简明泛函分析

主编 罗跃生 杜维华

哈尔滨工程大学出版社

责任编辑/朱春元 封面设计/李晓民

ISBN 7-81073-276-5

9 787810 732765 >

ISBN 7 - 81073 - 276 - 5

O · 29 定价:6.00元

高等学校教材

简明泛函分析

主编　罗跃生　杜维华
主审　杨海欧

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

简明泛函分析/罗跃生,杜维华主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2002.3
ISBN 7-81073-276-5

Ⅰ.简… Ⅱ.①罗…②杜… Ⅲ.泛函分析
Ⅵ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 012800 号

内 容 简 介

全书共分 3 章。第 1 章空间:介绍距离空间、线性赋范空间、内积空间的概念和基本性质。第 2 章线性算子与线性泛函:介绍了线性算子和线性泛函的概念和性质,并讨论了线性算子的基本定理、共轭空间和算子的谱理论。对一些重要定理给出了许多应用的例子。第 3 章介绍了广义函数的概念,并讨论了广义函数的简单运算及其性质。本书力求通俗易懂,让读者在较短的时间里初步了解和掌握泛函分析的基本理论和思想方法。

本书适用于高等院校数学系高年级本科生和工科研究生使用,也可供工程技术人员和数学工作者参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话(0451)2519328 邮编:150001
新华书店经销
肇东粮食印刷厂印刷

*

开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 4.375 字数 114 千字
2002 年 4 月第 1 版 2002 年 4 月第 1 次印刷
印数:1~1 000 册
定价:6.00 元

前　言

随着科学技术的飞速发展,泛函分析已成为理工科大学生、研究生及工程技术人员所必须掌握的一门基础数学学科。泛函分析作为一门基础学科,不仅在分析学中占有重要地位,而且渗透到了物理学、量子力学、控制理论等科学和工程技术的许多领域。了解泛函分析理论、掌握泛函分析的思想方法、用泛函分析的手段解决工程技术上出现的问题,已成为工科研究生和工程技术人员的迫切需要。

本书是在哈尔滨工程大学工科研究生多年教学的基础上产生的。注重适应工科学生受数学训练较少、数学基础相对于数学专业学生较弱的特点。注意利用学生熟知的例子,引进新的概念,在介绍了每个理论之后,也尽量举出一些大家熟知的例子来说明其应用价值和应用方法。力求在较短的时间内,使读者对泛函分析的理论体系和应用范围有一个初步的了解。

一般距离空间、赋范线性空间、内积空间、线性算子、线性泛函是泛函分析的基本研究对象。这些概念在本书中作为大家熟知的欧氏空间、n 维向量空间及高等数学、线性代数中的相关内容的推广而引入。

线性算子的基本理论,包括谱理论,也都是从方程解的存在惟一性、一致有界性、矩阵的特征值等大家熟知的数学问题入手引出的。使读者对这些泛函分析中的较抽象的理论有一个比较具体的印象。

在介绍广义函数时,则由工程上早已使用的 δ 函数、Fourier 变换等相关知识开始提出问题,引出概念。使读者体会到泛函分析在将工程技术上行之有效的数学手段从理论上加以完善,并将其向更深入更广泛的领域加以发展方面起到的重大作用。

本书的第一章和第三章由罗跃生编写，第二章由杜维华编写。由杨海欧主审。

由于本书在编写过程中时间仓促，更主要的是作者学识水平有限，在书中必然会出现许多错误和缺陷，真诚欢迎读者批评指正。

编　者

2002 年 1 月

目　　录

第 1 章　空　　间

1.1　距离空间

在数学分析,复变函数,实变函数中讨论实空间或复空间中点,点集的关系,如:聚点,极限,开集,闭集以及导数,微分等等定义时,都用到一个重要的概念.即两点之间的距离.如一维直线上两点 x,y 的距离为 $|x-y|$.二维平面上两点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 的距离为 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 等.为了在一般的元素组成的集合中讨论类似的问题,我们利用上述距离所共有的性质给出一般集合中两元素间类似的关系,这里也称为距离的定义.

定义 1.1.1　设 X 是由某些元素组成的非空集合,对于其中任意两个元素 x,y,按照一定的法则对应于一个实数 $\rho(x,y)$,且满足

(1) 正定性:$\rho(x,y)\geqslant 0$;$\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$.

(2) 对称性:$\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

(3) 三点不等式:$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

则称 $\rho(x,y)$ 为 x,y 的距离,而称 X 是以 ρ 为距离的距离空间或度量空间.记为 (X,ρ) 或简记为 X.距离空间中的元素又叫做点.X 中的非空子集 A 按照距离 ρ 显然也是一个距离空间,叫做 X 的子空间.

下面给出几个距离空间的例子:

1. n 维欧氏空间 R^n

R^n 是由所有 n 维矢量

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

组成的集合，此处 $\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都是实数. 在 R^n 中可以定义点 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 与点 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$ 的距离如下：

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 R^n 按此距离构成距离空间.

2. 空间 $C[a,b]$

考虑 $[a,b]$ 上全体连续函数所构成的集合. 这个集合记为 $C[a,b]$. 对于 $C[a,b]$ 中任意两个元素 $x(t),y(t)$，定义它们的距离为

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{1}$$

则 $C[a,b]$ 按照距离(1) 成为一个距离空间. 事实上，距离的条件(1) 与(2) 都是明显的. 我们仅验证三点不等式. 设 $x(t),y(t),z(t)\in C[a,b]$，则

$$\begin{aligned}|x(t)-z(t)|\leqslant&|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\leqslant\\&\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)-z(t)|=\\&\rho(x,y)+\rho(y,z)\end{aligned}$$

因 $\rho(x,y),\rho(y,z)$ 都是与 t 无关的实数，故

$$\rho(x,z)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

三点不等式(3) 成立，因此 $C[a,b]$ 按照定义确为距离空间.

3. 空间 $L^p[a,b](1\leqslant p\leqslant+\infty)$

此空间为 $[a,b]$ 上全体 p 次勒贝格可积函数所构成的集合. 距离：

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(x(t),y(t)\in L^p[a,b]) \tag{2}$$

值得注意的是，在任何一个非空子集 X 上，我们都可以定义距离. 例如对任一 $x\in X$，规定 $\rho(x,x)=0$，对任何 $y\in X$，只要 $y\neq x$，规定 $\rho(x,y)=1$，显然这样定义的 ρ 满足距离的全部条件，因此 X 按照

距离 ρ 成为一个距离空间,我们称这种距离空间是离散的.

定义 1.1.2 设 $\{x_n\}$ 为距离空间 X 中的一个点列,这里 $n = 1,2,3,\cdots$,以后如无特别声明,均假定 n 取一切自然数. 如果当 $n \to +\infty$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0) = 0$,就称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0,记为

$$x_n \to x_0 (n \to \infty) \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

并称 x_0 为 $\{x_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限.

按上述定义易知,若某点列收敛,极限必惟一。

对于一般的距离空间,也可像实数集合那样引进闭集和完备性的概念.

定义 1.1.3 设 E 为距离空间 (X,ρ) 中的一个子集,且对任何 E 中序列 $\{x_n\}$,若 $x_n \to x_0$,则 $x_0 \in E$. 那么称 E 为 (X,ρ) 中的闭集.

定义 1.1.4 称距离空间 X 的子集 A 中所有收敛点列的极限的全体与 A 的并集为 A 的闭包,记为 $\overline{A}$.

定义 1.1.5 设 A,B 均为距离空间 X 的子集. 如果 $A \subset \overline{B}$,就称 B 在 A 中稠密.

定义 1.1.6 距离空间 X 叫做可分的,是指在 X 中存在一个稠密的可列子集. $A \subset X$ 叫做可分的,是指存在 X 中的可列子集 B,使 B 在 A 中稠密,即 $A \subset \overline{B}$.

定义 1.1.7 设 (X,ρ),(X_1,ρ_1) 都是距离空间,如果对每一个 $x \in X$,按照一定的规律有 X_1 中的某一个点 y 与之对应,则我们就称这个对应关系是一个映射,映射常用记号 T 来表示. 如果对于某一给定的点 $x_0 \in X$,映射 T 满足下面的性质:对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得当 $\rho(x,x_0) < \delta$ 时,就有 $\rho_1(Tx,Tx_0) < \varepsilon$,则称映射 T 在 x_0 连续,如果映射 T 在 X 中的每一点都连续,就称 T 是连续映射.

命题 映射 $T:(X,\rho) \to (X_1,\rho_1)$ 为连续映射的充分且必要条件是 $\forall \varepsilon > 0$ 及 $\forall x_0 \in X$, $\exists \delta > 0$,使得 $\rho(x,x_0) < \delta$ 时,

$\rho_1(Tx, Tx_0) < \varepsilon$.

定义 1.1.8 距离空间 X 中的点列 $\{X_n\}$ 叫做基本列,是指对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 N,使当 $m, n > N$ 时,

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

距离空间叫做完备的,是指 X 中的任一基本列必收敛.

下面几种空间都是完备的空间.

4. 空间 S

设 E 为可测集;$0 < mE < +\infty$,在 E 上定义的一切几乎处处有限的可测函数组成的集合记为 S. S 中凡几乎处处相等的函数看成同一元素. 在 S 中定义距离如下:

$$\rho(x, y) = \int_E \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} \mathrm{d}t \qquad (x(t), y(t) \in S)$$

则 S 为完备的距离空间.

5. 空间 s

令 s 为一切实(或复)数序列 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots\}$ 组成的集,在 s 中定义距离如下:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots\}$,则 s 为一完备的距离空间.

6. 空间 $L^\infty[a, b]$

我们称定义在可测集 E 上的可测函数是本性有界的,是指除去 E 中的某个零测度集之外,在它的补集上是有界的. 令 $L^\infty[a, b]$ 表示在 $[a, b]$ 上本性有界可测函数的全体,凡是几乎处处相等的函数看成同一元素. 在 $L^\infty[a, b]$ 中定义距离如下:

$$\rho(x, y) = \inf_{\substack{mE_0 = 0 \\ E_0 \subset [a, b]}} \{\sup_{t \in [a, b] - E_0} |x(t) - y(t)|\} = \operatorname*{varisup}_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$$

则 $L^\infty[a,b]$ 为一完备的距离空间.

7. 空间 $l^p(1 \leqslant p < +\infty)$

令 l^p 表示满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$$

的一切实(或复)数序列 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots\}$ 组成的集.对于 l^p 的任意两个元素 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots\}$ 和 $y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots\}$,规定距离如下:

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{1/p}$$

则 l^p 为一完备、可分的距离空间.

1.2 列紧集

在一般的距离空间中也可以给出有界集的概念.

定义 1.2.1 设 (X, ρ) 是一个距离空间,A 是 X 的一个子集,若 $\exists\, x_0 \in X$,及 $r > 0$,记

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$$

称 $B(x_0, r)$ 为 x_0 的一个 r 邻域,或简称邻域.使得 $A \subset B(x_0, r)$,则称 A 为有界集.

在有限维欧氏空间中,含有无穷多个元素的有界集合必有收敛的子列,但对任意的距离空间,这一结果并不成立.

例如在 $C[a,b]$ 上,函数列

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & (t \geqslant \dfrac{1}{n}) \\ 1 - nt & (t \leqslant \dfrac{1}{n}) \end{cases}$$

显然 $\{x_n\} \subset B(\theta, 1)$,其中 $\theta = \theta(x) \equiv 0$,但是 $\{x_n\}$ 不含有收敛

子列.

为了区别集合是否有上述性质,我们给出下面的概念.

定义 1.2.2 距离空间 X 中的无穷集 A 叫做列紧的,是指 A 中的任一无穷子集必含有一个收敛点列. 如果 X 本身是列紧的,则称 X 为列紧距离空间,简称为列紧空间.

另外,我们还要给出几个其它的概念.

定义 1.2.3 设 M 是距离空间 (X,ρ) 中的一个子集,$\varepsilon>0$, $N\subset M$,若 $\forall x\in M$,存在 $y\in N$,使得 $\rho(x,y)<\varepsilon$,那么称 N 是 M 的一个 ε - 网. 如果 N 中只有有限多个点,则称 N 为 M 的一个有限 ε - 网.

定义 1.2.4 设 A 是距离空间 X 中的点集,如果对于任给的 $\varepsilon>0$, A 总存在有限的 ε - 网,则称 A 是全有界的.

定义 1.2.5 距离空间 X 中的列紧闭集称为自列紧集.

定义 1.2.6 设 M 为距离空间 (X,ρ) 的子集,称 $x\in M$ 是 M 的一个内点,如果存在 x 的一个邻域整个包含于 M. 若 M 的所有点都是内点,则称 M 为开集.

定义 1.2.7 设 X 为距离空间,A 为 X 中的某个点集, $(G_\iota)_{\iota\in J}$ 是 X 中某些开集组成的族,如果

$$A\subset\bigcup_{\iota\in J}G_\iota$$

则称 $(G_\iota)_{\iota\in J}$ 为 A 的一个覆盖. 点集 A 叫做紧的,是指从 A 的任意一个覆盖 $(G_\iota)_{\iota\in J}$ 中,可以取出有限多个开集 $G_{\iota_1},G_{\iota_2},\cdots,G_{\iota_n}$,使 $(G_{\iota_k})_{k=1,2,\cdots,n}$ 是 A 的一个覆盖. 如果空间 X 本身按上述定义是紧的,则称 X 为紧距离空间或简称为紧空间.

显然有下列性质:

1. 在 R^n 中,任意有界集是列紧集. 任意有界闭集是自列紧集.

2. 列紧空间内任意子集都是列紧集. 任意闭列紧集都是自列紧集.

3. 列紧空间必是完备空间.

定理 1.2.1 （完备）距离空间(X,ρ)中集合是列紧的必要（且充分）条件是 M 为完全有界的.

定理 1.2.2 完全有界的距离空间是可分的.

定理 1.2.3 设(X,ρ)是一个距离空间,$M\subset X$是紧集的充分必要条件为 M 是自列紧的.

1.3 赋范线性空间

前几节中我们讨论了距离空间以及距离空间中几类子集的性质.但在一个集合中仅仅赋予距离对于许多分析问题是不够的.因为在分析中经常遇到的函数空间中,除了要讨论极限,收敛性外还要讨论元素的加法,数乘等代数运算.为此我们把线性代数中学过的 n 维线性空间的概念推广到一般的线性空间.

定义 1.3.1 设 X 是一个非空集合,K 是复(或实)数域,如果它满足下列条件,则称 X 为一复(或实)线性空间.

(1)X 中有一种任意元素间的加法运算,且关于加法构成加法群,即对 $\forall x,y\in X$,$\exists u\in X$,记作 $u=x+y$ 称为x,y之和.该运算适合

(1.1) 交换律 $x+y=y+x$.

(1.2) 结合律$(x+y)+z=x+(y+z)$.

(1.3) 存在惟一的 $\theta\in X$,对 $\forall x\in X$,$x+\theta=x$.

(1.4) 对任意的 $x\in X$,存在惟一的 $x'\in X$,使得 $x+x'=\theta$,记此 x' 为 $-x$.

(2) 还定义了一种数域 K 中的数α与$x\in X$的数乘运算.即对 $\forall\alpha\in R$ 及$x\in X$都存在$u\in X$,记作 $u=\alpha x$,称为x对α的数乘,该运算适合

(2.1) 结合律 $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x\quad(\forall\alpha,\beta\in R,\forall x\in X)$.

(2.2) $1 \cdot x = x$.

(2.3) 分配律 $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\forall \alpha, \beta \in R, \forall x \in X)$.

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad (\forall \alpha \in R, \forall x, y \in X).$$

线性空间中的元素也称为向量.有时把线性空间称为向量空间.

在线性空间中经常要用到下列基本概念.

定义 1.3.2 若 X, X_1 为两个线性空间, $T: X \to X_1$ 是从 X 到 X_1 的一个映射.

(1) 若它为单射,即对不同的元素 $x_1, x_2 \in X$,映射为不同的元素 $Tx_1, Tx_2 \in X_1$.

(2) 它还是满射.即对 $\forall y \in X_1$,都 $\exists x \in X$,使 $Tx = y$.

(3) 它还是线性映射.即 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad (\forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y \in X)$.

则称 T 为从 X 到 X_1 的一个线性同构.这时也称 X 和 X_1 是同构的线性空间.

定义 1.3.3 若 E 是线性空间 X 的子集,且关于 X 中的加法和数乘运算也构成线性空间,则称 E 为 X 的一个线性子空间.

定义 1.3.4 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为线性空间 X 中的一组向量,若 $\exists$ 不全为零的域 K 中数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,使 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta$,则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性相关,否则称它们线性无关.

定义 1.3.5 若 A 为线性空间 X 中子集, A 中任意有限个元素线性无关,且对 $\forall x \in X$,都是 A 中向量的线性组合.即 $\exists x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$ 及 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in R$,使 $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$,则称 A 为 X 中的一个极大线性无关组,也称 A 为 X 的一组线性基,或称基底,或简称基.这时, A 中元素的个数(势)称为线性空间 X 的维数.

在分析中常见到的空间是一些带有某种距离的线性空间,典型的结构可概括为以下概念.

定义 1.3.6 设 E 是实(或复)线性空间,如果对于 E 中每个

元素 x 按照一定的法则对应于一个实数 $\|x\|$,满足:

(ⅰ) $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0$ 的充要条件是 $x = \theta$;

(ⅱ) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,这里 α 是实(或复)数;

(ⅲ) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

则称 E 为实(或复)赋范线性空间或线性赋范空间,$\|x\|$ 称为元 x 的范数.

对于赋范线性空间 E,我们可以用下面的方式

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{3}$$

定义元素 x 与 y 之间的距离.容易证明,这样定义的距离满足距离空间所需要的全部条件,因此 E 按照距离(3)是一个距离空间.

我们称 E 中的点列 $\{x_n\}(n = 1,2,3,\cdots)$ 依范数收敛于 $x \in E$,或称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x,是指

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0 \tag{4}$$

记为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$(强)或 $\{x_n\} \to x(n \to \infty)$,有时简记为 $x_n \to x(n \to \infty)$.

定义 1.3.7 巴拿赫空间:我们将完备的赋范线性空间称为巴拿赫(S.Banach)空间.

定理 1.3.1 设 E 是一个 n 维赋范线性空间,$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 E 的一个基底,则存在正数 M 及 M',使得对一切

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in E$$

下列不等式成立:

$$M\|x\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M'\|x\| \tag{5}$$

证 对任一 $x \in E$,有

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|e_k\| |\xi_k| \leqslant$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

这里 $m = \left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

任取 $y = \sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k \in E$,由不等式(6),有

$$\|x - y\| \leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k - \eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

于是更有

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k - \eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

将$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$看成 R^n 中的点,不等式(8) 表明$\|x\|$作为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \in R^n$ 的函数是连续的.令

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) = \|x\|$$

并在 R^n 中的单位球面$S:\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1$上考虑函数 $f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$.由于 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关并注意到S 是R^n 中的有界闭集且不含零元素,故非负函数 $f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 在 S 中的任一点处都不为零,从而在 S 上有正的下确界 m',即

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \geqslant m' \quad \text{或} \quad \|x\| \geqslant m'$$

任取 $x \in E$,令

$$x' = x/\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则$\|x'\| \geqslant m'$;故

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x'\| \geqslant m'\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

在(6) 中令 $M = \frac{1}{m}$,在(9) 中令 $M' = \frac{1}{m'}$,便得不等式(5).

推论 1.3.1 任一 n 维赋范线性空间 E 必与 n 维欧几里得空间 R^n 同构且同胚,即存在从 E 到 R^n 的一对一映上且双方连续的映射.

证 任取 E 中的一个基底 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$.设

$$x = \sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k \in E$$

将 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 看成 R^n 中的点,作 E 到 R^n 上的映射 T:$Tx = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$.显然 T 是同构映射.由不等式(5),不难看出任何 $x,y\in E$,有

$$M\|x-y\|\leqslant\|Tx-Ty\|\leqslant M'\|x-y\| \tag{10}$$

今设 $\{x_m\}\subset E(m=1,2,3,\cdots)$ 收敛于 $x_0\in E$,由(10)的第二个不等式得

$$\|Tx_m - Tx_0\|\leqslant M'\|x_m - x_0\|$$

故 $\{Tx_m\}$ 收敛于 Tx_0,即 T 连续,同理可证 T^{-1} 也连续.故 E 与 R^n 同胚且同构。

推论 1.3.2 任一 n 维赋范线性空间必为巴拿赫空间,因此任一赋范线性空间的有限维子空间一定是闭子空间.

证 第一个结论由推论 1.3.1 导出,第二个结论由第一个结论导出.

在许多分析问题中,对一个函数空间或其它线性空间可以引进不同的收敛概念.有时我们会关心不同收敛概念之间的关系.我们知道在线性空间中,定义了一种范数,就同时给出了一种距离,也就给出了一种收敛的概念.为讨论在不同范数下收敛概念的关系,我们引进下列与之密切相关的一些定义.

定义 1.3.8 设在线性空间 X 上给定了两个范数 $\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_2$,若当 $\|x_n\|_2\to 0$ 时必有 $\|x_n\|_1\to 0$,则称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强,若 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强,而 $\|\cdot\|_1$ 又比 $\|\cdot\|_2$ 强,则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

命题 1.3.1 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强的充分且必要条件是存在常数

$C > 0$,使得

$$\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2 \quad (\forall x \in X)$$

证 充分性是显然的.下面用反证法证必要性.若没有满足条件的 C,则对任意的正整数 n,$\exists x_n \in X$,使$\|x_n\|_1 > n\|x_n\|_2$,令

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$$

则$\|y_n\| = 1$,则

$$0 \leqslant \|y_n\|_2 \leqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

所以$\|y_n\|_2 \to 0(n \to \infty)$,又因为$\|\cdot\|_2$ 比$\|\cdot\|_1$ 强,所以应有$\|y_n\|_1 \to 0(n \to \infty)$,这与$\|y_n\|_1 = 1$ 矛盾.

推论 1.3.3 有穷维线性空间 X 中的任何两个范数都是等价的.

引理 1.3.1 (黎斯 F.Riesz)设 E_0 是赋范线性空间 E 的真闭子空间,那么对于任给的 $\varepsilon > 0$,必存在 $x_0 \in E$ 适合$\|x_0\| = 1$ 且使$\|x_0 - x\| \geqslant 1 - \varepsilon$ 对一切 $x \in E_0$ 成立.

证明:任取 $x_1 \in E - E_0$,并令

$$d = \inf_{x \in E_0} \|x_1 - x\|$$

因 E_0 是 E 的闭子空间,故 $d > 0$.不妨设正数 $\varepsilon < 1$,于是$\frac{d}{1-\varepsilon} > d$,故存在 $x'_1 \in E_0$ 使$\|x_1 - x'_1\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$.再令 $x_0 = \frac{x_1 - x'_1}{\|x_1 - x'_1\|}$,则$\|x_0\| = 1$.任取 $x \in E_0$,我们有

$$\|x - x_0\| = \left\| x - \frac{x_1 - x'_1}{\|x_1 - x'_1\|} \right\| =$$

$$\frac{1}{\|x_1 - x'_1\|} \|(\|x_1 - x'_1\| x + x'_1) - x_1\|$$

由于$\|x_1 - x_1'\|x + x_1' \in E_0$,故$\|(\|x_1 - x_1'\|x + x_1') - x_1\| \geqslant d$,于是

$$\|x - x_0\| \geqslant \frac{d}{x_1' - x_1} > 1 - \varepsilon.$$

如果赋范线性空间 E 中的任一有界集是列紧的,则称 E 是局部列紧的.

定理 1.3.2 赋范线性空间 E 是有限维的充要条件是它的任一有界子集都是列紧的,即 E 是局部列紧的.

证 必要性.设 E 是有限维的并设维数是 n.由定理 1.3.1 的推论 1.3.1,E 与 R^n 同构且同胚,而 R^n 中的任一有界集是列紧的,故 E 中任一有界集是列紧的.

充分性.用反证法.设 E 是无穷维的,令 S 为 E 中的单位球面:$S = \{x : \|x\| = 1\}$.任取 $x_1 \in S$,记 E_1 为 x_1 张成的子空间,则 E_1 是 E 的有限维真子空间.由定理 1.3.1 推论 1.3.2,E_1 是闭的,再由黎斯引理,存在 $x_2 \in S$ 使$\|x_2 - x\| \geqslant \frac{1}{2}$对一切 $x \in E_1$ 成立,特别地,对 x_1 成立,即$\|x_2 - x_1\| \geqslant \frac{1}{2}$.记 E_2 为 x_1, x_2 张成的子空间,则 E_2 也是 E 的有限维真子空间,因此 E_2 也是闭的.仍由黎斯引理,存在 $x_3 \in S$ 使$\|x_3 - x\| \geqslant \frac{1}{2}$对一切 $x \in E_2$ 成立,特别地,对 x_1, x_2 也成立,即$\|x_3 - x_k\| \geqslant \frac{1}{2}(k = 1,2)$.依此类推,根据 E 是无穷维的,可以作出 S 中的一列元素 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$,使对任何 $k(k \geqslant 2)$,不等式$\|x_k - x_l\| \geqslant \frac{1}{2}$对一切满足 $1 \leqslant l < k$ 的 l 成立.显然$\{x_k\}$中不存在收敛的子列,与 S 的列紧性矛盾,因此 E 是有限维的.

1.4 内积空间

前面我们已经给出了距离空间和赋范线性空间的定义.一个空间有了距离的概念,就可以讨论点列的收敛性、开集、闭集、列紧性等分析性质.而在线性赋范空间中,我们又可以讨论元素间的线性运算,线性相关性、极大无关组、空间基底等概念及性质.但是只有这些还是不够的.因为在这样的空间中还是难以讨论两元素之间的"角度"的概念,就难以定义两个向量的垂直关系,就无法讨论正交性,正交补空间等等概念.在本节中我们将 n 维欧氏空间 R^n 上的内积概念推广到一般的线性空间上来.

定义 1.4.1 设线性空间 X 上的一个二元函数 $a(\cdot,\cdot): X\times X\to R(C)$,若满足下面性质,则称为(共轭)双线性函数:

(1) $a(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\bar{\alpha}a(x,y_1)+\bar{\alpha}_2a(x,y_2)$;

(2) $a(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)=\alpha_1a(x_1,y)+\alpha_2a(x_2,y)$

其中 $\forall x,y,x_1,y_1,x_2,y_2\in X,\forall\alpha_1,\alpha_2\in R(C)$.

定义 1.4.2 设线性空间 X 上的一个(共轭)双线性函数 $(\cdot,\cdot): X\times X\to R(C)$,若满足下面性质,则称为是一个内积:

(1)(共轭)对称性 $(x,y)=\overline{(y,x)}(\forall x,y\in X)$

(2) 正定性 $(x,x)\geqslant 0,(x,x)=0\Leftrightarrow x=\theta$

具有内积的线性空间称为内积空间,记作 $(X,(\cdot,\cdot))$,或简记为 X.

例 1.4.1 在 $R^n(C^n)$ 中定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i(\forall x,y\in R^n),$$

$$((x,y)=\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i(\forall x,y\in C^n))$$

其中 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\},y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$ 就构成内

积空间.

例 1.4.2 l^2 空间中定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\bar{y}_i$$

其中 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$, $y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$ 构成内积空间.

例 1.4.3 $L^2(\Omega,\mu)$ 中规定内积 $(u,v)=\int_\Omega u(x)\,\overline{v(x)}\mathrm{d}x$,

其中 $u,v\in L^2(\Omega,\mu)$ 构成内积空间.

例 1.4.4 在空间 $C^k(\bar{\Omega})$ 中,规定内积

$$(u,v)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega\partial^\alpha u(x)\,\overline{\partial^\alpha v(x)}\mathrm{d}x\quad(\forall\, u,v\in C^k(\bar{\Omega}))$$

构成一个内积空间.

和欧氏空间 R^n 一样,由内积可以导出范数,即下面定理 1.4.1.为证明定理 1.4.1,先引出以下命题.

命题 1.4.1 若$(\cdot,\cdot)$是线性空间 X 上的内积.若令$\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}$,则有

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|\quad(\forall\, x,y\in X)$$

且其中等号成立的充分必要条件是 x 与 y 线性相关.

证 当 $y=\theta$ 时,显然命题成立.

当 $y\neq\theta$ 时,对 $\forall\,\lambda\in R(C)$,

$$\|x+\lambda y\|^2=(x+\lambda y,x+\lambda y)=$$
$$(x,x)+\lambda(y,x)+\bar{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2(y,y)\geqslant 0$$

取 $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$,由于$(x,y)=\overline{(y,x)}$得

$$(x,x)-2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\geqslant 0$$

由于 $y\neq\theta$,故有$\|x\|^2\|y\|^2\geqslant|(x,y)|^2$,即$|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$.

另外,当 x 与 y 线性相关时不妨设 $x,y\neq\theta$,则 $x=\alpha y$.在上面推导时取 $\lambda=-\alpha$,即知等号成立,反之若等号成立时,可知 $x=-\lambda y$.

定理 1.4.1 在内积空间 $(X,(\cdot,\cdot))$ 中规定范数 $\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}(\forall x\in X)$,则该空间构成一个线性赋范空间,并称 $\|x\|$ 为 $(\cdot,\cdot)$ 确定的范数.

证 正定性和奇次性(即 $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$)是显然成立的.而 $\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$

即有 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,故 $\|\cdot\|$ 是一个范数.

命题 1.4.2 在内积空间 $(X,(\cdot,\cdot))$ 中,内积 (x,y) 是关于范数 $\|\cdot\|=(\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$ 的二元连续函数.即有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}(x,y)=(x_0,y_0)$$

证 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时,不妨设 $\|x-x_0\|\leqslant 1$ 和 $\|y-y_0\|\leqslant 1$,于是 $\|x\|\leqslant M$,$\|y\|\leqslant M$(其中 $M=1+\max(\|x_0\|,\|y_0\|)$).因此当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时有

$$\begin{aligned}|(x,y)-(x_0,y_0)|\leqslant{}&|(x,y)-(x_0,y)|+|(x_0,y)-(x_0,y_0)|\leqslant\\&\|x-x_0\|\cdot\|y\|+\|x_0\|\cdot\|y-y_0\|\leqslant\\&M\|x-x_0\|\cdot+\|x_0\|\cdot\|y-y_0\|\to 0\end{aligned}$$

命题 1.4.3 在线性赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中,可引入内积 $(\cdot,\cdot)$,使 $(x,x)^{\frac{1}{2}}=\|x\|(\forall x\in X)$ 的充分必要条件是 $\|\cdot\|$ 满足如下平行四边形等式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\quad(\forall x,y\in X)$$

证 必要性是显然的.为证充分性,对实线性空间和复线性空间,分别令

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)$$

可以验证就是我们所表示的内积.

定义 1.4.3 完备的内积空间称为希尔伯特 Hilbert 空间.

上面所说的内积空间的完备性是指,由内积构造的范数的完备性.例 1.4.1,例 1.4.2,例 1.4.3 中所列的都是希尔伯特空间.

在欧氏空间中的两个向量间有夹角的概念,在内积空间中我们可以把这一概念推广为以下定义.

定义 1.4.4 对内积空间$(X,(\cdot,\cdot))$中两个元素 $x,y\in X$,定义它们之间的夹角为

$$\angle(x,y)=\arccos\frac{|(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

当$(x,y)=0$时,称 x 与 y 正交,记作 $x\perp y$.又若 M 是 X 的一个非空子集,$x\in X$,若对任何 $y\in M$ 都有 $x\perp y$,则称 x 与 M 正交,记作 $x\perp M$.另外还称集合

$$\{x\in X|x\perp M\}$$

为 M 的正交补,记作 $M^{\perp}$.

由上述定义易知下面性质.

命题 1.4.4 设$(X,(\cdot,\cdot))$为内积空间,M 为 X 的一个非空子集,则下面性质成立:

(1) 若 $x\perp y_i(i=1,2)$,则 $x\perp\lambda_1y_1+\lambda_2y_2(\forall\lambda_1,\lambda_2\in R(C))$.

(2) 若 $x\perp y$,则$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

(3) 若 $x\perp y_n(n=1,2,\cdots)$,$y_n\to y$,则 $x\perp y$.

(4) 若 $x\perp M$,则 $x\perp\operatorname{span}\{M\}$.其中 $\operatorname{span}\{M\}=\{y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i|x_i\in M,\alpha_i\in R(\text{或 }C),n\text{ 为整数}\}$

(5) $M^{\perp}$ 是 X 的一个闭线性子空间.

下面我们把欧氏空间直角坐标系的概念推广到一般的内积空

间中去.

定义 1.4.5　设 X 是一个内积空间,$S=\{e_\alpha \mid \alpha\in A\}$ 是 X 的一个子集,若

$$e_\alpha\perp e_\beta\quad(\text{当 }\alpha\neq\beta,\forall\,\alpha,\beta\in A)$$

则称 S 为正交集.若还有 $\|e_\beta\|=1(\forall\,\alpha\in A)$,则称 S 为标准正交集,或规范正交集.

如果对任意非零 $x\in X$,都有 $x\notin S^\perp$,即 $S^\perp=\{\theta\}$,则称 S 为完备的.

为讨论内积空间中完备正交集的存在性,先给出一个与无穷归纳法等价的命题 - Zorn 引理.

引理 1.4.1　(Zorn)设 X 是一个半序集,如果它的每个全序子集有一个上界,则 X 有一个极大元.

利用 Zorn 引理我们可以证明下面的命题.

命题 1.4.5　含有非零元素的内积空间必存在完备的正交集.

证　因为 X 中有非零元,显然 X 中正交集按包含关系构成一个半序集类,且每个全序子集类有上界(这个全序子集所有元素的并就是上界).由 Zorn 引理知,这个半序集类有极大元 S.下面证明极大元 S 就是完备正交集.(反证)若不然,则存在非零 $x_0\in S^\perp$,令 $S_1=\{x_0\}\cup S$,则 S_1 为正交集且 S 为 S_1 的真子集,这与 S 为极大元矛盾.

定义 1.4.6　内积空间 X 中的标准正交集 $S=\{e_\alpha\mid\alpha\in A\}$,若对任意的 $x\in X$,都有

$$x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$$

则称 S 为一个基底或称为封闭的,且称 $\{(x,e_\alpha)\mid\alpha\in A\}$ 为 X 关于基 S 的 Fourier 系数.

定理 1.4.2　(Bessel 不等式)设 X 是一个内积空间,若 $S=\{e_\alpha\mid\alpha\in A\}$ 为 X 中标准正交集,则对任意的 $x\in X$,有

$$\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\leqslant\|x\|^2$$

证 先证明当 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 时，定理成立. 由于

$$0\leqslant\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\|^2=$$

$$(x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i,x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i)=$$

$$\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2$$

即定理成立. 由此可知，对一般的 A 及任意正整数 n，满足 $|(x,e_\alpha)|>\dfrac{1}{n}$ 的 $\alpha\in A$ 至多只能有有限多个，否则可取 A 的一个子集与上述结论矛盾，从而使 $(x,e_\alpha)\neq 0$ 的 $\alpha\in A$ 至多有可数多个. 不妨记为 $\{e_i\}$，$i=1,2,\cdots$ 且对任意正整数 n，有 $\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2$，取 $n\to\infty$ 时的极限，即得定理结论.

由上面定理的证明过程知，定义 1.4.6 中 $x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$ 的求和式形式上虽然是对一般的集 A 作的，但由于非零的项至多只有可数多个，所以对任一确定的 $x\in X$，$\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$ 至多是一个具有可数多项求和的级数，故该定义是有意义的.

命题 1.4.6 设 X 是 Hilbert 空间，且 $\{e_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 X 中的标准正交集，则对任意的 $x\in X$，有

$$\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\in X,\quad 且$$

$$\|x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\|\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2$$

证 由上面定理的证明过程知，可设使 $(x,e_\alpha)\neq 0$ 的 $\alpha\in A$ 是 $1,2,\cdots,n\cdots$，则 $\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$，由 Bessel 不等式

知$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2$收敛,故有

$$\|\sum_{n=m}^{m+p}(x,e_n)e_n\|^2=\sum_{n=m}^{m+p}|(x,e_n)|^2\to 0\quad(m\to\infty,\forall p(\text{正整数}))$$

即 $x_m=\sum_{n=1}^{m}(x,e_n)e_n$ 为基本列,从而$\{x_m\}$收敛,即

$$\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n=\lim_{m\to\infty}x_m\in X$$

又因为 $x-\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\perp\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$,所以

$$\|x-\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\|^2=\|x\|^2-\|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\|^2$$ 证毕.

下面给出上述几个概念的等价性定理.

定理 1.4.3 设 X 是一个 Hilbert 空间,若 $S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 X 中的标准正交集 S,则以下三个条件等价:

(1) S 是封闭的,即对任意 $x\in X$,$x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$.

(2) S 是完备的,即 $S^\perp=\{\theta\}$.

(3) 对任意 $x\in X$,$\|x\|^2=\|\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2$.

证 (1)⇒(2) 若 S 不完备,则有非零元 $x\in X$,使 $(x,e_\alpha)=0$,但由封闭性有 $x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha=0$,矛盾!

(2)⇒(3) 若有 $x\in X$ 使 $\|x\|^2=\|\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2$ 不成立.则由于

$$\|x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\|\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2>0$$

于是 $x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\neq 0$,但 $x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\in S^\perp$,这与 S 完备矛盾!

(3)⇒(1) 这时由命题 1.4.6 有:

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha \right\|^2 = \| x \|^2 - \left\| \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha \right\|^2 = 0$$

即有 $x = \sum\limits_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$. 证毕.

有许多内积空间的标准正交基的例子.

例 1.4.5 在 $L^2[0,2\pi]$ 上,$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{int}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 是一组标准正交基,对 $\forall u \in L^2[0,2\pi]$,对应的 Fourier 系数是

$$(u, e_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(t) \mathrm{e}^{-int} \mathrm{d}t \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

例 1.4.6 在 l^2 空间上

$$e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) (\text{第 } n \text{ 项为 } 1) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

是一组标准正交基.

在线性代数中,有将一个线性无关组进行正交化的 Gram-Schmidt 正交化过程. 这一正交化方法,可以推广到内积空间上来. 设 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是内积空间 X 中的一列线性无关的元素. 则按下面过程

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1, & e_1 &= \frac{y_1}{\| y_1 \|} \\
y_2 &= x_2 - (x_2, e_1) e_1, & e_2 &= \frac{y_2}{\| y_2 \|} \\
&\vdots & &\vdots \\
y_n &= x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, e_i) e_i, & e_n &= \frac{y_n}{\| y_n \|} \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

则可得到一组标准正交集 $S = \{e_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$,对任一正整数 n, e_n 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合.

为讨论可分 Hilbert 空间的结构,给出下面定义.

定义 1.4.7 设 $(X_1, (\cdot, \cdot)_1)$ 与 $(X_2, (\cdot, \cdot)_2)$ 是两个内积空

间,若存在从 X_1 到 X_2 的一个线性同构映射 T,满足 $(Tx,Ty)_2 = (x,y)_1 (\forall x,y \in X)$,则称内积空间 X_1 与 X_2 是同构的.

定理 1.4.4 Hilbert 空间 X 是可分的充分必要条件是 X 有含可数个元的标准正交基 S. 又若 S 的元素个数 n 有限,则 X 同构于 R^n(或 C^n),若 S 中有可列个元素,则 X 同构于 l^2.

证 必要性. 设 $\{x_n\}_1^N$ 是 X 中的可数稠密子集,则其中必存在线性无关的子集 $\{y_n\}_1^N (N < \infty$ 或 $N = \infty)$,使得

$$\operatorname{span}\{y_n\}_1^N = \operatorname{span}\{x_n\}_1^N$$

设 $\{e_n\}_1^N$ 为 $\{y_n\}_1^N$ 做 Gram-Schmidt 过程所得的标准正交集,由于

$$\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_1^N} = \overline{\operatorname{span}\{y_n\}_1^N} = X$$

故 $\{e_n\}_1^N$ 是标准正交基.

充分性. 设 $\{e_n\}_1^N (N < \infty$ 或 $N = \infty)$ 是 X 的标准正交基,那么集合

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i : a_n \text{ 是有理数或有理复数}\right\}$$

(有理复数是指实部与虚部都是有理数的复数,上式中的 n,当 $N = \infty$ 时可取任何有限自然数,而当 N 为有限数时是不超过 N 的任何自然数) 是 X 中的稠密子集,故 X 可分.

对标准正交基 $\{e_n\}_1^N (N < \infty$ 或 $N = \infty)$,作映射

$$T : x \to \{(x,e_n)\}_1^N \quad (\forall x \in X)$$

由定理 1.4.3 知

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(x,e_n)|^2 \quad (\forall x \in X)$$

故知 T 是从 X 到 R^N(或 C^N) 的线性同构,且

$$(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{N}(x,e_i)e_i, \sum_{i=1}^{N}(y,e_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^{N}(x,e_i)\overline{(y,e_i)} \quad (\forall x,y \in X)$$

即定理结论成立.

习　题　一

1. 在 R^n 中定义距离如下：

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，证明 R^n 按距离 ρ_1 是距离空间.

2. 证明：

(ⅰ) 距离空间中的闭集必为可列个开集的交；

(ⅱ) 距离空间中的开集必为可列个闭集的并.

3. 设 X 为距离空间，$A\subset X$. 证明 A 的一切内点组成的集必为开集.

4. 证明完备度量空间的闭子集是一个完备的子空间，而任一度量空间中的完备子空间必是闭子集.

5. 设 X 为距离空间，$A\subset X$，令

$$f(x)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)\quad(x\in X)$$

求证 $f(x)$ 是连续函数.

6. 设 X 为距离空间，F_1,F_2 为 X 中不相交的闭集. 证明存在 X 上的连续函数 $f(x)$，使得当 $x\in F_1$ 时，$f(x)=0$；当 $x\in F_2$ 时，$f(x)=1$.

7. 设 X 为距离空间，F_1,F_2 为 X 中不相交的闭集，证明存在开集 $G_1\supset F_1,G_2\supset F_2$ 使得 $G_1\cap G_2=\varnothing$.

8. 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的二次可微的实值函数，$c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0,f'(c)\neq 0$. 求证存在 c 的邻域 $U(c)$，使得对任意的 $x_0\in U(c)$，迭代序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

是收敛的,并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c$$

9. 设(X,ρ)是度量空间,映射 $T:X\to X$ 满足$\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y)(\forall x \neq y)$,并已知 T 有不动点,求证此不动点是惟一的(c 称为T 的不动点,是指 c 满足 $Tc = c$).

10. 设 $E = \{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$,求证:$E$ 在$C[0,\pi]$中不是列紧的.

11. 设(X,ρ)是度量空间,映射 $T:X\to M\subset X$ 满足$\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y)(\forall x\neq y)$,且$M$是列紧集.求证:$T$有惟一的不动点.

12. 在 $C^1[0,1]$ 中,对每个 $f\in C^1[0,1]$,令

$$\|f\|_1 = \left(\int_0^1(|f|^2 + |f'|^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

求证:$\|\cdot\|_1$ 是 $C^1[0,1]$ 中的范数.

13. 在 $C[0,1]$ 中,对每个 $f\in C[0,1]$,令

$$\|f\|_1 = \left(\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}};\|f\|_2 = \left(\int_0^1(1+x)|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

求证:$\|\cdot\|_1$ 和$\|\cdot\|_2$ 是 $C[0,1]$ 中的两个等价范数.

14. 设 a 是复线性空间X上的共轭双线性函数,q 是由a 诱导的二次型,求证:对任何 $x,y\in X$,有

$$a(x,y) = \frac{1}{4}\{q(x+y) - q(x-y) + iq(x+iy) - iq(x-iy)\}$$

15. 设 M,N 是内积空间的两个子集,求证:

$$M\subset N\to N^{\perp}\subset M^{\perp}.$$

16. 设 M 是 Hilbert 空间 X 的子集,求证:

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{span}M}$$

其中 $\mathrm{span}M = \{y = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k\,|\,x_k\in M, a_k\in R(\text{或 } C), n = 1,2,\cdots\}$

17. 设 $A = \{\varphi(x)\,|\,\varphi(x)$ 任意次可微且当$|x|\geqslant a > 0$时,

$\varphi(x)=0\}$,记

$$\rho(\varphi,\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!2^n}\frac{\max\limits_x|\varphi_{(x)}^{(n)}-\psi_{(x)}^{(n)}|}{1+\max\limits_x|\varphi_{(x)}^{(n)}-\psi_{(x)}^{(n)}|}$$

证明:A 关于ρ是一度量空间,该空间中收敛概念等价于 $\varphi_m(x)$ 及其各阶偏导数 $\varphi_m^{(n)}(x)$ 增匀收敛。

18. 证明在度量空间(x,ρ)上的基本列收敛的充分必要条件是它存在一收敛子列。

19. 设 $\rho(x,y)$ 为空间 S 上的距离,证明 S 关于下面的"距离"也构成距离空间.

$$\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

20. 设 F 是只有有限项不为零的实数列全体,在 F 上引进距离 $\rho(x,y)=\sup\limits_{k\geqslant 1}|\xi_k-\eta_k|$.其中 $x=\{\xi_k\}\in F$, $y=\{\eta_k\}\in F$,求证(F,ρ)不完备,并指出其完备化空间(即包含 F 且关于ρ完备的最小空间).

21. 说明$[0,1]$上多项式全体按距离 $\rho(p,q)=\int_0^1|p(x)-q(x)|\mathrm{d}x$ 不完备,并指出完备化空间.

22. 证明在完备的度量空间(X,ρ)中给定点列$\{x_n\}$,若对 $\forall\epsilon>0$,存在基本列$\{y_n\}$,使 $\rho(x_n,y_n)<\epsilon$,$(\forall n=1,2,\cdots)$,则$\{x_n\}$收敛.

23. 证明:完备的度量空间中子集 A 列紧的充分必要条件是对 $\forall\epsilon>0$,存在 A 的列紧的ϵ网.

24. 设 $f(x)$ 是由距离空间(X,ρ)到距离空间(X_1,ρ_1)中的连续映射,A 在 X 中稠密,证明 $f(A)$ 在 $f(X)$ 中稠密.

25. 证明基本列都是有界的.

26. 设 X 是完备的距离空间,$\{F_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 为 X 中的一列闭集 $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$,且 $F_n\neq\varnothing$(即 F_n 非空),

$\lim\limits_{n\to\infty}d(F_n)=0$(其中 $dF_n=\sup\limits_{x,y\in F_n}\rho(x,y)$),证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$.

27. 证明紧集的闭子集也是紧集.

28. 证明在度量空间中紧集上的连续函数必是有界的,且可达到其上、下确界.

29. 设 (X,ρ) 为度量空间,F_1,F_2 为其两个紧子集,求证存在 $x_1\in F_1,x_2\in F_2$ 使

$$\rho(x_1,x_2)=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in F_1,y\in F_2\}$$

30. 设 M 是 $C[a,b]$ 中的有界集,证明下集合是列紧的

$$\{F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\mid f\in M\}$$

31. 设 (M,ρ) 是一个紧距离空间,又 E 为 M 上连续函数空间 $C(M)$ 的一个子集. E 中函数一致有界且满足

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant C\rho(t_1,t_2)^{\alpha}\quad(\forall x\in E,\forall t_1,t_2\in M)$$

其中 $0\leqslant\alpha\leqslant1,C>0$,求证 E 在 $C(M)$ 中是列紧集.

32. 证明定义在紧空间上的连续函数必是一致连续的.

33. 证明列紧集的闭包必是自列紧集.

34. 在数轴上添加无穷远点 $-\infty,+\infty$,得到的集记为 R',试在 R' 中适当地定义距离使 R' 与区间 $[0,1]$ 同胚(即存在 R' 到 $[0,1]$ 上双方连续的映射,$[0,1]$ 的距离与 R 中的相同).

35. 在 R^2 中,对 $\forall z=(x,y)$,令

$$\|z\|_1=|x|+|y|,\|z\|_2=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\|z\|_3=\max(|x|,|y|),\|z\|_4=(x^4+y^4)^{\frac{1}{4}}$$

(1) 证明 $\|\cdot\|_i(i=1,2,3,4)$ 都是 R^2 的范数.

(2) 画出 $(R^2,\|\cdot\|_i)(i=1,2,3,4)$ 各空间中的单位球面图形.

(3) 说明以 $O=(0,0),A=(1,0),B=(0,1)$ 为顶点的三角形,在哪个范数下是等边的.

36. 设 $V[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上具有有界变差，且右连续的函数全体，其线性运算与 $C[a,b]$ 相同，在 $V[a,b]$ 中定义范数 $\|x\| = |x(a)| + \bigvee_a^b(x)$，证明 $V[a,b]$ 是巴拿赫空间.

37. 设 $H^p(0 < p \leqslant 1)$ 表示 $[a,b]$ 上满足条件

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant M|t_1 - t_2|^p$$

的函数全体，线性运算的定义与 $C[a,b]$ 相同，在 H^p 中定义范数

$$\|x\| = |x(a)| + \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p}$$

证明 H^p 为巴拿赫空间.

38. 设 X 为一切有界数列组成的集，按通常线性运算，构成的线性空间，证明它按

$$\|x\| = \sup_{n \geqslant 1} |\xi_n| \quad 其中\ x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\} \in X$$

构成不可分的巴拿赫空间.

39. 在上题中若取 X 为一切收敛数列全体组成的集，证明 X 为可分巴拿赫空间.

40. 设 $C(0,1]$ 为 $(0,1]$ 上连续且有界的函数 $x(t)$ 全体，对 $\forall x \in C(0,1]$，令 $\|x\| = \sup_{0 < t \leqslant 1} |x(t)|$. 证明：

(1) $\|\cdot\|$ 是 $C(0,1]$ 空间上的范数

(2) $C(0,1]$ 与 l^∞ 的一个子空间是等距同构的(即同构且保持范数)

41. 在 $C'[a,b]$ 中，令

$$\|f\|_1 = \left(\int_a^b (|f|^2 + |f'|^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall f \in C'[a,b])$$

问 $(C'[a,b], \|\cdot\|_1)$ 是否完备?

42. 设 $BC[0,\infty)$ 表示 $[0,\infty)$ 上连续且有界的函数 $f(x)$ 全体，对于每个 $f \in BC[0,\infty)$ 及 $a > 0$，定义 $\|f\|_a = \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$

(1) 证明$\|\cdot\|_a$ 是$BC[0,\infty)$ 上的范数

(2) 若 $a,b>0,a\neq b$,求证$\|\cdot\|_a$ 与$\|\cdot\|_b$ 不等价.

43. 设 X_1,X_2 是两个线性赋范空间,$x_1\in X_1$ 和 $x_2\in X_2$ 的序对(x_1,x_2) 全体构成空间 $X=X_1\times X_2$,并规定

$$\|x\|=\max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2)$$

其中 $x=(x_1,x_2)$,$\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_2$ 分别为两空间的范数.证明$\|x\|$是 X 上的范数,且当 X_1,X_2 为巴拿赫空间时,X 也是巴拿赫空间.

44. 设 X 是线性赋范空间.证明 X 为巴拿赫空间的充分必要条件是对 $\forall\{x_n\}\subset X$,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

45. 设 A 是度量空间中的点集,$a>0$,证明$\{x\mid\rho(x,A)<a\}$是开集,问$\{x\mid\rho(x,F)\leqslant a\}$ 是否闭集?

46. 设$\{A_\alpha\}$为度量空间上的一个集族.证明所有 A_α 的交集的极限点必属于各集 A_α 的极限点的交.

47. 证明有限个集合的并集的极限点集等于各集的极限点集的并集.

48. 集 A 为闭集的充要条件是$A=\overline{A}$.

49. 设E 和F 为度量空间中的两个子集,且$\inf\limits_{\substack{x\in E\\y\in F}}\rho(x,y)>0$,证明必有不相交的开集 O 和G 分别包含E 和F.

50. 设 H 为 Hilbert 空间,$\{e_k\}$,$\{e'_k\}(k=1,2,3,\cdots)$ 是 H 中两个标准直交系,且$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|e_k-e'_k\|^2<1$,则$\{e_k\}$ 和$\{e'_k\}$ 同时为完备的或不完备的.

51. 可分的 Hilbert 空间的完备标准正交系必定是可列的.

52. 设 M,N 为内积空间H 中的子集,且 $M\perp N$,证明 $N\subset M^{\perp}$,$M\subset N^{\perp}$.

53. 设 H 为 Hilbert 空间,M 为其子空间,证明 $\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}$,$M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}$.

54. 设 L_1, L_2 为内积空间 H 的子空间,且 $L_1 \perp L_2, L_1 \dotplus L_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$

证明:$L_1 \dotplus L_2$ 是闭子空间的充分必要条件是 L_1, L_2 均为闭子空间.

55. 设 M, N 为内积空间 H 的子集,证明 $N^{\perp} \cap M^{\perp} = L^{\perp}$. 其中

$$L = \{x + y \mid x \in M, y \in N\}$$

56. 证明 n 维内积空间必与 n 维欧氏空间等距同构.

57. 证任一内积空间的有限维子空间是完备的.

58. 有限个内积空间中的元素,若它们两两正交,证明它们线性无关.

59. 证明 Hermite 多项式 $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \dfrac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$ 为 $L^2(-\infty, \infty)$ 中完备正交系.

60. 证明 Laguerre 函数 $L_n(t) = e^t \dfrac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$ 为 $L^2(0, \infty)$ 中完备正交系.

61. 说明在 $C[a,b]$ 中不存在内积$(\cdot, \cdot)$,使$(f,f)^{\frac{1}{2}} = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| (\forall f \in C[a,b])$

62. 在 $L^2[-1,1]$ 中,偶函数集的正交补是什么?

63. 在 $L^2[a,b]$ 中,令 $S = \{e^{2\pi i n x}\}_{n=-\infty}^{\infty}$,证明

(1) 若 $|b-a| \leqslant 1$,则 $S^{\perp} = \{\theta\}$,

(2) 若 $|b-a| > 1$,则 $S^{\perp} \neq \{\theta\}$.

64. 设 X 为闭单位圆上解析函数全体,内积取为$(f,g) = -i \oint\limits_{|z|=1} \dfrac{f(z)\overline{g(z)}}{z} dz (\forall f, g \in X)$

证明$\{z^n / \sqrt{2\pi}\}_{n=0}^{\infty}$ 是一组标准正交集.

65. 设 X_0 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间,$\{e_n\}$,$\{f_n\}$ 分别

是 X_0 和 $X_0^{\perp}$ 的标准正交基,证明$\{e_n\}\cup\{f_n\}$是 X 的标准正交基.

66. 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 H 中的标准正交集,证明 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right|\leqslant\|x\|\|y\|(\forall x,y\in H)$

67. 证明线性空间 X 上的距离 $\rho(x,y)$ 为某范数$\|\cdot\|$确定的(即存在某范数使 $\rho(x,y)=\|x-y\|$)的充分必要条件是 ρ 满足

(1)$\rho(x,y)=\rho(x-y,\theta)$,

(2)$\rho(\alpha x,\theta)=|\alpha|\rho(x,\theta)$.

68. 设 X 是内积空间,$\forall x_0\in X,\forall r>0$, 令 $C=\{x\in X\mid\|x-x_0\|\leqslant r\}$,证明 C 是 X 中的闭凸集.(即满足,若 $x,y\in C$,则对 $\forall\lambda\in[0,1],\lambda x+(1-\lambda)y\in C$ 的闭集).

69. 设 X 是线性赋范空间,M 是 X 的有限维真子空间,证明存在 $y\in X,\|y\|=1$,且对 $\forall x\in M$ 有$\|y-x\|\geqslant 1$.

70. 证明,第 1 题定义的距离是某范数确定的.

第 2 章　线性算子与线性泛函

在前一章中,我们已经讨论了距离空间,赋范线性空间和内积空间这几个基本空间的一些性质.事实上更重要的是讨论这些空间之间的映射,函数的性质.本章中我们主要讨论线性映射的性质.

2.1　线性算子的概念

在数学分析中,求导函数,变上限积分,积分变换等运算都是一个函数变换成另外一个函数的运算.这些运算中许多还是与函数空间中的加法和数乘运算是可以交换的.在一般的线性空间中,我们也可以把这样的运算加以推广而得到如下概念.

定义 2.1.1　设 T 是由赋范线性空间 E 中的某个子集 D 到赋范线性空间 E_1 中的一个映射,我们将 T 称为算子,D 称为 T 的定义域,像集 $\{y:y = Tx, x \in D\}$ 称为 T 的值域,T 的定义域有时用 $D(T)$ 表示,若 A 为 $D(T)$ 的一个子集,常用 $T(A)$ 表示 A 的像.

设 T 的定义域 $D(T)$ 是 E 的子空间.若 T 满足

$$T(x + y) = Tx + Ty \quad (x, y \in D(T))$$

则称 T 为可加的,若 T 满足

$$T(\alpha x) = \alpha Tx \quad (x \in D(T), \alpha \text{ 为数})$$

则称 T 为齐次时.可加齐次算子称为线性算子.

线性算子 T 如果满足下面的条件:存在正数 M,使得对一切 $x \in D(T)$,有 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$,则称 T 是有界的,否则就称 T 是

无界的.

如果 T 是由 D 到实(或复)数域的映射,则称 T 为泛函.泛函常以 f、g 等符号表示.

线性算子的例子很多,如

例 2.1.1 将赋范线性空间 E 中的每个元 x 映成 x 自身的算子,就是一个有界线性算子,称它为 E 上的恒同算子,常以 I 表示.将 E 中的每个元 x 映成 θ 的算子,也是一个有界线性算子,称它为零算子.

例 2.1.2 解析几何中常见的旋转变换

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为某一固定的角}) \tag{11}$$

就是二维实欧几里得空间到它自身的一个有界线性算子.

例 2.1.3 连续函数的积分

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t \quad (x(t) \in C[a,b]) \tag{12}$$

就是定义在连续函数空间 $C[a,b]$ 上的一个有界线性泛函.

例 2.1.4 在推论 1.3.1 中,由赋范线性空间 E 到赋范线性空间 E_1 上的等距同构映射就是 E 到 E_1 上的一个有界线性算子,而逆映射则是由 E_1 到 E 上的一个有界线性算子.

当算子连续时,有下面的结果。

定理 2.1.1 设 E, E_1 都是实赋范线性空间, T 是定义在 E 的子空间 D 上而值域包含在 E_1 中的连续可加算子,则 T 满足齐次性,因此 T 是连续线性算子.

证 我们的目的是证明对任何实数 α,有 $T(\alpha x) = \alpha Tx$.

先设 α 是正整数 n,则

$$T(nx) = T(x + \cdots + x) = nTx \tag{13}$$

将 x 换成 $\frac{x}{n}$,由(13)得

$$T(x) = T(n \cdot \frac{x}{n}) = nT(\frac{x}{n})$$

故 $$T\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}T(x)$$

于是当 α 是正有理数时，$T(\alpha x)=\alpha Tx$.

由 T 的可加性，$T(\theta)=T(2\theta)=2T(\theta)$，故 $T(\theta)=\theta$，于是

$$\theta=T(x-x)=Tx+T(-x)$$

即 $T(-x)=-Tx$，因此对一切有理数 α，有 $T(\alpha x)=\alpha Tx$.

现设 α 是一般的实数. 取有理数序列 $\{\alpha_n\}\to\alpha$，对每个 α_n，有 $T(\alpha_n x)=\alpha_n Tx$，令 $n\to\infty$，根据 T 的连续性得着

$$(T\alpha x)=\alpha Tx$$

即 T 是齐次的.

推论 2.1.1 设 E、E_1 都是复赋范线性空间，T 是定义在 E 的子空间 D 上而值域包含在 E_1 中连续可加算子，且 $T(ix)=iTx$，且 T 满足齐次性，即 T 是连续线性算子.

证 由定理 2.1.1，对任何实数 α，有 $T(\alpha x)=\alpha Tx$. 今设 α 为复数，即 $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$. 根据假定，$T(ix)=iTx$，故

$$T(\alpha x)=T((\alpha_1+i\alpha_2)x)=T(\alpha_1 x)+T(i\alpha_2 x)=$$
$$\alpha_1 Tx+i\alpha_2 Tx=\alpha Tx$$

关于线性算子的连续性和有界性还有如下一些结论.

定理 2.1.2 设 E、E_1 都是赋范线性空间，T 是定义在 E 的子空间 D 上而值域包含在 E_1 中的线性算子，则 T 有界的充要条件是 T 将 D 中的任一有界集映成 E_1 中的有界集.

证 必要性. 设 T 是有界线性算子，即存在 $M>0$，使得对一切 $x\in D$，$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$. 今设 $A\subset D$ 为一有界集，则存在正数 K，使得一切 $x\in A$，有 $\|x\|\leqslant K$，故当 $x\in A$ 时

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|\leqslant MK$$

即 T 的像 $T(A)$ 是 E_1 中的有界集.

充分性. 在 D 中取单位球面 $S=\{x:\|x\|=1,x\in D\}$，由假定，存在正数 M，使得当 $x\in S$ 时，$\|Tx\|\leqslant M$. 今设 x 是 D 中任一非零

元素,则$\frac{x}{\|x\|}\in S$,故$\left\|T(\frac{x}{\|x\|})\right\|\leqslant M$,由 T 的齐次性,得到

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\| \tag{14}$$

当 $x=\theta$ 时,(14) 显然成立.因此对任何 $x\in D$,(14) 成立.证毕.

定理2.1.3 设E、E_1都是赋范线性空间,T是定义在E的子空间 D 上而值域包含在E_1中的可加算子.如果 T 在某一点$x_0\in D$ 连续,则 T 在整个D 上连续.于是由定理 2.1.1 可知 T 是连续线性算子.

证 任取 $y\in D$,并任取 $y_n\in D(n=1,2,3,\cdots)$,设 $y_n\to y(n\to\infty)$.由 T 的可加性,得

$$Ty_n-Ty=T(y_n-y)=T(y_n-y+x_0)-Tx_0$$

不难看出,$y_n-y+x_0\to x_0$,由 T 在x_0 的连续性,得着 $T(y_n-y+x_0)\to Tx_0(n\to\infty)$,故

$$Ty_n\to Ty \quad (n\to\infty)$$

因此 T 在 y 处是连续的.证毕.

定理2.1.4 设E、E_1都是赋范线性空间,T是定义在E的子空间 D 上而值域包含在E_1中的线性算子.则 T 连续的充要条件是T 有界.

证 充分性.设 T 有界,则存在 $M>0$,使对一切 $x\in D$,$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$,任取 $x_n\to x(x_n\in D,n\to\infty)$,于是

$$\|Tx_n-Tx\|=\|T(x_n-x)\|\leqslant M\|x_n-x\|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

即 T 在D 内的任一点x 处是连续的.

必要性.用反证法.设T连续但T无界,则对每个自然数 n,必存在 $x_n\in D,x_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$ 使

$$\|Tx_n\|\geqslant n\|x_n\|$$

令 $y_n=\frac{x_n}{n\|x_n\|}$,则$\|y_n\|=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$,由 T 的连续性,$Ty_n\to 0(n\to\infty)$,另一方面

$$\|Ty_n\| = \left\|\frac{Tx_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} \geqslant 1$$

矛盾，故 T 有界. 证毕.

对于有界线性算子还可以定义它的范数.

定义 2.1.2 设 E、E_1 都是赋范线性空间，T 是定义在 E 的子空间 D 上而值域包含在 E_1 中的有界线性算子. 使 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$，对一切 $x \in D$ 都成立的正数 M 的下确界，称为 T 的范围，记为 $\|T\|$.

算子范数概念的实际应用很广泛，如

例 2.1.5 我们用 $C(-\infty,\infty)$ 表示定义在 $(-\infty,\infty)$ 上有界连续函数的全体，其中元素的相加以及数与元素的相乘与 $C[a,b]$ 中的相同. 在 $C(-\infty,\infty)$ 中定义范数：

$$\|y\| = \sup_{-\infty<t<\infty} |y(t)| \quad (y(t) \in (C(-\infty,\infty))$$

则 $C(-\infty,\infty)$ 是一个巴拿赫空间，今设 $x(t) \in L(-\infty,\infty)$，令

$$y = Tx : y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} x(t) \mathrm{d}t$$

则由实变函数理论可知 T 是定义在 $L(-\infty,\infty)$ 上并在 $C(-\infty,\infty)$ 中取值的有界线性算子，且 $\|T\| \leqslant 1$.

例 2.1.6 在内插理论中，我们往往用拉格朗日 (J.L. Lagrange) 公式来求已知连续函数的近似多项式. 设 $x(t) \in C[a,b]$，在 $[a,b]$ 内任取 n 个点 $a \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant b$，作多项式

$$l_k(t) = \frac{(t-t_1)\cdots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\cdots(t-t_n)}{(t_k-t_1)\cdots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\cdots(t_k-t_n)}$$

其中 $k = 1,2,\cdots,n$. 再令

$$y = L_n x ; \quad y(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k) l_k(t)$$

则 L_n 是 $C[a,b]$ 到其自身的有界线性算子且

$$\| L_n \| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \sum_{k=1}^{n} | l_k(t) | \tag{15}$$

其实,L_n 的线性是明显的.现在证明(15).令

$$\alpha = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \sum_{k=1}^{n} | l_k(t) |$$

则

$$\| L_n x \| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \sum_{k=1}^{n} x(t_k) l_k(t) \right| \leqslant \alpha \max_{a \leqslant t \leqslant b} | x(t) | = \alpha \| x \|$$

故

$$\| L_n \| \leqslant \alpha \tag{16}$$

另一方面,由于 $\sum_{k=1}^{n} | l_k(t) |$ 在 $[a,b]$ 上连续,故存在 $t_0 \in [a,b]$ 使

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} | l_k(t_0) |$$

取 $x_0(t) \in C[a,b]$ 使 $\| x_0 \| = 1$,且使 $x_0(t_k) = \operatorname{sgn} l_k(t_0)(k = 1,2,\cdots,n)$,于是

$$\| L_n x_0 \| \geqslant | (L_n x_0)(t_0) | = \left| \sum_{k=1}^{n} l_k(t_0) \operatorname{sgn} l_k(t_0) \right| = \sum_{k=1}^{n} | l_k(t_0) | = \alpha$$

故

$$\| L_n \| \geqslant \alpha \tag{17}$$

由(16)、(17)得到(15).

例 2.1.7 设 $K(s,t)$ 是定义在 $a \leqslant t \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b$ 上的连续实函数,在实连续函数空间 $C[a,b]$ 中定义如下的积分算子:

$$y(t) = (Tx)(t) = \int_a^b K(t,s) x(s) \mathrm{d}s$$

则 T 为 $C[a,b]$ 到自身的有界线性算子且

$$\|T\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b |K(t,s)| \mathrm{d}s \tag{18}$$

T 显然是 $C[a,b]$ 到其自身的线性算子.今证 T 的有界性以及等式(18).令

$$\alpha = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b |K(t,s)| \mathrm{d}s$$

则

$$\|Tx\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s \right| \leqslant$$

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b |K(t,s)| \mathrm{d}s = \alpha \|x\|$$

故 T 是有界的且 $\|T\| \leqslant \alpha$.

由于 $\int_a^b |K(t,s)| \mathrm{d}s$ 是 t 的连续函数,故存在 $t_0 \in [a,b]$ 使

$$\alpha = \int_a^b |K(t_0,s)| \mathrm{d}s$$

令 $z_0(s) = \mathrm{sgn} K(t_0,s)$,则 $z_0(s)$ 可测且 $|z_0(s)| \leqslant 1$.由鲁津定理,对每个自然数 n,存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $x_n(t)$ 使:

(i) $|x_n(t)| \leqslant 1$.

(ii) 除去一个测度小于 $\frac{1}{2Mn}$ 的集 E_n 外,在 $[a,b] - E_n$ 上 $x_n(s) = z_0(s)$,这里

$$M = \max_{t,s \in [a,b]} |K(t,s)|$$

于是

$$\left| \int_a^b K(t_0,s)z_0(s)\mathrm{d}s \right| \leqslant \left| \int_a^b K(t_0,s)x_n(s)\mathrm{d}s \right| +$$

$$\int_a^b |K(t_0,s)| \, |z_0(s) - x_n(s)| \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\|T\| \|x_n\| + 2MmE_n < \|T\| + \frac{1}{n}$$

由 $z_0(s)$ 的定义,得到

$$\alpha = \int_a^b |K(t_0,s)| \mathrm{d}s = \int_a^b K(t_0,s) z_0(s) \mathrm{d}s$$

故 $\alpha \leqslant \|T\| + \frac{1}{n}$. 令 $n \to \infty$,便有 $\alpha \leqslant \|T\|$,但已经证明 $\|T\| \leqslant \alpha$,故 $\|T\| = \alpha$,即(18)成立.

例 2.1.8 在连续函数空间 $C[a,b]$ 中讨论微分算子 $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 将在[0,1]上连续可微函数的全体 C^1 作为 T 的定义域,则 T 是定义在 C^1 上且在 $C[0,1]$ 中取值的线性算子,这里 C^1 是作为 $C[0,1]$ 的子空间看待. 我们证明 T 无界.

事实上,取 $x_n(t) = \sin nt$,则 $\|x_n\| = 1$,但

$$\|Tx_n\| = \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin nt\right\| = n\|\cos nt\| = n \to \infty (\text{当 } n \to \infty \text{ 时}),$$

故 T 将 C^1 中的单位球面映成 $C[0,1]$ 中的无界集,因此 T 无界.

例 2.1.9 我们将 $L^2[0,1]$ 中具有平方可积的导数的绝对连续函数组成的集 D 作为 $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的定义域,则 T 是定义在 D 上且在 $L^2[0,1]$ 中取值的线性算子. 我们证明 T 也是无界的.

事实上,取 $x_n(t) = \sqrt{2}\sin n\pi t$,则

$$\|x_n\| = \sqrt{2}\left(\int_0^1 |\sin n\pi t|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

但 $x'(t) = \sqrt{2}n\pi\cos n\pi t$,于是

$$\|x'_n\| = \sqrt{2}n\pi\left(\int_0^1 |\cos n\pi t|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = n\pi \to \infty \quad (n \to \infty)$$

即 T 将 D 中的单位球面映成 $L^2[0,1]$ 中的无界集,因此 T 无界.

以后把从线性空间 E 到线性空间 E_1 的有界线性算子全体记为 $B(E,E_1)$. 当 $E_1 = E$ 时简记为 $B(E)$. 对于 $B(E,E_1)$ 的元素可定义加法和数乘运算,并有如下结论.

定理 2.1.5 设 E、E_1 都是赋范线性空间,在 $B(E,E_1)$ 中定

义加法与数乘于下：

$$(T_1+T_2)x = T_1x+T_2x \quad (T_1,T_2\in B(E,E_1),x\in E) \tag{19}$$

$$(\alpha T)x=\alpha(Tx) \quad (T\in B(E,E_1),\alpha \text{ 为数}) \tag{20}$$

则 $B(E,E_1)$ 按照以上的线性运算是一个线性空间，再以定义 2.1.2 中算子的范数作为范数，则 $B(E,E_1)$ 是一个赋范线性空间.

证 不难看出 $B(E,E_1)$ 按(19)、(20)定义的线性运算是一个线性空间.故只验证范数的三个条件：

(ⅰ) $\|T\|\geqslant 0$ 是显然的.若 $T=\theta$(零算子)，显然有 $\|T\|=0$，反之，若 $\|T\|=0$，则对一切 $x\in E$，$Tx=0$，故 $T=0$.

(ⅱ) $\|\alpha T\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|\alpha Tx\|=|\alpha|\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|=|\alpha|\|T\|$；

(ⅲ) $\|T_1+T_2\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|(T_1+T_2)x\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|T_1x+T_2x\|\leqslant \sup\limits_{\|x\|=1}\|T_1x\|+\sup\limits_{\|x\|=1}\|T_2x\|=\|T_1\|+\|T_2\|$

证毕.

对 $B(E,E_1)$ 中元素列，我们给出一种收敛的概念.

定义 2.1.3 设 $\{T_n\}(n=1,2,\cdots)$，T 都属于 $B(E,E_1)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$，则称 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 T.

定理 2.1.6 设 $T_n(n=1,2,3,\cdots)$，T 都属于 $B(E,E_1)$，则 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 T 的充要条件是 $\{T_n\}$ 在 E 中的任一有界集上一致收敛于 T.

证 必要性.设 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$，$A\subset E$ 为有界集.对于 A 存在正数 K 使得当 $x\in A$ 时，$\|x\|\leqslant K$，故

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\|T_n-T\|\|x\|\leqslant K\|T_n-T\| \tag{21}$$

任给 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，$\|T_n-T\|<\frac{\varepsilon}{K}$，于是

由(21),得到

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon \quad (n > N)$$

对于 $x \in A$ 一致地成立,即$\{T_n\}$在 A 上一致收敛于 T.

充分性.设$\{T_n\} \subset B(E,E_1)$在 E 中的任一有界集上一致收敛于 $T \in B(E,E_1)$.取 E 中的单位球面 $S = \{x:\|x\| = 1, x \in E\}$,根据假定,对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使当 $n > N$ 时,

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$$

对于 $x \in S$ 一致地成立,于是

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon \quad (n > N)$$

即$\{T_n\}$依算子范数收敛于 T.证毕.

定理 2.1.7 设 E_1 是巴拿赫空间,则 $B(E,E_1)$ 也是巴拿赫空间.

证 设$\{T_n\}$是 $B(E,E_1)$ 中的基本列,即对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使当 m、$n > N$ 时,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon$$

任取 $x \in E$,则有

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\| \quad (m、n > N) \tag{22}$$

故$\{T_n x\}$是 E_1 中的基本列.依假设,E_1 完备,故$\{T_n x\}$在 E_1 中收敛于某一元素,记为 y:

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = y \tag{23}$$

令 $Tx = y$,可以证明 T 是定义在E上而值域包含在E_1中的有界线性算子,并且是$\{T_n\}$在算子范数意义下收敛的极限.

T 的线性性是显然的.现证有界性.由于

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leqslant \|T_n - T_m\| \to 0 \quad (m、n \to \infty)$$

故$\{\|T_n\|\}$是基本数列,于是有界,设$\|T_n\| \leqslant M(n = 1,2,3,\cdots)$.由

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty}\|T_n x\| \leqslant (\lim_{n\to\infty}\|T_n\|)\|x\| \leqslant M\|x\| \quad (x \in E)$$

得到$\|T\| \leqslant M$,即 T 有界.

还需证明$\{T_n\}$依算子范数收敛于 T. 在(22)中令 $m \to \infty$,得到

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon\|x\| \quad (x \in E, n > N)$$

即
$$\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon \quad (n > N)$$

故$\{T_n\}$依算子范数收敛于 T,就是说 $B(E,E_1)$ 中任一基本列必有极限,故 $B(E,E_1)$ 是巴拿赫空间. 证毕.

但是我们应该注意有些重要的收敛概念,并没有包含在依算子范数收敛这一概念之中。

例 2.1.10 设 $f(t)$ 是定义在$[0,1]$上的连续函数,$p_n(t)$ 是 $f(t)$ 的伯恩斯坦多项式,即

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \tag{24}$$

令 $L_n f = p_n$,由(24)容易看出 L_n 是$C[0,1]$到其自身的有界线性算子. 根据伯恩斯坦定理,当 $n \to \infty$ 时,$p_n(t)$ 在$[0,1]$上一致收敛于 $f(t)$,即对任意的 $f \in C[0,1]$,有

$$\|L_n f - If\| \to 0$$

这里 I 表示$C[0,1]$中的恒同算子. 但可以证明 L_n 并不依范数收敛于I. 随便取定一个 $k_0 (0 < k_0 < n)$,作下面的连续函数:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[0, \dfrac{k_0}{n}\right] \cup \left[\dfrac{k_0+1}{n}, 1\right] \\ 0 & t = \dfrac{2k_0+1}{2n} \\ \text{线性函数} & t \in \left[\dfrac{k_0}{n}, \dfrac{2k_0+1}{2n}\right] \text{或}\ t \in \left[\dfrac{2k_0+1}{2n}, \dfrac{k_0+1}{n}\right]. \end{cases}$$

记 $t_0 = \dfrac{2k_0+1}{2n}$,$f_n(t)$ 的伯恩斯坦多项式仍记为 $p_n(t)$,则

$$\|L_n f_n - If_n\| = \|p_n - f_n\| \geqslant |p_n(t_0) - f_n(t_0)| =$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_n\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t_0^k(1-t_0)^{n-k}-f_n(t_0)\right| =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t_0^k(t-t_0)^{n-k}=1$$

因$\|f_n\|=1$,故

$$\|L_n-I\|\geqslant\|(L_n-I)f_n\|=1$$

即 L_n 不依算子范数收敛于I.

例 2.1.11　在 l^p 中定义算子 T_n 于下:

$$T_n x = x_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in l^p$ 而 $x_n=\{\xi_n,\xi_{n+1},\cdots\}$.不难看出,$T_n$ 是有界线性算子且$\|T_n\|\leqslant 1$. 注意到对每个 $x\in l^p$, $\|x_n\|\to 0(n\to\infty)$,故

$$\lim_{n\to\infty} T_n x=\theta$$

但 T_n 并不依算子范数收敛于零.这时因为对每个 n,若取

$$y_n=\{0,\cdots,0,1,0,\cdots\},\text{其中 1 处于第 } n \text{ 个位置}$$

则$\|y_n\|=1$ 且 $T_n y_n=\{1,0,\cdots\}$,故

$$\|T_n\|\geqslant\|T_n y_n\|=1$$

于是$\|T_n\|=1$,即$\{T_n\}$不依算子范数收敛于零算子.

定义 2.1.4　设 T、$T_n\in B(E,E_1)(n=1,2,3,\cdots)$,若对每个 $x\in E$

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n x-Tx\|=0$$

称$\{T_n\}$强收敛于 T.

讨论一个线性算子的逆算子的存在及连续性是一个非常重要的问题,下面我们先给出一个有关的结论.

定理 2.1.8　设 E 为巴拿赫空间,$T\in B(E)$ 且$\|T\|<1$.则 $I-T$ 有有界的逆算子且$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{1-\|T\|}$.

证 由于$\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$,而$\|T\| < 1$,又因为 E 是巴拿赫空间,于是 $B(E)$ 也是巴拿赫空间,故级数

$$I + T + T^2 + \cdots + T^n + \cdots$$

在算子范数意义下收敛,它的和是有界线性算子.经过简单的验算,有

$$\begin{aligned}&(I - T)(I + T + T^2 + \cdots + T^{n-1}) = \\&\quad (I + T + T^2 + \cdots + T^{n-1})(I - T) = I - T^n\end{aligned} \tag{25}$$

在(25)中令 $n \to \infty$,并注意到 $T^{n+1} \to \theta$,得到

$$\begin{aligned}&(I - T)(I + T + T^2 + \cdots + T^n + \cdots) = \\&\quad (I + T + T^2 + \cdots + T^n + \cdots)(I - T) = I\end{aligned} \tag{26}$$

因此 $I - T$ 的逆算子存在且有界,由(26)可知

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots + T^n + \cdots \tag{27}$$

且

$$\|(I - T)^{-1}\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|} \tag{28}$$

推论 2.1.2 设 E 为巴拿赫空间,$T \in B(E)$ 是有有界的逆算子,那么对任何 $\Delta T \in B(E)$,当$\|\Delta T\| \leqslant \|T^{-1}\|^{-1}$时,算子 $S = T + \Delta T$ 也有有界的逆算子 S^{-1},且

$$S^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-T^{-1}\Delta T)^n T^{-1} \tag{29}$$

证 因 $S = T + \Delta T = T(I + T^{-1}\Delta T)$ 且$\|T^{-1}\Delta T\| \leqslant \|T^{-1}\|\|\Delta T\| < 1$,由定理 2.1.8,$I + T^{-1}\Delta T$ 有有界逆算子$(I + T^{-1}\Delta)^{-1}$.容易验证$(I + T^{-1}\Delta)^{-1}T^{-1}$ 便是 S 的逆算子.其实

$$\begin{aligned}S(I + T^{-1}\Delta)^{-1}T^{-1} &= T(I + T^{-1}\Delta)(I + T^{-1}\Delta)^{-1}T^{-1} = \\&\quad TT^{-1} = I\end{aligned}$$

同理$(I + T^{-1}\Delta)^{-1}T^{-1}S = I$.至于(29)可以由(27)立即导出.

2.2 泛函延拓定理

本节我们要讨论一个线性空间的子空间上的线性连续泛函是否可以将定义域扩张到整个线性空间上去,这个延拓后的线性泛函还会保留那些性质.为此我们先给出下面的概念.

定义 2.2.1 设 E 为线性空间,p 为定义在 E 上的泛函,如果对任意的 $x,y\in E$,

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$$

则称 p 为次可加的,如果对任意的实数 $\alpha\geqslant 0$ 以及任意的 $x\in E$,

$$p(\alpha x)=\alpha p(x)$$

则称 p 为正齐性的.正齐性次可加的非负泛函称为凸泛函.

引理 2.2.1 设 G 为实线性空间 E 的子空间,f 是定义在 G 上的实线性泛函(即满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,$f(\alpha x)=\alpha f(x)$,这里 $x,y\in G$,α 为实数),p 为定义在 E 上的凸泛函.如果 f 与 p 满足

$$f(x)\leqslant p(x)\quad (x\in G)$$

则必存在定义在 E 上的实线性泛函 F 满足

(i) 当 $x\in G$ 时,$F(x)=f(x)$;

(ii) 当 $x\in E$ 时,$F(x)\leqslant p(x)$.

证 任取 $x_0\in E-G$,令 G_1 是 G 与 x_0 张成的子空间:

$$G_1=\{\alpha x_0+x:\alpha\in R,x\in G\}$$

对任何 $x_1,x_2\in G$,有

$$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)\leqslant p(x_2-x_1)\leqslant p(x_2+x_0)+p(-x_1-x_0)$$

故 $\quad -p(-x_1-x_0)-f(x_1)\leqslant p(x_2+x_0)-f(x_2)$

因 x_1,x_2 是 G 中任意两个元素,故

$$c_1 = \sup_{x_1 \in G}\{-p(-x_1 - x_0) - f(x_1)\} \leqslant c_2 = \inf_{x_2 \in G}\{p(x_2 + x_0) - f(x_2)\}$$

任取数 c 使 $c_1 \leqslant c \leqslant c_2$,在 G_1 上定义泛函 $f_1(y)$ 如下:

$$f_1(y) = \alpha c + f(x) \quad (y = \alpha x_0 + x) \tag{30}$$

由于 $x_0 \notin G$,故 G_1 中每个元可惟一地表成 $\alpha x_0 + x$ 的形式,因此(30)惟一地定义了线性泛函 f_1.现在证明,对任何 $\alpha x_0 + x \in G_1$,有

$$f_1(\alpha x_0 + x) \leqslant p(\alpha x_0 + x) \tag{31}$$

若 $\alpha = 0$,则不需证.若 $\alpha > 0$,由 c 的取法

$$c \leqslant p(x_0 + \frac{x}{\alpha}) - f(\frac{x}{\alpha})$$

故
$$c + f(\frac{x}{\alpha}) \leqslant p(x_0 + \frac{x}{\alpha})$$

两边同乘以 α,得

$$\alpha c + f(x) \leqslant p(\alpha x_0 + x)$$

即(31)成立.若 $\alpha < 0$,则由

$$-p(-\frac{x}{\alpha} - x_0) - f(\frac{x}{\alpha}) \leqslant c$$

得
$$-c - f(\frac{x}{\alpha}) \leqslant p(-\frac{x}{\alpha} - x_0)$$

两边同乘以 $-\alpha$,得

$$\alpha c + f(x) \leqslant p(\alpha x_0 + x)$$

故(31)仍成立.

我们称 f_1 是 f 的延拓.一般地,设线性泛函 F 满足:$D(F) \supset G$,对 $x \in G$,$F(x) = f(x)$,则称 F 是 f 的延拓.

用 B 表示 f 的一切满足

$$F(x) \leqslant p(x) \quad (x \in D(F))$$

的延拓 F 的全体.在 B 中规定如下的序:对 $F_1, F_2 \in B$,若 $D(F_1)$

$\subset D(F_2)$,且对任一 $x \in D(F_1)$,有 $F_1(x) = F_2(x)$,则称 F_2 在 F_1 之后或称 F_1 在 F_2 之前,于是 B 成为一个半序集.设 M 是 B 的一个全序子集,令

$$D = \bigcup_{F \in M} D(F)$$

在 D 上定义泛函 ϕ:任取 $x \in D$,则 x 必属于某个 $D(F)$,对此种 x,令

$$\phi(x) = F(x)$$

由于 M 是全序的,ϕ 在 D 上惟一确定且是以 D 为定义域的线性泛函,满足

$$\phi(x) \leqslant p(x) \quad (x \in D)$$

ϕ 显然是 f 的延拓,故 $\phi \in B$,而且 ϕ 是 M 的上确界,由 Zorn 引理(第 1 章),B 有一极大元 F_0,可以证明 $D(F_0) = E$.若不然,则可取 $x_0 \in E - D(F_0)$,并可将 F_0 延拓到 $D(F_0)$ 与 x_0 所张成的子空间上,这显然与 F_0 的极大性矛盾,因此 $D(F_0) = E$.证毕.

定理 2.2.1 (汉恩 - 巴拿赫,H. Hahn-S. Banach) 设 G 是赋范线性空间 E 的子空间,f 是定义在 G 上的有界线性泛函,则 f 可以延拓到整个 E 上且保持范数不变,即存在定义在 E 上的有界线性泛函 F 满足

(i) 对 $x \in G, F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$,这里 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上有界线性泛函的范数.

证 设 $f(x) = \phi(x) + i\psi(x) \quad (x \in G)$,

这里 $\phi(x), \psi(x)$ 分别表示 $f(x)$ 的实部和虚部.注意到

$$i[\phi(x) + i\psi(x)] = if(x) = f(ix) = \phi(ix) + i\psi(ix)$$

故 ϕ 与 ψ 有下面的关系:

$$\phi(ix) = -\psi(x)$$

于是只要讨论 ϕ 就足够了.先将 E 看成实赋范线性空间,于是 ϕ 是定义在 G 上的实有界线性泛函.令 $p(x) = \|f\|_G\|x\|$,则 p 是定

义在 E 上的凸泛函且当 $x \in G$ 时

$$\phi(x) \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_G \|x\| = p(x) \tag{32}$$

于是 $\phi(x)$，$p(x)$ 满足引理的条件，因此 ϕ 可以延拓成定义在整个 E 上的实线性泛函 ϕ_0，且 $\phi_0(x) \leqslant p(x)(x \in E)$.

现令 $\quad F(x) = \phi_0(x) - i\phi_0(ix) \quad (x \in E)$

则 F 满足可加性，且对任何实数 α，有 $F(\alpha x) = \alpha F(x)$. 现在证明 F 便是满足定理中(ⅰ)(ⅱ)两个条件的有界线性泛函. 首先，对任何 $x \in E$，有

$$F(ix) = \phi_0(ix) - i\phi_0(-x) = \phi_0(ix) + i\phi_0(x) = i[\phi_0(x) - i\phi_0(ix)] = iF(x)$$

于是对任何复数 $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$，有

$$F(\alpha x) = F((\alpha_1 + i\alpha_2)x) = \alpha_1 F(x) + \alpha_2 F(ix) = \alpha_1 F(x) + i\alpha_2 F(x) = \alpha F(x)$$

故 F 是定义在 E 上的线性泛函.

其次，对任何 $x \in G$，有

$$F(x) = \phi_0(x) - i\phi_0(ix) = \phi(x) - i\phi(ix) = \phi(x) + i\psi(x) = f(x)$$

故 F 是 f 在 E 上的延拓.

最后还需证明 F 有界，且 $\|F\| = \|f\|_G$. 令 $\theta = \arg F(x)$，则

$$|F(x)| = e^{-i\theta}F(x) = F(e^{-i\theta}x) = \phi_0(e^{-i\theta}x) - i\phi_0(ie^{-i\theta}x).$$

因为 $|F(x)|$ 为实数，故虚部 $\phi_0(ie^{-i\theta}x) = 0$，所以

$$|F(x)| = \phi_0(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = \|f\|_G \|e^{-i\theta}x\| = \|f\|_G \|x\|$$

这表明 $\|F\| \leqslant \|f\|_G$，但 $\|F\| \geqslant \|f\|_G$ 是显然的，故等号成立.

推论 2.2.1 设 E 是赋范线性空间，则对于任一 $x_0 \in E$，只要 $x_0 \neq \theta$，必存在定义在 E 上的有界线性泛函 f，满足

$$\|f\| = 1, \quad f(x_0) = \|x_0\| \tag{33}$$

证 令 $G = \{\alpha x_0\}$，其中 α 取遍复数域或实数域. 在 G 上定

义线性泛函 f:

$$f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$$

则当 $x = \alpha x_0$ 时 $|f(x)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|$,故 $\|f\|_G = 1$,特别地,还有 $f(x_0) = \|x_0\|$. 由定理 2.2.1, f 可以延拓到整个 E 上且延拓后的泛函的范数与 $\|f\|_G$ 相等. 为简单起见,将延拓后的泛函仍记为 f,则经过延拓后的 f 便满足(33).

由推论 2.2.1 可以看出:

1° 对任何赋范线性空间 $E \neq \{\theta\}$, E 中任意的 x_1, x_2,且 $x_1 \neq x_2$,则存在有界线性泛函 f,使 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2° 如果对于 E 上的一切有界线性泛函 f,有 $f(x_0) = 0$,则 $x_0 = \theta$.

推论 2.2.2 设 G 是赋范线性空间 E 的子空间. $x_0 \in E$,若

$$\rho(x_0, G) = \inf_{x \in G}\|x_0 - x\| = \delta > 0$$

则必存在 E 上的有界线性泛函 f,使

$$\|f\| = \frac{1}{\delta}, \quad f(x_0) = 1, \text{而对 } x \in G, \quad f(x) = 0 \tag{34}$$

证 令 $G_1 = \{\alpha x_0 + x : \alpha \in K, x \in G\}$

则 G 为 E 的子空间,再令

$$f(\alpha x_0 + x) = \alpha$$

那么 f 是 G_1 上惟一确定的有界线性泛函,满足:

$$f(x_0) = 1; \text{对 } x \in G, f(x) = 0$$

注意到 $$\|\alpha x_0 + x\| = |\alpha|\left\|x_0 + \frac{x}{\alpha}\right\| \geqslant |\alpha|\delta$$

即 $|\alpha| \leqslant \frac{1}{\delta}\|\alpha x_0 + x\|$,故

$$|f(\alpha x_0 + x)| = |\alpha| \leqslant \frac{1}{\delta}\|\alpha x_0 + x\|$$

因此

$$\|f\|_{G_1} \leqslant \frac{1}{\delta} \tag{35}$$

另一方面,我们取 $x_n \in G(n = 1,2,3,\cdots)$,使 $\|x_0 - x_n\| \to \delta(n \to \infty)$,于是

$$\|f\|_{G_1} \|x_0 - x_n\| \geqslant |f(x_0 - x_n)| = |f(x_0)| = 1$$

故 $\|f\|_{G_1} \geqslant \frac{1}{\|x_0 - x_n\|}$. 令 $n \to \infty$,得到

$$\|f\|_{G_1} \geqslant \frac{1}{\delta} \tag{36}$$

由(35)(36),$\|f\|_{G_1} = \frac{1}{\delta_1}$. 再由定理2.2.1,$f$ 可以延拓到整个 E 上且延拓后的泛函的范数与 $\|f\|_{G_1}$ 相等. 为简单起见,将延拓后的泛函仍记为 f,则经过延拓后的 f 便满足(34). 证毕.

在推论 2.2.2 中,若令 $f_1 = \delta f$,则 $\|f_1\| = 1, f_1(x_0) = \delta$,于是推论 2.2.2 又可改写成:

推论 2.2.2′ 设 G 是赋范线性空间 E 的子空间;$x_0 \in E$,若

$$\rho(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x_0 - x\| = \delta > 0$$

则必存在 E 上的有界线性泛函 f_1,使

$$\|f_1\| = 1, \quad f_1(x_0) = \delta \text{ 而对 } x \in G, f_1(x) = 0 \tag{37}$$

利用推论 2.2.2(或推论 2.2.2′) 可以导出下列结果:

1° $x_0 \in \overline{G}$ 的充要条件是:对 E 上任一满足 $f(x) = 0(x \in G)$ 的有界线性泛函 f,必有 $f(x_0) = 0$.

必要性是显然的,充分性由推论 2.2.2(或推论 2.2.2′) 立即导出. 因此,为了判别 E 中的元 x_0 是否属于 $\overline{G}$,只要判别 E 上一切满足 $f(x) = 0(x \in G)$ 的有界线性泛函 f,对 x_0 作用是否等于零就行了.

2° 若 $x_0 \in E$,A 是 E 的一个子集,则 x_0 可以用 A 中的元的线性组合以任意的精确度逼近的充要条件是:对 E 上任一有界线

性泛函 f,当 $f(x)=0(x\in A)$ 时,必有 $f(x_0)=0$.

其实,若令 G 是 A 张成的子空间,则 x_0 可以用形如 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_kx_k$($x_k\in A$,$c_k$ 为数,$k=1,2,\pi,n$,n 为自然数)的元以任意的精确度逼近的充要条件是 $x_0\in\overline{G}$.由性质 1° 不难看出性质 2° 成立.

现在再来讨论定理 2.2.1.从定理 2.2.1 的证明过程容易看出,f 满足定理中的条件(ⅰ)、(ⅱ)的延拓不一定是惟一的.为了明确地说明这一事实,举例如下:

例 2.2.1 考察一切二维向量 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 按照范数

$$\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2|$$

所成的巴拿赫空间 R^2.令 G 为 R^2 中形如 $(\xi_1,0)$ 的向量组成的子空间.在 G 上定义有界线性泛函 f:

$$f(x)=\xi_1\quad(x\in G)$$

显然 $\|f\|_G=1$.任取满足 $|\alpha|\leqslant1$ 的数 α,再定义 R^2 上的有界线性泛函 F_α:

$$F_\alpha(x)=\xi_1+\alpha\xi_2\quad(x=(\xi_1,\xi_2)\in R^2)$$

易见 F_α 是 f 的延拓,且 $\|F_\alpha\|\geqslant1$,又因 $|F_\alpha(x)|\leqslant|\xi_1|+|\alpha||\xi_2|\leqslant|\xi_1|+|\xi_2|=\|x\|$,故 $\|F_\alpha\|\leqslant1$,于是 $\|F_\alpha\|=1$,因此 F_α 是 f 的延拓且满足 $\|F_\alpha\|=\|f\|_G$,但是全部 $F_\alpha(|\alpha|\leqslant1)$ 构成的集具有连续集的势.可见,有界线性泛函的延拓可以很多.一般说,有界线性泛函的延拓如果不惟一,那么它们组成的集的势不会小于连续集的势.

2.3 巴拿赫定理·闭图像定理·共鸣定理

在线性代数中的线性方程组求解、数学分析中的求隐函数问

题、常微分方程、偏微分方程、积分方程的求解等问题.从泛函分析的角度上看就是对给定的算子 $T:X\to Y$ 及 $y\in Y$,求 x,使 $Tx=y$ 的问题.而解的存在性便是讨论 T 的右逆 T_r^{-1} 是否存在的问题.因为若右逆 T_r^{-1} 存在,即 $TT_r^{-1}=I$(I 表示恒同算子),其右逆不需要惟一.则对任意 $y\in Y$,$x=T_r^{-1}y$ 就是方程 $Tx=y$ 的解.而解的惟一性则是讨论 T 的左逆 T_l^{-1} 是否存在的问题.这是因为若 T 的左逆存在,即 $T_l^{-1}T=I$,且 x_1,x_2 都为 $Tx=y$ 的解,则

$$x_1=T_l^{-1}Tx_1=T_l^{-1}y=T_l^{-1}Tx_2=x_2$$

另外,若 T 的左逆和右逆同时存在,则它们一定相等,因为这时有

$$T_l^{-1}=T_l^{-1}(TT_r^{-1})=(T_l^{-1}T)T_r^{-1}=T_r^{-1}$$

当 T^{-1} 同时为 T 的左逆和右逆时,称 T^{-1} 为 T 的逆.显然 T 有逆 T^{-1} 的充要条件是 $Tx=y$ 对任意 $y\in Y$ 的解存在且惟一.

而解的稳定性,则是讨论 T^{-1} 的连续性问题.

对于线性赋范空间的算子及其逆算子有很便于应用的结果.

2.3.1　巴拿赫逆算子定理

定理 2.3.1(巴拿赫)　设有界线性算子 T 将巴拿赫空间 E 一一对应地映射到巴拿赫空间 E_1 上,则 T 的逆算子有界.

证　根据假定,逆算子 T^{-1} 是存在的,关键在于证明 T^{-1} 的有界性.为清楚起见,我们将证明分成三步.

第一步:令 $O_n=\{x:\|x\|\leqslant n,x\in E\}(n=1,2,3,\cdots)$,$M_n$ 为 O_n 在 T 作用下的像,即 $M_n=T(O_n)$.因 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}O_n$,故 $E_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$.现在证明$\{M_n\}$中至少有一个集合在 E_1 的某个闭球中稠密.

用反证法.假设结论不对,则在任何闭球的内部,对每个 M_n,总存在某个闭球,它不含 M_n 中的元素.任取闭球 Q_0,在 Q_0 中存在一个闭球 Q_1,它不含 M_1 的元素,在 Q_1 中又存在闭球 Q_2,它不含 M_2 的元素;将这一步骤无限制地进行下去,可以得到一个渐缩

(即 $Q_n \supset Q_{n+1}, n = 0,1,2,\cdots$) 的闭球序列 $\{Q_n\}$. 不妨假定当 $n \to \infty$ 时, Q_n 的半径趋于零. 由 E_1 的完备性, 存在 E_1 中的一个元素 x_0 属于所有的闭球 Q_n, 再由 Q_n 的取法可知 x_0 不属于任何 M_n, 这与 $E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 矛盾. 因此必有某个 $M_{n_0} = T(O_{n_0})$ 在 E_1 中的某个闭球 $Q(y_0, r_0) = \{y: \|y - y_0\| \leqslant r_0\}$ 中稠密.

第二步: 令 $\delta_0 = \frac{r_0}{n_0}$, 我们证明 $M_1 = T(O_1)$ 在 E_1 中的闭球 $Q_{\delta_0} = Q(\theta, \delta) = \{y: \|y\| \leqslant \delta_0\}$ 中稠密. 任取 $y \in Q_{\delta_0}$, 则 $y_0 + n_0 y, y_0 - n_0 y$ 都属于 $Q(y_0, r_0)$, 故存在 Q_{n_0} 中的点列 $\{x_k\}$ 与 $\{x'_k\}$ $(k = 1,2,3,\cdots)$, 使

$$\lim_{k \to \infty} Tx_k = y_0 + n_0 y$$

$$\lim_{k \to \infty} Tx'_k = y_0 - n_0 y$$

于是
$$\lim_{k \to \infty} T(x_k - x'_k) = 2n_0 y$$

即
$$\lim_{k \to \infty} T\left(\frac{x_k - x'_k}{2n_0}\right) = y$$

但 $\frac{x_k - x'_k}{2n_0}$ 显然属于 O_1, 故 $M_1 = T(O_1)$ 在 Q_{δ_0} 中稠密.

我们用 $O(\frac{1}{2^n})$ 表示 E 中的闭球 $\{x: \|x\| \leqslant \frac{1}{2^n}\}$; 用 $Q(\frac{\delta_0}{2^n})$ 表示 E_1 中的闭球 $\{y: \|y\| \leqslant \frac{\delta_0}{2^n}\}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$. 由第二步得到的结果不难看出, 对每个 n, $T(O(\frac{1}{2^n}))$ 在 $Q(\frac{\delta_0}{2^n})$ 中稠密.

第三步: 我们证明 $T(O(1))$ 包含 $Q(\frac{\delta_0}{2})$, 于是进而证明 T^{-1} 有界. 任取 $y \in Q(\frac{\delta_0}{2})$, 由于 $T(O(\frac{1}{2}))$ 在 $Q(\frac{\delta_0}{2})$ 中稠密, 故存在 $x_1 \in O(\frac{1}{2})$ 使

$$\|y - Tx_1\| \leqslant \frac{\delta_0}{2^2}$$

即 $y - Tx \in Q(\frac{\delta_0}{2^2})$. 又因 $T(O(\frac{1}{2^2}))$ 在 $Q(\frac{\delta_0}{2^2})$ 中稠密，故存在 $x_2 \in O(\frac{1}{2^2})$ 使

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| \leqslant \frac{\delta_0}{2^3}$$

或
$$\|y - T(x_1 + x_2)\| \leqslant \frac{\delta_0}{2^3}$$

用归纳法可以证明：存在点列 $\{x_n\} \subset E(n = 1,2,3,\cdots)$，其中 $x_n \in O(\frac{1}{2^n})$，即 $\|x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$，使得

$$\|y - T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\| \leqslant \frac{\delta_0}{2^{n+1}} \tag{38}$$

由于 $\|x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 而 E 为巴拿赫空间，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 E 中收敛，令 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$，不难看出

$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

即 $x \in O(1)$. 根据 T 的连续性，在(38) 中令 $n \to \infty$，得到 $y = Tx$. 故 $T(O(1))$ 包含 $Q(\frac{\delta_0}{2})$，即 $O(1)$ 包含 $T^{-1}(Q(\frac{\delta_0}{2}))$. 任取 $y \in E_1, y \neq \theta$，则 $\frac{\delta_0 y}{2\|y\|} \in Q(\frac{\delta_0}{2})$，故 $T^{-1}(\frac{\delta_0 y}{2\|y\|}) \in O(1)$，于是

$$\left\| T^{-1}(\frac{\delta_0 y}{2\|y\|}) \right\| \leqslant 1$$

即
$$\|T^{-1}y\| \leqslant \frac{2}{\delta_0}\|y\|$$

于是 T^{-1} 是有界的. 证毕.

利用定理 2.3.1 可以证明关于巴拿赫空间范数等价的一个命题.

推论 2.3.1 设线性空间 E 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 均使 E 成为巴拿赫空间且不等式

$$\|x\|_2 \leqslant K\|x\|_1 \tag{39}$$

对一切 $x \in E$ 成立,其中 K 为一固定的正数.则 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 等价.

证 将 E 按范数 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 所成的巴拿赫空间分别记为 E_1、E_2.令 I 是将 E_1 中的元素 x 映成 E_2 中同一元素的恒同映射,则 I 是由 E_1 到 E_2 上的一一对应的线性算子.由(39),I 有界.根据定理 2.3.1,I^{-1} 是有界的,即存在 $K' > 0$,使

$$\|I^{-1}x\|_1 \leqslant K'\|x\|_2$$

即 $\|x\|_1 \leqslant K'\|x\|_2$,故 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 等价.

2.3.2 闭图像定理

通常的一元函数 $y = f(x)$ 的图像是平面上的一条曲线,这条曲线由平面上的点 $(x, f(x))$ 组成.对一般的线性算子也可以引入图像的概念.

设 E、E_1 都是巴拿赫空间.E、E_1 作为线性空间有直接和 $E \dotplus E_1$ 其中 $E \dotplus E_1 = \{(x, y) \mid x \in E, y \in E_1\}$,而且 $E \dotplus E_1$ 显然是一个线性空间.今在 $E \dotplus E_1$ 中定义范数如下:

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \quad ((x, y) \in E \dotplus E_1) \tag{40}$$

可以证明 $E \dotplus E_1$ 按照(40)定义的范数是一个赋范线性空间.

设 T 是定义在 E 的子空间 D 上且值域包含在 E_1 中的线性算子,$E \dotplus E_1$ 中的元素

$$(x, Tx) \quad (x \in D)$$

的全体组成的集称为 T 的图像,记为 G_T.

容易看出，对任何线性算子 T，G_T 是 $E \dot{+} E_1$ 的一个子空间．如果 T 的图像 G_T 是 $E \dot{+} E_1$ 的闭子空间，则称 T 为闭线性算子或简称为闭算子．

下面的定理给出闭算子的一个等价条件，利用这个等价条件检验线性算子是否为闭算子往往比较方便．

定理 2.3.2 设 E、E_1 为赋范线性空间，T 是定义在 E 的子空间 D 上且值域包含在 E_1 中的线性算子．则 T 为闭算子的充要条件是对任意的 $\{x_n\} \subset D(n = 1,2,3,\cdots)$，若 $x_n \to x$；$Tx_n \to y$，这里 $x \in E$，$y \in E_1$，则 $x \in D$ 且 $Tx = y$．

证 充分性．任取 $(x, y) \in \overline{G}_T$，则存在 $\{x_n\} \subset D(n = 1,2,3,\cdots)$，使

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y)$$

于是 $x_n \to x$；$Tx_n \to y(n \to \infty)$．由假设，$x \in D$ 且 $Tx = y$，故 $(x, y) = (x, Tx) \in G_T$，即 G_T 为 $E \dot{+} E_1$ 的闭子空间，就是说 T 为闭算子．

必要性．设 $\{x_n\} \subset D(n = 1,2,3,\cdots)$ 且 $x_n \to x$；$Tx_n \to y(n \to \infty)$，这里 $x \in E$，$y \in E_1$．容易看出

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y)$$

因 T 为闭算子，即 G_T 为闭集，故 $(x, y) \in G_T$，这表明 $x \in D$，且 $Tx = y$．证毕．

定理 2.3.3 设 T 是定义在赋范线性空间 E 的子空间 D 上而值域包含在赋范线性空间 E_1 中的有界线性算子．如果 D 是 E 的闭子空间，则 T 是闭算子，特别地，当 T 的定义域 $D = E$ 时，T 是闭算子．

证 当 D 是 E 的闭子空间时，注意到 T 有界，故满足定理 2.3.2 中的条件，由定理 2.3.2 的充分性可知 T 是闭算子．

定理 2.3.4（闭图像定理） 设 T 是定义在巴拿赫空间 E 上且

值域包含在巴拿赫空间 E_1 中的闭线性算子,则 T 有界.

证 因 E、E_1 都是巴拿赫空间,容易证明 $E \dot{+} E_1$ 也是巴拿赫空间.而 G_T 是 $E \dot{+} E_1$ 的闭子空间,所以 G_T 也是巴拿赫空间.现在定义 G_T 到 E 的算子 $\widetilde{T}$,

$$\widetilde{T}:(x, Tx) \to x \quad (x \in E, \text{“}\to\text{” 表示对应})$$

不难证明,$\widetilde{T}$ 是 G_T 到 E 上的一一对应的有界线性算子.由定理 2.3.1,$\widetilde{T}$ 有有界的逆算子 $\widetilde{T}^{-1}$,故对任何 $x \in E$,有

$$\|\widetilde{T}^{-1}x\| \leqslant \|\widetilde{T}^{-1}\|\|x\|$$

即 $\|(x, Tx)\| \leqslant \|\widetilde{T}^{-1}\|\|x\|$,于是更有

$$\|Tx\| \leqslant \|\widetilde{T}^{-1}\|\|x\|$$

即 T 是有界的.证毕.

例 2.3.1 考察微分算子 $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.它是定义在 $C[a,b]$ 内具有连续导数的函数类 C^1 上而值域包含在 $C[a,b]$ 内的线性算子.前面已经指出 T 是无界的.现在利用定理2.3.2证明 T 是闭算子.设 $\{x_n\} \subset C^1 (n = 1,2,3,\cdots)$,且 $\{x_n\} \to x$;$\{Tx_n\} \to y (n \to \infty)$.第二个极限实际上是指 $\{x'_n\} \to y (n \to \infty)$.因此函数列 $\{x_n(t)\}$ 以及函数列 $\{x'_n(t)\}$ 分别一致收敛于 $x(t)$ 及 $y(t)$.由数学分析可知,$x(t)$ 具有导数 $x'(t)$ 且 $x'(t) = y(t)$.这表明 $x(t) \in C^1$,且 $Tx = y$,由定理 2.3.2 可知 T 是闭算子.

例 2.3.2 设 S, T 为 l^2 到自身的连续线性算子,且 $R(S) \subset R(T)$,则存在惟一的从 l^2 到自身的连续线性算子 W,使 $S = TW$.

证明 由条件知,对任何 $x \in l^2$,$Sx \in R(T)$,从而存在 $y \in l^2$,使 $Ty = Sx$.进一步,存在惟一的 $y \in (N(T))^{\perp}$,使 $Ty = Sx$.由此我们确定了 l^2 到自身的映射,记这个映射为 W,即 $y = Wx$.我们可验证,此映射为线性的.

下面证明 W 是连续的.我们用闭图像定理来证明.设

$(x_n, Wx_n) \to (x, y)$，往证 $y = Wx$. 我们知道，$TWx_n = Sx_n$，从而 $T\lim\limits_{n\to\infty} Wx_n = S\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，即 $Ty = Sx$，容易验证 $y \in (N(T))^{\perp}$. 从而 $y = Wx$，这样证明了 W 的连续性.

例 2.3.3 设 A，B 都是 Hilbert 空间 H 上处处有定义的线性算子，且

$$(Ax, y) = (x, By), \forall x, y \in H.$$

求证：A，B 都是有界的.

证明 我们先用闭图像定理证明 A 有界. 设 $(x_n, Ax_n) \to (x, z)$，往证 $z = Ax$. 我们知道对任何 $y \in H$，$n \in N$ 有 $(Ax_n, y) = (x_n, By)$. 令 $n \to \infty$ 可得，对任何 $y \in H$ 有 $(z, y) = (x, By)$. 但我们知对任何 $y \in H$ 有 $(x, By) = (Ax, y)$，故对任何 $y \in H$ 有 $(z, y) = (Ax, y)$. 故 $z = Ax$，从而 A 有界. 同理 B 有界.

共鸣定理及其应用

在数学分析中，我们已经了解到讨论一个函数族或算子族的一致有界性是很重要的问题. 而对于线性算子来说，一致有界性与在定义域的每一点上有界有着密切的关系.

定理 2.3.5(共鸣定理) 设 $\{T_\alpha\}(\alpha \in A)$ 是定义在巴拿赫空间 E 上，而值域包含在赋范线性空间 E_1 中的有界线性算子 $\{T_\alpha\}(\alpha \in A)$ 组成的集，如果对每个 $x \in E$，有

$$\sup_{\alpha \in A}\{\|T_\alpha x\|\} < +\infty$$

则 $\{\|T_\alpha\|\}(\alpha \in A)$ 有界.

证 令

$$p(x) = \sup_{\alpha \in A}\{\|T_\alpha x\|\} \tag{41}$$

则 p 是定义在 E 上的泛函满足：

1° $p(x) \geqslant 0$，对任一数 c，有

$$p(cx) = |c| p(x) \quad (x \in E)$$

2° $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$，这里 x、$y \in E$.

性质 1° 是显然的. 现在证性质 2°, 我们有

$$p(x+y)=\sup_{\alpha\in A}\{\|T_\alpha(x+y)\|\}\leqslant\sup_{\alpha\in A}\{\|T_\alpha x\|+\|T_\alpha y\|\}\leqslant$$
$$\sup_{\alpha\in A}\{\|T_\alpha x\|\}+\sup_{\alpha\in A}\{\|T_\alpha y\|\}=p(x)+p(y)$$

即性质 2° 成立. 由性质 1°、2° 可知 p 是凸泛函且

$$p(-x)=p(x) \tag{42}$$

现在再证 p 还有下面的性质:

3° 对任何数 $k>0$, $\{x:p(x)\leqslant k\}$ 是 E 中的闭集.

其实, 由 p 的定义容易证明

$$\{x:p(x)\leqslant k\}=\bigcap_{\alpha\in A}\{x:\|T_\alpha x\|\leqslant k\}$$

因为每个 T_α 是连续的, 故 $\{x:\|T_\alpha x\|\leqslant k\}$ 是 E 中的闭集, 作为它们的交的 $\{x:p(x)\leqslant k\}$ 也是 E 中的闭集, 性质 3° 成立.

记 $M_k=\{x:p(x)\leqslant k\}$, 且取 k 为自然数, 则 $E=\bigcup\limits_{k=1}M_k$. 利用定理 2.3.1 第一步中的证法可以证明, M_k 中必有某个集, 记 M_{k_0} 在 E 中的某个闭球 $Q(x_0,r_0)=\{x:\|x-x_0\|\leqslant r_0\}$ 中稠密. 因 M_{k_0} 是闭集, 故 $Q(x_0,r_0)\subset M_{k_0}$.

任取 $x\in E, x\neq\theta$, 则 $x_0+\frac{r_0x}{\|x\|}$, $x_0-\frac{r_0x}{\|x\|}$ 均属于 $Q(x_0,r_0)$, 因此更属于 M_{k_0}, 所以

$$p\left(x_0+\frac{r_0x}{\|x\|}\right)\leqslant k_0,\ p\left(x_0-\frac{r_0x}{\|x\|}\right)\leqslant k_0$$

由(42), $p\left(x_0-\frac{r_0x}{\|x\|}\right)=p\left(\frac{r_0x}{\|x\|}-x_0\right)$, 再由性质 2°, 得

$$p\left(\frac{2r_0x}{\|x\|}\right)=p\left(\frac{r_0x}{\|x\|}+x_0+\frac{r_0x}{\|x\|}-x_0\right)\leqslant$$
$$p\left(\frac{r_0x}{\|x\|}+x_0\right)+p\left(\frac{r_0x}{\|x\|}-x_0\right)\leqslant 2k_0$$

最后由性质 1°, 得

$$p(x)\leqslant\frac{k_0}{r_0}\|x\|$$

因此对一切 $\alpha \in A$，有

$$\|T_\alpha x\| \leqslant \frac{k_0}{r_0}\|x\|$$

即对一切 $\alpha \in A$，$\|T_\alpha\| \leqslant \frac{k_0}{r_0}$. 证毕.

共鸣定理告诉我们，为了证明某一给定的有界线性算子族 $\{T_\alpha\}(\alpha \in A)$ 一致有界，只需证明对 E 中的每个点 x，$\{T_\alpha x\}(\alpha \in A)$ 是 E_1 中的有界集即可，就是说，由 $\{T_\alpha x\}(\alpha \in A)$ 对每个 $x \in E$ 的有界性可以导出 $\{T_\alpha\}(\alpha \in A)$ 的一致有界性. 因此共鸣定理有时又称为一致有界原理.

现在我们可以进一步研究算子列的强收敛. 主要问题是:

1° 强收敛的算子列具有什么性质，这主要是指强收敛的算子列是否一致有界?

2° 算子列满足什么条件时是强收敛的?

3° $B(E, E_1)$ 在算子强收敛的意义下是否完备?

现在先回答第一个问题. 由共鸣定理立即可得

推论 2.3.2 设 E 是巴拿赫空间，E_1 是赋范线性空间，T、$T_n \in B(E, E_1)(n = 1,2,3,\cdots)$. 如果 $\{T_n\}$ 强收敛于 T，则 $\{T_n\}$ 一致有界.

证 由假设，对每个 $x \in E$，$Tx_n \to Tx(n \to \infty)$，故 $\{T_n x\}$ 有界，由共鸣定理，$\{\|T_n\|\}(n = 1,2,3,\cdots)$ 有界即 $\{T_n\}$ 一致有界. 证毕.

定理 2.3.6 设 $\{T_n\}(n = 1,2,3,\cdots)$ 是由赋范线性空间 E 到巴拿赫空间 E_1 的有界线性算子列，如果满足下面的条件:

(ⅰ) $\{\|T_n\|\}$ 是有界数列;

(ⅱ) 对于 E 中的某一稠密子集 G 中的每个元素 x，$\{T_n x\}$ 收敛，则 $\{T_n\}$ 强收敛于一有界线性算子 $T \in B(E, E_1)$ 且

$$\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|T_n\| \tag{43}$$

证 因$\{\|T_n\|\}$有界,故存在$M>0$,使对一切$n=1,2,3,\cdots$,$\|T_n\|\leqslant M$.任取$x\in E$,注意到G在E中稠密,故对任给的$\varepsilon>0$,存在$y\in G$,使

$$\|x-y\|<\frac{\varepsilon}{3M}$$

由定理的条件(ii),$\{T_n y\}$收敛,故存在$N>0$使对一切$n>N$以及任意的自然数k,有

$$\|T_{n+k}y-T_n y\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是

$$\begin{aligned}\|T_{n+k}x-T_n x\|&\leqslant\|T_{n+k}x-T_{n+k}y\|\\&+\|T_{n+k}y-T_n y\|+\|T_n y-T_n x\|\\&\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon\end{aligned}$$

故$\{T_n x\}$是基本列.由于E_1完备,故$\{T_n x\}$收敛.令

$$Tx=\lim_{n\to\infty}T_n x\quad(x\in E)$$

则知T是定义在E上而值域包含在E_1中的线性算子,再由

$$\begin{aligned}\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_n x\|=\liminf_{n\to\infty}\|T_n x\|\leqslant\\\liminf_{n\to\infty}(\|T_n\|\|x\|)=(\liminf_{n\to\infty}\|T_n\|)\|x\|\end{aligned}$$

可知T有界且

$$\|T\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|T_n\|$$

即(43)成立.根据算子列强收敛的定义可知$\{T_n\}$强收敛于T.证毕.

在2.1节中,我们曾经证明当E_1完备时,线性算子空间$B(E,E_1)$也是完备的.现在还可以证明当E、E_1都完备时,$B(E,E_1)$对于算子列的强收敛也是完备的,因此回答了关于算子列强收敛的第三个问题.

定理2.3.7 设E、E_1都是巴拿赫空间,则$B(E,E_1)$在算子

列强收敛的意义下是完备的.

证　设$\{T_n\}\subset B(E,E_1)(n=1,2,3,\cdots)$是给定的有界线性算子列,对每个$x\in E$,$\{T_n\}$是基本列.我们要证明$\{T_n\}$是强收敛的.

因$\{T_n\}$是基本列,故$\{\|T_nx\|\}$有界,由共鸣定理可知$\{\|T_n\|\}$有界.注意到E_1是巴拿赫空间,故对每个$x\in E$,$\{T_nx\}$收敛.于是$\{T_n\}$满足定理2.3.6中的条件(ⅰ)、(ⅱ).由定理2.3.6,$\{T_n\}$强收敛于某一有界线性算子.证毕.

我们应当注意,在定理2.3.5、定理2.3.6及定理2.3.7中,关于空间E、E_1的假定彼此不同,在定理2.3.5及其推论中,需假定E是巴拿赫空间.在定理2.3.6中,需假设E_1是巴拿赫空间,而在定理2.3.7中则需假定E、E_1都是巴拿赫空间.

作为共鸣定理的应用,我们介绍几个实例,它们都是共鸣定理在各个不同问题上的特殊形式.

例2.3.4　(傅立叶级数的发散问题)令$C_{2\pi}$为定义在实轴上以2π为周期的实周期连续函数组成的集,在$C_{2\pi}$中定义范数

$$\|x\|=\max_{-\infty<t<+\infty}|x(t)|\quad(x(t)\in C_{2\pi})$$

则$C_{2\pi}$是一个巴拿赫空间.

设$x(t)\in C_2$的傅立叶级数是

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

由数学分析知道,上述级数前$n+1$项的和为

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(s-t)\right]\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(s-t)}{2\pi\sin\frac{1}{2}(s-t)}\mathrm{d}s$$

令 $K_n(s,t)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(s-t)}{2\pi\sin\frac{1}{2}(s-t)}$，称 $K_n(s,t)$ 为狄利希莱核.

我们的目的是证明：对任一点 $t_0\in[-\pi,\pi]$，$C_{2\pi}$ 中必有函数 $x(t)$，它的傅立叶级数在 t_0 处发散. 因 $C_{2\pi}$ 中的函数均以 2π 为周期，不失一般性，可设 $t_0=0$. 对每个 n，作 $C_{2\pi}$ 上的线性泛函

$$f_n=\int_{-\pi}^{\pi}x(s)K_n(s,0)\mathrm{d}s$$

由 $K_n(s,0)=\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ks$，可知 $K_n(s,0)$ 是连续的，故 f_n 有界. 我们可以证明：

$$\|f_n\|=\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(s,0)|\mathrm{d}s$$

现在估计积分 $\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(s,0)|\mathrm{d}s$. 注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(s,0)|\mathrm{d}s=\int_{0}^{2\pi}|K_n(s,0)|\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})s\right|}{\left|\sin\frac{1}{2}s\right|}\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\mathrm{d}t\geqslant$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u$$

由数学分析可知 $\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\to\infty\ (n\to\infty)$. 故

$$\|f_n\|=\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(s,0)|\mathrm{d}s\to\infty$$

由共鸣定理或它的推论可知，至少存在某个函数 $x_0(t)\in C_{2\pi}$，使 $\{f_n(x_0)\}$ 发散，即 $x_0(t)$ 的傅立叶级数在 $t=0$ 处发散.

例 2.3.5 （机械求积公式的收敛问题）设 $f(t)\in C[0,1]$，我们的目的是计算积分 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. 一般来说，求其精确值是困难

的,往往只能求近似值.取[0,1]中的点

$$0 \leqslant t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \cdots \leqslant t_n^{(n)} \leqslant 1$$

用和$\sum_{k=1}^{n} f(t_k^{(n)}) A_k^{(n)}$作为$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$的近似值,即

$$\sum_{k=0}^{n} f(t_k^{(n)}) A_k^{(n)} \approx \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \quad \text{(机械求积公式)}$$

其中$A_k^{(n)}(k=0,1,\cdots,n)$是这样选择,使得上式对一切次数$\leqslant n$的多项式精确地成立(事实上,只需对函数$1,t,t^2,\cdots,t^n$成立即可).现在的问题是:当$n \to \infty$时对每个$f \in C[0,1]$,机械求积公式$\sum_{k=0}^{n} f(t_k^{(n)}) A_k^{(n)}$是否收敛于积分$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,即对每个$f \in C[0,1]$是否都有

$$\sum_{k=0}^{n} f(t_k^{(n)}) A_k^{(n)} \to \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \tag{44}$$

利用共鸣定理的推论可以证明,(44)成立的充要条件是存在常数M,使对一切n有

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant M \tag{45}$$

我们先作$C[0,1]$上的有界线性泛函F_n:

$$F_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(t_k^{(n)}) A_k^{(n)}$$

可以证明F_n的范数满足

$$\|F_n\| = \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \tag{46}$$

其实对任一$f(t) \in C[0,1]$,有

$$|F_n(f)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f(t_k^{(n)}) A_k^{(n)}\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|\right)\|f\|$$

故

$$\|F_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \tag{47}$$

另一方面，对每个 $n(n=1,2,3,\cdots)$，可取 $[0,1]$ 上的连续函数 $f_n(t)$ 使 $\|f_n\|=1$，且

$$f_n(t_k^{(n)})=\operatorname{sgn}A_k^{(n)}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

于是

$$\|F_n\|\geqslant|F_n(f_n)|=\sum_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|\tag{48}$$

由(47)、(48) 即得(46).

现在再证明(45) 式的充要性. 如果对每个 $f\in C[0,1]$，(44) 成立，由共鸣定理的推论，$\{F_n\}$ 一致有界，即存在 $M>0$，使对一切 n，$\|F_n\|\leqslant M$，故(45) 成立. 反之，如果(45) 成立，对每个多项式 $p(t)$，只要取 n 大于 $p(t)$ 的次数，就有

$$\sum_{k=0}^{n}p(t_k^{(n)})A_k^{(n)}=\int_0^1 p(t)\mathrm{d}t$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}p(t_k^{(n)})A_k^{(n)}=\int_0^1 p(t)\mathrm{d}t$$

对一切多项式都成立. 注意到多项式的全体在 $C[0,1]$ 中稠密，故 (44) 成立.

例 2.3.6(拉格朗日插值公式的发散问题)　在内插理论中，我们往往用拉格朗日(J. L. Lagrange) 公式来求已知连续函数的近似多项式. 设 $x(t)\in C[a,b]$，在 $[a,b]$ 内任取 n 个点 $a\leqslant t_1<t_2<\cdots t_n\leqslant b$，作多项式

$$l_k(t)=\frac{(t-t_1)\cdots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\cdots(t-t_n)}{(t_k-t_1)\cdots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\cdots(t_k-t_n)}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$. 再令

$$y=L_nx:y(t)=\sum_{k=1}^{n}x(t_k)l_k(t).$$

则 L_n 是 $C[a,b]$ 到其自身的有界线性算子且

$$\|L_n\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|\tag{49}$$

在函数逼近论中已经证明上式右端大于$\frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$，故$\|L_n\|\to\infty(n\to\infty)$，由共鸣定理和它的推论可知，$C[a,b]$中至少存在一个函数$x(t)$使$L_n x$不收敛.

例 2.3.7 设$f(t)$是$[a,b]$上的可测函数，如果对于任一$g(t)\in L^q[a,b](1\leqslant q\leqslant+\infty)$，有$f(t)g(t)\in L[a,b]$，则$f(t)\in L^p[a,b]$（当$1<q<\infty$时，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，当$q=1$时，$p=+\infty$，当$q=+\infty$时，$p=1$）.

证明 令$f_n(t)=\begin{cases}f(t) & \text{当}\,|f(t)|\leqslant n\,\text{时}\\ 0 & \text{当}\,|f(t)|>n\,\text{时}\end{cases}$，并且定义$F_n$为$L^q[a,b]$上有界线性泛函，其定义为：

$$F_n(g)=\int_a^b f_n(t)g(t)\mathrm{d}t\quad \text{对任何}\ g\in L^q[a,b]$$

则对每个$g\in L^q[a,b]$，$|F_n(g)|$有上界$\int_a^b|f(t)g(t)|\mathrm{d}t$. 由共鸣定理知$\|F_n\|=\|f_n\|_p$（此等式的证明将在下一节给出）有界，记这个界为$M$. 即$\|f_n\|_p\leqslant M$，由法都引理知，$\|f\|_p\leqslant M$，从而结论成立.

例 2.3.8 设$\{\eta_n\}$为一数列，若对一切$x=\{\xi_n\}\in l^q(1\leqslant q\leqslant+\infty)$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_n\xi_n$收敛，则$\{\eta_n\}\in l^p$（这里的$p$与上题同）.

证明 定义l^q上的有界线性泛函F_n为：

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\eta_k\xi_k\ \text{对任何}\ x\in l^q$$

显然$F_n(x)$对于每个$x\in l^q$有界，从而由共鸣定理知，$\|F_n\|=(\sum\limits_{k=1}^{n}|\eta_k|^p)^{1/p}$有界，从而$(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p)^{1/p}$收敛，因此结论成立.

2.4 共轭空间与共轭算子

在本节中我们要讨论一个线性赋范空间上所有线性有界泛函全体组成的集合的整体性质. 由于线性有界算子就是从某个线性赋范空间到数域上的线性有界算子. 所以它们按算子范数也构成线性赋范空间. 除此之外,我们还要讨论各空间的线性算子之间的关系.

先看几个具体空间的例子.

某些具体空间上的有界线性泛函

Ⅰ. **空间 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函**

定理 2.4.1 设 f 为 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函,则必存在定义在 $[a,b]$ 上的有界变差函数 $v(t)$ 使对一切 $x(t)\in C[a,b]$,有

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t) \tag{50}$$

且 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)=\|f\|$,这里 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$ 表 $v(t)$ 在 $[a,b]$ 上的总变分. 反之,对任一在 $[a,b]$ 上具有有界变差的函数 $v(t)$, (50) 式定义了 $C[a,b]$ 上惟一的有界线性泛函 f.

证 定义 $\chi_s(t)$ 如下:

$$\chi_s(t)=\begin{cases}1 & \text{当 } a\leqslant t\leqslant s\\ 0 & \text{当 } s<t\leqslant b\end{cases}\quad (s\in[a,b])$$

因 $C[a,b]$ 是 $L^\infty[a,b]$ 的子空间,故 f 可延拓到 $L^\infty[a,b]$ 上且保持范数不变,记延拓后的泛函为 F. 令

$$v(s)=F(\chi_s)$$

则 $v(s)$ 是有界变差函数,且 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)\leqslant\|f\|$. 其实,取分点

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

令

$$\varepsilon_j = \mathrm{sgn}[v(t_j) - v(t_{j-1})] \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

则

$$\sum_{j=1}^{n} |v(t_j) - v(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j [v(t_j) - v(t_{j-1})] =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j [F(\chi_{t_j}) - F(\chi_{t_{j-1}})] = F[\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (\chi_{t_j} - \chi_{t_{j-1}})] \leqslant$$

$$\|F\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (\chi_{t_j} - \chi_{t_{j-1}}) \right\|$$

因$\|F\| = \|f\|$，$\left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (\chi_{t_j} - \chi_{t_{j-1}}) \right\| = 1$，故

$$\sum_{j=1}^{n} |v(t_j) - v(t_{j-1})| \leqslant \|f\|$$

于是 $v(s)$ 具有有界变差且 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v) \leqslant \|f\|$.

任取 $x(t) \in C[a,b]$，令

$$y(s) = \sum_{j=1}^{n} x(t_j)[\chi_{t_j}(s) - \chi_{t_{j-1}}(s)]$$

则

$$F(y) = \sum_{j=1}^{n} x(t_j)[v(t_j) - v(t_{j-1})] \tag{51}$$

记 $\delta = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |t_j - t_{j-1}|$，则当 $\delta \to 0$ 时，$\|y - x\| \to 0$，由 F 的连续性，$F(y) \to F(x)$. 再由 RS 积分的定义，(51) 的右边趋于 $\int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t)$，因此

$$F(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t)$$

因 $x(t) \in C[a,b]$，故 $F(x) = f(x)$，于是(50) 成立. 由 $R-S$ 积分的性质，对一切 $x(t) \in C[a,b]$，有

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t) \right| \leqslant \|x\| \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v) \tag{52}$$

故$\|f\|\leqslant\bigvee_a^b(v)$.但已经证明$\|f\|\geqslant\bigvee_a^b(v)$,于是$\|f\|=\bigvee_a^b(v)$.定理的第一部分证毕.

现在,设 $v(t)$ 为定义在$[a,b]$上的有界变差函数,令

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t) \tag{53}$$

由 RS 积分的线性以及不等式(52),(53) 式确实定义了 $C[a,b]$ 上惟一的有界线性泛函 f.

Ⅱ.空间 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函

定理 2.4.2 设 f 是空间$L^p[a,b]$上的有界线性泛函,则存在惟一的函数 $y(t)\in L^q[a,b]$,这里 $q=p(p-1)^{-1}$,使

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{54}$$

同时,f 的范数由

$$\|f\|=\|y\|=\left(\int_a^b|y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \tag{55}$$

给出.

反之,对任何 $y(t)\in L^q[a,b]$,(54) 定义了 $L^p[a,b]$ 上惟一的有界线性泛函 f.

证 令 $\chi_s(t)=\begin{cases}1 & 当\ a\leqslant t\leqslant s\\ 0 & 当\ s<t\leqslant b\end{cases}\quad(s\in[a,b])$

记 $g(s)=f(\chi_s)$,则 $g(s)$ 是绝对连续函数.其实,设 $\delta_j=[s_j,t_j](j=1,2,\cdots,n)$ 是一组包含在$[a,b]$中且没有公共内点的闭区间,记 $\varepsilon_j=\mathrm{sgn}[g(t_j)-g(s_j)]$,则

$$\sum_{j=1}^n|g(t_j)-g(s_j)|=\sum_{j=1}^n\varepsilon_j[g(t_j)-g(s_j)]=$$

$$f\left[\sum_{j=1}^n\varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{s_j})\right]\leqslant\|f\|\left\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{s_j})\right\|=$$

$$\|f\|\left(\int_a^b\left|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j[\chi_{t_j}(\xi)-\chi_{s_j}(\xi)]\right|^p\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$\|f\|\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{\delta_j}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|\left(\sum_{j=1}^{n} m\delta_j\right)^{\frac{1}{p}}$$

故 $g(s)$ 绝对连续.

令 $y(s) = g'(s)$,则 $y(s) \in L[a,b]$,注意到 $\chi_a(t)$ 对等于零,故 $g(a) = f(\chi_a) = 0$,于是 $g(s) = g(a) + \int_a^s y(t)\mathrm{d}t = \int_a^s y(t)\mathrm{d}t$.已设 $g(s) = f(\chi_s)$,所以

$$f(\chi_s) = \int_a^s y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \chi_s(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{56}$$

现在设 $x(t)$ 为任一有界可测函数,我们取一致有界的阶梯函数列 $\{x_n(t)\}$ 几乎处处收敛于 $x(t)$.由(56)及 f 的线性,得到

$$f(x_n) = \int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{57}$$

再根据勒贝格控制收敛定理,易知以下两个结论都成立:

$$\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t \to \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$$

$$\|x_n - x\| = \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

在(57)中令 $n \to \infty$,便得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{58}$$

现在证明 $y(t) \in L^q[a,b]$.作如下的有界可测函数:

$$y_n(t) = \begin{cases} |y(t)|^{q-1}\mathrm{sgn}\,y(t) & \text{当}\ |y(t)| \leqslant n \\ 0 & \text{当}\ |y(t)| > n \end{cases}$$

则

$$f(y_n) = \int_a^b y_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_{E_n} y_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_{E_n} |y(t)|^q\mathrm{d}t \tag{59}$$

其中 E_n 为 $[a,b]$ 中使 $|y(t)| \leqslant n$ 的点的全体.另一方面,

$$f(y_n) \leqslant \|f\| \|y_n\| = \|f\| (\int_{E_n} |y_n(t)|^p \mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\|f\| (\int_{E_n} |y(t)|^{(q-1)p} \mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}} = \|f\| (\int_{E_n} |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}} \tag{60}$$

比较(59)(60),得

$$(\int_{E_n} |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|$$

再令 $n \to \infty$,便有

$$\|y\| \leqslant (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\| \tag{61}$$

即

$$y(t) \in L^q$$

下面证明,对任一 $x(t) \in L^p$,有

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) \mathrm{d}t$$

取有界可测函数列$\{x_n(t)\}(n = 1,2,3,\cdots)$,使

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t \to 0 \tag{62}$$

因 $x_n(t)$ 有界可测,故(58)对于每个 $x_n(t)$ 都成立.将 $x_n(t)$ 代入(58)并令 $n \to \infty$,得

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) \mathrm{d}t$$

即(54)成立.现在证明等式(55).其实对任何 $x(t) \in L^p[a,b]$,由(54)及赫尔德不等式,得

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t) y(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \|x\| \|y\|$$

故$\|f\| \leqslant \|y\|$,再由(61),得到$\|f\| = \|y\|$,即(55)成立.由此可知对每个 f,满足(54)的 $y(t)$ 是惟一的.定理的第一部分全部证毕.

反之,设 $y(t) \in L^q[a,b]$,令

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) \mathrm{d}t \tag{63}$$

则 f 显然是定义在$L^p[a,b]$上的线性泛函. 再由赫尔德不等式,可知 f 是有界的. 定理全部证毕.

Ⅲ. 空间 $L[a,b]$ 上的有界线性泛函

设 f 为$L[a,b]$上的有界线性泛函,则存在惟一的本性有界可测函数 $y(t)(t\in[a,b])$,使

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{64}$$

反之,对任何本性有界的可测函数 $y(t)$,由(64)定义了 $L[a,b]$ 上惟一的有界线性泛函 f.

还可以证明,f 的范数由

$$\|f\|=\underset{t\in[a,b]}{\operatorname{varisup}}|y(t)| \tag{65}$$

给出.

Ⅳ. 空间 $l^p(1<p<+\infty)$、l^2 及 R^n 上的有界线性泛函

l^p 上的有界线性泛函f具有下面的形式:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\xi_k \tag{66}$$

其中 $c=\{c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots\}\in l^q(q=p(p-1)^{-1})$. 反之,任取 $c=\{c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots\}\in l^q$,由(66)定义了 l^p 上惟一的有界线性泛函 f,此外还可以证明$\|f\|=(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^q)^{\frac{1}{q}}$.

特别地,若 $p=2$,则 l^2 空间上的有界线性泛函 f 也具有(66)的形式,但 $c=\{c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots\}\in l^2$. 反之,任取 $c=\{c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots\}\in l^2$,由(66)定义了 l^2 上惟一的有界线性泛函 f,而且可以证明$\|f\|=(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^2)^{\frac{1}{2}}$.

如果考虑 n - 维欧几里得空间 R^n,则 R^n 上的有界线性泛函f具有下面的形式:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\xi_k$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是某些数.反之,对于任给的数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$,由上式定义了 R^n 上惟一的有界线性泛函 f,而且可以证明

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

共轭空间:设 E 是赋范线性空间,相应的数域为 K,我们称 E 上的全部有界线性泛函组成的集合 $B(E,K)$ 为 E 的共轭空间,记为 E^*.由于数域 K 是完备的,故任何赋范线性空间的共轭空间一定是完备的.

对于一个实(或复)赋范线性空间 E,称它的共轭空间 E^* 的共轭空间为 E 的二次共轭空间,记为 E^{**}.类似地,还可定义 E^{***} 等.

现在来考察 E 与 E^{**} 的关系.设 $x \in E, f \in E^*$,于是 $f(x)$ 是实(或复)数.原来的想法是:泛函 f 是固定的,而 x 跑遍 E.现在换一种看法:让 x 固定而让 f 跑遍 E^*,这时 $f(x)$ 就成了定义在 E^* 上的有界线性泛函,因此对任一 $x \in E$,必对应于 E^{**} 中的某一元,记为 F_x.这个对应有下列性质:

1° 对应是线性的,即

$$F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}, F_{\alpha x} = \alpha F_x. \quad (x_1, x_2, x \in E) \quad (67)$$

其实,对任一 $f \in E^*$,有

$$F_{x_1+x_2}(f) = f(x_1) + f(x_2) = F_{x_1}(f) + F_{x_2}(f) = (F_{x_1} + F_{x_2})(f)$$

$$F_{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha F_x(f)$$

因 $f \in E^*$ 是任意的,故 $F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}, F_{\alpha x} = \alpha F_x$ 即(67)式成立.

2° 对应是等距的即对 $\forall x \in E$ 有 $\|F_x\| = \|x\|$,因此是一对一的.

其实,对任一 $f \in E^*$,有

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\| \|f\|$$

故$\|F_x\| \leqslant \|x\|$.另一方面,对于 x,存在 $f_0 \in E^*$ 使

$$\|f_0\| = 1, \quad |f_0(x)| = \|x\|$$

于是 $$\|F_x\| \geqslant |F_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\|$$

即$\|F_x\| \geqslant \|x\|$,所以$\|F_x\| = \|x\|$.

由 1° 及 2°,除去等距同构不记外,E 可以看成是 E^{**} 中的一个子空间.如果 E 是巴拿赫空间,则可以看成是 E^{**} 中的闭子空间.一般说来,$E \neq E^{**}$,若 $E = E^{**}$,则称 E 为自反空间.

用同样方法可用来讨论 E^* 与 E^{***} 之间的关系,等等.

现在回过来考察几个具体空间.

对 $L^p[a,b](1 < p < +\infty)$ 来说,通过(54),$L^p[a,b]$ 上的每个有界线性泛函 f 惟一地对应于$L^q[a,b](q = p(p-1)^{-1})$ 中的一个函数 $y(t)$,我们用 T 表示这个对应,即

$$Tf = y$$

其中 f,y 满足关系(54).由定理 2.3.3,T 是由$(L^p[a,b])^*$ 到 $L^q[a,b]$ 上的映射,且

$$T(f+g) = Tf + Tg$$
$$T(\alpha f) = \alpha Tf$$
$$\|Tf\| = \|f\|$$

即 T 是$(L^p[a,b])^*$ 到 $L^q[a,b]$ 上的等距同构映射,因此我们可以将 f 与 y 视为同一.于是 $L^q[a,b]$ 就是 $L^p[a,b]$ 的共轭空间.由此可知 $L^p[a,b]$ 也是 $L^q[a,b]$ 的共轭空间,故 $L^p[a,b]$ 是自反空间.

对 $l^p(1 < p < +\infty)$ 来说,它的共轭空间是 l^q,而 l^q 的共轭空间是 l^p,故 l^p 是自反空间.

对 $L^2[a,b]$,l^2,R^n 来说,它们的共轭空间就是它们自己,即满足关系

$$(L^2[a,b])^* = L^2[a,b], \quad (l^2)^* = l^2, \quad (R^n)^* = R^n$$

我们称它们是自共轭空间.

关于空间 $C[a,b]$,我们已经给出了它上面的有界线性泛函

的一般形式,但关于它的共轭空间,还需用到 $R-S$ 积分的一些性质才便于讨论,这里就从略了.

有了共轭空间的概念,便可引入共轭算子的概念.

设 T 是由赋范线性空间 E 到赋范线性空间 E_1 的有界线性算子.任取 $f\in E_1^*$,那么由

$$f^*(x)=f(Tx)\quad(x\in E)$$

定义了 E 上的一个有界线性泛函 f^*.显然,对每一个 $f\in E_1^*$,对应于惟一的 $f^*\in E^*$,T^* 记这个对应关系,即 $T^*f=f^*$,于是 T^* 便是 E_1^* 到 E^* 中的算子.

定义 2.4.1 称 T^* 为 T 的共轭算子.

由定义容易看出,对任一 $x\in E$ 以及任一 $f\in E_1^*$,有

$$(T^*f)(x)=f(Tx)\tag{68}$$

共轭算子还具有下面的性质:

1° T 的共轭算子 T^* 是有界线性算子,且

$$\|T^*\|=\|T\|\tag{69}$$

2° $(\alpha T)^*=\alpha T^*$,这里 α 为数.

3° $(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$,这里 $T_1,T_2\in B(E,E_1)$.

4° $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$,这里 $T_1\in B(E,E_1)$,$T_2\in B(E_1,E_2)$,E_2 也是赋范线性空间.

5° 设 $T\in B(E,E_1)$ 有有界的逆算子,则 T^* 也有有界的逆算子,且 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

6° T 的共轭算子也有共轭算子 $(T^*)^*$,我们将它简单地记为 T^{**},则 $\|T^{**}\|=\|T\|$.若将 E 看成 E^{**} 的子空间,则 T^{**} 是 T 的延拓.

我们只证明性质 1°,5°,6°.

性质 1° 的证明 T^* 的线性是明显的.现在证明 T^* 的有界性.由(68),对任一 $x\in E$ 及任一 $f\in\in E^*$,有

$$|(T^*)f(x)|=|f(T(x))|\leqslant\|f\|\|T\|\|x\|$$

于是$\|T^* f\| \leqslant \|T\|\|f\|$,故 T^* 有界且$\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

由定理 2.3.1 推论 2.3.1,对任一 $x \in E$,有 $f_0 \in E_1^*$,使

$$f_0(Tx) = \|Tx\|;\quad \|f_0\| = 1$$

故

$$\|Tx\| = |f_0(Tx)| = |(T^* f_0)(x)| \leqslant$$
$$\|T^* f_0\|\|x\| \leqslant \|T^*\|\|f_0\|\|x\| = \|T^*\|\|x\|$$

因 $x \in E$ 是任意的,得$\|T\| \leqslant \|T^*\|$,故$\|T^*\| = \|T\|$,即(69) 成立.

性质 5° 的证明 由于 T^{-1} 是从 E_1 到 E 的有界线性算子,故 $(T^{-1})^*$ 是从 E^* 到 E_1^* 的有界线性算子.任取 $x \in E, f \in E^*$,则

$$[T^*(T^{-1})^* f](x) = [(T^{-1})^* f](Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x)$$

因 $x \in E$ 是任意的,故

$$T^*(T^{-1})^* f = f$$

又因 $f \in E^*$ 是任意的,故

$$T^*(T^{-1})^* = I_{E^*} \tag{70}$$

这里 I_{E^*} 是 E^* 中的恒同算子.

再任取 $y \in E_1, g \in E_1^*$,有

$$[(T^{-1})^* T^* g](y) = [T^* g](T^{-1}y) = g(TT^{-1}y) = g(y)$$

因 $y \in E_1, g \in E_1^*$ 都是任取的,故

$$(T^{-1})^* T^* = I_{E_1^*} \tag{71}$$

这里 $I_{E_1^*}$ 是 E_1^* 中的恒同算子.

由(70)、(71) 可知 T^* 以$(T^{-1})^*$ 为它的有界逆算子.

性质 6° 的证明 $\|T^{**}\| = \|T\|$ 由性质 1° 立即导出.现证 T^{**} 是 T 的延拓.任取 $x \in E$ 及$f \in E^*$,设 x^{**} 是 x 在E^{**} 中的对应元,则

$$(T^{**} x^{**})(f) = x^{**}(T^* f) = (T^* f)(x) =$$
$$f(Tx) = (Tx)^{**}(f)$$

因 $f\in E_1^*$ 是任意的,所以

$$T^{**}x^{**}=(Tx)^{**} \tag{72}$$

若将 E 视为E^{**} 的子空间,则 x 与x^{**} 可视为同一元.同理可把 $(T_x)^{**}$ 看成 T_x,于是(72) 可以写成 $T^{**}x=Tx$,这表明 T^{**} 是 T 的延拓.

在不少情况下,往往需要求出给定的有界线性算子的共轭算子的具体形式,我们仅举两例以说明其方法.

例 2.4.1 设$A=(a_{ij})$是 $m\times n$ 矩阵,这里 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$是实数;下标 i 表示行,下标 j 表示列.由 A 定义了一个由 n − 维实欧几里得空间 R^n 到m − 维实欧几里得空间 R^m 的算子T:

$$y=Tx\quad \eta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n,y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)\in R^m$.容易证明 T 是有界线性算子.由于实欧几里得空间是自共轭的,故由共轭算子的定义可知,T^* 是由 R^m 到R^n 的有界线性算子.现在求出 T^* 的具体形式.由本节的 Ⅳ,R^m 上的每个有界线性泛函f可以表成:

$$f(y)=\sum_{i=1}^{m}c_i\eta_i$$

于是

$$(T^*f)(x)=f(Tx)=\sum_{i=1}^{m}c_i(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_i\xi_j=$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}c_i)\xi_j=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}a_{ji}c_j)\xi_i \tag{73}$$

这里记号 i,j 对调了一下,目的是仍用 i 表示行,用 j 表示列.由(73) 可知

$$T^*f=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$$

其中 $$d_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} c_j \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

这表明 T^* 由 A 的转置矩阵 (a_{ji}) 所定义.

例 2.4.2 设 $K(t,s)$ 是变量 t 及 s 的实可测函数($a \leqslant t \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b$)满足

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^q \mathrm{d}t\mathrm{d}s < +\infty$$

设 T 是以 $K(t,s)$ 为核的积分算子,即

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s \quad (x(t_0) \in L^p[a,b])$$

可以证明 T 是 $L^p[a,b]$ 到 $L^q[a,b]$ 中的有界线性算子. 由于 $L^p[a,b]$、$L^q[a,b]$ 互为共轭空间,故由共轭算子的定义可知,T^* 是由 $L^p[a,b]$ 到 $L^q[a,b]$ 中的有界线性算子.现在求出 T 的具体形式.由 2.4 节的 Ⅱ,对于每个 $f \in (L^q[a,b])^*$,存在 $y(t) \in L^p[a,b]$,使对任何 $z(t) \in L^q[a,b]$ 有

$$f(z) = \int_a^b z(t)y(t)\mathrm{d}t$$

故

$$(T^* f)(x) = f(Tx) = \int_a^b y(t)\left[\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t = \int_a^b x(s)\left[\int_a^b K(t,s)y(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s$$

由于 $x(t) \in L^p[a,b]$ 是任意的,故

$$T^* f = \int_a^b K(t,s)y(t)\mathrm{d}t \tag{74}$$

因 f 与 y 可视为同一,(73) 又可写成

$$(T^* y)(s) = \int_a^b K(t,s)y(t)\mathrm{d}t$$

或 $$(T^* y)(t) = \int_a^b K(s,t)y(s)\mathrm{d}s$$

由此可见 T^* 是 $L^p[a,b]$ 到 $L^q[a,b]$ 中而以 $K_1(t,s) = K(s,t)$

为核的积分算子.

2.4.4 弱收敛

设 E 为赋范线性空间,E 的共轭空间 E^* 中的序列 $\{f_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 称为 * 弱收敛于 $f_0\in E^*$,是指对任意的 $x\in E$,有 $f_n(x)\to f_0(x)(n\to\infty)$,称 f_0 为 $\{f_n\}$ 的 * 弱极限.

由 * 弱收敛的定义可知下列性质成立:

1° * 弱收敛的极限是惟一的.

其实,若 E 上有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ 同时 * 弱收敛于 f_0 及 f'_0,由 * 弱收敛的定义可知,对任何 $x\in E$,$f_0(x)=f'_0(x)$,故 $f_0=f'_0$.

2° 有界线性泛函序列强收敛(即依 E^* 中的范数收敛)蕴含 * 弱收敛.

其实,设 $\{f_n\}\subset E^*(n=1,2,3,\cdots)$,$f_0\in E^*$ 且 $\|f_n-f_0\|\to 0(n\to\infty)$.任取 $x\in E$,有

$$|f_n(x)-f_0(x)|\leqslant\|f_n-f_0\|\|x\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

故 $\{f_n\}$ * 弱收敛于 f_0.

3° 设 E 是巴拿赫空间.如果 E 上的有界线性泛函序列 $\{f_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ * 弱收敛于 $f_0\in E^*$,则 $\{\|f_n\|\}$ 是有界数列.

注意到 $\{f_n\}$ 作为有界线性泛函序列 * 弱收敛,与 $\{f_n\}$ 作为 E 到数域 K 的算子列的强收敛实际上是一回事,因此由共鸣定理的推论立即可知性质 3° 成立.

由定理 2.3.6 还可以导出 * 弱收敛的一个充分条件.

定理 2.4.3 设 E 是赋范线性空间,$\{f_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 是 E 上有界线性泛函组成的序列满足:

(i) $\{\|f_n\|\}$ 有界;

(ii) 对于 E 中的某一稠密子集 G 中的每个元素 x,$\{f_n(x)\}$ 收敛,则 $\{f_n\}$ * 弱收敛于某一有界线性泛函.

由定理 2.4.3 可以导出可分赋范线性空间上的有界线性泛函序列的一个特性.

定理 2.4.4 若赋范线性空间 E 是可分的,则由 E 上任一一致有界的线性泛函序列中,必可取出一个 * 弱收敛的子序列.

证 由 E 可分可知 E 中存在可数稠密子集 $\{x_k\}(k=1,2,3,\cdots)$. 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的一个一致有界线性泛函序列. 则

$$f_1(x_1), f_2(x_1), f_3(x_1), \cdots$$

是有界的,因此从 $\{f_n\}$ 中可选出子序列 $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \cdots$ 使数列

$$f_1^{(1)}(x_1), f_2^{(1)}(x_1), f_3^{(1)}(x_1), \cdots$$

收敛. 同理从 $\{f_n^{(1)}\}$ 中可选出子序列 $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \cdots$ 使数列

$$f_1^{(2)}(x_2), f_2^{(2)}(x_2), f_3^{(2)}(x_2), \cdots$$

收敛. 依此类推,可得

$$\left.\begin{array}{llll} f_1^{(1)}, & f_2^{(1)}, & f_3^{(1)}, & \cdots \\ f_1^{(2)}, & f_2^{(2)}, & f_3^{(2)}, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ f_1^{(n)}, & f_2^{(n)}, & f_3^{(n)}, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right\} \tag{75}$$

其中每一个序列是前一个序列的子序列,而且对每个 $k(k=1,2,3,\cdots)$

$$f_1^{(k)}(x_k), f_2^{(k)}(x_k), f_3^{(k)}(x_k), \cdots$$

收敛. 取(75) 的对角线上的泛函组成的序列

$$f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \cdots, f_n^{(n)}, \cdots$$

容易看出对每个 $k(k=1,2,3,\cdots)$,序列

$$f_1^{(1)}(x_k), f_2^{(2)}(x_k), \cdots, f_n^{(n)}(x_k), \cdots$$

收敛. 由于 $\{f_n^{(n)}\}(n=1,2,3,\cdots)$ 一致有界,$\{x_k\}(k=1,2,3,\cdots)$ 是 E 中的稠密子集,由定理 2.4.3 可知,$\{f_n^{(n)}\}$ * 弱收敛于某一有界线性泛函. 证毕.

下面讨论点列的弱收敛.

设 E 是赋范线性空间,$\{x_n\}\subset E(n=1,2,3,\cdots)$,$x_0\in E$,如果对每个 $f\in E^*$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$,则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0,称 x_0 是 $\{x_n\}$ 的弱极限.

由点列弱收敛的定义,可导出下列性质:

1° 弱收敛点列的极限是惟一的.

用反证法.设 $\{x_n\}\in E(n=1,2,3,\cdots)$ 既弱收敛于 x_0 且弱收敛于 x'_0.若 $x_0\neq x'_0$,由定理2.2.1 推论2.2.1,存在 $f_0\in E^*$ 使 $\|f_0\|=1$,$f_0(x_0-x'_0)=\|x_0-x'_0\|$.另一方面,$\{f_0(x_n)\}$ 同时收敛于 $f_0(x_0)$ 及 $f_0(x'_0)$,故 $f_0(x_0)=f_0(x'_0)$,即 $f_0(x_0-x'_0)=0$,矛盾.因此弱极限是惟一的.

2° 点列的强收敛蕴含弱收敛,反之,则不然.

证法与 * 弱收敛的性质 2° 的证法相同.关于弱收敛不能导出强收敛,参看下面例子的后半部分.

3° 设 $\{x_n\}\subset E(n=1,2,3,\cdots)$ 弱收敛于 $x_0\in E$,这里 E 是赋范线性空间,则 $\{\|x_n\|\}$ 有界.

其实,我们将 $\{x_n\}\subset E(n=1,2,3,\cdots)$ 看成 E^{**} 中的元素,则作为 E^* 上的有界线性泛函序列,$\{x_n\}$ * 弱收敛于 x_0,因 E^* 是巴拿赫空间,由 * 弱收敛的性质 3°,可知 $\{\|x_n\|\}$ 有界.

为了使读者对点列的弱收敛概念有较深入的了解,我们以 $C[a,b]$ 及 $L^p[a,b]$ 为例,讨论它们中点列弱收敛的条件.

例2.4.3 空间 $C[a,b]$ 中的点列 $\{x_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 弱收敛于 $x_0\in C[a,b]$ 的充要条件是

(ⅰ) $\{x_n(t)\}$ 作为函数列在 $[a,b]$ 上处处收敛于 $x_0(t)$;

(ⅱ) $\{\|x_n\|\}$ 为有界数列.

证 必要性.(ⅱ) 的必要性由弱收敛的性质 3° 导出.现证条件(ⅰ)的必要性.任取 $t_0\in[a,b]$,在 $C[a,b]$ 上定义泛函 f_0 如下:

$$f_0(x) = x(t_0)$$

容易看出 f_0 是有界线性泛函. 由 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0, 可知 $f_0(x_n) \to f_0(x_0)(n \to \infty)$, 即 $\{x_n(t_0)\}$ 收敛于 $x_0(t_0)$, (ⅰ) 成立.

充分性. 设 f 是 $C[a,b]$ 上任一有界线性泛函, 由本章定理 2.4.1, 存在 $[a,b]$ 上的有界变差函数 $g(t)$ 使

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t) \quad (x(t) \in C[a,b]) \tag{76}$$

(76) 的右端可以看成 $L-S$ 积分. 现设 $\{x_n(t)\}$ 满足条件(ⅰ)、(ⅱ), 由 $L-S$ 积分的勒贝格控制收敛定理, 得到

$$\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}g(t) \to \int_a^b x_0(t)\mathrm{d}g(t) \quad (n \to \infty)$$

即 $f(x_n) \to f(x_0)(n \to \infty)$, 或 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0(n \to \infty)$.

利用上例的结果, 可以在 $C[a,b]$ 中作一个弱收敛但不强收敛的点列. 为简单起见, 设 $[a,b] = [0,1]$. 令

$$x_n(t) = \frac{nt}{1+n^2t^2} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

容易看出, 对每个 $t \in [0,1]$, $\{x_n(t)\} \to 0(n \to)$. 再利用数学分析中求最大值的方法或用初等数学的方法, 可以证明

$$\|x_n\| = \frac{1}{2} \quad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{77}$$

于是条件(ⅰ)、(ⅱ) 满足, 因此 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0(n \to \infty)$. 但由 (77), $\{x_n\}$ 显然不强收敛于零.

另外上例还告诉我们, 对于一致有界的连续函数列来说, 处处收敛的概念可容纳在弱收敛的概念中.

下面讨论 $L^p[a,b]$ 中点列弱收敛的条件.

例2.4.4 $L^p[a,b]$ 中的点列 $\{x_n\}(n = 1,2,3,\cdots)$ 弱收敛于 $x_0 \in L^p[a,b]$ 的充要条件是($p > 1$)

(ⅰ) 对于每个 $t \in [a,b]$, $\int_a^t x_n(s)\mathrm{d}s \to \int_a^t x_0(s)\mathrm{d}s(n \to \infty)$;

(ⅱ) $\{\|x_n\|\}$ 为有界数列.

证 必要性.(ⅱ)的必要性由弱收敛的性质 3° 导出.现证条件(ⅰ)的必要性.作函数

$$y_t(s)=\begin{cases}1 & 0\leqslant s\leqslant t\\ 0 & t<s\leqslant b\end{cases}\quad (t\in[a,b]) \tag{78}$$

对每个给定的 $t\in[a,b]$, $y_t(s)$ 作为 s 的函数属于 $L^q[a,b]$,由定理 2.4.2 等式

$$f(x)=\int_a^b x(s)y_t(s)\mathrm{d}s=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s \tag{79}$$

定义了 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函 f.现设 $\{x_n\}\subset L^p[a,b]$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 弱收敛于 $x_0\in L^p[a,b]$,代入(79)得到

$$\int_a^t x_n(s)\mathrm{d}s\to\int_a^t x_0(s)\mathrm{d}s(n\to\infty)$$

即(ⅰ)成立.

充分性.设 $\{x_n\}\subset L^p[a,b](n=1,2,3,\cdots)$ 满足条件(ⅰ)、(ⅱ).条件(ⅰ)等价于

$$\int_a^b x_n(s)y_t(s)\mathrm{d}s\to\int_a^b x_0(s)y_t(s)\mathrm{d}s\quad (n\to\infty)$$

其中 $y_t(s)$ 为(78)中的函数,于是对任一阶梯函数

$$y(s)=\sum_{k=1}^{k}\alpha_j y_{t_j}(s) \tag{80}$$

其中 k 为任一自然数,$t_1<t_2<\cdots<t_k$ 为 $[a,b]$ 中任意 k 个点,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为任意 k 个数,有

$$\int_a^b x_n(s)y(s)\mathrm{d}s\to\int_a^b x_0(s)y(s)\mathrm{d}s\quad (n\to\infty) \tag{81}$$

而(80)中 $y(s)$ 的全体组成的集在 $L^q[a,b]$ 中稠密,由条件(ⅱ),$\{\|x_n\|\}$ 有界,于是由定理 2.4.3 可知,对任一 $y\in L^q[a,b]$,(81)仍成立,即 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0.

2.5 全连续算子

本节我们来讨论一类有比连续性更强的性质的算子.

定义 2.5.1 设 T 是定义在赋范线性空间 E 上,而值域包含在赋范线性空间 E_1 中的线性算子.如果 T 将 E 中的任一有界集映成 E_1 中的列紧集,则称 T 为全连续线性算子简称全连续算子.

由全连续算子的定义可知:

1° 全连续算子必定是连续的.

其实,由于列紧集是有界的,由 2.1 节定理 2.1.2 及定理 2.1.4 可知,全连续算子必定有界因而必定连续.

2° 算子 T 为全连续的充要条件是 T 将 E 中的闭球 $Q(\theta,1)=\{x:\|x\|\leqslant 1\}$ 映成 E_1 中的列紧集.

必要性是显然的.今证充分性.设 $A\subset E$ 为任一有界集,取正数 α_0 充分大,使 $A\subset\alpha_0 Q(\theta,1)$,这里 $\alpha_0 Q(\theta,1)$ 表一切 $\alpha_0 x$ 组成的集,而 $x\in Q(\theta,1)$,根据假定可知 $\alpha_0 T(Q(\theta,1))$ 是 E_1 中的列紧集,于是 $T(A)\subset T(\alpha_0 Q(\theta,1))=\alpha_0 T(Q(\theta,1))$ 也是 E_1 中的列紧集,故 T 全连续.

现在介绍几个全连续算子的例.

例 2.5.1 设 E、E_1 是赋范线性空间,$T\in B(E,E_1)$,如果 T 的值域是有限维的,则 T 全连续.

其实,因 T 有界,故 T 将 E 中的任一有界集映成 E_1 中的有界集,根据假定,这个有界集包含在 E_1 的有限维子空间中,故列紧,因此 T 全连续.

例 2.5.2 设 $K(t,s)$ 是定义在 $a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant s\leqslant b$ 上连续函数,则由

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

定义的算子 T 是由 $C[a,b]$ 到自身的全连续算子.

证 设 A 是 $C[a,b]$ 中的任一有界集,则存在正数 M,使对一切 $x \in A$,有 $\|x\| \leqslant M$,于是

$$|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| \leqslant \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| |x(s)| \mathrm{d}s \leqslant M\int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \mathrm{d}s$$

注意到 $K(t,s)$ 在 $a \leqslant t \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b$ 上连续,于是对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得对任意的 t_1、$t_2 \in [a,b]$,只要 $|t_1 - t_2| < \delta$,就有

$$|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \quad (s \in [a,b])$$

因此对一切 $x \in A$,有

$$|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| < \varepsilon$$

这表明 A 的像 $T(A)$ 是等度连续的.又因 T 有界,因此 $T(A)$ 有界,由空间 $C[a,b]$ 中集合的可紧性条件可知 $T(A)$ 列紧,故 T 全连续.

例 2.5.3 设无穷阵 (α_{ij}) 满足

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 < +\infty$$

则由 $$y = Tx: \eta_k = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj}\xi_j \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

(其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots\} \in l^2, y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots\} \in l^2$)定义了一个由 l^2 到 l^2 的全连续算子 T.

证 由

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj}\xi_j \right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{kj}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \right) = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \right) \|x\|^2$$

可知 T 是定义在 l^2 上且值域包含在 l^2 中的有界线性算子.

现在证明 T 的全连续性.设 A 是 l^2 中的任一有界集,故存在正数 M,使对一切 $x \in A$,有 $\|x\| \leqslant M$.由于 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 < +\infty$,于是对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{kj}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{M^2}$$

因此

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\eta_k|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj}\xi_j \right|^2 \leqslant$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{kj}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right) < \frac{\varepsilon}{M^2}\|x\|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

这表明由 $y = Tx(x \in A)$ 的前 N 个坐标 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N$ 作成的元素 $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N, 0, \cdots\}$ 的全体组成的集 B 是集合 $T(A)$ 的一个 ε - 网.由于 B 是 l^2 中一个有限维子空间内的有界集,故 B 列紧,即 $T(A)$ 有列紧 ε - 网,于是 $T(A)$ 列紧,故 T 全连续。

定理 2.5.1 设 $T \in B(E, E_1)$, $S \in B(E_1, E_2)$,这里 E, E_1, E_2 都是赋范线性空间.如果 T、S 中有一个是全连续算子,则 ST 是全连续的.其中 ST 为从 E 到 E_2 的算子对 $\forall x \in E$, $ST(x) = S[T(x)]$

证 我们仅以 S 为全连续的情形来证明定理.因为 T 将 E 中的任一有界集映成 E_1 中的有界集,而 S 将 E_1 中的有界集映成 E_2 中的列紧集,因此 ST 将 E 中的任一有界集映成 E_2 中的列紧集,故 ST 全连续.

推论 设赋范线性空间 E、E_1 中有一个是无穷维的,$T \in B(E, E_1)$ 全连续,则 T 不可能存在有界的逆算子.

证 我们只证 E 是无穷维的情形.如果 T 有有界的逆算子 T^{-1},由定理 2.5.1, $I_E = T^{-1}T$ 全连续,于是 E 中任一有界集是列紧的,故 E 为有限维,矛盾.于是 T 不可能存在有界逆算子.

定理 2.5.2 设 $T \in B(E, E_1)$.若 T 全连续,则 T 将 E 中的

弱收敛点列映成 E_1 中的强收敛点列.

证 设 $\{x_n\}\subset E(n=1,2,3,\cdots)$ 弱收敛于 $x_0\in E$,容易看出 $\{Tx_n\}$ 在 E_1 中弱收敛于 Tx_0. 我们的目的是证明 $\{Tx_n\}$ 在 E_1 中强收敛于 T_{x_0},如若不然,必存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}(k=1,2,3,\cdots)$ 使

$$\left\|T_{x_n}-T_{x_0}\right\|\geqslant\varepsilon_0 \tag{82}$$

由于 T 全连续,而 $\{x_{n_k}\}$ 有界,故从 $\{Tx_{n_k}\}$ 中必可找出一个强收敛的子列. 为简单起见,不妨假定这个强收敛的子列就是 $\{Tx_{n_k}\}$,记其极限为 y_0. 在(82) 中令 $k\to\infty$,得到

$$\|y_0-Tx_0\|\geqslant\varepsilon_0 \tag{83}$$

另一方面,$\{Tx_{n_k}\}$ 显然弱收敛于 y_0,因此 $y_0=Tx_0$,与(82) 矛盾. 这个矛盾表明 $\{Tx_n\}$ 必强收敛于 Tx_0.

定理 2.5.3 设 $T\in B(E,E_1)$,T 全连续,则 T 的值域是可分的.

证 作 E 中的球 $S(\theta,n)=\{x:\|x\|<n\}(n=1,2,3,\cdots)$,令 M_n 是 $S(\theta,n)$ 在 T 作用下的像. 由于每个 S_n 都有界,故每个 M_n 是列紧的,而列紧集必定可分,故每个 M_n 是可分的,因此 T 的值域 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 也是可分的. 证毕.

定理 2.5.4 设 E 是赋范线性空间,E_1 是巴拿赫空间,$\{T_n\}\subset B(E,E_1)(n=1,2,3)$ 依算子范数收敛于 $T\in B(E,E_1)$,则 T 也是全连续的.

证 设 A 是 E 中的任一有界集. 根据假定,对每个 n,$T_n(A)$ 是 E_1 中的列紧集. 由于 $\|T_n-T\|\to0(n\to\infty)$,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 n_0,使

$$\left\|T_{n_0}x-Tx\right\|<\varepsilon$$

对一切 $x \in A$ 成立,即 $T_{n_0}(A)$ 是 $T(A)$ 的列紧 ε - 网,已知 E_1 完备,由定理 1.2.1,可知 $T(A)$ 列紧,故 T 全连续.

定理 2.5.5 设 E 是赋范线性空间,E_1 是巴拿赫空间,则由 E 到 E_1 的全连续算子组成的集按算子的线性运算及算子的范数是 $B(E,E_1)$ 的闭子空间,因此它本身也是一个巴拿赫空间.

引理 2.5.1 设 E 为赋范线性空间,$A \subset E$ 是列紧的,$\{f_n\} \subset E^*(n=1,2,3,\cdots)$ 是一致有界线性泛函序列,$f_0 \in E^*$.若对每个 $x \in A$,$\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f_0(x)$,则 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛于 f_0.

证 因 A 列紧,易知对任给的 $\varepsilon > 0$,A 有有限的 ε - 网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$. 不妨设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\} \subset A$. 根据假设,$\{f_n(x)\}$ 对任何 $x \in A$ 收敛于 $f_0(x)$,于是对于任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使得当 $n > N$ 时,对 $j = 1,2,\cdots,k$,有

$$\left|f_n(x_j) - f_0(x_j)\right| < \varepsilon$$

今任取 $x \in A$,则存在 $x_{j_0}(1 \leqslant j_0 \leqslant k)$ 使 $\left\|x - x_{j_0}\right\| < \varepsilon$,故当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned}&\left|f_n(x) - f_0(x)\right| \leqslant \left|f_n(x) - f_n(x_{j_0})\right| + \\ &\left|f_n(x_{j_0}) - f_0(x_{j_0})\right| + \left|f_0(x_{j_0}) - f_0(x)\right| \leqslant \\ &\|f_n\| \cdot \left\|x - x_{j_0}\right\| + \varepsilon + \|f_0\| \cdot \left\|x - x_{j_0}\right\| < \\ &(K + \|f_0\| + 1)\varepsilon \end{aligned} \tag{84}$$

其中 $K = \sup\limits_{n \geqslant 1}\{\|f_n\|\}$,由(84)可知 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛于 f_0. 证毕.

定理 2.5.6 设 E、E_1 都是赋范线性空间,$T(E,E_1)$ 全连续,则 T 的共轭算子 T^* 也是全连续的.

证 由定理2.5.3,T 的值域 R 是可分的,于是 R 本身是一个可分的赋范线性空间. 设 $\{f_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 是 E_1^* 中的一个一

致有界序列. 我们将 $\{f_n\}$ 看成是定义在 R 上的泛函序列, 由定理 2.3.6, 存在 $\{f_n\}$ 的一个子序列 $\{f_{n_k}\}$ 在 R 上 * 弱收敛于某一有界线性泛函 f_0, 这里 f_0 定义在 R 上, 将 f_0 延拓到空间 E_1, 仍用 f_0 记延拓后的有界线性泛函. 如果能够证明 $\{T^* f_{n_k}\}$ 强收敛于 $T^* f_0$, 则表明 T^* 是全连续的, 因此定理得证.

取 E 中的闭球 $Q = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$. 由于 T 全连续, 故 $T(Q)$ 是 E_1 中的列紧集. 根据引理, $\{f_{n_k}\}$ 在 $T(Q)$ 上一致收敛于 f_0, 因此对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $k_0 > 0$ 使得 $k > k_0$ 时, 不等式

$$\left| f_{n_k}(Tx) - f_0(Tx) \right| < \varepsilon$$

对一切 $x \in Q$ 一致地成立. 即

$$\left| (T^* f_{n_k})(x) - (T^* f_0)(x) \right| < \varepsilon$$

对一切 $x \in Q$ 一致地成立, 于是

$$\begin{aligned} &\left\| T^* f_{n_k} - T^* f_0 \right\| = \\ &\sup_{x \in Q} \left| (T^* f_{n_k})(x) - (T^* f_0)(x) \right| \leqslant \varepsilon \quad (k > k_0) \end{aligned}$$

即 $\{T^* f_{n_k}\}$ 强收敛于 $T^* f_0$.

为以后证明定理方便, 我们引入商空间的概念.

于集合 S, 子集 $R \subset S \times S$ 称为 S 上的关系, 仍记作 R. 如果 $\langle x, y \rangle \in R$, 则记作 xRy.

定义 2.5.2 S 上的关系称为等价的. 如果

(a) xRx, 当 $x \in S$(反身性).

(b) 当 xRy 时, yRx(对称性).

(c) xRy, yRz 蕴涵 xRz(传递性).

又, $[x] = \{y \in S : yRx\}$ 称为 x 的等价类或陪集.

线性空间 X 的商空间 设 M 为 X 的子空间. 定义 xRy 为 $x - y \in M$, 则 R 是一个等价关系, 而且

$$[x] = x + M = \{x + z : z \in M\}$$

又, $X/M = \{[x] : x \in X\}$ 关于运算

$$[x]+[y]=[x+y],\alpha[x]=[\alpha x]$$
为线性空间,称为 X 关于 M 的商空间.

设 X,Y 皆线性空间,T 是从 X 到 Y 的线性变换,$N(T)=\{x\in X: Tx=0\}$(称为 T 的零空间).在 $X/N(T)$ 上定义 $\tilde{T}$ 如下:
$$\tilde{T}([X])=Tx \tag{85}$$
这时,$\tilde{T}$ 是从 $X/N(T)$ 到 Y 内的单射的线性变换,而且
$$T=\tilde{T}\cdot\Pi$$
其中
$$\Pi:\begin{cases}X\to X/N(T)\\ x\to[x]\end{cases}$$
是从 X 到 $X/N(T)$ 的自然映射.

又,$N(T)$ 有时也记作 $\ker T$,称为 T 之核.

赋范空间 X 的商空间 设 X 是赋范空间,M 是其闭子空间.考察 X/M.对于 $[x]\in X/M$,定义
$$\|[x]\|=\inf\{\|x-m\|: m\in M\}=$$
$$\inf\{\|y\|: y\in[x]\}=\operatorname{dist}(x,M)$$
容易验证这是范数.而且容易证明,若 X 是巴拿赫空间,M 是其闭子空间,则 X/M 也是巴拿赫空间.

定理 2.5.7 设 $T\in B(E)$ 全连续,$\lambda\neq0$,则 $\lambda I-T$ 的值域是 E 的闭子空间.

证 不失一般性,可设 $\lambda=1$,否则可将 T 换成 $\lambda^{-1}T$ 而研究算子 $I-\lambda^{-1}T$ 好了.令 $S=I-T$,R 表示 S 的值域.要证 R 闭.作 S 的诱导映射 $\tilde{S}: E/N(S)\to E$ 为
$$\tilde{S}[x]=Sx$$
往证对任何 $y\in\bar{R}$,都有 $y\in R$.否则存在 $y\in\bar{R}$,但 $y\notin R$.显然存在 $y_n\in R$ 满足 $y_n\to y$.记 $\tilde{S}[x_n]=y_n$.我们选择如此的 x_n,使得 $\|x_n\|\leqslant2\|[x_n]\|$.

我们首先断定 $[x_n]$ 有界.否则存在子序列 n_k 使 $\|[x_{n_k}]\|\to$

∞,令 $z_n = x_n / \| x_n \|$,则$\| z_n \| = 1$,且$\frac{1}{2} \leqslant \| [z_n] \| \leqslant 1$,$\tilde{S}[z_{n_k}] = y_n / \| [x_{n_k}] \| \to 0$,即 $z_{n_k} - Tz_{n_k} \to 0$,由于 T 为紧算子,以及$\| z_n \| = 1$,故 Tz_{n_k} 有收敛子序列(不妨设为其自身),从而 $z_{n_k} = Tz_{n_k} + y_n / \| [x_{n_k}] \|$也收敛,不妨设其极限为 z_0,从而 $z_0 = Tz_0$,即 $z_0 \in N(S)$,这样$[z_0] = 0$,但由于$\| [z_{n_k}] \| \geqslant \frac{1}{2}$,故取极限为$\| [z_0] \| \geqslant \frac{1}{2}$,矛盾.因此$[x_n]$有界.

显然,x_n 也有界,从而 Tx_n 有收敛子列,设为 $Tx_{n_k} \to z$,从而 $x_{n_k} = Sx_{n_k} + Tx_{n_k} \to z + y$,记之为 x_0,因此 $Sx_{n_k} \to Sx_0 = y$,从而 R 闭.

设 E 是赋范线性空间.$x \in E$,$f \in E^*$,如果 $f(x) = 0$,则称 x 与 f 正交,记为 $x \perp f$.设 A 是 E 的一个子集,如果 $f \in E^*$ 与 A 中的一切元正交,则称 f 与 A 正交,记为 $f \perp A$.设 B 是 E^* 中的一个子集,如果 $x \in E$ 与 B 中的一切元正交,则称 x 与 B 正交,记为 $x \perp B$.如果 $A \subset E$ 中的一切元与 $B \subset E^*$ 正交,则称 A 与 B 正交,记为 $A \perp B$.若 $A \subset E$,则记 $A^{\perp} = \{f \in E^* \mid f \perp A\}$;若 $B \subset E^*$,则记 $B^{\perp} = \{x \in E \mid x \perp B\}$.

定理 2.5.8 设 $T \in B(E)$,则有下面的结论:

(ⅰ)$R(T) = (N(T^*))^{\perp}$;

(ⅱ)$R(T^*) \subset (N(T))^{\perp}$,此外,若 $R(T)$ 闭,则 $R(T^*) = (N(T))^{\perp}$.

证 容易验证:$R(T) \perp N(T^*)$ 和 $R(T^*) \perp N(T)$.从而有$\overline{R(T)} \subset (N(T^*))^{\perp}$ 和 $R(T^*) \subset (N(T))^{\perp}$.

另一方面,若 $x \notin \overline{R(T)}$,则由汉恩-巴拿赫定理可知,存在 $f \in E^*$ 满足 $f \perp R(T)$ 且 $f(x) \neq 0$.而 $f \perp R(T)$ 等价于 $T^* f = 0$,即 $f \in N(T^*)$.从而 x 至少与 $N(T^*)$ 中的一个元 f 不正

交,因此 $x \in (N(T^*))^\perp$,这样就证明了$(N(T^*))^\perp \subset \overline{R(T)}$,因此(i)正确.

现对任一 $f \in (N(T))^\perp$,可以定义 $g: R(T) \to E$ 如下:$g(Tx) = f(x)$,显然 g 的定义是合理的.另一方面,如果 $R(T)$ 闭,则可以定义 S 为从$E/N(T)$ 到 $R(T)$ 的映射,其中 $S[x] = Tx$,,由于 S 为从巴拿赫空间到另一个巴拿赫空间的一一映射,故 S 有有界逆算子S^{-1}.从而若 $Tx \to 0$,则$[x] \to 0$,因此有 $g(Tx) = f(x) = \tilde{f}([x]) \to 0$,从而 g 在$R(T)$ 上连续,因此可以延拓到整个 E 上,并仍记为g.所以 $f = T^* g \in R(T^*)$.所以(ii)成立.

定理 2.5.9 设 $T \in B(E)$ 全连续,则有下面的结论:

(i) 设 $\lambda \neq 0$,则 $R(\lambda I - T) = (N(\lambda I^* - T^*))^\perp$,这里 I^* 表示 E^* 中的恒同算子;

(ii) 设 $\lambda \neq 0$,则 $R(\lambda I^* - T^*) = (N(\lambda I - T))^\perp$.

证 由于 $R(\lambda I - T)$ 闭,故由上面引理的结论知成立.

定理 2.5.10 设 $T \in B(E)$ 全连续,$\lambda \neq 0$,则下列两个条件等价:

(i) $R(\lambda I - T) = E$.

(ii) $N(\lambda I - T) = \{\theta\}$.

证 (i)⇒(ii):为了方便,我们记 $S = \lambda I - T$,并假设 $\lambda = 1$.对每一个 $n \in N$,令 $R_n = \{x | S^n x = 0\}$.则可知 R_n 为渐升集列.如果(ii)不成立,则 $R_1 \neq 0$,取 $0 \neq x_1 \in R_1$,由(i)可知,存在 x_2,使 $Sx_2 = x_1$,再应用(i),可找到 x_3 满足 $Sx_3 = x_2, \cdots$,依次进行下去,可得到序列$\{x_n\}$ 满足 $Sx_{n+1} = x_n$.显然 $x_{n+1} \in R_{n+1} - R_n$,从面可知 R_n 为严格渐升的闭子空间列.

由黎斯引理,我们可以找到 $y_n \in R_n$,满足$\|y_n\| = 1$,且 $d(y_n, R_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$.这样由于 $Ty_n = y_n - Sy_n$,故 $d(Ty_n, R_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$ 以及 $TR_n \subset R_n$.所以对于不同的 m, n(不妨设 $m < n$),有

$$d(Ty_n, Ty_m) \geqslant d(Ty_n, R_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$$

因此 T 将有界集$\{y_n\}$变成没有聚点的集$\{Ty_n\}$. 这与 T 为全连续算子矛盾,故(ⅱ)成立.

(ⅱ)⇒(ⅰ):我们知道 $R(\lambda I^* - T^*) = (N(\lambda I - T))^{\perp}$,故 $R(\lambda I^* - T^*) = E^*$,将(ⅰ)⇒(ⅱ)的推理应用于 T^*,得到 $N(\lambda I^* - T^*) = \{\theta\}$. 从而 $R(\lambda I - T) = (N(\lambda I^* - T^*))^{\perp} = E$,从而结论成立.

2.6 线性算子的谱理论

在线性代数、微分方程、积分方程的理论中,特征值问题是一类很重要的问题. 它有助于研究解空间的结构、变换的不变子空间的结构等问题. 特征值问题在工程上也有重要的应用. 如计算振动的频率,进行光谱研究等等. 对于一般的线性算子,类似的问题要复杂的多. 要更一般地来研究谱进而了解算于本身的结构.

定义 2.6.1 设 E 为复巴拿赫空间,$T \in B(E)$,λ 为一复数.

(ⅰ) 如果 $\lambda I - T$ 有有界逆算子,则称 λ 为 T 的正则值,正则值的全体称为 T 的正则集,以 $\rho(T)$ 表示. 当 $\lambda \in \rho(T)$ 时,用 R_λ 表示 $\lambda I - T$ 的有界逆算子$(\lambda I - T)^{-1}$,并称 R_λ 为 T 的豫解式;

(ⅱ) 如果 λ 不是 T 的正则值(即 $\lambda I - T$ 没有有界逆算子),则称 λ 为 T 的谱点,谱点的全体称为 T 的谱,以 $\sigma(T)$ 表示. $\sigma(T)$ 中的点还可以分成以下三种类型:

(a) 对 $\lambda \in \sigma(T)$,方程$(\lambda I - T)x = \theta$ 有非零解,则称 λ 为 T 的特征值,而称对应的非零解为 T 的特征元或特征向量;

(b) 对 $\lambda \in \sigma(T)$,$(\lambda I - T)x = \theta$ 只有零解,$\lambda I - T$ 的值域在 E 中稠密,则称 λ 属于 T 的连续谱.

(c) 对 $\lambda \in \sigma(T)$,$(\lambda I - T)x = \theta$ 只有零解,$\lambda I - T$ 的值域

在 E 中不稠密,则称 λ 属于 T 的剩余谱.

例 2.6.1 在 n 维复欧几里得空间 R^n 中考察三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义的算子 T,

$$y = Tx : \eta_k = \sum_{l=k}^{n} a_{kl}\xi_l \quad (k = 1,2,\cdots,n)$$

其中 $x = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,$y = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$.由线性代数知道,主对角线上的数 a_{11}、a_{22}、$\cdots$、a_{nn} 是算子 T 的特征值,而且对任何复数 λ,只要 $\lambda \neq a_{kk}(k = 1,2,\cdots,n)$,$\lambda$ 就是 T 的正则值.

例 2.6.2 考察复连续函数空间 $C[0,1]$ 中的乘法算子:

$$(Tx)(t) = tx(t)$$

设 $\lambda \notin [0,1]$,在 $C[0,1]$ 上定义算子 R_λ 于下:

$$(R_\lambda x)(t) = \frac{x(t)}{\lambda - t}$$

由于 $\lambda \notin [0,1]$ 容易证明,R_λ 是定义在 $C[0,1]$ 上且值域包含在 $C[0,1]$ 中的有界线性算子.任取 $x(t) \in C[0,1]$,有

$$[R_\lambda(\lambda I - T)x](t) = [(\lambda I - T)R_\lambda x](t) = x(t)$$

即 $R_\lambda(\lambda I - T) = (\lambda I - T)R_\lambda = I$,故 $\lambda I - T$ 有有界逆算子 R_λ,因此 λ 是 T 的正则值.

现设 $\lambda \in [0,1]$,由

$$(\lambda I - T)x(t) = (\lambda - t)x(t) \quad (x(t) \in C[0,1])$$

可知当 $t = \lambda$ 时,$(\lambda - t)x(t) = 0$,因此当 $x(t)$ 跑遍 $C[0,1]$ 时,$(\lambda - t)x(t)$ 的全体组成的集在 $C[0,1]$ 中不稠密.其次,不难证明,λ 不可能是 T 的特征值.其实,若有 $x_0(t) \in C[0,1]$,使 $(\lambda I - T)x_0(t) = (\lambda - t)x_0(t) = 0$,则当 $t \neq \lambda$ 时,$x_0(t) = 0$,由

$x_0(t)$ 的连续性，可知 $x_0(\lambda)=0$，因此对一切 $t\in[0,1]$，$x_0(t)=0$，即 $(\lambda I-T)x(t)=0$ 没有非零解. 综上所述，当 $\lambda\in[0,1]$ 时，λ 属于 T 的剩余谱.

例 2.6.3 在复 $C[0,1]$ 中考察伏泰拉积分算子：

$$(Tx)(t)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$$

当 $\lambda\neq 0$ 时，方程

$$(\lambda I-T)x(t)=y(t)$$

即

$$\lambda x(t)-\int_0^t x(s)\mathrm{d}s=y(t) \tag{86}$$

等价于方程

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}y(t)+\frac{1}{\lambda}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s \tag{87}$$

由压缩映射原理可证，对任何 $y(t)\in C[0,1]$，方程(87)存在惟一的解，故 $\lambda I-T$ 存在逆算子 $(\lambda I-T)^{-1}$. 现在证明 $(\lambda I-T)^{-1}$ 有界. 通过计算，方程(87)的解可表成：

$$x_\lambda(t)=\frac{1}{\lambda}y(t)+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^t \exp\left(\frac{t-s}{\lambda}\right)y(s)\mathrm{d}s \quad (y(t)\in C[0,1])$$

因此

$$|x_\lambda(t)|\leqslant\frac{1}{|\lambda|}|y(t)|+\frac{1}{|\lambda|^2}\int_0^t\left|\exp\left(\frac{t-s}{\lambda}\right)\right||y(s)|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{1}{|\lambda|}\|y\|+\frac{M_\lambda}{|\lambda|^2}\|y\|$$

故

$$\|x_\lambda\|\leqslant\left(\frac{1}{|\lambda|}+\frac{M_\lambda}{|\lambda|^2}\right)\|y\| \tag{88}$$

其中 $M_\lambda=\max\limits_{t,s\in[0,1]}\left|\exp\left(\frac{t-s}{\lambda}\right)\right|$. (88) 表明

$$\|(\lambda I-T)^{-1}y\|\leqslant\left(\frac{1}{|\lambda|}+\frac{M_\lambda}{|\lambda|^2}\right)\|y\|$$

故$(\lambda I-T)^{-1}$是有界的.由此可见,任何复数$\lambda\neq 0$都是T的正则值.

现设$\lambda=0$.由$(Tx)(t)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$可以看出,$T$的值域是满足$y(0)=0$的一切连续可微函数$y(t)$组成的集,它在$C[0,1]$中不稠密.其次,由$(Tx)(t)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s=0$,立即可知$x(t)=0(t\in[0,1])$,即$\lambda=0$不可能是$T$的特征值,因此$\lambda=0$属于$T$的剩余谱.

定理 2.6.1 设E为复巴拿赫空间,$T\in B(E)$.

(ⅰ)若λ是T的特征值,则T对应于λ的全部特征元组成E的一个闭子空间,今后我们称它为T对应于λ的特征向量空间;

(ⅱ)设$\lambda_k(k=1,2,\cdots,n)$是$T$的$n$个不同的特征值,任取$T$对应于$\lambda_k$的特征元$x_k$,则$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性无关.

证 (ⅰ)T对应于λ的全部特征元就是算子$\lambda I-T$的零空间,然而对于任何有界线性算子,很容易证明它的零空间是闭子空间,故结论(ⅰ)成立.

(ⅱ)因$x_1\neq\theta$,故x_1本身是线性无关的,我们用归纳法证明$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性无关性.设已知$x_1,x_2,\cdots,x_k$线性无关,现证明$x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$也线性无关.设存在数$c_1,c_2,\cdots,c_k,c_{k+1}$使

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k+c_{k+1}x_{k+1}=\theta \tag{89}$$

于是

$$\begin{aligned}&T(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k+c_{k+1}x_{k+1})=\\&c_1\lambda_1x_1+c_2\lambda_2x_2+\cdots+c_k\lambda_kx_k+c_{k+1}\lambda_{k+1}x_{k+1}=\theta\end{aligned} \tag{90}$$

将(89)的左、右两端乘以λ_{k+1}再减去(90),得

$$c_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x_1+c_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)x_k=0$$

由于$x_1,x_2,\cdots,x_k$线性无关,故

$$c_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)=c_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)=\cdots=c_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)=0$$

由于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{k+1}$彼此不等，故$\lambda_{k+1}-\lambda_1,\lambda_{k+1}-\lambda_2,\cdots,\lambda_{k+1}-\lambda_k$全不为零，因此$c_1,c_2,\cdots,c_k$都为零，代入(89)后可得$c_{k+1}=0$，于是得到$c_1,c_2,\cdots,c_{k+1}$都为零．因此$x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$线性无关．由此可知$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性无关．证毕．

设$T(\lambda)$是定义在复平面的某个区域或开集G内，而在复赋范线性空间E中取值的抽象函数．如果对于给定的$\lambda\in G$，比值$\dfrac{T(\lambda+\Delta\lambda)-T(\lambda)}{\Delta\lambda}$强收敛于某一极限，我们就称这个极限是$T(\lambda)$在$\lambda$处按强收敛意义的导数，记为$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}T(\lambda)$，并称$T(\lambda)$在$\lambda$处按强收敛意义可导．如果$T(\lambda)$在$G$内每一点按强收敛意义可导，就称$T(\lambda)$在$G$内解析，或称$T(\lambda)$为定义在$G$内的抽象解析函数．

定理 2.6.2　设E是复巴拿赫空间，$T\in B(E)$，则有

(i) 当$|\lambda|>\|T\|$时，λ是T的正则值且相应的豫解式R_λ按算子范数的意义可展成如下的级数：

$$R_\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \tag{91}$$

R_λ的范数则满足不等式

$$\|R_\lambda\|=\frac{1}{|\lambda|-\|T\|} \tag{92}$$

(ii) 设λ为T的正则值，则当$|\Delta\lambda|<\|R_\lambda\|^{-1}$时，$\mu=\lambda+\Delta\lambda$也是$T$的正则值且$R_\mu$按算子范数收敛的意义可展成如下的级数：

$$R_\mu=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\mu-\lambda)^nR_\lambda^{n+1} \tag{93}$$

(iii) T的正则集$\rho(T)$是开集，$\sigma(T)$是有界闭集，R_λ作为λ的算子值函数在其定义域$\rho(T)$内是解析的．

证　(i) 因$|\lambda|>\|T\|$，故$\dfrac{\|T\|}{|\lambda|}<1$，由定理2.1.8，$I-\dfrac{T}{\lambda}$于是$\lambda I-T$有有界的逆算子．利用(27)，可将$R_\lambda$展成(91)且级数依

算子范数收敛.再由(91)立即可得(92).

(ⅱ)在定理2.1.8的推论中,将 T 换成 $\lambda I - T$,ΔT 换成 $\Delta\lambda I$,则推论中的条件满足,于是 $\mu I - T$ 有有界的逆算子,且这个逆算子可表成 $(I + \Delta\lambda R_\lambda)^{-1}R_\lambda$,再利用(29)可得 $(I + \Delta\lambda R_\lambda)^{-1}R_\lambda$ 展成(93)且级数依算子范数收敛.

(ⅲ)$\rho(T)$ 是开集可由本定理的(ⅱ)导出,$\sigma(T)$ 是有界闭集可由 $\rho(T)$ 是开集以及本定理的(ⅰ)导出,R_λ 的解析性可由(93)导出.

现在详细证明 R_λ 的解析性.其实,由(93)得着

$$\frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} + R_\lambda^2 = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\mu - \lambda)^n R_\lambda^{n+1} \quad (|\mu - \lambda| \text{充分小})$$

故

$$\left\|\frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} + R_\lambda^2\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}|\mu - \lambda|^n \|R_\lambda\|^{n+1} =$$

$$\frac{|\mu - \lambda|^2\|R_\lambda\|^3}{1 - |\mu - \lambda|\|R_\lambda\|} \quad (|\mu - \lambda| \text{充分小})$$

显然当 $\mu \to \lambda$ 时,$\frac{|\mu - \lambda|^2\|R_\lambda\|^3}{1 - |\mu - \lambda|\|R_\lambda\|} \to 0$,故在算子范数收敛的意义下,

$$\frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} \to - R_\lambda^2 \quad (\mu \to \lambda)$$

即 R_λ 在 $\rho(T)$ 中任一给定的点 λ 处可导,就是说 R_λ 在 $\rho(T)$ 内解析.证毕.

定理2.6.3 设 E 是复巴拿赫空间,$E \neq \{\theta\}$,则任何有界线性算子 $T \in B(E)$ 的谱不是空集.

证明 设复巴拿赫空间 E 上存在有界线性算子 T,它的谱是空集,则 T 的豫解式 R_λ 在复平面内处处解析.任取 $B(E)$ 上的有界线性泛函 f,则 $f(R_\lambda)$ 作为通常的复函数,在复平面内处处解析.由(92),当 $|\lambda| > \|T\|$,有

$$|f(R_\lambda)|\leqslant\|f\|\|R_\lambda\|\leqslant\frac{\|f\|}{|\lambda|-\|T\|}$$

因此当 $\lambda\to\infty$ 时，$f(R_\lambda)\to 0$. 根据刘维尔(J. Liouville)定理，对任一复数 λ，$f(R_\lambda)=0$. 也就是说，对任一 $B(E)$ 上的有界线性泛函 f 和任一复数 λ，有 $f(R_\lambda)=0$. 对任一固定的复数 λ，有 $f(R_\lambda)=0$ 对任一 $B(E)$ 上的有界线性泛函 f 成立. 故 $R_\lambda=0$. 因 $E\neq\{\theta\}$，可取 $x_0\in E$，$x_0\neq\theta$，由豫解式的一一对应性，可知 $R_\lambda x_0\neq\theta$，矛盾！故 T 的谱不可能是空集.

定理 2.6.4 设 $T\in B(E)$ 全连续，则

（ⅰ）任何复数 $\lambda\neq 0$ 或者是 T 的特征值或者是 T 的正则值，二者必居其一，当 $\lambda\neq 0$ 是 T 的特征值时，对应的特征向量空间是有限维的；

（ⅱ）T 的谱或者是有限集或者是仅以零为其聚点的可列集.

证 （ⅰ）由定理 2.5.10 容易知道，任何复数 $\lambda\neq 0$ 或者是 T 的特征值或者是 T 的正则值. 当 $\lambda\neq 0$ 是 T 的特征值时，对应的特征向量空间为

$$V=\{x\,|\,Tx=\lambda x\}$$

故 $TV=V$，从而 V 的任意有界集都列紧，因而有限维.

（ⅱ）如果 T 的谱是无限集，且有一个非零聚点，记为 $\lambda_0\neq 0$. 设 $\lambda_n\to\lambda_0$，不记设 $|\lambda_n-\lambda_0|<0.5|\lambda_0|$ 且 $Tx_n=\lambda_n x_n$，$\|x_n\|=1$. 令 $L_n=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则由 $\{x_n\}$ 线性无关可知，空间 L_n 严格上升. 则由黎斯引理可知，存在 $y_n\in L_n-L_{n-1}$，使得 $d(y_n,L_{n-1})\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $\|y_n\|=1$. 显然存在 α_n，使得 $y_n-\alpha_n x_n\in L_{n-1}$，于是 $d(y_n,L_{n-1})=|\alpha_n|d(x_n,L_{n-1})\geqslant\frac{1}{2}$. 显然 $TL_n\subset L_n$，故 $Ty_n-\alpha_n Tx_n\in L_{n-1}$，于是 $d(Ty_n,L_{n-1})=|\alpha_n\lambda_n|d(x_n,L_{n-1})\geqslant\frac{|\lambda_n|}{2}$，又由于 $Ty_n\in L_n$，故 Ty_n 两两之间的距离大于

$0.25\lambda_0$,从而与 T 紧矛盾!故如果 T 的谱是无限集,则其聚点只能为零,因此只能为可列集.所以结论成立.

对任何有界线性算子 T,记 $\rho(T)$ 为 T 的正则值之集,$\sigma(T)$ 为 T 的谱集,$\sigma_p(T)$ 为 T 的特征值之集,$\sigma_c(T)$ 为 T 的连续谱之集,$\sigma_r(T)$ 为 T 的剩余谱之集,它们之间的关系为:$(\rho(T))^c = \sigma(T) = \sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)$,而且 $\sigma_p(T),\sigma_c(T),\sigma_r(T)$ 之间两两不交.则根据以上结论可知,对于全连续算子 T 有 $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

定理 2.6.5 设 $T\in B(E)$ 全连续,则

(ⅰ) 对于 $\lambda\neq 0,\lambda\in\sigma(T)\Leftrightarrow\lambda\in\sigma(T^*)$.

(ⅱ) 设 λ、$\mu(\lambda\neq\mu)$ 分别是 T、T^* 的特征值,则 T 对应于 λ 的特征向量空间 L_λ 与对应于 μ 的特征向量空间 L_μ^* 正交.

证 (ⅰ) 由于 $N(\lambda I - T) = \{\theta\}$ 当且仅当 $R(\lambda I - T) = E$ 当且仅当 $N(\lambda I^* - T^*) = \{\theta\}$,故成立.

(ⅱ) 对于任何 $f\in E^*$ 及 $x\in E$,记 $f(x)$ 为 $<f,x>$.现在任取 $x\in L_\lambda$ 和 $f\in L_\mu^*$.则由于 $<f,Tx>=<T^*f,x>$,故 $\lambda<f,x>=\mu<f,x>$,故 $<f,x>=0$,因此成立.

定理 2.6.6 设 $T\in B(E)$ 全连续,则

(ⅰ) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$

(ⅱ) $T(T^*)$ 的非零谱点都是 $T(T^*)$ 的特征值,而且 T、T^* 对应于同一个非零特征值的特征向量空间有相同的维数,维数有限

(ⅲ) $\sigma(T)$(即 $=\sigma(T^*)$)或者是有限集或者是以零为聚点的可列集

(ⅳ) 设 λ、$\mu(\lambda\neq\mu)$ 分别是 T、T^* 的特征值,则 T 对应于 λ 的特征向量空间 L_λ 与对应于 μ 的特征向量空间 L_μ^* 正交

(ⅴ) $\lambda\neq 0$ 是 T(也是 T^*)的特征值,则成立

$$R(\lambda I - T) = (N(\lambda I^* - T^*))^{\perp}$$

和

$$R(\lambda I^{*}-T^{*})=(N(\lambda I-T))^{\perp}.$$

习　题　二

1. 设无穷阵$(\alpha_{ij})(i,j=1,2,3,\cdots)$满足

$$\sup_{i}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|<+\infty$$

m 为一切有界数列组成的集,则

$$y=Tx:\ \eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j$$

其中$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$,$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$是从$m$到$m$中的有界线性算子,且

$$\|T\|=\sup_{i}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|$$

2. 设$K(s,t)$是$a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant s\leqslant b$上的可测函数,且$\int_a^b|K(t,s)|\mathrm{d}t$对$[a,b]$上几乎所有的$s$存在,且作为$s$的函数是本性有界的,令

$$y=Tx:y(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

则T为$L[a,b]$到其自身的有界线性算子,且

$$\|T\|=\underset{a\leqslant t\leqslant b}{\mathrm{varisup}}\int_a^b|K(t,s)|\mathrm{d}t \tag{1}$$

3. 设$\sup\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|<+\infty$,在$l$中定义线性算子:

$$y=Tx:\ \eta_n=\alpha_n\xi_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

其中$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$,$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$,则$T$是有界线性算子,且

$$\|T\| = \sup_{n\geq 1}|\alpha_n|$$

4. 证明上题中的 T 存在有界逆算子的充要条件是 $\inf\limits_{n\geq 1}|\alpha_n| > 0$.

5. 设 E 为巴拿赫空间, T 为从 E 到 E 中的有界线性算子, 设 $\lambda, \mu \in \rho(T)$, 则 $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$(第一豫解算子方程).

6. 设 E 为巴拿赫空间, T_1、T_2 均为从 E 到 E 中的有界线性算子, 且可换. 设 $\lambda \in \rho(T_1)\cap\rho(T_2)$, 则 $R_\lambda(T_1) - R_\lambda(T_2) = (T_1 - T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2)$(第二豫解算子方程), 其中 $R_\lambda(T_j)(j = 1, 2)$ 是 T_j 的豫解.

7. 承 5 题, 证明 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}R_\lambda = (-1)^n n!R_\lambda^{n+1}$.

8. 设 E 为巴拿赫空间, T_λ 是定义在复平面的某一非空集 G 上面在 $B(E)$ 中取值的抽象函数适合 $T_\lambda - T_\mu = (\mu - \lambda)T_\lambda T_\mu$. 又设对 G 中的某个 λ, T_λ^{-1} 存在且有界则 T_λ^{-1} 对一切 $\lambda \in G$ 都存在且有界, 而且存在 E 中的有界线性算子 T, 使 T_λ 是 T 的豫解式, $\rho(T) \supset G$.

9. 设 F 是复平面上一有界无穷闭集, $\{\alpha_n\}(n = 1,2,3,\cdots)$ 为 F 的一个稠密子集, 在 l 中定义算子 T 如下, $Tx = y: x = \{\xi_n\}$, $y = \{\alpha_n\xi_n\}$, 则每个 α_n 是 T 的特征值, $\sigma(T) = F$, $F - \{\alpha_n\}$ 中的每个点属于 T 的连续谱.

10. 在 l 中定义如下的算子, $y = Tx: x = \{\xi_n\}, y = \{\eta_n\}, \eta_1 = 0, \eta_k = -\eta_{k-1}(k\geq 2)$. 证明 T 没有特征值, $\rho(T)$ 由一切 $|\lambda| > 1$ 的点组成, 且 $\|R_\lambda\| = (|\lambda| - 1)^{-1}$.

11. 设无穷阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

由 A 定义了 l^p 上的有界线性算子 $T: y = Tx$, 其中 $x = \{\xi_1, \xi_2,$

$\cdots,\xi_n,\cdots\}$, $y=\{\xi_2,\xi_3,\cdots\}$，证明 $\rho(T)$ 由一切 $|\lambda|>1$ 的点 λ 组成，T 的特征值由满足 $|\lambda|<1$ 的点组成，对于 $|\lambda|=1$，$\lambda I-T$ 是一一对应的.

12. 设 T 是定义在巴拿赫空间上的有界线性算子，$\alpha\in\rho(T)$，$A=R_\alpha$. 设 μ,λ 满足 $\mu(\alpha-\lambda)=1$，则 $\mu\in\sigma(A)$ 的充要条件是 $\lambda\in\sigma(T)$，又设 $\mu\in\rho(A)$，且 $\mu(\alpha-\lambda)=1$，则 $(\mu I-A)^{-1}=\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}R_\beta$.

13. 设无穷阵 (α_{kj}) 适合条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^q\right)^{\frac{p}{q}}<+\infty$$

作算子 T 如下：

$$y=Tx:\eta_k=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{kj}\xi_j\quad(k=1,2,3,\cdots)$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$，证明 T 是 l^p 到 l^p 的有界线性算子.

14. 设 T 是由赋范线性空间 E 到赋范线性空间 E_1 的线性算子，$R=\{x:Tx=\theta\}$，称 R 为 T 的零空间. 证明当 T 有界时，R 是 E 的闭子空间. 反之，若 R 是 E 的闭子空间，问 T 是否有界，如果不成立，试举出例子.

15. 设 E 为巴拿赫空间，$\{T_n\}\subset B(E)(n=1,2,3,\cdots)$ 依算子范数收敛于 $T\in B(E)$. λ_0 是 T 的正则值，则当 n 充分大时，λ_0 也是 T_n 的正则值，且

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_0 I-T_n)^{-1}=(\lambda_0 I-T)^{-1}$$

16. 设 E 为巴拿赫空间，$T\in B(E)$，设 μ_0 是 T^n 的特征值，则 μ_0 的某一 n 次根是 T 的特征值.

17. 设 f 是定义在 $C[a,b]$ 上的线性泛函，而且对 $C[a,b]$ 中一切满足 $x(t)\geqslant 0$ 的函数 $f(x)\geqslant 0$. 证明 f 连续，于是进一步证

明存在$[a,b]$上的单调上升函数$v(t)$,使

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t).$$

18. 证明无穷维赋范线性空间的共轭空间是无穷维的.

19. 证明巴拿赫空间E为自反的充要条件是E^*为自反的.

20. 设E不是自反空间,则E、E^*、E^{**}、E^{***}、…都是互不相同的空间(设E完备).

21. 证明任何有限维赋范线性空间都是自反的.

22. 设E为复的赋范线性空间,$f\in E^*$,已知f可表为

$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix)$$

证明$\|\varphi\|=\|f\|$.

23. 设$v(t)\in V[a,b]$,已知由

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t)$$

定义了$C[a,b]$上的一个有界线性泛函f.举例说明,存在这样的$v(t)$使$\|f\|<\bigvee_a^b(v)$.

24. 求出l、C、C_0上有界线性泛函的一般形式.

25. 求出$L[a,b]$上有界线性泛函的一般形式.

26. 证明$(l^p)^*=l^q(1<q<+\infty,q=p(p-1)^{-1})$.

27. 巴拿赫空间E称为具有可列基$\{x_n\}(n=1,2,3,\cdots)$,如果每个$x\in E$可惟一地表成$x=\sum_{n=1}^{\infty}c_nx_n$.证明

(ⅰ)$\{x_n\}$中的任意有限个都是线性无关的;

(ⅱ)令$f_n(x)=c_n(n=1,2,3,\cdots)$,这里$x=\sum_{n=1}^{\infty}c_nx_n$,则$f_n$是$E$上的有界线性泛函.

(ⅲ)令W为使$\sum_{n=1}^{\infty}c_nx_n$在$E$中收敛的序列$\{c_n\}$的全体,在$W$中定义范数

$$\|W\| = \sup_{m}\left\|\sum_{n=1}^{m} c_n x_n\right\|$$

则 W 为巴拿赫空间.

(iv) 证明 E 为可分的.

28. 设 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\} \in l^p (n = 1,2,3,\cdots)$,则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x = \{\xi_k\} \in l^p$ 的充要条件是 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|x_n\| < +\infty$,且对每个 k,$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)} = \xi_k$.

29. 证明 l 中点列的弱收敛与强收敛等价.

30. 巴拿赫空间 E 称为序列弱完备的,是指对每个 $f \in E^*$,若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在,则存在 $x \in E$ 使 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x. 证明

(i) 自反空间都是序列弱完备的;

(ii) $L[a,b]$、l 是序列弱完备的;

(iii) $C[a,b]$ 不是序列弱完备的.

31. 赋范线性空间 E 称为一致凸的,是指对任给的 $\epsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,只要 $\|x - y\| \geqslant \epsilon(\|x\| = \|y\| = 1)$,就有 $\|x + y\| \leqslant 2 - \delta$. 证明

(i) $C[a,b]$ 不是一致凸的;

(ii) $L[a,b]$、l 都不是一致凸的;

(iii) 在一致凸空间中,若 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x,且 $\|x_n\| \to \|x\|$,则 $\{x_n\}$ 强收敛于 x.

32. 设 $\{x_n\}$ 是巴拿赫空间 E 中的一个点列,如果对于每个 $f \in E^*$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < +\infty$$

则必存在正数 μ 是对一切 $f \in E^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| \leqslant \mu\|f\|.$$

33. $\{x_n\}$ 如 32 题. 则对每个 $f \in E^*$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$ 收敛的充要

条件是存在正数 μ,使对一切自然数 m,以及任意的 $\varepsilon_n = \pm 1$,有

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n x_n \right\| \leqslant \mu .$$

34. 求证上题中的条件等价于下列条件:存在 $\mu > 0$,使对任意的一串自然数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$(这里 k 也是任意的),有

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| \leqslant \mu .$$

35. 设 $\{f_n\}$ 是巴拿赫空间 E 的共轭空间 E^* 中的点列,则 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 对每个 $x \in E$ 收敛的充要条件是对每个 $F \in E^{**}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(f_n)|$$

收敛.

36. 在 $L^p[a,b](1 < p < +\infty)$ 中作一个弱收敛,但不强收敛的点列.

37. 设数列 $\{\alpha_n\} \to 0(n \to \infty)$,在 l 中定义算子 $T: y = Tx$,其中 $x = \{\xi_n\}, y = \{\alpha_n \xi_n\}$,证明 T 是全连续算子.

38. 设 M 为赋范线性空间 E 的闭子空间,设 x_0 是 M 中某个弱收敛点列的极限,则 $x_0 \in M$.

39. 设 E、E_1 均为赋范线性空间,S、$T \in B(E, E_1)$,且 S、T 全连续,证明 $\alpha S + \beta T$ 也是全连续的,这里 α、β 是数.

40. 设 P_1、P_2 为可换的投影算子,则 $P = P_1 + P_2 - P_1 P_2$ 也是投影算子,且 $P \geqslant P_1, P \geqslant P_2$. 当任意投影算子 Q 满足 $Q \geqslant P_1, Q \geqslant P_2$ 时,则必满足 $Q \geqslant P$.

41. 设 T 为完备内积空间 U 中的有界线性算子,且 $\|T\| \leqslant 1$,证明

$$\{x : Tx = x\} = \{x : T^* x = x\}.$$

42. 设 $\{e_n\}$ 是完备内积空间 U 中的标准直交系,$\{\lambda_n\} \to 0(n$

$\to\infty$),且每个 λ_n 是实数,令

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$$

则 T 是全连续算子.

43. 设 T 为 $L^2[a,b]$ 上的全连续自伴算子,而且有 $L^2[a,b]$ 的完备标准直交系 $\{e_n\}$,使

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| Te_n \|^2 < +\infty$$

证明必存在 $a \leqslant t \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b$ 上可测的平方可积函数$K(t,s)$ 适合:

$$\overline{K(s,t)} = K(t,s)$$

且对一切 $x(t) L^2[a,b]$,

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s) x(s) \mathrm{d}s.$$

44. 有界线性算子 T 称为正规的,是指 $T^* T = TT^*$. 证明当 T 为正规算子时,$\| T^* T \| = \| T^2 \|$.

45. 设 T 为定义在完备内积空间 U 上的有界线性算子,如果存在 $\alpha_0 > 0$ 使$(Tx, x) \geqslant \alpha_0 (x, x)$,则称 T 为正定的. 证明凡正定算子必有有界逆算子 T^{-1} 且$\| T^{-1} \| \leqslant \dfrac{1}{\alpha_0}$.

第 3 章　广义函数

先考虑一个实际例子.设在实数轴上给定一个质量分布,其密度函数用 $\rho(x)$ 表示.而用 $F(x)$ 表示 $(-\infty,x]$ 中的质量.易知它是直线上单调增加的右方连续函数.若

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}$$

存在,则

$$\rho(x)=F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}$$

当 $\rho(x)$ 为可积函数时,还有 $F(b)-F(a)=\int_a^b\rho(x)\mathrm{d}x$.但若在整个实轴上只有原点有一单位质量,其他地方没有质量,则

$$F(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x\geqslant 0\\ 0,\text{当 } x<0\end{cases}$$

这时当 $x\neq 0$ 时,有 $\rho(x)=0$,而在 $x=0$ 处

$$\rho(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(-h)}{2h}=+\infty$$

但由广义积分的定义知,满足当 $x\neq 0$ 时,$\rho(x)=0$,且对任意 $\epsilon>0,\delta>0$ 都有 $\int_{-\epsilon}^{\delta}\rho(x)\mathrm{d}x=1$ 的函数 $\rho(x)$ 是不存在的.即没有经典数学分析中定义的函数为分布

$$F(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x\geqslant 0\\ 0,\text{当 } x<0\end{cases}$$

的密度函数.可是,在许多工程技术领域里,满足这性质的"函数"给计算带来了很大的方便.这就促使人们研究这类不是经典意义下的"函数"的本质和性质.另外,在经典意义下的函数范围内,像求导、极限、积分这样的数学运算常常受到很大的限制,如极限、导

数、积分是否存在,在运算之间是否可以交换次序进行运算等等.还有像 Fourier 变换这样有力的分析工具也只能在很小的范围内使用.就连常值函数1这样的函数都不存在Fourier变换.本章要把函数的概念加以推广,并在推广的“函数”空间上引进导数、Fourier 变换等运算的推广定义来解决上述问题.

3.1 广义函数的定义

为了引进广义函数的概念,我们先给出几种具体的函数空间.为叙述方便,我们引进一些记号.对 n 维欧几里德空间 E^n 中的点简记为 x,即 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,且记 $|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.非负整数组 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 简记为 P,且记 $N(P)=P_1+P_2+\cdots+P_n$.

$D^P=\dfrac{\partial^{N(P)}}{\partial x_1^{P_1}\partial x_2^{P_2}\cdots\partial x_n^{P_n}}$ 当 $P_s=0$ 时表示不对 x_s 求偏导

$0=(0,0,\cdots,0)$

$D_\varphi^0=\varphi$ 称 φ 的零阶导数,即 φ 本身

定义 3.1.1 设 $\varphi(x)$ 是定义在 n 维欧几里德空间 E^n 上的函数,用 S_φ 表示集 $\{x|\varphi(x)\neq0\}$ 的闭包,且称它为函数 $\varphi(x)$ 的支集.

下面给出具有“非常好”的分析性质的函数空间的概念.

定义 3.1.2 把 E^n 上无限次可微而且支集有界的函数的全体记为 K,且赋予如下的极限概念.设 $\{\varphi_n\}\subset K(n=1,2,\cdots)$,$\varphi\in K$,若

(1) 存在有界集 A,使 $S_{\varphi_m}\subset A(m=1,2,\cdots)$(此时称 φ_m 的支集一致有界).

(2) $\{\varphi_m\}$ 的各阶(包含零阶)导数列 $\{D^P\varphi_m\}$ 都(在 E^n 上)一

致收敛于 $D^p\varphi$,则称 $\{\varphi_m\}$ 在 K 中收敛于 φ,记为 $\varphi_m \xrightarrow{K} \varphi$.

这样构成的函数空间 K 称为基本函数空间 K. K 中函数也称为基本函数.

易知,K 按通常函数的线性运算成为线性空间,而 K 是非空的.

例 3.1.1 函数

$$\varphi(x,a) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2 - |x|^2}\right) & \text{当} |x| < a \\ 0, & \text{当} |x| \geqslant a \end{cases}$$

在整个 E^n 上是无限次可微的,且 $S_\varphi = \{x : |x| \leqslant a\}$,即支集有界,所以 $\varphi(x,a) \in K$.

性质:K 上线性运算是连续的(即 K 中极限运算与线性运算可以交换).

这一性质的证明是简单的,请读者自己完成.

K 中函数列 φ_m 收敛到 φ 的概念中两个条件缺一不可.

例 3.1.2 在例 1 中的函数,取 $a = 1$,且做自变量变换:用 $x - b_m$ 代替 $x (m = 1,2,\cdots)$ 得到函数列 $\varphi_m(x) = \varphi(x - b_m, 1)$,则当 $b_m \to 0$ 时,$\varphi_m(x)$ 在 K 中趋于 $\varphi(x) = \varphi(0,a)$,但当 $b_m \to \infty$ 时,由于 φ_m 的支集不是一致有界的,所以在 K 中不收敛.

注 定义 3.1.2 中给出的极限概念不是距离空间中的极限概念.这一事实的证明很复杂,这里略去.

现在我们来看一个含有大量的我们熟悉的函数的空间.

定义 3.1.3 n 维欧氏空间 E^n 中的函数 $f(x)$,如果对于任何有界可测集 M,$f(x)$ 在 M 上是勒贝格可积的,那么称 $f(x)$ 为局部勒贝格可积函数.记 E^n 上的局部勒贝格可积函数全体为 L^*.

在 L^* 中,把几乎处处相等的函数看成同一个函数. L^* 按通常的线性运算为线性空间. L^* 中的函数都是经典分析中定义的函数.对于 L^* 上的任一函数 f,都可以定义一个 K 上的线性泛

函.即

定义 3.1.4 设 $f \in L^*$,则可利用 f 在 K 上定义一个线性泛函

$$F(f): \varphi \to (f,\varphi) = \int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \varphi \in K$$

称 $T(f)$ 为相应于 f 的泛函.

下面给出 K 上算子及泛函连续的定义.

定义 3.1.5 假设 A 是 $K \to K$ 的算子(或 K 上泛函),给定 $\varphi \in K$,若对任一在 K 中收敛到 φ 的序列 $\{\varphi_m\} \subset K$,都有 $A\varphi_m \xrightarrow{K} A\varphi$(或作为数列 $A\varphi_m \to A\varphi$),则称 A 在 φ 点连续.若 A 在 K 中每一点都连续,则称 A 是连续算子(或泛函).

读者容易自行证明若 A 是线性的,则 A 连续等价于 A 在 O 点即零函数连续.而按定义 3.1.4 给定的 L^* 中元素 f 与泛函 $T(f)$ 的对应关系,是 L^* 到 K 上线性连续泛函之间的一一对应.事实上,对任意 $\varphi \in K$,由于 φ 的支集有界,所以 $\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 必是一个有限数,且当有 $\{\varphi_m\} \in K$, $\varphi_m \xrightarrow{K} \varphi$ 时,必有 $\{\varphi_m\}$ 一致收敛于 φ,所以有 $(f,\varphi_m) = \int f(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x \to \int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = (f,\varphi)$.即 $T(f)$ 为线性连续泛函.

为证 $f \to T(f)$ 是一一对应,先证明下述事实.

引理 3.1.1 对任意支集有界的连续函数 φ(可不属于 K),必有 K 中函数列 $\{\varphi_m\}$, $\{\varphi_m\}$ 的支集是一致有界的,且 $\{\varphi_m\}$ 在 E^n 上一致收敛于 φ.

证 利用例 3.1.1 中函数 $\varphi(x,a)$,定义函数

$$K_m(x) = \frac{\varphi(x,\frac{1}{m})}{\int \varphi(x,\frac{1}{m})\mathrm{d}x}, \quad (m = 1,2,\cdots)$$

并作函数

$$\varphi_m(x)=\int_{E^n}\varphi(x+y)K_m(y)\mathrm{d}y=\int_{E^n}\varphi(z)K_m(x-z)\mathrm{d}z$$

后一个等号是由于作变换 $z=x+y$,使 n 个变量的积分限都不变且 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}z$.易知若 $\varphi(x)$ 的支集在集 $\{x\,\big|\,|x|\leqslant a\}$ 中时,由于 $K_n(x)$ 的支集是 $\{x\,\big|\,|x|\leqslant\frac{1}{m}\}$.所以上式被积函数的支集为 $\varphi(x)$ 与 $K_m(x-z)$ 的支集的交.也是一个有界集,所以上式积分等于在一个有界集上的积分.再由 $K_m(x-z)$ 关于 x 的任意阶偏导数存在且连续,所以知 $\varphi_m(x)$ 无穷次可微.且 $S_{\varphi_m}\subset\{x\,\big|\,|x|\leqslant a+1\}$,即 $\{\varphi_m\}\subset K$,且支集一致有界.

另外,由于 $\int_{E^n}K_m(x)\mathrm{d}x=1, K_m(x)\geqslant 0$,及

$$\varphi(x)=\varphi(x)\int_{E^n}K_m(y)\mathrm{d}y=\varphi(x)\int_{|y|\leqslant\frac{1}{m}}K_m(y)\mathrm{d}y=$$

$$\int_{|y|\leqslant\frac{1}{m}}\varphi(x)K_m(y)\mathrm{d}y$$

$$\varphi_m(x)-\varphi(x)=\int_{|y|\leqslant\frac{1}{m}}|\varphi(x+y)-\varphi(x)|K_m(y)\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\max_{|y|\leqslant\frac{1}{m}}|\varphi(x+y)-\varphi(x)|$$

又由于 $\varphi(x)$ 的支集有界且连续,所以 $\varphi(x)$ 在 E^n 上一致连续,故知 $\{\varphi_m\}$ 在 E^n 上一致收敛于 φ.

引理 3.1.2 设 $f\in L^*$,且对一切 $\varphi\in K$,

$$\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$$

则 $f(x)$ 几乎处处等于零.

证 由于对任一支集有界的可测函数 $\varphi(x)$,可作一列支集有界且函数本身也一致有界的连续函数列 $\{\varphi_m(x)\}$ 几乎处处收敛于 $\varphi(x)$,而对每一个 $\varphi_m(x)$,由引理3.1.1知又有 K 中支集一

致有界的函数列$\{\varphi_{mn}(x)\}$一致收敛到$\varphi_m(x)$,由引理中条件知$\int f(x)\varphi_{mn}(x)\mathrm{d}x = 0(m = 1,2,\cdots,n = 1,2,\cdots)$, 再由$\{\varphi_{mn}(x)\}(n = 1,2,\cdots)$的一致收敛性,及勒贝格积分的控制收敛定理知

$$\int f(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x = 0,\text{从而}\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$$

现在对任一有界闭球Ω,作有界可测函数

$$\varphi(x) = \begin{cases}\mathrm{sign} f(x), & \text{当 } x \in \Omega \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x \notin \Omega \text{ 时}\end{cases}$$

可知$\int_\Omega |f(x)|\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$,即知$f(x)$几乎处处等于零.

下面来证明$f \to T(f)$是一一对应.设$f_1, f_2 \in L^*$,且$T(f_1) = T(f_2)$.那么有$T(f_1 - f_2) = 0$,由引理3.1.2知$f_1 - f_2$几乎处处等于零,即f_1几乎处处等于f_2.即$f \to T(f)$是一一对应.因此以后我们可以视$T(f)$与f为同一"函数".即局部勒贝格可积函数都是一个K上的连续线性泛函.按照这一思路可以把函数的概念加以推广.

定义 3.1.6 设F是基本函数空间K上的连续线性泛函,则称F是(K空间上的)广义函数.

用前面的讨论知

定理 3.1.1 当$f \in L^*$时,相应于f的泛函$T(f) = \int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \varphi \in K$是($K$空间上的)广义函数,且映照$T: f \to T(f)(f \in L^*)$是可逆的线性映照.

定义 3.1.7 我们把函数$f \in L^*$与广义函数$T(f)$看作同一个广义函数.由于它是一种特殊的广义函数,称之为"正则"的广义函数.

为了统一起见,以后把一般的广义函数$F: \varphi \to (F, \varphi)$也形

式地写成

$$(F,\varphi)=\int F(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

非正则的广义函数是存在的.

例 3.1.3 对任意给定的 $a\in E^n$,作 K 空间上的泛函$\delta_a:\varphi\to(\delta_a,\varphi)$ 如下:

$$(\delta_a,\varphi)=\varphi(a),\quad \varphi\in K$$

显然它是 K 上的广义函数,称其为Dirac的 δ - 函数.当$a=0$ 时简记为 $\delta_0=\delta$.以后还形式地记$(\delta_a,\varphi)=(\delta(x-a),\varphi)=\int\delta(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(a)$.也将 Dirac 的 δ - 函数形式地记为 $\delta_a=\delta(x-a)$.

但是对任意 $\varphi\in K$,满足$\int\delta(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(a)$ 的 L^* 中的函数 $\delta(x-a)$ 是不存在的.这是因为,这时对一切 $\varphi\in K$,当 $\varphi(a)=0$ 时,$\int\delta(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$.用引理 3.1.1 中采用的证法易知 $\delta(x-a)$ 除 $x=a$ 点外几乎处处为零.所以 $\delta(x-a)$ 几乎处处为零,故应有对 $\forall\varphi\in K$,$\int\delta(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$,这与 Dirac 的$\delta$ - 函数定义是矛盾的.所以知它不是正则的广义函数.

易知 K 上线性连续泛函全体,按泛函的线性运算构成线性空间.

定义3.1.8 用 K' 表示K 上线性连续泛函全体.它是 K 的共轭空间.按通常线性泛函间的线性运算成为线性空间.在 K' 中引进极限概念如下:设$\{F_m\}\subset K'$,$F\in K'$,若对一切 $\varphi\in K$ 有 $\lim\limits_{m\to\infty}(F_m,\varphi)=(F,\varphi)$,就称$\{F_m\}$在 K' 中收敛于F,记为 $F_m\xrightarrow{K'}F$.我们称空间 K' 是一个广义函数空间.

易知 K' 中的线性运算关于上述极限概念是连续的.即可与极限运算交换.

与 K 的情况类似，可在 K' 上定义算子或泛函的连续性.

定义 3.1.9 设 A 是 K' 到 K' 的算子，如果对一切 $\{F_m\} \subset K'$，$F \in K'$，当 $F_m \xrightarrow{K'} F$ 时必有 $AF_m \xrightarrow{K'} AF$，则称算子 A 是连续的.

另外，设 A 是 K 到 K 的线性连续算子，A^* 是 K' 到 K' 的线性连续算子，若对一切 $\varphi \in K$，$F \in K'$，都有 $(A^* F, \varphi) = (F, A\varphi)$，则称 A^* 为 A 的共轭算子. 当 A 是 K 到 K 的线性连续算子，则存在 A 的共轭算子. 这是因为 $A' : F \to F_1 = A'F$. 其中 F_1 满足 $(F_1, \varphi) = (F, A\varphi)$ 对任意 φ 成立. 就是所求的 A 的共轭算子. 即 $A^* = A'$.

值得注意的是：K' 中并没有包含所有通常的函数，它只是包含 L^* 且对求函数列的极限运算封闭的一个函数空间.

3.2 广义函数的运算与性质

由于广义函数只是基本函数空间上的连续线性泛函，不是经典意义下的函数，没有自变量 $x \in R^n$ 与函数值之间的明确对应关系. 所以数学分析中的导数的定义对广义函数已不再适用了. 为把求导运算这一重要的分析手段推广到广义函数中来，我们先考虑具有连续导数的局部可积函数.

设 $f(x)$ 为具有连续导数的局部可积函数. $\varphi(x) \in K$，由于 $\varphi(x)$ 的支集有界，所以 $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$，故利用分部积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

即把 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 看作广义函数的话，有

$$(f',\varphi)=-(f,\varphi'),\varphi\in K$$

下面我们利用这一性质来推广广义函数的导数定义.

定义 3.2.1 设 F 是 K 空间上的广义函数.称泛函

$$\varphi\to-(F,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi)$$

为广义函数 F 对 x_j 的偏导数.记为$\frac{\partial}{\partial x_j}F$ 或F'_{x_j}.即

$$(\frac{\partial}{\partial x_j}F,\varphi)=-(F,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi),\varphi\in K.$$

由于$\frac{\partial}{\partial x_j}$ 是线性连续算子,故易知$\frac{\partial}{\partial x_j}F$ 确为线性连续泛函,即它为广义函数.由归纳法易得以下定理.

定理 3.2.1 广义函数的各阶偏导数都存在,而且都是广义函数,且有

$$(D^pF,\varphi)=(-1)^{N(p)}(F,D^p\varphi),\varphi\in K.$$

例 3.2.1 设 $\theta(x)=\begin{cases}1,x\geqslant 1\\0,x<1\end{cases}$,由于$(\theta,\varphi')=\int_0^\infty\varphi'(x)\mathrm{d}x=-\varphi(0)=-(\delta,\varphi),\varphi\in K$,故知作为广义函数 $\theta'(x)=\delta(x)$.

例 3.2.2 对局部可积函数 $\ln|x|$,由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(x)\ln|x|\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to0+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{+\infty}\right)\varphi'(x)\ln|x|\mathrm{d}x=$$

$$\lim_{\epsilon\to0+}\left\{[\varphi(x)\ln|x|]_{-\infty}^{-\epsilon}+[\varphi(x)\ln|x|]_{\epsilon}^{+\infty}-\right.$$

$$\left.\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{+\infty}\right)\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x\right\}=-\lim_{\epsilon\to0+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{+\infty}\right)\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$\varphi\in K$$

所以作为广义函数 $\ln|x|$ 的导函数,为把任意 $\varphi\in K$ 对应为主值积分

$$P\cdot\int\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to0+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{+\infty}\right)\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

的线性连续泛函.若把这一广义函数看成$\frac{1}{x}$,则有$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

但要注意,$\frac{1}{x}$ 不是正则的广义函数.因为$\frac{1}{x}$ 在$x=0$附近不是勒贝格可积的.

关于广义函数的导数还有下面的性质.

定理3.2.2 设$\{F_m\}\subset K'$,$F\in K'$,而且 $F_m \xrightarrow{K'} F$,则对任一求导运算 D^p 有$D^pF_m \xrightarrow{K'} D^pF$.即广义函数的求导与极限运算可以交换.

证 由于若 $\varphi\in K$,则 $D^p\varphi\in K$,故由广义函数的导数定义知

$$\lim_{m\to\infty}(D^pF_m,\varphi)=(-1)^{N(p)}\lim_{m\to\infty}(F_m,D^p\varphi)=$$
$$(-1)^{N(p)}(F,D^p\varphi)=(D^pF,\varphi)$$

由定理 3.2.1 和定理 3.2.2 说明对比经典数学分析中求导运算来说,广义函数的求导运算所受的限制要小得多.

定义 3.2.2 设函数列$\{f_n\}\subset L^*$,而且 $f_n \xrightarrow{K'} \delta(x)(n\to\infty)$,则称$\{f_n\}$为 $\delta-$式函数列.

性质:设$\{f_v(\cdot)\}$是一元局部可积函数列且

(i)对任何正数 m,存在常数 N_m,使得对一切 a,b,v,当$|a|\leqslant m$,$|b|\leqslant m$ 时$\left|\int_a^b f_v(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant c_m$.(其中 c_m 为只与m 有关的常数)

(ii)对任何给定的 $a,b(a<0<b)$都有$\lim\limits_{v\to\infty}\int_a^b f_v(x)\mathrm{d}x=1$.

则$\{f_v\}$为 $\delta-$式函数列(该结论请读者自行证明).

另外,广义函数对极限运算有下面的封闭性质.

定理3.2.3 设$\{F_m\}\subset K'$,且对任意 $\varphi\in K$,$\lim\limits_{m\to\infty}(F_m,\varphi)$存在且有限,则存在 $F\in K'$,使 $F_m \xrightarrow{K'} F$.

该定理的证明要用到拓扑空间理论,比较复杂,这里略去.

下面讨论广义函数空间中求原函数(或不定积分)的运算,即求导运算的逆运算.

定理 3.2.4 一元广义函数 F 必存在原函数 $G \in K'$,使 $G' = F$.

证 对任意 $\varphi \in K$,我们知道 $\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t$ 是 $\varphi(x)$ 在经典意义下的原函数,但是一般说来 $\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t$ 往往不再属于 K 了.为此,我们先定义一种类似的运算

$$J: \varphi \to J\varphi, J\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} (\varphi(t) - c_\varphi \varphi_0(t))\mathrm{d}t,$$

其中
$$c_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\mathrm{d}s$$

$\varphi_0(t)$ 是某一满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)\mathrm{d}t = 1$ 的 K 中函数.则显然 $J_\varphi(x)$ 无穷次可微且支集有界.即 J 是从 K 到 K 的映射.而且还对任意的 $\varphi \in K$,

$$\begin{aligned} J\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\} &= \int_{-\infty}^{x} [\varphi'(t) - (\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(\tau)\mathrm{d}\tau)\varphi_0(t)]\mathrm{d}t = \\ &\int_{-\infty}^{x} \{\varphi'(t) - \varphi(\tau)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)\}\mathrm{d}t = \\ &\int_{-\infty}^{x} \{\varphi'(t) - 0\}\mathrm{d}t = \varphi(t)\Big|_{-\infty}^{x} = \varphi(x) \end{aligned}$$

利用算子 J,我们可规定 F 的原函数 $G \in K'$ 如下:

$$G: \varphi \to -(F, J\varphi)$$

则对 $\forall \varphi \in K$, $(G', \varphi) = -(G, \varphi') = (F, J(\varphi')) = (F, J(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x))) = (F, \varphi)$.即 $G' = F$,故 G 就是 F 的原函数.

定理 3.2.4 中引入的 φ_0 的存在性是显然的.如可取

$$\varphi_0(x) = \frac{\varphi(x, a)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, a)\mathrm{d}x}$$

在 J 中取不同的 $\varphi_0(x)$ 得到的算子 J 是有所不同的.但对于 K 中函数 $\varphi(x)$ 的导数 $\varphi'(x)$ 来说,J 中取不同的 $\varphi_0(x)$, 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$,所以不影响 $J\varphi'$ 的像的取值.

为讨论广义函数的不定积分的性质,需要如下引理.

引理 3.2.1 设 $f \in K'$,$f' = 0$,那么 $f =$ 常数.

证 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J\varphi = \varphi(x) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\varphi_0(x)$$

其中 J 如上定理中定义.故

$$(f,\varphi) = \left(f,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J\varphi + \left(\int_{\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\varphi_0\right) =$$

$$-(f',J\varphi) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)(f,\varphi_0)$$

由于 $f' = 0$,故 $(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}(f,\varphi_0)\varphi(t)\mathrm{d}t$,即 $f = (f,\varphi_0) =$ 常数.

定理 3.2.5 设 $F \in K'$,G 为 F 的一个原函数,则 F 的不定积分为 $G + C$(C 为任意常数).即 F 的原函数全体为 $G + C$.

证 设 H 是 F 的另一个原函数.记 $f = H - G$,则 $f' = 0$,由引理 3.2.1 知 $f = C$,即 $H = G + C$.

注 对一般的广义函数,"函数在一点的值"是没有意义的.如 $\delta(x)$,δ' 等在 $x = 0$ 值就都没有意义,所以对一般的广义函数没有定积分理论.

在两个广义函数之间还可以定义乘法运算,但这一运算还需对其中一个因子加以限制.

定义 3.2.3 设 E 是 n 个变元的无限次可微分函数全体,称 E 为 K 的一个乘子空间.显然 $E \subset L^* \subset K'$,设 $\psi \in E$,$F \in K'$,则规定 ψ 和 F 的乘积 ψF 是满足条件 $(\psi F,\varphi) = (F,\psi\varphi)$,$\varphi \in K$ 的广义函数,也可记 ψF 为 $F\psi$.

由于 E 中函数和 K 中函数都无限次可微，K 中函数支集有界，故 E 中函数与 K 中函数的乘积仍为无限次可微且支集有界的函数，即属于 K. 这样上述定义中乘法运算的定义是有意义的. 但两个一般的广义函数的乘法运算，还没有令人满意的定义方法. 如，δ 函数与它自己的乘积 $\delta\cdot\delta$ 就不能按上述方法定义.

例 3.2.3 对于一元广义函数 $\delta^{(n)}(x)$，当 $\psi\in E$ 时

$$\psi\delta^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}\psi_{(0)}^{(n-k)}\delta^{(k)}$$

关于支集的概念，也可以推广到广义函数上去. 但由于广义函数在某特定点上的取值是没有定义的. 我们要先引进广义函数在某开集上为零的概念.

定义 3.2.4 设 $F\in K'$，O 是 E^n 中的开集. 如果对 K 中一切支集含在 O 中的函数 φ 都有 $(F,\varphi)=0$，则称广义函数 F 在 O 中等于零. 如果广义函数 F_1 与 F_2 的差 F_1-F_2 在 O 中等于零，我们称 F_1 与 F_2 在 O 中相等.

若 $F\in K'$ 在开集 O 中等于零，且对任一开集 G，若 $G\supset O$，$G\neq O$，则 F 不在 G 中等于零，则称 E^n-O 为广义函数 F 的支集，记为 S_F.

显然 F 是连续函数时，支集的概念与以前的定义相同.

定理 3.2.6 任何广义函数 F 必是某支集有界的广义函数列 $\{F_n\}$ 的极限.

证 取函数列

$$\varphi_m(x)=\frac{\int_{|y|\leqslant m+\frac{1}{2}}\varphi(x-y,\frac{1}{2})\mathrm{d}y}{\int_{|y|\leqslant\frac{1}{2}}\varphi(y,\frac{1}{2})\mathrm{d}y}$$

其中

$$\varphi(x,\frac{1}{2})=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{1}{1-4|x|^2}\right), & |x|<\dfrac{1}{2}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

易知 $\varphi_m(x)\in K$,且支集在 $S_{m+1}=\{x\,|\,|x|\leqslant m+1\}$ 之中,在 $S_m=\{x\,|\,|x|\leqslant m\}$ 上 $\varphi_m(x)\equiv 1$.作广义函数 $F_m=\varphi_m F$(显然 F_m 的支集有界),则对任意 $\varphi\in K$,由于 φ 的支集也是有界的,所以$(F_m,\varphi)=(F,\varphi_m\varphi)\to(F,\varphi)$,故 $F_m\xrightarrow{K'}F$.

为进一步讨论广义函数的概念,我们先给出如下概念.

定义 3.2.5 在基本函数空间 K 中规定一列内积如下:对任意一 $\varphi,\psi\in K$,$p=0,1,2,\cdots$

$$(\varphi,\psi)_p\doteq\sum_{N(q)\leqslant p}\int D^q\varphi(x)\cdot\overline{D^q\psi(x)}\mathrm{d}x$$

且对任意 $\varphi\in K$,引进范数$\|\varphi\|_p=\sqrt{(\varphi,\varphi)_p}$.

记 K 按内积$(\cdot,\cdot)_p$ 构成的内积空间为K_p.

显然, 当 $\{\varphi_m\}\subset K,\varphi\in K$, 且 $\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$ 时, 有 $\lim\limits_{m\to\infty}\|\varphi_m-\varphi\|_p=0$.即序列 φ_m 在K 中收敛于φ 时,必在 K_p 中收敛于 φ.但 φ_m 在K_p 中收敛于φ 时,不一定有 $\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$.

定义 3.2.6 设 $F:\varphi\to(F,\varphi)$ 是 K 上线性泛函,且关于 $\|\cdot\|_p$ 连续, 即当$\{\varphi_m\}\subset K,\varphi\in K$, 且$\|\varphi_m-\varphi\|_p\to 0$ 时有 $(F,\varphi_m)\to(F,\varphi)$,则称 F 是 p 级的广义函数.

显然当 F 是 p 级的广义函数时,对任意$\{\varphi_m\}\subset K,\varphi\in K$,且 $\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$, 必有$\|\varphi_m-\varphi\|_p\to 0$, 故有$(F,\varphi_m)\to(F,\varphi)$, 即 $F\in K'$.

性质:平方可积函数是零级广义函数.若 F 是 m 级广义函数,则 D^pF 是 $m+N(p)$ 级广义函数.

关于广义函数的结构,我们不加证明地给出如下几个结论.

定理 3.2.7 设 $F \in K'$,则 F 为 p 级广义函数的充要条件是对任一满足 $N(q) < p$ 的整数组 q,有相应的(勒贝格)平方可积函数 F_q,使 $F = \sum\limits_{N(q) \leqslant p} D^q F_q$.

定理 3.2.8 任一具有有界支集的广义函数必是有限级数.

3.3 广义函数的 Fourier 变换

Fourier 变换是十分有力的数学工具,我们要把这一概念推广到广义函数空间上去.

在本节对于多元函数来进行概念和结果的陈述.但是证明只限于一元函数的情况,读者可自行推广到多元函数.

3.3.1 基本函数的 Fourier 变换

我们先来回顾一下 K 空间中函数的 Fourier 变换.为了书写方便起见,当 $x = (x_1, \cdots, x_n), q = (q_1, \cdots, q_n); \sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 时,记 $dx = dx_1 \cdots dx_n; x \cdot \sigma = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \sigma_j; \sigma^q = \sigma_1^{q_1} \cdots \sigma_n^{q_n}$.

定义 3.3.1 设 $\varphi(\cdot) \in K$,称

$$\psi(\sigma) = \int_{E^n} \varphi(x) e^{-i\sigma \cdot x} dx \tag{124}$$

是 $\varphi(\cdot)$ 的 Fourier 变换,记为 $\tilde{\varphi}(\cdot)$ 或 $F(\varphi)$.也称映照 $F: \varphi \to \tilde{\varphi}$ 为 Fourier 变换.称它的逆映照 F^{-1} 为 Fourier 逆变换.我们把 K 中函数的 Fourier 变换全体所成的线性空间记为 $Z = FK$.设 $F(\varphi_n) \in Z, F(\varphi) \in Z$,那么当 $\varphi_n \xrightarrow{K} \varphi$ 时,称函数列 $\{F(\varphi_n)\}$ 在 Z 中收敛于 $F(\varphi)$,记为 $F(\varphi_n) \xrightarrow{Z} F(\varphi)$.

由上述定义易推出 Fourier 变换的如下性质:

定理 3.3.1 (基本函数的 Fourier 变换的基本性质)

(1) 对任一多项式 P 和 $\varphi \in K$,有

$$P(D)F(\varphi) = F(P(-i(\cdot))\varphi) \tag{125}$$

$$P(\cdot)F(\varphi) = F(P(-iD)\varphi) \tag{126}$$

(2) 当 $\varphi,\psi \in K$ 时,记 $(\varphi,\psi)_K = \int \varphi\bar{\psi}\mathrm{d}x$,当 $f,g \in Z$ 时,记 $(f,g)_Z = \int f\bar{g}\mathrm{d}x$,那么

$$(2\pi)^n(\varphi,\psi)_K = (F(\varphi),F(\psi))_Z \tag{127}$$

(3) F 的逆映照 $F^{-1}: Z \to K$ 有表达式

$$F^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int f(\sigma)\mathrm{e}^{i\sigma\cdot x}\mathrm{d}\sigma \tag{128}$$

(4) 设 $t = (t_1,\cdots,t_n)$,算子 $\tau_t: \varphi(\cdot) \to \varphi((\cdot)+t)$ 既可以看成是 $K \to K$ 的算子,又可以看成 $Z \to Z$ 的算子,而且

$$F(\tau_t\varphi) = \mathrm{e}^{i(\cdot)\cdot t}F(\varphi),\ \tau_tF(\varphi) = F(\mathrm{e}^{-it\cdot(\cdot)}\varphi) \tag{129}$$

现在我们来研究基本函数空间 Z.

定理 3.3.2 函数 $\psi(\cdot) \in Z$ 的充要条件是 ψ 可以解析开拓为 n 维复空间上的整函数(即 ψ 在全空间上连续,且各偏导数在全空间上存在),而且有正数 a,使得对一切非负整数组 $q = (q_1,\cdots,q_n)$,

$$|s^q\psi(s)| \leqslant c_q\mathrm{e}^{a|\tau|} \tag{130}$$

其中 c_q 为只与 q 和 ψ 有关的常数,$s = \sigma + i\tau$. 而 $\psi_m \xrightarrow{Z} 0$ 的充要条件是存在正数 a,使得对每个非负整数组 $q = (q_1,\cdots,q_n)$,存在常数 c_q 满足不等式

$$|s^q\psi_m(s)| \leqslant c_q\mathrm{e}^{a|\tau|},\ m = 1,2,\cdots,\ s = \sigma + i\tau \tag{131}$$

同时函数列 $\{\psi_m(\sigma)\}$ 在 E^n 的任一有界区域中一致收敛于零.

证 只讨论一元函数的情况. 设 $\psi \in Z$,就是说有 $\varphi \in K$ 使得 $\psi = F(\varphi)$. 又设 φ 的支集在 $|x| \leqslant a$ 中. 由于此时 $\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{-i\sigma x}\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a}\varphi(x)\mathrm{e}^{-i\sigma x}\mathrm{d}x$,而 $\psi(s) = \int_{a}^{a}\varphi(x)\mathrm{e}^{-isx}\mathrm{d}x$ 是

含参数 s 的有限积分，由被积函数的性质，显然是复变数 $s = \sigma + i\tau$ 的整函数，因此 $\psi(\sigma)$ 可以解析开拓为整函数 $\psi(s)$. 由(126) 容易知道，对任何非负整数 q，有

$$|s^q\psi(s)| = \left|\int_{-a}^{a}(-i)^q\varphi^{(q)}(x)e^{-isx}dx\right| \leqslant \int_{-a}^{a}|\varphi^{(q)}(x)|e^{x\tau}d\tau \leqslant \int_{-a}^{a}|\varphi^{(q)}(x)|dx\,e^{a|\tau|}$$

因此(130) 成立，其中 $c_q = \int_{-a}^{a}|\varphi^{(q)}(x)|dx$.

反过来，如果整函数 $\psi(x)$ 满足(130)，记 $c = c_q$ 取 $q = 2$，那么由(130) 可知

$$|\psi(s)| \leqslant \frac{c}{1 + |s|^2}e^{a|\tau|},\ s = \sigma + i\tau \tag{132}$$

我们作函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma$$

利用围道积分和(132)，容易证明对任何 τ

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma + i\tau)e^{i(\sigma+i\tau)x}d\sigma \tag{133}$$

取 τ 使 $\tau x = |\tau x|$，再利用(132) 就得到估计式

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{ce^{-\tau x+a|\tau|}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma}{1 + |\sigma + i\tau|^2} \leqslant c'e^{-|\tau|(|x|-a)}$$

此地 $c' = \frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma}{1 + \sigma^2}$ 是和 τ, x 都无关的常数. 令 $|\tau| \to +\infty$，就知道当 $|x| > a$ 时 $\varphi(x) = 0$. 因此 $\varphi(x)$ 的支集是有界的. 利用(130) 和(133) 可证明

$$\varphi^{(q)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(is)^q\psi(s)e^{isx}ds$$

因此函数 $\varphi(\cdot)$ 是无限次可微的，这样便有 $\varphi \in K$. 容易证明这时 $F(\varphi) = \psi$，因此 $\psi \in Z$.

由以上证明过程可以看出，如果 $\{\psi_m\} \subset Z$, $\psi_m = F(\varphi_m)$ 而且

(131) 成立,那么$\{\varphi_m\}$的支集都含在$|x|\leqslant a$中.因为

$$|\varphi_m^{(q)}(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^q\psi_m(\sigma)\mathrm{e}^{i\sigma x}\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma|\geqslant R} c_{q+2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\sigma^q|\psi_m(\sigma)|\mathrm{d}\sigma$$

对任何$\varepsilon > 0$,取R使$\frac{1}{2\pi}c_{q+2}\frac{2}{R} < \frac{\varepsilon}{2}$,如果$\{\psi_m(\sigma)\}$又在有界区间中一致收敛于零,再取$m$充分大,使$\int_{-R}^{R}\sigma^q|\psi_m(\sigma)|\mathrm{d}\sigma < \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2\pi$,就知道$\{\psi_m^{(q)}(x)\}$一致收敛于零.即$\varphi_m \xrightarrow{K} 0$.反过来,当$\varphi_m \xrightarrow{K} 0$时记$\psi_m = F(\varphi_m)$,也容易证明$\psi_m$应当满足定理中的条件.

3.3.2 Z空间上的线性连续泛函

由于Z空间也是一个线性空间,且有极限运算,而线性运算关于极限是连续的,因此我们可以像对K空间那样考察Z空间上的线性连续泛函这里也称广义函数.

定义 3.3.2 称Z空间上的线性连续泛函是Z空间上的广义函数,其全体也称为广义函数空间,记为Z'.

在Z'中可以仿照K'中一样地定义线性运算、求导运算和极限运算.我们仿照空间K'中的情况也给出Z'中正则泛函的概念,设$g \in Z'$,如果存在局部勒贝格可积函数$g(\sigma)$,使得对每个$\psi \in Z$,函数$\psi(\cdot)g(\cdot)$在E^n上是勒贝格可积的,而且

$$(g,\psi) = \int g(\sigma)\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma,\ \psi \in Z$$

那么称g是正则泛函.

Z空间与K不同.由于$\psi \in Z$时ψ的定义域为复空间,我们可以把广义函数表示成复空间上解析函数的积分.

例 3.3.1 设s_0是任意一组复数$(s_{01}, s_{02}, \cdots, s_{0n})$记$\delta(\cdot - s_0)$为$n$元函数的泛函

$$(\delta(\cdot - s_0), \psi) = \psi(s_0),\ \psi \in Z$$

这个泛函显然属于 Z'. 也称它是 δ - 函数. 当 s_0 是一组实数时, $\delta(\cdot - s_0)$ 显然不是正则泛函. 但一般来说,对任一 s_0, $\delta(\cdot - s_0)$ 可以用复空间中函数的积分来表达. 我们只就一元函数来说明这一点. 设 s_0 是一个复数. 任取一个以 s_0 为中心的正向圆周形围道,由柯西积分公式及 δ_- 函数的定义就得到

$$(\delta(\cdot - s_0), \psi) = \psi(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(s)}{s - s_0}\mathrm{d}s$$

现在我们考虑更一般的用复空间上的积分表示的广义函数. 并给出解析泛函的概念.

设 L 是 n 维复空间中的一个光滑的 n 维曲面,这曲面以 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 为参数,设 $s = s(u)$ 为曲面的参数方程,记 $\det(\frac{\partial s_i}{\partial u_j})(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 是变换 $(u_1, u_2, \cdots, u_n) \to (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 的 Jacobian. 令 $\mathrm{d}s = \det(\frac{\partial s_i}{\partial u_j})\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n$. 设 g 是 L 上的一个函数,它使得函数 $u \to g(s(u))$ 是勒贝格可测的,而且对每个 $\psi \in Z$, $\psi(s(\cdot))g(s(\cdot))$ 是 E^n 上的勒贝格可积函数,那么当

$$(g, \psi) = \int_L g(s)\psi(s)\mathrm{d}s, \psi \in Z$$

是 Z 上的线性连续泛函时,就称这个泛函是解析泛函. 如例 3.3.1 中所述 $\delta(\cdot - s_0)$ 是解析泛函,正则泛函也是解析泛函. 下面我们将看出解析泛函可以用来表达方程的解.

例 3.3.2 讨论一元函数组的一类解析函数,设 $P(s)$ 是一个复变数 s 的 m 次多项式,设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是它的 m 个零点,记 $r_k = \mathrm{Im}\alpha_k, k = 1, 2, \cdots, m$. 任取实数 $\tau, \tau \neq r_k, k = 1, 2, \cdots, m$, 作一元基本函数空间 Z 上的解析泛函 g, 如下:

$$(g_\tau, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\sigma + i\tau)}{P(\sigma + i\tau)}\mathrm{d}\sigma$$

我们注意这个解析泛函和 τ 的位置有关. 如果 $r_1 < r_2 < \cdots < r_m$,

利用围道积分可知,当 $r_k < \tau < r_{k+1}$ 时,g_τ 与 τ 无关,把这个泛函记为 $g_{(k)}$,$g_{(0)}$ 表示当 $\tau < \tau_1$ 时的 g_τ,$g_{(m)}$ 表示当 $\tau > \tau_m$ 时的g_τ,这时

$$(g_{(k+1)},\psi)-(g_{(k)},\psi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\sigma+i\tau_{k+1})}{P(\sigma+i\tau_{k+1})}\mathrm{d}\sigma-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\sigma+i\tau_k)}{P(\sigma+i\tau_k)}\mathrm{d}\sigma$$

其中 $r_k < \tau_k < r_{k+1} < \tau_{k+1} < r_{k+2}$. 由于在直线 $\tau = \tau_k$ 与$\tau = \tau_{k+1}$ 之间,函数$\dfrac{\psi(s)}{P(s)}$,$(s = \sigma + i\tau)$ 只有一个一次极点 α_{k+1},利用留数定理可知

$$(g_{(k+1)},\psi)-(g_{(k)},\psi)=-2\pi i\,\frac{\psi(\alpha_{k+1})}{P'(\alpha_{k+1})}$$

$$g_{(k+1)}-g_{(k)}=-2\pi i\,\frac{1}{P'(\alpha_{k+1})}\delta(\cdot-\alpha_{k+1})$$

也就是说,它不为零. 因此,尽管相应于同一函数$\dfrac{1}{P(s)}$,由于积分路径不一样,所得的解析泛函也不一样.

现在来定义 Z' 空间上的乘法运算. 我们令 $\xi(s)$ 为 n 维复空间上的整函数,而且存在正数 a,b 和c,使得

$$|\xi(s)|\leqslant c(|s|^b+1)\mathrm{e}^{a|\tau|},\ s=\sigma+i\tau$$

其中$|s|=\sqrt{|s_1|^2+\cdots+|s_n|^2}$. 这种函数全体记为 Y. 显然当$\xi \in Y$,$\psi \in Z$ 时,$\xi\psi \in Z$,即 ξ 是Z 的一个乘子,Y 是Z 空间的乘子空间. 完全类似于K' 与E 的乘法运算,可以定义 Z' 与Y 的乘法运算. 即若 $\xi \in Y$,$g \in Z'$,则 ξ 与g 的乘积ξg,为泛函$(\xi g,\psi) = (g,\xi\psi)$,显然任一多项式都在 Y 中,因此多项式是 Z' 的乘子.

例 3.3.3 由上例易知,对复变数 s 的m 次多项式$P(s)$ 及任何 k,

$$(Pg_{(k)},\psi)=(g_{(k)},P\psi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\sigma+i\tau_k)\psi(\sigma+i\tau_k)}{P(\sigma+i\tau_k)}\mathrm{d}\sigma=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma+i\tau_k)\mathrm{d}\sigma=\int_{\infty}^{\infty}1\cdot\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

因此

$$Pg_{(k)}=1,\qquad k=0,1,2,\cdots,m \tag{134}$$

所以对给定的 P,代数方程 $Pg=0$ 在 Z' 中至少有 m 个线性无关的解

$$g=g_{(0)}+\sum_{k=1}^{m}c_k(g_{(k)}-g_{(0)}) \tag{135}$$

事实上,可以证明这就是方程 $Pg=1$ 在 Z' 中的通解.

下面讨论广义函数的 Fourier 变换的概念. 为方便起见,对 $f,g\in E^n$,我们记

$$(f,g)=\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

这里没有对 f 取共轭,当 $L^2(E^n)$ 为复函数空间时,它并不是内积. 此外还定义一个 $L^2(E^n)$ 中的算子 J

$$J:\varphi(x)\to J\varphi(x)=\varphi(-x)$$

先来看 $f\in K$ 时的情况,这时当然也可以把 f 看成 K' 中的广义函数. 且有

$$(2\pi)^n(f,J\varphi)=(F(f),F(\varphi)),\varphi\in K$$

这是因为,关于 Fourier 变换有性质,若 $\varphi,\psi\in K$,则

$$(2\pi)^n(f,J\varphi)_K=(F(f),F(\varphi))_Z \tag{*}$$

故由 $\varphi(x)$ 的实函数有

$$(2\pi)^n(f,J\varphi)=(2\pi)^n\int f(x)\varphi(-x)\mathrm{d}x=$$

$$(2\pi)^n(f,\overline{\varphi(-x)})_K=(F(f),F(\overline{\varphi(-x)}))_Z=$$

$$(F(f),\overline{F(\overline{\varphi(-x)})})=(F(f),F(\varphi))$$

最后一步是因为

$$\overline{F(\overline{\varphi(-x)})}=\overline{\int_{E^n}\overline{\varphi(-x)}\mathrm{e}^{-i\sigma x}\mathrm{d}x}=\int_{E^n}\overline{\overline{\varphi(-x)\mathrm{e}^{-i\sigma x}}}\mathrm{d}x=$$

$$\int_{E^n}\varphi(-x)\mathrm{e}^{i\sigma x}\mathrm{d}x=\int_{E^n}\varphi(y)\mathrm{e}^{-i\sigma y}\mathrm{d}y=F(\varphi(x))$$

利用(*)式可以把 Fourier 变换推广到广义函数上去.

定义 3.3.3 设 $f \in K'$,作 Z 上的线性连续泛函

$$F(f): \psi \to (2\pi)^n (f, JF^{-1}(\psi)), \psi \in Z$$

称它为广义函数 f 的 Fourier 变换,简记为 $\tilde{f}$. 也称映射 $F: f \to F(f), f \in K'$ 为 Fourier 变换. 其逆变换 F^{-1} 称为 Fourier 逆变换.

广义函数的 Fourier 变换满足如下性质:

定理 3.3.3 K' 上的 Fourier 变换是从 K' 到 Z' 上的一对一的线性算子,具有性质

(1) 对任一多项式 P 及 $f \in K'$ 有

$$P(D)F(f) = F(P(-i(\cdot))f) \quad P(\cdot)F(f) = F(P(-iD)f)$$

(2) 设 $t = (t_1, \cdots, t_n)$, τ_t 是平移算子, 即 $\tau_t\varphi(x) = \varphi(x+t)$, $\tau'_t: f \to \tau'_t f$ 为 τ_t 的共轭算子,即 $(\tau'_t f, \varphi) = (f, \tau_t\varphi)$,则

$$F(\tau'_t f) = e^{i(\cdot)\cdot t}F(f), \qquad \tau'_t F(f) = F(e^{-it\cdot(\cdot)}f)$$

该定理的证明留给读者.

例 3.3.4 求 δ 函数及函数 $f(x) = 1$ 的 Fourier 变换.

解 对任意 $\varphi \in K$,设 $\psi(\sigma) = F(\varphi)$,则

$$(F(\delta), \varphi) = (2\pi)^n(\delta, J\varphi) = (2\pi)^n(J\varphi)(0) = (2\pi)^n\varphi(0) =$$

$$(2\pi)^n \cdot \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma)e^{i\sigma\cdot x}d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma)d\sigma = (1, \psi)$$

故有 $F(\delta) = 1$.

类似地

$$(F(1), \psi) = (2\pi)^n(1, J\psi) = (2\pi)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(-x)dx =$$

$$(2\pi)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)dy = (2\pi)^n\psi(0) = ((2\pi)^n\delta, \psi)$$

即 $F(1) = 2(\pi)^n\delta$.

例 3.3.5 求 $e^{b\cdot x}$ 的 Fourier 变换.

解 对任意 $\psi = F(\varphi)$, 设 $\psi(\sigma) = F(\varphi)$, 由于 $e^{b\cdot x} =$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b\cdot x)^n}{n!}$ 的右端在任一有界域上一致收敛，故作为广义函数它也收敛，所以

$$(F(e^{b\cdot x}),\psi)=(2\pi)^n(e^{b\cdot x},J\psi)=(2\pi)^n(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(b\cdot x)^m}{m!},J\psi)=$$

$$(2\pi)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}((b\cdot x)^m,J\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(F((b\cdot x)^m),\psi)$$

而利用例3.3.3中结果及广义函数Fourier变换的性质，易知，对任意多项式 $F(P(x))=(2\pi)^nP(-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma})\delta(\sigma)$. 从而

$$F((b\cdot x)^m)=(2\pi)^n(-i(b\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}))^m\delta(\sigma)$$

故

$$\begin{aligned}(F(e^{b\cdot x}),\psi)=&(2\pi)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}((-i(b\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}))^m\delta(\sigma),\psi(\sigma))=\\&(2\pi)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(ib\cdot D)^m\psi(s)\Big|_{s=0}=\\&(2\pi)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}D^m\psi(s)\Big|_{s=0}(ib)^m=\\&(2\pi)^n\psi(ib)=(2\pi)^n(\delta(s-ib),\psi(s))\end{aligned}$$

即有 $F(e^{b\cdot x})=(2\pi)^n\delta(s-ib)$.

由广义函数 Fourier 变换的定义及性质，我们看到对任意广义函数都可以求其 Fourier 变换. 取消了在经典 Fourier 变换中对函数的种种限制. 下面给出常用的一元函数的 Fourier 变换的一个简表.

	广义函数 $f(x)\in K'$	Fourier 变换 $\tilde{f}(\sigma)\in Z'$
1.	$\delta(x-a)$	$e^{-ia\sigma}$
2.	e^{iax}	$2\pi\delta(\sigma-a)$

3.	$x^{n}(n=0,1,2,\cdots)$	$2\pi(i)^{n}\delta^{(n)}(\sigma)$
4.	$\delta^{(n)}(x-a)$	$(i\sigma)^{n}\mathrm{e}^{ia\sigma}$
5.	$\dfrac{1}{x}$	$i\pi\mathrm{sign}\sigma$
6.	$\dfrac{1}{x^{2}+a^{2}},\mathrm{Re}(a)<0$	$-\dfrac{\pi}{a}\mathrm{e}^{a\lvert\sigma\rvert}$
7.	$\dfrac{1}{x^{2}}$	$-\pi\lvert\sigma\rvert$
8.	$\theta(x)$	$\dfrac{-i}{\sigma}+\pi\delta(\sigma)$
9.	$\sin x$	$-i\pi[\delta(\sigma-1)-\delta(\sigma+1)]$
10.	$\cos x$	$\pi[\delta(\sigma+1)+\delta(\sigma-1)]$

利用经典分析中两个函数卷积的性质,也可将卷积运算推广到广义函数上去.在分析数学中我们知道,若 $f,g\in L'$ 且 f 的支集有界,则

$$h(x)=\int f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

也是局部勒贝格可积函数.称其为 f 与 g 的卷积,记为 $h=f*g$.

若 $f,g\in L'$,则有 $h=f*g\in L'$,且 $f*g=g*f$.对任意 $\varphi\in K$,利用 Fubini 定理及勒贝格积分的平移不变性知

$$\begin{aligned}(f*g,\varphi)=&\iint f(x-t)g(t)\varphi(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\\&\int g(t)\left(\int f(x-t)\varphi(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\\&\int g(t)\left(\int f(x)\varphi(x+t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

若记 $\tau_{t}\varphi=\varphi(x+t)$,则上式可表示为

$$(f*g,\varphi)=(g(t),(f,\tau_{t}\varphi))$$

利用上式我们来给出广义函数卷积的概念.

定义 3.3.4 设 $f,g\in K'$,而且 f 是具有有界支集的,则称广义函数

$$f*g:\varphi\to(g,(f,\tau_{(\cdot)}\varphi)),\varphi\in K$$

为广义函数 f 与 g 的卷积.

易知卷积运算满足下性质.

性质 3.3.1 若 $f,g,h\in K'$,α,β 为常数,f 的支集有界,则 $f*(\alpha g+\beta h)=\alpha f*g+\beta f*h$.

定理 3.3.4 设 $f,g\in K'$,f 的支集有界,$F(f)$ 是正则广义函数,而且 $F(f)$ 是 Z 的乘子,则

$$F(f*g)=F(f)F(g)$$

该定理的证明有读者自行完成.

习　题　三

1. 求证:δ 函数不是局部可积函数.

2. 设

$$f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n\qquad(n\in N),$$

求证:

$$f_n(x)\to e^x\qquad(K').$$

3. 求证:(1) $\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}\to\delta(x)(\varepsilon\to 0+)$;

(2) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4t})\to\delta(x)(t\to 0+)$.

4. 设 $f(x)$ 是 E^n 上具有直到 m 阶的一切连续偏导数的连接函数.(m 为某正整数)证明存在 K 中函数列 $\{\varphi_k\}$,使当 $p=(p_1,\cdots,p_n)$,$p_1+\cdots+p_n\leqslant m$ 时,$\{D^p\varphi_k\}$ 在 E^n 的任一有界域上一致

收敛于 $D^p f$.

5. 设 $\{f_m\}$ 及 f 都是局部勒贝格可积函数。哪些条件与 $f_m \xrightarrow{K'} f$ 等价?

6. 若 K 中极限概念改为对一切 p, $\{D^p \varphi_m\}$ 一致收敛于 $D^p \varphi$, 那么是否任一局部可积函数仍为 K 上的线性连续泛函?

7. 证明对 $\forall p \in [1,\infty)$, K 在 L^p 中稠密.

8. 设 C 为 R^n 中开集, A 为 C 的紧子集, 证明存在 $\varphi \in K$, 其支集在 C 中, 使 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, 且 $\varphi(x)$ 在 A 的一个邻域内恒为 1.

9. 作为广义函数求 $|x|$ 的 n 阶导数.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x^\lambda & (x > 0) \\ 0 & (x \leqslant 0) \end{cases}$, 作为广义函数求 $f(x)$ 的 n 阶导数.

11. 设 $f(x)$ 除 $x = x_0$ 点外可导, x_0 为其第一类间断点, 证明作为广义函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = f' + [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\delta(x - x_0)$$

12. 设 $e_k = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0) \in E^n$ (即只有第 k 个分量为 1, 其它为零), $\tau_t^{(k)}$ 为 E^n 中平移变换

$$\tau_t^{(k)} : x \mapsto x + te_k \qquad x \in E^n$$

证明: 当 F 是 n 元的广义函数时, $\dfrac{\partial F}{\partial x_k} = \lim\limits_{n\to\infty} n(\tau_{-\frac{1}{n}}^{(k)} F - F)$.

13. 证明函数列 $\left\{\dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sin nx}{x} \,\middle|\, n = 1,2,\cdots\right\}$ 是 δ_- 式函数列.

14. 设 F 是一元广义函数, m 是一个非负整数, 而且在一个开区间 (a,b) 中, $\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} F = 0$, 证明 F 在 (a,b) 上等于一个次数小于 m 的多项式.

15. 设 $f \in L^*$, $F \in K'$ 为一元函数, 且存在一组常数 $c_1, \cdots,$

c_p,使

$$\frac{d^p}{dx^p}F + C_1\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}F + \cdots + C_pF = f$$

证明:$F \in L^*$,而且 F 就是上述常微分方程的普通解.

16. 设 $u_p, v_p(p = 0,1,\cdots,n)$ 是常数,将

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\sum_{p=1}^{n}x^p(u_p + v_p\theta(x))$$

其中 $\theta(x) = \begin{cases}1 & x > 0\\ 0 & x \leqslant 0\end{cases}$

表示成 δ 函数及其导数的线性组合的表示式.

17. 求出当 $2m \geqslant n$ 时方程 $\Delta^m E = \delta$ 的基本解的表示式.

18. 设 $f, g \in K'$,而且 f 的支集是有界的,p 是任一多项式,证明

$$P(D)(f * g) = (P(D)f) * g = f * (P(D)g)$$

19. 证明:若 $f \in K$,则 f 按广义函数和按普通函数作的 Fourier 变换一致.

参考文献

[1] 张恭庆,林源渠.泛函分析讲义(上册),北京大学出版社,1987

[2] 郑维行,王声望.实变函数与泛函分析概要.人民教育出版社,1980

[3] 夏道行等.实变函数与泛函分析.人民教育出版社,1979

[General Information]
书名=简明泛函分析
作者=
页数=134
SS号=0
出版日期=
Vss号=97288152