
極大值
0
鞍點
極小值
−0.328
−0.164
−0.082

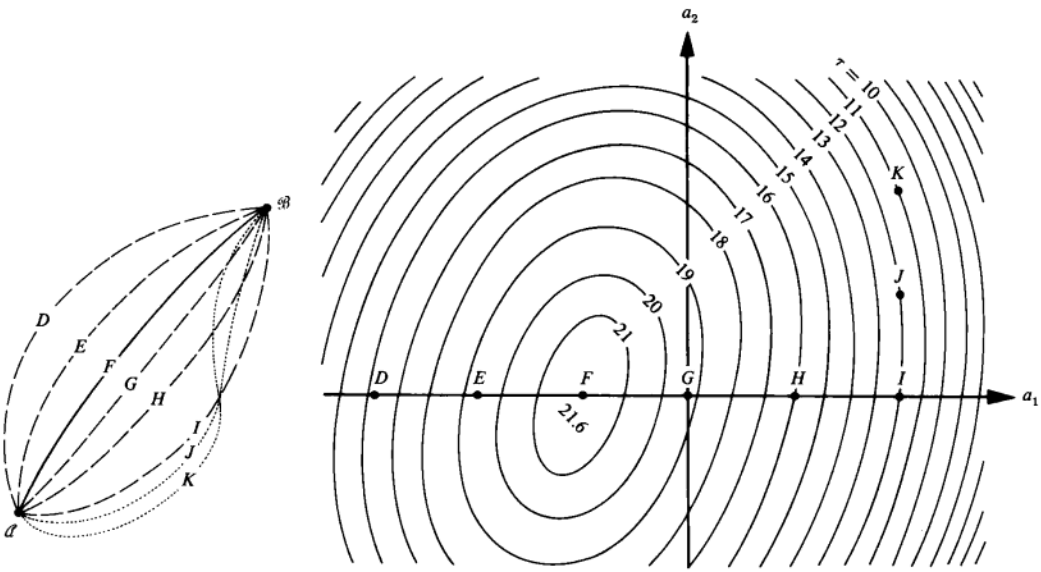


圖 13.3
適當選擇世界線使原時間隔爲極值。左：空時；從 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的原時間隔取極值的世界線 F 與其他世界線相比較。圖中所繪的特定世界線通過兩個 "Fourier 振幅" a_1 和 a_2 剛好與基準世界線 G 相區別

$$\delta a^\mu(\lambda)=a_1\sin(\pi\lambda)+a_2\sin(2\pi\lambda)\,,$$

式中 λ 的任意尺度及其零值調整到使 $\lambda(\mathscr{A})=0$, $\lambda(\mathscr{B})=1$。

右：「路徑空間」。此空間的坐標是 Fourier 振幅 a_1 和 a_2。只畫出了這兩個振幅（「兩維」），原則上爲了表示聯繫 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的一般類時世界線需要無窮多個振幅（「無窮維路徑空間」）。任何給定的等高線經過全部這些點（在路徑空間），對此相應的世界線(在空時中)獲得了指定的原時間隔 τ。上述描述是經典的；根據量子力學，聯繫 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的全部類時世界線以相同的幾率幅（「多過程平等的原理」）出現，從一條世界線到另一條，唯一的不同在於複幾率幅 $\exp(-im\tau/\hbar)$ (m=粒子質量，$\hbar$=角動量量子) 的位相。然而，對這些幾率幅求和妨礙了除去與最佳或經典過程相差太遠的所有過程的貢獻（「Fresnel 波帶」；「對過程求和的 Feynman 原理」；見 Feynman 和 Hibbs, 1965)。利用波動力學的基礎可說明物理學這部機器是怎樣工作的，框 25.3 說明了確定短程線的 Hamilton-Jacobi 方法（「量子力學的短波長極限」），對於絕大多數應用，這個方法比通常的「短程線二階微分方程」[(10.27) 式] 要方便得多。

注視一特定世界線 $x^\mu=a^\mu(\lambda)$ 及其全部變形；可以處處以 $x^\mu(\lambda)$ 代替 $a^\mu(\lambda)$。於是致極世界線的微分方程 (13.32) 式化爲

$$g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0\,。\qquad(13.36)$$

暫且撇開不談，注意恒等式（13.34）現在是由下式的微商（相對於τ）得出的

$$g_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}+1=0。\tag{13.37}$$

於是，此恒等式可解釋爲，對於任何世界線，無論致極與否，四維速度與四維加速度正交。現在，回到(13.36)式，用$g^{\beta\alpha}$提升指標，並由此使局域Lorentz幾何直線方程的形式爲

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2}+g^{\beta\alpha}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0。\tag{13.38}$$

與「前度規幾何」中短程線方程的下述標準形式比較

$$\frac{d^2x^\beta}{d\lambda^2}+\Gamma^\beta{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0。\tag{13.39}$$

由此得出，當且僅當以下二個條件滿足時，前度規幾何的短程線與局域 Lorentz 幾何的直線一致：(1)確定短程線，協變微商，和平行移動的40個聯絡係數必須通過前面導出的（13.22）式和（13.23）式由10個度規係數 $g_{\mu\nu}$（「Einstein 引力勢」）給出；(2)短程線參量 λ 與原時 τ 必須一致以適合於零點和任意恒定尺度因子的任意歸一化；即

$$\lambda=a\tau+b。$$

（這個公式與 Newton「處處勻速流動」的普適時間 t 沒有任何相似之處；更確切地說，每一條短程線都有各自的原時τ）另一種變分原理可參看框13.3，它同時給出致極世界線和在該線上的正確的參量這兩者。

由此，我們完成了把彎曲空間幾何的概念從以短程線爲基礎到以度規爲基礎的轉變。得出的幾何總是處處把自己牢固地聯繫在「局域 Lorentz 特徵」原理上，而 Newton-Carton 幾何絕不這樣做也絕不能這樣做。

練習 13.5　一旦類時，永遠類時　　**練習**

試證明，若在某一事件處一空時短程線是類時的，則它是處處類時的。同樣，試證明起初類空的短程線是處處類空的，而起初爲零的短程線處處爲零。［提示：這是本書中最簡單的練習！］

（接第324頁）

框 13.2 「短程線」與「致極世界線」比較

如本書現在和此後將要做的那樣(「Riemann幾何或度規幾何」)，一旦通過（13.22）式和（13.23）式用 Einstein 引力勢$g_{\mu\nu}$表示聯絡係數$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$，那麼，把前面的兩個不同概念納入一個詞「短程線」之中是允許的和合理的，這兩個概念是：(1)參量化的世界線，它滿足短程線方程

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}=0;$$

和(2)世界線，它使兩個事件 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之間的原時爲極值（或，如果是類空的話，則是使固有距離爲極值的曲線）。這可能引起混淆，(1)預先假設了固有的參量化曲線（例如，這在第10章用於平行移動的 Schild 階梯結構中是必不可少的），反之(2)又只注意世界線穿過空時的這段路線，而它對採用何種參量或引入無論什麼參量，都無關緊要。這並不否定沿着致極曲線「在以後標明」極其自然而容易算出的全部參量，原時本身的這種可能性，從而致極曲線(2)滿足短程線方程(1)。堅持固有的參量化可避免含混；從今以後「彎曲」一詞意味着參量化的彎曲，「短程線」一詞意味着固有的參量化短程線。

框 13.3 短程線的「動力學」變分原理

如果致極長度的原理

$$\tau=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\left[-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right]^{1/2}d\lambda=\text{極值} \qquad (1)$$

對參量化的選擇是無關緊要的［在(1)中消去「$d\lambda$」］，並且如果短程線方程得出適當的參量化關係，則探索另一個極值原理是合適的，它能一併得出正確的曲線和正確的參量兩者。與初等力學類似，預料首項爲「$\ddot{x}$」形式的運動方程［短程線方程

$$d^2x^{\beta}/d\lambda^2+\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}(dx^{\alpha}/d\lambda)(dx^{\beta}/d\lambda)=0]$$

可以從首項爲「$\frac{1}{2}\dot{x}^2$」（「動能」；「動力學」項）的 Lagrange 函數導出。最簡單的坐標不變量 $\frac{1}{2}\dot{x}^2$ 推廣爲

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(dx^{\mu}/d\lambda)(dx^{\nu}/d\lambda)。$$

因此，人們可嘗試以新的「動力學」極值原理代替致極長度的「幾何」原理：

$$I=\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{s} g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}d\lambda$$
$$=\int_{\varepsilon}^{s} L\left(x^{\sigma},\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda}\right)d\lambda=\text{極值} \tag{2}$$

（用一次冪代替前述變分原理中的平方根）。此處的極值條件與過去［(13.20)式到（13.32）式］一樣，是取消所謂 Euler-Lagrange「函數微商」

$$0=\frac{\delta I}{\delta x^{\sigma}}\equiv\begin{pmatrix}\delta I\text{ 被積函數中}\\ \delta x^{\sigma}\text{ 的係數}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{\partial L}{\partial x^{\sigma}}-\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda}\right)}; \tag{3}$$

或寫出全部細節爲

$$g_{\sigma\nu}\frac{d^{2}x^{\nu}}{d\lambda^{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}=0; \tag{4}$$

或乘上倒易度規後，爲

$$\frac{d^{2}x^{\alpha}}{d\lambda^{2}}+g^{\alpha\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}=0; \tag{5}$$

它表現爲短程線方程

$$\frac{d^{2}x^{\alpha}}{d\lambda^{2}}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}=0。 \tag{6}$$

於是，新的「動力學」表達式(2)式對於短程線曲線確實是極值，並且，與固有長度(1)相反，當且僅當短程線仿射參量化時，它才是極值。［它的「Euler-Lagrange 方程」(6)僅在保持參量爲仿射的參量變化爲 $\lambda_{新}=a\lambda_{老}+b$ 時仍滿足；反之，「致極長度原理」(1)的 Euler-Lagrange 方程（13.31）式和（13.32）式對於參量的無論任何變化均仍滿足。］

練習 13.6 類空短程線具有致極長度

試證明當且僅當聯結兩事件 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的任何類空曲線使固有長度

$$s=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu})^{1/2}$$

爲極值時，該類空曲線爲短程線。［提示：如果已經證明了類空短程線的類似定理，則本題幾乎和練習 13.5 一樣容易。］

練習 13.7 用光信號和自由粒子量度度規張量［Kuchař］

(a) 用原時 τ 取代參量化類時短程線，通過任意參量 μ 使之參量化

$$\tau=F(\mu)。$$

寫出 μ 參量化的短程線方程。

(b) 現在把坐標 t 用作一參量。以不同的「速度」$v^i=dx^i/dt$ 拋出自由粒子云，並觀測它們的「加速度」$a^i=d^2x^i/dt^2$。試討論在這一方法中我們可測量仿射聯絡分量 $\Gamma^l{}_{kl}$ 的何種組合？（假定沒有可用來測量 τ 的標準鐘！）

(c) 試證明只需利用沿零短程線 $g_{ik}dx^idx^k=0$ 運動的光信號，就可以量度保形度規 $\bar{g}_{ik}$，即度規張量的分量 g_{ik} 與給定分量（如 g_{00}）之比

$$\bar{g}_{ik}=\Lambda g_{ik},\qquad \Lambda\equiv(-g_{00})^{-1}。$$

(d) 把 (b) 和 (c) 的結果結合。設在坐標系 x^i 中 $\Gamma^l{}_{kl}$ 可通過 (13.22)、(13.23) 式由度規張量生成。試證明只要規定了在一事件處的 Λ（等價於確定時間的單位）即可以確定各處的 Λ。

---

§13.5 Riemann 的由度規導致的性質

無度規時 *Riemann* 的對稱性

在 Newton 空時中，在眞實的物理的 Einstein 空時中——確實在任何具有協變微商的流形中——Riemann 曲率張量具有這些對稱性（練習11.6）：

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\equiv R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta]}\text{（後兩指標反對稱）}\tag{13.40}$$

$$R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]}\equiv 0\text{（完全反對稱部分爲零）。}\tag{13.41}$$

加上它滿足微分恒等式（練習 11.10）：

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta;\epsilon]}\equiv 0\text{（「Bianchi 恒等式」）}\tag{13.42}$$

（幾何意義見第15章）。

由度規强加的新的對稱性

無論在 Einstein 空時或別的空時中，當度規登場時它給予 ***Riemann*** 附加的對稱性（練習 13.8）

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\equiv R_{[\alpha\beta]\gamma\delta}\text{（前兩指標反對稱）。}\tag{13.43}$$

上式與（13.40）式和（13.41）式合在一起，形成了 ***Riemann*** 的一組完整的對稱性；由這些可以導出其他的對稱性（練習 13.10）是

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\gamma\delta\alpha\beta}\text{（成對改變時的對稱性），}\tag{13.44}$$

和

$$R_{[\alpha\beta\gamma\delta]}=0\text{（完全反對稱部分爲零）。}\tag{13.45}$$

這些對稱性把 ***Riemann*** 的獨立分量數從 $4\times4\times4\times4=256$ 個減少爲 20 個（練習13.9）。

存在度規時，可以從 ***Riemann*** 構成種種新的曲率張量。某些將在以後起重要作用的曲率張量如下。

曲率張量 G

(1)***Riemann*** 的雙重對偶 $G\equiv{}^*Riemann^*$（類似於 ***Maxwell***$\equiv{}^*$***Faraday***），它的分量爲

$$G^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\equiv\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma\gamma\delta}=-\frac{1}{4}\delta^{\alpha\beta\mu\nu}_{\rho\sigma\lambda\delta}R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\tag{13.46}$$

（練習 13.11）。

Einstein 張量

(2)Einstein 曲率張量，它是對稱的（練習 13.11）

$$G^{\beta}{}_{\delta}\equiv G^{\mu\beta}{}_{\mu\delta};\quad G_{\beta\delta}=G_{\delta\beta}。\tag{13.47}$$

Ricci 張量
曲率標量

(3)Ricci 曲率張量，它是對稱的，而曲率標量

$$R^{\beta}{}_{\delta}\equiv R^{\mu\beta}{}_{\mu\delta},\quad R_{\beta\delta}=R_{\delta\beta};\quad R\equiv R^{\beta}{}_{\beta};\tag{13.48}$$

與 Einstein 張量的關係爲（練習 13.12）

$$R^{\beta}{}_{\delta}=G^{\beta}{}_{\delta}+\frac{1}{2}R\delta^{\beta}{}_{\delta}。\tag{13.49}$$

Weyl 保形張量

(4)Weyl 保形張量（練習 13.13）

$$C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}=R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}-2\delta^{[\alpha}{}_{[\gamma}R^{\beta]}{}_{\delta]}+\frac{1}{3}\delta^{[\alpha}{}_{[\gamma}\delta^{\beta]}{}_{\delta]}R。\tag{13.50}$$

Bianchi 恒等式

用雙重對偶 G 重新寫出 Bianchi 恒等式（13.42），它的形式特別簡單：

$$G_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{;\delta}\equiv0\text{（「Bianchi 恒等式」）}\tag{13.51}$$

（練習 13.11）；且它有明顯的結果

$$G_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta}\equiv0\text{（「縮併的 Bianchi 恒等式」）。}\tag{13.52}$$

第15章將致力於闡明這些 Bianchi 恒等式的深刻幾何意義。

練習

練習 13.8 *Riemann* 前兩個指標的反對稱性

(a) 試導出反對稱條件 (13.43) 式。[提示：通過抽象計算證明任意矢量場 **s**, **u**, **v**, **w** 滿足 $0=\mathcal{R}(u,v)(s\cdot w)=s\cdot[\mathcal{R}(u,v)w]+w\cdot[\mathcal{R}(u,v)s]$。再由此推出 (13.43) 式。]

(b) 用幾何術語解釋這種反對稱的含義。

練習 13.9 *Riemann* 的獨立分量數目

(a) 在沒有度規的情況下，*Riemann* 的一組完整的對稱條件是 $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta]}$ 和 $R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]}=0$. 試證明在四維空時中，上述對稱條件把獨立分量數 $4\times4\times4\times4=256$ 個減少爲 $4\times4\times6-4\times4=96-16=80$ 個。

(b) 試證明在沒有度規的 n 維流形中，獨立分量數爲

$$\frac{n^3(n-1)}{2}-\frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n^2(n^2-1)}{3}。\tag{13.53}$$

(c) 存在度規時，一組完整的對稱性是 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$, 和 $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0$, 試證明在四維空時中，它使獨立分量數減少爲 $6\times6-4\times4=36-16=20$ 個。

(d) 試證明具有度規的 n 維流形中，獨立分量數爲

$$\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2-\frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n^2(n^2-1)}{12}。\tag{13.54}$$

練習 13.10 成對改變時 *Riemann* 的對稱性；完全反對稱部分爲零

在有度規時，從一組完整的對稱性 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$ 和 $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0$ 導出：(a) 成對改變時的對稱性 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\gamma\delta\alpha\beta}$，和 (b) 完全反對稱部分爲零 $R_{[\alpha\beta\gamma\delta]}=0$。然後 (c) 證明下面形成一組完整的對稱性

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}=R_{\gamma\delta\alpha\beta},\quad R_{[\alpha\beta\gamma\delta]}=0。\tag{13.55}$$

練習 13.11 *Riemann* 的雙重對偶；*Einstein*。

(a) 試證明 **G**≡***Riemann*** 與 ***Riemann*** 精確地包含相同的信息量，並精確地滿足同一組對稱性 [(13.40) 式，(13.41) 式，(13.43) 式到 (13.45) 式]。

(b) 由 **G** 的對稱性，證明 ***Einstein*** [由 (13.47) 定義] 是對稱的 ($G_{[\beta\delta]}=0$)。

(c) 試證明，當用 **G** 寫出時，Bianchi 恒等式 (13.42) 的形式爲 (13.51) 式 (「散度爲零」$\nabla\cdot\mathbf{G}=0$)。

(d) 通過縮併 Bianchi 恒等式 $\nabla\cdot\mathbf{G}=0$，證明 $\mathbf{G}\equiv$***Einstein*** 散度爲零 [(13.52) 式]。

練習 13.12 *Ricci* 和 *Einstein* 的關係

(a) 由 ***Riemann*** 的對稱性，證明 ***Ricci*** 是對稱的 ($R_{[\beta\delta]}=0$)。

(b) 試證明 ***Ricci*** 與 ***Einstein*** 的關係爲 (13.49) 式。

練習 13.13　Weyl 保形張量

(a) 試證明 Weyl 保形張量 (13.50) 具有和 Riemann. 張量同樣的對稱性[(13.40) 式，(13.41) 式，(13.43) 到 (13.45) 式]。

(b) 試證明 Weyl 張量是完全「無跡」的；即

$$\text{在任意一對空位上 } C_{\alpha\beta\gamma\delta} \text{ 的縮併爲零。} \tag{13.56}$$

由此，$C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 可看作是 ***Riemann*** 的無跡部分，而 $R_{\alpha\beta}$ 可以看作***Riemann*** 的跡。***Riemann*** 完全取決於它的無跡部分 $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 和它的跡 $R_{\alpha\beta}$ [見 (13.50) 式，並憶及 $R=R^{\alpha}{}_{\alpha}$]。

(c) 試證明在空時中 Weyl 張量有10個獨立分量。

(d) 試證明在 n 維流形中，Weyl [由保持 (13.56) 式修正的 (13.50) 式定義] 的獨立分量數爲

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}-\frac{n(n+1)}{2}\text{對 } n\geq 3,\quad 0\text{對 } n\leq 3。 \tag{13.57}$$

由此，在 1，2和3維流形中，Weyl 張量恒等於零，而 Ricci 張量完全取決於 Riemann 張量。

---

§13.6　加速觀測者的固有參照系

物理學家在噴氣式飛機中做實驗（例如：紅外天文學實驗）時，可以同時採用若干不同的坐標系。但特別實用的坐標系是相對於栓在飛機座艙地板和牆壁上的所有儀器爲靜止的坐標系。這個「固有參照系」有附在座艙壁上的矩形「$\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$」坐標方格和靜止在坐標方格中的一個或多個鐘。物理學家從他自己不能在座艙中自由浮動，或更精確的從加速度計的測量知道這個固有參照系是相對於局域 Lorentz 系加速的。從他感覺到的 Coriolis 力，或者更精確地，從慣性制導迴轉儀相對於座艙壁的旋轉，他知道他的固有參照系是相對於局域 Lorentz 系轉動的。

物理上描述固有參照系

對於這種在平直空時加速的，轉動的，但局域正交歸一的參照系，練習 6.8 給出了一種數學處理。本節則在彎曲空時中做同一件事。在緊靠空間坐標方格原點 $x^j=0$ 的附近（空間範圍很小以致曲率效應可以忽略），坐標系的外貌不可能揭示空間究竟是彎曲的還是平直的。因此，在彎曲空時中，練習 6.8 的全部細節仍應正確。儘管如此，利用前幾章有威力的數學重新討論那些細節以及某些新的內容將不無裨益。

使所用的坐標方格更明確正規來着手。下列步驟或許是建立坐標方格的最自然方式。

建立固有參照系坐標方格的6個步驟

(1)設 τ 是加速觀測者的鐘（在上述例子中，鐘位於飛機座艙的中央）測出的原時。設 $\mathcal{P}=\mathcal{P}_0(\tau)$ 是觀測者的世界線，如圖 13.4, a 所示。

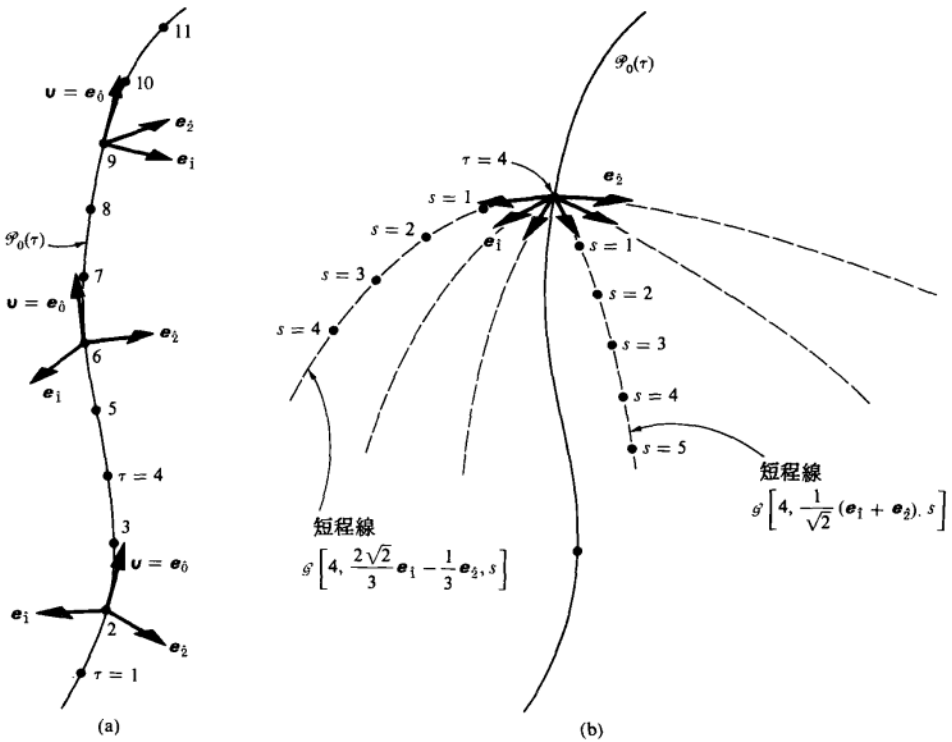


圖 13.4

加速觀測者的固有參照系，圖 (a) 畫出觀測者沿其世界線 $\mathscr{P}_0(\tau)$ 移動［移動定律 (13.60) 式］的正交歸一四重軸 $\{e_{\hat{a}}\}$。圖 (b) 畫出從觀測者世界線上一任意事件 $\mathscr{P}_0(4)$ 垂直叢生的毛髮狀短程線。每一條短程線由(1)它發生的原時 τ，和(2)方向 (它發射的單位切向矢量 $\mathbf{n}=d/ds=n^j\mathbf{e}_j$) 唯一地確定。在短程線上的一給定事件由 τ, $\mathbf{n}$ 和從短程線發射點到它的固有距離 s 確定；因此，給定事件的符號是

$$\mathscr{P}=\mathscr{g}[\tau,\mathbf{n},s]。$$

觀測者固有參照系把給定事件歸屬於坐標

$$x^0(\mathscr{g}[\tau,\mathbf{n},s])=\tau，$$
$$x^j(\mathscr{g}[\tau,\mathbf{n},s])=sn^j。$$

(2)觀測者隨身携帶一個正交歸一四重軸 $\{\mathbf{e}_{\hat{a}}\}$ （圖 13.4, a），其中

$$\mathbf{e}_{\hat{0}}=\mathbf{u}=d\mathscr{P}_0/d\tau=（觀測者的四維速度）\tag{13.58}$$

（$\mathbf{e}_{\hat{0}}$ 指向觀測者的「時間方向」），且

$$\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\cdot\mathbf{e}_{\hat{\beta}}=\eta_{\alpha\beta}\tag{13.59}$$

（正交歸一性）。

⑶相對於平行移動，四重軸沿觀測者的世界線逐點變化：　**觀測者四重軸的移動定律**

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_i = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{e}_i, \tag{13.60}$$

$$\Omega^{\mu\nu} = a^\mu u^\nu - u^\mu a^\nu + u_\alpha \omega_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{13.61}$$

$$= \text{「無限小 Lorentz 變換的生成元」。}$$

移動定律在彎曲空時中的形式與在平直空時相同（§6.5 和練習 6.8），因爲曲率只能在有限的距離內被覺察到，而不能在包含於「矢量一級時間變化率」之中的無限小距離上被覺察到（等效原理）。如同在練習 6.8 中，

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \text{（觀測者的四維加速度），} \\ \boldsymbol{\omega} &= \left\langle \begin{array}{l} \text{空間基矢 } \mathbf{e}_j \text{ 相對於} \\ \text{Fermi-Walker 遷移矢量} \\ \text{，即相對於慣性制導迴轉} \\ \text{儀的轉動加速度} \end{array} \right\rangle, \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{a} &= \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0。 \end{aligned} \tag{13.62}$$

如果 $\boldsymbol{\omega}$ 爲零，則觀測者將 Fermi-Walker 移動其四重軸（迴轉儀類型的移動）。如果 $\mathbf{a}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 兩者均爲零，則他將自由下降（短程線運動）並將平行移動其四重軸，$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_i = 0$。

⑷觀測者以類似於 §11.6 Riemann 簡正結構的方式建立他的固有參照系（局域坐標系）。從他的世界線上的每一事件 $\mathcal{P}_0(\tau)$，他發出仿射參量等於固有長度的純空間短程線（與 $\mathbf{u} = d\mathcal{P}_0/d\tau$ 正交的短程線），

$$\mathcal{P} = \mathcal{G}[\tau, \mathbf{n}, s]。 \tag{13.63}$$

（原時；說明短程線的「出發點」）　（在出發點短程線的切向矢量；說明是「哪一條」短程線）　（從出發點沿着短程線的固有長度；說明在短程線的「何處」）

（見圖 13.4, b）。切向矢量具有單位長度，因爲所選仿射參量是固有長度；

$$\begin{aligned} &\mathbf{n} = (\partial\mathcal{G}/\partial s)_{s=0}; \quad n^\mu = (dx^\mu/ds) \text{ 沿短程線，} \\ &\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = g_{\mu\nu}\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right) = \frac{ds^2}{ds^2} = 1。 \end{aligned} \tag{13.64}$$

⑸靠近觀測者世界線的每一事件精確的與短程線之一 $\mathcal{G}[\tau, \mathbf{n}, s]$ 相交。［離得太遠，就並非如此；短程線可能越過，或是因爲觀測者的加速度如圖 6.3，或是因爲空時曲率（「短程線偏離」）。］

(6)靠近觀測者的世界線選取一事件 $\mathcal{P}$，通過它的短程線起源於觀測者世界線上特定時間 τ 處，它的原始方向爲 $\mathbf{n}=n^j\mathbf{e}_j$，它在到達 $\mathcal{P}$ 之前延伸的距離爲 s，因此，這四個數

$$(x^0,x^1,x^2,x^3)\equiv(\tau,sn^1,sn^2,sn^3) \tag{13.65}$$

是辨認事件 $\mathcal{P}$ 的一種很自然的方式。這些就是 $\mathcal{P}$ 在觀測者固有參照系中的坐標。

(7)較爲抽象地重新表述爲

$$\begin{aligned} x^0(\mathcal{G}[\tau,\mathbf{n},s])&=\tau\ ,\\ x^j(\mathcal{G}[\tau,\mathbf{n},s])&=sn^j=sn_j=s\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_j\ 。\end{aligned} \tag{13.65'}$$

在平直空時，這種結構的程序和所得坐標 $x^{\hat{a}}(\mathcal{P})$ 與練習 6.8 的程序和所得坐標 $\xi^{\alpha'}(\mathcal{P})$ 等同。

爲了用於計算，不僅希望有坐標系，還希望有它的度規係數和聯絡係數。幸而，只需要沿觀測者世界線的 $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 和 $\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$，它們在該處特別簡單。只有愚蠢的觀測者才試圖使用遠離他的世界線的固有參照系，在該處的坐標方格已不是正交歸一的，短程方格線甚至可能相交！（見 §6.3）

沿着觀測者世界線 $\mathcal{P}_0(\tau)$，他的坐標方格的基矢與他（所建立）的正交歸一四重軸均相同

$$\partial/\partial x^{\hat{\alpha}}=\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\ , \tag{13.66}$$

因此它的度規係數爲

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\cdot\mathbf{e}_{\hat{\beta}}=\eta_{\alpha\beta}\ \text{均沿}\ \mathcal{P}_0(\tau)\ 。 \tag{13.67}$$

沿觀測者世界線的聯絡係數

對於觀測者的正交歸一四重軸，某些聯絡係數取決於移動定律（13.60）式：

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}&=\nabla_{\hat{0}}\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}=\mathbf{e}_{\hat{\beta}}\Gamma^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}\hat{0}}\\ &=-\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}=-\mathbf{e}_{\hat{\beta}}\Omega^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}}\ 。\end{aligned}$$

於是

$$\Gamma^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}\hat{0}}=-\Omega^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}}\ \text{均沿}\ \mathcal{P}_0(\tau)\ 。 \tag{13.68}$$

因爲 $\boldsymbol{\Omega}$ 的形式爲（13.61）式，且在觀測者自身的固有系中觀測者的四維速度和四維加速度的分量爲 $u_{\hat{0}}=-1$, $u_j=0$, $a_{\hat{0}}=0$，所以這些聯絡係數爲

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma^{\hat{0}}{}_{\hat{0}\hat{0}}=\Gamma_{\hat{0}\hat{0}\hat{0}}=0\ ,\\ &\Gamma^{\hat{0}}{}_{\hat{j}\hat{0}}=-\Gamma_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}}=+\Gamma_{\hat{j}\hat{0}\hat{0}}=+\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0}}=a^j\ ,\\ &\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{k}\hat{0}}=\Gamma_{\hat{j}\hat{k}\hat{0}}=-\omega^i\epsilon_{\hat{0}\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\ ,\end{aligned}\right\}\ \text{均沿}\ \mathcal{P}_0(\tau)\ 。 \tag{13.69a}$$

剩下的聯絡係數可由從觀測者世界線發出的短程線 $\mathcal{G}[\tau,\boldsymbol{n},s]$ 的短程線方程讀出。根據 (13.65) 式，每一條這種短程線的坐標可表爲

$$x^0(s)=\tau=\text{常數}，\quad x^j(s)=n^j s；$$

因此，沿着短程線均有 $d^2x^{\hat{a}}/ds^2=0$，從而短程線方程爲

$$0=\frac{d^2x^{\hat{a}}}{ds^2}+\Gamma^{\hat{a}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}\frac{dx^{\hat{\beta}}}{ds}\frac{dx^{\hat{\gamma}}}{ds}=\Gamma^{\hat{a}}{}_{jk}n^j n^k。$$

當且僅當

$$\Gamma^{\hat{a}}{}_{jk}=\Gamma_{\hat{a}jk}=0 \text{ 均沿 } \mathcal{P}_0(\tau) \tag{13.69b}$$

時，在觀測者世界線上，全部空間短程線（全部 n^j）滿足上式。

聯絡係數的值 (13.69) 式唯一地決定度規係數的偏微商 ［見 (13.19′) 式］：

$$\left.\begin{aligned} &g_{\hat{a}\hat{\beta},0}=0，\quad g_{jk,l}=0，\\ &g_{00,j}=-2a_j，\ g_{0j,k}=-\epsilon_{0jkl}\omega^l， \end{aligned}\right\} \text{均沿 } \mathcal{P}_0(\tau)； \tag{13.70}$$

這些加上正交歸一條件 $g_{\hat{a}\hat{\beta}}[\mathcal{P}_0(\tau)]=\eta_{\alpha\beta}$，意味着靠近觀測者世界線的線元爲

固有參照系的度規及其物理解釋

$$\begin{aligned} ds^2=&-(1+2a_jx^j)dx^{02}-2(\epsilon_{jkl}x^k\omega^l)dx^0dx^j\\ &+\delta_{jk}dx^jdx^k+O(|x^j|^2)dx^{\hat{a}}dx^{\hat{\beta}}。 \end{aligned} \tag{13.71}$$

這個線元值得注意的若干特徵如下：

(1)在觀測者世界線 $\mathcal{P}_0(\tau)$ 上，即在 $x^j=0$ 上，$ds^2=\eta_{\alpha\beta}dx^{\hat{a}}dx^{\hat{\beta}}$。

(2)觀測者的加速度在 g_{00} 的修正項中顯示出來

$$\delta g_{00}=-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}， \tag{13.72a}$$

它正比於沿着加速度方向的距離。關於這個修正項的平直空時的由來，見§6.6。

(3)觀測者相對於慣性制導迴轉儀的轉動在 g_{0j} 的修正項中顯示出來，它可以用三維矢量符號重新寫出

$$\delta g_{j0}\boldsymbol{e}_j=-\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\omega}=+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}。 \tag{13.72b}$$

(4)對線元的這些一級修正不受空時曲率的影響，也不包含有關曲率的信息。曲率只在二級項 $O(|x^j|^2)$ 中才顯示出來。

(5)在零加速度和零轉動（$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\omega}=0$）的特殊情形，觀測者的固有參照系均化爲沿着他的短程世界線的局域 Lorentz 系（$g_{\hat{a}\hat{\beta}}=\eta_{\alpha\beta}$，$\Gamma^{\hat{a}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}=0$）！反之，在

本書早些時候建立的局域 Lorentz 坐標系（§8.6 的「普遍」局域 Lorentz 坐標，§11.6 的「Riemann 簡正坐標」）只在單一事件處是局域 Lorentz 的。

在零轉動和零加速度情形，可導出下述度規表達式，精確到 $|x^j|$ 的二級：

$$ds^2=(-1-R_{\hat{0}\hat{i}\hat{0}\hat{m}}x^{\hat{i}}x^{\hat{m}})dt^2-\left(\frac{4}{3}R_{\hat{0}\hat{i}\hat{j}\hat{m}}x^{\hat{i}}x^{\hat{m}}\right)dtdx^j$$
$$+\left(\delta_{ij}-\frac{1}{3}R_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{m}}x^{\hat{j}}x^{\hat{m}}\right)dx^idx^j+O(|x^j|^3)dx^idx^j \qquad (13.73)$$

［參看，例如，Manasse 和 Misner (1963)］。此處 $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ 是 Riemann 張量沿世界線 $x^j=0$ 的分量。這種坐標稱爲「Fermi 簡正坐標」。

練習

練習 13.14 慣性力和 Coriolis 力

一加速觀測者在自由下落粒子經過他的固有參照系原點時，研究它的軌跡。如果

$$v\equiv(dx^j/dx^{\hat{0}})\mathbf{e}_j \qquad (13.74)$$

是粒子的原始速度，試證明它相對於觀測者固有參照系的原始加速度爲

$$\frac{d^2x^j}{dx^{\hat{0}2}}\mathbf{e}_j=-a-2\boldsymbol{\omega}\times v+2(a\cdot v)v。 \qquad (13.75)$$

［慣性加速度］ ［Coriolis 加速度］ ［慣性加速度的相對論修正］

式中 a 是觀測者自身的四維加速度，$\boldsymbol{\omega}$ 是他的空間基矢 $\mathbf{e}_j$ 旋轉的角速度［見 (13.62) 式］。［提示：採用粒子軌道的 $x^j=0$ 點處的短程線方程。注意：此結果已在練習 6.8 用不同方法在平直空時中導出。］

練習 13.15 轉動羣：度規

（練習 9.13, 9.14, 10.17 和 11.12 的繼續）。試證明，對於轉動羣的流形 $SO(3)$，存在着與協變微商∇相容的度規 $\boldsymbol{g}$。通過在生成元的非坐標基 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 中明顯地表示出度規分量來證明它存在。［答案：

$$g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}。 \qquad (13.76)$$

用文字重新表述。如果假設：(1)轉動羣的流形是局域 Euclid 的；(2)無限小轉動的生成元 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 是正交歸一的，$\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta=\delta_{\alpha\beta}$；和(3)$\{\mathbf{e}_\alpha\}$ 遵從標準轉動羣的對易關係

$$[\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta]=-\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\gamma; \qquad (13.77)$$

則得出的 $SO(3)$ 的短程線與練習 10.17 中選取的短程線一致。］

第十四章　曲率的計算

§14.1　曲率作爲理解物理學的手段

本章全屬高階。

第四章（微分形式）和第十、十一、十三章（微分幾何）是§14.5§14.6的必要準備。

本章是第十五章（Bianchi 恒等式）的必要準備。

本章對引力理論的許多應用（第 23-40 章）是有幫助的。

初等物理學允許我們略去曲率的任何系統化計算（試驗粒子的振盪頻率；吸引中心附近的生潮加速度；宇宙封閉三維球模型的曲率；在迴轉儀或矢量上平行移動的效應；見圖 1.1, 1.10, 1.12 以及框 1.6, 1.7）；但在其它一些場合，曲率計算是通向物理學的最快途徑。本章是爲這些場合安排的。本章敍述計算曲率的三種方法，並對於平面引力波（框 14.4，方程 5），對於宇宙的 Friedmann 幾何（框 14.5），以及對於靜態和動態 Schwarzschild 幾何（練習 14.13 和練習 14.16），給出 Einstein 曲率張量的分量。這些曲率計算以及別處其它的曲率計算都爲「曲率張量」做索引。

如果知道了曲率是什麼，考察一下像下式這樣複雜的四維幾何表達式，[Harrison (1959)]，以便能夠更好地認識物理狀況就足夠了

必須在其中計算曲率的狀況

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &-(x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{-3^{1/2}}\left(\int\frac{vdz}{z}\right)^{-1}(-z/L)^{3-1/2}dt^2 \\
&+(x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{1+3^{1/2}}\left(\int\frac{vdz}{z}\right)^{1+2/3^{1/2}}(-z/L)^{-1+3-1/2}dx^2 \\
&+(x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{2+3^{1/2}}\left(\int\frac{vdz}{z}\right)^{1+2/3^{1/2}}(-z/L)^{-3-1/2}dy^2 \\
&+(x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{3+3^{1/2}}\left(\int\frac{vdz}{z}\right)^{1+2/3^{1/2}}(-z/L)^{-2-3-1/2}\times \\
&\qquad\times\left(\frac{v^2-1}{-1-z/L}\right)dz^2 \qquad (14.1)
\end{aligned}
$$

類似的，還有來自解 Einstein 方程或文獻中顯得未經整理的任何其它複雜的度規表達式。在任一這樣的情況下，適當的辦法總是，首先是曲率，其次是理解。

曲率是幾何性質的最簡單的局域量度（見框14.1）。因此，曲率是通向研究空時較全面圖景的很好的第一步。

有時，人們首先有了一空時度規的表達式，再作曲率計算以了解它。但更爲經常的是，在空間和時間對稱的特定條件下，人們作曲率的計算，幫助得出物理上有興趣的度規表達式（恒星，第23-26章；模型宇宙論，第27-30章；坍縮和黑洞，第31-34章；以及引力波，第35-37章）。

計算曲率的「標準方法」

框14.2中說明了基本的「計算曲率的標準方法」。在框14.2中相繼採用前面導出的兩個公式，第一個（方程1和2）的形式爲$\Gamma\sim g\partial g$，並給出 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$。另一個（方程3）的形式爲 $R\sim\partial\Gamma+\Gamma^2$，並給出曲率分量 $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$。

展現曲率公式的方法

在算出曲率分量之後，存在着展示結果的諸有益方式。(1)構成 Ricci 張量 $R_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ 和標量曲率 $R=R^{\mu}{}_{\mu}$。(2)構成其他不變量，諸如 $R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$。(3)在審愼選擇的正交歸一系 $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}}=L^{\hat{\alpha}}{}_{\beta}\boldsymbol{dx}^{\beta}$ 中，構成分量 $R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$，以及(4)把 $R^{[\hat{\mu}\hat{\nu}]}{}_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}]}$ 表爲一6×6矩陣（在四維情況中；在三維情況中是3×3矩陣），其中 $[\hat{\mu}\hat{\nu}]=[\hat{0}\hat{1}]$, $[\hat{0}\hat{2}]$, $[\hat{0}\hat{3}]$, $[\hat{2}\hat{3}]$, $[\hat{3}\hat{1}]$, $[\hat{1}\hat{2}]$ 標誌行，$[\hat{\alpha}\hat{\beta}]$標誌列（練習14.14和練習14.15）。(5)最後，對於廣義相對論最爲重要的是構成如 §14.2 所描述的 Einstein 張量 $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$。

以上概述的並在框14.2中詳加描述的計算方法可用到任何地方，在那裏使用標準方法比學會或發明一種較好方法更快。對於學生來說，在一個簡短的課程中，標準方法總是可取的，在這種課程中物理的理解比技巧的熟練更重要。然而，這是一種呆板的方法，與人相比它更適合於計算機。甚至代數也可以用計算機處理（見框14.3）。

用計算機計算曲率

練習

練習 14.1 二維雙曲面的曲率

在 $ds_3^2=-dt^2+dx^2+dy^2$ 的 2+1 維 Minkowski 空時中，計算雙曲面 $t^2-x^2-y^2=T^2=$常數的曲率。首先證明，在雙曲面上適當選擇坐標 α, ϕ，可將這個二維面內的間隔表爲 $ds^2=T^2(d\alpha^2+\sinh^2\alpha d\phi^2)$.

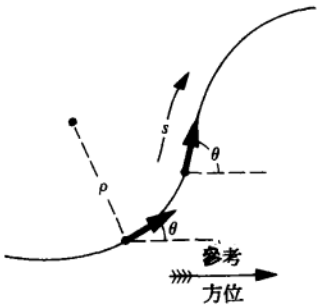
練習 14.2 在二維和三維情形，可用 Ricci 曲率表示 Riemann 曲率

在兩維情形，只有一個獨立的曲率分量 R_{1212}。顯然，單一的標量 R應携帶相應的信息。注意到建立起來的二維恒等式 $R_{\mu\nu\alpha\beta}=\frac{1}{2}R(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}-g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})$ 是唯一的張量公式，它給出 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 是R的線性函數，由R和度規單獨構成並具有合適縮併值 $R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}=R$。用 Ricci 張量

（接第343頁）

框 14.1　曲率縱橫觀

1.歷史的出發點：平面上的曲線。通過限於（「內稟於」）曲線本身的量度無從定義曲線的曲率。需要的是，例如，切向矢量相對於平面上一固定方向的方位角 θ，看作沿曲線量度的固有距離 s 的函數；即 $\theta=\theta(s)$。然後，由 $\kappa(s)=1/\rho(s)=d\theta(s)/ds$ 給出曲率 κ 及其倒數：曲率半徑 ρ。另一方面，我們可以考查垂直離開切線所量度的距離 y，把它看作沿切線量度的距離 x 的函數，則 $\kappa=1/\rho=d^2y/dx^2$。



2.此後，這個概念被擴展到嵌在平直（Euclid）三維空間的彎曲面。在一給定點，作平面與光滑曲面相切，曲面到平面的偏離 z，用該點鄰域的下述二次式來描繪

$$z=\frac{1}{2}ax^2+bxy+\frac{1}{2}cy^2。$$

軸旋轉適當的角度 α，

$$x=\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha,$$

$$y=-\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha,$$

二次式化爲

$$z=\frac{1}{2}\kappa_1\xi^2+\frac{1}{2}\kappa_2\eta^2,$$

其中

$$\kappa_1=1/\rho_1$$

和

$$\kappa_2=1/\rho_2$$

代表該面的兩個「主曲率」。

3.Gauss（1827）曾設想，通過完全限於曲面（「螞蟻社會」）內的測量來定義曲率。從面上一給定點 $\mathcal{P}$，沿面上一短程線行進一段完全在面內量度的固有距離 ϵ，重複地從原來的點出發，但沿其他方向行進，得出無數個點。它

們確定一個「圓」。再一次通過完全限於面內的測量，確定圓的固有圓周。採用與嵌入觀點相對應的度規

$$ds^2=dz^2+d\xi^2+d\eta^2 \quad (\text{Euclid三維空間})$$

$$=[(\kappa_1\xi d\xi+\kappa_2\eta d\eta)^2+(d\xi^2+d\eta^2)] \begin{pmatrix}\text{內稟於彎曲}\\ \text{二維幾何的}\\ \text{度規}\end{pmatrix},$$

可以計算這樣一種「內稟測量」的結果。算出此圓周與 Euclid 值 $2\pi\epsilon$ 不同，分數修正正比於 ϵ 的平方；具體的說

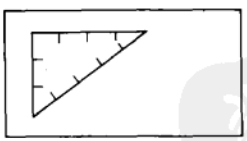
$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{6}{\epsilon^2}\left(1-\frac{\text{圓周}}{2\pi\epsilon}\right)=\kappa_1\kappa_2=\frac{1}{\rho_1\rho_2}=\det\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}。$$

特別要注意第一個量的符號。Gauss 並不隱瞞他對下述發現的得意心情，即通過完全在面內的測量而定義的某些東西與兩個量κ_1和κ_2的乘積一致，而κ_1和κ_2的定義各自要求外賦於面的測量。

4.「外賦」曲率與「內稟」曲率之間的對比概括如下

$$(\text{外賦曲率})=\kappa=(\kappa_1+\kappa_2)\ (\text{厘米}^{-1}),$$

$$\begin{pmatrix}\text{內稟或 Guass}\\ \text{曲率}\end{pmatrix}=\kappa_1\kappa_2(\text{厘米}^{-2})$$



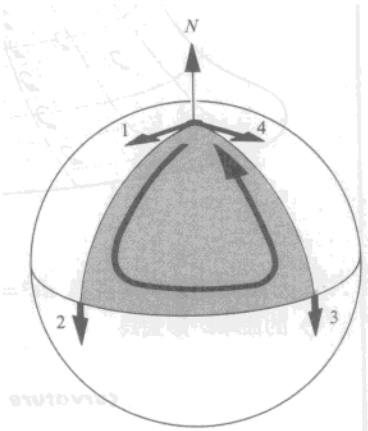
（後者與二維幾何的標量曲率不變量R之半相等）。在一張平直的紙片上畫下一個 3:4:5 的三角形，再把紙捲起來。內稟於紙片的Euclid二維幾何通過這種彎曲保存了下來。內稟於該面的 Gauss 曲率仍不變，它保持零 Euclid 值（κ_2非零 κ_1零；乘積 $\kappa_1\kappa_2$=零）。但是，外賦曲率却從 $\kappa_1+\kappa_2=0$ 變爲非零值 $\kappa_1+\kappa_2\neq 0$。

5. 本章討論的曲率是內稟於空時的曲率；這就是說，曲率完全不採用嵌入任何假想的更高維平直流形的方式來定義，並排除有關的各種想像（Riemann, Clifford 和 Einstein 的概念，即在物理學中，幾何是動力學的參預者，而不

是物質與能量競爭之外上帝所賜的完美之物）。

6.空時幾何的曲率把曲率强加給穿過該空時的任何類空薄片（三維幾何；「初值超曲面」）（見第21章「Guass 和 Codazzi 關係式」，關於幾何動力學的初值問題）。

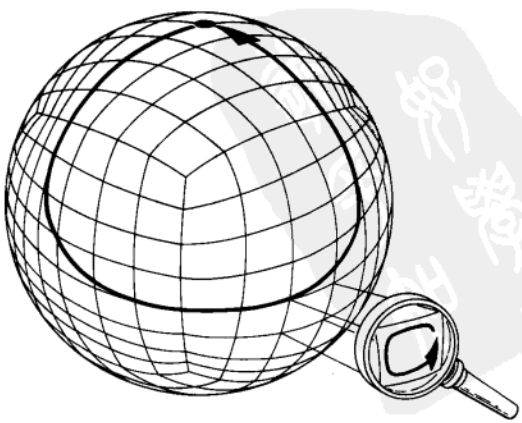
7.繞一閉合回路平行自身移動的矢量的轉動提供了曲率的定義，和在二維情況一樣，這對四維和三維也是有用的。（在彎曲的二維幾何中，在一點只有一個平面。由此得出，只需一個數來描述該處的 Gauss曲率。在三維和四維情形，通過一點有更多的獨立平面，因此需要更多的數描述曲率。）如圖，矢量從位置 1（北極）出發，平行於自身移動（位置2,3,...），繞了一個90°-90°-90°的球面三角形。它回到出發點（位置 4）時轉過了90°：

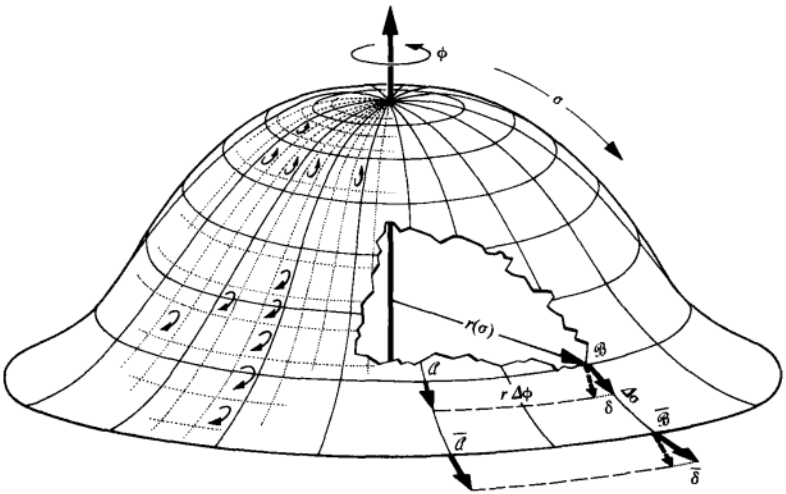


$$\left(\begin{matrix}\text{Guass}\\ \text{曲率}\end{matrix}\right)=\frac{\left(\begin{matrix}\text{轉過的}\\ \text{角度}\end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix}\text{繞行的}\\ \text{面積}\end{matrix}\right)}=\frac{(\pi/2)}{(1/8)(4\pi a^2)}=\frac{1}{a^2}$$

正值；轉動的方向與繞行的方向相同）。

8.爲簡單起見，仍停留在彎曲的二維流形，把二維曲面的曲率描述爲在整個曲面上定義的2-形式（「類盒結構」）。任何給定路線所圍起的盒數，立即以弧度（或十分之一弧度或百分之一弧度，等等，取決於選取的分割精細程度）給出了一矢量平行自身繞該路線轉過的角度。一給定盒的貢獻是作爲正值還是作爲負值來計算，取決於盒上面所標箭頭的方向（見放大圖）與該路線的繞行方向是否一致。





9.用來說明度規爲 $ds^2=d\sigma^2+r^2(\sigma)d\phi^2$ 的旋轉對稱面（「軟木遮陽帽」）的曲率2-形式爲

$$\textbf{curvature}=-\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\sigma^2}d\sigma\wedge rd\phi \tag{1}$$

（遮陽帽頂部爲正，邊緣周圍爲負，用圖左「2-形式盒」上的箭頭標明）。爲了便於想像，r 的「意義」是通過把曲面嵌入 Euclid 三維空間來說明的；但是，二維幾何通過內稟於它的測量來定義而無需嵌入的觀念更爲重要。

10.這個二維的例子，比任何地方都更清楚地說明，長度（「度規」）是怎樣細緻地定量確定曲率的，一個在數學計算「背後發生什麼」的模型在本章以四維空時中的1-形式和2-形式生長開來。

a. 繞面元 $\mathcal{A}\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}}\bar{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ 的淨轉動爲 $\delta-\bar{\delta}$（當矢量沿子午線 $\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}$ 或 $\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}}$ 移動時，未向左、右轉向）。

b. 從$\mathcal{A}$到$\mathcal{B}$時，矢量相對於坐標系（子午線的方向）的轉動爲

$$\text{（角 }\delta\text{）}=\frac{\text{弧}}{\text{長度}}=\frac{r(\sigma+d\sigma)\Delta\phi-r(\sigma)\Delta\phi}{d\sigma}$$
$$=\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)_{\sigma}\Delta\phi\text{。}$$

c. 類似地，矢量從 $\bar{d}$ 到 $\bar{\mathfrak{B}}$ 時轉動了

$$(\text{角}\bar{\delta}) = \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)_{\sigma+\Delta\sigma} \Delta\phi。$$

d. 因此，淨轉動爲

$$\delta - \bar{\delta} = -\left(\frac{d^2r}{d\sigma^2}\right)_{\sigma} \Delta\sigma\,\Delta\phi。$$

e. 表爲形式，立卽給出(1)式。

f. 在四維情形，概念和計算都更爲複雜，主要原因是必須在所述點討論面方向的不同選擇。

11.當我們停留在此二維例子時，可以立卽把這些幾何概念翻譯爲形式的語言。作爲樣品，矢量$A^i=(A^1,A^2)$繞一面元的邊界回到它的出發點，方向稍有變化：

$$-(A^i\text{的變化}) = \mathcal{R}^i{}_j A^j。 \tag{2}$$

a. 爲了更加確定起見，可以方便地採用基1-形式 $\omega^1=d\sigma$ 和 $\omega^2=r d\phi$，並把 A^1 作爲A在 σ 增加方向上的分量，A^2 作爲A在 ϕ 增加方向上的分量。矩陣 $\mathcal{R}^i{}_j$ 是一個轉動矩陣，它引起方向的改變但不改變長度（零對角分量）；因此，此處的

$$\|\mathcal{R}^i{}_j\| = \begin{Vmatrix} 0 & \mathcal{R}^1{}_2 \\ -\mathcal{R}^1{}_2 & 0 \end{Vmatrix}。 \tag{3}$$

在這個例子中，顯然 $\mathcal{R}^1{}_2$ 代表矢量 A 繞面元平行於自身移動所轉過的角度。

b. 迄今，轉動是「不確定的」，因爲面元的大小仍未指明。最方便的是設想一個由兩個矢量（「雙重矢量」）定義的基元平行四邊形，於是，$\mathcal{R}^i{}_j$，或者具體的說計算的一個元 $\mathcal{R}^1{}_2$（「轉動角」）必須看作是賦予兩個空位的數學對象（「2-形式」），把兩個矢量插入兩個空位得出一個確定的數(角度，以弧度爲單位)。在軟木遮陽帽的例子中，由(1)式，得

$$\mathcal{R}^1{}_2 = -\frac{1}{r}\,\frac{d^2r}{d\sigma^2}\,\omega^1\wedge\omega^2。 \tag{4}$$

因此在本書中 $\mathcal{R}^i{}_j$ 稱爲「曲率2-形式」。

c. 本書告訴讀者，怎樣在這些表達式中讀出 Riemann 曲率張量的分量；例如，此處，

$$R^1{}_{212}=-R^1{}_{221}=(-1/r)(d^2r/d\sigma^2)$$
$$(\omega^1\wedge\omega^2 \text{ 或 } \omega^2\wedge\omega^1 \text{ 的係數})。$$

d. 推廣到四維，人們把 $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ 理解爲必須乘上三個數才能得出第四個數的因子。所得之數是，當矢量平行於自身繞一閉合路徑移動時，該矢量第 α 個分量所發生的變化（以相反符號），閉合路徑可以規定爲，例如，由兩個矢量 **u** 和 **v** 所構成的平行四邊形。乘 $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ 的因子是，(1)矢量 **A** 在第 β 方向的分量，以及(2,3)平行四邊形延伸的 $\mu\nu$ 分量即 $(u^\mu v^\nu-u^\nu v^\mu)$。因此

$$\delta A^\alpha=-R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}A^\beta(u^\mu v^\nu-u^\nu v^\mu)。$$

框 14.2 直截了當的曲率計算（用球說明）

爲了計算 Riemann 曲率張量的分量 $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$，基本的普遍適用的方法是，在坐標基中，從規度分量 $g_{\mu\nu}$ 開始，按下列方案進行

$$g_{\mu\nu}\xrightarrow{\Gamma\sim\partial g}\Gamma_{\mu\alpha\beta}\longrightarrow\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\xrightarrow{R\sim\partial\Gamma+\Gamma\Gamma}R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}。$$

這三個步驟所需的公式是

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right), \tag{1}$$

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}=g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha\beta}, \tag{2}$$

和

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}=\frac{\partial\Gamma^\mu{}_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta}+\Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}\Gamma^\rho{}_{\nu\beta}-\Gamma^\mu{}_{\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\nu\alpha}。 \tag{3}$$

半徑爲 a 的球的二維曲面的度規是

$$ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)。 \tag{4}$$

爲了用標準的方法計算曲率，用 ds^2 的公式作 g_{kl} 值表。它表明 $g_{\theta\theta}=a^2$，$g_{\theta\phi}=0$，$g_{\phi\phi}=a^2\sin^2\theta$。由公式(1)計算六個可能不同的 $\Gamma_{jkl}=\Gamma_{jlk}$（在四維情

形將是40個）。於是

$$\begin{aligned}&\Gamma_{\theta\phi\phi}=-a^2\sin\theta\cos\theta=-\Gamma_{\phi\phi\theta},\\&\Gamma_{\theta\theta\theta}=\Gamma_{\phi\phi\phi}=0,\\&\Gamma_{\theta\theta\phi}=\Gamma_{\phi\theta\theta}=0。\end{aligned}\tag{5}$$

提升第一個指標：

$$\begin{aligned}&\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta,\\&\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}=\cot\theta,\\&\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}=\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}=0=\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta}=\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi}。\end{aligned}\tag{6}$$

選擇一個適當的曲率分量（由於基本的對稱性 $R_{\mu\nu\alpha\beta}=R_{[\mu\nu][\alpha\beta]}$，它不會自動爲零，也不能以另外的形式例如由 $R_{\mu\nu\alpha\beta}=R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 預先計算）。在這個二維例子中，只有一種選擇（對比：在四維情形有21種這類計算）；它是

$$\begin{aligned}R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi}&=\frac{\partial\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}}{\partial\theta}-\frac{\partial\Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta}}{\partial\phi}+\Gamma^{\theta}{}_{\lambda\theta}\Gamma^{\lambda}{}_{\phi\phi}-\Gamma^{\theta}{}_{\lambda\phi}\Gamma^{\lambda}{}_{\phi\theta}\\&=\frac{\partial\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}}{\partial\theta}-0+0-\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\\&=\sin^2\theta-\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta\cot\theta;\end{aligned}$$

因此，

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi}=\sin^2\theta\tag{7}$$

或

$$R^{\theta\phi}{}_{\theta\phi}=\frac{1}{a^2}。\tag{8}$$

縮併，給出了 Ricci 張量的分量

$$R^{\theta}{}_{\theta}=R^{\phi}{}_{\phi}=\frac{1}{a^2},\quad R^{\theta}{}_{\phi}=0,\tag{9}$$

進一步縮併，給出了曲率標量

$$R=2/a^2。\tag{10}$$

在此流形中，一個方便的正交歸一系是

$$\omega^{\hat{\theta}}=a\mathbf{d}\theta,\quad \omega^{\hat{\phi}}=a\sin\theta\mathbf{d}\phi。\tag{11}$$

更普遍地可寫成 $\omega^{\hat{\alpha}}=L^{\hat{\alpha}}{}_{\beta}\mathbf{d}x^{\beta}$。在這個簡單而有啓發性的對角度規例子中，將曲率張量轉換爲正交歸一的分量，對於張量的每一個指標要求一個單一的歸一化因子。因此，$v^{\hat{\theta}}=av^{\theta}$, $v^{\hat{\phi}}=a\sin\theta v^{\phi}$, $v_{\hat{\theta}}=a^{-1}v_{\theta}$, $v_{\hat{\phi}}=(a\sin\theta)^{-1}v_{\phi}$。類似地，在正交歸一系中，從 $R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi}=\sin^2\theta$ 可得出曲率張量的分量爲

$$R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}=\frac{1}{a^2}=R^{\hat{\theta}\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}}。\tag{12}$$

框 14.3 計算機的解析計算

引力物理和廣義相對論的研究有時因爲一些量的計算既冗長又需要細緻小心而使人感到煩惱，這些量諸如給定度規的 Einstein 和 Riemann 曲率張量，或給定脅强-能量張量的散度，或在給定代數假設下的Newman-Penrose四重軸方程。這些計算是極其直截了當的，並且在邏輯結構上是演繹的，它們可以通過計算機來處理。自從1966年以來，計算機已經廣泛地承擔了這種工作

有若干種計算機語言，研究者可用以編制他的解析計算程序。計算機專家可能願意用例如 LISP [參看，例如，Fletcher (1966) 和 Hearn (1970)的工作] 面向機器 (machine-oriented) 的語言。然而大多數相對論的應用者寧願採用面向用戶的 (user-oriented) 語言，例如REDUCE [爲 Hearn (1970) 創造，可利用 IBM 360 和 370，以及 PDP 10 計算機]，ALAM [爲 D'Inverno (1967)創造，可利用 Atlas 計算機]，CAMAL [爲 Barton, Bourne 和 Fitch (1970) 創造，可利用 Atlas 計算機]，以及 FORMAC [爲 Tobey等(1967) 創造，可利用 IBM 7090, 7094, 360 和 370]。關於在此領域的活動的評述，可參看 Barton 和 Fitch (1971) 的文獻。我們在這裏只描繪 FORMAC。它是最爲有用並被廣泛採用的語言；但它可能並不是最强有力的 [參看，例如，D'Inverno (1969)]。對於解析運算來說，FORMAC 相當於數值運算中 FORTRAN 的最早和最原始的形式。

FORMAC 處理的代數表達式包括：數值常數，如 1/3；符號常數，如 x 或 u；特定的初等函數，如 $\sin(u)$ 或 $\exp(x)$；若干變量的符號函數，如 $f(x,u)$ 或 $g(u)$。例如，它能把 $ax+bx^2$ 和 $2x+(3+b)x^2$ 相加，得出 $(a+2)x+(3+2b)x^2$；它能作 $x^2uf(x,u)+\cos(x)$ 對於 x 的偏微商，得出

$$2xuf(x,u)+x^2u\partial f(x,u)/\partial x-\sin(x)。$$

它能夠做人所能做的任何代數計算或微積分計算——而不至發生錯誤！不幸的是，它不能解析地作積分運算；積分需要歸納的邏輯而不是演繹的邏輯。

PL/1 是一種可以與 FORMAC 同時使用，或者獨立使用的語言。PL/1處理字符串(strings of characters)——例如，「Z/1×29－＋/。」它懂得字符的邏輯；它能告知兩字符串是否相等；它可在字符串中插入新的字符或從中除去原來的字符；但是它不懂代數或微分的規則。因此，它最初用作 FORMAC 的附件（雖然從計算機系統的觀點看來，FORMAC 是 PL/1 的附件）。

用於根據給定的度規分量計算Einstein張量以及用於其他計算的 FORMAC 程序從許多過去的用戶那裏得到是有利的 [參看，例如， Fletcher, Clemens, Matzner, Thorne，和 Zimmerman (1967); Ernst (1968); Harrison (1970) 的文獻]。然而，編制 FORMAC 程序是極其簡單的，爲了做一件給定的工作，而建立自己的程序，通常不會有困難。如果產生了困難，可能是因爲解析的計算用完了計算機的磁心 (core)。很容易建立一個很大的表達式來適應任何現存計算機的磁心，表達式的幾個微分可長達半頁。

面臨磁心用完的 FORMAC 用戶想出若干辦法來解決他們的問題。其一是從磁心除去不需要的那部分程序和FORMAC系統。爲此，Clemens和Matzner (1967)發展了稱爲 PURGE和KILL 的程序。另一種辦法是在大小可操縱的片上建立給定計算的答案，並把這些片從計算機磁心輸送到它的磁盤 (disk) 上。於是，必須把全部的片合在一起，這是單獨使用 FORMAC 不能解決的課題，甚至 FORMAC 加上 PL/1 也不行，而是 James Hartle 採用 FORMAC, PL/1和IBM 數據處理程序聯合（稱爲 SORT）解決了的課題 [參看Hartle和Thorne (1974)的文獻]。

和度規表示 R_{ijkl}，建立相應的三維恒等式。

練習 14.3　三維球在正交歸一系中的曲率

試計算三維球

$$ds^2=a^2[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。\tag{14.2}$$

的曲率張量，或三維雙曲面

$$ds^2=a^2[d\chi^2+\sinh^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。\tag{14.3}$$

的曲率張量，把坐標基分量 $R^i{}_{jkl}$ 轉換爲相應的正交歸一基分量 $R^{\hat{i}}{}_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}$。把 $R^{\hat{i}\hat{j}}{}_{\hat{k}\hat{l}}=R^{[\hat{i}\hat{j}]}{}_{[\hat{k}\hat{l}]}$ 展現爲一個適當標誌了行和列的3×3矩陣。

---

§14.2　構成 Einstein 張量

由 Riemann 張量計算 Einstein張量的三種方法

根據 Einstein的理論，物質在空間的分布並未直接說明空間局域曲率的全部細節。脅强-能量張量只是提供了有關 Riemann 曲率張量的分量某種組合的信息，這種組合構成了 Einstein 張量。第13章描述了計算 Einstein 張量的兩種等價方法：(1)將 Riemann 張量逐次縮併

$$R_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu},\quad R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu},$$
$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\tag{14.4}$$

[(13.48)式和(13.49)式]；(2)構成 Riemann 張量的對偶，再縮並：

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\equiv(*R*)_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}=\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}R^{[\mu\nu]}{}_{[\rho\sigma]}\epsilon^{\rho\sigma\gamma\delta}$$
$$=-\delta^{\rho\sigma\gamma\delta}_{\alpha\beta\mu\nu}R^{[\mu\nu]}{}_{[\rho\sigma]},\tag{14.5a}$$
$$G_{\beta}{}^{\delta}=\mathcal{G}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\delta}\tag{14.5b}$$

[(13.46)式和(13.47)式]。第三種方法通常比上二種方法都好，把(14.5a,b)式聯立起來，發現

$$G_{\beta}{}^{\delta}=G^{\delta}{}_{\beta}=-\delta^{\delta\rho\sigma}{}_{\beta\mu\nu}R^{[\mu\nu]}{}_{[\rho\sigma]}。\tag{14.6}$$

[注意：在任何參照系，無論正交歸一與否，置換張量 (permutation tensor) $\delta^{\delta\rho\sigma}{}_{\beta\mu\nu}$ 的分量爲

$$\delta^{\delta\rho\sigma}{}_{\beta\mu\nu}=\delta_{\beta\mu\nu}{}^{\delta\rho\sigma}=\begin{cases}+1 & \text{若}\delta\rho\sigma\text{是}\beta\mu\nu\text{的偶置換，}\\ -1 & \text{若}\delta\rho\sigma\text{是}\beta\mu\nu\text{的奇置換，}\\ 0 & \text{其他情形；}\end{cases}$$

爲了看出上述結果，用定義(3.50h)式和 $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ 與 $\epsilon^{\rho\sigma\tau\delta}$ 的分量 (8.10) 式簡單地計算 $\delta^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}$。]對於 Einstein 張量，(14.6)式可以明確地寫爲

$$\begin{aligned} G^0{}_0 &= -(R^{12}{}_{12}+R^{23}{}_{23}+R^{31}{}_{31}), \\ G^1{}_1 &= -(R^{02}{}_{02}+R^{03}{}_{03}+R^{23}{}_{23}), \\ G^0{}_1 &= R^{02}{}_{12}^{*}+R^{03}{}_{13}, \\ G^1{}_2 &= R^{10}{}_{20}+R^{13}{}_{23}, \end{aligned} \tag{14.7}$$

任何其他分量由類似的公式給出，這些公式可以通過指標的明顯置換得出。

§14.3 更有效的計算

計算曲率的標準方法是很浪費的

如果問題的答案或計算的結果並不簡單，那就不存在得出它的簡單辦法。但是，若冗長的計算給出了簡短的答案，則可尋找更好的方法。廣義相對論的許多最著名的應用是給以度規形式，其中 $g_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}$ 和 $R^{\rho}{}_{\nu\alpha\beta}$ 的許多分量爲零；對此，曲率的標準計算（框14.2）包含大量「徒勞」的努力。有人計算了許許多多的 $\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}$，原來是零。有人核對求和中許多像 $-\Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}$ 的項，它們或者是零，或者與其他項抵消而得零。可以利用兩種不同的方法來消除某些「徒勞」。「短程線 Lagrange 函數」方法提供了一種爲 $\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}$ 制表的經濟方法。「曲率2-形式」方法對這種描述從頭至尾作重新組織，並計算聯絡（係數）和曲率兩者。

避免「徒勞」的辦法

(1)短程線Lagrange 函數方法

短程線 Lagrange 函數方法只對標準方法作適當的改進，它只要求在變分計算中有節制地投入精力，在數學和物理學世界的其他方面，在任何情況下都是要付出的。反之，曲率2-形式的方法是有效的，但要求對1-形式和2-形式的數學投入較大的精力，它比任何人通常爲了對相對論作任何引論性的概括研究所需的精力要大些。然而，要對付若干天計算曲率工作的任何人，一定願意很好地學習曲率2-形式的算法。

(2)曲率2-形式方法

§14.4 短程線 Lagrange 函數方法

正常的想法是，在寫出下述短程線方程之前，必須先知道聯絡係數 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$

$$\ddot{x}^{\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}=0。 \tag{14.8}$$

(此處和以下用點表示對仿射參量 λ的微商。)然而，這種論證可以顛倒過來。一旦寫下了短程線方程，就可以從中辨認聯絡係數。例如，在框14.2中討論過

的二維球上，短程線方程是

$$\ddot{\theta}-\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2=0\,, \qquad (14.9\theta)$$
$$\ddot{\phi}+2\cot\theta\dot{\phi}\dot{\theta}=0\,。 \qquad (14.9\phi)$$

此處第一個方程表明 $\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta$；第二個方程表明 $\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}=\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}=\cot\theta$；不存在任何更多的項表明，所有其他的 $\Gamma^{i}{}_{jk}$ 爲零。

因此，第一條基本原理顯然是：短程線方程的明確形式，相當於給全部聯絡係數 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ 制表。

第二條原理進一步指出：甚至尚未計算 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ 就可以寫出短程線方程。爲了得出短程線方程（見框13.3），只需想起，短程線是使下述積分爲極值的參量化曲線

$$I=\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}d\lambda \qquad (14.10)$$

在這個意義上

$$\delta I=0\,。$$

在實際應用這個變分原理時，第一步是以可能的最簡單形式重新寫出(14.10)式，為手邊的問題插入特定的 $g_{\mu\nu}$ 值。如果我們的興趣放在與短程線有關，那麼甚至無須作任何變分，即可認出許多運動常數（參看第25章關於Schwarzschild 幾何中的短程線運動，特別是 §25.2 關於守恒定律和運動常數）。爲了計算 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$，依次變化每一個坐標，得到四個方程。再重新整理這些方程，使方程的首項是 $\ddot{x}^{\mu}$。在這種形式下，它們必定正好就是短程線方程 (14.8) 式。因此，$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ 由這四個方程的係數直接得到。用這個方法計算曲率的最後一步是回到標準方法，回到用標準方法處理（框 14.2）的 $R\sim\partial\Gamma+\Gamma\Gamma$ 型公式；並且，由於需要各個 Γ 依次出現，剖覽短程線方程即可找出。通過下面框14.4提供的一個例子，可以很好地理解這種方法。

短程線Lagrange 函數方法的四個步驟：

(1)寫出簡單形式的 I

(2)變化 I，得出短程線方程

(3)辨認 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\tau}$

(4)用標準方法計算 $R^{\alpha}{}_{\beta\tau\delta}$ 等

練習 14.4　用短程線 Lagrauge 函數方法計算 Friedmann 閉宇宙的 Einstein 方程

練習

此處感興趣的線元是（見第27章）。

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]\,。$$

（接第348頁）

框 14.4 短程線 Lagrange函數方法縮短了某些曲率的計算

目的：計算下述線元的曲率

$$ds^2=L^2(e^{2\beta}dx^2+e^{-2\beta}dy^2)-2dudv \tag{1}$$

式中 L 和 β 只是 u 的函數 。［這個度規，作爲引力波的一個例子，在 §35.9-§35.12中作了討論。］

方法：作爲變分原理 (14.10) 式的推論，由短程線方程得出 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ ，然後按框 14.2 計算 $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}\sim\partial\Gamma+\Gamma^2$。

步驟 1：表述變分積分。對於所考慮的度規，(14.10)式要求下述 I 的$\delta I=0$，

$$I=\int\left[\frac{1}{2}L^2(e^{2\beta}\dot{x}^2+e^{-2\beta}\dot{y}^2)-\dot{u}\dot{v}\right]d\lambda\text{。} \tag{2}$$

(2)使這個積分爲極值的世界線是短程線。

步驟 2：一次一個地按照坐標與 λ 的依賴關係，變更這條世界線的坐標。首先，保持函數 $y(\lambda)$, $u(\lambda)$ 和 $v(\lambda)$ 固定，變更 $x(\lambda)$。則

$$\delta I=\int(L^2e^{2\beta}\dot{x})\delta\dot{x}d\lambda=-\int(L^2e^{2\beta}\dot{x})\delta x d\lambda\text{ 。}$$

對其中的這個變分， $\delta I=0$ 要求給出

$$0=(L^2e^{2\beta}\dot{x})^{\cdot}=L^2e^{2\beta}\ddot{x}+\dot{x}\dot{u}\frac{\partial}{\partial u}(L^2e^{2\beta})\text{。}$$

按同樣方法，變更 y, u, v，給出

$$0=(L^2e^{-2\beta}\dot{y})^{\cdot}=L^2e^{-2\beta}\ddot{y}+\dot{y}\dot{u}\frac{\partial}{\partial u}(L^2e^{-2\beta})\text{，}$$

$$0=\ddot{v}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial}{\partial u}(L^2e^{2\beta})+\frac{1}{2}\dot{y}^2\frac{\partial}{\partial u}(L^2e^{-2\beta})\text{，}$$

$$0=\ddot{u}\text{。}$$

步驟 3：重新整理，使 $\ddot{x}^{\mu}$ 爲首項。如果這一步驟並不直截了當，則這種方法將無法節省時間，從而框14.2或框14.5的技巧更爲適用。在這個例子，用一撇表示 $\partial/\partial u$ ，很快寫出

$$0=\ddot{x}+2(L^{-1}L'+\beta')\dot{x}\dot{u}\text{，} \tag{3x}$$

$$0=\ddot{y}+2(L^{-1}L'-\beta')\dot{y}\dot{u}\text{，} \tag{3y}$$

$$0=\ddot{v}+(L^2e^{2\beta})(L^{-1}L'+\beta')\dot{x}^2+(L^2e^{-2\beta})(L^{-1}L'-\beta')\dot{y}^2\text{，} \tag{3v}$$

$$0=\ddot{u}\text{。} \tag{3u}$$

步驟3′：把這些方程解釋爲 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ 的表。(3)式是短程線的標準方程，

$$\ddot{x}^{\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}=0。$$

因此，瀏覽一下就足以找出任何所需的Γ值。例如，$\Gamma^{x}{}_{yu}$ 應在$\ddot{x}$方程中$\dot{y}\dot{u}$項的係數$(\Gamma^{x}{}_{yu}+\Gamma^{x}{}_{uy})=2\Gamma^{x}{}_{yu}$ 中出現。但在方程(3x)中未出現 $\dot{y}\dot{u}$ 項。因此，在這個例子中，$\Gamma^{x}{}_{yu}$爲零。注意，方程(3)，在它們只包括幾項的意義下，是簡單的；因此大多數 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ 應爲零。例如，由 (3u)式得出，全部十個 $\Gamma^{u}{}_{\alpha\beta}$ 均爲零。由(3x)式，非零的Γ只是 $\Gamma^{x}{}_{xu}=\Gamma^{x}{}_{ux}=(L^{-1}L'+\beta')$，由 (3$y$) 式，非零的$\Gamma$只是 $\Gamma^{y}{}_{yu}=\Gamma^{y}{}_{uy}=(L^{-1}L'-\beta')$，由 (3$v$) 式，非零的$\Gamma$只是 $\Gamma^{v}{}_{xx}$ 和 $\Gamma^{v}{}_{yy}$。

步驟 4：計算各 $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ 等等。有計畫地運用框14.2的(3)式，工作可稍微減輕。我們必須列出由於任一對稱性 $R_{\mu\nu\alpha\beta}=R_{\alpha\beta\mu\nu}=-R_{\mu\nu\beta\alpha}$ 而無關的21個 $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ 分量，並逐個計算。在這個例子中，注意到 $\Gamma^{u}{}_{\alpha\beta}=0$ 意味着 $R^{u}{}_{\alpha\beta\gamma}=-R_{v\alpha\beta\gamma}=0$。因此，一下子21個分量中有15個爲零。羅列如下：

$$\begin{aligned}
&R_{v\alpha\beta\gamma}=-R^{u}{}_{\alpha\beta\gamma}=0,\\
&R_{uxux}=-R^{v}{}_{xux}=-(\Gamma^{v}{}_{xx})'+\Gamma^{v}{}_{xx}\Gamma^{x}{}_{xu}\\
&\qquad=-(L^{2}e^{2\beta})\Big(\frac{L''}{L}+\beta''+2\frac{L'}{L}\beta'+\beta'^{2}\Big),\\
&R_{uxxy}=-R^{v}{}_{xxy}=0,\\
&R_{uxyu}=-R^{v}{}_{xyu}=0,\\
&R_{uyuy}=-R^{v}{}_{yuy}=-(\Gamma^{v}{}_{yy})'+\Gamma^{v}{}_{yy}\Gamma^{y}{}_{yu}\\
&\qquad=-(L^{2}e^{-2\beta})\Big(\frac{L''}{L}-\beta''-2\frac{L'}{L}\beta'+\beta'^{2}\Big),\\
&R_{uyxy}=-R^{v}{}_{yxy}=0,\\
&R_{xyxy}=(L^{2}e^{2\beta})R^{x}{}_{yxy}=0。
\end{aligned}\tag{4}$$

現在可經(14.7)式計算 Einstein 張量。然而，在這個例子中，通過直接縮併 $R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}$，先構成 Ricci 張量，同樣是簡單的。因爲上標無 u，下標無 v，所以只是 $\mu=x$ 和 $\mu=y$ 才有貢獻。於是，求出

$$\begin{aligned}
&R_{uu}=-2[L^{-1}L''+\beta'^{2}],\\
&\text{所有其他的 } R_{\alpha\beta}=0,
\end{aligned}\tag{5}$$

以及

$$R=0。\tag{6}$$

由最末的結果得出，此處所求的 Einstein 張量等於 Ricci 張量。

(a)對此度規中的短程線建立變分積分(14.10)式，然後逐個變化 t, χ, θ, 和ϕ，經重新整理後，得出(14.8)形式中顯示各個Γ的四個方程：$0=\ddot{t}+\ldots$, $0=\ddot{\chi}+\ldots$, 等等。

(b)用Γ表，計算 $R^{t}{}_{\chi\mu\nu}$ 和 $R^{\chi}{}_{\theta\mu\nu}$，其中只有 $R^{t}{}_{\chi t\chi}$ 和 $R^{\chi}{}_{\theta\chi\theta}$ 是非零的（結果完全等價於與 $\chi\theta\phi$ 球相切的所有方向）。

(c)變換到一個正交歸一系，其 $\omega^{\hat{t}}=dt$, $\omega^{\hat{\chi}}=ad\chi$, $\omega^{\hat{\theta}}=?$ ，$\omega^{\hat{\phi}}=?$ 並列出 $R^{\hat{t}\hat{\chi}}{}_{\hat{t}\hat{\chi}}$ 和 $R^{\hat{\chi}\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}\hat{\theta}}$。說明通過它們兩個的對稱性爲什麼可以得知所有其他的分量。

(d)用(14.7)式計算 Einstein 張量 $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$ 的全部獨立分量。［答案：見框 14.5。］

§14.5 曲率2-形式

在電動力學中，抽象符號

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{dA}$$

與明顯符號

$$F_{31}=\frac{\partial A_1}{\partial x^3}-\frac{\partial A_3}{\partial x^1},$$

$$F_{12}=\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2},$$

……等等（六個方程）

相比，節省了篇幅；在討論幾何動力學時，沒有理由避開類似的經濟措施。前已指出，Cartan 引入了微分形式（一個簡單對象代替了四個分量的表；即$\sigma=\sigma_\mu dx^\mu$），以及外微商$\boldsymbol{d}$的明確概念。接着(1928,1946)他把曲率張量的21個分量 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 納入六個曲率2-形式之中。

曲率2-形式方法所需的概念

$$\mathcal{R}^{\mu\nu}=-\mathcal{R}^{\nu\mu}。$$

純粹作爲符號看待，這些2-形式自動地有所得益。在人們有了答案需要列表時，它們減少了書寫的工作量。它們還提供了更深入地洞察「曲率作爲幾何對象」的方式，儘管這並不是本章馬上就要涉及的目標。

在曲率的計算中，Cartan 的外微商 $\boldsymbol{d}$ 自動地引起許多抵消。它常常在需要計算一些項之前，就把這些項消去了。

把 Cartan 的計算法從電磁學以及其他應用（第 4 章）推廣到曲率的分析（本章）時，需要在形式和外微商的武器中附加二點次要的內容：(1)求值矢量（vector-valued）（或求值張量）外微分形式的概念；以及(2)外微商$\boldsymbol{d}$的相應

推廣。本節將應用這兩種工具導出關鍵的(14.18), (14.25), (14.31) 和 (14.32)等式。然而，一旦導出之後，對於全部應用和全部曲率計算而言（§14.6和框14.5），這些公式並不比標準的外微商要求得更多。

推廣的外微商：

當人們把推廣的外微商首先用於標量函數（「0-形式」）和矢量場（「求值矢量0-形式」）這兩方面時，並沒有帶來什麼新東西。取任意函數 f。它在非特定方向的微商是1-形式；或「求值標量1-形式」，它引起了馬上就會變得有意義的新特徵。確定作微分的方向（「填充1-形式中的空位」）。當它用於函數時，由此得出了普通的微商

(1)作用在標量上

$$\langle df, u\rangle = \partial_u f。 \tag{14.11}$$

其次，取任意矢量場 v。它在非特定方向上的協變微商是「求值矢量1-形式」。確定作微分的方向 u（「填充1-形式中的空位」）。由此得出了協變微商

(2)作用在矢量上

$$\langle dv, u\rangle \equiv \nabla_u v。 \tag{14.12a}$$

這個對象也不是新的；它是矢量 v 在矢量 u 方向上的協變微商。當我們不在特別選擇的微分方向 u 抽象時，就會發現一個以前曾遇到過的表達式，雖然並未冠以它的新名稱「求值矢量1-形式」。這個表達式量度了矢量 v 在非特定方向的協變微商（「對方向的空位仍未填充」）。看一眼(14.12a)式可知，加在 v 上的推廣的外微商（並未涉及 u）爲

$$dv = \nabla v。 \tag{14.12b}$$

類似地，對於任何「求值張量0-形式」［即$\binom{n}{0}$秩張量］S，有$dS \equiv \nabla S$。

在進一步着手張量的外（馬上就要標作「反對稱的」）微分之前，寫下形式的積的外（反對稱）微商公式（見練習14.5）：

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \tag{14.13a}$$

式中α是p-形式，β是q-形式。

(3)普遍定義

現在，把外微商從基本的形式推廣到求值張量 p- 形式 S 與任意普通 q- 形式β的外積；即

$$d(S \wedge \beta) = dS \wedge \beta + (-1)^p S \wedge d\beta。 \tag{14.13b}$$

可以把這個方程看作推廣的外微商的普遍定義。例如，如果 S 是求值張量2-形式，$S = S^{\alpha\beta}{}_{|\gamma\delta|} e_\alpha e_\beta dx^\gamma \wedge dx^\delta$，則(14.13b)式爲

$$\begin{aligned} dS &= d[(e_\alpha e_\beta S^{\alpha\beta}{}_{|\gamma\delta|})(dx^\gamma \wedge dx^\delta)] \\ &= d(e_\alpha e_\beta S^{\alpha\beta}{}_{|\gamma\delta|}) \wedge (dx^\gamma \wedge dx^\delta)。 \end{aligned}$$

作爲另一個例子，用(14.13b)式計算 $d(u\sigma)$，其中 u 是求值矢量0-形式（矢量），σ 是求值張量1-形式（1-形式）：

$$d(u\sigma)=(du)\wedge\sigma+ud\sigma。$$

如果遵循前幾章的作法，在 $u\sigma$ 出現的地方，應寫作 $u\otimes\sigma$，$u\otimes d\sigma$ 代替 $ud\sigma$，$e_\alpha\otimes e_\beta$ 代替 $e_\alpha e_\beta$。然而，爲了避免符號過於複雜，此處及此後省略所有這類張量積符號。

(14.12)式和(14.13)式比（推廣的）外微商 d 的定義更豐富，並提供了用來作計算的方法。它們還可用來定義和計算反對稱的二階微商，例如 d^2v。而關係式

$$d^2v=\mathcal{R}v$$

（式中v是矢量）將引入「求值算符」或「$\binom{1}{1}$秩求值張量」曲率2-形式$\mathcal{R}$。推廣的外微商符號在老的基矢和平行移動的機構上增添了新的內容，從而開闢了計算曲率2-形式 $\mathcal{R}$的途徑。

設矢量場 v 用某個基矢場 e_μ 展開，即

$$v=e_\mu v^\mu。$$

則這個矢量的外微商爲

$$dv=de_\mu v^\mu+e_\mu dv^\mu。$$

把典型的求值矢量1-形式 de_μ 展爲形式

$\omega^\nu{}_\mu$的定義

$$de_\mu=e_\nu\omega^\nu{}_\mu。\qquad(14.14)$$

這裏，de_μ展開式中的「分量」$\omega^\nu{}_\mu$ 是1-形式。由（10.13）式回憶起，典型的 $\omega^\nu{}_\mu$ 與聯絡係數的關係爲

$$\omega^\nu{}_\mu=\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\omega^\lambda。\qquad(14.15)$$

因此，「矢量」（眞正的，「求值矢量1-形式」）的展開式爲

$$dv=e_\mu(dv^\mu+\omega^\mu{}_\nu v^\nu)。\qquad(14.16)$$

現在，再次微分，得

$$\begin{aligned}d^2v&=de_\alpha\wedge(dv^\alpha+\omega^\alpha{}_\nu v^\nu)\\&\quad+e_\mu(d^2v^\mu+d\omega^\mu{}_\nu v^\nu-\omega^\mu{}_\nu\wedge dv^\nu)\\&=e_\mu(\omega^\mu{}_\alpha\wedge dv^\alpha+\omega^\mu{}_\alpha\wedge\omega^\alpha{}_\nu v^\nu)\\&\quad+d^2v^\mu+d\omega^\mu{}_\nu v^\nu-\omega^\mu{}_\alpha\wedge dv^\alpha)。\end{aligned}$$

這裏所作的簡化有(1)再次用（14.14）式；以及(2)用乘積規則（14.13a）式，它在最後一項中引入了負號，準備消去第一項。現在考慮 d^2v^μ 項。記得任意給

定的分量，例如v^3，是位置的普通標量函數（與$\mathbf{v}$或$\mathbf{e}_3$或$\mathbf{e}_3v^3$相反）。因此，加在標量函數上的標準外微商（第4章）的全部內容是$\mathbf{d}$可以解釋爲$\mathbf{d}^2v^\mu$。但對於作用二次的標準外微商，可自動得出$\mathbf{d}^2v^\mu=0$（框 4.1, B；框 4.4）。這種情況把$\mathbf{d}^2\mathbf{v}$的展開式化爲

曲率2形式$\mathcal{R}^\mu{}_\nu$：

$$\mathbf{d}^2\mathbf{v}=\mathbf{e}_\mu\mathcal{R}^\mu{}_\nu v^\nu\,, \tag{14.17}$$

(1)用$\mathbf{d}^2\mathbf{v}$表示

式中$\mathcal{R}^\mu{}_\nu$是下述曲率2-形式的縮寫

$$\mathcal{R}^\mu{}_\nu\equiv d\omega^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\alpha\wedge\omega^\alpha{}_\nu\,。 \tag{14.18}$$

(2)用$\omega^\mu{}_\nu$表示

通常，對於曲率2-形式的計算而言，(14.18)式在功效上超過各種其他已知的方法。

(14.17)式的引人注目的形式值得加以評論一番。方程的左邊出現了兩次$\mathbf{d}$，提醒我們已對矢量場$\mathbf{v}$兩次微分。但在方程的右邊，作爲微分的結果，只有在所討論點未經微分的矢量場$\mathbf{v}$。$\mathbf{v}$在各處怎樣變化毫不影響答案。全部問題在於，幾何在各處怎樣變化。這就是曲率參與的證據。這就得到擺脫了矢量場$\mathbf{v}$的任何特殊性質的證據，因爲算符$\mathbf{d}^2$是反對稱的協變微商［用以前發展的抽象語言，把這個反對稱的協變微商與(11.8)式比較，在圖示形式表示的幕後發生了什麼，可參看框 11.2 和 11.6］。扼要的說，$\mathbf{d}$在$\mathbf{v}$上兩次作用的結果就是代數的線性算符作用於$\mathbf{v}$；即

$$\mathbf{d}^2\mathbf{v}=\mathcal{R}\mathbf{v}\,。 \tag{14.19}$$

求值張量曲率2-形式$\mathcal{R}$

這裏，$\mathcal{R}$是「$\binom{1}{1}$秩求值張量2-形式」的縮寫，即

$$\mathcal{R}=\mathbf{e}_\mu\otimes\omega^\nu\mathcal{R}^\mu{}_\nu\,。 \tag{14.20}$$

如果$\mathbf{d}$是「其中有一空位」的微商，其中插入的矢量說明在什麼方向上作微分，則$\mathbf{d}^2\mathbf{w}=\mathcal{R}\mathbf{w}$中的$\mathbf{d}^2\mathbf{w}$有兩個空位，並要求兩個矢量，如$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$。這兩個矢量確定了一個平面，在其中計算(14.19)式的反對稱外微商（$\mathbf{w}$繞着由$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$所定義的基本路線並回到其起始點引起的變化；框 11.6和11.7）。爲了明確地寫出插入這些空位的矢量，首先回到更簡單的情形，考察對雙重矢量$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$（「在由兩個矢量$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$所定義的平行四邊形範圍內，2-形式類蜂窩單元的數量」）「 計算」的1-形式的外微商（本身爲2-形式），再考察把計算結果（練習14.6）表爲對易算符（commutator），

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle=&\partial_{\mathbf{u}}\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{v}\rangle-\partial_{\mathbf{v}}\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}\rangle\\&-\langle\boldsymbol{\alpha},[\mathbf{u},\mathbf{v}]\rangle\,。\end{aligned} \tag{14.21}$$

顯然，這個結果本身可推廣到任意秩的求值張量1-形式 $\boldsymbol{S}$，即

$$\langle d\boldsymbol{S},\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\rangle=\nabla_{\boldsymbol{u}}\langle\boldsymbol{S},\boldsymbol{v}\rangle-\nabla_{\boldsymbol{v}}\langle\boldsymbol{S},\boldsymbol{u}\rangle-\langle\boldsymbol{S},[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\rangle。\tag{14.22}$$

把這個結果用於求值矢量1-形式 $\boldsymbol{S}=d\boldsymbol{w}$。回憶方向微商的表達式 $\langle d\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}\rangle=\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}$。於是得出結果

$$\begin{aligned}\langle d^2\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\rangle&=\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}-\nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}-\nabla_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}\boldsymbol{w}\\&=\mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w},\end{aligned}\tag{14.23}$$

曲率2-形式 $\mathcal{R}$ 與曲率算符 $\mathcal{R}$ 的關係

式中 $\mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 是已在第11章定義的曲率算符［(11.8)式］。結果是簡單的：在雙重矢量（「平行四邊形」） $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ 上計算的(14.19)式的$\binom{1}{1}$秩求值張量2-形式$\mathcal{R}$ 與前面引入的曲率算符 $\mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 相等；因此

$$\langle\mathcal{R},\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\rangle=\mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})。\tag{14.24}$$

現在，從抽象算符的語言過渡到使分量開始顯示出來的語言。把表達式（14.20)代入上式左邊，把由 (11.11) 式所得之曲率算符值代入右邊，把(14.24) 式重新寫成下述形式

$$\boldsymbol{e}_\mu\otimes\boldsymbol{\omega}^\nu\langle\mathcal{R}^\mu{}_\nu,\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\rangle=\boldsymbol{e}_\mu\otimes\boldsymbol{\omega}^\nu R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}u^\alpha v^\beta。$$

比較並由此得出，典型的單個曲率2-形式由下述公式給出

$\mathcal{R}$ 與Riemann分量的關係

$$\mathcal{R}^\mu{}_\nu=R^\mu{}_{\nu[\alpha\beta]}\boldsymbol{\omega}^\alpha\wedge\boldsymbol{\omega}^\beta\tag{14.25}$$

（對 α, β求和，局限於 $\alpha<\beta$；故每對指標只出現一次）。

(14.25) 式提供了前面已經提到過的把21個曲率分量納入六個曲率2-形式；(14.18) 式提供了計算這些曲率2-形式的快速手段。盲目地採用關鍵的計算方程(14.18) 式，或精通推廣的外微商以便證明或應用它們，都是不可取的。除了第 4 章的標準外微商 $\boldsymbol{d}$ 外，任意的 $\boldsymbol{d}$ 都不值得我們注意。此外，通過在一坐標系中的操作，這些關鍵的方程可以詳加證明（練習14.8）。我們採用基1-形式$\boldsymbol{\omega}^\alpha=d\boldsymbol{x}^\alpha$。我們繼續採用 (14.15) 式的 $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu=\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}d\boldsymbol{x}^\lambda$。由此，通過標準的方法，可獲得「曲率的標準公式」［框14.2的(11.12)式和(3)式］。

總之，形式和外微商的計算把

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\longrightarrow R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$$

的計算化爲

$$\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu\longrightarrow\mathcal{R}^\mu{}_\nu$$

的計算。現在考察一下從度規到曲率鏈條中的其他環節。它過去用的是

$$g_{\mu\nu}\longrightarrow\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}。$$

現在，它化爲「聯絡1-形式」的計算；卽

$$g_{\mu\nu}\longrightarrow\omega^{\mu}{}_{\nu}。$$

兩條原理支配着曲率計算的第一步：(1)協變微商的對稱性；以及(2)它和度規的相容性。條件(1)對稱性以隱蔽的形式出現在下述原理中

協變微商的對稱性：

(1)表爲 $d^2\mathscr{P}=0$

$$d^2\mathscr{P}=0。\tag{14.26}$$

這裏的符號「對於點的$\mathscr{P}$」直接出自 Cartan。他把矢量看作是通過從一點到無限接近它的另一點的運動來定義的。因此，寫出 $d\mathscr{P}$ 就是取「點的微商」［做爲一種結構，它具有「擦掉的點」（矢量之尾）和「重新插在附近的點」（矢量頂端）］。在$d\mathscr{P}$中微商d的方向是不確定的。換言之，$d\mathscr{P}$ 包含一個「空位」。僅當把一個確定的矢量 v 插入此空位時，$d\mathscr{P}$ 才對 Cartan 矢量給出確定的答案。$d\mathscr{P}$給出的矢量是什麼呢？就是 v 自己。「v告知點$\mathscr{P}$的運動再現了 v 的運動」；或者用具體的符號，爲

$$\langle d\mathscr{P},v\rangle=v。\tag{14.27}$$

在這個方程插入更多的形式項。量$d\mathscr{P}$是$\binom{1}{1}$秩張量

$$d\mathscr{P}=e\omega_{\mu}{}^{\mu}。\tag{14.28}$$

它和一般$\binom{1}{1}$秩張量

$$T=e_{\mu}T^{\mu}{}_{\nu}\omega^{\nu}$$

的區別在於它的分量有特殊值

$$T^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}。$$

在這個意義上，它理應稱爲「單位張量」。把這個張量代入(14.22)式中 S 的位置，得出結果爲

$$\langle d^2\mathscr{P},u\wedge v\rangle=\nabla_u v-\nabla_v u-[u,v]=0。\tag{14.29}$$

右邊的零是(10.2a)式的重新表述，或是框10.2「協變微分對稱性」圖中「矢量圖閉合」的重新表述。右邊對任意 u 和 v 爲零，要求左邊的 $d^2\mathscr{P}$ 爲零；反之，$d^2\mathscr{P}$ 爲零要求協變微商具有對稱性。以卽將來臨的計算爲基礎的另一條原理是「協變微商與度規的相容性」，可表爲下述形式

$$d(u\cdot v)=(du)\cdot v+u\cdot(dv)。\tag{14.30}$$

此處，重要的是，把協變微商爲零認爲是由度規（「圓點」）引起的；卽

$$d(\cdot)=0。$$

通過(14.26)式和(14.30)式中的基矢（以及該處與這些基矢對偶的適當的基1-形式），利用協變微商的對稱性和相容性，於是，由

$$d\mathscr{P}=e_\mu\omega^\mu$$

計算

$$\begin{aligned}0=d^2\mathscr{P}&=de_\mu\wedge\omega^\mu+e_\mu d\omega^\mu\\&=e_\mu(\omega^\mu{}_\nu\wedge\omega^\nu+d\omega^\mu),\end{aligned}$$

由此得出，e_μ 的係數必須爲零；或

(2)表爲 $d\omega^\mu+\omega^\mu{}_\nu\wedge\omega^\nu=0$

$$0=d\omega^\mu+\omega^\mu{}_\nu\wedge\omega^\nu\quad(\text{「對稱性」})。\tag{14.31a}$$

其次，在(14.30)式中分別代入特定的 e_μ 和 e_ν，代替一般的 u 和 v，求出

g 和 ∇ 的相容性表爲 $dg_{\mu\nu}=\omega_{\mu\nu}+\omega_{\nu\mu}$

$$dg_{\mu\nu}=\omega_{\mu\nu}+\omega_{\nu\mu}\quad(\text{「相容性」})，\tag{14.31b}$$

式中

$$\omega_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\alpha}\omega^\alpha{}_\nu=\Gamma_{\mu\nu\alpha}\omega^\alpha。\tag{14.31c}$$

(14.31)式以最緊湊的方式表示出度規和聯絡形式之間的聯繫。

§14.6 用外微分形式計算曲率

曲率2-形式方法分爲四步：
(1)選擇度規和參照系
(2)計算聯絡1-形式 $\omega^\mu{}_\nu$

框14.5說明微分形式對曲率計算的用處。本節概述這種方法。主要是三步：計算 $\omega^\mu{}_\nu$；計算 $\mathscr{R}^\mu{}_\nu$；以及計算 $G^\mu{}_\nu$。更具體地說，首先，選擇一種度規和一個參照系。從而固定基形式 $\omega^\mu=L^\mu{}_{\alpha'}dx^{\alpha'}$ 和 $ds^2=g_{\mu\nu}\omega^\mu\otimes\omega^\nu$ 中的度規分量 $g_{\mu\nu}$。然後，作爲下述方程的解，確定聯絡形式 $\omega^\mu{}_\nu$，並唯一地確定它們

$$0=d\omega^\mu+\omega^\mu{}_\nu\wedge\omega^\nu,\tag{14.31a}*$$

$$dg_{\mu\nu}=\omega_{\mu\nu}+\omega_{\nu\mu}。\tag{14.31b}*$$

用「猜測和檢驗」的方法求解這些方程（在框14.5中加以描述和說明）往往既快又容易。［練習(14.7)證明 Christoffel 公式(14.36)是在坐標系中的唯一解，從而說明解總是存在的。］通常，最方便的是採用具有 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ 的正交歸一系（或 $g_{\mu\nu}=$常數的某些別的簡單參照系，例如，零參照系）。於是 $dg_{\mu\nu}=0$，並且(14.31b)式表明 $\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$。因此，在四維情形只需求解六個 $\omega_{\mu\nu}$。

---

* 原文公式編號(14.31a)和(14.31b)重複用了兩次，有誤。請讀者注意區別。（譯者註）

（接第358頁）

框 14.5　用外微分形式計算曲率（Friedmann宇宙論度規）

Friedmann 度規

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]$$

（框27.1）代表一種空時，其中每個恒定 t 的超曲面是固有圓周爲 $2\pi a(t)$ 的三維超球。在這個空時中很容易找到一個正交歸一基；則

$$\mathbf{ds}^2=-(\boldsymbol{\omega}^{\hat{0}})^2+(\boldsymbol{\omega}^{\hat{1}})^2+(\boldsymbol{\omega}^{\hat{2}})^2+(\boldsymbol{\omega}^{\hat{3}})^2,$$

式中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}^{\hat{0}}=\mathbf{d}t,\\&\boldsymbol{\omega}^{\hat{1}}=a\mathbf{d}\chi,\\&\boldsymbol{\omega}^{\hat{2}}=a\sin\chi\mathbf{d}\theta,\\&\boldsymbol{\omega}^{\hat{3}}=a\sin\chi\sin\theta\mathbf{d}\phi。\end{aligned}\qquad(1)$$

A. 聯絡的計算

由於 $\mathbf{d}g_{\mu\nu}=\mathbf{d}\eta_{\mu\nu}=0$，(14.31b) 式剛好給出

$$\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu};\qquad(2)$$

因此只存在六個要找的1-形式 $\omega_{\mu\nu}$。轉向第二個基本方程（14.31a）式。現在的目的是猜出方程 $0=\mathbf{d}\omega^{\mu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}\wedge\omega^{\nu}$ 的解（因爲猜測常常比用系統的方法更快），其中 ω^{ν} 已知，從而 $\mathbf{d}\omega^{\mu}$ 也已知，而 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ 是未知的。已知解 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ 是唯一的；因此猜測（如果它能導致任何答案的話）只會給出正確的答案。

從最簡單的這類方程着手。由 $\omega^{\hat{0}}=\mathbf{d}t$ 算出

$$\mathbf{d}\omega^{\hat{0}}=0。$$

把它與 $\mathbf{d}\omega^{\hat{0}}=-\omega^{\hat{0}}{}_{\mu}\wedge\omega^{\mu}$ 或（由 $\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$，故 $\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{0}}=-\omega_{\hat{0}\hat{0}}=0$）

$$\mathbf{d}\omega^{\hat{0}}=-\omega^{\hat{0}}{}_{k}\wedge\omega^{k}=0$$

相比較。如果 $\omega^{\hat{0}}{}_{k}\propto\omega^{k}$，或者更複雜一點不同項之間相互抵消，或更簡單 $\omega^{\hat{0}}{}_{k}=0$，則上式就能滿足。進行下去，不要自找麻煩，直到求出某個非零的 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$

爲止。由 $\omega^{\hat{1}}=a\mathrm{d}\chi$ 求出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^{\hat{1}}&=\dot{a}\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}\chi\\&=(\dot{a}/a)\omega^{\hat{0}}\wedge\omega^{\hat{1}}\\&=-(\dot{a}/a)\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{0}}。\end{aligned}$$

把它與

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^{\hat{1}}&=-\omega^{\hat{1}}{}_{\mu}\wedge\omega^{\mu}\\&=-\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{1}}-\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{\theta}}\wedge\omega^{\hat{\theta}}-\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{\phi}}\wedge\omega^{\hat{\phi}}\end{aligned}$$

相比較。從第一項猜出 $\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{1}}=(\dot{a}/a)\omega^{\hat{1}}$；希望其他項均爲零。（注意，在 $\mathrm{d}\omega^{\hat{1}}$ 的方程中這允許 $\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{1}}=-\omega_{\hat{1}\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{1}}=\omega_{\hat{1}\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{1}}=0$。）考察 $\omega^{\hat{\theta}}=a\sin\chi\mathrm{d}\theta$，寫出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^{\hat{\theta}}&=(\dot{a}/a)\omega^{\hat{0}}\wedge\omega^{\hat{\theta}}+a^{-1}\cot\chi\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{\theta}}\\&=-\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{0}}-\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{1}}-\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}}\wedge\omega^{\hat{\phi}}。\end{aligned}$$

爲了與以前寫出的方程一致，猜出

$$\begin{aligned}\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{1}}&=\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{\theta}}=(\dot{a}/a)\omega^{\hat{\theta}}，\\\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{1}}&=-\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{\theta}}=a^{-1}\cot\chi\omega^{\hat{\theta}}。\end{aligned}$$

最後，從

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^{\hat{\phi}}&=(\dot{a}/a)\omega^{\hat{0}}\wedge\omega^{\hat{\phi}}+a^{-1}\cot\chi\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{\phi}}\\&\quad+(a\sin\chi)^{-1}\cot\theta\omega^{\hat{\theta}}\wedge\omega^{\hat{\phi}}\\&=-\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{0}}-\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{1}}-\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}}\wedge\omega^{\hat{\theta}}，\end{aligned}$$

推演出 $\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{0}}$, $\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{1}}$ 和 $\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}}$ 的值。這些和以前假設（在 $\mathrm{d}\omega^{\hat{\theta}}$ 方程中）像 $\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}}\wedge\omega^{\hat{\phi}}$ 的項爲零並非不一致；因此，事實上已經對一組聯絡形式 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ 解出 $\mathrm{d}\omega^{\mu}=-\omega^{\mu}{}_{\nu}\wedge\omega^{\nu}$ 如下：

$$\begin{aligned}\omega^{\hat{k}}{}_{\hat{i}}&=\omega^{\hat{i}}{}_{\hat{k}}=(\dot{a}/a)\omega^{\hat{k}}，\\\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{1}}&=-\omega^{\hat{\theta}}\ =a^{-1}\cot\chi\omega^{\hat{\theta}}\\&\qquad=\cos\chi\mathrm{d}\theta，\\\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{1}}&=-\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{\phi}}=a^{-1}\cot\chi\omega^{\hat{\phi}}\\&\qquad=\cos\chi\sin\theta\mathrm{d}\phi，\\\omega^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}}&=-\omega^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}}=(a\sin\chi)^{-1}\cot\theta\omega^{\hat{\phi}}\\&\qquad=\cos\theta\mathrm{d}\phi。\end{aligned}\qquad(3)$$

當然，如果這些漫無目的地求解 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ 的方法在某些問題中不容易做到的話，那麼可以簡地單採用(14.32)式和(14.33)式。

B. 曲率的計算

曲率的計算是直接將 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ 由上述(3)式代入(14.34)式

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}=\mathbf{d}\omega^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\alpha}\wedge\omega^{\alpha}{}_{\nu}。$$

與相應的 $R=\partial\Gamma+\Gamma^2$ 方程［框 14.2 的(3)式］中有十項不同，這個方程很短，可以寫出和

$$\mathcal{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}}=\mathbf{d}\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{2}}+\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{\beta}}\wedge\omega^{\hat{\beta}}{}_{\hat{2}}+\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{\beta}}\wedge\omega^{\hat{\beta}}{}_{\hat{2}}。$$

警告！：由 $\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{i}}=(\dot{a}/a)\omega^{\hat{i}}$，不能計算 $\mathbf{d}\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{i}}=(\dot{a}/a)\cdot\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{i}}$。$(\dot{a}/a)\mathbf{d}\omega^{\hat{i}}$ 項失踪了。作爲替代，寫出 $\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{i}}=(\dot{a}/a)\omega^{\hat{i}}=\dot{a}\mathbf{d}\chi$，然後求出 $\mathbf{d}\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{i}}=\ddot{a}\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}\chi=(\ddot{a}/a)\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{i}}$。再小心地、正確地由(3)式代 $\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}$ 的公式中的 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$，得出

$$\mathcal{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{i}}=(\ddot{a}/a)\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{i}},$$

和

$$\mathcal{R}^{\hat{i}}{}_{\hat{j}}=(1+\dot{a}^2)a^{-2}\omega^{\hat{i}}\wedge\omega^{\hat{j}}。$$

這就完成了 $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ 的計算，因爲在各向同性的宇宙模型中，在正交歸一系 ω^{μ} 內的所有空間方向在代數上是等價的。因此，爲了完整的列出 $\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}$，可以寫出

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{k}}&=(\ddot{a}/a)\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{k}},\\ \mathcal{R}^{\hat{k}}{}_{\hat{l}}&=a^{-2}(1+\dot{a}^2)\omega^{\hat{k}}\wedge\omega^{\hat{l}}。\end{aligned}\qquad(4)$$

從列出的 $\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}$ 很容易讀出特定的分量，例如

$$R^{\hat{1}}{}_{\hat{i}\hat{1}\hat{i}}=\ddot{a}/a,\quad R^{\hat{1}}{}_{\hat{i}\hat{1}\hat{j}}=0,\text{ 等等，}$$

或

$$R^{\hat{1}}{}_{\hat{i}\hat{i}\hat{i}}=0,\quad R^{\hat{j}}{}_{\hat{j}\hat{j}\hat{j}}=a^{-2}(1+\dot{a}^2)。$$

C. 縮併

由(14.7)式，求出

$$G^{\hat{1}\hat{1}}=+3a^{-2}(1+\dot{a}^2),\qquad(5a)$$

$$G^{\hat{1}\hat{i}}=G^{\hat{i}\hat{1}}=G^{\hat{i}\hat{j}}=0=G^{\hat{j}\hat{i}}=G^{\hat{j}\hat{k}}=G^{\hat{k}\hat{j}},\qquad(5b)$$

$$G^{\hat{i}\hat{i}}=G^{\hat{j}\hat{j}}=G^{\hat{k}\hat{k}}=-[2a^{-1}\ddot{a}+a^{-2}(1+\dot{a}^2)],\qquad(5c)$$

和

$$R=-G^{\mu}{}_{\mu}=6[a^{-1}\ddot{a}+a^{-2}(1+\dot{a}^2)]。\qquad(6)$$

如果猜測並不容易，那麼在正交歸一系或在任何其他 $dg_{\mu\nu}=0$ 的參照系中，有一種求解(14.31)式的系統方法。計算 $d\omega^{\mu}$，並把它整理成下述格式

$$d\omega^{\alpha}=-c_{[\mu\nu]}{}^{\alpha}\omega^{\mu}\wedge\omega^{\nu}。\tag{14.32}$$

這種方法展現了24個「對易係數(commutation coefficients)」$c_{\mu\nu}{}^{\alpha}$. 這些量進入公式

$$\omega_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(c_{\mu\nu\alpha}+c_{\mu\alpha\nu}-c_{\nu\alpha\mu})\omega^{\alpha},\tag{14.33}$$

給出六個 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$（練習 14.12）。

(3)計算曲率2-形式$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}$

一旦 $\omega_{\mu\nu}$ 已知，用下述公式即可計算曲率形式 $\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}$（因爲 $\mathcal{R}^{\mu\nu}=-\mathcal{R}^{\nu\mu}$，所以在四維情形還是只有六個）

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}=d\omega^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\alpha}\wedge\omega^{\alpha}{}_{\nu}。\tag{14.34}$$

(4)計算曲率張量的分量

用這些表，通過證認，讀出曲率張量的各個分量

$$\mathcal{R}^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}{}_{[\alpha\beta]}\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}。\tag{14.35}$$

仔細研究列出的 $\mathcal{R}^{\mu\nu}$，找出合乎(14.7)式[illegible]的適當的 $R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$ 分量，由此，可計算 Einstein 張量 $G^{\mu}{}_{\nu}$。

練習

練習 14.5 形式的積的外微商

從較低階形式到較高階形式逐個整理，從而建立(14.13a)式。［提示：由 (4.27) 式憶及，對於 p- 形式

$$\alpha=\alpha_{[\mu_1\cdots\mu_p]}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p},$$

外微商的定義爲

$$d\alpha=\frac{\partial\alpha_{[\mu_1\cdots\mu_p]}}{\partial x^{\mu_0}}dx^{\mu_0}\wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}。$$

把外微商加在兩個1-形式的積 $\alpha\wedge\beta$ 上，這一式給出

$$\begin{aligned}d(\alpha\wedge\beta)&=d[(\alpha_\lambda dx^\lambda)\wedge(\beta_\mu dx^\mu)]\\&=d[(\alpha_\lambda\beta_\mu)(dx^\lambda\wedge dx^\mu)]\\&=\frac{\partial(\alpha_\lambda\beta_\mu)}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^\lambda\wedge dx^\mu\\&=\left(\frac{\partial\alpha_\lambda}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^\lambda\right)\wedge\beta_\mu dx^\mu-(\alpha_\lambda dx^\lambda)\wedge\left(\frac{\partial\beta_\mu}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^\mu\right)\\&=(d\alpha)\wedge\beta-\alpha\wedge d\beta。\end{aligned}$$

把這種論證擴展到更高階的形式。］

練習 14.6　外微商和對易算符之間的關係

爲建立公式(14.21)式，試證明，(a)右側是 $\mathbf{u}$ 的代數線性函數和 $\mathbf{v}$ 的代數線性函數，和(b)當 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 爲坐標基矢 $\mathbf{u}=\partial/\partial x^k$, $\mathbf{v}=\partial/\partial x^l$ 時，此式成立。

練習 14.7　從聯絡形式導出 Christoffel 公式

在坐標系 $\omega^\mu=dx^\mu$ 中，證明(14.31a)式要求 $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}=\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$，並證明，由所確立的這種對稱性，(14.31b)式給出了 $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\alpha$ 的表達式，它可以求解得出 Christoffel 公式

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right)。\tag{14.36}$$

練習 14.8　Riemann-Christoffel 曲率公式與曲率形式的關係

把 $\omega^\mu{}_\nu=\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}dx^\lambda$ 代入(14.18)式，按照(14.25)式從所得結果讀出框14.2中分量 $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ 的標準公式(3)式。

練習 14.9　爲評論 Cartan 結構方程而用的矩陣符號

設 $e\equiv(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ 是一個行矩陣，它的輸入均爲基矢，設 ω 是一個基1-形式 ω^μ 的列。類似的，設 $\Omega=\|\omega^\mu{}_\nu\|$ 和 $\mathcal{R}=\|\mathcal{R}^\mu{}_\nu\|$ 是輸入1-形式和2-形式的方矩陣。這給出了一種緊湊的符號，其中 $\mathbf{d}e_\mu=\mathbf{e}_\nu\omega^\nu{}_\mu$ 和 $\mathbf{d}\mathcal{P}=\mathbf{e}_\mu\omega^\mu$ 分別讀作

$$\mathbf{d}e=e\Omega \text{ 和 } \mathbf{d}\mathcal{P}=e\omega。\tag{14.37}$$

(a)從(14.37)式和 $\mathbf{d}^2\mathcal{P}=0$ 導出下述形式的(14.31a)式

$$0=\mathbf{d}\omega+\Omega\wedge\omega。\tag{14.38}$$

[解：$\mathbf{d}^2\mathcal{P}=\mathbf{d}e\wedge\omega+e\mathbf{d}\omega=e(\Omega\wedge\omega+\mathbf{d}\omega)$]

(b)爲定義式(14.18)式，計算 $\mathbf{d}^2e$，把(14.18)式讀作

$$\mathcal{R}=\mathbf{d}\Omega+\Omega\wedge\Omega。\tag{14.39}$$

(c)由 $\mathbf{d}^2\omega=0$ 推出 $\mathcal{R}\wedge\omega=0$，然後疏展符號，得出反對稱關係式 $R^\mu{}_{[\alpha\beta\gamma]}=0$。

(d)由(14.39)式計算 $\mathbf{d}\mathcal{R}$，並把它和 Bianchi 恒等式 $R^\mu{}_{\nu[\alpha\beta;\gamma]}=0$ 聯繫起來。

(e)設 $v=\{v^\mu\}$ 是一個函數列；因此 $\mathbf{v}=ev=\mathbf{e}_\mu v^\mu$ 是矢量場。用緊湊的符號計算 $\mathbf{d}\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{d}^2\mathbf{v}$ 以證明 $\mathbf{d}^2\mathbf{v}=e\mathcal{R}v$ [此即(14.17)式]。

練習 14.10　用緊湊符號表示聯絡形式的變換規則

用前面練習中的符號，以 $e'=eA$ 代替 $\mathbf{e}_{\mu'}=\mathbf{e}_\nu A^\nu{}_{\mu'}$，類似的以 $\omega'=A^{-1}\omega$ 表示參照系的變化。試證明 $\mathbf{d}\mathcal{P}\equiv e\omega=e'\omega'$ 把 $e'=eA$ 代入 $\mathbf{d}e'=e'\Omega'$，推出變換定律

$$\Omega'=A^{-1}\Omega A+A^{-1}\mathbf{d}A。\tag{14.40}$$

對於具有 $A^\nu{}_{\mu'}=\partial x^\nu/\partial x^{\mu'}$ 的坐標系，以疏展符號把上式重新寫成 $\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'}=(?)$ 形式的公式。

練習 14.11 如果曲率爲零則空間是平直的（見§11.5）

如果存在着這樣的坐標，其中全部直線（$d^2x^\mu/d\lambda^2=0$）都是短程線，那麼我們說空間是平直的。根據(14.8)式及框 14.2 中的(3)式，顯然，在這種情形，全部 $\Gamma'^\mu{}_{\alpha\beta}$ 和 $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ 均爲零。反過來證明，如果 $\mathscr{R}=0$，則存在這類坐標。應用前面問題的結果，求出到基 e'（其中 $\Omega'=0$）的變換 A 的微分方程。這些方程完整積分的條件是什麼？［注意，如果對原方程的模 $\boldsymbol{d}^2f_K=0$，則 $\boldsymbol{d}f_K=F_K(x,f)$ 是可以完整積分的。］爲什麼在這個新系中，基形式 $\omega^{\mu'}$ 是坐標的微分 $\omega^{\mu'}=\boldsymbol{d}x^{\mu'}$？

練習 14.12 在正交歸一系中聯絡形式的系統計算

把(14.21)式用於基矢，以(8.14)式定義 $c_{\mu\nu}{}^\alpha$，導出 (14.32) 式。然後證明，在正交歸一系（或 $g_{\mu\nu}=$常數的任何系）中，(14.33)式提供了(14.31)式的一個解，它定義了 $\omega^\mu{}_\nu$。［還可與(8.24b)式比較。］

練習 14.13 Schwarzschild 曲率形式

對 Schwarzschild 度規

$$ds^2=-e^{2\Phi}dt^2+e^{2\Lambda}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,, \tag{14.41}$$

採用明顯的正交歸一系 $\omega^{\hat{1}}=e^\Phi\boldsymbol{d}t$, $\omega^{\hat{2}}=e^\Lambda\boldsymbol{d}r$, $\omega^{\hat{3}}=r\boldsymbol{d}\theta$, $\omega^{\hat{4}}=\sin\theta\boldsymbol{d}\phi$。其中$\Phi$和$\Lambda$只是 r 的函數；用框14.5的方法計算曲率形式 $\mathscr{R}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$ 和 Einstein 張量 $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$.［答案：$\mathscr{R}^{\hat{1}\hat{2}}=E\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{2}}$, $\mathscr{R}^{\hat{1}\hat{3}}=\bar{E}\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{3}}$, $\mathscr{R}^{\hat{1}\hat{4}}=\bar{E}\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{4}}$, $\mathscr{R}^{\hat{3}\hat{4}}=F\omega^{\hat{3}}\wedge\omega^{\hat{4}}$, $\mathscr{R}^{\hat{2}\hat{4}}=\bar{F}\omega^{\hat{2}}\wedge\omega^{\hat{4}}$, $\mathscr{R}^{\hat{2}\hat{3}}=\bar{F}\omega^{\hat{2}}\wedge\omega^{\hat{3}}$, 其中

$$\begin{aligned}
E&=-e^{-2\Lambda}(\Phi''+\Phi'^2-\Phi'\Lambda')\,,\\
\bar{E}&=-\frac{1}{r}e^{-2\Lambda}\Phi'\,,\\
F&=\frac{1}{r^2}(1-e^{-2\Lambda})\,,\\
\bar{F}&=\frac{1}{r}e^{-2\Lambda}\Lambda'\,;
\end{aligned} \tag{14.42}$$

於是

$$\begin{aligned}
G^{\hat{1}}_{\hat{1}}&=-(F+2\bar{F})\,,\\
G^{\hat{2}}_{\hat{2}}&=-(F+2\bar{E})\,,\\
G^{\hat{3}}_{\hat{3}}&=G^{\hat{4}}_{\hat{4}}=-(E+\bar{E}+\bar{F})\,,\\
G^{\hat{1}}_{\hat{2}}&=G^{\hat{1}}_{\hat{3}}=G^{\hat{1}}_{\hat{4}}=0=G^{\hat{2}}_{\hat{3}}=G^{\hat{2}}_{\hat{4}}=G^{\hat{3}}_{\hat{4}}\,。］
\end{aligned} \tag{14.43}$$

練習 14.14 Riemann 張量分量的矩陣顯示

利用 Riemann 張量的對稱性，證明可把它在正交歸一系中的分量展現爲下述形式

$$R^{\hat{a}\hat{b}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=\begin{array}{c}\begin{matrix}01\\02\\03\\23\\31\\12\end{matrix}\\ \end{array}\left(\begin{array}{c|c} E & H \\ \hline -H^T & F \end{array}\right)\,, \tag{14.44}$$

式中，行用指標對 $\hat{\mu}\hat{\nu}=01, 02,$ 等等標誌；類似的，列用 $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ 標誌。此處 E, F 和 H 均爲 3×3 矩陣，且（爲什麼？）

$$E=E^T, \quad F=F^T, \quad \text{H的迹}=0, \tag{14.45}$$

式中 E^T 是 E 的轉置。

練習 14.15　零 Einstein 張量的 Riemann 矩陣

試證明，空的空間的 Einstein 方程 $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}=0$ 使 (14.44) 式的矩陣簡化爲下述形式

$$R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=\left(\begin{array}{c|c} E & H \\ \hline -H & E \end{array}\right), \tag{14.46}$$

現在，加上這種形式所包含的等式 $E=F$，下述進一步的條件成立

$$E\text{的迹}=0, \quad H=H^T\text{。} \tag{14.47}$$

練習 14.16　脈沖星或坍縮是曲率的計算

第26章和第32章討論了自引力物體的球對稱運動。在這種情形，常常採用的度規的形式是

$$ds^2=-e^{2\Phi}dT^2+e^{2\Lambda}dR^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2), \tag{14.48}$$

現在，式中的 Φ, Λ和r都是兩個坐標R和T的函數。用框14.5的方法，對此度規，計算曲率2-形式和 Einstein 張量。在猜測 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ 時，根據練習 14.13 中相應的計算，大部分項已經是明顯的。［答案：在明顯的正交歸一系 $\omega^{\hat{T}}=e^{\Phi}dT$, $\omega^{\hat{R}}=e^{\Lambda}dR$, $\omega^{\hat{\theta}}=rd\theta$, $\omega^{\hat{\phi}}=r\sin\theta d\phi$ 中：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}^{\hat{T}}{}_{\hat{R}}=E\omega^{\hat{T}}\wedge\omega^{\hat{R}},\\
&\mathcal{R}^{\hat{T}}{}_{\hat{\theta}}=\bar{E}\omega^{\hat{T}}\wedge\omega^{\hat{\theta}}+H\omega^{\hat{R}}\wedge\omega^{\hat{\theta}},\\
&\mathcal{R}^{\hat{T}}{}_{\hat{\phi}}=\bar{E}\omega^{\hat{T}}\wedge\omega^{\hat{\phi}}+H\omega^{\hat{R}}\wedge\omega^{\hat{\phi}},\\
&\mathcal{R}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}}=F\omega^{\hat{\theta}}\wedge\omega^{\hat{\phi}},\\
&\mathcal{R}^{\hat{R}}{}_{\hat{\theta}}=\bar{F}\omega^{\hat{R}}\wedge\omega^{\hat{\theta}}-H\omega^{\hat{T}}\wedge\omega^{\hat{\theta}},\\
&\mathcal{R}^{\hat{R}}{}_{\hat{\phi}}=\bar{F}\omega^{\hat{R}}\wedge\omega^{\hat{\phi}}-H\omega^{\hat{T}}\wedge\omega^{\hat{\phi}},
\end{aligned} \tag{14.49}$$

在練習 14.14 的矩陣表示中，它給出

$$R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} E & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bar{E} & \cdot & \cdot & \cdot & H \\ \cdot & \cdot & \bar{E} & \cdot & -H & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & F & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & H & \cdot & \bar{F} & \cdot \\ \cdot & -H & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{F} \end{array}\right)\begin{array}{c} \hat{T}\hat{R} \\ \hat{T}\hat{\theta} \\ \hat{T}\hat{\phi} \\ \hat{\theta}\hat{\phi} \\ \hat{\phi}\hat{R} \\ \hat{R}\hat{\theta} \end{array}\text{。} \tag{14.50}$$

式中

$$
\begin{aligned}
E&=e^{-2\Phi}(\ddot{\Lambda}+\dot{\Lambda}^2-\dot{\Lambda}\dot{\Phi})-e^{-2\Lambda}(\Phi''+\Phi'^2-\Phi'\Lambda'),\\
\bar{E}&=\frac{1}{r}e^{-2\Phi}(\ddot{r}-\dot{r}\dot{\Phi})-\frac{1}{r}e^{-2\Lambda}r'\Phi,'\\
H&=\frac{1}{r}e^{-\Phi-\Lambda}(\dot{r}'-\dot{r}\Phi'-r'\dot{\Lambda}),\\
F&=\frac{1}{r^2}(1-r'^2e^{-2\Lambda}+\dot{r}^2e^{-2\Phi}),\\
\bar{F}&=\frac{1}{r}e^{-2\Phi}\dot{r}\dot{\Lambda}+\frac{1}{r}e^{-2\Lambda}(r'\Lambda'-r'')\text{。}
\end{aligned}
\tag{14.51}
$$

Einstein 張量爲

$$
\begin{aligned}
&G^{\hat{t}\hat{t}}=-G^{\hat{t}}{}_{\hat{t}}=F+2\bar{F},\\
&G^{\hat{t}\hat{R}}=G^{\hat{t}}{}_{\hat{R}}=2H,\\
&G^{\hat{t}}{}_{\hat{\theta}}=G^{\hat{t}}{}_{\hat{\phi}}=0,\\
&\qquad G^{\hat{R}}{}_{\hat{R}}=-(2\bar{E}+F),\\
&G^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\theta}}=G^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}}=-(E+\bar{E}+\bar{F}),\\
&G^{\hat{R}}{}_{\hat{\theta}}=G^{\hat{R}}{}_{\hat{\phi}}=G^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}}=0\text{。}]
\end{aligned}
\tag{14.52}
$$

練習 14.17 $d\mathcal{R}=0$ 形式的 Bianchi 恒等式

把 Riemann 張量定義爲雙重求值矢量2-形式

$$
\mathcal{R}=\frac{1}{2}\mathbf{e}_\mu\wedge\mathbf{e}_\nu\mathcal{R}^{\mu\nu},
\tag{14.53}
$$

計算 $d\mathcal{R}$，使它表明 $d\mathcal{R}=0$. 利用

$$
\mathcal{R}^{\mu\nu}=d\omega^{\mu\nu}-\omega^\mu{}_\alpha\wedge\omega^{\nu\alpha},
\tag{14.54}
$$

它很容易在（適於證明 $d\mathcal{R}=0$ 的）正交歸一系中導出，或者（作爲一種技巧的測驗）在一個一般的參照系中導出，其中 $\mathcal{R}^{\mu\nu}=\mathcal{R}^\mu{}_\alpha g^{\alpha\nu}$ 以及（爲什麼？）$dg^{\mu\nu}=-g^{\mu\alpha}(dg_{\alpha\beta})g^{\beta\nu}$。[注意：在 d 的積的規則(14.13)式中，只有形式之間的劈積（不是矢量之間的劈積）計入固定的符號。]

練習 14.18 能量和動量的局域守恒：$d^*\mathbf{T}=0$ 意指 $\nabla\cdot T=0$。

設按照框 4.1 中對外微分形式定義的對偶算符 * 作用在形式上，而不是作用在逆變矢量上，它出現在當把脅强-能量張量$\mathbf{T}$或 Einstein 張量$\mathbf{G}$寫爲混合的$\binom{1}{1}$秩張量時：

$$
\mathbf{T}=\mathbf{e}_\mu T^\mu{}_\nu\omega^\nu
$$

或

$$
\mathbf{G}=\mathbf{e}_\mu G^\mu{}_\nu\omega^\nu\text{。}
$$

(a)給出用基矢或形式展開的$^*\mathbf{T}$（或$^*\mathbf{G}$）表達式。

(b)試證明

$$*\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_{\mu}T^{\mu\nu}d^{3}\Sigma_{\nu},$$

式中 $d^{3}\Sigma_{\nu}=\epsilon_{\nu\lambda\alpha\beta\gamma}\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}$［見框5.4和(8.10)式］。

(c)用推廣的外微商$\boldsymbol{d}$計算 $\boldsymbol{d}*\boldsymbol{T}$，得

$$\boldsymbol{d}*\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_{\mu}T^{\mu\nu}{}_{;\nu}\sqrt{|g|}\,\omega^{0}\wedge\omega^{1}\wedge\omega^{2}\wedge\omega^{3}。$$

第十五章　Bianchi 恆等式和邊界的邊界

本章全屬高階。

作爲準備，應已看完(1)第四章（微分形式）和(2)第十四章（曲率的計算）。

第九～十一章和第十三章將對本章的閱讀有所裨益。

對於此後任何章，本章並非必須的準備，但將有助於第十七章(Einstein場方程)。

§15.1　Bianchi 恒等式概要

幾何給予物質指令（instructions），但物質如何設法給予幾何指令呢？幾何依靠簡單的辦法把它的指令傳達給物質：「追踪一條原時致極流逝的世界線（短程線）。」物質賴以反過來作用於幾何的辦法是什麼呢？當 Riemann 和 Einstein 的度規幾何具有許多有趣的特徵時，怎樣才能辨別正確的辦法呢？物理學告訴我們，應尋找的是：引力（空時曲率）和源（物質，脅强-能量張量 $\boldsymbol{T}$）之間耦合的機制，它將確保源的自動守恒（$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$）。因此，物理學問數學：「幾何的什麼類張量特徵是自動守恒的？」數學回答：「Einstein 張量」。物理學問：「這種守恒是怎樣發生的？」Élie Cartan 的數學回答：「通過『一邊界的邊界爲零』的原理」（框15.1）。

實際上，曲率的兩種特徵是自動守恆的；或者，換一種表述，曲率滿足兩個 Bianchi 恆等式，這是本章的主題。曲率的兩個特徵，兩種「幾何對象」，都適合於用圖表示，而且這些圖表明「一邊界的邊界爲零」的原理在起作用。在這方面，空時幾何顯示出與 Maxwell 電動力學的場有驚人的類似。

恆等式和源的守恆；電磁學和引力論的比較

在電動力學中有四個勢，組合爲1-形式 $\boldsymbol{A}\equiv A_\mu \boldsymbol{dx}^\mu$。用這些量作微分得 **Faraday**, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{dA}$。這個場滿足恆等式 $\boldsymbol{dF}=0$（是恆等式；但不是適用於守恆

源定義的恒等式）。　$d\mathbf{F}\equiv 0$

在引力論中有十個勢（度規係數 $g_{\mu\nu}$），組合爲度規張量 $\mathbf{g}=g_{\mu\nu}\mathbf{dx}^{\mu}\otimes\mathbf{dx}^{\nu}$。用這些量作兩次微分得曲率算符

$$\mathcal{R}=\frac{1}{4}\mathbf{e}_{\mu}\wedge\mathbf{e}_{\nu}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\mathbf{dx}^{\alpha}\wedge\mathbf{dx}^{\beta}。$$

此曲率算符滿足 Bianchi 恆等式 $d\mathcal{R}=0$，現在此處的「d」是 Cartan 外微商的推廣，已在第十四章詳加描述（又是一個恆等式，但仍是一個不適用於守恆源定義的恆等式）。　$d\mathcal{R}\equiv 0$

在電磁學中，必須求助於對偶 $^*\mathbf{F}$，以得出場的任何特徵，它爲源提供了一個把手，$d^*\mathbf{F}=4\pi^*\mathbf{J}$. 源的守恆 $d^*\mathbf{J}=0$ 是作爲恒等式 $dd^*\mathbf{F}=0$ 的結果出現的；或者，通過論證（框15.1）改說成作爲邊界的邊界爲零的結果出現。　$dd^*\mathbf{F}\equiv 0$加上 Maxwell方程$\Longrightarrow d^*\mathbf{J}=0$

（接第370頁）

框 15.1　邊界的邊界爲零

A.　邊界的邊界爲零概念的1-2-3維形式

從一個定向的立方體或近似的立方體（三維的）開始。

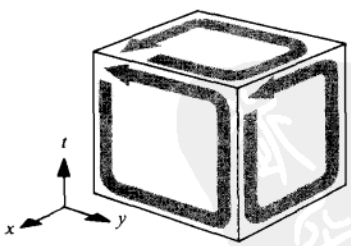
它的邊界由六個定向的面組成，每一個面都是二維的。每一個面的方位用一個箭頭表示。

任一定向面的邊界由四個定向的邊或箭頭組成，它們都是一維的。

每一條邊把一個面與另一個面聯結起來。沒有一條邊處於隔絕的狀態。

適當地考慮符號，對全部這些邊「求和」。發現任何給定的邊都計算了兩次，一次走一條路線，另一次走另一條路線。

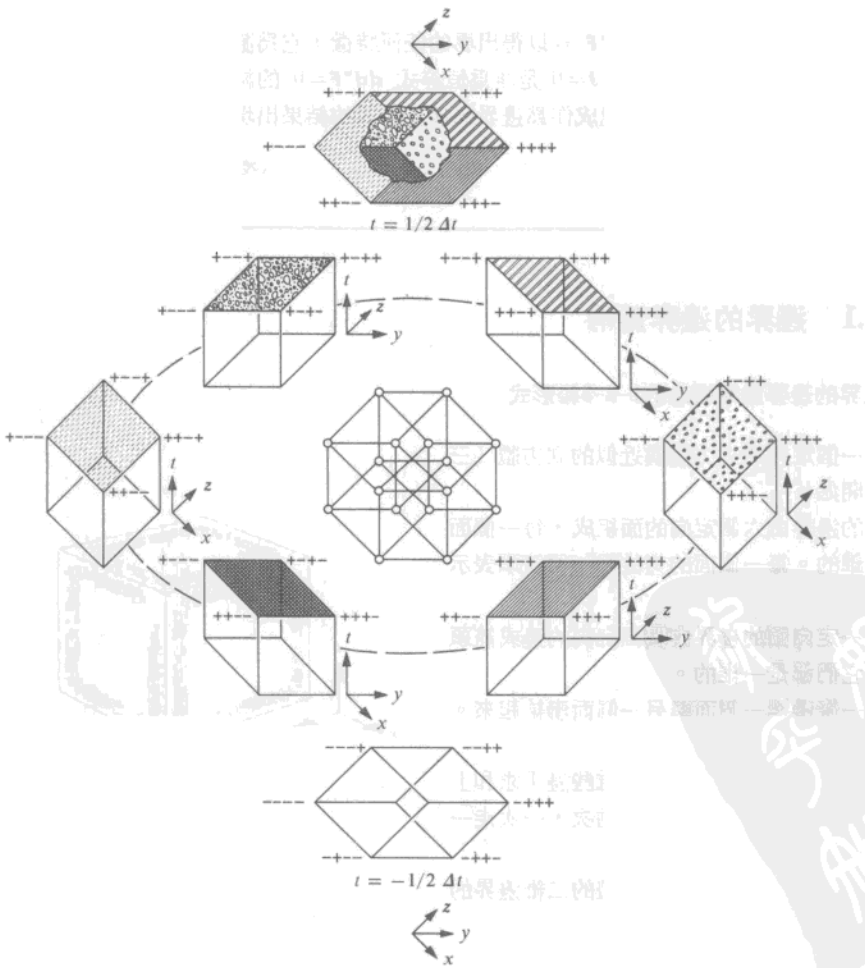
由此得出結論，三維立方體的二維邊界的一維邊界恆等於零。



B. 邊界的邊界爲零概念的2-3-4維形式

從一定向的或近似的四維立方體開始。四維立方體的典型角隅的坐標可取爲 $(t_0 \pm \frac{1}{2}\Delta t, x_0 \pm \frac{1}{2}\Delta x, y_0 \pm \frac{1}{2}\Delta y, z_0 \pm \frac{1}{2}\Delta z)$；因此，用明顯縮寫符號表示，一個角隅實例本身可方便地縮寫爲十一一十。共有16個這樣的角隅。四維立方體的三維表面，看上去不如四維立方體本身那麼複雜，三維表面把「四維立方體破裂」爲圖形周圍的區域，在那裏可以詳盡地考察它們。

四維立方體的邊界由八個定向的超表面組成，每一個超表面都是三維的（例如，頂超表面是 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 的延伸；「前」超表面是 $\Delta t \Delta y \Delta z$ 的延伸；等等。）



任一超表面（「立方體」）的邊界由 6 個定向的表面組成，每個表面都是二維的。

每一個表面（例如，在左下角的畫陰影線的表面 $\Delta x \Delta y$）把一個超表面和另一個聯結了起來（在此例中，把左下角的「三維立方側表面」$\Delta t \Delta x \Delta y$ 與「三維立方頂表面」$\Delta x \Delta y \Delta z$ 聯結起來）。沒有一個表面處於隔絕的狀態。四維立方體的三維邊界沒有暴露在外部世界的二維面。它是*無表面的*。

適當地考慮指向，對所有這些表面「求和」，發現任一給定表面都計算了兩次，一次沿一個指向，一次沿相反的指向。

由此得出結論：四維立方體的三維邊界的二維邊界恆等於零。

C. 邊界的邊界爲零概念的普遍抽象形式

$\partial\partial = 0$（邊界的邊界爲零）。

D. 邊界的邊界爲零概念用於引力論和電磁學之後

要點之一是守恆定律（電荷守恆；動量-能量守恆）。

另一要點是此守恆定律的「自動滿足」。

「自動守恆」要求源不是一種自由的到處和隨時任意變化的因素。

當源具有它自身的自由度時，源需要與某種東西有聯繫，它將使源的另外的任意自由度有足夠的縮減，以確保源自動滿足守恒定律。這裏的某種東西命名爲「場」。

*按下述方式定義場，並把它和源「相聯繫」，即源的守恆將是「邊界的零邊界」的自動結果。*或者，更明確地說，源的守恆要求在如圖所示的四維立方體之內，源既不能創生又不能毀滅。這相當於要求「創生事件」在此四維區域的積分（對於電荷，是 d^*J 的積分；對於能量-動量是 d^*T 的積分）爲零。

在四維區域內創生事件的積分可解釋爲源密度流（$^*J$ 或 $^*T$）在此區域的三維邊界上的積分。這個邊界用 8 個超表面組成，每個超表面可給以適當的指向。在上超表面（「$\Delta x \Delta y \Delta z$」）的積分給出在稍後時刻存在的源的數量；在下超表面的積分給出在較早時刻存在的源的數量；在諸如「$\Delta t \Delta x \Delta y$」等超表面的積分給出介於時間間隔內源的外流。守恆要求這 8 個三維積分之和爲零（詳見第五章）。

這些三維積分之和爲零表達了守恆的要求，但並未提供「自動的」（或，用數學術語，「恆等的」）滿足這個要求的機制。爲此，轉向「邊界的邊界爲零」的原理。

要求源密度流在任意指向超表面 $\mathcal{V}$（三維區域；「立方體」）上的積分應等於場在此「立方體」表面（每個表面取適當的指向，且立方體無限小）上的積分

$$4\pi\int_{\mathcal{V}} {}^*\mathbf{J}=\int_{\partial\mathcal{V}} {}^*\mathbf{F}; \qquad 8\pi\int_{\mathcal{V}} {}^*\mathbf{T}=\int_{\partial\mathcal{V}} \text{（轉矩）}。$$

對立方體的 6 個表面求和，並繼續求和直到全部 8 個立方體的表面均涉及爲止。發現任一給定表面（例如，圖中畫陰影線的表面）都計算了兩次，一次沿一種指向，另一次沿另一指向（「邊界的邊界爲零」）。這樣就確保了源的守恆：源密度流在四維區域的三維邊界上的積分自動爲零，從而創生事件在該四維區域內部的積分也恆等於零。

四維區域在一處稍有位移，在其邊界上重複計算 [Tomonaga (1946) 和 Schwinger (1948) 的「氣泡 (bubble) 微分法」]，由此得出結論，守恆的確保不僅在於整個四維區域，還在於其中的每一點，推而廣之，在於空時的各處。

E. 源和場的關係

一種觀點，源是首要的。場能夠有別的職能，但它的首要職能是用作源的「附庸」。首先是源的守恆；場必須相應地調整它自己。

另一種觀點：場是首要的。場擔當着設法使源遵從守恒定律的職責。沒有場，源不知道要做什麼，甚至亦不存在。源是由場「構成」的。源的守恆是這種結構的結果。

有一種模型從基本的方面闡明了這種觀點：「經典的」電荷概念除了「在多連通空間的拓撲中捕集的電力線」之外別無其他 [Weyl (1924b); Wheeler (1955); Misner 和 Wheeler (1957)]。

對於任何觀點：源密度流在任何三維區域（在上述簡單分析中是「立方體」）上的積分等於場在該區域邊界（如上述立方體的 6 個表面）上的積分。沒有人曾經找到過任何別的方式來理解場定律和守恆定律之間的相互關係。

F. 電磁學作爲一個模型：怎樣經過「$\partial\partial=0$」的2-3-4維形式把源「聯繫」到場，給出源的自動守恒

守恆意味着電荷的零創生（在四維區域Ω中的零創生）。

因此，守恆要求電荷密度流在該體積的三維邊界上的積分爲零值；因此用第三章和第五章的初階語言；

$$0=\int_\Omega \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu}\, d^4\Omega=\int_{\partial\Omega} J^\mu d^3\Sigma_\mu \ 。$$

等價地，用 §4.3-§4.6 的無坐標抽象語言，爲

$$0=\int_\Omega \mathbf{d}{}^*\mathbf{J}=\int_{\partial\Omega} {}^*\mathbf{J}\,,$$

式中

$$\begin{aligned}{}^*\mathbf{J}=&{}^*J_{123}\mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^3+{}^*J_{023}\mathbf{d}x^0\wedge\mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^3\\&+{}^*J_{031}\mathbf{d}x^0\wedge\mathbf{d}x^3\wedge\mathbf{d}x^1+{}^*J_{012}\mathbf{d}x^0\wedge\mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^2\end{aligned}$$

（電荷密度和電流密度的3-形式的「類蛋筐結構」）。

寫出 $4\pi{}^*\mathbf{J}=\mathbf{d}{}^*\mathbf{F}$，通過「邊界的邊界爲零」的原理，自動地（「恆等地」）要求滿足此守恆；因此

$$4\pi\int_{\partial\Omega}{}^*\mathbf{J}=\int_{\partial\Omega}\mathbf{d}{}^*\mathbf{F}=\int_{\partial\partial\Omega(\text{零!})}{}^*\mathbf{F}\equiv 0$$

或者，用初階語言，寫出 $4\pi J^\mu=F^{\mu\nu}{}_{;\nu}$，則有

$$4\pi\int_{\partial\Omega}J^\mu d^3\Sigma_\mu=\int_{\partial\Omega}F^{\mu\nu}{}_{;\nu}d^3\Sigma_\mu=\int_{\partial\partial\Omega(\text{零!})}F^{\mu\alpha}d^2\Sigma_{\mu\alpha}\equiv 0 \ 。$$

換言之，通過由「$\partial\partial\Omega=0$」直接導致源守恒定律的方式，在熟知平直空間形式中的一半 Maxwell 方程

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho\,,\qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{B}=\dot{\boldsymbol{E}}+4\pi\boldsymbol{J}\,,$$

把源和場聯繫了起來。

G. 電磁學在它的1-2-3維形式中也採用「$\partial\partial=0$」（「無磁荷」）

磁荷與場經 $4\pi\mathbf{J}_{磁}=\mathbf{d}\mathbf{F}$ 相聯繫（爲了把這種緊湊的高階語言翻譯爲等價的初階術語，參看上述 F 節）。不存在任何磁荷斷言 $\mathbf{J}_{磁}$在任何三維體積$\mathcal{V}$上的積

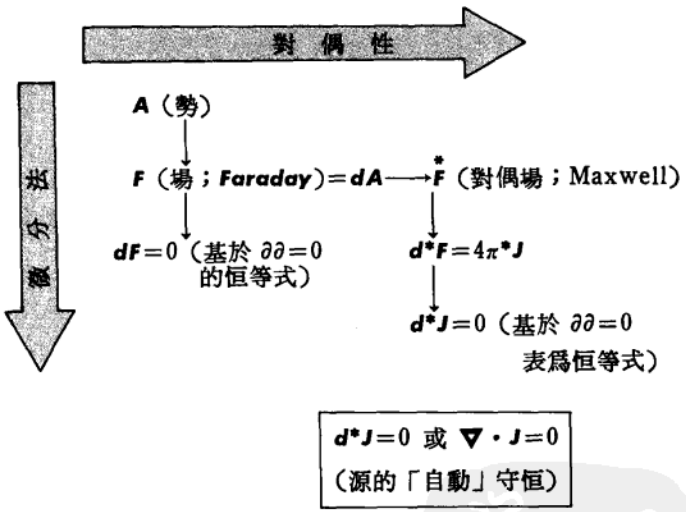
分必須爲零；或（「分部積分」，推廣的 Stokes 定理）

$$0=\int_{\mathcal{T}} dF=\int_{\partial\mathcal{T}} F=\left(\begin{array}{c}\text{經}\partial\mathcal{T}\text{流出}\\ \text{的總磁流}\end{array}\right)。$$

爲了「自動地」滿足這個要求，經「邊界的邊界爲零」的原理，寫出 $F=dA$（「用四維勢表示場」），有

$$\int_{\partial\mathcal{T}} F=\int_{\partial\mathcal{T}} dA=\int_{\partial\partial\mathcal{T}(\text{零!})} A\equiv 0。$$

H. 電動力學結構略圖

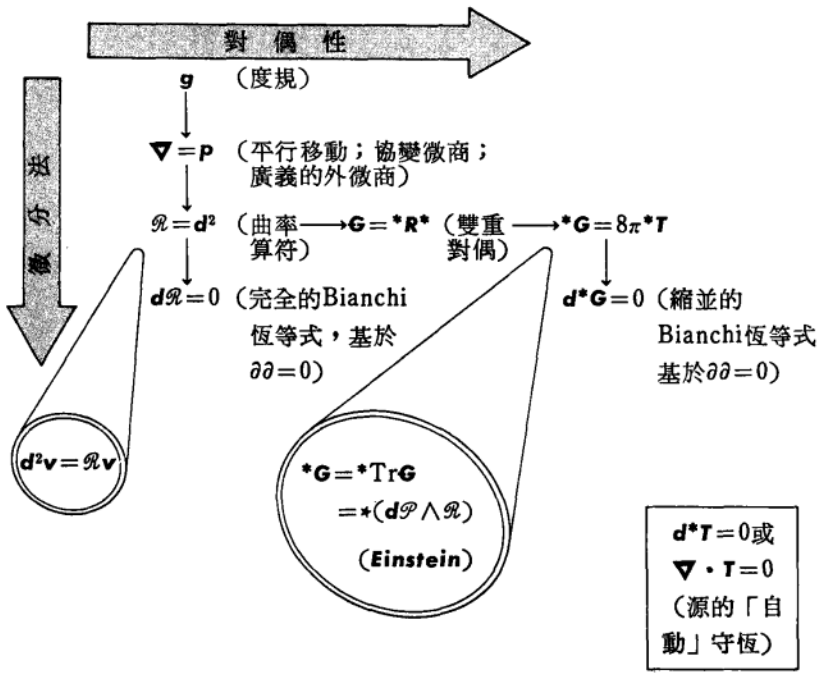


在引力物理學中，必須求助於 **Riemann** 的「雙重對偶」（兩對交錯的指標，兩處取對偶）$G=*R*$，以得出場的一個特徵，場爲源提供了一個把手：

$$G=\mathrm{Tr}G=Einstein=8\pi T=8\pi\times\text{（能量-動量密度）}。$$

源的守恒 $T\equiv e_\mu T^{\mu}{}_{\nu}\omega^{\nu}$ 可表爲 $\nabla\cdot T=0$。但在目前，更適合的形式是（見第十四章和練習 14.18）

I. 幾何動力學結構略圖



$$d^*T=0,$$

$d^*G\equiv 0$ 加上Einstein 場方程 $\Longrightarrow d^*T=0$

式中

$$^*T\equiv e_\mu T^\mu{}_\nu(^*\omega^\nu)=e_\mu T^{\mu\nu}d^3\Sigma_\nu。$$

這個守恆定律是作爲「縮並的 Bianchi 恆等式」$d^*G=0$ 的結果出現的，又可以用邊界的邊界爲零來解釋。

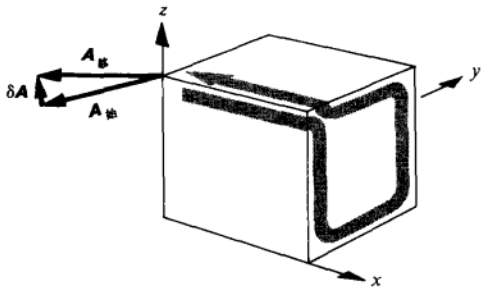


圖 15.1
與圖示三維體積 6 個表面的每一個表面相聯繫的聯合旋轉，以零淨旋轉告終（「完全的 Bianchi恒等式」）。理由：任一表面的貢獻是通過檢驗矢量 **A**繞該表面的周邊平行移動所帶來的變化來量度的。把所有表面的貢獻聯合起來，並以每一條邊移動兩次告終，沿一個方向移動一次，沿另一方向又移動一次［所示三維圖的邊界（二維）的邊界（此處爲一維）爲零］。細節：在圖示位置的矢量 **A**，平行於自身在所示表面上移動，然後繞該表面的周邊平行移動，在此過程經歷的轉動可通過與該面相聯繫的空時曲率量度，然後平行於自身移回原先的位置。用算符記號，直到小量的最低有關冪次，可以寫出

$$(\mathbf{A}\text{的變化}) = -\Delta y \Delta z \mathcal{R}(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)\mathbf{A};$$

或用坐標語言，寫出

$$-\delta A^\alpha = R^\alpha{}_{\beta yz}(\text{在 } x+\Delta x) A^\beta \Delta y \Delta z。$$

§15.2 Bianchi恒等式 $d\mathcal{R}=0$作爲「邊界的邊界=0」的表現形式

用繞立方體 6 個表面的平行移動解釋 Bianchi恆等式 $d\mathcal{R}\equiv 0$

這就是兩個 Bianchi恆等式故事的梗概；現在適當的補充細節。圖15.1說明了完全的 Bianchi 恆等式 $d\mathcal{R}=0$（見練習14.17），簡要地說，「與任何基本立方體 6 個表面相聯繫的由曲率引起的轉動之和爲零」。與繞圖示表面周邊移動相聯繫的矢量 **A**的改變，計算到小量的最低有關冪次，爲

$$-\delta A^\alpha = R^\alpha{}_{\beta yz}(\text{在 } x+\Delta x) A^\beta \Delta y \Delta z。 \tag{15.1}$$

相對的表面給出了類似的貢獻，只是符號相反，並且是在 x 計算而不是在 $x+\Delta x$ 計算。採用 Riemann 簡正坐標，把兩個表面的貢獻聯合起來，爲

$$\frac{\partial R^\alpha{}_{\beta yz}}{\partial x} A^\beta \, \Delta x \Delta y \Delta z。 \tag{15.2}$$

用這種坐標，全部 6 個表面貢獻的總－δA^{α}爲零

$$R^{\alpha}{}_{\beta yz;x}+R^{\alpha}{}_{\beta zx;y}+R^{\alpha}{}_{\beta xy;z}=0。\tag{15.3}$$

這裏的分號（協變微商）可以並已經代之以逗號（普通微商），因爲兩者在 Riemann簡正坐標的意義下是相同的；而協變形式的（15.3）式可以推廣到任意曲線坐標。從xyz 立方體轉向用任意一組坐標軸確定的另一個立方體，並把 Bianchi 恆等式寫成如下形式

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\lambda\mu;\nu]}=0。\tag{15.4}$$

（Bianchi 恆等式抽象的與坐標無關形式的重新表述之一$\boldsymbol{d\mathcal{R}}=0$參看練習14.17，另一種重新表述參看 §15.3。）這個恆等式在引力物理學中所占的地位與恆等式 $\boldsymbol{dF}=\boldsymbol{ddA}\equiv 0$ 在電磁學中的地位相同：

$$F_{[\lambda\mu\nu]}=F_{[\lambda\mu;\nu]}=0。\tag{15.5}$$

§ 15.3　轉矩：縮並 Bianchi 恒等式的關鍵

縮並的 Bianchi 恆等式提供了「與源耦合的把手」，它是 Elie Cartan 爲研究「轉矩」引入的 [Cartan (1928); Wheeler (1964b); Misner 和 Wheeler (1972)]。在初等力學，矩是熟悉的。一個剛體，除非作用於它的全部力的和爲零

$$\sum_i \boldsymbol{F}^{(i)}=0\tag{15.6}$$

否則是無法保持靜止的。這個條件雖然必要，卻並不是充分的。這些力對某一點$\mathcal{P}$的矩之和也必須爲零：

$$\sum_i (\mathcal{P}^{(i)}-\mathcal{P})\wedge\boldsymbol{F}^{(i)}=0。\tag{15.7}$$

這些矩是對哪一點取的，完全無關緊要，理由很簡單。在矢量積（15.7）式中的任意點都具有作爲係數的量 $\Sigma_i\boldsymbol{F}^{(i)}$，已經要求它爲零。這種情形與圖 15.1 中基本立方體的情形類似。圖中，與一給定表面相聯繫的轉動類似於力學中的力 $\boldsymbol{F}^{(i)}$。當擴展到立方體的全部 6 個表面時，這些轉動之和爲零，這類似於力 $\boldsymbol{F}^{(i)}$之和爲零。

人們在力學中遇到過力矩的曲率，和它類似的是什麼呢？這就是與立方體一個給定表面相聯繫的轉矩。任何單個矩的值取決於參考點$\mathcal{P}$。然而，對立方

對立方體全部6個表面的淨轉矩：

體全部6個表面取這些矩之和，它的值就與參考點$\mathcal{P}$無關，在力學中也是如此。因此$\mathcal{P}$取在何處悉聽尊便，取在基本立方體之內或之外均可。此外，該立方體可以看作是一些穿過空時的超曲面薄片。因此$\mathcal{P}$離開薄片和在薄片上是一樣的。只是要求所涉及的全部距離都夠短，以便在局域 Riemann 簡正坐標系中算出的矩以及矩的和有所需的精度。於是，得到一個與所述立方體相聯繫的總轉矩（並不必須是零；引力論不是力學！）無關的$\mathcal{P}$。

(1)描述

(2)等於源在立方體內部的積分 $\int {}^*T$

現在，「邊界的邊界爲零」的魔力顯現了。通過與各個表面相聯繫的各個轉矩求和算出的立方體淨轉矩，與源密度流（能量-動量張量 $^*T$）在三維立方體內的積分一致。不僅對一個三維立方體作此證認，而且對框15.1中四維立方體邊界的全部8個三維立方體（超表面）作此證認。不僅對四維立方體的一個超表面，而且對全部8個超表面求源密度流 $^*T$ 積分之和。於是有

$$\int_{\text{四維立方體}}\begin{pmatrix}\text{源創生}\\ d{}^*T\end{pmatrix}=\int_{\text{此四維立方體的三維邊界}}\begin{pmatrix}\text{源密度}\\ \text{流}{}^*T\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{\text{8個邊界三維立方體}}\begin{pmatrix}\text{與確定立方體}\\ \text{相聯繫的淨轉矩}\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\sum_{\substack{\text{8個邊界}\\ \text{三維立方體}}}\ \sum_{\substack{\text{給定三維立方體}\\ \text{的6個邊界面}}}}_{\text{（零！）}}\begin{pmatrix}\text{與確定立方體的}\\ \text{確定表面相聯繫}\\ \text{的轉矩}\end{pmatrix}。\quad(15.8)$$

(3)守恒

設不僅對一個立方體的6個表面所取的轉矩，而且對全部立方體的全部表面所取的轉矩都是相對於同一點$\mathcal{P}$的。記得（框15.1）任何給定的表面都連接兩個立方體或超表面。所以，它在表面的計算中出現了兩次，一次沿一個方向（「在平行移動環繞航行的意義下計算轉矩」），一次沿相反方向。因此，雙重求和恆等於零（邊界的邊界爲零！）。這個恆等式確定，存在着一種新的幾何對象，即曲率的一個特徵，它是守恆的，這就提供了一個與源耦合的把手。想要的結果已經得到。現在把它翻譯成標準的數學！

§15.4　轉矩的計算

還需找出屬於任何基本三維體積的守恒 Cartan 轉矩的張量特徵和數值。與圖15.1中立方體前表面 $\Delta y\Delta z\mathbf{e}_x\wedge\mathbf{e}_x$ 相聯繫的轉動，可表爲位於$\mathcal{P}_{\text{前}}=(t-\frac{1}{2}\Delta t,\ x+\Delta x,\ y+\frac{1}{2}\Delta y,\ z+\frac{1}{2}\Delta z)$的雙重矢量　(4)計算

$$\begin{pmatrix}\text{與前表面 }\Delta y\Delta z\\ \text{相聯繫的轉動}\end{pmatrix}=\mathbf{e}_\lambda\wedge\mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{yz}\Delta y\Delta z。\qquad(15.9)$$

此式採用了 Riemann 簡正坐標；豎線所圍指標，如$|\lambda\mu|$中的指標，應在$\lambda<\mu$的限制下求和。相對於點$\mathcal{P}$的這個轉動的矩，可表爲三重矢量

$$\begin{pmatrix}\text{與前表面 }\Delta y\Delta z\\ \text{相聯繫的轉矩}\end{pmatrix}=(\mathcal{P}_{\text{前表面中心}}-\mathcal{P})\wedge\mathbf{e}_\lambda\wedge\mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{yz}\Delta y\Delta z。\quad(15.10)$$

式中$\mathcal{P}_{\text{前表面中心}}$或$\mathcal{P}$都不具有作爲矢量的任何明確含義，但它們的差在間隔$\Delta\mathcal{P}=\mathcal{P}_{\text{前表面中心}}-\mathcal{P}$爲無限小的極限下，是一個矢量。與後表面相聯繫的一個類似的轉矩，只是符號相反，並以 $\mathcal{P}_{\text{後表面中心}}$ 代替 $\mathcal{P}_{\text{前表面中心}}$。在這兩項之差中，因爲 $\mathcal{P}$ 無意義，因爲人們確信它將消去［Bianchi 恆等式 (15.4)；類似於力學中的 $\Sigma\boldsymbol{F}^{(i)}=0$］。差$\mathcal{P}_{\text{前表面中心}}-\mathcal{P}_{\text{後表面中心}}$之值爲 $\Delta x\mathbf{e}_x$。對全部 6 個表面求和，得

$$\begin{pmatrix}\text{與立方體或超表面}\\ \Delta x\Delta y\Delta z\text{相聯繫的}\\ \text{淨轉矩}\end{pmatrix}=$$
$$\mathbf{e}_x\wedge\mathbf{e}_\lambda\wedge\mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{yz}\Delta x\Delta y\Delta z\ (\text{前與後})$$
$$+\mathbf{e}_y\wedge\mathbf{e}_\lambda\wedge\mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{zx}\Delta y\Delta z\Delta x\ (\text{側面})$$
$$+\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e}_\lambda\wedge\mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{xy}\Delta z\Delta x\Delta y\ (\text{頂與底})。\qquad(15.11)$$

我們認出，這個求和就是3-形式（在體元 $\mathbf{e}_x\wedge\mathbf{e}_y\wedge\mathbf{e}_z\Delta x\Delta y\Delta z$ 上）的值

$$\mathbf{e}_\lambda\wedge\mathbf{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{|\alpha\beta|}\mathbf{d}x^\nu\wedge\mathbf{d}x^\alpha\wedge\mathbf{d}x^\beta。$$

另外，這個3-形式在一點被定義且被精確定義，反之，用於擴展區域的(15.11)式並不適用於同時作簡要而精確的分析。因此，放棄(15.11)式是有利於3-形式的。只需記住，轉到解釋時，此3-形式是對「立方體」$\mathbf{e}_x\wedge\mathbf{e}_y\wedge\mathbf{e}_z\Delta x\Delta y\Delta z$

作計算的。現在，注意「求值三重矢量的轉矩3-形式」還可寫爲

(5)抽象地給出 $P\mathscr{P}\wedge\mathscr{R}$

$$(\text{轉矩})=d\mathscr{P}\wedge\mathscr{R}=\mathbf{e}_\nu\wedge\mathbf{e}_\lambda\wedge\mathbf{e}_\mu R^{[\lambda\mu]}{}_{[\alpha\beta]}dx^\nu\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta。\tag{15.12}$$

式中

$$d\mathscr{P}=\mathbf{e}_\sigma dx^\sigma\tag{15.13}$$

是 Cartan 的 $\binom{1}{1}$ 秩單位張量。$\mathscr{R}$也是曲率算符，可作爲求值雙重矢量的 2- 形式來處理

$$\mathscr{R}=\mathbf{e}_\lambda\wedge\mathbf{e}_\mu R^{[\lambda\mu]}{}_{[\alpha\beta]}dx^\alpha\wedge dx^\beta。\tag{15.14}$$

將分量語言用於 (15.11) 式，或者採用 (15.12) 式引入的抽象語言，人們發現涉及到一個三重矢量。一個三重矢量可以留下一個三重矢量，這正如在另一方面，四維空間內一超曲面上的三維體積元可以留下一個三重矢量一樣。然而，更方便的是取對偶表示，並把體積元作爲矢量來討論。用 $\star$ 表示對偶算符，它只作用於逆變矢量、三重矢量等等（但不作用於形式）。於是，在Lorentz系中有 $\star(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3)=\mathbf{e}_0$；但 $\star(dx^3)=dx^3$. 更一般的

$$\star(\mathbf{e}_\nu\wedge\mathbf{e}_\lambda\wedge\mathbf{e}_\mu)=\varepsilon_{\nu\lambda\mu}{}^\sigma\mathbf{e}_\sigma。\tag{15.15}$$

(6)抽象地給出 $\star(d\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})=\mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau$

用這個符號，「求值矢量轉矩3-形式」爲

$$\begin{aligned}(\text{轉矩})&=\star(d\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})=\mathbf{e}_\sigma\varepsilon_{\nu\lambda\mu}{}^\sigma R^{[\lambda\mu]}{}_{[\alpha\beta]}dx^\nu\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta\\&=\mathbf{e}_\sigma({}^*R)_\nu{}^\sigma{}_{[\alpha\beta]}dx^\nu\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta,\end{aligned}$$

或，更進一步

$$(\text{轉矩})=\star(d\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})=\mathbf{e}_\sigma({}^*R^*)_\nu{}^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau。\tag{15.16}$$

式中 $d^3\Sigma_\tau$ 是如同框5.4中的基3-形式的符號；於是，

$$dx^\nu\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta=\varepsilon^{\nu\alpha\beta\tau}d^3\Sigma_\tau。\tag{15.17}$$

（在局域 Lorentz 系中，$dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3=d^3\Sigma_0$。）

分析曲率時，沒有比 (15.16) 式更重要的了。它從一個三維體積元出發，並在該三維體積中給出轉矩而告終。把開始的體積和最終的矩聯繫起來的張量，即 **Riemann** 的「縮併雙重對偶」是極爲重要的，它應該有自己的名稱 $\mathbf{G}\equiv$ ***Einstein***；於是

$$(\text{Einstein})^{\sigma\tau}\equiv G^{\sigma\tau}=G_\nu{}^{\sigma\nu\tau}=({}^*R^*)_\nu{}^{\sigma\nu\tau}。\tag{15.18}$$

這個張量在 §13.5 和 §14.2 中，還在第十四章末的例子中受到了關注。借助於

Einstein，三維體積元與「求值矢量轉矩」之間的關係爲

$$(\text{轉矩}) = \star(d\mathscr{P}\wedge\mathscr{R}) = e_\sigma G^{\sigma\tau} d^3\Sigma_\tau 。 \tag{15.19}$$

根據廣義相對論，三維體積元 $d^3\Sigma_\mu$ 中所包含的「求值矢量轉矩」的數量等於該三維體積內所包含的能量-動量的數量。然而，暫且推遲這種證認。專心致志於轉矩的守恒性質。作爲「$\partial\partial\equiv 0$」原理的結果，在積分計算公式中查看它們一次。然後，作爲「$dd\equiv 0$」的結果，在微分公式中再查看它們。

§15.5　從「邊界的邊界爲零」查看轉矩的守恒

淨轉矩的守恒

轉矩定義了一個自動守恒的量。換言之，在時間間隔 Δt 後，基本三維體積 $\Delta x\Delta y\Delta z$ 的轉矩值，等於開始時同一三維體積的轉矩值加上在該時間間隔從三維體積的 6 個表面流入的轉矩值（與 $\Delta y\Delta z\Delta t$ 等等成正比的量）。現在用「邊界的邊界」的語言論證轉矩的守恒。遵循 (15.8) 式的樣式，但把字句逐條翻譯成公式。計算在基本的四維立方體 Ω 內創生的轉矩總量，得出

(1)從「$\partial\partial=0$」導出

$$\text{「創生」} \equiv \int \left(\begin{array}{l}\text{在基本的空時四維}\\ \text{立方體 } \Omega \text{ 內「創生}\\ \text{的轉矩」}\end{array} \right) = \int_\Omega d^*G ;$$

（「創生」：定義；括號內：定義）

$$\int_\Omega d^*G = \int_{\partial\Omega} {}^*G = \int_{\partial\Omega} \star(d\mathscr{P}\wedge\mathscr{R}) = \sum_{\text{束縛 }\Omega\text{ 的 8 個三維立方體}} \star\left(\begin{array}{l}\text{與特定三維立方體}\\ \text{相聯繫的轉矩}\\ \displaystyle\int_{\text{三維立方體}} (d\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})\end{array} \right)$$

（步驟 1　步驟 2　步驟 3）

$$= \sum_{\substack{\text{8 個邊界}\\ \text{三維立方體}}} \sum_{\substack{\text{特定三維立方體}\\ \text{的 6 個邊界表面}}} \star\left(\begin{array}{l}\text{與特定表面相聯繫}\\ \text{的轉矩}\\ \displaystyle\int_{\text{表面}} (\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})\end{array} \right) \equiv 0 。 \tag{15.20}$$

（步驟 4　步驟 5）

PDG

式中步驟 1 是 Stokes 定理。步驟 2 是由 Einstein 張量和轉矩之間的(15.19)式所確立的標誌。步驟 3 把在全部邊界 $\partial\Omega$ 上的積分分解爲構成該邊界的各個三維立方體上的積分。另外，在所有這些積分中，星號 $\star$ 作爲常數處理，提出積分號外。這種處理的理由很簡單：對偶算符 $\star$ 只包含度規，而在積分所延伸到的其邊界的整個無限小四維立方體上，度規是局域地恆定的。步驟 4 應用公式

$$\boldsymbol{d}(\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})=\boldsymbol{d}\mathscr{P}\wedge\mathscr{R}+\mathscr{P}\wedge\boldsymbol{d}\mathscr{R}=\boldsymbol{d}\mathscr{P}\wedge\mathscr{R} \tag{15.21}$$

並用 Stokes 定理把每個三維立方體的積分表爲在該立方體的二維邊界上$\mathscr{P}\wedge\mathscr{R}$的積分。最後一點是步驟 5 。它與被積函數無關。它完全依賴於$\partial\partial\equiv 0$的原理。

簡要地說，轉矩守恆是根據以下兩點得出的。(1)根據定義，與任何基本三維立方體相聯繫的轉矩爲一淨數值，它可通過與該立方體 6 個表面相聯繫的 6 個轉矩相加得出。(2)對於 (15.20) 式中作爲基本四維立方體Ω邊界的全部 8 個三維立方體，當我們把這些淨值求和時，已將給定二維表面的貢獻計算了兩次，以一種符號算一次，以相反符號又算了一次。因此，根據「邊界的邊界爲零」的原理，轉矩守恒是一個恆等式。

§ 15.6 用微分形式表示的轉矩守恒

(2)從「$\boldsymbol{dd}=0$」導出

用積分形式表述的每一種守恒定律都適合於重新表爲微分形式，轉矩守恆也不例外。計算很簡單。分三步計算轉矩的廣義外微商，發現它是零；於是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{G}&=\boldsymbol{d}[\star(\boldsymbol{d}\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})]\\&=\star[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})]\\&=\star[\boldsymbol{d}^2\mathscr{P}\wedge\mathscr{R}-\boldsymbol{d}\mathscr{P}\wedge\boldsymbol{d}\mathscr{R}]\\&=0\ 。\end{aligned}\quad\left.\begin{array}{l}\}\text{步驟 1}\\\}\text{步驟 2}\\\}\text{步驟 3}\end{array}\right.$$

步驟 1 用到關係式$\boldsymbol{d}\star=\star\boldsymbol{d}$。星對偶性與廣義的外微商可對易，因爲當把$\boldsymbol{d}$用於逆變矢量時，它起著協變微商的作用，而當把 $\star$ 用於協變矢量或1-形式時，毫無影響。步驟 2 應用了 $\boldsymbol{d}$ 作用在求值張量形式的積上的標準規則 [參看 (14.13b) 式] 。步驟 3 涉及兩項。第一項爲零，因爲其中第一個因子爲零；即$\boldsymbol{d}^2\mathscr{P}=0$ [Cartan 的結構方程；表爲協變微商的「撓率爲零」；參看 (14.26) 式] 。在這種情況下，第二項也爲零，因爲其中第二個因子爲零；即$\boldsymbol{d}\mathscr{R}=0$ (完全的 Bianchi 恆等式) 。這樣就簡要地確立了轉矩的守恆。

框 15.2　引力源和轉矩：兩個關鍵量和對於它們最有用的數學表述

	作爲引力源的能量-動量（空時曲率）	作爲幾何自動守恒性質的轉矩
表爲求值矢量3-形式，與坐標無關的幾何對象	說明在一基本三維體積內，含有多少能量-動量的機制 $*\mathbf{T}=\mathbf{e}_\sigma T^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau$（「脅强-能量張量的對偶」）	說明將這些與基本三維立方體的 6 個表面相聯繫的 6 個轉矩相加起來，可得到多少淨轉矩（表爲矢量）的機制 $\star(d\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})=*\mathbf{G}=\mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau$（「Einstein 的對偶」）
表爲 $\binom{2}{0}$ 秩張量（還是與坐標無關的幾何對象）	脅强-能量張量自身：$\mathbf{T}=\mathbf{e}_\sigma T^{\sigma\tau}\mathbf{e}_\tau$	Einstein 自身：$\mathbf{G}=\mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau}\mathbf{e}_\tau$
用分量語言表示（數值取決於坐標系的選擇）	$T^{\sigma\tau}$	$G^{\sigma\tau}$
分量語言的守恒定律	$T^{\sigma\tau}{}_{;\tau}=0$	$G^{\sigma\tau}{}_{;\tau}\equiv 0$
抽象語言的守恒，對 $\binom{2}{0}$ 秩張量	$\nabla\cdot\mathbf{T}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{G}\equiv 0$
抽象語言的守恒，翻譯爲對偶張量的外微商（求值矢量3-形式）	$d*\mathbf{T}=0$	$d*\mathbf{G}\equiv 0$ 或 $d\star(d\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})\equiv 0$
對四維體積元 Ω 用積分形式表示同樣的守恒定律	$\int_{\partial\Omega}*\mathbf{T}=0$	$\int_{\partial\Omega}*\mathbf{G}\equiv 0$ 或 $\star\int_{\partial\Omega}(d\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})\equiv 0$ 或 $\star\int_{\partial\partial\Omega}(\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})\equiv 0$

§15.7　從轉矩守恒到 Einstein 幾何動力學：預演

由（淨轉矩守恒）⟹（源守恒）的要求「導出」Einstein 場方程

質量，或者質量-能量，是引力之源。質量-能量是能量-動量四維矢量的一個分量。能量和動量是守恒的。在三維體積元 $d^3\Sigma$ 中的能量-動量爲

$$*\mathbf{T}=\mathbf{e}_\sigma T^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau \tag{15.22}$$

（見框15.2）。對於基本的四維立方體 Ω，能量-動量的守恒表爲下述形式

$$\int_{\partial\Omega}*\mathbf{T}=0\text{。} \tag{15.23}$$

這種守恆決非偶然。根據 Einstein 和 Cartan，守恒是「自動的」；另外，自動守恆是能量-動量和幾何的一種自動守恆特徵之間完全相等的結果 。幾何的這種特徵是什麼呢？就是轉矩，它滿足自動守恆的定律

$$\int_{\partial\Omega} {}^*\mathbf{G}=0。 \tag{15.24}$$

換句話說，下面的敍述使動量-能量守恆在性質上是幾何的 ，在行動上是自動的：**曲強-能量張量**（加上因子8π，或$8\pi G/c^4$，或其他取決於單位選擇的因子）**與轉矩是等同的**；於是

$$\star(\mathbf{d}\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})={}^*\mathbf{G}=8\pi{}^*\mathbf{T}; \tag{15.25}$$

；或等價地（仍用求值矢量3-形式的語言）

$$(\text{轉矩})=\star(\mathbf{d}\mathscr{P}\wedge\mathscr{R})=\mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau=8\pi\mathbf{e}_\sigma T^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau; \tag{15.26}$$

或用張量的語言，

$$\mathbf{G}=\mathbf{e}_\sigma G^{\sigma\tau}\mathbf{e}_\tau=8\pi\mathbf{e}_\sigma T^{\sigma\tau}\mathbf{e}_\tau=8\pi\mathbf{T}; \tag{15.27}$$

或用分量的語言

$$G^{\sigma\tau}=8\pi T^{\sigma\tau} \tag{15.28}$$

（Einstein 場方程；更爲詳盡的敍述，以及有關唯一性問題，可參看第十七章；也可參看框15.3）。因此，依賴邊界的邊界爲零原理的全部廣義相對論是簡單的。從來沒有人發現過動量和能量守恆原理的更爲信服的基礎。從來沒有人更深入地查看過人們稱之爲引力的物質對空間以及空間對物質的作用。

總之，Einstein **理論把能量-動量守恒理解為恒等於：「邊界的邊界為零」**。

練習

練習 15.1 四維單形（4- simplex）的邊界的邊界

在我們不得不用計算機從而幾何喪失全部對稱性的進程分析中 ， 作爲一種選擇，可以把四維幾何分解爲足够多且每一個足够小的單形［二維三角形 ， 三維四面體的四維類比；可以方便地認爲「主要單形」的頂點位於例如 $(t,x,y,z)=(0,1,1,1),(0,1,-1,-1),(0,-1,1,-1),(0,-1,-1,1),(5^{1/2},0,0,0)$］，每一個單形內的幾何可以理想化爲平直體（Lorentz 的），而全部曲率集中在單形之間的聯結處（見第42章中 Regge 微積分學對幾

框 15.3　曲率滿足的其他恒等式

(1)引力之源是能量-動量。(2)能量-動量用脊强-能量張量（或其對偶）表爲求值矢量 3- 形式（「單位三維體積的能量-動量）。(3)引力源是守恒的（在基本的空時四維立方體中無創生）。

在 Bianchi 恒等式這一章中，這些原理構成了探索的基礎。這就是爲什麼另外兩個極爲有興趣的恆等式 [Allendoerfer 和 Weil (1943); Chern (1955, 1962)] 不被注意的原因。人們研究 4- 形式

$$\Pi=\frac{1}{24\pi^2}g^{\alpha\tau}g^{\beta\delta}\mathcal{R}_{\alpha\beta}\wedge\mathcal{R}_{\tau\delta}, \qquad (1)$$

以及另外的4-形式

$$I=\frac{1}{8\pi^2|\det g_{\mu\nu}|^{1/2}}(\mathcal{R}_{12}\wedge\mathcal{R}_{30}+\mathcal{R}_{13}\wedge\mathcal{R}_{02}+\mathcal{R}_{10}\wedge\mathcal{R}_{23})。 \qquad (2)$$

這兩個量都是由下述張量「曲率2-形式」構成的

$$\mathcal{R}_{\alpha\tau}=\frac{1}{2}R_{\alpha\tau\beta\delta}dx^\beta\wedge dx^\delta。 \qquad (3)$$

每一個量在四維區域Ω上的四維積分得一值，它(1)是一個標量，(2)不恆等於零，(3)取決於積分所延伸到的空時區域的邊界，但(4)與該表面內空時幾何的任何變化無關（只要這些變化既不放棄連續性又不改變該區域內四維幾何的連通性）。性質(1)扼殺了這個積分、一個標量與能量-動量、一個四維矢量相等的任何可能性。性質(2)使之不能成爲守恆定律，因爲它意味着在 Ω 內有非零的創生。

這裏還省略了 Bel-Robinson 張量（見練習 15.2），它是用曲率張量和其他張量雙重線性地構成的，參看，例如 Synge (1962)。

可能在某一天會發現，這些量之一或全部具有重要的物理內容。

(2)式的 4- 形式 I 在整個流形上的積分給出一個數，一個整數，此卽所謂流形的 Euler-Poincaré 特徵，無論何時，這個積分和這個整數都是十分明確的。這個結果是 Gauss-Bonnet 積分的四維推廣，在二維幾何中 Gauss-Bonnet 積分是衆所周知的：

$$\int\begin{pmatrix}\text{Riemann 標量曲率}\\ \text{不變量（對於半徑爲 } a\\ \text{的球，其值爲 } 2/a^2)\end{pmatrix}g^{1/2}\,d^2x。$$

對於任何封閉的、定向的、拓撲爲二維球的二維流形，無論怎樣嚴重的變形，此積分之值總是8π；對於任何二維環，無論怎樣皺折和扭曲，積分值總是零；對於其他拓撲，積分有其他相等的特定值。

何動力學的討論）。試確定（「給予數學描述」）這種單形的（三維）邊界。取一部分這種邊界並確定它的（二維）邊界。試證明，對於這一二維邊界的一部分，在邊界的邊界的簿記中確實在另一地方存在另外一個（且僅存在一個）與之相消的二維部分（單形的三維邊界的「無表面性」）。

練習 15.2 Bel-Robinson 張量 [Bel (1958, 1959, 1962), Robinson (1959b), Sejnowski (1973); 亦見 Pirani (1957) 和 Lichnerowicz (1962)]

定義 Bel-Robinson 張量爲

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\alpha\rho\gamma\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma}+{}^{*}R_{\alpha\rho\gamma\sigma}{}^{*}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma}\text{。} \tag{15,29}$$

試證明，在空的空時，此張量可改寫爲

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\alpha\rho\gamma\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma}+R_{\alpha\rho\delta\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\gamma}{}^{\sigma}-\frac{1}{8}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}R_{\rho\sigma\lambda\mu}R^{\rho\sigma\lambda\mu}\text{。} \tag{15.30a}$$

再證明在空的空時中

$$T^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta;\alpha}=0\text{,} \tag{15.30b}$$

$T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 對各對指標是對稱的和無迹的。 (15.30c)

討論：原來，對於在空的空時的引力場，Einstein的「正則能量-動量贋張量」(§20.3) 具有一個兩階微商，它在 Riemann 簡正坐標中，爲

$$t_{\mathrm{E}\alpha\beta\gamma\delta}=-\frac{4}{9}\left(T_{\alpha\beta\gamma\delta}-\frac{1}{4}S_{\alpha\beta\gamma\delta}\right)\text{。} \tag{15.31a}$$

式中 $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 是完全對稱的 Bel-Robinson 張量，而 $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 定義爲

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}\equiv R_{\alpha\delta\rho\sigma}R_{\beta\gamma}{}^{\rho\sigma}+R_{\alpha\gamma\rho\sigma}R_{\beta\delta}{}^{\rho\sigma}+\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\text{。} \tag{15.31b}$$

$S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 在空的空間的脊變波動方程

$$\Delta R_{\alpha\beta\gamma\delta}\equiv-R_{\alpha\beta\gamma\delta;\mu}{}^{;\mu}+R_{\alpha\beta\rho\sigma}R_{\gamma\delta}{}^{\rho\sigma}+2(R_{\alpha\rho\gamma\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma}-R_{\alpha\rho\delta\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\gamma}{}^{\sigma})=0 \tag{15.31c}$$

中出現，當把波動方程改寫成

$$\Box R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\equiv R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}{}_{;\mu}{}^{;\mu}=2S_{[\alpha}{}^{[\gamma}{}_{\beta]}{}^{\delta]} \tag{15.31d}$$

時，上面的 Δ 是 Lichnerowicz-de Rham 波動算符的變式 [Lichnerowicz (1964)]。

第四篇

Einstein 的引力幾何理論

在此，讀者被引誘與世上最風雅的妖婦——幾何動力學——結下不解之緣，並向她學習支配宇宙的靈丹法術。

PDG

第十六章　等效原理和「引力場」的測量

與其說我們具有一個有引力的整體系，還不如
說具有許多沒有引力的局域系。

Stephen Shutz (1966)

§16.1　概　　述

由於牢固地掌握了彎曲空時的數學，人們受到誘惑，想輕率地詳盡研究 Einstein 的場方程。然而，對這種誘惑必須忍耐一會兒，要充分掌握場方程，人們首先必須了解從平直空時向彎曲空間過渡，物理學的一些經典定律是如何改變或者不改變的（§§16.2 和 16.3）；其次，必須了解如何「測量」「引力場」（度規；協變微商；空時曲率；…）（§§16.4 和 16.5）。

本章目的

§16.2　彎曲空時中的物理學定律

人們無論在何地何時探測，總能當時就在該處引入一個局域慣性系，在其中，所有的試驗粒子都沿直線運動。此外，這個局域慣性系還是局域 Lorentz 的：在其中，光速爲標準值，光線像試驗粒子的世界線一樣是直的。然而，物理學是更爲豐富的，物理學分析的要求不只是說明一些試驗粒子和光線的運動，在「强引力場」的影響下，Maxwell 方程、流體力學定律、原子結構原理，以及所有其他的物理學規律將怎樣呢？

Einstein 的等效原理

回答是簡單的：*在任一個和每一個局域 Lorentz 系中，在宇宙中任何地點和任意時刻，物理學的所有（非引力的）定律都應採取熟知的狹義相對論形式*。這等於說：通過局限在無窮小空時小區域內的實驗，是無法把空時中某個區域的局域 Lorentz 系與同一空時區域中的或任何另一區域中的任何另一局域 Lorentz 系區別開的。這是 Einstein 等效原理的最强形式——一個既能激發哲學興趣，又能激發實驗興趣的原理。（恰當的實驗探測可見 §38.6）

等效原理作爲工具，使非引力定律與重力緊密配合

等效原理具有巨大的威力。據此，人們可以把物理學的全部狹義相對論定律推廣到彎曲空時。空時曲率並不需要很小。它可以像中子星中心處的曲率那樣大；可以像黑洞邊界處的曲率那樣大；事實上（或者幾乎）可以是任意大。只是在引力坍縮的端點，以及在「大爆炸」的起始時刻，即只是在「空時的奇點」，直接應用等效原理所需的條件才會破壞（見 §§28.3, 34.6, 43.3, 43.4 以及第44章）。在此外任何地方，等效原理作爲一種工具，使物理學的全部非引力定律與重力緊密配合。

例：「局域能量-動量守恒定律」$\nabla \cdot \boldsymbol{T}=0$ 與重力的配合。解：

(1)在平直空時，這個定律寫成抽象的幾何形式，爲

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T}=0。 \tag{16.1a}$$

(2)在平直空時的一個整體 Lorentz 系中重新寫出，爲

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0。 \tag{16.1b}$$

(3)應用等效原理，在彎曲空時的局域 Lorentz 系中，給出相同的方程：

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{,\hat{\nu}}=0 \text{ 在局域 Lorentz 系的原點。} \tag{16.1c}$$

因爲，在局域 Lorentz 系的原點，聯絡係數都爲零，上式可重新寫爲

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{;\hat{\nu}}=0 \text{ 在局域 Lorentz 系的原點。} \tag{16.1d}$$

(4)這些是在彎曲空時中幾何定律的局域 Lorentz 分量，所以彎曲空時中的幾何定律是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T}=0; \tag{16.1e}$$

在任意參照系中，其分量公式爲

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0。 \tag{16.1f}$$

把彎曲空時中的抽象幾何定律（16.1e）式與平直空時中的相應定律（16.1a）式比較。它們是完全相同的！這決非偶然，對任意另一物理學定律（例如 Maxwell 定律 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}=4\pi \boldsymbol{J}$）重複上述四步論證即可容易地看出這一點。寫成

抽象幾何形式的物理學諸定律，在彎曲空時中，或平直空時中，均無任何差異；這是由等效原理所確保的，實際上這只是等效原理的另一種說法。

把在彎曲空時任一參照系中寫出的定律 $\nabla \cdot \boldsymbol{T}=0$ 的分量形式 [(16.1f) 式] 與它在平直空時一個整體 Lorentz 系中寫出的分量形式 [(16.1b) 式] 作比較。它們只有一個不同：逗號（偏微商；平直空時梯度）被分號（協變微商；彎曲空時梯度）取代。重寫方程的這種做法是普遍適用的，把寫成分量形式的物理學諸定律從平直空時變到彎曲空時，只要把全部逗號都換成分號即可（物理上或幾何上均無變化；變化只是由於從 Lorentz 參照系轉換到非 Lorentz 參照系！）。這種表述，像抽象幾何定律不發生變化一樣，只不過是等效原理換一種說法而已。

「逗號變成分號」的規則

按照上述方法在形式上完成從平直空時到彎曲空時的過渡，是一個平凡的過程。但是，它的含意並不平凡。它把重力與物理學的全部定律配合起來了。正如人們將在下述練習中看到的，通過彎曲空時的協變微商，重力以一種基本的方式參加進來了。

練習 16.1　在弱引力場中的流體動力學

練習

(a) 在 §18.4，將證明，對於一個近似Newton系，若在一個適當的近似整體Lorentz坐標系中分析，則度規具有下述形式

$$ds^2=-(1+2\Phi)dt^2+(1-2\Phi)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{16.2a}$$

式中 Φ 是牛頓勢 $(-1<\Phi<0)$。考慮一近似 Newton 理想流體 [脅强-能量張量爲

$$T^{\alpha\beta}=(\rho+p)u^\alpha u^\beta+pg^{\alpha\beta}, \qquad p<\rho; \tag{16.2b}$$

參見框 5.1 和 §5.10] 以普通的速度

$$v^j\equiv dx^j/dt<1 \tag{16.2c}$$

在該空時中運動。試證明，對於該體系，$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ 式化爲熟知的 Newton 質量守恒定律，以及流體在引力場中的 Newton 運動方程：

$$\frac{d\rho}{dt}=-\rho\frac{\partial v^j}{\partial x^j}, \qquad \rho\frac{dv^j}{dt}=-\rho\frac{\partial\Phi'}{\partial x^j}-\frac{\partial p}{\partial x^j}, \tag{16.3a}$$

式中 d/dt 是與物質共同運動的時間微商

$$\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v^j\frac{\partial}{\partial x^j}。 \tag{16.3b}$$

(b) 試利用這些方程，算出地球大氣層中作爲溫度和壓强函數的壓强梯度。在計算中，利用非相對論關係 $\rho=n_M\mu_M$，其中 n_M 是分子的數密度，μ_M 是每個分子的平均靜止質量；利用理想氣體狀態方程

$$p=n_M kT \quad (k=\text{Boltzmann 常數})\ ;$$

和地球 Newton 勢的球對稱形式 $\Phi=-M/r$。設海平面的壓强爲 1.01×10^6達因/厘米^2，試問珠穆朗瑪峯頂（高度爲 8,840 米）的壓强是多少？（作一個有關大氣溫度分布的合理假設。）

練習 16.2 光子的世界線

試證明，在平直空時中，自由運動光子的四維動量守恒定律可以寫成

$$\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p}=0。 \tag{16.4a}$$

根據等效原理，這個方程在彎曲空時中也應成立。試證明，這意味着，光子以與四維動量按下式相關的仿射參量 λ，沿彎曲空時的零短程線運動，

$$\mathbf{p}=d/d\lambda \tag{16.4b}$$

在練習 18.6 中，將用這個結果來計算光線被太陽的偏折。

§16.3 等效原理中的因子順序問題

因子順序問題以及與曲率的耦合

在用等效原理從平直空時的物理學得出彎曲空時的物理學時，人們有時會遇到「因子順序問題」，這與從經典力學向量子力學過渡時遇到的麻煩* 很類似。例如：電動力學的矢量勢方程（3.56）式怎樣過渡到彎曲空時？如果平直空時方程寫成，

$$-A^{\alpha,\mu}{}_{,\mu}+A^{\mu,\alpha}{}_{,\mu}=4\pi J^{\alpha}\ ,$$

則它的過渡（「逗號變成分號」）是。

$$-A^{\alpha;\mu}{}_{;\mu}+A^{\mu;\alpha}{}_{;\mu}=4\pi J^{\alpha}。 \tag{16.5}$$

然而，如果交換它的兩個偏微商，把平直空時方程寫成，

$$-A^{\alpha,\mu}{}_{,\mu}+A^{\mu,\alpha}{}_{,\mu}=4\pi J^{\alpha}\ ,$$

* 對量子力學因子順序問題的討論，可參看，例如，Merzbacher (1961) 138-139 頁和 334-335 頁；以及 Pauli (1934)。

則它的過渡是，

$$-A^{\alpha;\mu}{}_{\mu}+A^{\mu;\alpha}{}_{\mu}=4\pi J^{\alpha},$$

它可以重新寫成。

$$-A^{\alpha;\mu}{}_{\mu}+A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\alpha}+R^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu}=4\pi J^{\alpha}。\tag{16.5'}$$

（作爲交換協變微商的結果，出現了 Ricci 張量，參看練習 16.3.）哪個方程正確——（16.5）式還是（16.5′）式？這個問題並非無足輕重，正如量子力學中類似的因子順序問題並非無足輕重一樣。解決這個因子順序問題以及絕大部分因子順序問題的經驗規則可以參見框16.1。這些規則告訴人們，（16.5′）式正確，而（16.5）式是錯誤的（見框 16.1 和 §22.4）。

練習 16.3　協變微商的不對易　　**練習**

設 **B** 是一個矢量場，**S** 是一個二秩張量場，試證明

$$B^{\mu}{}_{;\alpha\beta}=B^{\mu}{}_{;\beta\alpha}+R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}B^{\nu}\tag{16.6a}$$

$$S^{\mu\nu}{}_{;\alpha\beta}=S^{\mu\nu}{}_{;\beta\alpha}+R^{\mu}{}_{\rho\beta\alpha}S^{\rho\nu}+R^{\nu}{}_{\rho\beta\alpha}S^{\mu\rho}。\tag{16.6b}$$

試由（16.6a）式，證明

$$B^{\mu;\alpha}{}_{\mu}=B^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\alpha}+R^{\alpha}{}_{\mu}B^{\mu}。\tag{16.6c}$$

［提示初階的計算：在局域 Lorentz 系中做，其中 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0$，但 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\delta}\neq 0$；把左邊用 Christoffel 符號和偏微商展開；再利用 Riemann 張量的 (8.44) 式。另一種高階計算則注意到 $\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\mathbf{B}$ 對 $\mathbf{e}_{\alpha}$ 並不是線性的，$B^{\mu}{}_{;\alpha\beta}$ 並不是它的分量；但是

$$B^{\mu}{}_{;\alpha\beta}\equiv\underbrace{\nabla\nabla\mathbf{B}}_{\text{[三秩張量]}}(\omega^{\mu},\mathbf{e}_{\alpha},\mathbf{e}_{\beta})。\tag{16.7}$$

於是，計算如下：

$$\begin{aligned}\langle\omega^{\mu},\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\mathbf{B}\rangle&=\langle\omega^{\mu},\nabla_{\beta}(\mathbf{e}_{\alpha}\cdot\nabla\mathbf{B})\rangle\\&=\langle\omega^{\mu},(\nabla_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha})\cdot\nabla\mathbf{B}+\mathbf{e}_{\alpha}\cdot(\nabla_{\beta}\nabla\mathbf{B})\rangle\\&=\langle\omega^{\mu},\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}\mathbf{e}_{\nu}\cdot\nabla\mathbf{B}+\nabla\nabla\mathbf{B}(\ldots,\mathbf{e}_{\alpha},\mathbf{e}_{\beta})\rangle\\&=B^{\mu}{}_{;\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}+B^{\mu}{}_{;\alpha\beta}。\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}B^{\mu}{}_{;\alpha\beta}-B^{\mu}{}_{;\beta\alpha}&=\langle\omega^{\mu},[\nabla_{\beta},\nabla_{\alpha}]\mathbf{B}\rangle-B^{\mu}{}_{;\nu}(\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha})\\&=\langle\omega^{\mu},[\nabla_{\beta},\nabla_{\alpha}]\mathbf{B}\rangle-\langle\omega^{\mu},\nabla_{(\nabla_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}-\nabla_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta})}\mathbf{B}\rangle\\&=\langle\omega^{\mu},([\nabla_{\beta},\nabla_{\alpha}]-\nabla_{[\mathbf{e}_{\beta},\mathbf{e}_{\alpha}]})\mathbf{B}\rangle\\&=\langle\omega^{\mu},\mathcal{R}(\mathbf{e}_{\beta},\mathbf{e}_{\alpha})\mathbf{B}\rangle\\&=R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}B^{\nu},\end{aligned}$$

與（16.6a）式一致。注：由於抽象記號較爲含糊，因此上述計算中的每一步都應仔細思考。反之，分量記號則毫不含糊。］

（接第392頁）

框 16.1 等效原理應用中的因子順序和曲率耦合

問題

當應用「逗號變爲分號規則」時，應當按怎樣的順序寫出微商？在平直空時中交換微商不會造成差異，但在彎曲空時中它產生一些與曲率相耦合的項，例如，對於任意矢量場 $2B^{\alpha}{}_{;[\tau\beta]}\equiv B^{\alpha}{}_{;\tau\beta}-B^{\alpha}{}_{;\beta\tau}=R^{\alpha}{}_{\mu\beta\tau}B^{\mu}$（見練習 16.3）。因此，問題可以重申如下：*逗號變分號規則應在什麼時候附加以曲率耦合項？*

解答

不存在普遍的解答，但是在絕大多數情況，下述形式的數學、物理推論毫不含糊地解答了這個問題。

A. *數學上，曲率項幾乎總是由協變微商的不可對易引起的。*因此，在任何方程中，如果含有一個雙協變微商（例如，$-A^{\alpha\beta}{}_{,\mu}+A^{\beta}{}_{,\mu}{}^{\alpha}=4\pi J^{\alpha}$）；或者根據更基本的定律，它們的求導包含雙協變微商（例如，在下述例 B(3) 中的 $\nabla_{\mu}\mathbf{S}=0$），則我們必須考慮曲率項。但在別處都可以忽略曲率耦合（例如，在 Maxwell 的一階方程中）。

B. *曲率耦合的出現決不會沒有某些物理原因的。*因此，如果人們僅將逗號變分號規則用於物理上可測的量（例如，用於電磁場而不是用於矢量勢），那麼，可以憑「直覺」知道是否可能與曲率耦合。例：

(1)*局域能量-動量守恒。*在方程 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$ 中的與曲率耦合——例如，將這些方程代之以 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=R^{\alpha}{}_{\beta\tau\delta}T^{\beta\tau}u^{\delta}$——是毫無意義的。在一個局域慣性系中，諸如 $R^{\alpha}{}_{\beta\tau\delta}T^{\beta\tau}u^{\delta}$ 之類的項總是被解釋成曲率在某一點上產生的力。但是，除非越過有限個區域（短程線偏離，等等），是不可能感知曲率的！另一種提法，引力勢的二階微商（度規）難於在一點產生淨力；它們只能產生潮汐力！

(2)電磁場張量的 Maxwell 方程組。這裏，引進曲率項也是不自然的。這些曲率項在下述意義下破壞了電荷守恒：即在有曲率而無電荷的那些點上，電場線和磁場線終止了。爲了保持電荷守恒，當把 Maxwell 方程（3.32）式和（3.36）式過渡到彎曲空時時，我們略去曲率耦合：

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=4\pi J^{\alpha}, \quad F_{\alpha\beta;\gamma}+F_{\beta\gamma;\alpha}+F_{\gamma\alpha;\beta}=0。$$

此外，我們繼續認爲 $F_{\mu\nu}$ 是（3.54'）式向彎曲空時過渡時由一矢量勢引起的

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}。$$

作了這些假定，可以證明， Maxwell 方程組的第二個方程是自動滿足的；還可以證明，當且僅當

$$-A^{\alpha;\mu}{}_{\mu}+A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\alpha}+R^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu}=4\pi J^{\alpha}$$

時，Maxwell 方程的第一個方程亦滿足。（更充分的討論和推導，參看§22.4）

(3)地球角動量矢量的輸運定律。如果地球像任一個孤立體一樣，處於平直空時中，它將沿其質心的直世界線平行輸運它的角動量矢量 $\boldsymbol{S}$, $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}=0$（「角動量守恒」）。當把這個輸運定律過渡到彎曲空時中（地球實際上居於其中），能否忽略曲率耦合呢？不能！起因於月亮和太陽的空時曲率在地球上產生潮汐引力；並且，因爲地球赤道的凸起，這些潮汐力對於地球的質心產生了一個非零的淨力矩。（用 Newton 的語言說：離月亮最近的凸起部分比離月亮最遠的凸起部分得到較大的拉力，因此有較大的力矩。）於是，在彎曲空時中，預期有以下形式的輸運定律

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}=\text{（Riemann 張量）}\times\text{（地球的四極矩）}。$$

這個曲率耦合力矩引起了地球轉軸的進動，每 26,000 年在黃道平面轉整整一周（「普遍進動」；「歲差」；公元前約 150 年被 Hipparchus 發現）。曲率耦合項的精確形式在練習 16.4 中導出。

練習 16.4 歲差

(a) 試證明，在彎曲空時中，地球內稟角動量矢量 S^α 的遷移定律是

$$\frac{DS^\alpha}{D\tau}=\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}t_{\beta\mu}R^\mu{}_{\nu\gamma\zeta}u_\delta u^\nu u^\zeta。 \tag{16.8}$$

這裏 $d/d\tau=\boldsymbol{u}$ 是沿着地球世界線的四維速度；$t_{\beta\mu}$ 是地球的「約化四極矩」（質量分布第二矩的無跡部分），它在地球局域 Lorentz 系中定義爲

$$t_{00}=t_{0j}=0,\qquad t_{jk}=\int\rho(x^jx^k-\frac{1}{3}\hat{r}^2\delta_{jk})d^3\hat{x}; \tag{16,9}$$

$R^\mu{}_{\nu\gamma\zeta}$ 是由月亮、太陽和行星在地球的位置上引起的 Riemann 曲率。［提示：忽略由於地球引起的空時曲率，在地球局域 Lorentz 系中導出這個結果。（在這本質上是 Newton 的情況中，由地球、太陽、月亮和行星引起的諸曲率分量 $R^j{}_{0\hat{k}0}$ 線性地叠加起來；「重力太小，不會是非線性的」）。對潮汐引力（「短程線偏離」）所引起的繞地球質心的力矩積分：

$$\begin{pmatrix}\text{相對於質心（}x^j=0\text{），在 }x^j\text{ 處的}\\ \text{加速度是由潮汐引力引起的，但部}\\ \text{分地爲地球的內脅强抵消}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{d^2x^k}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{短程線偏離}}=-R^k{}_{0l0}x^l\text{［見 (1.8′) 式］；}$$

$$\begin{pmatrix}\text{相對於質心，歸因於}\\ \text{這個加速度的單位體}\\ \text{積作用力}\end{pmatrix}=\rho\frac{d^2x^i}{d\hat{t}^2}=-\rho R^k{}_{0l0}x^l;\quad\leftarrow\text{質量密度}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{相對於質心的}\\ \text{單位體積力矩}\end{matrix}\right)_i=\epsilon_{0ijk}x^j(-\rho R^k{}_{0l0}x^l);$$

$$\left(\begin{matrix}\text{繞質心的}\\ \text{總力矩}\end{matrix}\right)_i=\int[\epsilon_{0ijk}x^j(-\rho R^k{}_{0l0}x^l)]d^3\hat{x}。$$

使這個表達式成爲含 t_{jl} 的形式，令它等於 $dS_i/d\tau$，然後在獨立的參照系中用分量記號重新寫出。結果應是 (16.8) 式。］

(b) 對於 Newton 引力勢的 **Riemann** 分量，利用方程

$$R^j{}_{0\hat{k}0}=\partial^2\Phi/\partial x^j\partial x^k$$

在地球局域 Lorentz 系中，重新寫出 (16.8) 式。（對於 Einstein 理論的 Newton 近似，高階讀者已在第12章遇到過這個方程；初階讀者將在 §17.4 遇到它。）

(c) 從開始就用 Newton 重力理論來計算 $dS^j/d\hat{t}$。其結果將與 (b) 中用 Einstein 理論所得結果相同。

(d) 把月亮和太陽理想化爲質點，計算它們在地球轉動軸上產生的長時期空時曲率效應，利用 (b) 的結果，以及與太陽系有關的具有適當精度的參量值。［答案：地球轉動軸相對於它的局域 Lorentz 系進動（「歲差」；「普遍進動」）；進動周期是 26,000 年。計算的細節可以在任何一本天體力學教科書中查到。］

§16.4　用以測量空間和時間間隔的杆和鐘

現在，把注意力從有重力的物理定律轉向杆和鐘的本性，爲了測量在這些定律中出現的長度和時間間隔，杆和鐘是一定要用到的。

我們不必要——實際上，肯定不必要——假定靜長度 s 是用某種類型的杆（例如，鉑制的米原器）測量的，或原時 τ 是用某種類型的鐘（例如，氫-微波激射鐘）測量的。相反，我們必須詢問物理學定律本身：什麼類型的杆和鐘將擔任這個角色？換言之，我們定義一個「理想的」杆或鐘，它測量的靜長度由 $ds=(g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$，或者它測量的原時由 $d\tau=(-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$ 給出（在§1.5，物理的論證使我們得出了這種鐘），然後，我們應該用物理學定律分析一個給定的杆和鐘的行爲，以便在給定的情況下，確定它們作爲理想的杆和鐘所需的精度。

定義「理想的」杆和鐘

實際的鐘是如何理想化的？

作爲一個明顯的例子，考慮一個擺鐘。如果此擺鐘靜止地放在地球表面上；如果它足夠小以致因擺動速度引起的從一端到另一端的紅移效應以及時間膨脹效應都可以忽略；如果我們所要求的精度足夠小，以致因地球潮汐引起的局域引力加速度的時間變化可以忽略，那麼，物理學定律指出（框 16.2）：該擺鐘是「理想的」。然而，在任何其他情況（例如，在去月亮旅行的火箭中）下，擺鐘遠非理想的。無控制地變化加速度，或者完全沒有加速度，將使擺鐘毫無用處！

(1)擺鐘

各類原子鐘和核鐘有更大的意義。如果它自由下落，則這樣的鐘最容易分析。我們可以在它的局域 Lorentz 靜止系中用量子論的標準方程來研究它；當然，我們將發現，它測量的原時受到原子鐘構造的技術精度的限制（$\Delta t/t\sim 10^{-9}$ 到 10^{-14}）。然而，人們很少容許他們的原子鐘自由下落。（與地球表面碰撞的代價高昂！）不過，即使在地球表面上被加速到「$1g$」=980厘米/秒^2，以及即使在試圖避免空中碰撞的客機上被加速到「$2g$」（框 16.3），一個原子鐘——只要構造堅固——沿着它的世界線仍將與它自由下落時以幾乎同樣的精度測量原時 $d\tau=(-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$。我們可以做一個實驗來揭示這一點。換言之，我們可以在鐘自身的「固有參照系」（§13.6）中來分析鐘，用 Fermi-Walker 輸運基矢，用適合於加速系的量子力學標準局域 Lorentz 定律（局域 Lorentz 定律加上「慣性力」，慣性力可以這樣處理，即把它看作是由一具有均勻梯度的勢所引起的）。

(2)原子鐘

當然，任何鐘都有一個「斷點」，超出此點，鐘將停止正常運行（框16.3）。但是，該斷點完全取決於鐘的構造——而完全與任何「加速度對時間步調的普適影響」無關。速度產生普適的時間膨脹；加速度却並非如此。

人體的老化受到電磁學和量子力學定律的支配，正像同樣的這些定律也支配着原子和分子中的周期性以及能級躍遷一樣。因此，像原子過程一樣，老化

(3)人的鐘

(接第396頁)

框 16.2 證明：在地球表面上，一個靜止的擺鐘是理想的

即證明它測量了間隔 $d\tau=(-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$。

A. 對擺的約束

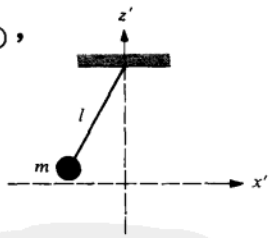
它必須很小，使它不能與空時曲率相耦合——即小到使地球引力場在它的鄰域內看起來是均勻的——以及擺球的速度與光速相比完全可以忽略。

B. 坐標系和度規

(1)普通坐標系：因爲地球場近似是 Newton 的，我們可以引進「線性化理論」的坐標（§18.4，對此我們必須信守，直至到達那一點爲止），在此坐標中

$$ds^2=-(1+2\Phi)dt'^2+(1-2\Phi)(dx'^2+dy'^2+dz'^2)，$$

式中 Φ 是 Newton 勢。



(2)取擺的平衡位置爲坐標原點，把擺動平面定位爲 $x'z'$ 平面。

(3)重正化坐標，使這些坐標在平衡位置測量靜長度和原時爲

$$t=[1+2\Phi(0)]^{1/2}t'，\qquad x^j=[1-2\Phi(0)]^{1/2}x^{j'}。$$

於是，在擺附近（場的非均勻性可略！）

$$\Phi=\Phi(0)+gz,\qquad g=\text{「重力加速度」},\tag{1}$$
$$ds^2=-(1+2gz)dt^2+(1-2gz)(dx^2+dy^2+dz^2)。\tag{2}$$

C. 擺運動的分析

(1)把擺的總質量m都置於它的球上（忽略它的杆的質量）。令杆的靜長度爲l。

(2)用 d^2x^α/dt^2 計算擺球的四維加速度 $\mathbf{a}=\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$，利用速度條件$v<<<1$和 $dt/d\tau\approx1$:

$$\begin{aligned}a^x&=d^2x/d\tau^2+\Gamma^x{}_{00}(dt/d\tau)^2=d^2x/dt^2+\Gamma^x{}_{00}=d^2x/dt^2,\\ a^z&=d^2z/d\tau^2+\Gamma^z{}_{00}(dt/d\tau)^2=d^2z/dt^2+\Gamma^z{}_{00}=d^2z/dt^2+g。\end{aligned}\tag{3}$$

(3)這個四維加速度應由杆內的力所產生，從而應指向杆，因此（因$x\ll l$，故 $g\geqslant d^2z/dt^2$）

$$d^2x/dt^2=a^x=-(x/l)a^z=-(g/l)x。\tag{4}$$

(4)解此微分方程，得

$$x=x_0\cos(t\sqrt{g/l})。\tag{5}$$

(5)因此，結論是：擺對 t 是周期性的，t 是球平衡位置處的原時（見(2)式）。這意味着：當擺靜止在地球表面上時，它是一個理想的鐘。

註：上述分析忽略了地球的轉動；對於包含轉動的另一種分析，我們可以在擺的「固有參照系」的原點，作類似的計算［§13.6線元（13.71）式］。答案是相同的；但現在“g”是「引力加速度」和「由地球轉動產生的離心加速度」之疊加。

框 16.3 鐘對於加速度和潮汐引力的響應

考慮一個原子鐘，它的頻率爲某種原子的或分子的過程所穩定——例如，被氨分子的「傘形振動」所確定［參看 Feynman 等 (1964)］。當受到足夠强的加速度或潮汐力時，這樣的鐘不再以其正常的精度測量原時。有兩種效應會導致從「理想狀態」的偏離。

A. *加速度和潮汐力對提供穩定頻率的原子過程的影響*。例如：如果潮汐力在幾埃的距離上（例如，在終止引力坍縮的空時「奇點」附近）是顯著的，那麼潮汐力就能夠並且將使氨分子變形，並破壞它的傘形振動的規律性，從而使得任何一個氨原子鐘成爲無用，無論鐘的結構如何。同樣，如果氨分子受到加速，加速度的大小可以與氨分子內部原子的加速度（$a \sim 10^{12}$「g」$\sim 10^{15}$ 厘米/秒^2）相比擬，後者在「傘形」振動周期的時間量級內會變化，那麼，它必然中止規律性的振動，從而使任何基於這種振動的鐘必然歸於失敗。在鐘的理想化方面，對於不同的原子過程，有不同的這類原則上的限制。然而，這些限制在1973年*還遠沒有成爲鐘構造的限制因素。今日，更爲重要得多的是：

B. *加速度或潮汐力對鐘的宏觀結構——一種受當前工藝決定的結構——的影響*。產生周期訊號輸出的晶體振盪器，必須以某種方式鎖定於規定的原子過程。中等的加速度就會擾亂這種鎖定。飛機鐘製造者的最困難任務是保證：甚至當飛機爲了躲避與另一飛機或導彈相撞而作危險的特技飛行時，鐘仍能保持精確的鎖定。在1972年，一個構造堅固的銣鐘，在定態加速度達到 50「g」或更高的情況下，仍能保持住它的鎖定，其穩定度［對於 1 秒$\lesssim t \lesssim 10^3$秒，$\Delta t/t \sim 10^{-12}$（1秒 $/t)^{1/2}$］不明顯降級。但是，由於鎖環的帶寬是有限的（典型的 $\Delta\nu \sim 20$ 至50赫芝），加速度的突然變化將暫時地破壞鎖定，把鐘的穩定度降低到無鎖定晶體振盪器的水平——即加速度 a 產生約（a/1「g」）$\times 10^{-9}$ 的頻率變化。但對銣標準的鎖定恢復得很快（$\delta t \sim 1/\Delta\nu$），使鐘回到它正常的高度穩定的狀態。*

在太陽系中，潮汐力如此之小，以致鐘製造者可以忽略它們。然而，如果一個1973年的原子鐘在一空時奇點附近受到潮汐加速度，則在潮汐力大到足以影響原子過程本身之前，早已破壞了對它的原子過程的「鎖定」。

* 本書（英文版）是1973年出版的——譯者註。

* 此處有關銣鐘對加速度響應的知識，我們要感謝 H. P. Stratemeyer（通用無線電公司，Concord，馬薩諸塞）。

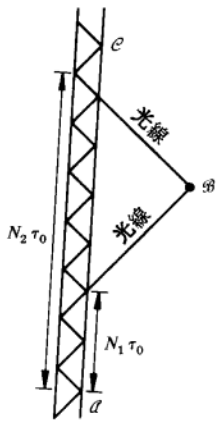
受到原時的約束，就像受到度規的支配一樣——當然，老化也受到另外一些事情的約束，例如吸煙。

由短程世界線構造理想的杆和鐘

原則上，人們可以由自由下落的試驗粒子和光子的短程測地線建造理想的杆和鐘。（參見框 16.4）換言之，即使物質和非引力場都不存在，空時仍具有建於其自身之內的它自己的杆和鐘。

框 16.4　由短程世界線建造理想的杆和鐘*

標準間隔一個特定的類時間隔——在兩個特殊的鄰近事件 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之間的間隔——被選爲標準間隔，並被指定爲單位長度。用它去校準一大批經過 $\mathcal{A}$ 的短程鐘。



每一個**短程鐘**的建造和校準如下：

(1)一類時短程線 $\mathcal{AC}$（自由下落粒子的路徑）經過 $\mathcal{A}$。

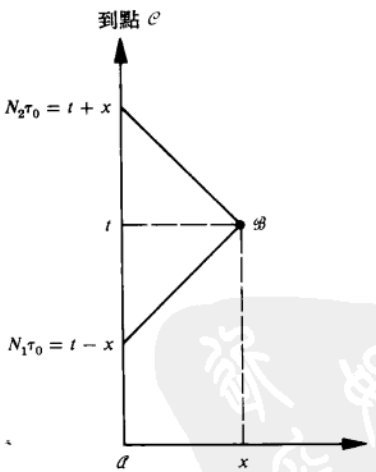
(2)利用只依賴於短程線的 Schild 階梯方法（框 10.2）建造一個鄰近世界線，它處處平行於 $\mathcal{AC}$（因而不是短程線）。

(3)光線（零短程線）在這兩個平行世界線之間來回反射；每往返一次構成一個「滴答」。

(4)滴答的原時間隔 τ_0 與間隔 $\mathcal{AB}$ 的關係是

$$-1 \equiv (\mathcal{AB})^2 = -(N_1\tau_0)(N_2\tau_0)\,,$$

式中 N_1 和 N_2 是圖中所示事件之間的滴答數。［**證明**：見右圖。］



在短程鐘的局域 Lorentz 靜止系中：

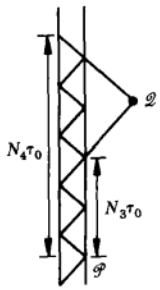
$$(N_1\tau_0)(N_2\tau_0) = (t - x)(t + x) = t^2 - x^2 = -(\mathcal{AB})^2$$

空時充滿了這類短程鐘。那些通過 $\mathcal{A}$ 的短程鐘，按照上述方法與標準間隔 $\mathcal{AB}$ 比較而被校準，隨後再用它們去校準所有別的與之相遇的鐘。

---

* 根據 Marzke 和 Wheeler (1964).

按照在校準中用過的同樣方法，可以測量沿一個短程鐘世界線的任一間隔 $\mathcal{P}2$ ，間隔 $\mathcal{P}2$ 可以是類時的、類空的、或零的；在所有這三種情況下，它的長度平方都是



$$(\mathcal{P}2)^2=-(N_3\tau_0)(N_4\tau_0)。$$

爲了使測量的精度達到N分之一（N是某個大數），採取兩項預防措施：

(1)要求間隔 $\mathcal{AB}$ 和 $\mathcal{P}2$ 比空時曲率的尺度小很多；或者明確地說，

$$R^{(AB)}(\mathcal{AB})^2\ll 1/N$$

以及

$$R^{(PQ)}(\mathcal{P}2)^2\ll 1/N,$$

其中 $R^{(AB)}$ 和 $R^{(PQ)}$ 是上述兩區域內曲率張量的最大相關分量。

(2)要求所使用的短程鐘的時標 τ_0 分別比 $\mathcal{AB}$ 和 $\mathcal{P}2$ 小很多；即

$$\tau_0\ll\mathcal{AB}/N,$$
$$\tau_0\ll\mathcal{P}2/N。$$

Einstein 原理，即空時由 Riemann 幾何學描寫，由於上「千」個試驗而使自己面臨着毀滅。例如，從基準間隔 $\mathcal{AB}$ 到測量的間隔 $\mathcal{P}2$，有「二十」條相互比較的路線，它們全都應當給出相同的 $\mathcal{P}2/\mathcal{AB}$ 比值。而且，人們可以容易地選出「五十」個間隔 $\mathcal{P}2$，對這些間隔可以採用同樣的試驗。今後，這類試驗還不是全部項目。

大約 5×10^9 年以前，許多電子經不同路線來到一個共同的位置，即地心內一個給定的鐵原子處。這個鐵原子沒有坍縮。Pauli 不相容原理阻止電子全都落入K軌道。如果這些電子不全同

或者遠不相同，則 Pauli 原理不適用。由此，可能導致一個重要的結論（Marzke 和 Wheeler）。與每個電子相聯繫的有一個標準長度，即電子的 Compton 波長 $\hbar/mc$ 。如果這些長度一開始就不同，或者沿着不同的路線有不同數量的變化，並且如果由此引起的性質的不同大到

$$\sim(5\times10^{9}\text{年})\times(3\times10^{7}\text{秒/年})\times(5\times10^{18}\text{圈/秒})\sim10^{36}$$

分之一，那麼，現在這個差別就要顯示出來了，各種各樣的電子都將落入K軌道，地球就會坍縮，但這與觀察相反。

Marzke-Wheeler 的結構是用基準間隔 $\mathcal{AB}$ 表示空時中任何地方的任意小間隔 $\mathcal{PQ}$，作爲定義，間隔 $\mathcal{AB}$ 本身可取作 §1.5 的「幾何動力學標準厘米」。因而，這個結構給 Riemann 幾何學的觀念以清晰的含義。

M-W 結構不用求助於任何原子構造的杆和鐘。由於下述理由，這是意義重大的。通常的鉑米尺長度是 Bohr 原子半徑的某些倍，即 $N_1(\hbar^2/me^2)$。同樣，Kr^{86} 譜線的波長是第二個基本長度（它以完全不同的方式依賴於原子常數）的某些倍，即 $N_2(\hbar c/e^2)(\hbar^2/me^2)$ 。因而，如果無量綱的比值 $\hbar c/e^2=137.038$ 隨時間有任何變化的話，則上述長度原子標準中的某一個或另一個或兩者，必定不是良好的幾何動力學的標準厘米。在此情況，廣義相對論說：「堅持幾何動力學的標準厘米。」

Hermann Weyl 起初設想，人們可以單獨用光線來進行長度的比較，但是，H.A. Lorentz 指出，在測量過程中，人們既不能省却試驗粒子的短程線，也不能省却光線的短程線，然而，對於測量過程的結構，Weyl 和 Lorentz 都沒有提供［在 Marzke 和 Wheeler (1964) 的文獻中］。Ehlers, Pirani 和 Schild (1972) 用仿射聯絡、度規的保形部分、以及滿度規，更深入的分析了測量過程中的分離部分。

§16.5　引力場的測量

「我知道怎樣利用試驗電荷去測量電磁場，但是，對於測量引力場，類似的步驟是什麼呢？」這個問題有許多答案，而又沒有答案。

它沒有答案，因爲任何地方都未曾給出過「引力場」的精確定義——也將不會給出這樣的定義。許多不同的數學實體與引力有聯繫：度規，Riemann 曲率張量，Ricci 曲率張量，曲率標量，協變微商，聯絡係數，等等。其中每一個在引力理論中都扮演着重要的角色，沒有哪一個比別的更爲主要，使得它應當接受「引力場」的名字。因此，縱觀全書，「引力場」和「重力」這兩個術語，是以較爲含糊的、集體的方式來描述的，指所有這些實體。另外，它們使用的等效術語是「空時的幾何」。

重力的許多方面，以及怎樣測量它們

「測量引力場」意即「用實驗考察空時幾何的各種性質」。人們根據對空時的哪個性質有興趣，而安排不同種類的測量。然而，所有這類測量必須包含詳盡的研究空時幾何（即重力）對粒子、物質或非引力場的效應。

例如，爲了在一給定事件附近「測量」度規，我們典型地布置一個杆和鐘的格子（局域正交歸一系，足夠小，使得曲率效應可以忽略），並用它去確定鄰近事件之間的間隔。爲了在一事件附近測量 Riemann 曲率張量，我們典型地研究短程線偏離（相對加速度），該曲率是在各種相鄰試驗粒子的世界線之間引起的；換言之，如果曲率是靜止的或緩變的，則可用「重力陡度計」測量（框16.5）；或者，如果曲率迅速地起伏，則可用引力波天線測量（第37章）。爲了研究空時的大尺度曲率，我們要考察重力的大尺度效應，諸如行星和衛星的軌道，或者光線被太陽引力場的彎曲。

然而，不管我們測量重力的哪一方面，也不管我們怎樣測量它，我們都是在研究空時的幾何學。

練習

練習 16.5 重力陡度計

框 16.5 的重力陡度計穿過彎曲的空時，沿着一條加速的世界線在移動。試計算重力陡度計的一臂相對於另一臂振動的振幅和相角。［提示：在重力陡度計的「固有參照系」(§13.6) 中，用 Fermi-Walker 輸運基矢來進行計算。作爲兩臂的相對角加速度的方程，採用

$$2ml^2(\ddot{\alpha}+\dot{\alpha}/\tau_0+\omega_0^2\alpha)=\text{（由 Riemann 曲率產生的驅動力矩）。}$$

其中

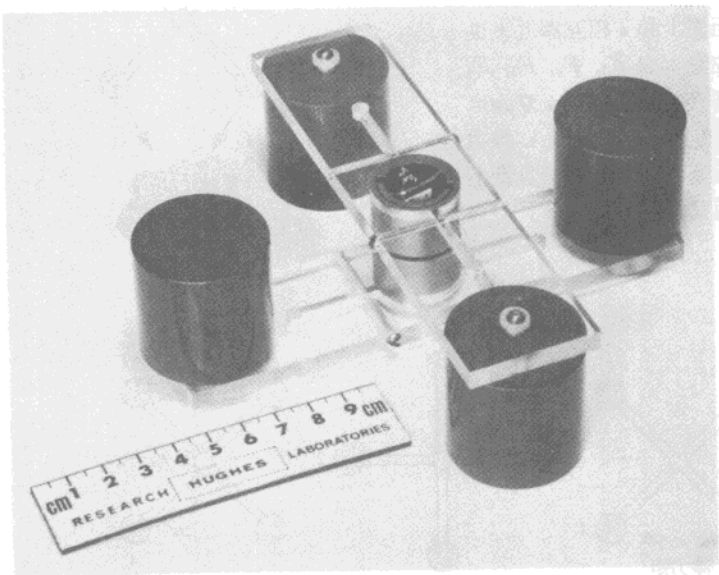
$$\begin{aligned}
2ml^2&=\text{（一個臂的轉動慣量），}\\
\alpha&=\text{（一個臂離平衡的角位移），}\\
\frac{\pi}{2}+2\alpha&=\text{（兩臂的角分離），}\\
2ml^2\omega_0^2&=\text{（扭轉彈性常數），}\\
\omega_0&=\text{（自由振動的角頻率），}\\
\tau_0&=\text{（由於內摩擦力引起的自由振動到阻尼的衰落時間）。}
\end{aligned}$$

如果 ξ 是從重力陡度計的質量中心到質量 1 的矢量，那麼就有

$$\begin{pmatrix}\text{曲率引起的質量 1}\\ \text{相對於重力陡度計}\\ \text{中心的加速度}\end{pmatrix}_{\hat{k}}=\left(\frac{D^2\xi_{\hat{k}}}{d\tau^2}\right)_{\text{短程線偏離}}=-R_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}\xi^{\hat{l}}\,;$$

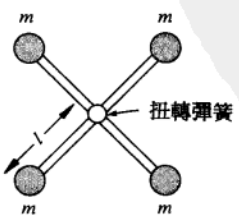
（接第403頁）

框 16.5　測量空時的 Riemann 曲率的重力陡度計

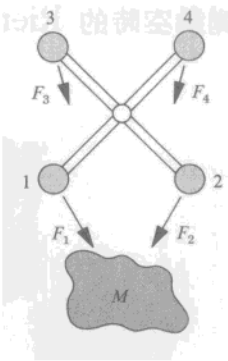


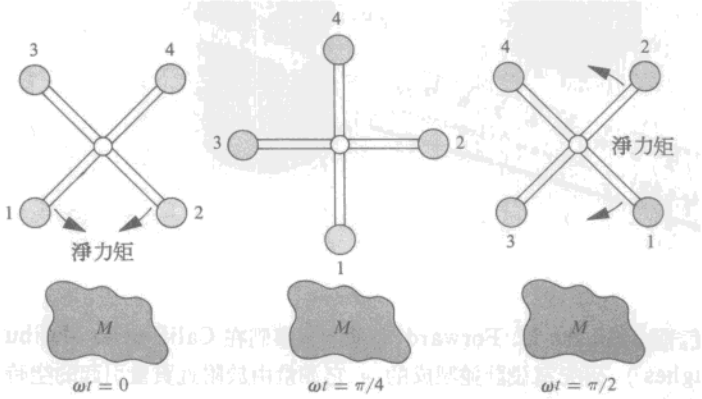
這個重力陡度計由 Robert M. Forward 和他的同事們在 California, Malibu 的休斯（Hughes）研究室設計並製成的。它測量由於附近質量引起的空時 Riemann 曲率。利用飛行用的、更爲先進型式的這種重力陡度計，在地球表面上空的飛機中，有可能測出由於不同地質結構引起的地球表面之下的質量變動。在環繞地球的衞星中，這種陡度計可以測量地球的引力多極矩。陡度計的技術細節在下列文章中有清楚的說明：Forward (1972)，和 Bell, Forward，以及 Williams (1970)，它的工作原理概述如下：

陡度計由末端帶有質量m的兩個正交的臂所組成，兩臂中心用扭轉彈簧聯接起來。當臂被扭離正交校準線時，它就振動了。用一個壓電脅變換能器來測量振動的振幅。



當把陡度計放在一個外部質量M附近時，它受一個力矩的作用：因爲M的引力場的陡度（即由M產生的空時曲率），牛頓力 F_1 和 F_2 大於 F_3 和 F_4 ；因此有一淨力矩使 1 和 2 相互靠近，也使 3 和 4 相互靠近。［注意：力 F_1, F_2, F_3, F_4 有賴於陡度計是自由下落（短程線運動；$\nabla_u u=0$）抑或是在加速的世界線上運動，但是，淨力矩不受加速度的影響，加速度在所有四個質量上產生相等的牛頓力，因而其淨力矩爲零。］





陡度計工作時圍繞着它的中心以角速度 ω 旋轉。由於它在轉動，作用在各臂上的力矩振動如下：

當 $\omega t=0$，淨力矩使 1 和 2 相互靠近；
當 $\omega t=\pi/4$，淨力矩爲零；
當 $\omega t=\pi/2$，淨力矩使 1 和 2 相互遠離。

振動着的力矩的角頻率是 2ω ，如果令 2ω 等於 $\omega_0\equiv$（臂的自然振動頻率），則振動的轉矩驅使臂發生共振。用陡度計的1970年原型，得出的振動振幅很容易檢測到重力陡度（Riemann曲率）的大小爲

$$\gtrsim 0.0002\left[\frac{2(\text{地球質量})}{(\text{地球半徑})^3}\right]$$

$$\sim 1\times 10^{-30}\text{厘米}^{-2}\sim .01\text{克/厘米}^3$$

$$\sim \left\{\begin{array}{l}\text{由一個兩千米高的山（理想化爲兩千}\\ \text{米高的立方體）在15公里遠處產生的}\\ \text{Riemann 曲率。（在這個理想化中，}\\ \text{忽略了地殼均衡以及在山隆起區域中}\\ \text{地殼密度的任何降低。）}\end{array}\right.$$

重力陡度計的數學分析可參看練習16.5。

$$\begin{pmatrix}\text{相對於重力陡度計}\\ \text{的中心，作用在質}\\ \text{量 1 上的力矩}\end{pmatrix}_i = \epsilon_{ijk}\xi_j(-mR_{k0l0}\xi_l)。$$

作用在質量 4 上的力矩與此完全相同（用 $-\xi$ 代替 ξ），所以，在臂 1-4 上的總力矩是上式的二倍。可以把 **Riemann** 的分量 R_{k0l0} 認爲是一個 3×3 對稱矩陣的分量。適當確定參照系空間軸的方向（沿 R_{k0l0} 的「主軸」定向），可以使 R_{k0l0} 在某起始瞬間是對角的

$$R_{\hat{x}0\hat{x}0}\neq 0,\ R_{\hat{y}0\hat{y}0}\neq 0,\ R_{\hat{z}0\hat{z}0}\neq 0,\ \text{餘皆爲零。}$$

設 **Riemann** 沿重力陡度計的世界線變化得足够慢，使得在整個實驗中，R_{j0k0} 保持爲對角並且保持爲常數。爲簡單計，將重力陡度計置於 $\hat{x}$，$\hat{y}$ 平面，所以它以角速度 $\omega\approx\frac{1}{2}\omega_0$ 繞 z 軸旋轉：

$$\begin{pmatrix}\text{1-4 臂相對於}\\ \hat{x}\text{ 軸的角度}\end{pmatrix}=\omega t。$$

試證明所得振動方程爲

$$\ddot{\alpha}+\dot{\alpha}/\tau_0+\omega_0^2\alpha=\frac{1}{2}(R_{\hat{x}0\hat{x}0}-R_{\hat{y}0\hat{y}0})\sin 2\omega t;$$

穩態振動爲：

$$\alpha=Im\left\{\frac{\frac{1}{2}(R_{\hat{x}0\hat{x}0}-R_{\hat{y}0\hat{y}0})}{2\omega_0(\omega_0-2\omega+i/2\tau_0)}e^{i2\omega t}\right\}。$$

因此，對於固定的 ω（例如，$2\omega=\omega_0$），測量振動的振幅和位相，就能知道 $R_{\hat{x}0\hat{x}0}-R_{\hat{y}0\hat{y}0}$ 的大小和符號。把重力陡度計的轉軸分別沿 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 軸放置，就能測出另外兩個差 $R_{\hat{y}0\hat{y}0}-R_{\hat{z}0\hat{z}0}$ 及 $R_{\hat{z}0\hat{z}0}-R_{\hat{x}0\hat{x}0}$。]

第十七章　質量-能量怎樣產生曲率

物理世界表現為一個四維的連續體。在此，若採用 Riemann 度規，並尋找這種度規所滿足的最簡單定律，那麼，就得到了空的空間的相對論性引力理論；如果在這空間採用一個矢量場，或由它導出的反對稱張量場，並且如果尋找這樣的場所滿足的最簡單定律，那麼，就得到了自由空間的 Maxwell方程組。……任何時候，在所有想得到的結構之外，一種單一的結構總是會證明它自己絕對地優於所有其它的……

Albert Einstein (1934, 第18頁)

§ 17.1　作爲場方程表述中心思想的源的自動守恒

本節導出「Einstein場方程」

現在，從物質對幾何的響應（中性試驗粒子在短程線上的運動；對於物質和場的動力學的「逗號變分號的規則」）轉向分析幾何對物質的響應。

質量是重力之源。任何一個四維速度爲 u 的觀察者所測得的質量-能量密度是

$$\rho = u \cdot T \cdot u = u^{\alpha} T_{\alpha\beta} u^{\beta} 。 \tag{17.1}$$

因此，脅强-能量張量 T 是與參照系無關的「幾何客體」，它必定充當重力之源。

這個源，即幾何客體，不是任意的對稱張量。它必須有零散度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T}=0\,, \tag{17.2}$$

因爲只有這樣，動量-能量守恒定律才能保持。

描寫物質怎樣產生重力的方程必然具備 $G=\kappa T$ 的形式，其中 T 是脅强-能量張量

把這個源 $\boldsymbol{T}$ 放在產生重力的方程的右邊。在左邊有一個表徵重力的幾何客體。該客體，像 $\boldsymbol{T}$ 那樣，必須是對稱的、無散的張量；如果它表徵重力，則它一定是由空時幾何構成的，並且除了幾何之外什麼也沒有。這個幾何客體稱爲「Einstein 張量」，用 $\boldsymbol{G}$ 表示，所以產生重力的方程爲

$$\boldsymbol{G}=\kappa \boldsymbol{T}\,。 \tag{17.3}$$

（比例因子；稍後即將算出）

（不用先假設 $\boldsymbol{G}$ 與第 8, 13, 14和15 章中遇見過的 Einstein 張量相同；而這將在後面得到證明！）

張量 $\boldsymbol{G}$ 必須具有的性質

散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{G}$ 爲零並不認爲是 $\nabla \cdot \boldsymbol{T}=0$ 的結果。相反，所有物質和場服從的守恒定律 $\nabla \cdot \boldsymbol{T}=0$ 被認爲是：(1)它們與空時幾何相聯接的方式〔(17.3)式〕的一個結果，因此(2)是自動守恒定律或者恒等式 $\nabla \cdot \boldsymbol{G}\equiv 0$ 所要求和所堅持的，該恒等式對任意的光滑 Riemann 空時，無論是物理的或非物理的都成立。（更充分的討論見第15章，更充分的證明見後面 §17.2。）相應地，尋找一個在下述意義上的對稱張量 $\boldsymbol{G}$（它是「自動守恒的空時曲率量度」）

(1)當空時平直時，$\boldsymbol{G}$ 爲零。

(2)$\boldsymbol{G}$ 由 Riemann 曲率張量以及度規構成，別無其它。

(3)$\boldsymbol{G}$ 與可由 **Riemann** 和 **g** 構成的其它張量的區別在於它要求 (i) 它對 **Riemann** 是線性的，適宜於曲率的任何自然的量度；(ii) 像 $\boldsymbol{T}$ 那樣，它是對稱的，其秩爲二；以及 (iii) 它有自動爲零的散度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G}\equiv 0\,。 \tag{17.4}$$

證明 $\boldsymbol{G}$ 應爲第 8 章的曲率張量

撇開相乘的常數，僅有一個張量（練習17.1）滿足這些要求：自動守恒的，二秩的張量，對曲率是線性的，當空時平直時它爲零，這就是 Einstein 曲率張量 $\boldsymbol{G}$，在第 8 章中用 Ricci 曲率張量表出，爲：

$$R_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}\,,$$

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\,。 \tag{17.5}$$

在第15章中，作爲「曲率的轉矩」，或更簡單些，作爲「轉矩」已給這個量以明確的意義，它是取 Riemann 曲率張量的雙對偶構成的

$$\mathbf{G}=\text{*}\mathbf{Riemann}\text{*}, \tag{17.6a}$$

然後再縮併這個雙對偶

$$G_{\mu\nu}=G^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}。 \tag{17.6b}$$

在第15章，$\nabla\cdot\mathbf{G}$ 爲零是作爲拓撲學的基本原理「一邊界的邊界是零」的結果而得到證明的。

用與 Newton 重力理論相比較的方法算出（$\mathbf{G}=\kappa\mathbf{T}$ 中的）κ

爲計算 "Einstein 場方程 $\mathbf{G}=\kappa\mathbf{T}$ 中的比例常數 κ，可以與經受考驗的 Newton 重力理論作比較。爲便於比較，檢測一些粒子的相對加速度（短程線偏離），這些粒子在一個插入地球的管子中下落，設地球是理想化的即有均勻的密度 ρ（圖 1.12）。根據 Newton 的觀點，相對加速度受密度控制；根據 Einstein 的觀點，它受空時的 Riemann 曲率控制。應用 Newton 坐標（其中 $g_{\mu\nu}\approx\eta_{\mu\nu}$）直接比較 Newton 和 Einstein 的預言，揭示出以下關係

$$R_{00}\equiv R^{\alpha}{}_{0\alpha 0}=4\pi\rho。 \tag{17.7}$$

（推導的細節，見 §1.7；應用這個方程對 Newton 重力的廣泛討論，見第 12 章。）當用於地球的內部，Einstein 場方程 $\mathbf{G}=\kappa\mathbf{T}$ 應簡化爲 $R_{00}=4\pi\rho$。用分量形式，Einstein 場方程爲

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\kappa T_{\mu\nu}。$$

它的跡爲

$$-R=R-2R=\kappa T。$$

結果，它預言

$$\begin{aligned}R_{00}&=\frac{1}{2}g_{00}R+\kappa T_{00}=\frac{1}{2}\kappa(2T_{00}-\underbrace{g_{00}}_{-1}T)\\&=\frac{1}{2}\kappa[2T_{00}+T^{0}{}_{0}+T^{j}{}_{j})]\\&=\frac{1}{2}\kappa(T_{00}+T^{j}{}_{j})。\end{aligned}$$

當我們記起，對於地球——像任意的近 Newton 體系那樣——，脅强 T_{jk} 比質量-能量密度 $T_{00}=\rho$ 要小得多：

$$\frac{|T_{jk}|}{T_{00}}\sim\frac{\text{壓强}}{\text{密度}}\sim\frac{dp}{d\rho}\sim(\text{聲速})^{2}\ll 1，$$

於是 R_{00} 的式子化爲

$$R_{00}=\frac{1}{2}\kappa\rho。 \tag{17.8}$$

僅當比例常數 κ 爲8π時，方程 $R_{00}=4\pi\rho$（由比較 Newton 理論和 Einstein 理論的相對加速度導出）才會與方程 $R_{00}=\frac{1}{2}\kappa\rho$（直接從 Einstein 場方程導出）相一致。

結果：「Einstein場方程」$G=8\pi T$

因此，描述質量-能量曲率生成的 Einstein 場方程應爲

$$G=8\pi T。 \tag{17.9}$$

左邊（「曲率」）的單位是（厘米）$^{-2}$，因爲一個曲率張量是一個線性的機器，可以在其中插入位移（單位：厘米）並由此得到相對加速度（單位：厘米／秒^2～厘米／厘米^2～厘米$^{-1}$）。右邊也有厘米$^{-2}$的量綱，因爲它是一個線性的機器，可以在其中插入四維速度（無量綱）並由此得到質量密度［單位：克／厘米^3～厘米／厘米^3～厘米$^{-2}$；回想由(1.12)式和框1.8，1克＝(1克)×(G/c^2)＝(1克)×(0.742×10^{-28}厘米／克)＝0.742×10^{-28}厘米］。

這就結束了 Einstein 場方程的最簡單的推導，它已在手頭，並確立了在 Newton 條件下它與 Newton 重力理論的對應。必須用這種對應來算出(17.9)式右邊的因子 $\kappa=8\pi$。撇開這個因子，推導的中心是要求存在一個唯一的、散度恆爲零的曲率 **G** 的張量量度。

練習

練習 17.1　Einstein 張量的唯一性

(a)試證明由 ***Riemann*** 和 **g** 構成的，與 ***Riemann*** 成線性關係的，最普遍的二秩、對稱張量是

$$\begin{aligned}&aR_{\alpha\beta}+bRg_{\alpha\beta}+\Lambda g_{\alpha\beta}\\&=aR^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}+bR^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+\Lambda g_{\alpha\beta}\,,\end{aligned} \tag{17.10}$$

式中 a, b 和Λ都是常數。

(b)試證明：當且僅當 $b=-\frac{1}{2}a$ 時，上述張量自動有零散度。

(c)附帶證明：當且僅當 $\Lambda=0$ 時，即當且僅當該張量是 Einstein 張量 $G_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ 的倍數時，則此張量在平直空時爲零。（不必費心證明 $\nabla\cdot\mathbf{G}\equiv0$；把它作爲第13章的一個結果來用。）

練習 17.2　由度規的一階微商不能構成張量

試證明：不存在這樣的張量，其分量是用十個度規係數 $g_{\alpha\beta}$ 和它們的四十個一階微商 $g_{\alpha\beta,\mu}$ 構成的——除了度規張量**g**以及它和自身的乘積，例如 $\mathbf{g}\otimes\mathbf{g}$。［提示：假設存在一些別的這種張量，在局域慣性系中檢查它的假定的分量。］

練習 17.3 *Riemann* 作爲由度規的二階微商構成並與度規的二階微商成線性關係的唯一的張量

試證明：(1)***Riemann*** (2)$\boldsymbol{g}$ 和(3)由 ***Riemann*** 和 $\boldsymbol{g}$ 形成且與 ***Riemann*** 成線性關係的張量（例如 ***Ricci***）是具有下列性質的僅有的張量：(a)它們可由十個 $g_{\alpha\beta}$，四十個 $g_{\alpha\beta,\mu}$ 和100個 $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ 構成，以及(b)與 $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ 成線性關係。［提示：假設存在一些別的這種張量，在正交歸一的 Riemann 簡正坐標系中，檢查它的假設的分量。利用 (11.30) 式到 (11.32) 式。］

練習 17.4 Einstein 張量的唯一性

(a)試證明，Einstein 張量 $G_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ 是唯一的二秩、對稱張量，它(1)有僅由 $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,\mu}$, $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ 構成的分量；(2)有與$g_{\alpha\beta,\mu\nu}$成線性關係的分量；(3)有自動爲零的散度，$\nabla\cdot\boldsymbol{G}=0$以及(4)在平直空時爲零。這啓發我們選擇Einstein張量作爲場方程$\boldsymbol{G}=8\pi\boldsymbol{T}$的左邊。

(b)試證明：若省略條件(4)，則最普遍的張量是 $\boldsymbol{G}+\Lambda\boldsymbol{g}$，其中 Λ是一個常數。（其意義見§17.3。）

§17.2 源的自動守恒：動力學的必然

現在有答案 $\boldsymbol{G}=8\pi\boldsymbol{T}$ 在手，但問題是什麼？方程已經導出，它把 Einstein-Cartan「轉矩」$\boldsymbol{G}$ 與脅强-能量張量 $\boldsymbol{T}$ 聯繫了起來，但是要這個方程的首要目的何在？即使幾何告訴物質怎樣運動，物質又告訴幾何怎樣彎曲，還是並未把握問題的癥結嗎？究竟怎樣才能解決它呢？

Einstein場方程支配空時幾何的演化

對幾何動力學而言，上述問題的特徵與動力學的其它分枝並無不同。爲了預言未來，首先必須在一個「初始的」「同時性」的超曲面上規定每一個粒子的位置和速度，並規定每一個遵循二階波動方程的場的振幅和時間變率。然後根據它們的動力學方程，就能及時向前推斷粒子和場。類似地，如果 Einstein 場方程能夠完全地、決定地預言整個系統（粒子加場加幾何）未來的時間依賴關係，那就必須在「初始的」超曲面上給出關於幾何及其一階時間變率的有關資料。（詳見第21章。）

如果要對幾何作預言，那麼，爲此應提供多少資料呢？空時幾何由度規描寫

$$ds^2=g_{\alpha\beta}(\mathcal{P})dx^\alpha dx^\beta;$$

即由空時中位置$\mathcal{P}$的十個函數 $g_{\alpha\beta}$ 描寫。看來似乎必須預言十個函數；倘若這樣，則爲此需要十個方程。然而並非如此。用坐標變換的方法引進一個新的坐

標 $x^{\bar{\mu}}$

$$x^{\alpha}=x^{\alpha}(x^{\bar{\mu}}),$$

找出用一整套新的度規係數 $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\mathscr{P})$ 描寫的同一個空時幾何，它帶有全部原有的隆起、谷和波。

$G=8\pi T$ 應只決定六個度規分量；其餘四個可通過坐標變換作調整

如果除「初值超曲面」上適當的資料之外，還要提供一種方法來計算所有十個函數 $g_{\alpha\beta}(\mathscr{P})$ 未來的值，那就超越了 Einstein 的「幾何動力學定律」$G=8\pi T$ 的權力和義務。要預言所有十個函數，就要預先假定坐標的選擇；而在各種坐標系中作選擇正是幾何動力學定律所不能也決沒有權力去做的事。這種選擇是研究幾何的人的需要，而不是造就幾何的自然界的需要。幾何，像汽車擋泥板一樣，在於自身也由於自身，無需乎坐標。坐標是人爲的。

由此，場方程的十個分量 $G_{\alpha\beta}=8\pi T_{\alpha\beta}$ 不應當完全地和唯一地確定度規的全部十個分量 $g_{\mu\nu}$。正相反，$G_{\alpha\beta}=8\pi T_{\alpha\beta}$ 應在十個 $g_{\mu\nu}(\mathscr{P})$ 中只給予六個獨立的約束，留下四個任意函數，由四個坐標函數 $x^{\alpha}(\mathscr{P})$的人爲特性來作調整。

$G=8\pi T$ 留下四個自由的度規分量，因爲它滿足四個恒等式 $0\equiv\nabla\cdot G=8\pi\nabla\cdot T$ （「源的自動守恒」）

怎樣才做到這點呢？這十個方程 $G_{\alpha\beta}=8\pi T_{\alpha\beta}$ 怎麼實際上僅爲六個呢？答案是：由於「源自動守恒」。更明確地說，恒等式 $G^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\equiv 0$ 確保十個方程 $G_{\alpha\beta}=8\pi T_{\alpha\beta}$ 包含四個「守恒定律」$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$。這四個守恒定律——與其餘方程一起——支配源的演化。它們不以任何方式約束幾何的演化。幾何僅受 $G_{\alpha\beta}=8\pi T_{\alpha\beta}$ 中其餘六個獨立方程的約束。

這樣看來，「源自動守恒」不僅是一個哲學上有吸引力的原理。實際上，它完全是動力學的必然。若沒有「源自動守恒」，十個 $G_{\alpha\beta}=8\pi T_{\alpha\beta}$ 對十個 $g_{\alpha\beta}$ 將給予十個約束，從而既固定了坐標系也固定了幾何。若有「自動守恒」，則十個 $G_{\alpha\beta}=8\pi T_{\alpha\beta}$ 對源給予四個約束（局域的能量和動量守恒），對十個 $g_{\alpha\beta}$ 給予六個約束，留下四個 $g_{\alpha\beta}$ 可由坐標系的調整來得到調整。

§17.3　宇宙常數

Einstein引進宇宙常數的動因

1915年，當 Einstein 發展他的廣義相對論時，在西方哲學中宇宙的永恒性是一個固定的信條。「天持續以至無窮」。Einstein 發現，他的幾何動力學定律 $G=8\pi T$ 預言一個非永恒的宇宙；一個動態的宇宙；一個起源於「大爆炸」或將由於收縮到無窮大密度而終將毀滅的宇宙；或者既起源於大爆炸又毀

滅於收縮的宇宙。這個發現大大地困擾了 Einstein （第 27章）。面對當時牢固的哲學信條與他的理論之間的矛盾， Einstein 退縮了 ， 他修改了自己的理論。

僅有的、可以相信的、不極大地改變理論結構的修改，是把幾何動力學定律 $G=8\pi T$ 的左邊作一些變化 。 記住， 左邊是 Einstein 張量 $G_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$，強加於其上的有三條假設：

(1)當空時平直時，G爲零。

(2)G 由 Riemann 曲率張量和度規構成，別無其他。

(3)G 與由 ***Riemann*** 和g構成的其他張量的區別在於它要求：(1)它對 ***Riemann*** 是線性的，適宜於曲率的任何自然的量度；(2)像 T 一樣，它是對稱的、二秩的；(3)它有自動爲零的散度，即 $\nabla\cdot G\equiv 0$。

爲了避免與標準的 Einstein 張量相混淆，用帶引號的 "G" 表示一個新的、修改過的左邊。在動力學基礎上，放棄 $\nabla\cdot$"G"$\equiv 0$ 是不可能的（見 §17.2）。在數學的基礎上，改變 "G" 的對稱性和秩是不可能的 ， 因爲 "G" 必須與 T 以等號聯接。若使 "G" 對 ***Riemann*** 爲非線性的， 將使理論大大複雜化。若使 "G" 由除 ***Riemann*** 和 g 之外的任何其他東西構成，將使 "G" 不再是空時幾何的量度，從而違背了理論的靈魂。經過很多苦惱之後斷定，可以取消、而又最少損及理論的靈魂及其完美的假設是第(1)條假設，即當空時平直時 "G" 爲零。但是，即使取消這個假設，仍然有下述的麻煩： (1)雖然 "G" 仍然可以在某種意義上是幾何的量度，但它不再是曲率的量度了；(2)平直的、空的空時將不再與幾何動力學定律相一致（在平直的、空的空間，$G\neq 0$ 而 $T=0$）。然而，這些後果， 較之一個動態的宇宙對 Einstein 來說，都是一些較次要的苦惱。

滿足條件(2)和(3) [放棄(1)] 的唯一的張量是 Einstein 張量加一個度規的倍數：

$$\text{“}G_{\alpha\beta}\text{”}=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R+\Lambda g_{\alpha\beta}=G_{\alpha\beta}+\Lambda g_{\alpha\beta}$$

（練習 17.1；亦見練習 17.4）。這樣，就把 Einstein (1917年) 引向他的修改過的場方程

具有宇宙常數的Einstein場方程

$$G+\Lambda g=8\pi T。\qquad (17.11)$$

其中常數Λ被他稱爲「宇宙常數」；它的量綱是厘米$^{-2}$。

爲什麼Einstein放棄宇宙常數

與原來的方程不同，修改過的方程容許一個靜止的，不變的宇宙作爲一個特解（見框27.5）。爲此，Einstein 在 1917 年傾向於相信這個修改過的方程。但是，十三年後 Hubble 發現了宇宙的膨脹 。 宇宙常數不再是必要的了。Einstein 稱宇宙常數爲「我一生中最大的錯誤」 ， 並將它拋棄並而回到他的

原始的幾何動力學定律 $\mathbf{G}=8\pi\mathbf{T}$ [Einstein (1970)]。

Λ 的確是一個巨大的並非不重要的錯誤！因爲，假如 Einstein 堅持他的原始方程，他就可以提出宇宙膨脹作爲他的重力理論的最成功的預言。

一個有害的妖魔，一旦放出瓶子，就不容易重新禁錮起來。很多宇宙學工作者不願意放棄宇宙常數。他們堅持認爲，只有當宇宙觀測揭示出宇宙常數小到可以忽略，才能放棄它。作爲保留宇宙常數的近代動因，有時把修改過的場方程重寫爲下述形式

宇宙常數的近代動因：眞空極化

$$\mathbf{G}=8\pi[\mathbf{T}+\mathbf{T}^{(\text{眞空})}], \tag{17.12a}$$

$$\mathbf{T}^{(\text{眞空})}\equiv-(\Lambda/8\pi)\mathbf{g} \tag{17.12b}$$

把 $\mathbf{T}^{(\text{眞空})}$ 解釋成與眞空相聯繫的脅強—能量張量。這個觀點推測 [Zel'dovich (1967)] 量子場論的眞空極化賦予眞空非零的脅強-能量張量 (17.12b)，除了利用它的引力效應外，這個張量是完全不能觀察的。遺憾的是，今天的量子場論太粗糙了，不允許從第一條原理計算出 $\mathbf{T}^{(\text{眞空})}$ （仍可參看練習17.5）。

宇宙常數給予眞空的質量-能量密度是

$$\rho^{(\text{眞空})}=T_{00}^{(\text{眞空})}=+\Lambda/8\pi。 \tag{17.13}$$

宇宙常數的觀察極限

無論 Newton 重力理論在何處對觀察作出了成功的計算，如果 $\Lambda\neq0$，那麼必定至少小得使 $\rho^{(\text{眞空})}$ 的引力效應可以忽略[$|\rho^{(\text{眞空})}|<\rho^{(\text{物質})}$]。應用 Newton 理論尙屬成功（雖不是巨大的成功）的最低密度的系統是一些小的星系團。因此，宇宙常數值的限度是

$$|\rho^{(\text{眞空})}|=|\Lambda|/8\pi\leqslant\rho^{(\text{星團})}\sim10^{-29}\text{克}/\text{厘米}^3$$
$$\sim10^{-57}\text{厘米}^{-2} \tag{17.14}$$

爲什麼除宇宙之外到處都忽略宇宙常數

顯然，即使 $\Lambda\neq0$, Λ 仍是足夠小的，這使它在星系，或恒星，或行星，或人，或原子的尺度上，總的說都是不重要的。因而，除了偶然地討論宇宙學（第27-30章）之外，有理由在任何地方都堅持 Einstein 的原始的幾何動力學定律 ($\mathbf{G}=8\pi\mathbf{T}$; $\Lambda=0$)。

練習 17.5　宇宙常數的大小

練習

(a)設 $\Lambda\sim10^{-57}$ 厘米$^{-2}$，宇宙常數對太陽系天體力學影響的數量級是多少？

(b)試證明，相應於 Λ 的最大可能值，眞空的質量-能量密度 ρ(眞空)$=\Lambda/8\pi\sim10^{-29}$克／厘米^{3}相當粗略地與下式一致

$$\frac{\text{一個基本粒子的靜質量}}{(\text{粒子的Compton波長})^3}\times(\text{引力精細結構常數})$$
$$=\frac{m}{(\hbar/m)^3}\ \frac{m^2}{\hbar}=\frac{m^6}{\hbar^4}$$

[Zel'dovich (1967, 1968)]。這種數字學是有啓發性的，但對於眞空，它並未引出任何可信的脅强-能量張量的推導。

§17.4 Newton 極限

正如量子力學在大作用量的「對應極限」($I\gg\hbar$) 還原爲經典力學一樣，廣義相對論在弱引力和低速度的「對應極限」也還原爲 Newton 理論。（關於「對應極限」，參看框 17.1）本節，在數學上相當詳細地闡明廣義相對論和 Newton 理論之間的對應。從引力的「被動的」方面（物質對引力的響應）開始，然後轉入「主動的」方面（物質產生重力）。

考慮一個孤立系——例如，太陽系——在其中，Newton 理論是高度精確

框 17.1 對應原理

A. 一般性評述和特例

1. 隨着物理學的發展和延拓，賴以維持其統一性的是對應原理之網，通過這個網，一些比較簡單的理論與更複雜但更精確的理論聯接起來，維持了它們的生命力。

a. 物理光學，連同它所解釋的衍射現象和干涉現象，它也已經並確實解釋了古老的、初等的關於鏡子和透鏡的幾何光學。在數學的「對應原理極限」下，即在波長與物理系統所有其他有關線度相比爲無窮小時，從物理光學重新得出幾何光學。

b. 在數學的「對應原理極限」下，即在與光速相比所有有關的速度都小到可以忽略時，從狹義相對論的力學重新得出 Newton 力學。

c. 在數學的「對應原理極限」下，即考慮很多粒子，使得壓力、粒子數以及其他物理量的漲落，與此系統的這些物理量的平均

值相比可以忽略時，熱力學就從它的後繼理論即統計力學重新得出。

d. 在「對應原理極限」下，即所討論的量子態的量子數很大，或開始起作用的作用量比 $\hbar$ 大很多，使得波動和衍射現象對標準的、決定論的經典力學預言所作的改變可以忽略時，從量子力學重新得出經典力學。甚至在任何適當的量子理論存在之前，N. Bohr 就已經闡明並利用了對應原理。他利用它預言原子能級以及光譜線強度的近似值。作爲所有物理學家的嚮導，N. Bohr 還詳細敍述了對應原理，首先是尋找量子理論的恰當形式；找到之後又說明了這個理論的內容。

2. 在所有這些例子以及其他的例子中，較新的、更複雜的理論比它的前任「更好」，因爲它或者很好地描述了更廣泛的物理領域，或者更精確地描述了同樣的領域，或者兩者兼而有之。

3. 新理論及其前任之間的對應 (a) 給我們從新理論重新得到老理論的能力；(b) 可以用直截了當的數學顯示出來；(c) 根據歷史記載，經常指導新理論的發展。

B. 廣義相對論的對應結構

1. Einstein 重力理論有不同的極限情形：(a) 狹義相對論；(b)「重力的線性化理論」；(c) Newton 重力理論；以及 (d) 重力的後 Newton 理論。因此，它有特別豐富的對應結構。

a. 與狹義相對論的對應；廣義相對論與狹義相對論有兩種不同的對應。第一是處處爲零引力場（零曲率）的極限；在此極限，可以引進一個整體的慣性系，令 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ 從而完整而精確地重新得到狹義相對論。第二是局域的而不是整體的；它要求（「對應原理」，「等效原理」）在局域慣性系，所有的物理定律取其狹義相對論的形式。正如在第16章中見過的，這對度規（除了在局域慣性系中 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ 以及 $g_{\mu\nu,\alpha}=0$ 之外）沒有限制；但在有重力時，它對物質和場的行爲有嚴格的約束。

b. 與 Newton 理論的對應：在弱引力場、低速和小壓强的極限下，廣義相對論還原爲 Newton 重力理論。在 §17.4 的正文中，對這種對應結構作了數學上的研究。

c. 與後 Newton 理論的對應：當 Newton 理論近於正確，但「一級相對論修正」可能重要時，經常用「重力的後 Newton 理論」。第39章闡述了後 Newton 理論以及它與廣義相對論和 Newton 理論兩者的對應。

d. 與線性化理論的對應：在弱引力場、但可能是大速度、大壓强 ($v\sim 1, T_{jk}\sim T_{00}$) 的極限下，廣義相對論還原爲「重力的線性化理論」。在第18章將研究這種對應。

爲使 Newton 重力理論精確，系統必須滿足的條件

的。爲使狹義相對論效應不顯著，系統中所有相對於其質量中心，或者相對於 Newton 坐標的速度，都必須比光速小很多

$$v \ll 1。 \tag{17.15a}$$

當一個粒子從這系統的外部地區落向內部時，引力將它加速到動能爲 $\frac{1}{2}mv^2 \sim |m\Phi|_{\text{極大}}$ [這裏 $\Phi<0$ 是 Newton 引力勢，規定 $\Phi(\infty)=0$.] 僅當

$$|\Phi| \ll 1 \tag{17.15b}$$

時，由此引起的速度才是小的。系統的內脅强（應力）也產生運動——例如，聲波。這種波特徵速度的量級爲 $|T^{ij}/T^{00}|^{1/2}$ ——例如，在理想流體中的聲速是

$$v=(dp/d\rho)^{1/2} \sim (p/\rho)^{1/2} \sim |T^{ij}/T^{00}|^{1/2}。$$

爲使這些速度比光速小得多，所有脅强（應力）必須比質量-能量密度小得多

$$|T^{ij}|/T^{00}=|T^{ij}|/\rho \ll 1。 \tag{17.15c}$$

當且僅當條件(17.15)式成立時，才能期望 Newton 理論精確地描寫所研究的系統。對於重力處於被動角色，廣義相對論與 Newton 理論的對應，要求自由下落粒子的短程世界線還原爲 Newton 世界線

$$d^2x^i/dt^2=-\partial\Phi/\partial x^i。 \tag{17.16}$$

此外，它們必須在任何相對坐標系中還原爲這樣的形式，即在這些相對坐標系中源和試驗粒子的速度是低的 $v \ll 1$，而且坐標長度和時間與 Newton 坐標的長度和時間幾乎相一致——後者又是用杆和鐘量度的固有長度和原時。這樣，有關的坐標（稱爲「Galileo」或「Newton」坐標）是這樣的坐標，在其中

定義「Newton 條件」

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad |v^i|=|dx^i/dt| \ll 1 \tag{17.17}$$

（弱引力場；近慣性坐標；低速度）。在這樣一個坐標系裏，試驗粒子的短程世界線有下面的形式

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{dt^2} &= \frac{d^2x^i}{d\tau^2} \quad (\text{因爲當 } |h_{\mu\nu}| \ll 1 \text{ 及 } |v^i| \ll 1 \text{ 時 } \frac{dt}{d\tau} \approx 1) \\
&= -\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (\text{短程線方程}) \\
&= -\Gamma^i_{00} \quad (\text{因爲 } \frac{dt}{d\tau} \approx 1 \text{ 及 } |\frac{dx^j}{d\tau}| \ll 1) \\
&= -\Gamma_{i00} \quad (\text{因爲 } g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}h_{00,i}-h_{0i,0} \quad (\text{用 } g_{\alpha\beta,\gamma} \text{ 表示的 } \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \text{ 的方程}) \\
&= \frac{1}{2}h_{00,i} \quad \left(\begin{array}{l}\text{所有速度都比 } c \text{ 小很多，意味着時間微商比空間微商小很多，即 } h_{\alpha\beta,0} \sim v h_{\alpha\beta,i}\end{array}\right)。
\end{aligned}$$

如果作出證認

$$\Gamma^{i}{}_{00}=-\frac{1}{2}h_{00,i}=\Phi_{,i}。\tag{17.18}$$

則這些短程世界線確實還原爲 Newton 理論的世界線 [(17.16)式] 。與邊界條件 $\Phi(r=\infty)=0$ 以及 $h_{\mu\nu}(r=\infty)=0$ (遠離源的 Lorentz 坐標) 一起，這個證認意味着 $h_{00}=-2\Phi$，也就是：

僅當在Newton坐標中$g_{00}=-1-2\Phi$時，Einstein重力還原爲Newton重力

$$g_{00}=-1-2\Phi \text{ 對於在 Newton 坐標內的近 Newton 系統。}\tag{17.19}$$

注意，對應只給出近 Newton 系統 h_{00} 的形式，並未給出度規攝動其餘分量的形式。事實上，另一些 $h_{\mu\nu}$ 完全可能與 $h_{00}\sim\Phi$ 是相同的數量級，不影響緩慢運動粒子的世界線，因爲它們總是進入乘以一個小量 v 或 v^2的，或者是對 t 而不是對 x^i 求微分的短程線方程。另一些 $h_{\mu\nu}$ 的形式以及它們對 Newton 運動的小的修正將在第 18, 39 和 40 章中研究。

在重力的所有「被動的」方面， Einstein 理論與 Newton 理論之間的對應

關係式 $g_{00}=-1-2\Phi$ 是關於重力被動方面廣義相對論與 Newton 理論之間對應的數學體現。與「有效性條件」 (17.15, 17.17 式) 一起，它是一個基礎，從它可以推導出關於「被動重力」對應的所有其它方面，其中包括關係式

$$R^{i}{}_{0j0}=\partial^2\Phi/\partial x^i\partial x^j\tag{17.20}$$

(練習 17.6) 。換言之，這種對應的所有其他方面可以直接比較 Newton 和 Einstein 的預言而推導出來。例如，爲導出 (17.20) 式，檢查兩個試驗粒子的相對加速度，一個粒子在 $x^i+\xi^i$，另一粒子在 x^i，根據 Newton 理論

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2}=\frac{d^2(x^i+\xi^i)}{dt^2}-\frac{d^2x^i}{dt^2}$$
$$=-\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\Big|_{\text{在}x^j+\xi^j}+\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\Big|_{\text{在}x^j}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^j}\xi^j。$$

作爲比較. Einstein 預言 (短程線偏離方程)

$$\frac{D^2\xi^i}{d\tau^2}=\frac{d^2\xi^i}{dt^2}=-R^{i}{}_{0j0}\xi^j。$$
$$\uparrow$$
$$\text{[由於條件 (17.15) 式和 (17.17) 式]}$$

直接比較給出關係 (17.20) 式。

Einstein場方程的Newton極限是$\nabla^2\Phi=4\pi\rho$

現在，從關於重力被動方面的對應轉向關於主動方面的對應。根據 Einstein，由於幾何動力學定律 $G=8\pi T$ 質量產生重力 (空時曲率) 。將這個定律應用於一個近 Newton 系統，經過 (17.8) 式前面的一系列論證，導出關係式

$$R_{00}=4\pi\rho。\tag{17.21}$$

與 (17.20) 式的縮併聯合，

$$R_{00}=R^{i}{}_{0i0}+\underset{\uparrow}{R^{0}{}_{000}}=\partial^2\Phi/\partial x^i\partial x^i=\nabla^2\Phi\,,$$
$$0$$

從而得到由質量產生重力的 Newton 方程

$$\nabla^2\Phi=4\pi\rho\,。\qquad(17.22)$$

於是，Einstein 場方程在 Newton 極限下還原爲 Newton 的場方程。

Einstein 和 Newton 之間的對應，盡管按上面的簡述是清楚而直截了當的，但當把 Newton 的引力理論用彎曲空時的 Einstein 語言重新寫出時，就更加清楚而直截了當了（第12章；練習17.7）。

練習

練習 17.6 重力處於被動角色時，對應的細節

從對應關係 $g_{00}=-1-2\Phi$，以及從對於 Newton 物理的條件 (17.15) 式和 (17.17) 式，導出對應關係

$$\Gamma^{t}{}_{00}=\partial\Phi/\partial x^t,\quad R^{t}{}_{0j0}=\partial^2\Phi/\partial x^t\partial x^j\,。$$

練習 17.7 用彎曲空時［高階］語言表示對應

把 Einstein 理論與 Newton 理論的 Cartan 彎曲空時表述之間的對應（第12章）表示出來。

---

§17.5 把 Einstein 理論公理化嗎？

對於廣義相對論，能否找到最嚴密，最合理的公理結構？然後從這些公理導出 Einstein 場方程

$$\boldsymbol{G}=8\pi\boldsymbol{T}$$

呢？這樣的方式將遵循傳統。然而，今天它可能過時了。自從1915年11月25日以來，已過去半個多世紀，在這全部時間裏，如果不管 Einstein 加上宇宙常數這個暫時的「過失」，則這個方程絲毫沒有變動。與此相反，推導方法已經變化，變得更爲衆多，更爲不同。起初，公理說什麼方程是可以接受的。而現在，却是方程說什麼公理是可以接受的。框17.2概述了各種各樣的公理系列，以及 Einstein 方程的導出。

有很多導出Einstein場方程的方法（框17.2）

（接第429頁）

框 17.2　引向有相同曲率和能量密度的 Einstein 幾何動力學定律（「Einstein 場方程」）的六條路線

［建議初階的讀者只須注意路線 1（源的自動守恒，加上與 Newton 理論的對應）和路線 2（Hilbert 變分原理）；甚至勸告高階的讀者，在他們學習路線 3（類空薄片上的物理學）、路線 4（從超空間到 Einstein 方程）、路線 5（在「不可觀察的平直空時」背景上自旋 2 的場）和路線 6（引力作爲空間的彈性，它來自粒子物理學）之前，應讀完這一章的其餘部分。］

1. 電動力學後的模型幾何動力學，把「源的自動守恒」以及與 Newton 重力的對應作爲中心來考慮。
   a. 在電動力學中，粒子響應場；在廣義相對論中粒子響應幾何。
   b. 電磁場的勢是四維矢量 $\boldsymbol{A}$（諸分量爲 A_μ）。幾何的勢是度規張量 $\boldsymbol{g}$（諸分量爲 $g_{\mu\nu}$）。
   c. 電磁勢滿足一個右端具有源項（四維電流）的波動方程

$$\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)^{;\nu}=4\pi j_\mu, \tag{1}$$

   這種結構使源守恒，即 $j_\mu{}^{;\mu}=0$，是自動的（從左邊完成恒等式的結果）。與此類似，幾何動力學勢也必須滿足一個右端具有源項（脅强 -能量張量）的波動方程

$$G_{\mu\nu}=8\pi T_{\mu\nu}, \tag{2}$$

   這種結構使源守恒，即 $T_{\mu\nu}{}^{;\nu}=0$（第16章）是「自動的」。這裏，守恒的自動是因爲方程左邊是一個由度規諸分量及其二階微商構成的張量（Einstein 張量；參看框8.6或第15章），所以得到恒等式 $G_{\mu\nu}{}^{;\nu}\equiv 0$。
   d. 沒有另外的具有以下性質的張量能滿足這樣一個恒等式，它(1)對度規諸分量的二階微商是線性的，(2)沒有更高階的微商，以及(3)在平直空時爲零。
   e. 比例常數（8π）是通過單位的選擇［這裏是幾何學的；見框 1.8］以及（「對應於 Newton 理論」）要求一個試驗粒子在密度爲 ρ 的聚集物前後振動，或圍繞這個聚集物以圓頻率 $\omega^2=(4\pi/3)\rho$（圖 1.12）在圓軌道上

旋轉而確定的。前面的敍述過於簡單化，而且省略了 Einstein 一時的錯誤改動，但是按另一種方式概述了他得出他的場方程時所尋求的推理。在第17章的正文中更詳盡地把這個推理講清楚。

2.以變分原理爲中心

a. 以度規分量構成僅有的具有下述性質的標量，它(1)對度規張量的二階微商是線性的，(2)不含有更高階的微商，以及(3)在平直空時爲零：這就是Riemann 標量曲率不變量R。

b. 作不變量的積分

$$I=\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega} R(-g)^{1/2}d^4x。 \tag{3}$$

c. 在四維區域Ω內部，給度規係數 $g^{\mu\nu}$ 一個小的變分 $\delta g^{\mu\nu}$，求出積分的變化爲

$$\delta I=\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega} G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}(-g)^{1/2}d^4x。 \tag{4}$$

d. 在Ω內部的區域，要求I對於幾何的選擇必須爲極值（對任意$\delta g^{\mu\nu}$, $\delta I=0$，「板值作用量原理」）。

e. 這樣，就得出了空的空間的 Einstein 場方程

$$G_{\mu\nu}=0。 \tag{5}$$

f. 推論繼續下去，導致恒等式

$$G_{\mu\nu}{}^{;\nu}=0。$$

第21章變分原理給出了更多的細節，當存在物質、或存在場、或兩者都存在時，在(5)式右邊還會有附加項出現。

g. 這個方法可以追溯到 David Hilbert (1915)。沒有更簡捷的路線能引向場方程。另外，它直接（參看下段2′）與「所有歷程皆民主」的量子原理相聯繫[Feynman (1942); Feynman 和 Hibbs (1965)]。在第21章，將更詳盡地闡明變分原理。

初階
高階

2′對於量子物理的眞實世界，關於經典作用量積分含意的題外話。

a. 「幾何的歷程」，H是一個空時，這就是說，一個具有四維－＋＋＋Riemann 度規的四維流形，它(1)在一個類空超曲面（「同時超曲面」）上還

本章的其餘部分屬高階。它既不需要前面的高階材料作爲準備，它又不是以後任意一章的必要準備，然而它對第21章（初值方程和變分原理）及第39章（引力的其他理論）是有益的。

原爲一個確定的、有正定度規的「初值三維幾何」A，(2)在另一個類空超曲面上還原爲一個確定的、也具有正定度規的「終值三維幾何」B。

b. 由 Arnowitt, Deser 及 Misner 重新闡明的 Hilbert 經典變分原理，爲具有任意可信歷程H（無論經典理論允許與否）的動力學路長I_H，提出了一個規定，它把A和B聯繫了起來（關於在初同時超曲面上和在終同時超曲面上能夠和必須規定什麼，以及關於在作用量原理中被積函數的兩種選擇，更充分的陳述可以參看第21章）。

c. 經典物理認爲，與所有鄰近的歷程相比，只有使動力學路長I爲極值的歷程才是允許的。量子物理認爲，在下述意義上，所有的歷程都以相等的幾率振幅出現。經過作用量積分爲I_H的歷程H，以及經過歷程H附近一規定無限小範圍 $\mathcal{O}H$ 內的歷程，「從A過渡到B時，空間的動力學幾何」的幾率振幅由下式給出

$$\left(\begin{array}{l}\text{經由歷程}H\text{，以及}\\ \text{經由}H\text{附近}\mathcal{O}H\text{範}\\ \text{圍內的歷程，從}A\\ \text{過渡到}B\text{的幾率振}\\ \text{幅}\end{array}\right)\sim\exp(iI_H/\hbar)N\mathcal{O}H。\qquad(6)$$

此處的歸一化因子N，對於從A引到B的、允許或不允許的、全部可信的歷程H，都是相同的（「諸歷程民主的原理」）。用幾何單位表示，角動量量子 $\hbar=h/2\pi$ 之值爲

$$\hbar=\hbar_{約定}G/c^3=(L^*)^2，\qquad(7)$$

其中 L^* 是 Planck 長度，$L^*=1.6\times10^{-33}$ 厘米。

d. 經典理論允許的歷程接受「沒有優先的優先」。這樣的歷程，以及與它相差甚小，即 $\delta I=I_H-I_{經典}$ 只有 $\hbar$ 的量級或更小的歷程H，對幾率振幅的貢獻是相長的干涉。反之，相消干涉有效地消除了那些來自與經典允許歷程相差較大的歷程（對過渡幾率振幅）的貢獻。因此，存在幾何的量子漲落，但它們是有限大小的漲落。$\hbar$ 的微不足道確保這些漲落的尺度在日常的距離上是不顯著的（參看第 43, 44 章的進一步討論）。在這個意義上，經典的幾何動力學是量子物理眞實世界的幾何動力學一個好的近似。

3.「在類空薄片或同時超曲面上的物理學」，再一次以電磁學爲模型。

a. 一再強調「磁力線絕不終止」，從而出現 Maxwell 方程組的一半。一再強調「電力線僅終止在電荷上」，於是得到 Maxwell 方程組的另一半。

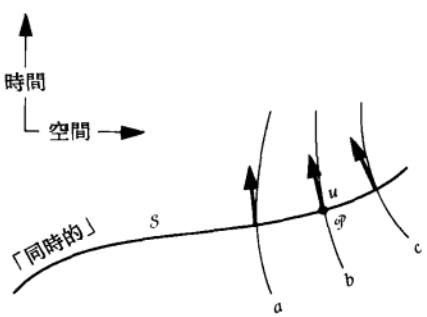
類似地，一再强調

$$\begin{pmatrix}\text{內稟}\\ \text{曲率標量}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{外賦}\\ \text{曲率標量}\end{pmatrix}=16\pi\begin{pmatrix}\text{局域的}\\ \text{質量-能量密度}\end{pmatrix} \qquad (8)$$

並以 Einstein 方程的全部十個分量爲結果。「一再强調」是一個縮寫詞，它要求所述原理在通過每一個空時事件的每一個類空薄片上都成立。

b. 明確地闡明 Maxwell 和 Einstein 方程組的「類空薄片表述」。考慮一任意空時點$\mathcal{P}$（「事件」），以及通過$\mathcal{P}$的任意「同時的」S（同時超曲面；穿過空時的類空薄片）。磁力線穿過 S，但即便是其中單獨一條都不允許在任何地方終止。回顧(§3.4)：當我們把一切參照系加在$\mathcal{P}$上（即「同時的」超曲面 S 的所有選擇）時，都要求「磁力線絕不終止」，這不僅保證 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，而且也保證 $\nabla\times\boldsymbol{E}+\partial\boldsymbol{B}/\partial t=0$。類似地 (§3.4) 當加上穿過$\mathcal{P}$的全部「同時的」超曲面時，「電力線僅終止在電荷上」，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi J^0$ 的要求保證了剩下的 Maxwell 方程 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\partial\boldsymbol{E}/\partial t+4\pi\boldsymbol{J}$。

c. 穿過$\mathcal{P}$的每一個同時超曲面S有它自己的斜率和曲率。不同斜率（在$\mathcal{P}$的不同局域 Lorentz系）的可能性，對於從通量守恒的要求導出全部 Maxwell 方程組，是基本的。儘管關於斜率是這樣，超曲面 S 的曲率對於電磁學的分析却完全無關緊要。然而，對於以前述電磁學處理爲模型的任何引力分析，它却是至關緊要的。



「同時的」S（類空超曲面或「穿過空時的薄片」）切過事件$\mathcal{P}$。「同時的」可以認爲由一系列「觀察者」a, b, c, …… 所定義。他們的世界線垂直地穿過同時超曲面，並且在穿過的瞬間他們的時鐘都讀出同樣的原時。另一個穿過$\mathcal{P}$的同時超曲面在$\mathcal{P}$可以有不同的曲率或斜率、或者曲率和斜率都不同；它由另一夥帶有另外手表的觀察者定義。

d.「質量-能量彎曲了空間」是引力的主要原理。爲了講清楚這個原理，要求逐個地檢查「空間」項，「空間的曲率」項以及「在給定空間區域中的質量-能量密度」。「空間」意指類空超曲面；或者更明確地說，即一個包含$\mathcal{P}$點（在此，物理學經受檢查）的同時超曲面S。

e. 用u表示在$\mathcal{P}$垂直於S的四維矢量。於是，根據第 5 章中給出的脅强-能量張量的定義，類空超曲面S中在$\mathcal{P}$的質量-能量密度是

$$\rho = u^{\alpha} T_{\alpha\beta} u^{\beta} 。 \tag{9}$$

f. 這個密度是一個簡單的數，它依賴於切開空時的薄片的傾角，而不依賴於怎樣彎曲地切開這個薄片。若它等於「空間的曲率」，則曲率必定與怎樣彎曲地切開薄片無關。

g. 結論是：幾何量，「空間的曲率」必須(1)是一個簡單的數（標量），(2)它依賴於在畫出的超曲面S上，在$\mathcal{P}$所作穿過空時的割線的傾角u，但是(3)它必須不受割線如何彎曲的影響。這裏的要求顯得自相矛盾。似乎要求不依賴於曲率的曲率測量。

h. 更嚴密的考慮揭示出，在此要考慮三個不同的概念。第一個，是內稟於超曲面S在$\mathcal{P}$的三維幾何的標量曲率不變量[3] R；「內稟」的意思是，它是由在超曲面內所作的距離測量定義的，且唯一地依賴於它。第二個，是這個三維幾何相對於包圍空時的四維幾何的「外賦曲率」（「怎樣彎曲地切開薄片」；爲了更好地區分外賦曲率和內稟曲率，可參看框14.1）。第三個，是四維空時本身的曲率，在某種意義上，尙須更嚴格地定義「垂直於u」。這個量獨立於怎樣彎曲地切開薄片。連同有賴於單位選擇的因子，這個量是與質量-能量密度相等的。

i. 這三個量以下列方式聯繫著：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{內稟於類空超曲面 } S \\ \text{的三維幾何的標量曲} \\ \text{率不變量 } {}^{(3)}R\text{，它依} \\ \text{賴於「怎樣彎曲地切} \\ \text{開薄片」}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{一個修正項，它 (a) 僅依賴於超曲面} \\ \text{相對於（它嵌入其中的）四維幾何的} \\ \text{「外賦曲率」 } K_{\alpha\beta}\text{（框14.1及第21章} \\ \text{）。(b) 它是這樣計算的（唯一確定} \\ \text{的計算），這個修正項與 } {}^{(3)}R\text{之和不} \\ \text{依賴於「怎樣彎曲地切開薄片」。(c)} \\ \text{有精確值} \\ (\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2-\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2\equiv(K_\alpha{}^\alpha)^2-K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}\end{array}\right.$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{空時曲率的測量，依賴} \\ \text{於空時的四維幾何以及} \\ \text{切割空時的類空薄片 } S \\ \text{的傾角 } \boldsymbol{u}\text{，但是，在結} \\ \text{構上，它不依賴於「如} \\ \text{何彎曲地切開薄片」}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{一個標量，它 (a) 完全由剛} \\ \text{說過的一切所定義，(b) 因} \\ \text{此，可以用標準的微分幾何} \\ \text{作完善的計算（詳見第21章} \\ \text{）}\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}2u^\alpha G_{\alpha\beta}u^\beta\text{. 其中 } G_{\alpha\beta}\text{ 是} \\ \text{(8.49) 式及框 8.6 的} \\ \text{Einstein 曲率張量}\end{array}\right\} = 2\left\{\begin{array}{l}\text{一個量，它在高階，第15章} \\ \text{中解釋爲「轉矩」，這個轉} \\ \text{矩與在 } \mathcal{P}\text{（} \mathcal{P} \text{ 在與 } \boldsymbol{u} \text{ 正交的} \\ \text{超曲面中）的三維幾何的單} \\ \text{元有關}\end{array}\right\} \tag{10}$$

j. 由此，核心的原理，「質量-能量彎曲了空間」可寫成公式，爲

$$ {}^{(3)}R+(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2-\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2=16\pi\rho\text{，} \tag{11}$$

或以縮寫形式，爲

$$(\text{轉矩}) = \begin{pmatrix}\text{內稟}\\ \text{曲率}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{外賦}\\ \text{曲率}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{質量-能量}\\ \text{密度}\end{pmatrix}, \qquad (12)$$

對在任意點$\mathcal{P}$穿過空時的每個類空薄片都成立。

k. Einstein 的幾何動力學的全部內容確實都包含於這個陳述之中，正如Maxwell 的電動力學的全部內容都包含於下面的陳述中一樣：終止於某一體元內的電力線數，等於4π乘上該體元內的電荷數。因子 16π對於本書中所用的幾何單位制是適當的（密度 ρ 以厘米$^{-2}$爲單位，這是由 $G/c^2=0.742\times10^{-28}$ 厘米／克乘以用約定單位克／厘米^3 表徵的 ρ 約定而得到的）。

l. 重新將原理「質量－能量彎曲了空間」表爲下式

$$2u^\alpha G_{\alpha\beta}u^\beta = 16\pi u^\alpha T_{\alpha\beta}u^\beta。 \qquad (13)$$

要求這個方程對於切過 $\mathcal{P}$ 的每一個同時超曲面都成立，無論其「傾角」u 如何。

m. 結論是，(13)式兩邊的係數必須一致；即

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \qquad (14)$$

此即分量語言的 Einstein 方程；或者，用抽象幾何量的語言，爲

$$\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}。 \qquad (15)$$

4. 從超空間到 Einstein 方程，而不是從 Einstein 方程到超空間。

a. 得到 Einstein 方程的第四條路線是以幾何動力學的高深觀點開始的，這些觀點將在第43章中講清楚。在那裏，我們注意到，幾何動力學是在超空間闡明的。超空間有無窮維數。超空間內任意一點描述一個完全的三維幾何，$^{(3)}\mathcal{G}$，連同它的全部隆起和曲率。在超空間內，幾何動力學從一點引向另一點。

b. 正如粒子動力學那樣，幾何動力學適合於不同的但是等效的數學表述，這些表述與 Lagrange, Hamilton, 以及 Hamilton 和 Jacobi 的名字聯繫在一起。其中最後一種（「H-J」）對當前的分析最爲方便。

c. 單粒子在勢 $V(x)$ 的影響下作一維運動，在這個問題中 H-J 方程是

$$\underbrace{-\frac{\partial S}{\partial t}}_{\text{總能}} = \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}_{\text{動能}} + V(x)。 \qquad (16)$$

它有解

$$S_E(x,t)=-Et+\int^x [2m(E-V)]^{1/2}dx\,。 \tag{17}$$

出於這個解，把「相長干涉條件」用於這個運動，有

$$\frac{\partial S_E(x,t)}{\partial E}=0 \tag{18}$$

（一個把 x 和 t 兩個量聯繫起來的方程；關於相長干涉條件的更詳盡的討論以及普遍的 H-J 方法，可參看框25.3及25.4）。

d. 在幾何動力學的相應方程中，要涉及三維幾何的函數 $S=S({}^{(3)}\mathfrak{G})$。它取決於三維幾何本身，而不取決於變化無常的坐標選擇或相應的變化無常的三維幾何的度規係數

$$ds^2={}^{(3)}g_{mn}dx^m dx^n \tag{19}$$

（此後，爲了簡化，省略三維幾何的指標${}^{(3)}$）。這個函數遵循 H-J 方程〔類似於(16)式〕

$$-(16\pi)^2\frac{1}{2g}(g_{im}g_{jn}+g_{in}g_{jm}-g_{ij}g_{mn})\frac{\delta S}{\delta g_{ij}}\frac{\delta S}{\delta g_{mn}}+{}^{(3)}R=16\pi\rho\,。 \tag{20}$$

e. 由於在超空間中幾何動力學的這個方程，根據類似於從(17)式到(18)式所用過的推演，卽可得出 Einstein 場方程（Gerlach 1969）。

f. 如果發現了怎樣才能把「Einstein-Hamilton-Jacobi方程」(20)式看作比由它導出的 Einstein 場方程更爲基本，則必將開闢新天地，建立新基礎。［鑒於 Hojman, Kuchar, 以及 Teitelboim (1973，預印本)。］

5. 把 Einstein 幾何動力學視爲在「不可觀察的平直空時」背景中自旋爲 2 的場的標準場理論。

a. 研究 Einstein 場方程的這個方法有一長段歷史，與此有關的可在§7.1和§18.1 中找到。（對這個方法的進一步討論可在這兩節以及框 7.1，練習 7.3，框18.1中找到）。

b. 下述摘要引自 Deser (1970) 的文獻：「我們想給出非線性的簡單的物理推導……，用現在熟悉的論證……從線性的、無質量的、自旋爲 2 的場導出整個 Einstein 方程……

c.「Einstein 方程可以用非幾何的方式導出，即注意到自由的、無質量的、自旋爲 2 的場方程爲

$$R^{L}{}_{\mu\nu}(\phi)-\frac{1}{2}R^{L}{}_{\alpha\alpha}(\phi)\eta_{\mu\nu}\equiv G^{L}{}_{\mu\nu}(\phi)\equiv[(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})\Box$$
$$+\eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}+\eta_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial_{\nu}-\eta_{\mu\alpha}\partial_{\nu}\partial_{\beta}-\eta_{\nu\beta}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}]\phi_{\alpha\beta}=0\,, \qquad (21)$$

它的源是物質脅强-張量 $T_{\mu\nu}$，實際上它必須與包含 ϕ 場自身脅强-張量的總脅强-張量相耦合。也就是說，儘管自由場方程 (21) 式像它堅持的那樣當然是十分一致的，但當有一個作爲源的動力體系的 $T_{\mu\nu}$ 時［則不然了］。因爲，耦合意味着由物質運動方程算出的 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ 不再守恒，這樣，恒等於無散的左邊就與右邊不一致了。

d.「爲了糾正這種［對動量能量守恒原理的違背］，應把響應方程(21)式的二次拉氏函數 ${}^{(2)}L$ 引起的脅强張量 ${}^{(2)}\theta_{\mu\nu}$ 補在右邊。

e.「但是導出這些修正方程的拉氏函數 ${}^{(3)}L$ 是三次的，因此它自己貢獻一個三次的 ${}^{(3)}\theta_{\mu\nu}$。

f.「這個級數無限地延續着，(若嚴格求出) 且求和到全部非線性 Einstein方程，$G_{\mu\nu}([\text{算自}]\eta_{\alpha\beta}+\phi_{\alpha\beta})=-\kappa T_{\mu\nu}$［$+8\pi T_{\mu\nu}$ 用幾何單位及本書的符號約定］，它是度規 $g_{\mu\nu}$ 與其 Minkowski 值 $\eta_{\mu\nu}$ 之偏離 $\phi_{\mu\nu}$ 的無窮級數。

g. 一旦疊代開始（不管實際上 $T_{\mu\nu}$ 是否存在），則必須延伸到所有的級，因爲守恒僅對全部級數 $\sum_{n=2}^{\infty}{}^{(n)}\theta_{\mu\nu}$ 成立。因而，這種理論或者保留其（物理上不相關的）自由線性形式(21)式，或者它必爲一無窮級數。」

h. 詳盡的討論見 Deser (1970) 的文獻；該文按下列步驟進行，(1)利用一種選擇好的表述形式，(2)重新安排計算，從而(3)「在同樣的自耦合要求的基礎上，導出全部 Einstein 方程，優點是整個理論以封閉的形式出現，只有一個附加（三次）項，而不是一個無窮級數。」

i. Deser 在最後總結了這種分析：「因此，一致性把我們引向普遍的耦合，它意味着等效原理。在這一點上才出現了廣義相對論的幾何解釋，因爲，現在所有物質都在一個度規爲 $g^{\mu\nu}\equiv\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}$ 的等效 Riemann 空間中運動……［這個］起始平直的『背景』空間不再可觀察」。換言之，導至 Einstein 場方程的這個方法可總結爲「沒有曲率的曲率」，或者——等同的——「沒有平直空時的平直空時」！

6. Sakharov 把引力視爲空間的彈性的觀點來自粒子物理。

a. 均勻的各向同性的固體對形變的抵抗由兩個彈性常數描寫，即 Young 氏模量和 Poisson 比。

b. 空間對形變的抵抗由一個彈性常數描寫，即 Newton 的重力常數。這使它出現在 Hilbert 作用量原理之中

$$I=\frac{1}{16\pi G}\int^{(4)}R(-g)^{1/2}d^4x$$
$$+\int(L_{物質}+L_{場})(-g)^{1/2}d^4x=極值。\qquad(22)$$

c. 按照歷史的記載，首先研究的是，根據物質的微觀分子模型（而不是根據對稱性和不變性的宏觀要求）應取多少彈性常數以描寫固體（Newton, Laplace, Navier, Cauchy, Poisson, Voigt, Kelvin, Born)。這樣，計算因從自然長度或從自然角度、或從兩者偏離而變形的分子鍵的貯能。得出單位體積彈性物質形變能的表達式

$$e=A(\mathrm{Tr}s)^2+B\mathrm{Tr}(s)^2。\qquad(23)$$

其中脅變張量

$$s_{mn}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_m}{\partial x^n}+\frac{\partial\xi_n}{\partial x^m}\right)\qquad(24)$$

量度在彈性介質中因位於 x^m 的代表點移到 $x^m+\xi^m(x)$ 時的運動所引起的脅變。常數 A 和 B 由微觀物理學導出。他們確定宏觀彈性理論的兩個彈性常數值。

d. Andrei Sakharov (1967) 曾對引力提出過一個類似的微觀基礎，或者按他所說稱之爲「空間的度規彈性」，他以爲 Einstein 幾何動力學中的作用項［(22)式中的第一項］就是當空間被彎曲時眞空量子漲落的作用量的變化［與粒子和場的物理學有關，並在空間彎曲時引起的］。

e. Sakharov 注意到，當今的量子場論「通過重正化方法免除了」眞空的能量密度，如果不用重正化把它除去，它在形式上將爲無窮大。於是，由平直空間電磁場自由度的標準分析，算出單位體積內圓波數從 k 到 $k+dk$ 的振動模式數爲 $(2.4\pi/8\pi^3)k^2dk$。即使在絕對零度，每一個振動模仍有一

個絕對不可縮減的「零點振動能」的極小值 $\frac{1}{2}h\nu=\frac{1}{2}\hbar ck$［與此有關的漲落電場是所有物理效應中最確定的之一。它作用在氫原子的電子上，以補充單獨由質子引起的電場，因而產生了最負盛名的氫原子能級的 Lamb-Retherford 移動，這是由 Welton (1948) 和 Dyson (1954) 特別清楚地得出的］。單位體積空時（單位：厘米^4）內電磁場零點能的總密度，以

$$(\hbar/2\pi^2)\int_0^\infty k^3dk \tag{25}$$

的形式發散。與此完全相同的發散已由「重正化」「去掉了」［關於重正化的更多內容，可參看，例如 Hepp (1969)］。

f. 當正式計算與另外的場有關的能量，以及與眞空漲落（有幾個電子對，μ 子對，以及另一些粒子，在量子能量比其中任一粒子的靜質量大得多的極限）有關的能量時，會出現類似的發散。在正式計算中，這些發散再次「經重正化消除掉」。

g. 經重正化所作的消除不僅對能量密度（即對脅强-能量張量）有貢獻，而且對所有這些場和粒子的變分原理的總拉氏函數 $\mathcal{L}$ 有貢獻

$$I=\int \mathcal{L}d^4x=\text{極值}。 \tag{26}$$

h. Sakharov 指出，彎曲的空時改變了所有這些能量，這擴充了 Zel'dovich 的一個論點 (1967)。因此，「重正化」或「減去」不再給出零。代之而來的是，零點能對拉氏函數的貢獻可展爲一個曲率的冪級數，帶有量級爲 1 的數值係數 A, B, ...其形式被 Ruzmaikina 和 Ruzmaikin (1969) 簡化如下

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(R)=&A\hbar\int k^3dk+B\hbar{}^{(4)}R\int kdk\\&+\hbar[C({}^{(4)}R)^2+DR^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}]\int k^{-1}dk\\&+\text{（更高階項）}。\end{aligned} \tag{27}$$

［對於在彎曲流形中，單位頻率駐波數的改變，還可參看 Berger (1966), Sakharov (1967), Hill in De Witt (1967c), Polievktov-Nikoladze (1969) 以及 Berger, Gauduchon 和 Mazet (1971)］

i. 重正化物理證明，(27)式中第一項應當捨掉。Sakharov 指出，第二項在形式上等同於 Hilbert 作用量原理，即前面的 (3) 式，只不過在那裏乘

Riemann 標量曲率不變量的是$-c^3/16\pi G$（約定單位），而這裏則是 $B\hbar\int kdk$（同樣的約定單位）。(27)式中更高階的項導致 Sakharov 稱之爲「對 Einstein 方程的修正……」。

j. 俯視這些修正，只要堅持下列等式，顯然就會得到 Einstein 理論的作用量原理

$$G=\begin{pmatrix}\text{Newton的}\\ \text{引力常數}\end{pmatrix}=\frac{c^3}{16\pi B\hbar\int kdk}。\qquad(28)$$

B是無量綱的、量級爲 1 的數值因子。接着，Sakharov 證明，在(28)式中形式上發散的積分的有效上限或「截止」取爲 Planck 長度倒數的量級［見(7)式］，

$$k_{\text{截止}}\sim(c^3/\hbar G)^{1/2}=1/L^*=1/1.6\times10^{-33}\text{ 厘米}。\qquad(29)$$

實際上，Sakharov 是說：(1)對於比 Planck 長度小的波長以及量級爲 $\hbar ck_{\text{截止}}\sim10^{28}$ 電子伏或 10^{-5} 克或更大的量子能量，場物理有顯着的變化，變成某種新的、奇異的事物；(2)結果是，積分 $\int kdk$ 被截止了；(3)純粹由場物理和粒子物理引起的這個截止值，支配着 Newton 引力常數G的值。

k. 在這個意義上，Sakharov 的分析暗示，引力之於粒子物理正如彈性之於化學物理；僅僅是剩餘能量的統計測量。一個是，分子鍵合取於分子-分子鍵的長度從標準值的偏離。另一個則是，粒子能量受幾何曲率的影響。

l. 看來簡單的彈性，其解釋來自分子鍵合，而分子鍵合是複雜的；但是複雜的分子鍵合用 Schrödinger 波動方程和帶電質點間作用力的 Coulomb 定律又得到了解釋，而這甚至比彈性還要簡單。

m. 看起來簡單的 Einstein 幾何動力學，被 Sakharov 作爲粒子物理中的修正項來說明，粒子物理是複雜的。是否複雜的粒子物理，命中註定有朝一日又可解釋爲某個簡單的命題——某個比幾何深刻得多但又簡單得多的命題（「前幾何」，第44章）呢？

§17.6 「沒有前幾何」：Einstein 理論與其他重力理論的重大區別

Einstein理論與其他重力理論比較

Einstein 的重力理論是極爲令人信服的，雖則人們可以容易地創立一些不大令人信服又不很優雅的理論。在物理學文獻中充滿了這類例子［見Ni(1972)和 Thorne, Ni ，以及 Will (1971) 的評論］。然而，置身於諸對手之中，Einstein 理論分明是十分出色的：它與實驗一致；而它的絕大部分對手則不然（第 38-40 章）。它完全用幾何描述重力；它的絕大部分對手則不然。它與任何「前幾何」無關；它的絕大部分對手則不然。

所有另外的理論都引進輔助的引力場或前幾何

撇開直到第38章議論的與實驗符合的問題，Einstein 理論仍然是獨一無二的。每一種別的理論，或者引入輔助的引力場［即 Brans 和 Dicke 的標量場 (1961)］，或者涉及「前幾何」，或者兩者兼而有之。因此，每一種別的理論在概念上都比 Einstein 理論更爲複雜。每一種別的理論都包含着尚難促動實驗的複雜要素。

定義「前幾何」

「前幾何」的概念需要闡明，因爲，拒絕前幾何，在原先引導 Einstein 得到他的幾何動力學方程 $\boldsymbol{G}=8\pi\boldsymbol{T}$ 的論證中，起了關鍵的作用。「前幾何」是指空時幾何永遠不變地固定着的，即不因引力源分布的變化而變化的任意方面。因此，前幾何不是由物質引起的，也不受物質的影響；它不是動力學的。例如：Nordstrøm (1913) 提出一種理論，其中空時的物理度規 $\boldsymbol{g}$（涉及等效原理的度規）是由「背景」平直空時度規η和標量引力場 ϕ 產生的：

Nordstrøm 的理論，作爲前幾何的一個實例

$$\eta^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha\beta}=-4\pi\phi\eta^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \quad \begin{pmatrix}\text{脅強-能量}\\ \text{產生}\phi\end{pmatrix}, \tag{17.23a}$$

$$g_{\alpha\beta}=\phi^2\eta_{\alpha\beta} \quad \begin{pmatrix}\phi\text{和}\eta\\ \text{構成}\boldsymbol{g}\end{pmatrix}。 \tag{17.23b}$$

在此理論中，物理度規 $\boldsymbol{g}$（杆、鐘，和試驗粒子運動的支配者）有一個可變的自由度——ϕ 的自由度。$\boldsymbol{g}$ 的其餘部分被平直空時度規（「前幾何」）η 所固定。不論η和ϕ 怎樣，將 Nordstrom 方程 (17.23) 式重寫成

$$\underbrace{R}_{\begin{bmatrix}\text{由}\boldsymbol{g}\text{構成的}\\ \text{曲率標量}\end{bmatrix}}=24\pi\underbrace{T}_{[g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}]}, \qquad \underbrace{C^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}}_{\begin{bmatrix}\text{由}\boldsymbol{g}\text{構成的}\\ \text{Weyl 張量}\end{bmatrix}}=0 \tag{17.24}$$

並不能消去前幾何［Einstein 和 Fokker (1914)；練習 17.8］。質量仍然只能影響空時幾何中的一個自由度。別的自由度是先前固定的——它們是前幾何。這個前幾何（原則上）能夠完全用物理實驗檢測出來，而不涉及任何方程（框17.3）。

框 17.3 檢測或排除某種類型的前幾何的實驗（基於1970年12月在 Alfred Schild 和 Charles W. Misner 之間的討論）

選擇一個瞬間靜止的宇宙，其中有大量合適的脈衝星，脈衝星應是絕對規則的，它周期地發射引力波和電磁波的特徵脈衝。

兩隊帶有接收器的飛船被送去「站上」收集實驗數據。Weber將軍的船隊携帶着引力波接收器，Hertz 將軍的船隊則携帶電磁波接收器。每個飛船的船長通過監聽三個適當選定的（頻率相等的）脈衝星，並操縱飛船使各脈衝星的脈衝總是一起到達，來維持自身在「站上」。從所有其他不作爲維持站臺用的脈衝星接收到的脈衝，就是他收集的實驗數據。每個脈衝在作爲參考的（固定的）脈衝之間或相符或交錯的記錄下來。［爲了顯示，任一單個脈衝的花樣可變換成聲音形式。參考脈衝（通過數據處理計算機）可在一個固定速率的磁鼓上表現爲聲音，從另一些脈衝星來的脈衝可在另一磁鼓上。結果是有節奏的拍的花樣。］

當數據船隊校正並調諧好時，每個船長報告固定花樣。實驗開始。一個或多個重的恒星被拖到船隊之間。船隊爲停留在站上作出了反應，並報告數據花樣的變化，在船隊外邊界上的飛船證實，在他們的站上沒有可覺察的變化；所以可以認爲從遙遠脈衝星來的入射輻射沒有受到新安插的恒星的影響。離可動恒星較近的數據站報告有意義的數據。

結果是什麼呢？

在由狹義相對論定律支配的宇宙中（空時總是平直的），沒有花樣的變化。（Weber的船隊在最初的地方就不能得到校核，因爲從脈衝星檢測不到引力波）。不管是恒星，還是任何別的東西，都不能產生引力場。空時幾何的所有方面都是先前固定的（完全前幾何！）。沒有引力，沒有光的偏折能使 Hertz 船長調整他們的位置。

在由 Nordstrom 重力理論支配的宇宙中（見課文），兩種船隊都得以校核——也就是兩者都看見波。但兩者都看不見拍的有節奏的花樣有任何變化。被拉近的恒星對於引力波或電磁波都沒有影響。在這個理論中的前幾何（η）排除任何光線的偏折或引力波的偏折。

在由 Whitehead (1922)重力理論支配的宇宙中，［參看 Will (1971b) 及其中引用的參考文獻］，輻射波沿「物理度規」g 的短程線傳播，並被恒星的引力場偏折。但引力波沿平直背景度規 η 的短程線傳播，因此不受恒星的影響。結果是，Hertz 船長必須調動以維持在站上；他們聽見一個在參考脈衝星與另一些脈衝星之間變化的拍花樣。但 Weber 船隊仍留在站上，並記錄到沒有變化的拍花樣。在實驗結果中，前幾何（η）清楚地顯示了出來。

在由 Einstein 理論支配的宇宙中，兩個船隊都看見了效應（不是前幾何的標記，因爲 Einstein 理論沒有前幾何）。然而，如果船隊原先是成對的，即一條 Weber 的船和一條 Hertz 的船各在其站上，則他們仍將成對。高頻光波與高頻引力波的傳播，沒有什麼不同。兩者都沿 g 的短程線傳播。

在1917年，數學還不夠精密，不足以把「沒有前幾何」與「幾何，與坐標無關的物理表述」這二個要求分開。Einstein 用一個簡單的詞「廣義協變性」來描述這兩個要求。「沒有前幾何」的要求實際上創立了廣義相對論，但却作得如此無名，僞裝或「廣義協變性」，它也造成了半個世紀的混亂［參看，例如Kretschmann (1917) 的文獻］。

「沒有前幾何」作爲 Einstein「廣義協變性」原理的一部分

系統地論述前幾何（「絕對客體」）與動力場（「動力學客體」）之間的區別，是 Anderson 的相對論課本 (1967) 的顯著特徵。

練習 17.8　Einstein-Fokker 化爲 Nordstrøm

練習

空時度規$\mathbf{g}$的 Weyl 張量爲零［(13.50) 式］，保證了度規是保形平直的——即存在一個張量場 ϕ，使得 $\mathbf{g}=\phi^2\boldsymbol{\eta}$，其中$\boldsymbol{\eta}$是平直空時度規［爲了證明，可參看，例如 Schouten (1954)的文獻］。於是，Einstein-Fokker 方程(17.24)式 $C^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}=0$就等效於 Nordstrøm 方程 (17.23b) 式。據此，試證明 Einstein-Fokker 場方程 $R=24\pi T$ 化爲 Nordstrøm 場方程 (17.23a) 式。

---

§ 17.7　領略 Einstein 方程的歷史

對於一個概念今天的內容和含義，沒有什麼能比它迄今爲止所經歷的戰鬥和變遷更足以說明的了。廣義相對論的全部歷史需要寫一本書。這裏，讓我們從幾篇偉大的論文中引用幾個關鍵的段落，初步領略一下這一段特定歷史的含義。

Einstein (1908)：「我們…… 因此將在以下假設：引力場和參照系的相應加速度在物理上是完全等價的……對於在空間任何地方的觀察者，P點的鐘比坐標原點的鐘快 $(1+\Phi/c^2)$ 倍……由此得出光線被引力場彎曲……能量E相當於具有質量 E/c^2。」

Einstein 和 Grossmann (1913)：「此處描述的理論來源於這種信念：物體的引力質量與慣性質量之間的正比關係是自然界一條嚴格的定律，它應當表爲理論物理的一個基本原理……一個關在電梯裏的觀察者無法確定：電梯是靜止在靜態的引力場中；還是電梯在無引力的空間中因有力作用在電梯上而保持加速運動（等效原理）……例如，在鐳的衰變中，（質量）減少到總質量的1/10,000。如果慣性質量的這種改變並不相應於引力質量的改變，則將引起慣性質量對引力質量的偏差，它遠大於 Eötvös 實驗的允許值。因此，必須認爲，很可能引力質量與慣性質量的相同是嚴格的。

PDG

「這種探索的推廣必為下述形式

$$\Gamma_{\mu\nu}=\kappa T_{\mu\nu},$$

其中 κ 是常量，$\Gamma_{\mu\nu}$ 是二秩反變張量，它是由基本張量 $g_{\mu\nu}$ 經微分運算得到的。……已證明不可能找到這樣一個 $\Gamma_{\mu\nu}$ 的微分表達式，它是［Poisson 的］$\Delta\phi$ 的推廣，並且對任意變換又是一個張量。……看來最自然的是要求方程組對任意變換是協變的。但與引力場方程不具有這些性質的結論相衝突。」

Einstein 和 Grossmann (1914)：「在 1913 的論述中，……我們不能證明這些引力方程的協變性。［困難的來源是：二指標曲率張量的一部分放在左邊，構成了場方程的二階部分，而另一部分則與 $T_{\mu\nu}$ 一起放在右邊，稱為引力脅強-能量。要求左邊與右邊都像張量那樣變換，但在廣義坐標變換之下它們作不到這一點。］

Einstein (1915a)：「近幾年來，我曾試圖在非勻速運動的相對性假定下，創立廣義相對論。我相信，事實上我已經找到了引力的值有的定律，它與廣義相對論合理表述的假定相對應。去年，在這些進展的一篇文章中，我企圖確立精確解的必要性。

「重新的分析告訴我，這種必要性在該文採用的方法中完全沒有被證明，雖則它好像在錯誤的基礎上被證明了。

「因此，對於我創立的場方程，我失去了所有的信心，我尋找一種方法，它應以自然的方式限制各種可能性。這樣，我又回到了場方程廣義協變性的要求，三年前我就和它分手了，當時，懷着沉重的心情與我的朋友 Grossmann 一起工作。實際上，我們在那時已經十分接近問題的解，即下面給出的解。

「根據已經說過的那些，假設引力場方程具有下述形式是很自然的

$$R_{\mu\nu}=-\kappa T_{\mu\nu},$$

因為，我們已經知道，這些方程對於行列式值為 1 的任意變換是協變的。事實上，這些方程滿足我們必須加於其上的所有條件。［其中 $R_{\mu\nu}$ 是一個 Ricci 張量，Einstein 認為是協變的。］……

「在一級近似下，(22a) 式給出

$$\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}=0。$$

在這個［條件］下，坐標系仍然不確定，為了確定需要四個方程。」(1915 年11月 4 日會議，11月11日發表。)

Einstein (1915b)：「在最近發表的一份研究中，我已證明，怎樣才

能把引力場的理論建立在多維流形的 Riemann 協變理論之上。在此，將證明，通過引入一個關於物質結構的確實是大膽的附加假設，可以得出邏輯上比較嚴密的理論結構……很可能，在該給定表達式所涉及的物質內，引力場起了基本的作用。那麼，對於整個結構，看來 T^{μ}_{μ} 都為正，雖然事實上只有 $T^{\mu}_{\mu}+t^{\mu}_{\mu}$ 為正，而 T^{μ}_{μ} 處處為零。以下，我們假設，事實上條件 $T^{\mu}_{\mu}=0$ 一般總是［完全］滿足的。

「無論誰，只要一開始不拒絕假定分子（小尺度）引力場構成物質的主要部分，就會繼而看到對這個觀點的一個有力支持。

「我們的假定使其可能……給出普遍協變形式的引力場方程

$$G_{\mu\nu}=-\kappa T_{\mu\nu}$$

［其中 $G_{\mu\nu}$ 是 Ricci 張量］。」（1915年11月11日會議，11月18日發表。）

Einstein (1915c)：「我已證明，關於這個假定（場方程）已無原則的異議，由此，空間和時間失去了客觀現實的最後痕跡。在當前的工作中，我找到了相對論的最基本理論的一個重要證據：結果是，無需任何特殊的假定，它定性且定量地解釋了水星軌道在軌道運動方向的長期歲差，這是 Leverrier 發現的，其大小約為每世紀 45″。」

Einstein (1915d; 1915年11月25日會議，12月 2 日發表)：「近來，我已發現，當引進物質的能量張量的方式與我在早先兩封通信中所做的稍有不同時，則不需要關於物質能量張量的假設就能進行下去。水星近日點運動的場方程不因這種修改而變動……

「我們提出

$$G_{im}=-\kappa\left(T_{im}-\frac{1}{2}g_{im}T\right)$$

［其中 G_{im} 是 Ricci 張量］。」……

……與 (9) 式對比，這些方程不包含新的條件，因而除了服從能量-動量「守恒」定律之外，無需另外的關於物質能量張量的假設。

「按這樣的步驟，廣義相對論作為一種邏輯結構最終完成了。最普遍表述的相對性原理，使得空時坐標成為物理上無意義的參量，令人信服地導出完全確定的引力理論，它解釋了水星近日點的運動。反之，關於狹義相對論未曾述及的自然界另外一些過程的本質，廣義的相對性原理也不能給我們啓示。在這些會議錄上，我近來表述的關於這一點的意見是錯誤的。任何與狹義相對論一致的物理理論，可以借助絕對微分的方法納入廣義相對論系統，而無需［廣義相對論］對該理論的可接受性提供任何判據。」

Hilbert (1915)：「公理 I ［為了與本書習慣一致，記號作了改變］

。物理事件的規律是通過一個世界函數［Mie 的術語；現在稱為「拉氏函數」］L決定的，它含有下列宗量：

$$g_{\mu\nu},\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}},\ \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}},$$

$$A_{\sigma},\ \frac{\partial A_{\sigma}}{\partial x^{\tau}},$$

並且特別是，對於這14個勢 $g_{\sigma\nu}$, A_{σ},...中任何一個［的變化］，積分

$$\int L(-g)^{1/2}d^4x$$

的變分必須為零。

「公理Ⅱ（廣義不變性公理）。對於世界參量［坐標］x^{α}的任意變換，世界函數L是不變的……

「對於世界函數L，還需要進一步的公理使它的選擇不致含糊。如果引力方程只含有勢 $g^{\sigma\nu}$ 的二階微商，則L必定具有下列形式

$$L=R+L_{\text{elec}},$$

其中R是由 Riemann 張量（四維流形的曲率）構成的不變量。」（1915年11月20日會議。）

Einstein (1916c)：「近來，H. A. Lorentz 和 D. Hilbert 已成功地從單一的變分原理導出了方程，給予廣義相對論一種特別清晰的形式。這在下面的論述中亦將做到。在此，我的目的是盡可能透徹地並按廣義相對論允許的普遍性來介紹基本的關係。」

Einstein (1916b)：「由此得出，首先，引力場以光速傳播……［平面］波輸送能量……於是得出……系統在單位時間的輻射……

$$\frac{G}{24\pi}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3}\right)^2。」$$

Hilbert (1917)：「就因果原理而論，由於物理量及其時間變率現在可以在任意給定的坐標系中得知；因此，一種預言，僅當它對於所有這些坐標的變換為不變量時，它才具有物理意義，而對當前所採用的那些坐標，它恰如是保持不變的。我宣佈，這種類型的對於未來的預言都是唯一確定的；這就是說，在這種表述下，因果原理成立：

「根據現在對於14個物理勢 $g_{\mu\nu}$, A_{σ} 的知識，所有關於這些量未來的預言都是必然的和唯一的，就此而言，它們是具有物理意義的。」

第十八章　弱引力場

道，可道也，非恒道也；
名，可名也，非恒名也。*
老子（～公元前五世紀）

§18.1　重力的線性理論

由於幾何語言及所用的縮寫，Einstein 場方程 $G_{\mu\nu}=8\pi T_{\mu\nu}$ 幾乎完全不像微分方程，更不用說很多熟知的特性了。爲了說明它們確實是微分方程，最好的辦法是把它用於弱場情形

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}|\ll 1, \tag{18.1}$$

例如，用於太陽系，其中 $|h_{\mu\nu}|\sim|\Phi|\lesssim M_\odot/R_\odot\sim 10^{-6}$；或者用於在星際空間傳播的弱引力波。

「重力的線性理論」
(1)作爲廣義相對論的弱場極限

在弱場情形，可以用場方程（18.1）式成立的坐標系把場方程按 $h_{\mu\nu}$ 的冪次展開；並且可以只保留線性項而不太失其精度。所得的表達形式通常稱爲「重力的線性理論」，因爲就其自身而言，這是一個重要的理論。事實上，當人們尋求與(1)零靜止質量、(2)自旋爲 2、(3)在平直空時的量力子學粒子對應的經典場時，得到的正是這個「線性理論」[見 Fierz 和 Pauli (1939)]。高階讀者已在 §7.1，練習 7.3 和框 7.1 中對線性理論稍有所涉。在那裏，它用另

(2)作爲「平直空時」中重力的標準「場論」描述

* 引自1973年12月從馬王堆三號漢墓發現的帛書〈老子〉寫本，這是目前所見到的最古本。譯爲白話文：
道，說得出的，就不是永恒的道；
名，叫得出的，就不是永恒的名。老子（見張松如，〈老子校讀〉，吉林人民出版社，1981年版）
英譯文：
The way that can be walked on is not the perfect way. The word that can be said is not the perfect word. Lao-Tzu
又，原書誤爲～公元前三世紀，應爲～公元前五世紀。

(3)作爲「推導」廣義相對論的基礎

一個名字，「平直空時中重力的張量場理論」。正如在平直空時附近，用線性化的方法可以從廣義相對論「下降」爲線性理論那樣（詳如下述），也可以倒過來，從線性理論上升爲廣義相對論，這要求線性場方程與運動方程一致。或者，等價地，要求：(1)線性引力場 $h_{\mu\nu}$ 帶來了脅强-能量；(2)這個脅强-能量的作用正如一個源，它對場作修正 $h^{(1)}{}_{\mu\nu}$ ；(3)修正 $h^{(1)}{}_{\mu\nu}$ 也帶來了脅强-能量；(4)這第二個脅强-能量的作用也正如一個源，它對修正 $h^{(1)}{}_{\mu\nu}$ 作修正 $h^{(2)}{}_{\mu\nu}$；(5)修正的修正又帶來了脅强-能量；如此等等。推導廣義相對論的另外的方法曾由 Gupta (1954, 1957, 1962), Kraichnan (1955), Thirring (1961), Feynman (1963a), Weinberg (1965) 和 Deser (1970) 等人發展並探索過。但是其觀點與幾何觀點相去甚遠（見框18.1），推導的細節不在此詳述了。（但可參看框17.2的第5部分。）

線性理論的細節

在此，把注意力集中於從廣義相對論導出線性理論。採用 (18.1) 式形式的度規分量。取線性度規擾動 $h_{\mu\nu}$，得聯絡係數 [(8.24b) 式] 爲

(1)聯絡係數

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}&=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu,\beta}+h_{\beta\nu,\alpha}-h_{\alpha\beta,\nu})\\&\equiv\frac{1}{2}(h_{\alpha}{}^{\mu},_{\beta}+h_{\beta}{}^{\mu},_{\alpha}-h_{\alpha\beta},^{\mu})。\end{aligned}\tag{18.2}$$

這裏，第二行引用了展成 $h_{\mu\nu}$ 冪次時常用的慣例，即利用 $\eta^{\mu\nu}$ 和 $\eta_{\mu\nu}$ 而不是利用 $g^{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}$ 來升降 $h_{\mu\nu}$ 的指標。類似地，Ricci 張量 [(8.47) 式] 的線性化給出

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}&=\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu}\\&=\frac{1}{2}(h_{\mu}{}^{\alpha},_{\nu\alpha}+h_{\nu}{}^{\alpha},_{\mu\alpha}-h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha}-h,_{\mu\nu})\,,\end{aligned}\tag{18.3}$$

式中

$$h\equiv h^{\alpha}{}_{\alpha}=\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}。\tag{18.4}$$

進一步縮併爲 $R\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\approx\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ 之後，Einstein 方程 $2G_{\mu\nu}=16\pi T_{\mu\nu}$ 成爲

$$\begin{aligned}&h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha}+h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha}-h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha}-h,_{\mu\nu}\\&\quad-\eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta},^{\alpha\beta}-h,_{\beta}{}^{\beta})=16\pi T_{\mu\nu}。\end{aligned}\tag{18.5}$$

從 $R_{\mu\nu}$ (18.3) 式過渡到 $G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ (18.5) 式，項數增加了，但這個煩惱的事情可以通過下述方式消除，即定義

(2)「引力勢」 $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\bar{h}_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\tag{18.6}$$

對於任意的其他對稱張量，都用一橫表示和它對應的算符。於是，$G_{\mu\nu}=\bar{R}_{\mu\nu}$ 是

框 18.1　從幾何觀點和自旋 2 觀點導出廣義相對論的比較與對照

	Einstein 推導	自旋 2 推導
原初空時幾何的本性。	沒有原初的空時幾何；在物理學中幾何是動力學的參與者。	「上帝賦予」平直 Lorentz 空時流形。
空時的拓撲（多連通）	物理學的規律是局域的；它們不規定拓撲。	單連通 Euclid 拓撲。
物理學的眼光	動力學幾何是物理的「主場」(master field)。	這個場，那個場，以及另外的場都是在平直空時流形上的動力學表現。
推導廣義相對論的出發點	1.等效原理（光子和試驗粒子的世界線是空時幾何的短程線） 2.從曲率（Cartan 的轉矩）導出的張量守恒量與脅强-動量-能量張量一致（見第15章）。	1.從平直空時中自旋 2 及零靜止質量的場開始。 2.由這個場確立的脅强-能量張量作爲該場的一個源。
得出的方程	Einstein 場方程。	Einstein 場方程。
對於作爲推導出發點的空時幾何的評價。	物理學中基本的動力學參與者。	無可奉告。所得理論把原始的平直幾何從所有方程中根除了，指出它是不可觀察的。
關於這些方程中顯示出物理學最大的唯一的危機：完全的引力坍縮的觀點。	核心是了解物質和宇宙的本性。	不重要的或者至多是外圍的。

$h_{\mu\nu}$ 的第一級，而 $\bar{h}_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}$；卽 $h_{\mu\nu}=\bar{h}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$ 。用這樣的記號，線性化的場方程變爲

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha}-\eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,}{}^{\alpha\beta}+\bar{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\nu}+\bar{h}_{\nu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\mu}=16\pi T_{\mu\nu}。\qquad (18.7)$$

(3)線性化場方程

在這些線性化方程中，第一項就是通常平直空間的 d'Alembert 項，另外一些項只是用來保持方程的「規範不變性」（見框18.2）。在框18.2中指出，

可以不失普遍性地加上「規範條件」

(4)規範條件

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}=0。 \tag{18.8a}$$

這些規範條件是電磁理論中 Lorentz 規範 $A^{\alpha}{}_{,\alpha}=0$ 的張量類比。因此，場方程 (18.7) 式變成

(5)Lorentz 規範中的場方程和度規

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha}=16\pi T_{\mu\nu}。 \tag{18.8b}$$

規範條件 (18.8a) 式，場方程 (18.8b) 式以及度規的定義

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\bar{h}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \tag{18.8c}$$

是在 Lorentz 規範下寫出的重力線性理論的基本方程。

練習

練習 18.1 Riemann 曲率的規範不變性

試證明，在線性理論中，Riemann 張量的分量是

$$R_{\alpha\mu\beta\nu}=\frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\mu\beta}+h_{\mu\beta,\nu\alpha}-h_{\mu\nu,\alpha\beta}-h_{\alpha\beta,\mu\nu})。 \tag{18.9}$$

再證明，在框 18.2 中所討論的規範變換的形式 [(4b) 式] 下，這些分量是不變的，因爲 Einstein 張量是 Riemann 張量的縮併，這表明它也是規範不變量。

練習 18.2 Lorentz 規範的證認

設在任意規範下，給定線性理論場方程 (18.7) 式的一個特解。試證明，必定存在四個母函數 $\xi_{\mu}(t,x^j)$，它們的規範變換 [框 18.2，(4b) 式] 使

$$\bar{h}^{新\mu\alpha}{}_{,\alpha}=0 \quad \text{(Lorentz 規範)}。$$

再證明，當且僅當其母函數滿足無源波動方程

$$\xi^{\alpha,\beta}{}_{\beta}=0$$

時，隨後的一個規範變換才使 Lorentz 規範條件不變。

練習 18.3 靜止球體的外場

考慮一個靜止球體的外引力場，在球體的(近) Lorentz 系中描述——即在近直角坐標系 $|h_{\mu\nu}|<1$ 中描述，在其中，球體在所有 t 都位於 $x=y=z=0$。作爲命令，採用Lorentz 規範。

(a) 試證明，場方程 (18.8b) 式及規範條件 (18.8a) 式意味着

$$\bar{h}_{00}=4M/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \qquad \bar{h}_{0j}=\bar{h}_{jk}=0,$$
$$h_{00}=h_{xx}=h_{yy}=h_{zz}=2M/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \quad h_{\alpha\beta}=0 \text{ 若 } \alpha\neq\beta,$$

式中M是常數 (球體質量；見 §19.3)。

框 18.2　線性理論中的規範變換和坐標變換

A. 線性理論的基本方程，在任意的近整體 Lorentz 坐標系中寫出，是 (18.1) 式和 (18.7) 式：

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}|\ll 1; \tag{1}$$

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha}-\eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,}{}^{\alpha\beta}+\bar{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\nu}+\bar{h}_{\nu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\mu}=16\pi T_{\mu\nu}。 \tag{2}$$

把近整體 Lorentz 系相互聯繫起來的兩種不同類型的坐標變換：整體 Lorentz 變換和無窮小坐標變換。

(1)整體 Lorentz 變換：

$$x^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}x^{\alpha'}, \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}\eta_{\mu\nu}=\eta_{\alpha'\beta'}。 \tag{3a}$$

它使度規系數經下式變換

$$\eta_{\alpha'\beta'}+h_{\alpha'\beta'}=g_{\alpha'\beta'}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}g_{\mu\nu}=\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})$$
$$=\eta_{\alpha'\beta'}+\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}h_{\mu\nu}。$$

因此，$h_{\mu\nu}$ 以及 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 都像在平直空時中張量的分量一樣變換

$$h_{\alpha'\beta'}=\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}h_{\mu\nu}。 \tag{3b}$$

2.無窮小坐標變換（坐標系中「波紋」的產生）：

$$x^{\mu'}(\mathcal{P})=x^{\mu}(\mathcal{P})+\xi^{\mu}(\mathcal{P}), \tag{4a}$$

其中 $\xi^{\mu}(\mathcal{P})$ 是四個任意函數，小到足以使 $|h_{\mu'\nu'}|\ll 1$，這類無窮小變換使所有標量、矢量以及張量場的函數形式都發生了微小的變化。例如：溫度 T 是位置的單值函數 $T(\mathcal{P})$；所以，當寫成坐標的函數時，它變爲

$$T(x^{\mu'}=a^{\mu})=T(x^{\mu}+\xi^{\mu}=a^{\mu})=T(x^{\mu}=a^{\mu}-\xi^{\mu})$$
$$=T(x^{\mu}=a^{\mu})-T_{,\mu}\xi^{\mu};$$

即，如果 $\xi^0=0.001\ \sin(x^1)$，且如果 $T=\cos^2(x^0)$，則

$$T=\cos^2(x^{0'})+0.002\sin(x^{1'})\cos(x^{0'})\sin(x^{0'})。$$

這些微小的變化在所有量中都可忽略，只是度規例外，在度規中，來自 $\eta_{\mu\nu}$ 的微小偏離包含了關於重力的全部信息。對於度規，當把普通的張量變換規律

$$g_{\rho'\sigma'}[x^{\alpha'}(\mathscr{P})]=g_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\mathscr{P})]\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\sigma'}},$$

與變換規律（4a）式並與下式聯立時，

$$g_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\mathscr{P})]=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\mathscr{P})],$$

得出

$$g_{\rho'\sigma'}(x^{\alpha'}=a^{\alpha})=\eta_{\rho\sigma}+h_{\rho\sigma}(x^{\alpha}=a^{\alpha})-\xi_{\rho,\sigma}-\xi_{\sigma,\rho}$$
$$+\text{可忽略的修正 }\sim h_{\rho\sigma,\alpha}\xi^{\alpha}\text{ 和 }\sim h_{\rho\alpha}\xi^{\alpha}{}_{,\sigma}。$$

因此，在新的（$x^{\mu'}$）和老的（x^{μ}）坐標系中的度規微擾函數由下式聯繫起來

$$h^{\text{新}}_{\mu\nu}=h^{\text{老}}_{\mu\nu}-\xi_{\mu,\nu}-\xi_{\nu,\mu},\tag{4b}$$

而所有其他標量、矢量及張量的函數形式，在線性理論的精度內，是不變的。

B. 規範變換和規範不變性。在線性理論中，常把（4b）式看作是規範變換，與電磁理論中的

$$A^{\text{新}}_{\mu}=A^{\text{老}}_{\mu}+\Psi_{,\mu}\tag{5a}$$

類似，引力規範變換不影響標量、矢量或張量（即可觀察的）的函數形式，這稱爲「規範不變性」。正如直接計算揭示出電磁場的規範不變性一樣

$$F^{\text{新}}_{\mu\nu}=A^{\text{新}}_{\nu,\mu}-A^{\text{新}}_{\mu,\nu}=A^{\text{老}}_{\nu,\mu}+\Psi_{,\nu\mu}-A^{\text{老}}_{\mu,\nu}-\Psi_{,\mu\nu}=F^{\text{老}}_{\mu\nu},\tag{5b}$$

直接的計算（練習18.1）也揭示出 Riemann 張量的規範不變性

$$R^{\text{新}}_{\mu\nu\alpha\beta}=R^{\text{老}}_{\mu\nu\alpha\beta}。\tag{6}$$

這種規範不變性是有保證的，因爲 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 是一個張量的分量，因而在正交歸一系 $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}=\eta_{\mu\nu}$ 中計算時，無論用老的坐標 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h^{\text{老}}_{\mu\nu}$，或者用新的坐標 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h^{\text{新}}_{\mu\nu}$ 實質上是相同的。

像 Riemann 張量一樣，Einstein 張量和脅强-能量張量不受規範變換的影響。因此，如果對於給定的 $T^{\mu\nu}$，已知線性場方程 (2) 式的一個特解 $\bar{h}_{\mu\nu}$，則通過規範變化 (4) 式（其中 ξ_μ 是四個任意的但微小的函数）即可得另一解，它精確地描述了相同的物理情況（所有可觀察的均不改變）。

C. Lorentz 規範。可以證明（練習 18.2），對於任何物理情況，可以選定規範（即坐標）使得 $\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}=0$。這就是 §18.1 引入的 Lorentz 規範。Lorentz 規範不是唯一確定的。規範條件 $\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}=0$ 不受任何規範變換的影響，對此

$$\xi^{\alpha}{}_{,\beta}{}^{\beta}=0。$$

（見練習 18.2）

D. 曲線坐標系。一旦對一給定系統（例如太陽系）經指令確定了規範，就可以把 $h_{\mu\nu}$ 和 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 看作是平直空時中張量的分量；並且可以把場方程 (2) 式以及選定的規範條件看作是在平直空時中幾何的、與坐標無關的方程。這種觀點允許我們，如果願意的話，採用曲線坐標（例如中心在太陽上的球坐標）。但在這樣做的時候，必須處處以平直空時的曲線坐標系中的度規分量 $g_{\mu\nu\text{平直}}$ 代替度規的 Lorentz 分量 $\eta_{\mu\nu}$；且必須把場方程和規範條件中的全部普通微商（「逗號」）換成協變微商，它的聯絡係數由 $g_{\mu\nu\text{平直}}$ 給出。作爲一個例子，可參看練習 18.3。

(b) 採用球極坐標

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta。$$

注意到 $h_{\mu\lambda}$ 和 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 作爲平直空時中張量的分量（見框 18.2 之末），並利用通常的張量變換規律，將 (a) 中所得的解置入

$$\bar{h}_{00}=4M/r,\quad \bar{h}_{0j}=\bar{h}_{jk}=0,$$
$$h_{00}=\frac{2M}{r},\quad h_{0j}=0,\quad h_{jk}=\frac{2M}{r}g_{jk\text{平直}}$$

式中 $g_{\alpha\beta\text{平直}}$ 是平直空時度規在球極坐標系中的分量

$$g_{00\text{平直}}=-1,\quad g_{rr\text{平直}}=1,\quad g_{\theta\theta\text{平直}}=r^2,$$
$$g_{\phi\phi\text{平直}}=r^2\sin^2\theta,\quad g_{\alpha\beta\text{平直}}=0 \text{ 當 } \alpha\neq\beta \text{ 時。}$$

由此斷定，廣義相對論性的線元，準確到線性級，爲

$$ds^2=-(1-2M/r)dt^2+(1+2M/r)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2)。$$

(c) 完全在球坐標中，從頭開始，推出線性場方程普遍的、靜止的、球對稱的、Lorentz 規範的、眞空解。［提示：正如框 18.2 末尾的討論，(18.8c) 式中的 $\eta_{\mu\nu}$ 必須用 $g_{\mu\nu\text{平直}}$ 代替；並且，在場方程和規範條件 (18.8a, b) 式中，所有的逗點（偏微商）必須用協變微商代替，它的聯絡係數來源於 $g_{\mu\nu\text{平直}}$。］

(d) 計算這個引力場的 Riemann 曲率張量。答案應與 (1.14) 式一致。

§18.2 引力波

線性理論和電磁理論比較

線性理論的規範條件和場方程 (18.8a,b) 式與平直空時中 Lorentz 規範的電磁理論的方程極爲相似，

$$A^{\alpha}{}_{,\alpha}=0, \tag{18.10a}$$
$$-A^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{,\alpha}=4\pi J^{\mu}。 \tag{18.10b}$$

它們的不同僅在於附加指標（$h^{\mu\nu}$ 對 A^{μ}, $T^{\mu\nu}$ 對 J^{μ}）。因而，根據電磁理論的經驗，可以對線性引力理論作很多推斷。

例如，場方程 (18.8b) 式必定具有引力波解。與平面電磁波

$$A^x=A^x(t-z),\quad A^y=A^y(t-z),\quad A^t=0,\quad A^0=0,$$

平面引力波

類似的是平面引力波

$$\bar{h}^{xx}=\bar{h}^{xx}(t-z),\quad \bar{h}^{xy}=\bar{h}^{xy}(t-z),\quad \bar{h}^{yy}=\bar{h}^{yy}(t-z),$$
$$\bar{h}^{\mu 0}=\bar{h}^{\mu z}=0 \text{ 對所有的 } \mu。 \tag{18.11}$$

雖然對這種波的詳細研究將留待第 35-37 章，但在下節末的練習中探討了它們的某些特性。

§18.3 重力對物質的效應

怎樣分析弱重力對物質的效應

弱引力場對物質的效應，可以用在適當的運動方程中的線性度規 (18.1) 式和 Christoffel 記號 (18.2) 式來計算。這些運動方程，例如短程線方程（對於粒子的運動或光線），流體動力學方程（對於流體），Maxwell 方程組（對於電磁波），或者 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 方程（對於可能存在的任何場和物質的總脅強

-能量張量）。練習 18.5, 18.6 和 18.7 提供了一些例子，而在練習 16.1, 16.4 和 §17.4 中作了 Newton 極限的計算。然而，如果最低級的（線性的）引力的「力」（Christoffel 符號項）對引力場源的運動有重要影響，那麼，線性場方程（18.7）式是不完善的，必須考慮 Einstein 方程的更好的近似。［這樣，由力或電驅動的振子發射的引力波在線性理論的範圍內下降了，而由引力維持的雙星系或恒星振盪發射的引力波，則需要討論 Einstein 方程中的非線性項（引力的「脅强-能量」）；見 36.9 至 §36.11。］

以上結論，是考慮與線性場方程相關的守恒定律得出的。正如電磁方程（18.10a,b）式確保電荷守恒一樣

$$J^{\mu}{}_{,\mu}=0\,,\quad \int_{\text{全空間}}J^{0}(t,\boldsymbol{x})dxdydz\equiv \mathrm{Q}=\text{常數}\,,$$

引力方程（18.8a, b）式確保了以眞空爲邊界的任何物體的總四維動量和角動量的守恒：

在線性理論中，四維動量和角動量守恒

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0\,, \tag{18.12a}$$

$$\int_{\text{物體}}T^{\mu 0}(t,\boldsymbol{x})dxdydz\equiv P^{\mu}=\text{常數}\,; \tag{18.12b}$$

$$(x^{\alpha}T^{\beta\mu}-x^{\beta}T^{\alpha\mu})_{,\mu}=0\,, \tag{18.13a}$$

$$\int_{\text{物體}}(x^{\alpha}T^{\beta 0}-x^{\beta}T^{\alpha 0})dxdydz\equiv J^{\alpha\beta}=\text{常數}\,。 \tag{18.13b}$$

（在狹義相對論中，角動量的基本性質，可參看 §5.11。此處，角動量是相對於坐標系原點計算的。）現在，重要的是，在線性場方程（18.7）式和這些守恒律中出現的諸脅强-能量分量 $T^{\mu\nu}$，正是要用狹義相對論（$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$）計算的諸分量。結果，在這裏用公式表示的能量-動量守恒不包括重力的貢獻或影響！由此可見，線性理論假設引力沒有重要的作用。例如，由於引力的輻射阻尼力引起的能量損失被線性理論忽略了。類似地，對於作爲 $h_{\mu\nu}$ 的源的每個物體，它的四維動量 P^{μ} 的守恒意味着每個物體沿着 $\eta_{\mu\nu}$ 的短程線（在近Lorentz 坐標系中是直線）運動，而不是沿着$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$的短程線運動。因此，線性理論用 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$ 可以計算試驗粒子和場的運動；但是，要包括對源本身運動的引力修正——即讓它們滿足 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ 而不是 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ ——就必須在場方程中重新插入被線性理論丟掉的非線性項。（參看，例如第 20 章的守恒律；§36.9-36.11 引力波的產生和輻射的反作用；以及第 39 章的後 Newton 近似）。

線性理論有效的界限：重力必須對源的運動沒有顯著影響

在線性理論中，可以用狹義相對論的方法計算引力波輻射的能量，動量以及角動量，正如在電磁理論中用於電磁波一樣 [Fietz 和 Pauli (1939)] ，但是，用完全引力的方法將更爲有益，也更爲有力。

練習

練習 18.4 平面引力波的空時曲率

試計算平面引力波 (18.11) 式的 Riemann 曲率張量 [(18.9) 式] 的諸分量。[答案：

$$R_{x0x0}=-R_{y0y0}=-R_{x0xx}=+R_{y0yx}=+R_{xxxx}=-R_{yxyx}=-\frac{1}{4}(\bar{h}_{xx}-\bar{h}_{yy})_{,tt};$$

$$R_{x0y0}=-R_{x0yx}=+R_{xxyx}=-R_{xxy0}=-\frac{1}{2}\bar{h}_{xy,tt};$$

除了利用對稱性 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}=R_{\gamma\delta\alpha\beta}$ 從上述能得出的結果之外， 所有其餘的分量都爲零。]

練習 18.5 一個原始的引力波探測器 (見圖 18.1)

兩個帶孔的小珠幾乎自由地在一光滑的棒上滑動 ， 僅有很小的摩擦阻礙它們的滑動。棒自由地通過空時落下， 其中心沿短程線運動， 棒兩端附有迴轉器，它們並不轉動。兩個小珠距棒中心等距放置 (距離爲 $\frac{1}{2}l$) 。射到棒上的平面引力波 [(18.11) 式和練習 18.4] 來回推動小珠 (「短程線偏離」；「潮汐引力」) 。小珠對棒的摩擦使棒變熱；通過測量棒溫升高來檢測是否有波經過*。 (當然，在可以設想到的裝置中， 這並不是最佳的！) 略去摩擦對小珠運動的影響，計算作爲時間函數的兩珠分開的固有距離。[提示：設 $\boldsymbol{\xi}$ 爲兩珠間隔；設 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|$ 是單位矢量，在棒自身的靜止系中它的指向沿着棒 。 則兩珠間隔的大小爲 $l=\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}$。棒不轉動的事實體現爲 $\boldsymbol{n}$ 的平行移動規律 $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}=0$。 (因爲棒沿着一條 $\boldsymbol{a}=\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=0$ 的短程線運動， §6.5, 6.6 及 §13.6 的 「Fermi-Walker 遷移」化爲平行移動。) 於是，

$$dl/d\tau=\nabla_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n})=(\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{n},$$

$$d^2l/d\tau^2=\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n})=(\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{n},$$

式中 τ 是棒的原時。但 $\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\xi}$ 是由波的 Riemann 曲率 (短程線偏離) 引起的：

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\xi}=\text{沿 }[-\boldsymbol{Riemann}(\ldots,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})]\text{ 的 }\boldsymbol{n}\text{ 射出。}$$

(短程線偏離力垂直於棒，即垂直於 $\boldsymbol{n}$ ，此力被棒在小珠上的回推力所平衡， 這種回推力

---

* 這個想像實驗是 Bondi 設計的 [1957, 1965; Bondi 和 McCrea (1960)] ，爲的是使懷疑引力波眞實性的人信服。

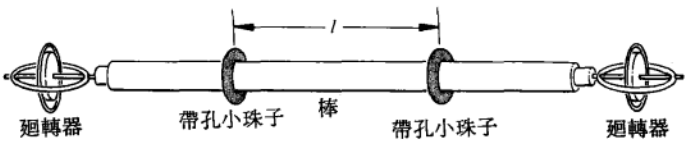


圖 18.1
一個原始的引力波探測器，由穿着珠子且兩端帶有迴轉器的棒構成［Bondi (1957)］。見練習18.5的討論。

使小珠從穿行到停止——不是物質被物質穿透！）這樣

$$d^2l/d\tau^2=-\textbf{Riemann}\,(...u,\xi,u)\cdot n=-\textbf{Riemann}\,(n,u,\xi,u)。$$

在棒的局域 Lorentz 系中算出這個加速度。確定坐標方位，使波沿 z 方向傳播，使棒的方向的分量爲 $n^x=\cos\theta$, $n^z=\sin\theta\cos\phi$, $n^y=\sin\theta\sin\phi$. 從所得的微分方程解出 $l(\tau)$。］［答案：

$$l=l_0\Big[1+\frac{1}{4}(\bar{h}_{xx}-\bar{h}_{yy})\sin^2\theta\cos2\phi+\frac{1}{2}\bar{h}_{xy}\sin^2\theta\sin2\phi\Big],$$

式中 $\bar{h}_{jk}$ 是在棒的世界線（$x=y=z=0$）上計算的。注意，如果棒的取向沿着波傳播的方向（即如果 $\theta=0$），則兩小珠不動。在此情形，波的效應（短程線偏離）是純橫向的。進一步的討論見 §35.4 至 35.6。］

§ 18.4　近 Newton 引力場

線性場方程的推遲積分解

Lorentz 規範下的線性場方程［(18.8a,b) 式］的通解適於表爲電磁理論中熟知的推遲積分形式：

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{x})=\int\frac{4T_{\mu\nu}(t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'。\qquad(18.14)$$

Newton 重力作爲線性理論的極限

這個解的引力波方面將在第36章研究。此處，集中注意近 Newton 源：$T_{00}\gg|T_{0j}|$, $T_{00}\gg|T_{jk}|$，並且速度慢得足以忽略推遲。在這種情況下，(18.14) 式化爲

$$\bar{h}_{00}=-4\Phi,\qquad \bar{h}_{0j}=\bar{h}_{jk}=0,\qquad(18.15a)$$

$$\Phi(t,\boldsymbol{x})=-\int\frac{T_{00}(t,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'=\text{Newton 勢}。\qquad(18.15b)$$

相應的度規 (18.8c) 式爲

$$ds^2=-(1+2\Phi)dt^2+(1-2\Phi)(dx^2+dy^2+dz^2)\qquad(18.15c)$$

$$\approx-(1-2M/r)dt^2+(1+2M/r)(dx^2+dy^2+dz^2)\quad\text{遠離源處。}$$

這個度規的誤差是：(1)沒有 Φ^2 量級的修正，這是線性理論捨棄而由非線性引起的；(2)沒有 $\bar{h}_{0j}=0$ 引起的修正（量級爲 $\bar{h}_{0j}\sim\Phi v$，其中$v\sim|T_{0j}|/T_{00}$ 是源的典型速度）；(3)沒有因令 $\bar{h}_{jk}=0$ 而引起的修正〔量級爲 $\bar{h}_{jk}\sim\Phi(|T_{jk}|/T_{00})$〕。在太陽系中，所有這些誤差$\sim10^{-12}$，而 $\Phi\sim10^{-6}$。

線性理論預言光線彎曲和引力紅移

與 Newton 理論的被動對應只要求 $g_{00}=-(1+2\Phi)$；見 (17.19) 式。然而，線性理論確定了所有的度規係數，誤差相當於$\sim\Phi v$, $\sim\Phi^2$和$\sim\Phi(|T_{jk}|/T_{00})$。這已足以精確的去正確預言（百分誤差$\sim10^{-6}$）太陽系中光線的彎曲和引力紅移，但不能預言近日點移動。

練習

練習 18.6 光線因太陽彎曲

直到很高的精度，太陽仍是靜止的和球狀的，所以它的外部線元是(18.15c)式，且 $\Phi=-M/r$；即

$$ds^2=-(1-2M/r)dt^2+(1+2M/r)(dx^2+dy^2+dz^2)\text{ 太陽外部各處。}\quad(18.16)$$

在這個彎曲空時赤道平面（$z=0$）上運動的一個光子，從世界線

$$x=t,\quad y=b\equiv\text{「碰撞參量」},\quad z=0,\quad(18.17)$$

有很小的偏離。試計算偏離值如下。

(a) 寫出光子世界線的短程線方程 (16.4a) 式

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda^*}+\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}p^\beta p^\gamma=0。\quad(18.18)$$

〔式中 $\mathbf{p}=d/d\lambda^*=$(光子的四維動量)=（與光子零短程線相切的矢量）。〕

(b) 通過估計赤道平面內的聯絡係數，並採用與近似的世界線 (18.17) 式相應的四維動量分量的近似值 $|p^y|\ll p^0\approx p^x$，證明

$$\frac{dp^y}{d\lambda^*}=\frac{-2Mb}{(x^2+b^2)^{3/2}}p^x\frac{dx}{d\lambda^*},\quad p^x=p^0\left[1+O\left(\frac{M}{b}\right)\right]=\text{常數}\left[1+O\left(\frac{M}{b}\right)\right]。$$

(c) 對這個 p^y 的方程作積分，設在 $x=-\infty$ 處 $p^y=0$（光子起始時嚴格沿 x 方向運動）；由此得出

$$p^y(x=+\infty)=-\frac{4M}{b}p^x。$$

(d) 試證明，這相當於光線彎曲了角度

$$\Delta\phi=4M/b=1''.75\ (R_\odot/b),\quad(18.19)$$

式中 $R_\odot$ 是太陽半徑。把這個預言與實驗比較，見框 40.1。

練習 18.7　引力紅移

(a) 用寫成下述形式的光子短程線方程

$$dp_\mu/d\lambda^* - \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} p_\alpha p^\beta = 0\,,$$

證明，在太陽引力場［線元 (18.16) 式］中，自由運動的任何光子都有 $dp_0/d\lambda^*=0$；即

$$p_0 = \text{沿光子世界線的常數。} \tag{18.20}$$

(b) 一個靜止在太陽表面上的原子發射一個波長爲 λ_e 的光子，在它的正交歸一系中觀察［注意：

$$h\nu_e = h/\lambda_e = (\text{原子量度的能量}) = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_e\,, \tag{18.21}$$

式中 $\mathbf{p}$ 是光子的四維動量，$\mathbf{u}_e$ 是發射者的四維速度。］一個離太陽很遠的靜止的原子接收到這個光子，測出它的波長爲 λ_r。［注意：$h/\lambda_r = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_r$。］試證明，光子的紅移量是

$$z \equiv \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{M_\odot}{R_\odot} = 2\times 10^{-6}\,。 \tag{18.22}$$

［提示：$\mathbf{u}_r = \partial/\partial t$；$\mathbf{u}_e = (1-2M/r)^{-1/2}\partial/\partial t$。爲什麼？］引力紅移和實驗結果的進一步討論，可參看 §7.4 和 §38.5；還有圖 38.1 和圖 38.2 。

第十九章　引力系統的質量和角動量

§19.1　弱引力源的外場

弱引力系遠處的度規，作爲$1/r$的冪級數

考慮一個孤立系，其間引力甚弱，當計算它的結構和運動時，可以完全忽略自引力效應。（小行星以及具有繞磁場作螺旋運動的高能電子和質子的星雲，就是上述情況；但地球或太陽則不然。）對系統不再作另外的假定——例如，與 Newton 理論不同，允許速度任意接近光速，允許脅强 T^{jk} 和動量密度 T^{0j} 與質量-能量密度 T^{00} 可以比擬。

(1)推導

計算由這樣一個系統產生的弱引力場［見（18.14）式的加「一橫」的形式］

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, \tag{19.1}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}=\int\frac{4\bar{T}_{\mu\nu}(t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x', \tag{19.2}$$

只限於注意系統外遠處的空時區域，把$h_{\mu\nu}$展爲 $\boldsymbol{x}'/r\equiv\boldsymbol{x}'/|\boldsymbol{x}|$的冪次，利用關係式

$$\bar{T}_{\mu\nu}(t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|,\boldsymbol{x}')=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\bar{T}_{\mu\nu}(t-r,\boldsymbol{x}')\right](r-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)^n, \tag{19.3a}$$

$$r-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|=x^j\left(\frac{x^{j'}}{r}\right)+\frac{1}{2}\frac{x^jx^k}{r}\left(\frac{x^{j'}x^{k'}-r'^2\delta_{jk}}{r^2}\right)+\cdots, \tag{19.3b}$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\frac{1}{r}+\frac{x^j}{r^2}\frac{x^{j'}}{r}+\frac{1}{2}\frac{x^jx^k}{r^3}\frac{(3x^{j'}x^{k'}-r'^2\delta_{jk})}{r^2}+\cdots。 \tag{19.3c}$$

在系統靜止坐標系中作計算，在此系中

$$P^j \equiv \int T^{0j} d^3x = 0, \tag{19.4a}$$

坐標原點取在系統的質量中心

$$\int x^j T^{00} d^3x = 0。 \tag{19.4b}$$

經改變規範以簡化h_{00}和h_{0j}之後，結果是

(2)結果

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + 0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]dt^2 - \left[4\epsilon_{jkl}S^k\frac{x^l}{r^3} + 0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]dt\,dx^j + \left[\left(1 + \frac{2M}{r}\right)\delta_{jk} + \left(\begin{array}{c}\text{按}0(1/r)\text{消亡}\\ \text{的引力輻射項}\end{array}\right)\right]dx^j\,dx^k。 \tag{19.5}$$

（推導見練習19.1。）式中M和S^k是物體的質量和內稟角動量。

$$M = \int T^{00}\, d^3x, \tag{19.6a}$$

$$S_k = \int \epsilon_{klm} x^l T^{m0}\, d^3x。 \tag{19.6b}$$

相應的 Newton 勢是

$$\Phi = -\frac{1}{2}(g_{00} - \eta_{00}) = -\frac{M}{r} + 0\left(\frac{1}{r^3}\right)。 \tag{19.6c}$$

度規如何取決於系統的質量M和角動量S

結論：選擇適當的規範，遠離任一弱源處的Φ和g_{00}是與時間無關的。它們唯一的取決於源的質量M；g_{0j}與時間無關，並由源的內稟角動量S^j確定；但g_{jk}具有$0(1/r)$的時間依賴項（引力波！）。

本章其餘部分着眼於引力場中質量和角動量的「特徵印記(imprints)」；在第35章之前，均忽略或幾乎忽略引力波。

練習 19.1　推導弱引力體外的度規

練習

(a)試導出 (19.5) 式。［提示：(1)重複課文中概述的步驟。(2)計算 h_{00} 時，明確寫出 (19.2) 式中的 $n=0$ 和 $n=1$ 項，精確到 $0(1/r^2)$，並利用下列恒等式簡化 $n=0$ 項

$$T^{jk} = \frac{1}{2}(T^{00}x^jx^k)_{,00} + (T^{lj}x^k + T^{lk}x^j)_{,l} - \frac{1}{2}(T^{lm}x^jx^k)_{,lm}, \tag{19.7a}$$

$$T^{ll}x^m = \left(T^{0l}x^lx^m - \frac{1}{2}T^{0m}r^2\right)_{,0} + \left(T^{lk}x^kx^m - \frac{1}{2}T^{lm}r^2\right)_{,l}。 \tag{19.7b}$$

（證明這些恒等式來自 $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$。）(3)計算$h_{0m}$時，明確寫出 (19.2) 式中的$n=0$項，精確到$0(1/r^2)$，並用下述恒等式簡化它

$$T^{0k}x^j+T^{0j}x^k=(T^{00}x^jx^k)_{,0}+(T^{0l}x^jx^k)_{,l}。\tag{19.7c}$$

（證明這來自 $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$。）(4)利用規範變換簡化$h_{00}$和$h_{0m}$，規範變換的生成如下

$$\begin{aligned}\xi_0=&\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00\prime}r'^2d^3x'+\frac{x^j}{r^3}\int\Big(T^{0k\prime}x^{k\prime}x^{j\prime}-\frac{1}{2}T^{0j\prime}r'^2\Big)d^3x'\\&+\int(T_{00}'+T_{ll}')\Big[\frac{x^jx^{j\prime}}{r^2}+\frac{(3x^{j\prime}x^{k\prime}-r'^2\delta_{jk})x^jx^k}{2r^4}\Big]d^3x'\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int(T_{00}'+T_{kk}')\frac{(r-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)^n}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_m=&-\frac{2x^j}{r^3}\int T_{00}'x^{j\prime}x^{m\prime}\,d^3x'+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int T_{0m}'\frac{(r-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)^n}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'\\&+\frac{x^m}{r}\xi_0-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\Big)_{,m}\int T_{00}'r'^2d^3x'-\Big(\frac{x^k}{r^2}\Big)_{,m}\int\Big(T^{0j\prime}x^{j\prime}x^{k\prime}-\frac{1}{2}T^{0k\prime}r'^2\Big)d^3x'\\&-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int(T_{00}'+T_{kk}')\Big[\frac{(r-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)^n}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\Big]_{,m}d^3x'\end{aligned}$$

式中 $T_{\mu\nu}'$表示 $T_{\mu\nu}(t-r,\boldsymbol{x}')$。］

(b)試證明，系統的質量和角動量是守恒的。［注意：因爲 $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$（自引力作用可忽略），所以這裏的證明與平直空時（第5章）並無不同。］

---

§19.2 質量和角動量的測量

對於弱引力系統：

用探針探測它們留在外引力場中的特徵印記可以測量系統的質量和角動量值。所有可用來探測的工具中，最簡單的是在引力束縛軌道上的試驗粒子。如果粒子離源足夠遠，它的運動幾乎完全不受源角動量或引力波的影響；只是引力場的球狀 Newton 部分有顯著的作用。因此，粒子在 Kepler 橢圓軌道上運動。爲了確定源的質量M，只需應用 Kepler 第三定律（也許稱爲「Kepler 1-2-3 定律」更好）：

(1)把 Kepler的"1-2-3"定律用於軌道粒子，可測量總質量

$$M=\Big(\frac{2\pi}{\text{軌道周期}}\Big)^2\Big(\begin{matrix}\text{橢圓的}\\\text{半長軸}\end{matrix}\Big)^3;\quad \text{即 } M^1=\omega^2a^3。\tag{19.8}$$

源角動量的測量遠非易事。必須用一種探針，它對 Newton 引力效應不敏感，但却能「感覺」度規 (19.5) 式中的非對角項

$$g_{0j}=-2\epsilon^{jkl}S^kx^l/r^3。\tag{19.9}$$

這種探針之一是以反轉衛星進動爲基準的共轉衛星近日點的進動。另一個這種探針是迴轉器。把迴轉器靜止地放在源引力場內。用一個力作用在它的質心上，防止它下落。隨着時間的消逝，度規中的g_{0j}項將迫使迴轉器相對基矢$\partial/\partial x^j$進動；由於這些基矢是「束縛」於坐標系的，而坐標系又束縛於無窮遠處的Lorentz 系，Lorentz 系又束縛於「固定的恒星」（參看 §39.12），所以進動是相對於「固定的恒星」的。練習19.2中導出的進動角速度爲

(2)檢測迴轉器的進動，可以測量總角動量 S

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{S}+\frac{3(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{r^2}\right]。\tag{19.10}$$

人們有時說，源的轉動把「慣性系拉近源」，因而迫使迴轉器進動。進一步的討論見§21.12，40.7和33.4。

練習 19.2　迴轉器的進動　　練習

試導出迴轉器進動角速度的 (19.10) 式。［提示：把一個正交歸一四重軸置於迴轉器的質心上。把四重軸剛性地束縛在坐標系上，因此也就束縛於「固定的恒星」上；更具體地選定這個四重軸是基 $\{e_a\}$，它與下列1-形式基對偶：

$$\omega^1=[1-(2M/r)]^{1/2}dt+2\epsilon_{jkl}S^k(x^l/r^3)dx^j,\quad \omega^j=[1+(2M/r)]^{1/2}dx^j。\tag{19.11}$$

四重軸的空間支柱 e_j，相對於迴轉器以角速度$\boldsymbol{\omega}$轉動，$\boldsymbol{\omega}$由下式給出［見 (13.69) 式］

$$-\epsilon_{jkl}\omega^k=\Gamma_{ij0}。$$

因此，迴轉器的角動量矢量$\boldsymbol{L}$，相對於四重軸，以角速度$\boldsymbol{\Omega}=-\boldsymbol{\omega}$進動：

$$\frac{dL^k}{dt}=\epsilon_{jkl}\Omega^kL^l,\quad \epsilon_{ijk}\Omega^k=\Gamma_{ij0}。\tag{19.12}$$

對於給定的正交歸一系，計算 Γ_{ij0}，並由此得出 $\boldsymbol{\Omega}$ 的 (19.10) 式。］

---

§19.3　完全相對論性的質量和角動量

現在，放棄弱引力源的限制。考慮一個孤立的引力系統，在其內部，空時可以是高度彎曲的，也可以不是高度彎曲的——黑洞，中子星，太陽，……。但是，現在不去分析系統的內部或系統附近的「强場區域」，而只限於注意遠

離源處的弱引力場，並用眞空中的線性理論來分析它。把 $h_{\mu\nu}$ 展成多極矩和（$1/r$)的冪次；調整規範、Lorentz 系、以及坐標原點，以簡化得出的度規。這樣計算的結果是一個等同於弱源［(19.5) 式］的引力場！(因過於冗長，計算的細節這裏沒有寫出；但可參看練習19.3。)

但是，在接受作爲任意源的遠距離場之前，應當檢查一下眞空場方程中的非線性效應。原來，遠離源處有兩種非線性是重要的：(1)靜止的非線性，度規的 Newton 部分，它產生度規修正

$$\delta g_{00}=-2M^2/r^2\,,\qquad \delta g_{jk}=\frac{3}{2}(M^2/r^2)\delta_{jk}\,,$$

(見練習19.3及§39.8)，將度規代入

遠離任意引力系的度規，作爲 $(1/r)$ 的冪級數

$$ds^2=-\left[1-\frac{2M}{r}+\frac{2M^2}{r^2}+0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]dt^2-\left[4\epsilon_{jkl}S^k\frac{x^l}{r^3}+0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]dt\,dx^j$$
$$+\left[\left(1+\frac{2M}{r}+\frac{3M^2}{2r^2}\right)\delta_{jk}+\left(\begin{matrix}\text{按}0(1/r)\text{消逝的}\\ \text{引力輻射項}\end{matrix}\right)\right]dx^j\,dx^k\,; \qquad (19.13)$$

(2)源的質量逐漸減少，它的角動量逐漸變化，以及爲補償質量、角動量在它的「靜止系」內的逐漸變化，還有被引力波帶走的線動量（見框19.1，在本節結束後再讀最相宜）。

測量一給定源遠處的空時幾何 (19.13) 式，不能揭示該源是否有强或弱的內引力。但是，當把確定 g_{00} 和 g_{0j} 的常數 M 和 S_j 表爲對源內部的積分時，則可發現一個決定性的差別：如果內部引力是弱的，則線性理論對整個源適用，且

當源有强的內部引力時，M和S的體積分失效

$$M=\int T_{00}\,d^3x\,,\qquad S_j=\int\epsilon_{jkl}x^k\,T^{l0}\,d^3x\,; \qquad (19.14)$$

但如果引力是强的，則這些公式失效。對於强引力，這個失效是否使度規 (19.13) 式中的常數 M 和 S_j 不等於源的質量和角動量呢？根據下面的論證看來，完全不是這樣。

首先，考慮太陽的質量。對於太陽，期望 Newton 理論是高度精確的（百分誤差$\sim M_\odot/R_\odot\sim 10^{-6}$）；因此可以斷定，在線元 (19.13) 式中出現的常數 M 確實是

$$M=\int\rho\,d^3x=\int T_{00}\,d^3x=\text{總質量}。$$

但是，這個斷言會出錯嗎？爲了獲得更大的信心和遠見，採用「控制無知（controlled ignorance)」的觀點；即無需妄求比所需的懂得更多（這種物理論證的風格可追溯到 Newton 的名言「假設不必揑造」，即「我不揑造假設」）

。在計算 T_{00} 的體積分時（常用的 M 的 Newton 定義），需要關於太陽內部結構的理論。例如，必須知道，太陽的可見表面層並不隱藏着一個重的中心核，它如此緻密龐大，以致這裏存在的相對論性引力場 $|\Phi|\sim 1$。如果在分析中利用流體類型的脅强-能量張量 $T^{\mu\nu}$，那麼就需要知道態方程，不透明度，能量生成和傳輸的理論。需要說明作爲物質原子結構的適當近似流體描寫是合理的。需要假設：一個解釋質子和電子靜止質量的根本物質理論，在亞微觀尺度上，不該把質量的重要部分分給强的（非線性的）引力場。所有這些似乎都可以做到，但顯然，這不是確定太陽質量的方法，太陽質量實際上是由天文學家確定的！調整恒星結構理論，以給出觀測的質量；理論的結構並不允許從非引力的觀測推出質量。實際上，太陽質量的測量是通過研究行星在它的外引力場中的軌道得出的，這個方法等價於讀出線元（19.13）式中的 M，而不是去計算體積分 $\int T^{00}\,d^3x$。

用外引力場定義「總質量-能量」 M 和「角動量」 S

爲了避免上述所有的不確定性，使理論盡可能緊密地與實驗對應，定義太陽或任何其他物體的「總質量-能量」M 爲：在它遠處外部空時幾何的線元(19.13)式中出現的常數。類似地，定義物體的內稟角動量爲：在它的線元(19.13)式中出現的恒定三維矢量 S。在運算上，總質量-能量 M 經 Kepler 第三定律測出；角動量 S 由它對迴轉器的進動或對某個行星軌道的影響測出。無論物體是太陽，還是黑洞或中子星，這都是正確的。

S 作爲源外遠處漸近平直區域中的一個幾何對象

內稟角動量 S 是哪一種幾何對象呢？它是由在遠離源處所作的測量定義的，該處，隨着距離的遠去，空時變得愈來愈平直（漸近地平直）。於是，在圍繞着源的「漸近平直空時」中，可以把它看作一個三維矢量。但是，S 在什麼 Lorentz系中是三維矢量呢？顯然，應在線元（19.13）式成立的漸近 Lorentz 系中；即在源遠距離「Coulomb」（「M/r」）場爲靜止的漸近 Lorentz 系中；亦即在源的「漸近靜止系」中。換言之，可以認爲 S 是一個四維矢量 $\boldsymbol{S}$，它在漸近靜止系中是純空間性的（$S^0=0$）。如果用 $\boldsymbol{U}$ 表示漸近靜止系中的四維速度，則 $\boldsymbol{S}$ 是純空間性的這一事實可以用幾何方法重新表爲 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{U}=0$，或

「漸近靜止系」和「總四維動量」

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{P}=0, \tag{19.15}$$

式中

$$\boldsymbol{P}\equiv M\boldsymbol{U}\equiv\text{「源的總四維動量」} \tag{19.16}$$

它是空時漸近平直區域中的另一個矢量。

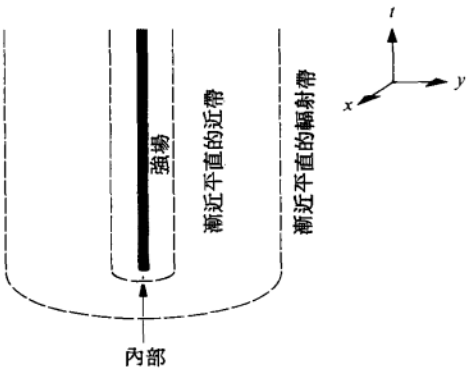
總四維動量和角動量的守恒律

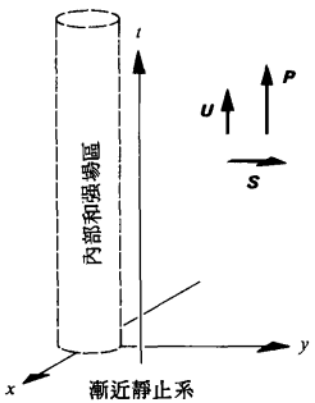
總四維動量 $\boldsymbol{P}$ 和內稟角動量 $\boldsymbol{S}$ 滿足框19.1所總結的守恒律。這些守恒律在引力理論和相對論天體物理中是有價值的工具，但這些定律的推導（第20章）並沒有首先與諸如中子星和基本宇宙學等論題相對照；所以絕大多數讀者在首次讀本書時會想到要跳過它。

（接第456頁）

框 19.1 孤立系統的總質量-能量，四維動量和角動量

A.把空時劃分爲(1)源的內部；它被(2)一個强場眞空區包圍着；它又被(3)一個弱場，漸近平直的，近帶狀區域包圍；它又被(4)一個弱場，漸近平直的，輻射帶狀區域包圍。本框及本章只處理漸近平直的區域。內部及强場區在下章處理。





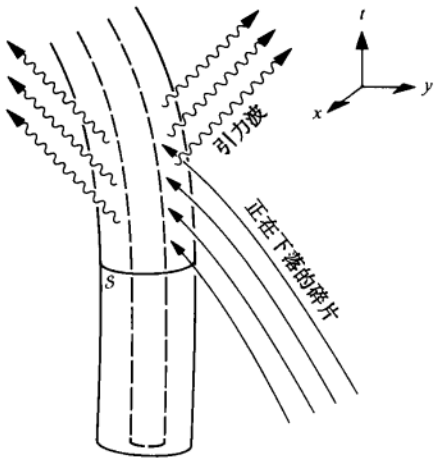
B.源的漸近靜止系是整體的，漸近 Lorentz 系（坐標 t, x, y, z），其中遠距離的源場的「Coulomb」部分是靜止的（見圖）。漸近的靜止系不延伸到强場區內；它的任何這樣的延伸必然被曲率强制進入一個高度非 Lorentz 的曲線形式。調整漸近靜止系的空間原點，使得源位於它的中心——卽遠處的 Newton 勢是 $\Phi = -M/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}+0\,(1/r^3)$；亦卽，$\Phi$ 沒有那種由坐標偏置而引起的偶極子項 $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{x}/r^3$。

C.可以認爲總質量-能量M，四維速度 $\boldsymbol{U}$，總四維動量$\boldsymbol{P}$以及內稟角動量矢量 $\boldsymbol{S}$ 是源的屬性。四維矢量$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{S}$存在於空時的漸近平直區內，並且可以在那裏自由移動（可忽略的曲率$\Longrightarrow$圍繞封閉曲線的平行移動不改變 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{P}$ 或$\boldsymbol{S}$）。源的四維速度$\boldsymbol{U}$定義爲等於漸近靜止系的四維速度（在靜止系 $U^0=1$，$\boldsymbol{U}=0$）。總質量-能量M由 Kepler 第三（「1-2-3」）定律［(19.8) 式］測量。總四維動量以 $\boldsymbol{P}\equiv M\boldsymbol{U}$ 定義，內稟角動量$\boldsymbol{S}$與四維速度$\boldsymbol{U}$正交，$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{U}=0$（所以$S^0=0$；一般說來在漸近靜止系$\boldsymbol{S}\neq 0$）；$\boldsymbol{S}$由迴轉器的進動或微分近日點的進動來測量（§19.2）。

在漸近靜止系，適當地選擇規範［卽在坐標中適當選擇波紋（ripples）］，則對平直空時幾何的輕微偏離由下述線元描述

$$ds^2=-\left[1-\frac{2M}{r}+\frac{2M^2}{r^2}+0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]dt^2-\left[4\epsilon_{jkl}S^k\frac{x^l}{r^3}+0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]dt\,dx^j$$
$$+\left[\left(1+\frac{2M}{r}+\frac{3M^2}{2r^2}\right)\delta_{jk}+(\text{引力輻射項})\right]dx^j\,dx^k。\qquad(1)$$

D.四維動量和角動量的守恒：設粒子落入某個源中或從源射出；設電磁波流入和流出；設源發射引力波。所有這類過程都破壞了源的孤立性，並且改變了它的總四維動量 $\boldsymbol{P}$，它的內稟角動量 $\boldsymbol{S}$，以及它的漸近靜止系，以一球狀殼 S 包圍源，它足夠遠，在漸近平直區域之內。使殼在源的瞬間漸近靜止系內總是靜止的。用探針探測 S 附近源的引力場的方法，來測量它的四維動量 $\boldsymbol{P}$ 和內稟角動量 $\boldsymbol{S}$，作爲殼的原時 τ 的函數。下章的分析將揭示出，在下述意義上，四維動量是守恒的



星際碎片掉入黑洞，引力波出現。

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau}=-\int_S T^{\alpha j}n_j\,d(\text{面積})=\begin{pmatrix}\text{四維動量經殼}\\ \text{流進的速率}\end{pmatrix},\qquad(2)$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是垂直於 S 向外的單元，積分是在殼的瞬間靜止系中完成的。用話來說：用標準的狹義相對論方式測量的，穿過殼的四維動量流的速率，等於以源的引力量度的四維動量的改變率。類似地，在下述意義下角動量也是守恒的

$$\frac{dS_i}{d\tau}=-\int_S(\epsilon_{ijk}x^jT^{kl})\,n_l d(\text{面積})=\begin{pmatrix}\text{角動量經殼}\\ \text{流進的速率}\end{pmatrix},\qquad(3a)$$

$$\frac{dS_0}{d\tau}=-\frac{dU^\alpha}{d\tau}S_\alpha=\begin{pmatrix}\text{爲維持 } \boldsymbol{S} \text{ 垂直於 } \boldsymbol{U} \text{ 所需的改變；}\\ \text{「Fermi-Walker 遷移定律」；見 §6.5, 13.6}\end{pmatrix}。\qquad(3b)$$

在這些守恒律中，$T^{\alpha\beta}$ 是殼上的總脅强-能量張量，包括物質、電磁場，以及引力波的貢獻。引力波的貢獻，稱爲 $T^{\alpha\beta}_{(\text{引力波})}$，將在第35章處理。

注意：形式如上所述的守恒律，包括 M/r 量級的百分誤差（來自落入物質的「引力勢能」的貢獻），但在殼很大的極限下（$r\longrightarrow\infty$），這個誤差趨於零。

注意：下一章給出的這些守恒律的表述形式更爲精確也更爲嚴格，但物理上的啓廸則稍遜於此。

練習

練習 19.3 一個穩態的、完全相對論性源遠處的引力場

在源與時間無關的特殊情況下（$g_{\mu\nu,t}=0$），導出線元的 (19.13) 式。如果不是小心地沿着下述路線進行，這可能是個難題。(1)首先在 Einstein 場方程中忽略所有的非線性。遠離源處的場是弱的。主要項中將沒有這些非線性。(2)用 Lorentz 規範下的線性理論，算出主要的項［(18.8) 式］。(3)特別是把眞空的、與時間無關的波動方程 (18.8b) 式的通解寫成下列形式，其中 $n^j\equiv x^j/r\equiv$（徑向單位矢量）：

$$\begin{aligned}
&\bar{h}_{00}=\frac{A^0}{r}+\frac{B^jn^j}{r^2}+0\left(\frac{1}{r^3}\right),\\
&\bar{h}_{0j}=\frac{A^j}{r}+\frac{B^{jk}n^k}{r^2}+0\left(\frac{1}{r^3}\right),\\
&\bar{h}_{jk}=\frac{A^{jk}}{r}+\frac{B^{jkl}n^l}{r^2}+0\left(\frac{1}{r^3}\right),\\
&A^{jk}=A^{(jk)},\qquad B^{jkl}=B^{(jk)l}。
\end{aligned}\tag{19.17}$$

（圓括號表示對稱化。）(4)然後，把 Lorentz 規範條件 $\bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta}=0$ 加在通解上，即得

$$\begin{aligned}
&A^j=0,\qquad A^{jk}=0,\\
&B^{jk}(\delta^{jk}-3n^jn^k)=0,\\
&B^{jkl}(\delta^{kl}-3n^kn^l)=0。
\end{aligned}\tag{19.18}$$

(5)將 B^{jk} 寫成它的跡$3B$、它的無跡對稱化部分S^{jk}、以及它的無跡反對稱部分（這些是它的「不可約部分」）之和：

$$B^{jk}=B\delta^{jk}+S^{jk}+\epsilon^{jkl}F^l,\qquad S^{jj}=0。\tag{19.19}$$

試證明，任一張量 B^{jk} 都可寫成這種形式。然後證明，規範條件 (19.18) 式意味着 $S^{jk}=0$。(6)類似地證明，前兩指標對稱的任一張量 B^{jkl} 可寫成下述形式

$$\begin{aligned}
&B^{jkl}=\delta^{jk}A^l+C^{(j}\delta^{k)l}+\epsilon^{ml(j}E^{k)m}+S^{jkl},\\
&E^{km}\text{ 對稱且無跡，}\quad\text{即 }E^{km}=E^{(km)},\quad E^{kk}=0,\\
&S^{jkl}\text{ 對稱且無跡，}\quad\text{即 }S^{jkl}=S^{(jkl)},\\
&\qquad\qquad S^{jjl}=S^{jkk}=S^{kkj}=0。
\end{aligned}\tag{19.20}$$

然後證明，規範條件 (19.18) 式意味着 $C^j=-2A^j$ 以及 $E^{km}=S^{jkl}=0$。(7)聯立所有這些結果，得出

$$\begin{aligned}
&\bar{h}_{00}=\frac{A^0}{r}+\frac{B^jn^j}{r^2}+0\left(\frac{1}{r^3}\right),\\
&\bar{h}_{0j}=\frac{\epsilon^{jkl}n^kF^l}{r^2}+\frac{Bn^j}{r^2}+0\left(\frac{1}{r^3}\right),\\
&\bar{h}_{jk}=\frac{\delta^{jk}A^in^i-A^jn^k-A^kn^j}{r^2}+0\left(\frac{1}{r^3}\right)。
\end{aligned}\tag{19.21}$$

然後應用 Lorentz 規範內的規範變換，從$\bar{h}_{0j}$和$\bar{h}_{jk}$中消去B和A^j；所以

$$\bar{h}_{00}=\frac{A^0}{r}+\frac{(B^j+A^j)n^j}{r^2}+0\left(\frac{1}{r^3}\right),$$
$$\bar{h}_{0j}=\frac{\epsilon^{jkl}n^kF^l}{r^2}+0\left(\frac{1}{r^3}\right), \qquad (19.22)$$
$$\bar{h}_{jk}=0\left(\frac{1}{r^3}\right)。$$

(8)移動坐標原點，使 x^j新$=x^j$老$-(B^j+A^j)/A^0$，在新的坐標系中，$\bar{h}_{\alpha\beta}$ 的形式與(19.22)式相同，但消去了 B^j+A^j。從所得的$\bar{h}_{\alpha\beta}$建造度規並重新定義常數A^0和F^l使與 (19.13) 式一致。(9)現在，度規中所有線性項均已算出 。主要的非線性項應正比於主要的線性項的平方 $(M/r)^2$，對於一個完全相對論性的、靜止的、球狀的源，得出比例常數最容易的方法是取 Schwarzschild 幾何［(31.1) 式］，作坐標變化使它的形式爲

$$ds^2=-\left(\frac{1-M/2r}{1+M/2r}\right)^2dt^2+\left(1+\frac{M}{2r}\right)^4(dx^2+dy^2+dz^2) \qquad (19.23)$$

（練習25.8），再將它展成M/r的冪次。

---

§19.4　閉宇宙的質量和角動量

「在愛爾蘭沒有蛇。」
把蛇驅逐出愛爾蘭
之後，St. Patrick
的報告（聖徒傳*）

對於一個閉宇宙，總質量-能量M和角動量S沒有定義，也不能下定義

根據廣義相對論，不存在「閉宇宙的能量（或角動量，或電荷）」這類東西，理由很簡單。要稱量某個東西，就需要一個能站上去進行稱量的台子。

爲了稱量太陽，人們測量行星軌道的周期和半長軸，再用 Kepler「1-2-3」定律，得$M=\omega^2a^3$。爲了測量太陽的角動量 S（70年代或80年代空間技術的一項任務！），人們測量圍繞着太陽的近軌道上廻轉器的進動，或者檢測「慣性

*Stokes (1887) 和另一些標準的文獻否認這個「聖徒傳 (legend)」。在 Stokes的第一部分中，列出了基本的手抄文獻，特別是包括了14和15世紀由不同人書寫的，154對開頁雙列的古抄本Rawlinson B. 512 (見 Catalogi codicum manuscriptorum Bibliothecae Bodleianae Partis Quintae Fasciculus Primus, Oxford, 1862, 728-732列)。在這個手抄本中，對開頁97b. 1,，第14行，Stokes的譯文第1部分第30頁說：「正像天國沒有野獸、沒有蛇、沒有獅子、沒有龍（海怪）、沒有鱷子、沒有老鼠、沒有蛙那樣，愛爾蘭也同樣沒有任何有害的動物，只保留着狼……」

系拖曳」的另一些方面。爲了確定物體的電荷，用一個大球面包圍它，在球面上每一點求出垂直於表面的電場值，對球面積分，再用 Gauss定理。但是，在任何具有三維球拓撲的閉模型宇宙內，從一點展開得足夠寬的一個 Gauss二維球，發現它自己在其對蹠點上坍縮爲一無所有。從而試圖獲得有關「宇宙電荷」有用信息的企圖也坍縮到一無所有：電荷是普普通通的零。與此相同，任何想要確定質量-能量或角動量的「面積分」的企圖(詳見第20章)也都坍縮爲一無所有。用另一種方式來說：圍繞着閉宇宙，無處安放試驗物體，或者，也無處把迴轉器放入 Kepler 軌道，以確定系統的任何所謂「總質量」或「靜止系」或「四維動量」或「角動量」。這些術語沒有定義也無法定義。有這些字，但沒有含意。

初看起來，閉宇宙沒有一個有定義的四維動量是令人不安的；但是，若給出四個數，且命令式地說 ： 它們表示某種涵義的「宇宙總能量-動量四維矢量」的諸分量，那麼這將是更令人不安的。這些分量相對於什麼局域 Lorentz 系呢？在哪一點上呢？並且當這種矢量繞閉合路徑作平行移動回到前述奇點時，它有什麼變化呢？從這些困惱中巧妙解脫的辦法是，不挑起爭端，也不能挑起爭端。

設想極爲精確地測量 γ 射線的能量。實驗者希望知道這個 γ 射線對宇宙的總質量-能量有多少貢獻。在實驗室測量它的能量 ， 然後他用地球束縛它的負引力能作修正。得出

$$E_{\text{修正}}=h\nu(1-M_{\oplus}/R_{\oplus}),$$

這個結果是光子越出地球引力場之後所具有的能量。但這只是因一長串能量損失（紅移）修正的第一步，因爲光子要越出太陽系、星系、本星系團、超團、以及此後什麼什麼的引力場？除非 $E_{\text{修正}}=0$，沒有跡象表明，這些修正會收斂。

漸近平直是可以定義 M 和 S 的關鍵

與閉宇宙表面上沒有電荷-能量-角動量完全相反，在任何漸近平直空間有可能定義並測量全部這三個量。在談論漸近平直空間時，並不必須革新當今宇宙學的觀點。在天文學或天體物理學感興趣的情形，只要注意到偏離平直多麼小就夠了，這種偏離是以$(-g_{00})^{1/2}$與 1 之差量度的(框19.2)。圍繞一個區域，其中任何動力學（不管多麼複雜）的分析正在進行，無論什麼時候，只要幾何在某種精度上是漸近平直的，那麼，在這個精度上，談論動力學區域的總能量-動量四維矢量 $\boldsymbol{P}$ 以及它的總內稟角動量 $\boldsymbol{S}$ 就是有意義的。上述矢量中不管

框 19.2　在所選天體附近的度規修正項

	m	m	r	$\frac{m}{r}=1-(-g_{00})^{1/2}$
在金星 de Milo 的肩部	2×10^{5}克$=1.5\times10^{-23}$厘米		30厘米	5×10^{-25}
在地球表面	6×10^{27}克$=4\times10^{-1}$厘米		6.4×10^{8}厘米	6×10^{-10}
離太陽一個地球距離處	2×10^{33}克$=1.5\times10^{5}$厘米		1.5×10^{13}厘米	1×10^{-8}
離星系中心一個太陽距離處	2×10^{44}克$=1.5\times10^{16}$厘米		2.5×10^{22}厘米	6×10^{-7}
離室女星系團一個星系距離處	6×10^{47}克$=4\times10^{19}$厘米		3×10^{25}厘米	1×10^{-6}

哪一個，在平直區域內繞任一封閉曲線平行移動回到原出發點將保持不變。此外，它並不影響在動力學區域內究竟與平直有多大偏離（黑洞，坍縮星，强引力波等等）；遠處的曲率很弱，四維動量和角動量將通過它們在空時幾何上的痕跡顯示自己。

第二十章　四維動量和角動量守恒定律

當一物質系統從其所處之確定狀態，以任意方式過渡到另一已特別定義之參考狀態時，我們把系統外所產生的全部效應（以功的力學單位量度）的總和表為該物質系統在該確定狀態之能量。

William Thompson（即後來的 Kelvin 爵士）Max von Laue 引述於 Schilpp (1949), 514 頁。

所有形式的能量都具有慣性。

Albert Einstein, von Laue 在 Schilpp (1949) 523 頁中概括 1905 年 9 月 26 日 Einstein 所撰論文的結論。

第 5 章（脅强－能量張量）是本章必需的準備知識，本章又是高階第36章（引力波的產生）的準備知識，並對理解第35章（引力波的傳播）有所裨益。

§20.1 概　　述

第19章闡明了任意引力系統的總四維動量 $\boldsymbol{P}$ 和總角動量 $\boldsymbol{S}$ 的主要特徵。但是，$\boldsymbol{P}$ 守恒定律和 $\boldsymbol{S}$ 守恒定律（框 19.1）這一至關重要的特徵尚待證明。本章的主要目的就是證明這些守恒定律。在證明的過程中，還將遇到 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的另外一些或許較爲次要但很有趣的方面——四維動量和角動量的 Guass 流量積分；關於引力場的一個脅强-能量「贋張量」，它是構成 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 體積分的工具；以及引力場能量的非局域化。

§20.2　四維動量和角動量的 Guass 流量積分

在電磁理論中，算出源所發出的電力線總數——即在包圍源的閉合二維曲面上作 Guass 流量積分

$$Q=\frac{1}{4\pi}\oint E^j d^2S_j=\frac{1}{4\pi}\oint F^{0j}d^2S_j。\tag{20.1}$$

對電荷和 Newton 質量的 Guass 流量積分

就可以確定守恒的總源電荷，類似地，在 Newton 理論中，計算 Guass 流量積分即可確定源的質量

$$M=\frac{1}{4\pi}\oint \Phi_{,j}d^2S_j。\tag{20.2}$$

這些流量積分之所以有效，是因爲源中的電荷和質量在環繞着它的電磁場和引力場上，留下了不可磨滅的痕跡。

在廣義相對論中，外部引力場（空時幾何）具有類似的痕跡，這些痕跡不僅來自源的總質量-能量M，還來自源的總四維動量 $\boldsymbol{P}$ 和內稟角動量 $\boldsymbol{S}$（見框 19.1）。所以，尋求代表源的四維動量和角動量的 Guass 流量積分是值得的。

爲了簡化尋求的過程，先從線性理論做起，以 Maxwell 電動力學爲指導。在電動力學中，電荷的 Guass 流量積分遵循 Maxwell 方程組 $F^{\mu\nu}{}_{,\nu}=4\pi J^\mu$，加上 $F^{\mu\nu}$ 反對稱這一決定性的事實，由此 $F^{0\mu}{}_{,\mu}=F^{0j}{}_{,j}$:

$$Q=\int J^0 d^3x=\frac{1}{4\pi}\int F^{0\nu}{}_{,\nu}d^3x=\frac{1}{4\pi}\int F^{0j}{}_{,j}d^3x=\frac{1}{4\pi}\oint F^{0j}d^2S_j。$$

[Guass 定理]

在線性理論中，爲了找到類似的流量積分，應按類似的形式重新寫出線性化場方程（18.7）式，使之包含具有類似的重要對稱性的實體。所需的實體是：

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}\equiv-(\bar{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}+\eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}-\bar{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta}-\bar{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu})。\tag{20.3}$$

定義 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$

由此表達式易於證明，它具有與 Riemann 張量相同的對稱性質

$$\begin{aligned}&H^{\mu\alpha\nu\beta}=H^{\nu\beta\mu\alpha}=H^{[\mu\alpha][\nu\beta]},\\&H^{\mu[\alpha\nu\beta]}=0。\end{aligned}\tag{20.4}$$

這個實體，像 $\bar{h}^{\mu\nu}$ 一樣，在線性理論的 Lorentz 變換下按張量變換；但它並非規範不變量，因此在廣義相對論的意義下不是張量。

以 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 表示的線性化場方程

用 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 表示，線性化場方程（18.7）式的形式可大爲簡化：

$$2G^{\mu\nu}=H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}=16\pi T^{\mu\nu}; \tag{20.5}$$

由此，考慮到 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 對 ν 和 β 的反對稱性，得出線性理論的源守恒定律如下：

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=\frac{1}{16\pi}H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta\nu}=0\,,$$

此式曾在 §18.3 討論過。產生這些運動方程時所用反對稱性也可用來導出源的總四維動量的 Guass 流量積分：

線性理論中的 Guass 流量積分：(1)對四維動量

$$\begin{aligned}P^{\mu}&=\int T^{\mu 0}d^3x=\frac{1}{16\pi}\int H^{\mu\alpha 0\beta}{}_{,\alpha\beta}d^3x=\frac{1}{16\pi}\int H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha j}d^3x\\&=\frac{1}{16\pi}\oint_S H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha}d^2S_j\,。\end{aligned}$$

（[Guass 定理]） (20.6)

此處閉合的二維積分曲面 S 必須將源完全圍住，並且必須位於恒定時間 x^0 的三維曲面上。在（20.6）式中，對源能量的積分 P^0 比其他積分 P^j 更常用到，用 $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$ 表示時，P^0 的形式特別簡單：

$$P^0=\frac{1}{16\pi}\int_S(g_{jk,k}-g_{kk,j})d^2S_j \tag{20.7}$$

（見練習 20.1）。

(2)對角動量

用類似於（20.6）式但冗長得多的計算（練習20.2），可得出繞坐標原點的總角動量的流量積分：

$$\begin{aligned}J^{\mu\nu}&=\int(x^{\mu}T^{\nu 0}-x^{\nu}T^{\mu 0})d^3x\\&=\frac{1}{16\pi}\oint_S(x^{\mu}H^{\nu\alpha 0j}{}_{,\alpha}-x^{\nu}H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha}+H^{\mu j0\nu}-H^{\nu j0\mu})d^2S_j\,。\end{aligned} \tag{20.8}$$

把 Guass 流量積分推廣到完全的廣義相對論

與體積分的計算不同，爲了計算（20.6）式到（20.8）式中的流量積分，只需利用源外面遠處的引力場。因爲對於强源，該引力場在完全的廣義相對論中的形式，與對於弱源，該引力場在線性理論中的形式相同，故可以用流量積分計算任何孤立源的 P^{μ} 和 $J^{\mu\nu}$，而不管源的强弱如何：

$$\left.\begin{aligned}P^{\mu}&=\frac{1}{16\pi}\oint_S H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha}d^2S_j\,,\\P^0&=\frac{1}{16\pi}\oint_S(g_{jk,k}-g_{kk,j})d^2S_j\,,\\J^{\mu\nu}&=\frac{1}{16\pi}\oint_S(x^{\mu}H^{\nu\alpha 0j}{}_{,\alpha}-x^{\nu}H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha}\\&\qquad+H^{\mu j0\nu}-H^{\nu j0\mu})d^2S_j\,。\end{aligned}\right\}\ \text{當閉合積分曲面 } S \text{ 位於包圍源的漸近平直區域中，並當採用漸近 Minkowski 坐標時，在完全的廣義相對理論中，上式對任何孤立源均適用。} \tag{20.9}$$

知道了 P^μ 和 $J^{\mu\nu}$，利用框 5.6 的標準程序，即可計算源的總質量-能量M和內稟角動量 S^μ：

總質量-能量，質心和內稟角動量

$$M=(-p^\mu p_\mu)^{1/2}, \tag{20.10}$$

$$Y^\mu=-J^{\mu\nu}P_\nu/M^2=\begin{pmatrix}\text{源的漸近球形場}\\ \text{「}M/r\text{」的中心相對於}\\ \text{坐標原點的位移矢量}\end{pmatrix} \tag{20.11}$$

$$S_\rho=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}(J^{\mu\nu}-Y^\mu P^\nu+Y^\nu P^\mu)P^\sigma/M。 \tag{20.12}$$

特別需要注意的是：（20.9）式流量積分中的被積函數不是規範不變量。它們在事件 $\mathcal{P}_0[g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0)=\eta_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\alpha}(\mathcal{P}_0)=0]$ 處的任意局域慣性系中將爲零，這是因爲

$$g_{\mu\nu,\alpha}=h_{\mu\nu,\alpha}=0\Longrightarrow H^{\mu\nu\alpha\beta}{}_{,\alpha}=0;\qquad g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}\Longrightarrow H^{\mu\nu\alpha\beta}=0。$$

這種行爲是合理的；在 Newton 理論中，類似的 Newton 流量積分（20.2）式中的被積函數 $\Phi_{,j}=$（引力加速度），它在局域慣性系中同樣變爲零。

儘管流量積分中的被積函數不是規範不變量，但總積分 P^μ（四維動量）和 $J^{\mu\nu}$（角動量）却是確定無疑的規範不變量！它們具有與任何坐標系和規範都無關的含義和重要性。在包圍源的漸近平直區域中，它們是張量。

如果有可能定義能量和角動量的話，則空時必須是漸近地平直的。只有這樣，才能採用線性理論，並且，只在線性理論適用於遠處的原則下，才能夠證明把流量積分（20.9）式用於完全的非線性理論是正確的。沒有人能强迫一個物理學家移到系統附近去定義能量和角動量。他根本無需移到附近；況且，會迫使他不能近移：源的內部結構或許是不能進入的，不可理解的，索然無趣的，危險的，過分遙遠的，或者是令人害怕的。遠處平直的要求是流量積分（20.9）式的一個顯著特徵，而且還是一個決定性的特徵。甚至坐標也必須是漸近 Minkowski 的；否則，本章大部分公式都失效或者需要修改。特別是，當計算一局域系統的四維動量和角動量時，只能在漸近 Minkowski 坐標中應用流量積分（20.9）式。如果不存在這種坐標（即空時在無窮遠處不平直），那就必須完全放棄流量積分和賴以定義的諸物理量：引力源的總質量，動量和角動量。在這方面，可重溫 §19.4 的討論。該節用物理的語言闡明爲什麼「總質量-能量」是一個有限的概念，它僅當採取置宇宙論於不顧的局限觀點時才有用。（試比較「光線」和「粒子」，這是兩個極有價值的概念，但是，當波動光學或波動力學明顯地起作用時，它們便失效了。）

Guass 流量積分僅在空時的漸近平直區域和漸近 Minkowski 坐標下才適用

小結：試圖以忽略 Minkowski 邊界條件的方式應用公式（20.9）式（尤其是在曲線坐標下簡單地採用它們而不加修改），極易不可避免地導致荒謬。

練習

練習 20.1 線性理論中總質量-能量的流量積分

試證明對於 P^0，流量積分 (20.6) 式簡化爲 (20.7) 式。再證明，當用於近似的 Newton 源時［線元如 (18.15c) 式］，它將進一步簡化爲熟悉的 Newton 流量積分 (20.2) 式。

練習 20.2 線性理論中角動量的流量積分

試導出 $J^{\mu\nu}$ 的 Guass 流量積分 (20.8) 式。［提示：用場方程 (20.5) 式證明

$$16\pi x^{\mu}T^{\nu 0}=(x^{\mu}H^{\nu\alpha 0k}{}_{,\alpha})_{,k}-H^{\nu j 0\mu}{}_{,j}-H^{\nu 00\mu}{}_{,0}; \tag{20.13}$$

再用 Guass 定理計算 (20.8) 式的體積分。］

練習 20.3 任意穩定源的流量積分

(a) 試用流量積分 (20.9) 式計算任意穩定源的 P^{μ} 和 $J^{\mu\nu}$。對源周圍的漸近平直度規，用 (19.13) 式，並設引力輻射項爲零。

(b) 試證明「輔助方程」(20.10) 式至 (20.12) 式可給出此源總質量-能量 M 和內稟角動量 S^{μ} 的正確答案。

§ 20.3 四維動量和角動量的體積分

在線性理論中，很容易把 P^{μ} 和 $J^{\mu\nu}$ 的面積分轉換爲對源的體積分；爲此，簡單地追溯起初導出面積分的步驟即可［方程 (20.6) 式；練習20.2］。在完全的廣義相對論中，如何類似地把面積分轉換爲體積分呢？只要思路對頭，回答並不困難。只須把完全的 Einstein 場方程轉換爲與線性理論方程 (20.5) 式類似的形式

以 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 表示完全的 Einstein 場方程

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}=16\pi T^{\mu\nu}{}_{\text{有效}} \tag{20.14}$$

此處，$H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 經 (20.3) 式用 $h_{\mu\nu}$ 定義，又 $h_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}$，即使在源內部深處 $|h_{\mu\nu}|$ 仍 $\gtrsim 1$。這種形式的 Einstein方程，與線性理論一樣，可把 Guass 流量積分轉換爲體積分：

在完全廣義相對論中四維動量與角動量的體積分

$$P^{\mu}=\frac{1}{16\pi}\oint H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha}\,d^2S_j=\frac{1}{16\pi}\int H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha j}\,d^3x=\frac{1}{16\pi}\int H^{\mu\alpha 0\beta}{}_{,\alpha\beta}d^3x$$
$$=\int T^{\mu 0}_{\text{有效}}d^3x。 \tag{20.15}$$

類似有

$$J^{\mu\nu}=\int(x^{\mu}T^{\nu 0}_{\text{有效}}-x^{\nu}T^{\mu 0}_{\text{有效}})d^3x。 \tag{20.16}$$

[轉換的關鍵是在（20.14）式中用偏微商而不用協變微商。]如同縱貫前面的討論一樣，在這些體積分中，遠離源處的坐標必須變爲漸近 Lorentz 坐標（$g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}$）.

憶及 $H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}$ 是 Einstein 曲率張量（20.5）式的線性近似，即可算出 $T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$的形式。定義非線性修正爲

$$16\pi t^{\mu\nu}\equiv H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}-2G^{\mu\nu}。\tag{20.17}$$

定義 $t^{\mu\nu}$（脅强-能量贋張量）

（用 $g_{\mu\nu}$ 或 $h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}$ 可算出 $t^{\mu\nu}$，計算是直截了當的但却是冗長的。在本書中根本用不到這些修正的精確表述。）於是，Einstein 方程可寫爲

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}=16\pi t^{\mu\nu}+2G^{\mu\nu}\ =16\pi(t^{\mu\nu}+T^{\mu\nu}),$$

因此

$$T^{\mu\nu}_{\text{有效}}=T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}。\tag{20.18}$$

定義 $T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$

量 $t^{\mu\nu}$ 有時稱爲「引力場的脅强-能量贋張量」。因爲 $H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}$ 對於 ν 和 β 是反對稱的，所以 Einstein場方程（20.14）式意味着

$$T^{\mu\nu}_{\text{有效}}=(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})_{,\nu}=0。\tag{20.19}$$

$T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$ 的守恒定律

這組方程與 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ 等效，但是以偏微商而不是以協變微商寫出的——正是這一點使得體積分與面積分得以相互轉換。

所有這些量 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$, $T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$ 和 $t^{\mu\nu}$，它們的定義以及是否存在都取決於坐標的選擇；獨立於坐標，它們就不復存在；它們既不是張量的分量，也不是任何其他幾何客體的分量。與此相應，包含 $T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$和 $t^{\mu\nu}$的諸方程（20.14）式至（20.19）式都不具有幾何的、獨立於坐標的意義；它們並非「協變張量方程」。雖然如此，仍存在着適當的不變性，使得在普遍的坐標變換下，在源外遠處的漸近平直區域中，可賦予體積分（20.15）式和（20.16）式 P^{μ} 和 $J^{\mu\nu}$ 值以幾何的、獨立於坐標的意義。儘管這種不變性在體積分自身中難於看出，但從面積分形式（20.9）式却一目了然，即任何坐標變換都只會改變內部某些空間有限區域的坐標，而不會影響積分值。對於在遙遠的漸近平直區域中的坐標變換，線性理論確保，在 Lorentz 變換下，P^{μ} 和 $J^{\mu\nu}$ 的積分將與狹義相對論張量一樣的變換，並且在無限小的坐標變換（規範變化）下，它們將是不變量。

$H^{\mu\alpha\nu\beta}$, $t^{\mu\nu}$ 和 $T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$ 是取決於坐標的客體

由於 $t^{\mu\nu}$ 不是張量的分量，它們在某一坐標系中在某點可以爲零，而在另一坐標系中在該點則可不爲零。由此導致引力場局域能量密度 t^{00} 的定義含混不

$H^{\mu\alpha\nu\beta}$, $t^{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$ 另一種等價的好型式

清，這與前述 $t^{\mu\nu}$ 定義中存在的含混不清相對應。顯然，在漸近弱場區與原來 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 一致的任何量 $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\text{新}}$，將與 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 經面積分 (20.9) 式給出 P^μ 和 $J^{\mu\nu}$ 的值那樣，給出同樣的值。Landau 和 Lifshitz (1962; §100) 作了一個特別方便的選擇，他們定義

(1) $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{L-L}$

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{L-L}=\mathfrak{g}^{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}-\mathfrak{g}^{\alpha\nu}\mathfrak{g}^{\mu\beta}, \tag{20.20}$$

式中 $\mathfrak{g}^{\mu\nu}\equiv(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}$. Landau 和 Lifshitz 證明 Einstein 方程可以寫成下述形式

(2) $t^{\alpha\beta}_{L-L}$

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{L-L,\alpha\beta}=16\pi(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}_{L-L}), \tag{20.21}$$

式中 Landau-Lifshitz 贋張量的諸分量

$$\begin{aligned}(-g)t^{\alpha\beta}_{L-L}=\frac{1}{16\pi}\Big\{&\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}\mathfrak{g}^{\lambda\mu}{}_{,\mu}-\mathfrak{g}^{\alpha\lambda}{}_{,\lambda}\mathfrak{g}^{\beta\mu}{}_{,\mu}+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}\mathfrak{g}^{\lambda\nu}{}_{,\rho}\mathfrak{g}^{\rho\mu}{}_{,\nu}\\&-(g^{\alpha\lambda}g_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}{}_{,\rho}\mathfrak{g}^{\mu\rho}{}_{,\lambda}+g^{\beta\lambda}g_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\alpha\nu}{}_{,\rho}\mathfrak{g}^{\mu\rho}{}_{,\lambda})+g_{\lambda\mu}g^{\nu\rho}\mathfrak{g}^{\alpha\lambda}{}_{,\nu}\mathfrak{g}^{\beta\mu}{}_{,\rho}\\&+\frac{1}{8}(2g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}-g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu})(2g_{\nu\rho}g_{\sigma\tau}-g_{\rho\sigma}g_{\nu\tau})\mathfrak{g}^{\nu\tau}{}_{,\lambda}\mathfrak{g}^{\rho\sigma}{}_{,\mu}\Big\}\end{aligned} \tag{20.22}$$

對於度規的一階微商是明確的二次式。(Einstein 也給出過一個具有這種性質的贋張量 $t_E{}^\mu{}_\nu$，但它不對稱．因此不能導致對 $J^{\mu\nu}$ 的積分。) 因爲 $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{L-L}$ 具有與 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 同樣的對稱性，並在遠離源處與 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 相等 (練習 20.4)，又因爲用 $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{L-L}$ 表述的場方程 (20.21) 式與用 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ 表示的場方程具有同樣形式，由此得出

(3) $T^{\mu\nu}_{L-L\text{有效}}$

$$T^{\mu\nu}_{L-L\text{有效}}\equiv(-g)\,(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}_{L-L}) \tag{20.23a}$$

具有 $T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$ 的全部性質，$T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$ 是在本節前面引入的：

$$T^{\mu\nu}_{L-L\text{有效},\nu}=0, \tag{20.23b}$$

$$P^\mu=\int T^{\mu 0}_{L-L\text{有效}}d^3x, \tag{20.23c}$$

$$J^{\mu\nu}=\int(x^\mu T^{\nu 0}_{L-L\text{有效}}-x^\nu T^{\mu 0}_{L-L\text{有效}})d^3x。 \tag{20.23d}$$

練習

練習 20.4 遠離源處 $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{L-L}$ 的形式

試證明 (20.20) 式中的實體 $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{L-L}$ 在源外遠處的弱場區化爲 (20.3) 式的 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$.

§20.4 爲什麼引力場的能量不能局域化

考慮一個三維體積元 $d\Sigma_\nu$，計算在此三維體積元內「引力場」對能量-動

量四維矢量的貢獻，計算中可採用上節所討論的贋張量 $t^{\mu\nu}$ 或贋張量 $t^{\mu\nu}_{L-L}$。由此得出

$$\mathbf{p}=\mathbf{e}_\mu t^{\mu\nu}d\Sigma_\nu$$

或

$$\mathbf{p}=\mathbf{e}_\mu t^{\mu\nu}_{L-L}d\Sigma_\nu。$$

對嗎？不對，問題是錯誤的，動機、結果、概念都是錯誤的。

在一個三維體積元中尋求電磁能量和電磁動量的數量是有意義的。首先，有一個計算此量的公式也僅此一個。其次，更重要的是，從原則上說該能量-動量是「有重量」的，它使空間彎曲。它在 Einstein 場方程的右側作爲源項。它引起了通過所研究空間區域的二條相鄰世界線的相對短程線偏離。它是可以觀測的。但「局域引力能量-動量」並不具有這些性質中的任何一個。對於它的計算不存在唯一的公式，而是有許多頗爲不同的公式。上面引述的兩個公式只是無數公式之二。而且，「局域引力能量-動量」不具有重量。它不能使空間彎曲。它不能作爲 Einstein 場方程右側的源項。它不能使通過所研究空間區域的二條相鄰世界線產生任何相對的短程線偏離。它是不可觀測的。

爲什麼不能定義引力場的局域能量-動量

任何爲「局域引力能量-動量」尋找有魔力的公式的人，都是在爲錯誤的問題尋求正確的答案。不平的是，在研究者們認識到這一事業毫無意義之前，爲了試圖「回答這個問題」已經虛擲了大量的時間和心血。直到最後，超乎一切數學論證之上，人們終於意識到 Einstein 等效原理的質樸而堅如磐石的力量。在任何給定的局域中人們總可以找到一個參照系，在其中所有的局域「引力場」（所有的 Christoffel符號，所有的 $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$）都消失了。沒有Γ意味着沒有「引力場」，而沒有局域引力場意味着沒有「局域引力能量-動量」。

沒有人否認或企圖否認引力對引力相互作用系統的質量－能量是有貢獻的，地-月系統的質量-能量小於兩者無限分離時的系統所具有的質量-能量。中子星的質量-能量小於無限分開的同樣數目重子的質量-能量。在有引力波集中的空的空間區域周圍，存在着淨吸引力，表示在該空間區域有正的淨質量-能量（參看第35章）。爭論不在於引力能是否存在，而是引力能能否局域化。它是不可能局域化的。等效原理禁止它局域化。

注視着一塊充滿瘤贅和鼓包的老土豆。用橙色筆標上「北極」和「赤道」。赤道長度遠不等於北極到赤道距離的2π倍。解釋很簡單：因爲「彎曲」，正如

地-月系統質量虧損（或者中子星的質量虧損，或引力波所占據空間區域的質量過剩）的解釋也很簡單：因爲「引力」。但是，試圖以任何一種唯一正確的方式，把上述第一種情形中赤道長度的虧損，或其他情形中的質量虧損，歸之於不同成分的流形（第一種情形是二維流形，其他情形是三維情形）是不可能的。考察土豆表面上一小區域，該處的幾何是局域平直的，在三個引力系統的任何一個中，考察空間一小區域，取適當的坐標系，該處無引力場。人們正在考察的全部效應是一種整體效應，而不是一種局域。這就是數學大聲疾呼的內容，這就是 $t^{\mu\nu}$ 非唯一性的教訓。

§ 20.5 總四維動量和角動量守恒定律

考慮一個系統，例如銀河系或太陽系，它們是由許多受引力作用的天體組成的。其中一些天體可能是高度相對論的（黑洞；中子星），而另一些天體並非如此。但是，要求天體之間區域的空時近似平直（引力很弱）——實際上對平直的要求是使人們可以用一個（幾乎）總體上是慣性的坐標系，覆蓋整個系統，而只把每個天體附近引力可能較強的小區域除外，僅當在天體之間的區域中，Newton 引力勢 $\Phi \approx \frac{1}{2}(\eta_{00}-g_{00})$ 很小：

$$\Phi_{\text{天體間}} \sim \frac{(\text{系統的質量})}{(\text{系統的半徑})} \ll 1$$

時，這種坐標系才可能存在。太陽系確實滿足這一條件（$\Phi_{\text{天體間}} \sim 10^{-7}$），銀河系（$\Phi_{\text{天體間}} \sim 10^{-6}$）和星系團（$\Phi_{\text{天體間}} \sim 10^{-6}$）也都滿足這一條件；但是，宇宙作為一個整體並不滿足這一條件（$\Phi_{\text{天體間}} \sim 1$）！

在計算系統總四維動量的體積分時，把體積分割爲包含每一個物體的區域（記爲「A」）加上物體之間的區域；忽略物體間幾乎平直區域中贋張量的貢獻：

受引力作用的物體系統的總四維動量和角動量

$$\begin{aligned} P^{\mu}_{\text{系統}} &= \sum_A \int_A T^{\mu 0}_{\text{有效}} d^3x + \int_{\substack{\text{物體間}\\ \text{區域}}} T^{\mu 0}_{\text{有效}} d^3x \\ &= \sum_A P^{\mu}_A + \int_{\substack{\text{物體間}\\ \text{區域}}} T^{\mu 0} d^3x \text{。} \end{aligned} \tag{20.24a}$$

因爲每個物體周圍的空時是漸近平直的，所以 $P_A{}^{\mu}$ 是在物體 A 附近的實驗者用引力測出的物體 A 的四維動量。$T^{\mu 0}$ 在物體之間區域的積分是其中任何氣體

，粒子或磁場對總四維動量的貢獻。角動量可類似地分解爲

$$J^{\mu\nu}_{\text{系統}}=\sum_A J^{\mu\nu}_A+\int_{\substack{\text{物體間}\\ \text{區域}}}(x^\mu T^{\nu 0}-x^\nu T^{\mu 0})d^3x。\qquad(20.24b)$$

用運算的術語來說，這些分解表明，由系統之外的實驗者用引力測出的系統總四維動量和角動量，等於在每個物體附近的實驗者用引力測出的各個物體的 P^μ 和 $J^{\mu\nu}$ 之和，再加上物體之間的物質和場所作出的通常狹義相對論類型的貢獻。即使其中某些物體以近於光的速度在系統內猛衝，上面的論述仍是正確的；即它們將與任何其他物體在同等的基礎上，以其引力測定的 P^μ 和 $J^{\mu\nu}$，對系統總的 P^μ 和 $J^{\mu\nu}$ 作出貢獻！

總四維動量和角動量的變化率

用在某個漸近 Lorentz 參照系中靜止的二維曲面 S 包圍這個漸近平直的系統，於是，S 內四維動量和角動量的變化率（在 S 靜止系中測定），爲：

(1)表爲 $T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$ 的流量積分

$$\frac{dP^\mu}{dt}=\frac{d}{dt}\int T^{\mu 0}_{\text{有效}}\,d^3x=\int T^{\mu 0}_{\text{有效},0}d^3x=-\int T^{\mu j}_{\text{有效},j}d^3x$$
$$=-\oint T^{\mu j}_{\text{有效}}d^2S_j\,,\qquad(20.25)$$

類似有

$$\frac{dJ^{\mu\nu}}{dt}=-\oint_{S_2}(x^\mu T^{\nu j}_{\text{有效}}-x^\nu T^{\mu j}_{\text{有效}})d^2S_j。\qquad(20.26)$$

盡管在物體之間的區域內和系統之外，贋張量 $t^{\mu\nu}$ 對總四維動量和角動量的貢獻是微不足道的（根據假定），但是它通過引力波對時間微商 dP^μ/dt 和 $dJ^{\mu\nu}/dt$ 的貢獻，在天文時間內累加起來，可能很重要。因而，在流量積分（20.25）式和（20.26）式中，此項不可忽略。

在計算這些流量積分時，採用 $T^{\mu\nu}_{\text{有效}}$ 的 Landau-Lifshitz 形式特別方便，因爲這種形式不包含度規的二階微商。於是，令

$$T^{\mu\nu}_{\text{有效}}=(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}_{L\text{-}L})\approx(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}_{L\text{-}L})\,,$$

式中 $t^{\mu\nu}_{L\text{-}L}$ 由（20.22）式給出。只有在這距離 r 處按 $1/r^2$ 或 $1/r^3$ 衰減的 $t^{\mu\nu}_{L\text{-}L}$ 的那些部份才能夠對流量積分（20.25）式和（20.26）式作出貢獻。對於靜態解 [$g_{\mu\nu}\sim$常數$+O(1/r)$]，$t^{\mu\nu}_{L\text{-}L}$ 按 $1/r^4$ 衰減。因此，唯一的貢獻來自度規的動力學部份，它們在遠距離處完全取引力波形式，第35章對引力波的研究將表明，當在幾個波長的範圍對 $t^{\mu\nu}_{L\text{-}L}$ 取平均時，它變成波的脅强-能量張量 $T^{(\text{引力波})\mu\nu}$，它具有人們要求於任何脅强-能量張量的全部性質。（例如，通過

Einstein 方程 $G^{(背景)\mu\nu}=8\pi T^{(引力波)\mu\nu}$，它對波在其中傳播的空時產生「背景」曲率）。另外，在計算流量積分（20.25）式（20.26）式之前，在幾個波長上對 $t^{\mu\nu}_{L-L}$ 取平均不會影響積分的值。因此，在這些積分中，可以自由地作代換

$$T^{\mu\nu}_{有效}=T^{\mu\nu}+T^{(引力波)\mu\nu},$$

從而得出

(2)表爲 $T^{\mu\nu}+T^{(引力波)\mu\nu}$ 的流量積分

$$-\frac{dP^\mu}{dt}=\oint_S (T^{\mu j}+T^{(引力波)\mu j})d^2S_j, \tag{20.27}$$

$$-\frac{dJ^{\mu\nu}}{dt}=\oint_S [x^\mu(T^{\nu j}+T^{(引力波)\nu j})-x^\nu(T^{\mu j}+T^{(引力波)\mu j})]d^2S_j。 \tag{20.28}$$

這些方程是在圍繞系統的漸近平直空時中的張量方程。涉及的全部實張量及其他非張量實體均已消失。

（20.27）式和（20.28）式表明，用引力波方法測量時，系統四維動量和角動量的損失率，精確地等於物質、場和引力波從系統帶走的四維動量和角動量的速率。

當人們設想從遠處把粒子拋入高度相對論物體（例如，旋轉中子星）而改變其四維動量或角動量時［參看，例如，Hartle (1970)］，在這類思維實驗中，上述定理是非常有用的。

練習

練習 20.5 在 Newton 極限下的總質量-能量

（a）在下述近似的 Newton 度規下，試計算 $t^{\alpha\beta}_{L-L}$:

$$ds^2=-(1+2\Phi)dt^2+(1-2\Phi)\delta_{jk}dx^jdx^k$$

（見 §18.4）。假設源緩慢地變化，使得與空間微商相比，Φ 的時間微商可以忽略。［答案：

$$t^{00}_{L-L}=-\frac{7}{8\pi}\Phi_{,j}\Phi_{,j},$$

$$t^{0j}_{L-L}=0,$$

$$t^{jk}_{L-L}=\frac{1}{4\pi}(\Phi_{,j}\Phi_{,k}-\frac{1}{2}\delta_{jk}\Phi_{,l}\Phi_{,l})。 \quad] \tag{20.29}$$

（注意：此處給出的 t^{jk}_{L-L} 是「Newton 引力場的脅強張量」；參看練習39.5和39.6.）

（b）設引力場的源爲理想流體且有

$$T^{\mu\nu}=(\rho+P)u^\mu u^\nu+Pg^{\mu\nu}, \quad P/\rho\sim v^2\equiv(dx/dt)^2\sim|\Phi|。$$

設 Newton 勢滿足源方程

$$\Phi_{,jj}=4\pi\rho。$$

試證明源的能量爲

$$\begin{aligned}P^0&=\int(T^{00}+t^{00})(-g)d^3x\\&=\int[\underbrace{\rho/(1-v^2)^{1/2}}_{\substack{\uparrow\\[\text{Lorentz}\\\text{收縮因子}]}}+\underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\substack{\uparrow\\[\text{動能}]}}+\underbrace{\frac{1}{2}\rho\Phi}_{\substack{\uparrow\\[\text{勢能}]}}]\underbrace{(g_{xx}g_{yy}g_{zz})^{1/2}\,dxdydz}_{\substack{\uparrow\\[\text{固有體積}]}}\end{aligned}\qquad(20.30)$$

＋高階修正項。

(c) 試證明「運動方程」$T^{\mu\nu}_{{}_{L-L}\text{有效},\nu}=0$ 將簡化爲 Newton 流體動力學的標準方程 (16.3) 式。

---

§20.6　從場方程導出運動方程

在除了無源的電磁場外，處處空無一物的空間中，即在

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}g_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\right)\qquad(20.32)$$

的條件下，考慮 Einstein 場方程

$$\boldsymbol{G}=8\pi\boldsymbol{T}\qquad(20.31)$$

（參看 §5.6 中電磁場脅强-能量張量的表達式）。爲了從 (20.31) 式預測幾何怎樣隨時間變化，必須知道電磁場如何隨時間變化。場可以表爲四維勢的「外微商」，

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{dA}\text{（用形式的語言）}$$

或

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\text{（用分量的語言），}\qquad(20.33)$$

場隨時間的變化率由 Maxwell 方程確定

$$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F}=0$$

或

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0。\qquad(20.34)$$

從 Einstein 場方程導出眞空中的 Maxwell 方程

如果說，由 Maxwell 方程預測 Maxwell 場隨時間的演變，由 Einstein 方程預測 Einstein 場隨時間的演變，似乎是公平的勞動分工，那麼，下述發現會令人新奇而驚訝：即 Einstein 方程 (20.31) 式加上 Maxwell 脅强-能量的表達式 (20.32) 式，可以同時完成上面兩項工作。而並非必須給出Maxwell「運動方程」(20.34) 式。由 (20.31) 式加上 (20.32) 式即可重新導出該式。證明可分五步進行（參看練習 3.18 和 §5.10）。第一步：Bianchi 恒等式 $\nabla\cdot\mathbf{G}\equiv 0$ 意味着能量-動量守恒 $\nabla\cdot\mathbf{T}=0$。第二步：用分量語言把守恒表爲下述形式：

$$0=8\pi T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=2F^{\mu\alpha}{}_{;\nu}g_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}+2F^{\mu\alpha}g_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}{}_{;\nu}$$
$$-g^{\mu\nu}F_{\sigma\tau;\nu}F^{\sigma\tau}。 \tag{20.35}$$

第三步：保持中間項不變，重新安排首項使之與末項一樣帶有因子 $F^{\sigma\tau}$，然後在首項中把 $F^{\nu\beta}$ 的指數 $\nu\beta$ 依次代換爲 $\sigma\tau$ 和 $\tau\sigma$，把該項分解爲

$$\begin{aligned}&F^{\mu\alpha}{}_{;\sigma}g_{\alpha\tau}F^{\sigma\tau}+F^{\mu\alpha}{}_{;\tau}g_{\alpha\sigma}F^{\tau\sigma}\\&=(F^{\mu}{}_{\tau;\sigma}-F^{\mu}{}_{\sigma;\tau})F^{\sigma\tau}\\&=g^{\mu\nu}(F_{\nu\tau;\sigma}+F_{\sigma\nu;\tau})F^{\sigma\tau}。\end{aligned}\tag{20.36}$$

第四步：把 (20.35) 式的首項與末項合併，得到

$$g^{\mu\nu}(F_{\nu\tau;\sigma}+F_{\sigma\nu;\tau}+F_{\tau\sigma;\nu})F^{\sigma\tau}。 \tag{20.37}$$

場量的微商指數按循環次序。寫出協變微商的顯式即可看出，上述情況宣告與系數 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\tau}$ 有關的所有項均失效。因而可用通常的微商取代協變微商。另外，對於場，當人們以勢代替表達式 (20.33) 式時，這三個微商彼此完全抵消，結果，在守恒定律 (20.35) 式中，除中間項外別無所有，即對於下述四個量 ($\beta=0,1,2,3$)

$$F^{\beta\nu}{}_{;\nu} \tag{20.39}$$

給出了四個關係式 ($\mu=0,1,2,3$)

$$F^{\mu}{}_{\beta}F^{\beta\nu}{}_{;\nu}=0。 \tag{20.38}$$

第五步：對於 (20.39) 式的四個未知數，(20.38) 式的四個方程的系數行列式之值爲

$$\begin{vmatrix}F^0{}_0F^0{}_1F^0{}_2F^0{}_3\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\F^3{}_0F^3{}_1F^3{}_2F^3{}_3\end{vmatrix}=-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2 \tag{20.40}$$

（參看練習 20.6 (i)）。在一般情況下，這一四變量 (t,x,y,z) 函數在一個或多個超曲面上變爲零；但在任一此類超曲面之外（即在空時中的「正常點」上）該函數不爲零。在所有這些正常點上，具有非零係數行列式的四元線性方程組（20.38）式的解即（20.39）式四個未知數均爲零；這就是說，作爲 Einstein 場方程（20.31）式和脅强-能量張量表達式（20.32）式的直接推論，Maxwell「運動方程」

$$F^{\beta\nu}{}_{;\nu}=0$$

是滿足和必須滿足的。在特殊情況可能有相反的例子（見練習 20.8）；但在一般情況下，無須援引 Maxwell 運動方程；它可從 Einstein 場方程導出。

現在，從 Maxwell 場自身的動力學轉向在 Maxwell 場影響下運動的帶電粒子的動力學。對於 Lorentz 運動方程無需比 Maxwell 運動方程作更多的額外的思慮。反之，從 Einstein 場方程可再次得出 Lorentz 方程，或者更直接地，從 Einstein 場方程的結果能量-動量局域守恒原理，導出 Lorentz 方程。

從 Einstein 場方程導出 Lorentz 力方程

留意粒子從 $t=t$ 到 $t=t+\Delta t$ 的世界線（圖 20.1）。圍繞該世界線作一「世界管」。然後，在時間坐標的每一個值 t，把粒子位置取爲中心；圍繞此中心作一半徑爲 ϵ 的球；注意這些前後相繼的球如何掃過所需的世界管。在時刻 t 和 $t+\Delta t$，給世界管戴上「帽子」。這兩個帽子，連同世界管自身，劃出了一個空時區域，其中的能量和動量既不能創生也不能消滅（用第 15 章 Bianchi 恒等式的語言來說，是「不產生轉矩」）。因此，經「頂端」帽子流出的能量-動量必須等於經「底端」帽子流入的能量-動量，加上由於Maxwell 場穿過世界管帶入的能量-動量。與在平直空時中所作的那樣，出於上述分析，最終可以導出基本形式的 Lorentz 運動方程（參看第 3 章和第 4 章），爲

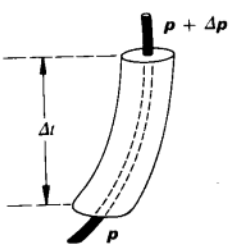


圖 20.1
「世界管」。粒子四維動量的變化決定於穿過世界管邊界的四維動量流。

$$d\mathbf{p}/d\tau = e\langle \mathbf{F}, \mathbf{u}\rangle \qquad \text{（形式的語言）}$$

或者在彎曲空時中，協變形式的 Lorentz 方程爲

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{p} = m\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = e\langle \mathbf{F}, \mathbf{u}\rangle \qquad \text{（形式的語言）}$$

或

$$m\left[\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right] = eF^\alpha{}_\beta\frac{dx^\beta}{d\tau} \qquad \text{（分量的語言）。} \quad (20.41)$$

「最終可以導出 Lorentz 運動方程」——但這只是在克服征途中許多原則的疑難問題之後。如果懂得了怎樣才能完全精確地完成能量-動量平衡的計算，那麼，就懂得了什麼是粒子！在全部物理學中，幾乎沒有別的計算像它這樣，曾經被從 Lorentz 及其前輩到 Dirac 和 Rohrlich 等如此衆多的第一流研究家以如此衆多的方式作過［爲了進一步地了解，可以參看 Teitelboim (1970, 1971) 的文獻］。在爭論中，有兩點進展永遠引起人們的關注。(1)粒子按照 Lorentz 力定律 (20.41) 式對場作出的響應。該場是外部源及粒子本身所作的貢獻之和。如何計算粒子產生的場對自身的作用呢？既然在 (20.41) 式「實驗質量」m的各種效應中尚未包括粒子場對自身的作用，因而這個力可按粒子產生的推遲場與超前場的差值之半來計算。（對於引力輻射的發射者，相應問題的更詳盡討論，可參看 §36.11）。此差值無奇點，在世界線上，它取下述簡單值［對於一般情況，下式對點粒子適用，對有限大小的粒子，則當且僅當在光穿過粒子自身的時間內，粒子速度的改變量與光速相比可以忽略時才可應用下式。參看，例如，Burke (1970)］

粒子受自身電磁場的作用（「輻射阻尼」）

$$\frac{1}{2}(F_{\text{推遲}} - F_{\text{超前}})^{\mu\nu} = \frac{2e}{3}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d^3x^\nu}{d\tau^3} - \frac{d^3x^\mu}{d\tau^3}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)。 \qquad (20.42)$$

每一種可以接受的思路總是導致表達式 (20.42) 式。它也代表着再現早已熟知的並經徹底檢驗的輻射阻尼定律所需要的場。(2)「無限自能」。在一個靜止粒子的周圍，或者在一處於任意運動狀態的粒子附近，場爲 e/r^2，場的能量爲

點粒子的無限自能

$$(1/8\pi)\int_{r_{\text{極小}}}^{\epsilon}(e/r^2)^2 4\pi r^2 dr = (e^2/2)(r_{\text{極小}}^{-1} - \epsilon^{-1})。 \qquad (20.43)$$

當允許 $r_{\text{極小}}$ 趨於零時，此表達式發散。爲了克服這個困難，通過總是出現「自能」與「裸質量」之和的方式來安排能量平衡的計算，可以想像，這兩項各自隨 $r_{\text{極小}}$ 趨於零而「趨於無窮」，但兩者之和應與「實驗質量」相等並應保持有限，當然，粒子都不是經典客體，必須在粒子水準上作適當的能量計算。比較方便的是把兩個無窮項隱藏起來，——但是它們仍然存在，並且在對粒子

結構有所了解以前將始終存在。

在從 Maxwell 和 Lorentz 運動方程轉向最後的例子（推導不帶電粒子的短程線運動方程）之前，提出「從 Einstein 場方程導出運動方程」整個程序的時機來到了嗎？首先，當它確實來自四維動量守恒定律這樣基本的和早已確立的原理時，說它來自「Einstein 場方程」（甚至進一步說，來自「Einstein 場方程組」），這難道不是浮誇自負的吹噓嗎？無可爭辯的歷史事實是，這個守恒原理早於幾何動力學，同樣，它也早於電動力學和所有其他已經確立的場的理論。但是，只有 Einstein 理論（沒有別的理論）能與此守恒原理結爲一體，只是在這裏，能量-動量守恒才表現爲世界機器內部運轉的完全自動的結果（能量密度與轉矩相聯繫，而轉矩自動守恒，參看第17章）。由 Einstein 理論可以導出粒子的運動方程。由Maxwell理論却不行。因而，無法阻止對一個電荷施加超過 Lorentz 力的外力，也不能阻止按特殊方式施加外力而使電荷沿某些指定的世界線運動（引擎驅動源）。把注意力從遵循 Lorentz 運動方程的一世界線轉移到另一不遵從它的世界線不會給 Maxwell 方程組造成任何困難。在廣義相對論中則完全相反。從正確的世界線（短程線）轉移到錯誤的世界線時，會在滿足 Einstein 場方程的正確世界線的領域，和不滿足Einstein 場方程的其他世界線之間造成差異。

爲什麼把運動方程看作 Einstein 場方程的結果是正確的

Maxwell 場方程組的構成使它們自動滿足並要求電荷守恒；但並非一切東西都有電荷。Einstein 場方程的構成使它自動滿足並要求動量-能量守恒；而一切東西都具有能量。「外」力的干預對於 Maxwell 場方程組是無關緊要的，因爲外力決不危及電荷守恒原理。Einstein 場方程關心每一個力，因爲每一個力都是能量交換的媒介。

電磁學的座右銘是「我把在此處的全部電荷都計算在內」。一切不帶電荷的均不予理睬。

「我稱量在這裏的一切」則是空時曲率的座右銘。沒有任何物理實體能逃脫這種監視。

那麼，爲什麼說一個物體的短程線運動方程是在「Einstein 幾何動力學場方程」基礎上導出的，而不說是在「四維動量守恒原理」基礎上導出的呢？因爲幾何通過它的曲率對每種形式的質量-能量作出響應。尤其是因爲由物體外的幾何可以說出內部的質量-能量，而不必涉及一切有關內部結構的問題（劇烈運動，未知力，彎曲扭折和甚至是多連通的幾何）。

如果說對於「從場方程」導出粒子運動方程計劃的一種反對意見已經解除，那麼現在就是處理另一種自然的反對意見的時候了：試圖把涉及連續分布的場方程用於一個「粒子」（理想化爲一個點），是否存在着內在矛盾呢？回答

在推導運動方程時，怎樣才能避開粒子結構的複雜性：「外部觀點」

是：處理一個點時，的確存在着矛盾。因此不要去處理一個點。根本不去涉及其內部結構。通過觀察物體外部的幾何來分析其運動。外部幾何足以提供跟踪運動所需要的全部信息。

此處已可看出與上面所簡述的推導 Lorentz 運動方程的區別。在那裏，(1)並未利用外部幾何作爲內部運動的指示者。(2)曾經設想過一種薄記，記載電磁能定域的空間。(3)這種薄記引起了粒子內部結構的問題，而這些問題未能滿意的解決。

從 Einstein 場方程推導短程線運動

現在開始用新的幾何動力學的精神作分析。在物體的「Schwarzschild 影響帶」的外圍，標出一個「緩衝地帶」（圖 20.2），它一直延伸到「背景幾何」開始顯著偏離平直的區域。把緩衝地帶的幾何理想化爲一不變源的幾何漸近地（「緩衝帶的邊界 $\mathcal{B}$」）併入在平直空間之中。回顧一不變（即無輻射）源（練習19.3）遠處幾何的性質，就足以得出主要的結論：相對於這個平直空時，並不顧其內部結構，物體應保持靜止，或者以勻速沿直線繼續運動（總四維動量守恒；§20.5）。換言之，它服從短程線運動方程。如果這是在瞬刻之間得到的結論，那麼最好後退一步，重溫一下，以便找出它意味着什麼和它要求什麼。

(1)簡要的推導

(2)謹愼的推導

當物體不存在，而必需單獨考慮背景幾何時，短程線是有明確定義的數學對象。另外，沿此短程線的 Fermi-Walker 移動給出了構造一共動局域慣性系的明確方法（參看 §13.6）。相對於這個參照系，短程線的代表點將永遠在原點保持靜止。

曲率與粒子矩的耦合引起了對短程線運動之偏離

物體的存在將以何種方式改變這一圖象呢？物體具有角動量，質量四極矩和多極矩。它們與背景幾何的生潮加速度（Riemann 曲率）相互作用。這種相互作用取決於這些矩在空間的指向，它沿着某一方向或另一方向把物體從其短程線軌道驅開（參看 §40.9）。運動的這些異常與幾何的異常有密切的聯繫。在理想的數學短程線上及其附近，度規是 Minkowski 度規。在距短程線的位移爲 Riemann 簡正坐標 ξ^1, ξ^2, ξ^3 的一點上（參看 §11.6），度規諸分量與其正則值（$-1, 1, 1, 1$）有所不同，其差值正比於(1)各個 ξ^m 的平方與乘積，(2)背景幾何的 Riemann 曲率張量（生潮加速度）的諸分量。這些二階項在緩衝地帶中產生出對理想情況的偏離，偏離可以象徵性地大約表示爲

$$\delta(\text{度規}) \sim r^2 \cdot R \cdot (\text{二階球諧函數})。 \tag{20.44}$$

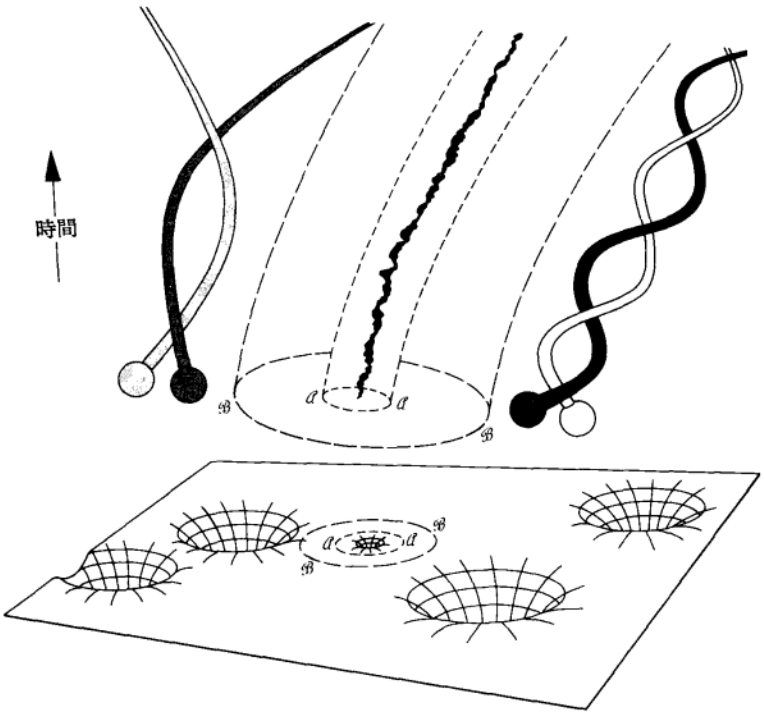


圖 20.2
「緩衝帶」：$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之間的空間殼層，其中的幾何可理想化地當作在漸近平直空間中具有一局域吸引中心（即所研究之物體）的球對稱「Schwarzschild 幾何」。在 $\mathcal{A}$ 之內，是物體的「影響帶」。在一般情況下，該物體不具有任何對稱性，隨着對幾何的研究越來越深入 $\mathcal{A}$ 的內部，發現度規越來越遠地偏離理想的「Schwarzschild 性質」（物體的角動量對度規的效應，四極矩的效應，高階矩的效應）。在 $\mathcal{B}$ 之外，是「背景幾何」。隨着對幾何的研究越來越遠離 $\mathcal{B}$，發現越來越偏離平直性（質量濃縮效應，引力波和其他幾何動力學效應）。

式中 r 是到短程線的距離，R 是曲率張量諸重要分量的大小。物體不僅產生了對於平直性的標準「Schwarzschild」偏離，

$$\delta(\text{度規}) \sim m/r\,, \tag{20.45}$$

而且還有改正項。前者本身（在平直背景中）不會導致對短程線運動的偏離。改正項則可以象徵地表爲

$$\delta(\text{度規})\sim(S/r^2)\ (\text{一階球諧函數}) \tag{20.46}$$

和

$$\delta(\text{度規})\sim(\mathcal{I}/r^3)\ (\text{二階球諧函數}) \tag{20.47}$$

和更高階項。此處 S(厘米^2) 是角動量矢量或「自旋」的典型分量，$\mathcal{I}$(厘米^3) 是慣性矩或四極矩的有代表性的分量（詳見第36章），高階項具有高階係數。

自旋與曲率的耦合

由物體周圍環境（「背景幾何」）產生的生潮加速度以約爲 RS 的力作用於物體的自旋，並以約爲

$$\text{加速度}\ (\text{厘米}^{-1})\sim\frac{R(\text{厘米}^{-2})\ S(\text{厘米}^2)}{m\ (\text{厘米})} \tag{20.48}$$

的加速度使物體偏離短程線運動（參看練習40.8）。換個說法，環境與自旋二者都使幾何扭曲，而這些扭曲一起把物體從它的軌道推開。

度規中有關的兩微擾項之和可以定性地表爲下述形式：

$$\delta g\sim r^2R+S/r^2。 \tag{20.49}$$

當 r 的值約爲

$$r\sim(S/R)^{1/4} \tag{20.50}$$

時，上述求和式取極小值，其大小爲

$$\delta g\sim(SR)^{1/2}。 \tag{20.51}$$

「按照某個預先指定的精度 ϵ 導出短程線運動方程」，這可以定義爲，緩衝帶內的度規在 ϵ 範圍內爲 Minkowski 度規。在此說明性的例子中，這意味着 $(SR)^{1/2}$ 應約爲 ϵ 或更小。因爲背景曲率 R 是背景幾何的特徵，所以對 R 的值是無所作爲的。因而爲了達到上述要求，只能限制物體的質量和矩。在這個例子中，占支配地位的矩是角動量，這就要求物體這一參數的大小應小於下述極限

$$S\sim\epsilon^2/R。 \tag{20.52}$$

顯然，只要物體具有球對稱性（$S=0$, $\mathcal{I}=0$ ，高階矩$=0$），則上式以及對於

高階矩的類似條件是非常容易滿足的。然後，再一次不管角度因子和指數，度規中的微擾可以定性地表爲下述形式

$$\delta g \sim r^2 R + m/r\,, \tag{20.53}$$

而緩衝帶的最好安排是按下述括號取 r 的極小值

$$r_a \leq [r \sim (m/R)^{1/3}] \leq r_s\,。 \tag{20.54}$$

在緩衝帶中，度規與理想 Minkowski 值之差約爲

$$\delta g \sim (m^2 R)^{1/3}\,。 \tag{20.55}$$

爲了使 δg 達到任何預先指定的精度 ϵ，應要求質量小於下述極限值

$$m \sim \epsilon^{3/2} R^{1/2}\,。 \tag{20.56}$$

沒有物體能在空時短程線上運動的含義

任何在複雜背景影響下運動的質量有限的物體，都不能允許這樣的緩衝帶，其幾何能以任意精度接近 Minkowski 值。因此，說這樣一個物體沿着短程世界線運動是不正確的。而說一個具有有限靜止質量的物體沿短程世界線運動也是沒有意義的。這是什麼世界線呢？如果物體是一個黑洞，那麼，在它的「地平線」（俘獲面，單向薄膜；參看第33和第34章）之內，不存在與黑洞外進行的物理過程有關的點。短程世界線處於什麼樣的背景幾何之下呢？談論黑洞「後面」的幾何或「背景」幾何是毫無意義的。

試驗粒子的確是沿背景幾何短程線運動的含義

現在，從某種空時中某一物體的一次運動轉向具有連續單參數的空時族情況，並以物體的質量 m 作爲區分 Einstein 場方程的不同解的參數。在 $m=0$ 的極限下，緩衝帶的大小縮小爲零，緩衝帶中的度規與理想 Minkowski 度規的偏離也趨於零。在此極限下（「試驗粒子」），可以說物體在局域慣性參照系中以勻速沿直線運動，換言之，它在背景幾何中追隨一短程線。此外，背景幾何也是有明確定義的：它是當參數 m 趨於零時空時幾何的極限［參看Infeld 和 Schild（1949）的文獻］。在這個意義下，短程線運動方程可以作爲 Einstein 場方程的必然結果。

帶電試驗粒子在彎曲空時中的運動

「背景」作爲單參數空時族極限的概念，可以推廣到物體不僅有質量，還有電荷，並且周圍空間具有電磁場的情形。這一次，單參數族是由 Einstein-Maxwell 聯立方程組的解組成的。荷質比 e/m 是固定的。質量仍然是可以調整的參數。在 m 趨於零的極限下，剩下的是(1)背景幾何，(2)背景電磁場，

和(3)在此背景下作爲場方程的解的世界線，它應遵循廣義相對論形式的Lorentz運動方程［Chase (1954)］。與此相對照，有一種所謂「引力場和電磁場的統一場論」曾經導出了錯誤的帶電粒子的運動方程［Callaway (1953)］，這是Einstein在他沉思的某個階段中試探性地提出來的，以此作爲他的標準的1915年幾何動力學和 Maxwell 標準電動力學聯合體的可能替代物。據此錯誤的運動方程，不管堆積了多少電荷，都像不帶電荷那樣運動。如果這種理論是正確的話，回旋加速器不能運轉，原子無法存在，就連生命本身也不可能了。

關於從 Einstein 場方程推導運動方程的參考文獻

於是，得出正確的粒子運動方程的能力，已經成爲今天廣義相對論手中的又一張王牌。這樣處理的思想可追溯到 Einstein 和 Grommer (1927) 的文獻。由於物體自旋（當物體具有有限大小時）與背景幾何曲率的相互作用所引起的對短程線運動方程的修正，是 Papapetrou (1951)首先討論的，爾後 Pirani (1956) 作了更完整的討論（見練習 40.8）。有一本關於這個課題的書籍［Infeld 和 Plebanski (1960)］。在 §40.9 將描述短程線運動的修正對月球和行星軌道有什麼影響。由於所研究物體破碎或發出定向輻射束所引起的一些問題，以及一些尚待解決的原則問題，Wheeler 曾加以討論。

當從無限小質量的極限情形轉向有限質量的物體時，沒有比不帶電的黑洞系統更簡單的情形了（第33章）。把無源的 Einstein 方程 $\mathbf{G}=0$ 用於這幾個物體的地平線（參看第34章）之外的空時區域，可以得出這些物體運動的全部情況。因此運動理論是幾何動力學，別無其他。

推導的量子力學限制

必須强調，本節中對於運動的全部考慮都是在經典理論範圍內進行的。在量子物理學的實際世界中，幾何處處經受着不可避免的、自然的零點起伏（第43章）。與任一熟悉的物體（電子或恒星）在很大尺度上產生的曲率相比較，在 Planck 距離尺度上［$L=(\hbar G/c^3)^{1/2}=1.6\times10^{-33}$ 厘米］涉及這些起伏而算出的局域曲率是非常巨大的［$R\sim1/L^2\sim0.4\times10^{66}$ 厘米$^{-2}$］。對這兩種曲率的相互作用還從來沒有作過詳細的分析。這種分析將在大於局域量子起伏的區域中，確定幾何的光滑平均值。相對於這種平均幾何，物體將沿短程線運動：這是一種沒有任何理由懷疑，但也未經證明的預言。

練習

練習 20.6 電磁場的簡單特徵及其奇强-能量强量

(a) 試證明「標量」$-1/2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$（相對於坐標變換爲不變量）和「贋標量」$1/4F_{\alpha\beta}{}^{*}F^{\alpha\beta}$（在坐標變換下除±符號外，本身不發生變化，符號按變換的 Jacobi 行列式的正負定）在任意局域慣性參照系中分別取值 $\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2$ 和 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$（電磁場的「兩個 Lorentz 不變量」）。

(b) 試證明，除了場的兩個 Lorentz 不變量都爲零（即場局域地爲「零」的情況）的例外情況外，Poynting 流量 $(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})/4\pi$ 的數值小於能量密度 $(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi$。

(c) 一帶電木髓球放在棒狀磁鐵的北極附近。試畫出電力線和磁力線的圖樣，並指出電磁場在何處具有「零場」性質。說「零場」是「輻射場」是否合理？

(d) 一平面波沿 z 方向傳播。試證明相應的電磁場處處爲零。

(e) 試證明沿不同方向傳播的兩個單色平面波的迭加場，至多在一測量爲零的點集上爲零。

(f) 在「一般情形」，即在感興趣的點上場 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 不爲零，試證明，在沿着 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 方向以下述速度 v 運動的局域慣性系中觀察場，若

$$v=\tanh\alpha, \tag{20.57}$$

式中速度參數 α 由下式給出

$$\tanh 2\alpha=\frac{(\text{Poynting 流量})}{(\text{能量密度})}=\frac{2|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}|}{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2}, \tag{20.58}$$

則場的 Poynting 流量減爲零。

(g) 試證明，在此新的參照系中，除 E_x 和 B_x 外，電場和磁場的全部分量均可取爲零。

(h) 試證明，由混合表述的諸場分量構成的 4×4 行列式 $F_{\alpha\beta}$ 相對於一般的坐標變換而言是不變量。（提示，利用定理：三個矩陣乘積的行列式等於這三個矩陣行列式的乘積。）

(i) 試證明，在 (f) 所定義的特殊局域慣性參照系中計算上述行列式，其值爲 $-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2$.

(j) 試證明，在此特殊參照系中 Maxwell 脅强-能量張量的形式爲

$$\|T^{\mu}{}_{\nu}\|=\frac{E_x^2+B_x^2}{8\pi}\begin{Vmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&+1&0\\0&0&0&+1\end{Vmatrix} \tag{20.59}$$

(Faraday 張力沿力線；Faraday 壓力與力線成直角)。

(k) 另一種情形，場局域地爲零，試證明，總可以找到一個局域慣性參照系，其中場的形式爲 $\boldsymbol{E}=(0,F,0)$, $\boldsymbol{B}=(0,0,F)$，且脅强-能量張量的值爲

$$\|T^{\mu}{}_{\nu}\|=\frac{F^2}{4\pi}\begin{Vmatrix}-1&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{Vmatrix}\ (\mu\text{ 爲行，}\nu\text{爲例})。 \tag{20.60}$$

(l) 試證明，不管電磁場是否爲零，Maxwell 脅强-能量張量的跡爲零，$T^{\mu}{}_{\mu}=0$，且它的平方是單位矩陣的倍數

$$\begin{aligned}T^{\mu}{}_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\nu}&=\frac{\delta^{\mu}{}_{\nu}}{(8\pi)^2}[(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2)^2+(2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2]\\&=\frac{\delta^{\mu}{}_{\nu}}{(8\pi)^2}[(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)^2-(2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^2]。\end{aligned} \tag{20.61}$$

練習 20.7 脊强-能量張量可以決定電磁場，但其外觀除外

(a) 給定一非零的對稱的 4×4 張量 $T^{\mu\nu}$ ，其跡爲零，$T^{\mu}{}_{\mu}=0$，其平方爲單位矩陣乘以 $M^4/(8\pi)^2$，試證明，分別通過在三維空間中的適當旋轉或適當選擇局域慣性參照系，可以按上述乘數是零（「零情況」）、或爲正，把這個張量轉換爲 (20.60) 式或 (20.59) 式的形式。

(b) 在一般（非零）情況下，在所述的參照系中，試證明 $T^{\mu\nu}$ 是其分量爲

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}\text{（致極）}=(M,0,0)\,,\\ &\boldsymbol{B}\text{（致極）}=(0,0,0)\,。\end{aligned} \tag{20.62}$$

的「致極電磁場」的 Maxwell 張量 $\xi_{\mu\nu}$。並證明它同時也是其分量爲

$$\begin{aligned} &{}^*\boldsymbol{E}\text{（致極）}=(0,0,0)\,,\\ &{}^*\boldsymbol{B}\text{（致極）}=(M,0,0)\,。\end{aligned} \tag{20.63}$$

的「對偶致極場」的 Maxwell 張量 ${}^*\xi_{\mu\nu}$。

(c) 記得在四維空間中對一反對稱的二秩張量（2- 形式）作兩次對偶運算將得出該張量的負值。試由此證明算子 $e^{{}^*\alpha}$（「對偶旋轉」）取值

$$e^{{}^*\alpha}=(\cos\alpha)+(\sin\alpha)^*\,。 \tag{20.64}$$

(d) 試證明，最一般的電磁場在所述參照系中會重新產生非零的張量 $T^{\mu\nu}$，因此在任意坐標系中，該電磁場爲

$$F_{\mu\nu}=e^{{}^*\alpha}\xi_{\mu\nu}\,。 \tag{20.65}$$

(e)試導出零情況下的相應結果。［在某一參照系中定義的，並由此經 (d) 和 (e) 在每一個坐標系中定義的場 $F_{\mu\nu}$，稱爲 $T^{\mu\nu}$ 的「Maxwell 平方根」；$\xi_{\mu\nu}$ 稱爲 $T^{\mu\nu}$ 的「致極 Maxwell 平方根」；角 α 稱爲「電磁場的外觀 (Complexion)」。參看 Misner 和 Wheeler (1957) 的文獻；也可參看引自該文的框 20.1 和框 20.2。］

框 20.1 本徵 Lorentz 變換和對偶旋轉的對照

量	一般的本徵 Lorentz 變換	對偶旋轉
Maxwell 脊强-能量張量的諸分量或場 $\boldsymbol{F}$ 的 "Maxwell 平方"	變 換	不改變
不變量 $\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2$ 和 $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2$	不改變	變 換
組合量 $[(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2)^2+(2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2]=$ $[(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2)^2-(2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^2]$	不改變	不改變

框 20.2　在局域慣性參照系中，一般（非零）電磁場張量 $F=(E,B)$ 的變換

場　值	初 始 值	經簡化對偶旋轉之後
初　值	E, B	E 和 B 垂直，E大於 B
經簡化 Lorentz 變換後	E 和 B 彼此平行並平行 x 軸	E 平行於 x 軸而 $B=0$

練習 20.8　當在一個延展區域內 $(E\cdot B)=0$ 時，Maxwell 方程組不可能由脅强-能量守恒定律導出

對於 Maxwell 方程

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0,$$

可以從 Einstein 方程導出的觀念提供一個反例；或者，更準確地說，當所述 Maxwell 方程組被破壞時，試證明以下兩個條件可以一起滿足(1) Maxwell 脅强-能量張量具有零散度，加上(2) Maxwell 場是四維勢 A_μ 的旋度。［提示：在平直空時範圍內討論這個問題，可以簡化分析而不掩蓋主要之點。對於把一任意加速電荷的推遲場分解爲兩部分的工作，可參看 Teitelboim (1970)的文章。在該文中。把推遲場的第二部分稱爲 $F^{\mu\nu}{}_{II}$，它滿足所述的要求，而且處處在世界線 $(E\cdot B)=0$ 之外，但是不滿足所引述的 Maxwell 方程組。］

練習 20.9　標量場的運動方程作爲 Einstein 場方程的結果

無質量的標量場的脅强-能量張量可取爲

$$T_{\mu\nu}=(1/4\pi)(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}-1/2g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha})。\qquad(20.66)$$

試由 Einstein 場方程導出此標量場的運動方程。

第二十一章　變分原理和初值數據

在自然界中，無論何時發生何種作用，任何變化都使作用量為最小。

Pierre Moreau de Maupertius (1746)

與理論物理的所有其他分支一樣，在引力理論中，問題的正確數學表述，在問題性質許可的範圍內必須是確定的；如果可能的話，還必須保證其解的唯一性。

Vladimir Alexandrovitch Fock (1959)

因為事情原來就是那樣，所在現在它們就是這樣，

Thomas Gold (1972)

邏輯推理微積演算

G. W. Leibniz

本章全屬高階內容。無須前面的高階材料作爲它的準備知識，但第 9—11 章和第13—15章是有用的。作爲框30.1（混主宇宙）和第42，43章的預備知識，本章是必須的。

§ 21.1　動力學需要初值數據

在預告幾何動力學的計劃時，最錯誤同時又是最正確的說法莫過於此：「給定質量-能量分布，由 Einstein 二階方程

$$G = 8\pi T \tag{21.1}$$

解出幾何」。給定空時中的質能分布就解出空時幾何嗎？不對。給定某一時刻產生質能的場及其時間變化率，給定同一時刻空間三維幾何及其時間變化率，

對於 Karel Kuchar, Claudio Teitelboim 和 James York 在本章準備過程中所給與的合作，對於獲准引用 K.K. 的講稿和援引 K.K.（特別是練習 21.10）與 J. Y.〔特別是 (21.87) 式，(21.88) 式和 (21.152) 式〕先前在別處發表的一些結果，謹致謝意。

給定初值數據，預言幾何

就解出在該時刻的空時四維幾何嗎？是的。僅當此時，無需更多的額外規定（需要的只是工作），由幾何動力學方程和場動力學方程，即可預言任何時刻的空時幾何和在此空時中的質量-能量流。簡言之，此即本章將詳加闡述的幾何動力學的固有「計劃」。

或許有人要反駁這一計劃，他指出：求解任一耦合方程組之藝術在於把未知量從已知量或規定量中區分出來。他强調在（21.1）式中已經作出了這種區分。在（21.1）式的右側，是曲率源。左側是曲率的收容項（其形式是人們想要知道的）微商兩次的度規係數。因此，他聲稱：需要作的只是毅然前進，由解這些方程求出度規係數。但是，深入地分析一下方程的結構發現［爲了合理地分析耦合偏微分方程組，請參看 Cartan（1922a）］的文獻，只能作到正確地區分曲率的「源與收容項」，與此同時，人們首次認識到區分「初值數據和未來」更爲主要。這樣，在進行分析前，可先把結果概述如下——Einstein 定律的十個方程中，有四個方程把此時此地的空間曲率和此時此地的質量-能量分布聯繫了起來，其它六個方程則告訴我們這樣確定的幾何將如何演化。

Einstein方程組的十個方程中，有四個是關於初值數據的條件

在確定什麼是應給出的適當的初值數據時，人們發現，最有用的指導原則是 Hilbert 變分原理

$$I=\int \mathcal{L}d^4x=\int L(-g)^{1/2}d^4x$$

$$=\int Ld\ (\text{固有四維體積})=\text{極值} \qquad (21.2)$$

↑
[練習8.16]

或它的 Arnowitt-Deser-Misner（「ADM」）變式（§21.6）及其 Kuchař 所作的推廣（§21.9）。如果要有一個明確定義的極值問題，那麼，由此原理可以最直接地確認：當到處改變「充滿此夾層」的空時幾何（§21.2）時，在邊界上（在初始的類空超曲面上和在最終的類空超曲面上）必須固定住什麼。

在處理彎曲的空的空間時，Lagrange 函數 L（標量函數）或 Lagrange 密度 $\mathcal{L}=(-g)^{1/2}L$（應在坐標體積上積分的量）由幾何單獨確定，但通常地也存在着場，並對 Lagrange 函數作出貢獻；從而

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\text{幾何}}+\mathcal{L}_{\text{場}}=(-g)^{1/2}L;$$

$$L=L_{\text{幾何}}+L_{\text{場}}。 \qquad (21.3)$$

脅强-能量張量的新觀點

場的 Lagrange 函數相對於典型度規係數的變分，證實是得出（即計算）場的對稱脅强-能量張量相應分量的一切途徑之中最爲方便的一個方法(§21.3)。

一計算機，考慮到該場對幾何的影響，並時刻往前計算度規隨時間的演化，就能把它自身的序列關係强加於空時事件之上。在實施中，它會把空時切割成大量類空薄片。它發現，最方便的辦法（§21.4）是分別記錄：(1)各個薄片的三維幾何，(2)用「時間推移函數」(lapse function) N和三維矢量「移位函數」(shift function) N_i 表示一個這樣的薄片與相鄰薄片之間的關係。

各個薄片內在的三維幾何或「同時性」，在它自身之中並由它自身定義了該超曲面內稟的三維 Riemann 曲率；但是爲了完全的說明此超曲面，還必須知道外賦的曲率（§21.5），它說出此超曲面相對於包圍它的四維時空流形是如何彎曲的。

用四維幾何分成空間加時間的說法，Hilbert 的作用量原理取簡單而有用的形式（§21.6）。

在把作用量原理應用於力學的最初等例子中，人們寫出

$$I=\int_{x',y'}^{x'',t''} L(dx/dt,x,t)dt \tag{21.4}$$

並取積分之極值，人們已經懂得所得之「動力學程長」或「動力學位相」或「作用量」，

$$S(x,t)=I_{\text{極值}}, \tag{21.5}$$

是一個重要的量，原因之一是因爲它給出了（乘以因子 $\hbar$）量子力學波函數的位相。此外，該作用量函數對位置的變化率卽所謂動量

$$p=\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}; \tag{21.6}$$

它對時間的變化率（的負值）給出了能量（圖21.1）

$$E=-\partial S(x,t)/\partial t; \tag{21.7}$$

並且，一個波脊系統（波包）的這兩個特徵量之間的關係，

$$E=H(p,x), \tag{21.8}$$

作爲色散關係的Hamilton函數

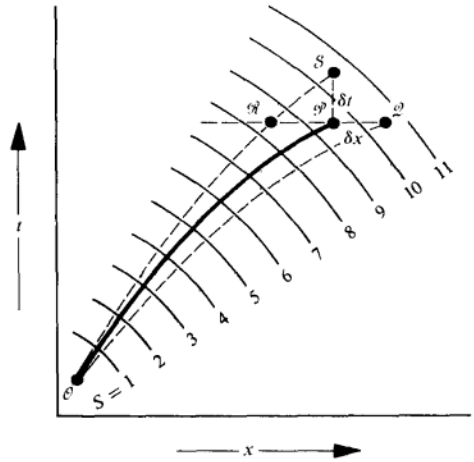
稱爲「色散關係」或什麼別的名字，這是力學的中心課題。

當涉及 Arnowitt-Deser-Misner 表述*中之幾何的動力學時，

---

* 歷史的評述。直到最近，還沒有人知道，在 Hilbert-Palatini 變分原理中，什麼無坐標的幾何-物理量是唯實固定在邊界上的。Dirac 在關於廣義相對論 Hamilton 表述的開拓性工作中，他並未特別注意任何變分原理。他必須把 Hamilton 形式普遍化使其適應廣義相對論，同時引入「一階和二階約束」，並把經典力學中 Poisson 括號推廣。與此相反，在 Arnowitt Deser 和 Misner 的公式中，以變分原理作爲整個處理的基礎，儘管他們也未回答在無坐標幾何-物理量的意義上，在邊界處什麼是固定的。這一工作的巨大報償在於確認（21.40）式的時間推移函數和移位函數是 Lagrange 乘子，

圖 21.1



動量和能量（的負值），看作是「動力學位相」或「作用量」，

$$S(x,t)=I_{極值}(x,t)=\int_{x',t'}^{x,t}L(x,\dot{x},t)dt\text{的極值}，\quad (1)$$

相對位置和時間的變化率；即

$$\delta S=p\delta x-E\delta t。\qquad (2)$$

相對於所沿軌道的變化 $\delta x(t)$, 積分I的變分，由於軌道的最優化已經爲零；因此，所發生的唯一改變是

$$\begin{aligned}\delta S=\delta I_{極值}&=L(x,\dot{x},t)\delta t+\int_{x',t'}^{x+\Delta x,t}\delta L dt\\&=L\delta t+\int_{x',t'}^{x+\Delta x,t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial x}\delta x\right)dt\\&=L\delta t+\frac{\delta L}{\delta\dot{x}}\Delta x+\int_{x',t'}^{x+\Delta x,t}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)}_{\text{由於取極值，應爲零}}\delta x dt。\end{aligned}\qquad (3)$$

當只考慮終點坐標 (x,t) 的變化 δx（軌道從 $\mathcal{OP}$ 變爲 $\mathcal{O2}$）時，人們有 $\Delta x=\delta x$。當只使終點變化 δt（軌道從 $\mathcal{OP}$ 變到 $\mathcal{OS}$）時，人們有 $\Delta x=$（顯示從$\mathcal{P}$到$\mathcal{R}$的變化）$=-\dot{x}\delta t$。對於終點的一般變化，有 $\Delta x=\delta x-\dot{x}\delta t$, 並且

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta x-\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-L\right)\delta t。\qquad (4)$$

由此斷定：通過［比較(2)式與(4)式］所得之關係式即可得出「色散關係」，即

$$\begin{pmatrix}\text{動力學位相隨}\\\text{位置的變化率}\end{pmatrix}=(\text{動量})=p=\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}}\qquad (5)$$

和

$$-\begin{pmatrix}\text{動力學位相隨}\\\text{時間的變化率}\end{pmatrix}=(\text{能量})=E=\dot{x}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-L。\qquad (6)$$

由上兩式消去$\dot{x}$［由(5)式解出$\dot{x}$，把此$\dot{x}$值代入(6)］；於是

$$E=H(p,x,t)\qquad (7)$$

或

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=H\left(\frac{\partial S}{\partial x},x,t\right)。\qquad (8)$$

上述初等分析的每一個特徵，都可在幾何動力學中找到其類似物。

由其係數可以直接地和簡單地給出 Dirac 約束條件。他們未能成功地導出自然而簡單的時間坐標。但是，與此同時 Kuchar 和 York(§21.11)用「外賦時間」的概念達到了這一目標。然而，Arnowitt-Deser-Misner 的方法爲 Sharp, Baierlein 和 Wheeler 的「內稟時間」打開了道路，其中三維幾何在邊界是固定的，並且，三維幾何是有關時間的信息的携帶者；這就直接導致關於Arnowitt, Deser 和 Misner 處理的 Wheeler 「超空間形式」。

人們發現把初始類空超曲面的三維幾何 $^{(3)}\mathfrak{h}$ 和最終類空超曲面的三維幾何 $^{(3)}\mathfrak{h}$ 作爲預先給定的量來考慮是方便的。人們將作用量積分設想爲，相對於充滿這兩個超曲面之間「夾層」的空時選擇，來取極值。如果人們以此方式確定了空時，也就自動地由此確定了這兩個超曲面的原時的分隔。不需要再引入或考慮任何附加的時間變量。這樣，在幾何動力學中的一個概念 $^{(3)}\mathfrak{h}$ 取代了粒子動力學中的兩個量 x 和 t 。作用量 S，在粒子動力學中依賴於 x 和 t，此處則依賴於夾層面的三維幾何；即

作用量依賴於三維幾何

$$S=S(^{(3)}\mathfrak{h})。\tag{21.9}$$

三維幾何的變化改變了作用量。三維幾何中每單位基元變化所引起作用量的變化量爲 δS，它按下式

$$\delta S=\int \pi^{ij}_{\text{眞}}\delta g_{ij}d^3x。\tag{21.10}$$

定義了與幾何動力學坐標 g_{ij} 共軛的「場動量」$\pi^{ij}_{\text{眞}}$。把由 Arnowitt, Deser 和 Misner (ADM) 的幾何動力學正則表述 (§21.7) 得出的上述方程，與初等力學中作用量隨端點發生改變的下述表達式

$$\delta S=p\delta x-E\delta t\tag{21.11}$$

相比較，乍看起來，似乎什麼地方出了差錯，因在 (21.10) 式中沒有明顯地涉及時間。但是，三維幾何本身自動是有關時間信息的載體；從而 (21.10) 式是完整的。此外，除了 $^{(3)}\mathfrak{h}$ 自身所已經携帶的有關時間的信息以外，不僅沒有「時間」變量，也沒有「能量」。這樣，對於「場坐標」或三維幾何種種變化的作用量諸變化率，與它相關的「色散關係」取如下的形式：

$$\mathcal{H}(\pi^{ij},g_{mn})=0,\tag{21.12}$$

而(21.8)式的E項爲零（詳見 §21.7）。Einstein 廣義相對論的全部內容都可以從這一個 Hamilton 函數，或者給它一個更適當的名字「超 Hamilton 函數」抽取出來。［關於 Dirac; Arnowitt, Deser 和 Misner, 以及其他人對於幾何動力學 Hamilton 表述所作的貢獻，請參看 DeWitt (1967a) 1113-1118頁；關於此表述的含義和報償請參看 §21.7 和本章以後各節。］

Hamilton 函數與超 Hamilton 函數的比較

爲了最清楚地指出 Hamilton 函數和超 Hamilton 函數的區別［例如，參看 Kramers (1957)］，可以研究在電磁四維勢爲 $A_\mu(x^\alpha)$ 的場的影響下，帶電粒子在平直空間的運動。用 Hamilton 函數處理，作用量原理導出的運動方程爲：

$$0=\delta I=\delta\int\left[p_i\frac{dx^i}{dt}-H(p_j,x^k,t)\right]dt$$

式中

$$H=-\frac{e}{c}\phi+\left[m^2+\eta^{ij}\left(p_i+\frac{e}{c}A_i\right)\left(p_j+\frac{e}{c}A_j\right)\right]^{1/2}。$$

用超 Hamilton 函數來分析，作用量原理得出的運動方程爲

$$0=\delta I'=\delta\int\left[p_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda}-\mathcal{H}(p_\alpha,x^\beta)\right]d\lambda。$$

此處超 Hamilton 函數由下式給出

$$\mathcal{H}(p_\alpha,x^\beta)=\frac{1}{2}\left[m^2+\eta^{\mu\nu}\left(p_\mu+\frac{e}{c}A_\mu\right)\left(p_\nu+\frac{e}{c}A_\nu\right)\right]。$$

變分原理給出諸變化率的 Hamilton 方程爲

$$dx^\alpha/d\lambda=\partial\mathcal{H}/\partial p_\alpha$$

和

$$dp_\beta/d\lambda=-\partial\mathcal{H}/\partial x^\beta。$$

從這些方程發現$\mathcal{H}$本身必須爲一常數，與類時參數λ無關。該常數值必須作爲初始條件給定，$\mathcal{H}=0$（「粒子質量的規定」），爾後通過Hamilton 方程自身得以維持。$\mathcal{H}$等於零決不意味着其偏微商

$$\partial\mathcal{H}/\partial p_\alpha \quad 和 \quad -\partial\mathcal{H}/\partial x^\beta$$

爲零，這些偏微商進入 Hamilton 方程給出了變化率

$$dx^\alpha/d\lambda \quad 和 \quad dp_\beta/d\lambda。$$

不論取何種形式，導出的運動方程是等價的，但是，在超 Hamilton 函數的形式中以及在廣義相對論中，協變性表現得比較清楚。

給定與(21.12)式相容的「場坐標」$g_{ij}(x,y,z)$（$^{(3)}\mathcal{G}$）和場動量 $\pi^{ij}_{\text{眞}}(x,y,z)=\delta S/\delta g_{ij}$ 的值，就具有了所謂「在一個初始類空超曲面上可相容的初值數據」。這時可以按 §21.8 的描述，逐步地向下一時刻積分，從一個類空超曲面到另一個類空超曲面，如此等等，直至構成整個四維幾何。用數學術語講，此處涉及的是具有波動方程特徵的雙曲型微分方程。

幾何的動力學演化

與此對比，當在第一處着手作出所需的初值數據時，涉及的是具有 Poisson 勢方程特徵的橢圓型微分方程（§21.9）。分析這些橢圓方程之際，在三維幾何中作出如下區分證實爲有益：(1)確定一點處的相對長度的度規部分，即

是說確定角度的度規部分（「度規的保形部分」）和(2)在一點進入 g_{ij} 的全部分量以確定在該點長度的絕對尺度的共同乘數因子。把三維幾何分爲兩部分提供了一種特別簡單的方式處理兩種特殊的初值問題，即所謂時間對稱和時間反對稱的初值問題(§21.10)。

在邊界超曲面上固定量的另一選擇：三維幾何的保形部分再加上外賦時間

如 §21.11 所概述的那樣，ADM 表述今天正在發展之中。在 Wheeler (1968a) 的「超空間」形式中，ADM的 處理固定了每一個邊界類空超曲面上的三維幾何。與此相反，York (§21.11)回到了最初的 Hilbert 作用量原理，並發現在每一個邊界類空超曲面上應當固定什麼量。原來合適的數據是「三維幾何的保形部分」加上與 Kuchař (1971a 和 1972)稱爲「外賦時間」緊密有關的某種東西。在下述情況下 Wheeler 方法和 Kuchař-York 方法的對照特別明顯：(1)處理一平直空時流形時，(2)在此空時中取平直的類空部分，(3)在此類空小片上引入高度爲 ϵ 的小的隆起。這個形變小片內稟的三維幾何與Euclid幾何的差別只是 ϵ 的二階量。因此，在此情況下由完全的三維幾何回讀出時間［「隆起部分的向前進」］所要求的運算有些類似於開平方根。反之，Kuchař-York 的處理涉及此薄片的「外賦曲率」。它正比於 ϵ 的一次方，因此在某些方面提供了更方便的時間量度［關於任意强度的圓柱形引力波如何構造「外賦時間」，請特別參看 Kuchař (1971)，並見框 30.1 關於「混主宇宙論」中個別定義的「時間」］。York 指出時間變量可以最方便地取爲「在三維幾何中與保形因子動力學共軛」的變量。

現代化的 Mach 原理：彼處的質量－能量決定了此處的慣性

可以用 Wheeler 的語言也可以用 Kuchař 和 York 的語言表述幾何動力學的初值問題。在任何一種表述（§21.9 或 §21.11）中，它都有助於闡明今天人們通過 Mach 原理 (§21.12) 所應適當理解的東西。對於 Mach，該原理意味着：在牛頓力學中所討論的「加速度」，只有在相對於恒星或同等明確定義的東西時才有意義。它把 Einstein 引向廣義相對論。今天它被總結爲「彼處的質量-能量決定了此處的慣性」的原理，並在初值方程中給出了它的數學表示。

初值問題的分析把跨越類空超曲面的過去和未來聯繫起來。與之對照，當人們討論 Einstein 場方程的一個解（如在密度均勻的球狀塵埃雲內部的 Friedmann 幾何）和另一解（如在此塵埃雲外部的 Schwarzschild 幾何）之間的連接條件時 (§21.13)，將遇到能適應類時矢量的超曲面。§21.13 及本章以關於引力激波和特徵初值問題（例如在一光錐上初值數據的表述）的評述爲結束。

§21.2 Hilbert 作用量原理和Palatini變分法

變分原理：導致Einstein方程的最簡單路線

在 Einstein 發表其最後的和現在作爲標準形式的幾何動力學之前五天，在 Einstein 早期著作的啓發下，Hilbert 獨立地發現（1915a），作爲形式如 (21.2-21.3) 式的最簡單的作用量原理的結果，應怎樣導出這個幾何動力學定律，即可以設想

$$L_{幾何}=(1/16\pi)\,{}^{(4)}R。 \tag{21.13}$$

（若從現在的幾何學單位改爲約定單位，則應把 $1/16\pi$ 代之以 $c^3/16\pi G$；或者，若從以作用量爲單位的動力學位相改爲以弧度爲單位的波函數實際位相時，應除以 $\hbar\sim L^{*2}$）。式中 ${}^{(4)}R$，如框 8.4 所詳述，是四維標量曲率不變量。

這個作用量原理含有度規係數的二階微商。與此對比，力學的作用量原理只包含動力學變量的一階微商；類似地，在電動力學的作用量原理中，只出現 $\partial A_\alpha/\partial x^\beta$ 形式的微商項，因此，在這裏的作用量原理中人們也只預料會出現 $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\tau$ 形式的一階微商。然而，從這些一階微商項不能構成標量不變量。因而，作爲一個不變量，$L_{幾何}$ 所取之值必須與坐標系的選擇無關。但是在一點的鄰域中，總可以選擇一個適當的坐標系，使得 $g_{\mu\nu}$ 的全部一階微商都爲零。除了常數以外，由度規係數和它們的一階微商無法齊次地構成任何標量不變量。

從一階微商轉向二階微商時，需要討論曲率張量的所有二十個不同的分量。在局域慣性參照系中，在局域 Lorentz 變換的六個參數範圍內，這二十個分量可任意取值。於是，存在着與坐標無關的 $20-6=14$ 個獨立的曲率局域特徵量（「曲率不變量」），可以設想把其中的任何一個用於作用量原理。但是，在這14個量中，只有 ${}^{(4)}R$ 對於度規係數的二階微商是線性的。除了 Hilbert 選擇的不變量外，任何別的選擇都會使幾何動力學定律複雜化，並且會破壞與 Newton 重力理論（第17章）的簡單對應關係。

標量曲率不變量是唯一的自然選擇

Hilbert 原先在變分原理中所構思的 x, y, z, t 的獨立可變函數是反變表述中度規張量的十個不同分量 $g^{\mu\nu}$。後來，Palatini (1919) 發現了更簡單和更有意義的一組獨立可變函數：不單是十個 $g^{\mu\nu}$，而是十個 $g^{\mu\nu}$ 加上四十個仿射聯絡 $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$。

放棄由度規 g 表示仿射聯絡 Γ 的標準公式，而讓 Γ「在微風中飄動」，這在數學物理中並不是新鮮的事情。甚至在最簡單的力學問題中，也可以放棄用坐標 x 的時間微商表示的動量 p 的標準公式，而讓 p「在微風中飄動」。從而

獨立地改變坐標和動量的想法

在新的變分原理中，$x(t)$ 和 $p(t)$ 變成了兩個獨立的可變函數

$$I=\int_{x',p'}^{x,p}\left[p(t)\frac{dx(t)}{dt}-H(p(t),x(t),t)\right]dt=\text{極值}。 \quad (21.14)$$

幸運的是，在相對於函數 $p(t)$ 的選擇取極值時，可恢復用速度表示動量的標準公式。而相對於另一函數 $x(t)$ 的選擇所取之極值，給出了運動方程，這正好與 Euler 和 Lagrange 在初等變分分析中所做的一樣，他們取 $x(t)$ 爲唯一的可變函數。關於在質點力學中這兩種變分原理等效性的進一步分析，見框 21.1。在該框中還可看到用在電動力學中的兩類變分原理。

把 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ 和 $g^{\alpha\beta}$ 看作 t, x, y, z 的原始函數，用它們表示 Hilbert 變分原理時，應注意 Lagrange 密度爲

$$\begin{aligned}L_{幾何}(-g)^{1/2}&=(1/16\pi)^{(4)}R(-g)^{1/2}\\&=(1/16\pi)g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(-g)^{1/2}。\end{aligned} \quad (21.15)$$

此處，與在任何具有仿射聯絡的空時流形中一樣，有（第14章）

$$R_{\alpha\beta}=R^{\lambda}{}_{\alpha\lambda\beta}, \quad (21.16)$$

式中

$$\begin{aligned}R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\beta}&=\partial\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}/\partial x^{\mu}-\partial\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}/\partial x^{\beta}\\&\quad+\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\lambda}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu},\end{aligned} \quad (21.17)$$

並且事前規定(在一坐標系中)每一個Γ均對其兩個下標對稱。爲了使(21.2)式(21.3)式的積分 I 取極值，要求$g^{\mu\nu}$和Γ兩者變化所引起的的 I 的變分爲零；即

$$\begin{aligned}0=\delta I&=(1/16\pi)\int\delta[g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(-g)^{1/2}]d^4x\\&\quad+\int\delta[L_{場}(-g)^{1/2}]d^4x。\end{aligned} \quad (21.18)$$

聯絡的變分是一個張量

現在考慮 (21.18) 式第一個和第二個積分中各個因子的變分。第一個因子的變分 $\delta g^{\alpha\beta}$ 是不重要的。在第二個因子 $R_{\alpha\beta}$ 的變分中，$g^{\alpha\beta}$ 的變化不起作用，只出現Γ的變化。此外，盡管$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ 本身不是張量，其變分 $\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ 却是一個張量。於是，在變換公式

$$\Gamma'^{\bar{\lambda}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}=\left[\Gamma^{\lambda}_{\sigma\tau}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\bar{\beta}}}+\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\bar{\alpha}}\partial x^{\bar{\beta}}}\right]\frac{\partial x^{\bar{\lambda}}}{\partial x^{\lambda}} \quad (21.19)$$

中，最後一項將消除任何單獨一組 $\Gamma^{\lambda}_{\sigma\tau}$ 的張量性質，而在二組不同Γ之差 $\delta\Gamma^{\lambda}_{\sigma\tau}$ 中此項將被消去。注意，曲率張量的典型分量的變分 $\delta R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\beta}$ 由形式爲 $\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta;\mu}$ 的兩項以及形式爲 $\Gamma\delta\Gamma$ 的四項組成（爲了簡化，略去了指標）。在討論

(接第500頁)

(接第500頁)

框 21.1　作用量隨動力學坐標的變化率（=「動量」）和隨時間的變化率，以及在質點力學和電動力學中把這兩個變化率聯繫起來的色散關係（=「Hamilton 函數」）

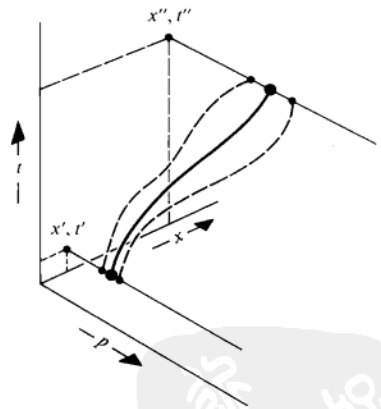
A. 關於質點力學中類似的 Palatini 方法的導言

在質點力學中，設在兩端點 (x',t') 和 (x,t) 之間的軌道 $x=x(t)$ 可以調整，變化軌道使在這兩個端點之間的積分 $I=\int L(x,\dot{x},t)dt$ 取極值。

用坐標與動量表示，該積分的形式爲（見圖21.1）

$$I=\int[p\dot{x}-H(p,x,t)]dt\,, \qquad (1)$$

式中，x(t) 爲可以變化的函數，p 只是 x 和 $\dot{x}$ 的某一特定函數之縮寫；即，$p=\partial L(x,\dot{x},t)/\partial\dot{x}$. 這樣看來，動量的變分 $\delta p(t)$ 受到變分 $\delta x(t)$ 的支配，並且只是 $\delta x(t)$ 的反映。



1.動量，作爲獨立變量來處理

然而，令人驚奇的是，還可以用另一種方式來考察這個問題（見插圖）。可以把 $x(t)$ 和 $p(t)$ 看作兩個完全無關的獨立可調函數。放棄公式 $p=\partial L(x,\dot{x},t)/\partial\dot{x}$，只是爲了在變分原理的新的「獨立於坐標和動量的形式」中重新恢復它，或者與它等價的表述。

按照在這個新方式中的定義和計算，(1)式的變分爲

$$\delta I=p\delta x\Big|_{x',t'}^{x'',t''}+\int_{x',t'}^{x'',t''}\left[\left(\dot{x}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p+\left(-\dot{p}-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\delta x\right]dt\,。 \qquad (2)$$

令 δp 的係數爲零，即可得出所尋求的動量與速度間老關係 $p=\partial L(x,x,t)/\partial\dot{x}$ 的新形式

$$\dot{x}=\frac{\partial H(p,x,t)}{\partial p}\,。$$

令 δx 的係數爲零，給出另一個 Hamilton 方程

$$\dot{p}=-\frac{\partial H(p,x,t)}{\partial x}, \tag{3}$$

它等價於原先的 Lagrange 運動方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0。 \tag{4}$$

在此雙變量概念中，取極值前的 $p(t)$ 是一個與函數 $x(t)$ 完全分開，毫無關係的時間函數。這一點在 x' 和 x'' 被指定， $p(t)$ 不存在强加的端點條件的情況下，表現得最爲清楚。這樣，在取極值過程中，不僅軌道的形狀可在 x, p, t 空間中加以調整，而且，如圖所示，其端點也如串在線上的珠子，需沿兩條指定的直線移動。

2 作爲尋找色散關係工具的作用量

對起於 (x',t') 終於 (x,t) 的經典軌道，用 $S(x,t)$ 表示「作用量」或 I 的極值（等於 de Broglie 波的位相乘以 $\hbar$） 。終點變化到 $(x+\delta x,t)$，使作用量改變了

$$\delta S=p\delta x。 \tag{5}$$

因而，動量卽爲「作用量對動力學坐標的變化率」。

端點變化到

$$(x+\delta x,t+\delta t)=([x+\dot{x}\delta t]+[\delta x-\dot{x}\delta t],t+\delta t) \tag{6}$$

使作用量改變了

$$\delta S=p[\delta x-\dot{x}\delta t]+L\delta t=p\delta x-H\delta t。 \tag{7}$$

因而，Hamilton 函數卽爲「作用量隨時間的變化率」的負值。

用 Hamilton 函數 $H=H(p,x)$ 表示，de Broglie 波的「色散關係」變爲

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=H\left(\frac{\partial S}{\partial x},x\right)。 \tag{8}$$

在推導此色散關係時，可以有益地簡化作爲獨立變量的 $p(t)$ 和 $x(t)$ 的全部討論，而從定義 $I=\int L(x,\dot{x},t)dt$ 出發直接導出結果 。 在電動力學中與

此相似。

首次仔細閱讀第21章者最好循本框的其餘部分前進。

B. 在電動力學中類似的 Palatini 方法

在無源的電動力學中，給定兩個類空超曲面 S' 和 S''，以及相應的作爲位置函數的磁場 B' 和 B''（爲了簡化符號，下面將略去第二個磁場的上標″）。要改變的是在這兩個超曲面之間空時區域中所作的積分

$$I_{\text{Maxwell}} \equiv \int \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}\, d^4x = -\frac{1}{16\pi}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(-g)^{1/2}d^4x\,。 \tag{9}$$

1. 在電磁學中，超曲面上場的變化和超曲面位置的變化是兩個明顯不同的概念

在電磁學中，電磁場 $\mathbf{F}$ 是物理上有關的量（與幾何動力學中的三維幾何比較）。反之，四維勢 $\mathbf{A}$ 並沒有直接的物理意義。勢的規範變換

$$A_\mu = A_{\mu\text{新}} + \partial\lambda/\partial x^\mu$$

不改變場的諸分量

$$F_{\mu\nu} = \partial A_\nu/\partial x^\mu - \partial A_\mu/\partial x^\nu$$

（比較：改變 $g_{\mu\nu}$ 使 (3)も 保持不變的坐標變換）。盡管如此，在夾層中場的變化還是用勢的變化 δA_μ 表示最爲方便。

人們還希望了解，作用量積分如何受上端類空超曲面（多指時間）位置改變的影響。考慮超曲面上現在坐標爲 $x,\ y,\ z,\ t\ (x,y,z)$ 的點，代之以 $x,\ y,\ z,\ t+\delta t(x,y,z)$ 的坐標。現在放棄這個習用的坐標系。用垂直於超曲面 Σ 的四維矢量 δn（不是單位四維矢量）來描述這個瞬時位移。在夾層原先的上端面與新的上端面之間的四維體積元 $\delta\Omega$，它在習用坐標系中形式爲 $(-g)^{1/2}\delta t(x,y,z)d^3x$，採用第20章的符號可表爲

$$\delta\Omega = \delta n^\mu d^3\Sigma_\mu = (\delta\mathbf{n}\cdot d^3\Sigma)\,, \tag{10}$$

其中面元 $d^3\Sigma_\mu$ 已包含上面所列的因子 $(-g)^{1/2}$。

同時考慮上端超曲面上場值改變的影響以及該超曲面位置改變的影響，可得出

$$\delta S=\delta I_{\text{極值}}=-(1/16\pi)\int_{\text{上端}\Sigma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\delta\mathbf{n}\cdot d^3\Sigma)$$
$$+(1/4\pi)\int_{\text{上端}\Sigma}F^{\mu\nu}\underbrace{\Delta A_\mu}_{\substack{\text{用等價量}\\(\delta A_\mu-\delta n^\alpha A_{\mu;\alpha})\\\text{代替}}}d^3\Sigma_\nu \tag{11}$$
$$+(1/4\pi)\int_{\text{四維體積}}\underbrace{F^{\mu\nu}{}_{;\nu}}_{\substack{\text{必爲零，因爲積分}\\\text{已取極值}}}\delta A_\mu(-g)^{1/2}d^4x\,。$$

簡化上式：重新安排坐標，使超曲面爲恒定時間 t 的超曲面，並使恒定的 x, y, z 諸直線與該超曲面垂直。然後，由此得出在該超曲面上的體元只包含單一的非零部分 $d^3\Sigma_0=(-g)^{1/2}d^3x$。場量 $F^{0\nu}$ 對其兩上標的反對稱性要求 ν 爲類空上標，$i=1,\ 2,\ 3$。作用量的變分變爲

$$\delta S=\int\Big[\underbrace{\frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi}\delta A_i-\Big\{\frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi}A_{i;0}-\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}\Big\}\delta t}_{\text{加上和減去}\left\{\frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi}A_0\delta t\right\}_{,i}}\Big]d^3x\,。 \tag{12}$$

2.電動力學中場「動量」的含義

令上述表達式與下述量等同起來

$$\delta S=\int\pi^i_{EM}\delta A_i d^3x-\int\mathcal{H}\delta\Omega\,, \tag{13}$$

式中

$$\pi^i_{EM}=\frac{\delta S}{\delta A_i}=\begin{pmatrix}\text{「與}A_i\text{動力學正則共軛}\\\text{的電磁動量密度」}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi}=-\frac{\mathcal{E}^i}{4\pi} \tag{14}$$

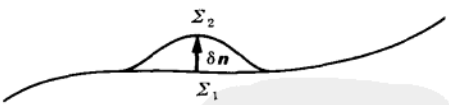
是電場的簡單倍數，而式中

$$\mathcal{H}=-\frac{\delta S}{\delta\Omega}=\begin{pmatrix}\text{「電磁 Hamilton}\\ \text{函數密度」}\end{pmatrix}$$
$$=(1/16\pi)[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+4F^{i0}(A_{i;0}-A_{0;i})]。$$
$$=(1/8\pi)(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)。 \tag{15}$$

動力學 Hamilton 函數密度的概念與通常的電磁能量概念相符，盡管它們的導出與應用非常不同。但是，正則動量 π^i_{EM}，盡管與例如由 Poynting 矢量定義的電磁動量密度在標準名稱上相似而易於混淆，却與它沒有任何直接的關係。注意，在(13)式中沒有 δA_0 項；即$\pi^0_{EM}\equiv 0$。

3. 氣泡微分法

Tomonaga (1946) 首先引入了相對於(15)式中出現的「多指時間」的「氣泡微分法」。考慮一類空超曲面Σ_1，考慮一在此超曲面上定義爲位置函數的磁場$\boldsymbol{B}$（觀測者在垂直此超曲面的世界線上），並由此信息得出一個數目即作用量的規定S。（這個作用量除以$\hbar$後，給出了在此特定超曲面上出現這種特定場分布的「波函數」或「概率振幅」的位相。）再考慮第二個超曲面 Σ_2（見插圖），它除了在一給定點的緊鄰處外，與 Σ_1 完全相同。在 Σ_2 上取一場分布，使之與 Σ_1 上原先的場分布完全相同，這裏，兩曲面上的「相同位置」是通過法線來確定的。在這兩種情況下，用動力學位相或作用量計算差值 δS，用在這兩超曲面之間的氣泡所包含的固有四維體積 $\delta\Omega=\int(\delta\boldsymbol{n}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma})$ 去除這一差值。取商，並在氣泡大小趨於零的極限下計算它，用這種方法得出作用量的「氣泡-時間微商」$\delta S/\delta\Omega$。



說作用量S不僅取決於超曲面Σ，還取決於磁場$\boldsymbol{B}$在該超曲面上的分布，其含義是什麼呢？作用量取決於物理量 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$, 而不取決於「前」物理量（prephysical quantity）$\boldsymbol{A}$。即規範變換 $\delta A_i=\partial\lambda/\partial x^i$ 不會造成S的任何變化。另一方面，對於$\boldsymbol{A}$的這一代換，S變化的計算值爲

$$\delta\ (\text{作用量})=\delta S=\int\frac{\delta S}{\delta A_i}\delta A_i d^3x$$
$$=\int\frac{\delta S}{\delta A_i}\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}d^3x=-\int\left(\frac{\delta S}{\delta A_i}\right)_{,i}\lambda(x,y,z)d^3x\text{。}\quad(16)$$

爲了使作用量不取決於規範，就要求此表達式對於任意的 $\lambda(x,y,z)$ 都必須永爲零，這個要求僅當 $S(\Sigma,\boldsymbol{B})=S$（超曲面，在超曲面上的場）滿足恒等式

$$\left(\frac{\delta S}{\delta A_i}\right)_{,i}=\pi^i_{EM,i}=-(1/4\pi)\mathcal{E}^i{}_{,i}=0\qquad(17)$$

時才有可能達到。

4.電動力學的 Hamilton-Jacobi「傳播定律」

電磁學中的「色散關係」或「Hamilton-Jacobi 方程」把下列內容聯繫了起來：(1)電動力學變量 A_i（粒子動力學中x的推廣）的改變所引起的「動力學位相」或「作用量」的變化，和(2)由多指時間（many-fingered time）（粒子動力學中單個時間t的推廣）的改變所引起的改變；這樣，(15)式可以寫爲

$$-\frac{\delta S}{\delta\Omega}=\frac{(4\pi)^2}{8\pi}\left(\frac{\delta S}{\delta A}\right)^2+\frac{1}{8\pi}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\text{。}\qquad(18)$$

C. 幾何動力學色散關係和電動力學色散關係的比較和對照

幾何動力學具有與方程(17)（「除了磁場 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 外，作用量與矢勢$\boldsymbol{A}$所携帶的信息無關」）直接類似的方程，它指出，除了「夾層上表面」的三維幾何 (3)ゟ 外，作用量與「夾層上表面」的度規 g_{ij} 所携帶的信息無關。幾何動力學還具有與方程(18)（「作用量傳播的動力學方程」）直接類似的方程，但有一點不同：在電動力學中，場變量$\boldsymbol{B}$和多指時間的性質不同，而在幾何動力學中，「場」和「多指時間」可以看作同一個 (3)ゟ 的兩個方面。

D. 作用量原理和色散關係來源於量子原理；所有軌道民主平等的 Feynman 原理

關於物理學中作用量原理的更多的討論，請參看例如 Mercier (1953), Lanczos (1970), 以及 Yourgrau 和 Mandelstam (1968) 的文獻。

Newton (1687) 在他的原理第一版序言的第一頁寫道：「幾何賴以建立的……直線的描述屬於力學。幾何並沒有告訴我們怎樣畫這些直線，却要求畫出這些直線」。

Newton 的陳述也是一個問題。力學使粒子沿直線運動，但是力學是通過什麼機制來完成這一奇迹的呢？量子原理給出了答案。粒子沿直線運動只是通過不沿直線運動來實現的。事實上，它「探明」從起點 (x', t') 通往探測點 (x'', t'') 的每一條可以設想的世界線都是彼此可以比擬的，但却取極值世界線。它是怎樣完成這一奇蹟的呢？

粒子的運動取決於「從 (x', t') 過渡到 (x'', t'') 的概率振幅」。該振幅或「傳播者」$\langle x'', t''|x', t'\rangle$，是由起點通往終點的每條世界線等權貢獻的民主的總和；即

$$\langle x'', t''|x', t'\rangle = N\int e^{iI_H/\hbar}\,\mathfrak{D}x\,。 \tag{19}$$

式中 N 是歸一化因子，對一切軌道都相同。

$\mathfrak{D}x$ 是對軌道求和的「體積元」。對於由 $t_n = t_0 + n\Delta t$ 給出的 x_n 確定的「基干軌道」，除一相乘的因子外，$\mathfrak{D}x$ 等於 $dx_1 dx_2 \ldots dx_N$. 當軌道由下式

$$x(t) = \frac{x'(t''-t) + x''(t-t')}{(t''-t')} + \sum_n a_n \sin n\pi \frac{(t-t')}{(t''-t')} \tag{20}$$

中的 Fourier 系數確定時，除一相乘因子外體積元再次等於 $da_1 da_2 \ldots$.

實際上相消干涉將除去顯著不同於「極值軌道」或「經典軌道」的那些軌道對過渡概率 (transition probability) 之貢獻。另一方面，接近極值軌道的諸軌道，作出了相長的貢獻，原因很簡單：對經典軌道的一階小偏離所引起的位相改變，只是二階小偏離。

這個初等的例子闡明了爲什麼在經典動力學中極值原理起着如此巨大的作用。它們提醒人們，全部經典物理學是建立在量子物理學基礎上的。中心思想是 (1)概率振幅迭加的原理，(2)相長與相消的干涉，(3)「所有軌道相互平等」

，(4)除了一個相乘因子即歸一化因子外，與某一軌道H相聯繫的概率振幅爲$e^{iI_H/\hbar}$。

關於諸軌道平等和對諸軌道求和的進一步討論，請參看 Feynman (1942, 1948,1949,1951 和 1955), Feynman 和 Hibbs (1965) 的著作；還有 Hibbs (1951), Morette (1951), Choquard (1955), Polkinghorne (1955), Fujiwara (1962) 的工作，以及 Kursunoglu (1962)的評述和參考文獻；還有 Dempster (1963) 和 Symanzik (1963) 的報告。許多作者曾用這種觀點討論幾何動力學的系統的量子闡述，首先這樣作的是 Misner (1957)，最近的一位是 Faddeev (1971)。

張量時，用這個或那個坐標系是一樣的。因此，可以選用一個坐標系，使得在該坐標系中所研究之點的全部Γ均爲零。$\Gamma\delta\Gamma$項退出。在此坐標系中，曲率的變分表爲量的一階微商如$\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$，從而，只需把普通的微商代之以協變微商，就可得出在任何坐標系都適用的公式，

$$\delta R^{\lambda}_{\alpha\mu\beta}=\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\mu}-\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu;\beta}, \tag{21.20}$$

及其縮併，

$$\delta R_{\alpha\beta}=\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\lambda}-\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda;\beta}。 \tag{21.21}$$

在變分原理中出現的第三個因子是$(-g)^{1/2}$，它的變分是（見練習21.1）

$$\delta(-g)^{1/2}=-\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}。 \tag{21.22}$$

另一個被積函數，Lagrange 密度 $L_{\text{場}}$，取決於此刻的場及其微商，但假定只包含度規 $g^{\mu\nu}$ 自身，而不包含 $g^{\mu\nu}$ 的任何微分形式。

爲使極值存在，下述表達式必須爲零

$$(1/16\pi)\int\left[\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)\delta g^{\alpha\beta}+g^{\alpha\beta}+(\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\lambda}-\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda;\beta})\right](-g)^{1/2}d^4x$$
$$+\int\left(\frac{\delta L_{\text{場}}}{\delta g^{\alpha\beta}}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}L_{\text{場}}\right)\delta g^{\alpha\beta}(-g)^{1/2}d^4x=0。 \tag{21.23}$$

注意在 (21.23) 式中含有Γ變分的項

$$(1/16\pi)\int g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\lambda}-\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda;\beta})(-g)^{1/2}d^4x,$$

作分部積分，消去 $\delta\Gamma$ 的微商。作爲積分的準備，引入張量密度的概念，這是廣泛應用於廣義相對論中的符號方法（notational device）。張量密度概念的目的在於經濟。不用此概念，必須處理張量

張量密度的概念

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}=(-g)^{1/2}[\mu\alpha\beta\gamma]$$

（見練習3.13），它有 $4^4=256$ 個分量，它的協變微商有 $4^5=1,024$ 個分量，其中之一爲

$$\begin{aligned}\epsilon_{0123;\rho}&=\partial(-g)^{1/2}/\partial x^{\rho}\epsilon_{[0123]}-\Gamma^{\sigma}_{0\rho}\epsilon_{\sigma 123}-\Gamma^{\sigma}_{1\rho}\epsilon_{0\sigma 23}-\Gamma^{\sigma}_{2\rho}\epsilon_{01\sigma 3}\\&\quad-\Gamma^{\sigma}_{3\rho}\epsilon_{012\sigma}\\&=[(-g)^{1/2}{}_{,\rho}-\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho}(-g)^{1/2}][0123]。\end{aligned}$$

符號 $[\alpha\beta\gamma\delta]$ 取值 $(0,-1,+1)$，它僅僅記錄指標的更替，却引入了如此大量的多餘項。爲了消除這種不便，引入非張量 $(-g)^{1/2}$ 並定義它的協變微分定律爲

$$(-g)^{1/2}{}_{;\rho}=(-g)^{1/2}{}_{,\rho}-\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho}(-g)^{1/2}。\qquad(21.24)$$

這四個分量取代了 1,024 個分量，並且足以傳遞其中的全部重要信息。

與矢量 j_μ 相聯繫，引入矢量密度

$$\mathfrak{j}_\mu=(-g)^{1/2}j_\mu;$$

與張量 $T_{\mu\nu}$ 相聯繫，引入張量密度

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu}=(-g)^{1/2}T_{\mu\nu};$$

如此等等；哥特體黑體字母是表示有因子 $(-g)^{1/2}$ 存在的標準符號。在某些情況下（參看，例如 §21.11），張量的分量乘以 $(-g)^{1/2}$ 的冪次比乘 1 更方便。按照指數值的不同，把所得的諸分量稱爲取這種或那種權（weight）的張量密度。

由任意階的張量

$$\mathfrak{A}^{\cdots}_{\cdots}=(-g)^{1/2}A^{\cdots}_{\cdots},$$

構成的普通或標準張量密度的微分定律是

$$(\mathfrak{A}^{\cdots}_{\cdots})_{;\rho}=(\mathfrak{A}^{\cdots}_{\cdots})_{,\rho}+\begin{pmatrix}\text{乘入}\mathfrak{A}^{\cdots}_{\cdots}\text{的標準協變}\\\text{微分的標準}\Gamma^{\cdots}_{\cdots}\text{項}\end{pmatrix}-(\mathfrak{A}^{\cdots}_{\cdots})\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho}。$$

積的協變微商是兩項之和：第一項的協變微商乘以第二項，加上第一項乘以第

二項的協變微商。

現在回過頭來計算積分。把因子 $g^{\alpha\beta}$ 和 $(-g)^{1/2}$ 併入張量密度 $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$。正如證明積的協變微商規則那樣，協變地作分部積分。得出「邊界項」，加上積分

$$-(1/16\pi)\int(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda}-\delta^{\beta}_{\lambda}\mathfrak{g}^{\alpha\tau}{}_{;\tau})\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}d^4x\,。$$

這個積分是作用量積分中唯一的一項，它含有此處感興趣的在「內點」(interior points) 上的 Γ 的變分。故爲使積分取極值，$\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ 的對稱係數必須爲零，

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda}-\frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\lambda}\mathfrak{g}^{\beta\tau}{}_{;\tau}-\frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\lambda}\mathfrak{g}^{\alpha\tau}{}_{;\tau}=0\,。$$

四十個協變微商 $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda}$ 的四十個方程只有零解，

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda}=0\,。\tag{21.25}$$

因而「由倒易度規張量構成的密度」是協變的常數。

這個簡單的結果(1)帶來了由此引起的許多簡單結果：即(2) $(-g)^{1/2}$，(3) $g^{\alpha\beta}$，(4)$g_{\alpha\beta}$，和(5) $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ 的協變不變性。其中(4)在此處特別有意義，而在後面證明它時，則需要(2)。取 (21.24) 式作爲 $(-g)^{1/2}$ 的協變微商之定義，並計算練習 21.1 第一項的普通微商。在這個計算中會遇到形如 $\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}/\partial x^{\lambda}$ 的項。用 (21.25) 式算出其值，得到的結果爲

$$(-g)^{1/2}{}_{;\lambda}=0\,。$$

由這個結果得出 $\left\{{\lambda\atop\lambda}\right\}$- 張量密度 $(-g)^{1/2}\delta^{\alpha}_{\tau}$的協變微商亦爲零。但是這一張量密度是張量密度 $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ 與普通度規張量 $g_{\beta\tau}$ 之積。在這個乘積對 x^{λ} 的協變微商中，已經知道第一個因子的微商爲零。因此，第一個因子乘以第二個因子的微商必爲零。

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}g_{\beta\tau;\lambda}=0\,,$$

由此得出

$$g_{\beta\tau;\lambda}=0\,,\tag{21.26}$$

此即所需之證明；或者，用顯式表爲

$$\frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial x^{\lambda}}-g_{\tau\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\lambda}-g_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\tau\lambda}=0\,。$$

求解這些到目前爲止與 $g_{\beta\tau}$ 無關的Γ的方程組，得出聯絡係數的標準方程

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu}+g_{\sigma\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\sigma})\,,\tag{21.27}$$

正如 Riemann 幾何所要求的那樣。

類似地，令變分式 (21.23) 中 $\delta g^{\alpha\beta}$ 的係數爲零，可求出 Einstein 場方程的所有十個分量的形式爲

$$G_{\alpha\beta}=8\pi\underbrace{\left(g_{\alpha\beta}L_{\text{場}}-2\frac{\delta L_{\text{場}}}{\delta g^{\alpha\beta}}\right)}_{\text{[與§21.3中脅强-能量張量 } T_{\alpha\beta}\text{ 相同]}}。\tag{21.28}$$

在度規的各種變化中，由無限小的坐標變換

$$g_{\text{新}\mu\nu}=g_{\mu\nu}+\delta g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}。\tag{21.29}$$

所引起的變化是最簡單的

$$x^{\mu}_{\text{新}}=x^{\mu}-\xi^{\mu}\tag{21.30}$$

雖然度規改變了，三維幾何却不改變。所討論的空時幾何是否使作用量取極值，是不是 Einstein 場方程的解，這些都沒有關係；作用量積分 I 是一個標量不變量，它是一個數，其值只取決於物理而與表述物理的坐標系完全無關。甚至對作用量原理的兩個單獨部分 ($I_{\text{幾何}}$ 和 $I_{\text{場}}$) 可以分別得出這個不變性。因此，無論哪一部分都不受 (21.29) 式變化的影響。換句話說，不管四維幾何是什麼，不管 ξ^{α} 改變了多少，量

值值是坐標變化不影響作用量

$$\begin{aligned}\delta I_{\text{幾何}}&=(1/16\pi)\int G_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha;\beta}+\xi^{\beta;\alpha})(-g)^{1/2}d^4x\\&=-(1/8\pi)\int\underbrace{G_{\alpha\beta}{}^{;\beta}\xi^{\alpha}(-g)^{1/2}d^4x}_{\text{[「分部協變積分」]}}\end{aligned}\tag{21.31}$$

必須爲零。這樣，可從一新的角度考察第15章的縮並 Bianchi 恒等式

$$G_{\alpha\beta}{}^{;\beta}=0。\tag{21.32}$$

作用量原理對於如 (21.29) 式所示的純坐標變換持「中立」態度，這再次表明，變分原理——和 Einstein 方程——不能確定坐標或者度規，而只能確定四維幾何本身。

練習

練習 21.1　度規張量行列式的變分

憶及任何行列式值的變化等於該行列式每一元素的變化與其餘因式乘積的總和 (練習 5.5)，試證明

$$\delta(-g)^{1/2}=\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\quad\text{和}\quad\delta(-g)^{1/2}=-\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}。$$

再證明

$$g=\det\|g^{\mu\nu}\|\quad\text{和}\quad\delta(-g)^{1/2}=+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}。$$

§21.3 物質的 Lagrange 函數和脅强—能量張量

從 Hilbert 作用量原理導出的 Einstein 幾何動力學定律中，右側的源項是由場的 Lagrange 函數導出的。可是，在第17章的推導中，源項是場的脅强-能量張量。爲了使兩種推導相一致，脅强-能量張量應由下式給出：

$$T_{\alpha\beta}=-2\frac{\delta L_{\text{場}}}{\delta g^{\alpha\beta}}+g_{\alpha\beta}L_{\text{場}}, \tag{21.33a}$$

Lagrange 函數產生脅强—能量張量

或

$$(-g)^{1/2}T^{\alpha\beta}\equiv\mathfrak{T}^{\alpha\beta}=2\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{場}}}{\delta g_{\alpha\beta}}。 \tag{21.33b}$$

這種證認的後果是什麼呢？

此處使用的術語「場的 Lagrange 函數」，意味着在平直空時中經典理論的 Lagrange 函數，但需把無論何處出現的平直空時度規代換爲實際度規，並把第16章的「逗號改爲分號的規則」應用於全部微商。

如果處理的是普遍的張量場，則「逗號改爲分號的規則」，除了張量場對其所有指標的微商外，還將引入與指標數目相同的Γ項。在場的 Lagrange 函數中出現的這些Γ項，對於 §21.2 描述的 Polatini 變分過程將產生非常不幸的後果。這些Γ不再能用標準公式(21.27)式表爲度規係數。從 Hilbert-Polatini 變分原理導出的幾何也不再是 Riemann 幾何。那該怎麼辦呢？

在兩種著名的簡單情形，即標量場和電磁場情形下，這些麻煩的問題並不出現。在標量場的情形下，場的 Lagrange 函數變爲

$$L_{\text{場}}=(1/8\pi)[-g^{\alpha\beta}(\partial\phi/\partial x^{\alpha})(\partial\phi/\partial x^{\beta})-\mathrm{m}^2\phi^2]。 \tag{21.34}$$

聯絡係數不出現；被微分的量是一個標量。在電磁場的情形下，場的 Lagrange 函數由四維勢 A_μ 的一階微商構成。因此，根據協變微商的標準規則（框8.4），Γ 應當出現。但是 A 的微商不單獨出現，而總是以反對稱的組合形式出現，其中Γ項互相抵消，便得協變微商與普通的微商等價：

電磁場，作爲一個例子

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}=A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu}。 \tag{21.35}$$

在上述兩種情況下，很容易由 (21.33) 式的微分得出脅强-能量張量（練習 21.2 和 21.3），並得出在這兩種情形下 $T_{\mu\nu}$ 的標準表達式［(5.22) 式和 (5.23) 式］，這些在第 5 章中已經給出。

與「正則場論」的脅强-能量張量對比

場論提供了一種完全不同的方法，可以得出所謂場的脅强－能量張量的正則表述［參看，例如 Wentzel (1949) 的文獻］。根據得出的方式，還確保該

表達式滿足動量和能量守恒定律，由於這一點，在某些情況下它會變得有用了。但是，正則張量對它的兩個指標而言常常是不對稱的，在這種情況下，將違反角動量守恒定律（參看§5.7的討論）。即使在對稱的情況下，它也會給出與(21.33)式十分不同的脅强和能量的定域。場能究竟局限於何處，在這些不同的圖象之間，場論本身無從確定。然而，從原則上講［參看，例如 Feynman (1964)的文獻］，因爲引力直接響應質量－能量密度和動量密度，所以直接測量引力拖曳（pull of gravitation），可爲脅强－能量定域的不同表述提供區別的手段。因此，令人愉快的是，以變分法系統闡述的重力理論，爲確定脅强－能量張量給出了唯一的規定，它不僅使張量保持對稱，而且使之自動滿足動量和能量守恒定律（練習21.2和21.3）。［對於脅强-能量張量對稱化的早期討論，見 Rosenfeld(1940) 和 Belinfante(1940) 的文獻，更廣泛的討論，見 Corson (1953) 和 Davis (1970)的文獻，其中給出了更多的參考文獻。］

當處理旋量場時，發現把一些量看作可變是方便的，這些量指的不是度規係數本身，而是在全空間定義四重場的正交歸一矢量的四重軸分量［有關的討論和參考文獻，見 Davis (1970) 的文獻］。

練習

練習 21.2　標量場的脅强-能量張量

給定標量場的 Lagrange 函數 (21.34) 式，試導出該場的脅强－能量張量。並寫出由此 Lagrange 函數導出的標量場的場方程（在一般情況下，該場在彎曲空時的一定場所內完成其動力學過程）。試證明，由於此場方程，脅强－能量張量應滿足守恒定律 $T_{\alpha\beta}{}^{;\beta}=0$。

練習 21.3　Faraday-Maxwell 脅强-能量張量

給定 Lagrange 密度 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/16\pi$，試用變量 A_μ 和 $g^{\mu\nu}$ 重新表示之，並利用 (21.33) 式導出如 §5.6 所討論的脅强－能量張量。又，由 Lagrange 變分原理導出場方程 $F_{\alpha\beta}{}^{;\beta}=0$（彎曲空時，但爲了簡單起見，取無電荷的空間區域）。試由此場方程證明，Faraday-Maxwell 脅强－能量張量滿足守恒定律 $T_{\alpha\beta}{}^{;\beta}=0$。作爲一個更有雄心的課題，試證明由場的 Lagrange 函數按照 (21.33) 式的規定導出的脅强－能量張量將自動滿足守恒定律 $T_{\alpha\beta}{}^{;\beta}=0$。

---

§21.4　把空時分割爲空間和時間

有許多種把多指時間「向前推進」的方式，有許多種此快彼慢或此慢彼快地考察空時的方式。然而，只有遵循確切的規定，才能最有效地爲計算機編定程序。通過時間參數 t 的連續取值，可以最方便地描述各個相繼的超曲面，在

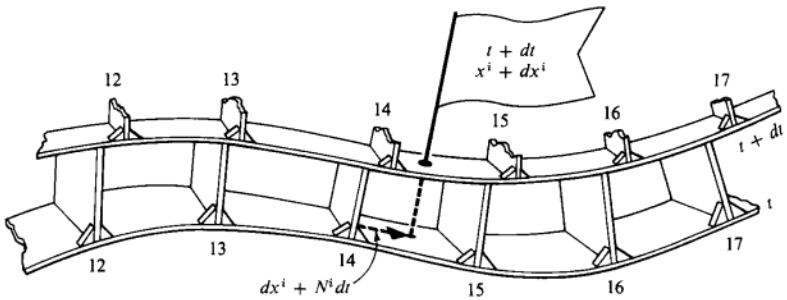


圖 21.2

在兩個三維幾何之間放入預先給定長度和位移的垂直連接部分，就可以由這兩個三維幾何構成薄夾層（亦可直譯爲薄三明治）的四維幾何。原來是可調的部分從此不可改變。懸旗點用來說明 (21.40) 式。

切割空時以計算空時

這些超曲面上給出了幾何。人們從不同的立足點論述這些超曲面的三維幾何，以及充滿這些迭片之間的四維幾何。

把空時分割爲單一參數的類空超曲面族，不僅僅是爲了循此作動力學的分析，也是邊條件的要求，這些邊條件是在下述形式的任意作用量原理中提出來的：「給定空時夾層兩端面的三維幾何，調整其間的四維幾何，使作用量取極值」。

薄夾層的四維幾何

再沒有比討論無限小厚度的夾層更簡單的了（圖 21.2）。選取適合於把 (3+1) 空時分離的坐標，圖中「下面」的（較早的）超曲面記爲 $t=$常數，「上面」的（較遲的）超曲面記爲 $t+dt=$常數（僅僅是命名，沒有任何原時的直接測量）。比較這兩個帶有鋼帶的超曲面，希望以此構成一剛性結構。給定這兩條帶上的幾何，決不能固定這一結構；爲了固定它還需要在兩條鋼帶之間有交叉連接部分。(1)規定這些連接部分垂直於下鋼帶銲接；(2)指定每一連接部分應銲接於何處；(3)給定連接部分的長度；即使如此還不夠。還必須說明每個連接部分在何處與上表面連接。如果各連接部分頂端之間的固有距離處處都比其底部之間的距離短，則此雙帶將具有吊橋鋼纜的曲線；如果頂端間距處處比底部間距長，則此雙帶具有石拱橋的曲線。因此，夾層結構所必須的數據是(1)下部超曲面三維幾何的度規

$$g_{ij}(t,x,y,z)dx^i dx^j, \qquad (21.36)$$

由它說明該超曲面上某一點與另一點之間的（距離）^{2}；(2)上部超曲面的度規

$$g_{ij}(t+dt,x,y,z)dx^i dx^j; \qquad (21.37)$$

(3)以下部超曲面 (x,y,z) 點爲基點的連接部分的靜長度公式

$$\left(\begin{array}{l}\text{在上下超曲}\\ \text{面之間的原}\\ \text{時間隔}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{l}\text{「間隔}\\ \text{函數」}\end{array}\right)dt=N(t,x,y,z)dt\,, \qquad (21.38)$$

和(4)連接部分與上超曲面銲接處的位置公式

$$x^i_{\text{上}}(x^m)=x^i-N^i(t,x,y,z)dt\,。 \qquad (21.39)$$

缺少任一部分信息，就會發現結構失去了剛性。

四維幾何的度規取決於兩個三維幾何的連接部分的間隔和移位

薄夾層結構的穩定性，因充滿此夾層空時的四維幾何的確定性得到了最直接的顯示。試求出在 $x^\alpha=(t,x^i)$ 和 $x^\alpha+dx^\alpha=(t+dt,x^i+dx^i)$ 之間的固有間隔 ds 或 $d\tau$。由四維形式的 Pythagoras 定理

$$ds^2=\left(\begin{array}{l}\text{在基底三維幾何}\\ \text{中的固有距離}\end{array}\right)^2-\left(\begin{array}{l}\text{從下部三維幾何到上}\\ \text{部三維幾何的原時}\end{array}\right)^2$$

可以得出（見圖21.2）

$$ds^2=g_{ij}(dx^i+N^i dt)(dx^j+N^j dt)-(Ndt)^2\,。 \qquad (21.40)$$

與 (21.36) 式相同，式中 g_{ij} 是三維幾何的度規系數，採用拉丁指標以區別於用希臘指標表示的四維度規分量

$$ds^2={}^{(4)}g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta\,, \qquad (21.41)$$

式中用添標(4)以避免混淆。比較 (21.41) 與 (21.40) 式，可由三維度規、間隔函數和移位函數得出四維度規的下述表示 [Arnowitt, Deser 和 Misner (1962) 的文獻]：

四維度規的細節

$$\left\|\begin{array}{cc}{}^{(4)}g_{00} & {}^{(4)}g_{0k}\\ {}^{(4)}g_{i0} & {}^{(4)}g_{ik}\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{cc}(N_rN^r-N^2) & N_k\\ N_i & g_{ik}\end{array}\right\|\,。 \qquad (21.42)$$

銲接的連接部分完成了這一工作。

在 (21.42) 式中，量 N^m 是原始反變形式的移位分量，而 $N_i=g_{im}N^m$ 是在三維幾何內用三維度規算出的協變分量。把此關係式倒置

$$N^m=g^{mi}N_i \qquad (21.43)$$

即涉及倒易三維度規，這個量必須與倒易四維度規嚴加區別。這時，倒易四維度規是

$$\begin{Vmatrix} {}^{(4)}g^{00} & {}^{(4)}g^{0m} \\ {}^{(4)}g^{k0} & {}^{(4)}g^{km} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -(1/N^2) & (N^m/N^2) \\ (N^k/N^2) & (g^{km}-N^kN^m/N^2) \end{Vmatrix}, \tag{21.44}$$

根據矩陣乘法的標準規則，計算一下乘積

$${}^{(4)}g_{\alpha\beta}{}^{(4)}g^{\beta\gamma}={}^{(4)}\delta_\alpha{}^\gamma$$

即可驗證上述結果。

體元的形式爲

$$(-{}^{(4)}g)^{1/2}dx^0dx^1dx^2dx^3=Ng^{1/2}dtdx^1dx^2dx^3。 \tag{21.45}$$

把連接部分銲接在兩個鋼帶上，或三維度規加上間隔和移位函數，通過固定四維度規，同時也自動地確定了單位類時法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 的各分量。列出這個四維矢量歸一化條件的最方便的辦法是指出：存在着與 $\boldsymbol{n}$ 對偶的-1形式，爲了方便起見也稱之爲 $\boldsymbol{n}$ ，這樣，該矢量與1-形式之積爲

$$\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\rangle=-1。 \tag{21.46}$$

這個1-形式的值爲

$$\boldsymbol{n}=n_\beta dx^\beta=-Ndt+0+0+0。 \tag{21.47}$$

如圖 2.4 所示，只有這個1-形式，這種分層表面結構，當它被一個代表固有時間前進一單位的矢量所穿透時，才能自動得出數值 1 ，鈴響一聲，而不管它在 x, y, z 方向上有多大位移。因此，單位類時法向矢量的協變1-形式必定有下述分量

單位法線的諸分量

$$n_\beta=(-N,0,0,0)。 \tag{21.48}$$

通過提升 (21.44) 式的諸指標，得到代表切向矢量的同一法向矢量的協變分量；爲

$$n^\alpha=[(1/N),-(N^m/N)]。 \tag{21.49}$$

考察圖21.2，可給此結果以簡單的解釋。可以說圖中典型的「垂直連接部分」具有分量

$$(dt,-N^mdt),$$

並具有固有長度 $d\tau=Ndt$ ；因此，縮小到具有單位固有長度的矢量 $\boldsymbol{n}$ ，其分量正是(21.49)式給出的。

§21.5　內稟曲率與外賦曲率

Einstein 重力解釋的中心概念是曲率，因此，用（3+1）空間-時間、分裂的語言分析曲率是適當的。類空超曲面三維幾何內稟曲率的定義與計算方法，與第14章中計算四維曲率時所描述和使用的方法相同。在內稟曲率的各種度量中，最簡單的一種是 Riemann 標量曲率不變量 ${}^{(3)}R$（爲了簡化符號，下面將略去附標，寫爲 R）；而在定義這個不變量的所有方法中（見第14章），最簡潔的方法是應用極限（見練習21.4）：

$$R\left(\begin{matrix}\text{在所研}\\\text{究之點}\end{matrix}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}18\frac{4\pi\varepsilon^2-\left(\begin{matrix}\text{由固有距離爲 }\varepsilon\text{ 的各點的軌跡所}\\\text{定義的表面（近似爲二維球）的}\\\text{固有面積}\end{matrix}\right)}{4\pi\varepsilon^4} \tag{21.50}$$

度量面積虧損的標量曲率

爲了更詳盡地描述三維幾何的內稟曲率，可利用在第 8 章到第14章中已經闡明的微分幾何，只是在需要區分三維與四維時作適當的修正。從考慮超曲面內的位移

$$d\mathcal{P}=\boldsymbol{e}_i dx^i \tag{21.51}$$

開始。式中 $\boldsymbol{e}_i$ 是與三個坐標1-形式 dx^i 對偶的切向矢量基，它在某種記號下爲 $\boldsymbol{e}_i=\partial/\partial x^i$，在另一種記號下爲 $\boldsymbol{e}_i=\partial\mathcal{P}/\partial x^i$。任何處於該超曲面內的切向矢量場 $\boldsymbol{A}$ 都可用同樣的基矢量表示：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_i A^i。 \tag{21.52}$$

這個矢量與基矢 $\boldsymbol{e}_j$ 的標積爲

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j)=A^i(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)=A^i g_{ij}=A_j。 \tag{21.53}$$

現在，把注意力從在某一點的矢量轉到由此矢量向鄰近點的平行移動。

位於地球赤道上並指向北極星的一個矢量，沿着子午線平行於自身移動到仍在地球表面上但距北部 1,000 公里的一點後，它將不再位於地球表面的二維幾何之內。設置在北半球的望遠鏡必須抬高鏡筒才能看到北極星！這可以直接推廣到嵌在四維幾何之內的三維超曲面。矢量 $\boldsymbol{A}$，位於超曲面內，沿超曲面內的簡單路線移動，在移動過程的每一階段中，都要保持它與自身平行，此處「

平行」意味着相對於環繞四維流型的幾何平行。這樣，通常 $\boldsymbol{A}$ 在移動結束時便不再在此超曲面之內。因此，在環繞空時的幾何中，$\boldsymbol{A}$ 在第 i 坐標方向的「協變微商」（即在新點上的 $\boldsymbol{A}$ 減去移過來的 $\boldsymbol{A}$）的形式爲（見 §10.4）

$$^{(4)}\nabla_{\mathbf{e}_i}\boldsymbol{A}=\,^{(4)}\nabla_i\boldsymbol{A}=\,^{(4)}\nabla_i(\mathbf{e}_jA^j)=\mathbf{e}_j\frac{\partial A^j}{\partial x^i}+(^{(4)}\Gamma^{\mu}_{ji}\mathbf{e}_{\mu})A^j。\quad(21.54)$$

這個公式的一個特殊情況是協變地度量基矢 $\mathbf{e}_m$ 本身變化的方程

$$^{(4)}\nabla_i\mathbf{e}_m=\,^{(4)}\Gamma^{\mu}_{mi}\mathbf{e}_{\mu}。\quad(21.55)$$

很明顯，在(21.54)和(21.55)兩式中都有「超曲面之外的分量」

$$(A^j\,^{(4)}\Gamma^0_{ji})(\mathbf{e}_0\cdot\boldsymbol{n})。\quad(21.56)$$

從四維幾何的平行移動到三維幾何的平行移動

現在，除去這一分量。把 $^{(4)}\nabla\boldsymbol{A}$ 正投影到超曲面上。以此方式得出內稟於超曲面三維幾何的平行移動及協變微商。這個協變微商應當記爲 $^{(3)}\nabla$，但爲了簡化符號，在本章的剩餘部分除可能引起混淆之處外都將寫成 ∇。爲了得到新的協變微商的值，只需改寫 (21.54) 式，把各處的附標 $^{(4)}$ 都改爲附標 $^{(3)}$ 或通通略去不寫，並把求和的「啞指標」$\mu=(0,1,2,3)$ 改寫爲 $m=(1,2,3)$ 即可。但是，更方便的是 Israel (1966)的作法，從處理 $\boldsymbol{A}$ 的反變分量 A^i 的表達式，轉向處理其協變分量 $A_i=(\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_i)$。這樣，相對內稟於超曲面的三維幾何，可以算出在超曲面第 i 個坐標方向上 $\boldsymbol{A}$ 的協變微商的第 h 個協變分量，其值爲［見（10.18)式］

相對於三維幾何得出的新協變微商

$$\begin{aligned}A_{h|i}&=\mathbf{e}_h\cdot\,^{(3)}\nabla_{\mathbf{e}_i}\boldsymbol{A}\equiv\mathbf{e}_h\cdot\nabla_i\boldsymbol{A}\\&=\frac{\partial A_h}{\partial x^i}-A^m\Gamma_{mhi}(=A_{h;i}\text{ 對於在}\Sigma\text{內的}\boldsymbol{A})。\end{aligned}\quad(21.57)$$

式中的豎線符號是爲了把這個協變微商與例如 (10.17ff) 式中相對於四維幾何的協變微商相區別。式中三維情況的聯絡係數像前面討論過的四維情況那樣［見由 (14.14) 式和 (14.15) 式導出的各式］，可以用度規係數及其一階微商表示，爲

$$^{(3)}\Gamma_{mhi}\equiv\Gamma_{mhi}=\mathbf{e}_m\cdot\nabla_i\mathbf{e}_h。\quad(21.58)$$

而由聯絡係數本身，與第14章中一樣，又可計算內稟於超曲面的三維幾何的完全 Riemann 曲率張量 $^{(3)}R^i{}_{jmn}$。

除了內稟於同時性的曲率以外，現在遇到了以前各章均未涉及（只在框14.1稍有所涉）的一個概念，即三維幾何的**外賦曲率**。局限於三維幾何本身時，這一概念是沒有意義的。它的存在取決於嵌入明確定義的環繞空時內的一明

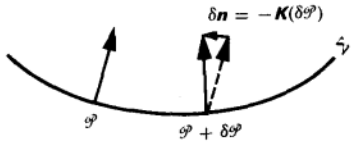


圖 21.3
位於類空超曲面 Σ中的一個圖形，當圖中每一點「垂直於」超曲面移向環繞空時一單位原時間隔時，圖形會發生收縮和形變，外賦曲率量度這種收縮和形變的比例。（沒有環繞空時，就沒有外賦曲率！）當元位移 $\delta\mathscr{P}$ 不論在曲面內指向什麼方向，而均以同樣的比例收縮時，外賦曲率張量是單位張量的正倍數。因此，如圖所示，超曲面的外賦曲率是正的。虛箭頭表示在基準點 $\mathscr{P}$的法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 平移到了鄰點 $\mathscr{P}+\delta\mathscr{P}$。

確定義薄片的三維幾何。它量度了該薄片相對於環繞四維幾何的曲率（圖21.3）。

取現在位於 $\mathscr{P}$點之法線，並「將其基維持在超曲面」Σ 內，把它作爲「基準矢」平行於自身移動到 $\mathscr{P}+\delta\mathscr{P}$ 點，然後從已在該點的法向矢量中減去它。在適當的近似中可以把差值 $\delta\boldsymbol{n}$ 看作是一個「矢量」，這個矢量的值受制於並線性地依賴於位移「矢量」$\delta\mathscr{P}$。

爲了免除符號的近似性，把有限位移 $\delta\mathscr{P}$ 改成相應的極限概念，即矢量值的「位移1-形式」$\boldsymbol{d}\mathscr{P}$［見 (15.13) 式］。再把有限的且未嚴格定義的矢量 $\delta\boldsymbol{n}$ 代之以相應的極限概念：矢量值的1-形式 $\boldsymbol{dn}$。1-形式 $\boldsymbol{dn}$ 作爲一個矢量，表示矢量 $\boldsymbol{n}$ 的變化，而不是長度的變化，它應代表方向的改變並垂直於 $\boldsymbol{n}$。因此，它可以看作是位於超曲面 Σ 之內的。它線性地依賴於 $\boldsymbol{d}\mathscr{P}$，可表爲下述形式：

$$\boldsymbol{dn}=-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{d}\mathscr{P})。\qquad (21.59)$$

作爲算符的外賦曲率

式中線性算符 $\boldsymbol{K}$ 是以抽象的與坐標無關的幾何客體呈現的外賦曲率。在如圖21.3的情形中，法線頂部之間比底部之間更接近（正如宇宙模型再收縮期間的情形），這時此處的 $\boldsymbol{K}$ 定義爲正，這與 Eisenhart (1926), Schouten (1954) 和 Arnowitt, Deser 與 Misner (1962) 的約定相同，而與 Israel (1966) 的約定相反。

出現在 (21.59) 式左右兩側的1-形式的空位中，不插入一般的切向矢量（它是用來描述一般局域位移的，正如緊接着 (2.12a) 式所作的討論，迄今尚

待解決），而插入一個非常特殊的切向矢量，即基矢 $\mathbf{e}_i$，作爲在第 i 坐標方向上的位移。於是（21.59）式變爲

$$^{(4)}\nabla_i \mathbf{n} = -\mathbf{K}(\mathbf{e}_i) = -K_i{}^j \mathbf{e}_j , \tag{21.60}$$

式中 $K_i{}^j$ 是線性算符$\mathbf{K}$的坐標表述的諸分量。取（21.60）式兩側與基矢 $\mathbf{e}_m$ 的標積。記住 $(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n}) = 0$ 。這樣，就可以確立協變表述的張量 K_{im} 對其兩個指標的對稱性：

$$\begin{aligned} K_{im} &= K_i{}^j g_{jm} = K_i{}^j (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_m) = -\mathbf{e}_m \cdot {}^{(4)}\nabla_i \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot {}^{(4)}\nabla_i \mathbf{e}_m \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_0)\,{}^{(4)}\Gamma^0_{mi} = \mathbf{n} \cdot {}^{(4)}\nabla_m \mathbf{e}_i = K_{mi} 。 \end{aligned} \tag{21.61}$$

（[見(21.55)式]）

對外賦曲率張量 K_{ij} 的了解有助於揭示平行移動時四個矢量 $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 的變化。（21.60）式已指出在平行移動時 $\mathbf{n}$ 如何變化。$\mathbf{e}_m$ 的變化，作爲一個矢量，要從（21.55）式得出。從（21.58）式，可得出這一矢量與基矢 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, 或簡潔地說，與 $\mathbf{e}_i$ 的標積；從（21.61）式可得出它與法向矢量 $\mathbf{n}$ 的標積；知道了這個矢量與上述四個獨立矢量每一個的標積，就足以確認這一矢量了。這樣，按照 Israel（1966）的方法，就可以得出所謂 Gauss 和 Weingarten 的方程，而愉快地略去在本世紀中各種符號的變化：

用外賦曲率表示的四維移動的Gauss-Weinargten方程

$$^{(4)}\nabla_i \mathbf{e}_j = K_{ij} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} + {}^{(3)}\Gamma^k_{ji} \mathbf{e}_k 。 \tag{21.62}$$

由這個方程可知在 Σ 內每個基矢如何改變，與此同時，也就知道了如何改寫（21.54）式以給出 Σ 內任意矢量場 $\mathbf{A}$ 的變化。在這兩種情況下的變化，都是相對於從鄰近基準點移動來的基準矢量而言的。這裏所謂「平行移動」意味着「相對於環繞空時的幾何是平行的」：

$$^{(4)}\nabla_i \mathbf{A} = A^j{}_{|i} \mathbf{e}_j + K_{ij} A^j \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})} 。 \tag{21.63}$$

特別重要的是，當如 §21.4 所述，按照 Arnowitt, Deser 和 Misner 的計畫，把空時分割爲類空薄片時，估算外賦曲率。圖 21.2 所示之薄夾層的四維幾何，盡管比較原始，却是由夾層兩面的三維度規，由間隔函數N和移位函數 N^i 完全確定的。根據（21.47）式，協變表述中法線的諸分量爲

$$(n_0, n_1, n_2, n_3) = (-N, 0, 0, 0) 。 \tag{21.64}$$

按照平行移動的定義，相對於「在環繞四維幾何中平行自身移動的 $\mathbf{n}$」而言，$\mathbf{n}$ 的變化是

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{dn})_i &= n_{i;k}\mathbf{d}x^k \\
&= \left[\frac{\partial n_i}{\partial x^k} - {}^{(4)}\Gamma^{\sigma}_{ik} n_{\sigma}\right]\mathbf{d}x^k \qquad (21.65) \\
&= N^{(4)}\Gamma^0_{ik}\mathbf{d}x^k 。
\end{aligned}
$$

把它與用外賦曲率張量表示的同一變化相比較，

$$
(\mathbf{dn})_i = -K_{ik}\mathbf{d}x^k 。 \qquad (21.66)
$$

可得出此張量值爲

$$
K_{ik} = -n_{i;k} = -N^{(4)}\Gamma^0_{ik} = -N[{}^{(4)}g^{00}{}^{(4)}\Gamma_{0ik} + {}^{(4)}g^{0p}{}^{(4)}\Gamma_{pik}],
$$

或者，借助於 (21.42) 式和 (21.44) 式，得出

用移位和三維度規的變化表示外賦曲率

$$
\begin{aligned}
K_{ik} &= (1/N)[{}^{(4)}\Gamma_{0ik} - N^p{}^{(3)}\Gamma_{pik}] \\
&= \frac{1}{2N}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x^k} + \frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} - 2\Gamma_{pik}N^p\right] \qquad (21.67) \\
&= \frac{1}{2N}\left[N_{i|k} + N_{k|i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right] 。
\end{aligned}
$$

這就是用 ADM 間隔函數和移位函數 [Arnowitt, Deser 和 Misner (1962) 的文獻] 表示的外賦曲率。

擴張三維球的外賦曲率

作爲一個例子，設Σ 之幾何爲三維球

$$
ds^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] 。 \qquad (21.68)
$$

設單參數薄片族中鄰近的類空薄片，即標記爲 $t+dt$ （僅僅是一個標記）的薄片，具有用同一公式給出的三維度規，只是把式中的a 用 $a+da$ 代替。在這兩個薄片之間的薄夾層的四維幾何，在給定間隔函數和移位函數之前是完全不確定的。爲簡單起見，設移位矢量 N^i （見圖 21.2）處處爲零，設間隔函數在Σ上的每一點均爲同一數值 N。從而兩球之間的原時間隔爲 $d\tau = N dt$. 任何位於Σ 上的幾何圖形將隨着時間的流逝而擴張。在此圖形中，任何長度在每單位原時間隔內增加的比例是相同的，與該長度的指向無關，其值爲

$$
\begin{pmatrix}\text{單位原時間隔}\\ \text{內長度的增加}\\ \text{比例}\end{pmatrix} = \frac{1}{a}\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{2N}\frac{1}{a^2}\frac{d(a^2)}{dt} 。 \qquad (21.69)
$$

這個量的負值，乘以(¦)單位張量，$\mathbf{1} = \mathbf{d}\mathcal{P}$, 可給出在(¦)表述中的外賦曲率張量

$$
\mathbf{K} = -\frac{1}{2N}\frac{1}{a^2}\frac{d(a^2)}{dt}\mathbf{1} 。 \qquad (21.70)
$$

利用 ADM 公式 (21.67) 式作爲起點直接計算K_i^j諸分量的值，可以證實這一結果（練習 21.5）。

內稟於超曲面 Σ 的 Riemann 曲率 $R^a{}_{bcd}={}^{(3)}R^a{}_{bcd}$，和外賦曲率 K_{ij} 一起，給出了四維幾何的 Riemann 曲率和 Einstein 曲率。在計算中，運用坐標基並不方便，

基矢	基1-形式
$\mathbf{e}_0=\partial_t$,	$\boldsymbol{dt}$,
$\mathbf{e}_i=\partial_i$,	$\boldsymbol{dx}^i$,

因爲通常基矢 $\mathbf{e}_0$ 並不垂直於超曲面（見圖 21.2）。取另一組自對偶基，

計算四維曲率的基形式

$$\begin{array}{cc} \text{基矢} & \text{基1-形式} \\ \mathbf{e}_n\equiv\mathbf{n}=N^{-1}(\partial_t-N^m\partial_m), & \omega^n=N\boldsymbol{dt}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}, \\ \mathbf{e}_i=\partial_i, & \omega^i\equiv\boldsymbol{dx}^i+N^i\boldsymbol{dt}。 \end{array} \tag{21.71}$$

在列出分量時不用希臘標號 $\alpha=0, 1, 2, 3$，而仍採用希臘標號 $\bar{\alpha}=n, 1, 2, 3$。

記得曲率是通過沿閉合路徑移動的矢量的變化來量度的；或者由 (14.23) 式

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mathbf{w}=\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\mathbf{w}-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\mathbf{w}-\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}\mathbf{w}。 \tag{21.72}$$

設移動的矢量爲 $\mathbf{e}_i$，並設移動路線由 $\mathbf{e}_j$ 和 $\mathbf{e}_k$ 確定，後兩個矢量屬於一坐標基。因此，「路線自動地閉合」，$[\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k]=0$，故 (21.72) 式的最後一項可不予考慮，用 (21.62) 式和 (21.60) 式，得出

$$\begin{aligned} {}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e}_j}{}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_i &= {}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e}_j}\left[K_{ik}\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}+{}^{(3)}\Gamma^m_{ik}\mathbf{e}_m\right] \\ &= K_{ik,j}\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}-K_{ik}K_j{}^m\mathbf{e}_m\frac{1}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}+{}^{(3)}\Gamma^m_{ik,j}\mathbf{e}_m \\ &\quad+{}^{(3)}\Gamma^m_{ik}\left[K_{mj}\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}+{}^{(3)}\Gamma^s_{mj}\mathbf{e}_s\right]。 \end{aligned} \tag{21.73}$$

類似的計算 j, k 倒序的項，並簡單地從 (21.73) 式中減去，即可得出

Gauss-Codazzi方程：用內稟三維幾何與外賦曲率表示四維曲率

$$\begin{aligned} \mathscr{R}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_i &= (K_{ik|j}-K_{ij|k})\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})} \\ &\quad+[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}(K_{ij}K_k{}^m-K_{ik}K_j{}^m)+{}^{(3)}R^m{}_{ijk}]\mathbf{e}_m。 \end{aligned} \tag{21.74}$$

係數直接給出了所需的曲率張量的諸分量

$${}^{(4)}R^m{}_{ijk}={}^{(3)}R^m{}_{ijk}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}(K_{ij}K_k{}^m-K_{ik}K_j{}^m) \tag{21.75}$$

和

$${}^{(4)}R^n{}_{ijk}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}{}^{(4)}R_{nijk}=-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}(K_{ij|k}-K_{ik|j})。 \tag{21.76}$$

(21.75) 式和 (21.76) 式即所謂 Gauss 和 Codazzi 方程［有關文獻可參看 Eisenhart (1926) 的文獻］。由 (21.75) 式得出，只有當三維幾何恰在所研究之點嵌入四維幾何之中，且超曲面沒有外賦曲率時，該三維幾何曲率的諸分量才與四維幾何曲率的相應諸分量一致。剛好相反的情況可由熟知的二維球嵌入平直三維空間的例子來加以說明，此時 (21.75) 式左側（各處的維數都要減去 1）爲零，右側外賦曲率與內稟曲率恰好互相抵消。

從 Gauss-Codazzi 的結果，可以計算出 Einstein 曲率的各個重要的分量。計算時，由於 $\boldsymbol{n}$ 本身已經歸一化並與超曲面內每一個矢量都正交，所以取 $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{e}_k$ 與 $\boldsymbol{n}$ 一起構成正交歸一四重軸是最簡單的。這樣，利用 (14.7) 式和 (21.75) 式，得出

用外賦曲率表示Einstein曲率

$$\begin{aligned}-G^0_0 &= {}^{(4)}R^{12}{}_{12}+{}^{(4)}R^{23}{}_{23}+{}^{(4)}R^{31}{}_{31}\\ &= {}^{(3)}R^{12}{}_{12}+{}^{(3)}R^{23}{}_{23}+{}^{(3)}R^{31}{}_{31}\\ &\quad +(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}[(K^2_1K^1_2-K^2_2K^1_1)+(K^3_2K^2_3-K^3_3K^2_2)\\ &\quad +(K^1_3K^3_1-K^1_1K^3_3)]\\ &= \frac{1}{2}R-\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}[(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2-\mathrm{Tr}(\boldsymbol{K}^2)]。\end{aligned}\tag{21.77}$$

式中R是三維標量曲率不變量，Tr 表示「迹」；即

$$\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}=g^{ij}K_{ij}=g_{ij}K^{ij}=K^j_j\tag{21.78}$$

和

$$\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2=(K^2)^j_j=K_j{}^mK_m{}^j=g_{jl}K^{lm}g_{mi}K^{ij}。\tag{21.79}$$

這些結果雖然是針對正交歸一四重軸得出的，但對於類空超曲面內的一般坐標變換明確地保持不變；而且它不明顯地涉及任何時間坐標，在這方面它提供了 Einstein 曲率的無坐標的描述。

(21.77)式是 Einstein 方程的核心：「質量－能量決定曲率」

Einstein 場方程使 (21.77) 式等於 $8\pi\rho$，其中ρ是質量-能量密度。表達式 (21.77) 是「與切割類空薄片時如何彎曲無關的曲率的量度」。這種曲率的量度，正如框 17.2 之 3，「類空薄片物理學」一節所述，是推導 Einstein 場方程的核心。

通過 (14.7) 式用手邊已有的結果，易於算出 Einstein 曲率張量的另一分量在交歸一系的形式爲

$$\begin{aligned}G^n_1 &= {}^{(4)}R^{n2}{}_{12}+{}^{(4)}R^{n3}{}_{13}\\ &= -(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}(K^2_{1|2}-K^2_{2|1}+K^3_{1|3}-K^3_{3|1}),\end{aligned}\tag{21.80}$$

可以立即把它轉換到超曲面中不管是否正交的任意 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 系中，

$$G^n_i=-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}[K_{i|m}{}^m-(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})_{|i}]。\tag{21.81}$$

其他初值方程

Einstein 場方程使此量等於除重力之外物質和場所携帶的動量密度的第 i 個協變分量的 8π 倍。

迄今爲止，已經寫出的 Einstein 場方程的四個分量，在下述廣義相對論的「初值方程組」中占據着核心位置。其他六個分量將不寫出，因爲(1)用 Hamilton 方法分析動力學更爲簡單，(2)計算工作量不小。它要求計算其他類型的量，$\mathcal{R}(\mathbf{e}_j,\mathbf{n})\mathbf{e}_i$. 在練習 21.7 中可以找到作此計算的一個初始步驟。Sachs 作了這一計算（1964，方程 10），但僅限於 Guass 正交坐標系的特殊情況。這組坐標事先假定了非常特殊的切割空時方法：(1)從類空超曲面垂直發出的短程線 $n=0$，與所有接着同時垂直地發出的 $n=$常數的短程線相切；(2)n 坐標直接量度沿着這些短程線的原時間隔，或靜長度間隔，無論那個都合適*。在這樣特殊的坐標系中，答案簡單就不足爲奇了：

$$^{(4)}R^{n}{}_{ikl}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}\left(\frac{\partial K_{ik}}{\partial n}+K_{im}K^{m}{}_{k}\right)。\left(\begin{matrix}\text{Gauss}\\ \text{正交坐標}\end{matrix}\right) \qquad (21.82)$$

當不用 Guass 正交坐標而採用 Arnowitt, Deser 和 Misner 的坐標系時，(21.82) 式中將出現一些附加項。此處採用 ADM 坐標系，因爲它允許人們按照他們所希望的方式作動力學的分析，可以在不同的地方選擇不同的速度推動類空超曲面隨時間前移（「多指時間」）。Fischer (1971) 指出，通過運用張量場的 Lie 微商概念，怎樣才能估價和理解這些公式在無坐標時所包含的幾何內容，練習 21.8 對此作了介紹。

* 此處已將 Sachs 方程(10)式推廣到單位法向矢量 $\mathbf{n}$ 不一定是類時的情形，Sachs 用的是 $\mathbf{n}=\partial/\partial t$。

練習

練習 21.4 用面積虧損表示標量曲率不變量

北極到赤道的距離是 10,000公里，若地球是平直的，則「赤道」之長度應爲 62,832公里，而不是實際上的 ~40,000 公里，這一差別反映了地球表面彎曲成封閉球的事實。從這一「預備性的問題」轉向實際問題，一個三維球

$$ds^2=a^2[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。$$

從 $\chi=0$ 量度一固有半徑爲 $\varepsilon=a\chi$ 的二維球。確定此二維球的固有面積並表爲 χ 的函數。試證明，面積虧損關係式 (21.50) 式在 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 的極限情況下，給出了正確的結果 $R=6/a^2$。作爲更有雄心的練習：(1)取一般的（平滑的）三維幾何；(2)在任意選定的某點附近，用 §11.6 給出的 Riemann 正交坐標表示度規；(3)用球極角 θ 和 ϕ（長度爲 ε的短程線所指的方向）表示固有距離爲 ε 的點集所在區域，準確到 ε 的最低冪次；(4)確定由這些點決定的圖形的固有面積，仍要求準確到 ε 的最低冪次；從而確立 (21.50) 式［有關這個題目的詳細內容，參看，例如，Cartan (1946) 的文獻，252—256 頁］。

練習 21.5　Friedmann 幾何薄片的外賦曲率

試由 (21.67) 式經直接計算證實外賦曲率的表達式 (21.70) 式。

練習 21.6　計算 $\mathscr{R}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)\mathbf{n}$

按照 (21.74) 式的模型或其他方法計算此量。試說明如何能預先看出結果中 $\mathbf{n}$ 的係數均應爲零？比較 $\mathbf{e}_m$ 的係數，求出 ${}^{(4)}R^m{}_{njk}$ 並證明它與 (21.76) 式等價。

練習 21.7　計算對易算符 (Commutator) $[\mathbf{e}_j,\mathbf{n}]$

計算對易算符是計算 $\mathscr{R}(\mathbf{e}_j,\mathbf{n})\mathbf{e}_i$ 之類的量的第一步。把 $\mathbf{e}_j$ 表爲微分算符 $\partial/\partial x^j$，用 (21.49) 式把 $\mathbf{n}$ 也表爲微分算符。用這種方法，證明所求之對易算符的值爲 $-(N_{,i}/N)\mathbf{n}-(N^m{}_{,j}/N)\mathbf{e}_m$。

練習 21.8　張量的 Lie 微商 (由 J. W. York, Jr. 提供的練習)

定義張量場的 Lie 微商並探索它的某些性質。沿矢量場 $\mathbf{n}$ 的 Lie 微商是微分算符，它作用於 $\binom{?}{?}$ 型的張量場 $\mathbf{T}$ 後，把它轉換爲還是 $\binom{?}{?}$ 型的張量 $\mathscr{L}_\mathbf{n}\mathbf{T}$。Lie 微商過程遵從通常的鏈式法則並具有相加性［與協變微商的 (10.2b,10.2c 10.2d)式比較］。對標量函數 f，有 $\mathscr{L}_\mathbf{n}f\equiv\mathbf{n}[f]=f_{,\mu}n^\mu$。在練習 9.11 中已經把矢量場 $\mathbf{v}$ 沿矢量場 $\mathbf{u}$ 的 Lie 微商定義爲

$$\mathscr{L}_\mathbf{u}\mathbf{v}\equiv[\mathbf{u},\mathbf{v}]。$$

如果再定義 $\mathscr{L}_\mathbf{n}$ 對1-形式的作用，就可以簡單地推廣到一般類型的張量了，因爲它常常可以分解爲矢量與1-形式的張量積之和，如果 $\boldsymbol{\sigma}$ 爲1-形式，$\mathbf{v}$ 爲矢量，則可定義 $\mathscr{L}_\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ 爲1-形式，對於任意的 $\mathbf{v}$，它都滿足

$$\langle\mathscr{L}_\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma},\mathbf{v}\rangle=\mathbf{n}[\langle\boldsymbol{\sigma},\mathbf{v}\rangle]-\langle\boldsymbol{\sigma},[\mathbf{n},\mathbf{v}]\rangle。$$

(a) 試證明，在坐標基中

$$\mathscr{L}_\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_{\alpha;\beta}n^\beta+\sigma_\beta n^\beta{}_{;\alpha})\mathbf{d}x^\alpha。$$

(b) 試證明，在坐標基中

$$\mathscr{L}_\mathbf{n}\mathbf{T}=(T_{\alpha\beta;\mu}n^\mu+T_{\mu\beta}n^\mu{}_{;\alpha}+T_{\alpha\mu}n^\mu{}_{;\beta})\mathbf{d}x^\alpha\otimes\mathbf{d}x^\beta$$

式中 $\mathbf{T}$ 是 $\binom{?}{?}$ 型的張量。

(c) 試證明，在 (a) 和 (b) 中，所有偏微商都可用協變微商代替。［注意，Lie微商的定義與仿射聯絡是否存在無關。詳細的內容，請參看，例如，Bishop 和 Goldberg (1968) 以及 Schouten (1954) 的文獻］。

練習 21.9　曲率張量動力學分量的表述 (J. W. York, Jr. 提供的練習)

可以把 Gauss-Codazzi 方程組看成是用三維(非零)超曲面的內稟曲率和外賦曲率給出了空時曲率張量 20 個代數上獨立分量中的14個分量。爲了完成 Hilbert Lagrange 函數 $\sqrt{-g}{}^{(4)}R$ 的空間加時間分離，還必須把空時曲率張量的其餘 6 個分量用類似的方式表示

出來。爲此目的，方便的辦法是把所有張量都表爲空時張量，並且沿類空超曲面的類時單位法向場方向取 Lie 微商，作爲時間微商的普遍符號。可以證明一些初步結果：

(a) $$\mathcal{L}_u g_{\mu\nu}=u_{\mu;\nu}+u_{\nu;\mu},$$

(b) $$\begin{aligned}\mathcal{L}_u(g_{\mu\nu}+u_\mu u_\nu)&\equiv\mathcal{L}_u(\gamma_{\mu\nu})\\&=u_{\mu;\nu}+u_{\nu;\mu}+u_\mu a_\nu+a_\mu u_\nu,\end{aligned}$$

式中 $\gamma_{\mu\nu}$ 是在空時坐標基中表示的類空超曲面的度規，$a^\mu\equiv u^\lambda\nabla_\lambda u^\mu$ 是切向場爲 u^μ 的類時法向曲線的曲率矢量（四維加速度）。（記住 $u_\mu a^\mu=0$。）

(c) 試證明外賦曲率張量爲

$$K_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\mathcal{L}_u\gamma_{\mu\nu}。$$

(d) 投影在超曲面的單位張量定義爲

$$\perp^\mu_\nu\equiv\delta^\mu_\nu+u^\mu u_\nu。$$

利用⊥證明

$$u_{\alpha;\beta}\equiv-K_{\alpha\beta}-\omega_{\alpha\beta}-a_\alpha u_\beta,$$

式中

$$K_{\alpha\beta}=-\perp^\mu_\alpha\perp^\nu_\beta u_{(\mu;\nu)}$$

和

$$\omega_{\alpha\beta}=-\perp^\mu_\alpha\perp^\nu_\beta u_{[\mu;\nu]}。$$

(e) 根據 u^μ 是類空超曲面族的單位法向場，試證明 $\omega_{\alpha\beta}=0$.

(f) 現在，所需工具都已在手邊。試得出以下結果：

(i) 寫出 $\mathcal{L}_u K_{\mu\nu}$（參看練習 21.8）；

(ii) 將此表達式代入下述形式的 Ricci 恒等式

$$u^\sigma\nabla_\sigma\nabla_\mu u_\nu=u^\sigma\nabla_\mu\nabla_\sigma u_\nu+{}^{(4)}R_{\rho\nu\mu\sigma}u^\sigma u^\rho;$$

(iii) 用⊥，把餘下的兩個自由指標投影到超曲面上，並證明

$$\begin{aligned}\perp^\mu_\alpha\perp^\rho_\beta{}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma}u^\nu u^\sigma&=\mathcal{L}_u K_{\alpha\beta}+K_{\alpha\gamma}K^\gamma_\beta。\\&\quad+{}^{(3)}\nabla_{(\alpha}a_{\beta)}+a_\alpha a_\beta,\end{aligned}$$

式中${}^{(3)}\nabla_\alpha a_\beta\equiv\perp^\mu_\alpha\perp^\nu_\beta\nabla_\mu a_\nu$ 可以證明是 a_β 的三維協變微商，試證明在 Gauss 正交坐標系中，由此可得

$$R_{0i0j}=\frac{\partial}{\partial t}K_{ij}+K_{ik}K^k_j。$$

(g) 最後，在構成 ${}^{(4)}R$ 時，需要證明

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu\nu}[{}^{(3)}\nabla_{(\mu}a_{\nu)}+a_\mu a_\nu]&=g^{\mu\nu}[{}^{(3)}\nabla_{(\mu}a_{\nu)}+a_\mu a_\nu]\\&=a^\lambda_{;\lambda}。\end{aligned}$$

練習 21.10　用外賦曲率和協變散度表示 ${}^{(4)}R^{t}{}_{nin}$
(K. Kuchar 提供的練習)

設 α' 是四維坐標的任意平滑組，且無需以任何方式與單參數超曲面族的選擇協調。

(a) 試證明

$${}^{(4)}R^{t}{}_{nin}=g^{\alpha'\tau'}n^{\beta'}(n_{\alpha'\beta';\beta'\tau'}-n_{\alpha'\beta';\tau'}{}_{;\beta'})。$$

(b) 試證明可從表達式中除去協變散度

$$(n^{\beta'}n^{\tau'}{}_{;\beta'})_{;\tau'}$$

和

$$-(n^{\beta'}n^{\tau'}{}_{;\tau'})_{;\beta'},$$

使表達式中只留下單位法向矢量 **n** 的一階微商。

(c) 注意到基矢 $\mathbf{e}_i$ 和 **n** 構成一完全集，試證明下述公式

$$g^{\beta'\mu'}=e_i{}^{\beta'}\omega^{i\mu'}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{-1}n^{\beta'}n^{\mu'},$$

式中 ω^i 是與 $\mathbf{e}_i$ 對偶的1-形式。

(d) 注意 $=n_{\alpha'i;\beta'}n^{\alpha'}0$ 和

$$K_{ij}=-e_{i\alpha'}n^{\alpha'}{}_{;\beta'}e_j{}^{\beta'},$$

試證明

$${}^{(4)}R^{t}{}_{nin}=(\mathrm{Tr}K)^2-\mathrm{Tr}K^2 \text{ 加上協變散度。}$$

---

§21.6　Hilbert 作用量原理和在空間加時間分割時 Arnowitt-Deser-Misner 對它的修正

可以很愉快的證明，爲了作動力學分析，並不需要找回失去的 ${}^{(4)}R_{ink}$ 公式。但是，在作爲全部動力學分析核心的 Hilbert 作用量原理中，實質上必須要 Lagrange 密度

$$16\pi\mathcal{L}_{幾何}=(-{}^{(4)}g)^{1/2}{}^{(4)}R。 \tag{21.83}$$

採用當前的 ADM (1962) 符號，此密度的形式爲

$$\begin{aligned}(-{}^{(4)}g)^{1/2}{}^{(4)}R&=(-{}^{(4)}g)^{1/2}[{}^{(4)}R^{ij}{}_{ij}+2{}^{(4)}R^{in}{}_{in}]\\&=(-{}^{(4)}g)^{1/2}[R+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})(\mathrm{Tr}K^2-(\mathrm{Tr}K)^2)+2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}){}^{(4)}R^{i}{}_{nin}]。\end{aligned} \tag{21.84}$$

從 Hilbert 作用量原理中去掉一個全微商，即可得出 ADM 原理

Kuchar (1971b；也請參看練習 21.10) 指出應如何計算此量的必要部分，而無需計算其全部。「必要部分」與「全部」的差別是一個時間微商加上一個散度，此散度的形式爲

$$[(-{}^{(4)}g)^{1/2}A^{\alpha}]_{,\alpha}=(-{}^{(4)}g)^{1/2}A^{\alpha}{}_{;\alpha}。 \tag{21.85}$$

當用 $dtdx^1dx^2dx^3$ 乘 (21.83) 式並積分以求得作用量積分時，(21.85) 式的項積分得出一個表面項。表面以內幾何的變化對表面項的值毫無影響。因此，略去 (21.85) 式的項對運動方程並無影響。計算結果（練習 21.10）很簡單：略去這一散度項之後，留下的項只改變了 (21.84) 式中 $\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2$ 和 $(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2$ 項的符號。於是，變分原理變爲

$$\begin{aligned}(\text{極值}) &= I_{\text{修正}} = \int \mathcal{L}_{\text{修正}} d^4x \\ &= (1/16\pi)\int [R + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})((\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2 - \mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2)] N g^{1/2} dt d^3x \\ &\quad + \int \mathcal{L}_{\text{場}} d^4x \text{。}\end{aligned} \tag{21.86}$$

這一重新表述的表達式是 Arnowitt, Deser和Misner幾何動力學分析的起點。

York (1972b；也請參看練習 21.9) 論文中的兩個附錄加深了對前述分析的幾何學理解。首先，外賦曲率張量可以最自然地定義爲 [也請參看 Fischer (1971)]

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2}\pounds_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{g}\text{，} \tag{21.87}$$

式中 $\boldsymbol{g}$ 爲三維幾何的度規張量，$\boldsymbol{n}$ 是類時單位法向場，$\pounds$ 是練習 21.8 所定義的 Lie 微商。其次，必須把 (21.85) 式的散度項加到 (21.86) 式的 Lagrange 函數之中，以得到完全的 Hilbert Lagrange 函數，該散度項爲

$$-2[(-{}^{(4)}g)^{1/2}(n^{\alpha'}\mathrm{Tr}\boldsymbol{K} + a^{\alpha'})]_{,\alpha'}\text{，} \tag{21.88}$$

式中坐標是一般的（參看練習 21.10），而

$$a^{\alpha'} = n^{\alpha'}{}_{;\beta}n^{\beta'} \tag{21.89}$$

是沿類時法線 $\boldsymbol{n}$ 向相鄰薄片運動的觀測者的四維加速度。

§21.7 幾何動力學的Arnowitt, Deser 和 Misner 表述

Dirac (1959, 1964，以及其中引述的更早的文獻) 利用推廣的 Poisson 括號和 Hamilton 方程以(3+1) 維的形式系統闡述過幾何動力學，Arnowitt, Deser 和 Misner 則以 Hilbert-Palatini 作用量原理爲這一動力學的基礎。由於 ADM (1962) 方法得簡單，此處將循此闡述。把 Hilbert-Palatini 作用量原理中被積函數的引力部分改寫爲精煉而標準的形式（補上了 ADM 用其他單位制而省去的 16π）如下

$$\begin{aligned}16\pi\mathcal{L}_{\text{幾何，眞}} = \mathcal{L}_{\text{幾何ADM}} &= -g_{ij}\partial\pi^{ij}/\partial t - N\mathcal{H} - N_i\mathcal{H}^i \\ &\quad -2\left[\pi^{ij}N_j - \frac{1}{2}N^i\mathrm{Tr}\,n + N^{|i}(g)^{1/2}\right]_{,i}\text{。}\end{aligned} \tag{21.90}$$

式中每一個縮寫項都有其特定的含義，並起着特定的由命名所預示的作用，現在說明如下：

$$\pi^{ij}_{\text{眞}}=\frac{\delta(\text{作用量})}{\delta g_{ij}}=\begin{pmatrix}(\text{與「幾何動力學場坐標」}\\ g_{ij}\ \text{動力學共軛的「幾何}\\ \text{動力學場動量」}\end{pmatrix}$$

與動力學 g_{ij} 共軛的動量

$$=\frac{\pi^{ij}}{16\pi};\ \pi^{ij}=g^{1/2}(g^{ij}\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}-K^{ij}) \tag{21.91}$$

（此處 ADM 的 π^{ij} 往往比 $\pi^{ij}_{\text{眞}}$更爲方便）；和

$$\mathcal{H}_{\text{眞}}=\mathcal{H}(\pi^{ij}_{\text{眞}},g_{ij})=(\text{「超 Hamilton 函數」})=\mathcal{H}/16\pi;$$

$$\mathcal{H}(\pi^{ij},g_{ij})=g^{-1/2}\left(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{n}^2-\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{n})^2\right)-g^{1/2}R; \tag{21.92}$$

以及

$$16\pi\mathcal{H}^{i}_{\text{眞}}=\mathcal{H}^{i}=\mathcal{H}^{i}(\pi^{ij},g_{ij})=(\text{「超動量」})=-2\pi^{ik}{}_{|k}。 \tag{21.93}$$

根據 (21.91) 式的定義（見 §21.2），式中的 π^{ik} 可作爲張量密度以求其協變微商。需要變化以使作用量取極值的量是四維幾何度規中的各個係數，它們是：六個 g_{ij}，間隔函數 N，和移位函數 N_i，以及六個「幾何動力學動量」π^{ij}. 這些動量與度規一樣變化，(1)是爲了遵循初等 Hamilton 動力學的形式（框21.1），在那裏，通過把動量 $\boldsymbol{p}$ 取成與坐標 $\boldsymbol{x}$ 一樣的獨立變量，可以得到兩個一階 Hamilton 方程，以代替一個二階 Lagrange 方程，(2)是爲了部分地仿效 §21.2 Palatini 變分原理的榜樣。但是，在那裏，有 40個聯絡係數需要變化，而此處已縮減到只有六個 π^{ij}，求出了這些動量和三維度規就是求出了外賦曲率。在作變分之前，從 (21.90) 式略去散度 $-2[\ \ ]_{,i}$，因爲它只給出一個表面積分而對由變分原理導出的運動方程毫無影響。再把 (21.90) 式的第一項改寫爲下述形式

$$-(\partial/\partial t)(g_{ij}\pi^{ij})+\pi^{ij}\partial g_{ij}/\partial t, \tag{21.94}$$

並從變分原理中略去完全時間微商項，原因還是它與求出的運動方程無關。現在，作用量原理的形式爲

$$\text{極值}=I_{\text{眞}}=I_{\text{ADM}}/16\pi$$

$$=(1/16\pi)\int[\pi^{ij}\partial g_{ij}/\partial t-N\mathcal{H}(\pi^{ij},g_{ij})-N_i\mathcal{H}^{i}(\pi^{ij},g_{ij})]d^4x$$

$$+\int\mathcal{L}_{\text{場}}d^4x。 \tag{21.95}$$

這裏與往常一樣，作用量原理本身告訴我們，爲了使作用量取確定值（如果當作用量爲極值時）應固定什麼。除了與場有關而與幾何無關的適當的勢以外，初看起來似乎只有在初、終類空超曲面上的六個 g_{ij} 值必須固定。但是，

作用量原理要求，固定夾層兩個面上的三維幾何

在相繼的類空薄片內，相對於坐標$x^1, x^2, x^3 \longrightarrow x^1, x^2, x^3$的任何變化，ADM作用量原理是不變的。因此，在夾層兩個面上實際上必須固定的量是三維幾何 ${}^{(3)}g'$（在初始超曲面上）和 ${}^{(3)}g$（在終止超曲面上），別無其他。

三維幾何是什麼

用數學語言表述，三維幾何 ${}^{(3)}g$ 是在微分同胚（diffeomorphism）下彼此等距地等效的可微分流形族的「等價類」。用通常物理學家的語言來表示，三維幾何是在坐標變換下彼此等價的三維度規 $g_{ij}(x,y,z)$ 的等價類。用家常話說，兩輛小汽車的緩衝板，如果形狀相同，就有同樣的二維幾何，而不必管上面噴塗的對應線條有多大差別。

電磁學提供了與「場坐標」共軛的動量的例子

爲了找到 (21.95) 式中場 Lagrange 函數的例子，使之物理上適宜又無不必要的複雜性，可取無源的電磁場，可取場 Lagrange 函數爲標準的 Maxwell 值

$$(1/8\pi)(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2)\longrightarrow -(1/16\pi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{21.96}$$

式中

$$F_{\mu\nu}=\partial A_\nu/\partial x^\mu-\partial A_\mu/\partial x^\nu。 \tag{21.97}$$

Lagrange 函數相對於場的獨立動力學變量（即四個勢 A_α）的變分，立即給出這四個勢的四個二階偏微分波動方程。但是像幾何動力學一樣，得到更多的一階方程對於電動力學是方便的。尋找類似於粒子動力學的 Hamilton 方程

$$\begin{aligned} dx/dt&=\partial H(x,p)/\partial p,\\ dp/dt&=-\partial H(x,p)/\partial x。 \end{aligned} \tag{21.98}$$

以 Hamilton 積分 $\int[p\dot{x}-H(x,p)]dt$ 取代 Lagrange 積分 $\int L(x,\dot{x})dt$ 即可得出這些方程。同樣，這裏也可將 (21.96) 式的作用量被積函數代之以平直空時中的

$$(1/4\pi)\left[A_{\mu,\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]。 \tag{21.99}$$

實際上，不僅把空時看作是彎曲的，還把它切割成類空超曲面。這種對幾何的（3 + 1）分割使人們樂於把十個幾何動力學勢分成六個 g_{ij} 和四個間隔函數與移位函數。這裏還類似地把四個勢 A_μ 分成矢勢的三個分量 A_j 和標勢 $A_0=-\phi$（符號的選擇使得在平直空時、在 Minkowski 坐標系中 $\phi=A^0$）。用此符號，包括標準密度因子 $(-{}^{(4)}g)^{1/2}$ 但略去對運動方程毫無影響的完全

時間積分 $(\partial/\partial t)(A_i\mathcal{E}^i)$ 後，Lagrange 密度函數可用下述公式表示：

$$4\pi\mathcal{L}_{\text{場}}=-\mathcal{E}^i\partial A_i/\partial t+\phi\mathcal{E}^i{}_{,i}$$
$$-\frac{1}{2}Ng^{-1/2}g_{ij}(\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j+\mathcal{B}^i\mathcal{B}^j)+N^i[ijk]\mathcal{E}^j\mathcal{B}^k。\quad(21.100)$$

電磁學的 Lagrange 密度

式中用到替換符號 $[ijk]$，其定義爲在任何二個標記換序時要改變符號，並歸一化爲 $[123]=1$。注意三維張量 ϵ^{ijk} 和替換符號 $[ijk]$ 有關，與 (8.10) 式中相應四維客體的關係一樣，故可寫出

$$\mathcal{B}^i=\frac{1}{2}[ijk](A_{k,j}-A_{j,k})。\quad(21.101)$$

量 $\mathcal{B}^i$ 是類空薄片中磁場的分量。它們不作爲獨立變量。三個勢 A_i 選定後它們就完全固定了。電場的分量 $\mathcal{E}^i$ 與此相反，它們作爲動量處理並且作爲獨立變量。

對 $\mathcal{E}^i$ 取作用量的極值（練習 21.11），可以得到既與質點力學中 $dx/dt=p/m$ 類似，又與平直空時電動力學方程

$$E_i=-\partial A_i/\partial t-\partial\phi/\partial x^i\quad(21.102)$$

相類似的方程；即

$$-\partial A_i/\partial t-\phi_{,i}-Ng^{-1/2}g_{ij}\mathcal{E}^j-[ijk]N^j\mathcal{B}^k=0。\quad(21.103)$$

電磁學的初值方程

式中最後一項含有移位函數 N^i，它來自坐標系的傾斜。ADM 給出了對 (21.103) 式的附加的但是等效的描述：

$$\mathcal{E}^i=\frac{1}{2}[ijk]{}^*F_{jk}$$
$$=\frac{1}{2}[ijk]\left\{\frac{1}{2}[jk\mu\nu](-{}^{(4)}g)^{1/2}{}^{(4)}g^{\mu\alpha}{}^{(4)}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\right\}。\quad(21.104)$$

他們注意到 $\mathcal{E}^i$ 和 $\mathcal{B}^i$ 並不直接是在同時超曲面 Σ 中場的反變分量

$$\boldsymbol{E}=E^ie_j,\quad \boldsymbol{B}=B^ie_j,\quad(21.105)$$

而是反變密度

$$\mathcal{E}^i=g^{1/2}E^i,\quad \mathcal{B}^i=g^{1/2}B^i。\quad(21.106)$$

對三個 A_i 取作用量的極值（練習21.12），給出了彎曲空時中的類 Maxwell 方程，

$$\partial\boldsymbol{E}/\partial t=\nabla\times\boldsymbol{B}。\quad(21.107)$$

對 ϕ 取極值得出散度方程

餘下的勢 ϕ，僅在一處進入作用量原理。對它取極值即可得出無源電磁學中的散度關係，

$$\mathcal{E}^i{}_{,i}=0。 \tag{21.108}$$

作用量原理指出在邊界上應固定什麼

如果作用量原理本身就可說明在邊界上應固定什麼量，那麼 (21.100) 式對此還能說什麼呢？可以回到框 21.1 所示的 Hamilton 形式下質點力學的例子，注意到該處的動量 p 可以「在微風中飄動」。在邊界上只有坐標 x 必須固定。於是，作用量的變分是

$$\begin{aligned}\delta I&=\delta\int[p\dot{x}-H(x,p)]dt\\&=\int\{[\dot{x}-\partial H/\partial p]\delta p+(d/dt)(p\delta x)\\&\qquad+[-\dot{p}-\partial H/\partial x]\delta x\}dt。\end{aligned} \tag{21.109}$$

在邊界，不固定勢，而固定磁場本身

爲了得到作用量積分 I 的確定的極值，僅令方括號內 δp 和 δx 的係數爲零，即給出 Hamilton 方程，是不夠的。還必須加上在邊界爲零的量 $p\delta x$，即規定在運動起點和終點的 x，此處類似。爲了談到作用量原理的確定的極值，量 ϕ 和 $\mathcal{E}^i$ 可以在微風中飄動，但是在夾層兩面上的磁場必須固定。爲什麼是磁場或下述三個量

$$\partial A_j/\partial x^i-\partial A_i/\partial x^j; \tag{21.110}$$

而不是三個 A_i 本身呢？在得出動力學方程的過程中，當對 A_i 變化 (21.100) 式並經分部積分對第一項的變化求積分時，將得到邊界項

$$\int_{\Sigma_{初}}\mathcal{E}^i\delta A_i d^3x-\int_{\Sigma_{終}}\mathcal{E}^i\delta A_i d^3x。 \tag{21.111}$$

爲了得到確定的變分問題，要求這兩項在邊界上必須爲零。通過規範變換，由給定的矢勢得出新的矢勢 $A_{i新}$，

$$A_{i新}=A_i+\delta A_i=A_i+\partial\lambda/\partial x^i。 \tag{21.112}$$

由這三個 $A_{i新}$ 給出的磁場分量與 (21.110) 式給出的並無不同。此外，「在邊界上的變分」

$$\int\mathcal{E}^i\delta A_i d^3x=\int\mathcal{E}^i\partial\lambda/\partial x^i d^3x=-\int\lambda\mathcal{E}^i{}_{,i}d^3x, \tag{21.113}$$

對於任意選定的λ，由於散度條件 (21.108) 式而自動爲零。因此，在邊界上固定的量不是三個 A_i 本身（僅爲勢），而是 (21.110) 式給出的物理上有意義的量，即磁場的諸分量。而且，現在散度條件 $\mathcal{E}^i{}_{,i}=0$ 變成了確定勢 ϕ 的初值方程。

在前一節，只須用「六個 g_{ij}」代替「三個 A_i」，用「三維幾何 [3]G」代替「磁場的諸分量」，用「間隔和移位函數 N, N^i」代替「勢 ϕ」，就可從電動力學過渡到幾何動力學。

ADM 原理重新得出幾何動力學的動量公式

記住這一種對應關係，回到 ADM 表述的廣義相對論變分原理 (21.95) 式。固定夾層兩面上的三維幾何，變化其間的條件使作用量取極值，再依次變化 π^{ij}, g_{ij}, 以及間隔函數和移位函數。在作用量原理中，幾何動力學動量在各處只是代數地出現，只有 $-2N_i\pi^{ij}{}_{|j}$ 一項除外。對此項作變分和分部積分，得出 $2N_{i|j}\delta\pi^{ij}$，收集 $\delta\pi^{ij}$ 的諸係數並令其和爲零，可得出若干極值條件之一

$$\delta g_{ij}/\partial t=2Ng^{-1/2}\left(\pi_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}\,\mathrm{Tr}\,n\right)+N_{i|j}+N_{j|i}。\quad (21.114)$$

這一結果與用外賦曲率定義幾何力學動量的 (21.91) 式以及用間隔函數與移位函數定義外賦曲率的 (21.67) 式合在一起所得的結果一致，此處的(21.114)式與

$$dx/dt=\partial H(x,p)/\partial p=p/m$$

在大多數初等力學問題中一樣有用：它標誌着把一個二階方程或方程組分解爲二倍之多的一階方程的第一步。

由 ADM 表述得出動力學方程和初值方程

現在對 g_{ij} 變化作用量，並在再次作適當的分部積分和重新整理之後，得出剩下的廣義相對論的一階動力學方程 [用 (21.116) 和 (21.117) 式加以簡化]，

$$\begin{aligned}\partial\pi^{ij}/\partial t=&-Ng^{1/2}\left(R^{ij}-\frac{1}{2}g^{ij}R\right)+\frac{1}{2}Ng^{-1/2}g^{ij}\left(\mathrm{Tr}\,n^2-\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\pi)^2\right)\\&-2Ng^{-1/2}\left(\pi^{im}\pi_m{}^j-\frac{1}{2}\pi^{ij}\,\mathrm{Tr}\,n\right)\\&+g^{1/2}(N^{|ij}-g^{ij}N^{|m}{}_{|m})+(\pi^{ij}N^m)_{|m}\\&-N^{i}{}_{|m}\pi^{mj}-N^{j}{}_{|m}\pi^{mi}+\left\{\begin{array}{l}\text{除幾何之外由場引起的源項}\\\text{，此處從簡略去，但 ADM}\\\text{(1962)曾討論過}\end{array}\right\}^{ij}。\end{aligned}\quad (21.115)$$

最後對間隔函數N和移位函數 N_i 取作用量 (21.95) 式的極值，得出等效於 (21.77)式和(21.81)式或等效於 $G_n^a=8\pi T_n^a$ 的廣義相對論的四個所謂初值方程；即

$$-(1/16\pi)\mathcal{H}(\pi^{ij},g_{ij})=(1/8\pi)Ng^{-1/2}g_{ij}(\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j+\mathcal{B}^i\mathcal{B}^j),\quad (21.116)$$

$$-(1/16\pi)\mathcal{H}^i(\pi^{ij},g_{ij})=-(1/4\pi)[ijk]\mathcal{E}^j\mathcal{B}^k。\quad (21.117)$$

練習

練習 21.11 首次把 ADM 變分原理用於電磁場

相對於 $\mathcal{E}^i$ 取作用量 (21.100) 式的極值，並導出 (21.103) 式。

練習 21.12 再次把 ADM 變分原理用於電磁場

相對於 A_i，取 (21.100) 式的極值，並證明在任何 Minkowski 平直區域中所得的結果與 (21.107) 式等價。

練習 21.13 在廣義相對論動力學方程中的 Faraday-Maxwell 源項

從作爲 A_i 和 g_{ij} 函數的 Maxwell 電動力學的 Lagrange 函數 (21.100) 式出發，計算 (21.115) 式中最後指出的源項。

練習 21.14 ϕ 的選擇無關緊要

試證明課文中的下述論斷：在分析 (a) 平直空時 Minkowski 坐標和 (b) 按練習 21.12 中推廣的 (21.107) 式和 (21.103) 式在廣義相對論中，電場和磁場本身的動力學發展與標勢 $\phi(t,x,y,z)$ 的選擇無關。

練習 21.15 空時如何切割無關緊要

在類空超曲面 Σ 上，給定度規 ${}^{(3)}g_{ij}(x,y,z)$ 和外賦曲率 $K^{ij}(x,y,z)$，假定這些量滿足初值方程 (21.116) 式和 (21.117) 式，並給定兩組可供選擇的間隔函數和移位函數 (N, N_i) 和 $(N+\delta N, N_i+\delta N_i)$，試證明，通過動力學方程 (21.114) 式和 (21.115) 式，在離超曲面不遠（一階小量）的一點 $\mathcal{P}$ 所算出的曲率本身（以它在兩個不同坐標系中的分量來區分）與間隔函數和移位函數的選擇無關。

§ 21.8 隨時間向前積分

在 Arnowitt, Deser 和 Misner 的 Hamilton 表述中［也請參看許多作者關於廣義相對論量子化的許多論文——主要是把 Einstein 理論寫成 Hamilton 形式——例如所引的 Wheeler (1968) 的文獻 1 和 2］幾何動力學的形式與 Hamilton 質點動力學十分相似。在 Hamilton 質點動力學中，給定起始時刻的 x 和 p 值，對 dx/dt 和 dp/dt 的兩個一階方程隨時間向前積分，以求出在所有未來時刻中這些動力學的共軛變量。這裏，在初始類空超曲面上，給定適當的 g_{ij} 和 π^{ij} 值，對兩個一階方程 (21.114) 式和 (21.115) 式隨時間向前積分，以求出未來時刻的幾何。例如，按照現代流體動力學中熟悉的方法，可以把微分方程改寫爲差分方程，然後在具有大量存儲能力的電子數字計算機上作積分。

在廣義相對論中，時間具有多指性質，與非相對論質點力學中時間的單參數特徵很不相同［但是，爲了討論有許多相互作用粒子的系統的相對論動力學，採用了多時間表述，可參看 Dirac, Fock 和 Podolsky (1932) 等人的文獻］。研究幾何的人可以隨意地把類空超曲面此處較快而彼處較慢地向前推進，只要保持它爲類空的即可。這種自由表現在積分的每一階段，即各 t 時刻的間隔函數 $N(t,x,y,z)$，(21.114) 式和 (21.115) 式並不是向分析者提供有關 N 的信息的通道。N 的選擇是人爲的而並非本應如此。在作出選擇之前，動力學方程不能開始履行它的任務。「時間參數」t 只是在單參數超曲面族中把一個類空超曲面與其他相區分的指標，而 N 則給出相鄰薄片之間的原時間隔，因爲它是處處不同的，人們選用這些薄片記錄幾何隨時間的演化。電影攝影機在一個時刻只能記錄事情的一個畫面，但操作人員可以選擇不同角度拍攝而得到完全不同的場景。此處同樣，只是選擇切割方式而已。

選擇間隔函數和移位函數以便最方便地隨時間向前積分

另一種選擇與分析者有關，特別是與用數字計算機作分析者有關。他正在把 (21.114) 式和 (21.115) 式寫成差分方程，以確定由 $x=\ldots,73,74,75,76,77,\ldots$ 所代表的各點陣上的情況。他發現，在 $x=83$ 到 $x=89$ 附近的局部區域中，曲率最强烈地增大。他希望在這一區域中增加追踪點的覆蓋密度。他把 x 值較小的點和 x 值較大的點，隨着時間 t 的增長：$t=\ldots,122,123,124,\ldots$ 逐漸移到這個區域，作到了這一點。他使 x 值較小的各追踪點向右移動（N_1 爲正），使 x 值較大的各點向左移動（N_1 爲負）。換言之，三個移位函數 $N_i(t,x,y,z)$ 的選擇，與間隔函數 N 的選擇一樣，也正是分析者的責任。方程決不會告訴他應如何選擇。他必須告訴方程如何選擇。

這些選擇權，決沒有使動力學方程 (21.114) 式和 (21.115) 式複雜化，却在分析者隨着他所研究的不管什麼樣的幾何動力學過程前進時，能使這些方程更靈活並適應分析者的願望。

在廣義相對論中，選擇四個函數 N, N_i 的自由，也可以從另一方面加以闡明，即與電動力學中選擇一個標勢函數 $\phi(t,x,y,z)$ 的自由相比較。練習 21.12 所推廣的動力學 Maxwell 方程 (21.103) 式和 (21.107) 式無法確定 ϕ。相反，這些方程要求 ϕ 應被（分析者）確定，以此作爲預言矢勢 A_i 隨時間發展的代價。$\phi(t,x,y,z)$ 對位置和時間依賴關係的另一選擇意味着從動力學方程得出的三個 A_i 隨時間和空間變化有另一種結果。但是，物理上有意義的量，即在相繼超曲面上的電場和磁場應保持不變（練習 21.14）而與 ϕ 的選擇無關。幾何動力學與此相似：四個函數 N, N_i 的另一種選擇意味着 (a) 在

四維幾何不變，與間隔函數和移位函數的選擇無關

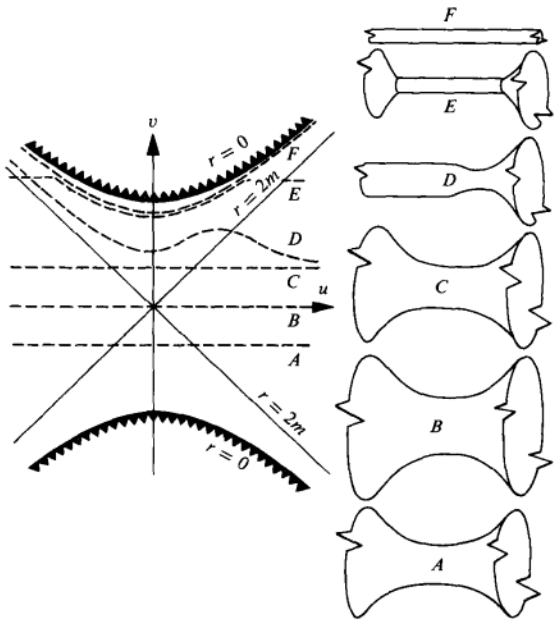


圖 21.4
對於同一個完全 Schwarzschild 四維幾何 $^{(4)}\mathfrak{G}$，構成不同類空薄片的許多方式中的幾種方式。

空時中建立了另一坐標系，因此（b）相繼類空超曲面的內稟度規 $^{(3)}g_{ij}$ 和外賦曲率 K^{ij} 不同，但得出同樣的四維幾何 $^{(4)}\mathfrak{G}$（圖 21.4）而與此種選擇無關（練習 21.15）。

§ 21.9 薄夾層表述中的初值問題

初值數據：什麼是隨意安排的？什麼是因之而固定的？

給定適當的初值數據，可以把動力學方程隨時間向前積分並確定幾何的演化；但是，什麼是適當的初值數據呢？它們是六個函數 $^{(3)}g_{ij}(x,y,z)$ 加上其他六個函數 $\pi^{ij}(x,y,z)$ 或 $K^{ij}(x,y,z)$，這些函數一起滿足四個初值方程（21.116）式和（21.117）式。需要給定坐標和動量，這是與 Hamilton 力學的熟悉的計畫相一致的；但是對此數據加上相容條件或「限制」却不很熟悉。在兩維空間運動的一個粒子可以坐標 x, y 和坐標 p_x, p_y 來標誌；但是被迫留在圓 $x^2+y^2=a^2$ 上的粒子滿足限制條件 $xp_x+yp_y=0$。因此，有「限制」是系統具有較少自由度（與無限制相比）的信號。充分地分析這四個「初值」條

件或「限制」條件（21.116）式和（21.117）式，可確定(1)幾何具有多少動力學自由度，(2)這些自由度是什麼；這就是說，爲了完全控制幾何和它隨時間的演化，有什麼「把手」（handle）是確實可以自由調整的。今天，自由度數可以數出來，結論是：幾何具有的眞自由度數與電磁場相同。對於「把手」或動力學自由調整特徵的辨識，幾何還不如電磁學先進（框21.2），但是，迄今爲止還是極爲有效的。

無論 Einstein 場，或是 Faraday 和 Maxwell 場，爲構成適當的明確定義的變分原理，要知道在初、終類空超曲面上應固定什麼量，公平地說，對自由度數的識別並不比這要求更多。因此，可以作以下的選擇：(1)給定兩個超曲面上的量，或(2)在一個超曲面上給定該量及其動力學共軛量，或(3)與(1)一樣，給定在兩個超曲面上的量，但取無限薄夾層的極限，結果確定了在一個超曲面上的量及其隨時間的變化率。在電動力學和幾何動力學中，爲了快速分析初值問題，第三種「薄夾層」方法是最簡單的。先以電動力學爲例加以說明。

在電磁學中，給出磁場及其變化率作爲初始數據

給定無散磁場及其時間變率：一般情況下是在彎曲空時的任意平滑類空超曲面上；在目前的例證中是在 Minkowski 空時 $t=0$ 的超曲面上，即

$$\mathcal{B}^i(0,x,y,z)\text{給定，} \tag{21.118}$$

$$\dot{\mathcal{B}}^i(0,x,y,z)=\left(\frac{\partial \mathcal{B}^i}{\partial t}\right)\text{也給定。} \tag{21.119}$$

這些量一共包括每一空間點的四個（只有四個）獨立數據。現在，如何得出動量 $\pi^i\sim-\mathcal{E}^i$，以便能把動力學方程（21.103）式和（21.107）式隨時間向前積分呢？(1)找出一組三個函數 $A_i(0,x,y,z)$ 使其旋度給出三個規定的 $\mathcal{B}^i$。完全可以這樣作的保證是散度 $\mathcal{B}^i{}_{,i}$ 爲零。然而，A_i 的選擇並不唯一。對任意平滑的 λ，一組新的勢 $A_{i\text{新}}=A_i+\partial\lambda/\partial x^i$ 與原來的 A_i 一樣，是很好的解。沒有關係。取一個解並堅持用它。(2)類似地，求出一組三個 $\dot{A}_i(0,x,y,z)$ 使其旋度給出規定的 $\dot{\mathcal{B}}^i(0,x,y,z)$，以「命令」解決所有選擇任意性的問題。(3)記住電場（場動量的負值）由下式給出

$$\mathcal{E}_i=-\dot{A}_i-\partial\phi/\partial x^i \tag{21.120}$$

（此公式只在平直空間適用，無需修正）。初值或限制方程 $\mathcal{E}^i{}_{,i}=0$ 轉換爲下述形式

$$\nabla^2\phi=-\eta^{ij}\dot{A}_{i,j}。 \tag{21.121}$$

框 21.2 電磁場自由度的計數

A. 第一種方法：每個空間點的「場坐標」數

無源電磁場自由度的表面記錄是，在初始時刻 Σ 上每一空間點有三個場坐標 $A_i(x,y,z)$，加上每一空間點的三個場動量 $\pi^i_{真}=\pi^i/4\pi$ $[\pi^i=-\mathcal{E}^i(x,y,z)]$。

更嚴密的檢查揭示出，每一空間點的坐標自由度數不是三而是二。因而，矢勢的改變 $A_i\longrightarrow A_i+\partial\lambda/\partial x^i$ 不改變實際的物理狀況，即不改變磁場分量

$$\mathcal{B}^i=\frac{1}{2}[ijk](\partial A_k/\partial x^j-\partial A_j/\partial x^k)。$$

而且，儘管這些分量的數目是三，但它們在每個空間點都滿足一個條件 $\mathcal{B}^i{}_{,i}=0$，因而每個空間點有效的淨坐標自由度數減少爲二。

每個空間點的動量自由度數，由於在每個空間點都有一個條件 $\mathcal{E}^i{}_{,i}=0$，類似地也由三減爲二。

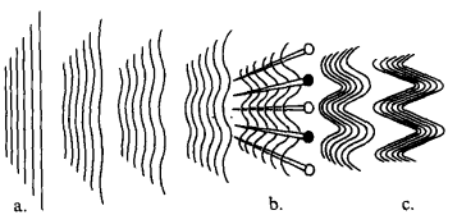
B. 另一種方法：Fourier 係數計數

在場論的教科書中［參看，例如，Wentzel (1949)］，注意力集中於平直空時。Fourier 分析把電磁場分解爲各個行波。可以不在坐標空間計數每一點的自由度，而等效地在波數空間計數每一點的自由度。這樣，對於每個 (k_x,k_y,k_z)，有兩個獨立的偏振狀態。在初始時刻 t_0'，每個偏振狀態的描述需要一個振幅（「坐標」）和振幅的時間變化率（「動量」）。這樣，在波數空間每一點的自由度數是坐標二個和動量二個，與在坐標空間的計數結果一致。

在彎曲空時中，用 Fourier 分析確定電磁場的自由度［對於這種 Fourier 分析，請參看 Misner 和 Wheeler (1957) 的文獻，特別是其中的表X和隨後的正文］不如上述直接在空間作分析方便。

C. 另一種方法：分析「結構形變」

還有第三種方式處理無散場 $\mathcal{E}$ 或 $\mathcal{B}$ 的自由度，它建立在結構形變的概念上［圖引自 Wheeler (1964) 的文獻］。用 Faraday 力線的



圖畫 (a) 表示磁場，力線連續通過空間而無終點，自動地確保 $\mathcal{B}^i{}_{,i}$ 處處爲零。把「織針」(b)插入力線的類通心粉結構並隨意移動這些針。沿力線滑動「織針」不會引起力線的移動。(c) 借助於兩個互相垂直且均與力線垂直的織針，可使任意給定力線垂直其長度方向作任意大小的位移：仍是每一空間點兩個自由度。從任意非零場開始，不管場是多麼小，通過一系列這類小形變，可構成與任意無散場樣式一致的場，而不管場可能有多麼複雜以及強度是多少。

解出 ϕ。然後，(4)由 (21.120) 式給出初值電場，或者按照積分動力學方程 (21.103) 式和 (21.107) 式的需要（與場坐標 A_i 一起）給出電動力學的場動量 $\pi^i \sim -\mathcal{E}^i$。[Misner 和 Wheeler (1957) 討論了空間多連通時出現的附加特徵。幾何的每一個蛀孔或把手都能俘獲電力線。在任一蛀孔中俘獲的通量確定了與該蛀孔相聯繫的經典電荷 q_w。除了 (21.118) 式和 (21.119) 式的數據外，還必須一勞永逸地規定全部這些電荷，以便完全確定電磁場的動力學演化。根據 Unruh (1971)，幾何動力學中沒有與電荷類似的東西。] (5)作積分時，每下一時刻的標勢 ϕ 不能由計算得出，而需選定。只有當作出這一選擇之後，動力學方程才能確定以下各時刻 A_i, π^i 或 $\mathcal{E}^i$ 的結果。

標量勢：開始給定，以後可自由處置

電動力學初值問題的薄夾層表述可概括如下：給定 $\mathcal{B}^i$ 和 $\dot{\mathcal{B}}^i$（等價於在相鄰的兩個超曲面上給定 $\mathcal{B}$ 值）。以很大的任意性選定 A_i 和 $\dot{A}_i$，以代表這些初值數據。任意性已被用來給出初始的 A_i 和 $\dot{A}_i$，初值 ϕ 已無任意性可言。然而，在隨後全部時刻，情況恰好相反。全部任意性都用於選擇 ϕ 值，三個 A_i 並無任何任意性（它們由動力學方程的積分給出）。

在 ADM 論述中，給定三維幾何及其時間變率

幾何動力學的情況十分類似。給定單參數類空超曲面族的開端；即

$$^{(3)}\mathfrak{h}(0) \text{ 給定，} \tag{21.122}$$

$$^{(3)}\dot{\mathfrak{h}}(0)=\frac{\partial\, ^{(3)}\mathfrak{h}}{\partial t} \text{給定，} \tag{21.123}$$

然後，(1)選出一組確定的坐標 $x^i=(x,y,z)$，並用這些坐標找出描述此三維幾何的唯一一組度規係數 $g_{ij}(x,y,z)$。解的存在由 $^{(3)}\mathfrak{h}$ 是 Riemann 幾何所確保。然而，爲描述同一個三維幾何，也可選用不同的坐標，得出不同的度規係數，沒有關係。挑出一組坐標，取由此得出的度規係數，堅持使用它們作爲給定的所需初值數據之半。(2)類似地，用坐標 $x^i+\dot{x}^i dt$ 描述參數值爲 $t+dt$ 時的三維幾何 $^{(3)}\mathfrak{h}+^{(3)}\dot{\mathfrak{h}}dt$，並得出度規係數 $g_{ij}+\dot{g}_{ij}dt$。x^i 的任意性由命令來解決，而 $^{(3)}\mathfrak{h}$ 作爲確定的初始物理數據給定，從而 g_{ij} 就完全固定了。(3)記住外賦曲率的諸分量 K_{ij} 或動量 π^{ij}，可通過 (21.67) 式，或 (21.67) 式加上 (21.79) 式，或 (21.114) 式，由 g_{ij}, $\dot{g}_{ij}$，以及間隔函數和移位函數 N 和 N_i 給出。這樣，四個初值方程或「限制」方程 (21.116) 式和 (21.117) 式變成了爲求出四個量 N, N_i 的四個條件。爲了把這些條件寫得簡短些，引入縮寫符號

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{2}[N_{i|j}+N_{j|i}-\partial g_{ij}/\partial t] \tag{21.124}$$

和

$$\gamma_2=\left(\begin{matrix}\text{「異常}\\ \text{移位」}\end{matrix}\right)=(\mathrm{Tr}\,\gamma)^2-\mathrm{Tr}\,\gamma^2 \tag{21.125}$$

（兩者都是初始時刻的 x, y, z 的函數）。於是，一個初值方程爲：

$${}^{(3)}R+\gamma_2/N^2=16\pi T_{nn}=16\pi T^{nn}; \tag{21.126}$$

另外三個爲

$$\left[\frac{\gamma_i{}^k-\delta_i{}^k\mathrm{Tr}\,\gamma}{N}\right]_{|k}=-8\pi T_i{}^n。 \tag{21.127}$$

間隔和移位起初是確定的，此後可自由處置

總而言之，以很大的任意性選定 g_{ij} 和 $\dot{g}_{ij}$（由於坐標的任意性，而不是由於物理中有什麼任意性）來表示給定的初值數據 ${}^{(3)}g$ 和 ${}^{(3)}\dot{g}$。初始時刻的任意性全部以這種方式吸收掉了，可以預料，通過解 (21.126) 式和 (21.127) 式得出的初始N和 N_i，已沒有任意性殘留下來。然而，在所有稍後的類空薄片上，對任意性的裁決剛好相反。間隔函數和移位函數可以自由處置，但是它們一旦被選定，通過對動力學方程 (21.114) 式和 (21.115) 式作積分得出的六個 g_{ij}（以及六個 K^{ij} 或 π^{ij}）已無任意性可言。與電動力學的相似是很明顯的。在電動力學中，一個「規範控制函數」ϕ 開始是由橢圓方程 (21.121) 式確定的，但爾後可任選。這裏，四個間隔函數和移位函數開始是由四個方程 (21.126) 式和 (21.127) 式確定的，但爾後可以任選。

練習 21.16 將初值方程 (21.126) 式用於分析任意 Friedmann 宇宙隨時間的全部演化，在該宇宙中，已知把壓力與密度聯繫起來的方程 $p=p(\rho)$。練習 21.17 尋找在類空超曲面Σ上的一個變分原理，它的內容與標勢ϕ的橢圓初值方程 (21.121) 式等價。練習 21.18 和 21.19 尋找類似的變分原理，以確定間隔函數和移位函數。

初值數據計數

在詳述將要得出的四維幾何時，有多少自由度或多少個「把手」呢？初始三維幾何的度規係數爲每個空間點提供了六個數目。然而，在由三個位置函數

$$x=x(x',y',z'),$$
$$y=y(x',y',z'),$$
$$z=z(x',y',z')$$

所確定的坐標變換的範圍內，它們是任意的。因此，在每一空間點帶有任何物理信息的量的淨數目是 6-3=3 。可以把這三個函數看作在坐標系中度規的三個對角分量，在該坐標中 g_{ij} 已變換爲對角形式。通常，在如此狹窄地限定的坐標系中繼續下去並如實地詳加分析是沒有意義的。

現在，設想所討論的 ⁽³⁾ゟ 嵌入由積分得出的 ⁽⁴⁾ゟ 之中。再設想 ⁽⁴⁾ゟ 具有大量的隆起、腫塊、扭曲和波紋，使得它與其他的一般四維幾何很不相同，並使得 Minkowski 幾何和特殊宇宙論毫無代表性。 ⁽³⁾ゟ 就是在這種 ⁽⁴⁾ゟ 之中的一片。在與它相交的 ⁽⁴⁾ゟ 的全部區域中，它分享着這些隆起、腫塊、扭曲和波紋。在 ⁽⁴⁾ゟ 是一般的四維空間的範圍內，不可能把 ⁽³⁾ゟ 移動到另一位置而不使它變成另一個 ⁽³⁾ゟ。如果試圖在某一位置把 ⁽³⁾ゟ「隨時間推進」一點，而保持它在其他各處不改變，那就必定改變了這個 ⁽³⁾ゟ。在這種情況下，可以看出 ⁽³⁾ゟ「携帶着有關時間的信息」［見 Sharp (1960); Baierlein, Sharp 和 Wheeler (1962) 的文獻］。此外，爲了描述「隨時間向前的運動」，在每一個空間點都需要一個數字。通過設想在 ⁽⁴⁾ゟ 內一個任選的坐標系 $\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, 可以具體地想像這個數字。於是，可以設想超曲面是由它與典型線 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 相交處的數值 $\bar{t}=\bar{t}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 所定義的。向前的運動使之達到 $\bar{t}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})+\delta\bar{t}$ ($\bar{x},\bar{y},\bar{z}$)，並相應地改變了 ⁽³⁾ゟ 的形狀和度規係數。通常，以不把思路束縛到這麼具體的模型中去爲宜，而寧肯確認原理的一般要點(1)爲了描述 ⁽³⁾ゟ 在空時中的位置，在每一空間點需要一個數據，和(2)這個數據已經被迫地置身於在每一空間點標誌任意 ⁽³⁾ゟ 的三個數據之中。

初始時刻每一空間點有四個幾何動力學信息

總之，在 ⁽³⁾ゟ 中每一空間點只有兩個數據，它們眞實地說明了有關它所嵌入或將嵌入的 ⁽⁴⁾ゟ 的一切（與 ⁽³⁾ゟ 切割該 ⁽⁴⁾ゟ 的地方相區別）。對定義別的或薄或厚的「夾層表面」的其他 ⁽³⁾ゟ，情況相似。因而，結論是： ⁽³⁾ゟ 和 ⁽³⁾ゟ̇ 的規定，實際上在每個空間點給出了有關 ⁽⁴⁾ゟ 的淨四條動力學信息（所有其餘的信息是「多指時間」，它指出三維幾何在該 ⁽⁴⁾ゟ 中位於何處）。根據這個思路，幾何動力學與電動力學有同樣數目的動力學自由度。由另外一條途徑也可達到同樣的結論，即在平直空時背景上作引力波的弱場分析時(§35.3) 得出：可能的波數的範圍與 Maxwell 波相同；並且對於每個波數有兩個偏振狀態，每個偏振有一個振幅和一個位相（等價於一個坐標和一個動量）。

在規定空時流形的電動力學中，每個空間點的一個時間數據（當用多指時間討論電磁學時）和每個空間點的兩個動力學變量之間界限分明；但在幾何動力學的超空間表述中並非如此。這時兩類量不可避免地混合在一個三維幾何的概念之中。

從初值和終值數據轉向作用量積分，後者取決於(1)這些數據和(2)作用量是一個極值的原理

$$I=I_{極值}=S。$$

作用量取決於終超曲面上的變量，在電動力學中的公式是

$$S=S(\Sigma,\boldsymbol{B}) \tag{21.128}$$

而在幾何動力學中的公式是

$$S=S({}^{(3)}\mathfrak{h}) \tag{21.129}$$

在每一種情況下，在函數的自變量中每個空間點有三個數目（一個在 Σ 中，兩個在無散磁場中，三個在 ${}^{(3)}\mathfrak{h}$ 中）。

保證原始數據完整性與一致性的問題

在三維幾何中一個多指時間與二個動力學變量的混合使廣義相對論比 Maxwell 理論更難知道什麼時候手中有了適當的初值數據。對於電動力學來說，給定 Σ 以及給定 Σ 上的 $\mathfrak{B}$ 和 $\dot{\mathfrak{B}}$ 就足夠了。對於幾何動力學，給定六個 $\dot{g}_{ij}(x,y,z)$ 和六個 $\dot{g}_{ij}(x,y,z)$ 却未必足夠。例如，設時間參數 t 是一個膺品，因此 dt 不能從給定的超曲面 Σ 引向新的超曲面 $\Sigma+d\Sigma$，而僅僅給原有超曲面以新的坐標：

$$\begin{aligned} &x^i\longrightarrow x^i-\xi^i dt\,,\\ &g_{ij}\longrightarrow g_{ij}+(\xi_{i|j}+\xi_{j|i})dt。\end{aligned} \tag{21.130}$$

初步考察會認爲在六個 g_{ij} 和六個

$$\dot{g}_{ij}=\xi_{i|j}+\xi_{j|i} \tag{21.131}$$

中已經有了適當的數據，但終於看出，並不具有所需的薄夾層的兩個面，而是只有一個面。因而，對以 (21.131) 式表示的任何一組六個 $\dot{g}_{ij}$，應作爲一般動力學問題中沒有提供適當數據的情形而予以拒絕［見 Belasco 和 Ohanian (1969) 的文獻］。

當薄夾層的兩個面不處處重合，而只在有限區域——三維的、二維的或甚至一維的區域中重合時（「從早先存在的一個面跨到較後的另一面」）也將出現類似的困難。因此，即使僅在 Σ 的一條曲線上出現 (21.131) 式，也可把六個 g_{ij} 作爲不適當的初值數據而加以拒絕。

「薄夾層推測」

人們可以對 g_{ij} 和 $\dot{g}_{ij}$ 附加上條件，它將保證初值方程 (21.126) 式和 (21.127) 式的解 $N(x,y,z)$，$N_i(x,y,z)$ 的存在唯一，這種條件即所謂「薄夾層推測」，對這一課題有許多研究者曾作過許多工作，但迄今尚無決定性的

定理。預先假定存在惟一，是給出 Mach 原理數學內容的第一步，Mach 原理指出，質量-能量在空間的分布決定了慣性（§21.12）。

§ 21.10　時間對稱和時間反對稱初值問題

從一般初值問題轉向可以詳加論述的兩個特殊的初值問題，其一爲時間對稱初值問題，另一爲時間反對稱初值問題。

一個四維幾何，如果在外賦曲率爲零的全部點上都存在着類空超曲面，則稱爲是時間對稱的四維幾何。在這種情況下，三個初值方程（21.127）式自動被滿足，而第四個初值方程簡化爲對三維標量曲率不變量的一個簡單要求，即

$$R=16\pi\rho。\tag{21.132}$$

當把注意力局限於眞空的空間時，可以進一步簡化。最簡單的是球對稱情形，對此，如練習 21.20 所述　在時間對稱時刻（兩個漸近平直空間由一口子連接起來）（21.132）式立即得出完全的 Schwarzschild 幾何。

考慮一個三維幾何，其度規爲

$$ds_1^2=g_{(1)ik}dx^i dx^k。\tag{21.133}$$

此度規稱爲「基度規」。考慮另一個三維幾何，其度規爲

$$ds_2^2=\psi^4(x^i)ds_1^2。\tag{21.134}$$

在這兩個幾何中，角度是同樣的。爲此，它們稱爲是保形等價的。這兩個三維幾何的標量曲率不變量的關係如下式 [Eisenhart (1926)]

$$R_2=-8\psi^{-5}\nabla_1^2\psi+\psi^{-4}R_1,\tag{21.135}$$

式中

$$\nabla_1^2\psi=\psi_{|i}{}^{|i}=g_1{}^{-1/2}(\partial/\partial x^i)[g_1{}^{1/2}g^{ik}(\partial\psi/\partial x^k)]。\tag{21.136}$$

令標量曲率不變量 R_2 爲零，得出 [Brill (1959)] 保形改正因子 ψ 的「波動方程」爲

$$\nabla_1^2\psi-(R_1/8)\psi=0。\tag{21.137}$$

Brill 取基度規爲 Bondi 所建議的形式

$$ds_1^2=e^{2Aq_1(\rho,z)}(dz^2+d\rho^2)+\rho^2d\phi^2,\tag{21.138}$$

且使保形改正因子具有軸對稱性。這樣

$q_1(\rho,z)$ 量度了「引力波振幅的分布」，爲了簡化，設它在 $r=(\rho^2+z^2)^{1/2}=a$ 之外爲零；

A 量度「引力波振幅分布的振幅」；

$\psi(\rho,z)$ 是保形改正因子，在遠處隨位置按 $1+(m/2r)$ 變化。幾何是漸近平直的這個條件唯一地決定了量 m（厘米）。它量度引力輻射分布的質量-能量。

波振幅確定了質量-能量：$m=m(A)$

引力輻射的質量在振幅 A 很小時正比於 A^2。它反比於約化波長 $\lambda=$（有效波長/2π），量度「活動帶」中引力波振幅 $q_1(\rho,z)$ 快速變化的尺度。這樣，在活動帶度規受彎曲的支配，彎曲的振幅正比於 A，在遠處則受度規中接近於 Schwarzschild $(1+2m/r)$ 因子的某些量的支配。當 A 的振幅增大並達到臨界值 $A=A_{臨界}$ 時，m趨於無限大，幾何彎曲直至閉合（「宇宙因自身引力波能的容量而閉合」）。進一步的分析和例子，請參看 Wheeler (1964a) 的文獻 399-451 頁，和 Wheeler (1964c) 的文獻。

「時間反對稱」初值數據

Brill 曾對他稱爲時間反對稱初值條件的眞空情況作過類似的分析 [Brill (1961)]，後經 York (1973) 修正，簡述如下。(1)初始薄片是最大的，Tr$K=0$。(2)該薄片保形地平直

$$g_{ij}=\psi^4\delta_{ij}。 \tag{21.139}$$

(3)在度規爲 δ_{ij} 的「基空間」中作分析，然後再轉換到幾何 (21.139) 式。三個初值方程變爲

$$K^{ij}_{基,j}=0。 \tag{21.140}$$

爲了解這些方程 (1)取任意局域無跡對稱張量 B_{km}；(2)解平直空間 Laplace 方程 $\nabla^2A=(3/2)\partial^2B_{km}/\partial x^k\partial x^m$，求出 A；(3)定義六個勢 $A_{km}=B_{km}+\frac{1}{3}A\delta_{km}$；和(4)計算

$$K^{ij}_{基}=[ikl][jmn]\partial^2A_{km}/\partial x^l\partial x^n, \tag{21.141}$$

它自動滿足 (21.140) 式並給出 Tr$K_{基}=0$. 這樣，$K^{ij}=\psi^{-10}K^{ij}_{基}$ 也自動滿足這些條件，但現在已在彎曲的幾何 (21.139) 式中了。在平直基空間，保形因子 ψ 最後的初值方程成爲準線性的橢圓方程。

$$8\nabla^2_{基}\psi+\psi^{-7}\sum_{i,j}(K_{基ij})^2=0。 \tag{21.142}$$

ψ 的漸近形式表明波的質量爲正。

賦予高度對稱性的幾何的有限維動力學

除了時間對稱與時間反對稱情況外，至少還有兩種情況初值問題特別簡單。其一是幾何被賦予對稱性，例如第27章的 Friedmann 宇宙，或第30章的混主宇宙，或 Kuchař (1971a) 處理的圓柱形引力波。可以從 g_{ij} 和 π^{ij} 具有特殊對稱性的類空薄片開始，並在構成未來類空薄片時保持這種對稱性。在這些時間中任一瞬間的幾何，儘管幾乎完全受這種對稱性考慮的支配，但爲了完全確定它，仍然典型地要求一些可計算的參數，例如 Freidmann 宇宙的半徑，或混主宇宙的三個主曲率半徑。這些參數以及與之共軛的動量定義一微相空間。在此微相空間中，動力學像經典動力學的任何其他問題一樣自由發展［對於混主宇宙，參看，例如，框 30.1 和 Misner (1969) 的文獻；對於具有柱對稱性的波，參看 Kuchař (1971a) 和 (1972) 的文獻；對於具有球對稱性的波參看 Gowdy (1973) 的文獻］。甚至最足以表徵廣義相對論特點的多指時間存在的證據也被抑制，付出這個代價是爲了絕不側目於任何失去所述對稱性的類空薄片。

練習

練習 21.16　處理宇宙論的窮人方式

考慮度規爲

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+sin^2\theta d\phi^2)]$$

的空時，它相當於半徑 $a(t)$ 隨時間變化的球形三維幾何。試證明在局域 *Euclid* 參照系中表示的外賦曲率張量爲

$$K=-a^{-1}(da/dt)1\,,$$

式中 1 爲單位張量。試證明初值方程 (21.77) 式簡化爲

$$(6/a^2)(da/dt)^2+(6/a^2)=16\pi\rho(a)$$

［左側第二項之值，請參看練習 14.3 和框 14.2 以及 14.5］，並說明對於「充滿塵埃的宇宙模型」，右側項爲什麼可以寫爲 $6a_0/a^3$。在更一般的情況下，給定任意狀態方程 $p=p(\rho)$，試說明如何由

$$d(\rho a^3)=-pd(a^3)$$

找出 $\rho=\rho(a)$；從而說明如何預報膨脹和重新收縮的歷程 $a=a(t)$。

練習 21.17　電動力學標勢的薄夾層變分原理

(a) 在下述表達式中

$$\frac{1}{8\pi}g^{mn}\frac{\partial\phi}{\partial x^m}\frac{\partial\phi}{\partial x^n}+U^m\frac{\partial\phi}{\partial x^n}$$

選擇未知的 U^m，使得此表達式乘體元 $g^{1/2}d^3x$ ，再對同時超曲面Σ積分後，對滿足電動力學初值方程的ϕ而且只對該ϕ取極值。

(b) 試證明所得之變分原理，並非什麼「突然的」發明，只不過是基於電動力學的Lagrange 密度 (21.100) 式，由作用量原理直接得出的結果（在夾層兩面之間，處處獨立地變化ϕ和三個 A_i，使 I 取極值，變化中只服從事先在夾層兩面上對 A_i 的規定，並取夾層厚度趨於零的極限）。

練習 21.18 在幾何動力學中，間隔函數和移位函數的薄夾層變分原理

(a) 取作用量積分

$$I_3=\int\{[R-(\mathrm{Tr}K)^2+\mathrm{Tr}K^2-2T^*_{nn}]N$$
$$-2T^{*k}_{n}N_k\}g^{1/2}d^3x$$

對間隔函數和移位函數之極值，並證明由此方式可得到幾何動力學的四個初值方程。可以認爲分析時已給定同時超曲面上的六個 g_{ij} 和六個 $\partial g_{ij}/\partial t$ 。外賦曲率如在 (21.67) 式中那樣，由上述量，間隔函數和移位函數表示。與本章前面的討論相同，能量密度和能流是對該同時超曲面內的三個任意坐標基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 和單位法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 而言的，星號縮寫表示略去因子8π。

(b) 由 ADM 變分原理，取無限薄夾層的極限，導出此變分原理［參看 Wheeler (1964) 的推導］。

練習 21.19 精簡的薄夾層變分原理

(a) 取上一練習的作用量 I_3 對間隔函數 N 的極值。

(b) 所得結果與「三維幾何是有關時間信息的携帶者」的原則有何關係？

(c) 消去 N，得出「精簡的薄夾層變分原理」，其中只有三個移位函數 N_i 可變。

練習 21.20 處理 Schwarzschild 幾何的寫人方式

把下述條件加在明確隨時間演化的彎曲眞空空間之上：(1)它具有一時間對稱的矩，一個類空超曲面，它相對於環繞空時的外賦曲率處處爲零，以及(2)該類空超曲面具有球對稱性。把三維幾何度規寫成下述形式

$$ds^2=\psi^4(\bar{r})(d\bar{r}^2+\bar{r}^2d\theta^2+\bar{r}^2\sin^2\theta d\phi^2)。$$

由初值方程 (21.127) 式，試證明除一乘數因子外，保形因子ψ的形式應爲 $\psi=(1+m/2\bar{r})$。試證明其固有圓周 $2\pi\bar{r}\psi^2(\bar{r})$ 在某個特定的 $\bar{r}$ 值取極小值，由此確定三維幾何的咽喉（throat）。試證明三維幾何對於在該咽喉處的反射具有鏡對稱性，意即作代換 $\bar{r}'=m^2/4\bar{r}$ 時，度規的形式不變。試求出從保形坐標 $\bar{r}$ 到 Schwarzschild 坐標 r 的變換。

§21.11　York 確定四維幾何的諸「把手」

簡述幾何的自由度

在極值固有體積的一個同時超曲面上，或者在該超曲面上，給出三維幾何的保形部分，並給出動力學共軛動量的兩個不等價的分量，以便(1)具有自由規定的但仍然是完全的初值數據，從而(2)完全確定整個一般的四維空時流形。簡要地說，這就是 York (1971,1972b) 的推廣，即把 Brill 在特殊情況所作的討論（參看前一節）推廣到一般。York 和 Brill 承認 Lichnerowicz (1944) 和 Bruhat (1962 及該文所引有關保形幾何和初值問題的早期文獻) 較早的討論。但爲什麼是保形幾何，爲什麼選定這樣特殊的類空超曲面，而在其上給出每空間點的四個動力學數據呢？

幾乎沒有別的 Maxwell 方程的解，比 Minkowski 平直空時中無限的平面單色波更簡單了；而當考察以任意方式切過空時的類空薄片時，其中有局部的扭曲和波紋，大尺度的隆起和腫塊，以及更大尺度的一般曲率時，也很少有別的解看起來更複雜了。希望研究電動力學隨多指時間演化的人，沒有人能夠避開這些複雜性；想看到以其最簡潔形式表現出來的電磁場自由度的人，誰也不會接受多指時間的這些複雜性。他會選用他所能找到的最簡單的類時薄片。在該同時，超曲面的每一空間點上有兩個也只有兩個場坐標，有兩個也只有兩個場動量。幾何動力學與此類似。

選取具有極值固有體積的超曲面

當人們想要整理幾何的自由度時，因與分析幾何的動力學不同，需要從包含在三維幾何中的每一空間點的三條信息後退［或者從任何其他分析幾何動力學的方式後退，特別是從 Kuchař (1971b 和 1972)「外賦時間」表述中所示的方式後退］，而追隨 York：(1)選取有極大固有體積的同時超曲面，和(2)在此同時超曲面上，在「每一空間點」規定兩個「坐標自由度」，上述空間點包含在三維幾何的保形部分之中。

類空超曲面 Σ 上的固有體元 $g^{1/2}d^3x$，在垂直超曲面量度的下一個單位原時間隔內，固有體積的部分增大［見圖 21.3 以及 (21.59) 式和 (21.66) 式］，爲

$$-\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}=-\frac{1}{2}g^{-1/2}\mathrm{Tr}\boldsymbol{n}\ 。\qquad(21.143)$$

對於體積的極值，此量應在Σ的每一點上均爲零。在 Friedmann宇宙（第27章）和 Taub 宇宙（第 30 章）中，在宇宙從膨脹轉爲重新收縮，自然時間坐標爲 t 值時，這個條件是滿足的。引人注目的是，對於完全喪失任何對稱性的閉宇宙，在選擇的同時超曲面Σ上，同樣的條件可同樣以很自然的方式表示爲

$$\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}=0\quad 或\quad \mathrm{Tr}\boldsymbol{n}=0。\qquad(21.144)$$

開放三維幾何的情況

換言之，可以處理這樣的空時，它在拓撲上是開放三維空間與實線（時間）的乘積。那麼，很自然會想到，可以規定一個類空二維幾何S在其中的位置，這個二維幾何是以二維球的拓撲爲邊界的。這樣，就有了很多以類空三維幾何Σ充滿S內部的方式；但是，在所有這些Σ中，只有使之取極值的那一個，或者只有使之取極值的那一些，是滿足（21.144）式的。

誰來規定這個具有二維球拓撲的二維幾何呢？該二維幾何的選擇並非無關緊要。通常，在給定的四維幾何中，邊界二維幾何的不同選擇將給出不同的極值三維幾何，因此導致「初值同時超曲面」Σ的不同選擇。不存在這樣的考慮，只要循此向前，就會立即給出二維幾何的一種優先選擇（與其他選擇相比）但是，當我們只注意閉合三維幾何時，這種選擇也並不是無限的。因此，雖則通過適當規定以開放區域爲邊界的閉合二維幾何上的邊值，會使得對該開放區域的分析非常明確，但當用於閉宇宙時，下述分析却可以具體化。簡言之，限於閉合三維幾何時，可以明顯的閉合條件取代不明顯的邊界條件。

當 York 的外賦時間

$$\tau=\frac{2}{3}g^{-1/2}\mathrm{Tr}\,n=\frac{4}{3}\mathrm{Tr}K$$

在超曲面上取任意常數值時，York 的分析仍很簡單，而不只是 $\tau=0$ 值適用於固有體積爲極值的超曲面。

保形三維幾何的含義

在由恒定外賦時間τ＝常數爲條件所確定的同時超曲面Σ上，從給出保形三維幾何開始，

$$<=^{(3)}<=\left\langle\begin{array}{l}\text{所有正定 Riemann 三維度規的等價類，在以下情形彼此等價(1)微分同胚（在流形上各點平滑地滑向新位置），或(2)逐點的尺度變化是平滑的，全部局域角度（局域距離之比）固定，但局域距離本身在變化，或(3)兩者兼而有之。}\end{array}\right\rangle \tag{21.145}$$

保形三維幾何是一個幾何客體，它的定義和解釋與坐標系的特殊選擇無關，甚至完全無需任何坐標系。對待保形三維幾何（在τ＝常數的超曲面Σ上）很像電磁學中對待磁場那樣。保形平直三維幾何的情況

$$ds^2=\phi^4(x,y,z)ds^2_{\text{基}} \tag{21.146}$$

($g_{ij基}=\delta_{ij}$) 類似於電磁學中磁場處處爲零的初值情況（Brill 的時間反對稱初值問題）；現在我們考慮一般$ds^2_{基}$的情況。

保形三維幾何的六個度規係數 g_{ij}，因三個坐x^i標的變化而變化，並且在任一點都有一共同的依賴於位置的乘數因子不確定，所以在每個空間點携帶着 6−3−1=2 條信息。在這方面，它們類似於無散磁場 $\mathcal{B}$ 的分量。相應的場動量 $\pi^i_{電磁}\propto\mathcal{E}^i$（框 21.1，496 頁）具有電荷密度決定的散度，故也携帶着

每一空間點上的二條信息（除上述有關電荷密度的信息外）。　(21.147)

把 $\mathcal{B}$的分量與度規係數相比稍有不妥。度規係數不像物理上有關場的分量，但更像勢。

在幾何動力學中，「場」的適當量度是曲率張量；但是對於保形三維幾何這種發展不完全的幾何，怎麼可能定義一個曲率張量呢？York (1971) 曾經提出並回答了這個問題，Weyl 保形曲率張量 [(13.50) 式和練習 13.13]，在高維空間中，[在固有 $(\frac{2}{2})$ 表象中] 與乘以度規係數並依賴位置的因子 ψ^4 無關，但在三維空間中同樣變爲零（練習 21.21）。僅當處理高於一階的微商時（練習21.22），才得到曲率的非零保形不變量的量度。這樣，就得到了 York 的曲率 $\tilde{\beta}^{ab}$，此處稱爲 Y^{ab}，這個張量密度具有下述性質：

York 曲率張量

$$Y^{ab}=Y^{ba}\text{（對稱）；}$$

$$Y^a_a=0\text{（無跡）；}$$

$$Y^{ab}{}_{|b}=0\text{（橫的）；}$$

Y^{ab} 對保形尺度因子與位置有關的變化是不變量；

$Y^{ab}=0$，當且僅當三維幾何保形平直時。　(21.148)

Y^{ab} 給出 York 所謂內稟於 Σ 的三維幾何的純自旋-二表述。它類似於在類空初值同時超曲面上的電動力學場 $\mathcal{B}$。它直接携帶着有關保形三維幾何的物理信息。

除了由「勢」$g_{ij}/g^{1/3}$ 規定且由「場分量」Y^{ij} 量度的保形幾何 [3]< 之外，還必須在 Σ 上規定相應的共軛動量：

$$\tilde{\pi}^{ab}=\tilde{\pi}^{ba}\text{（對稱）；}$$

$$\tilde{\pi}^{a}_{a}=0\text{（無跡）；}$$

有關的動量

$$\tilde{\pi}^{ab}{}_{|b}=0\text{（橫的）當空間無能流時；否則}$$

$$\tilde{\pi}^{ab}{}_{|b}=8\pi\text{（能流密度）；}$$

每個空間點有兩條信息（除上述有關能流的信息外）。 (21.149)

看來似乎重要的是，相對於三維幾何的保形因子，確定 (21.148) 式和 (21.149)式中權爲 5/3（見 §21.2）的張量密度的協變微商，這些三維幾何是以算出的保形因子有不同值而互相區別的。但是，York 已指出條件 (21.149) 式並不以任何方式依賴於保形因子 ψ^4 的值。

對於 York 稱爲「權 5/3 的動量密度」(21.149) 式，

$$\tilde{\pi}^{ab}=g^{1/3}\left(\pi^{ab}-\frac{1}{3}g^{ab}\mathrm{Tr}\,\pi\right), \qquad (21.150)$$

是線性的，因此可用標準方法進行分析。在這個複雜的求解中，York (1973a, b) 的工作給予很大的幫助，他提出了「在 Riemann 流形上對稱張量的保形不變正交分解」，由此可得出所需的解（「橫向無跡」部分，「保形扼殺（Killing）」部分和「跡」部分，它們分別量度幾何保形部分的形變，純重置坐標 (recoordinatization) 以及尺度的改變）。York 注意到的下述事實也對求解有進一步的幫助：即對整個一類保形等價度規，也就是說對於給定的

$$\tilde{g}_{ab}=g^{-1/3}g_{ab}, \qquad (21.151)$$

不管 g_{ab} 和 ψ 本身如何不同，其 $\tilde{\pi}^{ab}$ 總是相同的。

保形因子的唯一解

一旦選出保形三維幾何和「權 5/3 的動量密度」，餘下的初值方程 (21.116) 式就變成了確定保形因子 ψ 的「尺度」方程

$$8\nabla^2\psi-{}^{(3)}R\psi+M\psi^{-7}+Q\psi^{-3}-\frac{3}{8}\tau^2\psi^5=0。 \qquad (21.152)$$

式中 ∇^2 爲 Laplace 算符

$$\nabla^2\psi\equiv g^{-1/2}(\partial/\partial x^a)g^{1/2}g^{ab}(\partial\psi/\partial x^b)。 \qquad (21.153)$$

∇^2 與 ${}^{(3)}R$，M和Q一樣，都是相對基空間而言的。有趣的是

$$\nabla^2-\frac{1}{8}{}^{(3)}R$$

是保形不變的波算符，而 ∇^2 本身却並不是，在 York 的分析中，量M是縮寫符號，它表示

$$M\equiv g^{-5/3}g_{ac}g_{bd}\tilde{\pi}^{ab}\tilde{\pi}^{cd}, \qquad (21.154a)$$

和

$$Q\equiv 16\pi\rho_{基}(=16\pi\psi^8\rho=16\pi\psi^8\rho_{在給三維幾何中})。 \qquad (21.154b)$$

人們尋求的解ψ是在閉合流形中連續並處處爲實數和正值的ψ。什麼時候橢圓方程（21.152）式有這樣的解存在呢？什麼時候解是唯一的呢？ O'Murchadha 和 York (1973)的結論是，解總是存在並唯一的。（當 $M>0$ 和 $\tau\neq 0$ 時）；也請參看 Choquet-Bruhat (1972) 早先的研究。 Wheeler (1964a, 370-381 頁) 曾討論過進入這類問題的某些物理考慮。

§21.12　Mach 原理和慣性的起源

我認為，只有把世界看成是空間上自我封閉的，廣義相對論才能圓滿地解決這個［慣性］問題。

Albert Einstein (1934) 第52頁

1913年 6 月25日，即在 Einstein 發現以他命名的幾何動力學之前二年，Einstein (1913b) 寫信給 Ernst Mach（圖 21.5），爲 Mach 的概念對自己研究工作的啓發而向他表示感謝。Mach 在他的偉大著作力學 (The Science of Mechanics) ［(1912)，第二章 §6］中曾經評論說，談論質量相對於絕對空間的加速是沒有意義的。他評論說，任何試圖澄清物理學中神秘概念的人，最好是談論相對於遙遠恒星的加速。但是，遠在 10^9 光年之遙的恒星怎樣才能對此處和現在的慣性有所貢獻呢？長話短敍，可以馬上說，Einstein 的理論(1)認定引力是彼處物質影響此處慣性的機制；(2)指出這種耦合發生在類空超曲面上［這裏，不仔細考察，可能會錯誤地認爲違反因果律；參看 Fermi (1932) 對電動力學中類似佯謬的討論和澄清，也請參看 Einstein (1934) 84 頁：「而且，我曾相信我可以在一般考慮的基礎上，相對於與因果律不相一致的任意坐標變換證明引力不變定律，這個錯誤的想法浪費了我兩年的艱苦努力，直到1915年底才最後看清楚」］；(3)幾何動力學的初值方程給出了描述這種耦合的數學工具，(4)爲了得到完全確定的［而且，我們現在知道是唯一的］四維幾何，要求初值方程的邊條件爲，幾何在空間是閉合的［一個猜測；見 Wheeler (1959,1964c) 和 Hönl(1962)的文獻］；和(5)在所得空時中任一點附近，局域 Lorentz 系的集合與所說該點慣性的定量含義完全一樣。就這樣，結束了彼處的質量-能量密度和質量-能量流如何決定此處的慣性的討論。

不管外表如何，並不違反因果律

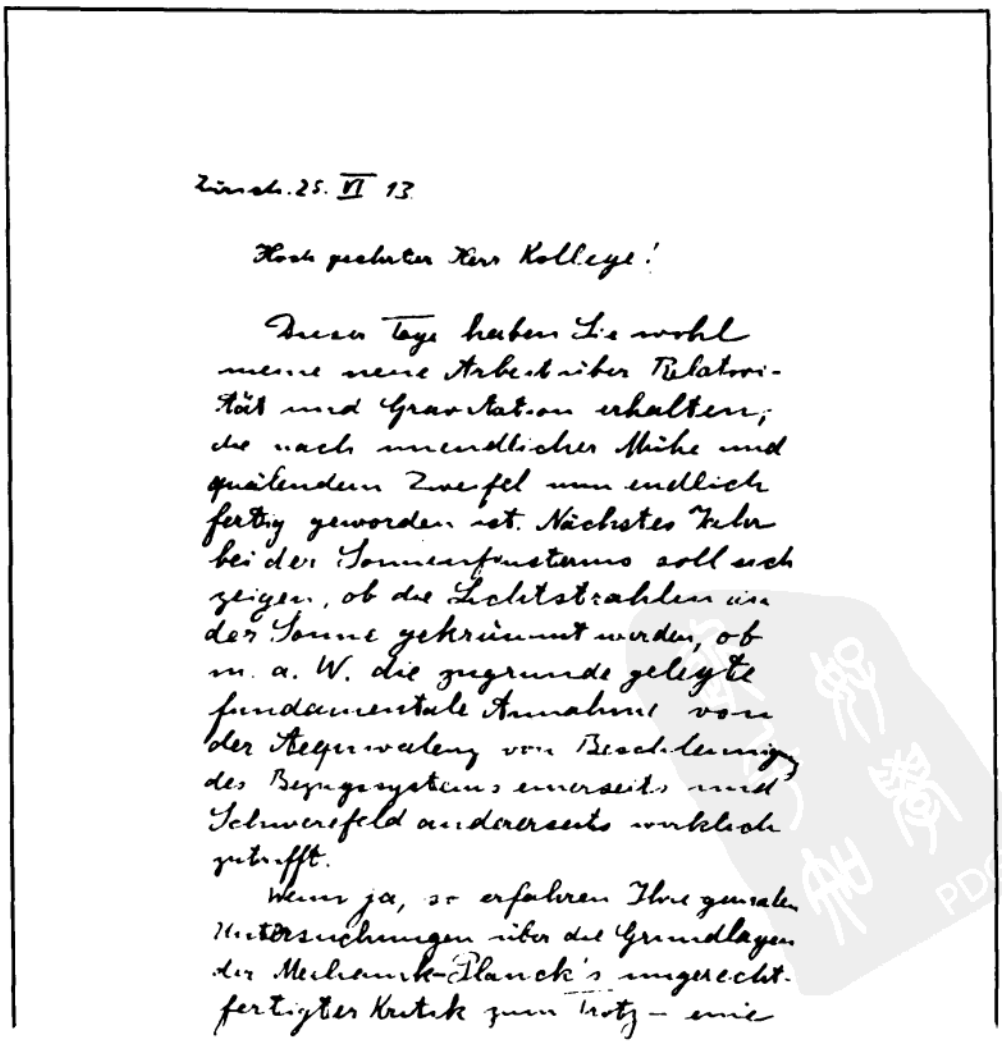
在有關 Mach 原理的文獻中，有很多篇論文，包括很多——甚至有一篇 Lenin 的文章（英譯本，1927）——可稱爲反 Mach 原理的文章；很多篇提出了有趣的論點［特別請參看 Weyl (1924a) 關於「慣性和宇宙」的有趣對話，以及 Sciama 的論文 (1957) 和書 (1961)］。但是這些文章絕大多數寫在以前，不具備當今對初值問題的理解。因此，並不打算總結和分析這些文獻，爲此就需要寫一本書。而且，這裏所介紹的 Mach 原理比 Einstein 在文獻

大量的文獻

（接第546頁）

圖 21.5

1913年 6 月25日，Einstein 寫給 Ernst Mach 的感謝信，當時 Einstein 正努力得出標準廣義相對論的 1915年 11月的最後表述，信中談到將出現的日蝕的驗證：「若果然，則你對力學基礎的成功研究，Planck 尚待證實的批評意見，都將得到光輝的證實。因爲它必將弄清楚慣性起源於物體之間的一類相互作用，這和你對 Newton 提桶實驗的考慮十分一致。第一個結果寫在我的文章的第 6 頁。下述附加要求也將出現：(1)如果加速一重物殼層S，則殼所包圍的質量受到一加速力。(2)如果使殼繞經過其中心的軸相對於固定的恒星旋轉，則在殼層內部將出現 Coriolis 力；即 Foucault 擺的擺動平面（以實際上無法測量的小角速度）受曳旋轉」。在 Mach 逝世時，Einstein (1916a) 爲 Mach 及其著作寫了一篇悼詞。承 Albert Einstein 財產的遺囑執行人 Helen Dukas 和 Otto Nathan 惠允復制此信。



Zürich. 25. VI 13

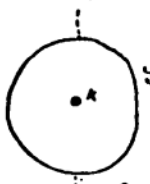
Hoch geehrter Herr Kollege!

Dieser Tage haben Sie wohl meine neue Arbeit über Relativität und Gravitation erhalten, die nach unendlicher Mühe und quälendem Zweifel nun endlich fertig geworden ist. Nächstes Jahr bei der Sonnenfinsternis soll sich zeigen, ob die Lichtstrahlen um der Sonne gekrümmt werden, ob m. a. W. die zugrunde gelegte fundamentale Annahme von der Aequivalenz von Beschleunigung des Bezugsystems einerseits und Schwerefeld andererseits zutrifft.

Wenn ja, so erfahren Ihre genialen Untersuchungen über die Grundlagen der Mechanik-Planck's ungerechtfertigter Kritik zum Trotz – eine

glänzende Bestätigung. Denn es ergibt sich mit Notwendigkeit, dass die Trägheit in einer Art Wechselwirkung der Körper ihren Ursprung hat, ganz im Sinne Ihrer Überlegungen zum Newton'schen Eimer-Versuch.

Eine erste Konsequenz in diesem Sinne finden Sie oben auf Seite 6 der Arbeit. Es hat sich ferner folgendes ergeben:



1) Beschleunigt man eine träge Kugelschale S, so erfährt nach der Theorie ein von ihr eingeschlossener Körper eine Beschleunigende Kraft

2) Rotiert die Schale S um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse (relativ zum System der Fixsterne ("Restsystem"), so entsteht im Inneren der Schale ein Coriolis-Feld, d. h. (das Foucault-Pendel wird mitgenommen) mitgenommen

(mit fernen allerdings nicht mitgenommen) mitgenommen

bekannt "Geschwindigkeit") mitgenommen

Es ist mir eine grosse Freude, Ihnen dies mitteilen zu können, zumal jene Kritiker Plancks nun schon immer höchst ungerechtfertigt erscheinen muss.

Mit grösster Hochachtung grüsst Sie herzlich

Ihr ergebener A. Einstein.

Ich danke Ihnen herzlich für die Übersendung Ihres Buches

中闡述得更加明晰［除了他關於宇宙必須閉合的考慮外，參看 Einstein 的書(1950), 107-108，頁］；而且 Mach 也肯定會否認它與自己有關，因爲他一直不肯接受廣義（或甚至狹義）相對論。盡管如此，但 Mach 原理——彼處的物質決定了此處的慣性——和 Riemann 的概念——空間的幾何響應物理學並參與物理學——是兩個主要的思潮，Einstein 通過他的强有力的等效原理把兩者置於當今對引力和運動的幾何描述之中，這却是事實。

現代化的詳加闡明的 Mach 原理

「規定各處的質量-能量分布和質量-能量流，由此確定每一個試驗粒子在各處和在所有時刻的慣性性質。」詳細地說，這種規定要求(1)談論「各處」的一種方式：類空超曲面 Σ，讓我們堅持——與 Einstein 一致——(2)它是閉合的三維幾何，並且爲了方便但非必須，令(3)τ 與在 Σ 上的位置無關。(4)規定三維幾何到給定保形度規的程度；但至少使此三維幾何不確定到不能明顯地指出質量-能量位於「何處」。(5)給定密度 $\rho_{基}$，作爲此保形三維幾何中位置的函數。(6)確認只給定不包括重力的場的質量-能量，這對於確定質量-能量在空間的分布是不適當的。確實，從形式上看，引力場沒有也不能對 Einstein 場方程右側的源項作出任何貢獻。然而，引力波的分析（第18章和第35章）表明，必須承認尺度比觀測尺度小的幾何擾動携帶着有效的質量-能量。此外，在幾何中［Wheeler (1955), Brill 和 Hartle (1964)；關於引力波能的更多討論，可參看 §35.14］存在着由引力波（或電磁波，或中微子，或三者的任意組合）構成的客體，它們自身維持在一起的時間比波振動的特徵週期要長。盡管在它的內部無法指着一處說「這裏是質量」，但從遠處看它與其他任何質量都很像。因此，像任何其他質量一樣，它必定也「對慣性有影響」。但是，爲了確定這種質量，必須給出足夠的信息，以便完全地描述引力波在同時超曲面 Σ 上的特徵。爲此，僅僅給出在[3]<中所具有的每一空間點的二個「波坐標」是不夠的。此外，還必須給出(7)在 York 的「權 5/3 的動量密度」 $\tilde{\pi}^{ab}$ 中出現的每個空間點的兩個「波動量」，與此同時，作爲這一運算的不可擺脫的一部分，還必須(8)確定場能流密度。(9)解保形因子 ψ。(10)這樣，就有了滿足廣義相對論初值方程的完全的初值數據。(11)已知這些數據後，場方程組餘下的動力學方程可以確定過去與將來的四維幾何。(12)以此方式，可確定各處和所有時刻每個試驗粒子的慣性性質，從而具體實現了 Mach 原理。

爲了詳細說明這些方程背後的物理內容和看清正在起作用的物理學，還需

要做很多工作。在對初值方程的理解達到目前階段以前，這方面已經取得了若干有意義的進展。特別重要的是 Einstein (1950) 在他的相對論的意義一書第三版中討論過的 Thirring (1918) 和 (1921) 以及 Thirring 和 Lense (1918) 的結果。

Foucault 擺

考慮地極附近的一小塊堅硬地面，在該處立一根支柱，柱上懸掛一個擺。天空烏雲密布，觀測者看到 Foucault 擺的軌跡緩慢地轉動 360°，隨後，天空晴朗，作爲奇蹟中的奇蹟，觀測者發現，擺始終沿着相對遠處恒星固定的弧線擺動。如果確如 Mach 所設想，「彼處的質量決定此處的慣性」，那麼，怎麼會是這樣呢？

慣性系的拖曳

把問題擴大。根據相等質量生來就應平等的民主原則，地球的質量必定被 Foucault 擺記錄下來。擺的旋轉平面應被拖着相對於所謂「固定恒星」以小的角速度 $\omega_{拖}$ 繞着它旋轉。$\omega_{拖}$ 有多大呢？如果擺被質量爲 M，半徑爲 $R_{殼}$，角速度爲 $\omega_{殼}$ 的快速旋轉的球形殼層所環繞，$\omega_{拖}$ 又將是多大呢？

Einstein 理論指出，慣性是空時的幾何表現。還指出，幾何受物質影響的程度正比於因子 $G/c^2=0.742\times10^{-28}$ 厘米／克。簡單的量綱考慮無疑表明，拖曳速度正比於下述表達式

$$\omega_{拖}=k\frac{G}{c^2}\frac{m_{殼，約定}}{R_{殼}}\omega_{殼}=k\frac{m_{殼}}{R_{殼}}\omega_{殼}。\tag{21.155}$$

式中 k 是只有經過詳細計算才能得出的數值因子。Lense 和 Thirring [(1918) 和 (1921)]，從平直背景空時流形開始，用第 18 章所述的弱場近似，計算了運動質量流對度規的影響。用極坐標表示，度規得到一非零係數 $g_{\phi t}$，代入短程線運動方程，這個非對角度規係數給出一個進動。這個進動（此處是對一平行於轉軸的軸線定義的，而不是對局域的垂線定義的）可用形式如 (21.155) 式的表達式給出，式中進動因子 k 的值爲

$$k=4/3。\tag{21.156}$$

Maxwell 場的磁分量和 Einstein 場的進動分量很相似。在這兩種場中，靜止的源對靜止的試驗粒子都不產生新的效應。可設計一個環形電流產生磁場，爲了對此磁場作出響應，試驗電荷必須運動。此處類似：沒有擺的擺動就沒有擺的進動。另外，進動的方向由擺相對於旋轉質量殼的位置決定。進動因子 k 取下述值：

$k=4/3$ 擺在旋轉質量殼內的任何地方；

$k=4/3$ 擺在北極和南極；

$k=-2/3$ 擺剛好在旋轉質量殼的赤道之外。

拖曳角速度 $\omega_{拖}$ 對位置的依賴關係使得它與磁學的相似性變得更爲明顯，磁學中旋轉帶電球的磁場在球心指向北方，在兩極指向北方，但在赤道指向南方。

無論設想 Foucault 擺位於地球中心，或實際上位於北極，預期拖曳角速度的量級是

$$\omega_{拖}\sim\frac{m_{地球}}{R_{地球}}\omega_{地球}\sim\frac{0.44厘米}{6\times10^{8}厘米}\frac{1弧度}{13700秒}$$
$$\sim5\times10^{-14}弧度/秒，\qquad(21.158)$$

這個角速度太小，不能用迄今已制成的任何裝置發現，更不用說實際測量了，但或許能用現在正在建造的回轉器（§40.7）測出。與此相反，在快速旋轉的中子星附近或在具有顯著角動量的黑洞附近，算出的拖曳效應不僅可以察覺，甚至是很重要的（見第33章關於旋轉黑洞的物理學），

只要恒星不是離得非常遠（$r\sim$宇宙半徑），以至引起對 Thirring和Lense 所計算的空間曲率的顯著修正，則遙遠的恒星與附近的旋轉物質殼一樣，必將影響 Foucault 擺擺動的自然平面。換言之，沒有什麼明顯的理由不把一切質量同等看待，因此，(21.158) 式可以更適當地或有點象徵性地表爲

「慣性的總和」

$$\omega_{\substack{\text{Foucault}\\\text{擺的擺}\\\text{動平面}}}\sim\frac{m_{殼}}{R_{殼}}\omega_{殼}+\sum_{\substack{\text{遙遠的}\\\text{「恒星」}}}\frac{m_{\text{「恒星」}}}{r_{\text{「恒星」}}}\omega_{\text{「恒星」}}。\qquad(21.159)$$

而且，當附近沒有物質殼層時，或當它的影響可以忽略不計時，如果實驗具有任何指導意義的話，那就是相對於由遠處「諸恒星」所定義的參照系，擺的擺動平面不能轉動。這時，ω_{Foucault} 應與 $\omega_{諸恒星}$ 或「慣性總和」相同，

$$\sum_{\substack{\text{遙遠的}\\\text{「恒星」}}}\frac{m_{\text{「恒星」}}}{r_{\text{「恒星」}}}\sim\frac{m_{宇宙}}{r_{宇宙}}，\qquad(21.160)$$

應爲 1 的量級。正是這個關係式，即宇宙包含的質量和它在極大膨脹狀態時的半徑之間的近似相等關係，表徵了 Friedmann 宇宙和其他簡單閉宇宙模型的特徵（第27章和第 30章）。在這方面，Mach 原理的 Einstein 理論表現出令人滿意的自洽性。

當宇宙的動力學狀態並不處於極大脹膨階段時，$r_{宇宙}$ 與 $m_{宇宙}$ 相比可以變成任意小，因而，比值 (21.160) 式可以與 1 相差 10 個冪次。不管這種情況，人們雖不能選擇，但是必須懂得，在對收縮或膨脹的動力學、對減速等等都作了改正之後，「慣性總和」的有效值仍然爲 1。只有如此，$\omega_{Foucault}$ 才能與 $\omega_{遙遠恒星}$ 保持不可避免的一致。幸而，爲了對慣性有適當的解釋並不必需追隨「慣性總和」的神學到這些複雜的極端。正如已詳細敍述的那樣，Mach 關於彼處質量決定此處慣性的思想，在 Einstein 幾何動力學定律中有其完全的數學敍述。作爲相對論性宇宙論中慣性參照系拖曳的第一個强場分析，請參看 Brill 和 Cohen (1966) 以及 Cohen 和 Brill (1967) 的文獻；被旋轉黑洞拖曳的情況請參看 §33.4。

需要澄清的另一個問題是：Mach 原理意味着什麼，以及如何利用它。當實驗粒子在理想的 Minkowski 空間中運動時，其慣性性質是完全確定的。反 Mach 原理者批評說：「請指出對此慣性負責的質量來」。作爲回答，要記住 Einstein 理論不僅包含幾何動力學的定律，而且按照 Einstein 的觀點，還包含着宇宙閉合的邊界條件。這樣空時的平直部分不應看作是無限的，而應看作閉合宇宙的一部分。（作爲二維模擬，用水充滿橡皮氣球，並放在玻璃桌面上，從下方觀察它。）宇宙的彎曲部分獲得它的曲率，是由於它實際上包含着質量-能量，或者——如果僅僅被引力波所激發——則是由於它包含着等效的質量-能量。這個質量-能量，不管是眞實的還是等效的，可以看作應對試驗粒子的慣性性質負責，而試驗粒子初看起來似乎孤立存在於宇宙中間。

Minkowski幾何作爲閉合三維幾何的極限

加大宇宙模型，使 Minkowski 平直區域的線度和所有其他宇宙線度都增大十倍。（「大十倍的氣球，大十倍的表面」），決不能改變結果的定性性質。宇宙模型彎曲部分的曲率和密度降低 100 倍，體積增大 1,000 倍，質量增大 10倍，但是質量與半徑之比，或「慣性總和」（窮人對完全的初值計算所作的代換）並沒有改變。

Einstein 承認他的理論源於 Mach 原理（圖 21.5）。因此，今天反過來 Mach 原理應把它的闡明歸功於 Einstein 理論，這才是公平的。

練習 21.21　爲什麼 Weyl 保形曲率張量會變爲零　　**練習**

在三維空間，Riemann 曲率張量有多少個獨立的分量呢？Ricci 曲率張量又有多少個獨立的分量呢？試證明這兩個張量之間存在下述關係：

$$R^d{}_{abc}=\delta^d_b R_{ac}-\delta^d_c R_{ab}+g_{ac}R^d{}_b-g_{ab}R^d_c$$
$$+\frac{1}{2}R\,(\delta^d_c g_{ab}-\delta^d_b g_{ac})$$

而無需任何 Weyl 保形曲率張量去確定（如在高維情形）Riemann 張量的更多細節。試由練習 13.13 (13.50) 式的 n 維修正公式證明 Weyl 張量在 $n=2$ 時爲零。

練習 21.22 York 的曲率

[York (1971)] (a) 定義張量 [Eisenhart (1926)]

$$R_{abc}=R_{ab1c}-R_{ac1b}+\frac{1}{4}(g_{ac}R_{1b}-g_{ab}R_{1c})。$$

(b) 試證明當且僅當 $R_{abc}=0$ 時，三維幾何是保形平直的。

(c) 試證明下列等式成立，並使 R_{abc} 的獨立分量數目減少爲 5 個：

$$R^a{}_{ac}=g^{ab}R_{bac}=0;$$
$$R_{abc}+R_{acb}=0;$$
$$R_{abc}+R_{cab}+R_{bca}=0。$$

(d) 試證明 York 的曲率

$$Y^{ab}=g^{1/3}[aef]\Big(R_f{}^b-\frac{1}{4}\delta_f{}^b R\Big)_{;e}$$
$$=-\frac{1}{2}g^{1/3}[aef]g^{bm}R_{mef}$$

是保形不變量，並且具有 (21.148) 式所列諸性質。

練習 21.23 把 Poynting 流矢量拉「出空氣之外」

Einstein 和 Maxwell 聯合場的 Hamilton-Jacobi 函數 $S(g_{ij},A_m)$（作用量積分的極值）表面上依賴於六個度規係數 $g_{ij}(x,y,z)$ 和三個勢 $A_m(x,y,z)$，但實際上只依賴於類空超曲面的三維幾何以及磁場強度在該類空超曲面上的分布，根據這個條件，試證明幾何動力學的場動量 $\pi^{ij}=\delta S/\delta g_{ij}$ 滿足下述條件

$$\pi^{ij}{}_{|j}=c[imn]\mathcal{E}_m\mathcal{B}_n,$$

並計算此方程中的係數 c [Wheeler (1968b)]，提示：注意變換

$$x^i\longrightarrow x^i-\xi^i,\quad g_{ij}\longrightarrow g_{ij}+\xi_{i|j}+\xi_{j|i}$$

決不改變三維幾何本身，因此對於任意選定的 $\xi^i(x,y,z)$，在S中引起的相應改變

$$\delta S=\int\Big[\frac{\delta S}{\delta g_{ij}}\delta g_{ij}+\frac{\delta S}{\delta A_m}\delta A_m\Big]d^3x$$

應同樣爲零。此外 $\xi^i(x,y,z)$ 量度汽車擋泥板上有畫格的透明橡皮片的等效滑動。

練習 21.24　與 Hilbert 作用量原理相聯繫的作用量極值依賴於保形三維幾何和外賦時間
[K. Kuchař (1972) 和 York (1972)]

試證明 Hilbert 作用量原理 $\delta\int^{(4)}R(-{}^{(4)}g)^{1/2}d^4x=0$ 要求，在兩個邊界類空超曲面的每一個面上的數據，都由以下組成：(1)超曲面的保形三維幾何 ${}^{(3)}<$ ，加上(2)外賦時間變量，它的定義爲

$$\tau=\frac{2}{3}g^{-1/2}\mathrm{Tr}\,n=\frac{4}{3}\mathrm{Tr}K\,,$$

可用繪畫文字 $\overset{<}{\curvearrowright}$ 方便的表示，在每一空間點用一個數字量度 ，並與三維幾何度規的保形因子無關。作完之後，簡單地解釋一下，爲什麼在這個幾何動力學表述中， Hamilton-Jacobi 函數（在半經典或 JWKB 近似下，爲 $\hbar$ 乘以波函數的位相）可以適當地表爲

$$S=S({}^{(3)}<,\ \overset{<}{\curvearrowright}\ )。$$

---

§ 21.13　連接條件

在初值表述中起着根本作用的超曲面的內稟曲率和外賦曲率，在分析「連接條件」時也是有力的工具。

電動力學的連接條件

回顧電動力學的連接條件：電場的切向部分 $\boldsymbol{E}_\parallel$ 和磁場的法向部分 $\boldsymbol{B}_\perp$ 在越過任一平面（如電容器板）時必須連續；即

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{E}_\parallel]&\equiv(\boldsymbol{E}_\parallel\text{ 的不連續性})\\
&\equiv(\text{在表面「+」側的 }\boldsymbol{E}_\parallel)-(\text{在表面「−」側的 }\boldsymbol{E}_\parallel)\\
&\equiv\boldsymbol{E}_\parallel^{+}-\boldsymbol{E}_\parallel^{-}=0\,, &(21.161a)\\
[\boldsymbol{B}_\perp]&\equiv\boldsymbol{B}_\perp^{+}-\boldsymbol{B}_\perp^{-}=0\,; &(21.161b)
\end{aligned}$$

同時，在 $\boldsymbol{E}_\perp$ 和 $\boldsymbol{B}_\parallel$ 部分中的「跳變」必與電荷密度（單位面積的電荷） σ ，電流密度（單位面積的電流） $\boldsymbol{j}$ ，以及表面單位法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 有關，其關係可表爲

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{E}_\perp]&=\boldsymbol{E}_\perp^{+}-\boldsymbol{E}_\perp^{-}=4\pi\sigma\boldsymbol{n}\,, &(21.161c)\\
[\boldsymbol{B}_\parallel]&=\boldsymbol{B}_\parallel^{+}-\boldsymbol{B}_\parallel^{-}=4\pi\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{n}\,。 &(21.161d)
\end{aligned}$$

再回顧：這些連接條件是把 Maxwell 方程組對其中心在表面的「藥片盒」作積分導出的。

可用類似的方式導出類似的連接條件 ，適用於引力場 （空時曲率） 和產生該場的脅强能量 * 。把注意力集中在一個特定的通過空時的三維薄片——圖

---

* 引力連接條件的最初表述起源於 Lanczos (1922,1924) 。這裏給出的用內稟曲率和外賦曲率表示的公式是由 Darmois (1927), Misner 和 Sharp (1964) 以及 Israel (1966) 發展起來的。進一步參考的更廣泛文獻，請看 Israel 的文獻。

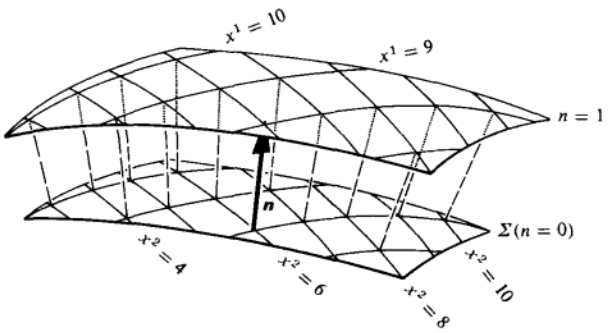


圖 21.6
在三維表面 Σ 鄰域中的 Gauss 簡正坐標系。在 Gauss 簡正坐標系中，度規的形式爲

$$ds^2=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}dn^2+g_{ij}dx^i dx^j$$

式中 $\boldsymbol{n}=\partial/\partial n$，若爲類空表面 $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})=-1$；若爲類時表面，$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})=1$.（見練習 27.2）$n=$常數表面的外賦曲率是 $K_{ij}=-\frac{1}{2}\partial g_{ij}/\partial n$, 寫成「3+1」形式的 Einstein 場方程爲 (21.162) 式。

21.6 中的三維表面 Σ。設表面或者是類空的［單位法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 爲類時的；$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})=-1$］，或者是類時的［$\boldsymbol{n}$ 爲類空的；$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})=+1$］。把零情況留待後面討論，爲了有助於導出連接條件，在 Σ 的領域中引入 Guass 法向坐標［參看 (21.82) 式前面的一節］。用 Σ 以及鄰近的 $n=$常數的三維表面的內稟曲率和外賦曲率表示，Einstein 張量和 Einstein 場方程的諸分量爲

"3+1" 形式的 Einstein 方程

$$G^{n}{}_{n}=-\frac{1}{2}{}^{(3)}R+\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}\{(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2-\mathrm{Tr}(\boldsymbol{K}^2)\}$$
$$=8\pi T^{n}{}_{n}\,, \tag{21.162a}$$
$$G^{n}{}_{i}=-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}\{K_{i}{}^{m}{}_{|m}-(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})_{|i}\}=8\pi T^{n}{}_{i}\,, \tag{21.162b}$$
$$G^{i}{}_{j}={}^{(3)}G^{i}{}_{j}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}\{(K^{i}{}_{j}-\delta^{i}{}_{j}\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})_{,n}$$
$$-(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})K^{i}{}_{j}+\frac{1}{2}\delta^{i}{}_{j}(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2+\frac{1}{2}\delta^{i}{}_{j}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{K}^2)\}=8\pi T^{i}{}_{j}\,。 \tag{21.162c}$$

［參看 (21.77), (21.81), (21.76) 和 (21.82) 等式。］

假設脅-能量張量 $T^{\alpha}{}_{\beta}$ 在 Σ 處包含一個「δ 函數奇點」——即假設 Σ 爲單位面積具有有限四維動量的二維表面的「世界管」（類似於電動力學中的面電荷和面電流）。則可定義 Σ 上的面脅强-能量張量爲 $T^{\alpha}{}_{\beta}$ 對垂直於 Σ 量度的固有距離 (n) 的積分：

面脅强-能量張量

$$S^{\alpha}{}_{\beta}=\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}T^{\alpha}{}_{\beta}dn\right]。 \tag{21.163}$$

連接條件的導出

爲了發現這個表面層對空時幾何的效應，對 Einstein 場方程 (21.162) 式作「藥片盒積分」：

$$\lim_{t\to 0}\left[\int_{-t}^{+t} G^{\alpha}{}_{\beta}\,dn\right]=8\pi S^{\alpha}{}_{\beta}。 \tag{21.164}$$

考察 $G^{\alpha}{}_{\beta}$ 的積分。如果三維度規 g_{ij} 在 Σ 上含有一 δ 函數或不連續性，那麼即使存在表面層，Σ 也將不具有任何確定的三維幾何——這是物理學不能接受的情況。g_{ij} 中沒有 δ 函數 $\delta(n)$ 意味着 ${}^{(3)}R$ 中沒有 δ 函數；g_{ij} 中沒有不連續性意味着在 $K_{ij}=-\frac{1}{2}g_{ij,n}$ 中沒有 δ 函數。這樣，(21.162) 式的積分給出

$$\int G^{\alpha}{}_{n}\,dn=0=8\pi S^{\alpha}{}_{n}, \tag{21.165a}$$

$$\int G^{\alpha}{}_{i}\,dn=0=8\pi S^{\alpha}{}_{i}, \tag{21.165b}$$

$$\int G^{i}{}_{j}\cdot dn=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})(\gamma^{i}{}_{j}-\delta^{i}{}_{j}\mathrm{Tr}\boldsymbol{\gamma})=8\pi S^{i}{}_{j}, \tag{21.165c}$$

式中 $\gamma^{i}{}_{j}$ 是外賦曲率諸分量的「跳變」

$$\boldsymbol{\gamma}\equiv[\boldsymbol{K}]\equiv(\text{在 }\Sigma\text{ 的「}n=+\varepsilon\text{ 側」上的 }\boldsymbol{K})-(\text{在 }\Sigma\text{ 的「}n=-\varepsilon\text{ 側」上的 }\boldsymbol{K})\equiv\boldsymbol{K}^{+}-\boldsymbol{K}^{-}。 \tag{21.166}$$

沒有表面層的連接條件

對沒有 δ 函數的表面層，上述連接條件簡化爲 $\boldsymbol{\gamma}\equiv[\boldsymbol{K}]\equiv 0$。用話來說：如果考察 Σ 是如何從空時的「上」表面之上或從空時的「下」表面之下嵌入空時的，那麼，將發現嵌入是相同的——即具有同樣的外賦曲率 $\boldsymbol{K}$。當然，無論是從上還是從下觀察，Σ 的內稟曲率必定也是相同的。更簡單地說

$$(\text{沒有表面層})\rightleftharpoons(g_{ij}\text{「連續」和 }K_{ij}\text{「連續」})。 \tag{21.167}$$

表面層的連接條件

如果存在表面層，那麼，Σ 應爲物質二維層的世界管，且 Σ 的法線應爲類空的，$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=+1$。這時連接條件 (21.165a,b) 具有簡單的物理意義

$$\boldsymbol{S}(\mathbf{n},\ldots)=0\rightleftharpoons\begin{pmatrix}\text{動量流全部在 }\Sigma\text{ 中；即沒有與}\\ \text{表面層相聯繫的動量流出}\Sigma\text{；}\\ \text{亦即 }\Sigma\text{ 是表面層的世界管}\end{pmatrix}, \tag{21.168a}$$

這並沒有什麼新東西。連接條件 (21.165c) 式指出表面脅强-能量產生出外賦曲率的不連續性（在 Σ「上」與在 Σ「下」嵌入空時是不同的），爲

$$\gamma^{i}{}_{j}-\delta^{i}{}_{j}\mathrm{Tr}\boldsymbol{\gamma}=8\pi S^{i}{}_{j}。 \tag{21.168b}$$

當然，從上和從下觀察時，Σ 的內稟幾何必須相同，

$$g_{ij}\text{ 連續的越過 }\Sigma。 \tag{21.169}$$

在分析表面層時，不僅應用連續條件 (21.168a) 式至 (21.169) 式，還分別在表面 Σ 的兩側應用四維 Einstein 場方程，以及應用面脊强-能量的運動方程。考察場方程 $G^{\alpha}{}_{i}=8\pi T^{\alpha}{}_{i}$ [(21.162b) 式] 的跳變可導出運動方程；即 $[G^{\alpha}{}_{i}]=8\pi[T^{\alpha}{}_{i}]$ 表明

$$(\gamma_i{}^{m}-\delta_i{}^{m}\mathrm{Tr}\gamma)_{|m}=-8\pi[T^{\alpha}{}_{i}];$$

且當借助於連接條件 (21.168b) 式用 $S_i{}^{m}$ 重新表示時，爲

表面層的運動方程

$$S^{im}{}_{|m}+[\mathrm{T}^{i\alpha}]=0。 \tag{21.170}$$

[爲了得到對這個運動方程的直覺，可參看練習 21.25 和 21.26。爲了應用「表面層的形式」，可參看練習 21.27；以及 Israel (1966)，Kuchař (1968)，Papapetrou 和 Hamoui (1968) 的文獻。]

引力波激震前沿

當人們把注意力轉向通過零表面 Σ 的連接條件時，會發現所得結果與類空和類時情況不同。場方程的「藥片盒」積分表明，即使在眞空中外賦曲率也可以不連續。越過零表面（沒有任何質量-能量來產生它）時 K_{ij} 的不連續性，是**引力波激震前沿**（類似於流體動力學中的激震前沿）的幾何顯示。對其定量細節，參看，例如，Pirani (1957), Papapetrou 和 Treder (1959,1962), Treder (1962), 以及特別是 Choquet-Bruhat (1968b) 的文獻。

曲率張量的不連續性可以光速傳播，這提醒我們，與電磁效應一樣，所有引力的效應都遵循因果律。在類空初值超曲面上的初值數據唯一地確定了得出的空時幾何［參看 Cartan, Stellmacher, Lichnerowicz 和 Bruhat （也以 Fourès-Bruhat 和 Choquet-Bruhat 的名義）的工作，以及在 Bruhat (1962) 論文中引述和概述的其他工作］，並且是以與因果律相一致的方式確定它的。於是，這些數據在整個初值三維幾何有限區域的改變，將被稍遲一些的超曲面感覺到，這些稍遲的超曲面只在有限的比原來區域稍大的區域內。

當從經典的動力學轉向量子的動力學時，可以看到應集中注意類空初值超曲面的新理由：在這種超曲面上的不同點，可觀測量彼此對易，也就是說，原則上是同時可被觀測的。

並非每一個四維流形都能容納整體無奇點的類空超曲面。可以相信，能容納這種超曲面的流形與不能容納的相比，必定與物理學有更多的關係。

在經典理論中，甚至對能容納類空超曲面的流形，曾不時注意過非類空的但以容納零短程線爲「特徵」的超曲面上的初值數據［參看，例如，Sachs (1964) 和該處引述的參考文獻］。這時，典型的情況是，只能預言未來但不能追述過去，或者能追述過去却不能預言未來。

與物理學的其他分支一樣，本章所呈現的物理學的幻影，是光明之子和黑暗之子。光明之子是由現在預言未來的微分方程。黑暗之子是確定這些初始條件的因子。

練習

練習 21.25　表面層的運動方程

(a) 設 $\boldsymbol{u}$ 爲表面層中物質的「平均四維速度」——其定義爲，以四維速度 $\boldsymbol{u}$ 運動的觀測者所看到的能流爲零。設 σ 爲該「共動觀測者」測出的每單位固有表面面積的總質量-能量。試證明表面脊强-能量張量可表爲下述形式

$$\boldsymbol{S}=\sigma\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+\boldsymbol{t},\quad \text{式中}\quad (\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u})=0\,, \tag{21.171}$$

式中 $\boldsymbol{t}$ 爲對稱脊强張量。

(b) 試證明運動方程 (21.170) 式沿 $\boldsymbol{u}$ 方向的分量爲

$$d\sigma/d\tau=-\sigma u^{i}{}_{;j}+u_j t^{ij}{}_{;k}+u_j[T^{jn}]\,, \tag{21.172}$$

式中 $d/d\tau=\boldsymbol{u}$。試對每一項給出物理解釋。

(c) 設 a_j 爲共動觀測者四維加速度在表面層 Σ 上的分量。把運動方程 (21.170) 式垂直於 $\boldsymbol{u}$ 作投影，試證明

$$\sigma a_j=-P_{ja}\{t^{ab}{}_{;b}+[T^{an}]\}\,, \tag{21.173}$$

式中 P_{ja} 是投影算符

$$P_{ja}=g_{ja}+u_j u_a\,。 \tag{21.174}$$

給出 (21.173) 式每一項的物理解釋。

練習 21.26　薄的塵埃殼層

對被眞空環繞的薄塵埃殼層 ($[T^{jn}]=0$, $\boldsymbol{t}=0$)，導出下述方程

$$d\sigma/d\tau=-\sigma u^{b}{}_{;b}\,, \tag{21.175a}$$

$$\boldsymbol{a}^{+}+\boldsymbol{a}^{-}=0\,, \tag{21.175b}$$

$$\boldsymbol{a}^{+}-\boldsymbol{a}^{-}=(4\pi\sigma)\boldsymbol{n}\,, \tag{21.175c}$$

$$\boldsymbol{\gamma}=8\pi\sigma\left(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\,\boldsymbol{g}\right)\,。$$

式中 $\boldsymbol{a}^{+}$ 和 $\boldsymbol{a}^{-}$ 是由固定在殼層外側和內側的加速度計測出的四維加速度，$\boldsymbol{g}$ 爲殼層的三維度規，試證明這些方程的第一式爲「靜質量守恒」定律。

練習 21.27　球形塵埃殼層

把練習 21.25 諸式用於塌縮的球形塵埃殼層 [Israel (1967b)]，取平直空時和眞空 Schwarzschild 表述 (第23章) 爲殼層內外之度規

內部 $ds^2=-dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$， (21.176a)

外部 $ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-2M/r}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$。 (21.176b)

設殼「半徑」——它是在殼上測出的原時的函數——爲

$$R\equiv\frac{1}{2\pi}\times(\text{殼層的固有圓周長})=R(\tau)。 \tag{21.176c}$$

試證明殼層的質量密度隨時間的變化爲

$$\sigma(\tau)=\mu/4\pi R^2(\tau),\quad \mu=\text{常數}=\text{「總靜止質量」}; \tag{21.176d}$$

並導出和求解運動方程

$$M=\mu\left\{1+\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2\right\}^{1/2}-\frac{\mu}{2R}。 \tag{21.176e}$$

第二十二章　熱力學，流體動力學，電動力學，幾何光學，和動力論

§22.1　本章的原由

本章完全屬於高階，無需前面的高階內容爲本章作準備，但第五章（奇强-能量張量）將不無裨益。

§22.5（幾何光學）作爲第三十四章（奇點和整體方法）的準備知識是必需的。本章其餘部分對此後任何章節都不是必需的準備知識；但對引力理論的絕大部分應用（第二十三章至第四十章）極端有用。

除第四十一章到第四十四章外，本書其餘部分均以引力理論在天體物理中的應用作爲焦點。每一種應用——恒星，星團，宇宙學，坍縮，黑洞，引力波，大陽系實驗——都可以在初等水平上獨自加以研究，而不必參考本章的內容。但是對這些應用的深刻理解，需要預先掌握彎曲空時中的熱力學，流體動力學，電動力學，幾何光學和動力論。因此，絕大多數高階讀者希望在這個時候探討這些課題。

§22.2　彎曲空時中的熱力學*

熱力學勢是在流體靜止參照系中定義的

爲了具體和簡單起見，考慮化學成分固定的理想流體（「簡單理想流體」）——例如，坍縮超重恒星內部氣體——的平衡熱力學。當流體元通過事件 $\mathcal{P}_0$ 時，它的熱力學狀態可用各種熱力學勢描述，例如 n, ρ, p, T, s, μ 等。各種勢在 $\mathcal{P}_0$ 的數值是在與流體元一起運動的觀測者的固有參照系（§13.6）中測量的，即在流體元的「靜止參照系」中測量。盡管採用靜止參照系測量各種勢，

*對此課題的更爲詳盡的論述可參看，例如，Stueckelberg 和 Wanders (1953), Kluitenberg 和 de Groot (1954), Meixner 和 Reik (1959) 的文獻，以及其中所引文獻；也可參看在§22.3 開始處引述的流體動力學文獻以及在§22,6開始處引述的動力論文獻。

但各種勢是與參照系無關的函數（標量場）。在選定的事件 $\mathscr{P}_0$ 處，一個給定的勢（例如 n）具有唯一的值 $n(\mathscr{P}_0)$；因此 n 是嚴格與參照系無關的函數。

n, ρ, p, T, s, μ 的值量度了在流體元靜止參照系中下述各量：

熱力學勢的定義

- n：重子數密度；即靜止系每單位三維體積中的重子數，反重子（如果有的話）按負值計數。
- ρ：總質量-能量密度；即靜止系每單位三維體積中包含的總質量-能量（包括靜止質量，熱能，壓縮能，等等）。
- p：靜止系中的各向同性壓力。
- T：靜止系中的溫度。
- s：靜止系中每個重子的熵。（單位體積的熵爲ns.）
- μ：靜止系中重子的化學勢［見後面的（22.8）式］。

「簡單流體」的定義

假設流體的化學成分（即氫分子數密度，氫原子數密度，自由質子和電子的數密度，光子數密度，^{238}U 核的數密度，Λ超子的數密度，……）由兩個熱力學變量唯一確定——例如，重子的總數密度 n 和每個重子的熵 s。則在此意義下流體是「簡單流體」。每當化學豐度被「凍結」時就會出現簡單流體（在感興趣的時間尺度內，反應速度過慢而無關重要；例如，在超重的恒星內，只要不爆炸燃燒，也不因溫度過高而產生 e^-—e^+ 對時就是如此）。在完全化學平衡的相反極端情況，也出現簡單流體（盡管密度和熵不斷變化，但反應速度快得足以維持平衡；例如在中子星中，由於壓力很高，一切反應都加快了）。但是，在研究非對流恒星中的核燃燒，或爆發性核燃燒，或高溫下電子對產生和中微子能量損失時，通常必須把流體看作「多成分」的。於是，對每種化學成分都要引入數密度n_i和化學勢μ_i，總豐度不再由 n 和 s 唯一確定。進一步的細節，可參看，例如，Zel'dovich 和 Novikov (1971)的文獻。

重子數守恒定律

熱力學最基本的定律是**重子數守恒定律**，它甚至比「第一」和「第二」定律更基本。考慮一流體元，它的移動的壁附在流體上，因此重子不能流入或流出。隨着流體元移過空時，沿途變形，它的體積V變化了。但其中的重子數應保持固定，因此

$$\frac{d}{d\tau}(nV)=0。 \tag{22.1}$$

體積變化產生於流體元鄰近各點互相流開或靠近，顯然（練習22.1）

$$dV/d\tau=(\nabla\cdot\boldsymbol{u})V, \tag{22.2}$$

式中 $\mathbf{u}=d/d\tau$ 是流體的四維速度。由此，重子數守恒［(22.1) 式］可重新表爲

$$0=\frac{dn}{d\tau}+\frac{n}{V}\frac{dV}{d\tau}=\nabla_{\mathbf{u}}n+n(\nabla\cdot\mathbf{u})=\mathbf{u}\cdot\nabla n+n(\nabla\cdot\mathbf{u})=\nabla\cdot(n\mathbf{u});$$

或

$$\nabla\cdot\mathbf{S}=0, \tag{22.3}$$

$$\mathbf{S}=n\mathbf{u}=\text{重子數流矢量} \tag{22.4}$$

（參看§5.4和練習 5.3）此外，重子數守恒定律的這種抽象幾何型式不僅適用於平直空間，而且同樣適用於彎曲的空時（等效原理）。

注意此定律與電動力學中電荷守恒定律 $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$（練習3.16）以及能量-動量局域守恒定律 $\nabla\cdot\mathbf{T}=0$（§5.9和§16.2）類似。從非常深刻的意義上說，這三個定律的形式取決於 Guass 定理（§5.9和框5.3, 5.4）。

熱力學第二定律

熱力學第二定律指出，在平直空時或彎曲空時中，熵可以產生但不能消滅。把這個定律用於體積爲 V，包含固定重子數 N 的流體元。它所包含的熵爲

$$S=Ns=nsV。$$

熵可以通過流體元的諸表面流進或流出（鄰近流體元之間的「熱流」）；但爲了簡單起見，假設熵不能進出；或者，即使有進出，也假定熵流動得非常緩慢對所討論的問題沒有任何影響。於是，流體元中的熵只能增加：

$$d(nsV)/d\tau\geq 0 \quad \text{當鄰近流體元之間熵的交換可忽略時；}$$

即［與 (22.1) 式聯立］

$$ds/d\tau\geq 0\ \text{（無熵交換時）。} \tag{22.5}$$

只要流體元保持熱動平衡，它的熵實際上是守恒的［在 (22.5) 式中取等號］；但對衝擊波，平衡暫時被破壞了，熵將增大（鄰近流體元的「相對動能」轉換爲熱）。［在狹義相對論和廣義相對論中對熱流的討論，可參看練習 22.7。對衝擊波的討論，參看Taub (1948), de Hoffman 和 Teller (1950), Israel (1960), May 和 White (1967), Zel'dovich 和 Rayzer (1967), Lichnerowicz (1967,1971) 和 Thorne (1973a) 的文獻。］

衝擊波和熱流

熱力學第一定律

在流體元固有參照系中的熱力學第一定律與在平直空時中的第一定律完全一樣（「等效原理」）；而在平直空時中，第一定律只不過是能量守恒定律：

$$d\begin{pmatrix}\text{包含固定數爲}A\text{個}\\ \text{重子的體元內的能量}\end{pmatrix}=-pd\,(\text{體積})+Td\,(\text{熵});$$

即

$$d(\rho A/n)=-pd(A/n)+Td(As)\,;$$

即

$$d\rho=\frac{\rho+p}{n}dn+nTds\,。$$

詢問：這裏出現的「d」是什麼類型的呢？對於簡單流體，兩個勢即 n 和 s 的值，唯一地確定了所有其他的量；所以，ρ 的任何變化必定唯一地由 n 和 s 的變化所確定。至於這個變化究竟是沿着給定流體元的世界線量度的，還是沿着某個別的方向量度的，無關緊要。這樣，第一定律中的「d」可以解釋爲外微商

$$\mathbf{d}\rho=\frac{\rho+p}{n}\mathbf{d}n+nT\mathbf{d}s\,; \tag{22.6}$$

而沿流體中給定方向（沿給定的切向矢量$\mathbf{v}$）的變化可以寫爲

$$\nabla_{\mathbf{v}}\rho\equiv\langle\mathbf{d}\rho,\mathbf{v}\rangle=\frac{\rho+p}{n}\langle\mathbf{d}n,\mathbf{v}\rangle+nT\langle\mathbf{d}s,\mathbf{v}\rangle$$

$$=\frac{\rho+p}{n}\nabla_{\mathbf{v}}n+nT\nabla_{\mathbf{v}}s\,。$$

從 $\rho(n,s)$ 計算壓力和溫度

(22.6)式適合於兩種意義相反的解釋：可以看作由壓力（作爲 n 和 s 的函數）和溫度（作爲 n 和 s 的函數）導出介質的質量-能量密度的方法；也可相反地看作由一個函數 $\rho(n,s)$ 導出兩個函數 $p(n,s)$ 和 $T(n,s)$ 的方法。先看一下第二種解釋是很自然的；誰不喜歡在理智上有益的戰略呢？把 ρ 看作用 n 和 s 的已知的（或可計算的）函數，由 (22.6) 式導出

$$\frac{\rho+p}{n}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_s,$$

$$nT=\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_n,$$

由此壓力和溫度各自爲

$$p(n,s)=n\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_s-\rho\,, \tag{22.7a}$$

$$T(n,s)=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_n \tag{22.7b}$$

（「由一個狀態方程導出兩個狀態方程」）。在已假定流體各處成分相同的情況下，若再賦予各處流體每一重子有相同的熵 s，以及流體處於絕熱的流動狀

態（無衝擊波或熱傳導），則分析可進一步簡化。這樣，密度 $\rho=\rho(n,s)$簡化爲一個變量的函數，由此可以導出該系統流體動力學和引力物理學所需要的一切物理量（ρ,p,μ）（下一章）。在其他情況下，選擇別的「原始的熱力學勢」是適當的（參見框22.1）。

如果說對 $\rho(n,s)$ 作微商可以導出 $p(n,s)$ 和 $T(n,s)$，那麼，這並不意味着，取任意兩個函數 $p(n,s)$ 和 $T(n,s)$ 就可倒算出（通過積分）「原始的函數」$\rho(n,s)$。爲了與熱力學第一定律（22.6）式相容，這兩個函數必須滿足自洽性要求［「Maxwell 關係」；ρ 的二階偏微商的等式］ **Maxwell 關係**

$$(\partial p/\partial s)_n=n^2(\partial T/\partial n)_s。\qquad(22.7c)$$

框 22.1　描述流體的「原始熱力學勢」的主要選擇

原始熱力學勢和看來最適當的自變量選擇	從原始熱力學勢微商得出「次級」熱力學量推導中可利用也可不利用下式	使此選擇方便適當和切合的條件。
	$d\left(\frac{\rho}{n}\right)+pd\left(\frac{1}{n}\right)-Tds=0$	
「密度」；單位體積的總質量-能量（靜止的＋熱能＋……） $\rho=\rho(n,s)$	$p(n,s)=n\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_s-\rho$ $T(n,s)=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_n$ $\mu(n,s)=\frac{p+\rho}{n}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_s$	絕熱流動條件（無衝擊波或熱傳導），因此，s 沿流線保持不變。
「物理自由能」 $a(n,T)=\frac{\rho}{n}-Ts$	$p(n,T)=n^2\left(\frac{\partial a}{\partial n}\right)_T$ $s(n,T)=-\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_n$ $\rho(n,T)=-nT^2\left[\frac{\partial(a/T)}{\partial T}\right]_n$	在給定每個重子的體積和溫度的條件下，a（或統計力學的「對各狀態求和」）已知或可以計算。
「化學自由能」 $f(p,T)=\frac{\rho+p}{n}-Ts$	$1/n(p,T)=(\partial f/\partial p)_T$ $s(p,T)=-(\partial f/\partial T)_p$ $\rho(p,T)=\frac{f-T(\partial f/\partial T)_p}{(\partial f/\partial p)_T}-p$	當壓力和溫度給定時，適用於確定的平衡態。
「化學勢」（表爲「每個重子」的「注入能量」） $\mu(p,s)=\frac{p+\rho}{n}$	$1/n(p,s)=(\partial\mu/\partial p)_s$ $T(p,s)=(\partial\mu/\partial s)_p$ $\rho(p,s)=\frac{\mu}{(\partial\mu/\partial p)_s}-p$	注意的中心是何時注入能量［＝相對論性的或非相對論性的理想 Fermi 氣體的 Fermi 能量；參看練習22.3］。

每個重子的熵和體積固定時，化學勢等於「注入能量」

化學勢 μ 也是 n 和 s 的單值函數，它的定義如下。(1)選取處於確定熱力學狀態（固定 n 和 s）的簡單流體的樣品。(2)從與大樣品處於同樣熱力學狀態（同樣的 n 和 s）的流體中分出更小的樣品，它有 δA 個重子。(3)把小樣品注入大樣品，在注入過程中保持大樣品體積不變。(4)注入的總質量-能量

$$\delta M_{\text{注入}} = \rho \times (\text{注入流體的體積}) = \rho(\delta A/n),$$

加上注入所需作的功

$$\delta W_{\text{注入}} = \begin{pmatrix}\text{在大樣品中爲注入的流體讓出}\\ \text{空間時，反抗其壓力所作的功}\end{pmatrix}$$
$$= p(\text{注入流體的體積}) = p(\delta A/n),$$

等於 $\mu\delta A$:

$$\mu\delta A = \delta M_{\text{注入}} + \delta W_{\text{注入}} = \frac{\rho+p}{n}\delta A。$$

更簡要地說

$$\mu = \begin{pmatrix}\text{在保持給定樣品的 } s \text{ 或體積不變的情況下，「創造」小量附}\\ \text{加流體並將它注入樣品時，每個重子所需的總質量-能量}\end{pmatrix}$$
$$= \frac{\rho+p}{n} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_{s}。 \qquad (22.8)$$
$$\uparrow$$
[根據熱力學第一定律(22.6)式]

上述全部熱力學定律和方程，在彎曲空時中與在平直空時中完全一樣；在（相對論性的）平直空時中，與在經典的非相對論性的熱力學中完全一樣——只是在 ρ 和 μ 中，除了包含靜止質量外，還應包括全部其他形式的能量。理由很簡單：所有定律都表爲聯繫各熱力學變量的標量方程，而這些熱力學變量是在流體靜止系中測量的。

§ 22.3 彎曲空時中的流體動力學*

無熱流或無粘滯性的簡單流體的流體動力學定律：

簡單的理想流體在空時中流動。這可以是地球引力場中地球大氣的環流。可以是在太陽自身引力場中靜止的太陽內部的氣體，也可以是吸積在黑洞上的星際氣體。但是，無論什麼流體，也無論流體在何處，它的運動將受到彎曲空

* 對此課題的更詳細討論，請參看，例如，Ehlers(1961), Taub(1971), Ellis(1971), Lichnerowicz (1967), Cattaneo (1971)的文獻，以及其中所引之參考文獻；並請參看§ 22.6開始處所引述的有關動力論的文獻。

時熱力學定律(§22.2)和局域能量-動量守恒定律 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 支配。本節的主要目的是把方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 簡化爲可用的形式。在本書中，這種簡化將用抽象符號來完成；建議讀者用指標符號把這種簡化重作一遍。

(1)定律的起源

彎曲空時中理想流體的脅强-能量張量，與平直的一樣（等效原理），爲

$$\boldsymbol{T}=(\rho+p)\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+p\boldsymbol{g}。\tag{22.9}$$

（參看 §5.5）利用鏈式法則；利用「$\boldsymbol{g}$ 與 ∇ 之間的相容性關係」，$\nabla\boldsymbol{g}=0$；利用恒等式 $(\nabla p)\cdot\boldsymbol{g}=\nabla p$（用指標符號不難證明）；則由下式不難求出其散度

$$\begin{aligned}0=\nabla\cdot\boldsymbol{T}&=[\nabla(\rho+p)\cdot\boldsymbol{u}]\boldsymbol{u}+[(\rho+p)\nabla\cdot\boldsymbol{u}]\boldsymbol{u}+[(\rho+p)\boldsymbol{u}]\cdot\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla p)\cdot\boldsymbol{g}\\&\quad\uparrow\text{[對第一空位求散度]}\\&=[\nabla_{\boldsymbol{u}}\rho+\nabla_{\boldsymbol{u}}p+(\rho+p)\nabla\cdot\boldsymbol{u}]\boldsymbol{u}+(\rho+p)\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}+\nabla p。\end{aligned}\tag{22.10}$$

此方程沿四維速度的分量特別簡單（回想起，因爲 $\boldsymbol{u}^2\equiv-1$，故 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}^2=0$）：

$$\begin{aligned}0=\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T})&=-[\nabla_{\boldsymbol{u}}\rho+\nabla_{\boldsymbol{u}}p+(\rho+p)\nabla\cdot\boldsymbol{u}]+\nabla_{\boldsymbol{u}}p\\&=-\nabla_{\boldsymbol{u}}\rho-(\rho+p)\nabla\cdot\boldsymbol{u}。\end{aligned}$$

將上式與重子數守恒方程(22.3)式聯立；結果爲

(2)局域能量守恒：流動的絕熱性

$$\frac{d\rho}{d\tau}=\frac{(\rho+p)}{n}\frac{dn}{d\tau}。\tag{22.11a}$$

注意，此式與沿流線應用熱力學第一定律(22.6)式，並假設沿着流線每個重子的熵不變，即

$$ds/d\tau=0\tag{22.11b}$$

所得結果完全一致。這個結果並不奇怪。堅持熱力學平衡又要求熵不變，就等於要求流體元之間的熱交換爲零。但從脅强-能量張量(22.9)式可看出熱交換並不存在。任何熱交換應在 $\boldsymbol{T}$ 中以能流項出現（練習22.7）；但是這種項並未出現。因此，當人們通過計算 $\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T})=0$ 來研究局域能量守恒時，脅强-能量張量表明無熱流發生——即 $ds/d\tau=0$。

還剩下方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 垂直於流體四維速度的三個分量。撇開 $\boldsymbol{u}$ 方向的分量，利用「投影張量」

$$\boldsymbol{P}\equiv\boldsymbol{g}+\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\tag{22.12}$$

框 22.2 彎曲空時中簡單理想流體的熱力學和流體動力學

A. 表示流體特性的十個量

各熱力學勢均在靜止參照系中測量。

n, 重子數密度

ρ, 總質量-能量密度

p, 壓力

T, 溫度

s, 每個重子的熵

μ, 每個重子的化學勢

流體四維速度的四個分量

B. 支配流體運動的十個方程

兩個狀態方程

$$p=p(n,s),\quad T=T(n,s) \qquad (1),(2)$$

服從相容性限制（由熱力學第一定律得出的"Maxwell關係"）

$$(\partial p/\partial s)_n=n^2(\partial T/\partial n)_s 。$$

熱力學第一定律

$$d\rho=\frac{\rho+p}{n}dn+nTds\,, \qquad (3)$$

積分給出 $\rho(n,s)$ 。

化學勢方程

$$\mu=(\rho+p)/n\,, \qquad (4)$$

此式與$\rho(n,s)$和$p(n,s)$聯立可給出 $\mu(n,s)$。

重子數守恒定律

$$dn/d\tau\equiv\nabla_{\boldsymbol{u}}n=-n\nabla\cdot\boldsymbol{u} 。 \qquad (5)$$

沿流線能量守恒，它（假設相鄰流體元之間無能量交換）意味着「絕熱流動」

$ds/d\tau=0$，只是，有

$$ds/d\tau>0 \text{ 在衝擊波內。} \qquad (6)$$

［本書不討論衝擊波；參看 Taub (1948), de Hoffman 和Taller(1950), Israel(1960), May 和 White(1967), Zel'dovich 和Rayzer (1967); Lichnerowicz (1967,1971)；和 Thorne (1973a) 的文獻 。］

Euler 方程

$$(\rho+p)\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=-(\boldsymbol{g}+\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\cdot\nabla p\,, \qquad (7),(8),(9)$$

它決定以 $\boldsymbol{u}$ 爲切向的流線。

四維速度的歸一化

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=-1 。 \qquad (10)$$

可從 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 中摘出這些這些分量（見練習22.4）。用$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$縮併 $\boldsymbol{P}$[(22.10)式]，得出

(3)Euler 方程

$$(\rho+p)\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{P}\cdot(\nabla p)\equiv-[\nabla p+(\nabla_{\boldsymbol{u}}p)\boldsymbol{u}] 。 \qquad (22.13)$$

這是相對論性流體動力學的「Euler 方程」。它與相應的平直空時 Euler 方程的形式完全相同：

$$\begin{pmatrix}\text{單位體積}\\ \text{的慣性質量}\\ \text{[練習5.4]}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\text{流體的}\\ \text{四維加}\\ \text{速度}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\text{在三維表面中}\\ \text{垂直於四維速}\\ \text{度的壓力梯度}\end{pmatrix} 。 \qquad (22.13')$$

流線對短程線的全部偏離都來自壓力梯度，而不是來自「重力」。

框22.2重新組織和概括了上述熱力學和流體力學的定律。

練習 22.1　流線發散造成體積的變化

導出流體元體積變化率的方程 $dV/d\tau=(\nabla\cdot\mathbf{u})V$［(22.2 式)］。［提示：選出事件 $\mathcal{P}_0$，並在 $\mathcal{P}_0$ 處隨流體一起運動的局域 Lorentz 參照系（「$\mathcal{P}_0$處的靜止系」）中作計算。］［解：在$\mathcal{P}_0$附近的各事件處，流體有很小的普通速度 $v^j=dx^j/dt$。由此，在 $\mathcal{P}_0$ 處，以 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=L$ 爲邊界的流體立方體，經時間 δt 後，其邊界的改變量爲

$$\begin{aligned}\delta(\Delta x)&=[(dx/dt)\delta t]_{\text{「前表面」}}-[(dx/dt)\delta t]_{\text{「後表面」}}\\&=(\partial v^x/\partial x)L\delta t,\\\delta(\Delta y)&=(\partial v^y/\partial y)L\delta t,\\\delta(\Delta z)&=(\partial v^z/\partial z)L\delta t。\end{aligned}$$

相應的體積變化爲

$$\delta(\Delta x\Delta y\Delta z)=(\partial v^j/\partial x^j)L^3\delta t;$$

因此，體積的變化率爲

$$\partial V/\partial t=V(\partial v^j/\partial x^j)。$$

但在 $\mathcal{P}_0$（該處 $x^\alpha=0$）及其附近的局域 Lorentz 靜止參照系中，度規係數爲 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+0(|x^\alpha|^2)$，普通速度爲 $v^j=0(|x^\alpha|)$；因此

$$u^0=\frac{dt}{d\tau}=\frac{dt}{(-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)^{1/2}}=1+0(|x^\alpha|^2),$$
$$u^j=\frac{dx^j}{d\tau}=v^j+0(|x^\alpha|^3)。$$

於是，在 $\mathcal{P}_0$ 處，微商 $\partial V/\partial t$ 和 $V(\partial v^j/\partial x^j)$ 爲

$$\begin{aligned}\partial V/\partial t&=u^\alpha\partial V/\partial x^\alpha=u^\alpha V_{,\alpha}=dV/d\tau\\&=V(\partial v^j/\partial x^j)=V(\partial u^\alpha/\partial x^\alpha)=Vu^\alpha{}_{;\alpha}=V(\nabla\cdot\mathbf{u})。\text{證完}］。\end{aligned}$$

［注意：在平直空時中，可更容易地導出 $\partial V/\partial t=dV/d\tau$ 和 $\partial v^j/\partial x^j=\nabla\cdot\mathbf{u}$；然後得出 $dV/d_\tau=(\nabla\cdot\mathbf{u})V$；再援引等效原理把這個定律移到彎曲空時中去。］

練習 22.2　連續性方程

試證明，在非相對論極限下，平直空時中的重子數守恒方程 (22.3) 式變爲「連續性方程」。

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^j}(nv^j)=0。$$

練習 22.3　理想 Fermi 氣體的化學勢

試證明，非相對論性的或相對論性的理想 Fermi 氣體的化學勢（在溫度爲零度時）等於該氣體的 Fermi 能量（即佔據最高動量狀態的能量）。

練習 22.4　投影張量

試證明，切向矢量 $\mathbf{B}$ 與「投影張量」$\mathbf{P}\equiv\mathbf{g}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$ 的縮併把 $\mathbf{B}$ 投影到與四維速度矢量 $\mathbf{u}$

正交的三維表面上。〔提示：在 $\mathbf{e}_0=\mathbf{u}$ 的正交歸一系中作計算，並寫成 $\mathbf{B}=B^a\mathbf{e}_a$；然後證明 $\mathbf{P}\cdot\mathbf{B}=B^j\mathbf{e}_j$。〕如果 $\mathbf{n}$ 爲單位類空矢量，試證明 $\mathbf{P}\equiv\mathbf{g}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ 是相應的投影算符。注意：「正交於零矢量的投影」這一概念是不唯一的。爲什麼？〔提示：在壓縮爲一維空間的平直空時中作圖。〕

練習 22.5 穩定引力場中的壓力梯度

在穩定引力場（度規係數與x^0無關）中，理想流體處於靜止狀態（流線 x^j=常數）。試證明，爲了「反抗重力支撐流體」（即使其流線爲 x^j=常數而非短程線）所需的壓力梯度爲

$$\frac{\partial p}{\partial x^0}=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial x^j}=-(\rho+p)\frac{\partial \ln\sqrt{-g_{00}}}{\partial x^j}。\tag{22.14}$$

試應用 (18.15c) 式的坐標系和度規係數，在 Newton 極限下計算此壓力梯度。

練習 22.6 擴張，旋轉和剪切

設給定流體四維速度場 $\mathbf{u}(\mathcal{P})$。

(a)試證明 $\nabla\mathbf{u}$ 可按下列方式分解

$$u_{\alpha;\beta}=\omega_{\alpha\beta}+\sigma_{\alpha\beta}+\frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta}-a_\alpha u_\beta,\tag{22.15a}$$

式中 $\mathbf{a}$ 爲流體的四維加速度

$$a_\alpha\equiv u_{\alpha;\beta}u^\beta,\tag{22.15b}$$

θ是流體世界線的「擴張」

$$\theta\equiv\nabla\cdot\mathbf{u}=u^\alpha{}_{;\alpha},\tag{22.15c}$$

$P_{\alpha\beta}$是投影張量

$$P_{\alpha\beta}\equiv g_{\alpha\beta}+u_\alpha u_\beta,\tag{22.15d}$$

$\sigma_{\alpha\beta}$是流體的剪切張量

$$\sigma_{\alpha\beta}\equiv\frac{1}{2}(u_{\alpha;\mu}P^\mu{}_\beta+u_{\beta;\mu}P^\mu{}_\alpha)-\frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta},\tag{22.15e}$$

$\omega_{\alpha\beta}$是流體的旋轉2-形式

$$\omega_{\alpha\beta}\equiv\frac{1}{2}(u_{\alpha;\mu}P^\mu{}_\beta-u_{\beta;\mu}P^\mu{}_\alpha)。\tag{22.15f}$$

(b)在流體局域靜止參照系中，這一分解的每一部分都有簡單的物理解釋。用加速度計讀出的四維加速度 $\mathbf{a}$ 的解釋是熟知的。練習 22.1表明，擴張 $\theta=\nabla\cdot\mathbf{u}$ 描述了流體元體積的增加率，

$$\theta=(1/V)(dV/d\tau)。\tag{22.15g}$$

練習 22.4 考察了投影張量 $\mathbf{P}$ 的含意與應用。試證明，在隨流體運動（$u^{\hat{a}}=\delta^a{}_0$）的局域 Lorentz 參照系（$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=\eta_{\alpha\beta}$, $\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}=0$）中，$\sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 和 $\omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 簡化爲流體的經典的（非相對論性的）剪切和旋轉。〔對於剪切和旋轉的經典描述與相對論描述，參看，例如，Ellis (1971) 的著作中 §2.4 和 2.5。〕

練習 22.7　有黏滯性與熱流時的流體動力學*

(a)在 Landau 和 Lifshitz (1959) 著作的 §15中，可以找到對經典（非相對論性）流體黏滯脅强的分析。直接把該分析用於相對論性流體的局域 Lorentz 靜止參照系中，再進一步推廣到與參照系無關的表述，由此證明黏滯性對脅强-能量張量的貢獻是

$$\boldsymbol{T}\text{（黏滯）}=-2\eta\boldsymbol{\sigma}-\zeta\theta\boldsymbol{P}\,, \tag{22.16a}$$

式中 $\eta\geq 0$是「動態黏滯性係數」；$\zeta\geq 0$ 是「整體黏滯性係數」，$\boldsymbol{\sigma}$, θ, $\boldsymbol{P}$ 分別是流體的剪切，擴張和投影張量。

(b)對流體中熱流的理想描述是引入熱流四維矢量 $\mathbf{q}$，它在流體局域靜止參照系中的分量爲：

$$q^0=0,\quad q^j=\begin{pmatrix}\text{單位時間通過垂直於}\\ \mathbf{e}_j\text{的單位面積的能量}\end{pmatrix}。 \tag{22.16b}$$

從流體靜止參照系推廣到與參照系無關的描述，證明熱流對脅强-能量張量的貢獻是

$$\boldsymbol{T}\text{（熱）}=\mathbf{u}\otimes\mathbf{q}+\mathbf{q}\otimes\mathbf{u}。 \tag{22.16c}$$

由此得出結論：在理想的情況下，具有熱傳導的黏滯流體的脅强-能量張量是

$$T^{\alpha\beta}=\rho u^\alpha u^\beta+(p-\zeta\theta)P^{\alpha\beta}-2\eta\sigma^{\alpha\beta}+q^\alpha u^\beta+u^\alpha q^\beta。 \tag{22.16d}$$

(c)定義熵四維矢量$\mathbf{s}$爲

$$\mathbf{s}\equiv n s\mathbf{u}+\mathbf{q}/T。 \tag{22.16e}$$

通過在流體局域靜止參照系中的計算，證明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{s}&=\begin{pmatrix}\text{單位體積內}\\ \text{熵的增加率}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{熵被熱流和流體}\\ \text{帶入單位體積的速率}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\text{單位體積內}\\ \text{熵的產生率}\end{pmatrix}。\end{aligned} \tag{22.16f}$$

由此得出下述形式的熱力學第二定律

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{s}\geq 0。 \tag{22.16g}$$

(d)對有熱流的黏滯流體，計算局域能量守恒定律 $\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0$。與熱力學第一定律和重子數守恒定律聯立，得出

$$T\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{s}=\zeta\theta^2+2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}-q^\alpha(T_{,\alpha}/T+a_\alpha)。 \tag{22.16h}$$

方程的每一項解釋爲對熵產生的貢獻（例如：把 $2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$ 描述爲黏滯加熱產生的熵）。［注意：$q^\alpha a_\alpha$ 項來源於相對論效應。它與熱流的慣性相聯繫。］

(e)當考慮熱流的慣性時，得出經典熱傳導定律的下述推廣：

$$q^\alpha=-\kappa P^{\alpha\beta}(T_{,\beta}+Ta_\beta) \tag{22.16i}$$

---

*John M. Stewart 提供的練習。

(Eckart 1940)。其中 κ 爲熱傳導係數。試用此方程證明，對於在穩定引力場中靜止的流體（練習22.5），

$$q_0=0, \qquad q_j=-\frac{\kappa}{\sqrt{-g_{00}}}(T\sqrt{-g_{00}})_{,j}。 \tag{22.16j}$$

［於是，熱平衡不再對應恒定的溫度，但相應的紅移溫度分布 $T\sqrt{-g_{00}}$=常數；Tolman (1934a) 313頁。］又，用理想的熱傳導定律 (22.16i) 式把熵的產生率重新表爲

$$T\nabla\cdot s=\zeta\theta^2+2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}+(\kappa/T)P^{\alpha\beta}(T_{,\alpha}+Ta_\alpha)(T_{,\beta}+Ta_\beta)\geq 0。 \tag{22.16k}$$

［關於熱流的進一步細節以及對上述理想描述的限制的討論，參看，例如，Ehlers (1971) 的§4.18；Marle (1969)，Anderson (1970)，Stewart (1971)的著作，以及其中引述的文獻。］

§ 22.4 彎曲空時中的電動力學

電場和磁場

在有重力存在的局域 Lorentz 參照系中，觀測者可以利用通常帶電粒子的 Lorentz力定律測量電場和磁場 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$。與在狹義相對論中一樣，他可以把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 看成電磁場張量的分量

$$F^{\hat{0}\hat{j}}=-F^{\hat{j}\hat{0}}=E^{\hat{j}}, \qquad F^{\hat{j}\hat{k}}=\epsilon^{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}B^{\hat{l}};$$

還可把電荷密度和電流密度看成四維矢量 $J^{\hat{\alpha}}$ 的分量，並以狹義相對論的形式寫出 Maxwell 方程組和 Lorentz 力方程，

$$F^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}_{,\hat{\beta}}=4\pi J^{\hat{\alpha}}, \qquad F_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}}+F_{\hat{\beta}\hat{\gamma},\hat{\alpha}}+F_{\hat{\gamma}\hat{\alpha},\hat{\beta}}=0,$$

$$ma^{\hat{\alpha}}=F^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}qu_{\hat{\beta}} \qquad \begin{pmatrix} m=\text{粒子質量}, q=\text{電荷}, \\ u^{\hat{\alpha}}=\text{四維速度}, a^{\hat{\alpha}}=\text{四維加速度} \end{pmatrix}。$$

在任何其他參照系中，這些方程將具有同樣的形式，但逗號應換成分號，

Maxwell 方程組和 Lorentz力定律

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=4\pi J^\alpha, \tag{22.17a}$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma}+F_{\beta\gamma;\alpha}+F_{\gamma\alpha;\beta}=0, \tag{22.17b}$$

$$ma^\alpha=F^{\alpha\beta}qu_\beta。 \tag{22.17c}$$

這些就是存在重力時電動力學的基本方程。其他一切均可由此得出。例如，與狹義相對論一樣，此處也是如此（練習22.9），應包含電荷守恒方程

電荷守恒

$$J^\alpha{}_{;\alpha}=0; \tag{22.18a}$$

而對與帶電物質相互作用的電磁場（練習22.10），應包含脅强-能量張量之和的散度爲零

$$(T^{(\text{電磁場})\alpha\beta}+T^{(\text{物質})\alpha\beta})_{;\beta}=0。 \tag{22.18b}$$

局域能量-動量守恒

與狹義相對論一樣，此處也是如此，可以引入矢勢 A^μ。把通常狹義相對論中用 A^μ 描述 $F_{\mu\nu}$ 的表達式中的逗號改爲分號，得出

矢勢

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}。 \tag{22.19a}$$

如果一切良好，這個方程（與在狹義相對論中一樣）將保證 Maxwell 方程（22.17b）能滿足。練習（22.8）表明的確如此。爲了導出決定矢勢的波動方程，把表達式（22.19a）代入剩下的 Maxwell 方程（22.17a）之中，得出

$$-A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta}+A^{\beta;\alpha}{}_{;\beta}=4\pi J^\alpha\ ; \tag{22.19b}$$

再利用恒等式（16.6c）替換第一項中的協變微商。得出

$$-A^{\alpha;\mu}{}_{;\mu}+A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{;\alpha}+R^\alpha{}_\mu A^\mu=4\pi J^\alpha。 \tag{22.19b′}$$

最後，採用狹義相對論的標準方法，加上 Lorentz 規範條件

$$A^\mu{}_{;\mu}=0\,, \tag{22.19c}$$

Lorentz 規範條件

把波動方程（22.19b′）變爲下述形式

$$(\Delta_{dR}A)^\alpha\equiv -A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta}+R^\alpha{}_\beta A^\beta=4\pi J^\alpha。 \tag{22.19d}$$

矢勢的波動方程

這裏出現的「de Rham 矢量波算符」Δ，除符號外，是彎曲空時中各矢量推廣的 d'Alambert 算符。它的數學功能比 $-A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta}$ 和在狹義相對論中能簡化爲（負的）d'Alambert 算符的任何其他算符都大。［有關的討論，可參看 de Rham (1955) 的著作。］

雖然電動力學方程（22.17a）到（22.19b）都是由狹義相對論的相應方程，通過逗號改爲分號的規則得到的，但矢勢的波動方程（22.19d）並非如此（「曲率耦合」；見框16.1）。儘管如此，當空時爲平直時（因此 $R^\alpha{}_\beta=0$），（22.19d）式的確可簡化爲狹義相對論通常的波動方程。

練習 22.8　電動力學的矢勢　　練習

試證明，在任何坐標系中，(22.19a) 式和 (22.17b) 式兩者的聯絡係數可彼此抵消，所以它們可寫爲

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu}\,, \tag{22.20a}$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma}+F_{\beta\gamma;\alpha}+F_{\gamma\alpha;\beta}=0。 \tag{22.20b}$$

（採用微分形式的語言，這些方程是 $\mathbf{F}=d\mathbf{A}$，$d\mathbf{F}=0$。）然後，用這種形式的方程，證明（22.19a）式包含（22.17b）式，確如課文所斷言。

練習 22.9 重力存在時的電荷守恒

試證明，在重力存在時，Maxwell 方程（22.17a,b）包含電荷守恒方程（22.18a），正像在狹義相對論中那樣。［提示：利用 $F^{\alpha\beta}$的反對稱性；並注意在應用（16.6）式時必須處理的各協變微商的不可對易。另一方面，證明在坐標系中（22.17a）式可以寫爲

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{|g|}F^{\alpha\beta})=4\pi J^\alpha \tag{22.17a'}$$

而（22.18a）式可寫爲

$$J^\alpha{}_{;\alpha}\equiv\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{|g|}J^\alpha)=0, \tag{22.18a'}$$

在同一坐標系中完成這個證明。］

練習 22.10 電磁場和帶電物質的相互作用

與在狹義相對論中一樣（「等效原理」），在重力存在時，電磁場的脅强-能量張量是

$$T(\text{電磁場})_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{\alpha\mu}F_\beta{}^\mu-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\right)。 \tag{22.21}$$

利用有重力存在時的 Maxwell 方程（22.17a,b），證明

$$T(\text{電磁場})^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=-F^{\alpha\beta}J_\beta。 \tag{22.22}$$

但是，$F^{\alpha\beta}J_\beta$ 正好是電磁場作用於帶電物質每單位體積的Lorentz四維力。［參看Lorentz力方程（22.17c）；以及（5.43）式］；即它就是T（物質）$^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$。由此得出上述方程可以改寫爲課文所述的（22.18b）式的形式。

§22.5 彎曲空時中的幾何光學*

類星體3C279的射電波經過太陽近旁，被它的引力場偏折。很久以前在遠處新誕生的星系所發出的光線，在宇宙的（宇宙論）彎曲空時中傳播，並被聚焦（和紅移），在地球的天空上產生出因彎曲而放大的（但是模糊的）星系的像。

*部分的根據是 William L. Burke 1968 年在加州理工學院準備的筆記。對彎曲空時中幾何光學的更詳盡論述，可參看，例如，Sachs (1961), Jordan, Ehlers, 和 Sachs (1961)，和 Robinson (1961) 的著作；也可參考 §41.11 中的討論和所列文獻。

這些以及絕大多數其他光和射電波傳播的例子都遵循幾何光學的定律。本節在彎曲空時中從 Maxwell 方程組推導這些定律。

幾何光學概述

幾何光學的基本定律是：(1)光線是零短程線；(2)偏振矢量垂直於光線並沿光線平行傳播；和(3)振幅由一絕熱不變量決定，用量子力學的語言來說，它表明光子數守恒。

幾何光學適用的條件

這些定律能否適用，取決於對下述三個長度所提的條件：(1)在典型的局域 Lorentz 參照系（例如，相對於鄰近星系靜止的參照系）中，測定的波的典型約化波長（reduced wavelength）：

$$\lambda\!\!\!^{-} \equiv \frac{\lambda}{2\pi} = \left(\begin{array}{c}\text{「具有單位角動量的光子}\\ \text{最靠近時的經典距離」}\end{array}\right) ; \qquad (22.23a)$$

(2)波的振幅，偏振和波長變化的典型長度 $\mathcal{L}$，例如波前的曲率半徑，或因類星體突然爆發而產生的波包的長度；(3)波在其中傳播的空時的典型曲率半徑 $\mathcal{R}$，

$$\mathcal{R} \equiv \left|\begin{array}{c}\text{在典型的局域 Lorentz 參照系中}\\ \text{測定的 } \textit{Riemann} \text{ 的典型分量}\end{array}\right|^{-1/2} 。 \qquad (22.23b)$$

幾何光學適用的條件是約化波長比其他二個尺度都短很多，即

$$\lambda\!\!\!^{-} \ll \mathcal{L} \quad 和 \quad \lambda\!\!\!^{-} \ll \mathcal{R}, \qquad (22.23c)$$

因此，波可以局域地看作是在曲率可以忽略的空時中傳播的平面波。

幾何光學隱含着「雙長度尺度」(two-length-scale)的展開

從數學上講，可按如下方式利用幾何光學的假設 $\lambda\!\!\!^{-} \ll \mathcal{L}$ 和 $\lambda\!\!\!^{-} \ll \mathcal{R}$。研究在 $\lesssim \mathcal{L}$ 區域中高度單色的波。（更複雜的光譜可以通過疊加來分析，即用 Fourier 分析。）把電磁理論的矢勢分爲迅速變化的實位相

$$\theta \sim (\text{傳播距離})/\lambda\!\!\!^{-},$$

和緩慢變化的複振幅（即有實部和虛部），

$$\boldsymbol{A} = \{\text{振幅} \times e^{i\theta}\} \text{ 的實部} \equiv \Re\{\text{振幅} \times e^{i\theta}\}。$$

設想固定振幅變化的尺度 $\mathcal{L}$ 和空時曲率的尺度 $\mathcal{R}$，而使約化波長 $\lambda\!\!\!^{-}$ 愈來愈短。因此在空時中固定事件處，位相將變得愈來愈大（$\theta \propto 1/\lambda\!\!\!^{-}$），但是作爲空時中位置的函數的振幅可以實質上保持不變

$$\text{振幅} = \left[\begin{array}{c}\text{主要部分，}\\ \text{與 } \lambda\!\!\!^{-} \text{ 無關}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}\text{有限波長引起的小修正}\\ \text{（對幾何光學的偏離）}\end{array}\right]。$$

這種情況允許把振幅展開爲λ的冪次：*

$$\text{振幅}= \underset{\uparrow}{\boldsymbol{a}} + \underset{\uparrow}{\boldsymbol{b}} + \underset{\uparrow}{\boldsymbol{c}} + \cdots.$$

[與λ無關] [$\propto\lambda$] [$\propto\lambda^2$]

[實際上，可按無量綱數的冪次展開

$$\lambda/(\mathcal{L}\text{ 和 }\mathcal{R}\text{ 中較小者})\equiv\lambda/L。 \tag{22.24}$$

應用數學家把這叫做「雙長度尺度展開」；參看，例如，Cole (1968) 的著作。此處所用的短波長近似的基本方法有很長的歷史；參看，例如，Liouville (1837), Rayleigh (1912) 的著作。遵照 Debye 的建議，Sommerfeld 和 Runge (1911) 曾把它用於 Maxwell 方程組。它與量子力學中的 WKB 近似一樣爲人們熟知，正如在 Keller, Lewis, 和 Secker (1956) 的書目提要中所指出，它有許多其他的應用。Kline (1954) 和 Lewis (1958) 曾考慮過高階項的貢獻。特別請參看 Fröman 和 Fröman (1965) 的書。]

引入參量 ε 是有用的，以便留意當 λ/L 趨於零時，各不同項趨於零（或無窮）的快慢：

幾何光學中的矢勢

$$A_\mu=\Re\{(a_\mu+\varepsilon b_\mu+\varepsilon^2 c_\mu+\ldots)e^{i\theta/\varepsilon}\}。 \tag{22.25}$$

前面有因子 ε^n 的各項在波長非常小的極限下將按 $(\lambda/L)^n$ 變化[$\theta\propto(\lambda/L)^{-1}$; $c_\mu\propto(\lambda/L)^2$; 等等]，按照慣例，$\varepsilon$ 是虛設的展開參量，最後取值爲 1；因此，當它不再有用時，可以從計算中刪去。而且，按照慣例，所有「後幾何光學修正項」都應置於振幅項 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,...之中；而不置於 θ 之中。

注意，當位相 θ 是空時中位置的實函數時，振幅從而各矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,...是複的。例如，爲了描述沿 z 方向傳播的右旋圓偏振單色波，可令 $\theta=\omega(z-t)$ 和 $\boldsymbol{a}=1\sqrt{2}\,a(\mathbf{e}_x+i\mathbf{e}_y)$，此處 a 爲實數；因此

$$\boldsymbol{A}=\Re\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}a(\mathbf{e}_x+i\mathbf{e}_y)e^{i\omega(z-t)}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}a\{\cos[\omega(z-t)]\mathbf{e}_x-\sin[\omega(z-t)]\mathbf{e}_y\}。$$

矢勢的假設形式 (22.25) 式是幾何光學的數學基礎。所有幾何光學的重要方程都可將矢勢代入無源波動方程 $\Delta\boldsymbol{A}=0$ [(22.19d) 式] 和 Lorentz 規範條件$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ [(22.19c) 式] 得出。僅當用以下各項表述時，所得方程（下面推導）的形式最簡單：

幾何光學的基本概念

* $\boldsymbol{A}$ 的方程是線性的。因此，若不假設振幅與波長無關，而假設主要部分 $\boldsymbol{a}\propto\lambda^n$，且$\boldsymbol{b}\propto\lambda^{n+1}$，$\boldsymbol{c}\propto\lambda^{n+2}$ 等等，則全部分析可以同樣進行。結果與 n 無關。若選定 $n=1$，則當 $\lambda\to0$ 時，場强 $F_{\mu\nu}$和能量密度 $T_{\mu\nu}\propto F^2\propto A^2/\lambda^2\propto$ 常數。

「波矢量」$\mathbf{k}\equiv\nabla\theta$；　(22.26a)　(1)波矢量

「標量振幅」$a\equiv(\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}})^{1/2}=(a^\mu\bar{a}_\mu)^{1/2}$；　(22.26b)　(2)標量振幅

「偏振矢量」$\mathbf{f}\equiv\mathbf{a}/a=$「沿 $\mathbf{a}$ 的單位複矢量」。　(22.26c)　(3)偏振矢量

（式中 $\bar{\mathbf{a}}$ 是 $\mathbf{a}$ 的複共軛。）光線定義爲垂直等相面 θ 的曲線 $\mathscr{P}(\lambda)$。因爲 $\mathbf{k}\equiv\nabla\theta$ 垂直於這些表面，光線的微分光程爲　(4)光線

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda}=k^\mu(x)=g^{\mu\nu}(x)\theta_{,\nu}(x)。\qquad(22.26d)$$

框 22.3 適合於此處的研究，它展示了傳播着的波的偏振矢量，波矢量，等相面和光線；其中沒有給出標量振幅，而只給出振幅矢量 $\mathbf{a}$ 的長度。如果讀者由電動力學對複偏振矢量還不很熟悉，那麼通過練習 22.12 可以加深對它的理解。

基礎部分就講到這裏。現在討論計算。首先把幾何光學矢勢 (22.25) 式代入 Lorentz 規範條件：　推導幾何光學定律

$$0=A^\mu{}_{;\mu}=\mathfrak{R}\left\{\left[\frac{i}{\varepsilon}k_\mu(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)+(a^\mu+\varepsilon b^\mu+\cdots)_{;\mu}\right]e^{i\theta/\varepsilon}\right\}。\quad(22.27)$$

主要項（量級爲 $1/\varepsilon$）爲

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}=0\text{（振幅垂直於波矢量）}；\qquad(22.28)$$

或等價地

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}=0\text{（偏振垂直於波矢量）}。\qquad(22.28')$$

破壞這個條件的後幾何光學受規範條件 (22.27) 式中更高量級項[$0(1)$, $0(\varepsilon)$, $0(\varepsilon^2)$,...] 的支配；例如，$0(1)$ 項表明

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}=i\nabla\cdot\mathbf{a}。$$

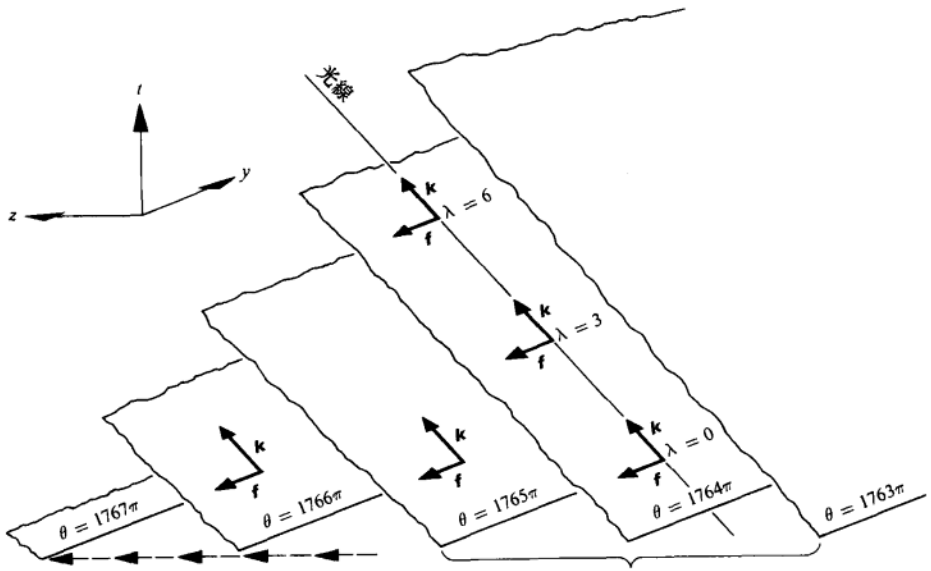
其次，把矢勢 (22.25) 式代入無源波動方程 (22.19d) 式：

$$\begin{aligned}0&=(\Delta_{dR}\mathbf{A})^\alpha=-A^{\alpha;\beta}{}_\beta+R^\alpha{}_\beta A^\beta\\&=\mathfrak{R}\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}k^\beta k_\beta(a^\alpha+\varepsilon b^\alpha+\varepsilon^2c^\alpha+\cdots)-2\frac{i}{\varepsilon}k^\beta(a^\alpha+\varepsilon b^\alpha+\cdots)_{;\beta}-\frac{i}{\varepsilon}k^\beta{}_{;\beta}(a^\alpha+\right.\right.\\&\quad\left.\left.\varepsilon b^\alpha+\cdots)-(a^\alpha+\cdots)^{;\beta}{}_\beta+R^\alpha{}_\beta(a^\beta+\cdots)\right]e^{i\theta/\varepsilon}\right\}。\end{aligned}\qquad(22.29)$$

選出量級爲 $1/\varepsilon^2$ 和 $1/\varepsilon$ 的各項（比 $1/\varepsilon$ 更高量級的各項決定了後幾任光學修正）：

（接第576頁）

框 22.3 電磁波列的幾何學



圖中畫出了從局域 Lorentz 參照系 $t=0$「同時性面」露出的各個 $\theta=$常數的等相面。所示的面是波列中交替的「波峰」（$\theta=1764\pi$, $\theta=1766\pi$,...）和「波谷」（$\theta=1765\pi$, $\theta=1767\pi$,...）。這些面構成1-形式 $\tilde{\boldsymbol{k}}=d\theta$。「相應的矢量」$\boldsymbol{k}=\nabla\theta$ 是「波矢量」。根據 Maxwell 方程組 [(22.30)式]，波矢量爲零 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=0$。因此它位於等相面內：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}\text{穿透的}\\ \text{面的數目}\end{pmatrix}=\langle d\theta,\boldsymbol{k}\rangle=\langle\tilde{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{k}\rangle=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=0。$$

但是它不僅位於等相面內；它還垂直於等相面！任何在該等相面內的矢量必須滿足 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}=\langle\tilde{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{v}\rangle=\langle d\theta,\boldsymbol{v}\rangle=0$，因爲該矢量不穿透任何面。

幾何光學假設，在典型的局域 Lorentz 參照系中測出的約化波長 λ 比波列中不均勻性的尺度 $\mathcal{L}$ 小得多，也比空時的曲率半徑 $\mathcal{R}$ 小得多。這樣，在比 λ 大很多而比 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{R}$ 小很多的區域內，波是平面波和單色波，並且該區域存在着 Lorentz

參照系（Riemann 簡正坐標）。在這些「擴展的」局域 Lorentz 參照系之一中，位相必須是

$$\theta = k_\alpha x^\alpha + \text{常數}\ ;$$

其他的表述都不能得到 $\nabla\theta = \mathbf{k}$。相應的矢勢［(22,25) 式］爲

$$A^\alpha = \text{Re}\{a^\alpha \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k^0 t)]\} + (\text{「後幾何光學修正」})\ ;$$

由此，

$$k^0 = 2\pi/(\text{波的周期}) = 2\pi\nu = \omega \equiv (\text{角頻率}),$$
$$|\mathbf{k}| = 2\pi/(\text{波的波長}) = 1/\lambda = \omega,$$
$$\mathbf{k}\ \text{指向波傳播的方向。}$$

空時的每一事件處有一波矢量；這些波矢量端點與端點釘在一起，形成一族曲線——「光線」，其切向矢量爲 $\mathbf{k}$。這些光線，像它的切向矢量一樣，既位於等相面又垂直於等相面。

光線的仿射參量 λ（勿與波長 $= 2\pi\lambda$ 相混淆）滿足 $\mathbf{k} = d/d\lambda$；因此它由下式給出

$$\lambda = t/k^0 + \text{常數} = t/\omega + \text{常數},$$

式中 t 不是通過光線自身（其原時爲零！）而是通過局域 Lorentz 觀測者（他看到角頻率爲 ω）沿光線測出的原時。因此，當 ω 爲與參照系有關的量時，t 也是與參照系有關的量，它們的商 t/ω，當沿光線測定（不離開光線）時，是與坐標無關的仿射參量。對於一個粒子，把仿射參量 λ 與原時 τ 等同起來是可能的也很自然。但對光線，這樣看既不可能也不自然。沿着光線原時的流逝永遠是零。取代了變爲零的 τ 而出現的 λ，爲我們提供了一種工具，去完成曾被認爲不可能做到的事情。給定一條由事件 $\mathcal{A}$ 發出經過事件 $\mathcal{B}$ 的光線，則沿着同一條零世界線可給出第三個事件 $\mathcal{C}$，使 $\mathcal{A}$ 與 $\mathcal{C}$ 的「遠離」是 $\mathcal{A}$ 與 $\mathcal{B}$「遠離」的兩倍。這裏「遠離」的新含義與原時（爲零！）並無直接關係，它是由仿射參量的相等增量（$\lambda_\mathcal{C} - \lambda_\mathcal{B} = \lambda_\mathcal{B} - \lambda_\mathcal{A}$）定義的。「仿射參量」對任何零短程線的分析都有意義，甚至孤立零短程線也是如此。在這方面，可以把它與所謂「發光度距離」(luminosity distance) 區別。發光度距離是爲討論輻射在彎曲空時中的傳播而引入的，它用來自同一光源的兩條或更多光線傳播的分離定義。

課文中考察過的 Maxwell 方程［(22.28′) 式］確保複偏振矢量 $\mathbf{f}$ 垂直於波矢量 $\mathbf{k}$，因此複偏振矢量位於一等相面內（參看插圖）。通過練習 22.12 可以對偏振矢量有更多的直觀了解。

$$0\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right): \qquad k^\beta k_\beta a^\alpha = 0$$

$$\Longrightarrow \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=0 \text{（波矢量為零）；} \tag{22.30}$$

$$0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right): \qquad \underbrace{k^\beta k_\beta}_{\text{[}=0\text{]}} b^\alpha - 2i\left(k^\beta a^\alpha{}_{;\beta} + \frac{1}{2}k^\beta{}_{;\beta}a^\alpha\right)=0$$

$$\Longrightarrow \nabla_k \mathbf{a} = -\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})\mathbf{a} \text{（振幅矢量的傳播方程）。} \tag{22.31}$$

(22.30, 22.31) 式和 (22.28) 式合在一起是此後由它們導出的全部結果的基礎。作爲第一個推論，由 (22.30) 式可得出短程線定律。取 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=0$ 的梯度

$$0=(k^\beta k_\beta)_{;\alpha}=2k^\beta k_{\beta;\alpha},$$

利用 $k_\beta \equiv \theta_{,\beta}$ 是標量的梯度的事實，可交換指標 $\theta_{;\beta\alpha}=\theta_{;\alpha\beta}$ 或

$$0=k^\beta k_{\beta;\alpha}=k^\beta k_{\alpha;\beta}。$$

幾何光學的主要定律

結果是

$$\nabla_k \mathbf{k}=0 \text{（波矢量的傳播方程）。} \tag{22.32}$$

(1)光線是零短程線

注意，這就是短程線方程！與 (22.30) 式聯立，表述了在彎曲空時中由 Maxwell 方程組導出的結論：光線是零短程線，這是幾何光學的第一個主要結果。

現在從傳播矢量 $\mathbf{k}=\nabla\theta$ 轉向波的振幅 $\mathbf{a}=a\mathbf{f}$，並分別得出振幅大小 a 和偏振 $\mathbf{f}$ 的方程，用 (22.31) 式計算

$$2a\partial_k a = 2a\nabla_k a = \nabla_k a^2 = \nabla_k(\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{a}}\cdot\nabla_k\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\nabla_k\bar{\mathbf{a}}$$
$$= -\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})(\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}}) = -a^2\nabla\cdot\mathbf{k};$$

因此

$$\partial_k a = -\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})a \text{（標量振幅的傳播方程）。} \tag{22.33}$$

其次，把 (22.31) 式中的 $\mathbf{a}$ 寫成 $\mathbf{a}=a\mathbf{f}$，得到

$$0=\nabla_k(a\mathbf{f})+\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})a\mathbf{f}=a\nabla_k\mathbf{f}+\mathbf{f}\left[\nabla_k a+\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})a\right]=a\nabla_k\mathbf{f}$$

或

$$\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{f}=0\ (\text{偏振矢量的傳播方程})。\qquad(22.34)$$

此式與（22.28′）式合在一起，組成了幾何光學的第二個主要結果：偏振矢量垂直於光線並沿光線平行傳播。現在可以看出，從（22.30）和（22.31）式導出的這些結果與規範條件（22.28）式一致。矢量 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{f}$，一旦在一點上給定，就在整條光線由傳播光程確定了。但是，因爲兩個傳播方程都是平行輸運定律，所以一旦在某一點把條件 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=0$, $\mathbf{f}\cdot\bar{\mathbf{f}}=1$ 和 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}=0$ 加於矢量，它們就將在整個光線上被滿足。

(2)偏振矢量垂直於光線並沿光線平行傳播

標量振幅方程（22.33）式可以改寫成守恒定律。因 $\partial_{\mathbf{k}}\equiv(\mathbf{k}\cdot\nabla)$，可把方程改寫爲 $(\mathbf{k}\cdot\nabla)a^2+a^2\nabla\cdot\mathbf{k}=0$ 或

$$\nabla\cdot(a^2\mathbf{k})=0。\qquad(22.35)$$

(3)「光子數」守恒

由此，矢量 $a^2\mathbf{k}$ 是一個「守恒流」，而且對於截斷由光線形成的給定管道的每一個三維體積，積分 $\int a^2k^\mu d^3\Sigma_\mu$ 具有固定不變的值。（管道必須由這樣的光線組成，即使得 $a^2\mathbf{k}$ 在管道壁上的積分爲零。）什麼東西守恒呢？爲了保持純經典的觀點，可以說是「光線的數目」守恒，並把 a^2k^0 叫做在 $x^0=$ 常數超曲面上的「光線密度」。但是更適當的對應和更具體的物理解釋使我們寧願把（22.35）式稱爲**光子數守恒定律**。這是幾何光學的第三個主要結果。當然，光子數並不總是守恒的；它只是一個絕熱不變量，這是一個在與光子頻率相比緩慢得多（$\mathcal{R}\gg\lambda$）的變化的影響（例如，空時曲率，$\sim 1/\mathcal{R}^2$）下不變的量。

框 22.4 總結了上述幾何光學方程，並連同在各練習中導出的其他方程。

練習

練習 22.11　電磁場和脅強-能量

導出框 22.4 D中 $\mathbf{F}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\mathbf{T}$ 的方程。

練習 22.12　偏振

在幾何光學波經過的某事件 $\mathcal{P}_0$ 處，引入局域 Lorentz 參照系，其 z 軸沿着波傳播的方向，則 $\mathbf{k}=\omega(\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_z)$。因爲偏振矢量垂直於 $\mathbf{k}$，它應爲 $\mathbf{f}=f^0(\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_z)+f^1\mathbf{e}_x+f^2\mathbf{e}_y$；又因 $\mathbf{f}\cdot\bar{\mathbf{f}}=1$，故有 $|f^1|^2+|f^2|^2=1$。

(a) 試證明，偏振矢量的 f^0 分量，對於在給定參照系中測出的電場和磁場沒有影響；即證明，在 $\mathbf{f}$ 上加上 $\mathbf{k}$ 的倍數並不影響任何物理測量。

（接第581頁）

框 22.4 彎曲空時中的幾何光學（課文與練習中導出結果的總結）

A. 幾何光學假設

在空時中無源區內傳播的電磁波是局域的平面波和單色波（約化波長 $\lambda \ll \mathcal{L}$，$\mathcal{L}$ 是振幅、波長或偏振變化的尺度；$\lambda \ll \mathcal{R}$ = 空時的平均曲率半徑）。

B. 光線，位相和波矢量（見框 22.3）

一切（振幅、偏振、能量，等等）都是沿着光線傳播的；一條光線上的各量對於任意其他光線上的各量沒有影響。

光線是彎曲空時中的零短程線，其切向矢量（「波矢量」）爲 $\mathbf{k}$：

$$\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k}=0。$$

光線既位於又垂直於等相面 θ = 常數；它們的切向矢量是 θ 的梯度：

$$\mathbf{k}=\nabla\theta。$$

在局域 Lorentz 參照系中，k^0 是「角頻率」，$k^0/2\pi$ 是波的普通頻率，

$$\boldsymbol{n}=\mathbf{k}/k^0$$

是指向其傳播方向的單位三維矢量。

C. 振幅和偏振矢量

波是以實振幅 a 和單位長度的複偏振矢量 $\mathbf{f}$ 表徵的。$\mathbf{f}\cdot\bar{\mathbf{f}}=1$。（基本量 θ, $\mathbf{k}$, a, $\mathbf{f}$ 中，除 $\mathbf{f}$ 外，均爲實數。爲了更深入地理解 $\mathbf{f}$，可參看練習22.12。）

偏振矢量處處垂直於光線 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}=0$，並沿光線平行傳播，$\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{f}=0$。

振幅的傳播定律是

$$\partial_{\mathbf{k}}a=-\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})a。$$

這個傳播定律等價於光子數守恒定律（經典表達：光線守恒定律）；$a^2\mathbf{k}$ 是滿足 $\nabla\cdot(a^2\mathbf{k})=0$ 的「守恒流」；$(8\pi\hbar)^{-1}\int a^2k^0\sqrt{|g|}\,d^3x$ 是在任意 $x^0=$ 常數超曲面上作積分的三維體積內的光子（光線）數，當該體積隨着光線向前移動時，它不變。

傳播定律分別對每個等相超曲面成立。在等相超曲面上它可以解釋爲 $a^2\mathcal{A}$ 守恒，此處 $\mathcal{A}$ 是光子脈衝或光線的二維截面積。參看練習 22.13。

D. 矢勢，電磁場，和脊强-能量-動量

在任何事件處，Lorentz 規範下的矢勢爲

$$\boldsymbol{A}=\mathfrak{Re}\{ae^{i\theta}\mathbf{f}\},$$

式中 $\mathfrak{Re}$ 表示實部。

電磁場張量垂直於光線，$\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}=0$，由下式給出。

$$\boldsymbol{F}=\mathfrak{Re}\{iae^{i\theta}\mathbf{k}\wedge\mathbf{f}\}。$$

在任何局域 Lorentz 參照系中，相應的電場和磁場爲

$$\boldsymbol{E}=\mathfrak{Re}\{iak^0e^{i\theta}\ (\boldsymbol{f}\text{ 垂直於 }\boldsymbol{k}\text{ 的投影})\}。$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E},\ \text{其中 }\boldsymbol{n}\equiv\boldsymbol{k}/k^0。$$

脊强-能量張量在一個波長上的平均爲，

$$\boldsymbol{T}=(1/8\pi)a^2\mathbf{k}\otimes\mathbf{k},$$

相應的在局域 Lorentz 參照系中的能量密度爲

$$T^{00}=(1/8\pi)(\mathrm{a}k^0)^2$$

能流爲

$$T^{0j}=T^{00}n^j,$$

因此能流以光速沿着光線（在 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/k^0$ 方向）傳播。等同於具有四維動量 $\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$ 的光子束所產生的脊强-能量張量。

能量-動量守恒 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 可以由光線守恒律 $\nabla\cdot(\mathrm{a}^2\mathbf{k})=0$ 和短程線定律 $\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k}\equiv(\mathbf{k}\cdot\nabla)\mathbf{k}=0$ 得出：

$$8\pi\nabla\cdot\boldsymbol{T}=\nabla\cdot(a^2\mathbf{k}\otimes\mathbf{k})=[\nabla\cdot(a^2\mathbf{k})]\mathbf{k}+a^2(\mathbf{k}\cdot\nabla)\mathbf{k}=0。$$

單位體積內的絕熱（幾何光學）不變量「光線數」a^2k^0 或「光子數」$(8\pi\hbar)^{-1}a^2k^0$ 正比於能量 $(8\pi)^{-1}a^2(k^0)^2$ 除以頻率 k^0 ——嚴格地對應於諧振子絕熱不變量 E/ω [Einstein (1912), Ehrenfest (1916), Landau 和 Lifshitz (1960)]。

E. 幾何光學的光子再解釋

幾何光學定律可以作下述重新解釋。這種重新解釋構成了電磁場標準量子理論的基礎［參看，例如，Baym (1969) 的第一章和第十三章］；這種量子理論的經典極限就是標準的 Maxwell 電動力學。

光子是具有零靜止質量並沿空時中零短程線（零光線）運動的粒子。

光子的四維動量與零光線切向矢量（波矢量）的關係 $\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$ 。仿射參量的重正化

$$(\text{新參量})=(1/\hbar)\times(\text{老參量})\ ,$$

使得 $\mathbf{p}$ 成爲光線的切向矢量。

每個光子具有一偏振矢量 $\mathbf{f}$，它與其四維動量垂直（$\mathbf{p}\cdot\mathbf{f}=0$），且沿其短程世界線平行傳播（$\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{f}=0$）。

一羣具有幾乎相同的四維動量 $\mathbf{p}$ 和偏振矢量 $\mathbf{f}$ （通過平行移動作比較）的光子組成了經典的電磁波。電磁波的脅強-能量張量爲

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{8\pi}a^2\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{a}{\hbar}\right)^2\mathbf{p}\otimes\mathbf{p}$$

數流矢量爲 $\boldsymbol{S}$ 的光子羣的脅強-能量張量爲

$$\boldsymbol{T}=\mathbf{p}\otimes\boldsymbol{S}$$

［參看 (5.18) 式］，由上述兩量的相等即可求出波的標量振幅 a 結果爲：

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{a}{\hbar}\right)^2\mathbf{p}=\frac{1}{8\pi\hbar}a^2\mathbf{k}$$

或者，在任何局域 Lorentz 參照系中，有

$$a=(8\pi\hbar S^0/p^0)^{1/2}=(8\pi)^{1/2}\hbar\left(\frac{\text{光子數密度}}{\text{一個光子的能量}}\right)^{1/2}。$$

(b) 試證明，下述偏振矢量相應於所列出的偏振類型：

$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}_x$, x 方向的線偏振；

$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}_y$, y 方向的線偏振；

$\boldsymbol{f}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x+i\boldsymbol{e}_y)$ 右旋圓偏振；

$\boldsymbol{f}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x-i\boldsymbol{e}_y)$, 左旋圓偏振；

$\boldsymbol{f}=\alpha\boldsymbol{e}_x+i(1-\alpha^2)^{1/2}\boldsymbol{e}_y$, 右旋橢圓偏振。

(c) 試證明，在給定光線的任何事件處的任何局域 Lorentz 參照系中，看到的偏振類型（線偏振，圓偏振，給定橢圓偏心率的橢圓偏振）都是相同的。［提示：採用圖示和抽象計算，而不要用 Lorentz 變換和分量計算。］

練習 22.13　一束光線的面積

在一坐標系中寫出 (22.31) 式，該坐標系的一個坐標選爲位相（推遲的時間坐標）$x^0=\theta$.

(a) 試證明 $g^{00}=0$，且在 (22.33) 式中不出現微商 $\partial/\partial\theta$；因此 a 的傳播可在單個 $\theta=$常數的超曲面內描述。

(b) 完成下述結構（參看圖 22.1）。選一條光線 $\mathcal{C}_0$，a 沿着它傳播。選一束光線，它具有二維的截面，並使它 (i) 全部光線與 $\mathcal{C}_0$ 位於同一等相面內，和 (ii) 圍繞着 $\mathcal{C}_0$（等相面是三維的，因此填滿它的任何光束都具有二維截面）。在任何事件 $\mathcal{P}_0$ 處，在該處的任意局域 Lorentz 參照系中，

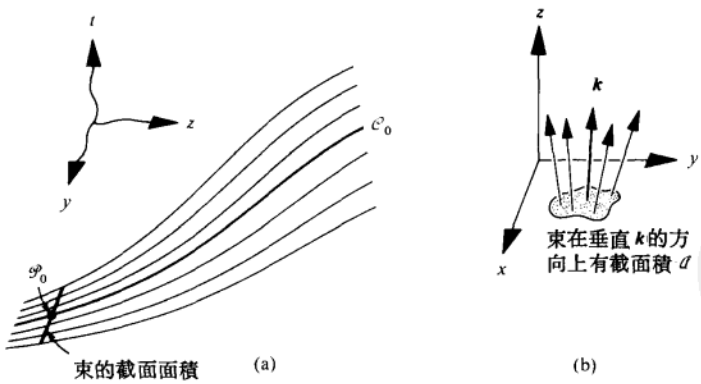


圖 22.1

全部處於等相面 $\theta=$常數之內，且具有二維截面的一束光線的幾何光學。圖 (a) 在壓縮爲一（空間）維的空時圖上，畫出了圍繞中心光線 $\mathcal{C}_0$ 的光束。圖 (b) 畫出了在事件 $\mathcal{P}_0$ 的局域 Lorentz 參照系內，從同時性薄片上看到的光束。切開光束，把每條光束換成一個「光子」；則光束變成充滿光子的二維面。這個充滿光子的面的面積 $\mathcal{A}$ 遵循以下定律（參看練習 22.13 和 22.14）：(1) $\mathcal{A}$ 與 Lorentz 參照系的選擇無關，它僅依賴於光線 $\mathcal{C}_0$ 上 $\mathcal{P}_0$ 點的位置。(2)波的振幅 a 滿足

$$\mathcal{A}a^2=\text{常數，沿着光線 } \mathcal{C}_0$$

（「光子流守恒」），(3) $\mathcal{A}$ 遵循「傳播方程」(22.36) 式。

在某一 x^0=常數的「同時性薄片」上，測出光束的截面積 $\mathcal{A}$ 。（注意：所測量的面積是在三維 Euclid 意義上與 $\mathbf{k}$ 垂直的面積；可以設想爲一羣沿 $\mathbf{k}$ 方向並排傳播的光子瞬間佔據的區域。）試證明，在給定事件 $\mathcal{P}_0$ 處，不管採用什麼 Lorentz 參照系來測量，截積 $\mathcal{A}$ 是相同的；但由於光線的相互集中或彼此散開，沿着光線 $\mathcal{C}_0$，該面積是逐點變化的：

$$\partial_{\mathbf{k}}\mathcal{A}=(\nabla\cdot\mathbf{k})\mathcal{A}。 \tag{22.36}$$

然後，再證明，沿光線 $\mathcal{C}_0$，$\mathcal{A}a^2$ 處處爲常數（「光流守恒」）。［提示：(i) 在光束中，連接相鄰光線的任何矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 都與 $\mathbf{k}$ 垂直，因爲 $\boldsymbol{\xi}$ 位於 θ 爲常數的面內，從而 $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}=\langle\tilde{\mathbf{k}}\cdot\boldsymbol{\xi}\rangle=\langle d\theta,\boldsymbol{\xi}\rangle=(\theta$ 沿 $\boldsymbol{\xi}$ 的變化）$=0$。(ii) 爲了簡單起見，考慮在特定事件 $\mathcal{P}_0$ 處，從特定局域 Lorentz 參照系中看，具有長方形截面的光束［其邊矢量爲 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$，且 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$（鄰邊互相垂直），且 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_0=\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_0=0$（邊在等時面中），以及 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{k}=0$（因爲邊矢量連接光束中相鄰的光線）］。用圖示證明，在 $\mathcal{P}_0$ 的任何其他 Lorentz 參照系中，邊矢量可用某些 α, β 值表爲 $\mathbf{v}'=\mathbf{v}+\alpha\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{w}'=\mathbf{w}+\beta\mathbf{k}$。由此得出，在 $\mathcal{P}_0$ 的所有 Lorentz 參照系中，截面具有相同的形狀和相同的面積，且在空間上與傳播方向垂直（$\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}=0$）。(iii) 通過在局域 Lorentz 參照系中的計算，證明 $\partial_{\mathbf{k}}\mathcal{A}=(\nabla\cdot\mathbf{k})\mathcal{A}$。(iv) 從 $\partial_{\mathbf{k}}a=-\frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{k})a$ 得出 $\partial_{\mathbf{k}}(\mathcal{A}a^2)=0$。］

練習 22.14 聚焦定理

位於同一等相面的一束光線的截面積 $\mathcal{A}$，沿着光束的中心光線以速率 (22.36) 變化（見圖 22.1）。

(a) 導出下述 $\mathcal{A}^{1/2}$ 二級微商的方程（「聚焦方程」）

$$\frac{d^2\mathcal{A}^{1/2}}{d\lambda^2}=-\left(|\sigma|^2+\frac{1}{2}R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta\right)\mathcal{A}^{1/2}, \tag{22.37}$$

式中 λ 爲中心光線的仿射參量（$\mathbf{k}=d/d\lambda$），「光線的剪切大小」$|\sigma|$ 由下式定義。

$$|\sigma|^2\equiv\frac{1}{2}k_{\alpha;\beta}k^{\alpha;\beta}-\frac{1}{4}(k^\mu{}_{;\mu})^2。 \tag{22.38}$$

［提示：這是一個指標操作的嚴格練習。在操作中所需的關鍵方程爲 $\mathcal{A},_\alpha k^\alpha=(k^\alpha{}_{;\alpha})\mathcal{A}$［(22.36 式)］；$k^\alpha{}_{;\beta}k^\beta=0$［光線的短程線方程 (22.32) 式］；$k_{\alpha;\beta}=k_{\beta;\alpha}$［它是由 $k_\alpha\equiv\theta,_\alpha$ 導出的］；以及矢量協變微商的交換規則 (16.6c) 式。］

(b) 試證明，在局域 Lorentz 參照系中［其中，在原點 $\mathbf{k}=\omega(\mathbf{e}_t+\mathbf{e}_z)$］。

$$|\sigma|^2=\frac{1}{4}(k_{x_1x}-k_{y_1y})^2+(k_{x_1y})^2。 \tag{22.39}$$

因此，$|\sigma|^2$ 是非負的，這表明採用絕對值符號是正確的。

(c) 討論：量 $|\sigma|$ 稱爲光線束的剪切，因爲它量度了鄰近光線相互滑動的程度［參看，例如 Sachs (1964)，的著作］。因此，聚焦方程 (22.37) 式表明剪切能使光線束聚焦（使得 $d^2\mathcal{A}^{1/2}/d\lambda^2<0$）；而且，如果 $R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta>0$，則空時曲率也使光線束聚焦，但如果 $R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta<0$，則空時曲率使光線束散開。（起初截面爲圓形的一束牙籤，在壓成橢圓截面時，受到了剪切。）

(d) 假設任何觀測者在空時的任何地方測出的能量密度 T_{00} 爲非負，把聚焦方程（22.37）式與 Einstein 場方程聯立，證明

$$\frac{d^2\mathcal{A}^{1/2}}{d\lambda^2}\le 0 \begin{pmatrix}\text{對於在空時中任何地方，全都處}\\ \text{於同一等相面內的任何光線束}\end{pmatrix} \tag{22.40}$$

（聚焦定理）。這個定理在黑洞物理學（§34.5）和奇點理論（§34.6）中起着決定性的作用。

§22.6　彎曲空時中的動力論*

恒星穿過空時在星系中漫遊，每個恒星都在它自己的短程世界線上，每個恒星都爲所有其他恒星感受到的空時曲率作出自己的貢獻。地球沐浴在大爆炸熱相遺留下的大量光子之中，這些光子隨身携帶着關於宇宙的均匀性和各向同性的資料。如果試圖着意於每單個恒星或光子的運動，那麼對於這些和其他一些問題的理論分析是根本辦不到的。但統計描述給出了準確的結果，是强有力的。另外，對於天體物理學和宇宙學的絕大多數問題，忽略碰撞的最簡單統計描述已經足夠。通常，對於系統（例如星系）的大尺度行爲，碰撞是不重要的，或者，當碰撞非常重要時，流體描述便有可能（例如，在恒星內部）。

考慮一羣粒子（恒星、或光子、或黑洞，等等）它們沿着短程世界線穿過空時運動，無碰撞。爲了簡單起見，假設這些粒子都具有同樣的靜止質量。那麼，關於粒子統計性質的全部信息都可以併入單一函數，即「分布函數」或「相空間中的數密度」$\mathcal{N}$ 之中。

用在彎曲空時中一給定事件 $\mathcal{P}_0$ 處的特定局域 Lorentz 觀測者所作的測量來定義函數 $\mathcal{N}$。給觀測者一個三維體積爲 $\mathcal{V}_*$（並具有假想的牆）的盒子。要求觀測者數出，在盒子內部並且其局域 Lorentz 動量分量 p^j 在以下範圍的粒子數 N 是多少。

一組全同粒子在相空間中的體積

$$p^j-\frac{1}{2}\Delta p^j<p^j<p^j+\frac{1}{2}\Delta p^j。$$

（他可以不管粒子的能量 p^0；因爲所有粒子都具有相同的靜止質量 m，能量

$$p^0=(m^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}$$

* 對這個題目的更詳細和更完善的論述，參看，例如，Tauber 和 Weinberg (1961)，和 Lindquist (1966), Marle (1969), Ehler (1971), Stewart (1971), Israel (1972) 的工作，以及其中所引文獻。其中 Ehlers (1971) 是極好的介紹性評述論文。

由動量唯一地決定。）N個粒子在動量空間中所占的體積是$\mathcal{V}_p = \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$；而在相空間中的體積爲

$$\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_x \mathcal{V}_p 。 \tag{22.41}$$

相空間體積的 Lorentz不變性

在 $\mathcal{P}_0$ 處，相對於前一觀測者運動的其他觀測者，對於同樣的這N個粒子所佔據的空間體積 $\mathcal{V}_x$ 和動量體積 $\mathcal{V}_p$ 爲多大持不同意見：即

$\mathcal{V}_x$ 和 $\mathcal{V}_p$ 依賴於 Lorentz 參照系的選擇。 (22.42)

但是，所有觀測者對乘積 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_x \mathcal{V}_p$（「相空間體積」）值的意見是一致的：

在空間給定事件處，給定的一組N個全同粒子所佔據的相空間體積$\mathcal{V}$，與它在哪一個局域 Lorentz 參照系中測量無關。 (22.43)

（證明可參看框22.5。）此外，當同樣的這N個粒子沿着它們的短程世界線通過空時（並通過動量空間）運動時，他們在相空間中橫越的體積$\mathcal{V}$保持不變：

Liouville 定理（相空間體積守恒）

給定的一羣N個粒子所佔據的體積$\mathcal{V}$，與這羣粒子在世界線上的位置無關（「彎曲空時中的 Liouville 定理」）。 (22.44)

（證明參看框22.6。）

相空間中數密度（分布函數）

爲了應用，比給定的一組N個粒子在相空間中所佔體積$\mathcal{V}$更方便的是，在這些粒子之一附近的「相空間中的數密度」（「分布函數」）：

$$\mathcal{N} \equiv N/\mathcal{V} 。 \tag{22.45}$$

這個數密度依賴於什麼呢？它依賴於在空時中測量它的位置$\mathcal{P}$。它還依賴於在測量處附近粒子的四維動量 $\mathbf{p}$。但是，因爲粒子都具有相同的靜止質量，$\mathbf{p}$不可能取在 $\mathcal{P}$ 點的切向空間中的每一個值 。相反，$\mathbf{p}$ 的值受到在 $\mathcal{P}$ 點的「向前質量雙曲面」的限制：

$$\mathbf{p}^2 = m^2; \quad \mathbf{p} \text{ 位於未來光錐之內。}$$

於是，

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}\left[\begin{pmatrix}\text{在空時中}\\ \text{的位置}\ \mathcal{P}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\text{四維動量}\mathbf{p}\text{，它位於在}\mathcal{P}\text{點切}\\ \text{向空間的向前質量雙曲面內}\end{pmatrix}\right]。 \tag{22.46}$$

在這一羣粒子中選出一個粒子，它的短程世界線爲$\mathcal{P}(\lambda)$［λ=(仿射參量)=(原時，若粒子具有有限的靜止質量)］，四維動量爲 $\mathbf{p}(\lambda)$。沿着粒子世界

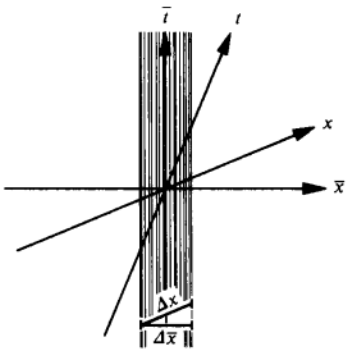
框 22.5　相空間中的體積

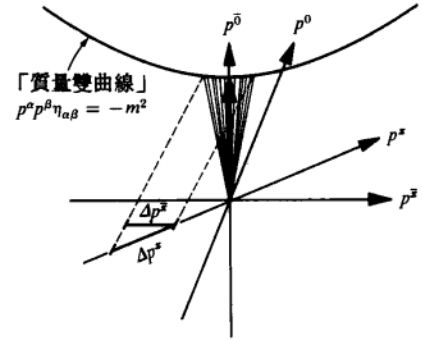
A.　具有非零靜止質量的全同粒子羣

選一事件 $\mathcal{P}_0$，一個名叫 "John" 四維動量取名爲「$\boldsymbol{P}$」的粒子通過它，在 $\mathcal{P}_0$ 處 John 的局域 Lorentz 靜止參照系（「帶一橫的參照系」$\bar{S}$）中，選取包括 John 在內的一個很小的三維體積 $\mathcal{V}_x \equiv \Delta\bar{x}\,\Delta\bar{y}\,\Delta\bar{z}$。再選取一個很小的「動量空間三維體積」$\mathcal{V}_{\bar{p}} \equiv \Delta\bar{p}^{\bar{x}}\Delta\bar{p}^{\bar{y}}\Delta\bar{p}^{\bar{z}}$，使它的中心在 John 的動量 $\bar{p}^{\bar{x}}=\bar{p}^{\bar{y}}=\bar{p}^{\bar{z}}=0$ 上。集中注意其世界線通過 $\mathcal{V}_{\bar{x}}$ 且動量 $\bar{p}^{\bar{j}}$ 在 $\bar{p}^{\bar{j}}=0$ 附近 $\mathcal{V}_{\bar{p}}$ 範圍內的所有粒子。

在 $\mathcal{P}_0$ 處的另一個局域 Lorentz 參照系（「不帶一橫的參照系」S）中考察這束粒子，新參照系以速率 β 相對於靜止系運動。調整軸的指向，使兩個參照系的相對運動在 x 和 $\bar{x}$ 方向。於是，在新參照系中這束粒子佔據的空間體積 $\mathcal{V}_x$ 的 $\Delta y=\Delta\bar{y}$，$\Delta z=\Delta\bar{z}$（運動對橫向無影響），$\Delta x=(1-\beta^2)^{1/2}\Delta\bar{x}$（縱向的 Lorentz 收縮）。因此，$\mathcal{V}_x=(1-\beta^2)^{1/2}\mathcal{V}_{\bar{x}}$（「空間體積的變換定律」）。或等價地表爲[因爲$P^0=m/(1-\beta^2)^{1/2}$]:

$P^0\mathcal{V}_x=m\mathcal{V}_{\bar{x}}=$(常數，與Lorentz 參照系無關)。





與空時圖類似的動量空間圖描繪了束中粒子的動量彌散，並且表明 $\Delta p^x=\Delta\bar{p}^{\bar{x}}/(1-\beta^2)^{1/2}$。從 $\bar{S}$ 到 S 的 Lorentz 變換對動量的橫向分量沒有影響；因此，$\Delta p^y=\Delta\bar{p}^{\bar{y}}$，$\Delta p^z=\Delta\bar{p}^{\bar{z}}$。所以$\mathcal{V}_p=\mathcal{V}_{\bar{p}}/(1-\beta^2)^{1/2}$（「動量體積的變換定律」）；或等價地

$$\frac{\mathcal{V}_p}{P^0}=\frac{\mathcal{V}_{\bar{p}}}{m}=\begin{pmatrix}\text{常數，與Lorentz}\\ \text{參照系無關}\end{pmatrix}。$$

儘管從一個參照系到另一個參照系時，空間三維體積$\mathcal{V}_x$ 和 $\mathcal{V}_{\bar{x}}$ 是不同的，動量三維體積$\mathcal{V}_p$ 和 $\mathcal{V}_{\bar{p}}$ 也是不同的，但六維相空間體積是 Lorentz 不變量：

$$\mathcal{V}\equiv\mathcal{V}_{\bar{x}}\mathcal{V}_{\bar{p}}=\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p。$$

它是與參照系無關的幾何客體！

B.　具有零靜止質量的全同粒子羣

考察一系列的體系，各個體系擁有的粒子的靜止質量愈來愈小，而相對於實驗室的速度却愈來愈高。對每個體系中的每一束粒子，$P^0\mathcal{V}_x$，$\mathcal{V}_p/P^0$ 和 $\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p$ 是 Lorentz 不變量。因此，在$m\longrightarrow 0$，$\beta\longrightarrow 1$，和 $P^0=m/(1-\beta^2)^{1/2}\longrightarrow$有限值（零靜止質量粒子以光速運動）的極限下，$P^0\mathcal{V}_x$，$\mathcal{V}_p/P^0$，和 $\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p$ 仍然都是 Lorentz 不變量，即幾何量。

框 22.6 相空間中的體積守恒

考察非常小的一束全同粒子，它們在相鄰的短程線上經彎曲空時運動。在相空間測量束的體積 $\mathcal{V}$（在任何局域 Lorentz 參照系中 $\mathcal{V}=\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p$），把它作爲沿束中心短程線的仿射參量 λ 的函數。下面的計算證明：

$$d\mathcal{V}/d\lambda=0 \left(\begin{matrix}\text{「彎曲空時中的}\\ \text{Liouville 定理。}\end{matrix}\right)。$$

對有限靜止質量粒子的證明：利用中心粒子的局域Lorentz靜止參照系，考察在時間間隔 $\delta\tau$ 內粒子的運動。在這個參照系中，所有的速度都很小，故

$$p^j=m dx^j/d\bar{t}。$$

所以（見插圖），動量和位置的彌散 $\Delta\bar{x}\,\Delta p^{\bar{x}}$, $\Delta\bar{y}\,\Delta p^{\bar{y}}$, 和 $\Delta\bar{z}\,\Delta p^{\bar{z}}$ 守恒；即

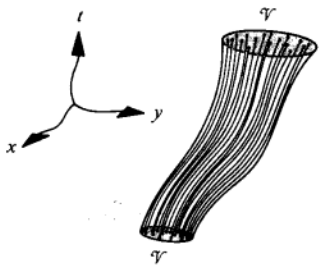
$$\frac{d\mathcal{V}}{d\tau}=\frac{\delta(\Delta\bar{x}\,\Delta\bar{y}\,\Delta\bar{z}\,\Delta p^{\bar{x}}\Delta p^{\bar{y}}\Delta p^{\bar{z}})}{\delta\bar{t}}=0。$$

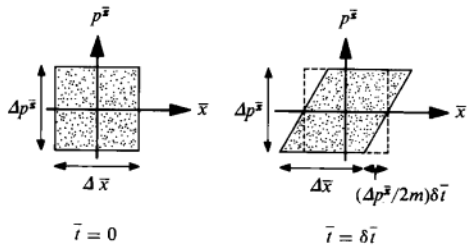
但是 $\tau=a\lambda+b$, 其中 a,b 爲任意常數，因此，$d\mathcal{V}/d\lambda=0$。

對零靜止質量粒子的證明。在中心粒子動量爲 $\mathbf{P}=P^0(\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_x)$ 的局域 Lorentz 參照系中，考察粒子的運動。在此參照系中，所有粒子都有 $p^{\bar{y}}\ll p^0$, $p^{\bar{z}}\ll p^0$, $p^{\bar{x}}=p^0+0([p^{\bar{y}}]^2/P^0)\approx P^0$。因爲對仿射參量適當歸一化後 $p^\alpha=dx^\alpha/d\lambda$，故可寫出 $dx^j/dt=p^j/p^0$; 即

$$\frac{dx}{dt}=1+0([p^{\bar{y}}/P^0]^2+[p^{\bar{z}}/p^0]^2)\approx 1,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{p^{\bar{y}}}{P^0},\qquad \frac{dz}{dt}=\frac{p^{\bar{z}}}{P^0}。$$

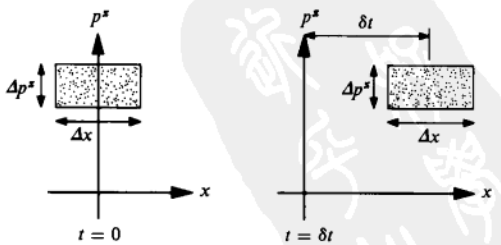




每個粒子以與圖中高度成正比的速率 $d\bar{x}/d\bar{t}$ 運動

$$d\bar{x}/d\bar{t}=p^{\bar{x}}/m,$$

且其動量守恒 $dp^{\bar{x}}/d\bar{t}=0$。因此，粒子佔據的區域將會變形，但其面積保持不變。對於（$y-p^{\bar{y}}$）和（$z-p^{\bar{z}}$）也是如此。



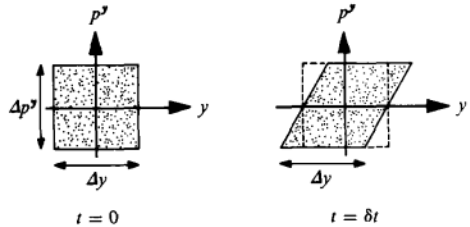
在局域 Lorentz 參照系中，每個粒子（「光子」）以 $dx/dt=1$ 運動，且 $dp^x/dt=0$。所佔據區域的面積和形狀都保持不變。

因此（見插圖） $\Delta x\Delta p^x$, $\Delta y\Delta p^y$, 和 $\Delta z\Delta p^z$ 都是守恒的；從而

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt}=\frac{\delta(\Delta x\Delta y\Delta z\Delta p^x\Delta p^y\Delta p^z)}{\delta t}=0。$$

但是，t 和中心粒子仿射參量 λ 的關係是 $t=P^0\lambda$ ［參看（16.4）式］；於是，

$$d\mathcal{V}/d\lambda=0。$$



粒子（「光子」）速率正比於圖中的高度，

$$dy/dt=p^y/p^0,$$

且 $dp^y/dt=0$。因此，所佔據的區域會變形但其面積不變對於 $z-p^z$ 也是如此。

線的每一點，在這個粒子附近，研究相空間密度：

$$\mathscr{n}=\mathscr{n}[\mathcal{P}(\lambda),\mathbf{p}(\lambda)]。$$

計算 $\mathscr{n}(\lambda)$ 如下：(1)在該世界線上選取一初始事件 $\mathcal{P}(0)$，和包含此粒子的相空間體積 $\mathcal{V}$。(2)把在 $\mathcal{P}(0)$ 處 $\mathcal{V}$ 內所包含的全部粒子都塗上紅色。(3)觀測在初始粒子旁邊空時中經過的紅色粒子。(4)隨着它們的運動，它們所佔據的相空間區域劇烈地改變形狀；但是其體積 $\mathcal{V}$ 仍然固定（Liouville 定理）。而且，沒有粒子能夠進入或者離開該相空間區域（一旦在其中，永遠在其中；一旦在外面，永遠在外面；相空間區域的邊界附着在粒子上並與粒子一起運動）。(5)因此，在沿着初始粒子世界線的任何 λ 處，粒子總是在不變體積 $\mathcal{V}$ 的相空間區域內，粒子數目 N 不改變，其比值 $\mathscr{n}=N/\mathcal{V}$ 也不改變：

$$\frac{d\mathscr{n}[\mathcal{P}(\lambda),\mathbf{p}(\lambda)]}{d\lambda}=0。\qquad(22.47)$$

無碰 Boltzmann 方程（動力論方程）

關於 $\mathscr{n}$ 沿着相空間中粒子軌道守恒的這個方程稱爲「無碰 Boltzmann 方程」或者「動力論方程」。

光子爲 Boltzmann 方程提供了一個重要的應用。但是，當討論光子時，通常人們不用相空間中的數密度來思考問題。而是談論在給定頻率 ν，沿給定方向 $\boldsymbol{n}$ 流動，在特定局域 Lorentz 參照系中測量的輻射的「比强度」（specific intensity）I_ν：

$$I_\nu=\frac{d(\text{能量})}{d(\text{時間})\,d(\text{面積})\,d(\text{頻率})\,d(\text{立體角})}。\qquad(22.48)$$

用輻射特定强度 I_ν 表示的光子分布函數

（參看圖 22.2）在局域 Lorentz 參照系中的簡單計算顯示出

$$\mathscr{N}=h^{-4}(I_\nu/\nu^3),$$

I_ν/ν^3 的不變性與守恒

式中 h 爲 Planck 常數（參看圖 22.2）。這樣，在空時中同一事件或不同事件處的兩個不同觀測者，當看着經過他們的同一個光子（以及相鄰的光子）時，他們將看到不同的頻率（「doppler 漂移」，「宇宙學紅移」，「引力紅移」）和不同的輻射特定强度 I_ν；但是他們將得出同樣的比值 I_ν/ν^3。因此，I_ν/ν^3 和 $\mathscr{N}$ 一樣，對於不同觀測者，對於給定光子的世界線上的不同事件而言，是不變量。

練習

練習 22.15 流量的反平方律

從給定源進入望遠鏡的輻射的比通量（specific flux）定義爲

$$F_\nu=\int I_\nu d\Omega, \tag{22.50}$$

式中對源在觀測者天空上所張全部立體角（假設 $<4\pi$）積分。試利用 Boltzmann 方程（I_ν/ν^3 守恒）證明，對於在平直空時中彼此都相對靜止的各觀測者，$F_\nu\propto$（到源的距離）$^{-2}$。

練習 22.16 太陽的亮度

與站在地面上的學生相比，站在水星上的宇航員看到的太陽表面是否更亮一些？

練習 22.17 黑體輻射

「光學厚」的黑體輻射源（例如，恒星表面，或大爆炸後不久充滿宇宙的熱物質）以比强度各向同性地發出光子，從源附近的靜止觀測者看來，該强度爲（Planck輻射定律）

$$I_\nu=\frac{2h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}。 \tag{22.51}$$

式中 T 爲源的溫度。試證明，對於在宇宙中任何地方在任何局域 Lorentz 參照系中的任何觀測者，在考察流過他身邊的這種輻射時，都將看到黑體輻射譜。進一步證明，他通過測量在任一頻率處的比强度 I_ν 而算出的溫度，與他通過譜的形狀所算出的溫度一致。（維持黑體輻射，而不會「沖淡」爲「灰體」。）最後，證明測出溫度的紅移量與任何給定光子頻率的紅移量完全一樣，即

$$\frac{T_{\text{觀測}}}{T_{\text{發射}}}=\left(\frac{\nu_{\text{觀測}}}{\nu_{\text{發射}}}\right) \text{對於給定光子。} \tag{22.52}$$

〔注意，此紅移可以起源於「Doppler」效應，「宇宙學」效應，「引力」效應，或它們的某種不可分離的混合。重要的只是這一事實，即光子四維動量的平行輸運定律 $\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p}=0$ 確保紅移 $\nu_{\text{觀測}}/\nu_{\text{發射}}$ 與發射頻率無關。〕

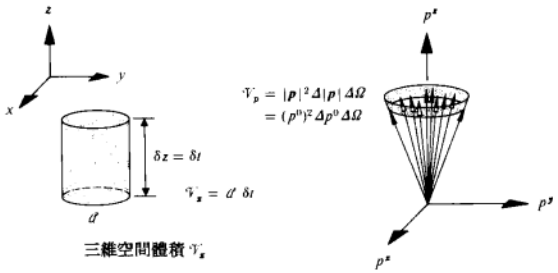


圖 22.2

用特定强度I_ν解釋相空間中光子的數密度。天文學家有一架望遠鏡，它的濾光器只允許來自 z 方向附近一小立體角 $\Delta\Omega$ 之內且能量在 p^0 和 $p^0+\Delta p^0$ 之間的光子通過。望遠鏡的收集面積爲 $\mathcal{A}$，位於 x, y平面（垂直於進入的光子束）。設在時間間隔 δt 內穿過面積 $\mathcal{A}$ 的光子數目爲 δN。[所有能量，面積，時間和長度都是在正交歸一參照系（「固有參照系」；§13.6）中測定的，天文學家 Fermi-Walker 把此參照系和他自己一起沿着他的（可能是加速的）世界線移動着——或者，等價地說，測量是在瞬間相對於該天文學家靜止的局域 Lorentz 參照系中進行的。] 在時間間隔即 δt 將開始之前，δN 個光子位於圖中所示的底面積爲 $\mathcal{A}$，高度爲 $\delta z=\delta t$ 的圓柱內。於是，它們的空間三維體積爲 $\mathcal{V}_x=\mathcal{A}\delta t$。它們的動量三維體積爲 $\mathcal{V}_p=(p^0)^2\Delta p^0\Delta\Omega$（見圖）。因此，它們在相空間中的數密度爲

$$\mathscr{N}=\frac{\delta N}{\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p}=\frac{\delta N}{\mathcal{A}\delta t(p^0)^2(\Delta p^0)\Delta\Omega}=\frac{\delta N}{h^3\mathcal{A}\delta t\nu^2\Delta\nu\Delta\Omega}\ ,$$

式中 ν 是望遠鏡測出的光子頻率（$p^0=h\nu$）。

光子的比强度 I_ν（天文學中的標準概念）是單位面積單位時間單位頻率單位立體角內穿過垂直於束的面的能量，即

$$I_\nu=\frac{h\nu\delta N}{\mathcal{A}\delta t\Delta\nu\Delta\Omega}\ 。$$

直接的比較表明，$\mathscr{N}=h^{-4}(I_\nu/\nu^3)$。

因此，$\mathscr{N}$ 沿光子世界線守恒意味着 I_ν/ν^3 守恒。在宇宙學（例如，框 29.2和練習29.5）和在引力透鏡效應（Refsdal 1964）中，這個守恒定律有重要的應用；還可參看練習 22.15—22.17 。

練習 22.18　脅强-能量張量

(a) 試證明，在事件 $\mathscr{P}_0$ 處一羣全同粒子的脅强-能量張量可以寫成在 $\mathscr{P}_0$ 處動量空間內質量雙曲面上的一個積分：

$$\mathbf{T}=\int(\mathscr{N}\mathbf{p}\otimes\mathbf{p})(d\mathcal{V}_p/p^0)\,, \tag{22.53}$$

$$\frac{d\mathcal{V}_p}{p^0}\equiv\frac{dp^x dp^y dp^z}{p^0}\ \text{在局域 Lorentz 參照系中。} \tag{22.54}$$

（注意，由框 22.5，對於質量雙曲面上的任一部分，$d\mathcal{V}_p/p^0$ 是 Lorentz 不變的體積元。）

(b) 試證明，Boltzmann 方程 $d\mathscr{N}/d\lambda=0$ 意味着對任何一羣全同粒子 $\nabla\cdot\mathbf{T}=0$。[提示：利用上面給出的 $\mathbf{T}$ 表達式，利用形式爲 $Dp^\mu/d\lambda=0$ 的短程線方程，在局域 Lorentz 參照系內計算 $\nabla\cdot\mathbf{T}$。]

練習 22.19 非全同粒子的動力論

對於靜止質量取值範圍很廣的一羣粒子，定義

$$\mathscr{N}=\frac{\Delta N}{\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p\Delta m}, \tag{22.55}$$

式中 $\mathcal{V}_x$ 和 $\mathcal{V}_p$ 爲空間和動量三維體積，ΔN 爲在區域 $\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p$ 中靜止質量在 $m-\Delta m/2$ 和 $m+\Delta m/2$ 範圍內的粒子數目。試證明下述結論。

(a) $\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p\Delta m$ 與 Lorentz 參照系無關，也與該束粒子在世界管中的位置無關。

(b) $\mathscr{N}$ 可以看作在空時中位置 $\mathscr{P}$ 的函數，和在 $\mathscr{P}$ 點切向空間的未來光錐內四維動量 $\mathbf{p}$ 的函數：

$$\mathscr{N}=\mathscr{N}(\mathscr{P},\mathbf{p})。 \tag{22.56}$$

(c) $\mathscr{N}$ 滿足無碰撞 Boltzmann 方程（動力論方程）

$$\frac{d\mathscr{N}[\mathscr{P}(\lambda),\mathbf{p}(\lambda)]}{d\lambda}=0 \quad \text{沿任何粒子的短程線軌道。} \tag{22.57}$$

(d) 在局域 Lorentz 參照系中 $\mathscr{N}$ 可改寫爲

$$\mathscr{N}=\frac{\Delta N}{[(p^0/m)\Delta x\Delta y\Delta z][\Delta p^0\Delta p^x\Delta p^y\Delta p^z]}。 \tag{22.58}$$

(e) 在事件 $\mathscr{P}$ 處，脅强-能量張量可以寫成對動量空間遍及未來光錐內部的一個積分，在局域 Lorentz 參照系中（積分的初階符號，見框 5.3）爲

$$T^{\mu\nu}=\int(\mathscr{N}p^\mu p^\nu)m^{-1}dp^0dp^1dp^2dp^3; \tag{22.59}$$

在局域 Lorentz 參照系中（高階符號；見框 5.4）爲

$$\begin{aligned}\mathbf{T}&=\int(\mathscr{N}\mathbf{p}\otimes\mathbf{p})m^{-1}*1 \quad \text{用與參照系無關的符號}\\ &=\int(\mathscr{N}\mathbf{p}\otimes\mathbf{p})m^{-1}\mathbf{d}p^0\wedge\mathbf{d}p^1\wedge\mathbf{d}p^2\wedge\mathbf{d}p^3。\end{aligned} \tag{22.59'}$$

第五篇

相對論性恒星

在本篇中，以幾何動力學的魔幻藥劑和威力武裝起來的讀者征服了恒星。

第二十三章　球狀恒星

§23.1 序　　言

引力理論也許是很美的，但在接觸眞實的物理世界之前，它只是一個並無結果的課題。只有實驗和天文觀測的不容懷疑的現實，才能使引力理論具有活力。並且，只有建立了恒星（第五篇）、宇宙（第六篇）、恒星坍縮和黑洞（第七篇）、引力波及其源（第八篇）、以及引力實驗（第九篇）的理論模型，人們才能清楚地理解引力理論和眞實世界的聯繫。

預告本書其餘部份

本書所建立的模型將遵循理論物理學的慣例。每一篇(恒星，宇宙，坍縮，……）都將從可能設想的最簡單模型出發，爾後也只加上接觸實際所必須的那些附加條件，以便與最不複雜的眞實物理系統相聯繫。結果將是一個待檢驗的理論框架，準備支承和編織因更實際一些所要求的附加的複雜性。本書並不試圖更實際一些。不過，着眼於此的讀者，最好從 Zel'dovich 和 Novikov（1971, 1974）的兩卷專著《相對論天體物理學》開始。

現在，從相對論性恒星的模型開始。作爲一個主要的簡化，（起初）堅決要求所研究的全部恒星是靜止的。從而不僅排除了爆發和脈動的恒星，甚至穩定轉動的也要停下來。根據靜止的假設，加上恒星由「理想流體」（不允許切脅强！）構成的要求，加上 Einstein 的場方程，大致可得出這種恒星是球對稱的。然而，還沒有人作過證明。［在更多的限制性假設下所作的證明，可參看 Avez (1964) 和 Kunzle (1971)］。在未經證明的情況下，作爲假設，要求所研究的全部恒星既是靜止的又是球狀的。

靜止的恒星必須是球狀的

§ 23.2 靜止球狀系統的坐標和度規

任何靜止球狀系統的度規：

爲了導出靜止球狀恒星或任何其他靜止球狀系統的引力場，從球對稱形式的狹義相對論（無引力）的度規開始

$$ds^2=-dt^2+dr^2+r^2d\Omega^2, \tag{23.1}$$

式中

$$d\Omega^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2。 \tag{23.2}$$

(1)從平直空時推廣

試着修改這個度規，以便在保持球對稱的條件下，考慮因恒星的引力影響而產生的曲率。最簡單和最明顯的猜測是，允許（23.1）式中非零的那些度規分量採用不同的值：

$$ds^2=-e^{2\Phi}dt^2+e^{2\Lambda}dr^2+R^2d\Omega^2, \tag{23.3}$$

式中 Φ, Λ 和 R 都只是 r 的函數。（靜止的假設要求 $\partial g_{\mu\nu}/\partial t=0$.）爲了證明這個猜測是適當的，用它來構築恒星模型，並且檢驗一下所得到的模型是否和 Newton 理論以及根據一般的物理考慮所預期的結果具有同樣的普遍性（自由指定同一組量）。表觀上更普遍的度規

$$ds^2=-a^2dt^2-2abdrdt+c^2dr^2+R^2d\Omega^2 \tag{23.4}$$

實際上從任何物理意義上說，它都並不更普遍些。可以按下述定義作坐標變換，得到新的時間坐標 t'

$$e^{\Phi}dt'=adt+bdr。 \tag{23.5}$$

把它代入（23.4）式，並定義 $e^{2\Lambda}\equiv b^2+c^2$，即可得出與上述設想相同的線元（23.3），只是時間坐標爲 t'。*

當人們用公式表示這種理論時，廣義相對論允許使用任意坐標的需要可能變成沉重的負擔；但它也給予了附加的靈活性，當用公式表示並求解問題時，應當充分利用這種靈活性。（23.3）式中 $g_{rt}=0$ 的簡化（稱爲坐標條件）就是通過適當選擇 t 坐標而得出的。而且，r 坐標也可以自由處理（只要選擇它時以某種方式考慮到球對稱性；因而不出現 $r'=r+\cos\theta$）。通過引入按下式定義的新坐標 $r'(r)$，人們可以把這種自由變爲一種有利條件

(2)特別指明的 "Schwarzschild 形式"

$$r'=R(r)。 \tag{23.6}$$

---

* 當然，如果（23.5）式作爲 t' 的微分方程是可積的，那麼它只是成功地定義了一個新的時間坐標 t'。選擇積分因子 e^{Φ} 使得剛好 $e^{\Phi}=a(r)$，即可看出 $t'=t+\int[b(r)/a(r)]dr$ 是（23.5）式的積分；因而無論（23.4）式中的函數 $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$, 和 $R(r)$ 是什麼，所需的 t' 坐標總是存在的。

這樣選擇徑向坐標，並除去撇，（23.3）式簡化爲

$$ds^2=-e^{2\Phi}dt^2+e^{2\Lambda}dr^2+r^2d\Omega^2, \qquad (23.7)$$

此線元中只含有兩個未知函數 $\Phi(r)$ 和 $\Lambda(r)$。自從 Schwarzschild (1916b), Tolman (1939)，以及 Oppenheimer 和 Volkoff (1939) 的開創工作以來，絕大多數相對論性恒星的理論模型都已採用這種坐標系和度規。這些特殊的坐標有時稱爲「曲率坐標」，有時稱爲，「Schwarzschild 坐標」。簡言之，這些坐標的主要想法是（Schwarzschild r坐標）＝（固有圓周）$/2\pi$。

在任何靜止球狀系統中引入 Schwarzschild 坐標從而把度規引向簡單形式（23.7）的更嚴格證明，可參看本章末的框23.3。

(3)更嚴格的推導

練習 23.1　各向同性坐標和 Newton 極限

有時，用於靜止球狀系統的另一組坐標是「各向同性坐標系」$(t,\bar{r},\theta,\phi)$。在各向同性坐標中，度規的形式是

$$ds^2=-e^{2\Phi}dt^2+e^{2\mu}[d\bar{r}^2+\bar{r}^2d\Omega^2], \qquad (23.8)$$

Φ 和 μ 是 $\bar{r}$ 的函數。

(a) 寫出把 Schwarzschild 坐標 (23.7) 與各向同性坐標 (23.8) 聯繫起來的坐標變換。

(b) 由 (16.2a) 式［或等價地，由 (18.15c) 式］證明，在 Newton 極限下，各向同性線元的度規系數 Φ 變成了 Newton 勢；μ 變成等於 $-\Phi$。與題 (a) 聯合，指出在 Newton 極限下 $\Lambda=rd\Phi/dr$。

練習

---

§ 23.3　Schwarzschild 坐標的物理解釋

在廣義相對論中，由於允許採用任意坐標，張量或矢量的分量以及其他量的表述的物理意義並不總是很明顯的。然而，在某些情形下的解釋却幾乎和狹義相對論一樣直截了當。最明顯的例子是局域慣性坐標系的中心點，在該點，等效原理允許人們與狹義相對論中完全同樣地處理所有的局域量（不包括空時曲率）。球狀系統的 Schwarzschild 坐標是第二個例子。

當遇到一種新的度規時，人們的第一個反應是應該審查一下，這不是爲了熟悉引力場（對此，曲率張量能更直接地提供信息），而是爲了熟悉坐標。

任何度規形式都能揭示所採用的坐標的性質

（例如，在某點，它是不是局域慣性的？）

給予坐標的名稱並不具有內稟的含義。坐標變換 $t'=\theta$, $r'=\phi$, $\theta'=r$, $\phi'=t$ 是完全允許的，並且對於相對論問題的物理或數學都沒有影響。唯一的影響是使採用這種坐標的研究者便於和他的同事交流。因而 Schwarzschild 坐標 (23.7) 的名稱 $tr\theta\phi$ 提供了指明坐標幾何容量的記憶裝置。* 特別是，正如標準的 θ, ϕ 坐標適宜於半徑爲 r 的球面那樣，在 r 和 t 爲常數的每一個二維表面上，兩相鄰事件之間的距離由 $ds^2=r^2d\Omega^2$ 給出，這個事實表明 θ, ϕ 的名稱是合適的。顯然，這個二維球的面積是

Schwarzschild 坐標的幾何意義：

(1)θ, ϕ 是球面上的角度

$$A=\int(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)=4\pi r^2\,; \tag{23.9}$$

因此，度規 (23.7) 告訴我們如何量度它採用的 r 坐標。人們可以只量度（以固有長度爲單位）球的面積 A，這個球是由按所期望的 $r(\mathcal{P})$ 值繞點 $\mathcal{P}$ 等價地旋轉的全部點組成的；可是，可以計算

(2) r 量度了球的表面積

$$r(\mathcal{P})=(\text{通過點}\,\mathcal{P}\text{的球的固有面積}/4\pi)^{1/2}。 \tag{23.9'}$$

Schwarzschild 坐標的選取只是爲了方便，而不是因爲用它易於建造一個量度坐標的機器。用它設計量度 t 的機器比設計量度 r, θ, ϕ 的機器更爲困難。

(3) t 有 3 個特殊的幾何性質

作爲量度裝置基礎的 t 的幾何性質是：(1)恒定 r, θ, ϕ 的各世界線之間的距離與時間無關 ($\partial g_{\alpha\beta}/\partial t=0$); (2)這些世界線與 $t=$常數的超曲面正交 ($g_{tr}=g_{t\theta}=g_{t\phi}=0$); 和(3)在空間無窮遠處 （那裏的空時變得平直了），這些超曲面可用 Minkowski 的（狹義相對論的）坐標時間來標誌。這種標誌產生對度規 (23.7) 的一個約束

$$\Phi(\infty)=0。 \tag{23.10}$$

[從數學上說，這個約束是由於簡單的重新標度變換 $t'=e^{\Phi(\infty)}t$ 並由此除去撇而强加的。]

(4)描述量度 t 的「機器」

設計一種「機器」，能從（心理上）建立一種 t 坐標，並在此過程中量度它，設計方案如下。觀測者利用排列放置的雷達沿着 r, θ, $\phi=$常數的坐標線移動。他們能做到這一點，是靠着調整他們的速度，直到各自發現雷達的回波來自他的近鄰，或者來自漸近地平直的空間中作爲「水準點」的參考點，要求每一次反復都有同樣的多次反射時間。等價地，每一個返回的回波應顯示零Doppler

* 作爲容易誤解名稱的一個例子，討論下式中的各個坐標

$$ds^2=-e^{2\Phi(\theta')}d\phi'^2+e^{2\Lambda(\theta')}d\theta'^2+\theta'^2(dt'^2+\sin^2t'dr'^2)\,,$$

此式與 (23.7) 式等價，但使用的坐標爲 $t'=\theta$, $r'=\phi$, $\theta'=r$, $\phi'=t$。

頻移；它必須以被發射的頻率返回。其次，一主鐘置於空間無窮遠處附近（遠離恒星）。建造它是爲了測量原時（對於主鐘，此卽「在無窮遠處」的（Minkowski 時間），並發射標準的一赫茲信號。每一個觀測者調整他的「坐標鐘」的快慢，以便恰好與他從主鐘接收到的信號合拍。規定他的「坐標鐘」的零點（現在，坐標鐘的快慢已經校正），他與主鐘是同步的，但已計及雷達信號從主鐘到達他所需的坐標時間 Δt。［爲了計算傳輸時間，他假設，對於雷達信號 $(t_{\text{反射}}-t_{\text{發射}})=(t_{\text{返回}}-t_{\text{反射}})=\Delta t$，因此，通過反射事件的時間反演可得到回波。這個時間反轉不變性把度規（23.7）中的時間 t 與（23.4）所允許的更普遍的 t 坐標相區別。］現在，沿着坐標線（r, θ, ϕ=常數）移動的每一個觀測者都有一個鐘，測量着他的近鄰的坐標時間 t。

由於其內稟的幾何性質，上述討論等同於（23.7）式的 Schwarzschild 坐標。不僅 r 和 t 分別是徑向變量和時間變量（其中 $\partial/\partial r$ 和 $\partial/\partial t$ 分別是類空的和類時的，並且還與由旋轉對稱定義的球正交），而且它們都具有區別於其他可能的坐標選擇［$r'=f(t)$, $t'=t+F(r)$］的特殊性質［$4\pi r^2$=表面積；$\partial g_{\mu\nu}/\partial t=0$; $\partial/\partial r\cdot\partial/\partial t=g_{rt}=0$; 在 $r=\infty$, $\partial/\partial t\cdot\partial/\partial t=g_{tt}=-1$］。並不要求這些坐標是可以合理地稱之爲 r 和 t 的唯一的坐標；另一種不同的選擇（「各向同性坐標」），可參看練習23.1。然而，它們提供了一種合理的、明確的、有用的、通常都採用的選擇。

也可能有其他坐標，但 Schwarzschild 坐標是特別簡單的

§23.4　恒星內部物質的描繪

任何恒星內部的物質，直至很高的精度，都是理想流體。（切脅强可以忽略，而且在「流體動學時標」內的能量傳輸亦可忽略。）因而，用下述理想流體參量建立描繪這種物質的模型是合理的：

恒星內部物質理想化爲理想流體

$\rho=\rho(r)$＝在流體靜止系中的質量-能量密度；
$p=p(r)$＝在流體靜止系中的各向同性壓强；
$n=n(r)$＝在流體靜止系中的重子數密度；　　(23.11)
$u^\mu=u^\mu(r)$＝流體的四維速度；
$T^{\mu\nu}=(\rho+p)u^\mu u^\nu+pg^{\mu\nu}$＝流體的脅强-能量張量。　　(23.12)

描繪理想流體的參量：
(1) ρ, p, n

（初階的討論，可參看框 5.1；更多的高階討論的細節，參看 §22.2 和§22.3。）爲了使恒星靜止，每一流體元必須在靜止坐標系中始終保持靜止；卽每一流體元應沿着 r, θ, ϕ 爲常數的世界線移動；卽每一流體元的四維速度分量應爲

(2) u

$$u^r=dr/d\tau=0,\quad u^\theta=d\theta/d\tau=0,\quad u^\phi=d\phi/d\tau=0。\qquad (23.13a)$$

四維速度的歸一化

$$-1=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=g_{ii}u^iu^i=-e^{2\Phi}u^iu^i\,,$$

確定了 u^t,

$$u^t=dt/d\tau=e^{-\Phi},\quad \mathbf{u}=e^{-\Phi}\partial/\partial t\,; \tag{23.13b}$$

(3) T

這個結果與脅強-能量張量的普遍形式 (23.12) 以及度規的形式 (23.7) 合在一起，確定了 $T^{\mu\nu}$:

$$T^{00}=\rho e^{-2\Phi},\quad T^{rr}=pe^{-2\Lambda},\quad T^{\theta\theta}=pr^{-2},\quad T^{\phi\phi}=pr^{-2}\sin^{-2}\theta\,,$$
$$T^{\alpha\beta}=0 \text{ 若 } \alpha\neq\beta\,。 \tag{23.14}$$

儘管在 Schwarzschild 坐標中的這些脅強－能量張量的分量對於計算是有用的，但歸一化因子 $e^{-2\Phi}$, $e^{-2\Lambda}$, r^{-2}, $r^{-2}\sin^{-2}\theta$ 使它們不便於物理解釋。更方便的是流體元所攜帶的正交歸一四重軸上的分量（「固有參照系」，參看 §13.6）：

流體的固有參照系

$$\mathbf{e}_t\equiv\frac{d}{d\tau}=\frac{1}{e^\Phi}\frac{\partial}{\partial t},\quad \mathbf{e}_r=\frac{1}{e^\Lambda}\frac{\partial}{\partial r},\quad \mathbf{e}_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \mathbf{e}_\phi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\,; \tag{23.15a}$$

$$\omega^t=e^\Phi dt,\quad \omega^r=e^\Lambda dr,\quad \omega^\theta=r\,d\theta,\quad \omega^\phi=r\sin\theta\,d\phi\,; \tag{23.15b}$$

$\mathbf{u}$ 和 T 在固有參照系中的分量

$$\mathbf{u}=\mathbf{e}_t;\quad u^t=1,\quad u^r=u^\theta=u^\phi=0\,; \tag{23.15c}$$

$$T_{tt}\equiv T_{\hat{0}\hat{0}}=\rho,\quad T_{rr}=T_{\theta\theta}=T_{\phi\phi}=p,\quad T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=0 \text{ 若 } \alpha\neq\beta\,。 \tag{23.15d}$$

參看下面的練習 23.2。

恒星的結構——即這組函數 $\Phi(r)$, $\Lambda(r)$, $\rho(r)$, $p(r)$, $n(r)$ ——部分取決於 Einstein 場方程 $G^{\mu\nu}=8\pi T^{\mu\nu}$，部分取決於流體中能量-動量的局域守恒定律 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$。然而，這些對於唯一的確定結構來說還不夠。還需要的是，壓强 p 和密度 ρ 對重子數密度 n 的函數依賴關係：

$$p=p(n),\quad \rho=\rho(n)\,。 \tag{23.16}$$

狀態方程：
(1)普遍的

通常，無法單獨從 n 的知識導出 p 和 ρ。還必須知道溫度 T 或每個重子的熵 s；這樣，熱力學定律加上狀態方程將確定全部剩下的熱力學變量：

$$p=p(n,s),\quad \rho=\rho(n,s),\ldots.$$

(2)理想化爲「單參量形式」$p=p(n)$, $\rho=\rho(n)$

（參看 §22.2 和框 22.1，完全是高階的討論。）爲了從給出的熱力學知識 $p(n,s)$ 和 $\rho(n,s)$ 過渡到所需的 $p(n)$ 和 $\rho(n)$，需要有關恒星熱性質的資料，特別是有關能量產生加上熱量流動共同形成熵分布 $s=s(n)$ 的方式的資料：

$$p(n)=p[n,s(n)],\quad \rho(n)=\rho[n,s(n)]\,。$$

相對論性恒星的理論有三個重要的應用：中子星，白矮星，和超大質量恒星（$M \gtrsim 10^3 M_\odot$ 的恒星，根據理論它是可能存在的，但它的存在還未被觀測所證實）。幸而，在所有這三種情形，從 $p=p(n,s)$, $\rho=\rho(n,s)$ 過渡到 $p=p(n)$, $\rho=\rho(n)$ 是輕而易舉的。

理想化的狀態方程的合理性

首先討論中子星。雖然，按照普通的標準，中子星很熱，但從任何核物質的溫度尺度來看，中子星是很冷的，以致實質上它的全部熱自由度都被凍結了（「簡並氣體」；「量子流體」）。對中子星物質的詳細討論超出了目前的理論的能力（考慮重子和重子的相互作用；在足夠高的超子和介子壓强下形成），但這無關緊要。簡單的事實是，人們所涉及的物質的密度可與原子核內的物質密度（2×10^{14} 克／厘米^3）相比擬，甚至更高。人們所知道的有關核物質的一切［參看，例如，Bohr 和 Mottelson (1969)］都告訴我們它是簡併的，並且，把它當作理想的 Fermi 中子氣來處理，可以估計它的簡併溫度的數量級。（在正常的原子核內，全部重子的百分之五十多一點是中子，其餘是質子；在中子星內，中子多達百分之99。）當近似地把中子星物質當作理想Fermi 中子氣時，認爲中子占據了自由粒子量子態，在每一個被占據的態有兩個相反自旋的粒子，並且當粒子的能量增加到「Fermi 能」的水平時，從100%占據量子態急劇下降到空態［關於這種理想 Fermi 氣的更多知識，參看 Kittel, 19 節（1958）；而入門水平的，可參看 Sears, 16-5 節，（1953）］。達到核密度的物質，其 Fermi 能的量級爲

(1)在中子星內

$$E_{\text{Fermi}} \sim 30 \text{ 兆電子伏或 } 3\times10^{11}\text{K};$$

而在更高的密度，甚至需要更高的溫度才能使簡併度不凍結。換言之，對達到或高於核密度的物質，在溫度爲零時，（受 Pauli 不相容原理及其 Fermi 能支配）的粒子的動能已經成爲壓强的主要來源。核力大大修正了這種壓强，但在 $T \lesssim 30$兆電子伏$=3\times10^{11}$K，沒有熱騷動的能量。

從正常狀態坍縮到中子星狀態的一顆恒星（見第24章），在溫度 $\gtrsim 10^{10}$K 時發射巨大的中微子流，並在形成中子星後的幾秒內冷却到 $T \ll 3\times10^{11}$K。結果，在年齡大於幾秒的所有中子星內，可以忽略熱對壓强和密度的貢獻；即可令

$$p(n,s)=p(n,s=0)=p(n), \quad \rho(n,s)=\rho(n,s=0)=\rho(n)。$$

白矮星類似，只不過現在電子（而不是中子）是 Fermi 氣體壓强的來源且簡併。典型的白矮星的溫度滿足

(2)在白矮星內

$$kT \ll E_{\text{Fermi電子}};$$

Fermi 動能（Pauli 不相容原理）是造成壓强和能量密度的最初的原因，而不是無規的 kT 能量；從而可令

$$p(n,s)=p(n,s=0)=p(n),$$
$$\rho(n,s)=\rho(n,s=0)=\rho(n)。$$

(3)在超大質量恒星內

在超大質量恒星內（見第24章），情況頗爲不同。就壓强和能量密度而言，溫度和熵幾乎是全部內容。然而，對流攪動着恒星，並產生均勻的熵分布

$$s=與半徑無關的常數；$$

因此可寫出

$$p(n,s)=p_s(n),\qquad \rho(n,s)=\rho_s(n)。$$

（在恒星內，取決於均勻的每個重子的熵 s 的函數）

在所有這三種情形——中子星，白矮星，大質量恒星——都把關係式 $p(n)$ 和 $\rho(n)$ 當作「狀態方程」；並且，在確定了它們之後，就可以計算恒星的結構而無需再涉及它的熱性質。

練習

練習 23.2 流體元的固有參照系

(a) 試證明對空時的每一事件，(23.15a, b) 式定義了一個正交歸一四重軸及其對偶 1-形式基。

(b) 試證明相對於這些四重軸的流體四維速度的分量由 (23.15c) 式給出。爲什麼這些分量確保四重軸形成了對流體元的「固有參照系」？

(c) 試證明脅强-能量張量分量的 (23.15d) 式。

---

§ 23.5 結構方程

需要五個方程來確定 5 個恒星結構函數：Φ, Λ, p, ρ, n

相對論性恒星的結構由五個半徑 r 的函數確定：度規函數 $\Phi(r)$, $\Lambda(r)$，壓强 $p(r)$，質量-能量密度 $\rho(r)$ 以及重子數密度 $n(r)$。因此，爲了唯一地確定結構，需要五個結構方程加上邊條件。手上已經有了兩個結構方程，即狀態方程 $p(n)$ 和 $\rho(n)$。剩下的三個方程應是 Einstein 場方程和局域能量-動量守恒定律 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ 的基本內容。

大家知道，流體的局域能量-動量守恒定律遵循由 Einstein 場方程得出的一個等式。爲了不喪失信息，可以加上全部十個場方程而不管局域能量-動量

守恒。但這是一個效率很低的辦法。與場方程相比，方程 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ 幾乎總是可以更容易的簡化爲可用的形式。因此，最有效率的步驟是：(1)求解四個方程 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$；(2)求解足夠多的場方程（六個）以便得到一組完整的解（6+4=10）；和(3)求解剩下的四個方程，以檢驗(1)和(2)的結果。

求解 Einstein 方程的最有效率的程序

高階讀者已經學過（§22.3），對於理想流體，方程 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ 可取特別簡單的形式，只要(1)投影在流體自身的四維速度 $\mathbf{u}$ 上，並(2)與 $\mathbf{u}$ 正交。沿 $\mathbf{u}$ 的投影（$u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$）給出了局域的能量守恒定律（22.11a），

$$\frac{d\rho}{d\tau}=-(\rho+p)\nabla\cdot\mathbf{u}=\frac{\rho+p}{n}\frac{dn}{d\tau},$$

式中 $\mathbf{u}=d/d\tau$；即 τ 是沿任意選定流體元的世界線的原時。對於靜止的恒星，或對於任何其他靜止的系統，此方程兩邊必須恒等於零（從未看到流體元自身的密度有任何變化）。

與 $\mathbf{u}$ 正交的 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ 的投影給出了適當的方程

導出流體靜力學的平衡方程

$$\begin{pmatrix}\text{單位體積的}\\ \text{慣性質量}\end{pmatrix}\times(\text{四維加速度})=-\begin{pmatrix}\text{壓强梯度，垂直}\\ \text{於 } \mathbf{u} \text{ 投影}\end{pmatrix}$$

即

$$(\rho+p)\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=-[\nabla p+(\nabla_{\mathbf{u}}p)\mathbf{u}]。$$

[見（22.13）式]。當用於靜止的恒星時，此方程告訴我們，爲了阻止流體元下落需要多大的壓强梯度。只是方程的徑向分量有內容，因爲壓强只依賴於 r，在 Schwarzschild 坐標系中徑向分量爲 [見線元（23.7）及四維速度分量（23.13）]，

$$\begin{aligned}(\rho+p)u_{r;\nu}u^\nu&=-(\rho+p)\Gamma^\alpha{}_{r\nu}u_\alpha u^\nu=-(\rho+p)\Gamma^0{}_{r0}u_0u^0\\&=(\rho+p)\Phi_{,r}=-p_{,r}。\end{aligned}\qquad(23.17)$$

（初階讀者可由本節末的練習 23.3 從頭導出此式。）在 Newton 極限下，Φ 變爲 Newton 勢（因爲 $g_{00}=-e^{2\Phi}\approx-1-2\Phi$），而壓强變得遠小於質量-能量度密；結果（23.17）式變爲

$$p\Phi_{,r}=-p_{,r}。\qquad(23.17\text{N})$$

這是描繪引力和壓强梯度之間達到平衡的方程的 Newton 形式。

阻止流體元的下落的壓强梯度，在 Einstein 理論中是作爲加速度的來源出現的。把流體元保持在固定 r 處的這個加速度使之偏離短程線運動（偏離「基準的世界線」；偏離落向恒星中心的自由落體運動）。另一方面，Newton

流體靜力學平衡的Newton觀點與 Einstein 觀點的比較

理論把基準世界線看作在確定 r 值處的一條世界線。它認爲「引力」試圖（因被壓强梯度平衡而不成功）把粒子從確定 r 的世界線拉向短程世界線。在這兩種理論中，無論是「實際發生」的（Einstein 理論）還是「試圖發生」的（Newton 理論），加速度的數值在最低量級相同（但方向相反）；因此，（23.17）和（23.17N）只在細節上有所不同是不足爲怪的。

其次，轉向 Einstein 場方程。這裏，像通常的情形一樣，在流體正交歸一系中場方程的分量［（23.15a,b）式］比在坐標基中的分量要簡單一些。我們已經知道了在正交歸一系中的脅强-能量張量 $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$［(23.15d) 式］；並且高階讀者已經計算過 Einstein 張量 $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$（練習 14.13；初階讀者將在本節末練習 23.4 中面對這個任務）。剩下的全部任務就是使 $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 與 $8\pi T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 相等。首先，審查一下場方程的 $\hat{0}\hat{0}$ 分量：

導出 A 的方程

$$G_{\hat{0}\hat{0}}=r^{-2}-r^{-2}e^{-2A}-r^{-1}(d/dr)(e^{-2A})$$
$$=r^{-2}(d/dr)[r(1-e^{-2A})]=8\pi T_{\hat{0}\hat{0}}=8\pi\rho。$$

一旦注意到這個方程是量 e^{-2A} 的線性微分方程，它就變得易於求解了；稍加整理然後集中注意量 $r(1-e^{-2A})$。稱此量爲 $2m(r)$（迄今只是一個名稱！）；於是，

$$2m\equiv r(1-e^{-2A});\quad e^{2A}=(1-2m/r)^{-1}。\tag{23.18}$$

用此符號，Einstein 張量的 $\hat{0}\hat{0}$ 分量變爲

$$G_{\hat{0}\hat{0}}=\frac{2}{r^2}\frac{dm(r)}{dr}=8\pi\rho。$$

積分，求出

$$m(\mathrm{r})=\int_0^r 4\pi r^2\rho dr+m(0)。\tag{23.19}$$

對於積分常數 $m(0)$，零值意味着在原點空時幾何是光滑的（物理上可以接受）；非零值意味着在原點有奇點的幾何（物理上不能接受：在 $r=0$ 處無局域 Lorentz 系）：

$$\begin{aligned}&\text{若 } m(0)\neq 0,\text{ 在 } r\approx 0,\\&ds^2=[1-2m(0)/r]^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\\&\quad\approx-[r/2m(0)]dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2);\\&\text{若 } m(0)=0,\text{ 在 } r\approx 0,\\&ds^2=[1-(8\pi/3)\rho_c r^2]^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\\&\quad\approx dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)。\end{aligned}\tag{23.20}$$

定義「半徑 r 內的質量-能量」$m(r)$

由（23.18）式定義並由（23.19）式計算且 $m(0)=0$ 的量 $m(r)$，是「半徑 r 內的質量-能量」的相對論類比。框 23.1 詳細說明了這種類比。

框 23.1　半徑 r 內的質量-能量

孤立恒星的總質量-能量 M 是十分明確的（第19章）。但是，一般說來，不十分明確的是恒星內部及其引力場中逐點的質量-能量分布（沒有唯一的「引力脅强-能量張量」）。這就是 §20.4（高階）的決定性信息。

一般說來這個信息是眞實的。但對於球狀恒星情形——僅對這種情形——這個信息就不大合用。球對稱允許人們選擇一種物理上合理的總質量-能量分布。在 Schwarzschild 坐標中，它定義爲

$$\text{「半徑 } r \text{ 內的總質量-能量」} \equiv m(r)=\int_0^r 4\pi r^2\rho dr\,。 \tag{1}$$

只要把這個定義推廣到依賴時間的球對稱恒星（脈衝星，坍縮星或爆發星；參看第26章和第32章，特別是練習32.7）就可以找到對它的完全令人信服的論證。對此，人們發現，與給定的物質球（確定的重子數）相聯繫的質量-能量 m 只能在球邊界可以探測到的局域能流的範圍內及時變化。［這種能流可能是對抗邊界面的運動，或熱流，或輻射（光子或中微子）流的壓力所消耗的功率。但由於球對稱引力波並不存在(第35章和第36章)，無論從物理直觀或從 Einstein 方程都無需面對局域引力波能量的問題。］因而，能量 m 是局域的，這並非數學上的約定，而在於能量傳輸（由此定義 m）可通過局域測量來探測這一情況。［在依賴時間情形下 $m(r,t)$ 的數學細節，參看 Misner 和 Sharp (1964), Misner (1965), 以及練習 32.7。］

加上上述關鍵性的 $m(r)$ 的「局域能流」性質，有三個進一步的性質證明它等同於質量-能量。它們是：(1)在恒星外各處

$$m(r)=M\equiv\begin{pmatrix}\text{由對遙遠行星的 Kepler 第三}\\ \text{定律測出的總質量-能量}\end{pmatrix}; \tag{2}$$

證明可見 §23.6。(2)對於 Newton 恒星，「半徑 r 內的質量」只有唯一的含義，$m(r)$ 是質量。(3)對於相對論性恒星，$m(r)$ 恰好分成「靜止質量-能量」$m_0(r)$ 加上「內能」$U(r)$ 加上「引力勢能」$\Omega(r)$。

確認並評價這種劃分

$$m(r)=m_0(r)+U(r)+\Omega(r)\,, \tag{3}$$

如下。首先，把總質量-能量密度 ρ 分成屬於靜止質量的部分 $\mu_0 n$（μ_0 是存在的各類重子的平均靜止質量）以及屬於內部熱能壓縮能等等的另一部分 $\rho-\mu_0 n$

。其次，注意到厚度爲 dr 的殼層的固有體積爲

$$d\mathcal{V}=4\pi r^2(e^{\lambda}dr)=4\pi r^2(1-2m/r)^{-1/2}dr\,, \tag{4}$$

而不是 $4\pi r^2dr$。因此，半徑 r 內的總靜止質量爲

$$m_0=\int_0^r \mu_0 n d\mathcal{V}=\int_0^r 4\pi r^2(1-2m/r)^{-1/2}\mu_0 n dr\,, \tag{5}$$

總內能爲

$$U=\int_0^r(\rho-\mu_0 n)d\mathcal{V}=\int_0^r 4\pi r^2(1-2m/r)^{-1/2}(\rho-\mu_0 n)dr\,。 \tag{6}$$

從總質量-能量m中減去這些；剩下的必爲引力勢能，

$$\begin{aligned}\Omega&=-\int_0^r\rho[(1-2m/r)^{-1/2}-1]4\pi r^2dr\\ &\approx-\int_0^r(\rho m/r)4\pi r^2dr\,。\end{aligned} \tag{7}$$

[Newton 極限，$m/r\ll 1$]

（見練習 23.7.）

導出 Φ 的方程

其次，轉向場方程的 $\hat{r}\hat{r}$ 分量：

$$\begin{aligned}G_{\hat{r}\hat{r}}&=-r^{-2}+r^{-2}e^{-2\lambda}+2r^{-1}e^{-2\lambda}d\Phi/dr\\ &=8\pi T_{\hat{r}\hat{r}}=8\pi p\,。\end{aligned}$$

求解這個方程得 Φ 的微商，以 $1-2m/r$ 代替 $e^{-2\lambda}$，得出勢 Φ 的梯度的表達式：

$$\frac{d\Phi}{dr}=\frac{m+4\pi r^3p}{r(r-2\mathrm{m})}\,。 \tag{23.21}$$

在 Newton 極限下，這個表達式化爲熟知的公式：

$$d\Phi/dr=m/r^2\,。 \tag{23.21N}$$

在絕大多數恒星結構的研究中，都用借助於（23.21）式得出的下述等價方程來代替（23.17）式，

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3p)}{r(r-2\mathrm{m})}。\qquad(23.22)$$

流體靜力學平衡方程改寫爲“OV”形式

它稱爲流體靜力學平衡的 Oppenheimer-Volkoff（OV）方程，它的 Newton 極限

$$dp/dr=-\rho m/r^2,\qquad(23.22\mathrm{N})$$

是熟知的。

比較兩類恒星模型，一是相對論性的，另一是 Newton 的。假設在給定半徑 r 處［在兩種情形，r 均取決於（固有面積）$=4\pi r^2$］，兩種位形具有相同的 ρ, p 和 m 值。則在相對論性的模型中，壓强梯度爲

$$\frac{dp}{d\,(\text{固有徑向距離})}=\frac{dp}{e^{\Lambda}dr}=-\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3p)}{r^2(1-2m/r)^{1/2}}。\qquad(23.23)$$

反之，Newton 理論給出的壓强梯度爲

$$\frac{dp}{d\,(\text{固有徑向距離})}=\frac{dp}{dr}=-\frac{\rho m}{r^2}。\qquad(23.23\mathrm{N})$$

Newton 恒星和相對論性恒星中壓强梯度的比較

梯度的相對論性表達式大於 Newton 表達式(1)因爲分子較大（兩個因子都加上壓强項），和(2)因爲分母較小［縮小的因子 $(1-2m/r)^{1/2}$］。因此，隨着深入到恒星內部，人們發現，壓强的增大比 Newton 引力理論所預期的要快。此外，壓强的這種增加在某種意義下是「自更生」的。壓强上升得越多，（23.23）式分子中的壓强修正項就越大；而這些項越大，隨着更深入恒星內部，壓强的進一步上升就越快。（23.23）式分母中的幾何因子$[1-2m(r)/r]^{1/2}$進一步增加了趨向中心時壓强的再生性增大。用較短的術語概述這種情況是適宜的，即在一個穩定的物體中廣義相對論預言的引力比 Newton 理論要强。這些力，包括它們的其他重要效應，在被 Newton 理論預期爲穩定流體靜力學平衡的某些情況下，會把某些白矮星和超大質量恒星引向引力坍縮（見第24章）。最基本的跡象是，在穩定性分析中出現了一個新的因子，注意到處於流體靜力學平衡的恒星從未能有 $2m(r)/r\geq 1$（參看框 23.2 的一種說明和§23.8的討論），這是與 Newton 理論格格不入的一種現象。

恒星結構方程總結

現在，對於五個結構函數 ρ, p, n, Φ, Λ, 手中已經有了五個結構方程［二個狀態方程（23.16）式；把$m(r)=\frac{1}{2}r(1-e^{-2\Lambda})$表爲 ρ 的體積分的(23.19)

式；Φ 的源方程（23.21）式；以及流體靜力學平衡的 OV 方程（23.22）式］。如果明確提出如上面所概述的相對論性恒星理論，那麼剩下的八個 Einstein 場方程 $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=8\pi T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 的每一個都必定是空無所有的（「0＝0」），或者必定是這五個結構方程的結果。確實，情況就是如此，用直截了當但冗長的計算即可以證明這一點。

爲了建立恒星模型，除了結構方程外還需要邊條件。爲了簡化邊條件的表示，下一節將審查恒星外部的引力場。

練習

練習 23.3 局域能量-動量守恒定律（爲未學第22章的讀者）

對於在(23.7)式的 Schwarzschild 坐標系中脊强-能量張量(23.14)，計算方程 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$ 的四個分量。［答：只有 $T^{r\beta}{}_{;\beta}=0$ 給出了有意義的結果，它給出了（23.17）式。］

練習 23.4 Einstein 曲率張量（爲未學第14章的讀者）

在 Schwarzschild 坐標中計算 Einstein 曲率張量 $G_{\alpha\beta}$ 的分量。再作變換得出（23.15a,b）式在正交歸一系中的諸分量 $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$。［參看框 8.6 或框 14.2 以及（14.7）式。］

練習 23.5 恒星內的總重子數

試證明，如果 $r=R$ 是一靜止恒星表面的位置，則恒星內的總重子數爲

$$A=\int_0^R 4\pi r^2 n e^{\Lambda} dr。 \tag{23.24}$$

［提示：參看框 23.1 中關於 m_0 的討論。］

練習 23.6 恒星內的浮力

在相對論性恒星內某點靜止的觀測者，測量體積爲 V 的微小流體元上的徑向壓强-浮力 $F_{浮}$。讓他採用通常的實驗技術。不要告訴他：他在相對論性恒星上，免得他混亂。他找出的 $F_{浮}$ 的值用 ρ, p, m, V 和 dp/dr 表示將是什麼？如果他使此浮力與相等反向的引力 $F_{引}$ 相等，則 $F_{引}$ 用 ρ, p, m, V 和 r 表示將是什麼？（利用 23.22 式。）爲什麼這些結果與相應的 Newton 的結果不同？

練習 23.7 Newton 恒星的引力能

設想從內部向外通過在頂部加上物質球殼來構造一個恒星，試用 Newton 理論從引力算出能量。利用 Laplace 方程 $(r^2\Phi_{,r})_{,r}=4\pi r^2\rho$ 和流體靜力學方程 $p_{,r}=-\rho\Phi_{,r}$ 把答案表爲下述等價的形式：

(從引力得出的能量)≡−(引力勢能)

$$=\int_0^R(\rho r\Phi_{,r})4\pi r^2dr=\int_0^R(\rho m/r)4\pi r^2dr$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^R(\rho\Phi)4\pi r^2dr=\frac{1}{8\pi}\int_0^\infty(\Phi_{,r})^2 4\pi r^2\,dr$$

$$=3\int_0^R 4\pi r^2 p\,dr\,。$$

§ 23.6　外部的引力場

在恒星外，密度和壓强爲零，因此只需考慮度規參量 Φ 和 $\Lambda=-\frac{1}{2}\ln(1-2m/r)$。由 (23.19) 式可見，「半徑 r 內的質量」$m(r)$ 對大於 R 的 r 值 (在恒星外) 是固定不變的。用 M 表示它的恒定值：

$$\text{對於 } r>R \text{ (即在恒星外)} \qquad m(r)=M。 \tag{23.25}$$

對 (23.21) 式求積，用 $p=0$ 和 $m=M$，再加 Φ 在 $r=\infty$ 的邊條件 (23.10) 式 (「在 $r=\infty$，時間尺度的歸一化」)，得

$$\text{對於 } r>R \qquad \Phi(r)=\frac{1}{2}\ln(1-2M/r)。 \tag{23.26}$$

結果，恒星外的空時幾何 (23.7) 變爲

恒星外的空時爲「Schwarzschild」幾何

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{(1-2M/r)}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)。 \tag{23.27}$$

它稱爲「Schwarzschild 幾何」或「Schwarzschild 引力場」或「Schwarzschild 線元」，這是因爲在 Einstein 闡明廣義相對論後幾個月，Karl Schwarzschild (1916a) 發現它是 Einstein 場方程的一個嚴格解。

在 $r\geqslant 2M$ 的空時區域中，幾何是近似平直的，Newton 引力理論適用，Newton 勢爲

$$\text{對於 } r>R,\ r\geqslant 2M \qquad \Phi=-M/r。 \tag{23.26N}$$

結果，M 是支配在 Newton 引力場中遠處行星 Kepler 運動的質量，即它是恒星的「總質量-能量」(參看第19章和第 20 章)。由於在恒星外遠處的度規 (23.27) 是嚴格對角的 ($g_{tj}\equiv 0$)，故恒星的總角動量應爲零。這個結果與不存在內部的流體運動相符。

恒星的總質量-能量

§ 23.7 如何建立恒星模型

把恒星結構方程集合在一起

把恒星結構方程 (23.16), (23.19), (23.21), (23.22) 式，相應的邊條件（下面要討論）與線元一道集合起來，如下。

線元

$$\text{對於 } r>R,\quad ds^2=-e^{2\Phi}dt^2+\frac{dr^2}{1-2m/r}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$$
$$=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-2M/r}$$
$$+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)。 \tag{23.27'}$$

質量方程

$$m=\int_0^r 4\pi r^2\rho dr,\ \text{且 } m(r=0)=0。 \tag{23.28a}$$

流體靜力學平衡的 OV 方程

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3p)}{r(r-2m)},\ \text{且 } p(r=0)=p_c=\text{中心壓强}。 \tag{23.28b}$$

狀態方程

$$p=p(n), \tag{23.28c}$$
$$\rho=\rho(n)。 \tag{23.28d}$$

Φ 的源方程

$$\frac{d\Phi}{dr}=\frac{(m+4\pi r^3p)}{r(r-2m)},\quad \text{且 } \Phi(r=R)=\frac{1}{2}\ln(1-2M/R)。 \tag{23.28e}$$

如何求解恒星結構方程

可按以下步驟建立恒星模型。首先，規定狀態方程 (23.28c,d) 和中心的壓强值 p_c。再規定一任意值 Φ_0 即 $\Phi(r=0)$（以後要重正化）。邊條件 $p(r=0)=p_c$, $\Phi(r=0)=\Phi_0$, $m(r=0)=0$ 足以唯一確定耦合方程組 (23.28) 的解。把這些耦合方程組從 $r=0$ 向外直到壓强爲零處作積分。［只要狀態方程遵循合理的限制，即對於所有 $p\geq 0$ 處 $\rho\geq 0$，則 OV 方程 (23.28b) 確保壓强

單調減小。] 壓强達到零的點就是恒星的表面；該處的 r 值就是恒星的半徑 R；該處的 m 值就是恒星的總質量-能量 M。達到表面後，通過在各處加上一常數使 Φ 重正化，因此它服從邊條件 (23.28 e)。這個結果就是相對論性恒星的模型，它的結構函數 Φ, m, ρ, p, n 滿足結構方程。

注意，對於任何選定的狀態方程 $p=p(n)$, $\rho=\rho(n)$，恒星模型形成單參量序列（參量 p_c）。一旦給定中心壓强，模型便唯一確定了。

下一章描述按上述規定用數值建立起來的一系列實際的恒星模型。而解析地建立的理想恒星模型，見框 23.2。

練習 23.8　均勻密度的 Newton 恒星　　**練習**

用 Newton 理論計算均勻密度位形的結構。試證明在弱引力極限下，框 23.2 的相對論性位形變得與 Newton 位形等同。再證明在 Newton 理論中不存在質量或半徑的極限。

(接第612頁)

框 23.2　均勻密度的相對論性恒星模型

對於實際的狀態方程（見下章），恒星結構方程 (23.28) 式無法解析地積分；需要數值積分。然而，各種理想化的和特別的狀態方程存在着解析解。最有用的解析解之一 [Karl Schwarzschild (1916b)] 描繪了均勻密度的恒星

$$\rho=\rho_0=\text{常數，對於所有的 } p。 \tag{1}$$

沒有必要爲了接受這種感興趣的模型而沉緬於虛構的「不可壓縮流體」。不可壓縮意味着聲速 $v=(dp/d\rho)^{1/2}$ 的大小不受限制，因此可以超過光速，從而與狹義相對論關於沒有物理效應能以 $v>1$ 的速度傳播的主要原理（「因果性原理」）相矛盾。（如果一個源能在某一局域 Lorentz 系中引起這樣快的一種效應，那麼就會存在着另一個局域 Lorentz 系，其中該效應會出現在源行動之前！）然而，高壓强區域的那部分流體與低壓强區域的那部分流體具有同樣密度的想法是很容易接受的，只要設想流體的成分從一個 r 值到另一個 r 值

不斷變化（「手工特製的」）即可。無論是沿着這條線索思考，還是簡單地考慮一個由水構成的球（其大小限爲地球尺度的一個小分數），人們已置身於 Schwarzschild 模型之中，這是在 Einstein 理論框架中所做的一個有啓發性的流體靜力學例子。

質量方程（23.28a）式立即給出。

$$m=\begin{cases}(4\pi/3)\rho_0 r^3 & \text{對於 } r<R\\ M=(4\pi/3)\rho_0 R^3 & \text{對於 } r>R\end{cases}。\tag{2}$$

由此導出度規的長度修正係數

$$\frac{d(\text{固有長度})}{dr}=e^{\lambda}=[1-2m(r)/r]^{-1/2}。\tag{3}$$

爲了形象化，把經過恒星的赤道薄片的空間幾何（r, ϕ）看作嵌在 Euclid 三維幾何（z,r,ϕ）之中［見 §23.8］，「離」開 $z=0$ 的平面爲

$$z(r)=\begin{cases}(R^3/2M)^{1/2}[1-(1-2Mr^2/R^3)^{1/2}] & \text{對於 } r\le R,\\ (R^3/2M)^{1/2}[1-(1-2M/R)^{1/2}]\\ \quad+[8M(r-2M)]^{1/2}-[8M(R-2M)]^{1/2} & \text{對於 } r\ge R。\end{cases}\tag{4}$$

(2)的 $m(r)$ 使流體靜力學平衡方程（23.28b）式可積，並給出壓强爲：

$$p=\rho_0\left\{\frac{(1-2Mr^2/R^3)^{1/2}-(1-2M/R)^{1/2}}{3(1-2M/R)^{1/2}-(1-2Mr^2/R^3)^{1/2}}\right\}\quad \text{對於 } r<R。\tag{5}$$

而壓强又經（23.28e）式引出度規的時間修正因子：

$$\frac{d(\text{原時})}{dt}=e^{\nu}$$
$$=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} & \text{對於 } r<R\\ (1-2M/r)^{1/2} & \text{對於 } r>R\end{cases}。\tag{6}$$

這些均勻密度位形的若干性質是值得注意的。(1)對於確定的能量密度 ρ_0，中心壓强爲

$$p_c=\rho_0\left\{\frac{1-(1-2M/R)^{1/2}}{3(1-2M/R)^{1/2}-1}\right\},\tag{7}$$

隨着半徑 R 的增大單調地增大，從而也隨着質量 $M=(4\pi/3)\rho_0 R^3$ 以及比值（「引力强度」）

$$2M/R=(8\pi/3)\rho_0 R^2\tag{8}$$

的增大而單調地增大。這是很自然的，因爲隨着恒星增添的物質越來越多，需要越來越大的壓强來支撑它。(2)當 M, R 和 $2M/R$ 達到極限值

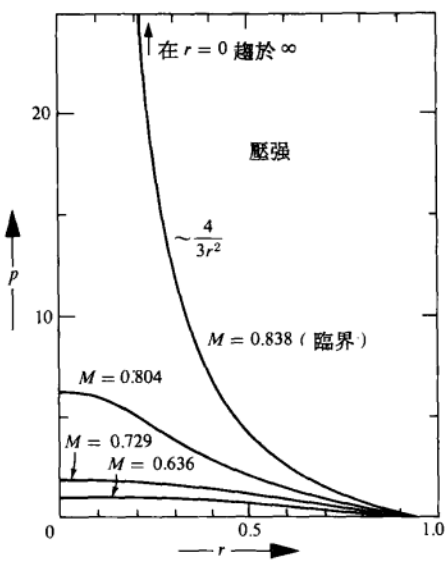
$$R_{\text{極限}}=(9/4)M_{\text{極限}}=(2\pi\rho_0)^{-1/2}, \tag{9}$$

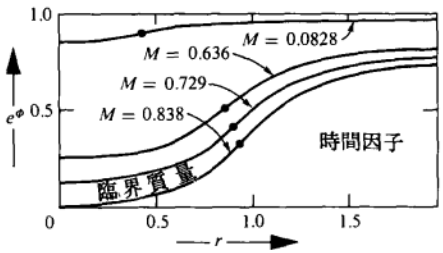
$$(2M/R)_{\text{極限}}=8/9 \tag{10}$$

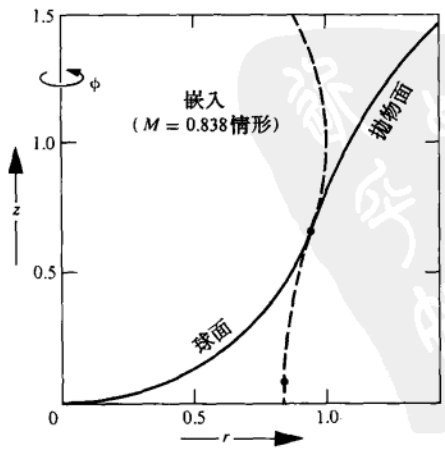
時，中心壓强變爲無限大。沒有一個均匀密度的恒星能具有超過這些極限的質量和半徑。這些極限純屬相對論現象；在 Newton 理論中不出現這類極限。(3)在恒星內，空間幾何（超曲面 $t=$常數的幾何）是曲率半徑爲

$$a=(3/8\pi\rho_0)^{1/2} \tag{11}$$

的三維球面。［見上述(4)式。］在恒星外，（Schwarzschild）空間幾何是三維的旋轉抛物面。內部的幾何和外部的幾何光滑地聯接在一起。全部這些細節如以下三張圖所示。圖中全部量均以下述幾何單位給出（把質量從克換爲厘米或密度從克／厘米^3 換爲厘米$^{-2}$，乘以 0.742×10^{-28} 厘米／克）；長度以 $(3/8\pi\rho_0)^{1/2}$ 爲單位；壓强以 ρ_0 爲單位；質量以 $(3/32\pi\rho_0)^{1/2}$ 爲單位。







「集合後」的質量稱爲M。同樣的流體當分散爲無限分離的許多微滴時，其質量在下表中稱爲$M_{\text{集合前}}$。

$M_{\text{集合前}}$	微小	0.0882	0.894	1.0913	1.374
M	微小	0.0828	0.636	0.729	0.838(臨界)
差（結合）：	$\frac{3}{10}M^{5/3}$	0.0054	0.258	0.362	0.536

§23.8 靜止恒星的空時幾何

球面積，$4\pi r^2$：

(1)從恒星中心向外單調地增大

對於高度相對論性的恒星，空時幾何與 Euclid-Lorentz 平直性有很大差別。其結果是，沒有先驗的理由預料表面積爲 $4\pi r^2$，以及預料徑向坐標 r 會隨着從恒星中心向外的運動而單調增大。幸而，只要 $\rho\geq 0$ 以及只要恒星是靜止的（平衡的），恒星結構方程確保，從恒星中心的 0 到離恒星無窮遠的∞，r 單調地增大。

r 的單調性可以說明如下。作爲新的徑向坐標，引入離恒星中心的固有距離 l。根據度規的表達式 (23.27′) 式，l 和 r 的關係爲

$$dr=\pm(1-2m/r)^{1/2}dl。\tag{23.29}$$

注意，r 在恒星中心爲零（該處 $m\propto r^3$），並注意由定義 r 總是非負的。因此，當從 $l=0$ 向外運動時，r 起初必定隨 l 增大；稍後，$r(l)$ 可能達到極大值，並從 $2m/r$ 變爲 1 的點開始減少［見 (23.29) 式］。這種行爲可能並的確在閉宇宙模型（密度均勻半徑爲 a 的三維球）中發生，其中

$$r(l)=a\sin(l/a)$$

［見第27章；特別是框 27.2(A) 的嵌入圖］。然而，場方程要求這樣一個系統是動力學的。反之，此處關注的系統只限於靜止條件下的系統。在這類系統中，流體靜力學平衡條件 (23.28b) 式適用。其次，壓强梯度是由分母中含有 $[1-2m(r)/r]$ 因子的表達式給出的。如果在恒星的某個區域內，隨着 l 的增大，$2m/r$ 接近於 1，則該處的壓强梯度變化很大，以致在到達 $2m(r)/r$ 爲

單位值的任何點之前，先到達 $p=0$ 點（恒星表面）。此外，在經過恒星表面之後，m保持不變 $m(r)=M$, 而 $2m(r)/r$ 減小。結果， $2m/r$ 總是小於 1；從而 $r(l)$ 沒有極大值，證完。（證明的細節留給讀者，如練習23.9。）

(2)但比在平直空時中增加得慢得多

儘管曲率半徑 r 和相應的球面積 $4\pi r^2$ 從恒星中心向外單調地增加，但它們增加的速率與在平直空時中不同。在平直空時中，增加的速率由 dr/d（固有徑向距離）$=dr/dl=1$ 給出。而在恒星內則由 $dr/dl=(1-2m/r)^{1/2}<1$ 給出。其結果是，如果從相對論性恒星中心向外攀登一條很長的梯子，測量各相繼的球殼的 Schwarzschild r 值（「固有圓周」$/2\pi$），那麼，將發現這些 r 值的增加驚人的慢。

把空時嵌入更高維的平直空間之中

這種離奇的行爲借助於「嵌入圖」是很容易想像的。如果人們爲了容易想像而試圖將整個彎曲的四維流形嵌入某個更高維的平直空間之中，那就太不現實了。［但是，整個地嵌入 5 + 1 維，可參看 Fronsdal (1959) 和 Clarke (1970)，局域地嵌入 4 + 2 維可參看 Kasner (1921b)。絕不能把非平直的眞空度規（$G_{\mu\nu}=0$）嵌入 5 維平直空間之中（Kasner, 1921c）。］因此，尋求更簡單的圖畫（Flamm 1916）。就靜止系統而言，某一時刻的空間與另一時刻的空間具有相同的三維幾何。因此，只要像在某一時刻 $t=$常數那樣的描繪三維空間即可。此外，在任一時刻空間本身都是球對稱的。結果，通過中心$r=0$把空間對稱地分成兩半的薄片（例如，赤道薄片 $\theta=\pi/2$）與通過中心的任何其他這類薄片（任意選定的仰角，在任何方位）一樣，都具有相同的二維幾何。因此，只需關注赤道薄片的二維幾何即可。這種薄片上的幾何由線元

$$ds^2=[1-2m(r)/r]^{-1}dr^2+r^2d\phi^2 \qquad (23.30)$$

描繪。現在，可把這個二維彎曲空間幾何嵌入 Euclid 三維流形的平直幾何之中。

對經過恒星的赤道薄片建立「嵌入圖」

如果二維薄片的曲率爲零或可以忽略，則嵌入是很平常的。結果，二維幾何與 Euclid 三維空間的 $z=0$ 薄片相同。此外，在該三維空間引入熟知的柱坐標 z, r, ϕ，這是任何軸對稱問題中常用的（見圖 23.1，更詳盡的內容見框 23.2）。然後，確認這個平直的二維薄片是 Euclid 空間中 $z=0$, ϕ 從 0 到 2π, r 從 0 到∞的點的集合。已將薄片上的 r 和 ϕ 與 Euclid 三維空間的 r 和 ϕ 視爲等同。

如果二維幾何是彎曲的，就像取經過眞實恒星的赤道截面那樣，則保持薄片的 r, ϕ 與 Euclid 三維幾何的 r, ϕ 之間的等同，但薄片卻是彎離 $z=0$ 平面的（原點 $r=0$ 除外）。同時，又要求這種彎曲是軸對稱的。換言之，要求

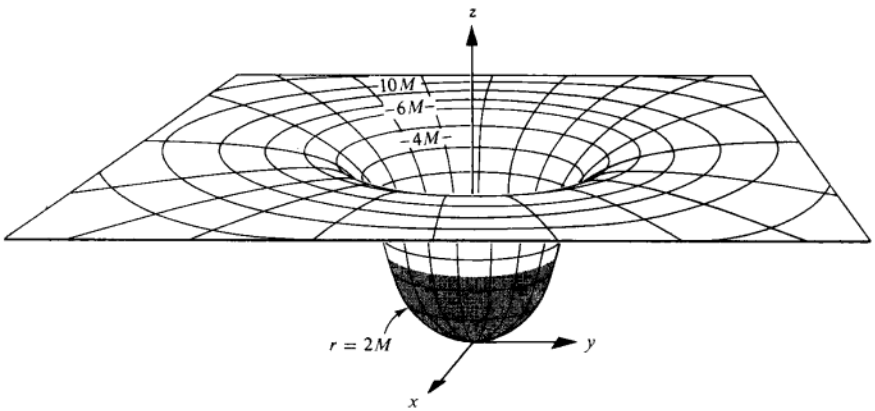


圖 23.1
半徑爲 $R=2.66\ M$ 的恒星內部（灰色）和周圍（白色）的幾何示意圖。恒星處於流體靜力學平衡，並具有零角動量（球對稱）。經過恒星的赤道薄片（$\theta=\pi/2$, $t=$常數）的二維幾何

$$ds^2=[1-2m(r)/r]^{-1}\,dr^2+r^2d\phi^2$$

按下述方式描繪爲嵌入 Euclid 三維空間之中，即任意兩鄰近點 (r,ϕ), 和 $(r+dr,\ \phi+d\phi)$ 之間的距離是正確地複製的。離開彎曲面量度的距離沒有物理意義；離開該面的點沒有物理意義；Euclid 三維空間本身也沒有物理意義。只有彎曲的二維幾何有意義。Schwarzschild 坐標半徑爲 r 的圓具有的固有圓周爲 $2\pi r$（只注意恒星的赤道平面$\theta=\pi/2$）。將該圓代之以固有面積爲$4\pi r^2$的球，所有其他圓類似，以便在任意選定的 Schwarzschild 坐標時間 t，設想恒星內和恒星周圍的全部三維幾何。因爲隨着 r 的減少，$m(r)$ 減少得足够快，所以在 $r=2M$ 內，隨着 r 的減少，因子 $[1-2m(r)/r]^{-1}$ 的變化無奇點。

在 $z=0$ 平面上「提升」的數量與 ϕ 無關，而無論如何都可能與 r 有關。於是，嵌入的全部內容可概括爲簡單的函數，即提升

$$z=z(r)\ （「嵌入公式」）。$$

在 Euclid 空間（人爲的三維空間；它與眞實的世界毫無共同之處）中這個彎曲的二維部位上的幾何等同於經過實際恒星的二維赤道薄片的幾何；換言之，在兩種情形下的線元是等同的。爲了用數學術語表述這種要求，把三維 Euclid 空間中的線元寫成下述形式

$$ds^2=dz^2+dr^2+r^2d\phi^2。 \tag{23.31}$$

通過寫出 $z=z(r)$ 或 $dz=(dz/dr)\,dr$ 來限制選定的部位（「提升的表面」）。於是，在三維幾何中的二維部位上有

$$ds^2=\left[1+\left(\frac{dz(r)}{dr}\right)^2\right]dr^2+r^2d\phi^2\,, \tag{23.32}$$

它等同於在實際恒星中的

$$ds^2=[1-2m(r)/r]^{-1}dr^2+r^2d\phi^2。$$

比較得出

$$\left(\frac{dz(r)}{dr}\right)^2+1=[1-2m(r)/r]^{-1}。 \tag{23.33}$$

此式足以求出作爲 r 函數的提升；於是

$$z(r)=\int_0^r \frac{dr}{\left[\dfrac{r}{2m(r)}-1\right]^{1/2}} \quad \text{各處，} \tag{23.34a}$$

$$z(r)=[8M(r-2M)]^{1/2}+\text{常數} \quad \text{恒星外。} \tag{23.34b}$$

描繪嵌入的表面

在恒星外這個嵌入的表面是旋轉拋物面的一部分。它在恒星內的形狀取決於作爲 r 的函數的質量 m 如何變化。記得在恒星中心附近 $m(r)$ 按 $(4\pi/3)\rho_c r^3$ 變化。由此斷定該處的嵌入表面像半徑爲 $a=(3/8\pi\rho_c)^{1/2}$ 的球面的一部分；於是

$$[a-z(r)]^2+r^2=a^2 \quad \text{對於 } r\ll a=(3/8\pi\rho_c)^{1/2}。 \tag{23.34c}$$

在恒星具有均勻密度的特殊情形（框 23.2），內部全爲球形（23.34c）；一般情形則並非如此。在所有情況下，因爲 $r>2m(r)$，所以（23.34a）式產生的表面其 z 和 r 互爲單調增加的函數。這意味着嵌入的表面總是像碗那樣向上和向外張開的；它實質上總是看上去像圖 23.1 那樣；它決沒有頸縮，也絕不平直的外展（漸近於 $r=\infty$ 處除外）。在恒星表面，儘管密度可能不連續地下降到零（在內部，當 $p=0$ 時，ρ 有限；在外部，ρ 爲零），內部和外部的幾何將光滑地聯接在一起［如（23.33）式所給出的 dz/dr 是連續的］。

必須强調指出，就恒星的幾何而言，只有位於嵌入的二維表面上的那些點才有物理意義。圖 23.1 中碗內外的三維區域是沒有物理意義的。Euclid 嵌入空間也是如此。只允許人們以方便的方式設想圍繞着恒星的空間幾何。

練習

練習 23.9　r 的好行爲

明確的完成本節開始所作證明的全部細節，即證明 $2m/r$ 總是小於 1 以及 r 是 l 的單調函數。

練習 23.10　在極端相對論的極限下，被理想 Fermi 氣佔據的恒星中心。

與不可壓縮流體構成恒星的理想情況相反，另一種理想情況是恒星由零溫度的理想 Fermi 氣構成［理想的中子星；參看 Oppenheimer 和 Volkoff (1939)］，高度的壓

縮使粒子具有相對論性的能量，與此相比較，它們所具有的任何靜止質量可以忽略。在此極限下，在相空間中體積爲 h^3 的每個被佔據的相格內有兩個粒子，於是有

$$(\text{Fermi 子的數密度})=n=(2/h^3)4\pi\int_0^{p_F}p^2dp=8\pi p_F{}^3/3h^3,$$

$$(\text{質量-能量密度})=\rho=(2/h^3)4\pi\int_0^{p_F}cp\cdot p^2dp=2\pi cp_F{}^4/h^3,$$

最後

$$p=-\frac{d\,(\text{每個粒子的能量})}{d\,(\text{每個粒子的體積})}=-\frac{d(\rho/n)}{d(1/n)}=2\pi cp_F{}^4/3h^3=\rho/3,$$

似乎討論的是輻射而不是粒子（p_F=Fermi 動量；最高的被佔據態的動量）。

框 23.3 球對稱線元的嚴格推導

§23.2 給出了一般球對稱線元 (23.7) 的啓發式推導。本框試圖作更嚴格的推導，除靜止的系統外還適用於非靜止的系統。

從流形 M^4 出發，在它上面已定義署名 Lorentz 的度規 ds^2。假設 M^4 在下述意義下是球對稱的，即對於任意 3×3 的轉動矩陣 A，相應的有一個 M^4 的映射（轉動），也稱爲 A（$A:M^4\longrightarrow M^4:\mathcal{P}\longrightarrow A\mathcal{P}$），它保持全部曲線的長度不變。進一步的假設和作圖將編上號碼 (i), (ii)等等，由此人們可以看出爲了得出線元(23.7)有什麼特殊的需要。劍號 (†) 指出的一些假設，對於某些其他物理上感興趣的情況是不適用的。

對任一點 $\mathcal{P}$，作相當於 $\mathcal{P}$ 經轉動後所得的全部點的集合 $s=S(\mathcal{P})=\{A\mathcal{P}\in M^4\mid A\in SO(3)\}$。假設 (i)† s 是一個二維面（中心點除外，該處 s 爲零維），(ii) s 上的度規是標準的二維球，從而在 s 上有

$$(ds^2)_s=R^2(s)d\Omega^2, \qquad (1)$$

式中 $d\Omega^2$ 是單位球的標準度規（對於某些 θ, ϕ, $d\Omega^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2$，在 s 上定義），式中 $2\pi R$ 是 s 的圓周，如果 M^2 是全部這類面 s 的集合，則 $S:M^4\longrightarrow M^2:\mathcal{P}\longrightarrow s=S(\mathcal{P})$ 使我們能從 $R:M^2\longrightarrow\mathscr{R}:s\longrightarrow R(s)$ [M^2 上的「圓周」函數，由(1)式定義] 得出 M^4 上的相應函數 $R:M^4\longrightarrow\mathscr{R}:\mathcal{P}\longrightarrow R(S(\mathcal{P}))$，它在某些情形最終可用來作爲 M^4 上的坐標。（注意：此處 $\mathscr{R}$ 表示實數。）

現在假設 (iii)† 有一球對稱四維速度場 $\boldsymbol{u}$，它是這樣定義的，即若 $\mathcal{P}=\mathcal{C}(\tau)$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的一條軌道且 $\boldsymbol{u}=d/d\tau$，則由轉動得出的每一條曲線 $\mathcal{P}=A\mathcal{C}(\tau)$ 必定也是 $\boldsymbol{u}$ 的一條軌道。從而 $\boldsymbol{u}$ 在任意球 s 上的垂直投影應爲零，就像二維球上沒有旋轉不變的非零矢量場一樣。於是，$\boldsymbol{u}$ 和每一個 s 正交。又，如果 $\boldsymbol{u}$ 的兩條軌道從同一個球 s 發出，即 $\mathcal{C}_1(0)=A\mathcal{C}_2(0)$，那麼同一個轉動 A 總能把它們聯繫起來 $\mathcal{C}_1(\tau)=A\mathcal{C}_2(\tau)$，因爲軌道是由它們上面的任一點唯一確定的。其次，$S(\mathcal{C}_1(\tau))$ 和 $S(\mathcal{C}_2(\tau))$ 兩者是 M^2 中相同的曲線，它們的正切 $d/d\tau$ 也可稱爲 $\boldsymbol{u}$；這樣就得到了 M^2 上的一個矢量場 $\boldsymbol{u}$。對 M^2 上 $\boldsymbol{u}$ 的每一條軌道給予不同的標記 r，以便在 M^2 上定義一函數 $r(s)$。用 $r=r(S(\mathcal{P}))$ 表示 M^4 上相應的函數 r 且 $dr/d\tau=0$。因爲 M^4 上的函數及其梯度定義了 M^2 上相應的量，所以諸如 $\boldsymbol{df}\cdot\boldsymbol{dg}$ 之類的內積可以通過它們在 M^4 上的值在 M^2 上定義；於是，從 M^4 上的度規得到了 M^2 上的度規

(a) 對於滿足狀態方程 $p=\rho/3$ 的物質，寫出流體靜力學平衡的相對論方程。

(b) 試證明在中心密度爲無限大的極限情形（對此 $m(r)/r$ 的值爲 3/14），存在着一個十分明確的解析解。

(c) 求出 $\rho(r)$, $p(r)$, 和 $n(r)$。

(d) 試證明儘管原點的 $n(r)$ 爲無窮大，但在任何有限 r 值之外的粒子數是有限的。

(e) 試證明三維幾何在 $r=0$ 處有一「錐形奇點」。

(f) 對此三維幾何畫一「嵌入圖」［由 (23.34) 式「提升」作爲 r 函數的 $z(r)$］。

（注意：在 $r=0$ 出現錐形奇點是因爲在該點質量-能量密度趨於無窮，否則物理上就不合理。再注意，算出的系統質量隨着 $r\longrightarrow\infty$ 發散爲無窮大。實際上，隨着密度的減少，Fermi 動量從相對論值下降到非相對論值，狀態方程改變了它的數學形式，而總質量M收斂爲有限值。）

。然後，由 (23.5) 式，或等價地通過在 M^2 上畫出與 $r=$常數線正交的曲線，並給每一條曲線不同的標記 t，人們就可以得到坐標，且 $g^{rt}=\mathbf{dr}\cdot\mathbf{dt}=0$。$r$ 和 t 這兩個標記是在相應的曲線上任意地指定的，因此，顯然變換 $t'=t'(t)$ 和 $r'=r'(r)$ 是不能排除的。

在 M^4 的一個二維球 s 上，在 $t=0$ 的超曲面上，通過任意選定極點 ($\theta=0$) 和本初子午線 ($\phi=0$) 可選取一組 θ, ϕ 坐標。然後，通過要求與每一個二維球 s 正交的曲線上的 θ 的 ϕ 爲常數，即要求在 $t=0$ 處 $(\partial/\partial r)_{\theta\phi}$ 與每一個 s 正交，可將 θ, ϕ 的定義推展到 $t=0$ 的超曲面。通過要求 θ 和 ϕ 在切線爲 $\mathbf{u}$ 的曲線上是常數，即 $(\partial/\partial t)_{r\theta\phi}\propto\mathbf{u}$ 可將 θ 和 ϕ 的定義推廣到 $t\neq0$。但每一個 s 是 r 和 t 爲常數的曲面；因此當 $\mathbf{u}\propto(\partial/\partial t)$ 與每一個 s 正交時，$(\partial/\partial\theta)_{rt\phi}$ 和 $(\partial/\partial\phi)_{rt\theta}$ 是 s 的正切。結果，在剛建立的 $tr\theta\phi$ 坐標系中

$$g_{t\theta}=(\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial\theta)=0 \qquad (2)$$

和

$$g_{t\phi}=(\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial\phi)=0。 \qquad (3)$$

矢量 $(\partial/\partial r)_{t\theta\phi}$ 並不依賴於球 s 上原來選擇θ, ϕ 坐標時所引入的任意方向；它在變換 $\theta=\theta(\theta',\phi')$, $\phi=\phi(\theta',\phi')$ 下是不變的，但是除了在討論中引入非轉動不變的因素 θ 和 ϕ 外，別無其他；因此 $(\partial/\partial r)_{t\theta\phi}$ 應是轉動不變的矢量場（例如，不像 $\partial/\partial\phi$）；因此，像 $\mathbf{u}$ 那樣，它與每一個二維球 s 正交。這種不變性給出

$$g_{r\theta}=(\partial/\partial r)\cdot(\partial/\partial\theta)=0, \qquad (4)$$

$$g_{r\phi}=(\partial/\partial r)\cdot(\partial/\partial\phi)=0, \qquad (5)$$

它和以前建立的 $g^{tr}=0$ 在一起，給出 $g_{tr}=0$。這個結果就是形式爲 (23.3) 式的線元，進一步特殊化，即經符號變化把徑向坐標和時間坐標變爲R和T，其中R由上面的(1)式定義且

$$\mathbf{d}T=e^{\psi}\left[\frac{1}{g_{rr}}\frac{\partial R}{\partial r}\mathbf{d}t-\frac{1}{g_{tt}}\frac{\partial R}{\partial t}\mathbf{d}r\right],$$

$$e^{\psi}=(\text{積分因子}),$$

由此導致 Schwarzschild 坐標和線元 (23.7) ——雖然這種變換只在 $\mathbf{d}R\wedge\mathbf{d}T\neq0$ 處才是可能的（即非奇異的）：

$$(\nabla R)^2=\frac{(\partial R/\partial t)^2}{g_{tt}}+\frac{(\partial R/\partial r)^2}{g_{rr}}\neq0。$$

如果 (iv)† 空時是漸近平直的，從而$r\longrightarrow\infty$是其中的度規可取其狹義相對論值的一個區域，那麼通過要求 $r\longrightarrow\infty$ 的 $g_{tt}=-1$ 可以消除 t 坐標 $t'=t'(t)$ 中的任意性。這樣，$(\partial/\partial t)_{r\theta\phi}$ 可由自然的要求（與任意選擇的 θ, ϕ 無關）唯一地確定，並且，無論什麼時候都希望作進一步的物理假設 (v)† 與時間無關的幾何，這可適當的重新表爲 $\partial g_{\mu\nu}/\partial t=0$。

第二十四章　脈衝星和中子星；類星體和超大質量恒星

走啊，令人折服的創造者，去攀登科學指引的高峰，
走啊，去測量地球，稱衡太空，闡明潮汐；
指令行星在什麼軌道上運行，
修正古老的時間，校準太陽。

Alexander Pope (1733)

§24.1 概　述

相對論起重要作用的恒星位形的類型

已經確認相對論效應起重要作用的五種恒星位形是：白矮星，中子星，黑洞，超大質量恒星，以及相對論性星團。在框 24.1 中概括了與每一類位形有關的關鍵事實；而最重要的內容則在本章正文中敍述（在 §24.2 敍述白矮星；在 §24.2 和 §24.3 敍述中子星以及與它有關的脈衝星；在 §24.4 和 §24.5 敍述超大質量恒星以及可能與它有關的類星體和星系核；在 §24.6 敍述相對論性星團；黑洞的詳細討論推遲到第33章）。

Zel'dovich 和 Novikov (1971) 所著的《恒星和相對論》一書，對於相對論性恒星理論的所有這些天體物理應用，提供了清晰而極爲完整的論述。從某種意義上說，該書可以看作是本書的姐妹篇；它選取了本書討論的全部課題，側重於天體物理，而本書側重於引力。本章的用意只是把可在《恒星和相對論》一書中找到的材料給予讀者一個簡短的述評。

（接第621頁）

框 24.1　相對論效應起重要作用的恒星位形

［關於全部這些課題的詳盡分析和參考文獻，參看 Zel'dovich 和 Novikov (1971)。］

A. 白矮星

這是約一個太陽質量的恒星，半徑約 5,000 公里，密度約 10^6克／厘米^3～1 噸／厘米^3；支撐它們對抗引力的是簡併電子的壓强；核燃料已停止燃燒，並隨着輻射其剩餘的熱能貯存而逐漸冷却。

從理論上弄懂它們之前很久，就曾有天文學的觀測和研究。

歷史要點：

1926年 8 月，Dirac (1926) 追隨 Fermi (2 月)，系統闡明了 Fermi-Dirac 統計。

1926 年 12 月，R. H. Fowler (1926) 用 Fermi-Dirac 統計說明白矮星的性質；他祈求電子簡併壓强支持恒星反抗向內拉的引力。

1930 年，S. Chandrasekhar (1931a,b) 考慮電子簡併狀態方程中的狹義相對論效應，計算了白矮星模型；他發現，白矮星不能重於 ～1.2 個太陽質量（「Chandrasekhar 極限」）。

1932年，L. D. Landan (1932) 初步解釋了 Chandrasekhar 極限。

1949 年，S. A. Kaplan (1949) 導出關於大質量白矮星質量－半徑曲線的廣義相對論效應，並得出當半徑變得小於 1.1×10^3 公里時，廣義相對論可能會引起不穩定性。

廣義相對論在白矮星中的作用：

對結構的影響可以忽略；

對穩定性，對脈動頻率，以及對 Chandrasekhar 極限（卽大質量白矮星）附近的質量-半徑曲線的形式有重要影響。電子俘獲也很重要。參看，例如，Zel'dovich 和 Novikov (1971); Faulkner 和 Gribben (1968)。

B. 中子星

這是約一個太陽質量的恒星，半徑約10公里，密度約10^{14}克／厘米^3（與原子核密度相同）；靠簡併中子的壓强和核子－核子的强相互作用力對抗引力來支撐；核燃料不再燃燒；輻射的能量是轉動能和剩餘的內部熱能貯存。

1934年，理論計算預言它存在，但直到1968年還沒有觀測上證實它存在。

歷史要點：

1932 年，Chadwick (1932) 發現中子。

1933-34 年，Baade 和 Zwicky(1934a,b,c) (1)創造了中子星的概念；(2)鑒定了一類新的天文對象，他們稱之爲「超新星」；(3)假設通過正常恒星的坍縮形成中子星可以產生超新星。（見圖 24.1。）

1939 年，Oppenheimer 和 Volkoff (1939) 首先詳細計算了中子星的結構；在此過程中，他們提出了廣義相對論恒星結構理論的基礎，如第23章所述。（見圖 24.1。）

1942 年，Duyvendak (1942) 和 Mayall 與 Oort (1942) 推斷蟹狀星雲就是中國天文學家在公元 1054 年觀察到的超新星遺跡。Baade

(1942) 和 Minkowskii (1942) 辨認出在蟹狀星雲中心附近的「西南星（目視雙星）」大概就是在1054年爆發的恒星（坍縮的）遺跡（見卷首插圖）。

1967 年， Hewish 等 (1968) 發現了脈衝星。

1968 年， Gold (1968) 提出脈衝星是旋轉的中子星的觀念；接着觀測證實了這個設想。

1969 年 Cocke, Disney 和 Taylor (1969) 發現蟹狀星雲的「西南星」是一顆脈衝星，從而確定了超新星、中子星和脈衝星之間的聯繫。

廣義相對論在中子星中的作用：

對結構和振盪周期有重要影響（多達因子 2）；

引力輻射的反作用可能是阻尼非徑向振盪的主要作用力。

C. 黑洞

這是當恒星坍縮到尺度小於其幾何質量的兩倍 ($R<2M\sim(M/M_\odot)\times 3$ 公里) 時產生的客體，由此產生了强烈的空時曲率，以致它不再與外部世界有聯繫（在第33章和第34章詳盡地分析黑洞）。

每一個接受廣義相對論的人都發現，無論如何都不可避免地預料，在銀河系中必定存在着黑洞。這種預言決不取決於形成黑洞的坍縮的複雜性，也決不取決於高密度物質的任何未知的性質。但是，黑洞的存在還未被觀測所證實。

歷史要點：

1795 年， Laplace (1795) 注意到，根據 Newton 引力和 Newton 的光的微粒說，光無法從一質量足夠大的客體逃逸（圖24.1）。

1939 年，Oppenheimer 和 Snyder (1939) 用廣義相對論計算了無壓强流體均匀球的坍縮，並發現該球切斷了它本身與宇宙其餘部分的聯繫。這是關於黑洞怎樣才能形成的首次計算（圖 24.1）。

1965 年，黑洞物理深入理論研究的時代開始了。

廣義相對論在黑洞物理學中的作用：

在 Newton 理論中不可能有合理的黑洞計算。黑洞物理學自始至終要求 Einstein 的引力描述。

D. 超大質量恒星

這是質量在 10^3 和 10^9 太陽質量之間的恒星，由密度低於正常恒星的熱等離子體構成；它主要由光子壓强支撐，光子被捕集在等離子體中並與它達到熱平衡；在它演化的某些階段燃燒核燃料（氫）。

理論計算認爲（但並不完全可信），超大質量恒星存在於星系和類星體的中心，也可能在別處。超大質量恒星可能是某些類星體和星系核的能量來源。然而，關於它們是否存在以及它們在宇宙中的作用（如果存在的話），天文觀測還沒有得出確切的證據。

歷史要點：

1963 年，Hoyle 和 Fowler (1963a,b) 想到超大質量恒星的觀念，計算了它們的性質，並假設它們可能與星系核和類星體相聯繫。

1963-64 年，Chandrasekhar (1964a,b) 和 Feynman (1964) 發展了廣義相對論的恒星脈動理論；並且，Feynman 用它證明，超大質量恒星盡管在結構上是 Newton 的，但受到廣義相對論不穩定性的影響。

1964 年和以後，許多作者的計算使 Hoyle 和 Fowler 的觀念更精細和擴展了，但並未得出任何引人注目的突破。

廣義相對論在超大質量恒星中的作用：

對結構的影響可以忽略，但致密、快速旋轉、類似盤狀位形的極端情形除外［見Bardeen 和 Wagoner(1971); Salpeter 和 Wagoner (1971)］。

對穩定性有重要影響。

E. 相對論性星團

這是致密的星團，Newton 理論的相對論修正改變了它的結構。

理論計算認爲相對論性星團可能在某些星系和類星體的核中形成，但也很可能並非如此；如果它們試圖形成的話，那麼它們很可能在形成期間就因恒星-恒星碰撞而被破壞了，恒星-恒星碰撞會把星團轉化爲超大質量恒星或致密的恒星和氣體的密集體。迄今爲止，關於相對論星團是否存在，天文觀測還沒有得到確切的證據。

歷史要點：

1965 年，Zel'dovich 和 Podurets (1965) 想到相對論性星團的觀念，應用廣義相對論和動力論發展了相對論性星團結構的理論(參看§25.7)，並推測它們的穩定性。

1968 年，Ipser (1969) 發展了星團的穩定性理論，並指出（與 Zel'dovich-Podurets 的推測相符），當它變得太致密時，星團開始坍縮形成黑洞。

廣義相對論在星團中的作用：

當從中心到無窮遠的引力紅移超過$z_c \equiv \Delta\lambda/\lambda \sim 0.05$ 時，對結構有重要影響。

當中心紅移達到 $z_c \approx 0.50$ 時，引起星團坍縮，形成黑洞。

§ 24.2　恒星演化的終點

在正常的演化階段之後，恒星經過各種各樣的過程「死亡」了。有些恒星爆發了，散布在星際介質之中；另一些收縮成白矮星狀態；而另一些——按照流行的理論——坍縮成中子星狀態，或者更進一步，坍縮爲黑洞。盡管目前對於恒星如何動力學演化到其終態還所知甚少，但對它們的終態已有較多的認識。終態包括彌散的星雲，此處對它不感興趣；冷恒星位形，這是本節的主題；以及「黑洞」，第七篇的主題。

（接第624頁）

JANUARY 15, 1934 PHYSICAL REVIEW VOLUME 45

Proceedings of the American Physical Society

MINUTES OF THE STANFORD MEETING, DECEMBER 15–16, 1933

38. Supernovae and Cosmic Rays. W. BAADE, *Mt. Wilson Observatory*, AND F. ZWICKY, *California Institute of Technology*.—Supernovae flare up in every stellar system (nebula) once in several centuries. The lifetime of a supernova is about twenty days and its absolute brightness at maximum may be as high as $M_{\text{vis}}=-14^{M}$. The visible radiation L_v of a supernova is about 10^8 times the radiation of our sun, that is, $L_v=3.78\times10^{41}$ ergs/sec. Calculations indicate that the total radiation, visible and invisible, is of the order $L_r=10^7L_v=3.78\times10^{48}$ ergs/sec. The supernova therefore emits during its life a total energy $E_r\geq10^6L_r=3.78\times10^{54}$ ergs. If supernovae initially are quite ordinary stars of mass $M<10^{34}$ g, E_r/c^2 is of the same order as M itself. In the *supernova* process *mass in bulk is annihilated*. In addition the hypothesis suggests itself that *cosmic rays are produced by supernovae*. Assuming that in every nebula one supernova occurs every thousand years, the intensity of the cosmic rays to be observed on the earth should be of the order $\sigma=2\times10^{-3}$ erg/cm² sec. The observational values are about $\sigma=3\times10^{-3}$ erg/cm² sec. (Millikan, Regener). With all reserve we advance the view that supernovae represent the transitions from ordinary stars into *neutron stars*, which in their final stages consist of extremely closely packed neutrons.

FEBRUARY 15, 1939 PHYSICAL REVIEW VOLUME 55

On Massive Neutron Cores

J. R. OPPENHEIMER AND G. M. VOLKOFF
Department of Physics, University of California, Berkeley, California

(Received January 3, 1939)

It has been suggested that, when the pressure within stellar matter becomes high enough, a new phase consisting of neutrons will be formed. In this paper we study the gravitational equilibrium of masses of neutrons, using the equation of state for a cold Fermi gas, and general relativity. For masses under $\frac{1}{3}\odot$ only one equilibrium solution exists, which is approximately described by the nonrelativistic Fermi equation of state and Newtonian gravitational theory. For masses $\frac{1}{3}\odot<m<\frac{3}{4}\odot$ two solutions exist, one stable and quasi-Newtonian, one more condensed, and unstable. For masses greater than $\frac{3}{4}\odot$ there are no static equilibrium solutions. These results are qualitatively confirmed by comparison with suitably chosen special cases of the analytic solutions recently discovered by Tolman. A discussion of the probable effect of deviations from the Fermi equation of state suggests that actual stellar matter after the exhaustion of thermonuclear sources of energy will, if massive enough, contract indefinitely, although more and more slowly, never reaching true equilibrium.

圖 24.1
天體物理舞台上的兩個重要來客：
中子星（1933）和黑洞（1795，1939）。在廣義相對論之前，對每一個都沒有適當的計算。

EXPOSITION
DU SYSTEME
DU MONDE,

PAR PIERRE-SIMON LAPLACE,
de l'Institut National de France, et
du Bureau des Longitudes.

TOME SECOND.

A PARIS,

De l'Imprimerie du CERCLE-SOCIAL, rue du
Théâtre Français, N°. 4.

L'AN IV DE LA RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

aussi sensibles à la distance qui nous en sépare ; et combien ils doivent surpasser ceux que nous observons à la surface du soleil ? Tous ces corps devenus invisibles, sont à la même place où ils ont été observés, puisqu'ils n'en ont point changé, durant leur apparition ; il existe donc dans les espaces célestes, des corps obscurs aussi considérables, et peut être en aussi grand nombre, que les étoiles. Un astre lumineux de même densité que la terre, et dont le diamètre serait deux cents cinquante fois plus grand que celui du soleil, ne laisserait en vertu de son attraction, parvenir aucun de ses rayons jusqu'à nous ; il est donc possible que les plus grands corps lumineux de l'univers, soient par cela même, invisibles. Une étoile qui, sans être de cette grandeur, surpasserait considérablement le soleil ; affaiblirait sensiblement la vitesse de la lumière, et augmenterait ainsi l'étendue de son aberration. Cette différence dans l'aberration des étoiles ; un catalogue de celles qui ne font que paraître, et leur position observée au moment de leur éclat passager ; la détermination de toutes les étoiles changeantes,

SEPTEMBER 1, 1939 PHYSICAL REVIEW VOLUME 56

On Continued Gravitational Contraction

J. R. OPPENHEIMER AND H. SNYDER
University of California, Berkeley, California

(Received July 10, 1939)

When all thermonuclear sources of energy are exhausted a sufficiently heavy star will collapse. Unless fission due to rotation, the radiation of mass, or the blowing off of mass by radiation, reduce the star's mass to the order of that of the sun, this contraction will continue indefinitely. In the present paper we study the solutions of the gravitational field equations which describe this process. In I, general and qualitative arguments are given on the behavior of the metrical tensor as the contraction progresses: the radius of the star approaches asymptotically its gravitational radius; light from the surface of the star is progressively reddened, and can escape over a progressively narrower range of angles. In II, an analytic solution of the field equations confirming these general arguments is obtained for the case that the pressure within the star can be neglected. The total time of collapse for an observer comoving with the stellar matter is finite, and for this idealized case and typical stellar masses, of the order of a day; an external observer sees the star asymptotically shrinking to its gravitational radius.

定義「恒星演化終態」和「冷的催化物質」

從原則上說，「恒星演化終態」術語的含義是什麼呢？從包含給定重子數 A 的恒星出發，並令其演化到熱核燃燒的絕對的、燒完的終點（A 個重子系統的可能的最小質量-能量）。如果正常的熱核燃燒過程太緩慢，則用催化劑加速。如果出現爆發，則設法聚集逸出的物質，提取其動能，並使之落回到系統上。多次重複這種行動直到燒光爲止（系統一部分的冷 Fe^{56} 處於適度的壓强下；其他種類的核在更靠近中心的區域內；自始至終「冷物質催化劑熱核燃燒的終點」）。最後以系統處於其絕對最低能量狀態，並消除了全部角動量，提取了全部熱量而告終，因此系統處於絕對零度的溫度並具有零角速度。這樣一種「死亡」的系統，依據它的質量和以前的歷史（對於一定的 A 值有兩個不同的能量最小值），以冷恒星位形（中子星或「白」矮星）或「死亡」的黑洞而告終。

冷的催化物質的狀態方程

分析冷恒星位形需要狀態方程。溫度已確定爲零；從原則上說，核的成分由密度唯一確定；因此，一旦確定了密度，壓强也就唯一地確定了［「冷的催化物質」的狀態方程 $p(\rho)$］。

天文學家觀測到的白矮星和中子星並非眞正地由冷的催化物質構成。但是，其中的物質足夠接近熱核演化的終點，也足夠的冷，以致可以在很好的精度下把它理想化爲冷的和催化的（見 §23.4）。

冷的催化物質的狀態方程 $\rho(p)$ 如圖 24.2 所示。這種形式的狀態方程是 Harrison 和 Wheeler 在1958年建立的。新近建立的其他形式［參看 Cameron (1970) 和 Baym, Bethe 與 Pethick (1971)］在低於核密度 $\rho < 3\times10^{13}$ 克／厘米³的密度下，與 Harrison-Wheeler 形式幾乎等同。在核密度和超核密度下，由於對核子-核子相互作用有不同的假設，所有的形式都有所不同。與狀態方程一起，圖 24.2 中還顯示了冷恒星模型的一些性質，這些冷恒星模型是通過結構方程 (23.28) 的數值積分由狀態方程建立的。

狀態方程可以循着一些變換來理解，這些變換是作爲樣品的冷催化物質被壓縮到越來越高的密度時發生的。在壓縮的每一階段，每一種可能的熱核反應都被催化到其終點，並且由此產生的熱能都被排除了。

當樣品處於零壓强時，它是一個純的冷 Fe^{56} 球，因爲在所有的核中 Fe^{56} 是最緊束縛的。它的密度爲 7.86 克／厘米³。隨着樣品被壓縮，它的內部壓强最初由正常的固態力提供；但原子立即緊密地凍結在一起，以致電子完全忘却了它們的核開始形成簡併 Fermi 氣體。這時密度已經達到了 $\rho=10^5$ 克／厘米³，價力完全可以忽略，簡併電子壓强占支配地位，壓縮指數 γ（見圖 24.2的說明）爲 5/3，這是非相對論性簡併 Fermi 氣體的值。在 10^5 和 10^7

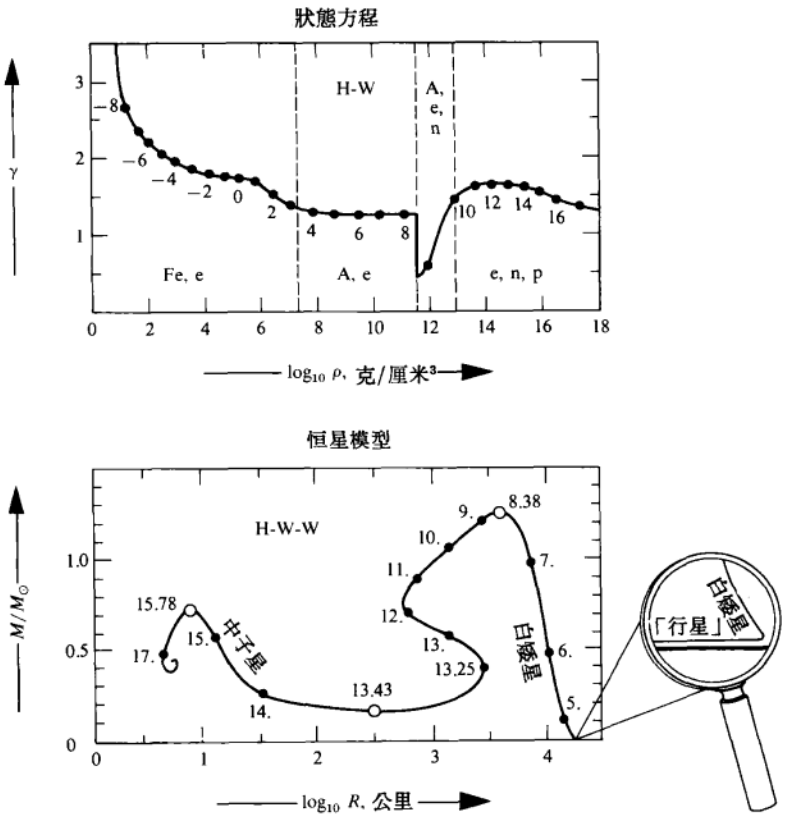


圖 24.2

在熱核演化絕對終點的冷物質的 Harrison-Wheeler 狀態方程，以及相應的 Harrison-Wakano-Wheeler 恒星模型。狀態方程以「壓縮指數」（作爲質量-能量密度 ρ 的函數）的曲線的形式顯示出來

$$\gamma = \frac{\rho+p}{p}\,\frac{dp}{d\rho}。$$

（小的 γ 相應於比較容易壓縮。）曲線用壓强［以克／厘米³爲單位，與 ρ 的單位相同；注意，p(克／厘米³)=(1/c^2)×p（達因／厘米²)］的對數 $\log_{10} p$ 參量化。物質的化學成分作爲密度函數標明如下：Fe, Fe^{56} 核；A, 中子多於 Fe^{56} 的核；e, 電子；n, 自由中子；p, 自由質子。

熱力學第一定律［(22.6) 式］用於冷物質（零熵）得 $d\rho/(\rho+p)=dn/n$；即

$$n = \frac{\rho+p}{\mu_{Fe}/56}\exp\left(-\int_0^p \frac{dp}{\rho+p}\right)。$$

此處一個 Fe^{56} 原子的靜止質量 μ_{Fe} 是 $\rho+p\approx\rho$ 和 $n/56$ 的比值在零密度下的極限。由此式及 $p(\rho)$ 的知識（見圖）即可算出 $n(p)$。

平衡位形由作爲半徑R函數的總質量-能量M的曲線表示。（定義 R 使 $4\pi R^2$ 爲恒星的表面積。）$M(R)$曲線用中心密度（以克／厘米³量度）的對數 $\log_{10}\rho_c$ 參量化。對於小的擾動，只有沿曲線兩個分支的位形是穩定的，從而可能在自然界中存在：白矮星 $\log_{10}\rho_c<8.38$，中子星 $13.43<\log_{10}\rho_c<15.78$（見框 26.1）。

關於狀態方程和平衡位形兩者的更詳盡的討論，參看 Harrison, Thorne, Wakano, 和 Wheeler (1965)；又，狀態方程的最新目錄，參看 Hartle 和 Thorne (1968)。

克／厘米³之間，提供壓强的電子逐漸變爲相對論性簡併，γ 接近 4/3 。高於 $\rho=1.4\times10^7$ 克／厘米³時，62 個 Fe^{56}_{26} 核的靜止質量加上44個電子的靜止質量加上在 Fermi 海洋頂部的44個電子的大量 Fermi 動能，超過了56個 Ni^{62}_{28} 核的靜止質量。結果，作爲催化樣品的物質被壓縮到越過了 $\rho=1.4\times10^7$ 克／厘米³，核反應

$$62\ Fe^{56}_{26}\ \left(\begin{matrix}\text{高度壓縮的}\\ \text{中性原子}\end{matrix}\right)\longrightarrow 56\ Ni^{62}_{28}\ \left(\begin{matrix}\text{高度壓縮的}\\ \text{中性原子}\end{matrix}\right) \tag{24.1}$$

趨向它的終點，伴隨着能量釋放。越過該點之後，繼續壓縮，增高的電子 Fermi 能引起類似於 (24.1) 式的新的核反應，只是涉及不同的核。在這些反應中，越來越多的電子被吞沒形成了新的核，核中的中子越來越多。當密度達到 $\rho=3\times10^{11}$ 克／厘米³時，核是高度富於中子的 (Y^{122}_{39})，以致中子開始從中漏出。現在，物質在一個短時間內變得高度壓縮 ($3\times10^{11}\leq\rho\leq4\times10^{11}$)，因爲絕大部分剩餘的電子極快地被正在洩漏的核吞沒。超過 $\rho\sim4\times10^{11}$ 克／厘米³，自由中子變得很豐富並且它們的簡併壓强超過了電子的。進一步壓縮到 $\rho\sim10^{13}$ 克／厘米³，剩下的核完全蛻變了，留下的樣品幾乎是純中子，且 $\gamma=5/3$，這是非相對論性簡併 Fermi 氣體的值。剛好有足夠多的簡併電子與中子混合以阻止中子衰變，並且剛好有足夠多的質子以維持電中性。壓縮到 $\rho\sim10^{13}$ 克／厘米³之後，樣品已被置於核密度範圍，對這種物質的物理學了解甚少。Harrison-Wheeler 形式的狀態方程不顧處於和超過核密度時所有的核子-核子相互作用；它把物質理想化爲沒有相互作用的中子、質子和電子的混合物而中子占優勢；它指出，當中子爲非相對論性時，壓縮指數爲 5/3，但當它們達到相對論性 Fermi 能之後壓縮指數爲 4/3。其他形式的狀態方程試圖用各種方式考慮核子-核子相互作用［參看，Cameron (1970), Baym, Bethe, 和 Pethick (1971), 以及其中所引用的許多參考文獻］。

冷的催化物質的平衡位形：

相應於中心密度 ρ_c 的每一個值，有一種恒星的平衡位形。平衡嗎？是的；但是，這種平衡穩定嗎？穩定性的研究（第26章，特別是框26.1）表明，對於小的徑向擾動許多模型是不穩定的，它導致引力坍縮。只有在 $\log_{10}\rho_c<8.4$ 範圍內的白矮星，以及在 $13.4\leq\log_{10}\rho_c\leq15.8$ 在範圍內的中子星是穩定的。對於 $\log\rho_c$ 值在 8.4 和 13.4 之間的範圍內，不穩定性是由以下幾個因素聯合造成的(1)引力的相對論性增强，和(2)由於原子核捕獲電子，漏出中子引起的物質高度壓縮。中子星是穩定的，理由很簡單。中子占優勢的物質是很難壓縮

(1)形態和穩定性

的，甚至相對論性增强的引力也無法征服它。在 $\log_{10}\rho_c \sim 15.8$ 以上，引力强到足以戰勝核物質的壓强，從而恒星都是不穩定的。［對於除白矮星和中子星外，存在第三種穩定平衡位形的可能性，參看 Gerlach (1968)一然而他認爲未必可靠。］

(2)**白矮星**

白矮星的質量低於 $1.2M_\odot$，半徑在～3,000公里和～20,000公里之間。它幾乎完全靠簡併電子氣的壓强支撐。Newton 結構的相對論偏離不到百分之一，但從 $\rho_c \approx 10^8$ 克／厘米^{3}到白矮星家族的上限 $\rho_c = 10^{8.4}$ 克／厘米^3，關於穩定性和脈動的相對論效應是很重要的［參看，例如，Faulkner 和 Gribbin (1968)］。白矮星模型的特徵是，與計算中採用哪種形式的狀態方程完全無關。

(3)**中子星**

中子星的特徵是對所用的狀態方程有適度的依賴。然而，所有形式的狀態方程都會導致質量以及中心密度的上限和下限。恰當的低限可能位於下述範圍

$$\begin{aligned} &13.4 \lesssim \log_{10}\rho_{c\text{極小}} \lesssim 14.0, \\ &0.05M_\odot \lesssim M_{\text{極小}} \lesssim 0.2M_\odot; \end{aligned} \tag{24.2}$$

恰當的高限可能位於下述範圍

$$\begin{aligned} &15.0 \lesssim \log_{10}\rho_{c\text{極大}} \lesssim 16.0, \\ &0.5M_\odot \lesssim M_{\text{極大}} \lesssim 3M_\odot \end{aligned} \tag{24.3}$$

［見 Rhoades (1971)］。中子星的典型半徑在～6 公里和～100 公里之間。Newton 結構的相對論偏離很大，有時超過百分之五十。

看來可以肯定：沒有一種冷的恒星位形能夠具有超過～$5M_\odot$的質量[*Rho*-ades (1971)]（根據 Harrison-Wheeler 狀態方程是 $1.2M_\odot$，圖 24.2）。任何比這更重的恒星必須使它的質量減少到這個極限之下，它才能不引人注目地逐漸消失，否則相對論性引力最終會把它引向災變性的引力坍縮，經過白矮星半徑，經過中子星半徑，成爲幾公里大小的黑洞（見第七篇）。

(4)**黑洞**

§ 24.3　脈衝星

理論預言，一個比 Chandrasekhar 極限 $1.2M_\odot$ 更重的恒星，耗盡了它核心中的核燃料並把它的核心壓縮到白矮星密度時，不穩定性會把恒星推向災變性坍縮。核心自身爆聚直到核子-核子的推斥使爆聚停止爲止。結果是中子

通過恒星坍縮，中子星誕生了

星，除非核心質量很大，以致引力克服了核子-核子間的排斥並把恒星引向形成黑洞。並非恒星的全部質量都變成了中子星或黑洞。大部分或許絕大部分質量都通過伴隨着坍縮的劇烈行動拋射到星際空間——這些劇烈行動是由於閃光的核燃燒、激波，以及通過中微子輸送的能量引起的（「坍縮點燃了恒星中心具有爆炸性的枯柴」）。

新生中子星的動力學

引力理論對坍縮的核心比拋出的外殼更有興趣。假定核心的質量很小足以避免黑洞的結局，核心起初是熾熱的、急劇脈動的、快速旋轉的核物質球以及很强的嵌入磁場（見圖 24.3）。脈動必定很快就消逝了。它們輻射了巨大的引力輻射流，並且輻射的反作用使之在～1 秒的特徵時間內衰減了［見 Wheeler (1966); Thorne (1969a)］。此外，由於核心內部 Fermi 能的增減，脈動往復地推拉着基本粒子起反應；這些粒子的反作用可將脈動能轉化爲熱，轉化的快慢與因引力而輻射的脈動能大致相同。［參看 Langer 和 Cameron (1969)；細節和參考文獻還可參看 Zel'dovich 和 Novikov (1971) 的 §11.5］

中子星作爲脈衝星

幾秒後的結果是，快速的離心旋轉使中子星及强大（也許是 10^{12} 高斯）的磁場變得扁平；全部脈動過去了。如果恒星從軸對稱變形（例如因離心力或非對稱磁場），那麼它的旋轉會引起穩定逸出的引力波的流，它反過來對恒星的作用將消除轉動能。無論這種情況是否出現，旋轉的磁場本身要輻射電磁波。它減緩了旋轉並把能量傳輸到周圍的爆發氣體雲（星雲）之中。［參看，Pacini (1968), Goldreich 和 Julian (1968)，基本的討論可參看 Ostriker 和 Gunn (1969)。］

不知爲什麼（沒有人詳盡地了解是怎麼回事），旋轉的中子星發出的相干射電波和光射向遠處的空間。每當波束掠過地球時，光學和射電望遠鏡就看到一個輻射的脈衝。光與射電波是同步發出的，但光脈衝到達地球要早一些（對於蟹狀星雲中的脈衝星，約早 1 秒），這是因爲沿途的等離子體妨礙了射電波。這就是爲絕大多數天體物理學家所接受的 1973 年的脈衝星理論的本質。

脈衝星輻射作爲研究中子星的手段

儘管並不了解相干輻射的機制，但脈衝星的輻射仍然是中子星實驗研究的有力手段。任何影響恒星轉動快慢的因素，即便是很小的影響（小到 10^{-9} 部分的變化），都將對到達地球的脈衝的計時產生可以測量出來的不規則性。如果按 1973 年的理論預期，恒星的外殼和覆蓋物是晶狀的，那麼它們就可能經受裂縫、斷層，或滑移（「星震」），這些將使轉動慣量變化，從而使轉動快慢發生變化。落在恒星上的碎片也將使它的轉動發生變化。無論哪個原因，在這類擾動之後，恒星的轉動可能有片刻的不同；至於它怎樣才能回復嚴格的轉動，這可能依賴於在它內部深處的諸如超流動性之類的現象。因而，脈衝星計時

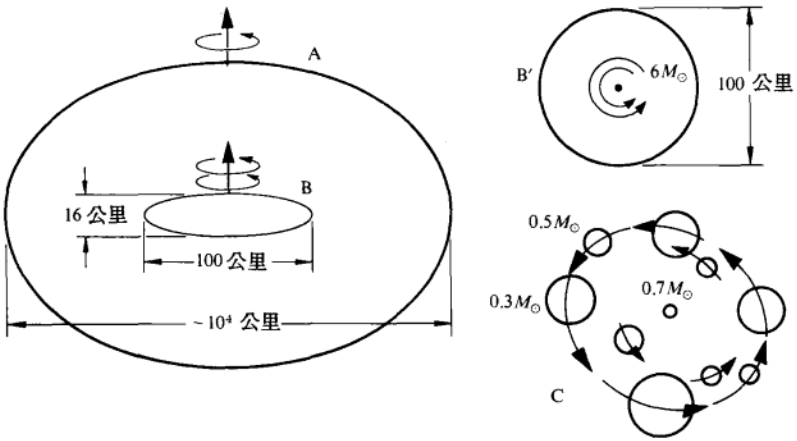


圖 24.3

「坍縮，追踪，並納入劇本」［引自 Ruffini 和 Wheeler (1971b) 的簡圖］。

- 恒星具有白矮星的核心 (A), 緩慢地轉動，
  - 直接按天體物理演化，
  - 到達引力不穩定的點，
  - 坍縮，以及
  - 作爲快速旋轉的中子星薄餅 (B, B′) 而告終。
- 然後，它碎裂了 (C), 這是因爲它具有太多的角動量，坍縮爲簡單的穩定客體。如果中子星薄餅的物質是不可壓縮流體，那麼這些碎片與衆所周知的常常觀測到的現象（「液滴形成」）有密切的關係。然而，中子星更重，更小，人們洞察了這一點，劇本的下一個篇章必然要受到修正或改善。今天人們還完全無法保證碎裂的出現；然而可以假設碎裂如下。
- 碎裂經引力輻射消耗了能量和角動量。
- 隨着它們一個一個地旋轉起來，它們又結合了（「追踪和納入劇本」）。
- 每這樣納入一次，就出現一個引力輻射的脈衝。
- 碎裂的碎片落在結合在一起的物體上（中子星或黑洞，視情況而定），改變了它們的角動量。
- 結局是，隨着最後的引力輻射脈衝，性質不同的中子星或黑洞或兩者結合成一個這樣的坍縮物體。
- 全部劇本的細節從一個演化的恒星到另一個時完全不同，它取決於
  - 恒星的核心質量，以及
  - 該核心的角動量。
- 因此，對於這兩個參量的不同值，必須畫出完全不同的圖畫。
- 甚至對本圖中所採用的這些參量值，本圖充其量只是定性正確的。
- 看來，對於任何精選劇本教程的任何確切預測，詳盡的計算機分析是必不可少的。

的數據最終能給出有關中子星內部和外殼的信息，並且因此(與理論結合)能給出有關它的質量和半徑的信息。這些問題在Ruderman (1972)以及Zel'dovich和 Novikov (1971) 的評論文章中有詳盡的討論。

§ 24.4 超大質量恒星和恒星的不穩定性

Newton 恒星的穩定性理論

當一質量爲M的 Newton 恒星按其基本模式絕熱地振盪時，它的半徑的變化 δR 服從諧振子方程

$$M\delta\ddot{R}=-k\delta R\,, \tag{24.4}$$

其中「彈簧常數」k依賴於恒星的平均絕熱指數$\bar{\Gamma}_1$ [憶及：$\Gamma_1\equiv(n/p)\,(\partial p/\partial n)_{\text{恒定的熵}}$]，依賴於它的引力勢能 Ω，依賴於其質量分布的二階矩的跡 $I=\int\rho r^2 d\mathcal{V}$ 以及依賴於其質量M,

$$k=3M(\bar{\Gamma}_1-4/3)\,|\Omega|/I \tag{24.5}$$

(見框 24.2)。如果 $\bar{\Gamma}_1>4/3$，則 Newton 恒星是穩定的並振盪着；如果$\bar{\Gamma}_1<4/3$，則恒星是不穩定的並將坍縮或爆發，這取決於它的初條件和全部唯能說。這個結果是 Newton 恒星理論的一條著名定理——但僅與絕熱振盪有關。

框 24.2 Newton 恒星的振盪

以下是徑向振盪最低級模式的體積平均分析法。這種分析對於理解恒星的定性行爲和穩定性是有用的。[它的廣泛利用可參看 Zel'dovich 和 Novikov (1971)。] 然而，爲了得出精確的定量結果，還必須作更詳盡的分析 [參看，例如，Ledoux 和 Walraven (1958)；也可參看本書第26章]。

1.令M=恒星的總質量

R=恒星的半徑

$\bar{\rho}$=平均密度$=(3/4\pi)M/R^3$

$\bar{p}$=平均壓强

$\bar{\Gamma}_1$=平均絕熱指數$=(\bar{n}/\bar{p})(\partial\bar{p}/\partial\bar{n})_{\text{絕熱}}$

$=(\bar{\rho}/\bar{p})(\partial\bar{p}/\partial\bar{\rho})_{\text{絕熱}}$ 在 Newton 極限，其中 ρ=常數$\times n$。

2.其次，在平衡的恒星中，平均壓强-浮力 $\bar{F}_{\text{浮}}$ 和相抗衡的引力 $\bar{F}_{\text{引}}$ 爲

$$\bar{F}_{\text{浮}}=\bar{p}/R$$
$$=\bar{F}_{\text{引}}=\bar{\rho}M/R^2=(4\pi/3)\bar{\rho}^2R\,。$$

3. 當振盪着的恒星膨脹或收縮時，其半徑爲 $R+\delta R$ ，從而它的平均密度將變爲

$$\bar{\rho}+\delta\bar{\rho}=(3/4\pi)M[R^{-3}+\delta(R^{-3})]=\bar{\rho}-3(\bar{\rho}/R)\delta R,$$

其平均壓强將爲

$$\bar{p}+\delta\bar{p}=\bar{p}+(\bar{p}/\bar{\rho})\bar{\Gamma}_1\delta\bar{\rho}=\bar{p}-3(\bar{\Gamma}_1\bar{p}/R)\delta R。$$

相應的力的改變將爲

$$\delta\bar{F}_{浮}=\frac{\delta\bar{p}}{R}-\frac{\bar{p}}{R^2}\delta R=-(3\Gamma_1+1)\frac{\bar{p}}{R}\frac{\delta R}{R}=-(3\bar{\Gamma}_1+1)\bar{F}_{浮}\left(\frac{\delta R}{R}\right),$$

$$\delta\bar{F}_{引}=\left(\frac{4\pi}{3}\right)(2\bar{\rho}R\delta\bar{\rho}+\bar{\rho}^2\delta R)=\left(\frac{4\pi}{3}\bar{\rho}^2R\right)\left(-5\frac{\delta R}{R}\right)=-5\bar{F}_{引}\left(\frac{\delta R}{R}\right)。$$

結果，回復力爲（憶及：$\bar{F}_{浮}=\bar{F}_{引}$）

$$\delta\bar{F}_{引}-\delta\bar{F}_{浮}=3\left(\bar{\Gamma}_1-\frac{4}{3}\right)\bar{F}_{引}\frac{\delta R}{R}。$$

4. 這個回復力產生了一個加速度

$$\delta\bar{F}_{引}-\delta\bar{F}_{浮}=-\bar{\rho}\delta\ddot{R}。$$

因此，振盪的運動方程爲

$$\delta\ddot{R}=-3(\bar{\Gamma}_1-4/3)(4\pi/3)\bar{\rho}\delta R,$$

相應的「彈簧常數」 k 和振盪角頻率 ω 由 $\omega^2=4\pi(\bar{\Gamma}_1-4/3)\bar{\rho}$ 和 $k=M\omega^2$ 給出。

5. 更精確的分析（詳細的內容見練習 39.7，或另一種推導見框 26.2）得出下述改進的振盪頻率平方的公式

$$\omega^2=3(\bar{\Gamma}_1-4/3)|\Omega|/I,$$

$$\Omega=\left(\begin{matrix}\text{恒星的自}\\\text{引力能}\end{matrix}\right)=\frac{1}{2}\int\rho\Phi\,d\mathcal{V}=-\frac{1}{2}\int\frac{\rho\rho'}{|x-x'|}d\mathcal{V}\,d\mathcal{V}',$$

$$I=\left(\begin{matrix}\text{恒星質量分布}\\\text{二階矩的跡}\end{matrix}\right)=\int\rho r^2d\mathcal{V}。$$

6. 注意，$\bar{\Gamma}_1>4/3$ 相應於穩定振盪；$\bar{\Gamma}_1<4/3$ 相應於指數發展的坍縮或爆發。

在眞實恒星中，不存在嚴格的絕熱振盪。溫度振盪引起了相應的恒星不透明度的振盪和核燃燒速率的振盪。這些將把能量輸入氣體振盪或從中提取能量。

迄今觀測和研究的全部主序星質量都低於 $60M_\odot$。對於這樣小的質量，理論預言足夠低的溫度就能使氣體壓强超過輻射壓强，並且絕熱指數接近於非相對論性氣體的值 $\bar{\Gamma}_1 \approx 5/3$。這類恒星的振盪是穩定的。通常，振盪着的不透明度和燃燒速率的淨效應是從這種振盪中提取能量。於是，它將衰減。（造父變星的振盪是一個著名的例外。）

穩定性理論預期（$M>60M_\odot$ 的恒星有）「引擎驅動的振盪」並將迅速死亡

還沒有人見過質量大於約 $60M_\odot$ 的主序星。這可以說明如下。對大於 $60M_\odot$ 的質量，溫度將很高以致輻射壓强超過氣體壓强，從而絕熱指數 $\bar{\Gamma}_1$ 僅稍高於純輻射的值 4/3。結果恒星的「彈簧常數」雖爲正值却是很小的。在振盪向內衝擊時，中心溫度上升，核燃燒加快。（核燃燒速率按中心溫度的很高冪次增長；例如，在大質量恒星 HCNO 中，燃燒按 $\varepsilon_{\mathrm{HCNO}} \propto T_c^{11}$ 的比率釋放能量。）因爲彈簧常數如此的小，向內的衝擊持續很長時間，並且增强的核燃燒產生了重要的剩餘熱能和壓强。因此，與收縮時相比，向外衝擊時恒星的膨脹更爲强有力（「引擎」）。相繼的振盪激起越來越高的振幅。最後，計算推測，恒星或是爆發，或是通過它的强有力的振盪拋出足夠的質量而降到 $M \sim 60M_\odot$ 的臨界極限之下。因此，質量大於 $60M_\odot$ 的恒星的生命不夠長，以致天文學家很難有適當的機會去發現它們。

超大質量恒星可能存在

當然，「引擎作用」並不阻止大質量恒星形成並生活一個短時間，然後再分裂。這種可能性對超大質量恒星［M在 $10^3M_\odot$ 和 $10^9M_\odot$ 之間$\sim 0.01\times$（星系質量）］特別有興趣。儘管這種恒星由於它們的巨大質量和釋放的巨大爆發能量可能極爲稀少，但它們可能在宇宙中扮演重要的角色。此外，可以設想，像造父變星的振盪那樣，這類恒星的振盪可能以大振幅維持很長的時間（百萬年？），而非線性的阻尼過程將阻止它們進一步增長。

超大質量恒星中的相對論性不穩定性

理論預期，廣義相對論效應對超大質量恒星的振盪有强烈影響。在廣義相對論中，向內衝擊時作用在物質殼層上的「引力」的增量 $\delta F_{\text{引}}$ 比 Newton 理論要大，並且向外衝擊時，引力的減小量也要大。結果，引力的「有效指數」$\Gamma_{1\text{臨界}}$ 增加到 Newton 值 4/3 以上；於是

$$\begin{pmatrix}\text{重子數密度每單位分}\\ \text{數變化時「類壓强引}\\ \text{力」的分數增加}\end{pmatrix} \equiv \Gamma_{1\text{臨界}} = (4/3) + \alpha(M/R) + O(M^2/R^2), \quad (24.6)$$

式中α是量級爲1的常數，取決於恒星的結構（見框26.2）。爲了抵抗引力，只有恒星的相對論性物質的彈性：

$$\begin{pmatrix}\text{重子數密度每單位分}\\ \text{數變化時「類壓强阻}\\ \text{力」的分數增加}\end{pmatrix}=\bar{\Gamma}_1=\left\langle \frac{p}{n}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_s \right\rangle_{\substack{\text{對恒星作}\\ \text{有效平均}}}。\qquad (24.7)$$

恒星振盪的有效彈簧常數受到這兩個指數間微妙差距的支配：

$$\begin{aligned} k&=\begin{pmatrix}\text{有效}\\ \text{彈簧常數}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{「彈性力」}\\ \text{的貢獻}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{引力}\\ \text{的貢獻}\end{pmatrix}\\ &=3M(\bar{\Gamma}_1-\Gamma_{1\text{臨界}})\frac{|\Omega|}{I}\end{aligned}\qquad (24.8)$$

（在第26章導出）。引力有效指數的相對論性增長超過 4/3［(24.6) 式］會在人們原先預期爲穩定的條件下引起從穩定（正 k；振盪）到不穩定（負 k；爆發或坍縮）的轉變。對於超大質量恒星，Fowler 和 Hoyle (1964) 證明

$$\bar{\Gamma}_1=4/3+\zeta(M/M_\odot)^{-1/2},$$

式中ζ是量級爲1的常數。隨着新形成的超大質量恒星的向內收縮，加熱了，但還沒有熱到足以點燃它的核燃料，它越來越接近於反抗坍縮的不穩定性。除非燃燒停止了收縮，否則坍縮從半徑 $R_{\text{臨界}}$ 開始，$R_{\text{臨界}}$ 由下式給出

$$\bar{\Gamma}_1=4/3+\zeta(M/M_\odot)^{-1/2}=\Gamma_{1\text{臨界}}=4/3+\alpha M/R;$$

即

$$\begin{aligned} R&=(\alpha/2\zeta)(M/M_\odot)^{1/2}\times(\text{Schwarzschild 半徑})\\ &\sim 10^4\times(\text{Schwarzschild 半徑})\ \text{如果}\ M=10^8M_\odot。\end{aligned}$$

當恒星質量很大時，遠離 Schwarzschild 半徑之外就會出現相對論性不穩定性。相對論幾乎不改動恒星的結構；但是由於 Newton 振盪中 $\delta\bar{F}_{\text{引}}$ 和 $\delta\bar{F}_{\text{浮}}$ 之間的精細平衡（框24.2），對這些力的很小的相對論修正就能完全改變穩定性。

由轉動引起的暫時的穩定

實際上，超大質量恒星的情況遠比此處陳述的要複雜得多。轉動可以暫時反抗相對論性坍縮使之穩定。然而，在恒星喪失了超過臨界值 $J_{\text{臨界}}=M^2$

超大質量恒星演化和死亡的可能情景

（「極端的 Kerr 極限」，見第 33 章）的全部角動量之後；並且在它收縮到接近 Schwarzschild 半徑之後，轉動無助於延緩爆聚。取決於恒星的質量和角動量，恒星可能在相對論性坍縮開始的前後點燃它的燃料，並在爆聚前後經過 Schwarzschild 半徑。當燃料點燃時，它可能受到很大破壞，因爲即使恒星爾後不爆聚，它的絕熱指數將非常接近臨界值，並且燃燒可能把振盪驅向越來越高的振幅。這些過程是很複雜的，在 1973 年人們對此還遠沒有滿意的分析，爲了回顧已經知道什麼和已經做了什麼，讀者可查閱 Fowler (1966), Thorne (1967), 以及 Zel'dovich 和 Novikov (1971)。

本書第26章爲高階讀者介紹了廣義相對論的恒星脈動理論。

§ 24.5 類星體和星系核的爆發

超大質量恒星作爲類星體和星系核的可能能量來源

Hoyle 和 Fowler (1963a,b) 首先提出超大質量恒星作爲對星系核爆發的一種解釋。此後不久，發現了類星體，Hoyle 和 Fowler 很自然地要求他們的超大質量恒星也能解釋這些難題。甚至，在 1973 年本書完成之際，星系爆發或類星體是否由超大質量恒星所導致，在天文學界仍是一個有爭論的課題。因此，本書除以下評述外將避免這個爭論。

無論如何，造成類星體和星系爆發的原因，必定是一部質量極大（$M\sim10^6$ 到 $10^{10}M_\odot$）半徑很小（由光振盪推出，光經過這部機器的時間有時小於一天）的機器。這部機器應是粘附在一起的物體，即超大質量恒星；或是原始恒星和許多氣體的致密混合物。實際上這兩種可能性並沒有什麼不同。致密星團中恒星-恒星的碰撞引起恒星的聚結，逐漸構成一個或多個超大質量恒星 [Sanders (1970); Spitzer (1971); Colgate (1967)]。這樣，在它生存的某個階段，致密星團中的碰撞可能導致星系核或類星體；在後一階段，它可能由超大質量恒星導致；而在更後的階段，恒星可能坍縮而遺留下一個大質量黑洞（$10^6\sim10^9M_\odot$），但這是仍然「活」着和行動着的黑洞（第33章）。

其他可能的能源：致密星團，黑洞

§ 24.6 相對論性星團

相對論性星團

星系核的正常天體物理演化估計 [Sanders (1970); Spitzer (1971)] 在某些情況下會導致非常致密的星團，廣義相對論影響着它的結構和演化。相對論性星團的理論與第23章中發展的相對論性恒星的理論密切相關。恒星是頻繁碰撞的氣體分子羣；星團則是很少碰撞的恒星羣。但在穩定狀態，碰撞頻率相對而言並不重要。關於相對論性星團的理論，可參看本書 §25.7； Zel'dovich

和 Podurets (1965); Fackerell, Ipser, 和 Thorne (1969); Zel'dovich 和 Novikov (1971) 的第12章；以及其中所引文獻。相對論性星團是一座潛伏的火山。對於它的未來，除了演化成大質量黑洞並釋放巨大的能量外，並不顯而易見，上述能量釋放過程或是通過直接坍縮（可能一次一顆恒星）或是先聚結成一個超大質量恒星爾後再坍縮。

第二十五章　「勢凹陷」作爲在 Schwarzschild 幾何中運動的主要新特徵

「偏心的，纏繞的，然而當它們看來似乎極不規則時，其實是極為規則的；並且，在它們的運動中具有神聖的和諧」

Milton, 1665 年

本章除圖25.2和圖25.6以及框 25.6 和框 25.7（第639, 660, 674, 和 677 頁）外全屬高階，爲了領悟和品嘗，初階讀者應仔細閱讀它們。無需前面的高階內容作爲本章的準備。

§25.2（對稱性）作爲框30.2（混主宇宙學）的準備知識是必須的。本章其餘部分對以後任一章均非必不可少，但它將有助於理解

(1)第31—34章（引力坍縮與黑洞）以及

(2)第40章（太陽系實驗）。

本章概述

§25.1　從 Kepler 定律到在 Schwarzschild 幾何中運動的有效勢

Newton 引力理論對太陽系主要特徵的說明是無與倫比的光榮業績，這些特徵是：行星的運動在相等時間內掃過相等的面積；它的軌道是橢圓，一個焦點在太陽上；以及橢圓半長軸 a 的立方乘以行星在它軌道上的平均角速度（$\omega = 2\pi/$周期）的平方給出了一個具有長度量綱的數［對於全部行星此數相同（框 25.1)］，它等於太陽質量：

$$M = \omega^2 a^3 。$$

完全同樣的結果對於木星的衛星（圖25.1）和地球的衛星（框25.1）也是正確的，並且，在天空各處也都是正確的。當 Einstein 的引力理論轉而解決在球對稱吸引中心影響下試驗物體的運動這一歷史悠久的論題時，人們可能預期什麼更多的東西呢？主要的新結論可以用一句簡單的話來表述：粒子受「有效勢」的支配（圖 25.2 和 §25.5, §25.6），有效勢不僅具有(1)長距離 $-M/r$ 的

吸引行爲，以及(2)較短距離的如 Newton 引力理論的（角動量）$^2/r^2$ 的排斥行爲，而且還(3)在更短的距離上具有**勢凹陷**，它(1)能捕獲太靠近的粒子；(2)對於這種黑洞捕獲過程，建立了一個最接近的臨界距離；(3)對於接近臨界點而未越過它的粒子，與 Newton 的預期相比，繞一圈的時間延長了；從而(4)使徑向漂移的周期比公轉周期要長；(5)使 Kepler 軌道進動；(6)使快粒子和光子偏轉的角度比 Newton 理論預期的更大。

初階
高階

這樣，**勢凹陷**就成了在 Schwarzschild 幾何中運動的主要新特徵和許多重要預言的來源（框 25.5）；尋找最直接進入有效勢概念及其含義和應用的途徑是適當的。在這個探索中，沒有比手邊的 Newton 力學更親密的嚮導了。

分析力學提供了討論在有心力場中運動問題的若干方法，其中兩種方法在這裏有重要的關係：(1)世界線方法，它包括運動的二階微分方程，Lagrange 方程，尋找積分常數，縮減爲一階方程，再進一步按照人們想要知道的是軌道的形狀 $\theta=\theta(r)$ 還是到達世界線上一給定點的時間 $t=t(r)$，用不同方式求積；(2)波峰方法，即通常所說的「程函方法」或「Hamilton-Jacobi 方法」，它通過「波峰構成干涉」的條件給出運動，從而由 Hamilton-Jacobi 方程簡單的躍向試驗物體的運動。兩種方法在此處依次使用，因爲每一種方法都能給

（接第641頁）

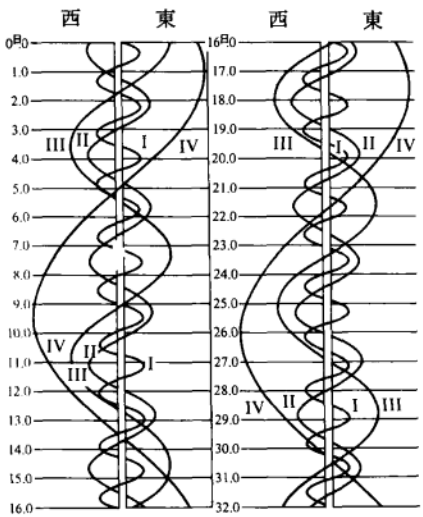


圖 25.1
用野外鏡或望遠鏡逐夜跟踪木星衛星提供了一個親自檢驗 Newton 近似下(距離大於 Schwarzschild 半徑)引力物理的主要概念的機會。對於這些衛星的實際圓軌道，Kepler 定律變爲 $M^1=\omega^2r^3$（「1-2-3 定理」），而在軌道上的速度爲 $\beta=\omega r$。觀測 β, M, ω, r 中的任何兩個量，即可求出另外兩個。［在相反的極限情形下，等質量的兩個物體（質量均爲M，繞它們共同的引力中心行進）分離爲 r 時，有 $M=\omega^2r^3/2$, $\beta=\omega r/2$］。此處給出的是1964年12月（「世界時」0.0, 1.0, 2.0 日等等，可參看任何好的辭典或百科全書）木衛 I-IV 的位形，引自 1964 年美國星曆表和航海歷［美國政府出版社（1962)）］。

框 25.1 由平均角頻率和半長軸得出質量：$M=\omega^2a^3$,

與倒數第二列中的半長軸 a 相比，最後一列所列出的質量（或「半 Schwarzschild 半徑」或「勢凹陷的延長」）的微不足道，顯示了Newton分析的適用性。基本數據引自 Allen (1963) 的滙編。

物 體	周期[a]（日）	ω（厘米$^{-1}$）	a（厘米）	ω^2a^3（厘米）
行 星				
水 星	87.9686	275.8×10^{-19}	0.5791×10^{13}	1.477×10^{5}
金 星	224.700	107.95	1.0821	1.477
地 球	365.257	66.41	1.4960	1.477
火 星	686.980	35.31	2.2794	1.477
木 星	4332.587	5.599	7.783	1.478
土 星	10759.20	2.255	14.27	1.477
天王星	30685	0.7905	28.69	1.476
海王星	60188	0.4030	44.98	1.478
冥王星	90700	0.2674×10^{-19}	59.00×10^{13}	1.469×10^{5}
木星的主要衛星				
木衛一	1.769 138	13.711×10^{-16}	0.422×10^{11}	141.3
木衛二	3.551 181	6.831	0.671	141.0
木衛三	7.154 553	3.391	1.070	140.8
木衛四	16.689 018	1.454×10^{-16}	1.883×10^{11}	141.1
地球的二個衛星				
OSO 5[b]	95.6分	3.65×10^{-14}	6.916×10^{8}	0.442
月 亮	27.32	0.888×10^{-16}	3.84×10^{10}	0.446

[a] 恒星周期：相對於確定恒星作一次公轉的時間。

[b] 1969年1月22日發射的軌道科學觀測站（OSO），觀測來自太陽的 X 射線和紫外輻射，近地點在地球上空531公里，遠地點在地球上空560公里。

若干典型的質量和時間，以慣用的單位和幾何單位。質量轉換因子 $G/c^2=0.742\times10^{-28}$厘米／克

質 量	銀河系	太 陽	木 星	地 球
M慣用（克）	2.2×10^{44}	1.989×10^{33}	1.899×10^{30}	5.977×10^{27}
M（厘米）	1.6×10^{16}	1.47×10^{5}	112	0.444

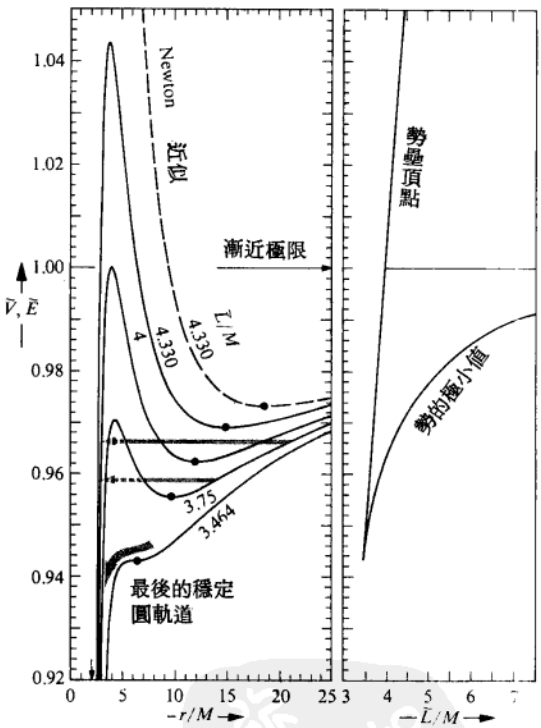
時間轉換因子 $c=2.998\times10^{10}$ 厘米／秒。一恒星年＝365.256日或 3.1558×10^{7} 秒。

周 期	1秒	1分	1時	1日
ω慣用（秒$^{-1}$）	6.28	1.046×10^{-1}	1.75×10^{-3}	7.28×10^{-5}
ω（厘米$^{-1}$）	2.09×10^{-10}	3.48×10^{-12}	5.80×10^{-14}	2.42×10^{-15}

	1周	1月	1年
	1.04×10^{-5}	2.39×10^{-6}	1.99×10^{-7}
	3.46×10^{-16}	7.95×10^{-17}	6.63×10^{-18}

高階
初階

圖 25.2



在集中質量爲M的 Schwarzschild 幾何中，試驗粒子運動的有效勢。以粒子靜止質量μ爲單位，能量表爲 $\tilde{E}=E/\mu$；角動量表爲 $\tilde{L}=L/\mu$。r 表示Schwarzschild r 坐標。有效勢（也以 μ 爲單位）由 (25.16) 式定義或等價地由下式定義

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\tilde{V}^2(r)=\tilde{E}^2$$

（也可參看 §25.5），其值爲

$$\tilde{V}=[(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}。$$

它表明，在 r 處 $\tilde{E}$ 的值使該處粒子的徑向動能減少爲零（$\tilde{E}$ 值使 r 成爲「轉變點」：$\tilde{V}(r)=\tilde{E}$。注意，人們可以同樣地把 $\tilde{V}^2(r)$ 看作有效勢，並由 $\tilde{V}^2=\tilde{E}^2$ 的條件定義一轉變點。選擇哪種定義取決於方便，取決於想作的應用，取決於與原始型式的微分方程 $\frac{1}{2}\dot{x}^2+V(x)=E$ 的聯繫，以及取決於人們想加上的與 Newton 理論的有效勢相對應的脅強）。只在 $\tilde{L}$ 值超過 $2\sqrt{3}M$ 時，才可能有穩定的圓軌道（代表點位於有效勢的極小值）。對於任何這類確定的$\tilde{L}$ 值，隨着能量上升到勢的極小值以上，運動稍稍偏離圓形（參看 $\tilde{L}=3.75M$ 的兩條粗水平線）。在經典物理中，運動限於正動能區域。在量子物理中，粒子可以通過隧道進入按經典物理計算的動能爲負的區域（粗水平線的虛線延長部分），朝着「勢凹陷」走去（被黑洞捕獲）。當吸引中心具有任何宏觀尺度時，這種隧道效應是絕對可以忽略的，但從原則上說，如果質量爲 10^{17} 克（或 10^{-11} 厘米）的黑洞原則上可以存在，則此時隧道效應會變得很重要。

右圖給出了勢的極小值和極大值，它們取決於試驗粒子的角動量。$\partial\tilde{V}/\partial r$ 的根用「約化角動量參量」$L^\dagger=\tilde{L}/M=L/M\mu$ 通過

$$r=\frac{6M}{1+(1-12/L^{\dagger 2})^{1/2}},$$

$$\tilde{E}^2=\frac{(L^{\dagger 2}+36)+(L^{\dagger 2}-12)(1-12/L^{\dagger 2})^{1/2}}{54}$$

$$[=8/9 \text{ 對於 } L^\dagger=(12)^{1/2};\ 1 \text{ 對於 } L^\dagger=4;$$
$$(L^{\dagger 2}/27)+(1/3)+(1/L^{\dagger 2})+\cdots \text{對於 } L^\dagger\longrightarrow\infty]$$

給出（加上有效勢極大值的根；減去極小值的根；見練習 25.18）。

初階
高階

框 25.2 對於 Einstein 幾何動力學的重要應用而言，在 Schwarzschild 幾何中的運動可看作中心出發點

1. 太陽對行星以及地球對月亮和人的 Newton 效應。
2. 太陽使光線彎曲。
3. 來自太陽的光線的紅移。
4. 水星繞太陽近日點的進動。
5. 作爲引力坍縮的簡單典型　試驗物體被黑洞捕獲。
6. 由 Schwarzschild 「點陣宇宙」模型導出 Friedmann 宇宙的動力學。點陣宇宙是由120個或某些其他幻數的集中質量構成的，每一個質量在它自身的除自身外空洞無物的點陣格子之中。每一個點陣格子，儘管實際上是多邊形的，可理想化爲球形的（見固體物理的 Wigner-Seitz 近似）。在兩格子交界面上的試驗物體落向各自的中心［在 Schwarzschild 幾何中的標準徑向運動；見 (25.27) 式後面的討論。］因此，兩個質量可以按算出的速率落向對方。由這個簡單的論證得出閉三維球點陣宇宙的全部動力學，與 Friedmann 模型的預期很一致［見 Lindquist 和 Wheeler (1957)］。
7. Schwarzschild 幾何的擾動，I. 引力波入射在黑洞上，被散射並捕獲入黑洞。作爲本章討論粒子和光子運動的應用，波長比 Schwarzschild 半徑短的波可以用幾何光學方法作很好的近似（練習 35.15 和練習 35.16）。對於較長的波長，這種幾何光學的理想化處理應作重要的物理光學修正（見 §35.8 和練習 32.10，練習 32.11）。類似的考慮適用於電磁波和 de Broglie 波。
8. 對於黑洞幾何中（「引力場」）處於最低量子態的一個電子，算出的輕子數是否超出（電子的捕獲！），取決於該黑洞的質量是大於還是小於某個臨界質量 $M_{\bullet\bullet}=M^{\bullet 2}/m_{\bullet}$（$\sim 10^{17}$ 克或 10^{-11} 厘米）［Hartle (1971, 1972); Wheeler (1971b,c); Teitelboim (1972b,c)］。對於重子數守恒，有類似情形（有另一個臨界質量值）［Bekenstein (1972a,b), Teitelboim (1972a)］。爲了分析「超出與否」，必須求解量子力學的波動方程，粒子和光子軌道的 Hamilton-Jacobi 方程是它的經典極限。這些量子波動方程包含的有效勢等同於——除了與自旋有關和與波長有關的修正外——粒子和光子運動的有效勢。
9. Schwarzschild 幾何的擾動，II. 在保持穩定的標準 Schwarzschild 黑洞幾何中這些微小變化，恰好描繪了使「死」黑洞成爲「活」黑洞的更替，對於活黑洞除質量外還賦予角動量（見第33章）。爲了分析黑洞幾何中的這類變化，必須再次求解波動方程，但現在是經典的波動方程。一旦波動方程與 Hamilton-Jacobi 方程密切相關，那麼它們的有效勢就與粒子運動的有效勢是近親。

出特殊的見解。Hamilton-Jacobi 方法（框 25.3）能迅速導致感興趣的主要結果（框25.4），並且它與量子原理有密切的聯繫。世界線方法(§25.2, §25.3, §25.4）則從運動自身的短程線方程出發。它爲不熟悉 Hamilton-Jacobi 方法的讀者提供了更熟悉地進入課題的途徑。此外，爲了試圖求解短程線運動方程，必須分析幾何的對稱性，當人們從 Schwarzschild 幾何轉向 Kerr-Newman 幾何（第33章），以及從 Friedmann 宇宙學（第27章）轉向更一般的宇宙學（第30章）時，這種分析會不斷帶來效益。

框 25.3　運動的 Hamiltom-Jacobi 描述：由量子原理確認爲自然的描述

1. 純經典的（非量子的）。

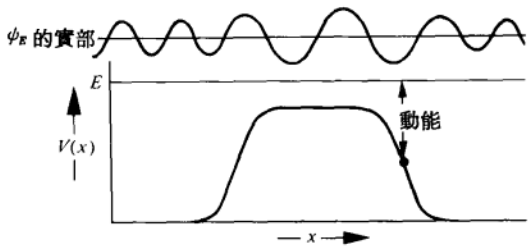
2. 由 William Rowan Hamilton 首創，確信力學就其特徵而言類似於光學；力學的「粒子世界線」是幾何光學的「光線」的理想類比。光線能量的局域性只是近似的。它的散布受光的波長支配（「幾何光學」）。對於粒子，Hamilton 曾經模糊感覺到同樣的概念：「量子物理前的量子物理」。他和 Jacobi 發展了用 Hamilton-Jacobi 函數 $S(x,t)$ ——以後有一個自由度 x 的動力學系統爲例——分析運動的方法，在人們知道怎樣作以後，很快就完成了從經典概念向量子概念的躍進。此外，眞實世界是一個量子世界。經典力學並不是憑空產生的。它是量子力學的理想化和近似。

3. 關鍵的觀念是把粒子波長理想化爲很短，以致粒子位置的量子力學散布或不確定性（或更複雜系統位形坐標的散布）可以忽略。還未曾發現把量子力學精神與經典力學的位置精確性統一起來的更好方法。

4. 令 Hamilton 函數爲 $H(p,x)=p^2/2m+V(x)$。令粒子能量爲 E。然而，沒有任何與量子原理自洽的方法能描述粒子在空間和時間中的運動。測不準原理禁止這樣做（在 $\Delta E\Delta t\geq\hbar/2$ 中尖銳地規定能量 $\Delta E\longrightarrow 0$ 就意味着不確定的 $\Delta t\longrightarrow\infty$；又，在 $\Delta p\Delta x\geq\hbar/2$ 中規定 $\Delta p\longrightarrow 0$ 意味着 $\Delta x\longrightarrow\infty$）。量子力學的波函數遍布全空間。對於幾率振幅函數，在所謂半經典近

似或 Wentzel-Kramers-Brillouin [「WKB」;參看，例如，Kemble (1937)] 近似中，這種散布表明

$$\phi_E(x,t)=\left(\begin{matrix}\text{緩慢變化的}\\ \text{振幅函數}\end{matrix}\right)e^{(i/\hbar)S_E(x,t)}。\qquad(1)$$



5. $\hbar=1.054\times10^{-27}$ 克厘米²/秒 [或$\hbar=(1.6\times10^{-33}$ 厘米$)^2$，用幾何單位] ，與絕大多數日常應用中遇到的「作用量」或「Hamilton-Jacobi 函數 S 的大小」或「動力學相 S」相比，極爲微小，這對於把幾率分佈局域化是無用的。

6. 動力學相服從簡單的 Hamilton-Jacobi 傳播定律

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=H\left(\frac{\partial S}{\partial x},\ x\right)=\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+V(x),\qquad(2)$$

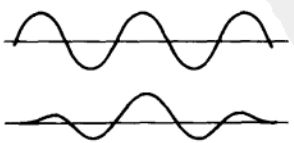
這對於把幾率分佈局域化是無用的。

7. 對於能量爲 E 的粒子，這個方程的解

$$S(x,t)=-Et+\int_{x_0}^{x}\{2m[E-V(x)]\}^{1/2}dx+\delta_E\qquad(3)$$

特別簡單 (δ_E 是任意附加的位相常數)，這對於把幾率分佈局域化是無用的。幾率振幅仍舊遍布各處。不存在任何最輕微的類似於局域世界線 $x=x(t)$的痕跡。

8. 爲了使粒子局域化，按照下述形式的定性規定，通過各單頻（單能）項的疊加，構成幾率振幅波包



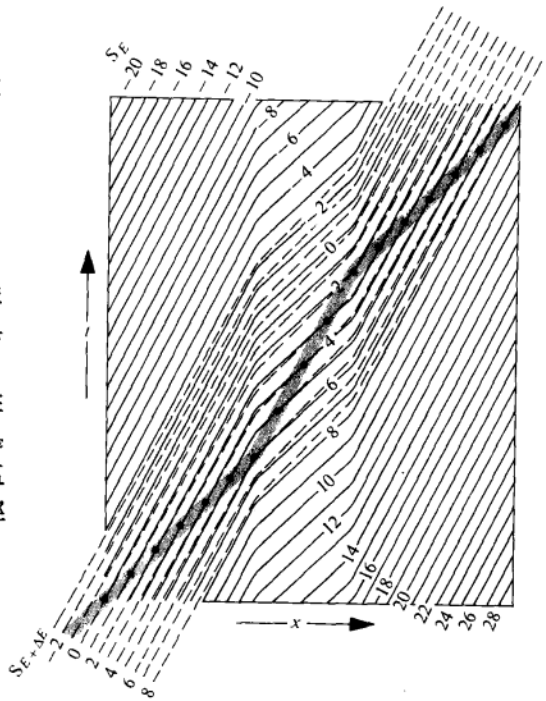
$$\psi(x,t)=\phi_E(x,t)+\phi_{E+\Delta E}(x,t)+\cdots。\qquad(4)$$

幾乎處處都發生相消干涉。波包集中在相長干涉的區域內。該處各波的位相是一致的；於是

$$S_E(x,t)=S_{E+\Delta E}(x,t)。\qquad (5)$$

人們終於從遍布各處的波移向局域波，並因此在不定的微小波長的極限下移向經典的世界線。這樣一個相長干涉的方程把 x 和 t 聯繫在一起（x,t 圖中世界線的所在地）。光滑線 −20, −19, −18 等等是 ψ_E 的波峰；虛線是 $\psi_{E+\Delta E}$ 的波峰。陰影區是相長干涉（波包）的區域。黑點標明經典世界線的所在地

$$\operatorname{Lim}_{\Delta E\to 0}\frac{S_{E+\Delta E}(x,t)-S_E(x,t)}{\Delta E}=0。$$



9. 當人們趨向經典極限（$\hbar$ 與涉及的作用量相比可忽略；因此波長短得可以忽略；因此爲建立局域波包所需的能量散布 ΔE 也可忽略）時，由這個相長干涉條件立即可得出穿越空時的世界線的 Newton 路線；於是

$$\frac{S_{E+\Delta E}(x,t)-S_E(x,t)}{\Delta E}=0$$

化爲

$$\frac{\partial S_E(x,t)}{\partial E}=0。$$

又把這個條件用於(3)式，給出移動到點 x 所需的時間；從而

$$-t+\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\{(2/m)[E-V(x)]\}^{1/2}}+t_0=0,$$

式中 t_0 是下述量的縮寫

$$t_0=d\delta_E/dE$$

（「每單位能量差的動力學位相基值之差」）。

10.在最後的 Newton 結果中毫無作用量子的痕跡，原因很簡單：$\hbar$已經處理爲可以忽略，波長也已處理爲可以忽略。在這種極限下，波「包」的位置化爲波峰的位置。波峰的位置精確地受 $S_E(x,t)$ 支配；而「相長干涉」條件 $\partial S_E(x,t)/\partial E=0$ 無需近似就給出了尖銳地確定的 Newton 世界線 $x=x(t)$ 的位置。

11.就在有心力場中的運動而言，相關聯的是什麼？這就是對有效勢概念最快的認識途徑（框 25.4）。

框 25.4 用 Hamilton-Jacobi 方法分析在中心質量的吸引下的運動

A. Newton 的引力理論

Hamilton 量爲
$$\tilde{H}=\frac{\tilde{p}_r^2}{2}+\frac{\tilde{p}_\theta^2}{2r^2}+\frac{\tilde{p}_\phi^2}{2r^2\sin^2\theta}-\frac{M}{r} \qquad (1)$$

（能量、動量等等上的符號～指的是單位質量的試驗物體，遵循同樣運動的質量爲 μ 的試驗粒子的能量爲 $E=\mu\tilde{E}$，動量爲 $\mathbf{p}=\mu\tilde{\mathbf{p}}$，等等）。

波峰傳播的 Hamilton-Jacobi 方程爲：

$$-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\phi}\right)^2-\frac{M}{r}。 \qquad (2)$$

用「分離變數法」解出（按慣例$\sqrt{a^2}\equiv\pm a$），

$$\tilde{S}=-\tilde{E}t+\tilde{p}_\phi\phi+\int^\theta\left(\tilde{L}^2-\frac{\tilde{p}_\phi^2}{\sin^2\theta}\right)^{1/2}d\theta$$
$$+\int^r\left[2\left(\tilde{E}+\frac{M}{r}-\frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right)\right]^{1/2}dr+\delta_{\tilde{p}_\phi,\tilde{L},\tilde{E}}。\tag{3}$$

（代入 Hamilton-Jacobi 方程檢驗。解是四項之和，相應於四個獨立變量，它可與量子力學中作爲四個因子之積的幾率振幅表達式結合起來，因爲 $iS/\hbar=i\mu\tilde{S}/\hbar$ 在幾率振幅的近似表達式中是指數。）

波的相長干涉：

(1)以稍稍不同的 $\tilde{E}$ 值（加上「相長干涉的條件」$\partial\tilde{S}_{\tilde{p}_\phi,\tilde{L},\tilde{E}}(t,r,\theta,\phi)/\partial\tilde{E}=0$）說明粒子何時到達給定的 r 處（即給定 t 和 r 的關係）；

(2)以稍稍不同的「每單位質量的總角動量參量」的值 $\tilde{L}$（加上相長干涉的條件 $\partial\tilde{S}_{\tilde{p}_\phi,\tilde{L},\tilde{E}}(t,r,\theta,\phi)/\partial\tilde{L}=0$）說明 θ 和 r 之間的關係（軌道形狀的主要特點）；

(3)以稍稍不同的「每單位質量的方位角動量參量」的值 $\tilde{p}_\phi$（加上條件 $\partial\tilde{S}/\partial\tilde{p}_\phi=0$）給出 θ 和 ϕ 之間的關係

$$0=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{p}_\phi}=\phi-\int^\theta\frac{(\tilde{p}_\phi/\tilde{L})d\theta}{\sin\theta(\sin^2\theta-\tilde{p}_\phi^2/\tilde{L}^2)^{1/2}}。\tag{4}$$

軌道的平面特徵。

借助於積分表冥思苦想最後那個積分的值嗎？無需計算即可更迅速而明確的抓住問題的關鍵：粒子在平面上運動。與角動量 $\tilde{L}$ 相聯繫的矢量垂直於該平面。角動量沿 z 軸的投影是 $\tilde{p}_\phi=\tilde{L}\cos\alpha$（軌道傾角 α 的定義）。連結原點與粒子的直線與單位球在點 $\mathcal{P}$ 相切。隨着時間的推移，$\mathcal{P}$ 在單位球上劃出一個大圓。這個大圓的平面在「叉點線（line of nodes）」切割赤道平面，在該「鉸鏈線（hinge-Line）」上這兩個平面以二面角 α 分開。在笛卡兒坐標系中，點 $\mathcal{P}$ 的軌道由 $\hat{x}=r\cos\phi$，$\hat{y}=r\sin\phi$，$\hat{z}=0$ 描繪，其中 $\hat{y}$ 沿着叉點線

，$\hat{x}$ 位於軌道平面內。在一個坐標系中，若 y 沿着叉點線，而 x 位於赤道平面內，則有

$$r\cos\theta = z = \hat{z}\cos\alpha + \hat{x}\sin\alpha = r\cos\psi\sin\alpha;$$
$$r\sin\theta\cos\phi = x = -\hat{z}\sin\alpha + \hat{x}\cos\alpha = r\cos\psi\cos\alpha;$$
$$r\sin\theta\sin\phi = y = \hat{y} = r\sin\psi。$$

消去涉及的笛卡兒坐標，並且，通過取比值，也消去涉及的 r 。於是找到了參量形式的大圓路線的方程

$$\tan\phi = \tan\psi/\cos\alpha$$

和

$$\cos\theta = \cos\psi\sin\alpha。$$

此處，ψ 值的增加描出了大圓上全部相繼的點。經下式消去 ψ

$$\sec^2\psi - \tan^2\psi = 1$$

得出

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\theta} - \tan^2\phi\cos^2\alpha = 1$$

或更簡要的

$$\sec\phi = \tan\alpha\tan\theta。 \qquad (5)$$

人們證實，由(5)式算出的 ϕ 提供了(4)式的積分，從而確認了剛才描出的物理變數的軌跡。此外，以 $\phi - \phi_0$ 代替 ϕ（把叉點線轉到一個新的方位角）很容易引入來自(4)式的任意積分常數（爲了簡單起見，不考慮(5)式）。顯然，剛才所作出的描繪 θ 和 ϕ 關係的這類物理過程只是初等立體幾何，別無其他。對於在 Schwarzschild 幾何中的運動，也顯示出同樣的幾何關係，無需作任何的相對論修正（怎麼可能有任何修正呢?!）。因此，放棄此處和此後所關注的複雜性是適當的。令粒子完全沿着 θ 增加的方向運動，而不沿 ϕ 增加的方向運動；即令粒子沿零角動量 $\tilde{p}_\phi$ 的軌道運動（總角動量矢量 $\tilde{L}$ 與 z 軸的傾角爲 $\alpha = \pi/2$）。結果，動力學位相 S（當從經典力學轉向量子力學時，除以 $\hbar$ 即得 Schrödinger 波函數的位相）變爲

$$\tilde{S} = -\tilde{E}t + \tilde{L}\theta + \int^r \left[2\left(\tilde{E} + \frac{M}{r} - \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right)\right]^{1/2} dr + \delta_{L,E}。 \qquad (6)$$

軌道形狀：

$$0=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{L}}=\theta-\int^{r}\frac{\tilde{L}dr/r^2}{[2(\tilde{E}+M/r-\tilde{L}^2/2r^2)]^{1/2}}, \tag{7}$$

由此

$$r=\frac{\tilde{L}^2/M}{1+e\cos\theta}\ 。 \tag{8}$$

此處 e 是軌道偏心率的簡寫，

$$e=(1+2\tilde{E}\tilde{L}^2/M^2)^{1/2} \tag{9}$$

（對於正的 $\tilde{E}$, e 大於 1，爲雙曲線軌道；對於零 $\tilde{E}$, e 等於 1，爲拋物線軌道；對於負的 $\tilde{E}$, e 小於 1，爲橢圓軌道。）爲了簡單起見，從(8)式起，略去積分常數。以 $\theta-\theta_0$ 代替 θ （在軌道平面內轉動主軸的方向）即可重新安置它。軌道的其他特徵是：

（橢圓軌道的半長軸）

$$a=\frac{\tilde{L}^2/M}{1-e^2}=\frac{M}{(-2\tilde{E})}; \tag{10}$$

（橢圓軌道的半短軸）

$$b=\frac{\tilde{L}^2/M}{(1-e^2)^{1/2}}=\frac{\tilde{L}}{(-2\tilde{E})^{1/2}}; \tag{11}$$

（雙曲線軌道的「碰撞參量」或「在沒有偏轉情況下最接近的距離」）

$$b=\frac{(\text{單位質量的角動量})}{(\text{單位質量的線動量})}=\frac{\tilde{L}}{(2\tilde{E})^{1/2}}; \tag{12}$$

（最接近的實際距離）

$$r_{\text{極小}}=\frac{\tilde{L}^2/M}{(1+2\tilde{E}\tilde{L}^2/M^2)^{1/2}+1}; \tag{13}$$

（雙曲線軌道的偏轉角）

$$\begin{aligned}\Theta&=\pi-2\arccos(1/e)\\&=2\arctan[M/(2\tilde{E})^{1/2}\tilde{L}]\\&=2\arctan[M/2\tilde{E}b];\end{aligned} \tag{14}$$

（微分散射截面）

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}&=\frac{2\pi bdb}{2\pi\sin\Theta d\Theta}\\&=\frac{M^2}{(4\tilde{E}\sin^2\Theta/2)^2}\ (\text{Rutherfold})。\end{aligned} \tag{15}$$

時間與位置相關連：

$$0=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{E}}=-t+\int^{r}\frac{dr}{\left[2\left(\tilde{E}+\frac{M}{r}-\frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right)\right]^{1/2}}。\tag{16}$$

爲了簡化積分，寫出

$$r=\frac{M}{(-2\tilde{E})}(1-e\cos u)\tag{17}$$

得

$$t=\frac{M}{(-2\tilde{E})^{3/2}}(u-e\sin u),\tag{18}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{平均}\\\text{圓頻率}\end{matrix}\right)=\frac{2\pi}{(\text{周期})}=\omega=\frac{(-2\tilde{E})^{3/2}}{M}=\left(\frac{M}{a^3}\right)^{1/2}。\tag{19}$$

此處 u 是所謂「平均偏近點角」(Bessel 的時間參量)。依據這個量，又有

$$\sin u=\frac{(1-e^2)^{1/2}\sin\theta}{1+e\cos\theta};$$

$$\cos u=\frac{\cos\theta+e}{1+e\cos\theta};$$

$$\cos\theta=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u};$$

$$\sin\theta=\frac{(1-e^2)^{1/2}\sin u}{1-e\cos u};$$

$$x=r\cos\theta=\frac{M}{(-2\tilde{E})}(\cos u-e);\tag{20}$$

$$y=r\sin\theta=\frac{\tilde{L}}{(-2\tilde{E})^{1/2}}\sin u。\tag{21}$$

這些表達式適用於時間諧函數的 Fourier 分析，係數是標準的 Bessel 函數：

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(z\sin u-nu)}du;\tag{22}$$

$$x/a=-\frac{3}{2}e+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{+\infty}k^{-1}J_{k-1}(ke)\cos k\omega t;\tag{23}$$

$$y/a=(1-e^2)^{1/2}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{+\infty}k^{-1}J_{k-1}(ke)\sin k\omega t\tag{24}$$

［對於這些公式以及進一步的此類公式，參看，例如，Wintner (1941), Siegel (1956), 以及 Siegel 和 Moser (1971)］。經過這種 Fourier 分析，人們就能夠計算以基本圓頻率 ω 和以諧波頻率發射的引力輻射的强度（見第36章）。

B. Einstein 的引力幾何理論

對於在彎曲空間行進的靜止質量爲 μ 的試驗粒子，其能量和動量之間的關係爲

$$g^{\alpha\beta}\tilde{p}_\alpha\tilde{p}_\beta+\mu^2=0。\tag{25}$$

引力除了在幾何的曲率中顯示出來之外，決無別的途徑，粒子在彎曲幾何中的運動就好像全部「眞實的」力都不存在。爲了涉及基於單位靜止質量的試驗物體的全部量，可自始至終地討論 $\tilde{\mathbf{p}}=\mathbf{p}/\mu$。也可寫爲 $\tilde{p}_\alpha=\partial\tilde{S}/\partial x^\alpha$。於是，在 Schwarzschild幾何（恒星的外部場；§23.6）中波峰傳播的Hamilton-Jacobi 方程變爲

$$-\frac{1}{(1-2M/r)}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}\right)^2+(1-2M/r)\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\phi}\right)^2$$
$$+1=0。\tag{26}$$

求解 Hamilton-Jacobi 方程。如同在 Newton 問題中那樣，消去在 ϕ 增加方向上的全部運動即可簡化。於是，令 $0=\tilde{p}_\phi=\partial\tilde{S}/\partial\phi$（與 ϕ 無關的動力學位相），有

$$\tilde{S}=-\tilde{E}t+\tilde{L}\theta+\int^r[\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)^{1/2}\frac{dr}{(1-2M/r)}。\tag{27}$$

由「相長干涉原理」求出軌道的形狀；於是

$$0=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{L}}=\theta-\int^r\frac{\tilde{L}dr/r^2}{[\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}}。\tag{28}$$

［參看（25.41）式以及正文中有關的討論；再參看圖25.6。］

通過考慮屬於稍稍不同的 $\tilde{E}$ 值的「波峰的干涉」，求出到達給定 r 的時間：

$$0=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{E}}=-t+\int^r\frac{\tilde{E}}{[\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}}\frac{dr}{(1-2M/r)}。\tag{29}$$

［參看（25.32）式以及正文中有關的討論；再參看圖 25.5 和練習 25.15。］

§25.2 對稱性和守恒定律

從對稱性到守恒定律，由：
(1)Lagrange 函數或 Hamilton 函數方法
(2)Killing 矢量方法

在分析力學中，大家知道 Lagrange 函數或Hamilton函數的對稱性導致守恒定律。練習25.1到練習25.4敍述了怎樣用這些普遍原理從 Schwarzschild 空時的對稱性導出在恒量外引力場中自由下落粒子軌道（短程線）的運動常數。在不同的幾何中用不同的語言得出同樣的運動常數，其中「Killing 矢量」是描述對稱性的標準手段。在着手於 Schwarzschild 空時之前，本節討論度規對稱性的一般問題。

定義 Killing 矢量 ξ

設相對於某個坐標基 $\boldsymbol{dx^\alpha}$ 的度規分量 $g_{\mu\nu}$ 與坐標之一的 x^K 無關，則

$$\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\alpha=0,\ \text{對于}\alpha=K。\tag{25.1}$$

這個關係式有一個幾何解釋。通過坐標移動 $\Delta x^K=\varepsilon$ 可以把任意曲線 $x^\alpha=c^\alpha(\lambda)$ 轉移到 x^K 方向，形成一條「全等」（等價）的曲線

$$x^\alpha=c^\alpha(\lambda)\quad \text{對於}\ \alpha\neq K\ \text{和}\ x^K=c^K(\lambda)+\varepsilon。$$

設原先的曲線從 $\lambda=\lambda_1$ 到 $\lambda=\lambda_2$，且長度爲

$$L=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}[g_{\mu\nu}(x(\lambda))(dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda)]^{1/2}d\lambda。$$

則移動後的曲線的長度爲

$$L(\varepsilon)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\left\{g_{\mu\nu}(x(\lambda))+\varepsilon\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^K}\right\}(dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda)\right]^{1/2}d\lambda。$$

但在被積函數中 ε 的係數爲零。因此，新曲線的長度與原先曲線的長度相等：$dL/d\varepsilon=0$。

矢量

$$\boldsymbol{\xi}\equiv d/d\varepsilon=(\partial/\partial x^K)\tag{25.2}$$

導出 Killing 方程

爲這些保持長度的「平移」提供了無限小的描述。它稱爲「Killing 矢量」。它滿足 Killing 方程*

$$\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}=0\tag{25.3}$$

（這是爲了確保所有長度經位移 $\varepsilon\boldsymbol{\xi}$ 後都保持不變而加給矢量場 $\boldsymbol{\xi}$ 的必要和充分條件）。這個條件可表爲協變形式。因此，爲了使它在每一個坐標中都成立

* 歷史注記：Wilhelm K. J. Killing 1847年5月10日誕生於 Burbach, Westphalie, 1923年2月11日死於 Münster, Westphalia; Münster 大學數學教授，1892-1920。給予此處討論的這類等距線以「Killing 矢量」名稱的主要論文幾乎出現在一個世紀之前［Killing (1892)］。

，在優先選擇的 (25.1) 式的坐標系中建立它就足夠了。在該優先選擇的坐標系中，根據 (25.2) 式，該矢量場的分量爲

$$\xi^{\mu}=\delta^{\mu}{}_{K}。$$

因此，該矢量場的協變微商的分量爲

$$\begin{aligned}\xi_{\mu;\nu}&=g_{\mu\alpha}\xi^{\alpha}{}_{;\nu}=g_{\mu\alpha}\left(\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\xi^{\sigma}\right)\\&=g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu K}=\Gamma_{\mu\nu K}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu K}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{K}}-\frac{\partial g_{\nu K}}{\partial x^{\mu}}\right)\qquad(25.4)\\&=\frac{1}{2}(g_{\mu K,\nu}-g_{\nu K,\mu})。\end{aligned}$$

可以看出，$\xi_{\mu;\nu}$ 對於標記 μ 和 ν 是反對稱的，這正如 Killing 方程 (25.3) 式所表示的那樣。

Killing 矢量的幾何意義在框 25.5 中詳細說明。

由 Killing 方程 $\xi_{(\mu;\nu)}=0$，並由短程線方程 $\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p}=0$（$\mathbf{p}=d/d\lambda$ 是任意短程線的切向矢量），得出一條重要的定理：**在已賦予如Killing矢量場 $\boldsymbol{\xi}$ 所描繪的對稱性的任何幾何中，凡是沿任意短程線的運動都使切向矢量和Killing矢量的標積爲常數。**

對於短程線運動 $\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}$ 守恒

$$p_{K}=\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}=常數。\qquad(25.5)$$

爲了證明這個結果，計算沿着典型的短程線路線，常數 p_K 的變化率（仿射參量 λ；因此，結果適用於光線——原時的零間隔——正如它也適用於粒子一樣）；得

$$dp_{K}/d\lambda=(p^{\mu}\xi_{\mu})_{;\nu}p^{\nu}=(p^{\mu}{}_{;\nu}p^{\nu})\xi_{\mu}+p^{(\mu}p^{\nu)}\xi_{(\mu;\nu)}=0。\qquad(25.6)$$

從一般的坐標系回到 (25.1) 式的坐標，其中對稱的 Killing 矢量場使它本身可寫爲 $\boldsymbol{\xi}=\partial/\partial x^{K}$。從而 (25.5) 式的標積變爲常數$\equiv p_{\alpha}\xi^{\alpha}=p_{\alpha}\delta^{\alpha}{}_{K}=p_{K}$。**幾何的對稱性確保動量的第$K$個協變坐標基分量守恒。**

在空時中的一條類時短程線上，質量爲 μ 的試驗粒子的動量爲

$$\mathbf{p}\equiv d/d\lambda=\mu\mathbf{u}=\mu d/d\tau。\qquad(25.7)$$

因此，當涉及粒子時，在上述分析中最爲有用的仿射參量 λ 不是原時 τ，而是比值 $\lambda=\tau/\mu$。

當度規 $g_{\mu\nu}$ 與坐標 x^{K} 無關時，坐標稱爲循環的，相應的守恒量 p_K 稱爲「與該循環坐標共軛的動量」，這是從非相對論力學借來的術語。

術語：「循環坐標」，「共軛動量」

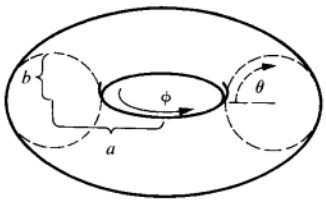
（接第654頁）

框 25.5 Killing 矢量和同規（譯註：同規——ISOMETRY，度規相同之意，在純數學的文章或課文中也可譯爲「等距」）［用油煎餅圈（Donut）來說明］

A. 在一給定的流形中（例如，空時或圖示的油煎餅圈），在給定的坐標系中，度規分量與特定的坐標 x^K 無關。以油煎餅圈爲例：

$$ds^2=b^2d\theta^2+(a-b\cos\theta)^2d\phi^2;$$

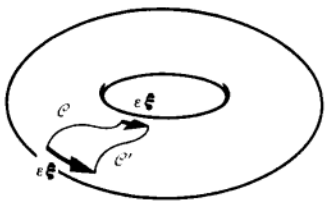
$g_{\mu\nu}$ 與 $x^K=\phi$ 無關。



B. 任意曲線 $\mathcal{C}$ 經無限小位移

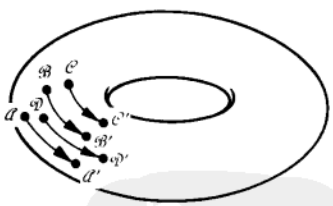
$$\varepsilon\boldsymbol{\xi}\equiv\varepsilon(\partial/\partial x^K)=\varepsilon(\partial/\partial\phi),\ \varepsilon\ll 1$$

形成了新的曲線 $\mathcal{C}'$。用坐標語言，$\mathcal{C}$ 是 $\theta=\theta(\lambda)$, $\phi=\phi(\lambda)$; 而 $\mathcal{C}'$ 是 $\theta=\theta(\lambda)$, $\phi=\phi(\lambda)+\varepsilon$，（全部點移動了 $\Delta\phi=\varepsilon$。）因爲 $\partial g_{\mu\nu}/\partial\phi=0$，所以曲線 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 具有相同的長度（見正文）。



C. 選取一組鄰近的點 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$; 把其中每一點移動 $\varepsilon\boldsymbol{\xi}$，得出點 $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{D}'$。因爲每一條曲線的長度在移動中保持不變，所以相鄰點之間的距離也保持不變：

（$\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{B}'$ 之間的距離）＝
（$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之間的距離）。



但是，幾何等價於一張無限小距離的表格（見框 13.1）。因而流形的幾何在全部點都移動了 $\varepsilon\boldsymbol{\xi}$ 後是完全不變的。［這是表述 $\partial g_{\mu\nu}/\partial\phi=0$ 的無坐標說法。］人們說，$\boldsymbol{\xi}=\partial/\partial\phi$ 是在流形上一「同規」（或「運動羣」）的生成元。

D. 一般說來（見正文），當且僅當一矢量場 $\boldsymbol{\xi}(\mathcal{P})$ 滿足 Killing 方程 $\xi_{(\alpha;\beta)}=0$ 時，它才產生一個同規。

E. 如果 $\xi(\mathscr{P})$ 產生了一個同規（即如果 ξ 是「Killing 矢量」），則以 ξ 爲切線 $[\xi=(\partial\mathscr{P}/\partial x^{K})_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}]$ 的諸曲線

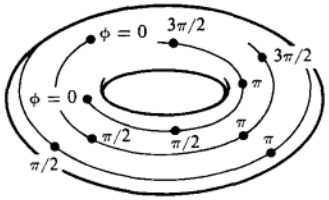
$$\mathscr{P}(x^{K},\underbrace{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}),$$

$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$：說明是「哪一條」曲線的標誌

x^{K}：曲線上的參量

稱爲「同規的軌道」。

油煎餅圈上三條不同的軌道



軌道上的參量是 $x^{K}=\phi$

F. 當流形上的全部點沿着這些軌道移過了同樣的 Δx^{K} 時 $[\mathscr{P}(x^{K},\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\longrightarrow\mathscr{P}(x^{K}+\Delta x^{K},\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$；「有限的運動」是由許多「無限小的運動」$\varepsilon\xi$ 構成的］，幾何是不變的。

G. 這種同規可用物理學術語描述如下。在流形處處設置一組觀測者。每一個觀測者都向中心計算機報告(1)他附近流形的幾何的所有方面，(2)他到所有鄰近觀測者的距離和方向（相對於「優先」方向的方向，優先方向是由局域幾何的各向異性確定的）。經過每一個觀測者位置，穿過一條唯一的同規軌道。把每一個觀測者沿着他的軌道移動同樣的確定的 Δx^{K}（例如 $\Delta x^{K}=17$），而流形本身不變化。那麼，每一個觀測者向中心計算機報告的幾何信息與他運動前的相同。運動後計算機接收到的信息與運動前接收到的相同。通過幾何測量無法發現曾經出現過的運動！這就是同規的意義。

練習

練習 25.1 由 Hamilton 原理得出運動常數

作爲短程線路徑的應用，試由 Hamilton 原理 (框 13.3) 證明上述 $p_K \equiv \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}$ 的守恒定理

$$\delta \int \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)(dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda)d\lambda = 0 。 \tag{25.8}$$

憶及：在這個作用量原理中，把 $g_{\mu\nu}$ 看作沿路徑的位置 x 的已知函數；而路徑 $x^\mu(\lambda)$ 本身是可變的。

練習 25.2 短程線運動的超 Hamilton 函數形式

試證明一組 Hamilton 函數形式的微分方程是在變分原理 $\delta I = 0$ 中獨立地改變 p_μ 和 x^μ 得出的，其中

$$I = \int (p_\mu dx^\mu - \mathcal{H} d\lambda) \tag{25.9}$$

及

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x) p_\mu p_\nu 。 \tag{25.10}$$

試證明「超 Hamilton 函數」是運動常數，並且這些方程的解是短程線。對於短程線及其參量，選取 $\mathcal{H} = +\frac{1}{2}$, $\mathcal{H} = 0$, $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\mu^2$，或 $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}$ 的含義是什麼？

練習 25.3 平直空時中的 Killing 矢量

在平直 Minkowski 空時中找出十個線性無關的 Killing 矢量。（限於注意線性的關係和恒定的係數）。

練習 25.4 作爲運動常數關鍵的 Poisson 括號

如果 $\boldsymbol{\xi}$ 是一個 Killing 矢量。試證明 $p_K \equiv \xi^\mu p_\mu$ 與上題的 Hamilton 函數 $\mathcal{H}$ 對易（Poisson 括號爲零），$[\mathcal{H}, p_K] = 0$，因此 $dp_K/d\lambda = 0$。［提示：採用一個方便的坐標系。］

練習 25.5 Killing 矢量的換位子是一個 Killing 矢量

考慮兩個 Killing 矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$，不對易［作爲微分算符；即 (8.13) 式的換位子不爲零；在當前的情形考慮繞垂直方向的旋轉］；於是。

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] \equiv \boldsymbol{\zeta} \neq 0 。$$

(a) 試證明，對於 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 兩者的對稱性不能同時採用 (25.1) 式意義下的單一的坐標系 (見練習 9.9)。

(b) 令 $p_\xi = p_\mu \xi^\mu$, $p_\eta = p_\mu \eta^\mu$ 和 $p_\zeta = p_\mu \zeta^\mu$，導出 Poisson 括號的關係式 $[p_\xi, p_\eta] = -p_\zeta$. 在其中的各種對稱性按這種方式關聯的幾何中，證明 p_ζ 也是運動常數。

(c) 在一坐標系中 $\boldsymbol{\zeta} = (\partial/\partial x^K)$，按 (25.10) 式定義 $\mathcal{H}$，並由 $[\mathcal{H}, p_\zeta] = 0$ 證明 $\boldsymbol{\zeta}$ 是 Killing 矢量。

因而兩個 Killing 矢量的換位子本身是 Killing 矢量。

練習 25.6　Killing 矢量的本徵值問題。

試證明任何 Killing 矢量都滿足 $\xi^{\mu}{}_{;\mu}=0$，且是下述方程的本徵值爲 $\kappa=0$ 的本徵矢量。

$$\xi^{\mu;\nu}{}_{;\nu}+R^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu}=\kappa\xi^{\mu}。\tag{25.11}$$

找出這個本徵值方程的變分原理（Raleigh-Ritz 類型）。

§25.3　Schwarzschild 幾何中的運動守恒量

考慮一試驗粒子在由下述線元描繪的 Schwarzschild 幾何中運動

$$ds^2=-(1-2M/r)\,dt^2+\frac{dr^2}{(1-2M/r)}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)。\tag{25.12}$$

爲什麼集中注意圍繞黑洞的粒子軌道

這個幾何的表達式適用於總質量-能量爲 M 的任何球對稱吸引中心的外部區域。對於外部的粒子運動，內部幾何是什麼無關緊要，因爲粒子決不到達內部；如果吸引中心是一顆恒星，亦即是處於流體靜力學平衡的流體質量，那麼在粒子能夠到達內部之前，它要與恒星表面相碰。在這樣一種平衡位形的每一點上，Schwarzschild 坐標 r 超過量 $2m(r)$ 的局域值；見 §23.8。因此，表面的 Schwarzschild 坐標 R 超過 $2M$。結果，無論怎樣致密，表達式 (25.12) 式都適用於任何平衡位形的外部（$r>R>2M$ 意味着人們無需面對有爭議的在 $r=2M$ 處的「奇點」）。然而，位形越致密，試驗粒子能夠探查到的 Schwarzschild 幾何就越多。理想的極限並不是處於流體靜力學平衡的恒星。它是經歷了全部引力坍縮而成爲黑洞的恒星。因而，(25.12) 式適用於任意接近 $r=2M$ 的情形。此處假設的這種理想情形（「黑洞」）是爲了所作的分析能遍及最大範圍的各種可能情況。

無論試驗粒子在哪裏，也無論它運動得多快，把該點和該三維速度徑向地投影在某個確定 r 值的球上，例如，投影在 $r=1$ 的單位球上。這個點和這個矢量一起確定了單位球表面上的一點和一個矢量；它們又標明了起點，並確定了大圓的總體。隨着粒子沿着它的路徑繼續運動，它的位置的徑向投影將繼續位於該大圓上。從一側或另一側離開大圓，將給予單位球的一個半球或另一個半球以優先權，與位置的對稱性相違背。

選擇坐標使粒子軌道在「赤道」上，$\theta=\pi/2$

確定坐標的方位，使軌道的徑向投影與極坐標的赤道 $\theta=\pi/2$ 重合（對於更爲一般的軌道方位的球面三角學，以及對於可能發生的特殊的極軌道——它

與此處討論的赤道軌道大不相同，可參看框25.4）。在這樣定方位的極坐標中，粒子開始時在 θ 方向的動量爲零，此後也爲零，即

$$p^\theta = d\theta/d\lambda = 0。$$

粒子運動的守恒量：
(1) $\boldsymbol{E}$
(2) $\boldsymbol{L}$

線元表達式（25.12）式表明，在 $t \longrightarrow t+\Delta t$, $\phi \longrightarrow \phi+\Delta\phi$ 的變換下，幾何是不變的。於是坐標 t 和 ϕ 是「循環的」。因此，共軛動量 $p_0 \equiv -E$ 和 $p_\phi \equiv \pm L$（$L \geq 0$）是守恒的。這種情形使人們立即推論出這種運動的主要性質如下。

能量-動量四維矢量的大小由粒子的靜止質量給出，

(3) μ

$$g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta + \mu^2 = g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + \mu^2 = 0 \qquad (25.13)$$

或

$$-\frac{E^2}{(1-2M/r)} + \frac{1}{(1-2M/r)}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + \mu^2 = 0。 \qquad (25.14)$$

此外，由等效原理得知，試驗粒子循着與質量無關的同樣世界線。因此，與粒子運動相關的不是它們的能量和角動量，而是比值

(4) $\tilde{E} \equiv E/\mu$

(5) $\tilde{L} \equiv L/\mu$

$$\tilde{E} \equiv E/\mu = \begin{pmatrix}\text{單位靜止質}\\ \text{量的能量}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{L} = L/\mu = \begin{pmatrix}\text{單位靜止質}\\ \text{量的角動量}\end{pmatrix}。 \qquad (25.15)$$

又憶及

$$\lambda = \tau/\mu = \begin{pmatrix}\text{單位靜止質}\\ \text{量的原時}\end{pmatrix}。$$

這樣（25.14）式變爲 r 坐標隨原時變化的方程，其中靜止質量不再出現：

有效勢 $\tilde{V}$，和 $\mu \neq 0$ 時的軌道方程

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - (1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2) = \tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r)。 \qquad (25.16a)$$

其中

$$\tilde{V}(r) = [(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2} \qquad (25.16b)$$

是 §25.1 和圖 25.2 中提到的「有效勢」，將在 §25.5 中討論。對於另外兩

個有關的坐標隨原時變化率，人們假設「直接的」軌道（$d\phi/d\tau>0$; $p_\phi=+L$ 而不是 $-L$），

$$\frac{d\phi}{d\tau}=\frac{1}{\mu}\frac{d\phi}{d\lambda}=\frac{p^\phi}{\mu}=\frac{g^{\phi\phi}L}{\mu}=\frac{\tilde{L}}{r^2} \tag{25.17}$$

和

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\mu}\frac{dt}{d\lambda}=\frac{p^0}{\mu}=-\frac{g^{00}E}{\mu}=\frac{\tilde{E}}{1-2M/r}。 \tag{25.18}$$

由（25.16）式知道了作爲 τ 的函數的 r，就可由（25.17）式和（25.18）式求出 ϕ 和 t 對 τ 的依賴關係。實際上，對稱性的考慮把短程線運動的四個共軛的二階微分方程 $p^\mu{}_{;\nu}p^\nu=0$ 縮減爲單一的一階方程（25.16）式。

對於零靜止質量的物體，涉及原時是沒有意義的，而稍有不同地處理則是適當的（§25.6）。

在 §25.5 中，在考察（25.16）式到（25.18）式所預期的運動之前，分析一下常數 p_0 和 p_ϕ 的物理意義，並鑑定一下其他有物理意義的量（它們的值在研究這些軌道時是有用的）是有用的。把 $E=-p_0$ 稱爲「在無限遠的能量」；把赤道軌道上的 $L=|p_\phi|$ 稱爲「總角動量」。爲了說明這些名稱是正確的，可以把它們和一些標準的量相比較，這些標準的量是由在 Schwarzschild 坐標系赤道上靜止的觀察者當試驗粒子沿着它的軌道飛經觀察者時測出的。令

把 E 解釋爲「在無限遠的能量」和把 L 解釋爲「角動量」

$$\begin{aligned}E_{\text{局域}}&\equiv p^{\hat{0}}\equiv\langle\omega^{\hat{0}},\mathbf{p}\rangle\equiv|g_{00}|^{1/2}\langle dt,\mathbf{p}\rangle=|g_{00}|^{1/2}p^0\\&=|g_{00}|^{1/2}dt/d\lambda=(1-2M/r)^{1/2}dt/d\lambda\end{aligned} \tag{25.19}$$

爲他在他的固有參照系中測出的能量，並令

$$\begin{aligned}v_{\hat{\phi}}&\equiv\frac{p^{\hat{\phi}}}{p^{\hat{0}}}\equiv\frac{\langle\omega^{\hat{\phi}},\mathbf{p}\rangle}{E_{\text{局域}}}=\frac{\langle|g_{\phi\phi}|^{1/2}\mathbf{d}\phi,d/d\lambda\rangle}{E_{\text{局域}}}\\&=\frac{r(d\phi/d\lambda)}{E_{\text{局域}}}=\frac{p_\phi}{rE_{\text{局域}}}\end{aligned} \tag{25.20}$$

爲他測出的原始速度的切向分量。［注意：$\omega^{\hat{a}}$ 是觀察者固有參照系的基1-形式；參看（23.15a,b）式。］依據這些局域地測量的量，在無限遠的能量爲

$$E=-p_0=-g_{00}p^0=|g_{00}|^{1/2}E_{\text{局域}}=(1-2M/r)^{1/2}E_{\text{局域}}=\text{常數}。 \tag{25.21}$$

因此，它表示局域地測量的能量 $E_{\text{局域}}$ 應以因子 $|g_{00}|^{1/2}$ 修正。對於從該觀察者自由飛向（短程線運動）$r=\infty$ 的任何粒子，修正因子化爲 1，並且 $E_{\text{局域}}$（由第二個觀察者測出的，這一次是在無限遠）變得與 E 相同。類似地，由（25.20）式，角動量爲

$$p_\phi=E_{\text{局域}}v_{\hat{\phi}}r=\text{常數}。 \tag{25.22}$$

像 $E=-p_0$ 一樣，此式表示一個守恒量，並且這個量在任意軌道上 $r\longrightarrow\infty$ 處的解釋也是類似的。最後，憶及兩個相碰粒子的總四維動量 $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$ 或 $(p_\mu)_1+(p_\mu)_2$，在碰撞點（在任意 r 處）是守恒的。因此，總的 $(E)_1+(E_2)=(-p_0)_1+(-p_0)_2$ 以及 $(p_\phi)_1+(p_\phi)_2$ 也是守恒的。碰撞粒子之一所在的軌道可能永遠到達不了 $r=\infty$，但這毫無關係。這個守恒原理允許人們並推動人們去接受術語 $E=$「在無窮遠的能量」和 $L=$「角動量」，它對能到達無窮遠的軌道是正確的，對不能到達無窮遠的軌道也是正確的。

練習

練習 25.7 試驗粒子的徑向速度

試求出在 r 的觀測者所測出的速度 $v_{\hat{r}}$ 的徑向分量的公式［$v_{\hat{r}}$ 見 (25.10) 式］。用 r 和常數 E，p_ϕ 表示 $E_{\text{局域}}$，$v_{\hat{r}}$ 和 $v_{\hat{\phi}}$。

練習 25.8 Schwarzschild 幾何的旋轉 Killing 矢量

(a) 試證明，在練習 23.1 的各向同性坐標中，Schwarzschild 幾何的度規取以下形式

$$ds^2=-(1-M/2\bar{r})^2(1+M/2\bar{r})^{-2}dt^2+(1+M/2\bar{r})^4(d\bar{r}^2+\bar{r}^2d\Omega^2)。\quad (25.23)$$

(b) 寫出由上述形式得出下述形式的坐標變換

$$ds^2=-(1-M/2\bar{r})^2(1+M/2\bar{r})^{-2}dt^2+(1+M/2\bar{r})^4(dx^2+dy^2+dz^2)，\quad (25.24)$$

其中 $\bar{r}=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$。

(c) 試證明 $\boldsymbol{\xi}_x=y(\partial/\partial z)-z(\partial/\partial y)$ 以及類似的矢量 $\boldsymbol{\xi}_y$ 和 $\boldsymbol{\xi}_z$ 每一個都是Killing矢量，可先證明（見練習 25.5c）對於每一個 $L_K=\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}_K$，$K=x,\ y,\ z$，Poisson 括號［$\mathcal{H}$，$L_K$］爲零。

(d) 試證明 $\boldsymbol{\xi}_z=(\partial/\partial\phi)_{t,r,\theta}$；並證明對於在赤道平面的軌道 $L_z=p_\phi$，$L_x=L_y=0$。

練習 25.9 試驗粒子的總角動量守恒

通過 Poisson 括號的計算，試證明對於任何 Schwarzschild 短程線，角動量的平方 $L^2=p_\theta{}^2+(\sin\theta)^{-2}p_\phi{}^2$ 是運動常數。

練習 25.10 通過選擇什麼是變化的來選擇方程

對於 Schwarzschild 度規 (25.12) 的特殊情形，寫出積分 I，它在 (25.8) 式中是變化的。如果只有 $\phi(\lambda)$ 是變化的，那麼要求 $\delta I=0$ 所導致的是什麼方程？如果 $t(\lambda)$ 是變化的，又如何？

練習 25.11 由超 Hamilton 函數導出運動

寫出 Schwarzschild 度規特殊情形下的超 Hamilton 函數 (25.10)。根據它的形式推出 p_0 和 p_ϕ 是運動常數。根據這個超 Hamilton 函數的形式導出 (25.14)，(25.17) 和 (25.18) 式。

---

§ 25.4　引力紅移

「能量紅移」（「引力紅移」）定律

守恒定律 $|g_{00}|^{1/2}E_{局域}=$常數 [(25.21) 式] 的這種形式對任何與時間無關的度規（且 $g_{0j}=0$）成立，對零靜止質量或非零靜止質量的粒子成立，它有時被稱爲「能量紅移定律」。它描述局域測量的任何粒子或光子的能量怎樣隨着它爬出或落入靜止引力場而變化（「紅移」或「紫移」）。對於零靜止質量的粒子（光子或中微子），局域測量的能量 $E_{局域}$ 和波長 $\lambda_{局域}$（勿與仿射參量混淆！）的關係是 $E_{局域}=h/\lambda_{局域}$，其中 h 是 Planck 常數。結果，能量紅移定律可以重新寫爲

$$\lambda_{局域}|g_{00}|^{-1/2}=\text{常數}。\tag{25.25}$$

在引力場中半徑爲 r 處靜止的一原子發射一光子，光子被在無窮遠處靜止的天文學家接收到了，其紅移量爲

$$z\equiv\Delta\lambda/\lambda=(\lambda_{接收}-\lambda_{發射})/\lambda_{發射}=|g_{00}(r)|^{-1/2}-1,$$

$$z=(1-2M/r)^{-1/2}-1,\tag{25.26}$$

$$z\approx M/r \text{ 在 Newton 極限。}\tag{25.26N}$$

注：無論光子是否沿徑向的路徑行進，這些表達式均成立。

練習

練習 25.12　定時脈衝的紅移

通過考慮在半徑 r 處一靜止原子相繼發射的兩個光脈衝，導出光子紅移的表達式（25.26）式。［提示：如果 $\Delta\tau_{發射}$ 是由發射原子處測出的兩脈衝之間的原時，而 $\Delta\tau_{接收}$ 是在 $r=\infty$ 的觀測者測出的原時間隔，則可以把 $\lambda_{發射}$ 理想化爲 $\Delta\tau_{發射}$，$\lambda_{接收}$ 理想化爲 $\Delta\tau_{接收}$。］

---

§ 25.5　粒子的軌道

現在，把注意力從在 Schwarzschild 幾何中的能量紅移轉向粒子的軌道。作爲原時函數的位置可求解 (25.16a) 式得出

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\tilde{V}^2(r)=\tilde{E}^2,\tag{25.16a}$$

式中 $\tilde{V}$ 是「有效勢」，定義爲

$$\tilde{V}^2(r)=(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)\tag{25.16b}$$

並在圖 25.2 和框 25.6 中加以說明。框 25.6 中的第一個圖給出了 $\tilde{V}^2(r)$ 作爲 r 的函數。它甚至在「黑洞內部區域」($r<2M$) 也是恰當的，該處的 $\tilde{V}^2$ 爲負值（見第31章）。它用作「有效勢」 $B^{-2}(r)$ 的模型並與之密切相關，$B^{-2}(r)$ 在 §25.6 中用來分析光子的軌道。框 25.6 中最後一個圖給出了作爲 r 函數的 $\tilde{V}(r)$ 本身。此圖或圖 25.2 中的能級可以像任何常規的能級圖那樣來解釋。兩個能級之間的能量差，代表從一個能級躍遷到另一個能級時發出的光子的能量（在無窮遠測量）。究竟畫出作爲 r 函數的 $\tilde{V}(r)$ 還是 $\tilde{V}^2(r)$ 都看何者方便而定。要點在於：$\tilde{V}(r)$ 變得等於資用能 $\tilde{E}$ 的那個 r 值，或 $\tilde{V}^2(r)$ 變得等於 $\tilde{E}^2$ 的那個 r 值是一個轉折點。向較大 r 值運動的粒子，一旦達到轉折點，將折回並向較小的 r 值運動。或者，當粒子向較小的 r 值運動而來到轉折點時，它的運動要反向，並向着較大的 r 值行進。轉折點並非平衡點。一塊石頭筆直向上扔出，它並不呆在位於它飛行頂端的平衡點不動。然而，當 $\tilde{E}-\tilde{V}(r)$ 或 $\tilde{E}^2-\tilde{V}^2(r)$ 有雙重根而不是單一根時，那麼人們就要涉及平衡點（可能如此只是因爲有對抗引力的「離心力」存在）。當這種平衡出現在 $\tilde{V}(r)$ 極小值處時，這是穩定的平衡；而出現在極大值處時，爲不穩定平衡。因而在 r 方向運動的全部主要特徵，可以從作爲 r 函數的有效勢曲線（曲線依賴於 $\tilde{L}$ 的值）以及從有關 $\tilde{E}$ 值的知識（圖 25.2，進一步的細節見框 25.6）讀出。

由有效勢圖判斷軌道的定性特徵

高階 / 初階

框 25.6 在 Schwarzschild 幾何中運動時粒子，其軌道的定性特徵

A. 決定軌道的方程（推導見正文）

1. 對於運動的徑向部分，有效勢的方程爲

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\tilde{V}^2(\tilde{L},r)=\tilde{E}^2,$$

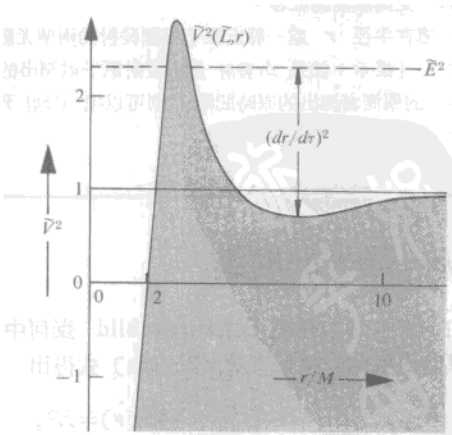
$$\tilde{V}^2(\tilde{L},r)=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right),$$

$\tilde{E}=$（在無窮遠單位靜止質量的能量），
$\tilde{L}=$（單位靜止質量的角動量）。

2. 對於「直接」軌道 $d\phi/d\tau>0$ 的角運動和隨時間運動的補充方程爲：

$$d\phi/d\tau=\tilde{L}/r^2,$$

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{\tilde{E}}{1-2M/r}。$$



軌道的「轉折點」出現在表示 $\tilde{E}^2$ 高度的水平線與 $\tilde{V}^2$ 的交叉處

B. Newton 極限，$|\tilde{E}-1|\ll 1$，$M/r\ll 1$，$\tilde{L}/r\ll 1$

1. 不說「單位靜止質量在無窮遠的能量」$E=\tilde{E}/\mu=(1-v_\infty^2)^{-1/2}$，而代之以「單位靜止質量的非相對論性能量」

$$\varepsilon\equiv\frac{1}{2}(\tilde{E}^2-1)\approx\tilde{E}-1\approx\frac{1}{2}v_\infty^2。$$

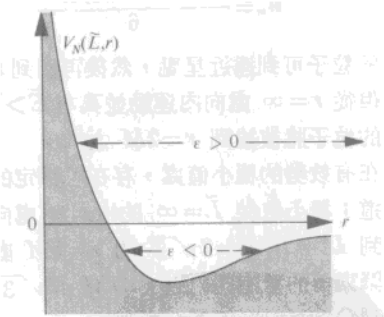
2. 不說 $\tilde{V}^2(\tilde{L},r)$，而代之以 Newton 的有效勢

$$V_N(\tilde{L},r)\equiv\frac{1}{2}(\tilde{V}^2-1)\approx-\frac{M}{r}+\frac{\tilde{L}^2}{2r^2}。$$

3. 把有效勢的方程重新寫爲以下形式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+V_N(\tilde{L},r)=\varepsilon。$$

4. 由有效勢圖及輔助方程 $d\phi/d\tau=\tilde{L}/r^2$ 得出：



a. $\varepsilon\geq 0$ $(\tilde{E}\geq 1)$ 的從 $r=\infty$ 處沿着雙曲線或拋物線軌道向內運動的粒子，在 $\varepsilon=V_N$ 的有效勢處返回 [$\tilde{E}^2=\tilde{V}^2$; 「轉折點」；$(dr/d\tau)^2=0$]，並回到 $r=\infty$ 處。

b. $\varepsilon<0$ $(\tilde{E}<1)$ 的粒子在近星點（橢圓軌道的內轉折點）和遠星點（外轉折點）之間的有效勢阱內往返。

C. 相對論軌道

按照與 B. 的 Newton 圖中相同的方法，應用 A. 的有效勢圖（此處對各種 $\tilde{L}$ 重新畫出），導出軌道的定性特徵。主要結論是以下這些。

1. 除了類似於水星的近星點有移動的情形外（練習 §25.16; §40.5），近星點在 $r \gg M$ 處的軌道是 Kepler 形式的軌道。
2. 其近星點在 $r \lesssim 10M$ 處的軌道與 Kepler 軌道顯著不同。
3. 對於 $\tilde{L}/M \leq 2\sqrt{3}$ 情形，不存在近星點；任何進入的粒子必定被拉到 $r=2M$ 以內。
4. 對於 $2\sqrt{3} < \tilde{L}/M < 4$ 情形，存在着束縛軌道，其中，粒子在近星點和遠星點之間進進出出；但任何從 $r=\infty$ 處（不束縛；$\tilde{E}^2 \geq 1$）向內運動的粒子必定被拉到 $r=2M$ 之內。
5. 對於 $L\dagger = \tilde{L}/M > 4$，存在束縛軌道；從 $r=\infty$ 處向內運動並具有

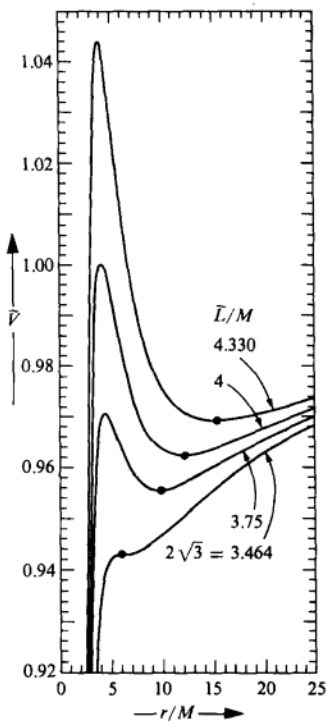
$$\tilde{E}^2 < \tilde{V}_{\text{極大}}^2 = (1-2u_m)(1+L\dagger^2 u_m^2),$$
$$u_m \equiv \frac{1+\sqrt{1-12/L\dagger^2}}{6}$$

的粒子可到達近星點，然後再回到 $r=\infty$；但從 $r=\infty$ 處向內運動並具有 $\tilde{E} > \tilde{V}_{\text{極大}}$ 的粒子將被拉到 $r=2M$ 之內。

6. 在有效勢的極小值處，存在着穩定的圓軌道；極小值從 $\tilde{L}=\infty$ 的 $r=\infty$ 處向內移到 $L\dagger = \tilde{L}/M = 2\sqrt{3}$ 的 $r=6M$ 處。最緊束縛的穩定圓軌道（$\tilde{L}/M=2\sqrt{3}$, $r=6M$）具有的相對結合能爲

$$\frac{\mu - E}{\mu} = 1 - \tilde{E} = 1 - \sqrt{8/9} = 0.0572。$$

7. 在有效勢的極大值處存在着不穩定的圓軌道；極大值從 $\tilde{L}=\infty$ 的 $r=3M$ 處向外移到 $\tilde{L}/M=2\sqrt{3}$ 的 $r=6M$ 處。一個處在這種圓軌道上的粒子，如果向內攝動，則將盤旋到 $r=2M$ 之內。如果向外攝動，並且如果它有 $\tilde{E}^2 > 1$，則將逃逸到 $r=\infty$ 處。如果向外攝動，並且如果它有 $\tilde{E}^2 < 1$，則它將到達遠星點然後進入螺旋軌道最後落入恒星內（例如，如果 $\delta\tilde{E} > 0$ 且不改變角動量）；或者它將在穩定束縛軌道的遠星點和近星點之間出出進進（例如，如果 $\delta\tilde{E} < 0$ 而且也不改變角動量）。



初階
高階

當從定性特徵轉向定量結果時，人們發現明顯地寫出使粒子的 Schwarzschild 坐標增加 Δr 所需要的原時 $\Delta\tau$ 是適當的；於是（按慣例，平方根可爲負值或正值 $\sqrt{a^2}\equiv\pm a$）

$$\tau=\int d\tau=\int\frac{dr}{[\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}}。\qquad(25.27)$$

徑向軌道

這個積分對粒子筆直落入或筆直升出特別簡單，其次，對於角動量爲零，這個積分可以寫成甚至適用於（把 τ 變爲 t）Newton 力學的初等形式

$$\tau=\int d\tau=\int\frac{dr}{[2M/r-2M/R]^{1/2}}。\qquad(25.27')$$

式中 $R\equiv 2M/(1-\tilde{E}^2)$ 是半徑，在該處粒子具有零速度（「遠星點」）。這種運動遵循同樣的「擺線原理」，這在非相對論力學中是很有用的（圖25.3）。於是，用參量形式，有

(1)對於徑向束縛軌道，$r(\tau)$ 的「擺線」形式

$$\tau=\frac{R}{2}(1+\cos\eta),$$
$$\tau=\frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}(\eta+\sin\eta),\qquad(25.28)$$

而從在 $r=R$ 處靜止到落入 $r=0$ 的總原時由下式給出

$$\tau=\frac{\pi}{2}R\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}\qquad(25.29)$$

［與因同樣質量（分布在半徑爲 R 的球上）的牽引而落下的時間相比，縮短 $1/\sqrt{2}$ 的因子；見圖 25.3 中畫點的曲線］。

對於給定的運動，Schwarzschild 坐標時間是什麼？對於一般運動（徑向的或非徑向的）可取（25.16a）式，並且其中出現的 $dr/d\tau$ 可代之以

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\frac{\tilde{E}}{1-2M/r}=\tilde{E}\frac{dr^*}{dt}。\qquad(25.30)$$

式中 r^* 是新的「龜坐標」的縮寫

$$r^*=\int dr^*=\int\frac{dr}{1-2M/r}=r+2M\ln\left(\frac{r}{2M}-1\right),\qquad(25.31)$$

它是 Wheeler (1955) 引入的，並爲 Regge 和 Wheeler (1957) 所推廣。於是，得出方程

(2)作爲坐標時間的函數的「龜」徑向坐標，$r^*(t)$

$$\left(\tilde{E}\frac{dr^*}{dt}\right)^2+\tilde{V}^2=\tilde{E}^2。\qquad(25.32)$$

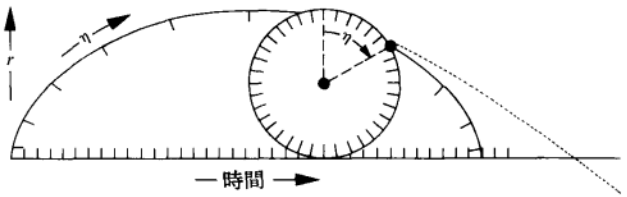


圖 25.3
對於一個筆直落向大小可以忽略的引力吸引中心的試驗粒子，擺線給出了原時和 Schwarzschild r 坐標之間的關係。隨着輪在基線上滾動，產生擺線，輪轉動的角度表爲 η。用這個參量，有

$$r=\frac{R}{2}(1+\cos\eta) \qquad \text{(Schwarzschild } r \text{ 坐標)}$$

$$\tau=\frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}(\eta+\sin\eta) \qquad \text{(原時)}$$

（注：r 和 τ 表達式中尺度因子不同）。從 $r=R$ 處落到 $r=0$ 處的總的原時間隔爲 $\tau=(\pi/2)(R^3/2M)^{1/2}$。同樣的擺線關係以及同樣的下落時間表達式，也適用於 Newton 的非相對論引力理論，只需將符號 τ 代之以 t（普通的時間）即可。在 Newton 理論中，人們討論同樣的吸引質量 M，它均勻地散布在半徑爲 R 的球上，一根管子插入球內造成了試驗粒子運動的管道，從而粒子將作簡諧振蕩（圖上畫點的曲線）。這些振蕩的角頻率 ω 將等同於在剛好掠過行星表面的圓周上試驗粒子轉動的角頻率，它由 Kepler 定律 $M=\omega^2R^3$ 給出。在這種情形，落到中心的時間將爲 $(\pi/2)(R^3/M)^{1/2}$，比集中的吸引中心（集中的質量：在下落的以後階段，有更强的加速度和更高的速度）要長 $2^{1/2}$ 的因子。在集中的吸引中心的影響下，下落到任意點 r 所需的 Schwarzschild 坐標時間 t 的表達式很複雜，這裏就不說明了［見 (25.37) 式和圖 25.5］。

把自由下落粒子的 r 與時間聯系起來的擺線關係，也同樣把「Friedmann 充滿坐埃的宇宙」的半徑與時間聯系了起來（見框 27.1），只是在那裏擺線圖可直接應用，兩個主要變量之間沒有任何尺度上的差別：

$$\begin{pmatrix}\text{三維球}\\ \text{的半徑}\end{pmatrix}=\frac{a}{2}(1-\cos\eta)\simeq\frac{a}{4}\eta^2 \text{（對於微小的 } \eta\text{），}$$

$$\begin{pmatrix}\text{坐標時間等}\\ \text{同於在塵埃}\\ \text{粒子上測量}\\ \text{的原時}\end{pmatrix}=\frac{a}{2}(\eta-\sin\eta)\simeq\frac{a}{12}\eta^3 \text{（對於微小的 } \eta\text{）。}$$

η 的起始點重正化爲膨脹開始的時間；對於粒子下落和宇宙膨脹之間相互關係的更多內容，參看 Lindquist 和 Wheeler (1957)。

此處的有效勢與以前涉及的有效勢相同，

$$\tilde{V}=[(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}。 \qquad (25.33)$$

此外，上式右邊的 $\tilde{E}$ 與前面 $(dr/d\tau)^2$ 方程中出現的 $\tilde{E}$ 相同。因此，轉折點和運動的定性描述兩者均同前。「轉折點是轉折點是轉折點」，正確嗎？對

於轉折點而言，正確；作爲結論，不正確。

(3)接近Schwarzschild 半徑（$r=2M$）的詳情

傳說 Achilles（譯注：希臘神話人物，渾身刀槍不入，但脚踵除外）決不能越過烏龜，每當他趕到它曾到達之處，它已經前移到一個新的位置；當他到達新的位置時，它又更向前了；如此等等以致無窮。設想 Achilles 和烏龜之間的賽跑是向左奔跑，並且期望通過的點位於 $r=2M$ 處。並不禁止 r 坐標通過 $r=2M$ 值。「龜坐標」r^* 則並非如此。它可以沿負無窮方向走到任意遠處（相應於 Achilles 無窮多次趕到烏龜到達過的地方），但 r 仍在 $r=2M$ 之外：

$r/2M$	1.000001	1.0001	1.01	1.278465	2	5	10	10,000
$r^*/2M$	−12.8155	−8.2102	−3.5952	0	2	6.386	12.303	10,009.210

由此得出，用下落粒子上的鐘的原時來描述運動（在 25.29 式的有限原時內，r 一路上從$r=R$減少爲 $r=0$），和用適合於遙遠觀測者的 Schwarzschild 坐標時間 t 來描述運動（r^*一路上從 $r^*=R^*$ 減少爲 $r^*=-\infty$；爲此需要無限的 t；但即使在無限時間內，隨着 r^* 一直到$-\infty$，r 只是漸近於 $r\sim 2M$）之間有很大的不同。因而運動的第二種描述不考慮(別無選擇，只能不考慮)，r 值從 $r=2M$ 減少爲零的整個範圍：理想的完美的物理學，這種物理學是下落粒子正要去觀察和探查的，但這種物理學是遠處觀測者絕對看不到也絕對不可能看到的。如果龜坐標不存在，就必須創造它。它使得每一次逼近 $r=2M$ 十倍與上一個十倍以及下一個十倍同樣重要。它使得它自身與遠處觀測者可以利用的 Schwarzschild 坐標時間的數量成正比，以便越來越細緻的研究這些越來越微小的運動的量。

圖 25.4 重新畫出了作爲龜坐標函數的 (25.33) 式和圖 25.2 的有效勢 $\tilde{V}$。$\tilde{V}$ 在 $r=2M$ 處趨於零揭示出隨着 r^* 趨於負無窮，$\tilde{V}$ 按指數趨於零。因而，在「向着黑洞」($r=2M$, $r^*=-\infty$) 運動時，以坐標時間 t 描繪的粒子立刻拋棄了對任何勢的任何有效的影響，實質上自由地按下式向 r^* 減少處運動，

$$\left(\tilde{E}\frac{dr^*}{dt}\right)^2 \simeq \tilde{E}^2; \tag{25.34}$$

即「以光速」運動 ($dr^*/dt\simeq -1$)。r^* 依賴於 t 立即意味着，r 本身按以下形式漸近地依賴於 Schwarzschild 坐標時間 t

$$r=2M\times(\text{常數}\times e^{-t/2M})。 \tag{25.35}$$

這個結果與粒子的角動量無關，也與粒子的能量無關，只要單位質量的能量 $\tilde{E}$ 足以克服單位質量有效勢 $\tilde{V}$ 的勢壘（圖25.4）。（在第32章中將更多地談到

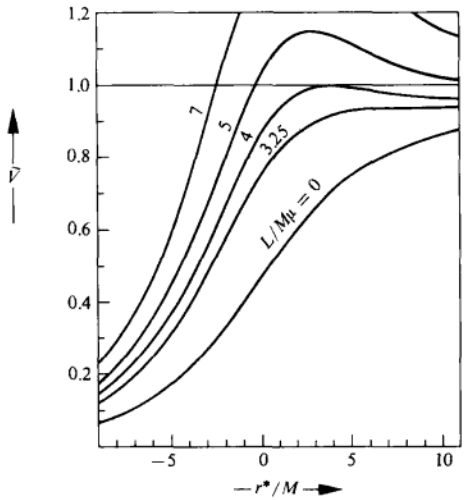


圖 25.4
在 Schwarzschild 幾何中，運動的有效勢表爲龜坐標的函數（對於試驗粒子的幾個選定的角動量值）。角動量 L 以 $M\mu$ 爲單位表示，其中 M 是黑洞的質量，μ 是試驗粒子的質量。有效勢（包括靜止質量）以 μ 爲單位表示；於是，$\tilde{V}=V/\mu$，龜坐標 $r^*=r+2M\ln(r/2M-1)$ 以 M 爲單位給出。

趨近 $r=2M$ 的情形，談到引力坍縮。）

爲了用完全的公式代替漸近公式（25.35）式，需要對（25.32）式求職，於是

$$t=\int dt=\int\frac{\tilde{E}dr^*}{[\tilde{E}^2-\tilde{V}^2]^{1/2}}$$
$$=\int\frac{\tilde{E}}{[\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}}\,\frac{dr}{(1-2M/r)}。\tag{25.36}$$

這個積分並不容易，即使對於純徑向運動（$\tilde{L}=0$）也不容易，這可從得出的複雜表達式（Khuri 1957）中看出：

$$t=\left[\left(\frac{R}{2}+2M\right)\left(\frac{R}{2M}-1\right)^{1/2}\right]\eta+\frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}-1\right)^{1/2}\sin\eta$$
$$+2M\ln\left|\frac{(R/2M-1)^{1/2}+\tan(\eta/2)}{(R/2M-1)^{1/2}-\tan(\eta/2)}\right|。\tag{25.37}$$

式中 η 是同樣的擺線參量，它在（25.28）式和圖 25.3 中出現過（r 與 t 之間的關係可參看圖 25.5 中更細致的曲線，它說明了漸近地趨於 $r=2M$ 的行

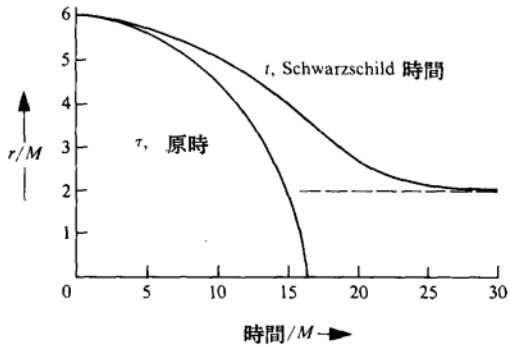


圖 25.5
由 (a) 共動的觀測者 (原時 τ) 和 (b) 遠處的觀測者 (Schwarzschild 坐標時間 t) 描繪落向 Schwarzschild 黑洞。在第一種描述中，到達了 $r=0$ 點，並且很快［見 (25.28) 式］。在第二種描述中，決不能到達 $r=0$，甚至 $r=2M$ 也只能漸近地到達［(25.35) 和 (25.37) 式］。當對原時感興趣時，通過檢查「單位質量的有效勢」$\tilde{V}$ 對 r 的依賴關係 (圖 25.2)；或當對 Schwarzschild 坐標時間 t 感興趣時，通過檢查同樣的有效勢 $\tilde{V}$ 對「龜坐標」r^* 的依賴關係［圖 25.4 和 (25.31) 式］，很容易得出在這兩種情形下，運動的定性特徵。

爲)。與 τ 的積分 (25.28) 很容易相比，t 的積分很困難，原因很簡單。在 (25.27a) 式中只有兩個 r 值作爲 $\tilde{L}$ 爲零的特殊點出現：起點 $r=R$，該處速度爲零；以及 $r=0$ 點，該處 $dr/d\tau$ 變爲無窮大。對比 (25.36) 式，把它重新寫成

$$t=\int dt=\int \frac{[1-2M/R]^{1/2}}{[2M/r-2M/R]^{1/2}}\,\frac{dr}{(1-2M/r)}, \qquad (25.36')$$

它包括三個特殊點：$r=R$, $r=0$，以及具有全部新物理內容的附加點 $r=2M$。容許有角動量就更進一步增加特殊點的數目，就使積分更不好處理，除非採用數值方法或定性的方法 (經圖25.4的勢圖) 或用橢圓函數 [Hagihara (1931)]。

提掉坍縮開始時的精確值 $r=R$ 常常是方便的。結果，人們涉及了$R\longrightarrow$ ∞的極限。其次，把零原時換成最後突變的瞬間是方便的。在此極限下，有

(4)從 $r=\infty$ 自由下落

$$\tau/2M=-(2/3)(r/2M)^{3/2},$$
$$t/2M=-(2/3)(r/2M)^{3/2}-2(r/2M)^{1/2}+\ln\frac{(r/2M)^{1/2}+1}{(r/2M)^{1/2}-1}。 \qquad (25.38)$$

在很大的負的時刻，粒子在遠處，並且只是緩緩趨近。於是，無論指的是坐標時間還是原時，均可寫爲

$$r=(9M\tau^2/2)^{1/3}\simeq(9Mt^2/2)^{1/3}。 \qquad (25.39a)$$

然而，對於落入的最後階段，用原時($\tau\longrightarrow 0, r\longrightarrow 0$)表示與用Schwarzschild坐標時間表示極爲不同，後者可表爲

$$r/2M=1+4e^{-8/3}e^{-t/2M}。 \tag{25.39b}$$

非徑向運動：

(1) Fourier 分析

從純徑向運動轉向具有角動量的運動，情況是，人們樂於把運動的主要量（位移，速度，和加速度的分量）表爲 Fourier 級數（用 Schwarzschild 坐標時間），這些可以很方便地在 Newton 極限下用於分析輻射，分析一個軌道受另一個的攝動，以及吸引中心的生潮作用對運動粒子本身的潮汐攝動。這些系數的任何精確計算都是相當困難的。目前，利用起源於 Newton 分析的逐次逼近，看來可以很好的展示出 Fourier 振幅的值（參看框 25.4 及其中所引文獻）。

在作任何這類 Fourier 分析時，憶及以下這些是適當的：即當運動發生在嚴格的圓軌道內（$\tilde{L}=0$ 的純徑向運動的相反的極端）時，基頻單獨出現，而全部更高的諧頻都具有零振幅。因此，有趣的注意到（練習 25.19）：遠處觀測者測出的此運動的圓頻率 ω 與軌道的 Schwarzschild r 值，嚴格地由非相對論物理學的 Kepler 公式聯繫起來：

$$\omega^2r^3=M\text{（嚴格的；廣義相對論）。} \tag{25.40}$$

(2)角運動的細節

現在從 r 和時間之間的關係轉向 r 和公轉角（在此處的分析中爲 ϕ；在框 25.4 的 Hamilton-Jacobi 分析中爲 θ；名稱的不同在以下是無關緊要的）之間的關係。回到 (25.16) 式

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\tilde{V}^2(r)=\tilde{E}^2,$$

又憶及 (25.17) 式

$$\frac{d\phi}{d\tau}=\frac{\tilde{L}}{r^2}。$$

由第二式解出 $d\tau$，代入第一式，得

$$\left(\frac{\tilde{L}dr}{r^2d\phi}\right)^2+\tilde{V}^2(r)=\tilde{E}^2, \tag{25.41}$$

或，等價地，用 $u=M/r$ 和 $L\dagger=\tilde{L}/\mu=L/M\mu$，得

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2=\frac{\tilde{E}^2-(1-2u)(1+L\dagger^2u^2)}{L\dagger^2}。 \tag{25.42}$$

練習 25.16 介紹了由這個公式導出的另一個微分方程，並用它得出了下述表達式，對於在近似圓軌道上運動的粒子或行星，經過兩相繼近星點時掃過的角度：

(3)近似的圓軌道：近星點移動

$$\Delta\phi=\frac{2\pi}{(1-6M/r_0)^{1/2}}\circ \tag{25.43}$$

每當作爲 r 函數的量 $\tilde{E}^2-\tilde{V}^2(r)$ 或 $\tilde{E}-\tilde{V}(r)$ 改變符號時，徑向運動就從進入轉向外出，或從外出轉向進入，這在此處 r 和 ϕ 的關係中以及前面 r 和時間的關係中是顯而易見的。再次回想圖 25.2 中作爲 r 函數的 $\tilde{V}(r)$ 曲線（對於選定的 $\tilde{L}$ 值）。從這些曲線，完全無須任何計算，就能夠看出由詳盡數字計算所得出的典型軌道（框25.6）的主要特徵。這些特徵是：

(4)角運動的定性特徵

(1)當 $\tilde{E}$ 與有效勢 $\tilde{V}(r)$ 的極小值一致時，爲圓軌道，
(2)當 $\tilde{E}$ 稍大於 $\tilde{V}_{極小}$ 時，爲進動，
(3)當 $\tilde{E}$ 接近於有效勢的極大值 $\tilde{V}_{極大}$ 時，爲暫時的「軌道」（圍繞吸引中心多次轉動），
(4)當 $\tilde{E}$ 超過 $\tilde{V}_{極大}$ 時，爲「捕獲到黑洞內」。

更詳細的分析在框 25.6 中。［對於在 Schwarzschild 幾何中的軌道的明確解析計算，見 Hagihara (1931), Darwin (1959 和 1961)，以及 Mielnik 和 Plebanski (1962)。］

入射粒子的散射

對於能量爲正值的軌道，Rutherfold 散射公式，對反平方力的性質作出了最好的描述。對於把粒子擲入遠處接收器的情形，它給出了吸引中心提供的「靶面積有效值」，該接收器能拾取到在特定偏轉角 Θ 處掉入單位立體角的任何東西：

(1)Rutherfold（非相對論性的）截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{M^2}{[4(\tilde{E}-1)\sin^2\Theta/2]^2}\text{(Rutherfold; 非相對論)} \tag{25.44}$$

（在框 25.4 的 8 到15式中導出）。當人們從 Newton 分析轉向廣義相對論的處理時，發現了與軌道現象相聯繫的有關散射的兩個驚人的新特徵。(1)在給定偏轉角 Θ 處掉入的粒子，現在不僅包括那些確實偏轉了 Θ 的粒子（在 Rutherfold 散射中這是唯一的貢獻），而且還包括那些偏轉了$\Theta+2\pi$, $\Theta+4\pi$, ，…等等的粒子（無窮系列的貢獻）。(2)這些補充的貢獻，雖然總量有限，甚至「在 Θ 的每單位範圍」內的總量也有限，但表爲在向前方向（$\Theta=0$）上或在向後方向（$\Theta=\pi$）上「每單位立體角 $d\Omega=2\pi\sin\Theta d\Theta$」的總量時，却並不是有限的。這種情況對向前的散射並未產生值得注意的變化，因爲在非相對論性的近似中已經是無限的了（趨近 $\Theta=0$ 時，$d\sigma/d\Omega$ 的 Rutherfold 值是無

(2)歸因於相對論性引力的新特徵

窮大，這是由於粒子以很大的碰撞參量飛越從而經歷很小的偏轉；見練習25.21）。反之，在 Rutherfold 分析中完全是有限的向後散射也達到無窮大：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta\sim\pi}\sim\frac{\text{常數}}{\sin\theta}。\tag{25.45}$$

這種在向後方向上集中的散射稱爲「光輪」（譯註：原文 glory，意爲神像後的光輪）。飛機的影子投在它下方很遠處的雲層上，觀看影子四周耀眼的照明即可很容易地看到這種效應（光線在水滴內的 180° 散射）。觀察接近 $\theta=180°$ 的原子被原子的散射，也很容易看到這種效應。白矮星甚至任何中子星，都還沒有致密到足以使高速粒子偏離它的路線作這種 180° 的偏轉。只有黑洞才致密到足以產生這個效應。

在 Schwarzschild 幾何中運動的進一步有趣特徵，將在以下的練習中出現。

練習

練習 25.13 粒子軌道的定性形式

試證明在框 25.6 的C部所作的有關粒子軌道的論述。

練習 25.14 碰撞參量

對於散射軌道（即非束縛軌道），試證明

$$b=\tilde{L}/(\tilde{E}^2-1)^{1/2}。\tag{25.46}$$

作圖說明碰撞參量的物理意義。

練習 25.15 落到 $r=2M$ 處的時間

試由 (25.16) 式及框 25.6 中第一圖和 (25.32) 式證明，軌道（一般的 $\tilde{L}$ 值！）可經有限的原時但需經無限的坐標時間 t 才能接近 $r=2M$。當然，對於平衡恒星，它必須具有 $R>2M$ 的半徑才能使落到表面的坐標時間 t 爲有限。

練習 25.16 近似圓軌道的近星點移動

把 (25.42) 式重新寫爲下述形式

$$(du/d\phi)^2+(1-6u_0)(u-u_0)^2-2(u-u_0)^3=(\tilde{E}^2-\tilde{E}_0^2)/L^{\dagger 2}。\tag{25.47}$$

用 $\tilde{L}/M$ 表示常數 $u_0\equiv M/r_0$，用 u_0 表示 $\tilde{E}_0$。試證明，對於半徑爲 r_0 的近似圓軌道，在兩相繼近星點（最接近恒星的點）之間掃過的角度爲

$$\Delta\phi=2\pi(1-6M/r_0)^{-1/2}。\tag{25.48}$$

取 $r_0=8M$，畫出軌道形狀的略圖。

練習 25.17　向內落下期間的角運動

試由 (25.42) 式導出，在落入 $r=0$ 的軌道上掃過的總角度 $\Delta\phi$ 是有限的。計算是直截了當的；但是，鑒於在同一軌道上 $t(\lambda)$ 的行爲 (25.32 式和練習 25.15)，解釋並不直截了當。這個解釋將在第31章中闡明。

練習 25.18　有效勢的極大值和極小值

對於作爲角動量函數的有效勢極大值的位置和極小值的位置，試導出圖 25.2 說明中所給出的表達式。並在 $\tilde{L}$ 遠大於 M 的極限下，確定勢壘高度對角動量依賴關係的極限形式。

練習 25.19　Kepler 定律對圓軌道成立

試由 (25.17) 式的 $d\phi/d\tau$ 和 (25.18) 式的 $dt/d\tau$，導出遠處觀察者所看到的公轉圓頻率的表達式；並由練習25.18的結果（或其他）證明，對於 Schwarzschild r- 值等於 r 的任意圓軌道，無論穩定（勢極小）或不穩定（勢極大），圓頻率都嚴格地滿足 Kepler 的關係式

$$\omega^2 r^3 = M。$$

練習 25.20　Hamilton-Jacobi 函數

在 r, θ 圖上，對於 $t=0$ 和 $\tilde{L}=4M$，$\tilde{E}=1$（或 $\tilde{L}=2\sqrt{3}M$, $\tilde{E}=(8/9)^{1/2}$，或這兩個參量某些其他簡單值的等價組合），畫出恒定動力學位相 $\tilde{S}(t,r,\theta)=0$ 的各點的軌迹。試證明，恒定 $\tilde{S}$ 的表面的全部集合，可以通過把上述軌迹轉一個角度再轉另一個又另一個角度並重新複製或重新描繪得出。從物理上說明所得曲線圖案的主要特徵。

練習 25.21　受引力偏轉和受電力偏轉的比較

一任意速度爲 β 的試驗粒子以很大的碰撞參量 b 飛經質量 M，它的偏轉是很小的。試證明偏轉爲

$$\theta = \frac{2M}{b\beta^2}(1+\beta^2)。 \tag{25.49}$$

試根據 Newton 力學導出以光速運動的粒子的偏轉。並證明 (25.49) 式在 $\beta \longrightarrow 1$ 的極限下是 Newton 偏轉的兩倍。再導出（平直空間分析）靜止質量爲 μ、電量爲 e 的快速粒子被電量爲 Ze 的核偏轉的對比公式爲

$$\theta = \frac{2Ze^2}{\mu b\beta^2}(1-\beta^2)^{1/2}。 \tag{25.50}$$

通過觀測光被太陽彎曲，仿照電磁理論，能否排除引力的「矢量」理論［參看，例如，Brillouin (1970)］。［提示：爲了簡化數學分析，回到 (25.42) 式。對 ϕ 作一次微分，轉化爲二階方程。重新整理，使左邊所有項都不含引力，而右邊所有項都來源於 $(1-2u)$ 因子中的 $-2u$ 項（引力）。略去方程的右邊並嚴格求解（直線運動）。通過在其中插入

$u(\phi)$ 的無微擾表達式，算出右側作爲 ϕ 的函數的微擾項。再次求解，得出偏轉。]

練習 25.22 被黑洞捕獲

粒子除了被黑洞散射外，還有直接捕獲到黑洞內的。試證明捕獲截面爲 $\pi b^2_{\text{臨界}}$，其中臨界碰撞參量 $b_{\text{臨界}}$ 由 $L_{\text{臨界}}/(E^2-\mu^2)^{1/2}$ 給出。根據圖 25.2 說明中的公式或其他公式，試證明對於高能粒子，此截面隨能量的變化爲

$$\sigma_{\text{捕獲}}=27\pi M^2\left(1+\frac{2}{3\tilde{E}^2}+\cdots\right) \tag{25.51}$$

（對於 $\tilde{E}\longrightarrow\infty$ 的光子極限），而對於低能粒子，爲

$$\sigma_{\text{捕獲}}=16\pi M^2/\beta^2, \tag{25.52}$$

式中 β 是相對於光速的速度［Bogorodsky (1962)］。

§25.6 在 Schwarzschild 幾何中光子，中微子或引力子的軌道

零靜止質量粒子的軌道：

「單位靜止質量的能量」和「單位靜止質量的角動量」的概念，對於零靜止質量的客體（光子，中微子，甚至練習 35.16 的引力子）是毫無意義的。然而，通過研究有限靜止質量 μ 的粒子的運動並取 $\mu\longrightarrow 0$ 的極限，這類實體的運動特徵全都可以發現。在此極限下，量

$$\tilde{E}=E/\mu$$

和

$$\tilde{L}=L/\mu$$

各自趨於無限大；但比值

(1)定義碰撞參量

$$\left(\begin{matrix}\text{碰撞}\\ \text{參量}\end{matrix}\right)=b=\frac{(\text{角動量})}{(\text{線動量})}=\frac{L}{(E^2-\mu^2)^{1/2}}=\frac{\tilde{L}}{(\tilde{E}^2-1)^{1/2}} \tag{25.53}$$

趨於有限值

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\tilde{L}}{\tilde{E}}=b。 \tag{25.54}$$

(2)軌道形狀

在此極限下，軌道形狀的 (25.41) 式立刻化爲簡單的形式

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi_2}\right)^2+\frac{1-2M/r}{r^2}=\frac{1}{b^2}, \qquad (25.55)$$

或

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2+B^{-2}(r)=b^{-2}, \qquad (25.56)$$

或

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+u^2(1-2u)=\left(\frac{M}{b}\right)^2\equiv\frac{1}{\tilde{b}^2}。 \qquad (25.57)$$

無論那種形式，軌道的微分方程已經寫出，其中一項取決於軌道的選擇（$1/b^2$ 項），其他的取決於 Schwarzschild 幾何的性質而不取決於軌道的選擇。這第二項定義了一類有效勢，

$$\begin{pmatrix}\text{「光子的}\\ \text{有效勢」}\end{pmatrix}\equiv B^{-2}(r)\equiv\frac{1-2M/r}{r^2}。 \qquad (25.58)$$

(3)有效勢

此處並不試圖取平方根，而對有限靜止質量的粒子是這樣作的。在那裏取平方根是爲了得出在非相對論極限下化成 Newton 有效勢（加上靜止質量）的量；但對於光（$v=1$），並不存在 Newton 極限。因此，在框 25.7 中直接畫出有效勢（25.58），並在該處用於分析 Schwarzschild 幾何中光子軌道的某些主要特徵。

在必要時可證明，不畫出作爲 r 函數的 (25.58) 式的「有效勢」，而畫出由該公式算出的作爲 r 函數的「勢碰撞參量 $B(r)$」是有用的［參看，例如，Power 和 Wheeler (1957), Zel'dovich 和 Novikov (1971)］。這個勢碰撞參量可解釋如下：一條光線，爲了到達點 r 所必須具有的碰撞參量 b 等於或小於 $B(r)$：

$$b\leq B(r)（「可到達的條件」）。 \qquad (25.59)$$

一條光線，若具有零碰撞參量（正碰撞）或具有任何小於 $b_{\text{臨界}}=\text{極小}[B(r)]=3\sqrt{3}M$ 的碰撞參量，就能到達任何 r 值和一切 r 值。

(4)臨界碰撞參量

由 (25.58) 式定義的美妙而簡單的「有效勢」用於 (25.56) 式可確定軌道的形狀；即當光子到達給定 r 值時它所具有的方位角 ϕ。在其他方面，可以同樣有興趣地知道，光子在何時或在什麼 Schwarzschild 坐標時間到達給定的 r 值處。更寬廣地說，光子的短程線（對此，原時已無意義）可用仿射參量 λ 的方法從第一條原理來分析，而不必用首先考慮一個粒子再取極限 $\mu\longrightarrow 0$ 的方法。

(5)仿射參量

（接第676頁）

高階 初階

框 25.7 在 Schwarzschild 幾何中光子軌道的定性分析

A. 支配軌道的方程

1.對於運動的徑向部分，有效勢方程爲：

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+B^{-2}(r)=b^{-2};$$

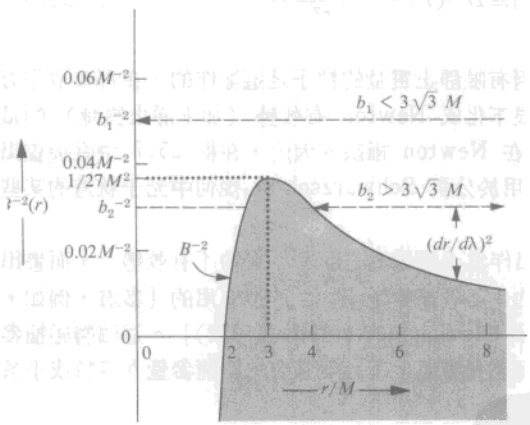
$$B^{-2}(r)=r^{-2}(1-2M/r);$$

$b=$(碰撞參量)。

2.確定角運動和時間運動的補充方程：

$$d\phi/d\lambda=1/r^2;$$

$$dt/d\lambda=b^{-1}(1-2M/r)^{-1}。$$



B. 軌道的定性特徵（由有效勢圖導出）

1.一個零質量粒子的 $b>3\sqrt{3}M$，它從 $r\longrightarrow\infty$ 落下，粒子將被「反射離開勢壘」（近星點；$b=B$; $dr/d\lambda=0$）並回到無窮遠。

a. 對於 $b\gg 3\sqrt{3}M$，軌道是直線，除了角度 $4M/b$ 的輕微偏離外（練習 25.21; §40.3）。

b. 對於 $0<b-3\sqrt{3}M\ll M$，粒子在飛回 $r=\infty$ 之前，在 $r\approx 3M$ 處圍繞恒星多次（「不穩定圓軌道」）。

2.一個零質量粒子的 $b<3\sqrt{3}M$，它從 $r=\infty$ 落下，粒子將落入 $r=2M$ 處（無近星點）。

3.從 $r=2M$ 附近發射的一個零質量粒子僅當它的 $b<3\sqrt{3}M$，才能逃向無窮遠，否則它將到達遠星點然後被拉回 $r=2M$ 處。

C. 作爲傳播方向函數的逃逸和捕獲

一觀測者在 Schwarzschild 引力場中靜止，他測出零質量粒子相對於它的正交歸一系［(23.15) 式］的普通速度爲

$$v_{\hat{r}}=\frac{|g_{rr}|^{1/2}dr/d\lambda}{|g_{00}|^{1/2}dt/d\lambda}=\pm(1-b^2/B^2)^{1/2};$$

$$v_{\hat{\phi}}=\frac{|g_{\phi\phi}|^{1/2}d\phi/d\lambda}{|g_{00}|^{1/2}dt/d\lambda}=b/B;$$

$$(v_{\hat{r}})^2+(v_{\hat{\phi}})^2=1;$$

$\delta\equiv$(傳播方向和徑向方向之間的夾角)

$=\cos^{-1}v_{\hat{r}}=\sin^{-1}v_{\hat{\phi}}$。

爲了能越過勢壘，粒子必須具有 $b<3\sqrt{3}M$，或 $v_{\hat{\phi}}^2B^2<27M^2$，或 $\sin^2\delta<27M^2/B^2$。這個結果，重新表爲：

1.當且僅當 $v_{\hat{r}}$ 爲正且

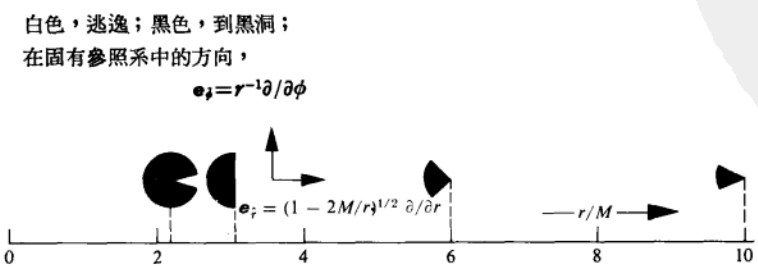
$$\sin\delta<3\sqrt{3}MB^{-1}(r),$$

一在 $r<3M$ 處的零靜止質量粒子才最終逃逸到無窮遠，而不被在 $r=2M$ 的黑洞捕獲。

2.當且僅當：(1)$v_{\hat{r}}$ 爲正，或(2)$v_{\hat{r}}$ 爲負，且

$$\sin\delta>3\sqrt{3}MB^{-1}(r),$$

一在 $r>3M$ 處的零靜止質量粒子才最終逃逸到無窮遠。



初階
高階

回到守恒定律（25.17）和（25.18）的涉及仿射參量 λ 而不涉及靜止質量 μ 的表述形式；於是

$$\frac{d\phi}{d\lambda}=\frac{L}{r^2} \tag{25.60}$$

和

$$\frac{dt}{d\lambda}=\frac{E}{1-2M/r}。 \tag{25.61}$$

憶及光子在引力場中的路線受它的方向支配而不是受它的能量支配。因此，單獨的 E 或 L 都關無緊要，只有它們的比值即（25.54）式和練習 25.14 的碰撞參量 $b=L/E$ 才是有關的。這種情況引導人們把仿射參量 λ 代之以一個新的仿射參量，

$$\lambda_{新}=L\lambda, \tag{25.62}$$

它沿着光子的世界線是恒定的。用這個符號（此後省略下標「新」），守恒定律取以下形式，

(6)軌道方程

$$\frac{d\phi}{d\lambda}=\frac{1}{r^2}, \tag{25.63}$$

$$\frac{dt}{d\lambda}=\frac{1}{b(1-2M/r)}。 \tag{25.64}$$

光子世界線是原時零間隔線的表述

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}=0 \tag{25.65}$$

導致「徑向方程」

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+B^{-2}(r)=b^{-2}。 \tag{25.66}$$

這裏，再次遇到了（25.58）式的「有效勢」$B^{-2}(r)$。現在的光子短程線的更完全的方程組所具有的優點是，它們能達到的空間範圍超過了用空時中世界線所描繪的範圍。

(7)散射截面

回到空間！圖25.6示出 Schwarzschild 幾何中光子的典型軌道。圖 25.7 示出作爲碰撞參量函數的偏轉角。根據這條曲線所包含的信息，人們可以計算圖 25.7 的散射曲線的各個「分支」對微分散射截面的貢獻

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\sum_{\text{「各個分支」}}\left|\frac{2\pi b\ db}{2\pi\sin\Theta d\Theta}\right| \tag{25.67}$$

[圍繞吸引中心轉一圈，兩圈，等等；關於這些分支以及在散射分析中扮演核心角色的偏轉函數 $\Theta=\Theta(b)$ 的更多內容，參看，例如， Ford 和 Wheeler

高階
初階

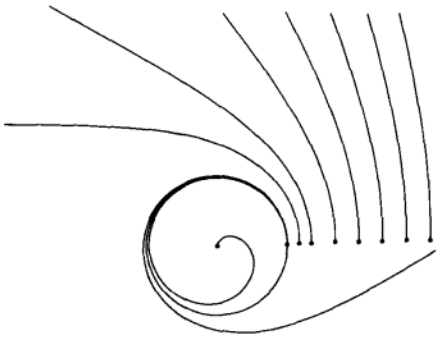


圖 25.6
在黑洞「赤道平面」上的光子軌道，它是用 Schwarzschild 坐標 r 和 ϕ 畫出的，選取的軌道轉折點之值爲 $r_{\text{轉折點}}/M=2.99, 3.00$（不穩定軌道），3.01, 3.5, 4, 5, 6, 7, 8, 9。碰撞參量由公式 $b=r_{\text{轉折點}}(1-2M/r_{\text{轉折點}})^{-1/2}$ 給出。沒有畫出的情形（甚至對於向內投入的螺旋線）是碰撞參量小於 $b_{\text{臨界}}=(27)^{1/2}M$ 的情形，而不是能够越過圓 $r=3M$ 的任何軌道。這只對 b 小於 $b_{\text{臨界}}$ 的軌道才能發生。對於這類軌道，無轉折點；光子從無窮遠進來並終止於 $r=0$ 處；對於 $b=0$（正碰撞）是直接進入；而當 $b/M=(27)^{1/2}-\varepsilon$（$\varepsilon$ 是一個非常小的量）時，只是轉了許多圈之後才接近 $r=3M$。感謝 R. H. Dicke 教授允許發表這些曲線，對此，他有數字計算器的計算，並直接由公式 $d^2u/d\phi^2=3u^2-u$ 畫出，其中 $u=M/r$。

初階
高階

(1959a,b)]。對於小角度，散射的「Rutherfold」部分佔優勢。小角度散射的主要部分以及它們在 $\Theta\longrightarrow 0$ 的極限，都來自大的碰撞參量，對此，有

$$\Theta=\frac{4M}{b} \tag{25.68}$$

（見練習 25.21 和練習 25.24）。由此得出截面的極限形式爲

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{4M}{\Theta^2}\right)^2 \quad (\text{小的}\Theta)。 \tag{25.69}$$

又，在 $\Theta=\pi$ 處，微分散射截面有一奇點，具有光輪的特徵［見（25.44）式以下的討論］。寫出散射函數若干分支對微分截面的貢獻，並求和，得出，在接近 $\Theta=\pi$ 處，有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{M^2}{\pi-\Theta}(1.75+0.0029+0.0000055+\cdots)=1.75\frac{M^2}{\pi-\Theta}。 \tag{25.70}$$

於是，從原則上說，如果一强有力的光源照耀在黑洞上，就能得到從它直接返回的幾個光子。（25.70）式提供了計算這種返回强度的方法。見練習25.26。

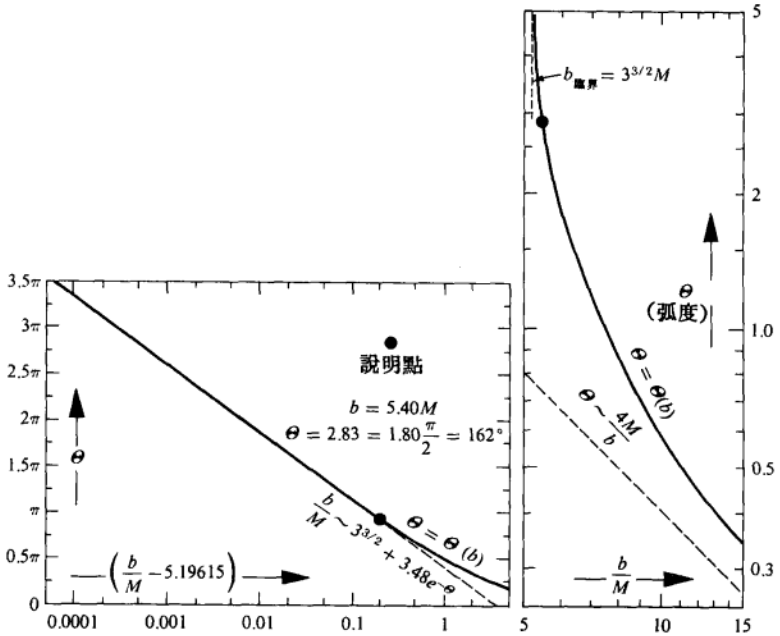


圖 25.7

光子被 Schwarzschild 黑洞偏轉，或被小到不足以阻塞光子軌道的任何球對稱吸引中心偏轉。精確計算（光滑曲線）與公式（虛曲線）比較在兩種極限情形下漸近地正確，這兩種極限情形是碰撞參量 b ：(1)非常接近 $b_{臨界} = 3^{3/2}M$（圍繞吸引中心轉了許多圈）；以及(2)遠大於 $b_{臨界}$（微小的偏轉）。偏轉的精確計算法如下（爲了簡單起見，已給出的全部距離均以質量值M爲單位）。(1)選取最接近點的 Schwarzschild 坐標值爲 $r = R$。(2)由 $b^2 = R^3/(R-2)$ 計算碰撞參量 b。(3)由 $Q^2 = (R-2)(R+6)$ 計算 Q。(4)由 $\sin^2\theta = k^2 = (Q - R + 6)/2Q$ 確定「第一類橢圓積分」的模 k。(5)由 $\mathrm{sn}^2\, u_{極小} = \sin^2\phi_{極小} = (2 + Q - R)/(6 + Q - R)$ 確定同樣橢圓函數的所謂振幅 $\phi = \phi_{極小}$。(6)從而總偏轉爲

$$\Theta = 4(R/Q)^{1/2}[F(\pi/2, \theta) - F(\phi_{極小}, \theta)] - \pi。$$

這裏畫出的值是 James A. Isenberg 在 C. G. Darwin (1959, 1961) 的工作基礎上計算出來的。

(8)引力透鏡效應

當照明源不在黑洞觀測者的一側而在相反的一側時，以大碰撞參量飛行的光子，除了要經受歸入 (25.68) 式的「透鏡效應」外［文獻太多此處無法概括，但可參看，例如，Refsdai (1964)］，還有光輪類型的照明（强度$\sim 1/\sin\Theta$，然而，現在 Θ 接近於零），它是從經歷過 $\Theta = 2\pi, 4\pi, \ldots$ 偏轉的諸光子接收到的。這種照明來自「明亮的環」，它位於由 $b/M - 3^{3/2} = 0.0065, 0.000012, \ldots$ 給出的碰撞參量處。儘管所有這些光學效應就其原理而言是有興趣的，但在觀測黑洞的所有方法中，它們却是最差的；詳盡的討論見框 33.3 的第 VI 部分，C。

練習

練習 25.23　光子軌道的定性特徵

試證明框 25.7 中所作的有關零靜止質量粒子軌道的全部陳述。

練習 25.24　光偏轉

用無量綱變量 $u=M/r$ 代替 r 本身，並用 $u_b=M/b$ 代替碰撞參量，把 (25.55) 式轉換成一階方程

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+(1-2u)u^2=u_b^2 \tag{25.71}$$

由此，用微分法，轉換成

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=3u^2。 \tag{25.72}$$

(a) 在大碰撞參量或微小 u 的近似下，上式右邊的項可以忽略，試證明 (25.72) 式的解得出初等的直線運動（零偏轉）。

(b) 把這個零階解代入 (25.72) 式右邊的微擾項 $3u^2$，重新解出 u（「直線運動加上一階修正」）。由此證明，光被太陽彎曲的公式可令 (25.49) 式中的 $\beta=1$ 給出。

練習 25.25　光被黑洞捕獲

試證明 Schwarzschild 黑洞給出的光捕獲截面爲 $\sigma_{\text{捕獲}}=27\pi M^2$。

練習 25.26　光從黑洞返回

試證明射在黑洞上的閃爍的强光脈衝原則上會從位於 $b/M-3^{3/2}=0.151,\ 0.00028,\ldots$ 的亮環返回。怎樣才能計算這些不同返回的時間延遲的差別？試證明，在衍射可以忽略的條件下，返回的强度 I（爾格／厘米²）作爲以下各量的函數如下式，這些量是：原脈衝的能量 E_0（爾格／球面度），黑洞的質量 M（厘米），到它的距離 R，以及從「閃光」到接收返回輻射的接收器的橫向距離 r

$$I=\frac{E_0}{R^3r}\sum_{\Theta=(2N+1)\pi}\left|\frac{2b\ db}{d\Theta}\right|=\frac{E_0M^2}{R^3r}(1.75+0.0029+0.0000055+\cdots)。$$

§25.7　球狀星團

把本章發展的軌道理論與 §22.6 發展的彎曲空時中的動力學理論結合起來，就可以用公式表述相對論性星團的理論。

靜止的球狀星團

爲了簡單起見，考慮球對稱星團［例如，球狀星團 (globular cluster)，但很致密以致相對論性引力效應很重要］。要求星團是靜止的，意即相空間中的數密度 $\mathcal{N}$ 與時間無關。（沿着短程線軌道飛行而進入相空間確定區域的新恒

星，與離開該處的「老」恒星的比率相同。）忽略恒星之間的碰撞和近距離遭遇；即把每一個恒星的軌道作爲星團整體球對稱空時中的短程線來處理。

(1)分析的基礎

接受這些理想化條件後，人們就可以寫下一組容易處理的星團結構方程*。由於星團是靜止的和球狀的，因此它的引力場也應是靜止的、球狀的。由此，可以引用在第23章對靜止球狀恒星用過的同類坐標系（「Schwarzschild」坐標）：

$$ds^2=-e^{2\Phi}dt^2+e^{2\Lambda}dr^2+r^2d\Omega^2;\quad \Phi=\Phi(r),\quad \Lambda=\Lambda(r)。\tag{25.73}$$

在空時中每一事件的切向空間處，存在着密集恒星的動量矢量。對於在此切向空間（「動量空間」）的坐標，採用四維動量的物理分量 $p^{\hat{a}}$，即採用正交歸一系的分量是方便的。

$$\omega^{\hat{t}}=e^{\Phi}dt,\quad \omega^{\hat{r}}=e^{\Lambda}dr,\quad \omega^{\hat{\theta}}=rd\theta,\quad \omega^{\hat{\phi}}=r\sin\theta d\phi。\tag{25.74}$$

於是，相空間中恒星的數密度是一個球對稱的靜止的函數

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}[r,p^{\hat{0}},p^{\hat{r}},(p^{\hat{\theta}2}+p^{\hat{\phi}2})^{1/2}]。\tag{25.75}$$

[因爲星團靜止，$\mathfrak{N}$ 與 t 無關；因爲星團球對稱，又與 θ、ϕ 和角度 $\Theta=\tan^{-1}(p^{\hat{\phi}}/p^{\hat{\theta}})$ 無關。]

描述星團結構的函數 Φ, Λ, 和 $\mathfrak{N}$ 取決於動力學方程（也稱爲 Vlasoff 方程）(§22.6)

$$d\mathfrak{N}/d\lambda=0 \text{ 即 } \mathfrak{N} \text{ 沿相空間中每一個恒星的軌道守恒}\tag{25.76a}$$

和 Einstein 場方程

$$G^{\hat{a}\hat{b}}=8\pi T^{\hat{a}\hat{b}}=8\pi\int(\mathfrak{N}p^{\hat{a}}p^{\hat{b}})\mu^{-1}dp^{\hat{0}}dp^{\hat{r}}dp^{\hat{\theta}}dp^{\hat{\phi}}。\tag{25.76b}$$

[Ogorodnikov (1965) 曾論述過 Newton 星團的 Vlasoff 方程。粒子（恒星）羣的脅强-能量張量的上述表達式已在練習22.18中導出。此處，如同練習22.18 那樣，不假設粒子（恒星）全都具有同樣的靜止質量。注，靜止質量在此處表爲 μ，而在第22章中則表爲 m。]

(2) Vlasoff 方程的解

爲了求解 Vlasoff 方程，只需注意 $\mathfrak{N}$ 沿恒星軌道是守恒的，因此必定是軌道運動常數的函數。在星團的靜止球狀空時中，相應於每一個 Killing 矢量，存在着一個運動常數（見練習25.8）：

* 這些方程是 Zel'dovich 和 Podurets (1965) 首先導出和研究的。

$$\begin{aligned} E &= \text{「在無窮遠的能量」} = -\mathbf{p}\cdot(\partial/\partial t) = -p_0, \\ L_z &= \text{「角動量的 } z \text{ 分量」} = p\cdot\xi_z = p\cdot(\partial/\partial\phi) = p_\phi, \\ L_y &= \text{「角動量的 } y \text{ 分量」} = p\cdot\xi, \\ L_x &= \text{「角動量的 } x \text{ 分量」} = p\cdot\xi_x\text{。} \end{aligned} \tag{25.77a}$$

此外，每一個恒星的靜止質量

$$\mu = (p^{\hat{0}2} - p^{\hat{r}2} - p^{\hat{\theta}2} - p^{\hat{\phi}2})^{1/2} \tag{25.77b}$$

也是它的運動常數。於是，Vlasoff 方程的一般解的形式爲

$$\mathscr{N} = H(E, L_z, L_y, L_x, \mu)\text{。}$$

但這個一般解並不是球對稱的。例如，分布函數

$$\mathscr{N} = H(E, \mu, L_z)\delta(L_y)\delta(L_x)$$

相應於其軌道全部在赤道平面 $\theta=\pi/2$ 上的星團（對於星團中的全部恒星 $L_y=L_x=0$）。爲了球對稱，星團的分布函數必須只依賴於角動量

$$L = (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)^{1/2}$$

的大小，而不依賴於它的方向（不依賴於恒星軌道平面的方位）。從而，在靜止球對稱空時中 Vlasoff 方程的一般球對稱解的形式應爲

$$\mathscr{N} = F(E, L, \mu)\text{。} \tag{25.78}$$

爲了應用這個一般解，必須用約定的相空間坐標 $(t, r, \theta, \phi, p^{\hat{0}}, p^{\hat{r}}, p^{\hat{\theta}}, p^{\hat{\phi}})$ 重新表示運動常數 E, L, μ。恒星的靜止質量由 (25.77b) 式給出。在無窮遠的能量可由局域測量能量的紅移得出

$$E = -p_0 = e^{\Phi}p^{\hat{0}}\text{。} \tag{25.79a}$$

對於在赤道平面（$p_\theta = p^{\hat{\theta}} = p^{\hat{\phi}} = 0$; $L_x = L_y = 0$）的軌道，總角動量的形式爲

$$L = |L_z| = |p_\phi| = |rp^{\hat{\phi}}| = r\times\text{（四維動量的「切向」分量）。}$$

由於對稱性，對於在其他平面的軌道，方程 $L = r\times$（$\mathbf{p}$ 的「切向」分量）也必須是正確的；它必須是完全普遍的：

$$L = rp^{\dagger}, \tag{25.79b}$$

$$p^{\dagger} \equiv \text{（四維動量的切向分量）} = [(p^{\hat{r}})^2 + (p^{\hat{\theta}})^2]^{1/2} \tag{25.80}$$

（見練習 25.9）。

(3)「抹掉」歸因於恒星的脅强-能量張量

在求解 Einstein 場方程之前，人們發現把脅强-能量張量化成比(25.76b)式更明確的形式是有用的。非對角分量 T^{0j} 和 T^{jk} $(j\neq k)$ 全爲零，因爲它們的被積函數是 p^j 的奇函數。對於對角分量 T^{00}, T^{rr}, 和 $\frac{1}{2}(T^{\theta\theta}+T^{\phi\phi})$，被積函數與在切向動量平面中的角度 $\Theta\equiv\tan^{-1}(p^\phi/p^\theta)$ 無關；因此動量體元可以重新寫爲

$$dp^0dp^rdp^\theta dp^\phi\longrightarrow 2\pi p^\theta dp^\theta dp^r dp^0。$$

把變量從 (p^θ,p^r,p^0) 改變爲 (p^θ,μ,p^0), 其中

$$\mu=[(p^0)^2-(p^r)^2-(p^\theta)^2]^{1/2},$$

並認出 p^r 的兩個值 $(\pm p^r)$ 相應於 μ 的每一個值，就可把體元寫爲下述形式

$$2\pi p^\theta dp^\theta dp^r dp^0\longrightarrow 4\pi(p^\theta\mu/p^r)dp^\theta dp^0 d\mu。$$

於是 $\boldsymbol{T}$ 的對角分量 [(25.76b)式] 爲

$$\rho\equiv T^{00}=\text{（總質量-能量密度）}\tag{25.81a}$$
$$=4\pi\int F(e^\Phi p^0,rp^\theta,\mu)(p^{0\,2}p^\theta/p^r)dp^\theta dp^0 d\mu,$$

$$p_T\equiv\frac{1}{2}(T^{\theta\theta}+T^{\phi\phi})=T^{\theta\theta}=T^{\phi\phi}=\text{（切向壓强）}$$
[由於球對稱]
$$\tag{25.81b}$$
$$=2\pi\int F(e^\Phi p^0,rp^\theta,\mu)[(p^\theta)^3/p^r]dp^\theta dp^0 d\mu,$$

$$p_r\equiv T^{rr}=\text{（徑向壓强）}$$
$$=4\pi\int F(e^\Phi p^0,rp^\theta,\mu)(p^r p^\theta)dp^\theta dp^0 d\mu。\tag{25.81c}$$

在作這些積分時，必須用積分變量表示 p^r

$$p^r=[(p^0)^2-(p^\theta)^2-\mu^2]^{1/2}。\tag{25.81d}$$

(4)場方程的解

對於這個脅强-能量張量的 Einstein 場方程以及度規 (25.73) 式，在對 $G^{\hat{a}\hat{b}}$ 用了表達式 (14.43) 式之後，以及作了類似於對球狀恒星所做的操作（在§23.5）之後，化爲

$$e^{2\lambda}=(1-2m/r)^{-1},\quad m=\int_0^r 4\pi r^2\rho dr;\tag{25.82a}$$

$$\frac{d\Phi}{dr}=\frac{m+4\pi r^3P_r}{r(r-2m)}。\tag{25.82b}$$

這些方程和假設的分布函數的形式 $F(E,L,\mu)$ 以及 ρ,P_r 和 P_T 的積分(25.81)

式合在一起，可確定星團的結構。框 25.8 綜述了這些結構方程，並把它們用於各向同性的速度分布。框 25.9 對於等溫星團（被截斷的 Maxwell 速度分布）給出並討論了方程的解。

練習

練習 25.27　各向同性星團

對於其分布函數與角動量無關的星團，試導出框 25.8 中 B. 1 到 B. 6 所示的性質。

練習25.28　自相似 (self-similar) 星團［見 Bisnovatyi-Kogan 和 Zel'dovich (1969), Bisnovatyi-Kogan 和 Thorne (1970)。］

(a) 對於中心密度爲無窮大，狀態方程爲 $P=\gamma\rho$ 的球狀恒星，試求其結構方程的解，其中 γ 是常數 $(0<\gamma<1/3)$。

(b) 試求各向同性的分布函數 $F(E,\mu)$，它使星團與題 (a) 的氣體球具有同樣的 ρ, P, m 和 Φ 的分布。（見框25.8）［答案：

$$P=\gamma\rho=\frac{\gamma^2}{1+6\gamma+\gamma^2}\frac{1}{2\pi r^2},$$

$$e^{2\lambda}=(1-2m/r)^{-1}=(1+6\gamma+\gamma)^2/(1+\gamma)^2,$$

$$e^{2\Phi}=Br^{4\gamma/(1+\gamma)},\quad B=\text{常數};$$

$$F=A(E/B^{1/2})^{-(1+\gamma)/\gamma}\delta(\mu-\mu_0)=Ar^{-2}(E_{\text{局域}})^{-(1+\gamma)/\gamma},\quad A=\text{常數}。\]$$

練習 25.29　具有圓軌道的星團

分布函數應具有什麼形式才能確保全部恒星都在圓軌道上運動？特別指明這種情形下的結構方程。用有效勢圖分析這個星團中各恒星軌道的穩定性。如果全部軌道都是穩定的，分布函數應滿足什麼條件？［見 Einstein (1939), Zapolsky (1968)。］

框 25.8　球狀星團的結構方程

A. 建立球狀星團的模型，如下，

1. 規定分布函數 $\mathscr{N}=F(E,L,\mu)$, 其中

E＝恒星在無窮遠的能量，

L＝恒星的角動量，

μ＝恒星的靜止質量。

2. 對於線元的度規函數 $m=\frac{1}{2}r(1-e^{-2\lambda})$ 和 Φ，求解以下兩個積分微分方程

$$ds^2=-e^{2\Phi}dt^2+e^{2\Lambda}dr^2+r^2d\Omega^2:$$

$$m=\int_0^r 4\pi r^2\rho dr\,,$$

$$\frac{d\Phi}{dr}=\frac{m+4\pi r^3P_r}{r(r-2m)}\,,$$

其中

$$\rho=4\pi\int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},rp^{\hat{r}},\mu)[(p^{\hat{0}})^2p^{\hat{r}}/p^{\hat{i}}]dp^{\hat{r}}dp^{\hat{0}}d\mu\,,$$

$$P_T=2\pi\int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},rp^{\hat{r}},\mu)[(p^{\hat{r}})^3/p^{\hat{i}}]dp^{\hat{r}}dp^{\hat{0}}d\mu\,,$$

$$P_r=4\pi\int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},rp^{\hat{r}},\mu)(p^{\hat{i}}p^{\hat{r}})dp^{\hat{r}}dp^{\hat{0}}d\mu\,,$$

$$p^{\hat{i}}=[(p^{\hat{0}})^2-(p^{\hat{r}})^2-\mu^2]^{1/2}\,。$$

ρ, P_T 和 P_r 的積分遍及全部正的 $p^{\hat{r}}$, $p^{\hat{0}}$, μ，對此 $(p^{\hat{0}})^2-(p^{\hat{r}})^2-\mu^2\geq 0$。

B. 如果分布函數與角動量無關，則

1. $F=F(E,\mu)$。
2. 在星團內每一點恒星速度的分布是各向同性的。
3. $\rho=4\pi\int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},\mu)[(p^{\hat{0}})^2-\mu^2]^{1/2}(p^{\hat{0}})^2dp^{\hat{0}}d\mu$。
4. 壓强是各向同性的：

$$P_r=P_T\equiv P\equiv\frac{4\pi}{3}\int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},\mu)(p^{\hat{0}2}-\mu^2)^{3/2}dp^{\hat{0}}d\mu\,。$$

5. 總質量-能量密度 ρ, 壓强 P, 度規函數 Φ 和 $m=\frac{1}{2}r(1-e^{-2\Lambda})$ 滿足氣體球（「恒星」）的結構方程

$$m=\int 4\pi r^2\rho dr\,,$$

$$\frac{d\Phi}{dr}=\frac{m+4\pi r^3P}{r(r-2m)}\,,$$

$$\frac{dP}{dr}=-\frac{(\rho+P)(m+4\pi r^3P)}{r(r-2m)}\,。$$

6. 於是，每一個具有各向同性速度分布的靜止、球狀星團都相應於唯一的氣體球，它具有同樣的 ρ, P, m 和 Φ 的分布。
7. 相反［見 Fackerell (1968)］，給定一氣體球（對於 ρ, P, m 和 Φ，給定恒星結構方程的解），人們總是能夠找到一個分布函數 $F(E,\mu)$，它描述了具有同樣 ρ, P, m 和 Φ 的星團。但是對於某些氣體球，F 在部分相空間必須是負值，從而是不實際的。

框 25.9　等溫的星團

A. 分布函數

1. 在任何相對論性星團中，可以預料，恒星間偶然的近距離相遇會「熱化」恒星的分布函數。這就暗示，所研究的各向同性球狀星團具有 Boltzmann 分布函數（對於 $p^{\hat{0}}=Ee^{-\phi}<\mu_0$，不言而喻地假設爲零）

$$\mathscr{N}=F(E,L,\mu)=Ke^{-E/T}\delta(\mu-\mu_0)。\tag{1}$$

式中 K 是歸一化常數，T 是恒定的「溫度」，並且爲了簡單起見，假設恒星全都具有同樣的靜止質量 μ_0。

2. 在這類星團中，在半徑 r 處的觀測者看到一顆在無窮遠處能量爲 E 的恒星所具有的局域測量的能量爲

$$p^{\hat{0}}=（靜止質量-能量）+（動能）=\frac{\mu_0}{(1-v^2)^{1/2}}=Ee^{-\phi(r)}。\tag{2}$$

結果，他附近的恒星具有 Boltzmann 分布

$$\frac{dN}{d^3\hat{p}d^3\hat{x}d\mu}=\mathscr{N}=K\exp(-p^{\hat{0}}/T_{局域})\delta(\mu-\mu_0)\tag{3}$$

其中局域測量的溫度爲

$$T_{局域}(r)=Te^{-\phi(r)}。\tag{4}$$

於是，星團的溫度，就像在星團中運動的光子、粒子和恒星那樣，要經受同樣的紅移-紫移效應。（對於熱平衡氣體，同樣的溫度-紅移定律的推導，見練習 22.7 的 (e)。

3. 實際上，Boltzmann 分布(1)決不能達到。具有 $E>\mu_0$ 的恒星不被來自星團的引力束縛，而將逃逸。Boltzmann 分布預測，隨着這類恒星向着 $r=\infty$ 離去，有相等數目具有同樣能量的恒星從 $r=\infty$ 內移，以保持不變的分布函數。顯然，這種情形是不現實的。人們預料，取而代之的是，恒星的逃逸將在稍小於 μ_0 的某個能量 $E_{極大}$ 處把分布截斷。這個結果的理想化形式就是「截斷的 Boltzmann 分布」

$$\mathscr{N}=F(E,L,\mu)=\begin{cases}Ke^{-E/T}\delta(\mu-\mu_0), & E<E_{極大},\\ 0, & E>E_{極大}。\end{cases}\tag{5}$$

B. 星團模型的結構和穩定性

1. Zel'dovich 和 Podurets (1965), Fackerell (1966), 以及Ipser (1969) 曾用框 25.8 中的方法建立起具有截斷 Boltzmann 分布的星團模型。Ipser 曾分析過這種星團的無碰撞徑向振蕩。

2. 一般說來，這些星團形成一個四參量族 $(K, T, \mu_0, E_{極大})$。把參量K代之以星團的總靜止質量 $M_0=\mu_0 N$，其中N是恒星總數。把T代之以單位靜止質量的溫度 $\tilde{T}=T/\mu_0$。把 $E_{極大}$ 代之以單位靜止質量的極大能量 $\tilde{E}_{極大}=E_{極大}/\mu_0$。於是星團以 $(M_0, \tilde{T}, \mu_0, \tilde{E}_{極大})$ 參量化。現在，保持 M_0, $\tilde{T}$, $\tilde{E}_{極大}$固定，而 μ_0 加倍（從而恒星總數減半），則星團的宏觀性質不變。在這個意義下，μ_0 是一個「平庸參量」，今後可以置之不顧或隨意變動。星團的總靜止質量 M_0 可以看作「定標因數」；星團的全部無量綱特徵都與它無關。例如，如果 ρ_c 是中心的質量-能量密度 [(25.81a) 式，在 $r=0$ 處計算]，則 $\rho_c M_0^2$ 是無量綱的，從而與M_0無關，它意味着 $\rho_c \propto M_0^{-2}$。只剩下兩個非平庸參量：$\tilde{T}$ 和 $\tilde{E}_{極大}$。

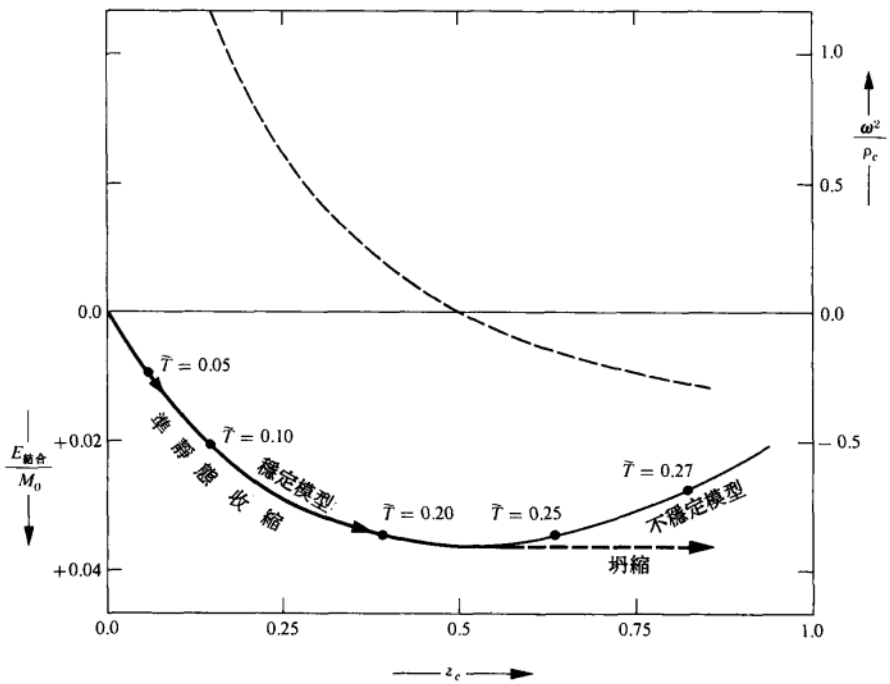
3. 作爲一個有啓發性的特殊情形 [Zel'dovich 和 Podurets (1965)]，考慮 $\tilde{E}_{極大}=1-\frac{1}{2}\tilde{T}$ 的單一參量序列。下圖是 Ipser (1969) 計算的，對於這個序列，圖中畫出了分數結合能

$$E_{結合}/M_0 \equiv (M_0-M)/M_0 \tag{6}$$

（這裏，M是總質量-能量）；無碰撞振盪（振幅 $\propto e^{-i\omega t}$）角頻率的平方除以中心質量-能量密度 $-\omega^2/\rho_c$；以及從星團中心發射在無窮遠接收的光子紅移 z_c。所有這些量都是無量綱的，因而只依賴於 $\tilde{T}=T/\mu_0$ 的選擇。

4. 注意，在結合能爲極大的點之外 ($z_c \gtrsim 0.5$) 的全部模型，對於無碰撞徑向擾動（ω爲虛數；擾動的振幅 $\propto e^{|\omega| t}$）都是不穩定的。當有輕微的擾動時，這種星團必定坍縮形成黑洞。（見第26章。對於恒星中類似不穩定性的分析）。

5. 這些結果暗示了球狀星團演化的理想過程 [Zel'dovich 和 Podurets (1965); Fackerell, Ipser 和 Thorne (1969)]。星團將沿着如圖所示的



那些球狀平衡位形的順序準統計地演化。這種演化是由恒星的碰撞和恒星的蒸發驅動的。當兩個恒星碰撞並結合時，它們增大了星團的靜止質量，從而也增大了它的分數結合能。當一個恒星從這種遭遇中獲得的能量足以使它從星團中逃逸時，它帶走了過量的動能，留下的星團束縛得更緊了。因而，碰撞和蒸發兩者將把星團驅向越來越緊的結合狀態。當星團沿着它的序列到達分數結合能爲極大的點時，它就不再能準靜態地演化了。相對論性引力坍縮開始了：恒星螺旋式的向內越過星團的引力半徑走向它的中心，後面留下了黑洞或許還有某些餘下的恒星繞它作軌道運動。

有吸引力的推測是，在某些星系核或類星體中的激烈事件可能與這種坍縮的突然開始或者與已經坍縮的星團（黑洞）與其周圍恒星的相遇有聯繫。

第二十六章　恒星的脈動

本章全屬高階，但它既不依賴於任何別的章，也不爲它們作準備

§26.1 動　　機

像在物理學別處一樣，在相對論天體物理學中，許多有深刻物理內容的問題要精確求解是太困難和太複雜了。它們只能用近似方法求解。而在全部近似方法中，應用範圍最廣泛的一種方法就是微擾理論。

本章的目的

微擾計算典型地冗長、乏味並充滿了複雜的數學表達式。因此，它們並不適合於本書這樣的教材。儘管如此，但因爲它們是極爲重要的，以致天體物理學家渴望知道在廣義相對論中怎樣建立和實行微擾計算，所以作者們選取了一個詳加介紹的例子。

選取的例子是分析非旋轉相對論性恒星的絕熱徑向脈動。這個例子的兩個特徵是值得注意的：(1)作爲一個有教益的例子，它是足夠複雜的，而作爲一個像樣的例子，它又是足夠簡單的；(2)在計算的結果中，人們可以覺察並確定相對論性不穩定性，這對於近代天體物理學是極爲重要的（第24章）。

此處介紹的計算是摹仿 Chandrasekhar (1964a,b) 的，它首先揭示出存在着相對論性的不穩定性。另一種基於「極端能量」概念的計算，見Harrison, Thorne, Wakano 和 Wheeler (1965) 的附錄B；而基於極端熵的計算見 Cocke (1965)。

作者們深深感謝 Carlton M. Caves 先生，他發現並糾正了本章和其他許多章方程中的錯誤。

§26.2　提出問題

提出分析恒星脈動

將要分析的系統是一個理想流體的球，以極小的振幅徑向地脈動着。爲了分析這種脈動，需要(a)支配平衡位形的精確方程，球的脈動就是圍繞着平衡位形的；(b)關於振盪球的坐標系，它在零脈動振幅下化爲平衡球的標準Schwarzschild 坐標；(c)描述脈動的一組微小的函數（徑向的位移和速度，壓强和密度微擾，度規係數的一階變化），用它們達到線性化，以及(d)支配這些「微擾函數」演化的一組方程。

a. 平衡位形

恒星的平衡位形

平衡球的結構方程就是 §23.7中概括的那些。把它們重新寫在這裏是有用的，符號稍有變動（用下標「0」標記「未微擾的位形」；在所有的方程中用 $\Lambda=-\frac{1}{2}\ln(1-2m/r)$ 代替m；用一撇表示相對於r的微商）：

$$ds^2=-e^{2\Phi_0}dt^2+e^{2\Lambda_0}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2), \qquad (26.1a)$$

$$\Lambda_0'=\frac{1}{2r}(1-e^{2\Lambda_0})+4\pi r\rho_0 e^{2\Lambda_0}, \qquad (26.1b)$$

$$p_0'=-(\rho_0+p_0)\Phi_0', \qquad (26.1c)$$

$$\Phi_0'=-1/2r(1-e^{2\Lambda_0})+4\pi r p_0 e^{2\Lambda_0}。 \qquad (26.1d)$$

b. 微擾位形的坐標

氣體球在徑向脈動，即以球對稱方式脈動。由此，它的空時幾何必定是球狀的。框23.3指出，對於任何球狀空時，無論是動力學的還是靜止的，可以引入 Schwarzschild 坐標，其線元爲：

$$ds^2=-e^{2\Phi}dt^2+e^{2\Lambda}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2), \qquad (26.2)$$

$$\Phi=\Phi(t,r), \quad \Lambda=\Lambda(t,r)。$$

微擾位形的坐標

人們把這些坐標用於脈動球，因爲當脈動爲零振幅時它們化爲未微擾的坐標。

c. 微擾函數

當微擾具有極小的振幅時，在流體靜止系中測量的度規係數Φ和Λ以及熱

力學變量p，ρ和n非常接近它們的未微擾值。用 $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, δp, $\delta\rho$, 和 δn 表示在確定坐標位置處的微擾：

微擾函數

$$\Phi(t,r)=\Phi_0(r)+\delta\Phi(t,r),\quad \Lambda(t,r)=\Lambda_0(r)+\delta\Lambda(t,r),$$
$$p(t,r)=p_0(r)+\delta p(t,r),\quad \rho(t,r)=\rho_0(r)+\delta\rho(t,r),\quad (26.3a)$$
$$n(t,r)=n_0(r)+\delta n(t,r)。$$

除了 $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, δp, $\delta\rho$ 和 δn 外，爲了描述脈動，還需要一個微擾函數：流體從其平衡位置的徑向位移 ξ ：

位於坐標半徑 r 處的
未微擾位形的流體元，
在振盪位形中在坐標時 (26.3b)
間 t 位移到坐標半徑
$r+\xi(r,t)$ 處。

爲了使脈動的分析容易處理，全部方程將以微擾函數 ξ, $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, δp, $\delta\rho$ 和 δn 線性化。

d. 演化方程

怎樣導出支配微擾函數的方程

微擾函數隨時間的演化將受 Einstein 場方程，能量－動量局域守恒定律 $\nabla\cdot T=0$，以及熱力學諸定律（均已適當的線性化）的支配。此後的分析除了把這些方程簡化成「易處理的形式」外，別無其他。當然，只要事先知道尋找的是什麼形式，就能最有效地進行這種簡化。這種計算以及絕大多數類似計算中的目標很簡單：(1)得出純動力學自由度（在這種情況只有流體的位移 ξ ；在非球狀情形可能有波，則有流體位移和引力波振幅）的一組*動力學方程*；(2)得出用動力學自由度（ξ）表示其餘微擾函數（在這種情形是 $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, δp, $\delta\rho$ 和 δn）的一組*初值方程*。

§ 26.3 Euler 微擾與 Lagrange 微擾的比較

在導出動力學方程和初值方程前，引入一個新的概念：熱力學變量的「Lagrange 微擾」是有用的。(26.3) 式的微擾 δp, $\delta\rho$ 和 δn 是 p, ρ 和 n 的 Euler *微擾*；即它們是永遠位於坐標格子固定點 (t,r,θ,ϕ) 的觀察者測出的變化。反之，表爲 Δp, $\Delta\rho$, 和 Δn 的 Lagrange *微擾*是由隨流體運動的觀察者

定義 Euler 微擾

定義 Lagrange微擾

測出的變化；即該觀察者在未微擾位形中位於半徑 r 處，而在微擾位形中則位於 $r+\xi(r,t)$ 處：

$$\Delta p(t,r)=p(t,r+\xi(t,r)]-p_0(r) \qquad (26.4a)$$
$$\approx\delta p+p_0'\xi;$$
$$\Delta\rho(t,r)=\rho[t,r+\xi(t,r)]-\rho_0(r) \qquad (26.4b)$$
$$\approx\delta\rho+\rho_0'\xi;$$
$$\Delta n(t,r)=n[t,r+\xi(t,r)]-n_0(r) \qquad (26.4c)$$
$$\approx\delta n+n_0'\xi。$$

Euler 微擾和 Lagrange 微擾之間的關係

§ 26.4　初值方程

a. 重子守恒

重子守恒定律 $\nabla\cdot(n\mathbf{u})=0$（§22.2）支配了重子微擾 Δn 和 δn 的演化。應用散度的鏈式法則和關係式 $\mathbf{u}\cdot\nabla n=\nabla_{\mathbf{u}}n=dn/d\tau$，可將守恒定律重新寫爲

$$dn/d\tau=-n(\nabla\cdot\mathbf{u})。$$
$$\uparrow\text{——[}n\text{ 沿流體世界線的微商]}$$

用隨流體運動的觀察者測出的微擾 Δn 表示，此式可重新寫爲

$$\frac{d\,\Delta n}{d\tau}=-n(\nabla\cdot\mathbf{u})。 \qquad (26.5)$$

爲了進一步簡化這個方程，需要流體四維速度的表達式。它很容易導出，由

$$\frac{u^r}{u^t}=\left(\frac{dr/d\tau}{dt/d\tau}\right)=\left(\frac{dr}{dt}\right)_{\text{沿世界線}}=\frac{\partial\xi}{\partial t}\equiv\dot{\xi},$$
$$(u^t)^2e^{2\Phi}-(u^r)^2e^{2\Lambda}=1。$$

到 ξ，$\delta\Lambda$ 和 $\delta\Phi$ 的一階量的結果是

$$u^t=e^{-\Phi}=e^{-\Phi_0}(1-\delta\Phi),\quad u^r=\dot{\xi}e^{-\Phi_0}。 \qquad (26.6)$$

利用（26.5）式中的這些分量，並利用關係式

$$\frac{d}{d\tau}=\mathbf{u}\cdot\nabla=u^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\quad \nabla\cdot\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}u^\alpha)_{,\alpha},$$

與振盪的度規（26.2）合在一起，就把（26.5）式簡化成一關係式，其時間積分爲

$$\Delta n=-n_0[r^{-2}e^{-\Lambda_0}(r^2e^{\Lambda_0}\xi)'+\delta\Lambda)。 \qquad (26.7)$$

導出初值方程：
(1)對於重子微擾 Δn 和 δn

這就是用動力學變量 ξ 表示的 Δn 的初值方程。δn 的初值方程此後並不需要，它可通過與（26.4c）式聯合得出。

b. 絕 熱 性

(2)對於壓强微擾 Δp 和 δp

對於絕熱振盪（忽略相鄰流體元之間的熱傳導），數密度和壓强的 Lagrange 變化之間的關係爲

$$\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln n}\right)_s \equiv \Gamma_1 = \frac{n}{p}\frac{\Delta p}{\Delta n}。 \qquad (26.8)$$

Γ_1 的定義

把這個絕熱關係式與 Δn 的（26.7）式以及用 Δp 表示 δp 的（26.4a）式聯合，得出下述 δp 的初值方程：

$$\delta p = -\Gamma_1 p_0[r^{-2}e^{-\Lambda_0}(r^2 e^{\Lambda_0}\xi)' + \delta\Lambda] - \xi p_0'。 \qquad (26.9)$$

c. 能量守恒

(3)對於密度微擾 $\Delta\rho$ 和 $\delta\rho$

局域能量守恒定律［熱力學第一定律；$\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T})=0$；見 §22.2和§22.3］指出

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{(\rho+p)}{n}\frac{dn}{d\tau}。$$

用 Lagrange 微擾重新寫出（憶及：$d/d\tau$ 是隨流體運動的觀察者測出的時間微商），爲

$$\frac{d\Delta\rho}{d\tau} = \frac{\rho+p}{n}\frac{d\,\Delta n}{d\tau},$$

作爲它的時間積分，有（一階分析！）

$$\Delta\rho = \frac{\rho_0+p_0}{n_0}\Delta n。 \qquad (26.10)$$

（積分常數爲零，因爲當 $\Delta n=0$ 時，$\Delta\rho$ 也應爲零。）把此式與 Δn 的（26.7）式以及用 $\Delta\rho$ 表示 $\delta\rho$ 的（26.4b）式聯合，得出下述 $\delta\rho$ 的初值方程：

$$\delta\rho = -(\rho_0+p_0)[r^{-2}e^{-\Lambda_0}(r^2 e^{\Lambda_0}\xi)' + \delta\Lambda] - \xi\rho_0'。 \qquad (26.11)$$

d. Einstein 場方程

(4)對於度規微擾$\delta\Lambda$和$\delta\Phi$

Einstein 場方程的兩個方程，線性化後，化爲度規微擾 $\delta\Lambda$ 和 $\delta\Phi$ 的初值方程。所需的方程在正交歸一系

$$\omega^{\hat{t}}=e^{\Phi}dt,\quad \omega^{\hat{r}}=e^{\Lambda}dr,\quad \omega^{\hat{\theta}}=r d\theta,\quad \omega^{\hat{\phi}}=r\sin\theta d\phi,\quad (26.12)$$

中表示，爲 $G_{\hat{t}\hat{t}}=8\pi T_{\hat{t}\hat{t}}$ 和 $G_{\hat{r}\hat{r}}=8\pi T_{\hat{r}\hat{r}}$。在此正交歸一系中 Einstein 張量的分量已在練習14.16中算出：

$$G_{\hat{t}\hat{t}}=2(\Lambda/r)e^{-(\Lambda+\Phi)}\overset{\text{[線性化]}}{=}2r^{-1}e^{-(\Lambda_0+\Phi_0)}\delta\Lambda\,;\qquad (26.13a)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}}=2(\Phi'/r)e^{-2\Lambda}+r^{-2}(e^{-2\Lambda}-1)\qquad (26.13b)$$

$$=(G_{\hat{r}\hat{r}})_0+2r^{-1}e^{-2\Lambda_0}\delta\Phi'-2e^{-2\Lambda_0}(2r^{-1}\Phi_0'+r^{-2})\delta\Lambda。$$

[線性化]

利用四維速度 (26.6) 式［變換爲 $u_0=-1$, $u_{\hat{r}}=\dot{\xi}e^{\Lambda_0-\Phi_0}$ 的形式］並利用 ρ 和 p 的表達式 (26.3a) 式作計算，把脅强-能量張量 $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=(\rho+p)u_{\hat{\alpha}}u_{\hat{\beta}}+p\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 的分量化爲

$$T_{\hat{t}\hat{t}}=-(\rho_0+p_0)e^{\Lambda_0-\Phi_0}\dot{\xi},\qquad T_{\hat{r}\hat{r}}=p_0+\delta p。\qquad (26.14)$$

結果，場方程 $G_{\hat{t}\hat{t}}=8\pi T_{\hat{t}\hat{t}}$——在對時間作積分，並選取積分常數使得當 $\xi=0$ 時 $\delta\Lambda=0$ 之後——化爲

$$\delta\Lambda=-4\pi(\rho_0+p_0)re^{2\Lambda_0}\xi=-(\Lambda_0'+\Phi_0')\xi。\qquad (26.15)$$

這是 $\delta\Lambda$ 的初值方程。場方程 $G_{\hat{r}\hat{r}}=8\pi T_{\hat{r}\hat{r}}$，在用 (26.15) 式消去 $\delta\Lambda$，用 (26.9) 式消去 δp，並用 (26.1c) 式消去 Φ_0' 後，化爲

$$\delta\Phi'=-4\pi\Gamma_1 p_0 r^{-1}e^{2\Lambda_0+\Phi_0}(r^2e^{-\Phi_0}\xi)'\qquad (26.16)$$

$$+[4\pi p_0' r-4\pi(\rho_0+p_0)]e^{2\Lambda_0}\xi。$$

這是 $\delta\Phi$ 的初值方程。

§26.5　動力學方程和邊界條件

導出流體位移 ξ 的運動方程

流體位移 $\xi(t,r)$ 的動力學演化受 Euler 方程 (22.13) 式的支配：

$$(\rho+p)\times(\text{四維加速度})=-(\nabla p \text{ 與 } u \text{ 正交的投影})。\qquad (26.17)$$

在度規 (26.2) 中，相應於四維速度 (26.6) 的四維加速度 $a=\nabla_u u$ 實際上具有的唯一的、非零的、線性的協變分量爲：

$$a_r=\Phi_0'+\delta\Phi'+e^{2(\Lambda_0-\Phi_0)}\ddot{\xi}。$$

[分量 a_i 在下述意義下是無足輕重的，即它導致的 Euler 方程與 (26.1c) 式完全一樣。] 把它與 $\rho+p=\rho_0+p_0+\delta\rho+\delta p$, 與 ∇p 投影的徑向分量$p_0'+\delta p'$，以及與流體靜力學平衡的一階方程 (26.1c) 式聯合，得出 Euler. 方程爲

$$(\rho_0+p_0)e^{2(\Lambda_0-\Phi_0)}\ddot{\xi}=-\delta p'-(\delta\rho+\delta p)\Phi_0'-(\rho_0+p_0)\delta\Phi'。 \quad (26.18)$$

應用初值方程 (26.9)，(26.11)，和 (26.16) 以 ξ 重新表示 δp，$\delta\rho$ 和 $\delta\Phi'$，然後借助於零階結構方程 (26.1) 廣泛地處理這些項，可將運動方程納入其最有用的形式。結果是

$$W\ddot{\zeta}=(P\zeta')'+Q\ddot{\zeta}, \quad (26.19)$$

式中 ζ 是「重正化的位移函數」，而 W, P, Q 是取決於平衡恒星結構的半徑的函數：

$$\zeta\equiv r^2e^{-\Phi_0}\xi; \quad (26.20)$$

$$W\equiv(\rho_0+p_0)r^{-2}e^{3\Lambda_0+\Phi_0}; \quad (26.21a)$$

$$P\equiv\Gamma_1p_0r^{-2}e^{\Lambda_0+3\Phi_0}; \quad (26.21b)$$

$$Q\equiv e^{\Lambda_0+3\Phi_0}\left[\frac{(p_0')^2}{\rho_0+p_0}r^{-2}-4p_0'r^{-3}-8\pi(\rho_0+p_0)p_0r^{-2}e^{2\Lambda_0}\right]。 \quad (26.21c)$$

(26.19) 式是支配恒星脈動的動力學方程。[這個方程可以寫成其他形式；例如，它可以乘W^{-1}或其他非零的因子，並且各項可以重新組合。(26.19) 式給出的形式是優先選用的，因爲如框26.1所指出，它導致振盪頻率的自伴本徵值問題。]

關於流體位移的邊條件

動力學方程的全部解並不都可接受。爲了在物理上可以接受，位移函數在球中心應引起非無窮大的密度和壓强微擾 ($\delta\rho$ 和 δp)，這意味着

$$\text{在 } r\longrightarrow 0 \text{ 的極限下，}(\xi/r) \text{ 爲有限或零} \quad (26.22a)$$

[見 (26.9) 和 (26.11) 式]；又，它應使恒星表面的壓强等於零，這意味着

$$\Delta p=-\Gamma_1p_0r^{-2}e^{\Phi_0}(r^2e^{-\Phi_0}\xi)'\longrightarrow 0 \text{ 隨着 } r\longrightarrow R \quad (26.22b)$$

[表面半徑]

[見 (26.8)，(26.7)，和 (26.15) 式]。

§ 26.6 結論的概要

恒星脈動理論概要

如果流體的初始位移ξ ($t=0,r$) 由邊條件 (26.22) 確定，則它爾後的演

化 $\xi(t,r)$ 可以通過對動力學方程 (26.19) 的積分來計算；並且壓强、密度和度規微擾的形式可以利用初值方程 (26.9)，(26.11)，(26.15) 和 (26.16) 由 $\xi(t,r)$ 計算。

在框26.1和框26.2中研究這些結果的若干重要推論。

(接第699頁)

框 26.1　恒星簡正模脈動的本徵值問題和變分原理

假設重正化的位移函數 (26.20) 具有正弦式的時間依賴關係：

$$\zeta=\zeta(r)e^{-i\omega t}。$$

則動力學方程 (26.19) 和邊條件 (26.20) 化爲角頻率 ω 和振幅 $\zeta(r)$ 的本徵值問題：

$$(P\zeta')'+Q\zeta+\omega^2W\zeta=0, \tag{1}$$

$$\text{隨着}r\longrightarrow 0，\zeta/r^3\text{爲有限或零}， \tag{2a}$$

$$\text{隨着}r\longrightarrow R，\Gamma_1 p_0 r^{-2}e^{\Phi_0}\zeta'\longrightarrow 0。 \tag{2b}$$

求解這種本徵值問題的方法曾由 Bardeen, Thorne 和 Meltzer (1966) 歸類並討論過。一種方法（但對於數值計算而言，並不是最佳的方法）是變分原理：

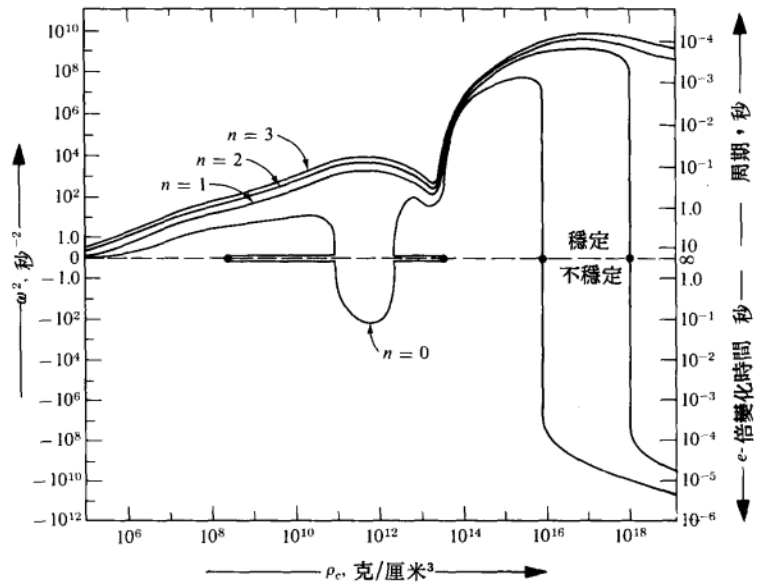
$$\omega^2=\left\{\frac{\int_0^R (P\zeta'^2-Q\zeta^2)dr}{\int_0^R W\zeta^2 dr}\right\}\text{的極值}， \tag{3}$$

式中的 ζ 隨着所有滿足邊條件(2)的函數變化。［對於這種變分原理和最初的本徵值問題之間等價性的討論，可參看，例如 Mathews 和 Walker (1965) 的 §12.3。］

(3)式的絕對極小值是脈動基諧模頻率的平方。如果它是負值，則恒星是不穩定的（$e^{-i\omega t}$ 值隨時間指數增長）。如果它是正值，則恒星對於絕熱的徑向的微擾是穩定的。由於(3)式的分母是正的有限值，因此，

$$\left\{\begin{array}{l}\text{反對絕熱}\\ \text{徑向微擾}\\ \text{的穩定性}\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{對於滿足(2)的}\\ \text{全部函數}\zeta\\ \\ \displaystyle\int_0^R (P\zeta'^2-Q\zeta^2)\,dr>0\end{array}\right\}。 \tag{4}$$

通過本徵值方程(1)的數值解，曾經計算過各種各樣中子星和超大質量恒星模型的脈動頻率。例：對於處在恒星演化終點的 Harrison-Wakano-Wheeler 模型的最低的四個簡正模，圖中給出了作爲中心密度函數的脈動頻率曲線。（與圖24.2仔細比較一下。）這些曲線是基於 Meltzer 和 Thorne (1966) 的計算，並經 Faulkner 和 Gribbin (1968) 對大質量白矮星的基諧模作了修正。



框 26.2　近 Newton 恒星的臨界絕熱指數

A. 完全 Newton 恒星

1. 對於正弦地脈動 $\xi=\xi(r)e^{-i\omega t}$ 的 Newton 恒星，動力學方程 (26.19) 式化爲

$$[\Gamma_1 p_0 r(\xi/r)']'+3(\Gamma_1 p_0\xi/r)'-4p_0'\xi/r+\omega^2\rho_0\xi=0。\qquad(1)$$

2. 如果恒星各處 $\Gamma_1=4/3$，則對於振盪的基諧模（具有最低 ω^2 值的模式）物理上可以接受的解［滿足邊條件 (26.22) 式的解］爲

$$\omega^2=0,\quad \xi=\epsilon r,\quad \epsilon=常數。\qquad(2)$$

於是，對於 $\Gamma_1=4/3$，基諧模是「中性穩定」的，並具有「同系的」位移函數——與恒星的狀態方程或結構方程無關。

3. 如果允許 Γ_1 按一種與 r 有關的方式與 4/3 稍有差別，則 $\xi(r)$ 將與同系的形式稍有不同：

$$\xi=\epsilon r[\,1+大小爲\ (\Gamma_1-4/3)\ 的與\ r\ 有關的修正\,]。$$

結果，如果把同系的表達式 $\xi=\epsilon r$ 用作框 26.1 變分原理中的測試函數，則得出的 ω^2 精確到 $O[(\Gamma_1-4/3)^2]$。(憶及：測試函數中的一階誤差產生了變分表達式的值中的二階誤差。) 選用同系的測試函數，變分表達式［框26.1的(3)式］的 Newton 極限變爲

$$\omega^2=(3\bar{\Gamma}_1-4)\frac{\int_0^R 3p_0r^2\,dr}{\int_0^R \rho_0 r^4\,dr}+O[(3\bar{\Gamma}_1-4)^2],\qquad(3)$$

式中 $\bar{\Gamma}_1$ 是壓强-平均絕熱指數

$$\bar{\Gamma}_1=\frac{\int_0^R \Gamma_1 p_0 4\pi r^2\,dr}{\int_0^R p_0 4\pi r^2 dr}。\qquad(4)$$

把 Newton 維里定理用於非脈動恒星［(39.21b) 式或練習23.7］，可以把(3)式轉換成下述形式

$$\omega^2=(3\bar{\Gamma}_1-4)|\Omega|/I, \tag{5}$$

式中Ω是恒星的自引力能，而 $I=\int(\rho_0 r^2)4\pi r^2 dr$ 是它的質量分布的二階矩的跡（見框24.2和練習39.6）。

B. 近 Newton 恒星

1. 當考慮一階的相對論修正（M/R 量級的修正）而不管高階修正時，可將變分表達式［框26.1的(3)式］重新寫爲下述形式

$$\omega^2=\frac{\int_0^R p_0[\Gamma_1 r^4\eta'^2+(3\Gamma_1-4)(r^3\eta^2)'](1+\Lambda_0+3\Phi_0)dr-\int_0^R F_0\eta^2 dr}{\int_0^R \rho_0 r^4(1+3\Lambda_0+\Phi_0+p_0/\rho_0)\eta^2 dr}, \tag{6}$$

式中

$$F_0\equiv 8\pi r^4 p_0\rho_0+8r m_0 p_0+\rho_0 m_0^2, \quad \eta=\zeta/r^3=(\xi/r)(1-\Phi_0), \tag{7}$$

而 $m_0(r)$ 是半徑 r 內的平衡質量。

2. 對於 $\Gamma_1-4/3$ 爲 M/R 量級且 $M/R\ll 1$ 的相對論性恒星，同系測試函數 $\xi=\epsilon r$ 仍是高度精確的。同樣精確而又易於奏效的是 $\xi=\epsilon r e^{\Phi_0}\approx\epsilon r(1+\Phi_0)$，它相應於 $\eta=\epsilon=$常數。它的部分誤差將爲 M/r 量級；並且它在 ω^2 中引起的誤差將爲 $(M/R)^2$ 量級。把這個測試函數放入變分原理(6)之中，並且只保留 M/R 量級的相對論性修正，得出

$$\omega^2=3(\bar{\Gamma}_1-\Gamma_{1\text{臨界}})|\Omega|/I。 \tag{8}$$

式中$\bar{\Gamma}_1$是壓强-平均絕熱指數，而絕熱指數的臨界值 $\Gamma_{1\text{臨界}}$ 爲

$$\Gamma_{1\text{臨界}}=\frac{4}{3}+\alpha M/R, \tag{9}$$

其中 α 是量級爲 1 的正的常數，它由下式給出

$$\alpha=\frac{1}{3}\frac{R}{M|\Omega|}\int_0^R\left(3p_0\frac{m_0^2}{r^2}+4p_0\frac{m_0}{r}\right)4\pi r^2\,dr\,。\qquad(10)$$

脈動頻率和絕熱指數的表達式(8)和(9)在超大質量恒星的理論中扮演重要的角色（§24.4）。

3. 上述結果的另一種推導，見 Chandrasekhar (1964a, b; 1965c), Fowler (1964, 1965), Wright (1964)。

練習 26.1　慣性系被緩慢轉動的恒星曳引　　**練習**

一流體球非常緩慢地轉動着。試用微擾理論分析它的轉動；在轉動角速度中只保留線性的效應和項。［提示：(1)在角速度中離心力是二階的。因此，到一階近似，恒星是不變形的；它的密度和壓强分布保持球狀和未微擾。(2)通過對稱性和時間反轉的論證，試證明可以引入坐標，其中

$$ds^2=-e^{2\Phi}dt^2+e^{2\Lambda}dr^2+r^2[d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2]$$
$$-2(r^2\sin^2\theta)\omega d\phi dr\,,\qquad(26.23)$$

式中

$$\Phi=\Phi(r),\ \Lambda=\Lambda(r),\ 和\ \omega=\omega(r,\theta)。\qquad(26.24)$$

試證明在角速度的一階近似中 $\Phi=\Phi_0$ 和 $\Lambda=\Lambda_0$（無微擾！）。(3)採用下述角速度 $\Omega(r,\theta)$ 的精確定義：

$$\Omega\equiv u^\phi/u^t=(d\phi/dt)_{隨流體運動}。\qquad(26.25)$$

假設 $u^r=u^\theta=0$（即在ϕ方向轉動），試計算流體的四維速度。(4)試用 Einstein 場方程導出用角速度Ω表示的度規微擾ω 的微分方程。(5)試用初等函數在恒星外解出此微分方程，並把解出的 $\omega(r,\theta)$ 用由遠處迴轉器測出的恒星總角動量S表示（見第19章）。］這個問題和有關論題的原始分析，參看 Gurovich (1965), Doroshkevich, Zel'dovich 和 Novikov (1965), Hartle 和 Sharp (1965), Brill 和 Cohen (1966), Hartle (1967), Krefetz (1967), Cohen 和 Brill (1968), Cohen (1968)。

第六篇

宇宙

因征服恒星而浸沉在觀樂中的讀者，在本篇中尋求對整個宇宙的控制，並被深奧莫測不可思議的初始奇點所挫敗。

第二十七章　理想化的宇宙學

按照我的觀點，如果不採用廣義相對論的原理，那麼，在宇宙學的領域內，就無法用理論的方法得出任何那怕是稍微有一點可靠的結論。

Albert Einstein (1949b, 684 頁)

§ 27.1　宇宙的均勻性和各向同性

宇宙：精細尺度上的凝聚性和大尺度上的均勻性

天文學的觀測顯示出，宇宙在 $\sim 10^8$ 光年或更大的尺度上是均勻的、各向同性的。採用「精細尺度」的觀點，人們看到，物質團或恒星、星系和星系團，其大小範圍分別是～1 光年，$\sim 10^6$ 光年和～3×10^7 光年。但代之以「大尺度」觀點，人們看到，以地球爲中心，在其一側 10^8 光年量級的一個宇宙基元體積與位於別處同樣大小的其他基元體積之間幾無不同。

宇宙學（在框27.1中按其最簡單的形式作了概述）採用大尺度觀點作爲它的一級近似；而作爲它的二級近似，它把精細尺度的結構作爲光滑、大尺度背景上的微擾來處理。本章（第27章）詳細論述大尺度的均勻近似。第28章考慮元素的原始形成以及宇宙膨脹期間以原始等離子體爲材料的星系凝聚等小尺度現象。第29章討論觀測宇宙學。

大尺度均勻性和各向同性的證據

宇宙大尺度均勻性和各向同性的證據有幾個來源。(1)天空中星系分佈的證據以及星系視星等和紅移分佈的證據［參看，例如，Hubble (1934b,1936); Sandage (1972a); Sandage Tamman 和 Hardy (1972); 但注意，這些論文主張從均勻性的「階式」偏離，這是 Sandage 引用並予抨擊的］。(2)天空中射電源分佈各向同性的證據［參看，例如，Holden (1966)，以及 Hughes 和 Longair(1967)］。(3)引人注目的宇宙微波輻射各向同性的證據［參看，例如，Boughn, Fram 和 Partridge (1971)］。對於絕大多數證據的評述可參看Peebles (1971) 的第二章。

(接第711頁)

框 27.1 宇宙學概要

均勻密度。把恒星和原子理想化爲像灰塵那樣，以處處相等的等效平均質量-能量密度 ρ 散佈在天空中。

幾何是均勻和各向同性的。把空間曲率理想化爲處處相同。

閉合。採用「Einstein 引力幾何理論」的術語，不僅包括 Einstein 的場方程 $G=8\pi T$，還包括强加在這個方程的任何解上的閉合邊條件*。

一個三維球滿足均勻性、各向同性和閉合三個要求，這是圓和二維球上度規的自然推廣：

選定維數的球	看作是嵌在高一維的 Euclid 空間之中 [a]	從笛卡兒坐標到極坐標的轉換	用這些極坐標表示的 S^n 上的度規
S^1	$x^2+y^2=a^2$	$x=a\cos\phi$ $y=a\sin\phi$	$ds^2=a^2d\phi^2$
S^2	$x^2+y^2+z^2=a^2$	$x=a\sin\theta\cos\phi$ $y=a\sin\theta\sin\phi$ $z=a\cos\theta$	$ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta a\phi^2)$
S^3	$x^2+y^2+z^2+w^2=a^2$	$x=a\sin\chi\sin\theta\cos\phi$ $y=a\sin\chi\sin\theta\sin\phi$ $z=a\sin\chi\cos\theta$ $w=a\cos\theta$	$ds^2=a^2[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]$

[a] 離開球的偏移在物理上沒有意義，也不允許。加上多餘的維數是爲了有助於理性的推理，並非爲了任何人眞的去旅行。多餘的維數尤其與時間沒有任何關係。

空時幾何由下述度規描述

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)\,[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。\qquad(1)$$

當人們知道了作爲時間 t 函數的半徑 a 時，這種幾何的動力學就全部知道了。

---

* 「於是，對於宇宙空間-無限的概念和空間-有界的概念，可以提供下述論證」：

「1. 根據相對論的觀點，閉合面的條件比相應的宇宙准 Euclid 結構在無窮遠的邊條件要簡單得多」。

「2. Mach 曾表述過慣性取決於物體相互作用的觀念，這個觀念已包含在相對論方程的一級近似中；……但 Mach 的這個觀念只相應於有限的空間有界的宇宙，而不相應於准 Euclid 的無限宇宙」[Einstein (1950), 107—108 頁]。

許多宇宙學工作者懷疑 Einstein 的宇宙閉合的邊條件，它仍有待天文學觀測的證實。

Einstein 場方程（爲了方便，加倍） $2\mathbf{G}=16\pi\mathbf{T}$ 的全部威力集中在它的 $\hat{0}\hat{0}$（或 $\hat{t}\hat{t}$）分量

$$\frac{6}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{6}{a^2}=16\pi\rho \tag{2}$$

[框 14.5的（5a）式]。Einstein 方程的這個分量和 Maxwell 方程的分量 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho$ 一樣是核心。它在高階第21章中被描繪成幾何動力學的「初值方程」。左邊兩項各自的名稱爲：穿越四維幾何「類空薄片」的「內稟曲率」的「二階不變量」（說明全部線性尺度每時每刻伸長得有多快）；以及在它自身給定的時刻「內稟曲率」或「類空薄片」（此處是三維球）的三維標量曲率不變量 ${}^{(3)}R$。

宇宙中的總質量-能量按照膨脹期間壓强所做的功，時時刻刻變化着，

$$d\left[\begin{pmatrix}\text{質量-能量}\\ \text{密度}\end{pmatrix}\times\text{體積}\right]=-(\text{壓强})\,d\,(\text{體積})。 \tag{3}$$

今天，輻射壓强與質量-能量密度相比可以忽略，並且方程的右邊（「作功」）可以忽略，人們估計，回溯到線性尺度約比現在小一千倍的過去，這仍然是正確的。在宇宙膨脹的以「物質爲主的狀態」期間，乘積

$$\begin{pmatrix}\text{質量-能量}\\ \text{密度}\end{pmatrix}\times(\text{體積})$$

保持不變，

$$\rho\cdot 2\pi^2a^3=M。 \tag{4}$$

此處的符號M可以看作處於物質形式的質量，甚至可稱爲質量；但是必須再次憶及（見§19.4），閉宇宙總質量-能量的概念還絕對沒有任何十分明確的含義，並非不重要的原因是，在宇宙之外並沒有一個「平臺」，可以站在平臺上面通過 Kepler 軌道的周期或任何其他辦法來測量它的吸引。比M更方便的是由下式定義的量 $a_{\text{極大}}$（「宇宙極大膨脹狀態的半徑」），因爲它在下文中更有意義。

$$a_{\text{極大}}=4M/3\pi。 \tag{5}$$

用這個符號，Einstein 場方程的決定性分量變爲

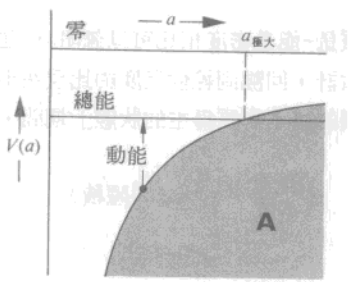
$$\frac{6}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{6}{a^2}=\frac{6a_{極大}}{a^3}$$

或

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2-\frac{a_{極大}}{a}=-1。 \tag{6}$$

(6)式第一項具有 Newton 力學初等問題中「動能」的定性特徵。第二項具有由反平方 Newton 力引起的「勢能」的定性特徵，

$$V(a)=-\frac{a_{極大}}{a}$$



（見圖 **A**）。繼續類比，認出右邊的「-1」就是 Newton 問題中的總能量。觀察一下圖 **A** 即可察覺動力學的定性特徵。宇宙的半徑值 a 不可能比 $a_{極大}$更大。如果 a 變得大於 $a_{極大}$，則「勢能」將超過總「能量」從而膨脹的「動能」將變爲負值，這是不可能的。因此，幾何動力學系統決不會處於膨脹超過 $a=a_{極大}$的狀態。從微小 a（$a\ll a_{極大}$）的狀態開始，膨脹，對於每一個 a 值，宇宙都有一個完美地定義的 da/dt 值。這個膨脹速度隨着膨脹的進行而減少，它在轉折點 $a=a_{極大}$下降爲零，此後，系統重新收縮。

缺乏選擇是動力學的顯著特徵。假定了特定數量的物質［(5)式中特定的M值］，人們就沒有任何自由參量可供使用了。$a_{極大}$值由現在的物質總量唯一確定，無需其他。不存在諸如「可調整的能量常數」這類事情，而這在 Newton 動力學的傳統問題中是存在的。那裏，這類可調整參量可以出現(6)式中，取代確定的數「-1」。這個固定的東西就是邊界閉合系統的決定性特徵。當人們討論遠方空間的岩石集體時，將可以選擇放在它們中心的炸藥總量。對於少量的炸藥，人們將發現，在引力停止岩石的飛行並把它們再次坍縮在一起之前，岩石只能向外飛行有限的距離。如果有了更多的噴氣燃料，它們將以逃逸速度向外飛出並不再返回。但是這種選擇此處並不出現，這完全是因爲强加了 Einstein 的閉合條件；並且一旦閉合，就永遠閉合。宇宙的坍縮是普遍的。這就是簡單的宇宙學概要。

Einstein 的不快，對此結論，他的不快是巨大的。在發展廣義相對論時，宇宙的永恒性在西方哲學中是固定的信條：「天國是永續不朽的」。然而，導致該確定的方程的論證並未爲改變該方程或它的奇怪預言留下什麼自然的途徑。因此，Einstein (1917)必須違反他的願望，引入他所能設想的最自然的改變，即所謂宇宙學項（§27.11），其全部目的是爲了避免宇宙的膨脹。十年後，Hubble (1929) 證實了預期的膨脹。隨即，Einstein 拋棄了宇宙學項，並稱之爲「我一生中最大的錯誤」［Einstein (1970)］。從而結束了對廣義相對論的明顯的否定，檢驗與戲劇性的維護之間的第一次大循環。人們是否終將識破創世的奧秘呢？在某一天，回答終將是「是的」，人類對像宇宙膨脹這種奇異現象作預言、作正確的預言、作反對一切期待的預言的能力就是證據，沒有比這更鼓舞人心的證據了。

「Newton 的宇宙學」提供了一個類似於 Einstein 宇宙學的「能量方程」，但對於閉合或對於唯一的常數「-1」則沒有提供任何清晰的或明確的論證。它考慮瞬時半徑爲 r 的任何基本球狀空間區域內的質量，以及在該球邊緣的試驗粒子向着球中心的引力加速度；於是

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{(\text{質量})}{(\text{距離})^2}=-\frac{(4\pi/3)\rho r^3}{r^2}=-\frac{4\pi\rho}{3}r。\tag{7}$$

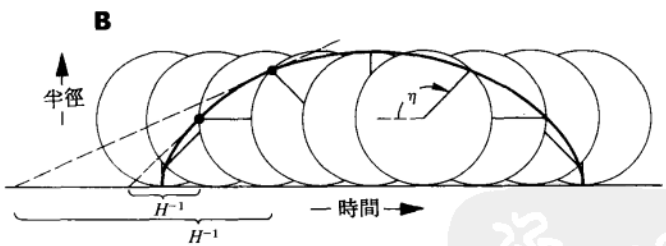
在具有同一中心的宇宙介質中，考慮這類假想的具有不同半徑的球。注意半徑加倍，加速度就要加倍。加速度和距離之間的這種正比關係與宇宙膨脹的均勻減速是相容的。因此，把膨脹參量 a^* 定義爲這些球中任一個球現在的半

徑與同一球在某個基準時刻的半徑之比；於是，$a^*=r/r_0$ 可認爲與所考慮的特殊球無關。寫出 $\rho=\rho_0 r_0^3/r^3$，其中 ρ_0 是在基準時刻的密度。把這個 ρ 的表達式代入減速度方程(7)中，方程兩邊乘以 dr/dt，求積，把結果從 dr/dt 的方程換成 da^*/dt 的方程，得出

$$\left(\frac{da^*}{dt}\right)^2-\frac{(8\pi\rho_0/3)}{a^*}=\text{常數}, \tag{8}$$

它與(6)式相符，除了(1)由於 a^* 是無量綱的膨脹比，而 a 是量綱爲厘米的絕對半徑所引起的無足輕重的差別，(2)全部重要的差別在於，此處的常數是可以任意處理的，而在標準的 Einstein 幾何動力學中它具有唯一的正則值「-1」。關於 Newton 宇宙學的更多見解，可參看，特別是，Bondi (1961)。

自由下落，根據 Newton 力學，粒子向 Newton 吸引中心的自由下落給出了與(6)式同樣形式的能量方程，只是「宇宙半徑 a 應代之以離吸引中心的距離 r。這個自由下落問題的



解可用擺線描繪（圖 B；又，參看圖25.3和框25.4），擺線是直徑爲 $a_{\text{極大}}$ 的圓在直線上滾動不斷增大角度 η 而產生的；於是

$$\begin{aligned} a&=\frac{1}{2}a_{\text{極大}}(1-\cos\eta),\\ t&=\frac{1}{2}a_{\text{極大}}(\eta-\sin\eta)。\end{aligned} \tag{9}$$

立刻可以觀測的，今天立刻可以觀測的是宇宙現在的膨脹速率，而宇宙每個距離增加的速率都正比於該距離*：

$$\frac{(\text{星系的退行速度})}{(\text{星系的距離})} = (\text{Hubble「常數」}\ H_0) \sim 55/\text{公里／秒兆秒差距}$$

$$= \frac{1}{18\times 10^9\text{年}} \text{或} \frac{1}{1.7\times 10^{28}\text{厘米}}$$

$$= \frac{(\text{宇宙自身半徑的增大率})}{(\text{宇宙的半徑})} = \frac{da/dt}{a}。 \qquad (10)$$

Hubble 時間，$H_0^{-1} \sim 18\times 10^9$ 年（按圖中的說明，基於今天觀測的膨脹率，線性外推回到零分離），預期比由恒星發展速率導出的回到膨脹開始的實際時間（$\sim 10\times 10^9$ 年）要大1.5 倍或更多（27.3 框）。預言和觀測之間還從未這樣令人滿意的一致，其間的不相等在40年代卽已存在，當時採用的星系與星系之間的距離尺度要小五倍以上。錯誤來自造父變星和 HII 區的錯誤證認，它們用作確定遙遠星系距離的標準亮度。回到膨脹開始的線性外推時間，

$$(\text{Hubble 時間}) = \frac{(\text{今天的距離})}{(\text{今天的退行速度})}，$$

相應的要短五倍以上。公諸於世的 Hubble 時間只有 3×10^9 年量級。這個數值明顯地違反不等式

$$\left(\begin{matrix}\sim 3\times 10^9\text{年} \\ \text{Hubble時間}\end{matrix}\right) \geq 1.5 \left(\begin{matrix}\sim 10\times 10^9\text{ 年；回到} \\ \text{膨脹開始的實際時間}\end{matrix}\right)。$$

它意味着作爲時間函數的尺度曲線不是如圖 B 中那樣往下彎，而是往上彎。在某些方面還曾建議把實際曲線看作是指數上升的。因而開始了「物質不斷創造的理論」的時代，完全脫離了 Einstein 的標準幾何動力學。當首次認出 I

* 既然局域運動是不重要的，既然現在的退行速度與光發射時的退行速度之間的差別是不重要的，那麼可以預料，H_0與星系的選取無關。由於星系密集到足以允許作必要的距離測量，所以後一個條件能很好地滿足，它們的紅移只有 $z\sim 0.1$ 的量級或更少（光輻射的時間和在地球上接收到它的時間之間的差別很小；因此，當時和現在的退行速度幾無變化；更完全的分析見 §29.3 和框 29.4）。

類星族和Ⅱ類星族的區別並由此 Baade (1952,1956) 正確地證認造父變星的時候，以及當 Sandage (1958) 發現 Hubble 曾錯誤地把遙遠星系中的 HII 區證認爲明亮恒星的時候，這個時代結束了。從而結束了對廣義相對論的明顯的否定，檢驗，以及戲劇性維護之間的第二次大循環。

迷失物質的奧秘標誌着第三個困難的循環，並且檢驗着仍未到來的最終判決。由(2)式得出，如果 Einstein 的閉合邊條件是正確的話，那麼質量-能量密度必定超過由下式給出的某個確定的下限

$$\rho \geq \rho_H = \frac{3}{8\pi} H_0^2 \tag{11}$$

(「把宇宙的幾何彎曲爲閉合所需質量-能量的臨界數量」)。與在星系中觀測到的「發光物質」的 $\rho \sim 2\times 10^{-31}$ 克／厘米^3 (§29.6) 以及今天在星系際空間探索到的更多的物質相比，Hubble 膨脹率 $H_0 = 55$ 公里／秒・兆秒差距意味着密度的下限爲

$$\rho_H = \frac{3}{8\pi} \frac{1}{(1.7\times 10^{28}\text{厘米})^2} \text{ 或 } \rho_{H,\text{conv}} = 5\times 10^{-30} \text{ 克/厘米}^3 \tag{12}$$

宇宙學的更完全的論述應涉及過去的狀態，過去是指相應的紅移比現在大 10,000 倍以及相應的尺度比現在小 10,000 倍，那時輻射不可忽略甚至佔優勢 (§27.10)。它甚至還要考慮更早的狀態，那時可以設想作爲一個整體宇宙的幾何的各向異性振蕩 (類似於雪茄轉換爲薄煎餅並再次返回) 占優勢 (第30章)。更廣泛地說，它要研究宇宙是如何演化到它目前狀態的 (第28章)，以及目前的狀態和宇宙將來的演化 (第29章)。本章檢驗基本假設；它們構成了所描述的簡單標準宇宙學的基礎，而 §27.11 將檢驗一下，如果放寬這些假設之一或另一，將會造成什麼樣的定性變化。

初階
高階

§27.2　理想化爲流體的宇宙的脅强-能量含量

本章其餘部分，除框27.4外，全屬高階。

無需早先的高階材料作爲它的準備，但它是第29章（宇宙的現狀和將來的演化）必須的準備。

採取大尺度觀點，可以把星系作爲充滿宇宙的「氣體」的「粒子」來處理。這些粒子具有內部結構（恒星、球狀星團，等等）；但可以置之不顧。在小尺度上「粒子」成團（星系團的大小 $\lesssim 3\times10^{7}$ 光年）；但可以不管這種成團效應。爲了簡化計算，甚至可以不管「氣體」的粒子性［雖然，如果想要考慮的話，可以採用動力論描述；動力論可參看 §22.6，對於它在宇宙學的應用可參看 Ehlers, Geren 和 Sachs (1968)］。用理想流體的近似來處理氣體可以消除氣體的微粒結構。於是，人們用**四維速度** $\boldsymbol{u}$（觀測者的四維速度，他看到他附近的星系無平均運動），用**質量-能量密度** ρ（在具有四維速度 $\boldsymbol{u}$ 的參照系中看到的光滑的質量-能量密度；它包括靜止質量加上單位體積中星系的動能，除以體積），以及用**壓强** p（星系的動壓）來表徵這種氣體。這種「星系流體」的脅强-能量張量是熟知的

把宇宙中的物質理想化爲理想流體（「星系流體」）

$$\boldsymbol{T}=(\rho+p)\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+\boldsymbol{g}p\,, \tag{27.1}$$

式中 $\boldsymbol{g}$ 是度規張量。

天文學觀測揭示，星系的靜止質量密度遠大於它的動能密度。星系（以及其中的恒星）彼此相對運動的典型普通速度爲

今天宇宙的大尺度條件

$$\langle v\rangle\sim 200\text{ 公里／秒}\sim10^{-3}\text{。} \tag{27.2}$$

由此，動能密度以及壓强與靜止質量密度之比爲

(1)恒星與星系的動能和壓强

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{動}}/\rho_{\text{靜止質量}}&=\frac{1}{2}\langle v^2\rangle\approx10^{-6}\,,\\ p/\rho_{\text{靜止質量}}&=\frac{1}{3}\langle v^2\rangle\approx10^{-6}\text{。}\end{aligned} \tag{27.3}$$

至少，這些是今天的比值。在宇宙生命的極早期，條件應大不相同。

於是，總質量-能量密度 ρ 非常接近於星系的靜止質量密度 $\rho_{\text{靜止質量}}$，天文學觀測得出今天的 $\rho_{\text{靜止質量}}$ 爲

(2)星系的質量密度

$$\rho_{\text{靜止質量}}\gtrsim 2\times10^{-31}\text{ 克／厘米}^{3} \tag{27.4}$$

（見 §29.6）

(3)宇宙射線的密度

宇宙中的全部物質並不都與星系緊密聯繫在一起；宇宙射線中也有物質，其平均質量-能量密度爲

$$\rho_{\text{宇宙射線}} \lesssim 10^{-33} \text{ 克/厘米}^3, \tag{27.5}$$

(4)星系際氣體的密度

或許，在星系際空間，還有氣體，爲

$$\rho_{\text{星系際}} \lesssim 10^{-28} \text{ 克/厘米}^3。 \tag{27.6}$$

［更鮮明的描繪 $\rho_{\text{星系際}}$的值是流行宇宙學研究的最重要目標之一。根據 1971 年的資料對這個問題的評述，參看「宇宙的平均質量密度」Peebles (1971)的第 56—120 頁。］可以把這些質量密度的來源，聯同壓强，與星系集中在一起，納入脅强-能量張量爲 (27.1) 的「宇宙學流體」之中。

(5)磁場

宇宙中的全部脅强-能量並非都是物質的形式。還有磁場，其平均能量密度幾乎一定不超過下述限度

$$\rho_{\text{磁場}} \lesssim 10^{-35} \text{ 克/厘米}^3 \tag{27.7}$$

(6)輻射密度

（相應的 $B_{\text{平均}} \lesssim 10^{-6}$ 高斯），以及全部輻射（電磁輻射，中微子輻射，或許還有引力輻射），估計爲

$$\rho_{\text{輻射}} \approx 10^{-33} \text{ 克/厘米}^3。 \tag{27.8}$$

本章將不管磁場；磁場對大尺度宇宙學並不重要，也許非常接近宇宙「大爆炸開始」（假如當時存在磁場的話）時應除外。但是輻射不能不管，它是一個決定性的角色。

宇宙微波輻射

絕大部分輻射密度的形式是「宇宙微波輻射」，它是 Penzias 和 Wilson (1965) 發現的［也可參看 Dicke, Peebles, Roll, 和 Wilkinson (1965)］，並且從那時起已經有過廣泛的研究［有關評述，可參看 Partridge (1969)］。强有力的證據表明，這種宇宙微波輻射是宇宙大爆炸開始時的遺跡。此處將採用這種解釋。

如果地球被封閉在一個溫度爲 2.7 開的盒（「黑體腔」）內，那麼宇宙微波輻射具有的正是人們預料的形式。光譜正是這個溫度的 Planck 光譜，並且輻射是各向同性的［Boughn, Fram, 和 Partridge (1971)］。因此，它的壓强和質量-能量密度由下式給出

$$\begin{aligned} \rho_{\text{微波}} &= 3p_{\text{微波}} = aT^4 \\ &= 4\times 10^{-34} \text{ 克/厘米}^3。 \end{aligned} \tag{27.9}$$

熱力學的討論 (§27.10) 暗示，宇宙還應充滿中微子輻射或許還有引力輻射，它們具有接近同樣溫度（～3 開）下的 Planck 光譜。但是，今天的技術還未能探測到它們。

直到很高的精度（≲300公里/秒），地球附近宇宙微波輻射的平均靜止系與地球近鄰星系的平均靜止系是相同的[Boughn, Fram和Partridge (1971)]。因此，輻射可以和物質一起包括在理想化的宇宙學流體之中。

把宇宙中物質理想化爲流體的小結

小結：由大尺度觀點，宇宙的脅强-能量可以理想化爲具有四維速度$\boldsymbol{u}$，質量-能量密度 ρ，壓强 p，以及脅强-能量張量

$$\boldsymbol{T}=(\rho+p)\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+p\boldsymbol{g} \tag{27.10}$$

的理想流體。在空時給定事件 $\mathcal{P}$ 處的四維速度 $\boldsymbol{u}$ 是 $\mathcal{P}$ 附近星系的平均四維速度；它也是爲了測出宇宙微波輻射的各向同性强度，人們應以之運動的四維速度。密度 ρ 是由物質密度（星系的靜止質量加上可以忽略的動能；宇宙射線的靜止質量加動能；星系際氣體的靜止質量加上熱能——都「抹去」單位體積）構成的，也是由輻射能量密度（電磁輻射、中微子輻射、引力輻射）構成的。壓强 p，像密度 ρ 一樣，取決於物質和輻射兩者。今天，物質的壓强遠小於它的質量-能量密度，

$$p_{\text{物質}}\ll\rho_{\text{物質}}\quad\text{今天，} \tag{27.11a}$$

但這個很强的不等式在很久以前並不成立。輻射壓强總是它的質量-能量密度的 $\frac{1}{3}$。

$$p_{\text{輻射}}=\frac{1}{3}\rho_{\text{輻射}}\quad\text{永遠。} \tag{27.11b}$$

§ 27.3　均匀和各向同性的幾何含義

本章將把宇宙理想化爲完全均匀的和各向同性的。這種理想化把很强的限制加在空時幾何和在其中運動的宇宙學流體上。爲了發現這些限制，首先必須給予均匀性和各向同性概念以精確的數學意義。

粗略地說，均匀性意味着在一給定的瞬時宇宙是處處相同的。是什麼時間的一個給定瞬間呢？誰的時間？這是研究者要回答的至關緊要的問題。

作爲推廣的「瞬時」的類空超曲面

在 Newton 理論中，關於「給定瞬時」的概念並無模糊之處。在狹義相對論中存在的某些模糊是因爲同時性的非普遍性，但一旦規定了慣性參照系，這個概念就變得精確了。在廣義相對論中不存在總體的慣性系（除非空時是平直的）；因此「給定瞬時」概念是完全模糊不清的。但是另一個更普遍的概念取代了它：三維類空超曲面的概念。由於空時中的自然對稱性，超曲面可使它本身引起人們的注意。或者，它可因研究者的興致或方便而選定。他可能發現，探索這裏和那裏的空時比別處更方便，從而把超曲面向前推進（「多指時間

」；引人注目的新時間概念，這是廣義相對論的一部分）。在類空超曲面上的每一事件處，存在着一局域 Lorentz 系，它的同時性曲面與該超曲面局域地重合。當然，這個 Lorentz 系是其四維速度與超曲面正交的那一個。在超曲面上不同事件處的這些 Lorentz 系並沒有形成總體慣性系的網絡，但是，它們的同時性表面却形成了類空超曲面本身的網絡。

直觀的詞組「在給定瞬時」，在廣義相對論中可翻譯成精確的詞組「在給定的類空超曲面」。研究者可以走得更遠。他可以借助於這類類空曲面的「單參量族」，把全部空時幾何「切成薄片」。他可以把這個參量（它把一個這類薄片與下一個區分開來）命名爲「時間」。這種貫穿空時的單參量薄片族在第42章的 Regge 計算中並不需要，但是，對於分析宇宙幾何動力學的絕大多數其他實用方法則是必須的（第 21, 30 和 43 章）。薄片的選擇可以解除動力學分析的困難或者僅能確認這些困難。相繼的「瞬時」薄片可能因其簡單而光彩奪目，或者也可能只是做了動力學的曲意的墨守陳規的簿記，究竟是什麼情況，取決於典型的類空超曲面能否通過自然的對稱性加以區別，還是任意畫出。

用類空超曲面定義「宇宙的均勻性」

因此，宇宙的均勻性意即在宇宙的每一事件處有一類空的「均勻性超曲面」通過（在這個超曲面上每一事件處的物理狀況等同）。在這類超曲面上每一事件處，密度 ρ 以及壓强 p 應該是同樣的；空時曲率也應是同樣的。

各向同性的概念也應使之精確。顯然，宇宙不可能在所有的觀測者看來都是各向同性的。例如，騎在 10^{20} 電子伏宇宙射線上的觀測者，將看到宇宙的物質從一個方向向他衝來又向相反的方向退離。只有與宇宙學流體一起運動的觀測者才可能看到事物是各向同性的。在定義各向同性時，考慮的就是這類觀測者。

定義「宇宙的各向同性」

宇宙的各向同性意即在任何事件處，「與宇宙學流體一起運動的」觀測者無法通過任何局域的物理測量，把他的空間方向之一與另一區別開。

宇宙的各向同性實際上意味着均勻性；對此，可以通過初等的論證使自己確信（練習 27.1）。

各向同性意味着流體世界線與均勻的超曲面正交

各向同性確保宇宙學流體的世界線與每一個均勻性的超曲面正交。說明如下。一個「與流體一起運動」的觀測者在經過給定事件的超曲面上作物理測量，可以發現狀態是均勻的。此外，他可以測量他自身相對於該超曲面的普通速度。如果該普通速度不爲零，則它爲觀測者提供了一種方法，可以把在他的靜

止系中的一個空間方向與全部其他方向區別開來——違背了各向同性。因而在各向同性的宇宙中，「觀測者與流體一起運動」的概念才有意義，每一這個類觀測者必定發現，他相對於均勻性的超曲面是靜止的。他的世界線與該超曲面正交。

練習 27.1　各向同性意味着均勻性　　**練習**

試用初等的假想實驗證明，宇宙的各向同性意味着均勻性。

§27.4　宇宙的共動、同步坐標系

建立宇宙的「共動、同步」坐標系

上節的結果使得人們能在各向同性模型宇宙的空時流形中建立特殊的坐標系（圖 27.1）。選擇一均勻性的超曲面 S_t。對於在它上面的全部事件都賦予坐標時間 t_t。按所希望的任何方式，在 S_t 上布置空間坐標 (x^1,x^2,x^3) 的格子。借助於宇宙學流體的世界線，把這些坐標從 S_t「傳播」開，並通過全部空時。特別是，賦予在給定世界線上的每個件事以空間坐標 (x^1,x^2,x^3)，世界線正是在該處與 S_t 相交。這種指定有簡單的結果。流體總是相對於空間坐標靜止的。換言之，空間坐標是「共動的」；它們只是爲了標明流體的世界線。對於給定事件 $\mathcal{P}$ 的時間坐標 t，採用從 S_t 到 $\mathcal{P}$ 的原時間隔 $\int d\tau$（它是沿着經過 $\mathcal{P}$ 的流體世界線測量的）加上 t_t（在初始超曲面 S_t 上的「時間標準」）；即

$$t(\mathcal{P})=t_t+\left(\int_{S_t}^{\mathcal{P}} d\tau\right)_{\text{沿着流體的世界線}} \qquad (27.12)$$

這樣一種坐標系的 $t=$常數曲面將與宇宙的均勻性超曲面一致。通過注意兩個不同觀測者 A 和 B 所作的觀測，就可以看清這一點，他們是沿着不同的世界線與流體一起運動的。在坐標時間 t_t（在 S_t 上），B 看到的宇宙與 A 看到的相同。在他們的鐘滴滴答答地過了同樣的時間間隔 $\Delta\tau$ 後，讓 A 和 B 再次觀測。初始超曲面 S_t 的均勻性加上 Einstein 場方程的決定論性質，確保 A 和 B 將再次看到相同的物理學。（在 S_t 上相同的初始條件，加上相同的原時間隔——在這期間 Einstein 方程支配了 A 和 B 附近宇宙的演化，確保了相同的終條件。）因此，在時間間隔 $\Delta\tau$ 之後，A 和 B 仍在同一個均勻性超曲面上——儘管是在與他們出發的 S_t 不同的超曲面上。由於坐標時間的定義（27.12），

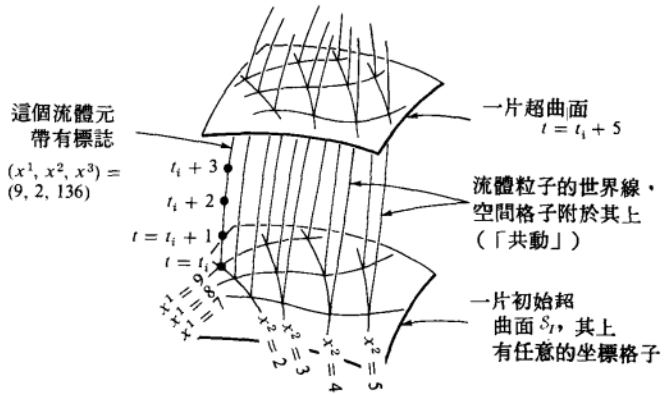


圖 27.1

在正文 §27.4 中對宇宙建立的共動、同步坐標系。這種坐標系的關鍵特徵如下（見 §27.4 和 §27.5）。(1)空間坐標與流體一起運動，而時間坐標是沿着流體世界線的原時；即特殊的流體世界線的坐標描述爲

$$(x^1, x^2, x^3) = \text{常數}，x^0 \equiv t = \tau + \text{常數}。$$

（τ：沿世界線量度的原時）

(2)任何恒定坐標時間的曲面是宇宙的均勻性超曲面。每一個這種超曲面與流體全部粒子的世界線正交。(3)在某個初始超曲面 S_I 上的空間格子是完全任意的。(4)如果 $\gamma_{ij}dx^i dx^j$ 是在初始超曲面上用它的任意坐標（γ_{ij} 是 x^1, x^2, x^3 的函數）表示的度規，則用共動、同步坐標系表示的空時度規爲

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j。$$

因而，宇宙幾何的全部動力學體現爲單一的時間函數 $a(t)$ =「膨脹因子」；而均勻性超曲面的形狀（但不是大小）體現在空間三維度規 $\gamma_{ij}dx^i dx^j$ 上。

B 的的世界線與這個新的超曲面相交處的坐標時間是 $t = t_1 + \Delta\tau$；對於 A，類似。此外，觀測者 A 和 B 是任意的。結果，這個新的均勻性超曲面，像 S_1 一樣，也是恒定坐標時間的超曲面，證完。

因爲均勻性超曲面是由 t = 常數給出的，在任何給定事件 $\mathcal{P}$ 處的基矢量 $\partial/\partial x^i$ 與經過該事件的均勻性超曲面相切。換言之，時間基矢量 $\partial/\partial t$ 與經過 $\mathcal{P}$ 的流體世界線相切，因爲沿着它的世界線的 x^i = 常數。因此，世界線與超曲面的正交性確保了 $\partial/\partial t$ 與 $\partial/\partial x^i$ 正交：

$$(\partial/\partial t) \cdot (\partial/\partial x^i) = 0, \text{ 對於 } i = 1, 2, 3。 \qquad (27.13a)$$

時間坐標還具有另一個特殊性質：它量度了沿着流體世界線的原時間隔。由此，並且因爲 $\partial/\partial t$ 與世界線相切，可以寫出

$$\partial/\partial t=(d/d\tau)_{\text{沿着流體的世界線}}=\boldsymbol{u}, \tag{27.13b}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 是「宇宙學流體」的四維速度。這個四維速度總是具有單位長度

$$(\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial t)=-1。 \tag{27.13c}$$

條件 (27.13a,c) 揭示，在共動坐標系中［其中 $g_{\alpha\beta}\equiv(\partial/\partial x^{\alpha})\cdot(\partial/\partial x^{\beta})$］，空時的線元爲

$$ds^2=-dt^2+g_{ij}dx^i dx^j。 \tag{27.14}$$

在此坐標系中線元的形式

其中的線元具有這種形式的任何坐標系稱爲是「同步的」(1)因爲坐標時間 t 量度了沿着恒定 x^i 線（即 $g_{tt}=-1$）的原時，(2)因爲對於以 $x^i=$常數［即 $g_{ti}=(\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial x^i)=0$］運動的觀測者來說，曲面 $t=$常數是（局域的）同時性曲面；它也稱爲「Gauss 簡正坐標系」（參看圖 21.6）。

一個 $t=$ 常數的均勻性超曲面具有如 (27.14) 式所描述的空間三維幾何且 $dt=0$:

$$(ds^2)_{\text{在均勻性超曲面上}}=d\sigma^2=[g_{ij}]_{t=\text{常數}}dx^i dx^j。 \tag{27.15}$$

知道了每一個這些超曲面上的三維幾何的一切，就是知道了空時幾何的一切。

練習 27.2　一般的同步坐標

練習

在任意的空時流形中，（無須均勻的或各向同性的），取一初始的類空超曲面 S_I，在它上面放上任意的坐標格子，排除和它正交的短程世界線，並給這些世界線以坐標

$$(x^1,x^2,x^3)=\text{常數}，x^0\equiv t=t_I+\tau,$$

式中 τ 是沿着世界線的原時，從 S_I 上的 $\tau=0$ 開始。試證明在此坐標系中度規採取同步的（Gauss 簡正）形式 (27.14)。

---

§ 27.5 膨脹因子

為了確定每一個均勻性超曲面的三維幾何 $d\sigma^2=g_{ij}(t,x^k)dx^idy^j$，把問題分成兩部分：(1)在任意初始超曲面上三維幾何的性質(在下節討論)；以及(2)隨着時間的流逝，即隨着注意力從初始超曲面移向其後的超曲面、另一個、再另一個……，三維幾何的演化（本節討論）。

除了總的「膨脹因子」外，證明宇宙中全部均勻的超曲面都具有相同的三維幾何

假設已知初始的三維幾何，即假設已知在初始超曲面 S_1 上（在它的任意、的但明確選定的坐標系中）度規空間部分的系數為

$$\gamma_{ij}(x^k)\equiv g_{ij}(t_1,x^k)。 \tag{27.16}$$

那麼，在其他的均勻性超曲面上，度規系數 $g_{ik}(t,x^k)$ 的形式將是什麼呢？這個問題很容易通過下述論證回答：考慮宇宙流體的兩條鄰近的世界線 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，其坐標為 (x^1,x^2,x^3) 和 $(x^1+\Delta x^1,\ x^2+\Delta x^2,\ x^3+\Delta x^3)$。在時間 t_1（在曲面 S_1 上）它們分離的固有距離為

$$\Delta\sigma(t_1)=(\gamma_{ij}\Delta x^i\Delta x^j)^{1/2}。 \tag{27.17}$$

在某個稍後的時刻 t（在曲面 S 上），它們分離的固有距離是另一個 $\Delta\sigma(t)$。空時的各向同性確保分離之比 $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_1)$ 與從 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的方向無關（流體沒有切向運動）。對於任何給定的方向，微小分離的增添量確保 $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_1)$ 與 $\Delta\sigma(t_1)$ 無關。因而，對於一給定世界線附近的全部世界線對，$\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_1)$ 必定是相同的。最後，均勻性確保這個標量比值與在初始曲面 S_1 上的位置無關——即與 x^1, x^2, x^3 無關。定義 $a(t)$ 為這個空間性地恒定比值

$$a(t)\equiv\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_1)。 \tag{27.18}$$

於是，$a(t)$ 是這樣一個因子，由於它，在時間 t_1 和時間 t 之間，世界線的分離膨脹了。換言之，函數 $a(t)$ 是宇宙的「膨脹因子」或「尺度因子」。

聯合 (27.17) 式和 (27.18) 式，得出在時間 t 鄰近世界線的分離為

$$\Delta\sigma(t)=a(t)[\gamma_{ij}(x^k)\Delta x^i\Delta x^j]^{1/2}。$$

相應的在時間 t 的空間度規為

$$d\sigma^2=a^2(t)\gamma_{ij}(x^k)dx^idx^j, \tag{27.19}$$

並且，相應的空時度規為

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)\gamma_{ij}(x^k)dx^idx^j。 \tag{27.20}$$

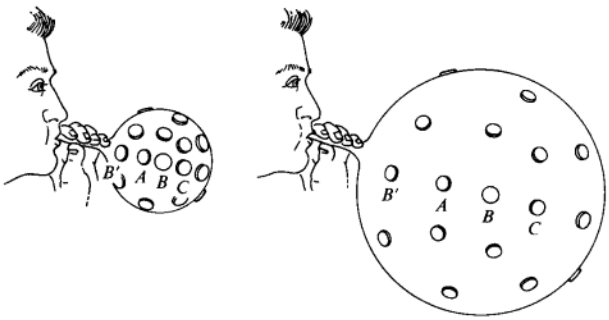


圖 27.2
貼有許多便士的氣球的充氣，作爲宇宙膨脹的一個模型。每一個便士 A 都可以很好地認爲自身是膨脹的中心，因爲從 A 到任何近鄰 B 或 C 的距離增大了，開始時越遠的鄰居增加得越多（「Hubble 關係」）。便士本身並未膨脹（日－地距離的恒定性，米尺不膨脹，原子尺度不增加）。今天，星系和星系之間的距離（$\sim 10^6$ 光年）約爲星系典型尺度（$\sim 10^5$ 光年）的10倍。

注意，系數 $\gamma_{ij}(x^k)$ 不僅描繪了初始超曲面的形狀，還描繪了全部其他均勻性超曲面的形狀。從一個超曲面到另一個，幾何上的全部變化在於距離的尺度。空間格點（流體世界線）之間的全部距離按相同的因子 $a(t)$ 膨脹，使超曲面的形狀不變。這就是均勻性和各向同性的結果；並且僅當模型宇宙是精確地均勻和各向同性時，這才精確地正確。

宇宙中什麼東西膨脹了，什麼東西沒有膨脹

至於「宇宙膨脹」的全部擾亂人心的含義，使許多初次遭遇到它的學生感到心煩意亂的莫過於這個觀念本身的混亂。宇宙膨脹了嗎，一個星系團和另一個星系團之間的距離膨脹了嗎？太陽和地球之間的距離膨脹了嗎？米尺的長度膨脹了嗎？原子膨脹了嗎？那麼，怎樣才能使任何關於膨脹的說法有任何意義呢？相對於什麼東西膨脹呢？相對於毫無意義的東西膨脹！只是在後來他才認識到原子並沒有膨脹，米尺並沒有膨脹，太陽和地球之間的距離並沒有膨脹。只是星系團之間的距離，以及更大的距離受膨脹的影響。只是在這種平均而言的巨大尺度上，均勻性概念才有意義。在更小的距離上決非如此。沒有一種模型能比下述模型更快地說明實際情形，這種模型是：一橡膠氣球，許多便士（英國輔幣）每個用一滴膠水貼附在氣球上，隨着氣球充氣（圖 27.2），一個便士與其他便士的分離增加了，但其中每一個便士都沒有膨脹！［數學上的細節，參看，例如，Noerdlinger 和 Petrosain (1971)。］

練習

練習 27.3 膨脹因子中的任意性

在膨脹因子 $a(t)$ 的定義中有多少任意性？文明A開始於很久以前的時間 t_A，對此，膨脹因子爲

$$\frac{\left(\begin{array}{c}\text{「宇宙學流體」的兩個}\\ \text{粒子在時間 } t \text{ 的固有距離}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{同樣兩個粒子在時}\\ \text{間 } t_A \text{ 的固有距離}\end{array}\right)}=a_A(t)。$$

此後，人類在時間 t_B，把文明B移植到鄰近星系的一個行星上。［此時，膨脹因子 a_A 的值爲 $a_A(t_B)$］。文明B定義了相對於它自身開始時間的膨脹因子：

$$\frac{\left(\begin{array}{c}\text{「宇宙學流體」的兩個}\\ \text{粒子在時間 } t \text{ 的固有距離}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{同樣兩個粒子在時}\\ \text{間 } t_B \text{ 的固有距離}\end{array}\right)}=a_B(t)。$$

在隨後的兩個事件 C 和 D，兩種文明都是知道的，在兩種文明的簿記中，賦予宇宙的決不是相同的膨脹因子

$$a_A(t_C)\neq a_B(t_C),$$
$$a_A(t_D)\neq a_B(t_D)。$$

試證明，從C階段到D階段的演化過程中，在兩種簿記系統中模型宇宙的相對膨脹仍然是相同的：

$$\frac{a_A(t_D)}{a_A(t_C)}=\left(\begin{array}{c}\text{從C到D的}\\ \text{相對膨脹}\end{array}\right)=\frac{a_B(t_D)}{a_B(t_C)}。$$

§ 27.6 均勻超曲面的可能的三維幾何

均勻、各向同性超曲面的 *Riemann* 張量

現在，回到任意初始超曲面 S_I 的三維幾何 $\gamma_{ij}dx^idx^j$。這個三維幾何必定是均勻的和各向同性的。它的三維 Riemann 曲率的精細研究，必定無法得出把 S_I 上一點與任何其他點相區別，或者把在給定點上的一個方向與任何其他方向相區別的「把手」。「無把手」意味着 [3] ***Riemann*** 必定是由純數和由唯一存在的「與把手無關」的張量：三維度規 γ_{ij} 和三維 Levi-Civita 張量 ε_{ijk}，

代數地構成的。(所有其他的張量都挑選優先的方向或位置。) (3)**Riemann** 的一個可能的表達式爲

$$ {}^{(3)}R_{ijkl}=K(\gamma_{ik}\gamma_{jl}-\gamma_{il}\gamma_{jk});\ K=\text{「曲率參量」}=\text{常數}。 \quad (27.21) $$

嘗試法立即使人們相信，這是唯一的表達式，它既具有曲率張量的正確對稱性又可完全由常數 γ_{ij} 和 ε_{ijk} 建立。因此，這必定是 S_I 的三維曲率。[具有這種形式的曲率張量的任何流形，稱爲「恒定曲率」的流形。]

均勻，各向同性超曲面的度規：三種可能性——正的、零或負的空間曲率

正如人們可能預料的那樣，S_I 的度規以至坐標變換，由它的曲率張量的形式 (27.21) 完全確定。(見後面的練習 27.4)。適當的選擇坐標，度規爲 (見後面的練習 27.5)

$$ \begin{aligned} d\sigma^2&=\gamma_{ij}dx^idx^j=K^{-1}[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)] \text{ 如果 } K>0,\\ d\sigma^2&=\gamma_{ij}dx^idx^j=d\chi^2+\chi^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \text{ 如果 } K=0, \quad (27.22)\\ d\sigma^2&=\gamma_{ij}dx^idx^j=(-K)^{-1}[d\chi^2+\sinh^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)] \text{ 如果 } K<0。 \end{aligned} $$

把因子 $K^{-1/2}$ 或 $(-K)^{-1/2}$ 吸收到膨脹因子 $a(t)$ 中 [見練習 27.3]，並定義函數，

$$ \begin{aligned} &\Sigma\equiv\sin\chi, && \text{如果 } k\equiv K/|K|=+1(\text{「正的空間曲率」}),\\ &\Sigma\equiv\chi, && \text{如果 } k\equiv K=0(\text{「零空間曲率」}), \quad (27.23)\\ &\Sigma\equiv\sinh\chi, && \text{如果 } k\equiv K/|K|=-1(\text{「負的空間曲率」})。 \end{aligned} $$

於是，全部空時幾何可寫成下述形式

$$ \begin{aligned} ds^2&=-dt^2+a^2(t)\gamma_{ij}dx^idx^j,\\ \gamma_{ij}dx^idx^j&=d\chi^2+\Sigma^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2), \end{aligned} \quad (27.24) $$

並且均勻超曲面的三維曲率可寫成下述形式

$$ {}^{(3)}R_{ijkl}=[k/a^2(t)][\gamma_{ik}\gamma_{jl}-\gamma_{il}\gamma_{jk}]。 \quad (27.25a) $$

顯然，在這樣重正化之後，曲率參量K爲

$$ K=k/a^2(t)。 \quad (27.25b) $$

膨脹因子歸一化的意義

爲什麼「重正化」一詞是適當的？以前的 $a(t)$ 是一個尺度因子，描繪線性尺度的膨脹，這種膨脹是相對於他們所處的某個任意選定時代的線性尺度的；而該基準時代的選擇則無關緊要。現在，$a(t)$ 喪失了這種任意性。它已經歸一化，因此，此處和現在它的值給出了此處和現在均勻性類空超曲面的曲率。以前的因子 $a(t)$ 是設想爲無量綱的。現在它具有長度的量綱。當曲率爲正值時，這個長度稱爲「模型宇宙的半徑」。甚至當曲率爲負值時，人們有時還

把 $a(t)$ 叫做「半徑」。只是對於零曲率，$a(t)$ 的歸一化仍然保留它從前的任意性。於是，對於零曲率，考慮 $a(t)$ 的兩種選擇，其一爲 $a(t)$，另一爲 $\bar{a}(t)=2a(t)$。然後，取 $\bar{\chi}=\frac{1}{2}\chi$，就可以用完全無關的兩種方法的任一種寫出在三個重要方向上的固有距離：

$$\begin{pmatrix}\text{在 }\chi\text{ 增加方向}\\ \text{上的固有距離}\end{pmatrix}=a(t)d\chi=\bar{a}(t)d\bar{\chi},$$

$$\begin{pmatrix}\text{在 }\theta\text{ 增加方向}\\ \text{上的固有距離}\end{pmatrix}=a(t)\chi d\theta=\bar{a}(t)\bar{\chi}d\theta,$$

$$\begin{pmatrix}\text{在 }\phi\text{ 增加方向}\\ \text{上的固有距離}\end{pmatrix}=a(t)\chi\sin\theta d\phi=\bar{a}(t)\bar{\chi}\sin\theta d\phi。$$

當模型宇宙彎曲時，就不可能有這種選擇的自由了，因爲在後兩行中的 χ 要代之以函數 $\sin\chi$ 或 $\sinh\chi$，它們在論證中並不是線性的。

不管從原則上確定彎曲宇宙「半徑」 $a(t)$ 絕對值的現實性如何，實際上今天還沒有達到這樣做所需要的精度。因此，在許多方面繼續把 $a(t)$ 看作相對膨脹因子是適當的，從它進入任何方程起，人們就試圖精確地保持它的絕對值，這是因爲它難於確定。這個因素說明在下面所作的許多膨脹分析中，所安排的計算將涉及 a 值之比而不是絕對的 a 值。

框 27.2 探索和闡明均勻性超曲面的幾何學。

練習

練習 27.4 對於恒定曲率的三維曲面，度規的唯一性

設 γ_{ij} 和 $\gamma_{i'j'}$ 是在坐標系 $\{x^i\}$ 和 $\{x^{i'}\}$ 中的兩組度規系數，它們所具有的 Riemann 曲率張量［由 (8.22) 式和 (8.42) 式導出］是恒定曲率類型的 (27.21) 式。此外，設它給出的曲率參量 K 和 K' 相等。試證明 γ_{ij} 和 $\gamma_{i'j'}$ 可通過坐標變換相聯系。［解答可參看 Robertson 和 Noonan (1968) 的 §8.10，或 Eisenhart (1926) 的 §10 和 §27。］

練習 27.5 恒定曲率的三維曲面的度規

(a) 試證明下述度規以表達式 (27.21) 爲其曲率張量

$$\gamma_{ij}=\left(1+\frac{1}{4}K\delta_{kl}x^kx^l\right)^{-2}\delta_{ij}。 \qquad (27.26)^*$$

---

* 選取這種空間坐標，空時度規爲

$$ds^2=-dt^2+\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{[1+\frac{1}{4}K(x^2+y^2+z^2)]^2}。$$

它通常稱爲「Robertson-Walker 線元」，因爲 Robertson (1935, 1936) 和 Walker (1936) 首先證明，它描述了最普通的均勻和各向同性的空時幾何。

(b) 通過變換到球坐標 (R,θ,ϕ)，再變到 Schwarzschild 徑向坐標 ($2\pi r$＝「固有圓周」)。把這個度規變換爲下述形式

$$d\sigma^2=\frac{dr^2}{1-Kr^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)。\qquad (27.27)$$

(c) 試求出徑向坐標的進一步變化，它把這個度規引入 (27.22) 的形式。

練習 27.6　這個三維曲面的性質

試證明框 27.2 中所作的全部陳述。

練習 27.7　各向同性意味着均勻性

應用縮併的 Bianchi 恒等式 ${}^{(3)}G^{ik}{}_{|k}=0$ (其中的一豎表示僅基於三維幾何的協變微商) 證明(1)在 (27.21)式中${}^{(3)}\nabla K=0$，並由此證明(2)曲率與方向無關［各向同性；(27.21)形式的曲率］意味着並要求均勻性 (K在空間是常數)。

(接第726頁)

框 27.2　均勻超曲面的三維幾何

A. 具有正空間曲率的宇宙 (「空間閉合的宇宙」)

每一個超曲面的度規爲

$$d\sigma^2=a^2[d\chi^2+\sin\chi^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。\quad (1)$$

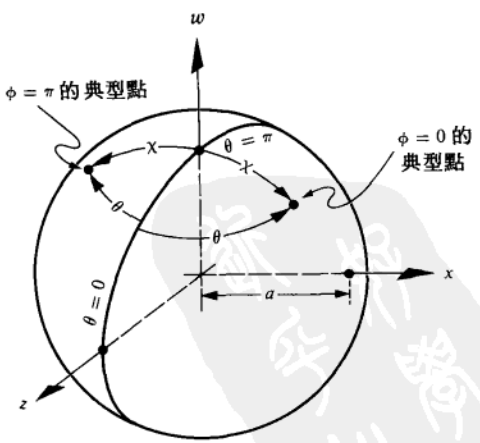
爲了想像這個三維幾何，設想把它嵌入四維 Euclid 空間之中(此處這種嵌入是可能的；對於一般的三維流形則不可能；只有四個可以自由處理的函數$[w,x,y,z]$，它們是三個變量$[\alpha,\beta,\gamma]$的函數，它們可聽憑處理以便試着再現六個規定函數 $[g_{mn}(\alpha,\beta,\gamma)]$，這六個函數是同樣的三個變量的函數)。

嵌入可通過下式實現

$$\begin{aligned} w&=a\cos\chi, \quad & z&=a\sin\chi\cos\theta,\\ x&=a\sin\chi\sin\theta\cos\phi, & & \qquad (2)\\ y&=a\sin\chi\sin\theta\sin\phi, & & \end{aligned}$$

因爲由此得出

$$\begin{aligned} d\sigma^2&\equiv dw^2+dx^2+dy^2+dz^2\\ &=a^2[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。(3)\end{aligned}$$



一個正曲率的三維曲面嵌入四維 Euclid 空間之中。一個轉動自由度可通過令 $\phi=0$和π來抑制 (「通過極點的薄片」，在四維空間的三維球看起來像在三維空間的二維球)。

嵌入曲面的(2)式意味着

$$w^2+x^2+y^2+z^2=a^2; \qquad (4)$$

即這個曲面是在四維 Euclid 空間中的三維球。

爲了證實均勻性和各向同性，只需注意在四維嵌入空間中的轉動能夠把任意給定點［在三維球上任意給定的 (w,x,y,z)］和在該點的任意給定方向移到任意的另一點和另一個方向——而使下述線元不變即可

$$d\sigma^2=dw^2+dx^2+dy^2+dz^2。$$

上面的方程和圖表明

(1) χ 確定的二維曲面（它看起來像圖中的圓，因爲一個轉動自由度已被抑制）實際上是表面積 $4\pi a^2\sin^2\chi$ 爲的二維球；而 (θ,ϕ) 是這些二維球上的標準球坐標。

(2)隨着 χ 從 0 變化到 π，人們從超曲面的「北極」向外運動，經過相繼的面積爲 $4\pi a^2\sin^2\chi$ 的各個二維球（「殼層」）（二維球在圖中看來像圓）。這些殼層的面積起初迅速增加，然後隨着接近超曲面的「赤道」$\chi=\pi/2$，增加得較慢。越過赤道面，面積起初慢慢減少，然後隨着接近「南極」($\chi=\pi$, 面積$=0$) 面積迅速減少。

(3)通過取

$$0\leq\chi\leq\pi,$$
$$0\leq\theta\leq\pi,$$
$$0\leq\phi\leq2\pi,$$

全部超曲面都被掃過了（ϕ 是循環的；$\phi=0$ 和 $\phi=2\pi$ 相同）；它的三維體積爲

$$\mathcal{V}=\int(ad\chi)(a\sin\chi d\theta)(a\sin\chi\sin\theta d\phi)$$
$$=\int_0^{\pi}4\pi a^2\sin^2\chi(ad\chi)=2\pi^2a^3。 \qquad (5)$$

B. 具有零空間曲率的宇宙（「空間平直的宇宙」）

每一個超曲面的度規爲

$$d\sigma^2=a^2[d\chi^2+\chi^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。 \qquad (6)$$

這是用球坐標描繪的完全平直的三維 Euclid 空間。用笛卡兒坐標

$$x=a\chi\sin\theta\cos\phi,$$
$$y=a\chi\sin\theta\sin\phi, \qquad (7)$$
$$z=a\chi\cos\theta,$$

度規爲

$$d\sigma^2=dx^2+dy^2+dz^2。 \qquad (8)$$

通過取

$$0\leq\chi<\infty,$$
$$0\leq\theta\leq\pi, \qquad (9)$$
$$0\leq\phi\leq2\pi,$$

全部超曲面都被掃過了；它的體積是無窮大。

C. 具有負空間曲率的宇宙（「空間開放的宇宙」）

每一個超曲面的度規爲

$$d\sigma^2=a^2[d\chi^2+\sinh^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。 \qquad (10)$$

這個三維幾何不能嵌入四維 Euclid 空間之中；但它能嵌入平直的 Minkowski 空間之中

$$d\sigma^2=-dw^2+dx^2+dy^2+dz^2。 \qquad (11)$$

爲了實現這種嵌入，令

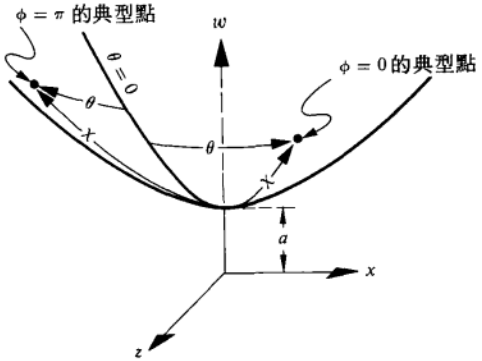
$$w=a\cosh\chi, \quad z=a\sinh\chi\cos\theta,$$
$$x=a\sinh\chi\sin\theta\cos\phi, \qquad (12)$$
$$y=a\sinh\chi\sin\theta\sin\phi;$$

把這代入(11)式，並由此得出(10)式。

對於嵌入的曲面，(12)式意味着

$$w^2-x^2-y^2-z^2=a^2; \qquad (13)$$

即此曲面是四維 Minkowski 空間中的三維雙曲面。（它和動量空間的質量雙曲面有相同的形式



嵌入四維Minkowski空間的負曲率的三維曲面。令$\phi=0$和π抑制了一個轉動自由度（「薄片經過極點」；在四維空間的三維雙曲面看起來像三維空間中的二維雙曲面）。

；見框 22.5.）

爲了證明均勻性和各向同性，只需注意在嵌入空間的「Lorentz 變換」可以把三維雙曲面上的任意給定點和經過該點的任意方向移向任意另一點和另一個方向——而使下述線元不變。

$$d\sigma^2=-dw^2+dx^2+dy^2+dz^2。$$

上述方程和圖表明：

(1)χ 確定的二維曲面（在圖中它看起來像圓，因爲一個轉動自由度已被抑制）實際上是表面積爲 $4\pi a^2\sinh^2\chi$ 的二維球；而 (θ,ϕ) 是在這些二維球上的標準球坐標。

(2)隨着 χ 從 0 變化到 ∞，人們從超曲面的（任意選定的）「極點」向外運動，經過面積 $4\pi a^2\sinh^2\chi$ 不斷增大的相繼的二維球（「殼層」）。對於大的 χ，表面積的增大比超曲面爲平直時要快得多

$$\frac{(\text{固有表面積})}{4\pi(\text{固有距離})^2}=\frac{A}{4\pi\ l^2}$$
$$=\frac{4\pi a^2\sinh^2\chi}{4\pi a^2\chi^2} \qquad (14)$$
$$\approx\left(\frac{e^{l/a}}{2l/a}\right)^2\longrightarrow\infty。$$

通過取

$$0\leq\chi<\infty,$$
$$0\leq\theta\leq\pi, \qquad (15)$$
$$0\leq\phi\leq2\pi。$$

全部超曲面都被掃過了（ϕ是循環的；$\phi=0$ 和 $\phi=2\pi$ 相同）。超曲面的體積爲無窮大。

D. 拓撲的不唯一性

警告：儘管均勻性和各向同性的要求完全確定了均勻性超曲面的局域幾何性質，直至單一的可自由處理的因子K，它仍然遺留下不確定的超曲面整體的拓撲。上面選擇的拓撲是最直截了當的。但其他選擇也是可能的。

當超曲面爲平直($k=0$)時，這種任意性最容易看出。在笛卡兒坐標中寫出全部空時度規，爲

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)[dx^2+dy^2+dz^2]。 \qquad (16)$$

然後，取坐標邊長爲L的立方體

$$0<x<L,\quad 0<y<L,\quad 0<z<L,$$

並視相對面爲等同（過程類似於把紙片卷成管，並把它的邊膠合在一起；詳盡的討論可參看§11.5的最後三段）。得出的幾何仍由線元(16)描述，但現在全部三個空間坐標都是「循環」的，就像球坐標中的ϕ坐標一樣：

$$(t,x,y,z)\text{ 與 }(t,\ x+L,\ y+L,\ z+L)$$

是同樣的事件。

現在均勻性超曲面是有限體積

$$V=a^3L^3$$

的「三維環」，類似於分析電子波、固體中的聲波以及空間的電磁波時所遇到的稱爲「周期性邊條件」的三維環。

另一個例子：在上述A部分（「正曲率」情形）描述的三維球與旋轉羣 $SO(3)$ 具有同樣的幾何，但並不具有同樣的拓撲［見練習 9.12, 9.13, 10.16 和 11.12］。詳盡的討論，參看，例如，Weyl (1946), Coxeter (1963), 以及 Auslander 和 Markus (1959)。

§27.7 流體的運動方程

在上面分析了任意一個均勻性的超曲面之後，回到宇宙的動力學。首先，檢查一下受定律 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 支配的流體的演化。

回想起（§22.3 和 §23.5）對於理想流體，運動方程分成兩部分。沿着四維速度的分量 $\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T})=0$。再現了熱力學第一定律

$$(d/d\tau)(\rho V)=-p(dV/d\tau), \qquad (27.28a)$$

式中V是任意流體元的體積。與四維速度正交的部分 $(\boldsymbol{g}+\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T})=0$，給出了力的方程（「Euler 方程」）

$$(\rho+p)\times(\text{四維加速度})=-(\text{與 }\boldsymbol{u}\text{ 正交的 }\nabla p\text{ 分量})。 \qquad (27.28b)$$

對於均勻的宇宙，Euler 方程空無所有

對於靜止的恒星（§23.5），熱力學第一定律空無所有，但力的方程至關緊要。對於均勻的宇宙，則剛相反；力的方程空無所有（無加速度），但熱力學第一定律至關緊要。

爲了說明力的方程空無所有，注意到各向同性確保方程（27.28b）的兩邊均爲零即可，如果有一邊在任意事件 $\mathcal{P}$ 處不爲零，它將在 $\mathcal{P}$ 的均勻性超曲面中辨別出一個方向來。

把熱力學第一定律（27.28a）用於宇宙學，將密度和壓强分成由物質貢獻的和由輻射貢獻的：

$$\rho=\rho_m+\rho_r;\qquad p=p_m+p_r。 \qquad (27.29)$$

物質和輻射的「狀態方程」

首先討論質量-能量密度。今天 $\rho_m(\gtrsim 10^{-31}$ 克/厘米$^3)$ 比 $\rho_r(\sim 10^{-33}$ 克/厘米$^3)$ 占優勢。但物質並不總是占優勢的。因此，不能令 $\rho_r=0$。現在討論壓强。在壓强具有重要宇宙學意義的宇宙時代，p_r 比 p_m 占優勢。因此，在所有時間，可以略去 p_m，並用輻射的「狀態方程」$p_r=\frac{1}{3}\rho_r$ 寫出

$$\rho=\rho_m+\rho_r;\qquad p=\frac{1}{3}\rho_r。 \qquad (27.30)$$

把（27.30）式代入熱力學第一定律（27.28a）式，得出結果

$$(d/d\tau)(\rho_m V)+(d/d\tau)(\rho_r V)=-\frac{1}{3}\rho_r dV/d\tau。 \qquad (27.31)$$

物質和輻射之間的能量交換可以忽略

直到知道物質和輻射之間如何來回輸送質量-能量之前——即直到知道 $\rho_m V$ 和 $\rho_r V$ 之間的另一關係式之前，上式無法積分。一切估計表明，除了宇宙生命

的最初幾秒鐘外，輻射與物質之間的能量交換與單獨的 $\rho_m V$ 和 $\rho_r V$ 相比是可以忽略的［見 §28.1］。在這些條件下，方程 (27.31) 可分爲兩部分

用膨脹因子的術語，以熱力學第一定律表示輻射密度和物質密度

$$(d/d\tau)(\rho_m V)=0\,, \tag{27.32a}$$

和

$$(d/d\tau)(\rho_r V)+\frac{1}{3}\rho_r dV/d\tau=0\,。 \tag{27.32b}$$

解是簡單的：

$$\rho_m V=\text{常數（物質守恒）} \tag{27.33a}$$

和

$$\rho_r V^{4/3}=\text{常數}=\underbrace{\frac{\rho_r}{V^{-1/3}}}_{\text{一個光子的能量 } hc/\lambda,\text{ 當相於一個比例因子}} V\text{（光子數不變）} \tag{27.33b}$$

現在，V 是什麼？它是任意流體元的體積。對於邊緣爲 $\Delta\chi$, $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ 的流體元，它的值爲：

$$V=a^3\Sigma^2\sin\theta\,\Delta\chi\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,。$$

此處的 χ, θ, ϕ 沿着每一條流體的世界線（共動坐標）是不變的。因此，對於任何流體元，在全部的時間，超球面立體角元 $\Sigma^2\sin\theta\,\Delta\chi\,\Delta\theta\,\Delta\phi$ （或者，開放宇宙模型的屢超球面立體角元）是不變的。因此，流體元體積的增長與膨脹參量 a 的立方成正比；即

$$V/a^3=\text{常數}。$$

把這個結果與 $\rho_m V$ 和 $\rho_r V^{4/3}$ 的不變性合在一起，可見

$$\rho_m a^3=\text{常數}\,,\qquad \rho_r a^4=\text{常數}。 \tag{27.34}$$

設 ρ_{m0} 是今天的物質密度，ρ_{r0} 是今天的輻射密度，a_0 是今天的宇宙膨脹因子。則在過去的任何時間，

$$\rho(t)=\rho_{m0}\frac{a_0^3}{a^3(t)}+\rho_{r0}\frac{a_0^4}{a^4(t)} \tag{27.35a}$$

和

$$p(t)=\frac{1}{3}\rho_{r0}\frac{a_0^4}{a^4(t)}\,。 \tag{27.35b}$$

這些結果是基於兩個關鍵要求的，以後將詳盡地說明它們是有理由的（第28章）：要求在壓强重要的時代，p_m 遠小於 p_r；以及要求輻射和物質之間交換的質量-能量總是可以忽略的（除了「創世」後的前幾秒鐘外）。

§27.8 Einstein 場方程

一旦已知膨脹因子隨時間的演化 $a(t)$，就可以從方程 (27.35) 直接得出密度和壓强隨時間的演化。而經 Einstein 場方程由密度和壓强又可最終確定膨脹是如何進行的。因此，場方程「封閉了邏輯環」，並由此給出確定全部三個量 $a(t)$, $p(t)$ 和 $\rho(t)$ 的封閉數學體系。

應用正交歸一基1-形式，可以很容易的計算模型宇宙的 Einstein 張量的分量

$$\omega^{\hat{t}}\equiv \mathbf{d}t\,,\quad \omega^{\hat{\chi}}\equiv a(t)\mathbf{d}\chi\,,\quad \omega^{\hat{\theta}}\equiv a(t)\Sigma\mathbf{d}\theta\,,\quad \omega^{\hat{\phi}}\equiv a(t)\Sigma\sin\theta\mathbf{d}\phi\,。\tag{27.36}$$

對於均勻的宇宙，Einstein 場方程的計算：

結果［見框 14.5 的(5)式］爲

$$G_{\hat{t}\hat{t}}=3\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2+\frac{3k}{a^2}\,,\tag{27.37a}$$

$$G_{\hat{x}\hat{x}}=G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}=G_{\hat{\phi}\hat{\phi}}=-2\frac{a_{,tt}}{a}-\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2-\frac{k}{a^2}\,,\tag{27.37b}$$

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}=0 \text{ 如果 } \mu\neq\nu\,。\tag{27.37c}$$

（人們應有先見之明的提前注意到，各向同性確保等式 $G_{\hat{x}\hat{x}}=G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}=G_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$，以及 Riemann 張量的類似等式；從而只需計算最容易計算的分量 $G_{\hat{x}\hat{x}}$ 即可。）

基 1- 形式 $\omega^{\hat{t}}$, $\omega^{\hat{x}}$, $\omega^{\hat{\theta}}$, $\omega^{\hat{\phi}}$ 是與「宇宙學流體」一起運動的觀測者所携帶的正交歸一基。因此，$T_{\hat{t}\hat{t}}$ 是他測量的質量-能量密度 ρ；$T_{\hat{j}\hat{j}}$ 是壓强 p；$T_{\hat{i}\hat{j}}$ 爲零，因爲他看不到能流（沒有動量密度）；並且，$i\neq j$ 的 $T_{\hat{i}\hat{j}}$ 爲零，因爲他看不到切脅强：

$$T_{\hat{t}\hat{t}}=\rho\,,\tag{27.38a}$$

$$T_{\hat{x}\hat{x}}=T_{\hat{\theta}\hat{\theta}}=T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}=p\,,\tag{27.38b}$$

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}=0 \text{ 當 } \mu\neq\nu\,。\tag{27.38c}$$

使 (27.37) 式的 Einstein 張量（「轉矩」）與 (27.38) 式的脅强-能量張量相等。並且如果人們堅持的話，在場方程中還可以包括所謂「Λ- 項」或「宇宙學項」［Einstein (1970):「我一生的最大錯誤」］。從而得到兩個並非空無所有的場方程。第一個是「初值方程」，它把 $a_{,t}$ 與在任意初始瞬時的

a 和 ρ 聯系了起來：

$$\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2=-\frac{k}{a^2}+\underbrace{\frac{\Lambda}{3}}_{\text{忽略}}+\frac{8\pi}{3}\rho\,。\qquad(27.39a)$$

(1)初值方程

第二個是「動力學方程」，它給出膨脹因子的二階時間微商，從而決定了離開初始瞬時後的動力學演化，

$$2\frac{a_{,tt}}{a}=-\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2-\frac{k}{a^2}+\underbrace{\Lambda}_{\text{忽略}}-8\pi p\,。\qquad(27.39b)$$

(2)動力學方程

爲什麼動力學方程是多餘的

如果要把 (27.39b) 式與 Newton 力學中的什麼東西相比較的話，那麼應與加速度方程（運動方程）相比較，根據同樣的精神，(27.39a)式應與運動方程的一次積分相比較，即與能量方程比較。根據這種比較，注意到只需對(27.39a)式求微分並把它與壓强所滿足的關係式

$$(\rho a^3)_{,t}=-p(a^3)_{,t}$$

（「能量守恒定律」）結合，就能得到加速度的方程 (27.39b) 式。因此，不損失任何信息，此後可以不管「加速度方程」或「動力學方程」(27.39b) 式，而使用類似的能量方程或更適當地稱爲「初值方程」即可（對於高階讀者，初值問題的細節見第21章）。

在更一般的意義上，從側面評論初值方程，動力學方程以及 Bianchi 恒等式

此處在 Friedmann 宇宙學範圍內所顯露出來的內容，可以適當的從更廣泛的一般幾何動力學來看一看。已經看到，能量守恒加上一個場方程可再現另一個場方程。反之，接受兩個場方程，就能導出剛剛表述過的那種形式的能量守恒定律。因而，在寫下場方程 $\boldsymbol{G}=8\pi\boldsymbol{T}$ 時（或者，如果堅持加上「宇宙學項」，爲

$$\boldsymbol{G}+\underbrace{\Lambda\boldsymbol{g}}_{\text{忽略}}=8\pi\boldsymbol{T})$$

就會發現散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{G}$ 自動爲零（或 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的散度爲零）並受到鼓舞，因爲人們首先知道能量和動量是守恒的 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$。其次，不必奇怪　守恒定律 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ 和場方程必有一個是多餘的。在 Friedmann 宇宙的動力學中，人們可以用此處守恒定律的唯一感興趣的分量，加上場方程的唯一感興趣的初值分量（G_{ii} 分量），得出場方程的唯一感興趣的動力學分量（G_{ii} 分量），這也是毫不足怪的。

同理，在缺乏對稱性的更一般問題中，人們總是可以消去某個動力學場方程，但當存在引力輻射時，不能把它們都消去。不能消去的動力學場方程甚至在原則上決定了引力波的傳播。在完全均勻和各向同性的宇宙學模型中不存在引力波；它的高度對稱性——特別是它繞 $\chi=0$ 的球（二維球！）對稱性——與引力波是不相容的。

現在回到 Friedmann 宇宙學的一般動力學。爲了確定膨脹因子 a 隨時間的演化，把 (27.35a) 式給出的質量-能量密度表達式代入初值方程 (27.39a) 式之中，得到一個準備作積分的方程

膨脹因子的微分方程

$$\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2=-\frac{k}{a^2}+\underbrace{\frac{\Lambda}{3}}_{\text{忽略}}+\underbrace{\frac{(8\pi\rho_{m0}a_0^3/3)}{a^3}+\frac{(8\pi\rho_{r0}a_0^4/3)}{a^4}}_{(8\pi/3)\rho(a)}。\qquad(27.40)$$

當完成了這個 $a=a(t)$ 的方程的積分之後，返回 (27.35a,b) 式可以得出 $\rho(t)$ 和 $p(t)$，返回 (27.24) 式可以得出幾何，

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)[d\chi^2+\Sigma^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]\,,\qquad(27.41)$$

從而完成了問題的求解。

§27.9 時間參量和 Hubble 常數

宇宙時間參量的三種選擇：

爲了分析動力學問題，從 1922 年 Friedmann 開始，這些年來許多研究者作出了貢獻。在這些成果中，他們發現，時間變量有三種自然的選擇，其中最實的用一種已在手頭。

(1)原時 t

首先是 t，原始的時間變量。這個量直接給出從膨脹開始以來經過的原時。這是適用於星系形成的時間。它也是在發生放射性衰變和其他物理過程期間的時間。

(2)膨脹因子 a

其次是 $a(t)$，膨脹因子，它隨時間增長，因此它適於把膨脹的一個階段與另一個階段區別開來，從而憑它本身的資格就可以看作時間的參量化測量。在兩個時間的 $a(t)$ 之比，給出了在這二個時間的宇宙尺度（體積的立方根）之比。它還給出了在這二個時間的波長之比 $(1+z)$（見 §29.2）。通過今天接收到的輻射了解紅移 z 在過去的時間內的經歷，等價於了解 $a(t)/a_0$，其中 a_0 是今天的膨脹因子。特殊地說，到來的 $z=999$ 的輻射來自宇宙歷史上的某一時刻，當時宇宙的尺度是現在的10^{-3}，體積是現在的 10^{-9}。在這段時間間隔

，膨脹參量從 a 增爲 $a+da$，按照 (27.40) 式原時間隔爲

$$dt=\frac{da}{[-k+(8\pi/3)a^2\rho(a)+\underbrace{(\Lambda/3)a^2}_{\text{忽略}}]^{1/2}}。\qquad(27.42)$$

以 a 爲新的時間參量，由此式得出度規的形式爲 [Hughston (1969)]

$$ds^2=\frac{-(da)^2}{-k+(8\pi/3)a^2\rho(a)+\underbrace{(\Lambda/3)a^2}_{\text{忽略}}}+a^2[d\chi^2+\Sigma^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。\quad(27.43)$$

第三是$\eta(t)$，「時間的弧參量量度」。在時間間隔 dt，在半徑爲 $a(t)$ 的超球面上行進的光子經過的弧（用弧度量度）等於

(3)**弧參量 η**

$$d\eta=\frac{dt}{a(t)}。\qquad(27.44)$$

當模型宇宙是開的而不是閉的時，可以定義同樣的參量。只是「超球面」和「弧」的用詞應代之以相應的均勻性平直超曲面（$k=0$）或雙曲面的超曲面（$k=-1$）等詞。在所有這三種情形，「弧參量」由上式從膨脹開始的積分定義

$$\eta=\int_0^t\frac{dt}{a(t)};\qquad(27.45)$$

於是「弧參量時間」η 的小值意味着較早的時間；大的值意味着以後的時間。用「時間的弧參量量度」，度規的形式爲

$$ds^2=a^2(\eta)[-d\eta^2+d\chi^2+\Sigma^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。\qquad(27.46)$$

令一光子在「弧參量時間」$\eta=\eta_1$ 從三維球（$\chi=0$; 任意的 θ 和 ϕ）的「北極」出發。然後，在「弧參量時間」$\eta=\eta_2$，光子行進到超球面上新的一點，並遇到一組新的「宇宙學流體」的粒子。它們位於超極角

$$\chi=\eta_2-\eta_1。$$

當人們在一張紙上作空時圖，以說明當一效應從宇宙中一點傳播到另一點時，發生了什麼事，那麼人們發現，最方便的是取(1)空間坐標爲 χ（於是，「宇宙學流體」各個粒子的生命史由不同的垂直線表示），和(2)時間坐標爲 η（因此光子由傾斜 $\pm45°$ 的線描繪）。當人們描出零短程線的路線時，沒有比 η 更自

然的時間參量可用了。作爲一個例子，可參看 §29.2 中對宇宙學紅移的論述。還已弄清楚，給出 $a=a(\eta)$ 和 $t=t(\eta)$ 比直接給出作爲時間函數的 a 是更簡單的分析（當 Λ 取爲零時）。於是，人們得出了尺度 a 和「弧參量時間」η 之間的聯繫如下式

$$\eta=\int d\eta=\int\frac{dt}{a(t)}=\int\frac{da}{[-ka^2+(8\pi/3)a^4\rho(a)+\underbrace{(\Lambda/3)a^4}_{\text{忽略}}]^{1/2}}。\quad(27.47)$$

了解了作爲這個時間參量函數的尺度 a，即可由下式得出用這個時間參量表示的原時

$$dt=a(\eta)d\eta。\quad(27.48)$$

現在，膨脹因子的方程 (27.40) 以及劃分時間參量的選擇，已經建立了詳盡分析理想化宇宙學的舞臺，並且甚至已經提出了某些有關的問題：幾何的特徵尺度 a（在封閉情形，是三維球的半徑）怎樣隨時間變化？什麼是空時幾何？短程線，特別是零短程線，怎樣在這個幾何中移動？然而，附加的問題是同樣重要的：宇宙的膨脹是否減速了，若果然，有多快？物質與輻射的密度和壓强怎樣隨時間變化？最後，把理論和觀測最簡單和最直接聯繫起來的膨脹速率是什麼？

Hubble 常數和 Hubble 時間

談到膨脹速率，人們指的是「Hubble 常數」，距離增加的相對速率

$$H\equiv\frac{\dot{a}(t)}{a(t)},\quad(27.49)$$

它就是今天正規算出的 H（今天）$\equiv H_0$，但從原則上說，對於宇宙歷史的每一階段，它是作爲時間函數來定義的。H 的倒數是「Hubble時間」H^{-1}。這個量表示時間，它被認爲是星系從無限致密的狀態開始達到它們現在分離的時間，如果星系在全部時間內都能保持它們目前的速度的話（「把尺度線性地外推回到起點所需的膨脹時間」）。取通常可接受的值 $H_0=55$ 公里/秒兆秒差距（框29.4），則天體物理學單位與幾何學單位以及年的換算可說明如下：

$$H_0=\frac{55\text{公里/秒}}{(299{,}793\text{ 公里/秒})(3.0856\times10^{24}\text{ 厘米或 }3.2615\times10^{6}\text{ 年的時間})}$$
$$=0.59\times10^{-28}\text{ 每厘米的光行時間}$$
$$\text{或 }5.6\times10^{-11}\text{ 每年的相對膨脹，}\quad(27.50)$$

$$H_0^{-1}=1.7\times10^{28}\text{ 厘米的光行時間或 }18\times10^{9}\text{ 年。}$$

§27.10　閉宇宙的初等 Friedmann 宇宙學

$\Lambda=0$ 的閉 Friedmann 宇宙的特徵：

取最簡單的宇宙學模型，即 $\Lambda=0$ 的各向同性的均勻的閉宇宙，在物質佔優勢和輻射佔優勢的兩種極限情形下，詳盡地描繪它的特徵。儘管有時把物質佔優勢的模型稱 Friedmann 宇宙而把輻射佔優勢的稱爲 Tolman 宇宙，但此處把「Friedmann 宇宙」一詞用於這兩種情形。在分析中，令變量 $a(t)$ 表示以厘米量度的宇宙半徑是適當的，因爲只有根據這個半徑，人們才能掌握工具討論全部感興趣的原則上適於觀測的幾何效應。作了這種討論之後，在涉及其他模型時，概括其原理部分，說明它們與這個簡單模型的區別就足夠了，無需重複全部研究。因此，任何有關開宇宙或任何所謂「宇宙學常數」或它的效應的內容都將推遲到簡短的最後一節 §27.11 。那裏，變量 $a(t)$ 有時只用來表示相對膨脹參量，這對於討論例如僅達 $z=0.1$ 而不需處理總體的幾何學問題是適當的。

(1)作爲時間函數的半徑

把 Einstein 場方程佔支配地位的分量 (27.40) 重新寫成下述形式

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2-\frac{8\pi\rho_{m0}a_0^3/3}{a}-\frac{8\pi\rho_{r0}a_0^4/3}{a^2}=-1。\qquad(27.51)$$

按照方程中輻射項或物質項可忽略的情形，把方程理想化爲

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2-\frac{a_{極大}}{a}=-1,\qquad\begin{pmatrix}27.52;\text{物}\\\text{質佔優勢}\end{pmatrix}$$

或

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2-\frac{a^{*2}}{a^2}=-1。\qquad\begin{pmatrix}27.52;\text{輻}\\\text{射佔優勢}\end{pmatrix}$$

在兩種情形，都適於把這個問題與 Newton 力學中「總能量」爲 -1 且「有效勢能」的定性形式如框 27.1 圖 **A** 所示的粒子運動問題相比較——只是隨着勢趨向 $-1/a$ 或 $-1/a^2$，形狀稍有不同。解的主要特徵集中在框 27.3 中。

(2)早期，輻射佔優勢：輻射的類型

早期 Friedmann 宇宙輻射佔優勢時代的一個顯著特徵是，輻射密度按下照述簡單的宇宙學定律取決於時間

$$\rho_r=3/32\pi t^2\qquad(27.53)$$

（框 27.3 的最後一行和最後一列）。這種情形可能在某天會提供一種工具，

（接第736頁）

框 27.3 閉宇宙的初等 Friedmann 宇宙學在兩種極限情形的解
(1)物質佔優勢而輻射可以忽略，和
(2)輻射佔優勢而物質可以忽略

理想化的三維球動力學	物質佔優勢	輻射佔優勢
模型相應於何時？	回到紅移 $z\sim10,000$ 的過去；經過今天，並經過極大膨脹的階段，重新收縮比今天小$\sim10,000$倍的尺度	膨脹的極早階段，紅移 $z\sim1,000$ 和更大；以及在重新收縮晚期的相應階段；不直接與今天有關
$\left(\frac{da}{dt}\right)^2+V(a)=-1$ 中的有效「勢」	$V(a)=-\frac{a_{\text{極大}}}{a}$	$V(a)=-\frac{a^{*2}}{a^2}$
這個「勢」中的常數值，用某個標準時代的狀況表示	$a_{\text{極大}}=\frac{8\pi}{3}a_0^3\rho_{m0}$	$a^{*2}=\frac{8\pi}{3}a_0^4\rho_{r0}$
動力學方程的解，用「弧參量」η 參量化地表示（從膨脹開始，光子在三維球上行經的弧距離，以弧度表示）	$a=\frac{a_{\text{極大}}}{2}(1-\cos\eta)$ $t=\frac{a_{\text{極大}}}{2}(\eta-\sin\eta)$	$a=a^*\sin\eta$ $t=a^*(1-\cos\eta)$
從膨脹開始到重新收縮結束的η的範圍	2π（圍繞宇宙的一次旅行）	π（只到宇宙的對跖點爲止）
把半徑a與時間t聯繫起來的曲線的性質	擺線	半圓
Hubble 時間 $H^{-1}=\frac{a}{(da/dt)}=\frac{a^2}{(da/d\eta)}$	$\frac{a_{\text{極大}}}{2}\frac{(1-\cos\eta)^2}{\sin\eta}$	$a^*\frac{\sin^2\eta}{\cos\eta}$

理想化的三維球動力學	物質佔優勢	輻射佔優勢
Hubble 時間或「外推」時間與回到膨脹開始的實際時間之間的不等式	$H^{-1}\geq 1.5t$	$H^{-1}\geq 2t$
質量-能量密度	$\rho_m=\dfrac{3}{\pi a^2 a_{極大}(1-\cos\eta)^3}$	$\rho_r=\dfrac{3}{8\pi a^{*2}\sin^4\eta}$
用 Hubble 膨脹率表示這個密度	$\rho_m=\dfrac{3H^2}{8\pi}\dfrac{2}{1+\cos\eta}$	$\rho_r=\dfrac{3H^2}{8\pi}\dfrac{1}{\cos^2\eta}$
密度滿足的不等式	$\rho_m\geq\dfrac{3H^2}{8\pi}$	$\rho_r\geq\dfrac{3H^2}{8\pi}$
通過介於空間的曲率對遙遠星系的放大分析	§29.5 和圖 29.2	§29.5
早期膨脹定律的極限形式	$\begin{cases} t=\dfrac{a_{極大}}{12}\eta^3 \\ a=\dfrac{a_{極大}}{4}\eta^2 \\ a=\left(\dfrac{9a_{極大}t^2}{4}\right)^{1/3} \end{cases}$	$\begin{cases} t=\dfrac{a^*}{2}\eta^2 \\ a=a^*\eta \\ a=(2a^*t)^{1/2} \end{cases}$
在早期膨脹的其他特徵	$\begin{cases} H^{-1}=\dfrac{a_{極大}}{8}\eta^3=1.5t \\ \rho_m=\dfrac{a_{極大}}{(8\pi a^3/3)} \\ \quad=\dfrac{1}{6\pi t^2}=\dfrac{3H^2}{8\pi} \end{cases}$	$\begin{cases} H^{-1}=a^*\eta^2=2t \\ \rho_r=3p_r=\dfrac{a^{*2}}{(8\pi a^4/3)} \\ \quad=\dfrac{3}{32\pi t^2}=\dfrac{3H^2}{8\pi} \end{cases}$

告訴我們在早期宇宙有多少類輻射對 ρ_r 有貢獻；或者，換言之，從觀測的宇宙學來學習場物理學。把輻射密度表爲下述形式

$$\rho_r(\text{厘米}^{-2})=\frac{G}{c^4}\rho_{r,\text{慣用}}(\text{爾格/厘米}^3)=\frac{Gf\pi^2}{c^4 120}\frac{(kT)^4}{\hbar^3c^3}。\quad (27.54)$$

如果電磁輻射成爲對輻射密度的唯一貢獻，那將是令人驚奇的，因爲可利用下述附加機制從激烈的輻射源中吸取內能；

電磁輻射（已經考慮），$f_{em}=8$；

引力的黑體輻射，$f_g=8$；

電子-中微子類型的中微子加反中微子輻射［它的貢獻取決於中微子的化學勢，對此可參看 Brill 和 Wheeler (1957)；此處假設該勢爲零值］，$f_{\nu}=7$；

μ 介子－中微子類型的中微子加反中微子輻射［作了與 ν_e 同樣的假設］$f_{\mu\nu}=7$；

當溫度爲 $T=mc^2/k=0.59\times10^{10}$ 開量級或更高時，從眞空中產生正電子和負電子對，作近似計算，即認爲這些粒子與人們今天所看到的不成對電子相比佔壓倒多數 $f_{e^+e^-}=14$；

當溫度高兩個量級（$\sim10^{12}$ 開）時，從眞空中產生其他粒子（如介子），以及當溫度爲 $\sim10^{13}$ 開量級或更高時，從眞空中產生重子和反重子對，這些 f 值之和 $\dfrac{f_{\mu^+\mu^-},f_{\pi,\cdots}}{f_\cdot}$；(27.55)

隨着膨脹的進行，溫度降到 10^{13} 開以下，然後降到 10^{12} 以下，再 10^{10} 以下，各種粒子對大概都湮沒和消失了［參看，Alfvén 和 Klein (1962), Alfvén (1971), Klein (1971), 以及 Omnes (1969)］。留下的是零靜止質量的輻射，並且只有這些輻射對眞空的比熱有貢獻。在重子-反重子和電子-正電子湮沒的階段，根據所有流行的估計，現在的熱引力輻射已經有效地使自己與物質退耦。因此，通過物質和反物質湮沒自由釋放的能量，預期最初會注入另外兩個能量的携帶者：中微子和電磁輻射。但是，中微子早先也已退耦（在重子-反重子湮沒之後；在全部電子-正電子湮沒之前），因爲中微子的平均自由

程隨着膨脹迅速增大。接着發生的湮沒的能量幾乎獨佔地進入電磁輻射。於是，在目前，這三種輻射的溫度的順序爲

$$T_{\nu\bar{\nu}}>T_{\nu}>T_{\gamma}。\tag{27.56}$$

已經測出 $T_{\gamma\bar{\gamma}}$ 爲 2.7 開；算出 T_{ν} 爲 $(4/11)^{1/3}T_{\gamma\bar{\gamma}}=1.9$ 開，按在早期夸克佔優勢的時代引力子退耦的模型算出 T_{g} 爲 1.5 開 [Matzner (1968)]。

退耦的輻射，一旦是 Planck 譜，就會保持 Planck 譜（見框 29.2）。膨脹使乘積 $\rho_{\gamma,\text{退耦}}a^4$ 或乘積 $T_{\gamma,\text{退耦}}^4a^4$ 爲常數。現在把這種特殊輻射的溫度與同樣的輻射在它退耦的時代之後、在任意選定的基準時間 $t_{\text{基準}}$ 的溫度相比較。得出

$$T_{\gamma,\text{基準}}=\frac{a_{\text{現在}}}{a_{\text{基準}}}T_{\gamma,\text{現在}}=(1+z)T_{\gamma,\text{現在}}。\tag{27.57}$$

此處 z 表示任意「示踪」譜線的紅移，譜線是在基準時間發出、而在今天觀測的，紅移是相對於實驗室觀測到的同樣躍遷的標準波長而言的。

如果這三種輻射可以催化到熱平衡，那麼，在輻射佔優勢的宇宙學時代，可以從同樣的立足點來處理所有的輻射。它們各自的 f 值可以直接相加，得出 $f=8+8+7+7=30$。溫度和時間將通過下式聯繫起來

$$(T/10^{10}\text{ 開})^2(t/1\text{ 秒})=1.19。\tag{27.58a}$$

此式與（27.57）式合在一起意味着關係式

$$\left[\left(\frac{T_{\gamma,\text{現在}}}{10^{10}\text{開}}\right)(1+z)\right]^2\left(\frac{t_{\text{基準}}}{1\text{秒}}\right)=1.19。\tag{27.58b}$$

這個關係式涉及兩種輻射：(1)具有 Planck 譜（連續譜）的實際電磁輻射；以及(2)「追踪輻射」（線狀譜）的紅移和發射時間。測量與這個關係式的偏離可以作爲一個勢，按照標準的理論，它（間接地）表明今天的中微子輻射和引力輻射比電磁輻射要冷一些。

(3)以後的時代，物質佔優勢

現在，從輻射佔優勢的宇宙學時代轉向物質佔優勢的時代。與公式相比，數目字有時能從想像中引出更多的反響。因此，理想化爲物質佔優勢的宇宙學，並且回到膨脹開始的瞬間，分別任意採用 20×10^9 年和 10×10^9 年作爲 Hubble 時間和實際時間。當然，將來的工作會說明這兩個數目需要修正，但按照觀測宇宙學家的意見，可能不會大於 2 倍。因爲關於最佳數目的任何判斷都要受到

不確定性的影響，所以人們可以挑選既簡單又合理的數目。由框 27.3 ，推斷現在弧參量時間 η 的值爲

$$\frac{20\times10^9\text{年}}{10\times10^9\text{年}}=\frac{H^{-1}}{t}=\frac{\frac{a_{\text{極大}}}{2}\frac{(1-\cos\eta)^2}{\sin\eta}}{\frac{a_{\text{極大}}}{2}(\eta-\sin\eta)} \tag{27.59}$$

或

$$\eta=1.975(\text{或}113.2^\circ) \tag{27.60}$$

（三維球上的光子從膨脹開始到今天所行經的弧。）這個數目確定了，全部其他數目就都顯露出來了，如框 27.4 所示。

高階
初階

框 27.4 典型的宇宙學模型與天文學觀測以及與 Einstein 的宇宙學概念是相容的（$\Lambda=0$；閉宇宙）

極大膨脹階段的半徑，	18.94×10^9 光年；
從開始到極大的時間，	29.76×10^9 年；
從開始到最終重新收縮的時間，	59.52×10^9 年；
從開始到今天的時間（可採用值），	10×10^9 年；
今天的半徑，	13.19×10^9 光年；
今天的 Hubble 時間（可採用值），	20×10^9 年；
今天的 Hubble 膨脹率，	49.0 公里/秒 兆秒差距；
今天的減速參量 q_0[(29.1b)]，	1.7
今天的密度 $(3/8\pi a_0^2)+(3H_0^2/8\pi)$，	$(7.67+3.33)\times10^{-58}$ 厘米$^{-2}$ $=11.00\times10^{-58}$ 厘米$^{-2}$ 或 14.8×10^{-30} 克/厘米^3；
今天的體積 $2\pi^2a_0^3$，	38.3×10^{84} 厘米^3；
極大密度$(3/8\pi a^2)+(3H^2/8\pi)$，	$(3.70+0.00)\times10^{-58}$ 厘米$^{-2}$ $=5.0\times10^{-30}$ 克/厘米^3；
極大體積，	114×10^{84} 厘米^3；
今天的半徑增大率，	13.19×10^9 光年/20×10^9 年 $=0.66$ 光年/年；
今天的體積增大率，	1.82×10^{68} 厘米^3/秒；
物質總量，	5.68×10^{56} 克；
等價的太陽質量數	2.86×10^{23}；
等價的重子數，	3.39×10^{80}。
今天可見的部分	0.74

必須强調，這些數目不應授予「規範」的稱號，然而可以很方便的用一些形容詞來描述它們；它們至多可稱爲是說明性的。

初階
高階

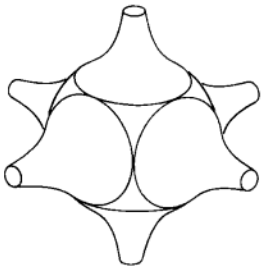


圖 27.3
許多 Schwarzschild 帶密接在一起構成閉宇宙。這個宇宙是動力學的，因爲在兩帶之間交界面上的試驗粒子，因反對各帶的引力吸引而上升，而又在各帶的引力吸引下落回。因此兩個中心本身必須移開並再次移回到一起。所有其他對中心同樣如此，由此得出，點陣宇宙本身會膨脹和重新收縮，即使每一個 Schwarzschild 幾何各自都可看作是靜止的。本圖取自 Lindquist 和 Wheeler (1957)。

(4)「在膨脹期間創造的新空間在何處？」——一個毫無意義的問題

如果每 5 秒鐘有一定體積的空間加在宇宙上，這個體積等價於邊長 10^5 光年（$=0.95\times10^{23}$ 厘米）的立方體，即約等於銀河所佔據的體積，那麼，該體積能從何處進入呢？與其尋找答案，不如重新檢驗一下問題爲好。空間不像水。離開 Mount Desert 島在 Jesuit Spring 的海洋底下傾瀉的新鮮水流，可以用那裏周圍的流量計來探測和測量。然而，沒有類似於流量計的東西能告訴我們「空間流過得有多快」。「空間流動」的概念是錯誤的。無法定義空間的流動，並非不重要的原因是無法測量空間的流動。水的流動，可測；空間的流動，不可測。流量計可相對於水固定或運動，並相應有極爲不同的測量結果。然而，對於在空的空間中的粒子，不管粒子相對某個選定的慣性係是靜止還是以高速運動，物理學是無法區別的。試圖指出這麼些立方公里的空間生自何處是一個錯誤的觀念，因爲這是一個毫無意義的觀念。

從均勻各向同性的閉宇宙轉向 Schwarzschild 點陣閉宇宙 [Lindquist 和 Wheeler (1957)]，人們能夠得到一個關於在膨脹和重新收縮時發生了什麼的新鮮看法。在前一種情形，把質量理想化爲均勻分布。在後一種情形，質量集中在 120 個相同的 Schwarzschild 黑洞之中。每一個黑洞位於它自身格子的中心，格子形狀爲12面體，以12個面爲界，每一個面近似爲五邊形；而空間是空的。在把每一個格子理想化爲球形的近似下，動力學分析是容易的，一種處理方法就是固體物理中熟知的「Wigner-Seitz 近似」（參考文獻見 Lindquist 和 Wheeler）。在這種近似中，把每一個格子內部的幾何當作完全具有 Schwarzschild 特徵的來處理（圖 27.3）；根據第25章中發展的規律［(25.28)式，對於確定的 η，起點有 π 的漂移］，放在黑洞A和黑洞B中間的試驗粒子，因反抗每一個黑洞的吸引而上升，並最終落向各個黑洞，

$$r=\frac{R}{2}(1-\cos\eta),$$
$$\tau=\frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}(\eta-\sin\eta)。\qquad(27.61)$$

因此，所述的兩個質量必定落向對方；從而它具有全部質量。這樣，人們得出結論，點陣宇宙與 Friedmann 宇宙在優於 4 %的精度下遵循同樣的膨脹和

重新收縮規律 [Lindquist 和 Wheeler; Wheeler (1964a), 370—381 頁] 。現在，再次問同樣毫無意義的問題，即當宇宙膨脹時，若干立方公里的空間是從何處注入的，以及當宇宙重新收縮時又從何處流出。按受一幅更完全的圖畫，就會知道爲什麼這個問題是沒有意義的。在每一個質量中心的周圍，幾何是 Schwarzschild 幾何並保持着 Schwarzschild 幾何 （直到最後黑洞極爲緊密的挨在一起聚結爲止）。因此，在每一個格子內的情況是靜止的。此外，設想格子與格子之間的界面由少量試驗粒子確定，它們很輕，對幾何或其動力學均無影響。一個格子內的幾何和下一個格子內的幾何之間的配合是光滑的（「兩幾何之間是相切的」）。無論在界面上或界面附近的空時，都沒有什麼反常。人們幾乎沒有權利說，那些立方公里是在此處還是在任何別的地方「創生」的。談論空間的「創生」是一種不好的談論方式，原始的問題就是一個壞問題。正確的談論方式是談論動力學的幾何。關於這個問題就如此！

在繪製 Friedmann 宇宙的幾何動力學時，人們常常發現，簡化的辦法是空間坐標取超極角 χ，它是從作爲參考標準的某個選定世界線（與「宇宙學流體」一起運動）量度的；時間坐標取時間的弧參量量度 η，如圖 27.4 所示。

(5)宇宙各區域彼此隔離的原因

觀察 (χ,η) 圖，很明顯，從在某一點的物質發出的光子，無法在有限的時間內到達任何物質，除非它位於三維球的被限制部分之上。根據框27.3，在短暫的時間 t 內，光子能夠涉及的三維球上的弧距離只等於 $\eta=(2t/a^*)^{1/2}$。此外，對光子而言是眞實的，則對於場、力、壓强、能量以及其他影響也是眞實的：它們無法超過這個限度。顯然，在時刻 t，三維球可分爲一系列的「帶」，

$$N=(\text{「帶」數})=\frac{\left(\begin{matrix}\text{整個三維球的}\\\text{超球面立體角}\end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix}\text{一個帶的超}\\\text{球面立體角}\end{matrix}\right)}=\frac{2\pi^2}{4\pi\chi^3/3}=\frac{3\pi}{2^{5/2}}\left(\frac{a^*}{t}\right)^{3/2}, \quad (27.62)$$

一帶與另一帶有效地退耦。隨着時間的推移，分離的帶更少了，最後，每一個粒子受到模型宇宙中每一個其他粒子的影響。

練習

練習 27.8 Friedmann 宇宙學的物質佔優勢體制和輻射佔優勢體制

試導出框最後兩列所列出的結果，除了彎曲空間的聚焦性質外。

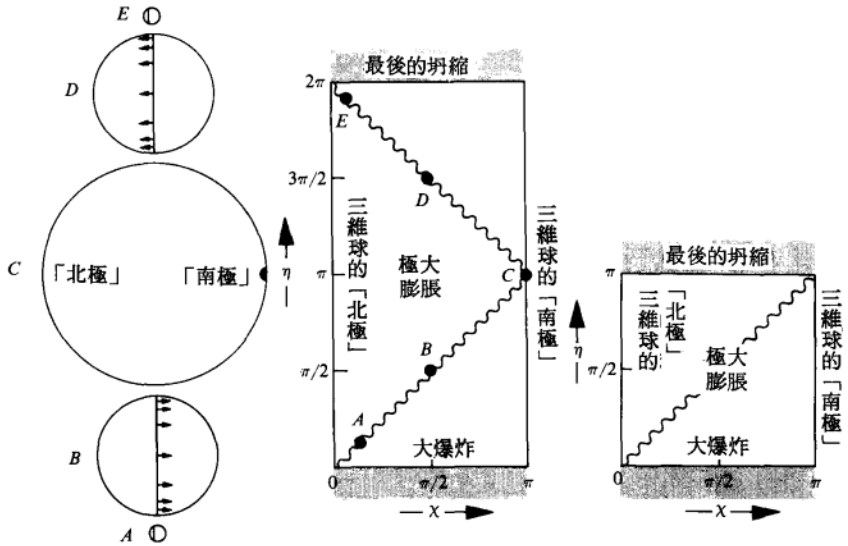


圖 27.4
用「弧參量」η 爲時間坐標，用超極角 χ 爲空間坐標，描繪光子在物質佔優勢（中圖）或輻射佔優勢（右圖）的 Friedmann 宇宙中行進（±45° 線）。爆發的光子是在大爆炸後不久從三維球的「北極」發射的，而在此後各個膨脹和重新收縮階段，光子雲的軌跡用左圖三維球的截面指明。物質佔優勢的 Friedmann 宇宙是作爲現實宇宙的合理模型出現的，但當它的尺度下降到極大膨脹的萬分之一量級或更小（「輻射體制」）時除外。

練習 27.9　從輻射佔優勢體制到物質佔優勢體制的轉變

在包含輻射項和物質項兩者的（27.51）式中，用弧參量 η（及 $d\eta=dt/a$）作爲獨立變量，重新表達該方程，並作積分，得出

$$a=\frac{a_{\text{極大}}}{2}-\left[\left(\frac{a_{\text{極大}}}{2}\right)^2+a^{*2}\right]^{1/2}\cos(\eta+\delta)\,, \tag{27.63}$$

$$t=\left(\frac{a_{\text{極大}}}{2}\right)\eta-\left[\left(\frac{a_{\text{極大}}}{2}\right)^2+a^{*2}\right]^{1/2}[\sin(\eta+\delta)-\sin\delta]\,, \tag{27.64}$$

式中

$$\delta=\arctan\left[a^*/\left(\frac{a_{\text{極大}}}{2}\right)\right]。 \tag{27.65}$$

(a) 試證明在適當的條件下，這些表達式在較早的時間化爲半徑和時間之間的「圓」關係式，而此後則化爲「擺線」關係式。

(b) 給定 a^{*2} 的值爲 $a_0 a_{極大}/10{,}000$ （爲什麼？）作爲無量綱量度的時間

$$\log_{10}(t/a_{極大})$$

的函數，畫出無量綱量度的密度

$$\log_{10}\left((8\pi a_{極大}^2/3)\begin{Bmatrix}\rho_m\\ \rho_r\\ \rho_m+\rho_r\end{Bmatrix}\right)$$

的曲線。觀察這些曲線的對數斜率，發現什麼結論？

練習 27.10 球形波前的膨脹和重新收縮

在「弧參量時間」之值爲 $\eta=\pi/3$ 時，即當宇宙半徑達到它的峰值之半時，在物質佔優勢的 Friedmann 模型宇宙的「北極」發生了一次爆發，來自爆發的光子在球形波前上向外疾駛。在波前具有其最大固有表面積的那一瞬間，波前已經貫穿了「宇宙學流體」的多大部分？

§27.11 違背 Einstein 宇宙學概念的均勻各向同性宇宙模型

$\Lambda=0$ 的開 Friedmann 宇宙：

把半徑爲 a 的閉三維球代之以具有同樣尺度的長度爲 a 的如 (27.22) 式的開雙曲面幾何，是違背 Einstein 宇宙學概念的（框 27.1）——儘管並不違背他的理論的方程。儘管如此，只要作下述改變，框 27.3 的結論在物質佔優勢和輻射佔優勢的動力學這兩種極限體制下繼續適用。

(1)作爲時間函數的膨脹因子

(1)把類似於「Newton 能量方程」右邊的常數 -1 變爲 $+1$，這樣就從一個有界系統（極大膨脹）轉向了開放系統（永遠膨脹）。(2)把 $(1-\cos\eta)$ 代之以 $(\cosh\eta-1)$, $\sin\eta$ 代之以 $\sinh\eta$, $\cos\eta$ 代之以 $\cosh\eta$, $(\eta-\sin\eta)$ 代之以 $(\sinh\eta-\eta)$。(3)現在，「弧參量」η 的範圍從 0 擴展到 ∞，而把「半徑」a 與時間 t 聯繫起來的曲線從擺線或圓變爲永遠增長的曲線。(4)列出的關於 Hubble 時間（與膨脹的實際時間有關）和密度（與 $3H_0^2/8\pi$ 有關）的不等式不再成立。(5)框 27.3 給出的早期條件下的公式繼續成立，原因很簡單：在早期，「在時間增加方向上」的空時曲率［如在框 27.1 (2)式中出現的外賦曲率 $(6/a^2)(da/dt)^2$］與任何均勻性超曲面內的曲率 $\pm 6/a^2$（內稟曲率）相比，其重要性佔壓倒優勢；因此，在早期，無論符號是加或減，無論空間是閉或開，或者無論空間幾何是球狀還是雙曲面狀，造成的差別是無法探測的。

(2)早期——與閉宇宙相同

爲什麼不造成差別呢？爲什麼在早期，無論空間是開的還是閉的，在數學上有差別，而在物理上沒有差別呢？因爲光子，信號，壓强，力和能量還遠不

足以「嗅出」閉合和開放之間的差異。(27.62)式的「影響帶」對於任何一個來說，要它獨自對負空間曲率 $-6/a^2$ 和正空間曲率 $+6/a^2$ 之間的任何差別有所覺察或有重要的響應，是太微小了。因此，框 27.3 中對閉宇宙給出的輻射質量-能量密度對時間的簡單冪律依賴關係，在輻射佔優勢的最初幾天內，對開放的各向同性模型宇宙同樣很好地成立；於是

$$\rho_r = 3/32\pi t^2 。 \tag{27.66}$$

只是在膨脹的稍後階段，當「外賦曲率」項［框 27.1，(2)式］$(6/a^2)(da/dt)^2$（根據框 27.3，起初按 $1.5t^{-2}$ 變化）下降到大小與「內稟曲率」項 $\pm 6/a^2$（起初按 $\pm 3a^{*-1}t^{-1}$ 變化）同量級時，內稟曲率的符號才開始標誌物質。只在這時，膨脹率的差別才開始顯示出開的模型宇宙與閉的模型宇宙的區別。

(3)以後的階段——永遠膨脹

開模型永遠膨脹。因此，無論是物質佔優勢且正比於 $a_{極大}/a^3$，或輻射佔優勢且正比於 a^{*2}/a^4，或兩者的某種組合，質量-能量密度(1)最終下降到與內稟曲率 $-6/a^2$ 相比可以忽略的水準，並且(2)此後可忽略。在這些情形，留下平衡內稟曲率的唯一項是外賦曲率。現在，場方程（從全部項中除去了共同的因子 3 之後）的重要分量爲

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{1}{a^2} = 0 。 \tag{27.67}$$

對於閉宇宙，這兩項（外賦曲率的六分之一和內稟曲率的六分之一）具有相同的符號，從而使任何類似(27.67)式的方程變得不可能了。然而，此處，與其說不可能，倒不如說有了值得注意的簡單解

$$a = t \tag{27.68}$$

以及相應的度規

$$ds^2 = -dt^2 + t^2[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] 。 \tag{27.69}$$

寫出

$$\begin{aligned} r &= t\sinh\chi , \\ t_{新} &= t\cosh\chi , \end{aligned} \tag{27.70}$$

像對 Einstein 的空的空間場方程那樣求解，得出 (27.69) 式與平直空時的 Lorentz-Minkowski 度規相同，

$$ds^2 = -dt^2_{新} + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{27.71}$$

（見框 27.2C）。因爲宇宙學流體（它對幾何的動力學的影響很弱，只足以提

供一些標誌點）向着所有的方向衝去，這個幾何獲得了膨脹宇宙的韻味［關於「膨脹的 Minkowski 宇宙」的更充分的討論，參看 ，例如 ，Robertson 和 Noonan (1968) 的第 16 章］。典型的均勻性類空超曲面看來具有彎曲的三維空間幾何，並具有彎曲的幾何（內稟曲率），因爲穿過平直空時的薄片(27.70)本身是彎曲的（外賦曲率）。

$\Lambda\neq 0$ 的均勻宇宙學：

現在，轉向對 Einstein 宇宙學概念的第二個違背：場方程 (27.39) 式中的宇宙學項爲

(1)膨脹因子的演化方程

$$\left(\frac{da/dt}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}-\frac{\Lambda}{3}=\frac{8\pi}{3}\rho(a)=\frac{8\pi\rho_{m0}a_0^3/3}{a^3}+\frac{8\pi\rho_{r0}a_0^4/3}{a^4}。\quad (27.72)$$

在分析這個擴大的方程的應用時，把注意力從「半徑」$a(t)$ 移開，它在關於 Friedmann 宇宙學的上一節 §27.10 中是感興趣的焦點。承認現代的測量還未能爲宇宙的絕對大小 $a(t)$ 提供一個很好的直接的機會。然而，它們已給出了很好的紅移 z 的數值，從而給出了在發射時刻的 a 和現在的 $a=a_0$ 之間的比值爲

$$a_0/a=1+z。\quad (27.73)$$

由於與觀測的任何比較都限於規定的 k(Einstein 值：$k=+1$) 和 Λ（預期爲零），因此重寫上述方程使之儘可能只歸爲比值是適當的。於是，把 (27.72) 重新表爲「普遍的 Friedmann 方程」，

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)\right]^2+V(a/a_0)=-\frac{k}{a_0^2}=-K_0。\quad (27.74)$$

此處，量

$$V(a/a_0)\equiv-\frac{8\pi}{3}\left[\rho_{m0}\left(\frac{a_0}{a}\right)+\rho_{r0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right]-\frac{1}{3}\Lambda\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\quad (27.75)$$

對於膨脹的動力學起着「有效勢」的作用。常數項 K_0 表示模型宇宙今天的內稟曲率的六分之一。它的負值 $-K_0$。在普遍的 Friedmann 方程（框 27.5）中扮演「有效能量」的角色。這種宇宙學的全部定性特徵可以從作爲 (a/a_0) 函數的有效勢的曲線以及從 K_0 的值看出。

(2)演化的定性特徵

對於定量的分析，圖 27.5 的 log-log 圖往往比框 27.5 中 V 對 (a/a_0) 的直線圖更有用。

各類宇宙學中揭示的全部有限的特徵，在分析初等Friedmann宇宙學（來自無限致密位形的大爆炸；在轉折點達到極大膨脹或繼續膨脹到 Minkowski 宇宙；重新坍縮到無窮大密度）之前，或者在使之適用於簡單的設想（靜止但

不穩定的 Einstein 宇宙；「含糊的」模型；「轉變」模型）之前就已經遇到過了，但當 Λ 爲正和尺度 a 超過某個臨界值時出現的更快膨脹除外。在這種膨脹中，a 最終按 $\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$ 增大，而不管宇宙是開的還是閉的（$k=0, \pm1$）。這種膨脹支配了宇宙學的每一個其他特徵。因此，在討論它時，抑制宇宙學的每一個其他特徵，取物質密度爲可略，並取 $k=0$（賦予平直三維空間幾何以均勻性的超曲面）是適當的。在此極限下，有下述具有宇宙學常數的 Einstein 場方程的空的空間解

(3)de Sitter 宇宙

$$ds^2=-dt^2+a_0^2e^{2(\Lambda/3)^{1/2}t}\,[d\chi^2+\chi^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。\qquad(27.76)$$

這個「de Sitter 宇宙」[de Sitter (1917a,b)] 可以看作一個四維曲面，

$$-(z^0)^2+(z^1)^2+(z^2)^2+(z^3)^2+(z^4)^2=3/\Lambda\,,\qquad(27.77)$$

在五維空間中賦予下述度規

$$(ds)^2=-(dz^0)^2+(dz^1)^2+(dz^2)^2+(dz^3)^2+(dz^4)^2。\qquad(27.78)$$

這種描述的正確性，可以通過作下述代換直接檢驗

$$\begin{aligned}
z^0&=(3/\Lambda)^{1/2}\sinh[(\Lambda/3)^{1/2}t]+\frac{1}{2}(\Lambda/3)^{1/2}e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}a_0^2\chi^2\,,\\
z^4&=(3/\Lambda)^{1/2}\cosh[(\Lambda/3)^{1/2}t]-\frac{1}{2}(\Lambda/3)^{1/2}e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}a_0^2\chi^2\,,\\
z^1&=a_0e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}\chi\sin\theta\cos\phi\,,\\
z^2&=a_0e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}\chi\sin\theta\sin\phi\,,\\
z^3&=a_0e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}\chi\cos\theta。
\end{aligned}\qquad(27.79)$$

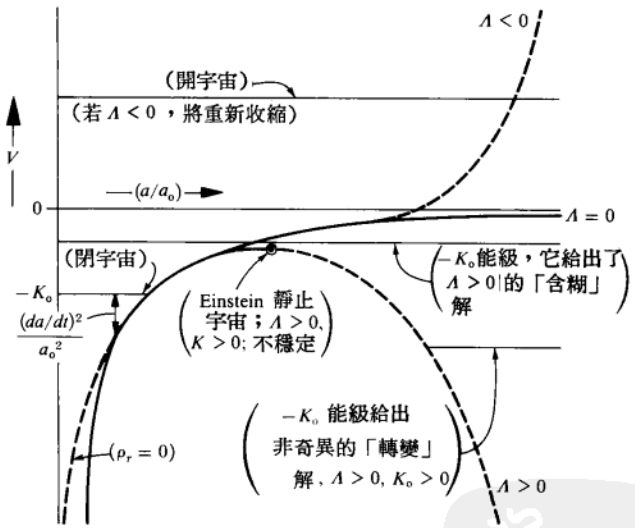
由於它優美的羣論性質以及相對於 $5\times4/2=10$ 個獨立轉動的不變性，de Sitter 幾何曾經是大量數學研究的課題。例如，Robertson 和 Noonan (1968，特別是其中的 §16.2) 就曾描述過遵循 de Sitter 模型的宇宙學的物理本質。de Sitter 模型是唯一服從 Einstein 方程（$\Lambda\neq0$）的模型，它(1)繼續膨脹，(2)與宇宙學流體一起運動的任何觀測者，不論他的位置或他的時間如何，看到的都相同。滿足條件(2)的任何宇宙模型都稱爲是服從所謂「理想宇宙學原理」的。這個詞組過去出現在廣義相對論框架之外的研究模型中，在這些模型中設想物質是不斷創造的，並曾給與「穩態宇宙」的名稱。今天任何這類模型都已被絕大多數研究者所拋棄，至少是因爲它不能滿意地說明 2.7 開的背景輻射。

其他非Einstein的宇宙學：(1)穩態模型

（接第748頁）

框 27.5 宇宙常數的數值以及模型宇宙「今天」的內稟曲率對預測宇宙學過程的影響

在廣義 Friedmann 方程 (27.74) 中的「有效勢」V，在這裏圖解地表爲膨脹比 a/a_0 的函數。圖說明了以下因素對宇宙學的影響，(1)宇宙學常數 Λ（決定有效勢在較大的 a/a_0 值處的行爲；見虛線），(2)採用的 $K_0=$（現代三維空間內稟曲率的六分之一）的值。量 $-K_0$ 的值決定了「有效能級」，它在圖中用一水平線表示。這條水平線和有效勢之間的差別決定了$(a_0^{-1}da/dt)^2$。這個差別爲負值的區域是不能到達的。由圖可以讀出下面描述的三維空間的歷史。



本圖是示意的，不是定量的。典型值可能是$\Lambda_{\text{慣用}}=0$ 或 $\pm\ 3\times10^{-28}$ 克/厘米^3; $\rho_{m0,\text{慣用}}=10^{-30}$ 克/厘米^3 或 $\rho_{m0,\text{慣用}}=10^{-28}$ 克/厘米^3; 以及$(a_0^{-1}da/dt)^2=H_0^2=(1/20\times10^9\text{ 年})^2$ 或 3.8×10^{-29} 克/厘米^3。在很小的 a/a_0 值處，宇宙學項 $-(\Lambda/3)(a/a_0)^2$ 可以忽略。在很小的 a/a_0 值處不可忽略的是，僅取決於物質密度的模型宇宙曲線（圖中虛曲線）與取決於輻射密度的曲線（實曲線）之間的差別。在物質佔優勢宇宙學和輻射佔優勢宇宙學這兩種情形下，在早期，「半徑」和密度對時間的不同依賴關係在框 27.3 的最後一部分已詳加說明，在一種情形給出 $\rho=1/6\pi t^2$，在另一情形 $\rho=3/32\pi t^2$。

今天空間的內稟曲率	Λ	宇　宙　學
雙曲的：K_0 爲負	負	宇宙從無窮大密度的狀態開始。它膨脹到的極大範圍（或極小密度）受Λ值的支配。然後，它以不斷增大的速率重新收縮到無窮大密度情形。
雙曲的：K_0 爲負	零	宇宙從無窮大密度的狀態開始。它膨脹了。膨脹速率最後達到一穩定速率，$da/dt=1$。四維幾何是 Minkowski 平直空時。只是從該平直四維幾何取出的類空薄片的曲率才給出了它的具有雙曲特徵的三維幾何［見 (27.70) 式］。
封閉的：K_0 爲正	零	標準的 Friedmann 宇宙學：從無限致密膨脹到有限半徑並重新收縮和坍縮。
封閉的：K_0 爲正	負	定性與上述相同。定量上，並極大膨脹階段有稍小的半徑，以及從始到終的時間稍短。
封閉的：K_0 爲正	Λ是大於某個臨界值的正值：$\Lambda>\Lambda_{臨界}$	「有效勢」的「頂點」化爲稍小於 $-K_0$ 的值。閉宇宙再一次從無限致密狀態開始它的膨脹。這種膨脹再一次隨着膨脹的進行而減慢，然後看起來幾乎趨於停止（「含糊的瞬間」）。但是，代表點緩慢的通過勢的頂點。此後膨脹速率越來越增大。它最終遵循指數規律。 $a=$常數$\times\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$。
封閉的：K_0 爲正	Λ 爲正，並精確等於臨界值，$\Lambda=\Lambda_{臨界}$，它使「勢的頂點」與$-K_0$ 一致	情況類似於一支鉛筆，它的尖端插入桌子，並且提供剛好足够的能量，使之在無限的時間內漸近地上升到垂直位置。宇宙從一致密位形開始並按照 $a=a_E-$常數$\times\exp(-\alpha t)$ 形式的規律膨脹接近某一半徑（「Einstein 半徑」a_E）。或者（Einstein 原來的建議，當時他想到宇宙是靜止的，並違反他的意願，在場方程中加上了「宇宙學項」，以便允許一個靜止的宇宙）代表點永遠位於「有效勢的頂點」（Einstein 宇宙）。除了與今天有關膨脹的證據相矛盾外，這種位形與一支試圖靠着其尖端站着的鉛筆具有同樣的不穩定性。總之，最小的微擾都將使它「掉下來」，趨於坍縮或趨於加速膨脹，在膨脹的情形下，最終接近下述規律 $a=$常數$\times\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$。
封閉的：K_0 爲正	Λ 是比臨界值小的正值：$0<\Lambda<\Lambda_{臨界}(K_0)$	在「勢壘」的 a 較大的一側運動。在遙遠的過去模型宇宙具有巨大的尺度，但也近似地按下式以巨大的速度收縮 $a=$常數$\times\exp[-(\Lambda/3)^{1/2}t]$。 半徑 a 到達一極小值，此後宇宙重新膨脹（「轉變解」），最終接近漸近規律 $a=$常數$\times\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$。

圖 27.5 （下頁）

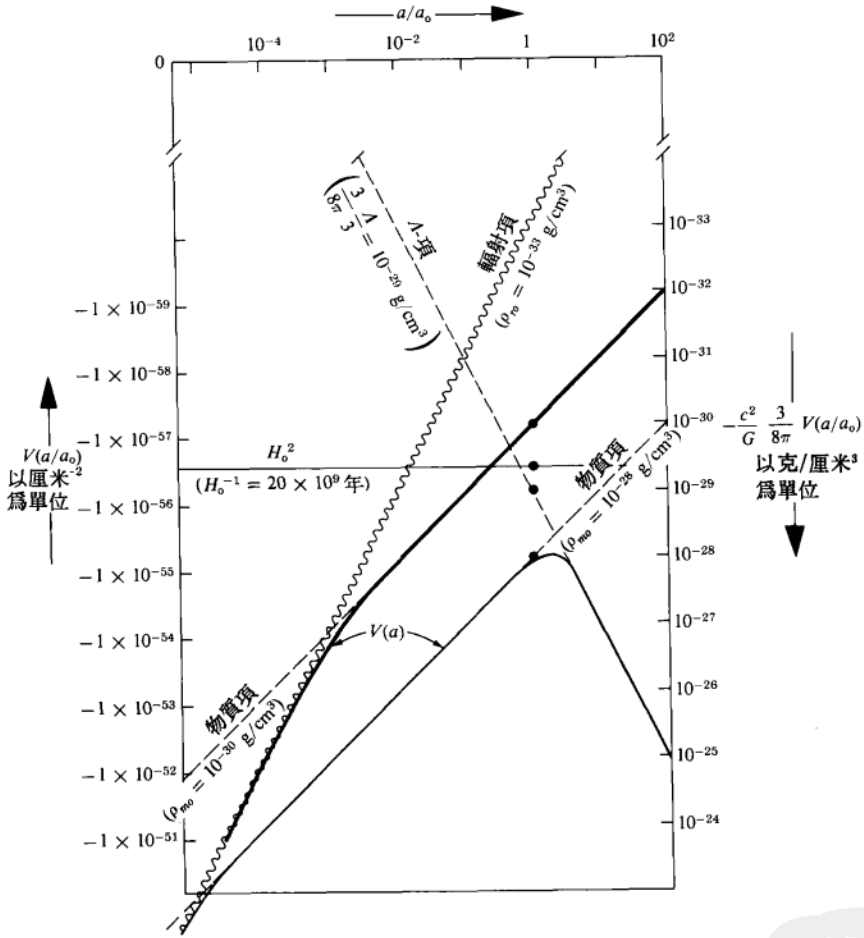
方程 (27.75) 和框 27.5 的有效勢 $V(a)$ 的 log-log 圖可納入廣義的 Friedmann 方程

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)\right]^2+V\left(\frac{a}{a_0}\right)=-\frac{k}{a_0^2}=-K_0。$$

水平線給出了以 $(a/a_0)_{今天}=1$ 爲參照標準的膨脹比。垂直線給出了用幾何單位厘米 $^{-2}$ 的 $V(a/a_0)$ 值。右邊的補充尺度把 $-(c^2/G)(3/8\pi)V(a/a_0)$ 轉變爲以克/厘米 ^{3} 表示的等價密度。輻射密度對有效勢的貢獻在圖中以波紋線表示，它已歸一化到今天的輻射密度值 $\rho_{r0}=10^{-33}$ 克/厘米 ^{3}，並具有 2 的對數斜率。物質密度對「有效勢」的貢獻具有 1 的對數斜率。對它所作的兩種選擇，相應於今天的物質密度爲 $\rho_{m0}=10^{-30}$ 克/厘米^{3}和$\rho_{m0}=10^{-28}$ 克/厘米 ^{3}(圖中的虛線)。在這兩種情形下的總有效勢也在圖中表示出來了：粗線是$\rho_{m0}=10^{-30}$ 克/厘米^3 的情形（不包括宇宙學項），細線是 $\rho_{m0}=10^{-28}$ 克/厘米^3 的情形。在第二種情形，包括了宇宙學項，宇宙學常數由 $(3/8\pi)(\Lambda/3)=10^{-29}$ 克/厘米 ^{3} 給出。描述這項貢獻的直線具有大小爲 2 的負斜率（虛線）。水平的線或「水平線」是以今天的 Hubble 膨脹率畫出的，它等於 $1/(20\times10^9$ 年）。在 log 圖上勢曲線和水平線之間的垂直分離給出了比值 $-V/H_0^2$。計算出在任意時間 t，這個比值的值爲 $\dot{a}^2(t)/\dot{a}_0^2+K_0H_0^{-2}$，其中 $\dot{a}\equiv da/dt$。算出「今天」$(a/a_0=1)$ 這個比值的值爲 $1+K_0H_0^{-2}$。因此，已知今天的 Hubble 膨脹率 H_0^2，並已知勢曲線（或嘗試一組勢曲線的參量），就可以從兩者之間的展開導出 $1+K_0H_0^{-2}$ 的值，從而導出 $K_0H_0^{-2}$ 的值以及今天的曲率因子 K_0 的值。作爲一個例子，考慮低密度宇宙情形（粗線），並讀出「今天的」值 $1+K_0H_0^{-2}=0.223$。由此得出 $K_0=-0.777H_0^2$（開的或雙曲的宇宙），因此 $k=-1$ 和 $a_0=(k/K_0)^{1/2}=(1/0.777)^{1/2}20\times10^9$ 年$=22.7\times10^9$ 年。對於高密度模型宇宙，$\rho_{m0}=10^{-28}$克/厘米^3，類似地求出 $1+K_0H_0^{-2}=24.5$，因此 $K_0=+23.5H_0^2$，因此 $k=+1$(閉宇宙)以及$a_0=(k/K_0)^{1/2}=(1/23.5)^{1/2}20\times10^9$ 年$=4.12\times10^9$年。如果膨脹停止了，則在這個階段，勢和水平線之間的比值 $-V/H_0^2$ 或 $\dot{a}^2(t)/\dot{a}_0^2+K_0H_0^{-2}$從它的「現在」值 $1+K_0H_0^{-2}$ 下降到 $0+K_0H_0^{-2}$；就是說，在一種情形從 0.223降到-0.777，在另一種情形從 24.5 降到 23.5。當 $\Lambda<0$ 時，log-log 圖應代之以框 27.5 的線性圖。

(2)等級模型

然而，它嚴重偏離 Einstein 宇宙學概念的是很重視宇宙學常數或開宇宙，更嚴重的是沉緬於宇宙的「等級模型」，其中的星系團和星系團的團，從宇宙的這部分看來，其密度隨着距離、隨着在大距離上變得平直的空間分成等級 [Alfvén 和 Klein (1962), Alfvén (1971), Klein (1971), Moritz (1969), de Vaucouleurs (1971), Steigman (1971)]。Oskar Klein 曾用下面這些話表述此處採用的觀點，「Einstein的宇宙學適合於 Hubble 的發現，即觀察到的部分正在膨脹；所謂宇宙學假設曾用來作爲一種公理基礎，在作分析時，它使得似乎膨脹是由一個非常巨大的仍有界的系統所承擔的。這意味着，我們的正在膨脹着的總星系可能正是處於不同演化階段的一類恒星物體，某些正在膨脹而某些正在收縮。」



等級宇宙學和 Einstein 的宇宙學 [Einstein (1931) 提倡封閉的 Friedmann 宇宙學] 之間的對比沒有比這裏更强烈的了，人們把漸近地平直的空時看作是一種需要；其他的，則是荒謬。「只是 Riemann 的天才、獨一無二和不可理解」，Einstein (1934) 說，「才能經過上世紀中葉奮力前進達到新的空間概念，其中空間被剝奪了它的剛性，並且它參與物理事件的能力被承認是可能的。」這個陳述概括了今天的宇宙學。

今天的宇宙學觀點，受到 Einstein 閉合邊條件（$k=+1$）以及他相信 $\Lambda=0$ 的控制，但是無需把它作爲永久的信念接受下來，Einstein 的預言是清楚而明確的。它們使自身面臨着破壞。觀測宇宙學將最終證實或破壞它們。正如已經決定性地毀滅了 1920 年關於靜態宇宙的信條以及 1948 年關於穩態模型的信條那樣（關於宇宙學的歷史，見框 27.7）。

練習

練習 27.11 看自己的後腦勺

借助於一路上繞閉模型宇宙行進的、服從 Friedmann 宇宙學、並具有非零的宇宙學常數的光子，一個相對於「宇宙學流體」靜止的人，能否看到他的後腦勺（對於零宇宙學常數的情形，參看框 27.3 的全部內容）？

練習 27.12 守恒定律是否禁止從空的空間通過潮汐引力產生粒子-反粒子對？

弄清楚下述論證有什麼錯誤：「經典方程

$$G_{\alpha\beta}=8\pi T_{\alpha\beta}$$

與粒子對的產生不相容，因爲它導致恒等式 $T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta}\equiv 0$。設初始狀態是眞空，設 $T_{\alpha\beta}$ 及其微商在超曲面 $t=$常數或 $t=-\infty$ 上等於零。然後由 $T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta}=0$ 得出眞空可始終維持。」［答案：參看 Zel'dovich (1970, 1971, 1972)。也可參看 §30.8。］

練習 27.13 轉折宇宙模型忽略物質密度

如果轉折（極小半徑）出現在 (27.75) 式中勢 $V(a)$ 極大值的右方（大的 a）遠處，則物質項可以忽略。令 $\rho_{m0}=\rho_{r0}=0$。然後（對於轉折，所需的 k,Λ 的符號是什麼？）求解表明 在轉折（$t=0$）附近，$\Lambda=3(a_{\text{極小}})^{-2}$, $H=(a_{\text{極小}})^{-1}\tanh(t/a_{\text{極小}})$, 以及減速參量 $q\equiv-(1/H^2a)(d^2a/dt^2)$ 的值爲

$$q=-a^2(a^2-a^2_{\text{極小}})^{-1}<-1。$$

練習 27.14 「停頓」宇宙

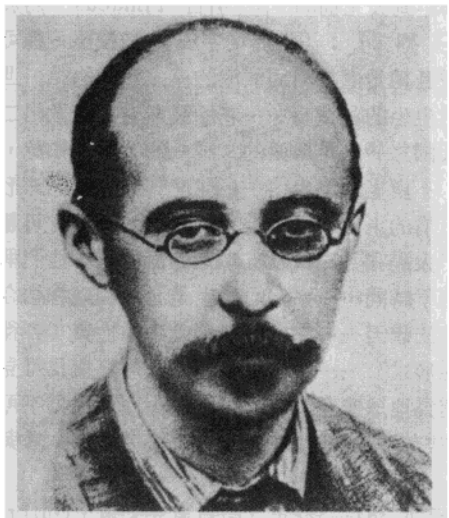
忽略 (27.75) 式中的輻射，但假設可選擇 K_0 和 Λ 使宇宙以 $a(t)$ 接近 a_k（a_k 量度了勢壘最高點的位置，或宇宙最不活躍時的大小）要花費很長的時間。選取 $a_k=a_0/3$，得出紅移近似爲 $z=2$ 的類星體的數目大得反常［Burbidge 和 Burbidge (1969a,b) 相信是這種情形，儘管他們的意見並不是全部觀測者共同的意見］。試證明 (a) 現在，物質密度只占 (27.75) 式中 $H_0^2=(\dot{a}/a)^2$現在值的 10%［「迷失物質」即 K_0 項和 Λ 項占90%］，(b) $a_k\simeq 20^{1/2}H_0^{-1}$, 和 (c) 在上一個練習中定義的減速參量，在「今天」計算，其值爲 $q_0=-13/10$。

練習 27.15　對黑體輻射不透明的宇宙在非奇異的過去的轉折處要求一些不可能的參量

從與框 27.5 的圖類似的圖，建立一個宇宙模型，它包含目前的 2.7 開黑體輻射，但 $k=+1$ 和 $\Lambda>0$，它具有一個過去的轉折（極小半徑），在該處黑體溫度達到 3,000 開，氫將電離。試用盡可能比現在所用的 H_0^{-1} 和 ρ_{m0} 值小的值。

框 27.6　Alexander Alexandrovitch Friedmann

聖彼得堡，1888年 6 月17日——列寧格勒，1925年 9 月15日



1909年畢業於聖彼得堡大學；1922年獲博士學位；1910年在 Bridges 和 Roads 學院任數學助教；1912年在 Mines 學院任微分學講師；1913年是 Pavlov 氣象學院的物理學家；爲觀測 1914 年 8 月的日食準備升高的飛艇；1914年，Osovets 附近戰爭前線的空軍志願者；1916—1917年，軍隊空中航行服務的頭領；1918年，Perm 大學力學教授；1920 年，在聖彼得堡大學；1922年，講授流體動力學、張量分析；「可壓縮流體的流體力學實驗」和「作爲空間和時間的世界」等書以及開拓性論文「關於空間曲率」的作者；列寧格勒主要的地球物理實驗室理論氣象部門的研究指導者，並且從 1925年 2 月直到七個月後他因傷寒高燒死亡，任實驗室主任；與 L. V. Keller「引入耦合矩的概念，即在不同點和在不同瞬間流體動力學單元脈動乘積的數學預期值……以闡明湍流的物理結構」［精選自 Polubarinova-Kochina (1963)，其中還包括 Friedmann 的文獻目錄和有關 Friedmann 的條目］。

框 27.7 宇宙學邁向更寬廣前景和更堅實基礎之途的步伐

［關於宇宙學歷史的一般參考文獻，尤其可參看 Munitz (1957), Nasr (1964), North (1965), Peebles (1971), Rindler (1969)，以及 Sciama (1971)；對於下面以縮寫形式列出的近代發展的文獻目錄，特別可參看 Peebles 和 Sciama 。］

A. 二十世紀之前

非常早期印度的宇宙學概念［由 Zimmer (1946) 概述］：「一千 mahāyugas ——人類估計的 4,320,000,000 年——組成了梵天 ， 即一拟。……我已經知道宇宙的可怕死亡。我已經看到每一次輪廻的全部死亡，一次又一次。在這種可怕的時刻，每一個單獨的原子都分解爲原初的永恒不朽的純粹的水，全部原始的東西都是從那裏發生的。」

Plato（**柏拉圖**），公元前428年到公元前348年［引自 Timaeus，寫於他生活的後期，由 Cornford (1937) 翻譯］：「世界（宇宙）是按照一種可以通過理性的論述和認識來理解，並且總是處於相同狀態的模式造成的……世界逐漸成爲……具有靈魂和理智的活生生的創造物……它的製造者並未做出二個世界，更不會是無限多個；這個天國終於只是單個的、唯一的，現在如此，今後也將如此……他使之完美無缺，不衰老，不生病……他使其形狀爲圓球形……。它無需眼睛，因爲外面沒有可看的東西；也無需聽，因爲外面沒有可聽的東西……爲了使時間出現，製造了太陽和月亮以及五顆別的恒星——他們稱爲『流浪漢』——以便規定和維持若干時間……宇宙的產生是必然和理智結合的結果……我們還必須引入飄忽不定的起因……它自身要接受各種性質（各種形式）而又必須免於各種特徵（各種形式）……由於這個理由，最終變爲可見和可感知之物的母親和溫床，不應稱爲地球或空氣或火或水……而應稱爲不可察覺，無從表徵的自然 ， 它們以非常奇妙 ， 難以理解的方式接受一切，參與一切。」

Aristotle（亞里士多德）公元前 384—322年［引自關於天國，Guthrie (1939) 翻譯］：「在全部過去的時間內， 根據世世代代留傳下來的記載，無論最外面的天國的整體或者它的任何一個適當的部分，我們都沒有發現變化的痕跡……天國的形狀必定是球形的……根據這些考慮［向中心沿着直線不變地運動；恒星升、降的規律性；地球向着宇宙中心的自然運動］，顯然，地球是不動的，它不位於任何地方而是位於中心……地球……必須長成球形。這些［

在月食時月亮遮斷部分的形狀；以及在埃及能看到的恒星在更北方的土地上就看不見］證明地球是球形的，並且它的外圍並不很大……嘗試計算這個圓周的數學家把它表爲 400,000 stades［古長度單位 1 stade＝600 希臘尺＝606 英呎；因而 24.24×10^7 呎/(6080.2 呎/海里）＝39,900 海里——地球圓周計算的最古老記載，據傳說已爲 Columbus（哥倫布）所知——比眞實圓周 60×360＝21,600 海里多85%以上。］」

Aristotle［引自*形而上學*，Warrington (1956) 翻譯］：「Euxodus［Cnidos 人，公元前 408—355 年］假設，太陽和月亮的運動在每種情形下都涉及三個球…… 他進一步假設，行星的運動在每種情形下都涉及四個球 …… Calippus［Cyzicus 人，活躍於公元前 330 年］……認爲，根據觀測，應再附加二個球給太陽，二個給月亮，一個給每一個其他行星。」

Eratosthenes，公元前 276—194 年［Claudius Ptolemy（托勒密）把一個計算歸於他，Ptolemy 從公元127到141 年或 151 年在 Alexandria 觀測，引自他的 Almagest, I, §12, 參看 Taliaferro (1952) 的翻譯］：

（從地球到月亮的最大距離）＝(64$\frac{1}{6}$)（地球半徑）；
（從地球到太陽的最小距離）＝(1,160)（地球半徑）。

Abū'Alīal-Husain ibn 'Abdallāh ibn Sīnā, 也稱爲 **Avicenna** 980—1037 年；醫生，哲學家，Aristotle（亞里士多德）的編輯者，保存希臘的學問並從而使之有可能傳播到中世紀的歐洲最有影響的人物之一［引自 Nasr (1964), 225 頁］：「時間是運動的量度。」

由 **Ikhwan al-Safa'** 或眞誠兄弟的 Rasā'il，這是有51篇論文的百科全書，有時也稱爲*可蘭經之後的可蘭經*，他們主要的中心在 Basra, Iraq（巴士拉，伊拉克），約公元950—1000年［引自 Nasr (1964), 64 頁；(用地球半徑表示的）行星距離表見78頁，取自 Rasā'il，還有行星的大小和各種 Ptolemy（托勒密）載球的旋轉運動］：空間是「從物質抽象出來的形式並且只存在於意識之中。」

Abū Raihān al-Bīrūnī, 公元 973—1030 年，學者，但也涉獵實驗、觀察和測量，根據他在印度所作的測量，他算出地球的圓周爲80,780,039腕尺（比今天認可的數值約大 4 %），並給出了行星距離表［引自 Nasr (1964)，第120頁和130頁］：「兩［類蝕］並不一起發生，除非在宇宙總崩潰之時。」

Étiene Tempier，巴黎的主教，1277 年，在調停使許多法國神學團體意見分歧的論爭時裁決，人們不能否定上帝按照他的意願創造許多宇宙的能力。

Roger Bacon（培根），1214—1294 年，在他的 Opus Majus (1268) 中，根據 Alfargani 的權威性典藉給出了裝載星星的球的直徑爲130,715,000

羅馬里［里等於1,000個卸下的右足］；太陽的體積爲地球體積的170倍；一等星，107倍；六等星，地球的18倍。

Nicolas Cusanus, 1401—1464年［引自 Of Learned Ignorance (1440), Heron (1954) 翻譯］：「天國的所有部分必然是在運動的……顯然，如前所述，地球是運動的……世界（宇宙），它的運動和形式……將表現爲輪中之輪，球中之球，任何地方都沒有中心或周圍……現在，很顯然，地球確實在運動，儘管對於我們它似乎是固定不動的。實際上，只有參照某些固定的東西，我們才能探測出任何東西的運動。如果……一個人看不到提岸，又不知道水是流動的，那他怎麼知道船在運動呢？」

Nicolaus Copernicus（**哥白尼**），1473年2月19日到1543年5月24日［引自 De Revolutionibus Orbium Coelestrum (1543), 由 Dobson 和 Brodetsky (1947) 翻譯］：「我曾被引誘去思考一種計算球運動的方法，這正是數學家們在研究中並不一致的那種學問……他們不能解釋或觀測季節性年的恒定長度……有人只用同心圓，而別人則用偏心的和本輪……因而他們都不能認出或推演出主要的東西——即宇宙的形狀及它各部分不可變更的對稱性……。

「我首先在 Cicero 發現，Nieetas 已認識到地球在運動。後來，我又從 Plutarch［～公元46—120年］發現……『靜止保持地球穩定，但是 Pythagoras（畢達哥拉斯）的信徒 Philolaus［生於～公元前 480 年］說，像太陽和月亮一樣，她在一個傾斜的圓上繞着（中心的）火運動。Pontus 的 Heraclides［活躍在公元前四世紀］以及 Pythagoras（畢達哥拉斯）的信徒 Ecphantus 也使地球運動，不是穿過空間，而是像一個在車輪上的輪子那樣，圍繞着它自身的中心從西到東旋轉』。利用這些，我也開始思考地球的運動性……。

「如果說巨大的宇宙24小時內都在旋轉，那麼對於小小的地球也這樣旋轉爲什麼要更感驚訝呢？……因此 Ptolemy（托勒密）害怕空轉會使地球以及它上面的一切因自然的旋轉而瓦解……行星表現的不規則運動以及它們到地球距離的變化證明，地球並不是所有公轉的中心……因此，我們斷言，地球的中心，帶着月亮的軌道，在每年繞太陽的公轉中，行經介乎其他行星之間的一個大軌道；太陽附近是宇宙的中心；而太陽是靜止的，太陽的任何表觀運動都可以用地球的運動很好地解釋……特別是火星，他整夜發亮，看來在星等上是木星的對手，只有通過他的微紅的顏色才能區分；另外，他是少見的，等於一顆二等的恒星，僅當仔細追踪他的運動才能認出他。所有這些現象出自同一個原因，即地球的運動……對於固定的恒星，不存在這些現象表明它們的距離是無

法測量的，與這些距離相比，甚至地球軌道的大小也可以忽略，視差效應也不被注意了。」

Thomas Digges, 1546-1595 年［書名「根據 Pythagoras（畢達哥拉斯）學派的最古老學說，由 Copernicus（哥白尼）更新並被幾何學演示所證實的對天球的完美描述（1576）」，它是Copernicus（哥白尼）影響英國的主要媒介物，引自 Johnson（1937 年）］：「對於天球可以這樣來理解，我們所能看到的僅僅是同一軌道的較低的部分，當軌道越來越高時，它們看起來會越來越小，以至最後我們的眼光無法達到。絕大部分的天球安息於我們所看不到的遙遠距離處。」

Giordano Bruno（**布魯諾**），1548年誕生，1600年 2 月17日被燒死在羅馬 Campo dei Fiori 的火刑柱上［引自關於無限的宇宙和世界，1583—1585 年訪問英國時撰寫，Singer（1950）翻譯］：「設這就是所要的那個表面，那麼，我必定總要提出問題，外邊是什麼？如果回答是一無所有，則我稱之爲空無所有或空虛。並且這種空無所有或空虛無法量度，即使它具有內部界限也沒有外部界限；無限的或無邊的宇宙比它更難於設想……存在着難以計數的太陽，且有無限數目的地球圍繞着這些太陽轉動，正像我們能觀測到的繞接近我們的太陽轉動的那七個那樣。」

Johann Kepler（**開普勒**）建立了橢圓軌道定律和等面積定律（1609），並建立了行星周期和半長軸之間的聯系（1619）。

Galileo Galilei（**伽利略**）觀測木星的衛星認識到它們爲 Copernicus（哥白尼）學說提供了支持，並把銀河解釋爲恒星的集合（1610）。1638 年他寫道：

「Salvati ：現在，Simplicio ，對於固定的恒星，我們能做些什麼呢？我們是希望把它們撒遍宇宙的無邊深淵，使之與任何預定點有種種不同的距離呢，還是把它們置於一球面之上（該球面是圍繞着它們自身的中心擴展的）使每一顆恒星都與中心等距離呢？」

「Simplicio ：我寧肯採取中間路線，爲它們指定一條圍繞着確定的中心並介乎兩球面之間的軌道……」

Isaac Newton（**牛頓**）（1687）：「指向太陽的引力，是由指向組成太陽主體的許多粒子的引力組成的，並且，隨着從太陽退離，引力精確地按距離的反平方減少，遠至土星軌道都是如此，這明顯地從行星遠日點的不很活動表現出來」。

Isaac Newton（**牛頓**）［在1692年12月10日給 Richard Bentley 的一封信中，引自 Munitz（1957）］：「如果太陽和行星的物質以至宇宙的全部物質都均勻地散布在全部天國，如果每一個粒子都有天生的指向所有其餘粒子的引

力，如果處處散布着物質的整個空間是有限的，那麼，在此空間外的物質將由於它的引力而趨向在它內部的物質，結果，將落入整個空間的中部並在該處構成一個巨大的球形的質量。但是，如果物質均勻地遍布於一無限空間，那麼，它就絕不會集中爲一塊質量；它的某些會集中爲一塊質量，某些集中爲另一塊，以致構成數目無限的大塊質量，彼此以很大的距離散布在無限空間的各處。太陽和固定的恒星可能就是這樣形成的」。

Christiaan Huygens（惠更斯）1629—1695［在他死後發表的 Cosmotheoros (1698)］：「鑒於恒星……是許許多多太陽，如果我們假定其中之一［天狼星，即犬星］等同於我們的，則由此可得出［細節，包括對準太陽的望遠鏡；薄的底片；其中的孔；與天狼星比較］……它到我們的距離與太陽到我們的距離爲 27,664 比 1 ……的確，在我看來，毫無疑問宇宙是無限擴展的。」

Edmund Halley（哈雷）(1720)：「如果固定的恒星的數目是無限的，那麼它們的表觀球［即天空］的整個表面將是發亮的」［用今天的論證來說，應與平均恒星表面有同樣的溫度；這在今天通稱爲 Olbers 佯謬，或 P. L. de Chéseaux (1744) 和 Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (1826) 佯謬］。

Durham **的 Thomas Wright** (1750)：「爲了……解釋銀河的現像……假設……銀河是由無數小恒星構成的……設想廣闊無限的漩渦，或媒介物，像平面似的四處伸展，並且兩表面之間甚至幾乎在兩邊是封住的。……現在，在此空間，讓我們設想全部恒星雜亂地散布着，但彼此間的距離是調整好的，以便按某種規則用不規則物體塡滿整個媒介物。［研究它的外貌］「一只眼睛位於……中間平面的任何地方」……我們在地球上觀察到的其中的全部不規則性，我斷定完全是由於我們的太陽的位置……而運動的多樣性……置於許多恒星之中，它們可能在此處或彼處……引起雲霧狀的恒星羣」。

Immanuel Kant（康德）1724—1804 (1755)：「這是爲英國人 Durham 的 Wright 先生保留的，以便邁出愉快的一步 …… 我們將試圖發現使固定恒星的位置與一共同平面有關的原因……假定……整羣［固定恒星］經其間的相互吸引彼此力求靠近……離心力的作用防止了毀滅……同樣的原因［離心力］……也直接導致它們的軌道都與一個平面有關……［計算得出所需的運動是］四千年一度［或少一些］；……仔細的觀測者……對它是需要的…… Bradley 先生觀察到恒星的幾乎難以察覺的位移」［從後來的工作知道，這是由光行差（觀測者速度的效應）造成的，而不是眞正的視差（觀測者位置的效應）］。

首次問道極爲遙遠的星系看來像是怎麼樣的：「圓的——如果它的平面直接面對眼睛，和橢圓的——如果從邊緣或傾斜地看它。它的暗弱的光線，它的圖案，以及它的直徑的表觀大小將清楚地把它所呈現的這類現象與所有單個恒星的現象區別開來……這個現象……曾被不同的觀測者清楚地察覺［他們］……曾驚訝於它的不可思議……與此類似，我們深信不疑的是，這些系統［行星，恒星，星系］……已經從充滿着空的空間的基本物質的最小微粒中……形成和產生了」。

繼續認眞地討論「創生［行星，恒星，星系］的接連的膨脹穿過其中有物質的無限空間區域……吸引正是這種普遍的關聯，它把自然界的所有部分結合在一個空間之內。因此，它能達到……自然界的全部無限的距離」。

Johann Heinrich Lambert, 1728—1777 (1761)：「服從有心力的固定恒星在軌道上運動。銀河包括若干個固定恒星的系統……每一個系統有它的中心，若干個系統合在一起有共同的中心。它們的集合的集合也和它們一樣。最後，對於整個世界有一個全體的中心，一切東西都圍繞它旋轉」。［首次詳細說明宇宙的「階式模型」，後來 C. V. I. Charlier 以及 H. Alfvén 和 O. Klein (1962) 繼續研究；也可參看 O. Klein (1966 和 1971)］。

Auguste Comte（**孔德**）(1835) 斷定，談論遙遠恒星的化學成分是毫無意義的，因爲人們絕不能探查它們；「實證哲學的範圍完全在我們的太陽系的限度之內，宇宙的研究達不到任何實證的意義」。

1838年首次成功的確定了任意恒星的視差［1 秒的視差：1 秒差距 (1pc) $=3.08\times10^{18}$ 厘米 $=3.26$ 光年］，(Henderson 確定了 α 半人馬座，Struve 確定了 α 天琴座，Bessel 確定了61天鵝座）。

B. 二十世紀

1902年 James Jeans 導出了把熱原始氣體振動的短波長聲模式與該氣體引力凝聚開始的較長波長模式相區分的臨界波長。1968年，P. J. E. Peebles 和 R. H. Dicke 用這些考慮解釋爲什麼球狀星團具有 $10^5 M_\odot$ 量級的質量。

宇宙線的研究從1911—1913年 V. F. Hess 和 W. Kolhörster 的首次觀測至今；確定了恒星際空間（在星系中）內的能量密度約爲 1 電子伏/厘米^{3}或 10^{-12} 爾格/厘米^3，與星光的能量密度可相比擬，與星系平均的星際氣體電離

雲的動能可相比擬，並與星際磁場（$\sim 10^{-5}$ 高斯）的能量密度可相比擬。與這些等式有關的內容，可參看，特別是，E. Fermi (1949)。

1912年 Henrietta Leavitt 發現造父變星的周期及其絕對的光度之間存在着十分明確的關係。

1912年 V. M. Slipher 首次確定了星系的徑向速度：仙女座接近200公里/秒。1915年他研究了十三個星系，除二個外全部都以大約 300 公里/秒退行。

Albert Einstein (1915d)：把引力解釋爲幾何的表現形式；給出了隨着時間推移，支配空間幾何動力學發展規律的公式表示。

Albert Einstein (1917)：把宇宙理想化爲充滿着物質（以有效的均勻密度）的三維球；不能想像這個三維球的半徑是靜態的，而又不改變他的標準的1915年幾何動力學定律；由於這個原因， Einstein 引入了所謂「宇宙學項」，他後來把這作爲他一生「最大的錯誤」而拋棄了 [Gamow (1970)]。

1917年 W. de Sitter 用公式表述宇宙學模型，其中(1)宇宙處處各向同性（因而是均勻的）和(2)宇宙不隨時間變化，因此平均質量-能量密度和空間的平均曲率是恒定的，但其中不得已地(3)必須附加一個 Einstein 類型的宇宙學項（「排斥」）以平衡物質的吸引。 de Sitter 注意到，他可以從原先的模型中除去全部物質而得出另一個靜態模型，但 Λ項將引起試驗粒子加速，相互遠離。

從1917到1920 年，討論漩渦星雲僅僅是星雲物體 (Harlow Shapley) 還是「島宇宙」，還是類似於銀河但在銀河之外的星系 (H. D. Curtis)。

1918年，Harlow Shapley 通過銀河系的約100個球狀星團（每一個有10^4到10^6 恒星）在空間的天體圖分布，發現中心在人馬座方向（目前距離太陽～10千秒差距）。

1922 年 A. Friedmann 和 1927 年 G. Lemaître 獨立的導出正在演化的均勻和各向同性的宇宙學模型 [還導致關係式 $v=H\cdot$（距離）]， Lemaître 在他的理論分析中，還與爾後不斷發展的 Wilson 山的工作聯繫了起來，成爲「大爆炸宇宙學之父」。（然而，在 Lemaître 的原始論文中，由 Einstein 的靜態 $\Lambda>0$ 解得出宇宙光滑地膨脹下去。）

1923年，H. Weyl 注意到，在 de Sitter 模型中的試驗粒子將分離，分離的速率由形式爲 $v=H\cdot$（距離）的公式給出。

1924年，Edwin P. Hubble 用 Wilson 山的 100 吋望遠鏡解決了有關漩渦星雲性質的辯論；發現了仙女座中的造父變星和其他漩渦星雲，並由此確定了這些星雲的距離。

1927年 Jan Oort 確定的太陽附近恒星徑向速度的特徵型式爲

$$\delta v_r = Ar\cos 2(\theta-\delta),$$

它表明：(1)銀河中恒星的轉動軸垂直於盤；(2)太陽在 $\sim 10^8$ 年作一次完全的公轉；以及(3)使太陽產生這種周期的公轉所需的牽引太陽的有效質量的量級爲～10^{44} 克或～$10^{11} M_\odot$。

由鉛－鈾之比確定了鈾礦石的年齡：直到 1927 年最大值爲 1.3×10^9 年(A. Holmes 和 R. W. Lawson)。地球「平均」表面岩石中鉛的年齡，根據在同樣表面岩石中的鈾產生鉛所需的時間計算，爲 2×10^9 年到 6×10^9 年。Rutherford 根據在早期 U^{235} 和 U^{238} 大致有相同的比率，而今天所知的比率極爲不同，根據它從早期到現在的衰變，估計元素鈾的年齡爲～3×10^9年。

1929年，Hubble 確定，在 6×10^6 光年之外，星系的退行速度與它的距離成正比。

1930年，A. S. Eddington 注意到，Einstein $\Lambda>0$ 靜態宇宙對於曲率半徑的任何微小增大或減少是不穩定的。

1931年 Einstein 建議今後放棄所謂宇宙學項。

1932年 Einstein 和 de Sitter 提議，試驗性地採用最簡單的假設：$\Lambda=0$，壓强可以忽略，以及宇宙曲率半徑平方的倒數既不是正的也不是負的（球狀宇宙或雙曲宇宙）而是零（「宇宙學的平直」），從而導致關係式 $\rho=3H^2/8\pi$（用幾何學單位）。

1934年 Grote Reber 揭示了天鵝座中存在分立射電源的證據；1946 年 J. S. Hey, S. J. Parsons 和 J. W. Phillips 使得關於天鵝座 A 源的證據更堅實了；1948 年，J. G. Bolton 發現了六個其他的分立射電源，包括金牛座 A和半人馬座A.。

1934年 E. A. Milne 和 W. H. McCred 發現了大氣體雲的 Newton 動力學和 Einstein 動力學宇宙理論之間的密切關係，並且，只要壓强可以忽略，膨脹的尺度因子在兩種理論中滿足同樣的方程。

1935年，H. P. Robertson 和 A. G. Walker 獨立地證明，Lemaître 類型的線元提供了與均勻性和各向同性相容的最一般的 Riemann 幾何。

1936年，Hubble 把星雲分類爲漩渦的，棒漩的，橢圓的和不規則的。

1939年，H. A. Bethe 提出了太陽中產生熱核能的第一個詳盡的理論。

1946 年，George Gamow 論證，在早期宇宙中的物質是致密的和熱的，足以經歷快速熱核反應，並且能量密度是輻射點優勢的。

1948年，H. Bondi, T. Gold 和 F. Hoyle 提出所謂「穩態宇宙學」（它是在 Einstein 標準廣義相對論範圍之外的），以及宇宙處處發生「物質的不斷創生」，現存物質的平均年齡等於 Hubble 時間的三分之一。

1948年，R. A. Alpher, H. A. Bethe 和 G. Gamow 預言，原始的充滿宇宙的黑體輻射，今天應具有相應於25開溫度的 Planck譜。1964 年 R. N. Dicke 提出同樣想法的獨立概念，並開始對這個原始的宇宙－火球輻射作實驗探索。1965年，A. A. Penzias 和 R. W. Wilson 發現了並不想要和並未預料到的 7 厘米背景輻射，其溫度約爲 3.5 開；Dicke, P. I. E. Peebles, P. G. Roll 和 D. T. Wilkinson 立即證認出這個輻射就是預期的殘餘輻射。

1949年 J. G. Bolton, G. J. Stanley 和 O. B. Slee 正確地證認出（先假定爾後證實爲）射電源金牛座A，室女座A和半人馬座A即爲蟹狀星雲，星系 NGC 4486 和 NGC5128 。

1950年，Lemaître 分析大爆炸膨脹非常接近 Einstein 靜態宇宙（$\Lambda>0$），並且，在最初的緩慢之後，繼而越來越快，進入指數膨脹。

1952年，Walter Baade 發現存在着具有不同周光關係的兩類造父變星；由此引起了 Hubble 距離尺度增大約2.6倍，與此相應，Hubble 時間 H_0^{-1} 原來的值（約爲 2×10^9 年）也增大了。

1954年，W. Baade 和 R. Minkowski 證認出射電源天鵝座 A 即爲暗弱星系團的最明亮的成員，與廣泛適用的認爲大多數射電源位於銀河內的觀點相反。Minkowski 確定光學譜的紅移爲 $\delta\lambda/\lambda=z=0.057$，這意味着天鵝座A的距離爲170兆秒差距，射電光度爲 10^{45} 爾格/秒，即爲正常星系射電功率的 10^7 倍和光學功率的10倍。

1956年把射電源天鵝座A分辨爲兩個部分，對稱地位於光學星系的兩側，這是絕大多數射電源成雙的第一個迹象。仍未解決的是造成這個雙源和其他雙源的神秘的爆發或其他機制。

1956年 G. R. Burbidge 計算了在射電星系中電子釋放給同步輻射的動能，以及把電子保持在軌道上的磁場的能量；把這兩種能量之和估計得最低；例

如，對於武仙座A，確定這個極小值的量級爲 10^{60} 爾格（50萬個太陽湮沒的能量）。

1956年 C. Patterson 根據隕石和海洋沉積物中 $Pb^{204,206,207}$ 和 $U^{235,238}$ 的相對豐度，1965年和1969年其他人根據隕石中 $Rb^{87}\longrightarrow Sr^{87}$ 和 $K^{40}\longrightarrow A^{40}$ 過程的證據，確定太陽系的年齡爲 4.55×10^{9} 年或更長。

1958年 Allen Sandage 發現，Hubble 在遙遠星系中證認爲明亮恒星的那些是 HII 區，這是被恒星電離的等離子體所圍繞的熱恒星羣，並由此把 Hubble 的距離尺度進一步提高了約2.2倍。

1958年，Jan Oort 根據其他星系的光度，估計星系中的物質對宇宙質量-能量密度的貢獻大約爲 3×10^{-31} 克/厘米^3 [最新的分析見 Peebles(1971)]，這比 Einstein 的概念（宇宙彎曲或閉合）所要求的數值小一或二個量級，從而引起了「神秘的迷失物質」，這是當今許多研究的中心。

1962年 Giacconi, Gursky, Paolini 和 Rossi 發現了天空（非太陽）的X射線。大多數源在銀河的平面上，推測就位於這個星系，就像蟹狀星雲那樣。河外源包括射電星系室女座A和類星體 3C273.

1962年 A. S. Bennett 發表了修訂的射電源「3C-星表」，包括 328 個源，幾乎完全覆蓋了傾角$-5°$ 和$+90°$ 之間亮於 9 流量單位（9×10^{-26} 瓦特/米^2 赫茲）在178兆赫茲的源。

1963年 Maarten Schmidt 在 Palomar 山證認了第一個類星體(QSO)：1962年 C. Hazard, M. B. Mackey 和A. J. Shimmins 把 3C273 的射電位置確定到優於 1 弧秒，接著，Schmidt 攝取了這個類恒星源的光學光譜，並不顧關於它是星系中一顆恒星的全部推測，嘗試着以 $\delta\lambda/\lambda=z=0.158$ 大小的紅移（對於「恒星」是空前的）去擬合它，取得了成功。由 Hubble 關係式，這意味着 1.5×10^{9} 光年的距離；光學亮度爲已知最亮星系的100倍。在1972年任何已知類星體的最大紅移爲 $z=2.88$ (4C05.34; C. R. Lynds)。這種源即使具有 3 的紅移，也可探測；但在1972年還不知道具有這樣紅移的類星體。見框38.1。

1964年 Dennis Sciama 推論 [也可參看 Sciama (1971)]，星系際的氫最能逃避觀測，只要溫度在 3×10^{5} 開和 10^{6} 開之間。在每厘米^3 具有多達 10^{-5} 質子和 10^{-5} 電子，以及低於 3×10^{5} 開的溫度的情況下，中性原子的數密度將足夠大並且由此引起的對來自遙遠星系（$z=2$）的 Lyman α 的吸收將强到足以顯示出來，而觀測正相反。

1964年 J. E. Gunn 和 B. A. Peterson, E. J. Wampler 以及其他人確定，在大於 10^{6} 開的溫度下，來自星系際空間的0.25千電子伏或50埃X射線的强

度將遠大於實際觀測强度。

Wheeler (1964a) 强調，在 Einstein 廣義相對論中的動力學客體是三維幾何而不是四維幾何，而這種動力學（經典的和量子的兩者）是在超空間的活動場所展現的。

1965年 Sandage 發現了類星星系（射電寧靜類星體）。

1965年 E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, C. R. Lynds 和 A. N. Stockton 發現的類星體 3C191 具有大量吸收線，意味着在一個光譜中有若干紅移共存。

在宇宙早期的幾分鐘內，物質轉換爲氦的（質量）部分，近似地與光子和重子的相對數目無關，這個數目比的值可在 10^6 範圍內變化，只要宇宙在 10^{10} 開仍是輻射占優勢。1966年 P. J. E. Peebles 以及1967年 R. V. Wagoner, W. A. Fowler 和 F. Hoyle （追隨其他人更早的工作）首次精確地算出這個平穩的氦豐度值爲27%。

1968年 C. W. Misner 建議，作爲早期宇宙學的一個重要部分，討論以前曾被 E. Kasner 以及 I. M. Khalatnikov 和 E. Lifshitz 關注過的空間幾何的各向異性振動。[Misner 希望用這種方法自然地說明，否則宇宙的如此令人迷惑的均勻性後來會被破壞]。

1968年和1969年，S. W. Hawking, G. F. R. Ellis 以及 R. Penrose 在標準廣義相對論的基礎上證明 [還可參看第44章所引的更早期研究者的有關工作]，目前正在膨脹並且充滿了物質和輻射（服從物理上可接受的狀態方程）的模型宇宙，它在過去必定是奇異的，而且它在今天也缺乏對稱性。

1968年，Hewish, Bell, Pilkington, Scott 和 Collins 發現了脈沖星，並解釋爲自旋的中子星（見第24章）。

> 無論詩人或任何藝術家，都無法單獨地對他作完整的說明。他的顯著性，他的評價，就是對他與死去的詩人和藝術家之間關係的評價。
>
> 你無法單獨估計他的價值；為了對照和比較，你必須把他置於已死去的人之中……當一件新的藝術作品問世時……某些東西……是與先前的全部藝術作品同時出現的。現存的不朽之作，其間井然有序，它因把新的（真正新的）藝術作品引入其間而有所修正。
>
> T. S. Eliot (1920).

第二十八章　宇宙演化到它目前的狀態

宇宙學……限制了純屬浪漫遐想的光行差。
Alfred North Whitehead (1929, 第21頁)

§ 28.1　宇宙的「標準模型」

自從 1965 年發現宇宙微波輻射以來，廣泛的理論研究已經爲宇宙可能怎樣演化到它目前的狀態展現了一幅相當詳盡的圖畫。本章將勾劃這幅稱爲宇宙「標準熱大爆炸模型」的圖畫，而它的主要特徵則出現在圖 28.1 之中。引力支配了總的膨脹；但演化的其他絕大多數細節則更多取決於熱力學、流體動力學、原子物理、核物理和高能物理的規律，而很少取決於引力。由於這個事實，也由於關於這個題目已有三本傑出的近代書籍 [Sciama (1971); Peebles (1972); Zel'dovich 和 Novikov (1974)]，促使在此從簡。

宇宙按照「標準熱大爆炸模型」的演化：

由於 k 和 Λ 對演化的貢獻在宇宙歷史的早期（很小的 a/a_0）並不重要，所以，宇宙以往的演化，定性地與均勻超曲面（$k=-1$, 0, 或 $+1$）的性質無關，也定性地與宇宙常數無關 [見 (27.40) 式和圖 27.5]。構成熱大爆炸模型基礎的一個至關重要的假設是：宇宙是在密度和溫度爲無窮大（或接近無窮大）的非常接近均勻和各向同性條件下，從快速膨脹狀態「開始」的。

(1)初態

在開始後的第一秒期間，根據這種分析，宇宙的溫度極高，光子，中微子，電子，正電子，中子，質子，各種超子和介子，以及或許甚至引力子（引力

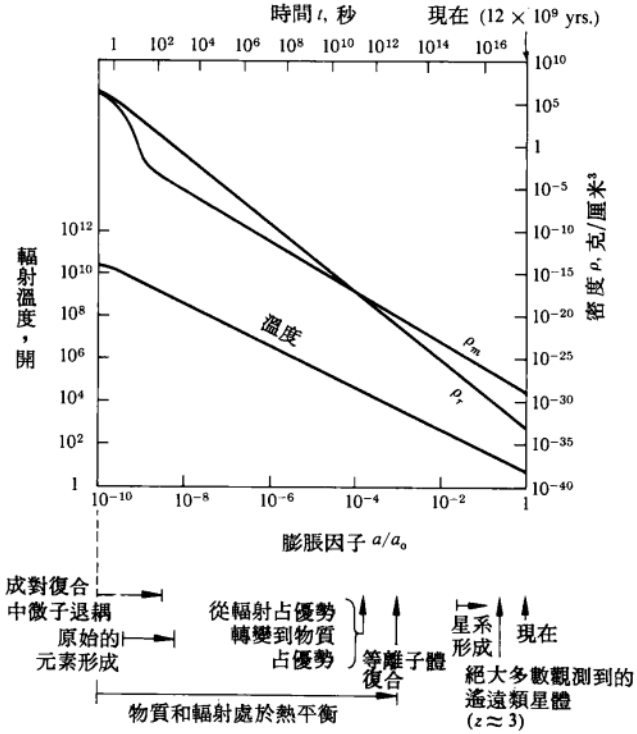


圖 28.1
宇宙按照標準的熱大爆炸模型演化到它目前的狀態。畫出的這些曲線採用了

$$\rho_{m0}=5\times10^{-30}\text{克}/\text{厘米}^3,\quad \rho_{r0}=10^{-33}\text{克}/\text{厘米}^3,\quad k=0;$$

但對在觀測極限之內的其他 ρ_{m0}，ρ_{r0}，和 k 值，這些曲線實際上是相同的（見練習 28.1）。對於圖底部所描述的那些過程的詳盡討論，可參看正文和框 28.1。［此圖是從 Dicke，Peebles，Roll，和 Wilkinson (1965) 改制的。］

(2)熱平衡，粒子衰變，成對復合（$0<t\lesssim10$ 秒）

波）之間完全熱力學平衡［參看，例如，Kundt (1971) 及其中所引文獻］。然而，到此刻，當宇宙年齡已有幾秒之久時，它的溫度降到約10^{10} 開，它的密度降到～10^5 克／厘米³；因此全部核子-反核子對已經復合，全部超子和介子已經衰變，而全部中微子和引力子已經與物質退耦。於是，這時宇宙由自由傳播的中微子或許還有引力子，與溫度 $T\sim10^{10}$ 開的黑體光譜，加上處於復合過程的電子-正電子對，加上在 $T\sim10^{10}$ 開處於熱平衡的電子、中子、質子和光子所組成。

(3)引力子和中微子的退耦和自由傳播（$t\lesssim1$ 秒）

從這個早期狀態以來，引力子（如果存在的話）和中微子繼續自由地傳播

，維持黑體光譜；但它們的溫度因宇宙膨脹而按下述規律紅移

$$T \propto 1/a \tag{28.1}$$

（框 29.2）。由此，當今它們的溫度將約爲3開，並仍將充滿宇宙。不幸，當今的技術，距離能探測這種中微子或引力子的「海洋」還太遠。然而，如果能夠探測它們，那麼就將能提供有關宇宙生命第一秒鐘的直接觀測資料！

(4)原始的元素形成（2秒 $\lesssim t \lesssim$ 1,000 秒）

在最初的幾秒之後，隨着宇宙的繼續膨脹，它進入了從 $t \sim 2$ 秒持續到 $t \sim 1{,}000$ 秒（$T \sim 10^{10}$ 到 10^9 開，$\rho \sim 10^{+5}$ 到 10^{-1} 克／厘米^3）的一段時期，在這期間出現了原始的元素形成。在這個時期之前，周圍有許多高能質子，它們能夠在任何原子核（例如，氘或氚或 He^3 或 He^4）剛形成時就把它們摧毀分離；在這個時期之後，對於貫穿彼此的 Coulomb 勢壘來說，質子是太冷了（具有的動能太低），而來自較早、較熱階段的全部自由貫穿中子都已經衰變爲電子加質子。僅在從 $t \sim 2$ 秒到 $t \sim 1{,}000$ 秒的這個短暫而至關緊要的時期內，才有製造元素的正確條件。Gamow (1948), Alpher 和 Hermann (1948a,b; 1950), Fermi 和 Turkevitch (1950), Peebles (1966)，以及 Wagoner, Fowler, 和 Hoyle (1967) 的計算揭示，在這個期間宇宙中約百分之25的重子已經轉化爲 He^4（α 粒子），而約百分之75作爲 H^1（質子）留下。也已經產生了微量的氘，He^3 和 Li，但實質上無重元素。今天所觀測到的全部重元素應是後來在恒星中造成的［參看，例如，Fowler (1967) 或 Clayton (1968)］。元素豐度的流行的天文學研究給予這些預言某些支持；但是觀測數據還不很確定［參看，例如，Danziger (1968) 以及 Peebles (1971) 的 268—275 頁］。

(5)物質和輻射的熱相互作用（1,000 秒 $\lesssim t \lesssim 10^5$ 年）

在原始元素形成之後，物質和輻射通過頻繁的原子電離和復合，繼續熱相互作用，各自保持在同樣的溫度上。如果輻射和物質的溫度沒有鎖在一起，輻射將比物質冷却得慢（對於絕熱膨脹，$T_r \propto 1/a$，而 $T_m \propto 1/a^2$）*。於是，只能通過從輻射向物質不斷的轉移能量才能保持熱平衡。但輻射的熱容量遠大於物質的。因此，能量轉移對 ρ_r, p_r 和 T_r 的影響可以忽略。它保持物質的溫度而不顯著降低輻射溫度（$T_m = T_r$）。另一方面，物質的總質量-能量過去和現在都是以靜止質量爲主的。因此，能量轉移對 ρ_m 的影響可以忽略。［這個情況說明，當從 (27.31) 式過渡到 (27.32) 式時，不考慮能量轉移的近似是合理的。］

(6)等離子體復合和過渡到物質佔優勢（$t \sim 10^5$ 年）

當溫度下降到幾千度（$a/a_0 \sim 10^{-3}$, $\rho \sim 10^{-20}$ 克／厘米^3，$t \sim 10^5$ 年）時，發生了兩件重要的事情：宇宙不再是輻射佔優勢，而變成物質佔優勢［$\rho_m = \rho_{m0}(a_0/a)^3$ 超過了 $\rho_r = \rho_{r0}(a_0/a)^4$］；以及光子不再具有足以保持氫原子電離

* 譯注：T_r 即 $T_{輻射}$，T_m 即 $T_{物質}$。ρ_r, ρ_m 等類似。

的高能，因此，電子和質子很快復合。這兩個事件大致同時發生，這是我們宇宙中每個重子的熵具有特定近似守恒值的結果：

$$s \equiv \text{每個重子的熵} \sim \frac{(\text{宇宙中的光子數})}{(\text{宇宙中的重子數})} \sim 10^8 。$$

爲什麼宇宙從這個 s 值開始，而不是從某個別的值（例如 1）開始，對此，還沒有人能夠解釋。

(7)隨後發生的光子的傳播（$t \gtrsim 10^5$ 年）

在 $t \sim 10^5$ 年，等離子體的復合是決定性的，因爲它結束了輻射和物質之間的相互作用和熱平衡（「退耦」）。此後，由於只受到極少自由電子的散射，並由於原子和分子的 Rayleigh 散射並不重要，光子幾乎自由地穿越空間傳播。除非能量釋放過程在 $a/a_0 \sim 10^{-3}$ 和 $a/a_0 \sim 0.1$ 之間的某個時候重新電離星系際介質，否則從等離子體復合以來光子一直是自由傳播的。即使出現了重新電離，至少從 $a/a_0 \sim 0.1$ 以來，光子是自由傳播的。

宇宙的膨脹使自由傳播光子的溫度按 $T \propto 1/a$ 方程紅移（見框 29.2）。因此，今天它們具有溫度爲 2.7 開的黑體光譜。它們與 1965 年發現的宇宙微波輻射完全等同，並且它們給出了在它們與物質作最後相互作用時有關宇宙性質的直接信息（如果不出現重新電離，$a/a_0 \sim 10^{-3}$, $t \sim 10^5$ 年；如果出現重新電離，$a/a_0 \sim 0.1$, $t \sim 5 \times 10^8$ 年）。

(8)恒星，星系和星團的凝聚（10^8 年 $\lesssim t \lesssim 10^9$ 年）

回到物質的歷史。在等離子體復合之前，光子壓强（「宇宙流體的彈性」）阻止均勻的物質（25% He^4, 75% H）凝聚成恒星、星系或星系團。然而，在復合之後，光子壓强消失了，凝聚可以開始。或許從膨脹開始時就存在的物質密度的小微擾開始增長得越來越大。在 $a/a_0 \sim 1/30$ 和 $a/a_0 \sim 1/10$ 之間的某處（10^8 年 $\lesssim t \lesssim 10^9$ 年），這些微擾開始發展到恒星、星系和星系團之中。稍後，在 $a/a_0 \sim 1/4$，類星體可能「啓動」了，發射光，這就是天文學家現在能從地球上接收到的（見框 28.1）。

練習

練習 28.1 演化中的不確定性

流行的觀測，加上假設膨脹之初完全均勻和各向同性，加上假設輕子超過反輕子的量少於重子超過反重子的量或同量級，給出了有關今天的宇宙參量的下述限制：

今天的物質密度$=\rho_{m0}$，在 10^{-28} 和 2×10^{-31} 克／厘米^{3}之間；
$k=0$ 或 $+1$ 或 -1；
今天的電磁輻射溫度$=2.7 \pm 0.1$ 開。
總輻射密度［觀測的光子，加上中微子和引力子，它們大概起源於大爆炸，與光子熱平衡］$=\rho_{r0}$，在 0.7×10^{-33} 和 1.2×10^{-33} 克／厘米^{3}之間。

（接第769頁）

框 28.1　類星體族的演化

宇宙的大尺度平均性質，隨着人們由類星體數據推斷出來的時間顯著地變化。簡要地說，宇宙中紅移 $z\approx 2$ 的類星體比紅移 $z\approx 0.5$ 的類星體約多50倍；而紅移 $z>3$ 的類星體較少，或者沒有。（用紅移表徵自從大爆炸以來的時間，見框 29.3。）更詳盡地，Schmidt (1972) 給出了對數據的下述分析：*

1. Schmidt 一開始就假設類星體紅移起源於宇宙學［紅移＝(Hubble 常數)×（距離）；§29.2］。對此，證據是
   a. 觀測的：某些類星體位於星系團之中［由在天空的位置，以及由類星體與星系團中的星系有同樣的紅移兩者證實；見 Gunn (1971)］。因爲對於星系的宇宙學距離-紅移關係式的證據極多（框 29.4 和框 29.5），所以這些特殊類星體的紅移必定是宇宙學的。
   b. 理論的：觀測到的類星體紅移 $z\sim 1$ 到 3 不可能起源於引力；引力紅移大於 $z\approx 0.5$ 的物體對於坍縮是不穩定的（見第24章和第26章以及框25.9）。類星體紅移也不像是 Doppler 紅移；這樣大質量的物體怎麼能夠加速到 $v\approx 1$ 而不全面分裂呢？唯一剩下的可能性是宇宙學紅移。由於這個原因，宇宙學假設的反對者常常感到壓力，而祈求在類星體中今天人們所理解的物理學規律被破壞了。［參看，例如，Arp (1971) 及其中所引文獻。這些文獻還敍述了反對宇宙學假設的證據，少數幾位傑出的研究者認爲這個證據是非相信不可的，但是，根據 1972 年的資料，大多數人並未接受它。］

2. 然後，Schmidt 問道，宇宙中究竟同時有多少個類星體 N，這些類星體相應於紅移 z，並且在 2,500 埃波長的單位頻率絕對發光度爲 L_ν(2,500埃)（在類星體的局域 Lorentz 系中測量）。

3. 在 1972 年，可資利用的類星體數據還完全不足以唯一地確定 $N[z, L_\nu(2{,}500\text{ 埃})]$，但它們是足以明確地指出：
   a. 必定曾有過演化；$N(z, L_\nu)$ 不可能與 z 無關。
   b. 演化不能首先歸於發光度；類星體的總數

$$N_{\text{總}}(z)\equiv \sum_{L_\nu(2{,}500\text{埃})} N(z, L_\nu)$$

必定顯著地隨時間（隨 z）變化。

* 我們給出的 Schmidt (1972) 論證的形式是過分簡化的。對更精確形式感興趣的讀者應查閱他的原始文獻。

c. 如果首先是總數 $N_{總}(z)$ 演化，即如果在 2,500 埃的相對發光度分布

$$f(z,L_{\nu})\equiv[1/N_{總}(z)]N(z,L_{\nu})$$

的變化可以忽略，且如果今天的宇宙由 $\sigma_0=q_0=1$（符號見第29章）表徵），則數據表明

$$N_{總}(z=2)\approx 50N_{總}(z=0.5)。$$

隨着時間的回溯，數目的急劇增加——以及對於 $z\leq 2$ 的類星體，觀測紅移和星等分布的全部其他基本特徵——可以通過以下兩個演化的規律之一與 $\sigma_0=q_0=1$ 的宇宙擬合

$$N_{總}(z)\propto(1+z)^6,$$
$$N_{總}[z(t)]\propto 10^{5(t_0-t)/t_0}。$$

式中 t_0 是宇宙現在的年齡，t 是在紅移 z 的年齡。

d. 當把這些演化規律外推到紅移 $z\approx 2$ 之外，並且當把這些演化規律與視星等接近18的類星體的觀測相對發光度函數 $f(z, L_{\nu})$ 聯合起來時，這些演化規律預言，地球上的觀測者看到的紅移大於 2.5 的19等和20等類星體的百分數爲

演化規律	$z>2.5$ 的百分數	
	$m=19$	$m=20$
$(1+z)^6$	29%	49%
$10^{5(t_0-t)/t_0}$	12%	14%

在 1972 年，已經知道約30個弱於 $m=18.5$ 的類星體，其中只有一個（3%）類星體的 $z>2.5$。用 Schmidt 的話來說，這表明「在 2.5 的紅移之外，密度定律 $(1+z)^6$ 不能繼續存在」。Schmidt 認爲$10^{5(t_0-t)/t_0}$定律（它在 $z>2.5$ 近似地爲常數）表面上也是與觀測衝突的，但是他說「需要對弱類星體作進一步的光譜工作，以便證實這個懷疑。」

一個值得注意的理由是，難於從數據中消除「觀測的選擇效應」。Schmidt, Sandage 和其他人曾獨立地探索過可能引起 $z>2.5$ 類星體數目人爲表觀減少的選擇效應。但一無所獲。用 Sandage (1972d) 的話來說，「紅移在 $z=2.8$ 附近的類星體的表觀截止，曾經作爲可能人爲地產生的選擇效應檢驗過。如果截止是眞實的，那麼它可能是第一個類星體誕生的時間，儘管設想的紅移不如預料的那麼小。在 $q_0=1$ 的宇宙中，在 $z=3$ 處，回顧時間爲Friedmann年齡的89%。觀測選擇效應的評價表明，沒有人正面確定它能引起人爲的截斷。」

（在 ρ_{r0} 中所涉及的不確定性，是關於四極矩在早期是否足以在相應於熱平衡的全部能級上產生引力子的不確定性，以及關於在引力退耦時處於平衡的各種粒子的數目和統計權重的不確定性。）試用 §27.10 中的方程計算，由於宇宙目前狀態中的這些不確定性在演化歷史中所造成的不確定性（圖 28.1）。

§ 28.2　以原始混沌修正的標準模型

標準熱大爆炸模型引人注目地强有力並與觀測（原始的氦豐度；宇宙微波輻射的存在，溫度和熵，宇宙大尺度的均匀和各向同性；由膨脹測出的宇宙年齡與最古老的恒星年齡之間的準確相符；……）很好地相符。然而，在1972年它遇到了一個表觀上的困難：星系的起源。在起初是均匀和各向同性的宇宙中，不清楚的是，無規的漲落（在等離子體復合之後）是否能夠引起足以凝聚成星系的大幅度物質密度微擾。最終形成星系的微擾必須在宇宙初始的爆炸階段就存在。［詳盡的評述和討論見 Zel'dovich 和 Novikov (1974)；也可參看 §30.1 所引文獻。］

假設少量的初始不均匀性是合理的嗎？假設理想的均匀性（一個極端）或者假設理想的混沌（另一個極端）難道就不更合理嗎？

如果宇宙開始是混沌的那將如何？

因而，如果弄清楚理想的初始均匀性與宇宙的起源不相容，那麼有吸引力的是嘗試一下「理想的初始混沌」——即完全無規的初始條件以及密度、熵和局域膨脹率的全部漲落譜［Misner (1968, 1969b)］。可以想像但遠未證明的是，在它繼續演化期間，這種模型的宇宙將很快地通過下述自然的過程（第30章）使自身平滑：諸如「混主振盪」，中微子引起的黏滯性［參看，例如，Matzner 和 Misner (1971)］，以及引力曲率產生的粒子對［Zel'dovich (1972)］。在不到幾秒鐘後，在接近均匀和各向同性的同時，是否將留下 Friedmann 宇宙，它剛好包含足夠的剩餘微擾以便最終凝聚爲星系？理論計算還遠不足以給出清晰的答案。當然，在最初的混沌平靜下來之後（如果它確能平靜下來的話），這種模型宇宙將按最後一節的標準大爆炸模型演化。

§ 28.3　在初始奇點「之前」是什麼？

宇宙學的問題中沒有比下述問題更能深刻地探究物理學的基礎了，這個問題是，在無窮大（或接近無窮大）密度、壓强和溫度的「初始狀態」「之前」是什麼。然而，不幸的是，在 1973 年，沒有比這離解決更遠的問題了。

初始奇點和量子引力效應

廣義相對論無情地預言，即使「初始狀態」是混沌的而不是光滑的，它必定包含某種類型的空時「奇點」［參看 Hawking 和 Ellis (1968); 又本書的§34.6］。並且廣義相對論不能經過奇點往回設想，說明在它「之前」是什麼。或許只有通過掌握量子引力效應（量子理論與經典幾何動力學的密切結合），人們才能清楚的了解初始狀態以及在它「之前」是什麼，如果確有任何東西的話［見 Misner (1969c), Wheeler (1971c)］。對於這些問題的進一步討論，見 §34.6, §43.4, 框 30.1 的最後一節，以及第44章。

§ 28.4 其他的宇宙學理論

違背廣義相對論的宇宙學

本書限於注意廣義相對論的宇宙學。如果放棄廣義相對論，就有了廣泛得多的可能性，包括(1)穩態理論［Hoyle (1948); Bondi 和 Gold (1948)］，它不能成功地說明宇宙微波輻射的原因，也不能成功地解釋射電源和類星體中觀測到的演化效應［框 28.1］；(2)Klein-Alfvén 的在漸近平直空時中物質的「階式宇宙學」［Alfvén 和 Klein (1962), Alfvén (1971), Klein (1971), Moritz (1969), de Vaucouleurs(1971)］，它與宇宙線和 γ 射線的觀測不符［Steigman (1971)］；以及 Brans-Dicke 宇宙學［Dicke (1968), Greenstein (1968a,b), Morganstern (1973)］，它與標準的熱大爆炸模型定性上相同定量上幾乎相同。然而，沒有明顯的動機或理由去放棄廣義相對論。在過去的十年，廣義相對論的實驗基礎得到了實質上的加强（第38—40章）；並且由廣義相對論預言的宇宙的標準大爆炸模型引人注目地與觀測很好地相符——比曾經提出的任何其他模型好得多！

第二十九章　宇宙目前的狀態和將來的演化

§ 29.1　確定宇宙命運的參量

本章全屬高階。第27章（理想化的宇宙學模型）是它必須的準備，但本章對於此後任何章都不是必須的準備。

宇宙將永遠繼續膨脹嗎？或者它將減緩膨脹以至停止，倒過來收縮，並爆聚回到無限（或接近無限）密度、壓强、溫度和曲率的狀態嗎？答案還不肯定地知道。發現這個答案是今天宇宙學的核心問題之一。

發現這個答案的唯一已知途徑是去測量，去觀察宇宙目前的狀態；然後用 Einstein 場方程計算將來的演化。場方程已經在 §27.10 和 §27.11 求解過。根據這些解，人們看出宇宙現狀及其未來之間有下述關係。

永遠膨脹與宇宙的重新收縮

如果 $\Lambda=0$［根據 Einstein 堅持的簡單性原理］：

永遠膨脹$\Longleftrightarrow$均勻性超曲面的負或零空間曲率，即 $k/a_0^2\leq 0$（「開」的或「平直的」）；

重新收縮$\Longleftrightarrow$均勻超曲面的正空間曲率，即 $k/a_0^2>0$（「閉的」）。

如果 $\Lambda\neq 0$:

$$\text{永遠膨脹}\Longleftrightarrow \Lambda\geq\Lambda_{\text{臨界}}\equiv\begin{cases}0 & \text{如果 } k\leq 0,\\ (4\pi\rho_{m0}a_0^3)^{-2} & \text{如果 } k>0;\end{cases}$$

重新收縮$\Longleftrightarrow\Lambda<\Lambda_{\text{臨界}}$。

預測宇宙的將來所需的參量：

(1)「相對論參量」 Λ，k^2/a_0^2，ρ_{m0}

顯然，爲了預測將來需要三個參量：宇宙學常數 Λ；均勻性超曲面今天的曲率參量 k/a_0^2；今天的物質密度 ρ_{m0}，爲了外推到過去，如上章所做的那樣，除了這些量外，人們還需要今天的輻射密度 ρ_{r0}。但現在的 ρ_{r0} 是很小的，而且很快地變得更小（$\rho_r\propto a^{-4}$; $\rho_m\propto a^{-3}$），以致它對於在剛剛列出的這些可能性之間作出決定並無影響。從而，預測將來的工作簡化爲測量「相對論參量」

Λ， k/a_0^2， 和 ρ_{m0} 的工作。

(2)「觀測的參量」H_0，q_0，σ_0

在從事這項工作時，觀測宇宙學家寧願用能夠更直接觀測的參量來代替具有直接相對論意義的這三個「相對論參量」。與觀測密切聯繫的一個參量是今天的 Hubble 膨脹率，即「*Hubble* 常數」。

$$H_0 \equiv (a_{,t}/a)_0 。 \tag{29.1a}$$

另一個是今天的無量綱「減速參量」，定義爲。

$$q_0 \equiv -\frac{a_{,tt}}{a}\frac{1}{H_0^2} = -\left(\frac{aa_{,tt}}{a_{,t}^2}\right)_0 。 \tag{29.1b}$$

第三個是今天的無量綱的「密度參量」，

$$\sigma_0 \equiv \frac{4\pi\rho_{m0}}{3H_0^2} 。 \tag{29.1c}$$

(3)相對論參量與觀測參量之間的關係式

把定義 (29.1) 式與 Einstein 場方程 (27.39) 式聯合起來，即可算出這三個「觀測參量」與三個「相對論參量」 Λ, k/a_0^2 和 ρ_{m0} 之間的關係（一起構成六個「宇宙學參量」），今天的計算得出，

$$\begin{aligned} H_0^2 &= -\frac{k}{a_0^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi}{3}\rho_{m0}, \\ -2q_0H_0^2 &= -H_0^2 - \frac{k}{a_0^2} + \Lambda 。 \end{aligned} \tag{29.2}$$

把這些方程聯合起來，得出如框 29.1 中所示的關係式，其中還指出了若干 σ_0 和 q_0 值的含義。

練習

練習 29.1 參量值的含義

試導出框 29.1 所引用的結論。

§ 29.2 宇宙學紅移

宇宙學紅移的觀測特徵

用於測量 H_0, q_0 和 σ_0 的觀測數據的關鍵部分之一是宇宙學紅移：發現在地球上接收到的從遠離地球的星系所發射的光譜線的波長向紅端移動。例如，[OII] λ 3727譜線，當在地球範圍內的實驗室發射並觀測時，其波長爲3727埃。然而，當它從星系 3C295 中的恒星發射（推測應具有同樣的波長 $\lambda_{發射}=$

框 29.1　觀測參量與相對論參量的比較

A. 相對論參量

1. 今天的物質密度，

$$\rho_{m0}$$

2. 今天的均勻性超曲面的曲率，

$$k/a_0^2$$

3. 宇宙學常數，

$$\Lambda$$

4. 今天的輻射密度 ρ_{r0}（對於現行的宇宙動力學並不重要，因此在本章略去）

B. 觀測參量

1. Hubble 常數（今天的 Hubble 膨脹率），

$$H_0 \equiv (a_{,t}/a)_0$$

2. 減速參量

$$q_0 \equiv -\frac{a_{,tt}}{a}\frac{1}{H_0^2}$$

3. 密度參量

$$\sigma_0 \equiv \frac{4\pi\rho_{m0}}{3H_0^2}$$

C. 用相對論參量表示觀測參量

$$H_0^2 = (8\pi/3)\rho_{m0} - k/a_0^2 + \Lambda/3, \tag{1}$$

$$q_0 = \frac{(4\pi/3)\rho_{m0} - \Lambda/3}{(8\pi/3)\rho_{m0} - k/a_0^2 + \Lambda/3}, \tag{2}$$

$$\sigma_0 = \frac{(4\pi/3)\rho_{m0}}{(8\pi/3)\rho_{m0} - k/a_0^2 + \Lambda/3}。 \tag{3}$$

D. 用觀測參量表示相對論參量

$$\rho_{m0} = (3/4\pi)H_0^2\sigma_0, \tag{4}$$

$$k/a_0^2 = H_0^2(3\sigma_0 - q_0 - 1), \tag{5}$$

$$\Lambda = 3H_0^2(\sigma_0 - q_0)。 \tag{6}$$

E. 特殊參量值的含義

1. 當且僅當 $\sigma_0 = q_0$ 時，$\Lambda = 0$（根據 Einstein 的觀點）。
2. Λ 的符號與 $\sigma_0 - q_0$ 的符號相同。

3. 如果 $\Lambda=0$

(a) $q_0>\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\rho_{m0}>\rho_{臨界}\equiv\frac{3}{8\pi}H_0^2\Longleftrightarrow k>0$ (正曲率；「閉」宇宙)

$\Longleftrightarrow$宇宙最終將重新收縮；

(b) $q_0=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\rho_{m0}=\rho_{臨界}\equiv\frac{3}{8\pi}H_0^2\Longleftrightarrow k=0$ (零曲率；「平直的」宇宙)

$\Longleftrightarrow$宇宙將永遠膨脹；

(c) $q_0<\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\rho_{m0}<\rho_{臨界}\equiv\frac{3}{8\pi}H_0^2\Longleftrightarrow k<0$ (負曲率；「開」宇宙)

$\Longleftrightarrow$宇宙將永遠膨脹。

4. 如果 $\Lambda\neq0$

(a) $\sigma_0>\frac{1}{3}(q_0+1)\Longleftrightarrow k>0$ (正曲率；「閉」宇宙)，

在這種情形，

$\sigma_0-q_0\geq\frac{1}{{\sigma_0}^2}\left(\sigma_0-\frac{q_0+1}{3}\right)^3\Longleftrightarrow$宇宙將永遠膨脹，

$\sigma_0-q_0<\frac{1}{{\sigma_0}^2}\left(\sigma_0-\frac{q_0+1}{3}\right)^3\Longleftrightarrow$宇宙最終將重新收縮；

(b) $\sigma_0=\frac{1}{3}(q_0+1)\Longleftrightarrow k=0$ (零曲率；「平直的」宇宙)，

在這種情形，

$\sigma_0\geq q_0\Longleftrightarrow$宇宙將永遠膨脹，

$\sigma_0<q_0\Longleftrightarrow$宇宙最終將重新收縮；

(c) $\sigma_0<\frac{1}{3}(q_0+1)\Longleftrightarrow k<0$ (負曲率；「開」宇宙)，

在這種情形，

$\sigma_0\geq q_0\Longleftrightarrow$宇宙將永遠膨脹，

$\sigma_0<q_0\Longleftrightarrow$宇宙最終將重新收縮。

3727埃）並在地球上接收時，測出它的波長爲 $\lambda_{接收}=5447$ 埃。波長的相對變化爲

$$z\equiv(\lambda_{接收}-\lambda_{發射})/\lambda_{發射}=0.4614 \text{ 對於 } 3C295。 \qquad (29.3)$$

觀測到的宇宙學紅移同樣地影響着全部光譜線，而不只是可見光譜中的譜線。根據 Dieter, Epstein, Lilley 和 Roberts (1962) 對三十個客體的觀測，以及 Roberts (1965) 的進一步觀測，氫的21厘米譜線（爲可見光中心區域波長的 400,000 倍）所經歷的紅移（在測量誤差內）在退行速度爲 $v\sim0.005$ 量級內與可見譜線的紅移一致。

爲什麼紅移不能歸因於「疲勞的光」

除了宇宙的膨脹外（見下面），沒有人曾經對宇宙學紅移提出過滿意的解釋。不同的作者在不同時候曾經提出過某些新過程在起作用（「疲勞的光」）的觀念，其中，在光子從源到接收器的途徑上，光子與原子或電子相互作用，從而零零碎碎地失去了它們的能量。Ya. B. Zel'dovich (1963) 深刻的分析了任何這類觀念的困難：

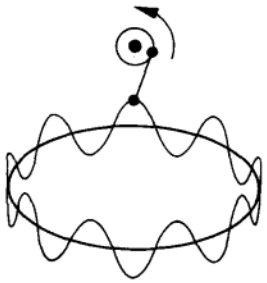
(1)「如果能量喪失的原因是與星系際物質的相互作用，那麼應伴隨着動量的轉移；即光子的運動方向應改變。這將使像的輪廓不清；遙遠的恒星看起來會像一個盤，而不是一個點，但觀測到的並不是這樣。」

(2)「讓我們假設光子衰變了，$\gamma\longrightarrow\gamma'+k$，把它的能量的一小部分給了某個粒子 k。根據守恒定律，k 必須在光子的方向上運動（順便說說，這可避免輪廓不清），並且必須具有零靜止質量。然而，由於過程的統計性質，有的光子將比別的光子失去更多的能量，從而譜線將有一個光譜加寬，但這也沒有觀測到。」

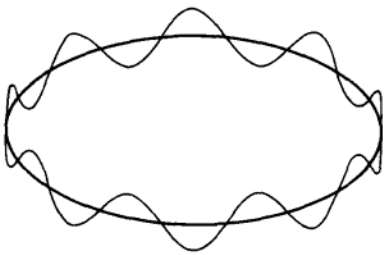
(3)如果存在着任何這類衰變過程，那麼狹義相對論的簡單論證（Zel'dovich 把它歸之於 M. P. Bronshtein，並詳加說明）要求下述關係式

$$\begin{pmatrix}\text{每秒「光子衰}\\\text{變」的幾率}\end{pmatrix}=\frac{(\text{宇宙常數，量綱爲秒}^{-2})}{(\text{光子頻率，以秒}^{-1}\text{爲單位})}。$$

「因而」Zel'dovich 斷定，「如果光子的衰變是完全可能的，那麼在射電波段的光子應衰變得特別快！這將意味着 Maxwell 的靜電場方程必須改變……並不存在這種效應的實驗跡象：傳播到我們這裏的來自遙遠源的射電頻率輻射一點也不比可見光弱，並且在光譜不同部分測出的紅移是精確相同的……因而，存在着與 Friedmann 不同的紅移解釋的設想完全失敗了。」



發射：
原子激發 n 個波節的駐波；
宇宙很小，$a(t_e)=a_{發射}$；
波長很小，$\lambda(t_e)=\lambda_{發射}$。



接收：
宇宙較大，$a(t_r)=a_{接收}$；
波長較大，$\lambda(t_r)=\lambda_{接收}$；
駐波的波節數不變；

$$n=\text{常數}=\frac{2\pi a_{接收}}{2\pi\lambda_{接收}}=\frac{a_{發射}}{\lambda_{發射}}。$$

圖 29.1
作爲駐波效應的紅移。在任何閉合的球對稱（Friedmann）模型宇宙中，波長之比 $\lambda_{接收}/\lambda_{發射}$ 等同於尺度之比 $a_{接收}/a_{發射}$。原子在宇宙中激發了一個有 n 個波節的駐波。在膨脹期間，數 n 固定不變。因此，波長按照與宇宙尺度同樣的比例增大。這樣，即可看出紅移與下述全部細節無關，即(1)爲什麼會發生膨脹（球對稱，但是任意的狀態方程）；(2)膨脹的速率是均勻的還是不均勻的；和(3)在發射時，在接收時，或在其間任何時刻，源和接收者的距離。圖中所出現的論證依賴於宇宙的閉合（駐波；$k=+1$ 而不是 0 或 -1）。從正文中給出的進一步分析可以看出，對於這種簡單的結果並不要求閉合。

作爲對紅移的解釋，人們接受星系的普遍退行，在導致這一結論的討論中，並非不重要的情況是，普遍退行的預言［Friedmann（1922）］在紅移的觀測［Hubble（1929）］之前。

導出紅移公式：
$\lambda\propto$（膨脹因子）

用宇宙的標準大爆炸模型，很容易理解宇宙學紅移（圖29.1）。詳盡的分析集中注意三個過程：光的發射，光經過彎曲空時從發射者傳播到接收者，以及光的接收。發射和接收出現在發射者和接收者的固有參照系（正交歸一四重軸）之中；它們是狹義相對論的現象。反之，傳播是廣義相對論的過程；它受彎曲空時中短程線運動規律的支配。

爲了計算全部三個過程——發射，傳播和吸收——需要一個坐標系。採用

第27章中引入的 (t,χ,θ,ϕ) 或 (η,χ,θ,ϕ)；並通過這樣的方式來定空間坐標的方位，使得經過坐標系的光線的路徑是簡單的。最好的辦法是把坐標系的原點（$\chi=0$）放在地球上。而發射的星系位於某個「半徑」χ_* 和某個角位置（θ_*,ϕ_*）處。宇宙學的線元

$$\begin{aligned} ds^2&=-dt^2+a^2(t)[d\chi^2+\Sigma^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]\\ &=a^2(\eta)[-d\eta^2+d\chi^2+\Sigma^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)], \end{aligned} \tag{29.4a}$$

$$\Sigma=\begin{cases}\sin\chi & \text{如果 } k=+1,\\ \chi & \text{如果 } k=0,\\ \sinh\chi & \text{如果 } k=-1,\end{cases} \tag{29.4b}$$

圍繞 $\chi=0$（即圍繞地球）是球對稱的，無論 $k=-1$，0，或 $+1$。結果，經過地球和發射星系兩者的短程線（光子世界線）必定都是徑向的

$$\theta=\theta_*,\qquad \phi=\phi_*,\qquad \chi=\chi(t)。 \tag{29.5}$$

（希望放棄任何對稱性要求的人可以檢驗 (t,χ,θ,ϕ) 坐標系中的短程線方程，並發現，如果 $d\theta/d\lambda=d\phi/d\lambda=0$，則 $d^2\theta/d\lambda^2=d^2\phi/d\lambda^2=0$。結果，一條短程線起初是徑向的將永遠保持徑向。）

現在，討論發射。一星系，靜止（與「宇宙學流體」一起運動）在(χ_*,θ_*,ϕ_*) 處，向着地球，在坐標時間 t_{A*} 和 t_{B*}，發射波列的兩個相繼的波峰A和B。已經安排得使在星系上測出的原時與坐標時間相同（$t=\tau+$常數是建立§27.4 坐標系過程的一部分）。結果，發射者看到的輻射周期是 $P_{\text{發射}}=t_{*B}-t_{*A}$；當採用幾何單位時，波長與周期是相同的：

$$\lambda_{\text{發射}}=t_{*B}-t_{*A}。 \tag{29.6}$$

其次，檢查傳播。波峰A和B沿零短程線傳播。這個事實使人們能夠直接從線元（29.4）讀出波峰 $\chi_A(t)$ 和 $\chi_B(t)$ 的世界線；$ds^2=0$ 確保 $a(t)d\chi=-dt$（是「−」而不是「+」，因爲光線是向着在 $\chi=0$ 的地球傳播的）。結果，世界線爲

$$\chi_*-\chi_A(t\text{ 或 }\eta)=\eta-\eta_{*A}=\int_{t_{*A}}^{t}a^{-1}dt, \tag{29.7}$$

$$\chi_*-\chi_B(t\text{ 或 }\eta)=\eta-\eta_{*B}=\int_{t_{*B}}^{t}a^{-1}dt。$$

最後，檢查接收。地球上的接收者與「宇宙學流體」一起運動，正像遙遠的發射者一樣。（忽略地球相對於流體的「獨特的運動」——繞太陽的運動，

繞銀河系中心的運動等等；它們可以通過普通的 Doppler 修正考慮在內）。因而，像發射者一樣，對於接收者，原時與坐標時間相同，且

$$\lambda_{\text{接收}}=t_{rB}-t_{rA}, \tag{29.8}$$

式中 t_{rB} 和 t_{rA} 是接收到相繼的波峰的時間。

現在，把 (29.6), (29.7) 和 (29.8) 式聯合起來得出紅移。接收者在 $\chi=0$ 處。因此，(29.7) 式爲

$$\begin{aligned} 0&=\chi_e-\int_{t_{eA}}^{t_{rA}}a^{-1}dt\,,\\ 0&=\chi_e-\int_{t_{eB}}^{t_{rB}}a^{-1}dt\,。\end{aligned} \tag{29.9}$$

這些方程彼此相減，得出

$$\begin{aligned} 0&=\int_{t_{eB}}^{t_{rB}}a^{-1}dt-\int_{t_{eA}}^{t_{rA}}a^{-1}dt\\ &=\int_{t_{rA}}^{t_{rB}}a^{-1}dt-\int_{t_{eA}}^{t_{eB}}a^{-1}dt\approx\frac{t_{rB}-t_{rA}}{a(t_r)}-\frac{t_{eB}-t_{eA}}{a(t_e)}\,; \end{aligned}$$

再與 (29.6) 和 (29.8) 式聯合，發現

$$\frac{\lambda_{\text{接收}}}{a(t_r)}=\frac{\lambda_{\text{發射}}}{a(t_e)}\,; \tag{29.10}$$

即

$$z\equiv\Delta\lambda/\lambda=a(t_r)/a(t_e)-1\,。 \tag{29.11}$$

這些紅移方程證實了圖 29.1 的簡單結果：隨着光線的傳播，它的波長（與「流體」一起運動的觀察者測出的）與宇宙的線性膨脹成正比地增大。波長與膨脹因子的比值 λ/a 保持不變。關於這個結果的重要應用，見框 29.2 和框 29.3。

練習

練習 29.2 紅移的另一種推導

注意到線元與光線相關的唯一的部分是

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)d\chi^2\,,$$

這是因爲沿着它的世界線 $d\theta=d\phi=0$(球對稱！)。把光線看作是由四維動量爲 $\mathbf{p}$ 的光子所

(接第780頁)

框 29.2　原始輻射的宇宙學紅移

作爲紅移公式

$$\lambda/a=\text{常數} \qquad (1)$$

[(29.10) 式] 的一個重要應用，考慮熱大爆炸發生的輻射。因爲它最初與物質處於熱平衡，所以這個原始的輻射最初具有 Planck 黑體光譜。以後與物質的相互作用不能改變這個光譜，因爲只要出現相互作用物質就繼續與輻射處於熱平衡。然而，宇宙學紅移能夠改變並確實改變了這種光譜。這在練習 22.17 中作了說明，應用動力論，從一個觀測者看來具有 Planck 光譜的輻射，從所有的觀測者看來都應具有 Planck 光譜；但觀測的溫度精確地按照與各個光子頻率紅移的同樣方式紅移。結果，從在「流體」中靜止的觀測者看來，原始輻射的溫度的紅移。

$$T\propto 1/a。 \qquad (2)$$

在等離子體復合前，這是正確的，當時輻射與物質是相互作用的，在等離子體復合後，還是正確的，這時輻射與物質已退耦。它不僅對原始光子是正確的，而且對於熱大爆炸時出現的熱中微子和引力子也是正確的。

有另外一種導出紅移方程(2)的辦法。把用溫度表示的黑體輻射能量密度的方程

$$\rho_r\propto T^4 \qquad (3)$$

與能量密度因絕熱膨脹而減少的方程

$$\rho_r\propto(\text{體積})^{-4/3}\propto(a^3)^{-4/3}\propto a^{-4} \qquad (4)$$

聯合起來即可。

框 29.3　用紅移表徵距離和時間

距離：當討論的客體在地球所屬的星系團之內時，天文學家描述距離的典型方式是以光年或秒差距爲單位。但是當涉及更遙遠的客體（星系，類星體，等等，）天文學家發現，以實際觀測的紅移來描述距離更爲方便。例如；「星系 3C295 在紅移 0.4614 處」的表述意即「從地球到 3C295 的距離［由 (29.16) 式給出］相應於$z=0.4614$的紅移。」

時間：當討論的事件出現在最近的幾個 10^9 年期間時，天文學家通常以年爲單位來量度時間。例如：「太陽系是由 4.6×10^9 年以前的星際氣體凝聚而成的」［見 Wasserburg 和 Burnett (1968)］。但是當涉及的事件非常接近宇宙開始的時候，實質上它們全都具有相同的年齡，約爲 12×10^9 年，天文學家發現用紅移來描述時間更爲方便。例如：「原始等離子體在紅移爲 1,000 的復合」意即「如果一個光子是在等離子體復合的時間發射的，並從那時以來是自由傳播的，那麼從當時到現在它所經歷的總紅移是$z=1{,}000$」。等價地，由於 $1+z=(a_0/a)$［見 (29.11) 式］，「等離子體復合時的宇宙比今天的宇宙小 $1+z\approx1{,}000$ 倍。」［應用：如圖 28.1，其中概括了宇宙過去的演化，可以自由地把水平尺度 a/a_0 代之以 $1/(1+z)$，並由此看出原始的元素形成出現在紅移 $z\approx10^9$。］紅移單位與時間單位的轉換强烈地依賴於參量 ρ_{m0}, ρ_{r0}, 和 k/a_0^2［見 §27.10 和 §27.11；又 (29.15) 式］。

構成。由短程線方程（或者，對於學過第25章的讀者，由關於Killing矢量的論證），證明

$$p_x \equiv \mathbf{p} \cdot (\partial/\partial x)$$

沿光子的世界線守恒。利用光子的四維動量爲零 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=0$ 的事實，以及由四維速度爲 $\mathbf{u}$ 的觀測者測出的能量 $E=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$ 的方程，導出紅移方程 (29.11) 式。

練習 29.3 粒子 de Broglie 波長的紅移

有限靜止質量爲 μ 的粒子沿着一短程世界線運動穿過膨脹的宇宙流體。設

$$p \equiv (\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})^{1/2} \equiv \frac{\mu v}{(1-v^2)^{1/2}}$$

是靜止在流體中的觀測者測出的粒子的空間四維動量。（在他們的固有參照系中，他們測出的普通速度爲 v。）與粒子相聯繫的「de Broglie 波長」爲 $\lambda \equiv h/p$。

(a) 試證明 de Broglie 波長精確地按照與光子波長同樣的方式紅移，

$$\lambda/a = \text{常數}。$$

(b) 應用這個結果，證明對於充滿宇宙的理想氣體分子，當氣體爲非相對論性氣體時，它們的平均動能與 a^2 成反比地減少，而當氣體爲高度相對論性氣體時，它們的平均動能（像光子能量那樣）與 a 成反比地減少。

§ 29.3 距離-紅移關係式；Hubble 常數的測量

(29.11) 式把紅移表示爲發射事件和接收事件之間膨脹因子的變化。對於「在附近」的發射者（發射者的距離遠小於「Hubble 長度」$1/H_0$），把紅移表示爲發射者和地球之間的距離更爲方便。距離（「現在的距離」）是在今天經過地球的均勻性超曲面上定義的，因爲該超曲面與今天接收者的同時性表面局域地相符，並且該超曲面還與隨「宇宙學流體」一起運動的任意觀測者的同時性表面局域地相符。

導出距離-紅移關係式

發射者與觀測者之間今天的距離［沿着恒定 (t,θ,ϕ) 的空間短程線的距離，該短程線把 $(t_r,0,\theta_e,\phi_e)$ 和 $(t_r,\chi_e,\theta_e,\phi_e)$ 聯繫了起來］可以從線元 (29.4) 直接讀出：

$$l = a(t_r)(\chi_e - \chi_r) = a(t_r)\chi_e。 \tag{29.12}$$

對 χ_e，應用 (29.9) 式，得出

$$l = a(t_r)\int_{t_e}^{t_r} a^{-1}dt。 \tag{29.12'}$$

在最近的過去，$a(t)$ 由下式給出

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_r)+(a_{,t})_{t_r}(t-t_r)+\frac{1}{2}(a_{,tt})_{t_r}(t-t_r)^2+\cdots \\ &= a(t_r)\left[1+H_0(t-t_r)-\frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_r)^2+\cdots\right], \end{aligned} \tag{29.13}$$

式中已經用到 Hubble 常數 H_0 和減速參量 q_0 的定義（29.1）式。把此式納入（29.12′）式，並積分，得出距離表達式

$$l=(t_r-t_e)+\frac{1}{2}H_0(t_r-t_e)^2+\cdots$$

或等價地，

$$t_r-t_e=l-\frac{1}{2}H_0l^2+\cdots。 \tag{29.14}$$

利用（29.13）式，可以把紅移［(29.11) 式］表爲 t_r-t_e 的冪級數：

$$\begin{aligned} z &= \frac{a(t_r)-a(t_e)}{a(t_e)}=\frac{a(t_r)\left[H_0(t_r-t_e)+\frac{1}{2}q_0H_0^2(t_r-t_e)^2+\cdots\right]}{a(t_r)\left[1-H_0(t_r-t_e)+\cdots\right]} \\ &= H_0(t_r-t_e)+H_0^2\left(1+\frac{1}{2}q_0\right)(t_r-t_e)^2+\cdots。 \end{aligned} \tag{29.15}$$

把此式與用 l 表示 t_r-t_e 的（29.14）式聯合起來，最後得出：

$$z=H_0l+\frac{1}{2}(1+q_0)(H_0l)^2+O([H_0l]^3)。 \tag{29.16}$$

距離-紅移關係式的結果

這就是宇宙標準大爆炸模型的「距離-紅移關係式」。

把這個距離-紅移關係式與天文學的觀測（見框 29.4，它最好接着下一節 **Hubble 常數 H_0 的測量**讀）相比較，Allan Sandage (1972a) 得出 Hubble 常數爲

$$H_0=55\pm7 \text{ 公里秒}^{-1}\text{兆秒差距}^{-1}； \tag{29.17}$$

即

$$H_0^{-1}=(18\pm2)\times10^9 \text{ 年}。 \tag{29.18}$$

（注：1兆秒差距是 3.26×10^5 光年，或 3.08×10^{24} 厘米。）此處引用的 ±7 公里秒$^{-1}$ 兆秒差距$^{-1}$ 的誤差是與距離-紅移數據相聯繫的「1σ」統計誤差。現在還不了解的系統誤差可能稍大；但 H_0 的眞實值幾乎肯定在 Sandage 值55 公里秒$^{-1}$ 兆秒差距$^{-1}$ 的 2 倍之內。

注意，如果 $\Lambda=0$，則標誌「閉」宇宙與「開」宇宙之間分界線——即標誌最終重新收縮和永遠膨脹之間分界線——的「臨界密度」爲

臨界密度的值

$$\rho_{\text{臨界}}=\frac{3}{8\pi}H_0^2=5\times10^{-30}\text{克}/\text{厘米}^3。\tag{29.19}$$

（如框 29.1 所描述的那樣，$\rho>\rho_{\text{臨界}}\Longleftrightarrow$「閉」$\Longleftrightarrow$重新收縮；$\rho<\rho_{\text{臨界}}\Longleftrightarrow$「開」$\Longleftrightarrow$永遠膨脹。）與實際密度的比較將推遲到 §29.6。

距離測量的精度還不足以得出關於減速參量 q_0 的有用信息。

§ 29.4 星等-紅移關係式；減速參量的測量

有關 q_0 的信息，最好通過星系視星等與其紅移的比較得到。

定義視星等

在天文學中，客體的視（輻射熱）星等，m，由下式定義

$$\begin{aligned}m&=-2.5\log_{10}(S/2.52\times10^{-5}\text{ 爾格厘米}^{-2}\text{秒}^{-1})\\&=-2.5\log_{10}S+\text{常數}，\end{aligned}\tag{29.20}$$

式中 S 是從客體到達地球的能流（單位時間通過單位面積的能量）。［當然，人們無法測量全部波長範圍 $0<\lambda<\infty$ 的能流；因此，相應於在不同波長範圍（「U」≡「紫外」；「B」≡「藍」；「V」≡「可見」）的能流，要區別不同的視星等。然而，這些細緻的區別與此處論述的引力物理學相差甚遠。］

星等-紅移關係式的推導

計算內稟光度爲 L 和紅移爲 z 的星系的視星等，爲了使計算簡化，把發射者置於空間坐標的原點（$\chi_e=0$）；把地球置於（χ_r,θ_r,ϕ_r）。（注：與 §29.2 的紅移計算相比，位置顛倒了。）在地球上，垂直於入射光線，放一面積爲 A 的照相底片。那麼，在時間 t_r，照相底片是圍繞着發射星系的球狀二維表面（$t=t_r,\chi=\chi_r$；θ 和 ϕ 可變）的很小的一部分。圍繞星系的二維球的總面積爲

$$\mathcal{A}=4\pi[a(t_r)\Sigma(\chi_r)]^2。\tag{29.21}$$

因此，照相底片的面積與二維球面積之比爲。

$$\frac{A}{\mathcal{A}}=\frac{A}{4\pi[a(t_r)\Sigma(\chi_r)]^2}。\tag{29.22}$$

照相底片收集了經二維球流出的能量的一小部分 $A/\mathcal{A}$。

如果沒有紅移，在時間 t_r 穿過整個二維球的功率應精確地就是在時間 t_e 發射者的光度。然而，紅移以兩種方式修改了這個結果。(1)在流體局域Lorentz系中測出的穿過二維球的每一個光子的能量比發射者測量的要小：

$$E_{接收}/E_{發射}=\lambda_{發射}/\lambda_{接收}=1/(1+z)。\tag{29.23}$$

(2)在二維球上相對於「宇宙學流體」固定的觀測者測出具有相同 θ 和 ϕ 的兩個光子相距的時間爲 Δt_r，而發射者測出的這兩個光子相距的時間是較短的時間 Δt_e。

$$\Delta t_r/\Delta t_e=\lambda_r/\lambda_e=1+z。\tag{29.24}$$

在源處測出的光度 L，是在時間間隔 Δt_e 內發射的各個光子（用指標 J 標記）能量 $E_{發射J}$ 之和除以 Δt_e

$$L=(1/\Delta t_e)\sum_J E_{發射J}。\tag{29.25}$$

通過二維球上的流體測出的，在以後的 t_r-t_e 時間穿過二維球的功率爲

$$P=(1/\Delta t_r)\sum_J E_{接收J},\tag{29.26}$$

式中的求和是對同一組光子。

聯合 (29.23) 式到 (29.26) 式，可見穿過二維球的功率爲

$$P=L/(1+z)^2。$$

對此，有一小部分

$$P_A=\frac{A}{\mathcal{A}}P=\frac{AL}{4\pi[(1+z)a(t_r)\Sigma(\chi_r)]^2},$$

穿過照相底片；因此，在地球上測出的通量爲

$$S=\frac{P_A}{A}=\frac{L}{4\pi R^2(1+z)^2},\tag{29.27}$$

式中 R 是二維球的「曲率半徑」，二維球圍繞着發射者並在接收時間經過接收者，

$$R\equiv a_0\Sigma(\chi_r-\chi_e)=\begin{cases}a_0\sinh(\chi_r-\chi_e) & \text{如果 } k=-1,\\ a_0[\chi_r-\chi_e] & \text{如果 } k=0,\\ a_0\sin(\chi_r-\chi_e) & \text{如果 } k=+1\end{cases}\tag{29.28}$$

[憶及：根據現在的約定 χ_e 是 0，而 $a_0=a(t_r)$]。相應的視星等 [(29.20)式] 爲

$$m=+5\log_{10}[(1+z)R]-2.5\log_{10}L+\text{常數}。\qquad(29.29)$$

爲了把視星等與發射者的紅移聯繫起來，必須用 z 表示量 R。由光子傳播的 (29.7) 式（因爲接收者和發射者的位置已經顚倒，所以符號也要顚倒），可知

$$\chi_r-\chi_e=\int_{t_e}^{t_r}a^{-1}dt=\int_1^{a(t_r)/a(t_e)}\left[\frac{a}{a(t_r)}\right]\left[\frac{dt}{da}\right]d\left[\frac{a(t_r)}{a}\right],\qquad(29.30)$$

而由 (29.11) 式可知

$$z=a(t_r)/a(t_e)-1。$$

因此，

$$\chi_r-\chi_e=\int_1^{1+z}\left[\frac{a}{a(t_r)}\right]\left[\frac{dt}{da}\right]d\left[\frac{a(t_r)}{a}\right]。\qquad(29.31)$$

框 29.1 的(4)式到(6)式和 (27.40) 式，用 $a/a(t_r)$ 和常數 H_0, q_0, σ_0 確定了函數 dt/da。把這個結果代入 (29.31) 式並積分，得出用紅移 z 以及宇宙學參量 H_0, q_0, σ_0 表示的 $\chi_r-\chi_e$：

$$\chi_r-\chi_e=|1+q_0-3\sigma_0|^{1/2}\int_1^{1+z}\frac{du}{[2\sigma_0u^3+(1+q_0-3\sigma_0)u^2+\sigma_0-q_0]^{1/2}}。\qquad(29.32a)$$

把這個表達式代入方程 [(29.28) 式，式中的 a_0 用框 29.1 的(5)式計算]，得出二維球的曲率半徑 R 爲

$$R=\frac{H_0^{-1}}{|1+q_0-3\sigma_0|^{1/2}}\Sigma(\chi_r-\chi_e)。\qquad(29.32b)$$

(29.29) 式和 (29.32) 式用紅 z 移確定了視星等 m。

對於零宇宙參量的情形 ($\sigma_0=q_0$; $\Lambda=0$)，積分 (29.32a) 可表爲初等函數，得出

$$\begin{aligned}R&=\frac{H_0^{-1}}{q_0^2(1+z)}[-q_0+1+q_0z+(q_0-1)(2q_0z+1)^{1/2}],\\&\approx H_0^{-1}z\left[1-\frac{1}{2}(1+q_0)z+O(z^2)\right],\end{aligned}\qquad(29.33)$$

因此，

星等-紅移關係式的結果

$$\begin{aligned}m&=5\log_{10}[1-q_0+q_0z+(q_0-1)(2q_0z+1)^{1/2}]-2.5\log_{10}L+\text{常數}\\&\approx 5\log_{10}z+1.086(1-q_0)z+O(z^2)-2.5\log L+\text{常數}，\end{aligned}\qquad(29.34)$$

對於 $z\ll 1$。

（注：因子 1.086 實際上就是 2.5/ln10。）對於非零 Λ（對於 $\sigma_0 \neq q_0$）的冪級數解揭示，只有 $O(z^2)$ 和更高冪次才依賴於 σ_0：

$$R \approx H_0^{-1} z\left[1-\frac{1}{2}(1+q_0)z+(\text{依賴於}\sigma_0\text{和}q_0\text{的 } O(z^2) \text{ 修正項})\right], \tag{29.35a}$$

$$m \approx 5\log_{10} z + 1.086(1-q_0)z + O(z^2) - 2.5\log_{10} L + \text{常數}。 \tag{29.35b}$$

Sheldon (1971) 給出了用 Weierstrass 橢圓函數表示的 $\Lambda \neq 0$ 的精確解。Refsdal 等 (1967) 作出了精確解的表和圖。

減速參量 q_0 的測量

把理論的星等-紅移關係式 (29.35b) 式與 82 個團中最亮星系的觀測相比較，Allan Sandage (1972a,c,d) 得出下述減參量值：

$$q_0 = 1.0 \pm 0.5, \quad \text{如果 } \sigma_0 = q_0 \text{（即 } \Lambda = 0)。 \tag{29.36}$$

（注：0.5 是「1σ」不確定性。Sandage 估計，只要未知的演化效應可以忽略，則在68%置信度上有 $0.5 < q_0 < 1.5$，而在95%置信度上有 $0 < q_0 < 2$。）導致這個結果的觀測以及歸因爲演化效應的不確定性在框 29.4 中敍述。框 29.5 給出了 Edwin Hubble 的簡介，他爲這類宇宙學測量奠定了基礎。

（接第794頁）

框 29.4　Hubble 常數和減速參量的測量

I. Hubble 常數 H_0

A. 目的：通過觀測數據與距離-紅移關係式

$$z = H_0 l + \frac{1}{2}(1+q_0)(H_0 l)^2 + O([H_0 l]^3)$$

的比較，來測量常數 H_0。其中 l 是今天從地球到源的距離；z 是在地球上測量的源的紅移。

B. 主要的困難：這個距離-紅移關係式並不適用於銀河系中的恒星：銀河系是引力自約束系統，因此不受宇宙學膨脹的影響。距離-紅移關係式也不適用於銀河系和鄰近星系（「本羣」）之間的分離；銀河系及其近鄰之間的引力吸引太强，它干擾了它們的運動使之實質上脫離了宇宙的

膨脹。只是在尺度大到足以包括許多星系（尺度大到每一個星系或星系團可以看作「塵埃的顆粒」，而且這些顆粒的分布大致均勻）——只有在這樣大的尺度上，距離-紅移關係式才很精確地成立。但是可靠地測量如此遙遠星系的距離 l 是極爲困難的！

C. 曾經用來測量 H_0 的方法 [Sandage 和 Tamman 總結在 Sandage (1972a)]：

1. 造父變星是脈動恒星，其脈動周期（由光輸出的脈動測出）與其光度 L ——或等價地與其絕對（輻射熱）星等 M 極爲密切地相關：

$$M\equiv\begin{pmatrix}\text{恒星在10秒差距}=32.6\text{光年}\\ \text{處的視星等}\end{pmatrix}$$
$$=-2.5\log_{10}(L/3.0\times10^{35}\text{爾格秒}^{-1}) \tag{1}$$

［見 (29.20) 式］。通過銀河系內的測量，天文學家已經得出了造父變星的「周光關係」。

2. 在遠達～4 兆秒差距（4 兆秒差距$\equiv4\times10^6$ 秒差距）的星系中，造父變星清晰可見。在每一個這類星系中，人們測量造父變星的周期；然後由周光關係推出它們的絕對星等M；測出它們的視星等m；然後利用下述關係式算出從地球到它們的距離 l

$$m-M=5\log_{10}(l/10\text{ 秒差距})。 \tag{2}$$

用這種方法，人們得出了離我們～4 兆秒差距之內的全部星系的距離 l。不幸的是，這類星系作爲宇宙膨脹的完全參與者是太靠近了。（它們都只包括在「本羣」，「$M81$ 羣」，以及「南極羣」內。）因而，在試圖測量 H_0 之前，還必須把距離尺度推向更遠。

3. 在～4 兆秒差距之內的 Sc，Sd，Sm 和 Ir 類型的星系中包含巨大的電離氫的雲，它發出明亮的「Hα 光」。這些雲稱爲「H II 區」，顯示出 H II 區的直徑D與星系的光度L之間（或等價地，D和星系的絕對星等M之間）有極爲緊密的關係。實際上，對於給定的星系光度 L，H II 直徑的相對伸展爲 $\sigma(\Delta D/D)\approx0.12$。利用 (a) 由造父變星確定的這些星系的距離（$\lesssim$ 4 兆秒差距），(b) 這些星系的視星等，

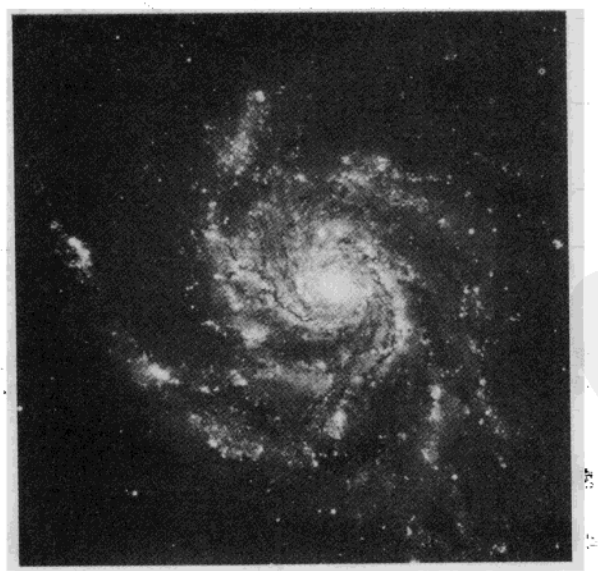
以及(c)這些星系中 H II 區的角直徑，計算出實際的 H II 直徑D和星系光度L，從而得出「直徑-光度關係」$D(L)$。

4. H II 區大到足以在遠至～60兆秒差距的星系中清晰地看到。測出H II 的角直徑 $\alpha=D/l$ 和星系視（輻射熱）星等

$$m=-2.5\log_{10}\left(\frac{L/4\pi l^2}{2.52\times10^{-5}\text{爾格厘米}^{-2}\text{秒}^{-1}}\right), \qquad (3)$$

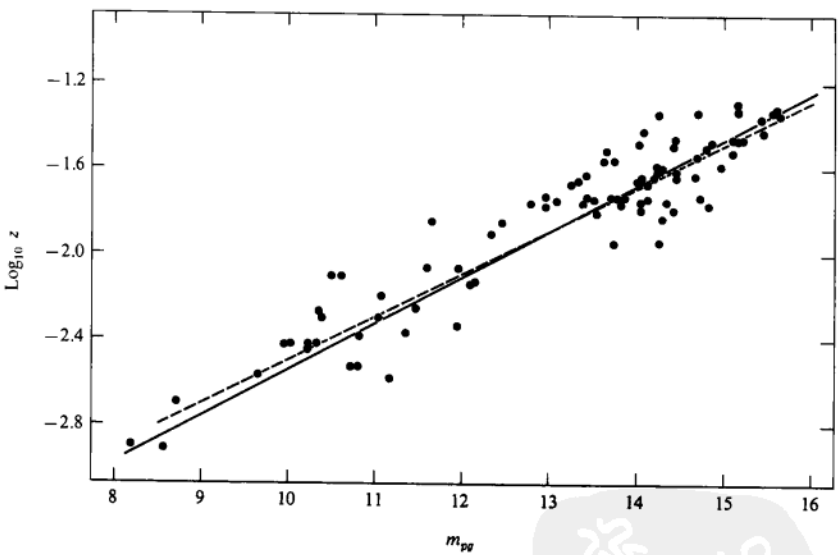
再與直徑-光度關係結合，人們得出了全部 Sc，Sd，Sm，和 Ir 類型星系的距離 l，它們都有 H II 區並位於地球的～60兆秒差距之內。不幸的是，對於與宇宙膨脹相比應可忽略的局域運動而言，仍然不夠遠。

5. 在～60兆秒差距之內有足夠的 Sc I 類星系，人們發現它們的光度（絕對星等）是恒定的（一個 Sc I 星系與另一個的L相差≤50%）。利用經 H II 區測出的這類 Sc I 星系的距離，並利用它們的視星等的測量，人們算出了它們普遍的絕對星等(照相測量)爲$M_{pg}=-21.2$。



距離地球 l～3 兆秒差距的 Sc I 星系 M101，用 200 吋望遠鏡拍攝的照片。（蒙 Hale 天文臺惠允轉載）

6. 然後，人們檢驗距離大於～70兆秒差距的全部已知的 ScI 星系。對每一個，測出視星等並把它與普遍的絕對星等相比較，得出離地球的距離。再對每一個，測出光譜線的紅移 $z=\Delta\lambda/\lambda$。由得出的紅移-距離關係 —— 並計及在所有步驟中逐漸引入其中的統計不確定性 —— Sandage 和 Tamman (1965—1972 完成的工作) 得出$H_0=dz/dl=55\pm7$ (公里／秒) 兆秒差距$^{-1}=1$ [$(18\pm2)\times10^9$ 年]。[評述可見 Sandage (1972a)。] 引入的誤差純屬統計的。系統誤差一定更大——但幾乎一定不會超過 2 倍 [即 $30<H_0<110$ (公里／秒) 兆秒差距$^{-1}$]。



距離≥70兆秒差距的 Sc I 星系的星等-紅移關係。實線是數據的最小二乘方擬合；虛線的理論斜率爲 5。[引自 Sandage 和 Tamman。]

II. 減速參量 q_0:

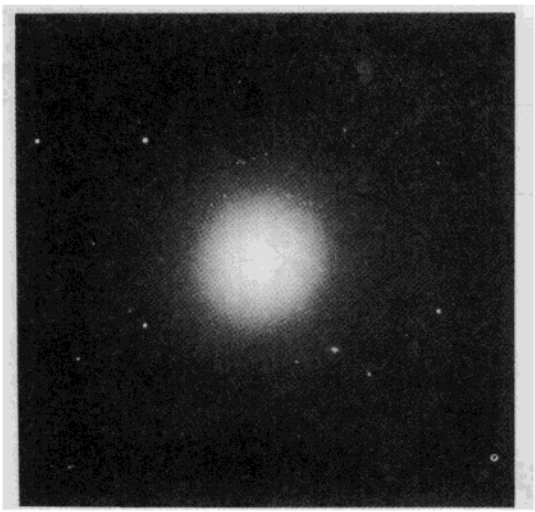
A. 目的：通過觀測數據與星等-紅移關係式的比較，測量常數 q_0:

$$m=5\log_{10}z+1.086(1-q_0)z+O(z^2)-2.5\log_{10}L+\text{常數}。\qquad(4)$$

［注：即使宇宙學常數是非零的，也就是即使 $\sigma_0 \neq q_0$，這個關係式仍成立。對 σ_0 的依賴關係只出現在 $O(z^2)$ 和更高的冪次之中。］

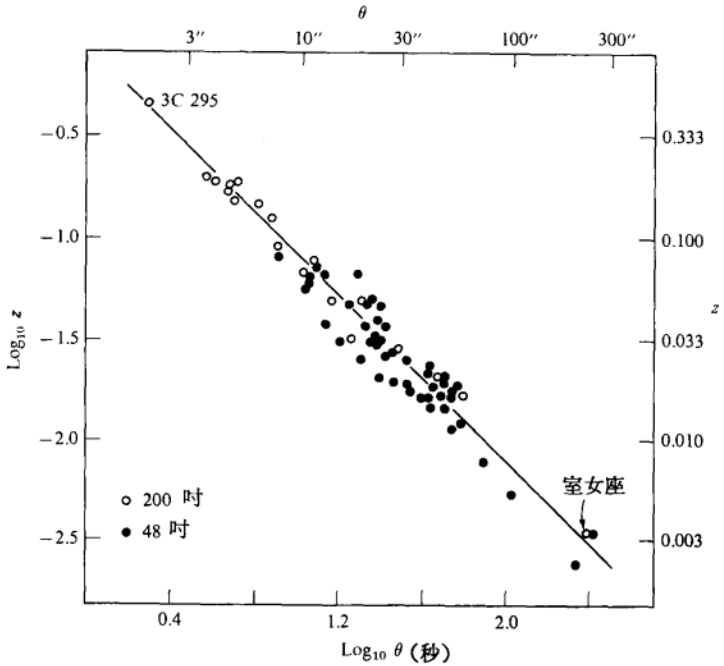
B. **主要的困難**：必須採用具有同樣絕對光度 L（「標準燭光」）的客體的數據。但是人們無法在大到足以使 q_0 的效應顯示出來的距離上測量 L。

C. **標準燭光的搜索**：顯然，人們選擇的標準燭光將是 Sc I 星系，因爲發現它們都具有幾乎同樣的 L（見上面）。但是，它們還沒有明亮到足以在 q_0 效應能夠顯示出來的遙遠距離上也看得見。另一種選擇是類星體，它很明亮，在很大的紅移（z 大到～3）處也能夠看得見。但是它們的絕對光度有很大的彌散——人們作此推斷是因爲類星體即使在 z 很小的範圍內在星等-紅移圖中也不能落在一條直線上。最好的選擇是最亮類型的客體，L 的彌散又很小。Sandage(1972 a,b,c)在「確認爲規則

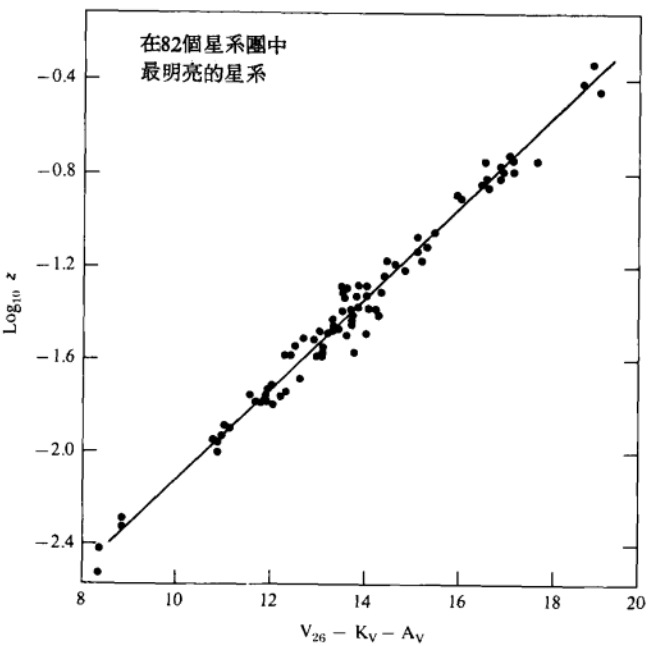


距離地球 l～11 兆秒差距的E型星系M87，用 200 吋望遠鏡拍攝的照片。（蒙 Hale 天文臺惠允轉載）

的星系團」中選擇最亮的星系。這類星系團由占優勢的E型星系組成，並且從一個團到另一個團最亮的成員引人注目地類似（L 的彌散爲～25%）。這種類似性在它們的光譜中顯示出來，並在人們繪製的角直徑-紅移圖（下頁）或視星等-紅移圖（下頁）或角直徑-視星等圖所給出的非常精確的直線中顯示出來。



在確認的規則星系團中，最明亮星系的角直徑與紅移的關係。引自 Sandage (1972a,b)。[這些數據還沒有精確到足以得出關於 q_0 和 σ_0 的有用信息；但1973年的改進可能帶來所需的精度；見§29.5。]



在確認的規則星系團中，最明亮星系的星等與紅移的關係。$V_{26}-K_v-A_v$ 是考慮了某些修正後的視星等。圖中所畫的直線相應於 $\sigma_0=q_0=1$（斜率爲 5 的直線）。引自 Sandage (1972a)。

D. 曾經用來測量 q_0 的方法 [Sandage (1972 a,c)]:

1. 在82個確認的規則星系團中，收集了最明亮星系的星等與紅移的數據（見上）。

2. 這些數據，當與一直線擬合時，其斜率爲

$$dm/d\log_{10}z=5.150\pm0.268\text{（方均根），}\tag{5}$$

作爲比較的理論斜率爲 5。

3. 這些數據，當與理論關係式擬合時

$$m=5\log_{10}z+1.086(1-q_0)z+O(z^2)+\text{常數，}\tag{6}$$

[包括修正的 $O(z^2)$ 和更高次項；見 (29.29), (29.32) 和 (29.34) 式] 得出

$$\left.\begin{aligned}q_0&=1\pm0.5\ (1\sigma)\\&=1\pm1\ \ (2\sigma)\end{aligned}\right\}\text{如果 }\sigma_0=q_0\ (\Lambda=0)。\tag{7}$$

這些數據不足以同時確定 σ_0 和 q_0。[$O(z^2)$ 項取決於 σ_0，它在數據的擬合中扮演重要的角色。它們的理論效應的圖示，見 Peebles 等 (1967) 的圖 2。]

E. 演化的不確定性

1. Sandage 的數據與理論擬合時假設他的「標準燭光」的亮度是不隨時間改變的。如果由於老恒星的演化和新恒星的形成，使他的星系每 10^9 年暗淡了 0.09 星等，那麼在 10^9 光年遠的星系看起來就像是 10^9 年以前的星系，它將比等同的鄰近星系內稟地明亮 0.09 星等。這個效應的修正將使 q_0 的最可幾值從 1 減少爲 0 [Sandage (1972c)]。

2. 在 1972 年，星系演化的知識對於證實或排除這種效應來說還不夠完全。[見 Sandage (1972c) 所引文獻。]

框 29.5 EDWIN POWELL HUBBLE

1889年11月20日，Marshfield Missouri（密蘇里）——1953年9月28日，Pasadena, California（加利福尼亞）

Edwin Hubble ，24歲在牛津大學獲得法律學位並在 Louisville, Kentucky 開始了法律業務。開業一年之後，他極感厭倦，用他自己的話說，「爲了天文學而拋棄了法律，我知道即使我只是二等或三等的角色，只要搞天文學，我就滿足了。」他選擇了 Chicago（芝加哥）大學和 Yerkes 天文臺作爲他的天文學教育的場所。三年後（1917年）完成了題爲「暗星雲照相研究」的博士論文。

當 Hubble 進入天文學界時，曾懷疑某些星雲位於銀河系之外，但證據非常不充分。在此後20年，Hubble 比任何別的人更多的打開了人們對河外宇宙的視界。用 Wilson 山60吋和 120 吋望遠鏡工作，Hubble 發展了有關旋渦星雲，橢圓星雲以及不規則星雲（現在稱爲星系）河外性質的無可辯駁的證據。他設想的星系分類方案今天仍在應用。他系統化了河外研究的全部課題：確定距離尺度、光度、恒星密度，以及銀河系的本動；並得到了關於銀河系外的物理學規律與地球附近相同的廣泛證據（用 Hubble 的話說：「證明了自然界一致性的原理」）。他發現了宇宙的大尺度均勻性，並使之定量化。並且——他的最大成就！——他發現了宇宙的膨脹。

Hubble 的先驅工作的詳細內容，最好用他自己的話來概述：

「星雲的性質所知極少；還沒有提出如何分類……［從旋渦星雲逃逸的速度和從銀河系逃逸的速度之間的］一致帶有某些假設的色彩，旋渦星雲是逃速的、其距離往往以百萬光年量度的恒星系統。」

（1920年；博士論文；因第一次世界大戰，推遲了三年才發表）

本框大部分基於 Mayall (1970) 撰寫的 Hubble 傳記。

「目前的研究［首次把造父變星用作比參哲倫雲更遠的距離指示者］把作為球立恒星系統的 NGC 6822 和參哲倫雲的同類星雲認為是等同的，儘管它稍小一些更遠一些。於是，在造父判據的基礎上建立了一個自洽的結構，其中，對作為整體的系統［NGC 6822］及其各分離成員這兩者，尺度、光度和密度的量級都是人們非常熟悉的。距離是唯一具有新量級的量。看來，自然界的一致性原理在這個巨大空間區域內的支配地位還沒有受到干擾。」

(1925)

「用可資利用的最高分辨本領的 100 吋反射望遠鏡作出的決定性檢驗表明，Messier 33 中所謂擬聚物的照相圖像與普通銀河恒星的圖像之間並無區別……在35個造父變星中，周光關係是明顯的，並指明距離約為小參哲倫雲的 8.1 倍。對於後者，採用 Shapley 的值，空間距離約為 263,000 秒差距。」

(1926a)

「［本文 (1926 b)］是星雲普遍分類的開端……各種類型的［河外星雲］均勻地分布在天空中……這個數據現在用來導出空間密度的量級。這是借助於對於給定極限星等的星雲數的公式以及用星等表示距離的公式得到的。［結果是］

$$\rho = 1.5\times10^{-31} \text{ 克／厘米}^3。$$

這應看作是較低的極限，因為瀰散在系統之間的彌散物質全部忽略了。空間的平均密度可用來確定廣義相對論的有限的但是無界的宇宙的大小……

$$R = \frac{c}{\sqrt{4\pi k}}\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \cdots = 2.7\times10^{10} \text{ 秒差距。」}$$ (1926b)

「這些數據……指出了［河外星雲的］距離和速度之間的線性關係。曾經作出兩個解答，其一個別地利用這24個星雲，另一則按照方向和距離的接近把它們聯合成 9 組。結果是……24個對象：$K=465\pm50$ 公里／秒每 10^6 秒差距；9 組：$K=513\pm60$公里／秒每 10^6 秒差距……。然而，外觀的特徵是一種可能性，即速度-距離關係可能代表 de Sitter 效應，並因此在空間一般曲率的討論中可引入這些數據。」

(1929)*

---

* Hubble 的K值（「Hubble 常數」）後來因 Baade 和 Sandage 的工作而向下修正了；見框 27.1 中題為 *Hubble* 時間的那一節。

「借助於 40 個新的速度重新檢驗了速度-距離關係……新的數據把首次用公式表示速度－距離關係時所利用的距離擴大了約18倍，而關係的形式保持不變，只是對距離的單位 [Shapley 的10%] 作了修正。」

(1931) 與 M. L. Humason

「產生這類效應 [河外星雲中的紅移] 的許多方式是已知的，但對於所有這些方式，只有一種方式能產生大的紅移而無須引入引人注目的其他效應，但實際上却並未發現。容許解釋紅移的這種方式通常歸因於離開觀測者的實際運動……，

(1934a)

「現在，作為一個單元的可觀測區域，我們對於它的某些普遍特徵已有了一個倉促的梗概。下一步將是沿着偵察路線審視一番——再仔細地探究一番目的在於精度和完整性。這個程序，以及它對方法的強調，將是冗長乏味接連不斷的近似。」

(1934b)

Hubble 餘生大絕的部分時間致力於這個「冗長乏味接連不斷的近似」。在 Hubble 逝世前不久，200 吋望遠鏡在 Palomer 山運轉了；Hubble 的學生 Alan Sandage 開始用它繼續 Hubble 對宇宙眞實性質的探索。（見框 29.4）。

練習

練習 29.4 用統計物理導出 $m(z)$

試用光子分布的統計描述導出星等-紅移關係 [參看，例如，(22.49) 式以及有關的討論]。

練習 29.5 Doppler 頻移與宇宙學紅移

(a) 考慮一星系在平直空時以速度v運動，離地球而去，並發射光，在地球上接收它發射的光。設在地球的 Lorentz 系中，在光發射的特定時刻，測出的地球和星系間的距離爲 r；設最終接收到的輻射的 Doppler 頻移爲 $z=\Delta\lambda/\lambda$。試證明地球上接收到的能流 S 與星系內稟光度 L 的關係爲

$$S=\frac{L}{4\pi r^2(1+z)^4}。\tag{29.37}$$

[高階讀者將發現，最方便的是利用 (22.49) 式的統計公式。]

(b) 把這個流量公式與公式 (29.27) 比較，後者的紅移是起源於宇宙學的。爲什麼兩個公式中 $1+z$ 因子的數值不同？[數學答案：Ellis (1971) 的 (6.28a) 式。]

§ 29.5 宇宙「透鏡效應」的探索

彎曲的空間將充當一個長焦距的透鏡。光線的彎曲對鄰近物體的表觀大小幾無影響。但是，預料遙遠的星系——距離爲宇宙尺度的四分之一至二分之一的星系——具有大大被放大的角直徑 [Klauder, Wakano, Wheeler 和 Willey (1959)] 。借助於一個光學望遠鏡去看一個這樣遙遠的星系似乎是毫無可能的。但是，射電望遠鏡可以分辨紅移爲 $z=2$ 或更大的類星射電源和其他河外星系的特徵。此外，一對洲際的射電望遠鏡（例如，Goldstone，加利福尼亞，和 Woomera，澳大利亞），對於在 3×10^9 光年之遠的目標，分辨遙遠源的能力優於 $0''.001$ 或 4.8×10^{-9} 弧度或15光年（暫時假設存在着 Euclid 幾何）。一個在空間的射電望遠鏡與一個在地球上的射電望遠鏡配成對，甚至會有更好的角分辨率。就像對附近的星系那樣，對於非常巨大的距離（$z=2$ 到 $z=3$），能否找到由任何一類客體表徵的任何基準距離以作爲自然的長度標準呢？也許沒有。然而，鑒於熟練的觀測者，曾在人們事先無權預期的許多領域內顯示了他們發現規律性的能力，對這種可能性以及它將帶來的全部好處持懷疑態度看來是不明智的。

希望在遙遠目標中確定一個基準長度

令 L 表示星系中基準單元（如果能夠找到任何基準單元的話）的實際長度；並令 $\delta\theta$（弧度！）表示客體的視長度，理想化爲客體垂直於觀測者的視線。這兩個量之比定義了源的「角度有效距離」(aed)。

定義角度有效距離 (aed)

$$(\text{角度有效距離})=r_{\text{aed}}=L/\delta\theta。 \tag{29.38a}$$

在平直空間，對於零相對速度的客體，這個距離等同於源的實際距離 r，或者等同於從源到觀測者的實際飛行時間 t。這種情況在一個膨脹的宇宙中將有所改變。

爲了計算作爲紅移函數的角度有效距離，把地球（接收者）放在 $\chi_r=0$ 處；把研究的客體（發射者）放在 χ_e 處。設基準長度 L 落在球上 χ_e 處（垂直於視線），並設它從 θ_e 到 $\theta_e+\delta\theta$ [基準單元的一端在 (χ_e,θ_e,ϕ_e)；另一端在 $(\chi_e,\theta_e+\delta\theta,\phi_e)$] 。則

$$L=a(t_e)\Sigma(\chi_e)\delta\theta,$$

和

$$r_{\text{aed}}=a(t_e)\Sigma(\chi_e)=[a(t_r)\Sigma(\chi_e-\chi_r)]a(t_e)/a(t_r);$$

即 [見 (29.28) 式，χ_r 和 χ_e 顛倒]，

$$r_{\text{aed}}=R/(1+z)。 \tag{29.38b}$$

作爲紅移函數的角度有效距離

一般說來由 (29.32) 式，或者如果 $\Lambda=0$ 由 (29.33) 式可知，式中的 R 是作爲源的紅移 z 以及宇宙學參量 H_0, q_0, σ_0 的函數給出的。[如果束優先經過低質量密度（「星系之間的眞空」）區域，則 (29.38b) 式應修正；見(22.37) 式和 Gunn (1967)。]

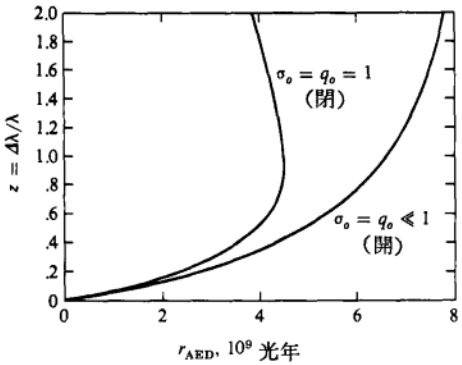


圖 29.2
兩個典型宇宙學模型的角度有效距離對紅移的曲線——其一是開的 ($0<\sigma_0=q_0\ll 1$)；另一是閉的 ($\sigma_0=q_0=1$)；兩者都具有零宇宙學常數；兩者的 $H_0^{-1}=18\times10^9$ 光年。

角度有效距離作爲確定宇宙是否封閉的工具

圖 29.2 對於幾個選定的有關參量，顯示了作爲紅移函數的角度有效距離。顯然，只要宇宙是閉的，角度有效距離在紅移大約爲 $z\sim1$ 處有一極大值。然而，如果宇宙是開的則大不相同（圖29.2）。射電天文學的迅速進步，使得它所提供的檢驗宇宙是否封閉的可能性具有更大的吸引力， Einstein 曾論證它必將如此 [Einstein (1950), 107—108 頁] 。此外，甚至用光學望遠鏡，人們在 1973 年通過角度有效距離的研究也快要測出 q_0 了：最初的研究 [Sandage (1972b)] 設想，最明亮的E型星系的光學大小可能是一個合用的基準長度。

§ 29.6 宇宙今天的密度

宇宙平均質量密度的測量：

(1)星系中的發光物質

測量宇宙今天的密度 ρ_{m0} 是非常困難的。大量物質可能具有天文學家還無法觀測的形式（星系際物質，黑洞，等等）。因此，所能做的最好的辦法之一是把星系中全部發光物質加在一起，並把得到的數值作爲 ρ_{m0} 的低限。但甚至把發光物質加在一起也是困難而冒險的工作，這種困難使得甚至今天還無法作出比 Oort (1958) 的經典工作更明確的分析。[然而，關於這個問題的極爲詳盡的評論，可參看 Peebles (1971) 的第四章] 。Oort 的結果是

$$\rho_{\text{發光物質}}\sim(2\times10^{-31}\ \text{克}/\text{厘米}^3)(H_0/55\ \text{公里秒}^{-1}\text{兆秒差距}^{-1})^2, \quad (29.39)$$

相應的

$$\sigma_0\geq0.02\ (\text{與 } H_0 \text{ 的值無關})。 \quad (29.40)$$

作爲任何這類估計所持有的危險的一個例子（雖則是一個不典型的例子），Oort 指出室女座星系團。如果室女團不因引力束縛，則在約10億年內它的～2,500 個星系將飛散，破壞了團的任何外貌。如果它被引力束縛，則當將它的星系彼此相對的平均速度與維里定理聯合起來時，可以估計出團的總質量。這種估計比 Oort 把團的發光物質加在一起的方法所得值大25倍。

(2)星系際空間的物質

儘管對於星系際空間的大量物質（足以封閉宇宙）還沒有明確的證據加以肯定或否定，但已有試驗性的間接限制：(1)如果 $\Lambda=0$（與 Einstein 一致），則 $\sigma_0=q_0$；因此 Sandage 的值 $q_0\lesssim 1$——在有關星系演化的最廣泛假設下，可擴展到 $q_0<10$——意味着

$$\rho_{\text{星系際}}<10^{-28}\ \text{克／厘米}^3 \quad (\sigma_0=q_0<10)。$$

(2) Gott 和 Gunn (1971) 指出，如果星系際空間的氣體密度 $\gtrsim 10^{-30}$ 克／厘米³（即如果 $\sigma_0\gtrsim 0.1$），則人們預料落入後髮座星系團的氣體會形成激波，它將發射大量X射線。根據通常的X射線觀測，可以給這類落入物質的總量一個限度——並由此給星系際空間的氣體密度一個限制

$$\rho_{\text{星系際}}\lesssim 10^{-30}\ \text{克／厘米}^3 \quad (\sigma_0\lesssim 0.1)。$$

但是這些限制像由其他方法得到的其他限制一樣［有關評述，參看 Peebles (1971) 第四章］，還遠不是確定的；它極大的取決於人們對所作的理論計算是否覺得十分舒服。

§ 29.7　目前有關宇宙學參量知識的總結

總結觀測的宇宙參量

在 1973 年，宇宙觀測參量的最佳可利用數據爲［(29.18), (29.36), (29.40) 式］

$$H_0^{-1}=(18\pm 2)\times 10^9\ \text{年},$$
$$q_0=1\pm 0.5\ (1\sigma)\quad \text{如果}\ \sigma_0=q_0\ (\Lambda=0), \qquad (29.41)$$
$$\sigma_0\gtrsim 0.02。$$

這些數值不足以揭示宇宙是閉的還是開的，也不足以揭示宇宙將繼續永遠膨脹還是最終將減緩到停止並重新收縮。

宇宙學的某些定量成就

如果人們因缺乏這些知識而感到失望，那麼，至少可因下述內容而有所安慰。(1)對於距離－紅移，星等-紅移以及角直徑-紅移關係的線性（低 z）部分，理論與觀測極好地相符（框 29.4）。(2)以下數據之間引人注目地一致 (a) 由 H_0 測量值算出的宇宙年齡（如果 $q_0=\sigma_0<1$，爲 180 億年；如果 $q_0=\sigma_0=\frac{1}{2}$，爲 120 億年）；(b) 通過恒星演化理論與觀測的恒星性質相比較，算出最

古老恒星的年齡（$\sim 10\times 10^9$ 年）；(c) 測量不同原子核類的相對豐度，算出人們在地球上發現的鈾、釷和鈣原子的核合成以來的時間（～90億年）；(d) 測量其他原子核類的相對豐度，算出最古老隕石和最古老月球岩石樣品的年齡（46億年）。進一步的細節，參看，例如，Sandage (1968, 1970)，Wasserburg 等 (1969)，Wasserburg 和 Burnett (1968)，以及 Fowler (1972)。(3)宇宙微波輻射的觀測以及氦豐度的測量現在可用來給出有關紅移 $z \gg 1$ 的宇宙中物理過程的直接信息（第28章）。(4)人們還可以在射電源中找到明顯地超出 $z \gtrsim 1$ 的「基準長度」，由此可通過角度-有效-距離的方法測出 q_0 和 σ_0（§29.5）。(5)在這個過程中類星體的不可思議的性質及其隨紅移的獨特分布（大量集中在 $z\sim 2$; $z \gtrsim 3$ 的很少）還可能揭開並得出許多有關宇宙中結構起源的新信息（框28.1）。(6)像過去的十年那樣，下一個十年可能帶來許多重大的意外觀測以及相應的新見解。

觀測宇宙學的光輝前景

練習

練習 29.6 源的計數

假設人們能够找到（實際上是不可能的）一族光學源或射電源，它們(1)全都具有相同的內稟光度 L，(2)均勻地分布在整個宇宙，並且(3)以同樣的速率誕生和死亡，因此在共動坐標單位體積中的數目永遠固定不變。

(a) 試證明，從今天的地球上觀測，紅移小於 z 的這類源的數目 $N(z)$ 爲

$$N(z)=(\text{常數})\cdot z^3\left[1-\frac{3}{2}(1+q_0)z+O(z^2)\right]。 \tag{29.42}$$

(b) 試證明，從今天的地球上觀測，流量大於 S 的源的數目 $N(S)$ 爲

$$N(S)=(\text{常數})\cdot\underbrace{\left(\frac{LH_0^2}{4\pi S}\right)^{3/2}}_{=z^2+O(z^3)}\left[1-3\left(\frac{LH_0^2}{4\pi S}\right)^{1/2}+O\left(\frac{LH_0^2}{4\pi S}\right)\right]。 \tag{29.43}$$

[與 q_0 和 σ_0 無關的一階修正]

[答案：見Robertson 和 Noonan (1968) 的 §15.7。]

練習 29.7 宇宙射線密度 (Maarten Schmidt 設計的問題)

假設宇宙包含着同樣數目的星系，這在過去是未確定的。進一步假設宇宙中的宇宙線是在星系中產生的，並且其中從形成以來已經慢化或喪失的部分可以忽略。試用(1)今天的星系數密度 N_0；和(2)在宇宙過去的歷史中星系平均產生宇宙線能量的非恒定速率 dE/dz，導出今天宇宙中平均能量密度的表達式。[在紅移 z 的範圍 dz 內，星系平均來說把能量 $(dE/dz)\,dz$ 釋放給宇宙線。]

練習 29.8　天空被星系覆蓋的部分

假設類星體的紅移是宇宙學的。設今天在宇宙中單位物理體積的星系數爲 N_0，並且假設自從 $z \geq 7$ 的紅移以來沒有星系被產生或毀滅。設 D 是星系的平均角直徑。試計算，在光線從紅移爲 z 的類星體傳播到地球期間，至少經過一個介乎其間的星系的幾率。［對這個問題的詳盡討論，見 Wagoner (1967)。］

第三十章　各向異性的和非均勻的宇宙學

§30.1　爲什麼宇宙是如此的均勻和各向同性？

本章全屬高階。

正文主要部分無需特殊的準備，雖則第27—29章是有幫助的。

框30.1包括更多的技巧性段落：對此，理想的準備是第4, 9—14, 21, 27—29章，加上§25.2；最少的準備是練習9.13, 9.14, 25.2，第21章直至§21.8，以及§27.8, §27.11, §29.2。

第30章並不是以後任何一章必需的準備。

前三章研究了 Friedmann 宇宙學模型以及它給出的宇宙及其演化的比較滿意的圖畫。本章敍述不太簡化的宇宙學模型，並利用它們着手回答問題：「爲什麼極爲簡單的 Friedmann 模型是令人滿意的？」試圖比最初的顯然回答——即該模型令人滿意是因爲它們與觀測不矛盾——更深入的探索一下這個問題。承認與觀測一致，我們還希望了解，為什麼物理學的規律要求（而不僅僅是容許）宇宙在大尺度上在很高的精度是均勻的和各向同性的。由於在1972年這個問題還不能確定性地回答，因此，許多讀者會認爲在第一次閱讀時不如略去本章爲好，並且只是在他們概觀了其他領域［例如黑洞（第33章），引力波（第35—37章），以及太陽系實驗（第40章）］的主要結果之後，再回到本章爲好。

研究非均勻和各向異性宇宙學的動機：爲什麼宇宙如此均勻？

這裏所描述的對於「爲什麼宇宙如此高度對稱？」問題的研究，是要詢問，如果宇宙是從高度不規則開始的，那麼根據 Einstein 方程將會發生什麼。

這種研究的第一步，是回答，如果宇宙是從一點點不規則開始的，那麼將會發生什麼。這個問題可以通過分析偏離高度對稱的 Friedmann 模型的小擾動來解決。這種分析能夠卓有成效的討論星系形成的開始，並且這種分析有能力把今天微波背景輻各向異性的微小上限與100億年之前發射這射個輻射時可

能存在的密度和溫度不規則性的限度聯系起來。這些研究在 Zel'dovich 和 Novikov (1974) 的書中有極好的敍述［也可參看 Field (1973), Peebles (1969), Peebles 和 Yu (1970), Jones 和 Peebles (1972)，以及其中所引文獻］，此處從略。

另一種研究允許較大的偏離 Friedmann 宇宙的對稱性，但是只把不對稱性置於幾個自由度。

§30.2　各向異性宇宙的 Kasner 模型

Kasner 度規：各向異性宇宙的一個例子

在幾個自由度具有很大不對稱性的宇宙學模型的典型是 Kasner (1921a) 度規，

$$ds^2=-dt^2+t^{2p_1}dx^2+t^{2p_2}dy^2+t^{2p_3}dz^2, \tag{30.1}$$

Schücking 和 Heckmann (1958) 首先把它作爲一個宇宙學模型來研究。在此度規中，p_i 是滿足下式的常數

$$p_1+p_2+p_3=(p_1)^2+(p_2)^2+(p_3)^2=1。 \tag{30.2}$$

這個宇宙學模型的每一個 $t=$常數的超曲面是一個平直的三維空間。恒定 x, y, z 的世界線是類時短程線，可以設想星系或其他物質（作爲試驗粒子處理）沿着這些短程線運動。這個模型表示一個膨脹着的宇宙，因爲體積元

$$\sqrt{-g}=\sqrt{{}^{(3)}g}=t$$

是恒定地增大的。但它是一個各向異性地膨脹着的宇宙。兩個標準的（恒定的 x, y, z）觀測者之間的分離是 $t^{p_1}\Delta x$，如果只是它們的 x 坐標不同。於是，平行於 x 軸的距離以一個速率膨脹，$l_1\propto t^{p_1}$，而沿 y 軸的距離則可以不同的速率膨脹，$l_2\propto t^{p_2}$。或許，最值得注意的事實是，沿着某一個軸，距離是收縮而不是膨脹。這個矛盾在數學上是由下述事實顯示出來的，即 (30.2) 式要求 p 之一，例如 p_1，是非正的：

$$-\frac{1}{3}\leq p_1\leq 0。 \tag{30.3}$$

結果，在這類宇宙中，如果在某一時刻 t 發射黑體輻射並且此後決不散射，則稍後，觀測者將在天空的一對相對的極附近看到紫移，而在絕大多數其他方向上看到紅移。根據這個例子，基本的宇宙問題是，與這個 Kasner 度規相比，爲什麼 Friedmann 度規是眞實宇宙的更精確的近似。

§30.3 各向異性的絕熱冷却

尋找答案，回答問題。特別是回答，一個宇宙，具有 (30.1) 式 Kasner 度規所描述的形式從 $t=0$ 附近開始，它將變成什麼。這個度規是眞空 Einstein 方程 $G=0$ 的精確解 。 它近似於這個情況 ： Einstein 方程中的物質項與 Riemann 張量的典型非零分量相比 ，可以忽略。 Schücking 和 Heckmann (1958) 給出了包括物質作爲無壓流體的解 。 在這種情況，空的空時的曲率支配了幾何以及早期 $t\longrightarrow 0$ 的膨脹率兩者；但在某個特徵時間 t_m 後，物質項變得較爲重要，並且度規漸近地化爲 $k=0$ 的均勻各向同性模型。

具有物質的 Kasner 度規在「老年」變得各向同性

這個例子說明宇宙在老年達到各向同性和均勻性量度的可能性，即使它是在高度不規則狀態中誕生的。在1972年，對於沿着這些路線能否解釋我們宇宙的對稱性，還不清楚。模型宇宙只是提出一種暗示，尤其是因爲臨界參量 t_m 能給出不管是什麼樣的任意值。

這個模型的標準 Einstein 廣義相對論物理學，可以用其他的語言來描述 (Misner, 1968) ， 即認爲空的空時的各向異性運動是由 「有效能量密度」 $\rho_{\text{各向異性}}$ 引起的，它以與物質-能量密度同樣的地位進入 Einstein 方程的 G_{00} 分量之中，因而有助於說明宇宙的膨脹

各向異性能量

$$H^2=\left(\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\ln\sqrt{{}^{(3)}g}\right)^2=\frac{8\pi}{3}(\rho_{\text{各向異性}}+\rho_{\text{物質}})。\qquad(30.4)$$

發現各向異性能量密度具有的狀態方程爲

$$\rho_{\text{各向異性}}\propto {}^{(3)}g^{-1}=(\text{體積})^{-2},$$

而

$$\rho_{\text{物質}}\propto {}^{(3)}g^{-\gamma/2}=(\text{體積})^{-\gamma}。$$

對於無壓的物質 $\gamma=1$ ； 對於輻射流體 $\gamma=4/3$ ； 對於非相對論性理想氣體 $\gamma=5/3$.

各向異性的絕熱冷却

Einstein 方程的這種安排允許人們設想各向異性運動好像正在由於宇宙膨脹而被絕熱地冷却，正如理想氣體的熱運動那樣。由於均勻各向異性的絕熱指數是 $\gamma=2$ 在高度壓縮狀態中各向異性將支配「有效能量」的根源，反之，在膨脹狀態中物質將占支配地位。

§30.4 各向異性的黏滯耗散

通過引入把各向異性能量轉換爲熱能的耗散機制，進一步精心雕鑿上面概述的模型宇宙。假設這樣一個各向異性的宇宙在某一時刻充滿了熱輻射。如果

這種輻射是無碰撞的或近似無碰撞的，則沿平行於收縮的 x 軸運動的量子將紫移，並發展爲相應於高溫的能量分布。而沿平行於其他（膨脹的）軸運動的量子將紅移到相應於低溫的能量分布。在兩個這樣的粒子系統之間發生的任何碰撞將在其間引入「熱接觸」，並將使能量從熱的系統傳輸到冷的系統，同時相應的產生較大的熵。這提供了一個不可逆的耗散過程，它減少了 $\rho_{\text{各向異性}}$，增大了 $\rho_{\text{輻射}}$——相對於它們在絕熱膨脹條件下所應具有的值。［進一步的細節，參看，例如，Matzner 和 Misner (1972)。］

各向異性的絕熱冷却和各向異性的耗散兩者，通過它們對幾乎無碰撞的量子氣的作用，在我們宇宙的演化中扮演重要的角色，這是可能的。特別是，中微子在 10^{10} 開以上所經歷的充分的 ν-e 散射，會在宇宙生命的最初幾秒鐘，提供强有力的耗散。

§30.5　各向異性宇宙中粒子的創生

通過各向異性的膨脹創生粒子

在膨脹的宇宙中，絕熱冷却和黏滯耗散可能並不是各向異性的主要破壞者。更强有力的還可能是另一種高度耗散的過程，它可能出現在非常接近初始「奇點」的更早時期。這是一種粒子創生的過程，它是首先由 Dewitt (1953) 論述的，然後，Parker (1966 和 1969) 爲各向同性宇宙學研究了它，最後 Zel'dovich (1970) 從各向異性宇宙學的目前這個方面研究了它。在這個過程中，作爲最簡單的例子，人們再一次回到 Kasner 度規，但現在量子力學的考慮進入了畫面。人們認識到，不僅在不同方向傳佈的眞實量子會受到紅移和紫移，而且還必須同樣考慮虛量子。眞空漲落（零點振蕩）遺留下某些最少量的虛量子，它受到强引力場的紅移和紫移作用。紫移足夠劇烈的虛量子由於它們所獲得的能量可以物質化爲眞實的粒子。在這方面「足夠劇烈」意味着非絕熱地。

在絕熱膨脹中，儘管每一個粒子的能量改變了，但粒子數並不改變。這個絕熱極限正是波動方程的幾何光學近似，它已在 §22.5 討論過。人們在那裏看到，如果空時在波長的尺度上不平直，則波動方程不能用具有粒子數守恒的粒子描述代替。因而，絕熱極限（幾何光學近似）在宇宙初始時在奇點附近高曲率的條件下被破壞了。

在Kasner 背景度規下研究波動方程，Zel'dovich 和 Starobinsky (1971) 定量地得出在奇點附近絕熱近似失效的結論。經典地說，波的振幅（其頻率與

任何給定時代的 Hubble 常數可相比擬）的增大比簡單的紫移計算所意味的要快（經參量共振放大了）。量子力學地說，適用於零點振蕩的同樣的放大導致粒子-反粒子對的創生。計算表明，這種效應在特徵時間 $t_q=\sqrt{G\hbar/c^5}\simeq10^{-43}$ 秒是極爲强烈的。（當這個效應變得强烈時，即對 $t\lesssim t_q$，迄今爲止所作的全部計算是不充足的。）

對於無質量粒子的創生，它實質上是以各向異性膨脹着的宇宙爲先決條件的（除去標量粒子（scalar particle），這種粒子的創生已在 Friedmann 宇宙中出現，除非粒子滿足保形不變量的波動方程）。各向同性的 Friedmann 宇宙全都是保形地平直的，因此對於零靜止質量的場，波動方程的解可以用平直空間波動方程的解給出，那裏是沒有粒子創生的。甚至在各向同性 Friedmann 宇宙中也會有某些粒子創生，如果該粒子具有有限的靜止質量和低能量。然而，正常的粒子創生過程把各向異性能量作爲能量補充，以便轉換爲輻射能。

各向異性可能創生我們的宇宙所含的物質，各向異性自身在此過程中削弱了

Parker 和 Zel'dovich 的先驅性工作設想，人們詳盡研究的宇宙學模型的初始條件是一個奇點，其中在 $t=t_q$ 時刻附近的量子效應耗散了全部各向異性，並同時產生模型所含的物質。這種研究方案，在它的初期，似乎需要把物理學的規律外推到看來非常自然但却令人感到荒謬地小的尺度 $\sqrt{G\hbar/c^5}\simeq10^{-43}$ 秒上，或等價地外推到 $\sqrt{G\hbar/c^3}\sim10^{-33}$ 厘米上。

§30.6 非均匀的宇宙學

非均匀的宇宙學模型

(1)具有球對稱性

上面討論的模型宇宙儘管各向異性但却全都是均匀的。研究非均匀的宇宙學模型也是至關緊要的，其中，度規非平庸的依賴於空間坐標。這種模型有一類是球對稱的宇宙，其中物質密度、膨脹率以及全部其他可局域測量的物理量都對某一個優先的原點具有球對稱性。這類模型首先是 Lemaitre (1933a,b), Tolman (1934b), 和 Datt (1938) 考慮的，在1947年也被 Bondi 論述過。這些模型提供了研究大振幅密度擾動的方法。

(2)具有（對稱的）引力波

一種新的工具能夠研究具有其他對稱性的大振幅的、空間變化的曲率擾動；這種工具就是 Gowdy (1971,1973) 度規。這些度規是 Einstein 方程的精確解，表示具有不同拓撲 (S^3, $S^1\times S^2$, T^3) 包括引力波的閉宇宙。在這些解中，波的形式實質上是任意的，但全部波都沿單一的優先方向傳播並具有共同的偏振。

(3)接近奇點，具有很少的對稱性或沒有對稱性

Khalatnikov, Lifshitz 及其同事發展了一種不同的方法，以了解Einstein 方程非均匀和各向異性解的行爲。他們認爲，與其截短 Einstein 理論，限於

注意可得出精確解的特殊情況，不如試圖研究解的最廣泛可能的類型，但只在最接近奇點處描繪它們的行爲。這些研究表明，在某些精確解中所發現的現象實際上是許多更廣泛類型的解的典型，從而大大提高了某些精確解的意義。

因此，在第一大類解的研究中 [Lifshitz 和 Khalatnikov (1963)] 發現，奇點附近包含的物質的解所顯示的特徵都是在眞空解中已經有的。而且，Einstein 方程中的空間微商在這些解的奇點附近變得可以忽略。結果，一個 Kasner 形式的度規 [(30.1) 式] 描繪了奇點附近空時的局域行爲，但在奇異超曲面的每一點上可能有一組不同的 p_i 值。此後，奇點附近解的更廣泛研究 [Belinsky 和 Khalatnikov (1970)] 表明混主宇宙 [Misner (1969b); Belinsky, Khalatnikov, 和 Lifshitz (1970)] 對於奇點的行爲而言，是比 Kasner 度規更好的均勻範例。

§30.7 混主宇宙

混主宇宙

(1)用 Kasner 模型解釋「各向異性振蕩」

混主宇宙的最簡單例子在框 30.1 中敍述。它表明，在奇點附近，Kasner 指數 p_i 怎樣變爲時間的函數。這個結果用 Khalatnikov-Lifshitz 參量 u 描述是極爲簡單的：

$$\begin{aligned} p_1&=-u/(1+u+u^2)\,,\\ p_2&=(1+u)/(1+u+u^2)\,,\\ p_3&=u(1+u)/(1+u+u^2)\,。\end{aligned} \tag{30.5}$$

隨着把時間外推回奇點，人們發現，在三個主要方向上的膨脹率相應於 Kasner 度規 (30.1) 式的那些分量，p_i 值相應於某個確定的 u 參量。然而，在這些混主模型中，度規並非與空間坐標無關（例如，類空超曲面具有與閉 Friedmann 宇宙同樣的三維球拓撲）。

在確定的 u 的類 Kasner 行爲，在度規空間微商的效應開始起作用之前，可以持續經過體積膨脹的許多個十年。然後，空間曲率起的作用是簡短的決定性的。膨脹從相應於參量值 $u=u_0$ 的類型轉化到了相應於參量值 $u=-u_0$（在重新標記軸之後，它等價於值 $u=u_0-1$）的類型。更進一步外推回奇點，人們發現在此之間還有 $u=u_0-2$ 的時期。縱貫全部序列 $u=u_0$，u_0-1，u_0-2，u_0-3，……且 $u_0\geqslant 1$，全部體積膨脹近似地歸爲在 3-方向上的膨脹，而1-方向和2-方向的變化極小，每一步在膨脹和收縮之間交替。然而，在足夠

遠的過去，這種序列導致 u 值在 0 和 1 之間。經過 $u \longrightarrow 1/u$ 的變換（它把軸 2 和軸 3 的名稱互換了），可以把這個值解釋爲另一類似序列的起點。

(2)作爲奇點附近一般行爲的範例

因此，把宇宙的演化外推回 $t=0$ 的奇點，顯示了非常複雜的行爲，其中類似的但並非等同的行爲序列無限多次的重複着。用近似爲 $\log(\log t^{-1})$ 的時間變量，這些行爲是準周期性的。在 Khalatnikov-Lifshitz 方法所導致的一般例子中，人們有一個度規，它在奇點附近的漸近行爲是在奇異超曲面的每一點上都由混主類行爲所描述。但是，在每一步膨脹中主軸的方向以及它們的作用（由 u 參量表徵）會隨之變化，並且混主參量空間可變。［更詳盡的討論見Belinsky, Lifshitz 和 Khalatnikov (1971), 以及 Ryan (1971,1972)。］

在奇點附近是否存在任何其他一般類型的行爲？

還不知道 (1972) 是否存在着其漸近奇點的行爲並不由 Khalatnikov-Lifshitz 一般情形描述的而與宇宙學問題有關的重要解或解的類型。此處，確切估計的困難在於，Khalatnikov 和 Lifshitz 採用的實質上是局域的方法，限制在單一的小塊坐標中，而要作出的估計則實質上是作爲總體問題提出來的。然而，總體的研究（在第34章敍述）並未對奇點的性質提供任何可供比較的描述，而只證明了它的必要性。Eardley, Liang 和 Sachs (1972) 的工作試圖從技巧和內容上爲這些差異建立橋樑。

（接第815頁）

框 30.1 混主宇宙學

混主宇宙學是一個有價值的例子。如 §30.7 所描述的那樣，它顯示了奇點的行爲；能說明已知的絕大多數一般例子的絕大多數特徵。特別是，它揭示了怎樣把空的空間的性質與彈性固體聯繫起來，這在宇宙學奇點附近變得明顯了。

本框給出了這個例子的數學線索，還說明了把變分原理用於 Einstein 方程來闡明這些方程的解的若干重要技巧。混主例子還可用來提供超空間概念以及引力定律量子闡述的簡單例子。

一個廣義的 Kasner 模型

爲了從宇宙學奇點的 Kasner 例子 (30.1) 前進到混主例子，必須作兩個推廣。第一是允許更普遍的時間依賴關係，而保留關於指數 p_i 條件 (30.2) 的某些簡單性。注意這些指數滿足例如 $p_2 \equiv d\ln g_{22}/d\ln g$。因此，可把3×3空間度規參量化爲

$$g_{ij} = e^{2\alpha}(e^{2\beta})_{ij} \qquad (1)$$

或等價地化爲 $(\ln g)_{ij} = 2\alpha\delta_{ij} + 2\beta_{ij}$，其中 β_{ij} 是無迹的、3×3對稱矩陣，而指數是矩陣的冪級數，故 $\det e^{2\beta} = 1$ 和

$$\sqrt{g} = e^{3\alpha}。 \qquad (2)$$

這一段的目的只是定義 $p_{ij} = d(\ln g)_{ij}/d\ln \det g$。

然後，由(1)和(2)式，算出

$$p_{ij}=\frac{1}{3}[\delta_{ij}+(d\beta_{ij}/d\alpha)]; \qquad (3)$$

因此，Kasner 條件之一

$$1=\sum_i p_i\equiv \text{迹}\ p_{ij}=1+\frac{1}{3}\text{迹}(d\beta/d\alpha)$$

是一個考慮到迹$\beta_{ij}=0$的恒等式。加在 Kasner指數上的第二個條件是迹$(p^2)=1$，並由(3)式變成$(d\beta_{ij}/d\alpha)^2=6$。這並不是一個恒等式，而是 Einstein 方程在空的空間的結果。對於（Bianchi I 類）度規

$$ds^2=-dt^2+e^{2\alpha}(e^{2\beta})_{ij}dx^i dx^j, \qquad (4)$$

並且在 β_{ij} 爲對角的情形，Einstein 方程爲

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2=\frac{8\pi}{3}[T^{00}+\frac{1}{16\pi}(d\beta_{ij}/dt)^2] \qquad (5)$$

和

$$e^{-3\alpha}\frac{d}{dt}\left(e^{3\alpha}\frac{d\beta_{ij}}{dt}\right)=8\pi\left(T_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}\right), \qquad (6)$$

以及包括 T_{kk} 的多餘方程和 $T_{0k}=0$。（此處的骨强分量指的是具有基 1-形式 $\omega^i=e^{\alpha}(e^{\beta})_{ij}dx^j$ 的正交歸一系。）由(5)式，即可導出

$$\rho_{\text{各向異性}}\ (\text{I})=(c^2/16\pi G)(d\beta_{ij}/dt)^2 \qquad (7)$$

如（30.4）式，在與物質能量可相比較的基礎上，(7)式表明 I 類各向異性對 Hubble 常數 $H=d\alpha/dt$ 貢獻的有效性。類似地，對於(6)式，在流體物質（各向同性壓强）情形下，骨强項爲零，得出 $\rho_{\text{各向異性}}\ (\text{I})\ e^{6\alpha}=$常數，正如（30.4）式以下的方程那樣。每當 $T^{00}<\rho_{\text{各向異性}}$ 時，即可由(5)式導出 Kasner 條件 $\Sigma p_i^2=1$ 或 $(d\beta_{ij}/d\alpha)^2=6$。

在對角情形，β_{ij} 只有兩個獨立的分量；有時用參量化法把它們明確地定義是方便的

$$\begin{aligned}\beta_{11}&=\beta_+ +\sqrt{3}\beta_-,\\ \beta_{22}&=\beta_+ -\sqrt{3}\beta_-,\\ \beta_{33}&=-2\beta_+。\end{aligned} \qquad (8)$$

對此，Kasner 條件 $(d\beta_{ij}/d\alpha)^2=6$ 變爲

$$(d\beta_+/d\alpha)^2+(d\beta_-/d\alpha)^2=1。 \qquad (9)$$

$\beta_\pm$ 與 Kasner 指數 p_i 或 (30.5) 式的 u 參量的關係爲

$$\begin{aligned}d\beta_+/d\alpha&=\frac{1}{2}(1-3p_3)\\ &=-1+(3/2)(1+u+u^2)^{-1}, \qquad (10)\\ d\beta_-/d\alpha&=\frac{1}{2}\sqrt{3}(p_1-p_2)\\ &=-\frac{1}{2}\sqrt{3}(1+2u)(1+u+u^2)^{-1}。\end{aligned}$$

引入空間曲率

推廣 Kasner 度規的第一步曾主要注意了「速度」 $\beta'\equiv(d\beta_+/d\alpha,\ d\beta_-/d\alpha)$，它是各向異性相對於膨脹的微商。物質的效應，或者如即將出現的空間曲率的效應，可以使 $\|\beta'\|$ 的大小從 Kasner 的單位值改變。推廣的第二步是引入空間曲率。對此，可在一簡單例子中完成，即保留(1)式的度規分量，並在一非完整基中使用它們。把在練習 9.13 和 9.14 中引入的基矢量用於轉動羣 $SO(3)$，它的對偶 1-形式爲

$$\begin{aligned}\sigma^1&=\cos\psi d\theta+\sin\psi\sin\theta d\phi,\\ \sigma^2&=\sin\psi d\theta-\cos\psi\sin\theta d\phi,\\ \sigma^3&=d\psi+\cos\theta d\phi,\end{aligned} \qquad (11)$$

以構成度規

$$ds^2=-N^2dt^2+e^{2\alpha}(e^{2\beta})_{ij}a^i a^j, \qquad (12)$$

式中 N, α, 和 β_{ij} 只是 t 的函數。當 $\alpha=0=\beta_{ij}$

時，此處的三維空間度規化爲在練習 13.15 中研究過的那一個，它是在羣空間 $SO(3)$ 上具有最高對稱性的度規。單連通覆蓋空間具有三維球拓撲，並可通過擴展 Euler 角Ψ的範圍給予它 4π 的周期而得出［$SU(2)$ 或自旋 $\frac{1}{2}$ 覆蓋轉動羣］。取$N=1$, $\frac{1}{2}a=e^{\alpha}$, 和 $\beta_{ij}=0$，由(12)式得出與練習14.4以及與第27章討論閉 Friedmann 宇宙學模型時所論述的同樣的度規（在不同坐標中）。β_{ij} 的非零值允許三維球在三個相互正交的主要方向的每一個方向的大圓上有不同的圓周，從而破壞了它的各向同性，但並未破壞它的均勻性。

讓我們只考慮 β_{ij} 對角的情形，如同在(8)式所作的那樣。從而 T^{00} Einstein 方程變爲（$N=1$ 作爲一個時間坐標的條件）

$$3(\dot{\alpha}^2-\dot{\beta}_+^2-\dot{\beta}_-^2)+\frac{1}{2}({}^3R_{1X})=8\pi T^{00}, \quad (13)$$

式中只有項

$${}^3R_{1X}=\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\,\text{迹}(2e^{-2\beta}-e^{4\beta}) \qquad (14)$$

與(5)式不同。這項［見 (21.92) 式］是三維薄片 $t=$常數的標量曲率［對於(11)和 (12) 式的度規，它具有所謂「Bianchi IX 類」對稱性質］。如果把 (13) 式的 T^{00} 解釋爲各向異性能量密度對體積膨脹 $\dot{\alpha}^2$ 的貢獻，那麼就不僅有動能項 $\dot{\beta}^2$［如(5)式和(7)式中那樣］；而且還有勢能項。這項表明，負的標量曲率［它可以由各向異性($\beta\neq 0$)產生］等價於正的勢能［或「內」能］，並且暗示空的空間具有類似於彈性固體的性質並反抗切向脅變。循此所作的更詳盡分析表明，在奇點附近，當標量曲率爲正時總是可以忽略的。

然而，在這個閉宇宙中負曲率是由奇點附近大的切(β)變產生的並變大到足以使一個 Kasner 切向運動［u 值，等等；(10)式］反向，把它變爲另一個。

從原則上講，這些結論以及「混主」度規 (11.12) 時間演化的進一步細節，需要研究全部 Einstein 方程，而不只是 T^{00} 的(13)式。然而，如第 21 章所描述的那樣，這個 T^{00} 約束方程是主要的，並且當正確地用公式表示時實際上明顯地包含了 Einstein 方程的全部內容。

變分原理

此處採用的一種適當的闡述方式，它不把(13)式當作能量方程（涉及速度）來處理，而是當作 Hamilton 方程（涉及動量）來處理。取 Einstein 變分原理 (21.15) 式的 ADM 形式 (21.95)式，並作空間積分，利用

$$\int \sigma^1\wedge\sigma^2\wedge\sigma^3=\int \sin\theta d\phi\wedge d\theta\wedge d\phi=(4\pi)^2,$$

得出下述形式的作用量積分

$$I=(\pi)\int\left\{\pi^{ij}dg_{ij}+Ne^{3\alpha}\left[{}^3R_{1X}+e^{-6\alpha}\left(\frac{1}{2}(\pi^l{}_l)^2-\pi^{ik}\pi_{ik}\right)\right]dt\right\}。 \quad (15)$$

當引入 g_{ij} 的特殊形式(1)和(8)時，把對角矩陣 $\pi^i{}_k$ 參量化如下是方便的：

$$\begin{aligned} p_\alpha&=(2\pi)\pi^k{}_k,\\ p^i{}_k&=(2\pi)\left(\pi^i{}_k-\frac{1}{3}\delta^i{}_k\pi^l{}_l\right), \end{aligned} \quad (16)$$

且

$$\begin{aligned} 6p^1{}_1&=p_++p_-\sqrt{3},\\ 6p^2{}_2&=p_+-p_-\sqrt{3},\\ 6p^3{}_3&=-2p_+ \end{aligned} \quad (17)$$

［見(8)式］。結果是

$$I=\int p_+d\beta_+ + p_-d\beta_- + p_\alpha d\alpha - \frac{Ne^{-3\alpha}}{24\pi}[-p_\alpha^2+p_+^2+p_-^2 - 24\pi^2e^{6\alpha}({}^3R_{1X})]dt。$$

爲了進一步研究，它可清理如下。寫出

$${}^3R_{1X}=\frac{3}{2}e^{-2\alpha}(1-V)\,, \qquad (18)$$

其中

$$V=V(\beta)=\frac{1}{3}迹(1-2e^{-2\beta}+e^{4\beta}) \qquad (19)$$

因此 $V(0)=0$；並調整 α 的零值（$\alpha\longrightarrow\alpha-\alpha_0$）使 $e^{2\alpha}\longrightarrow(6\pi)^{-1}e^{2\alpha}$。從而度規爲

$$ds^2=-N^2dt^2+(6\pi)^{-1}e^{2\alpha}(e^{2\beta})_{ij}\sigma^i\sigma^j\,, \qquad (20)$$

變分積分爲

$$I=\int p_+d\beta_+ + p_-d\beta_- + p_\alpha d\alpha - (3\pi/2)^{1/2}Ne^{-3\alpha}\mathcal{H}dt\,, \qquad (21)$$

其中

$$2\mathcal{H}\equiv -p_\alpha^2+p_+^2+p_-^2+e^{4\alpha}(V-1)。 \qquad (22)$$

要求對 $p_\pm, p_\alpha, \beta_\pm, \alpha, N$ 的任意獨立變分 $\delta I=0$ 以得出 Einstein 方程。變化 N，得出基本的約束方程 $\mathcal{H}=0$［如果强加上坐標條件 $N=1$，則當動量代之以速度（通過變化 p 得出方程）時，它將化爲(13)式的眞空形式。］

ADM Hamilton 函數

把這種變分原理化爲正則(Hamilton 函數)形式的標準 ADM 描述是選擇場變量之一或動量爲時間坐標，並爲其共軛 Hamilton 函數求解約束。此處，一種明顯的和令人滿意的選擇是讓 $t=\alpha$，並對

$$H_{\mathrm{ADM}}=-p_\alpha=[p_+^2+p_-^2+e^{4\alpha}(V-1)]^{1/2} \qquad (23)$$

求解 $\mathcal{H}=0$。$\dot{\alpha}$ 方程［變化(21)式中的 p_α］爲

$$\dot{\alpha}=-(3\pi/2)^{1/2}Ne^{-3\alpha}p_\alpha \qquad (24)$$

並指出，選擇 $\alpha=t$（由此 $\dot{\alpha}=1$）要求

$$N_{\mathrm{ADM}}=(2/3\pi)^{1/2}e^{3\alpha}/H_{\mathrm{ADM}}。 \qquad (25)$$

當用(23)式消去 p_α 時，由此得出簡化的正則的變分原理爲 $\delta I_{約化}=0$，其中

$$I_{約化}=\int p_+d\beta_+ + p_-d\beta_- - H_{\mathrm{ADM}}d\alpha \qquad (26)$$

並應以(25)式補充。

超 Hamilton 函數

此處，一種更方便的方法是這樣的，它與 Dirac Hamilton 函數方法的關係比與 ADM 更爲密切。但是，注意，不能把遞降函數取作坐標的某個特定函數 $N(t)$ 來除去其中的任意性。作爲此處採用方法的替代，可選取 N（坐標條件！）爲場變量和動量的某個選定的函數 $N=N(\alpha, \beta_\pm, p_\alpha, p_\pm)$，從變分原理(21)式中消除它。任何這種選擇，代入(21)式時，會遺留下一個正則 Hamilton 函數形式的變分積分。爲使新的變分原理的內容變得與原來的等價，只需要補充上約束

$$\mathcal{H}=0\,, \qquad (27)$$

它不能再由變分原理導出。［對於這兩個原理，其他 Euler-Lagrange 方程的不同僅在與 $\mathcal{H}$ 成正比的項，因而，當把 $\mathcal{H}=0$ 强加在初條件上時

，是等價的。］選擇

$$N=(2/3\pi)^{1/2}e^{3\alpha} \tag{28}$$

是顯然的和方便的。它使$\mathcal{H}$在由此得出的變分原理

$$I=\int p_+d\beta_+ + p_-d\beta_- + p_\alpha d\alpha - \mathcal{H}d\lambda \tag{29}$$

中變爲超 Hamilton 函數，式中 $t\equiv\lambda$ 曾經用來標誌(28)式所包含的特殊的時間坐標選擇。

混主動力學

如果把沒有附加自由度的物質項包括進來，則(29)式中的超 Hamilton 函數可以簡單地修正。作爲一個例子，在時間軸爲 $\mathbf{e}_0=N^{-1}(\partial/\partial t)$ 的參照系中，選擇

$$T^{00}=-T^0{}_0=(3/4)^2(\mu e^{-3\alpha}+\Gamma e^{-4\alpha}) \tag{30}$$

爲物質的能量密度。這兩項分別表示非相論性的理想流體（$\rho\propto V^{-1}$）和輻射流體（$\rho\propto V^{-4/3}$），並導致

$$2\mathcal{H}=-p_\alpha{}^2+p_+{}^2+p_-{}^2+e^{4\alpha}(V-1)+\mu e^{3\alpha}+\Gamma e^{2\alpha}。 \tag{31}$$

這個 Hamilton 函數，以及它對動量的簡單二次依賴關係，與初等力學的 Hamilton 函數只有兩方面不同，即(1) $p_\alpha{}^2$ 項的符號，以及(2)作爲 α 和 $\beta_\pm$ 函數的「勢」項的細緻形式，對它的研究化爲對函數 $V(\beta)$ 的研究。變化(29)式中的 α, $\beta_\pm$, p_α, 和 $p_\pm$, Hamilton 方程得出

$$\frac{d^2\beta_\pm}{d\lambda^2}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\beta_\pm}=-\frac{1}{2}e^{4\alpha}\frac{\partial V}{\partial\beta_\pm} \tag{32}$$

和

$$\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}=+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\alpha}=2e^{4\alpha}(V-1)+\frac{3}{2}\mu e^{3\alpha}+\Gamma e^{2\alpha}。 \tag{33}$$

因而 $p_\alpha{}^2$ 項的符號造成 α 向着（而不是離開）「勢」項 $e^{4\alpha}(V-1)+\mu e^{3\alpha}+\Gamma e^{2\alpha}$ 的更高值加速。當 $|V|\ll 1$（微小的各向異性）時，(33)式等同於它在各向同性 Friedman 模型中的形式，並且，僅當 α 大到足以使正的曲率項（$-e^{4\alpha}$）比物質項（$\mu e^{3\alpha}$）和輻射項（$\Gamma e^{2\alpha}$）占優勢時，才允許減速。接近奇點（$\alpha\longrightarrow-\infty$）時，正的曲率項與輻射項和物質項相比，總是可以忽略的。

爲了研究奇點的行爲，研究簡化的超 Hamilton 函數

$$2\mathcal{H}\sim -p_\alpha{}^2+p_+{}^2+p_-{}^2+e^{4\alpha}V(\beta), \tag{34}$$

就足夠了，因爲對於 $\alpha\longrightarrow-\infty$ 其他項顯然爲零。這種形式只在 ${}^3R_{1X}=\frac{3}{2}e^{-2\alpha}(1-V)$ 中保留 V 項，當這個閉宇宙的曲率變爲負值時，V 項占支配地位，$V\gg 1$。如果 $V(\beta)$ 項也可忽略，則 $\mathcal{H}=-p_\alpha{}^2+p^{+2}+p^{-2}$ 將使每一個 p_α，$p_\pm$ 不變，從而如所預料的那樣（因爲物質和曲率已略去）給出 Kasner 行爲

$$d\beta_\pm/d\alpha=p_\pm/p_\alpha=\text{常數}$$

以及 $|d\boldsymbol{\beta}/d\alpha|^2=1$。再進行下去，需要在(19)式和(8)式的基礎上研究 $V(\beta)$，立刻得到結果

$$V(\beta)=\frac{1}{3}e^{-8\beta_+}-\frac{4}{3}e^{-2\beta_+}\cosh 2\sqrt{3}\beta_- +1+\frac{2}{3}e^{4\beta_+}(\cosh 4\sqrt{3}\beta_- -1)。 \tag{35}$$

人們發現，$V(\beta)$ 是一個正定的「勢阱」，它與

在 $\beta_+\beta_-$ 平面內的等邊三角形具有同樣的對稱性。在原點附近，$\beta_\pm=0$，等勢線是圓周，因爲

$$V(\beta)=8(\beta_+^2+\beta_-^2)+O(\beta^3)。\quad (36)$$

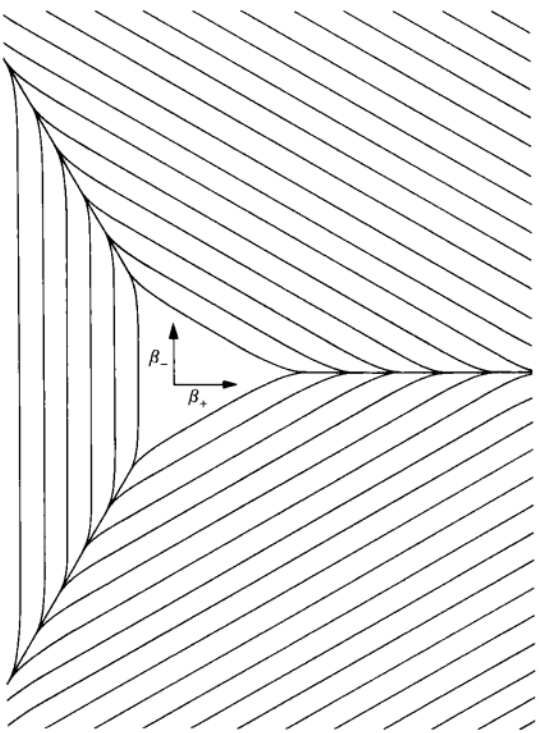
對於大的 β 值，得出

$$V(\beta)\sim\frac{1}{3}e^{-8\beta_+},\quad \beta_+\longrightarrow-\infty,\quad (37)$$

和

$$V(\beta)\sim1+16\beta_-^2e^{4\beta_+},\quad \begin{matrix}\beta_+\longrightarrow+\infty,\\ |\beta_-|\ll1。\end{matrix}\quad (38)$$

這兩種漸近形式與三角形的對稱性一起，給出了如圖所示的 $V(\beta)$ 的全部漸近描述，圖中，在分離爲 $\Delta\beta=1$ 的相繼的水平線上，勢 V 增大了 $e^8=3\times10^3$ 倍。



圖中示出按(37)式定義的 $V(\beta)$ 函數的某些等勢線，$V(\beta)=$常數。對於 $V<1$，在 β 平面原點附近的等勢線是閉曲線，此處從略。

「反跳」阻礙類 Kasner 步伐邁向奇點

$V(\beta)$ 勢的主要性質顯然是它的陡峭的（指數的）三角形牆，(37)式代表了所研究的典型之一。在勢牆的影響下，這個模型宇宙的演化由超 Hamilton 函數決定。

$$2\mathcal{H}\sim-p_\alpha^2+p_+^2+p_-^2+\frac{1}{3}e^{4(\alpha-2\beta_+)}。\quad (39)$$

如果 $\alpha\longrightarrow-\infty$ 且 $d\beta_+/d\alpha>1/2$ [憶及當(39)式中的末項很小時，$d\beta_+/d\alpha=$常數，$|d\beta/d\alpha|=1$]，則勢項增長並將最終變大到足以影響運動。通過超空間度規（動量二次項的係數）設想

的簡單「Lorentz」變換可以使計算進一步簡化。設

$$\bar{\beta}_+=\left(\beta_+-\frac{1}{2}\alpha\right)/\sqrt{3/4},$$

$$\bar{\alpha}=\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta_+\right)/\sqrt{3/4},$$

並求出

$$2\mathcal{H}=-\bar{p}_\alpha{}^2+\bar{p}_+{}^2+p_-{}^2+\frac{1}{3}\exp(-4\sqrt{3}\bar{\beta}_+)。 \tag{40}$$

對於這個超 Hamilton 函數，$\bar{p}_\alpha$ 和 p_- 兩者都是運動常數，而 $\bar{\beta}_+$-Hamilton 函數 $\bar{p}_+{}^2+\frac{1}{3}e^{-4\sqrt{3}\beta_+}$，表示對着一維勢牆的簡單反跳，$\bar{p}_+$ 的初值和終值只是符號不同。於是，各向異性參量 $\beta_\pm$ 在奇點附近的行爲構成了簡單的 Kasner 步伐（其中 $d\beta_\pm/d\alpha=$常數，且 $d\beta_+/d\alpha\geq\frac{1}{2}$，或相對於三面牆之一滿足的等價的對稱性條件），在對着該牆的一次反跳之後，開始了具有另一 Kasner 參量的新的 Kasner 步伐。〔這種行爲的最詳盡描述及其與更普遍的宇宙學模型的關係，可以在 Belinsky, Khalatnikov 和 Lifshitz (1970) 中找到——比較簡短的報導，參看 Khalatnikov和 Lifshitz (1970) —— 採用極爲不同的方法。Hamilton 函數方法的詳盡發展，它放棄了 Misner (1969b) 的偏 Lagrange 函數方法，可參看 Misner (1970, 1972a) 和Ryan (1972a, b)。〕

穩態的準周期的無限次「反跳」接近了奇點

奇點行爲的某些綜合特徵，包括許多類 Kasner 步伐在內，可以通過度規場參量空間（超空間）的另一種變換顯示出來。這個變換從 $\alpha\beta_\pm$ 空間的原點向外引入一個「徑向的」t 坐標，而關於這個超空間的度規性質則包含在超 Hamilton 函數的形式之中。於是，人們定義（對於任何恒定的 α_0）

$$\begin{aligned}\alpha_0-\alpha&=e^t\cosh\zeta,\\ \beta_+&=e^t\sinh\zeta\cos\phi,\\ \beta_-&=e^t\sinh\zeta\sin\phi,\end{aligned} \tag{41}$$

並求出。

$$2\mathcal{H}=e^{-2t}[(-p_t{}^2+p_\zeta{}^2+p_\phi{}^2\sinh^{-2}\zeta)+e^{2t}e^{4\alpha}V]。 \tag{42}$$

這個變換的優點是在 $t\longrightarrow\infty$（$\alpha\longrightarrow-\infty$，奇點）的極限下，勢項在一級近似下變得與 t 無關。於是，對於一個勢牆，(37)式給出，

$$e^{2t}e^{4\alpha}V\sim\frac{1}{3}e^{2t}\exp\left[4\alpha_0-8e^t\left(\sinh\zeta\cos\phi+\frac{1}{2}\cosh\zeta\right)\right]。 \tag{43}$$

當 $t\longrightarrow\infty$時，這個表達式顯然趨向於零或無窮大，這取決於表達式括號中的符號。因此，在扇形 $|\phi-\pi|<\pi/3$ 內，由

$$\tanh\zeta+\frac{1}{2}\sec\phi=0 \tag{44}$$

定義漸近的勢牆，並且，對於三角形的其他邊，有等價的公式，其中 ϕ 代之以 $\phi\pm(2\pi/3)$。結果，超 Hamilton 函數的漸近近似爲

$$2\mathcal{H}=e^{-2t}[-p_t{}^2+p_\zeta{}^2+p_\phi{}^2\sinh^{-2}\zeta+V'(\zeta,\phi)], \tag{45}$$

式中 $V'(\zeta,\phi)$ 在漸近牆 (44) 內爲零，在漸近牆外等於$+\infty$。因爲保留的對 t 的依賴關係在(45)式中是一個共同的因子，所以(29)式中獨立變量 $e^{-2t}d\lambda=d\lambda'$ 的簡單變化——等價於選取

$$N=(2/3\pi)^{1/2}e^{-2t}\exp[3(\alpha_0-e^t\cosh\zeta)] \tag{46}$$

來代替(28)式——給出了一個新的具有下述變分積分的超 Hamilton 函數 $\mathcal{H}'=e^{2t}\mathcal{H}$,

$$I=\int p_t dt+p_\zeta d\zeta+p_\phi d\phi-\mathcal{H}'d\lambda'。\quad(47)$$

在此漸近近似中，其中的

$$2\mathcal{H}'=-p_t^2+p_\zeta^2+p_\phi^2\sinh^{-2}\zeta+V'(\zeta,\phi),(48)$$

人們即可看出 p_t 是一個運動常數，而在此時間坐標 λ'（或 t，因爲 $dt/d\lambda'=-p_t=$ 常數）中 $\zeta\phi$ 值在漸近勢牆內的「反跳」是一個穩態的準周期過程，［在這個漸近超 Hamilton 函數基礎上所作的更詳盡研究表明，這種運動甚至是各態歷經的，即隨着 $t\longrightarrow\infty$, $\zeta\phi$ 無限多次的任意接近任何給定值；參看 Chitre (1972a)。］

總結

人們已經發現，在混主例子中奇點的行爲是異常活躍的。在簡單的 Kasner 奇點中，兩個軸坍縮了，但第三個軸却伴隨着體積的壓縮以簡單的潮汐式變形伸長了。但在混主例子中，每一次這種坍縮的努力都被它所包含的很高的負曲率所擊敗。或者，寧肯轉移爲另一種不屈不撓的繼續壓縮的努力，但潮汐式變形在對所有可能位形的無數次探查中，首先試圖形成一種位形，然後是另一種位形。

關於時間和奇點的思索

宇宙學的奇點（在所有的例子中，還不知道它的特徵是不穩定）包含着無窮大的曲率和無窮大的密度。因爲與此相關的預言指出：這些無窮大是在有限原時的過去出現的，並且還將——如果它們重新出現的話——在某個有限原時的將來再次出現，所以人們對這種理論預言感到格外地可憎。如果無窮大密度可以推移到無限遙遠的過去，那麼奇點的預言將比較可以容忍。這樣，像現在那樣，宇宙會發現它的自然狀態是一種膨脹，因此，在某個適當遙遠的過去時刻曾經歷過每一個有限的密度，而無限的密度則變成一種在演化進程中決不能實現的形式上的抽象。

從有限的過去排除無限的曲率可以用兩種方式達到。如果兩者中的任一存在的話，那麼還不知道是哪一種在起作用。一種方式是改變需要奇點的物理學的規律，或許只用明顯的和合乎需要的方式來改變它們，例如用適當的量子語言來表述引力的規律。然而，量子幾何學的計算還不很確定，並且某些(或許是不適當的)近似［Misner (1972a)］也並未除去奇點問題。

另一種拋棄奇點的方式是接受經典 Einstein 方程的數學，而用無限的過去時間重新解釋它。當然，有簡單而完全不恰當的方式來做到這一點，即作任意的坐標變換，諸如$t=\ln\tau$，它把$\tau=0$的奇點變成 $t=-\infty$ 的一個奇點。但是，一個任意的坐標是沒有意義的。問題在於，奇點出現在有限原時的過去，而我們知道，原時是最有物理意義的、物理上最眞實的時間。它相應於物理時鐘的滴答聲，量度着實際事件的自然節奏。爲了把有限的過去時間重新解釋爲無限的，人們必須在這些基礎上明確地抨擊原時，並聲稱它在物理上是不適當的。在一局域基上，其中狹義相對論成立，原時的物理意義無可詰難。在較爲整體的尺度上，原時的物理學身份需要審查一下。

「宇宙學奇點出現在百億年之前。」在這個陳述中，時間指的是沿着太陽系世界線的原時，歷書時。其次，如果它意味着從宇宙開始起，地

球已經繞太陽10^{10}圈，那麼，這個陳述最有最直接的物理意義。但原時並不是這樣與實際物理現象緊密聯繫的。這個陳述僅僅意味着，地球可能實際完成的 5×10^{9} 圈所給出的時間標準，已按規定的方式外推了，這樣，在太陽系形成之前，就斷言另外的 5×10^{9} 年具有給予的理論意義。

一只更經久耐用的標準鐘會改變論證的細節，但不會改變定性的結論。爲了用SI（國際制）秒解釋 10^{10} 年，要指定一段過去的歷史，它包括中性銫超精細躍遷的 3×10^{27} 次振蕩。但是，鐘的至關緊要的早期滴答（需要及時用實際的物理事件爲奇點定位）再一次迷失了。由恒星核聚變產生第一個銫所需要的時間在歷史的背景上取消了這個鐘的資格，並且更接近奇點的更早期的高溫將使全部銫電離，即使這些元素在日期上早於恒星。

因而，在奇點附近，原時不能直接依附於簡單而直接的物理現象，而只是煞費苦心的數學外推。每一個實際的鐘，它的「滴答」都要被一個適當的因子打折扣 —— 從地球-太陽系統的每圈 3×10^{7} 秒到銫躍遷每次振蕩的 1.1×10^{-10} 秒，等等。可以想像，沒有一個單獨的鐘（因爲它的有限大小和力量）能一路返回奇點，所以關於從奇點以來的原時的陳述，應涉及逐漸更小和更堅實的鐘的無限序列的概念，然後，它們的滴答還要打折扣和增添。這樣，「有限的原時」無需意味着可能的事件的任何有限序列。它可以在任何物理上可接受的歷史中描述無限個必然的事件（滴答），並用數學通過非局域收斂因子的作用轉換爲有限的求和，「折扣」適於把「滴答」轉換爲「原時」。

這裏，有所謂 Zeno 佯謬的概念顛倒。人們拒絕 Zeno 的設想，即擺的一次擺動是無限複雜的——組成半個周期，加上四分之一周期，加上 2^{-n} 以致無限——是因爲這些項在它的無限序列中是數學的抽象，而不是在一部劇本中必須演完的確確實實能夠完成的不連續動作。通過一個可以比較的標準，人們就可以不管作爲宇宙年齡的原時序列有限求和的數學抽象，只要能夠證明，在它過去的歷史中有無限個不連續的動作必須演完。在這兩種情形，通過在可實現的鐘上不連續滴答的計數可以判斷有限性，而不是通過評價不可實現的數學抽象的份量來判斷有限性。

根據這種尚待確定的標準，宇宙是否無限地古老呢。特別是，還須計算量子影響。決定性的問題是，每一個現代事件是否受無限多的以往的不連續事件的影響。在這種情形下，統計假設（大數，無規周相，等等）會以更强有力的方式進入宇宙學的理論之中。從這個意義上講，混主宇宙學模型並不具有無限多的過去的歷史，因爲從一個類 Kasner 運動到另一個的每一次「反跳」都是一個可以辨認的宇宙學事件，對此，必須認識到無限多介於任意有限的時代和奇點之間。

§30.8　微波背景的視界和各向同性

基本的宇宙學問題——「一個混沌地誕生的宇宙必定變得和我們的宇宙一樣的均匀和各向同性嗎，並且在生命形成之前就這樣嗎？」——留給人們進一步去爭論。爭論的是視界。如在 §27.10 中的討論那樣，在 Friedmann 宇宙膨脹的任何給定時代（例如，現代），宇宙可能有一些重要部分（其中沒有光訊號或其他引起傳播的影響），在從初始奇點以來可以利用的時間內，到達了地球。問題發生了，「如果我們能夠活得很長，那麼宇宙的這些新的部分，是否將在下一個百億年期間首次進入視野，並且統計地看來是否與已經看到的鄰近部分等同呢？」

Friedmann 宇宙中的視界

幸而，這個問題不只是爲將來提出來的。可以問某個過去的時間，而答案是：是的。從天空中所有方向到達地球的微波背景輻射具有幾乎完全相同的溫度。[Boughn, Fram 和 Partridge (1971) 以及 Conklin (1969) 的數據表明 $\Delta T/T \lesssim 0.004$。] 等離子體發射的微波輻射從天空中某一方向來到地球，另一等離子體發射的輻射從另一方向到達地球，前者在發射時代之前不可能與後者有因果聯繫。如果採用宇宙的 Friedmann 模型，那麼微波天空的不同扇形在下述意義下是彼此脫離的，即如果彼此的分離超過 30° 就認爲是脫離的，即使對於近代的 $z = 7$ 的微波發射也是如此。(如果微波最終散發到 $z = 1{,}000$，那麼這個臨界角要小得多。) 由此，人們斷定，宇宙均匀性和各向同性的基礎在宇宙變得接近於 Friedmann 之前很久就已經奠定了。因爲如果宇宙統計上的均匀性和各向同性在最長波長的更早期還沒有達到，那麼，當宇宙接近 Friedmann 狀態時，這些視界的極限將在大尺度上阻止條件的進一步同步化，從而現在應觀測到小幅度（10%）對各向同性的偏離。

觀測到的微波輻射的各向同性證明，均匀性的基礎在宇宙變成類Friedmann之前就已經奠定了

混主宇宙的名稱就是希望能對這個問題的解答有所貢獻。在混主宇宙奇點附近無數次偶然出現的非常大的 u 值，給出了接近 Kasner模型的幾何，且 $p_1 = 1$，$p_2 = p_3 = 0$。這個模型可以寫成下述形式

什麼東西使得宇宙均匀和各向同性？
(1)混主振蕩？——可能不是

$$ds^2 = e^{2\eta}(-d\eta^2 + dx^2) + dy^2 + dz^2, \qquad (30.6)$$

式中 $\eta = \ln t$。如果通過把 x, y, z 解釋爲各自具有 4π 周期的角坐標，將這個度規轉換爲閉宇宙模型，那麼人們看到光線可以在 x 方向在時間間隔 $\Delta\eta = 4\pi$ 內環繞宇宙，它通過因子 $\sqrt{-g_1}/\sqrt{-g_2} = e^{4\pi}$ 與體積膨脹對應。不幸的是，由此混主宇宙達到這個特定的 Kasner 形式程度和頻率的定量分析暗示，視界的打破不足以解釋宇宙的目前狀態 [Doroshkevich, Lukash 和 Novikov (1971);

(2)奇點附近創生粒子？ Chitre (1972)]。原來，在奇點附近創生的粒子可以解決這個視界問題，正像對各向異性耗散所提供的那樣。下述事實提供了希望，即當用純粹的經典項描述時，粒子的創生具有某些非因果聯繫的外貌，雖然在量子水準上它是嚴格的有因果聯繫的過程 [Zel'dovich (1972)]。

第七篇

引力坍縮和黑洞

在本編中，讀者將被送到黑洞的國土上，並遇到靜態極限，能層和視界等領地——在它們的幕後，隱藏着張開大口的凶惡奇點。

第三十一章　Schwarzschild 幾何

§ 31.1　大質量恒星的坍縮是不可避免的

對於所含重子數超過太陽兩倍的恒星($A > A_{極大} \sim 2A_{\odot}$)，在其熱核演化的終點，不存在平衡狀態。這是第24章的討論中最令人吃驚和不安的結果之一。換言之，具有重子數 $A > A_{極大} \sim 2A_{\odot}$ 的恒星，在以其最終的靜止狀態安息之前，必須通過例如新星或超新星爆發這類過程，把超出 $A_{極大}$ 的所有重子都拋射出去；否則，供其安息的最終靜止狀態將不存在。

如果恒星在接近熱核演化終點之前，未能拋出其過剩的重子，恒星的命運如何呢？例如，在極爲巨大的超新星爆發之後，如果坍縮的簡併中子核所包含的重子數多於 $A_{極大}$，它將變成什麼？這種超臨界的質量不能爆發，因爲它是引力約束的而又沒有更多的熱核能量可釋放。它也不能達到靜止的平衡狀態，因爲對於如此大的質量這種平衡狀態不存在。只留下一種選擇：超臨界的質量必定會坍縮到其「引力半徑」$r = 2M$ 之內，並在空間遺留下一個引力「黑洞」。

用經典的廣義相對論描述坍縮到引力半徑之內的現象將是下一章的課題。然而，在着手處理這一現象之前，必須比迄今爲止更透徹地理解 Schwarzschild 空時幾何，這種幾何圍繞着黑洞和坍縮的恒星，也圍繞着靜態的恒星。

本章討論 Schwarzschild 幾何，它是理解引力坍縮（下一章）和黑洞（再下一章）的最重要準備

本章將涉及兩個課題，初看起來，兩者似乎沒有什麼聯繫。其一是試驗粒子在先已存在的 Schwarzschild 幾何中的下落，把 Schwarzschild 幾何看作靜止的，也可設想爲在若干時間前經歷坍縮的恒星所遺留下來的一切。第二個

課題是 Schwarzschild 幾何本身獨自的物理特性。考察這一幾何時，試驗粒子可以作爲最好的考察者。但是，也可以從另一種角度來觀察試驗粒子：可以把它看成坍縮恒星的物質中最後落下的碎屑，「遲到的衣衫襤褸的約翰尼」（譯註：摘自英國歌曲的歌詞。）。這種看法，爲坍縮恒星物質分布中的不對稱性提供了最簡單的說明。這種不對稱性的自行消除將爲更複雜的不對稱性的自行消除提供某種初步的了解。簡言之，試驗粒子的運動和 Schwarzschild 幾何的動力學（下面將證明這種幾何是動力學的）這兩個明顯不同的問題，具有相互闡明的令人愉快的能力。

§ 31.2 引力半徑的非奇異性

看來，Schwarzschild 空時幾何

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-2M/r}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (31.1)$$

Schwarzschild線元在「引力半徑」 $r=2M$ 處變爲奇異

在 $r=2M$ 附近表現不好；在該處 g_{tt} 變爲零，而 g_{rr} 變爲無窮大。但是，在仔細研究以前，人們還不能肯定，線元的這種病態應歸因於空時本身的病態，或是僅歸因於在 $r=2M$ 附近坐標系 (t,r,θ,ϕ) 的病態。（坐標可以引入病態，例如，考察一個 $t=$常數和 $r=$常數的不變球體在 $\theta=0$ 附近的情形。此處坐標系表現不好，$g_{\phi\phi}$ 變爲零；然而球體內稟的與坐標無關的幾何在此處的表現並不壞。圖 1.4 給出了另一個例子。）

Schwarzschild 幾何中這一令人煩惱的區域 $r=2M$，稱爲「引力半徑」或「Schwarzschild 半徑」或「Schwarzschild 曲面」或「Schwarzschild 視界」或「Schwarzschild 球」。在某些較早的文獻中還稱之爲「Schwarzschild 奇點」，但用詞不當，因爲，將要指出，該處的空時幾何並非奇異。

爲了確定在引力半徑處的空時幾何是否奇異，從遠處派進去一探測者去測繪圖表。爲簡單起見，令探測者沿徑向自由下落到引力半徑處，並在下落途中令他携帶着他的正交歸一四重軸。他通過空時的軌道［「拋物線軌道」，度規 (31.1) 的徑向短程線］爲：

$$\frac{\tau}{2M}=-\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2}+\text{常數},$$
$$\frac{t}{2M}=-\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2}-2\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2}+\ln\left|\frac{(r/2M)^{1/2}+1}{(r/2M)^{1/2}-1}\right|+\text{常數}。 \qquad (31.2)$$

［參看 §25.5，特別是 (25.38) 式的推導和討論］。由第一個方程反推可得出用探測者携帶時鐘測出的以原時表示的探測者的 r 坐標 $r(\tau)$；由第二個方

程反推則可得出用坐標時間 t 表示的他的 r 坐標 $r(t)$。

在旅行者軌道的所有特徵中，最清楚而又令人不安的突出特點是：到達引力半徑 $r=2M$ 處，需要有限的原時，但却需要無限長的坐標時間：

下落的觀測者在有限的原時但在無限的坐標時間內到達 $r=2M$ 處

$$\begin{aligned}&\frac{r}{2M}=1-(\tau+\text{常數})/2M,\quad \text{當接近 } r=2M \text{ 時；}\\&\frac{r}{2M}=1+\text{常數}\times\exp(-t/2M),\quad \text{在 } t\longrightarrow\infty \text{ 的極限。}\end{aligned}\tag{31.3}$$

（參看圖 25.5。）當然，原時是與探測者的心臟跳動和健康有關的量。任何坐標系都沒有力量阻止探測者到達 $r=2M$ 處。只有與坐標無關的空時幾何有可能阻止他；而 (31.3) 式表明它並未這樣作！

那麼，就讓探測者接近並到達 $r=2M$ 處吧。在那裏他將測出什麼樣的空時幾何呢？是奇異的還是非奇異的？用測量的術語重新表述，當他接近 $r=2M$ 時，是無限大的潮汐引力把旅行者撕裂和壓碎呢？還是他只感受到有限的潮汐力，對此，原則上他的身體是能夠承受的呢？

當探測者經過給定半徑 r 時，他所感受到的潮汐力，可以用相對於該處探測者正交歸一參照系的 Riemann 曲率張量的分量來測定（短程線偏離方程）。爲了計算在 r 處的這些曲率分量，可分兩步進行。(1)不在旅行者參照系，而在位於他正穿過的事件處的「靜止」正交歸一參照系中計算這些分量；

$$\omega^{\hat{t}}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}dt,\ \omega^{\hat{r}}=\frac{dr}{(1-2M/r)^{1/2}},\ \omega^{\hat{\theta}}=r d\theta,\ \omega^{\hat{\phi}}=r\sin\theta d\phi \tag{31.4a}$$

結果［由 (14.50) 和 (14.51) 式，令 $e^{2\Phi}=e^{-2A}=1-2M/r$ 可得出］是

$$\begin{aligned}&R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}=\frac{-2M}{r^3},\quad R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}=R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}=\frac{M}{r^3},\\&R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}=\frac{2M}{r^3},\quad R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}=R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}=\frac{-M}{r^3};\end{aligned}\tag{31.4b}$$

除可用 ***Riemann*** 的對稱性由以上各量得出的那些分量外，全部其餘的 $R_{\hat{a}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ 均爲零。

(2)對「靜止參照系」諸分量 (31.4b) 作適當的變換，計算出在探測者參照系中的諸分量：對於 $r>2M$，是沿 $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ 方向用通常速度 $v^{\hat{r}}$ 的 Lorentz 增速；對於 $r<2M$，不是一次「增速」，而是用 $v^{\hat{r}}>1$ 根據標準增速公式（框 2.4）給出的一個變換。此處

$$v^{\hat{r}}=\frac{(g_{rr})^{1/2}dr}{(-g_{tt})^{1/2}dt}=\frac{dr/dt}{1-2M/r}=-\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}。\tag{31.5}$$

得到的令人驚訝的結果（這是 Schwarzschild 幾何的特殊代數性質的結果，

並有點類似於當電磁場 **E** 和 **B** 都平行於增速方向時電磁場諸分量所發生的情況——或，寧肯說，所不發生的情況）是：**Riemann** 張量的全部都完全不受增速的影響。如果 $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ 爲旅行者的徑向基矢，$\mathbf{e}_{\hat{t}}=\mathbf{u}$ 爲其時間基矢，則

$$R_{\hat{r}\hat{p}\hat{r}\hat{p}}=\frac{-2M}{r^3},\quad R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}=R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}=\frac{M}{r^3},$$
$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}=\frac{2M}{r^3},\qquad R_{\hat{p}\hat{\theta}\hat{p}\hat{\theta}}=R_{\hat{p}\hat{\phi}\hat{p}\hat{\phi}}=\frac{-M}{r^3}。\tag{31.6}$$

（見練習 31.1。）

下落的觀測者在 $r=2M$ 處感受不到無限大的潮汐力
這樣，在 $r=2M$ 處空時幾何表現正常，但坐標系有病態

計算得到的最終結果是：按照（31.6）式，在引力半徑處，在探測者的正交歸一參照系中，無一 **Riemann** 張量的分量變爲無窮大。旅行者接近 $r=2M$ 時，感受到的潮汐是有限的；潮汐力並不能把他撕裂——至少當質量 M 足夠大時不會如此，因爲在 $r=2M$ 處，典型的曲率張量的非零分量 $R_{\hat{a}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ 爲 $1/M^2$ 量級。引力半徑處是表現很好的非奇異的空時區域，在那裏沒有任何東西能阻止探測者向內降落。

反之，在引力半徑之內深處，即在 $r=0$ 處，不論旅行者到達該處所採用的路線是什麼，他必然遇到無窮大的潮汐力。人們稱「$r=0$ 爲空時的一個物理奇點」。要看清這一點，只需從（31.4b）或（31.6）式計算「曲率不變量」：

$$I\equiv R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}R^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}=48M^2/r^6。\tag{31.7}$$

框 31.1 「Schwarzschild 奇異性」：歷史評述

儘管 Eddington（1924）首先構造出在 $r=2M$ 處非奇異的坐標系，但他本人看來並未認識到他的結果的重要性。Lemaître（1933C，特別是第82頁）似乎首先認識到 $r=2M$ 處的所謂「Schwarzschild 奇異性」並不是一個奇異性。他寫道，「Schwarzschild 幾何的奇異性是一個虛構的奇異性，因此，與 de Sitter 宇宙初始結構中的中心視界的表現類似」。他還提供了一個可以通過 $r=2M$ 的坐標系。然而，他的坐標系與Eddington的一樣，只包括 Schwarzschild 幾何的一半，即圖31.3的Ⅰ和Ⅱ兩個區域。Synge（1950）首先發現 Eddington 坐標系和 Lemaître 坐標系的不完整性，並給出了包括全部幾何的坐標系（圖 31.3 的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四個區域）。Fronsdal（1959）不知道 Synge 的工作，他借助於圖和計算，再次發現了 Schwarzschild 幾何的整體結構。能夠最深刻了解 Schwarzschild 幾何的坐標系稱爲 Kruskal-Szekeres 坐標系。它是由 Kruskal（1960）和 Szekeres（1960）獨立構造出來的。

在每一個局域 Lorentz 參照系中，曲率不變量是曲率諸分量乘積之和，並且都取同樣數值 $48\ M^2/r^6$。於是，在包括旅行者參照系在內的每一個局域 Lorentz 參照系中，在 $r\to 0$ 處，**Riemann** 張量將有一個或多個分量爲無窮大，也就是說，潮汐力將變爲無窮大。

在 $r=0$ 處曲率爲無窮大

練習 31.1　作用於向內下落探測者的潮汐力

練習

(a) 仔細導出 Riemann 張量的諸分量 (31.6)。

(b) 粗略地計算出臨界質量 $M_{臨界}$，使得如果 $M>M_{臨界}$，則探測者的身體（由通常肌肉和骨骼組成的人體）能够在 $r=2M$ 處承受住潮汐力，但如果 $M<M_{臨界}$，則探測者的身體將致殘。［答案：$M_{臨界}\sim 1000M_\odot$。顯然，如果 $M\sim M_\odot$，物理學家在冒險下落之前應把自己變成一隻螞蟻！細節見 §32.6。］

---

§ 31.3　在 $r=2M$ 處 Schwarzschild 坐標的行爲

在 $r=2M$ 處坐標的病態性質

由於在引力半徑處空時幾何表現良好，所以 Schwarzschild 度規分量 $g_{tt}=-(1-2M/r)$ 和 $g_{rr}=(1-2M/r)^{-1}$ 在該處的奇異行爲必定由於Schwarzschild 坐標 t, r, θ, ϕ 在該處的病態。人們必須以某種方式找到擺脫這種病態的途徑——即人們必須構造一個不存在病態的新的坐標系。在這樣做之前，更好地理解病態的準確性質是有幫助的。

(1) t 和 r 作爲類時坐標和類空坐標的作用顛倒了

在 $r=2M$ 處最明顯的病態是在該處 t 和 r 作爲類時坐標和類空坐標的作用顛倒了。在 $r>2M$ 區域，t 方向 $\partial/\partial t$ 是類時的 ($g_{tt}<0$)，而 r 方向 $\partial/\partial r$ 是類空的 ($g_{rr}>0$)；但是在 $r<2M$ 區域，$\partial/\partial t$ 是類空的 ($g_{tt}>0$) 而 $\partial/\partial r$ 是類時的 ($g_{rr}<0$)。

r「從類空坐標變爲類時坐標」意味着什麼呢？在以火箭爲動力的宇宙飛船中的探測者，在到達 $r=2M$ 之前總有發動火箭使他的運動從 r 減小（下落）變爲 r 增大（逃脫）的選擇。但當他一旦落到 $r=2M$ 以內時，情況就完全相反了。這時，r 的進一步減小代表時間的流逝。旅行者不管對其火箭推進器下達什麼命令，都不能使時間倒流。那種不管願意與否，把每一個人從20歲拖到40歲，從40歲拖到80歲的世界的無形力量，也要拖着火箭向裏走，從時間坐標 $r=2M$ 到時間坐標的後一個值 $r=0$，無論人類的意志，引擎，火箭，力（見練習 31.3）都不能使時間停住脚步。細胞必定要死亡，旅行者的手錶必定滴答滴答地送走那「無情的分分秒秒」，同樣肯定而且一路上無人能夠阻止 r 從 $2M$ 減小到 0。

在作爲空間和時間坐標的 r 和 t 交換角色的 $r=2M$ 處，g_{tt} 爲零而 g_{rr}

(2)$r=2M$, $-\infty<t<+\infty$ 區域是二維的而不是三維的

爲無窮大。g_{tt} 爲零暗示在 Schwarzschild 坐標系中（$-\infty<t<+\infty$, $0<\theta<\pi$, $0<\phi<2\pi$）似乎為三維的 $r=2M$ 表面的體積為零，因而實際上只是二維的，否則毫無意義；即

$$\int_{r=2M}|g_{tt}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|^{1/2}dtd\theta d\phi=0;$$
$$\int_{(r=2M,t=\text{常數})}|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|^{1/2}d\theta d\phi=4\pi(2M)^2。 \tag{31.8}$$

g_{rr} 在 $r=2M$ 處的發散並不意味着 $r=2M$ 離其他空時區域無限遠。相反，從 $r=2M$ 到 r 爲任意值的某一點的固有距離爲

$$\int_{2M}^{r}|g_{rr}|^{1/2}dr=\begin{cases}[r(r-2M)]^{1/2}+2M\ln|(r/2M-1)^{1/2}+(r/2M)^{1/2}| & \text{當 } r>2M,\\ -2M\cot^{-1}[r^{1/2}/(2M-r)^{1/2}]-[r(2M-r)]^{1/2} & \text{當 } r<2M;\end{cases} \tag{31.9}$$

即對所有 $0<r<\infty$ 這個距離都是有限的。

考察 Schwarzschild 度規的徑向短程線即可發現 $r<2M$ 區域與 $r>2M$ 區域是怎樣從物理上聯結起來的。爲了具體化，注意下述試驗粒子的軌道，它從在 $r=0$ 處的奇點拋射出去，沿着徑向向外飛經 $r=2M$，在原時 $\tau=0$ 和坐標時間 $t=0$ 到達最大半徑 $r_{\text{極大}}$（「軌道頂點」）處，然後經 $r=2M$ 落回 $r=0$ 處。對這個軌道短程線方程的解已在 §25.5 導出，並在圖 25.3 中描繪。它具有「擺線的形式」（參量 η 從 $-\pi$ 變到 $+\pi$）

$$r=\frac{1}{2}r_{\text{極大}}(1+\cos\eta), \tag{31.10a}$$
$$\tau=(r_{\text{極大}}^3/8M)^{1/2}(\eta+\sin\eta), \tag{31.10b}$$
$$t=2M\ln\left|\frac{(r_{\text{極大}}/2M-1)^{1/2}+\tan(\eta/2)}{(r_{\text{極大}}/2M-1)^{1/2}-\tan(\eta/2)}\right| +2M\left(\frac{r_{\text{極大}}}{2M}-1\right)^{1/2}\left[\eta+\left(\frac{r_{\text{極大}}}{4M}\right)(\eta+\sin\eta)\right]。 \tag{31.10c}$$

圖 31.1 在 r, t 坐標平面上與幾類其他的徑向短程線一起，畫出了這個軌道（曲線 F-F'-F''）。

(3)徑向短程線表明，$r=2M$, $t=\pm\infty$ 的區域是空時中的「有限」部分

除了「量度爲零的一組短程線」外，根據圖 31.1 以及與該圖相應的計算（學生的練習！見第25章），每條徑向短程線都在 $t=+\infty$（或$-\infty$，或兩者）時穿過引力半徑。因此，人們猜想，對於 Schwarzschild 坐標的某種令人不快的選擇，是把發生在 $r=2M$ 處的全部物理學都交付與 $t=\pm\infty$ 的原因。人們開始相信，一個更好的坐標系，將把這兩個「無窮遠點」在新的（$r_{\text{新}}$,

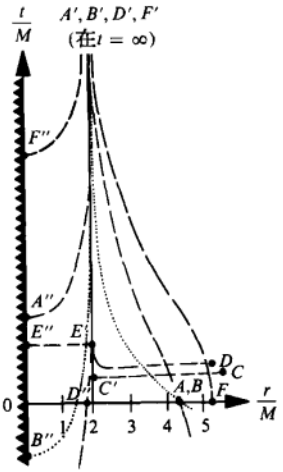


圖 31.1

以 Schwarzschild 坐標圖示（圖解）的 Schwarzschild 幾何的典型徑向短程線。$FF'F''$［見(31.10)式］是試驗粒子的類時短程線，它從 $r=5.2M$ 處靜止開始筆直向內落下，在有限的原時內落到奇點 $r=0$ 處（鋸齒形標記）。Schwarzschild 坐標系的令人不快之處表現在兩個方面：(1)在運動的半途中 t 趨於無窮大；和(2)以後雖然 τ（圖中沒有畫出）繼續增加，但 t 却要減小。在 $t=0$ 之前的同一軌道過程可把圖對水平軸反射得出（「時間反演」）。F'' 的時間反演像標誌試驗粒子從奇點拋射。$AA'A''$ 是從 $r=+\infty$ 進來的類時短程線。$BB'B''$ 是筆直落入的光子經歷的零短程線（沒有頂點，永不靜止！）$DD'D''$是類空徑向短程線。CC' 也是，但 $E'E''$ 是類時的。CC' 和 $E'E''$ 兩者都不能越過$r=2M$。（有關這些短程線的尚未回答的問題，將在圖 31.4 中解答，該處把同樣的世界線圖示於「Kruskal-Szekeres 圖」中）。

用 (31.10) 式作數學描述時，短程線 F''反演 F'反演 $FF'F''$ 在

$$r=0 \text{ 處，在 } t=-2\pi M\left(\frac{r_{極大}}{2M}-1\right)^{1/2}\left(\frac{r_{極大}}{4M}+1\right),\quad \tau=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{r_{極大}^3}{2M}\right)^{1/2},$$

開始被拋出；隨著原時 τ 的增加（但坐標時 t 減少）它向外飛出，直至它到達引力半徑

$$r=2M \text{ 處，在 } t=-\infty,\quad \tau=-\left(\frac{r_{極大}^3}{8M}\right)^{1/2}\cos^{-1}\left(\frac{4M}{r_{極大}}-1\right)-r_{極大}\left(1-\frac{2M}{r_{極大}}\right)^{1/2};$$

然後它繼續向外飛出，現在坐標時 t 將由 $t=-\infty$ 開始增大，直至它到達極大半徑

$$r=r_{極大} \text{ 處，在 } t=0,\ \tau=0 \text{（圖中事件 } F\text{）；}$$

此後它向內落下，t 繼續增大，直到它再一次經過引力半徑

$$r=2M \text{ 處，在 } t=+\infty,\quad \tau=+\left(\frac{r_{極大}^3}{8M}\right)^{1/2}\cos^{-1}\left(\frac{4M}{r_{極大}}-1\right)+r_{極大}\left(1-\frac{2M}{r_{極大}}\right)^{1/2}$$

（圖中事件 F'）；

最後，隨着 t 的減小（但是，當然，原時 τ 仍然增加），它最後落到

$$r=0 \text{ 處，在 } t=+2\pi M\left(\frac{r_{極大}}{2M}-1\right)^{1/2}\left(\frac{r_{極大}}{4M}+1\right),\quad \tau=+\frac{\pi}{2}\left(\frac{r_{極大}^3}{2M}\right)^{1/2}$$

（圖中事件 F''）。

$t_{新}$）平面上展開爲一條直線；並把（$r=2M$, t 從$-\infty$到$+\infty$的）「直線」在（$r_{新}$, $t_{新}$）平面上壓縮爲一個點。因爲人們已經看到〔(31.8) 式〕，在 $r=2M$, 從 $t=-\infty$ 延伸到 $t=+\infty$ 覆蓋 (θ,ϕ) 二維球的區域的固有體積爲零，所以人們易於接受這一暫時的結論並據此行動。但是，人們想要的能使 $r=2M$, $-\infty<t<+\infty$「直線」確實成爲一個點的時間指示器是什麼樣的呢？

§ 31.4 幾種表現良好的坐標系

Novikov 坐標系：
(1)怎樣構成

最容易設想的表現良好的坐標系是，在其中，按 (31.10) 式徑向運動的試驗粒子永遠保持靜止（「共動坐標系」）。Novikov (1963) 首先採用這種坐標系。對於從具有無限潮汐力的$r=0$奇點處出現的每一個試驗粒子，Novikov 都賦予其徑向坐標以特定值 R^*，並且認定，此粒子帶着該 R^* 值終其沿「擺線之一生」，即經由 $r=2M$ 到 $r=r_{極大}$，然後返回經 $r=2M$ 到 $r=0$。爲了明確起見，對於每個粒子 Novikov 用它的軌道的頂點位置表示其 R^* 值，即

$$R^*=(r_{極大}/2M-1)^{1/2}。\tag{31.11}$$

Novikov 採用試驗粒子的原時 τ 爲時間坐標，並標準化使得在軌道頂點處$\tau=0$，羣中的每個粒子都以這樣一種方式拋射，即它們在同一個 Schwarzschild 坐標時間 $t=0$ 到達其軌道頂點（$r=r_{極大}$, $\tau=0$）。

Novikov 坐標系雖然概念上很簡單，但是與原先的 Schwarzschild 坐標系的關連却是非常複雜的變換：(1)聯立 (31.10b) 和 (31.11) 式可得出 $\eta(\tau, R^*)$；(2)把 $\eta(\tau,R^*)$ 與 (31.10a) 和 (31.11) 式聯立可得出 $r(\tau,R^*)$；(3)把 $\eta(\tau,R^*)$ 與 (31.10c) 和 (31.11) 式聯立可得出 $t(\tau,R^*)$。把由此得出的坐標變換用於 Schwarzschild 度規 (31.1)，得出線元爲

(2)線元

$$ds^2=-d\tau^2+\left(\frac{R^{*2}+1}{R^{*2}}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial R^*}\right)^2 dR^{*2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)。\tag{31.12a}$$

（「Novikov 坐標系中的 Schwarzschild 幾何」。）此 r 不再是徑向坐標；現在它是度規函數 $r(\tau,R^*)$，由下式隱含地給出

$$\frac{\tau}{2M}=\pm(R^{*2}+1)\left[\frac{r}{2M}-\frac{(r/2M)^2}{R^{*2}+1}\right]^{1/2}+(R^{*2}+1)^{3/2}\cos^{-1}\left[\left(\frac{r/2M}{R^{*2}+1}\right)^{1/2}\right]。\tag{31.12b}$$

圖 31.2 畫出了在此坐標系中 Schwarzschild 空時的若干關鍵區域的位置。存在着兩個都具有$r=0$（奇點）但性質不同的區域，還存在着兩個都具有 $r\longrightarrow\infty$但性質不同的區域（漸近地平直的區域；記住 $4\pi r^2=$表面面積！）這將在 §31.5 討論。

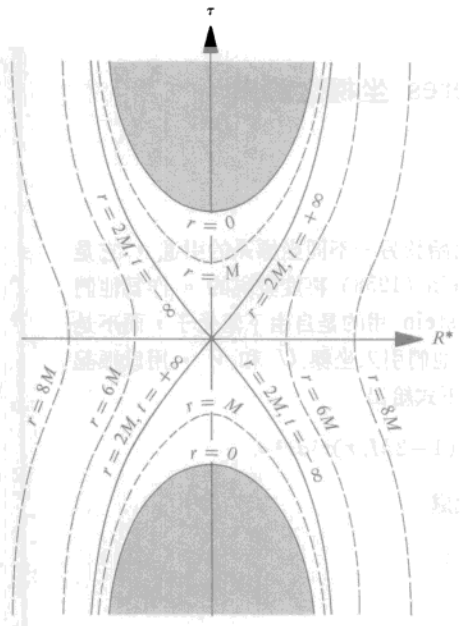


圖 31.2
Schwarzschild 空時中的 Novikov 坐標系（圖示）。虛線是 r 爲常數的曲線（記得：$4\pi r^2=$ 圍繞對稱中心的表面面積）。塗上灰色的區域並不是空時的一部分；它相應於 $r<0$，這是不能到達的區域，因爲空時在 $r=0$ 有奇點。注意，按照 §31.3 末的討論，Schwarzschild 坐標圖（圖 31.1）中的「直線」（$r=2M$, $-\infty<t<+\infty$）在這裏壓縮成了一個點。

雖然 Novikov 坐標系在觀念上非常簡單，但在此坐標系中度規分量的數學表述相當麻煩。Kruskal (1960) 和 Szekeres (1960) 獨立地建立了一種不同於此的坐標系（「Kruskal-Szekeres 坐標系」），在其中可得到較爲簡單合用的表述。

Kruskal-Szekeres 坐標系

Kruskal 和 Szekeres 採用無量綱的徑向坐標 u 和無量綱的時間坐標 v，它們與 Schwarzschild 坐標 r 和 t 的關係爲

$$\left.\begin{aligned}u&=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M)\\v&=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M)\end{aligned}\right\}\ \text{當 } r>2M, \qquad (31.13a)$$

$$\left.\begin{aligned}u&=(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M)\\v&=(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M)\end{aligned}\right\}\ \text{當 } r<2M。 \qquad (31.13b)$$

（框 31.2 說明了引入這個坐標系的緣由。）把這個改變後的坐標系用於 Schwarzschild 度規 (31.1)，得出下述線元：

$$ds^2=(32M^3/r)e^{-r/2M}(-dv^2+du^2)+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (31.14a)$$

（「在 Kruskal-Szekeres 坐標系中的 Schwarzschild 幾何」）。此處 r 看作 u, v，的函數，它由下式隱含地定義

$$(r/2M-1)e^{r/2M}=u^2-v^2 \qquad (31.14b)$$

［見 (31.13) 式］。

（接第833頁）

框 31.2 引入 Kruskal-Szekeres 坐標之緣由*

A. Eddington-Finkelstein 坐標

引入 Kruskal-Szekeres 坐標之緣由始於另一不同坐標系的引進，它是 Eddington (1924) 首先想出， Finkelstein (1958) 再度發現的。作爲他們的坐標系的基礎， Eddington 和 Finkelstein 用的是自由下落光子，而不是 Novikov 選用的自由下落粒子，特別是，他們引入坐標 $\tilde{U}$ 和 $\tilde{V}$ ，用以標記出射和入射的徑向零短程線。該短程線由下式給出

$$ds^2=0=-(1-2M/r)dt^2+(1-2M/r)^{-1}dr^2。$$

等價地，出射短程線由 $\tilde{U}=$常數給出，此處

$$\tilde{U}\equiv t-r^*; \tag{1a}$$

而入射短程線由 $\tilde{V}=$常數給出，此處

$$\tilde{V}\equiv t+r^*。 \tag{1b}$$

其中 r^* 爲 §25.5 和圖 25.4 的「烏龜坐標」：

$$r^*\equiv r+2M\ln|r/2M-1|。 \tag{1c}$$

內向 Eddington-Finkelstein 坐標——用 r 和 $\tilde{V}$ 取代坐標 r 和 t

Schwarzschild 度規變爲

$$ds^2=-(1-2M/r)d\tilde{V}^2+2d\tilde{V}dr+r^2d\Omega^2。 \tag{2}$$

徑向光錐 $ds^2=0$ 的一條邊爲

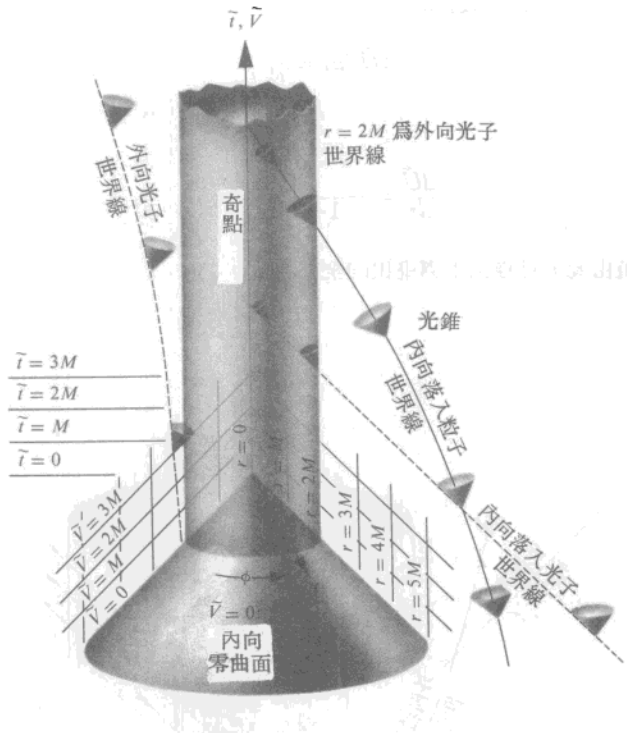
$$d\tilde{V}/dr=0, \tag{3a}$$

另一邊爲

$$\frac{d\tilde{V}}{dr}=\frac{2}{1-2M/r}。 \tag{3b}$$

由此，並僅由此，可推出下圖畫出的所有特徵。

* 本框根據 Misner (1969a)。



內向 Eddington-Finkelstein 坐標系 (一個轉動自由度被略去；即令 θ 等於 $\pi/2$) 。$\tilde{V}$ 爲常數的曲面即內向零曲面，畫成 45° 斜面，與在平直空時中相同。等價地，$\tilde{t}$ 爲常數的曲面

$$\tilde{t} \equiv \tilde{V} - r = t + 2M \ln|r/2M - 1|$$

畫成水平面。

外向 Eddington-Finkelstein 坐標——用 r 和 $\tilde{U}$ 取代坐標 r 和 t

Schwarzschild 度規變爲

$$ds^2 = -(1-2M/r)d\tilde{U}^2 - 2d\tilde{U}\,dr + r^2 d\Omega^2 。 \tag{4}$$

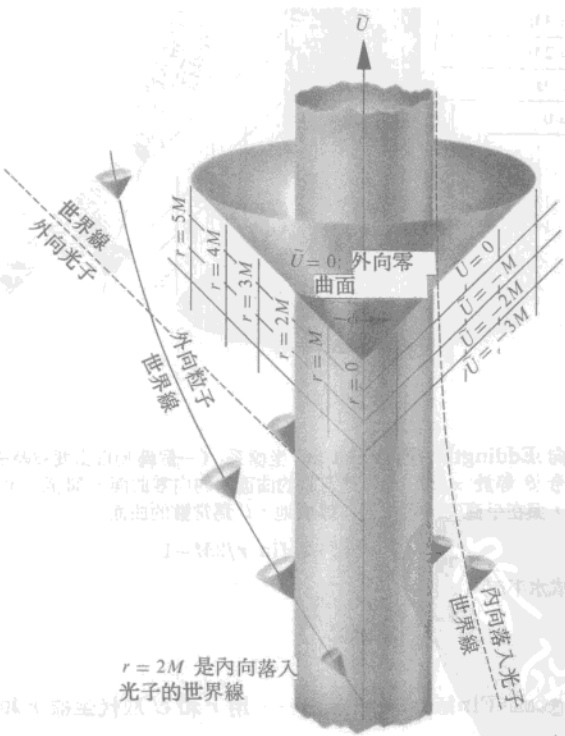
徑向光錐 $ds^2=0$ 的一個邊爲

$$d\tilde{U}/dr=0\,, \tag{5a}$$

另一邊爲

$$\frac{d\tilde{U}}{dr}=-\frac{2}{1-2M/r}\,。 \tag{5b}$$

由此，並僅由此，可推出下圖畫出的全部特徵。



外向 Eddington-Finkelstein 坐標 （一個轉動自由度被略去）。（$\tilde{U}$ 爲常數的曲面卽外向零曲面，畫成 45° 斜面，與在平直空時中相同。）

注意，兩個 Eddington-Finkelstein 坐標系在引力半徑處的表現都比 Schwarzschild 坐標系好；但是它們的表現並非完美無缺。外向坐標系 $(\tilde{U}, r, \theta, \phi)$ 以無病態的方式描述了粒子從 $r=0$ 經 $r=2M$ 向外拋出；但對經 $r=2M$ 向內粒子的描述與 Schwarzschild 坐標系所作的描述（圖 31.1）有同樣的病態。類似地，內向坐標系 $(\tilde{V}, r, \theta, \phi)$ 很好地描述了粒子經 $r=2M$ 的入射，但對出射軌道的描述仍顯病態。此外，對照兩圖，似乎自相矛盾：在一個圖中引力半徑由出射光子的世界線構成；而在另一圖中引力半徑則由入射光子的世界線構成！要解決這一矛盾，必須尋找另外的表現更好的坐標系。［但是要注意，因爲內向的 Eddington-Finkelstein 坐標系可以很好地描述入射，所以在討論引力坍縮（第32章）和黑洞（第33章和第34章）時得到了廣泛的應用。］

B. 從 Eddington-Finkelstein 向 Kruskal-Szekeres 過渡

也許略去 r，採用 $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ 作爲徑向-時間平面的兩個坐標，就可以得到一個表現完好的坐標系。這樣得到的坐標系與 Schwarzschild 坐標的關係是［見(1)式］

$$\tilde{V}-\tilde{U}=2r^*, \tag{6a}$$

$$\tilde{V}+\tilde{U}=2t; \tag{6b}$$

用新坐標系，線元爲

$$ds^2=-(1-2M/r)d\tilde{U}d\tilde{V}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)。 \tag{7}$$

與人們的期望相違背，這個坐標系在 $r=2M$ 處是病態的。

再度考查這一構造過程，揭示出困難在於：用來構成新坐標系的 $\tilde{U}=$常數的曲面（出射零曲面）在幾何上是確切定義的，$\tilde{V}=$常數的曲面（入射零曲面）也是如此；但是標記它們的方式却並非如此。任何重新標記，即引入 $\tilde{u}=F(\tilde{U})$ 和 $\tilde{v}=G(\tilde{V})$，都不會使曲面在物理上有所改變。因此，人們所需要作的重新標記是，除去線元(7)中的奇性因子 $1-2M/r$。一個成功的重新標記方法由下式給出：

$$\exp[(\tilde{V}-\tilde{U})/4M]=\exp(r^*/2M)=(r/2M-1)\exp(r/2M), \tag{8}$$

上式是由（6a）和（1c）式得出的。用此關係式試驗一下，很快發現下述重新標記

$$\tilde{u}\equiv -e^{-U/4M}=-(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}e^{-t/4M}, \tag{9a}$$

$$\tilde{v}\equiv e^{+V/4M}=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}e^{t/4M}, \tag{9b}$$

可以從度規系數中除去討厭的 $1-2M/r$，用此新坐標系，線元爲

$$ds^2=-(32M^3/r)e^{-r/2M}d\tilde{v}d\tilde{u}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)。 \tag{10a}$$

式中 r 仍由 $4\pi r^2=$曲面面積定義，但是它必須看作 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 的函數：

$$(r/2M-1)e^{r/2M}=-\tilde{u}\tilde{v}。 \tag{10b}$$

很容易證明，此式用乘積 $\tilde{u}\tilde{v}$ 唯一地確定了 r（記住：$r>0$！）［詳見Misner (1969a)］。

標記內向和外向零曲面的坐標 $\tilde{u}\tilde{v}$ 是零坐標；即

$$\partial/\partial\tilde{u}\cdot\partial/\partial\tilde{u}=g_{\tilde{u}\tilde{u}}=0, \qquad \partial/\partial\tilde{v}\cdot\partial/\partial\tilde{v}=g_{\tilde{v}\tilde{v}}=0$$

［見（10a）式］。如果使用零坐標不習慣，可以借助於類空和類時坐標 u 和 v（Kruskal-Szekeres 坐標）來代替 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$，其定義爲

$$u\equiv\frac{1}{2}(\tilde{v}-\tilde{u})=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M), \tag{11a}$$

$$v\equiv\frac{1}{2}(\tilde{v}+\tilde{u})=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M), \tag{11b}$$

因此

$$dv^2-du^2=d\tilde{v}d\tilde{u}。 \tag{12}$$

採用這一組坐標，線元具有 Kruskal 形式（31.14），它在引力半徑處表現完好。

儘管 Kruskal-Szekeres 線元在 $r=2M$ 處表現良好，但從Schwarzschild向Kruskal-Szekeres的變換(11)在該處的表現却並不好。當從$r>2M$移至$r<2M$時，變換變得沒有意義了（u 和 v 爲「虛數」）。當然，這是Schwarzschild坐標的病態表現。經過不斷摸索，很容易找到了一個新的變換，在 $r<2M$ 處取代(11)式，把 Schwarzschild 坐標導向 Kruskal-Szekeres 坐標：

$$u=(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M), \tag{11c}$$

$$v=(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M)。 \tag{11d}$$

§ 31.5 Kruskal-Szekeres坐標與Schwarzschild坐標之間的關係

Kruskal-Szekeres 坐標揭示，Schwarzschild空時具有兩個「$r=0$奇點」和兩個「$r\longrightarrow\infty$外區」

在 Kruskal-Szekeres 坐標系中，奇點 $r=0$ 位於 $v^2-u^2=1$ 處。於是，實際上有兩個奇點，而不是一個；即

$$v=+(1+u^2)^{1/2} \text{ 和 } v=-(1+u^2)^{1/2} \text{ 兩者都相應於 } r=0! \quad (31.15)$$

這還不是隱藏在 Kruskal-Szekeres 線元 (31.14) 中的唯一令人驚訝的事情。還應注意到 $r\geqslant 2M$ （遠離引力半徑之外的空時區域）的區域由 $u^2\geqslant v^2$ 給出。於是，實際上有兩個外區*；即

$$u\geqslant +|v| \text{ 和 } u\leqslant -|v| \text{ 兩者都相應於 } r\geqslant 2M! \quad (31.16)$$

這是怎麼回事呢？當在 Schwarzschild 坐標中畫出幾何時，它包含一個奇點和一個外區；但是，當在 Kruskal-Szekeres 坐標中表述時，每一個都變成了兩個。答案必定是 Schwarzschild 坐標只覆蓋了空時流形的一部分；它們一定只是補綴於整個流形上的一個局域坐標。不知爲什麼，借助於導致 Kruskal-Szekeres 坐標的坐標變換，通過解析的形式，度規的有限 Schwarzschild 解被解析地擴展到覆蓋全部（或幾乎全部）流形。

爲了更清楚地理解這個覆蓋問題，從 Kruskal-Szekeres 坐標變換回 Schwarzschild 坐標（見圖 31.3）。按 (31.13) 式寫下的變換方程只適用於 Kruskal 坐標的 $u>|v|$ [(31.13a) 式] 和 $v>|u|$ [(31.13b) 式] 象限。用數字 I 和 II 表示這些象限；並用 III 和 IV 表示其他象限（見圖31.3）。在其他象限中，也可以把 Kruskal-Szekeres 線元 (31.14) 變換爲 Schwarzschild 線元 (31.1)；但是需要稍有不同的變換方程。容易證明下述變換方程組適用

Schwarzschild 坐標與 Kruskal-Szekers 坐標之間的變換

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} u=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M) \\ v=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M), \end{cases} \quad (31.17a)$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} u=(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M) \\ v=(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M), \end{cases} \quad (31.17b)$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} u=-(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M) \\ v=-(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M), \end{cases} \quad (31.17c)$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} u=-(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M) \\ v=-(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M)。 \end{cases} \quad (31.17d)$$

* Schwarzschild 幾何的整體結構，包括存在着兩個奇點和兩個外區，是 Synge (1950) 首先發現的。見框 31.1。

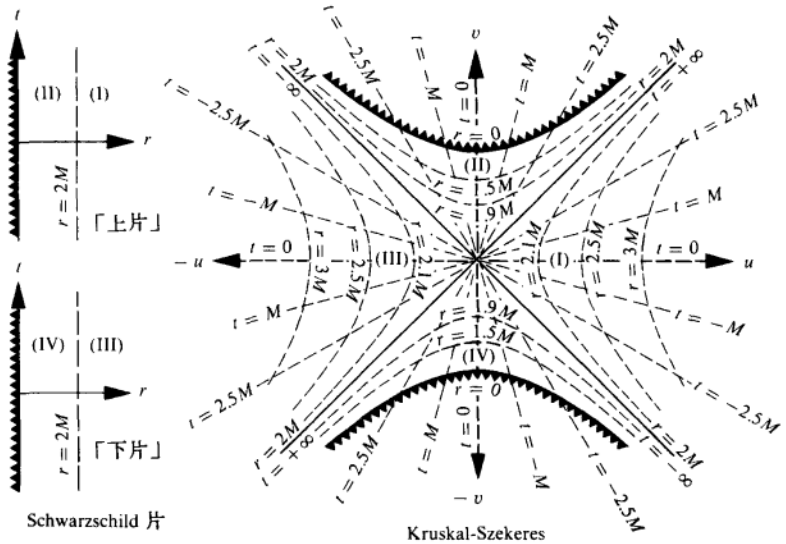


圖 31.3
Schwarzschild 眞空幾何在 Schwarzschild 坐標系和 Kruskal-Szekeres 坐標系之間的變換。爲了覆蓋全部 Schwarzschild 幾何，需要兩個 Schwarzschild 坐標片 I, II 和 III, IV（在圖 31.5a 的上半部和下半部說明），而只要單個 Kruskal-Szekeres 坐標系就足够了。Schwarzschild 幾何由 I, II, III, IV 四個區組成。I, III 兩區代表兩個互相分開但性質全同的 $r>2M$ 的漸近平直宇宙；而 II, IV 兩區代表兩個性質相同但時間反演的區域，在此區中演化出物理奇點（$r=0$）。把 Schwarzschild 坐標系和Kruskal-Szekeres 坐標系和坐標系彼此聯系起來的變換規律由 (31.17) 式和 (31.18) 式給出。在 Kruskal-Szekeres u, v 平面，r 爲常數的曲線是雙曲線，其漸近線爲 $u=\pm v$，而 t 爲常數的曲線是通過原點的直線。

逆變換爲

$$(r/2M-1)e^{r/2M}=u^2-v^2 \text{ 在 I, II, III, IV;} \qquad (31.18a)$$

$$t=\begin{cases}4M\tanh^{-1}(v/u) \text{ 在 I 和 III,}\\ 4M\tanh^{-1}(u/v) \text{ 在 III 和 IV。}\end{cases} \qquad (31.18b)$$

爲了覆蓋全部空時，需要兩個 Schwarzschild 坐標片

這些坐標變換圖示於圖 31.3 之中。注意，爲了覆蓋整個 Schwarzschild 幾何，需要兩個 Schwarzschild 坐標片 I, II 和 III, IV；但是單一的Kruskal 坐標系就足夠了。Schwarzschild 片 I, II 分爲兩個區域——區域 I，在引力半徑之外（$r>2M$）；以及區域 II，在引力半徑之內（$r<2M$）。類似地，Schwarzschild 片 III, IV 由一個外區 (III) 和一個內區 (IV) 組成。

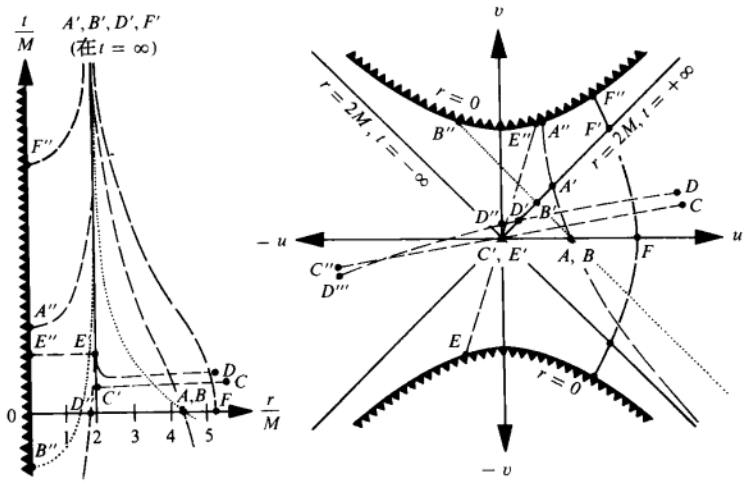


圖 31.4
(a) 在 Schwarzschild 坐標系中見到的 Schwarzschild 幾何的典型徑向類時 (A,E, F) 類光 (B)，和類空 (C,D) 短程線。這是圖 31.1 的複製。
(b) 在 Kruskal-Szekeres 坐標系中見到的同樣一些短程線，它們或者延伸爲無限長，或者是在 $r=0$ 處的無限曲率半徑的奇點（僅爲示意圖）。

(31.18) 式揭示，在 Kruskal-Szekeres 圖上，r 爲常數（曲面面積爲常數）的區域是雙曲線，其漸近線爲 $u=\pm v$，而 t 爲常數的區域是通過原點的直線。

Kruskal-Szekeres 坐標系的性質

圖 31.4 在 Kruskal-Szekeres 坐標系中描繪了完整 Schwarzschild 幾何的幾條徑向短程線。注意，短程線在 Kruskal-Szekeres 坐標系中的樣子比在 Schwarzschild 坐標系中要更合理得多。還應注意到，徑向類光短程線（徑向光線的路徑）在 Kruskal-Szekeres 坐標系中是45度線。這可以從 Kruskal-Szekeres 線元 (31.14) 看出，對此，$du=\pm dv$ 確保 $ds=0$。由於這種45度性質，徑向光錐在 Kruskal-Szekeres 圖中的形式與在狹義相對論的空時圖中相同。任何「向上指」的（即與垂直的 v 軸的夾角小於45度的）徑向曲線是類時的；而「向外指」的曲線是類空的。這一性質使得 Kruskal-Szekeres 圖容易顯示空時中一個事件與另一事件之間的因果關係。（見練習 31.2 至 31.4）。

練習

練習 31.2 非徑向光錐

試證明非徑向運動光子的世界線與 Kruskal-Szekeres 坐標圖垂直的 v 軸的夾角小於45度。據此，試推論有限靜止質量的粒子沿徑向或非徑向運動時，應永遠「向上」運動（與垂直的 v 軸的夾角小於45度）。

練習 31.3 世界末日的謬證

試利用 Kruskal 圖證明：

(a) 如果一個人下落經過引力半徑 $r=2M$ 處，則不管怎樣，他不可避免的要撞在（並被殺死於）$r=0$ 的奇點上。

(b) 一旦某人向內落下經過 $r=2M$ 處，則不管怎樣，他都無法向在 $r>2M$ 處的朋友送出任何信息，但是他仍然能够接收到來自他的朋友的信息（例如通過射電波，或激光束，或向內落下的「救急包」）。

練習 31.4 能活多久？

試證明一旦一個向內落下的人到達了引力半徑，無論他隨後做什麼（無論向什麼方向，用多長時間以及多麼艱苦地開動他的火箭發動機），他總會在原時

$$\tau<\tau_{\text{極大}}=\pi M=1.54\times10^{-5}(M/M_{\odot})\ \text{秒} \tag{31.19}$$

之內被拖入奇點並被殺死。[提示：原時間隔最長的軌道必定是短程線。試利用第25章的數學工具證明在 $r=2M$ 和 $r=0$ 之間原時間隔最長的短程線是徑向短程線（31.10a），式中 $r_{\text{極大}}=2M$，對此，時間間隔爲 πM。]

練習 31.5 比較 Eddington-Finkelstein 和 Kruskal-Szekeres 坐標

試利用坐標圖把框 31.2 的內向、外向 Eddington-Finkelstein 坐標與 Kruskal-Szekeres 坐標相比較。仿照圖31.3和圖31.4對 Schwarzschild 和 Kruskal-Szekeres 坐標的比較。

練習 31.6 另一個坐標系

爲框 31.2 的 $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, θ, ϕ 坐標系 [(6)式和(7)式] 作坐標圖。並顯示出下述特徵：(1) Schwarzschild 坐標系和 Kruskal-Szekeres 坐標系的關係；(2) $r=2M$ 的位置；和(3)徑向短程線。

§ 31.6 Schwarzschild 幾何的動力學

Schwarzschild 幾何看起來像什麼樣子？借助於與平衡恒星（§23.8；圖 23.1；和框 23.2 的結尾）和具有正負空間曲率的 Friedmann 宇宙 [(27.23)式和(27.24)式，以及框 27.2] 類似的「鑲嵌入圖」，這個問題很容易回答。

首先，考察類空超曲面 $v=0$ 的幾何，它從 $u=+\infty$ ($r=\infty$) 延伸到 $u=0$ ($r=2M$) 再向外延伸到 $u=-\infty$ ($r=\infty$)。在 Schwarzschild 坐標系中這個曲面是時間爲常數 $t=0$ 的薄片 [見 (31.18b) 式]；它是嚴格地按 (23.34b) 式算出的嵌入圖的曲面。這個嵌入曲面，在略去一個轉動自由度後，可以在度規爲

$$d\sigma^2=d\bar{r}^2+d\bar{z}^2+\bar{r}^2d\bar{\phi}^2 \tag{31.21}$$

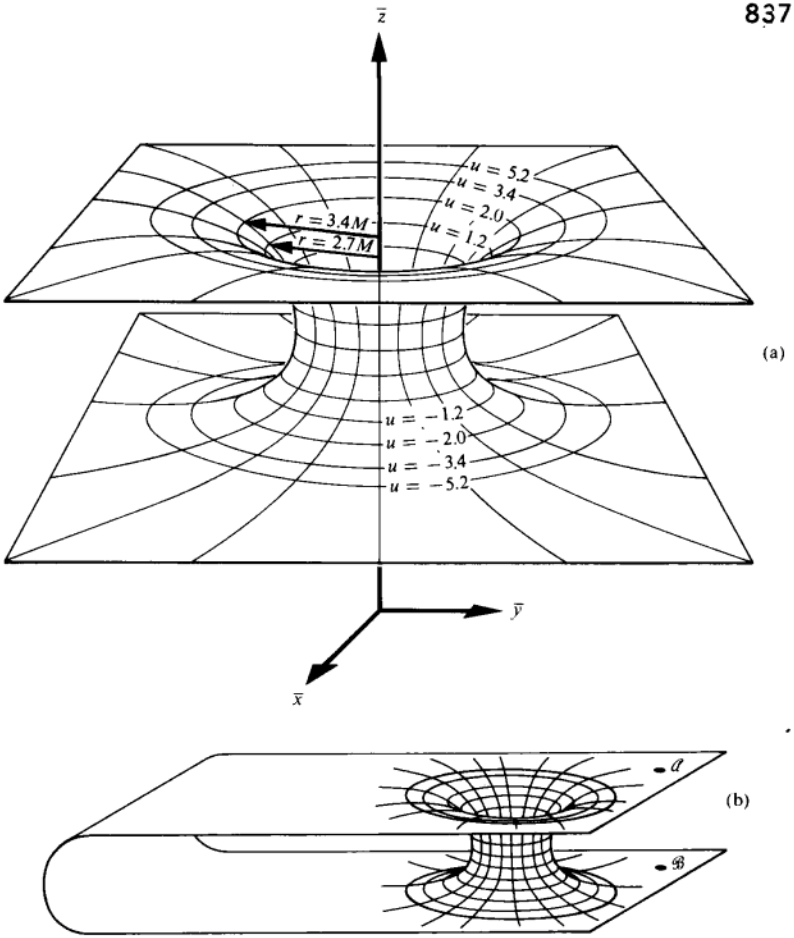


圖 31.5

(a) 在 $t=v=0$「瞬時」的 Schwarzschild 空間幾何，此處已略去一個轉動自由度 ($\theta=\pi/2$)。爲了恢復該轉動自由度並得到完全的 Schwarzschild 三維幾何，人們只需在內心把 $\bar{r}=(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^{1/2}$ 爲常數的圓代之以面積爲 $4\pi\bar{r}^2$ 的球面即可。注意得出的三維幾何在兩個方向（兩個「宇宙」）上遠離橋的喉管時變爲平直 (Euclid 的)。

(b) 在「時間」$t=v=0$ Schwarzschild 空間幾何的一個嵌入圖，從幾何上說它等同於嵌入圖 (a)，但在拓撲上則有所不同。Einstein 場方程組確定了局域的空時幾何，但是它們不能確定它的拓撲結構；參看框 27.2 末的討論。此處，Schwarzschild「蛀孔」連接着一個漸近平直宇宙的兩個遙遠的區域。與這種拓撲選擇有關的因果律問題的討論，見 Fuller 和 Wheeler (1962)。

的平直 Euclid 空間中用旋轉拋物面來描述

$$\bar{r}=2M+\bar{z}^2/8M\,, \tag{31.20}$$

（見圖 31.5）。

注意，從嵌入圖 31.5a 可見，Schwarzschild 幾何 $t=$常數的類空超曲

$v=t=0$ 三維曲面是把兩個漸近平直的宇宙或把一個宇宙的兩個不同區域連結起來的「蛀孔」

面是由把兩個互相分開但等同的漸近平直宇宙連結起來的橋或「蛀孔」組成的。此橋有時稱爲「Einstein-Rosen 橋」，有時稱爲「Schwarzschild 喉管」或「Schwarzschild 蛀孔」。如果願意，可以在遠離 Schwarzschild 喉管之處把兩個漸近平直宇宙連接成一個區域以改變 Schwarzschild 幾何的拓撲［Fuller 和 Wheeler (1962)；圖 31.5b］。這個單一的唯一的宇宙變成了多連通的，Schwarzschild 喉管提供從點 $\mathscr{A}$ 到點 $\mathscr{B}$ 的類空路徑，近似平直的宇宙提供另一個。爲了具體化，集中注意 Schwarzschild 幾何的解釋，我們不採用 Wheeler 多連通的單一宇宙，而寧肯採用圖 31.5a 的 Einstein-Rosen 雙重宇宙。

在 $r<2M$ 區域內 Schwarzschild 幾何是動力學的

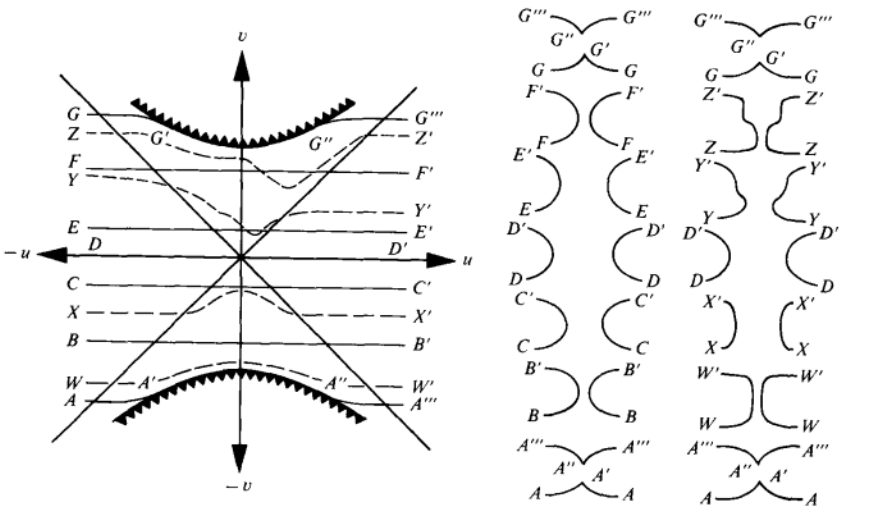
人們通常習慣於認爲 Schwarzschild 幾何是靜態的。但是，保持 Schwarzschild 幾何不變的靜態「時間變換」$t\longrightarrow t+\Delta t$ 從用詞的嚴格意義上講是只適用於 Schwarzschild 幾何 I, III 區域的時間變換。在 II, IV 區域內，$t\longrightarrow t+\Delta t$ 是類空運動而不是類時運動（見圖 31.3）。結果，類空超曲面，諸如圖 31.5a 中 $t=$常數的面從區域 I 經 $u=v=0$ 延伸到區域III，並不是靜態的。當這種類空超曲面隨時間向前推移時（沿 Kruskal 圖的 $+v$ 方向），它進入區間II，它的幾何開始改變。

爲了考察 Schwarzschild 幾何隨時間的發展，需要一系列嵌入圖，每一個圖相應前一個圖中類空超曲面的下一階段的幾何。但是這些超曲面如何選擇呢？在 Newton 理論或狹義相對論中，人們選擇時間爲常數的超曲面。但是在彎曲空時的動力學區域中，並不存在天然優越的時間坐標。這種情況迫使人們作出完全任意的超曲面選擇，用來觀察幾何隨時間的發展，並牢牢記住這種選擇是非常任意的。

蛀孔的時間演化，創生，膨脹，再收縮，箍斷

圖 31.6 選擇了兩組極爲不同的超曲面來揭示 Schwarzschild 幾何隨時間的演化。（還有別的選擇如圖 21.4 所示。）注意，雖然演化橋的精確幾何取決於類空超曲面的任意抉擇，但是演化的定性性質却與超曲面的選擇無關。定性地講，開始時兩個漸近地平直的宇宙不相連接，每個宇宙各自包含一個曲率爲無限的奇點（$r=0$）。當兩個宇宙隨時間演化時，它們的奇點相互連接，並形成一個非奇異的橋。橋逐漸增大，直到在喉管處達到極大半徑 $r=2M$（極大周長爲 $4\pi M$，極大表面面積爲 $16\pi M^2$）。此後，它再收縮直至箍斷，剩下的兩個宇宙不再連接，並再度包含奇點（$r=0$）。橋的形成，膨脹和收縮十分迅速，從一個宇宙的遠處發來的任何粒子或光線都來不及越過橋達到另一宇宙的遠處，它們總是在橋箍斷時被逮住和被壓碎。（爲了證明這一點，考察圖 31.3 的 Kruskal-Szekeres 圖，在此圖上徑向光線沿45度線運動）。

通過蛀孔交換信息是不可能的：它箍斷得太快



類空薄片　　歷史 *A-B-C-D-E-F-G*　　歷史 *A-W-X-D-Y-Z-G*

圖 31.6

眞空 Schwarzschild 幾何的 Einstein-Rosen 橋的動力學演化（示意圖）。此處表示的是，以兩種不同方式觀察橋的演化時，相應的兩個系列嵌入圖——歷史 *A-B-C-D-E-F-G* 和歷史 *A-W-X-D-Y-Z-G*。嵌入圖是概略的。其中每個圖都必須繞適當的垂直軸旋轉，以便變爲類似於圖 31.5a 的二維曲面。［注意，嵌入圖描繪的超曲面與奇點只是切向相交。在 *u-v* 平面內與奇點以有限角度相交的超曲面沒有畫出，因爲它們無法嵌入 Euclid 空間。作爲替代，應採用 Minkowski 空間（不定度規），至少在接近 $r=0$ 處應如此。作爲嵌入於 Minkowski 空間的例子，參看 (27.23) 式 (27.24) 式和框 27.2c 中對具有恒定負空間曲率宇宙的討論］。圖 21.4 展示了 Schwarzschild 幾何中其他類空薄片的嵌入圖。

在奇點創生和毀滅

從 Kruskal-Szekeres 圖及其徑向光線的45度性質可以看出，在空時 IV 區中找到的任何粒子必定是在前一個奇點「創生」的；而曾落入 II 區的任何粒子都注定會在後一個奇點中被壓碎。只有那些永遠呆在漸近平直宇宙 I 或 III 區的粒子，處在引力半徑之外（$r>2M$），才能永遠安全地避開奇點。

修改 Schwarzschild 空時拓撲的一些不實際的建議

一些研究者因在 $r=0$ 的奇點或因 Schwarzschild 幾何的「雙重宇宙」性質而不安，曾建議修改它的拓撲。一種建議認爲，較早的和稍後的兩個奇點彼此等同，因此當一個粒子落入區域 II 的奇點後，它沒有消滅，它將突然重新出現，從區域 IV 的奇點發射出來。不能誇大對這種觀點的反對：$r=0$ 區域是物理奇點，它具有無限大的潮汐引力和無限的 Riemann 曲率。任何落入該奇點的粒子必定會被這些力消滅。任何利用 Einstein 場方程把粒子壽命延

伸過奇點的企圖注定要失敗；面對無限大的曲率，方程失去了它們預告未來的能力。與此相應，假定粒子從前一奇點中重新出現也就是任意編造一個隨心所欲的數學定律，它與物理學毫不相關。可以設想，任何具有有限質量的物體在它接近 $r=0$ 時能修改奇點的幾何，以致使它能通過奇點並重新出現，但是，沒有人會相信這是眞的。然而，這種推測正確與否，不能由隨心所欲的規則來回答，而需要在廣義相對論的框架下作具體的困難的計算（見第34章）。

修改Schwarzschild幾何的拓撲的第二個建議是：通過把Kruskal-Szekeres坐標系中的每一點 (v,u,θ,ϕ) 和與它相反的點 $(-v,-u,\theta,\phi)$ 看作同一點，來避免兩個不同的漸近平直宇宙的存在。對這個建議有兩個反對意見，(1)這種方案在 $(v,u)=(0,0)$ 即在橋的頸部，在橋極大膨脹的時刻產生了某種「圓錐形」的奇點（不存在局域 Lorentz 系）；(2)它導致因果律的破壞，一個人可以隨時間倒退回去與他自己相遇。

讀者想精通 Schwarzschild 幾何基本特徵的一個好辦法是仔細地重新閱讀 §31.1 至 §31.4，並利用 Kruskal-Szekeres 圖重新解釋其中談到的每件事情。

練習

練習 31.7 在各向同性坐標系中的 Schwarzschild 度規

(a) 試證明，在練習 23.1 的各向同性坐標系中重新寫出的 Schwarzschild 度規爲

$$ds^2=-\left(\frac{1-M/2\bar{r}}{1+M/2\bar{r}}\right)^2dt^2+\left(1+\frac{M}{2\bar{r}}\right)^4[d\bar{r}^2+\bar{r}^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]; \qquad (31.22)$$

並導出兩個徑向坐標之間的變換關係爲

$$r=\bar{r}(1+M/2\bar{r})^2。 \qquad (31.23)$$

(b) 各向同性的坐標片可以覆蓋空時的哪一些區域 (I,II,III,IV; 見圖 31.3)，不能覆蓋哪些區域？

(c) 計算並繪出類空超曲面 $t=0$, $0<\bar{r}<\infty$ 的鑲嵌圖。

(d) 在保持度規係數爲原有形式的情況下，尋找一個把 $\bar{r}=0$ 附近區域與 $\bar{r}=\infty$ 附近區域交換的坐標變換。

練習 31.8 Reissner-Nordstrøm 幾何

(a) 在靜態正交歸一系

$$\omega^{\hat{0}}=e^{\Phi}dt, \quad \omega^{\hat{r}}=e^{\Lambda}dr, \quad \omega^{\hat{\theta}}=rd\theta, \quad \omega^{\hat{\phi}}=r\sin\theta d\phi$$

中，對於沒有任何物質但具有徑向電場 $\boldsymbol{B}=0$, $\boldsymbol{E}=f(r)\mathbf{e}_r$ 的球對稱靜態引力場

$$ds^2=-e^{2\Phi(r)}dt^2+e^{2\Lambda(r)}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,,$$

求解 Einstein 場方程。在 Einstein 場方程中把電場的脅强-能量用作源。［答案：

$$\boldsymbol{E}=(Q/r^2)\mathbf{e}_r\,, \tag{31.24a}$$

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,。 \tag{31.24b}$$

此解稱爲「Reissner (1916)-Nordstrøm (1918) 度規」。］

(b) 試證明，當遠處 ($r\gg 2M$, 和 $r\gg Q$) 觀測者利用 Gauss 流量積分或研究荷質比 $e/\mu\gg M/Q$ 的試驗電荷的 Coulomb 力支配的軌道時，他測出的常數 Q 就是總電荷。試問一個電子的無量綱荷質比是多少？試證明常數M是遠處觀測者利用電中性粒子Kepler 軌道測出的總質量。

(c) 試證明，當 $Q>M$ 時，從 $r=\infty$ 開始直到具有無限潮汐力的物理奇點 $r=0$ 處，Reissner-Nordstrøm 坐標系表現均良好。

(d) 試利用本章所述各種技巧（坐標變換，類 Kruskal 坐標，粒子軌道研究，鑲嵌圖等），考察 $Q<M$ 的空時幾何的性質。

［解：參看 Graves 和 Brill (1960)；也可參看本書圖 34.4。］

(e) 類似地考察 $Q=M$ 的空時幾何。［解：見 Carter (1966b)。］

(f) 對於大荷質比的情況［如題 (c) $Q>M$］，試證明 $r=0$ 附近的區域是非物理的。更準確地說，試證明在電荷重壓之下物質的任何球對稱分布所給出的在其邊界外的場 (31.24)，在 $r<r_0=Q^2/2M$ 的區域應予修正。［提示：研究 (23.18) 式和 (32.22h) 式定義的 $m(r)$，一方面注意從 (31.24) 式導出m值，另一方面注意在物質分布的區域內從適當的 Einstein 場方程導出的m值。參看 Misner (1969a) 圖26給出的類似論證。］

第三十二章　引力坍縮

你看，現在，在這裏，你必須拚命快跑，才能留在原地。如果你想去什麼別的地方，就必須加倍快跑。

紅色皇后，摘自「透過梳妝鏡」
Lewis Carroll (1871)

§32.1　Schwarzschild 幾何的適用性

上一章展現的故事令人難以置信！原來作爲靜態恒星外場推出的Schwarzschild 線元

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-2M/r}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2), \qquad (32.1)$$

初看令人乏味。人們問道，如果不存在恒星將會怎樣；即在沒有恒星產生Schwarzschild 幾何的情況下研究它的性質。人們預期這種幾何是在 $r=0$ 處有一點質量的幾何。但却並非如此。結果弄清楚它代表把兩個漸近地平直的宇宙連在一起的「蛀孔」。而且，此蛀孔是動力學的。它是分別具有「$r=0$」奇點的兩個宇宙「連在一起」的產物；它能擴展到 $4\pi M$ 的最大圓周；然後它將重新收縮並箍斷，使剩下的兩個宇宙再次失去聯系，保留各自的「$r=0$」奇點。

Schwarzschild幾何的作用和它的適用性

作爲 Einstein 場方程的一個解，對這個膨脹後又重新收縮的蛀孔必須認眞對待。它是一個嚴格解；也是所有嚴格解中最簡單的一個。但是，沒有任何理由相信在眞實宇宙中的確存在着這樣一些蛀孔！僅當膨脹的宇宙在$\sim 10\times 10^9$年前以必要的初始條件「誕生」時這些蛀孔才會存在——這個初始條件是，具

有已經準備好的「$r=0$」Schwarzschild 奇點，它們正等待着成長爲蛀孔。完全沒有理由相信這種病態的初始條件！

那麼，爲什麼在第31章中花費這麼多時間和努力來理解 Schwarzschild 幾何呢？(1)因爲它清楚地闡明了當引力變得很强時空時幾何的高度非 Euclid 性質；(2)因爲它闡明了可用於分析强引力場的許多巧技；而最重要的是(3)因爲經適當的剪截，它就成爲黑洞和坍縮恒星——以及蛀孔的空時幾何。

本章考察在引力坍縮中 Schwarzschild 幾何的作用；下一章考察它在黑洞物理學中的作用。

§32.2　Birkhoff 定理

Schwarzschild 幾何的唯一性：Birkhoff 定理

Schwarzschild 幾何與引力坍縮有關，這來自 Birkhoff (1923) 定理：設給定空時區域的幾何(1)是球對稱的，(2)是真空中 Einstein 場方程的解。那麼，此幾何必定是 Schwarzschild 幾何的一部分。不管恒星是否靜止，振動或坍縮，任何電中性球形恒星的外場都滿足 Birkhoff 定理的條件。因此，此外場必定是 Schwarzschild 幾何的一部分。

潛伏在 Birkhoff 定理之下的物理學

Birkhoff 定理不難以物理學理解。考慮一個平衡位形，它對於引力坍縮是不穩定的，並且與其他所有平衡位形一樣（參看 §23.6），它的外部引力場具有 Schwarzschild 幾何。以球對稱方式擾動此位形，使它開始徑向坍縮。只要保持嚴格的球對稱性，則擾動和隨後的坍縮並不影響外部引力場。正像 Maxwell 定律禁止單極電磁波，Einstein 定律也禁止單極引力波。沒有任何辦法使徑向坍縮的引力影響向外傳播。

Birkhoff 定理的證明

Birkhoff 定理不僅容易理解，它也相當容易證明。考慮一球形空時區域。球對稱本身就足以確保框 23.3 的條件 (i)，(ii) 和 (iii) 得到滿足，從而確保可以引入 Schwarzschild 坐標

$$ds^2=-e^{2\Phi}dt^2+e^{2\Lambda}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$$
$$\Phi=\Phi(t,r),\ \text{和}\ \Lambda=\Lambda(t,r)。\qquad(32.2)$$

[證明可參看框23.3；並需注意：(1)爲了普遍，應允許 $g_{tt}=-e^{2\Phi}$ 和 $g_{rr}=e^{2\Lambda}$ 可正可負（符號不得有限制！）；(2)對於在「周長函數」r 的梯度爲零或不存在處的那些事件，不能引入 Schwarzschild 坐標。特殊情況 $(\nabla r)^2=0$ 的

處理見練習 32.1。] 把度規 (32.2) 强加給 Einstein 的眞空場方程；利用練習14.16推出的 Einstein 張量的正交歸一分量：

$$G_{\hat{t}\hat{t}}=r^{-2}(1-e^{-2\Lambda})+2(\Lambda_{,r}/r)e^{-2\Lambda}=0\,, \tag{32.3a}$$

$$G_{\hat{t}\hat{r}}=G_{\hat{r}\hat{t}}=2(\Lambda_{,t}/r)e^{-(\Lambda+\Phi)}=0\,, \tag{32.3b}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}}=2(\Phi_{,r}/r)e^{-2\Lambda}+r^{-2}(e^{-2\Lambda}-1)=0\,, \tag{32.3c}$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}=G_{\hat{\phi}\hat{\phi}}=+(\Phi_{,rr}+\Phi_{,r}{}^2-\Phi_{,r}\Lambda_{,r}+\Phi_{,r}/r-\Lambda_{,r}/r)e^{-2\Lambda}$$
$$-(\Lambda_{,tt}+\Lambda_{,t}{}^2-\Lambda_{,t}\Phi_{,t})e^{-2\Phi}=0\text{。} \tag{32.3d}$$

(32.3b) 式確保 Λ 只是 r 的函數，(32.2a)式確保 Λ 具有與 Schwarzschild 度規同樣的形式：

$$\Lambda=-\frac{1}{2}\ln|1-2M/r|\text{。} \tag{32.4a}$$

這樣，(32.3c,d) 式變成 $\Phi(t,r)$ 的兩個等價的方程——由於 Bianchi 恒等式 $\nabla\cdot\mathbf{G}=0$ 它們才等價——方程的解爲

$$\Phi=\frac{1}{2}\ln|1-2M/r|+f(r)\text{。} \tag{32.4b}$$

式中 f 是任意函數。將表達式(32.4)代入線元(32.2)；由此得到

$$ds^2=-e^{2f(t)}\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-2M/r}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\text{。}$$

重新定義時間坐標

$$t_{\text{新}}=\int e^{f(t)}dt\,,$$

由此使線元成爲 Schwarzschild 形式

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-2M/r}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\text{。}$$

結論：當任一客體周圍的空時具有球對稱性，無電荷，無質量，且除引力外無任何其他場時，就可以引入坐標，其中的度規爲 Schwarzschild 度規。這個結論可用無坐標語言重述如下：空時的任何球對稱眞空區域的幾何是 Schwarzschild 幾何的一部分 (Birkhoff 定理) 。證畢。

練習

練習 32.1 Reissner-Nordstrøm 幾何的唯一性 [高階]

試證明下述廣義的 Birkhoff 定理。設給定空時區域的幾何(1)是球對稱的，(2)是以電

磁場爲源項的 Einstein 場方程的解。則該幾何必定是 Reissner-Nordstrøm 幾何［(31.24b)式］的一部分，它所具有的電磁場在標準靜態正交歸一系中測出爲

$$\boldsymbol{E}=(Q_e/r^2)\mathbf{e}_r\,,\qquad \boldsymbol{B}=(Q_m/r^2)\mathbf{e}_r\,,\qquad Q=(Q_e^2+Q_m^2)^{1/2}\,。$$

［提示：(1)首先，利用正文中用於 Birkhoff 定理的同樣方法，討論 $(\nabla r)^2\neq 0$ 的空時區域。結果爲 Reissner-Nordstrøm 解。(2)任何 $(\nabla r)^2=0$ 且維數小於四的區域（例如，Schwarzschild 半徑）可以當作 $(\nabla r)^2\neq 0$ 的四維區域之間的接合部來處理 。另外，這個區域的幾何由毗鄰四維區域的幾何唯一確定 （「連接條件」；§21.13)。因爲毗鄰區域必定是 Reissner-Nordstrøm（步驟1），故這些「中介」區域也必如此 。(3)然後考慮 $\nabla r=\boldsymbol{dr}$ 爲零和不爲零的四維區域。試證明在這樣的區域中存在着線元爲

$$ds^2=-2\Psi dr dt+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,,$$

的坐標系，其中 $\Psi=\Psi(r,t)$。試進一步證明，對此線元，Ricci 張量的正交歸一分量爲

$$R_{\hat{1}\hat{1}}=1/r^2\,,$$

而球對稱電磁場的脅强-能量張量爲

$$8\pi T_{\hat{1}\hat{1}}=8\pi\Big(T_{\hat{1}\hat{1}}-\frac{1}{2}g_{\hat{1}\hat{1}}T\Big)=Q^2/r^4,\ Q=常數。$$

量 $R_{\hat{1}\hat{1}}$ 和 $8\pi T_{\hat{1}\hat{1}}$ 必須相等（Einstein 場方程），但又因它們是 r 的不同函數而不可能相等。因此，電磁場不能產生出 $\boldsymbol{dr}\neq 0$，$\boldsymbol{dr}\cdot\boldsymbol{dr}=0$ 的區域。(4)最後，考慮 $\boldsymbol{dr}=0$ 的四維區域。把恒定的 r 值表爲 a，並證明任何事件都可選來作爲局域表現良好的坐標系的原點，且有

$$ds^2=a^2(-d\tilde{\tau}^2+e^{2\lambda}dz^2+d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,,$$
$$\lambda=\lambda(\tilde{\tau},z)\,,\quad \lambda(\tilde{\tau}=0,z)=0\,,\quad \lambda(\tilde{\tau}=0,z)=0\,。$$

［Novikov 類型的坐標系；參看 §31.4。］試證明，在連帶的正交歸一系中，球對稱要求

$$\boldsymbol{E}=(Q_e/a^2)\mathbf{e}_{\hat{r}}\,,\qquad \boldsymbol{B}=(Q_m/a^2)\mathbf{e}_{\hat{r}}\,,\qquad Q\equiv(Q_e^2+Q_m^2)^{1/2}\,,$$

以及 Einstein 場方程要求 $Q=a$ 和 $e^{\lambda}=\cos\tilde{\tau}$，因此

$$ds^2=Q^2(-d\tilde{\tau}^2+\cos^2\tilde{\tau}dz^2+d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,。$$

(5)場方程的這個解［有時稱爲「Bertotti(1959)-Robinson(1959a) 電磁宇宙」Lindquist (1960) 曾在此坐標系中研究了這個解］，實際上是在 $Q=M$ 特殊情況下 Reissner-Nordstrøm 解的喉管。在 Reissner-Nordstrøm 喉管區域，作下述坐標變換以證實這個論述［(31.24b) 式，$Q=M$ 和 $|r-Q|\ll Q$］:

$$r-Q=Qe^{-\tau}\cos\tilde{\tau}\,,\qquad t=Qe^{\tau}\tan\tilde{\tau}\,。$$

(6)從而，每一種可能的情況或是導致完全無解，或是導致 Reissner-Nordstrøm 幾何的一部分。證畢。〔注意：對於在正文中證明 Birkhoff 定理時略去的情況，$(\nabla r)^2=0$，只需注意到，對 $Q=0$ 的情況，上述步驟(3)與(4)導致完全無解，問題就可解決。作者感謝 G. F. R. Ellis 指出本書初稿中遺漏了 $(\nabla r)^2=0$ 情形。

§32.3 坍縮恒星的外部幾何

考慮暫時處於靜態但隨即開始坍縮的一顆恒星。它的空間幾何，在Schwarzschild 坐標時間 $t=0$ 的初始時刻，有兩部分：外部的眞空區域（$r>R>2M$）是 Schwarzschild 幾何(Birkhoff 定理！)；但在恒星內部是另外某種完全不同的幾何。不管內部幾何可能是什麼，它在 $t=0$ 時刻的嵌入圖定性地像圖23.1（對此的討論和證明，見 §23.8）。注意，拋棄完整 Schwarzschild 幾何（圖 31.5a）的下半個宇宙，並代之以包含恒星物質的光滑的「碗」，即可得到恒星的空間幾何。

通過考察恒星外部的Schwarzschild幾何來分析引力坍縮

爲了追踪恒星隨後的坍縮過程，無論在 Schwarzschild 坐標系中，或在 Kruskal-Szekeres 坐標系中，或在內向 Eddington-Finkelstein 坐標系中，都可以類似地拋棄恒星表面之內的那部分坐標圖，而只保留外部的Schwarzschild 區域。（見圖32.1。）代替被拋棄的內部 Schwarzschild 區域，必須引入某種另外的坐標系，線元和圖，以便正確地描繪坍縮恒星的內部區域。

從截斷的坐標圖（如圖 32.1 a,b,c）中，容易發現和理解經過引力半徑的坍縮的各種獨特性質。

引力半徑是不可回返之點，而$r=0$爲「壓碎」點

(1)不管(球狀)恒星由多麼堅硬的物質組成，一旦恒星表面坍縮到引力半徑之內，此恒星就要繼續坍縮下去，直到它的表面在$r=0$的奇點被壓碎。只要憶及恒星表面不可能運動得比光速還快，因此它的世界線與 Kruskal-Szekeres 圖中 v 軸的夾角永遠小於45度，就可以發現這一點。

(2)在恒星表面坍縮到引力半徑之內後，從恒星表面發出的信號（例如光子）永遠無法逃脫而達於外部觀測者。相反地，隨着恒星周圍空間的「箍斷」，在周圍幾何坍縮到$r=0$的奇點時，所有從引力半徑內發出的信號都被捕獲並被消滅。

(3)結果，在恒星坍縮到引力半徑之內後，外部觀測者就再也看不到它了；而且他也永遠不能看到結束恒星坍縮的奇點——除非他自己也打算落到引力半徑之內，並且準備爲了得到有關的知識付出死亡的代價。

這是否意味着，對於外部觀測者而言，坍縮着的恒星達到其引力半徑就立即完全消失呢？不是，按照圖 31.1c 所示的分析來看並非如此：把一位天體物理學家放在一坍縮恒星的表面，他向在遠方 $r \gg 2M$ 處靜止的另一位天文學家發出一系列均勻間距的信號，通知他坍縮的進程。這些信號沿着圖 31.1c 空時圖的零線傳播。這些信號起源於恒星表面的世界線，並且當它們與遙遠天文學家的世界線 $r=$ 常數 $\gg M$ 相交時，它們就被他接收到了。隨着恒星在坍縮過程中愈來愈接近其引力半徑 $R=2M$，按照天體物理學家的鐘，以相等時間間隔發出的信號，將在愈來愈長的時間間隔內被天文學家接收到。只有經過無限長的時間之後，天文學家才能接收到剛好在達到引力半徑之前發出的信號；而在越入引力半徑之內後發出的信號，他永遠不會收到。這些信號，與發出它們的天體物理學家一樣，在短暫的奔逃之後，就被奇點在 $r=0$ 的坍縮的幾何所捕獲並被消滅。不僅恒星在坍縮。圍繞着恒星的幾何也在坍縮。

剛好在越過引力半徑之前發出的信號的紅移

因此，對於遠處的天文學家來說，坍縮的恒星在接近其引力半徑時似乎減慢了；來自恒星的光線的紅移愈來愈大。在恒星上的鐘似乎愈走愈慢。恒星需要無限長的時間才能到達其引力半徑；而且，從遠處的天文學家看來，恒星永遠不會越過引力半徑進一步坍縮。

坍縮恒星的光學面貌

J. R. Oppenheimer 和 H. Snyder (1939) 首先從數學上分析了坍縮恒星的光學面貌，其主要注意力集中於徑向傳播的光子。近年來一些工作者又重新考察了這個問題 [參看，例如，Podurets (1964), Ames 和Thorne (1968) 以及 Jaffe (1969)]。這些研究的最重要定量結果如下。在恒星坍縮的晚期，當遠處天文學家看到恒星已非常接近其引力半徑時，他發現恒星的總光度隨時間指數衰減

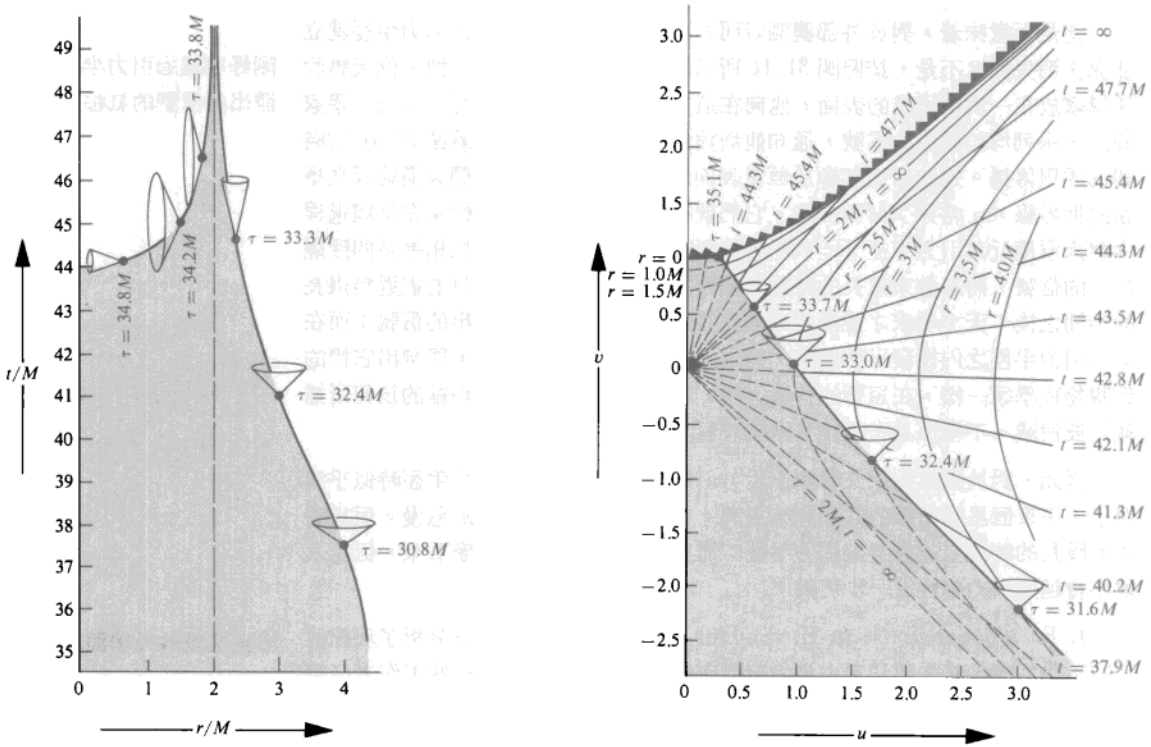
$$L \propto \exp\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{t}{2M}\right)。 \tag{32.5}$$

同時，沿着徑向軌道飛向天文學家的光子具有隨時間指數增大的紅移

$$z = \Delta\lambda/\lambda \propto e^{t/4M}。 \tag{32.6}$$

但是，在此晚期，恒星所發出的光，主要不是來自從引力半徑附近沿徑向軌道飛出的光子，而是來自當恒星表面經過 $r=3M$ 時被恒星存放在不穩定圓軌道上的光子（參看§25.6和框25.7）。隨着時間的流逝，在 $r=3M$ 處被捕獲的光子逐漸從彌散的球狀壳層中漏泄出來，並且飛向遙遠的觀測者，他測出它們的紅移爲 $z \approx 2$。結果，在坍縮的晚期，恒星的譜線會極大地加寬，但是它們在紅移 $z \approx 2$ 處最明亮。

（接第850頁）



(a) Schwarzschild (b) Kruskal-Szekeres

圖 32.1

本圖分別在 (a) Schwarzschild 坐標，(b) Kruskal-Szekeres 坐標，和 (c) 內向 Eddington-Finkelstein 坐標中描繪初始半徑 $R_i=10M$ 的恒星的自由下落坍縮（見框31.2）。坍縮恒星內部的空時區域用灰色表示，外部用白色表示。只有外部區域的幾何爲 Schwarzschild 幾何。分隔灰區和白區的曲線是坍縮恒星表面的短程世界線［(31.10) 式或 (32.10) 式，取 $r_{極大}=R_i=10M$］。此世界線以坐在恒星表面的觀測者測出的原時 τ 爲參數；從 $ds^2=0$ 算出的徑向光錐也附於此世界線上。

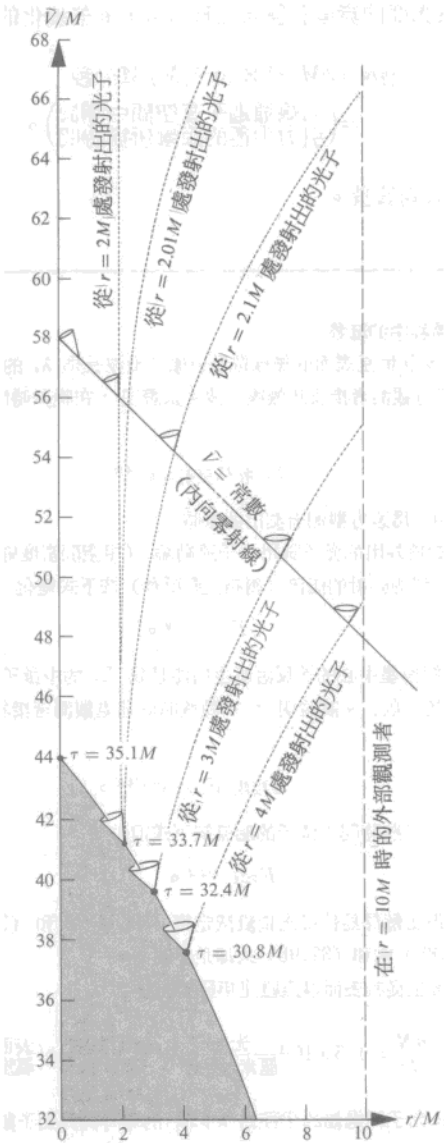
注意，儘管諸光錐相對於 Schwarzschild 坐標或相對於 Eddington-Finkelstein 坐標的形狀並不完全相同，但它們相對於 Kruskal-Szekeres 坐標却是完全相同的。這是因是在 u, v ，平面中光線沿45度線運動 ($dv=\pm du$)，而在 r, t 平面和 r, $\tilde{V}$ 平面中光線沿曲線運動。

此處所示的 Kruskal-Szekeres 空時圖與 Schwarzschild 圖的關係是 (31.13) 式加上 Schwarzschild 時間的變換：$t\longrightarrow t+42.8M$。Eddington-Finskelstein 圖與 Schwarzschild 圖的關係是

$$\tilde{V}=t+r^*=t+r+2M\ln|r/2M-1|$$

（見框 31.2）。

從這些圖顯然可見，自由下落坍縮的特徵是半徑的不斷減小，在有限而短暫的原時間隔 $\Delta\tau=35.1M$ 內，從 $R=10M$ 減少到 $R=0$。點 $R=0$ 和在恒星外 $r=0$ 的整個區域構成一物理「奇點」，根據經典的非量子化的廣義相對論，在奇點處無窮大的潮汐引力可以而且確實把物質擠壓到無窮大的密度（見 §31.2 的末尾和 §32.6）。



(c) Eddington-Finkelstein

Eddington-Finkelstein 圖中繪出了從坍縮恒星表面沿徑向發出並被在 $r = R_{初始} = 10M$ 處的觀測者接收的一系列光子。觀測者最終將接收到從引力半徑外沿徑向發射出的全部光子；在恒星坍縮到小於它的引力半徑之後發射的全部光子最終將被拖入 $r = 0$ 在的奇點；而在引力半徑處沿徑向發射的任何光子將永遠停留在引力半徑處。

非自由下落的坍縮類似於此圖描繪的坍縮。當存在壓力梯度時，只是恒星表面世界線形狀的細節有所變化。

注意，對於光度的衰減和徑向紅移而言，e 倍變化的特徵時間是多麼短暫

$$\tau_{\text{特徵}}=2M\approx 1\times 10^{-5}(M/M_{\odot})\text{秒}$$
$$=\left(\begin{matrix}\text{光線通過平直空間中等於}\\ \text{引力半徑的距離所需時間}\end{matrix}\right)。\qquad (32.7)$$

此處 $M_{\odot}$ 表示太陽質量。

初階

高階

本章其餘部分均屬高階。無需前面的高階內容爲它作準備，但它是下述內容的必要準備：(1)第33章的高階部分（黑洞）和(2)第34章（奇點和整體方法）。

練習

練習 32.2 坍縮過程中的紅移

(a) 設在坍縮球狀恒星表面的無線電發射機發出波長爲 λ_e 的單色波；並設與發射機處於同一 θ, ϕ 的遠方觀測者接收此無線電波。試證明，在晚些時間接收到的波長按下式變化

$$\lambda_{\text{接收}}/\lambda_{\text{發射}}\propto e^{t/4M} \qquad (32.8a)$$

[(32.6) 式]，式中 t 爲遠方觀測者測出的原時。

(b) [高階] 對於外出的光子試用分子運動論（相空間密度守恒；Liouville 定理；§22.6）證明，接收到的輻射的能流（爾格/厘米^{2}秒）按下式變化

$$F\propto e^{-t/M}。 \qquad (32.8b)$$

(c) 假設在坍縮恒星中心的核反應產生出能量爲 E_e 的中微子，並且這些中微子自由地外流（忽略恒星的吸收）。試證明，在晚些時間遠處觀測者接收到的中微子的能量按下式減小

$$E_{\text{接收}}/E_e\propto e^{-t/4M}。 \qquad (32.9a)$$

(d) 試證明，在晚些時間中微子的能流按下式消失

$$F\propto e^{-t/2M}。 \qquad (32.9b)$$

(e) 用初等的術語解釋爲什麼能量衰減定律 (32.8a) 式和 (32.9a) 式是相同的，而能流衰減定律 (32.8b) 式和 (32.9b) 式却是不同的。

(f) 設一坍縮恒星從其表面以黑體速率發射光子

$$\frac{dN}{d\tau}=\left(1.5\times 10^{11}\frac{\text{光子}}{\text{厘米}^2\text{秒開}^3}\right)\times\left(\begin{matrix}\text{恒星表}\\ \text{面面積}\end{matrix}\right)\times\left(\begin{matrix}\text{表面}\\ \text{溫度}\end{matrix}\right)^3。$$

設遠方觀測者在光子經過他的半徑爲 $r\gg M$ 的球時計算光子數目。當他看見（通過沿徑向向外運動的光子）恒星表面的中心通過半徑 $r=3M$ 時開始他的計數（時間 $t=0$）。試證明，從開始計數到最終能够飛出來的最後一個光子到達觀測者的時間，即觀測者及其伙伴必須等待的時間，其數量級爲

$$t=(M/M_{\odot})[8\times 10^{-4}+5\times 10^{-5}\log_{10}(T_{11}M/M_{\odot}]\text{秒}, \qquad (32.9c)$$

式中 T_{11} 是以 10^{11} 開爲單位的恒星表面溫度。

§ 32.4　密度均匀壓力爲零的恒星的坍縮

當人們把注意力轉向坍縮恒星的內部以及轉向其表面在 Schwarzschild 幾何中的精確的世界線時，會遇到比較複雜的數學。要處理的最簡單情況是密度均匀和壓力爲零的「恒星」；並且，確實，到最近爲止，這是曾經詳細處理過的唯一情況。對於這種密度均匀的「塵埃球」坍縮，最初的非常完整的分析是在 Oppenheimer 和 Snyder (1939) 的經典文獻中給出的。近來，另一些工作者從稍稍不同的觀點並採用不同的坐標系作了討論。此處採用的方法是 Beckedorff 和 Misner (1962) 提出的。

密度均匀的「塵埃」球從靜止坍縮

因爲不存在使運動偏折的壓力梯度，任何塵埃球表面上的粒子在外部 Schwarzschild 幾何中必定沿徑向短程線運動。對於在 $t=0$ 時以有限半徑 $R=R_i$ 從靜止開始的球，隨後其表面的短程線運動由 (31.10) 式給出：

$$R=(R_i/2)(1+\cos\eta)\,, \tag{32.10a}$$

(1)在外部Schwarzschild坐標系中球表面的世界線

$$t=2M\ln\left|\frac{(R_i/2M-1)^{1/2}+\tan(\eta/2)}{(R_i/2M-1)^{1/2}-\tan(\eta/2)}\right|$$

$$+2M(R_i/2M-1)^{1/2}[\eta+(R_i/4M)(\eta+\sin\eta)]\,。 \tag{32.10b}$$

式中 R 是在 Schwarzschild 時刻 t 的 Schwarzschild 徑向坐標（即 $4\pi R^2$ 是恒星的表面面積）。在圖32.1中，對於 $R_i=10M$ 的情形，分別在Schwarzschild 坐標，Kruskal-Szekeres 坐標和 Eddington-Finkelstein 坐標中繪出了這個世界線。由坍縮恒星表面上的鐘讀出的原時由 (31.10b) 式給出：

$$\tau=(R_i^3/8M)^{1/2}(\eta+\sin\eta)\,。 \tag{32.10c}$$

注意，當參數 η 爲零時坍縮開始了 ($R=R_i$, $t=\tau=0$)；並在奇點 ($R=0$, $\eta=\pi$) 終止，其間的原時間隔可由與塵埃一同下落的任何試驗粒子測出，等於

$$\Delta\tau=\pi(R_i^3/8M)^{1/2}\,。$$

雖屬巧合但有趣的是，它與 Newton 理論中自由下落坍縮到無窮大密度所需的時間間隔嚴格一致 [見 (25.27′) 式，圖25.3和有關的討論]。

坍縮時塵埃球內部的行爲如何呢？可以設想幾種不同的無壓塵埃內部結構（練習32.8）。但此處只注意其中最簡單的一種：除表面外內部處處均匀各向同性——即內部局域地等同於充滿塵埃的 Friedmann 宇宙學模型（框27.1）。Friedmann內部是「開放的」($k=-1$)，「平直的」($k=0$)，還是「閉合的

(2)球內部等同於閉合 Friedmann宇宙的一部分

」($k=+1$) 呢？只有閉合情形合適，因爲已經要求 [(32.10)式] 恒星起初是靜止的（密度的初始變化率爲零；「極大膨脹時刻」）。

對於恒星內部，採用共動超球面坐標 χ, θ, ϕ, 並把坐標原點放在恒星的中心，即可用熟知的 Friedmann 形式寫出內部的線元

$$ds^2=-d\tau^2+a^2(\tau)[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。\qquad(32.11)$$

式中 $a(\tau)$ 由熟知的擺線關係給出，

$$\begin{aligned} a&=\frac{1}{2}a_m(1+\cos\eta),\\ \tau&=\frac{1}{2}a_m(\eta+\sin\eta);\end{aligned}\qquad(32.12)$$

密度爲

$$\rho=(3a_m/8\pi)a^{-3}=(3/8\pi a_m^2)\left[\frac{1}{2}(1+\cos\eta)\right]^{-3}\qquad(32.13)$$

[見框 27.1 的(1)，(9)，(4)和(5)式，其中的 η 代之以 $\eta+\pi$] 。

(3)Friedmann 內解與 Schwarzschild 外解之間的連接

這個內部解有一個可能的困難。在宇宙學情形，解是處處均勻和各向同性的。但在恒星表面均勻和各向同性被破壞了——採用超球面極角 χ 作爲一個共動坐標（框 27.2 中第一圖），對於全部 τ 值，測出恒星表面位於某個半徑

$$\chi=\chi_0。\qquad(32.14)$$

內部 Friedmann 幾何與外部 Schwarzschild 幾何必須在該表面（即包圍恒星流體的三維世界管）上光滑地相匹配。如果達不到這種匹配，則 Friedmann 線元 (32.11) 就不能代表坍縮恒星的內部 。這種匹配不能達到的一個例子是，內部的壓力爲均勻非零壓力，同時密度均勻。在這種情形，恒星表面將有無窮大的壓力梯度，它將把恒星的外層吹散，並發送向內朝恒星中心傳播的稀疏波。密度和壓力的均勻分布很快就被破壞了。

對於零壓力情形，匹配是可能的。作爲這種匹配的部分證實，可以考察由內部解和外部解分別獨立預言的恒星周圍，$C=2\pi R$ ，它是在恒星表面的原時 τ 的函數。外部 Schwarzschild 解預言擺線關係，

$$\begin{aligned} C&=2\pi R=2\pi(R_i/2)(1+\cos\eta),\\ \tau&=(R_i^3/8M)^{1/2}(\eta+\sin\eta)\end{aligned}\qquad(32.15)$$

[(32.10)式]。內部 Friedmann 解預言了類似的擺線關係：

$$C=2\pi R=2\pi a\sin\chi_0=2\pi\left(\frac{1}{2}a_m\sin\chi_0\right)(1+\cos\eta)\,,$$

$$\tau=\frac{1}{2}a_m(\eta+\sin\eta)\,。\qquad(32.16)$$

當且僅當

$$R_i=a_m\sin\chi_0\,,\qquad(32.17a)$$

$$M=\frac{1}{2}a_m\sin^3\chi_0\,。\qquad(32.17b)$$

則在全部時間兩個預言完全相符。練習（32.4）給出了這種匹配的更完全的證明。

對於這個理想化的引力坍縮模型的進一步透徹理解，可參看框 32.1。

練習

練習 32.3　坍縮星的嵌入圖和光子傳播

試詳盡地證明框 32.1 所述的均勻坍縮的特徵。

練習 32.4　Friedmann 內解與 Schwarzschild 外解的匹配

當且僅當恒星表面三維世界管的內部幾何與外部幾何，無論是從內部測量還是從外部測量都相同時，Einstein 場方程在此表面上才被滿足（參看 §21.13 的證明和討論）。試證明，對此坍縮恒星，內部幾何與外部幾何在 Friedmann 內解和 Schwarzschild 外解的連結處是匹配的。［提示：(a) 在恒星表面的世界管上採用 η, θ, ϕ 爲坐標，並證明無論在 Schwarzschild 外部或 Friedmann 內部測量，內部幾何均有同樣的線元

$$ds^2=a^2(\eta)[-d\eta^2+\sin^2\chi_0(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]\,。\qquad(32.18a)$$

(b) 試證明，無論在 Schwarzschild 外部或在 Friedmann 內部測量，世界管的外賦曲率具有相同的分量

$$\begin{aligned}&K_{\eta\eta}=K_{\eta\theta}=K_{\eta\phi}=K_{\theta\phi}=0\,,\\&K_{\theta\theta}=K_{\phi\phi}/\sin^2\theta=-a(\eta)\sin\chi_0\cos\chi_0\,。\end{aligned}\qquad(32.18b)$$

］

練習 32.5　從無窮遠坍縮的恒星

(a) 試把截斷的 Schwarzschild 幾何與截斷的、「平直」（$k=0$）的、充滿塵埃的、Friedmann 宇宙的幾何拼接在一起，得出在無窮大初始半徑從靜止坍縮的恒星模型。［提示：在 Schwarzschild 幾何中，恒星表面的世界線由 (31.2) 式給出。］

(b) 類似地，把截斷的 Schwarzschild 幾何與截斷的、「開放」（$k=-1$）的、充滿塵埃的、Friedmann 宇宙的幾何拼接在一起，得出從無窮遠開始以有限初始向內速度坍縮的恒星模型。

（接第857頁）

框 32.1 具有 Friedmann 內部和 Schwarzschild 外部的理想化坍縮恒星

（對於此處所描述的結果的證明，可參看 §32.4 和練習 32.3 和練習 32.4）

初始狀態

(1)取在極大膨脹時刻 $\eta=0$ 時半徑 $a=a_m$ 的 Friedmann 宇宙；切掉並拋棄 $\chi_0<\chi\leq\pi$ 的區域，其中 χ_0 是小於 $\pi/2$ 的某個角度。

(2)取在 $t=0$ 時刻質量 $M=(a_m/2)\sin^3\chi_0$ 的 Schwarzschild 幾何；切掉並拋棄 $r<R_i=a_m\sin\chi_0$ 的區域。

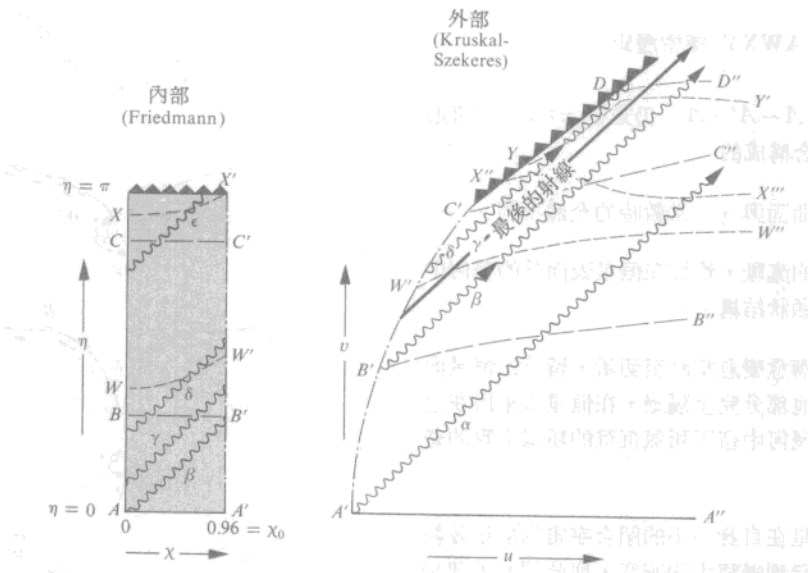
(3)把剩下的 Friedmann 幾何和 Schwarzschild 幾何沿着它們切割的表面光滑地粘貼在一起。得出的客體將是暫時處於靜止狀態的恒星，其密度均勻爲 $\rho_i=3/(8\pi a_m^2)$，質量爲 $M=(a_m/2)\sin^3\chi_0$，半徑爲 $R_i=a_m\sin\chi_0$。

隨後的演化

把此恒星從其初態釋放，使之按Einstein場方程坍縮。內部截斷的Friedmann宇宙和外部截斷的 Schwarzschild 幾何的演化，將與它們未被切割和拼接在一起時一樣；而且這種演化將維持內部與外部之間匹配的光滑性！

坍縮的細節

利用一系列嵌入圖（歷史 $ABCD$ 和 $AWXY$），並利用沿徑向向外傳播的光子（光子 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$）探明坍縮的細節。此處所示例子的 $\chi_0=0.96$，而 $R_i/M=2/\sin^2\chi_0=3$。



通過超曲面 ABCD 探索坍縮的歷史：

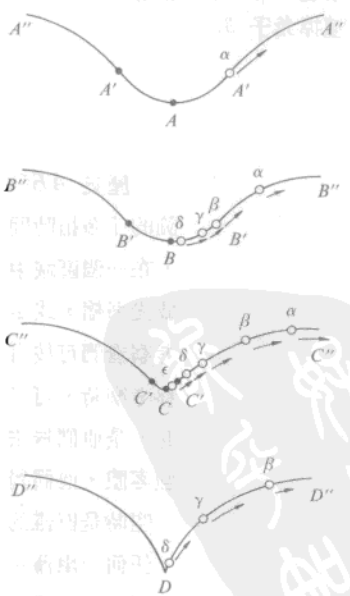
(1)初始位形 $A-A'-A''$，是在時刻 $\eta=t=0$通過切開與縫合構成的。

(2)隨後的每一個位形其內部是恒定Friedmann時間 η 的薄片。

(3)內部永遠保持爲半張角爲 χ_0 的球形杯；但它隨着時間的增加，從半徑 $R=R_i=a_m\sin\chi_0$ 收縮到 $R=0$。

(4)當R達到零時，恒星中的物質同時全部被擠壓到密度無窮大， 而外部 Schwarzschild 「漏斗」在該點發展爲杯狀奇點。

(5)隨着時間進一步增加，這個杯狀結構將很快地把漏斗的 $r<2M$ 區域拉到 $r=0$ 處，以致向外運動的光子將被吞噬和擠碎。



爲使這些嵌入圖變成類似於圖 23.1 的二維表面，應繞垂直軸旋轉。

通過超曲面 AWXY 探索歷史

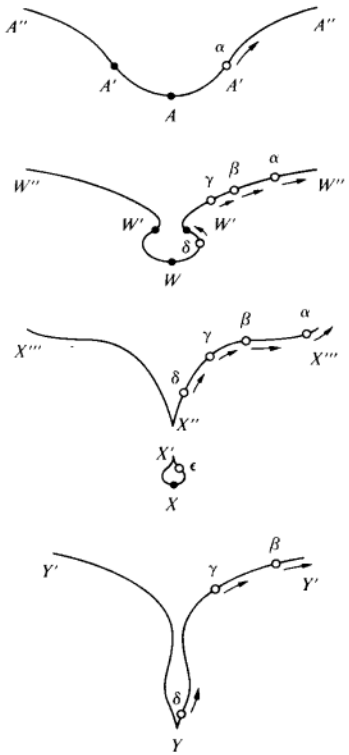
(1)初始位形 $A-A'-A''$ 仍是在 $\eta=t=0$ 時通過切開縫合構成的。

(2)隨後的超曲面與 $\eta=$常數時的全然不同。

(3)隨着時間的流駛，恰好在恒星表面外的幾何中發展出一頸狀結構。

(4)此頸狀結構愈變愈窄直至切斷，留下的恒星與宇宙的其他部分完全隔絕，在恒星原來所在之處的外部幾何中留下死氣沉沉的類似尖點的奇點。

(5)孤立的恒星在自身小小的閉合宇宙內繼續收縮，直至壓碎到無窮大的密度，與此同時外部幾何開始發展另一個頸狀結構，而尖點結構很快地吞噬掉光子 δ.



歷史 $ABCD$ 和歷史 $AWXY$ 之間的極端不同戲劇性地說明了廣義相對論的「多指時間」。人們在其上考察幾何的超曲面，可以根據考察者們的選擇，在一個區域中隨時間更快地推前。於是，究竟是恒星的這一區域還是那一區域先坍縮，或是整個恒星同時坍縮，取決於空時幾何和所選擇的薄片這兩者。考察者們可按自己的意願選擇薄片，因此從這個意義上說，當他們隨着時間前移考察時，可以支配考察的類空薄片的類型，但是，他們所切割的空時幾何本身，是他們無法控制或改變的。結果，他們的質量可以忽略，並且只適於作試驗客體，他們對空時不會有任何影響。空時完全由坍縮的初條件確定。簡言之，空時是四維的，而薄片只是三維的（從此處的圖中看來只是二維或一維的）。任何一組薄片只能佔據整個故事的一個片面。爲了看到整個畫面，必須研究幾何的動力學，在各種不同選擇的薄片中揭示它自己，或者習慣於把空時幾何看作一個整體。

§32.5　具有內壓力時的球對稱坍縮

有壓力的球狀坍縮定性地與無壓力時一樣

就外部引力而論，自由坍縮恒星和具有內壓力的球對稱坍縮恒星之間的唯一不同是：在外部 Schwarzschild 幾何中兩個恒星的表面沿着不同的世界線運動。因爲在兩種情況下，外部幾何是相同的，所以上一節對自由下落坍縮的定性描述可以直接用於內壓不可忽略的情況。

要問的一個重要而迷人的問題是：大的內壓力是否能以任何方式阻止坍縮的恒星被無窮大引力擠壓到無窮大密度？由圖 32.1b 的 Kruskal－Szekeres 圖顯而易見，一旦恒星坍縮到它的引力半徑以內（$R<2M$），不管內壓力多大，都無法阻止恒星表面擠壓成奇點。表面必定要沿着類時世界線運動，並且在 $r=2M$ 內的所有這些世界線都要達到 $r=0$。儘管現在還沒有合用的定理，但人們有理由猜想，如果球狀位形的表面被擠壓到在 $r=0$ 的奇點，則整個內部區域也必定都會被擠壓。

有壓力的球對稱坍縮恒星的內部動力學的細節，還沒有像外部 Schwarzschild 動力學那樣透徹的了解。但通過數值計算和解析分析，在理解內部動力學方面正在取得巨大的進展［參看 Misner (1969a)，作爲對此的評述］。在這些計算和分析中，除了上一節在簡單的均勻密度自由下落坍縮中所出現的特徵外，還沒有遇到什麼新的特徵（至少，沒有出乎意料的新特徵）。

練習

練習 32.6　一般的球狀坍縮：共動坐標中的度規

考慮一具有壓力的非均勻恒星經歷球狀坍縮。球對稱本身足以確保恒星內外存在着 Schwarzschild 坐標系 (t,r,θ,ϕ)［見 (32.2) 式及前面的討論］。以參數 a 標誌每一個球狀殼層，a 告訴我們該殼層內包含多少重子。這樣，$r(a,t)$ 是標誌爲 a 的球殼的世界線。倒着求解這些世界線的表達式可得出 $a(t,r)$，即可得出在時刻 t 在半徑 r 內的重子數。試證明，存在着一個新的時間坐標 $\tilde{t}(t,r)$，它使得在新坐標系 $(\tilde{t},a,\theta,\phi)$ 中重新寫出的線元 (32.2) 具有下述形式

$$ds^2=-e^{2\Phi}d\tilde{t}^2+\left[\frac{(\partial r/\partial a)_t da}{\Gamma}\right]^2+r^2d\Omega^2\,, \qquad (32.19a)$$

$$\tilde{\Phi}=\tilde{\Phi}(\tilde{t},a)\,, \quad r=r(\tilde{t},a)\,, \quad \Gamma=\Gamma(\tilde{t},a)\,。 \qquad (32.19b)$$

這些就是恒星內部的「共動同步坐標」。

練習 32.7 絕熱球形坍縮：演化方程［Misner 和 Sharp (1964)］

採用共動同步度規 (32.19) 式，重子數密度 n, 總質量-能量密度 ρ 和壓力 p 描述坍縮恒星的內部。因爲在此坐標系中流體是靜止的，所以恒星流體的四維速度爲

$$u=e^{-\phi}\partial/\partial\tilde{t}\,。 \tag{32.20}$$

用點表示從流體看來的原時微商——例如

$$\dot{n}\equiv u[n]=e^{-\phi}(\partial n/\partial\tilde{t})_a;$$

並用撇表示對重子數的偏微商——例如

$$n'\equiv(\partial n/\partial a)_{\tilde{t}}。$$

用 U 表示騎在給定殼層上的人所測出的 $(1/2\pi)\times$（殼層的周長）的變化率：

$$U\equiv\dot{r}; \tag{32.21a}$$

並用 $m(\tilde{t},a)$ 表示在時刻 $\tilde{t}$ 殼層 a 之內的總質量-能量：

$$m(\tilde{t},a)\equiv\int_0^a 4\pi r^2\rho(\tilde{t},a)r'da。 \tag{32.21b}$$

（對這種質量-能量局域化方法的討論，參看框 23.1。）假設坍縮是絕熱的（在相鄰殼層之間無能流；且完全用理想流體的質量-能量張量）。

(a) 試證明，坍縮方程［重子數守恒(22.3)式；局域能量守恒(22.11a)式；Euler 方程 (22.13) 式；以及 Einstein 場方程（例如 14.16 式）］簡化爲對八個函數 $\tilde{\Phi}$, Γ, r, n, ρ, p, U, m 的下列八個方程：

$$\dot{r}=U \qquad (r\text{ 的動力學方程}); \tag{32.22a}$$

$$\frac{(nr^2)^{\cdot}}{nr^2}=-\frac{U'}{r'} \qquad (n\text{ 的動力學方程}); \tag{32.22b}$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho+p}=\frac{\dot{n}}{n}, \qquad \text{激波波前除外，該處絕熱條件破壞（}\rho\text{ 的動力學方程）}; \tag{32.22c}$$

$$\dot{U}=-\frac{\Gamma^2}{\rho+p}\frac{p'}{r'}-\frac{m+4\pi r^3p}{r^2} \qquad (U\text{的動力學方程}); \tag{32.22d}$$

$$p=p(n,\rho) \qquad (\text{狀態方程}); \tag{32.22e}$$

$$\tilde{\Phi}=-\frac{p'}{\rho+p}, \quad \text{在恒星表面 } \tilde{\Phi}=0 \qquad (\tilde{\Phi}\text{ 的源方程}); \tag{32.22f}$$

$$m'=4\pi r^2\rho r', \quad \text{在 } a=0 \text{ 處 } m=0 \qquad (m\text{ 的源方程}); \tag{32.22g}$$

$$\Gamma=\text{sign }(r')(1+U^2-2m/r)^{1/2} \qquad (\Gamma\text{ 的代數方程})。 \tag{32.22h}$$

(b) 上述方程的形式適於數值計算。［對於特殊的數值解和對激波的處理，參看 May 和 White (1966)。］對於解析工作，適於把 (32.22b) 式代之以

$$n=\Gamma/(4\pi r^2r'), \tag{32.22b'}$$

把 (32.22d) 式代之以

$$\dot{m}=-4\pi r^2 pU。 \tag{32.22d'}$$

試導出這些方程。

(c) 試說明，爲什麼 (32.22g) 式和 (32.22d') 式證明框 23.1 中關於能量局域化的評述是正確的。

練習 32.8　無壓力坍縮的解析解 [Tolman (1934b); Datt (1938)]

試證明，可用如下方式得到在零壓情況下 (32.22) 式的一般解。

(a) 給定殼層 a 內的質量爲 $m(a)$；則由方程 (32.22d') 及 $p=0$ 可知，$m(a)$ 不隨時間 $\tilde{t}$ 變化。

(b) 假設全部塵埃粒子的靜止質量 μ 取決於半徑，即爲 $\mu(a)$；則

$$\rho=\mu n。 \tag{32.23a}$$

(c) 由方程

$$\Gamma=m'/\mu; \tag{32.23b}$$

計算 Γ 值；它應與 $\tilde{t}$ 無關。

(d) 給定作爲 a 的函數的圓周 $2\pi r$ 的初始分布，解動力學方程

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{t}}\right)^2-\frac{2m(a)}{r}=\Gamma^2(a)-1 \tag{32.23c}$$

以得出 $r(\tilde{t},a)$ 爾後的演化。注意，這個方程與 Newton 理論中相應方程的形式完全相同！

(e) 試從下述代數方程組算出其他感興趣的量

$$ds^2=-d\tilde{t}^2+(r'da/\Gamma)^2+r^2d\Omega^2, \tag{32.23d}$$

$$\rho=\mu n=m'/(4\pi r^2 r'), \tag{32.23e}$$

$$\tilde{\Phi}=0, \quad U=\partial r/\partial \tilde{t}。 \tag{32.23f}$$

[注意：在此解中，相鄰「殼層」可以互相貫穿，這時會產生出密度無窮大的表面($r'\longrightarrow 0$ 而 $m'\neq 0$)，因爲其中沒有建立足以阻止殼層貫穿的壓力。當出現這種情況時，坐標系變爲病態的 (a不再向外單調增大)，但是空時仍然表現良好。這個密度無窮大的表面(1)對鄰近塵埃粒子產生可以忽略的潮汐力；並且(2)像 §21.13 的表面層那樣，它是一種理想情況，當存在有限壓力時就會變成密度有限。]

練習 32.9　密度均勻的坍縮

給予練習 32.8 中規定的 $m(a)$ 和 $r(a)$ 以適當的形式，由此，重新得出密度均勻和零壓力坍縮的 Friedmann-Schwarzschild 解。在恒星內部，給予塵埃粒子以非零的靜止質量 μ=常數 $\neq 0$; 在外部給予塵埃粒子零靜止質量 $\mu=0$ (眞空中「假想的塵埃粒子」)。把所得度規 (32.23d) 式簡化，使得在恒星內部爲 Friedmann 度規，而使恒星外部的 Schwarzschild 幾何 [(31.12) 式] 簡化爲 Novikov 幾何。

§ 32.6 落入 $r=0$ 奇點的人的命運

潮汐力對落到 $r=0$ 奇點的人體的效應

實驗天體物理學家站在自由下落恒星的表面上，並隨之坍縮到 $R=0$，試討論他的困境。

隨着坍縮向 $R=0$ 進行，天體物理學家身體的各個部分經受不同的引力。他的在恒星表面上的雙脚被無限增長的引力吸向恒星中心；而他的頭，離得較遠，受到稍小的向下加速，雖然引力也在不斷增長。隨着坍縮的進行，兩個加速度（潮汐力）之間的差別愈來愈大，最後，當R達到零時，變爲無窮大。隨着R減小到零，天體物理學家的身體在頭足之間經受着無限强大的拉拽，他的身體無法承受這樣極端的作用。

但這並非事情的全部。在頭足拉拽的同時，天體物理學家被引力拉入其周圍面積 $4\pi r^2$ 不斷減少的空時區域之中。爲了完成這一點，在從頭到脚拉拽的同時，潮汐引力必須從全部側面壓縮天體物理學家。周圍的壓縮實際上比縱向的拉拽還要極端；因此，在 $R\longrightarrow 0$ 的極限，天體物理學家被擠壓成零體積和無限延伸的長度。

可以把上述討論置於數學基礎之上，如下。

殺死天體物理學家分三個階段：(1)早期階段，他的身體成功地經受住潮汐力；(2)中間階段，身體漸漸支持不住；以及(3)最後階段，人體完全被壓倒。

第一階段：身體抵制着變形；脅强逐漸增强

在早期階段，可以在天體物理學家的正交歸一系 $\omega^{\hat{t}}$, $\omega^{\hat{r}}$, $\omega^{\hat{\theta}}$, $\omega^{\hat{\phi}}$ （參看§31.2）中，利用短程線偏離方程分析潮汐力。在此參照系中，Riemann 曲率張量的非零分量由 (31.6) 式給出：

$$\begin{aligned} &R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}}=-2M/r^3, \qquad R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}=R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}=M/r^3, \\ &R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}=2M/r^3, \qquad R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}}=R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}}=-M/r^3。\end{aligned} \tag{32.24a}$$

短程線偏離方程表明，在天體物理學家的局域慣性系中暫時靜止且其間隔爲三維矢量

$$\boldsymbol{\xi}=\xi^j\boldsymbol{e}_j,$$

的兩個自由運動粒子必定以下述相對加速度加速分開

$$\begin{aligned} D^2\xi^j/d\tau^2&=-R^j{}_{\hat{t}k\hat{t}}\xi^k=-R_{j\hat{t}k\hat{t}}\xi^k \\ &=-R_{\hat{t}j\hat{t}k}\xi^k。\end{aligned}$$

利用曲率張量的分量（32.24a）式，得出

$$\begin{aligned} D^2\xi^{\hat{r}}/d\tau^2 &= +(2M/r^3)\xi^{\hat{r}}, \\ D^2\xi^{\hat{\theta}}/d\tau^2 &= -(M/r^3)\xi^{\hat{\theta}}, \\ D^2\xi^{\hat{\phi}}/d\tau^2 &= -(M/r^3)\xi^{\hat{\phi}}。 \end{aligned} \tag{32.24b}$$

爲了把這些方程用於天體物理學家的身體，（爲簡單起見）把人體理想化爲一個均勻的長方形盒子，質量 $\mu\approx 165$ 磅 ≈ 75 公斤，在 $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ 方向上的長度 $l\approx 70$ 英寸≈ 1.8 米，在 $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$ 和 $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ 方向上的寬度和深度 $w\approx 10$ 英寸≈ 0.2米。這樣，可算出在理想化人體中，爲了阻止它的粒子沿發散（和會聚）的短程線運動而必須形成的脅强。

根據（32.24）式的形式，顯而易見，脅强的主要方向將是 $\mathbf{e}_{\hat{r}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$ 和 $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$（即在 $\mathbf{e}_{\hat{r}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ 基中，脅强張量將是對角的）。在天體物理學家的質心，脅强的縱向分量可以估計如下。他身體中質量爲 $d\mu$, 位於質心之上高度 h 處（距離 h 是沿 $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ 方向測量的）的體元，如果能夠自由運動，則將以$a=(2M/r^3)h$的加速度離質心而去。爲了阻止這個加速度，天體物理學家的肌肉必須用的力爲

$$dF = a\,d\mu = (2M/r^3)h\,d\mu。$$

這個力對經質心越過水平面（$\mathbf{e}_{\hat{\theta}}\wedge\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ 平面）的脅强作出貢獻，越過該平面的總的力是它上面全部質元所受力的總和（也等於它下面全部質元所受力的總和）：

$$\begin{aligned} F &= \int_{(\text{平面之上的區域})} a\,d\mu = \int_0^{l/2} \left(\frac{2Mh}{r^3}\right)\left(\frac{\mu}{lw^2}\right)(w^2\,dh) \\ &= \frac{1}{4}\frac{\mu M l}{r^3}。 \end{aligned}$$

脅强是這個力除以截面積 w^2，因爲它是張力而不是壓力，所以加負號：

$$T_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{1}{4}\frac{\mu M l}{w^2 r^3} \approx -1.1\times 10^{15}\frac{M/M_\odot}{(r/1\text{公里})^3}\ \frac{\text{達因}}{\text{厘米}^2}。 \tag{32.25a}$$

類似地，在質心沿 $\mathbf{e}_{\hat{\theta}}$ 和 $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ 方向的脅强分量爲：

$$T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = +\frac{1}{8}\frac{\mu M}{l r^3} \approx +0.7\times 10^{13}\frac{M/M_\odot}{(r/1\text{公里})^3}\ \frac{\text{達因}}{\text{厘米}^2}。 \tag{32.25b}$$

（記得一個大氣壓强是 1.01×10^6 達因/厘米^2。）

第二階段：身體垮掉，人死亡

人體無法承受 $\gtrsim 100$ 大氣壓强 $\approx 10^8$ 達因/厘米^2 的張力或壓力而不毀損。結果，站在一個太陽質量的自由坍縮恒星表面的天體物理學家將在恒星半徑爲 $R\sim 200$ 公里 $\gg 2M\sim 3$ 公里時被潮汐力殺死。

第三階段：身體被擠碎和撕長

當恒星遠小於其引力半徑時，天體物理學家身體中的重子都沿着短程線運動；他的肌肉和骨骼完全垮掉了。在坍縮的這一最後階段，類時短程線是曲線，沿着它，Schwarzschild「時間」坐標 t 幾乎是常數［參看圖 32.1a 中接近 $r=0$ 處正在變窄的光錐； 也可參看在 $r\ll 2M$ 極限條件下的 (31.2) 式］。天體物理學家的雙脚在某一個 t 值，例如 $t=t_f$ 時觸及恒星的表面，而他的頭沿着曲線 $t=t_h>t_f$ 運動。結果，天體物理學家身體的長度將按照下式增加

$$l_{\text{天體物理學家}}=[g_{rr}(R)]^{1/2}[t_h-t_f]=[2M/R]^{1/2}[t_h-t_f] \propto R^{-1/2}\propto(\tau_{\text{坍縮}}-\tau)^{-1/3}。 \tag{32.26a}$$

式中 $\tau=[-\int^R|g_{rr}|^{1/2}dr+\text{常數}]$ 是天體物理學家測出的原時，如果他還活着的話，而 $\tau_{\text{坍縮}}$是他達到 $r=0$ 的時間。在坍縮的最後階段，引力場也將强迫天體物理學家身體中的重子沿着 θ 和 ϕ 爲常數的世界線下落。結果，他的截面積將按下述規律減小

$$\mathcal{A}_{\text{天體物理學家}}=[g_{\theta\theta}(R)g_{\phi\phi}(R)]^{1/2}\Delta\theta\,\Delta\phi\propto R^2\propto(\tau_{\text{坍縮}}-\tau)^{4/3}。 \tag{32.26b}$$

聯立 (32.26a,b) 兩式，可以看出，在坍縮的最後時刻，天體物理學家身體的體積按下述規律減小

$$\mathcal{V}_{\text{天體物理學家}}=l_{\text{天體物理學家}}\mathcal{A}_{\text{天體物理學家}}\propto R^{3/2}\propto(\tau_{\text{坍縮}}-\tau)。 \tag{32.26c}$$

在無限大潮汐引力作用下物質被擠壓到密度無窮大的情形不僅發生在坍縮恒星的表面，也發生在恒星表面之外沿着 $r=0$ 奇點的任何一點上。因此，敢於冒險進入外引力場半徑 $r=2M$ 以下的任何愚蠢的火箭駕駛員都注定要毀滅。

關於空時奇點以及關於經典引力理論預言量子引力效應會迫使人們重新考慮奇點的可能性，有關這些的進一步討論，請參看第30章，§34.6 和第44章。

§ 32.7 現實的引力坍縮—概述

球狀坍縮的回顧

不穩定性，爆聚，視界和奇點；這些就是任何恒星球狀坍縮的關鍵階段。不穩定性：恒星在耗盡核燃料並緩慢地向內收縮時，會把維持壓力的電子或質子擠入原子核內；這會使狀態方程軟化，並導致不穩定性［有關的細節，參看，例如，Zel'dovich 和 Novikov (1971) 的 §10.15 和 §11.4］。爆聚：在零

點幾秒內，不穩定性發展爲大規模的爆聚；對於現實的密度分布，恒星核快速地向內下落，而外圍部分緊隨其後［參看，例如，Colgate 和 White (1966), Arnett (1966,,1967), May 和 White (1966), 以及 Ivanova Imshennik 和 Nadezhin (1969) 等的數值計算］。視界：在理想化球的情形，恒星表面將通過其引力半徑（「視界」，與外界通訊的終點，不可返回之點）下落。從恒星的地位看來，這是在有限而短暫的原時間隔後發生的。但是從外部的地位看來，恒星要無限長的時間才能達到視界，雖然在此過程中恒星按指數快速地變黑變暗［e 倍變化時間$\sim M\sim 10^{-5}(M/M_\odot)$ 秒］。結果是「黑洞」，它的邊界就是視界（引力半徑），它的內部永遠無法與外部通訊。奇點：從恒星內部的地位看來，恒星通過視界之後，在短暫的原時間隔 $\Delta\tau\sim M\sim 10^{-5}(M/M_\odot)$ 秒內，即可達到奇點（零半徑，無窮大密度，無窮大潮汐力）。

1972年有關現實的非球狀坍縮知識的總結

這幅基本圖畫——不穩定性，爆聚，視界，奇點——與眞實的恒星有任何關係嗎？其他的複雜因素，如旋轉，非球形，磁場，以及中微子流，會不會改變這幅定性的圖畫呢！不會，對於球形的小的初始擾動不會改變這一圖畫。框 32.2和練習 32.10 描述的擾動理論的分析表明：現實的，幾乎是球對稱的坍縮，與理想的坍縮一樣，也是以不穩定性，爆聚，視界等爲特徵的；並且，Penrose (1965b, 參看 §34.6) 證明，隨後也會達到某種類型的奇點。

(1)視界
(2)黑洞

當然，對於高度非球形坍縮的了解還很不夠。雖然如此，許多詳盡計算和精確理論有一定把握地指出二點結論：(1)當且僅當質量M被壓縮進一個在任何方向的周長 $\mathcal{C}\le 4\pi M$ 的區域內時，視界才（可能）形成（框 32.3）；(2)視界（黑洞）的外部引力場，在所有「塵埃」和引力波都消散以後，幾乎可以肯定是 Schwarzschild 幾何的 Kerr-Newman 的推廣形式（第33章）。若果然，則外場由「進入黑洞」的質量，電荷和角動量唯一確定。（這就幾乎證明了人們常說的「黑洞沒有頭髮」的定理）。

(3)奇點

今天，對視界內部和坍縮終點（如果有任何終點的話）的了解還很差。第34章將要評述各種可能性。感謝 Penrose, Hawking, 和 Geroch 的定理，人們可以有把握地說，奇點是會出現的。但究竟是全部坍縮物質和場最終相遇於奇點，還是只有某些，或根本沒有呢，我們並不知道。

練習

練習 32.10　標量場的 Price 定理［參看 Price (1971,1972a), 以及 Thorne (1972), 此此處提供了更多的細節］

具有任意非球形「標量電荷分布」的球形恒星坍縮時會產生一個外部標量場 Φ。Φ 的眞空場方程爲 $\Box\Phi=\Phi_{;\alpha}{}^{;\alpha}=0$. 忽略場的脊强-能量對空時幾何的反作用。

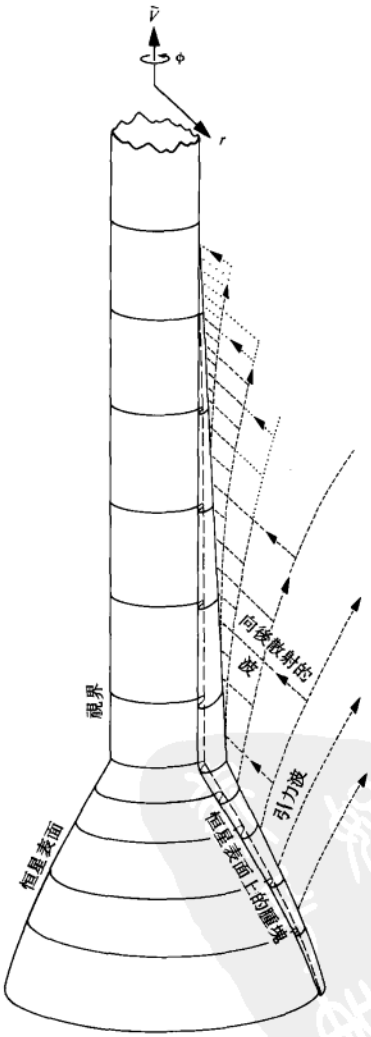
（接第868頁）

框 32.2 具有少量非球形擾動的坍縮

［基於 Richard H. Price (1971,1972a,b) 所作的詳細計算］

A. 密度擾動

1. 當恒星開始坍縮時，在其密度分布中有一個非球形的小「腫塊」。
2. 隨着坍縮的進行，腫塊長得愈來愈大［小擾動的坍縮不穩定性——這是 Newton 理論中熟知的現象；參看，例如，Hunter (1967); Lin, Mestel 和 Shu (1965)］。
3. 增長的腫塊發出引力波。
4. 從視界附近 ($r-2M \lesssim M$) 發出短波長 ($\lambda \ll M$) 的波，一部分傳到無窮遠去，另一部分被「背景」Schwarzschild 空時曲率往回散射。往回散射的波傳入由坍縮恒星形成的視界（黑洞表面，引力半徑）之內。
5. 從視界附近 ($r-2M \lesssim M$) 發出的長波長 ($\lambda \gg M$) 的波全部被空時曲率散射回去；永遠達不到 $r \sim 3M$ 以外；它們都「落入黑洞」而結束傳播。
6. 當恒星投入視界之後，恒星上的腫塊還在那裏嗎？若還存在，恒星會在那附近產生出一個變形的（有腫塊的）視界嗎？是的，計算結果就是如此。
7. 但是，外部觀測者只能通過考察最後的引力場的變形（四級矩），才能知道存在着「最後的腫塊」。場的最終的變形並沒有也不可能以無限大的速度向外傳播（不存在瞬時的「超距作用」）。它只能以光速傳播，以波長接近無窮大的引力波的形式傳播（從視界邊緣向任何外部半徑傳播時的無窮大紅移）。而最後的場的變形，與任何其他長波長的波一樣，在 $r \lesssim 3M$ 處全被空時曲率散射回去；它無法達到外部觀測者。外部觀測者永遠不會知道還有最後的腫塊存在。最後的外



在內向 Eddington-Finkelstein 坐標中描述的坍縮

場是嚴格球形的，沒有腫塊的Schwarzschild 幾何！

8. 即使在向後散射的區域內（$2M<r\leq 3M$），最後的外場也是無腫塊的。向後散射的波攜帶着有關最後腫塊存在的信息，它會與攜帶着同樣信息的向外傳播的波發生相消性的干涉。結果，會在外場和視界內消掉一切變形。

9. 最後得到的黑洞是 Schwarzschild 黑洞！

B. 角動量擾動

1. 當恒星開始坍縮時，恒星具有一個小的非零內稟角動量（「自旋」）$\boldsymbol{S}$。

2. 隨着坍縮的進行，$\boldsymbol{S}$被保存下來（除去由波帶走的角動量所引起的很小的可以忽略的變化；這個變化正比於波振幅的平方，即正比於恒星擾動振幅的平方，即 $\boldsymbol{S}^2$ 與成正比）。

3. 結果，外場永遠處處帶着角動量$\boldsymbol{S}$的痕迹（關於痕迹，參看第19章）。並不需要此痕迹從視界附近向外傳播。而且，由於$\boldsymbol{S}$的守恒定律，即使想這樣傳播也做不到（沒有偶極引力波，見 §36.1 和 §36.10）。

4. 因此，最後的外場是不變形的緩慢旋轉黑洞的外場；

$$\underbrace{ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-2M/r}+r^2d\Omega^2}_{\text{Schwarzschild 幾何}}$$
$$\underbrace{-\left(\frac{4S\sin\theta}{r^2}\right)(r\sin\theta d\phi)dt}_{\text{旋轉痕迹，見練習26.1；及第19章。}}。$$

此處極軸指向$\boldsymbol{S}$方向。

C. 電磁場的擾動

1. 恒星具有由其內部電流產生的磁場，以及由任意的內部電荷分布產生的電場；並且，恒星的熱物質發出電磁波。爲簡單起見，假設$\boldsymbol{S}$爲零。

2. 外部電磁場的演化類似於外部引力場中擾動的演化。遙遠的觀測者絕不會知道可以變化的各個量（磁偶極矩，電偶極矩，四極矩…）的「最後」數值。這些最後的數值嘗試着從視界附近由波長接近無窮大的電磁波帶到外面去。但是它們出不去：空時曲率把它們反射回黑洞；並且它們和它們的外傳相對物疊加而抵消，只產生出零的淨場。

3. 與全部其它可以改變的量不同，電單極矩（電場的總流量；等於總電荷的4π倍）是守恒的。它從恒星坍縮以前，經過坍縮階段，直到寧靜的黑洞階段，絕不改變。

4. 因此，最後的外電磁場是球對稱的Coulomb場。

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=(Q/r^2)\mathbf{e}_r\\ \boldsymbol{B}&=0\end{aligned}\right\}\text{靜止觀測者（}r,\theta,\phi\text{爲常數）的測量值；}$$

並且，最後的空時幾何是 Reissner 和 Nordstrøm 幾何（帶電的黑洞；見練習 31.8 和 32.1）：

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2+\frac{dr^2}{(1-2M/r+Q^2/r^2)}+r^2d\Omega^2。$$

D. 推廣；Price 定理

1. 設恒星產生「零靜止質量，整數自旋的場」。［「零靜止質量」指的是與經典場相聯系的量子化粒子。經典地說，它意味着場在遠距離按 Coulomb 定律 $(1/r)$ 衰減。自旋也是量子化粒子的性質；經典地說，它可容易地看作描繪單色平面波繞傳播方向旋轉的對稱性；參看 §35.6。標量場有零自旋；電磁場自旋爲 1；Einstein 引力場自旋爲 2；…在這些場中，只知道引力場 $(s=2)$ 和電磁場 $(s=1)$ 在眞實的宇宙中是存在的。進一步的討論，參看，例如，Dirac (1936), Gårding (1945) Bargmann 和 Wigner (1948), Penrose (1965a)。］
2. 設自旋 $-s$ 場足夠微弱，以至它的脅强-能量對恒星外部的 Schwarzschild 幾何的擾動極爲輕微。
3. 把外場分解爲球諧分量 $(s=0$ 的球諧標量；$s=1$ 的球諧矢量；和 $s\geq 2$ 的球諧張量)；並用通常的整數 l 標誌這些球諧分量（單極 $l=0$；偶極 $l=1$；四極 $l=2$；等等）。
4. 所有 $l<s$ 的多極場在坍縮時守恒（根據經典輻射理論得出的定理）。標量場 $(s=0)$ 無所保存。電磁場 $(s=1)$ 守恒的只是它的單極部分（電的 Coulomb 場，和消失的磁 Coulomb 場）。引力場 $(s=2)$ 守恒的是它的單極部分（帶有的痕迹等於質量）和它的偶極部分（帶有的痕迹量度角動量和標準的引力偶極矩——若坐標系的中心在恒星上，它變爲零）。
5. 對於 $l\geq s$，僅對於 $l\geq s$，輻射才是可能的（標量波可以具有任何多極性；電磁波必定是偶極的或更高極的；引力波必定是四極的和更高極的；參看 §36.1）。
6. Price 定理表明，隨着近似球形恒星的坍縮並形成黑洞，可以輻射的一切東西（全部 $l\geq s$ 的多極輻射）都輻射離去了——部分「到了無窮遠」；部分「下至黑洞」（「允許的就是必須作的」）。最後的場完全由它的守恒量（$l<s$ 的多極矩）表徵。
7. 在標量場情形對 Price 定理的證明，請參看練習 32.10。

E. 推廣到非經典的場

對於中微子場，參看 Hartle (1971,1972) 和 Teitelboim (1972b,c)；對於 π 介子場，參看 Bekenstein (1972a,b) 和 Teitelboim (1972a)。

框 32.3　一維與二維的坍縮

A. 問題

爲了產生一個黑洞（視界，從其中什麼都不會出現），是否必須在所有三個空間方向上都强烈地壓縮物質，使得周長 $\mathcal{C} \lesssim 4\pi M$（准球形壓縮）；還是只需在一個或兩個方向上壓縮就夠了呢？

B. 對一維情形的回答

作爲一個容易推廣的例子，考慮塵埃球體（零壓力）的引力坍縮。設球體在其初始的短暫靜止狀態是高度 Newton 的（即 $r>>>2M$）；並且讓它稍稍變扁（扁的球）。根據 Newton 理論，任何均勻的非旋轉塵埃球體在坍縮過程中保持均勻；但其變形會增長［更多的細節，可參看，例如，Lin, Mestel, 和 Shu (1965)］。因此，感興趣的球體會爆聚以形成密度爲無窮大的薄餅，但單位表面積的質量有限。塵埃粒子最後的動能大致等於它們最後的勢能

$$\frac{1}{2}v^2 \sim \frac{M}{(\mathcal{C}/2\pi)}$$

M＝球體質量

$\mathcal{C}$＝最後薄餅的周長。

結果，只要 $\mathcal{C}/2\pi \gg 2M$，坍縮速度總是遠小於光速，而引力能量總是遠小於靜止的質量-能量。這意味着，對於 $\mathcal{C}/2\pi \gg 2M$ 的情形，直至薄餅形成的最終點，Newton 分析一直是對廣義相對論的極好近似。因此，視界不可能形成，任何引力波都難於發射，整個故事極爲簡單而且完全是 Newton 的。但是，因爲薄餅終點並不是空時的奇點（見練習 32.8 末的附註），演化可以超越它進行下去；當 $\mathcal{C}$ 收縮至 $\lesssim 4\pi M$ 時，演化將變得非常複雜和高度相對論性的（參看圖 24.3 的「坍縮，追踪並納入劇本」）。

C. 對兩維情形的回答

作爲一個不那麼容易推廣的例子，考慮初始是 Newton 的均勻扁長塵埃球體的引力坍縮。這種球體坍縮形成細「線」或「紡錘」［見 Lin, Mestel 和 Shu (1965)］。假設當球體達到線狀情形時仍是 Newton 的，那時，它的長度爲 l，，單位長度的質量 $\lambda = M/l \ll 1$，並且快速收縮的赤道半徑 $R \ll l$。爾後，線的每一段都徑向地坍縮，就像它是無限圓柱的一部分那樣。［忽略分裂爲「珠子」的不穩定性；參看，例如，Hunter (1967), Chandrasekhar (1968)。］僅當線變得極細，即 $R \lesssim R_{\text{臨界}} \sim l \exp(-1/4\lambda)$ 時，徑向坍縮速度才接近光速並且引力能接近靜止質量-能量。在這個階段，Newton 坍縮的相對論偏離才開始起作用。Thorne (1972) 以及 Morgan 和 Thorne (1973) 曾用理想化的無限長圓柱模型，分析過這種相對論效應。結果既與球狀情形大不相同也與薄餅情形大不相同。坍縮的圓柱發射大流量的引力波；但它們無力使坍縮停止。坍縮向着類線狀奇點進行，但不產生任何視界（沒有黑洞！）

D. 對回答的反對意見，答覆和猜測

人們可能有異議，即薄餅和圓柱兩者的坍縮可能在它們的終點附近被停住，特別是薄餅。隨着薄餅的厚度接近於零，引力的垂直拉拽保持有

限，但由任何有限壓力造成的壓力梯度會趨於無窮大。因此，壓力會使坍縮停止。爾後，薄餅的邊緣向着相對論情形 $\mathcal{C}/2\pi \lesssim 2M$ 收縮。在圓柱體按照 Newton 理論坍縮時，壓力-密度關係爲 $p \propto \rho^{\gamma}$，引力加速度 a_g 和壓力-浮力加速度 a_p 按下式變化：

$$a_g = -2\lambda/R, \qquad a_p \sim \rho^{-1}(p/R) \propto \rho^{\gamma-1}/R。$$

因此，對於 $\gamma > 1$（最普通的現實情形），壓力將使坍縮停止，但對於 $\gamma < 1$ 的情形，則並非如此。到達相對論領域之後，這一點是否仍然正確，人們還不知道。

實際上，壓力使坍縮停止的能力對黑洞和視界的結果並不重要。重要的是，*在最終圓周 $\mathcal{C} \gg 4\pi M$ 的扁橢球坍縮情形下，以及在最終線長 $l \gg 2M$ 的扁長橢球坍縮情形下，並不產生視界。*這一點，與近似球形坍縮（框 32.2）永遠存在視界的情形合在一起，暗示下述猜測 [Thorne (1972)]: *當且僅當質量 M 被壓縮到一個區域之內，它的圓周在每一個方向上都滿足 $\mathcal{C} \lesssim 4\pi M$ 時，黑洞和視界才能形成。*（與絕大多數猜測一樣，這個猜測也相當含糊，它爲許多不同的數學表述留有餘地！）

(a) 對於外部 Schwarzschild 幾何，用 Schwarzschild 坐標把外場分解爲標量球諧分量：

$$\Phi = \sum_{l} \frac{1}{r} \Psi_l(t,r) Y_{lm}(\theta,\phi)。 \tag{32.27a}$$

試證明眞空場方程化爲

$$-\Psi_{l,tt} + \Psi_{l,r^*r^*} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\Psi_l, \tag{32.27b}$$

式中 r^* 爲 §25.5 和圖25.4中的「烏龜坐標」：

$$r^* = r + 2M\ln(r/2M - 1)。 \tag{32.27c}$$

注意，(32.27b) 式是平直空間的一維波動方程，有效勢爲

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)。 \tag{32.27d}$$

這個有效勢的 $[l(l+1)/r^2]$ 部分是「離心勢壘」，而 $[2M/r]$ 部分則歸因於空時的曲率。注意，標量波有效勢與在 Schwarzschild 幾何中運動的粒子和光子有效勢的相似性：

$$(\tilde{V}^2)_{\text{粒子}} = (1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2),$$
$$(B^{-2})_{\text{光子}} = (1-2M/r)r^{-2}$$

（框 25.6 和框 25.7）。標量波勢，與光子勢一樣，對於 $r > 2M$ 的全部區域爲正值。它從 $r = 2M$ 處的零一直增大到勢壘的頂點；然後又下降到 $r = \infty$ 處的零。

(b) 試證明，Schwarzschild 黑洞的物理上可以接受的靜態標量波擾動並不存在。［更準確地說，試證明（32.27b）式的全部靜態解都或者在視界處（$r=2M$, $r^*=-\infty$），或者在徑向無窮遠處變爲無窮大。］這暗示由坍縮形成的黑洞必須設法擺脫恒星外部標量場之後才能以平靜的狀態安定下來。

(c) 波動方程（32.27b）的一般解可以用 Fourier 變換寫出。對於從視界附近開始向外傳播並且部分發送部分反射（「向右傳播的波」）的波，試證明一般解爲

$$\Psi_l(t,r^*)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)R_k^l(r^*)e^{-ikt}dk\,, \tag{32.28a}$$

式中

$$d^2R_k^l/dr^{*2}=[-k^2+V_{\rm eff}(r)]R_k^l\,, \tag{32.28b}$$

$$R_k^l=e^{ikr^*}+\Gamma_k^{(R)}e^{-ikr^*}\ \text{當}\ r^*\longrightarrow-\infty\,,$$

$$R_k^l=T_k^{(R)}e^{ikr^*}\ \text{當}\ r^*\longrightarrow\infty\,。 \tag{32.28c}$$

試證明，「向右傳播的波的反射係數和透射係數」$\Gamma_k^{(R)}$ 和 $T_k^{(R)}$ 在 $|k|\ll 1/M$（短波數；長波）時，具有下述漸近形式

$$\Gamma_k^{(R)}=-1+\alpha 2Mik\,,\qquad T_k^{(R)}=\frac{\beta}{(2l-1)!!}(2Mik)^{l+1} \tag{32.28d}$$

$\Gamma_k^{(R)}$：在 $k\longrightarrow 0$ 極限下，產生全反射和全相消的干涉；對結果的詳盡討論，見框 32.2

$T_k^{(R)}$：在 $k\longrightarrow 0$ 極限下無透射；見框 32.2

式中 α 和 β 是量級爲 1 的常數。對於從外面射向 Schwarzschild 黑洞的波（「向左傳播的波」），試作類似的分析。

(d) 試證明，隨着恒星坍縮到視界內，在 (t,r^*) 坐標系中恒星表面的世界線爲

$$r^*=R^*(t)\equiv -t-R_0^*\exp(-t/2M)+\text{常數}\,, \tag{32.29a}$$

式中 R_0^* 與表面四維加速度幅度 a（對於向外的四維加速度 $a>0$）的關係爲

$$R_0^*=(8M/e)\left\{1+16Ma\left[Ma+\left(M^2a^2+\frac{1}{8}\right)^{1/2}\right]\right\}。 \tag{32.29b}$$

於是，在接近視界處（$t+r^*\equiv\tilde{V}=$常數）表面的世界線似乎變爲零；當然，這是由於坐標系在該處的病態。進一步，試證明，當恒星接近視界時（$t\longrightarrow\infty$, $r^*\longrightarrow-\infty$, $\tilde{U}\longrightarrow\infty$），恒星表面（$\tilde{V}=$常數）的標量場應按下式變化

$$\Psi_l=Q_{l0}+Q_{l1}e^{-U/4M}\,,\quad \tilde{U}\equiv t-r^*\,, \tag{32.29c}$$

以便在恒星表面測出的 Ψ_l 的變化率爲有限值。注意，Q_{l0} 是恒星表面上標量場的「最終值」。它可以看作波數爲零（波長無窮大）的外傳波；結果，它將被有效勢完全地和相

消性地反射掉［參看 (32.28d) 式；及框 32.2］。結論；當 $t\longrightarrow\infty$ 時，標量場的全部多極矩都在有限的 r^* 處消失了。（標量場的 Price 定理。）更爲詳盡的分析，包括多極矩消失的速率，參看 Price (1971,1972a) 或 Thorne (1972)。

練習 32.11 Newmen-Penrose「常數」

［參看 Press 和 Bardeen (1971), Bardeen 和 Press (1972)，以及 Piir (1971)，其中提供了比此處更多的細節。］

Wheeler (1955) 證明，存在於 Schwarzschild 幾何中的 l 極電磁場的 Maxwell 方程可以化爲下述波動方程

$$-\Psi_{l,tt}+\Psi_{l,r^*r^*}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{l(l+1)}{r^2}\Psi_l \tag{32.30}$$

［(32.27b) 式的電磁對應］。求解此方程後，把某種微分算符用於 $\Psi_l(t,r^*)Y_{lm}(\theta,\phi)$ 即可得出電磁場的分量。

(a) 試證明，對於偶極場 ($l=1$)，以及在 $r^*\longrightarrow+\infty$ 處的外傳邊條件，電磁波方程 (32.30) 一般解的形式爲

$$\Psi_1=f_0(\tilde{U})+\frac{f_1(\tilde{U})}{r}+\frac{f_2(\tilde{U})}{r^2}+\cdots,$$

式中

$$\tilde{U}=t-r^* \text{ 爲「推遲時間」，及}$$

$$f_1'=f_0,\quad f_2'=0,\quad \ldots,\quad f_n'=-\frac{(n+1)(n-2)}{2n}f_{n-1}+(n-2)Mf_{n-2}。 \tag{32.31b}$$

當空時爲平直 ($M=0$) 時，此解變爲

$$\Psi_1=f_1'(\tilde{U})+f_1(\tilde{U})/r。 \tag{32.31N}$$

［輻射場 $f_1'(\tilde{U})$ 的 $1/r$ 衰減是從 Ψ_1 中分解出的因子；見標量波函數 (32.27a) 式。］在平直空時中不出現 $f_2(\tilde{U})/r^2+\cdots$ 等項可歸因於空時曲率對外傳波的向回散射。有時把它們稱爲波的「尾迹」。

(b) 試證明，一般的靜態偶極場具有 (32.31a) 的形式，且

$$(f_0)_{\text{靜}}=0;\quad (f_1)_{\text{靜}}\equiv D=\text{偶極矩};$$
$$(f_2)_{\text{靜}}=\frac{3}{2}MD;\cdots \tag{32.32}$$

(c) 考慮一具有偶極場的恒星 （不是黑洞！） 它起初是靜止的。在 $t=0$ 時，設恒星的偶極矩突然改變爲新的靜態值 D'。(32.31b) 式要求 f_2 守恒［「Newman-Penrose (1965)常數」］。因此，f_2 將永遠呈現出 $\frac{3}{2}MD$ 的值，相應於老的偶極矩；它決不能改變爲 $\frac{3}{2}MD'$。這就是偶極矩突然改變所產生的波的尾跡的表現。爲了更清楚地理解尾跡效應，並發現上述結果的一個重要缺點，估計在推遲時間 $\tilde{U}>0$ 的解 (32.31)，可利用下述假設

$$\begin{aligned}&(1)\text{對 } \tilde{U}<0\text{，場具有靜態形式 (32.32)，}\\&(2)\text{對 } \tilde{U}>0,\quad f_1=D'。\end{aligned} \tag{32.33}$$

把答案寫成下述形式

$$\Psi_1=\frac{D'}{r}+\frac{\frac{3}{2}MD}{r^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2M(D'-D)(-1)^{n+1}(n+1)\tilde{U}^{n-2}}{(2r)^n}+O\left(\frac{M^2}{r^3},\frac{M^2\tilde{U}}{r^4}\right)。\quad(32.34)$$

（只要 $r>M$，對於所有 $\tilde{U}/r$，忽略的項都比保留的項要小。）顯然，只要級數收斂，如上所述，Newman-Penrose「常數」（$1/r^2$ 項的係數）將記住老的D項並守恒。然而，試證明，對於 $\tilde{U}>2r$，級數發散——即在以漸近$\frac{1}{3}$光速向外運動的球內，級數發散。這樣，Newman-Penrose「常數」只在「$\frac{1}{3}$光速錐」之外才有確切定義並且是守恒的。

(d) 把 (32.34) 式中級數求和，得出甚至對於 $\tilde{U}>2r$ 都成立的解：

$$\Psi=\underbrace{\frac{D'}{r}+\frac{3}{2}\frac{MD'}{r^2}}_{\text{新的靜態解}}\underbrace{-\frac{2M(D'-D)}{r}\frac{(\tilde{U}+3r)}{(\tilde{U}+2r)^2}}_{\text{「尾迹項」}}+O\left(\frac{M^2}{r^3}\right)$$

$$=\text{級數 (32.34) 對 } \tilde{U}<2r \text{ (級數收斂的範圍)}$$

$$=\frac{D'}{r}+\frac{3}{2}\frac{MD'}{r^2}+O\left(\frac{M}{\tilde{U}r},\frac{M^2}{r^3}\right)\quad \text{對 } \tilde{U}\gg r\gg M。$$

從此結果可斷定：在固定的 r 處和較後的時間，電磁場變成漸近地靜態的，且 Newman-Penrose「常數」採用新的數值 $\frac{3}{2}MD'$ 以適應於新的偶極矩。

第三十三章　黑　　洞

密度與地球相同而直徑比太陽大 250 倍的明亮恒星，由於它的引力，將不允許它的任何輻射到達我們這裏；因此，由於這個原因，可能宇宙中最明亮的天體是看不見的。

P. S. Laplace (1798)

§ 33.1　爲什麼是「黑洞」？

闡明爲什麼黑洞應得到其名稱的一段對話

Sagredus. 所有關於黑洞的談論到底是怎麼回事？當外部觀測者觀看恒星坍縮時，它看到恒星以不斷增大的速度爆聚，直到達到相對論階段。然後，它似乎慢了下來，並且剛好在達到它的視界（引力半徑）外緣時「凍結」住。不管觀測者再等多久，他再也看不到恒星的進一步坍縮。對於這樣一個決不會從視線消失的凍結的物體，什麼理由把它命名爲「黑洞」呢？

Salvatius. 讓我們把「黑洞」這個名稱分開。先討論這個黑字。確實沒有比黑洞更黑的東西了。使坍縮恒星似乎凍結住的極端紅移也還使它暗淡變黑。若忽略光子的不連續性，採用連續譜近似，則遙遠觀測者接收到的輻射强度將隨着時間的流逝指數減小，即 $L\propto\exp(-t/3\sqrt{3}M)$，且 e 倍衰減時間極短，爲

$$\tau=3\sqrt{3}M=(2.6\times10^{-5}\text{ 秒})(M/M_{\odot})。$$

在幾分之一秒內，恒星實質上已經黑了。光子的不連續性甚至會使它更黑。在恒星坍縮越過其視界之前發射的光子數目是有限的，因此指數衰減不可能永遠

關於「黑洞物理學」基礎的更詳盡闡述，參看 DeWitt 和 DeWitt (1973)。

繼續下去。最後——僅在恒星開始變暗後的 $10^{-3}(M/M_{\odot})$ 秒——還能逸出的最後一個光子到達了遠方觀測者。此後一無所見。恒星不僅「實質上是黑的」它是「絕對地黑的」。

Sagredus. 同意。但是，我關心的是「洞」字而不是「黑」字。怎麼能把一個永遠蟠伏於其視界外緣的物體稱爲「洞」呢？確實，不發光使物體看不見。但是，用手電筒照耀它的表面不就總能看見它嗎？並且，難道不能乘火箭飛船飛到它的表面上挖出幾個恒星的重子嗎？畢竟，從外邊看來，它表面上的重子是永遠永遠也不能落入視界以內的呀！

Salvatius. 你的論據聽起來很有說服力。爲了檢驗它的正確性，可以利用圖 33.1 的內向 Eddington-Finkelstein 圖來考察球對稱系統的坍縮。按照你的提議，讓一組外部觀測者用手電筒照耀恒星表面。把恒星表面仔細地鍍銀，使它能把一切到達它的光都反射回去。起初（圖 33.1 空時圖的最下方），

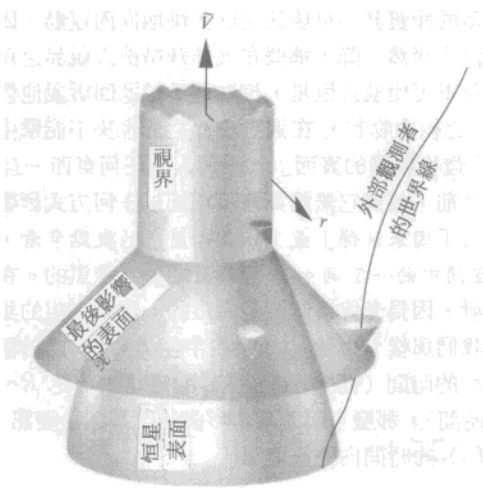


圖 33.1
在內向的 Eddington-Finkelstein 坐標中觀察形成黑洞的恒星的球形引力坍縮。「最後影響的表面」$\mathcal{O}$ 是一個內向的零表面，它和與坍縮恒星表面一致的視界相交。在隨着時間向前運動的外部觀察者經過最後影響的表面之後，在恒星投入視界之前，他無法與恒星相互作用也無法影響恒星。因而，可以認爲最後影響的表面是黑洞的「誕生點」。在經過這個表面之前，外部觀察者可以說他的手電筒正在探察坍縮恒星的形狀；此後，他可以把他的信號看作黑洞的探測器。進一步的討論見正文。

入射光束可以毫不困難的射到恒星表面並被反射返回閃光處。但是，存在着一個臨界點——一個內向的徑向零表面 $\mathscr{R}$——超過它的範圍反射就不可能了。沿着 $\mathscr{R}$ 向內發射的光子達到恒星的時刻正是它落入其視界的時刻。反射以後，這些光子將沿着視界「向外」飛行，並永遠留在 $r=2M$ 處。手電筒經過 $\mathscr{R}$ 後向內發射的其他光子，只是在恒星在其視界內之後，才能到達恒星表面並被反射。這些光子決不能返回照耀的手電筒。一旦進入視界，它們決不能逃逸。從而，返回的光子總數是有限的，而且與恒星的內稟光度遵循同樣的黑度衰減定律。此外，如果觀測者直到他們通過零平面 $\mathscr{R}$ 之後才點亮他的手電筒，那麼他們就決不能收回任何反射光子！顯然，手電筒對觀察「凍結恒星」毫無幫助。

Sagredus. 我無法擺脫你的論證邏輯。雖然如此，觀看並不是與凍結的恒星相互作用的唯一手段。我已建議從火箭飛船猝然下降並從恒星表面偷取幾個重子。類似地，可以使物質徑向地向內落在凍結恒星上。當物質擊中恒星表面時，它的巨大下落動能將轉化爲熱以及外瀉的輻射。

Salvatius. 初看起來似乎如此。但請再次考察圖 33.1，任何猝然下降的火箭飛船和向內下落的物質都不可能比光線更快地向內運動。因而，如果在飛船通過表面 $\mathscr{R}$ 後才決定猝然下降，那麼在火箭飛船衝入視界之前它不可能到達恒星；火箭和飛行員不可能觸及恒星，掠取重子並返回訴說他們的故事。類似地，向內下落到 $\mathscr{R}$ 之後的物質，在通過視界之前也決不能擊中恒星表面。實際上，表面 $\mathscr{R}$ 是「最後影響的表面」。任何人或任何東西一旦通過了 $\mathscr{R}$，那麼在恒星沖入視界之前，他或它無論如何不可能以任何方式影響恒星或與恒星相互作用。這樣，從「因果關係」或「相互作用」的觀點來看，坍縮的恒星在表面 $\mathscr{R}$ 處變成了空間中的一個洞。這個洞最初並不是黑的。在坍縮恒星通過 $\mathscr{R}$ 之後仍然發出輻射，因爲光傳播時間是有限的，正如宇宙的熱大爆炸發出的輻射今天仍能達到我們那樣。但是，如果在半徑 $r \geqslant 2M$ 處的觀測者在恒星通過 $\mathscr{R}$ 之後等待 $2r$ 的時間（從 $\mathscr{R}$ 到達視界的時間加上從 $R \sim 3M$ 處發出的輻射返回觀測者的時間），那麼它將看到新形成的空洞開始變黑；並在此後 $\Delta t \sim (10^{-5}\text{秒})(M/M_{\odot})$ 的時間內完全變黑。

Sagredus. 你把我說服了。從一切實用的觀點來看，詞組「黑洞」都是極好的描述。在 1969 年以前的物理文獻中，不同的詞組「凍結的恒星」或「坍縮的恒星」所强調的都是現象的光幻視方面。注意力應該離開產生黑洞的恒星，因爲超出最後影響表面的範圍，就沒有與該恒星相互作用的手段了。該恒星與以後的物理學和天體物理學毫不相關。只有視界和它的外部空時幾何與將

來有關。讓我們都贊同把視界稱爲「黑洞的表面」，並把它的外部幾何稱爲「黑洞的引力場」。

Salvatius. 同意。

§ 33.2　黑洞的引力場和電磁場

賦與球對稱性的電中性恒星的坍縮產生了球形黑洞，其外部引力場可用 Schwarzschild 線元描述

$$ds^2=-(1-2M/r)\,dt^2+\frac{dr^2}{1-2M/r}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)。\quad (33.1)$$

黑洞的表面，即視界，位於 $r=2M=$（引力半徑）處。只有黑洞表面上及表面外部的區域 $r\geq 2M$ 才與外部觀測者有關。視界以內的任何事件決不會影響外部。

實際恒星（非球對稱，坍縮時具有少量但非零的這種或那種符號的淨電荷）的坍縮產生的黑洞將與簡單的 Schwarzschild 黑洞略有不同。對於具有少量電荷和小的不對稱性的坍縮，擾動理論的計算（框 32.2）預言，最後的黑洞及其外場完全取決於坍縮恒星的質量M，電荷Q和內稟角動量S，對於完全相對論性的坍縮，當有大的不對稱性並可能有大量電荷時，最後的黑洞（只要它能形成）也由M，Q 和 S 唯一地表徵。這是在 1972 年，由框 33.1 中所描述的一組强有力的定理强烈地提出的結論。

黑洞的結構唯一地取決於它的質量M，電荷Q 和內稟角動量 S

爲什麼M，Q和S能夠完全支配黑洞的最後外場呢，人們可以啓發式的理解如下。對於任何孤立的引力源和電磁源，在其全部內稟的物理量中，只有M，Q和S在源的遙遠外場中具有（並據此定義）唯一的守恒的痕迹（守恒的 Gauss 流量積分，見框 19.1和§20.2）。當恒星坍縮形成黑洞時，它的遙遠外場被迫保持M，Q和S的痕迹不變。實際上，M，Q和S對外場的形式提供了依靠或限制。起初，恒星內的質量，動量，脅强，電荷和電流的分布產生了另一些限制。但是，最後恒星沉入視界與外部的宇宙切斷了一切因果聯系。（長波長的波在彎曲空時中不能傳播的特性對於這種聯系的切斷起着關鍵的作用；見框 32.2）。其後，爲外場留下的唯一的依靠就是守恒的 M，Q和 S 的痕迹。結果，外場很快地以相應於給定M，Q和S的唯一形態安頓下來。當然，這種安頓包含場的動力學變化以及相聯系的引力波和電磁波的外流。當然，外

***M*-*Q*-*S* 唯一性的啓發性說明**

框 33.1 黑洞沒有「頭髮」

下述定理接近於證明了*穩定黑洞*（已經安息於其「最後」狀態的黑洞）*的外部引力場和電磁場由黑洞的質量*M*，電荷*Q*和內稟角動量*S*唯一地唯定*——即黑洞不能有「頭髮」（沒有其他獨立的特徵）。詳細的評述，見 Carter (1973)。

I. Stephen Hawking (1971b, 1972a)：穩定黑洞必定具有拓撲形態爲球形的視界；它必定或者是靜態的（零角動量），或者是軸對稱的，或者兩者兼而有之。

II. Werner Israel (1967a, 1968)：任何*靜態*的具有球形拓撲的事件視界的黑洞，其外場由其質量M和電荷Q唯一地確定；另外，如果 $Q=0$，則這些外場爲 Schwarzschild 解，如果 $Q\neq 0$，則爲 Reissner-Nordstrøm 解（練習 31.8 和 32.1）（兩者都是Kerr-Newman 的特殊情形，見 §33.2）。

III. Brandon Carter (1970)：「所有具有球形拓撲事件視界的不帶電的，靜態的，軸對稱的黑洞都可以分別歸屬於互不相關的種類，不能由一類變成另一類。每一類黑洞都有外部引力場，它唯一地取決於兩個參量：質量M和角動量S。」（注意：「Kerr 解」——即 $Q=0$ 的「Kerr-Newman 解」——構成一類；很可能並不存在其他類，但是直到1972年12月爲止，這一點並未得到證明。可能 Carter 定理可推廣到有電荷的情形；但這一點也還沒有作到。）

IV. 把上述三個定理聯合起來，得出如下結論：

(a) 所有穩態黑洞是軸對稱的。

(b) 所有靜態（不旋轉）黑洞的特徵，由M和Q唯一確定，並具有 Reissner-Nordstrøm 形式。

(c) 所有不帶電的旋轉的黑洞可以分成彼此不同且互不相關的種類，在每一類中的每一個黑洞，其特徵都由M和S唯一地決定。Kerr 解構成了一類。也許並不存在其他類。

V. 評論和防止誤解的說明：

(a) 定理的上述表述全都帶有點啓發性。每個定理都對空時的整體性質作了此處未予說明的若干高度技術性的假設。這些假設在物理上似乎是合理和無關痛癢的，但也可能並非如此。

(b) 黑洞物理學的進展非常迅速，在本書出版時，很可能已經有了比上述更强有力的定理，它們確實證明「黑洞沒有頭髮」。

(c) 在證明上述定理和其他類似定理時用到一些「整體幾何」的技巧，要對這些技巧有透徹理解，可以參看第34章；更多的細節，可以參看即將出版的Hawking 和 Ellis (1973) 的著作。

(d) 分析表明，由於進入黑洞的輕子，黑洞並不能施加任何弱相互作用力，參看 Hartle (1971, 1972) 和 Teitelboim (1972b, c)。類似的分析表明，進入黑洞的重子也沒有造成强相互作用力的存在，參看 Bekenstein (1972 a, b) 和 Teitelboim (1972 a)。

流的波帶走了質量和角動量（但是沒有電荷），從而使M和S改變了。並且，當然，外場必須再作調整以適應新的M和S。但是，這個過程將很快結束，以產生出具有M，Q，S特定終值的黑洞，以及由這些值唯一地確定的外場。

給定M，Q和S以及它們的痕迹計算外場的問題，與坪問題* 相似——即給定金屬絲的形狀，計算依靠它的肥皂膜的形狀。找出橫跨彎曲金屬絲的極小表面面積，即可計算肥皂膜的形狀。面積極小的條件導致描述肥皂膜的微分方程，它必須在金屬絲形狀所附加的限定條件下求解。

黑洞結構的變分原理

爲了計算黑洞的外場，可以在M，Q，S的痕迹固定在徑向無窮遠的條件下，以及存在着物理上非奇異視界（視界上沒有無限曲率！）的條件下，對相互作用引力場和電磁場的「作用量積分」$\int(\mathcal{R}+\mathcal{L})\sqrt{-g}\,d^4x$求極值（見第21章）。作用量取極值等價於在$M$，$Q$和$S$强加痕迹以及存在視界的條件下，求解耦合 Einstein-Maxwell 場方程。求解並證明解的唯一性非常複雜，這裏無法給出。（參看框33.1列出的參考文獻。）但是，解原來就是「Kerr-Newman幾何」以及與它相聯系的電磁場。†

黑洞結構的細節

在 Boyer 和 Lindquist (1967) t, r, θ, ϕ 坐標系（Schwarzschild坐標的推廣）中寫出的 Kerr-Newman 幾何的形式爲

$$ds^2=-\frac{\Delta}{\rho^2}[dt-a\sin^2\theta d\phi]^2+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)d\phi-adt]^2+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2+\rho^2d\theta^2, \tag{33.2}$$

(1)度規（「Kerr-Newman幾何」）

式中

$$\Delta\equiv r^2-2Mr+a^2+Q^2, \tag{33.3a}$$

$$\rho^2\equiv r^2+a^2\cos^2\theta, \tag{33.3b}$$

$$a\equiv S/M\equiv\text{單位質量的角動量。} \tag{33.4}$$

相應電磁場張量寫成2-形式（憶及：$dx^\alpha\wedge dx^\beta\equiv dx^\alpha\otimes dx^\beta-dx^\beta\otimes dx^\alpha$）爲

$$\mathbf{F}=Q\rho^{-4}(r^2-a^2\cos^2\theta)\mathbf{dr}\wedge[\mathbf{dt}-a\sin^2\theta\mathbf{d}\phi]+2Q\rho^{-4}ar\cos\theta\sin\theta\mathbf{d}\theta\wedge[(r^2+a^2)\mathbf{d}\phi-a\mathbf{dt}]。 \tag{33.5}$$

(2)電磁場

---

* 關於坪問題，參看，例如，Courant (1937), Darboux (1941) 或 Lipman Bers (1952) 的第 157 頁。

† Kerr (1963) 首先發現，無電荷 ($Q=0$) 情形是 Einstein 眞空場方程的解。Newman, Couch, Chinnapared, Exton, Prakash 和 Torrence (1965) 首先發現帶電的一般情形是 Einstein-Maxwell 場方程的解，以後才發現與黑洞的聯系；見框 33.1。

度規的表達式（33.2）式和電磁場的表達式（33.5）式都長得有些嚇人。因此，在試圖詳細計算它們之前，對它們和它們的應用作一些定性的了解是有用的。框33.2，框33.3和框33.4給出了（而不推導）Kerr-Newman 幾何的主要特徵以及黑洞物理和黑洞天體物理的總結，以提供這種定性的了解。本章的其餘部分均屬高階，是對框 33.2- 框 33.4 所列部分結果（不是全部）的證明和推導。

（接第891頁）

框 33.2 Kerr-Newman 幾何和電磁場

1. 度規方程和電磁場方程

A. 在方程中出現的參數：

M＝質量，Q＝電荷，$a\equiv S/M$＝單位質量的角動量，所有這些都是通過它們在遙遠場的標準痕跡測出的。

B. 對參數的約束：

Kerr-Newman 幾何具有視界，因此當且僅當 $M^2\geq Q^2+a^2$ 時，才能用來描述黑洞。看來在任何破壞這種約束的坍縮物體中，在坍縮到其大小～M之前，離心力和／或靜電斥力就會使坍縮停止下來；見（33.56）式。

C. 極限情形：

$Q=0$,	Kerr（1963）幾何；
$S=0$,	Reissner-Nordstrøm 幾何和電磁場（練習 31.8 和 32.1）；
$Q=S=0$,	Schwarzschild 幾何；
$M^2=Q^2+a^2$,	「極端 Kerr-Newman 幾何」。

D. Boyer-Lindquist（1967）坐標（t,r,θ,ϕ—Schwarzschild 坐標的推廣；黑洞在ϕ方向旋轉）：

$$ds^2=-(\Delta/\rho^2)[dt-a\sin^2\theta d\phi]^2+\sin^2\theta/\rho^2)[(r^2+a^2)d\phi-adt]^2 +(\rho^2/\Delta)dr^2+\rho^2d\theta^2; \tag{1}$$

$$\Delta\equiv r^2-2Mr+a^2+Q^2,\quad \rho^2\equiv r^2+a^2\cos^2\theta。 \tag{2}$$

$$\mathbf{F}=Q\rho^{-4}(r^2-a^2\cos^2\theta)\mathbf{dr}\wedge[\mathbf{dt}-a\sin^2\theta\mathbf{d}\phi] +2Q\rho^{-4}ar\cos\theta\sin\theta\mathbf{d}\theta\wedge[(r^2+a^2)\mathbf{d}\phi-a\mathbf{dt}]。 \tag{3}$$

E. Kerr 坐標 $[\tilde{V},r,\theta,\tilde{\phi}$—內向 Eddington-Finkelstein 坐標的推廣；（$\tilde{V},\theta,\tilde{\phi}$）＝常數是內向的「徑向」零短程線；黑洞在$\phi$方向旋轉］：

與 Boyer-Lindquist 坐標的關係：

$$d\tilde{V}=dt+(r^2+a^2)(dr/\Delta),$$
$$d\tilde{\phi}=d\phi+a(dr/\Delta)。\tag{4}$$

$$ds^2=-[1-\rho^{-2}(2Mr-Q^2)]d\tilde{V}^2+2drd\tilde{V}+\rho^2d\theta^2$$
$$+\rho^{-2}[(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta]\sin^2\theta d\tilde{\phi}^2-2a\sin^2\theta d\tilde{\phi}dr \tag{5}$$
$$-2a\rho^{-2}(2Mr-Q^2)\sin^2\theta d\tilde{\phi}d\tilde{V}。$$

$$\mathbf{F}=Q\rho^{-4}[(r^2-a^2\cos^2\theta)dr\wedge d\tilde{V}-2a^2r\cos\theta\sin\theta d\theta\wedge d\tilde{V}$$
$$-a\sin^2\theta(r^2-a^2\cos^2\theta)dr\wedge d\tilde{\phi}+2ar(r^2+a^2)\cos\theta\sin\theta d\theta\wedge d\tilde{\phi}]。\tag{6}$$

II. 空時幾何的性質

A. 對稱性（§33.4）：

在 Boyer-Lindquist 坐標中的度規系數與 t，和 ϕ 無關，而在 Kerr 坐標中的度規系數與 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{\phi}$ 無關。這樣，空時幾何是「與時間無關的」（穩定的）和軸對稱的。與這兩種對稱性質相聯繫的「Killing 矢量」（§25.2）是 $(\partial/\partial t)_{r,\theta,\phi}=(\partial/\partial\tilde{V})_{r,\theta,\tilde{\phi}}$ 和 $(\partial/\partial\phi)_{t,r,\theta}=(\partial/\partial\tilde{\phi})_{\tilde{V},r,\theta}$。

B. 慣性系的拖曳和靜態極限（§33.4）：

1. 黑洞角動量對「慣性系的拖曳」造成迴轉儀相對遠方恒星的進動。通過這個進動可以定義和測量黑洞的角動量（參看 §19.2 和 §19.3）。

2. 愈接近黑洞視界時，拖曳變得愈强烈。在到達視界之前，在由

$$r=r_0(\theta)$$
$$\equiv M+\sqrt{M^2-Q^2-a^2\cos^2\theta},\tag{7}$$

所描繪的表面上，拖曳變得極端强烈，以致相對於遠方的恒星，觀測者不可能靜止的（即爲靜態）留在那裏。在此表面（稱爲「靜態極限」）上及其內部，所有 r 和 θ 固定的觀測者必定以與黑洞同樣的旋轉方向繞黑洞旋轉：

$$\Omega\equiv d\phi/dt$$
$$>\frac{a\sin\theta-\sqrt{\Delta}}{(r^2+a^2)\sin\theta-\sqrt{\Delta}\,a\sin^2\theta}$$
$$(\geq 0\text{，對 }a=S/M>0\text{ 和 }r\leq r_0)。$$

在靜態極限內固定的 (r,θ) 處，無論觀測者怎樣努力地開動他的火箭發動機，他決不能使他相對於遠處恒星的角運動停住。

3. 上述論述的數學基礎是：形式爲 $(r,\theta,\phi)=$常數的世界線［切向矢量$\propto\partial/\partial t=$「沿時間方向的 Killing 矢量」］在靜態極限之外是類時的，而在靜態極限之內變爲類空的。因此，在靜態極限上和在靜態極限內，觀測者無法保持靜止。

C. 視界（§33.4）：

1. 視界位于

$$r=r_+\equiv M+\sqrt{M^2-Q^2-a^2}。\tag{8}$$

2. 與非旋轉黑洞的 Schwarzschild 視界情形一樣，在這裏，粒子和光子可以經過視界向內落下；但是，粒子和光子不

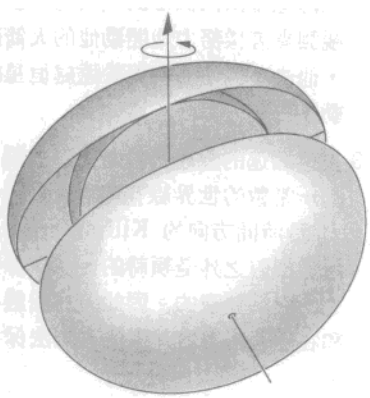
能經過它外出。

3. 視界是由外出的零短程線（外出的光子世界線）「產生」的。

D. 能層（§33.4）

1. 「能層」是視界與靜態極限之間的空時區域。它在黑洞物理學中起着基本的作用（框33.3, §33.7）。

2. 靜態極限與視界有接觸點，在此處它們與黑洞轉軸相割（$\theta=0,\pi$）；除了 $a=0$（無旋轉）之外，在別處，兩者明顯分開，而靜態極限在視界外。當 $a=0$ 時，靜態極限和視界重合；這時，沒有慣性系的拖曳；也沒有能層。



視界，能層和靜態極限的定性表示［取自 Ruffini 和 Wheeler (1971b)］。

E. Boyer-Lindquist 坐標系中的奇點：

1. 對於非旋轉黑洞，在視界處 Schwarzschild 坐標變爲奇點。奇點的表現之一是任何粒子或光子經視界向內落下所需的坐標時爲無窮大，即當 $r\longrightarrow 2M$ 時，$t\longrightarrow\infty$。去掉奇點的一種方式（Eddington-Finkelstein 方式）是用依附於下落光子的零坐標

$$\tilde{V}=t+r+2M\ln|r/2M-1|$$

代替 t［因此，$(\partial/\partial r)_{v,\theta,\phi}$ 是光子世界線的切向矢量］。

2. 對於旋轉的黑洞，作爲 Schwarzschild 坐標推廣的 Boyer-Lindquist 坐標在視界也是奇點。任何粒子或光子經視界向內落下需要無限長的坐標時間，即 $r\longrightarrow r_+$ 時 $t\longrightarrow\infty$。但這還不是全部。慣性系的拖曳迫使視界附近的粒子和光子以角速度 $\Omega\equiv d\phi/dt>0$ 繞黑洞旋轉。結果，對於經視界落下的粒子（$r\longrightarrow r_+$），正如 $t\longrightarrow\infty$ 一樣，還有 $\phi\longrightarrow\infty$（世界線繞視界無限扭曲）。

3. 爲了去掉坐標奇點，必須無限壓縮坐標時間，並把在視界附近無限的扭曲解除。Kerr 坐標用零坐標 $\tilde{V}$ 代替 t，並用解除扭曲的角坐標 $\tilde{\phi}$ 代替 ϕ，來達到這個要求：

$$d\tilde{V}=dt+(r^2+a^2)(dr/\Delta),$$
$$d\tilde{\phi}=d\phi+a(dr/\Delta)。$$

兩個新坐標都依附於特殊一類下落光子的世界線；$(\partial/\partial r)_{v,\theta,\phi}$ 是與這類光子世界線相切的矢量場（內向的主要零線滙；§33.6）

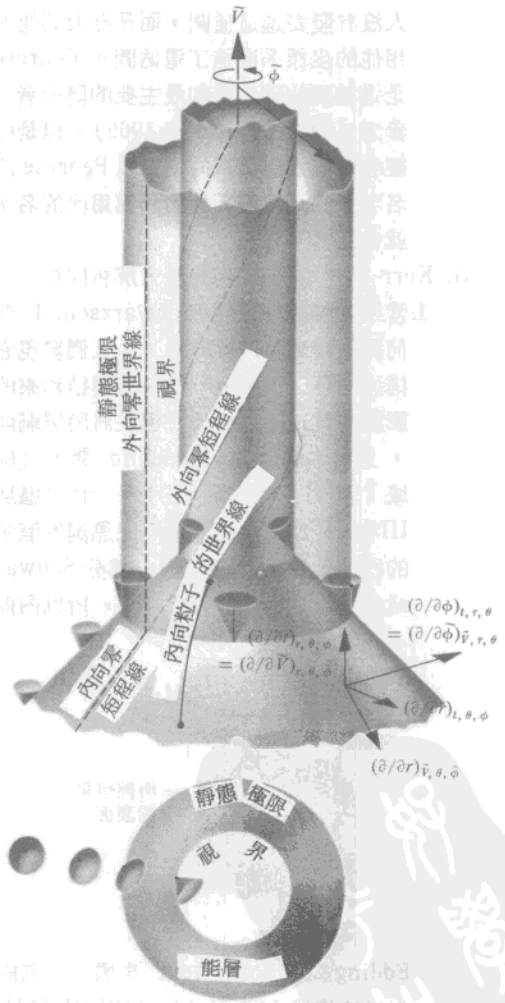
F. 空時圖：

1. Kerr 坐標系中的空時圖看來很像 Schwarzschild 幾何的 Eddington-Finkelstein 圖。在兩種情形，$\tilde{V}$ 爲常數的曲面都不畫成水平的平面，而畫成「向後的光錐」（「45度曲面」），因爲它們是由內向光子的世界線產生的。等質地，把 $\tilde{t}=\tilde{V}-r$ 爲常數的曲面畫成水平平面。

2. Kerr 圖和 Eddington-Finkelstein 圖之間的關鍵差別是：(a) 因爲 Kerr-Newman 幾何不是球形的，隱藏一個旋轉自由度的 Kerr 圖會夫去有關幾何的信息。通常，Kerr 圖是對於赤道「平面」$\theta=\pi/2$ 構成。(b)正如視界把光錐向內拉那樣，對於 $a>0$ 和 $r=$常數的情形，慣性系的拖曳使光錐向 $\tilde{\phi}$ 增加的方向傾斜。(c) 光錐的內向邊緣($d\tilde{r}/d\tilde{V}=-\infty$)並不朝 $\tilde{\phi}$ 增加的方向傾斜；把 Boyer-Lindquist 坐標變換爲 Kerr 坐標會解除隨着 r 減小而產生的這種傾斜，若非如此，則「慣性系拖曳」就會產生這種傾斜。

3. 光錐的形狀顯示出了靜態極限和視界的特殊性質。在靜態極限處，垂直的世界線 [r, θ, $\tilde{\phi}$ 爲常數；$(\partial/\partial\tilde{V})_{r,\theta,\tilde{\phi}}=(\partial/\partial t)_{r,\theta,\phi}=$切向矢量] 位於光錐上。在視界處光錐完全向內傾斜，只有與視界相切的一條線除外。注意，該切線的 $d\tilde{\phi}/d\tilde{V}=a/(r_+^2+a^2)\neq 0$。等價地，產生視界的外向零短程線繞着它（「理髮店招牌桿式的纏繞」）——這是慣性系拖曳的另一表現。

經過「極端 Kerr」黑洞 ($Q=0$, $a=M$) 空時的赤道薄片 ($\theta=\pi/2$) 的 Kerr 圖



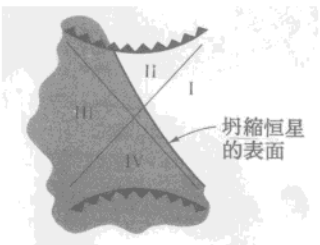
俯視圖顯示出作爲半徑函數的光錐形狀

4. Kerr 圖與 Eddington-Finkelstein 圖一樣，用忠實的非奇異方式描述了通過視界的下落。

5. ［術語「Kerr 圖」用詞不當。Kerr 本人沒有發表過這種圖，而是今天其他人用他的坐標系構造了這個圖。Penrose 是這種圖的發起人和最主要的研究者（參看，例如，Penrose, 1969）。但是已經有幾個其他類型的圖冠以 Penrose 的名字，因此把歸於他的圖都用他的名字就會混淆。］

G. Kerr-Newman 幾何的極大解析開拓

1. 當把遠離所有源的 Schwarzschild 幾何提取出來時（第31章），人們發現它描述的是，把兩個不同宇宙連結起來的膨脹和重新收縮的橋。但在討論黑洞時，只有半個 Schwarzschild 幾何（區域 I 和 II）有關係。另外一半（區域 III和 IV）完全被坍縮形成黑洞的恒星的內部代替。因爲只有一部分 Schwarzschild 幾何開始起作用，所以內向



Eddington-Finkelstein 坐標——它能很好地描述 I 和 II 區，但對 III 和 IV 區的描述欠佳——很適合於黑洞物理學。

2. 類似地，當把遠離所有源的 Kerr-Newman 幾何提取出來時，人們發現它描述着更大的比人們曾經猜想的複雜得多的空時流形。Boyer 和 Lindquist (1967) 以及 Carter (1966a, 1968a) 曾經詳盡地分析 Kerr-Newman 幾何的這種「極大的解析開拓」。但是，它與黑洞的課題完全無關，原因有二。其一，正如 Schwarzschild 幾何的情形一樣，坍縮形成黑洞的恒星取代了 Kerr-Newman流形內向開拓的絕大部分。其二，即使在恒星之外，Kerr-Newman 幾何也不能適當地表示早期的眞實幾何。早期，恒星在坍縮的路上還走得不遠。恒星的引力矩是由還沒有進入「絞肉機」的山脈，突起物，湍流或其他特徵產生的。幾何偏離平直是由於：(1)某項，它在遠距離按質量被距離除變化，(2)另一項，它按角動量除距離平方再乘一階球諧函數變化，還有(3)高階項，它正比於高階的質量矩乘以高階球諧函數。通常，這些高階項在早期偏離了 Kerr-Newman幾何數學分析的對應項——雖然，隨着時間的流逝，這些偏離將會消夫。對賦與球對稱的系統，這些高階項不出現，也不可能出現。因此，外圍的幾何在

坍縮的所有階段都是Schwarzschild性質的。然而當系統缺乏對稱性時，外圍的幾何開始時會偏離 Kerr-Newman性質。只是在坍縮發生了相當一段時間之後（漸近地將來），並且只是在視界上和視界之外的區域，Kerr-Newman 幾何才忠實地描繪了黑洞。Kerr 坐標和 Kerr 圖以非奇異的方式描繪了這個區域；這也是本書將研究的唯一區域。

H. 試驗粒子的軌道

參看 §33.5—§33.8 和框 33.5。

Ⅲ 電磁場的性質（§33.3）：

A. 遠離黑洞空時接近平直，在通常的球正交歸一系（$\omega^1=dt, \omega^2=dr, \omega^3=r d\theta, \omega^4=r\sin\theta d\phi$）中，電場和磁場的主要分量爲

$$E_r=\frac{Q}{r^2};$$

$$B_r=\frac{2Qa}{r^3}\cos\theta,\quad B_\theta=\frac{Qa}{r^3}\sin\theta。$$

這表明

Q＝黑洞的電荷，

$\mathscr{M}\equiv Qa$＝黑洞的磁偶極矩。

B. 注意，迴磁比 $\gamma\equiv$(磁矩)/(角動量)等於 Q/M＝(電荷/質量)，正如單個電子的情況一樣。

C. 注意，像黑洞的所有其他特徵一樣，其磁矩值唯一取決於黑洞的質量，電荷和角動量：$\mathscr{M}=QS/M$。這說明了黑洞無「頭髮」的定理（框 33.1）。

D. 其他的電矩和磁矩不爲零，但都由 M，S 和 Q 唯一確定。

E. 在黑洞附近，空時曲率使帶電旋轉黑洞產生的電場和磁場變形。對此變形的電磁場的數學描述。參看，Cohen 和 Wald（1971）；對它的圖形表示，參看，Hanni 和 Ruffini (1973)。

框 33.3　黑洞的天體物理學

自然界中的黑洞所參予的天體物理過程與恒星一樣是多種多樣的。通過尋找與這些過程相聯繫的可觀測現象，在70年代的某個時候，天文學家有發現第一個黑洞的好機會。本框列出某些可能的天體物理過程和少量有關文獻。

Ⅰ 形成機制

A. 「直接的，孤立的」：一個大質量恒星($M\gtrsim 3M_\odot$) 幾乎是球形地坍縮，產生了坍縮的中子星的核，但此核太重無法支持自己反抗引力。引力把核向內拉，產生了視界

和黑洞。［May 和 White (1966, 1967)；本書第32章。］

B. 「非直接的，孤立的」：圖 24.3 描繪的「坍縮，追踪和納入劇本」［Ruffini 和 Wheeler (1971b)］。

C. 「在稠密物體中」：聚集在稠密星團（例如，星系核）中的恒星互相交換能量。有些恒星得到能量向外運動到暈中。另一些恒星失掉能量構成一更爲致密的星團。這種分離的過程繼續進行。星團會變得非常致密，結果是發生碰撞和氣體被驅散。氣體向引力勢阱的中心運動。從中形成新的恒星。過程繼續進行。最後恒星-恒星碰撞變成足夠高能的非彈性碰撞，以致碰撞的恒星的中心滙合了。由此可能構成超大質量天體並演化。最後(1)許多「小的」恒星可能坍縮形成「小的」黑洞（$M\sim M_\odot$）；(2)一個或幾個超大質量恒星會坍縮形成龐大的黑洞（$M\sim 10^4 M_\odot$ 到 $10^9 M_\odot$）；(3)整團的恒星、氣體和黑洞變得非常致密，以致會坍縮形成單一的巨大的黑洞。［Sanders (1970), Spitzer (1971), Lynden Bell (1967, 1969), Colgate (1967)，以及本書 §24.5, §24.6 和 §25.7。］

D. 「原生地」：膨脹宇宙初始密度分布中的擾動可以造成坍縮，從而形成「原生的黑洞」。隨後這些黑洞將因吸積輻射和物質而增長。到今天，所有這種黑洞都可能會發展爲異常巨大的物體［$M\sim 10^{17} M_\odot$; Zel'dovich 和 Novikov (1966)］；但是，其中有些黑洞也可能沒有增大而只有 10^{-5} 克那麼小［Hawking (1971a)］。

II. **今天在銀河系中有多少黑洞？**

Peebles (1972) 對於這個課題以及在最近的將來找到黑洞的前景作出了一個傑出的評論。他指出：「我們的銀河系銀盤質量的相當一部分（在很久以前）就存放在可能坍縮成黑洞的恒星之中……。有迹象表明，銀盤可能包含 10^9 量級的黑洞。」

III. **「活」黑洞和「死」黑洞**

A. Schwarzschild 黑洞是「死」黑洞，意思是決不能從中提取任何質量-能量。這種「死亡」的一個方面—— Schwarzschild 黑洞對於小擾動是穩定的這一事實——對於下述方面是至關重要的(1)黑洞與大質量最終「基態」的相互證認，(2)廣義相對論預料可能存在黑洞的斷言。［關於穩定性的證明，參看 Vishveshwara (1970)。關於這個問題的系統陳述以及絕大部分必要的技巧的發展是 Regge 和 Wheeler (1957)的功績，Zerilli (1970a)也作出了非常重要的貢獻。］因而，一個小的引力（或其他）輻射的脈沖沖擊Schwarzschild黑洞時，不會發動黑洞向非常不同的天體或狀態轉變。

B. Kerr-Newman 黑洞——它是旋轉的或帶電的或兩者兼而有之——並不是死的。旋轉和電磁對於質量－能量的貢獻可以提取出來（數學細節可參看 §33.7 和 §33.8）。因而，這種黑洞是「活」的；它們可以向其周圍注入能量。通過適當安排的外部裝置，可以激起指數增長的能量釋放過程［Press 和Teukolsky (1972)］。但是，對於孤立的被擾動的黑洞，能量的釋放永

遠是「受控制的」和衰減的；即在任何經典的意義上，Kerr 黑洞是穩定的[Press 和 Teukolsky (1973)]。

C. 絕大多數能夠坍縮形成黑洞的天體（大質量恒星；星系核……）都具有很大的角動量，以致它們產生的黑洞是「非常活躍的」（a 近似等於 M; S 近似等於 M^2）。[Bardeen (1970a)。]

D. 反之，非常可能（但很不肯定）宇宙中的黑洞都不具有大量的電荷——即所有黑洞都滿足 $Q \ll M$。$Q \sim M$ 的黑洞（爲具體化，假設 $Q>0$）將對電子施加靜電吸引力和對質子施加靜電排斥力，這些靜電力比黑洞引力大的倍數爲

$$\frac{(\text{靜電力})}{(\text{引力})} = \frac{eQ}{\mu M} \sim \frac{e}{\mu} \sim 10^{20}。$$

此處 e 是電子電荷，μ 是電子（或質子）質量。這麼巨大差別的力很可能會從黑洞外面吸入足夠多的電荷，使黑洞電荷得到中和。

E. 但是，從中子星的「單極感應過程」[Goldreich 和 Julian (1968)]，人們了解到，電荷中和過程有時會受到阻礙。在1972年，還不知道是否存在什麼黑洞過程能阻止中和。

IV. 黑洞與其環境的相互作用

A. 引力吸引：黑洞對周圍的物質和恒星有引力的吸引。在半徑 $r \gg M$ 處，這種吸引與具有同樣質量恒星的吸引無法區別。

B. 吸積與 x 射線和 γ 射線的輻射：黑洞周圍的氣體受到向內的吸引，並因絕熱壓縮、激波、湍流、粘滯性等而加熱。在到達視界之前氣體可以變得很熱，以致它能發射大流量的 x 射線，甚至發射出 γ 射線。這樣，吸積物質可以把黑洞轉變爲發光發熱的「白色」天體［文獻評述可參看 Novikov 和 Thorne (1973)］。從非旋轉氣體雲的吸積傾向於減少黑洞的角動量［優先吸積具有「負」角動量的粒子；Doroshkevich (1966), Godfrey (1970a)］。但是，黑洞周圍的氣體很可能與黑洞本身在同一方向旋轉，並保持 $S \sim M^2$［更準確地說，$S \approx 0.998M^2$; Thorne (1973b)］。

C. 一塊物質（「小行星」或「行星」或恒星）落入黑洞之中，隨着它的下落會發生一個引力波的爆發。輻射的總能量是 $E \sim 0.01\mu(\mu/M)$，其中 μ 是物體的質量。[Zerilli (1970b); Davis, Ruffini, Press 和 Price (1971)；本書圖 36.2。]

D. 在圍繞黑洞的穩定軌道上運動的物體，由於引力輻射造成的能量損失，會螺旋式的緩緩向內運動，直至它達到最緊束縛的穩定圓軌道。然後，它應很快地落入黑洞，並發出「奄奄一息的爆發」波。在螺旋式的緩緩向內期間輻射的總能量等於最後穩定圓軌道的束縛能：

$$E_{\text{輻射}} = \mu - E_{\text{最後軌道}} = \begin{cases} 0.0572\mu & \text{對於 Schwarzschild 黑洞，} \\ 0.4235\mu & \text{對於 } S=M^2,\ Q=0 \text{ 的 Kerr 黑洞。} \end{cases}$$

式中 μ 是俘獲物體的靜止質量。[框33.5。] 如果 $\mu \ll M$，則奄奄一息爆發的總能量爲 $E \sim 0.01\mu(\mu/M)$。[圖36.2。]

E. 當物質落入黑洞時，它能激起黑洞的外部空時幾何發生振動。這種振動逐漸轉化爲引力波。其中某些逃逸而出，另一些回到黑洞。［Press (1971), Goebel (1972)。］這些振動類似於「初期的引力幾何子」［Wheeler (1962); Christodoulou (1971)］——只是對於振動的黑洞，背景 Kerr 幾何能保持振動能量聚在一起（防止它立刻傳播離開），而在幾何子中，由「振動能」自身產生的曲率能防止分裂。

F. 通過非 Newton 感應區（即非輻射區）的引力相互作用，黑洞把它的角動量逐漸傳送到在它附近的任何非軸對稱的物質或場的分布中去。［Hawking (1972 a); Ipser (1971), Press (1972), Hawking 和 Hartle (1972)。］

G. 落入大黑洞的恒星或行星會被潮汐引力撕裂。如果撕裂發生在視界外的近處，它會以相對論速度向外拋出一團恒星物質（「牙膏筒效應」）。而且，外向的噴流可以從黑洞的能層提取出大量的轉動能量——即黑洞拋出物體的靜止質量與動能之和會超出原先下落物體的靜止質量。［Wheeler (1971d); §33.7 和 §33.8。］

H. 帶電黑洞的磁力線可能固定在周圍的等離子體上，可能隨着黑洞的旋轉纏繞起來，並且可能會搖動、拉扯和激發等離子體。

V. 黑洞之間的碰撞

A. 兩個黑洞可能碰撞和合併；但是沒有辦法把一個黑洞炸開成幾個黑洞［Hawking (1972a)；練習 34.4］。

B. 當兩個黑洞碰撞和合併時，最後得到的黑洞的表面面積必定超過兩個初始黑洞的表面面積之和（「黑洞動力學的第二定律」，Hawking (1971a,b)，框33.4; §34.5）。這個約束對碰撞中發出的引力輻射的數量給出了一個上限。例如，如果所有三個黑洞都是 Schwarzschild 型的，並且兩個初始黑洞的質量相等，均爲 $M/2$，則

$$4\pi(2M_{終})^2 \geq 4\pi[2(M/2)]^2+4\pi[2(M/2)]^2,$$
$$M_{終} \geq M/\sqrt{2},$$

因此，輻射的能量爲

$$E_{輻射} \leq M-M/\sqrt{2}=0.293M。$$

VI. 在何處尋找黑洞以及如何尋找黑洞［詳細的評述，參看 Peebles (1971)］：

A. 當黑洞形成時，通過爆發或形成期間引力輻射的猝發尋找它［圖 24.3］。

B. 在雙星系統中：黑洞成分在光學上不可見，但是可因吸積而發射 x 射線和 γ 射線；可見成分顯示出洩露內情的 Doppler 頻移［Hoyle, Fowler, Burbidge 和 Burbidge (1964); Zel'dovich 和 Guseynov (1965); Trimble 和 Thorne (1969); Pringle 和 Rees (1972); Shakura 和 Sunyaev (1973)

]。可見成分的速度和雙星周期給出了關於不可見成分質量的信息。如果不可見成分的質量是四倍太陽質量或更多，它就不可能是普通的恒星，因爲具有那麼大質量的普通恒星將有 $(4)^3=64$ 倍的太陽光度。它既不可能是白矮星也不可能是中子星，因爲如此重的白矮星或中子星會立刻坍縮成黑洞。因此，把不可見成分證認爲黑洞是很有吸引力的——雖然未必令人信服［參看 Trimble 和 Thorne (1969)］。

C. ［但是不要期望從雙星系統的黑洞看到任何明顯的引力透鏡作用：如果說，爲了看到直徑爲 4,800 公里的水星黑盤面經過太陽的巨大表面，曾經使天文學家費盡心力幾十年，那麼，要在遙遠得多的距離處，看到掩蔽一個伴恒星的，有效半徑僅 ～3 公里的黑洞，幾乎是沒有希望的。有意義的透鏡作用要求透鏡（黑洞）與它所聚焦的恒星之間應隔開正常的星際距離；從那裏被聚焦的光線的碰撞參數大於恒星半徑，因此透鏡作用不大於正常恒星。此外，即使在銀河系中有 10^9 個黑洞，每年也只有一個黑洞直接從地球和較遠的恒星之間通過並產生有意義的透鏡作用（Refsdal, 1964）。在正確的時間，用足夠强大的望遠鏡，觀看天空上該正確點的機會是：零！］

D. 在可能有黑洞安息的球狀星團中心，會把正常恒星吸引到它的附近，從而在星團的光分布中產生一個光點。［Cameron 和 Truran (1971), Peebles (1971)。］

E. 在星系核中，甚至包括銀心在內，作爲星系核早期活動的終結產物，可能會有單個巨大黑洞（$M\sim10^4$ 到 $10^8 M_\odot$）位於其中。這樣一個黑洞在吸積物質時會發射引力波，光和射電波。大部分光會由於周圍塵埃的作用轉化爲紅外輻射。黑洞還可能產生噴流和其他核活動。［Lynden-Bell (1969), Lynden-Bell 和 Rees (1971), Wheeler (1971d), Peebles (1971)。］

框 33.4　黑洞動力學定律

框 33.3 中描述的黑洞過程受到標準的物理學規律的支配：廣義相對論，加上Maxwell電動力學，加上流體動力學、量子力學以及物質和輻射的其他一些物理學規律。從這些標準的物理學規律，可以導出黑洞過程所必須滿足的某些「規則」或「約束」。這些規則的威力、雅致和簡潔，與熱力學定律的威力、雅致和簡潔類似並可與之媲美。因此，已經給予它們類似的名稱：「黑洞動力學定律」(Israel 1971)。本框陳述黑洞動力學定律之二以及它們的某些分支。此

處沒有討論的另外兩個定律，Bardeen, Carter 和 Hawking (1973) 曾系統地闡述過。

I. 黑洞動力學的第一定律和第二定律

A. 第一定律

1. 像熱力學第一定律那樣，黑洞動力學的第一定律也是總能量守恒的標準定律，還補充以總動量、總角動量和總電荷的守恒定律。對這些守恒定律的詳細討論，請參看框 19.1 和第 20 章。

2. 限於物質落入黑洞和向外發出引力波的特殊情形，第一定律取框19.1接近末尾時所敍述和討論的形式。

3. 限於電荷下落的特殊情形，第一定律指出，黑洞總電荷 Q（根據從黑洞中流出的電流測出）改變的數量等於落入黑洞的總電荷

$$\Delta Q = q_{\text{落入黑洞}}。$$

4. 限於兩個黑洞碰撞並合併的特殊情形（例子在框33.3中給出），第一定律指出：(a) 當兩個黑洞分離足夠遠彼此的影響可以忽略時，設由引力方法測出的兩個黑洞的四維動量分別爲 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$。($\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 是周圍漸近平直空時中的四維矢量）。類似地，設 $\boldsymbol{J}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2$ 是黑洞的總角動量張量（不是內稟的角動量矢量！）——相對於在周圍漸近平直空時中某個任意選定的坐標原點 $\mathcal{O}_0$，($\boldsymbol{J}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2$ 包括軌道角動量和內稟角動量，參看框 5.6）。(b) 設 $\boldsymbol{P}_3$ 和 $\boldsymbol{J}_3$ 是最後黑洞的類似的總四維動量和角動量。(c) 設 $\boldsymbol{P}_r$ 和 $\boldsymbol{J}_r$ 是在碰撞和合併期間作爲引力波輻射出去的總四維動量和角動量。那麼

$$\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_r, \quad \boldsymbol{J}_3 = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2 - \boldsymbol{J}_r。$$

[注意：爲了從已知的 $\boldsymbol{P}_3$ 和 $\boldsymbol{J}_3$ 算出最後黑洞的質量和內稟角動量，應遵循框 5.6 的規定。按那裏的規定，最後黑洞的世界線應是：在遙遠漸近 Lorentz 坐標中，黑洞遠處球形場的中心在此世界線上。]

B. 第二定律 [Hawking (1971b, 1972a) 曾詳加敍述和應用]。
當任何東西落入黑洞時，或者當幾個黑洞碰撞和合併時，或者當幾個黑洞碰撞並散射時，或者在任何包含黑洞的過程中，涉及的全部黑洞的表面面積之和（或「不可約質量」的平方——參看下面的(3)式）決不會減小（證明見 §34.5）。這就是黑洞動力學的第二定律。

II. 可逆變換和不可逆變換；不可約質量

[Christodoulou (1970); Christodoulou 和 Ruffini (1971) ——與 Hawkings 發現第二定律同時獨立導出的結果。]

A. 考慮單個 Kerr-Newman 黑洞與周圍物質和場的相互作用。在任何瞬間，它的表面面積可由它的瞬時質量M，電荷Q和單位質量的內稟角動量 $a\equiv S/M$ 給出，即

$$A=4\pi(r_+^2+a^2)=4\pi[(M+\sqrt{M^2-Q^2-a^2})^2+a^2] \qquad (1)$$

（練習 33.12）。與物質和場的相互作用可以不同方式改變 M, Q 和 a；M甚至可能減少——即有可能從黑洞中提取能量！[Penrose (1969); §33.7。] 但是不管怎樣改變，它們決不能減少表面面積A。而且，如果 M, Q和a 的任何改變能增大表面面積，則未來的過程決不能使表面面積減小回到它的初始值。

B. 於是，可以把黑洞過程分爲兩類：
1. 可逆變換，改變M, Q 或 a 或改變其中的任何一組，同時保持表面面積不變。這些變換是可逆的，即可以使黑洞恢復到它的初始狀態。
2. 不可逆變換，改變M, Q或 a 或改變其中的任何一組，並且在過程中增加表面面積。這種變換決不可逆。經不可逆變換之後，黑洞決不能恢復其初始狀態。

C. 在 §33.7 和 §33.8 中給出由粒子向內下落引起的可逆變換和不可逆變換的例子。

D. 從黑洞可逆的提取電荷和角動量（Q和a 減少，A保持不變）必定要減少黑洞的質量（提取了能量！）。在所有電荷和角動量都被取出之後，質量降至最後的「不可約值」

$$M_{\text{不可約}}=(A/16\pi)^{1/2}=\left(\begin{matrix}\text{表面面積爲}A\text{的}\\ \text{Schwarzschild 黑洞的質量}\end{matrix}\right)。 \qquad (2)$$

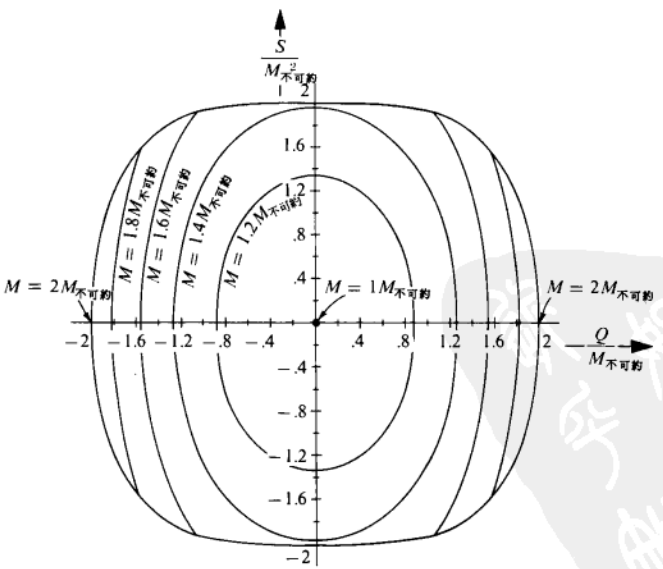
E. 用這個最後的不可約質量來表示，黑洞的初始質量-能量（具有電荷Q和內稟角動量S）爲

$$M^2=\left(M_{\text{不可約}}+\frac{Q^2}{4M_{\text{不可約}}}\right)^2+\frac{S^2}{4M^2_{\text{不可約}}}。\qquad(3)$$

［這個公式是由 Christodoulou 和 Ruffini 導出的，它也可由(1)(2)式和 $S=Ma$ 聯合得出。］

F. 於是，黑洞的總質量-能量可以看作是由不可約質量，電磁質量-能量和旋轉能量構成的。但是人們必須抵制住誘惑：即認爲這些貢獻是線性迭加的。反之，，它們的組合方式［式 (3)］類似於靜止質量和線性動量組合給出能量的方式，即 $E^2=m^2+p^2$。

G. 下面在「電荷-角動量平面」上描繪出 $M/M_{\text{不可約}}$ 爲常數的等值線。黑洞只能存在於由（$Q^2+a^2\leq M^2$）所描述的區域之內。［圖取自 Christodoulou (1971)。］



H. 因爲黑洞的不可約質量正比於其表面面積的平方根，可以把黑洞動力學的第二定律重新表述如下：

在黑洞過程中，涉及的所有黑洞的不可約質量的平方之和決不能減少。

初階
高階

§ 33.3　質量，角動量，電荷和磁矩

本章其餘部分均屬高階。作爲它的準備，需要涉及第32章的高階部分（引力坍縮）。閱讀時，第 25 章（Schwarzschild 幾何中的軌道）將極有幫助。本章其餘部分是第34章（奇點和整體方法）的必要準備。

證實在 Kerr-Newman 幾何和電磁場方程 (33.2)—(33.5) 中出現的常數 M, Q 和 a 是上節聲稱的黑洞質量，電荷和單位質量的角動量，這是有益的。

質量和角動量是由它們在遠離黑洞的空時幾何上的痕迹定義的。因此，爲了計算質量和角動量，可以把線元 (33.2) 式按 $1/r$ 的冪次展開並考察主要項：

黑洞外遠處的度規：質量和角動量的痕迹

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left[1-\frac{2M}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]dt^2-\left[\frac{4aM}{r}\sin^2\theta+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]dt\,d\phi \\ &+\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right][dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。 \end{aligned} \tag{33.6}$$

變換到漸近 Lorentz 坐標 ——$x=r\sin\theta\ \cos\phi$, $y=r\sin\theta\ \sin\phi$, $z=r\cos\theta$ 會使考察方便些：

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left[1-\frac{2M}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]dt^2-\left[\frac{4aM}{r^3}+O\left(\frac{1}{r^4}\right)\right][x\,dy-y\,dx] \\ &+\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right][dx^2+dy^2+dz^2]。 \end{aligned} \tag{33.6'}$$

把上式與遠離穩定旋轉源的度規的「標準形式」[(19.13)式] 直接比較，則揭示出：(1) 參數M確實是黑洞的質量；(2) 黑洞的內稟角動量矢量爲

$$\boldsymbol{S}=(aM)\partial/\partial z=(aM)\cdot\begin{pmatrix}\text{Boyer-Lindquist}\\ \text{坐標極軸方向的單}\\ \text{位矢量}\end{pmatrix}。 \tag{33.7}$$

黑洞外遠處的電場：

與任何源一樣，黑洞的電荷也是由圍繞黑洞的閉合曲面上電場的 Gauss流量積分定義的。在黑洞的漸近靜止系中，電場的正交歸一分量爲

(1)電場

$$E_{\hat{r}}=E_r=F_{rt}=Q/r^2+O(1/r^3),$$
$$E_{\hat{\theta}}=E_\theta/r=F_{\theta t}/r=O(1/r^4), \tag{33.8}$$
$$E_{\hat{\phi}}=E_\phi/r\sin\theta=F_{\theta t}/r\sin\theta=0。$$

因此，電場是純徑向的，其 Gauss 流量積分爲 $4\pi Q$，這表明黑洞的電荷就是 Q。

磁場主要分量的類似計算給出

(2)磁場

$$B_{\hat{r}}=F_{\hat{\theta}\hat{\phi}}=\frac{F_{\theta\phi}}{r^2\sin\theta}=2\frac{Qa}{r^3}\cos\theta+O\left(\frac{1}{r^4}\right),$$
$$B_{\hat{\theta}}=F_{\hat{\phi}\hat{r}}=\frac{F_{\phi r}}{r\sin\theta}=\frac{Qa}{r^3}\sin\theta+O\left(\frac{1}{r^4}\right), \tag{33.9}$$
$$B_{\hat{\phi}}=F_{\hat{r}\hat{\theta}}=\frac{F_{r\theta}}{r}=0。$$

這是一個偶極磁場，從它立刻可以得出黑洞磁矩值爲

(3)磁偶極矩

$$\mathcal{M}=Qa=(Q/M)S=(\underbrace{\text{電荷/質量}}_{\text{「迴磁比」}})\times(\text{角動量})。 \tag{33.10}$$

黑洞幾何的非球形

正像黑洞的旋轉會產生磁場一樣，黑洞的旋轉還在黑洞的引力場中產生非球形的變形［定量討論可參看 Hernandez (1967)］。但是這些變形與磁矩一樣，並不能隨意指定。它們是由黑洞的質量、電荷和角動量唯一確定的。

§ 33.4 對稱性和參照系拖曳

Kerr-Newman 黑洞的度規分量 (33.2) 與 Boyer-Lindquist 時間坐標 t 和角坐標 ϕ 無關。這意味着（見 §25.2）

Kerr-Newman 幾何的 Killing 矢量

$$\xi_{(t)}\equiv(\partial/\partial t)_{r,\theta,\phi} \text{ 和 } \xi_{(\phi)}\equiv(\partial/\partial\phi)_{t,r,\theta} \tag{33.11}$$

是與黑洞的穩定性（時間平移不變性）和軸對稱性相聯系的 Killing 矢量。這些 Killing 矢量自身及彼此的標積爲

$$\boldsymbol{\xi}_{(t)}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(t)}=g_{tt}=-\left(\frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)=-\left(1-\frac{2Mr-Q^2}{\rho^2}\right),\quad(33.12a)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(t)}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}=g_{t\phi}=\frac{a\sin^2\theta(\Delta-r^2-a^2)}{\rho^2}=-\frac{(2Mr-Q^2)a\sin^2\theta}{\rho^2},\quad(33.12b)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}=g_{\phi\phi}=\frac{[(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta]\sin^2\theta}{\rho^2}。\quad(33.12c)$$

因爲 Killing 矢量是空時的幾何性質，它的存在與任何的和所有的坐標系無關，所以它們的標積也具有與坐標無關的含義。恰好（不是機遇，而是由於細心挑選坐標！） Boyer-Lindquist 度規分量 g_{tt}, $g_{t\phi}$ 和 $g_{\phi\phi}$ 等於這些與坐標無關的標積。這樣，可以認爲 g_{tt}, $g_{t\phi}$ 和 $g_{\phi\phi}$ 是包含空時對稱性信息的三個標量場。反之，度規系數 $g_{rr}=\rho^2/\Delta$ 和 $g_{\theta\theta}=\rho^2$ 毫不帶有對稱性的任何信息*。它們的存在和數值，都依賴於 Boyer-Lindquist 坐標的選擇。

穩定的觀測者

靜止的觀測者

以均勻角速度沿着 (r,θ) 爲常數的世界線運動的任何觀測者，在他的鄰近看到的是一個不變的空時幾何。因此，可以認爲這樣一個觀測者相對於局域幾何是「穩定的」。當且僅當他的角速度爲零時，即當且僅當他沿着 (r,θ,ϕ) 均爲常數的世界線運動時，他相對於黑洞的漸近 Lorentz 系（即相對於遠處的恒星）才是「靜止的」。

角速度和穩定觀測者的四維速度

「相對於漸近靜止系的角速度」——或簡單地說「角速度」——的準確定義是

$$\Omega\equiv\frac{d\phi}{dt}=\frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau}=\frac{u^\phi}{u^t}\quad(33.13a)$$

（見練習 33.2）。用 Ω, Killing 矢量，和 Killing 矢量的標積來表示，穩定觀測者的四維速度是

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&=u^t(\partial/\partial t+\Omega\partial/\partial\phi)=\frac{\boldsymbol{\xi}_{(t)}+\Omega\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}}{|\boldsymbol{\xi}_{(t)}+\Omega\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}|}\\&=\frac{\boldsymbol{\xi}_{(t)}+\Omega\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}}{(-g_{tt}-2\Omega g_{t\phi}-\Omega^2g_{\phi\phi})^{1/2}}。\end{aligned}\quad(33.13b)$$

當且僅當 Ω 爲零時穩定的觀測者才是靜止的。

在給定 r, θ 處的穩定觀測者不可能具有任意的角速度和每一個角速度。只有使四維速度 $\mathbf{u}$ 位於未來光錐之內的那些 Ω 值才是允許的——即 Ω 應滿足

$$(\boldsymbol{\xi}_{(t)}+\Omega\boldsymbol{\xi}_{(\phi)})^2=g_{tt}+2\Omega g_{t\phi}+\Omega^2g_{\phi\phi}<0。$$

---

* 這一點並不全對。Kerr-Newman 空時除了具有它的兩個 Killing 矢量外還具有一個「Killing 張量」，它與 Boyer-Lindquist 坐標 r, θ 緊密聯系着。參看 Walker 和 Penrose (1970); 以及 §33.5。

參照系拖曳，靜態極限和能層

於是，穩定的觀測者的角速度被限制於

$$\Omega_{\text{極小}}<\Omega<\Omega_{\text{極大}}, \tag{33.14}$$

式中

$$\Omega_{\text{極小}}=\omega-\sqrt{\omega^2-g_{tt}/g_{\phi\phi}}, \tag{33.15a}$$

$$\Omega_{\text{極大}}=\omega+\sqrt{\omega^2-g_{tt}/g_{\phi\phi}}, \tag{33.15b}$$

$$\omega\equiv\frac{1}{2}(\Omega_{\text{極小}}+\Omega_{\text{極大}})=-\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}}=\frac{(2Mr-Q^2)a}{(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta}, \tag{33.16}$$

並且假定 $S/M=a>0$。這些限制的下述特徵是值得注意的。(1)遠離黑洞處，有 $r\Omega_{\text{極小}}=-1$ 和 $r\Omega_{\text{極大}}=+1$，這相應於平直空時中被光速强加的標准限制。(2)隨着半徑的減小，$\Omega_{\text{極小}}$ 增加（「慣性系的拖曳」）。最後，當 g_{tt} 達到零時，即在

$$r=r_0(\theta)\equiv M+\sqrt{M^2-Q^2-a^2\cos^2\theta}, \tag{33.17}$$

處，$\Omega_{\text{極小}}$ 變爲零。在此表面上及表面內，所有穩定的觀測者必定以正的角速度繞黑洞轉動。因而，*靜止的觀測者存在於 $r=r_0(\theta)$ 以外，也只在其外存在*。根據這個原因，$r=r_0(\theta)$ 稱爲「靜態極限」；參看框 33.2。(3)隨着人們通過靜態極限進入「能層」，發現角速度的允許範圍常常變得更正一些（「參照系的拖曳」更多一些）。同時，發現這一允許範圍狹窄了，直到最後，在視界

$$r=r_+\equiv M+\sqrt{M^2-Q^2-a^2} \tag{33.18}$$

處，極限 $\Omega_{\text{極小}}$ 和 $\Omega_{\text{極大}}$ 合而爲一（$\omega^2=g_{tt}/g_{\phi\phi}$）。這樣，在視界處就沒有穩定的觀測者了。所有類時世界線都指向內部。無法逃脫黑洞的「拖曳」。

穩定的觀測者和「參照系拖曳」的更多特徵將在練習中進一步考察。

練習

練習 33.1 Killing 矢量的 Kerr 描述

(a) 利用從 Boyer-Lindquist 坐標到 Kerr 坐標的變換規律［框 33.2 的(4)式］，試證明

$$\xi_{(t)}\equiv(\partial/\partial t)_{r,\theta,\phi}=(\partial/\partial\tilde{V})_{r,\theta,\tilde{\phi}}, \tag{33.19a}$$

$$\xi_{(\phi)}\equiv(\partial/\partial\phi)_{t,r,\theta}=(\partial/\partial\tilde{\phi})_{\tilde{V},r,\theta}。 \tag{33.19b}$$

通過考察度規分量，明確地證明

$$g_{\tilde{V}\tilde{V}}=g_{tt},\quad g_{\tilde{V}\tilde{\phi}}=g_{t\phi},\quad g_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}=g_{\phi\phi}, \tag{33.19c}$$

這與 (33.19a,b) 式相符。

(b) 試證明，對於穩定的觀測者（r,θ 爲常數的世界線，角速度用Kerr 坐標表示，爲

$$\Omega\equiv d\phi/dt=d\tilde{\phi}/d\tilde{V}=u^{\hat{\phi}}/u^{\hat{0}},$$

因此，在 Kerr 坐標系中對穩定的觀測者的全部討論與在 Boyer-Lindquist 坐標系中的討論等同。只有當沿着 r 變化的世界線運動時，坐標系之間的差別才會顯示出來。試把這個事實與下面的事實協調起來，即兩個坐標系採用同樣的（r,θ）坐標，但時間坐標和方位坐標不同（分別用 t, ϕ 和$\tilde{V}$, $\tilde{\phi}$）。

練習 33.2　角速度的觀測

遠離黑洞且在黑洞的漸近 Lorentz 系中靜止的觀測者（用他的雙眼）觀看沿着黑洞附近的穩定（非短程線）軌道運動的一個粒子。設 $\Omega=d\phi/dt$ 是上面定義和討論的粒子的角速度。遠處觀測者用他的跑錶測量粒子繞黑洞轉一整圈所需的時間（相對於遠處觀測者自身轉一整圈；即相對於黑洞的漸近 Lorentz 系）。

(a) 試證明，測出的轉一圈的時間是 $2\pi/\Omega$，因而，Ω 可以看作從「無限遠處測出的粒子的角速度」。

(b) 設與粒子一起運動的觀測者用他的雙眼和他携帶的跑錶測量粒子相對漸近Lorentz系轉一圈的時間。試證明，他得出的繞一圈的時間必定爲

$$\Delta\tau=\frac{2\pi}{\Omega}\underbrace{(-g_{tt}-2\Omega g_{t\phi}-\Omega^2 g_{\phi\phi})^{1/2}}_{\text{「紅移因子」}}。\tag{33.20}$$

練習 33.3　局域非轉動觀測者
(Bardeen 1970b)

(a) 在黑洞周圍固定的（r,θ）處放一剛性的圓形鏡子（「環狀鏡」）。設在（r,θ）處具有角速度 Ω 的觀測者發出一閃光。某些光子將被鏡子捕獲並掠過它的表面，在正 ϕ 方向繞黑洞環行。另一些光子被捕獲並在負 ϕ 方向掠過。試證明，僅當觀測者的角速度爲

$$\Omega=\omega(r,\theta)=\text{表達式 (33.16)}$$

時，他才能同時從兩個方向上回收光子。於是，在這種情形，也僅在這種情形，用局域幾何的術語來說，觀測者才能把 $+\phi$ 和 $-\phi$ 方向看作是等價的。換言之，在這種情形，也僅在這種情形，觀測者才「相對於局域空時幾何不旋轉」。因而，對於以角速度 $\Omega=\omega(r,\theta)$ 運動的觀測者，採用「局域非旋轉觀測者」的名稱是適當的。

(b) 與黑洞的軸對稱相聯系的是短程線運動的守恒量 $p_\phi\equiv\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}$。對於任何粒子——不管它是否沿短程線運動——這個量稱爲「沿黑洞自旋軸的角動量分量」，或簡稱爲粒子的「角動量」。（參看下面的§33.5。）試證明，對於在固定的（r,θ）處的全部穩定的觀測者，只有「局域非旋轉觀測者」具有零角動量。［注意：Bardeen, Press和Teukolsky (1972) 指出，「局域非旋轉觀測者」是分析黑洞附近物理過程的有力工具。］

練習 33.4 局域非旋轉觀測者的正交歸一系

(a) 設空時中充滿了局域非旋轉觀測者的世界線，並設每一個觀測者隨身携帶一正交歸一系。試證明，這些參照系的空間指向可選擇得使其基1-形式爲

$$\begin{aligned}\omega^{\hat{t}}&=|g_{tt}-\omega^2 g_{\phi\phi}|^{1/2}dt\,, & \omega^{\hat{\phi}}&=(g_{\phi\phi})^{1/2}(d\phi-\omega dt)\,,\\ \omega^{\hat{r}}&=(\rho/\Delta^{1/2})dr\,, & \omega^{\hat{\theta}}&=\rho d\theta\,。\end{aligned}\tag{33.21}$$

更明確的，試證明這些1-形是正交歸一的，並且其對偶基爲

$$\partial/\partial\hat{t}=\boldsymbol{u}\equiv\text{局域非旋轉觀測者的四維速度。}\tag{33.22}$$

試證明，$\boldsymbol{u}=-\omega^{\hat{t}}$ 是1-形式的無旋轉場［$d\omega^{\hat{t}}\wedge\omega^{\hat{t}}=0$；練習 4.4］。

(b) 有時會遇到一種錯誤的想法，即認爲「局域非旋轉觀測者」在某種意義上是局域慣性的。爲了消除這個錯誤的印象，試證明：(i) 這樣的觀測者具有非零的四維加速度

$$\boldsymbol{a}=\Gamma_{\hat{j}\hat{1}\hat{1}}\boldsymbol{e}_{\hat{j}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\ln|g_{tt}-\omega^2 g_{\phi\phi}|;\tag{33.23}$$

(ii) 如果這樣一位觀測者隨身携帶着迴轉儀，並把必要的加速度加在迴轉儀的質心上，則他看到迴轉儀相對於他的正交歸一系 (33.21) 以角速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}(\text{進動})&=\Gamma_{\hat{\theta}\hat{1}\hat{1}}\boldsymbol{e}_{\hat{r}}+\Gamma_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{1}}\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}\\ &=\frac{1}{2}\frac{g_{\phi\phi}{}^{1/2}}{|g_{tt}-\omega^2 g_{\phi\phi}|^{1/2}}\left[\frac{\omega_{,\theta}}{\rho}\boldsymbol{e}_{\hat{r}}-\frac{\Delta^{1/2}\omega_{,r}}{\rho}\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}\right]\end{aligned}\tag{33.24}$$

作進動。［提示：見練習 19.2，(13.69) 式和有關的討論。用微分形式的方法計算聯絡系數最爲容易；見 §14.6。］

練習 33.5 局域光錐

對於不帶電荷 ($Q=0$) 的 Kerr 黑洞，試計算在 Kerr 圖中畫出的光錐的形狀（框 33.2 的 II. F 部分）。特別地，引入新的時間坐標

$$\tilde{t}\equiv\tilde{V}-r\tag{33.25}$$

對此，$\tilde{t}$ 爲常數的薄片是 Kerr 圖中的視界面。那麼，當保持 $\theta=\pi/2$ 時（通過黑洞的赤道薄片），在 Kerr 圖中 $\tilde{t}$ 軸垂直繪出，r 軸徑向繪出，而 $\tilde{\phi}$ 軸經度方位角地繪出。

(a) 試證明，從給定的 $\tilde{t}$, r, $\tilde{\phi}$ 處放射的光錐的形式爲

$$\frac{dr}{d\tilde{t}}=a\left(\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{t}}\right)-\frac{2M/r}{1+2M/r}\pm\sqrt{\frac{1}{(1+2M/r)^2}-\frac{r^2(d\tilde{\phi}/d\tilde{t})^2}{1+2M/r}}\,。$$

(b) 試證明，光錐將沿着曲線

$$dr/d\tilde{t}=0\,,\quad d\tilde{\phi}/d\tilde{t}=\Omega_{\text{極小}}\text{ 和 }\Omega_{\text{極大}}\tag{33.26b}$$

切割半徑爲常數的曲面，式中 $\Omega_{\text{極小}}$ 和 $\Omega_{\text{極大}}$ 由表達式 (33.15a,b) 給出（對於穩定的觀測者允許的最小角速度和最大角速度）。

(c) 試證明，在靜態極限 $r=r_0(\pi/2)$ 處，光錐與 r, θ, $\tilde{\phi}$ 爲常數的曲線相切。

(d) 試證明，光錐沿曲線

$$\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{t}}=0,\quad \frac{dr}{d\tilde{t}}=-1 \text{ 和} \frac{1-2M/r}{1+2M/r}。 \tag{33.26c}$$

與 $\tilde{\phi}$ 爲常數的曲面相割。

(e) 試證明，光錐與視界相切。

(f) 試繪製作爲半徑函數的光錐形狀圖。

(g) 試定性描述，在 Boyer-Lindquist 坐標系中從視界附近看來光錐的形狀應怎樣。（注意：因爲坐標在視界處是奇異的，所以光錐看起來將是「怪誕的」。）

---

§ 33.5 試驗粒子的運動方程 [Carter (1968a)]

設一電荷爲 e 靜止質量爲 μ 的試驗粒子在黑洞的外場中運動。黑洞沒有電荷，試驗粒子沿短程線運動（零四維加速度）。但是電荷產生出電磁場，電磁場又產生作用於粒子的 Lorentz 力：$\mu\mathbf{a}=e\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$。（此處 $\mathbf{u}$ 是粒子的四維速度，$\mathbf{a}\equiv\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ 是它的四維加速度。）

對於沒有電荷的情形，短程線方程 $\mathbf{a}=0$ 等價於 Hamilton 方程

$$dx^\mu/d\lambda=\partial\mathcal{H}/\partial p_\mu,\qquad dp_\mu/d\lambda=-\partial\mathcal{H}/\partial x^\mu, \tag{33.27a}$$

式中 λ 是仿射參量，已歸一化使

$$d/d\lambda=\mathbf{p}=\text{四維動量}, \tag{33.27b}$$

式中

$$\mathcal{H}\equiv\text{「超 Hamilton 函數」}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu \tag{33.27c}$$

（見練習 25.2）。類似地（見練習 33.6）對於有電荷的情形，Lorentz 力方程 $\mu\mathbf{a}=e\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$ 等價於用位置 x^μ 和「廣義動量」π_μ 寫出的 Hamilton 方程

$$dx^\mu/d\lambda=\partial\mathcal{H}/\partial\pi_\mu,\qquad d\pi_\mu/d\lambda=-\partial\mathcal{H}/\partial x^\mu。 \tag{33.28a}$$

超 Hamilton 函數 $\mathcal{H}$ 的形式，用粒子所在處的度規系數 $g^{\mu\nu}(x^\alpha)$，粒子電荷 e 和廣義動量 π_μ 表示，爲

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\pi_\mu-eA_\mu)(\pi_\nu-eA_\nu)。 \tag{33.28b}$$

在彎曲空時中，在任意電磁場中，帶電的試驗粒子的超 Hamilton 函數

[平直空時中類似的超 Hamilton 函數，請參看 Goldstein (1959) 的 §7.3

。] 對此超 Hamilton 函數，第一個 Hamilton 方程化爲

$$p^\mu \equiv (\text{四維動量}) \equiv dx^\mu/d\lambda = \pi^\mu - eA^\mu \qquad (33.29a)$$

（用 p^μ, e, 和 A^μ 表示 π^μ 的值）；第二個 Hamilton 方程與第一個 Hamilton 方程聯合後，化爲 Lorentz 力方程

$$dp^\mu/d\lambda + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = eF^{\mu\nu} p_\nu 。 \qquad (33.29b)$$

[應當是 p_ν，而不是 u_ν，因爲 $\lambda = \tau/\mu$]

對於 Kerr-Newman 黑洞，在 Boyer-Lindquist 坐標中矢勢的形式爲

帶電黑洞的矢勢

$$\boldsymbol{A} = -\frac{Qr}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta\, d\phi)\,, \qquad (33.30)$$

要證明此式，只需檢驗

$$d\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta})\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

能化成 (33.5) 式的 Faraday 2-形式即可。

有充分理由仔細檢查所有這些形式，而不正面處理初等坐標形式的Lorentz力方程

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = eF^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\lambda} 。$$

繞帶電黑洞運動的帶電試驗粒子的「運動常數」

Hamilton 函數的形式使人們能夠立刻發現二個運動常數；而初等的 Lorentz 力方程却做不到這一點。關鍵在於 $\boldsymbol{A}$ 的分量 A_μ [(33.30) 式] 和度規的分量 $g^{\mu\nu}$ [(33.2) 式的 $g_{\mu\nu}$ 的倒數；見 (33.35) 式] 與 t 和 ϕ 無關（電磁場和空時幾何兩者都是穩定的和軸對稱的）。結果，超 Hamilton 函數也與 t 和 ϕ 無關；因此 Hamilton 方程

$$d\pi_\alpha/d\lambda = -\partial\mathcal{H}/\partial x^\alpha$$

確保 π_t 和 π_ϕ 為運動常數。

(1)「在無窮遠的能量」E

(2)「角動量的軸向分量」L_z

在遠離黑洞處，矢勢變爲零，度規變爲

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,,$$

運動常數變爲

$$\pi_t = p_t = -p^t = -\text{能量}\,,$$

$$\pi_\phi = p_\phi = r p^{\hat{\phi}} = \begin{pmatrix}\text{角動量在黑洞}\\ \text{旋轉軸的投影}\end{pmatrix}。$$

因而，對於運動常數 $-\pi_t$ 和 π_ϕ，採用下述名稱和符號是適當的

$$E\equiv(\text{「在無窮遠處的能量」})\equiv-\pi_t=-(p_t+eA_t)\,, \tag{33.31a}$$

$$L_z\equiv\begin{pmatrix}\text{「角動量的軸向分量」}\\ \text{或簡稱爲「角動量」}\end{pmatrix}\equiv\pi_\phi=p_\phi+eA_\phi\,。 \tag{33.31b}$$

(3)靜止質量 μ

第三個運動常數是粒子的靜止質量

$$\mu=|\mathbf{p}|=(-g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta)^{1/2}\,。 \tag{33.31c}$$

一般說來，需要四個運動常數才能唯一地確定粒子通過四維空時的軌道。如果黑洞具有附加的對稱性——例如，如果它是球對稱的，而不僅是軸對稱的——那麼自動地就有第四個運動常數。但一般說來，黑洞並不是球形的；所以試驗粒子繞黑洞的運動只有三個明顯的運動常數。而且，值得注意的是，結果弄清楚還有一個運動常數存在。它是 Carter (1968a) 用 Hamilton-Jacobi 方法發現的。根據 1973 年的資料，沒有人能對爲什麼存在這第四個常數給出令人信服的幾何解釋——雖則在 Carter (1968c) 以及 Walker 和 Penrose (1970) 中可以找到一種解釋的暗示。

(4)「$\mathcal{Q}$」

在練習 33.7 中導出的 Carter 的「第四個運動常數」是

$$\mathcal{Q}=p_\theta{}^2+\cos^2\theta[a^2(\mu^2-E^2)+\sin^{-2}\theta L_z{}^2]\,。 \tag{33.31d}$$

運動常數

$$\mathcal{K}\equiv\mathcal{Q}+(L_z-aE)^2 \tag{33.31e}$$

是由 $\mathcal{Q}$，L_z 和 E 組合而成的，它常常用來代替 $\mathcal{Q}$ 作爲第四個運動常數。但 $\mathcal{Q}$ 可以是負的；$\mathcal{K}$ 則永遠是非負的：

$$\begin{aligned}\mathcal{K}&=p_\theta{}^2+(L_z-aE\sin^2\theta)^2/\sin^2\theta+a^2\mu^2\cos^2\theta\\ &\geq 0\ \text{處處}\\ &=0\ \text{僅對光子}\ (\mu=0)\ \text{沿極軸}\ (\theta=0,\pi)\ \text{運動的情形。}\end{aligned}$$

試驗粒子四維動量的反變分量 $p^\alpha=dx^\alpha/d\lambda$ 可以很容易的用運動常數 E，L_z，μ，$\mathcal{Q}$ 表示，即把 (33.31) 式與度規系數 (33.2) 和矢勢分量 (33.30) 聯合即可。結果是

帶電試驗粒子的運動方程

$$\rho^2\,d\theta/d\lambda=\sqrt{\Theta}\,, \tag{33.32a}$$

$$\rho^2\,dr/d\lambda=\sqrt{R}\,, \tag{33.32b}$$

$$\rho^2 d\phi/d\lambda=-(aE-L_z/\sin^2\theta)+(a/\Delta)P\,, \tag{33.32c}$$

$$\rho^2 dt/d\lambda=-a(aE\sin^2\theta-L_z)+(r^2+a^2)\Delta^{-1}P\,。 \tag{33.32d}$$

式中 $\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta$ 由 (33.3b) 式定義，而函數 Θ, R, P 由下式定義

$$\Theta=\mathcal{Q}-\cos^2\theta[a^2(\mu^2-E^2)+L_z^2/\sin^2\theta], \tag{33.33a}$$

$$P=E(r^2+a^2)-L_z a-eQr, \tag{33.33b}$$

$$R=P^2-\Delta[\mu^2r^2+(L_z-aE)^2+\mathcal{Q}]。 \tag{33.33c}$$

當在 Kerr 坐標中工作時（爲了避開在視界的坐標奇點），必須把 (33.32c) 和 (33.32d) 式代之以

$$\rho^2 d\tilde{V}/d\lambda=-a(aE\sin^2\theta-L_z)+(r^2+a^2)\Delta^{-1}(\sqrt{R}+P), \tag{33.32c'}$$

$$\rho^2 d\phi/d\lambda=-(aE-L_z/\sin^2\theta)+a\Delta^{-1}(\sqrt{R}+P)。 \tag{33.32d'}$$

[這兩個公式是由 (33.32) 式和兩個坐標系之間的變換關係得出的——參看框 33.2 的(4)式。] 在上述方程中，$\sqrt{R}$和$\sqrt{\Theta}$的符號可以獨立地選擇；但是一旦選定，就必須處處貫徹始終。

這些運動方程的應用將在本章其餘部分起關鍵作用。

練習

練習 33.6 帶電粒子運動的超 Hamilton 函數

試證明，Hamilton 函數 (33.28b) 的 Hamilton 方程 (33.28a) 可化爲給出廣義動量值的方程 (33.29a) 和 Lorentz 力方程 (33.29b)。[提示：應用關係式 $(g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma})_{,\mu}=0$。]

練習 33.7 運動方程的 Hamilton-Jacobi 推導 [根據 Carter (1968a)]

試導出在 Kerr-Newman 黑洞外場中運動的帶電粒子的一階運動方程 (33.32) 式。請採用 Hamilton-Jacobi 方法 [本書框 25.3 和框 25.4；Goldstein (1959) 的第九章] 如下。

(a) 在超 Hamilton 函數的(33.28b)式中，把全部廣義動量 π_α 都代之以 Hamilton-Jacobi 函數的梯度 $\partial S/\partial x^\alpha$。

(b) 把 Hamilton-Jacobi 方程 [框 25.4 (2)式的推廣] 寫成下述形式

$$-\frac{\partial S}{\partial\lambda}=\mathcal{H}\left[x^\alpha,\frac{\partial S}{\partial x^\beta}\right]=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}-eA_\alpha\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\beta}-eA_\beta\right)。 \tag{33.34a}$$

(c) 試證明，Kerr-Newman 黑洞的度規分量 $g^{\alpha\beta}$ 在 Boyer-Lindquist 坐標系中由下式給出

$$\mathbf{g}\equiv g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}=-\frac{1}{\Delta\rho^2}\left[(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial\phi}\right]^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}+a\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial t}\right]^2$$
$$+\frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2。 \tag{33.35}$$

(d) 利用這些度規分量和矢勢分量 (33.30)，把 Hamilton-Jacobi 方程 (33.33) 化爲具體形式

$$-\frac{\partial S}{\partial \lambda}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta\rho^2}\left[(r^2+a^2)\frac{\partial S}{\partial t}+a\frac{\partial S}{\partial \phi}-eQr\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial S}{\partial \phi}+a\sin^2\theta\frac{\partial S}{\partial t}\right]^2+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2。 \tag{33.34b}$$

(e) 分離變量求解此 Hamilton-Jacobi 方程。［提示：因爲此方程不明顯地依賴於 λ, ϕ 或 t，解的形式應爲

$$S=\frac{1}{2}\mu^2\lambda-Et+L_z\phi+S_r(r)+S_\theta(\theta)\,, \tag{33.36a}$$

其中的「積分常數」值可由 $\partial S/\partial\lambda=-\mathcal{K}$，$\partial S/\partial t=\pi_t$，$\partial S/\partial\phi=\pi_\phi$ 得出。把這個假設的形式代入 (33.35) 式，並求解 $S_r(r)$ 和 $S_\theta(\theta)$，得出

$$S_r=\int\Delta^{-1}\sqrt{R}\,dr\,,\quad S_\theta=\int\sqrt{\Theta}\,d\theta\,, \tag{33.36b}$$

式中 $R(r)$ 和 $\Theta(\theta)$ 是 (33.33) 式定義的函數。注意，在此過程中常數 $\mathcal{Q}$ 作爲「分離變量常數」自然地出現。Carter 遵循 Misner 的建議尋求 Newton 偶極場常數的類似物，他就是用這種方式首先發現常數 $\mathcal{Q}$ 的 (Corben 和 Stehle, 1960, 第 209 頁)。］

(f) 相繼令 $\partial S/\partial[\mathcal{Q}+(L_z-aE)^2]$, $\partial S/\partial\mu^2$, $\partial S/\partial E$，和 $\partial S/\partial L_z$ 爲零，得出試驗粒子軌道的下述方程：

$$\int^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}=\int^r\frac{dr}{\sqrt{R}}\,, \tag{33.37a}$$

$$\lambda=\int^\theta\frac{a^2\cos^2\theta}{\sqrt{\Theta}}d\theta+\int^r\frac{r^2}{\sqrt{R}}dr\,, \tag{33.37b}$$

$$t=\int^\theta\frac{-a(aE\sin^2\theta-L_z)}{\sqrt{\Theta}}d\theta+\int^r\frac{(r^2+a^2)P}{\Delta\sqrt{R}}dr\,, \tag{33.37c}$$

$$\phi=\int\frac{-(aE\sin^2\theta-L_z)}{\sin^2\theta\sqrt{\Theta}}d\theta+\int\frac{aP}{\Delta\sqrt{R}}dr。 \tag{33.37d}$$

(g) 對上述方程作微分並聯合，得出正文中列出的運動方程 (33.32) 式。

(h) 設 $\partial S/\partial x^\alpha=\pi_\alpha=P_\alpha+eA_\alpha$，導出 E，L_z，μ，和 $\mathcal{Q}$ 的 (33.31) 式。

§ 33.6　主零線滙

兩族特殊的光子軌道以非常和諧的方式「把自己澆鑄」在 Kerr-Newman 幾何之中。它們被稱爲幾何的「主零線滙」。（「線滙」是一個優雅的詞，意

黑洞空時幾何的主零線滙

思是「填滿空間的曲線族」。）這些線滙是試驗粒子運動方程 (33.32) 的解，且

$$\mu=0 \text{（零靜止質量；光子），} \tag{33.38a}$$

$$e=0 \text{（光子的零電荷），} \tag{33.38b}$$

$$L_z=aE\sin^2\theta \quad \left(\begin{matrix}\text{只是因爲 } d\theta/d\lambda \text{ 原來是零，}\\ \text{才允許 } L_z \text{ 取的值}\end{matrix}\right), \tag{33.38c}$$

$$\mathcal{Q}=-(L_z-aE)^2=-a^2E^2\cos^4\theta\text{。} \tag{33.38d}$$

對於這些運動常數值，運動方程 (33.32) 式化爲

$$k^\theta\equiv d\theta/d\lambda=0, \tag{33.39a}$$

$$k^r\equiv dr/d\lambda=\pm E \quad \left(\begin{matrix}\text{「+」適用於外向的光子，}\\ \text{「−」適用於內向的光子}\end{matrix}\right), \tag{33.39b}$$

$$k^\phi\equiv d\phi/d\lambda=aE/\Delta, \tag{33.39c}$$

$$k^t\equiv dt/d\lambda=(r^2+a^2)E/\Delta\text{。} \tag{33.39d}$$

主零線滙的重要性

這些光子軌道在什麼意義上比其他軌道更有興趣呢？(1)它們按這樣一種方式把自己澆鑄於空時曲率，即如果 $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 爲 Weyl 保形張量 (§13.5)，並且 ${}^*C_{\alpha\beta\gamma\delta}=\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\lfloor\mu\nu\rfloor}{}_{\gamma\delta}$ 爲其對偶，則

$$C_{\alpha\beta\gamma[\delta}k_{\epsilon]}k^\beta k^\gamma=0, \qquad {}^*C_{\alpha\beta\gamma[\delta}k_{\epsilon]}k^\beta k^\gamma=0\text{。} \tag{33.40}$$

［這個關係式意味着 Kerr-Newman 幾何是「Petrov-Pirani 類型 D」的，以及這些光子的軌道是「雙重退化的主零線滙」。有關這些術語的含義和應用的細節，參看，例如，Sachs (1964) 的 §8，或者 Ehlers 和Kundt (1962)，或 Petrov (1954, 1969) 和 Pirani (1957) 的原始文獻。］(2)通過適當改變坐標（練習 33.8），可以把 Kerr-Newman 度規寫爲下述形式

$$ds^2=(\eta_{\alpha\beta}+2Hk_\alpha k_\beta)dx^\alpha dx^\beta, \tag{33.41}$$

式中H爲一標量場，而 k_α 是主零線滙之一（隨便那一個，但不是兩者！）的波矢量的分量。［這是導至最初發現 Kerr-Newman 度規的性質 (Kerr, 1963)。對於這種形式度規的進一步細節，請參看 Kerr 和 Schild (1965).］(3)在 Kerr 坐標中（框 33.2），內向主零線滙是

$$r=-E\lambda, \quad \theta=\text{常數}, \quad \tilde{\phi}=\text{常數}, \quad \tilde{V}=\text{常數}\text{。} \tag{33.42a}$$

（λ：任意的歸一化因子，可以通過重新定義 λ 除去）

這些內向光子世界線是框 33.2 Kerr 圖中錐形曲面 $\tilde{V}=$常數的母線。(4)能永遠停留在視界的唯一一種粒子是其世界線屬於外向主零線滙的光子（練習33.9）。這種光子的世界線是視界的「母線」（在框 33.2 的 Kerr 圖中具有「理髮店招牌桿式的纏繞」特徵的虛線）。它們的角速度爲

$$\Omega=\frac{d\phi}{dt}=\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{V}}=\frac{a}{r_+^2+a^2}=\frac{a}{2M^2-Q^2+2M(M^2-a^2-Q^2)^{1/2}}。\quad(33.42b)$$

練習 33.8　Kerr-Schild 坐標　　練習

（a）試證明，在 Kerr 坐標中內向零線滙 (33.39) 具有 (33.42a) 式的形式。再證明波矢量的共變分量——在把仿射參量變爲 $\lambda_{新}=\lambda_{舊}E$ 之後——是

$$k_r^{(內向)}=0,\quad k_\theta^{(內向)}=0,\quad k_\phi^{(內向)}=a\sin^2\theta,\quad k_{\tilde{V}}^{(內向)}=-1。\quad(33.43)$$

（b）引入由下式定義的新坐標 $\tilde{t}$, x, y, z

$$x+iy=(r+ia)e^{i\phi}\sin\theta,\quad z=r\cos\theta,\quad \tilde{t}=\tilde{V}-r;\qquad(33.44a)$$

並證明在此「Kerr-Schild 坐標系」中度規的形式爲

$$ds^2=(\eta_{\alpha\beta}+2Hk_\alpha^{(內向)}k_\beta^{(內向)})dx^\alpha dx^\beta,\qquad(33.44b)$$

式中

$$H=\frac{Mr-\frac{1}{2}Q^2}{r^2+a^2(z/r)^2},\qquad(33.44c)$$

$$k_\alpha^{(內向)}dx^\alpha=-\frac{r(xdx+ydy)-a(xdy-ydx)}{r^2+a^2}-\frac{zdz}{r}-d\tilde{t}。\qquad(33.44d)$$

類似的坐標變換可使度規爲

$$ds^2=(\eta_{\alpha\beta}+2Hk_\alpha^{(外向)}k_\beta^{(外向)})dx^\alpha dx^\beta。$$

參看，例如， Boyer 和 Lindquist (1967)。

練習 33.9　視界的零母線

（a）試證明，在 Kerr 坐標中，外向主零線滙可由下述切向矢量描述

$$\frac{d\theta}{d\lambda}=0,\quad\frac{dr}{d\lambda}=E,\quad\frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda}=2a\frac{E}{\Delta},\quad\frac{d\tilde{V}}{d\lambda}=2(r^2+a^2)\frac{E}{\Delta}。\qquad(33.45)$$

（b）波矢量的這些分量在視界處（$\Delta=0$）變爲奇異，這並非因爲坐標系的奇異性——坐標是表現良好的！——而是因爲仿射參量的歸一化不佳。對於每一條外向短程線，令 Δ_0

爲常數，並定義它爲在短程線切割 $\tilde{V}=0$ 超曲面事件處的 Δ 值。然後，對於每條短程線把仿射參量重新歸一化

$$\lambda_{新}=(E/\Delta_0)\lambda_{舊}。 \tag{33.46}$$

試證明，這時得出的波矢量

$$\frac{d\theta}{d\lambda}=0,\quad \frac{dr}{d\lambda}=\Delta_0,\quad \frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda}=2a\frac{\Delta_0}{\Delta},\quad \frac{d\tilde{V}}{d\lambda}=2(r^2+a^2)\frac{\Delta_0}{\Delta} \tag{33.45'}$$

在趨近視界時表現良好；並證明在視界上的短程線的形式爲

$$\theta=常數,\quad r=r_+=常數,\quad \tilde{\phi}=2a\lambda,\quad \tilde{V}=2(r_+^2+a^2)\lambda。 \tag{33.47}$$

(c) 試證明，這些就是永遠保持在視界處的唯一的試驗粒子軌道。［提示：考察光錐。］

§ 33.7 黑洞能量的存儲和遷移 [Penrose (1969)]

當小物體落入大黑洞時

(1)輻射能量與物體靜止質量相比可略

當一個物體落入黑洞時，它改變了黑洞的質量、電荷和內稟角動量（黑洞動力學第一定律；框33.4）。如果下落物體很大，則它的下落會產生許多引力輻射和電磁輻射。計算發出的輻射，以及它所帶走的能量和角動量——這是任何一種計算黑洞最終狀態的先決條件——是極爲困難的任務。但是，如果物體非常小（物體的大小≪視界的大小；物體的質量≪黑洞的質量），它的電荷也足夠小，則它繞黑洞每轉一圈所發出的輻射可以忽略。例如，引力輻射

$$\frac{(每轉一圈發出的能量)}{(物體的靜止質量)}\sim\frac{(物體的靜止質量)}{(黑洞的質量)} \tag{33.48}$$

［參看 §36.5；也可參看 Bardeen, Press 和 Teukolsky (1972)］。由於發射的能量可略，輻射的反作用也可略，物體十分近似地沿着試驗粒子的軌道運動。在這種情況下，黑洞動力學第一定律的應用是簡單而直截了當的。

(2)黑洞的質量、電荷和角動量的改變爲 $\Delta M=E$, $\Delta Q=e$, $\Delta S=L_z$

起初，考慮一個小物體從遠處直接落入黑洞。根據第一定律，它使黑洞的質量、電荷和角動量產生如下變化：

$$\Delta M=E=(下落物體「在無窮遠的能量」), \tag{33.49a}$$

$$\Delta Q=e=(下落物體的電荷), \tag{33.49b}$$

$$\Delta S\equiv\Delta|\mathbf{S}|=L_z=\begin{pmatrix}物體角動量在黑洞\\旋轉軸上的分量\end{pmatrix}。 \tag{33.49c}$$

下落物體也將改變 $\boldsymbol{S}$ 的方向。在黑洞原來的漸近 Lorentz 系中，它的初始角動量矢量指向 z 方向

$$(S_x)_{\text{初始}}=S,\qquad (S_x)_{\text{初始}}=0,\qquad (S_y)_{\text{初始}}=0。$$

結果，只有下落物體角動量的 z 分量可以造成 $\boldsymbol{S}$ 幅度的任何顯著改變。但是 x 方向和 y 方向的分量 L_x 和 L_y 則可以改變 $\boldsymbol{S}$ 的方向。如果物體在無窮遠的速度可以忽略，則它會產生下述變化（練習 33.10）：

$$\Delta S_x=L_x=-(\sin\phi_\infty)\sqrt{\Theta_\infty}-(\cot\theta_\infty\cos\phi_\infty)L_z,\qquad (33.49d)$$

$$\Delta S_y=L_y=(\cos\phi_\infty)\sqrt{\Theta_\infty}-(\cot\theta_\infty\sin\phi_\infty)L_z,\qquad (33.49e)$$

$$\Delta(S_x^2+S_y^2)^{1/2}=\sqrt{\mathcal{Q}}=(L^2-L_z^2)^{1/2}。\qquad (33.49f)$$

此處下標「∞」意味着在遠離黑洞（在「無窮遠」）的軌道的某一點物理量的數值。

其次，考慮首先由 Penrose (1969) 設想的較爲複雜的過程：(1)從外面把一小物體 A 射入黑洞，A 物體在無窮遠處的能量爲 E_A，電荷爲 e_A，角動量的軸向分量爲 L_{zA}。(2)當物體已深深地落到視界附近時，令它爆炸成兩部分 B 和 C，隨後每一部分分別沿新的試驗粒子軌道運動，並分別具有新的運動常數 e_B 和 e_C，E_B 和 E_C，L_{zB} 和 L_{zC}。(3)設計爆炸使物體 B 落入黑洞並被俘獲，而物體 C 逃逸回到徑向無窮遠處。那麼，黑洞的質量、電荷和角動量將如何變化呢？根據黑洞動力學的第一定律，

$$\Delta M=\begin{pmatrix}\text{遠處觀測者看到的經過他們}\\ \text{向內落入的總能量減去他們}\\ \text{見到的重新出現的總能量}\end{pmatrix}$$
$$=E_A-E_C。$$

類似地，$\Delta Q=e_A-e_C$ 和 $\Delta S=L_{zA}-L_{zC}$。如所預料，這些改變量可以用落入黑洞的物體 B 的運動常數更簡單的寫出。在黑洞附近，在爆炸事件中心的局域 Lorentz 參照系中觀察爆炸「$A\longrightarrow B+C$」。當在此參照系中觀察時，爆炸必須滿足物理學的狹義相對論定律（等效原理！）。特別是，它必須服從電荷守恒

$$e_A=e_B+e_C\qquad (33.50a)$$

和總四維動量守恒

$$(\mathbf{p}_A)_{\text{即將爆炸前}}=(\mathbf{p}_B+\mathbf{p}_C)_{\text{剛剛爆炸之後}}。$$

而且，四維動量 $\mathbf{p}$ 守恒與電荷守恒又意味着廣義動量 $\mathbf{\pi}\equiv\mathbf{p}-e\mathbf{A}$ 守恒，

$$\mathbf{\pi}_A=\mathbf{p}_A-e_A\mathbf{A}=\mathbf{p}_B+\mathbf{p}_C-(e_B+e_C)\mathbf{A}=\mathbf{\pi}_B+\mathbf{\pi}_C;$$

因此，廣義動量沿矢量 $\partial/\partial t$ 和 $\partial/\partial\phi$ 的分量也守恒

$$E_A\equiv-\pi_{tA}=-\pi_{tB}-\pi_{tC}=E_B+E_C, \tag{33.50b}$$

$$L_{zA}\equiv\pi_{\phi B}+\pi_{\phi C}=L_{zB}+L_{zC}, \tag{33.50c}$$

（爆炸過程中「在無窮遠的能量」守恒和「角動量的軸向分量」守恒）。把這些守恒定律與下述表達式合併

$$\Delta M=E_A-E_C,\quad \Delta Q=e_A-e_C,\text{ 和 }\Delta S=L_{zA}-L_{zC},$$

得出

$$\Delta M=E_B,\quad \Delta Q=e_B,\quad \Delta S=L_{zB}。 \tag{33.51}$$

這個結果用文字重新表述爲：質量、電荷和角動量的變化等於通過視界進入黑洞的物體B所携帶的「在無窮遠的能量」、電荷和「角動量的軸向分量」，儘管B最終所在的試驗粒子軌道並不延伸返回到徑向無窮遠！

任何非輻射黑洞過程中 M, Q, S 的變化

直接推廣上述假想實驗得出一般結論：*在任何複雜的黑洞過程中，其中包括物質的落入、發生碰撞和爆炸成幾塊，並且發出的引力輻射可以忽略，則黑洞的質量、電荷和角動量的總改變為*

$$\Delta M=\begin{pmatrix}\text{越過視界的全部物體的無窮遠}\\ \text{能量}E\text{值之和——在越過視界}\\ \text{的事件處計算每個物體的}E\end{pmatrix}, \tag{33.52a}$$

$$\Delta Q=\begin{pmatrix}\text{越過視界的全部物體的電荷}e\\ \text{之和}\end{pmatrix}, \tag{33.52b}$$

$$\Delta S=\begin{pmatrix}\text{越過視界的全部物體的角動量}\\ \text{軸向分量 }L_z\text{ 之和}\end{pmatrix}。 \tag{33.52c}$$

通過能層中的過程從黑洞中提取能量

這個結果毫不令人驚訝。它正是從最樸素的觀點所能預期的結果。但是，下述結果並非始料所及［Penrose (1969)］：*以仔細選擇的方式把物質射入黑洞，能够減少黑洞的總質量-能量——即可以從黑洞中提取能量。*

對於不帶電的下落物體，能量提取的關鍵是能層［能層 (ergosphere) 的名稱是 Ruffini 和 Wheeler (1971a) 根據「工作」(work) 的希臘字「$\epsilon\rho\gamma o\nu$」創造的新詞］。在能層之外，Killing 矢量 $\xi_{(t)}\equiv\partial/\partial t$ 是類時的，正如每個試驗粒子的四維動量也是類時的一樣；因此 $E=-\mathbf{p}\cdot\xi_{(t)}$ 必定是正

的。但是在能層之內（在視界與靜態極限之間），$\xi_{(t)}$ 是類空的，所以對於所選定的某個類時的動量矢量（不帶電試驗粒子的某個確定的軌道），$E=-\mathbf{p}\cdot\xi_{(t)}$ 是負值，而對於其他一些選擇，E 爲正值。E 爲負值的軌道完全局限於能層。這樣，爲了把一個不帶電的具有負 E 的物體射入黑洞——並從而從黑洞提取能量——必須在它進入能層之後，總是把它的能量從正改變爲負，因而也就必須改變它的軌道。當然，這在原則上並不困難——或許甚至在實際上也不困難；參看圖 33.2。

對於帶電的物體，電磁力會改變存在着負的無窮遠能量軌道的區域。如果物體與黑洞電荷的符號相反，則黑洞的電磁場把物體向內拉，在它接近黑洞時會給予它比預期更多的動能。這樣，$-\mathbf{p}\cdot\xi_{(t)}$ 變爲 E 的過高估計，

$$E=-(\mathbf{p}-e\mathbf{A})\cdot\xi_{(t)}=-\mathbf{p}\cdot\xi_{(t)}+\underbrace{eQr\rho^2}_{\text{[}<0\text{, 如果 }eQ<0\text{]}}; \qquad (33.53)$$

並且 $E<0$ 軌道存在的區域比能層稍大一些。另一方面，如果 e 和 Q 符號相同，則 $E<0$ 的軌道被限制在比能層更小的區域中。對於給定的值 e, Q 和靜止質量 μ，存在着 $E<0$ 軌道的區域稱爲「有效能層」。

帶電粒子過程的「有效能層」

練習 33.10 下落粒子的角動量矢量

練習

試導出落入黑洞粒子的軌道角動量分量 L_x 和 L_y 的 (33.49 d, e, f) 式。假設初速度可以忽略，$E^2-\mu^2\approx 0$。

---

§ 33.8 可逆變換與不可逆變換 [Christodoulou (1970), Christodoulou 和 Ruffini (1971)]

一黑洞，質量爲 M，電荷爲 Q 和角動量爲 S。射入一些小物體，造成了 M，Q 和 S 的一系列變化。挑出任意期望的變化 ΔM, ΔQ 和 ΔS，能否設計一個過程來達到它呢？或者是否有什麼限制呢？

黑洞動力學的第二定律（黑洞的表面面積不減少；框33.4，在下一章§34.5證明）提供了嚴格的限制。

那麼，在限制內的所有數值都能達到嗎——能否通過直接檢驗試驗粒子軌道來發現這些限制呢？

回答是可以的；而且，實際上，在 Hawking (1971) 發現黑洞動力學第二定律的同時，Christodoulou (1970) 以及 Christodoulou 和 Ruffini (1971) 從檢驗試驗粒子軌道獨立地發現了這些限制。

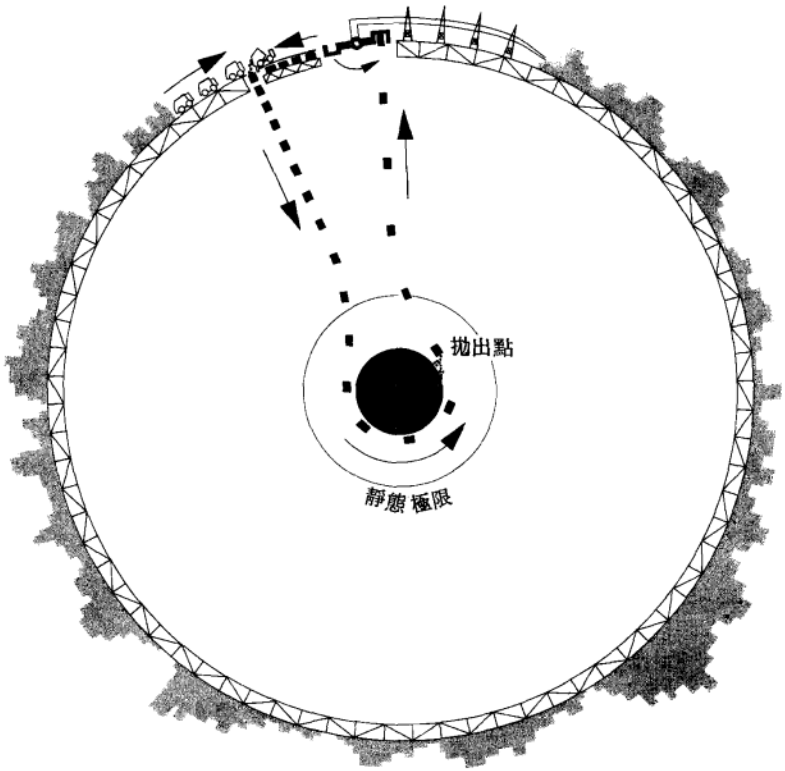


圖 33.2

先進的文明社會圍繞黑洞建造了堅硬的構架，並在構架上建設巨大的城市。每天許多卡車把百萬噸垃圾拉出城市送到垃圾場。在垃圾場，垃圾被鏟入往返飛行器，然後，飛行器一架接一架投向黑洞中心。慣性系的拖曳驅趕着每架飛行器進入視界附近圓形的向內成螺旋形的軌道。當它達到某個「拋出點」時，飛行器把裝載的垃圾投入在無窮遠爲負能，$E_{\text{垃圾}}<0$，的軌道。隨着垃圾飛入黑洞，黑洞的總質量-能量改變了 $\Delta M=E_{\text{拋出的垃圾}}<0$, 此往返飛行器從拋出點反彈而回，並以比其下落時更多的無窮遠能量飛回

$$E_{\text{出來的飛行器}}=E_{\text{飛行器}+\text{拋下的垃圾}}-E_{\text{拋出的垃圾}}$$
$$>E_{\text{飛行器}+\text{拋下的垃圾}}。$$

飛行器把它的巨大動能存儲在垃圾堆附近的巨大飛輪中；飛輪帶動發電機，爲城市生產電力，同時航天飛行器返回裝載另一車垃圾。空間飛行器每往返一次產生的總電能爲

$$\begin{aligned}(\text{每往返一次的能量})&=E_{\text{出來的飛行器}}-(\text{飛行器的靜止質量})\\&=(E_{\text{飛行器}+\text{拋下的垃圾}}-E_{\text{拋出的垃圾}})-(\text{飛行器的靜止質量})\\&=(\text{飛行器的靜止質量}+\text{垃圾的靜止質量}-\Delta M)\\&\qquad-(\text{飛行器的靜止質量})\\&=(\text{垃圾的靜止質量})+(\text{黑洞質量減少的總量，}-\Delta M)。\end{aligned}$$

這樣，城市的居民不僅僅能利用黑洞把他們的垃圾的全部靜止質量轉化爲飛行器的動能，並進而轉化爲電力，他仍還能把一部黑洞質量轉化爲電力！

試驗粒子軌道的性質：

爲了根據試驗粒子軌道的性質推出表面面積不可減少的限制，必須檢查在黑洞外某個給定位置 (r,θ) 處，什麼樣的無窮遠能量值 E 是允許存在的。把 (33.32 a,b) 式聯立，得出用試驗粒子位置 (r,θ)，靜止質量 μ，電荷 e，角動量軸向分量 L_z，和在 r，θ 方向的動量 $p^r=dr/d\lambda$，$p^\theta=d\theta/d\lambda$ 表示的 E 的數值：

(1) E 作爲 μ, e, L_z, r, θ, p^r 的函數

$$\alpha E^2-2\beta E+\gamma=0;\quad E=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha},\tag{33.54a}$$

式中

$$\alpha=(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta>0\quad \text{視界外各處},\tag{33.54b}$$

$$\beta=(L_z a+eQr)(r^2+a^2)-L_z a\Delta,\tag{33.54c}$$

$$\gamma=(L_z a+eQr)^2-\Delta(L_z/\sin\theta)^2-\mu^2\Delta\rho^2-\rho^4[(p^r)^2+\Delta(p^\theta)^2]。\tag{33.54d}$$

（必須取正平方根 $+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}$，而不取負平方根；正平方根相應於指向未來的四維動量；而負平方根相應於指向過去的四維動量；參看圖33.3。）

(2)有效勢

(3)負 E 要求 $L_z a<0$ 和／或 $eQ<0$

能量方程 (33.54) 式的若干特點是值得注意的。(1)對於在赤道「平面」$\theta=\pi/2$ 和 $p^\theta\equiv 0$ 的軌道，能量方程得出徑向運動的有效勢（框33.5）。(2)負 E 的軌道必定有 $\beta<0$ 和 $\gamma>0$——僅當 $L_z a<0$ 和／或 $eQ<0$ 時才能達到。因而，不可能減少黑洞的質量而不同時減少黑洞的電荷或角動量或兩者。(3)對於在給定 (r,θ) 處的軌道，給定 e 和 L_z，如果 $p^r=p^\theta=\mu=0$，則 E 爲極小值。換言之，靜止質量和動量的 r 分量與 θ 分量永遠對 E 作正的貢獻。

把物體拋入黑洞，引起黑洞質量，電荷和角動量的微小改變

$$\delta M=E,\quad \delta Q=e,\quad \delta S=L_z。$$

由於注入粒子引起的黑洞性質的變化：

對於給定的 Q 和 S 的改變，M 可能在什麼範圍內變化呢？顯然，只要靜止質量 μ 足夠大，δM 就可以如所希望的那麼大。但是，δM 有一個下限。這個下限值相應於給定 e 和 L_z 時 E 的極小值。E 爲極小的軌道穿過視界（否則 M, Q, S 就不會發生變化！），所以可以在視界估算 E 的值。在視界處，與任何其他地方一樣，如果 $\mu=p^r=p^\theta=0$，則 E 可達到其極小值。把這些值和 $r=r_+$（因此 $\Delta=0$）代入 (33.54) 式，得出

$$E_{\text{極小}}=\frac{L_z a+eQr_+}{r_+^2+a^2},\tag{33.55}$$

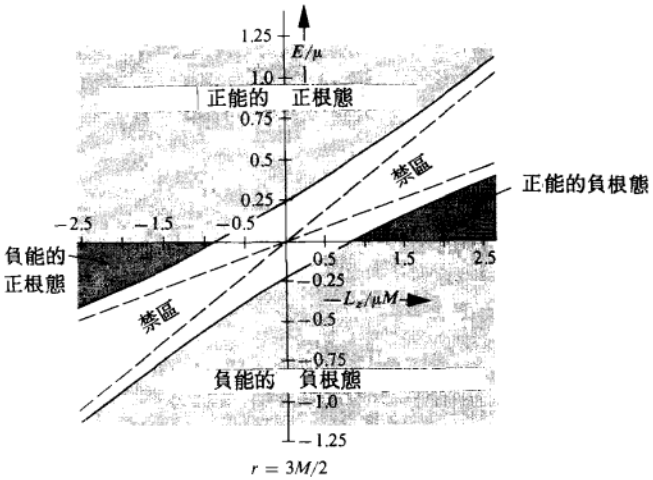


圖 33.3

對於角動量爲 L_z 和靜止質量爲 μ 的粒子，允許的無窮遠能量爲E，該粒子(1)在「赤道平面」$\theta=\pi/2$ 內，(2)在半徑 $r=3M/2$ 處，(3)對於不帶電的 ($Q=0$) 極端 Kerr ($S=M^2$) 黑洞。圖中畫出了 E 隨 L_z 的曲線。「正根」態和「負根」態的「海洋」也畫在圖上。正根態具有的在無窮遠處的能量由 (33.54) 或給出，爲

$$E=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha},$$

正根態具有的四維動量矢量指向未來光錐。負根態 (Dirac 的「負能海洋」狀態) 具有的在無窮遠的能量爲

$$E=\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha},$$

負根態具有的四維動量矢量指向過去光錐。「海洋」之間的間隙不存在軌道 (禁區)。在視界 $r=M$ 處，間隙區消失 (局域能量間隙 2μ 的無限紅移導至無窮遠能量的零間隙)。[圖取自 Christodoulou (1971)。]

相應的黑洞性質的變化爲

(1)對於給定的 δS 和 δQ，δM 的下限

$$\delta M\geq\frac{a\delta S+r_+QSQ}{r_+^2+a^2}\quad\left(\begin{array}{c}\text{對於給定的 }\delta S\text{ 和 }\delta Q\text{，}\\ \delta M\text{ 的絕對極小值}\end{array}\right)。\qquad(33\ 56)$$

注意一個重要的結果 [Bardeen (1970a)]：如果黑洞起初是「極端Kerr-Nemann」類型的，且 $M^2=a^2+Q^2$，那麼可能害怕使 $M^2<a^2+Q^2$ 並從而消滅視界的變化，但這種害怕是沒有根據的。(33.56) 式要求 (因爲 $r_+=M$ 和$S=Ma$)

$$M\delta M\geq a\delta a+QSQ;$$

(2)視界的保存

因此，M^2 仍大於或等於 a^2+Q^2，而視界則被保存。

框 33.5　在 Keer-Newman 黑洞「赤道平面」上試驗粒子的軌道

徑向運動受 $\theta=p^\theta=0$ 的能量方程（33.54）式支配：

$$\alpha E^2-2\beta E+\gamma_0-r^4(p^r)^2=0\,;\quad E=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma_0+\alpha r^4(p^r)^2}}{\alpha}\,;\quad (1)$$

α, β, γ_0 是 r 和運動常數的函數，

$$\alpha=(r^2+a^2)^2-\Delta a^2>0\,, \tag{2a}$$

$$\beta=(L_z a+eQr)(r^2+a^2)-L_z a\Delta\,, \tag{2b}$$

$$\gamma_0=(L_z a+eQr)^2-\Delta L_z{}^2-\mu^2 r^2\Delta\,; \tag{2c}$$

$p^r=$（徑向動量）爲

$$p^r=dr/d\lambda\,。 \tag{3}$$

這樣，(1)式是 $dr/d\lambda$ 的常微分方程。

徑向運動的定性特徵可以從有效勢圖讀出。有效勢 $V(r)$ 是在半徑 r 處 E 的極小允許值。

$$V(r)=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma_0}}{\alpha}\,。$$

與 Schwarzschild 情形（圖 25.2）一樣，對於在無窮遠能量爲 E 的粒子，允許的區域是 $V(r)\leq E$ 的區域；並且轉折點（$p^r=dr/d\lambda=0$）出現在 $V(r)=E$ 處。

穩定的圓形軌道出現在 $V(r)$ 的極小處。仔細地考察 $V(r)$ 發現，對於不帶電的黑洞，最內部的穩定圓軌道（束縛最緊的軌道）所具有的特徵列表如下［表取自 Ruffini 和 Wheeler (1971b)］。

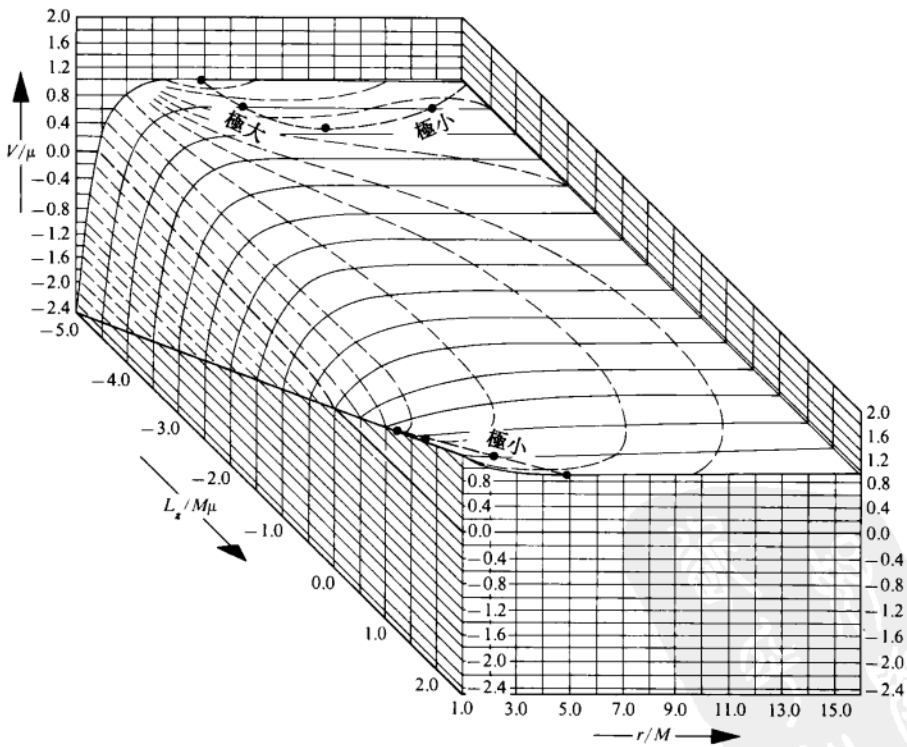
特　徵	Newton情形 (圖 25.2)	Schwarzschild (a=Q=0) (圖 25.2)	極端 Kerr ($a^2=M^2$, $Q=0$) (見圖) ［Bardeen (1970a)］ 若 $L_z a>0$	若 $L_z a<0$
r/M	0	6	1	9
E/μ	$-\infty$	$2\sqrt{2}/3$	$1/\sqrt{3}$	$5/(3\sqrt{3})$
$(\mu-E)/\mu=$「部分的束縛」	$+\infty$	0.0572	0.4226	0.0377
$\lvert L_z\rvert/\mu M$	0	$2\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$22/(3\sqrt{3})$

對於帶電的極端 Kerr-Newman 黑洞（$M^2=Q^2+a^2$, $Q\neq 0$ 和 $a\neq 0$），百分之百束縛（$E=0$）的穩定圓軌道在下述極限達到

$$\frac{e}{\mu}\longrightarrow-\infty,\quad \frac{Q}{M}\longrightarrow 0\ (\text{因此 } a\longrightarrow M),\quad \text{和}\left(\frac{e}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{Q}{M}\right)\longrightarrow-\infty。$$

[Christodoulou 和 Ruffini (1971)]。

不帶電的，極端 Kerr 黑洞（$a=M$）的有效勢如下圖所示 [圖取自 Ruffini 和 Wheeler (1971b)]。赤道平面中詳細的軌道圖請參看 de Felice (1968)。不限於赤道平面的軌道的許多有趣特特徵，參看 Wilkins (1972)。



質量改變的一般極限(33.56)式可以重新寫成另一種形式 [Christodoulou (1970), Christodoulou 和 Ruffini (1971)]：

$$\delta M_{\text{不可約}} \geq 0, \tag{33.57}$$

式中

$$M_{\text{不可約}} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{r_+^2+a^2} = \frac{1}{2}\left[\left(M+\sqrt{M^2-Q^2-a^2}\right)^2+a^2\right]^{1/2} \tag{33.58}$$

(3)不可約質量

是黑洞的「不可約質量」。(33.57) 式表明，因小塊物質投入而產生的黑洞變換決不可能減小黑洞的不可約質量。這個結果實際上是黑洞動力學第二定律的特殊情況，因爲黑洞的表面面積是

$$A = 16\pi M^2_{\text{不可約}} \tag{33.59}$$

(練習 33.12)。

把 (33.58) 式與 $a=S/M$ 聯立並反推，得

$$M^2 = \left(M_{\text{不可約}} + \frac{Q^2}{4M_{\text{不可約}}}\right)^2 + \frac{S^2}{4M^2_{\text{不可約}}}。 \tag{33.60}$$

[對質量的不可約貢獻]　[對質量的電磁貢獻]　[對質量的旋轉貢獻]

(4)可逆變換與不可逆變換

保持確定的不可約質量的黑洞變換爲可逆變換；而增大不可約質量的黑洞變換爲不可逆變換。(33.56) 式的推導揭示，唯一能達到 δM 極小的可能值（從而使 $\delta M_{\text{不可約}}=0$）的投入過程，是在視界 $r=r_+$ 處使 $\mu=p^r=p^\theta=0$ 的過程。用語言重新敍述：爲了通過把物體投入黑洞產生可逆變換，必須(1)物體的靜止質量 μ 與它的電荷 e 或角動量軸向分量 L_z 相比要極小，

$$\mu/e \ll 1 \text{ 和/或 } \mu^2/L_z^2 \ll 1;$$

和(2)使物體下落得「非常輕」($p^r=p^\theta=0$)，非常靠近視界 ($r=r_+$)。這一點聽起來似乎不很困難，但是要記住在視界處 $p^r=p^\theta=0$ 的物體必定正以光速向外運動，並且當人們把物體放在越接近視界處，人們「滑倒」和被吞沒的危險就越大！

顯然，任何實際的投入過程都會與可逆性有某種偏離。可逆性是一種理想化的極限，可以趨近而不可能達到。

練習

練習 33.11 不可約質量是不可約的

試證明，條件 (33.56) 等價於 $\delta M_{\text{不可約}} \geq 0$。

練習 33.12 黑洞的表面面積

試證明，Kerr-Newman 幾何的視界的表面面積〔$r=r_+$ 和 $t=$常數 (Boyer-Lindquist 坐標) 或 $\tilde{V}=$常數 (Kerr 坐標) 表面的面積〕是 $16\pi M^2$不可約 。

練習 33.13 黑洞的角速度

一條普遍的定理〔相對論情形見 Hartle (1970)；非相對論情形見 Ostriker 和 Gunn (1969)〕指出，如果把角動量注入旋轉恒星，而對它的總質量-能量的所有其他貢獻 (貢獻來自熵和重子的靜止質量)都保持不變，則注入所引起的恒星總質量-能量的改變由下式給出：

$$\delta(\text{質量-能量}) = \begin{pmatrix}\text{恒星在注入}\\ \text{點的角速度}\end{pmatrix} \delta(\text{角動量})。 \tag{33.61}$$

類似地，如果把角動量 δS 注入旋轉黑洞，而對黑洞總質量-能量的所有其他貢獻 (貢獻來自不可約質量和來自電荷) 都保持不變，則下式

$$\delta M = \Omega_h \delta S$$

中的系數 Ω_h 即爲黑洞的角速度：

$$\Omega_h = (\partial M/\partial S)_{Q,\mathcal{M}_{\text{不可約}}}。 \tag{33.62}$$

(a) 試證明，黑洞的角速度等於

$$\Omega_h = \frac{a}{r_+^2 + a^2}。 \tag{33.63}$$

注意，這正是永遠留在視界處的光子的角速度〔(33.42b) 式；視界零母線的「理髮店招牌桿式的纏繞」〕。

(b) 試證明，落入黑洞的**任何**物體在晚期階段當它接近視界時，都將獲得角速度 (相對於 Boyer-Lindquist 坐標) $\Omega = d\phi/dt = \Omega_h$。(記得在 Boyer-Lindquist 坐標系中視界是奇性的。這就是每個物體不論其 L_z, E, e, μ, $\mathcal{Q}$ 如何，都能够接近並確實接近 $\Omega = \Omega_h$的原因。)

練習 33.14 波動方程的變量分離

本章廣泛地研究了黑洞外場中小物體的運動。幾乎同樣重要，但由於其複雜性仍未很好理解的是在 Kerr-Newman 幾何中弱電磁擾動和引力擾動 (「波」) 的演化。正如人們事先無以預料 Kerr-Newman 幾何中試驗粒子的「第四個常數」一樣，也無法預料 Maxwell 方程，或描述引力擾動的波動方程，——或甚至標量波動的方程〔$\psi \equiv -\psi_{;\alpha}{}^{;\alpha} = 0$ 是可以分離變量的。因而，當 Carter (1968c) 證明標量波動方程的可分性，以及爾後 Teukolsky (1972, 1973) 把 Maxwell 方程和引力擾動的波動方程兩者都分離變量時，曾經使人們大吃一驚。

試證明，在（無電荷的）Kerr 幾何中，標量波動方程分離變量後得出下述形式的解

$$\psi=(r^2+a^2)^{-1/2}u_{lm}(r)S_{ml}(-i\omega a,\ \cos\theta)e^{i(m\phi-\omega t)}, \tag{33.64a}$$

式中 m 和 l 是整數，滿足 $0\leq|m|\leq l$; S_{ml} 是球諧函數［見 Meixner 和 Schärfke (1954)］；而 u_{lm} 滿足下述微分方程

$$-d^2u/dr^{*2}+Vu=0。 \tag{33.64b}$$

爲了把方程寫成這種形式，定義 Regge-Wheeler (1957)「烏龜」型徑向坐標 r^* 如下

$$dr^*=\Delta^{-1}(r^2+a^2)dr, \tag{33.64c}$$

並找到由下式給出的有效勢 $V(r^*)$

$$\begin{aligned}V=&-\left(\omega-\frac{ma}{r^2+a^2}\right)^2+[(m-\omega a)^2+\mathcal{Q}](r^2+a^2)^{-2}\Delta\\&+2(Mr-a^2)(r^2+a^2)^{-3}\Delta+3a^2(r^2+a^2)^{-4}\Delta^2。\end{aligned} \tag{33.64d}$$

在此徑向方程中，$\mathcal{Q}$ 是常數（類似於粒子運動的 Carter 常數），由 m, l 給出

$$\mathcal{Q}\equiv\lambda_{ml}-m^2;\quad \lambda_{ml}=\left[\begin{array}{l}\text{球諧本徵函數；}\\\text{見 Meixner 和 Schärfke (1954)}\end{array}\right]。 \tag{33.64e}$$

［這些分離解的細節由 Brill 等 (1972) 導出。對於場和 Kerr 黑洞之間相互作用的研究——利用上述解，並利用電磁波方程和引力波方程類似的解所作的研究——請參看Bardeen, Press 和 Teukolsky (1972), Misner (1972b), Teukolsky (1972), Ipser (1971), Press 和 Teukolsky (1973), 以及 Chrzanowski 和 Misner (1973)。］

第三十四章　整體技巧，視界和奇點定理

§34.1　整體技巧與局域技巧

本章全屬高階。§22.5（幾何光學）以及第32章和第33章的高階部分（坍縮和黑洞）是本章的必要準備，以後任何一章都無需本章作爲預備。

分析空時物理的局域技巧與整體技巧的對照

直到60年代，引力理論中的計算幾乎僅限於應用局域技巧：Einstein 場方程描述在某一給定事件處的脅强-能量張量 $\boldsymbol{T}$ 如何在同一事件處產生曲率 $\boldsymbol{G}$（局域的物理學）。當化爲度規係數的微分方程時，$\boldsymbol{G}=8\pi\boldsymbol{T}$ 把在每一給定事件處的 $g_{\alpha\beta}$，$\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^{\mu}$ 和 $\partial^2 g_{\alpha\beta}/\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}$ 與在同一事件處的 $T_{\mu\nu}$ 聯繫了起來（局域的方程）。通過隨時間從一事件至另一事件再一事件地向前積分（局域的積分），可以用計算機或任何初值類型的分析得出這些微分方程的解。非引力的物理定律可以在空時中各個事件處的局域 Lorentz 參照系中求助於等效原理得出。爲了建立對空時整體結構的理解，應在每個事件附近作局域的計算，然後把這些局域的結果拼在一起形成一幅整體的圖畫。爲什麼極大的依賴於局域分析呢？因爲引力物理的定律在局域地表述時形式特別簡單。

直到 60 年代中葉以前，物理學家還並未認識到，引力物理也遵守一些强有力的簡單的整體定律。但是，從 1963 年以來，對黑洞和奇性的研究揭示出空時的整體定律和整體性質，它們的簡潔與優雅甚至可與（局域的）等效原理相媲美。黑洞動力學的第二定律就是一個例子：「在一孤立的系統中，全部黑洞的表面面積之和決不可能減少」。結果，爲了直接分析空時的整體性質，發展了强有力的知識和技巧。

充分論述整體技巧需要寫許多章。幸而，Hawking 和 Ellis (1973) 所作的充分論述幾乎與本書同時出版。由於 Hawking 和 Ellis 比我們（Misner, Thorne 和 Wheeler）更有資格來撰寫這個課題，我們決定不撰寫「競爭性的」論述。作爲替代，本章只是簡要地體驗一下這個課題——這種體驗只夠使讀者對所涉及的技巧的類型以及若干最重要的結果有所了解，却不足以提供給讀

者有關這個課題的工作知識。我們選來論述的題目是本書與其餘部分最緊密聯繫的那些題目：漸近平直空時中「無窮遠」處的性質（§34.2）；因果關係與視界（§34.3 和 §34.4）；黑洞動力學第二定律的證明（§34.5）；以及關於空時中奇點演化的定理（§34.6）。關於整體技巧的更多細節，不僅可參看 Hawking 和 Ellis (1973) 的書，還可參看 Geroch (1971), Penrose (1968a, 1972) 和 Hawking (1973) 的評述文章，Godfrey (1970b) 的論文，以及本章正文中引述的更專門的文章。

關於整體技巧的參考文獻

§34.2　在漸近平直空時中的「無窮遠」處

研究接近無窮遠處空時性質的動機

當在漸近平直空時中作計算時，常常必須考察場（例如，度規或曲率張量或電磁場）在「無窮遠」的漸近形式。例如，一孤立系統的質量和角動量是由度規的漸近形式決定的（第19章）。只考察接近「空間無窮遠」處的漸近形式是很不夠的。例如，如果希望知道在超新星爆發期間引力波和電磁波帶走了多少質量，那麼就必須不僅考察在「空間無窮遠」度規的漸近形式，還必須考察在「未來零無窮遠」處度規的漸近形式（參看圖34.1）。

爲了研究接近「無窮遠」處空時的漸近形式，Penrose (1964, 1965a)發展了强有力數學技巧的主體。他的技巧的關鍵是空時的「保形變換」，通過變換把「無窮遠」變到有限半徑處，並從而把漸近計算變換爲在「有限遠點」的計算。Penrose 的技巧也爲在漸近平直空時中會遇到的幾類「無窮遠」提供了嚴格的定義。

Penrose 技巧的細節對本章其餘部分並不重要。但在本章中會經常提到 Penrose 定義的各類「無窮遠」。用啓發式的術語，它們有下述幾種（見圖 34.2a）。

特定的無窮遠區：I^+, I^0, I^-, $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$

$I^+\equiv$「未來類時無窮遠」；
　在有限半徑 r 處 $t\longrightarrow+\infty$的區域
　（指向類時線延伸的區域）。

$I^-\equiv$「過去類時無窮遠」；
　在有限半徑 r 處 $t\longrightarrow-\infty$的區域
　（類時線由之而來的區域）。

$I^0\equiv$「類空無窮遠」；
　在有限時刻 t, $r\longrightarrow\infty$的區域
　（指向類空薄片延伸的區域）。

$\mathcal{I}^+\equiv$「未來零無窮遠」：
　在有限 $t-r$ 處，$t+r\longrightarrow\infty$的區域
　（指向外向零線延伸的區域）。

$\mathcal{I}^-\equiv$「過去零無窮遠」；
　在有限 $t+r$ 處，$t-r\longrightarrow-\infty$的區域
　（內向零線由之而來的區域）。

注意：$\mathcal{I}$ 是 I 的手寫體，有時稱爲「手寫」。

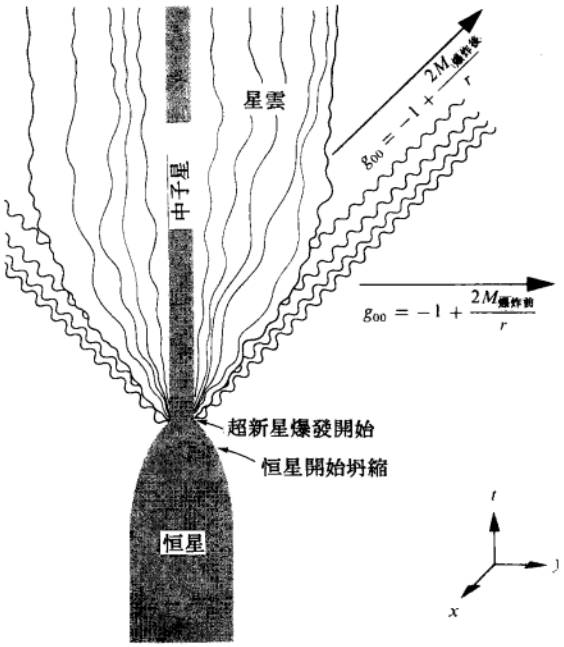


圖 34.1

測定在漸近平直空間中因超新星爆發隨引力波和電磁波輻射出去的質量-能量。輻射出去的質量-能量等於超新星爆發前恒星的質量（$M_{爆發前}$）減去爆發後中子星和星雲的質量（$M_{爆發後}$）：

$$M_{輻射}=M_{爆發前}-M_{爆發後}。$$

爲了測定 $M_{爆發前}$，可以考察在空間無窮遠處 g_{00} 的漸近形式（在適當的坐標系中）

$$g_{00}=-1+\frac{2M_{爆發前}}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad 當\ r\longrightarrow\infty,\ t=常數。$$

但是爲了以同樣方式測定 M 爆發後，必須在任意固定的 r 處等待，直到輻射完全流過該點爲止：

$$g_{00}=-1+\frac{2M_{爆發後}}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right),\ 當\ r\longrightarrow\infty\ 時，t-r=\begin{pmatrix}常數值，它應是够大，\\以保證在波爆發的內部\end{pmatrix}。$$

換言之，爲了測定 $M_{爆發後}$，必須考察的不是在「空間無窮遠」g_{00} 的漸近形式，而應考察在「未來零無窮遠」處 g_{00} 的漸近形式。

顯示無窮遠結構的坐標圖

在具體想像空時的漸近結構時，引進賦予無窮遠以有限坐標值的坐標常常是有用的。例如，在平直空時中，可以把通常的球坐標 t, r, θ, ϕ 及

$$ds^2=-dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)，\qquad (34.1)$$

變換到新的球坐標 ϕ, ξ, θ, ϕ, 且有下述關係：

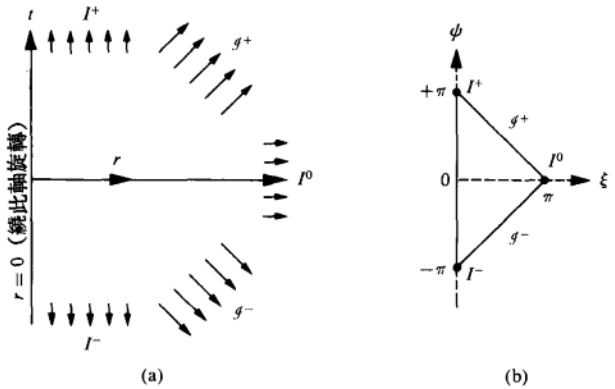


圖 34.2

平直「Minkowski」空時，圖示於 (a) 整體 Lorentz 系的通常球坐標 t, r, θ, ϕ 之中，和 (b) (34.2) 式的球坐標之中。這五個無窮遠區域——I^+, I^-, I^0, $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$——已在每一種坐標圖中畫出。在兩種坐標系中，徑向零線與垂直軸夾角 45°，非徑向零線的夾角小於45°［見 (34.1) 式和(34.2c) 式］。更多的細節見練習 34.1。

$$t+r=\tan\frac{1}{2}(\psi+\xi)\,, \tag{34.2a}$$

$$t-r=\tan\frac{1}{2}(\psi-\xi)\,, \tag{34.2b}$$

$$ds^2=\frac{-d\psi^2+d\xi^2}{4\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\xi)\cos^2\frac{1}{2}(\psi-\xi)}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,。 \tag{34.2c}$$

得出的 ψ，ξ 坐標圖（圖 34.2）能比通常的 t, r 坐標圖更清楚地描述 I^+, I^-, I^0, $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$。

另一個例子，把 Schwarzschild 空時的 Kruskal-Szekeres 坐標 v, u, θ, ϕ 代之以新的坐標 ψ, ξ, θ, ϕ:

$$v+u=\tan\frac{1}{2}(\psi+\xi)\,, \tag{34.3a}$$

$$v-u=\tan\frac{1}{2}(\psi-\xi)\,, \tag{34.3b}$$

$$(1-r/2M)e^{r/2M}=v^2-u^2=\tan\frac{1}{2}(\psi+\xi)\tan\frac{1}{2}(\psi-\xi)\,, \tag{34.3c}$$

$$ds^2=\frac{32M^3}{r}\frac{e^{-r/2M}(-d\psi^2+d\xi^2)}{4\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\xi)\cos^2\frac{1}{2}(\psi-\xi)}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,。 \tag{34.3d}$$

得出的坐標圖（圖34.3）清晰地描繪了視界，奇點和各種無窮遠區域之間的因果關係。

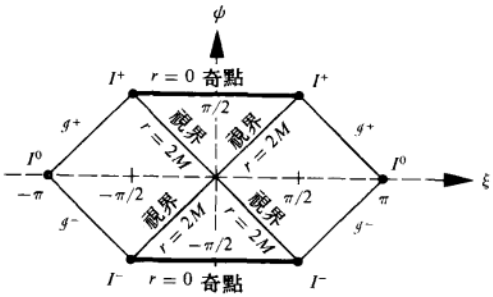


圖 34.3

在 (34.3) 式的 ψ, ξ, θ, ϕ 坐標中描繪 Schwarzschild 空時。應把這個坐標圖與 Krusal-Szekeres坐標圖［圖 (31.3)］作比較。在兩個圖中，徑向零短程線是 45° 線。每一個漸近平直區域（在圖 31.5a 的「蛀孔」的每一側有一個）有它自己的一組無窮遠 I^+, I^-, I^0, $\mathscr{I}^+$, $\mathscr{I}^-$。對此圖的證明，參看練習 34.2。

練習

練習 34.1 在 ψ, ξ, θ, ϕ 坐標系中的平直空時

(a) 試由 (34.1) 式和 (34.2a,b) 式導出 (34.2c) 式。

(b) 試證明，平直空時的區域 I^+, I^-, I^0, $\mathscr{I}^+$和 $\mathscr{I}^-$ 位於

$$\begin{aligned} &I^+: \psi=\pi, \quad \xi=0, \\ &I^+: \psi=-\pi, \quad \xi=0, \\ &I^0: \psi=0, \quad \xi=\pi, \\ &\mathscr{I}^+: \psi+\xi=\pi, \quad -\pi<\psi-\xi<\pi, \\ &\mathscr{I}^-: \psi-\xi=-\pi, \quad -\pi<\psi+\xi<\pi。 \end{aligned} \tag{34.4}$$

［參看 (34.2) 式］。這些區域如圖 34.2 所示。

(c) 試證明，在平直空時中，在 ψ, ξ 坐標圖（圖 34.2）中，徑向零線與垂直軸夾角 45°，而非徑向零線的夾角小於45°。

練習 34.2 在 ψ, ξ, θ, ϕ 坐標系中的 Schwarzschild 空時

(a) 試由 (34.3a,b) 式和 Kruskal-Szekeres 方程 (31.14) 導出 (34.3c,d) 式。

(b) 試用 (34.3) 式證實圖 34.3 中坐標圖的精確形式。

練習 34.3 Reissner-Nordstrøm 空時

(a) 試證明，存在着一個坐標系，在其中，$0<|Q|<M$ 的 Reissner-Nordstrøm 幾何（練習 31.8 和 32.1 練習）具有下述形式

$$\begin{aligned} ds^2=F^2(-d\psi^2+d\xi^2)+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2), \\ F=F(\psi,\xi), \quad r=r(\psi,\xi), \end{aligned} \tag{34.5}$$

並且在該坐標系中視界和無窮遠如圖 34.4所示。［注意：這是一個很難的練習，除非手邊有練習 31.8(d) 的解。爲了求解可參看 Carter (1966b)。］

(b) 試利用圖 34.4 推斷；Reissner-Nordstrøm 幾何描繪了把兩個漸近平直空連接起來的「蛀孔」或橋，此蛀孔或橋 (i) 膨脹到具有極大圓周的狀態；(ii) 再收縮到具有極小圓周的狀態，並且在這個過程中使它的外區與兩個 I^0（空間無窮遠）脫離，而與一對在 $r=0$ 的奇點再連結起來；(iii) 反彈回來；(iv) 再膨脹，並且在這個過程中使它的

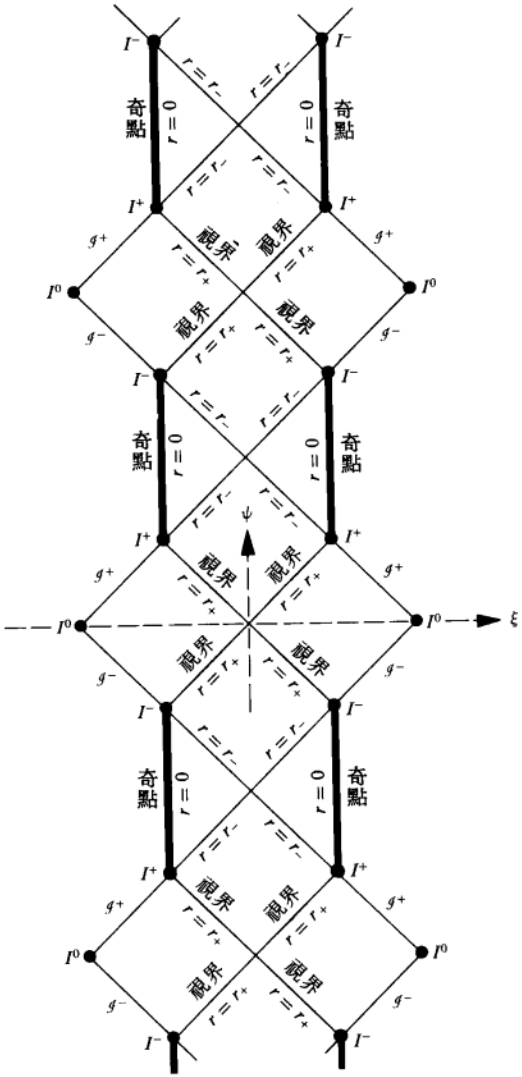


圖 34.4
Reissner-Nordstrøm 空時的

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2$$
$$+\frac{dr^2}{1-2M/r+Q^2/r^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$$

且 $0<|Q|<M$，如在新的(ψ,ξ,θ,ϕ)坐標系中描繪，則線元的形式爲

$$ds^2=F^2(-d\psi^2+d\xi^2)+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2),$$

（見練習34.3）。這個坐標圖顯示出幾何的整體結構，包括在 $r=0$ 處的奇點，在

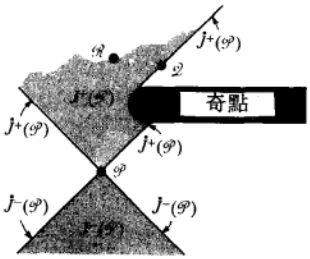
$$r=r_+=M+\sqrt{M^2-Q^2}$$

處的視界（它限制了與 $\mathcal{I}^+$ 和 $\mathcal{I}^-$ 的通訊聯繫），在

$$r=r_-=M-\sqrt{M^2-Q^2}$$

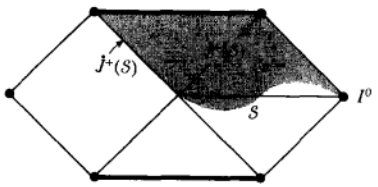
處的零曲面（它限制了與奇點的通訊聯繫），以及各處漸近平直無窮遠 I^+, I^-, I^0, $\mathcal{I}^+$ 和 $\mathcal{I}^-$。從此圖中可以讀出幾何的「因果結構」——即各個區域之間彼此通訊聯繫的能力。對這種幾何的詳細討論，參看 Grave 和 Brill (1960) 和 Carter (1966b)。對於以此幾何爲外部引力場的坍縮帶電恒星的討論，參看 Novikov (1966a,b), de la Cruz 和 Israel (1967), 以及 Bardeen (1968)。

「外區」與兩個奇點脫離，而與兩個新的漸近平直宇宙中的一對 I^0 再連接起來；(v) 膨脹減慢直到停止；(vi) 再向具有極小圓周的狀態收縮，並且在這個過程中使它的外區與兩個 I^0 脫離，而與一對新的 $r=0$ 奇點再連接在一起；如此等等以至於無窮。



注意：$\mathcal{P} \prec \mathcal{R}$, $\mathcal{P} \not\prec \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \not\succ \mathcal{R}$, $\mathcal{P} \not\succ \mathcal{Q}$, 但 $\mathcal{Q} \in \dot{J}^+(\mathcal{P})$

(a)



注意：S 是類空薄片，它從 I^0 向 $r=2M$ 延伸，但不包括 $r=2M$。$J^+(S)$ 不包括最左側的視界，但 $\dot{J}^+(S)$ 是最左側的視界。

(b)

圖 34.5

闡明各種因果關係的空時圖。圖 (a) 是假想的空時；圖 (b)是 Schwarzschild 空時（參看圖 34.3）。在兩個圖中，零線均傾斜45°。

§ 34.3 因果律和視界

把討論限於漸近平直的、時間定向的流形

現在，轉向分析黑洞的整體 * 技巧。討論的目的是(1)定義視界的概念（本節），(2)推出視界的整體幾何性質（下節），和(3)證明黑洞動力學的第二定律（再下一節）。整個討論限於具有下述特徵的空時流形(1)至少包含一個漸近平直區域（「外部宇宙」；「黑洞外」的區域），和(2)是「時間定向」的。所謂「時間定向」意味着在空時中的每一事件處都要作出明確的抉擇，說明那個光錐是未來光錐，那個光錐是過去光錐，不僅如此，而且這種選擇在整個空時從一事件到另一事件是連續的。

幾個因果概念的定義

討論從定義事件和空時區域之間的種種因果關係開始（見圖34.5）。

定義：$\mathcal{P} \preccurlyeq \mathcal{Q}$ 或等價地 $\mathcal{Q} \succcurlyeq \mathcal{P}$（「事件 $\mathcal{P}$ 在事件 $\mathcal{Q}$ 之前」；「事件 $\mathcal{Q}$ 跟隨在事件 $\mathcal{P}$ 之後」）意味着至少存在一條從 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{Q}$ 的光滑地指向未來的類時曲線。

定義：**因果曲線** $\mathcal{C}(\lambda)$ 是處處都非類空的任意光滑曲線——即是類時的，或空無所有（*null*），或「零（*zero*）」[對於全部 λ, $\mathcal{C}(\lambda)$=某個固定的 $\mathcal{P}$]，或是它的某種組合。

定義：$\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ 或等價地 $\mathcal{Q} \succ \mathcal{P}$（「事件 $\mathcal{P}$ 作爲事件 $\mathcal{Q}$ 之原因發生在前」

* 整體，但並非完全的整體；§34.3—§34.5 中的「宇宙」是漸近平直的；此處沒有考慮宇宙可能的閉合或坍縮，也沒有考慮它們的後果。

，「事件 $\mathcal{Q}$ 作爲事件 $\mathcal{P}$ 之後果發生在後」）意味着從 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{Q}$ 至少存在一條指向未來的因果曲線。

定義：$J^-(\mathcal{P})$ 稱爲 $\mathcal{P}$ 的前因，它是在 $\mathcal{P}$ 之前作爲 $\mathcal{P}$ 的原因的所有事件的集合——即 $J^-(\mathcal{P})=\{\mathcal{Q}\mid \mathcal{Q}\prec\mathcal{P}\}$。

定義：$J^+(\mathcal{P})$ 稱爲 $\mathcal{P}$ 的後果，它是在 $\mathcal{P}$ 之後作爲 $\mathcal{P}$ 的後果的所有事件的集合——即 $J^+(\mathcal{P})=\{\mathcal{Q}\mid \mathcal{Q}\succ\mathcal{P}\}$。

定義：如果 $\mathcal{S}$ 是空時的一個區域——例如類空超曲面的一部分——那麼 $J^-(\mathcal{S})$（$\mathcal{S}$ 的前因）是：至少對於 $\mathcal{S}$ 中一個事件，發生在該事件之前作爲原因的所有事件的集合——即

$$J^-(\mathcal{S})=\{\text{至少對於一個 }\mathcal{P}\in\mathcal{S},\ \mathcal{Q}\mid \mathcal{Q}\prec\mathcal{P}\}。$$

定義：類似地，$J^+(\mathcal{S})$（$\mathcal{S}$ 的後果）是：至少對於 $\mathcal{S}$ 中一個事件，發生在該事件之後作爲後果的所有事件的集合——即

$$J^+(\mathcal{S})=\{\text{至少對於一個 }\mathcal{P}\in\mathcal{S},\ \mathcal{Q}\mid \mathcal{Q}\succ\mathcal{P}\}。$$

定義：$\dot{J}^+(\mathcal{S})$ 是 $J^+(\mathcal{S})$ 的邊界，
$\dot{J}^-(\mathcal{S})$ 是 $J^-(\mathcal{S})$ 的邊界。

定義：可以用與上面完全相同的方式定義 $\mathcal{P}$ 的未來 $I^+(\mathcal{P})$；$\mathcal{P}$ 的過去 $I^-(\mathcal{P})$；$\mathcal{S}$ 的未來 $I^+(\mathcal{S})$；$\mathcal{S}$ 的過去 $I^-(\mathcal{S})$；$\mathcal{S}$ 的未來邊界 $\dot{I}^+(\mathcal{S})$；和 $\mathcal{S}$ 的過去邊界 $\dot{I}^-(\mathcal{S})$，只需把「前因」代之以「在前」，把「後果」代之以「隨後」。例如

$$I^+(\mathcal{S})=\{\text{至少對於一個 }\mathcal{P}\in\mathcal{S},\ \mathcal{Q}\mid \mathcal{Q}\succcurlyeq\mathcal{P}\}。$$

在下面的討論中並不需要所有這些定義；但是關於整體方法的文獻廣泛運用這些概念，讀者應當熟悉它們。

讓我們集中注意一種特定的空時流形，並且在此流形中挑選出一個特定的漸近平直區域。［在恒星的外場中，只有一個漸近平直區域。在無源眞空 Schwarzschild 幾何中（圖 34.3）有兩個。在無源 Reissner-Nordstrøm 幾何中（圖34.4），有無窮多個不同的漸近平直區域。］選定的漸近平直區域（「外宇宙」）具有一個未來類時無窮遠 I^+，一個過去類時無窮遠 I^-，一個類空無窮遠 I^0，一個未來零無窮遠 $\mathcal{I}^+$，和一個過去零無窮遠 $\mathcal{I}^-$。它還可能具有黑洞，這些黑洞是由恒星坍縮形成的，它們碰撞，合併，吸積物質，並在它們的近鄰處普遍地造成巨大的破壞。所有黑洞的表面（「未來視界」）把能夠向 $\mathcal{I}^+$ 發出信號的外部宇宙與不能向外發信號的黑洞內部分離開。於是，就有下述定義：

定義：黑洞的表面；未來視界——$\dot{J}(\mathcal{I}^+)$

定義：所有未來視界的總體（或「聯合」）（所有黑洞的表面）是區域 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$——即它是能夠向未來零無窮遠發出指向未來的因果曲線的區域 $J^-(\mathcal{I}^+)$ 之邊界。

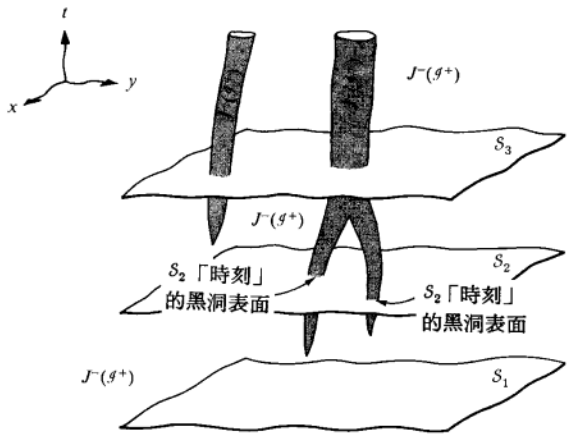


圖 34.6

在漸近平直空時中的黑洞（示意性的空時圖）。$J^-(\mathcal{I}^+)$ 是「外部宇宙」——即是能够向未來零無窮遠發出因果曲線的區域。$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$，即圖中的灰色區域，是「外部宇宙」的邊界——即它是全部未來視界的聯合。在類空薄片 S_1 的「時刻」，宇宙中沒有黑洞。在 S_1 與 S_2 之間，兩個恒星坍縮成了黑洞。S_2 與 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 相交的兩個閉合二維曲面是這些黑洞在「時刻」S_2 的視界。在 S_2 和 S_3 之間，二個原來的黑洞碰撞並結合，同時由於恒星坍縮又形成了第三個黑洞。

［類似地，也可以把所有過去視界的總體定義爲 $\dot{J}^+(\mathcal{I}^-)$。但天體物理學對過去視界沒有什麼興趣。引力坍縮以十分自然的方式產生未來視界，而過去視界的起源却必須是原生的——即必須假定它們是宇宙起源的初始結構［Novikov (1964), Ne'eman (1965)］。沒有充分理由相信宇宙開始時具有或應當具有這樣奇特的初始結構。］

通過空時的任意給定類空薄片 S 將與 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 在一系列互不相連的、閉合的二維曲面上相交。每一個這樣的二維曲面都是在 S「時刻」單個黑洞的視界，見圖34.6。

§ 34.4 視界的整體結構

關於 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$（未來視界）結構的 Penrose 定理

所有未來視界的聯合 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 具有特別簡單的整體幾何結構，如下。

定理［Penrose (1968a)］：$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 是由沒有未來終點的零短程線產生的。更確切地說（見圖34.7）：

(1)定義：$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 的「母線」是（至少對於仿射參量的某些有限間隔）位於 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$的零短程線。

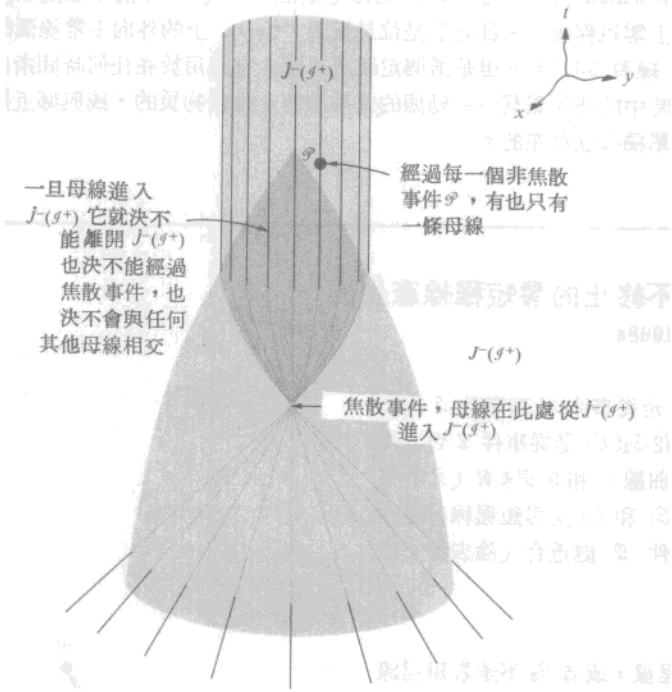


圖 34.7

由恒星的球形引力坍縮產生的未來視界 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$。這個視界圖示了 Penrose 定理（正文 §34.4）詳細闡明的 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 的整體幾何結構。在此特殊情況下，只有一個焦散事件。一般情況下焦散事件可能很多。

(2)定理：當循着母線到過去時，母線可能（但並非必定）脫離$\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$。母線脫離 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 處的每一個事件稱爲 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 的「焦散」事件。當母線脫離時，它進入 $J^-(\mathscr{I}^+)$。

(3)循着母線進入未來，一旦母線在某一焦散事件處從 $J^-(\mathscr{I}^+)$ 進入了 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$，則從此之後它決不能離開 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$，也決不能與另一母線相交。［母線只能在它們進入 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 的焦散事件處相交。］

(4)對於 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 的每一個非焦散事件，有一條並且（除去仿射參量的歸一化）也只有一條母線經過。

這個定理在框34.1中證明。

對於 Schwarzschild 黑洞，$\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 的母線是在引力半徑處徑向向外光子的世界線［$r=2M$, θ 和 ϕ 爲常數，$u=+v$; 圖 32.1(c) 中視界的虛線］。對於

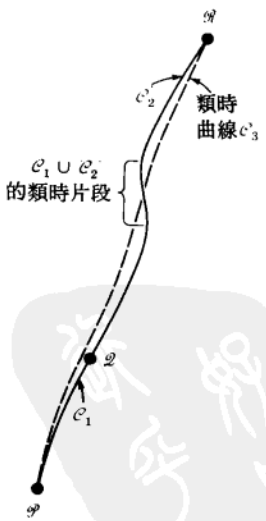
Kerr-Newman 黑洞，$\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 的母線是框 33.2(F) 中的「理髮店招牌桿式的纏繞」零短程線——即它們是位於視界 $r=r_+$ 上的外向主零線滙的成員（§33.6；練習 33.9）。但是這個定理更普遍。它適用於在任何時間指向的漸近平直空時中的任何黑洞——動態的或靜態的；吸積物質的，或與鄰近黑洞結合的，或單獨孤立存在的。

框 34.1 視界是由不終止的零短程線產生的
(Penrose 1968a)

A. **引理**：如果(1)$\mathcal{C}_1(\lambda)$ 是從事件 $\mathscr{P}$ 到事件 $\mathscr{Q}$ 的指向未來的因果曲線，(2)$\mathcal{C}_2(\lambda)$ 是從事件 $\mathscr{Q}$ 到事件 $\mathscr{R}$ 的指向未來的因果曲線，和(3)$\mathscr{P} \not< \mathscr{R}$（$\mathscr{P}$ 不在 $\mathscr{R}$ 的過去），那麼，$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是零短程線，並且它們的切向矢量在事件 $\mathscr{Q}$ 處重合（除去歸一化）。

證明*

1. 假設 $\mathcal{C}_1$ 不是零短程線，或者 $\mathcal{C}_2$ 不是零短程線，或者兩者都不是。那麼，沿着 $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 的某處會有一類時片段，或非短程線零片段，或兩者都有。
   a. 如果 $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 包含一類時片段，那麼 $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 稍有變形† 就會產生出一條從 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{R}$ 的處處類時的光滑曲線 $\mathcal{C}_3$‡——這與 $\mathscr{P} \not< \mathscr{R}$ 的假設矛盾。



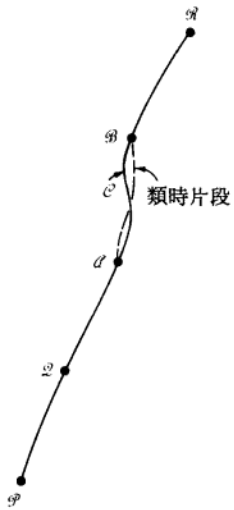
* 此證明用到一些點集拓撲學的基本概念；參看，例如，Wallace (1963) 或 Kelley (1955)

† 對於在任何空時流形中的任何曲線，總是可以使它在所希望的任意方向上作少量變形，而不碰到奇點或流形的其他邊界。這是可能的，因爲按照定義，流形是開放的。用物理學的術語來說，空時是開放的，因爲空時中的每一事件必定具有一局域的 Lorentz 鄰域，它也處於空時之中。

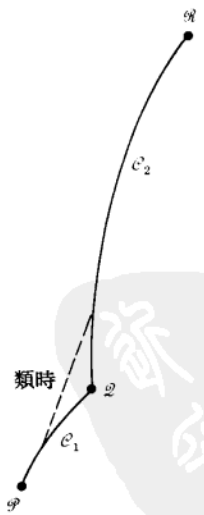
‡ 通過利用局域 Lorentz 系所作的論證，人們可以信服這一論斷以及此後證明中所作的類似論斷。在有關整體幾何的文獻中，諸如此類的論斷很少證明，雖然每個作者總是確信，如果有人懷疑，他是能够證明的。不幸的是，以嚴格的論證證實這種這種論斷，會使討論顯著地加長和極大地複雜化，並且容易使原來簡明的基本概念含糊不清。

b. 如果 $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 包含從事件 $\mathcal{A}$ 到事件 $\mathcal{B}$ 的非短程線零片段 $\mathcal{C}$，那麼，當與附近的在 $\mathcal{A}$ 與 $\mathcal{B}$ 之間的曲線比較時，$\mathcal{C}$ 沒有穩定的長度。這意味着從 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的某些曲線具有較大的平方長度——即它們是類空的——而另一些則具有較小的平方長度——即它們是類時的。這樣，$\mathcal{C}$ 的微小變形會產生出從 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的類時片段。這樣，按上面 (a) 的描述，$\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 的進一步變形會產生從 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{R}$ 的光滑的類時曲線，這與 $\mathcal{P} \not< \mathcal{R}$ 矛盾。

因而，假設是錯誤的；即 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 兩者必定是零短程線。



2. 假設 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 的切向矢量在它們的連接點 2 不重合。那麼，就有可能在 2「繞過拐角」，在該處產生一類時片段。這樣，就可如上面(1a)所述，進一步把 $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 變形，產生出從 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{R}$ 的光滑類時曲線——與 $\mathcal{P} \not< \mathcal{R}$ 矛盾。這樣，原假設是錯誤的；即兩切向矢量在 2 處必定重合。證完。

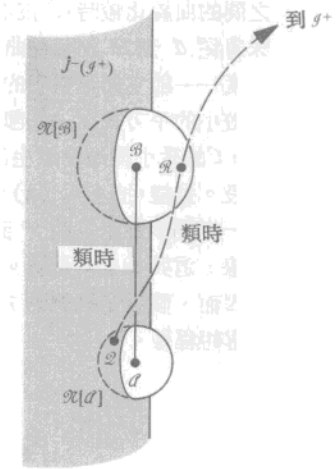


B. **引理**：如果 $\mathcal{A} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 和 $\mathcal{B} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$，則 $\mathcal{A} \not< \mathcal{B}$。

證明：假設 $\mathcal{A} < \mathcal{B}$。

1. 則存在着從 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的類時曲線。
2. 將該曲線稍稍變形但仍保持爲類時。這使它可以把處於某個足夠小鄰域 $\mathcal{N}[\mathcal{A}]$ 內的任意事件 $\mathcal{Q}$ 與處於某個足夠小鄰域 $\mathcal{N}[\mathcal{B}]$ 中的任意事件 $\mathcal{R}$ 連接起來。
3. 選取位於 $J^-(\mathcal{I}^+)$ 的事件 $\mathcal{R}$。然後，把從 $\mathcal{Q}$ 到 $\mathcal{R}$ 的類時曲線與從$\mathcal{R}$到 $\mathcal{I}^+$ 的因果曲線連接起來。所得的曲線在連接的鄰域中光滑之後就變成了從任一 $\mathcal{Q} \in \mathcal{N}[\mathcal{A}]$ 到 $\mathcal{I}^+$ 的因果曲線。
4. 存在這條曲線意味着 $\mathcal{N}[\mathcal{A}] \subset J^-(\mathcal{I}^+)$，因此 $\mathcal{A} \notin \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$——與起初的假設矛盾。

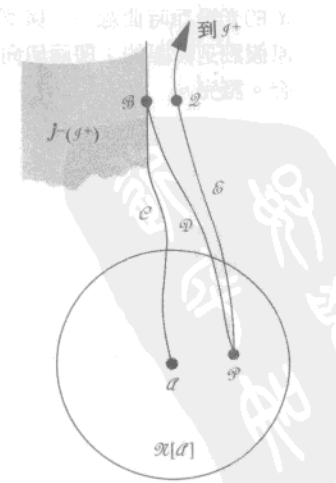
結論：$\mathcal{A} \not< \mathcal{B}$。證完。



C. **引理**：設 $\mathcal{C}(\lambda)$ 爲與 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 在某個事件 $\mathcal{B}$ 處相交的因果曲線。那當循此曲線從 $\mathcal{B}$ 進入過去時，則 $\mathcal{C}(\lambda)$ 永遠位於 $\dot{J}(\mathcal{I}^+) \cup J^-(\mathcal{I}^+)$ 之中。

證明：

1. 在 $\mathcal{C}(\lambda)$ 上挑選任意事件 $\mathcal{A}$，使 $\mathcal{A} < \mathcal{B}$。
2. 構造任意的小鄰域 $\mathcal{N}[\mathcal{A}]$。
3. 在 $\mathcal{A}$ 與 $\mathcal{B}$ 之間，$\mathcal{C}$ 的微小變形產生出從某事件 $\mathcal{P} \in \mathcal{N}[\mathcal{A}]$ 到 $\mathcal{B}$ 的類時曲線$\mathcal{D}$。
4. 因爲 $\mathcal{B} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$，故$\mathcal{D}$稍稍變形而保持其仍爲類時曲線，可產生出從$\mathcal{P}$到某個事件 $\mathcal{Q} \in J^-(\mathcal{I}^+)$的曲線 $\mathcal{E}$。然後，保持 $\mathcal{E}$爲因果曲線並把它延長，直至到達 $\mathcal{I}^+$ 爲止。結果是從 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{I}^+$ 的一條因果曲線。所以，$\mathcal{P} \in J^-(\mathcal{I}^+)$。
5. 但是，$\mathcal{P}$ 在任意的小鄰域 $\mathcal{N}[\mathcal{A}]$ 內。因此 $\mathcal{A}$ 必須也在 $J^-(\mathcal{I}^+)$ 內或在它的邊界 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 上。證完。



D. **定理** [Penrose (1968a)]：$\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 是由無未來端點的零短程線產生的。［對定理的更詳細敍述可參看正文§34.4。］

證明：

1. 在 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 內任選一事件 $\mathscr{P}$。按下述方式證明有一條位於 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 內而指向未來的零短程線通過 $\mathscr{P}$：

   a. 構造一任意鄰域 $\mathscr{U}[\mathscr{P}]$。［如果 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 碰巧在某處遇到一個空時奇點，那麼 $\mathscr{U}(\mathscr{P})$ 應選擇得足夠小以便使奇點在它的外面］。

   b. 在 $\mathscr{U}[\mathscr{P}] \cap J^-(\mathscr{I}^+)$ 內，構造一事件序列 $\{\mathscr{P}_i\}$，使之收斂於事件 $\mathscr{P}$。

   c. 對於每個 i 值，構造從 $\mathscr{P}_i$ 延伸到 $\mathscr{I}^+$ 的因果曲線 $\mathscr{C}_i$。

   d. 設 $\mathscr{Q}_i$ 爲 $\mathscr{C}_i$ 與 $\mathscr{U}[\mathscr{P}]$ 的交點，$\mathscr{U}[\mathscr{P}]$ 的邊界。因爲 $\mathscr{U}[\mathscr{P}]$ 爲一緊集，序列 $\mathscr{Q}_i$ 必有一極限點 $\mathscr{Q}$。

   e. 因爲從任意接近 $\mathscr{P}$ 的事件 $\mathscr{P}_i$ 到任意接近 $\mathscr{Q}$ 的事件 $\mathscr{Q}_i$ 存在着因果曲線，故必定有因果曲線從 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{Q}$。稱之爲曲線 $\mathscr{C}$。

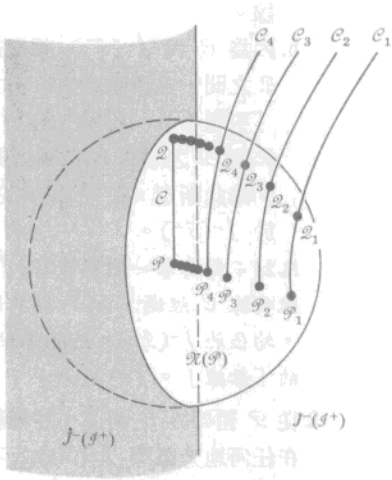
   f. 因爲 $\mathscr{Q}$ 是 $J^-(\mathscr{I}^+)$ 中事件序列的極限點，所以 $\mathscr{Q}$ 或位於 $J^-(\mathscr{I}^+)$ 內，或位於它的邊界 $\dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$ 上，或兩者兼而有之。假設 $\mathscr{Q} \notin \dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$。

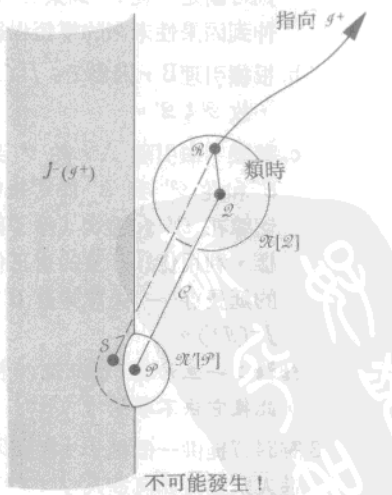
      i. 那麼，某個小的鄰域 $\mathscr{U}[\mathscr{Q}]$ 整個被包含在 $J^-(\mathscr{I}^+)$ 內。

      ii. 按下述方式構造一條從 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{I}^+$ 的因果曲線，先從 $\mathscr{P}$ 沿因果曲線 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{Q}$，再從 $\mathscr{Q}$ 沿類時曲線到某個事件 $\mathscr{R} \in \mathscr{U}[\mathscr{Q}]$，然後從 $\mathscr{R}$ 沿因果曲線到 $\mathscr{I}^+$——並在連接點 $\mathscr{Q}$ 和 $\mathscr{R}$ 處使曲線光滑。

      iii. 因爲這條從 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{I}^+$ 的曲線中有一個類時片段，所以它可以保持爲因果曲線而光滑地變形，使得曲線到達在 $\mathscr{P}$ 附近某個小鄰域 $\mathscr{U}'[\mathscr{P}]$內的任何選定的事件 $\mathscr{S}$。但是，這意味着 $\mathscr{U}'[\mathscr{P}] \subset J^-(\mathscr{I}^+)$，因此 $\mathscr{P} \notin \dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$——這與原來的 $\mathscr{P}$ 的定義矛盾。

結論： $\mathscr{Q} \in \dot{J}^-(\mathscr{I}^+)$。





g. 由引理 B，因爲 $\mathcal{P} \in \dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$ 及 $\mathcal{Q} \in \dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$，故 $\mathcal{P} \not< \mathcal{Q}$。但 $\mathcal{C}$ 是從 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{Q}$ 的指向未來的因果曲線。結果，由引理 A，$\mathcal{C}$ 是零短程線。

h. 因爲 $\mathcal{C}$ 與 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$ 相交於 $\mathcal{Q}$，故在 $\mathcal{P}$ 與 $\mathcal{Q}$ 之間，它應處處位於 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+) \cup J^-(\mathcal{Q}^+)$ 內［引理 C］。利用上述 (f) 中的論證，並用 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 之間的 $\mathcal{C}$ 曲線上的任意點代替 $\mathcal{Q}$ 點。由此斷定，在 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 之間 $\mathcal{C}$ 曲線處處位於 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$。

總結：對於每一個事件 $\mathcal{P} \in \dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$，都有一零短程線 $\mathcal{C}$ 經過，由 $\mathcal{P}$ 循此短程線進入未來時，均位於 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$。這條零短程線稱為 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$ 的「母線」。

2. 從 $\mathcal{P}$ 循母線 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{Q}$，並繼續向前。它會不會在任何地方離開 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$？不會！如果爲假設它確在某個事件 $\mathcal{P}' \in \dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$ 處離開。

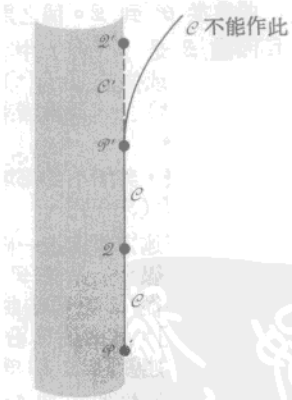
a. 重複步驟 1 的全部過程，而以 $\mathcal{P}'$ 代替 $\mathcal{P}$，則可斷定，從 $\mathcal{P}'$ 到某個事件 $\mathcal{Q}'$ 有一條可延伸到因果性未來的零短程線 $\mathcal{C}' \subset \dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$。

b. 根據引理B，因爲$\mathcal{P} \in \dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$和$\mathcal{Q}' \in \dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$，故 $\mathcal{P} \not< \mathcal{Q}'$。

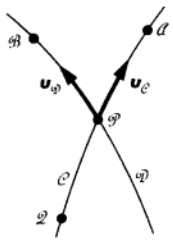
c. 那麼，由引理 A，從 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{P}'$ 的零短程線 $\mathcal{C}$ 和從 $\mathcal{P}'$ 到 $\mathcal{Q}'$ 的零短程線 $\mathcal{C}'$，它們的切線在 $\mathcal{P}'$ 處重合（除了歸一化以外）。這樣，利用仿射參量的重正化，$\mathcal{C}'$ 可以變爲 $\mathcal{C}$ 的延長線——這意味着 $\mathcal{C}$ 並未在 $\mathcal{P}'$ 點離開 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$。

結論：一旦母線（循此進入未來）進入 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$，此後它決不離開 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$。

3. 圖34.7提供一個例子，說明零短程線，當循此進入未來時如何進入 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$ 並變成母線。引理 C 確保，當一零短程線進入 $\dot{J}^-(\mathcal{Q}^+)$ 時，它一定是從 $J^-(\mathcal{Q}^+)$ 進入的。



4. 如圖34.7的例子所示，在「焦散事件」處［母線進入 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 之點］母線可以彼此交叉。循着母線 $\mathcal{C}$，從其進入 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 之點走向因果性未來。它能否與另一母線再次相交叉呢？不會。如果假設在 $\mathcal{P}$ 事件處，母線 $\mathcal{C}$ 與另一母線 $\mathcal{D}$ 交叉。



a. 在$\mathcal{P}$的因果性未來，兩母線總是位於$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$內。因而，圖中的$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$都在$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$內。

b. 因爲 $\mathcal{P}$ 是在 $\mathcal{C}$ 進入 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 的焦散事件的因果未來，故存在着事件 $\mathcal{Q}\in\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)\cap\mathcal{C}$，它是 $\mathcal{P}$ 的因果性過去。

c. 因爲 $\mathcal{Q}\in\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 和 $\mathcal{B}\in\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$，故 $\mathcal{Q}\not<\mathcal{B}$［引理B］。

d. 把引理A用於從 $\mathcal{Q}$ 到 $\mathcal{P}$ 的曲線 $\mathcal{C}$，和從 $\mathcal{P}$ 到$\mathcal{B}$的曲線 $\mathcal{D}$，即可確保兩者的切向矢量 $\mathbf{u}_{\mathcal{C}}$ 和 $\mathbf{u}_{\mathcal{D}}$ 在 $\mathcal{P}$ 點重合（歸一化除外），並且由此（歸一化除外）短程線 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是同一曲線。這與 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是在 $\mathcal{P}$ 點相交的不同母線的假設矛盾。

結論：一旦母線進入了 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$，此後它決不能與任何其他母線相交叉。

§ 34.5　黑洞動力學第二定律的證明
［Hawking (1971b, 1972a, 1973)］

現在，證明黑洞動力學第二定律的所有工具都已在掌握之中。

黑洞動力學第二定律的證明：

如圖34.8所示，在漸近平直空時中，考慮所有未來視界的聯合 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$。把 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 的零短程線母線分成大量無限小的束，給每一束一個供辨認用的數字K。當沿着 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 從過去移向未來時，偶然看到在三維表面 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 的「焦散線」內產生的一束束新的母線。新母線的焦散源是由這類過程產生的，即物質經視界的下落(例如：圖34.8中的束#42)以及兩個黑洞的碰撞並合併（例如束#29）。但是每一束母線，一旦產生，就決不會被消滅（當從過去移向未來時，零母線是沒有終點的）。

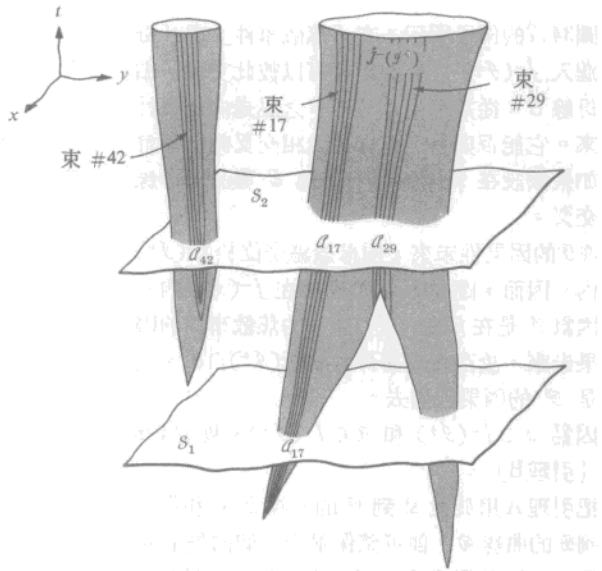


圖 34.8
用於證明黑洞動力學第二定律的示意空時圖。證明的細節見正文，圖的物理解釋參看圖 34.6。

把注意力集中於一束特定的母線——束$\#K$。沿着該束，在一特定事件 $\mathcal{P}$ 處，令以不同速度運動的不同觀測者分別測量它的（二維）截面積 $\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$。如圖22.1，練習22.13和練習22.14所示：(1)截面面積 $\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$ 與測量它的觀測者的速度無關——即 $\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$ 只依賴於 $\mathcal{P}$ 沿該束的位置；(2)$\mathcal{A}_K$ 沿該束從一事件到另一事件的改變方式受「聚焦定理」支配

$$\frac{d^2\mathcal{A}_K{}^{1/2}}{d\lambda_K{}^2} \leq 0 \qquad \begin{array}{l}\text{如果沿着該束的所有}\\ \text{觀測者測出的能量密}\\ \text{度 } T_{00} \text{ 是非負的。}\end{array} \qquad (34.6)$$

證明假設能量密度是非負的

此處 λ_K 爲沿着該束的仿射參量。假設能量密度 T_{00} 決不能取負值——這個假設與全部物理經驗以及近代物理的最佳估計一致（這個假設是黑洞動力學第二定律的基礎。如果一旦發現它不成立，那麼就必須放棄第二定律。）

假定 $d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K$ 沿着該束在某事件 $\mathcal{P}$ 處爲負值。那麼，根據聚焦定理，$d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K$，將永遠至少保持它在 $\mathcal{P}$ 處的值——因此，經過下述仿射參量的

間隔

$$\Delta\lambda_K \le \left(\frac{\mathcal{A}_K{}^{1/2}}{-d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K}\right)_{\text{在}\mathcal{P}\text{點}} \tag{34.7}$$

之後，$\mathcal{A}_K{}^{1/2}$ 將會變爲零。在 $\mathcal{A}_K{}^{1/2}$ 達到零的那一點，束中鄰近的零短程線會彼此相交，引起通過 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 中一些事件的零短程線母線多於一條。但是，這違背了關於視界整體結構的 Penrose 定理 (§34.4)。

因而，或者 $d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K$ 爲負的假設是錯誤的；或者 $d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K$ 雖爲負，但在母線有機會交叉之前［在仿射參量的有限間隔(34.7)之前］，母線已碰上奇點而停止存在。為了證明黑洞動力學第二定律，必須假設沒有奇點被視界碰上，並且由此斷定 $d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K$ 決不會變為負值。Hawking (1971b, 1972a) 作了另外的假設，它隱含着 $d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K \ge 0$: Hawking 假設空時是「未來漸近可預測的」。這實質上意味着空時不具有「裸露的奇點」——即從 $\mathcal{I}^+$ 看不見奇點。（裸露的奇點可能影響外部宇宙的演化；因此，除非能夠知道支配奇點的物理學定律——還沒有人知道這些定律——否則奇點的存在阻止人們去預言外部宇宙的未來。）

證明假設視界決不會碰上奇點（無裸露奇點）

根據以上兩個假設之一（無裸露的奇點；或者視界決不會碰上奇點），可以斷定

$$\text{沿着束}K\text{，}d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K \text{處處不取負值。} \tag{34.8}$$

這個結果表明，沿着 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 移向未來時，每個束的截面積 $\mathcal{A}_K$ 決不會減小。因爲移向未來時可能產生新的束，而舊的束却決不可能被消滅，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 的總截面面積向着未來決不會減小。等價地，(見圖 34.8)，如果 S_1 和 S_2 是類空超曲面，且 S_2 處處是 S_1 之未來，則 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 與 S_2 相交的截面積 $\mathcal{A}(S_2)$ 不可能小於與 S_1 相交的截面積 $\mathcal{A}(S_1)$，這就是用比第33章更準確的語言重新闡述的黑洞動力學第二定律，並已最終地證明了。

第二定律的準確描述

練習 34.4　黑洞決不可能分叉 [Hawking (1972a)]

論證下述定理似乎合理：不管怎樣用力地「劈」一個黑洞，也不管用什麼來「劈」它，決不可能使一個黑洞分爲兩個黑洞。［提示：通過作圖論證它似乎合理，即在任何分叉點，當循着 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$的某個零短程線母線進入未來時必定會離開 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$——違背了Penrose定理 (§34.4)。假設每個黑洞表面的拓撲形態爲二維球。注意，把時間反演，同樣的論證表明，如果兩個黑洞結合，則母線應在結合點從 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 進入 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$；並且視界的表面面積增加。］

練習

---

§ 34.6 關於奇點的定理和「最後狀態的論點」

關於奇點定理的概述

正如整體技巧是分析視界的强有力的工具那樣，它們在分析空時奇點時也是强有力的。事實上，正是 Penrose (1965b) 關於奇點的前驅定理的證明，導致研究空時整體技巧的誕生。

對於奇點整體分析的詳細介紹，可以閱讀 Hawking 和 Ellis (1973) 的書。現在，讀者已經體驗到了整體技巧，此處把注意力集中於結果的定性描述：

引力坍縮怎樣告終呢？典型的情況是球形坍縮的終點爲奇點呢？還是非對稱性可以消除奇點呢？感謝 Penrose, Hawking 和 Geroch 證明的奇點定理，從1965年以來已經知道奇點是非常普遍的現象，無法逃避的。［參考文獻的完全目錄，可參看 Hawking 和 Penrose (1969) 或 Hawring 和 Ellis (1973)。］

定義奇點

在考察奇點定理之前，必須把*奇點*概念弄準確。正如 Geroch (1968) 在關於空時流形中可能出現的廣泛多種病態的很長論文中曾經强調指出的那樣，這並不容易。然而，經過了許多人有力的努力之後，Schmidt (1970) 最後給出了一個看來比較令人滿意的定義。用啓發性的術語，可以把 Schmidt 的高度技巧性的定義表述如下。在一空時流形中，考慮所有類空短程線（「超光速粒子」的路徑），所有零短程線（光子的路徑），所有類時短程線（自由下落觀測者的路徑），以及所有具有有限加速度的類時曲線（原則上觀測者能沿之移動的路徑）。假定這些曲線之一，在經過有限的固有長度（或者，在零短程線情形，爲有限的仿射參量）之後終止。進一步假定，不可能把空時流形擴展到超出該終止點之外——例如，因爲那裏有無窮大的曲率。那麼，該終止點，連同所有鄰近的終止點一起，稱爲「奇點」。（對於這些可憐的超光速粒子，光子或沿着會終止的曲線運動的觀測者來說，還有什麼比存在着停止更奇異的呢？）

定義俘獲表面

在奇點定理中需要的另一個概念是*俘獲表面*。這個概念是 Penrose (1965b) 在仔細考察 Schwarzschild 幾何視界內的二維球面 (r,t)=常數時提出來的。這些表面由於下述性質可作爲接近奇點 ($r=0$) 的信號：從這些表面之一沿垂直向外方向發出的光線(即外向的、正交的、零短程線)在傳播時互相會聚；並且垂直於二維表面向內的光線也互相會聚。具有此性質的任何閉合二維表面，不管是否球形，Penrose 都命名爲「俘獲表面」。在 Schwarzschild 空時中，外向與內向的二種光線的會聚，都可歸因於把光子吸入奇點的「引力的强烈吸引」。Hawking-Penrose (1969)定理［這是適用於廣泛類型的最强有力的定理；對於其他情況的參考文獻，見 Hawking 和 Penrose (1969)；對 Hawking 和 Penrose 的介紹，見框34.2和框34.3］暗示，這在非對稱空時中可能也是正確的：

Hawking-Penrose 奇點定理

如果除了遵從 Einstein 方程之外，還滿足下述四個條件，則空時M必然包含不完全的、不可延展的類時短程線或零短程線（因而是 Schmidt 意義下的奇點）。(1)M不包含閉合的類時曲線（合理的因果條件）；(2)在M內的每一事件處，對每一個單位類時矢量 u，脅強-能量張量滿足

$$\left(T_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right)u^{\alpha}u^{\beta}\geq 0$$

（合理的能量條件）；(3)流形是「普遍的」（即不是太高度對稱的），意即對於單位切向矢量爲 u 的每一條類時短程線或零短程線，至少穿過一個事件，該處的曲率不與此切線矢量以特定的方式排成一線：

$$u_{[\alpha}R_{\beta]\gamma\delta[\rho}u_{\sigma]}u^{\gamma}u^{\delta}\neq 0 \quad \text{在短程線上某點。}$$

(4)流形包含一俘獲表面。

除了俘獲表面外，所有這些條件看來對於任何物理上現實的空時都顯然是合理的！特別要注意的是，只有某個局域觀測者在自身固有參照系中測出的總能量密度爲負值或者主壓强（脅强張量的本徵值）P_i 爲負值並滿足

$$\sum_i P_i < -E$$

時，能量條件才會破壞。

Hawking-Penrose 定理對引力坍縮的適用性

Hawking-Penrose 定理對坍縮的適用性來自下述的一般預料，即在眞實的宇宙中，俘獲表面總是剛好存在於所有未來視界 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 之下。（例外的情況，如 $a=M$ 的 Kerr 度規，可能是「零測度族」）。因爲視界和伴隨的俘獲表面必須是由輕微地非球形坍縮產生的（框32.2），而且因爲它們也可能是中等變形坍縮的結果（§32.7），所以這種坍縮大概也會產生奇點——或者違背因果關係，它也是一種相當奇特的事件。

如果奇點確實是坍縮的如此普遍的特點，那麼奇點的確切性質對於經視界落入的任何人來說都是生死攸關的！在那裏，人處於極爲脆弱的境地。儘管迄今爲止在本節所描述的主要結果和推測或許在未來的研究工作中還能幸存下來，但是關於奇點性質的意見，在最後搞清楚之前，很可能會多次改變。因此，只描述可能性，而不試圖作出判斷是保險的。

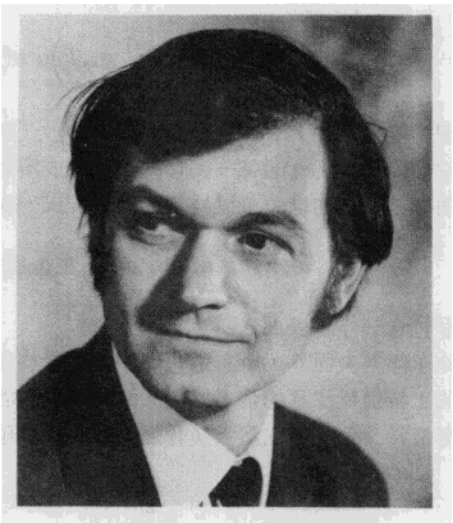
在現實坍縮終點的奇點的性質：四種可能性

可能性之一

在現實坍縮終點的奇點是一個無限潮汐引力的區域(無窮大曲率)，它把坍縮物質擠壓成無窮大密度。例如：Oppenheimer-Snyder (1939)球狀坍縮造成的非常特殊的均勻壓縮（§32.4）；還有 Podurets (1966) 描述的非常特殊不均勻但却是球形的擠壓；以及 Lifschitz 和Khalatnikov (1963a,b)的特殊不均

（接第940頁）

框 34.2 Roger Penrose: 1931年8月8日誕生於英國，Essex, Colchester



Roger Penrose起初是一位代數幾何學家。但從1952年到1955年以及從1957年到1960年他在劍橋期間，Hermann Bondi 和 Dennis Sciama 激起了他對廣義相對論的興趣。由於他的純數學基礎，他研究這個課題的方法與當時已經採用的那些方法都不相同。他特別感興趣於空時的整體光錐結構和零靜止質量場的方程，這兩者都在保形變換下保持不變。他利用這種保形不變性，用無窮遠處的零曲面 $\mathcal{I}^+$ 優雅而有力地論述了引力輻射問題。最近，這種興趣使他發展了扭轉子理論，這種扭轉子相應於 Minkowski 空間中保形羣的旋量。這些理論對研究空時的量子化問題提供了一種新的很有希望的手段。

他對保形幾何的興趣還引導他研究空時各點之間因果關係的性質。這種研究反過來又使他研究了空時中奇點出現的定理，這些定理可能是廣義相對論最重要的預言，因爲它們似乎意味着，空時有一個起點或者終點。

「如果僅從空時保形結構的觀點來考慮它，那麼無窮遠點就可與有限遠點在同樣的基礎上處理」

[Penrose 在 Infeld (1964)]

「這個論證將表明，存在停獲表面意味着——不管對稱性如何——奇點必然會發展」

[Penrose (1965b)]

「通常都認為僅當曲率達到10^{33}厘米$^{-1}$時引力的量子效應才是重要的，全部局域物理學是基於 Poincare 羣，它在尺度大於10^{-13}厘米時是局域對稱羣的很好近似。因而，當曲率一旦達到10^{13}厘米$^{-1}$時，毫無疑問，一些非尋常的局域效應就很可能會發生」

[Hawking 和 Penrose (1969)]

「這樣，我們就提出了或許是廣義相對論坍縮理論中沒有得到回答的最基本的的問題，即是否存在一位「宇宙監察員」他禁止裸露奇點出現，並在絕對事件視界內把每一個這種奇點覆蓋起來？」

[Penrose (1969)]

「在通常的情形，對於實用的目的，廣義相對論引人注目地與物理學的其餘部分保持一定距離——幾乎可以說是遠遠躲開。但在空時奇點，情況必定確實是顛倒過來！

「我不相信在對空時本身性質缺乏較深刻理解的同時，能夠真正理解基本粒子的性質。但是，如果我們涉及的只是某種水平的現象，在此水平上對空時的這種理解並非必須——而這幾乎可以包括當今物理學的全部——那麼，光滑流形的圖畫為討論這些現象提供了一個（過高的！）極好的框架。」

「或許，相對論最重要的一課是：空間和時間並不是可以彼此獨立地考慮的概念，它們必須聯合起來給出現象的四維圖畫，即用空時來描述」

[Penrose (1968a)]

「如果一組公式使得人們能夠處理大量的各類非現存的宇宙，那麼它（有效地）包含一些「任意參數」，只是這些參數的特殊值才相應于現實的世界。通常的方法是把空時看作賦 Riemann 微分流形，則流形的維數和度規的符號差就是兩個這種任意參數。」

「當我們把粒子定位時，粒子本質上是沿着零錐跳躍。產生的其他粒子本質上也是沿着零方向前後跳躍，並無明顯的連續性考慮，只留意它們自己的零錐的位置，對「拓撲」的考慮也只限於把這個術語用於圖形的結構時」

[Penrose (1966)]

「我的觀點是，終極的物理定律在本質上應該用組合原則找到它們最自然的表述，這就是說應該用有限的過程，諸如計數或其他基本上簡單的操作程序。因而，按照這種觀點，應當出現某種形式的分立的空時或組合空時」

[Penrose, 在 Klauder (1972)]

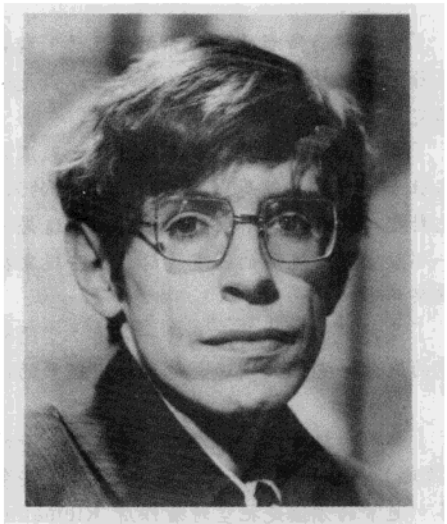
「複數是……物理定律結構中非常重要的組成部分。扭轉子理論把這一點更推進了一步，它暗示複數在定義空時自身性質時可能也是非常基本的。」

[Penrose 和 Maccallum (1973)]

「這種信念是很誘人的，即應用扭轉子可能提供空時曲率與量子過程之間的聯繫。這樣，粗略地說，量子（扭轉子）算子解釋上的不斷輕微『變化』導致空時的曲率」

[Penrose (1968b)]

框 34.3 Stephen W. Hawning: 1942年1月8日誕生於英國，牛津



在劍橋做 Dennis Sciama 的研究生時，Stephen Hawking 對相對論的早期興趣主要集中在空時奇點的問題。和 Ellis 一起，他證明一大類均勻宇宙學模型必定是奇異的。然後，受 Penrose 關於引力坍縮中出現奇點工作的鼓舞，他從1966年到1967年在倫敦皇家學會的一系列論文中發展了新的技巧，由此確立了任何似乎合理的廣義相對論宇宙學必定是奇異的這一重要結果。

他以後的研究工作大部分與黑洞有關。他想出了一系列極富創造性的論證，這些論證與 Israel 和 Carter 的工作一起，實質上證明了下述結果：廣義相對論中的（眞空）黑洞由 Kerr 度規描述，除了球形拓撲其他是不可能發生的，以及當兩個黑洞聚聚成一個黑洞時輻射的能量所必須滿足的確定的限制。

這些工作的某些具有重大的純數學的興趣（例如，奇點定理），某些與天體物理學有關（例如，與 Taylor 合作的關於大爆炸中氦氣產生的問題），某些與觀測有關（與 Gibbons 合作的關於在雙星系統中黑洞的可能性），甚至還有與實驗發展有關的（與 Gibbons 合作的關於引力波探測器的工作）。他在這些領域中不僅表現出了不可忽視的洞察力，深度和多才多藝，而且還表現出克服嚴重身體障礙、尋求和理解眞理的異乎尋常決心的天賦。

「觀測的微波背景輻射的各向同性表明，宇宙不是毫無旋轉就是很少……，這也許可看作 Mach 原理的一個實驗證據」

[Hawking (1969)]

「無疑，最重要的結果是……關於奇點發生的定理。這些定理似乎意味着，或者廣義相對論失敗，或者說可能有一些粒子，它們在某個時間之前（或之後）的歷史是不存在的。作者個人的意見是，應當量子引力效應變得重要時，理論才可能會失敗。」

「儘管我們從空時的定義中省略了奇點，但是我們仍然能夠說出殘存下來的『空洞』，在那裏，它們被存在的不完全短程線所切斷。」

「好的物理理論不僅應能正確地描述目前的實驗知識，還應能預言可以由實驗檢驗的新結果，預言離原來的實驗愈遠，則當它被證實時，理論的聲望就愈高。因而，奇點是否實際出現的觀測，將為強場中的廣義相對論提供強有力的檢驗。」

[Hawking (1966a)]

「引力輻射探測器的建造，可能會打開『引力天文學』的全新領域，它會像最近二十年來射電天文學一樣碩果累累……黑洞的碰撞……在把靜止－質量能量轉化為輻射方面將比核反應有效得多，核反應只能釋放靜止－質量能量的百分之一。此外，由較小黑洞碰撞而形成的黑洞可能經受更進一步的碰撞，釋放更多的能量，而經過充分核反應的物質却不可能用同樣的方式產生任何更多的能量……我們正目擊着在我們的銀河系中心某種東西的真正的災變」

[Hawking (1972b)]

「人們可能暗示，在目前的這種膨脹之前曾有過坍縮時期。在此時期內，局域不均勻性變得更不均勻，並且出現了孤立的奇點。絕大部分物質避開了奇點，重新膨脹，給出了現在觀測到的宇宙。」

「看來，我們應當圍繞着曲率半徑小於，例如，10^{-16} 厘米的區域畫一曲面。在此曲面向着我們的一側，空時流形圖可能是合適的，但是在另外一側，空時的結構究竟如何，我們毫無所知」

[Hawking 和 Ellis (1968)]

「假定在非常強的場中必須考慮量子效應。但是，直到曲率半徑變為 10^{-14} 厘米量級，量子效應才會變得重要，以實用的觀點來看，這樣小的尺度已經是相當奇異的了。」

「曾經有人提出過這樣的觀點，即由於奇點是如此令人討厭，以致如果Einstein 方程預言存在奇點，那麼這將是必須改造它的充分理由。然而，物理理論的真正檢驗並不在於它所預言的結果是否在美學上吸引人，而在於它們是否與觀測相符。迄今為止，還沒有觀測能夠證明奇點不出現」

[Hawking (1966b)]

「已證明，穩定黑洞必定具有拓撲上為球形的邊界，並且如果黑洞是旋轉的，則它必定是軸對稱的。這些結果，與 Israel 和 Carter 的合在一起，極大地有助於確立任何穩定黑洞是 Kerr 解的猜想」

[Hawking (1972a)]

「我們觀測到的宇宙是各向同性的這一事實，僅僅是我們存在的一個後果」

[Collins 和 Hawking (1973)]

勻的「類 Kasner」擠壓；以及極爲重要的非常普遍的「混主」擠壓(第30章)，在均勻情況下的這種擠壓是由 Misner (1969b) 以及 Belinsky 和 Khalatnikov (1969a) 發現的，而非均勻情況則由 Belinsky 和 Khalatnikov (1969b,1970) 以及 Khalatnikov 和 Lifschitz (1970) 作了分析。混主奇點——在全部明確已知的奇點中只有這種奇點——在下述意義上是一般的：如果輕微但任意地擾動將演化爲混主奇點的空時的初始條件，則作爲最後結果的、受到擾動的空時同樣會演化爲混主奇點。因此，今天 (1973年) 流行的意見是，眞實的坍縮可能會在視界內產生一混主奇點。不過這種意見也許以後會改變。

可能性之二

奇點是類時短程線或零短線終止的空時區域，終止的原因不是由於無限大的潮汐引力或者無限大的擠壓，而是由於其他更微妙的病態。例如：「Taub-NUT空間」［見 Misner 和 Taub (1968)］。對於爲了顯示各種病態而特別創造出來的其他例子，見 Geroch (1968)。

可能性之三

奇點的「大小」和影響可能都很有限，以致全部或絕大部分坍縮物質都能成功地避開奇點。在物質通過視界落下之後，不可能爆發越出視界返回；視界是單向薄膜，不讓任何進來的物質後退出去。與此相反，物質可能達到某種最大程度地但有限地壓縮，然後再爆發而進入其他空時的區域（多連通的空時拓撲；「蛀孔」）。坍縮帶電球的解析解確實有這種方式的再爆發［Novikov (1966); de la Cruz 和 Israel (1967)；Bardeen (1968)；見圖34.4］。這種過程要求蛀孔的「爆發」終點納入宇宙的初始條件之中，而且其質量和角動量（通過 Kepler 軌道和坐標系拖曳測出）應嚴格地等於落入黑洞一端的那些。這在物理上看來是難以置信的。這種「爆發」也是如此。

其他可能性

上述三種可能性的各種組合。

空時的量子化能把宇宙從奇點拯救出來嗎？

如果像我們今天所懷疑的那樣，奇點是非常實際的具有無限曲率的那種類型，那麼我們就不得不面對 John Wheeler (1964a) 關於「最後狀態的論點」的最原始的和最令人不安的形式。當面對這一論點時，Wheeler 論證說，無限曲率的奇點標誌着經典廣義相對論的失效——由於量子引力現象的介入而被迫失效（見第44章）。引力的量子化能否確實把空時從這類奇點中拯救出來呢，這在「廣義相對論和量子物理學的激情婚姻完滿成功之前」是無法知道的［Wheeler (1964a)；以及 Misner (1969c) 和框 30.1 的最後一節］。

第八篇

引力波

在本編中，讀者航行在曲率波紋的狂暴海洋上，尋覓產生波紋的風暴之神，並與使那海洋上空若明若暗的電磁的迷霧和熱的迷霧艱苦抗爭。

PDG

第三十五章　引力波的傳播

Born:「我願向 Einstein 先生請教一個問題，即在您的理論中引力作用的傳播有多快。我不懂為什麼它恰好是以光速傳播。在這些概念之間一定有着非常複雜的聯繫。

Einstein:「在引入場中的擾動為無窮小的情況下，寫下這些方程是極為簡單的。這時的 g 與不存在擾動時的只有無窮小的差別。從而擾動以與光速相同的速度傳播。」

Born:「但是，對於大的擾動，事情確實非常複雜嗎？」

Einstein:「是的。在數學上這是一個很複雜的問題。特別困難的是找出這些方程的嚴格解，因為這些方程是非線性的。」

節錄自1913年秋季 Einstein 在 Vienna（維也納）作的題的「引力問題的現狀」講座之後的討論，這發生在他得出最後的場方程之前二年。[Einstein, 1913a]

§ 35.1　觀點

研究一種又一種理想化情況。列出清單：理想化條件，它們的性質，分析它們的技巧等。這是掌握像廣義相對論這樣複雜課題的唯一方法！

球對稱是在最近十二章的大部分內容中占主導地位的理想化條件。與其他理想化條件，如把物質看作理想流體，把宇宙看作均勻的等等合在一起，得出了對恒星，對宇宙學，對引力坍縮的深入了解。

現在把注意力轉向一類完全不同的理想化條件，它與任何對稱性考慮完全無關：這是「引力波」的理想化。

引力波與海洋上的水波比較：

正如人們把越過海洋滾動的小波紋稱爲「水波」那樣，人們把越過空時滾動的小波紋命名爲「引力波」。什麼的波紋？海洋表面形狀的波紋；空時形狀

我們深深地感謝 James M. Nester 先生，他發現並改正了本章和本書其他十幾章的方程中的許多錯誤。

(1)波紋的近似性質

（即曲率）的波紋。兩類波都是理想化情況。人們無法無限精確地描述，在任意時刻哪一滴水在波中，哪一滴水在下面的海水裏；類似地人們也無法精確地描述，空時曲率的哪一部分在波紋中，哪一部分在宇宙背景中。但是人們幾乎能作到這一點；否則無從奢談「波動」！

(2)局域觀點與大尺度觀點

從划艇上看海洋。波動是主要的海景。每隔30英尺或略小於30英尺，海面的角度和水平呈現出改變。這些改變在傳播。它們遵循簡單的波動方程

$$\left(\frac{1}{g^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\text{表面高度})=0。$$

現在，更完善些。從宇宙飛船上注意海洋表面的大尺度曲率——由於地球是球形造成的曲率，由於太陽和月亮對水的吸引造成的曲率。隨着波經過長距離的傳播，此曲率使波前彎曲，並稍稍改變了它們的簡單的波動方程。在大的距離尺度上，重要的還有波之間的非線性相互作用，與風的相互作用，以及由於地球自轉而產生的 Coriolis 力，等等。

空時也類似。按照 Einstein 的理論，通過宇宙傳播的必定是空時曲率中小尺度波紋的複雜圖樣，這種小尺度波紋產生於雙星，超新星，引力坍縮，以及星系核的爆發。局域地（「划艇觀點」）可以不管這些波紋與空時大尺度曲率的相互作用，以及它們彼此之間的非線性相互作用。人們可以假托波在平直空時中傳播；並且可以爲它們寫出簡單的波動方程。但是，在整體上不能這樣作。歸因於寧靜恒星和星系的大尺度曲率將會產生紅移並使波前變形；並且波本身携帶的能量將有助於產生大尺度曲率。本章將用兩種觀點來論述：局域觀點（§35.2—§35.6）和整體觀點（§35.7—§35.15）。

§35.2 眞空中「線性理論」的回顧

引力波的線性理論

暫時，把宇宙中的引力波理想化爲通過平直的、空的空時傳播的（局域觀點）。那麼，就可以用在第18章中引入的「引力線性理論」來作分析。

記得線性理論是廣義相對論的弱場近似。在寫出並求解線性理論的方程時，把空時當作好像是平直的（狹義相對觀點）；但與實驗的聯繫却要通過廣義相對論的彎曲空間形式得出。

更準確地說，線性理論用對稱的、二階張量場 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 描述引力。在標準（「Lorentz」 或 Hilbert）規範中，這個場滿足「規範」條件或「輔」條件（坐標條件）

(1)Lorentz規範條件

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}=0。 \tag{35.1a}$$

（此處，以及全部線性理論，$\bar{h}_{\mu\nu}$ 的指數與 Minkowski 度規 $\eta_{\alpha\beta}$ 一起升、降。）在這個規範中，眞空引力場的**傳播方程**是熟悉的波動方程

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu}\equiv\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha}=0。\qquad(35.1b)$$

(2)**傳播方程**

儘管寫出方程（35.1）和求解時，認爲空時是不彎曲的，但在線性理論中空時實際上是彎曲的。方程（35.1）的總體慣性系僅僅幾乎是慣性的。在其中，度規分量實際上是

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}+O([h_{\mu\nu}]^2);\qquad(35.2a)^*$$

(3)**度規**

並且「度規微擾」 $h_{\mu\nu}$ 與「引力場」 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 的關係爲

$$h_{\mu\nu}=\bar{h}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu},\quad \bar{h}_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu},$$
$$h\equiv h_\alpha{}^\alpha=-\bar{h}=-\bar{h}_\alpha{}^\alpha。\qquad(35.2b)$$

度規(35.2a)以通常的廣義相對論方式支配着試驗粒子的運動，光的傳播，等等。

回憶支配 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 的方程（35.1）的來源。輔條件 $\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha}=0$ 是通過限定坐標系强加的；從而眞空中的 Einstein 場方程化爲 $\Box\bar{h}_{\mu\nu}=0$.

實際上，如框 18.2 所示，線性理論的坐標並不能由條件 $\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha}=0$ 完全確定。剩餘的含混體現在進一步的「規範變換」（無限小坐標變換）ξ_μ 之中，爲了保留條件（35.1a），ξ_μ 應滿足下述限制條件

(4)**剩餘規範自由度**

$$\xi_{\mu,\alpha}{}^{,\alpha}=0。\qquad(35.3a)$$

這樣，

$$x^\mu{}_{\text{新}}=x^\mu{}_{\text{舊}}+\xi^\mu\qquad(35.3b)$$

爲坐標變換，而

$$\bar{h}_{\mu\nu\text{新}}=\bar{h}_{\mu\nu\text{舊}}-\xi_{\mu,\nu}-\xi_{\nu,\mu}+\eta_{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha}\qquad(35.3c)$$

爲規範變換。所有這些都曾在第18章推導和討論過。

§ 35.3　線性理論中的平面波解

線性方程 $\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha}=\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha}=0$ 全部解中，最簡單的解是單色平面波解，

單色平面波

$$\bar{h}_{\mu\nu}=\Re[A_{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha)]。\qquad(35.4a)$$

---

* 更接近嚴格的處理，定義 $h_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}$，並把小的修正 $O(h[_{\mu\nu}]^2)$ 放入場方程。：

$$\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha}=O([h_{\mu\nu}]^2{}_{,\alpha}),\quad \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha}=O([h_{\mu\nu}]^2{}_{,\alpha\beta})。$$

此處$\mathfrak{Re}$ [……] 意味着只取方括號內表達式的實部；$A_{\mu\nu}$（振幅度）和 k_μ（波矢）是常數，它們分別滿足

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (\boldsymbol{k}\text{爲零矢量}), \tag{35.4b}$$

$$A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0 \quad (\boldsymbol{A}\text{ 與 }\boldsymbol{k}\text{ 正交}), \tag{35.4c}$$

［分別爲 $\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = 0$ 和 $\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ 的結果；對與此波相聯繫的眞實物理量，卽曲率張量，參看下面的(35.10)式］，顯然，這個解描述頻率爲

$$\omega \equiv k^0 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}, \tag{35.5}$$

的波，它以光速沿 $(1/k^0)(k_x, k_y, k_z)$ 方向傳播。

平面波振幅有二個自由度（二個偏振方向）

初看起來，這個平面波的振幅 $A_{\mu\nu}$ 似乎有六個獨立的分量（共十個，由於四個正交限制 $A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0$ 減少了四個）。但這是不對的！正如高階讀者在第21章已學過的那樣，廣義相對論中的引力場有二個動力學自由度而不是六個。上述分析是在何處誤入歧途的呢？

誤入歧途是由於忘記了與規範自由度（35.3）有牽連的任意性。平面波矢量

$$\xi^\mu \equiv -iC^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha), \tag{35.6}$$

具有四個任意常數 C^μ，它引起的規範變換能任意地改變 $A_{\mu\nu}$ 的六個獨立分量中的四個。選擇特定的規範卽可擺脫這種任意性。

§ 35.4　橫向無迹（TT）規範

橫向無迹（TT）規範

(1)對平面波

選擇一四維矢量 $\boldsymbol{u}$ ——並非只在某事件處，而是同一 $\boldsymbol{u}$ 貫穿全部空時（狹義相對論觀點！）。通過特定的規範變換（練習35.1），加上下述條件

$$A_{\mu\nu}u^\nu = 0。 \tag{35.7a}$$

這些只是對 $A_{\mu\nu}$ 的三個約束而不是四個，因爲其中之一——$k^\mu(A_{\mu\nu}u^\nu)=0$——由於(35.4c)式已經得到滿足。作爲第四個約束條件，採用規範變換（練習35.1）使得

$$A^\mu{}_\mu = 0。 \tag{35.7b}$$

現在，對於振幅的十個分量，已經有了八個約束條件，$A_{\mu\alpha}u^\alpha = A_{\mu\alpha}k^\alpha = A_\alpha{}^\alpha = 0$；並且坐標系（規範）現在已經嚴格地確定了。因而，$A_{\mu\nu}$ 的兩個餘下的自由分量代表平面引力波中的二個自由度（兩個偏振）。

在 $u^0=1$, $u^j=0$ 的 Lorentz 參照系中，以 k^α 不明顯出現的形式，重新表述八個約束條件 $A_{\mu\alpha}u^\alpha=A_{\mu\alpha}k^\alpha=A^\alpha{}_\mu=0$ 是有用的：

$$h_{\mu 0}=0,\quad \text{即 } h_{jk} \text{ 中只有空間分量是非零的；} \tag{35.8a}$$

$$h_{kj,j}=0,\quad \text{即空間分量是無散的；} \tag{35.8b}$$

$$h_{kk}=0,\quad \text{即空間分量是無迹的。} \tag{35.8c}$$

（此處和此後，凡重複的空間指標均表示求和，即使兩個指標都是下標也一樣；例如，$h_{kk}\equiv\Sigma_{k=1}^{3}h_{kk}$。）注意，因爲 $h=h_\mu{}^\mu=h_{kk}=0$，故在此規範中 $h_{\mu\nu}$ 和 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 之間沒有區別。

(2)對任何波

現在，把注意力離開平面波轉向線性理論中的任意引力波。任何電磁波都可以分解爲平面波的疊加，引力波也是如此。對於參預疊加的每一個平面波，都引入一特定的規範 (35.8)。注意，這些規範條件與 $h_{\mu\nu}$ 都是線性關係。因此，任何波也都將滿足條件 (35.8)。由此產生定理：選定線性理論的特定整體 Lorentz 參照系（即選定特定的四維速度 $\mathbf{u}$）。在該參照系（其中 $u^\alpha=\delta^\alpha{}_0$）中，考察一任意形式的特定引力波。則總是可以找到一個規範，使得在其中 $h_{\mu\nu}$ 滿足約束條件 (35.8)。另外，在此規範中只有 h_{jk} 是非零的。因此，只需利用六個波動方程

$$\Box h_{jk}=h_{jk,\alpha}{}^{,\alpha}=0。 \tag{35.9}$$

任何滿足約束條件 (35.8) [但不一定滿足波動方程 (35.9)] 的對稱張量稱爲橫向-無迹 (TT) 張量——稱爲橫向是因爲它是純空間的 ($h_{0\mu}=0$)，並且當作爲波來考慮時，對其自身的傳播方向而言是橫向的 ($h_{ij,j}=h_{ij}k_j=0$)；稱爲無迹是因爲 $h_{kk}=0$。最一般的純空間張量 S_{ij} 可以分解 [參看 Arnowitt, Deser 和 Misner (1962) 或框 35.1] 爲三個部分：S_{ij}^{TT} 部分，它是「橫向的和無迹的」；$S_{ij}^{T}=\frac{1}{2}(\delta_{ij}f_{,kk}-f_{,ij})$ 部分，它是「橫向」的 ($S_{ij,i}^{T}=0$)，但是完全取決於給出 S 迹的函數 f ($S_{kk}^{T}=\nabla^2 f$)；以及 $S_{ij}^{L}=S_{i,j}^{L}+S_{j,i}^{L}$ 部分，它是「縱向」的並取決於矢量場 S_i^L。在線性理論中，h_{ij}^{L} 是 $h_{\mu\nu}$ 的純規範部分，而 h_{ij}^{T} 和 h_{ij}^{TT} 是 $h_{\mu\nu}$ 的規範不變量部分。使得在其中 $h_{\mu\nu}$ 化爲其橫向無迹部分的特定規範稱爲 TT 規範，或橫向無迹規範。定義這一規範的條件 (35.8) 可以概括爲

空間張量的分解

$$h_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}^{TT}。 \tag{35.8d}$$

如練習35.2所說明，只有純波動（而不是有源的線性場方程 $\Box h_{\mu\nu}=-16\pi T_{\mu\nu}$ 的比較一般的解）才能化爲 TT 規範。

TT 規範中的曲率張量

在 TT 規範中，Riemann 曲率張量的時空分量

$$R_{j0k0}=R_{0j0k}=-R_{j00k}=-R_{0jk0}$$

具有特別簡單的形式［參看（18.9）式和練習 18.4］:

$$R_{j0k0}=-\frac{1}{2}h^{TT}_{jk,00}\text{。} \tag{35.10}$$

記得曲率張量是規範不變量（練習 18.1）。由此得出 $h_{\mu\nu}$ 不能把它的分量減少得比它在 TT 規範中的分量更少。

框 35.1 描述利用在某個其他規範中 $h_{\mu\nu}$ 的知識，來計算 $h^{TT}_{\mu\nu}$ 的方法。

框 35.1 計算波的「橫向無迹部分」的方法

問題：設已知線性理論任一規範中的引力波 $h_{\mu\nu}(t,x^j)$。如何在橫向無迹規範中計算波的度規微擾 $h^{TT}_{\mu\nu}(t,x^j)$?

解 1（只對波適用；即只適用於$\Box\bar{h}_{\mu\nu}=0$的情況）。在初始規範中計算 **Riemann** 張量的分量R_{j0k0}；然後把方程（35.10）積分

$$h^{TT}_{jk,00}=-2R_{j0k0} \tag{1}$$

得出 h^{ij}_{TT}。當波爲單色時，$h_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}(x^j)e^{-i\omega t}$; 這樣，(1)的解具有簡單的形式

$$h^{TT}_{jk}=2\omega^{-2}R_{j0k0}\text{。} \tag{2}$$

解 2（只對平面波適用）。以代數方法用算子

$$P_{jk}=\delta_{jk}-n_jn_k\text{。} \tag{3}$$

「投影得出」TT 分量。式中

$$n_k=k_k/|\boldsymbol{k}|$$

是傳播方向的單位矢量。試證明，P_{jk} 是在橫向平面上的投影算子：

$$P_{jl}P_{lk}=P_{jk}\text{，}\qquad P_{jk}n_k=0\text{，}\qquad P_{kk}=2\text{。}$$

這樣，h_{jk} 的橫向部分是 $P_{jl}h_{lm}P_{mk}$（或用矩陣符號，爲 PhP）；並且 TT 部分是此量減去其迹：

$$h^{TT}_{jk}=P_{jl}P_{mk}h_{lm}-\frac{1}{2}P_{jk}(P_{ml}h_{lm})$$

（指標符號），(4)

$$h^{TT}=PhP-\frac{1}{2}P\mathrm{Tr}(Ph)$$

（矩陣符號）。(4′)

給出 h^{TT}_{ij} 的運算序列從 h_{ij} 中切出兩個部分。切出的第一部分是

$$h^{T}_{jk}=\frac{1}{2}P_{jk}(P_{lm}h_{lm})\text{，} \tag{5}$$

它是橫向的，但由其自身的迹構成，

$$h^{T}\equiv\mathrm{Tr}(PhP)=\mathrm{Tr}(Ph)=P_{lm}h_{ml}\text{。}$$

練習 35.1　把平面變換到 TT 規範

設在線性理論的某個任意規範中，給定形式爲 (35.4) 的平面波。試明確寫出把它轉成 *TT* 規範的變換。［提示：在 *TT* 規範的四維速度 u^μ 爲 $u^0=1$, $u^j=0$ 的 Lorentz 參照系中工作。通過要求 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 滿足 *TT* 約束條件(35.7)，解出母函數(35.6)的四個常數 C^μ。］

練習 35.2　TT 規範存在的限制

儘管在線性理論中任何引力波的度規微擾 $h_{\mu\nu}$ 都可以表示成 *TT* 形式 (35.8)，非輻射的 $h_{\mu\nu}$ 却不能如此。例如，考慮旋轉的球形恒星的外場，它就不能寫成平面波的疊加：

練習

由 h_{ij} 中切出的第二部分是縱向部分

$$h^L{}_{jk}=h_{jk}-P_{jl}P_{mk}h_{lm}$$
$$=n_ln_kh_{jl}+n_jn_lh_{lk}-n_jn_k(n_ln_mh_{lm}); \tag{6}$$

或

$$h^L=h-PhP。 \tag{6'}$$

解 3（一般情形）。對任意對稱數組 $h_{ij}=\int h_{ij}(k,t)\exp(ik_mx^m)d^3k$ 作 Fourier 分析，並把解 2 的公式(4)單獨地用於每個 Fourier 分量。但注意，在這種情形，投影算子可以寫成與方向無關的形式

$$P_{jk}=\delta_{jk}-\frac{1}{\nabla^2}\partial_j\partial_k \tag{7}$$

或

$$n_ln_m=\frac{1}{\nabla^2}\partial_l\partial_m \tag{8}$$

（但在公式中要把所有 h 項寫在右側），因爲在 Fourier 積分中 $\partial_l=ik_l$。當然，算子 $1/\nabla^2$ 也可以用其他方法估算，例如，除了用 Fourier 分析外，同樣也可用 Green 函數方法。［量 $\psi=\nabla^{-2}f$ 代表 Poisson 方程 $\nabla^2\psi=f$ 的解 ψ。］這個方法的優點在於它在某種解析計算中的威力（參看，例如，下面）。

規範變換。由於規範變換造成的 $h_{\mu\nu}$ 的改變是

$$\delta h_{\mu\nu}=-(\partial_\nu\xi_\mu+\partial_\mu\xi_\nu)。 \tag{9}$$

這個改變的橫向部分爲

$$P_{jl}P_{km}(\delta h_{lm})=-P_{jl}P_{km}(\partial_l\xi_m+\partial_m\xi_l)=0。 \tag{10}$$

爲了對平面波證明此公式（解 2），請注意 $\partial_l=i|\boldsymbol{k}|n_l$ 和 $P_{jl}n_l=0$. 爲了普遍地證明同樣的結果，可利用(7)式給出下述結果

$$P_{jl}\partial_l=0。 \tag{11}$$

這樣，(4)式的 h^{TT}_{ij} 和(5)式的 h^T_{ij} 兩者都是規範不變量：

$$\delta h^{TT}_{ij}=\delta h^T_{ij}=0。 \tag{12}$$

在空的空間（$T_{\mu\nu}=0$）內，h^T_{ij} 和另一個規範不變量 $\tilde{h}_{0k}$（此量在練習 35.4 中討論）兩者都將由於場方程而消失。

$$h_{00}=\frac{2M}{r},\quad h_{jk}=\frac{2M}{r}\delta_{jk},\quad h_{0k}=-2\epsilon_{klm}\frac{S^l x^m}{r^3},$$

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

［見 (19.5) 式］。式中M是恒星的質量，S 是恒星的角動量。試證明，它不能表示成TT規範。［提示：計算 R_{j0k0}，並借助於 (35.10) 式從它推出 h^{TT}_{jk}。然後 ，在原先的規範和新的規範中計算 R_{0xyz}，並發現它們不相符——不僅由於質量項，還由於角動量項。］

練習 35.3 圓柱形引力波

爲了恢復可能因練習35.2而發生動搖的信心，考慮輻射解，它的唯一的非零分量 $h_{\mu\nu}$ 是

$$\bar{h}_{zz}=4A\cos(\omega t)J_0(\omega\sqrt{x^2+y^2}),$$

式中 J_0 爲 Bessel 函數。這個解代表內向與外向的圓柱形引力波的疊加 。對此引力場，計算 R_{j0k0} ，並由它推出 h^{TT}_{jk}。然後在原先的規範和 TT 規範中計算 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的幾個其它分量（例如 R_{xyxy}），並證明這兩個答案是相同的。

練習 35.4 度規微擾的非 TT 部分［高階］

從框 35.1 建立公式 $h^T=\nabla^{-2}(h_{kk,ll}-h_{kl,kl})$; 然後， 通過證明 $h_{kk,ll}-h_{kl,kl}$ 是規範不變的，直接地證明 h^T 的規範不變性。 利用 $\delta h_{ij}=\xi_{i,j}+\xi_{j,i}$. 類似地證明由下式定義的 $\tilde{h}_{0k}$ 是規範不變的

$$\tilde{h}_{0k}=\bar{h}_{0k}-\nabla^{-2}(\bar{h}^{\alpha}{}_{0,\mu k}+\bar{h}_{kl,l0})。$$

試從規範不變的線性場方程 (18.5) 式證明

$$\nabla^2 h^T=-16\pi T^{00},$$
$$\nabla^2\tilde{h}_{0k}=-16\pi T_{0k},$$

因此，對於在空的空間中的波，h^T 和 $\tilde{h}_{0k}$ 必定爲零。

§ 35.5 線性引力波中的短程線偏離

引力波對二個試驗粒子間隔的作用

引力波的振動曲率張量引起二個鄰近的試驗粒子A和B之間間隔的振動。從A的觀點考察這種振動。選用一個坐標系（「A的固有參照系」），其空間原點爲 $x^j=0$，依附於A的世界線（共動坐標系）；其坐標時間等於A的原時（在世界線 $x^j=0$ 上 $x^0=\tau$）；其正交的空間軸附在A所携帶的迴轉儀上（「非旋轉參照系」）。這個適當選定的坐標系，不僅在A的短程世界線上的某個事件 $\mathscr{P}_0$ 處是局域 Lorentz 系，並且在沿着 A 的世界線的所有事件處，都是局域 Lorentz 參照系：

$$ds^2=-dx^{0^2}+\delta_{jk}dx^j dx^k+O(|x^j|^2)dx^j dx^k。\qquad(35.11)$$

［證明：這樣一個「固有參照系」是在高階 §13.6 中爲加速粒子建立的。當把該處導出的線元 (13.71) 專用於粒子 A 時（因爲 A 自由下落，故 $a_j=0$；因爲空間軸附在迴轉儀上，故 $\omega^j=0$）即化爲上述形式，就像在(13.73)式中一樣。］

當引力波通過時，產生振動的曲率張量，它使得由粒子 A 到粒子 B 的間隔矢量 $\boldsymbol{n}$ 發生擺動：

$$D^2n^j/d\tau^2=-R^j{}_{0k0}n^k=-R_{j0k0}n^k。\tag{35.12}$$

間隔矢量的分量就是粒子 B 的坐標，別無其他，因爲粒子 A 在它自身固有參照系的原點；於是

$$n^j=x_B{}^j-x_A{}^j=x_B{}^j。$$

另外，在 $x^j=0$［在該處完成 (35.12) 式的計算］處，對於一切 $x^{\hat{0}}$, $\Gamma^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 均爲零；因此 $d\Gamma^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}/d\tau$ 也爲零。這就把 $D^2n^j/D\tau^2$ 中全部 Christoffel 符號改正項都消去了。因此，(35.12) 式簡化爲

$$d^2x_B{}^j/d\tau^2=-R_{j0k0}x_B{}^k。\tag{35.13}$$

存在着一個 TT 坐標系，當精確到一階度規擾動 h^{TT}_{jk} 時，它與粒子 A 以及它的固有參照系一起運動。當精確到一階 h^{TT}_{jk} 時，TT 坐標時 t 與原時 τ 相同，而且 $R^{TT}_{j0k0}=R_{j0k0}$。因此，(35.13) 式可以改寫爲

$$d^2x_B{}^j/dt^2=-R^{TT}_{j0k0}x_B{}^k=\frac{1}{2}(\partial^2h^{TT}_{jk}/\partial t^2)x_B{}^k。\tag{35.14}$$

爲了具體化，假設在波到達之前，粒子彼此相對靜止（當 $h^{TT}_{jk}=0$時，$x_B{}^j=x_{B(0)}{}^j$）。那麼，運動方程 (35.14) 式可積分給出

$$x_B{}^j(\tau)=x_{B(0)}{}^k\left[\delta_{jk}+\frac{1}{2}h^{TT}_{jk}\right]_{\text{在A的位置}}。\tag{35.15}$$

此式描述了在 A 的固有參照系中測出的由波所造成的 B 的位置的振動。

相對加速度的橫向性質

現在，轉向平面波的特殊情形。假設試驗粒子的間隔處於波傳播的方向，則波無法影響間隔；不存在振動：

$$h^{TT}_{jk}x_{B(0)}{}^k\propto h^{TT}_{jk}k_k=0。$$

只有在橫向的間隔振動；波是橫向的，不僅表現在它的數學描述 (h^{TT}_{jk}) 上，並且也表現在它的物理效果上（短程線偏離）！

練習

練習 35.5 相對振動的另一種計算

引入一 TT 坐標系，使得在 $t=0$ 時，兩個粒子都是靜止的。試應用短程線方程證明，其後兩個粒子將永遠在 TT 坐標系中保持靜止，而不管波的作用如何。這意味着，間隔矢量的反變分量在 TT 坐標系中永遠是常數：

$$n^j = x_B{}^j - x_A{}^j = \text{常數}。$$

稱此常數爲 $x_{B(0)}{}^j$。把這些分量變換到共動正交坐標系；答案應爲 (35.15) 式。

§35.6 平面波的偏振

引力波的偏振：

(1)線偏振狀態，「+」和「×」

橫向的短程線偏離提供了研究和表徵平面波偏振的方法。

考慮沿 z 方向傳播的平面單色波。在 TT 規範中，約束條件 $h^{TT}_{0\mu}=0$, $h^{TT}_{ij,j} \equiv ik_j h^{TT}_{ij}=0$ 和 $h^{TT}_{kk}=0$ 揭示，$h^{TT}_{\mu\nu}$ 的僅有的非零分量爲

$$\begin{aligned} h^{TT}_{xx} &= -h^{TT}_{yy} = \text{Re}\{A_+ e^{-i\omega(t-z)}\}, \\ h^{TT}_{xy} &= h^{TT}_{yx} = \text{Re}\{A_\times e^{-i\omega(t-z)}\}。 \end{aligned} \tag{35.16}$$

振幅 A_+ 和 $A_\times$ 代表偏振的兩個獨立模式。

對於引力平面波（圖 35.2），與對電磁平面波（圖 35.1）一樣，可以把一給定的波分解爲兩個線性偏振分量，或者，也可分解爲兩個圓偏振分量。

$\omega(t-z)$	對下述偏振的位移 δx			
	e_x	e_y	e_R	e_L
$2n\pi$	•	•	↑	↓
$\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$	←•	↓	←•	←•
$(2n+1)\pi$	•	•	↓	↑
$\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi$	•→	↑	•→	•→

圖 35.1
平面電磁波。
偏振矢量：e_P
矢勢

$$A = \text{Re}[A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_P]$$

試驗電荷的加速度：

$$a = (q/m)E = (q/m)(-\partial A/\partial t) = \text{Re}[i\omega(q/m)A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_P]$$

電荷相對於慣性參照系的位移

$$\delta x = \text{Re}\left[\frac{q/m}{i\omega} A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_P\right]$$

對於線性偏振波，電磁理論的單位偏振矢量是 e_x 和 e_y。試驗電荷遇到偏振矢量爲 e_x 的平面波時，將相對慣性參照系沿 x 方向振動；對 e_y 情況類似。以此類推，引力波的單位線偏振張量是

$$e_+ \equiv e_x \otimes e_x - e_y \otimes e_y, \qquad (35.17a)$$

$$e_\times \equiv e_x \otimes e_y + e_y \otimes e_x。 \qquad (35.17b)$$

當 $A_\times = 0$ 時，平面波 (35.16) 具有偏振 e_+，並可重新寫爲

$$h_{jk} = \Re\{A_+ e^{-i\omega(t-z)} e_{+jk}\}。 \qquad (35.18)$$

它對於改變兩個試驗粒子之間短程線間隔的效應取決於它們的間隔的方向。爲了同時看出在所有方向上的效應，考慮圍繞着中心粒子在橫向 (x, y) 平面內的試驗粒子圓環（圖 35.2）。當平面波 (35.18)（偏振 e_+）通過時，原來在中心粒子的固有參照系中測出的圓環，變形爲其主軸在 x, y 方向並內外振動的橢圓：

等等。偏振爲 $e_\times$ 的波與此不同（見圖 35.2），圓環在與 x, y 方向夾角45度處變形：　　等等。

(2)圓偏振狀態

對於圓偏振波，電磁理論的單位偏振矢量爲

$$e_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y), \qquad e_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y) \qquad (35.19)$$

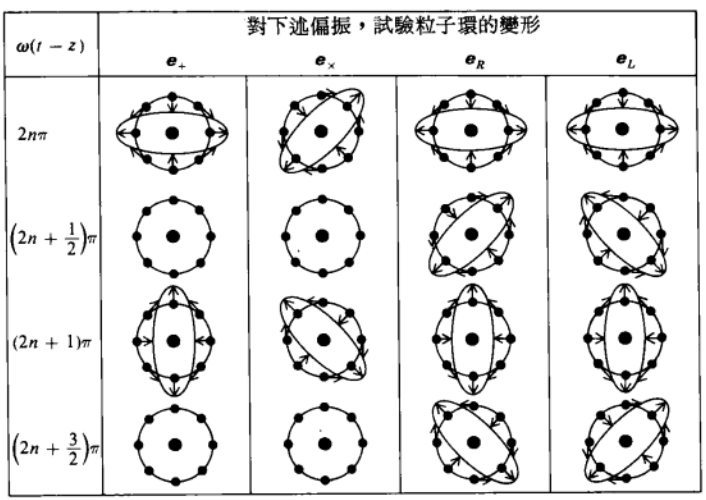


圖 35.2
平面引力波。偏振張量：e_P
度規微擾：

$$h_{jk} = \Re[A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk}]$$

兩個試驗粒子之間的潮汐加速度：

$$\frac{D^2 n^j}{D\tau^2} = -R_{j0k0} n_k = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial t^2} n_k$$

$$= \Re\left[-\frac{1}{2}\omega^2 A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk} n_k\right]$$

兩個試驗粒子之間的間隔：

$$n_j = n_j{}^{(0)} + \Re\left[\frac{1}{2} A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk} n_k{}^{(0)}\right]$$

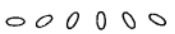
在試驗粒子A的固有參照系中，試驗粒子B的位置（圖中，A爲中心粒子，B爲任何一個外圍粒子），

$$x_B{}^j = x_{B(0)}{}^j + \Re\left[\frac{1}{2} A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk} x_{B(0)}{}^k\right]$$

類似地，引力理論的單位圓偏振張量爲

$$\mathbf{e}_R=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + i\mathbf{e}_\times),\qquad \mathbf{e}_L=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - i\mathbf{e}_\times)。\tag{35.20}$$

遇到偏振爲 $\mathbf{e}_R$ 的電磁波時，試驗電荷沿右手方向（即對於向着讀者傳播的波，沿反時針方向）作環繞運動；對於 $\mathbf{e}_L$，電荷沿左手方向（順時針）作環繞運動（見圖 35.1）。類似地（圖 35.2），偏振爲 $\mathbf{e}_R$ 的引力波使試驗粒子環的變形沿右手方向旋轉，



而 $\mathbf{e}_L$ 波使它沿左手方向旋轉。環上的各個試驗粒子相對於中心粒子沿小圓轉動。但是，正如海洋波中的水滴並不隨着波浪移動，同樣，環中的粒子也並不隨着旋轉的橢圓圍繞中心粒子運動。

引力場的自旋-2性質以及它和波的對稱性的關係

從圖35.2注意到，在任何時刻，引力波在繞它的傳播方向旋轉 180° 時是不變的。對於電磁波，相應的角度（圖 35.1）是 360°，對於中微子波是720°。這種行爲，與這些波的量子力學型式所對應的零質量粒子的自旋緊密相關；引力子的自旋爲 2，光子自旋爲 1，中微子自旋爲½。自旋爲 S 的粒子的經典輻射場，在繞其傳播方向旋轉 $360°/S$ 時，總是不變的。

任意的自旋爲 S 的輻射場準確地有兩個正交的線偏振狀態。它們彼此的傾角爲 $90°/S$；因而，對於自旋 $S=1/2$ 的中微子場，兩個態可以區分爲 $|\uparrow>$ 和 $|\downarrow>$（自旋向上和自旋向下；180° 角）。對 $S=1$ 於的電磁波，兩個正交的偏振狀態是 $\mathbf{e}_x$ 和 $\mathbf{e}_y$（90° 角）。對於 $S=2$ 的引力波，兩個正交狀態爲 $\mathbf{e}_+$ 和 $\mathbf{e}_\times$（45° 角）。

練習

練習 35.6 偏振狀態的旋轉變換

考慮兩個 Lorentz 坐標系，其一相對於另一繞 z 軸轉動 θ 角：

$$t'=t,\quad x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\quad y'=y\cos\theta-x\sin\theta,\quad z'=z。\tag{35.21}$$

設 $|\uparrow>$ 和 $|\downarrow>$ 是中微子相對於 x 方向的自旋向上和自旋向下的兩個量子力學狀態，類似地有 $|\uparrow'>$ 和 $|\downarrow'>$。設 $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_{x'}$, $\mathbf{e}_{y'}$ 爲沿 z 方向傳播的電磁波在兩個坐標系中的單位偏振矢量；類似地還有線性理論中引力波的 $\mathbf{e}_+$, $\mathbf{e}_\times$, $\mathbf{e}_{+'}$, $\mathbf{e}_{\times'}$。試導出下述變換規律：

$$\begin{aligned}
|\uparrow'>&=|\uparrow>\cos\tfrac{1}{2}\theta+|\downarrow>\sin\tfrac{1}{2}\theta; &\quad |\downarrow'>&=-|\uparrow>\sin\tfrac{1}{2}\theta+|\downarrow>\cos\tfrac{1}{2}\theta;\\
\mathbf{e}_{x'}&=\mathbf{e}_x\cos\theta+\mathbf{e}_y\sin\theta; &\quad \mathbf{e}_{y'}&=-\mathbf{e}_x\sin\theta+\mathbf{e}_y\cos\theta;\\
\mathbf{e}_{+'}&=\mathbf{e}_+\cos2\theta+\mathbf{e}_\times\sin2\theta; &\quad \mathbf{e}_{\times'}&=-\mathbf{e}_+\sin2\theta+\mathbf{e}_\times\cos2\theta。
\end{aligned}\tag{35.22}$$

推廣到任意的自旋爲 S 的輻射場的線偏振基態，旋轉變換規律的一般形式是什麼？

練習 35.7　橢圓偏振

用類似於圖 35.2 中討論線偏振波和圓偏振波的方法，討論一下橢圓偏振的引力波。

§ 35.7　引力波携帶的脅强-能量

練習 18.5 表明，原則上可以制造從引力波提取能量的探測器。因此，很清楚，波必定携帶能量。

不幸的是，爲了導出並證實它的能量表達式，需要採用比線性理論更複雜一些的觀點。這種觀點將在本章後面予以發展（§35.13 和 §35.15）。但爲了對初階讀者有利，此處闡述關鍵的結果。

引力波中能量的近似定位

根據 §19.4 和 §20.4 的討論，引力波携帶的脅强-能量不能局限於一個波長之內。人們無法說能量是否由波峯、波谷或波的「四壁」所携帶。但是，人們可以說，一定數量的脅强-能量包含在給定的「宏觀」區域（幾個波長大小的區域)內，從而，人們就可以談論一個引力波的有效地抹平了的化(或平均的）脅强-能量張量 $T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$。在線性理論的（近似）慣性系中，$T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$爲

引力波的有效脅强－能量張量：

$$T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}=\frac{1}{32\pi}\langle h_{jk,\mu}^{TT}h_{jk,\nu}^{TT}\rangle\,, \tag{35.23}$$

(1)用度規微擾表示

式中〈 〉表示在幾個波長上的平均，而 h_{jk}^{TT} 表示（規範不變的）$h_{\mu\nu}$ 的横向無跡部分，它在 TT 規範中就是 h_{jk}。$T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$的另一種公式適用於任何規範，且 $\bar{h}\neq 0$, $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}\neq 0$ 和 $\bar{h}_{0\mu}\neq 0$, 爲

$$T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}=\frac{1}{32\pi}\left\langle \bar{h}_{\alpha\beta,\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\nu}-\frac{1}{2}\bar{h}_{,\mu}\bar{h}_{,\nu}-\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\bar{h}_{\alpha\mu,\nu}-\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\bar{h}_{\alpha\nu,\mu}\right\rangle \tag{35.23'}$$

這個脅强-能量張量與任何其他脅强-能量張量一樣，在眞空中是無散的，即

$$T^{(\text{引力波})\nu}{}_{\mu,\nu}=0\,; \tag{35.24}$$

(2)服從守恒定律

並且它對大尺度背景曲率的貢獻（這是線性理論中不管的）與任何其他脅强-能量一樣：

$$G_{\mu\nu}^{(\text{背景})}=8\pi\left(T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}+T_{\mu\nu}^{(\text{物質})}+T_{\mu\nu}^{(\text{其他場})}\right)。 \tag{35.25}$$

(3)起着背景曲率的源的作用

在此，寫下引力波的有效地抹平了的能量密度項$T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$，絕不要再進一步把

引力波插入 Einstein 方程之中。否則，你會把同一波對背景空間曲率的貢獻重複計算兩次，雖然它們的表達形式極爲不同。

(4)對於平面單色波

根據 (35.23) 式，對於平面波

$$h_{\mu\nu}=\Re\{(A_+e_{+\mu\nu}+A_\times e_{\times\mu\nu})e^{-i\omega(t-z)}\}\,, \tag{35.26}$$

脅强-能量張量是

$$T^{(\text{引力波})}_{tt}=T^{(\text{引力波})}_{zz}=-T^{(\text{引力波})}_{tz}=\frac{1}{32\pi}\omega^2(|A_+|^2+|A_\times|^2)。 \tag{35.27}$$

注意，背景曲率半徑$\mathcal{R}$（線性理論置之不顧），平均約化波長λ（＝波長/2π）和引力波的振幅$\mathcal{A}$滿足

$$\mathcal{R}^{-2}\sim R^{(\text{背景})}_{\alpha\beta\gamma\delta}\text{ 分量的典型大小}\sim T^{(\text{引力波})}_{\mu\nu}$$

$$\sim\mathcal{A}^2/\lambda^2\text{ 如果}T^{(\text{引力波})}_{\mu\nu}\text{是背景曲率的主要源}$$

$$\gg T^{(\text{引力波})}_{\mu\nu}\sim\mathcal{A}^2/\lambda^2\text{ 如果 }T^{(\text{引力波})}_{\mu\nu}\text{不是主要的源。}$$

結果，無量綱的數$\mathcal{A}$和$\lambda/\mathcal{R}$的關係爲

$$\mathcal{A}\lesssim\lambda/\mathcal{R}。 \tag{35.28}$$

引力波公式的適用條件

因而，如果波的無量綱振幅接近 1，則在大尺度彎曲背景中傳播小尺度波紋的概念被破壞，本章的全部公式變得毫無意義。必須永遠保持$\mathcal{A}\ll 1$和$\lambda\ll\mathcal{R}$，引力波的概念才有意義！

§35.8 廣義相對論完備理論中的引力波

引力波中的非線性效應

由於波的能量造成的背景空時的彎曲，只是從線性理論過渡到完全的非線性廣義相對論時，許多要考慮的新效應之一。

(1)輻射阻尼

在線性理論中，人們考慮處於穩定振盪的引力波局域源（例如，一個振動的棒）發射嚴格的周期性波動。但是嚴格理論堅持，源的能量將在長時間內逐漸減小，以便與輻射帶走的能量相抵消（能量守恒；引力輻射阻尼；見 §36.8 和 §36.11）。在這種情況下，雖然非常接近周期性的波動仍能發射，但嚴格地周期性波動却成爲不可能的了 [Papapetrou (1958); 由 Misner (1964b) 報導的 Arnowitt, Deser 和 Misner 的工作]。

(2)折射

在現實的宇宙中，空時曲率並非僅由引力波的能量產生，更重要的源是宇宙的物質含量（行星，恒星，氣體，星系）。當引力波在這些彎曲空時中傳播

時，它的波前會變形狀（「折射」），它的波長會改變（引力紅移），並且在某種程度上會因空間彎曲而向後散射。如果波是一個脈沖，則向後散射將使它的形狀和偏振不斷改變，並在運動的比光速稍慢的脈沖之後產生逐漸擴展的「尾跡」［參看練習 32.10；以及 Riesz (1968), DeWitt 和 Brehme (1960), DeWitt 和 DeWitt (1964a), Kundt 和 Newman (1968), Couch 等(1968)］。然而，只要 $\mathscr{l} \ll 1$ 和 $\lambda/\mathscr{R} \ll 1$，這些效應局域地看來都是非常小的。它們只在 $\mathscr{R}$ 量級的距離上才構成，有時甚至在這種情況下還不能構成。因而，局域地說，線性理論將保持高度的精確性。

(3)紅移
(4)向後散射
(5)尾跡

甚至在除引力波別無他物的理想宇宙中，波與它們自身產生的背景曲率的相互作用，也會產生向後散射和尾跡。

如果約化波長 $\lambda = \lambda/2\pi$ 和波脈沖的質量-能量 m 滿足 $\lambda \ll m$，則（原則上）有可能把脈沖聚焦到尺度 $r < m$ 的區域之內，於是該脈沖的一部分能量將經過引力坍縮而達到奇點，留下一個黑洞［參看 Ruffini 和 Wheeler (1970)，以及 Christodoulou (1971) 的第 7—24 頁］。弱於某一臨界强度時，脈沖的任何部分都不會經歷坍縮。但是在重新膨脹之前，它會經歷一段時間延遲。能量會暫時會聚於尺度爲 λ 量級的區域內，不久之後，在遠離此區域的漸近地平直的空間內，可以定義和測量時間延遲。

(6)自引力吸引

所有這些效應都可以在廣義相對論中用近似方法作分析，這些近似方法的一級近似類似於或等同於線性理論。在本章後面（§35.13—§35.15），將發展一種近似方法。但首先研究顯示某些這類效應的嚴格解是有幫助的。

初階
高階

§ 35.9　嚴格的平面波解

本章其餘部分全屬高階，不需要前面的高階材料爲它作準備，但第20章（守恒定律）和 §22.5（幾何光學）將是有幫助的。以後任何章節並不需要這一部分材料作預備知識。

能夠以準確的數學形式給出的任何嚴格引力波解必定是高度理想化的；否則就無法對付上面概述過的各種複雜性。結果，數學上嚴格的解只適用於教學的目的。然而，教學不應當受到責備：不僅學生需要它，在相對論領域工作的老將也同樣需要它，因爲即使是老將，在今天，對於幾何動力學的非線性領域，也才剛剛有些直觀知識。

眞空場方程的嚴格平面波解

從大量有關嚴格解的文獻中，作爲現實性和複雜性之間的某種折衷，我們選擇了下述平面波［Bondi 等 (1959), Ehlers 和 Kundt (1962)］：

$$\begin{aligned} ds^2 &= L^2(e^{2\beta}dx^2 + e^{-2\beta}dy^2) + dz^2 - dt^2 \\ &= L^2(e^{2\beta}dx^2 + e^{-2\beta}dy^2) - dudv \text{。} \end{aligned} \tag{35.29a}$$

(1)度規的形式

式中

$$u = t - z, \quad v = t + z, \quad L = L(u), \quad \beta = \beta(u) \text{。} \tag{35.29b}$$

可以選取的 $L(u)$（「背景因子」）和 $\beta(u)$（「波因子」）的函數形式取決於眞空場方程。在零坐標系 u, v, x, y 中，唯一不爲零的 Ricci 張量的分量等於（參看框 14.4，允許在坐標中有下述差別：$2v_{\text{該處}}=v_{\text{此處}}$）

$$R_{uu}=-2L^{-1}[L''+(\beta')^2L], \tag{35.30}$$

式中撇代表 d/du。因而，眞空中的 Einstein 方程爲

(2)由「波因子」β 產生的「背景因子」L

$$L''+(\beta')^2L=0。 \tag{35.31}$$

（「波因子對背景因子的效應」）

(3)線性極限

這個方程的線性形式是 $L''=0$, 因爲 $(\beta')^2$ 是二階量。因此，相應於線性理論的解是

$$L=1, \quad \beta(u) \text{ 任意但很小。}$$

相應的度規是

$$ds^2=(1+2\beta)dx^2+(1-2\beta)dy^2+dz^2-dt^2, \quad \beta=\beta(t-z)。 \tag{35.32}$$

注意，這是沿 z 方向傳播的偏振爲 $\mathbf{e}_+$ 的平面波。（推廣到具有兩種偏振 $\mathbf{e}_+$ 和 $\mathbf{e}_\times$ 的情況，參看 §35.12 末尾的練習 35.10。）

(4)特殊情形：平面波脈衝

回過來注意嚴格的平面波，並集中注意這種情形，即「波因子」$\beta(u)$ 是持續 $2T$ 的脈衝，且在整個脈衝內 $|\beta'|\ll 1/T$。這時，嚴格解（圖 35.3）爲：(1)對於 $u<-T$（平直空時；脈衝尚未到達），

$$\beta=0, \quad L=1; \tag{35.33a}$$

(2)對於 $-T<u<+T$（脈衝內部），

$$\beta=\beta(u) \text{ 是任意的，只是 } |\beta'|\ll 1/T,$$

$$L(u)=1-\int_{-T}^{u}\left\{\int_{-T}^{\bar{u}}[\beta'(\bar{\bar{u}})]^2d\bar{\bar{u}}\right\}d\bar{u}+O([\beta'T]^4); \tag{35.33b}$$

(3)對於 $u>T$（脈衝通過之後），

$$\beta=0, \quad L=1-\frac{u}{a}, \quad a\equiv\frac{1}{\int_{-T}^{T}(\beta')^2du}+\frac{O([\beta'T]^2)}{\int_{-T}^{T}(\beta')^2du}。 \tag{35.33c}$$

在討論此嚴格解的物理意義之前，必須認眞處理在 $u=a\geqslant T$ 處度規系數的奇點。（該處 $L=0$, 所以 $g_{xx}=g_{yy}=0$。）這是像 Schwarzschild 幾何 $r=0$ 區域那樣的物理奇點呢，還是像 Schwarzschild 坐標中 $r=2M$ 那樣只是一個坐標奇點呢（第 31, 32 和 33 章）？對於度規 (35.29), Riemann 張量的僅有的非零分量爲（見框 14.4）

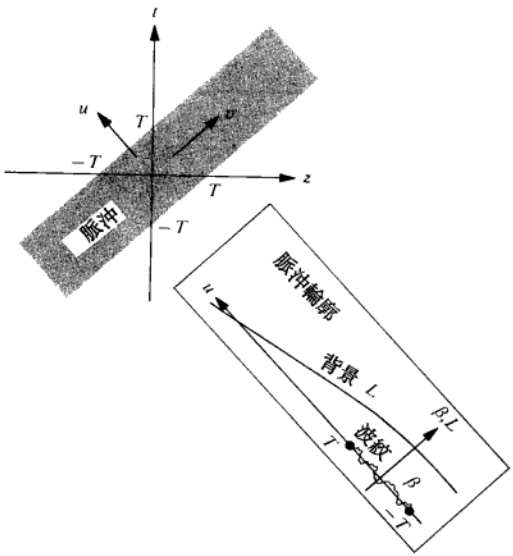


圖 35.3
Einstein 眞空場方程嚴格平面波解的空時圖和脈衝輪廓。度規的形式爲
$$ds^2=L^2(e^{2\beta}dx^2+e^{-2\beta}dy^2)+dz^2-dt^2。$$
「波因子」$\beta(u)\equiv\beta(t-z)$（小尺度波紋）和「背景因子」$L(u)\equiv L(t-z)$（由「波紋」引力波的有效質量-能量造成的背景幾何的大尺度彎曲）如圖所示，並由 (35.33) 式給出解析表達式。

$$R^t{}_{xxx}=\frac{1}{2}R_{xx}-\beta''-2(L'/L)\beta',\qquad (35.34)$$
$$R^y{}_{xyx}=\frac{1}{2}R_{xx}+\beta''+2(L'/L)\beta'。$$

而且，這兩個分量在 $\beta=0$ 的任何延伸區域中都爲零。因而，在「波因子」爲零的區域——它處處在脈衝之外，空時是完全平直的！特別是，在 $u=a$ 附近空時是平直的，所以在此處奇點必定是坐標奇點，而不是物理奇點。爲了消去這個奇點，可以對脈衝尚未到達的區域（$u>T$）作坐標變換

(5)在脈衝之外空時是平直的

$$x=\frac{X}{1-U/a},\quad y=\frac{Y}{1-U/a},\quad u=U,\quad v=V+\frac{X^2+Y^2}{a-U},\qquad (35.35)$$

在該區域內

$$ds^2=(1-u/a)^2(dx^2+dy^2)-dudv。\qquad (35.36a)$$

在此新的 X, Y, U, V 坐標系中，度規明顯地具有平直形式

$$ds^2=dX^2+dY^2-dUdV\text{，}\quad\text{對於 } U=u>T\text{。}\qquad(35.36)$$

練習

練習 35.8 對平面波適用的整體上表現良好的坐標 [基於 Ehlers 和 Kundt (1962)]

試尋找類似於 (35.35) 式的坐標變換，把嚴格的平面波解 (35.29a) (35.31) 寫成下述形式：

$$ds^2=dX^2+dY^2-dUdV+(X^2-Y^2)FdU^2\text{，}\qquad(35.37)$$
$$F=F(U)\text{ 完全任意。}$$

這個坐標系的優點在於處處無坐標奇點；而原來坐標系的優點在於容易過渡到線性理論，並容易解釋波對試驗粒子的作用。

練習 35.9 平面波流形的短程線完備性 [基於 Ehlers 和 Kundt (1962)]

試證明練習 35.8 的坐標系 (X, Y, U, V) 完全復蓋了它的空時流形。更明確地說，試證明，每條短程線都可以向兩個方向延伸到其仿參量長度取任意大值之處，而不離開 X, Y, U, V 坐標系。（這個性質稱爲短程線完備性。）[提示：在該處選取任一事件和任一切向矢量 $d/d\lambda$。它們可確定一任意短程線。作坐標變換而保持度規形式不變，並把 $d/d\lambda$ 或者放入 $(\tilde{U},\tilde{V})$=常數的二維曲面內，或者放入 $(\tilde{X},\tilde{Y})$=常數的二維曲面內。試證明兩個坐標系復蓋了同樣的空時區域。然後，在 $(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{U},\tilde{V})$ 坐標系中，分析 $d/d\lambda$ 的短程線的完備性。]

§ 35.10 嚴格平面波的物理性質

在平面波脈衝到達之前 ($u<-T$) 和在它通過之後 ($u>T$)，空時都是完全平直的。這是上一節給於我們的信息。

引力波脈衝之外的平直性是異乎尋常的

在完全的非線性的廣義相對論中，脈衝外的完全平直性對於引力波來說是非常不典型的。它發生在這個例子中，只是因爲波前（u 和 v 爲常數的曲面，即 z 和 t 爲常數的曲面）嚴格地是平直二維曲面。如果波前是彎曲的（例如球形），則脈衝攜帶的能量將在其外產生空時曲率。

嚴格的引力波脈衝對試驗粒子的作用：

爲了看出正在起作用的非線性效應，從脈衝外的平直幾何轉向脈沖對自由下落試驗粒子的作用。考慮一族粒子，它們在脈衝到達之前，在原來的 t, x, y, z 坐標系中都處於靜止態（世界線：$[x,y,z]$=常數）。那麼，即使在脈衝正通過時，以及脈衝通過之後，這些粒子在此坐標系中仍然保持靜止。（這對於任何度規都正確，例如，(35.29a) 的度規，且 $g_{0\mu}=-\delta^0{}_\mu$，於是 $\Gamma^\alpha{}_{00}=0$，因此 $x^\alpha=\delta^\alpha{}_0\tau+$常數滿足短程線方程。）

兩個在脈衝傳播方向（z 方向）有間隔的粒子，不僅坐標間隔爲常數 $\Delta x=\Delta y=0$ 和 $\Delta z\neq 0$; 而且它們的固有間隔 $\Delta s=g_{zz}^{1/2}\Delta z=\Delta z$ 也是常數。因此，嚴格的平面波完全是橫向的，與線性理論的平面波一樣。

(1)相對加速度的橫向性質

橫截傳播方向的相鄰粒子（$\Delta x\neq 0$, $\Delta y\neq 0$, $\Delta z=0$）在脈衝通過時，其固有間隔會有擺動：

$$\begin{aligned}\Delta s&=L(t-z)[e^{2\beta(t-z)}(\Delta x)^2+e^{-2\beta(t-z)}(\Delta y)^2]^{1/2}\\&\approx L[(1+2\beta)(\Delta x)^2+(1-2\beta)(\Delta y)^2]^{1/2}。\end{aligned}\qquad(35.38)$$

(2)由脈衝中能量造成的引力吸引

除了由於「波因子」β 產生的通常線性理論所述的擺動以外，還應附加上由「背景因子」L［注意圖 35.3 中 $L(u)$ 的形式］產生的相互指向對方的一個非常小的淨粒子加速度。這幾乎是一個 Newton 類型的加速度，它是由兩個粒子之間的引力波携帶的能量的引力吸引造成的。所有這些由流過的能量造成的總效應，是把粒子從相對靜止的初始狀態轉換到以下述速度作相對運動的終態

$$v_{終}=d\Delta s/dt=d(L\Delta s_i)/dt=-\Delta s_i/a，\qquad(35.39)$$

式中

$$\Delta s_i=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{1/2}=(初始的粒子間隔)。$$

［記住 $L_{初}=1$, $L_{終}=1-u/a=1-(t-z)/a$; (35.33) 式。］

電磁波脈衝能夠產生完全相同的效應（§35.11）。

§ 35.11　嚴格的電磁平面波與引力平面波的比較

考慮度規

$$ds^2=L^2(u)(dx^2+dy^2)-dudv,\qquad\begin{Bmatrix}u=t-z\\v=t+z\end{Bmatrix},\qquad(35.40)$$

電磁平面波脈衝

當此度規滿足眞空 Einstein 場方程（$R_{\mu\nu}=0$ 或 $L''=0$）時，它總是平直的，因此它不能代表引力波。在此度規中，電磁勢爲

$$\boldsymbol{A}=A_\mu dx^\mu=\mathcal{A}(u)\boldsymbol{dx}\qquad(35.41)$$

對任意 $\mathcal{A}(u)$, 此勢都滿足 Maxwell 方程。它代表一個電磁平面波，與最近幾節討論的引力平面波類似。這個波的僅有的非零場分量爲

$$F_{xz}=\mathcal{A}'，\text{即 }F_{tx}=-F_{xz}=\mathcal{A}'；\qquad(35.42)$$

因此電矢量在 x 方向往返振蕩，磁矢量在 y 方向振蕩，波在 z 方向傳播。在 x, y, u, v 坐標系中，脅强-能量張量的唯一非零分量爲

$$T_{uu}=(4\pi L^2)^{-1}(\mathcal{A}')^2。 \tag{35.43}$$

在背景度規 (35.40) 中，勢 (35.41) 已經滿足 Maxwell 方程，這一點讀者可以證明。爲了使得度規本身也同樣可以被接受，只需利用 Einstein 方程 $G_{\mu\nu}=8\pi T_{\mu\nu}$。它們是 [參看 (35.30) 式，其中 $\beta=0$]

$$L''+(4\pi T_{uu})L=0。 \tag{35.44}$$

電磁平面波與引力平面波產生同樣的引力吸引

這與引力平面波的方程 $L''+(\beta')^2L=0$ 形式完全相同。結果，由「背景因子」$L(u)$ 產生的不帶電試驗粒子的相對運動應當是相同的，而不管 $L(u)\neq 1$ 是由電磁波的脅强-能量產生的，還是由滿足下式的相應的引力波產生的

$$[(\beta')^2/4\pi]_{\text{引力波}}=[T_{uu}]_{\text{電磁波}}=(\mathcal{A}')^2/4\pi L^2。 \tag{35.45}$$

相似程度還可以更加强。在保持 $(\beta')^2/4\pi$ 和 $(\mathcal{A}')^2/4\pi L^2$ 不變的同時，減小波的波長：

$$\langle(\beta')^2/4\pi\rangle=\langle(\mathcal{A}')^2/4\pi L^2\rangle=\text{常數}；\quad \lambda\longrightarrow 0。$$

在極小波長的極限下（即從特徵長度 $\gg\lambda$ 的觀點來看）這兩個解是完全無法區分的。它們的度規相同（$\lambda\longrightarrow 0$ 和 $\langle(\beta')^2\rangle=$ 常數意味着 $\beta\longrightarrow 0$），並且它們引起的試驗粒子的輕微搖晃也因大小而看不到。只有它們造成的空時彎曲 ($L\neq 1$) 以及與它的能量相聯繫的引力吸引是可以檢測的。

§ 35.12 關於嚴格平面波的新觀點

用「短波近似」的語言重新考察嚴格的引力平面波：

(1)波紋與背景

上述比較提出了一種觀點，這種觀點在本章的引言和 §35.8 中曾概要地敍述過。把嚴格的引力平面波解 [圖 35.3, (35.29) 式和 (35.33) 式] 想像成，在由 $L(u)$ 所表徵的極輕微彎曲的背景空時中傳播的，由 $\beta(u)$ 所描繪的空時曲率中的波紋。背景與波紋之間最顯着的差別並不是它們的空時曲率的大小不同，而是它們的特徵長度不同。波紋的特徵長度是

$$\lambda\equiv(\text{波的典型的約化波長，}\lambda/2\pi)； \tag{35.46}$$

背景的特徵長度（「背景幾何的曲率半徑」）爲

$$\mathscr{R}\sim|L/L''|^{1/2}_{\text{波內}}\sim 1/|\beta'|\text{。}\tag{35.47}$$

記住，λ 比脈衝的長度 $2T$ 略小。再記住，$|\beta' T|\ll 1$。結論是，「波因子」和「背景因子」的特徵長度極爲不同：

$$\lambda\ll\mathscr{R}\text{。}\tag{35.48}$$

這種尺度的差別使得人們能把背景從波紋中區分出來。

波紋的尺度遠遠小於背景的尺度（$\lambda\ll\mathscr{R}$）。儘管如此，但在波紋內的局域曲率比相應的背景曲率大［(35.30) 式，(35.34) 式］，因而

$$\begin{aligned}&(R^{x}{}_{xxx})_{\text{背景}}=(R^{y}{}_{yyy})_{\text{背景}}=-L''/L\sim 1/\mathscr{R}^2\text{，}\\&(R^{x}{}_{xxx})_{\text{波}}=-(R^{y}{}_{yyy})_{\text{波}}=-\beta''\sim|\beta'|/\lambda\sim 1/(\lambda\mathscr{R})\\&\qquad\sim(\mathscr{R}/\lambda)(R^{x}{}_{xxx})_{\text{背景}}\text{。}\end{aligned}\tag{35.49}$$

這使人想起斑駁的桔子皮！

引力平面波的背景的度規與電磁平面波的相同［(35.40)式］：

$$ds^2=g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}=L^2(dx^2+dy^2)-dudv\text{。}\tag{35.50}$$

與 (35.29a) 式比較可以看出，全空時（背景加上波紋）的度規是

$$ds^2=(g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})dx^{\mu}dx^{\nu}\text{，}\tag{35.51}$$

$$h_{xx}=-h_{yy}=2\beta\text{，所有其他 }h_{\mu\nu}=0\text{。}\tag{35.52}$$

(2)波紋在背景中傳播

（記得，在 $\beta\neq 0$ 的區域，L 非常接近於 1。）人們可以把這種波紋設想成，在背景幾何中傳播的，類似於電磁場 A_{μ} 的，橫向無迹對稱張量場 $h_{\mu\nu}$。正如電磁場通過

$$G_{uu}=-2L''/L=8\pi T_{uu}$$

產生背景曲率一樣，引力波的波紋 $h_{\mu\nu}$ 也通過 (35.31) 式產生背景曲率，該式可重新寫爲

$$G^{(\text{背景})}_{uu}=-2L''/L=8\pi T^{(\text{有效})}_{uu}\text{。}\tag{35.53}$$

式中

$$T^{(\text{有效})}_{uu}\equiv\frac{1}{4\pi}(\beta')^2=\frac{1}{32\pi}h_{jk,u}h_{jk,u}\tag{35.54}$$

(3)波紋的有效脅强-能量張量

是引力波的「有效脅强-能量張量」。注意，這一表達式除了一個平均符號外，與 §35.7 中寫出的未證明的表達式 (35.23) 式相符。

練習

練習 35.10 有兩個偏振的平面波

嚴格的平面波解 (35.29) 的偏振是 $\mathbf{e}_+$。試構造一個類似的解，使之包括兩個偏振 $\mathbf{e}_+$ 和 $\mathbf{e}_\times$，其任意振幅分別爲 $\beta(u)$ 和 $\gamma(u)$。把 §35.9—§35.12 的討論擴展到這個解上。

§ 35.13 短波近似

本章的其餘部分以更嚴格的方式把上述觀點擴展到非常一般的引力波解。這種推廣稱爲「短波表述」，雖則它建立在 Wheeler (1964a) 以及 Brill 和 Hartle (1964) 所奠定的基礎上，但大量工作是 Isaacson (1968a,b) 作出的。更嚴格的型式是由 Choquet-Bruhat (1969) 以及 MacCallum 和 Taub (1973) 在 W. K. B. 或幾何光學極限下給出的。

短波表述的基礎：
(1) $\mathscr{R}$, λ和$\mathscr{A}$的定義

考慮通過真空背景空時傳播的引力波。如 §35.7 所示，設 $\mathscr{R}$爲背景的典型曲率半徑；設 λ 和 $\mathscr{A}$ 分別爲典型的約化波長($\lambda/2\pi$)和波的振幅；還要求 $\mathscr{A}\ll 1$

(2)要求 $\mathscr{A}\ll 1$ 和 $\lambda/\mathscr{R}\ll 1$

和 $\lambda/\mathscr{R}\ll 1$。背景曲率可以完全歸因於波，或者也可以部分歸因於波部分歸因於鄰近的物質和非引力場。

(3)把度規分解爲背景加微擾；「穩定坐標」

這種分析採用與空時嚴密「協調」的坐標系，也就是說，在這種坐標系中，度規係數可以分解爲「背景」係數加上微擾

$$g_{\mu\nu}=g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}+h_{\mu\nu} \tag{35.55}$$

它們具有下述性質：(1)微擾的振幅爲 $\mathscr{A}$

$$h_{\mu\nu}\lesssim(g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}\text{的典型值})\cdot\mathscr{A}; \tag{35.56a}$$

(2)$g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}$變化的尺度是$\gtrsim\mathscr{R}$

$$g^{(\text{背景})}_{\mu\nu;\alpha}\lesssim(g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}\text{的典型值})/\mathscr{R}; \tag{35.56b}$$

(3)$h_{\mu\nu}$ 變化的尺度是$\sim\lambda$

$$h_{\mu\nu;\alpha}\sim(h_{\mu\nu}\text{ 的典型值})/\lambda。 \tag{35.56c}$$

這種坐標稱爲「穩定的」坐標。

(4)Ricci曲率張量的分解

冗長的計算（練習 35.11） 表明，對於形式爲 (35.55) 的展開的度規，Ricci 張量爲

$$R_{\mu\nu}=R^{(\text{背景})}_{\mu\nu}+R^{(1)}_{\mu\nu}(h)+R^{(2)}_{\mu\nu}(h)+\text{誤差}。 \tag{35.57}$$

$$\text{?}\qquad \mathscr{A}/\lambda^2\qquad \mathscr{A}^2/\lambda^2\qquad \mathscr{A}^3/\lambda^2$$

式中置於每項之下的記號（$\mathcal{A}/\lambda^2$ 等等）表明該項的典型數量級；$R^{(\text{背景})}_{\mu\nu}$是背景度規$g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}$的 Ricci 張量；$R^{(1)}_{\mu\nu}$和$R^{(2)}_{\mu\nu}$是由下式定義的表達式

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(h)\equiv\frac{1}{2}(-h_{|\mu\nu}-h_{\mu\nu|\alpha}{}^{\alpha}+h_{\alpha\mu|\nu}{}^{\alpha}+h_{\alpha\nu|\mu}{}^{\alpha}), \qquad (35.58a)$$

$$R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\equiv\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}h_{\alpha\beta|\mu}h^{\alpha\beta}{}_{|\nu}+h^{\alpha\beta}(h_{\alpha\beta|\mu\nu}+h_{\mu\nu|\alpha\beta}-h_{\alpha\mu|\nu\beta}-h_{\alpha\nu|\mu\beta})$$
$$+h_{\nu}{}^{\alpha|\beta}(h_{\alpha\mu|\beta}-h_{\beta\mu|\alpha})-\Big(h^{\alpha\beta}{}_{|\beta}-\frac{1}{2}h^{|\alpha}\Big)(h_{\alpha\mu|\nu}+h_{\alpha\nu|\mu}-h_{\mu\nu|\alpha})\Big]。$$
(35.58b)

在這些表達式以及以下所有表達式中，指標隨 $g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}$ 一同升降，而豎線表示相對於 $g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}$的協變微商（雖然在第 21 章中它表示相對於三維幾何的協變微商）。

眞空場方程分解爲「波部分」（$\propto\mathcal{A}$），加上「粗紋部分」（$\propto\mathcal{A}^2$，並且在 λ 尺度上是光滑的），再加上「起伏修正」（$\propto\mathcal{A}^2$，並在 λ 尺度上波動）

短波表述的核心是它求解眞空場方程 $R_{\mu\nu}=0$ 的方法。開始先從(35.57)式中挑選出波振幅 $\mathcal{A}$ 的線性部分，並令它等於零。波使背景彎曲的作用是一種非線性現象（線性理論中沒有它的迹象）；因此 $R^{(\text{背景})}_{\mu\nu}$不可能是 $\mathcal{A}$ 的線性項。這樣，在表達式(35.57)中，$R^{(1)}_{\mu\nu}(h)$ 是唯一的線性項，它必定自然爲零

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(h)=0。 \qquad (35.59a)$$

［當然，$h_{\mu\nu}$ 可能包含量級爲 $\mathcal{A}^2$ 的非線性修正項——稱爲 $j_{\mu\nu}$ ——它必定不受此線性方程的約束。它將由下面的 (35.59c) 式確定。］

其次，把 $R_{\mu\nu}$ 的剩餘部分分解爲兩部分，第一部分沒有波紋，即它只在遠大於 λ 的尺度上變化（「粗紋觀點」），第二部分包括起伏。在幾個波長的尺度上作平均即可實現這個分解［平均過程的嚴格論述，參看練習 35.14，對於不需要這種平均的一類解，也可參看 Choquet-Bruhat (1969)］:

$$\underset{?}{R^{(\text{背景})}_{\mu\nu}}+<\underset{\mathcal{A}^2/\lambda^2}{R^{(2)}_{\mu\nu}(h)}>+\text{誤差}=0\ \begin{bmatrix}\text{光滑}\\ \text{部分}\end{bmatrix} \qquad (35.59b)$$

$$\underset{\mathcal{A}^2/\lambda^2}{R^{(1)}_{\mu\nu}(j)}+\underset{\mathcal{A}^2/\lambda^2}{R^{(2)}_{\mu\nu}(h)}-<\underset{\mathcal{A}^2/\lambda^2}{R^{(2)}_{\mu\nu}(h)}>+\text{誤差}=0\ \begin{bmatrix}\text{起伏}\\ \text{部分}\end{bmatrix}。 \qquad (35.59c)$$

$\mathcal{A}^2/\lambda^2$ ：［對 h 的非線性修正］　$\mathcal{A}^3/\lambda^2$

這就是所要討論的一切！——只是要把方程化爲易處理的形式以及作更完全的物理解釋。

對場方程三部分的物理解釋：

從物理解釋開始。

(1)波的傳播

(35.59a) 式是引力波 $h_{\mu\nu}$ 的傳播方程。

(2)波能量產生的背景曲率；定義 $T^{(\text{引力波})}_{\mu\nu}$

(35.59b) 式表明，波中的脅强-能量如何產生背景曲率。可以把它寫成更容易引起聯想的形式

$$G^{(\text{背景})}_{\mu\nu}=R^{(\text{背景})}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}R^{(\text{背景})}g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}=8\pi T^{(\text{引力波})}_{\mu\nu}\text{在眞空中，} \quad (35.60)$$

式中

$$T^{(\text{引力波})}_{\mu\nu}\equiv-\frac{1}{8\pi}\left\{\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\rangle-\frac{1}{2}g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}\langle R^{(2)}(h)\rangle\right\} \quad (35.61)$$

(3)波的非線性自相互作用

是引力波的脅强-能量張量。現在可以看出§35.7中所作陳述的來源，卽引力波的脅强-能量只有在抹平了的，卽在平均的意義上才有明確的定義。

最後，(35.59c) 式表明，引力波 h 如何產生對自身的非線性修正 j （波-波散射，基頻的諧波，等等）。本章不研究這些更高階的效應。

練習

練習 35.11 擾動度規的聯絡係數和曲率張量

在任意空時的特定坐標系中，按下述形式寫出用協變式表示的度規係數

$$g_{\mu\nu}=g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}。 \quad (35.62a)$$

（在計算末尾，可以把 $h_{\mu\nu}$ 分解成兩部分，$h_{\mu\nu}\longrightarrow h_{\mu\nu}+j_{\mu\nu}$；並從此分解中得出正文中所用的公式。）假設 $h_{\mu\nu}$ 的典型分量比 $g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}$的分量小很多；因此可以把 Christoffel 符號和曲率張量用 $h_{\mu\nu}$ 展開。隨着 $g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}$來升、降$h_{\mu\nu}$的指標；用「|」表示相對於 $g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}$ 的協變微商，用「;」表示相對於 $g_{\mu\nu}$ 的協變微商。

(a) 此處的 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{(\text{背景})}_{\mu\nu}$可以認爲是共存於空時流形中的兩個不同的度規 。試證明，相應的協變微商之差 $\nabla-\nabla^{(\text{背景})}\equiv\mathbf{S}$——確實 ， 任意兩個協變微商之差——是一個張量，其分量是

$$S^{\mu}{}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}-\Gamma^{(\text{背景})\mu}{}_{\beta\gamma} \quad (35.62b)$$

［提示：參看框 10.3 的B部分。］

(b) 試證明

$$g^{\mu\nu}=g^{(\text{背景})\mu\nu}-h^{\mu\nu}+h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\nu}-h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}h_{\beta}{}^{\nu}+\cdots, \quad (35.62c)$$

再證明

$$g^{\mu\nu}=g^{(\text{背景})\mu\nu}-h^{\mu\nu}+h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\nu}-h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}h_{\beta\gamma}g^{\gamma\nu}。 \quad (35.62c')$$

(c) 試先在 $g^{(背景)}_{\mu\nu}$ 的局域 Lorentz 系中作計算，然後再變換回到原來的參照系，由此證明

$$S^{\mu}{}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(h_{\alpha\beta|\gamma}+h_{\alpha\gamma|\beta}-h_{\beta\gamma|\alpha}), \tag{35.62d}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}-R^{(背景)\alpha}_{\quad\beta\gamma\delta}=S^{\alpha}{}_{\beta\delta|\gamma}-S^{\alpha}{}_{\beta\gamma|\delta}+S^{\alpha}{}_{\mu\gamma}S^{\mu}{}_{\beta\delta}-S^{\alpha}{}_{\mu\delta}S^{\mu}{}_{\beta\gamma}, \tag{35.62e}$$

$$R_{\beta\delta}-R^{(背景)}_{\quad\beta\delta}=S^{\alpha}{}_{\beta\delta|\alpha}-S^{\alpha}{}_{\beta\alpha|\delta}+S^{\alpha}{}_{\mu\alpha}S^{\mu}{}_{\beta\delta}-S^{\alpha}{}_{\mu\delta}S^{\mu}{}_{\beta\alpha}。 \tag{35.62f}$$

(d) 試證明，(35.62f) 式可化爲

$$R_{\beta\delta}=R^{(背景)}_{\quad\beta\delta}+R^{(1)}_{\beta\delta}(h)+R^{(2)}_{\beta\delta}(h)+\cdots \tag{35.62g}$$

式中 $R^{(1)}$ 和 $R^{(2)}$ 由 (35.58) 式定義。

---

§ 35.14　背景曲率對波傳播的效應

集中注意傳播方程 $R^{(1)}_{\mu\nu}(h)=0$。此處與線性理論一樣，採用

定義 $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\bar{h}_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}hg^{(背景)}_{\mu\nu}, \tag{35.63}$$

來討論傳播問題比用 $h_{\mu\nu}$ 更爲簡單。用 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 改寫 $R^{(1)}_{\mu\nu}(h)=0$，得

波在彎曲背景的傳播方程

$$\bar{h}_{\mu\nu|\alpha}{}^{\alpha}+g^{(背景)}_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\beta\alpha}-2\bar{h}_{\alpha(\mu|}{}^{\alpha}{}_{|\nu)}+2R^{(背景)}_{\alpha\mu\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}-2R^{(背景)}_{\alpha(\mu}\bar{h}^{\alpha}{}_{\nu)}=0。 \tag{35.64}$$

[爲得出此方程，顛倒一下 (35.63) 式，得出 $h_{\mu\nu}=\bar{h}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{(背景)}_{\mu\nu}\bar{h}$；把它代入 (35.58a) 式並使之等於零；然後用恒等式 (16.6b) 代換協變微分；最後縮併以得出 $\bar{h}_{|\alpha}{}^{\alpha}$ 的表達式並把它代回。]

傳播方程 (35.64) 可通過特殊選擇的規範簡化。一無限小的坐標變換

特別指明爲「Lorentz 規範」

$$x^{\mu}_{新}(\mathscr{P})=x^{\mu}_{舊}(\mathscr{P})+\xi^{\mu}(\mathscr{P}) \tag{35.65a}$$

在度規系數的函數形式中引入一階的變化，由下式給出

$$h_{\mu\nu新}(x^{\alpha}_{新})=h_{\alpha\nu舊}(x^{\alpha}_{新})-2\xi_{(\mu|\nu)} \tag{35.65b}$$

[類似於線性理論中的規範變換，(35.3c) 式；參看練習 35.12]。在新的坐標系中，通過適當選擇的四個函數 ξ^{μ}，可以强加上四個「Lorentz 規範條件」(練習 35.13)

$$\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}=0。 \tag{35.66}$$

規範的這種選擇與線性理論中相似。它使得傳播方程中的第二項和第三項爲零。（關於「TT」型的附加規範條件，見練習 35.13）

波與 Ricci張量的耦合可以不管

傳播方程的最後一項，$-2R^{(背景)}\bar{h}^{\alpha}_{\nu)}$，在分析的精度範圍內爲零，爲此：限於注意眞空情形；因此非零 Ricci 張量的唯一來源，是引力波自身携帶的脅强-能量［(35.60) 式］；所以 $R^{(背景)}_{\alpha\beta}\sim\mathcal{A}^2/\lambda^2$，並且

$$R^{(背景)}{}_{\alpha(\mu}\bar{h}_{\nu)}{}^{\alpha}\sim\mathcal{A}^2/\lambda^2。\tag{35.67}$$

這與 Ricci 張量的三階修正項 $R^{(3)}_{\mu\nu}(h)$ 同一量級，它遠在分析的精度以下。因此，爲了分析的自洽性，它們將被略去。

Lorentz 規範中的傳播方程及其適用範圍

本節迄今的內容可以總結如下：通過選定使 $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}=0$的規範，並棄去超出分析精度的高階項，得到眞空傳播方程，

$$\bar{h}_{\mu\nu|\alpha}{}^{\alpha}+2R^{(背景)}_{\alpha\mu\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}=0,\tag{35.68}$$

它服從 Lorentz 規範條件。

$$\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{|\alpha}=0。$$

(35.68) 式在振幅上精確到一階［修正項 $\propto\mathcal{A}^2$ 已體現在 (35.59c)式中］；而且從 (35.59) 式可以看出，(35.68) 式的精度與比值 $\lambda/\mathcal{R}$ 無關。因而，只要波是弱的，即使波長很大，此方程也可以應用。

傳播方程中沒有的以及所包含的各種效應的清單

在這個一階傳播方程中，波與其自身的全部非線性相互作用均被略去。因而，方程中沒有波彼此散射以及波與自身產生的背景曲率發生散射的機制。同樣，在波脈衝傳播過程中，由於自相互作用而引起的脈衝形狀變化的任何跡象也沒有了。當引力波的質量-能量m被壓縮到尺度 $\lesssim m$ 的區域中時必定會發生的引力坍縮踪跡全無。爲了看到全部這些效應，必須考慮 $\mathcal{A}$的二階和更高階的修正項［例如 (35.59c) 和 (35.60) 式］。

實際上，包含在此傳播方程中的是由背景曲率對傳播波的線性作用引起的全部效應。在本章末的練習 35.15—35.17 中，將在短波情形 ($\lambda/\mathcal{R}\ll1$) 和近似平面波前的情形下考察這些效應。考慮的這些效應包括，與光線相同的引力輻射的引力紅移，以及引力輻射傳播方向的引力折射；還有偏振張量的旋轉。當波長不很短時 ($\lambda/\mathcal{R}$ 並不 $\ll1$)，傳播方程包含着引力波在背景曲率上的向後散射，以及由此產生的波「尾跡」的花樣，它與練習 32.10中討論的類似［參看，例如，Couch 等 (1968)，Price (1971a)，Bardeen和 Press (1972)，Unt 和 Keres (1972)］。

練習

練習 35.12 彎曲背景下的規範變換

(a)試證明，無限小的坐標變換 (35.65a) 將在度規微擾的函數形式中引出 (35.65b) 式所示的變化。

(b)試討論這個規範變換與 Killing 矢量 (§25.2) 概念之間的關係。

練習 35.13 在彎曲背景中傳播的引力波的橫向無跡規範

(a)試證明，在彎曲背景空時的眞空，如果某變換的生成元滿足波方程 $\xi_{\mu}{}^{|\alpha}{}_{\alpha}=0$，則在此變換下規範條件 $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}=0$ 仍成立。

(b)如果局域地 (在遠小於 $\mathscr{R}$的距離上) 線性理論適用；則存在着某種變換，它使 [見 (35.7b) 式和 (35.8a) 式]。

$$\bar{h}=0+\text{誤差}，\quad \bar{h}_{\mu\alpha}u^{\alpha}=0+\text{誤差}。\tag{35.69}$$

式中，u^{α} 是儘可能接近協變常數 ($u^{\alpha}{}_{|\beta}=0$) 的矢量場；卽它是在線性理論慣性坐標系中的一個常矢量；而在遠小於 $\mathscr{R}$ 的距離尺度上誤差很小。試證明，與 $\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{|\alpha}=0$ 一起，可以整體地加上 $\bar{h}=0$ 的條件；也就是說，試證明，如果此條件在某個初始超曲面上成立，則傳播方程 (35.68) 使它繼續成立。

(c)試證明，一般說來，背景曲率阻止任何矢量場存在協變常數 (頂多 $u^{\alpha}{}_{|\beta}\sim u^{\alpha}/\mathscr{R}$)；由此證明，與 $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}=0$ 一起，不能整體地加上 $\bar{h}_{\mu\alpha}u^{\alpha}=0$ 的條件。

§ 35.15　引力波的脅强-能量張量

現在轉向求出 (35.61) 式的有效脅强-能量 $T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$ 的數值。這種估算需要在幾個波長的尺度上對各種不同量作平均。在處理求平均括號〈 〉中各種量時，一些有用的規則如下 (證明請參看練習 35.14)。

「粗糙部分」的觀點中所涉及的平均過程

(1)協變微商可對易；例如，$\langle h\ h_{\mu\nu|\alpha\beta}\rangle=\langle h\ h_{\mu\nu|\beta\alpha}\rangle$。自由對易造成的部分誤差爲～$(\lambda/\mathscr{R})^2$，遠小於計算的不準確性。

(2)梯度取平均後爲零；例如，$\langle\ (h_{|\alpha}h_{\mu\nu})_{|\beta}\ \rangle=0$。此處產生的部分誤差 $\lesssim\lambda/\mathscr{R}$。

(3)作爲一個推論，可以自由地分部積分，把對一個 h 的微商換到另一個 h 上；例如，$\langle h\ h_{\mu\nu|\alpha\beta}\rangle=\langle -h_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha}\rangle$。

用這些規則，經過直截了當但冗長的計算，利用 (35.58b)式得 $R^{(2)}_{\mu\nu}(h)$，利用 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 的定義 (35.63)，利用傳播方程 (35.64)，並利用 $T_{\mu\nu}$ (引力波) 的定義 (35.61)，得出 $\langle R^{(2)}(h)\rangle=0$，以及

計算引力波的有效脅强-能量張量 $T^{(\text{引力波})}_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}=\frac{1}{32\pi}\langle\bar{h}_{\alpha\beta|\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\nu}-\frac{1}{2}\bar{h}_{|\mu}\bar{h}_{|\nu}-2\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\beta}\bar{h}_{\alpha(\mu|\nu)}\rangle。\tag{35.70}$$

這就是(35.23′)式中引用的結果，只是該處採用的是線性理論的慣性坐標系，

其中脊變微商和尋常微商是相同的。在 $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}=0$ 的規範中，最後一項爲零。此外，當 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 爲無跡時（參看練習 35.13），第二項爲零；結果只留下

$$T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}=\frac{1}{32\pi}\langle \bar{h}_{\alpha\beta|\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\nu}\rangle \text{ 如果 } \bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}=\bar{h}=0。 \tag{35.70'}$$

$T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$ 表達式的精度

由於忽略了 $h_{\mu\nu}$ 的二階修正項，引力波的有效脊强-能量的這些表達式具有量級爲 $\mathcal{O}$ 的部分誤差；它們還有由於平均過程引起的量級爲 $\lambda/\mathcal{R}$ 的部分誤差，這在 λ 的大小趨近於 $\mathcal{R}$ 時失去了意義。由 (35.28) $\mathcal{O}\lesssim\lambda/\mathcal{R}$, $T_{\mu\nu}$ (引力波) 的主要誤差～$\lambda/\mathcal{R}$。

$T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$ 的性質

在此精度範圍內，引力波的脊强-能量張量與任何其他的脊强-能量張量都處於同等地位。它在產生背景曲率方面起着同樣的作用；並且它也以同樣的方式進入守恒定律。例如，通過直接的計算或從恒等式 $G^{(\text{背景})\mu\nu}{}_{|\nu}=0$ 可以證明

$$T^{(\text{引力波})\mu\nu}{}_{|\nu}=0+\text{誤差}, \tag{35.71}$$

式中誤差～$(\lambda/\mathcal{R})(\ T^{(\text{引力波})\mu\nu}/\mathcal{R}\ )$ 在短波近似下可以忽略。

在§35.7中已經研究了 $T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$ 的某些性質。對其性質的進一步探討見練習35.18和練習35.19。

練習

練習 35.14 Brill-Hartle 平均

Isaacson (1968b)引入下述平均方案，並取名爲「Brill-Hartle 平均」。

(a)在作平均的尺度爲幾個 λ 的小區域內，連接任意兩點 $\mathcal{P}'$ 和 $\mathcal{P}$ 有唯一的 $g_{\mu\nu}^{(\text{背景})}$ 的短程線；因此，當在 $\mathcal{P}'$ 點給定一張量 $\mathbf{E}(\mathcal{P}')$ 時，可以沿此短程線把張量平行移動到 $\mathcal{P}$，從而在該處得出張量 $\mathbf{E}(\mathcal{P}')_{\to\mathcal{P}}$。

(b)設 $f(\mathcal{P}',\mathcal{P})$ 爲一加權函數，當 $\mathcal{P}'$ 和 $\mathcal{P}$ 的間隔爲波長的許多倍時，此函數光滑地趨於零，以致

$$\int f(\mathcal{P}',\mathcal{P})\sqrt{-g^{(\text{背景})}(\mathcal{P}')}\,d^4x'=1。 \tag{35.72}$$

(c)然後，在 $\mathcal{P}$ 點附近幾個波長的範圍內，張量場 $\mathbf{E}(\mathcal{P}')$ 的平均值爲

$$\langle\mathbf{E}\rangle_{\mathcal{P}}\equiv\int \mathbf{E}(\mathcal{P}')_{\to\mathcal{P}}f(\mathcal{P}',\mathcal{P})\sqrt{-g^{(\text{背景})}(\mathcal{P}')}\,d^4x'。 \tag{35.73}$$

(i)試證明，存在着一個實體 $g_{\mu}^{(\text{背景})\alpha'}(\mathcal{P},\mathcal{P}')$，它的帶撇的指標對在 $\mathcal{P}'$ 的張量作變換，它的不帶撇的指標對在 $\mathcal{P}$ 的張量作變換，以致 ($\mathbf{E}$爲二秩張量)

$$E_{\alpha\beta}(\mathcal{P}')_{\to\mathcal{P}}=g_{\alpha}^{(\text{背景})\mu'}\,g_{\beta}^{(\text{背景})\nu'}\,E_{\mu'\nu'}(\mathcal{P}')。 \tag{35.74}$$

此實體稱爲「短程線平移二重矢量」；參看 De Witt 和 Brehme (1960) 或 Synge (1960a)。

(ii)用坐標語言把表達式 (35.73)重新寫爲，

$$\langle E_{\alpha\beta}(x)\rangle = \int g_{\alpha}^{(\text{背景})\mu'}(x,x')g_{\beta}^{(\text{背景})\nu'}(x,x')E_{\mu'\nu'}(x')f(x,x')$$
$$\sqrt{-g^{(\text{背景})}(x')}d^4x', \tag{35.73'}$$

並導出 §35.15 開頭所列出的三個平均規則［解答可參看 Isaacson (1968b)的附錄］。

練習 35.15 幾何光學

對於彎曲背景中傳播的小振幅引力波，試展現其幾何光學。仿照電磁波幾何光學的分析 (§22.5)。特別是，設 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 的振幅緩慢地變化（變化的尺度 $l \lesssim \mathcal{R}$），而位相 θ 快速地變化 ($\theta_{,\alpha} \sim 1/\lambda$)。把振幅按 λ/l 的冪次展開，使得

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re\{A_{\mu\nu}+\epsilon B_{\mu\nu}+\epsilon^2 C_{\mu\nu}+\cdots\}e^{i\theta/\epsilon}。 \tag{35.75}$$

式中ϵ是形式上的展開系數，實際上等於 1，它提醒人們，ϵ^n項正比於 $(\lambda/\mathcal{R})^n$。定義下述量（用 $A^{*\mu\nu}$ 表示 $A_{\mu\nu}$ 的複共軛）：

「波矢量」：$k_\alpha \equiv \theta_{,\alpha}$ (35.76a)

「標量振幅」：$\mathcal{A} \equiv \left(\frac{1}{2}A^*{}_{\nu}A^{\mu\nu}\right)^{1/2}$ (35.76b)

「偏振」：$e_{\mu\nu} \equiv A_{\mu\nu}/\mathcal{A}$。 (35.76c)

把表達式 (35.75)代入規範條件 (35.66) 和傳播方程 (35.68) 式之中，試導出幾何光學的基本方程如下。

(a)射線（垂直於恒定位相曲面的曲線）是零短程線；即

$$k_\alpha k^\alpha = 0, \tag{35.77a}$$
$$k_{\alpha|\beta}k^\beta = 0。 \tag{35.77b}$$

(b)偏振與射線正交並沿射線平行遷移；

$$e_{\mu\alpha}k^\alpha = 0, \tag{35.77c}$$
$$e_{\mu\nu|\alpha}k^\alpha = 0。 \tag{35.77d}$$

(c)當射線彼此散開時，標量振幅按下式減少。

$$\mathcal{A}_{,\alpha}k^\alpha = -\frac{1}{2}k^\alpha{}_{|\alpha}\mathcal{A}。 \tag{35.77e}$$

即

$$(\mathcal{A}^2 k^\alpha)_{|\alpha} = 0 \quad (\text{「引力子守恒」})。 \tag{35.77f}$$

(d)對振幅的修正 $B_{\mu\nu}$ 服從

$$B_{\mu\alpha}k^\alpha = iA_{\mu\alpha}{}^{|\alpha}, \tag{35.77g}$$
$$B_{\mu\nu|\alpha}k^\alpha = -\frac{1}{2}k^\alpha{}_{|\alpha}B_{\mu\nu}+\frac{1}{2}iA_{\mu\nu|\alpha}{}^\alpha + iR^{(\text{背景})}_{\alpha\mu\beta\nu}A^{\alpha\beta}。 \tag{35.77h}$$

根據練習 35.13，特別指定規範，使得 $\bar{h}=0$，即

$$e_\alpha{}^\alpha = 0。 \tag{35.77i}$$

然後，證明波的脅强-能量張量(35.70′)爲

$$T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}=\frac{1}{32\pi}\mathcal{A}^2k_\mu k_\nu。\tag{35.77j}$$

此脅强-能量張量的形式與具有零靜止質量的粒子束的形式相同（參看 §5.4）。試明確地證明 $T^{(\text{引力波})\mu\nu}{}_{|\nu}=0$。

練習 35.16 引力子

試證明，練習35.15所發展的幾何光學與下述描述等價：「假設引力子是靜止質量爲零四維動量爲 $\mathbf{p}$ 的粒子，它沿零短程線運動（$\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p}=0$）。橫向（$\mathbf{e}\cdot\mathbf{p}=0$）無跡（$e_\alpha{}^\alpha=0$）偏振張量 $\mathbf{e}$ 與它自己一起平行地遷移（$\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{e}=0$）。幾何光學就是一束這樣的引力子沿空時的運動的理論。」試展示幾何光學此種表述中的量與前一種表述中的量之間的關係（例如，$\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$，其中$\hbar$是約化的 Planck 常數 $h/2\pi$）。

練習 35.17 引力波的引力折射

試證明，短波長的引力波經過太陽系時會經受與光線同樣的紅移和引力折射。（可由練習 35.15 直接推出這個結論。）

練習 35.18 $T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$ 的規範不變性

試證明，(35.70) 式的脅强-能量張量 $T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$ 在 (35.65) 式形式的規範變換下保持不變。

練習 35.19 $T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$ 可表示爲脅强-能量贋張量的平均

對於 $\lambda/\mathcal{R}\ll 1$ 的引力波，試計算其 Landau-Lifshitz 脅强-能量贋張量[(20.22)式]在幾個波長範圍上的平均值。結果應等於 $T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$。[提示：爲了簡化計算，可以在 $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}=\bar{h}=0$ 的規範中進行。]

練習 35.20 從變分觀點看短波近似

學過第21章引力理論變分方法的讀者，可能會感到短波近似基本方程的下述推導方式很有吸引力。它是由 Sandor Kovacs和 Bernard Schutz，以及 Bryce De Witt（未發表，1971）獨立作出的。MacCallum 和 Taub (1973) 給出了「非 Palatini」方案。

(a) 定義

$$g_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\nu}^{(\text{背景})}+h_{\mu\nu},\quad \bar{h}_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(\text{背景})}h,\tag{35.78a}$$

$$W^\mu{}_{\beta\gamma}\equiv\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}_{(\text{背景})}(h_{\alpha\beta|\gamma}+h_{\alpha\gamma|\beta}-h_{\beta\gamma|\alpha})。\tag{35.78b}$$

隨背景度規升降 $h_{\mu\nu}$ 和 $W^\mu{}_{\beta\gamma}$ 的指標。試用練習 35.11 的結果，推出引力場的 Lagrange 函數的下述表達式：

$$\mathcal{L}\equiv\frac{1}{16\pi}(-g)^{1/2}R=\mathcal{L}'+\begin{pmatrix}\text{形式爲 }\partial\mathcal{Q}^\alpha/\partial x^\alpha\\ \text{的完整散度}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathcal{A}^3/\lambda^2,\ R_{\mu\nu}^{(\text{背景})}\mathcal{A}\text{ 和}\\ \text{更小量級的修正項}\end{pmatrix},\tag{35.78c}$$

式中

$$\mathcal{L}' \equiv \frac{1}{16\pi}(-g\ (\text{背景})\ )^{1/2}[R^{\ (\text{背景})} - \bar{h}^{\mu\nu}(W^{\alpha}{}_{\mu\nu|\alpha} - W^{\alpha}{}_{\mu\alpha|\nu}) + g\ (\text{背景})\ ^{\mu\nu}(W^{\alpha}{}_{\beta\alpha}W^{\beta}{}_{\mu\nu} - W^{\alpha}{}_{\beta\nu}W^{\beta}{}_{\mu\alpha})]。 \tag{35.78d}$$

[提示：記住，對於任意的 B^{α}，有

$$(-g\ (\text{背景})\ )^{1/2}B^{\alpha}{}_{|\alpha} = \partial[(-g\ (\text{背景})\ )^{1/2}B^{\alpha}]/\partial x^{\alpha} \quad]$$

從$\mathcal{L}$中丟掉 $\mathcal{A}^3/\lambda^2$ 量級的修正項；並且在事先知道場方程要求 $R^{(\text{背景})}_{\mu\nu} \sim \mathcal{A}^2/\lambda^2$ 的情況下，把 $R^{(\text{背景})}_{\mu\nu}\mathcal{A}$ 量級的修正項也丟掉。已知完全散度在極值計算中沒有任何貢獻，可從 $\mathcal{L}$ 中丟掉散度項。這樣，$\mathcal{L}$ 中唯一留下的部分就是 $\mathcal{L}'$ 了。

(b)利用 Platini 方法 (§21.2)對 $I \equiv \int \mathcal{L}' d^4x$ 求極值；即（暫時地）放棄 $W^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ 的定義 (35.78b)，而相對於獨立變量 $W^{\mu}{}_{\beta\gamma} = W^{\mu}{}_{\gamma\beta}$, $\bar{h}^{\mu\nu} = \bar{h}^{\nu\mu}$，和 $g^{\mu\nu}_{(\text{背景})} = g^{\mu\nu}_{(\text{背景})}$ 對 I 求極值。試證明，相對於 $W^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ 的極值就是前面用 $h_{\mu\nu}$ 表示 $W^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ 的(35.78a,b) 式。試證明，相對於 $\bar{h}^{\mu\nu}$ 的極值與 (35.78a,b) 式聯合起來，導致引力波的傳播方程 (35.64)。試證明，相對於 g（背景）$^{\mu\nu}$ 的極值，與 (35.78a,b)式和傳播方程 (35.64) 聯合起來，並在幾個波長上求平均後，導致

$$G^{(\text{背景})}_{\mu\nu} = 8\pi T^{(\text{引力波})}_{\mu\nu},$$

式中 $T^{(\text{引力波})}_{\mu\nu}$ 由 (35.70) 式給出。[警告：在此練習中代數計算是極其大量的，除非從一開始就選用規範條件 $\bar{h} = \bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} = 0$。]

第三十六章　引力波的產生

物質由曲率代表，但並非每種曲率都
代表物質；可能有「真空中」的曲率。
G. Lemaitre摘自 Schilpp (1949) 第440頁

§ 36.1　引力波的四極性

在孤立的近 Newton 系統中的質量，彼此圍繞運動。它們發出多少引力輻射呢？

通過電磁類比分析引力波的產生

作爲量級估計，可以使用熟悉的電磁理論的輻射公式，並作替換$e^2 \longrightarrow -m^2$，這個替換把靜態 Coulomb 定律轉換爲 Newton 引力定律。這種方法把引力當作自旋爲 1（矢量）的場來處理，而不是自旋爲 2（張量）的場；結果在數值因子中引入了不大不小的誤差，並改變了角分布。但是它能適當的估計總輻射功率。

在電磁理論中，電偶極輻射爲主，對於以加速度 $\boldsymbol{a}$ 運動且偶極矩按 $\ddot{\boldsymbol{d}} = e\ddot{\boldsymbol{x}} = e\boldsymbol{a}$ 變化的單個粒子，其輸出功率或「發光度」L 爲（參看§4.4和圖4.6）

$$L_{\text{電偶極}} = (2/3)e^2\boldsymbol{a}^2;$$

對於偶極矩爲 d 的一般系統，爲

$$L_{\text{電偶極}} = (2/3)\ddot{\boldsymbol{d}}^2。$$

[幾何單位：發光度的單位是在每厘米光傳播時間內發出的以厘米爲單位的質量-能量；電荷的單位爲厘米，$e = (G^{1/2}/c^2)e_{\text{慣用}} = (2.87\times10^{-25}$ 厘米/絕對靜電單位$) \times (4.8\times10^{-10}$絕對靜電單位$) = 1.38\times10^{-34}$ 厘米，加速度的單位爲每厘米時間平方內的以厘米爲單位的距離。對於傳統單位，即 e 採用絕對靜

電單位 esu 或（克厘米³/秒²）$^{1/2}$，則方程右側插入因子 c^{-3}，得出發光度 L 的單位爲爾格／秒］。電偶極矩的引力類比是質量偶極矩

爲什麼引力波不是偶極的

$$\boldsymbol{d}=\sum_{\text{粒子}A} m_A\boldsymbol{x}_A\text{。}$$

它的一階時間變化率是系統的總動量

$$\dot{\boldsymbol{d}}=\sum_{\text{粒子}A} m_A\dot{\boldsymbol{x}}_A=\boldsymbol{p}\text{。}$$

根據總動量守恒定律，質量偶極矩的二階時間變化率必須是零，$\ddot{\boldsymbol{d}}=\dot{\boldsymbol{p}}=0$ 因此，*在引力物理中不存在質量偶極輻射*。

其次的最强的電磁輻射是磁偶極輻射和電四極輻射。磁偶極輻射產生於磁矩的二階時間微商 $\ddot{\boldsymbol{\mu}}$。這裏，引力類比又一次是一個運動常數，即角動量

$$\boldsymbol{\mu}=\sum_A (A\text{ 的位置})\times(\text{由 }A\text{ 產生的流})=\sum_A \boldsymbol{r}_A\times(m\boldsymbol{v}_A)=\boldsymbol{J}\text{；}$$

因此又沒有輻射。從而*不存在任何類型的引力偶極輻射*。

在轉向四級輻射時，才終於得到了非零的結果（見圖36.1）。電磁理論預期的輸出功率爲

$$L_{\text{電四極}}=\frac{1}{20}\dddot{Q}^2\equiv\frac{1}{20}\dddot{Q}_{jk}\dddot{Q}_{jk}\text{，}$$

$$Q_{jk}\equiv\sum_A e_A\left(x_{Aj}x_{Ak}-\frac{1}{3}\delta_{jk}r_A^2\right)$$

（Q_{jk}此處$=Q_{jk}$在許多其他文獻中），它的引力對應爲

$$L_{\text{質量四極}}=\frac{1}{5}\langle\dddot{I}^2\rangle\equiv\frac{1}{5}\langle\dddot{\mathcal{I}}_{jk}\dddot{\mathcal{I}}_{jk}\rangle\text{，}\qquad(36.1)$$

用源的「約化四極矩」表示的引力波輸出功率

$$\mathcal{I}_{jk}\equiv\sum_A m_A\left(x_{Aj}x_{Ak}-\frac{1}{3}\delta_{jk}r_A^2\right)=\int\rho\left(x_jx_k-\frac{1}{3}\delta_{jk}r^2\right)d^3x\text{。}\qquad(36.2)$$

公式（36.1）中包含正確的因子1/5，它來自張量計算（見§36.10），而不是通過電磁類比得出的不正確的因子1/20；並且（36.1）式的右側已在源的幾個特徵周期上求了平均（「〈　　〉」），因爲無法把引力輻射能量局限於一個波長之內。

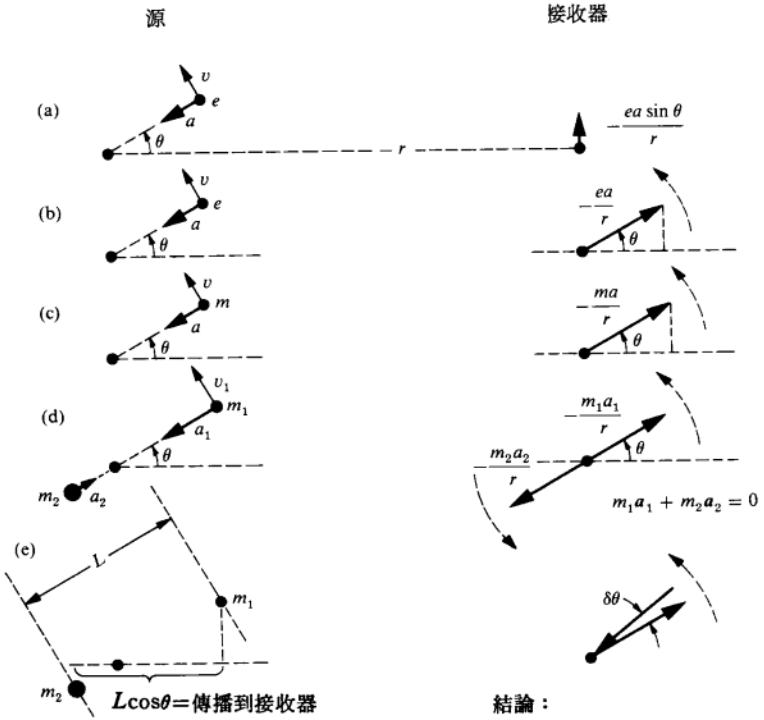


圖 36.1

爲什麼引力輻射通常很微弱。簡言之，分離質量的質量偶極矩對外向波的振幅的貢獻互相抵消，$(m_1a_1+m_2a_2)/r=0$（作用等於反作用原理）。

(a) 來自加速電荷的輻射（見§4.4和圖4.6）。

(b) 用電氣工程的典型旋轉矢量圖表示的在遠距離r處的場；然而，此處，爲了便於想像，以旋轉矢量的垂直投影給出觀測場（通常的偶極輻射場是由圓軌道上的電荷產生的）。

(c) 基於把引力場當作自旋爲1或矢量場的簡化模型，作出的引力輻射的相應旋轉矢量圖（與它的眞正張量性質不同；因此，這個簡單的圖所給出的角分布的細節和總輻射並不正確；但發光度的數量級是正確的）。

(d) 由於作用與反作用相等的原理，兩個使彼此保持在軌道上的質量 m_1 和 m_2，對外向波振幅的貢獻，大小相等而方向相反。（在氫原子電磁輻射的情況下，相應的兩個輻射振幅並不抵消：e電子 a電子＋e質子 a質子～e電子 a電子≠0）。

(e) 採用較好的近似時，必須考慮到來自兩個質量的效應到達接收器的時間不同。因此前面彼此恰好反向的兩個矢量，現在則畫成有位相角 $\delta\theta$ 的傾角。得到的場的振幅歸於 $\ddot{I}$，此處 I 爲約化四極矩而發光度正比於 $\ddot{I}^2$。

注：關於「質量分佈二階矩」的定義毫無含糊之處，當它在物理和數學文獻中出現時都很清楚

$$I_{jk}\equiv\int\rho x_j x_k d^3x\,。$$

關於如何從這個質量分布二階矩得出慣性張量矩 $\mathcal{I}_{jk}$，也毫無含糊之處：

$$\mathcal{I}_{jk}=\delta_{jk}\,\text{迹}\,(I_{ab})-I_{jk}=\int\rho(r^2\delta_{jk}-x_jx_k)d^3x\,。$$

此處所採用的矩，能夠表示發射四極引力輻射的源的特徵，它毫不含糊地就是「質量分布二階矩的無迹部分」：

$$\mathcal{I}_{jk}=I_{jk}-\frac{1}{3}\delta_{jk}\,\text{迹}\,(I_{ab})=I_{jk}-\frac{1}{3}\delta_{jk}I=\int\rho(x_jx_k-\frac{1}{3}\delta_{jk}r^2)d^3x\,。\quad(36.3)$$

採用這一符號是因爲它使公式簡化，使計算簡化，與引力波理論的大部分文獻密切配合［例如，Peters (1964), Peres 和 Rosen (1964)］，而且也容易記住。量 $\mathcal{I}_{jk}$ 的另一名稱是約化四極矩。這個術語把以下幾個量清楚的區分開來：此處採用的量；在 Landau 和 Lifshitz (1962) 標準教科書中以及在有關核四極矩文獻中稱爲四極矩的量，它爲此處量的三倍；以及球諧理論中所用的量，它爲此處量的 3/2 倍：

$$Q_{zz}\begin{pmatrix}\text{Landau 和 Lifshitz;}\\ \text{也是核四極矩}\end{pmatrix}=\int\rho(3z^2-r^2)d^3x\,),$$

$$Q_{zz}(\text{球諧理論})=\int\rho\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}r^2\right)d^3x,$$

$$\mathcal{I}_{zz}\begin{pmatrix}\text{約化四極矩；}\\ \text{此處採用的對源}\\ \text{强度的明確量度}\end{pmatrix}=\int\rho\left(z^2-\frac{1}{3}r^2\right)d^3x\,。$$

因而，採用 $\mathcal{I}_{zz}$ 符號的優點是能夠避免文獻中存在的含糊。

爲什麼引力波通常是四極的

電磁輻射以偶極輻射爲主（球諧指數 $l=1$），而引力輻射是四極輻射（$l=2$），這是普遍定理的結論。考慮一經典輻射場，其對應的量子力學粒子的自旋爲整數 S，靜止質量爲零。把輻射場分解爲球諧分量，即分解爲多極矩。全部 $l<S$ 的分量都將爲零；一般來說，$l\geq S$ 的分量不爲零；而這與源的性質無關！［參看，例如，Couch 和 Newman (1972)。］因爲對於緩慢運動的源（速度 $\ll c$），一般說來，最低階的非零的多極矩占主導地位，所以電磁輻射（$S=1$）通常是偶極的（$l=S=1$），而引力輻射（$S=2$）通常是四極的（$l=S=2$）。

與此定理緊密相關的是「拓撲定點定理」［例如，Lifshitz (1949)］，它把標量場，矢量場和張量場區分開。對於標量的擾動，例如壓力波，具有球對稱的源並無困難。這樣，在一個半徑 r 很大的球面上，不難使壓力場在任一時刻在整個球面處處取同一值 p。反之，無法把大小不爲零而又處處相等的連續矢量放在二維球的表面上（「無法把臺球表面上的頭髮梳理光滑」）。同樣地，也無法把連續非零橫向無迹2×2矩陣場放在二維球的表面上，且使該場從一點到另一點的不同最多不過是旋轉。因而，拓撲學排除了不管什麼樣的任何引力輻射球對稱源的可能性。

§ 36.2 用內功率流表示輻射功率

輸出功率的表達式 (36.1) 可以改寫成在數量級估計中較易使用的形式。注意，約化四極矩是

$$\ddot{I}_{jk}\sim\frac{\left(\begin{matrix}\text{系統中運動}\\\text{部分的質量}\end{matrix}\right)\times\left(\begin{matrix}\text{系統}\\\text{的大小}\end{matrix}\right)^2}{\left(\begin{matrix}\text{質量從系統一側運}\\\text{動到另一側的時間}\end{matrix}\right)^3}=\frac{MR^2}{T^3}$$

$$\sim\frac{M(R/T)^2}{T}\sim\frac{(\text{動能的非球形部分})}{T};$$

$$\ddot{I}_{jk}\sim L_{\text{內部}}\equiv\left(\begin{matrix}\text{系統一側到另}\\\text{一側的功率流}\end{matrix}\right): \tag{36.4}$$

用源的內功率流表示引力波的功率輸出

因此，(36.1)式指出，引力波的功率輸出（「發光度」）約爲內功率流的平方

$$L_{\text{引力波}}\sim(L_{\text{內部}})^2。 \tag{36.5}$$

如果覺得此式看起來很古怪（只有傻瓜才能使功率等於功率的平方？），那麼，請記住，在幾何單位中功率是無量綱的。變爲常規的單位，轉換因子是

$$L_0\equiv c^5/G=3.63\times10^{59}\text{爾格/秒}=2.03\times10^5 M_\odot c^2/\text{秒}。 \tag{36.6}$$

爲了使此式看起來更舒服一些，總可以把因子 $L_0=1$ 插入任何願意放的地方。例如，可以把(36.5)式改寫爲

$$L_{\text{引力波}}/L_{\text{內部}}\sim L_{\text{內部}}/L_0。 \tag{36.7}$$

在應用 $L_{引力波}\sim(L_{內部})^2$ 時，必須小心，要略去那些根本不能發出輻射（即那些不伴有隨時間變化的四極矩）的內功率流。例如，恒星中與球形脈動和軸對稱旋轉相聯繫的內功率流必須略去。

能量守恒確知輻射的反作用力將使系統的內能降低，其速率與引力波帶走能量的速率相同（見框19.1）。輻射反作用顯著地改變系統的特徵時間尺度爲

輻射反作用效應的特徵時間尺度

$$\begin{aligned}\tau_{反作用}&\sim[1/\text{能量損失速率}]\times[\text{發生輻射的運動中的能量}]\\&\sim[1/L_{引力波}]\times[(L_{內部})\times(\text{內部運動的特徵周期}T)]\\&\sim(L_{內部}/L_{引力波})T\sim(L_0/L_{內部})T。\end{aligned}\tag{36.8}$$

因此，*僅當系統內功率流非常強*

$$L_{內部}\gtrsim L_0=3.63\times10^{59}\text{爾格/秒}=1\ !$$

時，輻射的反作用才會在一個特徵周期內很重要。

§ 36.3　引力波的實驗室發生器

作爲引力波的實驗室發生器，考慮一個重的鋼樑，其半徑 $r=1$ 米，長度 $l=20$米，密度 $\rho=7.8$克/厘米^3，質量 $M=4.9\times10^8$克（490噸），抗張强度 $t=40{,}000$磅/英吋^2 或 3×10^9 達因/厘米^2。設此樑繞其中點轉動（一端越過一端地旋轉），其旋轉角速度 ω 受到離心力和抗張强度之間平衡的限制：

來自旋轉鋼樑的功率輸出

$$\omega=(8t/\rho l^2)^{1/2}=28\text{弧度/秒}。$$

內功率流爲

$$\begin{aligned}L_{內部}&=\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)\omega=\frac{1}{24}Ml^2\omega^3\\&\approx2\times10^{18}\text{爾格/秒}\approx10^{-41}L_0。\end{aligned}$$

輻射功率的數量級爲

$$L_{引力波}\sim(10^{-41})^2L_0\sim10^{-23}\text{爾格/秒}。\tag{36.9}$$

［利用(36.1)式作嚴格計算給出 2.2×10^{-22}爾格/秒；見練習36.1。］顯然，在沒有新的工程技術或新的概念或兩者皆無的情況下，製造引力輻射的實驗室發生器是一種沒有吸引力的事業。

依靠天體物理源建立實驗室或太陽系探測器是值得考慮的更自然的方針。探測將在下一章討論。此處集中注意天體物理源。

練習

練習 36.1 旋轉棹的引力波

一長鋼棹，長度爲 l，質量爲 M，以角速度 ω 一端越過一端地旋轉。試證明，它發出的引力波的功率爲

$$L_{\text{引力波}}=\frac{2}{45}M^2l^4\omega^6。 \tag{36.10}$$

試用此公式證明正文描述的棹輻射功率 2.2×10^{-22} 爾格/秒。

§ 36.4 引力波的天體物理源：一般討論

考慮一高度活動的天體物理系統（脈動的激烈旋轉的恒星，或坍縮恒星，或爆發恒星，或許多恒星組成的混沌系統）。如果它的質量爲M，大小爲 R，那麼，根據維里 (Virial) 定理（練習39.6），它的動能爲$\sim M^2/R$。質量從系統一端運動到另一端的特徵時間尺度T爲

$$T\sim\frac{R}{(\text{平均速度})}\sim\frac{R}{(M/R)^{1/2}}=\left(\frac{R^3}{M}\right)^{1/2} \tag{36.11a}$$

（～自由下落時間；～在 Kepler 軌道中轉動 1 弧度的時間；參看第25章）。結果，內功率流爲

$$L_{\text{內部}}\sim\frac{(\text{動能})}{T}\sim\left(\frac{M^2}{R}\right)\left(\frac{M}{R^3}\right)^{1/2}\sim\left(\frac{M}{R}\right)^{5/2}。 \tag{36.11b}$$

劇烈活動的天體物理源的功率輸出，用質量與半徑表示

引力波的輸出或「發光度」爲此量的平方，或

$$L_{\text{引力波}}\sim(M/R)^5L_0。 \tag{36.11c}$$

（如果系統較爲對稱，或如果只有其中一小部分質量在運動，則它的四極矩的改變不大，$L_{\text{引力波}}$的估值也要相應減小。波振幅的下降與其運動質量所占百分數成正比，功率的減小則正比於此百分數的平方。）

功率輸出的上限

顯然，*當系統接近其引力半徑時，功率輸出達到極大；並且，因爲任何東西甚至引力波都不可能從引力半徑內逃逸出去，所以，不管系統的性質如何，輸出的極大值總是*$\sim L_0=3.63\times10^{59}$*爾格/秒*！

實際上這一極限和 (36.11c) 式的上述推導，使用了廣義相對論的近似，而它在接近引力半徑時失效。［在推導$L_{\text{引力波}}$的標準公式 (36.1) 式時，要求

運動速度比光速小很多（見 §36.7）；對（36.11a）式中維里定理的論證，以及對 $L_{引力波}$公式的論證，都要求近 Newton 場。］雖然如此，作爲粗略的數量級估計，即使在相當接近 Schwarzschild 半徑處，例如 $R\sim 3M$ 處，（36.11c）式仍然適用；在該處之內，引力太强，以致任何系統都無法抗拒在遠長於 $T\sim M$的有效時間內坍縮。

天體物理源中輻射的反作用

輻射反作用力顯著影響系統所需時間［(36.8)式］的量級爲

$$\tau_{反作用}\sim(L_0/L_{內})T\sim(R/M)^{5/2}T\,, \qquad (36.11d)$$

式中T是旋轉或自由下落的特徵時間（36.11a）。（注意，如何隨意插入或除去因子 $L_0=1$!）結果，輻射反作用的效應，當在一個周期內積分時，除了系統接近其引力半徑的情況外，都是不重要的。

當一個系統，例如脈動的恒星，平靜下來進入平衡狀態時，輻射的反作用會阻遏其內部運動。另一方面，當系統，例如雙星系統，遠離任何平衡狀態時，在一定情況下，由於輻射而減小能量（以及角動量）時，會加大角速度或者使內部運動加快，從而進一步增强了輻射。

§36.5　引力坍縮，黑洞，超新星和脈衝星作爲引力波源

引力波來自：
(1)恒星坍縮和黑洞的形成

因爲 $L_{引力波}\sim(M/R)^5L_0$，到達地球的最强引力波必定來自接近其引力半徑的活動的、變形的系統（R每增大10倍，$L_{引力波}$會下降10萬倍！）。圖24.3的劇本給出了某些不僅可能發生而且必定發生的活動過程的景像。那裏概述的一系列事件包括一些引力輻射脈衝，其間點綴着頻率逐漸增加的連續輻射間隔。第一個脈衝到達的時間，正是具有白矮星核的恒星最初坍縮成薄餅形狀的中子星之時。繼續進行的細節如何，將因此「薄餅」初始質量和角動量的不同而有巨大差別。在該示意圖中，此薄餅碎裂爲共同旋轉的中子星的星座，然後它們逐個經歷「追踪和納入」。

無論在這類劇本或在其他劇本中，或許，最有利的引力輻射源是以高度非球形方式經引力半徑坍縮的恒星（原始的存留極爲短暫的「薄餅」或那裏的碎片之一）。這樣的恒星將以最後的引力波爆發結束生命，引力波帶走了它的靜止質量的相當大的一部分。於是，數量級估計給出

$$\begin{aligned}(\text{輻射的能量})&=\int L_{引力波}dt\sim L_0\cdot\left(\begin{array}{c}\text{出現峰值發光}\\ \text{度的持續時間}\end{array}\right) \qquad (36.12)\\ &\sim L_0M=M\,。\end{aligned}$$

（輻射的能量究竟是$0.9M$，還是$0.1M$或$0.01M$，今天還不能肯定，但是它必定處在這種量級範圍之內。）低頻的輻射應當是弱的；在頻率略小於$1/M$處，輻射上升到峰值；並在圓頻率超過 $\omega\sim 1/M$後，輻射尖銳地截止。

(2)碎片落入黑洞中

物質（「碎片」；參看圖24.3）落入黑洞也可能成爲引力波重要的輻射源。下落的物質在遠離引力半徑時的輻射很弱；但是當它落下經過引力半徑時（在 $r\sim 4M$ 和 $r=2M$ 之間），發出很强的爆發。如果下落物質團塊的質量爲m，黑洞的總質量爲M，則在最後爆發中釋放的總能量爲

$$E_{\text{輻射}}\sim m^2/M\,, \tag{36.13}$$

而且，發射此能量的持續時間爲$\sim M$，功率輸出爲 $L_{\text{引力波}}\sim(m/M)^2L_0$。（參看練習 36.2。）實際上，這是對能量輸出的非常粗略的估計。在下落物質團塊的質量和尺度兩者都很小的極限下［(團塊大小)≪（黑洞的引力半徑）；$m\ll M$；「δ 函數團塊」］，可以把團塊和引力波作爲對黑洞的 Schwarzschild 幾何的小微擾來處理，嚴格計算輻射能譜與輻射能量。這種處理方法的基礎由 Zerilli (1970b) 給出。Davis, Ruffini, Press 和 Price (1971) 修正了 Zerilli 的公式，並應用於正面撞擊的情形。他們預言了圖 36.2 的譜，並對 $m\ll M$ 和（團塊大小）≪M的情形，預言總輸出能量爲

$$E_{\text{輻射}}=0.0104m^2/M。 \tag{36.14}$$

(3)黑洞的碰撞

黑洞之間的碰撞也應產生强烈的引力波爆發——儘管這種碰撞大概非常罕見！

(4)超新星爆發

超新星爆發不像黑洞碰撞那麼稀少，但也不是常常發生的（大約每個星系每 100 年發生一次）。根據由脈衝星觀測證實的最新理論，超新星爆發是由高度演化恒星核的坍縮觸發的（見 §24.3）。坍縮本身和隨後坍縮核（中子星）的劇烈廻轉應產生短暫而强烈的引力波爆發。爆發的特徵，按 (36.11) 式估計，並假設與球形有很大偏離，爲

$$\begin{aligned}
&(\text{輻射的能量})\sim(\text{中子星結合能})\\
&\qquad\sim M^2/R\sim 0.1M\sim 10^{53}\ \text{爾格}\\
&(\text{平均頻率})\sim 1/T\sim(M/R^3)^{1/2}\sim 0.03M^{-1}\sim 3000\text{赫}\,,\\
&(\text{功率輸出})\sim(M/R)^5L_0\sim 10^{-5}L_0\sim 3\times 10^{54}\text{爾格/秒}\,,\\
&\left(\begin{array}{l}\text{如果湍流，熱傳導和其}\\ \text{他效應不能更快地使運}\\ \text{動受到阻尼，則引力輻}\\ \text{射阻尼運動的時間}\end{array}\right)=\tau\sim M(M/R)^{-4}\sim 0.1\text{秒}\sim 300\text{周期}。
\end{aligned} \tag{36.15}$$

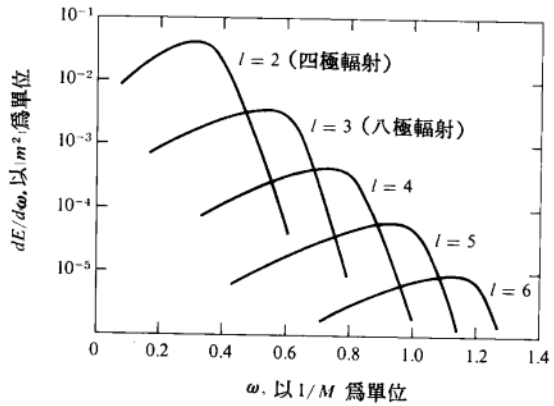


圖 36.2

引力波輻射譜，它是由質量爲 m 的「δ 函數」物質團塊正面落入質量 $M \gg m$ 的非旋轉（Schwarzschild）黑洞時發出的。輻射總能量在各多極輻射之間的分布遵從經驗規律

$$(l \text{ 極波中的能量}) \approx (0.44m^2/M)e^{-2l},$$

而且總頻譜的峰值在角頻率

$$\omega_{\text{極大}} = 0.32/M$$

處。這些計算是把落入的物質團塊和引力波當作對黑洞 Schwarzschild 幾何的小擾動來處理而計算出來的。有關的微擾理論方程是 Zerilli (1970) 導出的，Davis, Ruffini, Press 和 Price (1971) 作了數值解並給出了這些結果。

在恒星脈動的最後階段，當振幅 $\xi = \delta r$ 已經降到 $\delta r/r \ll 1$ 時，把流體運動和引力波當作對平衡恒星模型的小擾動來處理，可以嚴格地計算脈動頻率和阻尼時間。這樣計算的結果與上述粗略估計很好的相符，如框36.1所示。

(5)年青的脈衝星

在引力輻射反作用和其他力使中子星脈動衰減很長時間以後，恒星仍將繼續旋轉；並且在它旋轉時還携帶着離軸指向的磁矩，它將發出天文學家證認爲「脈衝星輻射」的射電波，光和X射線。在此脈衝星相，僅當恒星稍稍被變形而偏離軸對稱(軸對稱⇒恒定的四極矩⇒沒有引力波)時，引力輻射才是重要的。根據練習36.3的估計，只要包含 0.001 恒星質量的變形，已知的最年青的脈衝星（蟹狀星雲）就能發出 10^{38} 爾格/秒的輻射；而且伴生的輻射反作用可能是脈衝星轉動減慢的一個重要原因。但是，現在（1973年）還不完全清楚——確實，似乎不大可能——中子星能否承受那怕這麼小的變形。

（接第986頁）

框 36.1 來自脈動中子星的引力波

此表取自 Thorne (1969a)，它羅列了若干典型中子星模型四極振蕩的各種特徵。注意，最大質量模型發射的引力波(1)頻率爲 $\nu=1/T_n$～3,000 赫，(2)持續時間～$\frac{1}{3}$秒，(3)恒星的振動僅在振蕩～1,000次之後就被阻遏，(4)帶走的總能量爲～10^{54}爾格×$(\delta R/R)^2$，此處$\delta R/R$是恒星表面振動的初始相對振幅。

這些結果並非基於本章的近 Newton 緩慢運動公式[(36.1)式，§36.7和§36.8]，因爲這些公式在此並不適用：從最大質量恒星發出的波動的輻射約化波長 λ～15公里，並不比恒星引力半徑$2M$～6公里大多少；並且恒星內部引力場也並不弱 (M/R可大到 0.29)。因而，導出這些結果是採用了適合於快速運動和强內場的不同技巧，但是，它假定與平衡恒星模型的偏離是小擾動。關於推導的細節，參看 Thorne (1969a) 及該處引述的其他文獻。

中子星的四極脈動

狀態方程	ρ_c (克厘米$^{-3}$)	$M/M_\odot$	$2M/R$	n	Tn (毫秒)	τ_n (秒)	τ_n/T_n	$\frac{E_M}{\langle(\delta R/R)^2\rangle}$ (爾格)	$\frac{\text{功率}}{\langle(\delta R/R)^2\rangle}$ (爾格秒$^{-1}$)	$\frac{(\delta R/R)}{(\delta r/r)_c}$	$\delta\theta_s/\delta\theta_c$
H-W	3×10^{14}	0.405	0.0574	0	1.197	13.	11000	7.8×10^{50}	1.2×10^{50}	+ 7.4	+ 3.1
H-W	6×10^{15}	0.682	0.240	0	0.3109	0.19	610	2.8×10^{52}	2.9×10^{53}	+ 5.2	+ 3.7
				1	0.1713	0.28	1600	3.6×10^{51}	2.6×10^{52}	− 14.	− 3.3
				2	0.1179	1.3	11000	2.6×10^{50}	3.9×10^{50}	+ 55.	+ 5.9
				3	0.0938	24.	250000	8.9×10^{48}	$7.\times10^{47}$	− 350.	− 24.
V_I	5.15×10^{14}	0.677	0.159	0	0.6991	1.7	2400	5.7×10^{52}	$7.\times10^{52}$	+ 1.4	+ 1.3
				1	0.2358	11.0	47000	6.0×10^{50}	1.1×10^{50}	− 38.	− 4.7
V_I	3×10^{15}	1.954	0.580	0	0.3777	0.22	600	1.7×10^{54}	1.6×10^{55}	+ 1.9	+ 3.1
				1	0.1556	1.6	10000	1.5×10^{54}	1.9×10^{54}	− 2.1	− 0.66
				2	0.1026	2.6	25000	5.2×10^{53}	4.0×10^{53}	+ 2.9	+ 0.40

表中各列的含義如下：

狀態方程：狀態方程 $p(\rho)$ 用來構造平衡恒星模型，並由 $\gamma=[(\rho+p)/p]dp/d\rho$ 計算絕熱指數；H-W 是 Harrison-Wheeler 狀態方程，它在 Hartle 和 Thorne (1968) 的表 1 中用列表形式給出；V_7 是 Levinger-Simmons-Tsuruta-Cameron V_7 狀態方程，它在 Hartle 和 Thorne (1968) 的表 2 中用列表形式給出。

ρ_c：平衡恒星模型的總質量-能量的中心密度。

$M/M_\odot$：平衡模型的總質量-能量（即支配遠方 Kepler 軌道的質量）；用太陽質量爲單位表示。

$2M/R=2GM/Rc^2$：平衡模型的引力半徑與實際半徑（由 $4\pi R^2$=表面面積定義的半徑）之比。

n：所研究的脈動正則模式的「階」（對於此處所給出的全部模型，n 也是在徑向相對本徵函數 $\delta r/r$ 的結點數目）。注意，$n=0$ 是基（四極）模式。

$T_n=2\pi/\omega_n$：準簡正模式的脈動周期，以毫秒爲單位。

τ_n：簡正模式振幅的阻尼時間，以秒爲單位。

$\tau_n/T_n=\omega_n\tau_n/2\pi$：振幅減小至 $1/e$ 倍所需的脈動周期數目。

$E_\infty/\langle(\delta R/R)^2\rangle$：恒星脈動能量除以恒星表面徑向運動的相對振幅平方在恒星表面的平均值。

功率/$\langle(\delta R/R)^2\rangle$：作爲引力波輻射的功率，除以恒星表面相對振幅平方的平均值。

$(\delta R/R)(\delta r/r_c)^{-1}$：恒星表面徑向運動的相對振幅除以恒星中心的相對振幅。

$\delta\theta_s/\delta\theta_c=\delta\phi_s/\delta\phi_c$：在恒星表面處恒星流體角位移的振幅除以在恒星中心處的相應振幅。

本節討論的這些源，絕大多數是「脈衝」的而不是連續的（恒星坍縮經過引力半徑；碎片落入黑洞；黑洞之間的碰撞；超新星爆發）。它們導致引力波的爆發。框36.2詳細說明了分析這些爆發的數量級的方法。

從上面描述的應能產生引力波的過程，進而估計實際籠罩地球的引力波的特徵，這是困難而冒險的。對於在1972年作出的這類估計，以及隨着對宇宙理解的深入而作出的廣泛修正，見 Press 和 Thorne (1972)。

練習

練習 36.2 落入黑洞的物質發出的引力波

質量爲 m 的物質團塊落入質量爲 M 的黑洞。試證明，發出的引力波爆發的持續時間爲 $\sim M$，功率爲 $L_{\text{引力波}}\sim(m/M)^2L$，因此輻射總能量可由(36.13)式作粗略的數量級估計。

練習 36.3 振動中子星發出的引力波

把中子星理想化爲質量爲 M 半徑爲 R 的不可壓縮流體球，其結構受 Newton 引力定律支配。設恒星以其基諧四極模式脈動。試利用 Newton 理論計算：脈動的角頻率 ω；脈動的能量 $E_{\text{脈動}}$；量 $\frac{1}{3}\langle\ddot{I}^2\rangle$，由(36.1)式，此量即爲引力波的輻射功率 $L_{\text{引力波}}$；以及輻射掉的脈動能量的 e 倍變化時間 $\tau=E_{\text{脈動}}/L_{\text{引力波}}$。把答案與由較粗略近似得出的 (36.15) 式作比較，並與由較準確近似得出的框 36.1 中的結果作比較。［求解時可參看 Wheeler (1966) 的表13］

練習 36.4 脈衝星的減速

在蟹狀星雲中的脈衝星 NPO532，其周期爲 0.033秒，並以速率 $dP/dt=1.35\times10^{-5}$ 秒／年減速。假設此脈衝星爲典型的中子星，試計算其轉動能量損失的速率。如果此能量損失主要歸因於引力輻射的反作用，試問恒星非軸對稱形變的大小？［求解可參看Ferrari 和 Ruffini (1969)；嚴格的强場分析可參看 Ipser (1970)。］

---

§ 36.6 雙星作爲引力波源

雙星作爲引力波源：

最大量的弱引力波源是雙星系統。而且，大約全部恒星的一半是在雙星或多重星系統中［參看，例如， Allen (1962) 編纂的書］。根據 Kepler 三定律，質量分別爲 m_1 和 m_2 的兩個恒星互相繞轉時，其角頻率 ω 和間隔 a 通過下式聯繫在一起

$$\omega^2a^3=m_1+m_2=M。$$

框 36.2　分析來自脈衝事件的輻射爆*

	電　　磁	引　　力
與輻射有關的典型矩	$d_x(t)$	$\mathcal{I}_{xx}(t)$
它的 Fourier 變換	$(2\pi)^{-1/2}\int d_x\ \exp[i\omega t]\,dt$	$(2\pi)^{-1/2}\int \mathcal{I}_{xx}\exp[i\omega t]\,dt$
變換量的名稱	$d_x(\omega)$	$\mathcal{I}_{xx}(\omega)$
總輻射能量損失 ΔE 的時間分解	$c^{-3}\int \ddot{d}^2(t)dt$	$Gc^{-5}\int \dddot{\mathcal{I}}^2(t)dt$
ΔE 按圓頻率分解	$c^{-3}\int \ddot{d}^2(\omega)d\omega$	$Gc^{-5}\int \dddot{\mathcal{I}}^2(\omega)d\omega$
從 $\omega=0$ 到 ω 的某一臨界值，相對於 ω，被積函數近似爲常數，超過臨界值，輻射迅速衰減	$\omega_{臨界}\sim 1/\Delta t$	$\omega_{臨界}\sim 1/\Delta t$
$\omega<\omega_{臨界}$時的 $-d\Delta E/d\omega$	$\sim c^{-3}\ddot{d}^2(0)$	$\sim Gc^{-5}\dddot{\mathcal{I}}^2(0)$
進入此公式的零頻率矩	$\sim(e_1\Delta v_{x1}+e_2\Delta v_{x2})$	$\Delta(\text{《動能》})_{xx}$
重寫 $-d\Delta E/d\omega$	$\sim(e\Delta v)^2/c^3$	$\sim G[\Delta(\text{《動能》})_{xx}]^2/c^5$
脈衝總能量	～此值/Δt	～此值/Δt

* 本框取自 Wheeler (1962) 第 113 頁和第 114 頁。

作爲應用這個分析的樣品 Wheeler (1962)，取下述值：

參　　數	180 MeV 單原子核裂變	效率爲10%當量爲1萬7千噸的裂變式原子彈	以逃逸速度撞擊地球的隕星	恒星爆發並釋放質量的10^{-4}
質量	4×10^{-22}克	10^4 克	10^9克	2×10^{33}克
速度	1.2×10^9厘米/秒	4×10^8厘米/秒	11×10^5厘米/秒	4×10^8厘米/秒
能量	2.9×10^{-4}爾格	7×10^{20}爾格	6×10^{20}爾格	1.8×10^{50}爾格
假定與輻射矩有關的部分	1	0.1	1	0.1
這個矩的時間積分＝《動能》$_{xx}$	2.9×10^{-4}爾格	7×10^{19}爾格	6×10^{20}爾格	1.8×10^{49}爾格
《動能》$_{xx}/c^2$	3.2×10^{-25}克	0.08克	0.67克	2×10^{28}克
$\frac{dE}{d\omega}\sim\frac{G}{c}\left(\frac{\text{《動能》}_{xx}}{c^2}\right)^2$	$2.3\times10^{-67}\frac{\text{爾格}}{\text{弧度/秒}}$	$1.4\times10^{-20}\frac{\text{爾格}}{\text{弧度/秒}}$	$1.0\times10^{-18}\frac{\text{爾格}}{\text{弧度/秒}}$	$9\times10^{38}\frac{\text{爾格}}{\text{弧度/秒}}$
Δt	10^{-21}秒	10^{-8}秒	10^{-3}秒	10^4秒
$\Delta\omega\sim1/\Delta t$	10^{21}弧度/秒	10^8弧度/秒	10^3弧度/秒	10^{-4}弧度/秒
$\Delta E_{輻射}$	10^{-46}爾格	10^{-12}爾格	10^{-15}爾格	10^{35}爾格
到探測器的假定距離	10^3厘米	10^3厘米	10^9厘米	10^{23}厘米
$\Delta E/4\pi r^2$	10^{-53}爾格/厘米^2	10^{-19}爾格/厘米^2	10^{-34}爾格/厘米^2	10^{-12}爾格/厘米^2

讀者會發現，擴充此表，使之包括從下述源發出的波爆發就更豐富了；(1)碎片落入黑洞，(2)兩個黑洞之間的碰撞，和(3)超新星爆發，其中具有兩個太陽質量的恒星坍縮到核密度，在此過程中拋出其一半的質量。

在此運動中，動能爲

$$(\text{動能})=-\frac{1}{2}(\text{勢能})=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{a}。$$

引力波輻射功率可粗略估計爲環繞功率 $L\sim\omega\times(\text{動能})$的平方；即

$$L_{\text{引力波}}\sim\frac{\mu^2M^3}{4a^5}L_0,$$

式中 $\mu=m_1m_2/M$ 是熟悉的約化質量，$M=m_1+m_2$ 是雙星系統的總質量。

基於(36.1)式所作的嚴格計算給出的結果是此處結果的～30倍：對於半長軸爲 a，偏心率爲 ε 的雙星系統，在一個軌道周期的平均功率輸出爲

(1)輸出功率

$$L_{\text{引力波}}=\frac{32}{5}\frac{\mu^2M^3}{a^5}f(\varepsilon)L_0, \tag{36.16a}$$

式中 $f(\varepsilon)$ 是無量綱的「修正函數」，

$$f(\varepsilon)=\left[1+\frac{73}{24}\varepsilon^2+\frac{37}{96}\varepsilon^4\right][1-\varepsilon^2]^{-7/2}。 \tag{36.16b}$$

［見§36.8 末的練習 36.6；以及 Peters 和 Mathews (1963)。］

(2)輻射反作用的效應

隨着雙星系統經引力輻射失去能量，雙星將螺旋式的互相靠近（能量減少；引力約束得更緊）。在圓軌道情形，能量 $E=-\frac{1}{2}m_1m_2/a=-\frac{1}{2}\mu M/a$ 將逐漸按下式減少。

$$\begin{aligned}dE/dt&=1/2(\mu M/a^2)(da/dt)\\&=-L_{\text{引力波}}=-\frac{32}{5}\frac{\mu^2M^3}{a^5}。\end{aligned}$$

結果，軌道半徑的演化由下式給出

$$a=a_0(1-t/\tau_0)^{1/4}, \tag{36.17a}$$

式中 $a_0=a_{\text{今天}}$，和

$$\tau_0=\frac{1}{4}\left(\frac{-E}{L_{\text{引力波}}}\right)_{\text{今天}}=\frac{5}{256}\frac{a_0^4}{\mu M^2}。 \tag{36.17b}$$

因此，除非有非引力的力干預，否則兩顆恒星將在時間 τ_0（螺旋時間）內螺旋式的合在一起。對於橢圓軌道的情形，偏心率也演化。輻射主要在近星點發出。因此，輻射反作用引起的制動力在此處也最強。這個效應奪去了恒星間隔偏移的某些動能（「徑向動能」）。結果軌道將變得更接近圓形。［詳細的計算，參看 Peters 和 Mathews (1963)。］

(3)天文學家觀測過的一些特定雙星

對於幾個已知的雙星和幾個有趣的假想情況，計算出了輸出功率，在地球處的通量和阻尼時間，結果在框36.3中示出。注意，在最好的已知情形，周期爲幾小時；阻尼時間是宇宙年齡（沒有更好的情形會不會是由於輻射的反作用已把它們毀滅了呢？）；引力波形式的輸出功率是～10^{30} 到 10^{32} 爾格/秒（接近於太陽光的輸出功率 3.9×10^{33} 爾格/秒）；而在地球處計算的通量爲～10^{-10} 到10^{-12} 爾格/秒（在1973年要探測它還嫌太弱，幾十年以後或許就不算太弱了；參看第37章）。

框 36.3中的假想情形說明了在 §36.4中導出的天體物理系統的一般關係——即僅當系統趨近其引力半徑時，$L_{\text{引力波}}$才能趨近於L_0；也只有那時，阻尼才能在單個周期內幾乎除去系統的全部能量。

§ 36.7　近 Newton 慢運動源的輻射公式

現在，從舉例說明天體物理源，轉向適用於大批不同源的嚴格公式。這類公式之一已經在前面寫出

$$L_{\text{引力波}}=\frac{1}{5}\langle \dddot{I}_{jk}\dddot{I}_{jk}\rangle\ , \tag{36.1}$$

但是，既沒有推導，也沒有討論它的適用範圍。

用於分析引力波源的「近 Newton，慢運動近似」

這個功率輸出公式實際上適用於任何「近 Newton 的慢運動源」——更具體地說，適用於任何滿足下述條件的源：

$$(\text{源的大小})/(\text{引力波的約化波長})\ll 1\ , \tag{36.18a}$$

$$|\text{Newton勢}|\ll(\text{源的大小})/(\text{約化波長})\ , \tag{36.18b}$$

$$\frac{|\text{典型的脅强}|}{(\text{質量密度})}\ll\frac{(\text{源的大小})}{(\text{約化波長})}\ 。 \tag{36.18c}$$

對於快速運動的源或强場的源來說，此公式不適用，除非或許近似適用。另外，對於快速運動的情形或强場的情形，目前還沒有公式能作有效的一般的討論。

本章其餘部分致力於詳盡分析來自近 Newton 慢運動源的引力波。但在進行這種分析（高階；§36.9—§36.11）之前，在本節和下一節先作初階概述。

對於尺度爲 R，平均內部速度爲 v 的任何源，它發出輻射的特徵約化波長（$\lambda=\lambda/2\pi$）爲 $\lambda\sim$（運動振幅）$/v\le R/v$。因此，(36.18a) 的要求，$R/\lambda\ll1$ [即源應局限於近（非輻射）帶內深處的小區域中]，强加上慢運動限制：

$$v\ll1\ 。$$

框 36.3 來自幾個雙星系統的引力輻射[a]

系統類型	名稱	周期	$\frac{m_1}{M_\odot}$	$\frac{m_2}{M_\odot}$	到地球的距離（秒差距）	螺旋時間[b]	L引力波（爾格/秒）	在地球處的通量（爾格/秒厘米²）
太陽系（太陽十木星）	太陽系	11.86 年	1.0	9.56×10^{-4}	地球在近帶之內	2.5×10^{23}年	5.2×10^{10}	—
典型可分辨雙星，取材自 Van de Kamp 的彙編(1958)	η仙后座	480 年	0.94	0.58	5.9	9.5×10^{24}	5.6×10^{10}	1.4×10^{-29}
	ξ牧夫座	149.95 年	0.85	0.75	6.7	3.8×10^{23}	3.6×10^{12}	6.7×10^{-28}
	天狼星	49.94 年	2.28	0.98	2.6	7.2×10^{21}	1.1×10^{15}	1.3×10^{-24}
	Fu 46	13.12 年	0.31	0.25	6.5	3.2×10^{21}	3.6×10^{14}	7.1×10^{-26}
典型食雙星，取材自Gaposhkin (1958)的彙編	β天琴座	12.925日	19.48	9.74	330	7.0×10^{11}	0.057×10^{30}	0.0004×10^{-11}
	UW大犬座	4.395日	40.0	31.0	1470	8.2×10^{9}	$49.\times10^{30}$	0.019×10^{-11}
	β英仙座	2.867日	4.70	0.94	30	3.2×10^{11}	0.014×10^{30}	0.013×10^{-11}
	W大熊座	0.33 日	0.76	0.57	110	6.2×10^{9}	0.47×10^{30}	0.032×10^{-11}
Braginsky (1965)編纂中的好的情形	UV獅子座	0.6 日	1.36	1.25	68	1.0×10^{10}	0.63×10^{30}	0.012×10^{-11}
	V船尾座	1.45 日	16.6	9.8	390	2.3×10^{9}	$65.\times10^{30}$	0.36×10^{-11}
	i 牧夫座	0.268日	1.35	0.68	12	2.0×10^{9}	3.2×10^{30}	$18.\times10^{-11}$
	YY波江座	0.321日	0.76	0.50	42	6.6×10^{9}	0.42×10^{30}	0.20×10^{-11}
	SW蝎虎座	0.321日	0.97	0.83	75	3.5×10^{9}	1.5×10^{30}	0.21×10^{-11}
	WZ天箭座	81分	0.6	0.03	100	1.1×10^{9} 年	0.5×10^{30}	0.04×10^{-11}
假想的雙星（中子星或黑洞）	10^4公里	12.2 秒	1.0	1.0	1000	3.2 年	3.25×10^{41}	2.7×10^{-3}
	10^3公里	0.39 秒	1.0	1.0	1000	2.8 小時	3.25×10^{46}	2.7×10^{2}
	10^2公里	12.2 毫秒	1.0	1.0	1000	1.0 秒	3.25×10^{51}	2.7×10^{7}
	10 公里	0.39毫秒	1.0	1.0	1000	0.10毫秒	3.25×10^{56}	2.7×10^{12}

[a] 基於 Braginsky (1965) 以及 Ruffini 和 Wheeler (1971b) 的表。

[b] (36.17b) 式給出的螺旋時間τ_0，是在沒有非引力的力干擾時，雙星螺旋式地合到一起的時間。

目前設想的全部引力波實驗室發生器都滿足這些相關的條件，$v \ll 1$和$R \ll \lambda$。誰也想不出什麼辦法把一宏觀質量加速到速度 $v \sim 1$。每一個引力約束的近 Newton 系統也都滿足這些條件。於是，對於質量爲 M 的這種系統，引力約束條件 $\frac{1}{2}Mv^2 \lesssim M^2/R$ 確保 $v \lesssim (M/R)^{1/2} \ll 1$。

所有可能設想的有興趣的近 Newton 源都滿足條件 $M/R \ll R/\lambda$ 和 $|T^{jk}|/T^{00} \ll R/\lambda$，典型的源（例如雙星）有

$$\frac{M}{R} \sim \frac{|T^{jk}|}{T^{00}} \sim \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \ll \frac{R}{\lambda}$$

（維里定理）。在（M/R 或 $|T^{jk}|/T^{00}$）$\gtrsim R/\lambda$ 的幾種罕見情況下（例如勉强合格的穩定的緩慢振動的恒星），運動極端緩慢，輻射太弱，沒有考慮的價值。

慢運動源的質量，偶極矩和約化四級矩的定義

對於任何近 Newton 慢運動系統，存在着一空時區域，它深深位於近帶（$r \ll \lambda$）之內，但在源邊界之外（$r > R$），其中眞空 Newton 引力理論近似適用。在此 Newton 區域中的觀測者可以測量 Newton 勢 Φ，並把它按 $1/r$ 的冪次展開：

$$\Phi = -\left(\frac{M}{r} + \frac{d_j n^j}{r^2} + \frac{3\mathcal{I}_{jk}n^j n^k}{2r^3} + \cdots\right), \quad \text{式中 } n^j = x^j/r。 \tag{36.19a}$$

這個展開式中的係數可命名如下：

$$M \equiv \text{「總質量-能量」} = \text{「活動的引力質量」}；$$

$$d_j \equiv \text{「偶極矩」[如果小心地選擇坐標原點可使} d_j = 0\text{]}； \tag{36.19b}$$

$$\mathcal{I}_{jk} \equiv \text{「約化四極矩」[因爲系統是近 Newton 的，} \mathcal{I}_{jk} \text{ 由表達式(36.3)給出]}。$$

隨着此 Newton 勢向外到達輻射帶，它的靜態部分（$-M/r - d_j n^j/r^2$）保持其 Newton 形式不變。但是其動態部分（$-\frac{3}{2}\mathcal{I}_{jk}n^j n^k/r^3$）不能再用 Newton 項描述。隨着推遲效應變得顯着（在增大的 r 值處），它逐漸變爲外向的引力波，它必須用完全的廣義相對論，或線性理論，或 §35.13 所述的「短波」近似來描述。

用約化四級矩表示引力波的性質：

如果在輻射帶選用線性理論，並且如果在該處利用橫向無迹規範（$h^{TT}_{0\mu} = 0$，$h^{TT}_{jj} = 0$，$h^{TT}_{jk,k} = 0$），則引力波的形式爲［在後面作爲(36.47)式導出］

$$h^{TT}_{jk} = \frac{2}{r}\ddot{\mathcal{I}}^{TT}_{jk}(t-r) + \left[\frac{1}{r^2}\dddot{\mathcal{I}}^{TT}_{jk}(t-r)\right] \text{量級的修正項。} \tag{36.20}$$

(1)波場 h^{TT}_{jk}

式中 $\ddot{I}_{jk}^{TT}$ 爲四極矩橫向（與徑向垂直；參看 §35.4）無迹部分的二階時間微商；於是

$$\ddot{I}_{jk}^{TT}=P_{ja}\ddot{I}_{ab}P_{bk}-\frac{1}{2}P_{jk}P_{ab}\ddot{I}_{ab}\,,$$
$$P_{ab}=(\delta_{ab}-n_an_b)\quad\text{（投影算子）}\,,\qquad(36.21)$$
$$n_a=x^a/r\quad\text{（單位徑向矢量）}\,。$$

這些向外傳的波的有效脅强-能量張量(§35.7)，其形式與一羣以光速徑向地向外運動的零質量粒子的形式相同；在遠距離處它的非零最低階分量爲

(2)有效脅强-能量張量

$$T_{00}^{(\text{引力波})}=-T_{0r}^{(\text{引力波})}=T_{rr}^{(\text{引力波})}$$
$$=\frac{1}{32\pi}\langle h_{jk,0}^{TT}\,h_{jk,0}^{TT}\rangle=\frac{1}{8\pi r^2}\langle\ddot{I}_{jk}^{TT}\ddot{I}_{jk}^{TT}\rangle$$
$$=\frac{1}{8\pi r^2}\left\langle\ddot{I}_{jk}\ddot{I}_{jk}-2n_i\ddot{I}_{ij}\ddot{I}_{jk}n_k+\frac{1}{2}(n_j\ddot{I}_{jk}n_k)^2\right\rangle\,,\qquad(36.22)$$

式中〈 〉表示在幾個波長範圍內的平均值。（記住，不可能把能量局限於比波長更小的區域之內！）在時刻 t 穿過半徑爲 r 的球的總功率爲

(3)輻射的總功率

$$L_{\text{引力波}}(t,r)=\int T^{(\text{引力波})}0r^2d\Omega$$
$$=\frac{1}{5}\langle\dddot{I}_{jk}(t-r)\ddot{I}_{jk}(t-r)\rangle\,。\qquad(36.23)$$

（見練習 36.9.）這就是本章開始所給出的公式：(36.1)式。

波前並非嚴格球形。例如，對於雙星系統在赤道平面內的波前必定是螺旋線。這意味着動量流中存在着一個小的非徑向分量，它的强度按 $1/r^3$ 減少。與此非徑向動量相聯繫的是角動量密度（相對於系統中心 $r=0$ 的角動量），它按 $1/r^2$ 下降 [Peters (1964), Dewitt (1971) 作了修正，第 286 頁]：

(4)角動量密度

$$\mathcal{J}^i=\frac{1}{8\pi r^2}\epsilon^{ijk}\langle-6n_j\ddot{I}_{km}\ddot{I}_{mp}n_p+9n_j\ddot{I}_{km}n_mn_p\ddot{I}_{pq}n_q\rangle\,。\qquad(36.24)$$

此量在球面的積分是單位時間內向外傳輸的總角動量

(5)輻射的總角動量

$$-dJ_j/dt=\int\mathcal{J}_jr^2d\Omega=\frac{2}{5}\epsilon^{jkl}\langle\ddot{I}_{ka}\ddot{I}_{al}\rangle\,。\qquad(36.25)$$

（見練習 36.9）

§36.8　慢運動源的輻射反作用*

在框19.1討論過並在 §20.5 導出的守恒定律確保源損失能量和角動量的速率與引力波帶出的相同。造成這些損失的原因是源內空時曲率的一個小分量，如果把在無窮遠處（現實的）外向波的邊條件變爲相反的（不現實的）內向波的邊條件，則它將變號。當源滿足近 Newton 慢運動條件 (36.18) 時，曲率的這些「輻射反作用」部分可以用 Newton 的語言來描述。

外向波的邊條件導致 Newton 類型的輻射反作用勢

Newton 勢的動力學部分，用它的「標準形式」表示，爲

$$\Phi=-\frac{3}{2}I_{jk}(t)n_jn_k/r^3+O(1/r^4);\ \text{(36.18)式，}$$

其中沒有推遲項。（Newton 理論要求超距作用！）結果，標準勢無法確定，在大半徑處，是與外向波連在一起還是與內向波連在一起。由於無法確定，可採取中間路徑而與駐波連在一起（一半外向加上一半內向）。但這並非人們所希望的。結果弄清楚（見§36.11），當且僅當 Φ 增加一個微小的「輻射反作用」勢時，即可單純地與外向波連接在一起。

輻射反作用勢的形式和大小

$$\Phi=\Phi_{\text{標準Newton理論}}+\Phi^{(\text{反作用})},\qquad (36.26a)$$

$$\Phi^{(\text{反作用})}=\frac{1}{5}\frac{d^5I_{jk}}{dt^5}x^jx^k。\qquad (36.26b)$$

反之，如果令 $\Phi=\Phi_{\text{標準}}-\Phi^{(\text{反作用})}$，則勢將單純地與向內傳的波連接在一起。

輻射反作用勢的數量級爲

$$\Phi^{(\text{反作用})}\sim\frac{1}{\lambda^5}(MR^2)r^2\sim\frac{MR^2}{r^3}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^5。\qquad (36.27)$$

結果，在源附近，與標準 Newton 勢相比，它是非常小的［小$(R/\lambda)^5\sim v^5$倍！］。但是，在輻射帶的內邊界（$r\sim\lambda$），它與標準勢的動力學四極矩部分同數量級。

Newton 勢的輻射反作用部分與 Newton 勢的任何其他部分一樣，作爲加速度產生者，起着相同的作用。在 Newton 作用區內的任何粒子都受到下述的引力加速度：

該勢的效應

$$a_j=-\Phi_{,j}=-\Phi_{\text{標準},j}-\Phi_{,j}^{(\text{反作用})}。\qquad (36.28)$$

(1)輻射反作用加速度

---

* 本節所描述的概念和公式是由 Burke (1970)，Thorne (1969b)，以及 Chandrasekhar 和 Esposito (1970) 提出的。這些概念的前驅者有 Peters (1964)，以及 Peres 和 Rosen (1964) 的論文。

在源的內部，此加速度導致的能量和角動量損失爲：

$$dE/dt=\int \rho a_j v_j d^3x \tag{36.29a}$$

和

$$dJ_j/dt=\int \varepsilon_{jkl}x_k\rho a_l d^3x\text{。} \tag{36.29b}$$

(2)能量和角動量的損失

（式中 ρ 爲密度，v_j 爲速度，而如上所述 a_j 爲源內物質的加速度。）標準 Newton 理論中能量和角動量守恒。因此，只有勢的反作用部分能夠導致損失：

$$\begin{aligned} dE/dt&=-\int \rho\Phi_{,j}{}^{(\text{反作用})}v_j d^3x\text{，}\\ dJ_j/dt&=-\int \varepsilon_{jkl}x_k\rho\Phi_{,l}{}^{(\text{反作用})}d^3x\text{。}\end{aligned} \tag{36.30}$$

利用反作用勢的表達式 (36.26b)，經過直接計算（練習 36.5）得出對時間平均的損失爲，

$$\begin{aligned} dE/dt&=-\frac{1}{5}\langle \dddot{I}_{jk}\dddot{I}_{jk}\rangle\text{，}\\ dJ_j/dt&=-\frac{2}{5}\varepsilon_{jkl}\langle \ddot{I}_{km}\dddot{I}_{ml}\rangle\text{。}\end{aligned} \tag{36.31}$$

注意，這些結果與 (36 1) 式和 (36.25) 式給出的輻射帶走的能量和角動量一致。這種一致是絕對必要的。總能量和總角動量守恒定律要求如此。

發射電偶極輻射的慢運動電磁系統，具有的輻射反作用勢爲

電磁波的輻射反作用勢

$$A_j{}^{(\text{反作用})}=0\text{，}\qquad A_0{}^{(\text{反作用})}=-\Phi^{(\text{反作用})}=\frac{2}{3}\dddot{d}_j x^j\text{，} \tag{36.32}$$

它完全類似於引力理論的$\Phi^{(\text{反作用})}$［參看，例如，Burke (1971)］。然而，這個勢和它產生的反作用力通常不爲人們注意。相反，注意的是特殊的反作用力：即被非電磁力加速的孤立電荷的反作用力。對於這種電荷，反作用力爲

$$F^{(\text{反作用})}=\frac{2}{3}e^2\dddot{x}\text{。} \tag{36.33}$$

引力理論中不存在相關的公式，因爲不存在所謂引力上孤立的輻射粒子（即受到不與引力耦合的其他力的加速）。

練習

練習 36.5　由於輻射反作用造成的能量和角動量損失

試導出引力輻射阻尼消耗慢運動源能量和角動量的速率的(36.31)式。可根據(36.26b)式和 (36.30) 式的推導導出。

練習 36.6　來自雙星系統的引力波

將 §36.7 和 §36.8 的所有公式應用於以圓軌道繞轉的雙星系統。試計算引力波的角分布；輻射的總功率；輻射的總角動量；輻射的反作用力；以及由於輻射反作用造成的能量損失和角動量損失。並把答案與§36.6引用的結果比較。［求解的進一步細節，參看Peters 和 Mathews (1963)］。

初階
高階

§ 36.9　推導輻射公式的基礎

本章其餘部分均屬高階。第20章（守恒定律）是它的必要準備。它將對第39章（後 Newton 公式）有所幫助，但並非其他任何章節的必要準備。

現在，從給出慢運動近 Newton 系統的輻射公式，轉向這些公式的推導。（本節）最初在不加任何近似——甚至不要求緩慢運動——的完全的廣義相對論內工作。唯一的限制是源是孤立的，從而遠離源處的空時是漸近地平直的。

當從源徑向地向外移動到無窮遠處時，採用空時曲率所容許的、能儘快變成漸近 Lorentz 形式的坐標系。在此坐標系中，處處定義

$$h_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu} \tag{36.34}$$

慢運動源產生引力波場公式的推導

甚至在可能是相對論性的源的內部也這樣定義。顯然，$h_{\mu\nu}$ 並不是張量的分量。$\eta_{\mu\nu}$ 也不是眞正的度規張量。雖然如此，仍然可用 $\eta_{\mu\nu}$ 來升、降 $h_{\mu\nu}$ 的指標並定義

$$\bar{h}_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h;\quad h=h_{\alpha}{}^{\alpha}=h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}。 \tag{36.35}$$

(1)$\bar{h}_{\mu\nu}$ 的定義

另外，總可以特別指定坐標系使得下述四個條件

$$\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}=0 \tag{36.36}$$

處處嚴格成立，包括在源的內部。

利用這些定義和約定，在遠離源處，以及在源內部（若該處引力很弱），$\bar{h}_{\mu\nu}$ 都變爲線性理論的引力場。但是，如果內部引力很强（（$|\bar{h}_{\mu\nu}|$ 不$\ll 1$），則源內部的 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 與線性理論沒有任何連繫。

可以用 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 寫出嚴格的 Einstein 場方程如下［參看§20.3；特別是，聯立(20.14)式，(20.18)式和(20.3)式；並利用坐標條件(36.36)式］

(2)用 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 表示場方程

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}=-16\pi(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}), \tag{36.37}$$

式中 $T^{\mu\nu}$ 是脅强-能量張量的分量，而 $t^{\mu\nu}$ 是 $\bar{h}^{\mu\nu}$ 的二階或更高階量（「引力場脅强-能量贋張量」的分量）。回顧在§19.3曾詳細闡述的「控制無知哲學」。人們是如此的無知，以致並未在任何地方用 $\bar{h}^{\alpha\beta}$ 寫出 $t^{\mu\nu}$ 的明確表達式；而這種無知是受到控制的，在隨後的計算中決不需要這種表達式！更準確地說，外向傳的波的强度正比於一個複雜表達式在系統內部的積分，其中「引力脅强」與物質脅强可相比擬，$|t^{jk}|\sim|T^{jk}|$。沒有關係。與輻射有關的只是場的四極部分。另外，在(1)波帶內但又(2)在源的表面之外的 Newton 區域內作單純的 Newton 測量就可以從實驗上確定四極矩。爲了確定恒星的質量（對外部 Kepler 軌道的影響），並非必須知道恒星的內部活動，爲了從外部的意義上確定恒星的四極矩，同樣不需要知道這些內部活動。

(3)控制無知哲學

Einstein 方程(36.37)加上外向波的邊條件等價於積分方程

(4)場方程的積分形式

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t,x^j)=4\int_{\text{全空間}}\frac{[T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}]_{\text{推遲}}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x', \tag{36.38}$$

式中

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\equiv\Big[\sum_j(x^j-x^{j\prime})^2\Big]^{1/2},\quad d^3x'\equiv dx^{1\prime}dx^{2\prime}dx^{3\prime},$$

下標「推遲」表示該量是在推遲的空時點計算的

$$(t'=t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|,\ x^{j\prime})。$$

這些是積分方程，因爲未知量 $\bar{h}^{\mu\nu}$ 出現在積分內外（在積分內，它們包含在 $t^{\mu\nu}$ 內）。注意，從波動方程(36.37)過渡到積分方程(36.38)時，曾滿不在乎的把 $\bar{h}^{\mu\nu}$ 當作平直空時中的場。這當然不是眞實的，但儘管如此，數學運算還是正確的！——而且積分方程(36.38)對於任何場點(t,x^j)，甚至在源的內部都適用。

§ 36.10 在慢運動近似下輻射場的估算

(5)特別指定爲慢運動

迄今爲止的分析是嚴格的。現在必須引入§36.7的慢運動假設：$R\ll\lambda$。

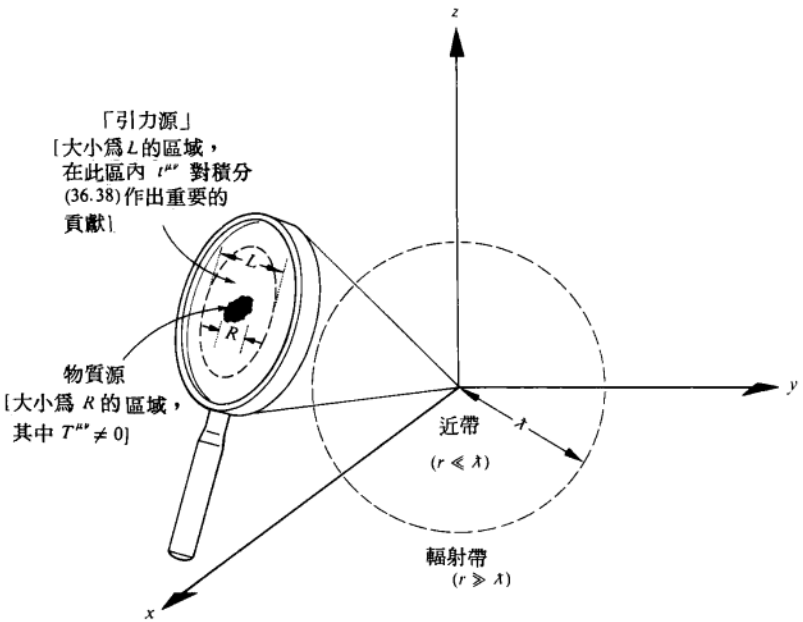


圖 36.3

輻射引力波的慢運動源。空間坐標的原點位於源內。源的大小 R 與約化波長相比是非常小的，$R \ll \lambda$。對 $\bar{h}^{\mu\nu}$ 的推遲積分(36.38)能作出顯著貢獻的區域只是源周圍大小爲 $L \sim R \ll \lambda$ 的地區，因爲在源外——但在近帶內（$R \ll r \ll \lambda$）——「脅强-能量贋張量」$t^{\mu\nu}$ 按 $1/r^4$ 衰減（見練習36.7）。

在輻射帶，$t^{\mu\nu}$ 不再按 $1/r^4$ 衰減，而開始按 $1/r^2$ 衰減；它試圖描述（但不作適當的平均還無法眞正描述）被引力波帶走的脅强-能量。如果源已經發射波足够長的時間，則輻射帶對推遲積分（36.38）的貢獻可能不可忽略：

$$[t^{\mu\nu}]_{\text{推遲}} \sim \frac{1}{r'^2} \Rightarrow \int [t^{\mu\nu}]_{\text{推遲}} d^3x' \sim \int \frac{1}{r'^2} r'^2 d\Omega' dr' 。$$

[對 $r > \lambda$] ↑　[有可能從大的 r' 處作出重要的貢獻] ↑

這種貢獻在正文中計算輻射波時被置之不顧，因爲它們與發射過程本身沒有任何關係。應當說，它們是上一章所處理的傳播過程的一部分。它們包括由波的脅强-能量產生的背景曲率，在背景曲率上的波散射，波-波散射等等；並且在源自身附近（例如 $r \lesssim 1000\lambda$），它們完全可以忽略，因爲慢運動源的輻射是非常微弱的。

如圖36.3所示，將空間坐標原點放在源的內部。對於慢運動系統，對推遲積分（36.38）的唯一重要貢獻來自近帶內部深處（即尺度 $L \sim R \ll \lambda$ 的區域；參看圖36.3）。把注意力局限於「源區」外遠處的「場點」（觀測點）x^j

$$|\boldsymbol{x}|\equiv r\gg L\gtrsim|\boldsymbol{x}'|\,, \tag{36.39a}$$

並把推遲積分 (36.38) 按 $\boldsymbol{x}'/r$ 的冪次展開——與 §19.1 的方法相同。(由於且因爲有慢運動假設 $\lambda/R\sim\lambda/L\ll 1$，這種展開才是正確的)。結果是

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t,\boldsymbol{x})=\frac{4}{r}\int[T^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}',\ t-r)+t^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}',t-r)]d^3x'$$
$$+O\left\{\frac{x^j}{r^2\lambda}\int x^{j'}[T^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}',t-r)+t^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}',t-r)d^3x'\right\}。 \tag{36.40}$$

(6)輻射帶中 $\bar{h}^{jk}$ 的計算

在 $\bar{h}^{\mu\nu}$ 的十個分量中，只有六個空間分量，$\bar{h}^{jk}$，是重要的，因爲在投影得出橫向無跡輻射場 $\bar{h}^{TT}_{jk}$ 時只需要這六個分量。這些空間分量在 (36.40) 式中表爲對「脅强分布」$T^{jk}+t^{jk}$ 的積分。爲了與 Newton 理論比較，方便的辦法是把 $\bar{h}^{jk}$ 重新表爲對「能量分布」$T^{00}+t^{00}$ 的積分。這種轉換可以借助於精確的運動方程 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ 來完成，在所用的坐標系中此方程具有特殊的形式

$$(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})_{,\nu}=0 \tag{36.41}$$

[參看 (36.36) 式和 (36.37) 式；也可參看 §20.3 的討論]。相繼二次運用這些關係式，得到恒等式。

$$(T^{00}+t^{00})_{,00}=-(T^{0l}+t^{0l})_{,l0}=-(T^{l0}+t^{l0})_{,0l}$$
$$=+(T^{lm}+t^{lm})_{,ml}。$$

由此以及基本的鏈微分法，得出

$$[(T^{00}+t^{00})x^jx^k]_{,00}=(T^{lm}+t^{lm})_{,ml}x^jx^k$$
$$=[(T^{lm}+t^{lm})x^jx^k]_{,ml}-2[(T^{lj}+t^{lj})x^k$$
$$+(T^{lk}+t^{lk})x^j]_{,l}+2(T^{jk}+t^{jk})\,,$$

由此

$$\int(T^{jk}+t^{jk})d^3x=\frac{1}{2}(d^2I_{jk}/dt^2)\,, \tag{36.42a}$$

式中

$$I_{jk}(t)\equiv\int[T^{00}(t,\boldsymbol{x})+t^{00}(t,\boldsymbol{x})]x^jx^kd^3x。 \tag{36.42b}$$

(7)特別指定近 Newton源

現在引入近 Newton 假設。它確保引力僅對總能量作出很小的貢獻：

$$t^{00}\sim(\Phi_{,j})^2\sim M^2/R^4\sim(M/R)T^{00}\ll T^{00}\,;$$

因此

$$I_{jk}(t)=\int T^{00}(t,\boldsymbol{x})x^jx^kd^3x。 \tag{36.42b′}$$

這樣，量 I_{jk} 代表質量分布的二階矩。

把 (36.42) 式和 (36.40) 式聯立，並注意到在源內部 $|t^{jk}|\sim|\Phi_{,j}\Phi_{,k}|\sim T^{00}|\Phi|$，得出

$$\bar{h}^{jk}(t,x)=\frac{2}{r}\frac{d^2I_{jk}(t-r)}{dt^2}+O\left[\frac{1}{r}\left(\frac{|T^{jk}|}{T^{00}}+|\Phi|\right)\frac{R}{\lambda}M\right]$$
$$=\frac{2}{r}\frac{d^2I_{jk}(t-r)}{dt^2}\left\{1+O\underbrace{\left[\frac{|T^{jk}|}{T^{00}}+\frac{M}{R}\right]\frac{\lambda}{R}}\right\}。\qquad(36.43)$$

[根據假設(36.18)，此項可以忽略]

實際上，希望得到的是 h^{TT}_{jk}，而不是 $\bar{h}^{jk}$。要得到它們，利用 $\eta_{lm}=\delta_{lm}$ 首先把指標降下，然後對徑向行進波，利用投影算符投影得出 TT 部分：

(8)通過投影轉換到 h^{TT}_{jk}

$$P_{lm}=\delta_{lm}-n_ln_m;\quad n_l=x^l/r\qquad(36.44)$$

（參看框 35.1）。（因爲 $\bar{h}_{jk}$ 和 h_{jk} 的不同只是跡不同，所以它們的 TT 部分相同）。結果是

$$h^{TT}_{jk}(t,x)=\frac{2}{r}\frac{d^2I^{TT}_{jk}(t-r)}{dt^2},\qquad(36.45a)$$

式中

$$I^{TT}_{jk}=P_{jl}I_{lm}P_{mk}-\frac{1}{2}P_{jk}(P_{lm}I_{ml})。\qquad(36.45b)$$

這並非寫出答案的最好方式，因爲外部觀測者無法直接測量質量分布的二階矩，I_{jk}。幸而，可以把 I_{jk} 代之以約化四極矩，

(9)用約化四極矩重新表示 h^{TT}_{jk}

$$\mathcal{I}_{jk}=I_{jk}-\frac{1}{3}\delta_{jk}I=\int(T^{00}+t^{00})\left(x^jx^k-\frac{1}{3}\delta_{jk}r^2\right)d^3x,\quad(36.46)$$

並寫出

$$h^{TT}_{jk}(t,x)=\frac{2}{r}\frac{d^2\mathcal{I}^{TT}_{jk}(t-r)}{dt^2}。\qquad(36.47)$$

這樣寫是允許的，因爲 I_{jk} 和 $\mathcal{I}_{jk}$ 的 TT 部分等同（練習36.8）。

對於限制在源外部的觀測者，約化四極矩 $\mathcal{I}_{jk}$ 具有十分明確的基本的物理意義。在源外部的近帶內（$r\ll\lambda$），眞空 Newton 理論近似適用，Newton 勢爲

$$\Phi=-\frac{1}{2}h_{00}=-\frac{1}{2}h^{00}=-\frac{1}{2}\left(\bar{h}^{00}+\frac{1}{2}\bar{h}\right)=-\frac{1}{4}(\bar{h}^{00}+\bar{h}^{jj})$$
$$=-\int_{\text{全空間}}\frac{[T^{00}+t^{00}+T^{jj}+t^{jj}]_{\text{推遲}}}{|x-x'|}d^3x'$$

[參看 (36.38) 式]。任何近 Newton 慢運動源滿足

$$|t^{00}+T^{jj}+t^{jj}|\ll T^{00}$$

[記住：$t^{\alpha\beta}\sim(\Phi_{,j})^2\sim T^{00}|\Phi|$]。因此，可寫出

$$\Phi(x,t)=-\int\frac{[T^{00}(x',t)]}{|x-x'|}d^3x'。\tag{36.48}$$

把 $|x-x'|^{-1}$ 展爲 $1/r$ 的冪次，得出

$$\Phi=-\left(\frac{M}{r}+\frac{d_jx^j}{r^3}+\frac{3\mathcal{I}_{jk}x^jx^k}{2r^5}+\cdots\right)\text{對於}\left(\begin{matrix}r\ll\lambda\text{，但 }r\text{ 又足}\\\text{夠大，使得眞空}\\\text{Newton理論適用}\end{matrix}\right)，\tag{36.49a}$$

式中

$$\begin{aligned}M&=(\text{源的總質量-能量})=\int T^{00}d^3x\,,\\d_j&\equiv(\text{源的偶極矩})=\int T^{00}x^jdx^3\,,\\\mathcal{I}_{jk}&\equiv(\text{源的約化四極矩})=\text{表達式(36.46)}。\end{aligned}\tag{36.49b}$$

於是，其二階時間微商通過(36.47)式確定輻射場的量 $\mathcal{I}_{jk}$，對於在近帶內深處（$r\ll\lambda$）探測它的 Newton 勢 Φ 的觀測者來說，就是他測出的恒星約化四極矩的分量（「經驗的四極矩」）。

用 $\mathcal{I}_{kl}^{TT}$ 表示的輻射場的最後答案(36.47)式曾在§36.7的結果提要中引用過。在那裏，還引述了輻射的有效脊强-能量張量的表達式，和輻射的能量和角動量的表達式[(36.22)式到(36.25)]。這些表達式可用短波近似的公式導出。（參看練習36.9）。

練習

練習 36.7 $t^{\mu\nu}$ 的振幅

考慮一慢運動引力波源。試證明，遠離源但又在近帶內($R<r<\lambda$)，「脊强-能量贋張量」$t^{\mu\nu}$ 的分量按 $1/r^4$ 衰減，而在輻射帶（$r>\lambda$）內它們只按 $1/r^2$ 衰減。

練習 36.8 證明 $\mathcal{I}_{jk}$ 和 I_{jk} 的橫向無跡部分等同

試通過直接計算證明 I_{jk} (36.42b) 和 $\mathcal{I}_{jk}$ (36.46) 的 TT 部分等同，不管作 TT 投影的觀測者在那裏都沒有關係（即在投影算子中的單位矢量 $\boldsymbol{n}$ 可能是什麼都沒有關係）。

練習 36.9 輻射的能量和角動量

(a) 對於 (36.47) 式描述的在漸近平直空時中的引力波，試計算 (35.23) 式的平均化的脊强-能量張量 $T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$。[答案：(36.22) 式。]

(b) 作 (36.23) 式和 (36.25) 式的積分以得出輻射的總功率和角動量。［提示：推導並利用下述對球面的平均

$$\frac{1}{4\pi}\int n_i d\Omega=0\,,\quad \frac{1}{4\pi}\int n_i n_j d\Omega=\frac{1}{3}\delta_{ij}\,,\quad \frac{1}{4\pi}\int n_i n_j n_k d\Omega=0\,,$$

$$\frac{1}{4\pi}\int n_i n_j n_k n_l d\Omega=\frac{1}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\,。$$

此處 $\boldsymbol{n}\equiv\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ 是單位徑向矢量。］

§ 36.11　輻射反作用勢的導出

最後，轉而推導 §36.8 引用的輻射反作用的結果。分析在原來（即，非 TT）規範中輻射場空間部分的解 (36.43) 開始：

輻射反作用勢公式的推導：

$$\bar{h}^{jk}(t,\boldsymbol{x})=\frac{2}{r}\ddot{I}_{jk}(t-r)\,。\qquad (36.50)$$

儘管原來導出這個解時忽略了衰減快於 $1/r$ 的所有項，事實上它是線性理論眞空場方程 $\bar{h}^{jk}{}_{,\alpha}{}^{,\alpha}=0$ 的嚴格解。這意味着它不僅適用於中間帶和近帶（$r\lesssim t$，但 $r>R$），也適用於輻射帶。

把無窮遠處的外向波的條件代之以內向波的條件，則 $\bar{h}^{jk}$ 的嚴格解(36.50) 應代之以

$$\bar{h}^{jk}(t,\boldsymbol{x})=\frac{2}{r}\ddot{I}_{jk}(t+r)\,。$$

因而，爲了描述外向波的邊條件的效應，可把嚴格解寫成下述形式

(1)源外各處的 $\bar{h}_{jk}$ 公式，或用外向波，或用內向波

$$\bar{h}_{jk}(t,\boldsymbol{x})=\bar{h}^{jk}(t,\boldsymbol{x})=\frac{2}{r}\ddot{I}_{jk}(t-\epsilon r)\,,\ \epsilon=\pm1\,,\qquad (36.51)$$

然後，集中注意 ϵ 的符號的效應。

在近帶內（$r\ll\lambda$），但在近 Newton 源的外部，把這個 $\bar{h}_{jk}$ 的解展爲 r 的冪次，變爲

(2)特別指定爲近帶的 $\bar{h}_{jk}$

$$\bar{h}_{jk}=2\Big[\frac{I_{jk}^{(2)}}{r}-\epsilon I_{jk}^{(3)}+\frac{I_{jk}^{(4)}r}{2!}-\epsilon\frac{I_{jk}^{(5)}r^2}{3!}+\cdots\Big]\,,\qquad (36.52a)$$

式中

$$I_{jk}^{(n)}\equiv d^n I_{jk}(t)/dt^n\,。$$

相應的 $\bar{h}_{0j}$ 和 $\bar{h}_{00}$ 形式可由此通過規範條件 $\bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta}=0$ 產生；即通過 $\bar{h}_{j0,0}=\bar{h}_{jk,k}$ 和 $\bar{h}_{00,0}=\bar{h}_{0j,j}$ 產生。結果是：

(3)通過規範條件計算近帶的 $\bar{h}_{00}$ 和 $\bar{h}_{0j}$

$$\bar{h}_{0j}=2\left[-\frac{I^{(1)}_{jk}x^k}{r^3}+\frac{I^{(3)}_{jk}x^k}{2!r}-\epsilon\frac{2I^{(4)}_{jk}x^k}{3!}+\frac{3I^{(5)}_{jk}x^kr}{4!}-\epsilon\frac{4I^{(6)}_{jk}x^kr^2}{5!}\right]$$

$$+\text{（與輻射無聯繫的靜態項）；}\qquad(36.52b)$$

$$\bar{h}_{00}=2\left[\frac{(3x^jx^k-r^2\delta^{jk})}{r^5}I_{jk}-\frac{(x^jx^k-r^2\delta^{jk})}{2!r^3}I^{(2)}_{jk}-\epsilon\frac{2}{3!}I^{(3)}_{jj}\right.$$

$$\left.+\frac{3(x^jx^k+r^2\delta^{jk})}{4!r}I^{(4)}_{jk}-\epsilon\frac{4(2x^jx^k+r^2\delta^{jk})}{5!}I^{(5)}_{jk}+\cdots\right]\qquad(36.52c)$$

$$+\text{（與輻射無聯繫的靜態項和時間-線性項）。}$$

在這些表達式中首項在趨近源時按 $1/r^3$ 增長：

$$\bar{h}_{00}\approx\frac{2(3x^jx^k-r^2\delta^{jk})}{r^5}I_{jk}=\frac{6\mathcal{I}_{jk}n^jn^k}{r^3}。$$

這正是 Newton 勢動力學四極部分的首項 $\Phi=-\frac{1}{2}h_{00}=-\frac{1}{4}\bar{h}_{00}$。所有前面沒有 ϵ 的項都是 Newton 勢的修正項。它們產生的效應像水星的近日點移動，不消耗系統的能量和角動量。

(4)從 $\bar{h}_{\alpha\beta}$ 中摘出輻射反作用勢

有 ϵ 的項與輻射的反作用聯繫。把首項摘出，並稱之爲「反作用勢」：

$$\bar{h}_{jk}{}^{(\text{反作用})}=-2I^{(3)}_{jk}-\frac{1}{3}I^{(5)}_{jk}r^2,$$

$$\bar{h}_{0j}{}^{(\text{反作用})}=-\frac{2}{3}I^{(4)}_{jk}x^k-\frac{1}{15}I^{(6)}_{jk}x^kr^2,\qquad(36.53)$$

$$\bar{h}_{00}{}^{(\text{反作用})}=-\frac{2}{3}I^{(3)}_{jj}-\frac{1}{15}(2x^jx^k+r^2\delta^{jk})I^{(5)}_{jk}。$$

相應的度規擾動 $h_{\alpha\beta}=\bar{h}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\alpha\beta}$ 爲

$$h_{jk}{}^{(\text{反作用})}=-2I^{(3)}_{jk}+\frac{2}{3}I^{(3)}_{ll}\delta_{jk}+O(I^{(5)}_{jk}r^2),$$

$$h_{0j}{}^{(\text{反作用})}=-\frac{2}{3}I^{(4)}_{jk}x^k+O(I^{(6)}_{jk}r^3),\qquad(36.54)$$

$$h_{00}{}^{(\text{反作用})}=-\frac{4}{3}I^{(3)}_{ll}-\frac{1}{15}(x^jx^k+3r^2\delta_{jk})I^{(5)}_{jk}。$$

爲了更清楚地理解在近帶的這些反作用勢，可改變規範，把它們引入 Newton 形式。令

$$x^{\mu}_{\text{新}}=x^{\mu}_{\text{舊}}+\xi^{\mu}(x),\quad h_{\mu\nu\text{新}}=h_{\mu\nu\text{舊}}-\xi_{\mu,\nu}-\xi_{\nu,\mu}$$

(5)把輻射反作用勢變換到 Newton 規範

其中

$$\xi_j=-I^{(3)}_{jk}x^k+\frac{1}{3}I^{(3)}_{ll}x^j,$$

$$\xi_0=-\frac{2}{3}I^{(2)}_{ll}+\frac{1}{6}I^{(4)}_{jk}x^jx^k-\frac{1}{6}I^{(4)}_{ll}r^2。\qquad(36.55)$$

那麼，在新規範中

$$h^{(\text{反作用})}_{jk}=O(I^{(5)}_{kj}r^2),\quad h^{(\text{反作用})}_{0j}=O(I^{(6)}_{jk}r^3),$$

$$h^{(\text{反作用})}_{00}=-\frac{2}{5}I^{(5)}_{jk}x^jx^k。\qquad(36.56)$$

這一規範對 Newton 解釋是非常理想的，因爲在此規範中慢運動粒子短程線方程的形式爲

$$d^2x^j/dt^2=-\Phi^{(\text{反作用})}_{,j}+\begin{pmatrix}\text{對外向波的條}\\\text{件不敏感的項}\end{pmatrix},\qquad(36.57)$$

其中

$$\Phi^{(\text{反作用})}=-\frac{1}{2}h^{(\text{反作用})}_{00}=\frac{1}{5}I^{(5)}_{jk}x^jx^k。\qquad(36.58)$$

這樣，在近 Newton 源的近帶內，首要的輻射反作用效應可以把 Newton 勢附加上 $\frac{1}{5}I^{(5)}_{jk}x^jx^k$ 項來描述（具有相對誤差～$[\lambda/r]^2$）。由此得出的公式和上述推導的定性描述已在 §36.8 中給出。

第三十七章　引力波的探測

我常常說，當你能夠測量你所談論的事物並能把它用數字表示時，你才算對它有了某種了解；而當你還不能測量它，還無法用數字表示時，你的知識是貧乏的，也是不能令人滿意的：它可能只是知識的開端，而且不管原因是什麼，在你的思想裏還幾乎沒有進入科學的階段。

William Thomson, Kelvin 爵士 [(1889), 第73頁]

§ 37.1　坐標系和衝擊波

在廣義相對論框架內處理引力波問題時，分析探測器甚至比分析發生器或傳輸更容易。所有人類可能使用的探測器都位於太陽系內，其中的引力微弱，空時非常接近於平直，以致在所有實際問題中，入射的平面引力波仍保持爲平面引力波。（通過太陽邊緣時，波前的偏轉角只有 1.″75。）而且，能發出值得注意的波的最近的源也是非常遠的，實際上當波到達地球時可以把它們看成平面波前的。因此，當波沿 z 方向傳播經過探測器時，可以高度精確地用下述橫向無迹線性表達式描述：

傳播經過地球的引力波的線性化描述

$$\text{度規擾動：}\ h^{TT}_{xx}=-h^{TT}_{yy}=A_+(t-z),\ h^{TT}_{xy}=h^{TT}_{yx}=A_\times(t-z)\,, \tag{37.1a}$$

$$\text{Riemann 張量：}\ R_{x0x0}=-R_{y0y0}=-\frac{1}{2}\ddot{A}_+(t-z)\,,$$
$$R_{x0y0}=R_{y0x0}=-\frac{1}{2}\ddot{A}_\times(t-z)\,。 \tag{37.1b}$$

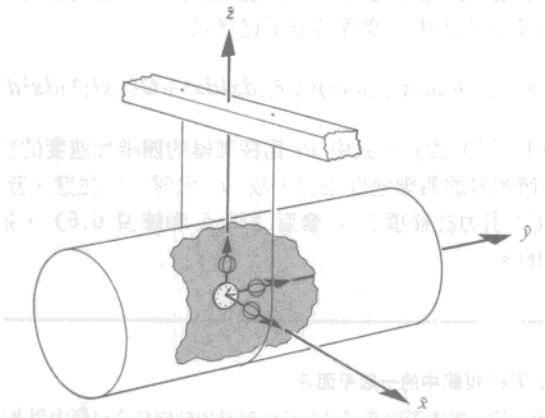


圖 37.1
振動棒探測器的固有參照系。棒用金屬絲懸吊在交叉的橫梁上，梁由埋入地面的立柱支撐（未畫出）。結果，在圖上所畫出的瞬間，棒經受的四維加速度 $\boldsymbol{a}=g(\partial/\partial\hat{z})$，其中 g 爲「局域重力加速度」($g\sim 980$ 厘米／秒^2)。此後，空間軸將相對於棒旋轉（由地球自轉引起的「Foucoult擺效應」），因此 $\boldsymbol{a}$ 的分量將會變化，但它的大小不變。

固有參照系依賴於假想的鐘以及位於棒質心的三個假想的迴轉儀（用剖視圖畫出）。坐標時等於鐘測量的原時，而幾個空間軸的方向 $\partial/\partial x^j$ 附着在迴轉儀上。阻止迴轉儀在地球場中下落的力應加在各個迴轉儀的質心處（無力矩！）。

$$\text{脊强-能量：}\ T_{00}^{(\text{引力波})}=T_{rr}^{(\text{引力波})}=-T_{0r}^{(\text{引力波})}$$
$$=\frac{1}{16\pi}\langle \dot{A}_+^2+\dot{A}_\times^2\rangle_{\text{時間平均}}。\qquad (37.1c)$$

（參看練習 37.1。）

爲了分析探測器對這些衝擊波的響應，最方便的不是 TT 坐標系 $\{x^\alpha\}$（它是專門「適應」於波的），而應該採用專門「適應」於實驗者及其探測器的坐標系 $\{x^{\hat{\alpha}}\}$。探測器可以是一根振動的棒，或者振動的地球，或者充滿液體的環管（參看圖 37.1 和圖 37.2）。但是，不管它是什麼，它總有一個質量中心。把空間原點 $x^j=0$ 指定在此質量中心；並把正交歸一的諸空間軸$\partial/\partial x^j$（可能是想像的）繫在位於此空間原點的諸迴轉儀上（圖37.1）。如果探測器正在加速運動（即並非自由下落），則在這些迴轉儀的質量中心處施加必要的力（無力矩！）使它們與探測器一起加速。利用在空間原點處的鐘測量的原時 $x^{\hat{0}}=\tau$ 作爲時間坐標。最後，把這些局域地定義的坐標系 $x^{\hat{\alpha}}$ 用可能的「

探測器的固有參照系

最直接」的方式擴充到全部空時。（完整的細節可參看高階的 §13.6。）在此「探測器固有參照系」中，度規具有下述形式

$$ds^2=-(1+2a_jx^j)(dx^0)^2+\delta_{jk}dx^jdx^k+O(|x^j|^2)dx^adx^b。\quad(37.2)$$

[$\omega^j=0$ 的 (13.71) 式]。式中 a_j 爲探測器的四維加速度的空間分量。（因爲 a 必定與探測器的四維速度正交，故 a_0 爲零。）注意，除了在 g_{00} 中的加速度項外（「引力紅移項」；參看 §38.5 和練習 6.6），這個參照系是局域 Lorentz 的。

練習

練習 37.1 在 *TT* 規範中的一般平面波

試證明，最一般的線性平面波可以在線性理論的橫向無迹規範中用表達式 (37.1) 描述。[提示：把平面波表爲單色平面波的疊加 (Fourier 積分)，每個單色平面波用表達式 (35.16) 描述。利用 (35.10) 式和 (35.23) 式計算 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 和 $T_{\mu\nu}^{(\text{引力波})}$。]

練習 37.2 在固有參照系中試驗粒子的運動

試證明，緩慢運動的試驗粒子自由下落穿過 (37.2) 式的固有參照系時，遵從運動方程（短程線方程）

$$d^2x^j/d\hat{t}^2=-a_j+O(|x^k|)。$$

因而，可以把 $-a_j$ 解釋爲「局域的重力加速度」（參看圖 37.1 的說明）。

§ 37.2 機械探測器的加速度

機械探測器的運動方程

(37.2) 式的固有參照系與 Newton 物理學家在分析探測器時所採用的參照系最爲接近。實際上，這個參照系是如此的接近 Newton 參照系（根據框 37.1 的分析），以致在此固有參照系中寫出的機械探測器的運動方程，採取標準的 Newton 形式，並且可用完全 Newton 的方式來觀察和處理，唯一的例外是引力波產生一非 Newton 起源的推動力，它由熟悉的短程線偏離表達式給出：

$$\begin{pmatrix}\text{相對於探測器質心 } x^j=0 \text{ 位}\\ \text{於 } x^j \text{ 的粒子，單位質量所}\\ \text{受的力（即加速度）}\end{pmatrix}=\left(\frac{d^2x^j}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{由波產生}}\quad(37.3)$$
$$=-(R_{j0k0})_{\text{由波產生}}x^k。$$

爲了應用這個方程和以後計算探測器截面，必須知道在探測器固有參照系中曲率張量 $R^a{}_{\beta\gamma\delta}$ 的分量和波的脊強-能量張量 $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\text{引力波})}$的分量。我們不能從

框 37.1　導出機械探測器的運動方程

考慮機械探測器中一「質量元」（例如，如果探測器爲圖 37.1 的棒，則可取每邊長 1 毫米的一個鋁立方體；或者如果探測器是如圖 37.2 h 所示的充滿流體的管子，則可取體積爲 1 毫米^3 的流體元）。當探測器的介質振動或流動或無論假設它作何種運動時，該質元受到相鄰物質以及電磁場的推和拉。設

$$\boldsymbol{f} \equiv \begin{pmatrix}\text{相鄰物質和電磁場作用在質}\\ \text{元每單位質量上的四維力}\end{pmatrix}。\tag{1}$$

每單位質量所受的四維力給予質元四維加速度$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$；或者，用探測器固有參照系中的分量來表達，$f^j=Du^j/d\tau$。假設在探測器固有參照系中（即相對於探測器的質心），質元具有一非常小的速度（$v\ll 1$）。那麼，不管$O(v^2)$, $O(|x^j|^2)$和 $O(|x^j|v)$ 諸項，有［見 (37.2) 式］

$$d\hat{t}/d\tau = u^0 = 1 - a_j x^j \equiv 1 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}\,,\tag{2}$$

和

$$f^j = d^2x^j/d\tau^2 + \Gamma^j{}_{\hat{t}\hat{t}}u^{\hat{t}}u^{\hat{t}} = (d^2x^j/d\hat{t}^2 + \Gamma^j{}_{\hat{t}\hat{t}\hat{t}\hat{t}})(1-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})。\tag{3}$$

練習 37.3 把 $\Gamma^j{}_{\hat{t}\hat{t}\hat{t}\hat{t}}$ 計算到 $O(|x^j|)$ 的精度。把此結果代入，並重新整理各項，得出

$$d^2x^j/d\hat{t}^2 = (1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})f^j - a^j(1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - R^j{}_{\hat{t}\hat{k}\hat{t}}x^k\tag{4}$$

（「質元的運動方程」）。

首先從 Einstein 物理學家的觀點來考察這一方程，然後再從 Newton 物理學家的觀點來考察。

Einstein 物理學家把 $d^2x^j/d\hat{t}^2$ 看作質元的「坐標加速度」——但他沒有忘記，在 $O(|x^j|^2)$ 的精度，坐標長度與固有長度相同［見 (37.2) 式］。坐標加速度 $d^2x^j/d\hat{t}^2$ 有三個起因：(1)外加力，

$$\begin{aligned}(1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})f^j &= (d^2x^j/d\hat{t}^2)_{\text{外力}} \qquad (5a)\\ &= (1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(d^2x^j/d\tau^2)_{\text{外力}}\end{aligned}$$

（$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ 修正項的來源很簡單，來源於坐標時與原時的變換）；(2)由於參照系

加速引起的「慣性力」，

$$-a^j(1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})=(d^2x^j/d\hat{t}^2)_{\text{慣性力}} \tag{5b}$$

（對 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ 修正項的解釋，見練習 37.4）；和(3)「Riemann 曲率力」，此曲率包括由局域 Newton 引力場（地球，太陽，月亮等的場）引起的Riemann曲率，加上由衝擊引力波引起的 Riemann 曲率

$$-(R^j{}_{0k0})_{\text{波}}x^k-(R^j{}_{0k0})_{\text{Newton場}}x^k=(d^2x^j/d\hat{t}^2)_{\text{曲率}} \tag{5c}$$

（此處取線性疊加，因爲在太陽系中所有引力場都是非常弱的）。當然，質元「感覺」不到這個「Riemann 曲率力」；它不產生任何四維加速度。像慣性力那樣，它起源於參照系的選擇：空間坐標 x^j 量度離開探測器質心的固有距離和方向；而 Riemann 曲率試圖改變此固有距離和方向（「相對加速度」；「短程線偏離」）。

Newton 物理學家以不同的方式觀察運動方程(4)。在得知空間坐標 x^j 量度離開探測器質心的固有距離和方向後，他把它們看作 Newton 理論的標準 Euclid 空間坐標。然後他把方程(4)改寫爲下述形式

$$d^2x^j/d\hat{t}^2=F^j-(R^j{}_{0k0})_{\text{波}}x^k, \tag{6}$$

式中

$$\begin{aligned}F^j&\equiv\begin{pmatrix}\text{作用於質元上每單位}\\ \text{質量的 Newton 力}\end{pmatrix} \\ &=(1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})f^j-a^j(1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})-(R^j{}_{0k0})_{\text{Newton場}}x^k\text{。}\end{aligned} \tag{7}$$

Newton 物理學家可以自由地把 F^j 表爲比這更熟悉的形式。他可以不管$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$「紅移效應」的精巧難解，因爲(1)它們很微小

$$|a^j(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})|\sim|f^j(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})|\lesssim|(R^j{}_{0k0})_{\text{波}}x^k|\text{；} \tag{8}$$

(2)它們不隨時間改變，因此——與同樣微小的由波產生的力相比——它們不能激發探測器的共振運動。而且，Newton 物理學家可以把「慣性加速度」$-a^j$

分成探測器質心處局域重力加速度的貢獻 $-(\partial\Phi/\partial x^j)_{x^j=0}$，加上由於探測器相對於 Newton 理論「絕對空間」的加速度所作的貢獻 $-a^j{}_{\text{絕對}}$。最後，他可以把由 Newton引力產生的 Riemann曲率重新寫爲熟悉的形式 $R^j{}_{0k0}=\partial^2\Phi/\partial x^j\partial x^k$。最後結果爲

$$
\begin{aligned}
F^j= & \quad \left[\begin{array}{l}\text{作用於質元每單位質}\\ \text{量上的總 Newton 力}\end{array}\right] \\
& +f^j \quad \left[\begin{array}{l}\text{由鄰近物質和電磁場作用於}\\ \text{單位質量上的 Newton 力}\end{array}\right] \\
& -a^j{}_{\text{絕對}} \quad \left[\begin{array}{l}\text{由探測器相對 Newton 絕對空間的加}\\ \text{速度而產生的單位質量上的慣性力}\end{array}\right] \\
& -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)_{\text{在質元處}} \quad \left[\begin{array}{l}=-(\partial\Phi/\partial x^j)_{x^j=0}-(\partial^2\Phi/\partial x^j\partial x^k)x^k \\ =\text{Newton 引力加速度}\end{array}\right]。 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

結論：在探測器固有參照系中，機械探測器質元的運動方程具有標準的 Newton 形式(6)，其中有標準的 Newton 驅動力(9)，加上由引力波產生的驅動力

$$
(d^2x^j/d\hat{t}^2)_{\text{由波產生}}=-(R^j{}_{0k0})_{\text{波}}x^k。 \qquad (10)
$$

表達式 (37.2) 的度規係數 $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 直接計算 $R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$；因爲這樣作就需要未知的 $O(|x^j|^2)$ 修正項。但是，應用變換矩陣 $\|\partial x^{\alpha}/\partial x^{\hat{\alpha}}\|$，就可以從 TT 坐標系中相應的分量 [(37.1) 式] 容易地得出 $R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ 和 $T^{(\text{引力波})}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$。爲了使變換平庸通俗，使 TT 坐標系的取向，在 $O(|h_{\mu\nu}|)\ll 1$ 的精度內，與探測器質心附近的探測器的固有參照系，在感興趣的時刻 $t=\hat{t}=0$ 相一致。這樣，變換矩陣將爲

$$
\partial x^{\alpha}/\partial x^{\hat{\beta}}=\delta^{\alpha}_{\mu}+O(h_{\mu\nu})+O(a_jx^j)+O(|\boldsymbol{a}|\hat{t})。 \qquad (37.4)
$$

（由波在空時中引起的波紋所產生的修正項；紅移修正項；由探測器加速度造成兩參照系相對速度所產生的修正項）

探測器經受的典型加速度爲

$$
|\boldsymbol{a}|=\text{一個「地球重力」}=980\text{厘米}/\text{秒}^2\sim 1/(\text{光年})。
$$

在探測器參照系中波的描述

因此，在很高的精度 $\|\partial x^{\alpha}/\partial x^{\hat{\mu}}\|=\|\delta_{\alpha}^{\mu}\|$，並且，在兩個參照系中張量的分量相同：

$$R_{\hat{i}\hat{0}\hat{i}\hat{0}}=-R_{\hat{j}\hat{0}\hat{j}\hat{0}}=-\frac{1}{2}\ddot{A}_{+},\quad R_{\hat{i}\hat{0}\hat{j}\hat{0}}=R_{\hat{j}\hat{0}\hat{i}\hat{0}}=-\frac{1}{2}\ddot{A}_{\times},$$

$$T^{(\text{引力波})}_{\hat{0}\hat{0}}=T^{(\text{引力波})}_{\hat{i}\hat{i}}=-T^{(\text{引力波})}_{\hat{0}\hat{i}}=\frac{1}{16\pi}\langle\dot{A}_{+}^{2}+\dot{A}_{\times}^{2}\rangle_{\text{時間平均}}。\quad (37.5)$$

［見 (37.1) 式］。

把 (37.3) 式和 (37.5) 式聯立，得出波引起的相對於探測器質心的加速度爲

波產生的加速度的顯式

$$\left(\frac{d^2\hat{x}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{由波產生}}=-R_{\hat{i}\hat{0}\hat{i}\hat{0}}\hat{x}-R_{\hat{i}\hat{0}\hat{j}\hat{0}}\hat{y}=\frac{1}{2}(\ddot{A}_{+}\hat{x}+\ddot{A}_{\times}\hat{y}),$$

$$\left(\frac{d^2\hat{y}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{由波產生}}=-R_{\hat{j}\hat{0}\hat{j}\hat{0}}\hat{y}-R_{\hat{j}\hat{0}\hat{i}\hat{0}}\hat{x}=\frac{1}{2}(-\ddot{A}_{+}\hat{y}+\ddot{A}_{\times}\hat{x}),\quad (37.6)$$

$$\left(\frac{d^2\hat{z}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{由波產生}}=0。$$

這個分析只適用於「微小的」探測器（$L\ll\lambda$）

這些表達式，與短程線偏離方程一樣，只適用於比一個波長小很多的區域。對於尺度 $L\gtrsim\lambda$ 的區域，度規的二階微商（即 Riemann 張量的分量）不能很好的量度短程線偏離和波所產生的力。因而，爲了分析大的探測器（$L\gtrsim\lambda$），必須放棄曲率張量的「局域數學」而代之以「整體數學」——例如用度規分量 $h_{\mu\nu}$ 在 TT 坐標系中作分析。作爲一個例子，參看練習 37.6。

迄今 (1973年) 爲止已經設計的全部高靈敏度的探測器都比一個波長小很多，因此可以用 Newton 物理學的技巧和 (37.6) 式的驅動力來分析。

對於由不同偏振波產生的驅動力，$-R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}x^{\hat{k}}$，發揮物理的直覺是有益的。圖 35.2 是其一；框 37.2 爲另一。［讀者會發覺去檢驗、比較、協調它們是有趣的！］。

練習

練習 37.3 固有參照系中的聯絡係數

(a) 對於度規 (37.2)，忽略 $O(|x^{\hat{j}}|)$ 的修正項，試計算 $\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$。［答案：(13.69) 式且 $\omega^{\hat{j}}=0$。］

(b) 試利用標準公式 (8.44) 計算 $R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$，計算時留下聯絡係數的空間微商不算，因爲在 $\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ 中的修正項 $O(|x^{\hat{j}}|)$ 未知。［答案：$R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}=\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0},\hat{k}}-a^{\hat{j}}a^{\hat{k}}$。］

(c) 試利用 (b) 的答案估算 $O(|x^{\hat{j}}|)$ 對 $\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0}}$ 的修正。［答案：

$$\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0}}=a^{\hat{j}}(1+a_{\hat{k}}x^{\hat{k}})+R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}x^{\hat{k}}+O(|x^{\hat{k}}|^2)。\quad]\qquad (37.7)$$

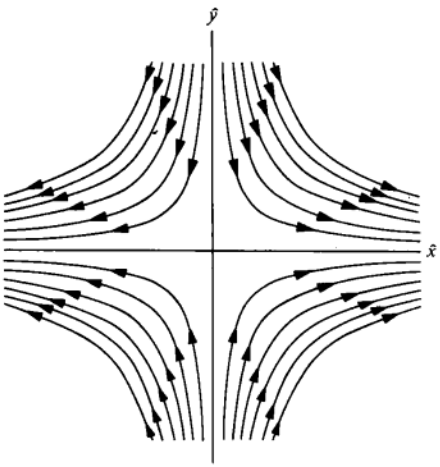
框 37.2　引力波加速度的力線

A. 基本概念

考慮在 $\hat{z}$ 方向傳播的平面波。完全在探測器的固有參照系內討論。由波產生的相對加速度完全是橫向的。相對於探測器質心（空間坐標原點）的加速度爲

$$\begin{aligned} d^2\hat{x}/d\hat{t}^2 &= \frac{1}{2}(\ddot{A}_+\hat{x}+\ddot{A}_\times\hat{y}), \\ d^2\hat{y}/d\hat{t}^2 &= \frac{1}{2}(-\ddot{A}_+\hat{y}+\ddot{A}_\times\hat{x}), \\ d^2\hat{z}/d\hat{t}^2 &= 0。 \end{aligned} \qquad (1)$$

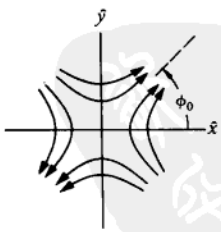
注意，這些加速度是無散度的。因此它們可以用類似於眞空中電場的「力線」表示。在 $\ddot{A}_\times=0$（因此偏振完全是 $\mathbf{e}_+$）的 $\hat{t}-\hat{z}$ 值處，力線是如示意圖(a)所示的雙曲線。在任一點加速度的方向是該處箭頭的方向；加速度的大小是力線的密度。因爲加速度正比於到質心的距離，所以當沿給定方向上運動到離原點二倍遠時，力線密集了二倍。當 $\ddot{A}_+$ 爲正時，力線上箭頭如圖 (a) 所示；當 $\ddot{A}_+$ 爲負時，箭頭方向相反。隨着 $|\ddot{A}_+|$ 增大，力線將向原點移動，使力線的密度增加；隨着 $|\ddot{A}_+|$ 減少，它們向無窮遠移動而使其密度降低。



(a) $\ddot{A}_\times=0$, $\ddot{A}_+>0$ 的力線

對於偏振 $\mathbf{e}_\times$，力線從上圖轉動 45°。對於中間的偏振（在 $\ddot{A}_+$ 和 $\ddot{A}_\times$ 兩者均不爲零的 $\hat{t}-\hat{z}$ 值），圖形將轉動一個適中的角度［示意圖(b)］

$$\phi_0=\frac{1}{2}\arctan(\ddot{A}_\times/\ddot{A}_+)。 \qquad (2)$$

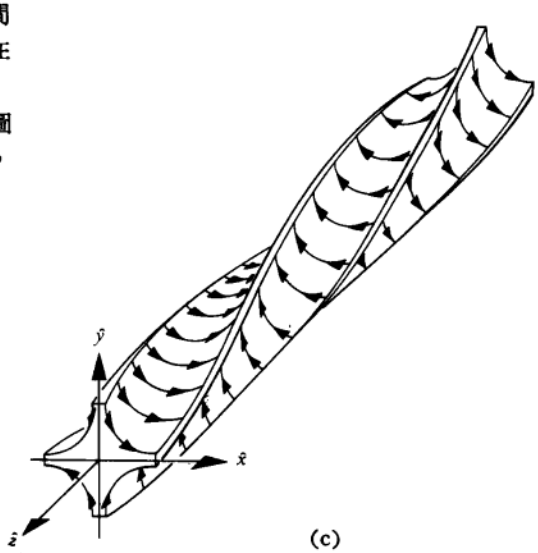


(b)

B. 三維圖形

在 $\hat{t}-\hat{z}$ 的每一值處，波產生的加速度都具有特定的偏振［示意圖（b）中的取向角 ϕ_0］和一特定的振幅（力線密度）。對於確定的 $\hat{t}$，在三維 $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ 圖上畫出力線。那麼，隨着時間的流逝，全圖的形狀將保持不變，但將以光速在 $\hat{z}$ 方向傳播。

示意圖(c)示出振幅不變的右旋圓偏振波圖。注意：在 William H. Press (1970) 以前，作者並沒有意識到這些圖［例如上述（a）(b)(c) 圖］以及在分析探測器響應時的用處。



練習 37.4 爲什麼有 $a\cdot x$？

試解釋框 37.1 (5b) 式中 $a\cdot x$ 修正項的來源。［提示：採取在空間原點靜止的觀測者的觀點，他觀察兩個自由下落粒子對慣性力的響應。在 $\hat{t}=0$ 時刻，把一個粒子置於原點，而另一置於 x^j。隨着時間的流逝，在它們共同的 Lorentz 系中兩粒子的間隔保持不變；因此，從位於 $x^j=0$ 的觀測者的觀點來看，此處發生了 Lorentz 收縮。］

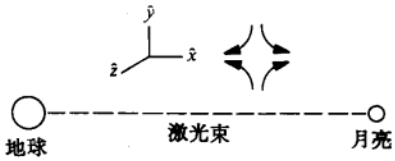
練習 37.5 偏振圖的指向

試導出框 37.2 的(2)式。

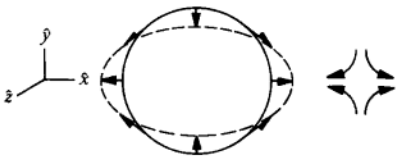
§ 37.3 機械探測器的類型

八類機械探測器：

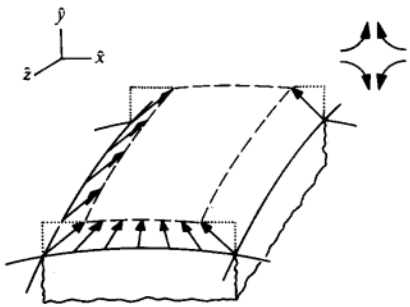
圖 37.2 畫出了八種不同類型的引力波機械探測器。（「機械探測器」意味着依賴於物質相對運動的探測器。在本章末的 §37.9 描述了非機械探測器。



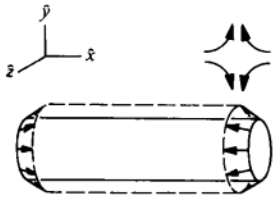
(a) 地－月距離的振動（見練習37.7）



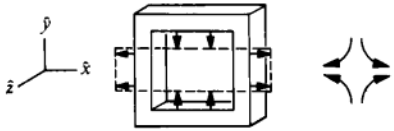
(b) 地球和月亮的簡正模式振動［參看Weber (1968)］



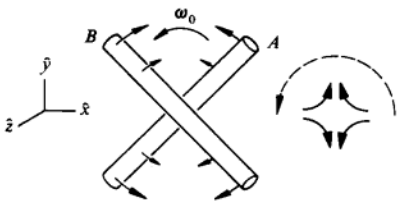
(c) 地殼的振動［參看Dyson (1969)］



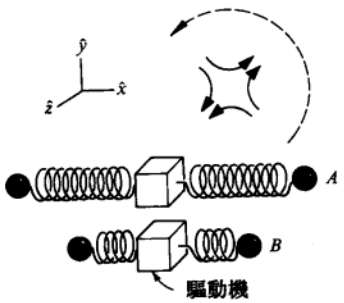
(d) 彈性棒的簡正模式振動［參看 Weber (1969) 和其中所引文獻］



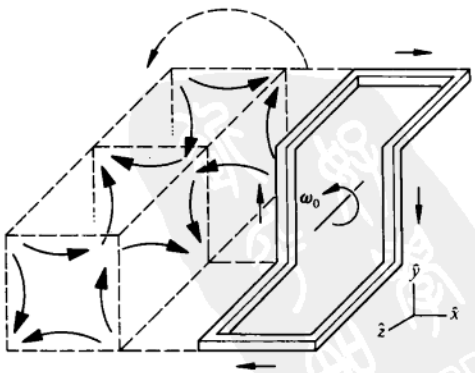
(e) 彈性立方體或環或音叉的簡正模式振動［參看Douglass (1971)］



(f) 旋轉棒的角加速度［「外差探測器」；參看Braginsky, Zel'dovich 和 Rudenko (1969)］



(g) 被驅動振子的角加速度［Sakharov (1969)］



(h) 在旋轉的環管中流體的抽運［Press (1970)］。管與波以同樣的角速度旋轉；因此管在右旋偏振力線中的位置永遠保持固定。

圖 37.2
各種類型的引力波探測器。

）這八種探測器以其他探測器都可以用框37.2的力線圖方便地進行分析。對這八種探測器的每一種所作的定性討論如下。（對每一種探測器完全的定量分析需要與廣義相對論無關的實驗技術，這超出了本書的範圍。但在§37.5—§37.8中描述了某些定量細節。）

1.兩個自由下落物體的相對運動

(1)自由下落物體

當引力波通過兩個自由下落的物體時，它們的固有間隔會振蕩（圖37.3）。這會在兩個物體之間往返傳播的電磁信號的紅移和往返傳播時間中產生相應的振蕩。原則上，兩個效應的每一個效應，即振蕩的紅移或振蕩的傳播時間都可用來探測波的通過。這類探測器的例子有：由激光測距儀監測的地-月距離［圖 37.2(a)］；射電測距儀監測的地球-宇宙飛船距離；以及由紅移測量或激光干涉儀監測的，在地球軌道實驗室中的二個試驗質量之間的距離。這種探測器的若干特徵在練習37.6和練習37.7中探討。正如練習37.7所示，這種探測器的靈敏度很低，幾乎沒有實驗價值。

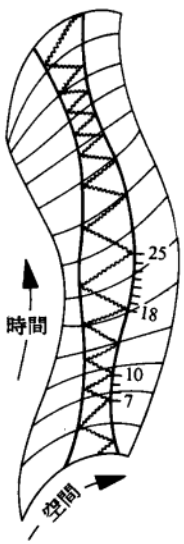


圖 37.3

兩短程線之間往返傳播時間對空時曲率中振蕩的響應（圖只是示意性的；，從地球向月亮上的角反射器發出激光脈衝符號並返回，此時，非常强的長波長引力波從傍經過；波必須非常强，因爲直接測量距離要優於10厘米是困難的，並且這種精度使波指示器的靈敏度比 Weber 棒長度的振蕩［10^{-14} 厘米或更少］更差；參看練習 37.7）。在 Riemann 曲率張量的有關分量（稱之爲 $R_{\hat{0}\hat{0}\hat{0}}$）具有同一符號的區域內，短程線的彎曲使它們彼此靠近，而在 $R_{\hat{0}\hat{0}\hat{0}}$ 具有相反符號的區域內，短程線的彎曲使它們彼此分開。此圖使人們一看便知道通常令人困惑的問題的答案：往返傳播時間的任何變化不是無聊的廢話嗎？波的度規擾動 $\delta h_{\mu\nu}$ 不但稍稍改變了距離尺度，還相應地改變了時間尺度。因此，對於任何眞正有意義並且可以測量的效應，各種可能性不會彼此抵消嗎？答案是：(1)短程線之間分離的加寬不是局域效應而是累積效應。它並非直接來自 $\delta h_{\mu\nu}$ 的局域值，甚至也並非來自曲率的局域值。它來自引力波整個半周期彎曲過程的積累。(2)短程線分離的改變是固有距離的眞正改變，並顯露在原時的眞正改變中（觀察在粒子之一的世界線上的「滴答聲」）。參看練習 37.6。注意：當研究短程線之間的分離時，如果不是像這裏只看單個周期的情況，而是研究很多個周期的情況，那麼他會發現，彼此相向快速擺動的短程線的累積的、系統的、淨存的緩慢彎曲。這個微小的吸引加速度是引力物理學中引力波帶走有效質量-能量的證據（參看第35章）。

2.地球和月亮的簡正模式振蕩

(2)地球和月亮

掃過地球的引力波將會激發地球的四級模式振蕩，因爲波的驅動力具有四極空間分佈［參看圖 37.2(b)］。地球的基頻四極模式的周期爲54分鐘，而月亮的相應周期爲15分鐘。因而，地球和月亮將從經過的波列中挑選出54分鐘和15分鐘的分量。§37.7 將定量地分析波和固體振動之間的相互作用。把這種分析與地球振動的地震計研究相比較，Weber (1967) 指出了引力波宇宙通量的第一個觀測限制：

$$I_\nu \equiv \frac{d\,\text{通量}}{d\,\text{頻率}} < 3\times10^{7}\ \text{爾格厘米}^{-2}\text{秒}^{-1}\text{赫茲}^{-1}\text{，對}\ \nu = 3.1\times10^{-4}\ \text{赫茲。} \quad (37.8)$$

3.地殼中的振蕩

(3)地殼

如果脈衝星中的中子星從軸對稱稍稍變形，則它的旋轉會產生引力波。波的周期爲脈衝星周期之半（恒星轉過 180 度時產生波的一個周期）——也就是說，它的周期範圍應從 NP0532（蟹狀星雲脈衝星）的 0.017 秒到 NP0527 的 1.87秒。這種波列不能激發地球的54分鐘四極振動或任何其他低頻的簡正模式振蕩。原則上，此波列所能激發的振動類型可以用簡正模式的術語來描述。然而，可以清楚地和更方便地把它們看作地球局部區域的振動；或者，更特殊地說，看作地殼的振動。

Dyson (1969) 分析過像地球這樣的彈性固體對入射的離共振引力波的響應。他指出，這種響應依賴於彈性模量對剪切波的不規則性，並且在自由表面上的響應最强［圖 37.2(c)］。通過平直表面的引力波能量中轉換爲固體彈性運動能量的分數，他找到表達式爲

$$(\text{分數}) = (8\pi G\rho/\omega^2)(s/c)^3\times\sin^2\theta\,|\cos\theta|^{-1}[1+\cos^2\theta+(s/v)\sin^2\theta]\text{。} \quad (37.9)$$

式中 s 和 v 分別爲剪切波和壓縮波的速度，θ 爲波傳播方向和表面法線之間的夾角。考慮通量爲 2×10^{-5} 爾格／厘米²秒 （對於來自脈衝星的波，這是一個樂觀的但是可以想象的值），水平地入射（$\theta=\pi/2$；在計算中「發散」因子 $|\cos\theta|^{-1}$ 會消去！），並取 s 爲 4.5×10^5 厘米／秒，ω 爲 6 弧度／秒，他計算出在表面上產生的 1 赫茲水平位移的振幅爲 $\xi_0\sim2\times10^{-17}$ 厘米，對照背景地震噪音，它是太微小了，比可探測的相差 10^5 倍。他指出了改進的可能性，特別是經過共振的情形（彈性波在兩個表面之間往返反射；南極冰層）。

4.彈性棒的簡正模式振動

(4)彈性棒

根據 1972 年的資料，最常討論的一類探測器是 Joseph Weber (1960, 1961) 發明的鋁棒［參看圖 37.1 和圖 37.2(d)］。Weber 的棒的形狀爲圓柱，長 153 厘米，直徑66厘米，重量爲 1.4×10^6 克。每根棒都用金屬絲懸掛在眞空中，並在機械上與周圍隔開。圍繞棒的中央加上壓電膂變換能器，把它接入對棒的基頻頭尾連結振動模式敏感的電路（頻率 $\nu=1,660$ 赫）。當引力波擊中棒的側面時，如圖 37.2(d) 所示，波帶來的相對加速度將激發棒的基頻模式。根據 1972 年的資料， Weber 在兩個這樣的棒中觀測到突然的同時的激發，兩個棒一個放在美國首都華盛頓附近的馬里蘭 (Maryland) 大學，另一個放在芝加哥附近的 Argonne 國家實驗室［見 Weber (1969, 1970a,b)］。對於 Weber 的巧合事件，除了解釋爲來自外空間的引力波以外，還沒有人提出切實可行的解釋。然而，物理學史上的許多例子表明，想像上的新效應最後不得不歸結爲早已熟知的現象。因此，似乎很難把觀測的事件評價爲「成功的試驗」。要自信地作出這種評價看來需要用不同的設備來證實，或者在不同情況下證實，或兩者兼而有之；企圖提供這種證實的實驗現在 (1972) 正在進行。如果人們接受這種尚無把握的評價，那麼就能諒解與此同時對 Joseph Weber 的最高贊譽，卽由於 Joseph Weber 對物理書上最難捉摸的輻射作出了長達10年以上的搜尋，人們對他在實驗上的首創性、活力、和動人的堅韌不拔給予最高的贊譽。

上述四類機械探測器代表着已經作過測量的系統；所以它們面臨的實際困難和可實現的噪音水平都可作出適當的估計。在對更佳方案的不斷追求中，曾經研究過許多更精巧的探測器，在1972年，我們可以列出下述一系列的有趣建議。對於這些建議，爲了實現所期望的特性，還需要作多少發展尚難斷言。

5.其他形狀的彈性物體的簡正模式振動

(5)其他形狀的彈性物體

Weber 探測器的「棒」的形狀並不一定要柱形。關於中空的方形，環形或音叉形的探測器的討論，可以參看 Douglass (1971)；這種探測器的基頻可以調整，使得在給定質量或給定最大尺寸或兩者都給定的情況下能得到最佳響應。§37.4，§37.7和練習37.9到練習37.12詳細分析了任意形狀的「振動棒」探測器的運行。還請參看 Douglass 和 Tyson (1971)。

6.旋轉棒的角加速度

(6)旋轉棒（「外差探測器」）

迄今爲止描述的所有可能的探測器，都是以最爲明顯的方式響應引力波的潮汐加速度：相對距離的內外振盪。但是，潮汐加速度除了包含長度改變分量

以外，還包含着切向的產生旋轉的分量。在框 37.2 的圖 (a) 中，改變長度的分量在 $\hat{x}$ 軸和 $\hat{y}$ 軸附近占主導地位，而產生旋轉的分量在兩軸中間爲主。Vladimir B. Braginsky 首先提出了響應產生旋轉加速度的探測器［參看 Braginsky, Zel'dovich 和 Rudenko (1969)；Braginsky 和 Nazarenko (1971)］。它由兩個互相垂直放置的金屬棒組成，它們可以在其共同平面內以角速度 ω_0 自由旋轉［參看圖 37.2 (f)］。(旋轉是相對於探測器固有參照系的廻轉儀的；這等價於它是相對探測器局域 Lorentz 參照系的。) 設角頻率 $\omega=2\omega_0$ 的單色引力波(其單位時間的位相改變等於力線圖案旋轉角速度的二倍)衝擊旋轉棒的側面。這樣，波的右旋圓偏振分量將與棒一起旋轉；所以它們在力線圖案上的指向將始終保持不變。按圖 37.2(f) 的指向，棒 A 將得到角加速度，而棒 B 將減速。實驗者可以探尋兩棒的恒定的相對角加速度（只要兩棒之間的角度不顯著偏離 90°，相對加速度不變）。更好的辦法是，實驗者可以（非常容易地）調整旋轉速度 ω_0，使之與波的頻率 ω 略有偏離。那麼，在隨後的 $\frac{1}{2}\omega_0/|\omega-2\omega_0|$ 次旋轉中，A棒將加速，B棒將減速；在緊接的 $\frac{1}{2}\omega_0/|\omega-2\omega_0|$ 次旋轉中，A會減速，B會加速，以此類推（拍頻）。實驗者可以探尋兩棒相對指向的振蕩。不必擔心左旋偏振波會與實驗結合。因爲左旋波並不與棒一起旋轉，它們的角加速度會在一圈中平均掉。

Braginsky 稱此設備爲「外差探測器」。他展望在 70 年代後期可能把這類探測器放在繞地球的自由下落軌道上。外差探測器對於諸如來自脈衝星的長單色波列的探測最爲有效；但即使對短的爆發波，它們也可能比振動棒更靈敏［參看 Braginsky 和 Nazarenko (1971)］。

7.被驅動振子的角加速度

(7)被驅動振子的旋轉

Andrei D. Sakharov (1969) 提出過不同類型的引力波角加速度探測器。與上述的兩個旋轉棒不同，它由兩個相同的被驅動振子組成，起初平行不旋轉彼此異相振蕩。在經過的波的某個位相時，每個振子在某方向受到角加速度，而在下一個位相則在反方向受到角加速度，但是力矩並不抵消。當振子極大膨脹時，它受到的力矩比它極大收縮時要大（加速度∝長度；力矩∝長度^2）。結果，如果被驅動振動與經過的、單色波的角頻率相同，並且如果位相如圖 37.2(g) 所示，則振子A將受到右旋方向的角加速度，而振子B受到左旋方向的角加速度。

8.旋轉環管中流體的抽運

(8)管中的流體

William Press (1970) 描述了第三類響應角加速的探測器。這種探測器大概遠不如其他探測器靈敏，因此不值得建造；但是它以新穎的設計引人注意；並且它能闡明其他探測器置之不顧的引力波的某些特性。Press 的探測器由裝着超流體的旋轉的管組成。選擇管的形狀和它的恒定的旋轉速度，使得引力波能抽運管內的流體。一種可能的管道設計（在實踐上這是個壞的設計，但是比較容易分析）如圖 37.2(h) 所示。注意，應用的是潮汐加速度沿波傳播方向的變化，以及垂直波傳播方向的變化。爲了分析流體對右旋圓偏振波的響應，可以設想把旋轉管放在框 37.2(c) 的三維力線圖上。

練習

練習 37.6 自由下落物體的相對運動用作引力波探測器［參看圖 37.2(a) 和圖 37.3］

考慮在平直的空的空時中起初相對靜止的兩個物體。(附近有其他引力物體的情況，在處理時並沒有太多的困難；但本練習只涉及最簡單的例子！) 來自 $-z$ 方向的角頻率爲 ω 偏振爲 $\mathbf{e}_+$ 的平面近單色引力波衝擊物體。如練習 35.5 所示，在波到達前，在構成物體整體慣性系的這些 TT 坐標系中，兩物體始終保持靜止。對於兩試驗物體的任意間隔 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$，試計算紅移和光子在兩物體間往返傳播的時間。對於大的 Δx, Δy, Δz，試把此答案與利用（不證明！）短程線偏離方程所得之答案相比較。從物理上講，爲什麼隨着間隔的增加，正確的答案會振動？試討論在採用當前技術的情況下，這種探測器的可行性和可能的靈敏度。

練習 37.7 地-月距離作爲引力波探測器

在70年代初期，利用激光測距儀監測地-月距離的精度可達10厘米，相繼的觀測之間的時間間隔至少是一次往返傳播的時間。假定除了由地球—月亮—太陽—行星的引力相互作用造成的（周期較長的）預期振動以外，在往返傳播時間中沒有觀測到振動。那麼，對於通過地球的引力波的能流通量，可以加上什麼限制呢？答案的數學公式可經數值計算得出

$$\text{通量} \lesssim 10^{18} \text{爾格/厘米}^2\text{秒} \quad \text{對於} 0.3\text{周/秒} \lesssim \nu \lesssim 1\text{周/日}, \tag{37.10a}$$

相應的加在引力波質量密度上的限制爲

$$\text{密度} \lesssim 10^{-13} \text{克/厘米}^3\text{。} \tag{37.10b}$$

爲什麼這是一個不感興趣的限制？

---

§37.4　振動的機械探測器：介紹性評述

初階
高階

本章其餘部分爲高階。無需前面的高階內容作爲它的準備知識，它對以後各章也不是必需的。

本章的其餘部分（除§37.9外）詳細分析振動的機械探測器(地球；Weber棒；形狀複雜的「棒」；等等）。

分析的細節及其應用主要取決於兩個無量綱數：(1)比值 $\tau_{\text{引力波}}/\tau_0$，其中

$$\tau_{\text{引力波}} \equiv \begin{pmatrix}\text{引力波振幅和譜變化}\\ \text{的特徵時間尺度}\end{pmatrix}, \tag{37.11a}$$

$$\tau_0 \equiv \begin{pmatrix}\text{由於內稟阻尼造成探測器}\\ \text{振動(在感興趣的簡正模式)}\\ \text{消逝的 } e \text{ 倍變化時間}\end{pmatrix}; \tag{37.11b}$$

和(2)比值 $\bar{E}_{\text{振動}}/kT$，其中

$$\bar{E}_{\text{振動}} \equiv \begin{pmatrix}\text{當波經過和驅動探測器時，}\\ \text{探測器振動能量（在感興趣}\\ \text{的簡正模式）的平均值}\end{pmatrix}, \tag{37.12a}$$

$$\begin{aligned} kT &\equiv \begin{pmatrix}\text{Boltzmann}\\ \text{常數}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{探測器}\\ \text{的溫度}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\text{當引力波不激發探測}\\ \text{器時，在感興趣的簡}\\ \text{正模式中的平均能量}\end{pmatrix}。\end{aligned} \tag{37.12b}$$

當 $\tau_{\text{引力波}} \gg \tau_0$ 時，探測器看來，輻射具有「穩定通量」，並且它以穩態振動作出響應；當 $\tau_{\text{引力波}} \ll \tau_0$（短時間波爆發），波「錘擊」探測器。當 $\bar{E}_{\text{振動}} \gg kT$ 時，波的驅動力超出探測器的隨機的、內稟的 Brown 噪音力，而居支配地位（「*波為主的探測器*」）；當 $\bar{E}_{\text{振動}} \lesssim kT$ 時，波的驅動力與探測器的隨機的、內稟的 Brown 噪音力競爭（「*噪音探測器*」）。

定義：「穩定通量」，「錘擊波」，「波爲主的探測器」，「噪音探測器」

§37.5 至 §37.7 涉及波爲主的探測器（$\bar{E}_{\text{振動}} \gg kT$）。這幾節的關鍵結果在框 37.3 中概述；它在此處出現是爲了讀者快速的預習一下（儘管讀者也許預先不能完全理解）。§37.8 論述噪音探測器。

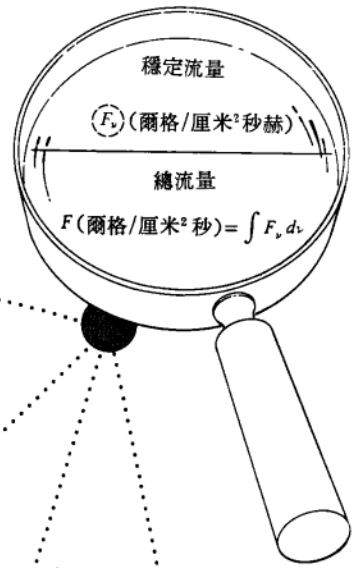
警告：本章其餘部分處處首先注意截面概念。這對探測器理論的初步介紹是很好的。但是，截面並不是問題的全部，特別是當研究輻射的細緻波形式時更是如此。並且有時(例如圖 37.2 a的探測器)截面概念根本與問題無關。第一流的實驗家在設計探測器時主要討論的不再是截面，正如無線電工程師設計新的射電望遠鏡一樣。注意力也大量集中於天線帶寬，天線響應的其他更細緻的特徵，

探測器的設計需要比截面概念更多的知識

(接第1022頁)

框 37.3 波爲主探測器運用截面的方式

A. 計算探測器從穩定通量的輻射提取能量的速率（$\tau_{\text{引力波}} \gg \tau_0$）

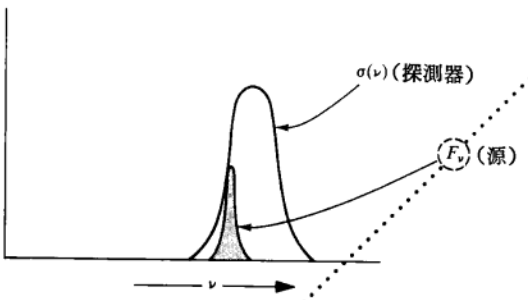


1. 輻射的頻率分佈爲任意的：

（探測器從引力波提取能量的穩定速率）

$= \int \underbrace{F_\nu(\nu)}_{\text{爾格/厘米}^2\text{秒赫}} \cdot \underbrace{\sigma(\nu)}_{\text{厘米}^2} \underbrace{d\nu}_{\text{赫}}$

2. 輻射的頻率展開小於探測器的線寬：



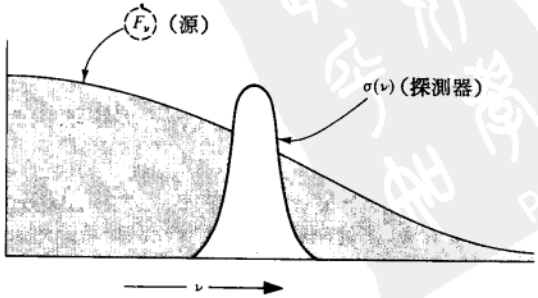
（探測器從引力波提取能量的穩定速率）

$= \sigma(\nu_{\text{探測器}}) \int F_\nu \, d\nu = \sigma F$

3. 輻射的頻率展開大於探測器的線寬：

（探測器從引力波提取能量的穩定速率）

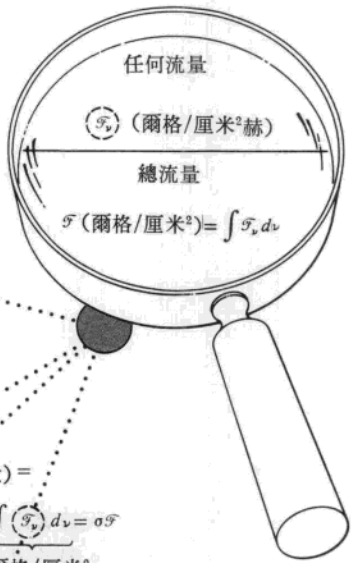
$= \underbrace{F_\nu \nu_{(\text{探測器})}}_{\text{爾格/厘米}^2\text{秒赫}} \underbrace{\int \sigma(\nu) \, d\nu}_{\text{「共振積分」，厘米}^2\text{赫}}$



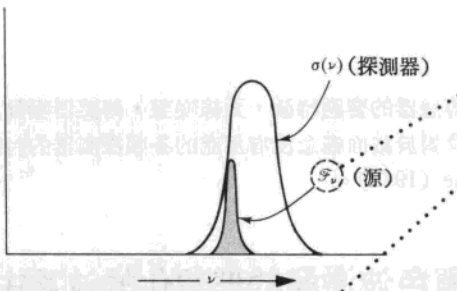
B. 計算任何經過的波列在探測器內留存的總能量

1. 如果輻射的頻率分布是任意的：

(留存的總能量) = $\int \underbrace{\mathcal{F}_\nu(\nu)}_{\text{爾格/厘米}^2\text{赫}} \underbrace{\sigma(\nu)}_{\text{厘米}^2} \underbrace{d\nu}_{\text{赫}}$



2. 如果輻射頻率的展開小於探測器的線寬（「單色波」）：



(留存的總能量) =

$\underbrace{\sigma(\nu_{\text{源}})}_{\text{厘米}^2} \underbrace{\int \mathcal{F}_\nu d\nu = \sigma\mathcal{F}}_{\text{爾格/厘米}^2}$

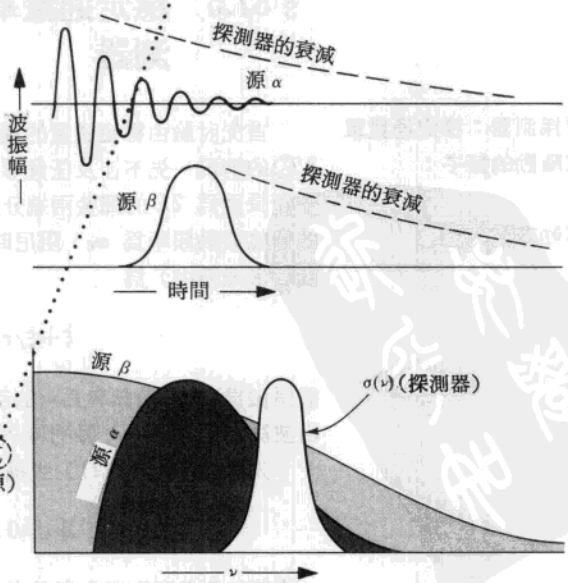
3. 如果輻射的頻率展開大於探測器的線寬（錘擊輻射一定屬於此種情形，其中

$\Delta\nu_{\text{源}} \geq 1/4\pi\tau_{\text{引力波}} \gg 1/4\pi\tau_0 = \Delta\nu_{\text{探測器}}$）：

（留存的總能量）=

$\underbrace{\mathcal{F}_\nu(\nu_{\text{探測器}})}_{\text{爾格/厘米}^2\text{赫}} \underbrace{\int \sigma(\nu)\, d\nu}_{\text{厘米}^2\text{赫}}$

「共振積分」



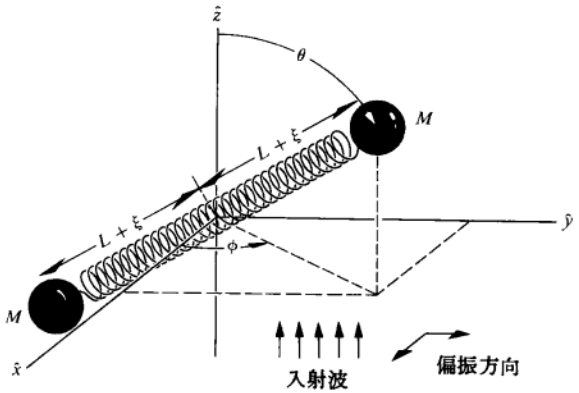


圖 37.4
響應線性偏振引力波的理想探測器（振子）。

天線與位移傳感器的耦合，傳感器的響應特徵，天線噪聲，傳感器噪聲，等等。對於這些論題的綜述，以及對於截面概念沒有用處的各類探測器的討論，參看，例如，Press 和 Thorne (1972)。

§ 37.5 穩定通量單色波激發的理想化的波爲主探測器

理想探測器：穩定通量單色波驅動的振子：

(1)運動方程的推導

首先討論由穩定通量的輻射驅動（$\tau_{\text{引力波}} \gg \tau_0$）的、波為主探測器（$\bar{E}_{\text{振動}} \gg kT$）的情況。先不涉及任意形狀的固體棒，而討論圖 37.4 的理想探測器：在平衡長度爲 $2L$ 的彈簧兩端分別放置質量爲M的物體所組成的振子。設探測器的自然振動頻率爲 ω_0，阻尼時間 $\tau_0 \gg 1/\omega_0$。因此，它的運動方程（在探測器固有參照系中）爲

$$\ddot{\xi}+\dot{\xi}/\tau_0+\omega_0^2\xi=\text{驅動加速度}。\qquad (37.13)$$

設偏振爲 $\mathbf{e}_+$，角頻率爲ω的引力波從 $-\hat{z}$ 方向衝擊探測器；設探測器相對於由波決定的 $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ 軸的極角爲θ和 ϕ。

入射波可由 (37.1) 式描述，其振幅爲

$$A_\times=0,\qquad A_+=\mathcal{A}_+e^{-i\omega(t-z)}。\qquad (37.14)$$

（此處和各處應取所有複數表達式的實部。）假設探測器比波長小得多，因此

，在探測器的各處可令 $z\approx\hat{z}=0$。那麼，由波產生的潮汐加速度爲

$$\left(\frac{d^2\hat{x}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{由波產生}}=-R_{\hat{x}0\hat{j}0}x^j=-\frac{1}{2}\omega^2\mathscr{A}_+e^{-i\omega\hat{t}}\hat{x}\,,$$

$$\left(\frac{d^2\hat{y}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{由波產生}}=-R_{\hat{y}0\hat{j}0}x^j=+\frac{1}{2}\omega^2\mathscr{A}_+e^{-i\omega\hat{t}}\hat{y}\,,$$

它沿振子的分量爲

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{\hat{x}}{L}\frac{d^2\hat{x}}{dt^2}+\frac{\hat{y}}{L}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\hat{z}}{L}\frac{d^2\hat{z}}{dt^2}=-\frac{1}{2}\omega^2\mathscr{A}_+Le^{-i\omega\hat{t}}\frac{\hat{x}^2-\hat{y}^2}{L^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\omega^2\mathscr{A}_+Le^{-i\omega\hat{t}}\sin^2\theta\cos2\phi\,。$$

結果，振子的運動方程爲

$$\ddot{\xi}+\dot{\xi}/\tau_0+\omega_0^2\xi=-\frac{1}{2}\omega^2\mathscr{A}_+Le^{-i\omega\hat{t}}\sin^2\theta\cos2\phi\,。\qquad(37.15)$$

驅動力按 $\cos2\phi$ 變化，這是因爲引力波的「自旋爲 2」的性質；在橫向平面內旋轉 180° 時波保持不變；旋轉 90° 時位相相反。$\sin^2\theta$ 項來自波的橫向性質［一個 $\sin\theta$ 因子是由於在探測器方向上的投影］，加上它的潮汐力性質［另一個 $\sin\theta$ 因子是由於（相對力）$\propto$（橫向平面內的距離］。

運動方程 (37.15) 式的直接穩態解爲

$$\xi=\frac{\frac{1}{2}\omega^2\mathscr{A}_+L\sin^2\theta\cos2\phi}{\omega^2-\omega_0^2+i\omega/\tau_0}e^{-i\omega\hat{t}}\,。\qquad(37.16)$$

(2)振子的振幅作爲頻率和指向的函數

當入射波與探測器接近共振時，即當 $|\omega\pm\omega_0|\lesssim1/\tau_0$ 時，振子被激發到很大振幅。否則激發是微小的。此後，集中討論近共振激發；於是 (37.16) 式可以簡化爲（注意：ω_0 爲正，但 ω 可負可正）：

$$\xi=\frac{\frac{1}{4}\omega_0\mathscr{A}_+L\sin^2\theta\cos2\phi}{|\omega|-\omega_0+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega)i/\tau_0}e^{-i\omega\hat{t}}\,。\qquad(37.16')$$

探測器是否有用的衡量之一是它吸收引力波能量的截面。在具有上述振幅且具有 2 個質量 M 的探測器中，穩態振動能量爲

$$E_{\text{振動}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot M\cdot(\dot{\xi}^2)_{\text{極大}}=\frac{\frac{1}{16}ML^2\omega_0^4\mathscr{A}_+^2\sin^4\theta\cos^22\phi}{(|\omega|-\omega_0)^2+(1/2\tau_0)^2}\,。\qquad(37.17)$$

這個能量以速率 $E_{振動}/\tau_0$ 在振子內部耗散。如果不管作爲引力波重新輻射出去的能量（一個可以忽略的過程！），那麼可以使耗散速率等於探測器從入射波吸收能量的速率——而後者又等於「截面」σ 乘以入射通量：

$$E_{振動}/\tau_0 = -dE_{波}/dt = \sigma T^{0t}{}_{(引力波)} = \frac{1}{32\pi}\sigma\omega^2 \mathcal{A}_+{}^2 。$$

(3)偏振輻射的截面

結果，近共振（$|\omega \pm \omega_0| \ll \omega_0$）時，攔截引力波能量的截面爲

$$\sigma = \frac{2\pi ML^2(\omega_0{}^2/\tau_0)\sin^4\theta\cos^2 2\phi}{(|\omega|-\omega_0)^2+(1/2\tau_0)^2}，\text{對於偏振的輻射。} \qquad (37.18)$$

這個表達式適用於單色輻射。但是，處理許多其他類型波動的經驗告訴我們，人們通常必須涉及頻率的寬帶連續譜，入射輻射的「帶寬」遠大於探測器共振的寬度（見框 37.3）。在這些條件下，相關的量不是截面本身，而是截面的「共振積分」，

$$\int_{共振}\sigma\, d\nu = \int\sigma(d\omega/2\pi) = 2\pi ML^2\omega_0{}^2\sin^4\theta\cos^2 2\phi，\quad \text{對於偏振的輻射。} \qquad (37.19)$$

(4)非偏振輻射的截面

在考察此截面的大小之前，讓我們先仔細考察它的方向性（「天線定向圖案」）。$\sin^4\theta\cos^2 2\phi$ 因子指的是線偏振的 $\mathbf{e}_+$ 輻射（見圖 37.4）。對於偏振的正交模式 $\mathbf{e}_\times$，$\cos^2 2\phi$ 要代之以 $\sin^2 2\phi$；對於非偏振（非相干混合）的輻射或圓偏振輻射，截面是這兩個表達式的平均值；因而，

$$\sigma = \frac{\pi ML^2(\omega_0{}^2/\tau_0)\sin^4\theta}{(|\omega|-\omega_0)^2+(1/2\tau_0)^2} \quad \text{對於非偏振的輻射。} \qquad (37.20)$$

注意，此非偏振截面在探測器的赤道平面達到峰值，半寬度爲 33°。對入射波的各種可能方向取平均，截面爲

$$\langle\sigma\rangle_{所有方向} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sigma\sin\theta\, d\theta = \frac{8}{15}\sigma_{極大} = \frac{(8\pi/15)ML^2(\omega_0{}^2/\tau_0)}{(|\omega|-\omega_0)^2+(1/2\tau_0)^2} \quad \text{對於非偏振的輻射。} \qquad (37.21)$$

可以把上述截面改寫成幾種容易引起聯想的形式。例如，在共振情況下，截面（37.21）可寫爲

$$\langle\sigma\rangle_{所有方向} = \frac{4\pi^2}{15}\,\frac{4M}{2\pi/\omega_0}(\omega_0\tau_0)(2L)^2 。$$

記住，$\omega_0\tau_0$ 定義爲探測器的「Q」值，$1/Q\equiv$（振動每一弧度中耗散的能量的相對比例）。注意，$2\pi/\omega_0$ 是共振輻射的波長 λ_0。最後，用 $r_g=4M$ 表示探測器的引力半徑。用這三個人們熟悉的量來表示，截面公式爲

$$\frac{\langle\sigma\rangle_{\text{所有方向}}}{(2L)^2}=\frac{\text{（共振時吸收波的截面）}}{\text{（探測器的「幾何」截面）}}$$

$$=(4\pi^2/15)(r_g/\lambda_0)Q \quad \text{對於共振的非偏振輻射。} \quad (37.22)$$

任何共振探測器的截面的大小

這個關係式在數量級上適用於任何共振探測器。它十分明顯地表明，引力波天文學必定是艱辛的事業。在給定合理預算的情況下，你能使因子 r_g/λ_0 爲多大呢？ Weber 1970 年的探測器的參數爲：$2L_{\text{有效}}\approx 1$ 米，$r_g\approx(0.74\times10^{-28}$ 厘米／克）×（10^6 克）$\approx10^{-22}$ 厘米，$\nu_0=\omega_0/2\pi=1{,}660$ 赫茲，$\lambda_0\approx200$ 公里，$r_g/\lambda_0\approx\frac{1}{2}\times10^{-29}$，$\tau_0\approx20$ 秒，$Q\approx2\times10^5$；因此

$$\sigma_{\text{Weber}}\approx3\times10^{-20}\text{ 厘米}^2 \quad \text{在共振時。} \quad (37.23)$$

激發 Weber 型探測器所需的通量

爲了把一冷探測器（$\sim0°$K）大體上激發到穩態振動，且振動能量爲〈Boltzmann 常數〉×〈室溫〉$\sim4\times10^{-14}$ 爾格，入射的引力波的能流通量必須是多少？如果把振子冷却到足以使波佔主導地位，則振子耗散能量的速率爲 $E_{\text{振動}}/\tau_0\sim2\times10^{-15}$ 爾格／秒。入射的通量必須補償這一損失，其速率應爲

$$T_{00}^{(\text{引力波})}\sigma\sim2\times10^{-15}\text{ 爾格／秒，} \quad (37.24a)$$

這意味着入射通量的量級應爲 $2\times10^{-15}/3\times10^{-20}\sim10^5$ 爾格／厘米²秒。另外，這個通量必須集中在狹窄的共振範圍內

$$\nu\approx\nu_0\pm1/4\pi\tau_0=(1660\pm0.004)\text{ 赫茲。} \quad (37.24b)$$

從任何標準來看，對於這麼狹小的帶寬，這都是非常高的引力輻射通量（$\sim10^7$ 爾格／厘米²秒赫茲；與在同樣溫度下相應於 Planck 平衡下的黑體引力輻射通量 $8\pi\nu^2kT/c^2=3\times10^{-27}$ 爾格／厘米²秒赫茲相比較，相差的巨大倍數直接反映了由於摩擦和由於引力輻射引起的振子阻尼速率的差別）。

大的 Q 值未必理想

由（37.22）式，似乎理想的探測器必須有大的 Q 值。未必如此。記得，在帶寬 $\Delta\omega\approx\omega_0/Q$ 上的較大的截面將隨着 Q 值的增大而減少。當帶寬爲 $\Delta\omega\gg\omega_0/Q\equiv1/\tau_0$，比通量爲

$$F_*(\text{爾格／厘米}^2\text{秒赫茲})$$

的波穩定地流入並驅動探測器時，它留存能量的速率爲

$$\left(\begin{matrix}\text{留存能量}\\ \text{的速率}\end{matrix}\right)=\frac{dE}{dt}=\int_{\text{共振}}F_\nu\sigma d\nu=F_\nu(\nu_0)\int_{\text{共振}}\sigma d\nu\text{。}$$

$$\uparrow\quad\left[\begin{matrix}\text{對於帶寬爲}\Delta\nu\geqslant 1/\tau_0\\ \text{的輻射}\end{matrix}\right]$$

結果，探測器有效性的適當量度將是截面在共振區的積分 $\int\sigma d\nu$ (37.19)。（見下一節。）這個對頻率積分的截面與探測器的Q值無關，因此，必須採用更完善的論證（例如，信噪比的理論）以決定是否希望有大的Q值。（見 §37.8）。

§ 37.6 由任意通量的輻射激發的理想的，以波爲主的探測器

理想探測器對任意的、非單色通量的響應：
(1)推導

設偏振爲 $\mathbf{e}_+$ 但具有任意譜的平面偏振波 [(37.1) 式且 $A_\times=0$] 衝擊圖 37.4 的理想探測器。那麼探測器的運動方程除了用 $\ddot{A}_+$ 取代 $-\omega^2\mathcal{A}_+e^{-i\omega t}$ 外，應與單色波的情況相同：

$$\ddot{\xi}+\dot{\xi}/\tau_0+\omega_0^2\xi=\frac{1}{2}\ddot{A}_+L\sin^2\theta\cos2\phi\text{。}\qquad(37.26)$$

[現在，讀者完全習慣於在坐標爲 $\hat{t}$, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ 的固有參照系中對探測器（當探測器遠小於波的波長時）作全部分析。此後，為了看起來方便，把這些「固有坐標」上的「帽」號拋去，只用 t, x, y, z 表示。]

對波和探測器位移作 Fourier 分析，

$$A_+(t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{A}_+(\omega)e^{-i\omega t},\qquad(37.27a)$$

$$\xi(t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\xi}(\omega)e^{-i\omega t};\qquad(37.27b)$$

並從 (37.26) 式得出

$$\xi=\frac{\frac{1}{2}\omega^2\tilde{A}_+L\sin^2\theta\cos2\phi}{\omega^2-\omega_0^2+i\omega/\tau_0}\text{。}$$

除非 $|\omega\pm\omega_0|\ll\omega_0$；否則這個 Fourier 振幅可以忽略；結果，可不損精度地改寫爲

$$\tilde{\xi}=\frac{\frac{1}{4}\omega_0\tilde{A}_+L\sin^2\theta\cos2\phi}{|\omega|-\omega_0+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega)i/\tau_0}。\tag{37.28}$$

［與穩態振幅（37.16′）式比較。］

現在要問引力波在探測器內留存的總能量有多少。不可直接考察振動振幅 $\xi(t)$ 以尋求答案；因爲振幅受內部的阻尼和波的驅動力兩者支配，它並不直接反映留存的能量。爲了得出留存的總能量，把作用於每個質量上的力乘以質量的速度而對時間積分：

$$\left(\begin{matrix}\text{留存的}\\\text{總能量}\end{matrix}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}2\underbrace{\left(\frac{1}{2}M\ddot{A}_+L\sin^2\theta\cos2\phi\right)}_{\text{[作用於每個質量的力]}}\dot{\xi}dt。$$

[2 個質量]　　[每個質量的速度]

利用 Parseval 定理（數學物理最强有力的工具之一！）把時間積分換成對頻率積分

$$\left(\begin{matrix}\text{留存的}\\\text{總能量}\end{matrix}\right)=\Re\int_{-\infty}^{+\infty}(ML\sin^2\theta\cos2\phi)(-\omega^2\tilde{A}_+^*)(-i\omega\xi)d\omega。$$

然後，利用（37.28）式，把此式完全用波振幅表示

$$\left(\begin{matrix}\text{留存的}\\\text{總能量}\end{matrix}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2\pi(\omega_0^2/\tau_0)ML^2\sin^4\theta\cos^22\phi}{(|\omega|-\omega_0)^2+(1/2\tau_0)^2}\right]\left[\frac{\omega^2|\tilde{A}_+|^2}{16\pi}\right]d\omega。\tag{37.29}$$

此表達式的第一部分正是上一節導出的單色波的截面（37.18）。第二部分有同樣簡單的解釋：引力波携帶的通過探測器單位表面面積的總能量爲

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\text{爾格/厘米}^2)&=\int T_{00}^{(\text{引力波})}dt=\int\frac{1}{16\pi}\dot{A}_+^2dt\\&=\int\frac{\omega^2|\tilde{A}_+|^2}{16\pi}d\omega=\int\frac{\omega^2|\tilde{A}_+|^2}{8}d\nu\end{aligned}\tag{37.30}$$

（再次利用 Parsevel 定理！）。結果，在單位面積單位頻率間隔內波所携帶的能量爲

$$\mathcal{F}_\nu(\text{爾格/厘米}^2\text{赫茲})=\frac{1}{8}\omega^2|\tilde{A}_+|^2\tag{37.31}$$

［對於 $-\infty<\nu<+\infty$；對於 $0<\nu<+\infty$ 則把上式加倍，這是本章其餘部分採用的一部分約定］。這是（37.29）第二部分的 2π 倍。

然後，聯立（37.18）、（37.29）和（37.31）式，得出

$$\left(\begin{matrix}\text{留存的}\\\text{能　量}\end{matrix}\right)=\int\sigma(\nu)\mathcal{F}_\nu(\nu)d\nu。\tag{37.32}$$

(2)答案——$\left(\begin{matrix}\text{留存的}\\\text{能　量}\end{matrix}\right)=\int\sigma\mathcal{F}_\nu d\nu$

不管波的譜是什麼，也不管波是以長時間的穩定通量或是以短暫的爆發或是以任何其他方式進入的，這就是留存的總能量。這個代表式是完全普遍的，只要當波驅動時探測器是以波爲主的（$E_{\text{振動}} \gg kT$）即可。

怎樣測量留存的能量

實驗者怎樣測量留存的總能量呢？一般說來，他不能直接測量它，但是他可以測量與之相等的另一量：內部阻尼即「摩擦」消耗的總能量。當振動能量遠大於 kT 時（在波爲主的時期內），「摩擦」消耗能量的速率是 $E_{\text{振動}}/\tau_0$。因此，實驗者可以測量

$$\begin{pmatrix}\text{留存的}\\ \text{總能量}\end{pmatrix}=\frac{1}{\tau_0}\int E_{\text{振動}}dt, \quad \text{一般情況。} \\ \qquad\qquad\qquad\

樣的任何振動共振探測器。

引入「Einstein A 系數」，它描述單位數量的探測器能量由於內部阻尼和引力波再輻射而損失的速率：

用「Einstein A 系數」重新表示截面

$$A_{\text{耗散}}\equiv\left(\frac{\text{內部耗散的能量的速率}}{\text{探測器振動的能量}}\right)=\frac{1}{\tau_0}, \tag{37.36a}$$

$$A_{\text{引力波}}\equiv\left(\frac{\text{再輻射的能量的速率}}{\text{振動的能量}}\right)。 \tag{37.36b}$$

對於圖37.4所示的理想探測器，由引力波輻射的標準公式（36.1）可得出

$$(\text{再輻射的功率})=\frac{32}{15}\omega^6M^2L^2\langle\xi^2\rangle_{\text{時間平均}}。 \tag{37.37}$$

（見練習 37.8）。結果

$$A_{\text{引力波}}=\frac{16}{15}ML^2\omega^4。 \tag{37.38}$$

可以利用這些關係把探測器截面用 $A_{\text{耗散}}$，$A_{\text{引力波}}$ 和輻射的約化波長

$$\lambda\!\!\!^{-}\equiv 1/\omega \tag{37.39}$$

表示。例如，截面（37.21）——現在 $\omega\geq 0$——爲

$$\langle\sigma\rangle_{\text{所有方向}}=\frac{1}{2}\pi\lambda\!\!\!^{-2}\frac{A_{\text{引力波}}A_{\text{耗散}}}{(\omega-\omega_0)^2+(A_{\text{耗散}}/2)^2}\quad\text{對於非偏振的輻射} \tag{37.40}$$

（記住，在所有截面公式中都假設 $|\omega-\omega_0|\ll\omega_0$），相應的共振區的積分爲

$$\int\langle\sigma\rangle_{\text{所有方向}}\,d\nu=\frac{1}{2}\pi\lambda\!\!\!^{-2}_0A_{\text{引力波}}\quad\text{對於偏振的輻射。} \tag{37.41}$$

A 系數公式的普遍性

截面的這些表達式有非常廣泛的用途。它們適用於不管什麼樣的、任何振動的、共振的引力波探測器，這可以從練習 37.9 的「細緻平衡」計算和從練習 37.10 的動力學計算中看出。經過統計因子和符號的明顯改變，它們也適用於核物理學中的復核反應（「Breit-Wigner 公式」；參看 Blatt 和 Weisskopf 第 392—394, 408—410, 555—559 頁），適用於原子和分子吸收光子，適用於電視天線接收電磁波等等。實際上，（37.41）式表明：「計算了振子因發出引力輻射而衰減的速率；把此速率乘上在所有天線工作中熟悉的幾何因子 $\frac{1}{2}\pi\lambda\!\!\!^{-2}_0$，立刻得出截面的共振積分」。結果用幾何單位（厘米）表示。爲了把

共振積分用慣用的單位表示，可乘以轉換因子 $c=3\times10^{10}$ 厘米赫茲。

在上一節發展的對理想化的質量-彈簧探測器所作的「動力學分析」可以容易地擴展到任意形狀的振動探測器（地球； Weber 棒；汽車檔泥板；等等）。練習 37.10 實現了這個擴展，其主要結果總結於框 37.4 之中。

被探測器散射的輻射

進入探測器的一部分能量作爲散射的引力輻射再輻射出去了。對於任何實驗室尺度的具有實驗室阻尼系數的探測器，這部分是非常小的。但是，從原則上講，可以展望較大的系統和再輻射不能完全忽略的條件。在這種情況下要涉及散射。此處不試圖分析這種散射過程。作爲簡單的數量級處理，可以採用在核共振中計算中子散射或在光學共振中計算光子散射的，與 Breit-Wigner 散射公式同類的公式。更仔細的討論還將分析散射輻射的偏振與入射輻射的偏振之間的相互關係。此處對引力輻射及其張量特徵有用的一類公式，非常像現在用來討論具有自旋爲 1 特徵的輻射偏振的公式。此處，請特別注意。「Madison 約定」[Barschall 和 Haeberli (1971)]，這種約定是在多年來經受了各種相互衝突的符號之後，由許多科學工作者合作發展出來的。考慮到今天適用於自旋爲 1 輻射的最好符號的建立方式，人們只是感到，對於散射引力輻射的物體，正式宣告任何一組描述散射參量的符號還爲時過早。

練習

練習 37.8 再輻射的功率

圖37.4的理想引力波探測器以角頻率 ω 振動。試證明它輻射的引力波功率由 (37.37) 式給出。

練習 37.9 由細緻平衡計算截面

對於任意大小、形狀或質量的振動共振探測器（例如，振動的地球，或 Weber 的振動圓柱體，或圖37.4的理想探測器），利用細緻平衡原理導出截面 (37.41) 式。[提示：設探測器與它所浸入的黑體引力波庫處於熱平衡。那麼，它通過再輻射損失的能量必須與從波中吸收能量的速率相同。（內稟的阻尼可以不管，因爲在眞實的熱平衡中，通過內稟阻尼損失的能量將與從隨機內稟 Brown 力得到的能量相匹配。）出入能量的平衡可細緻地表爲 [其中$I_\nu=$(22.48) 式的「比强度」]

$$[4\pi I_\nu(\nu=\nu_0)]_{\text{黑體}}\times\int\langle\sigma\rangle_{\text{所有方向}}d\nu$$
$$=A_{\text{引力波}}\times(\text{在探測器簡正模式中的能量})。$$

利用熟悉的 Planck 譜的形式以及引力波具有兩個獨立偏振狀態的事實求解 [$\int\langle\sigma\rangle d\nu$。]

注意：由於細緻平衡適用於(與輻射或粒子的任何熱庫相互作用的)任何一類共振系統，因此

框 37.4　任意形狀的振動的共振探測器

A. 探測器的物理性質

1. 探測器是固體（地球， Weber 棒 ，汽車檔泥板……） ，其密度分布爲 $\rho(x)$，總質量爲 $M=\int\rho d^3x$。

2. 探測器具有簡正模式振動。n 階簡正模式由下述量表徵：

$$\omega_n=\text{角頻率；}$$
$$\tau_n=\left(\begin{matrix}\text{由於內禀阻尼造成振動能}\\\text{量衰減的 e 倍變化時間}\end{matrix}\right)\gg 1/\omega_n; \tag{1}$$
$$u_n(x)=\text{本徵函數（此處定義爲無量綱實函數）。}$$

本徵函數 u_n 是正交歸一的，因此

$$\int\rho u_n\cdot u_m d^3x=M\delta_{nm}。 \tag{2}$$

3. 在簡正模式振動期間，如果 $E_{振動}\gg kT$，則最初在 $\hat{x}$ 處的質元達到的位移爲

$$\delta x=\xi=u_n(x)\underbrace{\mathcal{B}_n}_{\text{[恒定的振幅]}}e^{-i\omega_n t-t/\tau_n}, \tag{3a}$$

在固定 x 處密度的改變爲

$$\delta\rho=-\nabla\cdot(\rho u_n)\mathcal{B}_n e^{-i\omega_n t-t/\tau_n}, \tag{3b}$$

而轉動慣量張量的振動爲

$$\delta I_{jk}=I_{(n)jk}\mathcal{B}_n e^{-i\omega_n t-t/\tau_n}。 \tag{3c}$$

此處 $I_{(n)jk}$ 是「n 階簡正模式的轉動慣量因子」：

$$I_{(n)jk}\equiv\int-(\rho u_n{}^l)_{,l}x^j x^k d^3x$$
$$=\int\rho(u_n{}^j x^k+u_n{}^k x^j)d^3x \tag{4}$$

［量綱：質量×長度，再乘以 $\mathcal{B}_n$（長度）得出 I_{jk}］。

相應的「n 階簡正模式的約化四極因子」爲

$$\mathcal{I}_{(n)jk}\equiv I_{(n)jk}-\frac{1}{3}I_{(n)ll}\delta_{jk}。 \tag{5}$$

B. 探測器的截面（練習 37.10）

1.對於傳播方向爲 $\boldsymbol{n}$，偏振張量爲 $\mathbf{e}$ 的偏振輻射：

$$h_{jk}=A(t-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})e_{jk},$$

$$e_{jk}n_k=0,\quad e_{jj}=0,\quad e_{jk}e_{jk}=2; \tag{6}$$

$$\sigma_n(\nu)=\sigma_n(\omega/2\pi)=\frac{\pi}{4}\frac{|\mathcal{I}_{(n)jk}e_{jk}|^2}{M}\frac{\omega_n^2/\tau_n}{(|\omega|-\omega_n)^2+(1/2\tau_n)^2}, \tag{7a}$$

$$\int_{\text{共振}}\sigma_n\,d\nu=\frac{\pi}{4}\frac{|\mathcal{I}_{(n)jk}e_{jk}|^2}{M}\omega_n^2\circ \tag{7b}$$

2.對於傳播方向爲 $\boldsymbol{n}$ 的非偏振輻射（偏振的隨機混合），截面爲

$$\sigma_n(\nu)=\sigma_n(\omega/2\pi)=\frac{\pi}{4}\frac{(\mathcal{I}^{TT}_{(n)jk})^2}{M}\frac{\omega_n^2/\tau_n}{(|\omega|-\omega_n)^2+(1/2\tau_n)^2}, \tag{8a}$$

$$\int_{\text{共振}}\sigma_n\,d\nu=\frac{\pi}{4}\frac{(\mathcal{I}^{TT}_{(n)jk})^2}{M}\omega_n^2\circ \tag{8b}$$

式中 $\mathcal{I}^{TT}_{(n)jk}$ 是 $\mathcal{I}_{(n)jk}$ 的橫向無迹部分（相對於傳播方向 $\boldsymbol{n}$ 爲橫向的和無迹的）：

$$\mathcal{I}^{TT}_{(n)}=P\mathcal{I}_{(n)}P-\frac{1}{2}P\text{迹}(P\mathcal{I}_{(n)}),\qquad P_{jk}\equiv\delta_{jk}-n_jn_k\circ \tag{9}$$

（參看框 35.1）

3.對所有方向作過平均的非偏振幅射的截面，爲

$$\langle\sigma_n(\nu)\rangle_{\text{所有方向}}=\frac{1}{2}\pi\lambda^2\frac{A_{\text{引力波}}A_{\text{耗散}}}{(|\omega|-\omega_n)^2+(A_{\text{耗散}}/2)^2}, \tag{10a}$$

$$\int_{\text{共振}}\langle\sigma_n\rangle_{\text{所有方向}}\,d\nu=\frac{1}{2}\pi\lambda^2A_{\text{引力波}}, \tag{10b}$$

式中 Einstein A 系數爲

$$A_{\text{耗散}}=1/\tau_n, \tag{11}$$

$$A_{\text{引力波}}=\frac{1}{5}\frac{(\mathcal{I}_{(n)jk})^2}{M}\omega_n^4\circ \tag{12}$$

C. 非周期性源的輻射譜（練習 37.11）

把這些公式與非周期性源發射的輻射的表達式作比較是有益的。

1. 源的約化四極因子的 Fourier 分析

$$\mathcal{I}_{jk}(t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{I}_{jk}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\,。$$

2. 那麼，在全部時間內，射入在繞 $\boldsymbol{n}$ 方向的單位立體角內，輻射的偏振張量爲 $\mathbf{e}$ 的單位頻率間隔的（$\nu\geq 0$）總能量爲

$$\frac{dE}{d\nu d\Omega}=\frac{1}{8}\sum_{\omega=\pm 2\pi\nu}|\mathcal{I}_{jk}e_{jk}|^2\omega^6 \tag{13a}$$

［與(7)式比較］。對偏振求和，得

$$\frac{dE}{d\nu d\Omega}=\frac{1}{2}\sum_{j,k}|\mathcal{I}_{jk}{}^{TT}|^2\omega^6 \tag{13b}$$

［與(8)式比較］。此處 $\nu\geq 0$。

3. 對所有方向積分後，在單位頻率間隔內輻射的總能量（仍爲 $\nu\geq 0$）爲

$$dE/d\nu=\frac{4\pi}{5}\sum_{j,k}|\mathcal{I}_{jk}|^2\omega^6 \tag{14}$$

［與(10)式—(12)式比較］。

適當改變統計因子，(37.40) 式和 (37.41) 式有着廣泛的普遍性。

練習 37.10　振動的共振探測器的簡正模式分析

試導出框 37.4 引用的有關振動的共振探測器的全部結果。可仿照 §37.6 對理想探測器的處理作推導。［指導路線：(a) 設探測器被框 37.4 (6)式的偏振波驅動；並設它是波爲主的（$E_{振動}\gg kT$）。試證明其質元的位移 $\delta\boldsymbol{x}=\xi(\boldsymbol{x},t)$ 可由下式描述

$$\xi=\sum_n B_n(t)\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x})\,, \tag{37.42a}$$

式中 n 階模式的與時間有關的振幅滿足被驅動振子方程

$$\ddot{B}_n+\dot{B}_n/\tau_n+\omega_n^2B_n=R_n(t)\,, \tag{37.42b}$$

式中曲率產生的驅動項爲

$$\begin{aligned}R_n(t)&=-R_{j0l0}\int(\rho/M)u_n{}^jx^ld^3x\\&=\frac{1}{4}\ddot{A}(I_{(n)jk}e_{jk})/M\,。\end{aligned} \tag{37.42c}$$

（所用符號請參看框 37.4。）

(b) 探測器和波振幅的 Fourier 分析，

$$B_n(t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{B}_n(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\,, \tag{37.42d}$$

$$A(t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{A}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\,, \tag{37.42e}$$

求解運動方程 (37.42b,c)，得出在共振的鄰域內

$$\tilde{B}_n=\frac{\frac{1}{8}\omega_n\tilde{A}(I_{(n)jk}e_{jk})/M}{|\omega|-\omega_n+\frac{1}{2}i/\tau_n}\qquad\text{對於 }|\omega\pm\omega_n|<\omega_n\,。 \tag{37.42f}$$

(c) 通過積分計算在探測器中留存的總能量，

$$\begin{pmatrix}\text{留存的}\\\text{能量}\end{pmatrix}=\int(\text{單位體積的力})\cdot(\text{速度})\;d^3xdt\,。$$

由此得出

$$\begin{pmatrix}\text{在 }n\text{ 階簡正模式}\\\text{中留存的能量}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\,(I_{(n)jk}e_{jk})\int\ddot{A}\dot{B}_ndt\,。$$

(d) 應用 Parseval 定理並與表達式 (37.42f) 聯立得出

$$\begin{pmatrix}\text{在 }n\text{ 階簡正模式}\\\text{中留存的能量}\end{pmatrix}=\int\sigma_n(\nu)\mathcal{F}_\nu(\nu)d\nu\,, \tag{37.43}$$

式中 σ_n 由框 37.4 的 (7a) 式給出，並且 (對於 $-\infty<\omega<+\infty$)

$$\mathcal{F}_\nu(\nu)=\mathcal{F}_\nu(\omega/2\pi)=\frac{1}{8}\omega^2|\tilde{A}|^2\,。 \tag{37.44}$$

(e) 試證明 $\mathcal{F}_\nu(\nu)$ 是經過探測器的波所攜帶的單位面積單位頻率的總能量。

(f) 通過對此截面的適當操作，得出框 37.4 中引述的所有其他截面。可利用在框 35.1 和練習 36.9 中發展的數學工具作投影和「橫向無迹部分」的積分。]

練習 37.11 源輻射的能譜

試導出框 37.4 最後一節所引述的結果。

練習 37.12　發射和吸收的圖案

圖 37.4 所示的初等的啞鈴狀振蕩器，起初未激發，它具有的吸收非偏振引力輻射的截面正比於 $\sin^4\theta$，激發時輻射的強度也正比於 $\sin^4\theta$（第36章）。發射和吸收的圖案等同。任何其他的啞鈴狀振蕩器，除了可能有不同的指向外，都給出同樣的圖案。考慮一般形狀的非旋轉振蕩器在單一非簡併（因此是非旋轉的）模式中自由振動，或者被非偏振的輻射從外部激發。

(a) 試證明它的發射圖案與它的吸收圖案等同。［提示：作框 37.4 最後幾部分所建議的比較］。

(b) 試證明，此發射圖案（≡吸收圖案），除了描述圖案空間指向的三個 Euler 角，除了確定總强度的第四個參數外，由單一（「第五個」）參數唯一地確定。

(c) 對於這個參數的兩個極值以及在這兩個極值之間自然選定的參數，試繪出强度的圖案。

(d) 用約化四極張量的各主要矩的某種無量綱組合，定義所討論的參數。

練習 37.13　多模式探測器

考慮長度遠大於直徑的圓柱形棒。把棒首尾銜接振動的基諧模式指定爲「$n=1$」，並把其本徵函數中有 $n-1$ 個波節的模式稱爲「n 階模式」。試證明：攔截 n 階共振非偏振引力波的截面對共振區積分並對一切方向平均後，由下式給出［Ruffini 和 Wheeler (1971b)］

$$\int_{\substack{n\text{階共振；}\\ \text{無規}}} \sigma(\nu)\,d\nu = \frac{32}{15\pi}\frac{v^2}{c^2}\frac{M}{n^2} \quad \text{對於}n\text{爲奇數（}n\text{爲偶數得零），} \tag{37.45}$$

式中 v 是在棒內的聲速，用與光速 c 相同的單位表示，M 是棒的質量（幾何單位；當採用慣用的單位時應在右側乘以因子 $G/c=2.22\times10^{-18}$ 厘米²赫茲/克）。試證明，對於 Weber 棒的最低模式此表達式給出 $\int\sigma d\nu=1.0\times10^{-21}$ 厘米²赫茲。多模式探測器現在（1973年）正由 William Fairbank 和 William Hamilton 以及 David Douglass 和 John A. Tyson 建造之中。

練習 37.14　理想地球模型吸收引力輻射的截面

地球的四極振動的觀測周期是54分鐘［評述和文獻目錄，參看，例如，Bolt (1964)或 Press (1965)］。充分考慮到地球的彈性和密度變化，分析振動模式是一個相當困難的工作。因此，作爲地球吸收四極輻射的截面的初步估計，把地球當作密度均勻的流體球，在引力的單獨作用下保持爲球形（剛性爲零）。設表面從 $r=a$ 位移到

$$r=a+a\alpha P_2(\cos\theta), \tag{37.46a}$$

式中 θ 是從北極測量的極角，α 是主軸的相對延伸，與此形狀變化一致的最低能量運動可用速度場描述

$$\xi^x=-\frac{1}{2}\alpha x, \quad \xi^y=-\frac{1}{2}\alpha y, \quad \xi^z=\alpha z \tag{37.46b}$$

（散度和旋度均爲零）。

(a) 試證明動能和引力勢能之和爲

$$E=-(3/5)(M^2/a)(1-\alpha^2/5)+(3/20)Ma^2\dot{\alpha}^2。 \tag{37.46c}$$

(b) 試證明自由四極振動的角頻率爲

$$\omega=(16\pi/15)^{1/2}\rho^{1/2}。 \tag{37.46d}$$

(c) 試證明約化四極矩爲

$$I_{xx}=I_{yy}=-Ma^2\alpha/5,\quad I_{zz}=2Ma^2\alpha/5。 \tag{37.46e}$$

(d) 試證明對全周期平均的振動能量輻射率爲

$$-\langle dE/dt\rangle=(3/125)M^2a^4\omega^6\alpha_{峰}^2。 \tag{37.46f}$$

(e) 試證明由於引力波阻尼或「引力輻射譜線加寬」造成的能量指數衰減率爲

$$A_{引力波}=(4/25)Ma^2\omega^4。 \tag{37.46g}$$

(f) 試證明對於從隨機的方向以隨機的偏振入射的輻射，吸收截面的共振積分爲

$$\int_{共振}\langle\sigma(\nu)\rangle d\nu=(\pi/2)\lambda^2A_{引力波}=(2\pi/25)Ma^2/\lambda^2。 \tag{37.46h}$$

(g) 試評價此共振積分。注意：均勻密度流體球模型意味着地球的平均密度爲5.517克/厘米^3，四極振動周期爲94分鐘，而觀測周期只有54分鐘；轉動慣量爲 $(2/5)Ma^2$，而觀測爲 $0.33Ma^2$。Ruffini 和 Wheeler (1971b) 估計了這兩個效應的修正因子，並給出修正後的共振積分爲～5厘米^{2}赫茲。

§ 37.8 噪聲探測器

當入射波帶寬比探測器共振寬度大時，波在探測器中留存的總能量爲

$$\underset{[爾格]}{(留存的總能量)}=\int\sigma\mathcal{F}_\nu d\nu=\underset{[爾格厘米^{-2}赫茲^{-1}]}{\mathcal{F}_\nu(\nu=\nu_0)}\int\underset{[厘米^2赫茲]}{\sigma}d\nu。$$

至少，當探測器是波爲主時此式成立（即當波作用時$E_{振動}\gg kT$；即由 Brown 力產生的振動的初始振幅非常小，不能對由波產生的振動振幅進行建設性的或破壞性的干預）。

從大噪聲中提取小信號——一般評論

不幸的是，今天（1973年）所有的實驗都面臨噪聲探測器。誰也沒有發現足夠强的波，誰也沒能建造出足夠靈敏的以波爲主的探測器。結果，今天關鍵的實驗任務就是在大的噪聲中選出小的信號。爲了作到這一點，已經發展了很多技術，並且已應用於物理學的許多領域，以及天文學，心理學和工程等領域

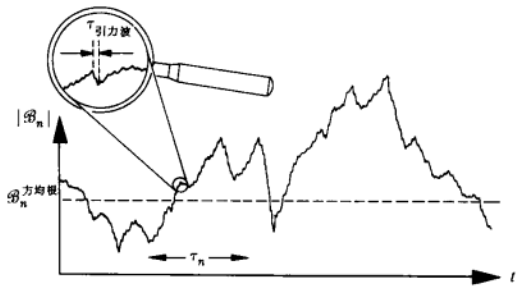


圖 37.5

用噪聲探測器探測錘擊引力波。當脈衝的時間足够短時，即使弱的脈衝也有可能探測到。在時間間隔 Δt 內由於熱漲落（無規行走，Brown 噪聲力）產生的探測器振動振幅 $\mathfrak{B}_n$ 的變化爲 $\sim \mathfrak{B}_n^{\text{方均根}}(\Delta t/\tau_n)^{1/2}$。插圖描繪持續時間爲 $\tau_{\text{引力波}}$ 的，到達時與探測器熱運動異相的爆發波所產生的振幅變化（波提取能量！）。波是可以探測的，因爲雖然 $\Delta|\mathfrak{B}_n| < \mathfrak{B}_n^{\text{方均根}}$，仍有

$$\Delta|\mathfrak{B}_n|_{\text{由波產生}} > \mathfrak{B}_n^{\text{方均根}}(\tau_{\text{引力波}}/\tau_n)^{1/2}。$$

［參看，例如，Davenport 和 Root (1958), Blackman 和 Tukey (1959)，以及其中給出的文獻］。關鍵總是找出信號的某種特徵，這種特徵在統計上比噪聲的同一特徵更突出，加上某種相關的關係表明此特徵來自預期的信號源而不來自別處（「防止系統誤差」）。這樣，爲了探測來自脈衝星的穩定引力波，可以試圖非常準確地定義兩個數目 $\langle N^2\rangle$ 和 $\langle(N+S)^2\rangle = \langle N^2\rangle + \langle S^2\rangle$，其中 N 和 S 分別爲噪聲振幅和信號振幅。長期的系列觀測（脈衝星在天線束之外時）給出 $\langle N^2\rangle$ 的一個值。另一同樣長期的系列觀測與第一系列觀測交叉進行，在零級近似下預期給出 $\langle N^2\rangle$ 的同一數值。在高一級近似下就可以識別和計算正常統計漲落的影響。舉例說明，由同樣資料推出的其他參數的統計檢驗證實的理論，確保漲落小於 $10^{-5}\langle N^2\rangle$ 有95%的置信度；（漲落超過 $10^{-5}\langle N^2\rangle$ 的機會只有 5 %；這一限制是由時間和資金決定的，而不是物理學家給出的絕對限制）。設第二系列觀測只在脈衝星處於天線束中間時進行。設它給出

$$\{\langle N^2\rangle + \langle S^2\rangle\}_{\text{第二系列}} = (1+7.3\times10^{-5})\{\langle N^2\rangle\}_{\text{第一系列}}。$$

那麼，在一級近似下，可以認爲 $\langle S^2\rangle$ 以95%置信度處於 $(7.3\pm1.0)\times10^{-5}\langle N^2\rangle$ 的限制之內。

探測器振幅的變化率作爲從熱噪聲中提取爆發信號的手段

許多可以設想的引力輻射源產生的信號强度不是穩定的，而是爆發的（圖 37.5）。從而引導人們回答「錘擊輻射」（$\tau_{\text{引力波}} \ll \tau_0$）與噪聲不同的特徵是什麼。探測器中「Brown 運動」的噪聲可以認爲是與熱庫所作的大量小的（

分子的）能量交換引起的。下面的計算估計了由於一系列這種分子的「擊打」，在探測器中產生的典型振幅變化率，並把它與「錘擊」輻射脈衝產生的快速振幅變化比較。計算表明熱導致的突然變化，即使振幅極小，也是非常稀少的。因而突然變化是集中觀測的適當特徵。然而，脈衝的實際探測需要更廣泛的分析，它超出了下面所作的估計的範圍。這種分析要計算在特定的時間內，稀少事件（振幅的突然變化）偶然出現（即由於熱漲落）的概率，以及這種事件在兩個或多個探測器同時出現的更小概率，以及與假定的源的相互關係。

考慮框 37.4 中描述的這類實際探測器。但在它不是輻射爲主時考察它。那麼，它的運動是由內部 Brown 力（熱漲落）驅動的，或許也可能被偶然爆發的引力波驅動。集中注意特殊的簡正模式（「n」階模式），並用下述矢量場描述該模式對探測器振動的貢獻

$$\delta \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}=\mathcal{B}_n(t)e^{-i\omega_n t}\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x})。\tag{37.47}$$

共振探測器中熱噪聲的描述

因爲 $\boldsymbol{u}_n$ 是平均值爲 1 的無量綱量（$\int \rho \boldsymbol{u}_n^2 d^3x=M$），複數 $\mathcal{B}_n(t)$ 是探測器質元運動振幅的以質量爲權重的平均值。在 Brown 力驅動下這個振幅隨時間緩慢的變化（變化率$\ll\omega_n$）；但是對時間平均後它的大小相應於振動的能量kT：

$$\langle E_{\text{振動}}\rangle=2\left\langle\frac{1}{2}\int\rho\dot{\xi}^2\,d^3x\right\rangle=\frac{1}{2}M\omega_n^2\langle|\mathcal{B}_n|^2\rangle kT;\tag{37.48}$$

即

$$\mathcal{B}_n^{\text{方均根}}\equiv\langle|\mathcal{B}_n|^2\rangle^{1/2}=(2kT/M\omega_n^2)^{1/2}。\tag{37.49}$$

例子：對於 Weber 探測器（$M\sim10^3$ 千克，$\omega_0\sim10^4$/秒），室溫下的基諧模式有

$$\mathcal{B}_0^{\text{方均根}}=\left(\frac{2\times1.38\times10^{-16}\times300\ \text{爾格}}{10^6\text{克}\times10^8\text{秒}^{-2}}\right)^{1/2}=3\times10^{-14}\ \text{厘米}。\tag{37.50}$$

探測弱錘擊輻射的希望不在於考察探測器的振動振幅（或能量），而在於考察它的變化率（圖37.5）。當探測器是噪聲探測器時，大振幅 Brown 漲落（$|\Delta\mathcal{B}_n|\sim\mathcal{B}_n^{\text{方均根}}$）的時標，與當探測器被驅動到 $E_{\text{振動}}\geqslant kT$ 時內力阻尼探測器的時標 τ_n 相同。因而，振幅 $\mathcal{B}_n$ 在 Brown 力的影響下作「無規行走」，而「大步行走」（$|\Delta\mathcal{B}_n|\sim\mathcal{B}_n^{\text{方均根}}$）的平均時間是$\Delta t\approx\tau$。在較短的時間 Δt 內，$\mathcal{B}_n$ 的變化要小「$1/\sqrt{N}$因子」，這個因子總要進入無規行走過程：

$$\sqrt{N}=\left(\frac{\text{在時間 } \tau_n \text{ 內振動周期數}}{\text{在時間 } \Delta t \text{ 內振動周期數}}\right)^{1/2}=\left(\frac{\tau_n}{\Delta t}\right)^{1/2}; \qquad (37.51)$$

$$\langle \Delta\mathcal{B}_n^{(\text{熱})} \,|\rangle \approx \mathcal{B}_0\text{方均根}\left(\frac{\Delta t}{\tau_n}\right)^{1/2}=\left(\frac{2kT}{M\omega_n^2}\right)^{1/2}\left(\frac{\Delta t}{\tau_n}\right)^{1/2} \text{ 在時間 } \Delta t \text{ 內。} \qquad (37.52)^*$$

波的爆發對於噪聲共振探測器的效應

現在，假定「錘擊」輻射（爆發時間 $\Delta t=\tau_{\text{引力波}}\ll\tau_n$）擊打探測器，在探測器的振幅中產生 $\Delta\mathcal{B}_n^{(\text{引力波})}$ 的變化。由於振幅的這種改變發生得很快，故(1)它線性地疊加在同一時間間隔內由 Brown 運動力產生的任何振幅改變之上；和(2)因此，在數值上與 Brown 運動力存在與否無關，即與所有的熱騷動無關。因此，$\Delta\mathcal{B}_n^{(\text{引力波})}$（此量包括振幅和位相兩者！）與探測器處於零溫度時它的值相同：

$$\underbrace{\frac{1}{2}M\omega_n^2|\Delta\mathcal{B}_n^{(\text{引力波})}|^2}_{\text{探測器在零溫度時留存的能量}}=\overbrace{\int\sigma_n(\nu)\mathcal{F}_\nu(\nu)d\nu=\mathcal{F}_\nu(\omega_n/2\pi)\int\sigma_n(\nu)d\nu}^{\text{對於錘擊輻射，輻射帶寬永遠}\gg\text{探測器帶寬；參看框 37.4}};$$

即

$$|\Delta\mathcal{B}_n^{(\text{引力波})}|=\left(\frac{2\mathcal{F}_\nu(\omega_n/2\pi)\int\sigma_n d\nu}{M\omega_n^2}\right)^{1/2}。 \qquad (37.53)$$

這個波所導致的振幅改變，僅當它比同樣時間間隔 $\tau_{\text{引力波}}$ 內預期的熱改變（37.52）顯著地大時，才能與熱改變區分開來：

$$\left.\begin{array}{l}|\Delta\mathcal{B}_n^{(\text{引力波})}|\gg\langle|\,\Delta\mathcal{B}_n^{(\text{熱})}|\rangle \text{在時間 } \tau_{\text{引力波}} \text{內}\\ \text{等價於：}\ F_\nu(\omega_n/2\pi)\gg\left(\dfrac{kT}{\int\sigma_n d\nu}\right)\left(\dfrac{\tau_{\text{引力波}}}{\tau_n}\right)\end{array}\right\}\ \text{可探測的判據} \qquad (37.54)$$

爆發可探測的判據

當然，如果觀測設備只能測出探測器振幅或能量的大小，而不能測量它的位相，那麼這些可探測判據是並不充分的。波導致的振幅平方的改變（正比於能量的改變）取決於初始振幅和振幅變化的相對位相

---

* 這個公式的更完全的推導和討論，參看，例如，Braginsky (1970)。那裏涉及的兩個要點是：(1)公式的統計形式，它描繪了在時間 Δt 內振幅從給定的初值變化給定數量的概率；和(2)量子力學的修正，它在 $\tau_n\longrightarrow\infty$ 的極限下起作用，但是，它對於 70 年代初期的探測器並不重要。

$$\Delta|\mathcal{B}_n|^2=|\mathcal{B}_n^{(\text{初始})}+\Delta\mathcal{B}_n^{(\text{引力波})}|^2-|\mathcal{B}_n^{(\text{初始})}|^2$$
$$\approx 2|\mathcal{B}_n^{(\text{初始})}||\Delta\mathcal{B}_n^{(\text{引力波})}| \quad \text{如果同位相}$$
$$\approx 0 \quad \text{如果位相差爲}\pm\pi/2 \qquad (37.55)$$
$$\approx -2|\mathcal{B}_n^{(\text{初始})}||\Delta\mathcal{B}_n^{(\text{引力波})}| \quad \text{如果位相差爲}\ \pi。$$

改進探測器靈敏度的途徑

因而，只有當爆發到達時，與探測器的初始運動同位相或反位相時，它是可測量的。然而，對於這種爆發，(37.54) 的判據是充分的。

(37.54) 式清楚表明，有三種途徑改進振動探測器對蛭擊輻射的靈敏度：(1)增大探測器的積分截面［要作到這一點只有增大探測器再輻射引力波的速率 $A_{\text{引力波}}$；參看框 37.4 的 (10b) 式和 (11b) 式］；(2)冷却探測器；(3)增大探測器的阻尼時間。

框 37.5 把上述可探測判據用於看來在70年代可能實現的某些探測器，以及理論預言的某些波爆發。這種比較得出的結論給人們以希望。

爲了完全，不僅應把上述討論用於分析探測器中的噪聲，還應分析用來測量探測器位移振幅的傳感器中的噪聲。然而位移傳感器的理論超出了本書的範圍。對於它的簡要討論和參考文獻，可參看 Press 和 Thorne (1972)。

§ 37.9 非機械探測器

非機械探測器

當引力波流過物質時，它們將激發物質使之運動。這種激發是迄今所描述的全部探測器的基礎。但是引力波不僅與物質相互作用；還與電磁場相互作用；這種相互作用也可在探測器中得到利用。將來可能建造的最有希望的探測器之一是 Braginsky 和 Menskii (1971) 設計的，它依靠引力波和電磁波之間的共振相互作用。在框 37.6 中描述了這種探測器。

§ 37.10 展望未來

引力波天文學的未來

在撰寫本書時，還不清楚 Joseph Weber 的實驗結果是否眞正探測到了引力波。（參看 §37.4，第四部分。）但無論是與否，引力波天文學開始了，並且看來有光輝的未來。1973年的技術看來足以建成一些探測器，它們將記錄銀河系內任何地方恒星坍縮形成黑洞發出的波（框37.5）；而70年代後期和80年代初期的探測器將記錄脈衝星和其他星系中超新星爆發發出的波。建造這些探測器需要克服的技術困難是十分巨大的。但物理學家是有創造才能的；在 Joseph Weber 先驅性工作的推動之下，在對科學開拓工作有眞誠興趣的廣大公衆的支持下，所有這些障礙是一定會克服的。

框 37.5　來自天體物理源的錘擊波的可探測性：兩個例子

（下述計算只精確到一個數量級左右）

A. 十個太陽質量的恒星坍縮形成黑洞時發出的波；具有1975年(?)傳感器的1972年探測器

1. 預期的輻射特徵：

（在地球處的强度）$=\mathcal{F}_\nu \sim \dfrac{M_\odot}{4\pi(\text{距離})^2\nu}$

$\sim(2\times10^5$ 爾格／厘米^{2}赫茲$)$ [(到銀心的距離)／(距離)]^2，

（波的頻率）$=\nu\sim10^3$ 赫茲，

（波的帶寬）$=\Delta\nu\sim10^3$ 赫茲，

（爆發持續時間）$=\tau_{\text{引力波}}\sim10^{-3}$秒到$10^{-1}$秒。

2. 探測器性質：以其基諧模式振動的 Weber 棒，它的

$M=10^6$ 克，　$\int\sigma d\nu=10^{-21}$ 厘米^{2}赫茲（練習37.13），

$\nu_0=\omega_0/2\pi=1{,}660$ 赫茲，　$T=3$ 開（液氦溫度），

$\tau_0=20$ 秒，

$$\mathcal{B}_0^{\text{方均根}}=\left(\frac{2\times1.37\times10^{-16}\times3\text{爾格}}{10^6\text{克}\times10^8\text{秒}^{-2}}\right)^{1/2}=3\times10^{-15}\text{ 厘米，}$$

$$|\Delta\mathcal{B}_0^{(\text{熱})}|=(3\times10^{-15}\text{ 厘米})(10^{-3}/20)^{1/2}=2\times10^{-17}\text{ 厘米，}$$

在 $\Delta t=10^{-3}$ 秒期間，

$|\Delta\mathcal{B}_0^{(\text{熱})}|=2\times10^{-16}$ 厘米，在 $\Delta t=0.1$ 秒期間。

3. 波的效應 [(37.53) 式]：

$$|\Delta\mathcal{B}_0^{(\text{引力波})}|=\left(\frac{2\times2\times10^5\times10^{-21}\text{ 爾格}}{10^6\times10^8\text{秒}^{-2}}\right)^{1/2}\left(\frac{\text{到銀心的距離}}{\text{距離}}\right)$$

$$=2\times10^{-15}\text{ 厘米}\left(\frac{\text{到銀心的距離}}{\text{距離}}\right)。$$

4. 結論：如果能夠製造一「傳感器」，測出在時標 <0.1 秒內，振動振幅 $\lesssim10^{-15}$ 厘米的變化，那麼在銀河系內任何地方的大質量恒星坍縮形成黑洞時發出的引力波就不難被探測到。就 1972 年的技術而言，看來是可行的；見 Press 和 Thorne (1972)。

B. 室女星系團中超新星爆發產生的波；在70年代後期或80年代初期可能建造的探測器

1. 預期的輻射性質：

$$\text{（在地球處的強度）}=\mathcal{F}_\nu\sim\frac{0.03M_\odot}{4\pi(11\text{兆秒差距})^2\nu}$$

$$\sim 4\times10^{-3}\ \text{爾格／厘米}^2\text{赫茲，}$$

$$\text{（波的頻率）}=\nu\sim10^3\ \text{赫茲，}$$

$$\text{（波的帶寬）}\sim\nu\sim10^3\ \text{赫茲，}$$

$$\text{（爆發持續時間）}=\tau_{\text{引力波}}\sim0.3\ \text{秒，}\quad\text{或 }\tau_{\text{引力波}}\sim2\times10^{-3}\ \text{秒。}*$$

2. 探測器：Weber 類型的棒，但不是用金屬作，而是用 1,000 公斤石英單晶體製作，並且冷却到 3×10^{-3} 開的溫度。（對於這種單晶體，可以認爲阻尼時間隨溫度成反比的增大，$\tau_0\propto 1/T$。）估計這種探測器的性質爲：

$$M\sim10^6\ \text{克，}\quad\int\sigma d\nu=10^{-21}\ \text{厘米}^2\text{赫茲（與 Weber 棒相同），}$$

$$\nu_0=\omega_0/2\pi\sim1{,}500\ \text{赫茲，}\quad T=3\times10^{-3}\ \text{開，}$$

$$\tau_0\sim10^6\ \text{秒，}$$

$$\mathcal{B}_0^{\text{方均根}}=\left(\frac{2\times1.37\times10^{-16}\times3\times10^{-3}\ \text{爾格}}{10^6\text{克}\times10^8\text{秒}^{-2}}\right)^{1/2}=1\times10^{-16}\ \text{厘米，}$$

$$|\Delta\mathcal{B}_0(\text{熱})|=(1\times10^{-16}\ \text{厘米})\left(\frac{0.3\text{ 或 }2\times10^{-3}}{10^6}\right)^{1/2}=\begin{cases}6\times10^{-20}\ \text{厘米，}\\ \text{或}\\ 5\times10^{-21}\ \text{厘米。}\end{cases}$$

3. 波的效應［(37.53) 式］：

$$|\Delta\mathcal{B}_0^{(\text{引力波})}|=\left(\frac{2\times4\times10^{-3}\times10^{-21}\ \text{爾格}}{10^6\times10^8\text{秒}^{-2}}\right)^{1/2}=3\times10^{-19}\ \text{厘米。}$$

4. 結論：如果能夠製造一個傳感器，測出在時標 $\lesssim0.1$ 秒內，振動振幅 $\lesssim10^{-19}$ 厘米的變化，並且如果能夠製造出具有上述特性的探測器，那麼，室女星系團中超新星爆發所發出的引力波是可以探測的。

---

* 對於超新星爆發產生的波的持續時間，兩個時標出現是相應於：(1)白矮星核坍縮爲中子星或中子星薄餅這一最後階段所需要的時間，$\tau\sim$(中子星尺度)／(核物質中的聲速) $\sim2\times10^{-3}$ 秒（「引力輻射的脈衝」）；和(2)振動中子星通過引力輻射（「衰減的波列」）損失能量所需時間 $\tau\sim0.3$ 秒。

框 37.6　引力波的非機械探測器

[Braginsky 和 Menskii (1971)]

概念簡述（參看右圖）

一環形波導含有環繞它傳播的單色電磁波列。引力波垂直於環平面傳播。如果電磁波環行一周的時間是引力波周期的兩倍，則引力波的一個圓偏振分量將與行進中的電磁波永遠保持同位相。結果：將發展起共振。在電磁波列的某一區域中，引力潮汐力永遠向前「推動」波（藍移！）而在另一區域潮汐力向後「拉」（紅移！）。電磁波頻率差隨時間線性增長；位相差二次地增長。

定量分析概要

1. 設波導在一地球軌道上自由下落。取定波導固有參照系（≡局域 Lorentz 參照系）軸的指向，使得(1)波導位於 $\hat{x}$, $\hat{y}$ 平面內，並且(2)引力波沿 $\hat{z}$ 方向傳播。

2. 設引力波振幅爲

$$A_+ - iA_\times = \mathscr{A} e^{-i\omega(t-z)} \qquad (1)$$

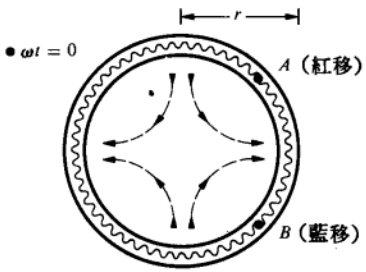
[記住：$\hat{t}=t$, $\hat{z}=z$；即固有參照系和 TT 坐標幾乎一致。] 則在波導平面內($z=0$)，

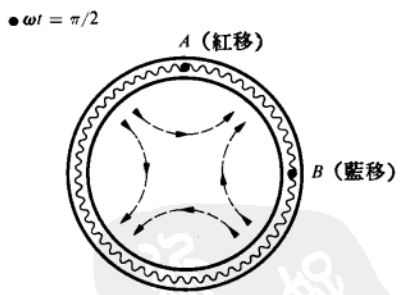
$$\begin{aligned} R_{\hat{x}0\hat{x}0} &= -R_{\hat{y}0\hat{y}0} = \frac{1}{2}\omega^2 \mathscr{A}\cos(\omega t) \\ R_{\hat{x}0\hat{y}0} &= R_{\hat{y}0\hat{x}0} = \frac{1}{2}\omega^2 \mathscr{A}\sin(\omega t) \end{aligned} \qquad (2)$$

3. 考慮電磁波的兩個相鄰部分，其一在 $\phi=\alpha+\frac{1}{2}\omega t$；另一個在 $\phi=\alpha+\delta\alpha+\frac{1}{2}\omega t$。把它們看作光子。每個光子除了波導的偏轉導引外，均

ω =（引力波的角頻率）
=（波位相隨時間的變化率）
=（「力線」圖案旋轉角速度的兩倍）

r =（環半徑），調整到使電磁波在波導中的傳播速度爲 $v=\frac{1}{2}\omega r$。





[電磁波反時針方向傳播；引力力線圖反時針方向旋轉；它們同位相。]

沿零短程線運動。這樣，其波矢量 k 滿足

$$\nabla_k k = \begin{pmatrix}\text{波導的偏轉}\\ \text{「加速度」}\end{pmatrix}; \qquad (3)$$

並且波兩個部分的波矢之間的差別 $\delta k = \nabla_n k$（通過平行移動測出的差別）滿足方程

$$\nabla_k \delta k = \nabla_k \nabla_n k = [\nabla_k, \nabla_n]k + \nabla_n \nabla_k k \qquad (4)$$
$$= \textit{Riemann}(\ldots, k, k, n) + \nabla_n \underbrace{\nabla_k k}_{\text{[波導的偏轉加速度]}}$$

波導影響了波的傳播方向，但不影響它的頻率。因而，只有 *Riemann* 進入上述方程的零分量：

$$k^i \delta k^0{}_{;i} = R^0{}_{i\beta j} k^i k^\beta n^j 。 \qquad (5)$$

4. 設 $k^0 = \omega_*$ 爲電磁波的角頻率。傳播四維矢量的空間分量 k 的方向沿着純空間矢量 n；因此

$$k^0 = \omega_*, \quad k = (v\omega_*/r\delta\alpha)n, \quad n^0 = 0 。 \qquad (6)$$

利用這些關係可把(5)式改寫爲

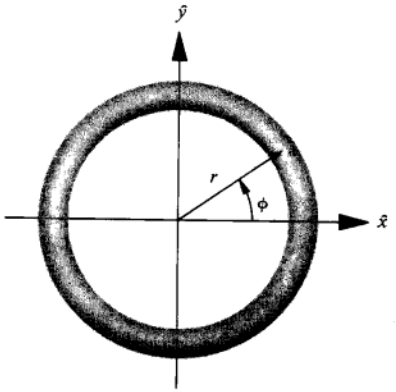
$$(d\delta\omega_*/dt)_{\text{隨光子運動}} = (v\omega_*/r\delta\alpha)R^0{}_{i0j}n^i n^j 。 \qquad (7)$$

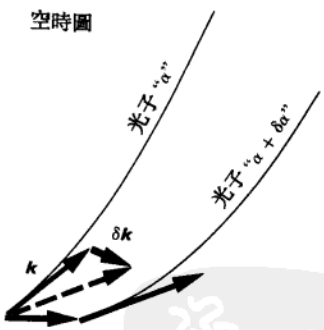
5. 把空時圖中 n 的表達式與(2)式和(7)式以及光子的世界線 $\phi = \alpha + \frac{1}{2}\omega t$ 聯立，得出

$$(d\delta\omega_*/dt)_{\text{隨光子運動}} = -\frac{1}{2}v\omega_*\omega^2 \mathcal{A} r(\cos 2\alpha)\delta\alpha 。 \qquad (8)$$

6. 對時間和 α 積分，得出

$$\omega_* = \omega_{*0}\left[1 - \frac{1}{4}\mathcal{A} v(\sin 2\alpha)(\omega r)(\omega \hat{t})\right] 。 \qquad (9)$$





n = (連接兩光子的矢量)
$= r\delta\alpha(-\sin\phi \mathbf{e}_x + \cos\phi \mathbf{e}_y)$

第九篇

廣義相對論的實驗檢驗

在本編中，讀者受到一些待字閨中的、有魅力的引力理論（以及某些不那麼有魅力的引力理論）的誘惑，可以由實驗大軍把他從愚蠢的激情中拯救出來，直到他對他的忠實伴侶幾何動力學保持忠誠，發誓今後過誠實的生活並變成幾何動力學的信徒爲止。

第三十八章　檢驗相對論的基礎

Provando e riprovando
(證明其一，反駁其餘)
Galileo

§ 38.1　在太陽系中的檢驗要比在遙遠的空間容易一些

廣義相對論，在它的生命的頭半個世紀，是理論家的伊甸樂園，但却是實驗家的地獄。沒有比它更美的理論，也沒有比它更難於檢驗的理論。

情況已經變化了。在近幾年，廣義相對論已經變成實驗物理學最激勵人心和最富有成效的分支之一。半個世紀後，技術的進展終於趕上了 Einstein 的天才——不僅在天文學的前沿，而且也在實驗室的實驗中。

廣義相對論的徹底檢驗目前限於太陽系

在天文學的前沿，觀測者探索了廣義相對論在其中起重要作用的現象，並研究了它們：宇宙學，脈衝星，類星體，引力波，黑洞。不幸的是，關於脈衝星和類星體，關於宇宙學輻射和引力波的起源，引力效應與局域的流體動力學以及局域的等離子體物理學緊密的交織在一起。幾乎沒有希望把這幾個效應足夠明顯地分開，以便徹底地檢驗引力的性質。相反，天體物理學家在他們的計算中必須把引力定律與全部其他的物理學規律以及觀測數據都放進去；然後，作爲產品，他們必須尋求有關物質和場所作所爲的信息，以得到「出路」。

於是，爲了廣義相對論的徹底檢驗，人們轉向實驗室——轉向比以往實驗室大得多的今天的實驗室；包括整個太陽系的實驗室。

在二十世紀七十年代，技術的能力

在太陽系，全部相對論效應都是微小的。然而，在二十世紀七十年代，其中某些效應可以其整個數值的千分之一或更好的精度測量出來（見框38.1）。

§ 38.2 廣義相對論分析檢驗的理論框架

現在，已經可能有許多實驗來檢驗廣義相對論。但其中絕大部分是昂貴的，極爲昂貴。它們包括在空間飛行器上飛行的原子鐘；從行星反彈回來的雷達

框 38.1 二十世紀七十年代面對相對論現象的技術

待測量的量	相對論效應的大小	在70年代初，一天測量的精度
天空上兩個源的角分離	恒星光的太陽偏轉 (1)如果光線掠過太陽邊緣，爲 1″.75 (2)如果光線垂直於地球-太陽的連線進入，爲 0″.004	(a) 用光學望遠鏡～1″ (b) 用射電望遠鏡，兩個類星體的角分離（逐日的較差測量，不是絕對測量） 在1970年，～0″.1 在70年代中期，～0″.001
太陽系中兩個物體之間的距離	(a) 每地球年的近日點移動 (1)對於水星，爲120公里 (2)對於火星，爲15公里	(a) 從地球到另一行星（水星，金星，火星）的分離，通過從它反彈回的雷達信號測出， ～0.3公里
	(b) 射電波從地球經太陽邊緣到金星（單程）的相對論時間延遲，爲 1×10^{-4}秒＝30公里	(b) 從地球到（在另一行星上或在空間飛行器上的）射電轉發器的分離，通過測量往返的射電傳播時間， ～3×10^{-8}秒＝10米 ＝0.01公里
	(c) 地球-月亮分離中的周期性相對論性效應 (1)在廣義相對論中，爲 100厘米 (2)在 Jordan-Brans-Dicke 理論中，爲 100厘米；(840厘米)/(2+ω)	(c) 地球-月亮的分離，通過激光測距， ～10厘米
太陽系中兩條世界線之間的原時間隔之差	(a) 地球上的鐘與在同步地球軌道上的鐘， $\Delta t/t\sim6\times10^{-10}$ (b) 地球上的鐘與在繞太陽軌道上的鐘， $\Delta t/t\sim10^{-8}$	氫微波激射鐘的穩定性， $\Delta t/t\sim10^{-13}$ 對於直到一年的 t

信號；在行星上登陸的，或在圍繞它們軌道上的射電指向標和轉發器；等等。由於昂貴，爲了比較各種實驗的相對值——以及爲了提出一個新的、可能曾經被忽視了的實驗，儘可能好地建立一個理論框架是至關緊要的。

分析引力實驗的理論框架

這種框架必須位於廣義相對論之外。它必須仔細審查 Einstein 理論的基礎。它必須把 Einstein 的理論與其他可行的引力理論相比較，以便看出哪些實驗能在其中顯出特色。它必須是一種「理論的理論」。

現在，1973年，廣泛採用的有兩種不同的框架。其一，大部分是 Dicke (1946b)* 設計的，對引力的性質幾乎不作假設。它在非常基礎的水準上，用於設計和討論那些檢驗空時和引力性質的實驗。其中，人們提出諸如此類的問題：是否所有的物體都以同樣的加速度響應着引力？空間的局部各向同性是它的內稟性質嗎？什麼是局域各向同性的理論實質？什麼類型的場（如果有的話）與引力相聯繫：標量場，矢量場，張量場，仿射場？儘管下面將討論處理這些問題的某些實驗，但本書並不試圖詳盡說明 Dicke 框架。

(1) Dicke 框架

廣泛採用的第二個框架是：「參量化的後牛頓（PPN）形式」。它曾經被 Eddington (1922), Robertson (1962), Schiff (1962, 1967), Nordtvedt (1968b, 1969), Will (1971c)，以及 Will 和 Nordtvedt (1972) 發展到越來越高級的複雜水準。

(2) PPN 框架

PPN 形式是廣義相對論的一種近似，也是各種其他當代引力理論（稱爲「度規理論」）的近似。每當場源的引力作用弱（$|\Phi|/c^2 \ll 1$）且移動緩慢（$v^2/c^2 \ll 1$）時，例如在太陽系中，它就是一個很好的近似。PPN 形式包括一組十個參量，它們的值在一種理論中與在另一種理論中不同。太陽系的實驗（近日點移動，光線偏轉的測量，等等）可以看作是試圖測量某些 PPN 參量，從而確定哪一種引力的度規理論是正確的——廣義相對論，Brans-Dicke (1961)-Jordan (1959) 理論，Bergmann (1968) 的標量-張量理論之一，Nordstrøm 的理論之一，Whitehead (1922) 理論，或某些其他理論。[對於 Nordstrøm 和 Whitehead 的評述，見 Whitrow 和 Morduch (1965)，Will (1971b)，以及 Ni (1972)。對於一種重要的非度規理論，見 Cartan (1920) 和 Trautman (1972)。]

第39章將討論引力度規理論的概念，並將建立 PPN 形式；然後，第40章將用 PPN 形式分析太陽系的分類，並討論能區別於各種引力度規理論的各式各樣的過去和將來的實驗。但首先，作爲這些課題的前奏，本章將研究一下那些檢驗廣義相對論基礎——絕大多數其他度規理論也以此爲基礎——的實驗。關於絕大多數這些實驗的更詳盡的討論，見 Dicke (1964b)。

* 對於兩種框架的說明和它們的比較，參看 Thorne 和 Will (1971)，或 Will (1972)。

§38.3 自由下落唯一性原理的檢驗：Eötvös-Dicke 實驗

初階
高階

本章餘下的內容全屬高階。無須前面的高階材料作爲它的準備，但第7章（引力的不相容性和狹義相對論）將有所裨益。本章不是後面任何一章的必要準備，但它將有助於第39章和第40章（其他理論；PPN 形式；實驗檢驗）。

檢驗自由下落唯一性的 Eötvös-Dicke 實驗

Einstein 引力理論和幾乎全部其他近代理論的一塊共同的基石是「自由下落唯一性」原理*：「自由下落的試驗物體的世界線與它的成分或結構無關」。所謂「試驗物體」是指電中性物體，小到足以使(1)用標準 Newton 理論計算的它的自引力能，與其靜止質量相比可略（$M/R \ll 1$），以及(2)它的多極矩與引力場不均勻性的耦合可以忽略。†

自由下落的唯一性允許人們認爲空時充滿着一組曲線——試驗物體的軌道，除了參量化之外，這些軌道是唯一的。沿着空時中每一個類時的或零方向，經過每一事件有一條也只有一條試驗物體的軌道通過。數學地描述這些軌道：這是任何引力理論不可避免的中心任務。

翻譯成 Newton 的語言，自由下落的唯一性表明，任何兩個試驗物體在給定的外引力場中必定以同樣的加速度下落。這個原理的實驗檢驗就是尋找一個物體與另一物體的加速度的差別。迄今，最精確的實驗是由 Baron Lorand von Eötvös（框 38.2）設計的一類實驗，它已經 Robert H. Dicke（框38.3）的 Princeton 小組重新設計並推向更高精度，並爲 Vladimir B. Braginsky 的 Moscow（莫斯科）小組所改進。（關於實驗的細節見圖1.6和框1.2。）

這些 Eötvös-Dicke 實驗都是「示零實驗」。它們使一個物體的加速度與另一物體的加速度平衡，並尋找從平衡的微小偏離。理由很簡單，示零實驗特有的精度比測量非零量之值的實驗高得多。

Eötvös, Pekar, 和 Fekete (1922) 檢驗到 5×10^{-9} 的精度，在此精度內地球給予木頭，鉑，銅，石棉，水，鎂鋁合金（90% Al, 10% Mg），硫酸銅，以及牛脂以同樣的加速度。Renner (1935) 在 7×10^{-10} 的精度內，檢驗了地球對鉑，銅，鉍，黃銅，玻璃，氟化銨，以及 30% Mg 70% Cu 的合金的加速度。Dicke 以及後來的 Braginsky，選用太陽的引力加速度而不是地球的引力加速度，因爲每12小時太陽曳引方向的不同會造成共振放大。（見圖

---

* R. H. Dicke 把這個原理稱爲「弱等效原理」。我們認爲還是避免與等效原理（第16章）混淆爲好。

† 在廣義相對論中，人們通常採用另一種試驗物體的定義，它不受自引力能的約束［放棄條件(1)，而保留(2)］。這種定義從原則上說更好一些，因爲物質的理論還沒有發展到足以決定引力能在亞核尺度是靜止質量的小部分、大部分還是全部（甚至還沒有提出一個客觀的檢驗來確定是哪種情形）。但是對於現在的目的，强制試驗物體具有 $M/R \ll 1$ 的定義更好一些，原因有二。首先，流行的與 Einstein 理論「競爭」的絕大多數引力理論，(a) 當宏觀的 Newton 的自引力能可略（$M/R \ll 1$）時，與自由下落唯一性原理相符，但 (b) 當考慮宏觀的 Newton 自引力能時，則違背該原理。詳細內容見 §40.9。其次，在Eötvös-Dicke 實驗中所採用的試驗物體的 M/R 很小，以致其宏觀的 Newton 自引力能實際上可以忽略（$M/R \sim E_{\text{引力}}/M \sim 10^{-27}$）。

1.6。) Roll, Krotkov，和 Dicke (1964) 報告，太陽對鋁和金的加速度相符到 1×10^{-11}，而 Braginsky 和 Panov (1971) 報告對鋁和鉑相符到 1×10^{-12}。

Eötvös-Dicke 實驗的理論本質

根據這些相符，人們可以推斷中子，質子，電子，虛電子-正電子對，核結合能，以及靜電能對太陽引力的響應。金有60%中子。而鋁只有50%中子。因此，即使從1964年的結果，人們也可以斷定，中子和質子在 10^{11} 分之 $[0.6-0.5=0.1]^{-1}=10^{-10}$ 內應具有相同的加速度。同樣，電子在 2×10^{-7} 內應與核子有同樣的加速；虛對（在金中比在鋁中豐富得多）在 1×10^{-4} 內；核結合能在 1×10^{-7} 內；靜電能在 3×10^{-9} 內應有同樣的加速。

這種檢驗的精度使人們確信自由下落的唯一性原理。

(接第1054頁)

框 38.2　BARON LORAND VON EÖTVÖS

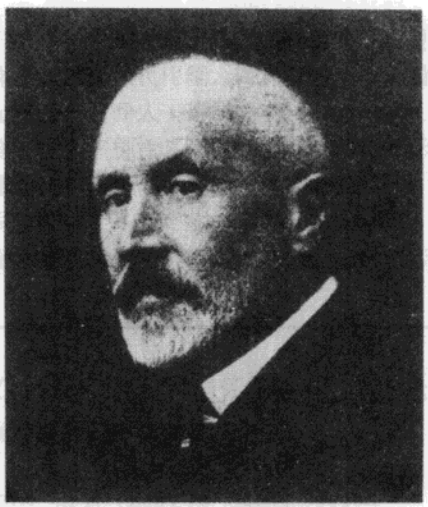
1848年7月27日，布達佩斯——1919年4月8日，布達佩斯

Eötvös (讀成 ut'vûsh) 曾和 Kirchhoff, Helmholtz, Bunsen 一起在 Heidelberg 從事研究工作，曾和 Neumann, Richelot 一起在 Königsberg 從事研究工作。1870年，他在 Heidelberg 的博士論文討論了一個相對論問題：光源相對於「以太」的運動能否通過比較運動方向的光强與反方向的光强來探測？

同時，他的研究得出了毛細現象的 Eötvös 定律，(表面張力) $\approx2.12(T_{\text{臨界}}-T)/(\text{比容})^{3/2}$。1872 年，Eötvös 成了布達佩斯的物理學教授，他從1886年起致力於引力的研究。他發展和擴充了原始的 Michell-Cavendish 扭秤，使之不僅可以測量 $\Phi_{,x}$ 和 $\Phi_{,y}$ (此處是引力勢) 還可以測量 $\Phi_{,xz}$ 和 $\Phi_{,yz}$，所達到的精度預計在幾十年內不會被超過。他指出，所謂「引力質量和慣性質量之比」，從物質到物質的變化不會多於 5×10^{-9}。他研究了磚和其他陶瓷物體的古磁性，並研究了地球的形狀。他曾擔任 (1894年6月——1895年1月) 公共教育和宗教事務部長(這是他父親在早些年代中所擁有的內閣席位)。他建立了一所培訓中學教員的學校，對於他們引起的影響，人們能夠給予諸如 von Karman, von Neuman, Teller 和 Wigner 等傑出的科學家以應有的評價。他曾擔任過一年的布達佩斯大學校長。

「我絕不會忘記這一瞬間，當時我的火車沿着 Neckar 的堤岸馳入 Heidalberg 火車站……我不會忘記我有幸現在能在這裏和那些其聲望深深吸引我的科學界人士呼吸同樣的空氣。」

[Eötvös, 1887 年，引自 Fejér 和 Mikola (1918), 259頁]



1913 年由 A. Szekely 所攝的照片

「既然根據少數實驗這是容許的，因此我們可以宣布，μ，即經過插入的補償象限儀後，地球引力的削弱小於 2×10^{-11}……整個地球沿着直徑的（引力）吸引小於約 800 分之一。」

「我們曾經作了一系列觀測，它們的精度超過所有以往的，但是我們決不會發現引力和慣性成正比規律的任何可以探測出來的偏離。」

[Eötvös, Pekár，和 Fekete (1922).]

「科學將決不會找到能夠證明它的必然特徵的公式。實際上，如果我們找到了解決奧秘的線索，那麼科學本身就會中止。」

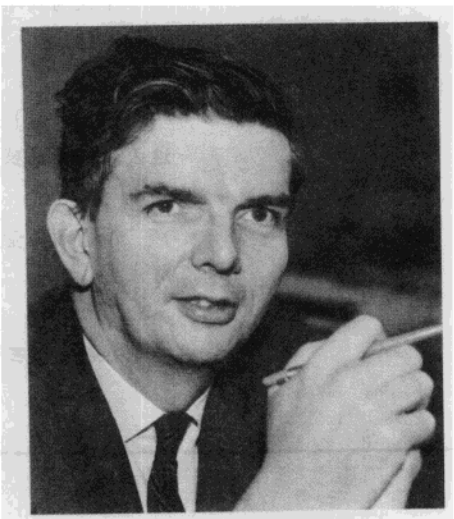
[Eötvös，匈牙利科學院的院長演說，1890年，引自 Fejér 和 Mikola (1918), 280頁]

「許許多多民衆傾聽着假預言家的言詞，這些假預言家以中世紀式的急躁，沒有任何歷史合理性地提供着代替宗教教義的科學教義，我們應該認為這是當代最令人驚訝的錯誤。

[Eötvös, 1877 年，引自 Fejér 和 Mikola (1918), 280頁]

框 38.3　ROBERT HENRY DICKE，1916年5月6日，聖路易斯，密蘇里

Princeton（普林斯頓）大學 Cyrus Fogg Brackett 物理學教授



在 1941～1946 年期間，Dicke 是把過時了的集總電路元件概念代之以基於對稱性考慮、守恒定律、倒易關係、以及散射矩陣等概念的新的微波分析的領導者，尤其是，這些概念導致鎖相放大器和微波輻射計。爲了精確的測量，要尋找一種減少譜線 Doppler 寬度的方法，Dicke 發現了置於盒中或緩衝氣體中的原子系統的無反衝輻射。這個發展導致(1)氣體池原子鐘基本概念的發現，和(2)精確得多的測量在氫的 1s 和 2s 能級中電子的迴磁比，以及原子氫的超精細結構。

1954 年 Dicke 的一篇基本論文進一步陳述了相干輻射過程以及超發光狀態的理論，並爲激光和微波激射（這些他也有貢獻）的將來發展奠定了基礎。他的專利 2,851,652 號（1956年5月21日申請）第一個透露了通過相干過程產生紅外輻射的裝置，並第一個設想把標準共振器與放大氣體聯合使用。

在1960年初，Dicke 把他的才能引向爲實驗宇宙學服務的精確測量，他和他的合作者：(1)以直到當時空前的 1×10^{-11} 的精度核查了等效原理；(2)確定了太陽的扁率；以及(3)設想原初宇宙火球的輻射，爲了有可能比以往更深入到宇宙過去的歷史，所用的手段應該是可以觀測的，因此應當去搜索和找到。

「因爲缺乏更好的術語，因相干而強烈輻射的氣體將稱之爲『超發光』的……隨着系統的輻射，它通過 r 不變的較低的 m 態——到達 $m\sim0$ 的『超發光』區域」。

(1954)

「檢驗氣體的光學『超發光』態的激發是可能的。」

(1957)

「［太陽的］5×10^{-5} 的『引力扁率』將要求放棄 Einstein 的純粹的引力幾何理論……［太陽的］變得扁平可以理解為內部快速旋轉的效應……答案顯示出，在過去，到現在，日冕及其磁場在太陽表面起着制動的作用。」

(1964a)

「太陽扁率的新測量給出了赤道半徑和極半徑的相對差值為 $(5.0\pm0.7)\times10^{-5}$」

［Dicke 和 Goldenberg (1967)］

「［宇宙］的年齡應老到足以存在除氫之外的諸元素，如所周知，要造出物理學家碳就是必須的。」

(1961)

「這類無量綱數的不變性問題不能通過定義來解決，而要通過測量來解決」

［Brans 和 Dicke (1961)］

「地球物理學的數據導致精細結構常數變化率的上限為每年3×10^{-13}」

［Dicke 和 Peebles (1962)］

§ 38.4 檢驗是否存在着支配長度和時間測量以及支配粒子運動學的度規

狹義相對論，廣義相對論以及所有其他的引力的度規理論都假設存在着一個度規場，並預言這個場通過熟知的關係式 $-d\tau^2=ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$，確定了原子鐘滴答的快慢和實驗室桿的長度。

度規存在的實驗證據

度規的實驗證據大量來自基本粒子物理學。它有兩類：第一類，直接測量時間間隔的實驗，例如，測量不穩定粒子衰變時間的時間膨脹*；第二類，揭示 Lorentz 羣在粒子運動學以及在粒子物理其他方面所扮演的基本角色的實驗†。把度規張量拋棄掉，就使人們完全沒有適於解釋這類實驗的理論框架了。

---

* 對於在存儲環中具有 $(1-v^2)^{-1/2}\sim12$ 的 μ 介子，2%精度的時間膨脹檢驗，見 Farley, Bailey, Brown, Giesch, Jöstlein, van der Meer, Picasso, 和 Tannenbaum (1966)。更早的時間膨脹實驗見 Frisch 和 Smith (1963); Durbin, Loar, 和 Havens (1952); Rossi 和 Hall (1941).

† 對於 Lorentz 不變性，自旋和統計法，TCP 理論，以及有關實驗的討論，見 Lichtenberg (1965) 的第18頁。

粒子實驗並不保證存在着總的 Lorentz 系或試驗粒子的短程線運動

注意，什麼粒子物理學實驗能或不能告訴人們有關的度規張量 g 呢。首先，它們不保證存在着總的 Lorentz 系，即伸展到全部空時的坐標系，其中 $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}$。然而，它們能暗示在每一事件 $\mathcal{P}$ 處存在着 $\mathbf{e}_\alpha(\mathcal{P})\cdot\mathbf{e}_\beta(\mathcal{P})=\eta_{\alpha\beta}$ 的正交歸一系，它們彼此通過 Lorentz 變換聯繫起來。這些正交歸一系提供了在一給定事件處任意兩個矢量內積的定義——從而它們定義了度規場。

其次，粒子實驗不保證自由下落粒子沿着度規場的短程線運動，即沿着局域 Lorentz 系中的直線運動。（此處，即在 §38.4 和 §38.5 中，短語「局域 Lorentz 系」意味着在事件 $\mathcal{P}$ 處的「簡正」坐標系，其中 $g_{\alpha\beta}(\mathcal{P})=\eta_{\alpha\beta}$ 和 $g_{\alpha\beta,\gamma}(\mathcal{P})=0$。避免術語「慣性系」，因爲還不能斷定有關試驗物體的運動。）特別是，從基本粒子的實驗人們並不知道在實驗室中的局域 Lorentz 系是否自由下落（因此它們從地球中心向上飛，然後以 Newton 加速度 $g=980$ 厘米／秒² 落回），並不知道它們是否永遠相對於實驗室的牆靜止，或者它們是否經歷着某種其他類型的運動。人們相信的全部內容是，度規確定了由原子鐘測量的空時間隔（$d\tau^2=-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$）的性質，因此，在實驗室中各種局域 Lorentz 系彼此相對以勻速運動（它們是通過 Lorentz 變換相聯繫的），並且，電場和磁場以及粒子的能量和動量經 Lorentz 變換從一個局域 Lorentz 系過渡到另一個。

粒子實驗的確表明原時與加速度無關

第三，基本粒子實驗的確表明，由原子鐘測量的時間只依賴於速度而不依賴於加速度。測出的間隔平方爲 $ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$，與加速度無關（除非加速度變得非常大以致弄亂了鐘的結構；見 §16.4 和框 16.3）。等價地，但更物理一些，由相對局域 Lorentz 系以速度 v^j 運動的鐘測出的時間間隔爲

$$d\tau=(-\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}=[1-(v^x)^2-(v^y)^2-(v^z)^2]^{1/2}dt\,, \quad (38.1)$$

與鐘的加速度 d^2x^j/dt^2 無關。如果不是這樣，那麼在强磁場中圓軌道上運動的粒子，將顯示出與自由運動粒子不同的衰變率——但它們並非如此 [Farley 等 (1966)]。*

§38.5　短程線運動的檢驗：引力紅移實驗

如 Dicke-Eötvös 實驗所檢驗的自由下落的唯一性意味着，空時充滿着一族優先的曲線——試驗物體的軌道。還有另一族優先的曲線——度規 g 的短

* Farley 等的實驗是對於能量爲 $E/m=(1-v^2)^{-1/2}\sim 12$ 以及加速度（在 μ 介子靜止系中測量）爲 $a=5\times10^{20}$ 厘米/秒²$=0.6$ 厘米$^{-1}$ 的 μ 介子，在 2 %的精度檢驗其衰變率與加速度無關。

程線。把這些短程線與試驗物體軌道視爲等同是很誘人的。 Einstein 的引力幾何理論就作了這種證認（「等效原理」）。人們可以設想拒絕這種證認的理論。就這一點而言，實驗的證據是什麼？

爲了看出哪類實驗是切合的，說明一下短程線的物理意義是有幫助的。

試驗物體軌道與度規短程線相比較的物理意義

g 的短程線最容易由下述事實局域地認出，即它在局域 Lorentz 系中是一條直線。不同的是，當且僅當物體沿 g 的短程線運動時，才能在局域 Lorentz 系測出物體的運動是非加速的。因此，爲了確定試驗物體軌道是否短程線，人們必須把局域 Lorentz 系（由原子鐘的讀數定義）的空間原點的運動與試驗物體（物質粒子）的運動，從實驗上作比較。

從實驗上研究試驗物體的運動是容易的；相對於地球上的實驗室，它們以 $g=980$ 厘米/秒^{2}向下加速；而這個加速度可以在地球上一給定位置處以 1×10^{-6} 的精度測出。

不幸的是，要測量再一次由原子鐘讀數定義的局域 Lorentz 系的運動要困難得多。今天，具有感興趣的足夠精度的唯一直接實驗手段是引力紅移實驗。（在廣義相對論框架中對引力紅移的理論討論見 §7.2—7.5 和 §25.4。）

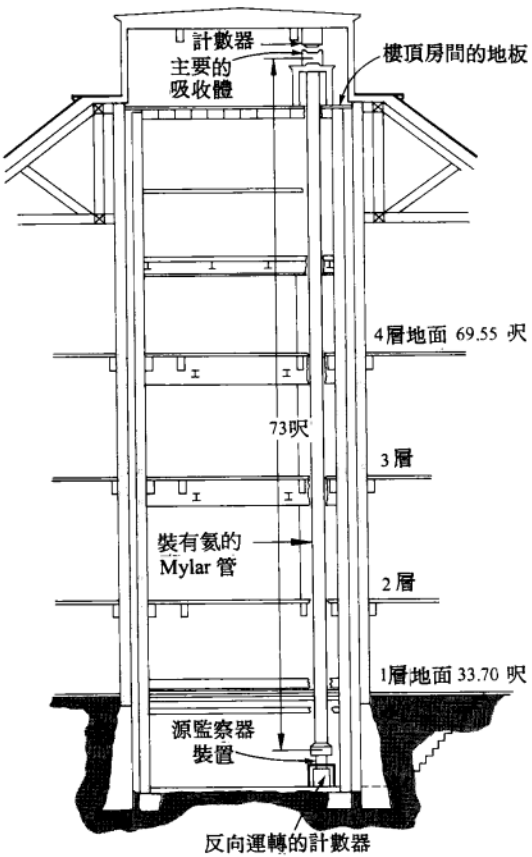
檢驗短程線運動的 Pound-Rebka-Snider 紅移實驗

最高精度的紅移實驗是由 Pound 和 Snider (1965) 改進的 Pound 和 Rebka (1960) 的實驗；見圖 38.1 。它用 Mossbauer 效應測量來自 Fe^{57} 的 14.4 千電子伏特 γ 射線的紅移。γ 射線的發射體和吸收體靜止地放置在哈佛大學一座塔的底部和頂部，高度間隔 $h=74$呎$=22.5$米。測出的紅移與廣義相對論所預期的在 1% 的精度內相符

$$\Delta\lambda/\lambda=gh=2.5\times10^{-15}。\tag{38.2}$$

這個結果告訴人們，局域 Lorentz 系並不是相對地球表面靜止的；它們以與作用在自由粒子上的同樣的加速度向下加速（在 1% 精度內）。爲了得到這個結論，人們在實驗室參照系分析了這個實驗，其中的一切（實驗裝置，地球、地球引力場）都是靜止的。相對於這個實驗室，一個瞬間靜止的局域 Lorentz 系以某個未知的加速度 a 向下加速（水平的加速度因對稱性消除了）。等價地，實驗室相對於這個局域 Lorentz 系以加速度 a 向上加速（在 $+z$ 方向）。結果，空時度規在實驗室系中具有標準的形式

$$ds^2=-(1+2az)dt^2+dx^2+dy^2+dz^2+O(|x^j|^2)dx^\alpha dx^\beta,\tag{38.3}$$



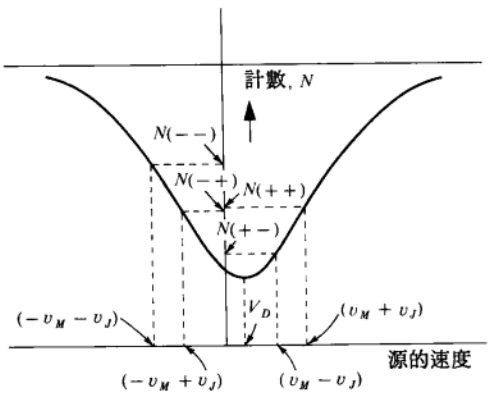


圖 38.1

Pound 和 Rebka (1959) 以及 Pound 和 Snider (1965) 關於光子引力紅移的實驗，在哈佛大學 Jefferson 物理實驗室的通風管道中，光子對着引力經過充滿氦的管道上升 22.5 米。Co^{57} 源起初的强度大於 1 居里。14.4 千電子伏特的 γ 射線必須通過濃縮的 Fe^{57} 吸收體才能到達大窗口的正比計數器。源和吸收體兩者都放在溫度調節好了的恒溫箱內。源的速度由兩部分組成，其一是穩定的（v_M）把發射線的中心置於傳播曲線接近筆直的部分上；另一在 $+v_J$ 和 $-v_J$ 之間變化，使之在這個筆直的區域內掃過傳播曲線；當穩定的速度爲 $-v_M$ 時，同樣。在 $+v_M$ 和 $-v_M$ 兩種情形之間，對稱性的偏離使人們能從穩定發射體和穩定吸收體的零引力情形確定偏移 v_D（引力紅移效應）。紅移的最後結果是等效原理所預期的 $2gh/c^2$ 值 4.905×10^{-15} 的 (0.9990 ± 0.0076) 倍（「向上」實驗與「向下」實驗之間的差別）• 圖取自 Pound 和 Snider (1965)。

它是高階讀者在 §6.6 和 §13.6 中已經遇到的，而低階讀者則在框 16.2 中遇到過並使用過的。此外，在實驗室系中，度規是靜止的，引力是靜止的，實驗裝置也是靜止的。因此，每一個向上昇的電磁波的波峰所必須遵循的世界線 $t(z)$ 在形式上等同於它前後的波峰的世界線；於是

$$\begin{aligned}&\text{波峰 } \#0: t = t_0(z),\\ &\text{波峰 } \#1: t = t_0(z) + \Delta t,\\ &\quad\vdots\\ &\text{波峰 } \#n: t = t_0(z) + n\Delta t。\end{aligned}$$

[此處，如同 Schild 的論證 (§7.3) 那樣，紅移意味着空時曲率，而關於波峰世界線 $t_0(z)$ 的形式則未作任何假設；見圖 7.1] 因此，表爲坐標時間，接收相繼波峰的間隔與發射的間隔相同。兩者都是 Δt，但假設實驗的原子鐘 (Fe^{57} 核) 測出的是原時 $\Delta\tau \equiv (-g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta)^{1/2}$，而不是坐標時間。於是

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{\text{接收}}}{\lambda_{\text{發射}}} &= \frac{\Delta\tau_{\text{接收}}}{\Delta\tau_{\text{發射}}} = \frac{(1+az_{\text{接收}})\Delta t}{(1+az_{\text{發射}})\Delta t}\\ &= 1 + a(z_{\text{接收}} - z_{\text{發射}});\end{aligned}$$

即

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = ah \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{理論預期基於下述假設}\\ \text{(i) 原子鐘測出的 } \Delta\tau = (-g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta)^{1/2};\\ \text{(ii) 電子輻射具有波列的形式;}\\ \text{(iii) 局域 Lorentz 系相對於實驗室以加速}\\ \quad\text{度 } a \text{ 向下加速。}\end{array}\right. \tag{38.4}$$

與實驗結果 (38.2) 的直接比較揭示出，*在地球上實驗室中的局域 Lorentz 系以與作用在試驗粒子上相同的加速度 g 向下加速 (在 1% 的精度內)*。

[上述討論基本上重複了 Schild 證明 (§7.2) 的形式，即紅移實驗意味着空時是彎曲的。最後，如果在華盛頓、莫斯科和北京的 Lorentz 系都向着地球中心以 $g = 980$ 厘米／秒^2 加速，那麼，空時怎麼可能是平直的呢？]

其他的紅移實驗

對於所有的紅移實驗，Pound-Rebka-Snider 實驗是最容易從理論上解釋的，因爲它是在均勻的引力場中作的。補充它的是 Brault (1962) 的實驗，它測量在太陽表面上發射而在地球上接收的鈉 D_1 線的紅移 (圖 38.2)。在 5% 的精度內，他發現了 $GM_\odot/R_\odot c^2$ 的紅移，其中 $M_\odot$ 和 $R_\odot$ 是太陽的質量和半徑。如果局域 Lorentz 系，在沿着光子軌道的每一點上，都與自由下

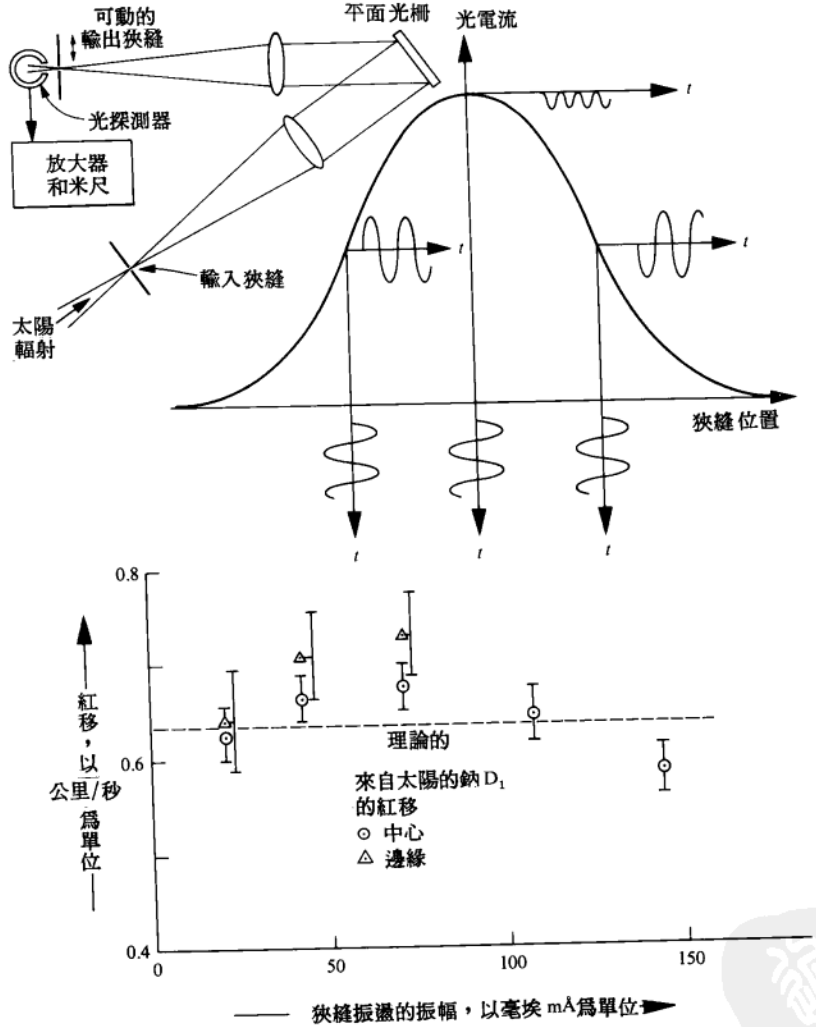


圖 38.2

Brault (1962) 測量的鈉 D_1 譜線的紅移給出了廣義相對論所預期的引力紅移的 1.05 ± 0.05。與早先研究者所採用的細譜線相比，粗譜線(1)是在太陽大氣的高處發射的，它處於因壓强和對流的移動而受到强烈擾動的區域之上，但仍低於色球層，(2)比可見光譜中任何另一條譜線更利落的超出背景之上。Brault 建立了一個新的光電分光計（上圖），它的狹縫機械地來回越過光譜的狹窄區域，以便(1)電子地，(2)與主觀判斷無關地，並且(3)以比一般目視方法所能提供的大十倍量級的精度，來確定譜線峰值的位置。把狹縫放在一條線上，它的平均位置使光電倍增管電流不包括調制頻率的信號。以這種方式測量的紅移因太陽和地球的軌道運動與旋轉所作的修正在下圖中用圓點和三角形點給出。外推到狹縫的零振蕩，給出了所引用的紅移數值。圖取自 Brault 的論文 (1962)。

落的試驗物體同步下落，那麼這正是預期的紅移。*

總之，紅移實驗揭示，到百分之幾的精度，在地球表面和太陽附近的局域 Lorentz 系相對於自由下落的試驗物體是不加速的。等價地，試驗物體在局域 Lorentz 系中沿直線運動。等價地，試驗物體的軌道是度規 g 的短程線。

§38.6 等效原理的檢驗

等效原理的檢驗

對引力起作用的全部原理，沒有比等效原理更重要的了。如同 §16.2 中所闡明的那樣，它表明：「在任一個和每一個局域 Lorentz 系中，在宇宙的任何地方和任何時間，全部（非引力的）物理學定律都必須採取它們熟悉的狹義相對論的形式」。

(1)短程線運動

試驗物體在局域 Lorentz 系中沿直線的運動（短程線運動）是等效原理的一個方面。另一方面是所有局域 Lorentz 系中 Maxwell 方程的普遍性

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=4\pi J^{\alpha} \text{ 和 } F_{\alpha\beta,\gamma}+F_{\beta\gamma,\alpha}+F_{\gamma\alpha,\beta}=0; \tag{38.5}$$

局域能量-動量守恒定律的普遍性

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0; \tag{38.6}$$

以及進入局域物理學定律之中的無量綱常數值的普遍性：

$$\alpha_{e}\equiv\frac{e^{2}}{\hbar c}=\frac{1}{137.0360\ldots}=\begin{pmatrix}\text{電磁精細}\\ \text{結構常數}\end{pmatrix};$$
$$\frac{m_{\text{中子}}}{m_{\text{質子}}}=1.00138\ldots,\ \frac{m_{\text{電子}}}{m_{\text{質子}}}=\frac{1}{1836.12\ldots},\ \text{等等。} \tag{38.7}$$

（注意，此處限於無量綱常數，因爲只有它們與任意選擇的測量單位無關。）

(2)物理學定律是局域的 Lorentz 不變式

如果人們集中注意一給定事件，並問到從一個Lorentz系到另一個Lorentz系物理定律［(38.5), (38.6) 式，等等］的形式的不變性，那麼，人們是在狹義相對論的範圍之內。這裏有許多證明等效原理的實驗（見§38.4）。

(3)定律從事件到事件是不變的

如果人們問到定律形式從一個事件到另一個事件的變化，那麼，人們就打開了一個 Pandora 的盒子［譯注，Pandora（潘朵拉）是主神宙斯命火神用粘土製成的人類第一個女性，據希臘神話，宙斯命 Pandora 帶着一個盒子下凡，Pandora 私自打開盒子，於是裏面的疾病、罪惡、瘋狂等各種禍害全跑出來散佈到世上。］其中所含的各種可能性，是人們幾乎不敢加以考慮的。然而，沒有實驗證據曾提供最輕微的理由，說明在起作用的物理學定律中要考慮任何這類「違反民主」的情形。

* 對於其他較不精確紅移實驗的評述，可參看 Bertotti, Brill, 和 Krotkov (1962)。

此外，天文觀測提供的強烈證據表明，物理學定律在遙遠的恒星系統中與在太陽系中是相同的，並且在遙遠的星系中與在我們的銀河系中也是相同的。（參看框 29.5 中高興地揭示出這一點的 Edwin Hubble 的表達式。）

(4)基本常數從事件到事件是不變的

如果人們假設物理定律的不變性，就可以很高的精度檢驗無量綱「常數」從事件到事件的不變性。Dirac (1937, 1938), Teller (1948), Jordan (1955, 1959), Gamow (1967), 以及其他人曾提出，精細結構「常數」α_* 可能是一個緩慢變化的標量場，或許受宇宙學方程的支配。然而，關於這類變化的嚴格極限是從類星體和射電星系光譜線精細結構分裂的數據得出的。對於紅移 $z=1.95$ 的類星體 3C191, Bahcall, Sargent, 和 Schmidt (1967) 得出 $\alpha_*(3C191)/\alpha_*(\text{地球})=0.97\pm0.5$. 按照類星體紅移的宇宙學解釋，這相應於極限 $(1/\alpha_*)(d\alpha_*/dt)\lesssim 1/10^{11}$ 年。由射電星系的數據甚至得到一個更嚴格的極限，其中關於紅移的解釋是毫無問題的。Bahcall 和 Schmidt (1967) 測量了五個射電星系的精細結構分裂，射電星系的 $z\approx 0.20$，相應於 2×10^9 年前的光發射。他們得出 $\alpha_*(z=0.20)/\alpha_*(\text{地球})=1.001\pm0.002$，由此得出極限 $|(1/\alpha_*)(d\alpha_*/dt)|\lesssim 1/10^{12}$ 年。

Dyson (1972) 指出，把 Re^{187} 過去的 β 衰變率（由古老礦石中鐵-銖的豐度比得出）與今天的 β 衰變率作比較，提供了一種核查 α_* 隨時間作任何可能變化的方法，它比紅移數據更靈敏，也比早期和現在 α 衰變和裂變率的任何變化更靈敏。他總結了可以利用的 Re^{187} 數據，得到極限

$$|(1/\alpha_*)(d\alpha_*/dt)|\lesssim 5/10^{15}\text{ 年}。$$

對於基本常數不變性的進一步證據，可參看，Minkowski 和 Wilson (1956), Dicke (1959a,b), Dicke 和 Peebles (1962b)。

用 Eötvös 類型的實驗檢驗基本常數的空間變化

借助於 Eötvös 類型的實驗可以尋求 α_*, $m_{\text{中子}}/m_{\text{質子}}$ 以及其他「常數」在太陽系的空間變化。由這類實驗導致這些常數任何空間變化的極限的論證 [Dicke (1969)] 是間接的。記得這種論證在有極分子的標準論文中曾用過，即推演因非均勻電場的牽引，可極化分子的加速度。

假設無量綱「常數」之一「α」依賴於位置。這將導致實驗室試驗物體的總質量-能量對位置的依賴關係。例如，如果 α_* 依賴於位置，則原子核的庫侖能也將依賴於位置 ($E_{\text{庫侖}}\propto e^4\propto\alpha_*^2$; $\delta M/E_{\text{庫侖}}=2\delta\alpha_*/\alpha_*$)。人們可以計算當試驗物體的 x^μ 運動到 $x^\mu+\delta x^\mu$ 時，它的質量-能量的變化，假設在它的位移期間物體的結構毫無變化：

$$\delta M=(\partial M/\partial\alpha)_{\text{固定的結構}}(\partial\alpha/\partial x^\mu)\delta x^\mu。\qquad(38.8)$$

在位移之後，內力的減弱（例如，由於 α 的減少）可能引起結構的變化，但是

這種變化將伴隨着內部勢能轉換爲內部動能，而M守恒。

現在，考慮下述假想實驗［一種精心設計的論證，Einstein用它首先導出了引力紅移(§7.2)］：取n個粒子，每一個粒子具有的質量-能量爲 μ。粒子的結構使μ與感興趣的「常數」α相聯繫的那部分可以忽略：

$$(1/\mu)(\partial\mu/\partial\alpha)=0。 \tag{38.9}$$

把這些粒子置於（局域）均勻 Newton 場中高度爲h處。在那裏把它們合併在一起，釋放出結合能 $E_B(h)$，形成一個復合物體，其質量爲

$$M=n\mu-E_B(h) \tag{38.10}$$

它以一種顯著的方式依賴於「常數」α,

$$(1/M)(\partial M/\partial\alpha)\neq 0。 \tag{38.11}$$

把此物體，以及裝在一個小袋中的釋放的結合能降低 δh 的距離。總的作用力（用 Newton 的語言）爲

$$F=Ma+E_B(h)g。 \tag{38.12}$$

式中g是這類質量－能量經歷的加速度，當它自由下落時，與α無關。相反，復合物體M的「自由」下落並不是眞正的自由下落，因爲補充的「極化力」曳引着這個物體。因此，復合物體在「自由」下落中所經受的加速度a與g稍有差別。然而，被加速的質量是精確的M，因此產生這個加速度所需要的力由乘積 Ma 給出。在物體和小袋降低時所獲得的能量爲

$$E(\text{下降})=F\delta h=Ma\delta h+E_B(h)g\delta h。$$

把這個能量放入袋中。

在 $h-\delta h$ 處，從袋中用一些能量去拉物體，使它分開成爲它的組成粒子。所需的能量爲

$$\begin{aligned}E_B(h-\delta h)&=n\mu-M(h-\delta h)=n\mu-Mh+\frac{\partial M}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dh}\delta h\\&=E_B(h)+\frac{\partial M}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial h}\delta h;\end{aligned}$$

因此，能量

$$\begin{aligned}E_{袋}&=E_B(h)+E(\text{下降})-E_B(h-\delta h)\\&=\left[Ma+E_B(h)g-\frac{\partial M}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dh}\right]\delta h\end{aligned} \tag{38.13}$$

留在袋中。用這個能量把n個粒子和袋升回到高度h爲止。假設總能量守恒，

因此，當 n 個粒子和袋返回在高度 h 處的原來狀態時，將沒有額外的能量也沒有虧空。這意味着 $E_{袋}$ 必須精確地就是用來提升的能量總數：

$$E_{袋}=n\mu g\delta h=[M+E_B(h)]g\delta h。 \tag{38.14}$$

把 $E_{袋}$ 的表達式 (38.13) 和 (38.14) 式聯立，發現

$$a-g=\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dh}。 \tag{38.15}$$

因而，在總能量守恒（無永動機！）的假設下，物理「常數」α 的空間依賴關係將導致其質量依賴於 α 的物體加速度的反常表達式 (38.15) 式。

正比於 α_s^2 的庫侖能在金核中相當於質量的0.4%，在鋁核中相當於0.1%。因此，α_s 的空間變化所導致的這兩種核中引力加速度的相對差別爲

$$\left|\frac{a_{金}-a_{鋁}}{g}\right|\approx\frac{1}{g}2\frac{0.003}{\alpha_s}\frac{d\alpha_s}{dh}\lesssim1\times10^{-11}；$$

即

$$\frac{1}{\alpha_s}\left|\frac{d\alpha_s}{dh}\right|\lesssim1\times10^{-9}g\approx1\times10^{-9}\text{厘米/秒}^2=1\times10^{-30}/\text{厘米} \tag{38.16}$$

在地球上，歸因於太陽。

此處已採用由 Dicke 實驗得出的極限 (1×10^{-11}) (§38.3)，以及地球上由太陽引起的加速度 $g=0.6$厘米／秒²。

注意，這表明 ln α_s 的梯度小於 Newton 勢梯度的 1×10^{-9}。

§ 38.7　檢驗是否存在着未知的長程場

可能存在與引力相聯繫的新的長程場

無論人們是否接受試驗物體在度規的短程線上運動的假設，仍然可以設想以某種方式與引力相聯繫的前所未知的長程場（場在遠距離以「$1/r$」減少）。

直接與間接的耦合

如果存在着尚待發現的「新的」長程場（非度規的，非電磁的），那麼它們有兩種方式影響物質。第一，它們可以直接地與物質耦合，引起例如從短程線運動的稍稍偏離（偏離比 §38.5 的極限小），或者使粒子的質量稍稍依賴於位置（依賴程度比 §38.6 的極限小）。第二（更難於探測），它們可以通過僅

僅參與確定空時幾何的場方程而間接地與物質耦合。本節描述直接耦合效應的探測。間接地與場耦合的理論將在框 39.1 描述，而對這類場的檢驗將在第40章討論。

直接耦合場的實驗極限

Dicke (1964b) 曾應用他的框架分析引力理論的試驗 (§38.2) 指出，若干示零實驗爲未知的直接耦合的長程場確定了嚴格的極限。

(1) Hughes-Drever 實驗

這些實驗之一是「Hughes-Drever 實驗」[Hughes, Robinson，和 Beltran-Lopez (1960); Drever (1961)]。它可以認爲像是要尋找一個對稱二秩張量場 $h_{\alpha\beta}$，這種場使試驗物體的軌道稍稍偏離度規 $g_{\alpha\beta}$ 的短程線。除非人們的實驗是在 $h_{\alpha\beta}$ 等於常數乘以 $g_{\alpha\beta}$ 的空時區域內做的 (「只是用一個常數因子重新標度全部長度和時間」)，否則這個張量場必定引起空時性質的各向異性——而這又將造成核子慣性質量的各向異性，從而造成原子核內不同磁量子數的簡併能級的相對移動。Hughes-Drever 實驗給出了這種移動的嚴格極限，從而給予可能的張量場 $h_{\alpha\beta}$ 以嚴格的極限。引用 Dicke (1964，第186頁) 的話來說：「如果在選定的坐標系中使得兩個「張量」場之一有强烈的各向異性而另一各向同性，則與其一 [直接] 耦合的强度必定只有與另一的 10^{-22} 量級…… [此外]，在速度常常改變的運動的地球上，根據某些理由可以預料各向異性。」其次，根據 Hughes 和 Drever 的實驗，人們斷定，沒有第二個張量場存在的一點兒證據。進一步的細節，見 Dicke 和 Peebles (1962a)。

(2) 以太漂移實驗

另一系列實驗稱爲「以太漂移實驗」，它對與質量-能量直接耦合的任何未知的長程矢量場，給予嚴格的極限。人們可以設想這樣一種宇宙學起源的場。存在宇宙學起源的場，最自然的是，預期其四維矢量與「宇宙學流體」的四維矢量 $\boldsymbol{u}$ 指向同一個方向 (等同於在宇宙微波輻射爲各向同性的系中的時間方向 $\boldsymbol{e}_0$)。其次，新場的四維矢量將在任何其他系中具有空間分量。從原則上說，觀測者可以用它們識別他相對於宇宙平均靜止系的運動方向和速率。以太漂移實驗搜尋這種場的效應。

例如，Turner 和 Hill (1964) 的實驗搜尋鐘的速率對這樣一種矢量場的依賴關係，辦法是對於在離心機邊緣的發射者和在離心機中心的接收者 (圖 38.3) 檢驗作爲方向函數的橫向 Doppler 頻移。如果存在着任何效應，那麼最自然的預期是具有下述形式

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{以速率}\beta\text{相對宇宙}\\ \text{運動的鐘的速率}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{相對宇宙靜止}\\ \text{的鐘的速率}\end{pmatrix}}=1+\gamma\beta^2, \qquad \gamma\text{是一個很小的常數，} \tag{38.17}$$

在離心機中央的鐘有 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{e}_x$，而在邊緣上的鐘則有 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{u}+v(\boldsymbol{e}_x\cos\omega t+\boldsymbol{e}_y\sin\omega t)$。因而，邊緣和盤之間的頻移應隨位置變化

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=-\frac{\Delta\nu}{\nu}=-2\gamma uv\cos\omega t+\text{通常的橫向頻移。}$$

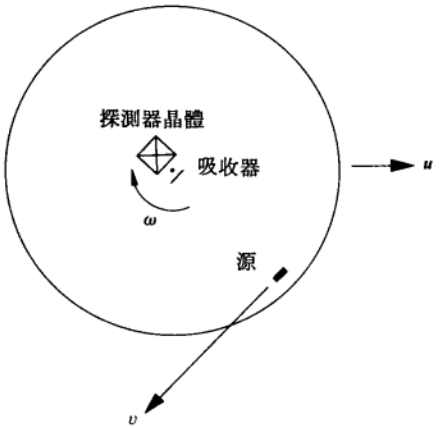


圖 38.3

Turner 和 Hill (1964) 實驗尋找固有鐘的速率 (鐘的 Co^{57} 源放在離心機邊緣附近) 與相對宇宙遙遠物質速度的依賴關係；或者，用工作術語來說，尋找相對於由四維矢量描寫的「新的局域場」的關係。來自 Co^{57} 的 14.4 千電子伏的 γ 射線已經歷了 1.3×10^{-13} 的二級 Doppler 頻移。人們搜尋的是附加的頻移 $\gamma\beta^2$，其中 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}_x\cos\omega t+\boldsymbol{e}_y\sin\omega t)$ 是相對於這樣一個系的速度，在該系中標量場是純類時的。經過 Fe^{57} 吸收器的 γ 射線透射，將隨任何這類附加的頻移線性地下降，並將以 NaI 晶體計數率的下降記錄下來。源離旋轉軸10厘米，離心機以每分 15,000 圈旋轉。由實驗推出的 γ 值爲 $(1\pm4)\times10^{-5}$。

應用 Mössbauer 效應，Turner 和 Hill 的數據表明

$$|\gamma|<4\times10^{-5}。\qquad(38.18)$$

因此，如果存在宇宙學矢量場的話，它也只與物質有微弱的直接耦合。

對於這些實驗的進一步討論，以及關於其他類似實驗的參考文獻見 Dicke (1964b)。

第三十九章　其他引力理論和後 Newton 近似

§ 39.1　其他理論

在全部物理學規律中，既從未找到比 Einstein 引力幾何理論（第16章和第17章）更簡潔美麗的，也從未發現比它更使人非相信不可的任何引力理論。

隨着一個實驗的完成，一個接着一個的引力理論被推翻在路邊成爲觀測的犧牲品，而 Einstein 理論依舊巍然屹立。所有聲稱的在實驗與 Einstein 引力定律之間的不一致性，都未能經受住時間的檢驗。

作爲實驗檢驗陪襯的其他引力理論的作用

詢問：既然這樣，爲什麼還要爲考察其他的引力理論操心呢？回答：作爲檢驗 Einstein 理論的「陪襯」。

我們說 Einstein 的幾何動力學是「飽經戰鬥檢驗」的，這就是說，每當它試圖反對作出不同預言的另一種理論時，它總是勝利的。那麼，爲了通過戰鬥作出決定性的新的考驗，人們應該怎樣選擇新的對手呢？

並非所有的引力理論都設爲平等的。在文獻中衆多的引力理論之中，只有極少數有足夠的生命力值得與廣義相對論或與未來的實驗作比較。「有價值的」理論是那些能滿足三條生存準則的理論：自洽性，完備性，以及與過去的實驗相符。

一種理論生存的準則：

(1)自洽性

自洽性的最好說明是描述在自洽性檢驗下失敗的若干理論。內部不自洽理論的經典例子是引力的自旋-2場理論［Fierz和 Pauli (1939)；本書框7.1］，它等價於線性化的廣義相對論（第18章）。自旋-2理論的場方程意味着所有受引力作用的物體在整體 Lorentz 參照系中沿着直線運動，而理論的運動方程則堅持引力使物體偏離直線運動。（當人們試圖糾正這種不自洽時，就會發現

正在「依靠自己的努力」從事着廣義相對論的工作；參看框 17.2 的第 5 條路線。）另一種不自洽的理論是 Kustaanheimo (1966) 的理論。它預料，當採用光的波動形式（Maxwell 理論）時，爲零引力紅移，而當採用光的粒子形式（光子）時，爲非零紅移。

(2)完備性

完備性：完備的引力理論必須能夠從「第一條原理」分析每一個感興趣的實驗的結果。因此，它必須與一組相互一致的電磁學規律、量子力學規律，以及所有其他物理學規律緊密配合並融爲一體。如果理論要求原子鐘測量的「間隔」$d\tau=(-g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx_{\beta})^{1/2}$ 是由特殊的度規構成的，那麼這種理論就不是完備的。因爲原子鐘是複雜的系統，它的行爲應由量子理論和電磁學的基本規律算出。如果理論要求行星在短程線上運動，那麼這種理論就不是完備的。因爲行星是複雜的系統，它的運動應由關於受應力物質的對引力響應的基本規律算出。進一步的討論見 §16.4, §20.6 和 §40.9。

(3)與過去的實驗相符

與過去的實驗相符：一種理論與「四大標準檢驗」（引力紅移，近日點移動，電磁波偏折，以及雷達時間延遲）在若干標準偏離內相符的必要性是顯而易見的。同樣明顯但往往被遺忘的是，應與宇宙的膨脹（歷史上這是廣義相對論的全部王牌中最大的王牌）相符，以及更多日常的 Newton 水準上的觀測相符。例：Birkhoff (1943) 理論預期的紅移，近日點移動，偏折，以及時間延遲都與廣義相對論相同。但是它要求受引力作用的物體內的壓强等於總質量-能量密度，$p=\rho$；並且由此它要求聲波以光速行進。當然，這個預言與實驗極爲不符。因此，Birkhoff 的理論是無法生存的。另一個例子：Whitehead (1922) 引力理論長期被認爲是 Einstein 理論的一個可行的替代，因爲它和 Einstein 理論一樣，對「四大標準檢驗」精確地作出了同樣的預言。直到 Will (1971b) 的工作才認識到，Whitehead 理論所預言的海洋潮汐的漲落的時間依賴關係與日常經驗是完全矛盾的（見 §40.8）。

§ 39.2　引力的度規理論

爲什麼集中注意引力的度規理論

兩條論證路線都只限於關注一類引力理論，即所謂*度規理論*。

第一條論證路線構成了前一章的論題。它檢查了一個個實驗，得到兩條結論：(1)*空時具有度規*；以及(2)*度規滿足等效原理*（物理學的標準狹義相對論定律在每一個局域 Lorentz 系中都成立）。*與這兩條原理結合的引力理論稱為度規理論**。簡言之，第38章指出，「對於引力的任何適當描述，都應指望度規理論。」例外：Cartan (1922 b, 1923) 的理論［「廣義相對論加上扭轉」；見 Trautman (1972)］是非度規的，但與實驗相符，並且就1970年代的技術而言

*關於度規理論的稍爲狹窄的定義，見 Thorne 和 Will (1971)。

，難以從實驗上與廣義相對論相區分。

第二條指向度規理論的論證路線從完備性（上節）的論點開始。爲了完備，理論應與物理學的全部非引力規律結合成自洽的形式。除非引入度規，並求助於等效原理，否則很難找到與物理學其餘部分結合的辦法。其他方法導致令人沮喪的複雜性，並且常常導致理論在三個問題（自洽性，完備性，以及與過去的實驗相符）的某一個問題上失敗。除了 Cartan 的理論外，在 1973 年，已知的可行的全部理論都是度規的。［見 Ni (1972b); Will (1972)。］

度規理論怎樣不同

引力度規理論彼此的不同只有一個重要方面，即它們產生度規的規律不同。在廣義相對論中，度規直接由物質的脅强－能量和非引力的場產生。在 Dicke-Brans-Jordan 理論（框 39.1，第 1070 頁）中，物質和非引力的場產生一標量場 ϕ；然後 ϕ 與物質和其他場的作用產生了度規。用 §38.7 的語言表述，ϕ 是間接地與物質耦合的「新的長程場」。作爲另一個例子，由Ni (1970, 1972)（框 39.1）提出的理論具有平直空間的度規 η 以及世界時坐標 t（「前幾何」；見 §17.6）；η 與物質和非引力場的作用產生了標量場 ϕ；然後 η，t 和 ϕ 聯合創造了進入等效原理的物理的度規 g。

上述的全部三種理論——Einstein, Dicke-Brans-Jordan, Ni——在 1971 年夏撰寫本書時還都是可行的。但在 1971 年秋，Ni 的理論以及曾被看作是可行的許多其他理論，已被 Nordtvedt 和 Will (1972) 證明與實驗不符。這是在引力理論的實驗檢驗方面，當前迅速進展的一個例子。

此後，在本章和下一章，都將限於關注引力的度規理論以及它們與實驗的比較。

§ 39.3 後 Newton 極限與 PPN 表述

度規理論的弱場，慢運動展開

太陽系具有弱引力，在其中可做旨在區分各種度規理論的實驗，

$$|\Phi| = |\text{Newton 勢}| \lesssim 10^{-6}; \tag{39.1a}$$

此外，產生太陽系引力的物質運動緩慢

$$v^2 = (\text{相對於太陽系質心的速度})^2 \lesssim 10^{-7} \tag{39.1b}$$

並具有微小的脅强和內能

$$|T_{jk}|/\rho_0 = (\text{脅强除以重子「質量」密度}) \lesssim 10^{-6}, \tag{39.1c}$$

$$\Pi = (\rho - \rho_0)/\rho_0 = \begin{pmatrix}\text{每單位重子「質量」}\\ \text{密度的內能密度}\end{pmatrix} \lesssim 10^{-6}。 \tag{39.1d}$$

［此處的重子「質量」密度 ρ_0，不管它的名稱，也不管有時甚至更誤稱之爲「靜止質量－能量密度」的事實，它實際上是重子數密度 n 的量度，別無其他。在某些十分明確的標準表述中，它定義爲 n 與每重子質量的某個標準值 μ_0 的乘積；於是

$$\rho_0 \equiv n\mu_0 。 \quad] \tag{39.1e}$$

因此，採用任何引力的度規理論分析太陽系的實驗時，可以通過同時對小參量 $|\Phi|$，v^2，$|T_{jk}|/\rho_0$，和 Π 作展開而簡化，精度並無重大損失。這種「弱場、慢運動展開」給出：(1)在「零級」，爲平直的、空的空時；(2)在「一級」，爲太陽系的 Newton 處理；以及(3)在「二級」，爲對 Newton 處理的後 Newton 修正。

後 Newton 近似

Newton 理論的表述加上後 Newton 修正稱爲「後 Newton 近似」。每一種度規理論都有它自身的後 Newton 近似。儘管各種度規理論之間有很大的差別，但它們的後 Newton 近似都非常類似。實際上，它們是如此的類似，以致人們可以建立單一的引力後 Newton 理論，而不提到任何間接的耦合場 (Dicke-Brans-Jordan 理論中的 ϕ；Ni 理論中的 η, t 和 ϕ；見框 39.1)，這種理論已把每一種可能的度規理論的後 Newton 近似都作爲一種特殊情形包括在內了。這種全部包括在內的後 Newton 理論稱爲「參量化的後 Newton (Parametrized Post-Newtonian PPN) 表述」。它包括一組可任意指定的參量（稱爲「PPN 參量」）。這些參量的某一組數值使 PPN 表述等同於廣義相對論的後 Newton 極限；另一組數值則使之成爲 Dicke-Brans-Jordan 理論的後 Newton 極限，等等。

PPN 表述（參量化的後 Newton 表述）

本章下幾節介紹的 PPN 表述的一種形式是由 Clifford M. Will 和 Kenneth Nordtvedt, Jr (1972) 提出的。［也可參看 Will (1972)。］這種形式包括10個 PPN 參量，它作爲特殊情況幾乎包括了作者們所知的每一種引力的度規理論。少量的例外［Whitehead (1922) 以及 Will (1973) 評論過的理論］全都與實驗不符。人們可以通過添加附加項和參量，把它們包括在 PPN 形式之內。

在框 39.2 中，啓發式地敍述了這十個參量，爲的是方便那些想跳過表述全部細節的讀者（§39.4—§39.12）。

在太陽系中 PPN 表述的精度

PPN 表述有多精確？或者，更確切地說，後 Newton 近似與從中得出它的度規理論的相符有多精確？在太陽系中，$|\Phi|$, v^2, $|T_{jk}|/\rho_0$，以及 Π 均 $\lesssim 10^{-6}$，後 Newton 近似在後 Newton 量級的量中造成了 $\lesssim 10^{-6}$ 的相對誤差，而在 Newton 量級的量中造成了 $\lesssim 10^{-12}$ 的相對誤差。例如，它把光的偏折錯誤地表爲 $\lesssim 10^{-6}\times$（後 Newton 偏折）$\sim 10^{-6}$ 弧秒。並且它忽視了地球軌道的相對論變形，其大小 $< 10^{-12}\times$(一天文學單位)~ 10 厘米。很明顯，在1970年代無須採用對後 Newton 近似的更高級修正；因此也無須建立「參量化的後-後 Newton 框架」。然而，用 Shapiro (1971b) 的話來說：「如果人

(接第1072頁)

框 39.1 Dicke-Brans-Jordan 的理論和 Ni 的理論

A. Dicke-Brans-Jordan

參考文獻：Brans 和 Dicke (1961); Jordan (1959)。

[注：這是 Jordan 理論的 $\eta=-1$ 的特殊情形。這個理論的另一種數學表示由 Dicke (1962) 給出。]

與引力相聯繫的場：

ϕ，長程標量場；

$\boldsymbol{g}$，空時的度規（由此，用通常的方法，建立了協變微商∇以及曲率張量）。

確定這些場的方程：

脅强－能量張量的跡經下述彎曲空時的波動方程產生了 ϕ

$$\Box\phi=\phi^{;\alpha}{}_{;\alpha}=\frac{8\pi}{3+2\omega}\,T,$$

式中 ω 是無量綱的「Dicke 耦合常數」。

脅强－能量張量和 ϕ 一起經下述場方程產生了度規（即空時曲率）

$$G_{\alpha\beta}=\frac{8\pi}{\phi}T_{\alpha\beta}+\frac{\omega}{\phi^2}\left(\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}\right)+\frac{1}{\phi}(\phi_{;\alpha\beta}-g_{\alpha\beta}\Box\phi),$$

式中 $G_{\alpha\beta}$ 是 Einstein 張量。

對這些方程的變分原理：

$$\delta\int[\phi R-\omega(\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}/\phi)+16\pi L](-g)^{1/2}d^4x=0,$$

式中 R 是標量曲率，L 是物質的 Lagrange 函數。

等效原理是滿足的：

在度規 $\boldsymbol{g}$ 的局域 Lorentz 系中，物理學的狹義相對論定律成立，沒有變化。

結論：標量場對物質無任何直接的影響；它唯一的作用是參與確定空時幾何的場方程。按 §38.7 的含義，它是一個「間接耦合場」。

這個理論是自洽的，完備的，並且對於 $\omega>5$ 能「合理地」與全部1973年以前的實驗相符（兩個標準偏離或更好些）。

B. Ni

參考文獻：Ni (1970, 1972)

與引力相聯繫的場：

η，平直的「背景度規」（按 §17.6 的含義爲「前幾何」）。由假設，

存在坐標系（「背景 Lorentz 系」），在其中各處，同時有 $\eta_{00}=-1$, $\eta_{0j}=0$ 和 $\eta_{jk}=\delta_{jk}$。

t，標量場，稱爲「世界時坐標」（按§17.6 的含義爲「前幾何」），它「轉向」背景度規使

$$t_{|\alpha\beta}=0\,,\quad t_{,\alpha}t_{,\beta}\eta^{\alpha\beta}=-1\,,$$

式中「|」表示相對於 η 的協變微商。

這意味着存在一背景 Lorestz 系（「宇宙的靜止系」），其中$x^0=t$。

ϕ，標量場，稱爲「標量引力場」。

$\mathbf{g}$，空時度規（由它按通常的方式建立協變微商∇以及曲率張量）。

確定這些場的方程：

空時的脅强－能量經下述波動方程產生標量引力場 ϕ

$$\Box\phi\equiv\phi^{,\alpha}{}_{;\alpha}=-2\pi T^{\alpha\beta}\partial g_{\alpha\beta}/\partial\phi$$
$$=4\pi T^{\alpha\beta}[\eta_{\alpha\beta}e^{-2\phi}+(e^{2\phi}+e^{-2\phi})t_{,\alpha}t_{,\beta}]。$$

ϕ, η 和 t 一起經過下述代數關係式確定空時的度規

$$\mathbf{g}=e^{-2\phi}\eta+(e^{-2\phi}-e^{2\phi})\mathbf{d}t\otimes\mathbf{d}t。$$

注：在「宇宙的靜止系」中，它是這個理論預先假定的，這個度規化爲
$ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta=-e^{-2\phi}dt^2+e^{-2\phi}(dx^2+dy^2+dz^2)$。

對於 ϕ 的場方程的變分原理：

$$\delta\int(-2\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}+16\pi L)(-g)^{1/2}d^4x=0,$$

式中L是物質的 Lagrange 函數。

等效原理是滿足的：

在空時度規 $\mathbf{g}$ 的局域 Lorentz 系中，物理學的狹義相對論定律成立，沒有變化。

結論：ϕ, η 和 t 對物質無任何直接影響；按 §38.7 的含義，它們是「間接耦合場」。

這個理論是自洽的和完備的。如果太陽系在「宇宙的靜止系」中靜止，則這個理論與迄今的全部實驗相符——或許，宇宙的膨脹除外。但太陽系經過宇宙的運動導致與實驗的嚴重不符（Will 和 Nordtvedt 1972; §40.8）。

框 39.2 十個 PPN 參量的啓發性描述

參量	相對於廣義相對論，測量的是什麼[a]	廣義相對論中的值	Dicke-Brans-Jordan 理論中的值[b]	Ni 理論中的值[b]
γ	單位靜止質量產生多少空間曲率 (g_{jk})？	1	$\frac{1+\omega}{2+\omega}$	1
β	在引力 (g_{00}) 疊加定律中有多少非線性？	1	1	1
β_1	單位動能 ($\frac{1}{2}\rho_0 v^2$) 產生多少引力 (g_{00})？	1	$\frac{3+2\omega}{4+2\omega}$	1
β_2	單位引力勢能 ($\rho_0 U$) 產生多少引力(g_{00})？	1	$\frac{1+2\omega}{4+2\omega}$	1
β_3	單位內能 ($\rho_0 \Pi$) 產生多少引力 (g_{00})？	1	1	1
β_4	單位壓强 (p) 產生多少引力 (g_{00})？	1	$\frac{1+\omega}{2+\omega}$	1
ζ	徑向動能 [$\frac{1}{2}\rho_0 (v\cdot\hat{r})^2$] 即向着觀察者運動的動能比橫向動能產生的引力 (g_{00}) 要多出多少？	0	0	0
η	徑向脅强 [$\hat{r}\cdot t\cdot\hat{r}$] 比橫向脅强產生的引力 ($g_{00}$) 要多出多少？	0	0	0
Δ_1	單位動量 ($\rho_0 v$) 產生多少慣性系的曳力 (g_{0j})？	1	$\frac{10+7\omega}{14+7\omega}$	$-\frac{1}{7}$
Δ_2	動量 ($\rho_0 v$) 徑向地 (向着觀測者) 曳引慣性系比在橫向更容易多少？	1	1	1

[a] 這些有啓發性的描述是以 (39.23) 式爲基礎的。

[b] 對於這些理論的說明可參看框39.1。它們的PPN值以及其他理論的值的PPN推導，參看 Ni (1972)。

們以上一個十年的成就來設想，那麼可以合理地預期80年代的技術將可用來探測廣義相對論的二級效應。那時，理論的相對論者和實驗的相對論者之比也許會急轉直下。」

實際上，對於聲稱，後 Newton 近似在70年代是滿足需要的主張，有少量例外。這些例外出現在外部宇宙衝擊和影響着太陽系的那些地方。例如，從遙遠的源傳播到太陽系中的引力波（第35—37章）就被每一個後 Newton 近似和 PPN 框架所忽視。它們必須用完全的度規理論來處理，或者用此理論的弱場「快運動」近似來處理。類似的，在某些理論中由宇宙膨脹所引起的「引力常數」對時間的依賴關係（§40.8），超出了 PPN 表述的範圍，正如膨脹本

身超出了 PPN 形式的範圍那樣。

PPN 表述不僅用於解釋引力理論的實驗檢驗，還可作爲理論天體物理學的有力工具。把除 $\zeta=\eta=0$ 以外的全部 PPN 參量指定爲 1，得出 Einstein 引力理論的後 Newton 近似。這個後 Newton 近似可用於（已廣泛用於）計算諸如恒星結構和穩定性 *等現象的廣義相對論修正。

PPN 表述對天體物理的應用

歷史注記和符號注記

PPN 表述的歷史和符號

Eddington (1922), Robertson (1962) 和 Schiff (1962, 1967) 最早完成了後 Newton 近似的參量化，並把它用於解釋太陽系的實驗。然而，他們只涉及孤立球狀物體（太陽）之外的眞空引力場。Nordtvedt (1968b, 1969) 提出了第一個完全的 PPN 表述，能夠處理太陽系的所有方面；他把太陽、行星和月亮處理作由點粒子（原子）「氣體」所構成，它們有引力和電磁的相互作用。稍後，Will (1971c) 利用 Chandrasekhar (1965a) 提出的技巧修改了 Nordtvedt 的表述，使之可用於描述天體的受壓力的、連續的物質。此處呈現的由 Will 和 Nordtvedt (1972) 提出的表述形式，概括了得出「後 Galileo 不變性」的全部以往的形式［參看 Chandrasekhar 和 Contopolous (1967)］。關於 PPN 形式最詳盡和最新的評述論文是 Will (1972) 撰寫的。

在後 Newton 物理學和 PPN 表述的文獻中，按慣例，Newton 勢不用 Φ 描述，而是用

$$U\equiv-\Phi\equiv+\int\frac{\rho_0(x')d^3x'}{|x-x'|}\,。\qquad(39.2)$$

爲了避免混淆，本章和下章將用 U，儘管本書其餘部分用的是 Φ。

現在，轉向 PPN 表述的詳盡的高階說明。

初階
高階

§ 39.4　PPN 坐標系

PPN 表述的說明：坐標系

PPN 表述包括了太陽系（或正要分析的任何系統），取坐標 $(t,x_j)\equiv(t,x^j)$，使它儘可能地接近整體 Lorentz 坐標：

$$g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}\,,\qquad |h_{\alpha\beta}|\lesssim M_\odot/R_\odot\sim10^{-6}\,。\qquad(39.3)$$

*參看，例如，從 Chandrasekhar (1965 a, b, c) 開始的 Chandrasekhar 及其諸合作者在天體物理雜誌的一長串論文。

本章其餘部分均爲高階。無須以前的高階內容作它的準備，但下述內容將有幫助：
(1)第7章（引力和狹義相對論的不相容性）
(2)§17.6（無前幾何）；
(3)§36.9—§36.11(引力波的產生），以及
(4)第38章(基礎的檢驗)。本章並非此後任何一章的必要準備，但對第40章（太陽系檢驗）將有幫助。

（在這個意義上，PPN 表述很像線性化的理論；見第18章。）選取坐標系的速度（即選取它的空間原點的四維速度）使太陽系在這些坐標中近似爲靜止。（太陽系的質心是精確地靜止，還是以某個低速 $v \lesssim (M_\odot/R_\odot)^{1/2} \sim 10^{-3} \sim 300$ 公里／秒運動，這是要由應用這個表述的人決定的問題。關於其他可作的選擇，見 §39.9 和 §39.12。）

PPN 坐標使人們能自然的把空時「3+1」的分離爲空間加時間。採用三維平直空間的矢量分析符號可以很方便的處理這種分離——即使空時和三維超曲面 x^0＝常數兩者都是彎曲的。得出的三維表述看起來像廣義相對論，但更像 Newton 理論——的確，人們正希望它如此；最後，人們的目標是研究對 Newton 理論的微小的相對論修正！

§39.5 描述太陽系中的物質

相對於 PPN 坐標，太陽系物質（理想化爲受壓力的介質）的坐標－速度場爲

物質的描述

$$v_j \equiv dx_j/dx^0 。 \tag{39.4}$$

選定一事件 $\mathcal{P}$，並在其附近轉換到一正交歸一系，它與該處的物質一起運動。確定這個共動系的空間軸 $\mathbf{e}_j$ 的方位，使它們儘可能精確地與 PPN 坐標軸重合。（這個要求將在 §39.10 中更精確地做到。）在此正交歸一的共動系中，定義描述物質狀態的下述量：

$$(\text{總質量－能量密度}) \equiv \rho ; \tag{39.5a}$$

$$(\text{重子「質量」密度}) \equiv \rho_0$$

$$\equiv (\text{重子數密度 } n) \times \begin{pmatrix} \text{對處於某個標準狀態的物質，} \\ \text{每個重子的標準靜止質量 } \mu_0 \end{pmatrix} ; \tag{39.5b}$$

$$(\text{比內能密度}) \equiv \Pi \equiv (\rho - \rho_0)/\rho_0 ; \tag{39.5c}$$

$$(\text{脅強張量的分量}) \equiv t_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{T} \cdot \mathbf{e}_j ; \tag{39.5d}$$

$$(\text{壓强}) \equiv p \equiv \frac{1}{3}(t_{xx} + t_{yy} + t_{zz}) \tag{39.5e}$$

$$\equiv (\text{對全部方向脅強的平均}) 。$$

脅強中的各向異性（即切向）只在諸如地球這樣的行星中才是重要的；甚至在那裏，占優勢的還是各向同性的壓强：

$$t_{ij} = p\delta_{ij} + p \times [\text{修正} \ll 1] 。 \tag{39.6}$$

對於許多論題，特別是在太陽內部，可以不管各向異性，從而把太陽系的物質近似爲理想流體*。

輻射場的各向同性部分對太陽內的壓强 p 和內能密度 $\rho_0\Pi$ 有重要的貢獻。然而，各向異性的輻射流在脅强－能量張量中被忽略了。這個近似是可以允許的，因爲在太陽中被輻射帶走向外的能流只是內能密度 $\rho_0\Pi$ 的 10^{-15}倍；在行星中，它甚至更少。

§ 39.6　後 Newton 展開的性質

對於任何引力束縛的位形，例如太陽系，Newton 近似對各種無量綱物理量的大小强加了限制（見練習 39.1）：

展開參量的相對大小

$$\epsilon^2 \equiv \text{Newton 勢 } U \text{的極大值}$$

$$\gtrsim \text{各處 } U,\ v^2,\ p/\rho_0,\ |t_{ij}|/\rho_0,\ \Pi \text{的值。} \tag{39.7}$$

（在太陽中心 Newton 勢爲 $\epsilon^2 \sim 10^{-5}$。在該處，p/ρ_0，t_{ij}/ρ_0 和 Π 也是$\sim 10^{-5}$，它們在別處要小得多。行星的軌道速度全都小於 100 公里／秒$=3\times10^{-4}$，因此 $v^2<10^{-7}$。）此外，在確定的 x 處，所有量隨時間的變化主要歸之於物質的運動。因此，時間微商與空間微商相比要小 $O(\epsilon)$，

$$\left|\frac{\partial A/\partial t}{\partial A/\partial x_j}\right| \sim |v_j| \lesssim \epsilon\text{，對任何量 } A\text{，} \tag{39.8}$$

儘管在輻射帶並非如此，該處有外向的引力波流出（到太陽的距離≳一光年）。結果，當人們作後 Newton 展開時，輻射帶必須排除在分析之外。爲了處理它，需要不同的技巧，例如，需要第36章的那些技巧。

展開的規則

條件 39.7 和 39.8 暗示，人們可把度規係數展開成小參量 ϵ 的冪次，把 U，v^2，p/ρ_0，t_{ij}/ρ_0 和Π都當作 $O(\epsilon^2)$ 來處理（通常它們更小！），並把時間微商當作 $O(\epsilon)$ 處理，它比空間微商小。

在此「後 Newton」展開中，ϵ 的奇次項（即諸如

$$\int \frac{\rho_0(x',t)\ v_j(x',t)}{|x-x'|}d^3x' \sim \frac{M}{R}v \sim \epsilon^3 \tag{39.9}$$

的項，其中 v 和 $(\partial/\partial t)$ 的總數是奇數）在時間反轉下要改變符號，而 ϵ 的偶

*在太陽系中，由各向導性脅强引起的後 Newton 修正，比起其他的後Newton修正要小得很多，在1970年代要測量它們是沒有希望的。由於這個原因，在別的文獻中（但不是在本書中），PPN 表述在後 Newton 水準上把所有的脅强都當作各向同性的壓强來處理，因而令 §39.8—§39.11 的 PPN 參量 η 爲零。

次項符號不變。時間反轉（$x^0=-x^0$）還改變了 g_{0j} 的符號（$g_{0j}=-g_{0j}$），但留下 g_{00} 和 g_{jk} 不變。因此，g_{0j} 應只包括 ϵ 的奇次項；而 g_{00} 和 g_{jk} 應只包括 ϵ 的偶次項。（實際上，當輻射阻尼進入畫面時，將中止這種情況。在眞實的世界上，人們總是堅持外向波的邊條件。但是時間反轉把外向波轉換爲內向波；爲了轉換回外向，就需要額外的符號變化。因此，在近帶的度規中，輻射阻尼項對於 g_{0j} 是 ϵ 的偶次項，對於 g_{00} 和 g_{jk} 是 ϵ 的奇次項。然而，輻射阻尼在 Newton 理論範圍之外直到 ϵ^5 量級才開始起作用——見第 36 章——所以此處將置之不顧。）

度規的展開形式

經過 Newton 量級展開的形式是已經知道的（§17.4，把 Φ 代之以 $-U$）：當要求

$$\begin{aligned} g_{00}&=-1+2U+[\lesssim\epsilon^4 \text{ 的項}],\\ g_{0j}&=[\lesssim\epsilon^3 \text{ 的項}],\\ g_{ij}&=\delta_{ij}+[\lesssim\epsilon^2 \text{ 的項}] \end{aligned} \tag{39.10}$$

時，僅得出 Newton 引力。這些用代數式表示的對於高階修正的限制，取決於短程線方程空間分量與 Newton 運動方程相一致的要求：

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_j}{dt^2}\approx\frac{d^2x_j}{d\tau^2}&=-\Gamma^j{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\approx-\Gamma^j{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}\\ &=-\Gamma^j{}_{00}-2\Gamma^j{}_{0k}v_k-\Gamma^j{}_{kl}v_kv_l\\ &=U_{,j}+\{\epsilon g_{0k,j},\ \epsilon^2 g_{kl,j}\} \text{ 量級的項。} \end{aligned} \tag{39.11}$$

如果 g_{0k} 爲 $O(\epsilon)$ 或更大，如果 $g_{kl}-\delta_{kl}$ 爲 $O(1)$ 或更大，則將得出錯誤的 Newton 極限。

可按上述方式繼續展開到全部階。於是，在短程線方程中，以及在能量-動量的局域守恒定律 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$ 中，g_{00} 總是與 ϵg_{0k} 和 $\epsilon^2 g_{jk}$ 連在一起的（見練習 39.2）。由此，後 Newton 展開具有框 39.3 所概括的形式。

練習

練習 39.1 引力束縛系統中的大小量級

對任何引力束縛系統，試用 Newton 理論導出條件 (39.7)。[提示：諸如軌道速度，聲波和切變波的速率，維里定理，以及流體靜力學平衡等概念都是有關的。]

練習 39.2 後 Newton 展開中項的型式

試證明緊接着 (39.11) 式的那一段陳述。特別是，假設人們希望算出坐標加速度 d^2x_j/dt^2，精確到 $\epsilon^{2N}U_{,j}$（N 是某個整數）。試證明這種承諾要求精確到 ϵ^{2N+2} 的 g_{00} 的知識，精確到 ϵ^{2N+1} 的 g_{0k} 的知識，以及精確到 ϵ^{2N} 的 g_{jk} 的知識。再假設已知精確到 $\rho_0\epsilon^{2N}$ 的 T^{00}，

精確到 $\rho_0\epsilon^{2N+1}$ 的 T^{0j}，以及精確到 $\rho_0\epsilon^{2N+2}$ 的 T^{jk}［參看，例如，$N=0$ 的 (39.13) 式和 $N=2$ 的 (39.42) 式］。試證明，爲了計算精確到 $\epsilon^{2N+1}\rho_{0,j}$ 的 $T^{0\alpha}{}_{;\alpha}$ 以及精確到 $\epsilon^{2N+2}\rho_{0,j}$ 的 $T^{j\alpha}{}_{;\alpha}$，必須知道精確到 ϵ^{2N+2} 的 g_{00}，精確到 ϵ^{2N+1} 的 g_{0k}，以及精確到 ϵ^{2N} 的 g_{jk}。這決定了框 39.3 的型式。

§39.7　Newton 近似

在 Newton 量級，度規具有 (39.10) 式的形式；並且，四維速度和脅强 **Newton 近似** -能量張量相對於 PPN 坐標系的分量爲

$$u^0=+1+O(\epsilon)^2, \qquad u^j=v_j+O(\epsilon^3); \tag{39.12}$$

$$T^{00}=\rho_0+O(\rho_0\epsilon^2), \quad T^{0j}=\rho_0 v_j+O(\rho_0\epsilon^3), \quad T^{jk}=t_{jk}+\rho_0 v_j v_k+O(\rho_0\epsilon^4) \tag{39.13}$$

（見練習 39.3）。兩組方程決定了太陽系的結構和演化。(1) Einstein 場方程。如 §18.4 所示，亦如 §17.4 所示，在 Newton 極限，Einstein 方程化爲 Laplace 方程

$$U_{,jj}=-4\pi\rho_0, \tag{39.14a}$$

它具有「超距作用」解

$$U(x,t)=\int\frac{\rho_0(x',t)}{|x-x'|}d^3x'。 \tag{39.14b}$$

框 39.3　度規係數的後 Newton 展開

近似的水準（以及把廣義相對論展開到此水準的論文）	量級或項的值 g_{00}	g_{0j}	g_{jk}
平直的，空的空時	-1	0	δ_{jk}
Newton 近似	$2U$	0	0
後 Newton 近似［(Fock (1959); Chandrasekhar (1965a)］	+項～ϵ^4	+項～ϵ^3	+項～ϵ^2
後-後 Newton 近似［Chandrasekhar 和 Nutku (1969)］	+項～ϵ^6	+項～ϵ^5	+項～ϵ^4
輻射阻尼［Chandrasekhar 和 Esposito (1970)］	+項～ϵ^7	+項～ϵ^6	+項～ϵ^5

(2)局域能量－動量守恒定律，$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$。這個定律的時間分量化爲靜止質量的守恒

$$\partial\rho_0/\partial t+\partial(\rho_0 v_j)/\partial x_j=0+O(\epsilon^2)\text{的部分誤差；} \tag{39.15a}$$

空間分量化爲 Newton 第二運動定律，「$F=ma$」:

$$\rho_0 dv_j/dt=\rho_0(\partial U/\partial x_j)-\partial t_{jk}/\partial x_k+O(\epsilon^2)\text{的部分誤差，} \tag{39.15b}$$

$$d/dt\equiv(\text{循着物質的時間微商})\equiv\partial/\partial t+v_k\partial/\partial x_k \tag{39.16}$$

（見練習 39.3）。

(39.14) — (39.16) 式與描述行星和太陽物質的狀態方程合在一起，是對太陽和行星的結構與運動作全部 Newton 計算的基礎。注意，內能密度 $\rho_0\Pi$ 無處進入這些方程。它對 Newton 的流體動力學是不重要的。它與太陽的熱能平衡有關係；但在此處則是無關的。

練習

練習 39.3 Newton 近似

(a) 試導出 PPN 坐標系中脅强－能量張量分量的 (39.13) 式。［提示：在物質靜止系中（「共動正交歸一系」）$T_{00}=\rho=\rho_0+O(\epsilon^2)$, $T_{0j}=0$, $T_{jk}=t_{jk}$；見 (39.5) 式。以普通速度 $-v_j$ 的純增加，Lorentz 變換這些分量，得出 $T_{\alpha\beta}$。］

(b) 試證明在 PPN 坐標系中，$T^{0\alpha}{}_{;\alpha}=0$ 化爲 (39.15a) 式，並且 $T^{j\alpha}{}_{;\alpha}=0$ 與 (39.15a) 式聯合化爲 (39.15b) 式。

練習 39.4 一個有用的公式

試由 (39.15) 式導出下述對任意函數 $f(\boldsymbol{x},t)$ 都成立的有用公式：

$$\frac{d}{dt}\int\rho_0(\boldsymbol{x},t)f(\boldsymbol{x},t)d^3x=\int\rho_0(\boldsymbol{x},t)\frac{df(\boldsymbol{x},t)}{dt}d^3x \tag{39.17}$$
$$+O(\epsilon^2)\text{ 的部分誤差。}$$

此處的兩個積分都遍及全部空間；並且 df/dt 是循着物質的微商 (39.16)。

練習 39.5 Newton 引力場的脅强張量

定義「Newton 引力場 U 的脅强張量」如下：

$$t_{jk}\equiv\frac{1}{4\pi}\left(U_{,j}U_{,k}-\frac{1}{2}\delta_{jk}U_{,l}U_{,l}\right)。 \tag{39.18}$$

試證明物質的運動方程 (39.15b) 式可重新寫爲下述形式

$$\rho_0\frac{dv_j}{dt}=-\frac{\partial}{\partial x^k}(t_{jk}+t_{jk})+O(\epsilon^2)\text{ 的部分誤差，} \tag{39.19}$$

$$(\rho_0 v_j)_{,t}+(t_{jk}+t_{jk}+\rho_0 v_j v_k)_{,k}=0+O(\epsilon^2)\text{ 的部分誤差。} \tag{39.19'}$$

練習 39.6 Newton 的維里定理

(a) 試由 (39.19′) 式證明

$$d^2I_{jk}/dt^2=2\int(t_{jk}+t_{jk}+\rho_0v_jv_k)d^3x+O(\epsilon^2)\text{ 的部分誤差，}\qquad(39.20a)$$

式中 I_{jk} 是系統質量分佈的二階矩

$$I_{jk}=\int\rho_0x_jx_kd^3x\text{。}$$

這稱爲「依賴時間的張量維里定理」。

(b) 由此推論，如果 $\langle\ \ \rangle_{\text{長時間}}$ 表示在長時間內的平均，則

$$\left\langle\int(t_{jk}+t_{jk}+\rho_0v_jv_k)\,d^3x\right\rangle_{\text{長時間}}=O\left(\int\rho_0\epsilon^4d^3x\right)\text{。}\qquad(39.20b)$$

這稱爲「張量維里定理」。

(c) 通過指標縮併並利用 (39.18), (39.14a) 和 (39.5e) 式，導出（普通的）維里定理：

$$\frac{1}{2}d^2I/dt^2=\int\rho_0v^2d^3x-\int\frac{1}{2}\rho_0Ud^3x+3\int pd^3x+O(\epsilon^2)\text{ 的部分誤差，}\qquad(39.21a)$$

式中 I 是質量分佈二階矩的迹

$$I=I_{jj}=\int\rho_0r^2d^3x\text{；}$$

以及

$$\left\langle\int\underbrace{\rho_0v^2d^3x}-\frac{1}{2}\underbrace{\int\rho_0Ud^3x}+3\underbrace{\int pd^3x}\right\rangle_{\text{長時間}}=O\left(\int\rho_0\epsilon^4d^3x\right)\text{。}\qquad(39.21b)$$

2×(動能)+(引力能)+3×(壓强積分)

練習 39.7 Newton 恒星的脈動頻率

試用普通的依賴時間的維里定理 (39.21a) 式導出無自轉 Newton 恒星脈動基角頻率的下述公式：

$$\omega^2=(3\bar{\Gamma}_1-4)\frac{|\text{恒星的自引力能}|}{(\text{恒星質量分佈二階矩的迹})}\text{；}\qquad(39.22a)$$

$$\bar{\Gamma}_1=\left(\begin{matrix}\text{絕熱指數的}\\\text{壓强加權平均}\end{matrix}\right)\equiv\frac{\int\Gamma_1pd^3x}{\int pd^3x}\text{。}\qquad(39.22b)$$

在推導中假設脈動是「同系的」——即平衡位置爲 x^j 的流體元（相對於質心 $x^j=0$）位移到 $x^j+\xi^j(x,t)$，其中

$$\xi^j=(\text{微小的常數})\,x^je^{-i\omega t}\text{。}$$

別無其他假設。注：(1)結論 (39.22) 曾在框 26.2 中不同地導出過，並用於 §24.4.，(2)同系脈動的假設是完全合理的，只要 $|\Gamma_1-4/3|=$常數<1；見框 26.2.，(3)結論 (39.22) 很容

易推廣到緩慢自轉的 Newton 恒星；參看，例如，Chandrasekhar 和 Lebovitz (1968)。用廣義相對論 (框 26.2) 或用任何度規理論的 PPN 表述 [Ni (1973)]，還可以把它推廣到無自轉的後 Newton 恒星。還可以把它推廣到緩慢自轉的後 Newton 恒星〔參看，例如，Chandrasekhar 和 Lebovitz (1968)〕。

§ 39.8 PPN 度規係數

度規的後 Newton 修正：

在引力的任何度規理論中，通過場方程的冗長處理，可算出對度規係數 $g_{\alpha\beta}$ 的後 Newton 修正 $k_{\alpha\beta}$。（參看，例如，接近本章末的關於廣義相對論的練習 39.14。）但是，往往不選取某一種理論也不寫下任何一組場方程，人們就能推出後 Newton 修正 $k_{\alpha\beta}$ 的形式。它們的形式是由下述約束確定的：(1)它們必須是後 Newton 量級的 ($k_{00}\sim\epsilon^4$, $k_{0j}\sim\epsilon^3$, $k_{ij}\sim\epsilon^2$)。(2)它們必須是無量綱的。(3) k_{00} 在旋轉的情況下必須是標量，k_{0j} 必須是三維矢量的分量，而 k_{jk} 必須是三維張量的分量。(4)在遠離太陽系處，修正必須至少像 $1/r$ 那樣快的衰減，因此在 $r=\infty$ 處坐標變爲整體 Lorentz 坐標而空時變得平直。(5)爲了簡單起見，可以假設度規分量僅由 ρ_0，$\rho_0\Pi$，t_{ij}，p，這些量與速度 v_j 的乘積以及這類量的時間微商產生；*而不是由它們的空間梯度得出。［直到 1973 年的檢查表明，這個簡化假設爲全部度規理論所滿足，Whitehead (1922) 以及 Will(1973) 所評述的理論除外——它們與實驗不符。］注，在練習 39.8 進一步證明這個假設是合理的。

(1)支配形式的法則

(2)修正的建立

從空間分量的修正開始，$k_{ij}\sim\epsilon^2$。只有兩個 ρ_0, p, Π, t_{jk}, v_j 的函數，它們衰減得至少像 $1/r$ 那樣快，它們是無量綱的，爲 $O(\epsilon^2)$，並且是二秩對稱的三維張量；它們是

$$\delta_{ij}U(\boldsymbol{x},t);\quad U_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)(x_i-x_i')(x_j-x_j')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x'。\quad (39.23a)$$

因而，對於某些恒定的「PPN 參量」γ 和 Γ，k_{ij} 必須是 $k_{ij}=2\gamma\delta_{ij}U+2\Gamma U_{ij}$。通過無窮小的坐標變換 [$x_{i\text{新}}=x_{i\text{舊}}+\Gamma\partial\chi/\partial x_i$ 其中 $\chi(\boldsymbol{x},t)=-\int\rho_0(\boldsymbol{x}',t)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|d^3x'$]，可令 $\Gamma=0$，由此得出

$$g_{ij}=\delta_{ij}+k_{ij}=\delta_{ij}(1+2\gamma U)+O(\epsilon^4)。\quad (39.23b)$$

*人們允許時間微商是因爲當展開到後 Newton 量級時推遲積分包括這類項；於是

$$\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'=\int\left[\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}-\frac{\partial\rho_0(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t}+\cdots\right]d^3x'。$$

然而，弄清楚的是，適當選擇坐標（「規範」），全部時間－奇次推遲項［例如 $\int(\partial\rho_0/\partial t)d^3x$］爲零，但在「後$^{5/2}$ Newton 量級」和在更高量級的近似中的項除外；那裏，它們導致輻射阻尼（參看框 39.3）。例如，$\int(\partial\rho_0/\partial t)d^3x=(d/dt)\int\rho_0 d^3x$ 由於重子數守恒而爲零。

其次考慮 $k_{0j}\sim\epsilon^3$。嘗試得出只有兩個矢量函數，它們按 $1/r$ 或更快地衰減，無量綱，且爲 $O(\epsilon^3)$。它們是

$$V_j(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)\cdot v_j(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x', \tag{39.23c}$$

$$W_j(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)](x_j-x_j')d^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}。 \tag{39.23d}$$

於是，k_{0j} 應是這些的線性組合，包括未知的常數（PPN 參量）Δ_1 和 Δ_2：

$$g_{0j}=k_{0j}=-\frac{7}{2}\Delta_1V_j-\frac{1}{2}\Delta_2W_j+O(\epsilon^5)。 \tag{39.23e}$$

最後，考慮 $k_{00}\sim\epsilon^4$。嘗試法得出各種項，它們全都可以與 g_{00} 的 Newton 部分聯合在一起，給出

$$g_{00}=-1+2U+k_{00}=-1+2U-2\beta U^2+4\Psi-\zeta\mathcal{A}-\eta\mathcal{D}, \tag{39.23f}$$

式中

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{x},t)&=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)\phi(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x',\\ \phi&=\beta_1v^2+\beta_2U+\frac{1}{2}\beta_3\Pi+\frac{3}{2}\beta_4p/\rho_0,\end{aligned} \tag{39.23g}*$$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)]^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x', \tag{39.23h}$$

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\left[t_{jk}(\boldsymbol{x}',t)-\frac{1}{3}\delta_{jk}t_{ll}(\boldsymbol{x}',t)\right](x_j-x_j')(x_k-x_k')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x'。 \tag{39.23i}$$

β, β_1, β_2, β_3, β_4, ζ, η 也是未知的常數（PPN 參量）。在別處的文獻中 g_{00} 中的項 $-\eta\mathcal{D}$ 被忽視了（見 1075 頁的脚注）。

雖然可能是另一項，人們仍可令

g_{00}=[(39.23f) 式中的值]

$$-\Sigma\iint\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)\rho_0(\boldsymbol{x}'',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')]}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'||\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|^3}d^3x'd^3x'', \tag{39.24}$$

式中 Σ 是另一個 PPN 參量。［應用 Newton 方程 (39.14)—(39.16) 可知，這個表達式在遠離太陽系處按 $1/r$ 衰減。］如果已經包括了這樣一個 Σ 項，

---

*警告：文獻中始終採符用號 ϕ 表示函數 (39.23g)，而我們則採用符號 Ψ，文獻中採用的 ϕ 是我們的 ψ，我們違背標準符號是爲了避免與 Newton 勢 $\phi=-U$ 混淆。然而，我們主張誰也不要再違背其他的標準符號了！

那麼可以通過作下述無窮小的坐標變換消去它

$$x^{0}_{\text{新}}=x^{0}_{\text{舊}}-\frac{1}{2}\Sigma\int\frac{\rho_0(x',t)[(x-x')\cdot v(x',t)]}{|x-x'|}d^3x' \qquad (39.25)$$

（見練習 39.9）。於是就沒有必要包括 Σ 項了。

坐標系的剛性

g_{00} 中無 Σ 項意味着時間坐標已經剛性地確定到後 Newton 量級：

$$x^0 \text{ 的不確定性只是 } O(R_\odot\epsilon^5)\sim 10^{-14}\text{秒。} \qquad (39.26a)$$

空間坐標也剛性地確定到後 Newton 量級：

$$x^j \text{ 的不確定性只是 } O(R_\odot\epsilon^4)\sim 0.1\text{ 厘米，} \qquad (39.26b)$$

因爲下述形式的任何變換

$$x^{j}_{\text{新}}=x^{j}_{\text{舊}}+\text{依賴位置的項 } O(\epsilon^2R_\odot)$$

將破壞度規空間部分的形式(39.23b)。

PPN 度規和參量的總結

總之，對於已創立的精度達到後 Newton 量級的幾乎每一種引力的度規理論，度規係數都具有 (39.23) 式的形式。一種理論與另一種理論的區別在於十個「後 Newton 參量」β, β_1, β_2, β_3, β_4, γ, ζ, η, Δ_1 和 Δ_2 的數值。這些值可通過把給定理論的場方程與後 Newton 度規的形式 (39.23) 相比較而確定。廣義相對論的參量值和若干其他理論的參量值在框 39.2 中給出，同時給出每一個參量的啓發性描述。

練習

練習 39.8 在後 Newton 極限中無「度規產生度規」項

在寫下後 Newton 度規修正時，人們可能受到誘惑，把那些因 Newton 勢的單獨作用所產生的項包括進來，而沒有任何來自物質的直接幫助。歸根到底，廣義相對論和別的度規理論都是非線性的；因此，包括兩個步驟的過程（物質）$\to U\to$（後 Newton 度規修正）看來是十分自然的。試證明，這類項是不需要的，因爲 Newton 近似的方程 (39.14)—(39.16) 使人們能够用對物質分布的直接積分重新表示它們。特別是，證明

$$\int\frac{\partial^2U(x',t)/\partial x_j'\partial t}{|x-x'|}d^3x'=2\pi[V_j(x,t)-W_j(x,t)] \qquad (39.27)$$

式中 V_j 和 W_j 是由 (39.23c,d) 定義的；再證明

$$\int\frac{[\partial U(x',t)/\partial x_j'][\partial U(x',t)/\partial x_j']}{|x-x'|}d^3x'\text{。}$$

$$=-2\pi[U(x,t)]^2+4\pi\int\frac{\rho_0(x',t)\,U(x',t)}{|x-x'|}d^3x'\text{。} \qquad (39.28)$$

注：(39.27) 式和 (39.28) 式右邊的項已經包括在 g_{0j} 和 g_{00} 的表達式 (39.23e,f) 之中。

練習 39.9　從 g_{00} 消去 Σ 項

試證明，正如正文所要求的那樣，坐標變換 (39.25) 從 (39.24) 式的度規係數 g_{00} 中消去了 Σ 項。

練習 39.10　證實後 Newton 修正的形式

試證實正文的要求即爲前面的 (39.23a,b,c,f) 式。

§ 39.9　PPN 坐標相對於「宇宙靜止系」的速度

迄今，已經不言而喻地假設，太陽系的質心在 PPN 坐標系中是靜止的。這確實是一個可以容許的假設嗎？換言之，人們能否總是這樣調整 PPN 坐標系，使得它的原點以任何所希望的速度（例如，太陽系的速度）運動；或者，PPN 坐標系是否剛性地和不可改變地依附於某個「宇宙靜止系」？

在廣義相對論中，彎曲空時的幾何挑選無優先的坐標系（具有特殊對稱性的情形除外）。因此，人們預料 PPN 坐標系的速度是能自由指定的。換言之，人們預料，對於廣義相對論，全部 PPN 表述在 PPN 坐標的 Lorentz 變換下是不變的［或許，應與「無窮小的坐標變換」聯合，以保持規範條件使 (39.24) 式和 (39.23a) 式中無「Σ」項和「U_{jk}」項］。反之，在 Ni 的引力理論中（框 39.1），空時的幾何總是挑選優先的坐標系：「宇宙靜止系」。無須驚訝，在這種情形下，會發現 PPN 坐標系剛性地依附於宇宙靜止系。

引力的優先系理論

根據 Will (1971d) 以及 Will 和 Nordtvedt (1972) 的計算，上述直覺是正確的。當涉及廣義相對論以及幾乎沒有「前幾何」的其他理論時，人們可以自由地規定 PPN 坐標系（在時間的某個初始瞬間）的速度。但對於像 Ni 的具有優先的「宇宙靜止系」的理論（「優先系的理論」），僅在該優先系中才能假設後 Newton 度規具有上節導出的形式［(39.23)式］。對 PPN 度規的這個限制並不意味着，在優先系理論中，全部計算都限制在宇宙靜止系中完成。倒不如說，它意味着，對於這類理論，PPN 度規需要推廣以便考慮坐標系相對於宇宙靜止系的運動。

所需的推廣可以通過使 PPN 度規 (39.23) 服從下述要求來完成(1)從優先系 $\{x^{\alpha\text{舊}}\}$ 到以速度 $\boldsymbol{w}$ 運動的新的 PPN 系 $\{x^{\alpha\text{新}}\}$ 的 Lorentz 增速，加上(2)設計一規範變化，保持度規係數儘可能簡單。這個增速加上規範變化就是［Will 和 Nordtvedt (1972)］

把 PPN 度規推廣到運動系

$$x_{舊}=x_{新}+\frac{1}{2}(x_{新}\cdot w)w+\left(1+\frac{1}{2}w^2\right)wt_{新}+O(\epsilon^5 t_{新}+\epsilon^4 x_{新}), \tag{39.29a}$$

$$t_{舊}=t_{新}\left(1+\frac{1}{2}w^2+\frac{3}{8}w^4\right)+\left(1+\frac{1}{2}w^2\right)x_{新}\cdot w+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\Delta_2+\zeta-1\right)w_j\frac{\partial\chi}{\partial x^j_{新}}}_{\text{[規範變化]}}+O(\epsilon^6 t_{新}+\epsilon^5 x_{新}), \tag{39.29b}$$

$$\chi(t_{新},x_{新})\equiv-\int\rho_0(t_{新}\cdot x'_{新})|x_{新}-x'_{新}|d^3x'_{新}。 \tag{39.29c}$$

[注：人們堅持認爲，後 Newton 近似的精神實質是，新的 PPN 系相對於宇宙靜止系的速度 w 不大於系統的特徵內部速度：

$$|w|\lesssim\epsilon。 \qquad] \tag{39.30}$$

坐標的這種變化引起了物質速度的相應變化

$$v_{舊}=\frac{dx_{舊}}{dt_{舊}}=v_{新}\left(1-w\cdot v_{新}-\frac{1}{2}w^2\right)+w\left(1-\frac{1}{2}w\cdot v_{新}\right)+O(\epsilon^5)。 \tag{39.31}$$

冗長但直截了當的計算（練習 39.11）得出了在新的 PPN 坐標中的下述度規分量。[注：此處及此後把下標新從符號中去掉了。]

$$g_{jk}=\delta_{jk}(1+2\gamma U)+O(\epsilon^4), \tag{39.32a}$$

$$g_{0j}=-\frac{7}{2}\Delta_1 V_j-\frac{1}{2}\Delta_2 W_j+\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1\right)w_j U-\alpha_2 w_k U_{kj}+O(\epsilon^5), \tag{39.32b}$$

度規的最後形式

$$g_{00}=-1+2U-2\beta U^2+4\Psi-\zeta\mathcal{A}-\eta\mathcal{B}+(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)w^2U+(2\alpha_3-\alpha_1)w_jV_j-\alpha_2 w_j w_k U_{jk}+O(\epsilon^6)。 \tag{39.32c}$$

此處 α_1,α_2 和 α_3 是 PPN 參量的確定的組合

$$\alpha_1=7\Delta_1+\Delta_2+4\gamma-4, \tag{39.33a}$$

$$\alpha_2=\Delta_2+\zeta-1, \tag{39.33b}$$

$$\alpha_3=4\beta_1-2\gamma-2-\zeta。 \tag{39.33c}$$

此處出現的「引力勢」U, V_j, W_j, Ψ, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 應在新的「運動的」PPN 坐標系中計算，並採用在宇宙靜止系中用過的同樣規定。於是，它們的函數形式與

以前相同，但它們在任意給定事件處的值是不同的（見練習 39.11）：

$$U(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'\,; \tag{39.34a}$$

$$V_j(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)v_j(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'\,; \tag{39.34b}$$

$$W_j(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)](x_j-x_j')d^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\,; \tag{39.34c}$$

$$\Phi(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)\phi(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'\,,$$

$$\phi=\beta_1v^2+\beta_2U+\frac{1}{2}\beta_3\Pi+\frac{3}{2}\beta_4p/\rho_0\,; \tag{39.34d}$$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)]^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x'\,; \tag{39.34e}$$

$$\Phi(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\left[t_{jk}(\boldsymbol{x}',t)-\frac{1}{3}\delta_{jk}t_{ll}(\boldsymbol{x}',t)\right](x_j-x_j')(x_k-x_k')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x'\,。 \tag{39.34f}$$

量 U_{jk} 是在（39.23a）式中定義的引力勢：

$$U_{jk}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)(x_j-x_j')(x_k-x_k')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x'\,。 \tag{39.34g}$$

注意，僅當一個或多個係數 α_1, α_2, α_3 爲非零時，PPN 坐標系相對於宇宙靜止系的速度才在 PPN 度規中明顯地出現。於是 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ 的理論（例如廣義相對論）在後 Newton 極限中具有無優先的宇宙靜止系；其所有 PPN 系都是「平等設立」的。反之，至少 α_1, α_2, α_3 之一爲非零的理論（例如 Ni 的理論）的確具有一個優先系。

PPN 度規的推廣形式 (39.32)，由於它的建立過程，在 Lorentz 增速加上規範調整下是不變的 [「後 Galileo 變換」，見 Chandrasekhar 和 Contopolous (1967)]:

後 Galileo 不變性

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{舊}&=\boldsymbol{x}_{新}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{新}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}+\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)\boldsymbol{\beta}t_{新}\\&\quad+O(\epsilon^5t_{新}+\epsilon^4\boldsymbol{x}_{新})\,,\end{aligned} \tag{39.35}$$

$$\begin{aligned}t_{舊}&=\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4\right)t_{新}+\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)\boldsymbol{x}_{新}\cdot\boldsymbol{\beta}\\&\quad+\left(\frac{1}{2}\Delta_2+\zeta_1-1\right)\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_{新}\chi+O(\epsilon^6t_{新}+\epsilon^5\boldsymbol{x}_{新})\,。\end{aligned}$$

當然，它在空間旋轉下也是不變的。

練習

練習 39.11 變換到運動系

試證明，坐標變換 (39.29) 把 PPN 度規係數從形式 (39.23) 變爲形式 (39.32)。[提示：(1)堅定地記住勢 U, V_j, W_j, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{D}$ 並非標量場這一事實。每一個坐標系都具有它本身的勢。例如，把 (39.29) 式用於 $U_{舊}$ 的積分中，得出

$$U_{舊}(\boldsymbol{x}_{舊},t_{舊})=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}'_{舊},t_{舊})}{|\boldsymbol{x}_{舊}-\boldsymbol{x}'_{舊}|}d^3x'_{舊} \tag{39.36}$$

$$=\Big[U_{新}-w_j(V_{j新}-W_{j新})+\frac{1}{2}w_jw_k\chi_{,jk}\Big]_{x_{新},t_{新}}+O(\epsilon^6)。$$

(2)重子守**恒定律 (39.44)** 式可能是有用的。]

§ 39.10 PPN 脅强-能量張量

太陽系的運動是受方程 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$ 支配的。在研究它們之前，必須在 PPN 坐標系中計算對脅强-能量張量的後 Newton 修正。這需要從共動的正交歸一系 $\omega^{\hat{a}}$ 其中

$$T^{\hat{0}\hat{0}}=\rho_0(1+\Pi),\quad T^{\hat{0}\hat{j}}=0,\quad T^{\hat{j}\hat{k}}=t_{\hat{j}\hat{k}}, \tag{39.37}$$

變換到該坐標系。人們可以用兩步來實現這個變換：第二步是在該坐標系與依附在它上面的正交歸一系之間的一個變換

$$\omega^{\hat{0}}\equiv[1-U+O(\epsilon^4)]dt \tag{39.38a}$$

$$+\Big[\frac{7}{2}\Delta_1V_j+\frac{1}{2}\Delta_2W_j+\Big(\frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_2\Big)w_jU+\alpha_2w_kU_{kj}+O(\epsilon^5)\Big]dx^j,$$

$$\omega^{\hat{j}}\equiv[(1+\gamma U)\delta_{jk}+O(\epsilon^4)]dx^k+O(\epsilon^5)dt, \tag{39.38b}$$

第一步是兩個正交歸一系 $\omega^{\hat{a}}$ 和 $\omega^{\bar{a}}$ 之間的純 Lorentz 變換（增速）。這種增速的四維速度是物質四維速度的負值，它的分量是

$$u^j=v_ju^0,\qquad u^0=1+\frac{1}{2}v^2+U+O(\epsilon^4)\quad\text{在坐標系中；} \tag{39.39}$$

$$\left.\begin{aligned}&u^{\bar{j}}=v_{\bar{j}}u^{\bar{0}},\qquad u^{\bar{0}}=1+\frac{1}{2}v^2+O(\epsilon^4),\\&v_{\bar{j}}=v_j[1+(1+\gamma)U]\end{aligned}\right\}\text{在 }\omega^{\bar{a}}\text{ 系中。} \tag{39.40}$$

把這種增速（它具有普通的速度 $\beta_{\bar{j}}=-v_{\bar{j}}$）與變換 (39.38) 聯合起來，再倒置，得出結果（練習 39.12）

$$dx^{\alpha}=A^{\alpha}{}_{\hat{\beta}}\omega^{\hat{\beta}},\quad \begin{cases}\omega^{\hat{\beta}}=\text{正交歸一共動基},\\ dx^{\alpha}=\text{PPN 坐標基};\end{cases}$$

從物質靜止系轉換到 PPN 坐標系

$$A^{\hat{0}}{}_{0}=1+\frac{1}{2}v^2+U+O(\epsilon^4),$$

$$A^{\hat{0}}{}_{j}=v_j\Big[1+\frac{1}{2}v^2+(2+\gamma)U-\frac{7}{2}\Delta_1V_j-\frac{1}{2}\Delta_2W_j$$

$$+\Big(\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1\Big)w_jU-\alpha_2w_kU_{kj}+O(\epsilon^5),\qquad(39.41)$$

$$A^{\hat{j}}{}_{0}=v_j\Big[1+\frac{1}{2}v^2+U\Big]+O(\epsilon^5),$$

$$A^{\hat{j}}{}_{k}=(1-\gamma U)\delta_{jk}+\frac{1}{2}v_jv_k+O(\epsilon^4)。$$

當把這個變換用於脅强-能量張量 (39.37) 時，得出在 PPN 坐標系中

在坐標系中的脅强-能量張量

$$T^{00}=\rho_0(1+\Pi+v^2+2U)+O(\rho_0\epsilon^4),\qquad(39.42a)$$

$$T^{0j}=\rho_0(1+\Pi+v^2+2U)v_j+t_{j\hat{m}}v_m+O(\rho_0\epsilon^5),\qquad(39.42b)$$

$$T^{jk}=t_{j\hat{k}}(1-2\gamma U)+\rho_0(1+\Pi+v^2+2U)v_jv_k$$

$$+\frac{1}{2}(v_jt_{k\hat{m}}v_m+v_kt_{j\hat{m}}v_m)+O(\rho_0\epsilon^6)。\qquad(39.42c)$$

練習 39.12 共動系和 PPN 系之間的變換

練習

仔細推導變換矩陣 (39.41)；並在此過程中計算對 $A^{\hat{0}}{}_{0}$ 的 $O(\epsilon^4)$ 的修正。

---

§ 39.11　PPN 運動方程

對 Newton 運動方程 (39.15) 和 (39.16) 的後 Newton 修正是從重子數守恒定律 $(\rho_0u^{\alpha})_{;\alpha}=0$，和從局域能量-動量守恒定律 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$ 導出的。最簡單的運動方程是重子數守恒。它的精確表達式是 $(\rho_0u^{\alpha})_{;\alpha}=(1/\sqrt{-g})(\sqrt{-g}\,\rho_0u^{\alpha})_{,\alpha}=0$。定義一個新的量

$$\rho^{*}\equiv\rho_0\Big(1+\frac{1}{2}v^2+3\gamma U\Big)\qquad(39.43)$$

$$=\rho_0u^0\sqrt{-g}+O(\rho_0\epsilon^4)$$

[參看 (39.39) 式的 u^0 和 (39.32) 式的度規] 。靜止質量守恒的形式與在 Newton 量級 (39.15a) 中相同，只是現在它更精確了：

重子守恒定律

$$\rho^*{}_{,t}+(\rho^* v_j)_{,j}=0+O(\rho_{0,j}\epsilon^5) \text{ 的誤差。} \tag{39.44}$$

其次的最簡單的運動方程是 $T^{0\alpha}{}_{;\alpha}=0$。利用(39.32)式的度規以及(39.42)式的脅强-能量張量，直截了當的計算得出

$$\begin{aligned}&[\rho_0(1+\Pi+v^2+2U)]_{,t}+[\rho_0(1+\Pi+v^2+2U)v_j+t_{j\hat{m}}v_m]_{,j}\\&\quad+(3\gamma-2)\rho_0 U_{,t}+(3\gamma-3)\rho_0 v_k U_{,k}=O(\rho_{0,j}\epsilon^5)。\end{aligned} \tag{39.45}$$

從此式減去 (39.44) 式，再利用 Newton運動方程 (39.15) 和 (39.16) 簡化若干項（其中 Newton 近似是適用的），得出

能量守恒定律

$$\rho_0 d\Pi/dt+t_{j\hat{k}}v_{j,k}=0+O(\rho_{0,j}\epsilon^5) \text{ 的誤差。} \tag{39.46}$$

注意，此式就是熱力學第一定律（局域能量守恒），並忽略經過物質的能流，別無其他。（在 §39.5 中說明忽略能流是合理的。）這個熱力學第一定律實際上就是在流體動力學方面的後 Newton 方程，而不是 Newton 方程，因爲在 Newton 量級 Π 並不影響流體動力學的運動（見 §39.7）。

最後的運動方程 $T^{j\alpha}{}_{;\alpha}=0$ 化爲後 Newton 的 Euler 方程。

後 Newton 的 Euler 方程

$$\begin{aligned}&\rho^*\frac{dv_j}{dt}-\rho^* U_{,j}+[t_{j\hat{k}}(1+3\gamma U)]_{,k}-t_{j\hat{k},k}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi\right)-\frac{t_{j\hat{k}}t_{\hat{k}l,l}}{\rho^*}\\&\quad+\rho^*\frac{d}{dt}\left[(2\gamma+2)Uv_j-\frac{1}{2}(7\Delta_1+\Delta_2)V_j-\frac{1}{2}\alpha_1 U w_j\right]-v_j\rho^* U_{,t}+v_k t_{\hat{k}j,t}\\&\quad+\frac{1}{2}\Delta_2\rho^*(V_j-W_j)_{,t}+\frac{1}{2}\rho^*[(7\Delta_1+\Delta_2)v_k+(\alpha_1-2\alpha_3)w_k]V_{k,j}\\&\quad-\rho^*\left[2\Phi_W-\frac{1}{2}\zeta\Phi_1-\frac{1}{2}\eta\Phi_2-\frac{1}{2}\alpha_2 w_i w_k U_{jk}+\alpha_2 w_i(V_i-W_i)\right]_{,j}\\&\quad-\rho^* U_{,j}\left[\gamma v^2-\frac{1}{2}\alpha_1 \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_3-\alpha_1)w^2-(2\beta-2)U+3\gamma p/\rho^*\right]\\&\quad+\frac{1}{2}(v_{j,k}t_{k\hat{m}}v_m-t_{j\hat{m}}v_{m,k}v_k)+\frac{1}{2}[v_m(t_{\hat{m}j}v_k)_{,k}-v_j(t_{kl}v_k)_{,l}]=0。\end{aligned} \tag{39.47}$$

偏微商用逗號表示；d/dt 是循着物質的時間微商 [(39.16) 式]。

(39.44), (39.46) 和 (39.47) 式是在後 Newton 量級的一組完備的運動方程。

練習 39.13 運動方程　　**練習**

仔細完成運動方程 (39.44), (39.46) 和 (39.47) 的推導。作爲推導的一部分，在 PPN 坐標系中計算 Christoffel 符號的下述值：

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^0{}_{00}=-U_{,t}+O(U_{,j}\epsilon^3)\,,\quad \Gamma^0{}_{0j}=-U_{,j}+O(U_{,j}\epsilon^2)\,,\\
&\Gamma^0{}_{jk}=\gamma U_{,t}\delta_{jk}+\frac{7}{2}\Delta_1 V_{(j,k)}+\frac{1}{2}\Delta_2 W_{(j,k)}+\Big(\frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_2\Big)w_{(j}U_{,k)}\\
&\qquad+\alpha_2 w_i U_{i(j,k)}+O(U_{,j}\epsilon^3)\,。\\
&\Gamma^j{}_{00}=-U_{,j}+\Big[(\beta+\gamma)U^2-2\Phi_1+\frac{1}{2}\zeta\Phi_2+\frac{1}{2}\eta\Phi_3+\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)w^2U\\
&\qquad+\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_3)w_iV_i+\frac{1}{2}\alpha_2 w_i w_k U_{ik}\Big]_{,j}-\frac{7}{2}\Delta_1 V_{j,t}-\frac{1}{2}\Delta_2 W_{j,t}\qquad(39.48)\\
&\qquad+\Big(\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1\Big)w_jU_{,t}-\alpha_2 w_i U_{ij,t}+O(U_{,j}\epsilon^4)\,,\\
&\Gamma^j{}_{0k}=\gamma U_{,t}\delta_{jk}-\Big(\frac{7}{2}\Delta_1+\frac{1}{2}\Delta_2\Big)V_{[j,k]}-\frac{1}{2}\alpha_1 w_{[j}U_{,k]}+O(U_{,j}\epsilon^3)\,,\\
&\Gamma^j{}_{kl}=-\gamma(U_{,j}\delta_{kl}-2U_{,(k}\delta_{l)j})+O(U_{,j}\epsilon^2)\,。
\end{aligned}
$$

此處張量指標上的方括號表示反對稱性，圓括號表示對稱性。作爲推導的一部分，證明並應用以下關係式是有益的

$$\chi(t,\boldsymbol{x})=-\int\rho_0(t,\boldsymbol{x}')|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\,d^3x'\,,\qquad(39.49a)$$

$$\chi_{,jk}=-\delta_{jk}U+U_{jk}\,,\qquad(39.49b)$$

$$\chi_{,tt}=V_i-W_i+O(\epsilon^5)\,,\qquad(39.49c)$$

$$W_{[k,j]}=V_{[k,j]}\,。\qquad(39.50)$$

此處 χ 是原先在 (39.29c) 式中定義的函數。

練習 39.14 廣義相對論的後 Newton 近似

作 Einstein 場方程的後 Newton 展開，由此得出框 39.2 所引用的廣義相對論的 PPN 參量值。計算最好遵循 Chandrasekhar (1965a) 的方法：令 $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$，並假設

$$h_{00}=O(\epsilon^2)+O(\epsilon^4),\quad h_{0j}=O(\epsilon^3),\quad h_{jk}=O(\epsilon^2)\,。\qquad(39.51)$$

選擇空間和時間坐標使下述四個「規範條件」得到滿足

$$\left.\begin{aligned}&h_{jk,k}-\frac{1}{2}h_{,j}=O(\epsilon^4/R_\odot)\\&h_{0k,k}-\frac{1}{2}h_{kk,0}=O(\epsilon^5/R_\odot)\end{aligned}\right\}\text{且有}h=h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}=-h_{00}+h_{ll}\,。\qquad(39.52)$$

(a) 試證明空間規範條件就是在研究弱引力波時用過的 (35.1a) 式的後 Newton 近似，但時間規範條件並非如此。

(b) 利用這些規範條件以及 (8.24) 和 (8.27) 式的後 Newton 極限，得出 Ricci 張量，精確到線性量級

$$R_{00}=-\frac{1}{2}h_{00,mm}+O(\epsilon^4/R_\odot^2)\,,\qquad R_{jk}=-\frac{1}{2}h_{jk,mm}+O(\epsilon^4/R_\odot^2)\,,\tag{39.53a}$$

$$R_{0j}=-\frac{1}{2}h_{0j,mm}-\frac{1}{4}h_{00,0j}+O(\epsilon^5/R_\odot^2)\,。\tag{39.53b}$$

(c) 把這些與脊强－能量張量的 Newton 形式 (39.13)，並與 (39.27) 式聯合起來，得出下述度規係數，精確到線性量級：

$$h_{00}=2U+\underset{\text{[未知的後 Newton 修正]}}{k_{00}}+O(\epsilon^6)\,,\qquad h_{0j}=-\frac{7}{2}V_j-\frac{1}{2}W_j+O(\epsilon^5)\,,$$
$$h_{jk}=2U\delta_{jk}+O(\epsilon^4)\,。\tag{39.54}$$

此處的 U, V_j 和 W_j 可看作是由 (39.34a,b,c) 定義的。把這些度規系數與 (39.32) 式比較，發現對於廣義相對論，有

$$\gamma=1\,,\qquad \Delta_1=1\,,\qquad \Delta_2=1\,。\tag{39.55}$$

(d) 由線性量級的這種度規知識，可以完成 §39.10 的分析（始終採用 $\gamma=\Delta_1=\Delta_2=1$），以得出脊强－能量張量的後 Newton 修正 [(39.42) 式且 $\gamma=1$]。

(e) 類似地，利用 $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$，利用 (39.54) 式給出的 $h_{\alpha\beta}$，並利用規範條件 (39.52)，計算對 Ricci 張量分量 R_{00} 的後 Newton 修正，答案將是

$$R_{00}=\left(-U-\frac{1}{2}k_{00}-U^2\right)_{,mm}+4UU_{,mm}+O(\epsilon^6/R_\odot^2)\,。\tag{39.56}$$

(f) 計算 Einstein 方程 $R_{00}=8\pi(T_{00}-\frac{1}{2}g_{00}T)$，精確到後 Newton 量級，並求解得出後 Newton 度規修正

$$k_{00}=-2U^2+4\Psi\,,\tag{39.57}$$

式中 Ψ 是由 (39.43d) 式取 $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=1$ 給出的。與 (39.32c) 和 (39.34d) 比較，發現對於廣義相對論，有

$$\beta=\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=1\,,\qquad \zeta=\eta=0\,。\tag{39.58}$$

(g) 知道了全部後 Newton 度規以及全部後 Newton 脊强－能量張量，就可以完成 §39.11 的計算（利用 $\gamma=\beta=\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=\Delta_1=\Delta_2=1$，$\zeta=\eta=0$），得出物質的後 Newton 運動方程 [(39.44), (39.46) 和 (39.47) 式]。

§ 39.12　PPN 坐標與周圍宇宙的關係

一個至關緊要的問題仍然有待澄清： PPN 坐標系相對於周圍宇宙的取向是什麼？更特殊地說： PPN 坐標系是否相對於「固定在天空中的恒星」旋轉；或者它是否在某種意義上「剛性地依附在」它們之上？爲了回答這個問題，設想用 PPN 表述去分析太陽系。關於太陽系穿過 PPN 坐標系的速度不作假設。然後，隨着人們從太陽向外運動，經過地球的軌道，經過冥王星的軌道，並處在向外的恒星際空間之中，人們看到， PPN 坐標系的整體性質變得越來越像 Lorentz $[g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+O(M_\odot/r)]$。於是，在遠離太陽系處，PPN 坐標變成一個「穿過星系運動的 Lorentz 系」。當然，這意味着，PPN 坐標系的空間軸的行爲就好像它們依附於遠離太陽系之外的迴轉器之上。等價地， PPN 坐標系穿過星系和宇宙的空時幾何 Fermi-Walker-遷移其空間軸。

太陽系的 PPN 坐標系依附於銀河系的局域 Lorentz 系

§ 39.13　PPN 表述的總結

本章建立的 PPN 表述，在框 39.4 中作了總結。許多近代文獻採用了與本書不同的一組 PPN 參量；從一組參量到另一組參量的轉換，見框 39.5。

練習 39.15　廣義相對論後 Newton 極限中的多體系統　　**練習**

在廣義相對論的後 Newton 極限中，考慮一個系統，它是由許多引力相互作用的物體構成的，這些物體的分離比它們的大小要大得多（例如，太陽系）。把每一個物體理想化爲球對稱，沒有內部運動，且具有各向同性的內脊張 $t_{jk}=\delta_{jk}p$。設物體 A 中心的世界線，在某個選定的 PPN 坐標系中，爲 $x_A(t)$；並設物體 A 中心的（坐標）速度爲

$$v_A(t)=dx_A/dt。\tag{39.59a}$$

在其鄰域測出物體 A 的總質量-能量（靜止質量-能量加上內能加上自引力能）爲

$$M_A=\int_{\mathcal{V}_A}\left(1+\Pi+\frac{1}{2}U_{自}\right)d\,(\text{靜止質量})+O(M_A\epsilon^4),\tag{39.59b}$$

式中 $U_{自}$ 是物體自身的 Newton 勢（沒有來自其他物體的貢獻），$\mathcal{V}_A$ 是物體的內部。

（接第1094頁）

框 39.4 PPN 表述的總結

I. 變量：

$\rho_0(x,t)$：重子「質量」密度（§39.3），在靜止系中測量

$\Pi(x,t)$：比內能（無量綱；§39.3），在靜止系中測量

$t_{jk}(x,t)$：靜止系正交歸一軸的脅强分量

$v_j(x,t)$：物質（即靜止系）相對於 PPN 坐標的坐標速度

$U(x,t)$, $\Psi(x,t)$, $\mathcal{A}(x,t)$, $\mathcal{Q}(x,t)$, $V_j(x,t)$, $W_j(x,t)$, $U_{jk}(x,t)$：引力勢

γ, β, β_1, β_2, β_3, β_4, Δ_1, Δ_2, ζ, η：參量，在各種理論中它們的值有區別（見框39.2）

w: PPN 坐標系相對於「宇宙靜止系」的速度［只與具有非零 α_1, α_2 或 α_3 的理論有關；見 (39.33) 式］。

II. 支配這些變量演化的方程

ρ_0：靜止質量守恒，(39.44)式

Π：熱力學第一定律，(39.46) 式

t_{jk}：由 ρ_0, Π 和其他物質變量（化學成分，脅變等等）通過狀態方程和受力介質的常見理論（此處不討論）來確定。

v_j：運動方程（「$F=ma$」），(39.47)式

U, Ψ, $\mathcal{A}$, $\mathcal{Q}$, V_j, W_j, U_{jk}：源方程 (39.34) 式

III. 從這些變量計算的量

$g_{00}(x,t)$, $g_{0j}(x,t)$, $g_{jk}(x,t)$：在 PPN 坐標系中度規的這些分量是通過 (39.32) 式用引力勢表示的

$u^0(x,t)$, $u^j(x,t)$：在 PPN 坐標系中物質四維速度的這些分量由 (39.39) 式給出

$T^{00}(x,t)$, $T^{0j}(x,t)$, $T^{jk}(x,t)$：在 PPN 坐標系中脅强－能量張量的這些分量由 (39.42) 式給出

IV. 靜止系，PPN 坐標，以及宇宙之間的關係

1. 靜止系的正交歸一基 $\omega^{\hat{a}}$ (t_{jk} 在其中定義) 與 PPN 坐標基 dx^{α} 通過 (39.41)相聯繫。
2. 遠離太陽處，PPN 坐標漸近地變爲 Lorentz; 即它們形成一個穿過星系和宇宙的空時幾何運動的慣性系。
3. 不考慮宇宙的膨脹或不考慮宇宙引力波對太陽系的衝擊。

框 39.5　文獻中採用的PPN參量：轉換者的指南

PPN 表述原先的「點粒子形式」[Nordtvedt (1968b)]，以及原先的「理想流體形式」[Will (1971c)] 用不同的 PPN 參量組。本書採用 Will 的一組參量，並加上表徵各向異性脅强效應的參量 η。最近，Will 和 Nordtvedt 共同採用了一組修正的參量，描述如下。

A. 轉換表

Will-Nordtvedt 修正的參量[a]	修正的參量，用本書的符號[b]	修正的參量，用 Nordtvedt (1968b) 的符號[c]
γ	γ	γ
β	β	β
α_1	$7\Delta_1+\Delta_2-4\gamma-4$	$8\Delta-4\gamma-4$
α_2	$\Delta_2+\zeta-1$	$\alpha'''-1$
α_3	$4\beta_1-2\gamma-2-\zeta$	$4\alpha''-\alpha'''-2\gamma-1$
ζ_1	ζ	$\alpha'''-\chi$
ζ_2	$2\beta+2\beta_2-3\gamma-1$	$2\beta-\alpha'-1$
ζ_3	β_3-1	缺
ζ_4	$\beta_4-\gamma$	缺

[a]修正的參量是 Will 和 Nordtvedt (1972), Nordtvedt 和 Will (1972), Will (1972)，和 Ni (1973) 採用的。
[b]本書的符號是 Will (1971a, b, c, d), Ni (1972), 以及 Thorne, Ni 和 Will (1971) 採用的。
[c] Nordtvedt 原先的「點粒子」參量是 Nordtvedt (1968b, 1970, 1971 a, b) 採用的。

B. 修正的參量的含義

α_1，α_2，α_3 量度「優先系效應」的範圍和性質；見 §39.9。至少有一個 α 爲非零的任何引力理論都稱爲**優先系理論**。

ζ_1，ζ_2，ζ_3，ζ_4，α_3 量度整體守恒定律破壞的範圍和性質。當且僅當 $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\zeta_4=\alpha_3=0$ 時，在後 Newton 水準上，引力理論具有全部10個整體守恒定律（4 個能量－動量守恒，6 個角動量守恒；見第19章和第20章）。證明和討論可參看 Will (1971d), Will 和 Nordtvedt (1972), Will (1972)。具有 $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\zeta_4=\alpha_3=0$ 的任何理論稱爲**守恒理論**。

在廣義相對論和 Dicke-Brans-Jordan 理論中，全部 α 和 ζ 均爲零。因而，廣義相對論和 Dicke-Brans-Jordan 理論是守恒理論而不具有優先系效應。

(a) 試證明，在選定的 PPN 坐標系寫出的 M_A 的表達式變爲

$$M_A=\int_{\mathcal{V}_A}\rho_0\Big(1+\Pi+\frac{1}{2}v_A^2+3U-\frac{1}{2}U_{自}\Big)d^3x+O(M_A\epsilon^4)。\tag{39.59c}$$

利用 (39.43), (39.44) 和 (39.46) 式證明，當各物體在其周圍運動時 M_A 守恒，$dM_A/dt=0$。

(b) 在全部物體之外挑選一事件 $(t, \boldsymbol{x})$，在時間 t 表爲

$$\boldsymbol{r}_A\equiv\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{r}_{AB}\equiv\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_B,\quad r_A\equiv|\boldsymbol{r}_A|,\quad r_{AB}\equiv|\boldsymbol{r}_{AB}|。\tag{39.59d}$$

試證明在選定事件處廣義相對論後 Newton 度規 (39.32) 的形式爲

$$g_{jk}=\delta_{jk}\Big(1+2\sum_A\frac{M_A}{r_A}\Big)+O(\epsilon^4),\tag{39.60a}$$

$$g_{0j}=-\sum_A\frac{M_A}{r_A}\Big[\frac{7}{2}v_{Aj}+\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{r}_A)r_{Aj}}{r_A^2}\Big]+O(\epsilon^5),\tag{39.60b}$$

$$g_{00}=-1+2\sum_A\frac{M_A}{r_A}-2\Big(\sum_A\frac{M_A}{r_A}\Big)^2+3\sum_A\frac{M_Av_A^2}{r_A}$$
$$-2\sum_A\sum_{B\neq A}\frac{M_AM_B}{r_Ar_{AB}}+O(\epsilon^6)。\tag{39.60c}$$

[提示：把 Newton 維里定理 (39.21a) 用於物體 A (A 在它自身的靜止系中)，由此斷定

$$\int_{\mathcal{V}_A}\Big(3p-\frac{1}{2}\rho_0U_{自}\Big)d^3x=O(M_A\epsilon^4),\tag{39.61}$$

式中的積分是在 PPN 系中完成的。]

(c) 作無窮小的坐標變換

$$t_{舊}=t_{新}-\frac{1}{2}\sum_A\frac{M_A(\boldsymbol{r}_A\cdot\boldsymbol{v}_A)}{r_A},\qquad \boldsymbol{x}_{舊}=\boldsymbol{x}_{新},\tag{39.62}$$

把度規 (39.60) 引入標準形式，後者最初是由 Einstein, Infeld 和 Hoffman (1938)，以及 Eddington 和 Clark (1938) 作出的：

$$g_{jk}=\delta_{jk}\Big(1+2\sum_A\frac{M_A}{r_A}\Big)+O(\epsilon^4),\tag{39.63a}$$

$$g_{0j}=-4\sum_A\frac{M_A}{r_A}v_{Aj}+O(\epsilon^5),\tag{39.63b}$$

$$g_{00}=-1+2\sum_A\frac{M_A}{r_A}-2\Big(\sum_A\frac{M_A}{r_A}\Big)^2+3\sum_A\frac{M_Av^2{}_A}{r_A}$$
$$-2\sum_A\sum_{B\neq A}\frac{M_AM_B}{r_Ar_{AB}}-\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}+O(\epsilon^6),\tag{39.63c}$$

式中 χ〔(39.49a)〕式〕由下式給出

$$\chi=-\sum_A M_A r_A。$$

(d) 各物體的運動方程可以由下述兩種方法中之任一得出：作 Euler 方程 (39.48) 的體積分，遍及每一個物體的內部；或援引 §20.6 的普遍論證。後一種方法更爲簡單。利用它斷定，任何選定物體 K 沿着〔在 (39.63) 式的求和中略去 $A=K$ 項所得〕度規的一條短程線運動。試證明，物體 K 的這個短程線方程化爲

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_K}{dt^2}\equiv\frac{dv_K}{dt}=&\sum_{A\neq K} r_{AK}\frac{M_A}{r_{AK}^3}\Big[1-4\sum_{B\neq K}\frac{M_B}{r_{BK}}-\sum_{C\neq A}\frac{M_C}{r_{CA}}\Big(1-\frac{r_{AK}\cdot r_{CA}}{2r_{CA}^2}\Big)\\&+v_K^2+2v_A^2-4v_A\cdot v_K-\frac{3}{2}\Big(\frac{v_A\cdot r_{AK}}{r_{AK}}\Big)^2\Big]\\&-\sum_{A\neq K}(v_A-v_K)\frac{M_A r_{AK}\cdot(3v_A-4v_K)}{r_{AK}^3}\\&+\frac{7}{2}\sum_{A\neq K}\sum_{C\neq A} r_{CA}\frac{M_A M_C}{r_{AK}r_{CA}^3}。\end{aligned}\tag{39.64}$$

(39.63) 和 (39.64) 式稱爲多體系統幾何和演化的 Einstein-Infeld-Hoffman (「EIH」) 方程。它們廣泛地用於分析太陽系中的行星軌道。例如，Caltech 噴氣推進實驗室利用它們的修改形式，計算了行星和宇宙飛船高精度軌道的星歷表。導出 EIH 方程和度規的上述方法是 Fock (1959) 提出的。關於 Dicke-Brans-Jordan 理論中的類似計算，可參看 Estabrook (1969)；關於在完全的 PPN 表述中類似的多體方程的推導，可參看 Will (1972)。

第四十章　太陽系實驗

§ 40.1　爲了把廣義相對論與已提出的引力度規理論相區別而開展的許多實驗

對於一場搏鬥，如果人人都認爲挑戰者不可能獲勝，那就不會有觀衆出席。試圖不顧一切地資助這場搏擊的渴望會戰的發起人，只能向此冠軍對抗賽提供他能找到的最佳競爭對手。與 Einstein 的引力度規理論對比，最後的審判（如 §39.2 所示）並未留給人們選擇的餘地，除非提出另一個也還是度規的（或度規加上張量的）引力理論。

本章用 PPN 表述分析實驗

於是，爲了競爭，設計並完成一個實驗，以便把廣義相對論與某些並不完全難以置信的引力度規理論相區別。本章描述這類實驗——某些已經完成；某些尚待將來完成——並用第39章的 PPN 表述分析它們的意義。

太陽系的空時幾何的複雜性

在即將描述的絕大多數實驗中，人們研究月亮、行星、宇宙飛船、光線或迴轉器穿過太陽系的空時幾何的運動。該空時幾何是非常複雜的。它包括太陽以及全部行星的球狀場，由於它們四極的形變以及更高階的形變所引起的非球狀場，以及由它們的動量和角動量引起的場。此外，空時幾何是全部這些場非線性疊加的結果——或至少在後 Newton 表述中可以認爲就是這樣。*

---

* 當然，從 Einstein 完全的廣義相對論理論的觀點看來，全部這些墨守法規的計算都只是眞實物理世界的彎曲空時幾何。全部這些「單獨的場」僅僅是簿記員的談論，並且，當人們從後 Newton 極限過渡到完全的 Einstein 理論時，最好把它們拋棄掉（它們不再有用了）。

幸而，對於現在的討論而言，若干最重要的實驗幾乎沒有所有的這些複雜性。它們所測量的效應完全與太陽引力場的球狀部分相聯繫。將首先描述這些實驗（§40.2—40.5），然後轉而注意原則上更爲複雜的實驗。

爲了討論檢力場實驗，需要關於理想化的、孤立的、靜止的、球狀太陽的外引力場表達式。在廣義相對論中，這樣一個引力場由下述 Schwarzschild 線元描述

孤立、靜止、球狀太陽的理想化幾何：

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M_\odot}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-2M_\odot/r}+r^2(d\theta^2+\sin^2\phi d\phi^2)。$$

(1)用Schwarzschild 坐標

但是這個線元並非人們所想要的，理由有二：(1)它「太精確了」；(2)它是在「錯誤的」坐標系中寫下的。

爲什麼太精確？因爲它僅當無微擾和無修正時才是簡單的；而某些修正理論揭示的一些新效應非常複雜，它們只是在後 Newton 近似中才易於處理。爲什麼是錯誤的坐標系？因爲物理學家，天文學家以及其他天體力學在分析太陽系時的標準慣例是採用「各向同性坐標」，而不採用「Schwarzschild 坐標」。例：後 Newton 展開，包括第 39 章的 PPN 表述，就幾乎總是採用各向同性坐標。另一個例子：由 Caltech 噴氣推進實驗室制定的，爲全世界廣泛採用的太陽系的相對論星曆表就使用各向同性坐標 [Ohandley 等 (1969)；Anderson (1973)]。

於是，更改 Schwarzschild 線元。首先，轉換到各向同性坐標（練習 31.7）；其次，把度規係數展開成 $M_\odot/r$ 的冪次，直到後 Newton 精度。由此得出

(2)用各向同性坐標

$$\begin{aligned}ds^2&=-\left[1-2\frac{M_\odot}{r}+2\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2+\left[1+2\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]\\&=-\left[1-2\frac{M_\odot}{r}+2\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2+\left[1+2\frac{M_\odot}{r}\right][dx^2+dy^2+dz^2]。\end{aligned}\tag{40.1}$$

式中 r, θ, ϕ 與 x, y, z 的關係是下述通常的形式：

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2},\ \theta=\tan^{-1}[z/(x^2+y^2)^{1/2}],\ \phi=\tan^{-1}(y/x);\tag{40.2}$$

r 是新的、「各向同性」的徑向坐標，不要與 Schwarzschild 的 r 混淆。（未學過 §39.6 的讀者將在下節發現，爲什麼在 g_{00} 中保留 $M_\odot^2/r^2$ 量級的項，而在 g_{jk} 中則並不保留。）注：度規的這個後 Newton 表達式是練習19.3中導出的結果的特殊情形。

如果在另一個引力的度規理論中，用同樣的後 Newton 近似計算同樣的源（太陽）的引力場，那麼就會得到極爲類似的結果：

(3)用 PPN 表述

$$ds^2=-\left[1-2\frac{M_\odot}{r}+2\beta\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2+\left[1+2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]$$
$$=-\left[1-2\frac{M_\odot}{r}+2\beta\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2+\left[1+2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dx^2+dy^2+dz^2] \quad (40.3)$$

（見練習 40.1）。式中 γ 和 β 是框 39.2 中描述的十個 PPN 參量之二。記得，在該框中，γ 量度了「單位靜止質量產生的空間曲率的總量」，而 β 量度了「g_{00} 疊加定律中非線性的總量」。對於球對稱吸引中心周圍的理想化度規，這些有啓發性的描述找到了它們的具有上述形式的數學對應。

以很高的精度測量參量 γ，人們就能在廣義相對論（$\gamma=1$）和 Dicke-Brans-Jordan 理論 [$\gamma=(1+\omega)/(2+\omega)$，其中 ω 是「Dicke 耦合常數」] 之間作出區別；見框 39.2。但是廣義相對論和 Dicke-Brans-Jordan 理論預言了相同的 β 值（$\beta=1$）。這個等同並不意味着不值得去測量 β。其他理論預言 $\beta\neq1$ [見 Ni (1972)]；因此 β 的測量對於把這類理論與廣義相對論相區別是有用的。

實際上，太陽度規的上述形式（40.3）並不是完全普遍的。在任何具有優先的「宇宙靜止系」的理論中（例如，Ni 的理論；框 39.1）由於太陽相對於該優先系的運動，會在度規中引起附加的項（練習40.1）：

(4)包括優先系的效應

$$ds^2=(\text{表達式 }40.3)+(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)\frac{M_\odot}{r}w^2dt^2+2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1\right)\frac{M_\odot}{r}w_jdx^jdt$$
$$-\alpha_2\left[\frac{M_\odot}{r^3}x^jx^k-\frac{I_\odot}{r^5}\left(x^jx^k-\frac{1}{3}r^2\delta_{jk}\right)\right]w_jdt(2dx^k+w_kdt)。\quad (40.3')$$

在這些「優先系的項」中，$I_\odot\equiv I_{jj}=\int\rho r^2d^3x$ 是太陽質量分布的二階矩的迹；

$$\alpha_1=7\Delta_1+\Delta_2-4\gamma-4,$$
$$\alpha_2=\Delta_2+\zeta-1,$$
$$\alpha_3=4\beta_1-2\gamma-2-\zeta$$

是 PPN 參量的組合；而 w 是太陽相對於優先系的速度（≡坐標系的速度）。（諸如廣義相對論和 Dicke-Brans-Jordan 等理論，它們不具有優先系，而有 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$，因此在度規中無優先系的項。）爲了易於解釋，本章的全部方程和計算都將不顧優先系的項；但將討論這些項的後果，並引用分析它們的文獻。

練習 40.1　理想化太陽的 PPN 度規［高階］

練習

試證明，對於在 PPN 坐標系原點靜止的孤立、靜止、球狀太陽，PPN 度規 (39.32) 化爲表達式 (40.3), (40.3′)。作爲推導的一部分，試證明太陽的總質量-能量爲

$$M_\odot=\int_0^{R_\odot}\rho_0(1+\beta_2U+\beta_3\Pi+3\beta_4p/\rho_0)4\pi r^2dr\,。\qquad(40.4)$$

［警告：一定不要看一下這個公式就立刻聯想：「靜止質量的貢獻是 $\int\rho_0 4\pi r^2dr$，引力能的貢獻是 $\int 2\beta_2\rho_0U4\pi r^2dr$，等等」。在作任何這類解釋時，必須記住，(1)空時是彎曲的，因此 $4\pi r^2dr$ 並非用實際米尺測量的固有體積；還有(2)維里定理（練習 39.6）以及其他積分定理可用於改變被積函數的形式。進一步的討論見下面的練習 40.9 和 40.10］。

§ 40.2　利用光線和射電波檢驗引力

在 Newton 極限中，行星和宇宙飛船的軌道受到引力的强烈影響；但是光的傳播和射電波的傳播（以「無窮大」的速度）則完全不受影響。爲此，軌道的實驗研究由於要把相對論效應從大得多的標準 Newton 效應中分離出來而受到困擾。反之，光和射電波傳播的實驗研究則不必和任何這類占壓倒優勢的 Newton 背景競爭。毋須驚訝，它們是迄今（1973年）最明顯和最確定的太陽系實驗。

光線和射電波「乾淨俐落的」檢驗相對論

從數學上說，把光線與行星相區別的參量是它的高速，在短程線方程中，速度的大小決定了哪些度規係數能影響運動。例如，考慮一弱的靜場 $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$，以及一個在 $(x,y,z)=(r,0,0)$ 以速度 $(v_x,v_y,v_z)=(0,v,0)$ 運動的粒子；見圖 40.1。這裏，引力對粒子軌道的效應可以用下述量表徵

$$\begin{pmatrix}\text{在三維近似 Euclid}\\ \text{空間中軌道的曲率}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{軌道的曲}\\ \text{率半徑}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\tau}{dy}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\tau}{dy}\frac{dx}{d\tau}\right)=\frac{1}{u^y}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u^x}{u^y}\right)=\frac{1}{(u^y)^2}\frac{du^x}{d\tau}$$

$$=-\frac{(1-v^2)}{v^2}\Gamma^x{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=-\frac{1'}{v^2}\Gamma^x{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}$$

$$=-\Gamma^x{}_{00}v^{-2}-2\Gamma^x{}_{0,y}v^{-1}-\Gamma^x{}_{,,}$$

$$=\frac{1}{2}h_{00,x}v^{-2}+(h_{0y,x}-h_{0x,y})v^{-1}+(\frac{1}{2}h_{yy,x}-h_{xy,y})\,。$$

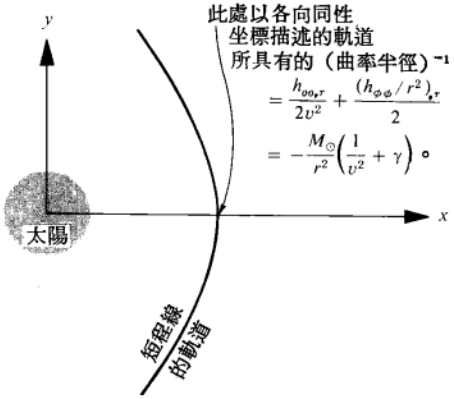


圖 40.1
在近日點，試驗物體軌道的彎曲作爲它的三維速度的函數。（關於計算和討論，參看正文。）

對於在其近日點上的粒子，用理想化的太陽線元（40.3）的術語，在球面坐標中重新表述，此公式爲

$$\begin{pmatrix}\text{在三維空間中}\\ \text{軌道的曲率}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}h_{00,rr}v^{-2}+\frac{1}{2}(h_{\phi\phi}/r^2)_{,rr}$$
$$\approx-(M_\odot/r^2)(v^{-2}+\gamma)。 \qquad (40.5)$$

（與練習 25.21 比較。）注，此處 γ 是一 PPN 參量；它不是 $(1-v^2)^{-1/2}$。

注意，當增加粒子的速度時發生了什麼。對於慢速度 [$v^2\sim$（後 Newton 展開參量 ϵ^2）$\approx M_\odot/R_\odot$]，h_{00} 的 Newton 部分完全占優勢；而微小的後 Newton 修正平等地來自 h_{00} 的 ϵ^4 部分，h_{0j} 的 ϵ^3 部分，以及 h_{jk} 的 ϵ^2 部分。[這就是在後 Newton 極限中把 h_{00} 展開到 $O(\epsilon^4)$，把 h_{0j} 展開到 $O(\epsilon^3)$ 以及把 h_{jk} 展開到 $O(\epsilon^2)$ 的合理性；見 §39.6。]但是，隨着 v 增大，各項的次序關係改變了。在高 v 狀態（$v\sim 1\gg\epsilon^2$），軌道的彎曲變得幾乎覺察不到，這是因爲粒子的高的向前動量以及它從太陽接受橫向動量的時間很短。剩下的彎曲歸因於 h_{00} 的 ϵ^2（Newton）部分以及 h_{jk} 的 ϵ^2（後 Newton）部分。別的都沒有重要影響。此外，注意，甚至當人們考慮到「優先系」效應時，這些占優勢的項，

$$h_{00}=2U=2M_\odot/r \text{ 和 } h_{jk}=2\gamma U\delta_{jk}=2\gamma(M_\odot/r)\delta_{jk},$$

只取決於 Newton 勢 $U\equiv-\Phi$ 和 PPN 參量 γ。

光線只受 Newton 勢和 PPN 參量 γ 的支配

這是更普遍結果的一個特殊情形：除了 $\epsilon^2\lesssim 10^{-6}$ 的部分修正外，光和射電波傳播的相對論效應完全受 Newton 勢 U 和 PPN 參量 γ 的支配。這些相對論效應包括引力紅移（已在上一章討論；與 γ 無關），光和射電波的引力偏

轉（下面討論；取決於 γ），以及「相對論性時間延遲」（下面討論；取決於 γ）。

§ 40.3　「光」偏轉

光偏轉：

考慮光線或射電波從遙遠的恒星或類星體進入地球上的望遠鏡。正如通常的討論（練習 18.6 和練習 25.24）那樣，不假設光線經過太陽附近。在70年代中期或後期，光線受太陽引力場的偏轉或許可以測量，甚至當光線遠離太陽經過時也是如此！［以下所作的計算應歸之於 Ward (1970)，但 Shapiro (1967) 首先導出答案。］

(1)推導

確定(40.3)式的 PPN 球面坐標的方位，使光線位於「平面」$\theta=\pi/2$ 上。由於對稱性，如果它在此平面上從遠離地球處出發，那麼它必定總是位於此平面上。設入射光線沿着 $\phi=0$ 線進入太陽系；並設當光線到達地球時，地球位於 $r=r_E$, $\phi=\phi_E$ 處。（見圖 40.2.）人們希望計算入射光線與太陽中心之間的夾角 α，這是在地球上的觀察者的正交歸一系（$\mathbf{e}_{\hat{r}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$）中測出的。如果太陽具有零質量（平直的 Euclid 空間），則 α 將爲 $\pi-\phi_E$（見圖40.2）。然而，太陽引起了偏轉：$\alpha=\pi-\phi_E+\delta\alpha$。偏轉角 $\delta\alpha$ 是眞正的計算目標。

在計算中，忽略地球的軌道運動和自轉。它們導致光行差。它們的修正可以通過狹義相對論的常用公式作出（在望遠鏡附近的 Lorentz 變換）。也忽略由於地球引力場引起的光線偏轉（偏轉角$\sim 2M_E/R_E\sim 0''.0003$）。它在70年代後期應可探測。

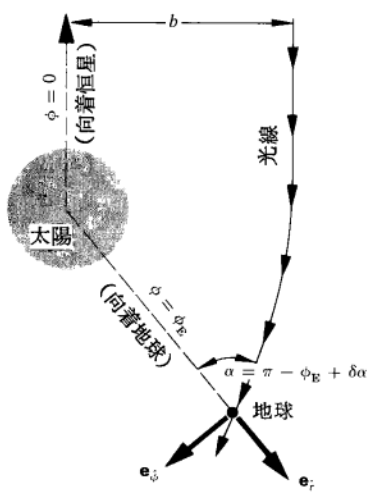


圖 40.2
正文中爲計算光的偏轉所採用的坐標。注意在此圖中 ϕ 沿順時針方向增加。

作爲計算偏轉角的第一步，確定光線在 r, ϕ 平面內的軌迹。這既可用短程線方程計算，也可用幾何光學程函方法 (Hamilton-Jacobi 方法；§22.5 和框 25.4) 來計算。這種計算的結果（練習 40.2）是把 r 和 ϕ 聯繫起來的一個方程；即爲

$$\frac{b}{r}=\sin\phi+\frac{(1+\gamma)M_\odot}{b}(1-\cos\phi)。 \tag{40.6}$$

注意，b 有簡單的幾何解釋：遠離太陽時，光線軌迹爲 $\phi=b/r+O(M_\odot b/r^2)$。由此，在通常經典散射理論的含義中，$b$ 是碰撞參量（見圖40.2）。光線在下述 PPN 坐標半徑處最接近太陽（假設它不首先被地球遮斷）

$$r_{\min}=b\left[1-\frac{(1+\gamma)M_\odot}{b}\right]\approx b。 \tag{40.7}$$

從而，b 也可以認爲是光線的「近日點」的半徑。

注意，光線並不是以 $\phi=\pi$ 的角度返回 $r=\infty$，而是以

$$\phi(r=\infty)=\pi+2(1+\gamma)M_\odot/b \tag{40.8a}$$

的角度返回 $r=\infty$。於是，總的偏轉角爲

$$\begin{aligned}(\text{總偏轉角})&=2(1+\gamma)M_\odot/b\\&=\frac{1}{2}(1+\gamma)1''.75\end{aligned} \tag{40.8b}$$

對於剛剛掠過太陽的光線。

但這並不是原先感興趣的量。人們尋求的是，從地球上的天文學家看來的恒星位置。天文學家測出的太陽和恒星之間的角度 $\alpha=\pi-\phi_E+\delta\alpha$ 由下式給出（見圖 40.2）

$$\begin{aligned}\tan(\pi-\phi_E+\delta\alpha)&=-\tan\phi_E+\delta\alpha/\cos^2\phi_E\\&=\frac{u^\lambda}{u^r}=\left[\frac{(1+\gamma M_\odot/r)r\,d\phi/d\lambda}{(1+\gamma M_\odot/r)dr/d\lambda}\right]_E=\left[\frac{r\,d\phi}{dr}\right]_E\\&=-\left[\frac{(b/r)d\phi}{d(b/r)}\right]_E,\end{aligned} \tag{40.9}$$

式中 $u^\beta=dx^\beta/d\lambda$ 是在地球上的光線的切向分量。把光線軌迹的表達式(40.6)代入此式，得出

$$\begin{aligned}\tan\phi_E-\frac{\delta\alpha}{\cos^2\phi_E}&=\frac{\sin\phi_E+[(1+\gamma)M_\odot/b](1-\cos\phi_E)}{\cos\phi_E+[(1+\gamma)M_\odot/b]\sin\phi_E}\\&=\tan\phi_E-[(1+\gamma)M_\odot/b](1-\cos\phi_E)/\cos^2\phi_E。\end{aligned} \tag{40.10}$$

於是，在地球上測出的偏轉角爲

$$\delta\alpha=\frac{(1+\gamma)M_\odot}{b}(1+\cos\alpha)=\frac{(1+\gamma)M_\odot}{r_E}\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)^{1/2}。\quad(40.11)$$

(2)偏轉角公式

它的範圍從光線逆着太陽方向（$\alpha=\pi$）進入時的零，經過光線垂直於地球－太陽直線（$\alpha=\pi/2$）進入時的值

$$(1+\gamma)M_\odot/r_E=\frac{1}{2}(1+\gamma)0''.0041\qquad(40.12)$$

直到光線掠過太陽邊緣進入時的 $\frac{1}{2}(1+\gamma)\times1''.75$ 的「經典值」。

偏轉的實驗測量

迄今（1972）的全部實驗檢查了掠射經過的情形。在框 40.1 中陳述並討論了實驗結果。它們表明，PPN 參量 γ 具有其廣義相對論值 1，有大約20%之內的不確定性。

在70年代中期或末期，測量來自類星體的射電波的偏轉將把 γ 確定到比 1% 還要好得多。又，到那時，射電天文學家利用甚長基線干涉學，可以向着在天空中建立高精度的坐標前進。若果然，他們必將利用（40.11）式去補償由於在全部天區（而不只是在太陽邊緣附近）射電波被太陽偏轉所造成的坐標「扭曲」。

練習

練習 40.2　光線在太陽引力場中的軌迹

試導出，在太陽「赤道平面」的各向同性坐標（40.3）中，光線路徑的（40.6）式。採用下述三種不同方法中的一種方法或多種方法：(1)短程線方程的直接積分（最艱難的方法）；(2)在三個運動積分的基礎上作計算

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=0,\quad \mathbf{k}\cdot(\partial/\partial t)=k_0,\quad \mathbf{k}\cdot(\partial/\partial\phi)=k_\phi=-bk_0;$$
$$\mathbf{k}\equiv d/d\lambda=\text{短程線的切向矢量}$$

（見 §25.2 和 §25.3）；(3)在 Hamilton-Jacobi 方法（框 25.4）的基礎上作計算，對於光子（零靜止質量）它化爲幾何光學的「程函方法」（見 §22.5）。

---

§ 40.4　雷達傳播的時間延遲

雷達時間延遲：

空時曲率對電磁波的另一個效應是雷達信號往返傳播時間的相對論性延遲。它是 Shapiro（1964）首先指出的；也可參看 Mnhleman 和 Reichley（1964, 1965）。

（接第1106頁）

框 40.1 光和射電波被太陽偏轉：實驗結果

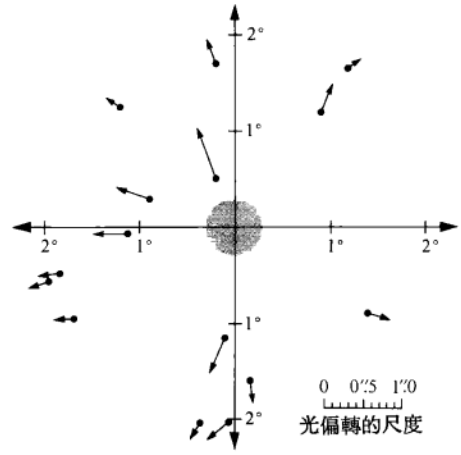
食的測量

直到1968年爲止，每一個實驗都是在日全食期間測量星光的偏折。測量的困難重重，諸如壞天氣，由溫度變化引起的光學畸變，以及食在熱帶叢林、在海洋當中、在沙漠、在北極凍土帶達到極大全食時間的離奇癖好。列出的全部結果和參考文獻都是由 Bertotti, Brill 和 Krotkov (1962)，以及由 Klüber (1960) 給出的。Dicke (1964b) 總結結果如下：

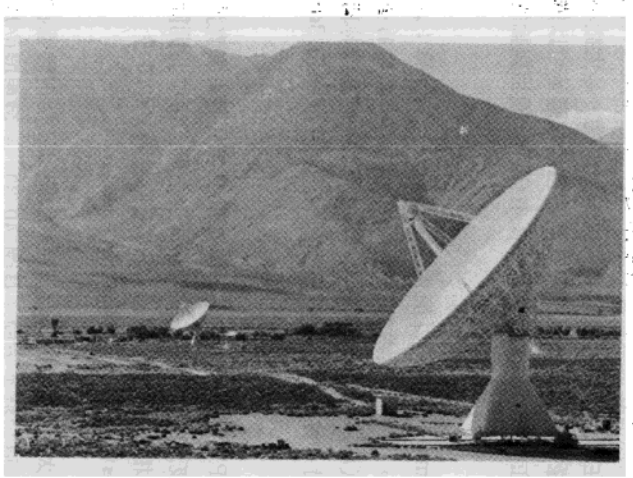
「[實驗數據的] 分析表明，在太陽邊緣的偏轉從1.43弧秒散佈到2.7弧秒 [與廣義相對論的 1.75 弧秒值相比較]。如果人們相信該方法沒有考慮系統誤差，那麼這種散佈並不太差。看來必須考慮至少10%或許多達20%的觀測不確定性。」這個結果相應於 γ 有20%到40%的不確定性。

射電波偏轉的測量

每年10月8日，從地球上看，太陽總是在類星體 3C279 的前面經過。通過監視 3C279 和附近類星體 3C273 之間的角分離，射電天文學家可以測量3C279 的射電波因太陽的偏轉。這種監視採用射電干涉儀。[參看討論技術的表中所引用的文獻。] 70年代早期的技術已允許測量到 0.001 弧秒的精度或更好一些，只要干涉儀的兩端分離幾千公里即可（「橫貫大陸的」或「橫貫世界的」基線）。但是，根據1971年的資料，唯一成功的實驗並不值得炫耀：他們使用的基線少於10公里。這些1971年前的短基線的結果如下表所概述。



1922 年 9 月21日在澳大利亞西部 Wallal 的日全食期間，Campbell 和 Trumpler (1928) 確定了在太陽中心 2°.5 之內15個恒星光偏折觀測的最佳測量（兩種儀器的平均值）。箭頭表示相對於參考恒星（離太陽中心 5° 到 10°）所觀測到的光偏轉的大小和方向。（Einstein 用太陽附近幾何的曲率來描述偏轉，參看框 1.6）。



在 Caltech 的 Owens 山谷射電天文臺的90呎（背景）和130 呎（前景）射電干涉儀。Seielstadt, Sramak 和 Weiler (1970) 用這些作出了類星體射電波被太陽偏轉的開創性測量。在實驗期間，兩個天線分離 1.07 公里。（Alan Moffet 拍攝。）

觀測日期	天文臺	實驗者和參考文獻	望遠鏡數目和間隔	波長	實驗結果[a] $\frac{1}{2}(1+\gamma)=\frac{(\text{觀測到的偏轉})}{(\text{Einstein 的預期})}$	形式上的標準誤差	$1-\sigma$ 誤差
1969 9.30 -10.15	Owens 山谷 (Caltech)	Seielstadt Sramek, Weiler (1970)	2, 1.07公里	3.1 厘米	1.01	±0.12	±0.12
1969.10.2 -10.10	Goldstone (Caltech-JPL)	Muhleman, Ekers, Fomalont (1970)	2, 21.56公里	12.5厘米	1.04	±0.05	+0.15 −0.10
1970.10.2 -10.12	國家射電天文臺（美國）	Sramek (1971)	3, 0.80公里，1.90公里 2.70公里	11.1厘米, 3.7厘米	0.90	±0.05	±0.05
1970 9.30 -10.15	Mullard 射電天文臺（劍橋大學）	Hill (1971)	3, 0.66公里，1.41公里	11.1厘米, 6.0厘米	1.07	±0.17	±0.17

[a] 此處（觀測到的偏轉）／（Einstein 的預期）是數 $\frac{1}{2}(1+\gamma)$，它是通過觀測數據與 PPN 預期 (40.11) 的擬合得出的。［在這些實驗中，光線經過太陽邊緣附近；因此 (40.11) 式化爲 $\delta\alpha=\frac{1}{2}(1+\gamma)(M_\odot/b)$。］「形式上的標準誤差」是通過標準的統計方法由數據得出的。然而，它通常並不能很好的量度結果的不確定性，因爲它沒有考慮系統誤差。引用的「$1-\sigma$ 誤差」是實驗者對統計不確定性和系統不確定性相聯合的最佳估計。實驗者估計，眞實結果在他們測量值的「1σ」之內的可能性是68%；在「2σ」之內的可能性是95%，等等。

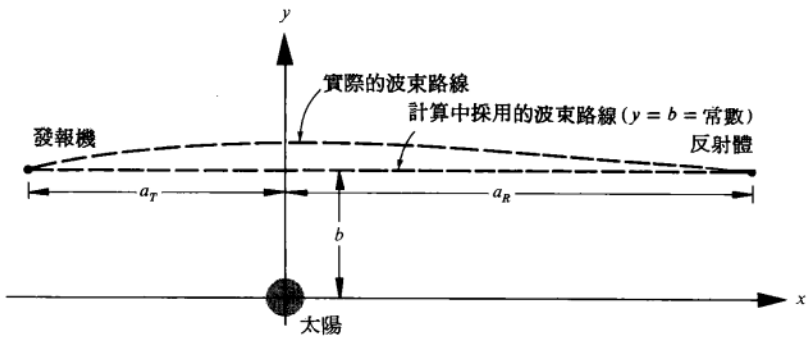


圖 40.3
在 PPN 坐標系中計算相對論性時間延遲的插圖。

(1)計算的基礎； Fermat 原理

讓在地球上的一個雷達發報機向在太陽系另一處的反射體發射一雷達波，並讓反射體將此波送還地球。試計算地球上的鐘測出的往返傳播時間。爲了使計算簡單起見，把地球和反射體兩者都理想化爲在太陽的靜止、球狀引力場中不旋轉且靜止。而在計算結束時，將分別討論旋轉和運動的效應。由地球引力場引起的發報機的鐘的時間膨脹也置之不顧；這是容易修正的，並且由於非常微小，以致在70年代中期或後期以前在這些雷達實驗中還沒有起作用。其他行星對雷達波的引力效應，對於在可以預見的未來能得以辨別來說，是太微小了，除非波束掠過其中之一的邊緣。然而，太陽風和日冕的色散效應是可以辨別的，應予修正。這些修正將不在此處討論，因爲其中沒有任何廣義相對論的影響。

利用廣義相對論形式的 Fermat 原理可以簡化往返傳播時間的計算：*在任何靜場中 ($g_{0j}=0$, $g_{\alpha\beta,0}=0$)，考慮空間兩點 $x^j=a^j$ 和 $x^j=b^j$ 之間的全部零曲線。每一條這種零曲線 $x^j(t)$，需要特殊的從 a^j 達到 b^j 的坐標時間間隔 Δt。Δt 的致極曲線就是空時的零短程線。*這個定理的證明在練習40.3中概述。

由於 Fermat 原理，對於 PPN 坐標中的直的路線以及對於波束實際遵循的稍稍彎曲的路線來說，雷達波束的發射和在反射體反射之間的坐標時間間隔 t_{TR} 是相同的。（兩者差別的相對數量爲 $\Delta t_{TR}/t_{TR}\sim$(偏轉角)$^2\lesssim 10^{-12}$，遠非可以辨別。）因此，在計算中可以不管波束的引力彎曲。

(2)計算的細節

採用笛卡兒 PPN 坐標，取太陽在原點；發報機，太陽以及反射體都在 $z=0$「平面」上；發報機-反射體直線沿 x 方向（見圖 40.3）。發報機位於 PPN 坐標的 $(x,y)=(-a_T,b)$ 處，反射體位於 $(x,y)=(a_R,b)$ 處。憶及對

於零光線 $ds^2=0=g_{00}dt^2-g_{xx}dx^2$。由此得出發射和反射之間的坐標時間間隔爲

$$t_{TR}=\int_{-a_T}^{a_R}\left(\frac{g_{xx}}{-g_{00}}\right)^{1/2}dx=\int_{-a_T}^{a_R}\left[1+\frac{(1+\gamma)M_\odot}{\sqrt{x^2+b^2}}\right]dx。$$

積分，得出

$$t_{TR}=a_R+a_T+(1+\gamma)M_\odot\ln\left[\frac{(a_R+\sqrt{a_R^2+b^2})(a_T+\sqrt{a_T^2+b^2})}{b^2}\right]。\quad(40.13)$$

往返傳播的坐標時間間隔爲此值的兩倍。由地面上的鐘測出的原時間隔爲

(3)延遲的公式

$$\Delta\tau=|g_{00}|^{1/2}_{\text{地球}}2t_{TR}，$$

$$\Delta\tau=2(a_R+a_T)\left(1-\frac{M_\odot}{\sqrt{a_T^2+b^2}}\right)$$
$$+2(1+\gamma)M_\odot\ln\left[\frac{(a_R+\sqrt{a_R^2+b^2})(a_T+\sqrt{a_T^2+b^2})}{b^2}\right]。\quad(40.14)$$

這是地面上鐘的時間間隔，地球的軌道運動和自轉，反射體的軌道運動，經過太陽風和日冕時輻射的色散，以及地球引力場中的時間膨脹等等修正均除外。

(4)與實驗比較

任何非議（40.14）式形式（其中寫出了時間延遲）的讀者都是有道理的。因爲量 a_R, a_T 和 b 是在 PPN 坐標系中的坐標位置，而不是天文學家可以直接測量的數字。它們和在別的同樣好的坐標系中的坐標位置之差異達 $M_\odot$～1.5 公里的量級。這個缺點並非起源於數學。量 a_R, a_T 和 b 是完全明確的［具有 $b(M_\odot/b^2)\lesssim10^{-6}$ 公里量級的後-後 Newton 不確定性］，因爲 PPN 坐標系是完全明確的。但它們並不是實驗者能夠［以在各處都有的、接近檢驗時間延遲公式（40.14）中相對論項所需的精度］直接測量的量。

幸而，實際上，實驗者並不需要以很高的精度測量 a_R, a_T 或 b，作爲替代，當地球和反射體在圍繞太陽的軌道上運動時，可測量 $\Delta\tau$ 的變化來檢驗時間延遲公式；即把 $\Delta\tau$ 作爲地面時間 τ 的函數來測量。注意，當波束經過太陽附近（($b<a_R$, $b<a_T$；但 $db/d\tau>da_R/d\tau$ 和 $db/d\tau>da_T/d\tau$，因爲地球的軌道和反射體的軌道接近於圓）時，(40.14) 式 ln 項中 b 的變化比 Newton 延遲的全部其他相對論修改都占優勢；因此（對於典型的實驗，採用 $db/d\tau$～10公里／秒）

$$\frac{d\Delta\tau}{d\tau}-\left(\begin{matrix}\text{恒定的}\\\text{部分}\end{matrix}\text{ Newton}\right)\approx-4(1+\gamma)\frac{M_\odot}{b}\frac{db}{d\tau}\qquad(40.15)$$
$$\sim4(1+\gamma)\left(\frac{1.5\text{ 公里}}{10^6\text{ 公里}}\right)\left(\frac{10\text{公里}}{\text{秒}}\right)\sim\frac{30\text{微秒}}{\text{日}}。$$

往返時間的這類較差移動 —— 它隨着地球-反射體直線向着太陽移動而上升，並隨着它的離開而下降——是容易觀測到的。

實際上，在通過時間延遲測量確定參量 γ 時，爲了使得到的精度優於約20%，必須仔細地收集和分析大半年的數據——從波束遠離太陽（$b\sim a_T\sim 10^8$ 公里）時，到上合（$b\sim R_\odot\sim 10^6$ 公里）時，直到波束再次遠離太陽爲止。這樣一種長「弧度」的數據，對於以高精度確定反射體軌道來說是需要的，並且對於充分地利用 $\Delta\tau$ 隨 b 按 (40.14) 緩慢地、對數地減少也是需要的。當波束遠離太陽（$b\gg R_\odot$）時，含於 (40.15) 式之內的簡化假設並不成立；並且相對論性時間延遲與地球和反射體的軌道運動糾纏在一起。然而，這種分析仍然是直截了當的，但它的細節很複雜，以致人們要借助於數值積分在計算機上完成它。因爲軌道運動進入了，所以時間延遲數據包括了除 γ 以外的其他度規參量（β 是主要的一個）的信息。

根據1971年資料的實驗結果在框40.2中描述。它們給出的 PPN 參量 γ 之值比由光和射電波偏轉實驗得出的值更精確：

(5) γ 的實驗結果

$$\gamma=1.02\pm0.08。\tag{40.16}$$

利用宇宙飛船的未來實驗可能把 γ 的精度改進到±0.001或更好。

練習

練習 40.3 Fermat 原理

對於靜止引力場，證明 Fermat 原理。［提示：證明可進行如下。利用仿射參量 λ 寫下四維空時中的短程線方程。把參量 λ 轉換爲坐標時間 t，利用 $ds^2=0$，得出

$$g_{jk}\frac{d^2x^k}{dt^2}+\Gamma_{jkl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}-\Gamma_{j00}\frac{g_{kl}}{g_{00}}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}+\frac{d^2t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2}g_{jk}\frac{dx^k}{dt}=0。$$

與短程線方程的時間部分結合

$$\frac{dt^2/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2}=-2\Gamma_{0k0}\frac{dx^k/dt}{g_{00}}$$

並採用以度規表示 Christoffel 符號的表達式得出

$$\gamma_{jk}\frac{d^2x^k}{dt^2}+\frac{1}{2}(\gamma_{jkl}+\gamma_{jlk}-\gamma_{klj})\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}=0,\quad \gamma_{jk}\equiv-\frac{g_{jk}}{g_{00}}。$$

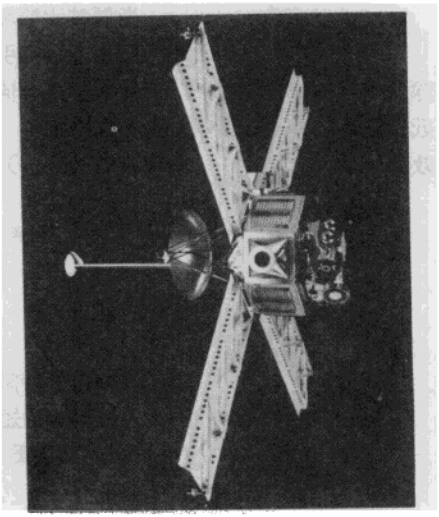
然後，注意，這是在度規爲 γ_{jk} 的三維流形中，具有仿射參量 t 的短程線方程。這個短程線的類似的致極原理爲

$$\delta\int_{x^j}^{x^j}(\gamma_{jk}dx^jdx^k)^{1/2}=\delta\int_{x^j}^{x^j}dt=0,$$

這就是 Fermat 原理！］

框 40.2　太陽系中的雷達時間延遲：實驗結果

爲了測量太陽系中雷達往返傳播時間的相對論效應［正比於 $\frac{1}{2}(1+\gamma)$；(40.14) 式］，已經完成了兩類實驗。在一類實驗（「被動的」實驗）中，反射體是行星金星或行星水星的表面。在另一類實驗（「主動的」實驗）中，「反射體」是宇宙飛船上的電子裝置，它接收訊號並把它發回地球（「轉發器」）。被動實驗會因反射行星地形引起的噪聲而受到損害（雷達從山頂返回比從谷底要早一些），它們還會因返回訊號很弱而受到損害。主動實驗因太陽風，因太陽輻射壓强的起伏，因氣體噴嘴的漏泄（「釋氣」）使宇宙飛船震動而受到損害。未來的實驗將通過把轉發器放在行星表面上或放在「無曳力」（無震動）的宇宙飛船上來解決這些問題。但是，現在和將來的實驗兩者，都必須面對由起伏的太陽風和日冕中的色散所引起的起伏的時間延遲的困難。幸而，這些比相對論效應微小得多，但當波束在二、三個太陽半徑內經過時除外。



水手 VI 號宇宙飛船（模型），在1970年通過雷達時間延遲測量 $\frac{1}{2}(1+\gamma)$ 時，它是反射體［照片蒙 Caltech 噴氣推進實驗室惠允轉載］。

1972年前完成的實驗的結果列於下表。

觀測日期	雷達望遠鏡	反射體	實驗者和參考文獻	波長	實驗結果[a] $\frac{1}{2}(1+\gamma)=\frac{\text{(觀測到的延遲)}}{\text{(Einstein 的預期)}}$	形式上的標準誤差	$1-\sigma$ 誤差
1966年11月到1967年8月	Haystack（麻省理工學院）	金星和水星	Shapiro (1968)	3.8 厘米	0.9		±0.2
1967年直到1970年	Haystack（麻省理工學院）和 Arecibo（康奈爾）	金星和水星	Shapiro, Ash 等 (1971)	3.8 厘米和70厘米	1.015	±0.02	±0.05
1969年10月到1971年1月	外層空間網絡（NASA, 國家航空和宇航局）	水手 VI 號和水手 VI 號宇宙飛船	Anderson 等 (1971)	14厘米	1.00	±0.014	±0.04

[a] 此處，(觀測到的延遲)／(Einstein 的預期) 之值爲 $\frac{1}{2}(1+\gamma)$，這是通過觀測數據 $d\tau(r)$ 與 PPN 預期的更完善形式（40.14）式相擬合得出的。更完善的形式包括了全部行星對反射體和地球軌道的引力影響；它包括月亮對地球軌道的效應以及地球自轉對傳播時間的效應；在實際可能的範圍內，還包括了由日冕和太陽風中的色散所引起的延遲。「形式上的標準誤差」和「1σ 誤差」是在框 40.1 的表中定義的。

§ 40.5 短程線軌道中的近日點移動和周期性微擾

光偏轉實驗和時間延遲實驗兩者都測量了 γ。爲了測量其他的 PPN 參量，人們必須研究引力對緩慢運動物體的效應；這是 §40.2 的啓示。

圍繞球狀太陽的短程線軌道的近日點移動，不管優先系效應

從最簡單的情形開始：在太陽球狀引力場中試驗物體的短程線軌道，不管行星、太陽扁率、以及相對於任何優先系運動的全部引力效應。於是，PPN 度規具有 (40.3) 的形式

$$ds^2=-\left[1-2\frac{M_\odot}{r}+2\beta\frac{M_\odot^2}{r^2}\right]dt^2 +\left[1+2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]。 \tag{40.3}$$

定坐標的方位使試驗物體在赤道「平面」$\theta=\pi/2$ 上運動；計算它的近似 Kepler 的、近似橢圓的短程線軌道的形狀 $r(\phi)$。超出 Newton 理論範圍精確到 $M_\odot/r$ 量級的結果爲

$$r=\frac{(1-e^2)a}{1+e\cos[(1-\delta\phi_0/2\pi)\phi]}, \tag{40.17}$$

式中 a 和 e 是積分常數，$\delta\phi_0$ 定義爲

$$\delta\phi_0=\frac{(2-\beta+2\gamma)}{3}\frac{6\pi M_\odot}{a(1-e^2)} =\frac{6\pi M_\odot}{a(1-e^2)} \text{ 在廣義相對論中。} \tag{40.18}$$

（推導見練習 40.4）

注意，如果 $\delta\phi_0$ 爲零——如它在 Newton 極限中那樣——則軌道(40.18)將是半長軸爲 a、偏心率爲 e 的橢圓（見框 25.4）。常數 $\delta\phi_0$ 只是使得橢圓進動：從近日點到遠日點再到近日點，r 經過了一整圈，$(1-\delta\phi_0/2\pi)\phi$ 應改變 2π；因此 ϕ 應改變 $2\pi+\delta\phi_0$。於是，*每繞橢圓一圈，近日點向前移動 $\delta\phi_0$ 角度*。

近日點相對於什麼東西移動呢？(1)相對於 PPN 坐標系；(2)相對於在太陽系外邊的慣性系（因爲 PPN 坐標是與那些系連結的；見§39.12）；(3)相對於由「天空中固定恒星」確定的系（因爲在太陽系外邊的慣性系，在銀河系別處的慣性系，以及在我們的星系團中的慣性系相互之間應無重要的轉動）；(4)相對於（其他）行星的近日點，這些行星自己正以可算出的速率移動，這種速率隨着在太陽系中從水星到金星到地球……向外而減少。

短程線軌道中的周期性微擾

近日點移動並不是試驗物體軌道運動中所包含的唯一的相對論效應。還有別的效應，但它們全都是隨時間的周期性效應而不是累積的效應；因此，受到前－空間－時代技術的限制，曾經不可能探測它們。但是，70年代的技術使之可以達到。此外，許多空間時代的實驗必定是短時間的(≤一個軌道)——特別是，它們涉及宇宙飛船和在行星上着陸的轉發器。對於這些，軌道中的周期性微擾幾乎與累積的近日點移動具有一樣多的實驗值。這些周期性效應在 PPN 軌道方程 (40.17) 中並不顯然；它看起來好像最簡單的進動的橢圓 。但觀測者直接測量的量並不是 a, e 和 $\delta\phi_0$。作爲替代，他測量的是雷達往返傳播時間的時間演化 $\Delta\tau(\tau)$，以及在天空中角位置的時間演化 $[\theta_0(\tau),\phi_0(\tau)]$。原則上這些量的計算是完全直截了當的，但實際上是非常複雜的工作。計算預期，相對論效應對軌道的頻率以及它的全部諧頻是周期性的。顯然，對於較低的諧頻，這些效應的幅度應爲$M_\odot$～1公里～10 微秒～天空中 0″.01 的弧的量級。(距離 $M_\odot$=1.48 公里是在太陽球狀場中全部相對論效應的特徵長度！)

把理論與行星軌道相比較

對於近日點移動和周期性效應的實驗檢驗來說，最有利的軌道是那些最接近太陽並具有最高偏心率［見 (40.18) 式］——水星、金星、地球、火星以及小行星 Icarus 的軌道。但是，人們怎麼知道這些軌道是短程線呢？行星畢竟不是「試驗物體」；它們本身在空時中產生了不可忽略的曲率。結果弄清楚（充分的討論見 §40.9），的確存在着對於短程線運動的微小偏離，但是它們與近日點移動或上面討論的周期性效應相比是太微小了，至少對這五個物體是如此。

行星軌道的廣泛天文學觀測（可追溯到19世紀中葉，從1966年起借助於雷達的幫助）已經得出行星近日點移動的精確值（對於水星，精確到每世紀±0.4 弧秒）。由這些數據（它們在框 40.3 中總結並討論），對於觀測的相對論移動與廣義相對論預期之比，得出下述值

$$\frac{1}{3}(2-\beta+2\gamma)=1.00\begin{cases}+0.01\\-0.10\end{cases} \qquad (40.19a)$$

把這個結果與 γ 的雷達延遲值 (40.16) 結合，得出 PPN 參量 β 的值爲

$$\beta=1.0\begin{cases}+0.4\\-0.2\end{cases} \qquad (40.19b)$$

β 的實驗結果

(憶及：β 量度了「g_{00} 疊加定律中非線性的總量」。)

行星軌道中的周期性效應還未曾 (1973) 實驗地研究過。

上述討論和框 40.3 已經置太陽系相對於優先系（如果存在一個的話）的運動於不顧；即它們已經置太陽度規中的項 (40.3′) 於不顧。當人們考慮這些

框 40.3 近日點移動：實驗結果

Newton 理論的相對論修正並不是引起行星軌道近日點移動的唯一原因。從 Newton 引力場理想化的、球狀的、反平方律形式的任何偏離都會引起移動。這種非球形及其導致的移動是由(1)其它行星的引力牽引，以及(2)太陽的變形（「太陽的扁率」，「四極矩」）引起的。此外，當原始數據是行星在天空的光學位置時（作爲時間的函數，正確的上升和傾斜），由地球軸的進動（「總歲差」；觀測者並不在「穩定的平臺上」；見練習16.4）會引起視近日點移動。

歸因於總歲差以及歸因於其他行星引力牽引的近日點移動可以很高的精度算出。但在1973年還沒有十分可靠的方法確定太陽的四極矩。用無量綱參量 J_2 把太陽的四極矩定量化是方便的，它出現在下述 Newton 勢的表達式之中

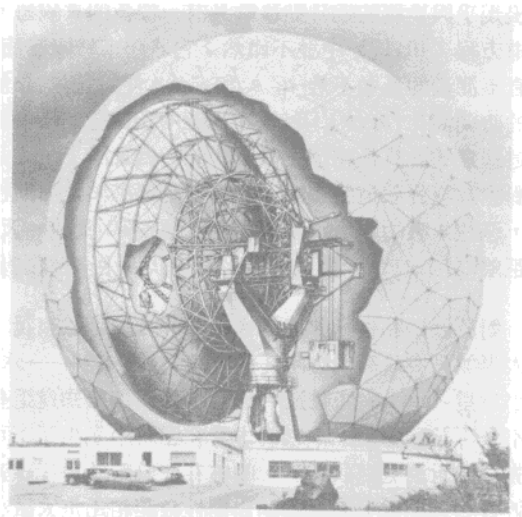
$$U=\frac{M_\odot}{r}\left[1-J_2\frac{R_\odot^2}{r^2}\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right)\right]。$$

如果太陽以接近崩裂的速度自轉，則 J_2 將接近 1，非常仔細的測量太陽的光學形狀［Dicke 和 Goldenberg (1967)］給出了扁率，它暗示 J_2 可能接近 3×10^{-5}。

由相對論加上太陽四極矩所引起的總的近日點移動爲（見練習40.5）

$$\delta\phi=\frac{6\pi M_\odot}{a(1-e^2)}\lambda_p,$$

$$\lambda_p\equiv\frac{2-\beta+2\gamma}{3}+J_2\frac{R_\odot^2/M_\odot}{2a(1-e^2)}。$$



Haystack 雷達天線，Irwin Shapiro 及其小組曾用它收集關於太陽系內部結構的廣泛數據。這些數據很快地變成有關近日點移動資料的最重要來源，［圖片蒙麻省理工學院（MIT）Lincoln 實驗室惠允轉載。］

注，相對論性的移動和四極的移動對軌道的半長軸 a 和偏心率 e 有不同的依賴關係。這種不同的依賴關係使人們可以把一個以上行星的 $\delta\phi$ 的測量聯合起來，得出四極矩參量 J_2 和 PPN 參量 $\frac{1}{3}(2-\beta+2\gamma)$ 兩者的值。

根據1972年的資料，實驗結果如下。

I. 來自光學研究的水星數據 [Clemence (1943, 1947)]* (在不考慮太陽扁率情況下廣義相對論預期 43.03″/世紀)

量	數值
(a) 每世紀的總觀測移動	5595″.74±0″.41
(b) 因觀測者不在遠離太陽的慣性系中而引起的對移動的貢獻 (在1947年計算的「總歲差」)	5025″.645±0″.50
(c) 由其他行星的 Newton 引力產生的每世紀的移動	531″.54±0″.68
(d) 歸因於廣義相對論加太陽扁率的每世紀的剩餘移動	42″.56±0″.94
(e) 如果採用1973年的「總歲差」值，得出的剩餘移動	41″.4±0″.90
(f) 相應的 $\lambda_\flat$ 值 (見上)	$\lambda_\flat=0.96\pm0.02$
II. 1970 年 Shapiro 的結果 (1970,1971a,b) ，Shapiro 等 (1972)	
(a) 重新分析全世界收集的光學數據，並把它與雷達數據結合起來，得出的 $\lambda_\flat$ 值	$\begin{cases}(\lambda_\flat)_{水星}=1.00\pm0.01\\(\lambda_\flat)_{火星}=1.07\pm0.10\end{cases}$
(b) 把水星和火星的觀測到的移動相比較，得出的 J_2 值	$J_2\leq3\times10^{-5}$
III. Shapiro 結果的理論含義	
(a) $(2-\beta+2\gamma)/3$ 的值	$1.00\begin{cases}+0.01\\-0.10\end{cases}$
(b) 與來自時間延遲實驗的 γ 相結合，得出 β 值 [(40.16) 式]	$1.0\begin{cases}+0.4\\-0.2\end{cases}$

* Clemence (1947) 注，「觀測不能在 Newton 參考系中完成。它們指的是運動的二分點，那它們受到二分點進動的影響，而進動運動的確定如果不是觀測天文學最大的困難，也是它最困難的問題之一。根據所有這些並無把握的結果，關於觀測的運動與理論的運動之間的密切相符存在着不同意見是不足爲怪的」。

項時發現，對於微小的偏心率 $e\ll1$ ，它們對近日點移動的附加貢獻爲

歸因於優先系作用的近日點移動

$$\delta\phi_0=-\alpha_1\frac{\pi}{2e}\left(\frac{M_\odot}{a}\right)^{1/2}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q}-\alpha_2\frac{\pi}{4}[(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{P})^2-(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q})^2]+\alpha_3\frac{\pi}{e}\left(\frac{|\Omega_\odot|}{M_\odot}\right)\left(\frac{\omega_\odot a^2}{M_\odot}\right)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q}\qquad(40.20)$$

[見 Nordtvedt 和 Will (1972)]。此處 $M_\odot$, $\Omega_\odot$ 和 $\omega_\odot$ 是太陽質量，自引力能和自轉角速度；$\boldsymbol{w}$ 是太陽相對於優先系的速度；a 和 e 是軌道的半長軸和偏心率；$\boldsymbol{P}$ 是從太陽指向近日點的單位矢量；$\boldsymbol{Q}$ 是與 $\boldsymbol{P}$ 正交並位於軌道平面

的單位矢量。與水星的觀測相比較——並與下面討論的 α_1 和 α_2 的極限［(40.46b) 和 (40.48) 式］結合——得出極限

α_3 的實驗結果

$$\left|\alpha_3 \frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q}}{200\text{ 公里}/\text{秒}}\right| \lesssim 2\times 10^{-5}。 \tag{40.21a}$$

由於太陽繞銀河系的速度爲～200 公里／秒，銀河系相對於其他鄰近星系的本動爲～200公里／秒，故 $\boldsymbol{w}$～200 公里／秒的值是合理的。此外，沒有理由相信 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 是正交的，因此人們相當可靠的斷定

$$|\alpha_3| = |4\beta_1 - 2\gamma - 2 - \zeta| \lesssim 2\times 10^{-5}。 \tag{40.21b}$$

這是具有宇宙靜止系的理論的嚴格極限。例如，毫無疑問，它排除了Coleman (1971) 提出的理論，它的 $\beta=\gamma=1$，但 $\alpha_3=-4$；見 Ni(1972)。

軌道實驗的未來

展望未來，人們不能預料關於宇宙飛船軌道的數據能否決定性的檢驗廣義相對論，儘管可以很高的精度（在1972年，～10米）追踪宇宙飛船。宇宙飛船被太陽風震動。它們響應太陽風的起伏，響應太陽輻射壓强的起伏，還響應漏泄噴嘴的「釋氣」。除非能發展傑出的「無曳力」或「受良心制導」的宇宙飛船，否則必須繼續依靠行星作爲短程線數據的來源。然而，將來可以通過把雷達轉發器放在行星表面上或放在圍繞它們的軌道上，通過改進雷達技術，以及通過不斷積累越來越多的觀測，大大改善行星數據本身。

練習

練習 40.4 以 PPN 表述推導近日點移動

［廣義相對論的推導見練習 25.16，當引力很强 ($2M/r$ 大到 $\frac{1}{3}$) 但軌道偏心率小時精確。本練習適用於任何「度規理論」以及任何偏心率，但它假設引力弱 ($2M/r \ll 1$) 並且不管相對於任何宇宙靜止系的運動。］試導出在 PPN 引力場 (40.3) 赤道平面運動的試驗粒子的任意束縛軌道形狀的 (40.17) 式。只保留對 Newton 理論的「一階」修正 ($M_\odot/r$ 冪次的第一階)。［用 Hamilton-Jacobi 理論 (框 25.4) 概述解答：(1)單位質量試驗物體的 Hamilton-Jacobi 方程爲

$$\begin{aligned}-1 &= g^{\alpha\beta}\tilde{S}_{,\alpha}\tilde{S}_{,\beta} \\ &= -\left[1+2\frac{M_\odot}{r}+(4-2\beta)\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{t}}\right)^2+\left[1-2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right]\left[\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\phi}\right)^2\right]。\end{aligned}$$

(2)Hamilton-Jacobi 方程的解爲

$$\begin{aligned}\tilde{S} = -\tilde{E}t+\tilde{L}\phi \pm \int^r \Bigg\{ &-(1-\tilde{E}^2)+\frac{2M_\odot}{r}[1-(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)] \\ &-\frac{\tilde{L}^2}{r^2}\left[1-\frac{2M_\odot{}^2}{\tilde{L}^2}(2-\beta+2\gamma)\right]\Bigg\}^{1/2} dr,\end{aligned} \tag{40.22}$$

其中後-後 Newton 修正已棄去。在拋棄後-後 Newton 修正時，記住 $\tilde{E}$ 是單位靜止質量保存的能量，$\tilde{L}$ 是單位靜止質量的角動量（見框 25.4）。由此，數量級關係式爲

$$1-\tilde{E}^2\sim(\text{試驗物體的速度})^2\sim M_\odot/r$$

以及

$$(M_\odot/\ \tilde{L})^2\sim(M_\odot/rv)^2\sim M_\odot/r。$$

(3)軌道形狀取決於「相長干涉條件」$\partial\tilde{S}/\partial\tilde{L}=0$:

$$\phi=\pm\int\left\{-\frac{1-\tilde{E}^2}{\tilde{L}^2}+\frac{2M_\odot}{\tilde{L}^2r}[1-(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{r^2}\left[1-\frac{2M_\odot^2}{\tilde{L}^2}(2-\beta+2\gamma)\right]\right\}^{-1/2}d(1/r)。$$

(4)這個積分用三角函數很容易計算。對於束縛軌道（$\tilde{E}<1$），積分爲

$$\phi=\left(1+\frac{\delta\phi_0}{2\pi}\right)\cos^{-1}\left[\frac{(1-e^2)a}{er}-\frac{1}{e}\right]$$

其中

$$a\equiv\frac{M_\odot}{1-\tilde{E}^2}[1-(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)]，$$
$$1-e^2\equiv\left(\frac{\tilde{L}}{M_\odot}\right)^2(1-\tilde{E}^2)\left[1+2(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)-2\left(\frac{M_\odot}{\tilde{L}}\right)^2(2-\beta+2\gamma)\right]，\quad(40.23)$$
$$\delta\phi_0\equiv\frac{1}{3}(2-\beta+2\gamma)6\pi(M_\odot/\tilde{L})^2。$$

(5)直截了當的操作可把這個結果引入（40.17）和（40.18）的形式。］

初階
高階

練習 40.5　對於扁太陽的近日點移動

(a) 對於一個扁的太陽，Newton 勢的形式爲

$$U=\frac{M_\odot}{r}\left(1-J_2\frac{R_\odot^2}{r^2}\ \frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right)，\quad(40.24)$$

式中 J_2 是「四極矩參量」。人們知道 $J_2\leq3\times10^{-5}$。試證明，如果一扁的太陽靜止在PPN坐標系的原點，則周圍空時的度規［(39.32)式］爲下述形式

$$ds^2=-\left[1-2\frac{M_\odot}{r}-2J_2\left(\frac{M_\odot R_\odot^2}{r^3}\right)\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right)+2\beta\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2$$
$$+\left[1+2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]\quad(40.25)$$
$$+\text{後-後 Newton 量值的修正。}$$

(b) 設一試驗粒子在赤道平面上的某束縛軌道運動。試利用 Hamilton-Jacobi 理論證明，它的軌道是進動的橢圓［(40.17)式］，每圈的進動爲

$$\delta\phi_0=\frac{2-\beta+2\gamma}{3}\frac{6\pi M_\odot}{a(1-e^2)}+J_2\frac{3\pi R_\odot^2}{a^2(1-e^2)^2}。\qquad(40.26)$$

關於此結果的重要性，見框40.3。

本章其餘部分全屬高階。無需前面的高階內容爲它作準備，但下述內容是有幫助的：
(1)第6章（加速的觀測者）；
(2)§17.6（無前幾何）；以及
(3)第38章和第39章（基礎的檢驗；其他理論；PPN表述）。
以後任何一章都無需它作爲準備。

§40.6 月球軌道中的三體效應

迄今所討論的相對論效應，全部涉及太陽外部引力場的球狀部分，因而，它們只能探索 PPN 參量 β 和 γ 加上「優先系」參量 α_1, α_2 和 α_3. 測量其他 PPN 參量的努力集中在三體相互作用（此處討論），慣性系被旋轉物體拖曳（§40.7），局域測量引力常數中的反常（§40.8），以及行星和月亮的軌道對短程線的偏離（§40.9）。

月亮軌道中的三體效應：

沒有比地球－月亮軌道更好的研究三體相互作用的場所了。地球、月亮以及太陽的拉力都有貢獻。地球和月亮圍繞它們共同引力中心運動中的微擾，可以利用激光測距（在70年代早期地球－月亮的間距可測準到～10厘米）並利用月亮表面的射電指向標（在天空的角位置可測量到優於 0″.001 的弧）高精度的測量。

(1)理論

而且，任何 Newton 三體相互作用（地球和太陽以非線性方式一起作用）將在月亮軌道上產生相對論性微擾，這勉强在這種技術測量的範圍之內。這些效應取決於熟悉的參量 γ（量度空間曲率）和 β［量度 g_{00} 中非線性疊加的總量 $(U_{地球}+U_{太陽})^2$］。此外，這些效應還取決於 β_2, β_2 控制了太陽勢 $U_{太陽}$ 對地球內部作用的範圍，影響着地球引力牽引的强度，使之隨着地球移近和遠離太陽而變化。預期這些效應還取決於 ζ, Δ_1 和 Δ_2，它們控制了地球軌道動量以及動能的各向異性（由太陽引起的）受引力作用的範圍。

Bromberg (1958), Baierlein (1967)，以及 Krogh 和 Baierlein (1968) 曾利用廣義相對論和 Dicke-Brans-Jordan 理論計算了地球－月亮軌道中三個主要的三體效應。這些效應是非累積的，幅度爲～100 厘米，～20 厘米，和～10厘米。已經知道這個 100 厘米的效應［它是 de Sitter (1916) 最早發現的］只取決於 γ。其他效應對 PPN 參量的精確依賴關係還不知道。

(2)測量的展望

在70年代測量這些效應的前景並不樂觀；它們被月亮軌道中的獨特性質所掩蓋，而這是相對論無能爲力的。

§ 40.7　慣性系的拖曳

迄今所討論的實驗研究的是電磁波、宇宙飛船、行星、以及穿過太陽系的小行星的運動。一類完全不同的實驗測量在地球引力場中運動的迴轉器取向的變化。這個實驗特別重要，因爲它能直接測量由地球角動量引起的「慣性系的拖曳」。

迴轉器進動：

在特別指明爲自轉的地球之前，導出後 Newton 極限中迴轉器進動的普遍表達式是有用的。（初階讀者以及未學第 6 章和第39章的讀者，可能難於跟隨這個推導。沒有關係。重要的是答案！）

(1)普遍的分析

令 S^α 爲迴轉器的自旋（即它的角動量矢量），令 u^α 爲它的四維速度。自旋總是與四維速度正交的，$S^\alpha u_\alpha=0$（見框 5.6）。*假設作用在迴轉器上的任何非引力的作用力是加在它的質心上的*，因此在它的固有參考系中不存在力矩。於是，迴轉器將沿着它的世界線「Fermi-Walker 遷移」其自旋（見§6.5）：

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{S}),\qquad \boldsymbol{a}\equiv\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=\text{四維加速度}。\tag{40.27}$$

計算的目標是在後 Newton 極限中寫下並分析這個遷移方程。

迴轉器相對於 PPN 坐標格子以速度 $v_j\equiv dx^j/dt\equiv \mathrm{d}x_j/dt$ 運動。假設 $v_j\lesssim\epsilon$，其中 ϵ 是後 Newton 展開的參量（$\epsilon^2\approx M_\odot/R_\odot$）。隨着迴轉器的運動，它本身携帶着一正交歸一系 $\boldsymbol{e}_i$，它與 PPN 坐標系的關係是純 Lorentz 增速加上基矢長度的重正化［變換 (39.41)］。這個自旋是在此共動系中的純空間矢量（$S^0=0$）；它的長度 $(S_jS_j)^{1/2}$ 保持固定（角動量守恒）；它的方向由 Fermi-Walker 遷移定律控制。

共動系的基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 並不是 Fermi-Walker 遷移的，反之，自旋是 Fermi-Walker 遷移的。它們是通過純增速（不是轉動！）與 PPN 坐標格子相聯繫的，後者又與遠離太陽系的慣性相聯繫，而它又如預料相對「遙遠恒星」是固定的。因而，通過計算自旋相對於共動系的進動，

$$dS_j/d\tau\equiv\varepsilon_{jkl}\Omega_kS_l,\tag{40.28}$$

人們實際上計算了自旋的進動角速度 Ω_j，它是相對於通過遙遠恒星固定在天空中的參考系的。

計算 $dS_j/d\tau$:

$$\frac{dS_j}{d\tau}=\nabla_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_j)=(\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{S}\cdot(\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{e}_j。\tag{40.29}$$

此處利用了下述事實，即 $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 方向［(40.27) 式］並從而與 $\boldsymbol{e}_j$ 正交。量

$\boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_j$ 在 PPN 坐標系中是很容易計算的。在計算中，把下述表達式用作度規係數 [(39.32)式]

$$g_{00}=-1+2U+O(\epsilon^4),\quad g_{jk}=\delta_{jk}(1+2\gamma U)+O(\epsilon^4),$$
$$g_{0j}=-\frac{7}{2}\Delta_1 V_j-\frac{1}{2}\Delta_2 W_j+(\text{「優先系的項」})+O(\epsilon^5);\tag{40.30}$$

把下述表達式用作 $\boldsymbol{e}_j$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的分量 [經變換 (39.41) 得出]

$$e_j{}^0=v_j+O(\epsilon^3),\quad e_j{}^k=(1-\gamma U)\delta_{jk}+\frac{1}{2}v_kv_j+O(\epsilon^4),$$
$$S^0=v_jS_j+O(\epsilon^3S_j),\tag{40.31}$$
$$S^k=(1-\gamma U)S_k+\frac{1}{2}v_kv_jS_j+O(\epsilon^4S_j);$$

並利用關係式

$$dv_j/d\tau=a_j+U_{,j}+O(\epsilon^2U_{,j})\tag{40.32}$$

式中 a_j（假設$\lesssim U_{,j}$）是四維加速度的分量。人們發現（見練習 40.6），自旋進動的結果是

$$dS_j/d\tau=\boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_j=S_k[v_{[j}a_{k]}+g_{0[k,j]}-(2\gamma+1)v_{[j}U_{,k]}]。$$

以三維矢量的形式重新寫出此結果，變爲

(2)進動的普遍 PPN 公式

$$d\boldsymbol{S}/d\tau=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{S},\tag{40.33a}$$
$$\boldsymbol{\Omega}\equiv-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{g}+\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{v}\times\nabla U,\tag{40.33b}$$
$$\boldsymbol{g}\equiv g_{0j}\boldsymbol{e}_j。\tag{40.33c}$$

在此最後結果中，是在坐標系中計算進入 $\boldsymbol{\Omega}$ 中的三維矢量，還是在共動正交歸一系中計算無關緊要，因爲 $\boldsymbol{e}_j$ 和 $\partial/\partial x_j$ 的不同只是 ϵ^2 量級的修正。

(40.33) 式在後 Newton 水準的近似上，以完整的普遍性，描述了迴轉器自旋 $\boldsymbol{S}$ 相對於共動正交歸一系的進動，共動系的標架在轉動方面被遙遠恒星束縛着。

(3)特別指明：Thomas 進動

對於一個自旋爲 $\boldsymbol{S}$，在圍繞着質子的軌道上的電子，只存在第一項 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}$（無引力）。這一項導致 Thomas 進動，它在原子光譜的精細結構中扮演重要角色 [參看，例如，Ruark 和 Urey (1930)]。推導 Thomas 進動的其他方法，見練習 6.9 和 §41.4。

Thomas 進動對於在地球表面的迴轉器起作用（$\boldsymbol{a}$=Newton 的引力加速度），但對於在自由運動的衛星中的迴轉器不起作用。

(4)特別指明：由加速度和地球的 Newton 勢引起的進動

如果置地球自轉和優先系效應於不顧，並將 PPN 坐標系相對於地球中心靜止地置放，則 g_{0j} 爲零，$\boldsymbol{\Omega}$ 爲

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}&=\boldsymbol{v}\times\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\nabla U\right]\\&=\gamma\boldsymbol{v}\times\nabla U\ \text{對於在地球表面的迴轉器}\\&=\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{v}\times\nabla U\ \text{對於在軌道上的迴轉器。}\end{aligned}\tag{40.34}$$

廣義相對論項 $(\gamma+\frac{1}{2})\boldsymbol{v}\times\nabla U$ 是迴轉器穿過地球的彎曲、靜止空時幾何的運動引起的。注意，它只取決於同樣的參量 γ，正如它受電磁波實驗檢驗那樣。對於在地球附近極軌道上的迴轉器，數量級爲

$$\Omega\approx\frac{3}{2}\left(\frac{M_E}{R_E}\right)^{1/2}\left(\frac{M_E}{R^2_E}\right)\approx\text{每年 8 弧秒。}\tag{40.35}$$

W. de Sitter (1916) 導出，環繞太陽的「地球-月亮迴轉器」的廣義相對論進動爲 $\frac{3}{2}\boldsymbol{v}\times\nabla U$。十一年後，L. H. Thomas (1927) 導出了適用於原子物理學的狹義相對論進動爲 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}$。

(5)特別指明：由地球自轉引起的進動

地球的自轉在 PPN 度規中引起的非對角線項 g_{0j} 爲（練習 40.7）：

$$g=g_{0j}\boldsymbol{e}_j=-\left(\frac{7}{4}\Delta_1+\frac{1}{4}\Delta_2\right)\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{r^3}。\tag{40.36}$$

此處 $\boldsymbol{J}$ 是地球的角動量。這些非對角線項對迴轉器進動貢獻的總量爲

$$\boldsymbol{\Omega}=-\frac{1}{2}\nabla\times g=\left(\frac{7}{8}\Delta_1+\frac{1}{8}\Delta_2\right)\frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{J}+\frac{3(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}\right]。\tag{40.37}$$

注意，這個貢獻與其他貢獻不同，它與迴轉器的線速度無關。人們可以通過下述途徑思考它。

轉動的迴轉器相對於它附近的慣性系靜止。它和這個局域慣性系相對於遙遠的星系以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 轉動，因爲地球的自轉「拖曳」着局域慣性系和它一起轉。注意，在北極和南極附近，局域慣性系轉動的方向與地球相同（$\boldsymbol{\Omega}$ 平行於 $\boldsymbol{J}$），但在赤道附近，它們反向轉動（$\boldsymbol{\Omega}$ 反平行於 $\boldsymbol{J}$；把 $\boldsymbol{\Omega}$ 與地球的磁場比較！）。儘管起初看來這似乎是荒謬的，但 Schiff 提出的類比使它似乎較爲合理了*。考慮一個浸沒在黏性流體中的轉動固體球。隨着它的轉動，該球將拖曳着流體和它一道轉動。在流體中的不同點，放下小杆，並且注視着當流體流經

* 可以從數學上嚴格作此類比；見 Thorne (1971) 第255頁上的脚注；也可參看本書 §21.12 的 Mach 原理。

時，流體怎樣使小杆轉動。在兩極附近，流體將明顯地使杆按照恒星轉動的同樣方向轉動。但在赤道附近，因爲在小半徑處對流體的拖曳要比在大半徑處快得多，所以緊靠着球的杆的末端，與桿的遠端相比，被流體拖曳得更快，結果，杆轉動的方向與球轉動的方向相反。

由地球自轉引起的進動角速度的數量級爲

$$\Omega\sim J_E/R_E^3\sim\text{每年 }0.1\text{ 弧秒}。\qquad(40.37')$$

(6)測量進動的展望

這兩種進動，以及由於穿過地球靜場運動而引起的較大的一種進動 [(40.35)式]，在 70 年代有可能探測到。通過衛星實驗以探測它們爲目標的設備現在（1973年）正在 Stanford（斯坦福）大學建造；見 Everitt, Fairbank, 和 Hamilton (1970)；也可參看 O'Connell (1972)。*

因地球相對於優先系（如果有的話）運動而產生的迴轉器進動太微小了，以致引不起很大興趣。

---

* 慣性系被轉動物體拖曳，在引力物理學的別處，例如在受引力作用物體的角動量定義中（§19.2），以及在黑洞物理學中（第33章），扮演重要的角色。這個效應是 Thirring 和 Lense (1918) 首先討論和計算的。晚近，Brill 和 Cohen (1966) 對理想化情形作了計算，其中的效應比較大，便於洞察效應的機制。還可參看 §21.12 中對 Mach 原理的討論。

練習

練習 40.6 進動的角速度

試導出在後 Newton 極限中，迴轉器進動的 (40.33) 式。推導的基礎是 (40.29) - (40.32) 式。

練習 40.7 地球周圍度規中的非對角線項

把地球理想化爲孤立的剛性轉動的球，角動量爲 $\boldsymbol{J}$。試用 (39.34b,c) 和 (39.27) 證明（用三維矢量符號）在地球外，在地球的 PPN 靜止系中

$$\boldsymbol{V}\equiv V_je_j=\boldsymbol{W}\equiv W_je_j=\frac{1}{2}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}/r^3。\qquad(40.38)$$

由此，推出 (40.36) 式。

練習 40.8 自旋曲率耦合

考慮一自旋物體（例如地球或迴轉器或電子）穿過彎曲的空時運動。由於空時曲率產生的潮汐引力，作用在自旋物體的基元小塊上。這些力應當不僅取決於各小塊相對於物體中心的位置，還取決於它們的相對速度。此外，物體的自旋，

$$\boldsymbol{S}\equiv\int(\rho\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})d\text{（體積）}\quad\text{在共動正交歸一系中，}$$

是它的這些小塊的相對位置和速度的量度。因此，人們預期自旋與潮汐引力的耦合——即與空時曲率的耦合——應引起從短程線運動的偏離。小心的求解關於廣義相對論的第39章

的 PPN 方程揭示 [Papapetrou (1951), Pirani (1956)]，這類耦合出現了並造成世界線從它否則應取的路線偏離；於是

$$m\frac{Du^\alpha}{d\tau}=-S_\mu u_\nu\frac{D^2u_\beta}{d\tau^2}\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}+\frac{1}{2}(\epsilon^{\lambda\mu\rho\tau}R^{\alpha\nu}{}_{\lambda\mu})u_\nu S_\rho u_\tau。\qquad(40.39)$$

從數量級上估計附加項對太陽系中行星軌道的效應。

［答案：對於探測來說，它們是太微小了。然而，可從另外兩個重要方面尋找這個效應：(1) 當賦予顯著角動量的快速自旋中子星或黑洞進入另一個中子星或黑洞的强大潮汐場時；以及(2)當單個電子或在「Dirac 負能態海洋」中的全體電子進入更其强大的潮汐場（引力坍縮的後階段)時。這樣的潮汐場或曲率，反向地拉着具有兩個相反方向自旋的電子 [Pirani (1956); DeWitt (1962)，第338頁；Schwinger (1963a,b)]，正像電場反向地拉着具有兩種相反電荷的電子那樣［「眞空極化」；特別可參看 Heisenberg 和 Euler (1936)]。從原則上說，拉着電子自旋的潮汐場不必歸因於「背景」空時曲率；它可以歸因於附近的大質量自旋物體，例如一個「活着的」黑洞（第33章）[「引力的自旋-自旋耦合」；O'Connell (1972)。］

§ 40.8　引力常數是恒定不變的嗎？

本節的標題和課題很可能引起混淆。本書全部採用幾何化的單位，其中 $G=c=1$。因此我們被自己鎖在一種觀點了，即禁止回答引力常數是否從事件到事件有所變化。

這是虛假的！人們完全能在 $G=c=1$ 情況下很好的提這個問題，只要弄清楚這個問題的含義是什麼。

在 §1.5 和 §1.6，c 被定義爲厘米和秒之間的一個確定的轉換因子；而 G/c^2 被定義爲克和厘米之間的一個確定的轉換因子。然而，這些法定的定義並不能保證測量兩個物體之間吸引的 Cavendish 實驗*得出

$$力=-Gm_1m_2/r^2=-m_1m_2/r^2。$$

如果廣義相對論正確地描述了經典的引力，並且如果轉換因子 G 和 c 的值已嚴格正確地選定，那麼，在宇宙任何地方，任何 Cavendish 實驗都將得出「力 $=-m_1m_2/r^2$」。但是，如果 Dicke-Brans-Jordan 理論或幾乎任何其他度規

* Cavendish 實驗的描述可參看任何標準的教科書。他的實驗的最初形式是兩個以細金屬絲懸掛的分離的球。Henry Cavendish (1798) 推斷出地球的質量，並由此得出地球的密度。他報導說：「通過首次採用的金屬絲所作的實驗的平均值，地球的密度是水的密度的 5.48 倍；而通過後來的金屬絲所作的那些實驗的平均值，顯示出同樣的結果；並且，……極端的結果與平均值的差異不多於 0.38 或整體的 1/14。」今天，最精確的測量 G 的方法 [Rose 等 (1969)] 給出 $G_c=(6.674\pm0.004)\times10^{-8}$ 厘米³/克秒²（一個標準的偏離）。

理論都正確地描述了引力，那麼 Cavendish 實驗中的力將取決於實驗是在何處、在何時做的，正如它取決於 m_1, m_2 和 r 一樣。其次，爲了討論作爲檢驗引力理論的 Cavendish 實驗，必須引入一個新的比例因數

定義「Cavendish 引力常數」G_c

$$G_c \equiv G_{\text{Cavendish}} \equiv (\text{「Cavendish 引力常數」}), \tag{40.40}$$

它進入了 Newton 的作用力定律

$$\text{力} = -G_c m_1 m_2 / r^2 。 \tag{40.41}$$

在廣義相對論中這個 Cavendish 常數將爲 1，但在絕大多數其他度規理論中，它將從空時中的一個事件到另一事件發生變化。

G_c 隨時間變化

在某些理論中，例如 Dicke-Brans-Jordan 理論，Cavendish 常數由宇宙中物質的分佈確定。由此，宇宙的膨脹改變着它的數值

$$\frac{1}{G_c}\frac{dG_c}{dt} \sim -\left(\frac{0.1 \text{ 到 } 1}{\text{宇宙年齡}}\right) \sim \frac{-1}{10^{10}\text{或}10^{11}\text{年}}$$

[參看，例如，Brans 和 Dicke (1961)]。一系列觀測爲這種時間變化加上了限制。在過去的46億年期間 G_c 的巨大時間變化會對地球、太陽和整個太陽系產生顯著的效應。Dicke 和 Peebles (1965) 總結了預期的地球物理效應並與觀測相比較。由於地球物理學所包含的複雜性，難於得出堅實的結論，但是，相當確定的極限是

$$(1/G_c)(dG_c/dt) \lesssim 1/10^{10} \text{ 年 （地球物理學的）。} \tag{40.42a}$$

最後，行星軌道運動的高精度測量將得出更好的極限。目前，行星觀測指出

$$(1/G_c)(dG_c/dt) \lesssim 4/10^{10}\text{年 （行星軌道）} \tag{40.42b}$$

[Shapiro, Smith 等 (1971)]。這些極限的嚴密已足以開始引起興趣，但還沒有嚴密到足以推翻任何別的可行的引力理論。

G_c 的空間變化

如果 G_c 取決於宇宙中物質的分佈，那麼它應依賴於人們何時在宇宙何處。特別是，隨着人們在太陽系中從一點運動到另一點，接近太陽然後又遠離，人們應看到 G_c 的變化。在絕大多數引力的度規理論中確實是這種情形，儘管在廣義相對論中並非如此。用 PPN 表述分析 Cavendish 實驗揭示出 G_c 的空間變化爲

$$\Delta G_c = -2G_c(\beta + \gamma - \beta_2 - 1)U \tag{40.43}$$

[Nordtvedt (1970, 1971a); Will (1971b)]。

如果 $\beta+\gamma-\beta_2-1 \sim 1$，則沿着地球橢圓軌道的這些變化的幅度爲 $\Delta G_c/G_c \sim 10^{-10}$。在 70 年代，對於直接測量而言，這是太微小了。儘管有偉大的創造

性和努力，在1972年，最精確的測量 G_c 值的實驗其精度不優於 10^4 分之一［見 Beams (1971)］。在地球上作的探索 G_c 年變化的實驗，不測量實際值（「示零類型的實驗」），其精度確實可以做到優於 10^{-4} ——但並未能達到 10^{-10} 的精度。另一方面，在太陽系中 G_c 空間變化的間接結果幾乎一定是可測量的（見下面 §40.9）。

G_c 依賴於速度

在 Ni 的引力理論中（框 39.1）以及在其他與它類似的二張量或矢量-張量理論中（其中，前幾何選取了一個優先的「宇宙靜止系」），Cavendish 常數 G_c 可依賴相對於這個優先系的速度。對於具有兩個相等質量且其間的分離大於其大小的 Cavendish 實驗，G_c 按下式變化。

$$\Delta G_c = G_c\left[\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)\,v^2-\frac{1}{2}\alpha_2(v\cdot n)^2\right] \tag{40.44}$$

［Will (1971b)］。此處 v 是 Cavendish 儀器相對於優先系的速度，而 n 是兩質量之間的單位矢量。對於一個物體是大質量球（例如地球），另一物體是在球表面上的小物體這樣的實驗，G_c 按下式變化

$$\Delta G_c/G_c=\frac{1}{2}[(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_2(1-I/MR^2)]v^2 -\frac{1}{2}\alpha_2(1-3I/MR^2)(v\cdot n)^2 \tag{40.44'}$$

［Nordtvedt 和 Will (1972)］。此處 M 和 R 是球的質量和半徑，而

$$I=\int(\rho r^2)4\pi r^2 dr$$

是它的質量分佈的二階矩的跡。對於行星軌道這些效應的後果還沒有詳細說明，但對地面上實驗的後果已經說明了。

由 G_c 各向異性引起的地球潮汐中的異常

設想 Cavendish 實驗中一個質量是地球，另一是在地球表面上的重差計。重差計讀出了「引力的局域加速度」爲

$$g=G_c m_{\text{地球}}/r^2_{\text{地球}}。 \tag{40.45}$$

隨着地球的自轉，地球中心和重差計之間的單位矢量 n 也轉動，G_c 以及由此 g 將以12恒星小時爲周期起伏，其幅度爲

$$(\Delta g/g)_{\text{幅度}}=\frac{1}{4}\alpha_2 v^2\cos^2\theta_m。$$

此處 θ_m 是隨着地球自轉，v（恒定矢量）和 n（轉動的矢量）之間夾角的最小值。（注：已用到地球的 $I/MR^2\approx 0.5$。）這些起伏在地球中產生的潮汐與

由月亮和太陽產生的潮汐是同一類型的。根據1972年的資料，根據在地球赤道附近重差計的測量，沒有跡象表明，存在着幅度～10^{-9}的，任何異常的12恒星小時效應 [Will (1971b)]。由此

(1)α_2 的實驗值

$$|\alpha_2|^{1/2}v\cos\theta_m=|\Delta_2+\zeta-1|^{1/2}v\cos\theta_m\lesssim 6\times10^{-5}\sim 20\text{公里/秒}。\quad(40.46a)$$

利用粗略的估計：地球相對於宇宙靜止系的速度 v～200 公里／秒，v 和地球赤道平面之間的夾角 $\theta_m\lesssim 60°$，得出粗略的極限

$$|\alpha_2|=|\Delta_2+\zeta-1|\lesssim 0.03。\quad(40.46b)$$

[這個極限並不影響框 39.1 中的三種理論；其中，只有 Ni 的理論具有前幾何和宇宙靜止系；它預言了 $\Delta G_c/G_c$ 中的各向同性效應 [(40.44) 式]，但沒有各向異性效應。然而，其他具有宇宙靜止系的理論——例如 Papapetrou 的 (1954a,b,c) 理論——被這個極限排除了；見 Ni (1972), Nordtvedt 和 Will (1972)。]

(2) Whitehead 理論的實驗反證

Whitehead 的引力理論（它是二張量理論，具有與 Ni 理論不同類型的前幾何）預期，星系應引起與速度無關的 G_c 的各向異性。這些又將引起地球潮汐，其周期爲12恒星小時，幅度爲

$$\Delta g/g\sim 2\times10^{-7}\sim 100\times\left(\begin{matrix}\text{這類幅度的}\\ \text{實驗極限}\end{matrix}\right)$$

[Will (1971b)]。不存在這類潮汐證明 Whitehead 理論是不確的——這是超出所有紅移、光偏轉、時間延遲，以及近日點移動測量威力之外的反證的功績。（對於所有這些「標準的實驗」，Whitehead 和 Einstein 的預言是同樣的！）

由 G_c 與速度有關引起的地球自轉速率的異常

(40.44′) 式預言，隨着地球圍繞太陽的運動，地球上的 Cavendish 常數有周期性的周年變化：

$$\boldsymbol{v}=\left(\begin{matrix}\text{地球相對於}\\ \text{太陽的速度}\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}\text{太陽相對於優}\\ \text{先系的速度}\end{matrix}\right)\equiv\boldsymbol{v}_E+\boldsymbol{w};$$

$$(\Delta G_c/G_c)_{\substack{\text{地球表面上}\\ \text{的平均值}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1\right)(\boldsymbol{w}^2+\boldsymbol{v}_E{}^2+2\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_E)。\quad(40.47)$$

（[以一年爲周期的正弦式的變化] 指向 $2\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_E$）

假設全部 PPN 參量的量級爲 1，這個周年變化比起地球穿過太陽引力勢出入運動所產生的 [(40.43) 式] 要大 1,000 倍。響應這種變化的 Cavendish 常數，地球的自引力牽引應變化，從而地球應有向內（較强的牽引）和向外（鬆弛的牽引）的「呼吸」。由此引起的地球轉動慣量的周年變化應引起地球自轉速率 ω 的周年變化（由原子鐘測出的「一天的長短」變化了）：

$$\delta\omega/\omega\sim 0.1\left(\frac{2}{3}\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1\right)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_E$$

[Nordtvedt 和 Will (1972)]。與測量到的自轉速率的周年變化相比較（地球物理學家們把全部這些變化都歸因於地球大氣的季節性變化），得出下述限制

$$\left|\frac{2}{3}\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1\right| \lesssim 0.2。 \tag{40.48}$$

$\frac{2}{3}\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1$ 的實驗值

[見 Nordtvedt 和 Will (1972)]。這個限制排除了若干引力的優先系理論，包括 Ni 的理論在內（框 39.1 和框 39.2）。

當把實驗結果 (40.21), (40.46) 和 (40.48) 聯合起來時，就把下述非常粗略的限制加在任何具有宇宙靜止系的理論之上：

$$\begin{aligned}
&|\alpha_1| = |7\Delta_1+\Delta_2-4\gamma-4| \lesssim 0.2, \\
&|\alpha_2| = |\Delta_2+\zeta-1| \lesssim 0.03, \\
&|\alpha_3| = |4\beta_1-2\gamma-2-\zeta| \lesssim 2\times10^{-5}。
\end{aligned} \tag{40.49}$$

這些限制完全推翻了迄今已經檢驗的具有優先系的全部理論，只有 Will 和 Nordtvedt 提出的那一種除外［見 Ni (1972); Nordtvedt 和 Will(1972)］。

G_c 依賴於化學成分

在某些引力理論中，Cavendish 實驗的結果依賴於試驗物體的化學成分和內部結構（練習 40.9 和練習 40.10）。迄今爲止，Kruezer (1968) 對這類效應作了最精確的探索。他發現，對於氟和溴，直到下述精度，G_c 還是相同的

$$\left|\frac{G_c(\text{溴})-G_c(\text{氟})}{G_c}\right| \lesssim 5\times10^{-5}。 \tag{40.50}$$

練習

練習 40.9　理想化太陽的 Cavendish 常數

把太陽理想化爲靜止的理想流體球，靜止位於 PPN 坐標的原點。這樣，它的外部引力場具有 (40.3) 式的形式，其中 $M_\odot$ 由 (40.4) 式給出。由此，質量爲 m，位於很遠半徑 r 處的試驗物體，受到下述引力的加速

$$\text{力} = -mM_\odot/r^2。 \tag{40.51a}$$

(a) 在下述意義下計算太陽的質量 M，即從內向外，把一層物質的球殼加在另一層的頂端，由此構成太陽所需的能量總數。［答案：

$$\begin{aligned}
M &= \underbrace{\int_0^{R_\odot}\rho_0\,(1+\Pi+3\gamma U)\,4\pi r^2dr}_{\text{靜止質量+內能}} \underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^{R_\odot}\rho_0 U 4\pi r^2dr}_{\text{引力勢能}} \\
&= \int_0^{R_\odot}\rho_0\left[1+\Pi+\left(3\gamma-\frac{1}{2}\right)U\right]4\pi r^2dr。 \quad]
\end{aligned} \tag{40.51b}$$

(b) 利用維里定理［(39.21b) 式］把 (40.4) 式重新寫成下述形式

$$M_\odot = \int_0^{R_\odot}\rho_0\left[1+\beta_3\Pi+\left(2\beta_2+\frac{1}{2}\beta_4\right)U\right]4\pi r^2dr。 \tag{40.51c}$$

(c) 把上述諸方程與遠在太陽外 r 處 Cavendish 常數的定義

$$\text{力}=-G_C mM/r^2 \tag{40.51d}$$

結合，得出

$$G_C=\frac{\left(\begin{array}{c}\text{通過太陽彎曲遙遠試驗粒子}\\ \text{世界線的效應定義的太陽質量}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{通過把能量守恒定律應用於}\\ \text{逐步構造太陽定義的質量-能量}\end{array}\right)} \tag{40.52}$$
$$=1+\int(\rho_0/M_0)[(\beta_3-1)\Pi+\frac{1}{2}(4\beta_2+\beta_4-6\gamma+1)U]4\pi r^2 dr。$$

除非 $\beta_3=1$ 和 $4\beta_2+\beta_4-6\gamma+1=0$（當然，它們在 Einstein 理論中就是如此），否則 G_C 將依賴於太陽的內部結構！把 (40.52) 式特殊化爲引力的守恒理論（框 39.5），並說明爲什麼該結果就是人們從 (40.43) 式預期的結果。

練習 40.10 任何物體的 Cavendish 常數

把練習 40.9 的分析推廣到受任意脅强並具有任意形狀和內部速度的源（受後Newton近似的約束 $v^2\ll 1$，$|t_{jk}|/\rho_0\ll 1$，$U\ll 1$，$\Pi\ll 1$）。假設物體相對於宇宙靜止系靜止。試證明 G_C 依賴於源的內部結構，除非

$$2\beta_1-\beta_4=1,\quad 4\beta_2+\beta_4-6\gamma=-1,\quad \beta_3=1,\quad \zeta=0,\quad \eta=0。 \tag{40.53}$$

當然，這些 PPN 約束全部爲 Einstein 理論所滿足。

§ 40.9 行星和太陽在短程線上運動嗎？

廣義相對論預言行星和太陽沿短程線運動的含義

對太陽系實驗至關緊要的問題是，太陽和行星是否在空時的短程線上運動。這個問題因運動物體本身對空時曲率的貢獻而複雜了。

爲了闡明這個問題——並在廣義相對論的框架中得出一個答案——考慮「Einstein 升降機」類型的論證。討論的天文學客體具有外部邊界，並且邊界上的每一點描繪出一條世界線。這些世界線定義一世界管。這個世界管外部的某個距離構成了如 §20.6 的「緩衝帶」。根據客體的質量和矩以及包絡空間的曲率（「外部引力場的生潮力的强度」），按這樣一種方式來剪裁緩衝帶內部和外部的尺度，即度規從緩衝帶中平直性的偏離 ϵ（參看 §20.6）所取的值至多等於能達到的極值 $\epsilon_{\text{極值}}$（相對於 r 的變化爲極小值，相對於方向的變化爲極大值；換言之，爲極小的極大）的兩倍。這樣，除了 $\epsilon_{\text{極值}}$ 量級的誤差外

，客體可以看作在漸近地平直的空間運動。總四維動量守恒定律適用。它使人們確信，客體以匀速沿（局域的）直線運動。其次，考慮「背景幾何」，它與剛出緩衝帶的實際幾何相符到 $\epsilon_{極值}$ 的精度或更好些，但內部是 Einstein 場方程的無源解。從而，直到由 $\epsilon_{極值}$ 值所支配的精度，局域的直線（天文學客體沿着它運動）將是這個背景幾何的短程線。

偏離短程線運動：

在人們能給實際運動從短程線偏離以任何十分明確的含義的範圍內（由於背景幾何實際上並不存在，這是一項困難的任務！），就能採用 PPN 表述或某些其他的近似方案來計算這種偏離［參看，例如，Taub (1965)］。這種偏離通常出現在實質性的測量中，而且有時幾乎全部來源於外部場的 Riemann 曲率張量和天文學客體的多極矩之間的耦合（角動量與轉動相聯繫；四極矩和更高極矩與形變相聯繫；參看，例如，練習 40.8 和 16.4）。這種耦合對地球－月亮系統是重要的，但無需用相對論來計算它；如果能夠充分地了解地球和月亮的內部，那麼，Newton 理論能以比所需或所要的高得多的精度來承擔這個任務！對於行星和太陽，這個效應可以忽略。（練習：用 Newton 理論證明確實如此！）

(1)歸因於曲率耦合

因而，當把廣義相對論用於太陽系時，可以把太陽、地球－月亮質心、以及每一個其他行星的軌道近似爲「背景空時幾何」的短程線，只要它自身並無曲率效應即可。這就是在 §40.5 中在廣義相對論情況下分析行星近日點移動的方法，以及在練習 39.15 中導出後 Newton「多體運動方程」的方法。

在絕大多數其他引力度規理論中，包括 Dicke-Brans-Jordan 理論，存在着從短程線運動的實質的偏離。在這些理論中，「Einstein 升降機」的論證失敗，因爲空時不僅有一種度規，還有一種長程場，它間接地與大質量的引力物體耦合（參看 §38.7 和 §39.2）。

(2)歸因於引力常數的空間依賴性（Nordtvedt 效應）

用 Dicke 關於基本常數空間變化對 Eötvös-Dicke 類型實驗的影響（見 §38.6）的論證，可以最好的理解這個現象。在 Cavendish 引力常數 G_c 依賴於位置的理論中（在廣義相對論中不會也不能是這樣），一個具有顯著的自引力能 $E_{引力}$ 的物體，在完全均匀的外部 Newton 引力場中，必定以反常的加速度下落：

$$\left(\begin{matrix}\text{大質量物體}\\ \text{的加速度}\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}\text{試驗物體}\\ \text{的加速度}\end{matrix}\right)=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial E_{引力}}{\partial G_c}\right)\nabla G_c$$
$$=\frac{E_{引力}}{MG_c}\nabla G_c \qquad (40.54)$$

[見 (38.15) 式] 。在 Dicke-Brans-Jordan 理論中， G_c 實質上是標量場的倒數；而它所包含的一小部分是正比於 Newton 勢 U 的 [(40.43) 式，適當的參量值來自框 39.2] 。因此，太陽下落的加速度比試驗物體的加速度小 10^{-6}；木星下落的加速度小 10^{-9}；地球的，則小 10^{-10}。翻譯成相對論的語言：受大質量物體引力自能的影響，標量場引起了從短程線運動的偏離。

在任何引力的度規理論中，人們可以利用第29章的全部 PPN 表述去計算大質量物體的運動。Nordtvedt (1968b) 和 Will (1971a) 曾做過這個工作。他們發現，在均勻外場中靜止的大質量物體，經歷的 (Newton 類型的) PPN 坐標加速度爲

$$\frac{d^2x_j}{dt^2}=E_{jk}\frac{\partial U}{\partial x_k},$$

式中 E_{jk} 是取決於物體結構的量：

$$E_{jk}=\delta_{jk}\left\{1-(7\Delta_1-3\gamma-4\beta)\frac{E_{\text{引力}}}{m}\right\}-(2\beta+2\beta_2-3\gamma+\Delta_2-2)\frac{\Omega_{jk}}{m},$$
$$\Omega_{jk}=-\frac{1}{2}\int\frac{\rho_0\rho_0'(x_j-x_j')(x_k-x_k')}{|x-x'|^3}d^3xd^3x',\quad E_{\text{引力}}=\sum\Omega_{jj}。 \tag{40.55}$$

此處， m 是物體的總質量-能量， Ω_{jk} 是「Chandrasekhar 勢能張量」， $E_{\text{引力}}$ 是物體的自引力能。[注： Dicke 計算反常加速度 (40.54) 的方法在不「守恒」的理論中失效 (框 39.5) 。]

在廣義相對論中，在 E_{jk} 中出現的 PPN 係數的組合爲零；因此 $E_{jk}=\delta_{jk}$，從而物體以通常的加速度下落——即它沿着短程線運動。但在大多數其他引力理論中 $E_{jk}\neq\delta_{jk}$；物體並不沿着短程線運動；並且，它的加速度甚至可能在不同於 Newton 勢梯度的方向上！

這個所預言的從短程線運動的偏離稱爲「Nordtvedt 效應」。這樣一種效應的可能性是首先由 Dicke (1964c) 附帶注意到的，而被 Nordtvedt (1968a, b) 獨立發現並作了極爲詳盡的研究。在與廣義相對論不同的理論中，Nordtvedt 效應在太陽系產生一系列現象，它們是潛在可觀測的。[現象的列舉和參考文獻見 Nordtvedt (1971b)。] 這個效應最適合於檢驗地球-月亮軌道的「極化」，它歸因於月亮落向太陽的加速度應大於地球落向太陽的加速度這一事實。這種「極化」引起的軌道偏心率總是指向太陽的，其幅度爲

地球－月亮軌道中的 Nordtvedt 效應

$$\delta r = 840\left[3\gamma + 4\beta - 7\Delta_1 - \frac{1}{3}(2\beta + 2\beta_2 - 3\gamma + \Delta_2 - 2)\right] \text{厘米} \qquad (40.56)$$

$= 67$米　　在 Ni 理論中（框 39.1 和 39.2）

$= \dfrac{8.4}{2+\omega}$米　在 Dicke-Brans-Jordan 理論中（框39.1和39.2）

$= 0$　　在 Einstein 理論中。

框 40.4　實驗的目錄

實驗類型	實驗的描述	在何處討論
I 廣義相對論基礎的檢驗	1. 自由下落唯一性的檢驗（Eötvös-Dicke-Braginsky 實驗）	§38.3; 圖1.6; 框1.1
	2. 存在度規的檢驗（粒子衰變的時間膨脹；Lorentz 羣在粒子運動學中的作用；等等）	§38.4
	3. 尋找新的直接耦合的長程場（Hughes-Drever 實驗；以太漂移實驗）	§38.7; 圖38.3
	4. 引力紅移實驗	§38.5; 圖38.1和38.2; §7.2, 7.3 和 7.4
	5. 非引力物理學常數隨空間和時間的恒定性	§38.6
II 後 Newton（「太陽系」）實驗	1. 光和射電波被太陽偏轉	§40.3; 框40.1
	2. 經過太陽附近的雷達波束往返傳播時間的相對論性延遲	§40.4; 框40.2
	3. 行星軌道的近日點移動和周期性微擾	§40.5; 框40.3
	4. 月亮軌道中的三體效應	§40.6
	5. 迴轉器的進動（「短程線進動」以及由地球自轉拖曳慣性系引起的進動）	§40.7
	6. 太陽系中 Cavendish 引力常數的空間變化	§40.8 和 40.9
	7. Cavendish 引力常數依賴於受引力作用物體的化學成分	§40.8
	8. 具有恒星周期的地球潮汐	§40.8
	9. 地球自轉速率的周年變化	§40.8
	10. 由短程線運動的破壞所引起的地球-月亮分離的周期性	§40.9
III 宇宙學觀測	1. 在太陽系中 Cavendish 常數隨時間的變化	§40.8
	2. 宇宙的大尺度特性（膨脹，各向同性，均勻性；宇宙微波輻射的存在和性質；……）	第27—30章；特別是第29章
	3. 宇宙年齡各種測量的的一致性（由膨脹得出的年齡；最古老的恒星的年齡；太陽系的年齡）	§29.7
IV 引力波實驗	波的存在；傳播速率；極化性質；……	第35—37章；特別是第37章

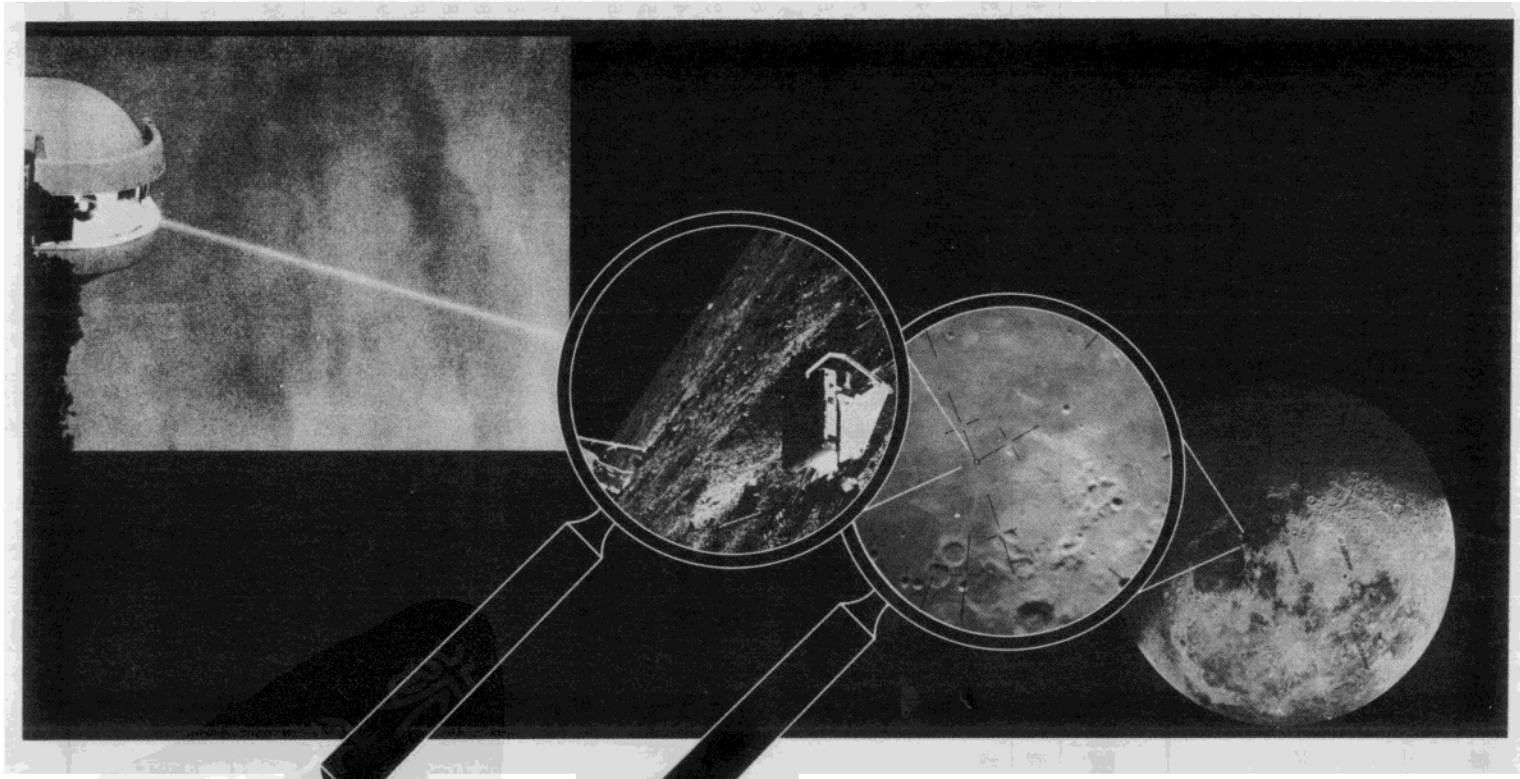


圖 40.4

從地球上的激光器發射的光經月亮返回地球，通過確定其間的時間延遲（約 2.5 秒）測量地球與月亮之間的分離。這個方案的關鍵部件是角反射器，第一個反射器是在 1969 年 7 月 20日由 Apollo（阿波羅）11 號的飛行人員送到月亮上的。在 1971 年 11 月，月亮上已有三個這樣的反射器：兩個是美國的，一個是法國製造蘇聯安放的。一脈衝紅寶石激光器從 Texas（德克薩斯）大學 McDonald 天文臺（在 El Paso 以東119英哩處的 Locke 山上）的 107 吋反射望遠鏡射出光束。這個光束在月亮表面造成直徑約爲 3.2 公里的光斑。激光通過「激光測距的向後反射器」（LR³）直接返回地球。每一個反射器是由具有 100 個熔凝氧化硅角立方體（每一個的直徑爲 3.8 厘米）的46厘米乘46厘米的鋁板組成的。曾安置好的第一個反射器出現在第一張插圖上，在登月艙附近。它相對於月亮的景觀面是傾斜的。這張照片是宇宙航行員 Neil A. Armstrong 和 Edwin E. Aldrin Jr. 在起飛回地球前不久拍攝的。第二張插圖是當激光器尚未向 Apollo 11 現場發射的間隙，由 D. G. Currie 從 McDonald 107 吋望遠鏡導向目鏡視場中拍攝的照片。人們通過對更明顯的月面特徵校準準標，把望遠鏡導向平靜的底部（小圓圈）。在 1971 年 11 月，LR³（激光測距的向後反射器）實驗以及繼之而來的飛行時間測量是國家航空和宇航局（NASA）和來自若干研究中心的代表組成的月亮向後反射測距小組的職責。感謝這個小組的成員之一，Maryland（馬里蘭）大學的 Carroll Alley 的好意，他提供了在此剪輯畫面中所使用的照片。感謝 NASA 的這個工作，地球上激光源和月亮上反射器之間的距離已經知道了，其精度優於半米。宇宙航行員不僅在月亮上留下了 LR³（激光測距的向後反射器）和一個地震計以及其他設備，而且還留下一塊飾板：「我們爲全人類的和平而來」。

在70年代中期，月亮激光測距數據或許能把這種極化的幅度確定到一米的精度或更好［參看 Bender 等（1971）；也可參看圖 40.4］。

§ 40.10　廣義相對論實驗檢驗總結

廣義相對論不再是「理論家的天堂，實驗家的地獄」了。現在，它是全體的天堂，——細閱第 1129 頁框 40.4 給出的實驗目錄就能很快的看到這一點。此外，廣義相對論已毫髮無損地經受了每一個對它的檢驗從中脫穎而出——這是對 Albert Einstein 1915 年天才創造的引人注目的 1973 年贈禮。

PDG

第十篇

前　沿

在本編中讀者諸君——在持續不斷地研讀內容各異的 40 章（序言除外）的生涯中，他們在 8 章中是數學家，四度受到誘惑（其中一次是被老朋友誘惑），在 4 章中是宇宙學家，在 4 章中成為被放逐到黑洞領地的天體物理學家，他們終於繼承了大量的實驗，誠實的生活着，變成了忠實的信徒——現在，冒着風險前進，去尋求並征服新的前沿領域。

PDG

第四十一章　旋　　量

§ 41.1　反射，旋轉和旋轉的組合

本章全屬高階。無需前面的高階內容作爲它的預備知識，以後任何一章也無需它作爲準備知識。

旋量和它們在相對論中的應用，首先產生於對在空間中的「旋轉」的分析，其次是對在空時中的旋轉的分析。取一立方體（參看圖41.1）。把它繞一軸旋轉 90°。選取另一軸與第一軸成直角。再把立方體繞第二個軸旋轉 90°。這樣，立方體就從標以「初始」的指向轉到標以「最終」的指向。怎樣才能用單一的步驟，經單一的旋轉，來實現這個淨變換呢？換言之，旋轉組合的規律是什麼呢？

組合旋轉的問題

如果用矢量描述旋轉，那麼就可以採用矢量組合的規律。大小相同（90°）而分離爲直角的兩個矢量的合成是一個矢量：(1)它位於兩個矢量所在的同一平面中，(2)它的大小爲$\sqrt{2}\times 90°=127.28°$。兩個預言都是錯誤的。爲了把立方體從初始指向轉到最終指向，所作的單一旋轉(1)轉軸經過中心和頂點A，(2)旋轉的角度是120°。

什麼樣的計算方法總能再現看起來如此奇怪的旋轉組合規律呢？1843年10月16日傍晚，William Rowan Hamilton 和他的妻子沿着都柏林皇家運河散步，多年沉思的答案突然在他的腦海中躍出。就在當時當地，他用刀子在 Brougham 橋的一塊石頭上刻下了這個公式*。

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=\boldsymbol{ijk}=-1\,,$$

* 1972年6月21日，在同一城市中，Eamon de Valera 總統告訴作者之一說，1916 年的一個黃昏，當時他被關在監獄中，定於次日清晨槍斃，這時他寫下了他非常喜愛的這個公式 $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=\boldsymbol{ijk}=-1$。

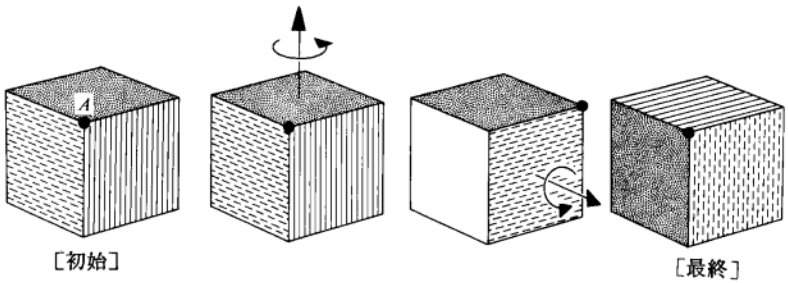


圖 41.1
繞垂直軸旋轉 90°，繼之以繞水平軸旋轉 90°，兩次旋轉給出的指向淨變化，可通過單一旋轉得到，它的轉軸從立方體中心到拐角A，旋轉角度爲 120°。

用今天的符號

$$\sigma_x=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}=i\boldsymbol{i},\quad \sigma_y=\begin{Vmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{Vmatrix}=i\boldsymbol{j},\quad \sigma_z=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}=i\boldsymbol{k},\qquad (41.1)$$

此公式的形式爲

$$\begin{aligned}&\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1,\\ &\sigma_x\sigma_y=-\sigma_y\sigma_x=i\sigma_z\ (\text{循環置換})\ 。\end{aligned}\qquad (41.2)$$

旋轉算符：

(1)定義

與任一旋轉相聯繫一個量（Hamilton 的「四元數」；今天稱爲「自旋矩陣」，或「旋量變換」或「旋轉算符」）

$$R=\cos(\theta/2)-i\sin(\theta/2)(\sigma_x\cos\alpha+\sigma_y\cos\beta+\sigma_z\cos\gamma),\qquad (41.3)$$

式中 θ 爲旋轉角度，α, β, γ 爲旋轉軸與坐標軸之間的夾角。在 R_1 所描述的旋轉之後，繼之以 R_2 所描述的旋轉，給出的指向淨變化由單一旋轉 R_3 描述

(2)作爲組合旋轉的工具

$$R_3=R_2R_1。\qquad (41.4)$$

這就是 Hamilton 關於兩個旋轉組合的公式（Euler 在 1776 年曾爲得出此公式作出過部分貢獻，1819年 Gauss 得出了這個公式，但是他沒有發表）。

在圖41.1的例子中，

$$\begin{aligned}&R_1(\text{繞 }z\text{ 軸旋轉 }\theta=90°)=(1-i\sigma_z)/2^{1/2},\\ &R_2(\text{繞 }x\text{ 軸旋轉 }\theta=90°)=(1-i\sigma_x)/2^{1/2},\end{aligned}$$

兩者的乘積爲

$$\begin{aligned}R_2R_1&=(1-i\sigma_x+i\sigma_y-i\sigma_z)/2\\ &=\cos60°-i\sin60°(\sigma_x/3^{1/2}-\sigma_y/3^{1/2}+\sigma_z/3^{1/2})。\end{aligned}$$

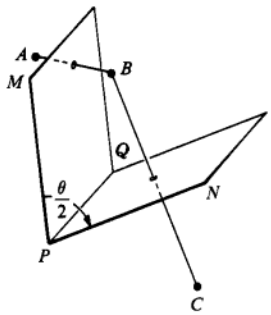


圖 41.2
在平面 MPQ 的反射把 A 點移到 B 點。在平面 NPQ 的反射把 B 點移到 C 點。在夾角爲 $\theta/2$ 的這兩個平面上的這兩次反射的組合所產生的最終結果（把 A 點移到 C 點）與繞直線 PQ 轉 θ 角的結果一樣。

根據 Hamilton 的法則 (41.3)，這個結果意味着淨旋轉角度爲 120°，軸線與 x 軸，與 y 軸，與 z 軸的夾角相等，這和已在圖41.1中看到的結果一致（旋轉軸從立方體的中心到拐角 A）。

在特例中所做的也適用於一般情況：令方程 $R_3=R_2R_1$ 兩側四個Hamilton單位 1, $-i\sigma_x$, $-i\sigma_y$, $-i\sigma_z$ 的四個係數相等，即可以得出淨旋轉（四個未知的！）參數 θ_3, α_3, β_3, γ_3。這樣，就得到了關於兩個旋轉組合的 Olinde Rodrigues (1840) 的四個前四元數公式。

在旋轉算符中出現半角的幾何原因

爲什麼在公式中會出現半角呢？在旋轉組合規律的背後還隱藏着什麼呢？對這兩個問題的答案相同：繞給定軸轉過 θ 角的一次旋轉可以看作在兩個平面上相繼的二次反射的結果，這兩個平面以 $\theta/2$ 角在轉軸相交（圖41.2）。因此兩次旋轉意味着四次反射。然而，可以安排得使第二次反射和第三次反射都發生在同一平面，這個平面應包含兩個轉軸。這樣，第三次反射恰好消除了第二次反射。這時已只剩下第一次反射和第四次反射，它們合在一起構成一次旋轉：即所求的淨旋轉（圖41.3和圖41.4）。

旋轉算符的代數性質

旋轉

$$R=\cos(\theta/2)-i\sin(\theta/2)(\sigma_x\cos\alpha+\sigma_y\cos\beta+\sigma_z\cos\gamma) \qquad (41.3)$$

被反向旋轉

$$R^{-1}=\cos(\theta/2)+i\sin(\theta/2)(\sigma_x\cos\alpha+\sigma_y\cos\beta+\sigma_z\cos\gamma) \qquad (41.3')$$

所消除。因而兩個旋轉算符的乘積

$$RR^{-1}=R^{-1}R=1 \qquad (41.5)$$

是一個單位算符，在它的作用下一切都保持不變。兩個旋轉的組合 $R=R_2R_1$ 的倒數 R^{-1} 爲

$$R^{-1}=R_1^{-1}R_2^{-1} \qquad (41.5')$$

（因子的次序也要顛倒！），代入 (41.5) 式即可證明。

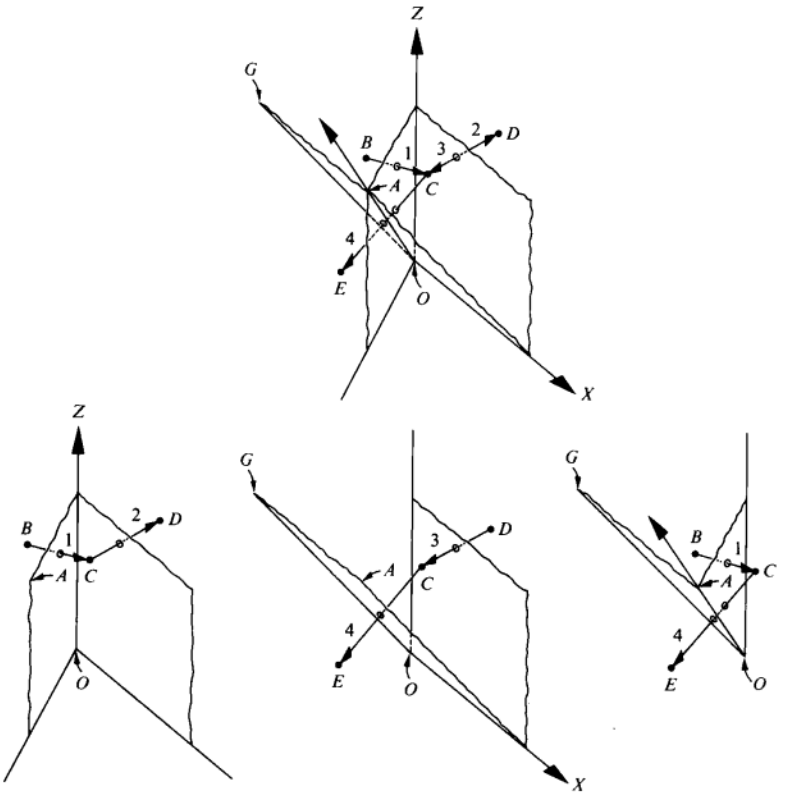


圖 41.3

本圖用反射表示兩次旋轉的合成。第一次旋轉（例如，圖41.1中的例子，繞OZ軸旋轉90°）可以表爲反射 1 之後繼之以反射 2 （在這個例子中兩個反射面的夾角爲 90°/2=45°）。第二次旋轉可以看作反射 3 和 4 的結果。但反射 2 與反射 3 發生在同一平面 ZOX 上。因此一次反射與另一次相抵消。這樣，按 1 2 3 4 順序的四次操作成爲 1，4 兩次反射。它們又可以用繞 OA 軸的單一旋轉代替。

矩陣M的共軛轉置矩陣 M^* 可以這樣得出：取矩陣M中每一元素的共軛複數，再把行列互換。直接考察矩陣表達式（41.1）可見，$\sigma_x^*=\sigma_x$，$\sigma_y^*=\sigma_y$，$\sigma_z^*=\sigma_z$。這種矩陣稱爲厄密（Hermit）矩陣。兩個矩陣乘積 $M=PQ$ 的共軛轉置矩陣爲各個共軛轉置矩陣的次序顛倒的乘積 $M^*=Q^*P^*$。對於上面寫出

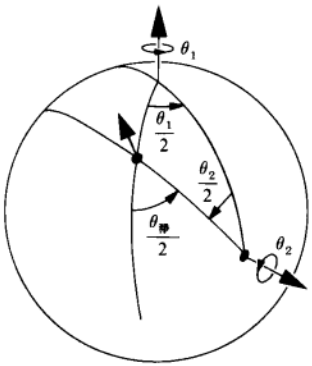


圖 41.4
用球面三角形體現旋轉合成規律，該球面三角形的三個重要角度分別代表各旋轉角度之半。

的旋轉矩陣，注意到 $R^*=R^{-1}$。這種矩陣稱爲幺正矩陣 。由下述論證可知幺正矩陣的行列式的絕對值爲 1 ：

$$\begin{aligned}1&=\det(\text{單位矩陣})=\det(RR^{-1})\\&=\det(RR^*)=\det R\det R^*\\&=|\det R|^2\text{。}\end{aligned}\tag{41.6}$$

實際上，如下述練習所示，旋轉自旋矩陣的行列式必定爲 1 （「幺模矩陣」）。

練習 41.1　旋轉矩陣的基本特徵　　**練習**

把 (41.3) 式寫成下述形式

$$R(\theta)=\cos(\theta/2)-i\sin(\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\text{，}$$

並證實下述性質：

(a)　$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2=1\equiv$單位矩陣；

(b)　$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})=0$ (tr 表示「迹」，即對角元素之和) ；

(c)　$\underbrace{[R,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})]}_{\text{[對易子]}}\equiv R(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})R=0$；

(d)　$$\frac{dR}{d\theta}=-\frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})R\text{。}\tag{41.7}$$

[注意，如果假定 θ 隨角速度 ω 增加，所以 $d\theta/dt=\omega=$常數，那麼最後一個方程可寫爲

$$\frac{dR}{dt}=-\frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega})R\tag{41.7′}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}$。]

練習 41.2 旋轉矩陣的行列式爲 1

回憶練習 5.5，對於任何矩陣M，有

$$d[\ln(\det M)]=\mathrm{tr}(M^{-1}dM)$$

試利用此式證明 (41.7) 式中的 $\det R$ 爲常數，並由此證明它等於 $(\det R)_{\theta=0}=1$。

§ 41.2 無窮小旋轉

無窮小旋轉

要得到一定的旋轉，可依次作兩次大小爲一半的旋轉，也可作四次大小爲四分之一的旋轉，或八次大小爲八分之一的旋轉，如此等等。於是得出無窮小旋轉的概念，它可用下述自旋矩陣描述

$$R=1-(i/2)(\sigma_x d\theta_{yz}+\sigma_y d\theta_{zx}+\sigma_z d\theta_{xy})$$

或

$$R=1-(id\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})。 \tag{41.8}$$

式中，量

$$\begin{aligned} d\theta_{yz}&=-d\theta_{zy}=n^x d\theta=\cos\alpha d\theta\,,\\ d\theta_{zx}&=-d\theta_{xz}=n^y d\theta=\cos\beta d\theta\,,\\ d\theta_{xy}&=-d\theta_{yx}=n^z d\theta=\cos\gamma d\theta\,, \end{aligned} \tag{41.9}$$

是無窮小旋轉在三個指定平面內的分量。在 (x,y) 平面內旋轉角度爲 $d\theta_{xy}$ 的無窮小旋轉，把矢量 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$變換成新的矢量，它有改變了的分量 x'和 y'，但有不變的分量$z'=z$。更一般地說，在同樣「主動」的意義*下考慮，無窮小旋轉 (41.8) 產生了下述變換

$$\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{x}'\,,$$

其分量爲

$$\begin{aligned} x'&=x-(d\theta_{xy})y-(d\theta_{zx})z\,,\\ y'&=-(d\theta_{yz})x+y-(d\theta_{xy})z\,,\\ z'&=-(d\theta_{zx})x-(d\theta_{yz})y+z。 \end{aligned} \tag{41.10}$$

自旋矩陣的三維矢量表述

旋量演算爲計算上述旋轉對矢量的效應提供了另一種（簡便！）的方法。與矢量$\boldsymbol{x}$相聯繫的自旋矩陣爲

$$X=x\sigma_x+y\sigma_y+z\sigma_z=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,, \tag{41.11}$$

---

* 「主動」的變換把一個矢量變換爲另一個矢量，而並不改變基礎的參照系（如果有參照系的話），反之，「被動」的變換保持所有矢量不變，但是更換參照系。本書前面各章的所有變換都是被動變換。

而與矢量 $\boldsymbol{x}'$ 相聯繫的是相應的自旋矩陣或四元數 X'。這樣，旋轉效應可總結爲公式

$$X\longrightarrow X'=RXR^{*}。\tag{41.12}$$

用自旋矩陣的語言描述三維矢量的旋轉

對於一般的無窮小旋轉 (41.10)，檢驗此公式。它得出

$$(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\sigma})=[1-(id\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})](\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})[1+(id\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})]$$

或者，取量 $d\theta$ 的一階量

$$(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\sigma})=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})+(id\theta/2)[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})]。\tag{41.13}$$

用兩個不同的矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 構成的自旋矩陣 $A=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ 和 $B=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ 的乘積爲

$$AB=(a\cdot\sigma)(b\cdot\sigma)=a^{x}b^{x}\sigma_{x}^{2}+a^{x}b^{y}\sigma_{x}\sigma_{y}+\cdots,$$

或者，根據 (41.2) 式，爲

$$AB=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+i(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{\sigma}。\tag{41.14}$$

利用此公式可算出 (41.13) 式的右邊。在方括弧中，$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})$ 的兩項符號相反相互抵消。反之，$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})$ 的兩項符號相同。它們的聯合消去了 $(d\theta/2)$ 中的因子 2。結果爲

$$(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\sigma})=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})+d\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

或

$$\boldsymbol{x}'=[1+(d\theta)\boldsymbol{n}\times]\boldsymbol{x}\tag{41.15}$$

與 (41.10) 式相符，即所要證明的結果。

繞給定軸的有限旋轉可以看作是繞該軸的無窮小旋轉的組合。爲了以最簡明的方式考察這種組合，把與一般的無窮小旋轉相聯繫的自旋矩陣 (41.8) 改寫爲

由無窮小旋轉組合成有限旋轉

$$R(d\theta)=e^{-(id\theta/2)(\sigma\cdot n)}\tag{41.16}$$

(指數函數由它的冪級數展開式定義)。注意，$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})$ 可以 (a) 與 1，(b) 與自身交換，而且 (c) 平方值爲 1。因此，這裏對自旋矩陣的指數函數的計算，與通常的代數計算沒有什麼不同。對於繞不變軸的無窮小旋轉，其自旋矩陣的合成可把指數相加得出

$$R(\theta)=e^{-i(\theta/2)(\sigma\cdot n)},\tag{41.17}$$

它也可直接由 (41.7) 式得出。這個表達式可通過展爲冪級數表爲另一形式；即

$$R(\theta)=\sum_{p=0}^{\infty}(1/p!)(-i\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}/2)^p$$
$$=\sum_{\text{偶數}p}(1/p!)(-i\theta/2)^p+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\sum_{\text{奇數}p}(1/p!)(-i\theta/2)^p \quad (41.18)$$
$$=\cos(\theta/2)-i\sin(\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})$$

與原來由旋量變換給出的表達式 (41.3) 式一致。加在矢量上的一個接一個的無窮小旋轉的效應爲

$$X'=R(d\theta)\ldots R(d\theta)XR^*(d\theta)\ldots R^*(d\theta),$$

結果表明，即使對於有限旋轉 $R=R(\theta)$，下述公式仍適用

$$X'=RXR^*。 \quad (41.19)$$

練習

練習 41.3 旋轉矩陣的其他性質

試證明對於 $X=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 有對易關係

$$[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}),X]=2i(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}。$$

用此式，從寫成 $X=RX_0R^*$ [其中 X_0 爲常數，$R(\theta)$ 由 (41.17) 式給出] 的 (41.19) 式得出下式

$$\frac{d}{d\theta}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}。$$

爲什麼此式與角速度的標準定義

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}$$

是等價的？把這個論證顛倒過來，試證明 (41.7′) 式正確地定義了由依賴時間的角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 所引起的旋轉 $R(t)$，儘管當 $\boldsymbol{\omega}$ 不是常數時，不再能寫出 (41.7′) 式的簡單解 $R=\exp[-\frac{1}{2}it(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega})]$。

---

§ 41.3 以旋量代數表示 Lorentz 變換

用自旋矩陣的語言表示的四維矢量和 Lorentz 變換

空間中的兩次反射不是能產生一個旋轉嗎？那麼爲什麼空時中的二次反射不能產生一個 Lorentz 變換呢？爲此，應把兩個反射面之間的實數半角變成複數半角，這種發展是不足爲奇的；不僅如此，Lorentz 變換的效應仍表爲下

述形式的矩陣乘法

$$X\longrightarrow X'=LXL^*, \tag{41.20}$$

也是不足爲奇的。這裏的「Lorentz 自旋變換矩陣」L是旋轉矩陣R的推廣。現在，「坐標產生的自旋轉矩陣」X也由 (41.11) 式推廣爲

$$X=t+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{41.21}$$

或

$$X=\begin{Vmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{Vmatrix}。 \tag{41.22}$$

要求此矩陣爲 Hermit (厄密) 矩陣

$$X=X^*。 \tag{41.23}$$

此時而且僅當此時，坐標 (t,x,y,z) 才是實數。變換後的自旋矩陣的共軛轉置也必須是 Hermit 矩陣，卽

$$\begin{aligned}(X')^*&=(LXL^*)^*\\&=(L^*)^*(X)^*(L)^*=LXL^*=X'。\end{aligned} \tag{41.24}$$

因此，新的坐標 (t',x',y',z') 可以確保是所期望的實數。對於取 (41.20) 形式的自旋矩陣變換，L出現在X的一側而 L^* 出現在另一側，這個實數要求是其基本原理。

Lorentz 變換由保持間隔不變的要求所定義：

$$t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=t^2-x^2-y^2-z^2。 \tag{41.25}$$

注意，寫成上述形式的矩陣X的行列式的值爲

$$\det X=t^2-x^2-y^2-z^2。 \tag{41.26}$$

結果，保持間隔的要求可表爲下述形式

$$\det X'=\det X \tag{41.27}$$

或

$$(\det L)(\det X)(\det L^*)=\det X。 \tag{41.28}$$

只要要求

$$\det L=1 \tag{41.29}$$

則上述要求卽可滿足［此處把L的每一元素都乘上共同的位相因子 $e^{i\delta}$，從而把 $\det L$ 乘上 $e^{2i\delta}$，這並不是有用的推廣，因爲位相因子在公式$X'=LXL^*$中的淨效應爲零］。

無窮小的 Lorentz 變換

與有限旋轉或無窮小旋轉相聯繫的自旋矩陣已經滿足條件 $\det L=1$ [證明在練習 (41.2)] 。當把實數角度 $d\theta_{yz}$, $d\theta_{zx}$, $d\theta_{xy}$ 代之以複數角度 $d\theta_{yz}+id\alpha_x$, $d\theta_{zx}+id\alpha_y$, $d\theta_{xy}+id\alpha_z$ 時，這個條件作爲一個代數條件仍繼續成立。這樣，爲了描述一般的無窮小 Lorentz 變換，自旋變換矩陣總共需要六個參數。因而一般的無窮小 Lorentz 變換的自旋矩陣可表爲

$$\begin{aligned} L&=1-(i/2)(\sigma_x d\theta_{yz}+\sigma_y d\theta_{zx}+\sigma_z d\theta_{xy}) \\ &\quad+(1/2)(\sigma_x d\alpha_x+\sigma_y d\alpha_y+\sigma_z d\alpha_z) \\ &=1-(id\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha}/2)。 \end{aligned} \tag{41.30}$$

這個變換加在坐標上的效應可由下述公式得出

$$X\longrightarrow X'=LXL^*$$

或

$$\begin{aligned} t'+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}')&=[1-(id\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha}/2)] \\ &\quad\times[t+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})][1+(id\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha}/2)]。 \end{aligned} \tag{41.31}$$

利用 $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})$ 的 (41.14) 式可把方程右側化爲

$$t+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha})t+d\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}+(\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{\alpha})。$$

現在分別比較方程二側的 1 ，σ_x, σ_y 和 σ_z 的係數，得出

$$\begin{aligned} t'&=t+(\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{\alpha}) \\ \boldsymbol{x}'&=\boldsymbol{x}+t\,d\boldsymbol{\alpha}+d\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{41.32}$$

下面將證明，此式與無窮小 Lorentz 變換的慣用表述，或與主動形式的速度「增速」$d\boldsymbol{\alpha}$ 一致。

由無窮小Lorentz 變換組成有限的Lorentz 變換

這種無窮小 Lorentz 變換的組合給出有限的 Lorentz 變換。然而，僅當所有無窮小變換可對易時，結果才能容易地算出。因而假設 $d\theta$ 和 $d\boldsymbol{\alpha}$ 都有固定的比值，即

$$\boldsymbol{\omega}\equiv\boldsymbol{n}\frac{d\theta}{d\tau}\text{和}\ \boldsymbol{a}\equiv\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\tau}$$

爲常數，其中 τ 爲參數。這樣，對 τ 的積分（無窮小變換的組合）給出了有限的變換 $L=\exp[-\frac{1}{2}i\tau\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\omega}+i\boldsymbol{a})]$。對於 $\tau=1$，有 $\theta\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\omega}\tau$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a}\tau$，上式可寫爲

$$L=\exp[(\boldsymbol{a}-i\theta\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{\sigma}/2]。 \tag{41.33}$$

在純增速的特殊情況下（沒有旋轉；$\theta=0$），可沿 (41.18) 指出的方法計算指數函數，結果爲

$$L=\cosh(\alpha/2)+(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh(\alpha/2)。 \tag{41.34}$$

式中 $\boldsymbol{n}_a=\boldsymbol{a}/\alpha$ 是在增速方向的單位矢量。相應的 Lorentz 變換本身可由下式估算

$$X'=LXL^*$$

或

$$t'+(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\sigma})=[\cosh\alpha/2+(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh\alpha/2][t+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})]\times[\cosh\alpha/2+(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh\alpha/2]。\tag{41.35}$$

借助於關係式

$$\cosh^2(\alpha/2)+\sinh^2(\alpha/2)=\cosh\alpha,$$
$$2\sinh(\alpha/2)\cosh(\alpha/2)=\sinh\alpha,$$

和

$$(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\sigma})=2(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\sigma})-(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_a)(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}),$$

簡化上式，並且比較方程兩側的 1 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 的係數，得出

$$\begin{aligned}t'&=(\cosh\alpha)t+(\sinh\alpha)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{x}'&=[(\sinh\alpha)\boldsymbol{n}_a t+(\cosh\alpha)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}_a]\text{（「變換的線內部分」）}\\&\quad+[\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}_a)\boldsymbol{n}_a]\text{（「}\boldsymbol{x}\text{的垂直部分不變」）。}\end{aligned}\tag{41.36}$$

這樣，可以證明量 α 就是通常的「速度參數」，它與速度本身的關係可用下述關係式表示：

$$\begin{aligned}(1-\beta^2)^{-1/2}&=\cosh\alpha,\\ \beta(1-\beta^2)^{-1/2}&=\sinh\alpha,\\ \beta&=\tanh\alpha。\end{aligned}\tag{41.37}$$

自旋變換矩陣的表達式 (41.33) 清楚地表明，在同一方向上相繼增速時，速度參數應相加：

$$\begin{aligned}L(\alpha_2)L(\alpha_1)&=\exp[\alpha_2(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\sigma})/2]\exp[\alpha_1(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\sigma})/2]\\&=\exp[(\alpha_2+\alpha_1)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\sigma})/2]\\&=L(\alpha_2+\alpha_1)。\end{aligned}\tag{41.38}$$

從這個特殊情況轉向回答如何求出兩個任意 Lorentz 變換的合成，其中每一個都是旋轉和增速的混合。把公式 (41.33) 和下述方程一起用即可回答這個問題，沒有比這更簡單的方法了

$$L(\text{合成})=L_2L_1。\tag{41.39}$$

§ 41.4　以旋量代數表示 Thomas 進動

在慣性參照系中觀察，不受任何力矩作用但是加速運動的自旋物體將改變

其轉動方向。這就是 Thomas 進動［參看練習 6.9 和 (40.33b) 式的第一項］。這個進動可以說明在原子的電子自旋角動量與軌道角動量耦合的有效能量中的因子二。在原子核中，這個進動對核子自旋和軌道的耦合也有少量貢獻。對 Thomas 進動的估算爲正在使用的自旋矩陣方法提供了說明。

Thomas 運動的起源：兩個增速的合成不再是純增速

討論所述的進動，完全無需涉及角動量或運動的質量。只要考慮具有下述兩個特徵的一系列慣性參照系 $S(t)$ 就足夠了。這兩個特徵是(1)不管在時刻 t 運動把質點帶到何處，慣性參照系 $S(t)$ 的原點，都位於該點。(2)當在這樣的慣性參照系中的觀測者表達旋轉時，在接着的下一時刻的慣性參照系$S(t+dt)$相對於 $S(t)$ 並沒有經歷旋轉。但是，當在實驗室參照系中表達和定義旋轉時，它確實經受了旋轉（「Thomas 進動」）。

「沒有旋轉」怎麼可能表現爲「旋轉」呢？回答如下：一個純粹的增速繼之以在另一方向上的另一個純增速，其淨效果不能用第三個純增速表示；相反，淨效果是一個增速加上一個旋轉。這個概念在性質上並不新奇。圖41.1說明，一個繞 z 軸的旋轉繼之以一個繞 x 軸的旋轉，怎樣使其合成的旋轉不僅有 x 分量和 z 分量，而且還有 y 分量。旋轉是如此，增速也是如此：它們都公然反抗矢量相加的規律。

用自旋矩陣導出 Thomas 進動

設參照系 S_0 與實驗室參照系重合，並設此實驗室參照系的原點就是 t 時刻運動參照系的原點。設 $S(t)$ 是在 t 時刻與該點一起運動的 Lorentz 參照系。設一純增速把它相對於實驗室的速度從 $\boldsymbol{\beta}$ 上升到 $\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta}$。合成的最終狀態是不能由 S_0 經純增速達到的。相反，首先相對實驗室參照系轉動S_0（「與 Thomas 進動相聯繫的旋轉R」），然後經簡單的增速，才能達到最終的狀態。只有一種旋轉的選擇剛好匹配。因而，如果把自旋矩陣區分爲純增速的和純旋轉的，分別用字母B和R表示，則有關係式

$$B(\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta})R(\boldsymbol{\omega}dt)=\lceil B(d\boldsymbol{\beta})\rfloor\, B(\boldsymbol{\beta}) \tag{41.40}$$

由此式可求出 Thomas 進動的角速度 $\boldsymbol{\omega}$。「$B(d\boldsymbol{\beta})$」中的引號帶有雙重警告的含義：(1)把 $S(t)$ 增速到 $S(t+dt)$ 的變換速度並不是 $(\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta})-\boldsymbol{\beta}=d\boldsymbol{\beta}$（矢量相加——或相減——的規律不適用於速度），(2)「$B(d\boldsymbol{\beta})$」在實驗室參照系中並不表現爲純增速。它只是在共動參照系中才表現爲純增速。

首先務必注意第二個困難。這個困難只是因爲在 §41.1 中發展的變換組合的表述 $R_3=R_2R_1$ 預先假定了所有的運算 $R_1, R_2,\ldots$ 都是在實驗室參照系中定義和實現的。反之，量「$B(d\boldsymbol{\beta})$」則應理解爲在共動參照系中定義和實現的純增速。可按下述步驟使這種運算適合於表述形式。(1)消除物體已經具有的任何速度。換言之，應用算符 $B^{-1}(\boldsymbol{\beta})$。這樣，物體在實驗室參照系中靜止。然

後，再用必要的小的純增速 $B(\boldsymbol{a}_{共動}d\tau)$，其中 $\boldsymbol{a}_{共動}$ 是物體將感受到的加速度，$d\tau$ 是物體將感受到的原時間隔。在此短暫加速開始時，物體相對實驗室是靜止的。對它的純增速，就是相對於實驗室的純增速。它也是在自旋矩陣表述中的純增速。這樣，再從實驗室變換回到運動參照系。於是，有關係式

$$「B(d\boldsymbol{\beta})」=B(\boldsymbol{\beta})B(\boldsymbol{a}_{共動}d\tau)B^{-1}(\boldsymbol{\beta})。\tag{41.41}$$

現在，確定 Thomas 進動的方程可寫爲

$$B(\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta})R(\boldsymbol{\omega}dt)=B(\boldsymbol{\beta})B(\boldsymbol{a}_{共動}d\tau)\tag{41.42}$$

或把全部未知量都放在左邊

$$R(\boldsymbol{\omega}dt)B^{-1}(\boldsymbol{a}_{共動}d\tau)=B^{-1}(\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta})B(\boldsymbol{\beta})。\tag{41.43}$$

第一個任務，把速度改變量 $(d\boldsymbol{\beta})$ 的錯誤值換成正確值 $(\boldsymbol{a}_{共動}d\tau)$，現在已成爲估算 Thomas 進動問題的一部分。

原則確定了，可以進行計算，把四個因子的適當表達式代入 (41.43) 式，估算方程兩側到一階小量如下：

$$\begin{aligned}1-(idt\boldsymbol{\omega}+d\tau\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\sigma}/2=&[\cosh(\alpha'/2)-(\boldsymbol{n}_{\alpha'}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh(\alpha'/2)]\\&\times\cosh(\alpha/2)+(\boldsymbol{n}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh(\alpha/2)]。\end{aligned}\tag{41.44}$$

式中 α 和 $\boldsymbol{n}_{\alpha}$ 分別是與速度 $\boldsymbol{\beta}$ 對應的速度參數和單位矢量；而 $\alpha'=\alpha+d\alpha$ 和 $\boldsymbol{n}_{\alpha'}=\boldsymbol{n}_{\alpha}+d\boldsymbol{n}_{\alpha}$ 與 $\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta}$ 相對應。用微積分方法，寫出 $\alpha'=\alpha+d\alpha$ 和 $\boldsymbol{n}_{\alpha'}=\boldsymbol{n}_{\alpha}+d\boldsymbol{n}_{\alpha}$，並利用乘積的微分法則，可以展開 (41.44) 式的右側。令方程兩側 $-\boldsymbol{\sigma}/2$ 和 $-i\boldsymbol{\sigma}/2$ 的係數相等。從而得出

$$\boldsymbol{a}_{共動}d\tau=(d\alpha)\boldsymbol{n}_{\alpha}+(\sinh\alpha)d\boldsymbol{n}_{\alpha}\tag{41.45}$$

和

$$\boldsymbol{\omega}dt=[2\sinh^2(\alpha/2)]d\boldsymbol{n}_{\alpha}\times\boldsymbol{n}_{\alpha}。\tag{41.46}$$

Thomas 進動的角速度

一個表達式給出在共動慣性參照系中的速度變化。另一表達式給出在實驗室參照系的進動。在低速情況下，Thomas 進動的表達式化爲

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}/2。\tag{41.47}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 爲加速度。只有垂直於速度 $\boldsymbol{\beta}$ 的分量與進動有關。

關於 Thomas 進動在原子物理學中重要性的初步討論，參看，例如，Ruark 和 Urey (1930)。

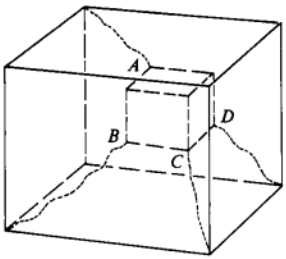


圖 41.5
立方體與房屋牆壁之間的「指向-纏繞關係」。立方體轉動 360° 使線纏繞起來。想來 720° 的旋轉會使線纏繞得更厲害——但是情況正好相反，轉 720° 後反倒完全鬆開了。

§41.5 旋 量

指向-纏繞關係

立方體各表面塗上不同顏色。然後用彈性線把立方體的每個角與相應的屋角連接（圖41.5）。現在，把立方體旋轉 $2\pi=360°$。線會纏結在一起。沒有辦法使它們不糾纏。不可能使每條線都成爲直線。現在把立方體繞同一個軸再轉2π。線纏繞得更厲害。然而，現在稍作努力就可以完全解開纏結（圖41.6）。每根線又跟開始一樣變成直線，從立方體的每個角到相應的屋角。一般來說，旋轉 0，$\pm4\pi$, $\pm8\pi$,...使立方體與其周圍環境處於標準的「指向-纏繞關係」之中，而旋轉 $\pm2\pi$, $\pm6\pi$, ±10,...之後，雖然立方體的指向可以復原，但它與周圍環境的「指向-纏繞關係」却不能復原。顯然，指向幾何中的某種東西在通常的指向概念中並沒有完全考慮到；因此需要「指向-纏繞關係」或（簡稱！）「轉向」（來自拉丁字 versor ，意爲轉動）的概念。對於一個物體的兩種不等價的轉向，是否在物理學上也有可以探測的差別呢（例如，金屬物體與其周圍金屬之間的接觸勢）目前尚不知道 [Aharonov 和 Susskind (1967)] 。

與旋轉聯繫的自旋矩陣

$$R=\cos(\theta/2)-i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin(\theta/2)\,, \tag{41.48}$$

可以區分一個物體兩個不等價的轉向，當物體旋轉 2π 的奇數倍時它會反號。這個符號改變在矢量變換規律中從不出現，這可從概括的公式

$$X\longrightarrow X'=RXR^{*} \tag{41.49}$$

中看出（兩個R因子，每個符號都變了！）。但當我們從矢量轉向一個具有二個分量的量，而該量的變換遵循下述規律

定義旋量

$$\xi\longrightarrow\xi'=R\xi\ 。 \tag{41.50}$$

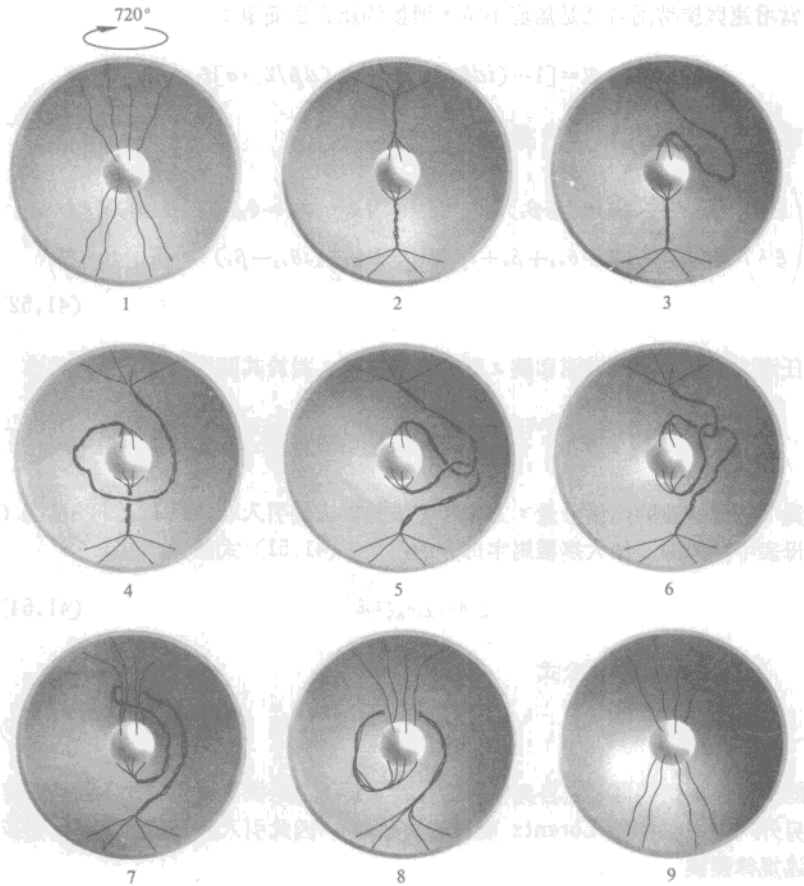


圖 41.6
如同圖 41.5，物體與周圍經彈性線相連。（圖上畫出 8 條彈性線；可以隨便多少條。）把物體旋轉 720°，然後按照圖 2-8 的步驟（Edward McDonald）（物體仍固定），人們發現連接線不再纏繞了，如圖 9 所示（右下）。

時，這種符號變化就可以顯示出來了。這種量就是所謂旋量。旋量在 360° 旋轉下反號。因此它提供了一種適當的方法來記錄立方體兩種不等價轉向之間的區別。更一般地說，可以把立方體和其周圍環境的每一種指向-纏繞關係，與旋量 ξ 的不同數值聯繫起來。另外，旋量概念用於旋轉的功效不受任何限制。而且，對於增速與旋轉的一般組合，可寫出

$$\xi \longrightarrow \xi' = L\xi \ 。 \qquad (41.51)$$

旋量的 Lorentz 變換

當增速與旋轉兩者都是無窮小時，變換的顯式很簡單：

$$\xi'=[1-(id\theta/2)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})+(d\beta/2)\cdot\boldsymbol{\sigma}]\xi,$$

或者，按照 (41.1) 式，爲

$$\begin{pmatrix}\xi'^1\\ \xi'^2\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}1+\frac{1}{2}(-i\theta_z+\beta_z) & \frac{1}{2}(-i\theta_x-\theta_y+\beta_x-i\beta_y)\\ \frac{1}{2}(-i\theta_x+\theta_y+\beta_x+i\beta_y) & 1+\frac{1}{2}(i\theta_z-\beta_z)\end{Vmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix} \tag{41.52}$$

任意大小的 z 方向增速和繞 z 軸的有限旋轉，對於其間的任意組合，都有

$$\begin{pmatrix}\xi'^1\\ \xi'^2\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}e^{-1/2i\theta_z+1/2\beta_z} & 0\\ 0 & e^{1/2i\theta_z-1/2\beta_z}\end{Vmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}。 \tag{41.53}$$

爲了記錄旋量的兩個分量，方便和習慣的作法是引入取值爲 1 或 2 的標記（字母表中開始的幾個大寫羅馬字母）；這樣，(41.51) 式變爲

$$\xi'^A=L^A{}_B\xi^B。 \tag{41.54}$$

由於抽取了變換公式

$$X'=LXL^* \tag{41.55}$$

的一半，旋量獲得了它自身特有的含義。爲了完全恢復變換公式，還需要它的另外一半。它包括 Lorentz 變換的複共軛。因此引入另一個旋量 η，它按下述規律變換

第二類旋量

$$\eta'^{\dot U}=\overline{L}^{\dot U}{}_{\dot V}\eta^{\dot V} \tag{41.56}$$

[$\dot U=1,2$; $\dot V=1,2$；圓點和字母表中最後的幾個大寫字母用來區別按照Lorentz自旋矩陣複共軛（不轉置）變換的分量]。

§ 41.6 矢量與旋量之間的對應關係

把矢量看作厄密(Hermit)二秩旋量

從旋量回到矢量，注意，(41.55) 式中自旋矩陣 X 的形式爲

$$X=t+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})=\begin{Vmatrix}(t+z) & (x-iy)\\ (x+iy) & (t-z)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}X^{11} & X^{12}\\ X^{21} & X^{22}\end{Vmatrix}, \tag{41.57}$$

式中的標記根據它在 (41.55) 式中與 L^* 耦合或與 L 耦合而分別帶有圓點或不帶圓點。該變換方程變爲

$$X'^{A\dot{U}}=L^A{}_B\bar{L}^{\dot{U}}{}_{\dot{V}}X^{B\dot{V}} \tag{41.58}$$

（轉置可通過指標的順序自動得出；因而用 $\bar{L}^{\dot{U}}{}_{\dot{V}}$ 而不是 $L^{*\dot{U}}{}_{\dot{V}}$）。這個變換中的係數與「一個指標不加圓點另一指標加圓點的二秩旋量」變換規律中的係數等同：

$$\xi'^A\eta'^{\dot{U}}=L^A{}_B\bar{L}^{\dot{U}}{}_{\dot{V}}\xi^B\eta^{\dot{V}}。 \tag{41.59}$$

在這個意義上，可以說「四維矢量的變換像一個二秩旋量」。爲了完全而明顯地表示四維矢量與二秩旋量的聯繫，由 (41.57)，注意下述關係

$$\begin{aligned}X^{1\dot{1}}&=x^0+x^3,\\ X^{1\dot{2}}&=x^1-ix^2,\\ X^{2\dot{1}}&=x^1+ix^2,\\ X^{2\dot{2}}&=x^0-x^3。\end{aligned} \tag{41.60}$$

用更緊湊的形式，爲

$$X^{A\dot{U}}=[t+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})]^{A\dot{U}}=x^\mu\sigma_\mu{}^{A\dot{U}} \tag{41.61}$$

式中 σ_0 是單位矩陣。此方程立刻指明如何從四維矢量或「1 指標張量」的分量得出相應「1，1-旋量」（一個不帶圓點的指標和一個帶圓點的指標）的分量。

與每個實四維矢量相聯繫的有一個1，1-旋量，它是 Hermit 的，意即

$$X^{A\dot{U}}=\overline{X^{U\dot{A}}}。 \tag{41.62}$$

(41.61) 式提供了一個 Hermit 的 1,1-旋量的例子。Hermit 性概念可以用另一種方式更一般地表示。與分量爲 $\Phi^{A_1\cdots A_N}{}_{\dot{U}_1\cdots\dot{U}_N}$ 的任意 N，N-旋量相聯繫的 **N,N-旋量和Hermit性** 是複共軛旋量 $\overline{\Phi}$，它滿足

$$(\overline{\Phi})_{A_1\cdots A_N\dot{U}_1\cdots\dot{U}_N}=\overline{(\Phi^{\dot{U}_1\cdots\dot{U}_N A_1\cdots A_N})} \tag{41.63}$$

當 N，N-旋量與其複共軛相等時，稱它爲 Hermit 的。

§ 41.7　旋量代數

(41.53) 式表明，旋量的一個分量 ξ'^1 隨增速指數增長，正比於 $e^{1/2\beta_z}$，而另一分量 ξ'^2 則指數減少。如果由兩個旋量 ξ 和 ζ 構成的任何量，其數值不 **旋量代數：**

受增速的影響，那麼它一定是由 $\xi^1\zeta^2$ 和 $\xi^2\zeta^1$ 這類乘積形成的。可以用另一種描述方式重新表示這類乘積。引入另一種符號 ε^{AB} 和 ε_{AB}，它們滿足 $\varepsilon^{12}=\varepsilon_{12}=1$ 和

(1)定義 ε^{AB} 和 ε_{AB}

$$\varepsilon^{AB}=-\varepsilon^{BA},\quad \varepsilon_{AB}=-\varepsilon_{BA}, \tag{41.64}$$

僅存的其他非零分量是 $\varepsilon^{21}=\varepsilon_{21}=-1$。可用上指標旋量 ξ^A 定義下指標旋量 ξ_A 如下式

(2)升、降旋量指標

$$\xi_A=\xi^B\varepsilon_{BA}, \tag{41.65}$$

或反過來，有

$$\xi^B=\varepsilon^{BC}\xi_C\ 。 \tag{41.66}$$

那麼，一個旋量與另一個旋量的標積定義爲

(3)旋量的標積

$$\xi_A\zeta^A\ 。 \tag{41.67}$$

該標積的數值不受任何增速，旋轉或它們的組合的影響：

$$\begin{aligned}\xi'_A\zeta'^A&=\xi'^B\varepsilon_{BA}\zeta'^A\\&=(L^B{}_D\xi^D)\varepsilon_{BA}(L^A{}_C\zeta^C)\\&=(\det L)\xi^D\varepsilon_{DC}\zeta^C\\&=\xi_C\zeta^C\ 。\end{aligned} \tag{41.68}$$

證明要用到表達式 $L^B{}_D\varepsilon_{BA}L^A{}_C$ 的下述性質：(1)當 $D=C$ 時它爲零；(2)當 $D=1, C=2$ 或 $D=2, C=1$ 時它化爲 L 的行列式（壹！）或其負值。注意，標積 $\xi^A\zeta_A$ 是標積 $\xi_A\zeta^A$ 的負值。旋量與其自身的標積之值自動爲零（「旋量固有的零性質」）。

(4)矢量與1,1-旋量之間的映射

具有上指標的矢量的分量可以用具有上指標的1,1-旋量的分量表示

$$X^{A\dot U}=x^\mu\sigma_\mu{}^{A\dot U}, \tag{41.69}$$

具有下指標的矢量和具有下指標的1,1-旋量有類似的關係；因而

$$X_{A\dot U}=x_\mu\sigma^\mu{}_{A\dot U}\ 。 \tag{41.70}$$

(5)σ^μ 的定義及其與 σ_μ 的關係

此處，「連帶的基本自旋矩陣」的分量爲

$$\sigma^\mu{}_{A\dot U}=\eta^{\mu\nu}\sigma_\nu{}^{B\dot V}\varepsilon_{BA}\varepsilon_{\dot V\dot U}, \tag{41.71}$$

或者，顯式爲

$$\left\|\begin{matrix}\sigma^{\mu}{}_{1\dot{1}} & \sigma^{\mu}{}_{1\dot{2}}\\ \sigma^{\mu}{}_{2\dot{1}} & \sigma^{\mu}{}_{2\dot{2}}\end{matrix}\right\|=\begin{cases}-\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\| \text{對於 } \mu=0,\\ -\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}\right\| \text{對於 } \mu=1,\\ +\left\|\begin{matrix}0 & -i\\ i & 0\end{matrix}\right\| \text{對於 } \mu=2,\\ -\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix}\right\| \text{對於 } \mu=3\text{。}\end{cases} \tag{41.72}$$

與 (41.2) 式的矩陣 σ_x, σ_y, σ_z 一樣，同樣類型的乘法定律也適用於這些矩陣 $(\sigma^x)^2=(\sigma^y)^2=(\sigma^z)^2=1$, $\sigma^x\sigma^y=-\sigma^y\sigma^x=i\sigma^z$，等等。在「基本自旋矩陣」$\sigma_\mu$和「連帶的基本自旋矩陣」$\sigma^\mu$ 之間，可得到下述正交歸一關係：

$$\sigma_\mu{}^{A\dot{U}}\sigma^{\mu}{}_{B\dot{V}}=-2\delta^{A}_{B}\delta^{\dot{U}}_{\dot{V}} \tag{41.73}$$

和

$$\sigma_\mu{}^{A\dot{U}}\sigma^{\nu}{}_{A\dot{U}}=-2\delta^{\nu}_{\mu}\text{。} \tag{41.74}$$

利用這些關係可以「從用1,1-旋量（『等價於矢量的旋量』）表示的量回到直接用矢量（一秩張量）表示的同一量」。這樣，在 (41.61) 式兩側都乘以 $-\frac{1}{2}\sigma^{\nu}{}_{A\dot{U}}$，對旋量的指標求和，並利用 (41.74) 式，可求出矢量的反變分量，爲

$$x^{\nu}=-\frac{1}{2}\sigma^{\nu}{}_{A\dot{U}}X^{A\dot{U}}\text{。} \tag{41.75}$$

類似地，從 (41.70) 式和 (41.73) 式得出協變分量爲

$$x^{\nu}=-\frac{1}{2}\sigma_{\nu}{}^{A\dot{U}}X_{A\dot{U}}\text{。} \tag{41.76}$$

(6) N秩張量和N,N-旋量之間的映射

N指標的張量T可以用旋量語言（「等價於張量的旋量」）表爲 (41.61) 式或 (41.70) 式的推廣；因而，對於三階混合張量，有

$$T_{A\dot{U}}{}^{B\dot{V}}{}_{C\dot{W}}=\sigma^{\alpha}{}_{A\dot{U}}\sigma_{\beta}{}^{B\dot{V}}\sigma_{\gamma}{}^{C\dot{W}}T_{\alpha}{}^{\beta\gamma} \tag{41.77}$$

和逆關係

$$T_{\alpha}{}^{\beta\gamma}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}\sigma_{\alpha}{}^{A\dot{U}}\sigma^{\beta}{}_{B\dot{V}}\sigma^{\gamma}{}_{C\dot{W}}T_{A\dot{U}}{}^{B\dot{V}}{}_{C\dot{W}}\text{。} \tag{41.78}$$

框 41.1 給出幾個簡單張量的旋量表示。

框 41.1 在局域 Lorentz 參照系中某些簡單矩陣的張量表示

量	張量表述	旋量表述
一般的四維矢量	x^α（四個複數）	$X^{A\dot{U}}$（四個複數）
實四維矢量（例：四維動量）	$x^\alpha=\bar{x}^\alpha$（四個實數）	$X^{A\dot{U}}=(X^{U\dot{A}})$（二個實分量，一個明顯的複分量）
零四維矢量	$\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0$	$\det X^{A\dot{U}}=0$［參看 (41.57) 式］；因此存在着兩個旋量 ξ^A 和 $\eta^{\dot{U}}$ 使 $X^{A\dot{U}}=\xi^A\eta^{\dot{U}}$。
指向未來的實零四維矢量（例如光子的四維動量）	$x^\alpha=\bar{x}^\alpha$ $\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0$ $x^0>0$	存在一個旋量 ξ^A（兩個複數，除一共同可乘的位相因子 $e^{i\delta}$ 外是唯一的）使得 $X^{A\dot{U}}=\xi^A(\bar{\xi})^{\dot{U}}$
指向過去的實零四維矢量	$x^0<0$	$X^{A\dot{U}}=-\xi^A(\bar{\xi})^{\dot{U}}$。
實的二重矢量或2-形式（例如 Maxwell 場）	$F_{[\alpha\beta]}$（下標意味着 $F_{\alpha\beta}=-F_{\beta\alpha}$；六個不同的實分量）	存在一對稱的旋量 ϕ_{AB}（三個不同的複分量 ϕ_{11}, ϕ_{12}, ϕ_{22}）使得 $F_{A\dot{U}B\dot{V}}=\phi_{AB}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}+\varepsilon_{AB}(\bar{\phi})_{\dot{U}\dot{V}}$
與上述實2-形式對偶的實2-形式	$^*F_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta}$	$^*F_{A\dot{U}B\dot{V}}=-i\phi_{AB}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}+i\varepsilon_{AB}(\bar{\phi})_{\dot{U}\dot{V}}$ （2-形式的對偶性相應於旋量 ϕ_{AB} 乘以因子 $-i$）
具有 Weyl 保形曲率張量對稱性的實四階張量；即具有 Riemann 曲率張量的對稱性，並要求其 Ricci 張量爲零（「空的空間」，「眞空 Riemann 張量」）	$C_{\alpha\beta\gamma\delta}=C_{([\alpha\beta][\gamma\delta])}$（前二個指標反對稱；末二個指標反對稱；前一對指標與後一對指標交換時爲對稱的）$C^\alpha{}_{[\beta\gamma\delta]}=0$（與 Riemann 張量一樣，20個在代數上不同的分量因下式的進一步的眞空條件而減少爲10個不同的分量）： $C^\alpha{}_{\beta\alpha\delta}=0$	存在一個完全對稱的旋量 ψ_{ABCD}，它有五個不同的複數分量 ψ_{1111} ψ_{1112} ψ_{1122} ψ_{1222} ψ_{2222} 使得 $C_{A\dot{U}B\dot{V}C\dot{W}D\dot{X}}=\psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}+\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\bar{\psi}_{\dot{U}\dot{V}\dot{W}\dot{X}}$。

在旋量分析的某些論文中，通過下述雙重規定，可以把類似 (41.78) 式中的 $(-\frac{1}{2})^N$ 因子消去：(1)在矩陣 σ_μ 和 σ^μ 中插入前面未曾包括進去的$1/\sqrt{2}$因子；(2)用作標準度規的不是上述對角的 $\eta_{\mu\nu}=(-1,1,1,1)$，而是 $(1,-1,-1,-1)$。此處不採用這種規定(1)因爲在矩陣 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 中引入因子$1/\sqrt{2}$，就會與多年來在原子物理和核物理中所用的 Pauli 矩陣不一致，(2)因爲在類

量	張量表述	旋量表述
充分發展的 Riemann 曲率張量（有物質存在的空間）	$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{[\alpha\beta]\gamma\delta}=R_{\alpha\beta[\gamma\delta]}=R_{([\alpha\beta][\gamma\delta])}$ $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0$（20個代數上不同的分量）	存在一完全對稱的旋量 ψ_{ABCD}（曲率的「Weyl」部分或「保形」部分或非局域起源的部分）和一個標量 Λ（量度局域起源的曲率部分的迹）和一個旋量 $\Phi_{AB\dot{U}\dot{V}}=\Phi_{(AB)(\dot{U}\dot{V})}=(\bar{\Phi})_{AB\dot{U}\dot{V}}$（量度局域起源的曲率的無迹部分；曲率張量三個不可約部分的最後一個）使得 $R_{A\dot{U}B\dot{V}C\dot{W}D\dot{X}}=\psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}$ $+\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}(\bar{\phi})_{\dot{U}\dot{V}\dot{W}\dot{X}}$ $+2\Lambda(\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}$ $+\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{V}\dot{W}})$ $+\varepsilon_{AB}\Phi_{CD\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}$ $+\varepsilon_{CD}\Phi_{AB\dot{W}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}$。
每個物理量用一幾何實體描述。每個局域物理量用一數學量描述，此數學量在固有局域 Lorentz 變換下以「固有 Lorentz 變換羣 $L\uparrow_+$ 的一個不可約表述」的形式變換。	每個局域物理量用一張量描述，它具有其自身的秩和特定的對稱性。	爲了提供必要的表徵局域物理量的有限不可約 $L\uparrow_+$ 的表述，相聯繫的旋量必須對其全部無點指標完全對稱，同時對其全部帶點指標也要完全對稱［Gel'fand (1963)］。

空超曲面中的正定度規對於分析幾何動力學的初值問題和定義三維幾何的含義時具有自然的優點。爲了這些優點，此處以因子 $(-\frac{1}{2})^N$ 爲代價。對於廣泛的旋量運算，慣例是最好避免這個代價；參看，例如，Pirani (1965)或Penrose (1968a)。

§41.8 自旋空間及其基旋量

旋量的線性獨立性

基本的旋量「空間」是二維的。因此，它可用任何兩個線性獨立的旋量 λ_A 和 μ_A 來生成。另外，很容易判斷一對旋量是否線性相關，即是否存在 $\mu_A=$常數 λ_A 形式的關係。在相關時，μ_A 與 λ^A 的標積和 λ_A 與 λ^A 的標積（41.67）一樣，自動爲零。因此，非零的標積

$$\lambda_A\mu^A\neq 0 \tag{41.79}$$

是兩個旋量線性獨立的充分必要條件。

一般的四維矢量可以用四個基矢的線性組合表示。類似的，一般的旋量可以用兩個基旋量的線性組合表示：

$$\omega^A=\lambda\xi^A+\mu\eta^A。 \tag{41.80}$$

基旋量和旋量對

此處的理解是，術語「基旋量」意味着 ξ^A 和 η^A 滿足歸一化條件

$$\xi_A\eta^A=1(=-\eta_A\xi^A)。 \tag{41.81}$$

從這個條件可以導出(41.80)式中展開係數的簡單表達式

$$\begin{aligned}\lambda&=-\eta_A\omega^A(=\omega_B\eta^B),\\ \mu&=\xi_A\omega^A(=-\omega_B\xi^B)。\end{aligned} \tag{41.82}$$

把這些展開係數代回（41.80）式，即可再現任何任意選定的旋量 ω^A。換言之，下述方程應當視爲 ω_B 分量的一個恒等式；

$$\omega^A=\varepsilon^{AB}\omega_B\equiv(\xi^A\eta^B-\eta^A\xi^B)\omega_B。 \tag{41.83}$$

由此得出，兩個基本的旋量的分量通過下式聯繫起來

$$\xi^A\eta^B-\eta^A\xi^B=\varepsilon^{AB}。 \tag{41.84}$$

給定兩個基旋量 ξ^A 和 η^A，可用任意實數或複常數 α，經

$$\begin{aligned}\xi^A{}_{新}&=\xi^A,\\ \eta^A{}_{新}&=\eta^A+\alpha\xi^A,\end{aligned} \tag{41.85}$$

得出兩個同樣好的基旋量，代入（41.81）式或（41.84）式即可核對這一點。對於給定的旋量 ξ^A，滿足歸一化條件（41.81）的最一般的「旋量對」具有（41.85）式的形式。

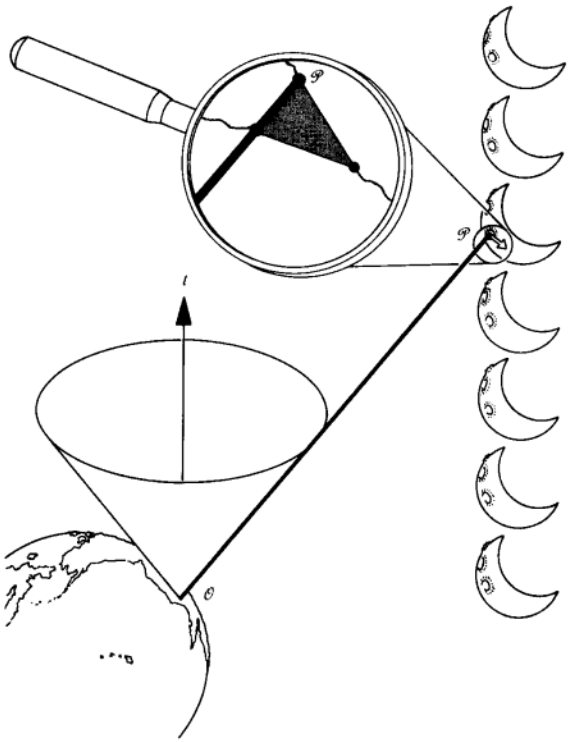


圖 41.7

旋量可以表爲(1)「旗杆」［Penrose 的術語；光脈衝的軌迹，零矢量 $\mathscr{O}\mathscr{P}$］加上(2)「旗」［來自地球的激光束閃現月亮表面上的箭頭 ($\mathscr{P}\rightarrow$)或如上端插入的放大圖所示，閃現代替箭頭的小旗本身］加上(3)旗和其周圍事物之間的指向-纏繞關係［用從旗角拉到周圍事物的細線表示］。當旋量本身乘上因子 $\rho e^{i\sigma}$ 時，零矢量（旗杆）的分量乘上因子 ρ^2，而旗子繞旗杆旋轉 2σ 角。

§ 41.9　把旋量看作旗杆加上旗加上指向-纏繞關係

旋量的幾何表示

如何設想旋量呢？瞄準激光，啓動開關，從此處此時（事件 $\mathscr{O}$）向彼處彼時（事件 $\mathscr{P}$: Aristarchus 環形山的中心之處，離 $\mathscr{O}$ 的空間距離爲 400,000 公里，與 $\mathscr{O}$ 的時間差是 400,000 公里的光傳播時間）發送兆焦耳的脈衝。設計激光使它產生的不只是一個光點，而是一個照亮的箭頭。追隨Roger Penrose 的說法，把零矢量 $\mathscr{O}\mathscr{P}$ 叫做「旗桿」，把照亮的箭頭叫做「旗」。一個旋量(圖41.7) 是由：(1)零旗桿加上(2)旗加上(3)旗與它周圍事物之間的指向-纏繞關

係三者聯合組成的。通過重複地發射激光，並在一次發射和下一次發射之間使激光繞它的軸稍有旋轉，就可以「旋轉旗子」。當旗子旋轉了 360° 並回到它原來的方向上時，旋量反號。旗繞旗桿旋轉 2π 的任意偶數倍後，旋量恢復其原來的數值。

(1)零矢量（旗杆），加上

從旋量 ξ（這是一個具有兩個複分量 ξ^1 和 ξ^2 的數學客體）變爲「旗杆加上旗加上指向-纏繞關係」組成的幾何客體，要經過兩個步驟：首先是杆，其次是旗。因此，用下式可從旋量 ξ^A 變爲「桿」的實零四維矢量，

$$x^a \longrightarrow X^{A\dot{U}} = \xi^A(\bar{\xi})^{\dot{U}} \tag{41.86}$$

或

$$\left\|\begin{matrix}(t+z) & (x-iy)\\ (x+iy) & (t-z)\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\xi^1\bar{\xi}^1 & \xi^1\bar{\xi}^2\\ \xi^2\bar{\xi}^1 & \xi^2\bar{\xi}^2\end{matrix}\right\| 。 \tag{41.87}$$

右側矩陣的第一行與第二行除差因子 ξ_1/ξ_2 外完全相同。因此右側矩陣的行列式爲零。左側亦應如此。因此四維矢量 $\mathcal{OP}=(t,x,y,z)$ 是零矢量。當把旋量 ξ^A 乘上非零的複數 $\lambda=\rho e^{i\sigma}$（ρ，σ 爲實數）時，這個矢量被「拉長」了 ρ^2 倍；但是，矢量的方向不變。這個四維矢量也不受角度 σ 選擇的影響。換言之，這個零四維矢量唯一地被旋量確定；但是，旋量却不是唯一地被四維矢量確定。對於一個給定的四維矢量，相應的有一族旋量。它們彼此的不同在於乘上形式爲 $e^{i\sigma}$ 的位相因子（「旗因子」）。

(2)二重矢量（旗）及其指向-纏繞關係

爲了進一步看出剛揭示的旗因子的影響，從旋量 ξ^A 產生的實矢量（四個分量）轉向由同一旋量產生的實二重矢量（六個分量）：

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \longrightarrow F^{AB\dot{U}\dot{V}} &= \xi^A\xi^B\epsilon^{\dot{U}\dot{V}} + \epsilon^{AB}(\bar{\xi})^{\dot{U}}(\xi)^{\dot{V}}, \\ \mu \longrightarrow A\dot{U};\ \nu &\longrightarrow B\dot{V} 。 \end{aligned} \tag{41.88}$$

這個量只有不多於六個不同的分量（$F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$），它們由 A 和 B 以及 $\dot{U}$ 和 $\dot{V}$ 的交換產生，並注意所得結果在（41.88）式右側的符號。爲了闡明這個二重矢量的含義，注視着（41.88）式交替因子 ϵ^{AB} 的每一次出現。無論這個因子在哪裏出現，就把這個因子以表達式（41.84）式用起始的旋量 ξ^A 和附加的旋量 η^A 取代（後者是需要的，它與 ξ_A 提供了全部旋量的基）。這樣，得出

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \longrightarrow F^{AB\dot{U}\dot{V}} &= \xi^A\xi^B(\bar{\xi}^{\dot{U}}\bar{\eta}^{\dot{V}} - \bar{\eta}^{\dot{U}}\bar{\xi}^{\dot{V}}) + (\xi^A\eta^B - \eta^A\xi^B)\bar{\xi}^{\dot{U}}\bar{\xi}^{\dot{V}} \\ &= \xi^A\bar{\xi}^{\dot{U}}(\xi^B\bar{\eta}^{\dot{V}} + \eta^B\bar{\xi}^{\dot{V}}) - (\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}})\xi^B\bar{\xi}^{\dot{V}} \\ &= X^{A\dot{U}}Y^{B\dot{V}} - Y^{A\dot{U}}X^{B\dot{V}} \longrightarrow x^\mu y^\nu - y^\mu x^\nu 。 \end{aligned} \tag{41.89}$$

因而，由 ξ^A 構成的 2,2-旋量代表着由兩個四維矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 構成的一個二重矢量。其中，第一個四維矢量是「旗杆的實零矢量」，前已指出它由旋量 ξ^A 唯一確定。第二個矢量

$$y^a \longrightarrow Y^{A\dot{U}}=\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}}+\eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}}, \tag{41.90}$$

也取決於 ξ^A，但不唯一，因爲「旋量對」η^A 對於 ξ^A 並不唯一。把旋量對的一種選擇 η^A 換成旋量對的新選擇［(41.85)式］$\eta^A_{新}$

$$\eta^A_{新}=\eta^A+\alpha\xi^A。 \tag{41.91}$$

那麼，實四維矢量 y^μ 也變爲新的實四維矢量

$$y^\mu_{新}=y^\mu+(\alpha+\bar{\alpha})x^\mu。 \tag{41.92}$$

如果四維矢量 $\boldsymbol{y}$ 是唯一的，則從旗杆拋出的就不是一面旗而是一個箭頭。由於實常數 $\alpha+\bar{\alpha}$ 取值有一定範圍，使得一個箭頭成了許多共面的箭頭；從而得出 Penrose 的旗。換一種表述方式，旋量 ξ^A 的選定，不是確定單一的箭頭，而是確定一群箭頭的總體，從而唯一地確定了旗。

四維矢量 $\boldsymbol{y}$（和新四維矢量 $\boldsymbol{y}_{新}$）與零四維矢量 $\boldsymbol{x}$ 正交，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}&=x_\beta y^\beta=-\frac{1}{2}X_{A\dot{U}}Y^{A\dot{U}}\\&=-\frac{1}{2}\xi_A\bar{\xi}_{\dot{U}}(\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}}+\eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}})=0,\end{aligned} \tag{41.93}$$

並且是類空的，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}&=-\frac{1}{2}(\xi_A\bar{\eta}_{\dot{U}}+\eta_A\bar{\xi}_{\dot{U}})(\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}}+\eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}})\\&=-\frac{1}{2}(\xi_A\eta^A)(\bar{\eta}_{\dot{U}}\bar{\xi}^{\dot{U}})-\frac{1}{2}(\eta_A\xi^A)(\bar{\xi}_{\dot{U}}\bar{\eta}^{\dot{U}})=1\end{aligned} \tag{41.94}$$

（「單位長度的旗」）。

旋量 ξ^A 乘以「旗因子」$e^{i\sigma}$ 把旗繞旗杆旋轉了 2σ 角，因爲 ξ^A 的旋量對 η^A 被乘以因子 $e^{-i\sigma}$［參看歸一化條件 (41.81)］。這些變化把矢量 $\boldsymbol{y}$ 改變成旋轉了的矢量 $\boldsymbol{y}_{轉動}$，

旗繞旗桿旋轉

$$\begin{aligned}y^a_{轉動}\longrightarrow Y^{A\dot{U}}_{轉動}&=e^{2i\sigma}\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}}+e^{-2i\sigma}\eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}}\\&=\cos2\sigma(\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}}+\eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}})+\sin2\sigma(i\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}}-i\eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}})\\&\longrightarrow y^a\cos2\sigma+z^a\sin2\sigma。\end{aligned} \tag{41.95}$$

式中，四維矢量 $\boldsymbol{z}$ 共享了矢量 $\boldsymbol{y}$ 的下述性質：它是(1)實的，(2)類空的，(3)具有單位大小，(4)與旗杆的零四維矢量 $\boldsymbol{x}$ 正交，以及(5)除了加性的 $\boldsymbol{x}$ 的實倍數 $(\alpha+\bar{\alpha})$ 外，唯一的由起初的旋量 ξ^A 確定。此外，$\boldsymbol{z}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是正交的。因而，

y 和 z 爲二維空間提供了基矢，「旗的尖端」就是在此二維空間經歷了它的旋轉（超出圖示）。

把旋量、旗桿和旗聯繫起來的方程組

回到激光脈衝扼要的重述要點。兩個數，例如熟悉的極角 θ（與 z 軸的夾角）和 ϕ（從 x 軸繞 z 軸的方位角）說明了它飛行的方向。第三個數 r，給出了到月亮的距離也給出了光達到月亮的傳播時間。第四個數，角度 ψ，說明了投放在月亮表面上的照亮的箭頭的方位，這個方位從 $\mathbf{e}_\theta$ 方向（該處 $\phi=0$）按右手繞旗桿測定。這樣，按照此處採用的慣例［見（41.87）式］，與旗杆加上旗（旋轉箭頭）相聯繫的旋量是

$$\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}=(2r)^{1/2}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)e^{-i\phi/2+i\psi/2}\\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2+i\psi/2}\end{pmatrix}。\tag{41.96}$$

這個旋量的旋量對 η_A，除了加性的 ξ^A 倍數外是唯一確定的，爲

$$\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}=(2r)^{-1/2}\begin{pmatrix}-\sin(\theta/2)e^{-i\phi/2-i\psi/2}\\ \cos(\theta/2)e^{i\phi/2-i\psi/2}\end{pmatrix}。\tag{41.97}$$

由 ξ^A 確定的旗桿的四維矢量由（41.87）式給出：

$$\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\ r\sin\theta\cos\phi\\ r\sin\theta\sin\phi\\ r\cos\theta\end{pmatrix}。\tag{41.98}$$

爲了確定旗本身，除了 x^α 以外，還需要單位類空四維矢量 y^α，它與 x^α 正交，並且除了加性的 x^α 實倍數之外是唯一的。這一矢量可用（41.90）計算，其形式爲

$$\begin{pmatrix}y^0\\ y^1\\ y^2\\ y^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \cos\theta\cos\phi\cos\psi+\sin\phi\sin\psi\\ \cos\theta\sin\phi\cos\psi-\cos\phi\sin\psi\\ -\sin\theta\cos\psi\end{pmatrix}。\tag{41.79}$$

從這些 x^μ 和 y^μ 的表達式，用簡單的算術，可以算出二重矢量（「旗」）的分量 $F^{\mu\nu}=x^\mu y^\nu-y^\mu x^\nu$。

§41.10 夜空的景象：旋量的一個應用

到目前爲止，我們所注意的是提取包含在旋量中的全部四組信息：時間間隔（等於空間間隔），空間指向以及繞該方向的旋轉。現在轉向一個應用，這

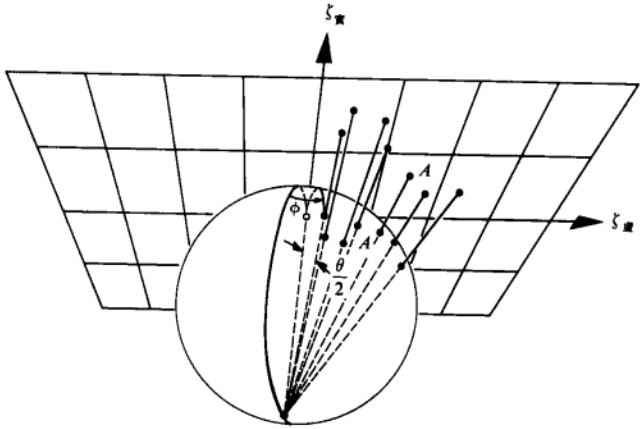


圖 41.8
通過從南極所作的球極平面投影，可把空間的一個方向（北斗七星的恒星之一，看作天球上的一點）表爲複ζ平面上的一點（ζ=比值 ξ^2/ξ^1, ξ^1, ξ^2 爲旋量的分量）。

旋量用於分析夜空外貌的「Lorentz 變換」

裏並不需要全部信息。觀察夜空，並且問(1)怎樣描述它的景象，和(2)如何改變它的景象。作爲描述夜空景象的一種方式，可以給出每顆恒星的方位。而不涉及任何恒星的距離，以及任何有關繞旗杆的旋轉 ϕ。換言之，不注意 ξ^1 和 ξ^2 中共同的複因子

$$(2r)^{1/2}e^{i\phi/2}。$$

剩下來的有意義的只是這些旋量分量的比值 ζ。

$$\zeta=\xi^2/\xi^1=\tan(\theta/2)e^{i\phi}。 \tag{41.100}$$

對於天空中的每一顆恒星，給予一個複數ζ（「球極坐標」，圖 41.8），也就是把恒星的圖案作表。

設觀測者改變了他的姿態。天球似乎在旋轉。或者設他乘火箭以接近光速的速度沿北極星方向經過他目前的位置。對於他，天球的那部分都張開了，好像用放大鏡去觀察一樣。作爲補償，剩下的恒星都納入較小的角範圍之內。任何這種旋轉或增速或旋轉和增速的組合，都可按照旋量的語言，用下述形式的變換來描述

$$\xi^A\longrightarrow\xi^A_{新}=L^A{}_B\xi^B, \tag{41.101}$$

這意味着任何給定恒星的複球極坐標應按下述形式變換

$$\zeta\longrightarrow\zeta_{新}=\frac{\xi^2_{新}}{\xi^1_{新}}=\frac{L^2{}_2\zeta+L^2{}_1}{L^1{}_2\zeta+L^1{}_1}。\tag{41.102}$$

在沿 z 方向以速度參數 α（速度 $\beta=\tanh\alpha$）增速的特殊情形，非對角分量 $L^1{}_2$ 和 $L^2{}_1$ 爲零。頭頂上天空的放大可用簡單的公式表示

$$\zeta_{新}=e^{\alpha}\zeta$$

或

$$\begin{aligned}&\phi_{新}=\phi,\\&\tan(\theta_{新}/2)=e^{\alpha}\tan(\theta/2)。\end{aligned}\tag{41.103}$$

但是與此預言和錯誤的期待相反，以高速沿北極星方向運動時，北極星周圍的區域根本不會出現放大的現象。反之，來自稍稍偏離該方向恒星（並具有少量橫向動量）的光子，在新的參照系中保持其橫向動量；但是它的對着觀測者的縱向動量由於觀測者的運動而增大了。因而動量之比減小，相對於北極星的觀測角度也相應減小了。結果不是放大，而是縮小（「望遠鏡放倒了」）。正確的公式不是（41.103）式，而是

$$\tan(\theta_{新}/2)=e^{-\alpha}\tan(\theta/2)\tag{41.104}$$

（α 反號）。作此修正的理由不難找出。迄今爲止所作的旋量分析只涉及外向的光脈衝，以及具有正的時間分量的四維矢量。這個特點取決於所採用的把旋量與四維矢量聯繫起來的公式，

$$r\mathbf{1}+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})\equiv X=\|\xi^{\wedge}\bar{\xi}^{\dot{v}}\|。\tag{41.105}$$

與此相反，回到內向光子原點的四維矢量，具有的時間分量是負的（或者，換個說法，空間分量反號）！對於具有負的時間分量的任何零四維矢量，代替（41.105）式應採用的公式是

$$X=-\|\xi^{\wedge}\bar{\xi}^{\dot{v}}\|。\tag{41.106}$$

此處注意這個原則要點就夠了，無須關心給出（41.104）式中 α 不同符號的細節。此後，爲保留前述算術表達，把問題改變一下即可。不討論入射光子，而討論出射光子。把接收望遠鏡代之以天象館的投影儀。它把北斗七星每一恒星的分離的光束以及北極星本身的光束投影到空間之中。設觀測者沿正 z 方向以速度參數 α 運動。在他的參照系中光束實際上全部按照(41.103)式被加寬了。

「放大過程改變了北斗七星的大小，但不改變它的形狀。」這一論斷又對

又不對。對於北斗七星和任何其他星座，當它們的角大小可以理想化爲整個天空範圍的很小一部分時，這個論斷是對的。任何向四周投射的星座，雖然從相對地球靜止的觀察者看來，此星座可能很小，但當觀察者具有足夠高的速度而仍在地球附近時，星座「擴展」開來了，使得星座包含天空相當大的一部分，這時這個論斷就是錯誤的。

Lorentz 變換保持天空中的角度不變（「保形不變性」）

小物體因「Lorentz 變換引起的放大」不改變它的形狀，這一點可用三種方式來理解。(1)球極平面投影（圖41.8）和「分式線性變換」（41.102）兩者都具有保持全部角度不變的特性［「保形不變性；」參看，例如，Penrose (1959)］並且甚至可以把每一個老的圓周轉換爲一個新的圓周。(2)考慮一給定恒星M，它在星座內，並且它有兩個近鄰星L和N，它們都是該星座的成員且恰好在M星的上方和下方。考慮指向M的旗桿，旗先從M指向L，然後從M指向N。旗繞旗桿旋轉了角度ϕ。因此，兩個相應旋量的差別是位相因子$e^{i\phi/2}$。它們並無其它不同。經過任意的 Lorentz 變換後它們的不同仍是位相因子$e^{i\phi/2}$而不會有其它差別。因此，在天球上弧ML和弧MN之間的角度在 Lorentz 變換後也保持其原來的值ϕ（還是天球上圖案的保形不變性！）。(3)甚至更初等的計算表明，在單位天球上在θ增加方向上的無窮小弧長以及在ϕ增加方向上的弧長以同樣比例放大，因而弧與弧之間的夾角不變（保形不變性）。這樣，考慮相對地球靜止的觀察者看到的從天象館投影儀射向天球上與z軸傾角爲θ的那一點（「天象館圓頂的北斗七星」）的光子。由 Lorentz 變換中角度變換的標準定律（「光行差」；框 2.4），變換角的正弦爲

$$\sin\theta_{新}=\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{1-\beta\cos\theta}\sin\theta \tag{41.107}$$

並且（對變換角餘弦的表達式求微分）

$$d\theta_{新}=\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{1-\beta\cos\theta}d\theta。 \tag{41.108}$$

從這些表達式立刻可得出，在變換後的天球上相對子午線的傾角與在原來的天球上相對於同一子午線的方向是完全一樣的：

$$\begin{aligned}\tan(新傾角)&=\frac{\sin\theta_{新}d\phi_{新}}{d\theta_{新}}=\frac{\sin\theta d\phi}{d\theta}\\&=\tan(原傾角)\end{aligned} \tag{41.109}$$

（還是保形不變性！）

關於初等的旋量，它與零矢量的關係，與指向天球的「旗桿」的關係，以及與繞旗杆旋轉的「旗」的關係，就講這些。

§41.11 作爲引力理論有力工具的旋量

在彎曲空時中旋量的表述

正如矢量，張量和微分形式很容易從平直空時推廣到彎曲空時一樣，旋量也如此。

彎曲空時的每個事件 $\mathcal{P}$ 都具有一個切向空間。在該切向空間中有屬於位在 $\mathcal{P}$ 點的所有矢量，張量和形式，它們都可運算。切向空間的幾何是 Lorentz 的（「在 $\mathcal{P}$ 點的局域 Lorentz 幾何」），所以在 $\mathcal{P}$ 點任意兩個矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的標積，在 $\mathcal{P}$ 點的正交歸一參照中表爲

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}u^{\hat{\alpha}}v^{\hat{\beta}}。$$

因而，在 $\mathcal{P}$ 點的切向空間與平直空時之間沒有數學上的差別。在其一中可作的數學運算在另一中也行。特別是，原來在平直空時中發展起來的旋量的全部表述，都可移到在彎曲空時中任一事件 $\mathcal{P}$ 處的切向空間而無須改變。

就這麼作吧。現在，在彎曲空時的每一事件處都有旋量；並且，在每一事件處，都可利用 §41.6 和 §41.7 的方程（適用於正交歸一系），在旋量表述與張量表述之間互相推導。

在引力場中分析Fermi子時需要旋量

當人們想研究引力對半整數自旋的量子化粒子（中微子，電子，質子，……）的影響時，彎曲空時中的旋量是離不開的數學工具。例如，考慮Hartle (1971) 的證明，他指出黑洞不可能對外部物質施加任何長程的弱相互作用力（即，黑洞沒有「弱相互作用的頭髮」）。如果沒有關於彎曲空時中中微子場的旋量描述，他的證明就無法進行。類似的還有 Wheeler (1971) 對於小黑洞（引力半徑～10^{-13} 厘米）引力場中電子準束縛態的分析：這需要在 Schwarzschild 彎曲空時幾何中，對自旋爲 $\frac{1}{2}$ 的粒子求解 Dirac 方程。關於彎曲空時中 Dirac 方程的詳細討論，參看，例如，Brill 和 Wheeler (1957)。

旋量和張量表述的等價性

爲了應用旋量數學，不需要涉及量子理論或者具有半整數自旋的粒子。旋量表述完全適用於只有整數自旋的客體（標量，矢量，張量）的情形，實際上在這種情形，旋量表述與遍及本書以前各章的張量表述完全等價。(41.77) 式和 (41.78) 式提供了從一種表述到另一種表述的翻譯，只要在空時的每一事件處選定正交歸一系即可。

但是，在引力理論中某些類型的問題用旋量表述比用張量表述容易處理得多。下面是一些例子。

(1)幾何光學（「零短程線滙」理論）

旋量表述在經典引力理論中的應用

此處旋量幾乎使得推導「聚焦定理」[(22.37) 式] 所需的冗長張量代數變得無關緊要了；並且旋量表述給出了優美簡單的表述，可以討論和計算仿射參量增加時一束光線如何改變它的大小（「擴張」），它的形狀（「剪切」）和它的指向（「旋轉」）。對此的評述和原始文獻，參看，例如Sachs (1964), Pirani (1965) 或 Penrose (1968a)。

(2)彎曲空時中的輻射理論（引力輻射和電磁輻射兩者）

在把輻射場分解爲其球諧分量以及在處理這些分量時，旋量表述是各種表述中最有效的。參看，例如，Price (1972a,b) 對於受擾動的 Schwarzschild 黑洞如何輻射掉它的全部可輻射的擾動的分析，這些可輻射擾動可以是電磁擾動，引力擾動或自旋爲17的虛擬場的擾動；類似地，參看 Fackerell 和 Ipser (1972) 以及 Ipser (1971) 關於 Kerr 黑洞的電磁擾動的分析，以及Toukolsky (1972) 對 Kerr 黑洞的引力擾動的分析。對於從源流向漸近平直空間的輻射場的「$1/r$」展開問題，旋量也給出了優美而有力的分析。其結果中的「*剝離定理*」描述 Riemann 張量 $1/r$ 展開係數的代數性質。對此的評述和原始文獻，參看，例如，Sachs (1964) 或 Pirani (1965)。

(3)曲率張量的代數性質

對於「保形曲率張量的 Petrov-Pirani 代數分類」的導出以及關於曲率張量代數性質定理的證明，旋量表述比任何其它表述都更爲有效。評述和文獻，參看，例如，Sachs (1964), Pirani (1965) 或 Penrose (1968a)。

當然，旋量表述，像其它任何表述一樣，也有它的限制。例如，引力理論的許多基本問題和大部分最困難的問題，用旋量表述會比用張量表述更加困難！但是對於某些問題，特別是零矢量起中心作用的問題，旋量是極有價值的工具。

Cartan 把旋量奉獻給全世界的物理學和數學。他的教科書（美國版，1966）是這個課題的主要文獻。

第四十二章　REGGE 計算法

§ 42.1　爲什麼討論 Regge 計算法

本章全屬高階。第21章（變分原理和初值表述）是它所需要的預備知識。無須它爲以後各章作準備，但它對第43章（幾何動力學）有幫助。

引力理論正在進入需要分析越來越複雜情形的新世紀。在1965年以前，主要感興趣的問題絕大多數可通過特殊對稱性或特殊簡化或兩者兼而有之的理想化方法處理。Schwarzschild 幾何及其推廣，Friedmann 宇宙學及其推廣，Schwarzschild 幾何和 Friedmann 幾何聯合起來描述束縛聚集物質的坍縮，相對論性恒星的振動，弱引力波在除引力波外爲平直的空間中的傳播：所有這些和其他一些問題都可以用初等的方法解決。

需要 Regge 計算法作爲計算工具

但是，現在，人們被迫去理解沒有對稱性也不能用擾動理論處理的一些情形：兩個黑洞將如何改變形狀，當它們碰撞並合併時發射多少引力輻射？Penrose, Hawking 和 Geroch 定理預言的引力坍縮終點的奇點的結構和性質是什麼？開始完全混沌的宇宙會不會通過像不均勻混主振盪之類的過程迅速地使自身平滑？

要解決這些問題，需要新類型的數學工具——響應這種需要，新的工具正在發展。第34章的「整體方法」提供了一組工具。Regge 計算法提供了另一組 [Regge (1961)]；也可參看，Wheeler (1964a) 第 467—500 頁。

§ 42.2　Regge 計算法簡介

用骨架結構作平滑幾何近似

考慮由許多平面三角形邊聯邊頂點聯頂點構成的覆蓋大禮堂的短程線圓頂。類似地，在 Regge 計算法中考察由平直空間「單形」面對面，邊對邊，頂

點對頂點連接在一起組成的空時（單形是四維空間中的圖形，低維的序列是：二維，三角形；三維，四面體；四維，單形）。規定了邊長，工程師就可以知道屋頂的形狀，科學家也就可以知道所考慮的空時幾何。一個平滑的禮堂屋頂可以用由足夠小的三角形構成的短程線圓頂任意接近地近似。一個平滑的空時流形也可以由鎖在一起裝配起來的足夠小的單形任意接近地近似。因而，超出度規的普通代數表述，Regge 計算法提供了一種方法，以分析失去球對稱——許多情形就是如此——甚至完全缺乏對稱性的系統的物理狀況。

Einstein場方程在確定骨架結構方面的作用

如果設計師可以把房頂設計成他喜歡的任何形狀，那麼他將比繪製空時幾何的分析家具有更多的自由。如果我們對於某個類空薄片放棄空時幾何稱之爲「現在」（由於沒有更好的名字），那麼，從此刻起，對於幾何就完全沒有自由了。Einstein 的幾何動力學定律完全是決定論的。翻譯成 Regge 計算法的語言，它提供了由以前的單形尺度計算新單形邊長的方法。儘管規定幾何學是決定論的，如何近似表述它却並不肯定。原始的類空超曲面（「現在」）是由一組面對面連接在一起的四面體集合近似表示的；但是需要多少個四面體，四面體的頂點如何放置，這是分析家可以選擇的。他可以在高曲率區域比低曲率區域賦予骨架更密集的骨骼，以便從規定的點數得到最多的「準確度的得益」。選定骨骼長度的某些自由，留待人們以 Regge (1961) 給出的幾何動力學定律形式從過去計算未來時使用。但是這種自由對於試圖寫出的計算程序來說是災難性的，除非程序員自己選定附加的補充條件、或者特意製作以給出好的「準確度的得益」、或者用別的固定方法來消除全部不確定性。

在感興趣的以骨架描述的空時部分中，在所有骨骼的長度都確定以後，就可以考察任何選定的局域骨骼羣內部及其自身。這樣，就可以發現該區域內幾何的全部特點。當然，人們發現的精度取決於所作骨架化描述的精細程度。但在原則上對精細程度並無限制，因此只要在經典物理情況下工作，對於精度也無限制。這樣最終得到標有每根骨骼長度的骨骼表。從而可以考察想研究的任何類空曲面的幾何，並一窺在這之外的許多其他問題。爲此，只須挑出有關的骨骼並看清楚它們是怎麼拼在一起的即可。

§ 42.3　單形和虧損角

圖 42.1 回顧了如何用平面三角形近似表示光滑的彎曲表面。全部曲率集中在頂點。不管人們的初步印象如何，在一個三角形和另一個三角形之間的邊

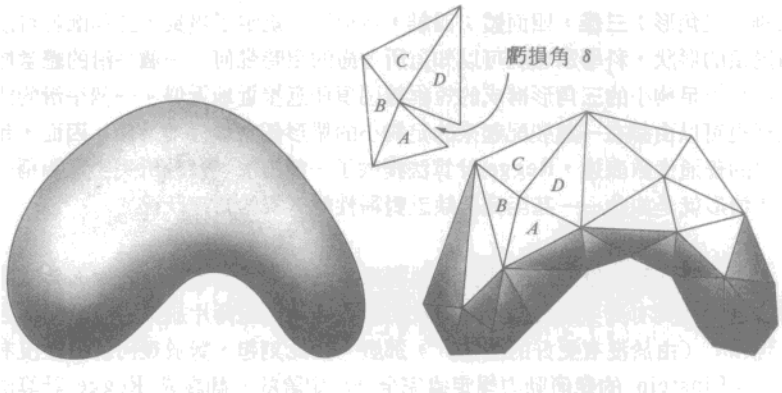


圖 42.1

具有連續變化曲率的二維幾何可以用由三角形構成的多面體任意接近地近似表述，只要三角形的數目足够多和每個三角形的尺度足够小即可。在每個三角形中的幾何是 Euclid 幾何。表面的曲率由在每個頂點處虧損角的大小表示（多面體的 $ABCD$ 部分平舖在平直表面上）。

虧損角作爲曲率的骨胳化量度：

(1)在二維

緣上不存在曲率。一個矢量從A平行移動經B和C到D，然後，通過另一路線經 C, B 到A，返回它的起點時方向並不改變，把此三角形複合體平舖在平直表面上就很容易看出這一點。僅當路徑能圍着 A, B, C, D 共同的頂點繞行一週時，矢量才經歷了淨旋轉。旋轉的數量等於已指出的在該頂點的虧損角 δ。全部頂點的虧損角之和具有值 4π，它與連續分佈的標量曲率（對於半徑爲 a 的球，${}^{(2)}R=2/a^2$）在整個原始光滑圖形上的半積分相同，

$$\sum_{\substack{\text{骨架}\\ \text{幾何}}} \delta_i=\frac{1}{2}\int_{\substack{\text{實際光}\\ \text{滑幾何}}} {}^{(2)}R\,d(\text{表面})=4\pi。 \tag{42.1}$$

(2)在 n（或四）維

從二維幾何的例子推廣，Regge 計算法把光滑的彎曲的 n 維 Riemann 流形近似表爲 n 維木塊的集合，每個木塊完全沒有曲率，用（$n-2$）維的區域把各木塊連接，全部曲率都集中在這些（$n-2$）維區域中（框 42.1）。對於廣義相對論的四維空時，曲率所集中的「絞鏈」區域的形狀爲三角形，如圖 42.2最底下一行的示意圖所示。在此處圖示例子中，十個四面體共同具有該三角形。在這些四面體之一和其相鄰四面體之間以四維單形擬合。這個單形的每一特徵都由它的十個邊緣的長度確定。特徵之一是單形中指定的一個四面體或

框 42.1　絞鏈，其中的曲率集中在骨架流形內積木塊之間的「嘎聲角」中

流形的維數	2	3	4
基本的平直空間積木塊：	三角形	四面體	單　形
規定積木塊的邊長數：	3	4	5
絞鏈，其中一圈木塊以虧損角或「嘎聲角」δ 相遇：	頂　點	邊	三角形
絞鏈維數：	0	1	2
這種絞鏈的「容積」：	1	長度 l	面積 A
在給定小區域內全部絞鏈對流形曲率的貢獻：	$\sum_{\text{該區域}} \delta_i$	$\sum_{\text{該區域}} l_i\delta_i$	$\sum_{\text{該區域}} A_i\delta_i$
把此量的連續區的極限表爲同一小區域內的積分：	$\frac{1}{2}\int {}^{(2)}R({}^{(2)}g)^{1/2}d^2x$	$\frac{1}{2}\int {}^{(3)}R({}^{(3)}g)^{1/2}d^3x$	$\frac{1}{2}\int {}^{(4)}R(-{}^{(4)}g)^{1/2}d^4x$

「面」與相鄰四面體或「面」之間的夾角 α，這樣，α 代表這個單形在該絞鏈處所張的角度。把在給定絞鏈 $\mathcal{P}2\mathcal{R}$ 處相遇的全部單形的 α 角求和，並從 2π 中減去，就得到與該絞鏈相聯繫的虧損角。然後，把在給定的微小 n 維體積中的各虧損角適當加權求和（框42.1），就可以得到與原始光滑 n 維幾何的標量曲率體積分相等的數字。參看框42.2。

§42.4　場方程的骨架形式

Einstein-Hilbert變分原理化爲骨架形式

Regge 並沒有把 Einstein 場方程直接翻譯成骨架計算法的語言，他轉向用以導出 Einstein 定律本身的標準變分原理。變分原理指出（參看§ 21.2 和 §43.3），調整整個擴展空時區域中的四維幾何，遵從某些特定的邊界條件，使得無量綱積分（作用量以 $\hbar$ 爲單位！）

$$I=(c^3/16\pi\hbar G)\int R(-g)^{1/2}d^4x \qquad (42.2)$$

取極值。這個論斷適用於空間無物質和電磁場的情形，這是在以後的討論中將

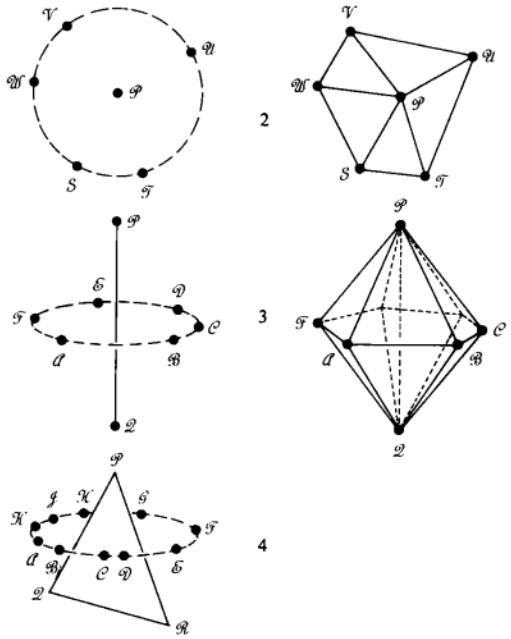


圖 42.2

與單個紋鏈相聯繫的一圈積木塊。 頂上一行， 二維：左圖，示意地畫出與在頂點 $\mathcal{P}$ 處的「紋鏈」相聯繫的頂點 $\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}$；右圖，同樣，但完全指出了基本三角形。中間行，三維：左圖，示意圖；右圖，在「紋鏈」$\mathcal{P}\mathcal{Q}$ 相遇的六個四面體的透視表示 。 下行，四維；只給出示意圖。五個頂點 $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{C}\mathcal{D}$ 屬於一個單形，即內部空間全部爲平直的四維區域。五個頂點 $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{D}\mathcal{E}$ 屬於相鄰的單形；如此等等圍成一圈單形。剛才提到的兩個單形相交於四面體 $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{D}$，其中的幾何也是平直的 。在該四面體與鄰近四面體 $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{E}$ 之間，對着「紋鏈」$\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}$ 有一定的超兩面角 α。此角度的值由插入其間的單形 $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{D}\mathcal{E}$ 的十個邊長完全確定。此兩面角加上由圈中另一些單形在紋鏈 $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}$ 處所張的相應的諸兩面角，一般來說並不總計共達2π。其虧損，即「嘎聲角」或虧損角 δ，給出了在該紋鏈 $\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}$ 處集中的曲率總量。並不存在眞實的嘎嘎作響或擬合不緊 ，除非試圖把這一圈單形嵌入全部平直的四維空間之中（如圖 42.1 的插圖所示，類似於「踩在」一堆三角形之上，看到它們以虧損角的數量張開）。

作的簡化，以便討論不過於冗長。另外，當所有長度都以 Planck 長度

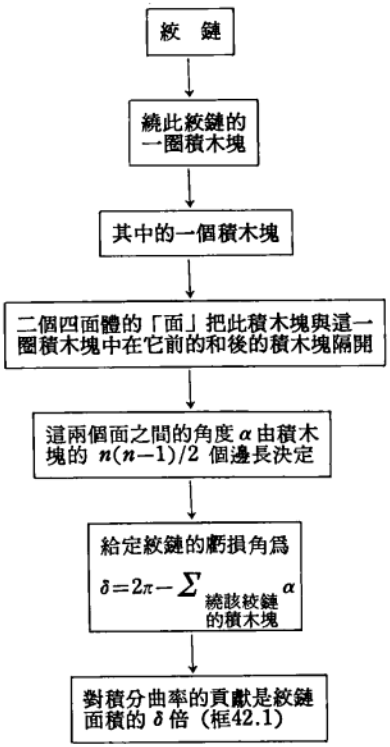
$$L^*=(\hbar G/c^3)^{1/2}=1.6\times10^{-33}\ \text{厘米} \tag{42.3}$$

爲單位，並且曲率積分用虧損角表達式近似給出時，Regge 指出 $\delta I=0$ 的表述（極值條件）變爲

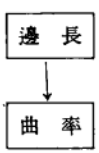
$$(1/8\pi)\delta\sum_{\substack{\text{諸紋鏈}\\ h=1}}^{H}A_h\delta_h=0。 \tag{42.4}$$

框 42.2　Regge 計算法的流程圖

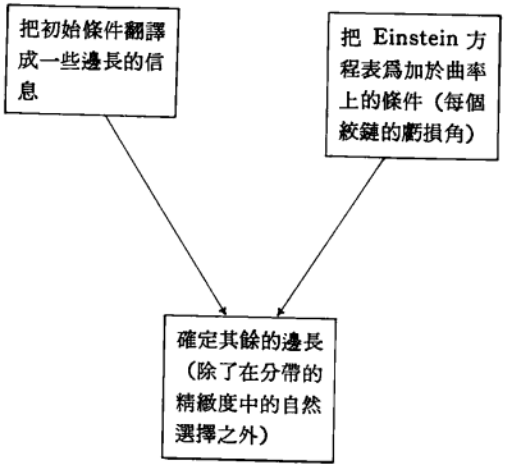
骨架四維幾何由它的全部邊長完全確定。由邊長，追隨下述流程圖可得出四維幾何中每一絞鏈的積分曲率：



自然，這種分析可以下述兩種方式來運用。第一，可以在下述含義下探查給定的四維幾何（給定一組邊長！）



第二——這才是 Regge 計算法的理論基礎——可以利用骨架計算法由 Einstein 幾何動力學定律推導出以前所不知道的四維幾何，過程如下



在此變分原理所預期的改變中，認爲某些邊的長度是確定的。它們必然涉及所研究的空時區域邊界上的特定條件。幸而此處無須精確的公式表述這些邊界條件，因爲在廣義相對論中，有關邊界條件的嚴格公式表述還有一些原則問題有待澄清（參看 §21.12）。重要的是，在所分析的區域內，木塊邊長的改變對於在不同絞鏈處增大或減小虧損角的效應。在關於這一課題的基本文獻中，Regge (1961) 注意到，典型的虧損角 δ_h 以複雜的三角學的方式依賴於衆多邊長 l_p 的值。然而，他證明（他的論文的附錄），「十分令人驚訝的是，我們在作變分時可把δ_h 當作似乎是常數」，從而把變分原理化爲

$$(1/8\pi)\sum_{\substack{\text{絞鏈}\\ h=1}}^{H}\delta_h\delta A_h=0。 \tag{42.5}$$

此處，根據初等三角學，第 h 個三角形絞鏈面積的改變爲

$$\delta A_h=\frac{1}{2}\sum_p l_p\delta l_p\operatorname{cotan}\theta_{ph}。 \tag{42.6}$$

此方程中，θ_{pk} 是三角形中與第 p 條邊相對的角度。結果，空的空間中的 Einstein 方程化爲骨架幾何中的形式

$$\sum_{\substack{\text{具有給定}\\ \text{的共同邊}\\ p\text{ 的諸絞}\\ \text{鏈}}} \delta_k \operatorname{cotan}\,\theta_{pk}=0,\quad (p=1,2,\ldots), \tag{42.7}$$

Einstein 場方程化爲骨架形式

這是在所分析的空時區域內部，每一邊長的方程。

§ 42.5　格子結構的選擇

在實際運用 Regge 計算法時，會出現兩個問題，現在還不清楚，哪一個問題已經有了對於實際應用骨架分析極爲方便的解答：即應採用哪類格子？怎樣最好地利用選擇邊長時的自由？本節將討論第一個問題，第二個問題將在下一節中討論。

格子結構的選擇：

使用由微小的近於長方形的積木構成的格子最爲自然，每塊積木相對於長方形的偏離由局域曲率的數量和方向規定。然而，這樣的積木塊是「鬆軟」的。可以在規定邊長的同時規定一些角度使積木塊具有剛性。但這樣就會喪失 Regge 規定的明晰性：即爲了規定幾何，需要給定邊長，只給定邊長，自由地和獨立地給定每一個邊長。另外，可能還需要重新推導 Regge方程，包括確定新角度的新方程。因此人們放棄準長方體結構，而傾向於用具有$5\cdot 4/2=10$個邊長的單形。作出這一決定之後，可以斷定，即使在平直空時中，各單形也不可能都具有相同的邊長。二維平直空間可以被等同的等邊三角形充滿，但用等同的等邊四面體已不能充滿三維流形。人們知道，在鉆石中一個給定碳原子是用四面體的鍵與其近鄰原子連接的，但稍加思索就可知道賦予給定原子的晶胞不可能具有等邊四面體的形狀。

(1)避免結構鬆軟

(2)邊長不相等的必要性

合成法看來是把積木塊放到一起的自然方式：先構成一維結構；把它們裝配成二維結構；再把二維裝成三維；再把三維裝配成最後的四維結構。一維結構由點 1, 2, 3 ……與線段 12, 23, 34,……相互交錯構成。爲了開始構成二維結構，選出第二個一維結構。標記它的點 1′, 2′, 3′,……等看來是自然的。然而，這種標記意味着跟梯子形狀一樣，在 1 與 1′ 之間，2 與 2′ 之間等等有交叉聯結。這樣，基本的格子將是準長方形。它們就會比較「鬆軟」，而這正是要排除的。因此，把第二個一維結構的點重新標記爲 $1\frac{1}{2}'$, $2\frac{1}{2}'$, $3\frac{1}{2}'$ 等等。這意味着 $2\frac{1}{2}'$ 與原來一維結構的 2 和 3 點有着交叉聯結，其他點類推。最終得到某種類似橋的樑式結構，如所期望的，它在二維情況下是完全剛性的。擴

(3)構成二維結構

展同樣的構造，用三角形充滿整個平面。現在，我們有了簡單的標準二維結構。很容易錯誤地認爲照此辦理就可作出三維結構了：錯誤在於心照不宣地假定平直空間的拓撲必定是正確的。

例如，討論一個具有三維球拓撲的三維幾何隨時間發展的問題。這個三維球很可能因長波長引力波的作用而强烈地從理想狀態變形。各點的正確排列是迫切的急需。因此當前先把幾何因波而變形的考慮（邊長從理想狀態改變）放在一邊。要問怎樣把一個理想的三維球分解爲二維的片。這裏的每一片都理解爲與下一片分開一定的距離。這時有兩種可供選擇的方法，爲簡單起見，分別稱之爲「塊」法和「球」法。

(4)用「塊法」從二維結構構成三維結構

(1)塊法。注意三維球可以分解爲5個等同的類四面體固體塊（5個頂點；有5種方式把這些頂點中的任一點除去！）。注視這些「四面體」中的一個。選擇一頂點作爲最高點，則通過其他三頂點的面爲底。使該底具有前面描述過的二維格子結構。引入大量的附加片堆在底面之上，作爲到達最高點的均勻間隔的層次。每一層的點比下一層要少一些。在一個「四面體」內三維幾何的分解就此完成。但是，留下了一個尚未解決的問題；不僅是如何把這個層式結構以規則的方式與相鄰「四面體」中對應結構相連接的問題，而甚至是這種規則連結究竟是否可能的問題。對於把三維球分解爲等同「四面體」的另外兩種方式也可以問同樣的問題［Coxeter (1948)，特別是第 292—293 頁：由總共8個頂點定義的16個四面體，或者由總共爲120個頂點定義的600個四面體］。用很簡單的方式可以消除結構的連結的問題，代價是可以達到的精度應加一上限：把上面提到的頂點數（5或8或 120）作爲在三維幾何骨架化中所使用的總點數（不要求或不允許作進一步的分割）。考慮到計算機（Computer —亦可譯爲電腦）記憶能力是有限的，因此，在探索性計算中限於注視120個追踪點並不可笑。

(5)用「球法」從二維構造三維結構

(2)球法。作爲把三維球「原子化」的另一種方式的開始，是在三維球上引入北極、南極和超球面角 χ（在北極 $\chi=0$，在南極$\chi=\pi$，在赤道 $\chi=\pi/2$，參看框 27.2）。設每一個二維層位於 χ 爲常數的表面上（χ 等於某個間隔值 $\Delta\chi$ 的整數倍）。認爲這個二維球結構已經骨架化爲基本的三角形了（「充分完整的 Buckminster Fuller 短程線圓頂」）。因此，「面」或三角形的數目F，邊長的數目E，以及頂點的數目V必定按 Euler 關係相聯繫：

$$F-E+V=\begin{pmatrix}\text{與拓撲有關的數目或}\\ \text{「Euler 特徵數」}\end{pmatrix}=\begin{cases}2 & \text{對於二維球，}\\ 0 & \text{對於二維環面。}\end{cases} \qquad (42.8)$$

從這個關係式可知把每一個頂點放在六邊形的中心（每個頂點是6個三角形的

會合點）是不可能的。在這種情況下毫不奇怪，仔細考察短程線圓頂的圖案表明，在有些頂點處只有 5 個三角形相遇。只要有12個這種 5 個三角形會合的頂點而其他都是 6 個三角形會合的頂點，就足以滿足 Euler 關係的需要：

$$\begin{aligned} & n && 5\text{ 個三角形會合的頂點} \\ & V-n && 6\text{ 個三角形會合的頂點} \\ & F=(V-n)(6/3)+n(5/3) && \text{三角形} \\ & E=(V-n)(6/2)+n(5/2) && \text{邊} \\ & V=(V-n)(6/6)+n && \text{頂點} \\ 2=F-E+V=n/6 & && \text{Euler 特徵數} \\ & n=12 \end{aligned} \tag{42.9}$$

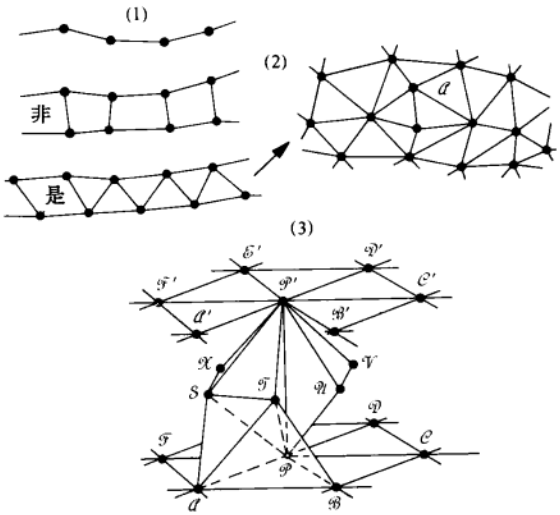
在所有具有三角形面的圖形中，20面體是滿足這個條件（只有 5 個三角形會合的頂點）並具有最小面數的圖形。

如果每一個二維面都具有短程線圓頂頂點的圖案，如何把一個圓頂與另一個圓頂連接起來構成剛性的骨架三維幾何呢？如果圓頂嵌入平直三維幾何中，剛性將不成問題。每個圓頂自身已是剛性的。但是，此處給出的三維幾何不是平直的。只有把兩個二維球之間的空間完全確定地骨架化之後，才能在彎曲空間幾何中給出剛性。(1)不能把一個面的每一個頂點與另一個面的相應頂點單獨聯繫（「鬆軟結構」！）(2)不能把一個面這樣放置，使它的每一個頂點都在上面或差不多在上面，而三角形中心則在此面的「下面」。因爲，首先，頂點數和三角形數通常並不相同。其次，即使數目相符，把上面的平面的頂點與下面的三角形的三個頂點連接，也不能給出必須的剛性。兩個面之間的空間會包含某些四面體，但不能把空間處處分解爲四面體。(3)把三維幾何骨架化的一個自然可行的方法是，把一個平面的每一頂點與另一平面相應的頂點連接，但在這種連結中以附加的結構來填充使三維幾何具有剛性：插入如框 42.3 所示的頂點和連線。

(6)從三維結構構造四維結構

從三維幾何的骨架構造四維幾何的骨架時，很自然可以類似處理。(1)在兩個三維幾何中使用等同的點圖案。(2)用單連線把相應點連接起來。(3)在兩個三維幾何的中間或接近中間處插入整個附加的頂點圖案。這些補充的頂點，每個頂點都與其上面近鄰三維幾何中的四面體中心「對偶」並位於它的「下面」附近。(4)把補充的頂點與近鄰其上面和其下面的四面體的頂點連接並與近鄰的其他補充的頂點連接。(5)這樣就得到了把四維幾何分解爲單形所需的邊長，每個單形具有嚴格確定的大小。

框 42.3 由低維骨架幾何合成高維骨架幾何



(1)點和線段交錯的一維結構。(2)二維結構（a）「鬆軟的」（不能接受的）和（b）剛性的（三角形的角度完全取決於邊長）。把此結構按右圖擴展，「正常的」頂點有六個三角形以它絞鏈接合。然而，如果二維幾何能夠封閉成爲二維球，那麼至少應插入12個如圖中 $\mathcal{A}$ 點所示的爲 5 個三角形所共有的頂點。(3)在二維骨架幾何間填充…$\mathcal{ABP}$…$\mathcal{FPC}$…$\mathcal{EQ}$… 和類似的結構…$\mathcal{A'B'}$…$\mathcal{F'P'C'}$…$\mathcal{E'Q'}$…可以得出三維骨架幾何。填充的方法如下。(a) 在兩個二維幾何中相應點之間直接插入連接線如 $\mathcal{PP'}$。(b) 插入由 $\mathcal{SFQVWX}$… 等「補充頂點」構成的中間層。這些補充頂點的每一點大致位於它「上面」三角形中心與它「下面」相應三角形中心的中間。(c) 把每個這種「補充頂點」與其上面，下面和同平面的近鄰點連接起來。(d) 給定全部邊長。(e) 這樣，在兩個二維幾何之間的三維骨架幾何就嚴格地確定了。它由下述五種四面體組成。(1)「連通塊」如 $\mathcal{PP'SF}$（當 $\mathcal{P}$ 爲通常的頂點時，有六個連通塊以 $\mathcal{PP'}$ 爲絞鏈；當如右上圖 $\mathcal{A}$ 點所示的情形時爲五重頂點，有五塊）。(2)「底面塊」如 $\mathcal{ABPF}$。(3)「下填充塊」如 $\mathcal{ABSF}$，(4,5) 相應的「頂面塊」和「上填充塊」（圖中未畫出）。對於下述兩種二維幾何的極端情形適當的列出了每種塊的數目。這兩種極端情形是(a)二維幾何由在平面內無限延伸的正常六邊形格子組成。(b) 組成二維幾何的格子是由最小數目的五重頂點（「$\mathcal{A}$ 類頂點」）組成的，它將允許閉合成二維球。

上（下）面的二維幾何	三角形的六邊形圖案	由三角形構成的二十面體
它的拓撲	無限二維平面	二維球
在上面的頂點數	V	12
這些頂點的性質	6 重	5 重
上面的邊長	$3V$	$\frac{5}{2}V=30$
上面的三角形	$2V$	20
「補充頂點」的數目	$2V$	20
面向外的塊數	$2V$	20
外面的填充塊數	$3V$	30
連通塊數	$6V$	60
內部的填充塊數	$3V$	30
面向內的塊數	$2V$	20

§42.6　邊長的選擇

邊長的選擇：

關於四維幾何的格子結構就談這麼多；現在談談別的問題即選擇邊長的自由。爲什麼不用最簡單的選擇，使全部邊都是光線呢？因爲那樣四維幾何不能完全確定。幾何 $g_{\alpha\beta}(x^\rho)$ 與幾何 $\lambda(x^\rho)g_{\alpha\beta}(x^\rho)$ 不同，儘管在一種幾何中由光線連接的一些點與在另一種幾何中由光線連接的點是同樣的。

(1)選擇一些類時的，另一些類空的

如果沒有邊爲零，那麼自然可取一些邊長爲類空的，一些爲類時的。結果三角形的面積 A 在有些情況爲實數，在另一些情況爲虛數。在三維空間，由兩個矢量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 張成的平行四邊形（雙三角形）可以用一個矢量 $\boldsymbol{A}$ 描述

$$2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{A}$ 與這兩個矢量垂直。由下式得出 A 的大小爲

$$4A^2=B^2C^2-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})^2。$$

在四維空間，設 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是三角形的兩條邊。那麼，與三維情形一樣，$2\boldsymbol{A}$ 是由 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 構成的二重矢量的對偶。換言之，如果 $\boldsymbol{B}$ 沿 t 方向，而 $\boldsymbol{C}$ 沿 z 方向，則 $\boldsymbol{A}$ 是位於 (x,y) 平面的二重矢量。結果它的大小可認爲是實的量。因此面積 A 的適當公式爲（Tullio Regge）

$$4A^2=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})^2-B^2C^2。\qquad(42.10)$$

當虧損角 δ 爲實數時，量 A 爲實數。因而幾何上重要的乘積 $A\delta$ 也是實數。

另一方面，當絞鏈位於 (x, y) 平面時，量 A 是純虛數。在這種情形，一個試驗矢量，沿着繞此絞鏈的一圈單形轉圈，只有它的 z 和 t 分量經歷變化；即它經受 Lorentz 增速；也就是說，虧損角 δ 也是純虛數。因此乘積 $A\delta$ 再一次是實的量。

(2)選取的類時長度與類空長度應相當

現在從邊長的性質轉向邊長的大小。希望基本的積木塊在大致相同基的不同方向上，提供表徵空間曲率的樣品。換言之，希望既不選取長針形的積木塊，也不要餅形的四面體和單形。這個自然的要求意味着，時間上向前的步調應與空間的「橫向」步調相當。需要提出這種要求的事實顯示出以前已很明顯的情形：即「絞鏈方程」

$$\sum_{\text{以 } p \text{ 爲共同邊的諸絞鏈 } h} \delta_h \operatorname{cotan}\theta_{ph} = 0 \quad (p=1,2,\ldots), \tag{42.7}$$

(3)爲什麼有些長度必須任意選擇

雖然它們與邊一樣多，却不能認爲足以決定所有的邊長。在這些方程間存在一些必須的關係使得它們不互相獨立。方程不能確定在很大程度上必然是任意的骨架化過程的所有細節。它們不能作到這一點，就像廣義相對論的場方程不能確定坐標系一樣。給定頂點的圖案（框42.3中所畫的四維的推廣），人們仍然可以 (a) 選擇結構中相鄰層次之間的密集程度 (b) 在給定層次的空間上怎樣分佈給定數目的點以得到最佳的精度（在曲率大的區域，點的密度也大）。要編制出以 Regge 計算法爲基礎的實用的計算機（電腦）程序，不僅要向機器提供絞鏈方程和初始條件，還要提供確定的算法以消除存在於選擇 (a), (b) 中的全部不確定性。

用邊長表示虧損角

Wheeler (1964a, 第 469, 470 和 490 頁) 和 C. Y. Wong (1971) 總結了立體幾何和四維幾何的公式，由這些公式，可用邊長（只用邊長別無其他）確定必須的超二面角 α 和虧損角 δ。Regge (1961) 還給出了用虧損角和沿給定方向的邊數表示的 Riemann 曲率張量的公式本身 [也可參看 Wheeler (1964a, 第 471 頁)]。

§ 42.7 Regge 計算法過去的應用

Regge 計算法過去的應用

Wong (1971) 曾把 Regge 計算法用於一個不隨時間發展的問題，因而幾何看作是靜態的並且還具有球對稱性。他用骨架化的方法確定了 Schwarzschild 幾何和 Reissner-Nordstrøm 幾何。考慮圍繞着吸引中心的一系列的球。Wong 把每個球近似看作二十面體。條件

$$^{(3)}R=16\pi\left(\begin{matrix}\text{三維空間的}\\ \text{能量密度}\end{matrix}\right)$$

(§21.5) 給出一遞推關係，它用兩個前面的二十面體確定每個二十面體的尺度。精確幾何骨架化表述的誤差範圍從大約10%到小於1%，誤差大小取決於分析的方法，要分析的量和再分割的精細程度。

幾何的骨架化應僅從把偏微分方程改寫爲差分方程來加以區別。目前已有三個例證表明，可以利用骨架化而不必把空時分割到各個單形的程度。第一個例子是 Wong 工作的第一部分，其中時間從未明顯出現，因此積木塊只是三維的。第二個例子是由 Wong 給出的另外一種處理方法，不考慮 t 的對稱性而只考慮 θ 和 ϕ 的對稱性。把空間分成球殼，在每個球殼內的幾何是「匱平直的」，與紙卷幾何是平直的同樣含義。第三個例子是 May 和 White (1966) 對球狀恒星引力坍縮所作的數值解，其中 θ 和 ϕ 有對稱性，但 r 或 t 無對稱性。這個分區佈局只出現在 r-t 平面內。每個區域是一球殼。與 Regge 計算法（每個積木塊內的幾何是平直的）比較，差別是給予每一球殼的「錐削度」是可調的。這些例子表明，關於幾何骨架化問題通常在計算中需要決定的不是「是否」要作的問題，而是「作多少」的問題。

部分地骨架化

§ 42.8　Regge 計算法的未來

總之，Regge 骨架化計算法把實際上超出一般解析方法威力的問題納入計算問題的領域之內。只要把所考慮的空時區域作足夠精細的分割，就足以提供任一所需的精度。通過數積木塊的方法，它還提供了可以顯示出這種計算結果的實際方法。最後，可以希望，Regge 的廣義相對論的眞正幾何表述，將在某一天準確清晰地展示 Einstein 場方程的內容（Cartan 的「轉動矩」；參看第15章），揭開所謂「幾何動力學場動量」幾何意義的面紗（在 Regge 計算法內分析與廣義相對論的變分問題有關的邊值問題，參看§21.12）。

對未來的希望

第四十三章　超空間：幾何動力學的競技場

旅行者，這裏沒有路。
路是走出來的。
Antonio Machado (1940)

本章全屬高階。第21章(初值表述)是本章的必要準備。閱讀本章時，第42章（Regge 計算法）將有幫助。本章並非以後任何一章的必要準備，但它將對第44章（想像未來）有所幫助。

超空間是幾何動力學的競技場

§ 43.1　區別空間，超空間和空時

超空間［Wheeler (1964a)，第 459 頁以下各頁］是幾何動力學的競技場。正如粒子動力學是在空時中展開一樣，Einstein 的彎曲空間幾何動力學是在超空間中自然發展的。本章給出超空間的一種簡單表述，同時對超空間的另一種表述提供一些初步印象，它也有它的用處。本章用框 25.3 和框 25.4 的 Hamilton-Jacobi 原理描述超空間中幾何的經典動力學。力學的任何一種表述都無法縮短從經典動力學向量子動力學的跳躍。本章提供了波峰在超空間傳播的原理（「EinsteinHamilton-Jacobi 或 EHJ 方程」），並找出在何處這些波峰給出相長干涉（「包絡形成」）的經典對應。這樣，人們發現了三維幾何隨時間發展的踪跡，它表現爲切開超空間的銳而薄的「史頁」。量子原理把這一肯定的報道代之以有限厚度的模糊史頁。結果，在 Planck 長度 $L^*=(\hbar G/c^3)^{1/2}=1.6\times10^{-33}$ 厘米和更小的距離範圍內，在空間幾何中發生的量子漲落占主導地位。目前的述評因只考慮彎曲的空的空間的動力學而使問題簡化。當源存在並應予以考慮時，要加入一些補充項，對此的一些文獻列在下面。

在半個世紀的歷程中，爲了理解幾何動力學所作的全部艱巨的研究，不管是經典的還是量子的，最困難之點也是最簡單的：動力學客體不是空時。它是

框 43.1　幾何動力學與粒子動力學的比較

概　　念	粒子動力學	幾何動力學
動力學實體	粒子	空間
瞬間位形的描述者	x,t（「事件」）	${}^{(3)}\mathcal{G}$（「三維幾何」）
經典歷史	$x=x(t)$	${}^{(4)}\mathcal{G}$（「四維幾何」）
歷史是位形的貯存嗎？	是的。世界線上的每一點給出粒子的瞬間位形	是的。穿過 ${}^{(4)}\mathcal{G}$ 的每一個類空薄片給出空間的瞬間位形
動力學的競技場	空時（所有點 x,t 的全體）	超空間（所有 ${}^{(3)}\mathcal{G}$ 的全體）

三維幾何是動力學客體

空間。空間的幾何位形隨時間變化。但只是空間，三維空間在變化（參看框 43.1）。

此處，把空間作爲「閉合的」來處理，或者，用數學的語言來說，是「致密的」，這樣做既是因爲物理學把閉合的要求加在 Einstein 二階微分方程之上作爲必要的和適當的邊界條件 [Einstein (1934，第52頁；1950); Wheeler (1959; 1964c)。Hönl (1962)；也可參看 §21.21]，也是因爲這個要求使數學分析簡化，也可以說兩個原因都有。

有限維的「截斷超空間」

可以把光滑閉合的三維幾何用如圖 43.1 示意圖所示的由四面體構成的骨架化三維幾何近似表示（參看42第章的 Regge 計算法）。在這個例子中，指定 98 個邊長以確定幾何的所有特徵；並通過給定 98 維空間中單一點的位置來確定這 98 個邊長。這個 98 維的流形，即此「截斷的超空間」在理想化條件下轉向超空間，即追踪點覆蓋密度的增加不受限制 [Wheeler (1964a)，第453, 459, 463, 495頁]。關於超空間的更多數學細節可參看 DeWitt (1967 a, b), Wheeler (1970) 和 Fischer (1970)。

設代表點在截斷超空間或完全超空間中從某一位置移到附近的位置。則所有的邊長都改變了，並且圖 43.1 所示的三維幾何也活生生的運動起來。這是對「空間動力學」所能容易提供的最好說明。

術語「三維幾何」在量子幾何動力學中的含義和在經典理論中一樣。超空間也是如此。但空時却並非如此。給定三維幾何，並給定它的時間變化率。在典型的情況下（參看第21章）這就足以確定幾何的全部時間演化；換言之，只要討論的是經典物理範圍內的問題，就足以確定整個四維空時幾何。但是，在量子物理的眞實世界中，不可能給出動力學變量及其時間變化率兩者。並

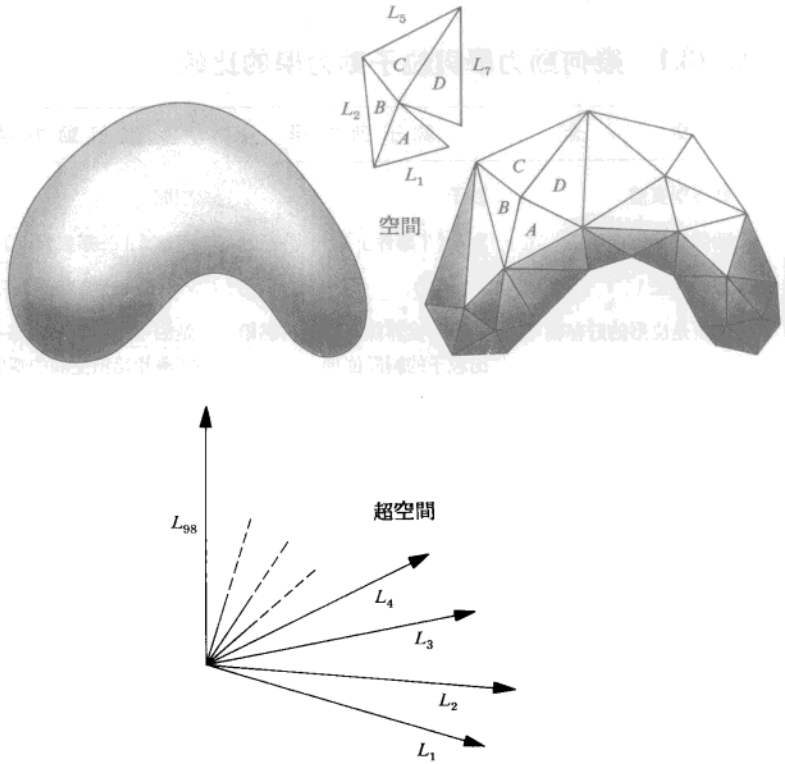


圖43.1

單形近似下的超空間。左上，空間（表爲二維但實際上是三維）。右上，空間的單形近似。通過任意精細的分解，這個近似可作到任意準確。在典型位置的曲率可用虧損角量度。這個角度完全取決於在該位置相遇的各單形的邊長（圖中 $L_1, L_2, \ldots L_5$）。當在幾何的單形表述中共有98個邊長時，那麼，這個幾何由98維空間（下圖：「超空間」）中單一點完全決定。

空時概念與量子原理不相容

協性原理禁止這樣作。給定某一時刻的準確的三維幾何，就不可能同時知道在該時刻三維幾何的時間變化率。換言之，給定幾何動力學的場坐標，就不可能知道幾何動力學的場動量。如果指定內稟的三維幾何，就不可能也指定外賦曲率。

這樣，測不準原理剝奪了人們以任何方式去預言「空間隨時間演化的決定論的經典歷史」，甚至使這種說法本身失去了意義。無法預言空時，因此空時

沒有意義，這就是量子原理的論斷。作爲全部經典廣義相對論中心的客體——四維空時幾何——除了在經典近似中以外，根本就不存在。

這些考慮揭示出，在物理理論的結構中，空時的概念和時間的概念不是根本的概念，而是從屬的概念。這些概念只適用於經典近似。然而，當量子幾何動力學效應變得重要時，這些概念既無意義也不能應用。這樣，人們必須拋棄舊的自然觀，它認爲每個事件，過去，現在或將來，都在稱之爲「空時」的巨大編目中占據其預先注定的位置，從每一事件到其鄰近事件的 Einstein 間隔永恒地存在。沒有空時，沒有時間，沒有過去，沒有今後。「隨後」會發生什麼的問題是沒有意義的。

空時不是正確的方式，這並不意味着沒有正確的方式與量子原理相容地描述幾何動力學。超空間就是描述動力學的一種正確方式的關鍵（見圖43.2）。

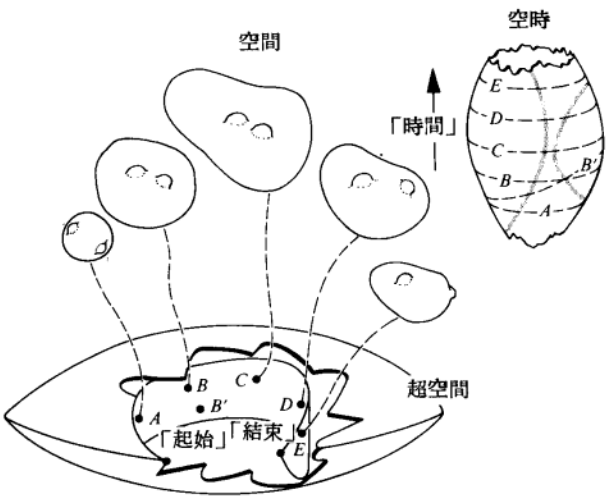


圖43.2

空間，空時和超空間。左上：五個位形樣品 $A, B, C, D, E,$，在空間膨脹和重新收縮過程中得出。下方：超空間和超空間中的點所代表的這五個位形樣品。右上：空時。穿越空時的類空切割（如 A）給出了空間的瞬間位形。沒有必要把注意力僅限於穿過空時的單參數薄片族 A, B, C, D, E。「多指時間」就是告訴人們不要這樣限制自己的薄片的一個口號，而 B' 就是實際上具有這種自由的一個例子。三維幾何 B' 以及 $A, B, C, D, E,$，像全部三維幾何（它們是所有類空薄片以任何方式穿過給定的經典空時得出的）一樣，處於單獨的彎曲史頁之中，如圖所示，並以其薄片穿過超空間。換言之，不同的空時，即 Einstein 場方程的一個不同的解，意味着切過超空間的一個不同的史頁（圖中未畫出）。

§43.2 用 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 的超空間語言描述幾何動力學

空時是切過超空間的經典史頁

給定空時，可以構造出切過超空間的相應史頁。反過來，給定史頁，也可重新構造出空時。

考慮通常稱爲「中國盒」的兒童玩具。打開最外面的盒子後，顯露出來的只是另一個盒子；再打開第二個盒子，又顯出另一個盒子，如此等等，直到最後有幾打盒子攤滿一地。或者相反地，這些盒子也還都能放回去，把一個盒子套入另一盒子之中，重新構成原來的包裝。把 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 裝入 $^{(4)}\mathfrak{H}$ 要複雜得多。自然界中並沒有 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 的單調次序。隨機地選取兩個動力學允許的 $^{(3)}\mathfrak{H}$，它們常常彼此交叉一次或多次。當把 $^{(4)}\mathfrak{H}$ 抖開時，大量 $^{(3)}\mathfrak{H}$「攤滿一地」，比設想的多得多。反之，當把所有置於史頁上的 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 放回到一起時，得到的結構所具有的剛性不比預想的差。這種剛性來自一個個清楚切割明確定義的 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 的無限豐富的交捧和交叉。

總之：(1)從原則上說，經典幾何動力學構成了一種裝置，一個算法，一套計算和構造切過超空間史頁的規則。(2)置於史頁上的 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 稱爲 YES 三維幾何；更多得多的不能置於史頁上的 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 稱爲 NO 三維幾何。(3) YES $^{(3)}\mathfrak{H}$ 是構造經典空時 $^{(4)}\mathfrak{H}$ 的積木塊。(4)這些積木塊交織和相連決定了 $^{(4)}\mathfrak{H}$ 的存在，尺度和結構。(5)在此結構中每一個 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 有它自己的嚴格確定的位置。(6)在這個意義上可以說每個三維幾何的所謂「多指時間」是由它本身的聯鎖結構指定的。Baierlein, Sharp 和 Wheeler (1962) 談到一些「三維幾何是有關時間的信息的携帶者」的概念。

這與教科書上的空時概念是多麼的不同！在教科書中把空時幾何設想爲是由基本客體或稱爲「事件」的許多點組成的。反之，此處第一性的概念是抽象的三維幾何，而由它導出事件的概念。因而，(1)事件位於這種和那種 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 的交叉點；而且(2)它與某個其他 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 有類時的關係（早些，遲些或同時）。(3)這另一個 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 又可從所有其他的 $^{(3)}\mathfrak{H}$ 的交叉中導出。

當從經典理論轉向量子理論時，除了半徑典近似外，應放棄空時概念。因此，對於通常看作非常基本的「事件」概念，也要放棄以任何方式直接定義的可能性。但是，理論本身，在此處與各處一樣 [Bohr 和 Rosenfeld (1933)]，以其自身的自然方式，對於原則上可測量的全部量規定了進行測量的原則步驟。

量子理論打破 YES 三維幾何與 NO 三維幾何之間的尖銳區別。它賦與

每一個三維幾何的不是 YES 或 NO，而是概率振幅（即幾率振幅或幾率幅）

三維幾何的概率振幅

$$\phi=\phi(^{(3)}g)。\tag{43.1}$$

在接近經典預告的史頁時，這個概率振幅達到最高，而在史頁兩側稍往外擴展的有限厚度區域之外，概率振幅急劇地下降。

代替物理上相關的概率振幅函數，如果取相關波動方程的典型解，那麼可以預料不會再看到任何類似經典幾何動力學的痕跡了。典型的概率振幅函數遍布全部超空間。不必驚訝！在經典理論中，人們已不得不考慮到 Hamilton-Jacobi 函數

$$S=S(^{(3)}g)\tag{43.2}$$

是遍佈超空間的。另外，這個經典幾何動力學的「動力學位相函數」立刻給出位相 ϕ 如下式

$$\phi(^{(3)}g)=\begin{pmatrix}\text{緩變的}\\ \text{振幅函數}\end{pmatrix}e^{(i/\hbar)S(^{(3)}g)},\tag{43.3}$$

這足以表明 ϕ 和 S 兩者都是非局域的。

當足夠多的這種遍佈的概率振幅函數疊加在一起構成局域化的波包時，動力學才首次變得可以清楚辨認，如框 25.3 和框 25.4 的初等例子所示；這樣，

波包恢復了經典幾何動力學

$$\phi=c_1\phi_1+c_2\phi_2+\cdots。\tag{43.4}$$

在幾個單獨的波的位相一致之處：

$$S_1(^{(3)}g)=S_2(^{(3)}g)=\cdots,\tag{43.5}$$

將發生相長干涉。這是把 YES 三維幾何從 NO 三維幾何中區分出來的條件。這是在超空間構成史頁的工具。這是幾何動力學的關鍵。另外，這是一個方程，它沒有一個字提到量子原理。相長干涉方程（43.5）式可以最簡捷的方式從經典理論躍向量子理論，這是毫不足怪的。

§43.3　Einstein-Hamilton-Jacobi 方程

應當寫出 Hamilton-Jacobi 函數 $S(^{(3)}g)$ 的微分方程，求解，並分析解的性質嗎？反過來更簡單：先考察解的性質，根據這種考察找出動力學位相或作用量 S 所必須滿足的方程是什麼。

Hilbert 最小作用量原理爲

$$I_{\text{Hilbert}}=(1/16\pi)\int {}^{(4)}R(-g)^{1/2}d^4x=\text{極值}。\qquad(43.6)$$

當把積分中的全微分分離後，留下的［參看（21.13）和（21.95）式］變爲

$$(1/16\pi)I_{\text{ADM}}=I_{\text{眞實}}=(1/16\pi)\int\Big\{\pi^{ij}\partial g_{ij}/\partial t+Ng^{1/2}R$$
$$+Ng^{-1/2}\Big[\frac{1}{2}(\text{Tr}\,p)^2-\text{Tr}(p^2)\Big]+2N_i\pi^{ij}{}_{|j}\Big\}d^4x。\qquad(43.7)$$

在（43.7）式中，g爲三維度規張量 g_{ij} 的行列式，R是三維幾何的標量曲率不變量，爲簡單起見，添標[3]省略了，但在（43.6）式中符號的含義與此不同。積分區間從⑴由度規 $g_{ij}'(x,y,z)$ 給定的三維幾何所在的類空超曲面擴充到⑵由度規 $g_{ij}''(x,y,z)$ 給定的三維幾何所在的類空超曲面。在空時之間一切可調的量現在都認爲已經調整得使積分取極值。因此積分 I_{ADM} 的值變成在兩個超曲面上的度規的泛函數，別無其他。

下一步，保持在前一個超曲面上的度規 $g_{ij}'(x,y,z)$ 固定不變，稍稍地甚至較多地改變後一超曲面上的度規。求解這個新的變分問題，並得到新的 I_{ADM} 的值。如此進行下去，對於每一個新的 g_{ij}''，得到一個新的 I_{ADM} 值。把這樣定義的度規泛函數 I_{ADM} 稱爲連接兩個給定三維幾何的「幾何史」的「Hamilton 主函數」或「作用量」或「動力學程長*」$S(g_{ij}(x,y,z))$。此處和此後把兩撇添標從 g_{ij}'' 去掉以簡化符號。從力學的其他分支知道，從這種方式定義的量 $S(g_{ij})$，只要存在，即使是一個特解，也永遠是 Hamilton-Jacobi 方程的一個解。Jacobi 可以去尋求更普遍的解，但是 Hamilton 已經得到了一個解！

爲了使（43.7）相對於間隔N和移位分量 N_i 的變化取極值，要求（參看第21章）這四個量的係數爲零；即

$$g^{-1/2}\Big[\frac{1}{2}(\text{Tr}\,p)^2-\text{Tr}\,p^2\Big]+g^{1/2}R=0\qquad(43.8)$$

和

$$\pi^{ij}{}_{|j}=0。\qquad(43.9)$$

在作用量極值的表達式中，只有第一項保留下來：

$$S(g(x,y,z))=I_{\text{ADM，極值}}=\int_{t'_{ij}}^{t_{ij}}\{\pi^{ij}\partial g_{ij}/\partial t\}d^4x。\qquad(43.10)$$

---

*實際上 $S\equiv S_{\text{ADM}}\equiv 16\pi S_{\text{眞實}}=16\pi$（眞實的動力學程長）。

因此三維度規中的微小變化 δg_{ij} 效應的上限很容易地表爲

$$\delta S=\int \pi^{ij}(x,y,z)\delta g_{ij}(x,y,z)d^3x。 \tag{43.11}$$

「函數微商」的語言［參看，例如，Bogoliubov 和 Shirkov (1959)］使人們可以用微商而不用積分來表示：

幾何動力學的動量表爲動力學程長相對於終超曲面三維幾何的變化率

$$\frac{\delta S}{\delta g_{ij}}=\pi^{ij}。 \tag{43.12}$$

「場動量」得到了簡單的含義：它們給出了作用量相對於連續無限的「場坐標」$g_{ij}(x,y,z)$的變化率。（此處 x, y, z，與 i 和 j 一樣，僅僅作爲標記。）

作用量取決於三維幾何而不取決於各個度規係數

儘管位相函數S似乎取決於所有 6 個單獨的度規係數 g_{ij}，實際上它只取決於鎖定三維幾何的 g_{ij} 的組合。爲了證明這一點，把貫穿某一局域坐標片並用一組坐標 x^ρ 表示的特殊三維幾何 [3]，表爲一組度規係數 $g_{\rho\sigma}$。把同一三維幾何用經小量移動 ξ^ρ 的坐標 $\bar{x}^\rho$ 重新表示

$$\bar{x}^\rho=x^\rho-\xi^\rho。 \tag{43.13}$$

爲了保持三維幾何不變，即保持從與坐標無關的一點到另一點的距離 ds 不變，度規係數必須改變：

$$\bar{g}_{\rho\sigma}=g_{\rho\sigma}+\xi_{\rho|\sigma}+\xi_{\sigma|\rho}。 \tag{43.14}$$

設位相函數S（或在量子力學中，設概率振幅 ψ）可表爲度規係數 $g_{11}(x)$, $g_{12}(x)$,..., $g_{33}(x)$ 的泛函數。這些係數的變化 $\delta g_{\rho\sigma}(x)$ 使 H-J 位相函數和概率振幅發生變化，根據函數微商的標準定義，其改變量爲

$$\begin{aligned}\delta S&=\int(\delta S/\delta g_{\rho\sigma})\delta g_{\rho\sigma}d^3x，\\ \delta\psi&=\int(\delta\psi/\delta g_{\rho\sigma})\delta g_{\rho\sigma}d^3x。\end{aligned} \tag{43.15}$$

因此坐標變化造成的動力學程長或位相S的表觀變化爲

$$\begin{aligned}\delta S&=\int(\delta S/\delta g_{\rho\sigma})(\xi_{\rho|\sigma}+\xi_{\sigma|\rho})d^3x\\ &=-2\int(\delta S/\delta g_{\rho\sigma})_{|\sigma}\xi_\rho d^3x。\end{aligned} \tag{43.16}$$

如果S只依賴於三維幾何而不依賴於表示該三維幾何的坐標，則此改變應爲零

；而且對於任意選擇的 ξ_ρ 都必須爲零。根據這個條件，可斷定

$$\left(\frac{\delta S}{\delta g_{\rho q}}\right)_{|q}=0。 \tag{43.17}$$

同樣，區別於它的位相 $S/\hbar$，得到波函數 ψ 本身的三個方程，爲

$$\left(\frac{\delta \psi}{\delta g_{\rho q}}\right)_{|q}=0。 \tag{43.18}$$

但是，由 (43.12) 式可知，(43.17) 式與 (43.9) 式等同。在此意義上，(43.9) 式只是證實了人們已經知道的事實：經典 Hamilton-Jacobi 函數 S（正如量子理論的概率振幅函數 ψ 那樣）依賴於三維幾何，而不依賴於各度規係數，也不依賴於坐標的選擇。

全部幾何動力學的動力學內容可以概括到剩下的唯一方程 (43.8) 之中，它可寫爲

超空間中波包傳播的定律

$$g^{-1/2}\left[\frac{1}{2}g_{\rho q}g_{rs}-g_{\rho r}g_{qs}\right]\frac{\delta S}{\delta g_{\rho q}}\frac{\delta S}{\delta g_{rs}}+g^{1/2}R=0。 \tag{43.19}$$

這是 Einstein-Hamilton-Jacobi 方程，它是在 Peres 和其他人關於幾何動力學 Hamilton 表達式的早期工作基礎上，首次在 Peres (1962) 的文獻中明確給出的。這個方程說明恒定 S 的波前（「波包」）在超空間中是怎樣傳播的。

Gerlach (1969) 證明，一個 EHJ 方程 (43.19) 所包含的信息與 Einstein 場方程的全部十個分量方程所含的信息一樣多。分析的要點是相長干涉原理，適當處理此要點的主要要求是 EHJ 方程的完全參數化解的概念。

用框 25.3 和框 25.4 中的 Hamilton-Jacobi 方法討論在二維空間中粒子運動的問題，要求完全的分析包含兩個不同的獨立可調參數的解，這兩個參數是單位質量的能量 $\tilde{E}$ 和單位質量的角動量 $\tilde{L}$；於是

$$S(r,\theta,t;\tilde{E},\tilde{L})=-\tilde{E}t+\tilde{L}\theta$$
$$+\int^{r}[\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}\frac{dr}{(1-2M/r)}+\delta(\tilde{E},\tilde{L})。 \tag{43.20}$$

此處，爲了使粒子在給定的 t 值和給定的 θ 值到達給定的 r 值，需要加性的位相 $\delta(\tilde{E},\tilde{L})$。考慮如 (43.4) 所示的四個概率振幅的疊加，以及由 (43.20) 式給出的動力學位相 S，參數分別取下述四組值：$(\tilde{E},\tilde{L})$;$(\tilde{E}+\Delta\tilde{E},\ \tilde{L})$, $(\tilde{E},\ \tilde{L}+\Delta\tilde{L})$ 和 $(\tilde{E}+\Delta\tilde{E},\tilde{L}+\Delta\tilde{L})$。相長干涉原理導致條件

$$\partial S/\partial \tilde{E}=0,$$
$$\partial S/\partial \tilde{L}=0。 \tag{43.21}$$

在空時 (r, θ, t) 中滿足這些條件的點爲 YES 點；它們位於世界線上。不滿足這些條件的點是 NO 點。

EHJ 方程 (43.19) 的期望解包含的不是兩個參數（再加上一個依賴於這兩個參數的加性的位相 δ），而是無窮多個參數，甚至是連續分布的無窮多個參數。因而參數不應記爲 $\alpha_1, \alpha_2,\ldots; \beta_1, \beta_2,\ldots$（以孤立指標標記的參數），而應記爲

$$\alpha(u,v,w)$$

和

$$\beta(u,v,w)$$

（用三個連續的指標 u, v, w「標記」兩個參數）。可以偶然地略掉無窮多參數之一嗎？怎麼能夠知道聲稱是 EHJ 方程完備解的那個解實際上是不是完備的解呢？幸而，Gerlach 給出了檢驗參數完備性的方法。

相長干涉條件給出了經典的「史頁」或空時

假定是完備的，Gerlach 證明「超空間中的史頁」或滿足相長干涉條件的三維幾何的集合

$$\frac{\delta S({}^{(3)}\mathfrak{H};\ \alpha(u,v,w),\ \beta(u,v,w))}{\delta\alpha}=0,$$
$$\frac{\delta S({}^{(3)}\mathfrak{H};\ \alpha(u,v,w),\ \beta(u,v,w))}{\delta\beta}=0, \tag{43.22}$$

是與由 Einstein 幾何動力學定律的十個分量給出的史頁或等價的四維幾何等同的。

從初等力學問題的 Hamilton-Jacobi 方程到相應的 Schroedinger 方程只有一小步；幾何動力學也類似。Bryce DcWitt 最充分地研究了這個「Einstein-Schroedinger 方程」的意義和後果 [DeWitt (1967a,b)]。最有趣的結果之一是，在超空間中存在着守恒的流，它類似於零自旋粒子的 Klein-Gordon 波動方程中的守恒流

$$j_\mu=\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\right)。$$

Einstein-Schroedinger 波動方程的一個令人不快的特點是它包含二階微商；因此必須同時指定概率振幅以及概率振幅在超空間中適當的「超－超曲面

」上的法向微商，以便能預言這個狀態函數在超空間其他各處的演化。這種情況至少是不方便，可能還是一種眞正的困難，Leutwyler (1968) 提出一種逃脫這個狀況的方法：强加自然的邊條件使得把獨立解的數目從二階方程的特徵數目減少到一階方程的特徵數目。逃脫這種狀況的另一途徑是用 Kuchař 提出的方法（參看第21章），即完全不同地用公式表述動力學，所得的方程是類似於時間的變量的一階方程。

當以强加上高度的對稱性，把幾何的絕大多數自由度凍結時，量子幾何動力學的研究大爲簡化。這時只剩下一個，二個或三個自由度（參看第 30 章混主宇宙學），甚至也可有無限多自由度，但可導致量子力學中可以處理的問題[Misner (1972a,1973)]。

§ 43.4 幾何漲落

二次大戰後，在物理學的所有重大發展中，最引人注目的是電磁場的眞空漲落對氫原子中電子運動效應的預言和證實（圖43.3）。這一發展迫使人們必須考慮這種漲落在整個物理學中的效應，其中不可忽視的是在空時幾何本身中的效應。

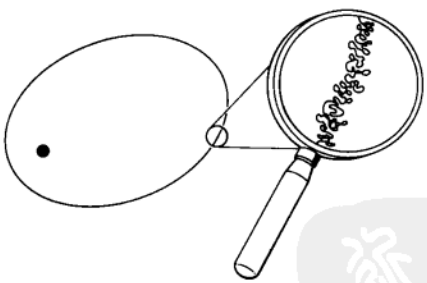


圖 43.3

氫原子中電子運動受眞空（「眞空」或「基態」或「零點」漲落）中電場漲落影響的示意表示。與漲落相關的電場 $E_x(t)=\int E_x(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$ 加在由核本身提供的靜電場之上。在最初級近似中，附加場引起的位移 $\Delta x=\int(e/m\omega^2)E_x(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$ 。平均值爲零但均方根值 $\langle(\Delta x)^2\rangle$ 不爲零。結果電子感受到的等效原子勢與預期值 $V(x,y,z)$ 相差

$$\Delta V(x,y,z)=\frac{1}{2}\langle(\Delta x)^2\rangle\nabla^2V(x,y,z)。$$

這一擾動對未擾運動的平均，可以說明觀測到的能級的 Lamb-Retherford 移位 $\Delta E=\langle\Delta V(x,y,z)\rangle$ 的主要部分。反之，預期移位的觀測使眞空漲落的實在性是不可避免地明顯。

從單個振子的零點漲落到電磁場的漲落到幾何動力學的漲落是自然的過程。

基態諧振子以振幅爲

振子和電磁場的漲落

$$\psi(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-(m\omega/2\hbar)x^2} \tag{43.23}$$

的概率從其自然的經典平衡位置偏離 x 的距離。在此意義上，可以說，在相隔空間範圍爲

$$\Delta x\sim(\hbar/m\omega)^{1/2} \tag{43.24}$$

的位置之間作「共振」或「漲落」。

電磁場可以看作振幅爲 $\xi_1, \xi_2,\ldots$ 的獨立「場振子」的無限集合。當 Maxwell 場在其最低能量狀態時，概率振幅——第一個振子的振幅爲 ξ_1，同時第二個振子的振幅爲 ξ_2，第三個爲 ξ_3，等等——是形式爲 (43.23) 的函數（對於每一個振子有一個這樣的函數）的乘積。當把每個振子振幅的尺度適當地歸一化後，得出的無限項乘積的形式爲

$$\psi(\xi_1,\xi_2,\ldots)=N\ \exp[-(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots)]。 \tag{43.25}$$

這個表達式給出了 Fourier 係數 $\xi_1, \xi_2,\ldots$所描述的磁場位形 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ 的概率振幅。但是，如果願意，也可以根本不提這些 Fourier 係數，而直接用磁場位形本身把 (43.25) 式改寫爲 [Wheeler (1962)]:

$$\psi(\boldsymbol{B}(x,y,z))=\mathcal{N}\exp\left(-\iint\frac{\boldsymbol{B}(x_1)\cdot\boldsymbol{B}(x_2)}{16\pi^3\hbar c r_{12}^2}d^3x_1d^3x_2\right)。 \tag{43.26}$$

人們不再說「這個」磁場，而應說這個，那個，或磁場的其他位形出現的概率，即使像現在這樣電磁場處在基態也應如此。［對於線性化引力場「基態」函數的類似表達式，可參看 Kuchař (1970)］。

在這種情況下，可以很合理地認爲具有最大概率的位形是 $\boldsymbol{B}(x,y,z)=0$ 爲了比較，可以考慮一種磁場位形，它除了在尺度爲 L 的區域外處處爲零。在尺度爲 L 的區域內，設永遠滿足條件 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$ 的場的數量級爲 ΔB。這個位形的概率振幅相對於零位形要縮小一個因子 $\exp(-I)$。此處指數中的量 I 的量級爲 $(\Delta B)^2L^4/\hbar c$。I 值比 1 大的位形出現的概率爲負值。I 比 1 小的位

形出現的概率幾乎與零位形的概率相同。在此意義下，可以說在範圍爲L的區域內磁場漲落的數量級爲

$$\Delta B\sim\frac{(\hbar c)^{1/2}}{L^2}。\tag{43.27}$$

換言之，場在一種位形與另一種位形之間「共振」，有顯著意義的位形範圍由((43.27) 式給出。而且，所考慮的空間區域愈小，以可察覺概率出現的場量值就愈大。

還有另一種熟悉的描述電磁場漲落的方式，它給出對幾何動力學另外的理解。考慮一測量儀器，它對尺度爲L的區域內各點磁場的比較測量是敏感的。人們尋求不同波長的電磁擾動對此設備的效應。波長比L短的擾動將在探測器的某一部分產生向一方作用的力，但在探測器的另一部分產生幾乎與之相補償的力。與此對照，長波長λ的擾動在各處產生的力都在同樣方向，但是太小不會產生大的效應。因而如果λ比區域的尺度L大，則由方程

$$\begin{pmatrix}\text{在體積爲 }\lambda^3\text{ 的區域內，}\\ \text{波長爲}\lambda\text{的電磁波的能量}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\text{波長爲}\lambda\text{的}\\ \text{一個量子的能量}\end{pmatrix}$$

或

$$B^2\lambda^3\sim\frac{\hbar c}{\lambda}$$

或

$$B\sim\frac{(\hbar c)^{1/2}}{\lambda^2}\tag{43.28}$$

可估計出場是非常小的。只有波長λ與L本身可以比擬的擾動，才能造成最大的效應。這條論證路線直接從 (43.28) 導出標準的漲落公式 (43.27)。

幾何中的漲落主要在 Planck 距離尺度上

類似的考慮也適用於幾何動力學。在幾何中的量子漲落疊加在由經典的決定論的廣義相對論所預言的大尺度緩慢變化的曲率之上並與之共存。因而，在尺度爲L的區域內，其中，度規係數在局域 Lorentz 系中的歸一值爲$-1,1,1,1$，這些係數上出現的漲落的量級爲

$$\Delta g\sim\frac{L^*}{L},\tag{43.29}$$

在g_{jk}一階微商中漲落的量級爲

$$\Delta\Gamma\sim\frac{\Delta g}{L}\sim\frac{L^*}{L^2},\tag{43.30}$$

在空間曲率中漲落的量級爲

$$\Delta R\sim\frac{\Delta g}{L^2}\sim\frac{L^*}{L^3}。\tag{43.31}$$

式中

$$L^*=\left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2}=1.6\times10^{-33}\text{ 厘米}\tag{43.32}$$

就是所謂的 Planck 長度 [Planck (1899)]。

考察一下數量級是適當的。按照經典的 Einstein 理論，在地球內或地球附近的空間率的量級爲

$$R\sim\left(\frac{G}{c^2}\right)\rho\sim(0.7\times10^{-28}\text{厘米/克})(5\text{克/厘米}^3)$$
$$\sim4\times10^{-28}\text{厘米}^{-2}。\tag{43.33}$$

這個量有很直接的物理意義。它量度在自由下落電梯中或在繞地球自由軌道的飛船內感覺到的「引力場的潮汐產生的分量」。與此比較，空間曲率的量子漲落甚至在觀測區域小到 1 厘米範圍時，其量級也只有

$$\Delta R\sim10^{-33}\text{厘米}^{-2}。\tag{43.34}$$

因而在空間幾何中的量子漲落在日常情況下是完全可以忽略的。

甚至在原子物理和核物理中度規的漲落

$$\Delta g\sim\frac{10^{-33}\text{厘米}}{10^{-8}\text{ 厘米}}\sim10^{-25}$$

和

$$\Delta g\sim\frac{10^{-33}\text{厘米}}{10^{-13}\text{厘米}}\sim10^{-20}\tag{43.35}$$

也是如此之小，以致完全可以理想化的認爲物理過程發生在平直的Lorentz 空時流形之中。

雖然如此，只要相信量子原理和 Einstein 理論，那麼幾何中的量子漲落是不可逃避的。它們與經典廣義相對論預言的幾何動力學的發展共存。漲落將把經典幾何歷史穿過超空間的狹窄切痕加寬。換言之，幾何並非決定論的，雖則在日常的觀測尺度上它看起來是如此。作爲代替，在亞微觀尺度上，幾何在一種位形與另一種以及再一種之間「共振」着。這個術語的含義不多不少如下：(1)每種位形 $^{(3)}\mathfrak{G}$ 有其自身的概率振幅 $\phi=\phi(^{(3)}\mathfrak{G})$。(2)在穿過超空間的經典切片的兩側，包含在 (43.29) 式的限度內的整個三維幾何區域，這些概率振幅

的大小相當。(2)在亞微觀尺度上，這些三維幾何的區域過於多樣化，不能納入任何一個四維幾何或任何一種經典幾何動力學歷史之內。(4)僅當忽略這些小尺度漲落（$\sim 10^{-33}$厘米）而考察三維幾何的大尺度特徵時，它們才似乎能納入與經典場方程相適合的單個空時流形中去。

這些小尺度的漲落告訴人們，像引力坍縮這類事件在空間處處時時都在發生；實際上，引力坍縮永恒地不斷地發生和消除。除了宇宙和恒星的引力坍縮之外，人們還必須涉及第三種引力坍縮，因爲它經常在消除，所以引力坍縮的最重要的層次是在 Planck 的距離尺度。

練習

練習 43.1 非相對論力學中自由粒子的作用量原理

取作用量原理 $I=\int L dt=$ 極值，指定 x', t' 和 x'', t'' 作爲積分上下限，並有 $L=\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$，試求(1)極值化的歷史 $x=x(t)$，和(2)動力學程長或作用量 $S(x'',t'';x',t')=I_{\text{極值}}$ 對兩端點的依賴關係。又(3)寫下這個問題的 Hamilton-Jacobi 方程和(4)證明 $S(x,\ t;\ x',t')$ 滿足此方程。最後，設想 Hamilton-Jacobi 方程未知，(5)試從已知的函數 S 本身的性質導出方程。

練習 43.2 諧振子的作用量

動能爲 $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$，勢能爲 $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 。完成上題(1)，(2)，(3)，(4)的分析。部分答案：

$$S=\frac{m\omega}{2}\frac{(x^2+x'^2)\cos\omega(t-t')-2xx'}{\sin\omega(t-t')}。$$

試證明，$\partial S/\partial x$ 給出動量而 $-\partial S/\partial t$ 給出能量。

練習 43.3 諧振子的量子傳播函數

試證明，單個諧振子從 x', t' 躍遷到 x'', t'' 的概率振幅爲

$$\langle x'',t'';x',t'\rangle$$
$$=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega(t''-t')}\right)^{1/2}\times\exp\frac{im\omega[(x'^2+x''^2)\cos\omega(t''-t')-2x''x']}{2\hbar\sin\omega(t''-t')},$$

並且，它在自由粒子情形下化爲

$$\langle x'',t'';x',t'\rangle=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t''-t')}\right)^{1/2}\exp\frac{im(x''-x')^2}{2\hbar(t''-t')}。$$

注意，利用公式

$$\langle x'',t'';x',t'\rangle=\sum_n u_n(x'')u_n^*(x')\exp iE_n(t'-t'')/\hbar$$

可以從解導出全部諧振子波函數。

練習 43.4 自由電磁場的量子傳播函數

在平直空時中，給定在類空超曲面 $t=t'$ 上的無散度磁場 $B'(x,y,z)$，給定在類空超曲面 $t=t''$ 上的無散度磁場 $B''(x,y,z)$。通過 Fourier 分析（把問題化爲上題）或其他方法，求出從 t' 時的 B' 躍遷到 t'' 時的 B'' 的概率振幅。

練習 43.5 Maxwell 電動力學的 Hamilton-Jacobi 公式表述

把電磁四維勢的四個分量 A_μ 看作基本量；把它們分解爲空間部分 A_i 和標量勢 ϕ。(1)從作用量原理（在平直空時中）

$$I=(1/8\pi)\int(E^2-B^2)d^4x$$

分出適當的散度項，導出性質與 (43.7) 定性相似的表達式。(2)試證明，需要在初、終類空超曲面上確定的適當量不眞是 A_i 自身，而是由 $\boldsymbol{B}=\text{curl}\ \boldsymbol{A}$ 定義的磁場。(3)試導出動力學位相或作用量 $S(\boldsymbol{B},\mathcal{S})$ 的 Hamilton-Jacobi 方程，$S(\boldsymbol{B},\mathcal{S})$ 依賴於超曲面 $\mathcal{S}$ 的選擇和在此超曲面上磁場 $\boldsymbol{B}$ 的選擇

$$-\frac{\delta S}{\delta\Omega}=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{B}^2+\frac{(4\pi)^2}{8\pi}\left(\frac{\delta S}{\delta \boldsymbol{A}}\right)^2。$$

左邊的量是 Tomonaga「氣泡時間」微商［Tomonaga (1946)；也可參看框 21.1］。

第四十四章　超越時間的終點

「天穹在你的上空回旋，向你展現她永恒的光輝，而你的眼睛却盯着地面」

Dante

世界「屹立在我們面前彷彿一個偉大而永恒的謎」

Einstein (1949a)

§44.1　引力坍縮是物理學有史以來最大的危機

本章全屬高階。無需前面的高階內容作爲它的預備知識，但第43章將有所幫助。

宇宙從大爆炸開始，膨脹到極大尺度，然後重新收縮和坍縮：從未有過這等令人敬畏的預言。簡直是荒謬絕倫。Einstein 自己都無法相信他本人的預言。多虧了 Hubble 所作的觀測，才迫使 Einstein 和科學界放棄了宇宙是無始無終的概念。

Tolman (1934a), Avez (1960), Geroch (1967) 以及 Hawking 和 Penrose (1969) 此後的工作把這個結論推廣了。閉合的，遵從 Einstein 幾何動力學定律的，處處都不包含負質量-能量的模型宇宙，不可避免地要發展成奇點。沒有人能找到逃脫質量-能量密度無限制增大的任何辦法。計算機一步一步地向前計算幾何動力學的演化，總會到達無法繼續下去的時刻。形象地說，計算機開始冒煙了。然而，如果除此沒有其他理由，那麼物理學必定還要繼續前進：根據定義，物理學應以其永恒的方式前進，而不管現實的外觀發生了什麼虛幻的變化。

J. A. W. 1971 年5月18日在 Newcastle-upon-Tyne 大學所作的 Marchon 講座和 1971 年7月19 日在 Cambridge (劍橋) 大學所作的 Nuffield 講座都根據本章提供的材料。

總有一天秘門一定會開啓，展現出主宰世界的光輝燦爛的中心機制的美妙和簡潔。對於這一天的到來，任何進展都不如引力坍縮佯謬能夠提供更多的希望。爲什麼是佯謬呢？因爲 Einstein 場方程說「這是終點」，而物理學說「不存在終點」。爲什麼有希望呢？因爲在所有探索謎底的範例中，佯謬給物理學提供的指望最多。

坍縮的佯謬：物理學中止了，但物理學必須繼續前進

1911年物理學遇到了前所未有的最大佯謬（框44.1）。當時，Rutherford 剛剛被迫斷定，物質是由局域化的正電荷和負電荷組成的。而根據理論，這樣組成的物質應在$\sim 10^{-17}$秒經歷電坍縮。觀測同樣清楚地表明，物質是穩定的。沒有人比 Bohr 更認眞地對待這個佯謬。圍繞着這個重要的不解之謎，在任何可以工作的領域中，沒有人比他付出更多的精力。沒有人比他更明智地兼具大膽精神和穩健態度，也沒有人比他更深刻地感受到物理學的和諧。和諧的

1911年電荷坍縮的危機

框 44.1　經典理論預期的宇宙坍縮和經典預期的原子坍縮的比較和對照

系　統	原　子 (1911)	宇宙 (70年代)
動力學實體	電子的體系	空間的幾何
經典預期的坍縮的性質	電子向着吸引的中心點在有限時間內被驅趕到無限的能量	不僅物質而且空間本身都在有限的原時內達到無限致密的狀態
人們拒絕的「出路」	放棄作用力的 Coulomb 定律	放棄 Einstein 的場方程
必須拒絕的另一個「廉價出路」建議	「加速的電荷不輻射」	「任何儘管很高的壓强都不能把物質壓縮到超過一定的密度」
這個建議怎樣破壞了因果性原理	點電荷的 Coulomb 場不可能以無限大的速率在不確定的大距離上對電荷速度的突然變化重新調整自身	聲速不可能超過光速；壓强不可能超過質量-能量密度
通過確認量子原理作爲組織物理學原理的中心，引入的主要新考慮。	測不準原理；與吸引中心結合得太緊密使零點動能勝過勢能；結果存在一最低量子態；不可能輻射是因爲不存在可落入的更低狀態。	測不準原理；典型波包在超空間的傳播並不決定論地導致空間幾何的奇異位形；寧可預期結果的概率分布，每一個結果描繪一種宇宙，各具有不同的大小，不同的粒子組，不同的粒子數，以及膨脹和重新收縮需要不同的時間長度。

直接對立物，不和諧，是瀏覽十幾篇關於原子結構的文獻時得出的印象。(1)電荷之間作用力的 Coulomb 定律應改變嗎？(2)加速電荷必定要輻射的原理應放棄嗎？反對這樣作的禁令幾乎沒有，還可以放棄更多已經建立起來的規律。但與此相反，Bohr 堅持這兩條原理。同時，他堅持第三條原理即量子原理的重要性。這是 Planck 在物理學的完全是另一個領域中堅定地確立起來的。利用這把鑰匙，Bohr 打開了通向原子世界的大門。

與 1911 年的危機一樣偉大，今天，引力坍縮使物理學面臨着它空前的最大危機。問題不只是物質的命運，而是宇宙本身的命運。坍縮的動力學，或者，不如說它的反面，膨脹的動力學，不僅爲理論所證明，並且也爲觀測所證明；不僅爲單一的觀測所證明，而是爲大量的觀測所證明，這些觀測是由能力卓絕誠實可靠的天文學家實現的。此外，坍縮，並非宇宙的大尺度動力學所僅有。預期超過臨界質量的白矮星或中子星也會經歷引力坍縮形成黑洞（第32章和第33章）。數目足夠多的恒星足夠密集的聚在星系核的中心時，預期會坍縮成比太陽質量大很多量級的大質量黑洞。正在銀河系積極地尋找存在黑洞的證據框（33.3）。形成黑洞的過程預期會對宇宙本身的引力坍縮提供一個經驗模型，但兩者有重要差別。對於坍縮成黑洞，觀測者可以選擇(1)從安全距離觀測，在這種情形，他的觀測無法揭示在視界內發生的任何事情；或者(2)追隨下落物質向內，在這種情形，他不僅可以看到物質而且可以看到圍繞着物質的幾何，坍縮到無限致密的最後階段，不過只能以他自己的較早死亡爲代價。對於閉合宇宙模型的坍縮，觀測者沒有任何選擇餘地。他的命運已經注定。物質和基本粒子的命運也都注定要被驅趕到無限高的密度。在坍縮危機中，賭注是無可比擬的：既包括最大的客體即空間的動力學，也包括最小的客體即基本粒子的動力學——以及兩者是如何開始的。

§ 44.2 對預言坍縮理論的評價

考慮坍縮佯謬（「坍縮結束了物理學」；「坍縮不可能結束物理學」）的人不能不問，「Einstein 引力幾何理論的適用限度是什麼？」在1911年的危機中曾提出過類似的問題。兩個電荷之間作用力的 Coulomb 定律曾經在米和毫米的距離上檢驗過，但是有什麼理由相信直到 10^{-8} 厘米的原子尺度它仍然成立呢？當然，終於證明它不僅在原子尺度上成立，而且在原子核的 10^{-13} 厘米尺度上也成立，甚至直到 5×10^{-15} 厘米還成立 [Barber, Gittelman, O'Neill和 Richter，以及 Bailey 等 (1968)，參看 Farley (1969) 以及 Brodsky 和

Drell (1970) 的評述]，這是 Wigner (1960) 所謂「數學在自然科學中異乎尋常有效性」的一個驚人的例子。

就其簡潔，優美和涉及的範圍而言，沒有一種理論比 Einstein 幾何動力學更像 Maxwell 的電動力學了。在物理學中幾乎沒有別的原理比下述一些原理更堅定地屹立着，它們正是幾何動力學確立的依據：狹義相對論的局域有效性（第2—7章），等效原理（第16章），動量和能量守恒（第5，15和16章）以及二階場方程在整個物理學的流行（第17章）。這些原理以及無「外來場」(例如，Dicke 的標量場) 和「無先驗幾何」(§17.6)的要求導致的結論是，空時幾何必須是 Riemann 幾何，以及幾何動力學定律必須是 Einstein 的。

經過戰鬥考驗的引力理論

說幾何是 Riemann 幾何，也就是說在空時中任何地方兩個相鄰事件 C 和 D 之間的間隔，當用空時中完全另一地方兩相鄰基準事件之間的間隔 AB 來表示時，其值 CD/AB 與路徑的相互比較無關（第13章和框 16.4）。有上千條路徑可供比較。由於作出了這個多頭的預言，Einstein 理論使自己面臨着上千種毀滅的可能性（框16.4）。

幾何動力學還使自己適於用別的方式來反駁。幾何對於它施加給粒子和場的動力學的控制作用是無法選擇的（第20章）。理論作出了關於致密恒星平衡結構與脈動的預言（第23—26章）。它給出了（第27—29章）宇宙膨脹的減速公式，質量-能量密度公式，以及空間曲率放大率的公式，對它們的檢驗並非遙遠不可及。它預言了引力坍縮，黑洞的存在，以及與這些客體相聯繫的豐富物理內容（第31—34章）。它預言了引力波（第35—37章）。在適當的近似之下，它包含了 Newton 引力理論對太陽系動力學所作的全部久經考驗的預言，而且還預言了可以檢驗的後 Newton 修正，其中包括若干已經證實的效應（第38—40章）。

在 Einstein 的引力幾何理論中，從未發現原理的不一致性。任何聲稱反對此理論的觀測證據都經不住時間的考驗。從未提出過具有類似的單純性和適用範圍的其他可接受的物理學。

在轉入討論中心論題，即理論的適用範圍及其與引力坍縮的關係之前，繼續再評價廣義相對論。Einstein 的幾何動力學對理解物理學作出了什麼貢獻呢？

從 Einstein 幾何動力學得出的新自然觀

第一，它把空時從高踞於物質和能量鬥爭之上的預先規定的完美無缺的位置上拉了下來，把它作爲活躍地參加此搏鬥的新的動力學實體。

第二，通過把能量動量與空間曲率相結合，Einstein 理論確認動量和能量的守恒定律是邊界的邊界爲零這個幾何恒等式的自動結果(第15和第17章)。

第三，它認識到引力是空時幾何曲率的表現，而不是嵌在空時之中的某種

外來的「物理」之物。

第四，廣義相對論强調下述觀點，即「物理學是局域的」；當把給定事件的各量與近鄰事件的各量相聯繫時，物理分析就變得簡單了。

第五，服從量子原理，它認識到空時和時間本身只是在經典水平的近似上才有效；Einstein 幾何動力學的固有競技場並非空時，而是超空間；按照量子原理，此動力學可用概率振幅經超空間的傳播來描述（第43章）。結果，空間幾何服從於量級爲

$$\delta g \sim \frac{(\text{Planck 長度，} L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6\times 10^{-33}\text{厘米})}{(\text{研究區域的線性開拓})}$$

的度規係數的量子起伏。

電荷作爲俘獲在空間拓撲中的力線

第六，標準的 Einstein 幾何動力學不喜歡 Euclid 拓撲，正如它不喜歡 Euclid 幾何一樣。多連通拓撲學把電荷自然地描述爲俘獲在多連通空間中的電力線（圖44.1）。對電的任何其他描述假定眞空的 Maxwell 場方程在電荷所在之處破壞了，或假定存在着嵌在空間的某種外來的「物理的」電的膠狀物

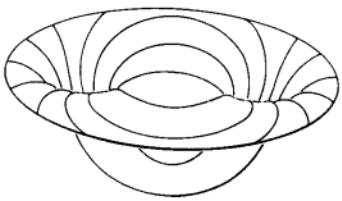


圖 44.1

把電荷看作在多連通空間的拓撲中俘獲的電力線［關於這個概念的歷史，參看 Wheeler (1968a) 的文獻36］。蛀孔或把手把同一空間的兩個非常不同的區域聯繫在一起。觀測者以低的分辨率觀察時，蛀孔口之一看來像是一個電荷的所在地。在三維空間的這個區域之外，他發現力線出現在整個 4π 立體角之中。他可以圍繞着該電荷構造一邊界，以確定通過此邊界的流量（這是對 Gauss 定理的不正確應用），並可「證明」在「邊界內」有電荷。這不是一個邊界。比方說，被捕於其中的某人，可進入蛀孔口之內，穿過咽喉，從另一口爬出，並經外圍空間回到原處，他可從外部觀察他的「監獄」。力線處處無終端。Maxwell 方程處處可用。無法用手指着某處說「這裏有電荷」。經典型的電荷與量子化的電荷之間沒有任何直接的關係。可以自由選擇通過蛀孔的流量，並規定一電荷與另一電荷之間的聯繫，這與基本粒子物理學的電荷毫不相干。爲了形象具體，上圖中空間的維數已從三維減到二維。在紙面外量度的第三維沒有物理意義——它只是提供額外的一維，其中可嵌入表面以更方便於圖形表示。［更多的細節可參看 Misner 和 Wheeler (1957)，重印於 Wheeler (1962)］。

，或兩者兼而有之。沒有人曾發現一種描述電的方法不具有這些令人不快的特性，除非指出空間幾何的量子起伏在小距離上非常巨大，甚至拓撲起伏了，造成了「蛀孔」，並且俘獲了力線。這些起伏不能看作與粒子相聯繫，也未被賦予和粒子物理相聯繫的距離尺度（$\sim 10^{-13}$ 厘米），而應看作瀰漫於全部空間（「幾何的泡沫狀結構」），並以 Planck 距離（$\sim 10^{-33}$ 厘米）爲特徵。這樣，第三類引力坍縮迫使人們注意它，這種坍縮在空間處處頻繁的進行並消除：確實，這就導致在恒星水平和宇宙水平上引力坍縮的結果（框44.2）。

框 44.2　引力坍縮的三種水平

1. 宇宙
2. 黑洞
3. 在 Planck 距離尺度上的起伏

宇宙的重新收縮和坍縮是「大爆炸」的一種鏡像，對此人們已有許多證據。

在兩個不同的水平上，物質坍縮形成黑洞是很自然的：(a) 單個恒星致密白矮星核的坍縮（當核超過臨界質量 $\sim 1M_\odot$ 或 $2M_\odot$ 時，中子星不可能是坍縮的穩定終點）和 (b) 星系中恒星逐個合併構成質量達到 $10^6 M_\odot$ 或甚至 $10^9 M_\odot$ 的黑洞。

在每一種情形，關於物質落入黑洞的原理，其最有趣的特徵莫過於觀測者所具有的選擇權（以插圖中分叉的箭頭示意）。他可以和落入的物質一起行進，在這種情形他會看到坍縮的最後階段，但是只有以他自身的滅亡爲代價。或者，他可以安全地停留在外面，在這種情形，即使經過無限長的時間，他也只能看到坍縮的開始階段，即落入的物質越來越慢地爬向水平線。

在閉合模型宇宙坍縮的最後階段，所有現存的黑洞都被捕獲並被驅趕到一起，逐個合併。誰也沒有辦法從外面安全地觀察這一事件；人們不可避免地被捕入其中。

在幾何的量子起伏中以及據信在空間的拓撲中，Planck 距離尺度的坍縮處處時時都在發生。在這個意義下，坍縮是在連續地進行和消除，模仿着宇宙本身坍縮的消除，概括地說，就是「宇宙的再加工」（參看正文）。

§ 44.3 眞空起伏，它的普遍性和最後的統治地位

如果說 Einstein 理論有助於闡明物理學的其他部分，那麼物理學的其他部分也有助於闡明幾何動力學。最中心的要點是，空的空間並非空無所有。這裏是最激烈的物理學的活動中心。電磁場起伏着（第43章）。實際上，正負電子的虛偶不斷地產生和湮滅，μ介子對，重子對和其他粒子對也是如此。所有這些起伏與幾何和空間拓撲中的量子起伏共存。它們是附加在幾何動力學零點擾動之上的某種東西呢，還是從某種現在還不大了解的意義上說，只是這些零點擾動的表現呢？

物質是由幾何構成的嗎？

把問題換一種提法。回憶 Clifford 受 Riemann 的鼓舞於1870年2月21日在劍橋哲學學會所作的「關於物質的空間理論」的演講 [Clifford (1879)，第 244 頁和第 322 頁；以及 (1882)，第21頁]，他說：「我認爲，事實上(1)空間的微小部分實際上類似於平直表面（平均而言）上的小山；即通常的幾何定律在其中不成立。(2)這種空間被彎曲或畸變的性質，仿效波動，不斷地從空間的一部分傳遞到另一部分。(3)空間曲率的這種變化是在我們稱之爲物質（有重量的或輕不可測的）運動的現象中實際發生的。(4)在物理世界中，除了（可能）遵循連續性原理的這種變化外，什麼其他事也沒有發生。」如果問粒子由幾何構成的說法是否有意義。或者，用現代的語言把問題重新表爲：「粒子是幾何動力學的激子嗎？」在構造粒子時除了幾何本身還有什麼呢？並且除了量子原理外，還有什麼能給予這種客體以分立性呢？

眞空物理學的豐富內容

Clifford-Einstein 的物質空間理論近年來並未被遺忘。本書作者之一在十年前 [Wheeler 1962)] 寫道：「總而言之，Riemann, Clifford 和 Einstein 關於物理學純幾何基礎的遠見卓識，今天已經發展到了更高的階段，並且比以前更富有希望，也提出了更深刻的問題。作用量子賦與幾何動力學以新的特徵，其中最引人注目的是，存在着遍布全空間的蛀孔型起伏。如果說從量子電動力學得知虛泡沫結構與物理眞空之間有什麼對應關係的話，那麼看來不可逃避地要認爲這種蛀孔就是「裸電子」。根據一切可資利用的證據，「裸電子」與電子和實驗物理學的其他粒子是完全不同的。對於這些粒子來說，幾何動力學的圖畫暗示，虛泡沫眞空中的集體擾動模型類似於固體中不同類型的聲子或激子。

「從核密度～10^{14}克/厘米^3 到眞空中場起伏能量密度～10^{94}克/厘米^3 的巨大倍數，證明了在表徵眞空的局域劇烈條件中，基本粒子所代表的是比例幾乎完全可以忽略的變化。「一個粒子（10^{14}克/厘米^3）對於眞空（10^{94}克/厘米^3）

的物理來說是微不足道的，正如一片雲（10^{-6} 克/厘米^3）對於天空（10^{-3} 克/厘米^3）的物理學那樣］。換言之，基本粒子並不能構成描述自然界的實際上的基本起點。相反，它們代表的是對眞空物理學的一階修正。眞空是事情的零階狀態，它具有巨大密度的虛光子，虛正負對和虛蛀孔，必須對眞空有適當的描繪之後，才能使適當的微擾理論分析有一個基本的起點。」

「關於眞空能量密度的這些結論，它的複雜的拓撲性質，以及在眞空中進行的豐富多彩的物理過程，與量子電動力學對於眞空的論述並無明顯的矛盾。相反，由「小距離」分析（10^{-33} 厘米）——實際上還很膚淺——和由「較大距離」分析（10^{-11} 厘米）所得出的結論，看來［可能］兩者以最自然的方式彼此支持。

「按照實際情況來說，幾何動力模型的最明顯缺點在於，一般來說對於自旋爲$\frac{1}{2}$，特殊地說對於中微子，它未能提供任何完全自然的位置。」

在 Einstein 的標準幾何動力學中，爲自旋$\frac{1}{2}$尋找自然位置的企圖（框44.3）遭到了失敗，這是因爲在經典微分幾何的範圍內，連通性的變化沒有自然的途徑。

經歷裂變的鈾核開始時具有一種拓撲，然而在結束時具有另一種拓撲。儘管如此，經典微分幾何還是以完全連續的方式完成這種過渡。

在幾何動力學中沒有拓撲改變的位置，因此轉向「前幾何」

通常認爲有兩類律師。一類律師告訴委託人不能作什麼。另一類律師聽取委託人想作什麼，並告訴他應怎樣去作。委託人從第一類律師即經典微分幾何處失望而去，仍然在尋求描述空間連通性中量子起伏的自然方式。只有在這種方式中他才有希望把電荷描述爲捕集在空間拓撲中的電力線。也只有以這種方式，他才能理解和分析引力坍縮的最後狀態。沉思着他的問題，他來到了門上寫着「前幾何」名字的第二位律師的辦公室。他滿懷希望的敲門進入。前幾何是什麼？它將說什麼呢？源於希望和需要的結合，源於哲學、物理學、數學和邏輯學的結合，前幾何講述的故事在撰寫本書時尚未結束，但迄今爲止已經充滿了演化的偶然事件。

§44.4　有魔力的建築材料不是幾何而是前幾何

一個早期的評述（框44.4）問道，能否借助於量子原理，從本身不具有任何特定維的更基本成分構造幾何。

在1964年的討論中，注意的焦點是「沒有維的維」。但是，思考前幾何的

（接第1206頁）

框 44.3 在 Einstein 標準幾何動力學中試圖爲自旋 $\frac{1}{2}$ 尋找自然位置的困難

「自旋 $\frac{1}{2}$ 無適當位置的任何基本粒子描述都是不能接受的 [Wheeler (1962)]。那麼，任何純幾何描述一般說來爲自旋 $\frac{1}{2}$ 的解釋提供了什麼呢？更特殊也更重要的是，在量子幾何動力學中，中微子——這是具有半整數自旋的唯一實體，其本身是純粹的場，具有零靜止質量並以光速運動——的位置在哪裏呢？今天，對於這個問題，還沒有清楚或令人滿意的答案。直到答案即將到來之前，必須斷定純幾何動力學作為基本粒子物理學的基礎是有所欠缺的。」

此後的出版物 [Wheeler (1968a)] 再次提出這個問題，並注意到「量子幾何動力學的分析展現了一個新的世界。中心的新概念是，空間在一個泡沫狀結構與另一個泡沫狀結構之間共振。對於在亞微觀距離上空間的這種多連通性，沒有自然的單一特徵比電荷表現得更有力。然而，至少與電荷同樣給人深刻印象的是遍佈於整個基本粒子世界的自旋 $\frac{1}{2}$。」

在重複了上面的陳述，即「自旋 $\frac{1}{2}$ 無適當位置的任何基本粒子描述都是不能接受的」之後，論文對此討論附加了一個新的注：「幸而，並非不重要的是，經過 John Milnor 的工作把自旋流形的概念歸結爲光 [參看Lichnerowicz (1961 a,b,c) 和 (1964); Milnor (1962), (1963) 和 (1965 a, b); Hsiang 和 Anderson (1965); Anderson, Brown 和 Peterson (1966a,b)；以及 Penrose(1968a)]。這個概念暗示了在量子幾何動力學的共振微拓撲內對旋量場新的有趣的解釋，即作為非經典的二值性 [Pauli 對自旋的標準術語；參看，例如，Pauli(1947)] 附加在概率振幅上，否則等同的三維幾何會具有不同的『自旋結構』。」。更明確地說：「對於閉合的可定向的物理學三維流形，當給定它的拓撲，它的微分結構，以及它的度規時，完全無法把它分類。必須說明它所具有的自旋結構是什麼。」［在具有三維球拓撲的三維幾何上，可以放下三重軸的連續場（三重軸由三個正交歸一的矢量組成）。任何其他三重軸的連續場，可以通過連續有次序的微小重新修正變形到第一個場。我們說，該三維球只容納一種「自旋結構」，這是一個可能引起誤解的標準名詞，正如曾稱爲「三重軸結構」那樣。反之，具有 n 把手或蛀孔的三維球可容納 2^n「自旋結構」(三重軸的連續場)，它們彼此在任何連續有次序的微小重新修正下是不等價的，並且可以用任何方便的方式通過 n「字碼」w_1, w_2,..., w_k,...w_n 互相區分。］在量子幾何動力學中，很自然的期望「字碼爲 $w_k=+1$ 的三維幾何和字碼爲 $w_k=-1$ 的另一等同的三維幾何有各自的概率振幅。這種情況是否意味着，量子幾何動力學爲描述一般的自旋 $\frac{1}{2}$ 的場以及特殊的中微子場提供了所需的全部方法？……這是在 Einstein 廣義相對論和 Planck 量子原理範圍內曾經出現的唯一方式。這是正確的途徑嗎？在人們的『每件東西都作爲幾何』的評述中，比此處更明確的爲任何問題取名是困難的。」

爲什麼不詳細說明這些概念，把它們付諸實踐，並把它們與已知的自旋 $\frac{1}{2}$ 場的行爲作比較呢？在這個企圖中有一個重要的困難。基於物理學的理由假設並要求，三維幾何的拓撲應自由地從一種連通性變到另一種連通性。而與之相反，實際上，經典的微分幾何却指出，「一旦是某種拓撲，就永遠是該拓撲。」嘗試一下這樣的問題，「當一種新的操作 (handle—或譯爲『把手』) 發現了，字碼數就增加了壹，在超空間中把原始

拓撲的三維幾何的概率振幅 ϕ 與新拓撲的兩個自旋結構的概率振幅 ϕ_+ 和 ϕ_- 連接起來的，是什麼邊條件？」經典微分幾何不僅無助於回答這個問題；它甚至禁止作此提問。換言之，想要以自然的數學方式去描述所需的拓撲變化，這種企圖是不能「上路」的。所以，此時此地應當放棄三維幾何是「宇宙的有魔力的建築材料」這個觀念。反之，把完全不具有任何凍結拓撲的前幾何（見正文）看作也不具有任何維的性質。

框 44.4　「一桶灰塵」——把前幾何概念寫成公式的早期嘗試［Wheeler (1964a)］

「爲了導致四維——或者任何維——從更原始的考慮出發曾經設想過什麼思維路線呢？在原子情形，通過分析系統的量子動力學導出了鈉D線的黃色，而系統的每部分都不具有絲毫類似於顏色的任何東西。類似地，四維空時也難於從維的概念開始作任何推導。」

「回想Borel集的概念。不嚴格地說，Borel集是點的集合（「灰塵桶」），它還未曾集合成任何特定維的流形……回想量子原理的普遍適用性，可以設想，Borel 集中的點被集合成具有這樣那樣或另外維性質的一些點的概率振幅……當這些點按五維排列在一起時，與同樣這些點排列成二維圖案相比，必須對給定數目的點强加上更多的條件——說到誰是誰的最近鄰。因而，可以設想，每一維應比下一個更高的維具有高得多的統計權重。另一方面，對於一維、二維和三維的流形，可以設想，對於給出感興趣的任何東西而言，幾何是太初步了。因而，適用於如此低維流形的Einstein 場方程要求平直的空間；僅當高達四維時才出現眞正感興趣的可能性。因此，能否認爲四維既高到足以給出任何眞實物理學又同時低到足以具有很大統計權重的唯一的維數呢？

「可以誇張地設想，在以任何程度的好想法探索這些概念的領域內，已經犯了足夠多的錯誤。」

考慮幾何的把手。讓它在它到某點長度的中途變薄。換言之，讓把手分解爲兩個彎曲的在某點接觸的叉。讓這些叉分離並縮短。在這個過程中，一度爲近鄰的兩點分開了。「然而，在經典理論中的突然變化，在量子理論中則是概率振幅函數，它在經典禁區內衰減掉了。換言之，在表面上離得很遠的點之間有某種殘存的聯繫（從叉的一個『尖端』向下，經過這些叉所依附的較大的空間，然後沿另一叉上升到另一尖端）。但是，碰巧討論到的這兩點，從原則上說並無任何與衆不同之處。因而，任一點和任何另一點之間看來必定存在着聯繫……，在這些條件下，最近鄰的概念看來不再有意義了。因而，借助於人們以另外的方式可以嘗試［不］含糊地談論維，工具消失了。」

主要壓力過去是現在仍然是自然界的二大特徵：這就是基本粒子物理學每一部分都强烈談到的自旋 $\frac{1}{2}$ 和電荷。

Sakharov ：引力是「空間的度規彈性」

對前幾何的新鮮看法來自廣義相對論的新鮮評述。「幾何動力學既不像它看起來那麼重要，也不像它看起來那麼單純。不要把它作爲尋求根本單純性的出發點。對基本粒子物理要看得更深刻一點。」這就是 Sakharov [*the* Sakharov] (1967) 提出的有趣新考慮的概要，在框17.2中的「把引力視爲空間的度規彈性」標題下作了概述。簡言之，在 Sakharov 看來，引力之與基本粒子物理學，正如彈性之與原子物理學一樣。彈性形變的能量是通過形變置於原子與原子之間的鍵中的能量，別無其他。使空間彎曲的能量，按照 Sakharov 的觀點，是由該曲率所引起的場和粒子的眞空能量的擾動，別無其他。形變所需要的能量在一個情況下，由兩個彈性常數決定，在另一個情況下由一個彈性常數 (Newton 引力常數) 決定，但是，他推想，在此兩情況下，常數都取決於大量複雜個別效應的組合，而並非取決於在空石板上勇猛清脆的一擊。

空間的層化

今天，由於人們知道眞空的物理內容是多麼豐富 (而這在1915年並不知道)，因此人們更樂於接受 Sakharov 的引力觀點。而在 Einstein 那時候，當時從完美的上帝賜予的 Lorentz 平直空時進入彎曲空時才十年左右。賦予一貫高踞於物理學之上的幾何世界即使一個物理常數也是需要勇氣的。長期以來尋求的眞空是清白無疵的結構，就像從旋轉磨床出來的一片玻璃。隨着正電子的發現[Anderson (1933)]，人們開始認識到，熱量能使「空的」空間解凍而放出一點點生命。每一個新粒子和輻射的發現都增加了對眞空豐富性的認識。碎石路面看起來很光滑，但是推土機只要在路上切開一條溝就能暴露出表面之下的全部複雜結構。

把粒子看作是由空間幾何構成的嗎？把粒子看作是「幾何動力學的激子」嗎？沒有一種模型——看來應遵循 Sakharov 的評述——能不與自然界和諧，除非把原子看作是由彈性構成的。彈性不能解釋原子。原子解釋了彈性。類似地，如果粒子決定了 Einstein 幾何動力學定律中的常數 (Sakharov)，那麼認爲幾何動力學定律能解釋粒子是否並非不合理呢？

與日常的彈性作比較

把幾何與彈性的比較深入一步 (圖44.2)。在混合的固體中，有成百個不同的鍵，它們都對彈性常數作出貢獻；其中有些來自 Van der Waal 力，有些來自離子耦合，有些來自同極鍵合；它們有多種不同的强度；但是它們全都起源於按照量子規律運動的帶正、負電荷的諸質量組成的非常簡單的系統之中。決不能也決不應要求無數鍵的每一種化學和物理的複雜性都與原理的相應複雜性對應。當分析的水平比鍵的强度更深入時，就會進入光的世界，在那裏能

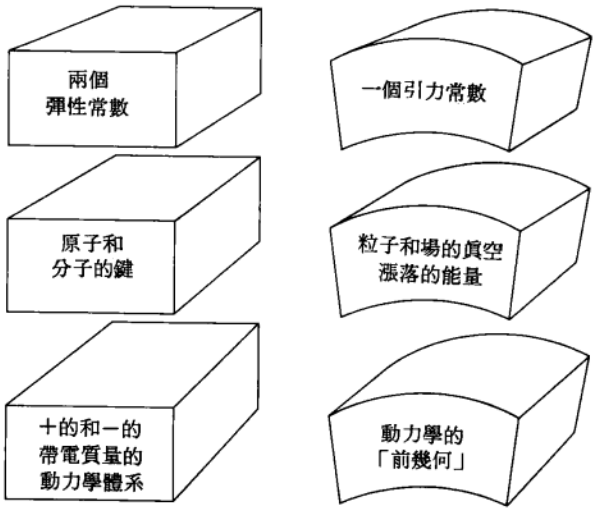


圖 44.2
從三種分析的水平看彈性和幾何動力學。百年來彈性的研究並未揭示分子的存在，而百年來分子化學的研究並未揭示 Schrödinger 方程。圖中是通過向上而不是向下的移動來顯示的。

看到的只是單一性和統一性。

與幾何作比較。眞空因各個場和大量不同粒子的零點活動而生機勃勃，按照 Sakharov 的觀點，它們都對 Newton 常數G即「度規的彈性常數」作出貢獻。某些相互作用來自弱相互作用力，某些來自電磁力，某些來自强相互作用力。這些相互作用的强度極爲不同。但是難道所有這些粒子和相互作用不能起源於某種非常單純的東西嗎？並且，這個某種東西，即「前幾何」，難道不能與幾何極爲不同嗎，就像電子的量子力學與彈性極爲不同那樣？

如果一旦把廣義相對論作爲發現前幾何的嚮導，那麼這種與老的物理王國的比較令人沮喪。誰也不會夢想研究彈性定律會揭示量子力學原理。誰也不會通過研究金屬的加工硬化來學習原子物理學。理解的順序並非

加工硬化(1厘米)→位錯(10^{-4}厘米)→原子(10^{-8}厘米)，

而是恰好相反

原子(10^{-8}厘米)→位錯(10^{-4}厘米)→加工硬化(1厘米)。

必須知道關於原子的事情才能設想位錯，必須知道關於位錯的事情才能理解加工硬化。從「幾何的彈性」理解粒子物理，從粒子物理揭示前幾何，不是同樣毫無希望的嗎？前進的順序不應再次完全相反嗎？任何沮喪的根源難道不是當人們放棄幾何動力學——不僅是幾何動力學，還包括幾何本身——它就像當人們蹣跚前進時倚靠的拐杖——時所感受到的明顯的失去引導嗎？然而，這種自然觀很可能是正確的，必須認眞對待並研究其結果。還從來沒有像今天這樣，人們的確有激情去研究前幾何。

§44.5 作爲命題算法的前幾何

用白紙覆蓋房間的地板，並把它按1平方英呎的方塊劃線隔開。用手，膝爬在地上，在第一個方塊中寫下設想能夠支配宇宙物理學的一組方程。沉思一夜。次日在第二個方塊中寫出較好的一組方程。邀請最受尊敬的同事們在其他方塊中寫。在這些工作結束之後，人們已經在這間屋子作出了自己的努力。站起來，回頭看看所有這些方程，某些方程可能比另一些更有希望，莊嚴地豎起手指下令「飛吧！」這些方程無一會生出翅膀，離開或者起飛。然而宇宙正在「飛翔」。

尋找前幾何的中心原理

某些唯一正確和唯一單純的原理，當人們知道它時，還必須令人折服於它清楚地說明，宇宙是、而且必定是以如此這般的方式構成的，決不可能是別的方式。但是怎樣才能發現這個原理呢？如果說，研究加工硬化和位錯無助於了解原子物理，那麼無論在廣義相對論和粒子物理學作多少工作，也同樣沒有希望了解宇宙的基本運行原理，不管把它稱作前幾何還是什麼其他的名稱。

Thomas Mann (1937) 在他關於 Freud 的文章中說，Niels Bohr 一定會說，他所講的「科學決不能取得進展，除非哲學授權並鼓勵它這樣做」是一個偉大的眞理（「一個偉大的眞理是這樣一種眞理，它的對立物也是一個偉大的眞理」）。如果說等效原理（第16章）和 Mach 原理（§21.9）是廣義相對論的哲學教父，那麼，同樣眞實的是，這些原理的含義是什麼和應當是什麼，也只有通過反復研究 Einstein 理論本身才變得清楚。因此，似乎有理由預期，尋求的前幾何的主要指導應來自一種哲學的强有力的原理，但是它的內容和實質或許並不完全清楚，而有待以後的發展。

在科學世界能夠命名的全部原理中，很難設想還有比單純性更令人傾倒的了；而在動力學和生命和運動的全部單純性中，沒有比在是-非或眞-假中二擇其一更徹底的了 [Wheeler (1969)]。對於支配粒子物理世界的 Pauli 的「非經典二值性」或「自旋」，無法證明這種選擇對於初始的原理是否恰當，但是在選擇中至少能給人們某些安慰。

把前幾何建築在二擇其一原理中的首次嘗試

前幾何的試驗性結構作爲開始；但是，如何繼續前進呢？圖44.3說明怎樣不繼續前進。「縫紉機」構造目標是這一個確定的維還是另一個確定的維，或混合的維，要根據它在是-非二進編碼的輸入磁帶中接收到的指令。根據這種模型，或者根據成打的別的模型中的任一個，在二元素基礎上建造結構的某些困難立刻突出起來了。(1)爲什麼要 $N=10,000$ 個建築單元？爲什麼不是一個不同的N？如果一開始就輸送這樣一個任意數，爲什麼不能「用手」確定更多的特性？既沒有一個自然的停止點是明顯的，也沒有任何原理能確定這樣一個停止點。這種任意性與單純性原理相矛盾，應排除這個模型。(2)量子力學是外加的而不是從內部（從模型自身）產生的。就這一點而言，單純性原理也要反對這個模型。(3)從前幾何到幾何的過程是一種過分字面意義上的方式，在這種方式中對粒子和場的需要沒有作出評價。用 Bohr 在另一場合所用的詞來說，這個模型是「令人着迷的，但還沒有令人着迷到足以認爲它是正確的。」

一幅更合理的圖畫：前幾何是命題的算法

注意到這些困難，以及徒勞地逐個試驗的前幾何模型，看看它們是否與這些困難無關，人們忽然認識到無須發明由是-非或眞-假元素組成的機器。它已經存在了。人們自己問自己，除了命題的算法外，前幾何還能是別的什麼呢？（框44.5）

§44.6　黑盒子：宇宙的再加工

早先的原子坍縮曾揭示出方便的途徑，而大量的探索並未從引力坍縮揭示什麼比早先更加「方便的途徑」。在早年危機時代的物理學家，發現他們正處在面對革命的槍口上，「一無所知——或接受量子原理。」今天的危機則很難推動一場那怕是較小的革命。人們認識到無可選擇，除非說幾何失敗了，前幾何必須代替它把物理學渡送過引力坍縮的最後階段，直到再次發生了什麼事。在此未知的路途上，除了極長期適用的單純性原理外，別無明顯的引導。

黑盒子在物理學中的角色

在重新膨脹開始之前和在動力學恢復正常之前，整個宇宙是否或多或少被壓縮到 Planck 尺度以下，這可能與希望考慮的某些問題並不相干。物理學長期利用「黑盒子」來象徵某些狀況，並以此研究什麼東西進入了，什麼東西離去了，而不管其間發生了什麼。

在電坍縮危機之初，人們設想電子正對着確定的途徑走向吸引中心點，並且不幸地預定在有限時間內達到無限的動能。在量子力學出現後，人們學會了

（接第1213頁）

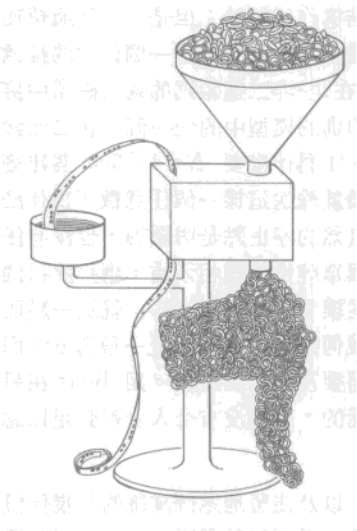


圖 44.3

「一萬個環」；或作爲設想前幾何與幾何之間聯繫方式的例子 ， 由於太着重字面的含義還由於正文所述的其他理由， 可能並不恰當。伊斯蘭國家的大臣［Wheeler 的故事， Kilmister (1971) 曾提及*］說：「取 $N=10{,}000$ 個黃銅環。取一能自動扣拴的裝置，它把環切開，使它圍住另一環， 再轉賣此接合物。 把黃銅環源源注入機器進料的漏斗。取一指令紙條，它的長度足以包括 $N(N-1)/2$ 個二進制數字。 注視此指令紙帶上第 jk 位置的指令 ($j, k=1, 2,..., N; j<k$) 。當在該位置的二進制數字爲 0 時，有一個第 j 個環與第 k 個環拆開的信號 。 當它爲 1 時，有一個把這對特定的環聯接的指令。紙帶穿過機器並按啓動按鈕。機器的卡嗒聲開始了 。 出來的是 10,000 個連接的環鏈，它落在桌上，機器停止了。注入另 10,000 個環，提供新的指令紙帶，再次推按鈕 。 這一次，它不表現爲一維結構，而是一個二維的：Crusader 的鎖子鎧甲外衣 ， 完整的具有敞開的領圈和袖子。再從紙帶庫取另一個紙帶並重複之 。 在桌子上砰地落下一較小的鎧甲衣服，這次內部填滿了實心的環網，這是三維結構 。 現在，放棄紙帶庫，作自己的指令紙帶，一串隨機的 0 和 1 。在它的導引下，扣拴產生「聖誕樹裝飾品」。這是一維鏈 ， 二維面，以及三、四、五和更高維實體部分（有的連在一起，有的自由飄浮着）的集合。現在，對於由 10,000 個環構成的結構，從紙帶確定的決定論結構轉向在概率的全部範圍內定義的概率振幅，一個複數

$$\phi(\text{紙帶})=\phi(n_{12},\ n_{13},\ n_{14},...,\ n_{N-1,N})\ (n_{ij}=0,1)。 \qquad (1)$$

設這些概率振幅不是隨機地指定的 。 相反，對於因某單個環打破了而互相不同的諸結構，用線性公式來同等地處理所有環，使這些概率振幅耦合在一起。不再完全獨立的各個 ϕ ，對於「聖誕節裝飾品」，仍將給出非零的概率振幅 。 比起結構的這些「難控制」部分，更感興趣的是有關光滑部分的下述問題： (1)在哪類結構中， 大量概率集中起來了？(2)在相應的適當原理的限制下， 這些結構的占優勢的維是什麼？(3)在牛經典極限下， 幾何演化的動力學規律應取什麼形式？ 對於前幾何， 沒有一個原理能比單純性原理更清楚的排除這種模型（參看正文）。

---

* Wheeler 關於大臣以及大臣曾逃及超空間的故事， 是1970年 5 月18日在關於拓撲依靠廣義相對論的 Gwatt 討論班上講的。 Kilmister (1971) 發表的文章提到了這個未發表的故事，但實際上並未包含這個故事。

框 44.5　「作爲命題算法的前幾何」

幾乎隨意地從標準邏輯教材中，舉出一實例命題，讀作［Kneebone（1963），第40頁］

$$[X\longrightarrow((X\longrightarrow X)\longrightarrow Y)]\&(\overline{X}\longrightarrow Z)\text{eq}(\overline{X}\vee Y\vee Z)\,\&\,(\overline{X}\vee Y\vee\bar{Z})\,\&\,(X\vee Y\vee Z)\,\&\,(X\vee\overline{Y}\vee Z)。$$

符號具有下述含義：

$\bar{A}$,	非 A；
$A\vee B$,	A或B或兩者（「A *vel* B」）；
$A\,\&\,B$,	A和B；
$A\longrightarrow B$,	A意味着B（「若有A，則有B」）；
$A\longleftrightarrow B$,	B等價於A（「當且僅當有A，則有B」）。

當且僅當 $\mathfrak{A}\longleftrightarrow\mathfrak{B}$ 是同義反復時，命題公式 $\mathfrak{A}$ 等價於（「eq」）命題公式$\mathfrak{B}$。字母 A, B 等等作爲把一個命題與另一個命題「牽連在一起」的聯繫者。照此進行，即可構成無限長的命題。

一個開關電路［參看，例如，Shannon (1938) 或 Hohn (1966)］就是同形的命題。

把一個簡短的命題或初等的開關電路與分子碰撞相比較。看來，沒有比 Daniel Bernoulli (1733) 更荒謬的想法了，即熱是分子碰撞的表現。另外，三體相碰難於處理，四體碰撞更困難，五個或更多個分子的系統實質上是無法處理的。儘管如此，在分子數極大以及在可以採用相空間中密度概念的極限下，力學仍然獲得了新的單純性的要素。在此極限，諸如溫度和熵等概念來自統計力學。當溫度完全確定時，系統的能量並不是一個完全確定的概念；而當能量完全確定時，溫度並非如此。這種互補性必然加入主題的原理之中。把手指伸入火柴的火焰之中，經受的感覺是天國或世間稀有的；然而，不管早年的批評家怎麼說，發生的全部都是分子碰撞的結果。

任何單個的命題，當它很長時，是難於理解的；而更難了解的是命題羣的內容。然而，在命題數很大以及大部分命題很長的極限下，可以作命題算法的統計分析。在此分析中需要引起人們注意的一些參數是(1)多少稍有幾分類似於統計力學中溫度和熵的參數，但(2)更大量的參數，其特徵是普通的動力學參數

，它們再現了日常的物理學的連續性。

初看起來，沒有比這種想法更荒謬的了，即自然界是建立在像命題算法那樣的以太的基礎上的。然而，除了沿着單純性原理指引的方向這樣看之外，還有兩種相反的看法。首先，量子力學的概要以奇妙而自然的方式適於用命題算法語言的公式表述，可以作證的並非不重要的是 Jauch (1968) 的書。如果量子原理未曾按此方式自動地包含在人們提出的前幾何模型中，而是相反，它必須從外面引入，那麼由此可以斷定，這個模型違背了單純性原理，必須拋棄它。其次，看來眞實性的追求常常使人們偏離了眞實性。誰曾設想能把此時此地某些東西的很大一部分，像引力那樣描寫成空時幾何的曲率呢？並且此後當把該幾何認爲是動力學的幾何時，誰曾夢想該幾何動力學所揭露的竟是以太乃是超空間呢？因此，毫不令人驚訝的是，如果自然界的描述把人們帶到邏輯的終端，那麼以太之巢就在數學的中心。如果人們相信全部數學都將化爲邏輯的數學，並且全部物理學都將化爲數學，那麼除了把全部物理學化爲邏輯的數學外，還有什麼選擇呢？邏輯是能夠「自我思索」的唯一數學分支。

「邏輯與物理學毫無關係的論點」是通過許多關於公理「平行線絕不相交」的古老論戰得出的評價。它是否可從 Euclid 幾何的其他公理得出呢，或者它是否獨立呢？ Bolyai 和 Lobachevsky 證明，它是「獨立的」。由此以及由 Gauss 開始的工作，Riemann 接着創造了 Riemann 幾何。他告誡人們，要認識幾何應研究自然界，而不是研究 Euclid; Einstein 接受了這個忠告並使幾何成爲物理學的一部分。

「邏輯與物理學毫無關係的論點」是人們對加在邏輯上的驚人限制的第一個很自然的評價，邏輯是 Gödel (1931), Cohen (1966) 和其他人發現的［有關評述，參看，例如，Kac 和 Ulam (1968)］。如果弄清楚眞實物理世界的眞實前幾何確實等同於命題的算法，那麼人們的評價應剛相反。

「物理學作爲邏輯的表現形式」或「前幾何作爲命題的算法」迄今［Wheeler (1971a)］並不是一個概念，而是當作概念的概念。此處提出它只是使它的含義稍稍清楚一些，以便暗示前進的順序可能並非

物理學——→前幾何

而是

前幾何——→物理學。

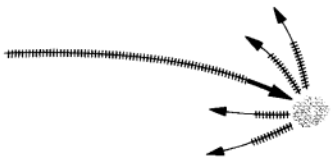


圖 44.4

「黑盒子模型」適用於(1)電子被吸引中心散射，以及(2)宇宙自身的坍縮。經典理論的決定論電子世界線在量子理論中代之以概率振幅，它的波峰的示意說明如圖。經典理論的災變，在量子理論中代之以輸出的概率分布。同一個圖說明了正文中提到的引力坍縮的「黑盒子的重要性」。圖中的場所不再是空時，而是超空間。入射箭頭標記的不再是電子經過空時的經典世界線，而是切過超空間的經典的「幾何史頁」（第43章）。波峰符號不再是經過空時傳播的電子波函數，而是經過超空間傳播的幾何動力學波函數。用交叉線畫成陰影的區域不再是一體勢趨於無窮的區域，而是空間曲率趨於無窮的引力坍縮區域。外傳波描繪的不再是散射電子新路徑的可能方向，而是在坍縮和結束目前循環的「再加工」之後，宇宙自身的可能的新歷史。

概述在「黑盒子」中吸引中心和電子之間的相互作用：發射的一波列電子沿某方向行進，得出在這個、那個，以及其他方向出現的電子，具有這樣、那樣，以及其他的確定的概率振幅（圖44.4）。另外，爲了定量地、正確地預測這些概率振幅，用波動力學的語言翻譯經典理論的 Hamilton 函數並求解得出的波動方程就足夠了，這是「黑盒子」的關鍵。

坍縮結果的概率分布

引力坍縮的類似的「黑盒子」觀點引導人們預測「結果的概率分布」。然而，此處人們應該期望不是通過單一的參量（例如電子的散射角）而是通過許多參量來把一種結果與另一種結果相區別。預期這些參量將決定的量有，系統極大膨脹的大小，從新循環開始到坍縮告終的時間，呈現的粒子數，以及成千個其他特徵。這些結果的「概率」將受動力學定律支配，它們類似於(1)電子的 Schrödinger 波動方程，或引用另一個黑盒子問題，(2)耦合在一起的Maxwell 方程，在波導管接合處，電磁波沿分離的波導管行進。然而，難於合理地預期當把廣義相對論的 Hamilton-Jacobi 方程（第43章）翻譯成 Schrödinger 方程時就立即出現的必須的動力學定律，原因很簡單，無論經典形式和量子形式的幾何動力學都是建立在標準微分幾何基礎上的。標準的幾何，與任何這些量子漲落（它們在微小距離上似乎是不可避免的，因此在引力坍縮的最後階段也是不可避免的）並無聯繫。不是幾何而是前幾何應填滿引力坍縮的黑盒子。

宇宙的「再加工」

人們對黑盒子的內部機制幾無所知，人們從這幅圖畫看不出發生了什麼：宇宙變換了，或嬗變了，或轉變了，或在坍縮的時代從一個歷史循環到另一歷史循環概率地再加工。

然而，看來這幅宇宙再加工的圖畫，是從作爲20世紀物理學兩大中心原理的廣義相對論和量子原理直接地和不可避免地得出的，儘管它是異想天開冥思苦想的結果。怎麼能轉換如此不可思議地巨大的系統的動力學呢，並且是以幻想的概率從已經持續 10^{11} 年的一個循環轉換到另一個將只持續 10^{6} 年的循環？起初，只是下述情形，即在此動力學過程中系統被壓縮到不可思議的微小距離，才使人們聽從否則很難置信的變換。然後，人們才看到山脈斜坡的倒置的地層，或者一隻以前未見到的小鳥，並對整個宇宙的不可思議感到驚異：

物種的變異，
岩石的變形，
化學的轉變，
核的自發變化，
粒子的放射衰變，
宇宙自身的再加工。

如果對地質學的新認識懂得岩石能上升、下降上千米，成百度，那麼，物理學把宇宙看作不時地「壓縮到節孔」，激烈地「再加工」並開始新的動力學循環又意味着什麼呢？迫使人們首先予以注意的三種考慮，可用簡練的措詞預言如下：

在坍縮中所有的運動常數都破壞了；
粒子以及物理學的「常數」，作爲「坍縮氣象學的被凍結的部分」；
「物理學常數的生物學選擇」。

全部守恒定律在宇宙坍縮中被超越了

恒星或恒星集合引力坍縮爲黑洞，除了質量、電荷和角動量外，消除了系統的全部細節（參看第32章和第33章）。無論是由物質或反物質或輻射構成的，無論具有大量熵或幾乎沒有熵，無論是處於光滑的運動或混沌的湍流，根據全部迹象，從外部看來，坍縮系統都以同樣的標準狀而告終。重子數守恒定律和輕子數守恒定律被超越了［第33章；也可參看 Wheeler (1971b)］。極不相同起源黑洞之間的區別是毫無意義的，只要它們都具有同樣的質量、電荷和角動量。但是對於閉宇宙，甚至這些常數都會從舞臺上消失。總電荷自動爲零，因爲力線除了在電荷上無處可成爲終端。對於閉合的宇宙，總質量和總角動量絕對地不具有任何可定義的含義。並非不重要的是，得出這個結論是因爲在

外部不存在漸近地平直的空間，在那裏可以把試驗粒子置入 Kepler 軌道以確定其周期和進動。

在全部物理學的原理中，電荷、輕子數、重子數、質量和角動量的守恒定律是其中最堅固地建立起來的。然而，與引力坍縮一起，這些守恒定律的內涵也坍縮了。已經建立的被廢除了。從宇宙的一個循環到另一循環，人了看不到運動的決定因素能夠繼續保持數值不變。另外，如果粒子的結構是動力學的，並且如果因此粒子質量譜也是動力學起源的，那麼，除了斷定質量譜本身在「宇宙被壓縮到節孔」之時被再加工外，似乎別無選擇。在本頁，分子是來自幾年前一棵樹中光化合成的「化石」。空氣中氧核是來自 10^9 年前一顆恒星中在高得多的溫度下熱核燃燒的化石。粒子除了是來自全部引力坍縮的最激烈事件的化石外，還能是什麼別的嗎？

三種等級的化石：分子、核、粒子

一個地質學的地層具有長達許多英里的斜坡和奇蹟般的線性結構，另一個地層具有另一個斜坡，這既是被每個過路人認爲是每天的陳年舊事，又是一個奇蹟——直到人們了解其機制時。此處的電子與彼處的電子具有相同的質量，這也既是平凡普通的事，又是奇蹟。這在量子電動力學中是平凡普通的，因爲與其說是假設還不如說是導出的。然而，從把宇宙看作不時「再加工」的任何觀點來看，這又是一個奇蹟。如果在宇宙的一個循環和另一個循環之間，粒子的質量譜不同，那麼在宇宙現在的循環中，在不同時間和位置的電子怎麼能具有相同的質量呢？

同種粒子質量相同的理由？

考察一類粒子的內部，並極大地把它放大，從該內部看出關於整個宇宙的一種觀點［與 Leibniz (1714) 的單軸概念比較，「單軸沒有窗能使任何東西進出」］；對於同類的另一個粒子也可以同樣做。在宇宙的任一循環中同樣結構粒子的等同是因爲它們給與同一宇宙以相同結構的觀點嗎？對於同類粒子奇蹟般的等同，還從未提出過可以接受的解釋。這種等同不應認爲是無足輕重的，而應認爲是物理學的核心奧秘。

物理學常數的再加工

看來可以極爲合理地認爲不只是粒子的質量譜，還有物理「常數」本身，都從一個循環到另一個循環被再加工。相對於什麼再加工？例如，相對於唯一的單位制，Planck 單位制

$$L^*=(\hbar G/c^3)^{1/2}=1.6\times10^{-33}\ \text{厘米},$$
$$T^*=(\hbar G/c^5)^{1/2}=5.4\times10^{-44}\ \text{秒},$$
$$M^*=(\hbar c/G)^{1/2}=2.2\times10^{-5}\ \text{克},$$

這唯一的單位制，Planck (1899) 指出，正如黑體輻射本身一樣，對於所有錯綜複雜的固體物理、分子結合、原子組合以及基本粒子結構，都是無關的或自由的，作爲它的背景僅依靠最簡單最普遍的物理學原理，即引力定律和黑體輻射定律。相對於 Planck 單位，在物理學每一其他部門的每一個常數都可表爲一個純數。

在物理學中給人印象最深刻的純數莫過於 $\hbar c/e^2=137.0360$ 以及所謂「大數」[Eddington (1931, 1936, 1946); Dirac (1937, 1938); Jordan (1955, 1959); Dicke (1959b, 1961, 1964b); Hayakawa (1965a,b); Carter (1968b)]:

$$\sim 10^{80} \text{ 粒子，在宇宙中*，}$$

$$\sim 10^{40} \sim \frac{10^{28} \text{ 厘米}}{10^{-12} \text{ 厘米}} \sim \frac{\text{(宇宙極大膨脹的半徑)*}}{\text{(基本粒子的「大小」)}},$$

$$\sim 10^{40} \sim \frac{e^2}{GmM} \sim \frac{\text{(電力)}}{\text{(引力)}},$$

$$\sim 10^{20} \sim \frac{e^2/mc^2}{(\hbar G/c^3)^{1/2}} \sim \frac{\text{(基本粒子的「大小」)}}{\text{(Planck 長度)}},$$

$$\sim 10^{10} \sim \frac{\text{(宇宙中的光子數)}}{\text{(宇宙中的重子數)}}。$$

曾經得出對這些數之間關係的某些理解 [Carter (1968b)]。如果再加工的宇宙同時也再加工了物理學常數的觀點是正確的話，那麼對於它們的巨大數值從來沒有也永遠不會出現任何解釋。根據這個觀點，這些常數並非物理學定律的一部分。它們是初值數據的一部分。對於宇宙膨脹的每一個新的循環，這些數是剛給定的。因而尋求對「大數」的物理解釋，看來就像爲錯誤的問題尋求正確的答案。

在一次風暴和下一次風暴之間的一周之內，氣候的絕大多數特徵都在改變，但是某些特殊形式的風却持續了一周。如果術語「氣象學的凍結的特徵」適用於此，那麼看來它更適用於宇宙一次再加工和另一次再加工之間循環中的大數，物理常數和粒子的質量譜。

物理常數的值與生命的可能性有關

「常數」之一的 $\hbar c/e^2$ 按一個方向變化百分之一左右將會使全部恒星變爲紅色的恒星；根據 Carter (1968b)，按另一方向的可比擬的變化將會使全部恒星變爲藍色的恒星。在並非這兩者的情形，才可能有任何像太陽這樣的恒星。如果確定物理常數的因素與表徵宇宙這一循環的那些因素具有實質性的不同，那麼他懷疑生命還能否發展起來。

Dicke (1961) 指出，觀念的正確順序不應是，此處是宇宙，因此人應該是什麼樣的呢；而應是，此處是人，因此宇宙應該是什麼樣的呢？換言之：(1)

* 基於框27.4「典型宇宙學模型」的數值；在天體物理距離測定的現階段，這些數值要受許多不確定因素的影響，並非不重要的原因是，這些數的範圍甚至足以與開宇宙相容。

在未意識到宇宙時，什麼宇宙是好的呢？但是：(2)意識要求有生命。(3)生命要求存在比氫更重的元素。(4)重元素的產生要求熱核燃燒。(5)在恒星中，熱核燃燒通常需要幾個 10^9 年的烹煮時間。(6)根據廣義相對論，除非宇宙極大膨脹的半徑爲幾個 10^9 光年或更多，否則幾個 10^9 年的時間將不適用和不能適用於閉宇宙。因此，從這個觀點看來，爲什麼宇宙會這樣大呢？因爲只有這樣，人才能在這裏！

簡言之，Carter 和 Dicke 的考慮似乎提出了「物理學常數的生物學選擇」的觀點。然而，「選擇」是不可能的，除非有在其間取捨的可選擇的東西。初次看來，這種可選擇的東西恰恰就是由宇宙引力坍縮僅有的總畫面提出來的，這就是人們今天看到的怎樣提出的問題，即宇宙再加工的前幾何黑盒子模型。

小心謹愼地進入未知的領域，儘管如此，人們必須意識到，在分析的一個給定階段，人們正在到達的結論和正在提出的問題，可能只是走向更深刻的問題和甚至更引人注目的畫面途中的歇脚石。像 Leibniz 那樣，思索宇宙，把宇宙想作各種關係的世界而不是機械裝置的世界，談論「再加工和選擇」可能只是在這種思索的半途之中。宇宙目前的狀況決不是通過較早循環的「再加工」實現的，從某種奇怪的意義上說，宇宙是否通過那些參與者的參與「實現」的呢？按照這個觀點，「循環」的概念甚至看來是完全錯誤的。代替生命行爲的是參與的行爲。「參與者」是量子力學給出的不容置疑的新概念；它打倒了經典理論的術語「觀測者」——他安全地站在厚厚的玻璃牆之後，注視着發生了什麼，而不參與。量子力學說，不可能這樣做。甚至卑微的電子，在人們能給與它的位置或它的動量以不管怎樣的任何含義之前，人們也必須參與進去。巨大冰山的微小尖頂就是這樣堅固地建立起來的嗎？宇宙也是從「參與」得到它的含義嗎？在我們能再次大大前進之前，我們是否注定要回到 Leibniz 的偉大概念「預先制定和諧」（「Leibniz 邏輯循環」）呢？

黑洞作爲宇宙坍縮的「實驗室」模型

引力物理的研究，從中子星到宇宙論，從後 Newton 天體力學到引力波，展現了廣闊的前景。Einsteinn 的幾何動力學使它自身面臨着在成打的前沿陣地上被成千個預言毀滅的危險。在早年受到檢驗的預言中，沒有比關於黑洞形成和性質的預言更令人神往的了，黑洞是對宇宙本身提出的一些預言的「實驗室模型」。沒有比引力坍縮更富有前途的領域了。與那些出於坍縮的佯謬，這個物理學最大危機的思考相比，沒有比被迫嚴肅地考慮人和宇宙的關係更革命的觀念了。

> 全部的這些努力都基於這樣的信念，即存在的應具有完全和諧的結構。今天，讓我們被迫離開這個奇妙信念的根據比以往更少了。
>
> Einstein (1934)

一度只是想像，
現在證實了。　William Blake

當我們認識到
宇宙是多麼的神奇時，
我們就開始懂得
宇宙是多麼的單純。
　　無名氏

誰能以統一的觀點理解宇宙，
那麼，對他來說，
全部創世過程將表現為唯一的真理和必然。
　　J. D'ALEMBERT

啊，真熱……太陽不是
我們可以居住的地方，
但是，如果沒有它發出的光，
地球上就不會有生命。
　　H. Zaret

或許可能，我的黑母鷄，
她在相對的某時下了蛋。
但她在確定的此刻却下不了蛋，
因為她無從設想怎樣下蛋。
　　F. Winsor
　　取自 A Space Child's Mother Goose
　　©1956, 1957, 1958 Frederick Winsor
　　和 Marian Parry，
　　承 Simon 和 Schuster 惠允。

（Georges Brassens 的一首歌曲「我在約定地點遇見了你」）

偶極輻射
我們知道它不是為我們的，這是 Maxwell 做過
它是為 Maxwell 的，對，這是 Maxwell 做過的事
歸根到底，一切都是相對的

人們夢想一個論據
Synge 說出了這一切
我們期望着四極矩
歸根到底，一切都是相對的

類星體源
在黑洞中不見了
對，這是 Schwarzschild 做過的事
歸根到底，一切都是相對的

人們非常喜歡
奇異的解
到處是有規律的度規
歸根到底，一切都是相對的

核物理學家
他們不喜歡我們
他們看守着各自的寶藏，但却受到寶藏的輕蔑
歸根到底，一切都是相對的

Weber 的實驗
迴轉僅有價值
但想法沒有價值
歸根到底，一切都是相對的
　　M. A. Tonnelat
　　承 M. A. Tonnelat 先生惠允轉載

從一無所有創造一切，這就夠了！
Gottfried Wilhelm von Leibniz

（聽了名曲「在我的金髮女郎身邊」）
在 d'Asnières 花園裏
科學又開花結果了
世界上所有的學者
都帶來了他們的著作

副歌：
在河邊
天氣多麼好，多麼好
在河邊
像夢幻一樣美好

世界上所有的學者
都帶來了他們的著作
無能量張量的
萬有引力定律

無能量張量的
萬有引力定律
宇宙學的
極好模型

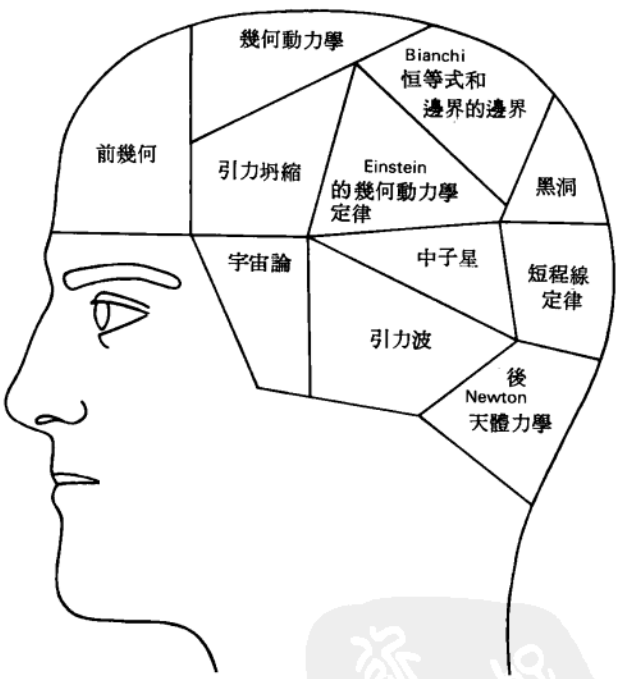
宇宙學的
極好模型
對我來說，並不十分必要
因為我已經有一個好的了

對我來說，並不十分必要
因為我已經有一個好的了
它就在我的腦海中
這是我的手稿

在場中留下我的筆跡
從時空的凸起處
拿一些東西
來描繪運動
C. Cattaneo, J. Géhéniau, M. Mavrides，
和 M. A. Tonnelat　承作者惠允轉載

當 Arthur Evans 開始這一發掘時，
他和任何人都不知道，
會揭示出一個未知的知界。
PAT [Mrs. Hypatia Vourloumis
在 Knossos (1971)]

隨著想像的軀體向前飛馳，
在詩人的筆下，
未知的事物的形式變得成形了，
空空如也之處也有了住處和名稱。
Shakespeare



我們的耐心的讀者，謝謝，再見。

Charles W. Misner　Kip S. Thorne　Jean A. Wheeler

PDG

文獻目錄和人名索引

本文獻目錄，像 Synge (1960) 的一樣，只提供列入本書的文獻條目，作爲綜合的編目它是太廣泛了。關於本書某些部分更廣泛的文獻目錄，可參看，例如，Lecat (1924), Boni, Russ 和 Laurence (1960), Chick (1960, 1964)，以及 Combridge (1965) 。有時，引用的文獻並非最早發表的，而是較後的和比較容易得到的。爲了易於參閱，把會議和暑期班文集列在編者姓名和比較著名的地名 (Brandeis, Les Houches, Varenna，等等) 兩者之下。正文中提到的沒有直接參考文獻的人，也編入索引。美國的絕大多數博士論文可從大學縮微膠卷公司 (University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Mich. 48106) 得到。感謝 Gregory Cherlin 爲本文獻目錄準備了初稿，感謝 Nigel Coote 隨後所作的許多修正，感謝同事們，沒有他們的幫助，某些最容易忘記的和最重要的參考文獻將會在搜尋中遺漏。

Adler, R., M. Bazin, and M. Schiffer, 1965, *Introduction to General Relativity,* McGraw-Hill, New York. [endpapers]

Aharonov, Y., and L. Susskind, 1967, "Observability of the sign change of spinors under 2π rotations," *Phys. Rev. 158,* 1237–1238. [§41.5]

Ahrens, L. H., F. Press, and S. K. Runcorn, eds., 1964, *Physics and Chemistry of the Earth,* Pergamon Press, London. *Cited under* Bolt 1964.

al Bīrūnī, Abū Raihān, *cited by name in* Box 27.7.

Aldrin, E. E., Jr., *cited by name in* Fig. 40.4.

Alfvén, H., 1971, "Plasma physics applied to cosmology," *Phys. Today 24* (Feb. 1971), 28–33. [§§27.10, 27.11, 28.4]

Alfvén, H., and O. Klein, 1962, "Matter-antimatter annihilation and cosmology," *Ark. Fys. 23,* 187–194. [§§27.10, 27.11, 28.4, Box 27.7]

al Khazini, 1115, *Book of the Balance of Wisdom,* partially edited and translated by N. Khanikoff in *J. Am. Oriental Soc. 6* (1860), 25–38. [§1.7]

Allen, C. W., 1963, *Astrophysical Quantities,* University of London, Athlone Press, London. [§36.6, Box 25.1, endpapers]

Allendoerfer, C., and A. Weil, 1943, "The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra," *Trans. Am. Math. Soc. 53,* 101–129. [Box 15.3]

Alley, C. O., *cited by name in* Fig. 40.4. *See also* Bender *et al.* 1971.

Alpher, R. A., *cited by name in* Box 27.7.

Alpher, R. A., and R. C. Herman 1948a, "Evolution of the universe," *Nature 162,* 774–775. [§28.1]

Alpher, R. A., and R. C. Herman, 1948b, "On the relative abundance of the elements," *Phys. Rev. 74,* 1737–1742. [§28.1]

Alpher, R. A., and R. C. Herman, 1950, "Theory of the origin and relative-abundance distribution of the elements," *Rev. Mod. Phys. 22,* 153–213. [§28.1]

American Ephemeris and Nautical Almanac for 1964, 1962, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. [Fig. 25.1]

Ames, W. L., and K. S. Thorne, 1968, "The optical appearance of a star that is collapsing through its gravitational radius," *Astrophys. J. 151,* 659–670. [§32.3]

Anderson, C. D., 1933, "The positive electron," *Phys. Rev. 43,* 491–494. [§44.4]

Anderson, D. W., E. H. Brown, Jr., and F. P. Peterson, 1966a, "Spin cobordism," *Bull. Am. Math. Soc. 72,* 256–260. [Box 44.3]

Anderson, D. W., E. H. Brown, Jr., and F. P. Peterson, 1966b, "SU-cobordism, KO-characteristic numbers, and the Kervaire invariant," *Ann. Math. 83,* 54. [Box 44.3]

Anderson, J. D., 1973, "Lectures on physical and technical problems posed by precision radio tracking," in Bertotti 1973. [§40.1]

Anderson, J. D., P. B. Esposito, W. L. Martin, and D. O. Muhleman, 1971, "Measurements of the general relativistic time delay with data from Mariners 6 and 7," in Davies 1971, pp. 111–135. [Box 40.2]

Anderson, J. L., 1967, *Principles of Relativity Physics,* Academic Press, New York. [§17.6, endpapers]

Anderson, J. L., 1970, "Relativistic Boltzmann theory and the Grad method of moments," in Carmeli, Fickler, and Witten 1970, pp. 109–124. [Ex. 22.7]

Anonymous, source of quotation at end of Chapter 44: found on beach at Rincon, Puerto Rico, March 21, 1973.

Aristotle, *ca.* 330 B.C., *Physics,* ed. by W. D. Ross, Clarendon Press, Oxford (1950). [Box 1.2] *See also* Guthrie 1939, Warrington 1956.

Armstrong, N. A., *cited by name in* Fig. 40.4.

Arnett, W. D., 1966, "Gravitational collapse and weak interactions," *Can. J. Phys. 44,* 2553–2594. [§32.7]

Arnett, W. D., 1967, "Mass dependence in gravitational collapse of stellar cores," *Can. J. Phys. 45,* 1621–1641. [§32.7]

Arnold, V. I., and A. Avez, 1968, *Ergodic Problems of Classical Mechanics,* W. A. Benjamin, New York. [§8.2]

Arnowitt, R., *cited by name in* §§21.1, 35.8, Box 17.2.

Arnowitt, R., S. Deser, and C. W. Misner, 1962, "The dynamics of general relativity," in Witten 1962, pp. 227–265. [§§21.1, 21.4, 21.5, 21.6, 21.7, 21.8, 35.4]

Arp, H., 1971, "Observational paradoxes in extragalactic astronomy," *Science 174,* 1189–1200. [Box 28.1]

Ash, M. E. *See* Shapiro, Ash, *et. al.* 1971, Shapiro, Smith, *et. al.* 1971, Shapiro *et. al.* 1972.

Auslander, L., and R. E. MacKenzie, 1963, *Introduction to Differentiable Manifolds,* McGraw-Hill, New York. [Box 8.1]

Auslander, L., and L. Markus, 1959, *Flat Lorentz 3-Manifolds,* American Mathematical Society, Providence, R.I. [Box 27.2]

Avez, A., 1960, "Propriétés globales des espace-temps périodiques clos," *Acad. des Sci., Paris, Comptes Rend. 250,* 3583–3587. [§44.1]

Avez, A., 1964, "Le ds^2 de Schwarzschild parmi les ds^2 stationnaires," *Ann. Inst. Henri Poincaré A1,* 291–300. [§23.1]

Avez, A. *See also* Arnold and Avez 1968.

Avicenna, *cited by name in* Box 27.7.

Baade, W., 1942, "The Crab Nebula," *Astrophys. J. 96,* 188–198. [Box 24.1]

Baade, W., 1952, Report to Commission 28 of I.A.U., Rome, September 1952. [Box 27.1]

Baade, W., 1956. "The period-luminosity relation of the cepheids," *Pub. Astron. Soc. Pacific, 28,* 5–16. [Box 27.1]

Baade, W., *cited by name in* Box 27.7.

Baade, W., and F. Zwicky, 1934a, "Cosmic rays from supernovae," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 20,* 259–263. [Box 24.1]

Baade, W., and F. Zwicky, 1934b. "On supernovae," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 20,* 254–259. [Box 24.1]

Baade, W., and F. Zwicky, 1934c. "Supernovae and cosmic rays," *Phys. Rev. 45,* 138. Abstract of paper presented at Stanford meeting of Amer. Phys. Soc., Dec. 15–16, 1933. [Box 24.1]

Bacon, R., 1268, *Opus Majus,* J. H. Bridges, ed., Clarendon Press, Oxford, Eng. Vols. 1 and 2, 1897; vol. 3, 1900. [Box 27.7]

Bahcall, J. N., W. L. W. Sargent, and M. Schmidt, 1967, "An analysis of the absorption spectrum of 3C191," *Astrophys. J. 149,* 11–15. [§38.6]

Bahcall, J. N., and M. Schmidt, 1967, "Does the fine-structure constant vary with cosmic time?" *Phys. Rev. Lett. 19,* 1294–1295. [§38.6]

Baierlein, R. F., 1967, "Testing general relativity with laser ranging to the moon," *Phys. Rev. 162,* 1275–1288. [§40.6]

Baierlein, R. F., *cited by name in* §21.1. *See also* Krogh and Baierlein 1968.

Baierlein, R. F., D. H. Sharp, and J. A. Wheeler, 1962, "Three-dimensional geometry as carrier of information about time," *Phys. Rev. 126,* 1864–1865. [§§21.9, 43.2]

Bailey, J. *See* Farley *et al.* 1966.

Bailey, J., W. Bartl, G. von Bochmann, R. C. A. Brown, F. J. M. Farley, H. Jostlein, E. Picasso, and R. W. Williams, 1968, "Precision measurement of the anomalous magnetic moment of the muon," *Phys. Lett. 28B,* 287–289. [§44.2]

Bardeen, J. M., 1968, "General relativistic collapse of charged dust (abstract)," *Bull. Am. Phys. Soc. 13,* 41. [§34.6, Fig. 34.4]

Bardeen, J. M., 1970a, "Kerr metric black holes," *Nature 226,* 64–65. [§33.8, Boxes 33.3, 33.5]

Bardeen, J. M., 1970b, "A variational principle for rotating stars in general relativity," *Astrophys. J. 162,* 71–95. [Ex. 33.3]

Bardeen, J. M. *See also* Press and Bardeen 1971.

Bardeen, J. M., B. Carter, and S. W. Hawking, 1973, "The four laws of black-hole mechanics," *Commun. Math. Phys.,* in press. [Box 33.4]

Bardeen, J. M., and W. H. Press, 1972, "Radiation fields in the Schwarzschild background," *J. Math. Phys. 14,* 7–19. [§35.14, Ex. 32.11]

Bardeen, J. M., W. H. Press, and S. A. Teukolsky, 1972, "Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation," *Astrophys. J. 178,* 347–369. [§33.7, Ex. 33.3, 33.14]

Bardeen, J. M., K. S. Thorne, and D. W. Meltzer, 1966, "A catalogue of methods for studying the normal modes of radial pulsation of general-relativistic stellar models," *Astrophys. J. 145,* 505–513. [Box 26.1]

Bardeen, J. M., and R. V. Wagoner, 1971, "Relativistic disks, I: Uniform rotation," *Astrophys. J. 167,* 359–423. [Box 24.1]

Barger, R. L. *See* Evenson *et. al.* 1972.

Bargmann, V., and E. P. Wigner, 1948, "Group theoretical discussion of relativistic wave equations," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 34,* 211–222. [Box 32.2]

Barnes, J. A., 1971, "A non-mathematical discussion of some basic concepts of precise time measurement," in *Tracor on Frequency 2,* No. 2 (Tracor Industrial Instruments, Austin, Texas). [Box 1.4]

Barschall, H. H. and W. Haeberli, 1971. "The Madison convention," pp. xxv–xxix in *Polarization Phenomena in Nuclear Reactions,* Univ. of Wisconsin Press, Madison. [§37.7]

Bartl, W. *See* Bailey *et al.* 1968.

Barton, D., S. R. Bourne, and J. P. Fitch, 1970, "An algebra system," *Comput. J. 13,* 32–39. [Box 14.3]

Barton, D., and J. P. Fitch, 1971, "General relativity and the application of algebraic manipulative systems," *Comm. Assoc. Comput. Machinery 14,* 542–547. [Box 14.3]

Battelle Rencontres, Seattle 1967. *See* DeWitt and Wheeler 1968.

Baym, G., 1969, *Lectures on Quantum Mechanics,* W. A. Benjamin, New York. [Box 22.4]

Baym, G., H. A. Bethe, and C. J. Pethick, 1971, "Neutron star matter," *Nuclear Phys A. 175,* 225–271. [§24.2]

Bazin, M. *See* Adler, Bazin, and Schiffer 1965.

Beall, E. F., 1970, "Measuring the gravitational interaction of elementary particles," *Phys. Rev. D 1,* 961–978. [§1.3, Box 1.2]

Beams, J. W., 1971, "Finding a better value for G," *Phys. Today 24* (May 1971), 35–40. [§40.8]

Beams, J. W. *See also* Rose *et al.* 1969.

Beckedorff, D. L., and C. W. Misner, 1962, unpublished; see D. L. Beckedorff's A. B. Senior Thesis, Princeton University. [§32.4]

Bekenstein, J., 1972a, "Nonexistence of baryon number for static black holes," *Phys. Rev. D 5,* 1239–1246. [Boxes 25.2, 32.2, 33.1]

Bekenstein, J., 1972b, "Nonexistence of baryon number for static black holes, II," *Phys. Rev. D 5,* 2403–2412. [Boxes 25.2, 32.2, 33.1]

Bel, L., 1958, "Sur la radiation gravitationelle," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 247,* 1094–1096. [Ex. 15.2]

Bel, L., 1959, "Introduction d'un tenseur du quatrième ordre," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 248,* 1297–1300. [Ex. 15.2]

Bel, L., 1962, "La radiation gravitationelle," in CNRS 1962, pp. 119–126. [Ex. 15.2]

Belasco, E. P., and H. C. Ohanian, 1969, "Initial conditions in general relativity: Lapse and shift formulation," *J. Math. Phys. 10,* 1503–1507. [§21.9]

Belinfante, F., 1940, "On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum, and the angular momentum of arbitrary fields," *Physica 7,* 449–474. [§21.3]

Belinsky, V. A. *See also* Ryan 1972b.

Belinsky, V. A., and I. M. Khalatnikov, 1969a, "On the nature of the singularities in the general solution of the gravitational equations," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 56,* 1700–1712. English translation in *Sov. Phys.—JETP 29,* 911–917. [§34.6]

Belinsky, V. A., and I. M. Khalatnikov, 1969b, "General solution of the gravitational equations with a physical singularity," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 57,* 2163–2175. English translation in *Sov. Phys.—JETP 30,* 1174–1180 (1970). [§34.6]

Belinsky, V. A., and I. M. Khalatnikov, 1970, "General solution of the gravitational equations with a physical oscillatory singularity," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 59,* 314–321. English translation in *Sov. Phys.—JETP 32,* 169–172. [§§30.6, 34.6]

Belinsky, V. A., I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz, 1970, "Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology," *Usp. Fiz. Nauk 102,* 463–500. English translation in *Advances in Physics 19,* 525–573. [§30.6, Box 30.1]

Belinsky, V. A., E. M. Lifshitz, and I. M. Khalatnikov, 1971, "Oscillatory mode of approach to a singularity in homogeneous cosmological models with rotating axes," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 60,* 1969–1979. English translation in *Sov. Phys.—JETP 33,* 1061–1066 (1971). [§§30.7, 34.6]

Bell, C. C., R. L. Forward, L. R. Miller, T. D. Beard, and T. M. Baran, 1969, "Static gravitational gradient field detection with a rotating torsional gradiometer," in NASL 1969. [Box 16.5]

Bell, C. C., R. L. Forward, and H. P. Williams, 1970, "Simulated terrain mapping with the rotating gravity gradiometer, in W. T. Kattner, ed., *Advances in Dynamic Gravimetry,* Instrument Society of America, Pittsburgh, 115–129. [Box 16.5]

Bell, S. J., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Hewish *et al.* 1968.

Beltran-Lopez, V. B. *See* Hughes, Robinson, and Beltran-Lopez 1960.

Bender, P. L., R. H. Dicke, D. T. Wilkinson, C. O. Alley, D. G. Currie, J. E. Faller, J. D. Mulholland, E. C. Silverberg, H. E. Plotkin, W. M. Kaulla, and G. J. F. McDonald, 1971, "The lunar laser-ranging experiment," in Davies 1971. [§40.9]

Bennett, A. S., *cited by name in* Box 27.7.

Bentley, R., *cited by name in* Box 27.7.

Berger, B. K., D. M. Chitre, V. E. Moncrief, and Y. Nutku, 1972, "Hamiltonian formulation of spherically symmetric gravitational fields," *Phys. Rev. D 5,* 2467–2470. [§21.10]

Berger, M., 1966, "Sur les spectres d'une variété Riemannienne," *Acad. Sci Paris, Comptes Rendus 263,* 13–16. [Box 17.2 part 6]

Berger, M., P. Gauduchon, and E. Mazet, 1971, *Le Spectre d'une variété riemannienne,* Springer, Berlin and New York. [Box 17.2 part 6]

Bergmann, P. G., 1942, *Introduction to the Theory of Relativity,* Prentice-Hall, New York. [endpapers]

Bergmann, P. G., 1968, "Comments on the scalar-tensor theory," *Int. J. Theor. Phys. 1,* 25–36. [§38.2]

Bern, Switzerland, 1955, Jubilee of Relativity Theory, conference held July 11–16, 1955; *see* Mercier and Kervaire 1956.

Bernoulli, D., 1733, *Hydrodynamica,* chapter 10, Archives of Academy of Science, Leningrad; summarized in C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography,* Scribners, New York, vol. 2, 1970. [Box 44.5]

Bers, L., 1952, "Singularities of minimal surfaces," in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950,* American Mathematical Society, Providence, R.I. [§33.2]

Bers, L., *cited by name in* Box 8.5.

Bertotti, B., 1959, "Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity," *Phys. Rev. 116,* 1331–1333. [Ex. 32.1]

Bertotti, B., ed., 1973, proceedings of Course 56 of the International School of Physics Enrico Fermi, dealing with experimental tests of relativistic gravitation theories, Academic Press, New York, in press.

Bertotti, B., D. R. Brill, and R. Krotkov, 1962, "Experiments on gravitation," in Witten 1962. [§38.5, Box 40.1]

Bessel, F. W., *cited by name in* Box 27.7.

Bethe, H. A., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Baym, Bethe, and Pethick 1971.

Birkhoff, G. D., 1923, *Relativity and Modern Physics*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. [§32.2]

Birkhoff, G. D., 1943, "Matter, electricity and gravitation in flat spacetime," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 29*, 231–239. [§39.1]

Bishop, R. L., and S. I. Goldberg, 1968, *Tensor Analysis on Manifolds*, Macmillan, New York. [Box 8.1, Ex. 21.8]

Bisnovatyi-Kogan, G. S., and K. S. Thorne, 1970, "Relativistic gas spheres and clusters of point masses with arbitrarily large central redshifts: Can they be stable?" *Astrophys. J. 160*, 875–885. [Ex. 25.28]

Bisnovatyi-Kogan, G. S., and Ya. B. Zel'dovich, 1969, "Models of clusters of point masses with great central redshift," *Astrofizika 5*, 223–234. English translation in *Astrophys. 5*, 105–109. [Ex. 25.28]

Blackman, R. B., and J. W. Tukey, 1959, *The Measurement of Power Spectra, from the Point of View of Communications Engineering*, Dover, New York. [§37.8]

Blake, W., *quoted at end of* Chapter 44

Blaton, J., 1950, "On a geometrical interpretation of energy and momentum conservation in atomic collisions and disintegration processes," *Kgl. Danske Videnskab. Sels., Mat.-fys. Medd. 24*, no. 20. [§2.10]

Blatt, J. M., and V. F. Weisskopf, 1952, *Theoretical Nuclear Physics*, Wiley, New York. [§37.7]

Blumenthal, L. M., 1953, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Clarendon Press, Oxford, England. [Box 13.1]

Bochmann, G. von. *See* Bailey *et al.* 1968.

Bogoliubov, N. N., and D. V. Shirkov, 1959, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience (now a division of Wiley), New York. [§43.3]

Bogorodskii, A. F., 1962, *Uravneniya Polya Einsteina i ikh Primeneniye v Astronomii* (*Einstein's Field Equations and Their Application in Astronomy*), Kiev Univ. Press, USSR. [Ex. 25.22]

Bohr, A., and B. R. Mottleson, 1969, *Nuclear Structure, Vol. I: Single-Particle Motion*, W. A. Benjamin, New York. [§23.4]

Bohr, N., 1918, "On the quantum theory of line spectra," *Mém. Acad. R. Sci. & Lett. Danemark 4*, no. 1, parts 1–2; part 1 reprinted in Van der Waerden 1967, pp. 95–137. [Box 17.1]

Bohr, N., *cited by name in* Preface, §§44.1, 44.5, Box 17.1

Bohr, N., and L. Rosenfeld, 1933, "Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen," *Kgl. Danske Videnshab. Sels. Mat.-fys. Medd. 12*, no. 8. [§43.2]

Boissonade, J. F. *See* Westerman and Boissonade 1878.

Bolt, B. A., 1964, "Recent information of the earth's interior from studies of mantle waves and eigenvibrations," in Ahrens, Press, and Runcorn 1964, pp. 55–119. [Ex. 37.14]

Bolton, J. G., *cited by name in* Box 27.7.

Bondi, H., 1947, "Spherically Symmetrical Models in General Relativity," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 107*, 410–425. [§30.6]

Bondi, H., 1957, "Plane gravitational waves in general relativity," *Nature 179*, 1072–1073. [Ex. 18.5, Fig. 18.1]

Bondi, H., 1961, *Cosmology*, 2d ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [Box 27.1]

Bondi, H., 1965, "Some special solutions of the Einstein equations," in Trautman, Pirani, and Bondi 1965, pp. 375–459, esp. p. 431. [Ex. 18.5]

Bondi, H., *cited by name in* §21.10, Boxes 27.7, 34.2. *See also* Trautman, Pirani, and Bondi 1965.

Bondi, H., and T. Gold, 1948, "The steady-state theory of the expanding universe," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 108*, 252–270. [§28.4]

Bondi, H., and W. H. McCrea, 1960, "Energy transfer by gravitation in Newtonian theory," *Proc. Cambridge Phil. Soc. 56*, 410–413. [Ex. 18.5]

Bondi, H., F. A. E. Pirani, and I. Robinson, 1959, "Gravitational waves in general relativity, III: Exact plane waves," *Proc. R. Soc. London A 251*, 519–533. [§35.9]

Boni, N., M. Russ, and D. H. Laurence, 1960, *A Bibliographical Check List and Index to the Published Writings of Albert Einstein*, Pageant Books, Paterson, N.J., cited in preface of present bibliography; based on earlier bibliography of M. C. Shields in Schilpp 1949.

Born, M., 1971, *The Born-Einstein letters: Correspondence Between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916 to 1955 with Commentaries by Max Born*, translated by Irene Born, Walker, New York. [Box 1.11]

Born, M., *cited by name in* Box 17.2

Boughn, S. P., D. M. Fram, and R. B. Partridge, 1971, "Isotropy of the microwave background at 8-millimeter wavelength," *Astrophys. J. 165*, 439–444. [§§27.1, 27.2, 30.8]

Bourbaki, N., *cited by name in* Box 8.2; pseudonym for an organization of French mathematicians who, since 1939, have nearly completed the first ten *Books* of a projected larger work: *Éléments de Mathématique*, Hermann, Paris.

Bourne, S. R. *See* Barton, Bourne, and Fitch 1970.

Boyer, R. H., and R. W. Lindquist, 1967, "Maximal analytic extension of the Kerr metric," *J. Math. Phys. 8*, 265–281. [§33.2, Box 33.2, Ex. 33.8]

Braginsky, V. B., 1965, "Gravitational radiation and the prospect of its experimental discovery," *Usp. Fiz. Nauk 86*, 433–446. English translation in *Sov. Phys.—Uspekhi 8*, 513–521. [Box 36.3]

Braginsky, V. B., 1970, *Fizicheskie Eksperimenti s Probnimi Telami* (*Physics Experiments With Test Bodies*), Nauka, Moscow, Russia. English translation published as NASA-TT F-762, available from National Technical Information Service, Springfield, Va. [§37.8]

Braginsky, V. B., A. B. Manukin, and M. Yu. Tikhonov, 1970, "Investigation of dissipative ponderomotive effects of electromagnetic radiation," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 58*, 1549–1552, English translation in *Sov. Phys.—JETP 31*, 829–830. [§37.8]

Braginsky, V. B., and M. B. Menskii, 1971, "High-frequency detection of gravitational waves," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma 13*, 585. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 13*, 417–419. [§37.9, Box 37.6]

Braginsky, V. B., and V. S. Nazarenko, 1971, "On the detection of gravitational radiation from some astronomical sources with the heterodyne detector," in Davies 1971, pp. 45–46. [§37.3]

Braginsky, V. B., and V. I. Panov, 1971, "Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 61,* 873–879. English translation in *Sov. Phys.—JETP 34,* 464–466. [§§38.3, 40.9, Box 1.2]

Braginsky, V. B., Ya. B. Zel'dovich, and V. N. Rudenko, 1969, "Reception of gravitational radiation of extraterrestrial origin," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma 10,* 437–441. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 10,* 280–283. [§37.3, Fig. 37.2]

Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics: 1964, *see* Trautman, Pirani, and Bondi 1965; 1968, *see* Chrétian, Deser, and Goldstein 1969.

Brans, C., *cited by name in* §§40.1, 40.6, 40.9.

Brans, C., and R. H. Dicke, 1961, "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation," *Phys. Rev. 124,* 925–935. Reprinted in Dicke 1964b. [§§17.6, 28.4, 38.2, 39.2, 40.8, Boxes 38.3, 39.1]

Brasseur, Georges, *quoted in* Fig. 44.5.

Brault, J. W., 1962, *The Gravitational Redshift in the Solar Spectrum,* doctoral dissertation, Princeton Univ. Abstract, "Gravitational Redshift of Solar Lines," in *Bull. Amer. Phys. Soc. 8,* 28 (1963). [§38.5, Fig. 38.2]

Brehme, R. W. *See* DeWitt and Brehme 1960.

Bressanone, Italy: 1970 summer school sponsored by Centro Interzionale Matematico Estivo. *See* Cattaneo 1971.

Brill, D. R., 1959, "On the positive definite mass of the Bondi-Weber-Wheeler time-symmetric gravitational waves," *Ann. Phys. (USA) 7,* 466–483. [§21.10]

Brill, D. R., 1961, *General Relativity: Selected Topics of Current Interest,* report SUI61-4, Physics Department, State University of Iowa, Iowa City, Iowa (multilithed); summarized in DeWitt and DeWitt 1964b, pp. 431–432; published as Brill 1964. [§21.10]

Brill, D. R., 1964, "General relativity: selected topics of current interest," *Suppl. Nuovo Cimento 2,* 1–56. *See* Brill 1961.

Brill, D. R. *See also* Bertotti, Brill, and Krotkov 1962, Cohen and Brill 1967 *and* 1968, *and* Graves and Brill 1960.

Brill, D. R., P. L. Chrzanowski, C. M. Pereira, E. D. Fackerell, and J. R. Ipser, 1972, "Solution of the scalar wave equation in a Kerr background by separation of variables," *Phys. Rev. D 5,* 1913–1915. [Ex. 33.14]

Brill, D. R., and J. M. Cohen, 1966, "Rotating masses and their effect on inertial frames," *Phys. Rev. 143,* 1011–1015. [§§21.12, 40.7, Ex. 26.1]

Brill, D. R., and J. B. Hartle, 1964, "Method of self-consistent field in general relativity and its application to the gravitational geon," *Phys. Rev. B 135,* 271–278. [§§21.12, 35.13]

Brill, D. R., and J. A. Wheeler, 1957, "Interaction of neutrinos and gravitational fields," *Rev. Mod. Phys. 29,* 465–479. [§§27.10, 41.11]

Brillouin, L., 1970, *Relativity Reexamined,* Academic Press, New York. [Ex. 25.21]

Brodetsky, S. *See* Dobson and Brodetsky 1947.

Brodsky, S. J., and S. D. Drell, 1970, "The present status of quantum electrodynamics," in *Ann. Rev. Nuclear Sci. 20,* 147–194. [§44.2]

Bromberg, V. A., 1958, "Relativistic corrections in the theory of the motion of the moon," *Bull. Inst. Theor. Astron., Akad. Nauk SSSR 6,* 733–756. [§40.6]

Bronshtein, M. P., *cited by name in* §29.2.

Brown, E. H., Jr. *See* Anderson, Brown, and Peterson 1966a *and* 1966b.

Brown, R. C. A. *See* Bailey *et al.* 1968 *and* Farley *et al.* 1966.

Bruhat, Y., 1962, "The Cauchy problem," in Witten 1962. [§§21.11, 21.13]

Bruhat, Y. *See also* Choquet-Bruhat, Y., and Fourès-Bruhat, Y.

Bruno, G. *See* Singer 1950.

Bunsen, R. W., *cited by name in* Box 38.2.

Burbidge, E. M., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Burbidge and Burbidge 1969a *and* 1969b *and* Hoyle *et al.* 1964.

Burbidge, G. R., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Hoyle *et al.* 1964.

Burbidge, G. R., and E. M. Burbidge, 1969a, "Red-shifts of quasi-stellar objects and related extragalactic systems," *Nature 222,* 735–741. [Ex. 27.14]

Burbidge, G. R., and E. M. Burbidge, 1969b, "Quasi-stellar objects—a progress report," *Nature 224,* 21–24. [Ex. 27.14]

Burke, W. L., 1970, "Runaway solutions: remarks on the asymptotic theory of radiation damping," *Phys. Rev. A 2,* 1501–1505. [§20.6]

Burke, W. L., 1971, "Gravitational radiation damping of slowly moving systems calculated using matched asymptotic expansions," *J. Math. Phys. 12,* 402–418. [§36.8]

Burke, W. L., *cited by name in* §22.5.

Burnett, D. S. *See* Wasserburg and Burnett 1968.

Cairns, S. S., ed., 1965, *Differential and Combinatorial Topology,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

Cairns, S. S. *See also* Morse and Cairns 1969.

Callaway, J., 1953, "The equations of motion in Einstein's new unified field theory," *Phys. Rev. 92,* 1567–1570. [§20.6]

Callippus, *cited by name in* Box 27.7.

Caltech-JPL conference on experimental tests of gravitational theories, November 1970. *See* Davies 1971.

Cameron, A. G. W., 1970, "Neutron stars," *Ann. Rev. Astron. & Astrophys. 8,* 179–208. [§24.2]

Cameron, A. G. W., *See also* Langer and Cameron 1969, *and* Truran and Cameron 1971.

Cameron, A. G. W., and J. Truran, 1971, *work cited by* Peebles 1971. [Box 33.3]

Campbell, D. B. *See* Shapiro, Ash, *et al.* 1971 *and* Shapiro *et al.* 1972.

Campbell, L., and Garnett, W., 1882, *Life of James Clerk Maxwell,* Macmillan, London. [Box 4.6]

Campbell, W. W., and R. J. Trumpler, 1928, "Observations made with a pair of five-foot cameras on the light-deflections in the sun's gravitational field at the total solar eclipse of September 21, 1922." *Lick Obs. Bull. 13,* 130–160. [Box 40.1]

Carmeli, M., S. I. Fickler, and L. Witten, 1970, *Relativity,* Plenum, New York. [§40.7]

Carroll, L. *See* Dodgson, C. L.

Cartan, É., 1901, "Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires," *Bull. Soc. Math. France 29,* 118–130. [Box 8.2]

Cartan, É., 1922a, "Sur les équations de la gravitation de Einstein," *J. Math. Pures Appl. 1,* 141–203. [§21.1]

Cartan, É., 1922b, "Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 174,* 593–595. [§§38.2, 39.2]

Cartan, É., 1923, "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité generalisée (première partie)," *Ann. École Norm. Sup. 40,* 325–412. [§§8.2, 12.1, 12.2, 38.2, 39.2]

Cartan, É., 1924, "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité generalisée (suite)," *Ann. École Norm. Sup. 41,* 1–25. [§§8.2, 8.3, 12.1]

Cartan, É., 1925, *La Géométrie des Espaces de Riemann,* Memorial des Sciences Mathématiques, Fascicule IX, Gauthier-Villars, Paris, France. [§14.5]

Cartan, É., 1928 and 1946, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann,* Gauthier-Villars, Paris, France. [§§14.5, 15.3, Box 8.2, Ex. 21.4, endpapers]

Cartan, É., 1935, *La Méthode du Repère Mobile, la Théorie des Groupes Continus et les Espaces Generalisées,* Hermann, Paris, France. [§6.4]

Cartan, É., 1945, "Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques," *Exposés de Géométrie 14,* Hermann, Paris, France. [§4.1]

Cartan, É., 1946. *See* Cartan 1928.

Cartan, É., 1966, *Theory of Spinors,* M.I.T. Press, Cambridge, Mass. [§41.11]

Cartan, É., *cited by name in* §§9.1, 13.1, 13.4, 15.1, Boxes 10.1, 12.3, Ex. 12.7, 12.8.

Cartan, H., 1970, *Formes Différentiels,* Hermann, Paris, France. [§4.1]

Carter, B., 1966a, "Complete analytic extension of the symmetry axis of Kerr's solution of Einstein's equations," *Phys. Rev. 141,* 1242–1247. [Box 33.2]

Carter, B., 1966b, "The complete analytic extension of the Reissner-Nordstrom metric in the special case $e^2 = m^2$," *Phys. Lett. 21,* 423–424. [Fig. 34.4, Ex. 31.8, 34.3]

Carter, B., 1968a, "Global structure of the Kerr family of gravitational fields," *Phys. Rev. 174,* 1559–1571. [§33.5, Box 33.2, Ex. 33.7]

Carter, B., 1968b, "Large numbers in astrophysics and cosmology," unpublished preprint, Institute of Theoretical Astronomy, Cambridge, Eng. [§44.6]

Carter, B., 1968c, "Hamilton-Jacobi and Schrodinger separable solutions of Einstein's equations," *Commun. Math. Phys. 10,* 280–310. [§33.5]

Carter, B., 1970, "An axisymmetric black hole has only two degrees of freedom," *Phys. Rev. Lett. 26,* 331–333. [Box 33.1]

Carter, B., 1973, "Properties of the Kerr metric," *in* DeWitt and DeWitt 1973. [Box 33.1]

Carter, B., *cited by name in* Box 34.3. *See also* Bardeen, Carter, and Hawking 1973.

Cattaneo, C., ed., 1971, *Relativistic Fluid Dynamics,* proceedings of a summer school sponsored by Centro Internazionale Matematico Estivo, Bressanone, Italy, June 1970, Edizione Cremonese, Rome. [§22.3]

Cattaneo, C., *quoted at end of* Chap. 44.

Cauchy, A. L., *cited by name in* Box 17.2.

Cavendish, H., 1798, "Experiments to determine the density of the Earth" (read June 21, 1798), *Phil. Trans. R. Soc. London, Part II* (1798), pp. 469–526. [§40.8]

Caves, C. M., *cited by name in* §26.1.

Chadwick, J., 1932, "Possible existence of a neutron," *Nature 129,* 312. [Box 24.1]

Chandrasekhar, S., 1931a, "The density of white dwarf stars," *Phil. Mag. 11,* 592–596. [Box 24.1]

Chandrasekhar, S., 1931b, "The maximum mass of ideal white dwarfs," *Astrophys. J. 74,* 81–82. [Box 24.1]

Chandrasekhar, S., 1964a. "Dynamical instability of gaseous masses approaching the Schwarzschild limit in general relativity," *Phys. Rev. Lett. 12,* 114–116 and 437–438. [§26.1, Boxes 24.1, 26.2]

Chandrasekhar, S., 1964b, "The dynamical instability of gaseous masses approaching the Schwarzschild limit in general relativity," *Astrophys. J. 140,* 417–433. [§26.1, Boxes 24.1, 26.2]

Chandrasekhar, S., 1965a, "The post-Newtonian equations of hydrodynamics in general relativity," *Astrophys. J. 142,* 1488–1512. [§39.3, Box 39.3, Ex. 39.14]

Chandrasekhar, S., 1965b, "The post-Newtonian effects of general relativity on the equilibrium of uniformly rotating bodies, I: The Maclaurin spheroids and the virial theorem," *Astrophys. J. 142,* 1513–1518. [§39.3, Box 39.3]

Chandrasekhar, S., 1965c, "The stability of gaseous masses for radial and non-radial oscillations in the post-Newtonian approximation of general relativity," *Astrophys. J. 142,* 1519–1540. [§39.3, Box 26.2]

Chandrasekhar, S., 1968, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability,* Clarendon Press, Oxford. See especially §108. [Box 32.3]

Chandrasekhar, S., and G. Contopolous, 1967, "On a post-Galilean transformation appropriate to the post-Newtonian theory of Einstein, Infeld, and Hoffmann," *Proc. R. Soc. London A 298,* 123–141. [§39.3, 39.9]

Chandrasekhar, S., and F. P. Esposito, 1970, "The 2½-post-Newtonian equations of hydrodynamics and radiation reaction in general relativity," *Astrophys. J. 160,* 153–180. [§36.8, Box 39.3]

Chandrasekhar, S., and N. R. Lebovitz, 1968, "The pulsations and the dynamical stability of gaseous masses in uniform rotation," *Astrophys. J., 152,* 267–291. [Ex. 39.7]

Chandrasekhar, S., and Y. Nutku, 1969, "The second post-Newtonian equations of hydrodynamics in general relativity," *Astrophys. J. 158,* 55–80. [Box 39.3]

Chapel Hill 1957, Conference on the Role of Gravitation in Physics, Jan. 18–23, 1957. *See* DeWitt 1957.

Chase, D. M., 1954, "The equations of motion of charged test particles in general relativity," *Phys. Rev. 95,* 243–246. [§20.6]

Cherlin, G., *cited by name in introduction to this bibliography.*

Chern, S.-S., 1955, "On curvature and characteristic classes of a Riemann manifold," *Hamburg Abh. 20,* 117–126. [Box 15.3]

Chern, S.-S., 1960, *Geometric Structures on Manifolds,* colloquium lectures, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. [§2.2]

Chern, S.-S., 1962, "Geometry of a quadratic differential

form," *J. Soc. Indust. & Appl. Math. 10,* 751–755, also in *H. P. Robertson January 27, 1903–August 26, 1961, In Memoriam,* Soc. Indust. and Applied Math., Philadelphia 1963, pp. 13–17. [Box 15.3]

Chern, S.-S., 1966, "The geometry of G-structures," *Bull. Am. Math. Soc. 72,* 167–219. [§2.2]

Chern, S.-S., 1971, "Differential geometry: its past and its future," in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Nice, September 1970,* Gauthier-Villars, Paris, pp. 41–53. [§2.2]

Chern, S.-S., and C. Chevalley, 1952, "Élie Cartan and his mathematical work," *Bull. Am. Math. Soc. 58,* 217–250. [Box 8.2]

Chevalley, C. *See* Chern and Chevalley 1952.

Chick, H. J., 1960, *Theory of Gravitation 1920–Present (Bibliography)*, Report LMS-2328 of Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, cited in preface of present bibliography.

Chick, H. J., 1964, *Theory of Gravitation 1959–1963 (Bibliography)*, Report LMS-3099 of Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, cited in preface of present bibliography.

Chinnapared, R. *See* Newman *et al.* 1965.

Chitre, D. M., 1972a, *Investigations of the Vanishing of a Horizon for Bianchi Type IX (Mixmaster) Universe,* doctoral dissertation, Univ. of Maryland. [§30.8]

Chitre, D. M., 1972b, "High-frequency sound waves to eliminate a horizon in the mixmaster universe," *Phys. Rev. D 6,* 3390–3396. [§30.8]

Chitre, D. M. *See also* Berger *et al.* 1972.

Chiu, H.-Y., and W. F. Hoffman, eds., 1964, *Gravitation and Relativity,* W. A. Benjamin, New York.

Choquard, P., 1955, "Traitement semi-classique des forces générales dans la représentation de Feynman," *Helv. Phys. Acta 28,* 89–157. [Box 21.1, Fig. 13.2]

Choquet-Bruhat, Y., 1968a, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs,* Monographies Universitaires de Mathématiques no. 28, Dunod, Paris, France. [§4.1]

Choquet-Bruhat, Y., 1968b, "Espace-temps Einsteiniens généraux, chocs gravitationels," *Ann. Inst. Henri Poincaré 8,* 327–338. [§21.13]

Choquet-Bruhat, Y., 1969, "Construction de solutions radiatives approchées des équations d'Einstein," *Commun. Math. Phys. 12,* 16–35. [§35.13]

Choquet-Bruhat, Y., 1972, "Problème des contraintes sur une variété compacte," *Acad. Sci. Paris, Comptes Rend. A 274,* 682–684; fuller account in "Global solutions of the equations of constraint in general relativity, on open and closed manifolds," *Gen. Rel. & Grav.* 1973, in press. [§21.1]

Choquet-Bruhat, Y. *See also* Bruhat, Y., *and* Fourès-Bruhat, Y.

Chrétien, M., S. Deser, and J. Goldstein, eds., 1969, *Brandeis Summer Institute 1968, Astrophysics and General Relativity,* Gordon and Breach, New York.

Christodolou, D., 1970, "Reversible and irreversible transformations in black-hole physics," *Phys. Rev. Lett. 25,* 1596–1597. [§33.8, Box 33.4]

Christodolou, D., 1971, *Investigations in Gravitational Collapse and the Physics of Black Holes,* doctoral dissertation, Princeton Univ. [§35.8, Boxes 33.3, 33.4, Fig. 33.3]

Christodolou, D., and R. Ruffini, 1971, "Reversible transformations of a charged black hole," *Phys. Rev. D 4,* 3552–3555. [§33.8, Boxes 33.4, 33.5]

Chrzanowski, P. L., and C. W. Misner, 1973, "Geodesic synchrotron radiation in the Kerr geometry by the method of asymptotically factorized Green's functions," technical report of the Dept. of Physics and Astronomy, University of Maryland. [§33.8]

Chrzanowski, P. L. *See also* Brill *et al.* 1972.

Cincinnati 1969, Relativity Conference in The Midwest, June 2–6, 1969, Cincinnati, Ohio. *See* Carmeli, Fickler, and Witten 1970.

Clark, G. *See* Eddington and Clark 1938.

Clarke, C. J. S., 1970, "On the global isometric embedding of pseudo-Riemannian manifolds," *Proc. Roy. Soc. London A 314,* 417–428. [§23.8]

Clayton, D., 1968, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis,* McGraw-Hill, New York. [§28.1]

Clemence, G. M., 1943, "The motion of Mercury, 1765–1937," *Astron. Papers Am. Ephemeris 11,* 1–221. [Box 40.3]

Clemence, G. M., 1947, "The relativity effect in planetary motions," *Rev. Mod. Phys. 19,* 361–364. [Box 40.3]

Clemens, R. *See also* Fletcher *et al.* 1967.

Clemens, R., and R. Matzner, 1967, Technical Report no. 635 of the Univ. of Maryland Department of Physics and Astronomy. [Box 14.3]

Clifford, W. K., 1879, *Lectures and Essays,* L. Stephen and F. Pollock, eds., Macmillan, London, I, 244 and 322. [§44.3]

Clifford, W. K., 1882, *Mathematical Papers,* R. Tucker, ed., Macmillan, London. [§44.3]

CNRS, 1962, *Les Théories relativistes de la gravitation,* Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, France. *Same as* Royaumont 1959.

Cocke, W. J., 1965, "A maximum-entropy principle in general relativity and the stability of fluid spheres," *Ann. Inst. Henri Poincaré A 2,* 283–306. [§26.1]

Cocke, W. J., H. J. Disney and D. J. Taylor, 1969, "Discovery of optical signals from pulsar NP0532," *Nature 221,* 525–527. [Box 24.1]

Codazzi, D., *cited by name in* §21.5.

Cohen, J. M., 1968, "Angular momentum and the Kerr metric," *J. Math. Phys. 9,* 905–906. [Ex. 26.1]

Cohen, J. M. *See also* Brill and Cohen 1966.

Cohen, J. M., and D. Brill, 1967, "Rotating masses and their effect on inertial frames," *Phys. Rev. 143,* 1011–1015. [§21.12]

Cohen, J. M., and D. R. Brill, 1968, "Further examples of 'Machian effects' of rotating bodies in general relativity," *Nuovo Cim. 56B,* 209–219. [Ex. 26.1]

Cohen, J. M., and R. M. Wald, 1971, "Point charge in the vicinity of a Schwarzschild black hole," *J. Math. Phys. 12,* 1845–1849. [Box 33.1]

Cohen, P., 1966, *Set Theory and the Continuum Hypothesis,* W. A. Benjamin, New York. [Box 44.5]

Cole, J., 1968, *Perturbation Methods in Applied Mathematics,* Ginn-Blaisdell, Waltham, Mass. [§22.5]

Coleman, C. J., 1971, "A simple relativistic theory of gravitation," *J. Phys. A 4,* 611–616. [§40.5]

Coleman, J. A., 1967, *Early Theories of the Universe,* New American Library, New York. [§1.7]

Colgate, S. A., 1967, "Stellar coalescence and the multiple-supernova interpretation of quasi-stellar sources," *Astrophys. J. 150,* 163–192. [§24.5, Box 33.3]

Colgate, S. A., and R. H. White, 1966, "The hydrodynamic behavior of supernovae explosions," *Astrophys. J. 143,* 626–681. [§32.7]

Collins, C. B., and S. W. Hawking, 1973, "Why is the universe isotropic?" *Astrophys. J. 180,* 317–334. [Box 34.3]

Collins, R. A., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Hewish *et al.* 1968.

Combridge, J. T., 1965, *Bibliography of Relativity and Gravitation Theory 1921–1937,* Kings College, London, cited in preface of present bibliography.

Comte, A., 1835, *Cours de philosophie positive,* Paris. [Box 27.7].

Conklin, E. K., 1969, "Velocity of the Earth with respect to the cosmic background radiation," *Nature 222,* 971–972. [§30.8]

Contopolous, G. *See* Chandrasekhar and Contopolous 1967.

Coote, N., *cited by name in introduction to this bibliography.*

Copenhagen 1971, Sixth International Conference on General Relativity and Gravitation, held in Copenhagen, July 1971; portions of the proceedings appear as articles in *Gen. Rel. Grav.,* especially vol. 3, 1972.

Copernicus, N. *See* Dobson and Brodetsky 1947.

Corben, H. C., and P. Stehle, 1960, *Classical Mechanics,* 2d ed., Wiley, New York. [Ex. 33.7]

Cornell University, 1965, Summer Seminar on Applied Mathematics, arranged by the American Mathematical Society. Proceedings (vols. 8–10 in Lectures in Applied Mathematics series) published as Ehlers 1967.

Cornford, F. M., 1937, *Plato's Cosmology: The Timaeus of Plato,* Humanities Press, New York. [Box 27.7]

Corson, E. M., 1953, *Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations,* Hafner, New York. [§21.3]

Couch, W. E. *See also* Newman *et al.* 1965.

Couch, W. E., and E. T. Newman, 1972, "Generalized Lienard-Wiechart fields," *J. Math. Phys. 13,* 929–931. [§36.1]

Couch, W. E., R. J. Torrence, A. I. Janis, and E. T. Newman, 1968, "Tail of a gravitational wave," *J. Math. Phys. 9,* 484–496. [§§35.8, 35.14]

Courant, R., 1937, "Plateau's problem and Dirichlet's principle," *Ann. Math. U.S. 38,* 679–724. [§33.2]

Coxeter, H. S. M., 1963, *Regular Polytopes,* 2d ed., Macmillan, New York. [§42.5, Box 27.2]

Curott, D. R., 1966, "Earth deceleration from ancient solar eclipses," *Astron. J. 71,* 264–269. [Fig. 1.8]

Currie, D. G., *cited by name in* Fig. 40.4. *See also* Bender *et al.* 1971.

Curtis, H. D., *cited by name in* Box 27.7.

Cusanus, N. *See* Heron 1954.

Dabbs, J. W. T., J. A. Harvey, D. Paya, and H. Horstmann, 1965, "Gravitational acceleration of free neutrons," *Phys. Rev. B 139,* 756–760. [§1.3]

D'Alembert, J., *quoted at end of* Chap. 44.

Danielson, B. L. *See* Evenson *et al.* 1972.

Dante Alighieri, *Paradiso,* translated by Philip H. Wicksteed, 1921, Dent, London, England. [Epigraph to Chap. 44]

Danziger, I. J., 1970, "The cosmic abundance of helium," *Ann. Rev. Astron. Astrophys., 8,* 161–178. [§28.1]

Darboux, G., 1941, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, Part I,* Gauthier-Villars, Paris, France. [§33.2]

Darmois, G., 1927, *Les équations de la gravitation einsteinienne,* Mémorial des sciences mathematiques XXV, Gauthier-Villars, Paris. [§21.13]

Darwin, C., 1959, "The gravity field of a particle, I," *Proc. R. Soc. London A 249,* 180–194. [§25.5, Fig. 25.7]

Darwin, C., 1961, "The gravity field of a particle, II," *Proc. R. Soc. London A 263,* 39–50. [§25.5, Fig. 25.7]

Datt, B., 1938, "Über eine Klasse von Lösungen der Gravitationsgleichungen der Relativität," *Z. Physik 108,* 314–321. [§30.6, Ex. 32.8]

Davenport, W. B., and W. L. Root, 1958, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise.* McGraw Hill, New York, [§37.8]

Davies, R. W., ed., 1971, *Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitational Theories, November 11–13, 1970, California Institute of Technology,* J.P.L. Technical Memorandum, 33–499.

Davis, M., R. Ruffini, W. H. Press, and R. H. Price, 1971, "Gravitational radiation from a particle falling radially into a Schwarzschild black hole," *Phys. Rev. Lett. 27,* 1466–1469. [§§33.7, 36.5, Box 33.3, Fig. 36.2]

Davis, W. R., 1970, *Classical Theory of Particles and Fields and the Theory of Relativity,* Gordon and Breach, New York. [§21.3, endpapers]

Day, G. W. *See* Evenson *et al.* 1972.

de Broglie, M. *See* Einstein 1912.

Debye, P. J. W., *cited by name in* §22.5.

De Chéseaux, P. L., 1744, *Traité de la comète qui a paru en décembre 1743,* Paris; the relevant material is in the Appendix. [Box 27.7]

De Felice, F., 1968, "Equatorial geodesic motion in the gravitational field of a rotating source," *Nuovo Cimento B 57,* 351–388. [Box 33.5]

Defoe, D., 1722, *The Fortunes and Misfortunes of the Famous Moll Flanders,* reprinted by Fine Editions Press, Cleveland, 1953. [epigraph to Part X]

De Groot, S. R. *See* Kluitenberg and de Groot 1954.

De Hoffmann, F., and E. Teller, 1950, "Magneto-hydrodynamic shocks," *Phys. Rev. 80,* 692–703. [§22.2, Box 22.2]

De la Cruz, V., and W. Israel, 1967, "Gravitational bounce," *Nuovo Cimento A 51,* 744–760. [§34.6, Fig. 34.4]

De Lange, F. G. *See* Refsdal, Stabell, and de Lange 1967.

Dempster, J. R. H., 1963, *Feynman Quantization in Field Theory: Topology of Commutators and Functional Representation of States,* doctoral dissertation, Princeton University. [Box 21.1]

De Rham, G., 1955, *Variétés Différentiables,* Herman, Paris. [§§4.1, 22.4]

Deser, S., 1970, "Self-interaction and gauge invariance," *Gen. Rel. & Grav. 1,* 9–18. [§§7.1, 18.1, Box 17.2 part 5]

Deser, S., *cited by name in* §§21.1, 35.8, Box 17.2, part 2'. *See also* Arnowitt, Deser, and Misner 1962 *and* Chrétien, Deser, and Goldstein 1969.

Deser, S., and K. W. Ford, eds., 1965, *Lectures on General Relativity; 1964 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics I,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. *Same as* Trautman, Pirani, and Bondi 1965.

De Sitter, W., 1916, "On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 77,* 155–184 and 481. [§§40.6, 40.7]

De Sitter, W., 1917a, "On the relativity of inertia: Remarks concerning Einstein's latest hypothesis," *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 19,* 1217–1225. [§27.11]

De Sitter, W., 1917b, "On the curvature of space," *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20,* 229–243. [§27.11]

De Sitter, W., *cited by name in* §30.3, Box 27.7.

Deutsch, A. J., and W. B. Klemperer, eds., 1962, *Space Age Astronomy,* Academic Press, New York.

De Valera, E., *cited by name in* §41.1.

De Vaucouleurs, G., 1971, "The large-scale distribution of galaxies and clusters of galaxies," *Astron. Soc. Pacific Publ. 83,* 113–143. [§27.11]

DeWitt, B. S., 1953, "Pair production by a curved metric," *Phys. Rev. 90,* 357. [§30.5]

DeWitt, B. S., 1962, "The quantization of geometry," in Witten 1962. [Ex. 40.8]

DeWitt, B. S., 1967a, "Quantum theory of gravity, I," *Phys. Rev. 160,* 1113–1148. [§§21.1, 43.1, 43.3]

DeWitt, B. S., 1967b. "Quantum theory of gravity, II; The manifestly covariant theory." *Phys. Rev. 162,* 1195–1239. [§§43.1, 43.3]

DeWitt, B. S., 1967c, "Quantum theory of gravity, III; Application of the covariant theory," *Phys. Rev. 162,* 1239–1256. [Box 17.2 part 6h]

DeWitt, B. S., 1971, *Lectures on Relativity—Stanford, Fall 1971* (unpublished manuscript). [§36.7]

DeWitt, B. S., *cited by name in* Ex. 35.20. *See also* DeWitt and DeWitt 1964a, 1964b, and 1973.

DeWitt, B. S., and R. W. Brehme, 1960, "Radiation damping in a gravitational field," *Ann. Phys. (U.S.A.) 9,* 220–259. [§35.8, Ex. 35.14]

DeWitt, C., ed. 1957, *Conference on the Role of Gravitation in Physics, Proceedings,* W.A.D.C. Technical Report 57-216; ASTIA Document No. AD118180, Wright Air Development Center, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.

DeWitt, C. *See also* Morette, C.

DeWitt, C., and B. S. DeWitt, 1964a, "Falling charges," *Physics 1,* 3–20. [§35.8]

DeWitt, C., and B. S. DeWitt, eds., 1964b, *Relativity, Groups, and Topology,* Gordon and Breach, New York. [§38.2]

DeWitt, C., and B. S. DeWitt, eds., 1973, *Black Holes,* Proceedings of 1972 session of Ecole d'été de physique theorique, Gordon and Breach, New York. [§33.1]

DeWitt, C., E. Schatzman, and P. Veron, eds., 1967, *High-Energy Astrophysics, Vol. III,* Gordon and Breach, New York. [§24.4]

DeWitt, C., and J. A. Wheeler, eds., 1968, *Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics,* W. A. Benjamin, New York.

Dicke, R. H., 1954, "Coherence in spontaneous radiation processes," *Phys. Rev. 93,* 99–110. [Box 38.3]

Dicke, R. H., 1957, "Coherence and the quantum," *J. Opt. Soc. Am. 47,* 527. [Box 38.3]

Dicke, R. H., 1959a, "Dirac's cosmology and the dating of meteorites," *Nature 183,* 170–171. [§38.6]

Dicke, R. H., 1959b, "New research on old gravitation," *Science 129,* 621–624. [§§38.6, 40.9, 44.6]

Dicke, R. H., 1961, "Dirac's cosmology and Mach's principle," *Nature 192,* 440–441. [§§38.6, 44.6, Box 38.3]

Dicke, R. H., 1962, "Mach's principle and invariance under transformation of units," *Phys. Rev. 125,* 2163–2167. Reprinted in Dicke 1964b. [Box 39.1]

Dicke, R. H., 1964a, "The sun's rotation and relativity," *Nature 202,* 432–435. [Box 38.3]

Dicke, R. H., 1964b, *The Theoretical Significance of Experimental Relativity,* Gordon and Breach, New York; also in DeWitt and DeWitt 1964a. [§§38.2, 38.7, 44.6, Box 40.1]

Dicke, R. H., 1964c, "Remarks on the observational basis of general relativity," in Chiu and Hoffman 1964, pp. 1–16. [§40.9]

Dicke, R. H., 1968, "Scalar-tensor gravitation and the cosmic fireball," *Astrophys. J., 152,* 1–24. [§28.4]

Dicke, R. H., 1969, *Gravitation and the Universe,* American Philosophical Society, Philadelphia. [§§38.6, 40.9]

Dicke, R. H., *cited by name in* §§10.1, 38.3, 38.5, 40.1, 40.6, 40.9, Box 27.7. *See also* Bender *et al.* 1971, Brans and Dicke 1961, *and* Roll, Krotkov, and Dicke 1964.

Dicke, R. H., and H. M. Goldenberg, 1967, "Solar oblateness and general relativity," *Phys. Rev. Lett. 18,* 313–316. [Boxes 38.3, 40.3]

Dicke, R. H., and P. J. E. Peebles, 1962a, "Significance of spatial isotropy," *Phys. Rev. 127,* 629–631. Reprinted in Dicke 1964b. [§38.7]

Dicke, R. H., and P. J. E. Peebles, 1962b, "Cosmology and the radioactive decay ages of terrestrial rocks and meteorites," *Phys. Rev. 128,* 2006–2011. [§38.6, Box 38.3]

Dicke, R. H., and P. J. E. Peebles, 1965, "Gravitation and space science," *Space Sci. Rev. 4,* 419–460. [§40.8]

Dicke, R. H., P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson, 1965, "Cosmic-black-body radiation," *Astrophys. J. 142,* 414–419. [§§27.2, 28.1]

Dieter, N. H., E. E. Epstein, A. E. Lilley, and M. S. Roberts, 1962, "A radio and optical investigation of extragalactic redshifts," *Astron. J. 67,* 270–271. [§29.2]

Dieudonné, J., 1960, *Foundations of Modern Analysis,* Academic Press, New York. [§2.6]

Digges, T., *cited by name in* Box 27.7.

d'Inverno, R. A., 1969, "ALAM—Atlas Lisp algebraic manipulator," *Comput. J. 12,* 124–127. [Box 14.3]

Dirac, P. A. M., 1926, "On the theory of quantum mechanics," *Proc. R. Soc. London A 112,* 661–677. [Box 24.1]

Dirac, P. A. M., 1936, "Relativistic wave equations," *Proc. R. Soc. London A 155,* 447–459. [Box 32.2]

Dirac, P. A. M., 1937, "The cosmological constants," *Nature 139,* 323. [§§38.6, 44.6]

Dirac, P. A. M., 1938, "New basis for cosmology," *Proc. R. Soc. London A 165,* 199–208. [§§38.6, 44.6]

Dirac, P. A. M., 1959, "Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation," *Phys. Rev. 114,* 924–930. [§21.7]

Dirac, P. A. M. 1964, *Lectures on Quantum Mechanics,* Belfer Graduate School of Science Monograph Series Number Two, Yeshiva University, New York. [§21.7]

Dirac, Paul A. M., *Festschrift* on the occasion of his 70th birthday, Aug. 8, 1972. *See* Salam and Wigner 1972.

Dirac, P. A. M., *cited by name in* §§20.6, 21.1, Box 4.4.

Dirac, P. A. M., V. A. Fock, and B. Podplsky, 1932, "On quantum electrodynamics," *Phys. Z. Sowjetunion 2,* 468–479. [§21.8]

Dobson, J. F., and S. Brodetsky, 1947, *Nicolaus Copernicus's De Revolutionibus* (translation of Preface and Book I), Royal Astronomical Society, London. [Box 27.7].

Dodgson, C. L., 1871, *Through the Looking Glass,* Macmillan, London. [Epigraph to Chap. 32]

Doroshkevich, A. G., 1966, "Change of the angular momentum of a star during accretion," *Astron. Zhur. 43,* 105–107. Terrible English translation in *Sov. Astron.—A. J. 10,* 83–84. [Box 33.3]

Doroshkevich, A. G., V. N. Lukash, and I. D. Novikov, 1971, "Impossibility of mixing in the Bianchi type IX cosmological model," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 60,* 1201–1205. English translation in *Sov. Phys.—JETP 33,* 649–651. [§30.8]

Doroshkevich, A. G., Ya. B. Zel'dovich, and I. D. Novikov, 1965, "Gravitational collapse of nonsymmetric and rotating masses," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 49,* 170–181. English translation in *Sov. Phys.—JETP 22,* 122–130. [Box 33.3, Ex. 26.1]

Douglas, K. N., I. Robinson, A. Schild, E. L. Schücking, J. A. Wheeler, and N. J. Woolf, eds., 1969, *Quasars and High-Energy Astronomy,* Proceedings of the Second Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, Gordon and Breach, New York.

Douglass, D. H., Jr., 1971, "Properties of 'hollow square' gravitational wave detectors," in Davies 1971. [§37.3, Fig. 37.2]

Douglass, D. H., Jr., *cited by name in* Ex. 37.13.

Douglass, D. H., Jr., and J. A. Tyson, 1971, "New class of gravitational-wave detectors," *Nature 229,* 34–36. [§37.3]

Drabkin, I. E., and S. Drake, 1960, *Galileo Galilei on Motion and on Mechanics,* translations with introductions and notes, University of Wisconsin Press, Madison, Wisc. [Box 1.2]

Drake, S. *See* Drabkin and Drake 1960.

Drell, S. D. *See* Brodsky and Drell 1970.

Drever, R. W., 1961, "A search for anisotropy of inertial mass using a free precession technique," *Phil. Mag. 6,* 683–687. [§38.7]

Dunford, N. and J. T. Schwartz, 1958, *Linear operators,* pp. 467–471, Interscience (now a division of Wiley), New York. *Cited under* Lefschetz 1949.

Durbin, R. P., H. H. Loar, and W. W. Havens, Jr., 1952, "The lifetimes of the pi-plus and pi-minus mesons," *Phys. Rev. 88,* 179–183. [§38.4]

Duyvendak, J. J. L., 1942, "Further data bearing on the identification of the Crab Nebula with the supernova of A.D. 1054, Part I: The ancient oriental chronicles," *Proc. Astron. Soc. Pacific 54,* 91–94. [Box 24.1]

Dyce, R. B. *See* Shapiro, Ash, *et al.* 1971 and Shapiro *et al.* 1972.

Dyson, F. J., 1954, *Advanced Quantum Mechanics,* multilithographed lecture notes, Physics Department, Cornell University. [Box 17.2 part 6]

Dyson, F. J., 1967, "Time variation of the charge of the proton," *Phys. Rev. Lett. 19,* 1291–1293. [§37.3, Fig. 37.2]

Dyson, F. J., 1969, "Seismic response of the Earth to a gravitational wave in the 1-Hz band," *Astrophys. J. 156,* 529–540. [§37.3, Fig. 37.2]

Dyson, F. J., 1972, "The fundamental constants and their time variation," in Salam and Wigner 1972. [§38.6]

Eardley, D., E. Liang, and R. Sachs, 1972, "Velocity-dominated singularities in irrotational dust cosmologies," *J. Math. Phys. 13,* 99–107. [§30.7]

Eckart, C., 1940, "The thermodynamics of irreversible processes, III: Relativistic theory of the simple fluid," *Phys. Rev., 58,* 919–924. [Ex. 22.7]

Ecphantus, *cited by name in* Box 27.7.

Eddington, A. S., 1922, *The Mathematical Theory of Relativity,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§§38.2, 39.3]

Eddington, A. S., 1924, "A comparison of Whitehead's and Einstein's formulas," *Nature 113,* 192. [Boxes 31.1, 31.2]

Eddington, A. S., 1931, "Preliminary note on the masses of the electron, the proton, and the universe," *Proc. Cambridge Phil. Soc. 27,* 15–19. [§44.6]

Eddington, A. S., 1936, *Relativity Theory of Protons and Electrons,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§44.6]

Eddington, A. S., 1946, *Fundamental Theory,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§44.6]

Eddington, A. S., *cited by name in* Box 27.7.

Eddington, A., and G. Clark, 1938, "The problem of *n* bodies in general relativity theory," *Proc. Roy. Soc. A 166,* 465–475. [Ex. 39.15]

Ehlers, J., 1961, "Contributions to the relativistic mechanics of continuous media," *Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math.-Nat. Kl.,* 793–837. [§22.3]

Ehlers, J., ed., 1967, *Relativity Theory and Astrophysics. I, Relativity and Cosmology; II, Galactic Structure; III, Stellar Structure,* American Mathematical Society, Providence, R.I.

Ehlers, J., 1971, "General relativity and kinetic theory," in Sachs 1971. [§22.6, Ex. 22.7, endpapers]

Ehlers, J. *See also* Jordan, Ehlers, and Sachs 1961.

Ehlers, J., P. Geren, and R. K. Sachs, 1968, "Isotropic solutions of the Einstein-Liouville equations," *J. Math. Phys. 9,* 1344–1349. [§27.2]

Ehlers, J., and W. Kundt, 1962, "Exact solutions of the gravitational field equations," in Witten 1962. [§§33.6, 35.9, Ex. 35.8, 35.9]

Ehlers, J., F. A. E. Pirani, and A. Schild, 1972, "The geometry of free-fall and light propagation," *in* O'Raifeartaigh 1972, pp. 63–84. [Boxes 10.2, 16.4]

Ehrenfest, P., 1916, "On the adiabatic changes of a system in connection with the quantum theory," *Amsterdam Acad., Proc. 19,* 576–597. [Box 22.4]

Einstein, A., 1905, "Zur elektrodynamik bewegter Körper," *Ann. Phys. (Germany) 17,* 891–921. [Box 1.5]

Einstein, A., 1908, "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen," *Jarb. Radioakt. 4,* 411–462. [§§7.4, 17.7]

Einstein, A., 1911, "Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes," *Ann. Phys. (Germany) 35,* 898–908, English translation in Lorentz *et al.* 1923. [§§1.3, 7.2, 7.4, 10.1, 16.2]

Einstein, A. 1912, "Si l'on modifie la longueur du pendule . . . ," p. 450 in P. Langevin and M. de Broglie, eds., *La théorie du rayonnement et les quanta,* Gauthier-Villars, Paris, 1912. [Box 22.4]

Einstein, A., 1913a, "Zum gegenwärtigen Stand des Gravitationsproblems," *Phys. Z. 14,* 1249–1262, discussion 1262–1266. [Epigraph to Chap. 35]

Einstein, A., 1913b, letter to Ernst Mach dated June 26. [§21.12, Fig. 21.5]

Einstein, A., 1915a, "Zür allgemeinen Relativitätstheorie," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.,* 778–786 (published November 11). [§17.7]

Einstein, A. 1915b, "Zür allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag)," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.,* 799–801 (published November 18). [§17.7, Box 27.8]

Einstein, A., 1915c. "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber. 47,* 831–839 (published November 25). [§17.7]

Einstein, A., 1915d, "Die Feldgleichungen der Gravitation," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.,* 844–847 (published December 2). [§17.7, Box 27.7]

Einstein, A., 1916a, "Ernst Mach," *Phys. Z. Sowjetunion 17,* 101–104. [Fig. 21.5]

Einstein, A., 1916b, "Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation," *Preuss, Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.* 688–696. [§17.7]

Einstein, A., 1916c, "Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.,* 1111–1116. [§17.7]

Einstein, A., 1917, "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.* 142–152, reprinted in English in Lorentz *et al.* 1923. [§17.3, Boxes 27.1, 27.7]

Einstein, A., 1921, "Geometry and Experience," address to Prussian Academy of Sciences, Berlin, Jan. 27, 1921; published in *Sidelights on Relativity,* Mathuen, London, 1922. [Box 1.11]

Einstein, A., 1931, "Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie," *Preuss, Akad. Wiss. Berlin, Sitzber,* 235–237. [§27.11]

Einstein, A., 1934, *Essays in Science,* Philosophical Library, New York. Translated from *Mein Weltbilde,* Querido Verlag, Amsterdam, 1933. [Epigraph to Chap. 17, §§21.12, 27.11, 27.12, 43.1, 44.6, Box 8.5]

Einstein, A., 1939, "On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses," *Ann. Math. (U.S.A.) 40,* 922–936. [Ex. 25.29]

Einstein, Albert, *Festschrift,* in commemoration of his seventieth birthday, March 14, 1949; *Rev. Mod. Phys. 21* (July 1949), 343–540.

Einstein, A., 1949a, introduction to Schilpp 1949. [Preface, Epigraph to Chap. 44, §1.2]

Einstein, A., 1949b, "Reply to criticisms," in Schilpp 1949. [Epigraph to Chap. 27]

Einstein, A., 1950, *The Meaning of Relativity,* 3d ed., Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. [§21.12, 29.5, 43.1, Box 27.1, endpapers]

Einstein, A., 1954, preface to *Concepts of Space,* M. Jammer, ed., Harper, New York, p. xv. [§1.3]

Einstein, A., 1970, quoted by G. Gamow in *My World Line,* Viking Press, New York (1970), p. 44. [§§17.3, 27.8, Box 27.1]

Einstein, A., *cited by name in* §§1.1, 1.6, 7.1, 7.2, 7.4, 10.1, 12.1, 12.2, 17.3, 20.6, Boxes 12.2, 12.3, 27.7. *See also* Lorentz *et al.* 1923, Born 1971, Holton 1971, Klein 1971.

Einstein, A., and A. D. Fokker, 1914, *Ann. Phys. (Germany), 44,* 321. [§17.6]

Einstein, A., and J. Grommer, 1927, "Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetze," *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. Tech.* 2–13, 235–245. [§20.6]

Einstein, A., and M. Grossmann, 1913, "Entwerf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation," *Zeit. Math. Phys. 62,* 225–261. [§17.7]

Einstein, A., and M. Grossmann, 1914, "Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie," *Zeit. Math. Phys. 63,* 215–225. [§17.7]

Einstein, A., L. Infeld, and B. Hoffmann, 1938, "The gravitational equations and the problem of motion," *Ann. Math. 39,* 65–100. [Ex. 39.15]

Eisenhart, L. P., 1926, *Riemannian Geometry.* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. [§§21.5, 21.12, Ex. 27.4, endpapers]

Ekers, R. D. *See* Muhleman, Ekers, and Fomalont 1970.

Eliot, T. S., 1920, "Tradition and individual talent," in *The Sacred Wood; Essays on Poetry and Criticism,* Methuen, London. [Box 27.7]

Eliot, T. S., 1942, *Little Gidding,* Faber and Faber, London. [§1.7]

Ellis, G. F. R., 1971, "Relativistic cosmology," in Sachs 1971. [§22.3, Ex. 22.6, 29.5]

Ellis., G. F. R., *cited by name in* Boxes 27.7, 34.3, Ex. 32.1. *See also* Hawking and Ellis 1968 *and* 1973, *and* Stewart and Ellis 1968.

Eötvös, R. V., 1889, "Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen," *Math. Naturw. Ber. aus Ungarn 8,* 65–68. [Box 1.2]

Eötvös, R. V., *cited by name in* §§10.1, 38.3, 38.5, 40.9.

Eötvös, R. V., D. Pekár, and E. Fekete, 1922, "Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität," *Ann. Phys. (Germany) 68,* 11–66. [§§10.1, 38.3, 40.9, Boxes 1.2, 38.2]

Epstein, E. E. *See* Dieter *et al.* 1962.

Ernst, F. J., 1968, "7090 FORMAC subroutines: Exterior calculus," report number PORS IIT-9, Illinois Institute of Technology. [Box 14.3]

Esposito, F. P. *See* Chandrasekhar and Esposito 1970.
Esposito, P. B. *See* Anderson *et al.* 1971.
ESRO Conference on Space Physics, Interlaken, Switzerland, September 4, 1969. *See* Ruffini and Wheeler 1971b.
Estabrook, F. B., 1969, "Post-Newtonian *n*-body equations of the Brans-Dicke theory," *Astrophys. J. 158,* 81–83. [Ex. 39.15]
Estermann, I., O. C. Simpson, and O. Stern, 1938, "The free fall of molecules," *Phys. Rev. 53,* 947–948. [§1.3]
Eudoxus, *cited by name in* Box 27.7.
Euler, H. *See* Heisenberg and Euler 1936.
Euler, L., 1760, "Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum esse summam quatuor quadratorum," *Novi Comment, Petrop. 5, 93, Opera 12,* 369ff. [§41.1]
Evenson, K. M., J. S. Wells, F. R. Petersen, B. L. Danielson, G. W. Day, R. L. Barger, and J. L. Hall, 1972, "Speed of light from direct frequency and wavelength measurements of the methane-stabilized laser", *Phys. Rev. Letters 29,* 1346–1349. [§1.5]
Everitt, C. W. F., 1970, "Maxwell as a student," preprint, Stanford University, Stanford, Calif. [Box 14.6]
Everitt, C. W. F., W. M. Fairbank, and W. O. Hamilton, 1970, "General relativity experiments using low-temperature techniques," in Carmeli, Fickler, and Witten 1970, pp. 145–159. [§40.7]
Exton, A. *See* Newman *et al.* 1965.
Fackerell, E. D., 1966, *Relativistic Stellar Dynamics,* unpublished Ph.D. thesis, University of Sydney. [Box 25.9]
Fackerell, E. D., 1968, "Relativistic stellar dynamics," *Astrophys. J. 153,* 643–660. [Box 25.8]
Fackerell, E. D. *See also* Brill *et al.* 1972.
Fackerell, E. D., and J. R. Ipser, 1972, "Weak electromagnetic fields around a rotating black hole," *Phys. Rev. D5,* 2455–2458. [§41.11]
Fackerell, E. D., J. R. Ipser, and K. S. Thorne, 1969, "Relativistic star clusters," *Comments Astrophys. & Space Phys. 1,* 134–139. [§24.6, Box 25.9]
Fadeev, L. D., 1971, "Symplectic structure and quantization of the Einstein gravitation theory," in *Actes du Congrés International des Mathématiciens, Nice 1–10 Septembre 1970,* Gauthier-Villars, Paris, III, 35–40. [Box 21.1]
Fairbank, W. M. *cited by name in* Ex. 37.13. *See also* Everitt, Fairbank, and Hamilton 1970, Witteborn and Fairbank 1967, *and* Witteborn, Knight, and Fairbank 1967.
Faller, J. E. *See* Bender *et al.* 1971.
Faraday, M., *cited by name in* §5.6.
Farley, F. J. M., 1969, "The status of quantum electrodynamics," *Nuovo Cimento 1,* Numero Speciale, 59–86. [§44.2]
Farley, F. J. M. *See also* Bailey *et al.* 1968.
Farley, F. J. M., J. Bailey, R. C. A. Brown, M. Giesch, H. Jöstlein, S. van der Meer, E. Picasso, and M. Tannenbaum, 1966, "The anomolous magnetic moment of the negative muon," *Nuovo Cimento 45,* 281–286. [§38.4]
Farnsworth, D., J. Fink, J. Porter, and A. Thomson, eds., 1972, *Methods of Local and Global Differential Geometry in General Relativity,* Springer, Berlin.
Faulkner, J., and J. R. Gribbin, 1968, "Stability and radial vibration periods of the Hamada-Salpeter white-dwarf models," *Nature 218,* 734–735. [§24.2, Boxes 24.1, 26.1]
Fejér, L., and S. Mikola, eds., 1918, "Báró Eötvös Loránd Füzet," *Matem. Fiz. Lapok 27,* Nos. 6–7, Oct.–Nov., kindly translated into English for use here by Rev. Stanley Jaki. [Box 38.2]
Fekete, E. *See* Eötvös, Pekar, and Fekete 1922.
Fermi, E., 1922, "Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria," *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. & Nat. 31,* 184–187, 306–309. [§6.3]
Fermi, E., 1932, "Quantum theory of radiation," *Rev. Mod. Phys. 4,* 87–132. [§21.12]
Fermi, E., 1949, "On the origin of the cosmic radiation," *Phys. Rev. 75,* 1169–1174. [Box 27.7].
Fermi, E., and A. Turkevich, 1950, unpublished work described in Alpher and Herman 1950, pp. 194ff. [§28.1]
Ferrari, A., and R. Ruffini, 1969, "Theoretical implications of the second time derivative of the period of the pulsar NP 0532," *Astrophys. J. Letters 158,* L71–L75. [Ex. 36.4]
Feynman, R. P., 1942. *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics,* doctoral dissertation, Princeton University. [Boxes 17.2, 21.1]
Feynman, R. P., 1948, "Spacetime approach to nonrelativistic quantum mechanics," *Rev. Mod. Phys. 20,* 367–387. [Box 21.1]
Feynman, R. P., 1949, "Spacetime approach to quantum electrodynamics," *Phys. Rev. 76,* 769–789. [Box 21.1]
Feynman, R. P., 1951, "The concept of probability in quantum mechanics," in Neyman 1951, p. 533. [Box 21.1]
Feynman, R. P., 1955, "Slow electrons in polar crystals," *Phys. Rev. 97,* 660–665. [Box 21.1]
Feynman, R. P., 1963, *Lectures on Gravitation,* unpublished lecture notes prepared by F. B. Morinigo and W. G. Wagner, Calif. Institute of Technology. [§7.1, Box 7.1, §18.1]
Feynman, R. P., 1964, unpublished work cited in Fowler 1964. [Box 24.1]
Feynman, R. P. *See also* Wheeler and Feynman 1945 *and* Wheeler and Feynman 1949.
Feynman, R. P., and A. R. Hibbs, 1965, *Quantum Mechanics and Path Integrals,* McGraw-Hill, New York. [§21.1, Fig. 13.3, Boxes 17.2, 21.1]
Feynman, R. P., R. B. Leighton and M. Sands, 1964, *The Feynman Lectures on Physics,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [§21.3, Box 16.3]
Fickler, S. I. *See* Carmeli, Fickler, and Witten 1970.
Field, G., 1973, "The origin of galaxies," in A. and M. Sandage, eds., *Stars and Stellar Systems, IX: Galaxies and the Universe,* Univ. of Chicago Press, Chicago (in press). [§30.1]
Fierz, M., and W. Pauli, 1939, "Relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field," *Proc. R. Soc. London A 173,* 211–232. [§§18.1, 18.3, 39.1, Box 7.1]
Fierz, M., and V. F. Weisskopf, 1960, *Theoretical Physics in the 20th Century: A Memorial Volume to Wolfgang Pauli,* Interscience, New York.
Fink, J. *See* Farnsworth *et al.* 1972.
Finkelstein, D., 1958, "Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle," *Phys. Rev. 110,* 965–967. [Box 31.2]

Fischer, A. E., and J. B. Marsden, 1972, "The Einstein equations of evolution—A geometric approach," *J. Math. Phys. 13,* 546–568. [§§21.5, 21.6]

Fischer, A. E., 1970, "The theory of superspace," in Carmeli, Fickler, and Witten 1970. [§43.1]

Fitch, J. P. *See* Barton and Fitch 1971 *and* Barton, Bourne, and Fitch 1970.

Flamm, L., 1916, "Beitrage zur Einsteinschen Gravitationstheorie," *Physik. Z. 17,* 448–454. [§23.8]

Flanders, H., 1953, "Development of an extended exterior differential calculus," *Trans. Am. Math. Soc. 75,* 311–326. [§14.5, Ex. 14.9, 14.10]

Flanders, H., 1963, *Differential Forms With Applications to the Physical Sciences,* Academic Press, New York. [§4.1, Boxes 4.4, 8.1]

Fletcher, J. G., 1966, "GRAD Assistant—a program for symbolic algebraic manipulation and differentiation," *Commun. Assoc. Comput. Machinery 9,* 552–553. [Box 14.3]

Fletcher, J. G., R. Clemens, R. Matzner, K. S. Thorne, and B. A. Zimmerman, 1967, "Computer programs for calculating general-relativistic curvature tensors," *Astrophys. J. Lett. 148,* L91–L92. [Box 14.3]

Fock, V. A., 1959, *The Theory of Space, Time, and Gravitation,* Pergamon, New York, translated by N. Kemmer. [Box 39.3. Ex. 39.15, Epigraph to Chap. 21, endpapers]

Fock, V. A., chief editor, 1968, *Abstracts, Fifth International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity,* Publishing House of Tbilisi University, Tbilisi, USSR.

Fock, V. A. *See also* Dirac, Fock, and Podolsky 1932.

Fokker, A. D., 1965, *Time and Space, Weight and Inertia,* Pergamon Press, London. [endpapers]

Fokker, A. D. *See* Einstein and Fokker 1914.

Fomalont, E. B. *See* Muhleman, Ekers, and Fomalont 1970.

Ford, K. W. *See* Deser and Ford 1967.

Ford, K. W., and J. A. Wheeler, 1959a, "Application of semiclassical scattering analysis," *Ann. Phys. (U.S.A.) 7,* 287–322. [§25.6]

Ford, K. W., and J. A. Wheeler, 1959b, "Semiclassical description of scattering," *Ann. Phys. (U.S.A.) 7,* 259–286. [§25.6]

Forman, F. *See* Gittelman *et al.* 1968.

Forward, R. L., 1972, "Geodesy with orbiting gravity gradiometers," in *The Use of Artificial Satellites for Geodesy,* Geophysical Monograph Series, vol. 15, American Geophysical Union, Washington, 239–243. [Box 16.5]

Fourés-Bruhat, Y. *See* Bruhat, Y., *and* Choquet-Bruhat, Y.

Fowler, R. H., 1926, "Dense matter," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 87,* 114–122. [Box 24.1]

Fowler, W. A., 1964, "Massive stars, relativistic polytropes, and gravitational radiation," *Rev. Mod. Phys. 36,* 545–555 and 1104. [Boxes 24.1, 26.2]

Fowler, W. A., 1966, "The stability of supermassive stars," *Astrophys. J. 144,* 180–200. [§24.4, Box 26.2]

Fowler, W. A., 1967, *Nuclear Astrophysics,* American Philosophical Society, Philadelphia, Penn. [§28.1]

Fowler, W. A., 1972, "New observations and old nucleocosmochronologies," in Reines 1972. [§29.7]

Fowler, W. A. *Cited by name in* Box 27.7. *See also* Hoyle and Fowler 1963a *and* 1963b, Hoyle *et al.* 1964, *and* Wagoner, Fowler, and Hoyle 1967.

Fowler, W. A., and F. Hoyle, 1964, "Neutrino processes and pair formation in massive stars and supernovae," *Astrophys. J. Supp. 9,* 201–319. [§24.4]

Fram, D. M. *See* Boughn, Fram, and Partridge 1971.

Friedmann, A., 1922, "Über die Krümmung des Raumes," *Z. Phys. 10,* 377–386. [§§14.1, 27.9, 29.2, Boxes 14.5, 27.6]

Friedmann, A., *cited by name in* §§30.3, 42.1, Boxes 27.6, 27.7.

Frisch, D. H., and J. H. Smith, 1963, "Measurement of the relativistic time dilation using mu-mesons," *Am. J. Phys. 31,* 342–355. [§38.4]

Fröman, N., and P. O. Fröman, *JWKB approximation: contributions to the theory,* North-Holland, Amsterdam, 1965. [§22.5]

Fröman, P. O. *See* Fröman and Fröman 1965.

Fronsdal, C., 1959, "Completion and embedding of the Schwarzschild solution," *Phys. Rev. 116,* 778–781. [§23.8, Box 31.1]

Fujiwara, I., 1962, "The correspondence principle, I," in *Proceedings of the Physics Seminar in Trondheim,* no. 3, Nordita, Copenhagen, Denmark. [Box 21.1]

Fuller, R. W., and J. A. Wheeler, 1962, "Causality and multiply-connected space-time," *Phys. Rev. 128,* 919–929. [§31.6, Fig. 31.5]

Galilei, G., 1592, *De Motu,* unpublished work written at the University of Pisa, 1589–1592; translation in Drabkin and Drake 1961, p. 48. [Box 1.2]

Galilei, G., 1610, *Sidereus Nuncius,* Translated by E. S. Carlos, *The Sidereal messenger,* Rivingtons, London, 1880. [Boxes 1.9, 27.7]

Galilei, G., 1623, *Il Saggiatore,* Accademia dei Lincei, Rome. [epigraph, Chap. 13]

Galilei, G., 1632, *Dialogo dei due massimi sistemi del mundo,* Landini, Florence. Translation by S. Drake, *Galileo Galilei—Dialogue Concerning the Two Chief World Systems—Ptolemaic and Copernican,* Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1953. [Box 1.9]

Galilei, G., 1638, *Discorsi e dimostriazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* Elzevir, Leiden. Translation by H. Crew and A. de Salvio, *Dialogues Concerning Two New Sciences,* Macmillan, New York, 1914; reprinted by Dover, New York, 1954. [Boxes 1.2, 1.9, 27.7]

Galilei, G., *cited by name in* §12.2, *quoted in* epigraph of Chap. 38.

Gamow, G., 1948, "The evolution of the universe," *Nature 162,* 680–682. [§28.1]

Gamow, G., 1967, "Electricity, gravity, and cosmology," *Phys. Rev. Lett. 19,* 759–761. [§38.6]

Gamow, G., 1970, *My World Line,* Viking Press, New York. [Box 27.7]

Gamow, George, March 4, 1904–August 20, 1968, Memorial volume. *See* Reines 1972.

Gaposchkin, S., 1958, "The eclipsing binaries," *Handbuch der Physik 50,* 225–242. [Box 36.3]

Gårding, L., 1945, "Relativistic wave equations for zero rest mass," *Proc. Cambridge Phil. Soc. 41,* 49–56. [Box 32.2]

Garnett, W. *See* Campbell and Garnett 1882.

Gauduchon, P. *See* Berger, Gauduchon, and Mazet 1971.

Gasiorowicz, S., 1966, *Elementary Particle Physics,* Wiley, New York. [Box 7.1]

Gauss, K. F., 1817, letter to Olbers in his *Werke,* VIII, 177. [Epigraph to Chap. 8]

Gauss, K. F., 1830, letter to Bessel in his *Werke,* VIII, 201. [Epigraph to Chap. 8]

Gauss, K. F., 1827, "Disquisitiones generales circa superficies curvas," in *Karl Friedrich Gauss Werke,* IV, 217–258; English translation by J. C. Morehead and A. M. Hiltebeitel, *General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825,* reprinted by Raven Press, New York, 1965. [§§5.9, 22.2, Boxes 5.3, 5.4, 14.1]

Gauss, K. F., *cited by name in* §41.1.

Géhéniau, J., *quoted at end of* Chap. 44.

Geren, P. *See* Ehlers, Geren, and Sachs 1968.

Gerlach, U., 1968, "The equation of state at supranuclear densities and the existence of a third family of superdense stars," *Phys. Rev. 172,* 1325–1330. [§24.2]

Gerlach, U., 1969, "Derivation of the ten Einstein field equations from the semiclassical approximation to quantum geometrodynamics," *Phys. Rev. 177,* 1929–1941. [§43.3, Box 17.2 part 4]

Geroch, R. P., 1967, *Singularities in the Spacetime of General Relativity: Their Definition, Existence, and Local Characterization,* doctoral dissertation, Princeton University. [§§32.7, 44.1, Epigraph to Chap. 34]

Geroch, R. P., 1968, "What is a singularity in general relativity?" *Ann. Phys. (U.S.A.) 48,* 526–540. [§34.6]

Geroch, R. P., 1971, "Spacetime structure from a global viewpoint," in Sachs 1971. [§34.1]

Geroch, R. P., *cited by name in* §§32.7, 42.1, Box 34.1.

Giacconi, R., *cited by name in* Box 27.7.

Gibbons, J. J., *cited by name in* Box 34.3.

Giesch, M. *See* Farley *et al.* 1966.

Gilbert, R. P., and R. Newton, 1970, *Analytic Methods in Mathematical Physics,* Gordon and Breach, New York. [Box 8.5]

Gillispie, C. C. *See* Bernoulli 1733.

Ginzel, F. K., 1882, "Astronomische Untersuchungen über Finsternisse, I: Über die zwischen 26 und 103 nach Chr. stattgefundenen Sonnenfinsternisse im Allgemeinen and die Finsterniss des Plutarch ins besonders," *Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Wien Math.-Nat. Kl. 85II,* 663–747. [Fig. 1.8]

Ginzel, F. K., 1883, "Astronomische Untersuchungen über Finsternisse, II: Grundlagen aus historischen Sonnenfinsternissen zur Ableitung empirischer Correctionen der Mondbahn," *Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Wien Math.-Nat. Kl. 88II,* 629–755. [Fig. 1.8]

Ginzel, F. K., 1884, "Astronomische Untersuchungen über Finsternisse, III: Ermittlung empirischer Correction der Bahn des Mondes," *Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Wien Math.-Nat. Kl. 89II.* [Fig. 1.8]

Ginzel, F. K., 1899, *Spezieller Kanon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Landergebiet der Klassischen Altertumwissenschaften und den Zeitraum von 900 vor Chr. bis 600 nach Chr.,* Mayer, Berlin. [Fig. 1.8]

Godfrey, B. B., 1970a, "Mach's principle, the Kerr metric, and black-hole physics," *Phys. Rev. D 1,* 2721–2725. [Box 33.3]

Godfrey, B. B., 1970b, *A Survey of the Mathematical Properties of Static, Axisymmetric Vacuum Spacetimes,* doctoral dissertation, Princeton University. [§34.1]

Goebel, C. J., 1972, "Comments on the 'vibrations' of a black hole," *Astrophys. J. 172,* L95–L96. [Box 33.3]

Gödel, K., 1931, "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandte Systeme I," *Monatsh. Math. Phys. 38,* 173–198, English translation by B. Meltzer, *On Formally Undecidable Propositions,* with an introduction by R. O. Braithwaite, Basic Books, New York, 1962; outlined and discussed in Nagel and Newman 1958. [Box 44.5]

Gold, T., 1968, "Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources," *Nature 218,* 731–732. [Box 24.1]

Gold, T., 1972, oral remark to J. A. Wheeler. [Epigraph to Chap. 21]

Gold, T., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Bondi and Gold 1948.

Goldberg, S. I. *See* Bishop and Goldberg 1968.

Goldenberg, H. M. *See* Dicke and Goldenberg 1967.

Goldreich, P. and W. H. Julian, 1968, "Pulsar electrodynamics," *Astrophys. J. 157,* 869–880. [§24.3, Box 33.3]

Goldstein, H., 1959, *Classical Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [§§2.1, 9.7, 33.5, Ex. 33.7]

Goldstein, J. *See* Chrétien, Deser, and Goldstein 1969.

Gott, J. R., III, and J. E. Gunn, 1971, "The Coma Cluster as an X-ray source: Some cosmological implications," *Astrophys. J. Lett. 169,* 13–15. [§29.6]

Gowdy, R. H., 1971, "Gravitational waves in closed universes," *Phys. Rev. Lett. 27,* 826–829, and erratum p. 1102. [§30.6]

Gowdy, R. H., 1973, "Vacuum spacetimes with two-parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: Topologies and Boundary conditions," University of Maryland technical report 73-089 (unpublished). [§§21.10, 30.6]

Gratton, L., ed., 1966, *High-Energy Astrophysics,* Academic Press, New York.

Graves, J. C., and D. R. Brill, 1960, "Oscillatory character of Reissner-Nordstrom metric for an ideal charged wormhole," *Phys. Rev. 120,* 1507–1513. [Fig. 34.4, Ex. 31.8]

Greenstein, G. S., 1968a, "Brans-Dicke Cosmology," *Astrophys. Letters, 1,* 139–141. [§28.4]

Greenstein, G. S., 1968b, "Brans-Dicke Cosmology, II," *Ap. Space Sci., 2,* 157–165. [§28.4]

Gribbin, J. R. *See* Faulkner and Gribbin 1968.

GR*n*, *International Conferences on General Relativity and Gravitation. See* Berne 1955 (GR0), Chapel Hill 1957 (GR1), Royaumont 1959 (GR2), Jablonna 1962 (GR3), London 1965 (GR4), Tbilisi 1968 (GR5), Copenhagen 1971 (GR6).

Grommer, J. *See* Einstein and Grommer 1927.

Grossmann, M. *See* Einstein and Grossman 1913 *and* 1914.

Gunn, J. E., 1967, "On the propagation of light in inhomogeneous cosmologies: I, Mean effects," *Astrophys. J. 150,* 737–753. [§29.5]

Gunn, J. E., 1971, "On the distances of the quasistellar objects," *Astrophys. J. Letters, 164,* L133–L118. [Box 28.1]

Gunn, J. E. *Cited by name in* Box 27.7. *See also* Gott and Gunn 1971, Ostriker and Gunn 1969.

Gupta, S. N., 1954, "Gravitation and electromagnetism," *Phys. Rev. 96,* 1683–1685. [§§7.1, 18.1]
Gupta, S. N., 1957, "Einstein's and other theories of gravitation," *Rev. Mod. Phys. 29,* 337–350. [§§7.1, 18.1]
Gupta, S. N., 1962, "Quantum theory of gravitation," in *Recent Developments in General Relativity,* Pergamon, New York, pp. 251–258. [§§7.1, 18.1]
Gurovich, V. Ts., 1965, "The gravitational field of rotating superdense configurations," *Astron. Zhur. 42,* 974–976. English translation in *Sov. Astron.—A.J. 9,* 750–751. [Ex. 26.1]
Gursky, H., *cited by name in* Box 27.7.
Guseynov, O. H. *See* Zel'dovich and Guseynov 1965.
Guthrie, W. K. C., trans., 1939, *Aristotle's On the Heavens,* Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass. [Box 27.7]
Haeberli, W. *See* Barschall and Haeberli 1971.
Hagedorn, R., 1964, *Relativistic Kinematics,* W. A. Benjamin, New York. [§2.10]
Hagihara, Y., 1931, "Theory of the relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild," *Japan. J. Astron. Geophys., 8,* 67–175. [§25.5]
Hall, D. B. *See* Rossi and Hall 1941.
Hall, J. L., 1972. *See* Evenson *et al.* 1972.
Halley, E., 1693, "Emendationes ac notal in vetustas Ablatenii observationes astronomicas cum restitutione tabularum lunisolarum," *Roy. Soc., London, Phil. Trans. 17,* 913. [§1.5]
Halley, E. 1720, "Of the infinity of the sphere of fix'd stars" and "Of the number, order, and light of the fix'd stars," *Roy. Soc. London, Phil. Trans. 31,* 22–24 and 24–26. [Box 27.7]
Hamilton, W. O., *cited by name in* Ex. 37.13. *See also* Everitt, Fairbank, and Hamilton 1970.
Hamilton, W. R., *cited by name in* §41.1 Boxes 17.2, 25.3.
Hamoui, A. *See* Papapetrou and Hamoui 1967 *and* 1968.
Hanni, R. S., and R. Ruffini, 1973, paper in preparation. [Box 33.2]
Hardy, E. *See* Sandage, Tamman, and Hardy 1972.
Harrison, B. K., 1959, "Exact three-variable solutions of the field equations of general relativity," *Phys. Rev. 116,* 1285–1296. [§14.1]
Harrison, B. K., K. S. Thorne, M. Wakano, and J. A. Wheeler, 1965, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse,* Univ. of Chicago Press, Chicago. [§26.1, Fig. 24.2]
Harrison, B. K., and J. A. Wheeler, 1958, "The Harrison-Wheeler equation of state," first presented in *Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers,* Editions Stoops, Brussels, 1959; presented in greater detail in Harrison *et al.* 1965. [§24.2, Fig. 24.2]
Harrison, G. H., 1970, "A Compact Method for Symbolic Computation of the Riemann Tensor," M. S. thesis, Tech. Report, Dept. of Physics and Astronomy, Univ. of Maryland, College Park. [Box 14.3]
Hartle, J. B., 1967, "Slowly rotating relativistic stars, I: Equations of structure," *Astrophys. J. 150,* 1005–1029. [Ex. 26.1]
Hartle, J. B., 1970, "Slowly rotating relativistic stars, IV: Rotational energy and moment of inertia for stars in differential rotation," *Astrophys. J. 161,* 111–118. [§20.5, Ex. 33.13]
Hartle, J. B., 1971, "Long-range neutrino forces exerted by Kerr black holes," *Phys. Rev. D 3,* 2938–2940. [§41.11, Boxes 25.2, 32.2, 33.1]
Hartle, J. B., 1972, "Can a Schwarzschild black hole exert long-range neutrino forces?" in Klauder 1972. [Boxes 25.2, 32.2, 33.1]
Hartle, J. B. *See also* Brill and Hartle 1964, Hawking and Hartle 1972.
Hartle, J. B., and D. H. Sharp 1965, "Variational principle for the hydrostatic equilibrium of a relativistic, rotating fluid," *Phys. Rev. Lett. 15,* 909–911. [Ex. 26.1]
Hartle, J. B., and K. S. Thorne, 1968, "Slowly rotating relativistic stars, II: Models for neutron stars and supermassive stars," *Astrophys. J. 153,* 807–834. [Box 36.1, Fig. 24.2]
Hartle, J. B., and K. S. Thorne, 1974, "Slowly rotating relativistic stars, VII: Emission of gravitational waves due to quasiradial pulsation," *Astrophys. J.,* in preparation. [Box 14.3]
Harvey, J. A. *See* Dabbs *et al.* 1965.
Hauser, W., 1970, "On the fundamental equations of electromagnetism," *Am. J. Phys. 38,* 80–85. [§4.1]
Havens, W. W., Jr. *See* Durbin, Loar, and Havens 1952.
Hawking, S. W., 1966a, "Singularities and the geometry of space-time" Adams Prize Essay, Cambridge University, Cambridge, England. [Box 34.3]
Hawking, S. W., 1966b, "The occurrence of singularities in cosmology," *Proc. R. Soc. London A 294,* 511–521. [Box 34.3]
Hawking, S. W., 1969, "On the rotation of the Universe," *Observatory 89,* 38–39. [Box 34.3]
Hawking, S. W., 1971a, "Gravitationally collapsed objects of very low mass," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 152,* 75–78. [Box 33.3]
Hawking, S. W., 1971b, "Gravitational radiation from colliding black holes," *Phys. Rev. Lett. 26,* 1344–1346. [§34.5, Boxes 33.1, 33.4, Ex. 34.4]
Hawking, S. W., 1972a, "Black holes in general relativity," *Commun. Math. Phys. 25,* 152–166. [§34.5, Boxes 33.1, 33.3, 33.4, 34.3, Ex. 34.4]
Hawking, S. W., 1972b, "Gravitational Radiation: The Theoretical Aspect," *Contemp. Phys. 13,* 273–282. [Box 34.3]
Hawking, S. W., 1973, "The Event Horizon," in DeWitt and DeWitt 1973. [§§34.1, 34.5]
Hawking, S. W., *cited by name in* §§32.7, 42.1, Box 27.7. *See also* Bardeen, Carter, and Hawking 1973 *and* Collins and Hawking 1973.
Hawking, S. W., and G. F. R. Ellis, 1968, "The cosmic black-body radiation and the existence of singularities in our universe," *Astrophys. J. 152,* 25–36. [§28.3, Box 34.3]
Hawking, S. W., and G. F. R. Ellis, 1973, *The Large Scale Structure of Space-time,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§§34.1, 34.6, Box 33.1, endpapers]
Hawking, S. W., and J. B. Hartle, 1972, "Energy and angular momentum flow into a black hole," *Commun. Math. Phys. 27,* 283–290. [Box 33.3]
Hawking, S. W., and R. Penrose, 1969, "The singularities of gravitational collapse and cosmology., *Proc. R. Soc. London A 314,* 529–548. [§§34.6, 44.1]

Hayakawa, S., 1965a, "Cosmological interpretation of the weak forces," *Prog. Theor. Phys. 33,* 538–539. [§44.6]
Hayakawa, S., 1965b, "Atomism and cosmology," *Prog. Theor. Phys. Supp.*, special number, Yukawa thirtieth anniversary issue, 532–541. [§44.6]
Hazard, C., *cited by name in* Box 27.7.
Hearn, A. C., 1970, "A program for symbolic algebraic computation," in *Proceedings of SHARE XXXIV,* 4.470–4.481. [Box 14.3]
Heckmann, O. *See* Schücking and Heckmann 1958.
Heisenberg, W., and H. Euler, 1936, "Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons," *Z. Phys. 98,* 714–732. [Ex. 40.8]
Helmholtz, H. L. F., *cited by name in* Box 38.2.
Henderson, T., *cited by name in* Box 27.7.
Hepp, K., 1969, *Théorie de la renormalisation,* Springer, Berlin. [Box 17.2 part 6]
Herman, R. C. *See* Alpher and Herman 1948a,b *and* 1950.
Hermann, R., 1966, *Lie Groups for Physicists,* W. A. Benjamin, New York. [§8.2]
Hernandez, W. C., Jr., 1967, "Material sources for the Kerr metric," *Phys. Rev. 159,* 1070–1072. [§33.3]
Heron (Hero of Alexandria), 1899, *Heronis Alexandrini Opera Omnia,* Teubner, Leipzig; *also in* G. Sarton, *A History of Science,* Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1952, I, 73. [Box 13.1]
Heron, G., trans., 1954, *Nicolas Cusanus's Of Learned Ignorance,* Yale Univ. Press, New Haven, Conn. [Box 27.7]
Hertz, G. L., *cited by name in* Box 17.3.
Hewish, A., *cited by name in* Box 27.7.
Hewish, A., S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott, and R. A. Collins, 1968, "Observation of a rapidly pulsating radio source," *Nature 217,* 709–713. [Box 24.1]
Hey, J. S., *cited by name in* Box 27.7.
Hibbs, A. R., 1951, "Quantum mechanics," in M. Kac, *Probability and Related Topics in Physical Science,* Interscience, New York, pp. 205–221. [Box 21.1]
Hibbs, A. R. *See also* Feynman and Hibbs 1965.
Hicks, N. J., 1965, *Notes on Differential Geometry,* Van Nostrand, Princeton, N.J. [Box 8.1, endpapers]
Hilbert, D., 1915, "Die Grundlagen der Physik," *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr., Math.-Phys. Kl.,* 395–407; see also *Math. Annalen 92* (1924), 1–32. [§§17.7, 21.2, Box 17.2]
Hilbert, D., 1917, "Die Grundlagen der Physik (Zweite Mitteilung)," *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr., Math.-Phys. Kl.,* 53–76. [§17.7]
Hilbert, D., *cited by name in* §21.1.
Hill, H. A. *See* Turner and Hill 1964.
Hill, J. M., 1971, "A Measurement of the gravitational deflection of radio waves by the sun," *Mon. Not. R. Astron. Soc., 154,* 7P-11P. [Box 40.1]
Hill, T., 1967, unpublished work referred to in DeWitt 1967c. [Box 17.2 part 6]
Hiltebeitel, A. M. *See* Gauss 1827
Hipparchus, *cited by name in* Box 16.1.
Hlavatý, Václav, *Festschrift* on the occasion of his 70th birthday, Jan. 27, 1964. *See* Hoffmann 1966.
Hönl, H., 1962, "Allgemeine Relativitätstheorie und Machsches Prinzip," in *Physikertagung Wien,* Physik Verlag, Mosbach/Baden, Germany. [§§21.12, 43.1]
Hoffmann, B., ed., 1966, *Perspectives in Geometry and Relativity: Essays in Honor of Václav Hlavatý,* Indiana Univ. Press, Bloomington.
Hoffman, B. *See also* Einstein, Infeld, and Hoffman 1938.
Hoffman, W. F. *See* Chiu and Hoffman 1964.
Hohn F. E., 1966, *Applied Boolean Algebra: An Elementary Introduction,* 2d ed., Macmillan, New York. [§44.5]
Holden, D. J., 1966, "An investigation of the clustering of radio sources," *Mon. Not. R. Astron. Soc., 133,* 225–228. [§27.1]
Holdridge, D. B. *See* Ohandley *et al.*, 1969.
Holmes, A., *cited by name in* Box 27.7.
Holton, G., 1965, personal communication, London. [Preface]
Holton, G., 1971, *Einstein. The Life and Times, by R. W. Clark,* book review, *New York Times Book Review,* September 5, 1–20. [Box 1.11]
Holton, G. *See also* Kollros 1956.
Horstmann, H. *See* Dabbs *et al.* 1965
Hoyle, F., 1948, "A new model for the expanding universe," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 108,* 372–382. [§28.4]
Hoyle, F., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Fowler and Hoyle 1964 *and* Wagoner, Fowler, and Hoyle 1967.
Hoyle, F., and W. A. Fowler, 1963a, "On the nature of strong radio sources," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 125,* 169–176. [§24.5, Box 24.1]
Hoyle, F., and W. A. Fowler, 1963b, "Nature of strong radio sources," *Nature 197,* 533–535. [§24.5, Box 24.1]
Hoyle, F., W. A. Fowler, G. R. Burbidge, and E. M. Burbidge, 1964, "On relativistic astrophysics," *Astrophys. J. 139,* 909–928. [Box 33.3]
Hsiang, W.-C., and B. J. Sanderson, 1965, "Twist-spinning spheres in spheres," *Illinois J. Math. 9,* 651–659. [Box 44.3]
Hubble, E. P., 1920, "Photographic investigations of faint nebulae" (Ph.D. thesis), *Pub. Yerkes Obs., 4,* 69–85. [Box 29.5]
Hubble, E. P., 1925, "NGC 6822, a remote stellar system," *Astrophys. J. 62,* 409–433. [Box 29.5]
Hubble, E. P., 1926a, "A spiral nebula as a stellar system: Messier 33," *Astrophys. J. 63,* 236–274. [Box 29.5]
Hubble, E. P., 1926b, "Extra-galactic nebulae," *Astrophys. J. 64,* 321–369. [Box 29.5]
Hubble, E. P., 1929, "A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 15,* 169–173. [§§27.9, 29.2, Boxes 27.1, 29.5]
Hubble, E. P., 1934a, *Red-shifts in the spectra of nebulae* (Halley Lecture), Clarendon Press, Oxford, Eng. [Box 29.5]
Hubble, E. P., 1934b, "The distribution of extra-galactic nebulae," *Astrophys. J. 79,* 8–76. [§27.1, Box 29.5]
Hubble, E. P., 1936, "Effects of redshifts on the distribution of nebulae," *Astrophys. J. 84,* 517–554. [§27.1]
Hubble, E. P., *cited by name in* §17.3, Boxes 27.7, 29.5. *See also* Mayall 1970.
Hubble, E. P., and M. L. Humason, 1931, "The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae," *Astrophys. J. 74,* 43–80. [Box 29.5]

Hughes, R. G., and M. S. Longair, 1967, "Evidence of the isotropy of faint radio sources," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 135*, 131–137. [§27.1]

Hughes, V. W., H. G. Robinson, and V. B. Beltran-Lopez, 1960, "Upper limit for the anisotropy of inertial mass from nuclear resonance experiments," *Phys. Rev. Lett. 4*, 342–344. [§38.7]

Hughston, L., 1969, "Multifluid cosmologies," *Astrophys. J. 158*, 987–989. [§27.9]

Humason, M. L. *See* Hubble and Humason 1931.

Huneke, J. C. *See* Wasserburg, Schramm, and Huneke 1969.

Hunter, C., 1967, "Fragmentation," in Ehlers 1967, pp. 169–194. [Boxes 32.2, 32.3]

Huygens, C., 1698, *Cosmotheoros*, The Hague. English translation, *The Celestial Worlds Discovered or, Conjectures Concerning the Inhabitants, Plants and Productions of the Worlds in the Planets*, London, also 1698. [Box 27.7]

Imshennik, V. S. *See* Ivanova, Imshennik, and Nadezhin 1969.

Infeld, Leopold, 1962, volume dedicated to him in connection with his 60th birthday, Feb. 8, 1958: *Recent Developments in General Relativity*, Pergamon Press, Oxford, and PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw.

Infeld, L., ed., 1964, *Conférence Internationale sur les théories relativistes de la gravitation*, Gauthier-Villars, Paris, France.

Infeld, L. *See also* Einstein, Infeld, and Hoffman 1938.

Infeld, L., and J. Plebanski, 1960, *Motion and Relativity*, Pergamon, New York. [§20.6, endpapers]

Infeld, L., and A. Schild, 1949, "On the motion of test particles in general relativity," *Rev. Mod. Phys. 21*, 408–413. [§20.6]

Ingalls, R. P. *See* Shapiro, Ash *et al.* 1971, Shapiro, Smith *et al.* 1971, Shapiro *et al.* 1972.

Ipser, J. R., 1969, "Relativistic, spherically symmetric star clusters, III: Stability of compact isotropic models," *Astrophys. J. 158*, 17–43. [Boxes 24.1, 25.9]

Ipser, J. R., 1970, "Gravitational radiation from slowly rotating, fully relativistic stars," *Astrophys. J. 166*, 175–196. [Ex. 36.4]

Ipser, J. R., 1971, "Electromagnetic test fields around a Kerr-metric black hole," *Phys. Rev. Lett. 27*, 529–531. [§41.11, Ex. 33.14, Box 33.3]

Ipser, J. R. *See also* Brill *et al.* 1972, Fackerell and Ipser 1972, *and* Fackerell, Ipser, and Thorne 1969.

Ipser, J. R., and K. S. Thorne, 1968, "Relativistic, spherically symmetric star clusters, I: Stability theory for radial perturbations," *Astrophys. J. 154*, 251–270. [Box 24.1]

Isaacson, R. A., 1968a, "Gravitational radiation in the limit of high frequency, I: The linear approximation and geometrical optics," *Phys. Rev. 166*, 1263–1271. [§35.13]

Isaacson, R. A., 1968b, "Gravitational radiation in the limit of high frequency, II: Nonlinear terms and the effective stress tensor," *Phys. Rev. 166*, 1272–1280. [§35.13, Ex. 35.14]

Isenberg, J. A., *cited by name in* Figure 25.7.

Israel, W., 1960, "Relativistic theory of shock waves," *Proc. Roy. Soc. A 259*, 129–143. [§22.2, Box 22.2]

Israel, W., 1966, "Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity," *Nuovo Cimento 44 B*, 1–14, and correction in *48 B*, 463. [§§21.5, 21.13]

Israel, W., 1967a, "Event horizons in static vacuum space-times," *Phys. Rev. 164*, 1776–1779. [Box 33.1]

Israel, W., 1967b, "Gravitational collapse and causality," *Phys. Rev. 153*, 1388–1393. [Ex. 21.27]

Israel, W., 1968, "Event horizons in static electrovac space-times," *Commun. Math. Phys. 8*, 245–260. [Box 33.1]

Israel, W., 1970, *Differential Forms in General Relativity*, Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, series A, no. 17. [§4.1]

Israel, W., 1971, personal communication. [Box 33.4]

Israel, W., 1972, "The relativistic Boltzman Equation," in O'Raifeartaigh 1972, pp. 201–241. [§22.6]

Israel, W., *cited by name in* Box 34.3. *See also* de la Cruz and Israel 1967.

Ithaca 1965. *See* Cornell University 1965 *or* Ehlers 1967.

Ivanova, L. N., V. S. Imshennik, and D. K. Nadezhin, 1969, "Investigations into the dynamics of supernova explosions," *Sci. Inf. Astron. Council USSR Acad. Sci. 13*, 3–93. [§32.7]

Jablonna 1962, *Relativistic Theories of Gravitation*, proceedings of a conference held in Warsaw and Jablonna, July 1962, edited by L. Infeld, Pergamon Press, Oxford, 1964.

Jackson, J. D., 1962, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York. [§2.1]

Jacobi, K. G. J., *cited by name in* Box 17.2.

Jaffe, J., 1969, "Collapsing objects and the backward emission of light," *Ann. Phys. U.S.A. 55*, 374–390. [§32.3]

Janis, A. I. *See* Couch *et al.* 1968.

Jauch, J., 1968, *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. [Box 44.5]

Jeans, J., *cited by name in* Box 27.7.

Jones, B. T. J., and P. J. E. Peebles, 1972, "Chaos in Cosmology," *Comm. Astrophys. Space Sci. 4*, 121–128. [§30.1]

Jöstlein, H. *See* Bailey *et al.* 1968 *and* Farley *et al.* 1966.

Johnson, F. R., 1937, *Astronomical Thought in Renaissance England*, John Hopkins Press, Baltimore. [Box 27.7]

Jordan, P., 1955, *Schwerkraft und Weltall*, Vieweg und Sohn, Braunschweig. [§§38.6, 44.6]

Jordan, P., 1959, "Zum gegenwärtigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen," *Z. Phys. 157*, 112–121. [§§38.2, 38.6, 44.6, Box 39.1]

Jordan, P., *cited by name in* §§40.1, 40.6, 40.9.

Jordan, P., J. Ehlers, and R. Sachs, 1961, "Exact solutions of the field equations of general relativity, II: Contributions to the theory of pure gravitational radiation," (in German) *Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math.-Nat. Kl. 1*, 3–60. [§22.5]

Julian, W. H. *See* Goldreich and Julian 1968.

Jurgens, R. F. *See* Shapiro, Ash *et al.* 1971.

Kac, M., and S. Ulam, 1968, *Mathematics and Logic: Retrospect and Prospects*, Praeger, New York; abridged paperback edition by Pelican Books, Harmondsworth, Middlesex, 1971. [Box 44.5]

Kant, I., 1754, "Whether the earth has undergone an alteration of its axial rotation," *Wöchentliche Frag- und Anzeigungs-Nachrichten*, Kanter, Königsberg, mid-June issue [§1.5]

Kant, I., 1755, *Allgemeine Naturgeschichte und Theories des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem Mechanischen Ursprunge des ganzen Welt gebäudes nach Newtonischen Grundsätzen Abgehandelt*, Petersen, Konigsberg and Leipzig. Translation by W. Hastie, with introduction

by M. K. Munitz, *Universal Natural History and Theory of the Heavens,* Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1969. [Box 27.7]

Kaplan, S. A., 1949a, "Sverkhplotnye' zvezdy ('Superdense' stars)," *Naukovy Zapiski (Sci. Notes Univ. Lwow) 15,* 109–115. [Box 24.1]

Kaplan, S. A., 1949b, "O krugovykh orbitakh v teorii tyagoteniya Einshteina (On circular orbits in Einstein's theory of gravitation)," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 19,* 951–952. [Box 24.1]

Kasner, E., 1921a, "Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations," *Am. J. Math. 43,* 217–221. [§30.2]

Kasner, E., 1921b, "Finite representation of the solar gravitational field in a space of six dimensions," *Am. J. Math 43,* 130–133. [§23.8]

Kasner, E., 1921c, "The impossibility of Einstein fields immersed in flat space of five dimensions," *Am. J. Math 43,* 126–129. [§23.8]

Kasner, E., *cited by name in* Boxes 27.7, 30.1.

Kaula, W. M. *See* Bender *et al.* 1971.

Keller, J. B., R. M. Lewis, and B. D. Seckler, 1956, "Asymptotic solution of some diffraction problems," *Commun. Pure & Appl. Math. 9,* 207–265. [§22.5]

Keller, L. V., *cited by name in* Box 27.6.

Kelley, J. L., 1955, *General Topology,* Van Nostrand, New York. [Box 34.2]

Kelvin. *See* Thomson, W., Lord Kelvin.

Kemble, E. C., 1937, *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics,* McGraw-Hill, New York. Later editions available in paperback. [Box 25.3]

Keres, P. *See* Unt and Keres 1972.

Kepler, J., 1609, *Astronomia nova αιτιολογητος, seu Physica coelestis tradita comentariis de motibus stellae Martis,* Prague. [Box 27.7]

Kepler, J., 1619, *De Harmonice Mundi,* Augsburg. [Box 27.7]

Kerr, R. P., 1963, "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics," *Phys. Rev. Lett. 11,* 237–238. [§§33.2, 33.6, Box 33.2]

Kerr, R. P., and A. Schild, 1965, "A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations," in *Proceedings of the Galileo Galilei Centenary Meeting on General Relativity, Problems of Energy and Gravitational Waves,* G. Barbera, ed., Comitato Nazionale per le Manifestazione Celebrative, Florence, pp. 222–233. [§33.6]

Khalatnikov, I. M., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Belinsky and Khalatnikov 1969a, 1969b, *and* 1970, Belinsky, Khalatnikov, and Lifshitz 1970, Belinsky, Lifshitz, and Khalatnikov 1971, Lifshitz and Khalatnikov 1963a *and* 1963b, *and* Ryan 1972b.

Khalatnikov, I. M., and E. M. Lifshitz, 1970, "General cosmological solutions of the gravitational equations with a singularity in time," *Phys. Rev. Lett. 24,* 76–79. [§34.6, Box 30.1]

Khuri, N., 1957, unpublished calculation quoted in Lindquist and Wheeler 1957. [§25.5]

Killing, W., 1892, "Über die Grundlagen der Geometrie," *J. Reine Angew. Math. 109,* 121–186. [§25.2]

Kilmister, C. W., 1971, "More about the King and the Vizier," *Gen. Relativity & Grav. 2,* 35–36. [Fig. 44.3]

Kirchhoff, G.-R., *cited by name in* Box 38.2.

Kittel, C., 1958, *Elementary Statistical Physics,* Wiley, New York. [§23.4]

Klauder, J., ed., 1972, *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler,* W. H. Freeman, San Francisco.

Klauder, L. T., Jr., M. Wakano, J. A. Wheeler, and R. Willey, 1959, "Kinematics of a spherical isotropic uniform universe," in *Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers,* Éditions Stoops, Brussels, Belgium. [§29.5]

Klein, F., 1872, "Erlangerprogram: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrischen Forschungen," translation in *Bull. Amer. Math. Soc. 2,* 215–249, 1893. [§2.2]

Klein, M. J., 1971, *Einstein: The Life and Times, by R. W. Clark,* book review, *Science, 174,* 1315–1316. [Box 1.1]

Klein, O., 1966, "Boundary conditions and general relativity" in A. de-Shalit, H. Feshbach, and L. Van Hove, eds., *Preludes in Theoretical Physics in Honor of V. F. Weisskopf,* North Holland, Amsterdam, pp. 23–26. [Box 27.7]

Klein, O., 1971, "Arguments concerning relativity and cosmology," *Science 171,* 339–345. [§§27.10, 27.11, Box 27.7]

Klein, O. *See also* Alfvén and Klein 1962.

Klemperer, W. B. *See* Deutsch and Klemperer 1962.

Kline, M., 1954, "Asymptotic solution of linear hyperbolic partial-differential equations," *J. Rat. Mech. & Anal. 3,* 315–342. [§22.5]

Klüber, H. V., 1960, "The determination of Einstein's light-deflection in the gravitational field of the sun," *Vistas in Astronomy 3,* 47–77, London, Pergamon Press. [Box 40.1]

Kluitenberg, G. A., and S. R. deGroot, 1954, "Relativistic thermodynamics of irreversible processes, III," *Physica 20,* 199–209. [§22.2]

Kneebone, G. T., 1963, *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics: An Introductory Survey,* Van Nostrand, Princeton, N. J. [Box 44.5]

Knight, L. V. *See* Witteborn, Knight, and Fairbank 1967.

Kollros, L., 1956, *in* Carl Seelig, ed. *Helle Zeit- Dunkle Zeit—In Memoriam Albert Einstein,* Europa, Zurich. We thank Professor G. Holton for this quotation. [preface]

Kovács, S., *cited by name in* ex. 35.20.

Kraichnan, R. H., 1955, "Special-relativistic derivation of generally covariant gravitation theory," *Phys. Rev. 55,* 1118–1122. [§§7.1, 18.1]

Kramers, H. A., 1957, *Quantum Mechanics,* North Holland Pub. Co., Amsterdam, Holland. Translated from the German by D. ter Haar. [§21.1]

Krefetz, E., 1967, "The equilibrium of slowly rotating configurations in the post-Newtonian approximation: Corrections to Clairaut's equations," *Astrophys. J. 148,* 589–612. [Ex. 26.1]

Kretschmann, E., 1917, "Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprungliche Relativitätstheorie," *Ann. Phys. (Germany) 53,* 575–614. [§§12.5, 17.6]

Kreuzer, L. B., 1968, "Experimental measurement of the

equivalence of active and passive gravitational mass," *Phys. Rev. 169,* 1007–1012. [§40.8]
Krogh, C., and R. Baierlein, 1968, "Lunar laser ranging and the Brans-Dicke theory," *Phys. Rev. 175,* 1576–1579. [§40.6]
Krotkov, R. *See* Bertotti, Brill, and Krotkov 1962 *and* Roll, Krotkov, and Dicke 1964.
Kruskal, M. D., 1960, "Maximal extension of Schwarzschild metric," *Phys. Rev. 119,* 1743–1745. [§31.4, Box 31.1]
Kuchař, K., 1968, "Charged shells in general relativity and their gravitational collapse," *Czech J. Phys. B 18,* 435–463. [§21.13]
Kuchař, K., 1970, "Ground state functional of the linearized gravitational field," *J. Math. Phys. 11,* 3322–3334. [§43.4]
Kuchař, K., 1971a, "Canonical quantization of cylindrical gravitational waves," *Phys. Rev. D 4,* 955–986. [§§21.1, 21.10]
Kuchař, K., 1971b, "Gravitational action functional reexpressed by means of intrinsic and extrinsic curvature," unpublished lecture given in the course *Relativity* at Princeton University. [§§21.6, 21.11, Ex. 21.10]
Kuchař, K., 1972, "A bubble-time canonical formalism for geometrodynamics," *J. Math. Phys. 13,* 768–781. [§§21.1, 21.10, 21.11, Ex. 21.24]
Kuchař, K., *cited by name in* §21.1, Ex. 13.7, 21.10.
Kuhlthau, A. R. *See* Rose *et al.* 1969.
Kundt, W., 1971, "Cosmological density fluctuations during Hadron stage," in Sachs 1971, pp. 365–372. [§28.1]
Kundt, W. *See also* Ehlers and Kundt 1962.
Kundt, W., and E. T. Newman, 1968, "Hyperbolic differential equations in two dimensions," *J. Math. Phys. 9,* 2193–2210. [§§35.8, 38.8]
Künzle, H. P., 1971, "On the Spherical Symmetry of a Static Perfect Fluid," *Commun. Math. Phys. 20,* 85–100. [§23.1]
Kuper, C. G., and A. Peres, eds., 1971, *Relativity and Gravitation,* Gordon and Breach, New York.
Kursunoglu, B., 1962, *Modern Quantum Theory,* W. H. Freeman, San Francisco. [Box 21.1]
Kustaanheimo, P., 1966, "Route dependence of the gravitational red shift," *Phys. Lett. 23,* 75–77. [§39.1]
Lagrange, J. L., *cited by name in* Box 17.2.
Lamb, W. E., Jr., and R. C. Retherford, 1947, "Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method," *Phys. Rev. 72,* 241–243. [Fig. 43.3, Box 17.2 part 6]
Lambert, J. H., 1761, *Kosmologischen Briefe,* Augsburg; see his *The System of the World,* translated, with modifications, from the French by J. Jacque, London, 1800; reprinted in part in Munitz 1957. [Box 27.7]
Lanczos, K., 1922, "Bemerkung zur de Sitterschen Welt," *Phys. Z. 23,* 539–543. [§21.13]
Lanczos, K., 1924, "Flächenhafte Verteilung der Materie in der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Ann. Phys. (Germany) 74,* 518–540. [§21.13]
Lanczos, K., 1970, *The Variational Principles of Mechanics,* Univ. of Toronto Press, Toronto, 4th ed. [Box 21.1]
Landau, L. D., 1932, "On the theory of stars," *Phys. Z. Sowjetunion 1,* 285–288. [Box 24.1]
Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, 1959, *Fluid Mechanics,* Pergamon Press, London. [Ex. 22.7]
Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, 1960, *Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [Box 22.4]
Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, 1962, *The Classical Theory of Fields,* translated by M. Hamermesh, Addison-Wesley, Reading, Mass. [§§20.3, 20.5, 36.1, endpapers]
Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, 1971, *The Classical Theory of Fields,* 3d rev. English ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, and Pergamon, London. [endpapers]
Langer, W. D., and A. G. W. Cameron, 1969, "Effects of hyperons on the vibrations of neutron stars," *Astrophys. & Space Sci. 5,* 213–253. [§24.3]
Lao-tzu, 3d century B.C. *Tao Tê Ching,* Poem 1. Translated as *The Way of Life,* R. B. Blakney, New American Library, 1955; translation revised by Janet Ten Broeck. [Epigraph to Chap. 18]
Langevin, P. *See* Einstein 1912.
Laplace, P. S., 1795, *Le Système du monde,* vol. II, Paris. Published in English as *The System of the World,* W. Flint, London, 1809. [Fig. 24.1, Box 24.1, Epigraph to chap. 33]
Laplace, P. S., *cited by name in* Box 17.2.
Lascoux, J., 1968, "Perturbation theory in quantum field theory and homology," in DeWitt and Wheeler 1968, 354–419. [Ex. 4.5]
Laurence, D. H. *See* Boni, Russ, and Laurence 1960.
Lawson, R. W., *cited by name in* Box 27.7.
Leavitt, H., *cited by name in* Box 27.7.
Lebovitz, N. R. *See* Chandrasekhar and Lebovitz 1968.
Lecat, M., 1924, *"Bibliographie de la relativité,"* Lamertine, Bruxelles, cited in preface of present bibliography.
Ledoux, P., and Th. Walraven, 1958, "Variable stars," *Handbuch der Physik 51,* S, Flügge ed., Springer-Verlag, Berlin, pp. 353–604. [Box 24.2]
Lefschetz, S. 1949, *Introduction to Topology,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. For a fuller account of fixed-point theorems, see Dunford and Schwartz 1958. [§36.1]
Leibniz, G. W., 1714, *La Monadologie.* English translation available in several books; parts included in P. P. Wiener, ed., *Leibniz Selections,* Scribners, New York, 1951. [§44.6]
Leibniz, G. W., 1961, untitled essay in his *Philosophischen Schriften, vol. 7,* ed. by C. J. Gerhardt, Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, p. 200. [Epigraph to Chap. 21]
Leibniz, G. W., *quoted at end of* Chap. 44.
Leighton, R. B., 1959, *Principles of Modern Physics,* McGraw-Hill, New York. [§2.1]
Leighton, R. B. *See also* Feynman, Leighton, and Sands 1964.
Lemaître, G., 1933a, "Formation of nebulae in the expanding universe," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 196,* 1085–1087. [§30.6]
Lemaître, G., 1933b, "Spherical condensations in the expanding universe," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 196,* 903–904. [§30.6]
Lemaître, G., 1933c, "L'univers en expansion," *Ann. Soc. Sci. Bruxelles I A53,* 51–85. [Box 31.1]
Lemaître, G., 1949, cited in Schilpp 1949, p. 440. [Epigraph to Chap. 36]

Lemaître, G., *cited by name in* Box 27.7.

Lenin, V. I., 1927, *Materialism and Empiriocriticism: Critical Comments on a Reactionary Philosophy*, International Publications, New York, 2d English ed. of *Materializm' i Empiriokrititsizm': Kriticheskia Zametki ob' Odnoi Reaktsionnoi Filosofii*, Zveno Press, Moscow, 1909. [§21.12]

Lense, J. *See* Thirring and Lense 1918.

Les Houches, France, Ecole d'ete de physique theorique: 1963, *see* DeWitt and DeWitt 1964b; 1966, *see* DeWitt, Schatzman, and Veron 1967 (third volume of three); 1972, *see* DeWitt and DeWitt 1973.

Leutwyler, H., 1968, "Boundary conditions for the state functional in the quantum theory of gravity," in DeWitt and Wheeler 1968, pp. 309–317. [§43.3]

Lewis, R. M., 1958, "Asymptotic expansion of steady-state solutions of symmetric hyperbolic linear differential equations," *J. Rat. Mech. & Math. 7*, 593–641. [§22.5]

Lewis, R. M. *See also* Keller, Lewis, and Seckler 1956.

Liang, E. *See* Eardley, Liang, and Sachs 1972.

Lichnerowicz, A., 1944, "L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps," *J. Math. Pures & Appl. 23*, 37–63. [§21.11]

Lichnerowicz, A., 1955, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris. [endpapers]

Lichnerowicz, A., 1961a, "Anticommutateur du champ spinoriel en relativité générale," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 252*, 3742–3744. [Box 44.3]

Lichnerowicz, A., 1961b, "Anticommutateur pour le champ correspondant au spin 3/2 sur un espace d'Einstein," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 253*, 940–942. [Box 44.3]

Lichnerowicz, A., 1961c, "Théorie de Petiau-Duffin-Kemmeren," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 253*, 983–985. [Box 44.3]

Lichnerowicz, A., 1962, "Radiations en relativité générale," especially "Le tenseur de superénergie," in CNRS 1962, pp. 93–106. [Ex. 15.2]

Lichnerowicz, A., 1964, "Propagateurs, commutateurs, et anticommutateurs en relativité générale," in DeWitt and DeWitt 1964. [Box 44.3, Ex. 15.2]

Lichnerowicz, A., 1967, *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics; Lectures on the Existence of Solutions*, W. A. Benjamin, New York. [§§22.2, 22.3, Box 22.2]

Lichnerowicz, A., 1971, "Ondes des choc, ondes infinitesimales et rayons en hydrodynamique et magnetohydrodynamique relativistes," in Cattaneo 1971, pp. 88–203. [§22.2, Box 22.2]

Lichtenberg, D. B., 1965, *Meson and Baryon Spectroscopy*, Springer-Verlag, New York. [§38.4]

Lifshitz, E. M., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Belinsky, Khalatnikov, and Lifshitz 1970, Belinsky, Lifshitz, and Khalatnikov 1971, Khalatnikov and Lifshitz 1970, *and* Landau and Lifshitz, 1959, 1960, 1962, and 1971.

Lifshitz, E. M., and I. M. Khalatnikov, 1963a, "Investigations in relativistic cosmology," in *Advances in Physics 12*, 185–249; translated from the Russian by J. L. Beeby. [§§30.6, 34.6]

Lifshitz, E. M., and I. M. Khalatnikov, 1963b, "Problems of relativistic cosmology," *Usp. Fiz. Nauk 80*, 391–438. English translation in *Sov. Phys.—Uspekhi 6*, 495–522, 1964. [§§30.6, 34.6]

Lifshitz, E. M., and I. M. Khalatnikov, 1970, "Oscillatory approach to singular point in the open cosmological model," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma., 11*, 200–203. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 11*, 123–125 (1971).

Lighthill, M. J., 1958, *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, England. [§4.7]

Lilley, A. E. *See* Dieter *et al.* 1962.

Lin, C. C., L. Mestel, and F. H. Shu, 1965, "The gravitational collapse of a uniform spheroid," *Astrophys. J. 142*, 1431–1446. [Boxes 32.2, 32.3]

Lindquist, R. W., 1960, *The Two-Body Problem in Geometrodynamics*, doctoral dissertation, Princeton University, Princeton, N.J. [Ex. 32.1]

Lindquist, R. W., 1966, "Relativistic transport theory," *Ann. Phys. (USA) 37*, 487–518. [§22.6]

Lindquist, R. W. *See also* Boyer and Lindquist 1967.

Lindquist, R. W., and J. A. Wheeler, 1957, "Dynamics of a lattice universe by the Schwarzschild cell method," *Rev. Mod. Phys. 29*, 432–433. [§27.10, Box 25.2, Fig. 25.3, 27.3]

Liouville, J., 1837, "Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties des fonctions en séries . . . ," Liouville's *J. de Math. Pures et Appliquées 2*, 16–35. [§22.5]

Loar, H. H. *See* Durbin, Loar, and Havens 1952.

London 1965, International Conference on Relativistic Theories of Gravitation, King's College, University of London, July 1965. Proceedings multilithed in 2 volumes by King's College.

Longair, M. S. *See* Hughes and Longair 1967.

Lorentz, H. A., *cited by name in* §20.6 *and* Box 16.4.

Lorentz, H. A., A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl, 1923, *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs*, Methuen, London. Paperback reprint, Dover, New York.

Lowry, R. A. *See* Rose *et al.* 1969.

Lukash, V. N. *See* Doroshkevich, Lukash, and Novikov 1971.

Lurie, D., and N. Mukunda, eds., 1963, *Proceedings of Seminar on Unified Theories of Elementary Particles*, University of Rochester report URPA-11, Rochester, N.Y.

Lynden-Bell, D., 1967, "Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 136*, 101–121. [Box 33.3]

Lynden-Bell, D., 1969, "Galactic nuclei as collapsed old quasars," *Nature 223*, 690–694. [Box 33.3]

Lynden-Bell, D., and M. Rees, 1971, "On quasars, dust, and the galactic center," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 152*, 461–475. [Box 33.3]

Lynds, C. R., *cited by name in* Box 27.7.

MacCallum, M. A. H. *See* Penrose and MacCallum 1973.

MacDonald, G. J. F. *See* Bender *et al.* 1971 *and* Munk and MacDonald 1960.

Mach, E., 1912, *Die Mechanik in Ihrer Entwicklung Historisch-*

Kritisch Dargestellt, Brockhaus, Leipzig. English translation by T. J. McCormack, published in 1960 as *The Science of Mechanics* with an introduction by Karl Menger, Open Court, La Salle, Ill. [§§21.1, 21.12]
Mach, E., *cited by name in* Box 27.1.
Machado, A., 1940, "Proverbios y cantares XXIX," in his *Obras,* Editorial Seneca, Mexico, pp. 235–236. [Epigraph to Chap. 43]
MacKenzie, R. E. *See* Auslander and MacKenzie 1963.
Mackey, M. B., *cited by name in* Box 27.7.
Manasse, F. K., and C. W. Misner, 1963, "Fermi Normal Coordinates and Some Basic Concepts in Differential Geometry," *J. Math. Phys. 4,* 735–745. [§13.6]
Mandelstam, S. *See* Yourgrau and Mandelstam 1968.
Mann, T., 1937, *Freud, Goethe, Wagner,* Knopf, New York. Essay on Freud published originally as *Freud und die Zukunft* (*Vortrag Gehalten in Wien am 8 Mai 1936 zur Feier von Sigmund Freuds 80 Geburtstag*), Bormann-Fischer, Wien (1936). [§44.5]
Manukin, A. B. *See* Braginsky, Manukin, and Tikhonov 1970.
Marconi, G. W., *cited by name in* Preface.
Marinus of Naples, *cited by name in* Fig. 1.8.
Markus, L. *See* Auslander and Markus 1959.
Marle, C., 1969, "Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs, I et II," *Ann. Inst. Henri Poincare, 10,* 67–126 and 127–194. [§22.6, Ex. 22.7]
Marsden, J. B. *See* Fischer and Marsden 1972.
Martin, W. L. *See* Anderson *et al.* 1971.
Marzke, R. F., and J. A. Wheeler, 1964, in Chiu and Hoffman 1964. [Box 16.4]
Mathews, J. *See also* Peters and Mathews 1963.
Mathews, J., and R. Walker, 1965, *Mathematical Methods of Physics,* W. A. Benjamin, New York. [Box 26.1]
Matzner, R. A., 1968, "The present temperature of primordial black-body gravitational radiation," *Astrophys. J. 154,* 1123–1125. [§27.10]
Matzner, R. A. *See also* Clemens and Matzner 1967 *and* Fletcher *et al.* 1967.
Matzner, R. A., and C. W. Misner, 1972, "Dissipative effects in the expansion of the universe," *Astrophys. J. 171,* 415–432. [§§28.2, 30.4]
Maupertuis, P. L. M. de, 1746, "Recherche des loix du mouvement," *Acad. R. Sci. Berlin.* [Epigraph to Chap. 21]
Mavrides, M., *quoted at end of* Chap. 44.
Maxwell, J. C., *cited by name in* Preface, Box 4.6.
May, M., and R. H. White, 1966, "Hydrodynamic calculations of general-relativistic collapse," *Phys. Rev. 141,* 1232–1241. [§§32.7, 42.7, Box 33.3, Ex. 32.7]
May, M., and R. H. White, 1967, "Stellar dynamics and gravitational collapse," *Meth. Computat. Phys. 73,* 219–258. [§22.2, Boxes 22.2, 33.3]
Mayall, N. U., 1970, "Edwin Powell Hubble," *Biograph. Mem. Nat. Acad. Sci., 41,* 176–214. [Box 29.5]
Mayall, N. U., and Oort, J. H., 1942, "Further data bearing on the identification of the Crab Nebula with the supernova of 1054 A.D., part II: The astronomical aspects," *Proc. Astron. Soc. Pacific 54,* 95–104. [Box 24.1]
Mazet, E. *See* Berger, Gauduchon, and Mazet 1971.
McCrea, W. H., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Bondi and McCrea 1960.
McDonald, E., *cited by name in* Fig. 41.6.
McVittie, G. C., 1956, *General Relativity and Cosmology,* Chapman and Hall, London. [endpapers]
McWhirster, N., and R. McWhirster, 1971, *The Guinness Book of Records,* Guinness Superlatives, Ltd., Enfield, Middlesex [Chap. 12 epigraph]
Meer, S. van der. *See* Farley *et al.* 1966.
Meixner, J., and H. G. Reik, 1959, "Thermodynamik der irreversiblen Prozesse," *Handbuch der Physik, 3, Teil 2,* 413–505. [§22.2]
Meixner, J., and F. W. Schäfke, 1954, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen,* Springer-Verlag, Berlin, Germany. [Ex. 33.14]
Melbourne, W. G. *See* Ohandley *et al.* 1969.
Meltzer, D. W. *See* Bardeen, Thorne, and Meltzer 1966.
Meltzer, D. W., and K. S. Thorne, 1966, "Normal modes of radial pulsation of stars at the end point of thermonuclear evolution," *Astrophys. J. 145,* 514–543. [Box 26.1]
Menger, Karl, 1949, see Schilpp 1949, pp. 466–467. [Epigraph to Chap. 2, Epigraph to Chap. 9]
Menskii, M. B. *See* Braginsky and Menskii 1971.
Mercier, A., 1953, *Analytical and Canonical Formalism in Physics,* North-Holland, Amsterdam, Holland. Paperback reprint, Dover, New York, 1963. [Box 21.1]
Mercier, A., and M. Kervaire, 1956, *Jubilee of Relativity Theory,* proceedings of a conference in Bern, Switzerland, July 11–16, 1955, Birkhäuser, Bern.
Merzbacher, E., 1961, *Quantum Mechanics,* Wiley, New York. [§16.3]
Messiah, A., 1961, *Quantum Mechanics,* translated from the French by G. M. Temmer, North-Holland, Amsterdam, Holland. [Ex. 3.12]
Mestel, L. *See* Lin, Mestel, and Shu 1965.
Mielnik, B., and J. Plebanski, 1962, "A study of geodesic motion in the field of Schwarzschild's solution," *Acta Phys. Polon. 21,* 239–268. [§25.5]
Mikola, S. *See* Fejér and Mikola 1918.
Milne, E. A., *cited by name in* Box 27.7.
Milnor, J., 1962, "A survey of cobordism theory," *Enseignement Math. 8,* 16–23. [Box 44.3]
Milnor, J., 1963, "Spin structures on manifolds," *Enseignement Math. 9,* 198–203. [Box 44.3]
Milnor, J., 1965a, "On the Stiefel-Whitney numbers of complex manifolds and of spin manifolds," *Topology 3,* 223–230. [Box 44.3]
Milnor, J., 1965b, "Remarks concerning spin manifolds," in Cairns 1965, p. 55. [Box 44.3]
Milton, J., 1665, *Paradise Lost,* Book V, Lines 623–625, in *The Complete Poems of John Milton,* Union Library Association of New York, 1936. [Epigraph to Chap. 25]
Minkowski, H., 1908, address delivered at the 80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians, Cologne. English translation, "Space and time," in *The Principle of Relativity,* Dover, New York, 1923. [§1.5]
Minkowski, H. *See also* Lorentz *et al.* 1923.

Minkowski, R., 1942, "The Crab Nebula," *Astrophys. J. 96,* 199–213. [Box 24.1]
Minkowski, R., *cited by name in* Box 27.7.
Minkowski, R., and O. C. Wilson, 1956, "Proportionality of nebular redshifts to wave length," *Astrophys. J. 123,* 373–376. [§38.6]
Misner, C. W., 1957, "Feynman quantization of general relativity," *Rev. Mod. Phys. 29,* 497–509. [Box 21.1]
Misner, C. W., 1964a, "Differential geometry and differential topology," in DeWitt and DeWitt 1964b, pp. 881–929. [Box 8.1]
Misner, C. W., 1964b, "Waves, Newtonian fields, and coordinate functions," in Infeld 1964. [§35.8]
Misner, C. W., 1965, "Relativistic equations for spherical gravitational collapse with escaping neutrinos," *Phys. Rev. B137,* 1360–1364. [Box 23.1]
Misner, C. W., 1968, "The isotropy of the universe," *Astrophys. J. 151,* 431–457. [§§28.2, 30.3]
Misner, C. W., 1969a, "Gravitational collapse," in Chrétien, Deser, and Goldstein 1969, vol I. [§§12.1, 32.5, Boxes 8.1, 31.2, Ex. 31.8, endpapers]
Misner, C. W., 1969b, "Mixmaster universe," *Phys. Rev. Lett. 22,* 1071–1074. [§§21.10, 28.2, 30.6, 34.6, Box 30.1]
Misner, C. W., 1969c, "Absolute zero of time," *Phys. Rev. 186,* 1328–1333. [§§28.3, 34.6]
Misner, C. W., 1970, "Classical and quantum dynamics of a closed universe," in Carmeli, Fickler, and Witten 1970, pp. 55–79. [Box 30.1]
Misner, C. W., 1972a, "Minisuperspace," in Klauder 1972. [§43.3, Box 30.1]
Misner, C. W., 1972b, "Stability of Kerr black holes against scalar perturbations," *Bull. Am. Phys. Soc. (II) 17,* 472. [Ex. 33.14]
Misner, C. W., 1973, "A minsuperspace example: The Gowdy T^3 cosmology," Caltech Orange Aid Preprint. Submitted to *Phys. Rev.* [§43.3]
Misner, C. W., *cited by name in* §§21.1, 35.8, Boxes 17.2 part 2′, 17.3, 27.7. *See also* Arnowitt, Deser, and Misner 1962, Beckedorff and Misner 1962, Chrzanowski and Misner 1973, Manasse and Misner 1963, *and* Matzner and Misner 1972.
Misner, C. W., and D. H. Sharp, 1964, "Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse," *Phys. Rev. B 136,* 571–576. [§§21.13, 22.2, Ex. 32.7, Box 23.1]
Misner, C. W., and A. H. Taub, 1968, "A singularity-free empty universe," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 55,* 233. English original in *Sov. Phys.—JETP 28,* 122, 1969. [§§32.5, 34.6]
Misner, C. W., and J. A. Wheeler, 1957, "Classical physics as geometry: Gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space," *Ann. Phys. (U.S.A.) 2,* 525–603, reprinted in Wheeler 1962. [§§20.6, 21.8, 21.9, Fig. 44.1, Boxes 4.1, 4.4, 15.1, 21.2, Ex. 20.7]
Misner, C. W., and J. A. Wheeler, 1972, "Conservation laws and the boundary of a boundary," in Shelest 1972, pp. 338–351. [§15.3]
Moffet, A., *cited by name in* Box 40.1.
Møller, C., 1952, *The Theory of Relativity,* Oxford Univ. Press, London; 2d ed., 1972. [endpapers]
Møller, C., ed., 1962, *Evidence for Gravitational Theories,* Academic Press, New York.
Moncrief, V. E. *See* Berger *et al.* 1972.
Morduch, G. E. *See* Whitrow and Morduch 1965.
Morehead, J. C. *See* Gauss 1827.
Morette, C., 1951, "On the definition and approximation of Feynman's path integrals," *Phys. Rev. 81,* 848–852. [Box 21.1]
Morette, C. *See also* DeWitt, C.
Morgan, T., and K. S. Thorne, 1973, in preparation. [Box 32.3]
Morganstern, R. E., 1973, "Observational constraints imposed by Brans-Dicke cosmologies," *Phys. Rev. D 7,* 1570–1579. [§28.4]
Moritz, B. K., 1969, *A Study of the General Relativistic Dynamics of the Klein-Alfvén Cosmology,* doctoral dissertation, University of Maryland [§27.11, §28.4]
Morse, M., 1934, *The calculus of variations in the large,* American Mathematical Society, Providence, R.I. [Fig. 13.2]
Morse, M., and S. S. Cairns, 1969, *Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology: an Introduction,* Academic Press, New York. [Fig. 13.2]
Moser, J. K. *See* Siegel and Moser 1971.
Mottleson, B. R. *See* Bohr and Mottleson 1969.
Muhleman, D. O. *See* Anderson *et al.* 1971.
Muhleman, D. O., R. D. Ekers, and E. B. Fomalont, 1970, "Radio interferometric test of the general relativistic light bending near the sun," *Phys. Rev. Lett. 24,* 1377–1380. [Box 40.1]
Muhlemann, D. O., and P. Reichley, 1964, "Effects of general relativity on planetary radar distance measurements," *JPL Space Programs Summary 4,* no. 37-29, p. 239. [§40.4]
Muhlemann, D. O., and P. Reichley, 1965, "General relativistic effects on radar propagation," *JPL Space Programs Summary 4,* no. 37-31, p. 342. [§40.4]
Mukunda, N. *See* Lurie and Mukunda 1963.
Mulholland, J. D. *See* Bender *et al.* 1971 *and* Ohandley *et al.* 1969.
Munitz, M. K., 1957, *Theories of the Universe,* Free Press, New York. [Box 27.7]
Munk, W. H., and G. J. F. MacDonald, 1960, *The Rotation of the Earth; a Geophysical Discussion,* Cambridge University Press, Cambridge, England. [Fig. 1.8]
Nadezhin, D. K. *See* Ivanova, Imshennik, and Nadezhin 1969.
Nagel, E., and J. R. Newman, 1958, *Gödel's Proof,* New York Univ. Press, New York.
NASL, 1969, *Proceedings of the 1969 Symposium on Unconventional Inertial Sensors (U) Vol. I,* Naval Applied Science Laboratory, Brooklyn, New York.
Nasr, H., 1964, *Three Muslim sages: Avicenna, Suhrawardi. Ibn Arabi,* Harvard University Press, Cambridge, Mass. [Box 27.7]
Navier, L., *cited by name in* Box 17.2 part 6.
Nazarenko, V. S. *See* Braginsky and Nazarenko 1971.
Ne'eman, Y., 1965, "Expansion as an energy source in quasistellar radio sources," *Astrophys. J. 141,* 1303–1305. [§34.3]
Nester, J. M., *cited by name in* §35.1.

Neugebauer, O., 1959, *Greek Horoscopes*, with H. B. van Hösen, American Philosophical Society, Philadelphia, Pa. [Fig. 1.8]

Neugebauer, P. V., 1927, "Zür astronomischen Chronologie," *Astron. Nachr. 230,* 57–64. [Fig. 1.8]

Neugebauer, P. V., 1929, *Astronomische Chronologie,* 2 vols, De Gruyter, Berlin. [Fig. 1.8]

Neugebauer, P. V., 1930, "Schoch Todesanzeige," *Astron. Nachr. 237,* 221–224. [Fig. 1.8]

Neugebauer, P. V., and C. Schoch, 1930, "Zür astronomischen Chronologie, II," *Astronomische Abhandlungen. Erganzungshefte zu den Astron. Nachrichten 8,* no. 2, 24–32. [Fig. 1.8]

Newman, E. T. *See also* Couch and Newman 1972, Couch *et al.* 1968, *and* Kundt and Newman 1968.

Newman, E. T., E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, 1965, "Metric of a rotating, charged mass," *J. Math. Phys. 6,* 918–919. [§33.2]

Newman, E. T., and R. Penrose, 1965, "10 exact gravitationally-conserved quantities," *Phys. Rev. Lett. 15,* 231–233. [Ex. 32.11]

Newman, J. R. *See* Nagel and Newman 1958.

Newton, I., 1687, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* 1st ed., Streater, London; final ed., in English translation by A. Motte, 1729, revised by A. Cajori, *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World,* Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1934; paperback, 1962. [Boxes 1.10, 21.1, 27.7]

Newton, I., 1730, *Opticks, or a Treatise of the Reflection, Refraction, Inflection, & Colours of Light,* 4th ed.; reprint, ed. by D. H. D. Roller, Dover, New York, 1952. [Box 1.10]

Newton, I., *cited by name in* §§1.1, 1.3, 12.1, 12.2, Boxes 1.2, 12.2, 12.3, 12.6, Ex. 12.7, 12.8, 13.4, 17.2 part 6.

Newton, R. *See* Gilbert and Newton 1970.

Neyman, J., 1951, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* Univ. of California Press, Berkeley, Calif.

Ni, W.-T., 1970, work reported by K. S. Thorne at the NASA-ESRO conference on experimental tests of gravitation theories, California Institute of Technology, November 1970; *see* Thorne, Ni, and Will 1971. [§39.2, Box 39.1]

Ni, W.-T., 1972, "Theoretical frameworks for testing relativistic gravity, IV: A compendium of metric theories of gravity and their post-Newtonian limits," *Astrophys. J. 176,* 769–796. [§§17.6, 38.2, 39.2, 40.1, 40.5, 40.8, Boxes 39.1, 39.2, 39.5]

Ni, W.-T. *See also* Thorne, Ni, and Will 1971.

Ni, W.-T., 1973, "Relativistic stellar stability: an empirical approach," *Astrophys. J. 181,* 939–956. [Box 39.5, Ex. 39.7]

Nicetas, *cited by name in* Box 27.7.

Nickerson, H. K., D. C. Spencer, and N. E. Steenrod, 1959, *Advanced Calculus,* Van Nostrand, Princeton, New Jersey. [§4.1]

Nijenhuis, A., 1952, "Theory of the geometric object," dissertation, Amsterdam. [§2.2]

Nizer, L., 1972, quoted in the *New York Times* February 7, 1972. [Epigraph to Chap. 40]

Noerdlinger, P. D., and V. Petrosian, 1971, "The effect of cosmological expansion on self-gravitating ensembles of particles," *Astrophys. J. 168,* 1–9. [§27.5]

Noonan, T. W. *See* Robertson and Noonan 1968.

Nordstrøm, G., 1913, "Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips," *Ann. Phys. (Germany) 42,* 533–554. [§17.6]

Nordstrøm, G., 1918, "On the energy of the gravitational field in Einstein's theory," *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20,* 1238–1245. [Ex. 31.8]

Nordstrøm, G., *cited by name in* §§38.2, 42.7.

Nordtvedt, K., 1968a, "Equivalence principle for massive bodies, I: Phenomenology," *Phys. Rev. 169,* 1014–1016. [§§38.2, 40.9]

Nordtvedt, K., 1968b, "Equivalence principle for massive bodies, II: Theory," *Phys. Rev. 169,* 1017–1025. [§§38.2, 39.3, 40.9, Box 39.5]

Nordtvedt, K., Jr., 1969, "Equivalence principle for massive bodies including rotational energy and radiation pressure," *Phys. Rev., 180,* 1293–1298. [§§38.2, 39.3]

Nordtvedt, K., 1970, "Solar system Eötvos experiments," *Icarus 12,* 91–100. [§40.8, Box 39.5]

Nordtvedt, K., 1971a, "Equivalence principle for massive bodies, IV: Planetary bodies and modified Eötvos-type experiments," *Phys. Rev. D 3,* 1683–1689. [§§40.8, 40.9, Box 39.5]

Nordtvedt, K., 1971b, in Davies 1971, pp. 32–37. [§§39.5, 40.9, Box 39.5]

Nordtvedt, K., Jr. *See also* Will and Nordtvedt 1972.

Nordtvedt, K., Jr., and C. M. Will, 1972, "Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity, II: Experimental evidence to rule out preferred-frame theories of gravity," *Astrophys. J. 177,* 775–792. [§§39.2, 40.5, 40.8, Box 39.5]

North, J. D., 1965, *The Measure of the Universe,* Clarendon Press, Oxford. [Box 27.7]

Novikov, I. D., 1963, doctoral dissertation, Shternberg Astronomical Institute, Moscow. [§31.4]

Novikov, I. D., 1964, "Delayed explosion of a part of the Friedmann universe, and quasars," *Astron. Zh. 41,* 1075–1083. English translation in *Sov. Astron.-Astron. J. 8,* 857–863. [§34.3]

Novikov, I. D., 1966a, "Change of relativistic collapse into anticollapse and kinematics of a charged sphere," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma 3,* 223–227. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 3,* 142–144. [§34.6, Fig. 34.4]

Novikov, I. D., 1966b, "The replacement of relativistic gravitational contraction by expansion, and the physical singularities during contraction," *Astron. Zh. 43,* 911–918. English translation in *Sov. Astron.—A. J. 10,* 731–737. [§34.6, Fig. 34.4]

Novikov, I. D. *See also* Doroshkevich, Lukash, and Novikov 1971, Doroshkevich, Zel'dovich, and Novikov 1965, *and* Zel'dovich and Novikov 1966, 1971, *and* 1974.

Novikov, I. D., and K. S. Thorne, 1973, "Astrophysics of black holes," in DeWitt and DeWitt 1973, pp. 343–450. [Box 33.3]

Nutku, Y. *See* Berger *et al.* 1972 *and* Chandrasekhar and Nutku 1969.

O'Connell, R. F., 1972, "Present status of the theory of the relativistic gyroscope experiment," *Gen. Rel. & Grav. 3,* 123–133. [§40.7, Ex. 40.8]

Ogorodnikov, K. F., 1965, *Dynamics of Stellar Systems,* ed. by A. Beer, Macmillan, New York. [§25.7]

Ohandley, D. A., D. B. Holdridge, W. G. Melbourne, and J. D. Mulholland, 1969, *J.P.L. Development Ephemeris No. 69,* J.P.L. Technical report 32–1465, Caltech Jet Propulsion Laboratory, Pasadena. [§40.1]

Ohanian, H. C. *See* Belasco and Ohanian 1969.

Olbers, H. W. M., 1826, "Über die Durchsichtigkcit des Weltraumes" *Bode Jahrbuch, 110;* substantially the same article in *Bibliothèque Universelle* for February 1826, and in *Edinburgh New Philosophical Journal* for April–October 1826, 141. [Box 27.7]

Omnes, R. L., 1969, "Possibility of matter-antimatter separation at high temperature," *Phys. Rev. Lett. 23,* 38–40. [§27.10]

O'Murchadha, N., and J. W. York, Jr., 1973, personal communication; *see also* O'Murchadha, N., "Existence and uniqueness of solutions of the Hamiltonian constraint of general relativity," doctoral dissertation, Princeton Univ., February 5, 1973. [§21.11]

O'Neill, B., 1966, *Elementary Differential Geometry,* Academic Press, New York. [Box 8.1]

Oort, J. H., 1958, "Distribution of galaxies and the density of the universe," in *Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers,* Éditions Stoops, Brussels, Belgium. [§29.6]

Oort, J. H., 1970, "Matter far from the galactic plane associated with spiral arms," in *Spiral Structure of our Galaxy, Basel, Switzerland, 29 Aug.–4 Sep. 1969,* D. Reidel, Dordrecht, Netherlands. [§28.2]

Oort, J. H., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Mayall and Oort 1942.

Oppenheimer, J. R., and H. Snyder, 1939, "On continued gravitational contraction," *Phys. Rev. 56,* 455–459. [§§32.3, 32.4, 34.6, Fig. 24.1, Box 24.1]

Oppenheimer, J. R., and G. Volkoff, 1939, "On massive neutron cores," *Phys. Rev. 55,* 374–381. [§23.2, Fig. 24.1, Box 24.1, Ex. 23.10]

Oppolzer, Th. V., 1887, "Canon der Finsternisse," *Math.–Naturwiss. Cl. d. Akad. der Wiss. Denkschriften 52,* Wien. [Fig. 1.8]

O'Raifeartaigh, L., ed., 1972, *General Relativity, Papers in Honor of J. L. Synge,* Oxford Univ. Press, London.

Ostriker, J. P., and J. E. Gunn, 1969, "On the nature of pulsars, I: Theory," *Astrophys. J. 157,* 1395–1417. [§24.3, Ex. 33.13]

Pacini, F., 1968, "Rotating neutron stars, pulsars, and supernova remnants," *Nature 219,* 145–146. [§24.3]

Page, L., 1941, lecture at Dec. 17 meeting of the American Institute of Electrical Engineers, New York. [Epigraph to Chap. 3]

Palatini, A., 1919, "Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton," *Rend. Circ. Mat. Palermo 43,* 203–212. [§21.2]

Palatini, A., *cited by name in* §§21.1, 21.2.

Panov, V. I. *See* Braginsky and Panov 1971.

Paolini, F., R., *cited by name in* Box 27.7.

Papanastassiou, D. A., and G. J. Wasserburg, 1969, "Initial strontium isotopic abundances and the resolution of small time differences in the formation of planetary objects," *Earth & Planetary Sci. Lett. 5,* 361–376. [Box 29.3]

Papapetrou, A., 1951, "Spinning test-particles in general relativity, I," *Proc. R. Soc. London A 209,* 248–258. [§20.6, Ex. 40.8]

Papapetrou, A., 1954a, "Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes, I," *Math. Nachr. 12,* 129–141. [§40.8]

Papapetrou, A., 1954b, "Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes, II," *Math. Nachr. 12,* 143–154. [§40.8]

Papapetrou, A., 1954c, "Eine Theorie des Gravitationsfeldes mit einer Feldfunktion," *Z. Phys. 139,* 518–532. [§40.8]

Papapetrou, A., 1958, "Uber zeit abhängige Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie," *Ann. Phys. (Germany) 2,* 87–96. [§35.8]

Papapetrou, A., and A. Hamoui, 1967, "Surfaces caustiques dégénerées dans la solution de Tolman: La singularité physique en relativité générale," *Ann. Inst. Henri Poincaré A 6,* 343–364. [Ex. 32.7]

Papapetrou, A., and A. Hamoui, 1968, "Couches simples de matières en relativité générale," *Ann. Inst. Henri Poincaré A 9,* 179–211. [§21.13]

Papapetrou, A., and H. Treder, 1959, "Das Sprungproblem erster Ordnung in der allgemeinen Relativitätstheorie," *Math. Nachr. 20,* 53–66. [§21.13]

Papapetrou, A., and H. Treder, 1962, "Shock waves in general relativity," in Infeld 1962, pp. 351–360. [§21.13]

Paris 1967, *Fluides et Champs Gravitationnel en relativité générale,* Colloques Internationaux du CNRS, no. 170, organizé au Collège de France, du 19 au 23 juin 1967, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, 1969.

Parker, H. M. *See* Rose *et al.* 1969.

Parker, L., 1966, *Particle Creation in the Expanding Universe,* Ph.D. thesis, Harvard University, unpublished. [§30.5]

Parker, L., 1969, "Quantized fields and particle creation in expanding universes, I," *Phys. Rev. 183,* 1057–1068. [§30.5]

Parker, L., 1972, "Particle Creation in Isotropic Cosmologies," *Phys. Rev. Lett. 28,* 705–708. [§30.5]

Parsons, S. J., *cited by name in* Box 27.7.

Partridge, R. B., 1969, "The primeval fireball today," *Am. Sci. 57,* 37–74. [§27.2]

Partridge, R. B. *See also* Boughn, Fram, and Partridge 1971.

Pauli, W., 1921, "Relativitätstheorie," in *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* II, 539–775, Teubner, Leipzig, Germany. [Preface]

Pauli, W., 1934, "Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik," *Handbuch der Physik 24,* Part 1, 2d ed. [§16.3]

Pauli, W., 1947, *Exclusion Principle and Quantum Mechanics,* 1945 Nobel prize lecture, Editions Grisson, Neuchatel, Switzerland. Related discussion in Fierz and Weisskopf 1960. [Box 44.3]

Pauli, W., ed., 1955, *Niels Bohr and the Development of Physics,* McGraw-Hill, New York.

Pauli, W., 1958, *Theory of Relativity,* Pergamon Press, London. English translation by Gerard Field of Pauli 1921 with supplementary notes (1956) by the author. [endpapers]

Pauli, Wolfgang, Memorial volume. *See* Fierz and Weisskopf 1960.
Pauli, W., *cited by name in* Preface. *See also* Fierz and Pauli 1939.
Paya, D. *See* Dabbs *et al.* 1965.
Peebles, P. J. E., 1966, "Primordial He abundance and fireball, II," *Astrophys. J. 146,* 542–552. [§28.1]
Peebles, P. J. E., 1969, "Cosmology," *Proc. Roy. Astron. Soc. Canada, 63,* 4–31. [§30.1]
Peebles, P. J. E., 1971, *Physical Cosmology,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. [§§27.1, 27.2, 28.1, 29.6, Box 27.7]
Peebles, P. J. E., 1972, "Gravitational collapse and related phenomena from an empirical point of view, or, black holes are where you find them," *Gen. Rel. & Grav. 3,* 63–82. [Box 33.3]
Peebles, P. J. E. *Cited by name in* Box 27.7. *See also* Dicke and Peebles 1962a, 1962b, *and* 1965, Dicke *et al.* 1965, *and* Jones and Peebles 1972.
Peebles, P. J. E., and J. T. Yu, 1970, "Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe," *Astrophys. J. 162,* 815–836. [§30.1]
Pekar, D. *See* Eötvös, Pekar, and Fekete 1922.
Penrose, R., 1959, "The apparent shape of a relativistically moving sphere," *Proc. Cambridge Phil. Soc. 55,* 137–139. [§41.10]
Penrose, R., 1964, "Conformal treatment of infinity," in DeWitt and DeWitt 1964b. [§34.2]
Penrose, R., 1965a, "Zero rest-mass fields including gravitation: Asymptotic behavior," *Proc. R. Soc. London A 284,* 159–203. [§34.2, Box 32.2]
Penrose, R., 1965b, "Gravitational collapse and space-time singularities," *Phys. Rev. Lett. 14,* 57–59. [§§32.7, 34.6, Box 34.2]
Penrose, R., 1966, "An analysis of the structure of spacetime," Adams Prize Essay. [Box 34.2]
Penrose, R., 1968a, "Structure of spacetime," in DeWitt and Wheeler 1968. [§§34.1, 34.4, 41.7, 41.11, Boxes 34.1, 34.2, 44.3]
Penrose, R., 1968b, "Twistor quantization and the curvature of spacetime," *Int. J. Theor. Phys. 1,* 61–99. [Box 34.2]
Penrose, R., 1969, "Gravitational collapse: The role of general relativity," *Nuovo Cimento 1,* special number, 252–276. [§33.7, Boxes 33.2, 33.4, 34.2]
Penrose, R., 1972, "Techniques of differential topology in relativity," in Farnsworth *et al.* (1972). [§34.1]
Penrose, R., *cited by name in* §§32.7, 41.9, 42.1, Box 27.7, Fig. 41.7. *See also* Hawking and Penrose 1969, Infeld 1964, Klauder 1964, Newman and Penrose 1965, *and* Walker and Penrose 1970.
Penrose, R., and M. A. H. MacCallum, 1973, "Twistor Theory: An approach to the quantization of fields and spacetime," *Physics Reports 6C,* no. 4, 242–315. [Box 34.2]
Penzias, A. A., *cited by name in* Box 27.7.
Penzias, A. A., and R. W. Wilson, 1965, "A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s," *Astrophys. J. 142,* 419–421. [§27.2]
Pereira, C. M. *See* Brill *et al.* 1972.
Peres, A., 1962, "On the Cauchy problem in general relativity, II," *Nuovo Cimento 26,* 53–62. [§43.3]
Peres, A., and N. Rosen, 1964, "Gravitational radiation damping of nongravitational motion," *Ann. Phys. (U.S.A.) 10,* 94–99. [§§36.1, 36.8]
Peters, P. C., 1964, "Gravitational radiation and the motion of two point masses," *Phys. Rev. B 136,* 1224–1232. [§§36.1, 36.7, Ex. 36.9]
Peters, P. C., and J. Mathews, 1963, "Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit," *Phys. Rev. 131,* 435–440. [§36.6, Ex. 36.6]
Peterson, B. A., *cited by name in* Box 27.7.
Peterson, F. P. *See* Anderson, Brown, and Peterson 1966a *and* 1966b.
Peterson, F. R. *See* Evenson *et al.* 1972.
Pethick, C. J. *See* Baym, Bethe, and Pethick 1971.
Petrosian, V. *See* Noerdlinger and Petrosian 1971.
Petrov, A. Z., 1954, *Reports of the State University of Kazan 114,* book 8, 55. [§33.6]
Petrov, A. Z., 1969, *Einstein Spaces,* Pergamon, New York. [§33.6]
Petrov, Aleksei Zinoveivich, Memorial volume. *See* Shelest 1972.
Pettengill, G. H. *See* Shapiro, Ash *et al.* 1971, Shapiro, Smith *et al.* 1971, and Shapiro *et al.* 1972.
Philolaus, *cited by name in* Box 27.7.
Phillips, J. W., *cited by name in* Box 27.7.
Picasso, E. *See* Bailey *et al.* 1968 *and* Farley *et al.* 1966.
Piir, I. I., 1971, "Maxwell equations in the Schwarzschild gravitational field" (in Russian), *Izv. Akad. Nauk Estonian S. S. R., Fiz. Mat., 20,* 413–419. [Ex. 32.11]
Pilkington, J. D., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Hewish *et al.* 1968.
Pirani, F. A. E., 1956, "On the physical significance of the Riemann tensor," *Acta Phys. Pol. 15,* 389–405. [§20.6, Ex. 40.8]
Pirani, F. A. E., 1957, "Invariant formulation of gravitational radiation theory," *Phys. Rev. 105,* 1089–1099. [§§21.13, 33.6, Ex. 15.2]
Pirani, F. A. E., 1965, "Introduction to gravitational radiation theory," in Trautman, Pirani, and Bondi 1965, pp. 249–373. [§§41.7, 41.11, endpapers]
Pirani, F. A. E. *See also* Bondi, Pirani, and Robinson 1959, Ehlers, Pirani, and Schild 1972, *and* Trautman, Pirani, and Bondi 1965.
Pittsburgh 1970, Regional Conference on Relativity, July 13–17, 1970. *See* Farnsworth *et al.* 1972.
Planck, M., 1899, "Über irreversible Strahlungsvorgänge," *Sitzungsber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.—Phys. Tech.,* 440–480. [§§43.4, 44.6]
Plato. *See* Cornford 1937.
Plebanski, J. *See* Infeld and Plebanski 1960 *and* Mielnik and Plebanski 1962.
Plotkin, H. E. *See* Bender *et al.* 1971.
Plutarch, *cited by name in* Box 27.7.
Podolsky, B. *See* Dirac, Fock, and Podolsky 1932.
Podurets, M. A., 1964, "Asymptotic behavior of the optical luminosity of a star in gravitational collapse in terms of general relativity theory," *Astron. Zhur. 41,* 1090–1096, English translation in *Sov. Astron.—A. J. 8,* 868–873 (1965). [§32.3]
Podurets, M. A., 1966, "The character of the singularity in the gravitational collapse of a star," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*

167, 1025–1027. English translation in *Sov. Ph.—Doklady 11,* 275–276. [§34.6, Ex. 32.3]
Podurets, M. A. *See also* Zel'dovich and Podurets 1965.
Poincaré, H. *cited by name in* §§3.1, 12.3.
Poisson, S., *cited by name in* Box 17.2 part 6.
Polievktov-Nikoladze, N. M., 1969, "On the theory of the gravitational field," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 57,* 2010–2020. English translation in *Sov. Phys.—JETP 30* (1970), 1089–1095. [Box 17.2 part 6]
Polkinghorne, J. C., 1955, "On the Feynman principle," *Proc. R. Soc. London A 230,* 272–276. [Box 21.1]
Polubarinova-Kochina, P. Ya., 1963, "Alexander Alexandrovitch Friedmann (In memory of A. A. Friedmann)," *Usp. Fiz. Nauk, 80,* 345–352. English translation in *Sov. Phys.—Uspekhi, XX,* 467–472 (1964). [Box 27.6]
Pope, A., 1733, *Essay on Man,* London [Epigraph to Chap. 24]
Porter, J. *See* Farnsworth *et al.* 1972.
Pound, R. V., and G. A. Rebka, 1960, "Apparent weight of Photons," *Phys. Rev. Lett. 4,* 337–341. [§§7.2, 7.4, 38.5, Fig. 38.1]
Pound, R. V., and J. L. Snider, 1964, "Effect of gravity on nuclear resonance," *Phys. Rev. Lett. 13,* 539–540. [§§7.2, 7.4]
Pound, R. V., and J. L. Snider, 1965, "Effect of gravity on gamma radiation," *Phys. Rev. B 140,* 788–803. [§§7.2, 38.5, Fig. 38.1]
Power, E. A., and J. A. Wheeler, 1957, "Thermal geons," *Rev. Mod. Phys. 29,* 480–495. [§25.6]
Prakash, A. *See* Newman *et al.* 1965.
Press, F., 1965, "Resonant vibrations of the Earth." *Sci. American 213,* no. 5, 28–37. [Ex. 37.14]
Press, F. *See also* Ahrens, Press, and Runcorn 1964.
Press, W. H., 1970, unpublished work described in part in Press and Thorne 1972. [§37.3, Fig. 37.2, Box 37.2]
Press, W. H., 1971, "Long wave trains of gravitational waves from a vibrating black hole," *Astrophys. J. Lett. 170,* 105–108. [Box 33.3]
Press, W. H., 1972, "Time evolution of a rotating black hole immersed in a static scalar field," *Astrophys. J. 175,* 243–252. [Ex. 33.14, Box 33.3]
Press, W. H. *See also* Bardeen and Press 1972, Bardeen, Press, and Teukolsky 1972, *and* Davis *et al.* 1971.
Press, W. H., and J. M. Bardeen, 1971, "Nonconservation of the Newman-Penrose conserved quantities," *Phys. Rev. Lett. 27,* 1303–1306. [Ex. 32.11]
Press, W. H., and S. A. Teukolsky, 1972, "Floating orbits, superradiant scattering and the black-hole bomb," *Nature 238,* 211–212. [Box 33.3]
Press, W. H., and S. A. Teukolsky, 1973, "Perturbations of a rotating black hole, II: Dynamical stability of the Kerr metric," *Astrophys. J.*, in press. [Box 33.3, Ex. 33.14]
Press, W. H., and K. S. Thorne, 1972, "Gravitational-wave astronomy," *Ann. Rev. Astron. Astrophys. 10,* 335–374. [§§36.5, 37.4, 37.8, Box 37.5]
Price, R. H., 1971, *Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse,* doctoral dissertation, California Institute of Technology. [Ex. 32.10, Box 32.2]
Price, R. H., 1972a, "Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse, I: Scalar and gravitational perturbations," *Phys. Rev., D5,* 2419–2438. [§§35.14, 41.11, Ex. 32.10, Box 32.2]
Price, R. H., 1972b, "Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse, II: Integer-spin, zero-rest-mass fields," *Phys. Rev., D5,* 2439–2454. [§41.11, Box 32.2]
Price, R. H. *See also* Davis *et al.* 1971.
Pringle, J. E., and M. J. Rees, 1972, "Accretion disc models for compact X-ray sources," *Astron. Astrophys. 21,* 1–9. [Box 33.3]
Proclus of Athens, *cited by name in* Fig. 1.8.
Ptolemy, C. *See* Taliaferro 1952.
Ramsey, N. F., 1972, "History of atomic and molecular standards of frequency and time," *I.E.E.E. Trans. IM-21,* 90–98. [Box 16.3]
Rayleigh, Lord, 1912, "On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection," *Proc. R. Soc. London A 86,* 207–226. [§22.5]
Rayzer, Yu. P. *See* Zel'dovich and Rayzer 1967.
Reber, G., *cited by name in* Box 27.7.
Rebka, G. A. *See* Pound and Rebka 1960.
Rees, M. *See* Lynden-Bell and Rees 1971 *and* Pringle and Rees 1972.
Refsdal, S., 1964, "The gravitational lens effect," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 128,* 295–306. [§25.6, Fig. 22.2, Box 33.3]
Refsdal, S., R. Stabell, and F. G. de Lange, 1967, "Numerical calculations on relativistic cosmological models," *Mem. Roy. Astron. Soc., 71,* 143–248. [§29.4, Box 29.4]
Regge, T., 1961, "General relativity without coordinates," *Nuovo Cimento 19,* 558–571. [§§42.1, 42.2, 42.4, 42.6]
Regge, T., and J. A. Wheeler, 1957, "Stability of a Schwarzschild singularity," *Phys. Rev. 108,* 1063–1069. [§25.5, Box 33.3]
Reichley, P. *See* Muhlemann and Reichley 1964 *and* 1965.
Reik, H. G. *See* Meixner and Reik 1959.
Reines, F., ed., 1972, *Cosmology, Fusion, and Other Matters,* Univ. of Colorado Press, Boulder.
Reissner, H., 1916, "Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie," *Ann. Phys. (Germany) 50,* 106–120. [Ex. 31.8]
Reissner, H., *cited by name in* §42.7.
Retherford, R. C. *See* Lamb and Retherford 1947.
Rhoades, C. E. J., 1971, *Investigations in the Physics of Neutron Stars,* doctoral dissertation, Princeton University. [§24.2]
Richelot, *cited by name in* Box 38.2.
Riemann, G. F. B., *achievements and picture in* Box 8.5; for collected works, see Weber 1953.
Riesz, M., 1949, "L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy," *Acta Math. 81,* 1–223. [§35.8]
Rindler, W., 1969, *Essential Relativity: Special, General, and Cosmological,* Van Nostrand, New York. [Box 27.7]
Robb, A. A., 1914, *A Theory of Time and Space,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [Box 13.1]
Robb, A. A., 1936, *Geometry of Time and Space,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. Rev. ed. of Robb 1914. [Boxes 1.3, 13.1]

Robb, A. A., *quoted,* epigraph of Chap. 4.
Roberts, M. S., 1965, "21-cm. hydrogen measurements of NGC5668, a relatively distant galaxy," *Astrophys. J. 142,* 148–153. [§29.2]
Roberts, M. S. *See also* Dieter *et al.* 1962.
Robertson, H. P., 1935, "Kinematics and world structure," *Astrophys. J. 82,* 248–301. [Ex. 27.5]
Robertson, H. P., 1936, "Kinematics and world structure," *Astrophys. J. 83,* 187–201, 257–271. [Ex. 27.5]
Robertson, H. P., 1962, "Relativity and cosmology," in Deutsch and Klemperer 1962, pp. 228–235. [§§38.2, 39.3]
Robertson, H. P., *cited by name in* §30.3, Box 27.7.
Robertson, H. P., and T. W. Noonan, 1968, *Relativity and Cosmology,* W. B. Saunders, Philadelphia. [§27.11, Ex. 27.4, 29.6, endpapers]
Robinson, H. G. *See* Hughes, Robinson, and Beltran-Lopez 1960.
Robinson, I., 1959a, "A solution of the Maxwell-Einstein equations," *Bull. Acad. Polon. Sci. 7,* 351–352. [Ex. 32.1]
Robinson, I., 1959b, unpublished report at *Colloque Internationale sur les Théories Relativistes de la Gravitation,* Abbaye de Royaumont. [Ex. 15.2]
Robinson, I., 1961, "Null Electromagnetic Fields," *J. Math. Phys., 2,* 290–291. [§22.5]
Robinson, I., A. Schild, and E. Schücking, eds., 1965, *Quasi-stellar Sources and Gravitational Collapse,* The University of Chicago Press, Chicago.
Robinson, I. *See also* Bondi, Pirani, and Robinson 1959, Douglas *et al.* 1969.
Rohrlich, F., 1965, *Classical Charged Particles; Foundations of Their Theory,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [§4.7]
Rohrlich, F., *cited by name in* §20.6.
Roll, P. G., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Dicke *et al.* 1965.
Roll, P. G., R. Krotkov, and R. H. Dicke, 1964, "The equivalence of inertial and passive gravitational mass," *Ann. Phys. (U.S.A.) 26,* 442–517. [§§1.3, 10.1, 38.3, Fig. 1.6, Box 1.2]
Root, W. L. *See* Davenport and Root 1958.
Rose, R. D., H. M. Parker, R. A. Lowry, A. R. Kuhlthau, and J. W. Beams, 1969, "Determination of the gravitational constant *G, Phys. Rev. Lett. 23,* 655–658. [§40.8]
Rosen, Nathan, *Festschrift* on The occasion of his 60th birthday, March 22, 1969. *See* Kuper and Peres 1971.
Rosen, N. *See also* Peres and Rosen 1964.
Rosenfeld, L., 1940, "Sur le tenseur d'impulsion-énergie," *Mém. Acad. R. Belg. Sci. 18,* no. 6. [§21.3]
Rosenfeld, L. *See also* Bohr and Rosenfeld 1933.
Rossi, B., *cited by name in* Box 27.7.
Rossi, B., and D. B. Hall, 1941, "Variation of the rate of decay of mesotrons with momentum," *Phys. Rev. 59,* 223–228. [§38.4]
Royaumont 1959, *Les Théories relativistes de la gravitation,* Actes du Colloque International, organizé à Royaumont, du 21 au 27 juin 1959, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1962.
Ruark, A. E., and H. C. Urey, 1930, *Atoms, Molecules, and Quanta,* McGraw-Hill, New York. [§§40.7, 41.4]
Rudenko, V. N. *See* Braginsky, Zel'dovich, and Rudenko 1969.
Ruderman, M., 1972, "Pulsars: Structure and dynamics," *Ann. Rev. Astron. Astrophys. 10,* 427–476. [§24.3]
Ruffini, R. *See* Christodolou and Ruffini 1971; Davis *et al.* 1971; Ferrari and Ruffini 1969; *and* Hanni and Ruffini 1973.
Ruffini, R., and J. A. Wheeler, 1970, "Collapse of wave to black hole," *Bull. Am. Phys. Soc. 15,* 76. [§35.8]
Ruffini, R., and J. A. Wheeler, 1971a, "Introducing the black hole," *Phys. Today 24,* 30–36. [§33.7]
Ruffini, R., and J. A. Wheeler, 1971b, "Relativistic cosmology and space platforms," in *Proceedings of the Conference on Space Physics,* European Space Research Organization, Paris, France, pp. 45–174. [Boxes 33.2, 33.3, 33.5, 36.3, Fig. 24.3, Ex. 37.13, 37.14]
Runcorn, S. K. *See* Ahrens, Press, and Runcorn 1964.
Runge, J. *See* Sommerfeld and Runge 1911.
Russ, N. *See* Boni, Russ, and Laurence 1960.
Rutherford, E., *cited by name in* Preface, §44.1.
Ruzmaikin, A. A. *See* Ruzmaikina and Ruzmaikin 1969.
Ruzmaikina, T. V., and A. A. Ruzmaikin, 1969, "Quadratic corrections to the Lagrangian density of the gravitational field and the singularity," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 57,* 680–685. English translation in *Sov. Phys.—JETP 30,* 372–374. [Box 17.2 part 6]
Ryan, M. P., Jr., 1971, "Qualitative cosmology: Diagrammatic solutions for Bianchi type IX universes with expansion, rotation, and shear, II: The general case," *Ann. Phys. 68,* 541–555. [§30.7]
Ryan, M. P., Jr., 1972a, *Hamiltonian Cosmology,* Springer, Berlin, Germany. [§30.7, Box 30.1]
Ryan, M. P., Jr., 1972b, "The oscillatory regime near the singularity in Bianchi type-IX universes," *Ann. Phys. (U.S.A.) 70,* 301–322. (Includes a report of work by V. A. Belinsky and I. M. Khalatnikov. [§30.7, Box 30.1]
Sachs, R. K., 1961, "Gravitational waves in general relativity, VI: The outgoing radiation condition," *Proc. R. Soc. London A 264,* 309–338. [§22.5]
Sachs, R. K., 1964, "Gravitational radiation," in DeWitt and DeWitt 1964. [§§21.5, 21.13, 33.6, 41.11, Ex. 22.14, endpapers]
Sachs, R. K., ed., 1971, *General Relativity and Cosmology,* proceedings of course 47 of the International School of Physics "Enrico Fermi", Academic Press. [§§27.2, 34.1, 40.7]
Sachs, R. K. *See also* Eardley, Liang, and Sachs 1972, Ehlers, Geren, and Sachs 1968, *and* Jordan, Ehlers, and Sachs 1961.
Sakharov, A. D., 1967, "Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation," *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R. 177,* 70–71. English translation in *Sov. Phys. Doklady 12,* 1040–1041 (1968). [§44.4, Box 17.2 part 6]
Sakharov, A. D., 1969, unpublished work cited by Braginsky and Nazarenko 1971. [§37.3, Fig. 37.2]
Salam, A., and E. P. Wigner, eds., 1972, *Aspects of Quantum Theory,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng.
Salpeter, E. E. and R. V. Wagoner, 1971, "Structure of relativistic disks," *Astrophys. J. 164,* 557–568. [Box 24.1]

Sandage, A., 1958, "Current problems in the extragalactic distance scale," *Astrophys. J. 127,* 513–526. [Box 27.1]

Sandage, A., 1968, "The time scale for creation," in L. Woltjer, ed., *Galaxies and the Universe,* Columbia Univ. Press, New York, pp. 75–112. [§29.7]

Sandage, A., 1970, "Main-sequence photometry, color-magnitude diagrams, and ages for the globular clusters M3, M13, M15, and M92," *Astrophys. J. 162,* 841–870. [§29.7]

Sandage, A., 1972a, "Distances to galaxies: the Hubble constant, the Friedmann time, and the edge of the world," in *Proceedings of the Symposium on the Galaxy and the Distance Scale,* Essex, England, in press. [§§27.1, 29.3, 29.4, Box 29.4]

Sandage, A., 1972b, "The redshift-distance relation, I. Angular diameter of first-ranked cluster galaxies as a function of redshift: the aperture correction to magnitudes," *Astrophys. J. 173,* 485–500. [§29.5, Box 29.4]

Sandage, A., 1972c, "The redshift-distance relation, II. The Hubble diagram and its scatter for first-ranked cluster galaxies: a formal value for q_o," *Astrophys. J. 178,* 1–24. [§29.4, Box 29.4]

Sandage, A., 1972d, "The redshift-distance relation, III. Photometry and the Hubble diagram for radio sources and the possible turn-on time for QSO's," *Astrophys. J. 178,* 25–44. [§29.4, Boxes 28.1, 29.4]

Sandage, A., *cited by name in* Boxes 27.7, 29.5.

Sandage, A., G. A. Tamman, and E. Hardy, 1972, "Limits on the local deviation of the universe from a homogeneous model," *Astrophys. J. 172,* 253–263. [§27.1]

Sanders, R., 1970, "The effects of stellar collisions in dense stellar systems," *Astrophys. J. 162,* 791–809. [§§24.5, 24.6, Box 33.3]

Sanderson, B. J. *See* Hsiang and Sanderson 1965.

Sands, M. *See* Feynman, Leighton, and Sands 1964.

Sard, R. D., 1970, *Relativistic Mechanics,* W. A. Benjamin, New York. [§2.10]

Sargent, W. L. W. *See* Bahcall, Sargent, and Schmidt 1967.

Schäfke, F. W. *See* Meixner and Schäfke 1954.

Schatzman, E. *See* DeWitt, Veron, and Schatzman 1967.

Schiff, L. I., 1962, "General relativity: Theory and experiment," *J. Indust. & Appl. Math 10,* 795–801. [§§38.2, 39.3]

Schiff, L. I., 1967, "Comparison of theory and observation in general relativity," in Ehlers 1967. [§§38.2, 39.3]

Schiffer, M. *See* Adler, Bazin, and Schiffer 1965.

Schild, A., 1960, "Time," *Texas Quarterly, 3,* no. 3, 42–62. [§7.3]

Schild, A., 1962, "Gravitational theories of the Whitehead type and the principle of equivalence," in Møller 1962. [§§7.3, 38.5]

Schild, A., 1967, "Lectures on General Relativity Theory," in Ehlers 1967, pp. 1–105. [§7.3, endpapers]

Schild, A., 1970, "Tearing geometry to pieces: More on conformal geometry," unpublished lecture at Jan. 19 Princeton University relativity seminar. [Box 10.2]

Schild, A., *cited by name in* §10.3, Box 17.3, Ex. 10.6. *See also* Douglas *et al.* 1969, Ehlers, Pirani, and Schild 1972, Infeld and Schild 1949, Kerr and Schild 1965, *and* Robinson, Schild, and Schücking 1965.

Schilpp, P. A., ed., 1949, *Albert Einstein: Philosopher-Scientist,* Library of Living Philosophers, Evanston, Ill.; source of quotations from A. Einstein, K. Menger, and M. von Laue. [Box 1.11, epigraphs to §1.2, Chaps. 2, 9]

Schmidt, B. G., 1971, "A new definition of singular points in general relativity," *Gen. Rel. Grav. 1,* 269–280. [§34.6]

Schmidt, M., 1972, "Statistical studies of the evolution of extragalactic radio sources, I. Quasars," *Astrophys. J. 176,* 273–287. [Box 28.1]

Schmidt, M. *Cited by name in* Box 27.7, Ex. 29.7. *See also* Bahcall, Sargent, and Schmidt 1967 *and* Bahcall and Schmidt 1967.

Schoch, C. *See* Neugebauer and Schoch 1930.

Schouten, J. A., 1954, *Ricci-calculus,* Springer, Berlin, Germany. [§21.5, Ex. 17.8, 21.8, endpapers]

Schramm, D. N. *See* Wasserburg, Schramm, and Huneke 1969.

Schrödinger, E., 1950, *Space-Time Structure,* Cambridge Univ. Press, England. [endpapers]

Schücking, E. *See also* Douglas *et al.* 1969 *and* Robinson, Schild, and Schücking 1965.

Schücking, E., and O. Heckmann, 1958, "World models," in *Onzième Conseil de Physique Solvay,* Éditions Stoops, Brussels, pp. 149–158. [§§30.2, 30.3]

Schutz, B., *cited by name in* Ex. 35.20.

Schutz, S., 1966, statement in January 1966 final examination in course in relativity, Princeton University. [Epigraph to Chap. 16]

Schwartz, J. T. *See* Dunford and Schwartz 1958.

Schwartz, L., 1950–1951, *Théorie des distributions,* vols. 1 and 2, Hermann, Paris. [§4.7]

Schwarzschild, K., 1916a, "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie," *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.,* 189–196. [Preface, §§14.1, 23.6]

Schwarzschild, K., 1916b, "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flussigkeit nach der Einsteinschen Theorie," *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.,* 424–434. [§23.2, Box 23.2]

Schwarzschild, K., *cited by name in* §§42.1, 42.7.

Schwinger, J., 1948, "Quantum electrodynamics, I: A covariant formulation," *Phys. Rev. 74,* 1439–1461. [Box 15.1]

Schwinger, J., ed., 1958, *Selected Papers on Quantum Electrodynamics,* Dover, New York.

Schwinger, J., 1963a, "Energy and momentum density in field theory," *Phys. Rev. 130,* 800–805. [Ex. 40.8]

Schwinger, J., 1963b, "Quantized gravitational field," *Phys. Rev. 130,* 1253–1258. [Ex. 40.8]

Sciama, D. W., 1957, "Inertia," *Sci. American 196,* no. 2, 99–109. [§21.12]

Sciama, D. W., 1961, *The Unity of the Universe,* Anchor, New York. [§21.12]

Sciama, D. W., 1971, *Modern Cosmology,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§28.1, Box 27.7]

Sciama, D. W., *cited by name in* Boxes 34.2, 34.3.

Scott, P. F., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Hewish *et al.* 1968.

Sears, F. W., 1953, *An Introduction to Thermodynamics. the Kinetic Theory of Gases, and Statistical Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [§23.4]

Seattle 1967, Battelles Rencontres. *See* DeWitt and Wheeler 1968.
Seckler, B. D. *See* Keller, Lewis, and Seckler 1956.
Seelig, C., ed., 1956. *See* Kollros 1956.
Seielstad, G. A., R. A. Sramek, and K. W. Weiler, 1970, "Measurement of the deflection of 9.602-GHz radiation from 3C279 in the solar gravitational field," *Phys. Rev. Lett. 24,* 1373–1376. [Box 40.1]
Sejnowski, T. J., 1973, personal communication. [Ex. 15.2]
Shakespeare, W., *quoted at end of* Chap. 44.
Shakura, N. I., and R. A. Sunyaev, 1973, "Black holes in binary systems: Observational appearance," *Astron. Astrophys. 24,* 337–355. [Box 33.3]
Shannon, C., 1938, "A symbolic analysis of relay and switching circuits," *Trans. Am. Inst. Elect. Eng. 57,* 713–723. [§44.5]
Shapiro, I. I., 1964, "Fourth test of general relativity," *Phys. Rev. Lett. 13,* 789–791. [§40.4]
Shapiro, I. I., 1967, "New method for the detection of light deflection by solar gravity," *Science 157,* 806–808. [§40.3]
Shapiro, I. I., 1968, "Fourth test of general relativity: preliminary results," *Phys. Rev. Lett. 20,* 1265–1269. [§40.4, Box 40.2]
Shapiro, I. I., 1970, results reported at Third Cambridge Conference on Experimental Relativity, New York City, June 1970. [Box 40.3]
Shapiro, I. I., 1971a. "Testing general relativity: progress, problems, and prospects," in Davies, 1971, pp. 136–147. [Box 40.3]
Shapiro, I. I., 1971b. "Testing general relativity: progress, problems, and prospects," lecture at Sixth International Conference on Gravitation and Relativity, published by NORDITA (Copenhagen) in multilith form for distribution at conference, also published in *Gen. Rel. Grav. 3,* 135–148 (1972). [§39.3, Box 40.3]
Shapiro, I. I., M. E. Ash, D. B. Campbell, R. B. Dyce, R. P. Ingalls, R. F. Jurgens, and G. H. Pettengill, 1971, "Fourth test of general relativity: New radar result," *Phys. Rev. Lett. 26,* 1132–1135. [Box 40.2]
Shapiro, I. I., W. B. Smith, M. E. Ash, R. P. Ingalls, and G. H. Pettengill, 1971, "Gravitational constant: Experimental bound on its time variation," *Phys. Rev. Lett. 26,* 27–30. [§40.8]
Shapiro, I. I., G. H. Pettengill, M. E. Ash, R. P. Ingalls, D. B. Campbell, and R. B. Dyce, 1972, "Mercury's perihelion advance: determination by radar," *Phys. Rev. Lett. 28,* 1594–1597. [Box 40.3]
Shapley, H., *cited by name in* Box 27.7.
Sharp, D. H., 1960, "One- and two-surface formulations of the boundary-value problem for Einstein-Maxwell theory and for 'already unified' field theory," Physics A. B. senior thesis, Princeton University, unpublished; deposited in Fine Library, Princeton University. [§21.9]
Sharp, D. H., *cited by name in* §21.1. *See also* Baierlein, Sharp, and Wheeler 1962, Hartle and Sharp 1965, *and* Misner and Sharp 1964.
Sheldon, S. E., 1971, "A complete redshift-magnitude formula," *Astron. J. 76,* 751–755. [§29.4]
Shelest, V. P., ed., 1972, *Gravitatsiya: Problemi i Perspektivi: pamyati Alekseya Zinovievicha Petrova posvashaetsya,* Naukova Dumka, Kiev.
Shields, M. C. *See* Boni, Russ, and Laurence 1960.
Shimmins, A. J., *cited by name in* Box 27.7.
Shirkov, D. V. *See* Bogoliubov, N. N.
Shu, F. H. *See* Lin, Mestel, and Shu 1965.
Siegel, C. L., 1956, *Vorlesungen über Himmelsmechanik,* Springer, Berlin. [Box 25.4]
Siegel, C. L., and J. K. Moser, 1971, *Lectures on Classical Mechanics,* translated by C. I. Kalme, Springer, Berlin and New York, 1971. [Box 25.4]
Silverberg, E. C. *See* Bender *et al.* 1971.
Simpson, O. C. *See* Estermann, Simpson, and Stern 1938.
Singer, D. W., 1950, *Giordano Bruno, His Life and Thought with Annotated Translation of His Work, On the Infinite Universe and Worlds,* Abelard-Schuman, New York. [Box 27.7]
Slee, O. B., *cited by name in* Box 27.7.
Slipher, V. M., *cited by name in* Box 27.7.
Smith, J. H. *See* Frisch and Smith 1963.
Smith, W. B. *See* Shapiro, Smith *et al.* 1971.
Snider, J. L. *See* Pound and Snider 1964 *and* 1965.
Snyder, H. *See* Oppenheimer and Snyder 1939.
Söding, P., J. Bartels, A. Barbaro-Galtieri, J. E. Enstrom, T. A. Łasinski, A. Rittenberg, A. H. Rosenfeld, T. G. Trippe, N. Barash-Schmidt, C. Bricman, V. Chaloupka, and M. Roos, 1972, "Review of particle properties," *Physics Letters, 39B,* 13. [endpapers]
Solvay 1958, Onzième Conseil de Physique Solvay, held at the Instituts Solvay, Brussels; proceedings: *La Structure et l'evolution de l'univers,* Éditions Stoops, Brussels, Belgium.
Sommerfeld, A., and J. Runge, 1911, "Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik," *Ann. Phys. (Germany) 35,* 277–298. [§22.5]
Spencer, D. C. *See* Nickerson, Spencer, and Steenrod 1959.
Spitzer, L., Jr., 1971, "Dynamical evolution of dense spherical star systems," in *Semaine d'étude sur les noyeaux des galaxies 1970 (Pontificae Academiae Scientarum Scripta Varia no. 35).* [§§24.5, 24.6, Box 33.3]
Spivak, M., 1965, *Calculus on Manifolds,* W. A. Benjamin, New York. [§4.1, Box 4.1]
Sramek, R. A., 1971, "A measurement of the gravitational deflection of microwave radiation near the sun, 1970 October," *Astrophys. J. Lett. 167,* L55–L60. [Box 40.1]
Sramek, R. A. *See also* Seielstad, Sramek, and Weiler 1970.
St. Patrick. *See* Stokes 1887.
Stabell, R. *See* Refsdal, Stabell, and de Lange 1967.
Stanley, G. J., *cited by name in* Box 27.7.
Starobinsky, A. A. *See* Zel'dovich and Starobinsky 1971.
Steenrod, N. E. *See* Nickerson, Spencer, and Steenrod 1959.
Stehle, P. *See* Corben and Stehle 1960.
Steigman, G., 1971, "Antimatter and cosmology," in Sachs 1971, pp. 373–382. [§§27.11, 28.4]
Stephenson, F. R., *contributed* Fig. 1.8.
Stern, O. *See* Estermann, Simpson, and Stern 1938.
Sternberg, S., 1969, *Celestial Mechanics,* W. A. Benjamin, New York. [§8.2]
Steuckelberg, E. C. G., and G. Wanders, 1953, "Thermodynamique en relativité général," *Helv. Phys. Act., 26,* 307–316. [§22.2]
Stewart, J. M., 1971, *Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory,* lecture notes in Physics 10, Springer-Verlag, Berlin. [§22.6, Ex. 22.7]

Stewart, J. M., *cited by name in* §22.3.
Stewart, J. M., and G. F. R. Ellis, 1968, "Solutions of Einstein's equations for a fluid which exhibits local rotational symmetry," *J. Math. Phys. 9,* 1072–1082. [Ex. 32.1]
Stockton, A. N., *cited by name in* Box 27.7.
Stokes, G. C., *cited by name in* Box 4.6.
Stokes, W., 1887, *The Tripartite Life of St. Patrick With Other Documents Relating to That Saint,* Her Majesty's Stationery Office, London. [§19.4]
Stratimyer, H., *cited by name in* Box 16.3.
Struve, F. G. W., *cited by name in* Box 27.7.
Sunyaev, R. A. *See* Shakura and Sunyaev 1973.
Susskind, L. *See* Aharonov and Susskind 1967.
Symanzik, K., 1963, "Aspects of Euclidean field theory and Feynman path integrals," in Lurie and Mukunda 1963. [Box 21.1]
Synge, J. L., 1950, "The gravitational field of a particle," *Proc. R. Irish Acad. A 53,* 83–114. [§31.5, Box 31.1]
Synge, J. L., 1960a, "On certain identities connected with the Einstein tensor," *Proc. R. Irish Acad. A 61,* 29–36. [Ex. 35.14]
Synge, J. L., 1960b, *Relativity: The General Theory,* North-Holland, Amsterdam. [endpapers]
Synge, J. L., 1962, "Tensorial integral conservation laws in general relativity," in CNRS 1962, pp. 75–83. [Box 15.3]
Synge, John Lighton, *Festschrift* on the occasion of his 75th birthday, March 23, 1972. *See* O'Raifeartaigh 1972.
Szekeres, G., 1960, "On the singularities of a Riemannian manifold," *Publ. Mat. Debrecen 7,* 285–301. [§31.4, Box 31.1]
Taliaferro, R. C., trans. 1952, *Ptolemy, The Almagest,* in *Great Books of the Western World,* Encyclopedia Brittanica, Inc., Chicago, Ill., Volume 16. [Box 27.7]
Tamman, G. A., *cited by name in* Box 29.4. *See also* Sandage, Tamman, and Hardy 1972.
Tannenbaum, M. *See* Farley *et al.* 1966.
Tartaglia, N. F., 1560, *General Trattato dei Numeri et Misure,* Cited in *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* vol. III, part i, p. 1056, Leipzig 1914. [Box 13.1]
Taub, A. H., 1948, "Relativistic Rankine-Hugonoit equations, *Phys. Rev., 74,* 328–334. [§22.2, Box 22.2]
Taub, A. H., 1965, "Equations of motion of test particles," in London 1965. [§40.9]
Taub, A. H., 1971, "Relativistic Hydrodynamics," *Studies in Applied Mathematics—Math. Assoc. Amer. Studies in Math. 7,* 150–180. [§22.3]
Taub, A. H. *See also* Misner and Taub 1968.
Tauber, G. E., and J. W. Weinberg, 1961, "Internal state of a gravitating gas," *Phys. Rev. 122,* 1342–1365. [§22.6]
Taylor, D. J., *cited by name in* Box 34.3. See also Cocke and Taylor 1969.
Taylor, E. F., and J. A. Wheeler, 1966, *Spacetime Physics,* W. H. Freeman, San Francisco, Calif. [§2.1, Fig. 2.7, Ex. 6.9]
Tbilisi, USSR, 1968. Fifth International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity, Tbilisi State University, August 1968. *See* Fock 1968.
Technion 1969, *International Seminar on Relativity and Gravitation* held at Technion City, Israel, in July 1969, in honor of the 60th birthday of Professor Nathan Rosen. *See* Kuper and Peres 1971.
Teitelboim, C., 1970, "Splitting of the Maxwell tensor: radiation reaction without advanced fields," *Phys. Rev. D 1,* 1572–1582. [§20.6, Ex. 20.8]
Teitelboim, C., 1971, "Radiation reaction as a retarded self-interaction," *Phys. Rev. D 4,* 345–347. [§20.6]
Teitelboim, C., 1972a, "Nonmeasurability of the baryon number of a black hole," *Nuovo Cimento Lett., II, no. 3,* 326–328. [Box 25.2, Boxes 32.2, 33.1]
Teitelboim, C., 1972b, "Nonmeasurability of the lepton number of a black hole," *Nuovo Cimento, II 3,* 397–400. [Boxes 25.2, 33.1]
Teitelboim, C., 1972c, "Nonmeasurability of the Quantum Numbers of a Black Hole," *Phys. Rev. D 5,* 2941–2954 [Boxes 25.2, 32.2, 33.1]
Teitelboim, C., *cited by name in* §21.1, Fig. 4.6.
Teller, E., 1948, "On the change of physical constants," *Phys. Rev. 73,* 801–802. [§38.6]
Teller, E., *cited by name in* Box 38.2. *See also* De Hoffman and Teller 1950.
Tempier, É., *cited by name in* Box 27.7.
Teukolsky, S. A., 1972. "Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations," *Phys. Rev. Lett. 29,* 1114–1118. [§41.11, Box 33.3, Ex. 33.14]
Teukolsky, S. A., 1973, "Perturbations of a rotating black hole, I: Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations," *Astrophys. J.,* in press. [Ex. 33.14]
Teukolsky, S. A. *See also* Bardeen, Press, and Teukolsky 1972 *and* Press and Teukolsky 1972 *and* 1973.
Texas Symposia on Relativistic Astrophysics: 1963, *see* Robinson, Schild, and Schücking 1965 *and* Harrison *et al.* 1965; 1964, *see* Douglas *et al.* 1969; 1972, *see Trans. N.Y. Acad. Sci.*
Thirring, H., 1918, "Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. Z. 19,* 33–39. [§21.12]
Thirring, H., 1921, "Berichtigung zu meiner Arbeit: "Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. A. 22,* 29–30. [§21.12]
Thirring, H., and J. Lense, 1918, "Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. Z. 19,* 156–163. [§§21.12, 40.7]
Thirring, W. E., 1961, "An alternative approach to the theory of gravitation," *Ann. Phys. (U.S.A.) 16,* 96–117. [§§7.1, 18.1]
Thomas, L. H., 1927, "The kinematics of an electron with an axis," *Phil. Mag. 3,* 1–22. [§§40.7, 41.4, Ex. 6.9]
Thomson, A. *See* Farnsworth *et al.* 1972.
Thomson, J. J., 1907, *Electricity and Matter,* Archibald Constable, London, Chapter III. [Fig. 4.6]
Thomson, J. J., *cited by name in* Fig. 4.6.
Thomson, W., Lord Kelvin, 1889, *Popular Lectures and Addresses, Vol. I,* Macmillan, London. [Epigraph to Chap. 37]
Thomson, W., Lord Kelvin, 1904, *Baltimore Lectures on Mo-*

lecular Dynamics and the Wave Theory of Light, C. J. Clay, London. [Preface]
Thomson, W., Lord Kelvin, *cited by name in* Box 17.2, *quoted in* epigraph of Chap. 20.
Thorne, K. S., 1967, "The general relativistic theory of stellar structure and dynamics," in DeWitt, Schatzman, and Veron 1967, pp. 259–441. [§24.4, endpapers]
Thorne, K. S., 1969a, "Nonradial pulsation of general-relativistic stellar models, III: Analytic and numerical results for neutron stars," *Astrophys. J. 158,* 1–16. [§24.3, Box 36.1]
Thorne, K. S., 1969b, "Nonradial pulsation of general-relativistic stellar models, IV: The weak-field limit," *Astrophys. J. 158,* 997–1019. [§36.8, Box 36.1]
Thorne, K. S., 1971, "Relativistic stars, black holes, and gravitational waves," in Sachs 1971, pp. 238–283. [§40.7]
Thorne, K. S., 1972, "Nonspherical gravitational collapse, a short review," in Klauder 1972, pp. 231–258. [Box 32.3, Ex. 32.10]
Thorne, K. S., 1973a. "Relativistic shocks: The Taub adiabat," *Astrophys. J. 179,* 897–907. [§22.2, Box 22.2]
Thorne, K. S., 1973b, "Black-hole models for compact x-ray sources," *Astrophys. J.,* in press. [Box 33.3]
Thorne, K. S. *See also* Ames and Thorne 1968, Bardeen, Thorne, and Meltzer 1966, Bisnovatyi-Kogan and Thorne 1970, Fackerell, Ipser, and Thorne 1969, Fletcher *et al.* 1967, Harrison *et al.* 1965, Hartle and Thorne 1968 *and* 1974, Ipser and Thorne 1968, Meltzer and Thorne 1966, Morgan and Thorne 1973, Novikov and Thorne 1973, Press and Thorne 1972, *and* Trimble and Thorne 1969.
Thorne, K. S., W. T. Ni, and C. M. Will, 1971, "Theoretical frameworks for testing relativistic gravity: A review," in Davies 1971, pp. 10–31. [§17.6, Box 39.5]
Thorne, K. S., and C. M. Will, 1971, "Theoretical frameworks for texting relativistic gravity, I: Foundations," *Astrophys. J. 163,* 595–610. [§§38.2, 39.2]
Tikhonov, M. Yu. *See* Braginsky, Manukin, and Tikhonov 1970.
Tobey, R. G., *et al.* 1967, *PL/1 Formac Interpreter, Users Reference Manual* IBM Controlled Program Library 360D 03.3004, Hawthorne, N.Y. [Box 14.3]
Tolman, R. C., 1934a, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology,* Clarendon Press, Oxford. [§44.1, Ex. 22.7, endpapers]
Tolman, R. C., 1934b, "Effect of inhomogeneity on cosmological models," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 20,* 169–176. [§30.6, Ex. 32.8]
Tolman, R. C., 1939, "Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid," *Phys. Rev. 55,* 364–373. [§23.2, Ex. 23.9]
Tomonaga, S., 1946, "On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields," *Prog. Theor. Phys. 1,* 27–42, reprinted in Schwinger 1958. [Boxes 15.1, 21.1, Ex. 43.5]
Tonnelat, M. A., *quoted at end of* Chap. 44.
Torrence, R. J. *See* Couch *et al.* 1968 *and* Newman *et al.* 1965.
Trautman, A., 1965, "Foundations and current problems of general relativity theory," in Trautman, Pirani, and Bondi 1965. [§12.1, Boxes 8.1, 12.4, endpapers]
Trautman, A., 1972, "On the Einstein-Cartan equations, I," *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences (math., astr., phys.) 20,* 185–190. [§§38.2, 39.2]
Trautman, A., F. A. E. Pirani, and H. Bondi, 1965, *Lectures on General Relativity,* Brandeis 1964 Summer Institute on Theoretical Physics, vol. I, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Treder, H. J., 1962, *Gravitative Stosswellen, Nichtanalytischen Wellenlösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen,* Akademie-Verlag, Berlin. [§21.13]
Treder, H. J. *See also* Papapetrou and Treder 1959 *and* 1962.
Trimble, V. L., and K. S. Thorne, 1969, "Spectroscopic binaries and collapsed stars," *Astrophys. J. 156,* 1013–1019. [Box 33.3]
Trumpler, R. J. *See* Campbell and Trumpler 1928.
Truran, J. *See* Cameron and Truran 1971.
Truran, J., and A. G. W. Cameron, 1971, "Evolutionary models of nucleosynthesis in the galaxy," *Astrophys. & Space Sci. 14,* 179–222. [Box 33.3]
Tukey, J. W. *See* Blackman and Tukey 1959.
Turkevich, A. *See* Fermi and Turkevich 1950.
Turner, K. C., and H. A. Hill, 1964, "New experimental limit on velocity-dependent interactions of clocks and distant matter," *Phys. Rev. B 134,* 252–256. [§38.7, Fig. 38.3]
Tyson, J. A., *cited by name in* Ex. 37.13. *See also* Douglass and Tyson 1971.
Ulam, S. *See* Kac and Ulam 1968.
Unruh, W. G., 1971, "Dirac particles and geometrodynamical charge in curved geometries," doctoral dissertation, physics, Princeton University. [§21.9]
Unt, V., and P. Keres, 1972. "Tails of waves in the Schwarzschild field" (in Russian), *Izv. Akad Nauk Estonian S.S.R., Fiz. Mat., 21,* 17–30. [§35.14]
Urey, H. C. *See* Ruark and Urey 1930.
Van de Kamp, P., 1958, "Visual binaries," *Ann. Phys. (U.S.A.) 50,* 187–224. [Box 36.3]
Van der Waerden, B. L., 1967, *Sources of Quantum Mechanics,* North-Holland, Amsterdam, Holland. Reprinted in 1968 by Dover, New York.
Varenna, International School of Physics "Enrico Fermi," organized at Varenna on Lake Como by the Italian Physical Society; 1961, *see* Møller 1962; 1965, *see* Gratton 1966; 1969, *see* Sachs 1971; 1972, *see* Bertotti 1973.
Vatican 1970, Study Week on the Nuclei of Galaxies, April 13–18, 1970, at the Vatican; proceedings published in *Semain d'etude sur les noyeaux des galaxies, Pontificae Academiae Scientarum Script Varia no. 35,* 1971.
Veblen, O., and J. H. C. Whitehead, 1932, *The Foundations of Differential Geometry,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. Reprinted 1953. [§2.2]
Veron, P. *See* DeWitt, Schatzman, and Veron 1967.
Vishveshwara, C. V., 1970, "Stability of the Schwarzschild Metric," *Phys. Rev. D 1,* 2870–2879. [Box 33.3]
Volkoff, G. *See* Oppenheimer and Volkoff 1939.
Voltaire, François Marie Arouet de, 1738, *Élèments de Philosophie de Newton,* Pt. 3, chap. III; reprinted in vol. 5 of *Oevres de Voltaire,* Bacquenois, Paris, 1836. [epigraph to §1.1]
von Karman, T., *cited by name in* Box 38.2.

von Klüber, H., 1960, "The determination of Einstein's light deflection in the gravitational field of the sun," in Beer 1960, pp. 47–77. [Box 40.1]

von Oppolzer, T. R., 1887, "Canon der Finsternisse," *Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Wien Math.—Nat. Kl. 52,* i-xviii, 1–321. [Fig. 1.8]

von Neumann, J., *cited by name in* Box 38.2.

Vourloumis, Hypatia, 1971, statement made at Knossos, May 1971, while serving as guide on Swan's Hellenic tour. *Quoted at end of* Chap. 44.

Vyasa, about 400 A.D., *The Mahabharata,* translated from the Sanskrit by P. Lal, Writers Workshop, Calcutta. [Epigraph to §1.5]

Waage, H., *cited by name in* Fig. 1.7.

Wagoner, R. V., 1967, "Some effects of an intervening galaxy on the radiation from very distant objects," *Astrophys. J. 149,* 465–480. [Ex. 29.8]

Wagoner, R. V., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Bardeen and Wagoner 1971 *and* Salpeter and Wagoner 1971.

Wagoner, R. V., W. A. Fowler, and F. Hoyle, 1967, "On the synthesis of elements at very high temperatures," *Astrophys. J. 148,* 3–49. [§28.1]

Wakano, M. *See* Harrison *et al.* 1965 *and* Klauder *et al.* 1959.

Wald, R. M., 1971. *See* Cohen and Wald 1971.

Walker, A. G., 1932, "Relative coordinates," *Proc. R. Soc. Edinburgh 52,* 345–353. [§6.3]

Walker, A. G., 1936, "On Milne's theory of world-structure," *Proc. London Math. Soc. 42,* 90–127. [Ex. 27.5]

Walker, A. G. *cited by name in* §30.3, Box 27.7.

Walker, M., and R. Penrose, 1970, "On quadratic first integrals of the geodesic equations for type [22] spacetimes," *Commun. Math. Phys. 18,* 265–274. [§§33.4, 33.5]

Walker, R. *See* Mathews and Walker 1965.

Wallace, A. H., 1957, *An Introduction to Algebraic Topology,* Pergamon, London. [Box 34.1]

Walraven, Th. *See* Ledoux and Walraven 1958.

Wampler, E. J., *cited by name in* Box 27.7.

Wanders, G. *See* Steuckelberg and Wanders 1953.

Ward, W., 1970, "General-relativistic light deflection for the complete celestial sphere," *Astrophys. J. 162,* 345–348. [§40.3]

Warrington, J., trans. 1956, *Aristotle's Metaphysics,* E. P. Dutton, New York. [Box 27.7]

Wasserburg, G. J. *See* Papanastassiou and Wasserburg 1969.

Wasserburg, G. J., and D. S. Burnett, 1968, "The status of isotopic age determinations on iron and stone meteorites," in P. M. Millman, ed., *Meteorite Research,* Reidel, Dordrecht, Holland, pp. 467–479. [§29.7, Box 29.3]

Wasserburg, G. J., D. N. Schramm, and J. C. Huneke, 1969, "Nuclear chronologies for the galaxy," *Astrophys. J. 157,* L91–L96. [§29.7]

Weber, H., ed., 1953, *B. Riemann: Gesammelte Mathematische Werke,* 2d ed., paperback reprint, Dover, New York. The *Habilitationsvorlesung* of 1854 was translated into English by W. K. Clifford, *Nature, 8,* 14 (1873). [Box 8.5]

Weber, J., 1960, "Detection and generation of gravitational waves," *Phys. Rev. 117,* 307–313. [§37.3]

Weber, J., 1961, *General Relativity and Gravitational Waves,* Wiley-Interscience, New York. [§37.3, endpapers]

Weber, J., 1967, "Gravitational radiation," *Phys. Rev. Lett. 18,* 498–501. [§37.3, Fig. 37.2]

Weber, J., 1969, "Evidence for discovery of gravitational radiation," *Phys. Rev. Lett. 22,* 1320–1324. [§§37.3, 37.10, Fig. 37.2]

Weber, J., 1970a, "Gravitational radiation experiments," *Phys. Rev. Lett. 24,* 276–279. [§§37.3, 37.10]

Weber, J., 1970b, "Anisotropy and polarization in the gravitational-radiation experiments," *Phys. Rev. Lett. 25,* 180–184. [§§37.3, 37.10]

Weber, J., *cited by name in* Preface, Box 17.3.

Weil, A. *See* Allendoerfer and Weil 1943.

Weiler, K. W. *See* Seielstad, Sramek, and Weiler 1970.

Weinberg, J. W. *See* Tauber and Weinberg 1961.

Weinberg, S., 1965, "Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's equations," *Phys. Rev. B 138,* 988–1002. [§§7.1, 18.1]

Weinberg, S., 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity,* Wiley, New York. [endpapers]

Weingarten, J., *cited by name in* §21.5.

Weisskopf, V. F. *See* Blatt and Weisskopf 1952 *and* Fierz and Weisskopf 1960.

Wells, J. S. *See* Evenson *et al.* 1972.

Welton, T. A., 1948, "Some observable effects of the quantum-mechanical fluctuations of the electromagnetic field," *Phys. Rev. 74,* 1157–1167. [Box 17.2 part 6]

Wentzel, G., 1949, *Quantum Theory of Fields,* Interscience, New York. [§21.3, Boxes 7.1, 21.2]

Werner, F. G., 1969, private remark to J. A. Wheeler on June 3 at the Cincinnati, Ohio, Relativity Conference in the Midwest. [§44.5]

Westermann, A. and J. F. Boissonade, eds. 1878, "Marini vita Procli," xxxvii, *in Dioginis Laertii de Clarorum Philosophorum,* II, Paris, p. 169. [Fig. 1.8]

Weyl, H., 1922, *Space-Time-Matter,* translated by H. L. Brose, Methuen, London. [endpapers]

Weyl, H., 1924a, "Massenträgheit und Kosmos: Ein Dialog," *Naturwissenschaften 12,* 197–204. [§21.12]

Weyl, H., 1924b, *Was Ist Materie,* Springer, Berlin, Germany. [Box 15.1]

Weyl, H., 1925, "Theorie der Darstellung kontinuierlichen halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I," *Math. Z. 23,* 271–309. [§2.2, Epigraph to Chap. 2]

Weyl, H., 1937, lectures at Princeton University. [§4.5]

Weyl, H., 1946, *Classical Groups: Their Invariants and Representation,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 2d ed. [Box 27.2]

Weyl, H., 1949, *Philosophy of Mathematics and Natural Science,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., p. 116. [Epigraph to Chap. 6, Box 8.5]

Weyl, H., *cited by name in* §4.5, Boxes 16.4, 27.7, *quoted in* epigraph of Chap. 10. *See also* Lorentz *et al.* 1923.

Wheeler, J. A., 1955, "Geons," *Phys. Rev. 97,* 511–536. [§§21.12, 25.5, Box 15.1, Ex. 32.11]

Wheeler, J. A., 1959, "View that the distribution of mass and energy determines the metric," in *Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers,* Éditions Stoops, Brussels, Belgium. [§§21.12, 43.1]

Wheeler, J. A., 1961, "Geometrodynamics and the problem of motion," *Rev. Mod. Phys. 33,* 63–78. [§20.6]

Wheeler, J. A., 1962, *Geometrodynamics,* Academic Press, New York. [§§43.4, 44.3, Fig. 44.1, Boxes 33.3, 36.2, 44.3]

Wheeler, J. A., 1964a, "Geometrodynamics and the issue of the final state," in DeWitt and DeWitt 1964b. [§§27.10, 21.11, 34.6, 35.13, 42.6, 43.1, Boxes 27.7, 44.4, Ex. 21.18]

Wheeler, J. A., 1964b, "Gravitation as geometry, II," in Chiu and Hoffman 1964. [§15.3]

Wheeler, J. A., 1964c, "Mach's principle as boundary condition for Einstein's equations," in Chiu and Hoffman 1964, pp. 303–349. [§§21.10, 21.12, 43.1]

Wheeler, J. A., 1966, "Superdense stars," in *Annual Review Astron. and Astrophys. Vol. 4,* L. Goldberg, ed., Palo Alto, Calif. pp. 393–432. [§24.3, Ex. 36.3]

Wheeler, J. A., 1968a, "Superspace and the nature of quantum geometrodynamics," in DeWitt and Wheeler 1968. [§§21.1, 21.8, Box 44.3]

Wheeler, J. A., 1968b, *Einstein's Vision,* Springer, Berlin. Contained in part in Wheeler 1968a. [§§21.8, 21.12, Ex. 21.23]

Wheeler, J. A., 1970, "Superspace," in Gilbert and Newton 1970, pp. 335–378. [§43.1]

Wheeler, J. A., 1971a, notebook entry, "Pregeometry and the calculus of variations," 9:10 A.M., April 10; seminar, Department of Mathematics, Kings College, London, May 10; letter to L. Thomas, "Pregeometry and propositions," June 11, unpublished. [Box 44.5]

Wheeler, J. A., 1971b, "Transcending the law of conservation of leptons," in *Atti del Convegno Internazionale sul Tema: The Astrophysical Aspects of the Weak Interactions; Quaderno N. 157,* Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, pp. 133–164. [§§41.11, 44.6, Box 25.2]

Wheeler, J. A., 1971c, "From Mendeléev's atom to the collapsing star," 189–233 in *Atti del Convegno Mendeléeviano,* Accademia delle Scienze, Torino; reprinted in *Trans. New York Acad. Sci., 33,* 745–779 (1971). *See also* Wyler 1971. [§28.3, Box 25.2]

Wheeler, J. A., 1971d, "Mechanisms for jets," in *Study week on nuclei of galaxies, Pontificiae Academiae Scientarum Scripta Varia no. 35,* 539–567. [Box 33.3]

Wheeler, John Archibald, *Festschrift* on the occasion of his sixtieth birthday, July 9, 1971. *See* Klauder 1972.

Wheeler, J. A., *cited by name in* §21.1, Box 8.5. *See also* Baierlein, Sharp, and Wheeler 1962, Brill and Wheeler 1957, DeWitt and Wheeler 1968, Douglas *et al.* 1969, Ford and Wheeler 1959a *and* 1959b, Fuller and Wheeler 1962, Harrison *et al.* 1965, Harrison and Wheeler 1958, Klauder *et al.* 1959, Lindquist and Wheeler 1957, Marzke and Wheeler 1964, Misner and Wheeler 1957 *and* 1972, Power and Wheeler 1957, Regge and Wheeler 1957, Ruffini and Wheeler 1970, 1971a, *and* 1971b, *and* Taylor and Wheeler 1966.

Wheeler, J. A., and R. P. Feynman, 1945, "Interaction with the absorber as the mechanism of radiation," *Rev. Mod. Phys. 17,* 157–181. [§4.7, Box 2.1]

Wheeler, J. A., and R. P. Feynman, 1949, "Classical electrodynamics in terms of direct inter-particle action," *Rev. Mod. Phys. 21,* 425–434. [§4.7, Box 2.1]

White, R. H. *See* Colgate and White 1966 *and* May and White 1966 *and* 1967.

Whitehead, A. N., 1922, *The Principle of Relativity,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§§38.2, 39.1, 39.3, 39.8, Box 17.3]

Whitehead, A. N., 1929, *The Function of Reason,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. [Epigraph to Chap. 28]

Whitehead, J. H. C. *See* Veblen and Whitehead 1932.

Whitrow, G. J., and G. E. Morduch, 1965, "Relativistic theories of gravitation, a comparative analysis with particular reference to astronomical tests, in *Vistas in Astronomy 6,* 1–67. [§38.2]

Whittaker, E. R., 1904, "On an expression of the electromagnetic field due to electrons by means of two scalar potential functions," *Proc. R. Soc. London 1,* 367–372. [Ex. 4.10]

Wigner, E. P., 1960, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences," *Commun. Pure & Appl. Math. 13,* 1–14, reprinted in *Symmetries and Reflections: Scientific Essays of Eugene P. Wigner,* W. J. Moore and M. Scriven, eds., Indiana Univ. Press, Bloomington, Ind., 1967. [§44.2]

Wigner, E. P., *cited by name in* Box 38.2. *See also* Bargmann and Wigner 1948 *and* Salam and Wigner 1972.

Wilkins, D., 1972, "Bound geodesics in the Kerr metric," *Phys. Rev. D 5,* 814–822. [Box 33.5]

Wilkinson, D. T., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Bender *et al.* 1971 *and* Dicke *et al.* 1965.

Will, C. M., 1971a, "Relativistic gravity in the solar system, I: Effect of an anisotropic gravitational mass on the earth-moon distance," *Astrophys. J. 165,* 409–412. [Box 39.5]

Will, C. M., 1971b, "Relativistic gravity in the solar system, II: Anisotropy in the Newtonian gravitational constant," *Astrophys. J. 169,* 141–156. [§§38.2, 39.1, 40.8, Boxes 17.3, 39.5]

Will, C. M., 1971c, "Theoretical frameworks for testing relativistic gravity, II: Parametrized post-Newtonian hydrodynamics, and the Nordtvedt effect," *Astrophys. J. 163,* 611–628. [§§38.2, 39.3, 40.9, Box 39.5]

Will, C. M., 1971d, "Theoretical frameworks for testing relativistic gravity, III: Conservation laws, Lorentz invariance, and values of the PPN parameters," *Astrophys. J. 169,* 125–140. [§39.9, Box 39.5, Ex. 39.15]

Will, C. M., 1972, "The theoretical tools of experimental gravitation," Caltech Orange-Aid Preprint 289, to be published in Bertotti 1973. [§§38.2, 39.3, Box 39.5]

Will, C. M., 1973, "Relativistic gravity in the solar system, III: Experimental disproof of a class of linear theories of gravitation," *Astrophys. J.,* in press. [§§39.3, 39.8]

Will, C. M. *See also* Nordtvedt and Will 1972, Thorne, Ni, and Will 1971, *and* Thorne and Will 1971.

Will, C. M., and K. Nordtvedt, Jr., 1972, "Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity, I: Preferred-frame theories and an extended PPN formalism," *Astrophys. J. 177,* 757–774. [§§38.2, 39.2, 39.3, 39.9, 40.8, Boxes 39.1, 39.5]

Willey, R. *See* Klauder *et al.* 1959.

Williams, R. W. *See* Bailey *et al.* 1968.

Willmore, T. J., 1959, *An Introduction to Differential Geometry,* Clarendon Press, Oxford, [Box 8.1]

Wilson, O. C. *See* Minkowski and Wilson 1956.

Wilson, R. W., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Penzias and Wilson 1965.

Winsor, F., *quoted at end of* Chap. 44.
Wintner, A., 1941, *Analytical Foundations of Celestial Mechanics,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. [Box 25.4]
Witteborn, F. C., and W. M. Fairbank, 1967, "Experimental comparison of the gravitational force on freely falling electrons and metallic electrons," *Phys. Rev. Lett. 19,* 1049–1052. [§1.3]
Witteborn, F. C., L. V. Knight, and W. M. Fairbank, 1965, "Use of low-temperature techniques to measure gravitational forces on charged particles," in *Proceedings of the 9th International Conference on Low-Temperature Physics, Columbus 1964,* Plenum Press, New York, 1965, part B, pp. 1248–1252. [§1.3]
Witten, L., ed., 1962, *Gravitation: An Introduction to Current Research,* Wiley, New York.
Witten, L. *See also* Carmeli, Fickler, and Witten 1970.
Wong, C.-Y., 1971, "Application of Regge calculus to the Schwarzschild and Reissner-Nordstrom geometries at the moment of time-symmetry," *J. Math. Phys. 12,* 70–78. [§§42.6, 42.7]
Woolf, N. *See* Douglas *et al.* 1969.
Wright, J. P., 1964, "General relativistic instability," *Phys. Rev. B 136,* 288–289. [Box 26.2]
Wright, T., 1750, *An Original Theory or New Hypothesis of the Universe,* H. Chapelle, London. Reprinted in Munitz 1957. [Box 27.7]
Wyler, J. A. (pseudonym), 1971, "Rasputin, science, and the transmogrification of destiny," preprint bearing the Princeton University seal.
York, J. W., Jr., 1971, "Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem," *Phys. Rev. Lett. 26,* 1656–1658. [§§21.11, 21.12, Ex. 21.22]
York, J. W., Jr., 1972a, personal communication. [Ex. 21.8, 21.9, 21.24]
York, J. W., Jr., 1972b, "The role of conformal 3-geometry in the dynamics of gravitation," *Phys. Rev. Letters 28,* 1082–1085. [§§21.6, 21.11, Ex. 21.24]
York, J. W., Jr., 1973a, "Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial-value problem of general relativity," *J. Math. Phys. 14,* in press. [§21.11]
York, J. W., Jr., 1973b, personal communication. [§§21.10, 21.11]
York, J. W., Jr., *cited by name in* §21.1, Ex. 21.8, 21.9. *See also* O'Murchadha and York 1973.
Yourgrau, W., and S. Mandelstam, 1968, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory,* W. B. Saunders, Philadelphia, Pa. [Box 21.1]
Yu, J. T. *See* Peebles and Yu 1970.
Zapolsky, H. S., 1968, "Can the redshift of quasistellar objects be gravitational?" *Astrophys. J. Lett. 153,* 163–169. [Ex. 25.29]
Zaret, H., *quoted at end of* Chap. 44.
Zeeman, E. C., 1964, "Causality implies the Lorentz group," *J. Math. Phys. 5,* 190–493. [Box 2.1]
Zel'dovich, Ya. B., 1963. "The theory of the expanding universe as originated by A. A. Friedmann," *Usp. Fiz. Nauk, 80,* 357–390. English translation in *Sov. Phys.—Uspekhi. 6,* 475–494 (1964). [§29.2]
Zel'dovich, Ya. B., 1967, "Cosmological constant and elementary particles," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma 6,* 883–884. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 6,* 316–317. [§17.3, Ex. 17.5, Box 17.2 part 6]
Zel'dovich, Ya. B., 1968, "The cosmological constant and the theory of elementary particles," *Usp. Fiz. Nauk 95,* 209–230. English translation in *Sov. Phys.—Uspekhi 11,* 381–393. [Ex. 17.5]
Zel'dovich, Ya. B., 1970, "Particle production in cosmology," *Zh. Eksp. Teor. Fiz.—Pis'ma 12,* 443–447. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 12,* 307–311. [§30.5, Ex. 27.12]
Zel'dovich, Ya. B., 1971, "Particle creation by gravitational fields in collapse and singularities," *Comm. Astrophys. & Space Phys. 3,* 179–184. [Ex. 27.12]
Zel'dovich, Ya. B., 1972, "Creation of particles and antiparticles in an electric and gravitational field," in Klauder 1972, pp. 277–288. [§30.8, Ex. 27.12]
Zel'dovich, Ya. B. *See also* Bisnovatyi-Kogan and Zel'dovich 1969, Braginsky, Zel'dovich, and Rudenko 1969, *and* Doroshkevich, Zel'dovich, and Novikov 1965.
Zel'dovich, Ya. B., and O. H. Guseynov, 1965, "Collapsed stars in binaries," *Astrophys. J. 144,* 840–841. [Box 33.3]
Zel'dovich, Ya. B., and I. D. Novikov, 1966, "The hypothesis of cores retarded during expansion and the hot cosmological model," *Astron. Zh. 43,* 758–760. English translation in *Sov. Astron.—A. J. 10,* 602–603. [Box 33.3]
Zel'dovich, Ya. B., and I. D. Novikov, 1971, *Relativistic Astrophysics, Vol. I: Stars and Relativity,* Univ. of Chicago Press, Chicago, Ill. [§§22.2, 23.1, 24.1, 24.3, 24.4, 24.6, 25.6, 32.1, Boxes 24.1, 24.2]
Zel'dovich, Ya. B., and I. D. Novikov, 1974, *Relativistic Astrophysics, Vol. II: The Universe and Relativity,* Univ. of Chicago Press, Chicago, Ill., in press. [§§23.1, 28.1, 28.2, 30.1]
Zel'dovich, Ya. B., and M. A. Podurets, 1965, "The evolution of a system of gravitationally interacting point masses," *Astron. Zh. 42,* 963–973. English translation in *Sov. Astron.—A. J. 9,* 742–749 (1966). [§§24.6, 25.7, Boxes 24.1, 25.9]
Zel'dovich, Ya. B., and Yu. P. Rayzer, 1967, *Physics of Shock Waves and High-temperature Hydrodynamic Phenomena,* Academic Press, New York. [§22.2, Box 22.2]
Zel'dovich, Ya. B., and A. A. Starobinsky, 1971, "Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field," *Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61,* 2161–2175. English translation in *Sov. Phys.—JETP 34,* 1159–1166 (1972). [§30.5]
Zeno, *cited by name in* Box 30.1; *see* A. Grünbaum, 1967, *Modern Science and Zeno's Paradoxes,* Wesleyan Univ. Press, Middletown, Conn.
Zerilli, F. J., 1970a, "Effective potential for even-parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations," *Phys. Rev. Lett. 24,* 737–738. [Box 33.3]
Zerilli, F. J., 1970b, "Gravitational field of a particle falling in Schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics," *Phys. Rev. D 2,* 2141–2160. [§36.5, Fig. 36.2, Box 33.3]
Zimmer, H., 1946, *Myths and Symbols in Indian Art and Civilization,* Bollingen Foundation, Washington, D.C.; paperback reprint, Harper and Row, New York, 1962. [Box 27.7]
Zimmerman, B. A. *See* Fletcher *et al.* 1967.
Zwicky, F. *See* Baade and Zwicky 1934a *and* 1934b.

標題索引

一、筆畫數簡表

一　畫

A，B，C，d，δ，D，E，F，G，γ，H，J，K，L，M，N，O，p，P，R，S，T，V，W，X，Y，1，一。

二　畫

二，力。

三　畫

三，干，大。

四　畫

引，中，分，太，月，不，元，升，木，水，方，比，切，反，日，內，化，以，方。

五　畫

加，矢，平，外，四，世，白，北，生，未，正，可，示，失。

六　畫

宇，有，曲，守，地，自，仿，光，共，因，各，同，回，行，多，任，向，色。

七　畫

坐，形，角，作，坍，初，位，求，扭，冷，完，局，投，快，杆。

八　畫

空，取，波，非，物，事，固，注，降，坪，表，拓，孤，法，奇，兩，近，協，狀。

九　畫

恒，度，星，相，背，重，括，封，保，指，前，秒，信，俘，神，洞，約，紅，軌，後。

十　畫

流，氣，特，能，浮，原，振，射，弱，致，骨，疲，被，矩，核，時，脊，脈，凍，狹。

十一畫

基，旋，球，梯，理，移，常，混，偏，粒，排，控，國，推，連，動，張，細，閉，參，規，速，造，視，逗，桿。

十二畫

短，黑，超，等，量，焦，晶，距，嵌，程，最，散，帽，溫，測，提，幾，極，場，結，間，閏，殼，單，絕，無，透，進。

十三畫

微，源，蜂，感，羣，零，碰，路，傳，過，運，勢，電，較，經，圍，試。

十四畫

聚，磁，鞍，截，對，蝕，數，廣，遙，漲，維，漸，複，銀，臺。

十五畫

熱，標，質，慣，線，增，熵，橫，劈，潮，盤，緩，彈。

十六畫

靜，噪，激，輻，選，薄，聯，隨，積，導，橢。

十七畫

點，環，優，黏，壓，錘。

十八畫

擺，虧，離，轉，雙，龜，簡。

十九畫

蟹，邊，穩，類，鏈。

二十畫以上

鐘，彎，變，觀，體。

二、標題索引詳表

一 畫

Ampère 定律，來自電磁四維勢，122頁
Bertotti-Robinson 電磁宇宙，845頁
Betti 數，表徵連通性，221頁
Bianchi 恒等式
  表述，221頁及下頁，224頁，325頁及下頁
  證明，287頁
  在短程線恒等式中的模式，318頁
  用曲率2-形式表示，362頁
  用邊界的邊界表示，第15章
  作爲自動滿足的守恒定律，405頁
  因幾何動力學定律不可預言坐標而需要，409頁
  用於運動方程，473頁
  來自 Hilbert-Palatini 變分原理的坐標一中性，503頁
Birkhoff 定理
  Schwarzschild 幾何的，843頁及下頁
  Reissner-Nordstrøm 幾何的，844頁及以下幾頁
Boyer-Lindquist 坐標，877頁-880頁
Bragg 反射，相對於1-形式，232頁
Brans-Dicke 引力理論，見引力理論：Dicke-Brans-Jordan 理論的諸論說
Brill-Hartle 平均過程，970頁
Brown 力，1038頁
Calumoid, Whitaker 的，對於流量的積分，125頁
Cartan 結構方程，359頁
Carter 的第四個常數，899頁
Cavendish 實驗，1121頁及下頁
Cavendish 引力常數，1121 頁及以下幾頁
  依賴於相對「優先宇宙靜止系」的速度，1123頁-1124頁
  依賴於引力物體的化學成分，1125頁
  其中的變動，造成從短程線運動的偏離，1127頁-1128頁
Chandrasekhar 極限，619頁
Coriolis 力，165頁，175頁，294頁，327頁，332頁
Coulomb 場，「薄餅」，對於快速帶電粒子，124頁
Coulomb 力，來自電磁四維勢，122頁
"d" 這個微分符號的三種用法，95頁-96頁
d'Alembert 算符，見波動算符
de Rham 算符，見波動算符
de Broglie 波，53頁，55頁-59頁
de Sitter 宇宙，745頁，758頁
δ, Kronecker，22頁
δ 函數，Dirac，121頁
Dewitt 方程，1189頁。也可參閱 Einstein-Schrödinger 方程
Dicke-Brans-Jordan 引力理論，見引力理論
Dicke-Eötvös 實驗，見 Eötvös-Dicke 實驗
Dicke 分析實驗的框架，1049 頁，1064頁
Dirac 括號，468頁，520頁
Dirac δ 函數，121頁
Dirac 方程，在 Schwarzschild 幾何中，1165頁
Eddington-Finklestein 坐標，828頁-831頁，849頁
Eddington-Finklestein 圖，829頁，830頁，849頁，864頁，873頁
Einstein 見曲率的表述
EIH 運動方程，1091頁，1094頁-1095頁
Einstein A 係數，1029頁
Einstein 的升降機，298 頁。也可參閱等效原理
Einstein 場方程，431頁-434頁
  初等引入，41頁及以下幾頁
  等價的積分方程，995頁-996頁
  場方程的變分原理，見變分原理
  場方程的微商
    全部，第17章，特別是 406頁，416頁-482頁
    從源的自動守恒，379 頁及下頁，417頁
    從 Hilbert 作用量原理，418頁
    從類空薄片上的物理學，419頁-423頁
    從自旋2-場理論，424 頁及下頁，437頁
    從超空間分析，423頁及下頁
    從「空間的度規彈性」，426頁及以下幾頁
  用宇宙學項修正，410頁-412頁
  相應於 Newton 理論，412頁-416頁
  與坍縮，1198頁-1199頁
  也可參閱幾何動力學
Einstein-Infeld-Hoffman 運動方程，1091頁，1094頁-1095頁

Einstein-Rosen 橋，837 頁及以下幾頁
Einstein-Schrödinger 方程，1189 頁及下頁
Einstein 靜態宇宙，746頁，747 頁，750頁，758頁及下頁
Einstein 求和慣例，9頁
Einstein 張量，見曲率的表述
Einstein 的引力理論， 見廣義相對論
Eötvös-Dicke 實驗，14頁-17頁，1050頁-1055頁
早年 Einstein 的話，431頁
基本常數恒定的含義，1061頁-1063頁
對大質量（自引力）物體，1127頁-1131頁
Euclid 幾何，19頁-22頁
與 Lorentz 幾何對比，51頁
Euler 角，243頁
Euler 關係，關於頂點，邊和面，1175頁
Euler 擾動，690頁-691頁
Faraday 見電磁場
Faraday 脅强，140 頁及下頁，481 頁
Fermi 能量，在中子星和白矮星中，599頁-600頁
Fermi 氣體，理想的，565頁，599 頁
Fermi 簡正坐標，332頁
Fermi-Walker 遷移，165 頁，170 頁及下頁，1117頁
Feynman 對軌道求和，320頁，419 頁，499頁及下頁
Friedmann 宇宙學，見宇宙學模型
Friedmann 宇宙學的「曲率參量」，721頁
Frobenius 定理，關於無旋轉的 1-形式，124頁
Galileo 坐標，289頁，291頁-298頁，414頁
γ 射線觀測，作爲宇宙學模型的檢驗，770頁
Gauss-Bonnet 定理，對於二維球拓撲，309頁
Gauss-Codazzi 關係，514頁及以下幾頁
Gauss-Weingarten 方程，對四維遷移
用外賦曲率表示，512頁
Gauss 流量積分
對能量-動量和角動量，460頁-464頁
對電荷，461頁
Gauss 簡正坐標系，552頁，717頁
Gauss 定理，148頁-151頁
作爲廣義 Stokes 定理的特殊情形，97頁
用於能量-動量守恒，146頁，152頁
Gowdy 度規，804頁
Hamilton-Jacobi 理論，486 頁及以下幾頁，641頁-649頁
與量子理論的關係，641頁-643頁
對諧振子，1194頁
對自由粒子，1194頁
對試驗粒子的運動
在 Newton M/r 勢中，644頁-649頁
在 Schwarzschild 引力場中，649頁
在 Kerr-Newman 引力場和電磁場中，900頁-901頁
光被太陽偏轉，在 PPN 表述中，1102頁及下頁
近日點移動，在 PPN 表述中，1114頁及下頁
對電動力學，1195頁
對超空間中的幾何動力學，423頁及下頁，1180頁-1190頁
Hamilton 函數
與超 Hamilton 函數對比，對場中的帶電粒子，488頁-489頁
電磁的，497頁
對在 Newton 1/r 勢中的試驗粒子，644頁
也可參閱超 Hamilton 函數
Hamilton 函數， ADM ，用於混主宇宙學，809頁
Hamilton 動力學，
用形式的語言，125頁-126頁
辛（symplectic）結構，126頁
Harrison-Wheeler 狀態方程，625頁
Harrison-Wakano-Wheeler 恒星模型，625頁及以下幾頁，696頁
Hilbert 變分原理，見變分原理 Hilbert 部分
Hubble 膨脹率，709頁及下頁
有關知識的歷史，709頁-710頁，758頁-761頁
用膨脹因子 a(t) 表示，732頁
用於測量的距離-紅移關係，780頁-781頁
與其他宇宙學參量的聯繫，771頁-773頁
也可參閱宇宙學模型，宇宙學
Hughes-Drever 實驗，1064頁
Jacobi 恒等式，對於對易算符，240頁
Jacobi 行列式，93頁，148頁，160頁及下頁
Jacobi 梯，見 Schild 梯
Jeans 不穩定性，757頁
K'ai-feng（開封）天文臺，ii
Kasner 宇宙學模型，801頁，805頁及以下幾頁
「Kepler 密度」，來自衛星周期，44頁
Kepler 定律
Kepler 的發現，755頁
「1-2-3」定律，39頁，450頁，457

頁
Kerr 坐標，879頁及下頁
Kerr 圖，881頁
Kerr 幾何，作爲 Kerr-Newman 的極限情形，878頁
Kerr-Newman 黑洞的迴磁比，883頁，892頁
Kerr-Newman 黑洞的多極矩，883頁，892頁
Kerr-Newman 幾何和電磁場，
歷史，877頁註
參量 (M, Q, S 或 a)，878頁
極限情形 (Schwarzschild, Reissner-Nordstrøm, Kerr, 極端 Kerr-Newman)，878頁
作爲黑洞外部場的唯一性
唯一性的啓發式解釋，875頁，877頁
意味着唯一性的定理，876頁，938頁，939頁
現實引力坍縮的含義，863頁
Boyer-Lindquist 坐標
度規，877頁，878頁
電磁場張量，877頁，878頁
矢勢，898頁
在視界的反常，880頁
Kerr 坐標
電磁場張量，879頁
度規，879頁
Kerr 坐標和 Boyer-Lindquist 坐標間的變換，879頁及下頁
Kerr-Schild 坐標，903頁
固定的觀測者，893頁-894頁
局域非旋轉觀測者，895頁-896頁
Kerr 圖，881頁
極大解析開拓，882頁
Killing 矢量，879頁，892頁及以下幾頁
Killing 張量，893頁
主零線滙，901頁-904頁
光錐，891頁，896頁-897頁
電磁場結構，877頁及以下幾頁，883頁，892頁
磁偶極矩，883頁，892頁
多極矩，883頁，892頁
視界，879頁及以下幾頁
零母線，903頁-904頁
面積，889頁，914頁
角速度，914頁
轉動性質
內稟角動量矢量，891頁
迴磁比，883頁，892頁
靜態極限，879頁及以下幾頁，894頁
能層，880頁
慣性系的拖曳，879頁及以下幾頁，893頁-896頁
動力學性質
作爲引力坍縮的終點，882頁-883頁
反抗微小擾動的穩定性，884頁-885頁
當粒子落入視界時，M, Q, S 的改變，904頁-910頁，913頁
可逆變換和不可逆變換，889頁-890頁
轉動能量，890頁
電磁能量，890頁
不可約質量，889頁-890頁，913頁
試驗粒子的運動，
超 Hamilton 函數，897頁
在無窮遠的能量，898頁-899頁，910頁
角動量的軸分量，898頁-899頁
粒子的靜止質量，899頁
Carter 第四個運動常數，$\mathscr{Q}$或$\mathscr{K}$，899頁
分離形式的運動方程，899頁-900頁，901頁
運動方程的 Hamilton-Jacobi 推導，900頁-901頁
在赤道平面的軌道，911頁-912頁
赤道運動的有效勢，911頁
最後穩定圓軌道的束縛能，885頁，911頁
波的傳播，914頁-915頁
Kerr-Newman 幾何中軌道運動的角速度，893頁及以下幾頁
Kerr-Schild 坐標，903頁
Killing 矢量場，650頁-653頁
相聯繫的試驗粒子運動的守恒定律，651頁
對易算符是 Killing 矢量，654頁
找出本徵值問題，654頁
對平直空時，654頁
對球對稱流形，658頁
對 Kerr-Newman 幾何，879頁，892頁及以下幾頁
Killing 矢量的球對稱性，658頁
Killing 方程，650頁
Killing 張量場，893頁註
Klein-Alfven 宇宙學，748頁，770頁
Kronecker δ, 22頁
Kruskal 圖，528頁，834頁及下頁，839頁，848頁，855頁
Lagrange 微擾，690頁-691頁
Lamb-Retherford 移位，主要的機制，1190頁
Landau-Lifshitz 贋張量。見引力場的脊強-能量贋張量，
Laplace 算符與 d'Alembert算符，177頁
Levi-Civita 張量
在平直空時中，87頁及下頁
取向，87頁及下頁
在廣義的基中，202頁，207頁
在球坐標中，206頁
Lie 微商
矢量的，240頁

張量的，517頁
與任何仿射聯絡無關，517頁
Lie 羣，198頁
Lie 輸運定律，240頁
Liouville 定理，584頁，586頁及下頁，590頁
Lorentz 收縮，48頁
Lorentz 力定律，
與短程線偏離方程比較，35頁
在平直空時中的表述，73頁
相聯繫的能量變化，73頁
雙重角色：規定場和預測運動，71頁-74頁
用形式的語言，101頁-104頁
用能量-動量守恆的語言，155頁
在彎曲空時中，201頁，568頁
對連續介質，570頁
由 Einstein 場方程導出，473頁-475頁
用三種語言，474頁
Lorentz 系，局域的
最接近於整體 Lorentz系，207頁
數學表述，217頁及下頁，285頁及以下幾頁，314頁及下頁
直線是彎曲空時的短程線，312頁-324頁
相對局域 Lorentz 系加速的證據，327頁
用於分析紅移實驗，1056頁-1060頁
也可參閱局域的慣性系
Lorentz 規範，見規範變換和不變性
Lorentz 幾何，整體的，19頁-23頁
與 Euclid 幾何對比，51頁
當且僅當 ***Riemann*** 爲零時，爲空時所具有，284頁
Lorentz 羣，242頁
Lorentz 不變性的實驗檢驗，1054頁及下頁
Lorentz 變換，66頁-69頁
要點，67頁及下頁
矩陣描述，66頁
記住指標位置的方法，66頁
速度參量，67頁
增速，67頁，69頁
在坐標平面的轉動，67頁
無窮小的
反對稱矩陣，171頁
生成元，329頁
特殊情形：沿坐標軸增速，80頁
用自旋-矩陣語言，1142頁-1145頁
速度參量，1145頁
後 Newton 極限，1086頁
用於周年 Poynting 流量，122頁
也可參閱轉動
Mach 原理，490頁，543頁-545頁
相對遙遠恒星加速，543頁
初值問題的 York 形式，546頁
彼處的質量給出此處的慣性，546頁
與 Foucault 擺，547頁
與慣性系的拖曳，547頁
也可參閱慣性系的拖曳
拖曳類似於磁效應，548頁
遙遠恒星的慣性影響，548頁
慣性總和，549頁
「平直」空間是閉合空間的一部份，549頁
Maxwell, 電磁場的對偶 2- 形式表述，引入，105頁
也可參閱電磁場
Maxwell 能量密度，140頁-141頁
Maxwell 方程
在平直空時的分量形式，80頁及下頁
幾何形式，88頁-89頁
用形式的語言，112頁-114頁
對處於任何運動狀態粒子的解，121頁-122頁
在彎曲空時中，391頁，568頁
對於矢勢，569頁
從「力線只終止於電荷」推演，79頁-81頁
從類空薄片上的物理學導出，419頁-420頁
從脊强-能量和 Einstein 場方程導出，471頁-473頁
與能量-動量守恒，483頁
無處不成功，1200頁
也可參閱電動力學， Lorentz 力定律
Minkowski 幾何，見 Lorentz 幾何
Möbius 帶，96頁
Morse 理論，318頁
Mössbauer 效應，63 頁，1056頁，1057頁
Newman-Penrose 常數， 870頁及下頁
Newton 理論的絕對空間，19頁，40頁，291頁及下頁
Newton 理論的絕對時間，291 頁及下頁
Newton 理論中角動量的流量積分，470頁
Newton 勢的多極展開，991頁
Newton 引力勢的 Poisson 方程，290頁，299頁，301頁
Newton 引力理論中的維里定理，1078頁
對球狀恒星的計算，607頁
Newton-Cartan 引力理論
與 Einstein 理論對比，3頁及以下幾頁，197頁，245頁，297頁及下頁，302頁及下頁
與狹義相對論不相容，177頁，304頁
標準的 Newton 表述
提要，177頁，301頁
作爲廣義相對論的近似，412頁-416頁
作爲引力度規理論的近似，1077頁及下頁，1097頁
有用的公式和計算技巧，1078頁

及下頁
維里定理，1079頁
Newton 引力場的脅强張量，1078頁及下頁
Cartan 的彎曲空時表述
全部，第12章
提要，用 Galileo 坐標的語言，289頁及下頁
提要，用無坐標的語言，300頁及下頁
各種語言之間的變換，298頁及下頁
Newton 表述和 Cartan 表述之間的變換，289頁及下頁，299頁
Nordstrøm 引力理論，見引力理論
Nordtvedt 效應，1128頁-1131頁
Novikov 坐標，826頁及下頁
Olber 佯謬，756頁
Oppenheimer-Volkoff 流體靜力學平衡方程，605頁
Oppenheimer-Snyder 坍縮恒星模型，851頁-856頁
p- 形式的模方，97頁
Pauli 原理，作爲 Riemann 幾何的檢驗，398頁-399頁
「Peeling 定理」，輻射理論中的，1165頁
Planck 長度
定義，10頁
與幾何的漲落相關，10頁，1180頁，1192頁及以下幾頁
Poincaré 變換，68頁
Poission 括號，654頁
廣義的，486頁
Pound-Rebka-Snider 實驗，1056頁及以下幾頁
Poynting 通量，122頁，140頁及下頁，481頁，550頁
Price 定理，863頁，866頁
Regge-Wheeler 徑向坐標。見龜坐標
Regge 計算法
述評，第42章
適合於低-對稱性的幾何動力學，1166頁
幾何由長度確定，1167頁
單形和虧損角，1167頁-1169頁
骨架幾何，1169頁
絞鏈，1169頁
連續極限，1169頁
與一絞鏈相聯繫的積木塊，1170頁
幾何動力學的變分原理，1170頁
流程圖，1171頁-1172頁
初值數據，1172頁
Einstein 幾何動力學定律的表示，1173頁
點陣結構的選擇，1173頁-1177頁
補充頂點，1176頁
面塊，填充塊和連通塊，1176頁
面的計數，1177頁
邊長的選擇，1177頁-1178頁
應用和未來，1178頁-1179頁
Reissner-Nordstrøm 幾何
度規的導出，840頁-841頁
類 Kruskal 坐標、841頁
具有無限保形變換的坐標，920頁
整體結構，920頁-921頁
$Q=M$ 的咽喉等同於 Bertotti-Robinson 宇宙，845頁
唯一性 (Birkhoff 類型的定理)，844頁及以下幾頁
作爲 Kerr-Newman 的極限情形，878頁
Ricci 曲率。見曲率的表述
Ricci 轉動係數。見聯絡係數
Ricci 轉動 1-形式。見轉動 1-形式
Riemann 。見曲率的表述
Riemann 簡正坐標，258頁及以下幾頁，480頁-486頁
Riemann 幾何，
特徵，242頁，304頁及下頁
初階論述，第 8 章
高階論述，第13章
Riemann 的創立，220頁
蘋果的 Riemann 幾何是局域 Euclid 幾何，19頁-21頁
空時的 Riemann 幾何是局域 Lorentz 幾何，19頁-23頁
也可參閱特殊的概念如度規，聯絡
Robertson-Walker 線元，722頁，759頁
Roll-Krotkov-Dicke 實驗。見 Eötvös-Dicke 實驗
Rutherford 散射，647頁，669頁
相對論修正，669頁及下頁
Sakharov 的引力觀點，426頁-428頁
Schild 對曲率的論證，187頁-189頁
Schild 的梯子，
描述，249頁
應用，251頁-253頁，258頁，263頁，268頁，278頁
Schwarzschild 坐標
對任意靜態球狀系統，597頁
對 Schwarzschild 幾何，607頁
在引力半徑處的病態性質，11頁，823頁-826頁
對脈動的恒星，689頁
Schwarzschild 幾何的 Kruskal-Szekers 坐標，828頁-832頁
度規，827頁
與 Schwarzschild 坐標的聯繫，833頁-835頁
Schwarzschild 幾何，822頁
全部，第25章，第31章
作爲 Kerr-Newman 的極限情形，878頁
Birkhoff 定理，843頁-844頁
推導
從完整的場方程，607頁
從初值方程，538頁
坐標系和參照系
Schwarzschild 坐標，607頁

各向同性坐標，840頁
Novikov 坐標，826頁-827頁
內向 Eddington-Finklestein 坐標，312頁，828頁及下頁，849頁
外向 Eddington-Finklestein 坐標，829頁及以下幾頁
Kruskal-Szekeres 坐標，827頁
也可參閱 Kruskal-Szekeres 坐標
龜坐標，663頁，665頁及下頁
具有無限保形變換的坐標，919頁及下頁
正交簇一系，821頁
Riemann曲率，821頁及以下幾頁
結構和演化
Einstein-Rosen 橋（蛀孔），837頁及以下幾頁，842頁及下頁
拓撲，838頁及以下幾頁
非靜態內引力半徑，838頁
演化，838頁及以下幾頁，842頁
嵌入圖，528頁，837頁，839頁
因果結構圖，920頁
奇點。見 Schwarzschild 幾何的奇點
在 $r=0$ 的奇點。見奇點。
由沿徑向落入的觀測者探測，820頁-823頁
落入引力半徑內的全部粒子的毀滅，836頁，839頁，860頁-862頁
試驗粒子運動
全部，第25章
用 Hamilton-Jacobi 理論來分析，649頁
用對稱引入的運動常數來分析，656頁-672頁
位於「平面」的軌道，645頁及下頁，655頁
守恒量，656頁
角動量，656頁及以下幾頁
在無窮遠的能量，656頁及以下幾頁
運動徑向部分的有效勢，639頁，656頁，659頁-662頁
軌道的定性描繪，662頁
徑向軌道的細節，663頁-668頁，820頁-823頁，824頁-826頁，835頁
非徑向軌道的細節，668頁
圓軌道的穩定性，662頁
最後穩定圓軌道的束縛能，885頁，911頁
近似圓軌道的近星點移動，670
散射截面，頁669頁及下頁
偏轉角，671頁
光子運動
軌道形狀，673頁，677頁
運動徑向部分的有效勢，673頁及下頁，676頁
定性描繪，674頁及下頁
碰撞參量，672頁
對於捕獲的臨界碰撞參量，673頁
逃逸和捕獲作爲傳播方向的函數，675頁
散射截面，676頁-679頁
捕獲截面，679頁
波的傳播
有效勢，868頁，870頁
標量場，詳細分析，863頁，868頁及以下幾頁
電磁場， Newman-Penrose 常數，870頁及下頁
零靜止質量的場，整數自旋，866頁
Dirac 方程，1164頁
微擾
高頻，用幾何光學分析，640頁
與 Hamilton-Jacobi 方程有關的波動方程，640頁
克服小微擾的穩定性，884頁
應用
作爲靜態恒星的外場，607頁
作爲坍縮恒星的外部，846頁-850頁
與 Friedmann 幾何匹配得出坍縮恒星模型，851頁及以下幾頁
許多 Schwarzschild 解在點陣中聯合形成閉宇宙，739頁及下頁
Schwarzschild 點陣宇宙，739頁及下頁
Schwarzschild 半徑。見引力半徑
Schwarzschild 表面。見引力半徑
Schwarzschild 均勻密度恒星模型，609頁-612頁
Sharp, Baierlein, Wheeler 的內稟時間，487頁，490頁
Stokes 定理，廣義的，96頁及下頁，127頁
內容圖示，117頁
作爲特殊情形的 Gauss 定理，97頁，150頁及下頁
應用，96頁及下頁，125頁，378頁
Taub-NUT 空間，940頁
TCP 的實驗檢驗，1054頁
Teichmüller 空間，221頁
Thomas 進動，175頁-176頁，1118頁，1146頁及下頁
Tolman 宇宙，733頁
Vierbein 。見四重軸
Vlasoff 方程，680 頁。也可參閱無碰撞 **Boltzmann** 方程
Weyl 張量的主零線滙
定義，902頁
對 Kerr-Newman 幾何， 901頁-904頁
Whitehead 的引力理論。見引力理論
X-射線衍射，與1-形式的關係，

232頁
X-射線源，761頁-762頁
X-射線，來自黑洞周圍氣體的，ix頁，885頁
York 矩測量變形，重新坐標化和尺度，542頁
York 的曲率，541頁
Young 對稱圖，86頁
1-形式。見形式，微分的
一無所有，作爲一切東西的基礎
Leibniz 的論述，1219頁
作爲早期模型的幾何動力學，1202頁-1203頁
作爲後來模型所建議的算法，1209頁，1211頁-1212頁

二 畫

二形式。見形式，微分的
二重矢量
定義，83頁
在Whitaker 的 Calumoid表面，125頁
二分點，二分點的進動，391頁及下頁，1112頁及下頁
力學中的能量，作爲作用量的時間變化率，486頁-487頁
力管，102頁，114頁
力線，
與蜂窩結構的關係，102頁
永不終止， Maxwell 方程的核心，420頁
引力波的力線圖，1011頁及下頁

三 畫

三維幾何
初、終類空超曲面的三維幾何，488頁
作爲圈繞時間的信息運載者，488頁，533頁
在 ADM 表述中固定在表面，522頁
保形三維幾何
在初值問題的 York 表述中，540頁-541頁
純自旋 -2 表示和 York 曲率，541頁
YES 和 NO 和量子幾率，1184頁及下頁
也可參閱初值，類空薄片
三維幾何的保形部分，在初值問題的 York 表述中，540頁-541頁
三重矢量，定義，83頁
干涉，相長的和相消的，419頁，423頁及下頁，1185頁-1187頁
干涉儀，用於測量射電波被太陽偏轉，1104頁-1105頁
大爆炸中核的合成，760頁，762頁
大小
與角動量有關的大小，162頁
加速系的大小，168頁及下頁

四 畫

引力，13頁，163頁-164頁
用產生潮汐的加速度局域地描述，29頁-37頁
引力-物質「耦合環」概要，5頁，37頁
引力理論
目錄，429頁
可行的判據，1066頁-1067頁
Bergmann 的標量-張量理論，1049頁
Birkhoff 理論，1067頁
Cartan 理論（廣義相對論加上扭轉），1049頁，1068頁
Cartan-Newton。見 Newton-Cartan 引力理論
Coleman 理論，1114頁
完整性，1067頁，1068頁
保守的，1093頁
Dicke-Brans-Jordan, 1048頁及下頁，1068 頁及下頁 ， 特別是1070頁，1093頁，1098頁，1122頁，1127頁，1129頁
宇宙學模型，770頁
廣義相對論的基礎，第16、17章
Kustaanheimo 理論，1067頁
線性化理論。見引力的線性化理論
度規。見引力的度規理論
不包含在 10- 參量 PPN 表述的度規，1069頁
Newton 理論。見 Newton-Cartan 引力理論
Ni 理論。特別是 1070頁及下頁，1083頁，1098頁，1123頁，1129頁
Nordstrøm 理論，429 頁及以下幾頁，1049頁
Papapetrou 理論，1124頁
後 Newton 理論。見後 Newton 近似；後 Newton 表述，參量化的
優先系，1083頁，1093頁，1098頁，1123頁-1125頁
前幾何，429頁-431頁，1068頁，1070頁-1071頁
自洽性，1066頁-1067頁
自旋 -0 場，在平直空時中，178頁及下頁
自旋 -1 場，在平直空時中，179頁
自旋 -2 場，在平直空時中。見線性化的引力理論
Whitehead 理論，430 頁， 1049頁，1067頁，1069頁，1124頁
引力坍縮。見坍縮，引力的
引力常數
數值，29頁，末頁
測量，1121頁，1123頁
作爲「空間的度規彈性」的量度，

426頁-428頁
也可參閱 Cavendish 引力常數
引力的透鏡效應，589頁，887頁
引力質量，431頁
引力勢。見 Newton-Cartan 理論，後 Newton 表述
引力輻射反作用。見引力波；輻射反作用
引力半徑，820頁-826頁。也可參閱視界，黑洞，Schwarzchild 幾何，Kerr-Newman 幾何
引力波探測器
可以設想的類型
地-月間隔，1013頁，1014頁，1018頁
地球和月亮的簡正模式振動，1013頁，1015頁
地殼的振盪，1013頁，1015頁
彈性棒的簡正模式振動，1013頁，1016頁1025頁，1035頁，1038頁
一般彈性物體的簡正模式振動，1013頁，1016頁，1025頁，1028頁-1035頁，1041頁-1042頁
旋轉棒的角加速度（「外差探測器」），1013頁，1016頁-1017頁
被驅動振子的角加速度，1013頁，1017頁
旋轉管中流體的抽運，1013頁，1018頁
理想化的振子(彈簧上兩個質量)，1022頁-1028頁
棒上附有小珠，444頁及下頁
非機械的探測器，1040頁
環形波導中的電磁波，1043頁-1044頁
分析方法（對於比波長小很多的機械探測器）
探測器的固有參照系，1005頁-1006頁，1010頁，1012頁
動力學分析： Newton 運動方程加上波驅動力，1006頁-1009頁
波的驅動力，1006頁，1009頁，1010頁
力線圖，1011頁-1012頁
細致平衡的方法，1028頁，1029頁-1030頁，1033頁
對噪聲探測器，1019頁，1036頁-1040頁
細致分析
兩個自由下落物體，1018頁
理想化的振子（彈簧上兩個質量），1022頁-1028頁
任何共振振子，用細致平衡分析，1030頁，1033頁
任何共振振子，用動力學方法分析，1031頁-1034頁
噪聲共振振子（從噪聲中提取訊號），1036頁-1040頁
地球以四極模式振動，1035頁-1036頁
在環形波導中的電磁波，1043頁-1044頁
截面
截面概念有用的限度，1019頁，1022頁
應用途徑概述，對於波占優勢的探測器，1020頁-1021頁
用於計算存貯在探測器中的總能量，1027頁，1028頁
用於噪聲探測器，1038頁-1039頁
與發射圖案有關，1032頁-1033頁，1035頁
對於理想化的振子，1024頁，1025頁
對於任何共振的機械探測器，1025頁，1029頁，1032頁
對於 Weber 棒，1025頁
對於處於多模操作的 Weber 棒，1035頁
對於處於基四極模的地球，1036頁
熱噪聲探測器
從噪聲中提取微弱訊號，1036頁-1040頁
靈敏度，對錘擊波，1039頁
改進靈敏度的途徑，1040頁
監視位移的傳感器，1041頁，1042頁
展望未來，1040頁及以下幾頁
引力波
精確解
柱面波，950頁
具有一種偏振狀態的平面波，957頁-963頁。
也可參閱平面引力波
具有兩種偏振狀態的平面波，964頁
用於廣義相對論的實驗檢驗，1047頁，1072頁
由緩慢運動的弱場源產生
不存在單極和偶極波，974頁-978頁
波是四極占優勢，975頁-978頁
假設的基本公式，989頁，991頁
度規擾動的公式，991頁
發射能流和角動量的公式，992頁
能量和角動量總輸出的公式，975頁，992頁
源中輻射反作用的公式，993頁-994頁
對於各種偏振狀態的譜的公式，1033頁，1035頁
特殊化爲脈衝事件的公式，987頁
量級公式，978頁-979頁，980頁-981頁
公式的導出，995頁-1003頁

「引力脅强」在引力波產生中的作用，996頁-998頁
由强場源產生，計算技巧
粒子落入黑洞，通過 Schwarzschild 度規的微擾，982頁，983頁
相對論性恒星的振動，通過平衡恒星結構的微擾，984頁-985頁
變形的相對論性恒星的旋轉，通過球狀恒星結構的微擾，986頁
初值解，536頁
籠罩地球的引力波的强度和波譜估計，986頁
引力波的線性化理論
全部，944頁-955頁
Lorentz 規範條件，944頁-945頁
傳播方程，945頁
保持 Lorentz 規範的規範變化，945頁
平面波解，945頁-946頁，949頁，1004頁-1005頁
橫向無迹規範，946頁-950頁
計算橫向無迹部分的方法，948頁-949頁
Riemann 張量，948頁
短程線偏離，950頁-955頁，1011頁-1012頁
相對加速度是純粹橫向的，951頁
偏振，952頁-955頁
Fourier 分析，1026頁，1027頁
比通量，1027頁
單極和偶極波絕對禁止，977頁，978頁
波與其自身之間的非線性相互作用
不存在嚴格的周期波，956頁
自引力吸引，975頁，986頁
波-波散射，968頁
引力波經彎曲空時傳播
與海洋上的水波類比，993頁-994頁
波前被背景曲率折射（光線的偏轉），956頁，968頁，972頁
頻率的引力紅移，956頁-957頁，968頁
離開曲率的反向散射，957頁，864頁-865頁，869頁-871頁
歸因於與背景曲率相互作用的尾跡，957頁，864頁-865頁，869頁-871頁
激波波前（激震前沿），554頁
短波表述，964頁-973頁。也可參閱引力波：短波表述
傳播方程，967頁-968頁
脅强-能量張量，969頁-970頁。也可參閱引力波：脅强-能量張量
幾何光學表述，971頁-972頁
偏振張量的傳播，968頁，971頁
旋量表述，1165頁
也可參閱引力波：波與其自身之間的非線性相互作用
輻射反作用
量級公式，979頁，981頁
在弱場緩慢運動源中的計算表述，993頁及以下幾頁，1001頁及以下幾頁
連接外向波的條件，993頁，1001頁-1002頁
不存在嚴格的周期波，956頁
中子星振動被輻射反作用阻尼，620頁，628頁，984頁及下頁
雙星軌道歸因於輻射反作用的演化，988頁
短波表述
「穩定的」坐標，964頁
膨脹參量，964頁
基本的假設，964頁
Ricci 張量的展開，964頁-965頁
粗紋觀點和細紋觀點，965頁
傳播方程，967頁-968頁
規範自由度，967頁-969頁
Lorentz 規範，968頁
橫向-無迹規範，969頁
脅强-能量張量，969頁-970頁。也可參閱引力波：脅强-能量張量
Brill-Hartle 平均過程，970頁
幾何光學特殊化，971頁-972頁
用於推導的變分原理，972頁-973頁
引力波的源
天體物理源，量級公式，980頁-981頁
宇宙的大爆炸起源，712頁，736頁-737頁，764頁-765頁
恒星的引力坍縮，628頁，629頁，1041頁
超新星爆發，982頁，1040頁，1042頁
恒星的爆發，987頁
室女座星系團中的坍縮和爆發，1042頁
中子星的振蕩，982頁-986頁
變形中子星（年輕的脈衝星）的旋轉，628頁及下頁，983頁，986頁，1040頁
雙星，986頁，988頁-990頁，995頁
物質落入黑洞之中，885頁，982頁，983頁，986頁
黑洞的碰撞和聚結，886頁，939頁，982頁
黑洞的振盪，886頁
旋轉的鋼樑，979頁-980頁
原子核的裂變，987頁

原子彈，987頁
隕星打擊地球，987頁
引力波的脅強-能量張量
初等的概述，955頁-956頁
表爲度規的微擾，969頁
在無跡 Lorentz 規範中表述，970頁
規範不變性，972頁
表爲脅強-能量贋張量的平均，972頁
散度爲零，970頁
作爲空時背景曲率的源，966頁，973頁
對於幾何光學波，972頁
對於在近似平直空時中的波，955頁-956頁
對於精確的平面波，963頁
引力子，972頁
引力的光偏轉
圖示解釋，32頁
早年 Einstein 的話，431頁
在線性理論中計算，184頁及下頁，446頁
在 Schwarzschild 坐標中計算，679頁
在 PPN 表述中計算，1101頁及以下幾頁
後-後- Newton 修正，1069頁
大小，與現代技術比較，1048頁，1101頁
實驗結果，1104頁及下頁
在平直空間的引力理論，179頁，184頁及下頁
引力的線性化理論（與平直空時中的自旋 -2 理論相同）
說明兩種理論等價，435頁
從自旋-2 觀點提出，179頁-186頁
作爲廣義相對論的線性化極限來提出，第18章，448頁-451頁，461頁-464頁，944頁-955頁
概略，435頁
加一橫的運算，436頁-438頁
場方程，437頁-438頁，461頁及下頁
度規的公式，438頁
規範變換，438頁-441頁
Riemann 曲率的規範不變性，438頁
Lorentz 規範，438 頁，441 頁
整體 Lorentz 變換，439頁
曲線坐標，441頁
引力對物質和光子的效應，442頁-444頁
不自洽性，180頁，186頁，443頁及下頁
完全的修正，引向廣義相對論，186頁，424頁及下頁
對緩慢運動系統的部分修正引向 Newton 和後-Newton 表述，1073頁-1078頁，1089頁及下頁
應用
靜態球狀物體的外部場，438頁
任何源的外部場，448頁-451頁，461頁-464頁
光的彎曲，紅移，近日點前移，183頁及以下幾頁，446頁
引力波，185頁及下頁，442頁，444頁及下頁，944頁-955頁。也可參閱引力波
引力的度規理論，1067頁及以下幾頁
檢驗正確的理論是否度規理論的實驗，第38章，1067頁
作爲近似的 PPN 表述，1069頁
引力能量不能局域化。
見質量-能量，總的；能量-動量；贋張量
引力波的偏振
定義的張量，953頁及下頁，971頁
平面的（線性的），952頁及下頁
圓的，953頁及下頁
橢圓的，955頁
與電磁波的偏振比較，952頁-954頁
狀態的旋轉變換，954頁
平行遷移，在幾何光學極限下，971頁
力線圖，1011頁-1012頁
引力場的脅強-能量贋張量，465頁及下頁
並不局域引力能量，466頁及下頁
數量級，996頁，999頁及下頁
用於分析引力波的產生，996頁-999頁
對於波，平均給出的脅強-能量張量，972頁
引力紅移，對於引力波，956頁及下頁，968頁
引力紅移，對於光子
與 1970 年鐘的技術比較，1048頁
實驗結果，1058頁，1060頁
Pound-Rebka-Snider 實驗，1056頁-1058頁
在太陽光譜中，1058頁-1060頁
用來檢驗等效原理，189頁及下頁，1056頁
用來檢驗短程線運動，1055頁-1060頁
意味着空時是彎曲的，187頁-189頁
推導
由能量守恒，187頁
由在一般靜態度規中的短程線方程，657頁，659頁
在線性化理論中，446頁及下頁
引力紅移，對於溫度，568頁，685頁
引力的標量-張量理論。見引力理論
引力坍縮
一維的和二維的，867頁及下頁
塵埃球殼的引力坍縮，555頁-556頁
球狀恒星的引力坍縮
通過檢驗外部幾何來分析，846

頁-850頁，857頁
來自引力坍縮的輻射紅移，847頁，849頁及下頁，872頁
引力坍縮的光度衰減，847頁，850頁，872頁
最後影響的表面，873頁及下頁
Eddington-Finklestein 圖，849頁，864頁，873頁
Kruskal 圖，848頁，855頁
嵌入圖，855頁及下頁
共動坐標，857頁
支配絕熱坍縮的方程，858頁及下頁
具有零壓强的模型，859頁
具有零壓强和均勻密度的模型，851頁-856頁，859頁
現實的引力坍縮，862頁及下頁，883頁及下頁
在恒星演化晚期，引力坍縮的觸發，627頁，862頁
坍縮，追踪，並納入劇本，629頁
球對稱微小擾動的演化，864頁-866頁
Price 定理，866頁
引力坍縮期間發射的引力波，1041頁
對於大質量恒星，引力坍縮的不可避免性，819頁
致密星團中的引力坍縮，884頁
引力坍縮產生的 Kerr-Newman 黑洞，882頁-883頁
三種水平：宇宙，黑洞，量子起伏，1021頁
最後狀態的問題，940頁，1196頁及下頁
引力坍縮的黑盒模型，1209頁，1213頁-1217頁
引力坍縮的重要性和哲學意義，437頁，1196頁及下頁
引力源的外部場。見漸近平直的空時幾何
引力的優先系理論，1083頁，1093頁，1098頁，1123頁及以下幾頁
中性的穩定性，697頁
「中性的聯繫」。見因果聯繫
中微子
在恒星坍縮時發射，599頁
在坍縮恒星中輸送能量，628頁
坍縮恒星發射時的紅移，850頁
來自大爆炸，712頁，736頁-737頁，764頁-765頁
衰減膨脹的各向異性，803頁
在彎曲空時中分析時的表述，1164頁
中子星物質，599頁
理想化爲簡單流體，558頁
狀態方程，624頁-626頁
中子星，619頁及下頁，622頁
模型，625頁-627頁
質量極限，627頁
轉動，628頁
作爲引力波的源，983頁，986頁，1040頁
脈動，628頁
作爲引力波的源，982頁-986頁
穩定性，626頁-627頁，696頁
由恒星坍縮產生，627頁-629頁
中微子的偏振，954頁
分量操作。見指標操作
分量符號，消除空位的含糊不清，84頁
分量
矢量的分量，引入，8頁-10頁，50頁-51頁
1-形式的分量，引入，61頁
張量的分量，引入，75頁
曲率張量的分量，引入，34頁，37頁，40頁，42頁
也可參閱指標操作
分析空時結構的整體技巧
全部，第34章
基本參考資料，916頁-917頁
例子，926頁-931頁
嘗試與局域方法聯合，806頁
也可參閱在漸近平直空時中的無窮大區域；空時的因果結構；空時中的奇點
分布。見 Diras δ 函數
分布函數，583頁及下頁，590頁
太陽
由行星軌道導出質量，638頁，書末的補頁
四極矩，1112頁及下頁，1115頁及下頁，1053頁及下頁
PPN 表述中的引力場，1097頁及以下幾頁
相對於銀河系，局域羣和宇宙的速度，1114頁
對潮汐的效應，44頁
來自太陽的光線的觀測紅移，1058頁及以下幾頁
輻射通量與壓强相比可以忽略，1075頁
也可參閱廣義相對論的實驗檢驗
太陽和月亮產生的潮汐，38頁，44頁，391頁及下頁
太陽和月亮在地球上的轉矩，391頁-392頁
太陽系星曆表 (J.P.L.)，1095頁，1097頁
太陽系，752頁-756頁
星曆表 (J.P.L.)，1095頁，1097頁
太陽系中相對論效應的大小，1048頁，1068頁
太陽系中的 Nordtvedt 效應，1128頁
也可參閱地球，月亮，行星軌道，太陽，廣義相對論的實驗檢驗
太陽的四極矩參量，J_2，1112頁及下頁，1115頁
太陽引力場中的雷達時間延遲，1048

頁，1103頁，特別是，1106頁-1109頁
月亮軌道，用於廣義相對論的實驗檢驗，1048頁，1116頁，1119頁，1127頁-1131頁
月亮，
對潮汐的效應，44頁
在地球上的陰影，24頁-26頁
月亮的激光測距，1048頁，1130頁及下頁
月亮的軌道，用於廣義相對論的檢驗，1048頁，1116頁，1119頁，1127頁-1131頁
月亮與地球的間隔作爲引力波探測器，1013頁及下頁，1018頁
月亮的激光測距，1048頁，1130頁及下頁
不採用虛時間坐標，51頁
不變式
電磁場的，110頁，480頁-483頁
Riemann 張量的，491頁
不能定向的表面，96頁
元素的豐度，765頁
升降機，431頁。也可參閱自由下落的唯一性，產生潮汐的加速度
木星，衛星的運動，637頁
水星的近日點進動。見近日點移動
「方向」。見取向
比强度，定義，587頁，589頁
比通量，定義，1025頁
「切變」
世界線線漩的切變，566頁
一束零射線的切變，582頁
用旋量語言，1165頁
切脅强
對理想流體可理想化地除去，140頁
產生於黏性，567頁
在 PPN 表述中，1074頁，1075頁註
切向空間，205頁，227頁-231頁
在相聯繫的鄰近點，246頁及下頁，252頁
切向矢量。見矢量，切向的
反變分量，76頁，201頁-207頁，312頁
日的長短，23頁-26頁，1124頁及下頁
內稟曲率。見曲率的表述
化學勢。見熱力學
以太，1051頁，1064頁及下頁
方向微商
函數沿矢量的方向微商，59頁-60頁
算符，61頁
作爲切向矢量，227頁-230頁

五 畫

加速度
由加速度模擬的引力，163 頁及以下幾頁
等價於引力場。見等效原理
狹義相對論勝任於分析，163頁及以下幾頁
核內中子的加速度，163頁
對於雙曲運動，在共動系中的常數，166頁-167頁
四維加速度總與四維速度正交，166頁
也可參閱 Fermi-Walker 遷移，
加速度，「絕對的」，和等效原理，17頁
加速度，相對的。見短程線偏離
加速（或非加速）觀察者的固有參照系
結構，327頁-332頁
度規，331頁及下頁
聯絡係數，330頁及下頁
慣性力和 Coriolis 力，332頁
用於熱力學勢的定義，557頁及下頁
用於引力波探測器的分析，1005頁-1010頁，1012頁
加速觀測者的雙曲運動，166頁及以下幾頁，173頁及下頁
加一橫的運算
在線性理論中，436頁及以下幾頁
在短波表述中，967頁
矢量，切向的
引入，8頁-13頁
定義
作爲箭頭，49頁
作爲參量化的直線，49頁
作爲點的微商，49頁，205頁，226頁-229頁
作爲方向微商算符，205頁，227頁-230頁
操作概述。見張量
矢量的表述，在整體 Lorentz 系中，
類時的，零和類空的，53頁
定義方向微商，59頁及下頁
相應於1-形式，58頁及以下幾頁
通過提升指標，由1-形式得出，62頁
線性依賴關係的檢驗，83頁
變換到彎曲空時，201頁-207頁，230頁及下頁
對易算符，204頁
確定分量的公式，232頁
變換定律，230頁及以下幾頁
與平行移動比較，245頁-263頁
與旋量相應的矢量，1150頁及以下幾頁
來自旋量分析的協變分量，1153頁
矢量，p-矢量，91頁
矢量，三維的（空間的），
引入，64頁
矢量的標積，22頁，52頁及下頁，62頁
矢量或張量的散度，82頁，213頁，222頁，261頁

平直空時中的加速觀測者，163頁-175頁
測量裝置，164頁-165頁
定義坐標系的原則問題，168頁-169頁
對參照系大小的限制，168頁-169頁
觀測者作了 Fermi-Walker 遷移的四重軸，169頁-172頁
局域坐標系，172頁-176頁
具有轉動四重軸，174頁及下頁
平直空時中的角動量
密度，151頁，156頁及下頁
總值，156頁-159頁
總值分解爲內稟的和軌道的，158頁及下頁
守恒，156頁及下頁
內稟的，給出大小的低限，162頁
平行移動和 Thomas 進動，175頁-176頁
平直空時中的因果關係，48頁，51頁
平直空時中粒子的碰撞，19頁，69頁及下頁
平直性
檢驗，30頁
等價於零 Riemann 曲率，283頁-284頁
不意味着 Enclid 拓撲，284頁
局域的平直性，伴隨着整體的彎曲，190頁-191頁
Newton-Cartan 空時中空間薄片的平直性，291頁-295頁
平直性，漸近的。見漸近平直的空時
平直空時。見狹義相對論；Lorentz 幾何
平均偏近點角，648頁
平行移動
提要，208頁及下頁
全部，245頁-263頁
方程，概要，224頁
圖解說明，209頁，212頁
也可參閱 Fermi-Walker 遷移
平行六面體，三重矢量和 1-形式的表示，133頁，135頁-136頁
平面引力波，嚴格的
度規的形式，957頁
對於波脈衝的場方程和解，958頁-959頁
線性化極限，958頁
Riemann 曲率，959頁
空時的整體結構，958頁-960頁
對試驗粒子的效應，960頁-961頁
與嚴格的電磁平面波比較，961頁-963頁
脊强-能量張量，963頁
用短波近似的語言，962頁-963頁
平面引力波，線性化理論中的，945頁及下頁，949頁，1004頁及以下幾頁
平直空時中引力的自旋-0、自旋-1和自旋-2理論的變分原理，178頁-181頁
外微分
引入和詳細概述，91頁-98頁
用於電磁學，第 4 章
主要不受度規存在與否的影響，233頁
推廣到矢量值形式和張量值形式，348頁-363頁
也可參閱特殊的概念，例如微分形式；外微商；Stokes 定理
外微商
引入，對標量場，93頁及下頁
使形式增價的運算，114頁-120頁
相繼二次應用，自動給出零，116頁，118頁
結果，119頁
推廣到矢量值形式和張量值形式，348頁-363頁，
第15章
外積。見 Wedge 積
外賦的時間，Kuohar 和 York的，487頁
外賦曲率。見曲率的表述
四維力，Lorentz，73頁
四維動量。見能量-動量
四維矢量。見矢量
四維速度。見速度四維矢量
四元數。見自旋度規
四極矩，977頁
耦合於曲率的產生
從短程線運動的偏離，476頁-480頁
自旋軸的進動，391頁及下頁
約化，977頁
化爲質量分布的積分，975頁，977頁
化爲質量分布二階矩的無迹部分，977頁
化爲 Newton 勢按 1/r 展開的係數，991頁
與引力波的產生，975頁，991頁-994頁
四重軸
均勻加速觀測者携帶的，169頁-170頁
在 Fermi-Walker 遷移中的，170頁-171頁
加速觀測者携帶的，328頁-332頁
四面體，307頁，309頁
世界線，4頁，13頁。也可參閱短程線
世界片，被三維體積的一個面掃過的，133頁
世界管中四維動量平衡的分析，473頁
世界時 (UT0, UT1, UT2)，28頁
世界線線滙的「膨脹」，565頁及下頁
白矮星，619頁
模型，625頁-626頁
Chandrasekhar 質量極限，619頁
穩定性，605頁，619頁，626頁及下頁，696頁

白矮星物質
熱壓力可略，599頁-600頁
其中電子的俘獲，619頁
狀態方程，624頁及以下幾頁
北斗七星，形狀不受觀測者速度影響，1160頁-1164頁
生成函數，對於從 2-形式的一種正則表示到另一種的變換，122頁-123頁
「未來」。見因果關係
正向。見取向
正則結構，度規結構和辛（symplectic）結構，126頁
正則變量，Hamilton 力學中的，125頁
可微的流形。見流形，可微的
可微的結構，242頁
示零實驗，1050頁，1064頁
失重。見自由下落的唯一性

六 畫

交錯張量。見排列張量
宇宙的閉合。見宇宙學模型
宇宙的膨脹。見宇宙學
宇宙的各向同性和均勻性
全部，第30章
在各向異性宇宙中人不可能存在，939頁
各向異性的絕熱冷却，802頁
各向異性的黏滯耗散，769頁，802頁-803頁
由各向異性能量產生的對，769頁，803頁-804頁
也可參閱宇宙學模型；宇宙學
宇宙中的物質，光度，平均密度，710頁及下頁，761頁
宇宙的「再加工」，1209頁，1213頁-1217頁
宇宙的監察，937頁
宇宙的引力波背景，712頁，736頁及下頁，764頁及下頁
宇宙的微波輻射，712頁及下頁，764頁及以下幾頁
Gamow 等的預言，760頁
宇宙微波輻射的各向同性，703頁
宇宙微波輻射的存在駁斥了穩態宇宙學模型，770頁
與「轉折宇宙」不相容，751頁
宇宙的中微子背景，712頁，736頁及下頁，764頁及下頁
宇宙線，757頁
平均密度的演化，798頁
宇宙線觀測駁斥了 Klein-Alfven 宇宙學模型，770頁
宇宙學常數，410頁及以下幾頁
Einstein 發明和撤消了宇宙學常數，410頁及下頁，707頁，758頁
對宇宙演化的影響，747頁，771頁，774頁
宇宙學模型
各向異性宇宙學模型，第30章
Brans-Dicke 宇宙學模型，770頁
宇宙的閉合
與 Mach 原理的關係，543頁，549頁
作爲邊界條件，1181頁
de Sitter 宇宙學模型，745頁，758頁
Einstem 穩態宇宙，746頁及下頁，750頁，758頁及下頁
平直，閉合，穩定的三維環模型，284頁
Friedmann 宇宙學模型
Friedmann 和 Lemaitre 的發現，751頁，758頁
均勻和各向同性假設，703頁，713頁
理想流體脊强-能量張量的假設，711頁及下頁
假設的狀態方程，713頁，726頁
均勻和各向同性的含義，714頁及下頁，720頁及以下幾頁
各向同性意味着均勻，715頁，723頁
構築坐標系，715頁及以下幾頁
引入膨脹因子，718頁
膨脹因子中的任意性，720頁及以下幾頁
重正化了的膨脹因子，721頁及下頁
均勻超曲面可能的三維幾何，720頁-725頁
曲率參量 $K=k/a^2$，721頁
線元的不同形式，721頁及以下幾頁，731頁，759頁
嵌入圖，723頁，725頁
拓撲並不唯一，725頁
Friedmann 宇宙學模型的熱力學第一定律，726頁及以下幾頁
假設物質與輻射交換的能量可以忽略，726頁及以下幾頁，765頁
假設物質的壓强總可以忽略，726頁，728頁
用膨脹因子表示密度和壓强，727頁
Friedmann 宇宙學模型的 Einstein 張量，728頁
附在物質上的正交歸一系，728頁
初值方程（對 $a_{,t}{}^2$），744頁
動力學方程（對 $a_{,tt}$），729頁
由初值方程加上熱力學第一定律導出動力學方程，729頁
時間參量：t, a, η，730頁-732頁
觀察者的參量與相對論參量，771頁及以下幾頁
宇宙的未來參量值的含義，747

頁，771頁，773頁及下頁
早期的動力學與 k 無關（不受閉合影響），742頁及下頁
若 $\Lambda=0$ 閉宇宙的臨界密度，782頁
微小擾動，800頁及下頁
也可參閱 Hubble 常數，密度參量，減速參量
Friedmann 閉宇宙模型（$k=+1$, $\Lambda=0$）
全部，733頁-742頁
低階概述，704頁-711頁
Einstein 支持閉合的論證，704頁
閉合的臨界密度，710頁，782頁
三維球超曲面的幾何，704頁，721頁，723頁及下頁
定義閉宇宙半徑，704頁
極大膨脹的半徑，705頁
嵌入圖，723頁及下頁
閉宇宙的體積，724頁
拓撲不唯一，725頁
適用的熱力學第一定律，705頁，726頁及以下幾頁
初值方程，537頁，705頁及下頁，729頁，733頁
演化的有效勢，706頁
重新坍縮的不可避免性，707頁
場方程的解，734頁及下頁
輻射占優勢時代，733頁-737頁，740頁及以下幾頁
物質占優勢時代，733頁及以下幾頁，738頁-742頁
坐標圖，741頁
典型模型的具體數字，738頁
圍繞宇宙的信號傳播，741頁，750頁
不同區域彼此間的因果隔離，740頁及以下幾頁
Schwarzschild 點陣宇宙模擬的大模型，739頁及下頁
與 Newton 宇宙學模型比較，707頁及下頁
Friedmann 平直的和開放的宇宙模型（$k=0$, $k=-1$; $\Lambda=0$）
均勻超曲面的幾何，721頁，724頁及下頁
嵌入圖，724頁及下頁
拓撲不唯一，725頁
場方程的解，742頁
輻射占優勢時代，742頁及下頁
物質占優勢時代，743頁及下頁
加上宇宙學常數的 Friedmann 宇宙學模型
（$k=0$, ±1; $\Lambda\neq0$）
初值方程（對 $a_{,t}{}^2$），744頁
演化的有效勢，744頁，746頁，748頁及下頁
動力學演化，744頁-747頁
特殊情形，745頁及以下幾頁，750頁及下頁
停頓宇宙，750頁
等級（島）宇宙，748頁及下頁，770頁
非均勻，第30章
非均勻的 Gowdy 模型，804頁
非均勻球狀模型，804頁
Kasner 模型，801頁，805頁及以下幾頁
Klein-Alfven 模型，748頁，770頁
混主，805頁-814頁
Newton 模型，707頁及下頁，759頁
大爆炸模型中原始的混沌，769頁，802頁及以下幾頁
全部，第30章
產生的原始黑洞，884頁
也可參閱宇宙的各向同性和均勻性，可能的解釋
Schwarzschild 點陣宇宙，739頁及下頁
穩態宇宙，745頁，750頁，770頁
轉折宇宙，750頁及下頁
也可參閱宇宙學：按「標準大爆炸模型」的宇宙歷史
宇宙學
宇宙的膨脹
Friedmann, de Sitter 和 Weyl 的預言，758頁，776頁
Hubble 的發現，759頁，792頁-794頁
除去宇宙學項的動機，410頁-411頁
是 Einstein 理論最偉大的預言，411頁
什麼膨脹了以及什麼沒有膨脹，719頁，735頁
「新空間加在何處？」719頁，739頁
宇宙會重新收縮嗎？747頁，771頁，774頁
也可參閱 Hubble 膨脹率
人們關於宇宙的觀念和知識的歷史，752頁-762頁
按照「標準大爆炸模型」宇宙的歷史
全部，第28章
初始的奇點，769頁及下頁
初始奇點「之前」是什麼？769頁
原始混沌的可能作用，769頁，803頁及下頁，816頁。也可參閱宇宙學模型：原始混沌
在 $t\ll1$ 秒，完全熱平衡，736頁，763頁及下頁
引力波和中微子退耦，736頁，764頁
配對的重新組合，736頁及下頁，764頁
膨脹期間物質和輻射的熱相互作用，765頁及下頁
從物質占優勢轉變到輻射占優勢

，741頁及下頁，765頁及下頁
恒星，星系和星系團的凝聚，766頁，769頁，800頁
過去的歷史不大受 k（超曲面的幾何）的影響，742頁及下頁，763頁
永遠膨脹和重新收縮，747頁，771頁，774頁
標準模型的觀察探測，780頁-798頁
摘要，797頁及下頁
距離-紅移關係的導出，780頁及下頁
距離-紅移關係的觀測數據，781頁，785頁-788頁，792頁及以下幾頁。也可參閱 Hubble 膨脹率
星等-紅移關係的導出，782頁-785頁，794頁
星等-紅移關係的觀測數據，788頁-791頁
角度-有效距離與紅移（「宇宙的透鏡效應」），795頁及下頁
源計數（數目-通量關係），798頁
宇宙的平均質量密度，710頁及以下幾頁，796頁及下頁
對於宇宙背景輻射，比較其溫度、紅移、和發射時間，737頁
元素的豐度，765頁
用各種方法推出的年齡的比較，797頁及下頁
類星體總體的演化，767頁及下頁，770頁
利用宇宙學觀測對廣義相對論的實驗檢驗，1047頁
宇宙的觀測性質
大尺度的均勻性，703頁，815頁
大尺度的各向同性，703頁，801頁，815頁
旋轉，觀測的極限，939頁
宇宙學膨脹，772頁，775頁及下頁，785頁-788頁，793頁及下頁
從膨脹率推出年齡，709頁及下頁，797頁
最古老的恒星的年齡，709頁，797頁及下頁
岩石和隕星的年齡，759頁，761頁，798頁
減速參量，785頁，788頁-791頁
密度參量，796頁及下頁
發光物質的平均密度，710頁及下頁，761頁
宇宙線的平均密度，712頁，757頁，798頁
星系際物質的平均密度，712頁，761頁及下頁，797頁
電磁輻射的平均密度，712頁
星系和恒星動力學運動中的能量和壓强，711頁
元素的豐度，765頁
每個重子的熵，766頁
類星體總體的演化，767頁及下頁，770頁
「精細尺度」結構，703頁
也可參閱宇宙微波輻射，Hubble 膨脹率
有關宇宙初態和終態的推測，707頁，1209頁，1213頁-1217頁
宇宙學中的源計數，798頁
宇宙飛船，用於檢驗廣義相對論，1108頁及下頁，1114頁
宇宙，見宇宙學模型，宇宙學
宇宙的密度，見宇宙學：宇宙的觀測性質
宇宙的「密度參量」，772頁，796頁及下頁
宇宙的減速參量
定義，772頁
與其他宇宙學參量的關系，771頁-773頁
宇宙是否會重新收縮的決定因素，774頁
爲了測量星等-紅移關係，782頁-785頁，794頁
觀測數據，785頁，788頁-791頁
有效勢
對於在 Schwarzschild 幾何中的試驗粒子，639頁，656頁，659頁-662頁
對於在 Kerr-Newman 黑洞赤道平面中的帶電試驗粒子，911頁
對於在 Schwarzschild 幾何中的波，868頁，870頁
對於在 Kerr 幾何中的標量波，915頁
對於 Friedmann 宇宙的半徑，706頁，744頁，746頁，748頁及下頁
對於混主宇宙的振盪，809頁及以下幾頁
有通道的機器，見協變微商，度規，張量
曲率，常數，三維幾何的，720頁-725頁
曲率的表述
基本方程概述，223頁-224頁
Bel-Robinson（潮汐）張量，381頁及下頁
保形（Weyl）張量，
引入，325頁，327頁
保形張量的主零線滙，902頁
Petrov-Pirani 代數學分類，1165頁
旋量表示，1154頁及下頁
在 Nordstrøm-Einstein-Fokker 的引力理論中，429頁，431頁
在三維爲零，550頁
Einstein 張量
引入，222頁，325頁及下頁
初階方程概述，224頁

作爲 ***Riemann*** 雙對偶的跡，325頁及下頁，376頁
用 Riemann 分量表示混合分量的公式，343頁及下頁
用內稟和外賦曲率表示，515頁
解釋爲轉矩，373頁-377頁
縮併的 Bianchi 恒等式（「***Einstein*** 的守恒」），325頁，377頁及以下幾頁
Einstein 張量的守恒，來自邊界的邊界，377頁及以下幾頁
Einstein 張量的不唯一性，405頁，407頁及下頁
曲率 2-形式，348頁-363頁
對二維球的圖示，337頁
對軟木遮陽帽的圖示，338頁
曲率算符 **R**
引入，271頁
看作二重矢量值的 2-形式，376頁-380頁
作爲再次適用的外微商，351頁
作爲具有空位的機器，351頁及下頁
在 Newton-Cartan 理論中，299頁
超曲面的外賦曲率，511頁-516頁
與內稟曲率對比，336頁，421頁
算符，511頁
張量，512頁
來自度規的 Lie 微商，520頁
Gauss-Codazzi 關係，514頁及以下幾頁
二維面的 Gauss 曲率，30頁，44頁，336頁及下頁
超曲面的內稟曲率，509頁及下頁
Riemann 的不變式，491頁
Jacobi 曲率張量，286頁及下頁
Jacobi 曲率算符，286頁
在 Newton-Cartan 理論中，299頁，301頁
二維面的曲率主半徑，44頁，335頁及下頁
Riemann 張量
分量公式，概述，224頁，266頁
在非坐標基中的分量公式，277頁
Riemann 分量的矩陣表示，360頁及下頁
初等的引論，31頁，34頁-37頁，39頁
全部初階論述（度規表示），218頁-224頁
全部，除了度規，270頁-288頁
全部，因引入度規所導致的性質，324頁-327頁
用圍繞閉合曲線平行移動定義，277頁-282頁
張量特徵的證明，276頁
用短程線偏離定義，29頁-37頁，218頁及下頁，270頁-277頁，287頁
與曲率算符的關係，274頁及以下幾頁
與非對易協變微商的關係，389頁及以下幾頁
與曲率 2-形式的關係，352頁
作爲具有空位的機器，271頁，274頁及下頁
對稱性，35頁，220頁及以下幾頁，286頁，324頁及下頁
獨立分量數，326頁
不變式，491頁
二維和三維：可從 Ricci 張量導出，334頁，343頁，550頁
Bianchi 恒等式，221 頁及下頁，224頁，325頁及下頁。也可參閱 Bianchi 恒等式
由度規二次微商並與之成線性關係構成的唯一張量，408頁
波動方程，382頁
動力學分量，517頁及下頁
旋量表示，1154頁及下頁
在 Newton-Cartan 空時中，290頁，302頁
在線性化理論中，438頁
Riemann 張量的雙重對偶，325頁及下頁，343頁，371頁，376頁
Ricci 張量，222頁，325頁及下頁
在 Newton-Cartan 理論中，290頁，300頁
標量曲率
引入，222頁，325頁
用面積虧損表示，516頁
三維面的標量曲率，422頁及下頁
Gauss-Bonnet 積分，309頁，381頁
在 Hilbert 作用量原理中，418頁，491頁
Weyl 張量。見保形張量
York 的曲率，541頁，550頁
曲率，計算方法
全部，第14章
在計算機（Computer，或譯爲電腦）上分析，342頁
來自聯絡及其微商的直截了當的方法，340頁及下頁
用***Riemann***分量顯式表示 ***Einstein*** 的混合分量，343頁及下頁
短程線 Lagrange 函數方法，344頁-348頁
經 2-形式，理論，348頁-354頁
經 2-形式，方法，354頁-362頁
顯示結果的方法，334頁，360頁及下頁
曲率。也可參閱 Bianchi 恒等式；Gauss-Weingarten 方程；Gauss-Codazzi 方程
守恒定律
微分表述和積分表述的等價，146頁
重子數守恒定律，558頁及下頁，

563頁及以下幾頁
應用於脈衝星，691頁及下頁
應用於坍縮星，858頁
在 PPN 表述中，1088頁
電荷守恒定律，369頁及下頁
微分表述，88頁，568頁，570頁
由微分表述經 Stokes 定理得積分表述，98頁，156頁
作爲 $dd=0$ 的結果，118頁
能量-動量守恒定律 $(\nabla\cdot T=0)$
在基本粒子物理學中的檢驗，19頁
在平直空時中，132頁，146頁，152頁-155頁
在平直空時中的積分表述，142頁-146頁
變換到彎曲空時，386頁及下頁，390頁
經與幾何「相聯繫」自動地解釋，364頁，367頁及下頁，371頁，404頁-407頁
用廣義的外微商表示，362頁及下頁
不同的數學表示，379頁
引力源的總質量-能量和四維動量守恒定律，455頁，468頁-471頁
對於試驗粒子的運動
與 Killing 矢量場有關，651頁
與 Hamilton 原理有關，654頁
在 Schwarzschild 幾何中，655頁-658頁
在任何球狀靜態幾何中，681頁
在 Kerr 度規和電磁場中，898頁及下頁
地球
大氣和重力，388頁
地殼，作爲引力波的探測器，1013頁，1015頁
一般的進動（自轉軸的進動），391頁，392頁，1112頁，1113頁
引力的多極矩，401頁
質量，半徑，密度。見末頁，
相對於宇宙微波輻射的運動，713頁
粒子在貫穿洞穴中的振盪，39頁
拖曳慣性系的自轉，1119頁及下頁。也可參閱日
衛星軌道用於推出質量，638頁
通過各種距離的集合描繪形狀，306頁-309頁
地面下的質量振盪，401頁
潮汐，作爲廣義相對論的實驗檢驗，1123頁及下頁
地球的振盪，作爲引力波的探測器，1013頁，1015頁，1035頁及下頁
地殼均衡，402頁
自旋，作爲非經典的二值性，1204頁
自旋度規
在轉動組合定律中，1136頁
作爲四元數或轉動算符，1136頁
Hermit 共軛，1138頁
代數性質，1137頁-1142頁
與三維矢量，1140頁及下頁
與四維矢量，1142頁及下頁
與自旋度規相聯繫，1152頁及下頁
乘法定律，1153頁
自旋的物體，
運動方程，1120頁及下頁
自旋的遷移定律
Fermi-Walker 無曲率耦合，165頁，176頁及下頁，1117頁
用曲率耦合修正，391頁及下頁
自旋進動
「普遍的」，391頁及下頁
Thomas，175頁及下頁，1118頁，1145頁及以下幾頁
參照系拖曳，1119頁及下頁
歸因於空間曲率（「測地的」），1119頁及下頁
自由下落的唯一性（「失重」，「弱等效原理」），13頁-19頁，197頁，1050頁-1054頁
本書的表述，1050頁
Einstein 1908 年的表述，5頁
包含在 Einstein 的 1911年等效原理中，17頁
實驗檢驗，13頁-17頁，1051頁-1054頁。
也可參閱 Eötvös-Dicke 實驗
自由度的計數，對幾何動力學和電動力學，529頁-533頁
「自能」，無限的，474頁
「自作用力」，474頁
自由下落的試驗粒子定義短程線，196頁
仿射聯絡。見聯絡，協變微商
仿射幾何
特徵，191頁，242頁
全部，第10章
也可參閱特殊的概念，例如協變微商，聯絡係數
仿射參量，定義，211頁，244頁及以下幾頁
短程線的仿射參量，244頁-246頁
改變的效應，關於短程線偏離，269頁
適用的變分原理，322頁-323頁
在幾何光學中，575頁
光行差
公式，68頁
在光偏轉實驗中，1101頁
光子
分裂，爲平面波所禁止，70頁
光子的世界線，388頁
光子的分子運動論描述，587頁-589頁
在幾何光學中，580頁
光線，幾何光學中的，537頁及以下幾頁，581頁及下頁
光的彎曲。見光的偏轉
「光輪」，粒子散射中的，670頁
光錐

表徵提前勢和推遲勢，122頁
Newton-Cartan 和 Einstein 的區別，297頁
也可參閱因果聯繫
光學。見幾何光學
共面性，檢驗，281頁
因果性原理和輻射機制，110頁
因子順序問題，388頁-391頁
各向同性坐標
對於恒星，595頁
對於 Schwarzschild 幾何，840頁
在後 Newton 近似中，1097頁
各向同性意味着均勻性，715頁，723頁
各向異性能量，802頁，807頁
同步坐標系，717頁。也可參閱 Gauss 簡正坐標系
同時性
在 Newton, Minkowski 和 Einstein 空時中，296頁
作爲類空薄片的術語。見類空薄片
回轉器
用於確定 Fermi-Walker 遷移，165頁
用於構築固有參照系，327頁，330頁及下頁
回轉器的進動，作爲廣義相對論的實驗檢驗，1117頁-1120頁
也可參閱慣性系的拖曳
行星軌道
行星軌道中的周期性相對論效應，1009頁，1011頁
從短程線運動的偏離，1111頁，1126頁-1131頁
也可參閱 Kepler 軌道，近日點移動
行列式
行列式微商，160頁-161頁
和 Jacobi 函數，160頁-161頁
多分量流體，558頁
多指時間和穿越時空的薄片上的任意性，713頁及下頁，1184頁
任意自旋的輻射場的偏振，954頁-955頁
向前勢，121頁
色散關係，由 Hamilton 函數得出的，486頁及下頁，494頁，498頁
曲線的線滙，240頁

七 畫

坐標，5頁-10頁
微分形式和辛結構的規範坐標，125頁及下頁
不應由幾何動力學定律預言，409頁
在 Newton-Cartan 理論中，坐標的旋轉和變換，294頁及下頁
在 Minkowski 和 Einstein 空時中優先的坐標，269頁
坐標系
可從度規推斷出來的性質，595頁及下頁
加速觀測者的坐標系，172頁-176頁
漸近 Minkowski 坐標系，463頁
Boyer-Lindquist 坐標系，877頁-880頁
坍縮恒星的共動坐標系，857頁
宇宙的共動坐標系，715頁及以下幾頁
線性理論中的曲線坐標系，441頁
Eddington-Finklestein 坐標系，828頁-831頁，849頁
Euclid 坐標系，22頁及下頁
Fermi 正交坐標系，332頁
Galileo 坐標系，289頁，291頁-298頁，414頁
Gauss 正交坐標系，516頁，518頁，715頁及以下幾頁
Schwarzschild 幾何的各向同性坐標系，840頁
靜態球狀系統的各向同性坐標系，595頁
Kerr 坐標系，879頁及下頁
Kerr-Schild 坐標系，903頁
Kruskal-Szekeres 坐標系，827頁，831頁-836頁
局域 Lorentz 坐標系，207頁
Lorentz 坐標系，22頁及下頁
Minkowski 坐標系，與 Lorentz 坐標系相同
Novikov 坐標系，826頁及下頁
後 Newton 表述的坐標系，1073頁及下頁，1082頁-1087頁，1089頁，1091頁，1097頁
Regge-Wheeler 坐標系，與龜坐標系相同
Riemann 正交坐標系，285頁及以下幾頁，329頁-332頁
Schwarzschild 幾何的 Schwarizschild 坐標系，607頁
靜態球狀系統的 Schwarzschild 坐標系，597頁
脈衝星的 Schwarzschild 坐標系，689頁
任意球狀系統的坐標系，616頁及下頁
Schwarzschild 幾何的龜坐標系，663頁，665頁-666頁
坐標佈片，概念的引入，10頁-12頁
坐標奇點。見奇點，坐標
形式，微分的
全部定義和公式一覽表，91頁-98頁。
注：此表不列入本索引，因爲它本身就像一個索引！
在電磁學的範圍內，是起作用的機器，第 4 章
作爲面的交叉堆積，99頁-120頁
微分形式的有序系列 (1-形式，2-

形式，……），114頁-120頁
封閉的形式區別於一般的形式，114頁-119頁
形式的運算。見對偶性，外微商，積分
1-形式
引入動機，53頁，55頁及下頁
定義，56頁及下頁
說明，55頁-58頁
「相應的」切向矢量，58頁及下頁
附加圖示，57頁
基。見基 1-形式
1-形式的代數，對一般的基，202頁-203頁
無度規方面，226頁，231頁-233頁
閉合的，123頁
無旋的，123頁
無轉動的，123頁-124頁
有轉動的，123頁
2-形式
作爲從定向表面構築「許多管」的機器，105頁-107頁
簡單的，103頁
普遍的，可表爲兩個簡單的 2-形式之和，103頁，122頁及下頁
基 2-形式，直接標示和對偶標示，151頁
用於曲率的描繪和計算，337頁-340頁，348頁-363頁
矢量值和張量值形式，第15章
形式的表面的穿透，55頁及下頁，60頁，99頁，202頁，231頁
角度有效距離和紅移，795頁及下頁
角積分，有用的公式，1001頁
角動量算符，240頁
角速度
擴展到四維，170頁及下頁
轉動四重軸和 Fermi-Walker 四重軸，174頁及下頁
在旋量分析的情況下，1139頁，1142頁
作用量。見動力學路程長度
作用量原理。見變分原理
坍縮恒星。見中子星，黑洞
初值數據
Hilbert 用初值數據唯一地確定未來，434頁
奧秘在於什麼使之固定，555頁
在特徵超曲面上的表述，554頁
位相，de Broglie 波的，53頁-55頁
位相，幾何光學中的，571頁及下頁，574頁及下頁
位相空間，126頁，584頁及下頁，590頁
位相空間的體積，584頁-587頁，590頁
求和慣例，Einstein 的，9頁
扭轉
如果等效原理是正確的，在仿射聯絡中不出現扭轉，250頁
在 Riemann 幾何中爲零，378頁
可能結合到廣義相對論中去，1049頁，1068頁
扭轉子，937頁
冷的催化物質，624頁-626頁
完整基，204頁，210頁，239頁
局域物理學是簡單的物理學，4頁，19頁，39頁及下頁
局域慣性系。見慣性系，局域的
局域 Lorentz 系。見 Lorentz 系，局域的
局域非轉動觀測者，895頁-896頁
局域 Lorentz 系的相互吻合，190頁-191頁
投影張量，565頁及下頁
快運動近似，1072頁-1073頁
杆，301頁，393頁，396頁-399頁

八 畫

空時曲率
以蘋果表面爲模型，4頁及下頁
意味着引力紅移，187頁及以下幾頁
由質量-能量產生，37頁-44頁，第17章
用短程線偏離量度，29頁-37頁，195頁及下頁，270頁-275頁
測量的原則方法，72頁
用重力陡度計測量，400頁-403頁
在等效原理的物理學中出現曲率耦合，389頁-392頁
與宏觀物體的矩耦合，391頁及下頁，476頁-480頁，1120頁及下頁
即使平均接近零，局域地可以很大，220頁
也可參閱短程線偏離，潮汐力，空時幾何
空時幾何
Newton 的。見 Newton-Cartan 引力理論。
Minkowski (Lorentz) 的。見 Lorentz 幾何
Einstein 的
用蘋果作模型，4頁
用地球的穩定性檢驗 Riemann 的特徵，398頁及下頁
曲率，隱含於引力紅移，187頁及以下幾頁
不按物理學的局域 Lorentz 特徵分層，304頁及下頁
看作「引力場」，399頁及下頁
作爲物理學的動力學參與者，337頁
作爲廣義相對論的核心，響應物質，404頁
作爲經典近似，1181頁及下頁
作爲穿過超空間的經典薄片，

1184頁
也可參閱廣義相對論，幾何動力學，空時的曲率
Newton 空時幾何、Minkowski 空時幾何、以及 Einstein 空時幾何的比較和對比，296頁，437頁
空時幾何中的奇點
定義，934頁
關於空時幾何中奇點創生的定理，934頁及以下幾頁，936頁，938頁，762頁
結構，935頁，940頁，804頁及以下幾頁
宇宙的監察和裸露的奇點，937頁
在 Schwarzschild 幾何中，
幾何的演化，838頁及下頁
落入物體被破壞的可能性極小，840頁
恒星的球狀引力坍縮，846頁，860頁及以下幾頁
混主，805頁-813頁
是普遍的，806頁，940頁
改變了附近的時間標準，813頁及下頁
宇宙的初始，769頁及下頁
在它「之前」是什麼？769頁及下頁
展望，爲了理解，707頁
人們要爲奇點擔憂嗎？
Misner 的觀點，813頁及下頁
Thorne 的中性，
Wheeler 的觀點，1196頁及以下幾頁
非物理學的，歸因於過分理想化
表面層，552頁-556頁
殼層貫穿，859頁
空時薄片，506頁。也可參閱類空薄片
空時的對稱性。見 Killing 矢量場
空時的三加一分離，486頁，505頁
夾層（或按原文「sandwich」可直譯爲三明治）和剛性，506頁
與 3-度規加間隔和移動，506頁-507頁
4-度規和 3-度規，508頁
薄片的選擇無關緊要，526頁
空時的拓撲
Schwarzschild 幾何的各種可能性，837頁-840頁
Friedmann 宇宙學模型的各種可能性，725頁
Einstein 和平直空間觀點，437頁
也可參閱微分拓撲
空間
Newton 絕對空間，19頁
類泡沫結構和量子起伏，1204頁
不是空時，作爲動力學客體，1181頁
也可參閱流形，微分幾何，微分拓撲，仿射幾何，Riemann 幾何
空間的度規彈性，426頁-428頁
空間的「類泡沫」特徵，419頁，480頁，1190頁-1194頁，1202頁
空間中的蛀孔
和 Betti 數，221頁
Schwarzschild 幾何的蛀孔，837頁及以下幾頁，842頁
Reissner-Nordstrøm 幾何的蛀孔，921頁
在經典水平的眞實宇宙中可能不存在，842頁及下頁
在量子水平，1200頁及下頁，1203頁
電荷作爲被俘獲入內的力線，1200頁
空時幾何的微擾理論
普遍表述
用度規微擾表示聯絡係數，966頁-967頁
用度規微擾表示曲率張量，966頁-967頁
度規微擾的作用量原理，在眞空中，972頁及下頁
規範變換，967頁及以下幾頁
在短波極限的度規微擾的協强-能量，969頁
應用
引力波的短波近似，964頁-973頁
相對論性恒星的脈動，688頁-699頁
恒星的緩慢轉動，699頁
用於 Friedmann 宇宙學，800頁及下頁
用於坍縮恒星，844頁及以下幾頁
Schwarzschild 和 Kerr黑洞的穩定性分析，844頁及下頁
空時的 Petrov-Pirani 分類，902頁
取向
空間取向，體現爲對偶操作，97頁
形式的取向，
1-形式，圖解說明，55頁
2-形式，圖解說明，100頁，104頁，107頁，109頁，116頁
3-形式，117頁
體積的取向，133頁-135頁及下頁，147頁-150頁
區域及其邊界的相對取向，96頁
「波爲主探測器」，定義，1019頁
波矢，573頁及以下幾頁
波函數。見幾率振幅
波算符
d'Alembert 波算符，89頁，120頁，177頁，183頁
de Rham 波算符，對矢量場，569頁
Lichnerowicz-de Rham 波算符，對張量場，382頁
保形不變性，542頁
波數 1-形式，55頁-58頁
與能量-動量四維矢量有關，57頁

波離開曲率向後散射，864頁及下頁，869頁及以下幾頁，957頁
波動算符的核，121頁
「波的穩定流動」，定義，1019頁
非完整的基，204頁，210頁，239頁
物質的空間理論，1202頁-1205頁
物理學的概念，由理論自身定義的，71頁及下頁
物理光學，相應於幾何光學，412頁
事件，6頁，9頁及下頁
  關鍵是可證認，225頁
  作爲經典概念而不是正確的量子概念，1184頁
固有距離。見 Lorentz 間隔
固定點定理，978頁
注入能量，561頁，562頁
坪的問題，877頁
表面積分。見積分
拓撲，點集，241頁，926頁註
孤立系，454頁
法線，用間隔和移位表示單位法線，508頁
奇點，坐標的，10頁-12頁
  用 Schwarzschild 坐標圖示，11頁，823頁及以下幾頁
兩個長度尺度的膨脹，571頁及下頁
近日點移動，391頁及下頁
  對精確 Schwarzschild 幾何中的近似圓軌道，670頁
  在廣義相對論的後 Newton 極限中，1110頁-1116頁
  在 PPN 表述中，1110頁-1116頁
  在線性化（自旋-2）理論中，183頁及下頁，446頁
  在引力的自旋-0和自旋-1理論中，179頁
  觀測數據，1112頁及下頁
  Einstein 論近日點移動，433頁
協變性，廣義的。見廣義的協變性
協變微商
  基本方程概述，223頁-224頁
  由平行移動定義，208頁，249頁
  圖示，209頁，212頁
  代數學，250頁-261頁
  鏈式規則，214頁，250頁，252頁，257頁及下頁，260頁及下頁
  對稱性（「無扭轉」），250頁，252頁，353頁及下頁
  相加性，252頁
  與縮併對易，214頁
  與度規相容，215頁及下頁，313頁及以下幾頁，353頁及下頁
  兩個協變微商不可對易，389頁及以下幾頁
  作爲一個有空位的機器，253頁及以下幾頁
  不是張量，253頁，255頁及下頁
  聯絡係數作爲它的分量，210頁，256頁，261頁及下頁
  從中構造轉動 1-形式，349頁及以下幾頁，359頁及下頁
  引入分號符號，210頁
  分量計算，215頁
  張量密度的協變微商，501頁及下頁
  在超曲面中，510頁
  當作引力場，387頁
  也可參閱聯絡係數；平行移動；轉動係數
協變微商的分號符號，210頁
狀態方程
  對核和白矮星物質，624頁-626頁
  對「宇宙學流體」，713頁，726頁
降低指標。見指標操作

九 畫

恒星。也可參閱雙星，造父變星，中子星，超大質量恒星，白矮星
恒星，演化到進入終態，627頁-629頁
恒星，Newton 的
  結構方程，601頁-602頁，605頁及以下幾頁
  引力能，606頁-607頁
  均勻密度模型，609頁
  脈動理論，
    動力學分析，697頁及下頁
    維里定理分析，1079頁及下頁
    體積-平均分析， 630頁及下頁
恒星，相對論性的，不轉動的
  結構
    全部，第23、24章
    結構方程概述，608頁-609頁，689頁
    必定是球狀的，593頁
    Schwarzschild 坐標系，597頁
    各向同性坐標系，595頁
    曲率張量，360頁及下頁
    引力勢的 Newton 極限， 595頁
    描述物質的參量，597頁-600頁
    流體的固有參照系，598頁
    導出結構方程，600頁-606頁
    結構方程的 Newton 極限，601頁-602頁，605頁及以下幾頁
    半徑 r 內的質量-能量，602頁及以下幾頁
    必定有 $2m/r$ <1，605頁，612頁及下頁，615頁
    重子的總數，606頁
    外部引力場。見 Schwarzschild 幾何
    r 的單調性，。612頁-613頁，615頁
    嵌入圖，613頁-615頁，617頁
  特殊模型
    怎樣構造，608頁及下頁
    Schwarzschild均勻密度模型，609頁-612頁
    具有 $\rho_e=\infty$ 的 Fermi 氣模型，615頁及以下幾頁
    白矮星和中子星的數值模型，

625頁及以下幾頁，696頁
徑向脈動
動力學分析，688頁-699頁
邊界條件，694頁
簡正模式的本徵值問題，695頁及下頁
Newton 極限，697頁及下頁
後 Newton 極限，698頁及下頁，1080頁
穩定性
徑向脈動的臨界絕熱指數，697頁及以下幾頁
大質量恒星中的脈動不穩定性，632頁
相對論性不穩定性，605頁，697頁及以下幾頁
也可參閱白矮星，中子星，超大質量恒星
坍縮。見引力坍縮
非徑向脈動，984頁及下頁
恒星，相對論性的，轉動的
緩慢轉動的球狀恒星，699頁
快速轉動的盤，621頁
轉動的穩定效應，633頁及下頁
恒星中的核燃燒
驅動脈動的不穩定性，632頁
HCNO 循環，632頁
催化到終點，624頁-626頁
存在核燃燒時熱力學的表述，558頁
恒星演化的終態，624頁。也可參閱白矮星，中子星，黑洞
恒星的同系脈動，697頁，1079頁
恒等式，自動滿足守恒定律的，405頁
度規
從距離提取出來的，306頁-309頁
度規的描述
概述，77頁，305頁，310頁及下頁
作爲有空位的機器，22頁，51頁-53頁，77頁，305頁，310頁及下頁
用分量語言，77頁，310頁及下頁
用基 1-形式表示，77頁，310頁
作爲線元，77頁，305頁，310頁
引入和定義，22頁
度規的分量
在任意基中，201頁，310頁及下頁
在 Euclid 坐標中，22頁
在 Lorentz 坐標中，22頁，53頁
分量行列式
定義，202頁
微分，給出聯絡係數的縮併，222頁
變分，503頁
聯絡係數的計算，210頁，216頁
與協變微商相容，313頁及以下幾頁，353頁及下頁
結構和辛結構，126頁
只在對偶性概念進入電磁學，105頁，114頁
在廣義相對論空時中的作用
由光信號及自由粒子測量，324頁
作爲「引力場」，399頁-400頁
檢驗局域 Lorentz 特徵，311頁-312頁
分量並非全部由幾何動力學定律預期，409頁
在 Newton-Cartan 空時中的作用，300頁，302頁
在特殊流形和參照系中的係數。見特殊流形，例如，三維球；Schwarzschild 幾何或坐標系，例如 Kerr-Schild 坐標
度規微商和協變微商的一致性，313頁及以下幾頁，353頁及下頁
度規的符號差，311頁
星系團
起源，766頁，769頁及下頁
作爲引力波之源的室女座，1042頁
星系
分類，786頁及下頁，789頁，793頁，795頁
起源，766頁，769頁及下頁
演化，791頁
分布，均勻性和階式結構，703頁
覆蓋天空的百分數，799頁
星系核
星系核中的爆炸，634頁
星系核中的黑洞，887頁
星系核中的相對論星團，634頁，687頁
星系中的 *H*II 區，710頁，761頁，786頁及下頁
「星等，絕對的」，定義，786頁
「星等，表觀的」，定義，782頁
星等-紅移關係。見宇宙學，標準模型的觀測探索
星團，相對論性的，621頁，635頁
由星系核的演化創生，634頁
結構分析，679頁-683頁
結構方程概述，683頁及下頁
其中的相對論性不穩定性，621頁，686頁及下頁
坍縮，884頁
在類星體和星系核中可能的角色，634頁，687頁
特殊模型
具有純粹圓軌道的星團，683頁
自相似的星團，683頁
各向同性的星團，683頁及下頁
等溫的球狀星團，685頁及以下幾頁
星運算。見對偶性
星震，628頁
星歷表秒，28頁
星系際物質的平均密度，712頁，761頁及下頁

相長干涉
作爲從量子到經典的最短躍進，1185頁
在質點力學中和在幾何動力學中，比較，1186頁及下頁
在力學的和幾何動力學的Hamilton-Jacobi 表述之後， 423頁及下頁
相對加速度。見短程線偏離
相對論。見狹義相對論；廣義相對論
背景幾何
通過有限程序定義，479頁-480頁。也可參閱引力波，短波表述
重力陡度計，400頁-403頁
重子
數密度，558頁
質量密度，1069頁，1074頁
守恒定律。見守恒定律
括號，圓括號和方括號，定義對稱性，126頁
封閉的形式，114頁。也可參閱形式，微分
保形曲率張量。見曲率的表述
指標，反變式和協變式，76頁
指標操作
在整體 Lorentz 系中，85頁
在彎曲的 Riemann 流形中，201頁-204頁，223頁及下頁
在仿射流形中，225頁及下頁
在線性化理論中，436頁
前幾何 (pregeometry)，1203頁-1212頁到處都有作爲命題的算法，1208頁-1209頁，1211頁-1212頁
前幾何 (prior geometry) ，429頁及以下幾頁，1068頁，1070頁及下頁
秒，改變的定義，23頁-29頁
信號，從噪聲中提取，1036頁-1038頁
俘獲表面，934頁，936頁
「神秘的」迷失物質，710頁。也可參閱宇宙學
洞上的頭髮。見 Kerr-Newman 幾何的唯一性
約束，作爲減少自由度數的信號，528頁及下頁
約束，第一級和第二級，在幾何動力學的 Dirac 形式中，486頁
紅移，宇宙學的
與波長無關，775頁
「疲勞的光」不能解釋，775頁
推導
從駐波，776頁
從波峰發射，傳播和接收，777頁及下頁
利用對稱性導出的短程線運動常數，777頁，780頁
用於宇宙的特徵距離和時間，779頁
與 Doppler 頻移對比，794頁
粒子能量和 de Broglie 波的紅移，780頁
宇宙微波輻射的紅移，764頁-765頁，779頁
在各向異性宇宙學中，801頁
也可參閱宇宙學
紅移
Doppler，63頁及下頁，794頁
歸因於「以太漂移」，1064頁及下頁
來自坍縮恒星的輻射的紅移，847頁，849頁及下頁，872頁
紅移參量 z 的定義，187頁
軌道 (History)
軌道的空間，318頁-319頁
軌道的民主，320
軌道上求和，頁320頁，419頁，499頁及下頁
軌道上求和。見 Feynman 的軌道上求和
軌道 (Orbit)，見 Kepler 軌道。行星軌道。也可參閱其中出現軌道的幾何，例如 Schwarzschild 幾何
軌道 (Histories) 的民主， 418頁-419頁
後 Newton 展開的方法，1075頁及以下幾頁。
也可參閱參量化的後Newton 表述。
後-後 Newton 近似，1069頁，1077頁
後$^{5/2}$ -Newton 近似及其與輻射阻尼的聯繫，1077頁
後 Galileo 變換，1085頁

十 畫

流體動力學
Newton 的，無引力時，152頁及以下幾頁
Newton 的，有引力時，387頁及下頁，1077頁-1080頁
後 Newton 的。見 PPN 表述
廣義相對論的
基本參考書，562頁註，568頁
對無熱流或黏性的簡單流體，562頁-563頁
對有黏性和熱流的流體，567頁-568頁
與流線散度有關的體積變化，565頁
四維速度的梯度分解爲四維加速度，膨脹，旋轉和切變，566頁
Euler 方程，564頁
在穩定引力場中的平衡，566頁，568頁
帶電物質與電磁場的相互作用，570頁
也可參閱熱力學定律
流體靜力學平衡
在任何穩定的引力場中，566頁
在靜態球狀恒星中，601頁-602頁

，605頁
Oppenheimer-Volkoff 方程，605頁
浮力，606頁
流體動力學的 Euler 方程
在平直空時中，152頁及下頁
在彎曲空時中，564頁
在 PPN 表述中，1088頁
用於脈衝星，693頁-694頁
用於坍縮星，858頁
流體。見流體動力學
流形，可微的，10頁，13頁，241頁及以下幾頁
氣泡時間微商，497頁
特殊流形的曲率張量
精確的平面引力波，346頁及下頁，444頁
線性化的引力波，948頁
線性化理論，任何度規，438頁
Friedmann 宇宙學，345頁，348頁，355頁及以幾下頁，537頁，728頁
Newton-Cartan 空時，290頁
均勻密度的 Newton 球，39頁及下頁
Newton 的球狀眞空場，37頁
Schwarzschild 度規，821頁及以下幾頁
球狀、動力學線元，361頁及下頁
在 Schwarzschild 坐標中的球狀靜態線元，360頁及下頁
三維雙曲面，343頁，721頁
三維球，343頁，721頁
「恒定曲率」的三維面，721頁
二維雙曲面，334頁
二維球，30頁，341頁
繞轉的二維面，339頁及下頁
坍縮恒星表面的世界管，853頁
特定源產生的電磁場，
振蕩偶極子，111頁-112頁
點電荷，107頁-111頁，121頁及下頁
能量-動量
四維矢量，51頁，53頁及下頁，68頁
能量-動量密度
用脅强-能量張量表示，131頁
3-形式，151頁
引力場的能量-動量
一般情形不能局域化，466頁及下頁
只對球狀系統可精確地局域化，603頁-604頁，858頁及下頁
對於引力波只能在一個波長內局域化，955頁及下頁，964頁-966頁，969頁及下頁
引力源的總能量-動量
用漸近的引力場表示，第19章
表爲通量積分，461頁-464頁
表爲體積積分，464頁-466頁
能量-動量的守恒。見守恒定律
能層，880頁
能流，定義，782頁
浮力，606頁
原初火球。見宇宙微波輻射
原時積分的極值，316頁-324頁
原時。見 Lorentz 間隔
振盪器的Q值，1025頁
振盪的偶極子，111頁，112頁
射電源，宇宙的，759頁-762頁
在天空中各向同性，703頁
也可參閱類星體
弱等效原理。見自由下落的唯一性
致極 Kerr-Newman 幾何，作爲 Kerr-Newman 的極限情形，878頁
骨架幾何，309頁，1169頁
骨架軌道，499頁
疲勞的光，775頁
被動的和主動的變換，1140頁
矩陣，逆的，明顯表達式，161頁。
也可參閱 Jacobi 行列式，行列式
矩心，161頁
核物質。見中子星物質
時間
時間標準，23頁-29頁
定義使運動看來簡單，23頁-29頁
在引力坍縮中，時間的終端，第44章，
多指時間，495頁，498頁，527頁
原時。見間隔
時間的虛坐標，不採用，51頁
Newton 世界時，40頁，299頁
也可參閱 Bubble-時間微商，鐘，日
時間膨脹的實驗檢驗，1054頁及下頁
「時間矩」意味着「類空超曲面」，713頁-714頁，1184頁
脅强。見脅强-能量張量
脅强-能量贋張量。見贋張量
脅强-能量張量
概述，131頁-132頁
全部，第5章
作爲顯示能量密度，動量密度和脅强的機器，131頁及下頁
分量的物理解釋，137頁及下頁
對稱性，141頁-142頁
散度爲零，152頁
作爲 Lagrange 算符的函數微商，485頁，503頁及以下幾頁
特殊形式
近似 Newton 流體，152頁，154頁
理想流體，132頁，140頁
有熱流經過的黏滯流體，567頁
無熱流的受壓物質，1086頁及下頁
粒子羣（分子運動論），138頁及下頁，589頁及下頁，680頁，682頁
球狀星團，680頁，682頁
幾何光學極限的光子，579頁及下頁

幾何光學的波，579頁
電磁場，139頁-140頁，480頁及以下幾頁
標量場，504頁及下頁
自旋-2 理論中的引力場，425頁
廣義相對論中的引力場。並不存在，見贋張量
脈衝星
發現，620頁，762頁
理論，628頁，630頁
作爲探索中子星結構的計時數據，628頁，630頁
用於廣義相對論的實驗檢驗，1047頁
在「前幾何」的理想化實驗中，430頁
也可參閱中子星
凍結星。見黑洞
狹義相對論
簡短的概要，47頁-48頁
全部內容，第 2-6 章
不考慮引力，第 7 章
作爲彎曲空時的主要性質，局域正確，304頁及下頁
也可參閱特殊的概念，例如電磁場，Lorentz 變換
狹義相對論的實驗檢驗，1054頁-1055頁
配容 (Complexion)，電磁場的，108頁，482頁

十一畫

基度規，在時間對稱的初值問題中，535頁
基形式
體積分的 3-形式和 4-形式，150頁
2-形式和它的對偶標記，151頁
基 1-形式
對偶於基矢量，60頁及下頁，202頁及下頁，232頁，234頁
作爲坐標梯度，60頁及以下幾頁
變換定律，68頁，203頁
聯絡係數，209頁，215頁，258頁及下頁
基矢，50頁
全部，201頁-207頁
作爲微分算符，229頁及下頁
對偶於基 1-形式，60頁及以下幾頁，232頁
變換定律，68頁，201頁，203頁，230頁及下頁
對易係數，204頁
聯絡係數，209頁，258頁及下頁
坐標和一般的基，201頁-203頁
坐標基，230頁及下頁
也可參閱固有參照系，四重軸
基本粒子實驗，作爲相對論的檢驗，1054頁及下頁，1060頁。
也可參閱能量-動量守恒定律
旋量
一般敍述，第41章
與取向－纏繞關係，1148頁及以下幾頁
由其變換定律定義，1148頁及以下幾頁
共軛複數，1150頁
具有帶點的指標，1150頁
相應於矢量，1150頁及以下幾頁
更高秩的旋量，1151頁
旋量代數，1151頁-1155頁
旋量等價於張量，1153頁及下頁
旋量空間和基旋量，1156頁
旗桿加旗加取向-纏繞關係，1157頁-1160頁
在彎曲空時中，1164頁
分析夜空的出現，1160頁-1164頁
作爲引力理論的工具，1164頁及下頁
旋量分析中的不同符號
定義，1152頁。也可參閱 Levi-Civita 張量，排列張量
球，二維的 (S^2)
兩個坐標片覆蓋，12頁
拓撲，241頁及下頁
其上的度規，340頁
Riemann 張量，341頁
球，三維的 (S^3)
體積，724頁
超球坐標與度規，723頁及下頁
Riemann 曲率張量，721頁
嵌入圖，723頁
與低維球比較，704頁
與轉動羣的流形等距，725頁
球狀星團，757頁
其中的黑洞，887頁
梯度
標量的梯度，在平直空時中，59頁及下頁
張量的梯度，在平直空時中，81頁及下頁
在彎曲流形中，208頁-212頁，259頁-261頁
也可參閱外微商
理想氣體，139頁及下頁
理想的宇宙學原理，745頁
理想流體
定義，132頁，140頁
脅强-能量張量，132頁，140頁
也可參閱流體動力學
移動函數
作爲 Lagrange 乘子，487頁
由移動函數確定的度規間距，507頁
協變形式和反變形式，507頁及下頁
在反向的移動函數中給予任意性，532頁
兩個變分原理，538頁
常數，基本的
常數表，末頁
偏離恒定的限制，1061頁-1063頁
混主宇宙，805頁-814頁

混主振盪阻尼了混沌，769頁
偏離，短程線的。見短程線偏離
偏微分方程
微分幾何的應用，198頁
分析的基本原理，485頁
粒子物理實驗作爲狹義相對論的檢驗，1054頁及下頁，1060頁。
也可參閱守恒定律
粒子。見電子偶；守恒定律
粒子被有心力場偏轉，671頁，1099頁及下頁
粒子的能量，表爲 $-p\cdot u$，65頁
粒子和場零點能量的重正化，426頁及以下幾頁
粒子的通量。見數通矢量
排列張量（與交錯張量相同），126頁，128頁及下頁，207頁，343頁
「控制無知」的哲學，452頁及下頁，996頁
國際單位制（SI）秒，28頁
推遲場和輻射反作用，474頁
推遲勢，121頁
連接條件，490頁
從電動力學作爲引導，551頁
Einstein 場方程的相關分量，552頁
表面脅强-能量張量，552頁-553頁
內稟幾何連續性，553頁
外賦曲率可能突變，554頁
越過零表面，554頁
表面層的運動，555頁
適用於塵埃殼的坍縮，555頁-556頁
適用於坍縮恒星的表面，852頁-853頁
連通性
在微小距離上，221頁
經典微分幾何中空時的連通性，1204頁-1205頁
作爲捕集力線的電荷，221頁，368頁，1200頁及下頁
也可參閱拓撲
連續性方程，152頁及以下幾頁，565頁
「連續創造」，745頁，750頁，770頁
動力學的路徑長度
在初等力學中，486頁-487頁
正比於波函數的位相，486頁
在幾何動力學的超空間表述中，419頁，1186頁
也可參閱變分原理
動量，在力學中，作爲作用量的空間變化率，486頁-487頁
動量場，電磁的，497頁及下頁，524頁
動量空間，583頁及以下幾頁，590頁
動量矢量。見能量- 動量四維矢量
動力學的球狀系統
Schwarzchild 坐標，616頁及下頁，689頁
曲率張量，361頁及下頁
Birkhoff 定理，883頁及下頁
張量
操作方式概述
在整體 Lorentz 系中，85頁
在無度規的流形中，233頁及下頁
在有度規的彎曲流形中，203頁及下頁，223頁及下頁
有空位的機器的定義，22頁，74頁及以下幾頁，131頁，133頁及下頁，233頁及下頁，310頁及下頁
用分量符號除去空位的模糊性，84頁
秩的定義，75頁及下頁，234頁
張量的分量
在 Lorentz 系中，75頁及下頁
在一般參照系中，201頁-204頁，312頁
在整體 Lorentz 系中引入張量的操作
指標，升和降，75頁-76頁
加法，76頁
乘上標量，76頁
張量積，76頁
基張量，76頁
梯度，81頁-82頁，84頁
縮併，82頁，84頁
散度，82頁
轉置，83頁
對稱性和反對稱性，83頁，85頁及下頁，126頁
劈積，83頁
對偶性，85頁，87頁，88頁
積分，147頁及以下幾頁
推廣到一般參照系的代數操作，201頁-207頁，233頁及下頁
引入協變微商，208頁及以下幾頁，257頁-261頁
引入 Lie 微商，517頁
旋量表示，1153頁-1155頁
張量，一秩張量。見矢量，形式，1-形式
張量，二秩對稱張量的分解，947頁
張量，完全反對稱的張量。見微分形式
張量密度，501頁及下頁
張量的轉置，83頁
張量密度的權重，501頁
張量的對稱性，用圓括號或方括號表示，126頁
張量的對稱運算，126頁，128頁-129頁
張量的對稱化，83頁
張量機器概念中的「空位」。見張量
張量橫向-無迹部分的投影算符，948頁
張量的協變分量，76頁，201頁-207頁，312頁
張量的縮併，82頁
張量的反對稱性，83頁
細致平衡原理，1028頁及以下幾頁，

1033頁，1035頁及下頁
閉 Friedmann 宇宙的半徑，704頁及下頁
參量化的後 Newton 表述
歷史，1049頁，1073頁
定性描述，1049頁，1068頁及下頁，1072頁及下頁
技巧細節概要，1092頁
符號，1073頁及下頁，1092頁及下頁
精度和有效的範圍，1069頁，1072頁及下頁，1075頁
包括和不包括度規理論，1069頁
參量
定性描述，1069頁，1072頁
精確定義，1080頁及下頁
從一種約定到另一種約定的轉換，1093頁
對幾種理論的參量值，1072頁
參量的實驗極限
γ, 1103頁，1105頁，1108頁及下頁
β, 1111頁，1113頁
$\alpha_3=4\beta,\ -2\gamma-2-\zeta$, 1114頁
$\alpha_2-\Delta_2+\zeta-1$, 1124頁
$\alpha_3=4\beta,\ -2\gamma-2-\zeta$, 1125頁
基礎
坐標，1073頁及下頁，1082頁-1087頁，1089頁，1091頁，1097頁
膨脹參量及其在太陽系中的量級，1068頁，1075頁
排除的輻射帶，1075頁
時間微商與空間微商相比小得多，1075頁
切變協強典型地可以忽略，1074頁及下頁
展開的方法，1075頁及以下幾頁
度規係數，型式，1076頁及下頁，1080頁，1100頁
物質的描述
熱力學函數，1074頁及下頁
物質的速度，1073頁及下頁，1086頁
坐標系和物質靜止系之間的變換，1087頁
脅強-能量張量，1086頁及下頁
物質產生引力
引力勢(出現在度規中的函數)，1080頁及下頁，1085頁
引力場的非線性迭加，1096頁
把各種勢彼此關聯的恒等式，1082頁，1089頁
度規係數的精確形式，1084頁及下頁
Christoffel 符號，1089頁
物質的運動方程，1087頁及以下幾頁
重子（靜止質量）守恒，1088頁
能量守恒定律，1088頁
Euler 方程，1088頁
後 Galileo 變換和不變性，1085頁
坐標系相對宇宙優先系的速度，1083頁及下頁，1098頁，1114頁
應用
計算物體的總質量-能量，1091頁，1094頁，1099頁，1125頁及下頁
孤立球形太陽的引力場，1097頁及以下幾頁
具有四極矩的太陽的引力場，1115頁
旋轉的地球的引力場，1119頁
爲什麼高速粒子的運動只能探測參量 γ，1099頁及以下幾頁
光和射電波的傳播，1099頁-1109頁
電磁波被太陽偏轉，1101頁及以下幾頁
在太陽引力場中雷達的時間延遲，1103頁，1106頁-1109頁
多體（"EIH"）運動方程，1091頁，1094頁及下頁
自旋物體的運動方程，1120頁及下頁
近日點移動，1110頁-1116頁
月亮軌道中的三體效應，1116頁
回轉儀的進動，1117頁-1120頁
導出 Cavendish 引力常數，1125頁及下頁
參照系。見坐標系，慣性系，Lorentz 系，固有參照系
規範變換和不變性
在電磁學中，89頁
在線性化的引力理論中（平直空間自旋-2 理論），180頁，182頁及下頁，440頁及下頁，463頁
在彎曲空時的擾動中，967頁及以下幾頁
也可參閱 Lorentz 規範
速度四維矢量
定義，49頁
分量，50頁
單位長度，54頁
與能量-動量四維矢量有關，53頁及下頁
速度參量，Lorentz 變換中的，67頁
造父變星
脈動，632頁
發現的周光關係，758頁
作爲距離指示器，786頁
在 Hubble 的工作中與 HII 區混淆，709頁
混淆被 Baade 消除，710頁，760頁
視界，黑洞物理學中的
定義，923頁-924頁
(定理) 的整體結構，924頁-925頁
整體結構分析，926頁-931頁
焦散線，925頁
母線，903頁-904頁，925頁，929頁-931頁，932頁

由引力坍縮產生，862頁，863頁，867頁，924頁
對於 Kerr-Newman 幾何，879頁及以下幾頁
角速度，914頁
面積，889頁，914頁
母線，903頁及下頁
視界，宇宙學中的，815頁及下頁
在 Friedmann 宇宙學中，740頁及以下幾頁，815頁
視差，757頁
逗號變成分號的規則，387頁-392頁。也可參閱等效原理
基矢的對易係數，204頁，243頁，314頁
通過基 1-形式的外微商來計算，358頁及下頁
轉動羣的對易，243頁

十二畫

短程線
初階引入，211頁
高階論述，在無度規時，244頁-247頁
短程線的仿射參量，244頁-246頁
作爲直接的平行遷移，245頁
作爲局域 Lorentz 幾何的直線，312頁-315頁，321頁-324頁
作爲致極固有長度的曲線，314頁-321頁，324頁
短程線的「動態」變分原理，322頁及下頁
一個參量的短程線族，265頁-267頁
在途中不能從類時的變爲零或類空的，321頁
簡單的例子
球上的大圓，211頁及下頁
在極坐標中，平面上的直線，213頁
特定流形的短程線。見有趣的流形
作爲自由下落粒子的世界線，4頁，196頁
作爲建築理想杆和鐘的工具，396頁-399頁
短程線偏離
初等的引入，29頁-37頁
雙重作用：定義曲率，預測運動，72頁
方程，以初階語言呈現，218頁及以下幾頁
方程的導出，265頁-275頁
在 Newton-Cartan 空時中，272頁及下頁，293頁
在引力波探測器中，444頁-445頁，950頁-955頁，1011頁及下頁
短程線方程，211頁，262頁及以下幾頁
短程線運動
實驗檢驗，1055頁-1060頁
背離短程線運動。見運動方程
短程線間隔矢量，265頁-270頁
短程線運動的 Hamilton 的原理，654頁
短程線的參量化，244頁-246頁
黑洞，
全部，第33章
性質的簡要概述，620頁
黑洞知識的歷史，620頁，623頁
爲什麼這樣命名，872頁-875頁
Kerr-Newman 幾何作爲唯一的外場，863頁，875頁-877頁，特別是，876頁
「黑洞的頭髮」，43頁，863頁，876頁
超出的重子數，876頁
超出的輕子數，640頁，876頁
黑洞的天體物理方面，883頁-887頁
形成機制，883頁-884頁
形成時來自坍縮的引力波，1041頁
動力學過程，884頁及以下幾頁
絕不分叉，933頁
碰撞和聚結，886頁，924頁，939頁
來自黑洞-黑洞碰撞的引力波，886頁，939頁，982頁
與物質相互作用，885頁及下頁
作爲一個例子的天鵝座 $X-1$，ix頁
來自落入物質的引力波，885頁，904頁，982頁及下頁，986頁
粒子落入引起的黑洞參量改變，904頁-910頁，913頁
從黑洞提取能量，906頁，908頁
用於廣義相對論的實驗檢驗，1047頁
也可參閱黑洞動力學的定律；引力坍縮；Kerr-Newman 幾何；Schwarzchild 幾何
黑洞上氣體的吸積，885頁
黑洞動力學的定律，887頁及下頁。也可參閱黑洞動力學第二定律
黑洞的不可約質量，889頁及下頁，913頁
黑洞物理學中的可逆變換與不可逆變換，889頁及下頁
黑洞動力學第二定律，931頁及以下幾頁
不顧假設的表述，889頁，891頁
可逆變換和不可逆變換，889頁及下頁，907頁-910頁，913頁
對黑洞-黑洞碰撞產生的引力波加限制，886頁
黑洞的自旋減退，886頁
黑體。見輻射
超 Hamilton 函數
與 Hamilton 函數對比，488頁及下頁
對試驗粒子的運動

在電磁場中，488頁及下頁
在引力場中，654頁
在電磁場和引力場聯合中，897頁及下頁
對混主宇宙學，809頁-813頁
超大質量恒星，620頁及下頁，634頁
其中的對流，600頁
其中的熵常數，600頁
其中的絕熱指數，633頁
其中的脈動不穩定性，632頁-633頁
其中的相對論性不穩定性，605頁，620頁，633頁及下頁
作爲穩定器的轉動，633頁-634頁
在類星體和星系核中的可能作用，634頁
也可參閱中子星，白矮星
超新星，619頁，622頁
產生的蟹狀星雲，ii 頁，619頁及下頁
理論劇本，628頁
作爲引力波的源，982頁，987頁，1040頁，1042頁
超空間，1180頁-1183頁
作爲 Einstein 幾何動力學定律的出發點，423頁
量子起伏，1180頁
散佈的波與波包，1185頁
其中守恒的幾率流，1189頁
截斷的骨架形式，1181頁
混主形式（「微型超空間」），806頁
二維幾何的超空間，221頁
超距作用，引力的，4頁
Newton 的駁難，41頁
從局域定律導出，120頁
超曲面，類空的。見類空薄片
超前場，和輻射反作用，474頁
等效原理
闡述，386頁及下頁，1060頁
Einstein 的 1911 年表述，17頁
從狹義相對論到廣義相對論的橋樑，164頁，第16章，207頁
出於自旋-2 場理論，425頁
在 Newton-Cartan 理論中，297頁
仿射參量的基礎，211頁，250頁
因子順序問題，388頁-391頁
在度規理論中的作用，1067頁及下頁
等效原理的檢驗，187頁-190頁，1054頁-1063頁
弱等效原理。見自由下落的唯一性
等效原理中的「曲率耦合」，389頁-392頁
等距線，652頁-653頁。也可參閱 Killing 矢量場
等溫星團，685頁及以下幾頁
量子起伏（漲落）
在電磁場中，427頁，1190頁及下頁
在空時幾何中，419頁，480頁，1190頁-1194頁，1202頁
與粒子和場的零點能量，作爲對引力的響應，426頁及以下幾頁
量子幾何動力學
在類空超曲面上可觀測的對易，554頁
Penrose 和 Hawking 的觀念，936頁，938頁，940頁
也可參閱電子偶產生，量子起伏
量子理論
角動量對易算符，236頁
普遍的算符，236頁
對應原理，413頁
粒子自能，474頁及下頁
量子傳播函數，1194頁
量子幾何動力學中未定義的術語——後來，1183頁
焦散線，視界的焦散線，925頁
晶體學，與 1- 形式的關係，232頁
距離，固有的。見 Lorentz 間隔
距離-紅移關係。見宇宙學：標準模型的觀察探測
距離，作爲度規的原材料，306頁-309頁
嵌入圖
一般討論，613頁
對靜態球狀恒星，613頁-615頁，617頁
對 Schwarzschild 幾何，837頁，839頁，528頁
對球狀坍縮恒星，855頁-856頁
對 Friedmann 宇宙學模型，723頁，725頁
程函方法，1102頁
最後影響的表面，873頁及下頁
最小作用量原理
用於初等的 Hamilton 力學，125頁-126頁
聯繫於致極時間，315頁-324頁
散度，粒子和場理論中的散度，426頁-428頁
帽積，見劈積
溫度。見熱力學
溫度的紅移，568頁，588頁，685頁
測量，由理論定義的可能性，1184頁
測量的杆。見杆
提升指標。見指標操作
幾何。見特殊類型的幾何：空時幾何，Euclid 幾何，Lorentz 幾何，微分幾何，仿射幾何， Riemann 幾何，前幾何。也可參閱曲率
幾何子，886頁
幾何客體，48頁
絕對的和動力學的，以及「無前幾何」，431頁
旋量表示，1154頁及下頁
也可參閱特殊的客體，例如矢量，形式，聯絡
幾何單位
引入，27頁及以下幾頁，36頁
來回的變換因子，36頁，638頁，

末頁
幾何光學
作爲物理光學的極限情形，412頁
全部，對電磁波，570頁-583頁
基本的參考書，570頁註
幾何光學有效的條件，571頁
根本的兩種長度尺度的膨脹，571頁-572頁
幾何光學的基本概念，571頁-582頁
概述，578頁-580頁
光線的仿射參量，575頁
角頻率，575頁
光線束，581頁-582頁
電場，579頁
磁場，579頁
位相，571頁，572頁，574頁-575頁
光子，580頁，581頁
偏振矢量，573頁，574頁-575頁，577頁，578頁，581頁
標量振幅，573頁
光線，573頁，574頁-575頁
脊强-能量張量，579頁
波矢，573頁，574頁-575頁
幾何光學的定律
定性描繪，571頁
詳細概述，578頁-580頁
光子解釋，580頁
從波動方程和矢勢的 Lorentz 規範條件導出，573頁，576頁-577頁
後幾何光學修正，572頁及下頁，803頁及下頁
用旋量語言，1165頁
應用舉例，570頁
光束的幾何，581頁-582頁
聚焦方程，582頁及下頁
破壞，與電子偶產生有關，803頁-804頁
幾何動力學（幾何的動力學）
觀念，簡述，4頁及下頁
加入計劃：初始數據加上時間演化，408頁及下頁，484頁及下頁
某些歷史，486頁-488頁
與電動力學類比，364頁，367頁-370頁
幾何動力學效應的因果傳播，554頁
Arnowitt, Deser, Misner 表述
提要，486頁-490頁
作用量原理，521頁
幾何動力學的場動量，521頁
固定在曲面上的三維幾何，522頁
造成的變量分離，525頁-526頁
電動力學類比，522頁-524頁
Dirac 表述，520頁
受標準的量子不確定性支配，1182頁
用作用量說明，對 Schwarzschild 幾何，528頁
也可參閱 Einstein 場方程，廣義相對論，初值，沿時間向前積分
「幾何的軌道」，定義，418頁-419頁
幾何動力學的初值數據
全部，第21章
動力學所需要的，484頁-485頁
在類空薄片上相容的，489頁-490頁
在特徵面上，490頁
薄夾層（直譯則爲三明治）推測，534頁
計數，529頁-533頁
在三維幾何中混合的時間和動力學數據，533頁
不適當提出的數據，534頁-535頁
時間和動力學數據的分離，533頁
York 表述
概略，490頁
在零或恒定外賦時間的超曲面上，539頁-540頁
給出保形三維幾何，540頁-541頁
給出 York 曲率，541頁
給出共軛 York 矩，542頁
幾何動力學的初值方程，515頁-516頁，519頁，525頁，531頁-535頁
幾何動力學的初值問題
York 表述
保形因子的波動方程，542頁
解的存在和唯一性，543頁
薄夾層（直譯則爲三明治）表述
作爲在規定數據中的選擇，529頁
電動力學類比，529頁
作爲計算自由度的引導，529頁-533頁
引向幾何動力學，529頁-531頁
時間對稱情形，490頁
公式，535頁
基度規的作用，535頁
引力波振幅，536頁
保形修正因子的波動方程，535頁
時間反對稱情形，490頁
公式，536頁
保形修正因子的波動方程，536頁
波的質量是正的，536頁
其他對稱情形
Friedmann 宇宙，537頁，705頁及下頁，727頁及下頁，744頁
混主宇宙，537頁，806頁-811頁
具有柱對稱性的波，537頁
具有球對稱性的波，537頁
脈動的恒星，691頁-694頁
走向宇宙學，537頁
也可參閱幾何動力學，沿時間向前積分
幾何的極大解析延拓，882頁
幾何動力學變分原理
Hilbert 的，434頁

全部，第21章
提要，418頁，485頁
在極限情形固定的是什麼，485頁
作爲被積函數的標量曲率，491頁，519頁
以物理學的量子特徵爲基礎，499頁及下頁
在空間-加-時間分離時，519頁及下頁
運用 ADM 形式，520頁
Sakharov 重正化，426頁
Hilbert 的，用 Palatini的方法概略，491頁
與力學類比，491頁-495頁
與電動力學類比，495頁-498頁
作爲獨立變量的聯絡，492頁
Arnowitt, Deser, Misner
最簡單形式，521頁
利用，526頁
特殊化爲混主宇宙學，808頁及下頁
薄夾層（直譯則爲三明治），對間隔和移動，538頁
在短波近似中，927頁及下頁
在 Regge 算法中，1170頁
在超空間表述中，1186頁
幾率振幅
對軌道，419頁
位相，由作用量給出，486頁，491頁
極小數，318頁
極大數，318頁
極值的數目，318頁
場方程。見 Einstein 場方程
場，大範圍的（即零靜止質量）
場的自旋，由波的偏振變換定律推出，954頁
輻射場必定有$I \geq S$，866頁，977頁
在恒星稍稍非球狀坍縮中的作用，866頁
直接耦合和間接耦合，1063頁-1064頁
直接耦合，實驗搜索，1063頁-1065頁
間接耦合，1068頁，1069頁
場與物質的耦合，直接的或間接的，1063頁及下頁
結構
Cartan 的結構方程，378頁
轉動羣的結構常數，243頁
變形，530頁
可微，242頁
Hamilton 力學的單形，125頁-126頁
也可參閱整體技巧，視界
間隔矢量，29頁及以下幾頁，218頁及下頁，265頁-270頁
間隔函數
作爲 Lagrange 乘子，487頁
固定度規間隔，507頁
協變和反變形式，507頁-508頁
間隔函數中任意性的優越性；相反的情形，532頁
變分原理，538頁
間隔， Lorentz，19頁-23頁
閏秒，28頁
殼層貫穿，859頁
單形，307頁，380頁及下頁，1167頁及以下幾頁
絕熱指數的定義，692頁
無窮大的保形變換。見無窮大
無窮遠處的能量
在 Schwarzschild 幾何中，656頁及以下幾頁
在 Kerr-Newman 幾何中，898頁及下頁，910頁
無窮小的 Lorentz變換。見Lorentz變換，無窮小的
無窮大區域，在漸近平直的空時中
I^+, I^-, I^0, $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$ 定義，917頁-918頁
保形變換，919頁-921頁，936頁
保形變換的坐標圖，919頁-921頁
透鏡效應，589頁，795頁及下頁，887頁
進動
近日點的進動。見近日點
自旋軸的進動。見自旋物體
進動分量， Einstein 場的，547頁

十三畫

微商，協變的。見協變微商
微商，方向的。見方向微商
微商，循着流體，153頁，1078頁
微分守恒定律，等價於積分守恒定律，146頁
微分形式。見形式，微分的
微分幾何
概觀，194頁-198頁
初階論述，第 8 章
高階論述，第 9 —11，13—15章
正文，196頁
三種水平：圖示的，抽象的，分量的，198頁-200頁
Cartan 的貢獻，198頁
應用一覽，198頁
也可參閱微分拓撲，仿射幾何，Riemann 幾何，以及諸如度規，聯絡，形式等特殊概念
微分學「微分」的精確形式，62頁
解釋爲 1-形式，63頁
解釋爲 p-形式，160頁-161頁
微分拓撲，197頁及下頁，第 9 章，特別是，240頁-243頁。也可參閱例如流形，Lie 微商等特殊概念
微波輻射。見宇宙微波輻射
微分拓撲中的曲線，226
源的自動守恒，404頁，408頁及下頁，417頁
也可參閱 Bianchi 恒等式
源與場「相聯繫」，367頁及以下幾

頁，405頁
蜂房結構。見形式
感應，來自電磁四維勢，122頁
羣。見轉動羣；Lorentz 羣
零光線束的「膨脹」，582頁，1165頁
零點能量，426頁及以下幾頁
碰撞參量
對於雙曲 Newton 軌道，647頁
對於 Schwarzschild 場中的雙曲軌道，670頁
對於 Schwarzschild 場中的光子，672頁
對於 PPN 表述中的光子，1101頁及下頁
路徑積分。見 Feynman 對軌道求和
傳播函數，提到的，120頁
「過去」。見因果聯繫。
運動方程
從 Einstein 場方程導出，42頁-43頁，471頁-480頁
對分開的距離遠大於其大小的物體「EIH」（後 Newton），對球狀物體，1091頁，1094頁-1095頁
從短程線運動的偏離，1120頁-1121頁，1128頁
運動羣，652頁-653頁。也可參閱 Killing 矢量場
運動參照系。見四重軸
運動。見運動方程
勢的凹陷，636頁-637頁
勢，有效的。見有效勢
電子
在微小黑洞場中的準束縛，1164頁
自旋的， Thomas 進動，175頁-176頁
電子俘獲，在白矮星物質中，619頁
電磁場
電磁場的描述以及支配電場和磁場的方程，73頁及下頁
Lorentz 變換，78頁及下頁
電磁場張量的對偶，***Maxwell***
引入，88頁，105頁
蛋筐圖，107頁，109頁
散度爲零，88頁
外微商給出電荷密度和電流，113頁及下頁
矢勢，88頁及下頁，120頁，569頁
波動方程，89頁，120頁，388頁-391頁，569頁
電磁場張量(或2-形式)，***Faraday***
作爲從四維速度產生力的機器，73頁，101頁，104頁
分量，73頁-74頁
表爲外積，99頁
蛋筐圖，99頁及下頁，104頁，106頁，107頁，111頁
「正則表示」，122頁
純電，純磁和一無所有的特殊情形，122頁
一般情形化爲最簡單的形式，122頁，483頁
Maxwell 方程，用分量符號，80頁及下頁，568頁
散度給出電荷密度和電流，81頁，88頁
外微商爲零，112頁及下頁，117頁
不變量，110頁，480頁-483頁
場動量，496頁及下頁，522頁及以下幾頁
脅强-能量張量，140頁及下頁
散度爲零，89頁
配容（Complexion），108 頁，482頁
calumoid，125頁
Lorentz 力，71頁及以下幾頁，101頁，104頁，568頁
Maxwell 方程，80頁及下頁，568頁。也可參閱 Maxwell 方程
Lorentz 變換，78頁及下頁，108頁及以下幾頁，482頁及下頁
電荷
從流量積分計算，98頁
閉宇宙的電荷，無意義的積分，457頁-458頁
以力管測量，用 2-形式表示，107頁
作爲在空間拓撲中捕集的力線，221頁，368頁，1200頁及下頁
電荷守恒。見守恒定律，電荷
電荷密度-電流
四維矢量，電荷密度-電流的 Lorentz 變換，68頁
對偶表示，88頁，97頁及下頁
3-形式，113頁及下頁，151頁
Dirac 的表示，對於任意運動的粒子，120頁及下頁
電動力學
在平直空時，全部，第 3 章
在彎曲空時，全部，385頁-391頁，568頁-570頁
用形式的語言，全部，第 4 章
用旋量的語言，1154頁，1165頁
用邊界的邊界的術語，365頁-370頁
幾何光學極限。見幾何光學
正則表述，作爲幾何動力學的引導，496頁及下頁，522頁及以下幾頁
Palatini 變分方法的類比，495頁-498頁
三加一觀點與幾何的觀點，78頁-79頁
從矢勢導出，122頁
從靜電學加協變性導出，81頁
電動力學的核心原理，力線絕不終止，420頁
與幾何動力學類比和比較，35頁，348頁，364頁，367頁-370頁
也可參閱初值問題，隨時間向前積

分
電動力學的初值理論，523頁及下頁，526頁，529頁及以下幾頁。也可參閱電動力學，隨時間向前積分
電子偶
電子偶的自由下落，實驗檢驗，1051頁
在標準宇宙學模型的早期，736頁及下頁，764頁
電子偶的產生
由光子，70頁
在高溫下，558頁
由潮汐引力，750頁，769頁，803頁及下頁，816頁
衰減幾何的各向異性，769頁，803頁及下頁
電磁波的偏振矢量，573頁及以下幾頁，577頁及下頁，581頁
電磁輻射
$1/r$ 行爲的圖示解釋，110頁及下頁
因果性，110頁
振盪偶極子的電磁輻射，111頁-112頁
電和引力的統一理論，Riemann 的不成功探索，32頁，221頁
電流四維矢量。見電荷密度-電流
電磁精細結構常數的恒定性，399頁，1061頁
經典理論中幾何和場的可測量性，13頁
經典力學，對應於量子力學，413頁
經典理論，設想爲可測量的幾何和場，13頁
圍繞黑洞軌道的結合能，885頁，911頁
試驗粒子的軌道角動量
在 Schwarzschild 幾何中，656頁及以下幾頁
在 Kerr-Newman 幾何中，898頁及下頁
試驗粒子
探索 Lorentz 力需要三個試驗粒子，72頁
探索 Riemann 曲率需要更多試驗粒子，72頁
「試驗物體」，定義，1050頁註
試驗粒子運動的變分原理
致極原時，314頁-324頁
「動力學」原理，322頁及下頁
電磁場的對偶旋轉，108頁，482頁及下頁

十四畫

聚焦
零光線的聚焦，582頁及下頁，932頁，1165頁
也可參閱透鏡效應。
磁流，來自 ***Faraday*** 的積分，99頁-101頁
磁極的缺乏，80頁
鞍點的數目，318頁
截面
碰撞截面，69頁
截面的 Lorentz 變換，70頁
截斷，與 Planck 長度有關的，428頁
對易，在類空超曲面上可觀測量的對易，554頁
對易算符
切向矢量的對易算符，204頁，206頁及下頁，235頁-240頁
Jacobi 恒等式，240頁
作爲四邊形的閉合邊，236頁，278頁
圖示，236頁-237頁
轉動羣的對易算符，332頁.
與類空薄片正交和相切的對易算符，517頁
協變微商的對易算符，276頁，389頁及以下幾頁
對流，在超大質量恒星中，600頁
對應， 1-形式和矢量之間的對應，310頁。也可參閱矢量；形式，微分
對應原理，412頁及下頁
對稱性，比對稱性和反對稱性更精細的，86頁
對偶基，60頁及下頁，119頁，202頁，232頁
對於形式，矢量和張量的對偶運算
形式的對偶運算，88頁，97頁及下頁，108頁，119頁，151頁
簡單形式的對偶運算，正交表示，98頁
應用於電磁學，88頁，97頁及下頁，114頁
Riemann 的雙重對偶，371頁，376頁
不要與基的對偶性混淆，119頁
特殊恒星的運算不作用在形式上，376頁-380頁
蝕，24頁-26頁，1104頁
數流矢量
引入，138頁-139頁
對幾何光學極限下的光子，580頁
數-流關係，在宇宙學中，798頁
數空間，241頁
廣義相對論
簡短的概要，130頁(第一行)，164頁，190頁及下頁，266頁，289頁
基礎發展的詳情，第16，17章
也可參閱 Einstein 場方程，等效原理，廣義相對論的實驗檢驗，幾何動力學
廣義相對論中的熱流
參考書，559頁
熱流四維矢量，567頁
熱傳導定律，567頁
在穩定的引力場中，568頁
廣義相對論的檢驗。見廣義相對論的

實驗檢驗
廣義相對論的實驗檢驗
全部，第 38, 39, 40 章
自由下落唯一性的 Beall 檢驗，17頁
黑洞，1047頁
目錄，1129頁
基本常數的恒定性，1061頁-1063頁
所需的宇宙學觀測，707頁，1047頁，1061頁，1067頁
電磁波被太陽偏轉，1048頁，1069頁，特別是，1101頁-1105頁
地-月軌道的「de Sitter 效應」，1116頁，1119頁
地球毀於坍縮，398頁及下頁
地球自轉速率中的周期性，1124頁-1125頁
歸因於星系和歸因於相對優先系運動的地球潮汐，1123頁-1124頁
Eötvös-Dicke實驗。見 Eötvös-Dicke 的諸實驗
以太漂移實驗，1064頁-1065頁
宇宙的膨脹，707頁
地球物理觀測，1061頁，1123頁-1125頁
回轉儀進動，1117頁-1120頁
引力 (Cavendish) 常數的變化 見 Cavendish 引力常數
引力波，1047頁，1072頁
Hughes-Drever 實驗，1064頁
空間的各向同性，1064頁
Kreuzer 實驗，1125頁
月亮的激光測距，1048頁，1130頁-1131頁
月球軌道，1048頁，1116頁，1119頁，1127頁，1128頁-1131頁
Newton 實驗，1067頁
Nordvedt 效應，1128頁1131頁
示零實驗，1050頁，1064頁
近日點移動，特別是1110頁-1116頁
行星軌道，偏離短程線運動，1111頁，1126頁-1131頁
行星軌道中的周期效應，1069頁，1111頁
Pound-Rebka-Snider 實驗，1056頁-1058頁
優先系效應，1098頁，1113頁-1114頁
所需的脈衝星，1047頁
所需的類星體，1047頁，1048頁，1061頁，1101頁，1103頁，1104頁-1105頁
雷達時間延遲，1048頁，1103頁，特別是，1106頁-1109頁
引力紅移。見引力紅移
歸因於「以太漂移」的紅移，1064頁-1065頁
空時中奇點的存在，939頁
Turner-Hill 實驗，1064頁-1065頁
也可參閱參量化的後 Newton 表述，分析實驗的 Dicke 框架，狹義相對論的實驗檢驗
廣義相對論中的「引力場」
作爲具有許多含義和沒有意義的項，399頁及下頁
空時幾何作爲引力場，399頁-400頁
度規作爲引力場，399頁及下頁
協變微商和聯絡係數作爲引力場，387頁，399頁-400頁
Riemann 曲率作爲引力場，399頁-403頁
明確排除引力場對標準脊强-能量張量的貢獻，131頁
廣義相對論的後 Newton 近似，1069頁
從 PPN 表述得出，1073頁
由場方程的後 Newton展開導出，1089頁及下頁
用於恒星結構和穩定性的分析，1073頁
多體運動方程（「EIH」），1091頁，1094頁及下頁
也可參閱參量化的後 Newton 表述
廣義的協變性原理，80頁，431頁及下頁
遙遠恒星的慣性影響。見Mach 原理
漲落。見量子漲落
維，10頁，12頁
漸近平直的空時幾何，453頁
在線性理論中的形式，448頁及以下幾頁
遠離穩態的完全相對論性源的形式，456頁及下頁
定義質量和角動量的關鍵，457頁及以下幾頁
Gauss 通量積分的計算，462頁及下頁
「我稱量這裏的一切」，475頁
無窮大的保形處理，917頁-921頁
銀河系，（銀河），756頁-761頁
度規修正，459頁
分析恒星經盤面的振盪，318頁-319頁
臺球上的頭髮，978頁

十五畫

熱力學
全部，557頁-562頁
基本參考書，557頁註，568頁
基本概念的定義
簡單流體，558頁
多成分流體，558頁
重子數密度，558頁
總質量-能量密度，558頁
化學勢，558頁，561頁，562頁
每個重子的熵，558頁
熵四維矢量，567頁

溫度，508頁
熱通量四維矢量，567頁
壓强，558頁
原始的化學勢，561頁
物理的自由能，561頁
化學的自由能，561頁
狀態方程，560頁
絕熱指數，692頁
黏滯係數，567頁
定律和方程
熱傳導定律，559頁
Maxwell 關係，561頁，564頁
也可參閱重子守恒定律；熱力學第一定律；熱力學第二定律；狀態方程
出現核燃燒時公式的推廣，558頁
某些應用和過程
注入能量，561頁及下頁
激波，559頁
高溫時電子偶的產生，558頁
理想 Fermi 氣的化學勢，565頁
也可參閱流體動力學
熱力學第一定律
對於簡單流體的普遍表述，559頁-560頁
對絕熱流動的流體，563頁
在 PPN 表述中，1088頁
在流體動力學定律中的作用，564頁
用於脈動恒星，692頁
用於坍縮星，858頁
用於閉 Friedmann 宇宙，705頁，726頁及以下幾頁
熱力學第二定律，563頁，567頁及下頁
熱傳導，567頁
標準燭光，789頁
標量場
脊强-能量張量，483頁
運動方程，來自 Einstein 場方程，483頁
在 Schwarzschild 幾何中的傳播，863頁，868頁及以下幾頁
標準熱大爆炸宇宙學模型。見宇宙學
質量
主動的和被動的質量。見 Cavendish 引力常數
質心，161頁
實驗的有限質量，作爲兩無窮大之差，474頁-475頁
慣性質量密度，159頁及下頁
慣性質量和引力質量，431頁，1051頁。也可參閱自由下落的唯一性
「質量-能量，半徑 r 內的」，602頁及以下幾頁，858頁及下頁
質量-能量密度。見脊强-能量張量
質量-能量，總的，孤立引力系統的（≡「主動的引力質量」）
由度規趨近平直性的速率定義
全部，第19章
在線性化理論中，448頁-450頁
普遍的，453頁，455頁
無意義，對閉宇宙，457頁-459頁
作爲屬於漸近平直空時的幾何客體，453頁
由 Kepler 1-2-3 定律測量，450頁，457頁，636頁及以下幾頁
引力場的貢獻，467頁
一般情形不能局域化，466頁及以下幾頁
只對球狀系統可精確局域化，603頁及下頁，803頁及下頁
對引力波在一波長內可局域化，955頁及下頁，964頁及以下幾頁，969頁及下頁
守恒定律，455頁，468頁-471頁
也可參閱能量-動量
質量雙曲面，585頁
質心，161頁
質量分布二階矩，定義，977頁
線元。見度規
增速，67頁及以下幾頁
熵。見熱力學第二定律
橫向-無迹規範
在線性化理論中，946頁-950頁
在彎曲背景中，969頁
勞積
張量的勞積和形式的勞積，83頁，91頁及下頁
加法和乘法的規則，92頁
其他名稱，83頁，99頁
排列張量的勞積，128頁及下頁
潮汐力，823頁，860頁及以下幾頁。也可參閱空時的曲率，短程線偏離
盤，在廣義相對論中快速旋轉的盤，621頁
緩衝帶，分析從短程線運動的偏離，476頁-480頁
彈性，426頁-428頁
慣性系的拖曳
在 PPN 表述中，1117頁-1120頁
由於地球自轉，1119頁及下頁
由於緩慢自轉的恒星，699頁
在 Kerr-Newman 幾何中，879頁及以下幾頁，893頁-896頁
測量的展望，1120頁
也可參閱 Mach 原理
慣性波導，247頁
慣性質量，159頁及下頁，431頁，1051頁
慣性參照系，局域的（≡局域的 Lorentz 系，如果採用正交歸一坐標），18頁及下頁
用自由試驗粒子的均勻速度定義，23頁
用於分析產生潮汐的加速度，29頁-37頁
數學表示。見 Riemann 簡正坐標
也可參閱局域的 Lorentz 系
慣性，460頁
慣性力，165頁，332頁

在 Newton-Cartan 理論中，294頁
慣性求和。見 Mach 原理

十六畫

靜態引力場中的 Fermat 原理，1106頁，1108頁
靜態球狀系統
Schwarzschild 坐標，594頁-597頁
各向同性坐標，595頁
正交歸一系，598頁
線元的嚴格推導，616頁及下頁
曲率張量，360頁及下頁
靜態極限，879頁及以下幾頁，894頁
靜磁學加上協變性，給出磁動力學，80頁，106頁
噪聲，從中提取信號，1036頁及以下幾頁。也可參閱引力波探測器
激波
流體動力學，559頁，564頁，628頁
在空時曲率中，554頁
輻射，譜的描繪，588頁
比强度 I_ν 的定義，587頁，589頁
比通量 F_ν 的定義，1025頁
通量 F 的定義，782頁
I_ν/ν^3 的守恒（Liouville 定理），587頁-588頁
黑體輻射的溫度紅移，588頁
輻射，引力的。見引力波
輻射反作用，474頁，993頁及下頁
輻射帶，997頁
輻射理論的鄰近帶，997頁，999頁-1000頁
選擇參量
定義，265頁-266頁
用於分析短程線偏離，第11章
聯絡，通過光信號和自由粒子量度，324頁
也可參閱協變微商
聯絡系數
概要，223頁
作爲協變微商的分量，208頁及下頁，256頁，261頁-262頁
由度規和對易算符計算，210頁，216頁，314頁
對稱性，213頁-214頁
變換定律，262頁
特殊化到坐標基
稱爲「Christoffel 符號」，210頁
用度規表示的縮併，222頁
來自Palatini變分原理的公式，502頁
唯一性，使短程線與局域Lorentz幾何的直線一致，314頁及下頁
通過大圓航行來說明，212頁
特殊情形
極坐標中的平面，213頁，263頁
平直三維幾何，極坐標，213頁
二維球，341頁，345頁
轉動羣，264頁
Riemann 簡正坐標，286頁及下頁
Newton-Cartan 空時，291 頁及下頁，294頁，298頁
加速觀測者的固有參照系，330頁及下頁
隨時間向前積分
幾何動力學方程
初始數據的陳述，526頁-527頁
間隔和移位的選擇權，527頁-528頁
與電動力學比較，527頁-528頁
Maxwell 方程
初始數據的陳述，527頁
勢的選擇權，527頁
引向幾何動力學，527頁
也可參閱電動力學，幾何動力學，初值
積分
微分形式的積分，94頁-97頁，150頁及下頁
張量的積分，用初階語言，147頁及以下幾頁
也可參閱 Stokes 定理，Gauss 定理，體積
積分守恒定律，146頁
導熱性。見熱傳導定律
橢圓軌道的半主軸，647頁
橢圓軌道的偏心率，647頁
薄夾層（直譯則爲三明治）猜想，534頁

十七畫

點陣。見鐘；杆
點電荷，
點質量 Newton 場中的 Kepler 軌道，647頁-649頁
用 Hamilton-Jacobi 理論分析，644頁-649頁
有效勢，661頁
環，三維的，284頁，725頁
優先系效應，搜索效應的實驗，1098頁，1113頁及下頁
黏滯性和黏滯脅强
公式，567頁
原始的混沌被黏滯衰減，769頁，802頁及以下幾頁
壓强，在理想流體的脅强-能量張量中，132頁
壓電脅變換能器，401頁
「錘擊波」定義，1019頁

十八畫

擺線運動
對於 Schwarzschild 幾何中的徑向短程線，664頁
對於 Newton 點質量場中的試驗

粒子，708頁
對於閉合 Friedmann 宇宙學的半徑，708頁
對於無壓强的坍縮恒星的表面，852頁
虧損角，309頁，1167頁及以下幾頁
離心力，294頁
離心機，理想化紅移實驗中的，63頁及下頁
轉動
作爲恒星的穩定器，633頁及下頁
剛體，123頁及下頁
宇宙的轉動，限制，939頁
「轉動」
1-形式場的轉動，123頁及下頁
四維速度場的轉動，566頁
光線的轉動，用旋量語言，1165頁
轉動羣 $SO(3)$，流形的
生成元，242頁-243頁，264頁
結構常數，243頁，332頁
短程線和聯絡，264頁，332頁
Riemann 曲率，288頁
度規，322頁
與三維球等距，725頁
用於構築混主宇宙學模型，807頁
轉動度規。見自旋度規
轉動 1-形式 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$，350頁-354頁，360頁
矩陣符號，359頁
也可參閱協變微商，聯絡係數
轉動算符。見自旋度規
轉動
在坐標平面中，67頁
轉動的合成，1135頁-1138頁
Rodrigues 公式，1137頁
表爲兩個反射，1137頁及以下幾頁
由反射產生的半角，1137頁
無窮小的轉動，170頁及下頁，1140頁及以下幾頁
轉動慣量張量的定義，977頁
轉矩
意味着 Einstein 曲率，373頁-377頁
轉矩的守恒，378頁及以下幾頁，473頁
雙星 (Binary Star)
黑洞作爲雙星的成員，886頁及下頁
產生引力波，986頁，988頁及以下幾頁，995頁
雙星 (Double Star)。見雙星 (Binary Star)
雙生子「佯謬」，167頁
簡正坐標系，1055頁
簡併電子氣。見白矮星物質
簡併中子氣。見中子星物質
簡單流體，定義，558頁
龜坐標，663頁，665頁-666頁

十九畫

蟹狀超新星的中國歷史記載，ii頁
蟹狀星雲，ii 頁，619頁及下頁，760頁
邊界
邊界的邊界，Bianchi 恒等式的路線，第15章
邊界的邊界爲零，364頁-370頁
自動守恒的 Cartan 轉矩，377頁-378頁
四維單形的邊界的邊界，380頁-381頁
邊界算符，96頁
穩定坐標，964頁
穩定引力場中的熱平衡，568頁
穩定的引力場
其中的流體靜力學平衡，566頁
其中的熱平衡，568頁
穩態宇宙學，745頁，750頁，770頁
「類空關係」。見因果關係（平直空時中的因果關係）
類空薄片
作爲空時中的「時間矩」，713頁及下頁
作爲超空間中的動力學客體，423頁及下頁，1181頁
從類空薄片上的物理學導出幾何動力學和電動力學，419頁-423頁
也可參閱嵌入圖，初值，三維幾何
類星體，761頁及下頁
有爭議的距離，767頁
總體的演化，767頁及下頁，770頁
能源模型，634頁-635頁，687頁
用於廣義相對論的實驗檢驗，1047頁及下頁，1061頁，1101頁，1103頁及以下幾頁
鏈式規則
提要，314頁-315頁
對於協變微商，252頁，257頁及下頁，260頁及下頁

二十畫以上

鐘
壞的鐘和好的鐘，26頁-27頁
鐘的穩定性，28頁，1048頁
理想的鐘
定義，393頁
在 Newton-Cartan 理論中，301頁
建立在短程線上，396頁-399頁
特殊類型的鐘，28頁，393頁-396頁
加速度對鐘的影響，164頁及下頁，327頁，396頁
潮汐力對鐘的影響，396頁
作爲短程線參量化的工具，246頁
當人們逼近奇點時所需的鐘的無窮系列，813頁及下頁
鐘的「佯謬」，167頁
鐘的嗑嗑聲，55頁及下頁，60頁，99頁，202頁，231頁
彎曲空時中的分子運動論
全部，583頁-590頁

基本定律，
彎曲空時中無相互作用粒子的 Liouville 定理，584頁，586頁-587頁，590頁
無碰撞的 Boltzmann 方程（動力學方程），587頁，590頁
特殊到光子，587頁-589頁
基本概念
質量雙曲面，585頁
動量空間，583頁及以下幾頁，590頁
相空間，584頁及下頁，590頁
相空間的體積，584頁-587頁，590頁
定義分布函數（相空間的數密度），583頁及下頁，590頁
應用，583頁
壓强的基本表達式，139頁-140頁
脊强-能量張量作爲在動量空間上的積分，589頁及下頁
光子，587頁及以下幾頁
相對論性星團，679頁-687頁
坍縮恒星光學外貌的計算，850頁
彎曲空時中的物理學定律，384頁-393頁。也可參閱特殊定律，例如分子運動論，流體動力學，守恒定律
彎曲空時的因果結構，922頁及以下幾頁
未來視界，923頁-924頁
視界整體結構的有關定理，924頁-925頁
視界整體結構的分析，926頁-931頁
也可參閱整體技巧，視界
彎曲空時中的加速觀測者，327頁-332頁。也可參閱固有參照系
彎曲空時中的角動量，對孤立源
定義爲趨於平直性的度規
全部，第19章
在線性化理論中，448頁-451頁
一般情形，453頁及以下幾頁
作爲屬於漸近平直區域中的幾何客體，453頁
對閉宇宙，無意義，457頁及以下幾頁
內部物體物質和場的貢獻，468頁
總的不含糊，不管匱張量的貢獻，470頁
Gauss 的通量積分，460頁-464頁
體積分，460頁-466頁
通過衛星軌道進動來測量，451頁，454頁，457頁
通過迴轉器進動來測量，451頁，454頁，457頁
通過參照系拖曳來測量，451頁，457頁
守恒定律，455頁，468頁-471頁
對於 Kerr-Newman 黑洞，891頁
彎曲空時中的平面電磁波，961頁-962頁
彎曲空時中波的尾部，957頁，864頁及下頁，869頁及以下幾頁
彎曲空時中電磁場的矢勢，569頁及下頁
變換
主動的和被動的，1140頁
張量的變換，201頁-204頁
聯絡係數的變換，262頁
旋量的變換，1149頁及下頁
觀測宇宙學，第29章。見宇宙學
體積，Hero-Tartaglie 公式，307頁
體積 1-形式，133頁-137頁
四維體積，147頁
體積積分，147頁-151頁

附錄：一些有用的數，用常用單位和幾何單位* 表示

基本常數

引力常數 $G=(6.673\pm0.003)\times10^{-8}$ 厘米^3/克 秒$^2=1$

光速 $c=(2.997\ 924\ 562\pm0.000\ 000\ 011)\times10^{10}$ 厘米/秒$=1$

有用的組合

$G/c^2=0.7425\times10^{-28}$ 厘米/克

$=1.476\ 64$ 公里/$M_\odot=1$

$c^5/G=3.629\times10^{59}$ 爾格/秒

$=2.030\times10^5\ M_\odot c^2$/秒

$=1$ (發射因子)

$G/c=2.226\times10^{-18}$ 厘米^2 赫/克

$=1$ (接收因子)

$c^2/G^{1/2}=3.479\times10^{24}$ 高斯 厘米

$=3.479\times10^{24}$ 靜電系電勢單位

$=1$

Planck 約化常數 $\hbar=(1.054\ 592\pm0.000\ 008)\times10^{-27}$ 克 厘米^2/秒

$=2.612\times10^{-66}$ 厘米^2

Planck 長度，L^* $(\hbar G/c^3)^{1/2}=1.616\times10^{-33}$ 厘米

Planck 時間，T^* $(\hbar G/c^5)^{1/2}=5.391\times10^{-44}$ 秒

Planck 質量，M^* $(\hbar c/G)^{1/2}=2.177\times10^{-5}$ 克

Planck 密度，M^*/L^{*3} $c^5/\hbar G^2=5.157\times10^{93}$ 克/厘米^3

電荷的量子 $e=(4.803\ 25\pm0.000\ 02)\times10^{-10}$ (克 厘米^3/秒^2)$^{1/2}$

$=1.381\times10^{-34}$ 厘米

精細結構常數的倒數，$1/\alpha$ $\hbar c/e^2=137.0360\pm0.0002$

電子靜止質量 $m_e=(9.109\ 56\pm0.000\ 05)\times10^{-28}$ 克

$=8.1873\times10^{-7}$ 爾格

$=0.511\ 004$ 兆電子伏

$=5.9301\times10^9$ 開

$=6.764\times10^{-56}$ 厘米

質子靜止質量 $M_p=(1.672\ 614\pm0.000\ 012)\times10^{-24}$ 克

$=1.503\ 27\times10^{-3}$ 爾格

$=0.938\ 259$ 京電子伏

$=1.088\ 83\times10^{13}$ 開
$=1.2419\times10^{-52}$ 厘米

Bohr 半徑 $a_0=\hbar^2/m_e e^2=0.529\ 177\times10^{-8}$ 厘米
約化 Compton 波長 $\lambda_e=\hbar/m_e c=3.861\ 59\times10^{-11}$ 厘米
經典的電子半徑 $r_0=e^2/m_e c^2=2.817\ 94\times10^{-13}$ 厘米
原子的能量單位 $e^2/a_0=m_e e^4/\hbar^2=4.359\ 83\times10^{-11}$ 爾格
$=27.2116$ 電子伏
$=3.157\ 86\times10^{5}$ 開
$=3.602\times10^{-60}$ 厘米

換算因子（參看上述「基本常數」）

距離
1秒差距$=3.0856\times10^{18}$ 厘米；
1光年$=0.946\ 05\times10^{18}$ 厘米；
1 A. U.(天文單位)$=1.495\ 985\times10^{13}$ 厘米

時間
1年$=3.155\ 692\ 6\times10^{7}$ 秒；
1日$=86\ 400$ 秒；
1恒星日$=86\ 164.091$ 秒

質量，能量，溫度
1電子伏$=1.160\ 48\times10^{4}$ 開
$=1.602\ 192\times10^{-12}$ 爾格
$=1.782\ 68\times10^{-33}$ 克
$=1.324\times10^{-61}$ 厘米

電磁輻射

黑體輻射

能量密度$=aT^4$, $a=7.5647\times10^{-15}$ 爾格 厘米$^{-3}$ 開$^{-4}$
發射$=\sigma T^4$, $\sigma=\frac{1}{4}ac=5.6696\times10^{-5}$ 爾格 厘米$^{-2}$ 秒$^{-1}$ 開$^{-4}$
$dE/d\lambda$ 譜的峰值， $\lambda_{極大}T=0.289\ 79$ 厘米 開
$=(0.289\ 79$ 埃$)\ (10^8$開$)$

電離氫的自由-自由發射， $\epsilon=(6\times10^{20}$ 爾格/克秒$)\ (\rho_{克\ 厘米^{-3}})\ T_{\kappa}^{1/2}$
電離氫的自由-自由不透明度， $\bar{\kappa}_{ff}=(0.8\times10^{23}$ 厘米^2/克$)\ (\rho_{克\ 厘米^{-3}})\ T_{\kappa}^{-7/2}$
Thomson 截面， $\sigma_T=(8\pi/3)r_0^2=0.665\ 24\times10^{-24}$ 厘米^2
電離氫的電子散射不透明度 $\kappa_{es}=0.398$ 厘米^2/克

宇宙

太陽質量 $M_\odot=(1.476\ 64\pm0.000\ 02)\times10^{5}$ 厘米
$=1.989\times10^{33}$克$=4.9255$ 微秒

太陽半徑 $R_\odot=(6.9598\pm0.0007)\times10^{10}$ 厘米

太陽光度 $L_\odot=(3.90\pm0.04)\times10^{33}$ 爾格/秒
$=(1.07\times10^{-26})c^5/G$

地一日距離 1 A. U.(天文單位)$=(1.495\ 985\pm0.000\ 005)\times10^{13}$ 厘米
$=499.007$ 秒

地球質量	$M_\oplus=(5.977\pm0.004)\times10^{27}$克$=0.4438$ 厘米
地球平均半徑	$R_\oplus=6.371\ 03\times10^{8}$ 厘米
銀河系質量	$M_G=1.8\times10^{11}\ M_\odot=2.7\times10^{16}$ 厘米
	$=0.028$ 光年
到銀河系中心的距離	$r_\odot=10$千秒差距$=30\ 000$ 光年
銀河系直徑	$D_G\sim$(30 到 50) 千秒差距
	$\sim$(100 000 到 150 000) 光年
在太陽位置的銀河系厚度	$h_G\approx500$ 秒差距$\approx1\ 500$ 光年
附近的星系：距離和質量，	大麥哲倫雲，52 千秒差距，$10^{10.1}M_\odot$;
	小麥哲倫雲，54 千秒差距，$10^{9.2}M_\odot$;
	仙女座星雲 ($M31$) ，570千秒差距，$10^{11.5}M_\odot$。
星系團：成員，距離，直徑，	本羣，16個成員；$d\sim D\sim0.4$ 兆秒差距；
	室女座星團，2 500個成員， $d\sim11$ 兆秒差距，
	$D\sim12$ 兆秒差距；
	「典型的」星團，130個成員，$D\sim3$ 兆秒差距
Hubble 常數	$H=55$公里 秒$^{-1}$ 兆秒差距$^{-1}=(1.7\times10^{28}$厘米$)^{-1}$
	$=(18\times10^{9}$年$)^{-1}$
亮物質的宇宙密度	$\langle\rho\rangle=2\times10^{-31}$ 克/厘米^3

* 數據係基於 Söding 等 (1971) 和 Allen (1963) 或從中算出，以參考文獻爲補充。

[General Information]
书名=引力论
作者=C.W.麦思纳（Charles W.Misner），K.S.索恩（Kip S.Thorne），J.A.惠勒（John Archibald Wheeler）著；陈秉乾等译
页数=1297
出版社=正中书局
出版日期=1997.12
SS号=12378035
DX号=000005212260
URL=http://book.szdnet.org.cn/bookDetail.jsp?dxNumber=000005212260&d=A113AA22304DC4413F25E84BC3FD4435