A216181

國立政治大學圖書館典藏
由國家圖書館數位化

520
800
1.2
119

高等天文學

下　册

目　錄

第十八章　動學……(1)
§275. 動體之行動……(1)
§276. 圓行動……(5)
§277. 刻白爾律……(5)
§278. 刻白爾第三律之修正……(7)
§279. 由刻白爾定律得有三項斷語……(8)
§280. 由月之行動證明重力……(8)
§281. 圓錐體切面……(9)
§282. 二體算題……(11)
第十九章　三體算題　攝動之幾何詮釋　月理潮汐……(39)
§283. 三體算題……(39)
§284. 攝動……(39)
§285. 行動之微分方程式……(40)
§286. 根數之變異……(46)
§287. 畫圖推定諸根數……(48)
§288. 攝動力之分力……(49)

216181

§ 289. 垂力之攝動影響……(50)
§ 290. 切力之影響於長徑者……(51)
§ 291. 切力之影響於長軸線者……(52)
§ 292. 切力之影響於偏心率者……(52)
§ 293. 法力之影響於長徑者……(53)
§ 294. 法力之關於長軸線者……(53)
§ 295. 法力之關於偏心率者……(54)
§ 296. 總表……(55)
§ 297. 阻礙物之攝動影響……(56)
§ 298. 起於中體微扁之攝動……(56)
§ 299. 第三物體攝動力之幾何分解法……(58)
§ 300. 用解析數學法分解第三體之攝動影響……(60)
§ 301. 交點之攝動……(64)
§ 302. 交角之攝動及攝動加速度在行動平面內之分體……(66)
§ 303. 長徑之攝動……(68)
§ 304. 周期之攝動……(68)
§ 305. 年差……(69)
§ 306. 平速長差……(69)
§ 307. 二均差……(72)
§ 308. 角差……(76)
§ 309. 長軸線之行動……(77)
§ 310. 兩心差之攝動……(81)
§ 311. 出差……(82)
§ 312. 告司推算長差之法……(83)
§ 313. 海面因潮汐成長橢圓體……(84)

§ 314. 潮汐之昇力……(86)
§ 315. 潮汐之波動理……(87)
§ 316. 自由波動及強迫波動……(87)
§ 317. 同潮時線……(88)
§ 318. 潮波之行程……(88)
§ 319. 河潮……(90)
§ 320. 潮之高度……(90)
§ 321. 潮波之折反及衝撞……(91)
§ 322. 湖潮及島海之潮……(91)
§ 323. 地之堅度……(91)
§ 324. 潮對地球自轉之影響……(92)
§ 325. 潮對月球行動之影響……(93)
第二十章　行星總論及攝動……(94)
§ 326. 行星總論及攝動……(94)
§ 327. 諸行星去日相對之距離……(94)
§ 328. 周期……(97)
§ 329. 視行……(98)
§ 330. 天空行星之屬地心行動……(99)
§ 331. 行星在天球上之視行……(99)
§ 332. 行星對日在天空位置之行動……(101)
§ 333. 多祿某之太陽系行動學說……(102)
§ 334. 考白尼之太陽系行動學說……(103)
§ 335. 第谷之太陽系行動學說……(103)
§ 336. 行星軌道之根數……(104)
§ 337. 屬地心位置……(106)
§ 338. 觀測之間求法……(106)

§ 339. 屬日心位置……(107)
§ 340. 屬日心位置與屬地心位置之推算……(107)
§ 341. 周期之測定……(113)
§ 342. 求星之去日距離(以地日距離爲單位)……(114)
§ 343. 測最大偏角定內行星之平均星日距……(116)
§ 344. 求金水二星之留點……(116)
§ 345. 軌道之推定……(119)
§ 346. 推算軌道之公式……(122)
§ 347. 行星攝動……(132)
§ 348. 周期差……(136)
§ 349. 長差……(136)
§ 350. 交點行……(136)
§ 351. 交角之變……(141)
§ 352. 歲差章動……(144)
§ 353. 長徑之攝動……(146)
§ 354. 兩心差之攝動……(149)
§ 355. 行星道長徑之行……(152)
§ 356. 諸行星相攝動……(154)
§ 357. 月道長徑行之理可以器顯之……(156)
§ 358. 逐時經緯度之差(附海王星之發見史)……(157)
§ 359. 用解析數學法分解攝動……(174)
§ 360. 行星直徑……(213)
§ 361. 面積及體積……(213)
§ 362. 行星有衞星者之質量……(214)
§ 363. 行星無衞星者之質量……(215)
§ 364. 密度……(215)

§ 365. 表面上重力……(216)
§ 366. 行星之扁度……(216)
§ 367. 軸之傾斜……(216)
§ 368. 遠鏡對於表面特徵之研究……(216)
§ 369. 行星現於分光器上之特徵及反光力……(216)
§ 370. 行星之衞星……(216)
§ 371. 何木包爾特之行星分類……(217)
§ 372. 推內外星道大小之簡法……(217)
第二十一章　行星分論……(220)
§ 373. 水星……(220)
§ 374. 距離,光及熱……(220)
§ 375. 周期……(220)
§ 376. 古時之記載……(221)
§ 377. 斜度……(222)
§ 378. 直徑,表面積及容積……(222)
§ 379. 質量,密度及表面重力……(222)
§ 380. 反光力……(222)
§ 381. 遠鏡中所見星之外觀及位相……(222)
§ 382. 大氣……(223)
§ 383. 水星掠日……(223)
§ 384. 金星……(224)
§ 385. 距離,周期及軌道斜角……(224)
§ 386. 直徑,面積及容積……(225)
§ 387. 質量,密度及重力……(225)
§ 388. 位相……(225)
§ 389. 最大光度……(225)

§390. 表面標記及自轉……(226)
§391. 反光力……(226)
§392. 大氣……(226)
§393. 衛星……(227)
§394. 金星掠日……(227)
§395. 掠日之復至期……(227)
§396. 火星……(228)
§397. 星去地距離……(228)
§398. 直徑,面積及容積……(229)
§399. 質量,密度及重力……(229)
§400. 位相……(229)
§401. 反光力……(229)
§402. 自轉……(229)
§403. 星之赤道交星道面之斜角……(230)
§404. 兩極之低扁……(230)
§405. 遠鏡中星之外觀及表面標記……(230)
§406. 大氣及溫度……(231)
§407. 衛星……(232)
§408. 小行星……(233)
§409. 探索方法……(238)
§410. 小行星之軌道……(238)
§411. 小行星之體質……(239)
§412. 愛神星……(239)
§413. 小行星之來源……(240)
§414. 水星內之行星及黃道光……(240)
§415. 木星軌道……(241)

§ 416. 周期……(242)
§ 417. 直徑,面積及容積……(245)
§ 418. 質量,密度及表面重力……(245)
§ 419. 位相及反光力……(245)
§ 420. 自轉,自轉之軸及季候……(246)
§ 421. 在遠鏡中之外觀……(246)
§ 422. 温度……(246)
§ 423. 大氣……(247)
§ 424. 衛星……(247)
§ 425. 衛星之平均行動間及黃經間之關係……(247)
§ 426. 木星之月食……(248)
§ 427. 光差……(250)
§ 428. 衛星之自轉……(251)
§ 429. 土星軌道及周期……(251)
§ 430. 直徑,面積及容積……(252)
§ 431. 質量,密度及重力……(252)
§ 432. 自轉……(252)
§ 433. 星面標記,反光力及彩色帶……(252)
§ 434. 光環……(253)
§ 435. 光環之大小……(254)
§ 436. 光環之位相……(254)
§ 437. 土星光環……(257)
§ 438. 衛星……(257)
§ 439. 天王星……(259)
§ 440. 衛星……(260)
§ 441. 軌道之大……(260)

§ 442. 星之外觀……(261)
§ 443. 衛星……(261)
§ 444. 太陽系之比擬……(261)
§ 445. 行星面之生物……(261)
§ 446. 冥王星……(262)
第二十二章 彗星……(275)
§ 447. 彗星形狀……(275)
§ 448. 彗星行動及軌道……(276)
§ 449. 彗之大小……(278)
§ 450. 彗之再現……(278)
§ 451. 昔見之彗……(281)
§ 452. 周時小之彗……(282)
§ 453. 迪未谷彗……(285)
§ 454. 勃陸孫彗……(286)
§ 455. 彼得彗……(286)
§ 456. 1843 年之大彗……(286)
§ 457. 杜捺底測得第三大彗……(289)
§ 458. 1882 年之大彗星……(289)
§ 459. 1892 年侯爾木斯發見之彗……(290)
§ 460. 彗星之名稱……(290)
§ 461. 彗尾之分三種……(291)
§ 462. 彗之來源……(291)
§ 463. 彗星彩色帶……(292)
§ 464. 因測彗而推行星質量……(293)
§ 465. 彗尾之討論……(293)
§ 466. 彗之逆行……(293)

§ 467. 彗道長徑方向……(293)
第二十三章　恆星……(297)
§ 468. 恆星……(297)
§ 469. 恆星大小之等級……(297)
§ 470. 光比及星等之絕對尺度……(299)
§ 471. 遠鏡大小與其能見之最小星等級之關係……(300)
§ 472. 星之自行……(300)
§ 473. 星之眞行……(301)
§ 474. 日之自行……(304)
§ 475. 星之視差及距離……(308)
§ 476. 恆星距離之單位（光年）……(313)
§ 477. 星之絕對光等……(314)
§ 478. 星之眞徑,光度及實光……(314)
§ 479. 變星……(316)
§ 480. 恆星之彩色帶……(321)
§ 481. 雙星及聚星……(323)
§ 482. 聯星……(327)
§ 483. 聯星軌道……(328)
§ 484. 古人之測算聯星軌道……(330)
§ 485. 南門二及天津增二十九之軌道……(332)
§ 486. 聯星之色……(333)
§ 487. 星團……(333)
§ 488. 星雲……(336)
§ 489. 諸橢圜星雲……(340)
§ 490. 天琴座星雲……(340)
§ 491. 行星狀星雲……(341)

§492. 雙星雲……(341)
§493. 有法形之星雲……(342)
§494. 無法形之星雲……(342)
§495. 渦旋狀之星雲……(345)
§496. 墨吉蘭尼克雲……(345)
§497. 星雲之變異……(346)
§498. 星雲彩色帶……(348)
§499. 天河……(349)
第二十四章 隕石 流星……(365)
§500. 隕石及流星……(365)
§501. 流星羣……(367)
§502. 流星道之解法……(370)
§503. 流星道交角……(370)
§504. 流星道與但白勒之彗星道……(371)
§505. 流星道與1862年大彗星道之比較……(373)
§506. 隕石流星羣加於地之影響……(373)
第二十五章 宇宙創造論……(376)
§507. 宇宙創造論……(376)
§508. 行星系……(376)
§509. 拉普拉瑟學說（星雲學說）……(377)
§510. 拉普拉瑟學說之修改……(378)
§511. 特洛卜立階之解釋天王海王二星之奇異自轉……(379)
§512. 費易之修改星雲學說……(380)
§513. 潮動轉化學說……(381)
§514. 由日月行星之冷熱而得之證明……381)
§515. 日體收縮之速率……(382)

§516. 太陽系已往之年齡……(382)
§517. 太陽系將來之壽命……(383)
§518. 恆星,星團及星雲……(383)
§519. 現世宇宙局勢能否永久存在……(384)
§520. 拉克亞流星學說……(384)
§521. 太陽系的新學說……(385)
§522. 宇宙創造論之精進及新學說……(389)
附表……(401)
附錄……(475)
（甲）歲差　自行　章動　光行差　恆星歲周視差……(475)
（乙）黃道斜角及星之絕對赤經緯之測定……(527)
（丙）弧三角公式……(537)

320.1
2165--2
01692
教育部圖書室藏書

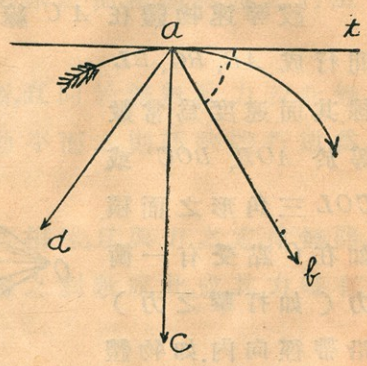
高等天文學

下　册

第十八章

動　學

§275.動體之行動　據牛頓第一動律,一動體無外來之攪擾將永以一致不變之速度行於一直線上,若見有如此行動之物體,即可斷定該物體或未受外力之作用,或其所受之外力彼此相衡.

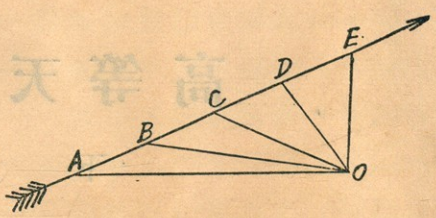


第一七九圖

若一物體行於直線上,時增或時減其速度,則必有外力在其行動線上,加於該物體,以助其行動,或阻其行動.若物體行於曲線上而變其速度,則所受之外力必斜向其行動線.若其速度被增,則力之方向必向前,如第一七九圖 ab 線與行動線 at (曲線之切線)成小於90度之角.若其速度被阻,則力必向後,如 ad 與 at 成大於90度之角.若速度不變,則外力之方向必正垂直於行動線,如 ac 所示者然. ab、ad、ac 或爲單力,或爲衆力之合力.

(一)若一物體以一致不變之速度行於一直線上,於其接連每單位時間所行路綫之末端向另外一點聯引直線,如第一八〇圖 A、B、C、D、E 各點聯至 O 之直線.由是則有一串等面積之

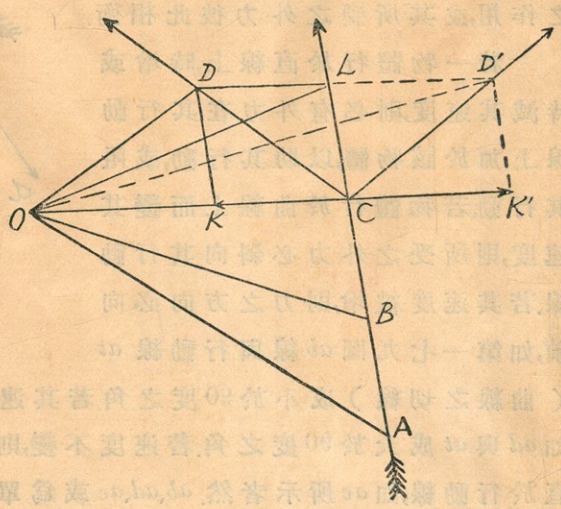
三角形,因其底線 AB、BC 等皆相等,且同在一直線上,並有共同之頂點 O 也.如以 O 爲心,AO 爲帶徑,則可謂動體無外力作用時,其由任何點之帶徑於相等時間內必繞該心畫過相等之面積.此之謂物體之面速度(Areal velocity),在此例則爲不變之常數.



第一八〇圖

(二)若動體如此進行,受有外來之衝力,而此力或沿帶徑向內或向外,則其行動平面及其面速度皆不變.此斷語可證之如下:

設等速物體在 AC 線上（第一八一圖）,於接連單位時間行成 AB、BC、BL 線.其面速度爲常數等於 AOB、BOC 或 COL 三角形之面積.如在 C 點受有一衝力（如打擊之力）沿帶徑向內.如物體在 C 點時係靜止,則此力能使物體於單位時間行成 CK 線.今該物體正當行時而受此力,必沿新行路而至 D 點.如作成 $CKDL$ 四邊形卽定 D 之所在.依照牛頓第二動律,如此則得新動 CK 及原動 CL 之合動.此合動之面速



第一八一圖

度由OCD三角形量定之.因COL及COD之底線同爲OC,其頂點同在與OC平行之直線上.故COL面積必等於COD之面積,亦等於BOC及AOB之面積,是此動體之面速度未嘗因此衝力而變也.

同理,此衝力若沿帶徑向外,其單獨之行動爲CK',合動爲CD',COD'仍等於COL.

至於行動之平面,則因LD線係由L點引出與OC平行之線,故D點在OCL面內,而OCL面爲含BOC及AOD者之一部分,是以知OCD仍在原平面內也.

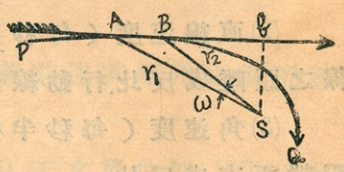
(三)由上之推證而得一般之斷語如下:

物體在一外力之下行動,此外力或恆向或恆背某固定之中心,則其帶徑於相等時間內畫行相等之面積,而物體之行道皆在同一平面內.

如此一力之作用,若接續無間斷,直同於無數衝力.若此無數衝力中無能變其面速度或其行動平面者,則該物體行道爲一曲線,而非一斷線也.

上所論者,無論其力爲相攝或爲相斥,且與力之定律無關,其力或與距離立方成反比,或與距離之對數成比,或其力時有間斷,此斷語皆通用有效.

(四)反之,若一物體如此行動,於等時間內繞一點畫行等大面積,則加於該物之力必皆向該點.



第一八二圖

由此等面積定律乃推定關於物體在中心力作用下而動之直線速度及速度之定律,茲述之於下:

(五)直線速度定律(Law of linear velocity):

設一動體其所受之力恆向 S 點（第一八二圖）.命 AB 爲該物體行道之一部分,於一秒時內所畫行者.引 Bb 切線.以扇形 ASB 爲三角形（因一秒時之行道曲度極小也）.則此三角形之面積等於 $\frac{1}{2}AB \times Sb$.AB 爲物體於 1 秒時所行之距離,乃其直線速度也.Sb 爲由力心至行動線(Line of motion)之距離.Sb 切線卽所謂行動線也.如以 p 代 Sb, A 爲扇形之面積,則該物體在行道中之直線速度 V（以每秒英里計之）$=\frac{2A}{p}$,卽與 p 成反比也.p 若爲 0 而 A 不爲 0,則 V 爲無窮大矣.

(六)角速度定律(Law of angular velocity):

三角形 ASB 之面積亦等於 $\frac{1}{2}$（$AS \times BS \times \sin ASB$),卽 $A=\frac{1}{2}r_1 r_2 \sin w$.若由 S 引 r 線至 AB 中點,則可令 $r_1 r_2 = r^2$,因一秒爲時甚短,r_1 及 r_2 相差無多也.ω 亦爲甚小之角,若以半徑弧計之,則可令角之正弦等於角之本值.由是

$$\frac{1}{2}r^2\omega = A,\ \omega 及 = \frac{2A}{r^2}.$$

ω 乃物體之角速度,卽每秒畫行自 S 所見之半徑角數,而 r 爲其帶徑.

(七)總言之,動體受一中心力 (Central force) 之作用,必合下之三律:

(1)面速度（每秒之英畝數）爲常數.

(2)直線速度（每秒英里數）與自力心至該時物體行動線之距離成反比.行動線乃物體行至軌道一點之切線也.

(3)角速度（每秒半徑弧數或度數）與自力心至物體之距離平方成反比.

前已言過,據觀測所得,日之角速度隨其視徑平方而變.卽

由此推定等面積定律爲地球繞日行動之事實.牛頓曾首先指示動體受一中心力之作用,必遵守等面積定律;反之,動體遵守等面積定律,必在一中心力作用之下.

§276. **圓行動**　物體在一中心力作用之下行於圓圈上,其力必爲常數,而由下式算得之:

$$f=\frac{V^2}{r} \quad \cdots\cdots(1)$$

r 爲圓之半徑,V 爲速度,f 爲中心力,以其加速度量計之,卽以該力能使該物體於一秒時內增加若干速度單位也.故以每秒公尺數或英尺數計之,一如重力以 $g=9.81$ 公尺表示之也.

V 不能由觀測得之,但 V 等於圓周除以行動一周所歷之時,卽 $2\pi r\div t$. 以之代入(1)式內,則有

$$f=4\pi^2\left(\frac{r}{t^2}\right) \quad \cdots\cdots(2)$$

雖僅爲(1)之等式,然便利多矣.

§277. **刻白爾律**(Kepler's law)　在1607—1620年間刻白爾探討第谷之觀測,首創行星運行之三律,有如事實之無庸解釋者.其律如下:

(一)各行星之軌道爲橢圓,日居其二焦點之一.

(二)各行星帶徑於等時間畫行等面積.

(三)調和定律 (Harmonic law).　行星周期之平方與其去日平均距離之立方成正比例,卽

$$t_1^2 : t_2^2 = a_1^3 : a_2^3.$$

爲使學者易於明瞭第三律之意義,茲述其應用之簡例數則如下:

(1)如行星去日之平均距離爲 100 天文單位,卽 100 倍日地距離,則其周期應爲何數?

97年7月

$$1^3 : 100^3 = (1\text{年})^2 : x^2,$$

$$x = 100^{\frac{3}{2}} = 1000\text{年}.$$

(2) 如行星之周期爲 125 年,其距日如何?

$$1^2 : 125^2 = 1^3 : x^3,$$

$$x = 125^{\frac{2}{3}} = 25\text{天文單位}.$$

(3) 如有一衞星接近地面,其周期應如何?

$$(\text{月地二心距})^3 : (\text{衞星距})^3 = (27.3\text{日})^2 : x^2$$

$$60^3 : 1^3 = (27.3)^2 : x^2,$$

$$x = 1\text{時}24\text{分}.$$

(4) 如日地距增加$\frac{10}{100}$,其年之長應如何?

$$(365{\cdot}25)^2 : x^2 = 1^3 : (1.10)^3,$$

$$x = 421.38\text{日}.$$

卽增長 56.13 日.

多數天文家推解此三律之物理意義,認爲有一力向日,或由日發出,可作其解釋,而牛頓證明確有如此之力.牛頓並解明等面積律及其反則,實爲行動定律之附帶論斷.並證明若物體如地球之順橢圓運行,其力心在其焦點之一,則在其軌道各點之力必隨其去力心之距離平方而反變之(卽與距離平方成反比).最後復謂若認可調和定律,則其加於諸行星之力必亦依照平方反比之律而變.

此最後之議論,在圓周軌道,則頗易證明.由(2)式則其力之方式如下:

$$f = 4\pi^2 \frac{r}{t^2}.$$

同理其加於第二行星之力爲 $f_1 = 4\pi^2 \frac{r_1}{t_1^2}$,由是得

$$\frac{f}{f_1}=\frac{r}{t^2}\times\left(\frac{t_1^2}{r_1}\right).$$

依照刻白爾定律 $t^2:t_1^2=r^3:r_1^3$, 由是

$$t_1^2=\frac{t^2r_1^3}{r^3}.$$

以 t_1^2 之值代入前式,則得

$$\frac{f}{f^1}=\frac{r}{t^2}\times\frac{t^2r_1^3}{r^3r_1}=\frac{r_1^2}{r^2},$$

即爲平方反比之律,　$f:f_1=r_1^2:r^2$.

在橢圓軌道亦如此,惟以半長徑 a 替代 r 耳.

在圓軌道,調和定律實爲重力定律之附帶論斷,此可證之如下:

由(2)式有　　$f=4\pi^2\frac{r}{t^2}$.

由重力定律有　　$f=\frac{M}{r^2}$,

M 爲日之質量.由此二式得

$$\frac{M}{r^2}=4\pi^2\frac{r}{t^2},\text{ 及 }t^2=\frac{4\pi^2}{M}r^3.$$

同理在他一星有　　$t_1^2=\frac{4\pi^2}{M}r_1^3$,

由是得調和定律,　$t^2:t_1^2=r^3:r_1^3$.

在橢圓軌道亦如此,惟推證時須用等面積定律而較繁難耳.

§278. 刻白爾第三律之修正　調和定律並非的確,不過刻白爾係由觀測推斷,其不同處極小,非觀測所能覺察;故不能謂刻白爾之推斷爲不確也.

若行星僅爲質點 (Particles of matter)，則調和定律確切無疑.但行星質量雖爲日質之極小部分,然其小亦非不能計者.例如木星且能攝日一如日攝木星,其質量可不計及乎.設木星在距日 r 遠時受日之攝力爲 $G\frac{M}{r^2}$（卽該力予木星向日之加速度也）.同時日亦受木星之攝力,其向木星因此力而生之加速度爲 $G\frac{m}{r^2}$.故兩體彼此趨近之速率爲 $G\frac{m+M}{r^2}$.則討論木星繞日心行動時,不能僅用 $f=G\frac{M}{r^2}$,而須用 $f=G\frac{m+M}{r^2}$ 也.但在圓周行動,$f=\frac{4\pi^2 r}{t^2}$,故得

$$Gt^2(M+m)=4\pi^2 r^3.$$

作爲比例,則 $t^2(M+m):t_1^2(M+m_1)=r^3:r_1^3$. 在行星行動未被變動前,此方爲眞確調和定律.

§279. 由刻白爾定律得有三項斷語

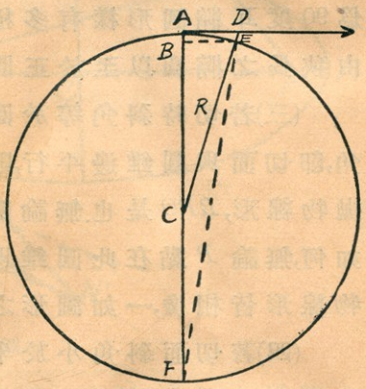
(一)由第二定律得保持行星在軌道內之力必向日.

(二)由第一定律得無論在何行星力之量隨該行星去日距離平方而反變之,卽力與去日距離之平方成反比也.

(三)由第三定律得該力只關於行星質量及去日距離,而無關於行星之物理情況（如其溫度化學成分等等）.

§280. 由月之行動證明重力 當初牛頓創重力定律時,曾設法證實其理想.苟月繞地而行係受地球攝力之支配,則必可算出該力與地面重力之比數.惟彼時伊尙不能證明球體之攝力,一若質量皆聚於中心者然,遂因地球大小之數不準確（牛頓擬定每度合60英里）而使其結果失敗.數年後皮克爾在法國北部測量子午弧之報告,送到英國皇家公會,得知每度合69英里長,伊乃得竟其全功.

在地球表面,物體於1秒時降落193英寸,月之距離幾爲地球半徑之60倍.若重力實隨距離之平方而反變之,則一石塊在月之距離處所落之高必爲其$\frac{1}{60^2}$(卽$\frac{1}{3600}$),卽應落$\frac{193}{3600}$=0.0535英寸也.月每秒向地降落之高,卽其軌道每秒由直線向內偏曲之數.若保持月在軌道內之力實同於使物體向地心降落之力,則其偏曲之數當等於0.0535英寸.如第一八三圖AE爲月於1秒時內之行路必等於$\frac{2\pi R}{t}$,R爲月軌道之半徑,t爲恆星月之秒數.因AEF爲直角三角形,則



第一八三圖

$$AB : AE = AE : AF\ (\text{卽}\ 2R).$$

由是
$$AB = \frac{\overline{AE}^2}{2R}.$$

代入實數,得AB=0.0534,實合於193英寸之$\frac{1}{3600}$.

數雖相合,不能卽認重力之理成立,僅能證明其有成立之可能耳.或者其數爲偶然之合,而兩力之性質或不同(如爲電力、磁力)亦未可知,不能謂其必爲重力也.

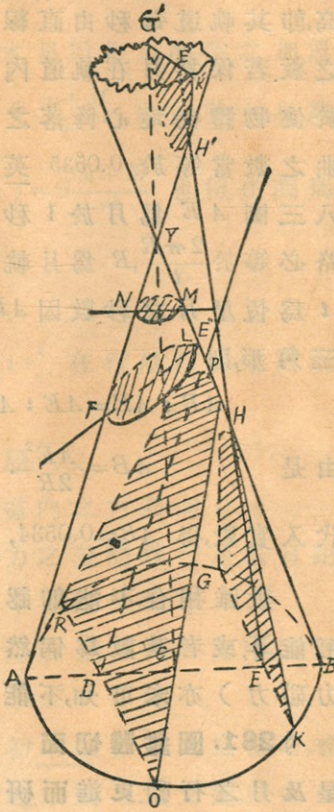
§281. 圓錐體切面　牛頓並未認其重力定律已足解釋行星及月之行動.更進而研究題之反面,以推定行星及月果依重力定律而行,其行動究將如何.伊推得物體繞中心質量而行,並非必行於圓圈,或行於橢圓周,如行星之軌道然.但所行之軌道必爲任何兩心差之圓錐體切面,或竟爲圓形、橢圓形、拋物線形(Parabola),或竟爲雙曲線(Hyperbola).茲爲便於學者起見,略述圓錐體切面於下:

(一)任何頂角之圓錐體,若垂直其軸而切之,其切面爲圓形,MN 是也.

(二)若斜切之,其與錐軸所成之斜角大於圓錐半頂角,則切面爲橢圓形,LF 是也.圓形實爲橢圓形之特例,僅其切時斜角爲90度耳.橢圓形樣有多種之不同,由狹長之橢圓以至於正圓皆是也.

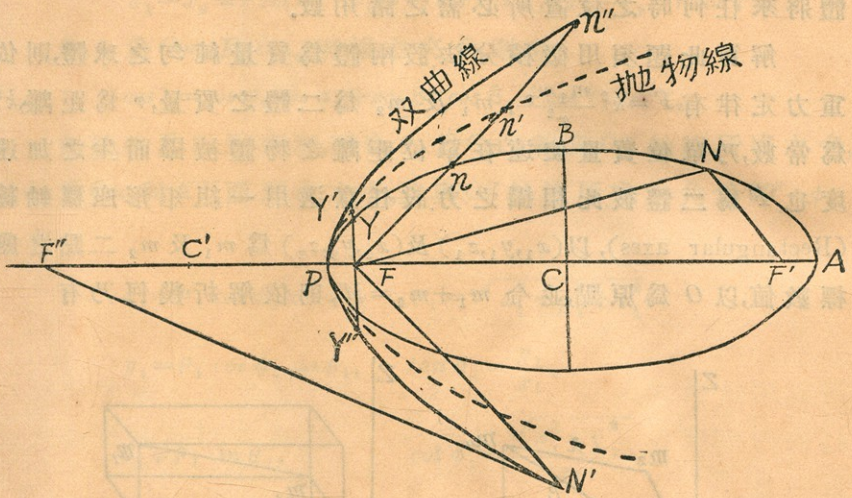
(三)若切時斜角等於圓錐半頂角,卽切面與圓錐邊平行,則切面爲拋物線形,RPO 是也.無論圓錐頂角如何,無論 P 點在此圓錐邊何處,拋物線形皆相像,一如圖形之相像然.

(四)若切面斜角小於半頂角,則切面入錐體愈深,而爲雙曲線形矣.若錐體由頂點延出,則延出之錐體亦有同形之切面.是以謂之雙曲線也.GHK 爲原錐體內之曲線,$G'H'K'$ 爲延出錐體內之曲線.雙曲線之徑在曲線外,如圖之 HH' 線,其中心在此徑線中點.



第一八四圖

實則圓錐體切面共分爲兩種,一爲橢圓,一爲雙曲線.圓乃橢圓之特例,而拋物線乃橢圓與雙曲線之中間物也.此可由第一八五圖見之,在橢圓線上,一點至二焦點距離之和 $FN+F'N$ 等於其長徑;在雙曲線,則其較 $F''N'-FN$ 等於其長徑.在橢圓,兩心差小於1(在圓則兩心差爲0);在雙曲線,則大於1.



第一八五圖

圓錐體切面在極點座標法 (Polar co-ordinates) 之通用方式爲

$$r=\frac{p}{1+e\cos V}.$$

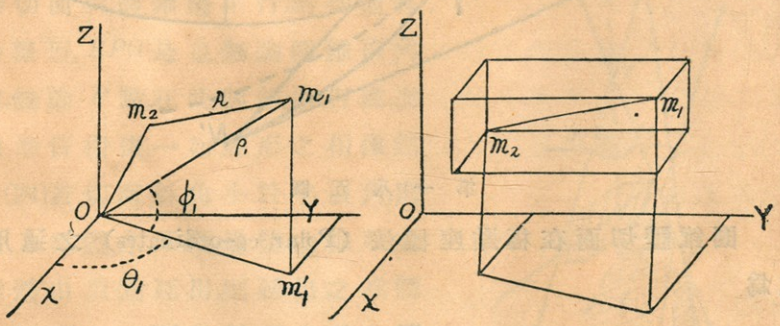
r 爲焦點至線上一點之距離,如 FN、FN' 或 FN''. e 爲兩心差,如 $\frac{FC}{PC}$ 或 $\frac{FC'}{PC''}$. V 爲 PFn、PFn' 或 PFn'' 角。p 爲 FY、FY' 或 FY'' 直線,名曰半通徑(Semi-parameter).若 $e=0$,則曲線爲圓,而 $r=p$;若 e 小於 1,則曲線爲橢圓;若 e 大於 1,則爲雙曲線;若 $e=1$,則爲拋物線.

刻白爾第三定律,若改爲物體繞日轉行之面速度與其軌道通徑平方根成正比,即爲雙曲線,拋線及橢圓線,軌道通用之定律矣.

§**282. 二體算題** (Problem of two bodies)　此項算題,乃牛頓所提出,即由已知兩圓球體之質量,及其在某時之位置及行動,並已知之重力定律,推算其該時以後之行動,以及供備推求兩

體將來任何時之位置所必需之諸用數.

解算此題須用微積分法.設兩體爲質量純勻之球體,則依重力定律有 $F=k^2\frac{m_1m_2}{r^2}$. m_1 及 m_2 爲二體之質量,r 爲距離,k^2 爲常數,乃單位質量使遠在單位距離之物體被攝而生之加速度也.F 爲二體彼此相攝之力.設任意選用一組矩形座標軸線(Rectangular axes),以(x_1,y_1,z_1)及(x_2,y_2,z_2)爲 m_1 及 m_2 二點之座標數值,以 O 爲原點,並令 $m_1+m_2=M$,則依解析幾何乃有



第 一 八 六 圖

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$

$$Om_1^2=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},$$

$$Om_2^2=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

命 Om_1 分別與 X、Y、Z 三座標軸線所成之方向角(Direction angles)爲 α_1、β_1、γ_1,則有

$$x_1=Om_1\cos\alpha_1,\quad y_1=Om_1\cos\beta_1,\quad z_1=Om_1\cos\gamma_1,$$

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1.$$

其 Om_2 者同此.

命 α'、β'、γ' 爲 m_1m_2 線與 X、Y、Z 三座標軸線所成之方位角,則有

$$x_1-x_2=r\cos\alpha',\quad y_1-y_2=r\cos\beta',\quad z_1-z_2=r\cos\gamma'.$$

命 λ 爲 Om_1 及 Om_2 兩線之夾角,則有

$$\cos\lambda=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

如欲改爲極點座標,則命 θ_1 爲 Om'_1 線與 OX 軸線所成之角,以 ϕ_1 爲 Om_1 與 XY 面所成之角,其與 OZ 軸線所成之角爲 $90°-\phi_1$,乃有

$$x_1=\rho_1\cos\phi_1\cos\theta_1,\qquad \rho_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},$$

$$y_1=\rho_1\cos\phi_1\sin\theta_1,\qquad \tan\theta_1=\frac{y_1}{x_1},$$

$$z_1=\rho_1\sin\theta_1,\qquad \cot\phi_1=\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{z_1}.$$

其關於 Om_2 者同此.

以上略述幾何學方式以便學者.

茲將攝力 F 分爲三個分力,分別與 X、Y、Z 三座標軸線平行,謂之曰力之分體.並令 α、β、γ 爲 m_1m_2 線分別與 X、Y、Z 所成之方向角,則有

$$F_x=F\cos\alpha=F\frac{x_1-x_2}{r},$$

$$F_y=F\cos\beta=F\frac{y_1-y_2}{r},$$

$$F_z=F\cos\gamma=F\frac{z_1-z_2}{r}.$$

設 a_1 及 a_2 爲攝力所生之加速度,則 m_1a_1 及 m_2a_2 爲 m_1 及 m_2 所受之攝力,而各等於 $F=k^2\frac{m_1m_2}{r^2}$ 也.因 $a=\frac{dV}{dt}$,所以 a 在三座標平行線上分投之加速度爲 $\frac{d^2x}{dt^2}$、$\frac{d^2y}{dt^2}$ 及 $\frac{d^2z}{dt^2}$.由是則得二攝力之六個分力方式.

$$\left.\begin{aligned}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}&=-k^2m_1m_2\frac{x_1-x_2}{r^3},\\
m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}&=-k^2m_1m_2\frac{y_1-y_2}{r^3},\\
m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}&=-k^2m_1m_2\frac{z_1-z_2}{r^3},\\
m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}&=-k^2m_1m_2\frac{x_2-x_1}{r^3},\\
m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}&=-k^2m_1m_2\frac{y_2-y_1}{r^3},\\
m_2\frac{d^2z_2}{dt^2}&=-k^2m_1m_2\frac{z_2-z_1}{r^3}.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

所以用負號者,因前三式 m_1 受 m_2 攝力所生之加速度使 x_1、y_1、z_1 向內縮短也.後三式乃移 x_2、y_2、z_2 於前,俾用負號與前三式取一致.

解此六個二次聯立方程式,必得12個積分式,而生有12個常數.此12個常數,可由物體之3個初期座標數值,及其初期速度之3個分體而定之.

(一)取(1)式之第一及第四相併,第二及第五相併,第三及第六相併,則得

$$\begin{aligned}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}&=0,\\
m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}&=0,\\
m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2z_2}{dt^2}&=0.
\end{aligned}$$

積分之,乃得

$$\left.\begin{aligned}
m_1\frac{dx_1}{dt}+m_2\frac{dx_2}{dt}&=a_1,\\
m_1\frac{dy_1}{dt}+m_2\frac{dy_2}{dt}&=b_1,\\
m_1\frac{dz_1}{dt}+m_2\frac{dz_2}{dt}&=c_1.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

再積分之,則得

$$\left.\begin{aligned} m_1x_1+m_2x_2&=a_1t+a_2,\\ m_1y_1+m_2y_2&=b_1t+b_2,\\ m_1z_1+m_2z_2&=c_1t+c_2. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

至此已得12個中之6個積分式矣.其常數爲a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、c_2.

令$\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$爲兩體之公共質心之座標數值,則

$$\left.\begin{aligned} M\bar{x}&=m_1x_1+m_2x_2=a_1t+a_2,\\ M\bar{y}&=m_1y_1+m_2y_2=b_1t+b_2,\\ M\bar{z}&=m_1z_1+m_2z_2=c_1t+c_2. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

由此三式可知公共質心之座標數值與時俱增,所以該質心之行動乃具一致不變之速度.如微分(4)式,而平方之,再合併之,則得

$$M^2\left\{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{z}}{dt}\right)^2\right\}=a_1^2+b_1^2+c_1^2,$$

即

$$(M\bar{V})^2=a_1^2+b_1^2+c_1^2,$$

故

$$\bar{V}=\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}{M}.$$

$\bar{V}$乃質心行動之速度也,由此式可知其爲常數.若由(4)式銷去t,得有

$$\frac{M\bar{x}-a_2}{a_1}=\frac{M\bar{y}-b_2}{b_1}=\frac{M\bar{z}-c_2}{c_1}.$$

此乃空間直線之均衡方式(Symmetrical equations of a straight line in space)也.故知質心以常速度行於一直線上也.

(二)爲求m_1及m_2相對行動之方式,須用另一組座標與原座標平行,而原點則在二物體公共質心處.令m_1及m_2之新座標數值爲(X_1, Y_1, Z_1)及(X_2, Y_2, Z_2).其與原座標數值之關係爲

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= x_1 - \bar{x}, & X_2 &= x_2 - \bar{x}, \\ Y_1 &= y_1 - \bar{y}, & Y_2 &= y_2 - \bar{y}, \\ Z_1 &= z_1 - \bar{z}. & Z_2 &= z_2 - \bar{z}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

代入(1)式內,則二體相對行動在新座標軸線之微分式爲

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2X_1}{dt^2} &= -k^2m_1m_2\frac{(X_1-X_2)}{r^3}, \\ m_1\frac{d^2Y_1}{dt^2} &= -k^2m_1m_2\frac{(Y_1-Y_2)}{r^3}, \\ m_1\frac{d^2Z_1}{dt^2} &= -k^2m_1m_2\frac{(Z_1-Z_2)}{r^3}, \\ m_2\frac{d^2X_2}{dt^2} &= -k^2m_1m_2\frac{(X_2-X_1)}{r^3}, \\ m_2\frac{d^2Y_2}{dt^2} &= -k^2m_1m_2\frac{(Y_2-Y_1)}{r^3}, \\ m_2\frac{d^2Z_2}{dt^2} &= -k^2m_1m_2\frac{(Z_2-Z_1)}{r^3}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6)$$

此與絕對行動之公式樣式相同.

質量中心之座標軸線數值可由(4)式推得.故若知 X_1、Y_1、Z_1、$\cdots Z_2$,並知 a_1、$\cdots c_2$ 諸常數,則可推定二體在空間之絕對的位置.但實無法推得諸常數,而所能解者只(6)式所表示之相對行動耳.

因原點在質心,二體座標軸線數值乃有如下之關係:

$$\left.\begin{aligned} m_1X_1 + m_2X_2 &= 0, \\ m_1Y_1 + m_2Y_2 &= 0, \\ m_1Z_1 + m_2Z_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(7)$$

故若知二體中任一體之座標數值,可由(7)推得他一體者.

利用(7)式由(6)式之前三式消去 X_1、Y_1、Z_1,由後三式消去 X_2、Y_2、Z_2,消去之結果,得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2X_1}{dt^2}&=-k^2M\frac{X_1}{r^3},\\
\frac{d^2Y_1}{dt^2}&=-k^2M\frac{Y_1}{r^3},\\
\frac{d^2Z_1}{dt^2}&=-k^2M\frac{Z_1}{r^3},\\
\frac{d^2X_2}{dt^2}&=-k^2M\frac{X_2}{r^3},\\
\frac{d^2Y_2}{dt^2}&=-k^2M\frac{Y_2}{r^3},\\
\frac{d^2Z_2}{dt^2}&=-k^2M\frac{Z_2}{r^3}.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(8)$$

在前三式之 r 必爲 X_1、Y_1、Z_1 所表顯,後三式者必爲 X_2、Y_2、Z_2 所表顯.由(7)式則有

$$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}=\frac{M}{m_2}\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}=\frac{M}{m_2}r_1=\frac{M}{m_1}r_2.$$

如此則(8)式或可全爲 X_1、Y_1、Z_1,或全爲 X_2、Y_2、Z_2 所表顯,可勿庸互相糾纏也.但所欲求者乃一體對他一體之行動.設以 X、Y、Z 表 m_1 對於 m_2 之座標數值,則

$$X=X_1-X_2,\quad Y=Y_1-Y_2,\quad Z=Z_1-Z_2.$$

故以(8)式之第四由第一減去,第五由第二減去,第六由第三減去,並利用座標數值之關係,則得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2X}{dt^2}&=-k^2M\frac{X}{r^3},\\
\frac{d^2Y}{dt^2}&=-k^2M\frac{Y}{r^3},\\
\frac{d^2Z}{dt^2}&=-k^2M\frac{Z}{r^3}.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(9)$$

本題至此爲屬於第六次者,積分之,生有 6 個新常數.此 6 個常數由 m_1 對於 m_2 之 3 個初時座標數值及初時速度之 3 個

分體數值定之.

(三)欲求晝行面積之積分式,以 $-Y$ 乘(9)式之一以 $+X$ 乘(9)式之二,則有

$$X\frac{d^2Y}{dt^2}-Y\frac{d^2X}{dt^2}=0,$$

同理

$$Y\frac{d^2Z}{dt^2}-Z\frac{d^2Y}{dt^2}=0,$$

$$Z\frac{d^2X}{dt^2}-X\frac{d^2Z}{dt^2}=0.$$

積分之,爲

$$\left.\begin{aligned} X\frac{dY}{dt}-Y\frac{dX}{dt}&=A_1,\\ Y\frac{dZ}{dt}-Z\frac{dY}{dt}&=A_2,\\ Z\frac{dX}{dt}-X\frac{dZ}{dt}&=A_3. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(10)$$

因面速度之微分式爲

$$\frac{dA_{xy}}{dt}=\frac{1}{2}\left(X\frac{dY}{dt}-Y\frac{dX}{dt}\right),$$

$$\frac{dA_{yz}}{dt}=\frac{1}{2}\left(Y\frac{dZ}{dt}-Z\frac{dY}{dt}\right),$$

$$\frac{dA_{zx}}{dt}=\frac{1}{2}\left(Z\frac{dX}{dt}-X\frac{dZ}{dt}\right).$$

故 A_1、A_2 及 A_3 乃 2 倍面速度在 XY、YZ、ZX 面上之分別投射之數值也.以 Z、X 及 Y 分乘(10)式而加之,則有

$$A_1Z+A_2X+A_3Y=0\quad\cdots\cdots(11)$$

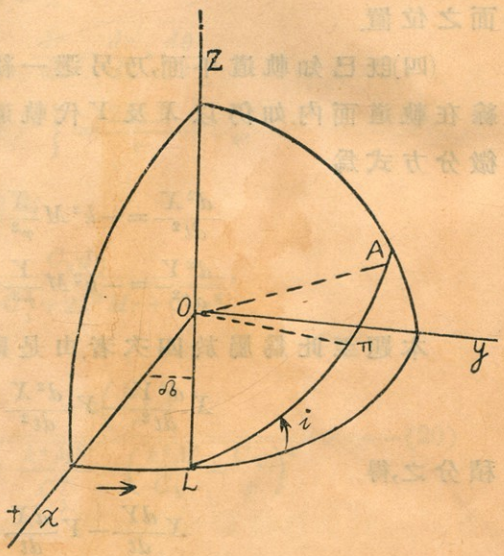
此爲通過座標原點之平面之方式.m_1之座標數值既恆合於此方式,故知物體對於他體之行動乃在通過後一體中心之平面上也.

A_1、A_2 及 A_3 三常數卽能定軌道對於座標軸線之位置,在

極點座標法,(11)式變爲

$$A_1 \sin\phi_1 + A_2 \cos\phi \cos\theta + A_3 \cos\phi \sin\theta = 0 \quad \cdots\cdots(12)$$

xy 平面與軌道平面交於 OL 線（OL 僅爲其交線之一半）.令 Ω 爲 OL 與 x 座標所成之角,此角之值由 0 度以至 360 度. i 爲兩平面之交角,此角隨平面繞 OL 轉動而變.其值由 0 以至 180 度.其小於 90 度或大於 90 度,則視 A_1 爲正數或爲負數而定.當 $\phi=0$ 時,則 θ 值爲 Ω 或爲 $\Omega+\pi$.當 $\theta=\Omega+\frac{1}{2}\pi$, 則 ϕ 值爲 i 或爲 $\pi-i$,須視 i 小於或大於 90 度而定.在此兩情境時,(12)式變爲



第一八七圖

$$\left.\begin{aligned} A_2 \cos\Omega + A_3 \sin\Omega &= 0, \\ A_1 \sin i \mp A_2 \cos i \sin\Omega \pm A_3 \cos i \cos\Omega &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(13)$$

在第二式之正負號,i 小於 90 度時用上號,大於 90 度時用下號.

面速度之 3 個分體數值（亦曰分投數值）既爲常數,則面速度亦爲常數.茲令 $\frac{1}{2}K_1$ 爲此常數,則有

$$K_1 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad \cdots\cdots(14)$$

只用平方根之正數,由(13)及(14)解得

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= +K_1 \cos i, \\ A_2 &= \pm K_1 \sin i \sin\Omega, \\ A_3 &= \mp K_1 \sin i \cos\Omega. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(15)$$

i 小於90度時,用上號;大於90度時,用下號.亦卽A_1爲正數時用上號,爲負數時用下號.由(15)式得定 i 及 Ω,而 i 及 Ω 卽定軌道面之位置.

(四)既已知軌道平面,乃另選一組座標使其 x 軸線及 y 軸線在軌道面內.如仍以 X 及 Y 代軌道上點之座標數值,則行動微分方式爲

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2X}{dt^2}&=-k^2M\frac{X}{r^3},\\ \frac{d^2Y}{dt^2}&=-k^2M\frac{Y}{r^3}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(16)$$

本題至此爲屬於四次者.由是則有

$$X\frac{d^2Y}{dt^2}-Y\frac{d^2X}{dt^2}=0.$$

積分之,得

$$X\frac{dY}{dt}-Y\frac{dX}{dt}=C_1,$$

改用極點座標數值,則此式變爲

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=C_1\quad\cdots\cdots(17)$$

以 A 爲帶徑 r 所畫行之面積,則

$$2\frac{dA}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}=C_1.$$

由是得

$$2A=C_1t+C_2\quad\cdots\cdots(18)$$

由此式則知帶徑畫行之面積與其所行之時成比例.

以 $2\frac{dX}{dt}$ 乘(16)之第一,$2\frac{dY}{dt}$ 乘(16)之第二,而加之,再積分之,則得

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2=\frac{2k^2M}{r}+C_3\quad\cdots\cdots(19)$$

此方式只含有速度之平方及距離,名曰維斯維發積分式(Vis

Viva integral).將其左邊變歸極點座標,則爲

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2k^2M}{r}+C_3.$$

但

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt},$$

故

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right\}=\frac{2k^2M}{r}+C_3.$$

用(17)式消去$\frac{d\theta}{dt}$,則由此式得有

$$d\theta=\frac{C_1dr}{r\sqrt{-C_1^2+2k^2Mr+C_3r^2}}.$$

此式可寫爲

$$d\theta=\frac{-d\left(\frac{C_1}{r}\right)}{\sqrt{C_3+\frac{k^4M^2}{C_1^2}-\left(\frac{k^2M}{C_1}-\frac{C_1}{r}\right)^2}}\quad\cdots\cdots(20)$$

令B^2及u有下之意義,

$$C_3+\frac{k^4M^2}{C_1^2}=B^2,$$

$$\frac{k^2M}{C_1}-\frac{C_1}{r}=-u.$$

由是則(20)變爲

$$d\theta=\frac{-du}{\sqrt{B^2-u^2}}.$$

積分之,則有

$$\theta=\cos^{-1}\frac{u}{B}+C_4.$$

將u、B及C_4變回r及原常數,則有

$$r=\frac{C_1}{\frac{k^2M}{C_1}-\sqrt{C_3+\frac{k^4M^2}{C_1^2}}\cos(\theta-C_4)}\quad\cdots\cdots(21)$$

此圓錐體切面之極點方程式也,其原點在二交點之一.

(五)交點及斜交角已有(15)式用積分常數表示之矣.圓錐切面原點在右焦點之普通方式爲

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\omega)}.$$

其 p 乃半通徑,ω 爲圓錐切面長徑與極點座標軸線間所成之角.以此式與(21)式比較之,則有

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{C^2}{k^2M},\\ e^2&=1+\frac{C^2C_3}{k^4M^2},\\ \omega&=C_4-\pi,\\ C_1&=k\sqrt{Mp},\\ C_3&=-\frac{k^2(1-e^2)}{p}M. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(22)$$

若 $e^2<1$,則軌道爲一橢圓,而 $p=a(1-e^2)$,a 乃其半長徑也.若 $e^2=1$,軌道乃一拋物線,而 $p=2q$,q 乃由原點至拋物線頂點之距離也.若 $e^2>1$,軌道爲一雙曲線,而 $p=a(e^2-1)$. 設 A_0 爲物體過近日點時已畫行之面積,則由(18)式得走過近日點時之時爲

$$T=\frac{2A_0-C_2}{C_1}\quad\cdots\cdots(23)$$

如此諸基本用數名曰根數(Elements),至此已皆用積分常數表示之矣.而此常數乃當其初次出現時〔卽在(10)、(17)、(18)、(19)及(21)式內時〕,由初時 3 個座標數值及 3 個速度分體而定之.

(六)行動性質　設軌道爲橢圓而將(22)式之常數代入(17)及(19)式內,則二式變爲

$$\left.\begin{aligned} r^2\frac{d\theta}{dt}&=k\sqrt{Ma(1-e^2)},\\ \left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2&=V^2=k^2M\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right). \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(24)$$

其 V 乃在軌道上距原點 r 處之速度.

若軌道爲圓圈,則 $r=a$, 並

$$V_c^2=\frac{k^2M}{r}.$$

若軌道爲拋物線,則 $a=\infty$, 並

$$V_p^2=\frac{2k^2M}{r}.$$

故在距原點同遠時,在拋物線軌道之速度與在圓道上速度之比爲

$$V_p : V_c=\sqrt{2} : 1 \quad \cdots\cdots(25)$$

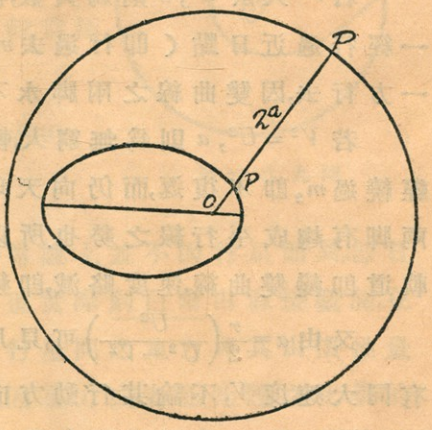
凡物體由 s 距離向力心落至 r 距離處(受攝力之作用),必得有下式之速度,

$$V^2=2k^2M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right).$$

設 $s-r=h$,則 $V^2=2k^2M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+h}\right)=2\frac{k^2Mh}{r^2+rh}$.若 h 與 r 比爲極小之距離,則 $V^2=2k^2M\frac{h}{r^2}$,此與在地面落下速度之等於 $2gh$ 相同,惟 $2g$ 換爲 $2\frac{k^2M}{r^2}$ 耳.若令此速度 V 等於物體在軌道上之速度,則以式之右方等於(24)第二式之右方,得 s 必等於 $2a$ 方可,卽

$$V^2=2k^2M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right).$$

所以物體在橢圓軌道上之速度,無論在軌道何點,等於該體由以原點爲心橢圓長徑爲半徑之圓周上落至橢圓上所得之速度.如動體在橢圓 P 點之速度等於 P' 至落 P 點所



第一八八圖

得之速度是也（如第一八八圖）.

由(26)之第二式,設令物體m_1自距m_2物體r遠處拋來,則其圓錐切面之長徑因其初時距原點之遠及初時之速度而變,而與拋之方向無關.

若物體自無窮遠處落來r處,則其所得之速度爲

$$U^2=\frac{2k^2M}{r}$$

此速度以U代之,特名之曰拋物線速度(Parabolic velocity).

由(24)之第二式得

$$a=k^2M\frac{r}{2k^2M-rV^2}.$$

代入$k^2M=\frac{U^2r}{2}$,則有

$$a=\frac{r}{2}\left(\frac{U^2}{U^2-V^2}\right).$$

由此式可見若V^2小於U^2,a則爲正數,軌道爲橢圓矣,即物體m_1在去m_2物體r遠處之速度,若小於自無窮遠落至r遠處之速度,該物體m_1永遠繞m_2行於橢圓軌道上.

若V^2大於U^2,a則爲負數,軌道爲雙曲線矣.在此情況時m_1一經行過近日點（即行過去m_2最近之點）,即不復返,而向另一方行去,因雙曲線之兩脚永不能平行也.

若$V^2=U^2$,a則爲無窮大,軌道爲拋物線矣.在此情況m_1一經繞過m_2即不復返,而仍向天球上原來之點行去,因拋物線之兩脚有趨成平行線之勢也.所以物體行於拋物線上,速度略增,軌道即變雙曲線,速度略減,即變爲橢圓.

又由$a=\frac{r}{2}\left(\frac{U^2}{U^2-V^2}\right)$可見凡物體在去力心同一$r$距離處有同大速度$V$,不論其行動方向如何,其軌道之長徑必皆同長.

設t_1及t_2爲兩時期,A_1及A_2爲該時帶經已畫行之面積,則

由(18)式有

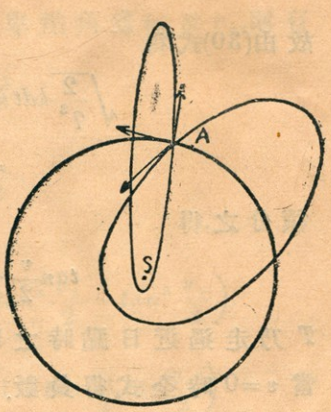
$$2(A_2-A_1)=(t_2-t_1)C_1.$$

如 $t_2-t_1=P$ 爲旋轉一周之周期,則 $2(A_2-A_1)$ 爲橢圓面積之 2 倍,卽 $2\pi ab$. 用(22)式所給 C_1 之數值,則得周期方式爲

$$P=\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{M}} \quad \cdots\cdots(27)$$

由此式可知周期,除長徑外,與諸根數無關.再由(26)式則見周期僅因初時去原點之距離及初時速度而定,而無關於拋落之方向.此半長徑名曰平均距離,亦曰中距 (Mean distance).

第一八九圖之 3 個軌道,其長徑同,所以其周期亦同.其落至 A 點之速度亦同,僅其形狀及位置不同,則因其拋來之方向異也.



第一八九圖

如有兩組物體如 m_1、m_2 及 m_2、m_3,其周期之比爲

$$\frac{P_{1,2}^2}{P_{3,2}^2}=\frac{a_{1,2}^3}{a_{2,3}^3}\cdot\frac{M_{3,2}}{M_{1,2}} \quad \cdots\cdots(28)$$

若此兩組爲日及兩行星,則 $M_{1,2}$ 及 $M_{3,2}$ 約相等,因行星之質量與日較爲極小也.所以其比式幾爲

$$\frac{P_{1,2}^2}{P_{3,2}^2}=\frac{a_{1,2}^3}{a_{3,2}^3} \quad \cdots\cdots(29)$$

此卽刻白爾第三定律也.

比周期時,認日攝諸行星之常數 k,並不因行星而異,卽日在單位距離攝兩行星之力相同也.實際刻白爾由直接觀測,在諸行星 k 確相同.由此可知日與行星間之重力與其由慣性量定之質量成正比.此似不甚可解,因重力或者隨物體之化學的成分或物理的情況而異.然實際重力只與慣性成比,而與他事

無關.

(七)在拋物線軌道上之位置　既已尋得物體行走之軌道，則卽須設法推定任何時物體在軌道上之位置.因拋物線較簡，故先討論彗星對日之行動.彗星之質量最小可無庸計算,故令 $M=1$, 則(17)式變爲

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=k\sqrt{p}=k\sqrt{2q} \quad \cdots\cdots(30)$$

若軌道上極點角（卽帶徑與長徑所成之角）由拋物線頂點計算而以 v 表示之,名曰眞卑點角,則有

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt}&=\frac{dv}{dt},\\ r&=\frac{p}{1+\cos v}=q\sec^2\frac{v}{2}.\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(31)$$

故由(30)式得

$$\sqrt{\frac{2}{q^3}}kdt=\sec^4\frac{v}{2}dv$$
$$=\left(\sec^2\frac{v}{2}+\sec^2\frac{v}{2}\tan^2\frac{v}{2}\right)dv.$$

積分之,得

$$\tan\frac{v}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{v}{2}=\frac{k(t-T)}{\sqrt{2q^3}} \quad \cdots\cdots(32)$$

T 乃走過近日點時之時.如將右項移至左則可見若 $(t-T)>0$, 當 $v=0$ 時全式得負數. v 若增,全式得數亦隨之增,直至爲無窮大,而彼時之 v 正等於 180 度也.所以(32)式之 $\tan\frac{v}{2}$ 只有一個正眞數解釋.若 $(t-T)<0$, 則只有一個負眞數解釋.(32)式亦可寫爲

$$25\tan^3\frac{v}{2}+75\tan\frac{v}{2}=\frac{75k\ (t-T)}{\sqrt{2}\sqrt{q^3}}=K\frac{(t-T)}{\sqrt{q^3}}.$$

依此式由 v 之各數值推得右項之數值而立成表.若知 $(t-T)$ 數值,可間求 v 之值.若知 v 之值,可求 $t-T$ 之值.此表名之曰巴

克表(Barker's table).

若令　$$\tan\frac{v}{2}=2\cot 2w=\cot w-\tan w,$$

及　$$\cot w=\sqrt[3]{\cot\frac{s}{2}}.$$

則有

$$\left.\begin{aligned}\cot s&=\frac{3k(t-T)}{\sqrt{(2q)^3}},\\ \cot w&=\sqrt[3]{\cot\frac{s}{2}},\\ \tan\frac{v}{2}&=2\cot 2w.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(33)$$

由此即可求得 v 矣.然後再由 $r=\dfrac{p}{1+\cos v}=q\sec^2\dfrac{v}{2}$ 推定 r 數值.

(八)尤勒方程式　設一彗星在 t_1 及 t_2 兩時之位置有 r_1 及 r_2 之半徑,其聯兩端之弦爲 s,其所過之卑點角爲 v_1 及 v_2,則有

$$\frac{k(t_1-T)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}}=\tan\frac{v_1}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{v_1}{2},$$

$$\frac{k(t_2-T)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}}=\tan\frac{v_2}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{v_2}{2}.$$

二式之較爲

$$\frac{k(t_2-t_1)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}}=\tan\frac{v_2}{2}-\tan\frac{v_1}{2}+\frac{1}{3}\left(\tan^3\frac{v_2}{2}-\tan^3\frac{v_1}{2}\right),$$

即

$$\frac{3k(t_2-t_1)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}}=\left(\tan\frac{v_2}{2}-\tan\frac{v_1}{2}\right)\left\{3\left(1+\tan\frac{v_1}{2}\tan\frac{v_2}{2}\right)+\left(\tan\frac{v_2}{2}-\tan\frac{v_1}{2}\right)^2\right\}\quad\cdots\cdots(34)$$

其弦之方程式爲

$$s=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(v_2-v_1)$$

$$=(r_1+r_2)^2-4r_1r_2\cos^2\left(\frac{v_2-v_1}{2}\right).$$

由此得

$$2\sqrt{r_1 r_2}\cos\left(\frac{v_2-v_1}{2}\right)=\pm\sqrt{(r_1+r_2+s)(r_1+r_2-s)} \quad \cdots\cdots(35)$$

若$v_2-v_1<\pi$,則用＋號;若$v_2-v_1>\pi$,則用－號.

由拋物線之極點方程式有

$$r_1=q\sec^2\frac{v_1}{2},\text{ 及 }r_2=q\sec^2\frac{v_2}{2}$$

代入(35),則有

$$1+\tan\frac{v_1}{2}\tan\frac{v_2}{2}=\pm\frac{\sqrt{(r_1+r_2+s)(r_1+r_2-s)}}{2q} \quad \cdots\cdots(36)$$

又由表示r_1及r_2之二式得

$$r_1+r_2=q\left(2+\tan^2\frac{v_1}{2}+\tan^2\frac{v_2}{2}\right).$$

由此最後之二式得

$$\frac{(r_1+r_2+s)+(r_1+r_2-s)\mp 2\sqrt{(r_1+r_2+s)(r_1+r_2-s)}}{2q}$$
$$=\left(\tan\frac{v_2}{2}-\tan\frac{v_1}{2}\right)^2,$$

即

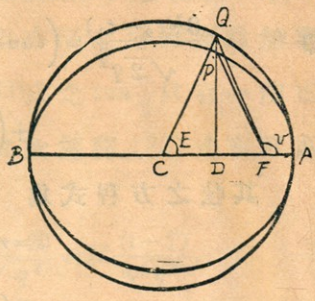
$$\frac{\sqrt{r_1+r_2+s}\mp\sqrt{r_1+r_2-s}}{\sqrt{2q}}=\tan\frac{v_2}{2}-\tan\frac{v_1}{2} \quad \cdots\cdots(37)$$

由(36)及(37)變(34)爲

$$6k(t_2-t_1)=(r_1+r_2+s)^{\frac{3}{2}}\mp(r_1+r_2-s)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots\cdots(38)$$

此式不含q.由屬地心之測數推算拋物線軌道之根數,此爲許多推法中之最要公式.式爲尤勒發明,即以其名名之.

(九)橢圓軌道上之位置　推定位置,須用刻白爾方式.茲先討論其幾何學的原委.設先畫一物體行動之橢圓,並畫一附圓,則AFP爲眞卑點角v,而ACQ名之曰偏心卑點角(Eccentric anomaly),以E表之,並以M爲平卑點角.刻白爾方式即表示M與



第一九〇圖

E 之關係也.偏心卑點角舊稱曰借積度.

由面積定律及附圓之性質,則有

$$\frac{M}{2\pi}=\frac{AFP\text{面}}{\text{橢圓面}\ \pi ab}=\frac{AFQ\text{面}}{\text{圓面}\ \pi a^2}.$$

因

$$ACQ\text{面}=\pi a^2\frac{E}{2\pi},$$

及

$$FCQ\text{面}=ae\frac{a\sin E}{2},$$

所以

$$AFQ\text{面}=ACQ\text{面}-FCQ\text{面}$$

$$=\frac{a^2E}{2}-\frac{a^2e}{2}\sin E.$$

由是得

$$\frac{M}{2\pi}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{E-e\sin E}{\pi a^2}\right),$$

或

$$M=E-e\sin E,$$

及

$$FP=r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}=\sqrt{PD^2+FD^2}=a(1-e\cos E).$$

此卽偏心卑點角之意義,而 $M=E-e\sin E$ 名曰刻白爾式.如能推解此式得 M 之數值,卽可由第二式得 v 及 r 矣.

刻白爾方式亦可推求之如下:以 $1+m$ 代 M,以 v 代 θ,則有面積之積分式及維斯維發積分式爲

$$r^2\frac{dv}{dt}=k\sqrt{(1+m)a(1-e^2)},$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=k^2(1+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

以一式消去二式之 $\frac{dv}{dt}$,則有

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{k^2(1+m)a(1-e^2)}{r^2}=k^2(1+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\cdots\cdots(39)$$

令 n 表示物體在軌道上之平均角速度,則有

$$n=\frac{2\pi}{p}=\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

代入(39)式,則有

$$ndt=\frac{r}{a}\frac{dr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

乃用下式引入 E 於(40)

$$a-r=ae\cos E,\text{ 卽 }r=a(1-e\cos E)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

則(40)變爲 $ndt=(1-e\cos E)dE.$

積分之,得

$$n(t-T)=E-e\sin E=M\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

$n(t-T)$ 卽帶徑以平均速度所畫行之角,乃平卑點角 M 也.

(十)刻白爾方式之推解　此式不能用三角方式推解之.但知 M 數值卽可求得 E 之近似值.先估擬 E 之數值,視其合於方式之程度如何,然後再改正所擬之數,再視其合於方式否.如此更番推擬,卽可得合於方式之 E 數值.亦有用收斂性級數(Converging series)而推解者.其連級式有適於小偏心率之軌道者,有適於幾近拋物線軌道者.依照拉哥蘭基(Lagrange)之連級式,則有

$$E=M+\frac{e}{1}\sin M+\frac{e^2}{1\times2}\sin 2M+\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

右邊除第一項外,皆以半徑弧計之,故必須化爲度數.在小偏心率之行星軌道,此項級數收斂極速,其前三項已足給準確 E 之數值矣.如以此數爲不甚確,則以其值爲 E_0,而另求較確之 E.

由刻白爾方式得

$$M_0=E_0-e\sin E_0=f(E_0)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

其與眞確 E 相當之平卑點角必爲 M,而 M 與 M_0 必差無多;而可寫爲

$$M=M_0+\Delta M_0=f(E_0+\Delta E_0)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

依泰勒式(Taylor's formula)展開之,則成爲

$$M=M_0+\Delta M_0=f(E_0)+f'(E_0)\Delta E_0+\cdots\cdots,$$

即
$$M-M_0=f'(E_0)\Delta E_0+\cdots\cdots=(1-e\cos E_0)\Delta E_0+\cdots\cdots(46)$$

因 ΔE 爲極小之數,故其高次方之數可以棄去不用,而得 E_0 之改正數爲

$$\Delta E_0=\frac{M-M_0}{1-e\cos E_0}\cdots\cdots(47)$$

以 ΔE_0 加於 E_0,即得偏心卑點角較確之數值矣.如仍不甚確,則命其爲 E_1,而再求其改正數 ΔE_1,即

$$\Delta E_1=\frac{M-M_1}{1-e\cos E_1}.$$

如此推算必得 E 之極確數值.

(十一)刻白爾式之畫圖解法　若偏心率大於0.2,上述之解法即甚冗繁,因前三項所給之數值甚不確也.在雙星及彗星之軌道偏心率有大至0.7者,在此情況時以用下法爲宜.

因刻白爾式可寫爲

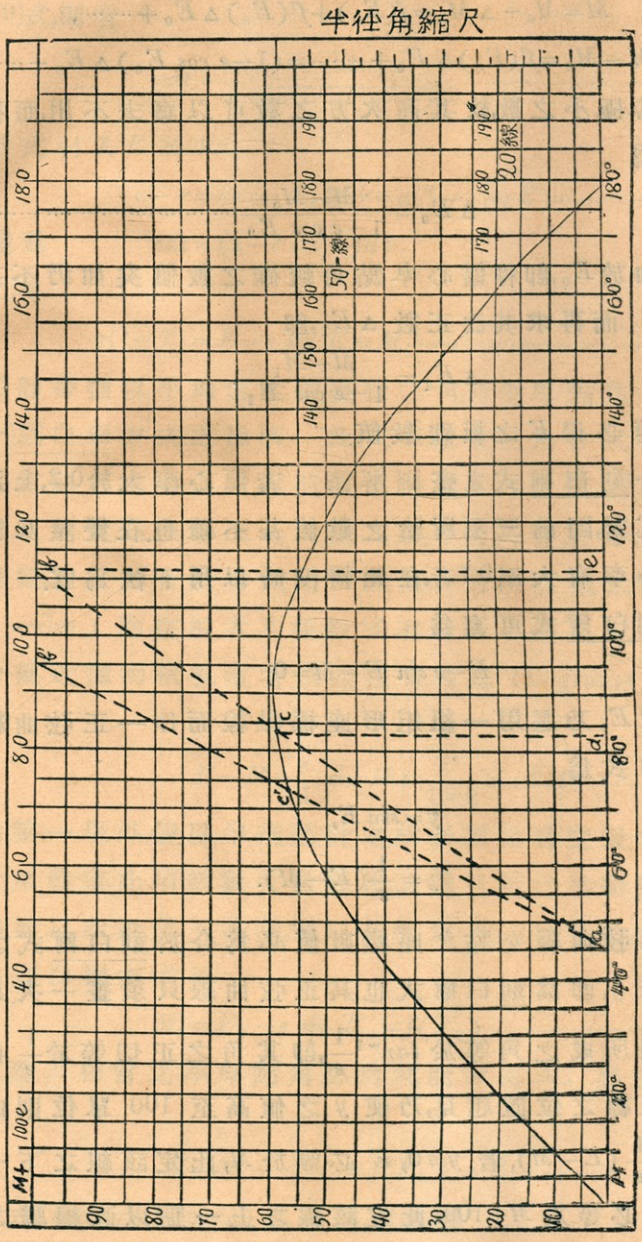
$$E-e\sin E-M=0.$$

由 M 以求 E,乃選用一組矩形座標軸線而作一正弦曲線及一直線,其方式爲

$$y=\sin E,$$

及
$$y=\frac{1}{e}(E-M).$$

直線與正弦曲線交點之座標數值必爲合於刻白爾式之 E,因兩式消去 y,即爲刻白爾式也.其正弦曲線只須畫一次.其直線與 E 軸線所成之角等於 $\tan^{-1}\frac{1}{e}$,即其角之正切等於 $\frac{1}{e}$ 也.爲便於定該直線之位置起見,乃使 y 之值高至 100 單位.則由直線方式 $y=\frac{1}{e}(E-M)$,若 $y=0$,E 必等於 M,此定該線之下一點;若 $y=100$,E 必等於 $M+100e$,此定該線之上一點.以直線聯之,即爲



第一九一圖

所求之線.其交曲線之點,卽所求之 E 也.若 M 值大過 100 度,卽不能再用 $y=100$,因上點已過圖限以外也.乃用 $y=50$ 或 $y=20$,則上點等於 $M+50e$ 或 $M+20e$ 矣.若 M 近於 180 度,平卑點角與偏心卑點角相差無多.M 等於 180 時,則兩角相合矣.

(十二)茲總列時爲已知數推算軌道極點座標數值所用之方式如下,其前後乃依入用之次序.

$$\left.\begin{aligned} n&=\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}},\\ M&=n(t-T),\\ E_0&=M+e\sin M+\frac{e^2}{2}\sin 2M,\\ M_0&=E_0-e\sin E_0,\\ \Delta E_0&=\frac{M-M_0}{1-e\cos E_0},\\ E_1&=E_0+\Delta E_0,\\ r&=a(1-e\cos E)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(48)$$

由是乃有

$$\left.\begin{aligned} \cos v&=\frac{\cos E-e}{1-e\cos E},\\ \sin v&=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E},\\ 1+\cos v&=\frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E},\\ 1-\cos v&=\frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e\cos E}. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(49)$$

由末二式得

$$\sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}}=\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}\quad\cdots\cdots(50)$$

最適於推算 v 之數值.由(48)之末一式及(50),若已知 E,可推得

極點座標數值.

(十三)雙曲線軌道上之位置　此與推求在橢圓軌道上物體之位置法甚相類,但其軌道之極點方程式爲

$$r=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{1+\varepsilon\cos v}.$$

a 爲其半長徑,ε 爲其兩心差,在此例 v 只能由 $-\pi+\cos^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ 變至 $+\pi-\cos^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

雙曲線軌道之面積積分式,及維斯維發積分式爲

$$r^2\frac{dv}{dt}=k\sqrt{(1+m)a(\varepsilon^2-1)} \quad \cdots\cdots(51)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=k^2(1+m)\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right) \quad \cdots\cdots(51)$$

用此式之第一式消去第二式之 v,解之得

$$aHdt=\frac{rdr}{\sqrt{(a+r)^2-a^2\varepsilon^2}},$$

其

$$H=\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

此式可立卽解爲含雙曲線函數(Hyperbolic functions)諸項之式.但先引用一輔助數 F 與橢圓軌道之 E 相當,則較爲便益.

設

$$a+r=\frac{a\varepsilon}{2}(e^F+e^{-F})=a\varepsilon\cosh F \quad \cdots\cdots(52)$$

則有

$$Hdt=\left\{-1+\frac{\varepsilon}{2}(e^F+e^{-F})\right\}dF$$

$$=(-1+\varepsilon\cosh F)dF.$$

此式之積分式爲

$$M=H(t-T)=-F+\frac{\varepsilon}{2}(e^F-e^{-F})=-F+\varepsilon\sinh F \quad \cdots\cdots(53)$$

如 F 爲已知,則此式卽給 t 之數值,若 $H(t-T)$ 爲已知而推求 F,則爲極繁難之算題.最好先用圖解法求得 F 之概數,再用微分

改正數求較確之數. F 之能適合(53)式者,必爲下二線交點之橫座標線數值,

$$y=\frac{1}{\varepsilon}(F+M),$$

及

$$y=\frac{e^F-e^{-F}}{2}\sin hF.$$

其前者爲一直線,後者爲一屬雙曲線之正弦曲線(Hyperbolic sine curve).在此例微分改正數之算法,與橢圓軌道之例相彷彿.

由(52)及雙曲線之極點方程式,則有

$$r=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{1+\varepsilon\cos v}=a(-1+\varepsilon\cosh F).$$

由此式則有

$$\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\frac{\sqrt{-1+\frac{1}{2}(e^F+e^{-F})}}{\sqrt{+1+\frac{1}{2}(e^F+e^{-F})}}=\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\tanh\frac{F}{2}.$$

已求得 F 推算 v,此爲較便之式.

(十四)E、r 及 v 之展開　利用拉哥蘭基法將 E、r 及 v 展開如下:

$$\left.\begin{aligned}
E&=M+e\sin E\\
&=M+e\sin M+\frac{e^2}{2}\sin 2M\\
&\quad+\frac{e^3}{3!2^2}(3^2\sin 3M-3\sin M)\\
&\quad+\frac{e^4}{4!2^3}(4^3\sin 4M-4\times 2^3\sin 2M)\\
&\quad+\frac{e^5}{5!2^4}(5^4\sin 5M-5\times 3^4\sin 3M+10\sin M)\\
&\quad+\frac{e^6}{6!2^5}(6^5\sin 6M-6\times 4^5\sin 4M+15\times 2^5\sin 2M)\\
&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}(54)$$

$$\frac{r}{a}=1-e\cos E$$

$$\left.\begin{aligned}&=1-e\cos M-\frac{e^2}{2}(\cos 2M-1)\\&-\frac{e^3}{2!2^2}(3\cos 3M-3M)\\&-\frac{e^4}{3!2^3}(4^2\cos 4M-4\times 2^2\cos 2M)\\&-\frac{e^5}{4.2^4}(5^3\cos 5M-5\times 3^3\cos 3M+10\cos M)\\&-\frac{e^6}{5!2^5}(6^4\cos 6M-6\times 4^4\cos 4M+15\times 2^4\cos 2M)\\&-\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(55)$$

由(49)之前二式,則有

$$dv=\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2}dM.$$

由刻白爾方程式,則有

$$\frac{dE}{dM}=\frac{1}{(1-e\cos E)},$$

故

$$dv=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{dE}{dM}\right)^2dM\cdots\cdots(56)$$

$\frac{dE}{dM}$ 可由(54)推求之.乘方其得數代入(56)內而積分之.先將 $\sqrt{1-e^2}$ 展開爲以 e^2 爲主數之次方級數,然後有

$$\left.\begin{aligned}v&=M+2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M\\&+\frac{e^3}{12}(13\sin 3M-3\sin M)\\&+\frac{e^4}{96}(103\sin 4M-44\sin 2M)\\&+\frac{e^5}{960}(1097\sin 5M-645\sin 3M+50\sin M)\\&+\frac{e^6}{960}(1223\sin 6M-902\sin 4M+85\sin 2M)\\&+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(57)$$

此三展開式在解算攝動時最爲必需,因所求之數更須精確也.

(十五)選用單位以定k^2之數值　告司以平均太陽日爲時之單位,日之質量爲質之單位,地球軌道半長徑爲距離之單位,定得k之數值名,曰告司常數.

設m_2爲日之質量,m_1爲地及月之合併質量.由觀測所得

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{m_2}{329390} = \frac{1}{329390}, \\ P &= 365.2563835. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(58)$$

以之代入(27)式,則有

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{P\sqrt{1+m_1}} = 0.01720209895 = 3548''.18761, \\ \log k &= 8.2355814414 - 10. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

因m_1爲極小之數,所以k約等於$\frac{2\pi}{P}$,而爲地球每日在軌道上之平均速度即約等於$\frac{1}{60}$半徑角.設行星質量爲m_i,其每日平均速度爲$\frac{2\pi}{P_i}$而以n_i表示之,則由(27)式得

$$n_i = \frac{k\sqrt{1+m_i}}{a_i^{\frac{3}{2}}}. \quad \cdots\cdots(60)$$

告司時所知地道周期及地日平均距離並不確實,即現所知者亦然.故k數隨推定該二數而變,然多主張用告司所定之k數,而調濟長之單位恆使k值合於(27)式,以免他數值與k有關者須時常訂正.

註　拉哥蘭基展開法:

設z爲w之函數,其方程式爲

$$z = w + a\phi(z),$$

α 爲曲線式常數(Parameter).拉哥蘭基曾證明 z 之任何函數均能以依 α 之次方次序排列之連級數(Power series)表顯之,其級數如下式,在 α 爲相當微數時有收斂性.

$$F(z)=F(w)+\frac{\alpha}{1}\cdot\phi(w)F'(w)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{\partial}{\partial w}[\{\phi(w)\}^2F'(w)]$$

$$+\cdots\cdots+\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial w^n}[\{\phi(w)\}^{n+1}F'(w)]+\cdots\cdots.$$

第十九章

三體算題　攝動之幾何詮釋　月理　潮汐

三體算題

§283. 三體算題　二體算題業已得解,但3個或3個以上球體彼此互攝,知其位置,質量及速度,而求其以後之行動,及豫推其在某時之位置,實爲超過現時數學能力之問題也.

三體算題因無一般的解法,故須於每一特例,如月之行動及行星行動所生之變異等,設一特法以求其近似之答解.

§284. 攝動　設天只有一日一行星,則或行星繞日,或日與行星共繞一公重心,其所行之道必永久不變.設空中又增一體,則新體必攝二舊體,令其道生微差.蓋攝力加於二體不等,則二體相連屬之例必變而生差也.故差非生於攝二體之力,而生於攝二體力之較也.

統言之,兩球體相互攝引,必繞其公重心行於圓錐切面軌道;反言之,其行動必合於面積定律,其攝力必合於攝力定律.若二體有一體是扁球,或有一中體阻隔之,或有一體攝該二體,或除二體互相之攝力外另有一力之作用,均能使其軌道不爲完全之圓錐切面.物體在實行之軌道上與物體行動未受任何外力作用當行之軌道上,其座標數值及速度分體之較數是爲所生之差,名之曰攝動.其生此攝動之力,名曰攝動力(Disturbing force).攝動力恆爲攝力之分體,僅爲攝力之一小部分.

設天空不祇多加一體,或不祇多一種外力,當推諸體或諸力互相攝動,以求本體所生之差.然歷時非甚遠,亦不必如是.但分推各體攝動本體所生差,幷之卽得.其法恆推三體之力,一中

體,一發攝動力體,一受攝動力體.發力受力二體可交互相易.中體恆作不動論.設二星相攝動,則日爲中體.設二月相攝動,或月爲日所攝動,則以本星爲中體,將日當作最遠之大月,其繞本星之道如本星繞日之道.凡相攝動之二體恆稱內行星、外行星.日攝動月,月卽內行星,日卽外行星也.

§285. 行動之微分方程式 設 n 個物體皆爲質量純勻之球體,互相攝引一若其質量聚於其中心者然.令 $m_1、m_2、\cdots m_n$ 爲其質量,並令 $x_i、y_i、z_i(i=1,\cdots n)$ 爲 m_i 之座標數值,$r_{i,j}$ 爲 m_i 及 m_j 兩中心之距離,k^2 爲常數,則諸體加於 m_1 之與 x 軸線平行之諸分力爲

$$-\frac{k^2m_1m_2}{r_{1,2}^2}\frac{(x_1-x_2)}{r_{1,2}},\cdots\cdots-\frac{k^2m_1m_n}{r_{1,n}^2}\frac{(x_1-x_n)}{r_{1,2}}.$$

其加於 m_1 與 x 軸線平行之全力爲此諸力之和,所以有

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-k^2m_1\sum_{j=2}^{n}m_j\frac{(x_1-x_j)}{r_{1,j}^3}.$$

其關於 y 及 z 者同此.

各體所受攝力之方式相似,故全組之式爲

$$\left.\begin{aligned}m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}&=-k^2m_i\sum_{j=1}^{n}m_j\frac{(x_i-x_j)}{r_{i,j}^3},\\ m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}&=-k^2m_i\sum_{j=1}^{n}{}_j\frac{(y_i-y_j)}{r_{i,j}^3},\\ m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}&=-k^2m_i\sum_{j=1}^{n}m_j\frac{(z_i-z_j)}{r_{i,j}^3}.\quad[i=1,\cdots,n.j\neq i]\end{aligned}\right\}(1)$$

格立音(Green)於1828年引用一函數名曰蓄勢函數(Potential function),其方式爲 $U=\int_m\frac{dm}{r}$,乃 $x、y$ 及 z 之函數,其意謂 U 爲 M 質體對於 r 距離處 P 質點 (x,y,z) 所具之蓄勢也.在本題則質體分立,故其蓄勢爲

$$U=\frac{1}{2}k^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_i m_j}{r_{i,j}}. \quad [i\neq j] \cdots\cdots(2)$$

其準於x_i之偏微分式爲

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}=k^2 m_i\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{r_{i,j}}=-k^2 m_i\sum_{j=1}^{n}m_j\frac{(x_i-x_j)}{r_{i,j}^3}. \quad (i\neq j)$$

其關於y_i及z_i者同此,所以(1)可寫爲

$$\left.\begin{aligned} m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}&=\frac{\partial U}{\partial x_i},\\ m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}&=\frac{\partial U}{\partial y_i},\\ m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}&=\frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad [i=1,\cdots,n] \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

蓄勢函數U不因座標軸線之選擇而變,而祇隨諸物體相互之距離而異.所以將軸線移動仍與原軸線平行,或轉移與原軸線成角度,均不使U生變.故亦如二體算題,以相當軸線之移換手續,由(3)式推得下之(4)、(5)、(6)、(7)、(8)、(9)諸式.

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{dx_i}{dt}&=a_1,\\ \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{dy_i}{dt}&=b_1,\\ \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{dz_i}{dt}&=c_1. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}m_i x_i&=a_1t+a_2=M\bar{x},\\ \sum_{i=1}^{n}m_i y_i&=b_1t+b_2=M\bar{y},\\ \sum_{i=1}^{n}m_i z_i&=c_1t+c_2=M\bar{z}. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

$$V=\sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{z}}{dt}\right)^2}=\frac{1}{M}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdots\cdots(6)$$

$$\frac{M\bar{x}-a_2}{a_1}=\frac{M\bar{y}-b_2}{b_1}=\frac{M\bar{z}-c_2}{c_1}\cdots\cdots(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[x_i\frac{dy_i}{dt}-y_i\frac{dx_i}{dt}\right]&=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{dA_i}{dt}=K_1,\\ \sum_{i=1}^{n} m_i\left[y_i\frac{dz_i}{dt}-z_i\frac{dy_i}{dt}\right]&=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{dB_i}{dt}=K_2,\\ \sum_{i=1}^{n} m_i\left[z_i\frac{dx_i}{dt}-x_i\frac{dz_i}{dt}\right]&=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{dC_i}{dt}=K_3.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_iA_i&=K_1t+K'_1,\\ \sum_{i=1}^{n} m_iB_i&=K_2t+K'_2,\\ \sum_{i=1}^{n} m_iC_i&=K_3t+K'_3.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

由(6)、(7)二式證明 n 個物體只受彼此互相攝引之力，其公共質心以常速度行於一直線上．由(8)、(9)二式證明 n 個質量各自乘其半徑晝行之投射面積（即面積之分投於三座標軸線者）之總和與所行之時成比例，或 n 個質量乘其面積投射率之總和爲一常數．A_i、B_i、C_i 乃由原點至 m_i 之聯線所晝行之面積分投射於 xy、yz 及 zx 三平面者．(6)乃(5)之積分式，(9)乃(8)之積分式也．

拉普拉瑟(Laplace)曾首先說明，移換軸線時可使軸線所指之方俾(8)式之二常數爲零，而其第三常數爲 $\sqrt{K_1^2+K_2^2+K_3^2}$，如此之平面乃質量乘其面積投射率(Rate of projections of areas)之總和爲最大值之平面也．此面與原定軸線之關係由 K_1、K_2、K_3 三常數定之，故其位置恆不變．此拉普拉瑟所以名之曰定面(Invariable plane)也．在今世太陽系之定面與黃道斜交成 2 度之角，其交點之黃經爲 286 度．此數若確，則用此面爲基本平面較用黃道面爲更佳也．

以 $\frac{dx_i}{dt}$、$\frac{dy_i}{dt}$、$\frac{dz_i}{dt}$ 分乘(3)之三式，加而依 i 之數序總和之，

再積分之,得

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\}=U+h\cdots\cdots\cdots(10)$$

h 爲常數,左項爲全組之動勢能力(Kinetic energy), U 爲蓄勢函數,等於 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{k^2m_im_j}{r_{i,j}}$. 因全組之蓄勢能力等於

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{k^2m_im_j}{r_{i,j}}.$$

是以知 U 乃爲全組蓄勢能力之負數.故(10)式指明一組 n 個物體互相攝引而無其他外力,其動勢能力及蓄勢能力和爲一常數.

欲定太陽系各行星與日相對之位置,須將座標軸線之原點移至日心.設 m_n 爲日 x'_i、y'_i、z'_i 爲 m_i 對以日心爲原點之新座標數值,則舊座標與新座標數值有如下式之關係:

$$x_i=x'_i+x_n,\ y_i=y'_i+y_n,\ z_i=z'_i+z_n.\quad(i=1,\cdots,n-1)$$

因舊座標數值之較(如 x_i-x_j)等於新座標數值之較(如 $x'_i-x'_j$),所以

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial U}{\partial x'_i},\ \frac{\partial U}{\partial y_i}=\frac{\partial U}{\partial y'_i},\ \frac{\partial U}{\partial z_i}=\frac{\partial U}{\partial z'_i}.\quad(i=1,\cdots,n-1)$$

如此改換,則(3)式變爲

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x'_i}{dt^2}+\frac{d^2x_n}{dt^2}&=\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial x'_i},\\ \frac{d^2y'_i}{dt^2}+\frac{d^2y_n}{dt^2}&=\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial y'_i},\\ \frac{d^2z'_i}{dt^2}+\frac{d^2z_n}{dt^2}&=\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial z'_i}.\quad(i=1,\cdots,n-1)\end{aligned}\right\}\cdots(11)$$

因原點係在 $x'_n=y'_n=z'_n=0$ 處,故在(1)之第一式以 $i=n$,則有

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_n}{dt^2}&=\frac{k^2m_1x'_1}{r^3_{1,n}}+\frac{k^2m_2x'_2}{r^3_{2,n}}+\cdots+\frac{k^2m_{n-1}x'_{n-1}}{r^3_{n-1,n}}\\ &=k^2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m_jx'_j}{r^3_{j,n}}.\end{aligned}\right\}\cdots(12)$$

320.1
216E-2
016.92

其他爲 y 及 z 之二式同此.至此則改換新座標之工作業已完成.然爲不使由日而來之攝力及行星攝力相混雜起見,乃將蓄勢函數分爲二段,書爲

$$U=k^2m_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{m_i}{r_{i,n}}+\frac{1}{2}k^2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m_im_j}{r_{i,j}},\quad (i\neq j)$$

或

$$U=k^2m_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{m_i}{r_{i,n}}+U'\qquad\cdots\cdots(13)$$

將(12)及(13)代入(11)內,則(11)變爲

$$\frac{d^2x'_1}{dt^2}+k^2(m_1+m_n)\frac{x'_1}{r_{1,n}^3}=\frac{1}{m_1}\cdot\frac{\partial U'}{\partial x'_1}-k^2\sum_{j=2}^{n-1}\frac{m_jx'_j}{r_{j,n}^3}\qquad\cdots\cdots(14)$$

其爲 y' 及 z' 之二式同此.三式合一,乃爲 m_1 之微分方式.其他行星之微分方式同此,祇須換其字右下角所附之號誌耳.

如以

$$R_{1,j}=k^2\left\{\frac{1}{r_{1,j}}-\frac{x'_1x'_j+y'_1y'_j+z'_1z'_j}{r_{j,n}^3}\right\},$$

則(14)變爲

$$\frac{d^2x'_1}{dt^2}+k^2(m_1+m_n)\frac{x'_1}{r_{1,n}^3}=\sum_{j=2}^{n-1}m_j\frac{\partial R_{1,j}}{\partial x'_1}\qquad\cdots\cdots(15)$$

其爲 y' 及 z' 之方式同此.茲撤去 x'、y'、z' 右上角之號誌.以下所用 x、y、z 皆指以日心爲原點之座標數值.則(15)式之通用方式應爲

$$\left.\begin{aligned}
&R_{i,j}=k^2\left\{\frac{1}{r_{i,j}}-\frac{x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j}{r_{j,n}^3}\right\},\quad (i\neq j)\\
&\frac{d^2x_i}{dt^2}+k^2(m_i+m_n)\frac{x_i}{r_{i,n}^3}=\sum_{j=1}^{n-1}m_j\frac{\partial R_{i,j}}{\partial x_i},\\
&\frac{d^2y_i}{dt^2}+k^2(m_i+m_n)\frac{y_i}{r_{i,n}^3}=\sum_{j=1}^{n-1}m_j\frac{\partial R_{i,j}}{\partial y_i},\\
&\frac{d^2z_i}{dt^2}+k^2(m_i+m_n)\frac{z_i}{r_{i,n}^3}=\sum_{j=1}^{n-1}m_j\frac{\partial R_{i,j}}{\partial z_i}.
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

其 $i=1,\cdots\cdots,n-1$. 此 n 個球體相對行動之通用方式也.爲明瞭(16)式之意義起見,設只有三個球體 m_1,m_2 及 m_n,以 m_n 爲日,以其質爲單位,m_1 及 m_2 至 m_n 之距離爲 r_1 及 r_2,則(16)之全式爲

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{dt^2}+k^2(1+m_1)\frac{x_1}{r_1^3}=k^2m_2\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{r_{1,2}}-\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_2^3}\right\},\\
&\frac{d^2y_1}{dt^2}+k^2(1+m_1)\frac{y_1}{r_1^3}=k^2m_2\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{\frac{1}{r_{1,2}}-\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_2^3}\right\},\\
&\frac{d^2z_1}{dt^2}+k^2(1+m_1)\frac{z_1}{r_1^3}=k^2m_2\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{\frac{1}{r_{1,2}}-\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_2^3}\right\},\\
&\frac{d^2x_2}{dt^2}+k^2(1+m_2)\frac{x_2}{r_2^3}=k^2m_1\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{1}{r_{2,1}}-\frac{x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1}{r_1^3}\right\},\\
&\frac{d^2y_2}{dt^2}+k^2(1+m_2)\frac{y_2}{r_2^3}=k^2m_1\frac{\partial}{\partial y_2}\left\{\frac{1}{r_{2,1}}-\frac{x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1}{r_1^3}\right\},\\
&\frac{d^2z_2}{dt^2}+k^2(1+m_2)\frac{z_2}{r_2^3}=k^2m_1\frac{\partial}{\partial z_2}\left\{\frac{1}{r_{2,1}}-\frac{x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1}{r_1^3}\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

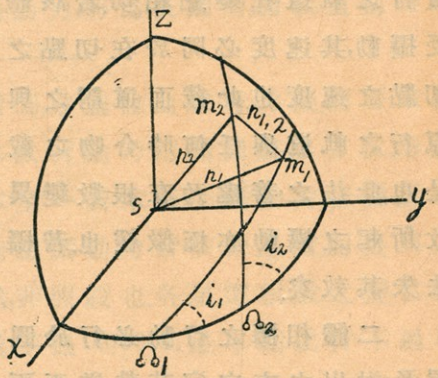
此卽日與兩行星體互相攝引以日爲心之相對行動之方式也.

前三式右邊第一項之偏微係數爲

$$-k^2m_2\frac{x_1-x_2}{r_{1,2}^3},$$

$$-k^2m_2\frac{y_1-y_2}{r_{1,2}^3},$$

$$-k^2m_2\frac{z_1-z_2}{r_{1,2}^3},$$



第一九二圖

乃 m_1 因 m_2 攝引而生之加速度之分體也.其第二項偏微係數爲

$$-k^2m_2\frac{x_2}{r_2^3},\quad -k^2m_2\frac{y_2}{r_2^3},\quad -k^2m_2\frac{z_2}{r_2^3},$$

乃日因m_2攝引而生之加速度分體之負數也.所以(17)式前三式之右側乃m_1及日二者因m_2攝引而生之加速度分體之較也.同理後三式右側乃m_2及日因m_1攝引而生之加速度分體之較也.若兩體受同大而平行之加速度,則兩體相與之位置不變.今二加速度既有較數,必因有攝動力也.而此較數卽量此攝動者也.所以(17)之右側乃攝動力之加速度分體也.是以$m_2R_{1,2}$名之曰攝動函數(Perturbative function).

(17)前三式之右側乃單因m_2所生之攝動加速度也.若有$n-2$攝動體,則右側爲因m_2、…、m_{n-1}而生者之和數.換言之,卽總攝動加速度乃等於由各發攝動體作用而起之加速度之和也.

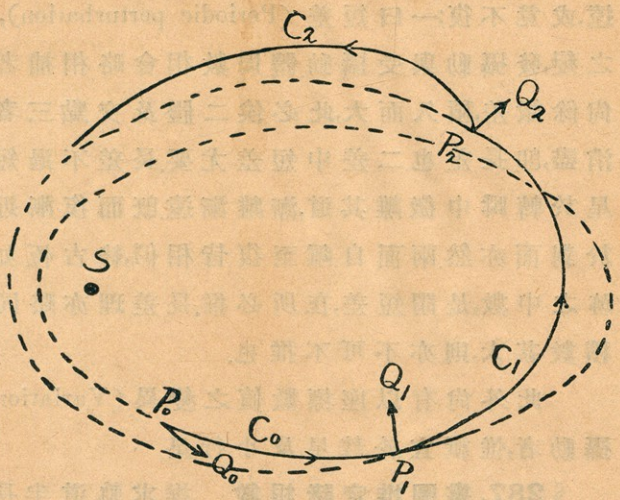
攝動之幾何詮釋

§286. 根數之變異(Variation of elements) 推攝動之法有多種,此法依星道根數之變異而推之.其意起於物體依重力律恆行於圓錐截面之軌道,但此道時時變易.此變易之截面道與實行之軌道在變點相切.若該體在此相切截面道內之行動未受攝動,其速度必同於在切點之速度,卽該體行於實行道在該切點之速度也.此截面道謂之與實行道在切點合吻(Osculate).原行之軌道與任何時合吻之截面道諸根數之較,卽所謂攝動是也.此法之善處乃在根數變異極緩,因太陽系之攝動力甚小,故所起之攝動亦極微緩也.若攝動甚大,如聚星道之變異,則此法失其效矣.

二體相攝之行動必行於圓錐切面軌道,其初時二體之位置及拋出之方向定其軌道平面,初時之位置及拋出之速度定其軌道長徑,初時拋出方向及速度以及其他情況定其偏心率及長軸線.

假設一物體(第一九三圖)m由P_0以速度V_0向Q_0拋出.

如祇有日之攝力 m 必行於圓錐切面 C_0,其根數可定也.設其行至 P_1 時忽受有 f_1 之外力在 P_1Q_1 方向,則此時 m 之位置及新速度以及行動之方向另定一新圓錐切面,爲 m 之行路,以至其再受他外力.設其行至 P_2 時,受有 f_2 之外力在 P_2Q_2 方向,m 乃變行於 C_2 軌道.設無數之外力,極微小而其相隔之時間極短,則 m 體之變動情形必仍如前述.至其極,則外力爲繼續之攝動力,稱爲長加力,而軌道爲時時變異之圓錐切面矣.



第一九三圖

行星道因攝動不復成橢圓,亦無他曲線可比擬.而曆家恆用橢圓者,取其便於推步也.本法所論乃謂橢圓道之方位、形狀、大小、兩心差,依攝動徐變.而本星一若未嘗受攝動力,但隨星道之變,而依常法行於其周.是則諸攝動力皆加於星道,而星與道相屬之理不變.此法出於自然,非假設也.各星道根數之變甚緩.如地道百年中兩心差之增損不過 0.00004,最卑點之行不過 19 分 39 秒.若一周時中微細之變,雖畫其道於徑 6 尺之板,用最精顯微鏡亦難察也.則雖有變,不可不謂之橢圓.但其變積久必著,是又不能不推也.

凡橢圓道之變,分爲二:一曰長差(Secular inequality),其復時

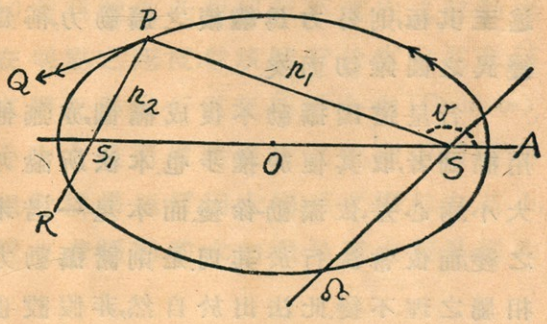
遠,或竟不復;一曰短差 (Periodic perturbation),其復時近.如交角之變,發攝動與受攝動體周數相會略相補者,即短差也.相補後尙餘微差,積久而大,此必俟二體及交點三者之周俱相會,然後消盡,即長差也.二差中短差尤要.長差不過短差之小餘.大率行星於轉瞬中微離其道,漸離漸遠.既而復漸近,漸歸本道.再漸離於對面亦然.兩面自離至復皆相似,終古恆如是,本道乃兩面軌跡之中數,是謂短差,在所必推.長差理亦略同,但久而後復,中間積數甚大,則亦不可不推也.

此外尙有以座標數值之變異 (Variation of co-ordinates) 推攝動者,惟祇宜於彗星及小行星.

§287. 畫圖推定諸根數 推求軌道半長徑之方式爲

$$V^2=k^2(s+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\cdots\cdots(1)$$

V 爲初時速度,k^2 爲告司常數,$s+m$ 爲二體質量之和,r 爲初時兩體之距離,a 爲半長徑.設由(1)式推得半長徑,則其餘之根數可由幾何畫法之幫助推得之.茲述之如下:s 及 m 之初時位置及 m 之拋出方向,乃定軌道平面之位置者,所以 i 及 Ω 由之而定.設 m 初時在 P 點處以速度 V 順 PQ 方向拋出,s 在焦點之一,此焦點後常稱曰餘心.由橢圓性質知 P 至二焦點之直線與切線 PQ 所成之角相等,所以由 P 引 PR 線與 PQ 所成之角等於 SP 與 PQ 所成之角.此線交長徑 S_1 處,即他一焦點,後常稱曰本心.命 SS_1 中點爲 O,則 $e=\frac{SO}{a}$.設 $S\Omega$ 爲交點線,則



第一九四圖

$\Omega SA = w$, 而 $\pi = w + \Omega$. π 乃卑點黃經度也（見第 336 節）.

如此則所未得者僅爲行過近日點之時矣. ASP 角順行動之方向計算之,命爲 v, 則偏心卑點角 E 由下式推之,

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{v}{2} \quad \cdots\cdots(2)$$

既得 E, 則用下式定行過近日點之時 T,

$$n(t-T) = E - e\sin E \quad \cdots\cdots(3)$$

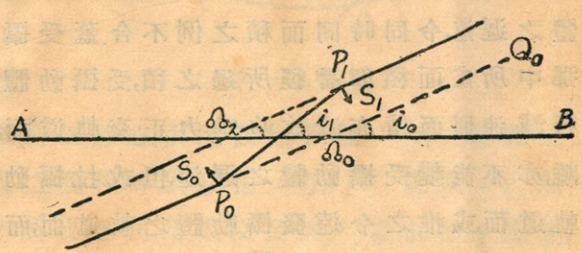
§288 攝動力之分力　僅以攝動力爲獨力,則歷久所生星道之變,不能瞭然.故當依力學理復論其分力,有數法.(一)分爲三力,在天空有一定方向,相與俱成直角.推每力之數,其合力卽獨力之數.論攝動之公理,此法最便.近代諸家俱用之以考攝動之深理.(二)亦分爲三力,相與俱成直角,而方向不一定.一與帶徑同方向,名帶徑率;一在軌道面內與帶徑成正交,名橫率;一正交於道面名垂率.此三率力其方向相與皆正交,故不相憑藉而加於受攝動體,令生動差各不同.帶徑力或向中體或背中體,故不能變軌道面之方位,亦不能變同時同面積之比例,僅能變橢圓各點之曲率及速率.蓋橢圓道視受攝動與中體相距之遠近而異,此力向中體,則令其距變近,此力背中體,則令其距變遠故也.而同時同面積之理不關中體之攝力,凡帶徑上之力皆然.此力方向恆在帶徑上,故不變面積也.橫力既正交帶徑力,則不能變二體之距.又在軌道面內,則不能變軌道面之方位.而能變受攝動體之遲速,令同時同面積之例不合.蓋受攝動體繞中體在每刹那中所成面積卽帶徑所過之積,受攝動體行增速則面積亦增,行減速則面積亦減故也.垂力正交軌道面,故不能變二體之距離,亦不能變受攝動體之遲速,但或拉攝動體令近發攝動體之軌道面,或推之令遠發攝動體之軌道面,而令受攝動體之軌道變方位也.此爲牛頓以後諸曆家同用之法.(三)亦分爲三力,相與

亦俱成直角,而方向時變不一定.前法帶徑率今改用受攝動體處之法線,前法橫率今改用該處之切線,名法切二力.設軌道爲正圓或微橢,則此法與前法略無異.若橢率甚大,則法切二方向與帶徑率橫率之方向不同.帶徑之力令二體之距變遠近,橫力令受攝動體行變遲速.法力能變曲率.此力向內,則曲率增;向外,則曲率損.切力能變速率.此力順,則速率增,逆則速率損.設欲知攝動力所變角度及距中體遠近,則第二法較顯明易推.設欲知攝動力所變橢圓道之根數,則第三法爲妙.而第二法之垂率今不改.垂力之用,令受攝動體出於軌道原面,而行於重曲線.此重曲線以中體爲心,而逐點之方向不同面,因此軌道之根數恆變,令其面之方位刻刻移動.設空中有一定面,則軌道面與定面之交線刻刻旋移也.

茲命 S 爲垂力之符號,此力以向黃道北極爲正.命 T 爲切力,以順行動之方向爲正.命 N 爲法力,以向軌道內爲正.茲分別研討其對於受攝動體之影響於下.此謂影響者,乃指在某時諸根數因而所生之變異,非指諸攝動力積久之影響也.若同時諸分力生有作用,須分算其攝動之大小,以定其合成之影響.

§289. 垂力之攝動影響 茲以月繞地球,被日攝動爲例.因此乃牛頓所用者也.論時只言其正分力之攝動,其負分力所生之變異適與正分力所生者相反.

垂力不能變 a、e、T 乃顯然之事,若 w 係自軌道面內某定線起算,亦在不變之列.但通用之 w 係自交點起算,故交點



第一九五圖

Ω 之增進率之負數乘以 $\cos i$，卽爲 w 因起算原點(Origin)變異之增進率，是以討論垂力之攝動只及 Ω 及 i 之變異可也.

設 AB 爲黃道面之直線，P_0Q_0 爲未被攝動時月軌道平面之直線，Ω_0 及 i_0 爲其交點及交角，如月在 P_0 時，忽有臨時之衝力 P_0S_0，月乃轉向 P_0P_1 行.其新交點及交角爲 Ω_1 及 i_1，則當然 $i_1>i_0$ 而 $\Omega_1<\Omega_0$. 如月至 P_1 時另有一 P_1S_1 新力之作用，其新交點及交角爲 Ω_2 及 i_2，則當然 $i_2<i_1$，及 $\Omega_2<\Omega_1$. 若 $P_0\Omega_1=\Omega_1P_1$，$P_0S_0=P_1S_1$，及月在 P_0 及 P_1 之速度相等，則 $i_0=i_2$.是其影響乃使交點退行，交角無變也.

上所言者乃月由南向北走過之昇交點（正交點）由降交點同樣之圖，可見在未過交點前如有一負力 S，及在已過交點後相稱之處有一正力 S，其生起之影響一如在昇交點處者.所以月在第一或第二象限內時，正力 S 使交點進行，而月在第三或第四象限內時，則使其退行；月在第一或第四象限內時，正力 S 使交角增，而月在第二或第三象限內時，則使其減.

Ω 及 i 之變異率與 S 力成正比.i 愈小，Ω 之變異率愈大，i 若等於 0 時，則 Ω 難於定界矣.然在月之行動，S 於此情形時必等於 0 也.在某定數之 i，Ω 之變率以攝動力愈近二交點中間處爲愈大.而 i 之變率以攝動力愈近交點處爲愈大，此又不可不知也.

§290. 切力之影響於長徑者　以初時距離及速度定半長徑之方式爲

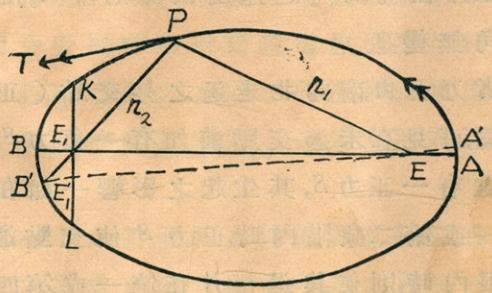
$$V^2=k^2(E+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

在橢圓軌道，a 爲正數，所以一正數 T 使 V^2 增大而不變 r 之數值，此正數 T 無論月在軌道何處，均使其長徑增大.惟式中可見 V 最大時卽月在卑點時，其使長徑增大之影響爲最大，且長徑

愈大,其增大率亦愈速.以偏微係數(Partial derivative)表半長徑 a 之因 T 而變有如下式:

$$\frac{\partial a}{\partial T}=\frac{\partial a}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{2a^2V}{k^2(E+m)}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}.$$

§291. 切力之影響於長軸線者 切力能增減月之速度,但不變其行動之方向.焦點 E 不變,r_1 不變,而 a 有變異.因 $r_2=2a-r_1$,所以 r_2 之方向不變,焦點 E_1 必被向前移而至 E'_1(第一九六圖),長軸線由 AB 前進轉至 $A'B'$.由圖可見在第一半周轉



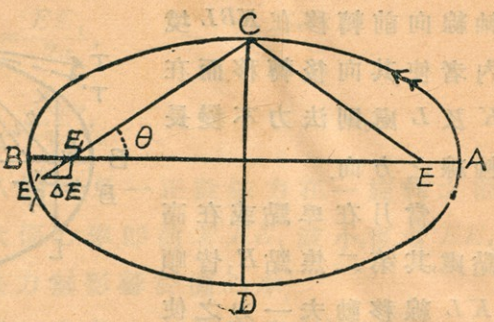
第一九六圖

期內之正數 T 使長軸線向前轉,而在第二半周轉期內者使其向後回轉.

在長徑左右相稱處其所生之影響相同.當月在 K 或 L 時,第二焦點之移動與長軸線垂直,而長軸線之轉移爲最大.惟該時 a 之變不大,長軸線轉動之遲速亦與 a 之變有關.所以此最大長軸之轉移係指對該長徑之變而言.但月在卑點時,長徑之變最大,所以長軸線轉動最速之時,必月在近 K 及 L 處而居於二點與卑點之間之時也.而月在卑點或高點時,長軸線之轉動率又爲 0.因 T 隨日月至地之距離而異,而此二距離又永變,遂致此事乃愈益複雜也.

§292. 切力之影響於偏心率者 橢圓之偏心率之方式爲

$e=\frac{EE_1}{2a}$（第一九六圖）.當月在卑點時 EE_1 及 $2a$ 之增量同爲一數.因 EE_1 小於 $2a$,所以此時偏心率爲增.當月在高點時 $2a$ 增大而 EE_1 則被減小,惟量相同,所以此時偏心率爲減.如是則在卑、高兩點之間必有偏心率不變之處,此則不難證爲在短徑之端.設 $2\Delta a$ 爲月在 C 或 D 時（第一九七圖）$2a$ 之增大數,則 r_2 增 $2\Delta a$ 而 EE_1 增 ΔE.如以 θ 表 CE_1E 角,則 $\cos\theta=\frac{EE_1}{2a}=\frac{2ae}{2a}=e$,且 $\Delta E=2\Delta a\cos\theta=2e\Delta a$.所以



第一九七圖

$$e'=\frac{EE_1+\Delta E}{2a+2\Delta a}=\frac{2ae+2e\Delta a}{2a+2\Delta a}=e,$$

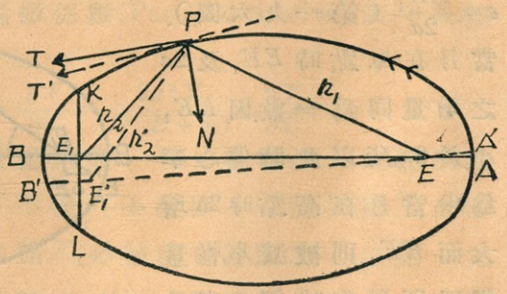
即月在短徑端時偏心率不受切力之影響也.

行過近日點之時之變異與周期之變,長徑方向之變,及軌道內經度之直接攝動,均有關聯.但周期之變全依長徑,而長徑之變前已論之,是對於研討行過近日點時之變異已立有基礎矣.至其經度之變異,後當論之.

§293. 法力之影響於長徑者　由(1)式可見長徑隨各處之速度而變,而與其行動之方向無關.法力既垂直於切力,當然不能使速度生差,所以不能使長徑生變也.

§294. 法力之關於長軸線者　設月在 P 時（第一九八圖）之切力爲 PT,法力爲 PN,則 PN 能使 PT 變至 PT'.因至兩焦點之半徑與切線成等大之角,故 r_2 必變爲 r'_2.又因法力不能變長徑之長,故 r_2 與 r'_2 仍是等長.是以在 LAK 境內之正數法力使長

軸線向前轉移,在KBL境內者使其向後轉移,而在K及L處,則法力不變長軸線之方向.



第一九八圖

當月在卑點或在高點處,其第二焦點E_1皆順KL線移動.夫一力之使行動方向所生之變動反比於行動之速度,但照面積定律在A及B處之速度與其去E點之距離成反比例.是以令E_A及E_B爲一力使月在A及B處行動方向所生之變動,V_A及V_B爲在該處之速度,則

$$E_A : E_B = V_B : V_A = a(1-e) : a(1+e).$$

長軸線之轉移與E_1順KL線之移動成正比,E_1順KL線之移動與由A及B至E_1之半徑乘其所轉之角成正比,而此角與E_A及E_B成正比例.至E_1之半徑與$a(1+e)$及$a(1-e)$成正比例,所以令R_A及R_B爲在A及B處長軸線之轉移,則

$$R_A : R_B = a(1+e)E_A : a(1-e)E_B = 1 : 1.$$

此卽當月在高點及卑點時等大之法力使長軸線生等大而方向相反之轉移也.

如此力在一小弧上繼續工作,謂之長加力.因線速度與半徑成反比例,則在A處一小弧上此長加力之使長軸線方向所生之變異與在B處者之比等於$a(1-e)$與$a(1+e)$之比.實際攝動力並非忽然而來,皆接連不斷也.其力之大小隨物體之所在而異.所以除非在高點處之法力小於在卑點處者,長軸線因方向不變之法力所生之平均轉動,必在月在高點時轉動之方向內.

§295. 法力之關於偏心率者　偏心率之方式爲

$$e=\frac{EE_1}{2a},$$

既受法力作用,則變爲

$$e'=\frac{EE'_1}{2a},$$

其長徑未變也.由第一九八圖可見一正數法力在一旋轉之前半,減小偏心率;在後半,增大偏心率.即前者EE_1減小,後者EE_1增大也.惟月在A或B時,法力無影響於偏心率.

由第一九八圖亦可見r_2之某方向變異,當月在第二或第三象限時,使偏心率所生之變異大於月在第一或第四象限時者.且月愈遠地,行愈速,所以一定數之法力當月近高點時使行動方向之變及因而r_2之變,皆大於月近卑點時者.所以一定數之法力當月近高點時使偏心率所生之變大於當月近卑點時者.

§296. 總表　以上討論之結果,時被引用,茲總列成表;惟只言正數分力之影響,其負數分力者恆與之相反,故無須兩列也.

表 *P.*

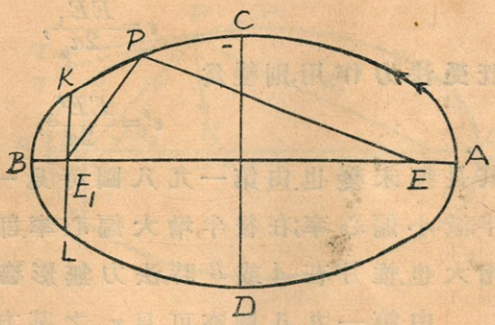
分　力	垂力 S	切力 T	法力 N
交　點	在一二象限內遞行 在三四象限內退行	0	0
交　角	在一四象限內增大 在二三象限內減小	0	0
長　徑	0	恆增	0
長軸線	若ϖ不由交點而由某定點起算則無變	在ACB間遞行 在BDA間退行	在LAK間遞行 在KBL間退行
偏心率	0	在DAC間增大 在CBD間減小	在ACB間減小 在BDA間增大

註　垂力或垂率在英文爲 Orthogonal component, 切力爲 Tangential component, 法力爲 Normal component.

垂力 S 之指向黃道北極者爲正數.

切力 T 之指向行動方向者爲正數.

法力 N 之指向橢圓內者爲正數.



第一九九圖

§297. 阻礙物之攝動影響 橢圓行動之攝動最簡者,厥爲起自阻礙物之攝動力.其力係一負數切力,在長徑兩對面相稱之處,其力相等.所以由前表可知其影響如下:(1) Ω 及 i 均不變.(2) a 繼續減小.(3) 長軸線前後變動,周而復始,在物體旋轉之前半周,向後退轉;在旋轉之後半周,向前進轉,其前進後退之量相等.(4) 物體行過 DAC 時,偏心率減小,餘時則增大.據實驗所得,若物體速度極高,阻力隨速度之高次方而變.所以偏心率之變,當物體在卑點時,大於在高點時者,而物體旋轉一周偏心率因之減小.以上所言,合於彗星、行星或衛星被隕星或以太阻礙所生之變異.

§298. 起於中體微扁之攝動 設一衛星繞一扁球體行星在其赤道面內旋轉,則由扁球體施於遠處單位質量之攝力方式爲

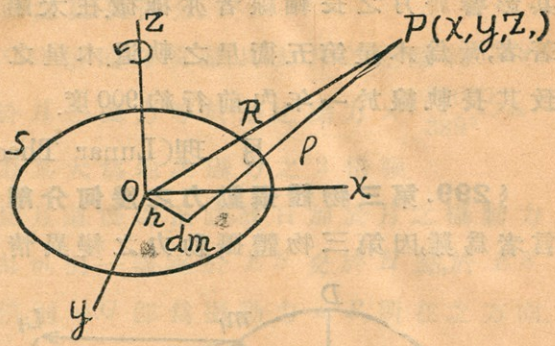
$$F_x=-\frac{k^2M_0}{R^3}\left[1+\frac{3}{10}b^2\frac{(x^2+y^2-4z^2)}{R^4}e^2+\cdots\cdots\right],$$

$$F_y=-\frac{k^2M_y}{R^3}\left[1+\frac{3}{10}b^2\frac{(x^2+y^2-4z^2)}{R^4}e^2+\cdots\cdots\right],$$

$$F_z=-\frac{k^2M_z}{R^3}\left[1+\frac{3}{10}b^2\frac{3(x^2+y^2)-2z^2}{R^4}e^2+\cdots\cdots\right].$$

由此可見,若扁球體變爲等質量之圓球體,則其攝力方式之右

方只有前一項.若該質點在赤道面內,則$z=0$.所以扁球體對其赤道面內遠處物體所發之攝力,大於等質量圓球體對該物體所發者.但若被攝動體向遠處退行,此兩種攝力有近似



第二〇〇圖

相等之時.此扁球體與圓球體對同一物體所發攝力之較,即攝動力也.此力恆沿帶徑而向行星,所以其法力恆爲正數,且在長徑兩邊相稱之處恆相等.若軌道偏心率不大,則切力恆微小,在ACB間爲負數,而在BDA間爲正數.

(一)影響於周期者　若軌道爲圓圜時,此最易見.其攝力必爲常數而大於圓球體行星所應發者,此即等於增大k^2之數值.所以由周期方式

$$P=\frac{2\pi}{k\sqrt{m_1+m_2}}a^{\frac{3}{2}},$$

可知軌道一定則衞星繞扁球體之周期必較繞圓球體者爲短,而周期一定則其去扁球體行星之距離必較去圓球體者爲大.

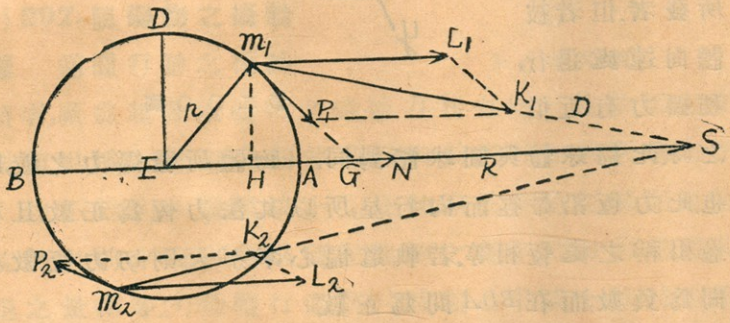
(二)影響於根數者　由前表可見:(1) Ω及i不變.(2) a在一周中減小及增大之量相等.(3)長軸線於大半周時向前轉移.(4)偏心率於全周中變量相等而方向相反.換言之,即Ω及i絕對不變,a及e爲周期之變異,其周期同於衞星繞行星一周,而長軸線則前後擺動,但全體言之則向前行.

此影響,行星愈扁及衞星愈近則愈大.地球之扁率極小,故

其影響於月之長軸線者亦極微.在太陽系中此類攝動之最顯著者,厥爲木星第五衞星之軌道.木星之扁及該衞星軌道之小致其長軌線於一年內前行約900度.

月 理(Lunar Theory)

§299.第三物體攝動力之幾何分解法 此題較前二節所言者爲難,因第三物體攝動力之變異情形甚複雜也.



第二〇一圖

如第二〇一圖,設三物體爲S、E及m,以S爲發攝動體,使m繞E之行動生有變異,令m_1及m_2爲m之二位置.EN爲S對E單位質點之攝力,或使其所生之加速度之大小及方向.其方向如字母之次序,卽由E向N也.其大小隨所用之尺度單位.mK爲S加於E之單位質量之攝力或加速度之大小及方向,依照攝力定律,攝力與距離之平方成反比,所以m_1K_1大於EN,因m_1S小於ES也.m_2K_2小於EN,因m_2S大於ES也.以方式表之爲

$$EN=mK\left(\frac{MS}{ES}\right)^2$$

(一)將mK分爲mL及mP二力,使mL與EN相等而且平行.因mL與EN相等而且平行,所以此分力不攝動E及m相關之位置.而mP乃爲S加於m之攝動力或加速度也.

由圖可見攝動加速度恆向E及S之聯線,或於mS大於

ES 時則向 E 及 S 聯線之延長部分.

因日之質量約 330000 倍地之質量,其去月之距離約 389 倍月地距離,所以日加於月之攝力等於地之攝力 $\times\frac{330000}{389^2}=2.18$, 卽日加於月之攝力其大爲地之攝力之 2 倍强.

(二)因日月距甚大,且月道幾爲正圓,故日加於月之攝動力頗易用繪圖法求之.如由 m 引一線垂於 ES 交於 H 點,於 ES 線上取 EG 爲 EH 之 3 倍,則 mG 卽爲攝動力 mP 所在之方向. 而由三角形之比例得

$$mP:mK=mG:mS,$$

若以 mS 表日加於月之全攝力,則 mG 卽表日加於月之攝動力.其 EG 等於 EH 之 3 倍可證之如下:

令　$mS=D, ES=R, Em=r, EH=p, R\fallingdotseq D+p.$

因　$mK:EN=\overline{ES}^2:\overline{mS}^2,$

所以　$$EN=mK\times\left(\frac{mS}{ES}\right)^2=mK\frac{D^2}{R^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(I)$$

因　$mK:EN=mS:GS(=R-EG),$

所以　$$EN=mK\frac{(R-EG)}{D}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(II)$$

由 (I) 及 (II) 消去 EN 及 mK 得

$$EG=R-\frac{D^3}{R^2}=\frac{R^3-D^3}{R^2}$$

$$=\frac{(D+p)^3-D^3}{(D+p)^2}=\frac{3D^2p+3Dp^2+p^3}{D^2+2Dp+p^2}.$$

因 p 與 D 比爲極小之數,若棄去其高次方各項,則得

$$EG\fallingdotseq\frac{3D^2p}{D^2}=3p.$$

(三)將攝動力 mP 分爲法力,切力及垂力三分體.法力在朔望及兩弦時爲最大.實際兩弦時全攝動力幾盡爲法力,其切力

及垂力實皆等於零也.無論何時,引 mP 線交 ES 線於 G 點,則 $mP=mK\times\frac{mG}{mS}$. 但在朔望時

$$mP=mK-EN=mK-mK\left(\frac{mS}{ES}\right)^2$$

$$=mK\left\{1-\left(\frac{mS}{mS+Em}\right)^2\right\}$$

$$=mK\left\{1-\left(\frac{1}{1+\frac{1}{389}}\right)^2\right\},$$

故

$$mP=\frac{2}{389}mK.$$

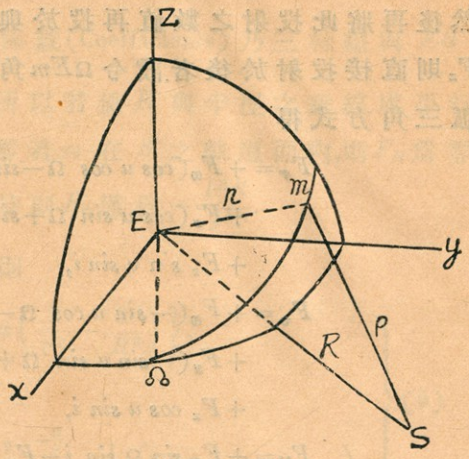
即日加於月之攝動力略爲其加於月之攝力之$\frac{2}{389}$也.前已證明 mK 約等於 2.18 倍地球加於月之攝力,所以在朔望時 mP 爲地攝力之 $2.18\times\frac{2}{389}=\frac{1}{89.2}$. 全體爲負數法力,無垂切二力,故使地加於月之攝力減$\frac{1}{89}$,令月離地而去也.在兩弦時法力爲正數,適爲朔望時法力之半量,所以約等於地加於月之攝力之$\frac{1}{178}$.

法力在朔望線之兩邊各54度44分處爲零,即在該四點處無法力也.因 mP 垂於 mE 時,則 EH 與 mH 之比等於 mH 與 HG 之比,而 $HG=2EH$,所以得 $\frac{mH}{EH}=\sqrt{2}=tan\,mEH$ 角,即 mEH 角 $=54$ 度 44 分.

切力在望時起爲零,漸增至最大值,斯時帶徑正與朔望線成45度角,切力之值爲地攝月力之$\frac{1}{119}$. 過此則漸減,至弦時復爲零.在第一及第三象限內此力爲負數,阻月之行動,在第二及第四象限內爲正數,助月之行動.

§300. 用解析數學法分解第三體之攝動影響 用一組矩

形座標軸線,以地心爲原點,xy平面爲黃道平面.令(x, y, z)及(X, Y, Z)爲月及日之座標數值.令r、ρ及R爲Em、mS及ES距離,令F_x、F_y及F_z爲攝動分力或其力所生之加速度之與x、y、z平行者,則依三體攝動力之方式而有$(z=0)$



第二〇二圖

$$\left.\begin{aligned} F_x &= k^2S\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{xX+yY}{R^3}\right)=k^2S\left[-\frac{x}{\rho^3}+X\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)\right],\\ F_y &= k^2S\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{xX+yY}{R^3}\right)=k^2S\left[-\frac{y}{\rho^3}+Y\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)\right],\\ F_z &= k^2S\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{xX+yY}{R^3}\right)=k^2S\left[-\frac{z}{\rho^3}+0\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)\right]. \end{aligned}\right\}(1)$$

欲求在任何方向之攝動分力,卽將此三分力投於具該方向之直線上而取其和數.

設令F_r爲攝動力在帶徑r方向之分力,F_v爲在m行動面內與r垂直之分力,F_N爲與F_r及F_v皆成直角之分力,此三分力名之曰帶徑力、橫力及垂力.F_r以背E者爲正數.F_v以與行動方向所成之角小於90度者爲正數.F_N以指向包含正數z軸線之半球者爲正數.表F_r之方式爲

$$F_r=F_x\cos(xEm)+F_y\cos(yEm)+F_z\cos(zEm).$$

其表F_v之方式可由此式得之,而以$\Omega Em+90$度代ΩEm.因物體在其軌道內前進90度後,r將正具m處切線之方向也.F_N之方式得之如下.先投射F_x及F_y於xy平面內與ΩE垂直之直線上,

然後再將此投射之數值再投於與ΩEm平面相垂之直線上,其F_z則直接投射於後者.設令ΩEm角爲u,則由第二〇二圖依照弧三角方式得

$$\left.\begin{aligned}
F_r &= +F_x(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i)\\
&\quad +F_y(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i)\\
&\quad +F_z\sin u\sin i,\\
F_v &= +F_x(-\sin u\cos\Omega-\cos u\sin\Omega\cos i)\\
&\quad +F_y(-\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\cos i)\\
&\quad +F_z\cos u\sin i,\\
F_N &= +F_x\sin\Omega\sin i-F_y\cos\Omega\sin i+F_z\cos i.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

令U爲ΩES角,則因日在xy面內行動故有

$$\left.\begin{aligned}
x &= r(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i),\\
y &= r(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i),\\
z &= r\sin u\sin i,\\
X &= R(\cos U\cos\Omega-\sin U\sin\Omega),\\
Y &= R(\cos U\sin\Omega+\sin U\cos\Omega),\\
Z &= 0.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)$$

利用(3)式更替(2)式內之F_x、F_y及F_z,且化之乃得有

$$\left.\begin{aligned}
F_r &= k^2S\left\{-\frac{r}{\rho^3}+R[\cos U\cos u+\sin U\sin u\cos i]\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)\right\},\\
F_v &= k^2S\left\{0+R[-\cos U\sin u+\sin U\cos u\cos i]\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)\right\},\\
F_N &= k^2S\left\{0-R\sin U\sin i\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

(4)式之幾何意義爲完全了解本題最要之事.設用一組座標軸線,以E爲原點,一軸線直指m,一軸線在軌道平面內與前線成直角而指m前90度處,其第三軸線與此二軸線成直角.則由圖

可知(4)式 $k^2SR\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)$ 之係數(Coefficients)乃三軸線與 ES 線所成之方向角之餘弦也.所以若過 E 與半徑之垂線成平行之線亦與 ES 相垂,則 F_v 爲零.若 m 在 S 之軌道面內,則 F_N 爲零.若 $r=\rho$,則 F_v 及 F_N 均爲零,此時則 F_r 僅爲 $-\frac{k^2S}{r^2}$.

令 ϕ 爲 r 與 R 間之角,則

$$\left.\begin{aligned} F_r &= k^2S\left\{-\frac{r}{\rho^3}+R\cos\phi\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)\right\},\\ \rho^2 &= R^2+r^2-2Rr\cos\phi,\\ \frac{1}{\rho^3} &= \frac{1}{R^3}\left(1-\frac{2r}{R}\cos\phi+\frac{r^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{R^3}\left(1+3\frac{r}{R}\cos\phi+\cdots\right). \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

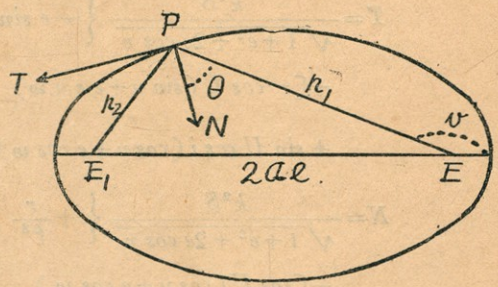
故 F_r 之式變爲

$$F_r=\frac{k^2S}{2R^2}\left\{\frac{r}{R}(1+3\cos 2\phi)+\cdots\right\}\quad\cdots\cdots(6)$$

是以若棄去高次方者,則當下式情況之時 F_r 必爲零.

$$\left.\begin{aligned} &1+3\cos 2\phi=0,\\ &\phi=54°44',\ 125°16',\ 234°44',\ 305°16'. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(7)$$

至此可討論攝動加速度之法切二分體矣.設令 P 爲軌道內任意之一點(第二〇三圖).PT 爲在 P 點之切線,PN 爲其垂線.由橢圓性質,PN 乃平分 r_1 及 r_2 所夾之角.



第二〇三圖

則法切二分力以 F_r 及 F_v 組成之方式爲

$$\left.\begin{aligned} T &= +F_r\sin\theta+F_v\cos\theta,\\ N &= -F_r\cos\theta+F_v\sin\theta. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(8)$$

欲完成 T 及 N 之方式,須將 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 變爲以 v 作成之方式表之.由橢圓之幾何性質及三角形 EPE_1,則有

$$r_1=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

$$r_1+r_2=2a,$$

$$r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos 2\theta=4a^2e^2.$$

由此三式消去 r_1 及 r_2,乃得

$$\sin\theta=\frac{e\sin v}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}},$$

$$\cos\theta=\frac{1+e\cos v}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}.$$

所以

$$\left.\begin{aligned}T&=\frac{e\sin v}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}F_r+\frac{1+e\cos v}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}F_v,\\ N&=\frac{-(1+e\cos v)}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}F_r+\frac{e\sin v}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}F_v.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

利用(4)式及 $u=w+v$,則法切二力之最後方式爲

$$\left.\begin{aligned}T=\frac{k^2S}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}\Big\{&-e\sin v\frac{r}{\rho^3}\\&+[-\cos U(\sin u+e\sin w)\\&+\sin U\cos i(\cos u+e\cos w)]R\Big(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\Big)\Big\},\\ N=\frac{k^2S}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}\Big\{&+\frac{r}{\rho^3}\\&-[\cos U(\cos u+e\cos w)\\&+\sin U\cos i(\sin u+e\sin w)]R\Big(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\Big)\Big\}.\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

T 及 N 之一切變異情形,均可由此式推斷之.

§301. 交點之攝動 據垂力之定義是垂力 S 與 F_N 爲一事.

所以由(4)之末一式有

$$\text{垂力 } S=-k^2SR\sin U\sin i\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

右邊數之符號隨 $\sin U$ 及 $\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)$ 之符號而定,二者或爲正或爲負.欲定何者符號所佔之時期長俾得知總全周論之交點,究係向前進行抑或向後退行,須展開(11)式之末一因數,再利用(5)之末式,則得

$$\left.\begin{aligned}S&=-\frac{3k^2S_r}{R^3}\sin U\sin i\cos\phi+\cdots\\&=-\frac{3k^2S_r}{R^3}\sin U\sin i\,(\cos U\cos u+\sin U\sin u\cos i)+\cdots.\end{aligned}\right\}(12)$$

右邊之 S 乃顯示日之質量,不可與左邊之 S 相混.

日在其軌道內之角速度與月較爲甚慢,是以欲使便於討論,可假設當月繞行一周時日靜而未動.因月及日之周期並無關聯,$\sin U$ 及 $\cos U$ 之數值在長時期內減小與增大之次數或竟相等,故如此假設不能生重要誤差也.

設 S 又析爲二分,S_1 及 S_2,其方式爲

$$\left.\begin{aligned}S_1&=-\frac{3k^2S_r}{R^3}\sin i\sin U\cos U\cos u,\\S_2&=-\frac{3k^2S_r}{R^3}\sin i\cos i\sin^2 U\sin u.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

又設月之軌道爲圓圜,則 r 爲常數,u 等於 nt. 本題乃愈益簡便矣.如 U 爲一定數,則月起自正交點繞行一周中,S_1 之影響,由前表可見.在第一及第二象限相等而相反,因 $\cos u$ 在該象限內有相對相等之數而正負相反也.其在第三第四象限者亦然.所以 S_1 僅使交點線生周期攝動.

論 S_2 之影響,則在起自交點之前半周 S_2 爲負數,以 $\sin u$ 爲正數也(其他因數皆爲正數).而在後半周 S_2 爲正數,以 $\sin u$

爲負數也.所以由前表可見此力使交點線生繼續而無法之退行（惟有時爲零）.是交點線之行動乃因S_1而生之周期擺動及因S_2而生之周期,且繼續之變異相合併之行動也.

月道交點線之轉行周期約爲19年,尼生（Neison）謂爲18.5997年.因日月之食僅能於日近月道一交點時遇之,故每年內日近交點之時逐年提早,約19年周而復初.

§302. 交角之攝動及攝動加速度在行動平面內之分體 由前表可見正數S在第一及第四象限內增大交角,在第二及第三象限內減小交角.

若$\sin U \cos U$爲正數,S_1在各象限內之影響是減小交角,但此爲$\sin U \cos U$爲相等之負數時對補.因所有之變均可如此對補,所以S_1僅使交角生周期變異.

S_2之影響尤較S_1者爲簡單,因$\sin u$在前二象限爲正數,其在第二象限內之影響,卽抵消在第一象限內者.其在第三及第四象限內之變異,彼此相抵消亦然.所以交角僅有周期變異也.

惟上之討論,未計及月及地之軌道偏心率.若將此加入,則不能彼此完全抵消如上述之簡易也.雖前之討論皆係單就一項攝動而言,視其與他項攝動一若無關者.其實彼此均有關聯.例如交點一變,交角所受之影響卽與交點不變時不同.反之亦然.是以欲求變異之確數,更需精細之分析也.

由前表得知垂力不使長徑、卑點黃經度及偏心率,生有攝動.惟垂力移動交點線,而卑點黃經係由交點線所在起算.是垂力間接與之有關係者惟此一事耳.所以討論長徑、卑點黃經及偏心率諸根數之攝動,可假設交角爲零,如是則無垂力矣.雖T及N與交角有關係,如是假設其結果不爲眞確.但爲簡便及助吾人易於認知此事起見,則又不得不如此也.

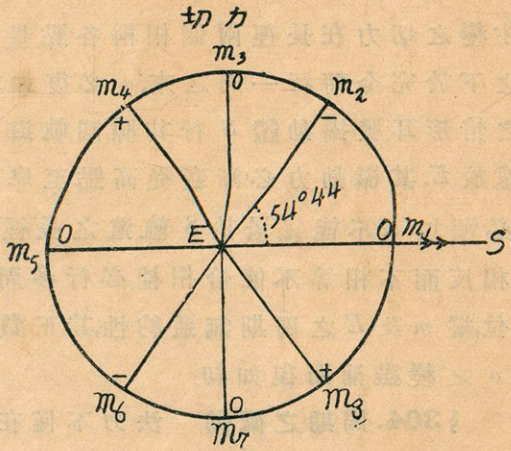
以 $i=0$,則 (10) 變爲

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{k^2S}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}\left\{-e\sin v\frac{r}{\rho^3}\right.\\ &\quad\left.\left\{\frac{\gamma}{\rho^3}-R[\sin(u-U)+e\sin(w-U)]\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)\right\},\right.\\ N&=\frac{k^2S}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}\\ &\quad\left\{\frac{r}{\rho^3}-R[\cos(u-U)+e\cos(w-U)]\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

在 $i=0$, $\phi=u-U$ 時,並用 (5) 之末一式,則得有

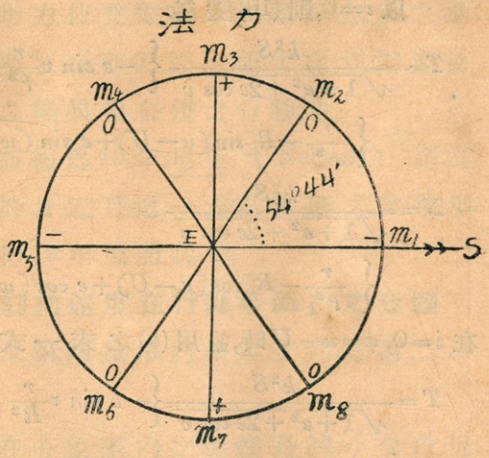
$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{k^2S}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}\left\{-e\sin v\frac{r}{R^3}\right.\\ &\quad -3e\frac{r}{R^3}\sin(w-U)\cos(u-U)\\ &\quad\left.-\frac{3}{2}\cdot\frac{r}{R^3}\sin 2(u-U)+\cdots\cdots\right\},\\ N&=\frac{k^2S}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}\left\{-3e\frac{r}{R^3}\cos(w-U)\cos(u-U)\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{R^3}[1-3\cos 2(u-U)]+\cdots\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

在月道 e 約爲 $\frac{1}{20}$,故將含 e 爲因子之各項棄去不用,可以得 T 及 N 數値之大概及其如何變換代數符號之情形.若果棄去各項之含 e 者則得 $u-U=0$、$\frac{\pi}{2}$、π 及 $\frac{3}{2}\pi$ 時 T 爲零,在第一及第三象限時爲負號數,在第二及



第二〇四圖

第四象限時爲正數.在同樣情形之下,$u-U=54$ 度 44分、125 度16分、234 度 44分及 305度 16分時 N 爲零,在由 -54 度44分至 +54 度44分及由 125 度 16分至 234 度44分處內爲負數,在由54度44分至 125 度16分及由 234 度 44分至 305 度16分處內爲正數.若不將含 e 各項及 ρ^{-3} 之展開式之高次各項棄去,則 T 及 N 爲零之處將與上所得者小有不同.



第二〇五圖

第二〇四圖及第二〇五圖示月在軌道各部時 T 及 N 之代數符號.

§303. 長徑之攝動 若月道卑點在 m_1 或 m_5 處,則僅能使 a 生變之切力在長徑兩側相稱各點量等而記號相反.在此情形之下於完全轉行一周之末,a 必復如初略無變異.然此乃一時之情形耳.發攝動體 S 行其橢圓軌道中,從卑點至高點半周漸遠於 E,其攝動力必漸衰.從高點至卑點半周漸近於 E,其攝動必漸加.m 不能定居於 S 軌道之長徑上,故 S 行一周其切力雖相反而不相等不能恰相補.必行多周歷盡 m S、E 相與之各方位,縱 m 及 E 之周期無通約性,其正負切力之個數亦必相等使 a 之變盡補而復如初.

§304. 周期之攝動 法力不僅在多半周爲負數,且其負數值大於正數值.若棄去含 e 各項,則由(15)式,可見負數 N 之最大

值（在朔望時）.在數兩倍於正數 N 之最大值（在兩弦時），其全體之平均結果,乃在減少 E 對 m 之攝力（約減 $\frac{1}{360}$），即使物體在單位距離因攝力所生之加速度 k^2 減少也.周期與攝力強弱及長徑之關係爲

$$P=\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{E+m}}.$$

故距離不變 k 損則 P 亦損.日之攝動月道之影響使月之周期約增益 $\frac{1}{720}$（略多於一時）.

§305. 年差(Annual equation)　因地道爲橢圓,日之距離頗經變易.日去地愈遠,其攝動影響愈弱,而上節所論增益月之周期者爲尤弱.所以當地由近日點行至遠日點時,增月周期之攝動逐漸變小,即月之周期變短,亦即月之角行動變大也.當地由遠日點行至近日點時,則一切相反,月之行動乃被阻抑.此差略多於11分,一年一復.於耶紀1590年爲第谷所測覺,名曰月之年差.

§306. 平速長差(Secular acceleration)　海利取迦勒底人所記最古之月食與近代月食相校勘,知月之周時今小古大.又以唐時亞喇伯測望之數合考之,知月之平速古小今大.約百年積數11秒.數雖甚微,但久久積之則漸著.此事及木土差,其理幾何家久考不能知.或謂攝力之理有時窮,或謂古表不足憑.一百年後至拉普拉瑟始發其祕.假如日月同從合點起,歷12合日未至原處而所差無幾,至13合則日已過原處.故12合前半周經度所生差未消盡,13合消盡而生反差,則度必微增.由是26合日離原處略倍.39合日離原處略三倍.如此累加13合,累倍,而每次增度之比例必漸小,至日離原處半周而不增.餘半周理同而度微損.

日離原處一周名曰大周,其度之增損消盡.然其合視原處尙有小餘,則度尙有小差,然較13合之差甚微也.以此小餘之弧分除360度,所得用乘大周之時,名曰廣周,尙有小差,則更微矣.如此累推之,若地道不變,可數百年而得恰盡.然諸行星之攝力加於地,令地橢圓道之兩心差徐徐而變.細考之自上古以來恆變小.如是久之又久,必至兩心差消盡,而地道變成正圓.後復變橢圓,其兩心差徐徐變大,至限而復徐徐變小.此變一終之時極久,非言語譬喻所能明,視開闢至今若一剎那耳.月之平速長差因此而生.故雖歷大周廣周之久時終不能消盡.蓋地道兩心差恆變小則反力較正力更大.故所補數與變數不相同亦不相等,猶之上山力不足下山力有餘也.必俟地道兩心差復變大,正力較反力大始能消盡其差也.故日月及日道之卑點三者相與之方位每一次復原,月之諸差略消盡,必餘甚微之增速,久積之成黃經度之大差也.觀此所論,知諸行星及諸月若一體有一定時之變,亦令諸體相應而生一定時之變.月與地球相屬之動,惟日能令月生變.諸行星之質微,距地月遠,除金星外,其攝力不能令生大差.然能令地道變,月道因之而亦變,而月道差較地道差更易見也.

地道兩心差之變異影響甚廣,其影響於日對月道之平均攝動能力者,在兩心差變小,平均攝動能力亦變小.茲證之如下:

月道周期之變純由法力,因其爲獨一幾沿軌道半徑而施作用之力也.故於本節之討論不復計及切力.如以R及U爲常數,e爲零,則每月繞一周N之平均數值由(15)之第二式得爲

$$\left.\begin{aligned} \text{平均 } N &= -\frac{1}{2}k^2S\frac{r}{R^3}\cdot\frac{n}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}[1-3\cos 2(nt-U)]dt, \\ &= -\frac{1}{2}k^2S\frac{r}{R^3}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

卽攝動加速度之法分體(Normal component)之平均數,幾與月道半徑成正比與地道半徑之三次方成反比也.但若地道爲偏心者,則全年之結果隨兩心率而變矣.苟得知平均N與地道兩心差之關係,則兩心差增減之影響可定也.

設$\overline{N}$爲一年內之平均N,則由(16)有

$$\overline{N}=\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2Sr}{P}\int_0^P\frac{dt}{R^3} \quad \cdots\cdots(17)$$

P乃地繞日之周期.依面積定律,則$hdt=R^2d\theta$,故(17)變爲

$$\overline{N}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2Sr}{Ph}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{R}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2Sr}{Ph}\int_0^{2\pi}\frac{(1+e'\cos\theta)}{a'(1-e'^2)}d\theta,$$

$$=\frac{-Sk^2r\pi}{Pha'(1-e'^2)},$$

a'及e'爲日道之長半徑及兩心差.但由二體算題

$$h=k\sqrt{(1+m)a'(1-e'^2)},\quad P=\frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{1+m}}.$$

故顯$\overline{N}$之式變爲

$$\overline{N}=\frac{-k^2Sr}{2a'^3(1-e'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots(18)$$

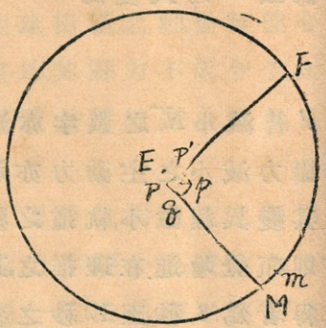
e'若減小$\overline{N}$之數字亦減小.所以地道兩心差減小,日使地對月攝力減小之主動力亦逐漸減小,而月之平速乃有相當之增益.其變異極微小,軌道之變幾不能覺,然積數世之久月之黃經度則頗覺增進.在理推之,其數約爲每百年6秒.但由日蝕推算而得者爲8秒至12秒之多.此測數與推數之不合有以由於潮汐阻礙地球自轉之行動,而使其日增長解之者;然此事至今仍爲未決之問題也.

諸行星之質微,距離又遠,其直接使月行動生變之攝動幾難覺察;然能間接由其對地道(卽如日道)之攝動而生月之平速長差及其他之攝動.由此間接作用之事實,可見太陽系天

體行動之複雜情形,非另設精細推法不足以得滿意之結果也.

§307. 二均差(Variation) 此差不與月道兩心差相關.第谷於耶紀1590年測出,牛頓解釋之,頗爲拉普拉瑟所贊許.

如以未被攝動之月道爲平圜,其理更易明瞭.前已證明日攝動加速度之法分體在$m_8 m_1 m_2$及$m_4 m_5 m_6$內爲負數,其最大值則在m_1及m_5處.今於月道設在m_1處未被攝動之行動爲行於平圜（卽由於地攝力之加速度,正與離心力相平衡,而以平速行也）.在此點無切分體,而法分體爲最大之負數,結果乃使向E之力減小,及軌道於此點較平圜之曲率小.故月將於兩弦時較平圜軌道退居於去地較遠之處.在m_3處切分體爲零,向E之力增大,曲率較平圜爲大.此變易之情形,在m_1至m_2中間繼續不已.其在軌道此段以外部分之相當變易亦同此理.全體之結果,乃使軌道於日地聯線之垂直方向加長.若日之距離能使其在$m_3 m_5 m_7$中間與在$m_7 m_1 m_3$弧內之攝動影響相等,則月道於初時適宜情境之下,乃對E相稱而以E爲心,且極似一橢圓形.此軌道形之變異及聯帶而生之帶徑面積行率之變,遂致月之平位置及眞位置之黃經最大時有39分30秒之差,名曰二均差.此差一月而復.



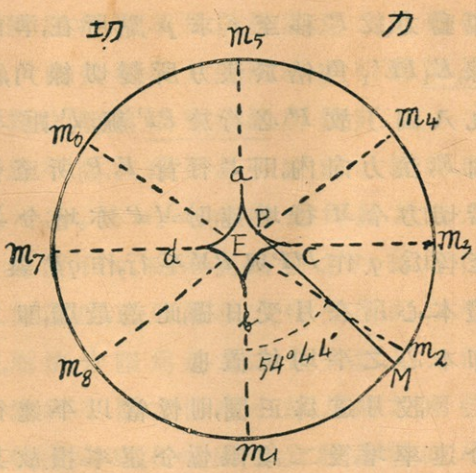
第二〇六圖

發攝動受攝動二體之周相會,所生之差或自相消而復初.此差因受攝動道之本心繞中心點行成曲線道而生.設道爲正圜,則中心點卽圜心.若微橢,則中心點卽本心所繞之心.本心繞中心點兼用法切二力.如第二〇六圖P爲本心,M爲受攝動體,Mm爲一剎那中所過之道.若無攝動力則Mm爲橢圓之一分,P不動.因有

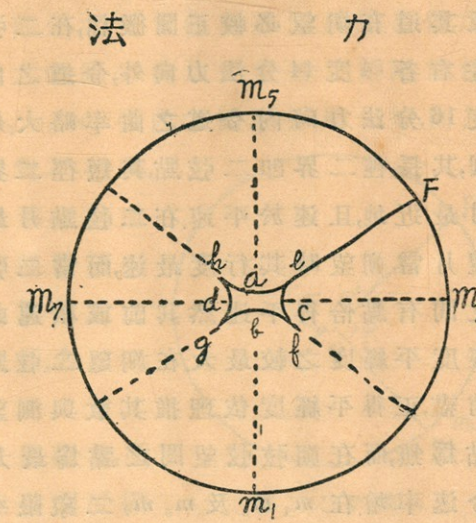
攝動力,故 P 移至 p.求 p 點所在,準前法力變 PE_1 線爲 PE'_1 線,$E_1PE'_1$ 角倍於法力所變切線角,而 PE_1 之距不變(見第一九八圖).故 P' 必行於 PF 線,F 距 M 90 度.若法力向外,則 P 行向 F;法力向內,則 P 行背 F.P 所至恆爲 P'.又切力能增損 MP.若切力令 M 行增速,則 MP 亦增;令 M 行損速,則 MP 亦損.P 所至恆爲 q.作 $P'P$ 與 PM 平行,作 qP 與 PF 平行,交於 p,p 卽受攝動體本心所在.月受日攝,此差最顯,卽上所論之二均差也.中心點卽本心之平均位置也

設月道爲正圜,則恆當以平速行.乃朔望前二象限切力恆令速率增,後二象限恆令速率損.故其速率在朔望二點爲最大,在上下弦二點爲最小.近朔望必大於平速,近二弦必小於平速.故其道在朔望必較正圓微扁,在二弦必較正圓微凸.又朔望點左右各 54 度 44 分法力向外,令道之曲率略小.二弦點左右各 35 度 16 分法力向內,令道之曲率略大.是切法二力共變正圓爲橢圓,其長徑二界卽二弦點,其短徑二界卽朔望點也.故在朔望點月最近地,且速於平速.在二弦點月最遠地,且遲於平速.故從地望月當朔望時其行度最速,而當二弦時其行度最遲.朔弦弦望之間有點恰得平速.然其前或積速或積遲俱未消,故在此點眞經度平經度之較最大.在朔望二弦點其變遲速最大,而積差卻消盡,正得平經度.依理推其數與測望密合.案切力在朔望,二弦點爲無,而在朔弦弦望間之點爲最大.在 m_7m_1 及 m_3m_5 二象限令速率增.在 m_1m_3 及 m_5m_7 二象限令速率損,速率增則長徑變長,速率損則長徑變短.法力在 m_2 m_4 m_6 m_8 四點距朔望點各 54 度 44 分爲無,在 $m_8m_1m_2$ 及 $m_4m_5m_6$ 二弧向外,在 $m_2m_3m_4$ 及 $m_6m_7m_8$ 二弧向內.乃先論切力令 P 點行法.M 行 m_1m_3 及 m_5m_7 二象限 P 漸近 M.M 行 m_3m_5 及 m_7m_1 二象限 P 漸遠 M.M 在

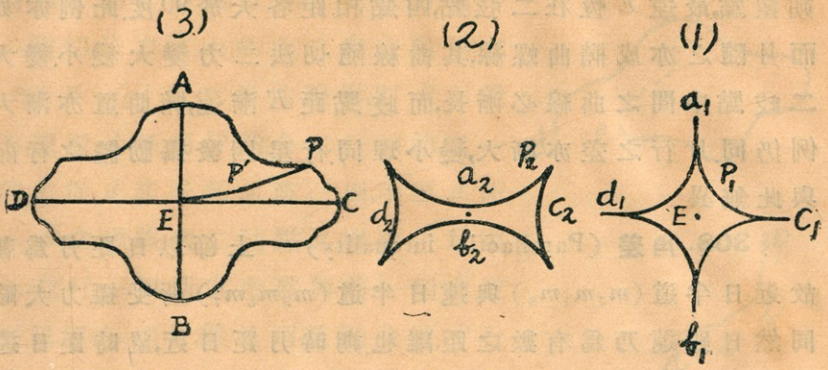
m_9 m_1 m_3 m_5 四點 P 不動. 故 M 在 m_1 一剎那中 P 在 a 不動. M 離 m_1 向 m_3，則 P 恆向 M 行. 而成 ac 線，PM 恆爲 ac 之切線. M 至 m_1m_3 之中，則 P 距 M 得中與 ME 距等. 此時 P 向 M 行最速. M 自此至 m_3，P 向 M 漸遲至 m_3 而定. M 自 m_3 至 m_5，P 背 M 而行，成 cb 線，速率之變與前同. M 自 m_5 至 m_7，自 m_7 至 m_1，P 行成 bd 及 da 二線理同. 故依切力 P 必繞 E 行成 $acbd$ 四岐點曲線道，與 M 行相逆. 再論法力令 P 點行法. M 在 m_1 m_5 二點 P 向 F 行爲最速. M 在 m_3 m_7 二點 P 背 M 行爲最速. M 在 m_2 m_4 m_6 m_8 四點 P 不動. 故 M 在 m_1，F 在 m_3，P 在 a 向 F 行最速. M 離 m_1 向 m_3，F 離 m_3 向 m_5，P 向 F 行漸遲. M 行 54 度 44 分至 m_2，F 行亦同，而 P 行至 e 成 ae 線，PF 線恆爲曲線之切線，P 至 e 不復向 F 而定. M 至 m_3，F 至 m_5，P 背 F 行至 c 在 c 背 F 最速. M 行全周復至 m_1，則 P 行 $efgh$ 四岐點曲線道而復至



第二〇七圖



第二〇八圖



第二〇九圖

a,亦繞E與M行相逆.乃取此二行幷之.命二P點爲P_1及P_2,$abcd$亦依類作識.法作EP'與EP_1等且平行.又作$P'P$與EP_2等且平行.二曲線相對無數諸點,皆依此作EP'及$P'P$諸線.乃聯諸P點成$ACBD$橢曲線形爲月道本心所行之眞道.其半短徑EA等於Ea_1加Ea_2.其半長徑EC等於Ec_1加Ec_2.$ACBD$四點與M道$m_1\ m_3\ m_5\ m_7$四點相對,故朔望月在本道m_1m_5點其距餘心較近於本心.二弦月在本道m_3m_7點,其距餘心較遠於本心.P行$ABCD$橢曲道一周,月行$m_1\ m_3\ m_5\ m_7$亦一周,其行相逆.朔望月所在爲在該時一剎那中橢圜之卑點.二弦月所在爲一剎那中橢圜之高點.

以上所論設日爲定,今設日行於略近正圜之道.則E所見MS之距度等,切法二力亦等.惟朔望二弦四點及法力爲零之四點不定於月道,而隨日進行.其逐時所過度與日行等.故$a_1\ c_1\ b_1\ d_1$及$a_2\ c_2\ b_2\ d_2$二曲線形P行一周後不能復至原處,而曲線必更彎,令歧點進行與日行同方向.故M與P行之度必變大.其比若月之恆星周與太陽周比.而二曲線形幷之仍略如橢曲道.但P一周後不能復至原處,必繞E成橢曲螺線.其最近E恆在

朔望點,最遠 E 恆在二弦點,四點相距各大於90度.此例亦如上.而月隨之亦成橢曲螺線,其曲線隨切法二力變大變小.變大則二歧點中間之曲線必漸長,而歧點距 E 漸遠,橢曲道亦漸大,比例仍同.月行之差亦漸大,變小理同.行星因發攝動體之行而變與此無異.

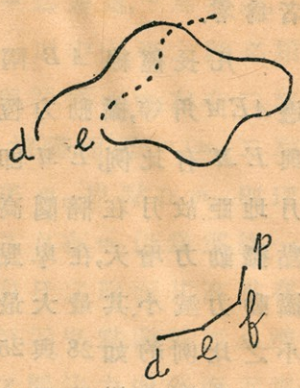
§**308. 角差** (Parallactic inequality) 上節以日距月爲甚遠,故近日半道($m_7m_1m_3$)與遠日半道($m_3m_5m_7$)所受攝力大略相同.然日雖遠乃爲有數之距離也.朔時月距日近,望時距日遠,其較約 $\frac{1}{200}$.故日之攝動影響在 m_1m_7 線左右相稱之處不能相等,而在近日半道者較大.因此生一月行差名曰角差.月行一周黃經約差2分7秒,即變動之軌道生有一種變形使月之經度較在變道上理應佔據之位置差約2分餘也.如將(14)之 ρ^{-3} 之展開式再向高展,使其含有二次方各項(即含 $\frac{r^2}{R^2}$ 各項),則 N 不含 e 之部分爲

$$N=\frac{k^2S}{R^2}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{R}[1+3\cos 2(u-U)]\right.$$
$$\left.-\frac{3}{8}\cdot\frac{r^2}{R^2}[3\cos(u-U)+5\cos 3(u-U)]-\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(19)$$

$u-U=0$ 時,二次方之項與一次方者有同樣符號,而當 $u-U=\pi$ 時有相反之符號.此項之影響甚小,因 $r\div R$ 僅約等於0.0025也.此二次方之諸項即爲變動之軌道生變形之主動力.月行角差由於日之視差,故英文名爲 Parallactic i equality 也.拉普拉瑟謂如對此差作長期多次之精確測量,可爲推算日距離最滿意之方法.

以圖明之,此差生 P 行曲線之差及所成橢曲道之差,如前切法二力圖.設月 M 從 m_7 起行本道自 m_1 至 m_3,本心 P 從 d 起

行曲線形,在切力圖行 dac, 在法力圖行 $dhec$. 因切法力更大,故此二半曲線形大於 cbd 及 $cfgd$ 餘二半曲線形,則 P 不能復至原處 d, 每周皆然.合二行如第二一〇圖, P 從 d 起行橢曲道一周,不至 d 而至 e. de 之聯線與二弦點之聯線平行.復從 e 起行一周,所成曲道與前一周曲道同例.以後每周皆然.是謂重橢曲道. P 行一周,日亦行黃道若干度.二弦點之方位隨日而變.故 P 從 e 起行一周至 f. f 點不在聯 de 引長之直線內,而在二弦點聯線新方位平行線 ef 內.故一歲中所得 de 等點環繞一中點 E, 一若重橢曲道中心點亦繞此中點成一小道.故兩心差無長差,若日不行則兩心差必生長差,久之必變成極大也.



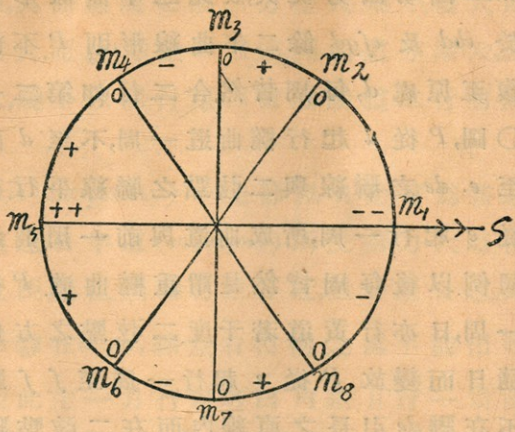
第二一〇圖

§309. 長軸線之行動　諸分力影響於長軸線行動之情形最爲複雜.故此根數之攝動較前所論者難於分析.長軸線之變與兩心差之變本一理,兼憑法切二力.設其道爲正圜論之,則簡而易明.如先以長軸線與 ES 線合併,以卑點在 m_1, 則此處之法力爲負數,故使長軸線生退行(第296節之表).若月在 m_5 則負數法力使其生進行.前曾證明當月在高點行成小弧時之法力,與月在卑點行成同大小弧時之同大法力,其影響於長軸線者之比爲 $a(1+e)$ 與 $a(1-e)$ 之比.且(15)之第二式證明法力爲月地距離之變有正比,所以月在高點法力較大,其影響於長軸線者比其力之大小更甚;而月在卑點之法力則較小,其影響尤小.在 $m_2 m_3 m_4$ 及 $m_6 m_1 m_8$ 弧內法力雖較小而爲正數.此二弧幾爲 K 及 L(第一九八圖)所平分,在平分處法力之影響於長軸線

者爲零.

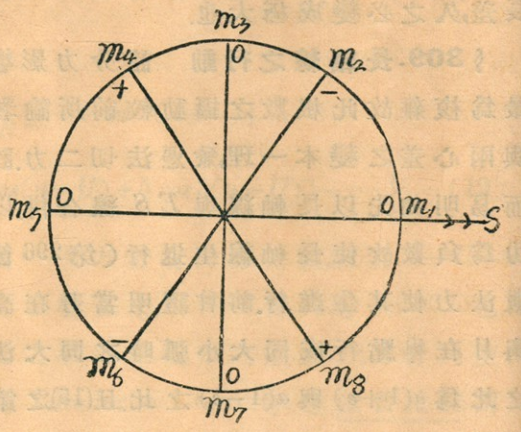
凡長徑線 AB 兩邊 AEM 角等,攝動力恆與 EM 有比例,EM 卽月地距.故月在橢圓高點攝動力增大,在卑點攝動力減小.其最大最小之比例約如 28 與 25. 準此論法力變長徑方位.設長徑向日,卑點在 m_1,高點在 m_5. 取 m_1m_8、m_1m_2、m_5m_4、m_5m_6 四分,各 54 度 44 分.月在 m_8、m_2 之間,法力向外而近卑點,則長徑必退後;在 m_4、m_6 之間,法力向外而近高點,則長徑必進前;在 m_1、m_5 二點其行最速,漸遠二點漸遲;在 m_8、m_2、m_4、m_6 四點則遲極而定.自 m_2 至 m_3 法力向內而近卑點,則長徑必進前,但行甚遲.蓋初離 m_2 法力小,漸近 m_3 法力雖漸大,然其方位不易動長徑故也.過 m_3 至橢圓長徑餘焦點上垂線界 K 而復定.自此界至 m_4 法力向內而近高點,則長徑必退後,而亦甚遲.月在 m_6m_7 及 m_7m_8 之間理

法力



第二一一圖

±力力



第二一二圖

同.第二一一圖圓圜內之＋＋爲速進,－－爲速退,＋爲遲進,－爲遲退,0爲定.若兩邊正負之力相等,則一周中遲速之數必相消.然高點之力恆大於卑點,其比例若28與25.惟m_3m_7左右二象限之力相等,故近m_3 m_7二點進退二行略消盡.而近m_1 m_5二點進退二行不能消盡,進必多於退.若高點在m_1,卑點在m_5,則理俱相反.圖中進退之行必皆易位,而最大之力在m_1仍爲進.故一周中長徑之進亦多於退.又設長徑正交向日之線而其高點在m_7,卑點在m_2.月在m_2m_4之間法力向內而近卑點,則長徑必進而不速,因法力不大也.在m_1 m_2及m_4 m_5之間法力向外而近卑點,則長徑必退,亦不速.在m_8 m_1及m_5 m_6之間法力向外而近高點,則長徑必進,亦不速.在m_6m_8之間法力向內而近高點,則長徑必退.高點法力大於卑點,故一周中長徑之退多於進.若高點在m_3,卑點在m_7,理同.總論之,最高在m_1m_5二點,法力向外,全周中長徑進多於退.在m_3m_7二點,法力向內,退多於進.然月近m_1m_5二點法力大,近m_3m_7二點法力小.又m_2 m_4、m_6 m_8二弧甚小於m_8m_2、m_4m_6二弧.又長徑在全周各方位中有定而不行時,其方位亦較近m_3m_7二點.故一歲中日繞地一周長徑盡歷諸方位.統計其行,進必多於退也.更論切力變長徑方位.設卑點在m_1,月行m_1 m_3象限,切力必令速率損.而月自卑至高,故長徑退行.m_3m_5象限,切力必令速率增,月仍自卑至高,故長徑進行.m_5m_7象限,切力必令速率損,而月自高至卑,故長徑進行.m_7m_1象限,切力必令速率增,月仍自高至卑,故長徑退.是在$m_7m_1m_3$半周長徑恆退,在$m_3m_5m_7$半周長徑恆進.然近高點之切力强於近卑點,故全周中進必多於退.若卑點在m_5則俱相反.在$m_7m_1m_3$半周長徑恆進,在$m_3m_5m_7$半周長徑恆退.而進仍近高點,則全周中亦進多於退.又設卑點在m_3,月行m_1m_3象限,速率損而自高至卑,故長徑進行.m_3m_5象

限,速率增而自卑至高,故長徑進行.m_5m_7象限,速率損而自卑至高,故長徑退行.m_7m_1象限,速率增而自高至卑,故長徑退.是在$m_1m_3m_5$半周恆進,在$m_5m_7m_1$半周恆退.高點在m_7,力更强.故全周中退多於進.若卑點在m_7,理同.總論之,最高在m_1m_5二點進多於退,在m_3m_7二點退多於進,其數略相等而相消也.故日繞地一周,長徑盡歷諸方位.其近朔望點時法力必令進前,近二弦點時法力必令退後.但進速而退遲由(15)之第2式得知進約倍於退,故總計之爲進.切力亦然,而進退之遲速等,故總計之無進退.是一歲中切力不能變法力所生長徑之總差,然逐時能令法力所生差增大,故平均結果卑點任在何處長徑爲進也.

案日行與月同方向.月近高點日近長軸線時,法力使長軸線進行,此進行保持月道與日位之關係.故長軸線之進行更延長,更加增進.若月在卑點日近長軸線時,長軸退行,日行與長軸線行相反.故此時日與月道之關係變易極速,使長軸線之退行較日靜者爲損.同理任在日與月道如何相關情況之時,進量增而退量損.切力使法力所生差增大亦同此理.蓋日行與月同方向,長徑近朔望點其進隨日,故切力之加比日不動更久.長徑近二弦點其退逆日,故切力之加比日不動更暫.夫準法力進本有餘.今因切力加久,而更有餘.退本不足,今因切力加暫,而更不足.是謂以攝動加於攝動.天算家言長徑之動大略若攝動力平方之比,卽長徑之動大部由於攝動平方,理本此也.

上諸條論月道長徑攝動之法最爲繁重.初牛頓用帶徑力推長徑之行,所得較實測數僅得半.後曆算諸家細測詳推,終不能密合,遂謂牛頓攝力之理未足盡憑.格來老始亦云然,既而忽得其解,乃知攝力之理精深神妙,不能改也.案月道長徑順行需3232.575343 日而一周約9年弱（尼生謂爲8.855年）.

§310. 兩心差之攝動　設長軸線過日且卑點在m_1,則由法力在ES線兩測之相稱及前表所列法力之影響,可知月行一周因此力而生兩心差之增損,正在此情況下相等而相消.由切力變正負記號之情形及表列切力之影響,可知其因此力而生者,亦相平衡.故在此情況之下,月行一周,兩心差仍復原不變.同理月在m_5亦然.

如長軸線與m_3m_7方向合,同理法切二力均不能使兩心差生有長久之變動.

設長軸線在此兩位置中間,並爲簡明計,設其與m_2m_6合,卑點在m_2,同時並論卑點在m_6時所生之變異.先論法力之影響.由第二一一圖及第 296 節之表可知卑點在m_2月在m_2m_4境內時,法力令兩心差損,而卑點在m_6時則令增,此二者略相消.但在第 295 節講明一定之法力,影響於兩心差之變於月近高點時較月同樣近卑點時爲大.且N與r成比例〔由(15)之第二式〕,月距愈遠法力愈大.有此二理當月在m_2m_4弧內時,卑點在m_6兩心差之增大於卑點在m_2兩心差之損.二者相併,尤有微小之二次方之殘增(Second order residual increase).此兩心差之殘增以$+\Delta_1 e$表之.同理月在m_4m_6境內時,卑點在m_2及m_6法力對於兩心差之影響,一爲增一爲損,其相併加於兩心差之影響,爲一二次方之殘增$+\Delta_2 e$.同理月在m_6m_8及m_8m_2弧內相併之影響爲$+\Delta_3 e$及$+\Delta_4 e$.

此二次方之殘增是否亦被消盡,則就長軸線與ES線成相對稱之位置卑點在m_8或m_4例論之,知其亦行消滅.當卑點在m_4月在m_2m_4境內時,法力增兩心差.卑點在m_8時,損兩心差.後者之增大於前者之損,因當卑點在m_8時m_2m_4近於高點也,卽日近高點也.所以合併之影響,兩心差有一二次方之殘損.因m_2m_4弧

不僅對日及地球有同樣相與之位置,且對月道亦然,與長軸線在$m_2 m_6$者相若,故知此二次方之殘損爲$-\Delta_1 e$.依同理當月在$m_4 m_6$、$m_6 m_8$及$m_8 m_2$時,卑點在m_4及m_8,兩心差變異之合爲$-\Delta_2 e$、$-\Delta_3 e$及$-\Delta_4 e$.此二次方之殘損與長軸線在m_2 m_6時之殘增相加結果爲零,同樣之討論長軸線任在其他位置得同樣之結果.是每一兩心差之變,必有一同量相反相對之變在對ES線相稱處與之配.故卑點在各線兩方時,法力對兩心差整個影響爲零,亦卽法力在此長期行動不使月道兩心差生永久之變也.同理切力之結果亦然.

月行一周,日非靜止不動也,故所擬之情形不能適合.然藉以明增損之情形,雖時變而得相配,兩心差歷久而復初,亦甚有益也.兩心差變易之周期與日月之周期,日道（卽地道）之兩心差及日月道長軸線之轉動,均有關係.

交點行與交角變相應,長軸線行與兩心差變相應,二者彼此相似.卑點進退行成大弧其較餘歷久而一周,兩心差微增微損以應之,歷久而復初.交點行亦歷久而一周,交角亦增損以應之,歷久而復初.月道交點行甚速,阻交角之變不能積爲長差.而卑點行愈速亦致兩心差雖變而不能積爲長差,蓋月受日及衆行星及地赤道上凸質諸攝動力生諸小變,其變甚速,故不能久積以令橢道率大變,測月道兩心差中數古今同也.

§311. 出差(Evection)　前已證明兩心差雖有周期變異,然歷久而復初,卽因此變異遂使月生有攝動,名曰出差.其最大影響使月之屬地心黃經較未被攝動之橢道約差1度15分（尼生謂爲1度16分27.01秒）.此差能使各地蝕時差6點鐘,較理應之時刻早三點鐘晚三點鐘.依巴谷乃注意及之而發現此差,多祿某更細考之.

根數之攝動與月在軌道之位置及月對日及地相關之位置有關,而兩心差爲尤甚.設卑點在m_1,日月會於m_1點而同行.單就一朔望周之行動而論.由表及第211,212圖可知當月在m_1時兩心差不變.月在m_2、m_3、m_4,則或損或爲零.月在m_5則不變.月在m_6、m_7、m_8,則爲增或爲零.月回至m_1則變動停止.然此係在月行一周中卑點在m_1處停止不動,或長軸線前行同於日行於黃道之速度情況下兩心差之變易.實則日行約8.5倍長軸線轉行之速度.因朔望月約爲29.5日,日行約一日一度,是月行至m_1月已過其卑點約26度$\left(29.5-\frac{29.5}{8.5}\right)$.此必使兩心差增損之情形生變.法力爲負數,在此部分使兩心差增.同時切力爲零,故不生變.迨月過m_1,法力之數值變小,而切力變爲負數使兩心差損.此二力之趨勢使兩心差當月在m_1及m_2間之一點時變易相反而相稱,過此點兩心差乃損.在近m_5同樣之前處,兩心差停止損減而起始增大.起自其他日月及月道卑點相與之方位局勢(Configuration)亦得同樣之結果,故可總之如下:日之攝動於多半朔望周使月道兩心差損,然後乃於同長時期使其增.出差由此兩心差增損及日與長軸線移方位令長軸線進退而生.蓋長軸線進退,則月在本道之方位亦進退,較依橢圓理應佔之位置,差前差後各約1度15分也.此差之周期約爲31.8日.

§312. 告司推算長差之法　前已論過根數有向一方變動而無限止者,例如交點線及長軸線之變皆是也.其變非以平速,因於本變之外尚有許多短期之擺動,其大小足使根數之變動屬於相反之方向.若將所得之結果以字代之立爲算式,則平均本變之前進爲一與時成比之項名曰長差,其與此一致之本變不相同之差爲各項周期差之和.可見長差乃發攝動體及被攝

動體在各相與之可能位置時,因平均攝動力而致之者也.

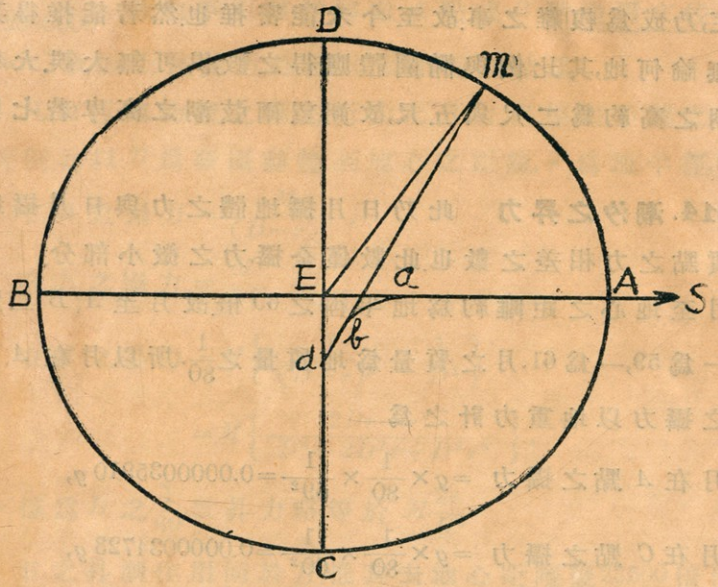
其他根數如交角及兩心差,其變異雖歷久而復,然平均繼續向一方漸變,能歷數千年之久.故亦得謂爲長差,當然亦由一種平均攝動而生.

告司於耶紀1818年,根據上述意見立一算法,多用於推算行星軌道根數之長差.告司先假設各行星之質量鋪佈於其軌道之橢圓周,其在各點之密度與其在該點之行速有反比.然後解明如何推算一圓對他一圓之攝力,及其位置並形狀因此攝力影響之變動率.

告司法經何義爾(G. W. Hill)演爲公式,杜立特爾(E. Doolittle)用之頗獲成效.其得數與來未里亞及牛考卜用不同之法算得者大致相合.

潮汐

§313. 海面因潮汐成長橢圓體(Prolate spheroid) 設第二〇一圖之ADB爲地球大圈上之水面,S不爲日而爲月,m爲水面之任一點,mP顯m點所受攝動力之大小及方向,EN顯月攝地之全力加於E點.mP力加於m必引m向G點,而地之攝力必引m向E.此二力之幷力爲mb,引長之必與DE線相遇,去E無幾.因月之攝動力甚小於地之攝力故也.設於AD象限各點俱作幷力線mb,必恆爲ad小曲線之切線,而海面恆正交mb線,此流質重力理也.故AmD一象限各點依二力而成定面必恆以mb爲曲線半徑,在D點曲率最小,在A點曲率最大,而成一橢圓.E爲中點,da爲漸伸線(Evolute),EA爲半長徑,ED爲半短徑.故海面成長橢圓體,其長徑恆向發攝動體.準月之攝力推之,長短二半徑之較約當得58英寸.準日之攝力推之,長短二半徑之較約當得23英寸.設惟有月力而月不動,地球亦不自轉則海面成橢



第二一三圖

圜體勢甚安穩.既成而定永不變.在A、B點永爲高潮,在去A、B各90度處如D、C二點,永爲低潮.在A、D之水面差約二英尺餘.今此橢圜體剛欲成,水面未定,月已進前,則橢圜體之頂點亦移,刻刻如此.故海面必依此勢成最廣而扁之浪,此浪之頂恆隨月.月有視行,則必感動浪頂與月之諸差相合.凡諸體或以實質相聯或以攝力相聯,中有一體以一定之周時旋行,必感動各體令其各分生一定時之動,其周時俱與原動相應,而其最速最遲時不盡相應.各體有易感者,有不易感者.有一分易感,一分不易感者.故其感動有時不覺,有時可推,有時覺本動更易見.感動中事之最大者卽爲水之潮汐也.潮浪之最高卑行至海岸,卽爲潮之長落.日之攝力亦成如此最廣之浪,浪頂恆隨日之視行,亦與日之諸差相合.日月二浪有時合而相加,有時離而相消.朔望爲二潮之合,兩弦爲二潮之較.但潮之定數因海水深度海岸形勢皆

無一定,乃成爲複雜之事.故至今未能密推也.然若能推得其定面,則無論何地,其比例與橢圓體應得之數,俱可無大誤.大率日月二潮之高約爲二尺與五尺,故朔望兩弦潮之高卑若七與三之比.

§314. 潮汐之昇力 此乃日月攝地體之力與日月攝地面各部質點之力相差之數也.此數僅全攝力之微小部分.

月至地心之距離約爲地半徑之60倍.故月至A、B二點之距離一爲59,一爲61.月之質量爲地質量之$\frac{1}{80}$.所以月在A、C、B三點之攝力以地重力計之爲

$$\text{月在}A\text{點之攝力}=g\times\frac{1}{80}\times\frac{1}{59^2}=0.0000035910\,g,$$

$$\text{月在}C\text{點之攝力}=g\times\frac{1}{80}\times\frac{1}{60^2}=0.0000034723\,g,$$

$$\text{月在}B\text{點之攝力}=g\times\frac{1}{80}\times\frac{1}{61^2}=0.0000033593\,g.$$

故

$$A-C=0.0000001187\,g=\frac{1}{8424000}g,$$

$$C-B=0.0000001130\,g=\frac{1}{8835000}g.$$

此數較確,然普通均以在A或B點處,月之昇潮力約爲月全攝力之$\frac{1}{30}$,即

$$\text{月在}A\text{或}B\text{點之昇潮力}=\frac{1}{30}\times\frac{1}{80}\times\frac{1}{60^2}g=\frac{1}{8640000}g.$$

故物體之重四千噸者,當月在頂上或在脚下時,因此相差之攝動力約減重一磅.在D及C二處或其餘地面上相去A及B各90度之地方,月之攝動力約使該物體增重半磅,因力之方向爲DE及CE也.凡在以A或B爲心,以54度44分爲半徑所畫之圓圈上各點處,該物體既不增重亦不減重,但有一力約爲該體重

之$\frac{1}{12000000}$，沿地平引該體移向A點或B點.達爾文佐治(G. Darwin)欲測上述諸力,終因其太小而無結果.

凡由遠處物體之攝力而生之昇力與相去距離之立方成反比例.如以D爲發攝動體至地心之距離,r爲地半徑,則

$$在A之攝力=\frac{M}{(D-r)^2},$$

$$在E之攝力=\frac{M}{D^2},$$

$$在A之昇力=M\left\{\frac{1}{(D-r)^2}-\frac{1}{D^2}\right\}$$

$$=M\left\{\frac{2Dr-r^2}{D^4-2D^3r+D^2r^2}\right\}.$$

因r僅爲D之$\frac{1}{60}$,故昇力略等於$M\frac{2r}{D^3}$.

日之昇潮作用同於月,惟其去地心距離幾23500倍地半徑,攝力與距離平方成反比,而昇潮力與距離立方成反比,雖日加於地之攝力約爲月攝力之200倍,但其昇潮力僅爲月昇潮力之$\frac{2}{5}$.當日在頂上或脚下時,其攝動力僅使重力約減$\frac{1}{19600000}$.

§315.潮汐之波動理　若地面除數小島備作測量外,全覆以深水,則潮汐波浪將順序繞球推動.達爾文謂若海水深過14英里月潮之潮頂將正在月下,若較淺則在赤道之潮頂點將在月後之90度處,而近兩極處之潮頂仍保持其與月之原關係,中間某緯將有一帶無潮之處水流混亂.實際情形極爲複雜,潮浪幾難以理推.求之實測而各地情境變其現象,測亦不確.

§316.自由波動及强迫波動　若海水忽被擾動(如地震時)繼而聽其自然,則必起有自由波浪(Free wave).如波在地平面內之大小堪比水之深度,其進行之速度將單與深度有關而等於物體降下半海深所具之速度,其公式爲$V=\sqrt{gh}$.故

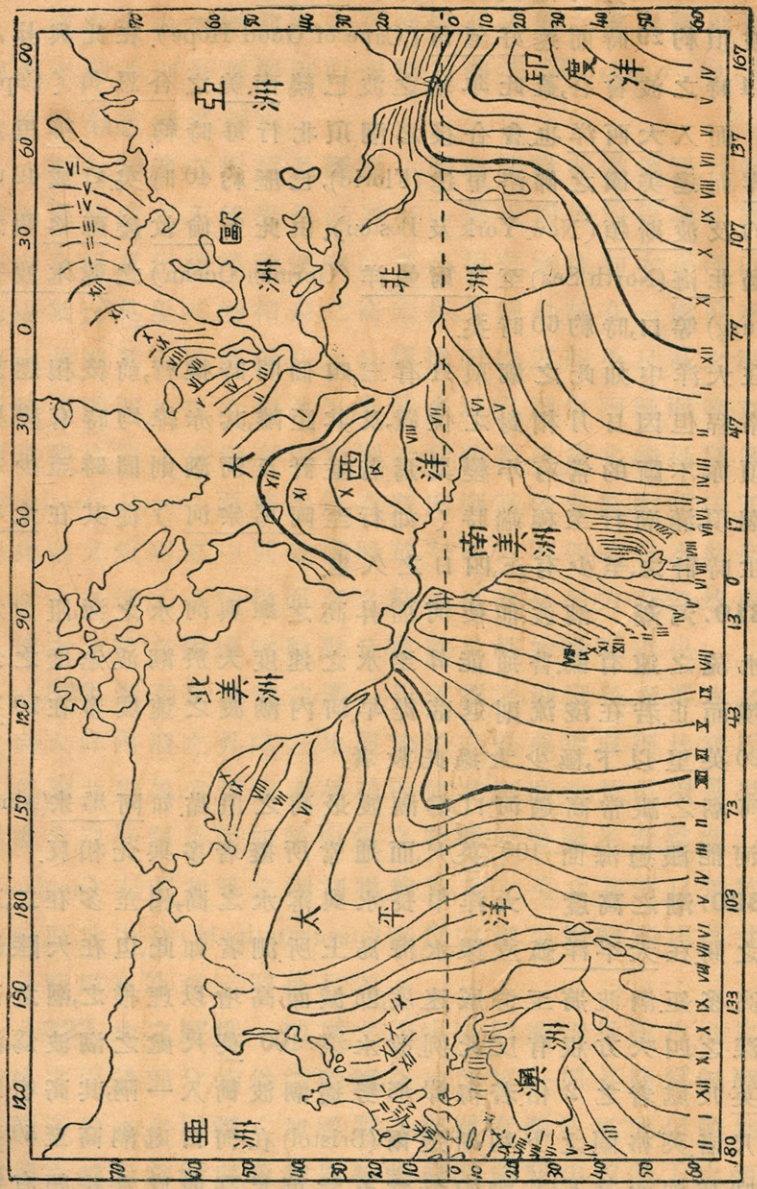
海深 25英尺波之速度爲每時 19英里,
海深 100英尺波之速度爲每時 39英里,
海深 10000英尺波之速度爲每時 388英里,
海深 40000英尺波之速度爲每時 775英里,
海深 67200英尺波之速度爲每時 1000英里,
海深 90000英尺波之速度爲每時 1165英里.

在南美日本等處,觀測地震所起之波浪,得知該國海濱間之太平洋平均深度在$2\frac{1}{2}$至3英里之間.

當月每日橫過美洲大陸行經太平洋上時,必在該洋起一波浪（名曰主浪 Parent wave）.此波一經昇起,其行動幾與地震所起者相同.所以不能恰相同者,因地自轉之速度在赤道約爲每時1050英里,致月西向之相對行動較波浪所得追隨者爲快,而能使波浪少加其速度也.每日月於12時後行經底下相對之處又昇起一第二波浪.如此昇起之波在原點爲强迫波動(Forced oscillation),其繼而行者,則近似自由波動 (Free oscillation).

§317. 同潮時線（Co-tidal lines） 在海洋面上將同時（格林維基時）滿潮之各地聯成曲線,此線名曰同潮時線.如能在地球圖上將格林維基時每間一時之同潮時線繪出,則關於潮波之行動可熟知矣.但在海洋中間之線實無法知其位置,現所知者只在海濱海島之數點而已.

§318. 潮波之行程 由潮波地圖,可查得每日在太平洋南美洲海濱克阿洛(Callao)處,兩次起有主波.此可由同潮時線所成之橢圓眼而知,蓋地勢圖同高線之圓眼示高山頂之所在與此有同理也.此波由該點西北行每時約行 850 英里過太平洋最深之水,約10時而達堪特恰特克阿(Kamtchatka).西及西南方水較淺,波行較緩,每時約行400至600英里,約12時而達紐吉蘭



第一一四圖

德(New Zealand). 乃過澳洲與月在印度洋昇起之波會合.會合後之波頂約29時而達好望角(Cape of Good Hope). 在此與昇起較晚24時之波會合,蓋此年幼之波已繞南美之合恩角（Cape Horn）而入大西洋也.會合後之潮頂北行每時約 700 英里過大西洋而達美國之佛洛里達(Florid), 已歷約40時矣.41或42時至紐約及波斯頓(New York及Boston). 由此至倫敦繞蘇格蘭之北端,過北海(North Sea)至日爾曼洋(German Ocean)之韓木波哥(Hamburg)等口,時約60時矣.

在大洋中如此之潮頂只有三、四個同時推行,前後相逐於一條路程.但因日月相對之位置,及其距離,其赤緯,均時有變異.故潮頂亦不斷的常有小變異焉.若並計及河潮則同時至少有六、七潮頂,滿潮行至極端時（如行至阿馬宗河）從其在太平洋誕生時計之,至少有三、四日之久也.

§**319. 河潮** 潮波能使河面昇高之率與河水之深,阻力之大,及水流之速有關.普通能昇至水之速度大於潮波速度之急流情境而止.若在淺流則退落提早.河內潮波之速度多在10英里或20英里以下,極少大過此數者.

河潮之漲常高過河口處潮波最高之頂點.如阿馬宗(Amazon)河能漲過海面 100 英尺,而通常所擬者多與此相反.

§**320. 潮之高度** 大洋中長水與落水之高,相差多在二、三英尺之間.在太平洋孤立深水海島上所測者如此,但在大陸海岸其高多鉅.潮波將至海底速度,即減而高增.以理推之,潮之高與海深之四次方根有反比例.故水深 100 英尺處之潮波爲深 1600 英尺處者之 2 倍.若海岸形勢逼潮波衝入一隅,其高有至百英尺者.英格蘭之卜利斯透爾(Bristol)在河口處潮高至50英尺,有時使河水高長,其潮頭壁立五、六英尺高,激成水花,頗有害

於航船.而愛爾蘭東岸正與之相對,其潮高差則僅約 2 英尺.

在海洋中水無前進之行動,但在近地之處潮漲則奔騰澎湃而來,潮落則奔騰澎湃而去.斯乃潮流 (Tidal current),其速度不可與潮波速度相混.

§321. 潮波之折反及衝撞　潮波至岸非盡銷毀.若海岸崎嶇水深逾常,尤不能盡行泯滅.有一部折回海內復與新來之潮波會合而互相衝撞,致使潮波之高相差逾恆.如太平洋內小島相隔數百英里,其潮相差之高頗鉅,其例也.故在一處直來之波與由亞洲及南美洲折回之波衝撞而成三四英尺高之潮波,而同時他處則又彼此相銷.又有許多地方潮由兩路而來.如英格蘭及蘇格蘭之東岸,有兩路潮波皆繞蘇格蘭北端過寶佛海峽 (Strait of Dover) 而來.此岸有些處潮高倍常數,而相去不遠之他處則又無潮,其中間各處時於 24 時內有四次長水.此亦因兩路潮波之折反及衝撞而至之結果也.故昇潮力苟忽然中斷,潮不能立止,勢必繼續行動數日或數星期始漸衰退也.

§322. 湖潮及島海之潮　以理推之,湖潮長水落水之潮高差與大洋內潮之昇降之比,同於湖之長與地直徑比.然因風向及氣壓之變異,常致水面搖動而使其潮高逾恆.故須長期觀測,俾能分別眞潮及因他故而生之影響.如美國米奇乾湖 (Lake Michigan) 在芝加哥之潮測得約爲 $1\frac{3}{4}$ 英寸,其海口差約爲 30 分鐘.而地中海 (Mediterranean) 海岸之潮平均約爲 18 英寸高,在其各彎處有高至三四英尺者.

§323. 地之堅度　愷爾文 (Kelvin) 以潮理推論地心之堅度.若地之固體部分皆爲流動體,全地面可一同昇降當無潮波之可測.若地爲半固體 (如膠質),則雖有潮波可測,但較地心爲堅固之體猶爲微弱.蓋膠質物體變形需時,半固體上之短期波

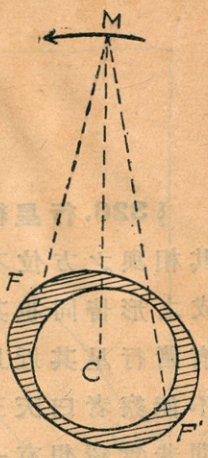
(Waves of short period)可見其至於極量,而長期波因地殼感應外力之遲緩幾全消滅也.實際之潮波確爲多數不同周期（自半日以上）之潮波積合而成.依照强迫震動原理(Principle of forced vibrations),按期而至之力施於海洋面上必感生潮波,其期與之相應.力依期變,潮亦應之而變也.故地上之潮有半日潮、半月潮、半年潮.因月距離及赤緯之變異而有逐月之兩次潮.因日距離及赤緯之變異,而有逐年之兩次潮.又因月交點旋轉而有19年潮,此潮周期太長故不論也.

達爾文依愷爾文之指示,在世界各處考測潮波33年之久.其結果不僅短期波與上理合,長期波亦極與上理合.愷爾文乃斷定地球全體,必如鋼之堅,而或不能堅如玻璃.此與歷來以地心爲熔化物質之學說相反,故引起極大之討論焉.但郝氏(S. S. Hough)研究地球緯度之變異,對於愷爾文之斷定深表同情.

§324. 潮對地球自轉之影響 若潮之行動僅爲海洋質點上下行動二、三英尺,一日兩次,其所費之能力甚屬有限.海洋內之潮誠如此.但近海岸則此微弱之顫動變爲巨體水量之行動,沖來沖去,其磨擦力至大,灣口由以成,岩石由以碎,巨大之物由以行動.此必含有大量之能力耗於轉變爲熱.此大量能力究由何來,大部來自地球之轉動能力乃其答解.故潮之影響乃在減地球自轉之速度,以消費其轉動能力.然與地自轉能力之全量比,百年中因潮阻力而生之損失極爲微小.其影響於日長者,更屬無幾矣（參看月之平速長差）.

縱潮之阻力確欲增日之長,實際日亦未必增長.蓋尚有許多反抗之力也.地熱之放於空間而致體積縮小是其一也.現今之日究比千年前之日較長,抑或較短,尚非吾人所得知,即使有差,亦不能大至$\frac{1}{1000}$秒.

§325. 潮對月球行動之影響　潮不僅因其阻力減小地之自轉能力,並傳該能力之一小部於月球.由第二一五圖可見苟有一潮波其位置如圖所示,能使月之行動微增.潮在F處之隆起加於月之攝力較在F'處之隆起所加者爲大.其差勢在增加月之速度,遂致月道之長徑增大.故潮對月之影響,乃使月背地後退增加月長也.



第二一五圖

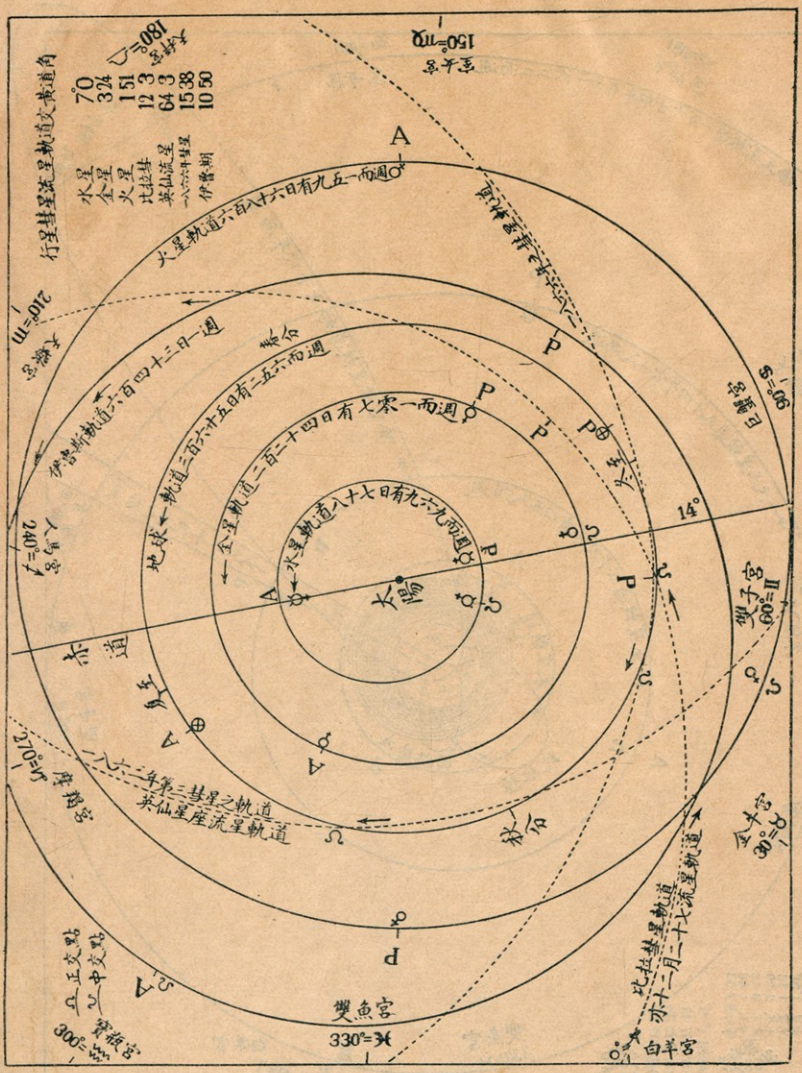
由此潮汐及地月行動之彼此往復之作用,達爾文倡其潮動轉化(Tidal evolution)學說,而謂行星之衞星自千百萬年前,與本星分離後漸向後退,以至現今之距離,正由如此之作用也.西(See)以同樣之作用,解釋雙星軌道之加長.

第二十章

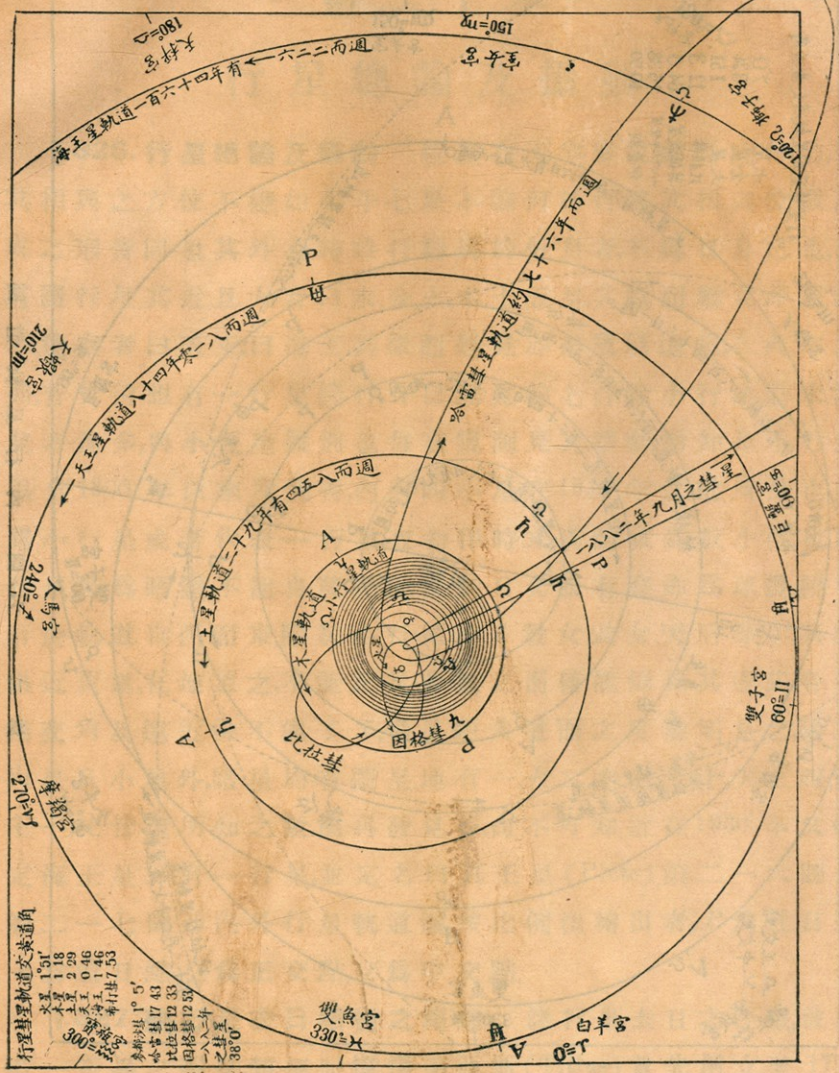
行星總論及攝動

§326. 行星總論及攝動 恆星在天空雖視爲時時行動,但其相與之方位不變.如北斗七星不論何時何處,其相與位置所成之形皆同也.其外有時時行動異於恆星者,不獨日月已也,又有諸行星.其近且大者曰水、金、火、木、土五星,其遠而難見非遠鏡不能察者曰天王、曰海王,其微而難見亦必窺以遠鏡,在火、木之間,昔曾猜想有一行星繞行,今已測見約七百餘小行星,恐未測見者尚多,與小恆星難別也.每夜窺測見其移動,即知是小行星,俱自1800年以來所測得,內有四小星在1844年之前所得也.此諸小行星或者代表一行星,在初作時未成而破爲數小塊也.諸行星皆爲暗體不能自發光,因反射日光而有亮.亦爲球體,繞日行於軌道自西而東.除數小行星外（穀女、武女、天后等）,其道俱近黃道,在地望之,不能正見各道之面,僅能側見其邊.其各面相交角及遠近俱不能了了,惟星距黃道面之度能明見之,除二內星及小星外,諸星均有衞星.地有一、火二、木七、土十、天王四、海王一,此皆現所知之數,能再發見否,尚不可知.近在1930年又確定海王星外有一行星,並定名曰冥王星(Pluto).第二一六圖及第二一七圖乃內外行星軌道圖,按比例法繪出者,P爲近日點,A爲遠日點,☊爲正交點,☋爲中交點.

§327. 諸行星去日相對之距離 諸行星去日之距離,彼此有一奇異之關係,頗便記憶.悌弟亞斯(Titius)首先創立,至1772年,經波得提出,遂皆稱爲波得律(Bode's law).其律先寫一組4,於第二4加3,於第三4加3×2,第四4加3×4,如此遞推.每次



第二一六圖　內行星軌道圖



第二一七圖　外行星軌道圖

將前所加數倍之加於次一位之 4 上.茲算之如下,底行之符號,乃誌各行星者也.

4	4	4	4	4	4	4	4	4
	3	6	12	24	48	96	192	384
4	7	10	16	(28)	52	100	196	388
☿	♀	⊕	♂	①	♃	♄	♅	♆

得數以10除之,卽約爲計以地道半徑之諸星去日之平均距離.而在海王星則數相差太大,此律竟不合用.

此律爲偶合性質,其解釋須俟眞實明瞭太陽系如何創造而成,方能得也.

§328. 周期　行星恆星周期乃其繞日旋轉一周,在日心見其由某一恆星起復回至該恆星所歷之時間也.至其會合周期(Synodic period)同於月之朔望周期,在地見其二次與日會合所歷之時間也,亦曰朔望周.二周期之關係同於恆星月與朔望月,故有

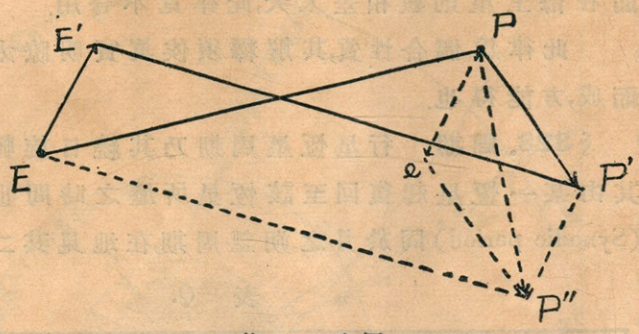
表 Q.

名	號	距離	波得	差	恆星周期	會合周期
水	☿	0.387	0.4	−0.013	88日或 3 月	116 日
金	♀	0.723	0.7	+0.023	224.7日或 7½月	584 日
地球	⊕	1.000	1.0	0.000	365¼日或 1 年	
火	♂	1.523	1.6	−0.077	687日或10½月	780 日
小行星平均數		2.650	2.8	−0.150	3.1年至8.0年	各不同
木	♃	5.202	5.2	+0.002	11.9 年	399 日
土	♄	9.539	10.0	−0.461	29.5 年	378 日
天王	♅	19.183	19.6	−0.417	84.0 年	370 日
海王	♆	30.054	38.8	−8.746	164.8 年	367½日

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{P}-\frac{1}{E},$$

E、P及S乃地及行星之周期及行星之會合周期也.$\frac{1}{P}$及$\frac{1}{E}$間之較只論數不論其正負號.

§329. 視行 過日引一直線與黃道面垂直,在此直線之遠處一點看行星,必見諸行星各在其略近於圓之軌道運行.但若在地上觀之,則其視行乃由行星繞日之眞行合其因地行動而見之視行相併而成.凡一物體對地之行動恆若該體之本行合另一行動.此另一行動同於地球行動而方向相反,此謂之爲相對行動定律(Law of relative motion).

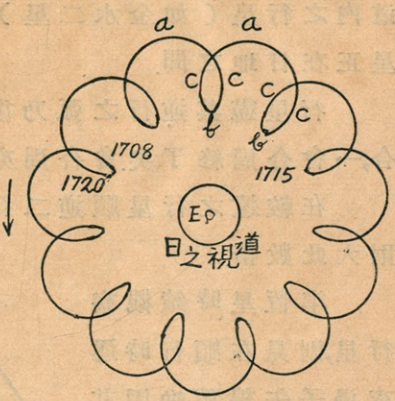


第二一八圖

此律之證明頗易.如二一八圖以E爲地球,P爲行星,其方向及距離如EP.設E之行動於單位時間行至E'.P之行動於同時行至P'.故在單位時間之末由E至P之距離及方向爲$E'P'$.如以E爲不動,而予P一行動Pe等於EE',但與其方向相反.作二行動四邊形,合併Pe於PP',則得P''爲P於單位時間末所至處.因EP''與$E'P'$平行且相等,由E處見P''點在天球所佔之位置同於在E'所見P'之位置,蓋平行線皆穿天球於一點也.

故若地球行於圓道,凡靜物皆視若行於與地道同大之圓道,但在其圓道內恆保持其位置,致其行動正與地球眞行動相反.

§330. 天空行星之屬地心行動　行星之屬地心行動,乃以地爲定心之行動也.故由二項行動而成,卽行星一年繞地道同大之圓圈一周,同時圓心本身復繞日行於行星眞軌道歷行星之周期而一周.改言之,行星去地之距離及相對之方向皆爲地球不動行星本身行於複雜情況之軌道所應有者.故此行星之相對軌道,卽行星之屬地心軌道,乃一帶圜耳之曲線(Looped curve).若行星眞軌道爲一正圓,則其相對軌道卽爲一外擺線(Epicycloid).但因行星道爲橢圓,故圜耳之大小及彼此相距皆不一致.例如木星每周有11個圜耳.其小圈之直徑爲大圈直徑之$\frac{1}{5}$,因木道徑約5倍地道徑也.小圈心行於大圈周,木星行於小圈周.第二一九圖乃卡西尼所推木星由1708年至1720年之屬地心行動也.



第二一九圖

§331. 行星在天球上之視行　地上視日月之行略有遲速,由於軌道之爲橢圓也.行星則大異於日月,因前述之繞圜耳行動,故有順行(Direct motion)逆行(Retrograde motion).順行由速而遲而留(Stationary)而逆行.逆行亦由速而遲而留而復順行.總計之順行多於逆行,順逆二行之較爲星東行之度.試自日在地與一行星間之時起,此時稱曰上合(Superior conjunction),因行星在日之上也.此時行星去地較遠(如第二一九圖屬地心軌道內之a點),東行於恆星間時時增進其黃赤經度,繼乃漸遲而至於留.第二一九圖之c點,均留點也.此點去日之偏角(Elongation)隨行星道與地道大小之比而異

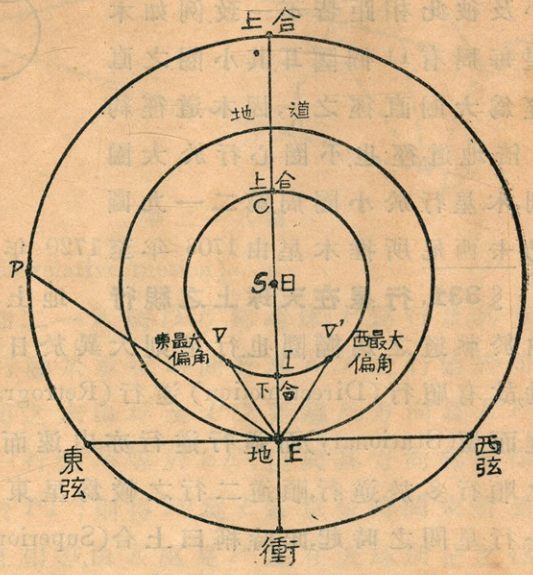
自此點乃反向西行.行星行至西行之弧之中點時,正地行星及日三者同在一直線上,而地與行星且同在日之一邊之時也.第二一九圖屬地心軌道之 b 點,卽逆行之弧之中點也.此乃圜耳之端,行星在此去地最近.在地道外之行星正與日隔地處於天空之相對地位,如望時之月然,稱曰相衝(In opposition).在地道內之行星（如金水二星）稱曰下合 (Inferior conjunction),行星正在日地之間.

行星盡其逆行之弧乃復留,後乃轉而復東行直至復至上合,一會合周終了矣.會合周亦曰太陽周.

在較遠之行星順逆二行之較小,自 3 度以至 10 度,在近星則大此數倍.

準恆星時鐘觀察行星,則見在順行時逐夜過子午線稍晚,因其赤經正在增進也.在逆行時逐日稍早.

第二二〇圖解明衝、合、弦、偏角等名詞最爲清晰.E 爲地之位置,其內一圈爲一內行星之軌道,外一圈爲一外行星之軌道.PES 角乃由地引一直線至日及



第二二〇圖

引一直線至行星二線在地處所作之角,卽爲行星在該時去日之偏角(Elongation).在外行星偏角之值,由 0 度以至 180 度.在內行星則不能超過一最大值,而此最大值,則隨行星軌道之直徑

而異.

若行星軌道正在地道面內,則行星恆在黃道.實際行星去黃道圈約4度或5度,水星有時相去8度.故行星在恆星間之路跡成有圜結(Loops and kinks).

行星軌道既斜交黃道於二點.地在黃道面內,交角亦在黃道面內,故星在交點必無視差.欲知星過交點時,取相連二日,一在黃道南,一在黃道北,各測其緯度,用比例推之即得.屢推之,凡星二次過中交或正交中間之積時恆等,無論順逆遲速皆然.然則星之行皆有定法,我見其忽順忽逆忽留若無定法者,因我所居之地不在星道之心,而地又行於本道生視差故也.蓋諸行星道皆以日爲心,故若於日面觀之,必見其行有定法,而無順逆留諸變矣.

§332. 行星對日在天空位置之行動　行星之能見與否,多半視其離日之角距離(即偏角)而定.因離日近時行星將僅於白晝在地平上,常不能見也.由此點論行星之行動,內外行星大有不同.

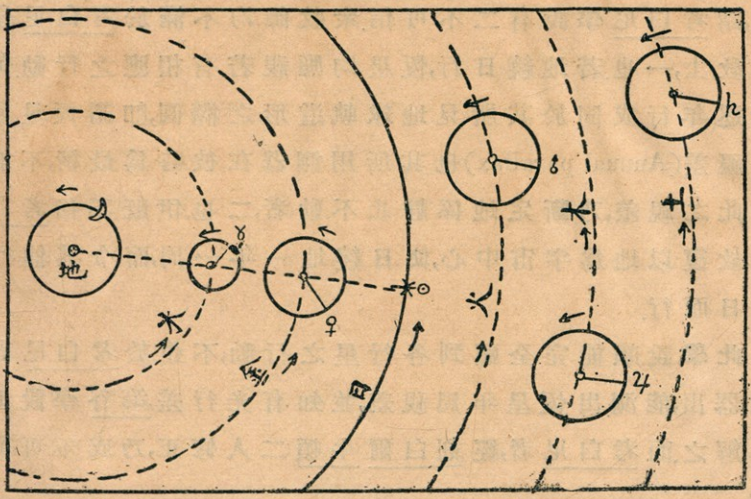
外行星者地道外之行星也.恆向日西走去,不斷的增其西偏角或減其東偏角.故依太陽時觀察之,恆見其逐夜早過子午線.試行星自上合日起,以最大速度東行於恆星間,然仍不及日速,故在日西繼竟至日西90度,是爲西弦,乃於日出時中天.至會合周之半則已去日180度,正在日落時與日對衝矣.此時距地最近,光度最強且每日中天相差之時間亦最大.在火星則能差至6分鐘(即較前一日早6分鐘中天).過衝日後則逐夜於日落時居天較高,如此直至東弦則已在日東90度,故在日落時中天.自此以後逐漸西去而漸近於日,以至會合周終了,而復與日合.凡外行星在合點後若干時爲晨見於日出前現於東方也.

將到衝點前若干時爲昏見於日落後現於東方也.

內行星者,地道內之行星也.如偕日東西擺行,離日之度有定界,或行於日東,或行於日西,而東西之距離相等,其東西行之距離雖等而西行較速,其理可由第二二〇圖解明之.此事一若地球不動,星於一會合周時繞日一周者然.其由最大偏角點 V 經下合日 l 而至 V' 之距離較由 V' 經上合日 C 而至 V 者爲小,故其所行之時較短也.內行星卽金水二星.在日東時則日入後見於西方名昏見,在日西時則日出前見於東方名晨見.離日最遠水星不過29度,而金星約47度.其在日東最遠時與日同速,既而留,而逆行,初遲後速與日漸近而伏.伏時或見其過日面如一黑圜斑,此必行星過交點線而地球亦在交點線乃有之,與日月會理同.伏若干日而復見在日西,仍逆行,初速後遲,遲極復留而順行,復離日最遠而與日同速,既而速漸增追及於日而又伏,伏數日復見在日東焉.順逆伏留之時有增損.伏時星在日地間爲下合,日在星地間爲上合.

§333. 多祿某之太陽系行動學說 古天文家以地爲靜且在宇宙中心.因此假定及天每日之轉動,多祿某約於耶紀140年在亞力山德里亞創一學說,風行一千四百年之久.其說謂行星之視行可設其各行於次輪(Epicycle).次輪心名曰假星(Fictitious planet).行於較大之輪名曰本輪(Deferent).眞星一若在曲臂(Crank arm)一端繞假星而轉,其行動於每周二次日地星行至一直線時其曲臂一者指地,一者背地.

在外行星每年繞行次輪一周,故曲臂恆與日地聯線平行而繞行本輪一周之時間,卽今所謂之行星周期.第二二一圖卽表示多祿某學說,惟其尺寸之大小隨意爲之,並未依照比例.由圖可見火木土三星次輪之曲臂皆恆與日地聯線平行,而金水



第二二一圖

二星則不然.多祿某假定此二星之本輪在日地之間,其假星繞行本輪一年一周恆保持其居於日地之間.在此例,其在次輪上之行動周期,卽今之行星周期也.金水二星之本輪實卽日道,古埃及人曾已言及,多祿某何尙不覺.

迨後知行星行動之不盡合,乃又改設地不在本輪中心,假星亦不在次輪中心.亞拉伯人復於次輪上再加次輪以求合於行星行動,乃益複雜矣.

§334. 考白尼之太陽系行動學說　考白尼(耶紀後 1473－1543)確定地球逐日繞軸自轉,乃解明恆星之日周視行.復證明凡行星之已知行動,均可假定行星繞日行於心稍偏之圓道而算求之.地亦爲行星之一.此學說頗近於今所公認者.然考白尼亦曾因行動之不盡合,留有小次輪以計其差.

彼時無敢議軌道爲圓形之非者,又60年後刻白爾出,始證明行星軌道皆爲橢圓形,而成爲現今之太陽系形勢.

§335. 第谷之太陽系行動學說　第谷生於考白尼刻白爾

之間,謂考白尼學說有二不可信.衆牧師均不滿於考白尼學說,伊乃教士,一也.若地繞日行,恆星均應視若有相應之行動.每一星應逐年行成同於其所見地球軌道形之橢圓,卽謂恆星應有年周視差(Annual parallax)也.其所用測器在彼時爲最精,不能測出如此之視差,乃斷定地係靜止不動者,二也.伊旣不信考白尼學說,故復以地爲宇宙中心,使日繞地一年一周,而令其他行星皆繞日而行.

此學說頗能完全顧到各行星之行動,不亞於考白尼者;惟新測器出,能測出恆星年周視差,並知有光行差,第谷學說乃不足以解之.而考白尼者,經刻白爾牛頓二人修正,乃成不可破之學說.

§336. 行星軌道之根數 欲推算行星軌道,須知行星根數.有根數卽可繪出軌道眞形,得以推求星在某時所佔軌道內之位置,惟其位置須受日攝力之支配方可,常用之根數有七.

(一)半長徑 a.

(二)兩心差 e.

(三)交黃道斜角 i.

(四)正交點黃經度 Ω.

(五)自交點量起卑點之黃經度 w,或卑點黃經度 π.

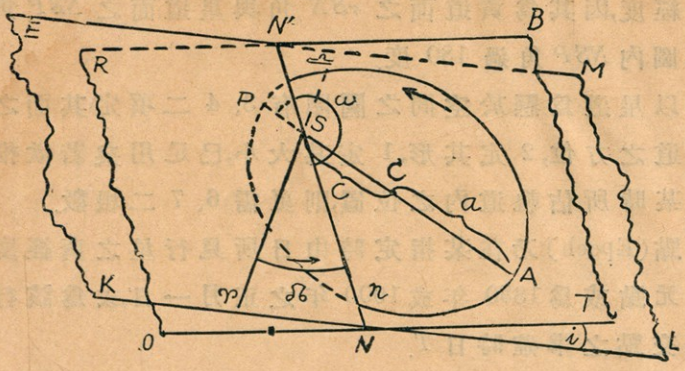
(六)元點（時之起點）E 或過卑點時 T.

(七)周期 P,或每日行動 n.

前五項關於軌道本身,以道爲橢圓,日在焦點之一.後二項乃定星在軌道內之位置所必需者.

如第二二二圖 CA 爲半長徑,定軌道之大小者.或以天文單位（日地平均距離）計,或以里數計.

兩心差,定道之形狀者,乃以半長徑除日至軌道中心之距



第二二二圖

離所得之數也.有時用 ϕ 角之正弦表之,入算時用其角數值者 $(\phi = sin^{-1}e)$.

i 乃軌道面與地道面間之斜角.圖中 $EKLM$ 爲黃道面,KNO 角卽 i 角也.如以行星之行動方向同於地球者爲進行,相反者爲退行,則斜角入算者,恆小於 90 度.若皆視爲進行,則斜角之值可由 0 度以至 180 度,如此則可避去用公式內之雙符號(見二體算題之 c 段).

正交點 Ω,定軌道面之視向者,乃星由南向北過黃道面時,其位置自日投射於黃道上之陰影點也.其經度自春分點計,圖內 NN' 線,卽地道面與星道面之交線.Sr 爲由日引至春分點之直線.γSN 卽正交點經度也.星依矢所指之方向行 $ORBT$ 面,由黃道面之底行過黃道面之上,穿黃道面於 n 點,自日視之一若在 N 點也.交點及斜角二者可定星道面在空間之位置.

沿星在軌道內之行向由正交點至卑點之距離爲 w,乃定星道在星道面內之方位者也.卑點黃經度之以 ϖ 表顯而由下式算得之者.

$$\varpi = \Omega + w.$$

實非黃經度,因其爲黃道面之 γSN 角與星道面之 NSP 角之和也.在本圖內 NSP 角過 180 度.

若以星道爲懸於空間之圜圈有 3、4 二項定其面之位置,5 定軌道之方位,2 定其形,1 定其大小,已足用矣.若欲推定星於後來某時所佔軌道內之位置,則更需 6、7 二根數.

元點(Epoch)乃在某指定時由日所見行星之黃經度也.近時所用元點或爲1850 年或1900 年之正月一日,或爲該行星過卑點或交點之準確時日 T.

周期 P 乃行星之恆星周期也.n 乃行星每日之平均行動.

若無行星互相攝引而生之攝動,則此等根數將永不變異,可用以推算行星在已往或將來任何時日之位置,但除 a 及 P 外均因攝動而變.故行星根數表內有冠以 $\Delta\Omega$、Δi、$\Delta\pi$ 及 Δe 字者四行乃 Ω、i、π 及 e 於百年中之變數也.

若刻白爾律爲的確,則 a 及 P 二者知一,即可.因能利用該律（地周期）$^2 : P^2 = 1 : a^3$ 即 $P = a^{\frac{3}{2}}$ 公式由已知之一求其所不知者.其 P 以年計,a 以天文單位計.但該律與實際微有不合,其修正之式爲

$$P_1^2(1+m_1) : P_2^2(1+m_2) = a_1^3 : a_2^3,$$

故二者均須預知也.

§337. 屬地心位置(Geocentric place)　吾人觀測行星位置當然以地心爲計算之原點.觀測所得者,改正蒙氣差視差後爲自地心所見之赤經緯,由此可變爲自地心所見之黃經緯.

§338. 觀測之間求法　有時吾人所欲知之位置適當不能直接測視之時,可於該時前後連作一組觀測而用間求法,以定在該時之位置,其結果比一次觀測所得者尤爲準確.

設欲知火星在六月三日上午八時之赤經,乃於六月一日

下午十時,六月二日九時五十五分,三日九時五十分,四日九時四十五分,餘類推,觀測星之所在.以觀測時刻爲橫座標線作時之尺度,以赤經爲縱線,在相當之觀測時刻處,立縱線等於各該時所測得之赤經.以曲線聯縱線之上端,則與指定時刻相當之赤經,可由曲線上直接得之.赤緯亦可如此間求.此乃繪圖法也若算求之,當更精確.

§339. 屬日心位置(Heliocentric place)　行星之屬日心位置,乃在日心所見星之位置也.若知星道之交點黃經度及其斜角,並其去日之距離,可用三角法由屬地心位置,推求屬日心位置.

§340. 屬日心位置與屬地心位置之推算

(一)屬日心位置之黃道座標數值.

茲將本節所用行星屬地心位置,及屬日心位置之極點座標黃道經緯記號列下:

	地心爲原點	日心爲原點	
黃經	l	L	由春分點向東量計.
黃緯	b	B	黃道北爲＋,南爲－.
赤經	a	A	由春分點向東量計.
赤緯	d	D	赤道北爲＋,南爲－.
距離	ρ	r	

既得屬日心位置之極點座標數值,即可依下式求矩形座標數值.此座標以 x 軸線之正數末端指卑點,y 軸線在軌道面內.

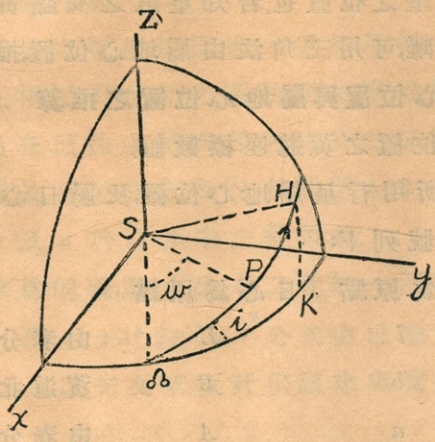
$$\left.\begin{aligned} x_0 &= r\cos v, \\ y_0 &= r\sin v, \\ z_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1)$$

v 乃行星所在去卑點之度數也.若將 x 軸線向後移至交點線,

則新座標數值爲

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(v+w) = r\cos(v+\pi-\Omega), \\ y &= r\sin(v+w) = r\sin(v+\pi-\Omega), \\ z &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

星在軌道內由正交點計起之經度,稱曰黃緯交點距(Argument of the latitude) 以 u 記之.其數值由 $u=v+w$ 求之.故若知 u, 則 v 可得矣.



第 二 二 三 圖

設 S 爲日（第二二三圖）, Sxy 爲黃道平面, $S\Omega H$ 爲星道平面, Ω 爲正交點, P 爲卑點, H 爲行星投於天球上之位置, PSH 角 $=v$, 所以 $\Omega H = w+v = u$.

若仍以日心爲原點,而改以 x 軸線合於交點線, y 軸線在黃道面內,則星之新座標數值爲

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cos(v+w) = r\cos u, \\ y' &= r\sin(v+w)\cos i = r\sin u\cos i, \\ z' &= r\sin(v+w)\sin i = r\sin u\sin i. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3)$$

若用屬日心黃經緯度推算則有下式:

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cos B\cos(L-\Omega),\\ y' &= r\cos B\sin(L-\Omega),\\ z' &= r\sin B. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

比較(3),(4)二式,則得

$$\left.\begin{aligned} \cos B\cos(L-\Omega) &= \cos u,\\ \cos B\sin(L-\Omega) &= \sin u\cos i,\\ \sin B &= \sin u\sin i. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

由是而得

$$\left.\begin{aligned} \tan(L-\Omega) &= \tan u\cos i,\\ \tan B &= \tan i\sin(L-\Omega). \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(6)$$

(因 $\cos B$ 恆爲正數,故若知 Ω、i、u, 則屬日心黃經緯 L 及 B 可由5),(6)二式推求之.

(二)若將原點移至地心,而以 X、Y、Z 爲日心對新軸線之屬地心座標數值,以 x 軸線指春分點,y 軸線在黃道面內,並以 R、G、I 爲日心之屬地心距離及屬地心黃經緯(此三數可由天文年曆按日檢查),則日心之屬地心矩形座標數值可用下式推算之:

$$\left.\begin{aligned} X &= R\cos I\cos G,\\ Y &= R\cos I\sin G,\\ Z &= R\sin I. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(7)$$

G 角恆小於1秒之弧,若非求極確之數,則(7)式可作爲

$$\left.\begin{aligned} X &= R\cos G,\\ Y &= R\sin G,\\ Z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

設以 x^+、y^+、z^+ 爲星之屬地心座標數值, x''、y''、z'' 爲其屬

日心座標數值，x 軸線正指春分點，y 軸線在黃道面內，則

$$\left.\begin{aligned} x^{+} &= x'' + X, \\ y^{+} &= y'' + Y, \\ z^{+} &= z'' + Z. \end{aligned}\right\}$$

在極點座標則此式爲

$$\left.\begin{aligned} \rho \cos b \cos l &= r \cos B \cos L + R \cos I \cos G, \\ \rho \cos b \sin l &= r \cos B \sin L + R \cos I \sin G, \\ \rho \sin b &= r \sin B + R \sin I. \end{aligned}\right\}$$

l 及 b 可由此三式推算．如以 $\cos G$ 乘其第一式，以 $\sin G$ 乘其第二式，而加之；再以 $-\sin G$ 乘其第一式，以 $\cos G$ 乘其第二式，而加之則得下之三式較便於用．

$$\left.\begin{aligned} \rho \cos b \cos (l-G) &= r \cos B \cos (L-G) + R \cos I, \\ \rho \cos b \sin (l-G) &= r \cos B \sin (L-G), \\ \rho \sin b &= r \sin B + R \sin I. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(8)$$

星之屬地心距離及黃經緯 (ρ, l, b) 均可用此式推之．

(三)變爲屬地心之赤道座標數值．

設以 ε 爲黃赤斜角，x^{+}、y^{+}、z^{+} 乃星之屬地心黃道座標數值，其 x 軸線正指春分點，y 軸線在黃道面內．如欲變至赤道座標，祇將黃道座標繞 x 軸線退轉 ε 角即得而 y 軸線落在赤道面內矣．故二座標數值之關係爲

$$\left.\begin{aligned} x^{++} &= x^{+}, \\ y^{++} &= y^{+} \cos \varepsilon - z^{+} \sin \varepsilon, \\ z^{++} &= y^{+} \sin \varepsilon + z^{+} \cos \varepsilon. \end{aligned}\right\}$$

在極點座標則爲

$$\left.\begin{aligned} \cos d \cos a &= \cos b \cos l, \\ \cos d \sin a &= \cos b \sin l \cos \varepsilon - \sin b \sin \varepsilon, \\ \sin d &= \cos b \sin l \sin \varepsilon + \sin b \cos \varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(9)$$

爲便於解算此式,另立二輔數 n 及 N,其與 l 及 b 之關係爲

$$\left.\begin{aligned} n\sin N &= \sin b, \\ n\cos N &= \cos b \sin l. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (10)$$

n 爲正數.有此二數(9)乃變爲

$$\left.\begin{aligned} \cos d \cos a &= \cos b \cos l, \\ \cos d \sin a &= n\cos(N+\varepsilon), \\ \sin d &= n\sin(N+\varepsilon). \end{aligned}\right\}$$

由是而有

$$\left.\begin{aligned} n\sin N &= \sin b, \\ n\cos N &= \cos b \sin l, \\ \tan a &= \frac{\cos(N+\varepsilon)\tan l}{\cos N}, \\ \tan d &= \tan(N+\varepsilon)\sin a. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (11)$$

用此式及(9)之第一式由 l 及 b 求 a 及 d 毫無猶疑而(9)之第一式,且能定 a 所在之象限.

若知 a 及 d 而求 l 及 b,只須於式內以 a 及 d 與 l 及 b 對調,並改 ε 爲 $-\varepsilon$,則(11)變爲

$$\left.\begin{aligned} m\sin M &= \sin d, \\ m\cos M &= \cos d \sin a, \\ \tan l &= \frac{\cos(M-\varepsilon)\tan a}{\cos M}, \\ \tan b &= \tan(M-\varepsilon)\sin l. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (12)$$

m 及 M 乃新立之輔數也.

(四)直接推算屬地心赤道座標數值.

屬地心赤道座標數值 a 及 d 可直接由 i、Ω 及 u 三根數推求之,無須先求黃道座標之 l 及 b.

以 x 軸線指交點，y 軸線在黃道面內，則屬日心座標數值由下式推之：

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cos u, \\ y' &= r\sin u\cos i, \\ z' &= r\sin u\sin i. \end{aligned}\right\}$$

若將座標繞 z 軸線轉移使 x 軸線正指春分點，則座標數值爲

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x'\cos\Omega - y'\sin\Omega, \\ y'' &= x'\sin\Omega + y'\cos\Omega, \\ z'' &= z'. \end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x'' &= r(\cos u\cos\Omega - \sin u\cos i\sin\Omega), \\ y'' &= r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos i\cos\Omega), \\ z'' &= r\sin u\sin i. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(13)$$

若再就此將座標繞 x 軸線轉過 $-\varepsilon$ 使 y 軸線在赤道面內，則座標數值爲

$$\left.\begin{aligned} x''' &= x'', \\ y''' &= y''\cos\varepsilon - z''\sin\varepsilon, \\ z''' &= y''\sin\varepsilon + z''\cos\varepsilon. \end{aligned}\right\}$$

或在極座標則爲

$$\left.\begin{aligned} x''' &= r\ (\cos u\cos\Omega - \sin u\cos i\sin\Omega), \\ y''' &= r\{(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos i\cos\Omega)\cos\varepsilon \\ &\qquad - \sin u\sin i\sin\varepsilon\}, \\ z''' &= r\{(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos i\cos\Omega)\sin\varepsilon \\ &\qquad + \sin u\sin i\cos\varepsilon\}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

<u>告司</u>爲便於推算乃立六個輔數，茲以 Q、q、S、s、T、t 六字母代之，其與根數之關係如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\sin q \sin Q = \cos \Omega, \\
&\sin q \cos Q = -\sin \Omega \cos i, \qquad [\sin q > 0], \\
&\sin s \sin S = \sin \Omega \cos \varepsilon, \qquad [\sin s > 0], \\
&\sin s \cos S = \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon, \\
&\sin t \sin T = \sin \Omega \sin \varepsilon, \qquad [\sin t > 0], \\
&\sin t \cos T = \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon.
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(15)$$

此六數祇與根數有關,故在每一星道僅須推算一次,尤利於推算座標數值供年曆之用.以此數代入(14),則屬日心座標數值之公式變爲

$$\left.\begin{aligned}
x''' &= r \sin q \sin(Q+u), \\
y''' &= r \sin s \sin(S+u), \\
Z''' &= r \sin t \sin(T+u).
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(16)$$

x'''、y'''、z'''可由此推算之.

最後屬地心赤道座標數值,由下式推定:

$$\left.\begin{aligned}
\rho \cos d \cos a &= x''' + X', \\
\rho \cos d \sin a &= y''' + Y', \\
\rho \sin d &= z''' + Z'.
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(17)$$

X'、Y'、Z'乃日之屬地心赤道矩形座標數值,可由天文年曆按日查獲,故由(17)式可推定ρ、a、d也.

行星之屬日心及屬地心座標數值相互之推定,無論用赤道或黃道標線法,其理盡於此矣.

§341. 周期之測定　第一法測星之過交點時.

星當行過交點時正在黃道面內,地亦在黃道面內,故無論地在軌道何處,星之屬地心及屬日心黃緯均爲零(除在交點外,星之視緯度均不能與地之位置無關而隨去地之距離同變).若測星相連二次過一交點,其相隔之時間卽星之周期也.若交點

不動,此爲確數.若交點非絕對的靜止,則此爲概數.然此法有二難:(1)在天王星周期爲84年,海王星爲 164 年,爲期過長不便等候;(2)星道斜交黃道角度均極小,星在交點左右時,其黃緯度約有數日爲零,頗難定其正爲零度時之準確時刻,且緯度有小差影響於得數則甚大.

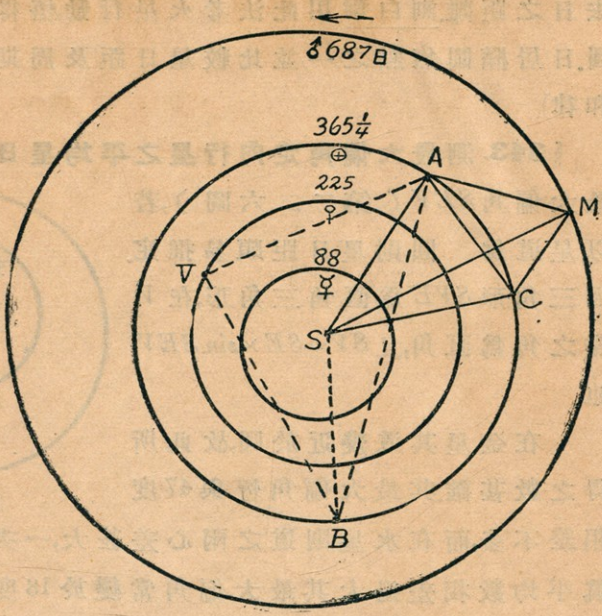
第二法測星之會合周期.

會合周期乃星相連二次衝日或合日相隔之時期也.衝日時星之黃經與日差 180 度.但此日星相離之角頗難測準,須於衝日之前後相連數日用子午儀測星之赤經緯變爲黃經緯.測星須於夜半而測日須於正午,故須由日之測得經度求其在測星時之經度,而取各測星時日星經度之較.由此諸較數乃求日星黃經差 180 度時（卽衝日之時）之眞確時刻.若所測甚準,所得時刻之差不出數秒.然星道非正圓,相連二次之觀測所得之時間非平均會合周期,僅爲其概數.然可由相隔多年之衝日時期除以會合周期之次數,如此得數與概數相比,卽能得較確之平均會合周期.若兩次衝日所在年內之時大約相同（如前次在某月某日而後次亦約在該月該日）則得數尤確.既得會合周期,乃由下式推恆星周期,

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{E}-\frac{1}{S}.$$

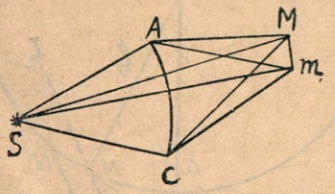
§342.求星之去日距離（以地日距離爲單位） 既知星之恆星周期,則其去日距離可於相隔等於星之恆星周期之時間,兩次觀測星之偏角以求之.星之偏角乃星與日二屬地心黃經度之較也.對日星作一組子午儀觀測,可供給觀測期內任何時之日星經度較.例如求火星去日之距離,須於相隔 687 日之時期作兩次觀測.設在第一測時地在 A 點（第二二四圖）星

在M點,則在第二測時地必在C點.由A至C之角度ASC乃地於$43\frac{1}{2}$日所行之弧距.因地再至A正足二年,至C祇行687日尙有$43\frac{1}{2}$日也.地至C時星正行一恆星周復至M點.SCM及SAM角,卽星離日之偏角,能直接測得之.SC及SA乃地在兩次



第二二四圖

測時之去日距離,亦爲已知之數.故可解算四邊形而得SM之長及ASM之角.此角能定星在M點之屬日心黃經度,因知地在測時之黃經也.



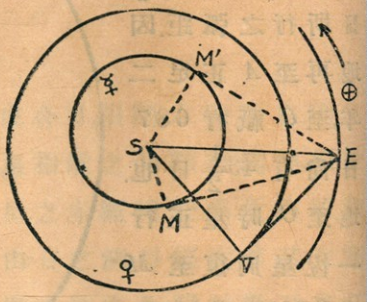
第二二五圖

欲使此法準確,須於M與A、S、C在同一平面時測之.卽於星至交點時作觀測是也.苟不如此則測時之距離非眞星日距,乃星日距之投射於黃道面者.卽由日至m點之距離,m點乃由M引一線垂於黃道面交該面之點也.既測得Am及mAM角(星之屬地心黃緯度)卽能推算Mm.再由Sm及Mm推算眞星日距SM及星之屬日心黃緯MSm.

如此繞星道作一組成對之觀測,當然能定星在軌道各部

去日之距離.刻白爾用此法考火星行動,悟得行星軌道皆爲橢圓.日居橢圓焦點之一,並比較星日距及周期創立其第三律(調和律).

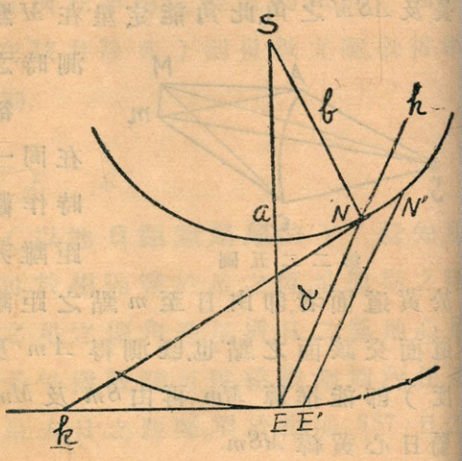
§343. 測最大偏角定內行星之平均星日距 在地測金星最大偏角SEV（第二二六圖）,若以星道爲圓,則星日距頗易推定.因三角形SVE爲直角三角形,在V點之角爲直角,且$SV=SE\times\sin SEV$也.



第二二六圖

在金星其道幾近於圓,故此所得之數甚確.其最大偏角恆與47度相差不多,而在水星則道之兩心差甚大,一次觀測之得數或與眞平均數相差過大.其最大偏角常變於18度至28度之間,故須多次觀測之而取其中數.

§344. 求金水二星之留點 既得金、水、地球三道之平均半徑,設軌道爲正圓推得三道里數,各以一周之時約之,得一時中水星約行十萬九千三百六十英里,金星約行八萬英里,而地球約行六萬八千四十英里.故星在下合日左右時星地之行方向同而星速於地,從地視之,見星行之方向與日視行逆,故爲逆行.在上合日左右時星地之行方向逆,而從地視之見星



第二二七圖

行之方向與日視行順更速於日,故爲順行.二留點不在離日最遠二點,而在二點與下合點之間.又如第二二七圖 EE' 爲地道上之微弧,NN' 爲星道上之微弧.若二微弧與二速率比恰令地過 EE' 星過 NN',其距線 NE 至 $N'E'$ 方向不變.則地視星或背地上行或向地下行,而不見有順逆行,故曰留也.若離日最遠時,則見其與日同速而爲順行矣.欲推留點所在,引長 NN' 及 EE' 爲 N、E 二點之切線,會於 k 點,任引長 EN 至 h.NE 與 $N'E'$ 平行,則準平三角例 NN' 與 EE' 比若 Nk 與 kE 比.命星地之二速率爲 v、u,則 NN' 與 EE' 比若 v 與 u 比.故 v 與 u 比若 Nk 與 kE 比,亦若 NEk 與 kNE 二角之正弦比,亦若 SEN 與 SNh 二角之餘弦比.蓋因 SNk 及 SEk 俱爲直角故也.亦若 SEN 角餘弦與 SEN 及 ESN 二角和之餘弦比.又命星地二道之半徑爲 b、a,則 b 與 a 比若 SEN 角之正弦與 SEN 及 ESN 二角和之正弦比.而 SEN 及 ESN 二角可推,一爲行星留時離日之偏角,一爲日視行星與地二黃經度之較角也.然星地二道俱非平圜,故推算更繁,今不詳論,而著其已推得之數.水星之留點偏角最小約15度,最大約20度.金星恆在29度左右.其逆行水星約22日,金星約42日,此皆見於侯失勒天文學之數也.

以上所論係以軌道爲正圜,星地均在一平面內,其理並不限金水二星之於地球,故二行星之相與位置合於下式之情況均能彼此見留.

$$u\cos SEN = v\cos SNh = -v\cos SNE \quad \cdots\cdots(1)$$

在留時兩星帶徑間之角及一星在其間退行之時數,亦可求之如下.投射 SN、NE 於 SE 上,則有

$$a = b\cos ESN + d\cos SEN,$$

同理

$$b = a\cos ESN + d\cos SNE.$$

所以 $\cos SEN : \cos SNE = (a - b\cos ESN) : (b - a\cos ESN)$.

由(1)則得

$$u(a - b\cos ESN) + v(b - a\cos ESN) = 0,$$

所以
$$\cos ESN = \frac{au + bv}{av + bu} \quad \cdots\cdots(2)$$

依刻白爾第三律可以 a 及 b 顯 u 與 v 之比數.如以 T_1 及 T_2 爲 E 及 N 之周期,則

$$uT_1 = 2\pi a, \quad vT_2 = 2\pi b,$$

所以
$$u : v = aT_2 : bT_1.$$

但
$$T_1 : T_2 = a^{\frac{3}{2}} : b^{\frac{3}{2}},$$

所以
$$u : v = \sqrt{b} : \sqrt{a}.$$

代入(2)內,則有

$$\cos ESN = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} = \frac{(ab)^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{ab}}{a - \sqrt{ab} + b}.$$

由此可推得

$$\tan\frac{1}{2}ESN = \left(\frac{1 - \cos ESN}{1 + \cos ESN}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{(a+b)}}.$$

此 ESN 角卽星由合點至留點時其帶徑 SN 離 SE 所過之角也.因 ESN 角於一朔望周中自 0 度增至 360 度,所以自合時至留時之時間爲

$$S \times \frac{ESN\text{角}}{360^\circ}.$$

S 乃星之朔望周期也.因會合左右共有二留點,所以星在一朔望周中之逆行時間爲

$$2S \times \frac{ESN}{360^\circ} = S \times \frac{ESN}{180^\circ},$$

而一朔望周內星之順行時爲

$$S-S\times\frac{ESN}{180^\circ}=S\times\frac{180^\circ-ESN}{180^\circ}.$$

§345. 軌道之推定

(一)由舊測簿之記載推算行星軌道,如刻白爾之採用第谷記錄,則從事較易.若新見一星,則無此利便矣.前論二體算題,推解微分方程式時生有六個積分常數,而此常數可由星之初時座標數值及初時速度之分體定之,然後再由常數推定軌道.故須選一元時以觀測星體之位置及速度之分體.但自運行之地球觀測星體,只能供給測者所見星之方向,關於其距離則毫無所得.一次視位之觀測,只能定明星在過測者某定直線之半段上,其在空間之位置仍不能定,其速度之分體更無從推求也.故須於另一時再作一觀測.在此兩次觀測之間地星均在軌道前行.而此第二次觀測,亦僅能定明另一線爲該時星所在之直線耳.故知由此測數推定星之位置及軌道之根數非易事也.

究須若干次觀測始足推算根數之用,乃爲先決之事.因軌道爲六個根數所定,故觀測須供給六個獨立數目,俾得算求六個根數.一次觀測只能供給星體之弧標線數值,是僅兩個數目故須三次觀測始足定星之軌道.若所測者爲行於拋物線道之彗星,其兩心差爲一,只須求五個根數.在此例則二次完全之觀測及另一次觀測供給二弧標線數值之一,即已足用矣.

(二)測星之視位,恆量其去左近某恆星之弧距離及方向而定之.惟恆星之位置之載在星錄者,皆係赤經緯,故測得之數,亦爲赤經緯,須變爲黃經緯或其他座標數值.設三次觀測作於t_1、t_2、t_3(相隔二、三星期即可)之時,其各次之標線數值,附以1、2、3以別之.赤經緯乃爲軌道六個根數及觀測時日之函數,故其關係爲

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \phi\ (\Omega, i, w\ a, e, T; t_1), \\ a_2 &= \phi\ (\Omega, i, w, a, e, T; t_2), \\ a_3 &= \phi\ (\Omega, i, w, a, e, T; t_3), \\ d_1 &= \psi\ (\Omega, i, w, a, e, T; t_1), \\ d_2 &= \psi\ (\Omega, i, w, a, e, T; t_2), \\ d_3 &= \psi\ (\Omega, i, w, a, e, T; t_3). \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1)$$

式中函數內之 a 係指半長徑與附有數字之 a 不同,切莫相混

本題卽在解此六個方程式以求六個未知之根數. ϕ, ψ 二函數所函六根數之關係極爲複雜,必須設法轉換.在橢圓軌道須經刻白爾算式之手續,在雙曲線軌道手續亦同,在拋物線軌道須解一三次方程式.而星之屬地心座標數值,在此三例均須經三角式之轉變方能推得.故(1)式非能直接解之者也.

雖本題是在推求軌道之根數,然須先求藉以定此根數之數.此根數之所由定之數稱曰間數 (Intermediate elements). 在元時之座標數值及速度之分體,均已推知,卽可求軌道之根數,此層前已表明.設欲求在第二觀測時之極點座標數值及其微係數以定當時之矩形座標值及其微係數,則與(1)相當之式變爲

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= f(a_2, d_2, \rho_2, a'_2, d'_2, \rho'_2; t_1, t_2), \\ a_2 &= a_2, \\ a_3 &= f(a_2, d_2, \rho_2, a'_2, d'_2, \rho'_2; t_2, t_3), \\ d_1 &= g(a_2, d_2, \rho_2, a'_2, d'_2, \rho'_2; t_1\ t_2), \\ d_2 &= d_2, \\ d_3 &= g(a_2, d_2, \rho_2, a'_2, d'_2, \rho'_2; t_2, t_3). \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

其 a'_2、d'_2、ρ'_2 乃在 $t=t_2$ 時之

$$a'_2 = \frac{da}{dt},\ d'_2 = \frac{dd}{dt},\ \rho'_2 = \frac{d\rho}{dt}.$$

a_2及d_2乃觀測之數,故祇須推解第一、第三、第四、第六四式以求ρ_2、a_2、d_2及ρ'_2.是本題已變爲四個聯立方程式,較(1)式簡單多矣.此爲處理本題方法之一,乃拉普拉瑟於1780年所創,曾用之實推行星軌道者也.其後復經近時之人略爲改正,並加擴充焉.

另有一法用兩元時之三個座標數值,以定間數.設用t_1及t_3,則其基本公式之與(1)相當者可書爲

$$\left.\begin{aligned} a_1&=a_1,\\ a_2&=F(a_1,d_1,\rho_1,a_3,d_3,\rho_3;t_1,t_2,t_3),\\ a_3&=a_3,\\ d_1&=d_1,\\ d_2&=G(a_1,d_1,\rho_1,a_3,d_3,\rho_3;t_1,t_2,t_3),\\ d_3&=d_3. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

本題至此已變爲兩個方程式,有兩個未知數待解矣.拉哥蘭基於1778年,告司於1801年創立此法推算星道,近時之人多用之.此外討論推定軌道原理者不下數百家,然皆不能較茲三人之著作更爲重要也.

(三)無論用何方法推解本題,觀測之數須先加修正方能入算.日月之攝地球赤道凸質,使赤道面生有一種小周期擺動及其位置之長期變動,而致春分點生有章動及歲差.凡觀測所得之數均須變爲同一系座標之數方能入算,現時均以觀測所在年首日春分點及赤道位置爲標準稱曰平春分點平赤道位置.又觀測之位置因地之公轉及自轉,復受光行差之影響,自轉較公轉爲甚慢,故其光行差亦較小.若觀測不十分準確,此差亦可不計.設a_0及d_0爲任何時觀測之赤經緯,則其對該年首日春分點及改正歲周光行差之赤經緯爲

$$\left.\begin{aligned} a&=a_0-15f-g\sin(G+a_0)\tan d_0-h\sin(H+a_0)\sec d_0,\\ d&=d_0-i\cos d_0-g\cos(G+a_0)-h\cos(H+a_0)\sin d_0. \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

其f、g、h、G、H是爲輔數,稱曰星之獨立用數(Independent star-numbers). 其數隨地之行動逐日不同,載於天文年曆中.其推算則由弧三角公式,茲從略.(4)式內a_0及d_0之改正數爲弧之秒數.其日周光行差之改正數爲

$$\left.\begin{aligned}\Delta a &= -0''.322 \cos l \cos(\theta - a_0) \sec d_0,\\ \Delta d &= -0''.322 \cos l \sin(\theta - a_0) \sin d_0.\end{aligned}\right\}$$

l乃測者所在之地球緯度,$\theta - a_0$乃星在測時之時角也.此第二改正數不能大過 0.322 秒.其第一改正數亦甚小,惟當d_0近於± 90度時則數略大.

§346. 推算軌道之公式 拉普拉瑟及告司二人解算軌道之公式,其推定之理頗繁難,茲從略.僅將其公式依入用之次序列於下,而略加說明.

令C爲星,E爲地,S爲日,x^+、y^+、z^+爲C對E之矩形座標數值,x、y、z爲C對S之矩形座標數值,ρ爲由E至C之距離,r爲S至C之距離,R爲E至S距離.觀測之赤經緯既經改正章動歲差及光行差,乃求EC線之方向角餘弦λ、u、v.

$$\left.\begin{aligned}\lambda_j &= \cos d_j \cos a_j, \quad (j=1,2,3)\\ u_j &= \cos d_j \sin a_j,\\ v_j &= \sin d_j.\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(1)$$

在拉普拉瑟法以$t_0 = t_2$（現均用t_2爲時之原點）,若相連觀測所隔之時間極不相等,則以$t_0 = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$. 茲以$t_0 = t_2$,由天文年曆查得$t_a$、$t_b$、$t_0$時$S$對$E$之$X$、$Y$、$Z$,其$t_b$須甚近於$t_0$.由如下之公式求在$t_0$時$S$對$E$之矩形座標數值$X$、$Y$、$Z$.

$$\left.\begin{aligned}X = {} & \frac{(t_0 - t_b)(t - t_c)}{(t_a - t_b)(t_a - t_c)} X_a + \frac{(t_0 - t_a)(t_0 - t_c)}{(t_b - t_a)(t_b - t_c)} X_b\\ & + \frac{(t_0 - t_a)(t_0 - t_b)}{(t_c - t_a)(t_c - t_b)} X_c.\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2)$$

(λ亦可以如此之式求之.惟以 τ 代 t_0,以 τ_1、τ_2、τ_3 代 t_a、t_b、t_c,以 λ_1、λ_2、λ_3 代 X_a、X_b、X_c,且 $\tau_2=0$ 耳)

設 $k(t-t_0)=\tau$ 而有 $k(t_j-t_0)=\tau_j$,$(j=1、2、3,\ \tau_2=0.)$ ……(3)

k 乃告司常數也.t_2 爲時之原點,故 τ 在 $t_0=t_2$ 時等於零.

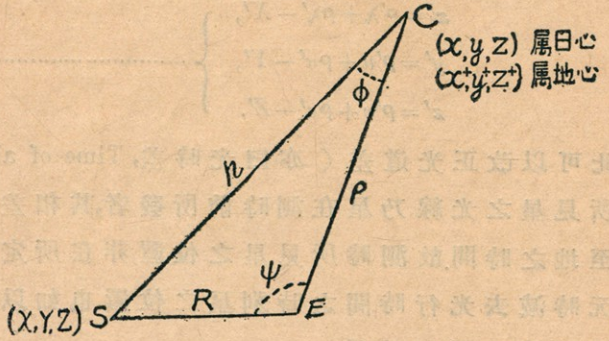
$$P=-\tau_1\tau_3(\tau_3-\tau_1) \quad \text{……(4)}$$

因原設 $P=(\tau_2-\tau_1)(\tau_3-\tau_2)(\tau_3-\tau_1)$ 也.

$$\text{設 } D=\Delta_1\Delta_2=\frac{2}{P}\begin{vmatrix}\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\\ u_1,u_2,u_3\\ v_1,v_2,v_3\end{vmatrix} \quad \text{……(5)}$$

$$D_1=-\frac{\tau_3^2}{P}\begin{vmatrix}\lambda_1,\lambda_2,X\\ u_1,u_2,Y\\ v_1,v_2,Z\end{vmatrix}-\frac{\tau_1^2}{P}\begin{vmatrix}\lambda_2,\lambda_3,X\\ u_2,u_3,Y\\ v_2,v_3,Z\end{vmatrix} \quad \text{……(6)}$$

$$D_2=+\frac{2\tau_3}{P}\begin{vmatrix}\lambda_1,\lambda_2,X\\ u_1,u_2,Y\\ v_1,v_2,Z\end{vmatrix}+\frac{2\tau_1}{P}\begin{vmatrix}\lambda_2,\lambda_3,X\\ u_2,u_3,Y\\ v_2,v_3,Z\end{vmatrix} \quad \text{……(7)}$$



第二二八圖

$$R\cos\phi=X\lambda+Yu+Zv,\ [0<\phi\leqq\pi] \quad \text{……(8)}$$

設

$$\left.\begin{aligned}N\sin m&=R\sin\phi,\\ N\cos m&=R\cos\phi-\frac{D_1}{DR^3},\\ M&=-\frac{NDR^3}{D_1}\sin^3\phi>0.\end{aligned}\right\} \quad \text{……(9)}$$

$$\sin^4\phi = M\sin(\phi+m) \quad \cdots\cdots(10)$$

$$r = R\frac{\sin\psi}{\sin\phi}, \quad \rho = R\frac{\sin(\psi+\phi)}{\sin\phi} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$\rho' = \frac{D_0}{2D}\left[\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right] \quad \cdots\cdots(12)$$

ρ' 乃 ρ 之一次微係數也.

$$x = \rho\lambda - X,\ y = \rho u - Y,\ z = \rho v - Z \quad \cdots\cdots(13)$$

由如下之公式求 λ、u、v 之一次微係數 λ'、u'、v'.

$$\left.\begin{aligned}\lambda' = {} & \frac{-(\tau_2+\tau_3)}{(\tau_1-\tau_2)(\tau_1-\tau_3)}\lambda_1 - \frac{(\tau_3+\tau_1)}{(\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_1)}\lambda_2 \\ & - \frac{(\tau_1+\tau_2)}{(\tau_3-\tau_1)(\tau_3-\tau_2)}\lambda_3.\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

由如下之公式求 X、Y、Z 之一次微係數 X'、Y'、Z'.

$$\left.\begin{aligned}kX' = {} & \frac{2t_2-(t_b+t_C)}{(t_a-t_b)(t_a-t_C)}X_a + \frac{2t_2-(t_C+t_a)}{(t_b-t_a)(t_b-t_C)}X_b \\ & + \frac{2t_2-(t_a+t_b)}{(t_C-t_a)(t_C-t_b)}X_C.\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(15)$$

$$\left.\begin{aligned}x' &= \rho'\lambda + \rho\lambda' - X', \\ y' &= \rho' u + \rho u' - Y', \\ z' &= \rho' v + \rho v' - Z'.\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(16)$$

至此可以改正光道差（亦曰光時差, Time of aberration）. 因測時所見星之光線乃星在測時前所發者,其相差之時爲光自星行至地之時間.故測時所見星之位置,非在所定元時之位置,乃在元時減去光行時間之時刻星之位置也.如以 V 爲光行速度,則改正後之新元時爲

$$\left.\begin{aligned}\tau_1 - \Delta\tau_1 &= \tau_1 - \frac{\rho_1}{V} = \tau_1 - \frac{(\rho+\rho'\tau_1)}{V}, \\ \tau_2 - \Delta\tau_2 &= \tau_2 - \frac{\rho_2}{V} = \tau_2 - \frac{(\rho+\rho'\tau_2)}{V}, \\ \tau_3 - \Delta\tau_3 &= \tau_3 - \frac{\rho_3}{V} = \tau_3 - \frac{(\rho+\rho'\tau_3)}{V}.\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(17)$$

D、D_1、D_2 亦應改正.在 D 祇改正 Δ_1. 但因所用者均爲 D 與 D_1 及與 D_2 之比數,而 D_1、D_2 亦均含有 Δ_1 因子,故祇須以 $\tau_1-\Delta\tau_1$、$\tau_2-\Delta\tau_2$、$\tau_3-\Delta\tau_3$ 代 τ_1、τ_2、τ_3 於(6)及(7)二式之內卽可.由如(2)之式及(15)式所得之 λ、λ'、λ''、u、u'、u''、v、v'、v'' 均爲概數,故所得之 x、y、z、x'、y'、z' 亦均爲概數,均須再加改正.其法先改正 λ、λ'、λ''、…等,然後再求 D、D_1、D_2、ϕ、ρ、ρ'、x、y、z、x'、y'、z',或不再求較近之數,立卽用前二體算題之公式求軌道之根數.以下所用 a、b 等皆爲常數,不可與經緯數相混.

其在赤道標線法之面積積分式爲

$$\left.\begin{aligned} xy'-yx'&=b_1,\\ yz'-zy'&=b_2,\\ zx'-xz'&=b_3. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

此卽二體算題之(10)式.b_1、b_2、b_3 爲三常數,乃二倍面速度分別在 xy、yz、zx 三平面之投射數也.若以 ε 爲黃道斜角,則在黃道標線法相當之常數爲

$$\left.\begin{aligned} a_1&=b_1\cos\varepsilon-b_2\sin\varepsilon,\\ a_2&=b_2,\\ a_3&=b_1\sin\varepsilon+b_3\cos\varepsilon. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(19)$$

用下式以定 i 及 Ω.

$$\left.\begin{aligned} a_1&=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cos i,\\ a_2&=\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sin i\sin\Omega,\\ a_3&=\mp\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sin i\cos\Omega. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(20)$$

此卽二體算題之(15)式也.

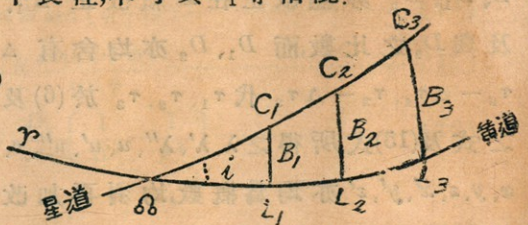
以下二式定長徑及通徑

$$x'^2+y'^2+z'^2=k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\cdots\cdots(21)$$

此二體算題之(24)式，a 乃半長徑，不可與 a_1 等相混.

$$\left.\begin{aligned} k^2p &= k^2a(1-e^2) \\ &= a_1^2+a_2^2+a_3^2 \end{aligned}\right\} \cdots(22)$$

此卽二體算題之(22)式，p 爲半通徑也.



第二二九圖

由第二二九圖則有

$$\left.\begin{aligned} \sin i \sin u &= \sin B = \frac{z}{r}, \\ \cos i \sin u &= \cos B \sin (L-\Omega), \\ &= \frac{y}{r}\cos\Omega - \frac{x}{r}\sin\Omega, \\ \cos u &= \cos B \cos (L-\Omega), \\ &= \frac{y}{r}\sin\Omega + \frac{x}{r}\cos\Omega. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(23)$$

u 乃黃緯度交點距也.

以下式定眞卑點角 v.

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{p}{1+e\cos v}, \\ w &= u-v. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(24)$$

若軌道爲拋物線，則 T 由下式定之.

$$k(t-T) = \frac{1}{2}p^{\frac{3}{2}}\left(\tan\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{v}{2}\right) \cdots\cdots(25)$$

此卽二體算題之(32)式也.

若軌道爲橢圓，E、n、T 由下式定之.

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{E}{2} &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{v}{2}, \\ n &= \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}, \\ n(t-T) &= E - e\sin E. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(26)$$

此卽二體算題之 (50)、(60)、(42) 式也.

若軌道爲雙曲線,則用下式:

$$\left.\begin{aligned} a+r&=a\,e\cosh F,\\ n(t-T)&=-F+e\sinh F.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(27)$$

此卽二體算題之(52)、(53)式也.

在告司法觀測之赤經緯改正後,乃求 EC 線之方向角餘弦,然後用如下之式求日在 t_1、t_2、t_3 時之座標數值.

$$\left.\begin{aligned} X_i=&\frac{(t_i-t_b)(t_i-t_c)}{(t_a-t_b)(t_a-t_c)}X_a+\frac{(t_i-t_a)(t_i-t_c)}{(t_b-t_a)(t_b-t_c)}X_b\\ &+\frac{(t_i-t_a)(t_i-t_b)}{(t_c-t_a)(t_c-t_b)}X_c.\end{aligned}\right\}\quad\cdots(28)$$

其 X_a、X_b、X_c 由天文年曆檢查 t_b 最近於 t_i、X_i 乃在 t_i 時之數也.

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\\ u_1,u_2,u_3\\ v_1,v_2,v_3\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots(29)$$

$$K=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\lambda_1,X_1+X_3-2X_2,\lambda_3\\ u_1,Y_1+Y_3-2Y_2,u_3\\ v_1,Z_1+Z_3-2Z_2,v_3\end{vmatrix},\quad K_1=-\begin{vmatrix}\lambda_1,X_1+X_3,\lambda_3\\ u_1,Y_1+Y_3,u_3\\ v_1,Z_1+Z_3,v_3\end{vmatrix}\quad\cdots(30)$$

至此乃以下數式推定 r_2 及 ρ_2,

$$R_2\cos\psi_2=X_2\lambda_2+Y_2u_2+Z_2v_2,\quad[0<\psi_2\leqq\pi]\quad\cdots\cdots(31)$$

$$\left.\begin{aligned} N\sin m&=R_2\sin\psi_2,\\ N\cos m&=R_2\cos\psi_2-\frac{K}{\Delta_2},\\ M&=\frac{4\Delta_2R^3\sin^3\psi}{K_1}>0.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(32)$$

$$\sin^4\phi=M\sin(\phi+m)\quad\cdots\cdots(33)$$

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \frac{R_2 \sin\phi_2}{\sin\phi}, \\ \rho_2 &= R_2 \frac{\sin(\phi_2+\phi)}{\sin\phi}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(34)$$

既得r_2及ρ_2，乃由下數式推求ρ_1及ρ_3.

$$\left.\begin{aligned} &k(t_3-t_1)=\tau_3-\tau_1=2\tau, \\ &\tau_1=-\tau+\varepsilon,\ \tau_3=+\tau+\varepsilon,\ 2\varepsilon=\tau_3+\tau_1. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(35)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{[1,3]}{[2,3]} &= \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2\tau}+\frac{\tau^2}{4r_2^3}}, \\ \frac{[1,2]}{[2,3]} &= \frac{1-\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\tau^2}{2r_2^3}}{1+\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\tau^2}{2r_2^3}}, \\ \frac{[2,3]}{[1,2]} &= \frac{1+\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\tau^2}{2r_2^3}}{1-\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\tau^2}{2r_2^3}}, \\ \frac{[1,3]}{[1,2]} &= \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2\tau}+\frac{\tau^2}{4r_2^3}}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(36)$$

[1,2]、[1,3]、[2,3]乃以表示S與C在t_1t_2、t_1t_3及t_2t_3時分別所成之三角形面積也此ε不可與黃道斜角ε相混.

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix}\lambda_1,\lambda_3\\ u_1,u_3\end{vmatrix}\rho_1 &= \begin{vmatrix}X_1,\lambda_3\\ Y_1,u_3\end{vmatrix} - \frac{[1,3]}{[2,3]}\begin{vmatrix}X_2,\lambda_3\\ Y_2,u_3\end{vmatrix} \\ &\quad + \frac{[1,2]}{[2,3]}\begin{vmatrix}X_3,\lambda_3\\ Y_3,u_3\end{vmatrix} + \rho_2\frac{[1,3]}{[2,3]}\begin{vmatrix}\lambda_2,\lambda_3\\ u_2,u_3\end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix}\lambda_1,\lambda_3\\ u_1,u_3\end{vmatrix}\rho_3 &= \frac{[2,3]}{[1,2]}\begin{vmatrix}\lambda_1,X_1\\ u_1,Y_1\end{vmatrix} - \frac{[1,3]}{[1,2]}\begin{vmatrix}\lambda_1,X_2\\ u_1,Y_2\end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix}\lambda_1,X_3\\ u_1,Y_3\end{vmatrix} + \rho_2\frac{[1,3]}{[2,3]}\begin{vmatrix}\lambda_1,\lambda_2\\ u_1,u_2\end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(37)$$

$$\left.\begin{aligned} x_j &= \rho_j\lambda_j - X_j, \quad [j=1,2,3] \\ y_j &= \rho_j u_j - Y_j, \\ Z_j &= \rho_j v_j - Z_j. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(38)$$

至此 ρ_1、ρ_2、ρ_3 既已推得，乃可推算光道差改正元時，其法同前．又可用下式推求在各元時之 r．

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R\sin\phi \cdots\cdots\cdots(39)$$

又可用如下之式求 r 在 $t=t_2$ 時之一次及二次微係數．

$$\left.\begin{aligned} r' = {} & \frac{2t-(t_2+t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}r_1 + \frac{2t-(t_3+t_1)}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)}r_2 \\ & + \frac{2t-(t_1+t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}r_3, \\ r'' = {} & \frac{2}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}r_1 + \frac{2}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} \\ & + \frac{2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}r_3. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(40)$$

又可用下式求 p 及 q（此二數爲拉哥蘭基所引用）．

$$\left.\begin{aligned} r^2 p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{dr^2}{d\tau} = xx' + yy' + zz', \\ r^3 q &= \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2r^2}{d\tau^2} = x'^2 + y'^2 + z'^2 - r^2 u, \\ u &= \frac{1}{r^3}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(41)$$

並用下式求 P 及 Q 較近於眞之數值．

$$\left.\begin{aligned} P &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{\tau_2} - 2p\varepsilon + \frac{1}{12}(7u - 15p^2 + 3q)\tau^2 + \cdots\cdots, \\ Q &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{\tau^2} + \frac{3}{2}p\frac{\tau^2}{\varepsilon} - 2p\varepsilon + \frac{1}{60}(37u - 765p^2 + 153q)\tau^2 \\ & \quad + \frac{1}{4}p(3u + 14p^2 - 6q)\frac{\tau^4}{\varepsilon} + \cdots\cdots. \end{aligned}\right\} \cdots(42)$$

而用下式改進 $\frac{[2,3]}{[2,3]}$ 及 $\frac{[1,2]}{[1,3]}$ 之數值．

$$\left.\begin{aligned}\frac{[2,3]}{[1,3]}&=\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2\tau}+\frac{1}{4}u\tau^2P+\frac{\tau\varepsilon}{12}uQ,\\ \frac{[1,3]}{[1,2]}&=\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2\tau}+\frac{1}{4}u\tau^2P-\frac{\tau\varepsilon}{12}uQ.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(43)$$

然後可由(34)式起重新推算.或用告司定三角形比例法改正[2,3]與[1,3]及[1,2]與[1,3]之比數,蓋C在二次位置時對S所成之面形乃二次之r與C走過之軌道部分所成之扇形面非三角面也,故須改正之.設以r_1與r_2間之扇形面積與三角形面積之比爲η,則求之如下.v及E乃眞卑點角及偏心卑點角.

$$\left.\begin{aligned}v_2-v_1&=u_2-u_1=2f,\\ E_2-E_1&=2g,\\ m&=\frac{k(t_2-t_1)}{(2\sqrt{r_1r_2}\cos f)^{\frac{3}{2}}},\\ l&=\frac{r_1+r_2}{4\sqrt{r_1r_2}\cos f}-\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(44)$$

u乃黃緯交點距f、g、m、l乃新引之未知數也.

$$\left.\begin{aligned}&\sin^2\frac{g}{2}=x, && (I)\\ &\xi=\frac{2}{35}x^2+\frac{52}{1575}x^3+\cdots, && (II)\\ &x=\frac{m^2}{\eta^2}-l, && (III)\\ &h=\frac{m^2}{\frac{5}{6}+l+\xi}, && (IV)\\ &\eta^3-\eta^2-h\eta-\frac{h}{9}=0. && (V)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(45)$$

先用(IV)設$\xi=0$求h之概數,再用(V)求η之方根數（如有告司所製η及h之數值表,則此層手續可省矣）.用(III)求x（x爲正爲零爲負則軌道爲橢圓爲拋物線爲雙曲線）.用(II)求ξ.即

依此 ξ 之數值,再重新推求 h 及 η.此種手續可反復爲之,以至所求之數愈近眞確爲止.同樣算法推求 $(r_1\ r_3)$ 及 $(r_2\ r_3)$ 扇形面與三角形面之比.既得其比,乃再從(31)起重新推算以求數愈逼眞.或不再推求較眞之間數,卽進行推算軌道根數,其所用之公式列下:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_j &= x_j, \quad [j=1,2,3]\\ \bar{y}_j &= +y_j \cos\varepsilon + z_j \sin\varepsilon,\\ \bar{z}_j &= -y_j \sin\varepsilon + z_j \cos\varepsilon.\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(46)$$

$\bar{x}\ \bar{y}_j\ \bar{z}_j$ 乃黃道矩形座標數值,ε 乃黃道斜角不可與(35),(36),(42)之 ε 相混.

$$\left.\begin{aligned}A\bar{x}_1 + B\bar{y}_1 + C\bar{z}_1 &= 0,\\ A\bar{x}_2 + B\bar{y}_2 + C\bar{z}_2 &= 0,\\ A\bar{x}_3 + B\bar{y}_3 + C\bar{z}_3 &= 0.\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(47)$$

A、B、C 爲三常數隨行動平面(軌道面)之位置而異.由此式則有

$$A : B : C = \begin{vmatrix}\bar{y}_1, \bar{z}_1\\ \bar{y}_2, \bar{z}_2\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\bar{z}_1, \bar{x}_1\\ \bar{z}_2, \bar{x}_2\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\bar{x}_1, \bar{y}_1\\ \bar{x}_2, \bar{y}_2\end{vmatrix} \cdots\cdots(48)$$

至此乃用與二體算題(11),(14),(15)之式相當之公式以定 Ω 及 i.

$$\left.\begin{aligned}\cos i &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \sin\Omega\sin i &= \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\Omega\sin i &= \frac{\mp C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(49)$$

由第二二九圖可見黃緯交點距能由下式定之:

$$\left.\begin{aligned} \sin i \sin u_j &= \frac{\overline{z}_j}{r_j}, \quad [j=1,2,3] \\ \cos i \sin u_j &= \frac{\overline{y}_j}{r_j}\cos\ \Omega - \frac{\overline{x}_j}{r_j}\sin\ \Omega, \\ \cos u_j &= \frac{\overline{y}_j}{r_j}\sin\ \Omega + \frac{\overline{x}_j}{r_j}\cos\ \Omega. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(50)$$

以 $\sigma_1 = u_3 - u_2$, $\sigma_2 = u_3 - u_1$, $\sigma_3 = u_2 - u_1$ ……(51)

用 $k\sqrt{p}(t_3 - t_1) = \frac{r_2^2\sigma_2^3}{6\sigma_1\sigma_3} + \frac{r_1^2\sigma_2(2\sigma_3 - \sigma_1)}{6\sigma_3} + \frac{r_3^2\sigma_2(2\sigma_1 - \sigma_3)}{6\sigma_1}$ ……(52)

以定 p.

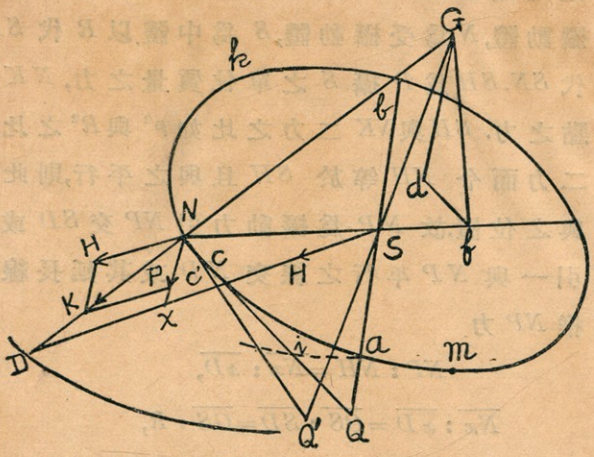
$$\left.\begin{aligned} \text{用 } e\sin(u_1 - w) &= \frac{r_3(p - r_1)\cos\sigma_2 - r_1(p - r_3)}{r_1 r_3 \sin\sigma_2}, \\ e\cos(u_1 - w) &= \frac{p - r_1}{r_1}, \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(53)$$

以定 e 及 w. 既得 p 及 e, 則可由之以定半長徑 a.

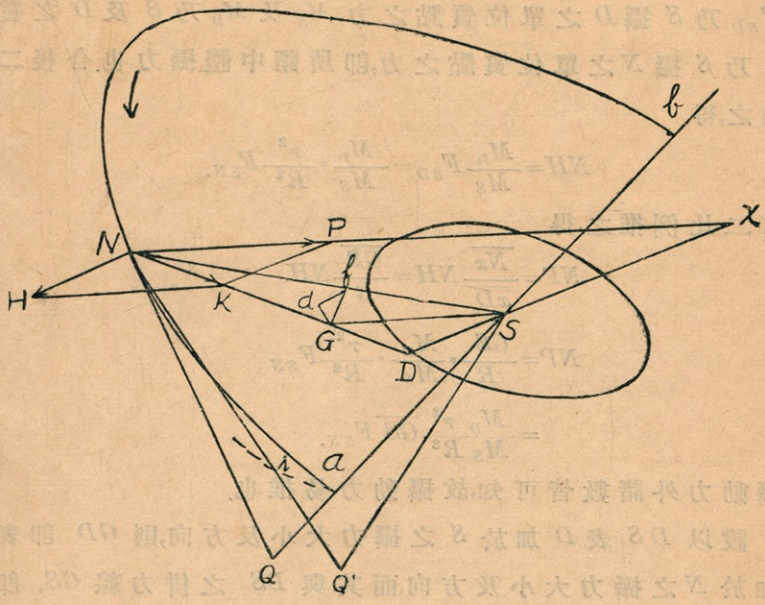
因 $v_j = u_j - w$ $(j=1,2,3)$, 故過卑點時可如拉普拉瑟法用 (25), (26), (27) 分別定之.

§347. 行星攝動 行星彼此相攝致其軌道橢圓時時生變. 其攝動力雖與月理爲同例, 亦甚微小, 但其理稍爲不同. 在月理日之攝動力甚小, 因日去月之距離約爲地去月之距離之400倍也. 在行星理發攝動體距受攝動體恆較日爲近（如土受木攝動）, 但發攝動體之質量無大過日質量之$\frac{1}{1000}$者, 故行星之攝動力不過日攝力之極小部分耳.

行星間最大之攝動力爲土木二星, 相去最近時之木星攝土星（有些小行星爲例外）約爲日攝力之$\frac{1}{128}$, 當二星相去最遠時約爲日之$\frac{1}{357}$, 其他之攝動力無至日力之$\frac{1}{1000}$者（小行星受木星之攝動爲例外）.



第二三〇圖



第二三一圖

二行星之攝動力均可照月理推算日之攝動力法推算之設 D 爲發攝動體，N 爲受攝動體，S 爲中體．以 R 代 SD，以 ρ 代 ND，以 r 代 SN．SH 爲 D 攝 S 之單位質量之力，NK 爲 D 攝 N 之單位質點之力．SH 與 NK 二力之比如 ρ^3 與 R^3 之比．分 NK 爲 NH 與 NP 二力而令 NH 等於 SH 且與之平行，則此力不能變 S 及 N 相與之位置，故 NP 爲攝動力．引 NP 交 SD 或其延長線於 x．由 S 引一與 NP 平行之線交 ND 或其延長線於 G．由下之比例可推 NP 力．

$$NP : NH = \overline{Nx} : \overline{xD},$$

$$\overline{Nx} : \overline{xD} = \overline{GS} : \overline{SD} = \overline{GS} : R,$$

$$F_{SD} : NH = M_S : M_D,$$

$$F_{SN} : F_{SD} = \overline{SD}^2 : \overline{SN}^2 = R^2 : r^2.$$

其 F_{SD} 乃 S 攝 D 之單位質點之力，M_S 及 M_D 乃 S 及 D 之質量，F_{SN} 乃 S 攝 N 之單位質點之力，卽所謂中體攝力也．合後二比例推之，得

$$NH = \frac{M_D}{M_S} F_{SD} = \frac{M_D}{M_S} \cdot \frac{r^2}{R^2} F_{SN}.$$

合前二比例推之，得

$$NP = \frac{\overline{Nx}}{\overline{xD}} NH = \frac{\overline{GS}}{R} NH.$$

故

$$NP = \frac{GS}{R} \cdot \frac{M_D}{M_S} \cdot \frac{r^2}{R^2} F_{SN}$$

$$= \frac{M_D}{M_S} \frac{r^2}{R^3} \overline{GS}\, F_{SN}.$$

除攝動力外諸數皆可知，故攝動力易推也．

設以 DS 表 D 加於 S 之攝力大小及方向，則 GD 卽表顯 D 加於 N 之攝力大小及方向，而其與 DS 之併力線 GS，卽表 N 所受攝動力大小及方向，亦卽同於 NP，不過尺度不同耳．引

Gl 垂於 N 道面，df 垂於 NS 線或其延長線，則 Gd、df 及 fs 即表垂力、橫力、及帶徑力之大小及方向.

設發攝動體之道爲平圓則 SD 不變，而攝動力之比例恆如 GS 之比例.道爲微橢理亦略同.設以中體攝受攝動體之力爲單位，略取受攝動發攝動二體相距最遠最近適中三處，其攝動力與中體攝力之比例列爲表，其意即謂：

第三體攝動力：中體攝力＝表列數：1，

亦即　第三體攝動力：中體攝力＝分子：分母.

表 R.　攝動力

發攝動體	受攝動體	最遠	中距	最近
日	月	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{179}$	$\frac{1}{89}$
木	土	$\frac{1}{354}$	$\frac{1}{312}$	$\frac{1}{128}$
木	地	$\frac{1}{95683}$	$\frac{1}{147575}$	$\frac{1}{53268}$
金	地	$\frac{1}{255208}$	$\frac{1}{210245}$	$\frac{1}{26833}$
海王	天王	$\frac{1}{57420}$	$\frac{1}{56592}$	$\frac{1}{5519}$
水	海王	$\frac{1}{845}$	$\frac{1}{845}$	$\frac{1}{845}$
木	穀女	$\frac{1}{6433}$	$\frac{1}{6937}$	$\frac{1}{1033}$
土	木	$\frac{1}{20248}$	$\frac{1}{21579}$	$\frac{1}{3065}$

如 N 距 D 小於 S 距 D 如第二三〇圖，則 DG 大於 DN，G 必居 DN 引長之線內在 N 道面之上，而 D 在 N 道面之下.故 GS 力推 N 向 D 道面內 SD 線中之 x 點.設 N 距 D 等於 S 距 D，則 DG、DS、DN 三線俱等且 G 與 N 合，x 與 S 合.故 GS 力推 N 向中體.

設N距D大於S距D如第二三一圖,則DG小於DN,G必居DN之間與D同在N道面之下.故GS力推N向D道餘半面內DS引長線中之x點.第二三〇圖爲近體受遠體之攝動,如地受木星攝是也.第二三一圖爲遠體受近體攝動,如火星受地球攝是也.凡攝動力之方向恆在D、N、S三體之面內,以此力當作獨力,則考論諸行星之力互相加,心中不亂.又設以D爲定點而N行於橢圓道繞S,則G點亦必行成橢圜道,而攝動力GS之方向因SD、SN二半徑及ND之距及N行之方向而變.

行星攝動由於攝動力長期繼續之作用積久而顯,可分爲二大類:一爲周期差亦曰短差,一爲長差.周期差又有短期與長期之別.

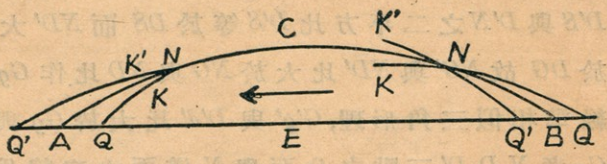
§348. 周期差 此差隨行星在軌道內之位置而異,常經行星繞道數周而復初,但其差均甚小.水星自日視之,其差不過15秒,金星約至30秒,地球約1分,火星約2分,土木間攝動最大約至21分及49分,天王星不過3分,海王星不過$1\frac{1}{2}$分.小行星受木星攝動最大,其短期差有時大至5度或6度.

§349. 長差 此差不隨行星在本道內之位置而異,但隨其軌道相互之位置而異,例如兩隣近軌道之交點線及長軸線彼此相關之位置是也.因行星軌道之位置變易甚緩,故屬此類之攝動均極微小.嚴格論之,亦爲周期性,不過爲期太長致人疑而不決而已.期以萬年計,逐年之差微小,令人不覺,積久乃著.

§350. 交點行 交點行由於攝動力之垂力,今以前第二三〇圖及第二三一圖詳解之.設N體自a行至N,如無攝動力則在N點時其行必向c.若有垂力加於N,則N必因之斜行,故改行於NC'曲線.第二三〇圖NC'線在NC線之下,第二三一圖在NC線之上.是N道面因垂力變其方位,原面NSC一分變爲新

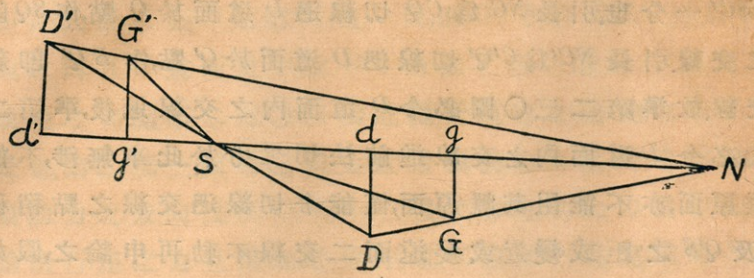
面 NSC' 一分也.引長 NC 爲 CQ 切線遇 D 道面於 Q 點,作 SQ 卽原面之交線.引長 NC' 爲 $C'Q'$ 切線遇 D 道面於 Q' 點,作 SQ' 卽新面之交線.故準第二三〇圖必令 D 道面內之交線退後,準第二三一圖必令 D 道面內之交線進前.法切二力於此事無涉,不能令 N 離原面,亦不能阻其離原面,僅能令切線遇交線之點稍移令 QS 及 $Q'S$ 之距或變近或變遠而二交線不動.再申論之,假如前圖 D 在 N 原道面之上,x 在 DS 之間則亦在原道面上,而 G 必在原道面之下.則垂力必向上,故推 N 向上而 NC' 曲線必定在 NC 曲線之上.引長之遇 D 道面 Q' 點必在 Q 點之前.故若 D 道面不動,則交點必進前.卽動而不消盡,進前之理仍如故.

設以 D 道面爲定面.若垂力拉 N 體令向 D 道面,則 D 道上之交點必退後.若推 N 體令遠地道面,則交點必進前.如圖 BEA 爲從 S 點平視 D 道半周,BCA 爲未攝動時 N 道半周.N 行自 B 至 A 垂力拉 N 令行於 NK 在 BCA、BEA 之間.引長 NK 成 NQ 爲 N 新道之一分.是二交點俱退行,一自 A 至 Q,一自 B 至 Q 也.若垂力推 N 令行於 NK' 在 BCA 之外.引長 NK' 成 NQ' 爲 N 新道之一分.是二交點俱進行,一自 A 至 Q',一自 B 至 Q' 也.



第二三二圖

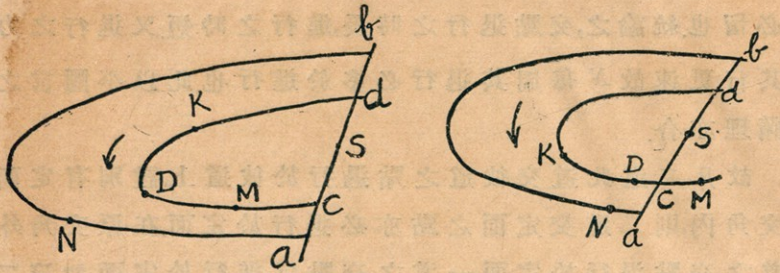
前第二三一圖 N 道大於 D 道.設二道相距大於 D 道半徑,又 D、N 二星同在交線之一邊,則垂力必推 N 令遠.故無論 N、D 各在半周何點,D 道上交點必進前.若二星在交線之兩邊,則垂力必拉 N 令近.亦無論 N、D 各在半周何點,D 道上交點必退後.故 D、N 繞 S 無論各若干周,但二星在交線一邊交點必進行,在



第 三 三 二 圖

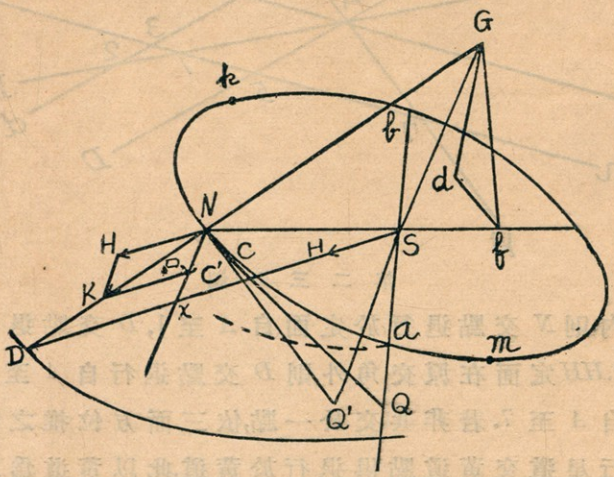
交線兩邊交點必退行.若二道俱略近正圜,則進退之時等,而每次退行必大於進行,取相對之二方向以圖明之.二星在交線一邊時內星爲D,在交線兩邊時內星爲D',其方向恰相對.引長NS作Dd、$D'd'$二垂線.星道略近正圜則DS等於$D'S$,故Dd等於$D'd'$.準前DG與DS比若DS與DN之二平方比.又$D'G'$與$D'S$比若$D'S$與$D'N$之二平方比.$D'S$等於DS而ND'大於ND,則$D'G'$必小於DG.故NG'與ND'比大於NG與ND比.作Gg、$G'g'$爲NS之二垂線.準相似三角形理,$G'g'$與$D'd'$比大於Gg與Dd比.故$G'g'$大於Gg.考N、D、D'三點之公面與N道面之交線爲$N'd$.故若從G、G'作N道面二垂線,其比例必若Gg與$G'g'$比.是G'點之垂線大於G點之垂線.夫$G'S$與GS顯D、D'攝動N之二全力.則此二垂線必顯二垂力.G'點垂力令交點退行,G點垂力令交點進行.二力有大小,故退行大於進行也.

設二道相距小於D道半徑,無論N在何處,於交線一邊取D道M、K二點相距不滿120度,令距N、S俱等.設D行全周,N仍在原處不動,則D自K至M時交點亦退行,是退行愈多.若MDK弧大半在交線此邊如Kc,小半在交線彼邊如cM,則D在Kc分內交點退行,在cM分內交點進行.而D道距N最近點在Kc分內退行力最大,則Kc分內之退行大於cM分內之進行,不能消盡



第二三四圖

故D在cM分內計交點之度仍爲退行.是以總全周論之,視前項退行更大也.又設內星爲外星攝動,D道大於N道.取Dk、Dm皆等於DS.設N行一周D在原處不動,則N自k至a,自m至b,交點必退行;自b至k,自a至m,交點必進行.凡D在交線則無垂力,交點不動;D不在交線則ka與mb和恆大於半周.D愈近交線S點之垂線,則其和愈大,垂力亦愈大,交點之進退愈速.N愈近

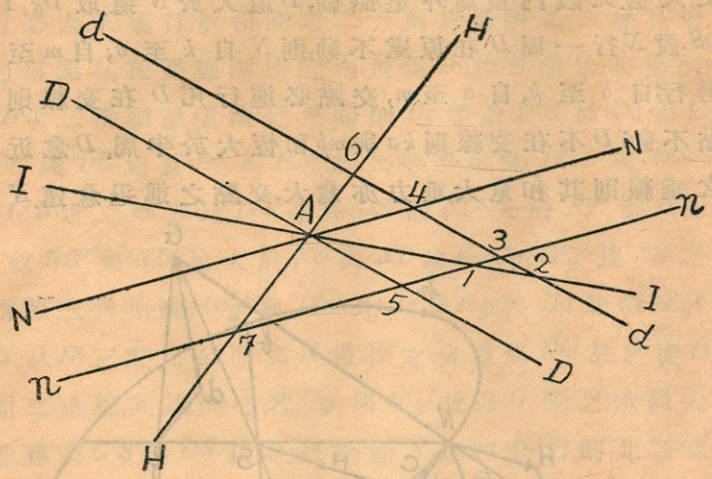


第二三五圖

於k或m垂力愈小,在此二點則無,而交點不動.N在交點,交點亦不動.蓋垂力雖非消盡方向亦不變,然此時交點退行變進行

則必留也.統論之,交點退行之時長,進行之時短.又退行之力更大,其行更速.故 N 每周其退行必多於進行也.此以平圜言之,若微橢理亦合.

故凡二道此道交彼道之點退行於彼道上.設別有定面在原交角內,則二道交定面之點亦必退行於定面.在原交角外,則一道之交點退行於定面,一道之交點反進行於定面.如第二三六圖 NN、DD 爲二道原方位,nn,dd 爲二道退行後新方位.N 交點退行於 D 道自 A 至 5,D 交點退行於 N 道自 A 至 4.II 定面在



第二三六圖

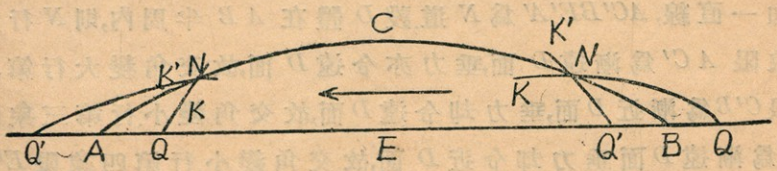
原交角內,則 N 交點退行於定面自 A 至 1,D 交點退行於定面自 A 至 2.HH 定面在原交角外,則 D 交點退行自 A 至 6,N 交點反進行自 A 至 7.若非共交於一點,依三面方位推之理同.

諸行星道交黃道點俱退行於黃道,此以黃道爲本而推諸行星之攝動.若於諸行星中另虛設一定面以爲本,則當幷推黃道被諸星之攝動,而準上論諸行星交定面之點,或進行或退行,不一定也.

諸行星相距甚遠,質量又俱甚微,故其交點之行甚緩.大率百年中最速者不滿一度,其遲者不滿半度.而月獨不然,約十八年六已退行一周.其故有二:一太陽所發攝動力與地攝力之比甚大於諸行星所發攝動力與太陽攝力之比,一因月之周時僅二十九日半較諸行星之周時甚小也.準上論理用垂力推其退行度分與測望所得合,故知攝力之理確無可疑也.

本節所論交點行及下四節係採自侯失勒天文學,因其論法頗便於初學,故不避重複之嫌也.

§351. 交角之變　各行星交點之移所關尙輕,而各星道交角之變所關甚大.以黃道言之,黃道交定面之角變,則黃道交赤道之角亦變,而各地之四時俱變.假如黃道與赤道合,則統地球恆如春時.設黃道過二極則冬夏二時寒暑極盛,萬物不能生.故各星道交角之變爲最要事.今詳考之,前諸圖中NSC'面爲受攝動體纔離N點後一剎那中所過之面.此面交D道面或定面之角與未攝動時之NSC面不同.而NSC、NSC'二面之交角卽NSQ、NSQ'二面之交角.既知此角,亦知D道面二交線之角QSQ',卽可依弧三角法推其與D道面之二交角.然則一剎那中交角之變與交點之移理相聯屬,欲考此亦必考彼也.此一若N道爲鐵線圈N體爲一珠行其上,N道之方位變N行之方向亦必變.然則N行之方向變N道之方位亦必變,所以交角與交點必同變也.諸行星及我月之道相與成角俱甚小,故雖交角與交點同變,而

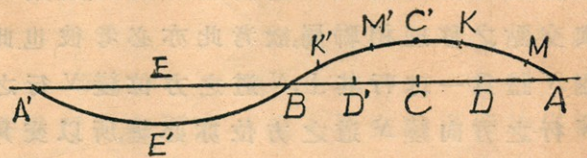


第二三七圖

交角之變較交點變甚小.蓋 NSQ、QSQ' 二面之交角卽二道之交角,既甚小,則 QNQ' 角必甚小於 QSQ' 角.若二道面之交角甚微,幾近於合,則 CNC' 角變雖甚微,Q 點移至 Q' 點必甚大也.

準前說,一刹那中因攝動所成之微曲線,若在 BEA、BCA 二道面之中間如 NK,交點必退行.若在 BCA 面之外如 NK',交點必進行.而交角之變大變小,不與交點相應.微曲線爲 NK 交角必變爲 NQE.微曲線爲 NK' 交角必變爲 $NQ'E$.在 BC 象限內 NQE 小於 NBE,$NQ'E$ 大於 NBE.在 CA 象限內 NQE 大於 NAE,$NQ'E$ 小於 NAQ.故凡攝動力拉 N 向 D 面 N 之本動亦漸近 D 面,或攝動力推 N 遠 D 面 N 之本動亦漸遠 D 面,則交角變大.凡攝動力拉 N 向 D 面 N 之本動却漸遠 D 面,或攝動力推 N 遠 D 面 N 之本動却漸近 D 面,則交角變小.約言之,N 本動與攝動其向 D 面背 D 面同,則交角變大,異則交角變小.

角之變一刹那中甚微,積久則大.欲推其數非用積分法不能.今不言數,但依上論之理論其由小漸變大,復由大漸變小,有一定時分,而其道之面擺動於中面之兩邊,設外行星爲內行星所攝動,內星道之半徑不及外星道半徑之半.如第二三八圖 ABA' 爲從 S 望 D 全道在天



第二三八圖

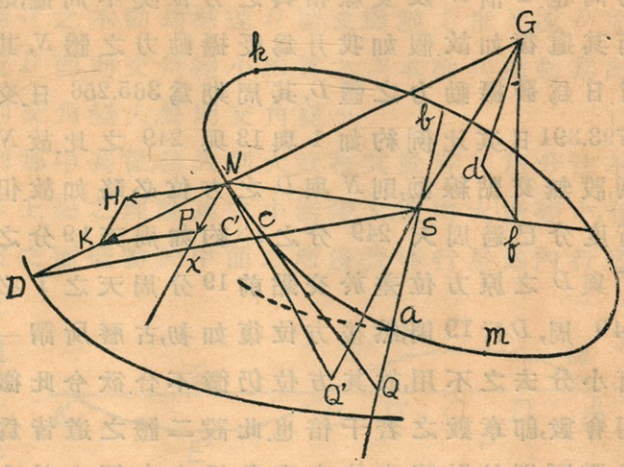
空如一直線,$AC'BE'A'$ 爲 N 道.設 D 體在 AB 半周內,則 N 行第一象限 AC' 爲漸遠 D 面,垂力亦令遠 D 面,故交角變大.行第二象限 $C'B$ 爲漸近 D 面,垂力却令遠 D 面,故交角變小.行第三象限 BE' 爲漸遠 D 面垂力却令近 D 面,故交角變小.行第四象限 $E'A'$ 爲漸近 D 面垂力亦令近 D 面,故交角變大.是 N 行一周,其道面

擺動二次.若D定於C點不動,兩邊之攝力等,則N行一周其道面必復至原處.若D在他點兩邊攝力不等,則N行一周,其角變大變小不能適相補.但D體在D與在D'距C相等所生之變必恰相反,而二處所得中數一似D體平分爲二,一在D一在D',所生之變必適相補.以遍D道各點所得中數推之,一似D體勻分於全道成一圈,故在交線左右所生各變一一相對相補也.若外星爲內星攝動而內星道之半徑大於外星道半徑之半,又或內星爲外星所攝動,則N道內KM一段其變必與本象限相反.任設D體在D.乃取CD'等於CD,又取$K'M'$與KM相似,則D體在D及D',N在KM及$K'M'$,其相關之理亦正相反而恰相補仍同也.D偕N及交線相與之方位莫不周徧,則其變盡相補足而其道復如故.假如我月爲受攝動力之體N,其周期爲27.322日.日爲發攝動力之體D,其周期爲365.256日.交點線之周期爲6793.391日.其比例約如1與13與249之比.故N行13周,D行1周,設無交點線動,則N與D之方位必略如故.但此時交點線所行度分已過周天249分之13約如周天19分之1.此爲退行,故N與D之原方位差於交點前19分周天之1必更19倍之,N行249周,D行19周,然後方位復如初,古曆所謂一章也.然數末尙有小分去之不用,故其方位仍微不合.欲令此微不合亦消去,當用會數,卽章數之若干倍也.此設二體之道皆爲平圜則然.若皆爲橢圜,則統計諸方位令交角增之力恆大於令交角損之力.設交點與長徑俱不動,則交角必有增無減.今不然者,一因交點有行分過半周時諸方位令交角增損之力相反,一因長徑之行亦不以平速則令交角增損之方位恆移易於道中故也.又交角因兩心差所生變亦有一定時,而兩心差甚小,其所生變甚微,則所生交角變大小之限亦必甚微.幾何家言諸道相與之交角令諸

行星之力相定於空中.拉哥蘭基細推其理,謂各行星之質量乘本道長徑之平方根,又以交定面角之正切平方乘之,所得諸數,其和恆等.試以今黃道面爲定面依法推得其和數果恆等,而甚小.然則諸大行星之道永無大變,而諸行星互相補其差.

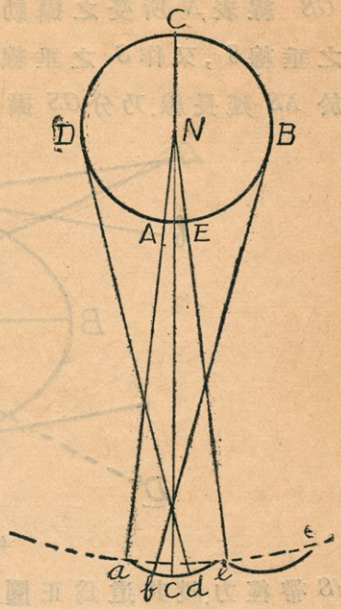
黃道面恆因諸行星之攝動力而變,令黃赤大距漸小,百年約48秒,測諸星之緯度或增或損而知之.準上論理,則其變小必有限,至限必復變大也.其最大最小在中數之左右各1度21分.

§352. 歲差章動 黃道面變方位,交定面之點必退行,此事與歲差雜糅難分,此當詳考歲差之理以辨別之.歲差者,黃赤交點恆退行於黃道面是也.此與諸行星道交點退行之理同,亦生於攝動.其攝動力非發於諸行星而發於日與月.蓋日較諸行星甚大,月較諸行星甚近,故此二體之攝力同攝地球赤道上之凸積,地又自轉,而歲差生焉.今細論之,如第二三九圖外星D攝內星N.假如N之質量平散於全道,成一流質圈(其每一質點可作爲小衛星論),D之攝力加之令繞S行於本面,則必生二事:(一)道之面必變如浪紋形,ka與mb二段交D面角必愈大,am與bk二段交角必愈小.(二)交點必退行於D道面.此二事各不相涉.若不爲流質圈而爲定質成一堅圈,則圈中



第二三九圖

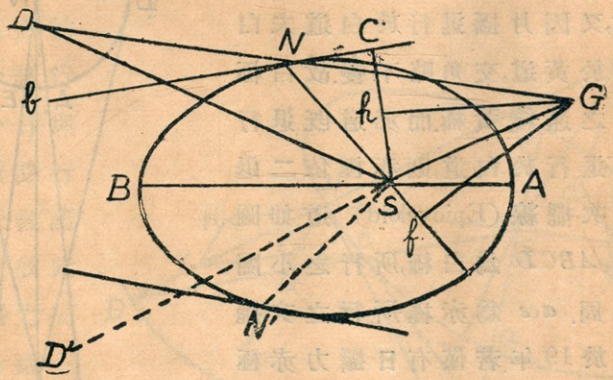
有若干分欲令交角變大,有若干分欲令交角變小,此必相消.每時刻依圈行,用其相消之餘成角之變.又圈中諸質點有若干分欲交點順行,有若干分欲交點退行,亦必相消以其餘成進退行.夫赤道卽定質圈也.發攝動力者爲日爲月,俱不與赤道同面.則其交點必恒退行,蓋堅圈與質體周行於圈之理同也.此圈若不附於他物,交點之退行當甚速.今赤道圈與地球合爲一體,交點行之理惟赤道及諸距等圈有之,與全地球無涉.諸圈體質之和卽地殼較全地球甚小,則諸圈退行力爲地球質阻力所消甚多,故交點行速率變甚小.以日力言之,卽歲差也.然赤道之交點,又因月攝退行於白道.夫白道旣退行於黃道,交角略不變.故白極依交點行之速繞黃極.而赤道旣退行於黃道又退行於白道,則赤極依二退行必行成次擺線(Epicycloid)道.如圖 N 爲黃極,$ABCD$ 爲白極,所行之小圈約19年一周.ace 爲赤極所行之次擺線,其時大於19年.若僅有日攝力赤極當行於 ae 虛線.此虛線爲圓圈之一部分,而圓圈之直徑乃黃赤大距23度27分也.今又有月攝力,則赤極所行方向恆正交赤白二極距.如白極在 A 赤極行在 a,其方向正交 Aa.白極至 B 赤極行至 b,其方向正交 Bb.白極自 A 行一周餘至 E,赤極行成一次擺線 ace,其速率時大時小,每次皆然,是謂歲差合章動所生之行動.依此理考諸力之率卽得歲差及章動之數,與測望密合.日月所生二差之比,若2與5之比.旣得此二差,則



第二四〇圖

黃道交定面點因諸行星攝動退行之數亦得,與理所應得亦密合也.因其密合,是以知地球非外爲薄壳內爲液體,如向之所擬議也者.蓋若內爲液體,則外壳必爲滑動而致退行更速也.

§353. 長徑之攝動 茲論星面內諸長短差,不及交角,故設諸道在一面內,令其理更易明也.如圖 ANB 爲 N 未被攝動之橢圓道,D 爲發攝動力體,作 DN 聯線任引長之.S 爲中體.取 Da 等於 DS,又取 DG,令 DG 與 Da 比若 Da 與 DN 之二平方比.乃作 GS 線表 N 所受之攝動力及方向.次作 N 點之切線 bc,次作 bc 之垂線 Sc,又作 Sc 之垂線 Gh,又引長 NS 線而由 G 點作 Gf 線垂於 NS 延長線.乃分 GS 攝動力爲 Gh 切力,hS 法力.或分爲 Gf 橫力,



第二四一圖

fS 帶徑力.設其道爲正圜或微橢,則 NSf 與 cS 合而切法二力與橫帶徑二力略等,乃考切法二力所生橢圓諸根數每刻之變.先論長徑.行星受日攝力幷他星攝動力行成無法之曲線.分此曲線爲無數小分,則每分有一定曲率及方向與橢圓合,故可恆以橢圓推之.但每刻中橢圓之根數與前一刻後一刻橢圓之根數不同.因曲率能變距日之遠近,方向能變橢圜之方位也.然長徑不因之而增減.距日之遠近生於長徑,不能變長徑.而橢圓之方

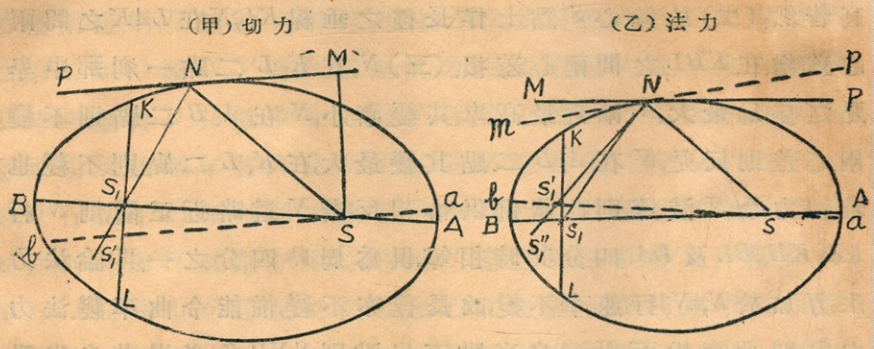
位與長徑無涉也.準刻白爾測定之例.凡橢圓道皆遷中心攝力而成.星任在道中何點,若知其速率及距日數,長徑亦可知,而星行之方向不論.蓋方向變僅能令兩心差及橢圓之方位變而不能令長徑變也.然則長徑因何而變乎.曰長徑之刻刻增減,其故因速率之變而生,速率之變因切力而生,切力與星行方向同,則速率增而長徑亦增,方向異,則速率減而長徑亦減.如第二四一圖AB爲長徑.作SN'、SD'二虛線,其交長徑角與SN、SD二線者等.設外星在D',內星在N',則D'加攝力於N'、S二體與D加攝力於N、S二體等,而N、N'所受之切力亦等.故N所增之速等於N'所減之速,而長徑必一增一減,其所增必等於所減.設D道爲正圜,D、N二周時無通約性,則二星行至多周必有時D與N在長徑此邊之方位與前在彼邊之方位相似,此方位長徑之變與彼方位長徑之變必恰相反,至無窮周歷盡一切方位則所生長徑之變必恰補盡.設D、N二道俱爲正圓,則D行一周,長徑必復如初.蓋四象限之切力兩兩相等而相反,故恰相補也.設N道爲正圜,D道爲橢圓,則D從最卑至最高半周漸遠於S,其攝動力必漸衰.從最高至最卑半周漸近於S,其攝動力必漸加.N不能定居於D道之長徑上,故D行一周其切力雖相反而不相等不能恰相補,必行多周歷盡N、D、S相與之各方位,然後長徑之變盡補.

設N、D二道俱爲橢圜而二長徑之方向不同,則與上所論者不合矣.當以動力學之公理論之.凡物動時有向心力恆加之令刻刻變速率,名曰長加力,其力之大小與距心遠近之平方有反比例.物在空中從此點至彼點,其速率之變遷二點空中之方位,不遷二點中間所過之曲線.諸長加力中之平行力可當作無窮遠定心所發.如此若物行從N起仍至N時,其速率必仍如初.準此設D有定處不動,N恆受三力:(一)S之攝力,方向爲NS.(二)

D之攝力,方向爲ND.(三)D加S之攝力,方向爲DS,恆在DS平行線上.N行一周復至原處,其速率與長徑必略如初.倘有小差爲攝動力變其道所生,然甚小可不論.設D雖不繞S而漸遠於S,則N至原處速率之差不能補足,必N行多周俟D復漸近S然後消盡.則D無論定於何方位,N行多周必得各點相對稱,俱如第二四一圖.N、N'令D所加之力相反.然則D雖不定,行無數周時必盡得D在道中各方位,N行若干周中之相對各點其力兩兩相反.故歷年甚久後,所生之差必消盡也.又設令N定於一處,D行若干周,理亦同.夫攝動力令兩心差生短差,又令長徑移方位,則N與D至原方位時,其距S遠近及速率必各不同.然長徑行一周其距S遠近必復原,兩心差之變一終其速率必復原.故N、D至原方位、長徑周、兩心差變終,三者會於一時,則一切如初.此必多歷年所,久之又久之,始一遇也.此理不關於力之方向,或在平面內或無論從何處來皆同.故D、N二道雖有交角,理亦合.但有交角變及交點行,則N行一周不能至一定之原方位.然交角變大小,其面恆在中面之二邊相去不遠.而每次交點行一周時,N至原經度必不在原處,或在中面上或在中面下,其距必有時彼此相等,故歷無數周其差必消盡.如上所論既爲公理,則無論有若干定心,無論何方位,且無論有若干發攝動力之體,其理俱同,不過推其相消法更繁耳.有此奇理,故知諸行星道之長徑其差必復,其平速周時亦然.如歲實雖有消長,統計之實無增損也.故諸行星距日之數不能增至無窮,亦不至漸近日而合爲一.統計之其道大小不變也.此事拉哥蘭基得之,實推步家至要之理也.地日距若加十分之一,則一切動植諸物俱難生活.然長徑變長變短離中數不遠.依理推測諸行星長徑之增損,除火木間諸小星外,未有過中數千分之一也.

§354. 兩心差之攝動　長徑之增損遷切力而兩心差及長徑方向二根之變則兼遷法切二力，今分考之，先論切力。根據第292節所論切力令N增速則有諸例：(一)最卑新方位a與N俱在原長徑AB之一邊，無論N從最高至最卑或從最卑至最高皆然。(二)於餘心S點上作長徑之垂線KL，N在LAK之間兩心差增，在KBL之間兩心差損。(三)N在K、L二點一刹那中卑點之變爲最大，N漸近最高卑其變漸小，N在A、B二點則不變。兩心差則反是，N在A、B二點其變最大，在K、L二點則不變也。若切力令N減速，則此諸例俱恰相反；若N道略近正圓，則N行AK、KB、BL及LA四分其時相等，俱爲周時四分之一。再論法力。法力加於N，N行速率不變，故長徑亦不變，惟能令曲率變。法力向內，則曲率增，而N行自高點至卑點則SNP角必損，若自卑點至高點則SNP角必增。今設N自高點至卑點，因SNP損，故切線NP必變爲Np而餘心S_1必移其處。欲知在何點，取SNS'_1角等於180度減二倍SNp角或取$S_1NS'_1$角等於二PNp角，又取NS'_1與NS_1等則S'_1即餘心所移之處也。乃作SS'_1線引長成ab爲長徑之新方位。a爲新卑點，半SS'_1爲新兩心差。故法力向內，N自高點至卑點則有諸例：(一)若N在KA之間則長徑順行，S'_1與N在原徑一邊，N恰在K則長徑不行，N在KB之間，則長徑逆行，S'_1與N在原徑兩邊。(二)兩心差增，N在K點，其增最大，在高卑二點不增。若N自卑點向高點，則諸例俱相反。又若法力向外，則一切相反。又兩心差卑點距二事之變互爲消長，此變速則彼變遲，此極速則彼爲無也。又餘心之移遷切法二力，此二力恆正交亦互爲消長，此力愈大則彼力愈小也。欲推刹那中攝動之差必準動力學分推刹那中切法二力所得之速率，各令二根所生之差，視其同號則相加，異號則相減。或先取$S_1NS''_1$角倍於

法力所生 PNp 角，又取 NS''_1 等於 NS_1，加減切力所生長徑差，得 S'_1 爲餘心之處，其他俱可推矣。欲知 PNp 角以此時 N 行速率約法力所生之速率即得。今列二表，N 行全道切法二力生差之例，一覽了然矣。



第二四二圖

表 S. 切力生差表

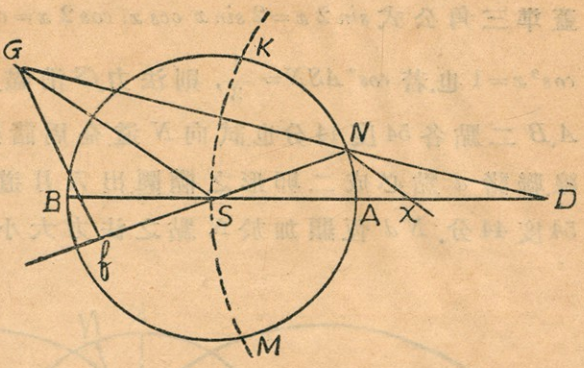
N 行	N所在	切力所生	根之差
高至卑	無論	速率增	長徑退
高至卑	無論	速率損	長徑進
高至卑	無論	速率增	長徑進
高至卑	無論	速率損	長徑退
無論	近高點	速率增	兩心差損
無論	近高點	速率損	兩心差增
無論	近卑點	速率增	兩心差增
無論	近卑點	速率損	兩心差損

表 T. 法力生差表

N 行	N所在	法力所向	根之差
無論	近高點	向內	長徑退
無論	近高點	向外	長徑進
無論	近卑點	向內	長徑進
無論	近卑點	向外	長徑退
高至卑	無論	向內	兩心差增
高至卑	無論	向外	兩心差損
卑至高	無論	向內	兩心差損
卑至高	無論	向外	兩心差增

長徑之行兩心差之變本一理，試設其道爲正圓論之，簡而易明也，道爲正圓則切法二力與橫帶徑二力合，故推橫力帶徑力如推切法二力也。如第二四三圖 DN 與 DS 之二平方比，若 DS

與 DG 比.GN 爲 DG 減去 DN,Gf 等於 GN 乘 GNS 正弦,亦等於 GN 乘 ASN、SDN 二角和之正弦.又 fS 爲 Nf 減去 NS,卽等於 GN 乘 GNS 餘弦減去 NS,亦等於 GN 乘 ASN、SDN 二角和之餘弦減去 SN.Gf 卽顯切力,fS 卽顯法力也.凡 N 從 M 至 A 從 K 至 B 切力令其速增.從 A 至 K 從 B 至 M 切力令其速減.在 A、K、B、M 四點切力消盡,在 AK、KB、BM、MA 四分之中則最大.又 N 近 A、B 二點法力向外,近 K、M 二點法力向內.在 A、K、B、M 四點法力最大,在 AK、KB、BM、MA 四分之中則消盡.試設 N 在各處一一作圖玩之自明也.若 D 最遠,則法力消盡之點略近 K、M 而遠 A、B.



第二四三圖

準上理推月道,法更簡便.蓋 D 爲日,距地月甚遠,月道半徑日視之不過 8 分,故 GN 與 AB 一若平行而 KM 一若直線.以 SN 爲半徑,則

$$NW=SN\times \cos ASN.$$

又因 SDN 角一若爲零,故

$$Gf=GN\times \sin ASN,$$
$$fN=GN\times \cos ASN.$$

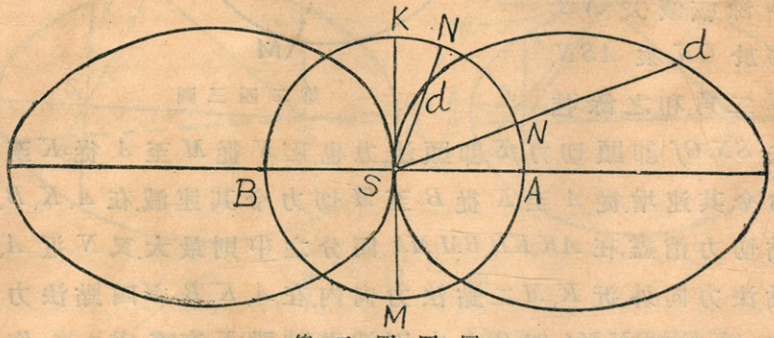
又因 GN 幾與 Sx 平行,則準前月理

$$GN\fallingdotseq 3NW\fallingdotseq 3SN\times \cos ASN.$$

故
$$Gf=3SN\times \sin ASN\cos ASN=\frac{3}{2}SN\times \sin 2ASN,$$

及
$$fS=3SN\cos^2 ASN-SN=\frac{1}{2}SN(3\cos 2ASN+1).$$

蓋準三角公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, 及 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 也.若 $\cos^2 ASN=\frac{1}{3}$, 則法力 fS 消盡.蓋 GN 割 N 道二點距 A、B 二點各 54 度 44 分也.試向 N 道.全周諸點作 $Sd=3SN\cos^2 ASN$ 線.聯諸 d 點必成二卵形之橢圓.出入月道四點距 A、B 二點各 54 度 44 分. Nd 恆顯加於 N 點之法力大小方向也.



第二四四圖

§355. 行星道長徑之行 推諸行星道長徑之行,兩心差之變,有簡於月道者,有繁於月道者.其簡者何?一周中長徑之變甚微則體與長徑逐周所成各方位略不變.又發攝動體或進或退,受攝動體之長徑雖隨之進退亦甚小,俱可不論.又月道之長徑進退甚大,須加推由攝動力平方而來之部分,行星長徑進退甚微無須此也.其繁者何?受攝動發攝動二體周時之比甚小於 13 與 1 之比,則 N 行一周 D 與 N 道長徑變方位之度甚大.前論月,N 一周設 D 爲不動以便算,其差不甚大.若行星,則 N 一周 D 已行多度,設爲不動其差甚大,故不能也.如木受土攝動,木一周土已行 140 度,設爲不動,則攝動諸力盡不合矣.又若外星受內星攝動,則 D 與 N 道長徑方位之變速於 D 與中體方位之變,更不能設 D 爲不動矣.又 D 道兩心差變爲最要事.其故甚繁不能以

言喻,必用代數式及微分法方能推之.又水金及地球爲木土諸星所攝動與常理不甚合.各道之長徑因土木諸星所攝而進前,常也.乃有時遽 N、D 二體相距,二兩心差之大小,及二長徑相與之方位,令常徑退後與常理相反.如金星道之長徑受地球水星攝動力之和而退後,受木土諸星之力而進前,而退更速於進,故其長徑恆退行,是也.

推諸行星道長徑行兩心差之變,設其道略近正圜,則攝動諸力無大變.故長徑進退兩心差大小,行若干周後盡歷諸方位必相消而復初.觀前切法二力生差表,理易明.蓋 D 按次在本道恰相對二點,一與 N 之高點成方位,一與 N 之卑點成方位,相似而相反.二道既略近正圜,則切力或法力之分佈對合點線兩邊相稱.故 N 之卑點前後半周與 D 道此點諸力相關,一如 N 之高點前後半周與相對點諸力相關,又 N 自高至卑半周與 D 道此點諸力相關,一如自卑至高半周與相對點諸力相關,而長徑進退兩心差增損俱恰相反.故 D 任在何點加於 N 之力與 DN 俱在對面所加之力必恰相消,而長徑兩心差之變,亦必恰相消.設二道俱非正圜,則諸力不能恰相消.然兩心差非甚大,則其大分仍如上相消,所謂短差也.而餘小分積久不消以成長差.推長差之法甚繁,今不暇細論,但論生差之大.凡亦必分法切二力.法力所生在二星合點爲最大,蓋在合點法力最强故也.雖合點距高卑點各90度時長徑不移,合點合高卑二點時兩心差不生變,而距此二方位各90度則法力所生之差最大也.切力最强時每因方位之故相消,又無論合點距高卑二點若干,二星合時無切力;故長差生於法力者爲多,生於合點之法力者爲最多也.設合點在二道最近點,則所生差尤多.今試論之,夫同心二橢圜各有卑點,其方位刻刻不同.則二道最近點在 N 道之卑點可,在 N 道之

高點可,在道中無論何點俱可.設在卑點,N 道在內,D 道在外,則法力向外,故長徑退;N 道在外,D 道在內,則法力向內,故長徑進.設在高點,則俱相反.然兩心差俱不變,在高卑中間諸點則長徑之進退小而兩心差之增損大.準此,若僅有二行星,久之最近點必因長徑兩心差之變而亦漸變,而長徑之行,又因最近點變而或增或損或相反,兩心差亦因之或增或損,俱有定時,與長徑相應.然又有諸行星皆相攝動,則亦當推諸道兩心之最近點.故其法雜糅而甚繁也.

§356. 諸行星相攝動 諸行星相攝動,最卑之行兩心差之變,二道互爲消長,交點交角亦然.舉土木二星以例其餘,設土木外無他行星,則土道兩心差最大必爲0.08409,最小必爲0.01345.木道兩心差最大必爲0.0603,最小必爲0.02606.木道之兩心差最大時,土之兩心差最小.木最小時,土最大.歷70414年而一終.若諸星道之兩心差俱復初,必歷幾萬萬年也.

卑點之行於本星無甚關係,而兩心差之變則關係甚大.蓋本星面寒暑之中率實遷之增損焉.各行星每周受日之光熱與橢圓道之短徑恆有比例.兩心差變,則短徑變而寒暑之中率必變.然則幾萬萬年中所生之差,必有行星兩心差之變甚大,令附面諸物俱不能生活.設我地球當之,則人物必俱死,即不死,亦必大苦矣.解者曰無慮也.天算家已詳推之而知其必無是事.拉哥蘭基謂諸行星之質量,各乘其道之半長徑平方根,又以其兩心差之平方乘之,其得數之和恆等.此乘數中一爲半長徑之平方根,一爲兩心差之平方,而各道之長徑增損無長差,則兩心差之增損必不至懸絕也.

1782年,拉哥蘭基推諸行星道兩心差變之限依諸相與之攝動而計之.惟因其爲根數之金星體質有誤,故得數不確.1843

年來未理亞以確切根數推之,得當時七行星道之最大兩心差爲水星道0.225646,金星道0.086716,地道0.077747,火星道0.142243,木星道0.061548,土星道0.084919,天王星道0.064646.雖拉哥蘭基之數因其根數有數差而得兩心差之常變差不合,但所得變之最大界限,則與來未理亞所得者大同而小異耳.來未理亞得地道之最小兩心差0.003314在1800年.以此年爲元,漸變大,大極而又漸小,再至最小之時歷23980年,適在1862年後23919年也.木星

表U. 來未里亞所推地道之根數表

元前後之年數	兩心差	卑點之黃經		交角			正交點之黃經	
		度	分	度	分	秒	度	分
前								
100000	0.0473	316	18	3	45	31	96	33
90000	0.0452	340	2	2	42	19	76	17
80000	0.0398	4	13	1	18	58	73	47
70000	0.0316	27	22	1	13	58	136	8
60000	0.0218	46	8	2	36	42	136	29
50000	0.0131	50	14	3	40	11	116	9
40000	0.0109	28	36	4	3	1	91	59
30000	0.0151	5	50	3	41	51	66	49
20000	0.0188	44	0	2	44	12	41	34
10000	0.0187	78	28	1	24	35	16	39
元年	0.0168	90	30	0	0	0	0	0
後								
10000	0.0153	134	14	1	14	26	148	15
20000	0.0047	192	22	2	7	46	124	29
30000	0.0059	318	47	2	33	19	100	29
40000	0.0124	6	25	2	27	53	75	31
50000	0.0173	38	3	1	51	54	48	13
60000	0.0199	64	31	0	51	52	10	47
70000	0.0211	71	7	0	34	55	220	38
80000	0.0188	101	38	1	45	40	170	15
90000	0.0176	109	19	2	40	56	139	3
100000	0.0189	114	5	3	2	57	109	57

註　以耶紀1800年爲元.

表 V. 克羅爾所推地道之兩心差與卑點之黃經表

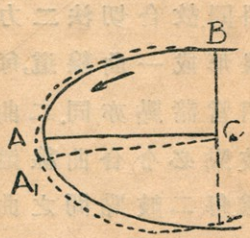
元前之年數	兩心差	卑點之黃經		元後之年數	兩心差	卑點之黃經	
		度	分			度	分
1000000	0.0151	248	22	50000	0.0173	38	12
950000	0.0517	97	51	100000	0.0191	114	50
900000	0.0102	135	2	150000	0.0353	201	57
850000	0.0747	239	28	200000	0.0076	303	30
800000	0.0132	343	49	250000	0.0286	350	54
750000	0.0575	27	18	300000	0.0158	179	29
700000	0.0220	208	13	350000	0.0098	201	40
650000	0.0226	141	29	400000	0.0429	6	9
600000	0.0417	32	34	450000	0.0231	98	37
550000	0.0166	251	50	500000	0.0534	157	26
500000	0.0388	193	56	550000	0.0259	287	31
450000	0.0308	356	52	600000	0.0395	285	43
400000	0.0170	290	7	650000	0.0169	144	3
350000	0.0195	182	50	700000	0.0357	17	12
300000	0.0424	23	29	750000	0.0195	0	53
250000	0.0258	59	39	800000	0.0639	140	38
200000	0.0569	168	18	850000	0.0144	176	41
150000	0.0332	242	56	900000	0.0659	291	16
100000	0.0473	316	2	950000	0 0086	115	13
50000	0.0131	50	3	1000000	0.0528	57	31
0	0.0168	99	30				

註 以耶紀1800年爲元.

土星天王星道之兩心差自最小至最小之時,約 900000 年,而多少4000 年不定.土星道之兩心差最小 0.0136, 自最小至最小之時,約34647年,而多少 117 年不定,下次最小當在1862年後16053年.附表載有來未理亞所推地道之根數,自元之前 100000 年至後 100000 年,每萬年之數.另有克羅爾所推得地道兩心差,在元之前後各1000000年之數.

§357. 月道長徑行之理可以器顯之 法用鐵線或銅線任長十餘尺懸一鉛球,下承以平板,球板相去甚微.取球略偏向旁

推放之令旋轉,必行成小橢圓,原垂線在其中點.若於球底中心安一鉛筆,必畫橢圓圈於板.此長徑之方向不甚變,爲風氣所阻,橢圓必漸變小而定.若取球大偏與垂線成角約15度至20度旁推之,則所行橢圓大.其長徑之方向,每周必逐漸前移,與球行之方向同.久之長徑必至短徑之處,既而還至原方向,卽如月道長徑之行也.問此橢圓道之長徑何以能進前行.曰取球偏而放之令旋轉,必常有力加之,其方向恆正交鐵線.此力恆變,其大小之比,若鐵線交原垂線角正弦之比.弧甚小,則正弦之比略如弧之比.取球小偏,弧與正弦無別.其行一周球受中心之攝力與距數比例恆合,故長徑不移.若球大偏,鐵線與垂線成大角.則受中心之攝力恆如正弦之比例,而距數恆如弧之比例.弧變大正弦亦變大,而正弦之變不能若弧之速.故球向中心之力較行橢圓之力略小,則近長徑界曲率必損.故至原長徑界A不能復正交距心線,必行至A_1方正交,是長徑進前也.觀圖自明,此不過借以明月道,實與月道之理不全合.蓋其攝動僅有帶徑力無橫力也.

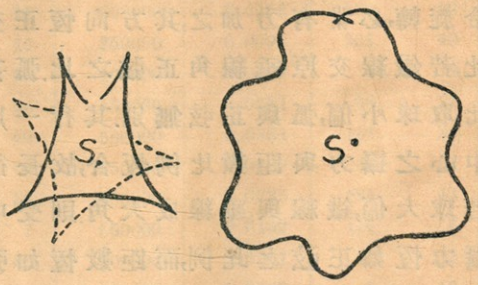


第二四五圖

§358.逐時經緯度之差（附海王星之發現史）　欲知行星與月逐時經緯度之差,不特當知長差,亦不特當知短差,必當知短差令星月之軌道行變遲速而經度變,令星月道之面與定面變交角而緯度變.經緯度諸變法其中有因久測而得.前人但知其當然未知其所以然.後人用攝力遞解遞明,初若與攝力不合,細考之知亦本於攝力,而攝力之理愈確不可易已.

(一)短差　二行星相攝動亦生二差,理與月之二均差角差同,然道之大小不同,則其差亦異,觀前二體攝動表自明.如海王攝動天王在下合點之力較上合點大十餘倍.故重橢曲道中心

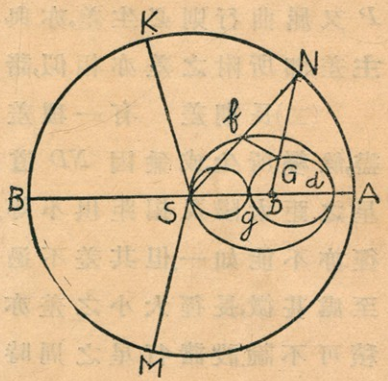
點繞S之道與橢曲道之比例,較月甚大.又設外星受內星攝動,則發攝動體之行度速於受攝動體.故雖順行,而道上切法諸無力點順行甚速,恆追及N,則N一若退行.而N遇此諸點,則道之本心P適至曲線之歧點.故無論D在何處,N行過諸無力點P行過諸歧點中間之度必變小,其比例若會合周與恆星周之比.凡N行每會合周P（星道本心）依切法二力在二曲線形上次第過諸歧點,其相距之度皆同,距合點度又彼此相同.故合切法二力之曲線形成一曲線道,每周中相當諸點亦同.二曲線之歧點必令合曲線道生凸處.每二岐點間之曲線,必令合曲線道生凹處.故P所行之眞道若發攝動體不動,則一周後必仍至原處,若亦動則不能復至原處而成曲螺線道.設發攝動與受攝動二體之周時爲可通約之數.則二合中間P所過恆星經度與360度有比例.若無通約性,則亦無比例,而一會合周中依所行二曲線若干歧點及方位以成合曲線道,道上之向內向外及或速或遲,每次仍同.



第二四六圖

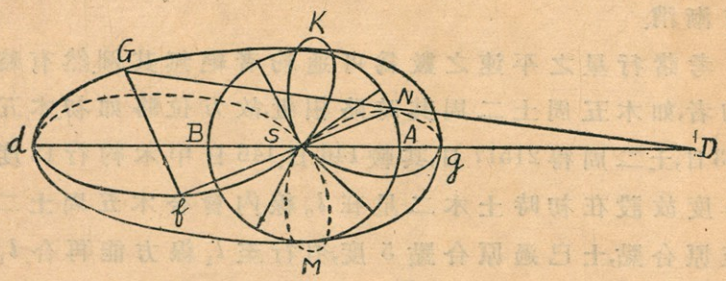
凡二星之攝動法當分三種:第一發攝動體D在外,則切法二力在受攝動體N道上各有四無力點.切力之四點一爲下合點,一爲上合點,餘二點在下合點左右,其距發攝動體與日同,名曰等距點.法力之四點俱在合點與等距點之中間.若D體甚遠,則法力四無力點遠於合點,近於二弦點,與月道同.D體漸近,則下合等距中間二無法力點,更近下合點.若DN二道等,則二無法力點俱與下合點合爲一.第二發攝動體D在內,而D道徑大

於N道半徑,則切力有四無力點,法力只有二無力點.切力之四點二在合衝二點,二在兩等距點,與上同.D道愈大,等距點愈遠於衝點,愈小愈近於衝點.二道相等距衝點60度.N道徑D道徑則與衝點合爲一.如土星受木星攝動,等距點離衝點23度33分.N自衝後行一象限速率恆損.再行至合,速率恆增,自合至衝亦然.法力二點距合點近於距衝點,D道變大小,此二點方位不甚變.第三亦D在內而D道徑小於N道半徑,則切法二力,各有二無力點.切力之二點在合衝二點.N自衝至合半道速率恆增.自合至衝半道速率恆損,距合點約90度增損最大,法力二點與第二種略同.學者當依此三種作若干圖,令D道自極大至極小,設D爲不動,如前第二四三圖作Gf二點使各在橢圓上,玩之理自明也.



第二四七圖

如第二四七圖SfG爲直角.fG爲切力率,Sf爲法力率,G恆行於dG橢圓,f恆行於fS及Sg二橢圓,此爲第三種圖.若第二種二橢圓之公頂點d在N道外,若第一種,則df,Sg二橢圓變爲四橢圓圈.其二圈之頂點切dg橢圓,



第二四八圖

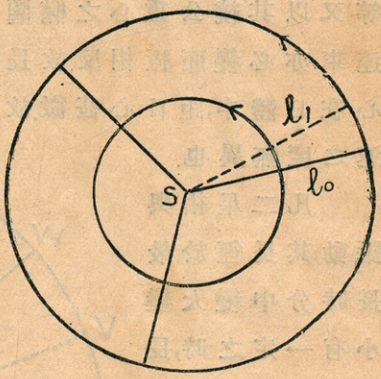
餘二圈割N道於二等距點及二切點.N至切點則DNS爲直角.

詳玩此二圖,則本心P所成螺曲線之圖亦易作.有三事當論之:(1)N與D每相連二合之間,P所行成小曲線,其諸小浪紋及末一點變方位大略同.(2)D爲外星,P行曲線道恆逆故每歷刹那橢圜之長徑恆微退.若P非屈曲行,則每合長徑與合點所成方位恆同.(3)若但長徑恆退而P非屈曲行,則N行一會合周必兩次在刹那中橢圓之卑點,兩次在高點,與月繞地之理同.今P又屈曲行則必生差,亦與月之二均差相似,不僅如此所生之主差,卽所附之差亦相似,諸差之和用以加減角差.

(二)長期差　有一種差或因N道或因D道之兩心差消不盡,餘變所生,或兼因ND道之兩心差變而生,令每當會合時二星之距太陽及相距俱不等.故相連二合其兩心差不能如一,長徑亦不能如一.但其差不過一周中未消之微餘.故其本心離當至處甚微,長徑大小之差亦甚微.此二差皆因切力而生,若非久積可不論.設諸行星之周時爲可通約之數,則諸合點之徑度有一定,卽能久積.是諸合點散列本道,其中必有一點加力於根數較强.故歷盡諸合成一會終其每周之餘差已補,因此一點力更强必尙留微差未補,再一會終,其差漸大.如此遞推必待長徑變,高卑點移,令行星之周爲不可通約之數而最有力之合點移,其差方漸消.

考諸行星之平速之數爲可通約者絕無其例.然有略近可通約者,如木五周土二周其時略相近,故方位略如初.木五周得21663日,土二周得21517日,其較146日.146日中木約行12度,土約行5度.故設在初時土木二星在l_0線內會合.木五周土二周後,木至原合點,土已過原合點5度,須行至l_1線方能再合.l_1雖與l_0相近而經度較大,細推之,二星每合爲7253.4日.三合得21760

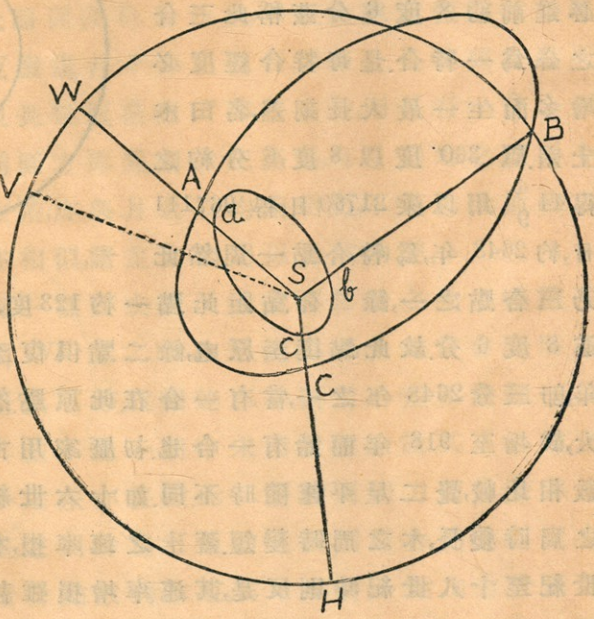
日.在土星行爲較二恆星周多 8 度 6 分,在木星行爲較 5 恆星周多 8 度 6 分.故每三合較前三合必進前約 8 度 6 分.茲稱此三合之合爲一特合.是每特合經度必增多而生一最大長期差,名曰木土差.置 360 度以 8 度 6 分約之得 $44\frac{4}{9}$.用以乘 21760 日得 967111 日,約 2648 年,爲特合點一周.然此乃三合點之一,餘二合點距此點一約 123 度,一約 246 度.俱特合進 8 度 6 分.故此點復至原處,餘二點俱復至原處.是以每 883 年,卽三分 2648 年之一,當有一合在此原點.然其長差因積久而大,故增至 918 年而始有一合也.初歷家用古今土木二星之測數相比較,覺二星平速隨時不同.如十六世紀至十七世紀時土之周時變長,木之周時變短.蓋土之速率損,木之速率增也.十七世紀至十八世紀時則反是,其速率增損雖甚微,但積久而大,則推算與測望不合.歷代天文諸士不能解其故,幾欲廢牛頓攝力之說,至拉普拉瑟發明之,上所論列,卽拉普氏之說也.此差遞增遞損,最大土星經度約 49 分(或謂 48 分),木星經度約 21 分(或謂 28 分).淺言之,一星變速則一星變遲.蓋木令土自 N 向 D,則土必令木自 D 向 N,故一星退後一星必進前,然其理尙未全.何則?凡論攝動恆以日爲定,兩星之行皆爲對日之行,攝動力令相對之行變,其力非加於二星之聯線也.若云日與二星俱繞一公重心,而二星加攝力於日各令行一小橢圓,日兼用此二橢圓行成一小道,如是則 DN 互相攝動,謂其全力加於聯線上於理方無虧缺也.準此凡 N 因 D 而生進行,D 必因 N 而生退行,二者相



第二四九圖

等.又以其繞公重心之橢圓行言之,一星之速率變則餘一星之速率亦必變而恆相反.故長差之一終,中函二星之多周.按公重心在日體中,距日心甚微.故或以日爲心或以公重心爲心,推平速之度無異也.

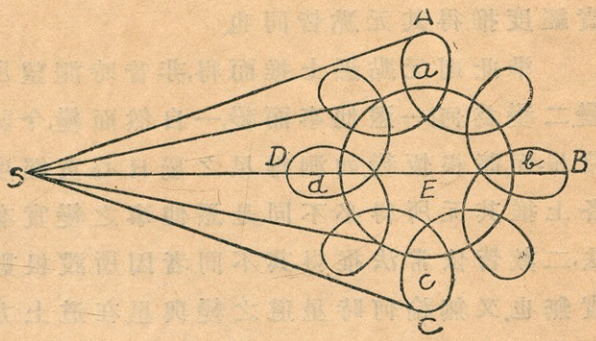
凡二星相與攝動,其長徑於最長時分中變大變小有一定之時,長差因之而生.幾何家定其率,謂二星經度變之比,若二星體積各以本道長徑平方根乘之之反比.驗諸測望相合.今論其理,如第二五〇圖 ABC 爲土道,abc 爲木道,A、a 爲二星,先合於 SW 線,次合於 SH 線,距 SW 123 度.又次合於 SB 線,距 SW 246 度.又次合於 SV 線,距 SW 368 度.SH、SB 俱甚遠於 SW,準二道之最高點所生變必與 SW 大不同.而 SV 略近於 SW 則必略如初,故每三合必大消其差.所以長期差非每三合內積聚之全差乃其中各合未消盡之餘差也.



第二五〇圖

凡二行星之平速使其周時爲可通約之數者,理皆如土木二星.如金 13 周與地 8 周之時略相近,故每 5 合方位略如初,其差不滿 240 分周之 1.故相消之餘甚微.愛里曾細推之,最大不過數秒（約 3 秒）,其周時約 249 年也（235 年）.天王海王二

星亦有甚大之長期差,其周期約4000餘年.經度之增減有長差,本心移動亦有長差與之相應.蓋本心移動生於兩心差之增減及長徑之易方位也.凡正圜道本心P所繞之中心點與日心S合,橢圜道則不合,而用一周中本心所歷諸方位可推中心點所在.若體每在合點時曲線之歧點距中心點俱等,則中心點不動然在諸合點中必有一合令其歧點距中心點獨遠,則中心點必移遞合遞移,故本心繞其中心點,而中心點又繞一定中心.定中心者長期差一終時中中心點所成道之中心也.如第二五一圖S爲日,若無差則E爲本心.今有差,故本心行於$ABCD$曲線道以繞E.而一終中兩心差最小爲SD,最大爲SB,長徑方位變之二限爲SA及SC,又中心點所行之道爲$abcd$.則bD爲兩心差中數差,aSc爲最卑點之經度大差.本心差動一終與經度差一終之時等,但移動差之最大與經度差之最大非必同時.蓋長徑之增損憑切力,切力最大不在二合點而遠在他點.兩心差之增損兼憑切法二力.法力最大在下合點.是以諸合點中令長徑增損最大之合點非必令兩心差增損最大之合點.故長徑最大非必與兩心差或最大或最小合,亦非必與高卑點進退最大合.然此星道之長徑及兩心差變,彼星道之長徑及兩心差必有相反之變,此理之必然也.



第二五一圖

(三)元點(平黃經元點)之變　無論行星與月所變之根數皆有六:曰交點黃經度,曰交角,曰長徑,曰兩心差,曰卑點黃經

度,曰元點.卑點黃經度以上五根之變,前已詳論,今特解元點之變.元點者,歷元星所在之點也.由平黃經度可推橢圓之實經度.反其法測得實經度,並知諸根數可以推其時之平黃經度,則元點亦可知.蓋平黃經度與時正相應,歷若干平黃經度當有若干時也.故此根名平黃經元點.設星道之諸根數不變,則任用何時實經度推得其元點皆同也.

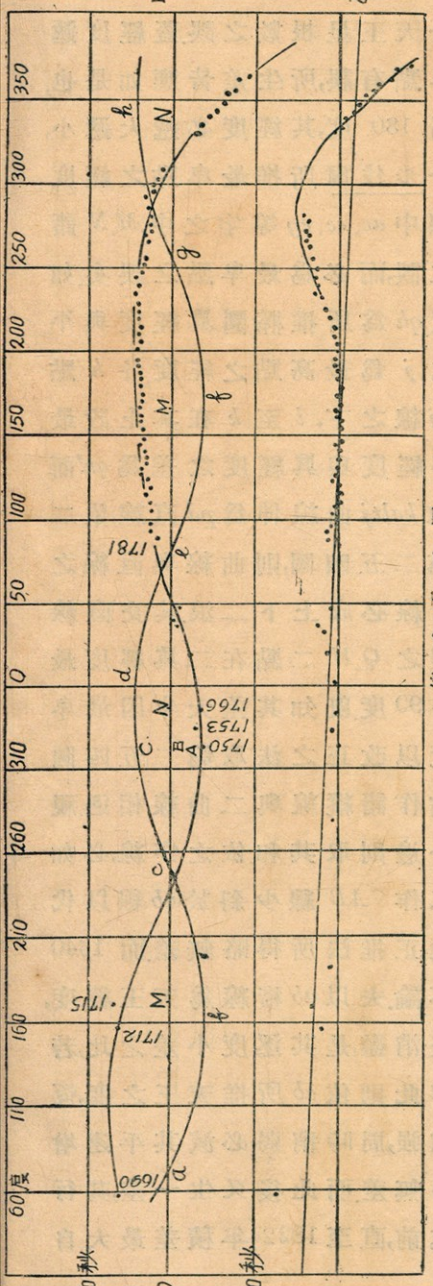
準此則元點憑上推而得,非昔時測望所得,故難保其無二變.二變爲何?一憑他事而變,一自然而變,今試考論之.推算必用諸根,而諸根恆變.如測得星之屬日心黃經度,用前後兩種根數各上推其元所得必不同.是憑他事之變實有之.推元不能用別法,二數皆依常法推得,其不同者因所設根數不同,是自然之變實無也.又無論何時星道之變與星在道上方位之變,皆因攝動力變星之速率及方向而生,可以本心逐時之行及道面方位逐時之變發明之.故元點不能自變,但憑他根數而變也.然經度之差,若非因長徑令周時變而生,而因他根數變而生,可當作元點之自然變.考此種差,因受攝動體距中體之中數刻刻變,不生於半長徑之變.蓋半長徑爲虛數,此刻刻變之中數爲眞數.此種攝動差與月略同,不因N道之變而生.故可設N道本無永久的兩心差,而以本心P繞與餘心相合之中心點,又設D甚遠與月同以便論算.準第307節所論及圖先論切力.切力逐時令長徑增損,故其周時亦有增損.此事之外,N之每周切力又令本心P繞S行四歧點之曲線如$acbd$,每二岐點間之曲線相似亦相等.設D爲不動,則N在二合點必居一刹那中橢圓之最卑點,N在距合點一象限之二點,必居一刹那中橢圓之最高點.故於眞橢圓長徑增損所生差之外,N在二合點距S必小於原正圜道之半徑.N在二象限點距S必大於原正圜道之半徑.然全周中諸距之

中數不變,因 $acbd$ 四點距 S 皆等,而四曲邊皆相似,則近 ab 漸損之數與近 cd 漸增之數相等,故一周中長徑變大變小恰相消也.則此種差非生於切力.次論法力,法力每周亦令本心 P 行於四岐點之曲線如 $efgh$,而每二岐點間之曲線不相等,二長二短,因法力向外之時多且强於向內之時故也,雖 N 在二合點居最卑點,在二象限點居最高點,與切力同.然 S_c 甚大 S_a,故近 cd 距數之增甚大於近 ab 距數之損.則統全周諸距數計之,增必有餘.故每周 NS 距之中數必漸大.此變不由於眞橢圓長徑之增損,蓋法力不能變長徑也.然法力能變 NS 距而不能變 N 之速率.故 NS 距增 N 行度率必變小,NS 距損 N 行度率必變大.是 NS 距增損,N 行速率之大小必有相反之變.且行度率變,其比例必更大.蓋行橢圓法等時得等面積而行度率之比,恆若距數平方之反比,法力不能變此例,故每周行度率之中數必變小,而每周之時必變大.此與長徑之增損及所生之周時俱無涉.若 D 甚近,理無異.或在內道,則行度變大周時變小,餘亦同.

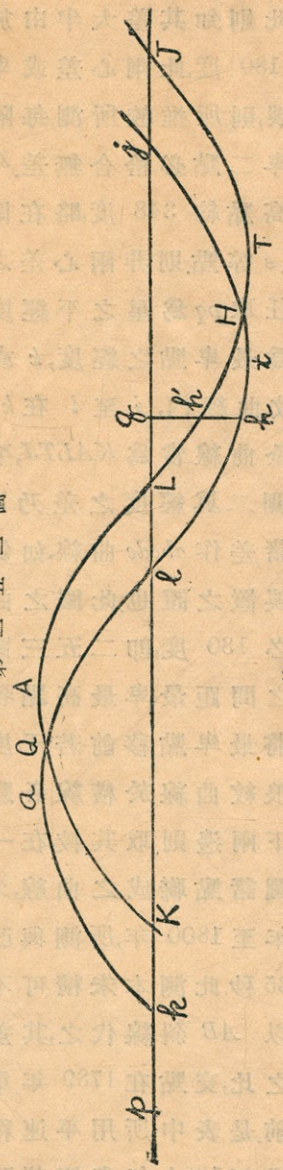
上論之理一若攝動體 D 散爲等積之圈與 S 同心,其大使其隨處加於 N 之力等於一切法力向內向外之平均較而方向之內外亦同,S 在心 N 繞 S.故此加於 N 之力爲圈加於 S、N 二攝力之較.凡圈加於心之攝力諸方皆等,故統計 S 所受四面恰消盡無餘,而統計 N 所受則恆有餘.N 在圈內餘力恆向外令 N 離心,N 在圈外餘力恆向內令 N 向心.故 D 在 N 道外能減 S 之中心攝力,在 N 道內能助 S 之中心力.助中心力,則 N 及 D 行多周中心力漸變大,其周時及 NS 距必俱變小.減中心力,則 N 及 D 行多周中心力漸變小,其周時及 NS 距必俱變大.故凡諸內星之行度率恆變小,而諸外星之行度率恆變大.凡外星道之內有諸內星,其攝力和令中心力增大.然此事究不能測.舍推算外

無別法可證之.蓋可測者星之平速,平速生於中心力而中心力兼日與諸內星之攝力雜糅難分也.但已知諸星之質分甚微,雖難分亦無害也.

(四)考天王星攝動推未見之海王星　天算家考天王攝動能推未見之海王,定其方位,用遠鏡試測果得之.此事爲攝動之奇證,故詳言之.1781 年初測得天王星,後屢測,略得其道之諸根.據以上考,疑佛蘭斯諦 (Flamsteed) 於 1690、1712、1715 諸年,六次所測得相等諸恆星後復不見者,恐俱卽此星.又 1753 年白拉里 (Bradley) 1756 年梅爾 (Mayer) 所測得之星,及在 1750、1764、1768、1769、1771 諸年,勒末聶十二次所測得諸星,亦皆卽此星也.此諸人俱用精器,測亦細密,故其測簿可信,據以改正諸根數.蓋橢圓之分愈大,則根數愈易推定也.又以土木諸行星所發之攝動加減之,意其能密合矣.步代爾 (Bouvard) 既作土木二表,又欲作天王表,乃準 1781 至 1820 年所測,用一橢圓道及諸攝動,上推不能悉合.因謂舊測不足信,然用其所作表下推,與測望亦不能密合,所測經度,恆多於表中經度.自 1795 年,其差漸大,至 1822 年而止.此後漸小.至 1830 年所測與表合,過此復不合.所測經度恆少於表中經度,則此表不能定星之行法也.乃考其不合之故,如第二五二圖,其橫線爲所推天王星之屬日心經度,每分 50 度,其縱線爲經度差,每分 100 秒.每年測天王星經度或與所推合,或大於所推,或小於所推,於橫線或上或下俱用黑點識之.如 1690 年佛蘭斯諦所測大於所推 65.9 秒,識於橫線之上是也,餘仿此.若作線聯諸黑點則成浪紋狀,橫線之上有二彎,其下有一彎.又略依其狀作 $abcdefgh$ 線,令交橫線之點相距各 180 度.乃依此線各點距橫線之度,移相對諸黑點向橫線.如 1750 年之點 A 移向 B 與 B 距 C 等（卽將 A 移至 AC 間之中點也）,則與交點 e 略合


甲
乙
60度
110
160
210
260
310
0
50
100
150
200
250
300
350
100秒
0
100秒
1690
1712
1715
1781
1750
1753
1766
A
B
C
M
N
a
b
c
d
e
f
g
h

第二五二圖


A
Q
a
K
L
H
T
J
p
q
h
h'
t
j
l

第二五三圖

C
a
b
d
e
h
h'

於一橫線.準此則知其差大半由於天王星根數之誤.蓋經度遞大遞小恰距 180 度,此兩心差或卑點有誤,所生差皆應如是也.考兩心差或誤,則所推較所測每隔 180 度,其經度必遞大遞小,而在最高最卑二點必恰合無差.今步伐爾所推最卑點之經度約 168 度,最高點約 348 度,略在圖中 ac、ce、eg 等字之中,M、N 諸點而不在 a、c、e 等點.則非兩心差之誤,而必爲最卑點之誤矣.如第二五三圖任取 pq 爲星之平經度,qh 爲所推橢圓眞經度與平經度之差,l 爲最卑點之經度,k 或 j 爲最高點之經度.各 h 點恆在 $kaltj$ 浪紋曲線內,j 至 l 在 kj 線之下,l 至 k 在其上.設最卑點實在 L,全曲線當爲 $KALTJ$,平經度與眞經度之差爲 qh' 而 hh' 爲所推所測二眞經度之差.乃取 $kaltj$ 曲線伸爲 pd 直線,依二眞經度之 hh' 諸差作 $abcde$ 曲線,如第二五四圖,則曲線與直線之距卽最卑點誤置之證也.此圖之曲線必成上下二浪.其交直線 bd 二點相距必 180 度,卽二五三圖之 Q、H 二點在二眞經度最大差 aA 及 tT 之間距最卑最高點各 90 度.既知其差大半因最卑點誤置,則必將最卑點移前若干度以改正之.法取第二五四圖之橫線,幷二浪紋曲線於橫線各點作諸縱線與二曲線相遇.視諸縱線在上下兩邊則取其較,在一邊則取其和.依之作線,必如第二五二乙圖諸點聯成之曲線,又作 AB 線少斜於 ab 線以代之.則自 1712 年至 1800 年,所測與改正推法所得略無差.而 1640 年所測尙差 35 秒.此測本未精可不論.夫以 ab 橫線爲天王經度,周時有小差以 AB 斜線代之,其差消盡,是其逐度小差之比,若距二線交點之比,交點在 1789 年.準此則依 ab 所推天王之度,恆在所測度之前.是表中所用平速稍强,周時稍弱,必減其平速增其周時.依法推至 1804 年與測望略無差.而此後又生一差,其行增速愈久愈大.較所推橢圓行恆進前,直至 1822 年積差最大.自

此以後,速率復漸減.天算家論此事謂必有他力加之.此力或前所無,或雖有甚微不能覺,至1822年力之方向相反,且反力更强於原力.論此力者,紛紛不一,或謂必有未見之外行星,此乃其攝動力也.其說最合理.於是英亞當史(Adams),法來未里亞用攝動之法反推之,求未見星所在之方位,二人所得略同.來未里亞推得1846年9月23日,未見星之屬日心經度爲326度,亞當史推得是日屬日心經度爲329度19分,其較不過3度19分.又推其星之道面略與黃道面合.來未里亞寓書於伯靈星臺官嘉勒請依所推試測之.是夜嘉勒與因格同測果得之,爲8等星.明夜復測之,見其經度已變,知確係行星非恆星也.後復細測,依牛頓攝力之理推之,知天王諸差果皆生於此星也.嘉勒推得本日之屬地心經度爲325度53分,化作屬日心經度得326度52分,較來未里亞所推差52分,較亞當史所推差2度27分,而較二人所推得之中數僅差47分.

今略言其推法.海王之質量與諸根數俱爲未知之數,惟波得(Bode)曾言半長徑略倍天王半長徑,約大於地道半徑38.364倍.而天王諸根亦爲未知之數,蓋發攝動體之諸根俱未知,則受攝動體之諸根亦難定也.故推步之法甚繁.惟略知一道之長徑,則可設餘一道之長徑,而半用代數號半用實數,依拉普拉瑟天文力學中之公式寫其諸項,無論何時可顯其攝動力之率.以此諸式及所改天王之根數,用表中經度推得其數.以測望之數校勘之.乃改正式中海王之諸根數與質量及天王未定之根,俱能得其眞數.次減小海王之距數,再推之,蓋據前推所得知先所設距數太大也,而得諸數更密.列表於後:

表 W. 海王諸根表

推者	年月日	平黃經	半長徑	兩心差	卑點黃經	質量
		度 分			度 分	以日質爲一
來未理亞	1847 1 1	318 47.4	36.1539	0.107610	284 45.8	0.00010727
亞當史	1846 10 6	323 2	37.2474	0.120615	299 11	0.00015003

來未里亞依測望簿推至1845年,亞當史推至1840年.亞當史又另推5年,知半長徑不合,當更減小,定爲33.33與測望略合.後人益復精測,覺亞當史後所定半長徑尙失之大須再減.既測得其數據以上推,知拉蘭於1795年5月8日及10日所測得之恆星因前後測不合,自疑初測誤者,蓋卽海王也.美國厄克據此諸測推得諸根數如下:

元時	1847年1月1日倫敦午正
平經度	328度32分44.2秒
半長徑	30.0367
兩心差	0.00871946
最卑經度	47度12分6.50秒
正交經度	130度4分20.81秒
交角	1度46分58.97秒
周時	164.6181太陽年
每年平速行	2.8683度

上之根數較來未里亞及亞當史所推差甚大,然所得海王之方位甚相近.蓋用二種根數,推海王此日所在與測望所見之處俱相近也.又其距日亦與二種根數所得距日中數甚相近.蓋用來未理亞根數,推得本日之帶徑爲33,而卑點距日爲32.2634,又推得1806年至1847年海王最卑點不過42度,則本日海王距日必在32.6與33之間.後有表彙列海王之眞度及二人推得之

度,觀之知其數相近,所列之度皆屬日心經度也.

表X.　天王海王二星諸黃經度帶徑表

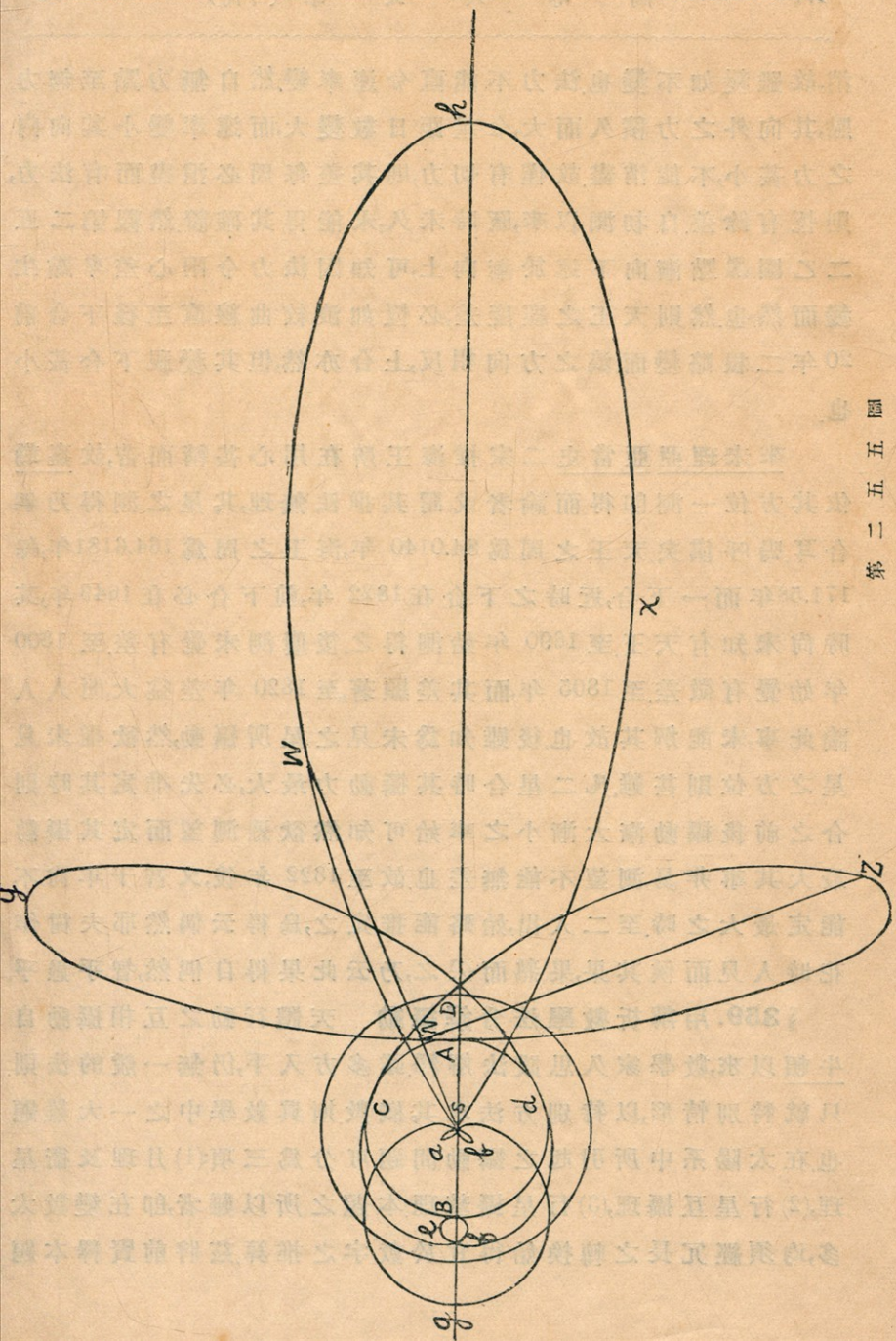
年	天王	海王		來未理亞		亞當史	
	黃徑	黃徑	帶徑	黃徑	帶徑	黃徑	帶徑
耶紀後	度	度		度		度	
1805	197.8	235.9	30.3	241.2	33.1	246.5	34.2
1810	220.9	247.0	30.3	251.1	32.8	255.9	33.7
1815	243.2	258.0	30.3	261.2	32.5	265.5	33.3
1820	264.7	268.8	30.2	271.4	32.4	275.4	33.1
1821	269.0	271.0	30.2	273.5	32.3	277.4	33.0
1822	273.3	273.2	30.2	275.6	32.3	279.5	33.0
1823	277.6	275.3	30.2	277.6	32.3	281.5	32.9
1824	281.8	277.4	30.2	279.7	32.3	283.6	32.9
1825	285.8	279.6	30.2	281.8	32.3	285.6	32.8
1830	306.1	290.5	30.1	292.1	32.3	296.0	32.8
1835	326.0	301.4	30.1	302.5	32.4	306.3	32.8
1840	345.7	312.2	30.1	312.6	32.6	316.3	32.9
1845	365.3	323.1	30.0	322.6	32.9	326.0	33.1
1847	373.3	327.6	30.0	326.5	33.1	329.3	33.2

觀此表知天王與海王合在1821年之末,來未里亞所推在1823年之首,亞當史所推在1824年之末.故二人所推海王之攝力方向與眞略同也.凡攝力在合時最大.今列諸家所推1805年、1845年及合時海王之攝力並質量列於後.準論行星攝動理,日攝天王之力恆爲一,以所得各母數約之得全攝動力也.

表Y.　推海王攝動力之比例表

推者	質量	1805年力	合時力	1845年力
庇爾思	$\frac{1}{19840}$	$\frac{1}{27540}$	$\frac{1}{7508}$	$\frac{1}{33390}$
斯得路佛	$\frac{1}{14496}$	$\frac{1}{20244}$	$\frac{1}{5519}$	$\frac{1}{23810}$
來未理亞	$\frac{1}{9322}$	$\frac{1}{20837}$	$\frac{1}{5193}$	$\frac{1}{19935}$

按庇爾思(Pierce)在美國堪比日星臺,斯得路佛(Struve)在波羅咯星臺用夫洛音侯佛所造之遠鏡,測拉塞爾所得之海王衛星以推海王之質量,然二得數大不同,蓋用量微器其細數最難確,故不能決其誰得誰失也.海王之質量既未能定,故但憑來未里亞所推1805年至1845年40年中之攝動爲最有力之時,依本節(一)項之理作圖以顯法切二力之大小率.如第二五五圖N爲天王,D爲海王.二平圜爲二星之道.NW爲法力率,其方向恆正交N道卽前圖之Sf.NZ爲切力率其方向恆切N道卽前圖之fG.$SWhxSaSgSbS$四圈曲線爲W點所行之道.$AZcfBedyA$四圈曲線爲Z點所行之道在上下二合點之左右法力向外,餘處皆向內.近下合點法力最大,遠勝於近上合點.下合點左右各35度5分之點無法力.故天王在下合點所受法力最大.行8.36年漸變小而無.此後法力向內,自小而大.然W點在a或b小圈內則向內力最大時亦甚微,歷時最少故也.後W點行Sg圈向內力復漸小而無,乃復向外至上合點而最大.餘可類推.天王在c、d、A、B四點皆無切力.dA、Ac二弧各71度20分.天王自d至A行17年,其速率因切力而增.自A至c亦行17年,其速率因切力而損.自c至B至d切力不大,觀圖自明.準此則第二五二乙圖1800年後經度漸變大至1822年而止者乃切力順加漸變大,令速之增率漸大,後切力復變小,增率漸小至合點而切力爲無,速率得平,所生也.1822年後經度漸變小者,乃切力逆加漸變大,令速之損率漸大所生也.故其曲線前高而後卑,皆生於切力無可疑焉.曰此與法力無關乎?曰切力能直令速率變,法力令距日數變,準同時同面積之理而速率亦變.然自1800年至1845年,法力所生經度差甚小,與測望數不相關也.細論之,切力所變速率合前合後恰相反而相消,故平速仍不變.又所變最卑點兩心差亦相反而相



第二五五圖

消,故雖變如不變也.法力不能直令速率變.然自無力點至無力點,其向外之力積久而大,令星距日數變大,而速率變小.其向內之力甚小,不能消盡.故僅有切力,則其差每周必消盡而有法力,則恆有餘差.自初測以來,歷時未久,未能得其確證.然觀第二五二乙圖黑點漸向下速於漸向上,可知因法力令兩心差卑點生變而然也.然則天王之經度差,必恆如浪紋曲線,直至後下合前20年二根略變而浪之方向相反,上合亦然,但其變視下合甚小也.

來未理亞亞當史二家推海王所在用心甚精而苦,故嘉勒依其方位一測即得.而論者或謂其推法無理,其星之測得乃偶合耳.嗚呼愼矣.天王之周爲84.0140年,海王之周爲164.6181年,每171.58年而一下合,近時之下合在1822年,前下合必在1649年,其時尙未知有天王.至1690年始測得之.後屢測未覺有差.至1800年始覺有微差.至1805年,而其差顯著,至1820年差益大,而人人論此事,未能解其故也.後雖知爲未見之星所攝動,然欲推未見星之方位則甚難.凡二星合時其攝動力最大,必先推定其時則合之前後攝動漸大漸小之率始可知.然欲憑測望而定其攝動最大其事非易,測望不能無差也.故至1822年後,又若干年尙不能定最大之時.至二人出,始略能推定之,烏得云偶然耶.夫樹作花時人見而候其果,果熟而采之,乃云此果得自偶然,智乎愚乎.

§359. 用解析數學法分解攝動 天體行動之互相攝動自牛頓以來,數學家久思設法解釋.雖多方入手,仍無一般的法則.只就特別情形,以特別方法求其概數.斯眞數學中之一大難題也.在太陽系中所引起之攝動問題可分爲三項:(1)月理及衞星理,(2)行星互攝理,(3)行星攝彗理.本題之所以難者,卽在變數太多,均須經冗長之轉換始得宜於數字之推算.茲將前賢釋本題

之方法及意義略述之.欲知其詳,須讀西文專書.

攝動可視爲各體座標數值之變異,亦可視爲軌道根數之變異,前已言及.其數學解法之闡明,始自尤勒及格來老.使其進至完善,則拉普拉瑟及拉哥蘭基之功居多,然仍不少假象.直至19世紀之末,寇琪(Cauchy)、韋爾斯特拉斯(Weierstrass)及龐卡累(Poincare)始純以數學解之,乃益精美.然本題一般的解法,則仍俟諸後賢之闡發.

(一)方程式之演解　三體算題之微分方程式,前已推定.其六個二次方程式,可化爲十二個一次方程式.設

$$x'=\frac{dx}{dt},\quad y'=\frac{dy}{dt},\quad z'=\frac{dz}{dt}.$$

則該式前三式變爲

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}-x'_1=0,\quad \frac{dx'_1}{dt}+k^2(S+m_1)\frac{x_1}{r_1^3}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x_1},\\
&\frac{dy_1}{dt}-y'_1=0,\quad \frac{dy'_1}{dt}+k^2(S+m_1)\frac{y_1}{r_1^3}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial y_1},\\
&\frac{dz_1}{dt}-z'_1=0.\quad \frac{dz'_1}{dt}+k^2(S+m_1)\frac{z_1}{r_1^3}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial z_1}.
\end{aligned}\right\}\cdots(1)$$

其後三式亦變爲同樣之六式.

若m_1及m_2不互相攝動,則(1)式變爲

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}-x'_1=0,\quad \frac{dx'_1}{dt}+k^2(S+m_1)\frac{x_1}{r_1^3}=0,\\
&\frac{dy_1}{dt}-y'_1=0,\quad \frac{dy'_1}{dt}+k^2(S+m_1)\frac{y_1}{r_1^3}=0,\\
&\frac{dz_1}{dt}-z'_1=0.\quad \frac{dz'_1}{dt}+k^2(S+m_1)\frac{z_1}{r_1^3}=0.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

前已解得二體算題之座標數值,如何以軌道根數及時計之矣.設$\alpha_1\cdots\alpha_6$爲m_1軌道之根數,$\beta_1\cdots\beta_6$爲m_2軌道之根數,則二

體算題之座標數值可寫爲

$$\left.\begin{aligned}
&x_1=f(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_6,t),\quad x'_1=\theta(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_6,t),\\
&y_1=g(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_6,t),\quad y'_1=\phi(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_6,t),\\
&z_1=h(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_6,t),\quad z'_1=\psi(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_6,t),\\
&x_2=f(\beta_1,\cdots\cdots\beta_6,t),\quad x'_2=\theta(\beta_1,\cdots\cdots\beta_6,t),\\
&y_2=g(\beta_1,\cdots\cdots\beta_6,t),\quad y'_2=\phi(\beta_1,\cdots\cdots\beta_6,t),\\
&z_2=h(\beta_1,\cdots\cdots\beta_6,t),\quad z'_2=\psi(\beta_1,\cdots\cdots\beta_6,t).
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

如暫不以(3)式爲二體算題之解式,而認其爲轉變含舊變數 $x_1,\cdots,z'_1,\ x_2,\cdots,z'_2$ 之(1)式至於含新變數 $\alpha_1,\cdots,\alpha_6,\beta_1,\cdots\beta_6$ 之式,則轉變手續祇須推算見於(1)內之微係數而代入之.準 t 微分(3)式而代入(1)式,並令 $\frac{\partial x'_i}{\partial t}-x'_i=0$ 及 $\frac{\partial x'_i}{\partial t}+k^2(S+m_i)\frac{x_i}{r_i^3}=0$ 因以 α_1, β_1,……等爲變數之偏微係數同於以 $\alpha_1,\cdots\beta_1,\cdots$ 爲常數之全微係數,並(3)若爲橢圓行動未受攝動之解式,則由(2)式可見 $\frac{dx}{dt}-x'_1=0,\frac{dx'_1}{dt}+k^2(S+m_1)\frac{x_1}{r_1^3}=0$ 也.其 y 及 z 者同此.準此關係乃得

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{d\alpha_i}{dt}=0,\quad \sum_{i=1}^{6}\frac{\partial x'_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{d\alpha_i}{dt}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x_1},\\
&\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{d\alpha_i}{dt}=0,\quad \sum_{i=1}^{6}\frac{\partial y'_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{d\alpha_i}{dt}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial y_1},\\
&\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial z_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{d\alpha_i}{dt}=0,\quad \sum_{i=1}^{6}\frac{\partial z'_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{d\alpha_i}{dt}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial z_1}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(4)$$

含 β_i 之式同此.此爲以 $\frac{d\alpha_i}{dt}$ 爲主數之直線方程式.若其係數之排列式(Determinant)非 0,則該式可解矣.若 $m_2=0$,則(4)更爲同性(同度)之直線方程式,而祇以 $\frac{d\alpha_i}{dt}=0$ 爲其解數.

解(4)得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha_i}{dt}&=m_2\phi_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_6;\beta_1,\quad,\beta_6;t),\quad i=1,\cdots,6\\ \frac{d\beta_i}{dt}&=m_1\psi_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_6;\beta,\cdots\beta_6;t),\quad i=1,\cdots,6\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

若 m_1 及 m_2 與 S 比均爲極小之數,且其軌道約爲固定之橢圓,則 α_i 及 β_i 變易極緩.故於積分(5)式時可視其爲常數.如 t 與元時相隔不遠,α_i 及 β_i 之概數可推求矣.在昔時初解本題卽依此理,惟嫌其假設太多,去眞較遠.

(5)式經寇琪及龐卡累證明可積分之爲 m_1 及 m_2 組成之次方連級數(Power series).寇琪證明 m_1、m_2 及 t 之數有小至使該級數爲收斂性者.而龐卡累證明之理較爲普通,若天體在元時一刹那中所行之道,並不相交,則在 t 數定限以內 m_1 及 m_2 之數有小至使解得之級數爲收斂性者.但 m_1 及 m_2 之數,不能小過天然所有之數.乃更證明一理.無論 m_1 及 m_2 之數如何,t 必有一定限使(5)之解式爲該式常數(Parameters) m_1 及 m_2 所成之次方級數,且在該 t 限內之任何時爲收斂性者.凡此常數愈大,t 之限愈嚴.依此理,若 t 限不大,(5)之解式可以 m_1 及 m_2 之收斂性次方級數表之.其式如下:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_i^{(j,k)}m_1^jm_2^k,\\ \beta_i&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_i^{(j,k)}m_1^jm_2^k,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

α_i 及 β_i 之右上角之指數僅記係數(Coefficients)在級數內之序次.$\alpha_i^{(j,k)}$ 及 $\beta_i^{(j,k)}$ 皆爲 t 之函數乃所推定者也.此法祇於某短時限內有效,因此級數不能在任何數之 t 有收斂性,且其 t 之限並不長也.在行星理,其時限當爲數百年〔當知(3)及(5)之右側均暗含 m_1 及 m_2,因推算平卑點角時須連及平速而平速爲

$n_j=\frac{1}{a_j^{\frac{3}{2}}}\sqrt{S+m_j}$ 所定也.此暗含之 m_1 及 m_2 可視爲已定數處理之,其數值將由各星單與日之相互攝引定之.其明顯爲 ϕ_i 及 ψ_i 之因子者將由星間之相互攝動定之〕.

代(6)入(5)內依 m_1 及 m_2 展開爲次方連級數,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\alpha_i^{(0,0)}}{dt}+\frac{d\alpha_i^{(0,1)}}{dt}m_2+\frac{d\alpha_i^{(1,0)}}{dt}m_1+\frac{d\alpha_i^{(1,1)}}{dt}m_1m_2\\
&\quad+\frac{d\alpha_i^{(0,2)}}{dt}m_2^2+\frac{d\alpha_i^{(2,0)}}{dt}m_1^2+\cdots\cdots\\
&=m_2\phi_i(\alpha_1^{(0,0)},\cdots,\alpha_6^{(0,0)};\beta_1^{(0,0)},\cdots,\beta_6^{(0,0)};t)\\
&\quad+m_2\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i}{\partial\alpha_j}(\alpha_j^{(0,1)}m_2+\alpha_j^{(1,0)}m_1)\\
&\quad+m_2\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i}{\partial\beta_j}(\beta_j^{(0,1)}m_2+\beta_j^{(1,0)}m_1)\\
&\quad+m_1\text{及}m_2\text{之高次方之諸項},\\
&\frac{d\beta_i^{(0,0)}}{dt}+\frac{d\beta_i^{(0,1)}}{dt}m_2+\frac{d\beta_i^{(1,0)}}{dt}m_1+\frac{d\beta_i^{(1,1)}}{dt}m_1m_2\\
&\quad+\frac{d\beta_i^{(0,2)}}{dt}m_2^2+\frac{d\beta_i^{(2,0)}}{dt}m_1^2+\cdots\cdots\\
&=m_1\psi_i(\alpha_1^{(0,0)},\cdots,\alpha_6^{(0,0)};\beta_1^{(0,0)},\cdots,\beta_6^{(0,0)};t)\\
&\quad+m_1\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_j}(\alpha_j^{(0,1)}m_2+\alpha_j^{(1,0)}m_1)\\
&\quad+m_1\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta_j}(\beta_j^{(0,1)}m_2+\beta_j^{(1,0)}m_1)\\
&\quad+m_1\text{及}m_2\text{高次方項}.\quad[i=1,\cdots,6]
\end{aligned}\right\}\cdots(7)$$

在收斂性時限以內,式內兩邊同次方之 m_1 及 m_2 其係數當相等.取而等之,乃得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\alpha_i^{(0,0)}}{dt}=0,\quad[i=1,\cdots,6]\\
&\frac{d\beta_i^{(0,0)}}{dt}=0.
\end{aligned}\right\}\cdots(8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\alpha_i^{(0,1)}}{dt}&=\phi_i(\alpha_1^{(0,0)},\cdots,\alpha_6^{(0,0)};\beta_1^{(0,0)},\cdots,\beta_6^{(0,0)};t),\\
\frac{d\alpha_i^{(1,0)}}{dt}&=0,\\
\frac{d\beta_i^{(0,1)}}{dt}&=0,\\
\frac{d\beta_i^{(1,0)}}{dt}&=\psi_i(\alpha_1^{(0,0)},\cdots,\alpha_6^{(0,0)};\beta_1^{(0,0)},\cdots,\beta_6^{(0,0)};t).
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\alpha_i^{(1,1)}}{dt}&=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(1,0)}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i}{\partial\beta_j}\beta_j^{(1,0)},\\
\frac{d\alpha_i^{(0,2)}}{dt}&=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(0,1)}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i}{\partial\beta_j}\beta_j^{(0,1)},\\
\frac{d\alpha_i^{(2,0)}}{dt}&=0,\\
\frac{d\beta_i^{(1,1)}}{dt}&=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(0,1)}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta_j}\beta_j^{(0,1)},\\
\frac{d\beta_i^{(2,0)}}{dt}&=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(1,0)}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta_j}\beta_j^{(1,0)},\\
\frac{d\beta_i^{(0,2)}}{dt}&=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

積分(8)式,以所得 $\alpha_i^{(0,0)}$、$\beta_i^{(0,0)}$ 之值代入(9)式.化之爲積分式,乃可積分之,積分後以所得 $\alpha_i^{(0,0)}$、$\alpha_i^{(1,0)}$、$\beta_i^{(0,1)}$、$\beta_i^{(1,0)}$ 之值代入(10)式,化之爲積分式乃可積分之.如此遞算,繼續以至無窮.用如此法可推定(6)式連級數之係數,而 α_i、β_i 之數值在 t 數值,能使該級數爲收斂性界限以內者,均可推得極確矣.

(二)積分常數之推定　積分(8)、(9)、……求 $\alpha_i^{(j,k)}$、$\beta_i^{(j,k)}$ 時必生常數,茲設隨 $\alpha_i^{(j,k)}$ 所生之常數爲 $-a_i^{(j,k)}$, 隨 $\beta_i^{(j,k)}$ 者爲 $-b_i^{(j,k)}$. 因原微分式之前一組含 m_2 爲右側因子之一,後一組含 m_1 爲右側因子之一,故 $\alpha_i^{(j,0)}=a_i^{(j,0)}$ 而 $j=0,\cdots\infty$, $\beta_i^{(0,k)}=b_i^{(0,k)}$ 而 $k=0,\cdots\infty$.

因 $\alpha_i^{(j,k)}$ 及 $\beta_i^{(j,k)}$ 係由方形式法推定，其諸積分常數，祇須加於 t 之函數．故

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i^{(j,k)}&=f_i^{(j,k)}(t)-a_i^{(j,k)},\\ \beta_i^{(j,k)}&=g_i^{(j,k)}(t)-b_i^{(j,k)}.\end{aligned}\right\}$$

所以(6)式變爲

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i&=\sum_{j=0}^{\infty}a_i^{(j,0)}m_1^j+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(f_i^{(j,k)}-a_i^{(j,k)})m_1^jm_2^k,\\ \beta_i&=\sum_{k=0}^{\infty}b_i^{(0,k)}m_2^k+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}g_i^{(j,k)}-b_i^{(j,k)})m_1^jm_2^k.\end{aligned}\right\}\cdots(11)$$

設 α_i 及 β_i 在 $t=t_0$ 時之數值爲 $\alpha_i^{(0)}$ 及 $\beta_i^{(0)}$ 則在 $t=t_0$ 時(11)式變爲

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i^{(0)}&=\sum_{j=0}^{\infty}a_i^{(j,0)}m_1^j+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(f_i^{(j,k)}-a_i^{(j,k)})_0m_1^jm_2^k,\\ \beta_i^{(0)}&=\sum_{k=0}^{\infty}b_i^{(0,k)}m_2^k+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(g_i^{(j,k)}-b_i^{(j,k)})_0m_1^jm_2^k.\end{aligned}\right\}$$

在 m_1 及 m_2 數值定限以內此式不假，其 m_1 及 m_2 在左右兩側相當次方者之係數，當然相等．故得

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_i^{(0,0)}=\alpha_i^{(0)},\ a_i^{(j,0)}=0, && [j=1,\cdots\infty]\\ &\beta_i^{(0,0)}=\beta_i^{(0)},\ b_i^{(0,k)}=0, && [k=1,\cdots\infty]\\ &f_i^{(j,k)}(t_0)-a_i^{(j,k)}=0, && [j=1,\cdots\infty;k=1,\cdots\infty]\\ &g_i^{(j,k)}(t_0)-b_i^{(j,k)}=0. && [j=1,\cdots\infty;k=1,\cdots\infty]\end{aligned}\right\}\cdots(12)$$

因(11)式各項除第一項外在 $t=t_0$ 時皆爲零，故知 $\alpha_i^{(0,0)}$ 及 $\beta_i^{(0,0)}$ 爲 m_1 及 m_2 二軌道在 $t=t_0$ 時之合吻根數(Osculating elements)，而(6)式之其他係數皆爲在 $t=t_0$ 及 $t=t$ 界限內微分方程式之定積分．

(三)一次之各項(The terms of the first order) m_1 及 m_2 一次之諸項由(9)式定之，因零次之諸項乃在 t_0 時之合吻根數，故微

分方程式變爲

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha_i^{(0,1)}}{dt}&=\phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t)\\ \frac{d\beta_i^{(1,0)}}{dt}&=\psi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

若二行星在一刹那時各在原軌道內行動,則此式之右側與二星軌道諸根數在該一刹那時之變率成比例.故(13)式之積分式爲在一刹那時諸影響之和數.換言之,乃變易之總和,而生此變易之諸力及其一刹那時之結果,恆同於未受攝動之軌道.然攝動變此情況,並生有二次(Secondary)三次(Tertiary)及高次之影響.斯皆含於(6)式 m_1 及 m_2 高次方數之係數內.

$\alpha_i^{(0,1)}$ 及 $\beta_i^{(1,0)}$ 恆稱爲質量一次之攝動(Perturbations of the first order with respect to the masses),因其爲(6)式內一次方之 m_1 及 m_2 之係數也.在行星攝動理,除大行星互相隣近外,無須推算高次攝動.在土木二星之互攝,僅須推算三次之各項.

太陽系非只二星一日,乃有八星一日,故實際之理不能如所論之簡單.然其增加之複雜,亦包含於高次攝動以內.若有一第三行星 m_3, 其軌道根數爲 $\gamma_1,\cdots,\gamma_6$,則(9)式變爲

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha_i^{(1,0,0)}}{dt}&=0,\\ \frac{d\alpha_i^{(0,1,0)}}{dt}&=\phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t),\\ \frac{d\alpha_i^{(0,0,1)}}{dt}&=\phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\gamma_1^{(0)},\cdots,\gamma_6^{(0)};t),\\ \frac{d\beta_i^{(1,0,0)}}{dt}&=\psi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t),\\ \frac{d\beta_i^{(0,1,0)}}{dt}&=0,\\ \frac{d\beta_i^{(0,0,1)}}{dt}&=\psi_i(\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};\gamma_1^{(0)},\cdots,\gamma_6^{(0)};t),\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(14)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma_i^{(1,0,0)}}{dt}&=\chi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\gamma_1^{(0)},\cdots,\gamma_6^{(0)};t),\\ \frac{d\gamma_i^{(0,1,0)}}{dt}&=\chi_i(\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};\gamma_1^{(0)},\cdots,\gamma_6^{(0)};t),\\ \frac{d\gamma_i^{(0,0,1)}}{dt}&=0.\end{aligned}\right\}$$

若再多有行星卽多加同樣之公式.就m_1軌道根數之一次攝動而論,其攝動由兩部組成:一由m_2之攝力,一由m_3之攝力,(14)之第二及第三組公式是也.故天文家謂各行星之攝動影響可單獨推論,乃指質量一次之攝動而言.

(四)二次之各項　前已證明$\alpha_i^{(1,0)}=\alpha_i^{(2,0)}=\beta_i^{(0,1)}=\beta_i^{(0,2)}=0$, 故由(10)式得知質量二次之攝動,可由下式定之:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha_i^{(1,1)}}{dt}&=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t)}{\partial\beta_j}\beta_j^{(1,0)},\\ \frac{d\alpha_i^{(0,2)}}{dt}&=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t)}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(0,1)},\\ \frac{d\beta_i^{(1,1)}}{dt}&=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\psi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t)}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(0,1)},\\ \frac{d\beta_i^{(2,0)}}{dt}&=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\psi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t)}{\partial\beta_j}\beta_j^{(1,0)}.\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

一次攝動之所由生,由於攝動力在每一剎那時與行星行於原橢圓道中者相同.若行星m_1及m_2所行之曲線與原橢道不同,則其根數在一剎那時之變率與(13)式所得者亦不同.m_1軌道根數之攝動由於m_2因一次攝動之離開原軌道者,由與(15)之第一式相類之公式定之,因若$\beta_j^{(1,0)}=0$,則$\alpha_i^{(1,1)}$亦等於零也.其m攝動由於m_1因一次攝動之離開原橢道者,由與(15)之第二式相類之公式定之,因若$\alpha_j^{(0,1)}=0$, 則$\alpha_i^{(0,2)}=0$也.其$\beta_i^{(1,1)}$及$\beta_i^{(2,0)}$項在m_2軌道根數亦由同理而生.是以二次攝動改正一次各項之差錯,三次攝動改正二次各項之差錯,如此遞推皆同.

前言解式之爲質量之次方連級數,須相隔之時間不大,始爲收斂性.質量愈小,其時間可愈長.在月理日爲攝動體.其質量較地過大,故質量連級數爲收斂性之時間僅爲數月,不能如行星之爲若干年.故本法在月理不甚相宜,而展爲月日去地距離之比之次方級數.

若有一第三行星,則二次攝動愈爲複雜.如有 m_1、m_2 及 m_3 三行星,就 m_1 根數之二次攝動而論必有如下之各項:(1) m_2 及 m_3 由其根數受 m_1 攝動作用而生之一次攝動轉而加於 m_1 之攝動作用引起之項.(2) m_1 受 m_2 及 m_3 攝動其根數發生之一次攝動轉致 m_2 及 m_3 加於 m_1 之攝動作用引起之項.(3) m_1 受 m_2 之攝動其根數發生之一次攝動轉致 m_2 加於 m_1 之攝動作用引起之項.(4) m_2 受 m_3 之攝動其根數發生之一次攝動轉致 m_2 加於 m_1 之攝動作用引起之項.(5) m_1 受 m_2 之攝動其根數發生之一次攝動轉致 m_3 加於 m_1 之攝動作用引起之項.(6) m_3 受 m_2 之攝動其根數發生之一次攝動轉致 m_3 加於 m_1 之攝動作用引起之項.

準此,在三個行星之例,其質量二次之各項由(5)、(6)推得爲

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\alpha_i^{(1,1,0)}}{dt} &= \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t)}{\partial \beta_j}\beta_j^{(1,0,0)},\\
\frac{d\alpha_i^{(1,0,1)}}{dt} &= \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\gamma_1^{(0)},\cdots,\gamma_6^{(0)};t)}{\partial \gamma_j}\gamma_j^{(1,0,0)},\\
\frac{d\alpha_i^{(0,2,0)}}{dt} &= \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t)}{\partial \alpha_j}\alpha_j^{(0,1,0)},\\
\frac{d\alpha_i^{(0,0,2)}}{dt} &= \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\gamma_1^{(0)},\cdots,\gamma_6^{(0)};t)}{\partial \alpha_j}\alpha_j^{(0,0,1)},\\
\frac{d\alpha_i^{(0,1,1)}}{dt} &= \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta_1^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t)}{\partial \alpha_j}\alpha_j^{(0,0,1)},
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

$$+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\beta^{(0)},\cdots,\beta_6^{(0)};t)}{\partial\beta_j}\beta_j^{(0,0,1)},$$

$$+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(9)};\gamma_1^{(0)},\cdots,\gamma_6^{(0)},t)}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(0,1,0)},$$

$$+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\phi_i(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_6^{(0)};\gamma_1^{(0)},\cdots,\gamma_6^{(0)};t)}{\partial\gamma_j}\gamma_j^{(0,1,0)}.$$

其$\frac{d\beta_j}{dt}$及$\frac{d\gamma_j}{dt}$之式同此.

前二式爲(1)類之攝動因$\phi_i(\alpha,\beta)$及$\phi_i(\alpha,\gamma)$爲m_2及m_3所給攝動函數之一部而$\beta_j^{(1,0,0)}$及$\gamma_j^{(1,0,0)}$乃m_2及m_3之根數由m_1而生之一次攝動也.同理,第三第四二式爲(2)類之攝動.第五式之第一項爲(3)類,第二項爲(4)類,第三項爲(5)類,第四項爲(6)類.由此可知二次之各項不能爲各攝動體單獨推算也.

三次攝動所生各項之形式,亦可如此預推,而細論其式,亦能證實其預推.

(五)拉哥蘭基括弧(Lagrange's brackets) 拉哥蘭基作如下之轉換致(5)之推算較易.以$-\frac{\partial x'_1}{\partial\alpha_1}$、$-\frac{\partial y'_1}{\partial\alpha_1}$、$-\frac{\partial z'_1}{\partial\alpha_1}$、$\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}$、$\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_1}$、$\frac{\partial z_1}{\partial\alpha_1}$分乘(4)式而加之,得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\alpha_2}{dt}\left\{\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x'_1}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial x'_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial y'_1}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial y'_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial z_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial z'_1}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial z'_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial\alpha_2}\right\}\\
&+\frac{d\alpha_3}{dt}\left\{\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x'_1}{\partial\alpha_3}-\frac{\partial x'_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_3}+\cdots\right\}+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\frac{d\alpha_6}{dt}\left\{\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x'_1}{\partial\alpha_6}-\frac{\partial x'_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_6}+\cdots\right\}\\
&=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}+m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_1}+m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial\alpha_1}\\
&=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial\alpha_1}.
\end{aligned}\right\}(17)$$

拉哥蘭基括弧定之如下式:

$$[\alpha_i,\alpha_j]\equiv\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial x'_1}{\partial\alpha_j}-\frac{\partial x'_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial y'_1}{\partial\alpha_j}-\frac{\partial y'_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial z_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial z'_1}{\partial\alpha_j}-\frac{\partial z'_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial\alpha_j}. \quad\cdots\cdots(18)$$

作成與(17)相當之式乃得下式,是爲(4)之相等式.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{6}[\alpha_1,\alpha_i]\frac{d\alpha_i}{dt}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial\alpha_1},\\
&\sum_{i=1}^{6}[\alpha_2,\alpha_i]\frac{d\alpha_i}{dt}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial\alpha_2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{6}[\alpha_6,\alpha_i]\frac{d\alpha_i}{dt}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial\alpha_6}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

自該括弧之定義可見 $[\alpha_i,\alpha_i]=0$ 及 $[\alpha_i,\alpha_j]=-[\alpha_j,\alpha_i]$. 該括弧不明含時爲其最要性質.此不能預知須經證明,因括弧內之數顯爲 t 之函數也.證法從略,因其不明含 t 故 $\frac{\partial[\alpha_i,\alpha_j]}{\partial t}=0$, 而該括弧可任爲某元時推算矣.

設在 $t=t_0$ 時之座標數爲 $x_0,\cdots,z'_0$, 則

$$\left.\begin{aligned}
&[y_0,z_0]=[z_0,x_0]=[x'_0,y'_0]=[y'_0,z'_0]=[z'_0,x'_0]=[x_0,y_0]=0,\\
&[x_0,y'_0]=[x_0,z'_0]=[y_0,x'_0]=[y_0,z'_0]=[z_0,x'_0]=[z_0,y'_0]=0,
\end{aligned}\right\}$$

而

$$[x_0,x'_0]=[y_0,y'_0]=[z_0,z'_0]=1,$$

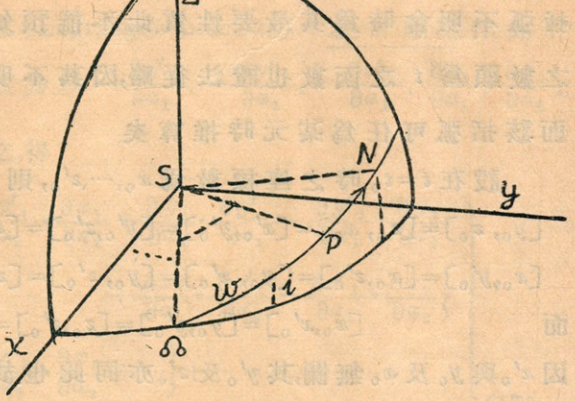
因 x'_0 與 y_0 及 x_0 無關,其 y'_0 及 z'_0 亦同此也.故(19)在此例變爲

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_0}{dt}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x'_0},\quad \frac{dx'_0}{dt}=-m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x_0},\\
&\frac{dy_0}{dt}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial y'_0},\quad \frac{dy'_0}{dt}=-m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial y_0},\\
&\frac{dz_0}{dt}=m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial z'_0},\quad \frac{dz'_0}{dt}=-m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial z_0}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

凡一組微分方程式與(20)同樣者,皆稱爲一法組(Canonical system).有一公理,凡動力學之問題其諸力能以蓄勢函數之偏微係數表示者,皆能以此樣之式表示之,凡問題之能歸於一組法式者,則能歸於無數組相關變數之式.

解(20)所得之數爲在t_0時之座標數值.假設在$t-t_0$之間行星行於未變之橢道,則可由所得之數值推得在t時之座標數.若式內之變數爲橢道之根數,則解得者爲在t_0時之根數.假設在$t-t_0$間諸根數不變,卽可由所得者推在t時之座標數值.故根數算得後,其所餘者乃推算未被攝動之行動也.

(六)拉哥蘭基括弧之推算　所求之數非在$t=t_0$時之座標數值,乃Ω、i、a、e、π及T(或$\varepsilon=\pi-nT$)諸根數.故推得座標數值後須利用二體算題之算式變爲此常用之根數.然其推法甚繁,故實際多欲直接推算拉哥蘭基括弧.下所述者乃悌瑟欒德(Tisserand)之法.



第二五六圖

設xy面爲黃道面,ΩPN爲在天球上星道之投影,P爲卑點(近日點)之投影,N爲行星在t時之位置之投影.於π及ε處採用下式所定之新變數w及σ以代替之,

$$w=\pi-\Omega,\ \sigma=-nT \quad \cdots\cdots(21)$$

則由前二體算題所論或利用三角公式,乃有下式:

$$
\left.\begin{aligned}
n &= \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{s+m_1},\\
E-e\sin E &= nt+\sigma,\\
r &= a(1-e\cos E),\\
\tan\frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2},\\
\cos v &= \frac{\cos E-e}{1-e\cos E},\\
\sin v &= \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E},\\
x &= r\{\cos(v+w)\cos\Omega-\sin(v+w)\sin\Omega\cos i\},\\
y &= r\{\cos(v+w)\sin\Omega+\sin(v+w)\cos\Omega\cos i\},\\
z &= r\sin(v+w)\sin i.
\end{aligned}\right\}\cdots(22)
$$

由此式及其準 t 之微係數,可算得座標數值準根數之偏微係數.茲分根數爲二類: Ω、i、w 乃定行動面之位置及軌道在面內之方位者也,是爲第一類. a、e、σ 乃定軌道之大小形狀及行星之位置者也,是爲第二類.故軌道內之座標數值,僅能由第二類根數表顯之,從此利用第一種根數求空間之座標數值.

設一組新座標軸線,其原點在日心, ξ 軸線之正端指近日點. η 軸線在軌道面內居 ξ 前 90 度, ζ 軸線垂於軌道面.設 ξ、η、ζ 軸線與 x 軸線間之方向角餘弦爲 α、α'、α'',與 y 軸線間者爲 β、β'、β'',與 z 軸線間者爲 γ、γ'、γ''.則由第二五六圖得

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha &= \cos w\cos\Omega-\sin w\sin\Omega\cos i,\\
\beta &= \cos w\sin\Omega+\sin w\cos\Omega\cos i,\\
\gamma &= \sin w\sin i,\\
\alpha' &= -\sin w\cos\Omega-\cos w\sin\Omega\cos i,\\
\beta' &= -\sin w\sin\Omega+\cos w\cos\Omega\cos i,\\
\gamma' &= \cos w\sin i,
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(23)
$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha'' &= \sin\Omega\sin i,\\ \beta'' &= -\cos\Omega\sin i,\\ \gamma'' &= \cos i.\end{aligned}\right\}$$

其相互之關係如下：

$$\left.\begin{aligned}&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, && \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,\\ &\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1, && \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,\\ &\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1, && \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0,\\ &\alpha=\beta'\gamma''-\gamma'\beta'', \quad \alpha'=\beta''\gamma-\gamma''\beta, && \alpha''=\beta\gamma'-\gamma\beta',\\ &\beta=\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'', \quad \beta'=\gamma''\alpha-\alpha''\gamma, && \beta''=\gamma\alpha'-\alpha\gamma',\\ &\gamma=\alpha'\beta''-\beta'\alpha'', \quad \gamma'=\alpha''\beta-\beta''\alpha, && \gamma''=\alpha\beta'-\beta\alpha'.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(24)$$

由(22)及(23)及新座標之定義，乃有

$$\left.\begin{aligned}&\xi=r\cos v=a(\cos E-e), \quad \eta=a\sqrt{1-e^2}\sin E,\\ &\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{n}{1-e\cos E},\\ &\xi'=\frac{-na\sin E}{1-e\cos E}=\frac{-k\sqrt{s+m_1}\sin E}{\sqrt{a}(1-e\cos E)},\\ &\eta'=\frac{na\sqrt{1-e^2}\cos E}{1-e\cos E}=\frac{k\sqrt{s+m_1}\sqrt{1-e^2}\cos E}{\sqrt{a}(1-e\cos E)},\\ &x=\alpha\xi+\alpha'\eta, \quad y=\beta\xi+\beta'\eta, \quad z=\gamma\xi+\gamma'\eta,\\ &x'=\alpha\xi'+\alpha'\eta', \quad y'=\beta\xi'+\beta'\eta', \quad z'=\gamma\xi'+\gamma'\eta'.\end{aligned}\right\}\quad\cdots(25)$$

其 $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ 右角之有 $'$ 者，乃示準 t 之一次微係數也.

其 $\alpha, \cdots, \gamma''$ 之準根數之偏微係數由(23)得爲

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\alpha}{\partial w}=\alpha', \quad \frac{\partial\alpha'}{\partial w}=-\alpha, \quad \frac{\partial\alpha''}{\partial w}=0,\\ &\frac{\partial\beta}{\partial w}=\beta', \quad \frac{\partial\beta'}{\partial w}=-\beta, \quad \frac{\partial\beta''}{\partial w}=0,\\ &\frac{\partial\gamma}{\partial w}=\gamma', \quad \frac{\partial\gamma'}{\partial w}=-\gamma, \quad \frac{\partial\gamma''}{\partial w}=0;\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(26)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial\Omega}=-\beta, \quad \frac{\partial\alpha'}{\partial\Omega}=-\beta' \quad \frac{\partial\alpha''}{\partial\Omega}=-\beta'',\\
&\frac{\partial\beta}{\partial\Omega}=\alpha, \quad \frac{\partial\beta'}{\partial\Omega}=\alpha', \quad \frac{\partial\beta''}{\partial\Omega}=\alpha'',\\
&\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega}=0, \quad \frac{\partial\gamma'}{\partial\Omega}=0, \quad \frac{\partial\gamma''}{\partial\Omega}=0;
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial i}=\alpha''\sin w, \quad \frac{\partial\alpha'}{\partial i}=\alpha''\cos w, \quad \frac{\partial\alpha''}{\partial i}=+\sin\Omega\cos i,\\
&\frac{\partial\beta}{\partial i}=\beta''\sin w, \quad \frac{\partial\beta'}{\partial i}=\beta''\cos w, \quad \frac{\partial\beta''}{\partial i}=-\cos\Omega\cos i,\\
&\frac{\partial\gamma}{\partial i}=\gamma''\sin w, \quad \frac{\partial\gamma'}{\partial i}=\gamma''\cos w, \quad \frac{\partial\gamma''}{\partial i}=-\sin i.
\end{aligned}\right\}(28)$$

六個根數每次只取其二,則有$\frac{6!}{2!4!}=15$對.故須推算15個括弧,內中三個祇含第一類根數,九個含一個第一類及一個第二類者,三個祇含第二類者.令K及L代表第一類之一對根數,P及Q代表第二類之一對,則拉哥蘭基括弧之須推算者爲

$$\left.\begin{aligned}
&(I)\quad [K,L]=S\left\{\frac{\partial x}{\partial K}\cdot\frac{\partial x'}{\partial L}-\frac{\partial x'}{\partial K}\cdot\frac{\partial x}{\partial L}\right\},(\text{三個如此之式})\\
&(II)\quad [K,P]=S\left\{\frac{\partial x}{\partial K}\cdot\frac{\partial x'}{\partial P}-\frac{\partial x'}{\partial K}\cdot\frac{\partial x}{\partial P}\right\},(\text{九個如此之式})\\
&(III)\quad [P,Q]=S\left\{\frac{\partial x}{\partial P}\cdot\frac{\partial x'}{\partial Q}-\frac{\partial x'}{\partial P}\cdot\frac{\partial x}{\partial Q}\right\}.(\text{三個如此之式})
\end{aligned}\right\}(29)$$

函數前之S乃表示其後尙加有y及z之同樣函數也.如$S(x_1x'_2-x_2x'_1)$乃表其爲$(x_1x'_2-x_2x'_1)+(y_1y'_2-y_2y'_1)+(z_1z'_2-z_2z'_1)$是其例也.

由(25)推得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial K}=\xi\frac{\partial\alpha}{\partial K}+\eta\frac{\partial\alpha'}{\partial K}, \quad \frac{\partial x'}{\partial K}=\xi'\frac{\partial\alpha}{\partial K}+\eta'\frac{\partial\alpha'}{\partial K},\\
&\frac{\partial x}{\partial P}=\alpha\frac{\partial\xi}{\partial P}+\alpha'\frac{\partial\eta}{\partial P}, \quad \frac{\partial x'}{\partial P}=\alpha\frac{\partial\xi'}{\partial P}+\alpha'\frac{\partial\eta'}{\partial P},
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(30)$$

y 及 z 之式同此.

(七)$[w,\Omega]$、$[\Omega,i]$、$[i,w]$ 之推算　由(30)將(29)之第一式變爲

$$[K,L]=(\xi\eta'-\eta\xi')S\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial K}\cdot\frac{\partial\alpha'}{\partial L}-\frac{\partial\alpha'}{\partial K}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial L}\right\}.$$

由前論之面積定律,則有

$$\xi\eta'-\eta\xi'=\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}=k\sqrt{(s+m_1)a(1-e^2)}$$
$$=na^2\sqrt{1-e^2}.$$

故
$$[K,L]=na^2\sqrt{1-e^2}\,S\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial K}\cdot\frac{\partial\alpha'}{\partial L}-\frac{\partial\alpha'}{\partial K}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial L}\right\}\quad\cdots\cdots(31)$$

以(26)、(27)、(28)式推算此式之右側,再用(24)式化之,則有下之祇含第一類根數之式.

$$\left.\begin{aligned}
[w,\Omega]&=na^2\sqrt{1-e^2}\,(-\alpha\beta-\alpha'\beta'+\alpha\beta+\alpha'\beta')=0,\\
[\Omega,i]&=na^2\sqrt{1-e^2}\,\{(\alpha\beta''-\beta\alpha'')\cos w\\
&\qquad+(\beta'\alpha''-\alpha'\beta'')\sin w\}\\
&=na^2\sqrt{1-e^2}\,(-\gamma'\cos w-\gamma\sin w)\\
&=-na^2\sqrt{1-e^2}\sin i,\\
[i,w]&=-na^2\sqrt{1-e^2}\,\{(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')\cos w\\
&\qquad+(\alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma)\sin w\}=0.
\end{aligned}\right\}(32)$$

(八)$[K,P]$ 之推算　利用(30)轉變(29)之第二式如上節然.再用(24)、(26)、(27)、(28)推算之,得

$$[K,P]=k\sqrt{s+m_1}\left[\alpha'\frac{\partial\alpha}{\partial K}+\beta'\frac{\partial\beta}{\partial K}+\gamma'\frac{\partial\gamma}{\partial K}\right]\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial P}\quad\cdots(33)$$

令 P 逐次爲 a、e、σ,則得

$$\left.\begin{aligned}
k\sqrt{s+m_1}\,\frac{\partial\sqrt{a(1-e^2)}}{\partial a}&=\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2},\\
k\sqrt{s+m_1}\,\frac{\partial\sqrt{a(1-e^2)}}{\partial e}&=-\frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}},\\
k\sqrt{s+m_1}\,\frac{\partial\sqrt{a(1-e^2)}}{\partial\sigma}&=0.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(34)$$

令 K 逐次爲 w, Ω、i 代入(33),再利用(34)乃得

$$\left.\begin{array}{lll} [w,a]=\dfrac{na}{2}\sqrt{1-e^2}, & [w,e]=\dfrac{-na^2e}{\sqrt{1-e^2}}, & [w,\sigma]=0, \\ [\Omega,a]=\dfrac{na}{2}\sqrt{1-e^2}\cos i, & [i,a]=0, & [i,e]=0, \\ [\Omega,e]=\dfrac{-na^2e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i, & [\Omega,\sigma]=0, & [i,\sigma]=0. \end{array}\right\} \quad (35)$$

(九)$[a,e]$、$[e,\sigma]$、$[\sigma,a]$ 之推算　利用(30)轉變(29)之第三式,並利用(24)化其變成之式之右側,乃得

$$[P,Q]=\frac{\partial\xi}{\partial P}\cdot\frac{\partial\xi'}{\partial Q}-\frac{\partial\xi}{\partial Q}\cdot\frac{\partial\xi'}{\partial P}+\frac{\partial\eta}{\partial P}\cdot\frac{\partial\eta'}{\partial Q}-\frac{\partial\eta}{\partial Q}\cdot\frac{\partial\eta'}{\partial P} \quad \cdots\cdots(36)$$

因括弧式不明含 t,故作成偏微係數後 t 之值,可隨意給予;惟 $t=T$ 時,偏微係數爲最簡.因 $t=T$, 則 $E=0, r=a(1-e)$, 由 (25) 可得

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{\partial\xi}{\partial a}=1-e, & \dfrac{\partial\eta}{\partial a}=0, & \dfrac{\partial\xi}{\partial a}=0, & \dfrac{\partial\eta'}{\partial a}=-\dfrac{n}{2}\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}, \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial e}=-a, & \dfrac{\partial\eta}{\partial e}=0, & \dfrac{\partial\xi}{\partial e}=0, & \dfrac{\partial\eta'}{\partial e}=\dfrac{1}{1-e}\cdot\dfrac{na}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial\sigma}=0, & \dfrac{\partial\eta}{\partial\sigma}=a\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}, & \dfrac{\partial\xi'}{\partial\sigma}=\dfrac{-na}{(1-e)^2}, & \dfrac{\partial\eta'}{\partial\sigma}=0. \end{array}\right\} \quad (37)$$

則由(36),有

$$[a,e]=0, \quad [e,\sigma]=0, \quad [\sigma,a]=\frac{na}{2} \quad \cdots\cdots(38)$$

利用 $[\alpha_j,\alpha_j]=-[\alpha_j,\alpha_i]$ 之理及(32),(35),(38)變轉(19)而解求其微係數,得

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\Omega}{dt}=\dfrac{m_2}{na^2\sqrt{1-e^2}\ \sin i}\cdot\dfrac{\partial R_{1,2}}{\partial i}, \\ \dfrac{di}{dt}=\dfrac{m_2\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\dfrac{\partial R_{1,2}}{\partial w}-\dfrac{m_2}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\dfrac{\partial R_{1,2}}{\partial\Omega}, \\ \dfrac{dw}{dt}=\dfrac{-m_2\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\dfrac{\partial R_{1,2}}{\partial i}+\dfrac{m_2\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\cdot\dfrac{\partial R_{1,2}}{\partial e}, \end{array}\right\} \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\frac{2m_2}{na}\frac{\partial R_{1,2}}{\partial\sigma},\\ \frac{de}{dt}&=\frac{m_2(1-e^2)}{na^2e}\frac{\partial R_{1,2}}{\partial\sigma}-\frac{m_2\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R_{1,2}}{\partial w},\\ \frac{\partial\sigma}{dt}&=-\frac{m_2(1-e^2)}{na^2e}\frac{\partial R_{1,2}}{\sigma e}-\frac{2m_2}{na}\frac{\partial R_{1,2}}{\partial a}.\end{aligned}\right\}$$

攝動函數 $R_{1,2}$ 明含 a 而 n 亦含 a, $R_{1,2}$ 含 $nt+\sigma$, 故又暗含 a. 所以(39)之末一式應爲

$$\frac{d\sigma}{dt}=-\frac{m_2(1-e_2)}{na^2e}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\sigma e}-\frac{2m_2}{na}\left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial a}\right)-\frac{2m_2}{na}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial a}\cdots\cdots(40)$$

括弧內偏微係數,乃表示僅就明含之 a 而取其微係數.

由 $nt+\sigma$ 可見 $\frac{2m_2}{na}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial n}=\frac{2m_2t}{na}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial\sigma}=t\frac{da}{dt}$.

以(40)定 σ 在 t 數大時頗不便,爲免此不便,來未理亞乃用從卑點起之黃平經 l 爲根數以代 σ. 其 l 由下式定之:

$$l=\int ndt+\sigma\cdots\cdots(41)$$

由是乃有

$$\frac{dl}{dt}=n+t\frac{dn}{dt}+\frac{d\sigma}{dt}\cdots\cdots(42)$$

因 $$n=\frac{k\sqrt{s+m_1}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

故知 $$\frac{\partial n}{\partial a}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{a},\quad \frac{dn}{dt}=-\frac{3n}{2a}\cdot\frac{da}{dt}\cdots\cdots(43)$$

再利用(40),則(42)變爲

$$\frac{dl}{dt}=n-\frac{m_2(1-e^2)}{na^2e}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial e}-\frac{2m_2}{na}\left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial a}\right)\cdots\cdots(44)$$

惟因 $\frac{\partial R_{1,2}}{\partial\sigma}=\frac{\partial R_{1,2}}{\partial l}$, 故(39)之僅有 $R_{1,2}$ 準 σ 之偏微係數之式(即四五兩式)其樣式將不因換用 l 而變. 故統(39)換用 l 以代 σ 其式樣不變,且 $R_{1,2}$ 準 a 之偏微係數,僅就明顯之 a 而取之.

(十)變 Ω、w、σ 爲 Ω、π、ε　由定義,則有

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \Omega, & \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{d\Omega}{dt}, \\ w &= \pi - \Omega, & \frac{dw}{dt} &= \frac{d\pi}{dt} - \frac{d\Omega}{dt}, \\ \sigma &= \varepsilon - \pi; & \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\pi}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(45)$$

解之得 Ω、w、σ 組成之項所表顯之 Ω、π、ε.

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \Omega, \\ \pi &= w + \Omega, \\ \varepsilon &= \sigma + \pi = \sigma + w + \Omega. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(46)$$

故在偏微係數之轉變有如下式:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \Omega} &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \Omega}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi}\right)\frac{\partial \pi}{\partial \Omega} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Omega} \\ &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \Omega}\right) + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi}\right) + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon}\right), \\ \frac{\partial R_{1,2}}{\partial w} &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \Omega}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial w} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi}\right)\frac{\partial \pi}{\partial w} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial w} \\ &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi}\right) + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon}\right), \\ \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \sigma} &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \Omega}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi}\right)\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \\ &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon}\right). \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

將(45)及(47)代入(39)並去偏微係數外之括弧而解求根數之微係數得

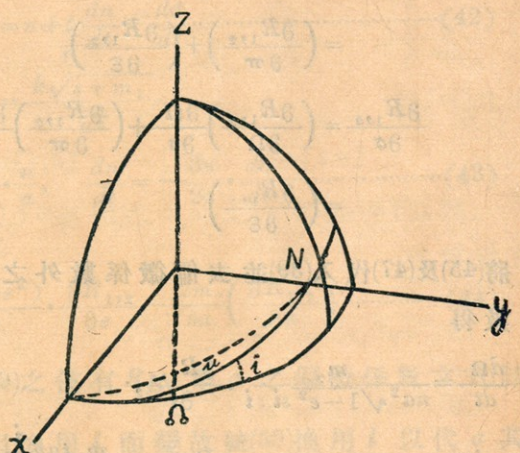
$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{m_2}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial i}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-m_2}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \Omega} - \frac{m_2 \tan\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi} + \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon}\right], \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{m_2 tan\frac{1}{2}i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial i}+\frac{m_2\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial e},\\
\frac{da}{dt} &= \frac{2m_2}{na}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon},\\
\frac{de}{dt} &= -m_2\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon}-\frac{m_2\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{m_2 tan\frac{1}{2}i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial i}+m_2\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial e}\\
&\quad -\frac{2m_2}{na}\cdot\frac{\partial R_{1,2}}{\partial a}.
\end{aligned}\right\}(48)$$

此乃爲m_1根數之公式,合其與此相應之m_2者（須附以1及2以別之）乃成一組微分方程式,是爲用以推定m_1及m_2二星僅依三體相互攝力繞日行動之式.

若$R_{1,2}$係以時及在t_0時之合吻根數組成之項表顯者,則(48)顯然代表(13)之第一式足以定質量一次之根數攝動.

(十一)攝動加速度之分體　(48)式在用時須先以根數組成之項表顯$R_{1,2}$,然後再求其偏微係數.惟有時(特別在彗星道例)用攝動加速度之矩形分體組成之項表顯根數之變率較爲便利.設分攝動加速度爲W、S、R三矩形分體.W垂於軌道,其正方向指北極.S在軌道面內垂於帶徑,其正方向與行向所成



第二五七圖

之角小於90度.R 沿帶徑其正方向背日.以 W、S、R 組成之項表顯 $R_{1,2}$ 準根數之偏微係數而代入(39)或(48)卽得所求之式.

$m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x}$、$m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial y}$、$m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial z}$ 乃攝動加速度與座標軸線平行之三分體.準分合力之通例 $m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x}$ 等於 W、S、R 在 x 軸線上投影之和,設 u 爲行星黃緯交點距,則由三角公式得

$$\left.\begin{aligned} m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x} &= +R(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i)\\ &\quad -S(\sin u\cos\Omega+\cos u\sin\Omega\cos i)\\ &\quad +W\sin\Omega\sin i,\\ m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial y} &= +R(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i)\\ &\quad -S(\sin u\sin\Omega-\cos u\cos\Omega\cos i)\\ &\quad -W\cos\Omega\sin i,\\ m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial z} &= +R\sin u\sin i+S\cos u\sin i+W\cos i. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(49)$$

設 s 代表 Ω、$\cdots$、σ 根數之一,則

$$\frac{\partial R_{1,2}}{\partial s}=\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial R_{1,2}}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial R_{1,2}}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\quad\cdots\cdots(50)$$

$\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x}$、$\frac{\partial R_{1,2}}{\partial y}$、$\frac{\partial R_{1,2}}{\partial z}$ 三偏微係數已見於(49)式,若算得 $\frac{\partial x}{\partial s}$、$\frac{\partial y}{\partial s}$、$\frac{\partial z}{\partial s}$,則轉變之事可立完成矣.

由(30)可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial K}&=\xi\frac{\partial\alpha}{\partial K}+\eta\frac{\partial\alpha'}{\partial K},\quad \frac{\partial x}{\partial P}=\alpha\frac{\partial\xi}{\partial P}+\alpha'\frac{\partial\eta}{\partial P},\\ \frac{\partial y}{\partial K}&=\xi\frac{\partial\beta}{\partial K}+\eta\frac{\partial\beta'}{\partial K},\quad \frac{\partial y}{\partial P}=\beta\frac{\partial\xi}{\partial P}+\beta'\frac{\partial\eta}{\partial P},\\ \frac{\partial z}{\partial K}&=\xi\frac{\partial\gamma}{\partial K}+\eta\frac{\partial\gamma'}{\partial K},\quad \frac{\partial z}{\partial P}=\gamma\frac{\partial\xi}{\partial P}+\gamma'\frac{\partial\eta}{\partial P}. \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(51)$$

K 乃 $\Omega\ i\ w$ 根數之一，P 乃 $a\ e\ \sigma$ 之一．$\alpha,\cdots,\gamma'$ 由(23)定之，其微係數已見(26)，(27)．$\frac{\partial\xi}{\partial P}$ 及 $\frac{\partial\eta}{\partial P}$ 須由(25)算求之．

經長而簡之轉化，得

$$\left.\begin{aligned}
m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial\Omega}&=Sr\cos i-Wr\cos u\sin i,\\
m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial i}&=Wr\sin u,\\
m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial w}&=Sr,\\
m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial a}&=R\frac{r}{a},\\
m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial e}&=-Ra\cos v+S\left[1+\frac{r}{p}\right]a\sin v,\\
m_2\frac{\partial R_{1,2}}{\partial\sigma}&=\frac{Rae}{\sqrt{1-e^2}}\sin v+S\frac{a^2}{r}\sqrt{1-e^2}.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(52)$$

故(39)乃變爲

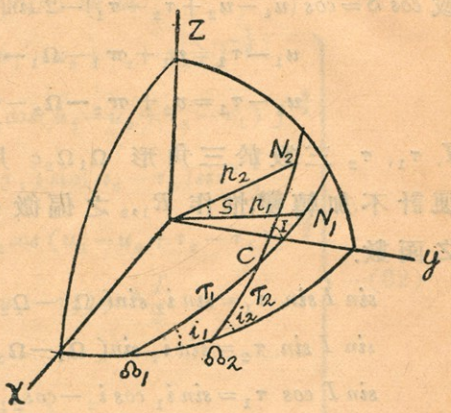
$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt}&=\frac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W,\\
\frac{di}{dt}&=\frac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W,\\
\frac{dw}{dt}&=\frac{-\sqrt{1-e^2}\cos v}{nae}R+\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[1+\frac{r}{p}\right]\sin v\,S\\
&\qquad-\frac{r\sin u\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}W,\\
\frac{da}{dt}&=\frac{2e\sin v}{n\sqrt{1-e^2}}R+\frac{2a\sqrt{1-e^2}}{nr}S,\\
\frac{de}{dt}&=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin v}{na}R+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\left[\frac{a^2(1-e^2)}{r}-r\right]S,\\
\frac{d\sigma}{dt}&=-\frac{1}{na}\left[\frac{2r}{a}-\frac{1-e^2}{e}\cos v\right]R-\frac{(1-e^2)}{nae}\left[1+\frac{r}{p}\right]\sin v\,S
\end{aligned}\right\}\quad(53)$$

(十二)攝動函數之展開　欲用(48)必須展開 $R_{1,2}$，明以根數

及時組成之項表顯之.茲就一次之攝動論,則見於 $R_{1,2}$ 內之根數乃在 t_0 時之合吻根數.夫攝動力顯然與軌道相互之交角有關,故明以星道相互交角組成之項表顯 $R_{1,2}$ 甚爲便宜,而此角可以 i_1、i_2、Ω_1 及 Ω_2 組成之項表顯之,故 $R_{1,2}$ 準此諸根數之偏微係數將隨遇有隱含此諸根數之部分,而生關係.

展開 $R_{1,2}$ 分三層工作:

(1) 展開 $R_{1,2}$ 爲軌道相互交角之半角平方所成之次方級數. (2) 展開該級數之係數爲 e_1 及 e_2 所成之次方級數. (3) 展開前級數之係數爲二行星之平黃經及 π_1、π_2、Ω_1 及 Ω_2 所成之佛里亞級數 (Fourier series).



第二五八圖

$R_{1,2}$ 之展開手續極爲複雜,難於詳論,茲略述其大意.

(1) 攝動函數爲

$$\left.\begin{aligned} R_{1,2} &= k^2\left[\frac{1}{r_{1,2}} - \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_2^3}\right], \\ r_{1,2} &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(54)$$

令 S 表 r_1 與 r_2 間之角,則

$$\frac{1}{r_{1,2}} = (r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos S)^{-\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots(55)$$

令 r_1 及 r_2 與 x、y、z 軸線間之角爲 α_1、β_1、γ_1, α_2、β_2、γ_2, 則有

$$x_1 = r_1\cos\alpha_1,\quad y_1 = r_1\cos\beta_1,\quad z_1 = r_1\cos\gamma_1, \text{ 等等} \quad \cdots\cdots(56)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2 \\ &\quad +\cos\gamma_1\cos\gamma_2)=r_1r_2\cos S. \end{aligned}\right\} \cdots(57)$$

令 I 爲軌道間之交角，τ_1 及 τ_2 爲自正交點至兩道交點之距離，則由弧三角形 N_1N_2C 有

$$\left.\begin{aligned} &\cos S=\cos(u_1-\tau_1)\cos(u_2-\tau_2)+\sin(u_1-\tau_1)\sin(u_2-\tau_2)\cos I, \\ &\text{或 } \cos S=\cos(u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)-2\sin(u_1-\tau_1)\sin(u_2-\tau_2)\sin^2\frac{I}{2}, \\ &\qquad u_1-\tau_1=v_1+\varpi_1-\Omega_1-\tau_1, \\ &\qquad u_2-\tau_1=v_2+\varpi_2-\Omega_2-\tau_2. \end{aligned}\right\} (58)$$

I、τ_1、τ_2 三數於三角形 $\Omega_1\Omega_2c$ 用告司式推定之得下式．爲簡便計不加轉變，惟作 $R_{1,2}$ 之偏微係數時須知其爲 i_1、i_2、Ω_1、Ω_2 之函數．

$$\left.\begin{aligned} &\sin I\sin\tau_1=\sin i_2\sin(\Omega_1-\Omega_2), \\ &\sin I\sin\tau_2=\sin i_1\sin(\Omega_1-\Omega_2), \\ &\sin I\cos\tau_1=\sin i_1\cos i_2-\cos i_1\sin i_2\cos(\Omega_1-\Omega_2), \\ &\sin I\cos\tau_2=-\cos i_1\sin i_2+\sin i_1\cos i_2\cos(\Omega_1-\Omega_2), \\ &\qquad \cos I=\cos i_1\cos i_2+\sin i_1\sin i_2\cos(\Omega_1-\Omega_2). \end{aligned}\right\} (59)$$

由 (55)、(57) 及 (58) 可知 $R_{1,2}$ 能寫爲下式：

$$\left.\begin{aligned} R_{1,2}&=[r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)]^{-\frac{1}{2}} \\ &\times\left[1+\frac{4r_1r_2\sin(u_1-\tau_1)\sin(u_2-\tau_2)\sin^2\frac{I}{2}}{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &-\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)-2\sin(u_1-\tau_1)\sin(u_2-\tau_2)\sin^2\frac{I}{2}\right]. \end{aligned}\right\} (60)$$

r_1 及 r_2 與 I 無關．此式右側第一項之第二因子，能依二項式理 (Binomial theorem) 展爲 $\sin^2\frac{I}{2}$ 組成之絕對收斂性級數，惟以該因子之第二項小於一爲必要之條件．該項恆小於或等於

$$\frac{4r_1r_2\sin^2\frac{I}{2}}{(r_2-r_1)^2} \quad \cdots\cdots(61)$$

若此式無論橢圓之 r_1 及 r_2 爲何數,皆小於一,則(60)在任何數之時均有效.在大行星此式之數甚小,$\sin^2\frac{I}{2}$ 在水火二星之數爲 0.0118,是爲最大.在木星攝動諸小行星之例 I 數常大,(r_2-r_1) 常小,每致(60)失效.在有效之例(60)可展爲

$$\left.\begin{aligned}R_{1,2}=&+[r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)]^{-\frac{1}{2}}\\&-r_1r_2[r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)]^{-\frac{3}{2}}\\&\qquad\times 2\sin(u_1-\tau_1)\sin(u_2-\tau_2)\sin^2\frac{I}{2}\\&+r_1^2r_2^2[r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)]^{-\frac{5}{2}}\\&\times 6\sin^2(u_1-\tau_1)\sin^2(u_2-\tau_2)\sin^4\frac{I}{2}\\&+\cdots\cdots\\&-\frac{r_1}{r_2^2}\cos(u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)\\&+\frac{2r_1}{r_2^2}\sin(u_1-\tau_1)\sin(u_2-\tau_2)\sin^2\frac{I}{2}.\end{aligned}\right\}\cdots(62)$$

(2) r_1 及 r_2 變於 $a(1-e_1)$ 及 $a_2(1-e_2)$ 至 $a_1(1+e_1)$ 及 $a_2(1+e_2)$ 之間,故可令

$$\left.\begin{aligned}r_1&=a_1(1+\rho_1),\\r_2&=a_2(1+\rho_2).\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(63)$$

u_1 及 u_2 角可用眞卑點角(v_1 及 v_2)及(58)所定之根數組成之項表顯之.而眞卑點角等於平卑點角加角心差(以 b_1 及 b_2 表之).令 l_1 及 l_2 爲自 x 軸線起計之平黃經,則有

$$\left.\begin{aligned}u_1-\tau_1&=l_1-\Omega_1-\tau_1+b_1,\\u_2-\tau_2&=l_2-\Omega_2-\tau_2+b_2.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(64)$$

由(57)可知 $R_{1,2}$ 能寫成下式:

$$R_{1,2}=F[a_1(1+\rho_1),\ a_2(1+\rho_2)],$$

其 F 爲 a_1 及 a_2 之 -1 次方之純函數,所以

$$R_{1,2}=\frac{1}{1+\rho_2}F\left[\left(a_1+a_1\frac{\rho_1-\rho_2}{1+\rho_2}\right),a_2\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(65)$$

式之右側能依泰勒式(Taylor's formula)展開之,乃有

$$R_{1,2}=\frac{1}{1+\rho_2}\left\{F(a_1,a_2)+\frac{\rho_1-\rho_2}{1+\rho_2}\cdot\frac{a_1}{1}\cdot\frac{\partial F(a_1,a_2)}{\partial a_1}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{1+\rho_2}\right)^2\frac{a^2}{1\times 2}\cdot\frac{\partial^2 F(a_1,a_2)}{\partial a_1^2}+\cdots\cdots\right\} \quad \cdots\cdots(66)$$

$\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{1+\rho_2}\right)^i$ 可展爲 ρ_1 及 ρ_2 組成之次方級數.但因

$$\frac{r}{a}=1-e\cos M-e^2(\cos 2M-1)$$

$$-\frac{e^3}{2!2^2}(3\cos 3M-3\cos M)$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

故 ρ 爲 e 組成之次方級數,其係數爲平卑點角倍數之餘弦.展開 $\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{1+\rho_2}\right)^i$ 之後代入(66)內依 e_1 及 e_2 之次方排併其各項,則 $R_{1,2}$ 成爲 e_1 及 e_2 組成之次方級數.如此之推演須就(62)各項分別行之.故所得者依 e_1、e_2 及 $\sin^2\frac{I}{2}$ 之次方數排併成爲級數.b_1 及 b_2 亦與 e_1 及 e_2 有關,然其推論則見於下層.

(3) 於(62)內以 a_1 及 a_2 分別代 r_1 及 r_2,即得(66)之括弧內第一項.回視(62)則知必須討論下類式之展開

$$(a_1a_2)^{\frac{\lambda-1}{2}}[a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos(u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)]^{-\frac{\lambda}{2}},$$

其 λ 乃奇整數也.

設 $u_1-u_2+\tau_2-\tau_1=\phi$. 由佛里亞級數理可知 a_1 與 a_2 若不相等,則 $[a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\phi]^{-\frac{\lambda}{2}}$ 能展爲 ϕ 之倍數之餘弦組成之

收斂性級數.

$$(a_1a_2)^{\frac{\lambda-1}{2}}\left[a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\psi\right]^{-\frac{\lambda}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}B_\lambda^{(i)}\cos i\psi \quad\cdots\cdots(67)$$

其 $B_\lambda^{(i)}=B_\lambda^{(-i)}$.

係數 $B_\lambda^{(i)}$ 當然由佛里亞積分式求之.

$$B_\lambda^{(i)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(a_1a_2)^{\frac{\lambda-1}{2}}\left[a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\psi\right]^{-\frac{\lambda}{2}}\cos i\psi\,d\psi.$$

但此積分式之推求最難,故另設一法.

設 $z=e^{\sqrt{-1}\psi}$,此 e 乃那氏底數(Napierian base),則

$$2\cos\psi=z+z^{-1},\quad 2\cos i\psi=z^i+z^{-i}.$$

如 $a_2>a_1$,並令 $\frac{a_1}{a_2}=\alpha$,則(67)成爲

$$\frac{\alpha^{\frac{\lambda-1}{2}}}{a_2}(1+\alpha^2-2\alpha\cos\psi)^{-\frac{\lambda}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}B_\lambda^{(i)}\cos i\psi\quad\cdots\cdots(68)$$

令 $(1+\alpha^2-2\alpha\cos\psi)^{-\frac{\lambda}{2}}=(1-\alpha z)^{-\frac{\lambda}{2}}(1-\alpha z^{-1})^{-\frac{\lambda}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h_\lambda^{(i)}z^i$,

則

$$B_\lambda^{(i)}=\frac{\alpha^{\frac{\lambda-1}{2}}}{a_2}h_\lambda^{(i)}\quad\cdots\cdots(69)$$

因 $(1-\alpha z)^{-\frac{\lambda}{2}}$ 及 $(1-\alpha z^{-1})^{-\frac{\lambda}{2}}$ 之絕對數值,無論 ψ 之眞數若何,均小於一,故皆可依二項式之理展爲 αz 及 αz^{-1} 組成之次方收斂性級數.在兩級數之積,z^i 之係數爲 $\frac{1}{2}h_\lambda^{(i)}$. 其積內一般之項如下式:

$$\frac{1}{2}h_\lambda^{(i)}=\frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{2}+i-1\right)}{i!}\alpha^i\left[1+\frac{\frac{\lambda}{2}}{1}\cdot\frac{\frac{\lambda}{2}+i}{i+1}\alpha^2\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}{1\,2}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda}{2}+i\right)\left(\frac{\lambda}{2}+i+1\right)}{(i+1)(i+2)}\alpha^4+\cdots\cdots\right]\quad\cdots(70)$$

$B_\lambda^{(i)}$ 至此可由(69)推得矣.

$\rho_1^{j_1}\rho_2^{j_2}\left(\sin^2\frac{I}{2}\right)^k$之係數，卽如此展爲$\cos i\ (u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)$組成之佛里亞級數，但由(62)可見此函數爲$\sin(u_1-\tau_1)\sin(u_2-\tau_2)$之不同次方之數所乘，化此正弦之次方數爲其主數(Argument)（於此指u_1、τ_1、u_2、τ_2而言）之倍數之正弦及餘弦，與$\cos i\ (u_1-u_2+\tau_2-\tau_1)$相乘後再化爲弧之倍數之正弦及餘弦，最末所得三角的諸項其式樣類如$\cos(j_1u_1+j_2u_2+k_1\tau_1+k_2\tau_2)$，而$j_1$、$j_2$、$k_1$、$k_2$皆整數也，由(64)可知此式可展爲

$$\cos(j_1l_1+j_2l_2-j_1\Omega_1-j_2\Omega_2+k_1\tau_1+k_2\tau_2+j_1b_1+j_2b_2)$$
$$=\cos(j_1l_1+j_2l_2-j_1\Omega_1-j_2\Omega_2+k_1\tau_1+k_2\tau_2)$$
$$\times\{\cos(j_1b_1)\cos(j_2b_2)-\sin(j_1b_1)\sin(j_2b_2)\}$$
$$-\sin(j_1l_1+j_2l_2-j_1\Omega_1-j_2\Omega_2+k_1\tau_1+k_2\tau_2)$$
$$\times\{\sin(j_1b_1)\cos(j_2b_2)+\cos(j_1b_1)\sin(j_2b_2)\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(71)$$

因
$$l_1=\Omega_1+w_1+n_1(t_0-T_1)+n_1(t-t_0)=n_1t+\varepsilon_1,$$
$$l_2=\Omega_2+w_2+n_2(t_0-T_2)+n_2(t-t_0)=n_2t+\varepsilon_2,$$

故(71)右側各項之第一因子與e_1及e_2無關，其第二因子$\cos(j_1b_1)$等可依常法展爲b_1及b_2組成之級數，但$b_1=v_1-M_1$，$b_2=v_2-M_2$，而v_1及v_2可展爲e_1及e_2組成之級數，其係數爲以平卑點角之倍數爲主數之佛里亞級數（見二體算題），以v_1-M_1及v_2-M_2組成之級數代替$\cos(j_1b_1)$等之展開式內之b_1及b_2，並化平卑點角之正弦及餘弦之次方數爲平卑點角倍數之正弦及餘弦，且以式內各項之第一因子分別乘之，再化爲主數之倍數之正弦及餘弦，則(71)展爲e_1及e_2組成之次方級數，其係數爲l_1、l_2、Ω_1、Ω_2、τ_1、τ_2、M_1、M_2，倍數之總和之正弦及餘弦所成之級數，但$M_1=l_1-\pi_1$，$M_2=l_2-\pi_2$，所以其主數爲l_1、l_2、Ω_1、Ω_2、τ_1、τ_2、π_1、π_2，而τ_1及τ_2乃Ω_1、Ω_2、i_1及i_2之函數（見59式）。

上述之數次展化作畢時 $R_{1,2}$ 卽展爲 e_1、e_2 及 $\sin^2\frac{I}{2}$ 所成之次方級數,其係數爲 l_1、l_2、Ω_1、Ω_2、τ_1、τ_2、ϖ_1、ϖ_2 之倍數之正弦及餘弦所成之級數,而各三角項之係數均與半長徑之比有關. 由(60)可知 Ω_1、Ω_2、ϖ_1、ϖ_2、τ_1、τ_2、ε_1、ε_2 及 t 之正負號雖變,$R_{1,2}$ 之值不變,所以本題之展開式僅含主數之餘弦,乃有

$$\left.\begin{aligned} R_{1,2} &= \Sigma C\cos D,\\ D &= j_1(n_1t+\varepsilon_1)+j_2(n_2t+\varepsilon_2)-j'_1\Omega_1-j'_2\Omega_2\\ &\quad +k_1\tau_1+k_2\tau_2+k'_1\varpi_1+k'_2\varpi_2,\\ C &= f\left(a_1, a_2, e_1, e_2, \sin^2\frac{I}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

其 $j_1,\cdots,k'_2$ 爲正負整數及零.此可知 $R_{1,2}$ 之繁難矣.

(十三)短期差　由(48)及(72)可知 m_1 根數之變率依下式定之:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} &= \frac{m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}\sin i_1}\Sigma\left\{\frac{\partial C}{\partial i_1}\cos D\right.\\ &\qquad \left.-\left[k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial i_1}+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial i_1}\right]C\sin D\right\},\\ \frac{di_1}{dt} &= \frac{-m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}\sin i_1}\Sigma\left\{j'_1-k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\Omega_1}-k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial\Omega_1}\right\}C\sin D\\ &\quad +\frac{m_2\tan\frac{i_1}{2}}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}}\Sigma\left\{k'_1+j'_1+k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\varpi_1}+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial\varpi_1}\right\}C\sin D,\\ \frac{d\varpi_1}{dt} &= \frac{m_2\tan\frac{i_1}{2}}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}}\Sigma\left\{\frac{\partial C}{\partial i_1}\cos D-\left[k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial i_1}+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial i_1}\right]C\sin D\right\}\\ &\quad +\frac{m_2\sqrt{1-e_1^2}}{n_1a_1^2e_1}\Sigma\frac{\partial C}{\partial e_1}\cos D,\\ \frac{da_1}{dt} &= \frac{-2m_2}{n_1a_1}\Sigma j_1C\sin D, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

$$\frac{de_1}{dt}=m_2\sqrt{1-e_1^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e_1^2}}{n_1a_1^2e_1}\Sigma j_1 C\sin D$$
$$+\frac{m_2\sqrt{1-e_1^2}}{n_1a_1^2e_1}\Sigma\left\{k'_1+k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\pi_1}+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial\pi_1}\right\}C\sin D,$$
$$\frac{d\varepsilon_1}{dt}=\frac{m_2\tan\frac{i_1}{2}}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}}\Sigma\left\{\frac{\partial C}{\partial i_1}\cos D-\left[k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial i_1}+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial i_1}\right]\right.$$
$$\left.\times C\sin D\right\}+m_2\sqrt{1-e_1^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e_1^2}}{n_1a_1^2e_1}\Sigma\frac{\partial C}{\partial e_1}\cos D$$
$$-\frac{2m_2}{n_1a_1}\Sigma\frac{\partial C}{\partial a_1}\cos D.$$

此式之積分（以右側之根數爲常數）卽是m_1軌道根數準m_2一次之攝動.其他攝動體者式樣相同.

$R_{1,2}$內之諸項有三類:(1) $j_1n_1+j_2n_2$之數不甚小者;(2) $j_1n_1+j_2n_2$甚小而非0者;(3) $j_1n_1+j_2n_2$等於0者.茲以下式表明之,其三總項分別含三類之項.

$$R_{1,2}=\Sigma C_0\cos D_0+\Sigma C_1\cos D_1+\Sigma C_2\cos D_2.$$

故m_1之根數由於m_2一次方且屬第一類之攝動爲

$$[\Omega_1^{(0,1)}]-[\Omega_1^{(0,1)}]t_0=\frac{m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}\sin i_1}$$
$$\times\Sigma\left\{\frac{\partial C_0}{\partial i_1}\frac{\sin D_0}{j_1n_1+j_2n_2}+\left[k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial i_1}+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial i_1}\right]\frac{C_0\cos D_0}{j_1n_1+j_2n_2}\right\},$$
$$[i_1^{(0,1)}]-[i_1^{(0,1)}]t_0=\frac{m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}\sin i_1}$$
$$\times\Sigma\left\{j'_1-k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\Omega_1}-k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial\Omega_1}\right\}\frac{C_0\cos D_0}{j_1n_1+j_2n_2}$$
$$-\frac{m_2\tan\frac{i_1}{2}}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}}\Sigma\left\{k'_1+j_1+k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\pi_1}+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial\pi_1}\right\}$$

$$\times \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2},$$

$$[\pi_1^{(0,1)}] - [\pi_1^{(0,1)}] t_0 = \frac{m_2 \tan \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1-e_1^2}} \Sigma \left\{ \frac{\partial C_0}{\partial i_1} \cdot \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} + \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] \frac{C_0 \sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} \right\}$$

$$+ \frac{m_2 \sqrt{1-e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \Sigma \frac{\partial C_0}{\partial e_1} \cdot \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2},$$

$$[a_1^{(0,1)}] - [a_1^{(0,1)}] t_0 = \frac{2 m_2}{n_1 a_1} \Sigma j_1 \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2},$$

$$[e_1^{(0,1)}] - [e_1^{(0,1)}] t_0 = -m_2 \sqrt{1-e_1^2} \frac{1-\sqrt{1-e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1}$$

$$\times \Sigma j_1 \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} - \frac{m_2 \sqrt{1-e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \Sigma \left\{ k'_1 + k \frac{\partial \tau_1}{\partial \pi_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \pi_1} \right\} \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2},$$

$$[\varepsilon_1^{(0,1)}] - [\varepsilon_1^{(0,1)}] t_0 = \frac{m_2 \tan \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1-e_1^2}} \Sigma \left\{ \frac{\partial C_0}{\partial i_1} \cdot \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} + \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} \right\}$$

$$+ m_2 \sqrt{1-e_1^2} \frac{1-\sqrt{1-e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \Sigma \frac{\partial C_0}{\partial e_1} \cdot \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2}$$

$$- \frac{2 m_2}{n_1 a_1} \Sigma \frac{\partial C_0}{\partial a_1} \cdot \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2}. \qquad (74)$$

諸項皆爲周期性,其周期爲 $\frac{2\pi}{j_1 n_1 + j_2 n_2}$.

此法以周期性諸項之級數表明行星之行動,與多祿某之次輪理相似,蓋每一項卽等於加一小輪行動於前之行動也.此理較其於次輪上加次輪爲尤繁.然其推演統依重力定律一理,

故又較簡.

(十四)長期差 j_1及j_2乃表一切正負整數及零,故除n_1及n_2無通約性外,j_1及j_2必有$j_1n_1+j_2n_2=0$而j_1及j_2不爲零之時.但如此則D爲常數,積分式不能依此法作成矣.然無論n_1及n_2是否無通約性,必有一對j_1, j_2使$j_1n_1+j_2n_2$爲甚小之數者.如此則除非C亦甚小,其相當之項必甚大.詳細展開$R_{1,2}$能證明C在e_1、e_2、$\sin^2\frac{I}{2}$內之序次,僅就數字論,至小等於j_1+j_2之數.n_1及n_2既皆爲正數,j_1及j_2必有一正一負,$j_1n_1+j_2n_2$方能甚小.僅就數字論,則j_1及j_2之數愈相近,j_1+j_2必愈小,且C乃愈大.若二星之平速有以n_1與n_2比數通約之性,而此比能以二小整數表示之,則因此小分母之存在,必有大數之攝動,其周期$\frac{2\pi}{j_1n_1+j_2n_2}$甚大,故稱曰長期差.其攝動諸項之式同於(74),惟其$j_1n_1+j_2n_2$爲甚小耳.

以幾何理論之,二星周期幾爲可通約之數,其比可以二小整數之比表示之者,必其會合之點,經過幾次會合後,復幾在二軌道之同一部分也.

木土二星之平速幾爲5與2之比,故$j_1=2, j_2=-5$乃有長期攝動之項,且係數C之序次當爲$2-5$之絕對數,即3也.拉普拉瑟於1784年,推算e_1及e_2三次之攝動,始證明土木差之理.

(十五)長差 D式諸項之$j_1=j_2=0$者,與時無關,D之準根數之偏微係數亦與時無關.故由(73)取此諸項而積分之得下式:

$$\left.\begin{aligned}[\Omega_1^{(0,1)}]&=\frac{m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}\sin i_1}\Sigma\left\{\frac{\partial C_2}{\partial i_1}\cos D_2\right.\\&\qquad\left.-\left[k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial i_1}+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial i_1}\right]C_2\sin D_2\right\}(t-t_0),\\[i_1^{(0,1)}]&=\frac{-m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}\sin i_1}\Sigma\left\{j'_1-k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\Omega_1}\right.\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial\Omega_1}\Big\}C_2 sinD_2\cdot(t-t_0)\\
&+\frac{m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}}tan\frac{i_1}{2}\Sigma\Big\{k'_1+k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\pi_1}\\
&+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial\pi_1}\Big\}C_2\ sin\ D_2\cdot(t-t_0),\\
[\pi_1^{(0,1)}]=&\frac{m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}}tan\frac{i_1}{2}\Sigma\Big\{\frac{\partial C_2}{\partial i_1}cos\ D_2\\
&-\Big[k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial i_1}+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial i_1}\Big]C_2\ sin\ D_2\Big\}(t-t_0)\\
&+\frac{m_2\sqrt{1-e_1^2}}{n_1a_1^2e_1}\Sigma\frac{\partial C_2}{\partial e_1}cos\ D_2\cdot(t-t_0),\\
[a_1^{(0,1)}]=&0,\\
[e_1^{(0,1)}]=&\frac{m_2\sqrt{1-e_1^2}}{n_1a_1^2e_1}\Sigma\Big\{k'_1+k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\pi_1}\\
&+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial\pi_1}\Big\}C_2\ sin\ D_2\cdot(t-t_0),\\
[\varepsilon^{(0,1)}]=&\frac{m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}}tan\frac{i_1}{2}\Sigma\Big\{\frac{\partial C_2}{\partial i_1}cos\ D_2\\
&-\Big[k_1\frac{\partial\tau_1}{\partial i_1}+k_2\frac{\partial\tau_2}{\partial i_1}\Big]C_2\ sin\ D_2\Big\}(t-t_0)\\
&+m_2\sqrt{1-e_1^2}\frac{1-\sqrt{1-e_1^2}}{n_1a_1^2e_1}\\
&\times\Sigma\frac{\partial C_2}{\partial e_1}cos\ D_2\cdot(t-t_0)\\
&-\frac{2m_2}{n_1a_1}\Sigma\frac{\partial C_2}{\partial a_1}cos\ D_2\cdot(t-t_0).
\end{aligned}
\right\}(75)
$$

由此可見 a 之攝動,無此類質量一次方之長差諸項.太陽系之穩定(Stability)第一理卽由此演出也.1773年拉普拉瑟證明,至 e 二次方,a 無長差.1776年拉哥蘭基證明至 e 任何次方均如

此. 1809年包衣深 (Poisson) 證明 a 在質量二次之攝動無長差，但有如 $t\cos D$ 式樣之諸項，其 D 亦含 t. 如此式之諸項，稱曰包衣深項.

若 $j_1n_1+j_2n_2=0$ 而 $j_1\neq 0, j_3\neq 0$，則 D 與 t 無關，其相當之諸項爲長差. 在此例 D 與 ε 有關，故 a 之攝動或亦有長差. 但觀測之精確原有極限，在限內 n_1 及 n_2 爲不可通約與否，其成分正等，故 a 之有長差與否其理由亦相等也.

(十六)質量二次之諸項　由(14)可見其右側爲一次式內右側諸項準諸根數之偏微係數，乘其相當根數之一次攝動之積. 所以交點之二次攝動，由下式定之：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Omega_1^{(0,2)}}{dt}&=\frac{m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}\sin i_1}\sum_{s_1}\frac{\partial^2R_{1,2}}{\partial i_1\partial s_1}s_1^{(0,1)},\\ \frac{d\Omega_1^{(1,1)}}{dt}&=\frac{m_2}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}\sin i_1}\sum_{s_2}\frac{\partial^2R_{1,2}}{\partial i_1\partial s_2}s_2^{(1,0)}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(76)$$

其 s_1 及 s_2 表示 m_1 及 m_2 軌道之根數，偏微係數 $\frac{\partial^2R_{1,2}}{\partial i_1\partial s_1}$ 爲周期性及常數諸項之和，$s_1^{(0,1)}$ 及 $s_2^{(1,0)}$ 爲周期性諸項及含一次方之 t 爲因子之諸項之和. 故二偏微係數之積所含諸項有四類：(1) $\frac{\sin}{\cos}D$，其 D 含有 t；(2) $t\frac{\sin}{\cos}D$，其 D 含有 t；(3) $\frac{\sin}{\cos}D_2$，其 D_2 不含 t；(4) $t\frac{\sin}{\cos}D_2$. 此四類之積分如下式：

$$(1)\ \frac{-\cos}{j_1n_1+j_2n_2}\frac{\sin}{D},\qquad (2)\ t\frac{-\cos}{j_1n_1+j_2n_2}\frac{\sin}{D}+\frac{\sin}{\cos}\frac{D}{(j_1n_1+j_2n_2)^2},$$

$$(3)\ t\frac{\sin}{\cos}D_2,\qquad (4)\ \frac{t^2}{2}\frac{\sin}{\cos}D_2.$$

故二次質量之攝動有純周期性諸項，包衣深諸項，長差項之含一次方之 t 者，及長差項含二次方之 t 者. 除半長徑外（包衣

深證明其第三及第四類諸項之係數爲 0),諸根數均如此.

在三次質量之諸項,諸根數之攝動,除 a_1 外,均有長差.諸項與 t 之三次方成比例.其餘類推.

(十七)拉哥蘭基之論長差　表明根數之式,如有長差諸項存在,似可指明苟該級數無論 t 爲何數,均表明該諸根數,則根數隨時而變將無底止,但此並非事實.例如下式,

$$sin(cmt)=cmt-\frac{c^3m^3t^3}{3!}+\cdots\cdots,$$

其 c 爲常數,m 爲極小數而可用以替代質量.右側之數無論 t 爲何值,均爲收斂性,故此函數無論 t 爲何值,不能大於一.但將其展爲 m 之次方級數,而僅討論其前數項,且不知其係數之規律,亦將謂該級數所表之函數,隨時無限增長.拉哥蘭基依此意證明長差諸項,實乃極長期周期性諸項之展開式.此諸項之不同於長期差者,乃其差生於周期差之未能補消之殘餘,非若長期差之直接生於星體在軌道內彼此相成之方位情形.

拉哥蘭基法之第一步用下式轉換變數:

$$\left.\begin{aligned} h_j&=e_j\,sin\,\pi_j,\\ l_j&=e_j\,cos\,\pi_j. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} p_j&=tan\,i_j\,sin\,\Omega_j,\\ q&=tan\,i_j\,cos\,\Omega_j. \end{aligned}\right\}$$

其 e_j、π_j 等爲 m_j 軌道之根數,而 l_j 爲一新引之變數,不可與平黃經相混.微分上式(撤去字尾),並變 R 準 e、π、Ω 及 i 之偏微係數爲準 h、l、p、q 之偏微係數.再依(48)求 h、l、p 及 q 準 t 之微分式,再展開其右側而棄去 h、l、p 及 q 二次方以上之諸項,乃得下式:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dh}{dt}&=+\frac{m_2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial l},\\ \frac{dl}{dt}&=-\frac{m_2}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial h},\\ \frac{dp}{dt}&=+\frac{m_2}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial q},\\ \frac{dq}{dt}&=-\frac{m_2}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial p}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(77)$$

每一攝動體賦予如此之攝動諸項.本式所表者乃來自 m_2 也.但此式非眞,因曾棄變數高次方之諸項也.

第二步乃處理此微分式之法.夫 $R_{i,j}$ 之展開式,必有與 t 無關之諸項.設 $R^{(0)}_{i,j}$ 表示該諸項,此諸項乃所以生長差者,拉哥蘭基乃棄去 R_{ij} 之周期性諸項而寫成下式:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dh_i}{dt}&=+\sum_{j=1}^{n} m_j\frac{\partial R^{(0)}_{i,j}}{\partial l_j},\quad(i=1,\cdots,n;j\neq 1)\\ \frac{dl_j}{dt}&=-\sum_{j=1}^{n} m_j\frac{\partial R^{(0)}_{i,j}}{\partial h_i},\\ \frac{dp_i}{dt}&=+\sum_{j=1}^{n} m_j\frac{\partial R^{(0)}_{i,j}}{\partial q_i},\\ \frac{dq_i}{dt}&=-\sum_{j=1}^{n} m_j\frac{\partial R^{(0)}_{i,j}}{\partial p_i}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(78)$$

由此式推得之 h_i、l_i、p_i 及 q_i 用以代(0)段所得之長差諸項.如此分裂微分式非理所許,而所得者,又頗合於根數之實在變異,亦奇事也.

將(78)之右側展爲 h_i、l_i、p_i 及 q_i 之次方級數.棄去二次方以上之諸項,則諸式變爲同次直線(Linear & homogeneous)式.其式如下:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dh_1}{dt}-\sum_{j=1}^{n} c_{1j}l_j&=0,\\ \frac{dl_1}{dt}+\sum_{j=1}^{n} c_{1j}h_j&=0,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dh_2}{dt}-\sum_{j=1}^{n}c_{2j}l_j=0,\\
&\frac{dl_2}{dt}+\sum_{j=1}^{n}c_{2j}h_j=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dh_n}{dt}-\sum_{j=1}^{n}c_{nj}l_j=0,\\
&\frac{dl_n}{dt}+\sum_{j=1}^{n}c_{nj}h_j=0.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(79)$$

其p_i及q_i之式同此.

其c_{ij}僅與α有關（因ε_j不存於長差諸項內）可認爲常數,因α在質量一次及二次之攝動無長期諸項也.惟α之周期性攝動並非小,故以c_{ij}爲常數,亦非眞確.

解(79)式得其變數之值如下式:

$$\left.\begin{aligned}
&h_i=\sum_{j=1}^{n}H_{ij}e^{\lambda_j t},\quad l_i=\sum_{j=1}^{n}L_{ij}e^{\lambda_j t},\\
&p_i=\sum_{j=1}^{n}P_{ij}e^{\mu_j t},\quad q_i=\sum_{j=1}^{n}Q_{ij}e^{\mu_j t}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(80)$$

其H_{ij}、L_{ij}、P_{ij}及Q_{ij}爲與初時情況有關之常數.詳細推之,可知λ_j及μ_j皆爲純虛數 (Imaginaries), 其絕對值甚小.故h_i、l_i、p_i、q_i皆在中數左右擺動,其期極長.因e_j及$\tan i_j$能以h_j、l_j、p_j及q_j之平方和表示之,故亦有周期甚長之大擺動.如地道兩心差現在減小,而將繼續減小24000年,是其例也.

拉普拉瑟於1784年解(79)得

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}m_j a_j^2 n_j(h_j^2+l_j^2)=\text{常數}=C_1,\\
&\sum_{j=1}^{n}m_j a_j^2 n_j(p_j^2+q_j^2)=C'_1.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(81)$$

由h、l、p及q之定義,乃有

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} m_j n_j a_j^2 e_j^2 = C_1, \text{或} \sum_{j=1}^{n} m_j \sqrt{a_j}\, e_j^2 = C_2,\\ &\sum_{j=1}^{n} m_j n_j a_j^2 \tan^2 i_j = C'_1, \text{或} \sum_{j=1}^{n} m_j \sqrt{a_j} \tan^2 i_j = C'_2.\end{aligned}\right\} \cdots (82)$$

其 n_j 乃 m_j 之平均行動，C_1 及 C'_1 乃由初時情況推定之常數，並皆爲微小之數，其左側僅爲正數諸項組成，故 e_j 或 i_j 不能有大數．但 m_j 若比其餘者爲甚小，亦有爲例外者．

(82)即表示諸行星兩心差變及交角變之界限甚狹，所謂拉普拉瑟之公理是也．但(82)不能如(80)之表出其周期及搖擺之度．

(十八)方形推算攝動法　若(60)第二因子之第二項之絕對數值大於一，則(62)不具收斂性不能用以推算攝動矣．或 r_1 及 r_2 極近於相等，或二者不等而 I 甚大，皆令該展開式無效．若因 I 大而無效，尙有一展開法，但有時二法均不能得有效之數值．若二星道共在一面內，彼此相交，則二法均無效，因如此則

$$r_{1,2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 (u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)$$

於二星同時行於交點時，將成爲零也．

用方形法(Method of mechanical quadratures)推算攝動無須展開 $R_{1,2}$ 爲明含 t 之諸項．故此法可用以推算行星加於彗之攝動，及 $R_{1,2}$ 之展開式不能收斂或收斂極慢之攝動．設 s 表示 m_1 道根數之一，則(53)可寫爲

$$\frac{ds}{dt} = f_s(t),$$

且在 $t_n - t_0$ 時間內一次之攝動爲

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t_n} f_s(t)\,dt \quad \cdots (83)$$

其 s_0 爲 $t = t_0$ 時之 s．

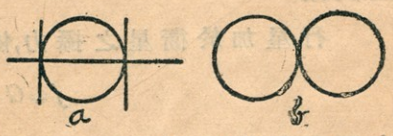
此法之難，即在作此積分式．若攝動函數不能明展爲含 t 之諸項，則函數 $R_{1,2}$ 所表之原數不得推出．但無論在何例 $f_s(t)$

在 t 任何數時之數值可得推出,由 $f_S(t)$ 之數值,即可得此積分式之概數,以幾何理論之,此積分爲 t 軸線與曲線 $f=f_S(t)$ 及 t_0 及 t_n 二豎線間所含之面積.故此積分式之概數爲

$$s=s_c+f_S(t_0)(t_1-t_0)+f_S(t_1)(t_2-t_1)+\cdots+f_S(t_{n-1})(t_n-t_{n-1}).$$

若使其 $t_1-t_0, t_2-t_1, \cdots, t_n-t_{n-1}$ 之時間極小,則所得之數,愈近於所欲求者.

§360. 行星直徑　行星之視直徑用量微器量定之.在此例則雙象(Double-image)量微器較線量微器爲適用,因星有燦爛之光也.如第二五九圖 a 使二線切於行星之緣,因有光物體通能感動眼膜俾視其稍大,斯乃光之燦爛之作用也.故如此量得之直徑過大,用小儀器所差尤大.若使視場光亮,所差可減小.在雙象量微器,使兩個同亮之平圓相切,則在切點幾無燦爛影響矣.



第二五九圖

如此量得之直徑爲視直徑,以弧之秒數計之,隨去地之遠近而異.其用直線單位計之,得

$$\text{眞直徑}=\frac{\Delta\, D''}{206265},$$

Δ 乃行星去地之距離,D'' 乃行星直徑之秒數.若 Δ 爲在天文單位之數,則所得之眞直徑,亦爲在天文單位之數.欲求直徑之里數,即乘以天文單位所當之里數(即日地距離).

§361. 面積及體積　既得直徑,因面積與直徑平方成比,故行星之面積等於地球面積乘以 $\left(\frac{s}{\rho}\right)^2$. s 爲行星之半徑,ρ 爲地球之半徑.

行星體積等於地球體積乘以 $\left(\frac{s}{\rho}\right)^3$.

其他情況均相同,則行星愈近於地,上所推算之數愈準確.

金星最近時其視直徑之量，如有0.1秒之錯誤，僅當眞直徑之13英里，而在海王星則當1300英里．所以遠行星之數各家所測每有不同也．

§362. 行星有衛星者之質量 在此例，測得衛星之周期及距離乃用下之基本式推算其質量．

$$M+m=\frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{r^3}{t^2}.$$

其 M 爲行星質量，m 爲衛星質量，r 爲衛星軌道之半徑，t 爲衛星周期．

行星加於衛星之攝力，依攝力定律，爲

$$f=G\frac{M+m}{r^2}.$$

由圓行動定律，則爲

$$f=4\pi^2\left(\frac{r}{t^2}\right),$$

故得

$$M+m=\frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{r^3}{t^2}.$$

此雖適於圓道，若以衛星軌道之半長徑 a 代 r，卽適於橢圓道矣．

將上式改爲如下之比例式，則便於比較二行星之質量．

$$(M+m):(M_1+m_1)=\frac{r^3}{t^2}:\frac{r_1^3}{t^2}.$$

月之質量約爲地之$\frac{1}{80}$，其他衛星不及本星之$\frac{1}{1000}$，故可不計也．

試求日質量與地之比，在此例不能用月之實恆星周期，須用月行未受攝動時之周期，此周期較實數約少一時，故有

$$(S+E):(E+m)=\frac{(93000000)^3}{(365.25)^2}:\frac{(239000)^3}{(27.4)^2}.$$

試求地質量與木星之比．木星之第四衛星之周期爲 $16\frac{3}{4}$

日,距離爲1167000英里,故有

$$(E+m):(J+m_1)=\frac{(239000)^3}{(27.4)^2}:\frac{(1167000)^3}{(16.7)^2}.$$

得木星質量爲地月質量之316倍,爲地之318倍.

通常多以日質量之分數表行星之質量,其比例爲

$$日:行星=\frac{R^3}{T^2}:\frac{r^3}{t^2}.$$

由是得行星質量等於日質量乘以$\left(\frac{r}{R}\right)^3\left(\frac{T}{t}\right)^2$,$T$及$R$爲行星之周期及去日之距離.因$R$及$r$均可依天文單位推定,無須知其里數.故行星質量如以日質量度計之,原無須知視差.但與地質量比,則須知視差,蓋月去地之距離係依英里數或地半徑測得者,非依天文單位也.

欲利用衛星以定行星質量,必須用量微器觀測衛星去本星之距離及其周期.

§363. 行星無衛星者之質量　行星無衛星時,其質量頗難定,因不能推定其攝力也.但可由行星之攝動力推之.蓋凡行星依其質量及方位加攝動力於他行星,準方位可推其力之率,測得其攝動力若干,即可以力之率比例而得質量也.金加攝動力於地及水星,由其所生之攝動推定金星之質量.水星加攝動力於金星,於彗行至其近處時亦加攝動力,測得攝動,水星之質量可推矣.

§364. 密度　行星與地相比之密度,以容積除質量定之,故有

$$密度=m\div\left(\frac{s}{\rho}\right)^3.$$

例如木星直徑約爲地球之11倍,即$\frac{s}{\rho}=11$,故容積約爲地球之$11^3=1331$倍,其質量約爲318倍,故密度等於$\frac{318}{1331}$(略等於

0.24) 倍地之密度,即約 $1\frac{1}{3}$ 倍水之密度.地之密度爲 5.58.

§365. 表面上重力 行星表面上之重力與地球之比,最爲重要,因由此可知行星之自然情況也.設 r 爲以地半徑度計之行星半徑,則

$$\gamma = \text{表面重力} = \frac{m}{\left(\frac{s}{\rho}\right)^2} = \frac{m}{\left(\frac{s}{\rho}\right)^3} \cdot \left(\frac{s}{\rho}\right).$$

即 γ 等於行星密度乘以行星與地球二直徑之比數也.例如木星之 $\gamma = \frac{318}{11^2} =$ 密度 $\times 11 = 0.24 \times 11$,故在木星上物體之重量爲地球上者之 2.64 倍.

§366. 行星之扁度 扁度 (Oblateness 或 polar compression) 爲赤道直徑與兩極直徑之較除以赤道直徑.用量微器測量其最大與最小之較,則扁度可算求矣.

§367. 軸之傾斜 於觀測行星自轉周期時,以量微器測各斑點行過行星面所畫之道,即可定其軸之傾斜.然能測者,僅火木土三星

§368. 遠鏡對於表面特徵之研究 比較由觀測或由攝影所見星面之記號,可知何者爲暫時的,何者爲永久的,現所知者惟火星較詳,可作其表面圖.

§369. 行星現於分光器上之特徵及反光力 行星大氣之特徵可用分光器研究之.有些行星之彩色帶具有暗線,故知其有水蒸氣及吸收物質.行星面之反光力,可用光度表 (Photometer) 測其與恆星或假作之星或其他行星之比較.

§370. 行星之衛星 用線量微器累測衛星去本星心之視距離及方向可定衛星之距離及周期,最好於衛星行近其最大偏角時測之.

若行星及地球皆靜而不動,則所見衛星行道必爲橢圓,累測之大小必皆相同.但本星及地皆動,故本題亦複雜也.

除我地之月及土之第八月外,衛星均在本星赤道面行動.除月及土木二星之外衛星外,且均行於圜道(略圓).拉普拉瑟證明苟衛星之行道與本星赤道面相合其赤道凸質必有維持其留在該面之趨勢,但其何以行於圓道,則非所知矣.在一星有數衛星者,其互相引起之攝動,亦爲一有趣之問題,並有可由此推定該衛星與本星質量之比者.有些衛星光度之變甚爲特異,或者表示其自轉之時等於繞本星一周之時,如我月然.

§371. 何木包爾特(Humboldt)之行星分類　分行星爲二類,一爲屬地行星(Terrestrial planets),一爲大行星(Major planets),屬地行星爲水、金、地、火四星,其大小依次而增,其直徑由3000英里而至8000英里,其密度相差無幾(地爲其中最大最密者),其物理的情況約略相同,且均有水有空氣.但其所受之太陽之光熱,表面上之重力及其大氣之密度,均不相同,故不能斷定各星上之生活亦與地上相似也.

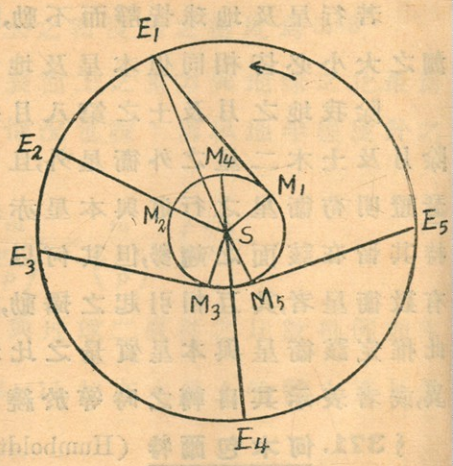
大行星爲木、土、天王、海王四星,其體較大,其直徑在30000至90000英里以內,其密度甚小,或竟爲如雲之氣體.故有疑其温度甚高,並有謂木星爲一種半日狀之星體,然皆非一定之事也.

衆小行星或者爲屬地星類中之一星,於其轉化中不知由於何故破成碎磈.聚積爲一,其質量亦不能足地之百分之一.

表列行星數字之有關於日之視差者,皆假定該視差爲8.8秒.日之平均距離爲92897000英里.

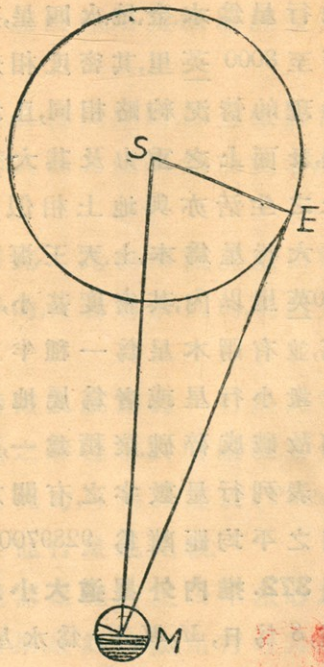
§372. 推內外星道大小之簡法　第二六〇圖爲正視星地二道,S爲日,$M_1M_3M_4$爲水星道,$E_1E_3E_5$爲地道.矢表星地所行之方向.星在M_1時,設地在E_1,其方向爲星道之切線M_1E_1,

則必見星離日最遠.其角度M_1E_1S爲最大.E_1M_1S爲直角.則半徑與M_1E_1S角正弦比若地道半徑ES與星道半徑MS比.故測得M_1E_1S角,卽能知星道之半徑.然屢測其半徑不等,故知星道非正圜而爲橢圜.設地定居於E_1,則行星在M_1爲昏見,離日最遠,行一周復至M_1仍得昏見,離日最遠.今地自E_1向E_2行於本道.故星復至M_1時地已前行,追至M_5遇地在E_5.始同在切線上而復得星昏見,離日最遠也.中間星至M_2時地至E_2,則見星下合日.星至M_3時地至E_3,則得星晨見離日最遠.星復過M_1至M_4時地至E_4,則見星上合日.星自M_1起復至M_1是謂恆星周.一周後更行至M_5是謂太陽周,卽會合周也.



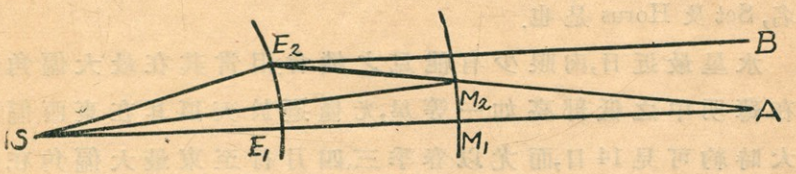
第二六〇圖

凡星道包地道者,名曰外行星.何以知其包地道,其證有二:內行星離日度有限,遠至限而復近.外行星則無



第二六一圖

限,衝日時遠至半周,地不在星日中間不能如是,一也.星之光常滿,不見有弦缺.其遠者爲木、土、天王、海王,恆爲圜體.其近者爲火星,雖或小虧,亦不能過8分之 .故知在地視星與日照星之方向略同,非地道在星道內不能如此,二也.以火星論之,如圖S爲日,E爲地,M爲火星.地在E時火星上見地離日度最大,地上視火星見暗面亦最多.準星之光度能推SME角,及星日二心距SM與日地二心距SE之比例.故知火星道半徑爲一箇半地道半徑强.而木、土、天王、海王之虧不能見,則其道必包地與火二道.



第二六二圖

外行星於衝日前後皆逆行.逆行之時及所過度分及速率各不同.俱火大於木,木大於土,土大於天王,天王大於海王.既知星之恆星周時,則測其逆行能推星道大小.如第二六二圖S爲日.衝日時地在E_1星在M_1同在SA直線內.歷若干時地行至E_2星行至M_2,作E_2M_2聯線引長之交SA線於A,成SE_2A、SM_2A二三角形.先用SE_2A形,已有SE_1邊卽日地距,亦有ASE_1角卽地所過之弧度,亦有SAE_1角卽BE_1A角爲星逆行之度,則可推得SA邊.次用SM_2A形,已有SAM_2角,亦有ASM_2角卽星所過之弧度,以星周時與今所歷時比例而得,又有SA邊,則可推得SM邊卽星日距也.然星道非平圜,必累測而推之取其中數爲星道半徑也.

第二十一章

行星分論

水星

§373. 水星 水星爲古緯星之一，亦卽舜時所齊七政之一，其發見不知始於何時．古有七名：辰星、天攙、鉤星、細爽、能星、小正、安周是也．希臘有二名，在晨爲 Appollo，在夕爲 Mercury．埃及亦有二名，Set 及 Horus 是也．

水星最近日，肉眼少有能見之機會．但當其在最大偏角時，則在薄明中之低部亮如一等星，光僅遜於天狼耳．在東西偏角最大時約可見 14 日，而尤以春季三、四月行至東最大偏角在昏時爲最易見．北歐洲能見水星之機會極少，其他之處亦多於晝間觀測之．

水星最近日，受日之光熱最多，行最速（有些小行星比水星更快），軌道偏心最大，軌道面交黃道面斜角最大，直徑最小（小行星除外），皆其與他星之不同處也．

§374. 距離，光及熱 水星去日之中距爲 36000000 英里．兩心差爲 0.205，故日離軌道中心 7500000 英里，致星去日之實距離在 28500000 至 43000000 英里之間，其軌道行速度之變異，介於由在卑點時之每秒 35 英里，以至在高點時之每秒 23 英里之間．平均計之，其所受日之光熱爲地之 6.7 倍．但在卑點與在高點時，所受光熱之比爲 9 與 4 之比．故於距離變異所成之年，雖其赤道面與地道面成平行，亦有二季．若赤道面之傾斜如地球然，則其氣候之時將更複雜矣．

§375. 周期 恆星周期略爲 88 日，會合周期約爲 116 日．最

大偏角點介於16度至29度之間,約爲下合前後22日,或上合前後36日所行至之處,其留點甚近於最大偏角點.

§376. 古時之記載　周時以前之記載,多因秦火焚毀不得獲見.前漢史記天官書關於水星之行動,載其出東方行四舍,四十八日,其數二十日而反入於東方.其出西方行四舍,四十八日,其數二十日而反入於西方,就語意推解之,則該時已知水星偕日而行,離日有定界,或在日東或在日西,在日東則夕見於西方,在日西則晨見於東方矣.又載水星之色爲春青黃、夏赤白、秋青白、冬黃而不明.

後漢三統曆(約耶紀開始時)載水晨見去日半次.逆,日行二度,一日始留,二日而旋.順,日行七分度六,七日順疾.日行一度三分度一,十八日而伏.凡見二十八日,除逆定,行星二十八度.伏,日行一度九分度七有奇,三十七日有奇行星六十八度有奇.凡晨見伏六十五日,行星九十六度有奇.夕始見去日半次順疾,日行一度三分度一,十六日二分日一順遲.日行七分度六,七日留.一日二分日一而旋.逆,日行二度,一日而伏.凡見二十六日,除逆定,行星二十六度.伏逆,日行十五分度四有奇,二十四日行星六度有奇.凡夕見伏五十日,行星十九度有奇.一復百一十五日有奇,行星亦如之.故曰日行一度.由此可知該時之觀測,因無良好之測器,頗難定其會合點.就語意解之,似留點與最大偏角點相合.一復之中共逆行26日,留3.5日,順行85日有奇.以伏見分之,則見爲54日,伏爲61日有奇,共爲115日有奇.留點在日之東西各28度處(古以365.25度爲一周天故較今度略小).雖不能與近測密合而會合周期爲115日有奇.將近116日則爲確數也.而宋何承之元嘉曆謂自初與日合伏而順行17日有奇.在日東見於西方,順疾18日,順遲7日,留4日.夕伏西方,逆行11日

（退6度）而與日合.又11日（退6度）而晨見東方,留4日,順遲7日,疾18日.晨伏東方,順行17日有奇,而復初.共115日有奇.是更爲密切矣.

§377. 斜度 軌道交黃道斜角約爲7度.但由地心見行星去黃道之最大距離（卽最大屬地心黃緯）恆小於此數.

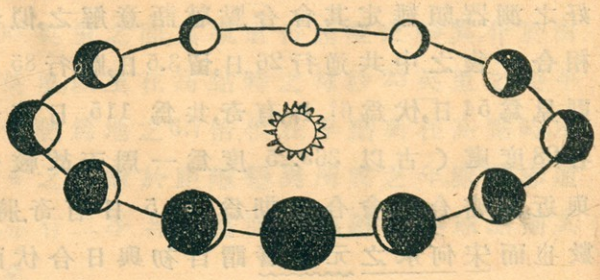
§378. 直徑,表面積及容積 視直徑在5秒約至13秒之間,隨去地距離而變,最近時約爲57000000英里(93−36),最遠時約爲129000000英里(93+36).眞徑頗近於3000(±50)英里,故其表面積爲地之$\frac{1}{7}$,其容積爲$\frac{1}{18.5}$.

§379. 質量,密度及表面重力 其質量因無衞星,頗難測定.據拉普拉瑟來未里亞因格等所得者在$\frac{1}{9}$至$\frac{1}{30}$地球質量之間.此星質量甚小,去日又最近,故其加於他行星之攝動亦甚小.其測定之錯誤較大,在所當然.

牛考卜謂爲日質量之$\frac{1}{6944000}$,地質量之$\frac{1}{21}$.如用此數,則其密度爲地之$\frac{7}{8}$.其表面重力較地之$\frac{1}{3}$略小.

§380. 反光力(Albedo) 反光力據楚爾諾(Zollner)所定爲0.13,比月尙小.緣邊之光較中心爲亮.

§381. 遠鏡中所見星之外觀及位相 以遠鏡窺察水星形如小月球,呈盈虛之象.在下合點時黑暗之半面向地球.在上合點時,則光亮之面向地.偏離角最大時形如半月.介於上合與



第二六三圖

最大偏角之際形如凸月.介於下合與最大偏角之際形如彎月.金星亦同此.觀第二六三圖自明.

水星距太陽最近,僅可於晝間測之.設法將物鏡遮蔽,俾日光不得直接射入,即可觀測其表面,惟星面無特著之記號.百年前須婁特(Schroeter)據星面之黑影推得水星24時5分自轉一周.至1889年夏巴理立(Schiaparelli)謂於水星面發現標記,依標記之運動知水星繞軸自轉,凡88日而一周,同時公轉亦一周.故水星半面永對太陽,半面永背太陽,有如月球與地球之關係焉.且水星道偏心率甚大,故其天平動亦甚著,偏左偏右約有$23\frac{1}{2}$度之多.故在水星上適當之處,觀望太陽無昇無沒,但在天際左右擺動約47度,凡88日而一次.1896年羅威爾(Lowell)之測亦與此合,或有可信之處.

§382. 大氣　水星面之大氣密度不如金星,更不如地球.蓋水星掠過日面時,雖亦現一新黑點而不生光圈,足徵水星之大氣甚爲稀薄.惟據黑京(Huggins)及弗哥爾(Vogel)之報告謂水星彩色帶中除通常黑線爲日光反射所生外,更有蒸氣之粗黑線在.乃知水星大氣中有水無疑,但甚稀薄耳.

§383. 水星掠日　水星因其道之斜角甚大,在下合時常由日南或日北經過,惟於行近交點遇有會合時,始能掠過日面.在地視之,如日面上一小黑斑,其大雖肉眼亦得見.

地球經過水星道正交點時近小雪,約在五月七日.過中交點時近小滿,約在十一月九日.故水星於該日左近掠日,苟星道爲平圓,其掠日限(與食限意同)爲2度10分.但在五月之掠日,水星近其高點去地較近,遂致其限縮小.而在十一月之掠日,其限增長.實際五月掠日之次數小於11月掠日之一半.

22個會合周期略等於7年,41個則最近於14年,而145個

幾等於46年.故11月掠日將7年再見,13年更有再見之可能,而46年則必再見.至於五月掠日相隔7年非能必見,而13年者竟常不見也.

首發見水星掠日者爲伽申第(Gassendi)係在1631年11月7日.茲列本世紀掠日日期於下以備參考.

1907年11月14日,	1914年11月 6日,
1924年 5月 7日,	1927年11月 8日,
1937年 5月10日,	1940年11月12日,
1953年11月13日,	1960年11月 6日,
1970年 5月 9日,	1973年11月 9日,
1986年11月12日,	1999年11月14日.

金 星

§384. 金星 金星最亮,與地之大小及密度相捋.古曰太白.辰出東方曰啓明,昏見西方曰長庚.出東方近日時曰明星,遠日時曰大囂剛.出西方近日時曰太白,遠日時曰大相剛.希臘古亦有二名,晨見曰Phosphorus,夕見曰 Hesperus. 肉眼能於白晝見之,當其近最大偏角時,可見數星期之久.

§385. 距離,周期及軌道斜角 金星距日之中數爲67200000英里.兩心差最小,僅爲0.007.故其最大最小之距離去中數,僅約470000英里.其軌道行速度爲每秒22英里.

其恆星周期爲225日(7.5月).會合周期爲584日(1年7月).從上合點至最大偏角點東西各220日,而從下合點,則各71或72日,留點去下合點約29度.

斜角僅爲3.5度.

史記天官書,記其行動,與記水星者同,是語意不明.三統曆謂見485日有奇,伏99日其中順行者540日有奇,逆行者28日,

留者15日有奇.統一會合周而復始,共約 584 日.何承天元嘉曆(424 年)謂初與日合伏41日有奇,見西方順疾91日,小遲91日,大遲45日,留 8 日,逆 9 日(退 6 度),伏西方 6 日(退 4 度),而與日合,又 6 日(退 4 度)晨見東方,逆 9 日(退 6 度),留 8 日,順45日,小疾91日,大疾91日,晨伏東方41日有奇,復與日合,周而復始共約 584 日.古又稱金水二星其出也不經天,火土木三星其出也經天,故曰參天兩地.蓋指二星在地外(在地道內),三星在日外(在地道外)也.不經天乃謂不見其中天也.

§386. 直徑,面積及容積　視直徑在下合時爲67秒,在上合時爲11秒,他時則介於二者之間.其差如此之大,蓋因其去地距離變異太甚.在下合時去地僅 26000000 英里 (93－67),除月及偶至之彗並愛神星外無去地如此之近者.而在上合時,則去地竟遠至160000000 英里 (93＋67).其最遠比最近如 6 與 1 之比,故其視徑之變異,亦甚大也.

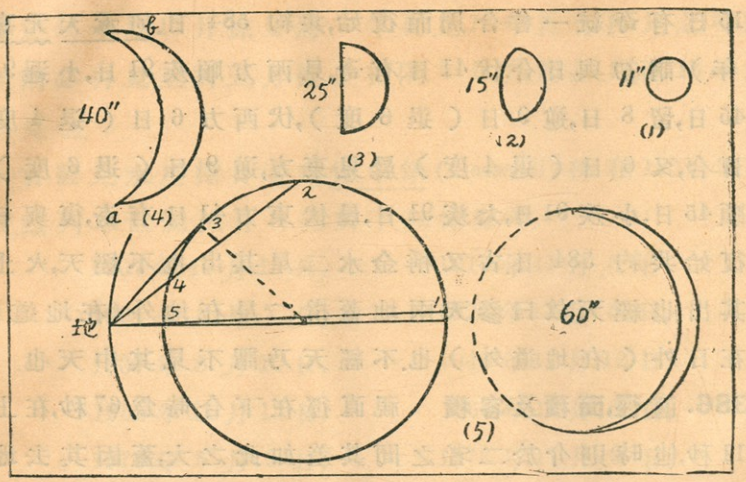
眞直徑爲7700(±30)英里.其面積爲地之95%,其容積爲地之92%.

§387. 質量,密度及重力　依其加於他星之攝動牛考卜推得其質量爲地之82%.故其密度爲地之88%,其表面重力爲地之85%.

§388. 位相　金星光度極强,故其在遠鏡內之外象甚顯著.當其在最大偏角點及下合點之間,其直徑爲40秒,故以擴大力45倍之遠鏡視其大小形象及光亮,如朔後四日之月.

第二六四圖,乃表顯星在其道上五點,由地所見星輪之大小也.1、3 及 5 乃分別在上合,最大偏角及近下合時所見者,2 及 4 乃在其間之點所見者.

§389. 最大光度　金星在下合前後各36日時爲最亮.彼時



第四二六圖

去日約38或39度,其位相如朔後五日之月,爲肉眼於晝間最易見之時也.

§390. 表面標記及自轉 金星面上無顯著之標記,偶或見有陰影,不過光暗之異非能固定,故頗難定其自轉周期.須婁特觀測其陰影定爲23時21分,夏巴里立之觀測謂約係225日,實一未決之問題也.或星之體非我人所能見,但見包星之雲,而此雲所以蔽日以獲星也.1912年拜羅波爾斯克(Belopolsky)用分光器測定其自轉周期約爲一日,是與須婁特相合矣.

§391. 反光力 楚爾諾定爲0.50,約三倍月之反光力,或者其表面多爲雲霧遮蔽,故其反光率如此之强.

§392. 大氣 當星去日甚近,形如彎月時,其彎端附近,偶有光點炫耀.當星掠日面時,星之暗面有一光環圍繞.瓦特申(Watson)於1874年測之,斷爲星之大氣折光作用,推定其大氣之厚約爲55英里(地之大氣約爲40英里).然後人詳測之謂其不如地大氣之厚,其環光多由於擴散反光作用,若果全由於折光

作用,則其環在星距日最遠之一邊必寬而且亮,而實際則反是也.星之彩色帶雖有水蒸氣之線,然亦可謂爲屬地線.

有時星面之晴部亦現微光,此則不能由於反光必爲星自發之光.

§393. 衛星　金星無衛星.星光極强,且祇能於光亮之薄明時觀測之,縱有衛星亦難測見也.

§394. 金星掠日　金星有時由東至西掠過日面,雖肉眼亦能見其如一黑斑.因星道交角僅爲3.5度,其掠日限甚小(約4度),故掠日機會甚少.日行至交點,在6月5日及12月7日,故掠日日期必近該二日(恆近冬夏二至).星若平分日面而掠過之,其掠日之時間約爲8時.以日徑中數爲32分,則正爲一周360度之$\frac{1}{675}$,星之會合周期爲584日,若星去日與去地之距離相等,則中心掠日之時間必爲$\frac{584}{675}$日.但在下合時星去地日距離之比如277與723之比,故中心掠日時間爲

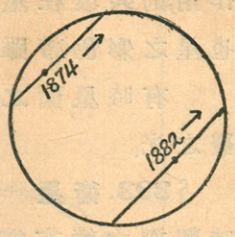
$$\frac{584}{675}\times\frac{277}{723}=0.332\text{日}=7\text{時}58\text{分}.$$

§395. 掠日之復至期　5箇會合周期或13箇恆星周期約等於8年,其差僅半日餘.而152會合周期或395恆星周期幾正等於243年,故若一時金星掠日,其8年前或8年後,在該交點亦有一次掠日,而16年前或後則不能有,且不越過235或243年之期,在此同一交點處,無復有掠日之事.

若現時所有之掠日爲中心掠日,其相隔8年之掠日,不能亦爲中心掠日,必掠過日面北或南之部分.若現爲掠過日面南或北緣之掠日,其8年前或後之掠日所過日面之部位,必與本次相反.所以若現有一對相隔8年之6月中掠日,則243年後必在此交點處又有一對6月中掠日,而於此兩對六月中掠日

之中間（122年）有一對12月中掠日,惟千年以後,恐其不能按對而至矣.茲列金星掠日日期如下:

1631年12月7日,	1874年12月9日,
1639年12月4日,	1882年12月6日,
1761年6月5日,	2004年6月8日,
1769年6月3日,	2012年6月6日.



第二六五圖

火 星

§396. 火星 火星古名熒惑.其距日中數爲141500000英里.兩心差爲0.093,故其距離之變異左右各約13000000英里.其所受日之光熱約少於地之一半.軌道交角爲1度51分.恆星周期爲687日（1年10.5月）.軌道行速度之中數爲每秒15英里.會合周期爲780日（2年$1\frac{2}{3}$月）,是爲太陽系中會合周期之最長者,在此期中東行者710日,逆行者70日.

三統曆謂火星晨始見去日半次,順行276日,留10日,旋逆行62日,復留10日,旋順行276日而伏,伏146日.凡見634日,伏146日有奇,伏見共780有奇,行星415度有奇,日行$\frac{7355}{13824}$度.元嘉曆謂火初與日合伏71日有奇,行54度有奇.晨見東方,順疾108.5日行77.5度.小遲126日,行72度.大遲42日,行12度.留12日.逆60日,退18度.又留12日.順遲42日,行12度.小疾126日,行72度.大疾108.5日,行77.5度.夕伏西方,71日有奇,行54度有奇.伏見共779日有奇.

§397. 星去地距離 星日對衝時（At opposition）星距地中數爲48600000英里（141500000－92900000）.對衝在星道卑點時距地減至35050000英里,在星道高點時增至61000000英里.星日

會合時距地中數爲234400000英里(141500000+92900000).

其距離變異如此之鉅,其視徑及光度亦必隨之變異.設以R爲星日距,r爲星地距.若不計其位相之變異,則星之光度爲$\frac{1}{R^2r^2}$.如以合日時之光度爲單位(該時星之光度約同於極星),則由此推得星在衝日中距時星之光度亮23倍,在卑點衝日時亮53倍,在高點衝日時亮僅12倍,在卑高二點衝日時光度之比,大於4與1之比.

卑點衝日恆遇於8月下旬(該時地正經過星道之長軸線),約15年或17年一次.上次卑點衝日係在1922年,下次或在1937年.

§398. 直徑,面積及容積　星之視徑由在合日時之3.8秒至在卑點衝日時之25秒,在他時則介於二者之間,逐漸而變.其眞徑約爲4200英里(士20英里).故其面積爲地之0.28,容積爲地之0.147.

§399. 質量,密度及重力　測其衛星可推得其質量爲地之$\frac{1}{9.4}$,故其密度爲0.73,表面重力爲0.38.在地面重100磅者,移至火星面僅重38磅矣.

§400. 位相　星道在地道外,星永不能經於地日之間,且永不能有如彎月之位相,然在兩弦時,其不亮之部分向地遂致其面如望後三,四日之凸月.

§401. 反光力　據楚爾諾之觀測星之反光力爲0.26,正爲水星之2倍.

§402. 自轉　星之自轉需24時37分22.67秒,此爲愷沙(Kaiser)及巴克胡申(Bakhuyzen)所測而比較海更士(Huyghens)在二百數十年前所作之星圖而定之者也.僅隔數日或數星期

之久觀測之,以定其自轉時間,難得確數.然既得其概數,再於相隔較長之時間,卽可得較確之數,而不虞其有錯矣.如此遞測求之,其差不能多於$\frac{1}{50}$秒矣.

§403. 星之赤道交星道面之斜角 據羅威爾之觀測,此角爲24度與地略同,故其季候當亦與地同也.

§404. 兩極之低扁 早時之測者謂爲$\frac{1}{10}$,有謂爲$\frac{1}{40}$者,然近之測者謂爲$\frac{1}{200}$,羅威爾測爲$\frac{1}{190}$與斯德路佛(Struve)依其最近衞星之攝動算得者相合,是小數可信也.

§405. 遠鏡中星之外觀及表面標記 火星之自轉周期所以能確定者,因其面上有可認之標記也,用大力之遠鏡察視星面,見其爲紅寶石色或橙黃色,邊緣之光最强.但星光有虧時.其明暗界限處之光不加强.星面中部呈微綠色及微紫色之陰影塊.但界線模糊者多,清晰者少.只須注視數時之久,卽能見其標記以次而現.有如固定之形者,有隨時改變者,其二極各有一白斑(White patch),亦稱曰極冠(Polar cup),最明.或云是積雪,故向日久則小(北極者在北半球之夏時小同時則南極者大),背日久則大.有時南極之白斑廣至1800英里以上,約距極6度,而四,五月後,則有時全消矣.其藍灰或微綠色之斑約佔全面之$\frac{3}{8}$,多在南半球近赤道處.昔皆以爲星面之水而稱之曰海,今則皆謂火星無大量之水,其綠斑或係草木所蔽之地.其橙黃之陰影約佔全面之大半,多在北半球,現皆認爲土地沙石之類.

夏巴里立於1877及1879年,發見火星面上有多數暗而細之直線,縱橫交錯於紅斑之內,氏稱之曰運河.1881年又見有些線竟有時變爲雙線,如車軌然,然他人測之竟無所見.而羅威爾

等又謂確有如運河之細線,並謂如此之線,並不限於紅斑之內,亦有擴至黑暗部分者.此若確實,則所謂海者,誠非水矣.其運河交點處,有時見有小黑斑,初皆以爲海,現認爲係積沙(Oasis).羅氏並謂所稱爲海者,隨星之季候而變.當所在半球之白斑初成時廣而且暗.白斑消滅時,則小而界線甚清晰.意或平地多積雪,斯乃融化之水也.

§406. 大氣及溫度　初時多以火星有濃密之大氣,故具有深紅之色.但由星之表面重力甚低,及觀測之所見,星之有大氣信屬不誣.其時有雲霧之遮蔽及極冠(卽白斑)之堆積及融解,皆爲大氣存在之證明.然其高其密純不如我地之甚.初時測者雖曾由分光器發見星有水蒸氣,而近時之康倍爾(Campell)在立克觀象臺之觀測謂屬不確.

關於星之溫度知之不詳,然由其去日之距離,推想其所受日光之强度與地比如1比$(1.524)^2$,僅爲地之百分之43,其太陽常數必爲10(地之太陽常數21).則其大氣之密度在星面者尙小於地上最高山頂之大氣,必致其溫度低於水之冰點.但若兩極之白斑果由大氣中冰雪所積,且在星之夏季融化沿修成之河道下流灌溉兩岸之植木,則星必有熱之來源,來自內或來自外,尙非吾人所能知也.或者極冠非冰水積成,星之爲溫爲冷,實一未決之問題也.

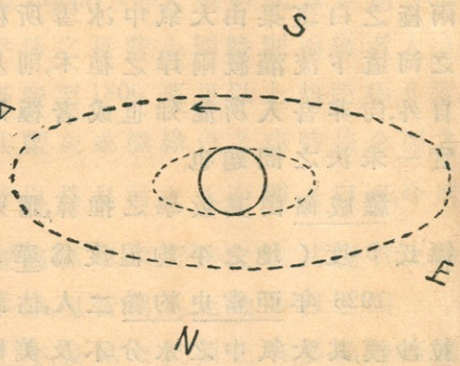
羅威爾由其數學之推算,謂火星之平均溫度,爲華氏48度,攝氏9度(地之平均溫度爲華氏60度).

1926年亞當史約翰二人,估計火星向地之半球,乾如薩哈拉沙漠,其大氣中之水分不及美國加州巴剎第那(Pasadena)清爽天氣中者之百分三,其溫度自正午至夜半,由75度以至−40度.

§407. 衛星 火星有衛星二，爲西曆1877年，美國教授郝爾(Hall)用26英寸遠鏡所發現.體積皆小，須用遠鏡見之.一曰戰神長子星(Phobos)，距本星僅5800英里.一曰戰神次子星(Deimos)，距本星14600英里.長子星之恆星周期爲7時39分，不及火星自轉周期之三分一.衛星之恆星周期，小於其行星之自轉週期者惟此而已.故在火星面觀長子星，必每晚昇於西約歷5.5時而沒於東.次子星繞本星之周期爲30時18分，東昇西沒一如他星.但其軌道行速度幾等於其日周西行之速度，故兩次東昇相隔約132時.兩者之軌道皆似圓形，其面殆與火星赤道面相合，二衛星皆常有食.

二星之直徑甚小，不可用量微器測之，美國教授皮克靈氏由其光等並假設其反射力與火星相等，因而估計長子星之直徑約7英里，次子星之直徑約5或6英里.長子星之光在火星如我月之$\frac{1}{60}$.次子星之光僅約如$\frac{1}{1200}$.然據西曆1894年，羅威爾之估計其值較大，長子星之直徑可25英里，次子星之直徑可10英里.

次子星周期在太陽系中爲最短者.若星雲假說果眞，則自衛星產生時後必衛星周期縮短，或本星自轉周期增長，因該假學初不容周期小於本星自轉周期之衛星存在也.



第二六六圖

第二六六圖乃1888年地上所見二衛星之軌道也.

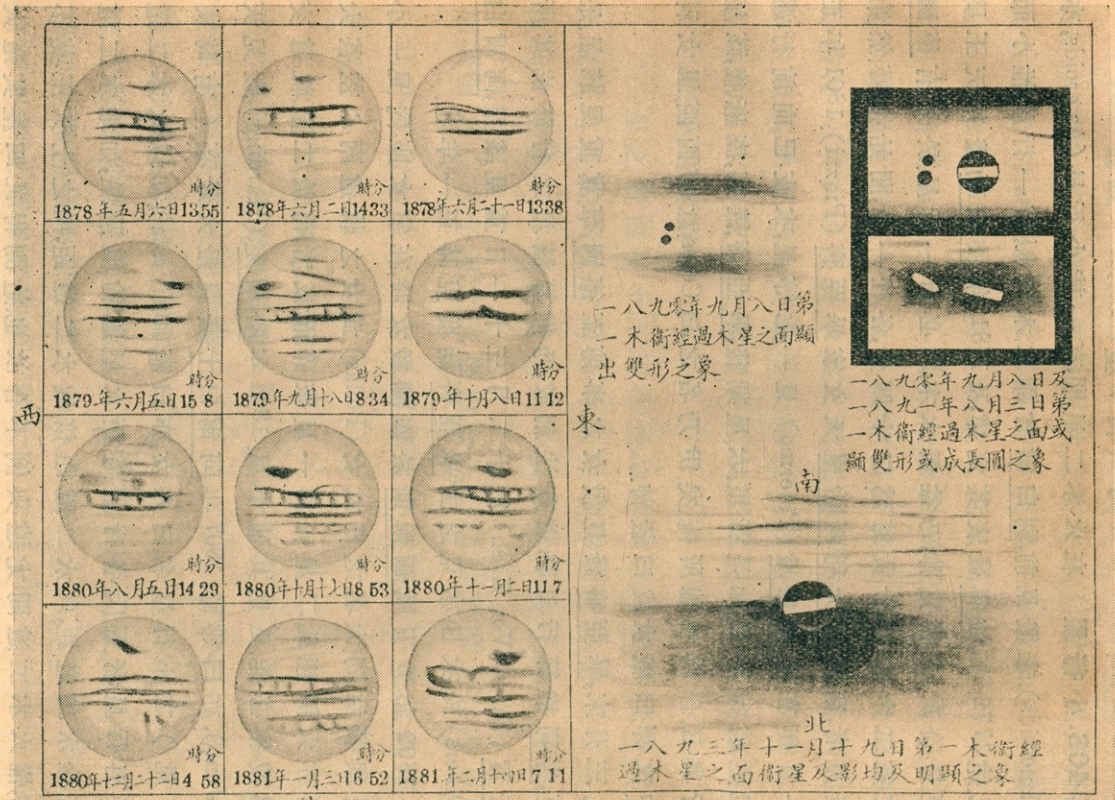
小行星

§408. 小行星　在火木二星間,有一族小行星(Asteroids,亦曰Planetoids).未發見前,刻白爾曾謂火木間似有一行星,惟小而難見.迨1772年,波得發表其定律,及1781年侯失勒發見天王星其距日合於波得定律,乃益信火木間必有一行星.於是有德國天文家二十四人,分黃道爲二十四分,各任一分,開始搜尋.然第一發見者,竟爲意大利西希里天文家畢亞齊(Piazzi).1801年正月一日伊在巴勒摩城(Palermo)見一七等星,次夜已向前行.逐夜視之前行不已,知是行星.六星期後,畢亞齊罹病,痊癒後,該星已行與日合爲光線所掩矣.伊乃名之曰Ceres,意卽西西里女神也.中文譯曰穀女或曰穀神.

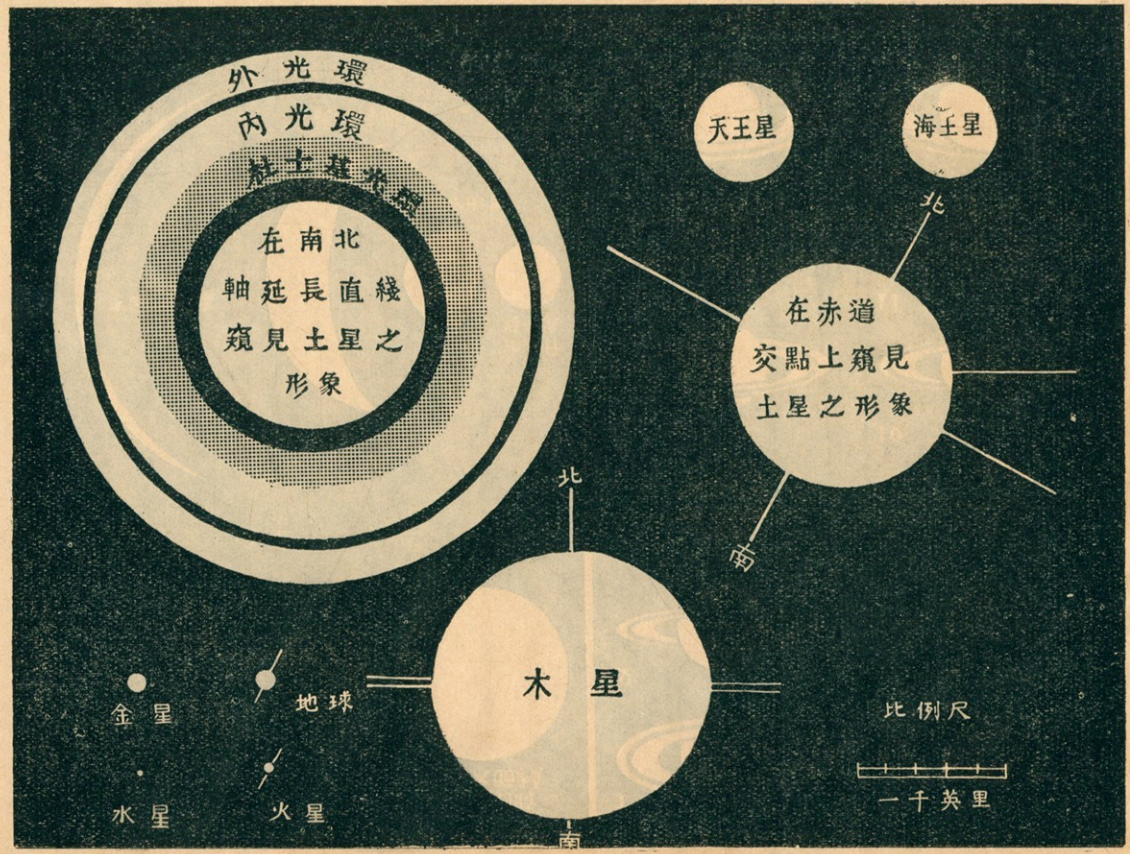
三月末,畢亞齊發見穀女之事傳至德國,羣冀重見該星.是年夏,告司推算行星軌道新法創成,乃推算該星之行跡.依其所算查賀(Baron Von Zach)於十二月三十一日重見該星,阿爾白士(Olbers)於次日亦見之,去畢亞齊始發見時正一年也.

1802年3月歐爾博斯於觀測穀女時,在室女座內見一小行星與穀女同大.名之曰武女(Pollas).武女之軌道兩心差甚大,斜角亦大.伊想此二星或爲一星破碎而成者,苟於二星軌道交點處搜察必能更見其他小星.1804年哈爾定(Harding)發見天后(Juno),亦曰婚神.1807年阿爾白士發見最大最亮(有時肉眼可見)之小行星名曰火女,亦曰竈神(Vesta).初以火木二道間必有行星者,蓋因各行星道距水星道約俱遞倍,如地水二道距倍金水二道距,火水二道距倍地水二道距,推之土天王莫不皆然,惟火木二道間尤遠與例不合故也.迨測得此四星其道大小略等,俱在火木中間,距火木二道之數與上例合.

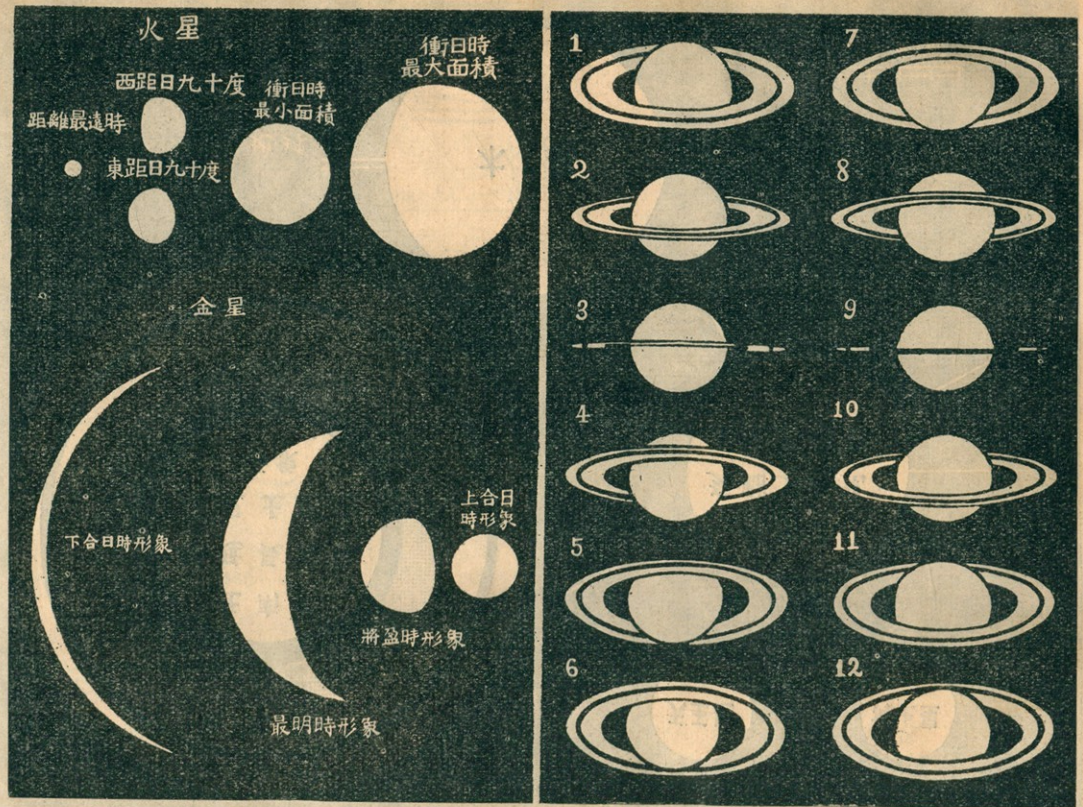
亨克(Hencke)從事於小星體之研究者15年.於1845年發



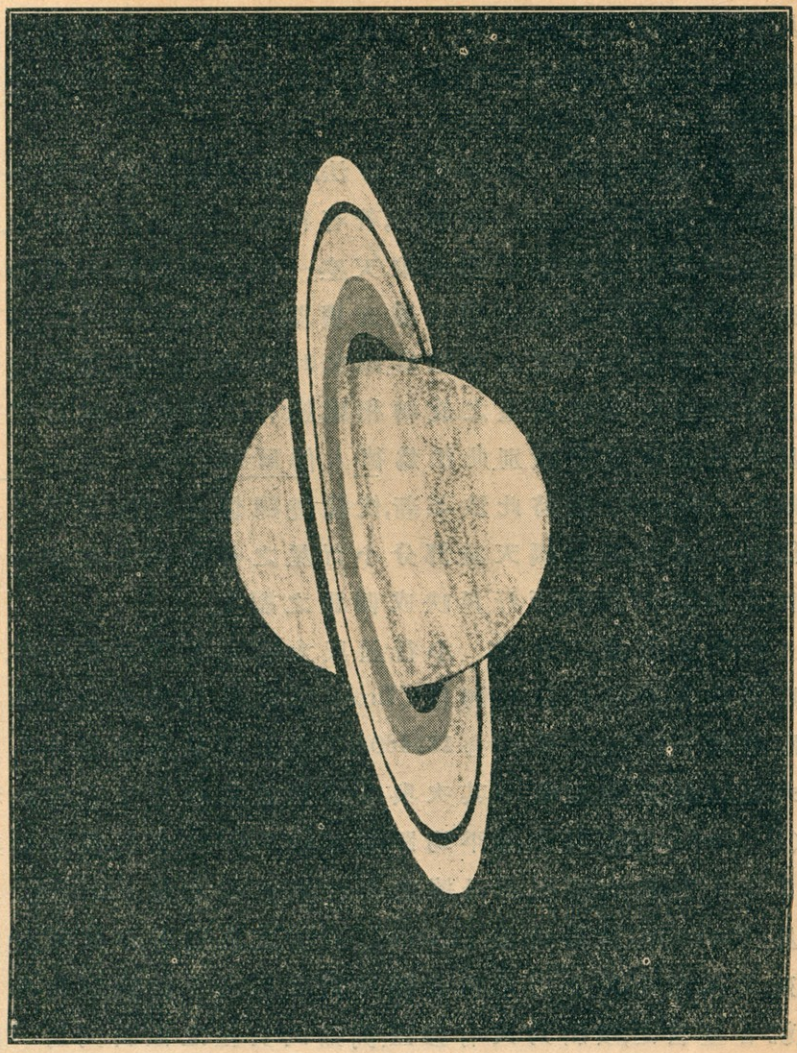
第二六七圖 木星及衛星圖



第二六八圖　行星積量比較圖



第二六九圖　內行星之盈虧及土星光環圖



第二七〇圖　土星圖（一八九四年六月二日）

現第五小行星，名之曰嚴女，亦曰義神 (Astraea). 1847 年有三小行星被發見，嗣後歲有所獲. 小行星多有題名，兼有以號表之者. 其號數書於圈內，例如穀女爲①，武女爲②是也. 行星錄中小行星之數，已在一千二百以上.

§409. 探索方法 初時所用方法，係將黃道左近分爲若干境域，作成星圖與天象比較察之，若有行動之星，是必行星也. 法甚勞累. 1891 年多用攝影器攝取天空一部之影. 法以大攝動器，按赤道部位繫於遠鏡後面，以鐘表機器行動之. 其乾片之面積足攝天空 5 度至 10 度正方之影. 感光時間約二、三時. 遠鏡與攝影之旋轉速度須恆與星之旋轉相應. 攝得之影恆星映爲圓點，行星映成條紋，易於識別. 此法爲德人倭爾夫 (Wolf) 所創. 麥特卡爾夫 (Metcalf) 復將此法革新，使遠鏡隨恆星旋轉，而攝影片作微小之滑動，與所攝天空部分小行星之行動相等. 如此則恆星映成圓弧形之影，而行星映成圓點之影矣.

§410. 小行星之軌道 小行星與太陽之距離，各各不同，恆星周期亦各異. 就中以愛神星 (Eros) 之軌道爲最小，與太陽平均距離爲 1.46 天文單位合 135480.000 英里. 恆星周期爲 643 日，較火星之恆星周期略小. 其次與太陽相近之小行星，爲匈牙利星 (Hungaria) (434)，與太陽平均距離爲 180000000 英里，恆星周期爲 2 年 9 月. 與太陽相距最遠之小行星爲勇士星 (Achills)、勇友星 (Patroclus) 及暴徒星 (Hector). 三者之軌道大小及恆星周期，殆與木星相埒. 小行星軌道面與黃道面之平均傾斜角爲 8 度. 就各星言之，傾斜角大有參差. 例如武女星之傾斜角爲 35 度，其次者 25 度. 軌道偏心率之大者亦甚多，例如西曆 1911 年，發現之小行星，名亞爾伯特 (Albert) 者偏心率爲 0.54，是爲最大. 其次爲 0.38，其次爲 0.30，且小行星之軌道，每受木星攝動大變形狀，

測算不易.

§411. 小行星之體質　小行星中,惟最初發現之四星可在大遠鏡中顯其圓面,以尋常遠鏡窺之,僅爲微點.藉光度表之測定,並設四星之反射力與火星同,得四星之直徑,以火女爲最大,約 319 英里.西曆 1895 年,巴那德 (Barnard) 用量微器以測四星之直徑,得穀女星之直徑約 485 英里,武女星 304 英里,竈神星 243 英里,天后星 118 英里,然亦不能認爲確數.其他小行星之直徑未有超過 100 英里者.最近發現之小行星,直徑更小不過 10 英里至 20 英里,其體質類於火星之衞星,用口徑 1 英尺之遠鏡,方能見之.

小行星之質量及密度概未確定.如巴那德所測之直徑無誤,並假定密度與地殼相等,或與火星相等,則可推算穀神星之質量僅爲地球之 $\frac{1}{6000}$,表面重力僅爲地之 $\frac{1}{23}$.設一物體由星面以每秒 2500 英尺之速度拋出,將飛入空間,永不回歸,而繞日旋轉如行星矣.

來未里亞 (Leverrier) 依火星道長軸線行動之理估計,小行星之總質量不出地球四分之一,而爲火星之二倍有奇.晚近拉溫尼 (Ravene) 於 1896 年,復估算之約爲地之 $\frac{1}{115}$.但就今日所知小行星而言,其總質量遠不若此數之巨 (在 1880 年約爲地之 $\frac{1}{6000}$),故知未發見者,爲數正夥也.

§412. 愛神星　小行星中研究最有興味者,莫愛神星若.此星爲西曆 1898 年德人維特 (Witt) 所發現.其與太陽之平均距離及恆星周期,皆小於火星.軌道偏心率爲 0.223.故在高點時距日 165670000 英里,軼出火星軌道以外,在卑點時距日 105290000 英里,越出地球軌道外僅 12005000 英里.但軌道之位置使星不

得近地在 13500000 英里以內.然此較諸金星與地球之最近距離（26000000 英里）僅半數耳.其軌道斜角約爲 11 度.當其距地最近之際,其赤緯出入極圈內在衝日時,殆向南行,非如其他行星,向西逆行,是其特異之點.1894 年、1931 年皆去地最近與日對衝,最適於測定太陽視差之用.

愛神星之直徑不出 20 英里,非用大遠鏡不能見之.當其趨近地球之際光輝漸增,肉眼可以瞭見.

愛神星之光度隨距地之遠近而變,其變化具周期性.美人皮克靈即藉此以測其自轉周期約爲 5 時 16 分.然此按期光度之變異或另有故,不能定謂爲自轉之表示也.

§413. 小行星之來源 小行星之來源尙無定論.若係由一星一次爆裂而成,則其軌道縱有本星之攝動作用,亦不能如今之交錯.原星係由自力爆炸,則小行星必挾此力俱去,將更再行分裂.另有一說,謂星雲拋出質環後,不知何故,又未能聚積成星,而成爲無數小環,如土星光環然,被左近大行星攝動,其攝力環各不同,終裂成爲小星.

§414. 水星內之行星及黃道光 水星道以內,尙有繞日之行星,並非絕無之事.來未里亞於 1859 年研究所有水星掠日之觀測,推得水星道之卑點每世紀前進 574 秒,除已知行星攝動力所應生之行動共爲 536 秒外,尙有 38 秒未得其解.乃謂復有攝力來自另一行星或一環小行星,此星在水星道以內,繞日旋轉,其道之面幾與水道合,其質量約爲水星之一半,如此方足以解水道卑點之如斯行動.

然假設攝力不與相距平方成反比,而與 $(2+n)$ 方成反比,即不如 $\frac{1}{D^2}$ 之變而如 $\frac{1}{D^{2+n}}$ 之變,亦足以解此.其 n 爲一極小之數.或假設攝力定律在行動物體不同於在靜止物體,前者之力較

亦,亦足以解之.但牛考卜之推算謂苟此諸說解釋水星道卑點之行動,其交點行動(金星者亦然)乃不與之相合,是此事尙未大白也.

自來未里亞推算之結果宣佈後,萊斯卡包爾特(Lescarbault)竟謂曾於1859年3月26日見過該行星.來未里亞乃親往訪詢,並贊美其觀測之得法,且名其新發見之星爲火山(Vulcan).其在太陽系內之位置爲去日13000000英里.恆星周期爲19日餘.其視徑約爲7秒,故其眞徑爲2500餘英里.

然近之考察,火山星實莫須有之事.若果有之,則自1859年後於來未里亞推算之時期,必得見於日面.乃嚴測之,竟未一見.彼以小遠鏡曾謂測見者,而各天文家以精器測之,皆爲日面黑斑焉.

凡掠日面之行星,其大小能爲2.5英寸之遠鏡(萊氏所用者同此)所見者,在日食時,必爲顯著之物體.然每於如此之機會細心察之,近日處三、四、五等之星皆有所見,而不見有行星.是火山星之存在,乃莫須有之事也.但不卽能謂水星道內不能有小行星.凡直徑200英里之小行星靠近太陽,在地見之不過$\frac{1}{2}$秒,掠日面時不用大遠鏡不得見之也.

吾人所見之黃道光(見後第500節),其原因尙不詳.或謂小隕星等繞日行於黃道面左近,組成一片如土星之光環然.其濃密之部分在水星道內,遂致惹出水星道卑點之行動(卽來未里亞所覺察者).然亦有謂爲日暈之擴大者.

木　星

§415. 木星軌道　木星之光度次於金星,約爲天狼之5倍.古名歲星,又有應星、經星、紀星諸名.

距日之中數爲483000000英里.兩心差爲0.04825.其最大及

最小之距離去中數各 21000000 英里.距地之中數在衝日時爲 390000000 英里,在兩弦時爲 576000000 英里.衝日去地最小之距離僅爲 369000000 英里,斯時約在 10 月 6 日,木星正在卑點,其屬日心黃經爲 12 度.而在高點之衝日（在四月中）,其距地爲 411000000 英里.

木星之光度在一般會合時,與最近及最遠衝日時之比,如 10,27 及 18 之比.故在衝日時之平均光度爲合日時之 2 倍强.在 10 月衝日時,較在四月衝日時光度高百分之 50.其差甚大,然尙不如火金水三星之甚.

其軌道交黃道之斜角僅爲 1 度 19 秒.

§416. 周期 恆星周期爲 11.86 年,會合周期爲 399 日（稍多於一年零一月）,其軌道行之速度約爲每秒 8 英里.

史記天官書謂歲星出東行 12 度,百日而止.反逆行.逆行 8 度.百日復東行.歲行 $30\frac{7}{10}$ 度.率日行 $\frac{1}{12}$ 度.12 歲而周天.出常東方以晨,入於西方用昏.此 12 歲,乃恆星周期也.至於會合周期,則未明言.然一加思索,便知爲其一年零一月也.茲述其原文而加以解釋如下:

(一)以攝提格歲,歲陰左行在寅,歲星右轉居丑,正月與斗牽牛晨出東方,名曰監德,蒼蒼有光.

(二)單閼歲,歲陰在卯,星居子,以二月與婺女虛危晨出,曰降入,大有光.

(三)執徐歲,歲陰在辰,星居亥,以三月與營室東壁晨出,曰青章,青章甚章.

(四)大荒駱歲,歲陰在巳,星居戌,以四月與奎婁胃昴晨出,曰跰踵,熊熊赤色有光.

(五)敦牂歲,歲陰在午,星居酉,以五月與胃昴畢晨出,曰開明,

炎炎有光.

(六)叶洽歲,歲陰在未,星居申,以六月與觜觿參晨出,曰長列,昭昭有光.

(七)涒灘歲,歲陰在申,星居未,七月與東井輿鬼晨出,曰大音,昭昭白.

(八)作鄂歲,歲陰在酉,星居午,以八月與柳七星張晨出,曰爲長王,作作有芒.

(九)閹茂歲,歲陰在戌,星居巳,以九月與翼軫晨出,曰天睢,白色大明.

(十)大淵獻歲,歲陰在亥,星居辰,以十月與角亢晨出,曰大章,蒼蒼然星若躍而陰出旦是謂正平.

(十一)困敦歲,歲陰在子,星居卯,以十一月與氐房心晨出,曰天泉,元色甚明.

(十二)赤奮若歲,歲陰在丑,星居寅,以十二月與尾箕晨出,曰天皓,黮然黑色甚明.

設古以二分二至爲中點,分黃道爲十二宮,爲七政東行之次.以宮之西端爲初度,因七政東行也.是爲天之十二次.以各地子午圈卯酉圈交赤道之四點爲中點,分赤道爲十二宮,爲衆星所臨之辰.以宮之東端爲初度,因衆星逐日隨天西轉也.是爲地之十二辰.木爲歲星,在天東行.太歲乃虛擬之名,隨天西轉,一歲移一辰,卽所謂太歲,左行於地也.因其不爲人所睹,故曰歲陰.又因木星約十二年一周天,每歲只有一次回其與日原相與之方位(如原相合或原相距某一定度數),故舉木星所舍之次以表太歲所在之辰(一說木日同次之月斗所建之辰爲太歲,是太歲與歲陰爲二事,而歲陰在太歲前二辰也).攝提格歲,歲陰在寅歲星居丑.設其皆在該辰次之初度,設此時正當木日會合,

則適在建子月（卽十一月）之首.過此因日行速木行遲木必在日西,至建寅月之首已在日西約55度矣.彼時斗牽牛在丑宮,故正月木與之於日出前隨天西行見於東方也.至第二年歲星東行至子次（約過子次初度）乃復與日合,歲陰亦西行至卯辰（約過卯辰初度）,故曰單閼歲.星與日旣會於子次,在地爲建丑之十二月,則爲時已歷一年又一月矣.斯乃木之會合周期也.又約過二月星已在日後約53度,女虛危寄於子次,故木於二月與之晨出東方.如此類推,第十二年之十月歲陰行至丑辰（約在丑辰之尾度）,歲星乃與日合於寅次（約在寅次之尾度）,而曰赤奮若歲.尾箕約在寅次,故木於十二月與之晨出東方.至此歲陰由第一年建子之十一月首日起寅辰初度,至第十二年建亥之十月末日止終於丑辰尾度,已西行一周天,正爲十二年.而歲星亦由丑次初度起至寅次尾度止東行一周天,且與日連首尾正合12次.是其歷時恰爲11倍會合周時.故知木之會合周期爲144月÷11=13月零2日餘,與近測甚相合也.又古有歲星歲陰144年跳一次辰之說.是史記謂木星12年一周天,乃言其整數,以跳一次言之,乃約11.917 $\left(\frac{144\times12}{144+1}\right)$ 年一周天也.

三統曆謂木星晨始見去日半次.順,日行11分度之2,121日始留.25日而旋.逆,日行7分度之1,84日復留.24日而旋.復順,日行11分度之2,111日有奇而伏.凡見365日有奇.除逆定,行星30度有奇.凡見一歲一次而後伏,日行不盈11分度之1,伏33日有奇.行星3度有奇.伏見共398日有奇,行星33度有奇.通其率,故曰日行1728分度之145.

元嘉曆謂木初與日合伏16日有奇,行2度餘.晨見東方.順,日行23分度之4,115日行20度.留不行.26日而逆,日行7分度之1,84日退12度.又留26日.順115日,行20度.夕伏西方16日有奇,

行2度餘.復與日合.一終398日有奇,行星33有奇.

§417. 直徑,面積及容積　星之視徑之變異,由在十月衝日時之50秒(在4月衝日時爲45.5秒)至會合時之32秒.星之面非純圓形,兩極之徑約比赤道之徑少$\frac{1}{16}$.赤道之徑爲90190英里,兩極之徑爲84570.其徑之平均數不等於$\frac{a+b}{2}$而等於$\frac{2a+b}{3}$,蓋扁球體之平均直徑應如此算也.a爲赤道面上縱橫二徑,b爲豎徑,斯乃爲球之軸也.依式推之,得平均徑爲88300英里,幾爲地之11倍.

其面積爲地之119倍,容積爲地之1300倍,爲行星之最大者.

§418. 質量,密度及表面重力　其質量由衛星之行動,及小行星之攝動推算大致相同,爲日質之$\frac{1}{1047.4}$,幾爲地之318倍.以此數合容積算之得密度爲0.24,不足地之$\frac{1}{4}$,幾與日同.其平均表面重力爲地之2.64倍.因其轉動甚速及其扁度,在赤道與在兩極之重力差甚大,約爲赤道重力之$\frac{1}{5}$(地之差僅爲$\frac{1}{190}$).

§419. 位相及反光力　星道較地道甚大,故幾無星之位相,幾無盈虧之可見.惟在兩弦去日最遠之緣微較暗耳.

其反光力甚高.據楚爾諾之推測爲0.62.白紙之反光力僅爲0.78,其力之高可知矣.星之中心部亮於邊緣(土星亦然).此邊緣之微暗爲木星之特異.其水,金,火及月皆與此相反.故有謂木星能如日之自發光.然此非必然之事.透明之大氣包於反光均勻之物面,亦能生同樣之結果.

縱能發光,其光亦甚弱.因其衛星行入陰影成食時全體皆不得見也.

§420. 自轉,自轉之軸及季候 其自轉時間約爲 9 時 55 分.因觀測其面之斑點近其赤道者所示之日時較短,而在同緯度之斑點,則界線清晰斑點白亮者所示之轉動較速,故其自轉時間乃約數也.

其赤道面與軌道面之交角僅 3 度,故不得有季候.木星所受日之光熱僅爲地之$\frac{1}{27}$,因其去日之距離爲地之5.2倍也.

§421. 在遠鏡中之外觀 在衝日時,以40倍放大力遠鏡能見其如滿月之大.若以 8 或 10 英寸口徑及300或400 倍放大力之遠鏡能見其面上各色標記,隨星之迅速自轉走過目前.若欲見其色之清晰,則須更大之遠鏡.其標記多排列成條,約與其赤道平行.以小遠鏡測之,則其標記混爲二帶,分在其赤道之兩邊.其帶之廣狹及位置屢變非一定,間或散於星之全面.意或在包星之大氣中因風而成也.帶在星面所佔境域之緯度,同於我地之貿易風區域,故謂其外觀多由於風之作用未爲無見.

星面標記雖多變異,然亦有經年變甚微者,其大紅斑(Great red spot)是也.溥麗綺(Pritchet)於 1878 年 7 月見其爲13秒長 3 秒寬之蛋圓形（30000 × 7000 英里）.數月後雖有見之者,而未加注意.蓋未知其有永久性也.次年愈爲顯著如紅磚色.其長爲星徑之$\frac{1}{3}$,寬爲長之$\frac{1}{4}$,二、三年內甚少變遷.1882至1883 年色略減.1885 年變爲淡紅色之蛋圓環,中部爲白雲所佔.1886及1887 年色又略增.1908年尙存在,惟色已暗淡,兩端已失矣.此紅斑在赤道南,標記帶之南緣,約在星面緯度30度處.

§422. 温度 星之可見面上有如此其速之變異,必消費多量之熱力;然星所受日之熱既甚少,不與所見之現象相合.楚爾諾謂其熱來自木星本體,其温度有略次於白熱之可能.星體內

有無固體或液體物質亦屬疑問.

§423. 大氣　其大氣之成分亦不詳知.雖其彩色帶與日線相同,但無其大氣作用之吸收條紋.其低紅部中略有暗影,或者爲其吸收作用之影響.

§424. 衛星　木星有九衛星,其中四星發見之較早,蓋較大,可以小遠鏡見之也.葛立老 (Galileo) 於 1610 年 7 月用自製之遠鏡測見之.最近者爲第一木衛星,距本星26200英里.最遠者爲第四星,距1169000英里.二、三在其間.其距數約爲本星半徑之 6、9、15 及 26 倍.其恆星周在 1 日 18.5 時及16日 16.5 時之間.

1892 年 9 月巴那德在力克觀象臺發見第五木衛星,體甚小,且近本星,頗難測見.距本星約 112500 英里.周期爲 11 時 57.4 分.

此五木衛星之軌道,皆幾爲平圓,且與本星赤道面幾相合.

1905 年拍靈 (Perrine) 發見第六第七木衛星均甚小,第七尤小.在舊衛星道之外,其軌道約同大.道之直徑略多於7000000英里,與本星赤道面斜交成30度角,且相互斜交.

1908 年梅樂德 (Melotte) 發見第八,1915 年尼科爾孫 (Nicholson) 發見第九木衛星.二星之道大致相同,而旋轉之方向相反,故有雙子星 (Twin) 之稱.

§425. 衛星之平均行動間及黃經間之關係　拉普拉瑟發見前三衛星之平均行有如下之關係:

$$\frac{1}{T_1}+\frac{2}{T_3}=\frac{3}{T_2}$$

其 T_1、T_2 及 T_3 乃三衛星之自轉周期也.其黃經度亦有同樣之關係.

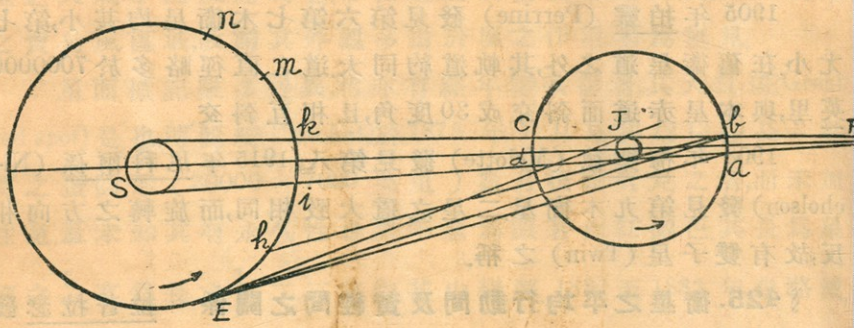
$$l_1+2l_3=3l_2+180°.$$

故三衛星不能同時與日衝合.此層關係經久不變.有時第四衛

星之攝動使其略有變動,然爲時亦甚暫.

§426.木星之月食 木星月食大略與地球之月食同.但木星距日較地甚遠,星體較地甚大,故其闇虛較地更長且廣.又星與諸衞星大小之比例,較地球與月大小之比例甚大,而諸衞星道與星道之交角俱甚小.又諸衞星道徑與木星徑之比例,視地之月道徑與地徑之比例較小.故第一二三四衞星中有三衞星每周必過闇虛,必食既.餘一衞星,其道交星道之角略大,則非每周食既,時或切闇虛邊而過.見微食,然亦食既時爲多也.但星去其道之交點甚遠時,第四衞星常不得食.

地球之月食,人在月道之中望之.木星之月食,人在衞星道之外望之,視線與其闇虛之方向相交之角時時不同.準此,見食之方向及衞星與本星之視方位不能一定,而食時不變.如第二七一圖 S 爲日,E 爲地,$Ehik$ 爲地道,J 爲木星,$abcd$ 爲星之衞星



第二七一圖

道.闇虛之尖在天空中如 P,距諸衞星之道甚遠,因日距木星甚遠故也.木星見日之視徑甚小,約六分.故當諸衞星之道其外虛甚微,可不著於圖.衞星自西至東,其方向如矢,行至 a 入闇虛必見食.自初虧至食既,衞星所行之弧必如木星心所見衞星之視徑分秒.自生光至復圓亦然.然遠鏡及目不能無小差,則初虧食

既生光至復圜之時刻,不能密合無訛.故但測星之隱見二時相較折半,得食甚時用之.此時衛星在SJP線內,卽木星見衛星衝日時也.測此時可定地面經度,有二食中間之積時,卽其衛星之會合周時,而衛星之恆星周時亦可推.

觀此圖知地在SJ線之西,則見木月食必在木星之西,其時在木星衝日前.地在SJ線之東則反是.地漸近SJ線則視線與闇虛之方向漸相近,見木月食處必漸近木星之體.自b作線切木星而過至地道h點.設地在h則衛星出闇虛在木星背,不能見.自h至木星衝日皆然.又自a作線切星至地道m點.地自木星衝日至m,則衛星入闇虛在木星背不能見.地在i,則衛星入闇虛在星邊.地在k,則衛星出闇虛在星邊.地在ik間,則衛星出入闇虛俱在星背,而俱不能見.若衛星至c點,其影必入星面,望之若黑斑.衛星自c至d見黑斑過星面.衛星離d見黑斑出星面.又從E作二切線切木星之二邊,地在E衛星至二切線之間,則見衛星體過星面.故木星衝日前衛星過星面必影先於體.衝日後反是.諸衛星體過星面時,用最精遠鏡測之,有時若光斑在黑帶上,有時若黑斑小於影.理當大於影,今反小,意非衛星之全面,必面上或其包氣中之大黑斑也.

由衛星之體積及去本星之距離,知木星上視第一衛星,如我地球上視我月(約33分餘),視第二第三衛星大小略等.其視徑若第一衛星視徑之大半,第四衛星之視徑,若四分第一衛星徑之一.諸衛星恆相食,亦令日食.然木星上見食之處不多也.

地上見諸衛星過木星背,則衛星爲星掩.衛星過木星視徑分秒之時卽掩時.衛星行有遲速,故掩時不同.第一衛星2時20分,第二衛星2時56分,第三衛星3時43分,第四衛星4時56分.地距木星較諸衛星甚遠,故雖有軌道差而掩時略同.推諸衛星

所見木星之視徑,第一衛星19度49分,第二衛星12度25分,第三衛星7度47分,第四衛星4度25分.木星衝日前衛星之掩在食後,衝日後衛星之掩在食前.第一第二衛星最近木星,故掩食出入星及出入闇虛不能全見.在衝日前,入星在食時,出闇虛在掩時,在衝日後,出星在食時,入闇虛在掩時,俱不能見也.觀前圖自明.地在ik弧居日與木星之間,則掩之出入俱能見之,而食不能見.考木星之第一第二第三衛星平速之率最奇.假如同時中第一衛星平速度內,加兩個第三衛星平速度,等於三個第二衛星平速度.故第一衛星之平經度內,加兩個第三衛星之平經度,減三個第二衛星之平經度,恆得 180 度.故知兩衛星所在度餘一衛星之度亦可知.準此三衛星不能同時食,蓋第二第三衛星同經度,則第一衛星相去必半周;故第一衛星食,則第二第三衛星必合日也,反之亦然.此事或以攝力相聯之理釋之.

木星諸衛星雖不能同食,然四衛星同時中或食或掩或過星面,則未嘗無也.此時必四衛星俱不見,蓋衛星在星面非最精遠鏡不能測見也.

§**427. 光差** (Equation of light) 昔人測木星之月因悟光行之理,爲格致學中最大事.蓋地道在木星道之內,而二道同心.故星地距恆不同.最大在星合日時爲二道半徑和,最小在星衝日時爲二道半徑較.大小之較爲地道全徑,爲日地距之五倍.1675年勒墨爾 (Roemer) 取歷年木星諸月食測簿較勘之,覺木星近衝日測得時必略早於推得時,近合日測得時必略遲於推得時.詳考諸時差及諸遠近差與最大時差16分26.6秒及最大遠近差二倍日地距,比例皆同.因悟光自遠而近行若干路,必歷若干時.徧推之悉合.得由日發光行至地面爲8分13.3秒,共493.3秒.故每歷時1秒光行192000英里.人初疑速率太大,不甚信,共欲

求其證.後以白拉里所得光行差理證之,則由光行差所得光行速率與木星月食所得光行速率,其較不及80分之1.

自天體發光達於地面所需之時間,謂之光差.自一個天文單位之遠處,發光達於地面,所需之時間爲光差常數.日之光差常數爲493.3秒,後又測爲501秒,近則多以爲499秒.此法是以日地距爲已知,由日之光差推得光行之速度.至1849年,費覺另用儀器測得光之速度及光差以求日地距,其推法恰相反.

§428. 衛星之自轉　木星諸衛星道之兩心差俱甚小.其內二道不甚覺,難測也.其相攝動生小差與諸行星無異.拉普拉瑟諸天學家已細測詳推之.又屢測覺四衛星光準與星之方向而變.其變有定處,且有定時.意諸衛星必自轉.其自轉一周與繞木星一周之時等,與我月同例.

土星

§429. 土星軌道及周期　土星古名塡星,亦曰地侯,爲古去日最遠之行星.其距日中數爲9.45天文單位(886000000英里),其兩心差爲0.056,故距日之變在中數左右各50000000英里.

在12月中土星與日對衝時星距地最近,爲744000000英里(1932年星道卑點黃經度爲91度43分);在5月與日會合時距地最遠,爲1028000英里.星距日極遠,故其距地如此之變異,無多大影響於其光度.其光之大小比尙不及2與1之比,卽在最近時其光度不足最遠時之2倍.

其軌道與黃道斜交成2.5度角.

其恆星周期爲29.5年,會合周期爲378日.

史記天官書謂土星歲行$12\frac{5}{112}$度.日行$\frac{1}{28}$度.28歲周天,其色黃光芒.出120日而逆西行.西行120日反東行.見330日而入.入30日復出東方.準此則會合周期爲360日也.

三統曆謂土星晨始見去日半次,順,日行$\frac{1}{15}$度,87日始留,34日而旋;逆,日行$\frac{5}{81}$度,101日復留,33日有奇日而旋;復順,日行$\frac{1}{15}$度,85日而伏.凡見340日有奇.除逆定行星5度有奇.伏,日行不盈$\frac{3}{15}$度,37日有奇,行星7度有奇.壹復377日有奇,行星12度有奇.通其率,故曰日行4320分度之45.

元嘉曆謂土初與日合伏18日有奇,行2度有奇.晨見東方,順日行$\frac{1}{12}$度,84日行7度,留不行,36日而逆,日行7度.夕伏西方18日有奇,行2度有奇,復與日合.一終378日有奇,行星12度有奇.

§430. 直徑,面積及容積 平均視徑隨距地遠近而異,在20秒至14秒之間.所以稱平均視徑者,因土星扁度最大,約爲$\frac{1}{10}$也.其赤道徑約爲76470英里,兩極直徑約爲69770英里.其中數幾爲74200英里,少多於地之9倍.故其面積約爲地之82倍,容積爲地之820倍.

§431. 質量,密度及重力 質量僅爲地之95倍,故其密度爲地之$\frac{1}{8}$,約爲水之$\frac{5}{7}$,爲行星中密度最小者.其表面重力爲1·2.

§432. 自轉 1876年星面忽見一白斑,歷數星期可見.郝爾測之得其自轉約爲10時14分.

土星軸與軌道斜交約27度.

§433. 星面標記,反光力及彩色帶 星之邊緣不如中部光亮.其標記帶不如木星之清晰,亦不如木星之常變.在赤道處有一較亮之帶.兩極處時呈微綠色之極冠.

楚爾諾謂其反光力爲0·52,與金星同.星之彩色帶如日之彩色帶無水蒸氣之表現.但在紅橙二色中有黑暗條紋與木星

類似,尙不得其解釋.此黑暗條紋之最暗線不見於其光環之彩色帶中,蓋因光環之大氣甚薄少也.

§**434.光環**　星之特異處於體外有平光環三層,與星同心而共在一平面內.斯得路佛以A、B、C名之.A爲最外環,二外環較亮,最內一環則暗而難見.

1610年葛立老以其小遠鏡測土星,見其兩邊若有物附而斷其爲三星聚處.不久環之側邊向日,遂隱而不見.多有謂土星已吞食其子矣.1655年,海更士(Huyghens)始謂星有光環.更20年後,卡西尼謂有二環與星同心,兩環間有暗隙,望之若黑環焉.環之前半對日生影,影在星面.環之後半有星體之影.故意環爲實體非虛象也.星面諸帶與環平行,故知星自轉之軸正交環面.

環之厚不過100英里,或言其環如此之薄,若爲實質,恐外邊內邊所加二離心力之較必將環撕碎,若爲流質則無此事.或疑環爲氣質,又謂氣與氣質交和如雲之類也.以量微器細測,知光環之重心行於一小圜周以繞星之重心,非與星共一重心也.如此環之攝力加於星之四面不同,令星恆欲向環之最近點.而最近點繞星而行頻移其處,故環甚穩不致搖動,亦不致與星附着也.又環與星繞日遲速如一,故永不變.若速率微不同,環亦必落於星面也.或言外環之光小於內環,而內環內半之光亦小於外半.1850年10月11夜,美國堪比日星臺官本特用大赤道儀測之,見內環之半有暗帶界之,其內半較闊,覺別有一環,其闊若五分舊二環和之一.二星期後,英國天文士導斯用精遠鏡徑6寸者測之,亦見暗帶更明晰,與本特不謀而合.故定爲三環,暗帶乃新環舊環間之空處也.而新環之半亦見有黑線界之,界以內光更小.

1849年6月8日伯林星臺官嘉勒(Galle)初測見內環之

內邊（指B環）又加闊,以量微器測之,約爲星與環間之半.此加闊者略能透光,故隔此能見星體.因其能透光故有沙網環之稱.嘉勒測得雖在先,而其頒行已在本特與導斯測得之後.又有多人測得亦謂其能透光.又見光環之面有數黑線與環間之黑帶平行,屢有屢無.按此可信土星之光環爲氣質也.

晚近多以光環爲一羣分離之質點所組成,各如一衞星繞星旋轉,實如一羣流星也.

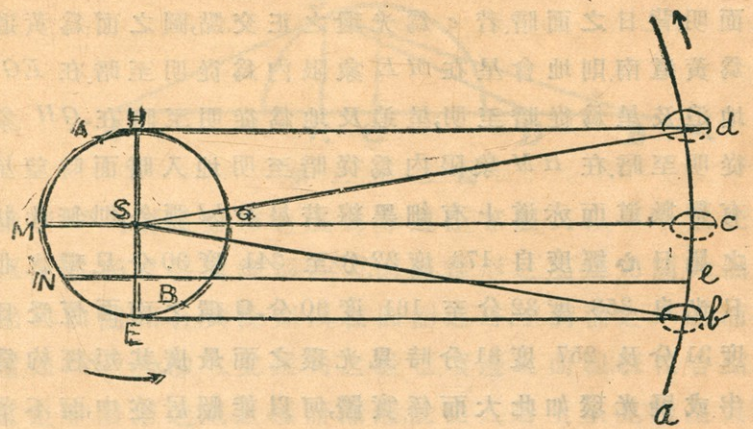
§**435. 光環之大小** 外環A之外徑爲 172000 英里（巴那德之數）,寬11000英里.故其內徑爲 150000 英里.A與B環之間有空隙約2300 英里寬,視之如一黑環.環B之外徑爲 145400 英里,寬約18000英里,內徑爲 109400 英里.內環之內緣光略淡與最內環C相聯,幾無顯著之界限.C環寬約與A同,故C環之內徑爲87400英里.星之赤道徑爲76470英里,故C環與星赤道間之空隙約爲5500 英里.

據侯失勒之數外環外徑之視徑爲 40.095 秒,其內徑之視徑爲 35.289 秒,內環外徑之視徑爲 34.475 秒,內徑則爲 26.665 秒.星赤道視徑 17.991 秒,故赤道與內環內周之視距爲4.339秒,外內環間之視距爲0.408秒.

斯得路佛測計光環之質量及平均密度均極微小,對於衞星之行動並無阻力.郝爾謂光環質量不及星之$\frac{1}{7100}$.

§**436. 光環之位相** 光環無論爲實體爲虛象,地球在便當之時能見其環影在土星向日之面,亦見土星影在環向日之面而在土星之後,曾用遠鏡細測之矣.或意其外環之外邊略有扁圓之形.又意其二環不在一個平面內.土星繞日行其自轉軸與光環方向不變,故光環面交黃道面之角亦不變,恆爲28度11分.其二面交線與分點線成角 167 度31分,故光環二交點之經度

一爲 167 度31分,一爲 347 度31分.土星至此二點,光環之邊正對日,若適當衝日時地上視光環如一細長光線,非最精遠鏡不能見,謂之光環隱.土星約15年一過交點,過交點時光環或隱一次或隱二次三次.光環所以不見之故有三:環面過日心,日不能照其兩旁,祇能照環之外邊,邊既甚窄,故不能見,一也.環面過地,其向地者,惟環之外邊,故仍不能見,二也.環面斜界於地日之間,則映日之面背地,故環不得見,三也.其故雖有三,然環被隱之期不過一年,卽環面交地道之年也.如第二七二圖,S 爲日,ad 爲土



第二七二圖

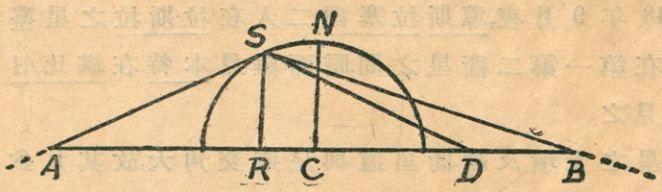
星道,$EGHM$ 爲地道,矢所指爲星地行動方向,c 爲交點,cS 爲交點距日線.作 Eb、Hd 與 cS 平行切地道於 H、E 二點.光環之方向恆不變,故土星在 bd 之間,若與地球會於 cS 平行線如 eN、Eb 等線,光環必隱.土日距 Sb 與地日距 SE 之比若 9.54 與 1 之比.推得 cSb 角爲 6 度 1 分.倍之卽 bSd 角爲12度 2 分,卽 bd 度.土星過此約需 359.46 日,較地繞日一周僅少5.8日.地或在 EGH 或在 HME 二半周俱可與土星會於 cS 平行線,會則光環必隱.設地從 H 行5.8日至 A 之時土星初至 b,則必一會於 ME 象限內,再

會於 H 點,計其隱有二次.若地在 AME 弧內土星至 b 則必一會於 NE 象限內,再會於 EGH 半周內,三會於 HM 象限內,計其隱有三次.若地在 EB 弧內土星至 b,則其初地斜行而遲星追及地而一會,後地行近正而速追及星而再會,俱在 EGH 半周內.而星未至 d 地已過 H,又會於 HM 象限內,計其隱亦三次.地在 B 時土星至 b,其初地斜行星速於地追及地與會,會後地行漸正卽速於星而前行再會於 HM 象限內,計其隱只二次.若地在 BGA 半周內,則僅一會於 HME 半周內而其隱不過一次.光環向日之面明,背日之面暗.若 c 爲光環之正交點,圖之面爲黃道北,其背爲黃道南.則地會星在 ME 象限內爲從明至暗.在 EG 象限內地追及星爲從暗至明,星追及地爲從明至暗.在 GH 象限內爲從明至暗.在 HM 象限內爲從暗至明.地入暗面時望星,見面上有帶數道而赤道上有細黑線.若星在 bd 弧外,則無此狀.凡土星之屬日心經度自 173 度 32 分至 341 度 30 分,見環之北面恆受日光.自 353 度 32 分至 161 度 30 分,見環之南面恆受日光.在 77 度 31 分及 257 度 31 分時見光環之面最廣,其短徑約爲長徑之半.或疑光環如此大而係實體,何以能懸居空中,而不落於星面,曰光環亦依本面自轉,環上之光有不同處,據以測得歷 10 時 32 分 15 秒而一周,準土星攝力推之,如物在環半繞星應得之速,故能懸居空中不落也.

此段係譯侯失勒天文學,該書三版係在 1850 年刊行.光環正交點在 1900 年時之黃經爲 168 度 10 分 35 秒,已較本段之數差 39 分 35 秒.按其交點每年前行約 0.79 分.以此推之,本段所言經度當係 1850 年之數也.1907 年 10 月,1922 年夏,皆土星過光環交點時.

昔白塞爾謂光環每年前行 46.462 秒.

§437. 土星光環　人若居土星光環之邊而觀光環,必如大光弧橫亘天空,而兩端至土星之地平界,甚奇妙也.人若居土星之軸,則見光環之內外邊必合其赤道之距等圈,而恆掩距等圈間之多星.人若居土星面使星體能透光,則見光環之內外邊必成不同心之橢圓,且近邊闊而遠邊狹,其橢圓不合其赤道之距等圈,必向高之一極而偏.以圖明之.於土星面之某點 S 作 SR 與光環 AB 正交,以 AD 爲其赤道距等圈之徑,以此爲底旋成正



第二七三圖

圓錐形 ASD,則圓錐形之底爲赤道距等圈.又以 AB 爲光環之徑,以此爲底成斜圓錐形 ASB,則圓錐形之底爲光圓.此圈惟在 A 點與前圈相合,其餘則俱在圓圈之外,至對面之 B 點而相距最遠.如 BSD 角,卽二尖錐角之較也.環邊之曲線,既在合點與其赤道距等圈漸近星之極而漸離,故使人居土星見諸星與日之出,有時先在環下能見,後爲圓所掩,後在環上再能見也.

§438. 衛星　土星之諸衛星距地更遠,較木星更難測,故不能詳細.如木星諸衛星距土星最遠之衛星,其道與光環面之交角最大,爲12度14分(近測爲10度).其距土星之心64倍土星半徑.餘衛星之道俱略與光環面平行,其距星最遠者僅爲此衛星之距三分之一.惟我地之月距地60地半徑,差堪與比.他星之衛星,俱不能及也.1671年卡西尼初測得此衛星,然在土星東半道幾不能見.今用最精遠鏡始見全周,但在東半道光變小約在西半道時之$\frac{1}{2}$,難測.因思此衛星必自轉,其一周與繞土星一周

之時等,與我月同.想諸星之各月皆同此例也.自外至內,舊時所謂之第二衛星爲1655年海更士所測得,乃土星諸月之最大而明者.其實體略與水星等.第三第四第五衛星俱甚小,非精遠鏡不能見,卡西尼於1672年及1684年中測得之.第六第七衛星侯失勒維廉於1789年測得之,此二衛星甚近光環外周.於清朗夜用最精遠鏡方能測之.見光環如線時,二衛星若珠附於線而行.久而各離線端,既而各退行過線端而爲星所掩.

1848年9月夜,導斯拉塞爾二人在拉斯拉之星臺測得第八衛星在第一第二衛星之間,暗而難見.本特在堪比日星臺同時亦測見之.

土星之光環及諸衛星道與星道交角大,故其月食過面諸事,惟內二衛星爲多,外諸衛星非近光環如線時不能有也.且測其食甚難,故非若木星之衛星可用以定地面之經度也.

天文家定土星諸衛星之次不一.或以最近土星之衛星爲七,其次爲六,其次至最遠爲一、二、三、四、五.或自一至七,俱自內至外順數.因各家之次不同,恐易淆亂,故以古神之名名之.自內至外,一電鬼 (Mimas), 二巨神 (Enceladus), 三水神 (Tethys), 四山神 (Dione),五天女 (Rhea), 六大力神 (Titan), 七日神 (Hyperion), 八天子 (Iapetus), 九鵡神 (Phoebe).

日神星受大力神星之攝動,致其軌道有偏心率.且長軸線向後退行,恆保持與巨神星成直線.除天子星外,各衛星道皆約在光環面內.內五星之道幾爲正圓.天子星日神星及大力神星之道,則微有偏心.

第九衛星爲皮克靈於1898年,由攝影圖發見.星依道退行,是其特點.

1905年4月,又發見第十衛星,爲日神星之姊妹星,名曰靛

神星 (Thami), 軌道同大而偏心微巨,且斜角不同,光較弱.

天王星

§439. 天王星　五緯星上古以來人皆知之.天王星乃侯失勒維廉於1781年3月13日夜,以自造之7英寸反光鏡測諸恆星,始知爲行星,昔皆誤爲恆星也.

其距日之中數幾爲18000000英里.兩心差略小於木星道者.致其最遠最近去中數各83000000英里.軌道面與黃道面交角僅46分.恆星周期爲84年.會合周期369日16時,軌道行速度爲每秒$4\frac{1}{3}$英里.

黑夜時肉眼能見,約如6等之星.因其道甚大,故其視徑之變不甚覺.在遠鏡中見其面爲海水綠色,視徑約4秒.合實直徑32000英里〔但西(*See*)之測定爲27930英里〕.其面積約爲地之16倍,容量約爲地之66倍,質量爲地之14.6倍,密度爲0.22,表面動力爲0.90.

星之反光力爲0.64,較木星尙强.但在星面之日光,其强度僅爲地面之$\frac{1}{368}$,爲木星之$\frac{1}{14}$.故在遠鏡中與木星呈同大之面,不能如木星之亮也.其彩色帶之低部有顯著之暗條紋,與土星相似而較强烈.意星面呈微綠色爲彩色帶顯暗線之原因,可爲星面大氣濃厚之表示也.

星之扁度約爲$\frac{1}{14}$,此1883年測得之數也.後屢測之均與此合.星面有時見有光甚微弱之帶.在小遠鏡中視之,如木星之帶然,由此帶察之,似星自轉之平面不與諸衞星道面相合,而有15度至40度之斜角.若拉普拉瑟研究其諸衞星行動,苟無錯誤,則此諸道面必幾與星之赤道面相合,或者星面標記帶之方向觀測,不無差錯也.

星之自轉有謂爲自 9 時至 12 時者,尙爲未定之數.

§440. 衛星 天王諸衛星非最大力遠鏡不能測之,已確知者,有四月,以古仙之名名之.曰仙王星 (Oberon), 曰仙后星(Titania),曰妖怪星(Umbreal),曰神獅星 (Ariel). 仙王仙后皆是侯失勒維廉在 1787 年所測見.以 18 寸回光遠鏡測之,所見略明.約翰亦見之.其後拉塞爾斯得路佛拉門三人又見之.妖怪星甚暗,恐亦是侯失勒維廉始測見而以爲內衛星.但見時不多,亦不甚詳,未能定知是衛星與否.後斯得路佛於 1851 年 1 月亦測見之,更後拉塞爾亦測見數次.神獅星是拉塞爾於 1851 年 8 月所測得.又在里味不星臺及馬達島用量微器詳測此四衛星.在測天之事,此爲甚要.此四衛星之周時與距數見附表.侯失勒維廉疑仙王星與仙后星之間或再有三月而未之見,恐竟無之也.

天王諸衛星之道幾爲平圓,皆在一平面內,且均相近.最特異者,其道面與黃道交成 82.2 度之角,其繞本星皆自東而西非自西而東,然謂其道面與黃道面斜交 97.8 度角繞本星順行自西而東亦無不可.其交角未見有變. 1840 及 1882 年其交點線過地心,地上視其道如直線. 1861 及 1903 年視其道幾如平圓.而由 1882 至 1883 年爲測定衛星道之斜度及交點位置,並本星扁度最適宜之時.衛星之光爲本星光所奪,未切本星已隱不見,故用大力遠鏡尙未能測其食與掩也.

海王星

§441. 軌道之大 亞當史及來未里亞,均照波德律定海王星之距日中數,故其推算之根數,皆有錯誤.星去日之平均距離實爲 2800000000 英里,非如波德規定之爲 3600000000 英里.其兩心差據亞來二氏所推應甚大,而實則道近平圓,兩心差僅 $\frac{9}{1000}$.故其最遠最近去中數各 50000000 英里.道與黃道面之斜角約爲

$1\frac{3}{4}$度.恆星周期約164年,非如阿李二氏所推之爲217年也.軌道行速度約爲每秒$3\frac{1}{3}$英里.

§442. 星之外觀　在遠鏡中星如八,九等間之小星,肉眼純不能見,其面微綠.視徑約2.6秒.因星距地之變甚小$\left(\frac{1}{15}\right)$,故視徑之變幾不覺.直徑約35000英里(西氏之推測爲27190英里),體積約爲地之85倍,質量約爲地17倍,密度爲0.20.

反光力約爲0.46.面無可見標記,故不知其是否自轉.彩色帶同於天王星者,光甚弱,但有重暗條紋,星面顯濃厚之大氣.

§443. 衛星　星有一衛星,1846年10月爲拉塞爾所發見.去本星之距離爲223000英里,周期爲5日21時2.7分,道與黃道面之交角爲34度53分.繞本星逆行,光度如天王之仙王星.從其光度與木星比較之,估計其直徑,約如我月之大.

§444. 太陽系之比擬　欲顯繞日諸星大小及相距之率,當擇一極平地面,置一球徑二英尺爲日,距球164英尺,置一芥子爲水星,距球284英尺,置一豌豆爲金星,距球430英尺,又置一豌豆爲地,距球654英尺,置一菜豆爲火星,距球1000英尺至1200英尺,置五十餘沙粒爲穀女等諸小星,距球半英里餘,置一橘爲木星,距球$\frac{4}{5}$英里,置一小橘爲土星,距球1.5英里,置一大櫻桃爲天王,距球2.5英里,置一大李爲海王.若作圖於紙不能得眞比例也.

§445. 行星面之生物　諸行星上設有動植諸物,其性與質必較地面諸物大不同.蓋諸行星異於地球者三:受日之光熱多少不同一也,攝力大小不同二也,體質疎密不同三也.

諸行星所受太陽之熱氣,雖無多少大不同,然行星外所包之密雲或能透熱氣,而易射至行星之面.又能阻之使不易發散

故遠日之行星所受太陽之熱氣雖不多,而所受者能多存於其面也.如藏植物之玻璃房受太陽之熱氣,雖至有雲之時,房內寒暑度仍大也.按此理行星距太陽甚遠者,未必是甚冷矣.

然僅依地球之事論之,諸星是否難居生物,尙未可必信,或地球之人以爲極苦,而在星面者,實爲最適亦未可知也.

冥王星

§446. 冥王星 自海王星發見以後,天文家遂疑水星道之內,及海王星之外,均有一新行星.前者已謂有發見之者,並命名曰Vulcan.但以後加種種研究及觀察,殆不能認其存在.又因波得律至海王星而失其應用,多謂海王星外,不再有行星.然經種種研究至1930年3月12日,美國羅威爾天文臺發見後,加以精密觀測,現已確定其爲海王星外之行星,並定名曰Pluto,譯曰冥王星.

下表所載,乃歷年各天文家所推測者.有依天王星位置之變動而計算之者,如1877年陀德(Todd),1901年洛氏(Lau),1909年葛樂德(Gaillot)及賈立幹(Carrigan)、西、皮克靈羅威爾諸

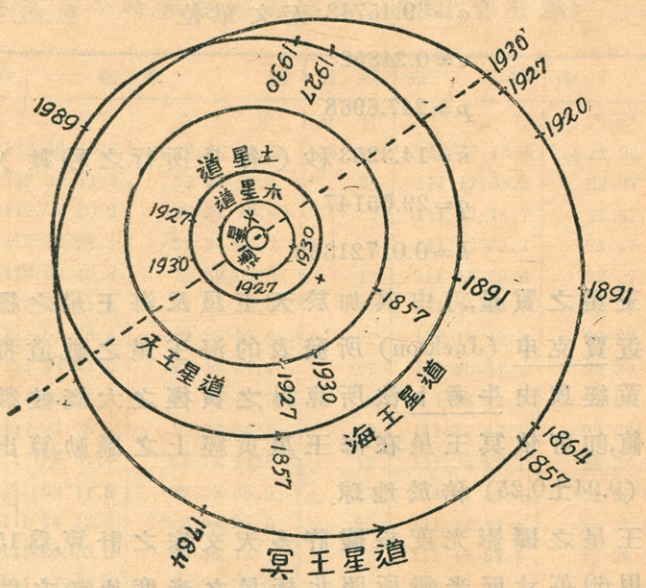
次序	推算者	方法	半長徑 a	周期 T	平行動 n	時 t	經度 g	1930年經度 G
					度		度	度
1	陀德	海王星	52	375.0	0.960	1878.0	170.0	219.9
2	葛樂德	海王星	44	291.9	1.233	1910.0	284.2	308.9
3	葛樂德	海王星	66	536.2	0.672	1910.0	114.6	128.0
4	洛	海王星	46.5	317·1	1.135	1910.0	274.4	308.5
5	洛	海王星	71.8	608.4	0.593	1900.0	154.9	172.7
6	皮克靈	海王星	51.9	373.9	0.963	1900.0	105.8	134.7
7	羅威爾	海王星	43.0	282.0	1.281	1914.5	84.0	103.8
8	羅威爾	海王星	44.7	298.9	1.204	1914.5	262.8	281.5
9	皮克靈	天王星	55.1	409.9	0.880	1920.0	97.8	106.6
10	佛伯斯	彗星	98	970.2	0.371	1880.5	198.0	216.4
11	佛伯斯	彗星	98	970.2	0.371	1880.5	184.0	202.4
12	哥立固爾	彗星	50.6	360.0	1.000	1902.0	357.5	25.5
13	西	宇宙論	42.25	274.6	1.311	1904.0	200.0	234.1

氏是也.又有依海王星之變動而計算之者,如皮克靈氏於1915年發表結果以後,1928年又加以改正是也.又有依彗星之研究而計算之者,如1879年蒲拉麻立昂(Flammarion),1880年1908年佛伯斯(Forbes)及哥立固爾(Grigull)諸氏是也.

表載n乃冥王星一年繞太陽之平均行動,g乃t年計算所得之經度,G乃改算爲1930年之經度,其算式如下:

$$G=g+n(1930-t).$$

第二七四圖示地球、火、木、土、天王、海王及冥王各星之軌道.最內圓乃地球之軌道,其半徑爲一天文單位或93000000英里.各行星皆由西向東繞太陽而行,圖中示各星由1784年至1989年之位置.冥王星軌道之中心,以十字符號表之,恰在土星軌道



第二七四圖

之右側.

冥王星之位置得由胡馬申(Humason)在1919年12月用10英寸三聯鏡(Cooke triplet)所攝得之四張照片〔其結果公佈於哈佛片(Harvard Card) 1930年133號〕及在1930年各天文家用60英寸及100英寸口徑之反光鏡所照得該行星之影片決定之.

冥王星之軌道根數計算時,包含四大行星之攝動,其結果如下:

T= 過卑點之時 =1989年11月6.98日

ω= 113度 52分 50.6秒 } 1930年

Ω= 109度 21分 43.7秒 }

i= 17度 08分 38.1秒 1930年

a=39.45743 天文單位

e=0.24852

p=247.6968

n=14.3253秒（每日所行之秒數）

q=29.65147

k=0.01721363

冥王星之質量,可由其加於天王星及海王星之攝動而定之.由最近賈克申(Jackson)所發表的海王星之軌道推得該星之觀測黃經與由牛考卜法所算得之黃徑之大概較數.由此大概的數值,即可依冥王星在海王星黃經上之攝動,算出冥王質量m爲(0.94±0.25)倍於地球.

冥王星之攝影光度,根據許多天文家之計算,爲15至16星等若與用60英寸反光鏡所照北極星之光度比較之,則爲15.5星等.其視光度或者介乎14.0與14.5星等間.若假定冥王星之

密度等於地球之密度,其反射一若月球,且其視光度爲 14.0 星等.是則其質量適當於地球三分之二.若其光度爲 14.5,則當於地球三分之一.若冥王星之質量大於地球三分之二,則其密度必大於太陽系的一切星球,或其反光率爲最低.雖然冥王星在此種狀態之下,基本上可與其他行星有別,而其光度必如在此所引質量之低限有同一之變化.吾人相信若更進一步的研究,當可證明冥王星之質量約等於地球三分之二.

依最近包渥 (Bowers) 之研究,冥王星之質量尙未能確實決定.若由光度之觀測,採用最確之反射力及密度,則其質量之最大限爲地球之0.7倍.若由今日視直徑之觀測,採用最確之密度,則其質量之最大限當爲地球之0.3倍.但冥王星質量之最可靠數值當爲地球之0.1倍.氏又發表1932 年該星之位置如下(時刻係格林維基平時,赤經赤緯係按 1900.0 春分點):

日期		赤經			赤緯			日期		赤經			赤緯		
月	日	°	′	″	°	′	″	月	日	°	′	″	°	′	″
1	3	112	36	00.6	+22	20	49.5	3	23	111	13	42.3	+22	36	55.8
	8	112	29	12.3	22	22	08.1		28	111	12	39.3	22	37	19.3
	13	112	22	20.2	22	23	26.6	4	2	111	12	15.7	22	37	37.3
	18	112	15	28.4	22	24	44.3		7	111	12	32.2	22	37	49.9
	23	112	08	40.8	22	26	00.8		12	111	13	28.6	22	37	57.0
	28	112	02	01.4	22	27	15.5		17	111	15	04.7	22	37	58.8
2	2	111	55	33.6	22	28	27.8		22	111	17	19.5	22	37	55.2
	7	111	49	21.5	22	29	37.4		27	111	20	12.2	22	37	46.6
	12	111	43	28.6	22	30	43.7	5	2	111	23	41.9	22	37	33.0
	17	111	37	58.4	22	31	46.3		7	111	27	47.4	22	37	14.5
	22	111	32	54.0	22	32	44.8		12	111	32	27.1	22	36	51.3
	27	111	28	17.8	22	33	38.9		17	111	37	39.0	22	36	23.8
3	3	111	24	12.6	22	34	28.5		22	111	43	21.2	22	35	52.1
	8	111	20	40.5	22	35	13.1		27	111	49	31.5	22	35	16.6
	13	111	17	43.8	22	35	52.6	6	1	111	56	08.1	22	34	37.4
	18	111	15	24.0	22	36	26.9		6	112	03	08.5	22	33	54.9

時天中星金 Z. 表

年	一月			二月			三月			四月			五月			六月		
	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座
1932	下午二時	虛危間	寶瓶	下午二時	奎宿	雙魚	下午四時	鬼宿	羊牛白金間	下午四時	參井間	牛女金雙間	下午二時	參井間	牛女金雙間	正午	參井間	牛女金雙間
1933	上午十時	尾箕	蝎馬天人間	正午	奎宿	雙魚	正午	婁宿	雙魚	正午	婁宿	白羊	正午	鬼宿	羊牛白金	下午二時	井柳	女端雙東間
1934	正午	斗牛	馬羯人磨	上午十時	虛危	寶瓶	上午十時	虛危	寶瓶	上午十時	奎宿	雙魚	上午十時	婁宿	白羊	上午十時	鬼宿	羊牛白金
1935	下午二時	虛危	寶瓶	下午二時	奎宿	雙魚	下午二時	婁宿	白羊	下午二時	鬼宿	羊牛白金	下午二時	參井	牛女金雙	下午四時	星宿	獅子西端
1936	上午十時	尾箕	蝎馬天人	上午十時	斗牛	馬羯人磨	上午十時	虛危	寶瓶	上午十時	奎宿	雙魚	正午	鬼宿	羊牛白金	正午	參井	牛女金雙
1937	下午四時	奎宿	雙魚	下午四時	婁宿	白羊	下午二時	婁宿	白羊	下午二時	鬼宿	羊牛白金	上午十時	婁宿	白羊	上午十時	鬼宿	羊牛白金
1938	正午	斗牛	馬羯人磨	正午	虛危	寶瓶	正午	奎宿	雙魚	下午二時	鬼宿	羊牛白金	下午二時	參井	牛女金雙	下午二時	井柳	女端雙東
1939	上午十時	尾箕	蝎馬天人	上午十時	斗牛	馬羯人磨	上午十時	虛危	寶瓶	上午十時	奎宿	雙魚	上午十時	婁宿	白羊	上午十時	鬼宿	羊牛白金
1940	下午二時	虛危	寶瓶	下午二時	奎宿	雙魚	下午四時	鬼宿	羊牛白金	下午四時	參井	牛女金雙	下午二時	參井	牛女金雙	正午	參井	牛女金雙
1941	上午十時	尾箕	蝎馬天人	正午	虛危	雙魚	正午	奎宿	雙魚	正午	婁宿	白羊	正午	鬼宿	羊牛白金	下午二時	井柳	女端雙東
1942	正午	斗牛	馬羯人磨	上午十時	斗牛	馬羯人磨	上午十時	虛危	寶瓶	上午十時	奎宿	雙魚	上午十時	婁宿	白羊	上午十時	鬼宿	羊牛白金
1943	下午二時	虛危	寶瓶	下午二時	奎宿	雙魚	下午二時	婁宿	白羊	下午二時	鬼宿	羊牛白金	下午四時	井柳	女端雙東	下午四時	星宿	獅子西端
1944	上午十時	尾箕	蝎馬天人	上午十時	斗牛	馬羯人磨	上午十時	虛危	寶瓶	正午	婁宿	白羊	正午	鬼宿	羊牛白金	正午	參井	牛女金雙
1945	下午四時	奎宿	雙魚	下午四時	婁宿	白羊	下午二時	婁宿	白羊	下午二時	鬼宿	羊牛白金	上午十時	婁宿	白羊	上午十時	鬼宿	羊牛白金
1946	正午	斗牛	馬羯人磨	正午	虛危	寶瓶	正午	奎宿	雙魚	下午二時	鬼宿	羊牛白金	下午二時	參井	牛女金雙	下午二時	井柳	女端雙東
1947	上午十時	尾箕	蝎馬天人	上午十時	斗牛	馬羯人磨	上午十時	虛危	寶瓶	上午十時	奎宿	雙魚	上午十時	婁宿	白羊	上午十時	鬼宿	羊牛白金
1948	下午二時	虛危	寶瓶	下午二時	奎宿	雙魚	下午四時	鬼宿	羊牛白金	下午四時	參井	牛女金雙	下午二時	參井	牛女金雙	夜半	參井	牛女金雙
1949	上午十時	尾箕	蝎馬天人	正午	斗牛	雙魚	正午	奎宿	雙魚	正午	婁宿	白羊	正午	鬼宿	羊牛白金	下午二時	井柳	女端雙東
1950	正午	斗牛	馬羯人磨	上午十時	虛危	寶瓶	上午十時	虛危	寶瓶	上午十時	奎宿	雙魚	上午十時	婁宿	白羊	上午十時	鬼宿	羊牛白金

刻概數及大概方位

七月			八月			九月			十月			十一月			十二月		
時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座
上午十時	參井間	金牛雙女間	上午十時	井柳	雙女東端	上午十時	星宿	獅子西端	上午十時	翼宿	獅子處女間	上午十時	角亢	處女東端	上午十時	氐房	天蝎
下午二時	星宿	獅子西端	下午二時	翼宿	獅子處女	下午二時	角亢	處女東端	下午四時	尾箕	天蝎人馬	下午四時	斗牛	人馬磨羯	下午二時	斗牛	人馬磨羯
上午十時	參井	金牛雙女	上午十時	井柳	雙女東端	上午十時	星宿	獅子西端	正午	角亢	處女東端	正午	氐房	天蝎	正午	尾箕	天蝎人馬
下午四時	翼宿	獅子處女	下午二時	翼宿	獅子處女	正午	翼宿	獅子處女	上午十時	翼宿	獅子處女	上午八時	翼宿	獅子處女	上午八時	角亢	處女東端
正午	井柳	雙女東端	正午	星宿	獅子西端	下午二時	角亢	處女東端	下午二時	氐房	天蝎	下午二時	尾箕	天蝎人馬	下午二時	斗牛	人馬磨羯
上午八時	昴宿	白羊金牛	上午十時	井柳	雙女東端	上午十時	星宿	獅子西端	上午十時	翼宿	獅子處女	上午十時	角亢	處女東端	上午十時	氐房	天蝎
下午二時	星宿	獅子西端	下午四時	角亢	處女東端	下午四時	氐房	天蝎	下午二時	氐房	天蝎	正午	氐房	天蝎	上午十時	氐房	天蝎
上午十時	參井	金牛雙女	正午	星宿	獅子西端	正午	翼宿	獅子處女	正午	角亢	處女東端	下午二時	尾箕	天蝎人馬	下午二時	斗牛	人馬磨羯
上午十時	參井	金牛雙女	上午十時	井柳	雙女東端	上午十時	星宿	獅子西端	上午十時	翼宿	獅子處女	上午十時	角亢	處女東端	上午十時	氐房	天蝎
下午二時	星宿	獅子西端	下午二時	翼宿	獅子處女	下午二時	角亢	處女東端	下午四時	尾箕	天蝎人馬	下午四時	斗牛	人馬磨羯	下午二時	斗牛	人馬磨羯
上午十時	參井	金牛雙女	上午十時	井柳	雙女東端	上午十時	星宿	獅子西端	正午	角亢	處女東端	正午	氐房	天蝎	正午	尾箕	天蝎人馬
下午二時	星宿	獅子西端	正午	星宿	獅子西端	上午十時	星宿	獅子西端	上午八時	星宿	獅子西端	上午八時	翼宿	獅子處女	上午十時	氐房	天蝎
正午	井柳	雙女東端	下午二時	翼宿	獅子處女	下午二時	角亢	處女東端	下午二時	氐房	天蝎	下午二時	尾箕	天蝎人馬	下午二時	斗牛	人馬磨羯
上午八時	昴宿	白羊金牛	上午十時	井柳	雙女東端	上午十時	星宿	獅子西端	上午十時	翼宿	獅子處女	上午十時	角亢	處女東端	上午十時	氐房	天蝎
下午二時	星宿	獅子西端	下午四時	角亢	處女東端	下午四時	氐房	天蝎	下午二時	氐房	天蝎	正午	氐房	天蝎	上午十時	氐房	天蝎
上午十時	參井	金牛雙女	正午	星宿	獅子西端	正午	翼宿	獅子處女	正午	角亢	處女東端	下午二時	尾箕	天蝎人馬	下午二時	斗牛	人馬磨羯
上午十時	參井	金牛雙女	上午十時	井柳	雙女東端	上午十時	星宿	獅子西端	上午十時	翼宿	獅子處女	上午十時	角亢	處女東端	上午十時	氐房	天蝎
下午二時	星宿	獅子西端	下午二時	翼宿	獅子處女	下午二時	角亢	處女東端	下午四時	尾箕	天蝎人馬	下午四時	斗牛	人馬磨羯	下午二時	斗牛	人馬磨羯
上午十時	參井	金牛雙女	上午十時	井柳	雙女東端	上午十時	星宿	獅子西端	正午	角亢	處女東端	正午	氐房	天蝎	正午	尾箕	天蝎人馬

時天中星火 α 表

年	一月			二月			三月			四月			五月			六月		
	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座
1932	正午	斗牛	馬羯人磨	正午	虛危	寶瓶	正午	奎宿	雙魚	正午	婁宿	白羊	午時	婁宿	白羊	午時	昴宿	羊牛
1933	上午四時	翼宿	獅子女處	上午二時	翼宿	獅子女處	夜半	翼宿	獅子女處	下午十時	翼宿	獅子女處	下午八時	婁宿	獅子女處	下午六時	昴宿	獅子女處
1934	下午二時	虛危	寶瓶女處	下午二時	奎宿	雙魚女處	正午	奎宿	雙魚女處	正午	婁宿	白羊女處	正午	昴宿	白羊牛女	正午	參井	金雙牛女
1935	上午六時	角亢	雙魚女處	上午四時	角亢	雙魚女處	下午二時	氐房	天蝎女處	夜半	角亢	白羊牛女	下午十時	昴宿	白金羊牛女	下午八時	參井	金雙牛女
1936	下午四時	奎宿	雙魚女處	上午二時	奎宿	天蝎女處	下午二時	房宿	天蝎女處	下午二時	昴宿	白羊牛女	正午	昴宿	白羊牛女	正午	參井	金雙牛女
1937	上午六時	氐房	天蝎女處	上午四時	氐房	天蝎女處	上午二時	尾箕	天蝎女處	上午四時	昴宿	天蝎女處	夜半	氐房	天蝎女處	下午十時	參井	天蝎女處
1938	下午四時	奎宿	雙魚女處	下午二時	奎宿	雙魚女處	下午二時	尾箕	白羊女處	下午二時	昴宿	白羊牛女	下午二時	參井	金雙牛女	正午	參井	金雙牛女
1939	上午八時	氐房	天蝎女處	上午六時	尾箕	天人蝎馬	上午四時	尾箕	天人蝎馬	上午六時	斗牛	人馬羯磨	上午四時	斗牛	人馬羯磨	上午二時	斗牛	人馬羯磨
1940	下午四時	奎宿	雙魚女處	下午四時	婁宿	白羊女處	下午二時	尾箕	白羊女處	下午四時	斗牛	白羊牛女	下午二時	參井	金雙牛女	正午	參井	金雙牛女
1941	上午八時	氐房	天蝎女處	上午八時	尾箕	天人蝎馬	上午八時	斗牛	人馬羯磨	上午六時	斗牛	人馬羯磨	上午六時	虛危	寶瓶女處	上午六時	奎宿	雙魚女處
1942	下午六時	奎宿	白羊女處	下午四時	婁宿	白羊女處	下午四時	斗牛	白羊牛女	下午四時	參井	金雙牛女	下午二時	參井	金雙牛女	下午二時	井柳	雙東端女
1943	上午十時	尾箕	天人蝎馬	上午八時	尾箕	天人蝎馬	上午八時	斗牛	人馬羯磨	上午八時	虛危	寶瓶女處	上午八時	奎宿	雙魚女處	上午六時	奎宿	雙魚女處
1944	下午十時	參井	金牛女雙	下午八時	參井	金雙牛女	下午六時	參井	金雙牛女	下午六時	井柳	雙東女端	下午四時	井柳	雙東女端	下午四時	星宿	獅子端西
1945	正午	斗牛	人馬羯磨	正午	虛危	寶瓶女處	上午十時	虛危	寶瓶女處	上午十時	奎宿	雙魚女處	上午十時	婁宿	白羊女處	上午十時	昴宿	白金羊牛
1946	夜半	井柳	雙東女端	午時	井柳	雙東女端	下午十時	虛危	寶瓶女處	下午十時	奎宿	雙魚女處	下午六時	星宿	獅西子端	下午四時	星宿	獅西子端
1947	正午	斗牛	人馬羯磨	正午	星宿	獅西子端	正午	星宿	獅西子端	正午	婁宿	白羊女處	上午八時	昴宿	白羊女處	上午六時	昴宿	白金羊牛
1948	上午四時	翼宿	獅子女處	午時	星宿	獅西子端	下午十時	奎宿	雙魚女處	下午八時	婁宿	白羊女處	下午六時	昴宿	白羊女處	下午六時	翼宿	獅子女處
1949	下午二時	虛危	寶瓶女處	上午十時	虛危	寶瓶女處	正午	奎宿	雙魚女處	正午	婁宿	白羊女處	正午	昴宿	白金羊牛	上午十時	昴宿	白金羊牛
1950	上午六時	角亢	處東女端	上午四時	角亢	處東女端	夜半	翼宿	獅子女處	下午十時	翼宿	獅子女處	下午八時	翼宿	獅子女處	下午六時	翼宿	獅子女處

刻概數及大概方位

七月			八月			九月			十月			十一月			十二月		
時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座
上午十時	參井	金牛雙女	上午十時	井柳	雙女東端	上午八時	井柳	雙女東端	上午八時	星宿	獅子西端	上午六時	星宿	獅子西端	上午六時	翼宿	獅子處女
下午六時	角亢	處女東端	下午四時	角亢	處女東端	下午四時	氐房	天蝎	下午四時	尾箕	天蝎人馬	下午二時	尾箕	天蝎人馬	下午二時	斗牛	人馬磨羯
上午十時	參井	金牛雙女	上午十時	井柳	雙女東端	上午十時	星宿	獅子西端	上午八時	星宿	獅子西端	上午八時	翼宿	獅子處女	上午八時	角亢	處女東端
下午六時	角亢	處女東端	下午六時	氐房	天蝎	下午四時	氐房	天蝎	下午四時	尾箕	天蝎人馬	下午四時	斗牛	人馬磨羯	下午四時	虛危	寶瓶
正午	井柳	雙女東端	正午	星宿	獅子西端	上午十時	星宿	獅子西端	上午十時	翼宿	獅子處女	上午八時	翼宿	獅子處女	上午八時	角亢	處女東端
下午八時	氐房	天蝎	下午六時	氐房	天蝎	下午六時	尾箕	天蝎人馬	下午四時	尾箕	天蝎人馬	下午四時	斗牛	人馬磨羯	下午四時	虛危	寶瓶
正午	井柳	雙女東端	正午	星宿	獅子西端	上午十時	星宿	獅子西端	上午十時	翼宿	獅子處女	上午十時	角亢	處女東端	上午八時	角亢	處女東端
夜半	斗牛	人馬磨羯	下午十時	斗牛	人馬磨羯	下午八時	斗牛	人馬磨羯	下午六時	斗牛	人馬磨羯	下午六時	虛危	寶瓶	下午四時	虛危	寶瓶
正午	井柳	雙女東端	正午	星宿	獅子西端	上午十時	星宿	獅子西端	上午十時	翼宿	獅子處女	上午十時	角亢	處女東端	上午八時	角亢	處女東端
上午四時	奎宿	雙魚	上午二時	奎宿	雙魚	夜半	奎宿	雙魚	下午十時	奎宿	雙魚	下午八時	奎宿	雙魚	下午六時	奎宿	雙魚
上午二時	星宿	獅子西端	正午	星宿	獅子西端	正午	翼宿	獅子處女	正午	角亢	處女東端	上午十時	角亢	處女東端	上午十時	氐房	天蝎
上午六時	婁宿	白羊	上午六時	昴宿	白羊金牛	上午四時	昴宿	白羊金牛	上午四時	參井	金牛雙女	上午二時	參井	金牛雙女	夜半	參井	金牛雙女
下午四時	翼宿	獅子處女	下午二時	翼宿	獅子處女	下午二時	角亢	處女東端	正午	角亢	處女東端	正午	氐房	天蝎	正午	尾箕	天蝎人馬
上午八時	昴宿	白羊金牛	上午八時	參井	金牛雙女	上午八時	井柳	雙女東端	上午六時	井柳	雙女東端	上午六時	星宿	獅子西端	上午四時	星宿	獅子西端
下午四時	翼宿	獅子處女	下午四時	角亢	處女東端	下午二時	角亢	處女東端	下午二時	氐房	天蝎	下午二時	尾箕	天蝎人馬	正午	尾箕	天蝎人馬
上午十時	參井	金牛雙女	上午十時	井柳	雙女東端	上午八時	井柳	雙女東端	上午八時	星宿	獅子西端	上午六時	星宿	獅子西端	上午六時	翼宿	獅子處女
下午四時	翼宿	獅子處女	下午四時	角亢	處女東端	下午四時	氐房	天蝎	下午二時	氐房	天蝎	下午二時	尾箕	天蝎人馬	下午二時	斗牛	人馬磨羯
上午十時	參井	金牛雙女	上午十時	井柳	雙女東端	上午十時	星宿	獅子西端	上午八時	星宿	獅子西端	上午八時	翼宿	獅子處女	上午六時	翼宿	獅子處女
下午六時	角亢	處女東端	下午四時	角亢	處女東端	下午四時	氐房	天蝎	下午四時	尾箕	天蝎人馬	下午二時	尾箕	天蝎人馬	下午二時	斗牛	人馬磨羯

時天中星木 b 表

年	一月			二月			三月			四月			五月			六月		
	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座
1932	午時上二	星宿	獅子端西	夜半	星宿	獅子端西	午時下十	星宿	獅子端西	午時下八	星宿	獅子端西	午時下六	星宿	獅子端西	午時下四	星宿	獅子端西
1933	午時上四	翼宿	獅子女處	午時上二	翼宿	獅子女處	夜半	翼宿	獅子女處	午時下十	翼宿	獅子女處	午時下八	翼宿	獅子女處	午時下六	翼宿	獅子女處
1934	午時上六	角亢	女端處東	午時上四	角亢	女端處東	午時上二	角亢	女端處東	夜半	角亢	女端處東	午時下十	角亢	女端處東	午時下八	角亢	女端處東
1935	午時上八	氐房	天蝎	午時上六	氐房	天蝎	午時上四	氐房	天蝎	午時上二	氐房	天蝎	夜半	氐房	天蝎	午時下十	氐房	天蝎
1936	午時上十	尾箕	蝎馬天人	午時上八	尾箕	蝎馬天人	午時上六	尾箕	蝎馬天人	午時上四	尾箕	蝎馬天人	午時上二	尾箕	蝎馬天人	夜半	尾箕	蝎馬天人
1937	正午	斗牛	馬羯磨	午時上十	斗牛	馬羯磨	午時上八	斗牛	馬羯磨	午時上六	斗牛	馬羯磨	午時上四	斗牛	馬羯磨	午時上二	斗牛	馬羯磨
1938	午時下二	虛危	寶瓶	正午	虛危	寶瓶	午時上十	虛危	寶瓶	午時上八	虛危	寶瓶	午時上六	虛危	寶瓶	午時上四	虛危	寶瓶
1939	午時下四	虛危	寶瓶	午時下二	奎宿	寶瓶	正午	奎宿	雙魚	午時上十	奎宿	雙魚	午時上八	奎宿	雙魚	午時上六	奎宿	雙魚
1940	午時下六	奎宿	雙魚	午時下四	奎宿	雙魚	午時下二	婁宿	白羊	正午	婁宿	白羊	午時上十	婁宿	白羊	午時上八	婁宿	白羊
1941	午時下八	鶉宿	羊牛白金	午時下六	鶉宿	羊牛白金	午時下四	鶉宿	羊牛白金	午時下二	鶉宿	羊牛白金	午時下十	參井	牛女金雙	正午	參井	牛女金雙
1942	午時下十	參井	牛女金雙	午時下八	參井	牛女金雙	午時下六	參井	牛女金雙	午時下四	參井	牛女金雙	午時下二	參井	牛女金雙	午時下十	參井	牛女金雙
1943	夜半	井柳	女端雙東	午時下十	井柳	女端雙東	午時下八	井柳	女端雙東	午時下六	井柳	女端雙東	午時下四	井柳	女端雙東	午時下二	井柳	女端雙東
1944	午時上二	星宿	子端獅西	夜半	星宿	子端獅西	午時下十	星宿	子端獅西	午時下八	星宿	子端獅西	午時下六	星宿	子端獅西	午時下四	星宿	子端獅西
1945	午時上四	翼宿	子女獅處	午時上二	翼宿	子女獅處	夜半	翼宿	子女獅處	午時下十	翼宿	子女獅處	午時下八	翼宿	子女獅處	午時下六	翼宿	子女獅處
1946	午時上六	角亢	女端處東	午時上四	角亢	女端處東	午時上二	角亢	女端處東	夜半	角亢	女端處東	午時下十	角亢	女端處東	午時下八	角亢	女端處東
1947	午時上八	氐房	天蝎	午時上六	氐房	天蝎	午時上四	氐房	天蝎	午時上二	氐房	天蝎	夜半	氐房	天蝎	午時下十	氐房	天蝎
1948	午時上十	尾箕	蝎馬天人	午時上八	尾箕	蝎馬天人	午時上六	尾箕	蝎馬天人	午時上四	尾箕	蝎馬天人	午時上二	尾箕	蝎馬天人	夜半	尾箕	蝎馬天人
1949	正午	斗牛	馬羯磨	午時上十	斗牛	馬羯磨	午時上八	斗牛	馬羯磨	午時上六	斗牛	馬羯磨	午時上四	斗牛	馬羯磨	午時上二	斗牛	馬羯磨
1950	午時下二	虛危	寶瓶	正午	虛危	寶瓶	午時上十	虛危	寶瓶	午時上八	虛危	寶瓶	午時上六	虛危	寶瓶	午時上四	虛危	寶瓶

位方概大及數概刻

十二月			十一月			十月			九月			八月			七月		
時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座
午時	翼宿	子女獅	午時	翼宿	子女獅	午時	翼宿	子女獅	正午	翼宿	子女獅	午時	翼宿	子女獅	午時	星宿	子女獅
上六	角亢	女端處	上八	角亢	女端處	上十	角亢	女端處	下二	角亢	女端處	下二	翼宿	女端處	下二	翼宿	女端處
午時	氐房	天蝎	午時	氐房	天蝎	正午	氐房	天蝎	午時	氐房	天蝎	午時	角亢	天蝎	午時	角亢	天蝎
上八	尾箕	蝎馬	上十	尾箕	蝎馬	下二	尾箕	蝎馬	下二	尾箕	蝎馬	下二	氐房	蝎馬	下二	氐房	蝎馬
午時	斗牛	人人羯	午時	斗牛	人人羯	午時	斗牛	人人羯	午時	斗牛	人人羯	午時	尾箕	人人羯	午時	尾箕	人人羯
上十	虛危	磨磨	上十	虛危	磨磨	下四	虛危	磨磨	下四	虛危	磨磨	下四	斗牛	磨磨	下四	斗牛	磨磨
午時	奎宿	寶寶	午時	奎宿	寶寶	午時	奎宿	寶寶	午時	奎宿	寶寶	午時	虛危	寶寶	午時	虛危	寶寶
下六	婁宿	瓶瓶	下八	婁宿	瓶瓶	下八	婁宿	瓶瓶	下六	婁宿	瓶瓶	下六	奎宿	瓶瓶	下六	奎宿	瓶瓶
午時	參井	雙白	午時	參井	雙白	午時	參井	雙白	午時	參井	雙白	午時	婁宿	雙白	午時	婁宿	雙白
下十	井柳	魚羊	下十	井柳	魚羊	下十	井柳	魚羊	下八	井柳	魚羊	下八	參井	魚羊	下八	參井	魚羊
夜半	星宿	牛女	夜半	星宿	牛女	夜半	星宿	牛女	下十	星宿	牛女	下十	井柳	牛女	下十	井柳	牛女
上二	翼宿	女端	上二	翼宿	女端	上四	翼宿	女端	夜半	翼宿	女端	夜半	星宿	女端	夜半	星宿	女端
午時	角亢	端子	午時	角亢	端子	午時	角亢	端子	上二	角亢	端子	上二	翼宿	端子	上二	翼宿	端子
上四	氐房	女女	上四	氐房	女女	上六	氐房	女女	上四	氐房	女女	上四	角亢	女女	上四	角亢	女女
午時	尾箕	端處	午時	尾箕	端處	午時	尾箕	端處	午時	尾箕	端處	午時	氐房	端處	午時	氐房	端處
上六	斗牛	天東	上八	斗牛	天東	上八	斗牛	天東	上六	斗牛	天東	上六	尾箕	天東	上六	尾箕	天東
午時	虛危	蝎蝎	午時	虛危	蝎蝎	午時	虛危	蝎蝎	午時	虛危	蝎蝎	午時	斗牛	蝎蝎	午時	斗牛	蝎蝎
上十	奎宿	馬馬	上十	奎宿	馬馬	上十	奎宿	馬馬	上八	奎宿	馬馬	上八	虛危	馬馬	上八	虛危	馬馬
正午	婁宿	人人	正午	婁宿	人人	正午	婁宿	人人	上十	婁宿	人人	上十	奎宿	人人	上十	奎宿	人人
午時	參井	羯磨	午時	參井	羯磨	午時	參井	羯磨	正午	參井	羯磨	正午	婁宿	羯磨	正午	婁宿	羯磨
下二	井柳	寶寶	下二	井柳	寶寶	下二	井柳	寶寶	下二	井柳	寶寶	下二	參井	寶寶	下二	參井	寶寶
午時	星宿	瓶瓶	午時	星宿	瓶瓶	午時	星宿	瓶瓶	午時	星宿	瓶瓶	午時	井柳	瓶瓶	午時	井柳	瓶瓶
下四	翼宿	雙白	下四	翼宿	雙白	下四	翼宿	雙白	下四	翼宿	雙白	下四	星宿	雙白	下四	星宿	雙白
午時	角亢	魚羊	午時	角亢	魚羊	午時	角亢	魚羊	午時	角亢	魚羊	午時	翼宿	魚羊	午時	翼宿	魚羊
下六	氐房	牛女	下六	氐房	牛女	下六	氐房	牛女	下六	氐房	牛女	下六	角亢	牛女	下六	角亢	牛女
午時	尾箕	女端	午時	尾箕	女端	午時	尾箕	女端	午時	尾箕	女端	午時	氐房	女端	午時	氐房	女端
下八	斗牛	端子	下八	斗牛	端子	下八	斗牛	端子	下八	斗牛	端子	下八	尾箕	端子	下八	尾箕	端子
午時	虛危	女女	午時	虛危	女女	午時	虛危	女女	午時	虛危	女女	午時	斗牛	女女	午時	斗牛	女女
下十	奎宿	端處	下十	奎宿	端處	下十	奎宿	端處	下十	奎宿	端處	下十	虛危	端處	下十	虛危	端處
夜半	婁宿	天東	夜半	婁宿	天東	夜半	婁宿	天東	夜半	婁宿	天東	夜半	奎宿	天東	夜半	奎宿	天東
午時	參井	蝎蝎	午時	參井	蝎蝎	午時	參井	蝎蝎	午時	參井	蝎蝎	午時	婁宿	蝎蝎	午時	婁宿	蝎蝎
上二	井柳	馬馬	上二	井柳	馬馬	上二	井柳	馬馬	上二	井柳	馬馬	上二	參井	馬馬	上二	參井	馬馬
午時	星宿	人人	午時	星宿	人人	午時	星宿	人人	午時	星宿	人人	午時	井柳	人人	午時	井柳	人人
上四	翼宿	磨磨	上四	翼宿	磨磨	上四	翼宿	磨磨	上四	翼宿	磨磨	上四	星宿	磨磨	上四	星宿	磨磨
午時	角亢	寶寶	午時	角亢	寶寶	午時	角亢	寶寶	午時	角亢	寶寶	午時	翼宿	寶寶	午時	翼宿	寶寶
上六	氐房	瓶瓶	上六	氐房	瓶瓶	上六	氐房	瓶瓶	上六	氐房	瓶瓶	上六	角亢	瓶瓶	上六	角亢	瓶瓶
午時	尾箕	雙白	午時	尾箕	雙白	午時	尾箕	雙白	午時	尾箕	雙白	午時	氐房	雙白	午時	氐房	雙白
上八	斗牛	魚羊	上八	斗牛	魚羊	上八	斗牛	魚羊	上八	斗牛	魚羊	上八	尾箕	魚羊	上八	尾箕	魚羊
午時	虛危	牛女	午時	虛危	牛女	午時	虛危	牛女	午時	虛危	牛女	午時	斗牛	牛女	午時	斗牛	牛女
上十	奎宿	女端	上十	奎宿	女端	上十	奎宿	女端	上十	奎宿	女端	上十	虛危	女端	上十	虛危	女端
正午	婁宿	端子	正午	婁宿	端子	正午	婁宿	端子	正午	婁宿	端子	正午	奎宿	端子	正午	奎宿	端子
午時	參井	女女	午時	參井	女女	午時	參井	女女	午時	參井	女女	午時	婁宿	女女	午時	婁宿	女女
下二	井柳	端處	下二	井柳	端處	下二	井柳	端處	下二	井柳	端處	下二	參井	端處	下二	參井	端處
午時	星宿	天東	午時	星宿	天東	午時	星宿	天東	午時	星宿	天東	午時	井柳	天東	午時	井柳	天東
下四	翼宿	蝎蝎	下四	翼宿	蝎蝎	下四	翼宿	蝎蝎	下四	翼宿	蝎蝎	下四	星宿	蝎蝎	下四	星宿	蝎蝎
午時	角亢	馬馬	午時	角亢	馬馬	午時	角亢	馬馬	午時	角亢	馬馬	午時	翼宿	馬馬	午時	翼宿	馬馬
下六	氐房	人人	下六	氐房	人人	下六	氐房	人人	下六	氐房	人人	下六	角亢	人人	下六	角亢	人人
午時	尾箕	磨磨	午時	尾箕	磨磨	午時	尾箕	磨磨	午時	尾箕	磨磨	午時	氐房	磨磨	午時	氐房	磨磨
下八	斗牛	寶寶	下八	斗牛	寶寶	下八	斗牛	寶寶	下八	斗牛	寶寶	下八	尾箕	寶寶	下八	尾箕	寶寶
午時	虛危	瓶瓶	午時	虛危	瓶瓶	午時	虛危	瓶瓶	午時	虛危	瓶瓶	午時	斗牛	瓶瓶	午時	斗牛	瓶瓶
下十	奎宿	雙白	下十	奎宿	雙白	下十	奎宿	雙白	下十	奎宿	雙白	下十	虛危	雙白	下十	虛危	雙白
夜半	婁宿	魚羊	夜半	婁宿	魚羊	夜半	婁宿	魚羊	夜半	婁宿	魚羊	夜半	奎宿	魚羊	夜半	奎宿	魚羊
午時	參井	牛女	午時	參井	牛女	午時	參井	牛女	午時	參井	牛女	午時	婁宿	牛女	午時	婁宿	牛女
上二	井柳	女端	上二	井柳	女端	上四	井柳	女端	上二	井柳	女端	上四	參井	女端	上四	參井	女端
午時	星宿	端子	午時	星宿	端子	午時	星宿	端子	午時	星宿	端子	午時	井柳	端子	午時	井柳	端子
上四	翼宿	女女	上四	翼宿	女女	上六	翼宿	女女	上四	翼宿	女女	上四	星宿	女女	上四	星宿	女女
午時	角亢	端處	午時	角亢	端處	午時	角亢	端處	午時	角亢	端處	午時	翼宿	端處	午時	翼宿	端處
上六	氐房	天東	上八	氐房	天東	上八	氐房	天東	上六	氐房	天東	上六	角亢	天東	上六	角亢	天東
午時	尾箕	蝎蝎	午時	尾箕	蝎蝎	午時	尾箕	蝎蝎	午時	尾箕	蝎蝎	午時	氐房	蝎蝎	午時	氐房	蝎蝎
上八	斗牛	馬馬	上十	斗牛	馬馬	上十	斗牛	馬馬	上八	斗牛	馬馬	上八	尾箕	馬馬	上八	尾箕	馬馬
午時	虛危	人人	午時	虛危	人人	午時	虛危	人人	午時	虛危	人人	午時	斗牛	人人	午時	斗牛	人人
上十	奎宿	磨磨	正午	奎宿	磨磨	正午	奎宿	磨磨	上十	奎宿	磨磨	上十	虛危	磨磨	上十	虛危	磨磨
午時	婁宿	寶寶	午時	婁宿	寶寶	午時	婁宿	寶寶	正午	婁宿	寶寶	正午	奎宿	寶寶	正午	奎宿	寶寶
下二	參井	瓶瓶	下二	參井	瓶瓶	下二	參井	瓶瓶	下二	參井	瓶瓶	下二	婁宿	瓶瓶	下二	婁宿	瓶瓶
午時	井柳	雙白	午時	井柳	雙白	午時	井柳	雙白	午時	井柳	雙白	午時	參井	雙白	午時	參井	雙白
下四	星宿	魚羊	下四	星宿	魚羊	下四	星宿	魚羊	下四	星宿	魚羊	下四	井柳	魚羊	下四	井柳	魚羊
午時	翼宿	牛女	午時	翼宿	牛女	午時	翼宿	牛女	午時	翼宿	牛女	午時	星宿	牛女	午時	星宿	牛女
下六	角亢	女端	下六	角亢	女端	下六	角亢	女端	下六	角亢	女端	下六	翼宿	女端	下六	翼宿	女端
午時	氐房	端子	午時	氐房	端子	午時	氐房	端子	午時	氐房	端子	午時	角亢	端子	午時	角亢	端子
下八	尾箕	女女	下八	尾箕	女女	下八	尾箕	女女	下八	尾箕	女女	下八	氐房	女女	下八	氐房	女女
午時	斗牛	端處	午時	斗牛	端處	午時	斗牛	端處	午時	斗牛	端處	午時	尾箕	端處	午時	尾箕	端處
下十	虛危	天東	夜半	虛危	天東	夜半	虛危	天東	下十	虛危	天東	下十	斗牛	天東	下十	斗牛	天東
夜半	奎宿	蝎蝎	午時	奎宿	蝎蝎	午時	奎宿	蝎蝎	夜半	奎宿	蝎蝎	夜半	虛危	蝎蝎	夜半	虛危	蝎蝎
午時	婁宿	馬馬	上二	婁宿	馬馬	午時	婁宿	馬馬	午時	婁宿	馬馬	午時	奎宿	馬馬	午時	奎宿	馬馬
上二	參井	人人	午時	參井	人人	上四	參井	人人	上二	參井	人人	上二	婁宿	人人	上二	婁宿	人人
午時	井柳	磨磨	午時	井柳	磨磨	午時	井柳	磨磨	午時	井柳	磨磨	午時	參井	磨磨	午時	參井	磨磨
上四	星宿	寶寶	上四	星宿	寶寶	上六	星宿	寶寶	上四	星宿	寶寶	上四	井柳	寶寶	上四	井柳	寶寶
午時	翼宿	瓶瓶	午時	翼宿	瓶瓶	午時	翼宿	瓶瓶	午時	翼宿	瓶瓶	午時	星宿	瓶瓶	午時	星宿	瓶瓶
上六	角亢	雙白	上八	角亢	雙白	上八	角亢	雙白	上六	角亢	雙白	上六	翼宿	雙白	上六	翼宿	雙白
午時	氐房	魚羊	午時	氐房	魚羊	午時	氐房	魚羊	午時	氐房	魚羊	午時	角亢	魚羊	午時	角亢	魚羊
上八	尾箕	牛女	上十	尾箕	牛女	上十	尾箕	牛女	上八	尾箕	牛女	上八	氐房	牛女	上八	氐房	牛女
午時	斗牛	女端	午時	斗牛	女端	午時	斗牛	女端	午時	斗牛	女端	午時	尾箕	女端	午時	尾箕	女端
上十	虛危	端子	正午	虛危	端子	正午	虛危	端子	上十	虛危	端子	上十	斗牛	端子	上十	斗牛	端子
正午	奎宿	女女	午時	奎宿	女女	午時	奎宿	女女	正午	奎宿	女女	正午	虛危	女女	正午	虛危	女女
午時	婁宿	端處	下二	婁宿	端處	下二	婁宿	端處	午時	婁宿	端處	午時	奎宿	端處	午時	奎宿	端處
下二	參井	天東	午時	參井	天東	下四	參井	天東	下二	參井	天東	下二	婁宿	天東	下二	婁宿	天東
午時	井柳	蝎蝎	午時	井柳	蝎蝎	午時	井柳	蝎蝎	午時	井柳	蝎蝎	午時	參井	蝎蝎	午時	參井	蝎蝎
下四	星宿	馬馬	下四	星宿	馬馬	下六	星宿	馬馬	下四	星宿	馬馬	下四	井柳	馬馬	下四	井柳	馬馬
午時	翼宿	人人	午時	翼宿	人人	午時	翼宿	人人	午時	翼宿	人人	午時	星宿	人人	午時	星宿	人人
下六	角亢	磨磨	下六	角亢	磨磨	下八	角亢	磨磨	下六	角亢	磨磨	下六	翼宿	磨磨	下六	翼宿	磨磨
午時	氐房	寶寶	午時	氐房	寶寶	午時	氐房	寶寶	午時	氐房	寶寶	午時	角亢	寶寶	午時	角亢	寶寶
下八	尾箕	瓶瓶	下八	尾箕	瓶瓶	下八	尾箕	瓶瓶	下八	尾箕	瓶瓶	下八	氐房	瓶瓶	下八	氐房	瓶瓶
午時	斗牛	雙白	午時	斗牛	雙白	午時	斗牛	雙白	午時	斗牛	雙白	午時	尾箕	雙白	午時	尾箕	雙白
下十	虛危	魚羊	夜半	虛危	魚羊	夜半	虛危	魚羊	下十	虛危	魚羊	下十	斗牛	魚羊	下十	斗牛	魚羊
夜半	奎宿	牛女	午時	奎宿	牛女	午時	奎宿	牛女	夜半	奎宿	牛女	夜半	虛危	牛女	夜半	虛危	牛女
午時	婁宿	女端	上二	婁宿	女端	午時	婁宿	女端	午時	婁宿	女端	午時	奎宿	女端	午時	奎宿	女端
上二	參井	端子	午時	參井	端子	上四	參井	端子	上二	參井	端子	上二	婁宿	端子	上二	婁宿	端子
午時	井柳	女女	午時	井柳	女女	午時	井柳	女女	午時	井柳	女女	午時	參井	女女	午時	參井	女女
上四	星宿	端處	上四	星宿	端處	上六	星宿	端處	上四	星宿	端處	上四	井柳	端處	上四	井柳	端處
午時	翼宿	天東	午時	翼宿	天東	午時	翼宿	天東	午時	翼宿	天東	午時	星宿	天東	午時	星宿	天東
上六	角亢	蝎蝎	上八	角亢	蝎蝎	上八	角亢	蝎蝎	上六	角亢	蝎蝎	上六	翼宿	蝎蝎	上六	翼宿	蝎蝎
午時	氐房	馬馬	午時	氐房	馬馬	午時	氐房	馬馬	午時	氐房	馬馬	午時	角亢	馬馬	午時	角亢	馬馬
上八	尾箕	人人	上十	尾箕	人人	上十	尾箕	人人	上八	尾箕	人人	上八	氐房	人人	上八	氐房	人人
午時	斗牛	磨磨	午時	斗牛	磨磨	午時	斗牛	磨磨	午時	斗牛	磨磨	午時	尾箕	磨磨	午時	尾箕	磨磨
上十	虛危	寶寶	正午	虛危	寶寶	正午	虛危	寶寶	上十	虛危	寶寶	上十	斗牛	寶寶	上十	斗牛	寶寶
午時	奎宿	瓶瓶	午時	奎宿	瓶瓶	午時	奎宿	瓶瓶	正午	奎宿	瓶瓶	正午	虛危	瓶瓶	正午	虛危	瓶瓶
下二	婁宿	雙白	下二	婁宿	雙白	下二	婁宿	雙白	下二	婁宿	雙白	下二	奎宿	雙白	下二	奎宿	雙白
午時	參井	魚羊	午時	參井	魚羊	午時	參井	魚羊	午時	參井	魚羊	午時	婁宿	魚羊	午時	婁宿	魚羊
下四	井柳	牛女	下四	井柳	牛女	下四	井柳	牛女	下四	井柳	牛女	下四	參井	牛女	下四	參井	牛女
午時	星宿	女端	午時	星宿	女端	午時	星宿	女端	午時	星宿	女端	午時	井柳	女端	午時	井柳	女端
下六	翼宿	端子	下六	翼宿	端子	下六	翼宿	端子	下六	翼宿	端子	下六	星宿	端子	下六	星宿	端子
午時	角亢	女女	午時	角亢	女女	午時	角亢	女女	午時	角亢	女女	午時	翼宿	女女	午時	翼宿	女女
下八	氐房	端處	下八	氐房	端處	下八	氐房	端處	下八	氐房	端處	下八	角亢	端處	下八	角亢	端處
午時	尾箕	天東	午時	尾箕	天東	午時	尾箕	天東	午時	尾箕	天東	午時	氐房	天東	午時	氐房	天東
下十	斗牛	蝎蝎	夜半	斗牛	蝎蝎	夜半	斗牛	蝎蝎	下十	斗牛	蝎蝎	下十	尾箕	蝎蝎	下十	尾箕	蝎蝎
夜半	虛危	馬馬	午時	虛危	馬馬	午時	虛危	馬馬	夜半	虛危	馬馬	夜半	斗牛	馬馬	夜半	斗牛	馬馬
午時	奎宿	人人	上二	奎宿	人人	午時	奎宿	人人	午時	奎宿	人人	午時	虛危	人人	午時	虛危	人人
上二	婁宿	磨磨	午時	婁宿	磨磨	上四	婁宿	磨磨	上二	婁宿	磨磨	上二	奎宿	磨磨	上二	奎宿	磨磨
午時	參井	寶寶	午時	參井	寶寶	午時	參井	寶寶	午時	參井	寶寶	午時	婁宿	寶寶	午時	婁宿	寶寶
上四	井柳	瓶瓶	上四	井柳	瓶瓶	上六	井柳	瓶瓶	上四	井柳	瓶瓶	上四	參井	瓶瓶	上四	參井	瓶瓶
午時	星宿	雙白	午時	星宿	雙白	午時	星宿	雙白	午時	星宿	雙白	午時	井柳	雙白	午時	井柳	雙白
上六	翼宿	魚羊	上八	翼宿	魚羊	上八	翼宿	魚羊	上六	翼宿	魚羊	上六	星宿	魚羊	上六	星宿	魚羊
午時	角亢	牛女	午時	角亢	牛女	午時	角亢	牛女	午時	角亢	牛女	午時	翼宿	牛女	午時	翼宿	牛女
上八	氐房	女端	上十	氐房	女端	上十	氐房	女端	上八	氐房	女端	上八	角亢	女端	上八	角亢	女端
午時	尾箕	端子	午時	尾箕	端子	午時	尾箕	端子	午時	尾箕	端子	午時	氐房	端子	午時	氐房	端子
上十	斗牛	女女	正午	斗牛	女女	正午	斗牛	女女	上十	斗牛	女女	上十	尾箕	女女	上十	尾箕	女女
正午	虛危	端處	午時	虛危	端處	午時	虛危	端處	正午	虛危	端處	正午	斗牛	端處	正午	斗牛	端處
午時	奎宿	天東	下二	奎宿	天東	下二	奎宿	天東	午時	奎宿	天東	午時	虛危	天東	午時	虛危	天東
下二	婁宿	蝎蝎	午時	婁宿	蝎蝎	午時	婁宿	蝎蝎	下二	婁宿	蝎蝎	下二	奎宿	蝎蝎	下二	奎宿	蝎蝎
午時	參井	馬馬	午時	參井	馬馬	午時	參井	馬馬	午時	參井	馬馬	午時	婁宿	馬馬	午時	婁宿	馬馬
下四	井柳	人人	下四	井柳	人人	下四	井柳	人人	下四	井柳	人人	下四	參井	人人	下四	參井	人人
午時	星宿	磨磨	午時	星宿	磨磨	午時	星宿	磨磨	午時	星宿	磨磨	午時	井柳	磨磨	午時	井柳	磨磨
下六	翼宿	寶寶	下六	翼宿	寶寶	下六	翼宿	寶寶	下六	翼宿	寶寶	下六	星宿	寶寶	下六	星宿	寶寶
午時	角亢	瓶瓶	午時	角亢	瓶瓶	午時	角亢	瓶瓶	午時	角亢	瓶瓶	午時	翼宿	瓶瓶	午時	翼宿	瓶瓶
下八	氐房	雙白	下八	氐房	雙白	下八	氐房	雙白	下八	氐房	雙白	下八	角亢	雙白	下八	角亢	雙白
午時	尾箕	魚羊	午時	尾箕	魚羊	午時	尾箕	魚羊	午時	尾箕	魚羊	午時	氐房	魚羊	午時	氐房	魚羊
下十	斗牛	牛女	夜半	斗牛	牛女	夜半	斗牛	牛女	下十	斗牛	牛女	下十	尾箕	牛女	下十	尾箕	牛女
夜半	虛危	女端	午時	虛危	女端	午時	虛危	女端	夜半	虛危	女端	夜半	斗牛	女端	夜半	斗牛	女端
午時	奎宿	端子	上二	奎宿	端子	午時	奎宿	端子	午時	奎宿	端子	午時	虛危	端子	午時	虛危	端子
上二	婁宿	女女	午時	婁宿	女女	上四	婁宿	女女	上二	婁宿	女女	上二	奎宿	女女	上二	奎宿	女女
午時	參井	端處	午時	參井	端處	午時	參井	端處	午時	參井	端處	午時	婁宿	端處	午時	婁宿	端處
上四	井柳	天東	上四	井柳	天東	上六	井柳	天東	上四	井柳	天東	上四	參井	天東	上四	參井	天東
午時	星宿	蝎蝎	午時	星宿	蝎蝎	午時	星宿	蝎蝎	午時	星宿	蝎蝎	午時	井柳	蝎蝎	午時	井柳	蝎蝎
上六	翼宿	馬馬	上八	翼宿	馬馬	上八	翼宿	馬馬	上六	翼宿	馬馬	上六	星宿	馬馬	上六	星宿	馬馬
午時	角亢	人人	午時	角亢	人人	午時	角亢	人人	午時	角亢	人人	午時	翼宿	人人	午時	翼宿	人人
上八	氐房	磨磨	上十	氐房	磨磨	上十	氐房	磨磨	上八	氐房

時天中星土 c. 表

年	一月			二月			三月			四月			五月			六月		
	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座
1932	正午	斗牛	馬羯人磨	上午十時	斗牛	馬羯人磨	上午八時	斗牛	馬羯人磨	上午六時	斗牛	馬羯人磨	上午四時	斗牛	馬羯人磨	上午二時	斗牛	馬羯人磨
1933	正午	斗牛	馬羯人磨	正午	虛危	寶瓶	上午十時	虛危	寶瓶	上午八時	虛危	寶瓶	上午六時	虛危	寶瓶	上午四時	虛危	寶瓶
1934	午時	虛危	寶瓶	正午	虛危	寶瓶	上午十時	虛危	寶瓶	上午八時	虛危	寶瓶	上午六時	虛危	寶瓶	上午四時	虛危	寶瓶
1935	下二時	虛危	寶瓶	正午	虛危	寶瓶	上午十時	虛危	寶瓶	上午八時	奎宿	寶瓶	上午六時	奎宿	寶瓶	上午四時	奎宿	寶瓶
1939	下二時	奎宿	寶瓶	正午	奎宿	寶瓶	正午	奎宿	寶瓶	上午十時	奎宿	雙魚	上午八時	奎宿	雙魚	上午六時	奎宿	雙魚
1937	下四時	奎宿	雙魚	下二時	奎宿	雙魚	正午	奎宿	雙魚	上午十時	奎宿	雙魚	上午八時	奎宿	雙魚	上午六時	奎宿	雙魚
1938	下四時	奎宿	雙魚	下二時	奎宿	雙魚	正午	奎宿	雙魚	上午十時	婁宿	白羊	上午八時	婁宿	白羊	上午六時	婁宿	白羊
1939	下六時	婁宿	白羊	下四時	婁宿	白羊	下二時	婁宿	白羊	正午	婁宿	白羊	上午十時	婁宿	白羊	上午八時	婁宿	白羊
1940	下六時	婁宿	白羊	下四時	婁宿	白羊	下二時	婁宿	白羊	正午	鶉宿	白羊	上午十時	鶉宿	白羊	上午八時	鶉宿	白羊
1941	下八時	鶉宿	白羊	下六時	鶉宿	白羊	下四時	鶉宿	白羊	下二時	鶉宿	白羊	正午	鶉宿	白羊	上午十時	鶉宿	白羊
1942	下八時	鶉宿	白羊	下六時	鶉宿	白羊	下四時	鶉宿	白羊	下二時	鶉宿	白羊	正午	鶉宿	白羊	上午十時	鶉宿	白羊
1943	下八時	鶉宿	白羊	下六時	鶉宿	白羊	下四時	鶉宿	白羊	下二時	參井	白羊	正午	參井	白羊	正午	參井	白羊
1944	下十時	參井	白羊	下八時	參井	白羊	下六時	參井	白羊	下二時	參井	白羊	下二時	參井	白羊	正午	參井	白羊
1945	下十時	參井	白羊	下八時	參井	白羊	下六時	參井	白羊	下四時	井柳	雙魚	下二時	井柳	雙魚	下午時	井柳	雙魚
1946	夜半	井柳	雙魚	下十時	井柳	雙魚	下八時	井柳	雙魚	下六時	井柳	雙魚	下四時	井柳	雙魚	下二時	井柳	雙魚
1947	夜半	井柳	雙魚	夜半	井柳	雙魚	下十時	井柳	雙魚	下八時	星宿	獅西	下六時	星宿	獅西	下四時	星宿	獅西
1948	午時	星宿	獅西	夜半	星宿	獅西	下十時	星宿	獅西	下女時	星宿	獅西	下六時	星宿	獅西	下四時	星宿	獅西
1949	上二時	星宿	獅西	午時	星宿	獅西	夜半	星宿	獅西	下女時	翼宿	獅西	下八時	翼宿	獅西	下六時	翼宿	獅西
1950	上四時	翼宿	獅處	上二時	翼宿	獅處	午時	翼宿	獅處	上二時	翼宿	獅處	下十時	翼宿	獅處	下八時	翼宿	獅處

位方概大及數概刻

十二月			十一月			十月			九月			八月			七月		
時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座	時	宿	座
午時	斗牛	馬羯人磨	午時	斗牛	馬羯人磨	午時	斗牛	馬羯人磨	午時	斗牛	馬羯人磨	午時	斗牛	馬羯人磨	夜半	斗牛	馬羯人磨
下二	虛危	寶瓶	下四	虛危	寶瓶	下六	虛危	寶瓶	下八	虛危	寶瓶	下十	虛危	寶瓶	上午時	虛危	寶瓶
午時	虛危	寶瓶	午時	虛危	寶瓶	午時	虛危	寶瓶	午時	虛危	寶瓶	午時	虛危	寶瓶	午時	虛危	寶瓶
下四	奎宿	雙魚	下六	奎宿	雙魚	下八	奎宿	雙魚	午時	奎宿	雙魚	午時	奎宿	雙魚	午時	奎宿	雙魚
午時	奎宿	雙魚	午時	奎宿	雙魚	午時	奎宿	雙魚	夜半	奎宿	雙魚	夜半	奎宿	雙魚	午時	奎宿	雙魚
下六	婁宿	白羊	下八	婁宿	白羊	下十	婁宿	白羊	午時	婁宿	白羊	午時	婁宿	白羊	午時	婁宿	白羊
午時	婁宿	白羊	午時	婁宿	白羊	午時	婁宿	白羊	午時	婁宿	白羊	午時	婁宿	白羊	午時	婁宿	白羊
下八	鶉宿	羊牛白金	下十	鶉宿	羊牛白金	夜半	鶉宿	羊牛白金	下午時	鶉宿	羊牛白金	下午時	鶉宿	羊牛白金	午時	鶉宿	羊牛白金
午時	鶉宿	羊牛白金	夜半	鶉宿	羊牛白金	午時	鶉宿	羊牛白金	午時	鶉宿	羊牛白金	午時	鶉宿	羊牛白金	午時	鶉宿	羊牛白金
午時	參井	羊牛女白金雙	夜半	參井	羊牛女白金雙	午時	參井	羊牛女白金雙	午時	參井	羊牛女白金雙	午時	參井	羊牛女白金雙	午時	參井	羊牛女白金雙
午時	井柳	女端子東雙	午時	井柳	女端子東雙	午時	井柳	女端子東雙	午時	井柳	女端子東雙	午時	井柳	女端子東雙	午時	井柳	女端子東雙
午時	井柳	女端子東雙	午時	井柳	女端子東雙	午時	井柳	女端子東雙	午時	井柳	女端子東雙	午時	井柳	女端子東雙	午時	井柳	女端子東雙
正午	星宿	女端子獅西	正午	星宿	女端子獅西	午時	星宿	女端子獅西	午時	星宿	女端子獅西	午時	星宿	女端子獅西	午時	星宿	女端子獅西
正午	星宿	女端子獅西	正午	星宿	女端子獅西	午時	星宿	女端子獅西	午時	星宿	女端子獅西	午時	星宿	女端子獅西	午時	星宿	女端子獅西
午時	翼宿	子女獅西	午時	翼宿	子女獅西	午時	翼宿	子女獅西	午時	翼宿	子女獅西	午時	翼宿	子女獅西	午時	翼宿	子女獅西
午時	翼宿	子女獅處	午時	翼宿	子女獅處	午時	翼宿	子女獅處	午時	翼宿	子女獅處	午時	翼宿	子女獅處	午時	翼宿	子女獅處

表 d. 行星隱現時期表

年份	水星 昏見 月	日		月	日	水星 晨見 月	日		月	日	金星（離日最遠） 昏見	晨見	火星 衝日	木星 衝日	土星 衝日	土星 背向光圈
1915	2	2	至	2	9	11	3	至	11	10		2月		9月	12月	第269圖之12
1916	5	9		5	16	10	18		10	25	4月	9	2月	10		1
1917	4	21		4	28	10	1		10	8	11			11	1	1
1918	4	3		4	10	9	14		9	21		4	3		1	1
1919	3	17		3	24	8	29		9	5	7	11		1	2	2
1920	3	1		3	8	8	12		8	19			4	2	2	2
1921	2	12		2	19	11	13		11	20	2	7		3	3	3
1922	1	25		2	1	10	28		11	4	9		6	4	3	3
1923	5	1		5	8	10	11		10	18		2		5	4	4
1924	4	14		4	21	9	24		10	1	4	9	8	6	4	4
1925	3	28		4	4	9	8		9	15	11			7	4	4
1926	3	13		3	18	8	22		8	29		4	10	8	5	5
1927	2	22		3	1	8	4		8	11	7	11		9	5	5
1928	2	5		2	12	11	6		11	13			12	10	6	6
1929	5	12		5	19	10	21		10	28	2	6		12	6	6
1930	4	24		5	1	10	4		10	11	9				6	6
1931	4	6		4	13	9	17		9	24		2	1	1	7	7
1932	3	20		3	27	9	1		9	8	4	9		2	7	7
1933	3	4		2	11	8	15		8	22	11		3	3	8	8
1934	2	15		2	22	7	29		8	5		4		4	8	8
1935	1	28		2	4	10	31		11	7	7	11	4	5	8	8
1936	5	4		5	11	10	14		10	21				6	9	9
1937	4	17		4	24	9	27		10	4	2	6	5	7	9	9
1938	3	31		4	7	9	11		9	18	9			8	10	10
1939	3	14		3	21	8	25		9	1		2	7	9	10	10
1940	2	25		3	3	8	7		8	14	4	9		11	11	11
1941	2	8		3	15	9	9		9	16	11		9	12	11	11
1942	1	22		1	29	10	24		10	31		4			11	11
1943	4	27		5	4	10	7		10	14	6	11	12	1	12	12
1944	4	9		4	16	9	20		9	27				2	12	12
1945	3	23		3	30	9	4		9	11	2	6		3		1
1946	3	7		3	14	8	18		8	25	9		1	4	1	1
1947	2	18		2	25	8	1		8	8		1		5	1	1
1948	2	1		2	8	11	3		11	10	4	9	2	6	2	2
1949	5	7		5	14	10	17		10	24	11			7	2	2
1950	4	20		4	27	9	30		10	7		4	3	8	3	3

第二十二章

彗　星

§447. 彗星形狀　古人以彗星之行,速率甚大而無法,恆隱而忽見,光或甚巨,異於常星.故恆目爲災異,人皆畏之,雖智者不免焉.今始知其行與繞日諸星同理,未嘗無法.然其狀及功用亦未能深悉.其外觀頗類圓形,雲霧中央似有一恆星映照之,且往往牽長而成帚形,故俗曰掃帚星也.

彗之見於史者,多至數百次.意古時未有遠鏡,所見者,彗之大者耳.近代遠鏡日精,大率每年必見一、二彗,甚或二彗三彗並見於一時.故知彗之數必多至數千.遠鏡未發明時,已知有四百,至二十世紀之初合前知者,共八百餘.其中有依一定周期去而復來者.惟凡此所知,乃彗之能趨近地球便於觀察者.此外當尚有不知若干也.有彗晝在地平上則不能見,惟日食既方見之.耶紀前 162 年日食,見大彗在日旁,事載賽乃加所著書.又有數彗光最大,正午亦能見,載於史者 1402 年 1532 年 1843 年諸彗皆是也.

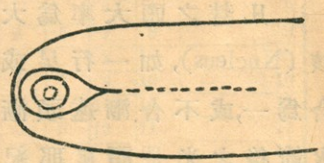
凡彗之頭大率爲大光體,其狀不一定.中心一點,最明謂之核 (Nucleus),如一行星或如一恆星.背日之面發長光二道.近頭合爲一,或不合.漸遠頭漸闊漸散.其本末略似流星後之光,或似火箭後之光.是謂尾.耶紀前 371 年之彗尾長 60 度,而 1618 年之彗尾長 104 度,1680 年之彗其頭亮如一、二等星,尾長亘天空 70 餘度或云 90 度,1769 年之彗星尾長 97 度,1843 年之彗尾長 65 度.

彗非恆有尾.有光甚明而尾短不顯者.有體甚大而絕無尾者.1585 年 1763 年二次所見彗尾不顯,而卡西尼所述 1665 年及

1682年二次之彗爲正圓形,甚清晰若木星然.彗有數尾者,1744年之彗有六尾如摺扇狀長30度.1823年見一小彗二尾,其交角約160度,一尾背日光更明,一尾幾向日稍淡.凡彗之尾恆微曲向後,若有力撓之.

凡小彗非遠鏡不能見者甚多,或無尾望之,若正圓或橢圓之星氣,漸近中心漸厚,疑無實體.女士密哲勒於1847年,用一百倍力之遠鏡測一彗正過五等恆星,不能言其質何邊爲厚.如此恆星苟地面霧氣高10餘尺,卽能掩之,而隔彗望之甚明晰,此彗非實體之證.彗雖大不見有朔弦望之象,然借日光而明無可疑者.蓋彗乃薄氣積成,能透日光,故內外通明也.竊意彗體甚小,而包體之氣甚大,體與氣俱受日光而明,則上三事,俱非難解矣.譬如日落時,天半之霞通體光明,以彗之薄比之,此霞獨是實體也.故以目視彗疑爲實體.用遠鏡察之,知非實體.或中心有一點更明者,意是實體耳.此實體甚小,其攝力不能收束所包之氣,故氣漲甚大甚薄也.假如地球之質量變小,僅賸千分之一,則攝外氣之力亦變小,僅得千分之一,其氣必漲大多一千倍,或不止一千倍.蓋氣距中心愈遠攝力愈小故也.然氣雖大必仍包其中體,此理僅能解彗氣之薄,至其尾當別有理也.

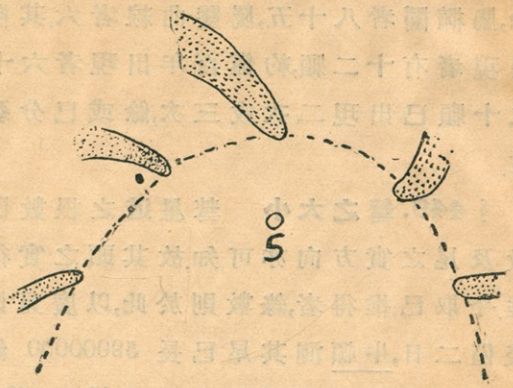
彗之頭其外體,或似煙,或似霧,或似雲,可以上條理解之.尾之本包頭而與頭不相連,望之若雲二層,中有空處其狀如水漚.其曲勢合拋物線.頭在內近漚之頂如第二七五圖.此可明尾分爲二之故.人於地斜望其漚,故愈近邊光愈深.



第二七五圖

§448. 彗星行動及軌道 彗之行一若無法.有數日內連次見者,有歷數月見者.有行甚緩,有行甚速,亦有於本道之二處一

甚緩,一甚速者.1472年之彗,其最速時一日中過40度.有順,有逆,有曲折,又諸彗之道徧天空皆有之,不似諸行星道俱近黃道一帶也.有初見光甚淡而小,行甚緩,尾甚微.既而漸速,光漸明大,尾出漸大甚長,且甚明,至近日而隱,復見出於對邊.大率過卑點後光最大,尾亦最長.故疑彗之尾生於日光也.又過卑點後,其行先速後遲.久之尾漸短,光亦漸淡而小,以至不見.



第二七六圖

若不知攝力之理,則彗之行無法能解之.牛頓已考明繞日諸體,皆依圜錐諸曲線而行,因悟彗星道亦必依此理.1680年之彗尾長,且近日用以驗其理最便,因測之果合.其道爲橢圜而極長,與拋物線幾無別,日居其一心.彗之行道所過面積與時有比例,與行星無異,此後人皆信之,無復疑者.

凡有彗星見,大率三次測其赤道經緯度,以推其橢圜道或拋物道之大小及方向,即可定其諸根數.曰最卑點之經度,曰正交點之經度,曰與黃道交角度,曰半長徑,曰兩心差,曰過最卑之時.及繞日順逆行,大略皆與行星同.諸根既定,即可依法推其全道而更測驗,以考其合否,考驗之法,此爲最嚴.

拋物線爲圓錐上橢圜與雙曲線二線分界處之一線,即長徑大至無窮之橢圜.彗所行橢圜道大率極長.故見時其所行道依拋物線推之,不覺其不合.然彗有再見者.若其道爲拋物線,則已過最卑後不能復回,而或入於恆星中,或滅於天空,安能再見

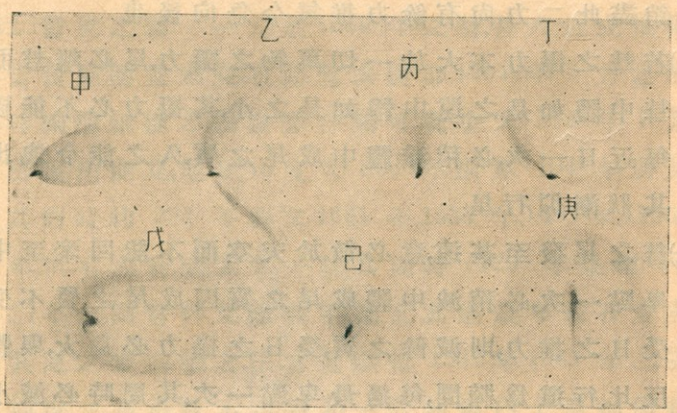
耶.今測得彗星行橢圓道者居多.此等彗若不因行星攝動令道大變,必永爲太陽之屬星.然多疑大多數之彗行於拋物線或雙曲線道者.而謂現世知之較深之四百彗星中屬拋物線者三百餘,屬橢圓者八十五,屬雙曲線者六.其橢圓道彗星約千年左右出現者有十二顆,約僅百年出現者六十顆.而此六十顆之中,有二十顆已出現二次或三次,餘或已分裂,或被攝動而改變其軌道.

§449. 彗之大小 彗星道之根數已知,則無論何時,距地球數及尾之實方向亦可知.故其頭之實徑,尾之實長實廣,俱不難推.今取已推得者,錄數則於此,以廣見聞.1680年之彗過最卑點後僅二日,牛頓測其尾已長 59000000 餘英里,推其最長時,必至 124000000 英里.1769年之彗其尾長 48000000 英里.1811年之彗其尾長107000000 英里,其頭在透光氣中,了了可見與尾不連,實徑 550000 英里.其質漲大至此,以意度之,必不能復斂,其中心質積微攝力甚小故也.凡彗數次復見,其尾漸小,或亦因此也.

§450. 彗之再現 1682 年有彗見,尾長30度.海利測其過最卑得諸根數與1531 年1607 年二次之彗根數略同.意必一彗也.其再見約計75或76年.因言1759 年必再見.及期將至,天學家俱欲驗其言,或恐因大行星(木星)攝動必生差.格來老依牛頓攝力之理推得因土星攝動當退後100日,因木星攝動當退後518日,幷之得 618 日.乃依根數預推其時內減此日數,謂見時當在1759 年清明前後一月之中.既而三月十二日彗星果見,在清明前二十四日.其後精曆算者,復欲推其再見過最卑之時,大慕鎖推得 1835年11月 4 日,邦的古浪推得11月 7 日,陸孫白推得11月11日,立曼推得11月26日.而陸孫白立曼二家細考 1682 年1759年測簿,又細推諸行星之攝動,故人更信之.7 月25日立曼

以所推刊板傳送.8月5日羅馬天氣清朗最先見之,若淡星氣然,與陸孫白所推是日當在之處不差一度.20日人共見之.所過之道略與所推合.11月16日過最卑後,其行向南,北半球不能見.1836年2月至4月俱見於南半球.至5月5日而隱.此彗因海利所測定,卽名海利彗.此星再見於1910年,於4月19及20兩日過卑點.5月18經過日地之間與地相近,尾之一部掠過地面,頭掠日面,並無何等影響.預計此彗將於1985年再現.

海利彗1835年見時,遠鏡較1759年力更大而統地球皆測之,故攷察最詳.初見時距日甚遠,僅若小圜星氣.微橢無尾.有一點較明不在中心.10月2日尾初發,逐日漸大.至5日長4.5度.15日至20度爲最長,既而漸小.至10月29日僅長3度.11月5日2.5度.意未至最卑點其尾已隱,過最卑點日,俄羅斯之卜爾寇瓦有人測之不言有尾也.當10月2日尾初發時,其中體忽明,向日之面發光一道,未幾卽隱.既而復發,至八日其勢更猛.既而時隱時發,以至不見.其光之狀及方向變化不定,連二夜無時或同.有時爲一道距中體不遠.有時爲扇形,有時或二道或三道或多道發



第二七七圖

於各方向.如第二七七圖甲爲10月8日,乙爲9日,丙爲10日,丁爲12日,四夜內中體發光之狀也,向上卽向日之面.頭因太大不能作戊亦9日夜之狀.彗中體與頭作之,乃縮本也.此時見光道擺動於向日線之左右,一若指南針擺動於午線之左右.其光之本甚明,距中體稍遠卽暗,散入空中而不見,其形曲向後,若煙或水氣出小孔遇風不能當之狀.天學家據此立彗星例若干條如下:

(一)凡彗之中體受日之熱必發氣.其氣於彗體包力小處洩出,條條直射.意此氣洩時,必有令彗倒退力,而彗行之方向,必因之微變.

(二)中體發氣必在向日之面,故洩出之方向恆對日.

(三)氣洩出,日有力推之,令退至中體之後,行甚遠而成尾之質.

(四)彗之質有不變氣者,有變氣而包中體以成頭及鬚者.

(五)日推氣成尾之力與攝力異而較攝力更大.何則此氣洩時,有中體漲力,又有彗之本行力,而退後甚速,故知推力甚大.蓋推力能銷盡此二力,尙有餘力推氣令急向後也.

(六)若彗之攝力不大於一切萬物之攝力,尾必離彗而去.竊意尾離彗中體如是之遠,中體如是之小,其攝力必不能攝定之.然則彗每近日一次,必稍減體中成尾之質,久之能令洩出之氣漸少,而其狀漸似行星.

(七)彗之尾發至甚遠,意必散於天空而不能回聚至中體.故每過最卑點一次,必稍減中體成尾之質.因成尾之質不受日之攝力,而受日之推力,則減餘之質,受日之攝力必益大,與體質之多少爲反比.行道爲橢圓,每過最卑點一次,其周時必減小於前一次之周時,至受日推力之質盡去而止

海利彗過最卑後二月不見,至1836年1月25日夜始復見其狀大異於前,尾已無,以目望之,大如四五等星而薄若星氣.用大力遠鏡窺之,爲小光面,徑2分强,外有氣包之,鬚甚多.其面內近心處有中體略明,背日發一短光線,如第二七七圖中之己.彗離日稍遠,鬚速滅若面食之,而其面驟變大.26日及2月2日依彗距地,以量微器測而推之,其光面變大之比若1與40比.從此漸大漸薄以至不見.其不見由於無光可測非關遠也.變大時其面背日之半,略變長,其全形作拋物線狀,如第二七七圖中之庚.向日之半恆有明晰之界,而底變淡難辨.意此時若光未滅,亦能見其發尾.但其面漸大漸暗,故惟見其後有若尾之根者,目與小力遠鏡俱能察之.而彗已極遠,數夜遂不見.拋物線狀之包漸大漸暗時,其中體無大變,但所發之光線漸變長而明,其方向合拋物體之軸,亦不似前向日發光時變化無定也.侯失勒謂若前日之向日發光爲養尾之用,則今日之背日發光必爲收尾之用.久之此光亦漸變暗,又末一夜所見之狀,如始一夜所見之狀,一若小圜星氣,近中心有光點也.

§451. 昔見之彗　一爲於1556年之彗,甚大.近或推得約於1860年當復見,而竟未見也.此彗或疑卽1264年8月之彗.欣特曾取當時測簿細推之,根數悉合無可疑也.又975年7月之彗,其光日出後尙能見,尾長40度.又396年所見104年所見恐皆卽此彗.其周時約292年弱.又1661年、1532年、1402年、1145年、891年、243年,俱有大彗,或云是一彗,其周時129年果爾1789年1790年二年之間當再見而竟不見.意其過最卑或在夏至後一月,則以其道之方向推之,法當恆隱也.1532年1661年二次測簿墨商曾細推之,謂根數不同,恐非一彗.阿爾白士覆推所得1532年根數與墨商大異.而1661年根數與墨商合,故此彗尙未能定.

§452. 周時小之彗 彗之周時有甚小者.一曰因格彗.初推得其根而預定其再見時者,爲柏林之因格,卽以人之名名之也.亦行橢圓道.兩心差甚大.其道與黃道交角約13度22分.其周時爲1211日.於1819年用四次測簿參考得之.因格推得其橢圓道謂1822年當復見,至期果見.龍格於新南維爾斯巴拉馬大測之,時歐羅巴洲不見.此後天下星臺皆預推而測之.以因格彗逐次過最卑之時細考之,除諸行星之攝動外,尙有差覺其周漸小,每周減100分日之11（約二時半）.如此距日之中數及長徑亦必略變小.因格言此必天空中有薄氣阻其行令速率變小.故離心力亦變小,而日之攝力拉之令近也.由半長徑式$a=\frac{r}{2}\left(\frac{U^2}{U^2-V^2}\right)$可見其速度變小,其軌道之長徑亦隨之變小.彗旣改行於近日較小之道,必增其速度.其增數大於因阻力而生之減數,故結果彗之速度增,而周期短也.此說若確,則彗之體若非自消盡,久之必與日相併.惟因其體質之輕,故無所不可,依前彗星條例,如能有別理解說之,彗體可不必滅也.又測因格彗之體積,漸近日漸小,漸遠日漸大,與海利彗同.乏勒思（Valz）謂遍天空有薄氣(卽以太)漸近日漸厚,故擠彗之體令變小也.果爾則將謂慧體之外如一皮,令內氣與天空氣不通耶.恐未必然.侯失勒謂因距日遠近冷熱不同,令彗之體或變爲雲,或變爲不能見之薄氣,故覺有大小耳.此彗無尾,有小中體不在中心,恆偏於向日之一邊,其形狀未能測定.

一曰比乙拉彗,乃1826年比乙拉在奧大利所測得者,意卽1772年及1805年之彗也.所行道甚橢.其周時爲2410日,約6.6年.其道面與黃道面交角爲12度34分.1832年、1846年、1852年,俱爲再見之期.其道最近地道,有時近至數千英里以內.幾與相交.1832年彗行至交點後約1月地始至該點.是二體永不能行至

相距一千五百萬英里以內也.設地行速一月必遇彗於交點,恐亦一大危事也.比乙拉彗甚小,最明時尙不能以目見.而1845年乃獨顯一大異事,忽分爲二彗,並行70度,遠鏡能合觀之.12月19日初覺有異,望之如一梨.至1846年1月13日美國華盛頓初見分爲二.15日統歐羅巴洲,皆見爲雙彗.初分時見小彗之中體距本中體之心2分,其距心線之方向與經圈交角約328度,小彗在本彗之北.從此漸分爲二.至1846年1月30日小彗距本彗心3分.2月7日距心4分.11日距心5分.3月5日距心9分19秒.而距心線之方向略不變.其分後二彗各有變狀,且各有中體及短尾.尾之方向平行,與距心線略近正交.1月13日,新彗較舊彗小而暗,其後大小明暗互相消長.2月9日新彗爲月所奪,而舊彗仍見.10日二彗大小明暗略同.14日至16日新彗明於舊彗,中體清晰若恆星.18日舊彗倍明於新彗,中體最明若恆星.從此新彗漸暗.直至3月15日後二彗並見.24日而僅見一彗.至4月22日而俱隱.二彗互爲明暗時,新彗於尾之外,另發光一條作弧形,與舊彗相聯若橋.然舊彗復明時,亦另發光一條.故2月22日23日二夜視舊彗若有三小尾.其一聯於新彗,三尾之角約120度.時瑞士日內瓦星臺官拔蘭大木詳考測簿,分推得二彗之根數,謂2月10日夜至3月22日夜,所見二體相距之大小乃視距非眞距也.準地距二彗線及此距線與二彗聯線之交角,推其眞距約39倍地半徑,幾及月地距三分之二.彗之質甚微,相距如是遠,其相與之攝動必幾若無.

此事甚奇也.因其根數知此雙彗在1852年必復見.測天家咸詳測之,至七八月間,英國堪比日星臺查星司,羅馬之色幾與斯得路佛三人皆測此二彗,其方向相與之勢相同(二彗相距約一百五十萬英里).所以當時見太陽又加一屬星也.參弟尼

第二七八圖

以根數推之,言其二彗當於1866年1月27日與29日各復過最卑點.然而諸測天家雖勤測之,皆未見之也.於1872年11月27日夜地球正過此遺失彗星之軌道,忽遇隕石如雨而降,克樂克女士(Clerke)謂是該彗瀉出其分裂物也.1885年及1892年11月地行過該彗道時,又遇同樣之事.此比乙拉隕石隊若自仙女座中一點而來,故名曰仙女座隕石隊.其行動在該彗道交地道點處,與彗道平行.

又有一彗,1843年11月22日巴黎費易測得之.其道爲橢圜,尼谷來(Nicolai)推其根數,來未里亞復改正之.其周時爲2717.68日.兩心差爲0.55596.其道與黃道交角11度22分31秒.依諸根及諸行星攝動力推得再見過最卑約在1851年4月4日.其後於1850年10月20日夜查里斯測見之,斯得路佛亦測之.至1851年3月5日而隱.在4月1日過最卑點與推得之數略合.1858年復過最卑.

諸彗之道,俱爲極長橢圜,與黃道交角又大小不一,則其出

入諸行星道,必有時與星最近,甚者或相遇.如比乙拉彗道與地道甚近,恐數百萬年後與地球必有相遇之時.又1770年之彗6月30日距地最近時約7倍月地距.1767年此彗與木星最近時爲58分木星道半徑之一.或謂此時爲木星所攝動,而其道愈近地.勒石力推此彗之兩心差爲0.7858,其周時約五年半,其道與黃道交角1度34分.1770年8月13日過最卑.1776年復過最卑,近日不能見.1779年8月23日距木星最近爲491分木星道半徑之一,卽木星第4月道半徑5分之4,此時受木星攝動更大,其道大變.測算諸根與勒石力前所推大異,而木星及諸月不見有攝動,故知彗體之質甚微也.

§453. 迪未谷彗　1844年8月22日羅馬星臺官迪未谷測得一彗,知其道爲橢圓,與拋物線大不合.自9月2日過最卑,直至12月7日,每夜俱可測之.各家推其根數,大略相同.其周時約1990日.若無攝動再過最卑當在1850年1月13日.此時彗恆近日不能見.凡小彗測其體恆不清晰,故最難推.今以諸家所推根數列爲表,令讀者知測算之精密也.推者六家,曰尼谷來,曰欣特(Hind),曰哥勒斯迷,曰費易,曰書白,曰白倫諸(Prunnow).此彗最明時,目亦能見,有小尾.來未里亞細推謂與1678年所見同一

表 *e*.　1844年8月各家所推迪未谷彗諸根數表

	過最卑時	最卑黃經度	正交黃經度	交黃道角	半長徑	兩心差	周　日
	日(九月)	度 分 秒	度 分 秒	度 分 秒			
尾谷來	2.47594	342 31 5.5	63 48 48.9	2 54 45.8	3.09853	0.61716	1992
欣　特	2.50412	342 32 40.1	63 52 24.1	2 54 27.1	3.08582	0.61566	1980
哥勒斯迷	2.45430	342 29 44.9	63 48 55.2	2 55 1.9	3.11111	0.61861	2400
費　易	2.48745	342 31 15.5	63 49 30.6	2 54 45.0	3.09946	0.61726	1993
書　白	2.56348	342 34 31.5	63 54 40.8	2 52 51.8	3.02612	0.60866	1923
白倫諸	2.47402	342 30 49.6	63 49 .1	2 54 50.3	3.10295	0.61788	1996

彗，而樂竭與毛費二人謂與1585年第谷所測者同一彗．又1743年、176年、61819年三次所見，恐俱卽此彗也．

§454. 勃陸孫彗 1846年2月26日勃陸孫測得一彗，言其道非拋物線．今以諸家推得橢圓諸根數列爲表．此彗甚暗，形狀無大異．其根數與1532年之彗大略相近．

表 *f*. 1846年各家所推勃陸孫彗諸根數表

	過最卑時	最卑黃經度	正交黃經度	交黃道度	半長徑	兩心差	周 日
	日(2月)	度 分 秒	度 分 秒	度 分 秒			
白倫諾	25.37794	116 28 34.	102 39 36.5	30 55 6.5	3.15021	.79363	2042
欣 特	25.33109	116 28 17.8	102 45 20.9	30 49 3.6	3.12292	.79771	1016
威令根 特 漢	25.02227	116 23 52.9	103 31 25.7	30 30 30.2	2·87052	.77313	1776

§455. 彼得彗 1846年6月26日夜，彼得測得一彗，達哀詳推其根數，得周時5804.3日，兩心差0.75672，半長徑6.32066，交黃道角31度2分14秒，是年6月1日過最卑．

§456. 1843年之大彗 1843年有大彗見．未過最卑時，統地球俱不見．2月27日過最卑．3月1日始見於萬地曼蘭(Van Diemen's Land)〔卽達斯馬尼亞(Tasmania)島在澳洲西南〕．3月3日北半球熱帶內，初見其尾．而赤道南日落後，見其頭在西地平上．用遠鏡察之，其面若行星，尾分爲二交角甚小，有黑氣一道隔之，長約25度．尾根有光射出與尾同方向．其北又發光一道，引長其尾與本尾交角五或六度，其長距頭65度．其南亦有光一道，但暗於北者．中體甚明，若一、二等恆星．至3月11日，若三等恆星，光驟暗．3月19日不能見，而尾仍極明，愈遠中體愈明．若以目視，不能見其與頭連．3月3日後尾成一長光帶，覺微彎．3月11日加爾各搭(Calcutta)革勒里休測見尾之南又發一尾，與本尾交角18度，而長幾倍本尾，約100度，前後日俱不見．於一日中發之，能令

如是遠.可想見中體發力之大.若所發爲實質,則其力更强於攝力.此彗過最卑後一日,印度貿易公局,有船曰阿文格論頭爾,過好望角於,日將落時,共見此彗,狀若小佩刀.是日美國在波德蘭(Portland)於午後3時6分,用六分儀測見其中體距日心僅3度50分43秒.中體與尾,俱甚明晰,如月在清天近頭處,色略異.格氏謂中體如此厚,設過日面,亦能見也.又測尾長59分,約倍日視徑.此日彗距地與日略同.推其實長約一百七十三萬英里.此爲古今最異之彗.故其根數歷算家多推之.今擇其尤密者列爲表凡最卑距日以地道半徑爲一.

表 g.　諸家所推1843年2月大彗星諸根數表

推步家	過最卑時	最卑黃經度	正交黃經度	交黃道角	最卑距日	順逆行
	日(二月)	度分秒	度分秒	度分秒		
因格	27.45096	279 2 30	4 15 5	35 12 38	0.00522	逆行
拔蘭大木	27.42935	278 18 3	51 4	35 8 56	0·00581	逆行
腦爾	27.39638	278 28 25	1 48 3	35 35 29	0.00579	逆行
尼谷來	27.43023	278 36 33	1 37 55	35 36 29	0.00558	逆行
彼得	27.41319	279 59 17	3 55 17	35 15 42	0.00428	逆行

此彗之異者,最卑距日甚近.古今所見之彗未有若是近日者.試以日地距之中數爲半徑命爲一,則日半徑爲16分1.5秒之正弦0.00466.取上表中諸距日之中數爲0.00534,大於日半徑僅0.00068,約爲7分之1.是彗在最卑時距日面數如7分日半徑之一.凡日所發光與熱距日愈遠,則愈分而愈薄,其比例如半天球與日視面之比.地球所見日之視面其徑爲32分3秒.此彗在最卑時所見日之視面其徑爲121度32分.準幾何凡在不同遠所見半球面之比,若二分所見角之一之正弦平方比.依法推得地與彗所見日二視面之比若1與35200之比,卽地與彗所受日光熱之比.試思若35200箇太陽合以照我,其光與熱當若何耶?巴

格所造陽燧（聚光鏡）徑 $32\frac{1}{2}$ 英寸，聚光點距徑六尺八寸，用時光熱盡彙於聚光點，必與見日視徑 23 度 26 分處同，此地所受光熱大 1915 倍，與彗所受光熱比若 2 與 39 比，而此鏡已能鎔瑪瑙與水晶。或再用一斂光鏡增其力至 7 倍，則比地所受光熱爲 13405 倍。卽此聚光點之光熱與彗所受光熱比若 2 與 7 比。然則此彗所受光熱，眞不可思議也。此彗在最卑時，其速率一秒中行 366 英里。自正交至中交不過二小時强。在中交距日倍最卑時，所受光熱少四分之三。1680 年之彗最卑距日心爲 0.0062，其距日面如三分日半徑之一弱，較此彗一倍强。牛頓推其受熱已多於赤鐵 2000 倍。此彗之道雖未能細推，然測知其非拋物線而爲橢圓。1668 年里斯本（Lisbon）及巴西等地，俱見大彗之尾與此時所見之尾略同。自 3 月 3 日後，數日間其方向亦略同。光甚大，照海面生影。其後頭出地平亦如此彗，不甚清晰。當時雖未細測，但諸事俱相似。人多意其爲一彗，其周時約 175 年。後細考舊彗測簿而益信。又考史而知 268 年、442 至 443 年、791 年、968 年、1143 年、1317 年、1494 年諸次所見，必皆卽此彗也。蓋準所推當見於 268 年、443 年、618 年、793 年、968 年、1143 年、1318 年、1493 年，與史所見或同年或先後一、二年，因有諸行星攝動，故不能一定也。或疑 1689 年 12 月 8 日至 12 月 23 日所見之彗與此彗同，爾時粗測其方位，冰立取測簿細推其根數，最卑甚近日，又最卑及交點之經度俱略同。但交黃道角 69 度大不合。庇爾思復推之僅 30 度 4 分，則非甚不合。然則 175 年中當見 8 次，其周時爲 21.875 年。自 1843 年 2 月 27 日上推見於史者，不獨如上所云，又有 1733 年、1689 年、1559 年及 1537 年、1515 年、1471 年、1426 年、1405 年、1383 年、1361 年後至 1340 年、1296 年、1274 年、1230 年、1208 年、1098 年、1056 年、1034 年、1012 年、990 年、925 年、858 年、684 年諸彗，疑皆是也。果

爾則1864年冬過最卑前後俱當見於南半球.後格勞孫合各次測簿統考其根數,謂其周時僅6.38年.或云21.875年,以3分之當爲7.292年,方與諸史合,此說恐未必合理.然用如此小周時,其行法尙能合.則21年之周時,更可信矣.

§457. 杜捺底測得第三大彗　1811年,1823年二大彗之外,1858年杜捺底測得第三大彗.自6月2日至1859年1月,其頭甚明,尾似羽帚,最長至30度,曲向彗已離之處,似留於後者,其曲非因有所阻也.乃因尾自彗發出,彗向日而行,與其本速率而行之和而然也.美國測者云有長狹而直之淡光線二條爲羽帚,連其頭內外曲線之二切線.用大力遠鏡觀其頭形繁而奇.1861年見一大彗,其尾甚長,而一邊直.七月三十日地球雖未通過其尾,亦已甚近.1862年,又見一大彗,其頭結成定質,噴氣之光獨有一條

§458. 1882年之大彗星　此星光輝甚强,形狀美麗,尤多奇景.西曆1882年9月3日見於南半球.17日始見於北半球.斯時彗星與太陽最近,正過卑點.此後得於晝時見之,去日僅2度左右,繼則現於朝晨,約六閱月而隱.

此星軌道在地球軌道內之一部分,殆與在1668年、1843年、1880年、1887年所見者相合.此等彗道之特點,在其去日最近.其各卑點距日少於750000英里,故皆能行過去日面300000英里之處.在卑時每秒之速度多過250英里.於不足三點鐘內,在其軌道內行180度.此等彗星或出一源,今名之曰彗星羣(Cometary group). 彗星羣者多彗前後相間追逐於相似之軌道,一若前曾合一或發於一源也.

此星出現期甚長,故得密測其軌道,乃一形如橢圓周界甚長之道也.其週期約630年至840年.

是年8月初旬,此星形狀與一般彗星相同,核圓而有包被,

尾部中心線上如陰影之暗條，甚爲顯著。二星期後核部分裂爲一帶光點，數在五六之間。其大而亮者，爲由頭數之第三顆，光點徑約5000英里，頭部之包被消失，暗條變爲明條。此一帶光點共約長56000英里。

此星在近日點時，其彩色帶中有無數亮線，而鈉線最易識別，歷數星期不滅。其他輝線難於識別，大概爲鐵、鎂、鈣等元素所生，存留祇數日。迨至8月中旬，彩色帶大起變化，僅見有炭氫化合物之亮帶，與一般彗星相同矣。

此星之尾與地球均於相對之位置，不便觀察，其視長度不出35度，而眞長度爲一萬萬英里左右，大於日地距。

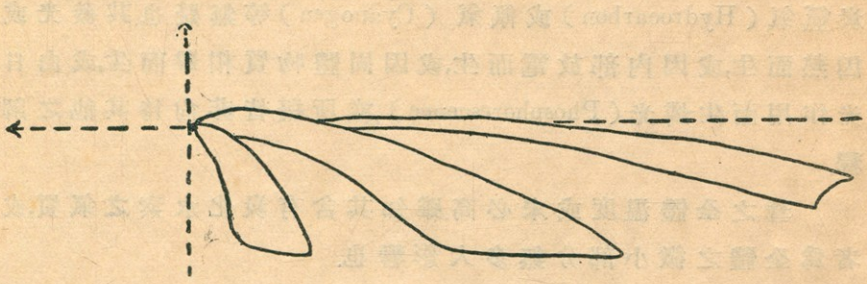
所奇者，此星頭部附近有圓柱形之弱光一圈，包圍之如鞘然，在頭部前面凸出約三、四度。此外尙有類似彗星之物質，如殘鱗斷片，隨從彗星左右，初見時距彗星不過三、四度，漸次遠離，光度變暗。此等現象在彗星史中實爲創見。其後1889年之雷布彗星(Lexell-Brooks comet)（乃先由雷氏後由布氏發見之彗也）亦呈相類現象，迄無有說明之者。

§459. 1892年11月6日侯爾木斯發見一彗，其軌道界於火木二星道間，與行星軌道相同。或謂其非彗，疑係天空兩體相衝而發此光。1893年有布魯克斯彗。1901年見有二彗，一在4月4日，一在9月間。1910年1月15日於澳蘭基弗利(Orange Free)見一彗星，第三日羅馬維也納亦見之，第四日蘇格蘭亦見之。蓋此彗行至速，且向北移動也。

§460. 彗星之名稱 凡肉眼所見之彗星，皆以發現人或研究人之名字表示之，例如海利彗星、侯爾木斯彗星、因格彗星、比乙拉彗星、杜捺底彗星等皆是。遠鏡中所見之彗星，皆以發見之年份表示之，年份同者附a、b、c等字母於年份之前，以表發現之

次序,或附 *I*、*II*、*III* 等羅馬數字於年份之後,以表經過近日點之次序,例如*a*1890彗星、1890—*I*彗星等皆是.間有以雙名字表示彗星者,如雷布彗星(1889—*V*)乃指1770年雷克才爾氏發現此星後至1889年布魯克斯氏復發現之也.

§461. 彗尾之分三種　布里狄欽(Bredichin)分彗星之尾爲三種.第一種爲長而直之輻射線,其質點所受太陽斥力爲重力之12倍至15倍.故由質點由彗射出之速度至少爲每秒四、五英里.去彗漸遠則漸增,終至極大.成分以氫爲主.第二種爲通常曲線,在凸出一邊斥力爲重力之2.2倍,在他一邊爲1.1倍.其彩色帶與彗星頭部相同.成分或以炭氫化合物爲主.第三種爲短而粗之刷子形,曲率甚大,頗不多見.其質點所受之斥力較重力爲小,約爲$\frac{1}{10}$至$\frac{1}{2}$.成分或以濃密之金屬蒸氣爲主,又雜鈉蒸氣等.以上三種均見第二七九圖.



第二七九圖

§462. 彗之來源　拉普拉瑟謂彗星軌道爲拋物線者,一旦來至太陽系中與任一行星相近,則必受攝動影響,改變速度,速度增加者,軌道變爲雙曲線,愈行愈遠永不復見,速度減少者,軌道變爲橢圓繞日旋轉,而改變之軌道必經過原遇攝動之處.此學說名曰羈留學說(Capture theory).其爲木星羈留者,爲木星彗族(Family of comets),約有30彗,比乙拉彗其一也.土星彗族現

有二彗,特特爾彗(Tuttle's comet)其一也.天王星彗族有三彗,泰木布爾彗(Temple's comet)其一也.海王星彗族有六彗,海利彗其一也.彗族不與彗羣同.彗羣者,彗之軌道約相合,或僅其近日之道相合.而一彗族之軌道,則僅其周期及其隣近於某行星相似,餘均不同.樸老克特(Proctor)謂彗爲天體分裂射出之物質,某星彗族者,某星之分裂物也.二說不知何者爲是,或前者較有成立之可能.

§463. 彗星彩色帶 大多數彗星彩色帶爲暗淡連續之彩色帶,蓋以三個光亮條紋,一黃色、一綠色、一爲藍色,此條紋在底部最清晰,向彩色帶之藍端而衰退.有時有一第四條紋,現於紫色內.綠色條紋最亮,有時內現多條光亮之細線.黃藍條紋內亦有同樣線之痕跡.此樣彩色帶,正與普通氣質或蠟燭光,在藍地(Blue base)所現之彩色帶相同.故彗星有氣體之炭素混合物,如炭氫氣(Hydrocarbon)或氰氣(Cyanogen)等無疑也.其發光或因熱而生,或因內部放電而生,或因固體物質相擊而生,或由日光作用而生燐光(Phosphorescence),或所擬皆非尙待其他之解釋.

彗之全體溫度或未必高.雖知其含有炭化水素之氣質,或者爲全體之微小部分無多大影響也.

1882年魏兒斯彗(Wells's comet)及數星期後該年大彗最近日時之彩色帶,除炭氫氣線外,現有金屬物質之亮線,知其確有鈉鎂等質.1882年大彗似有由鐵質而生之光線.

彗星彩色帶亦有奇異者,亦有常變者,如1892年侯爾木斯彗僅爲簡單連續之彩色帶,既無亮線亦無暗線.拉克亞謂彗彩色帶隨距日遠近而變其條紋,既變形象,復變位置,但其說亦難證實.

§464. 因測彗而推行星質量　因測彗又得旁通諸理.憑周時差而知徧天空有薄氣能阻動其一也.又彗近行星時測其攝動力可推行星質量多少.如水星之質量古昔未知,1838年有彗近之始大略能推定.1849年1月20日是彗復過水星,較前更近,僅15倍月地距,而推得其質量益密.

§465. 彗尾之討論　彗之尾若係實質,則當其過最卑時,疾行旋轉而尾不曲,與攝力理不合,與力學中動理亦不合.1680年,1843年二次之彗其尾幾與地道半徑等,旋過最卑皆不壞.而在1843年之彗,其尾之方向旋過180度僅2時略强,如是之速恐未必是實質也.或云彗能於薄氣作負影似有理.此須俟後世格致家精思密察方能定也.

§466. 彗之逆行　諸行星諸月大率皆順行,而彗則有逆行者.十八世紀末所見諸彗之道,拉普拉瑟推其與黃道交角之中數略近90度,則皆可云順行,因交角鈍似逆行耳.19世紀中葉以前,所見諸彗之橢圜根數已推定者凡三十六,其交黃道角大小不等,逆行者只有五彗,其二已有確證,一卽海利彗,一乃1843年之大彗也,而交角17度以內,無一逆行者.此外書瑪割與阿爾白士所推得1823年以前諸彗之根數.其交角小於10度者九彗,中有逆行者二.小於20度者二十三彗,中有逆行者七.凡道近於黃道而周時有一定者,大率皆順行與行星同.欣特言周時一定之彗,當分爲二類:(一)周時約75年略與天王等,海利彗周時76年,阿爾白士測得一彗74年,迪未谷所測得第四彗73年,勃陸孫所測得第三彗75年,共四彗.(二)周時略如小行星與木星周時之中率.又言小行星中有一二略如彗之狀.

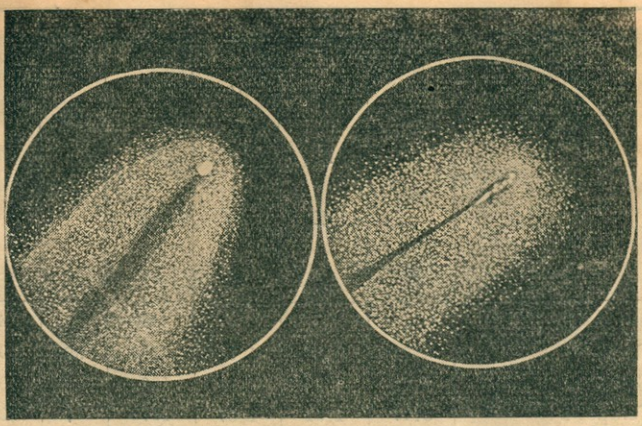
§467. 彗道長徑方向　凡有定時之彗,其道之長徑略在一方向,向北在天球黃經70度,北緯30度乃近天河內積水星也.其

向南亦在天河相對之一點.

第二八〇圖　杜那底彗星(一八五八年十月五日)

表 h. 彗星

次序	星名	回歸周期	近日點距離	遠日點距離	最初發見時	回歸次數	再次回歸期
		年			年	次	年 月
1	Encke	3.30	0.34	4.09	1786	38	1934 11
2	Grigg-Skjellerup	4.99	0.89	4.95	1902	2	1932 5
3	Tempel 2	5.17	1.32	4.87	1873	7	1935 12
4	Neujmin	5.41	1.34	4.83	1916	2	1932 7
5	Brorsen 1	5.46	0.59	5.61	1846	4	1933 11
6	Tempel-L.Swift	5.68	1.15	5.21	1869	3	1937 3
7	Winnecke	5.89	0.97	5.55	1819	10	1933 5
8	De Vice-E.Swift	6.40	1.67	5.22	1678	2	1933 1
9	Perrine	6.45	1.17	5.76	1896	2	1935 9
10	Tempel 1	6.54	2.09	4.90	1867	2	1938 2
11	Griacobini	6.57	0.99	6.02	1900	2	1933 7
12	Kopff	6.58	1.70	5.32	1906	2	1932 9
13	D'Arrest	6.64	1.34	5.62	1851	8	1937 1
14	Biela	6.69	0.88	6.22	1772	5	1932 12
15	Finlay	6.84	1.06	6.15	1886	4	1933 7
16	Holmes	6.86	2.12	5.10	1892	2	1933 8
17	Borrelly	6.93	1.40	5.87	1904	3	1932 9
18	Brooks	7.10	1.96	5.43	1889	4	1932 10
19	Faye	7.44	1.66	5.97	1843	9	1932 12
20	Schaumasse	7.99	1.17	6.82	1911	2	1935 11
21	Wolf	8.28	2.43	5.75	1884	5	1934 2
22	Tuttle	13.54	1.03	10.33	1790	6	1939 11
23	Westphal	61.73	1.25	29.98	1852	1	1975
24	Pons-Brooks	71.56	0.78	33.70	1812	1	1955
25	Brorsen 2	72.10	0.49	34.15	1847	1	1991
26	Olbers	72.65	1.20	33.62	1815	1	1960
27	Halley	76.02	0.59	35.32	−240	27	1986



十月九日　　十月十五日

第二八一圖　1882年大彗之頭

第二十三章

恆星(亦曰經星)

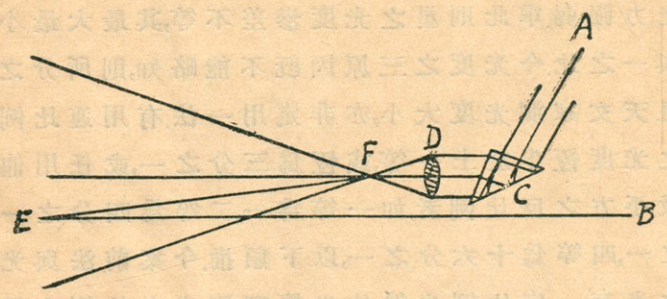
§468. 恆星　恆星自其彩色帶觀之亦日也.其大小及物理的狀態皆似日.亦自發光,光之性質與日無異.星有大於日,熱於日者.肉眼可見者約六、七千.以四十英寸口徑之大遠鏡可見者約一萬萬:一等星二十三或二十四,二等星約五、六十,三等星約二百,愈小愈多.1926年施雅斯(F. H. Sears)用攝影法測天,斷定星之全數在30×10^{18}(30 Trillions)以上.

§469. 恆星大小之等級　恆星之等級,以其入目之光度定之,與其視徑無涉.依巴谷多祿某分星之光爲六等,第六等爲目能見之最小者.自遠鏡發明後光弱者亦可測見,等乃增多.夫光度大小之故有三:(一)星距我遠近,(二)星之實光面大小,(三)星之光力强弱.準此則星之光度參差不等,其最大最小,必如數萬萬與一之比.今光度之三原因既不能略知,則所分之等亦不足憑.且天文家測光度大小,亦非定用一法.有用連比例者,如下一等之光度恆半於上一等,或恆爲三分之一,或任用他比例.有用逐數平方之反比例者,如一等爲一,二等爲四分之一,三等爲九分之一,四等爲十六分之一,以下類推.今案前法與光理合,蓋逐等之光有一定比例也.然依光學理測光之比例人目所不能,則亦有病也.後法與體積等齊之理合.其意蓋謂星之實光本相等,但距我有遠近.一等最近我,二等以下其距我或倍於一等,或三倍四倍於一等,餘類推.準此七等與六等比若三十六與四十九比.十等與九等比若八十一與一百比.而一等與二等比若四與一比.此法無病,蓋目之辨別小光較易於大光,察六、七等之差

爲四十九分之三十六,與察一、二等之差爲四分之一初無異,故後法勝於前法也.近代所用之等數理與第二法略同.

凡相連二等諸星其光度不齊,中間尙可分爲若干等,而一等與二等尤不齊.或於一、二兩等間增兩等,曰 1 等,1—2 等,2—1 等,2 等.1—2 等者,謂其等在一、二等之間,而近於一等也.2—1 等者,亦謂在一、二等之間,而近於二等也.然不如用整數小數,以整數表其等,以小數表其分,爲較密.如 2·3、2·4,前者之光强於後者也.

測星光度大小,其難有多端.星之色不同一也;無一定大小之光爲本二也;人目僅能辨光之等不等,而不能定大小之比例三也.侯失勒取木星之光爲本率,蓋木星之光明於諸大恆星,無弦望之變,不過準距日遠近而小變,亦易推也.法依光學令其光變小,與所測之恆星光相等,乃推其比例而知所測星之光度也.如第二八二圖 B 爲所測星,A 爲木星,C 爲三稜玻璃,D 爲凸鏡,



第二八二圖

F 爲焦點.A 光入 C 而回透過 D 而聚於 F,F 必有小光點熒熒若星.置 C 之法,必令 A 之回光與 B 之視線平行.E 爲人目,見 F 並見 B.乃進退 E 令 F 變大變小,以至 F、B 二光度相等而止.夫 F 光之大小與 EF 距離之平方有反比例.乃如法累測二星定 EF 之二距,卽得二星光度之比例也.先選取數星用此法測其

光度以定其等.其餘諸星暗於上一等,明於下一等者,卽用測定之星相較,以推其小分,則可成星等之全表.自最明天狼星起至最小僅能見之星,俱能推定其光度也.天學中此一門卽從此濫觴,後乃得精益求精也.

§470.光比及星等之絕對尺度　侯失勒於60年前推得一等星之光平均約爲六等星之100倍.100之五次方根爲2.512,故一等星之光度爲二等星之2.512倍,二等星者爲三等之2.512,餘同此.凡星之等級上下相連者,其光度之比名曰光比(Light ratio),現今所用之阿幾蘭德海斯等之星圖,其星等之光比並不一致.鮑哥僧(Pogson)於1850年提議採用$\sqrt[5]{100}$爲光比,將各家所定之星等依此光比修改;然竟未見諸實行,直至近時美國堪比日(Cambridge)及牛津(Oxford)之新星圖(Uranometrias)始採用之.如此光比之分等尺度,稱曰星等絕對尺度(Absolute scale of magnitude).

此光比之對數爲0.4000(卽$\frac{log\,100}{5}=0.4000$),其反數(Reciprocal)$\left(卽\frac{1}{\sqrt[5]{100}}\right)$爲0.3981,反數之對數爲9.6000.若以$b_m$爲標準$m$等星之光度(無論以燭光計之或以其他單位計之),$b_n$爲$n$等星之光度,則有

$$log\,b_n=log\,b_m-\frac{4}{10}(n-m).$$

反之
$$n=m+\frac{10}{4}(log\,b_m-log\,b_n),$$

或
$$n=m+\frac{10}{4}log\,\frac{b_m}{b_n}.$$

$(n-m)$乃m等星至n等星相差之等級數也.如六等星與一等星比其差爲5,故

$$log\,b_6=log\,b_1-\frac{4}{10}\times5=log\,b_1-2.$$

在此尺度下,其幾爲一等標準星者,爲河鼓二及畢宿五.極星及北斗之二指極星爲幾近之二等標準星.其較一等星更亮一級者爲0等,大角星其例也.其更亮者則爲負數等級矣,如天狼星爲 −1.43 是也.木星在此尺度約爲 −2 等,卽其光約爲一等星之16倍(2.51^3)也.

§**471. 遠鏡大小與其能見之最小星等級之關係** 遠鏡視力之大小與其口徑之平方成比.星光每減5等,口徑須增加至$\sqrt{100}=10$倍;星光每減一等,口徑須增至$\sqrt{2.512}=\sqrt[10]{100}=1.59$倍.如以通常之眼力及甚好之遠鏡,口徑一英寸者,最小能見九等星.則依 $m=9+5\ log$(口徑英寸數)可得口徑若干英寸大,最小能見何等星,列表如下:

星等	7	8	9	10	11	12
口徑	0.4	0.63	1.0	1.59	2.51	3.98
星等	13	14	15	16	17	18
口徑	6.31	10.0	15.9	25.1	39.8	63.1

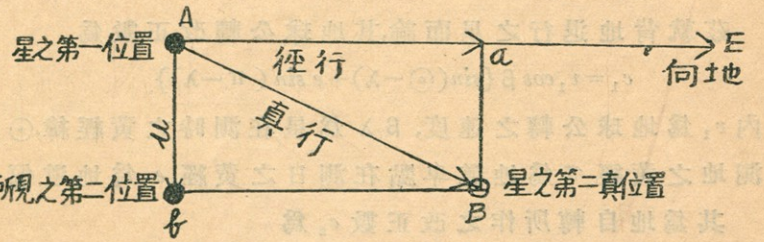
但因大遠鏡透鏡之加厚,其能見之量不能與此相合.如掖克之40英寸遠鏡(Yerkes telescope),其所見17等星之光較華盛頓之26英寸遠鏡所見之16等星不僅弱一等,其明證也.

§**472. 星之自行**(Proper motion) 恆星定而不動者也;然以現定之赤經緯與百年前者較,則見有差.此差固多由於歲差章動及光行之視差;然去此基本圈點之變動,及地軸變方向所生之公共行動,以及光行之視動,仍見有差,是以知星亦有行動也.海利於1717年(康熙五十六年)測恆星方位,上考多祿某依耶紀前130年依巴谷測數所作表,其中天狼、大角、畢宿五較已測之黃緯俱差而北,一爲20分,一爲22分,一爲33分.古今相距1847年,以黃赤道交角之變論之,設諸星不動,今當差而南,一爲10分,

一爲14分,一無差.故知此三星自行向南,一爲30分,一爲36分,一爲33分.表縱不能無誤,然星有自行無疑矣.又考509年3月6日,希臘國雅典所測畢宿第五星爲月掩復見之時,知其方位在月道上,亦與自行之理合.設當時星之緯度與今時同,其掩不當如此也.況星體甚大居空中,無力令常靜,能不生動乎.蓋諸星互相攝,其力雖甚遠而小,且相敵而相消,然歷久其敵力之較必積而大,則不能不動矣.其後天文家以聯星證之,如天津增二十九,二星相距約15秒,50年來略不變.其方位移4分23秒,每年自行5.3秒,是此二星恆行.其道之狀未知,數百年視之恆如以平速行直線也.又以獨星證之.如波斯第七星,其方位每年移7.74秒,閣道第四每年移3.74秒也.又有多星其移之數小於此,俱確然無可疑焉.恆星既自行則亦有變,不可云恆矣.然行分甚微,非數百年積之不能見,故不易名,仍曰恆星也.

今所知星之自行最大者,爲南半球星錄(Cordoba zone-catalogue)之第五時243號星(No. 243 of the fifth hour).星光爲八等,每年自行8.7秒,能於149000年行360度.據現所知者,一等星之平均自行約爲$\frac{1}{4}$秒,六等星者約爲$\frac{1}{25}$秒.最近又得一十等星,每年自行$10\frac{1}{4}$秒.

§473. 星之眞行(Real motion)　吾人所推星之自行,乃行之



第二八二圖　恆星之行動

垂直於吾人視線之弧數值也.欲得星對地之眞行,須知星去我之距離及行之方向.如第二八三圖星由 A 行至 B,在地見之,則由 A 行至 b,在地所見此 Ab 之弧數值,卽星之自行,以 u 代之,以秒計之,則有

$$u''=206265\frac{Ab}{\text{星地距}}.$$

至星之直向地或背地行者,在地見之,皆若無行動.由此式可知不知星去我之距離,不能知星之眞行.AB. Aa 乃行之沿視線者,名曰徑行(Radial motion). Ab 行之以線速度計者,曰橫行(Cross motion).

星之徑行可由星之彩色帶推之.蓋星向地來距離減小,則星之光線向藍色移動.若背地去距離增大,則光線向紅色移動也.

黑京(Huggins)於1867年考天狼星彩色帶,知其指氫氣三光線內之最明一線之位,略合於太陽彩色帶內此光線之位.並測得天狼彩色帶內此最明光線,在三稜玻璃折光之度數稍小於太陽彩色帶內此光線折光之度數.知其光波長度較其正常波長不同.乃依杜費原理(第216節)推得該星對地球之徑行速度.因地球亦行,故所得之數須經改正,地球自轉及公轉在該視線內應有之行動速度,方爲星對日之徑行速度.凡表列之徑行數,皆以日爲準也.

茲就背地退行之星而論,其地球公轉改正數爲

$$c_1=v_1\cos\beta\{\sin(\odot-\lambda)+e\sin(\pi-\lambda)\}.$$

式內 v_1 爲地球公轉之速度,β,λ 爲星在測時之黃經緯,$\odot$ 爲日在測地之黃經.π 爲地道卑點在測日之黃經,e 爲地道偏心率.

其爲地自轉所作之改正數 c_2 爲

$$c_2=-\frac{b\pi A}{T}\rho\cos l\sin t\cos d.$$

式內 A 爲地球之赤道半徑,l 爲測地緯度,T 爲恆星日所合之平時秒數 (86164.1), ρ 爲測地至地心之距離,d 爲星之赤緯,t 爲星在測時之西向時角.

爲精密計,尙須爲地球繞月地公重心之轉動,作改正數 c_3. 爲日繞太陽系公重心之轉動,作改正數 c_4;然此二數皆甚微小,多不計.故星對日之徑行速度爲 $v+c_1+c_2$. 其 v 乃由杜費原理

表 i　恆星徑行速度表

星名	星等	類	速度	星名	星等	類	速度
α Andromedrae	2.0	*Ia*	+ 2.8	γ Leonis	2.0	*IIa*	−24.1
β Cassiopeiae	2.1	*Ia*−*IIa*	+ 3.2	β Ursae Majoris	2.3	*Ia*	−18.5
α Cassiopeiae		*IIa*	− 9.7	α Ursae Majoris	2.0	*IIa*	−12.0
γ Cassiopeiae	2.0	*Ic*	− 2.3	δ Leonis	2.3	*Ia*	− 8.8
β Andromedrae	2.3	*IIa*	+ 6.9	β Leonis	2.0	*Ia*	−12.0
α Ursae Minoris	2.0	*IIa*	−16.1	γ Ursae Majoris	2.3	*Ia*	−16.6
γ Andromedrae	2.4	*IIa*	− 7.8	ε Ursae Majoris	2.0	*Ia*	−19.0
α Arietis	2.0	*IIa*	− 9.2	α Virginis	1	*Ia*	− 9.2
β Persei	變	*Ia*	− 0.9	ζ Ursae Majoris	2.1	*Ia*	−19.5
α Persei	2.0	*IIa*	− 6.5	η Ursae Majoris	2.0	*Ia*	−16.1
α Tauri	1	*IIa*	+30.1	α Bootis	1	*IIa*	− 4.6
α Aurigae	1	*IIa*	+15.2	ε Bootis	2.0	*IIa*	− 9.7
β Orionis	1	*Ib*	+10.1	β Ursae Minoris	2.0	*IIa*	+ 8.8
γ Orionis	2.0	*Ia*	+ 5.5	β Librae	2.0	*Ia*	− 6.0
β Tauri	2.0	*Ia*	+ 5.1	α Coronae Borealis	2.0	*Ia*	+19.9
δ Orionis	2.5	*Ia*	+ 0.5	α Serpentis	2.3	*IIa*	+13.8
ε Orionis	2.0	*Ib*	+16.6	β Herculis	2.3	*IIIa*	−22.2
ζ Orionis	2.0	*Ia*	+ 9.2	α Ophiuchi	2.0	*Ia*	−12.0
α Orionis	變	*IIIa*	+10.6	α Lyrae	1	*Ia*	− 9.7
β Aurigae	2.0	*Ia*	−17.5	α Aquilae	1.3	*Ia*	−23.7
γ Geminorum	2.3	*Ia*	−10.1	γ Cygni	2.4	*IIa*	− 4.1
α Canis Majoris	1	*Ia*	− 9.7	α Cygni	1.6	*Ib*	− 5.1
α Geminorum	2.3	*Ia*	−18.4	ε Pegasi	2.3	*IIa*	+ 5.1
α Canis Minoris	1	*Ia*−*IIa*	− 5.5	β Pegasi	變	*IIIa*	+ 4.1
β Geminorum	1.3	*IIa*	+ 0.9	α Pegasi	2.0	*Ia*	+ 0.9
α Leonis	1.3	*Ia*	− 5.5	ζ Herculis	3.1	*IIa*	−43.8

註　速度乃每秒英里數,其十號指明星向後退.

推得之星的對地徑行速度也.黑京後蒲哥兒研究徑行之結果較爲可靠,茲列其表於上.

§474. 日之自行 推多星之自行,覺諸星有共同趨向天球面上某一點之勢.星固各有其不同之行動,而多星之平均行動,皆有此趨勢.所測星之行動,乃相對性的行動,必須有一標點以資歸宿.天文家多以日爲星之平均行動之相對處,而反謂日對於星行於反向而趨其相對之一點,並名曰日行 (Solar motion). 況日亦係恆星,以理論,星既有行動,則日亦當有行動,雖衆星共趨一點,而各星復有遲速不等之本行.則凡遲於太陽者,在太陽前必見其背此方向諸平行線之合點而行,在太陽後必見其向此諸平行線之餘一合點而行,速於太陽者則反是.若詳知諸星之視自行,準上理可測太陽之行法.諸星同方向行而遲速不等者,此如衆塵浮行氣中因風而移.知此方能測日行.星之自行乃二分合成.一分由於日之行動,乃所視星在天球上移動之一部分也.是曰視差自行 (Parallactic motion). 以線行動言之,此則諸星咸同,而等於日自行,惟方向相反.以角度行言之,此則與星地距成反比,且隨其距合點度之正弦而異.其餘一部分,則爲各星對於諸星平均行動之行動,是曰本自行 (Peculiar proper motion).

1783 年侯失勒維廉測得諸平行線之合點,近天市垣趙星 (λ Herculis),其赤經 260 度 34 分距極 63 度 43 分（1790 年表）.是年百勒伏亦推得平行線之合點,距極度分略與前合,而赤經差 27 度.此後天算日精,測得恆星每年有行分者更多,知恆星之自行益眞.天學最精深者凡四家,俱推明此事.一曰阿幾蘭得,取 21 星每年自行約一秒强者,推日與諸星相對行動之合點,赤經 256 度 25 分距極 51 度 23 分,又取 50 星每年行 0.5 秒至一秒者,推得合點之赤經 255 度 10 分距極 51 度 26 分,又取 319 星每年行 0.1 秒至

0.5秒者推得合點之赤經 261 度11分,距極59度 2 分.二曰倫大勒,取 147 星之行推得合點之赤經 252 度53分,距極75度34分三曰斯得路佛,細考 392 星推得合點之赤經 261 度22分,距極62度24分.三家所推俱 1790 年之合點也.約取其中數爲赤經 259 度 9 分距極55度22分,然所測皆北半球之星.四曰迦羅畏於1846 年作文一通,宣告英國博物公會,論南半球諸星平行所向合點也.其大略言準拉該勒1751 年1752 年在好望角所測,及閔孫於1829 年至1833 年在三厄里那島所測,又恆特孫於1830、1831 兩年,在好望角所測,其中有81星前三家所未用者,取以相比勘推得1790 年諸平行線之合點赤經 261 度 1 分,距極55度37分,與北半球所測之中數相差無幾,則信而有徵矣.近據牛考卜之推測謂太陽移向之點在武仙座(Herculis)中之東緣,約當赤經277$\frac{1}{2}$度赤緯35度處.1925年穆阿(Moore)與康倍爾推定太陽行動爲每秒 11.4 英里(19公里),移向赤經268.5赤緯 +27.2度處,此點名曰日路絕頂.

細推日與恆星相對行動之合點,其法甚繁,不能詳載,今略述其理之源.凡天文諸要事,恆因奇零數推得.蓋事之已知者,依法推之,恆有小奇零不合,此小奇零卽他事之端倪.如推太陽每年一周有小奇零不合,爲歲差之端倪.已詳知歲差之根,如法推之,仍有小奇零不合,爲光行差章動之端倪.已知光行差章動之根,如法推之,仍有不合,乃恆星與太陽視自行之端倪也.凡測天與所推有小奇零不合,必精心思其故,令此不合遞減小以至於無.未至於無,必更思其故也.既思得一故,當考此故能生此差否,又考生此差之最大其力若干.今太陽自行之故,能生前不合之差二,一方向,一速率也.然可見者,不過小奇零,憑以推得太陽自行之根,察其與恆星自行之數密合否.若不能盡合,而所餘之差

更微.此更微差若不可解,當以偶然法推之.法用幾何中最小平方法,即可得所求根數與當得之數,或無大差.前條諸幾何家推日與恆星之合點亦用上法.推日自行之方向與速率當準諸恆星速率之比例.而星之自行乃在其距日遠近,其每年行差對日所張之角度也.然惟二、三星能知其距日確數,餘俱不能,不足以定公理;故此必用設數之法,其法有二:一依諸星之大小明暗分若干類,每類星之距日俱設爲略等;二依諸星之自行數分類,以最速者爲最近.斯得路佛用第一法,阿幾蘭德用第二法.考第二法有不便事二:準視學,星之行不能知其實行,但知其視行,一也;恆星視行生於日之眞行者,因距日線之實長,及距諸平行線合點之視角度而異,蓋距合點度之正弦與此視行有比例,二也.每星須知此二事乃可考.而第一事無從知,故不能不多用若干星取其大率,冀其特有之自行或消去也.第二事當先設諸恆星之距日俱等,利用日行合點推算星自行之視行部分,由測得之全自行減去之,視其餘數,用以分諸類.此法測望甚費功,然亦不甚可憑.第一法,但言星愈明愈近,其分類較易也.

上言定日行之法,係由星之自行推求.因日爲恆星之一,當然如星之有行.苟吾人遊於林中,向樹叢之一部走去,其在前方之樹必視若彼此分開,其在兩旁者,奔吾人所向之對方而去,而在後方之樹,則視若彼此合攏.分析星之自行所得正同於此.天之一方星皆彼此攏近,而在對方者皆彼此離開,居其間者皆向一方流走.此現象之最簡答解,即爲日向星彼此離開之部分行動也.

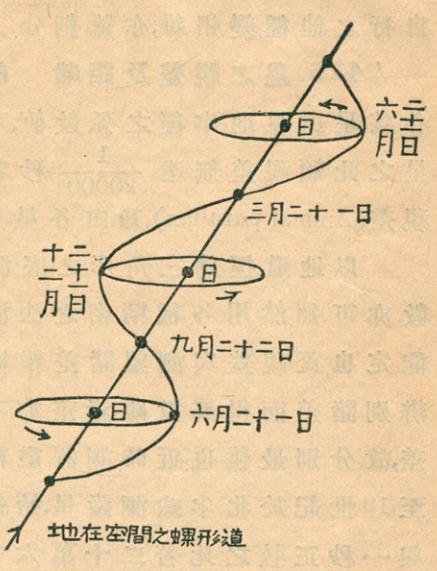
又有由星之徑行推求之法.吾人遊於林中,其在前方之樹必漸近我,其在後方者必漸遠我,而在我兩旁者,則不近我亦不遠我.康倍爾與穆阿取2100星之徑行分析之,得在天之一方其

星皆向日來,而在相對一方者皆背日去,在其間者平均不來亦不去,恰同於吾人遊林之所見,因以定日向某方行動也.

斯得路佛推得太陽之行動,能使吾人在相去一等星平均距離處望太陽一歲之自行爲 0.3392 秒.其父言此類星之地道半徑視差約爲0.209秒,然則一歲太陽行與地道半徑比若1.623與1比.是每歲太陽率諸行星彗星在空中橫行154185000英里,計每秒約行4.78英里,較地球軌道行速度之四分一少强.有星之地道半徑視差 p,及星之自行 u,則其每秒橫行英里數 c 可由下式推算之:

$$c=2.944\frac{u}{p}.$$

前所推太陽自行其數合否,其行果平速否,其道或係直線或係曲線,均不能定.今但能於天空作一弧線,當作日道,以表諸星攝力令日所行之方向耳.第二八四圖乃設日以平速行於直線,令地球在空中所行之螺旋道也.



第二八四圖

天學家有言天河與諸恆星及太陽聯爲一體而旋轉,同繞天河面內之一點.因諸星互相攝,故不因離心力散飛空中.60年前梅特勤定其所繞之點在鼎宿六中,顧此點離天河平面至26度,則未可深信,蓋所繞之點疑必在天河面內也.此當取大河中諸等星,雖最小等不遺,擇其易測者,測其赤經及赤緯,卽能知天河果自轉否.惟望南北各地星臺用心測此事,如是三,四十年方能定也.

前論日在空間之行動,苟爲眞行,並非僅爲與星相對之行動,則必使衆星生有二差與視差及光行差相類似.此差可稱曰日系視差(Systematic parallax)及日系光行差.日系視差不過爲星自行之一部,須知星之距離,方能由星之實行劃分.日系光行差最大爲五秒（凡去合點90度之星具之）,使衆星方位依過星及合點之諸大圈而移,其移多少之比,若星距合點度正弦之比.但其移往不復,若日恆以平速直行,則無從知;設久後日行之方向速度變,則其移位之方向大小亦隨之而變雖可知,然與星自行之他種變相雜,亦難劃分.

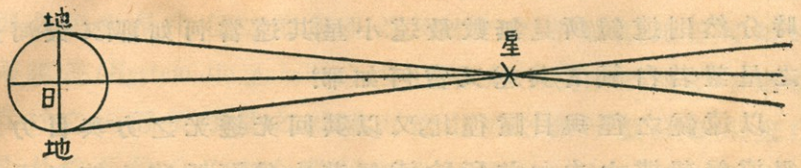
§475. 星之視差及距離 前所言之日月行星之視徑爲由各該星所見地半徑之弧數值,乃日周視差(Diurnal parallax)也.星之此類視差無達 $\frac{1}{20000}$ 秒者,實無測見之可能.故改用歲周視差(Annual parallax),乃由各星所見地道半徑之弧數值也.

以地道徑爲三角形之底測恆星一歲視差,視差若得,則距數亦可知.然用各種精密之法測之甚久,最近恆星之視差終未能定也.蓋視差與測望諸差雜糅不可分,其和不至一秒,故不能辨別諸差而得眞數.雖諸差亦不甚大,而中有乍大乍小無定之差,故分別最難也.近時測器歲精一歲,改正測差之法歲密一歲.至19世紀於北半球測諸星,始知其視差無有過一秒者.凡半徑與一秒正弦之比若二十萬六千二百六十五與一之比.又日地距與地半徑之比若二萬三千九百八十四與一之比.則有一秒視差之星,其距日爲四十九億四千七百零五萬九千七百六十倍地半徑.地半徑約三千九百五十八英里,故星距日約十九兆六千二百十一億八千七百二十四萬英里,卽最近恆星之遠也.光行最速歷時一秒行十九萬二千英里,過地道半徑當歷八分十三秒三,以二十萬六千二百六十五乘之得一千一百七十七

日十六時二分四秒五,卽三年八十三日,爲最近恆星光行至日之時分.然則遠鏡所見無數最遠小星,其遠當何如耶?又天河最遠之星望若白氣者,其遠又當何如耶?

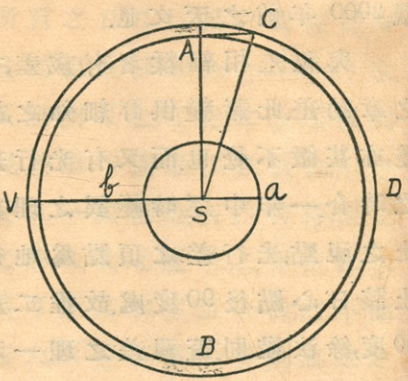
以遠鏡之徑與目瞳徑比,又以其回光透光之力與目力比,卽得遠鏡望遠之力.如前所論遠鏡其力爲75,設移六等星更遠日至75倍原距日數,此鏡能見之.又六等星光爲一等星光百分之一,設移一等星遠日至750倍原距日數,此鏡望之如目視六等星.故天河遠處必有無數大星與近處之一等星相等.此諸星之光到我地大率必2000年,故測望此等星非觀今日之天文,乃觀2000年前之天文也.

與視差相雜糅者有歲差,有恆星自行差,有地球19年一周之章動差.此諸變俱詳細知之,故推而去之不難.卽根數尙有小差,亦甚微不覺也.而又有光行差則異是.此差一年一終,與視差之時合.一年中逐時變異之理亦相似.視差之頂點爲日在黃道上之視點,光行差之頂點爲地行方向諸平行線之合點,在黃道上該日心點後90度處.故推二差同用一術,惟所用之經度相差90度,餘法盡同.蓋視差之理一若從星出線聯地球.地球繞日一周,則此線必行成極銳之斜圜錐,其軸卽星日之聯線,其底周卽地道(設爲正圓).此線過星引長之必行成相似之倒錐.準視差理,星之平均位置爲不動,每年必見星繞該不動處行於小橢圜一周.此小橢圜乃天球所割倒錐之截面也.恆與視線成正交.又若其星實行一道,其道與地道等並平行,人居太陽心望之,亦見其繞其平均位置行一小橢圓.光行差之理亦然,而橢圓周之大小不同,又視線交周點之方位亦不同,恆差90度.今以視差之最大一秒,光行差之最大二十秒五,俱設爲正圜作圖明之.如第二八六圖 AB 爲因光行差所見星行之小圜道,ab 爲因視差所



第二八五圖

見星行之小圓道同繞一中點S,SV線與二分線平行.若僅有視差必見星在內道a點,若僅有光行差必見星在外道A點,ASa必爲直角.乃作AC與Sa,其大相等且平行.作SC聯線,則C必爲因視差光行差二故,見星所在之點,且見星行於CDV圓道.SC爲20.524秒,卽道之半徑.星恆在A點之前,其度如ASC角爲2度47分35秒,因SA與AC比若20.5與1比也.故欲推視差Sa,必先測得ASC角,卽二差所生角VSC與光行差所獨生角VSA之較也.此角度在徑數十秒之圓周,故甚微而測之甚難焉.此外又有測器差.器之質暑則漲大,寒則縮小.器所憑依之石墩及地亦因寒暑而變,生極微之側動,垂線準及諸平準俱不能覺.凡此諸差皆與測望之差相雜糅.然久測用其中數自能消去.而又有蒙氣差每夜不同,蓋逐層之地氣四時冷熱異,蒙氣差亦隨之而變.測恆星視差如此其難焉.各星光行差星行之視道(Abberrational orbit)其大小恆不變,視差星行之視道(Parallactic orbit)（簡稱視差道）隨星之遠近而異.且星在視差道內之位置,恆與地球相對,而在光行差道內

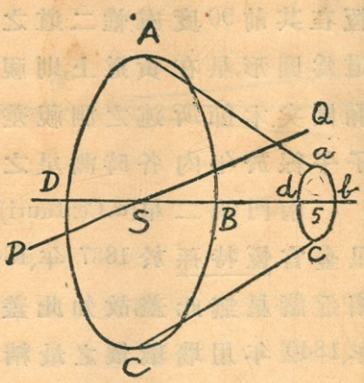


第二八六圖

恆在其前90度處,惟二道之視形皆隨星之所在而異.星在黃極道爲圓形,星在黃道上,則視若短直線,在二者中間各處,則視若橢圓矣.本節所述之測視差法,名曰單測法(Absolute method),乃依子午線於年內各時測星之赤經緯去其各項差而考其位置也.

南門第二星(α Centauri)爲南半球諸星中之最明者.好望角星臺官恆特孫於1837年、1840年中,累測此星,推得視差一秒.測相近諸星無此差,故知此差非因寒暑而生焉.後馬格釐於1839年、1840年用墻環儀之最精者復測而推之,所得略小,爲0.9128,約近11分秒之10.然較1秒所差甚微,不可謂一定,故大略仍可言一秒也.此星視差數未流傳之前,哥寧堡星臺官白塞爾言赤經315度10分15秒,赤緯38度4分17秒,星名61 Cygni者(卽天津增二十九)視差可推.係六等星,然覺其有自行,每年五秒强,較他星一年之小差甚大.則距我地必較近,故曰視差易測也.前南門第二星亦有自行每年4秒,恆特孫亦因此而測其視差云.1837年秋,哥甯堡星臺最精之量日鏡成,白塞爾卽以此鏡測天津增二十九.用新測法,其命意極精,故測較易而得數更密.凡二星之視線略相近而距日遠近大不同名視雙星,非實雙星也.此二星所有光行差、歲差、章動差、蒙氣差及測器諸差俱略同,可不必細推.惟地道半徑視差不同,因視差與距日數有反比例故也.故一歲中因視差所成之小橢圜,亦大小不同.若逐時測二星之相距及聯線方位,卽可得其視差.不必用赤經及距極數,但以雙星之遠者爲主,而測近者在一年中與之相距遠近及方位卽得,上諸差俱不相涉也.此法名曰分測法(Differential method),所得者乃二星視差之較也.二星與日之方位既略同,則二小橢圜必相似且等勢.如Ss爲從日所見二星之方位,$ABCD$、$abcd$爲因視差所成之二橢圜,二星在其周,其方位恆同.如近星在A,遠星必

在 a 地行一象限，二星必在 B、b，又行一象限，二星在 C、c，又行一象限，二星在 D、d。二星距日不等，故二楕圓大小不等，Aa、Cc 二線不能平行，Bb、Dd 二線不能相等，故二星距分之大小及方向逐時不同。用量微器細測之，可得其一定之變。此須用最精雙象量微器量日鏡，則測時雖或因光差或因器動二星之視體刻刻移，然二星同移，與相與之方位無關也。又量日鏡之界大於尋常量微器，故可取一大星與相近數小星比較。白塞爾測天津增二十九用相近二星，一爲 s' 距本星 7 分 42 秒，一爲 s'' 距本星 11 分 46 秒。本星與二星之聯線略成直角。故 Ss' Ss'' 二距變大變小不同時，當此距不變時，彼距之變最速。每隔三月，彼此適相反。測其距之變推得本星與餘一星二視差之較約三分秒之一。累測所得恆同，可不疑。因推得此星之視差爲 0.348 秒，其距我地約三倍一秒視差之星。其後卜爾寇瓦星臺官彼得復測之，得數與前合。織女第一星相近有微星，其距 43 秒。斯得路佛自 1835 年後用雙象量微器屢測之，考覈甚嚴，知大星之視差僅 4 分秒之 1。雖小於天津增二十九，然測器甚精妙，測法又巧，故 1835、1836 兩年中纔測五夜即得之。後累測盡 18 年俱合。彼得復測之，得數亦同。初耶紀 1781 年侯失勒維廉定此測法，謂於天學必有裨益。然此時量微器未精，又有他故，久測未合。其後善用此法，始於斯得路佛。



第二八七圖

設 Ss 二星相距甚近，則其方位之差角必甚大，即 Aa、Cc 二線之交角也。如二星相距 15 秒，視差之較 8 分秒之一，方位之差

角必半度.又如二星相距5秒,視差之較一秒,方位之差角11度.二星相距愈近,則方差角愈大.此法路得色利測多星用之,大有裨益.溥立洽 (Pritchard) 於1886年首用數星之攝影考測視差,較用量微器量日鏡簡便多矣.

上述古人測視差之法,其得數與表卯表辰所列者,頗有不同,蓋彼時器不精也.此外有用分光器推定恆星視差之法,茲略述之.

若聯星之周期及其軌道視大小之秒數,均已確定,且其軌道面正向太陽,可用分光器量定其在視線上之速度(徑行速度).無論在軌道何點,須間日量計之,次數以多爲妙.由是可計算其軌道眞大小之英里數.合此英里數及視大小之秒數,得在星之距離處一秒弧之英里數.由此數卽可推得星之視差及遠度矣.耶紀1905年力克星臺員來特 (Wright) 氏曾用此法,在南美洲測南門二之視差爲0.76秒,與他法所得者相同.然聯星軌道之被確定者,在今日爲數不多,故用此法之機會甚少也.

尙有利用彩色帶間接測定恆星遠度之法,其法最適於遠星,故尤爲重要.蓋比較二彩色帶中某對亮線之相對强度,可知星之絕對光等(Absolute magnitude)也.所謂絕對等級者,乃假想該星移至規定之遠處(32.6光年處)所見其光度之等級也.既知該星之光等級,又知其絕對光等,則實在之遠度可以求矣.

§476. 恆星距離之單位(光年)　既能量定星之視差道,則星之去地距離,可由下式求之:

$$D=\frac{206265\,R}{p}.$$

R乃日地距離之英里數,p爲星視差之秒數.以里爲單位嫌其過小,故以日地距爲單位,是曰天文單位;然仍嫌其小,故近多以光行一年之距離爲單位,名曰光年(Light year).一光年約爲日

地距之63000倍.星之視差爲 1 秒者,其距離爲 3.26 光年.故以光年計星之距離,可用下式求之:

$$D_y = \frac{3.26}{p}.$$

3.26 光年之距離稱曰星里(Parsec). 1000000 星里稱曰大星里(Mega-parsec),乃用以量計螺旋星雲之距離者也.星里亦曰秒差距.

附列之表載有星之視差光年自行及徑行,較昔時所推得者稍爲精密.

§477. 星之絕對光等 星之絕對光等(Absolute magnitude)乃將星移至10星里處所應見之光度也.在此計法,日之絕對光等爲4.7,卽將日移至10星里處,僅見約如五等星之光也.

§478. 星之眞徑,光度及實光 既得地道半徑視差,星之遠近已知,次當測其實體之大小.然遠鏡所見星之體乃光線所成之假體,非眞體也.故用大小不等數遠鏡測星之體不同.鏡愈大星體愈小.最明之星其體爲最小之點.故月掩恆星霎時而隱,無初虧食既次第也.若遠鏡所見爲眞體,不當如是.設太陽移遠至地道半徑視差 1 秒之處,則今所見32分 4 秒之視徑,必變小爲0.0093秒$\left(=\frac{1924''}{206265}\right)$,不滿一百分秒之一,則遠鏡雖極精必不能察其眞體矣.故星體大小無從測,僅能測其光度,而以其遠近推得其實光.測光用三稜玻璃法,太陽光太大不能與星比較,故用月之光爲本率.昔曾以南門第二星與月光比較十一次,取其中數,推得望時月與本星之二光度比若27408與 1 比.而武喇斯頓(Wollaston)用精法測得日月二光度比若 801072 與 1 比.合二比例得日與本星二光度比若 21955780000 强與 1 比.乃以本星之視差推得其實光與太陽實光比若 2.3247 與 1 比,卽二者在同

遠處我見其光度之比也.此乃舊時推測之數.後又測得亮星織女一光度爲日光度之$\frac{1}{4\times10^{10}}$.天狼星之光度,約爲織女一之六倍,故在地見其光度爲$\frac{1}{7\times10^{9}}$日光度.標準一等星之光度可作爲織女一之半,爲日光度之$\frac{1}{8\times10^{10}}$,遂使在絕對光等尺度日之光度爲-26.3.六等星之光度爲一等星之$\frac{1}{100}$,是須8×10^{12}個六等星之光度方等於日光度也.以星之視差及其光度與日之比,推星與日實光之比,所用公式爲

$$L=lD^2=4\times10^9D_y^2.$$

D爲以天文單位量計之距離,D_y爲以光年量計之距離,l爲在地所見該星之光度與所見日光度之比數,L乃該星實發之光量與日實光量之比數也.以附表所列之視差及頃言之光度比推之,則得天狼爲日實光之40倍.上之推算乃將星移至日處而比其實光.所謂星之實光者,乃星之發光本領(Luminosity),簡稱光力,亦曰實光度.將星之光等變爲絕對光等,可用下式推二星實光之比:

$$log\frac{L_2}{L_1}=0.4(M_1-M_2).$$

L及M乃星之實光及絕對光等.日之光等現改爲-26.72,天狼之光等及視差現改爲-1.58及0.371,推得天狼實光爲日之27倍.

1920年海爾(Hale)及辟思(Pease)二人用米克爾申(Michelson)創作之干涉器(Interferometer)及100英寸回光鏡在威爾遜山頂量定參宿四(Betelgeuze)之直徑,算得其容積爲日之五千萬倍.1927年測得其質量僅爲日之50倍.1928年測得其大氣之密度約爲日之百倍.是星之大小亦有量法矣.

§479. 變星 恆星雖甚遠,然亦有攝力之理與我諸行星相同,此非臆說也.諸恆星中或有光變明變暗有一定周時者甚者有光消盡而復生者,此類星名曰變星.現分變星爲六種,茲分述之:

(一)星光漸次變化者 此類恆星爲數不多,現所知者約12顆.如北河二、北河三(Castor及Pollux)二星,拜亞(Bayer)於1610年定星等時前者較明,今則後者較明,是其中必有一星變亮或變暗者,乃其例也.

(二)星光忽明忽暗變化無常者 南半球海山第二星(η Argus)其光度之變屬於此類.1677年海利測爲四等星;1751年拉該勒(Lacaille)測爲二等星;1811年至1815年俱爲四等星;1822年至1826年又爲二等星;1827年2月1日卜直勒見其變大爲一等星,與十字架第四等明,復漸暗爲二等星,盡1837年冬;至1838年春復變大爲一等大星,略與南門第二星等明,惟不及天狼、老人,後復漸小,然仍爲一等;至1843年春又變大,明過老人,惟少遜於天狼耳.凡變星俱有一定周時,其漸明漸暗俱有法.而此星若任意變大小,歷測數百年未有一定之次第.其忽明忽暗,究屬何理.設有動植諸物藉其光熱而生,必甚不便也.此非妄論,蓋意諸恆星皆爲太陽,俱有行星繞之,而行星上必生諸物也.證以察地家言,知亘古以前我地球有大變化,非海陸變遷所可比.蓋日之光熱若有變,地質必隨之而變.故知此星所屬諸行星上之物,必大不安也.又該星正在一星雲之中間,或者助其變幻有如此耶.阿波得云此星在1863年4月僅爲六等星.羅密士(Loomis)以其變有一定之周時,其二次最小之期間約70年.此星至19世紀初,光又增長.

此外如參宿四(α Orionis)、帝座(α Herculis)、王良四(α Cassiopeiae),

皆屬此類.光之變限不超過等級,變期不出三年.此類星數甚多,見於變星表者,亦不爲少矣.

參宿第四星1836至1840年其變顯然.1840至1848年不甚可辨.至1848年終時其變又起.至1852年11月30日參宿第四星比五車第二星更明,當時爲北半球諸星之最大者.

(三)星光突現繼而復隱古稱客星者　古今史志所載客星,卽此類變星也.但其見時甚暫,而不見之時甚久,意其復見必有一定之時.古今測望僅一見而未再見,故未能知,蓋其周甚長也.此類星現所知不過十數顆,茲略述之:(1)耶紀前125年有客星見,日中不隱,依巴谷因此創作恆星表.(2)389年近河鼓第二星有客星見,在天鷹座(Aquilae)中,歷二旬明如金星而隱.(3)又945年、1264年、1572年皆有客星,俱在王良造父之間,在仙女座(Cassiopeiae)中,考其年數相距略同,恐卽一星也.約312年或156年一見.在1572年11月時其見驟,非由小漸大.其見之夜第谷由化學館歸路見村人羣聚望一星,第谷亦望之,見明如天狼,半時前尙未有也.於是逐夜測之,其光度漸大,過於木星,正午不隱,歷一月漸小,至1574年春始隱.(4)1604年刻白爾見有客星現於逐蛇星座(Serpentarius)(天市垣),明與前星同,至明秋始隱.(5)然孫於耶紀1600年見天鵝座(Cygnus)中有一變星,疑卽天津增九也.(6)1670年安得林(Anthelm)見近漸臺有一三等星隱而復見,歷二年其光數次大變,後隱不復見.(7)1848年4月28日欣特見近逐蛇星座(近天市垣宋)有一五等星,其赤經252度45分22.5秒,距極102度39分14秒.此處星俱最小,欣特所常測,知初5日以前無大如九十等之星.考古表此處亦無星.此星見後光漸減,未幾而隱.其色紅,或因高度小蒙氣厚故耳.(8)敖渥於1860年見天蝎座(Scorpis)星團中現一變星.(9)

1866 年 5 月 12 日敖渥(Auwers)在愛爾蘭之都安新見近貫索第七星(在北冕座中)有二等星速變小.黑京於是年 5 月 14 日見其如三六等,1 日見如四二等,16 日見如四九等,17 日見如五三等,18 日見如五七等,19 日見如六二等.小至十等,則又變大.10 月 5 日賜密特見爲七等.依是年之星表赤經 16 時 3 刻 9 分距北極 63 度 42 分.該星在最明時之彩色帶有强亮之氫氣亮線,並有二式顯明正負二質之線,指有火炎及吸收光線之質.(10)耶紀 1876 年在天鷹座中見一變星,於 11 月 24 日明至與二等星相捋,約經一、二日光漸減.約一月而隱,然以遠鏡望之,光同於 15 等星.於其最明時,得有連續彩色帶雜以氫氣亮線,及不知物質之線條,逐漸失其連續性質,終至變爲三亮線之單純彩色帶如星雲者然.(11)耶紀 1885 年有一變星.光不過六等半,星正在仙女座大星雲中間,去星雲核僅 12 秒.忽然而見,歷六月逐漸而隱,雖以大遠鏡亦不得見矣.(12)耶紀 1892 年 1 月在御夫座(Auriga)中見一變星,在最明時(約 2 月 5 日)爲一4.5 等星.其彩色帶極特別,有極多亮線,尤以氫氣亮線爲最多,並間以同質之暗線.此亮暗諸線彼此交換位置,一若由於兩種或多種不同質量之氣體相互移動者然.其相與之移動約似每秒 500 英里.亮線之質背我而去,暗線之質向我而來.至秋此星低至 11 等,復又明至 9 等,其彩色帶乃幾同於行星星雲者.但至 1903 年,據康倍爾(Campell)云已變爲單純之連續彩色帶矣.(13)耶紀 1901 年約 2 月 20 日在大將座(Perseus)中見一新星 Nova Parsei 爲刻白爾客星以來之最亮者.在 2 月 21 日約如極星之亮,至 19 日乃次於 12 等.不出三日,其明竟增 25000 倍.在 22 日爲天空最明之星,僅遜於天狼耳.如此約歷數時,乃漸紅而與大角相若.自是明愈減,至五月幾非肉眼所能見.從此明之減愈緩,至 1908 年,在大遠

鏡中見其尙爲12等或13等星也.(14)1903年1月特諾(Turner)在雙子座中見有一新星Nova Geminorum爲一8等星.(15)1918年6月8號天鷹座中見一新星Nova Aquila,初時明同於織女一,次夜捋於天狼,漸次減弱而沒.

馬端臨文獻通考所載客星,意大半是彗.然其中亦有眞客星.如云漢熹平二年十月癸亥客星在南門中,五色,至後年六月消,此必客星也.又宋大中祥符4年(耶紀1011年)正月丁丑客星見南斗魁前,意卽西史(1012年)所見者.西史言在南半球歷三月最明,其經緯度與馬氏所載合.又漢元光元年(耶紀134年)六月客星見於房,或卽依巴谷所見之星也.

(四)星光依較長之周期變化,其周期有2月者,有長至2年者　此類變星光度由弱而漸强,復由强而漸弱,而成一周期.如此連續不已.蒭藁增二(O Ceti),1596年法必修(Fabricius)覺其爲變星.大率11年中明暗12次.其周時331日15時7分.其最明之時約半月,時或與二等大星相若.乃漸暗約三月而目不能見.約5月而復見.乃漸明約三月而復最明.但每次最明光度非恆同.其變大變小,亦無一定次第.每二次最明相距之時亦無定.近代阿幾蘭德詳考測簿知一切有定期,88周而復初.周時之最長最短差至25日.最明時之光度變大變小,意亦有一定.又赫佛流言此星自1672至1776年俱不見.1839年10月5日爲最明,大於天困第一星與五車第三星等.近最小之時其色白,後變爲深紅.此星在最明時之彩色帶亮線極多,且有氫氦亮線.此類星約有數百,其周期約一年左右.

(五)星光依較短之周期變化,其周期有數時者,有至三星期者　此類變星周期雖短,而光之增減時時不停.多在一周期中有二或三次光度最小之時.其彩色帶暗亮線相間,互移位置,頗

形複雜.天桴四(η Aquilae)及漸台二(β Lyrae)爲此類之代表.

漸台第二星,歌特歷格於1784年始測之.其周時六日九時至十一時,言人人殊.其光自明至暗有大變.阿幾蘭德復細測之,謂其周時實十二日二十一時五十三分十秒.每周之變有二次最明二次最暗.二最明俱爲三、四等,二最暗一爲三、四等,一爲四、五等.其周時每次不等,亦須久而復初.自1784年後,其周時恆變大,而變大之比例漸小至1840年而止.自此以後恆變小.準阿幾蘭德所推此星最暗之限在1846年1月3日0時9分53秒(G. M. T.).

天桴第四星,必哥得於1784年測知爲變星.其周時爲7日4時13分53秒.其漸變明歷57時,漸變暗歷115時.最明爲四、三等,最暗爲五等.

造父第一星亦有明暗.自暗變明1日14時,自明變暗3日19時.其周時爲5日8時47分39.5秒.最明時爲三、四等,最暗時爲五等.歌特歷格於1784年始測之.自此至今,屢測俱同.

(六)星光似爲暗星所掩,時隱時現,依周期而變化者　此類變星光度强盛之時多,衰弱之時少.偶爲附近暗星所掩,則光度大減,呈星食現象.此類星之周期均甚短,約由4時以至13日5時,大陵第五星(β Persei)爲其代表.

大陵第五星最明時若二等星,歷二日十三時三十分忽漸暗,約三時半而僅若四等星,歷約十五分乃漸明,歷三時半復如初.其周時爲二日二十時四十八分五十八秒五.1782年歌特歷格初測得其數,自此以後,屢有人測之,覺其周時漸小.阿幾蘭德、海斯(Heis)、賜密特(Schmidt)三人俱言其變無一定比例,而其比例恆變速,意後當復變遲,若干周而復初,必有一定也.

自1900年以來,變星發見者甚多.遠鏡能見者,約在數萬以

上;肉眼能見者,亦有六千餘.就中70餘爲早已深知者.

§480. 恆星之彩色帶　耶紀1824年弗洛音侯佛(Fraunhofer)於小遠鏡之物鏡前置一三稜鏡考查星光,置一圓柱透鏡於目鏡內以擴大其彩色帶,否則僅爲一線耳.伊查得天狼北河二等星之彩色帶暗線不多但極强,而北河三、五車二則與日之彩色帶相似.

1864年分光器造成,黑京及塞岐二氏乃從事研究.黑京考查之星甚少,然注其全力,故頗精詳.而塞岐(Secchi)則用力小之器,考查數千星之彩色帶,用以別其異同而分其類.

黑京查參四及畢五之彩色帶,確有地球上所常見之元素(Elements),就中尤多爲日彩色帶之主要部分.在前一星則有鈉、鎂、鈣、鐵、鉍、氫等元素.在後一星更有碲(Tellurium)、銻(Antimony)及水銀.

塞岐將其所考4000星之彩色帶,分爲四類.所分雖非完美,然頗爲多家所採用,其類如下:

(一)第一類爲白色或藍色星之彩色帶,氫氣線最强,寬而成朦朧不清之寬條紋(Bands),是其特徵.此類線頗似日彩色帶之H及K線.其餘他類線皆甚弱,或竟不見.星之屬此類者,佔其所考全數之半.天狼、織女一,其代表也.

(二)第二類星之彩色帶與日相似,H及K線均極强.五車二、北河三,其代表也.此類星亦甚多,合前類之星約佔所考全數之八分之七.有許多星如南河三(Procyon)、河鼓二(α Aquilae),氫線甚强,間以許多他類之線,實介於前類與此類之間者.

(三)第三類紅色星及變星之大部(約500顆)皆屬之.其彩色帶有暗色條紋,是其特徵.此條紋由藍色端向紅色端逐漸模糊,其來源現尚不知.帝座、參四、天困十三,其代表也.有時此類

星彩色帶之氫線有甚亮者.

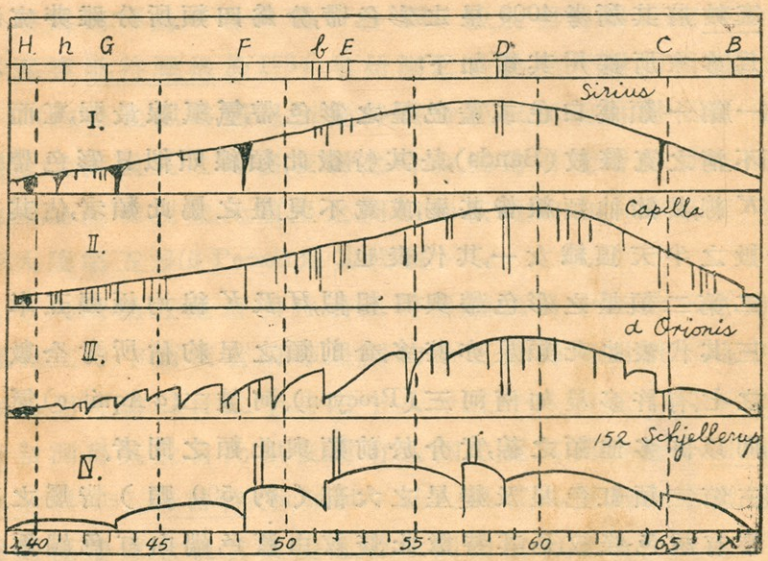
(四)第四類星數甚少（不足六十），皆爲紅色之小星.其彩色帶亦成條紋,惟向藍色端逐漸模糊（或因有炭素之故），有時亦雜以亮線.五等以上之星無屬此類者.152 Schjellerup（一六等星其赤經緯爲12時40分,+45度59分）乃其代表也.

皮克靈增一第五類,而以渥爾夫雷亞特之諸星(Wolf-Rayet stars)屬之.此類星有一種條紋間亮線之特異彩色帶.此類星現所知者約有70,光均微弱,且全在天河界,而近馬哥蘭尼克雲(Magellanic clouds),尙爲星學中待解之一事也.

莆哥兒改爲三大類,而每大類,再分小類.

(一)(1)如塞岐之(I)白色星屬之.

(2)連續彩色帶無線可分,或線光均微弱,參七(β Orionis)屬此類.



第二八八圖 塞岐四類彩色帶

(3)有氫氣亮線亦有鈣線D_3.

(二)(1)如塞岐之(II).

(2)與本類之(1)相似,但其亮線非氫線亦非氦線(渥爾夫雷亞特之諸星屬之).

(三)(1)如塞岐之(III).

(2)如塞岐之(IV).

弗哥兒之分類,假設白色星爲最亮最年幼之星,皆非確論.且紅色星究較白色星爲年長,抑爲年幼,實難斷定.故今之關於星之年齡,尙無充足智識也.

§481. 雙星及聚星(Double及Multiple stars)　恆星中多雙星,尤可爲攝力之證.何謂雙星,目視之爲一星,以遠鏡測之,則爲甚相近之二星.若統天空止有二、三星如是,則或偶然耳.今甚多,且或二星大小略等,此必有相聯屬之理焉.如北河第二星以大力遠鏡測之爲兩三等星,相距五秒.三等星不多,故相距甚近非偶然.況有多星皆如是,則更非偶然矣.1767年有密者勒(Mitchell)者,曾推昴宿最亮第六星甚近合,考其偶然與否,以相等之1500星推得當如是相近,與不當之比若1與500000之比.斯得路佛設雙星相距4秒,以本國所見七等以上諸星推其當如是與不當之比若1與9578之比.此時已得雙星91,後測得更多.且有三合者.再推當三合與不當之比若1與173524之比.水位第四星(ζ Cancri)乃三合星也.故知諸星必有相聯屬之理,非偶然矣.又南門第二星及天津增二十九皆爲雙星,相距15秒.而天津增二十九爲兩七等星,其當不當之比爲1與9578.南門第二星爲兩二等星.統天空二等星不過五、六十,則其當不當之比例當更大.又此二星各有自行,若非相屬,則久必相離矣.古測不知其爲雙星.1751年拉該勒用約九倍力之遠鏡測之始知.設一星行一

星不行,此時當相離 6 分而仍如故,故知其相聯屬也.

侯失勒維廉作雙星表共五百,相距最遠不滿32秒.斯得路佛用精器測,所得之數五倍之.後人屢測,所得益多;然必尙有未測得者.斯得路佛依其相距遠近分爲八類:第一類不過一秒;第二類一秒至二秒;第三類二秒至四秒;第四類四秒至八秒;第五類八秒至十二秒;第六類十二秒至十六秒;第七類十六秒至二十四秒;第八類二十四秒至三十二秒.又依其光度大小分爲二大類.以 8.25 等以上諸星爲顯雙星,中等遠鏡能見之.以下諸星爲微雙星,非最精遠鏡不能見也.欲測第幾類星當用若干力遠鏡.今每類取數顯星爲例,列於後,依其例測之,可考遠鏡之力.今遠鏡力增大,故雙星數亦增至一萬六千以上,相距有近至$\frac{1}{4}$秒者

第一類 0 至一秒

貫索第五(γ Coronae Bor.)　庫樓第七(γ Centauri)
左更增第七(ε Arietis)　天紀第二(ζ Herculis)
貫索增第三(η Coronae)　天紀增第一(η Herculis)
列肆第二(λ Ophuichi)　騎官第八(π Lupi)
柱史(φ Draconis)　酒旗第三(ω Leonis)
昴宿第七(Atlas)　胃宿增第四(52 Arietis)

第二類一秒至二秒

天津第二(δ Cygni)　小斗第一(ε Chamaeleontis)
左攝提第三(ζ Boötis)　閣道第一(ι Cassiopeiae)
下台第二(ξ Ursae Majoris)　貫索增第七(σ Coronae Bor)

第三類二秒至四秒

外屏第七(α Piscium)　天囷第八(γ Ceti)
軒轅第十二(γ Leonis)　左垣上相(γ Virginis)

梗河第一(ε Boötis)　天廚第三(ε Draconis)
柳宿第五(ε Hydrae)　墳墓第一(ζ Aquarii)
參宿第一(ζ Orionis)　右垣次將(ι Leonis)
女床第三(ρ Herculis)　天槍增第四(44 Boötis)

第四類四秒至八秒

十字架第二(α Crucis)　帝座(α Herculis)
北河第二(α Geminorum)　天鐘第二(δ Geminorum)
七公增第七(ζ Coronae B)　天柱增三(κ Cephei)
左攝提增第一(ξ Boötis)　左攝提第二(π Boötis)
牛宿第六(ρ Capricorni)　海石第五(υ Argus)
九游第二(μ Eridani)　宗人第四(70 Ophiuchi)
天苑增第三(12 Eridani)

第五類八秒至十二秒

參宿第七(β Orionis)　婁宿第二(γ Arietis)
瓠瓜第二(γ Delphini)　王良第三(η Cassiopeiae)
天圍第六(θ Eridani)　伐第三(ι Orionis)
常陳第六(2 Canum Ven)

第六類十二秒至十六秒

南門第二(α Centauri)　上衞增第一(β Cephei)
房宿第四(β Scorpii)　飛魚第三(γ Volantis)
開陽(北斗六)(ζ Urs. Maj)　四瀆第四(8 Monocerotis)
天津增第二十九(61 Cygni)

第七類十六秒至二十四秒

常陳第一(α Canum Ven)　外屏第三(ζ Piscium)
天市垣徐(θ Serpentis)　礪石第三(χ Tauri)
五諸侯第五(24 Comae)

第八類二十四秒至三十二秒

天市垣魏(δ Herculis)　軒轅增二十二(ι Cancri)

天市垣晉(κ Herculis)　天柱增二(κ Cephei)

女史增一(ψ Draconis)

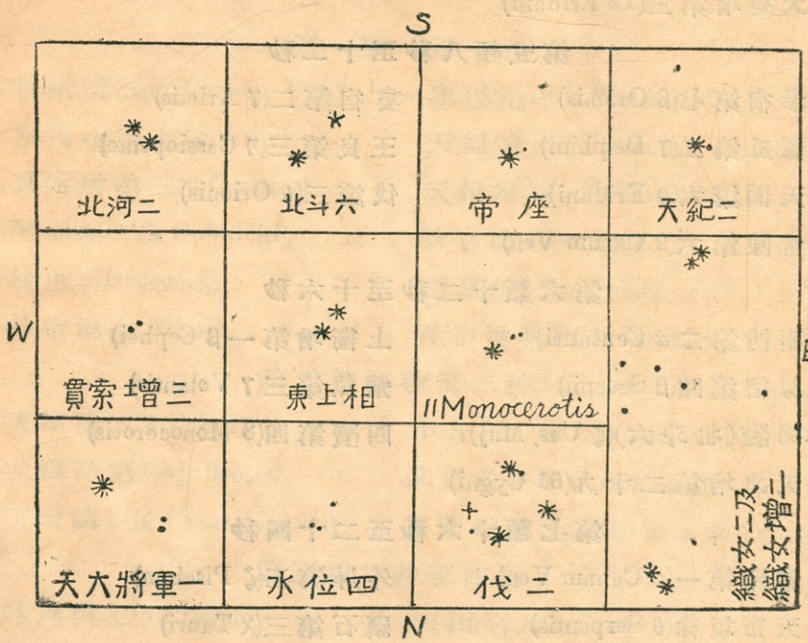
恆星又有合三星四星多星者,名曰聚星,略列數星於下:

天大將軍第一(α Andromedae)織女第二及織女增二(ε Lyrae)

水位第四(ζ Cancri)　伐第二(θ Orionis)

七公第六(ξ Scorpii)

天大將軍第一星,七公第六星,用尋常大力遠鏡測之,見爲雙星,用最精大力遠鏡測之,見其副星又分爲二星,共三星.又織女第二星爲雙星,蓋用尋常鏡測見爲雙星,用精鏡測之,見其二



第二八九圖

必過無數流星繞日道之面,一、二日始過盡,其過時,因時日甚小,流星及地球之路皆可當作直線論,又諸流星俱若用同速平行而視地若定.故從地望之,若俱從天空一公點發出,此與雲隙日光平行線之合點同理.故諸流星所行之弧線引長之俱成大圈.立冬後五、六兩夜所向之點近軒轅第十二星.立秋後二、三兩夜所發之公點恆近傳舍第七星.無論此二星與地平成何方位皆然.流星道非必與黃道同面,但設爲橢圜且兩心差無定,而各流星之速率及方向無論與地同異,其所發公點之緯度雖不同,未嘗不合理也.若諸流星勻列於此橢圜道,則地球繞日每年必一次遇之.若諸流星分作數隊,依次相隨行於橢圜道,而周時與地球不同,則或間數年一遇之.所遇之隊有疎密,故所見不同也.

近時天文家俱究心流星之理.便孫伯、勃蘭特二人,欲知其道與地道之交角,細測各流星初見至隱之時分及恆星中之方位.用底線長五萬英尺,從兩端測之,知其高從 15.8 英里至 130 餘英里不等,速率每秒中 18 英里至 34 餘英里不等.其速如是繞日無疑也.流星在離地七、八十英里處始行發光,蓋其處地氣漸濃厚,多阻力,能使之熾熱發光也.至距地 20 英里處,流星之質體已全消毀爲氣體矣.蓋流星體積甚小又非堅質,有謂其如一團塵埃雜有氣質者.

§**501. 流星羣**　1847 年 8 月 19 日有大流星羣過法蘭西提挨伯及巴黎,測如上法,土魯士星臺官白底推得其繞日之道爲雙曲線,半長徑 0.3240083,負兩心差 3.95130,最卑點距日 0.95626,與地赤道面之交角 18 度 20 分 18 秒,正交點黃經 10 度 34 分 48 秒.依此諸根推之,此流星從最近恆星天(即視差一秒之星),行 37340 年而始至也.

諸流星羣之行道,設有方向速率略與地同,而又近地,則意

必爲地攝力所留而繞地也.若爲實體能借光照地,則有時必於一剎那中見之,卽入闇虛而隱.觀白底所測,中有一疑其繞地如月.其周時 3 時 20 分,其距地心與地半徑比若 2.513 與 1 比.其距地面爲 5000 英里也.

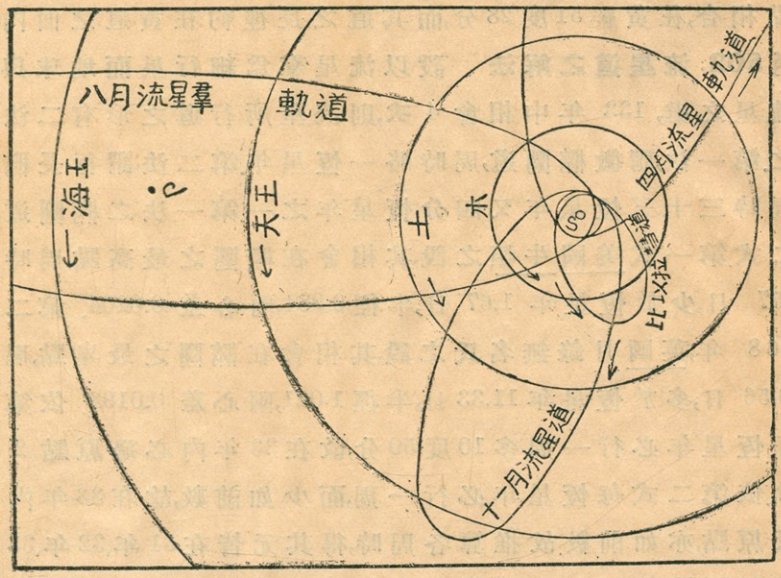
1866 年立冬後五夜見流星極多,故其後必以是年爲流星天學之元年也.其後勤於測流星之人甚多.故英國格致公會,設白來利格類失格勒格與侯失勒亞力會,合內地陸海多人,如海斯及哈定等所測,而用便孫伯.勒蘭特二人之原法,詳考獨流星顯滅之高,與速率行道.而知立冬立秋後之外,亦有依定時而見之流星,乃定流星顯滅之高及速率,而得總說如下:

(一)流星所顯之光道距地面之高至少 20 英里,至多 130 英里.其初顯時高之中數爲 69 英里,滅時高之中數爲 52 英里;故依北曉之證言雲氣之高過於 39 英里有據也.

(二)流星之速率每秒 17 英里餘至 79 英里,中數爲 34 英里,與便孫伯.勃蘭特之數合.

(三)立冬立秋後之外,最要之各隊流星,小寒前 4 日所顯者合點在赤經 234 度北赤緯 51 度,穀雨日所顯者合點在赤經 277 度北赤緯 35 度,霜降前 5 日所顯者合點在赤經 90 度北赤緯 16 度,大雪後 5 日所顯者合點在赤經 105 度北赤緯 30 度.

立冬後之流星羣,美國紐赫溫(New Heaven)之牛頓考相傳之書,知自 1833 年共有 13 次,在 902 年、934 年、1002 年、1101 年、1202 年、1366 年、1533 年、1602 年、1698 年、1799 年、1832 年、1833 年也.其間之期爲 32 年、33 年、34 年,中數爲 33 年又 4 分年之 1,卽 133 年內有 4 次. 902 年在霜降前 7 夜.以後日期移易不勻.至 1833 年則在立冬後六夜.依曆法變此年爲日數 2050799 日,與 2390867 日之較爲 340068.而 931 太陽年爲 340040 日,其較爲 28 日.故發流星



第三〇一圖

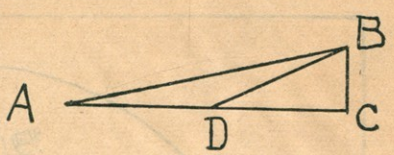
之日期在 931 年內漸移後 28 日,約每百年移後三日也.按 1799 年、1832 年、1833 年人所推算者,知在 1866 年、1867 年當再見甚多之流星,將此預傳各處使人候之.至期有驗,雖不及 1899 年時之亮而已爲甚亮.1867 年所見者則尤多.美國見其最大者,印地亞那 (Indiana) 不路明敦人,格固烏特自半夜至上午 5 時 15 分,共見 525 流星.近馬的尼島見星光如雨.在特尼塔島之舟主名赤木云,上午 2 時至天明記所見共 160 流星.巴哈馬島之那掃有武官多司多爾得,與其伴自上午 1 時至 5 時 30 分記所見共 1040 流星.彼時細考此流星之合點在黃經 142 度 35 分黃北緯 10 度 27 分,卽在軒轅第 11 第 9 之間也.彼時自太陽觀地球之黃經爲 51 度 28 分,故 1833 年因格謂合點在黃道面,推之當時必略在地道內地球所在之點切線之方向.故若以每流星爲細行星,則必逆行環繞與地道同心之平圓或橢圓.其最卑點或最高點略與

合點相合,在黃經51度28分,而其道之長徑約在黃道之面內.

§502. 流星道之解法 設以流星羣爲細行星而地球與大發流星之處,133 年中相會 4 次,則流星所行道之形有二法可解之.第一法,謂微橢圓道,周時略一恆星年.第二法,謂行長橢圓道,周時三十三恆星年又四分恆星年之一.第一法之橢圓道亦有二式.第一式美國牛頓之說,其相會在橢圓之最高點,周時爲 354.57 日,少於恆星年 1.67 日,半徑 0.981,兩心差 0.0204. 第二式 1868 年,英國月錄無名氏之說,其相會在橢圓之最卑點,周時 376.56 日,多於恆星年 11.33 日,半徑 1.021,兩心差 0.0192. 依第一式每恆星年必行一周多 10 度 50 分,故在 33 年內必過原點 2 度 30 分.依第二式每恆星年必行一周,而少如前數,故在 33 年內必不及原點,亦如前數.故推算各周時,得其元皆在 31 年、32 年、33 年及 34 年,而流星恆必略近所會之原點也.若諸流星散大至公總道闊 1 度,則幾必相會,若散大至闊 22 度,則定必相會,而幾能連有兩年相會矣.第二法意大利密蘭星臺官夏伯里利(Schiaparelli)之說,其相會甚近橢圓道之最卑點,周時 33 年又 4 分年之 1,半徑 1.034,兩心差 0.9033. 此法與前法,其相會皆在往下時之中交點也.其諸流星若散大至公總道之闊,能容地球過此交點,則歷時必多於一年,爲 133 分之 4,相會約可在所定之年,若諸流星散大之闊爲此二倍,則相會必在所定之年.若再闊則相會連有二、三年,而與古所記者相合矣.每百年移後三日之故,半因恆星年長於太陽年 1.4 日,尙有 1.6 日,乃因被他行星所攝動,而每百年交點移前 1 度 36 分,卽每年 57.6 秒.地球屢近之,攝力最大,攝動必因此也.故知必被地球攝動也.

§503. 前言流星行道第一法之二式,其速率必略同地球之速率而行與地球相逆,可知其眞交角約倍其視交角而得 20

度54分.流星行道第二法,在橢圓道之最卑點速率與地球速率比若1.371與1比.設AC爲地道,BD爲流星道,視交角BAD12度27分,



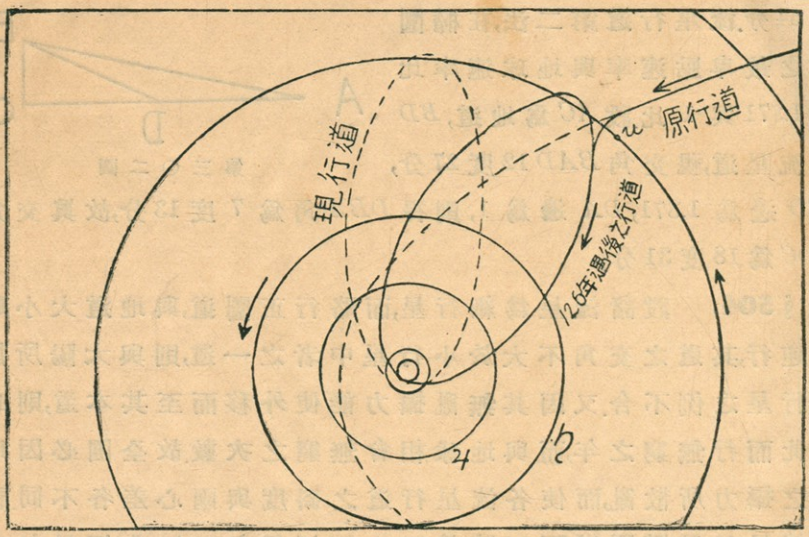
第三〇二圖

BD邊爲1.371,DA邊爲1,則得DBA角爲7度13分,故眞交角BDC爲18度31分.

§504. 設諸流星爲細行星,而略行正圓道,與地道大小略同逆行,其道之交角不大於小行星中者之一道,則與太陽所屬諸行星之例不合.又因其無亂攝力能使外移而至其本道,則必依此而行無窮之年,而與地球相會無窮之次數.故全團必因地球之攝力所散亂,而使各流星行道之斜度與兩心差各不同.設諸流星行長橢圓道,而周時爲三十三恆星年又四分恆星年之一,則似彗星之道,彗星則常有逆行也.彼得與夏伯里利同時考得但白勒(Tempel)於1865年所測之彗星,除過最卑點外,其根數與此流星盡合,列其二數如下,以比較之.

	流星道	但白勒彗星道
過最卑時	1866年11月13日	1865年1月11日
最卑點之距	0.9893 即地道之帶徑 立冬後六日	0.9765
兩心差	0.9033	0.9054
半長徑	10.34	10.334
交角	18度3分	17度18·1分
中交黃經度	51度28分	51度26.1分
周時	33.25年	33.176年
行法	逆行	逆行

觀表內之半長徑10.34,最卑點之距略爲一,則知最高點距日必19.64,稍出天王星道之外.而道面與天王星道面之交角甚



第三〇三圖

小,長徑與黃道面略合,故天王星與流星同時至二道之交處略必相遇.無論長徑之方向有變,古必已有相遇之時,後亦必有相遇之時也.惟長徑之方向未必與交點同變,尙未推算,故未能確知其變否.來未理亞另立一說云,在耶紀 126 年必已相遇.彼時天王星與流星之行俱慢於今,流星在最高點之速率與球速率比若 0.07 與 1 比,得每秒行 1.32 英里(地之速率爲 18.85 英里).故必久受天王星攝動之力,而流星道之方向大有變移,卽與古時木星攝動,勒石力彗星變之爲短時道相似也.可知流星之行古尙在外,若非天王星攝之使行於今之道,則在地球永不能見之也.夏伯里利又另立說.謂流星道之半短徑爲 0.441,其道面與地道面之交角小,故出地道面之距永不能過於 1.5 地道半徑.又思古時必已近木星或土星而受其攝動,使行於今之道也.按此說不合理,倘如此則攝力必正加於道面.而行星與流星之速率皆甚大,加力之時必甚小,所受攝動亦必甚小也.

§505. 立秋後三日之流星羣,依1868年侯失勒亞力測星所得,其合點在大陵中若其道合拋物線,則遇時速率與地行正圜當有之速率比若二之平方根與一比,此與侯氏及同測者所定之速率略同.又夏伯里利依此而推得其道之根數,知與1862年大彗星道之根數略合.列其二數如下,以比較之.

	夏伯里利推流星之根數	大彗星道之根數
過中交點	1866年8月11日	
過最卑點	1866年7月24日	1862年8月24日
最卑點黃經度	343度38分	344度41分
正交之黃經度	138度16分	137度27分
交角	64度3分	66度25分
最卑點距	0.9643	0.9626
周時		1237.4年

設不爲拋物線道而是長橢圜道,周時約123年,亦是相合.惟若每年有相遇,則或正圜或橢圜,皆必全圈有流星也.立秋後流星之合點,各人於不同年月所測者各不同,不及立冬後合點之有定.可知立秋後之流星屬太陽甚久於立冬後之流星,蓋各流星之周時必有稍異,故久則行前留後,而團聚者散開成一帶,又因地球之攝動而諸交角兩心差亦各不同,故合點不定也.立冬後之流星不如此,故合點有定也.

§506. 隕石流星羣加於地之影響

(一)隕石落地可使地增大,然其量極微小.如以地每日受隕石百噸,年受36500噸計,並以隕石比重3倍於水,則約須十萬萬年始能堆滿全地面至1英寸厚,其所加之大不亦微乎?

(二)以理推之,地受隕石及流星羣之影響,能使其周期變短,其變短之道有三:(1)其作用如一中間阻力,能減地道之大小,

間接增地之速度,如前述之因格彗然.(2)增日與地之質量,致日地間之攝力增大.(3)使地徑增大,地自轉因以變慢,日因以增長,故年之日數減少.三者合一,積一百萬年不能至$\frac{1}{1000}$秒,其影響不亦微乎?

(三)隕星作用,亦能使月之周期變短.

(四)隕星能使地球受少量之熱.

(五)隕星能使空間略微透明,若無隕星遠處星光必更薄暗.

表 *k*. 流星表

流星羣	出現時期	最多時期	輻射點	
			赤經	赤緯
	月 日 月 日	月 日	時 分	0
Quadrantids	12 28 至 1 9	1 3	15 20	+53
Aurigids	2 7 至 23	2 10	5 0	+41
Lyrids	4 16 至 22	4 21	18 4	+33
η Aquarids	4 29 至 5 8	5 4 至 6	22 32	− 2
Herculids	5 13 至 29	5 24	16 36	+30
Scorpüds	5 至 7	6 4	16 48	−21
Sagittids	6 至 7	7 28	20 12	+24
Capricornids	7 至 8	7 22	20 20	−12
δ Aquarids	7 18 至 8 12	7 28 至 31	22 36	−11
$\alpha\ \beta$ Perseids	7 至 9	8 16	3 12	+43
Perseids	7 8 至 8 25	8 11 至 12	3 4	+57
Draconis	8 18 至 25	8 23	19 24	+61
ε Perseids	8 至 9	9 15	4 8	+35
Arietids	8 至 10	9 21	2 4	+19
	9 至 10	10 15	2 4	+ 9
Orionids	10 9 至 29	10 19	6 8	+15
μ Ursids Maj.	10 至 12	11 16 至 25	10 16	+41
Taurids	11 至	11 21	4 12	+23
Leonids	11 9 至 20	11 14 至 15	10 0	+23
Andromedes	11 20 至 30	11 20 至 23	1 40	+43
Geminids	12 1 至 14	12 11	7 12	+33

表中以英仙羣(Perseids)、獅子羣(Leonids)及仙女羣(An-

dromedes) 爲最有名.英仙羣每年出現最盛,其軌道與1862年第3彗相似,周期爲120年.獅子羣之軌道與1866年但白勒彗相似,周期33年.仙女羣之軌道,則認爲與比以拉彗星相似,1872年,1885年,1898年出現最盛,近年不甚顯著.本表乃採自但寧(W.F. Denning)所著者,輻射點卽合點也.

第二十二章

宇宙創造論

§507. 現世宇宙何自而來,乃人人欲知而實難於答解之問題也.行星衞星何以至其現在之狀況,何以與日有如斯之關係,其以往之歷史如何,其將來果又如何,日何以至現在之大,在恆星界內衆天體排次序之意義及相互之關係如何,衆星雲衆星團以及衆恆星間之關係又如何,斯皆疑問而未得答解也.試入森林中,則可見各種年齡樹木之情況,有自種子初發者,有嫩如細枝者,有碩大崢嶸者,有將老而枯者,更有死幹不能復生者.如以此例彼,則將以何者爲初生,何者爲已老而將滅亡耶.在現今情況之科學,此等問題皆非所能討論.此外則有些行將得解,有些似已得解者,其解答所依之理由,概括言之,卽稀薄巨大之質量受重力之支配而團聚而凝結,因凝結致其依地位而具之蓄勢能力變化爲熱,此熱感及於物質本身,因其能力射放及於空間,並周圍之物體乃成光及熱之波動而已.

§508. 行星系 吾人之行星系非偶然之結合也.多數巨塊物質如偶然行向太陽,必將如彗星行於圓錐截面形之軌道,但其兩心差及交角必各自不同.吾人所測行星系之關係,有如下列.其所以至此者,非僅重力所能說明,尙俟其他眞理之解釋也.

(一)軌道皆幾爲圓圜.

(二)皆幾在一平面內（有些小行星是例外）.

(三)皆繞日旋轉於同一之方向.

(四)去太陽之距離依一奇異之順序（卽波得定律,惟海王星是例外）.

(五)行星之密度自土星（密度最小）起向兩方依次增進.

行星本身之關係如下:

(六)行星自轉之平面幾與公轉平面相合(天王星是例外).

(七)自轉與公轉之方向相同（天王,海王未定）.

(八)衞星公轉之平面幾與其行星之自轉平面相合.

(九)衞星自轉與其行星自轉之方向相同.

(十)最大行星自轉最速.

§509. **拉普拉瑟學說（星雲學說）**　學者多以行星系之排列,自有始以來,卽已如斯.達的(Deity)亦如此想,然此似爲不可能之解說.行星系總是以遞變而成現今之情狀,較有生以來卽如此爲可信.拉普拉瑟於百數十年前,繼司維登波哥(Swedenburg)及康特(Kant)之後,倡星雲學說.彼時能力不變定律及熱之機械力量尙未出現,其說不無錯誤之處.然其謂太陽有時變爲一塊星雲,由此一塊星雲變至現今之情狀,乃純由物理的推演而成,似近情理,而爲後世探討此事之基礎,茲述其說如下:

(一)以昔某時爲行星系史之起點（須知此非謂該時爲行星系組成之物質始生之時也）,現時成日成行星之物質,在該時爲一塊星雲.

(二)此一塊星雲爲一團白熾之熱氣,或較現時之日爲尤熱.

(三)此星雲受其本身重力之支配略成球形,繞軸自轉.如以其確是繞軸自轉,卽須假定此星雲各部在起點前已各有行動.既各有行動,苟非此諸行動完全互相抵消(此爲不可能之事),則星雲收縮時,內部必生轉動,恰如盆內之水從底孔外流,盆內水必行成水渦也.此自轉之行動隨星雲體質縮小而加大,以保其動量能率(Moment of momentum)不變.

(四)因此自轉球形之星雲,必漸爲扁球形,兩極處必變平,自

轉不息速度必漸加,必有一時在星雲赤道處之離心力等於重力而有一圈星雲物質,勢須棄去飛入空間,有如土星之光環然（本學說卽由土星光環有感而生）.

(五)此環先必整個旋轉,後乃破裂,其質復又聚爲一球.假定此環轉時如一固體之環,則外邊之行動,必速於內部.苟如此則由破碎物質聚成之質塊,其轉動之方向必同於該環以前旋轉之方向.

(六)如此作成之行星,必繞中心質量旋轉,亦必能棄去圈環而破裂而聚成衞星.

此學說恰能解答前節所列各情形之疑問.然其重大難點,卽在天王海王之衞星行動異常(逆行),以及火星內衞星戰神長子星之旋轉太速.據本學說行星或衞星繞本星公轉之時間(周期)不能較本星自轉之時間小.縱本星之半徑漲至其衞星軌道之半徑大,縱衞星公轉之周期小於本星現時自轉之周期,本星在該情況時,自轉之周期將仍變爲小於其衞星公轉之周期.如此則將何以解戰神長子星之公轉周期小於火星自轉周期.

§510. 拉普拉瑟學說之修改 科學智識進至今日之情況,故其學說有修改之必要.茲述其要者於下:

(一)或者初時之星雲較現時日之熱爲低.據雷因定律,氣體因放射作用損失其熱量而致凝聚,其溫度必隨之而高,直至其質量起始凝爲液體或固體而止.或者星雲原非純爲氣體,而有星之質點,如塵埃火烟(Fire mist).然此微質,或爲固體,或液體,分佈極勻,每一質點均永有氣體包圍.如此之星雲先能溫度增高,一如純氣質者然.故其中心質量經過若干時,能至如太陽之溫度.其液體固體之質點必隨熱度增高而化爲氣.自此情境以後,該質量之原有能力,再隨放射而喪失,則在星雲內作成之物體,

必溫度降低焉.

苟原星雲之溫度實高如拉普拉瑟所擬者,亦無大差.不過達至太陽系情境,須時較長耳.但其溫度高及純氣質之假定,實非必要也.

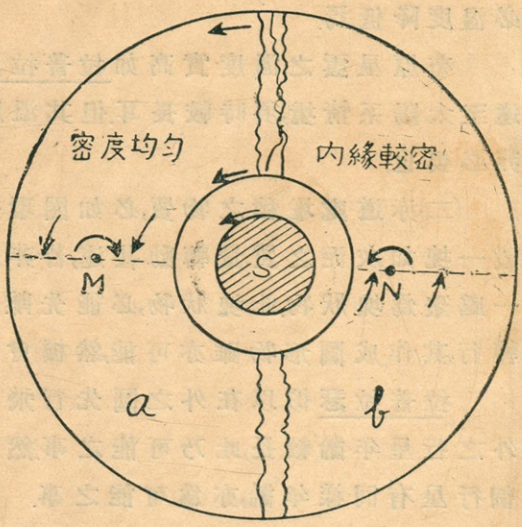
(二)赤道處堆積之物質,必如圈環拋入空間,亦似可疑之點.設一塊如灰泥之質量轉動甚速,若非絕對的均勻相稱,每多在一處聚爲塊狀物.此塊狀物,必能先離本體飛入空間,而繞本體轉行,其作成圜形物雖亦可能,然機會較少.

拉普拉瑟似以在外之圜先行飛出,其次則順序而出.故在外之行星年齡較長,此乃可能之事.然同時飛出數個圈圜,或數個行星有同樣年齡,亦爲可能之事.

(三)實際一圜作成,並不能如一固體圜,各質點均以同大之角速度旋轉,而其在外之質點行動,必較速於在內者.例如現成地球之物質,在初分佈成環時約佔金火二星相距之一半,當然約如彗星質量之稀薄.如此環圜之質點,勢難互相控制,必各奔各路,其在外之質點,正如遠在外之行星,必較在內者行動爲緩,致其周期甚長.土星光環現卽知其如此,故知拉普拉瑟假定飛成之圜圈轉動,如一固體環,在外之質點較在內者行動爲速,非必能之事也.

§511. 特洛卜立階（Trowbridge）之解釋天王海王二星之奇異自轉　由星雲收縮飛入空間之圈圜,聚結爲一質量而成一行星,其自轉之方向,須視其物質原來如何分佈而定.如圜之密度統體均勻,行星必約在圜寬之中間作成,其自轉必如天王海王星之逆轉.若圜之質點偏於內緣,行星必在近內緣處作成,其自轉必爲正轉.如第三〇四圖 a 表明前者行星在 M 處作成,其近環內緣之質點能控制其轉動,因其對於 M 點之轉動能率

(Moment of rotation) 較外緣質點之能率爲大也.故行星之自轉爲逆行.第三〇四圖 b 表明後者環之內緣密度最大,行星作在 N 處,近於內緣.在 N 外之質點比在內行動較速之質點對於 N 之轉動率爲大,因其距 N 遠也.



第三〇四圖

天王海王之衞星之所以逆轉者,亦因此故,並非拉普拉瑟學說之不可信也.

§**512.** 費易(Faye)於1884年修改星雲學說,而謂屬地行星(水金地火四星)較外行星爲年長.伊假定行星爲在星雲內各處凝結而成.在星雲中心尙未過於凝結時,各點向內之攝力必與各該點去星雲重心之距離成正比例,卽其力可以 $F=ar$ 表明之.迨物質幾全凝聚於星雲中心,攝力乃與距離平方成反比例,此卽重力定律也.其公式爲 $F=\frac{b}{r^2}$.在二者中間之時,星雲逐漸凝聚,其中心力之强度由下式表之:

$$F=ar+\frac{b}{r^2}.$$

r 爲星雲重心與中心力所加之物體相去之距離,a 及 b 爲二係數,隨星雲年齡而變.星雲漸長,則 a 漸損,而 b 漸增.當在星雲幼時,在星雲內部作成之行星(卽 a 大 b 小之時)必繞軸正轉.而當 a 小至 b 時,作成之行星必繞軸逆轉,並謂天王海王二

星乃其二例,故二星較內行星爲年幼焉.費書收集各家關於宇宙創造之討論,極爲詳細,可供參考.

若火星實熱於地球,則本學說尤覺可信.

§513. 潮動轉化學說　1885 年達爾文佐治 (George H. Darwin) 研究二體間潮動抗力 (Tidal reaction) 之影響,一爲本體,一繞本體而旋轉.假定二體皆非絕對的堅固 (Rigid),其彼此相攝力能使其物質微起潮動,此於潮汐編內業論及.達爾文由此抗力得許多疑問之答解.假如一行星及其衞星曾於一時其自轉之周期,同於其繞公重心旋轉之周期.自此時起衞星或背行星而遠去愈去愈遠,或向行星而來終復歸於本星,二者必有其一焉.迨至本星自轉之周期小於衞星公轉之周期 (此乃衞星被拋後繼續凝縮自然而生之結果),卽有使衞星增加速度之趨勢 (參見第 484 節) 而生一種作用致其漸向後退.此作用正與某種阻力攝動因格彗之作用相反,吾人之月,卽合於此例也.

若行星自轉,被一種動作所阻,而致日之時間長於衞星周期,衞星在行星上所生之潮動,將如一種阻力繼續使衞星周期縮短,恰如因格彗然.若再無他事相雜,此動作能使衞星回歸行星面上.譬如火星,因日使其生有潮動,阻其自轉,信潮動轉化理者,皆謂此動作先使行星日加長,長於衞星周期,遂致行星對衞星生一種阻動,使其周期縮短,終必引其回歸行星.

此種潮動轉化作用必極遲緩,究須若干時期方顯其效果,尙難估計.然此作用繼續不已,數千百萬年後,此微小不絕之作用,必能積至可驚人之效果也.

§514. 由日月行星之冷熱而得之證明　牛考卜曾言康特拉普拉瑟皆自一理向下推論,而有星雲學說.若以目前所見之動作向上追溯,亦必有可證明之事.從地面掘土而下,每深 50 或

60英尺,溫度昇高華氏表一度.如是則深下數英里處,其溫度必高過白熱之溫度,表面溫度既如斯之低,則或地內部正釀巨熱,或地原是極熱漸乃冷却,二者必有一是也.月面上尤多火熱作用之遺痕,而月今已極冷矣.由遠鏡見金水火等星之景象,似已如我地之冷却,而木土二星似有許多溫度猶高之現象.

日繼續發放無限熱量,而熱之來源不審何自.至今關於此事之學說,認爲合理,並與其他現象不背謬者,卽謂日爲雲氣包圍之一大白熱氣球,在其本身重力作用之下,漸次收縮,繼續變其位置之蓄勢能力(Potential energy of position)之一部爲熱之動勢能力,而致其熱乃射散於空間是也（所謂位置蓄勢能力者,乃其質點因分離情形而具之能力.當其向中心收縮時,所作之功恰同於墜落物之所作者）.或者日之溫度現仍漸增,尙未至最高之時.因尙不得確知其每年因收縮而生之熱,全放於空間,或尙留一部於質內以增其溫度,或不足射放致溫度降低也.

§515. 日體收縮之速率 日體收縮不已,乃想像之詞.縱有收縮亦已極遲緩,非直接觀測所得覺察也.人見鐘之行動,可斷定其擺錘正在下降.縱其行動極緩不可得見,亦知其非誤.若再知鐘之構造,其齒輪之配佈及各輪之齒數,卽可知每一擺動錘落一寸之若干分.再檢察鐘函量錘所能行之路程,並誌其正時之所在,更可推知該鐘於若干時前上弦（卽已行若干時）及尙有若干時之行程.推算鐘之機械誠可如此,推算太陽則未能相同.但照此法,由量度太陽每年射放之熱力,以推日體收縮之速率,可得日徑每年須縮小 200 英尺,與此收縮量相應之蓄勢能力損失方合於太陽機械一年之行動.

§516. 太陽系已往之年齡 向上追溯,假想太陽逆其程序,體積逐漸漲大,密度逐漸稀薄,直至充滿太陽系最大軌道所包

之空間.斯時也,可作太陽系起點之元,但此元究在若干年前,則無人知其確數.若假設因收縮而失之蓄勢能力,變爲熱力放於空間,各年之量俱等,且所放之熱全由此源而來,其原含之火烟物質,並未供給少量之熱,亦未由以外之來源得有熱量,則可斷定太陽以往歷史,必有五百萬至二千萬年之久.但謂太陽熱之損失均勻一致,乃不可能之事.與原星雲之溫度較,今之太陽溫度應如何高,其表面之大與所包固體質量之比應如何隨直徑縮小而增大,一思及此,則知前之假定不能合事實也.

日熱之來源或不止由於本身縮小,故太陽之年齡不止一千五百萬年,或竟長至數倍亦未可知.愷爾文爵士(Lord Kelvin)根據由地面下降溫度漸高之觀測,及岩石之傳熱力,而謂地球年齡最多已在一萬萬以至二萬萬年之久.

由星雲而形成圜圈,形成雲狀行星,須長大之時期.變成如現見之繞日轉行之物體,又須長大之時期.太陽系之降生,豈偶然哉.究竟前定太陽之年齡能容其如此轉變否,是又星雲學說所遇之難點也.

§517. 太陽系將來之壽命　以現今射放及收縮之速率推至來世,再五百萬或一千萬年後,日之密度將大至不容其現今之構造情形,而使之根本改變.其改變之甚,竟使現今地上之生物不能存在,苟無他故變其程序,太陽終必變爲黑暗堅固之球體,太陽系統爲冰冷無生氣之世界矣.以科學智識查其現今之行爲及所蓄之生活力,此乃必然之結果也.

§518. 恆星、星團及星雲　星雲學說,亦可解明恆星、星團及星雲彼此間之關係.在拉普拉瑟未成星雲學說之前,侯失勒業由連繼定律(Law of continuity)斷定星雲可進而變成星團,有時變成雙星聚星,有時變爲獨星.伊曾指明由星雲以至完成之星,

中間各種物形,天空盡有其存在者.十九世紀中葉,多謂凡星雲皆爲最遠之星團,非彼時所有之遠鏡所能分爲星而已.故侯氏所論爲衆所否認.今則由分光器證明氣質星雲迥不同於星團.侯氏所論,乃得復活.但星雲物質雖極稀薄而均勻,或者不能純爲氣質,亦許有些固體或液體之質點,懸於氣中如烟霧然.

§519. 現世宇宙局勢能否永久存在 現今宇宙局勢非能永久存在,似頗顯然.因其演進程式連續不變的向於一方,無他補救,必至於終了也.熱者失其熱力分於冷者而無酬報,勢必至全宇宙冷熱均勻溫度一致.夫熱之能工作,顯其有效能力,必其能由熱體過至冷體也.冷體之得熱乃由於熱體消費其有效能力也.是能力不斷的消費,以資工作之進行,乃得保持宇宙之生活.冷熱一致均勻,熱之流動完全停止,則有效能力爲零,無工作之可能矣.是全宇宙至於絕對的呆滯,乃勢所必然之結果也.或有其他變化釀成新天地,繼此絕世而再興,事雖可能,惟今之科學尚不足以解此.

§520. 拉克亞流星學說 拉克亞謂現今之天體,乃由隕石物質積成,非由於氣質星雲之凝聚.此說出世頗早,至拉克亞用分光器考察隕石所發之光,乃得顯著,遂以其名名之.伊自信由隕石在各種情況下之彩色帶得有彗星、星雲各樣恆星,以及北極光(Aurora borealis)、黃道光等彩色帶之解說.

伊以星雲乃流星羣(Meteoric swarms)之初步凝結其衆體尚相離甚遠,仍屢行觸撞.迨聚積不已,經長期之歷史而成爲星.溫度先漸增而至最高,後乃落至不能發光.在此期中,此星按次歷經各程,各程各有其特異之彩色帶.伊乃依其學說,分別天體彩色帶而定其種類,然未爲多數學者所認.

逢爾文佐治以算法研究,謂如有一流星羣大小堪比太陽

系,其所含之各體如落至地面之隕石,其具有速度快如隕星,此大塊如蜂集之流星羣,遠在恆星之處,視之必如一塊不散之氣質.依照氣體動力學理,氣體乃一羣份子,其行爲一如所擬流星之動作.是達爾文乃贊助拉克亞學說之一人也.

§521. 太陽系的新學說　拉普拉瑟所想像的太陽是孤獨的存在空間.雖其最鄰近的天體,亦因距離太遠,不能對其有任何影響,此乃一種很合理的假設.因在空間兩星走到可以彼此互相生有影響的距離,實爲絕少之事也.但一個孤獨存在空間的星球,似乎不能用任何可能的進化方式,解釋其系體之起源.耶紀1750年巴芬 (Buffon) 曾經提示太陽系的產生或許是另一天體(伊稱之曰流星)將太陽撞裂所致.拉普拉瑟說明其星雲假說時,曾提及巴芬的觀念,其所以遭其擯棄者,因其不能說明行星軌道之近似圓形也.此種反對理由,當然不甚健全.最近由渦狀星雲之研究,見其有一種作用正在進行,與拉普拉瑟所想像者大致相同,所不同者,祇規模相差極大耳.此原始星雲並非正在創造一個太陽,其所含之物質,實在可以造成幾萬萬個太陽,而凝聚的結果,亦非如我地球樣小體積之行星,其本身皆爲太陽,數目亦非祇八,九個,實須計以百萬.且由原始太陽之全部角度行動量,能證明原始太陽之旋轉速度,實亦不足使其破裂,縱然破裂,亦只能裂爲碎磈,不能造成一個行星系統也.故知一個孤獨的星球,自身不能產生一個太陽系.乃另開途徑,進而研究一個星球在轉化中,如偶爲另一星球接近,將有何種狀況發生,遂有所謂第二星體學說 (Second-body Theories).

耶紀1880年新錫蘭比克頓 (Bickerton) 重新提起巴芬的觀念,假設太陽系的生產由於太陽受另一星球之撞擊.其想像此種撞擊之結果,爲產生第三個星雲體,而從此星雲中凝聚成爲

如許行星.其並證明如許行星在其四周之星雲內運行時,因遇有阻力逐漸使其軌道變圓,最終乃成現今近乎圓形之軌道.十年後英國著作家普羅克特 (Proctor) 亦曾說相似之觀念.迨至1905年美國張伯倫(Chamberlain)及穆爾登略加修改前述之理,成爲所謂星子假說 (Planetesimal hypothesis). 張穆二氏揚棄二星體相撞之說法,而假設一個在太陽近旁經過的星,對於太陽發生極大之潮汐引力,因之太陽表面之通常突出部分,異常猛增,迸出之物質達到異常的高度,凝聚成若干細小之固體,卽所謂星子.星子再集合起來,最後成爲行星.

在張穆二人發表星子理論三年前,英國吉安斯 (Jeans)亦曾想到潮汐引力怎樣破裂一個星球,能否產生一個太陽系統.迨至1916年又用算學方法分析研究一個星球對於另一個星球發生強烈潮汐引力時,究竟發生何種情形.所得結果,似乎正足以推翻張伯倫及穆爾登二氏的星子說,而引起如下之一種新潮汐學說(Tidal Theory):

當兩個星球彼此接近而不接觸時,最初之影響,必是彼此互相引起潮汐現象,距離愈近潮之升亦愈高,但其彼此相過的速度,亦有相當之關係,因其速度快慢,可以決定其互相影響之時間的長短,當然亦影響於所生潮汐之高低.

渦狀星雲有兩個渦狀臂形物突出,乃其特點,亦卽其名稱所由來.其所以如此者,或原於類似的潮汐作用.而不同處,僅在星雲的旋轉,總使其物質沿星雲的赤道面向外放出物質,故較小之潮汐力應能使該物質成爲兩個對稱之臂狀突出.至於在星球狀況之下,則必須距離極近,始能將星面的物質引出,而其突出之兩個臂狀大半不能彼此相等,亦不能互相對稱,或祇有一個臂狀發生.

如果接近的程度很高,星面物質之潮浪勢必非常巨大,不能與日月在我地海面所生之潮浪相比擬.如再近一些,或竟將此如山狀之巨浪,引開了星體成爲很長的臂狀物.並且若此兩個星球重量不同,則重量較小的必將受較大的攝動.

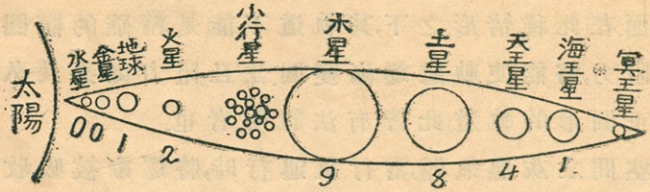
一個星球因爲受潮汐作用而發生的長臂狀體,在起初其構造尙是連續的.但因重力不平衡之結果,這個氣體長臂逐漸凝結,而小的凝結向太空飛散,大的凝結方正在逐漸增加密度.最後此長臂乃變成若干塊不相連屬之物質,乃卽從較小星球裏發生之行星也.新生出之行星成爲分離而獨立之物體以後,其開始之運動要同時受兩星球之影響,是以所取之軌道形異常複雜.後來較大之星球愈行愈遠,其影響逐漸減小,於是各行星乃祇繞着較小的星球運行.此時空間如眞空洞無物,各軌道一定全成爲純正的橢圓形.惟當行星造成時,空間所遺零星物質爲量正多,所有現今還存在的彗星流星和其他較小的物體,亦不過其中之一小部分,其主要部分大抵全是氣體灰塵之類.所以新生行星最初運行時,總在一種多少可阻礙其運動的媒介物裏面.在此種情形之下,其軌道不能是精確的橢圓形.此類性質的阻力,將能使軌道逐漸變圓.並且阻力如果長久存在,竟能促成正圓形的軌道,此皆有法證明者也.

惟空間之灰塵氣體,當行星運行時,將逐漸被吸收.經過相當時間,竟會完全消滅.結果所成軌道,總差一些不到絕對的圓形.假設太陽系裏果眞有如此情事發生,那種原始期之物質殘餘,到現今總不能存有多少.不過這種有阻力的媒介物,其存留時期,似乎已經使各行星和衞星的軌道大部分,很近於正圓形矣.特殊的情形及諧和情形,其關重要完全相同.例如現在比較長圓形的軌道,正是我們預料原始阻力媒介物最稀薄的地方.

冥王星是太陽系的最外行星,軌道便較長於其他各行星.木星和土星之衞星距離本星較遠者,軌道亦較長.此外由行星及衞星的重量大小,亦可看出軌道變長的傾向.如水星重量爲地球之25分之1,軌道極現長圓.再如火星重量爲地球之9分之1,軌道亦較長.關於此點吉弗萊(Jeffreys)曾經提出一種解釋.他以爲較重大的行星,如木星土星,必定從四周吸收較多的零星物質.在空間運行如帶着一個很大的包裹,故其所受其餘媒介物之阻力亦較大,而其軌道變圓亦快於其他較輕小之行星.此種解釋略加變更,亦能應用於各衞星之軌道.

吉弗萊曾經計算各行星之軌道,在此種有阻力之媒介中,將按何種速度變圓.其所根據之材料,因不十分確定,故所得結論,受有相當影響.但其計算結果,却使對於行星自發生迄今所歷時間長短之估計獲得可貴之證明.

太陽受另一星球之牽引,發生出一個長臂狀物體,其中段物質必較多,兩端必較少.所以此長條物質之形狀,大抵如第三〇五圖中間較粗兩端較細.因其在開始凝結時,在中間的所含



第三〇五圖

物質大概較富於在兩端者,而木星和土星地位,恰居於太陽系各行星的中間,其體積較大或卽由於此也.

第三〇五圖,卽是把太陽系的行星依照其距離太陽的遠近排成一列,體積之大小,亦約略與實際相比.如用兩線連起這些行星之上下兩面,如圖中所示,結果便成爲他們產生所自的

一個長臂形物質,物質最富的部分,正是體積最大的行星,全體頗似圓梭體形.

潮汐學說預論此事時,冥王星尚未發見.迨其發現後,仍全適合於潮汐學說之所需要者,是此學說比較的有成立之可能.

由各行星的衛星之大小及質量,以及其去本星之次序,可想見其造成之手續,必與其本星之造成屬於一類.意或行星產生後必漸冷却,大者遲而小者速.小者生後或不久卽冷縮而成液體,或竟成固體.當此冷却轉化正在進行中,此行星仍循其道繞日旋轉,日乃如向之星體對日生有潮汐作用,亦對此行星生有同樣作用,而由之引出臂狀物質,而凝結而生衛星.

算而推之,可知行星生時液質成分愈多者,愈不易於再爲氣體之日所撕裂.苟有撕裂情事發生,其本星衛星之質量,亦必相差無幾,不能如氣質成分大之行星之易於裂成小塊也.故由全體氣質之行星順序數至生後卽變成液質之行星,必見先者有多而小之衛星,乃至最末者,有少而大之衛星或竟無衛星,而太陽系衛星之情形,確是如此.

總言之,太虛氣質由混沌而轉成星雲,由星雲而轉成太陽,由太陽偶遇他星體攝引而生行星,由行星而生衛星,以成今之太陽系.

§522. 宇宙創造論之精進及新學說　宇宙內天體之組織情形,隨科學智識之增進而益明.須確知其組織,乃能推其如何創造.故宇宙創造學說亦隨科學進步而益精.茲先略述晚近與宇宙天體組織有關之新智識,次乃略述宇宙創造新學說.

(一)以地道半徑爲底線定恆星距離.

(二)由聯星之有力學理推其計以日質之重量.

(三)由彩色帶得知星之表面溫度,大氣元素,絕對光等,距離

及其增減之速率,星之大小,質量,以及自轉速率.

(1)直徑　既知星之距離,卽可知其絕對光等而推算其能力之放射總量（假設不能見之放射量爲若干）.由星之表面溫度可知其表面每單位面積之放射量.有此二數可算出星之全面積而其直徑可知矣.大星之直徑可用干涉器直接測得之.

(2)自轉　由彩色帶光線之移動,可推星去我或向我之速率,亦可推其自轉之赤道行速率.蓋星苟自轉其赤道一端之質點,必背我去而他一端者必向我來.故其半面發來之光,必移向紅色,而他半面者移向他一端,結果致使彩色帶線加寬,量其寬卽可推其赤道行速率.苟知星之大小,卽可知其自轉周期.

(3)重量　由彩色帶之有雙暗線,且此雙暗線很諧和的在其常位前後移動,可知其爲二彩色帶而所測之星爲聯星.苟此等現象,每間若干時重見一次,卽可知該時爲聯星之周期（一星繞他一星）.但如此測視僅能知星之徑行,而不知其道之實大及星之重量,因在視線垂面內之大軌道,與在視線面內之小軌道,可有同大之徑行速率也.然有一特例,苟其星之光按期而減漸仍復初者,是必二星相食,然此僅能於道面幾過我地者有之,如此則可知其道之大小並推其重量,且由相食之歷時可知二星之實大.其不能相食者,可假定其道面過地心而推其道之大小以定其重量之最小限,因聯星具某徑行速率,以其道面過地心者重量爲最小也.

(四)由變星之光變期及視光度定其距離.

造父第一星所屬之變星類,現稱曰仙王類變星 (Cepheid variables). 其光由暗而明而復漸暗,有一定規則,恰似按一定時間添定量之煤於爐火然.其光之變可資以量時間,亦可資以量距離.女士李耒 (Leavett) 倡一說,謂仙王類變星之變光周期隨

其光力（即燭光 Candle power 數）而異.謝樸勒因以倡言苟有此類之A、B二星分在天之二部而其光之變同速,其本質之光力必同大.故若二星之光視度有不同,必其距我有差也.準此,若A之視光爲B之100倍,則必B之距我10倍於A,因光度之大小與距離之平方成反比也.若有第三星C亦屬此類,其距我10倍於B,則必100倍於A矣.如此類推,可用A爲量尺以度其餘,直至同類之星遠至其光不得見,則此量尺之能事畢矣.如此量得者乃相對的距離.苟有一星屬於此類而去地甚近,可用視差法推其絕對的距離,則可以此量爲仙王類變星之標準,資以推其他同類星之絕對的距離矣.如此測得此類星之光變期與其光度之關係而成所謂光期律 (Period–luminosity law),則可製成尺度,藉以準其光變期而讀取其絕對光力.例如光變期爲40時之仙王類變星,其光力約爲日之200,即爲6.46×10^{29}燭光(日之燭光數爲3.23×10^{27}). 光變期爲10日者,其光力約爲日之1600倍,即5.17×10^{30}燭光,餘類推.若有一遠星,其光變期爲10日而與仙王類變星有同一性質,則可定其實光力爲5.17×10^{10}燭光也.若其視光度爲16等星,是等於在570英里外所見一燭光之光度.由此算得此星距我約220000$\left(=\frac{\sqrt{5.17\times10^{30}\times570^2}}{93\times10^6\times63000}\right)$光年.有此一法則視差法不能量之遠星,亦可量度矣.吉勒席茂威克 (Gerasimovic)謂此法得數只能取其百分之六十三,因此類變星之最近者,其絕對距離用視差法亦頗難確定也.

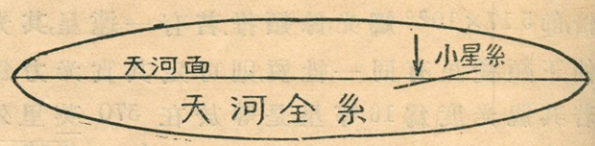
長期變星其本質光力及距離尤大,故可用以量定更遠星之距離.新星在天之各部時有發見而尤多見於天河外之星雲,其光能忽然增至1000倍以上.據察較近之新星,其最大光力略相同,均約爲日之25000倍.此類星可用以粗定星雲之距離.藍星光最强,據考屬於一類彩色帶之藍星,其光力之等第甚狹.故此

可用以定藍色星之距離.

(五)球狀星團及天河並其旋轉及重量.

謝樸勒利用光期律考查球狀星團內之仙王類變星,估計最近之星團(如ω Centauri)去我22000光年,最遠者(N. G. C. 7006)220000光年.謝氏並繪球狀星雲全系於圖,見其所估之域爲一扁球形,居於天河面之兩邊,其長徑在天河面內,二短徑甚小.日去扁球心較遠而近於邊.是以解明1911年奧克(Hinks)謂球狀星團皆在天之一方面之說.據謝氏之估計,球狀星團除N. G. C. 7006外均在以125000光年爲半徑所作之圓圈內,其心去日50000光年.

最近經多人細測,顯見所畫球狀星團全系佔領之空間,與天河相合.日在人馬座大星簇(Star cloud)中,斯乃天河中星最密處.謝氏謂此星簇之中心去日47000光年,是幾與球狀星團全系之心相合.謝氏並謂日之四圍爲一星團所包,此星團之形與全系之扁形相似,與天河面斜交成約12度之角,日去天河面僅25光年,而在該星系平面之北約150光年處.



第三〇六圖

天河實如一車輪形,苟非全系轉動,則星必被內部之重力引至輪轂處,而成混亂狀態.故龐卡累謂天河必全體旋轉星方不向內降,正如地繞日轉而不落於日也.龐氏算得天河輪之旋轉約五萬萬光年一周.

據林得卜賴得(Lindblad)等之研究,謂天河之轉非全似車輪,而與太陽系之內行星行速而外行星行緩相同.太陽系之行動不如此,其內行星不足以抗日之攝力.天河輪不如此,其居於

內圈之星不足以抗其中心攝力,故日之行動超過於其外者而爲其內者所超過.細心察之,天河輪之行動確是如此.

天河輪之轂正在謝氏所定天河心之方向內,去日約300000(卽50000×0.63)光年.故天河輪之在日處者約二萬五千萬光年轉動一周.近日之星其因天河輪之轉動而生之空間行動約每秒 140 英里.以此等已知數,可依求日或木星質量之法推天河星之重量,而得日道內全星之重約爲 110×10^9 日之質量.星多有輕於日者,故取其概數,天河全體之星數,恐不下二千萬萬個.

(六)天河外星雲.

舊說謂星雲爲遠方之星團.後多謂星雲內實無星,非與星團相同.然近年來多有發見其有星者,故又承認侯失勒之舊說,星雲實爲島宇與天河同也.威爾遜山何卜爾(Hubble)發見星雲內有仙王類變星,有新星,有長期變星,有球狀星團,是爲獨立之大宇無疑矣.

何氏由仙王類變星之變光期估計,獵戶座大星雲約去我855000光年,折爲百分之六十三,約得 540000 光年.由此距離,則知其在天河外矣.

星雲所含之星數,可以所選小面積內見得之星數爲底數,估計其全數,然亦可由重力推之.蓋星雲內最外之星,受星雲全體攝力,繞心行成軌道,一如天河全體攝力,成其最外星之軌道轉動,而保持其不外竄之力,亦必類似保持我地繞日行之力.苟誠如此,則求星雲重量之法,一如求日之重量也.依此,何氏求得獵戶座星雲之重約爲日之 3500×10^6 倍,乘以0.63約得 2000×10^6 倍.是該星雲能有平均重量之星 4000×10^6 個,縱實無此多星,而其所含之質量,實足造成此多星也.

(七)暗淡星雲.

暗淡星雲去地當更遠,前法均不足測其距離.何氏另擬一量尺.夫暗淡星雲之視光度,及所佔天空之面積,固均可量定者也.何氏謂其視光度約與所佔面積成比,故同形之星雲每單位面積之光度相等.此乃謂同形之星雲其結構相同,其視光度及大小不同者,乃僅因其去我遠近不同也.準此,乃得按其同大光力照前法製成標準,依其視光度或視大小估計其距離.如有一團星雲極暗淡,另有一單星雲甚大而形與暗淡星雲同,故知其均是同大.苟該單星雲視若10倍大,則知其近我亦必10倍.如此可以推得暗淡星雲之距離.現威爾遜山 100 英寸遠鏡能見之星雲已約有二百萬個.其分佈於天空甚勻,而其相距約1500000光年,間有爲團聚之星雲所隔者.

(八)宇宙之擴大.

暗淡星雲距我約 100×10^6 光年,則宇宙之大爲何如耶.苟將現在之 100 英寸遠鏡之口徑加倍,當能見二倍之遠,或能見八倍現所見暗淡星雲之多.愛因斯坦謂宇宙之大由其所含之質量而定,宇宙爲有限的,其表面成曲形,一如我地表面之有曲度.迪席特(De Sitter)謂宇宙因其物體彼此互離,故在擴大中.弗賴曼(Friedmann)謂愛因斯坦之宇宙不能穩定,一經產生,即行逐漸漲大,而成迪席特之宇宙,二氏之說並不抵觸.據觀測所得(何卜爾之推算)宇宙之擴大速率,約每百萬光年之距離,每秒擴大 105 英里,是每二千萬年約擴大百分之一.設其擴大率爲不變的,則自擴大初起時以複利法計算之,則宇宙必每 1434×10^6 年而倍其本.愛丁頓(Eddington)估計宇宙內之質量約 1.08×10^{22} 個太陽之多.設全宇宙滿含有物質而成,如愛因斯坦所稱之平衡的宇宙,算其大當得 1068×10^6 光年爲半徑始足容此

1.08×10^{22}個太陽之質量.若此質原是勻佈於宇宙內,則每立方公分約有10^{-27}公分物質,較現宇宙平均密度大約千倍(現今宇宙之密度由天體之重量及距離推算之,得爲水之10^{-30}倍)是宇宙之半徑,至今已擴大10倍而成10000×10^{6}光年矣.但迪席特之研究謂現之宇宙,其半徑僅1000×10^{6}光年

(九)電子、正子、中子、質子之發見,光熱作用,射散作用,以及電射作用(Radio-activity)之充分明瞭,均有補助於天文學.而天文學之精進,尤足證其不誤,蓋互爲闡明也.

(十)宇宙創造新學說(Cosmogony).

愛丁頓之估計,謂宇宙間之電子、正子、中子、質子各有10^{27}個,分在各處聚成星雲、星等體.然其何以能分聚而成此形之體耶?

(1)重力不平衡性　昔牛頓有言曰,苟物質充滿太虛頗爲均勻,每質點對其餘均有向內引動之力,且此太虛爲有限的,則在外之質必各內向,結果全質必聚於太虛中心而成一個大球體.但若此質均勻充滿於無限大之太虛,則永不能聚爲一物,必有些聚爲此體,有些聚爲彼體,結果聚成無數大物體散佈於太虛中.吉安斯於1901年用算學研究此題證明其非誤,謂宇宙實具不穩性,稍有移動,必生重力不平衡而致物質分別聚集.吉氏且能算得在重力作用下聚成體之大小.

(2)原始混沌及凝聚　設此勻分於太虛之氣質,偶有擾動生一次混沌,必破其互相攝引之平衡局勢而凝聚.其聚成大體者,攝力必大,必吸收周圍之分子,愈聚愈大至無分子可吸而止.分子飛行之速率不足抗其力者,均不能脫其羈絆.其聚成小體者,攝力必小,終不足保其分子而致散失,至其力足以保其分子而止.用算學推之,聚成體之最小重量爲$M_1=\left(\frac{1}{3}\pi\kappa\right)^{\frac{3}{2}}C^3\gamma^{-\frac{3}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}$,

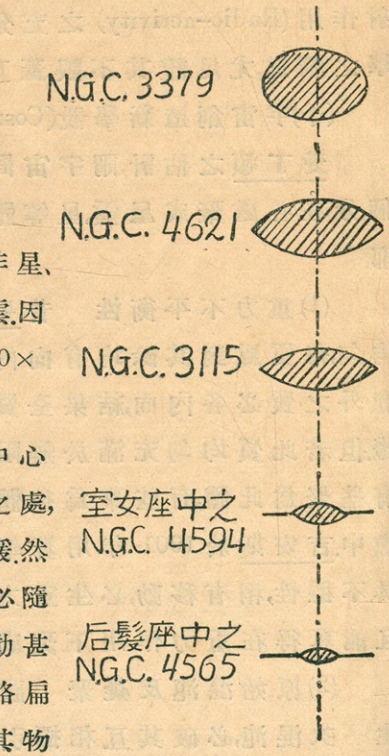
而足以保持其分子,不再散失之重爲 $M_2=\frac{3}{4\pi}C^3\gamma^{-\frac{3}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}$. 以 $\kappa=1\frac{2}{3}$,則 M_1 爲 M_2 之 9.7 倍.其 C、γ、ρ、κ 爲分子速率、重力常數、原始密度及比熱.

(3)大星雲之生及自轉　設太虛原始物質之平均密度爲 10^{-30} 公分,據吉安斯之推算凝聚之體有如下表:

分子速率（每秒碼數）	最小重量（以日質計）
500	10000000
2000	640000000
10000	1000000000

由其大可知由混沌而初聚之體非星、非日,更非行星,乃如天河外之星雲.因何氏所推獵戶座大星雲約重 3500×10^6 個太陽,堪與比擬也.

苟星雲聚成時,其質量皆向中心凝聚,其形必爲球體.但稍有不稱之處,則凝結時必生轉動.起初當然甚緩.然依角度行動量不滅定律,此轉動必隨凝縮而俱增.故星雲完成後,必轉動甚速,而各不相同也.轉動慢者,必成略扁球體,轉愈快扁度亦愈大,充其極其物質,必泄入赤道面向外展佈而成扁平體.其次序如右圖.



第三〇七圖
氣體轉動依次而成之形

(4)星之生　何氏估計此最扁二星雲之重量而推其密度,皆約爲 10^{-21} 公分(每立方公分).以此密度之氣體,如再分別凝

聚,其最小重量當如下表:

分子速度（每秒碼數）	重量（以日質計）
100	2.5
300	65
500	330
1000	2500

是星雲偶受重力不平衡之作用起而凝聚所成者,必爲恆星也.由星雲影片觀之,其泄於赤道面之質非均勻一致,似多聚集成結,竟似有聚成大結,非如一星而爲星團者.天河之形頗似旋轉之星雲,惟體大質多而旋轉速,均非其他星雲所及.或者初生此天河之星雲異常龐大,或者其所生之星年齡較高,衆星因射散作用而失質量,結果向心攝力減退,致星之行道趨向直線,而天河因以漲大也.

由混沌而生星雲時,因質之流動可致星雲有不同速之旋轉,星之生也亦必如之.且依角度行動量不滅律,此轉動之不滅必同於能力之不滅.星雲裂成星後,其星雲原具之轉動,亦必傳之於其星.故星除因凝聚時之流動而生之轉動外,復有遺傳之轉動.星之物理的情況,必因轉動而生變,而星之直徑縮小,亦其變之一也.依運動量不滅律,星體縮小其轉動必加速,故星之年齡高者轉動必快也.觀測所得,紅而大之星絕少轉動之象,藍而小之星轉動有每秒 200 英里之速者,且赤道部分尤速,是其證也.此是其外層之轉動,其內層如何則不可得見也.以理論之,長期之射散能於其外層施有制動作用,故星經過相當之時期,其外層之轉動能較內層爲緩.

星雲之不轉動者能保持其球狀形而不裂爲星,用遠鏡測

天能見其例.夫星雲固已知其轉動,由慢而快而收縮而愈快而生一族恆星矣.亦將謂星亦如此而再生星乎.以理論之當如此,惟須視其物理的情況適合與否而已.細考之,知其物理的情況至少有一不合之點.雖星亦泄氣質於其赤道面.然算而推之,苟其分子速度非異常遲緩,實無凝聚成塊之可能,除非其質量大過其星全體之重,然此乃必無之事也.是以知星具通常之分子速率,其向赤道面泄出之氣質將成大氣而不凝聚.星之爲純氣質者,其事實確是如此,其再能裂爲星者,必另有故也.

(5)聯星之生　星體不轉動者,成正球體.因轉動而成之扁球體爲轉動不甚快者之通形,與其體之內部之爲氣質,液質或泥灰狀質無涉.但轉動至速者,則受內部結構情形之影響,而重量集於中心之情狀,尤與之有關.星體之內部情形有二限.純氣質有極高之壓緊性,其質集於中心,一限也;質密均勻無壓緊性之液體(如水)不聚集於中心,一限也.在後者,轉動增速時變成扁球形,如再增速,其赤道不向外突出而失其圓形.繼亦成橢圓形,久之其最長之徑向外延長,而成長橢圓體.其質漸向兩點集聚,中間凹陷,愈陷愈深,乃切成二體,互繞而成聯星.其演進之次序如第三〇八圖,而前第三〇七圖乃氣質球體之演進次序也.

第三〇八圖　液體轉動依次而成之形

然星體不能純爲氣質或純爲液質,必在二者之間.想其演進之次序,亦必介於二者之間.惟以理論之,此非事實.蓋星體一有中心集聚,其演進必立由第三〇八圖之演進次序而變爲第三〇七圖者,故星體之轉化必恰如此二限也.

聯星產生後二體相距甚近,必互生潮汐作用,致二體攝力情形複雜而生達爾文所謂之潮阻力 (Tidal friction). 此力能使二體分離,使轉動之率等大.此作用經過數百萬年後二體自轉及互繞之公轉,其率必約等大,故二體必永以一面向其同伴.其互相轉動,恰如兩啞鈴聯以不可見之桿.日與行星雖非聯星.然水星永以一面向日,金星自轉極慢,而向日之面亦似不變,而地與火均約24時自轉一周,木土天王約10時一周,足徵二體近者必有潮阻力,距漸遠其力漸微也.地月間現所成之方位,亦必因潮阻力所致,月既被逐而去,永以一面向地,再過幾百萬年,地之自轉,亦必慢至永以一面向月,而地月之自轉公轉皆爲等率,吉夫勒估計地月成現之局勢約需4000×10^6年.約再需50000×10^6年,月日同長等於現之47日,而地永以一面向月矣.

聯星產生後必依潮阻力逐漸分離.算而推之,此力只能使其遠至其直徑數倍之大而已,過此則微至於無矣.今所見之雙星,其相距之遠此數不能比,僅此潮阻力何足以解之.二星相互攝引,當然餘力向外擴大,是必另有一新力.夫星體皆有射散作用而減其重量,此種能力亦可使聯星分離.今地去日若斯之遠,必其適合於日之重量.若日忽然失其重量之半,其攝地之力亦必減半,地必去更遠矣.日之重量不能忽然而減,故地道亦必逐漸擴大.算而推之,地道非正圓,亦非偏率小之橢圓,實如鐘表放開之簧,每年向外一步,約每百年去日增加39.37英寸.天河因星之減低重量,而向外擴展,亦此之類也.故聯星之向外分離,此亦其力之一也.夫聯星生後因攝力必行於圓道,或偏率小之橢圓,今見聯星之橢圓偏率特別大,有大至1.0者.潮阻力及重量減小之能力無論分合均不足完全解決聯星道之大,更不能變其初生時之形,是必再有一新力,而所能有者,只是由他星體行動而

來者矣.此雖非常遇之事,然偶遇他星行至其近處,必對二星生有攝力變其道之大小及形狀.此雖頗難依理考其變之次序,亦可由統計法略得其梗概.聯星道之詳情尙不深悉,然此三力合作,經潮阻力之作用,歷若干百萬年,經重量減損之作用,歷幾百萬萬年,再經其他星體走過之擾動,歷幾百萬萬年,必可致聯星有現見之距離及其軌道形也.

聯星逐漸減小重量,必逐漸縮小其體積,其形狀必歷經前述之演進,達至相當時期,必各能再裂爲聯星.

總之,自混沌以降,而星雲而恆星而聯星而再聯星實爲五世,若再聯星仍能裂爲聯星,可再增爲六世.上自大星雲下至無量可分之小星,其遞次之轉化雖皆憑理而斷,而皆能逐步由觀測證明之.惟原始之混沌不能測其爲何似,亦其性有以使之然也.前述之太陽系由混沌亦歷五世而底於成.此二者皆由重力不平衡之作用而裂生子嗣,一切較大之天體,皆不出此兩大轉化.此說實較前此諸家爲完備,或能合於自然之理耶.

附表

表一　平均蒙氣差

氣壓表29.5英寸　溫度表50度華氏

視高弧	蒙氣差	視高弧	蒙氣差	視高弧	蒙氣差	視高弧	蒙氣差
0° 00′	33′ 51″	10° 00′	5′ 13″	20° 00′	2′ 36″	35° 00′	1′ 21″
30	28 11	30	4 59	30	2 32	36 00	1 18
1 00	23 51	11 00	4 46	21 00	2 28	37 00	1 16
30	20 33	30	4 34	30	2 24	38 00	1 13
2 00	17 55	12 00	4 22	22 00	2 20	40 00	1 08
30	15 49	30	4 12	30	2 17	42 00	1 03
3 00	14 07	13 00	4 02	23 00	2 14	44 00	0 59
30	12 42	30	3 54	30	2 11	46 00	0 55
4 00	11 31	14 00	3 45	24 00	2 08	48 00	0 51
30	10 32	30	3 37	30	2 05	50 00	0 48
5 00	9 40	15 00	3 30	25 00	2 02	52 00	0 45
30	8 56	30	3 23	26 00	1 57	54 00	0 41
6 00	8 19	16 00	3 17	27 00	1 52	56 00	0 38
30	7 45	30	3 10	28 00	1 47	58 00	0 36
7 00	7 15	17 00	3 05	29 00	1 43	60 00	0 33
30	6 49	30	2 59	30 00	1 39	65 00	0 27
8 00	6 26	18 00	2 54	31 00	1 35	70 00	0 21
30	6 05	30	2 49	32 00	1 31	75 00	0 15
9 00	5 46	19 00	2 44	33 00	1 28	80 00	0 10
30	5 29	30	2 40	34 00	1 24	85 00	0 05
10 00	5 13	20 00	2 36	35 00	1 21	90 00	0 00

爲大氣溫度改正數

視高弧	溫度之高（華氏）			
	+20 度	+40 度	+60 度	+80 度
5 度	+48 秒	+16 秒	−14 秒	−40 秒
10	+26	+ 8	− 7	−22
15	+17	+ 6	− 5	−15
20	+13	+ 4	− 4	−11

表二　化恆星時爲平太陽時所用之改正數

平時＝恆星時－C'

恆星時數	改正數	分數	改正數	分數	改正數	秒數	改正數	秒數	改正數
	時 秒		秒		秒		秒		秒
1	0 9.830	1	0.164	31	5.079	1	0.003	31	0.085
2	0 19.659	2	0.328	32	5.242	2	0.005	32	0.087
3	0 29.489	3	0.491	33	5.406	3	0.008	33	0.090
4	0 39.318	4	0.655	34	5.570	4	0.011	34	0.093
5	0 49.148	5	0.819	35	5.734	5	0.014	35	0.096
6	0 58.977	6	0.983	36	5.898	6	0.016	36	0.098
7	1 8.807	7	1.147	37	6.062	7	0.019	37	0.101
8	1 18.636	8	1.311	38	6.225	8	0.022	38	0.104
9	1 28.466	9	1.474	39	6.389	9	0.025	39	0.106
10	1 38.296	10	1.638	40	6.553	10	0.027	40	0.109
11	1 48.125	11	1.802	41	6.717	11	0.030	41	0.112
12	1 57.955	12	1.966	42	6.881	12	0.033	42	0.115
13	2 7.784	13	2.130	43	7.045	13	0.035	43	0.117
14	2 17.614	14	2.294	44	7.208	14	0.038	44	0.120
15	2 27.443	15	2.457	45	7.372	15	0.041	45	0.123
16	2 37.273	16	2.621	46	7.536	16	0.044	46	0.126
17	2 47.102	17	2.785	47	7.700	17	0.046	47	0.128
18	2 56.932	18	2.949	48	7.864	18	0.049	48	0.131
19	3 6.762	19	3.113	49	8.027	19	0.052	49	0.134
20	3 16.591	20	3.277	50	8.191	20	0.055	50	0.137
21	3 26.421	21	3.440	51	8.355	21	0.057	51	0.139
22	3 36.250	22	3.604	52	8.519	22	0.060	52	0.142
23	3 46.080	23	3.768	53	8.683	23	0.063	53	0.145
24	3 55.909	24	3.932	54	8.847	24	0.066	54	0.147
		25	4.096	55	9.010	25	0.068	55	0.150
		26	4.259	56	9.174	26	0.071	56	0.153
		27	4.423	57	9.338	27	0.074	57	0.156
		28	4.587	58	9.502	28	0.076	58	0.158
		29	4.751	59	9.666	29	0.079	59	0.161
		30	4.915	60	9.830	30	0.082	60	0.164

表三　化平太陽時爲恆星時所用之改正數

恆星時＝平時＋C

平時數	改正數	分數	改正數	分數	改正數	秒數	改正數	秒數	改正數
	m s		s		s		s		s
1	0 9.856	1	0.164	31	5.093	1	0.003	31	0.085
2	0 19.713	2	0.329	32	5.257	2	0.005	32	0.088
3	0 29.569	3	0.493	33	5.421	3	0.008	33	0.090
4	0 39.426	4	0.657	34	5.585	4	0.011	34	0.093
5	0 49.282	5	0 821	35	5.750	5	0.014	35	0.096
6	0 59.139	6	0.986	36	5.914	6	0.016	36	0.099
7	1 8.995	7	1.150	37	6.078	7	0.019	37	0.101
8	1 18.852	8	1.314	38	6.242	8	0.022	38	0.104
9	1 28.708	9	1.478	39	6.407	9	0.025	39	0.107
10	1 38.565	10	1.643	40	6.571	10	0.027	40	0.110
11	1 48.421	11	1.807	41	6.735	11	0.030	41	0.112
12	1 58.278	12	1.971	42	6.900	12	0.033	42	0.115
13	2 8.134	13	2.136	43	7.064	13	5.036	43	0.118
14	2 17.991	14	2.300	44	7.228	14	0.038	44	0.120
15	2 27.847	15	2.464	45	7.392	15	0.041	45	0.123
16	2 37.704	16	2.628	46	7.557	16	0.044	46	0.126
17	2 47.560	17	2.793	47	7.721	17	0.047	47	0.129
18	2 57.417	18	2.957	48	7.885	18	0.049	48	0.131
19	3 7.273	19	3.121	49	8.049	19	0.052	49	0.134
20	3 17.129	20	3.285	50	8.214	20	0.055	50	0.137
21	3 26.986	21	3.450	51	8.378	21	0.057	51	0.140
22	3 36.842	22	3.614	52	8.542	22	0.060	52	0.142
23	3 46.699	23	3.778	53	8.707	23	0.063	53	0.145
24	3 56.555	24	3.943	54	8.871	24	0.066	54	0.148
		25	4.107	55	9.035	25	0.068	55	0.151
		26	4.271	56	9.199	26	0.071	56	0.153
		27	4.435	57	9.364	27	0.074	57	0.156
		28	4.600	58	9.528	28	0.077	58	0.160
		29	4.764	59	9.692	29	0.079	59	0.162
		30	4.928	60	9.856	30	0.082	60	0.164

表四

視差　半徑差　低角

(A) 太陽視差

太陽高弧	太陽視差
0°	9″
10	9
20	8
30	8
40	7
50	6
60	4
70	3
80	2
90	0

(B) 太陽半徑差

日期	半徑差
一月一	16′ 18″
二月一	16 16
三月一	16 10
四月一	16 02
五月一	15 54
六月一	15 48
七月一	15 46
八月一	15 47
九月一	15 53
十月一	16 01
十一月一	16 09
十二月一	16 15

(C) 海平面低角

目高英尺數	海平面低角
1	0′ 59″
2	1 23
3	1 42
4	1 58
5	2 11
6	2 24
7	2 36
8	2 46
9	2 56
10	3 06
11	3 15
12	3 24
13	3 32
14	3 40
15	3 48
16	3 55
17	4 02
18	4 09
19	4 16
20	4 23
21	4 29
22	4 36
23	4 42
24	4 48
25	4 54
26	5 00
27	5 06
28	5 11
29	5 17
30	5 22
35	5 48
40	6 12
45	6 36
50	6 56
55	7 16
60	7 35
65	7 54
70	8 12
75	8 29
80	8 46
85	9 02
90	9 18
95	9 33
100	9 48

表　五

1922年極星中天時及最大偏角時之地方民用時

北緯40度　西經90度

1922年民用日期	東偏角		上中天		西偏角		下中天	
	h	m	h	m	h	m	h	m
January 1	12	54.7	18	50.5	0	49.2	6	51.9
January 15	11	59.3	17	54.7	23	50.0	5	56.6
February 1	10	52.2	16	47.5	22	42.8	4	49.4
February 15	9	56.9	15	52.2	21	47.5	3	54.2
March 1	9	01.7	14	57.0	20	52.3	2	58.9
March 15	8	06.5	14	01.8	19	57.1	2	03.7
April 1	6	59.6	12	54.9	18	50.2	0	56.8
April 15	6	04.5	11	59.8	17	55.1	0 23	01.7 57.8
May 1	5	01.6	10	56.9	16	52.2	22	55.0
May 15	4	06.8	10	02.1	15	57.4	22	00.1
June 1	3	00.1	8	55.4	14	50.7	20	53.5
June 15	2	05.3	8	00.6	13	55.9	19	58.6
July 1	1	02.7	6	58.0	12	53.3	18	56.0
July 15	0	07.9	6	03.2	11	58.5	18	01.3
August 1	22	57.5	4	56.7	10	52.0	16	54.7
August 15	22	02.7	4	01.9	9	57.2	15	59.9
September 1	20	56.1	2	55.3	8	50.6	14	53.3
September 15	20	01.2	2	00.4	7	55.7	13	58.5
October 1	18	58.4	0	57.6	6	52.9	12	55.7
October 15	18	03.4	0 23	02.8 58.7	5	57.9	12	00.7
November 1	16	56.6	22	51.9	4	51.1	10	53.8
November 15	16	01.5	21	56.8	3	56.0	9	58.7
December 1	14	58.5	20	53.8	2	53.0	8	55.7
December 15	14	03.2	19	58.5	1	57.7	8	00.5

(A)化表列之數爲在其他年之數.

化爲1923年　須加1.4分.

化爲1924年　3月1日前　須加2.8分.
　　3月1日及以後須減1.1分(2.8−3.9).

化爲1925年 須加0.2分.

化爲1926年 須加1.5分.

化爲1927年 須加2.7分.

化爲1928年 3月1日前 須加4.1分.
3月1日及以後須加0.2分(4.1—3.9).

化爲1929年 須加1.6分.

化爲1930年 須加3.1分.

化爲1931年 須加4.5分.

化爲1932年 3月1日前 須加5.9分.
3月1日及以後須加2.0分(5.9—3.9).

化爲1933年 須加3.4分.

化爲1934年 須加4.8分.

化爲1935年 須加6.2分.

化爲1936年 3月1日前 須加7.6分.
3月1日及以後須加3.7分(7.6—3.9).

化爲1937年 須加5.1分.

(*B*)化表列數爲在各月其他時日之數,須由表列數減去下數.

月之時日	分數	經歷日數	月之時日	分數	經歷日數
2或16	3.9	1	10或24	35.9	9
3 17	7.8	2	11 25	39.2	10
4 18	11.8	3	12 26	43.1	11
5 19	15.7	4	13 27	47.0	12
6 20	19.6	5	14 28	51.0	13
7 21	23.5	6	29	54.9	14
8 22	27.4	7	30	58.8	15
9 23	31.4	8	31	62.8	16

(*C*)化表列數歸準於標準時.

(1)本子午線西每經度1度須加4分於表列數,

午線東則減之.

(2)表列之時數小於12時者爲午前,大於12時者爲午後.

(*D*)化表列數歸於其他緯度(北緯10度至50度內)之數,自北緯40度起每向南1度須於西最大偏角時加0.10分,每向北1度則減0.16分,於東最大偏角,則與此相反.

(*E*)化表列數爲在其他經度之數,由西經90度起每向東15度則加0.16分於表列數,每向西15度則減0.16分.

表　六

化近最大偏角時測數爲最大偏角時測數所用之改正數

最大偏角時測數 / 時*	1° 0′	1° 10′	1° 20′	1° 30′	1° 40′	1° 50′	2° 0′	2° 10′	最大偏角時測數 / 時*
時	″	″	″	″	″	″	″	″	時
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0
1	0.0	0.0	0.0	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.1	1
2	+ 0.1	+ 0.2	+ 0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	2
3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7	3
4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	4
5	+ 0.9	+ 1.0	+ 1.1	+ 1.3	+ 1.4	+ 1.6	+ 1.7	+ 1.9	5
6	1.2	1.4	1.6	1.8	2.1	2.3	2.5	2.7	6
7	1.7	2.0	2.2	2.5	2.8	3.1	3.4	3.7	7
8	2.2	2.6	2.9	3.3	3.7	4.0	4.4	4.8	8
9	2.8	3.2	3.7	4.2	4.6	5.1	5.6	6.0	9
10	+ 3.4	+ 4.0	+ 4.6	+ 5.1	+ 5.7	+ 6.3	+ 6.9	+ 7.4	10
11	4.1	4.8	5.5	6.2	6.9	7.6	8.3	9.0	11
12	4.9	5.8	6.6	7.4	8.2	9.0	9.9	10.7	12
13	5.8	6.8	7.7	8.7	9.7	10.6	11.6	12.6	13
14	6.7	7.8	9.0	10.1	11.2	12.3	13.4	14.6	14
15	+ 7.7	+ 9.0	+10.3	+11.6	+12.8	+14.1	+15.4	+16.7	15
16	8.8	10.2	11.7	13.2	14.6	16.1	17.5	19.0	16
17	9.9	11.5	13.2	14.9	16.5	18.2	19.8	21.5	17
18	11.1	12.9	14.8	16.7	18.5	20.4	22.2	24.1	18
19	12.4	14.4	16.5	18.6	20.6	22.7	24.7	26.8	19

* 離偏角時之恆星時分數.

表七　緯度圈每1000英尺之子午線轉極秒數

緯度	距離（東或西）								
l	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
°	″	″	″	″	″	″	″	″	″
20	3.51	7.01	10.51	14.02	17.52	21.03	24.53	28.04	31.54
21	3.78	7.57	11.35	15.13	18.91	22.69	26.48	30.26	34.04
22	3.98	7.96	11.94	15.92	19.90	23.88	27.86	31.84	35.83
23	4.18	8.36	12.55	16.73	20.91	25.09	29.27	33.46	37.64
24	4.39	8.77	13.16	17.54	21.93	26.32	30.70	35.09	39.47
25	4.59	9.19	13.78	18.37	22.97	27.56	32.15	36.75	41.34
26	4.80	9.61	14.42	19.22	24.02	28.83	33.63	38.44	43.24
27	5.02	10.04	15.06	20.08	25.10	30.11	35.13	40.15	45.17
28	5.24	10.48	15.71	20.95	26.19	31.42	36.66	41.90	47.13
29	5.46	10.92	16.38	21.84	27.30	32.76	38.22	43.68	49.14
30	5.69	11.37	17.06	22.74	28.43	34.12	39.80	45.49	51.17
31	5.92	11.83	17.75	23.67	29.59	35.51	41.42	47.34	53.26
32	6.16	12.31	18.46	24.62	30.77	36.92	43.08	49.23	55.38
33	6.39	12.78	19.17	25.57	31.96	38.36	44.75	51.15	57.54
34	6.64	13.29	19.92	26.57	33.21	39.85	46.49	53.13	59.77
35	6.89	13.79	20.68	27.58	34.47	41.37	48.26	55.15	62.05
36	7.15	14.31	21.46	28.61	35.77	42.92	50.07	57.22	64.38
37	7.42	14.84	22.26	29.67	37.09	44.51	51.93	59.35	66.77
38	7.69	15.38	23.08	30.77	38.46	46.15	53.84	61.53	69.22
39	7.97	15.95	23.92	31.89	39.86	47.83	55.80	63.77	71.74
40	8.26	16.52	24.78	33.04	41.30	49.56	57.82	66.08	74.34
41	8.55	17.11	25.67	34.22	42.78	51.33	59.89	68.45	77.00
42	8.86	17.72	26.58	35.45	44.31	53.17	62.03	70.89	79.76
43	9.18	18.36	27.53	36.71	45.89	55.06	64.24	73.42	82.60
44	9.50	19.01	28.51	38.01	47.52	57.02	66.52	76.02	85.53
45	9.84	19.68	29.52	39.36	49.20	59.04	68.88	78.72	88.56
46	10.19	20.38	30.57	40.76	50.95	61.13	71.32	81.51	91.70
47	10.55	21.10	31.65	42.20	52.76	63.31	73.86	84.41	94.96
48	10.93	21.85	32.78	43.71	54.63	65.56	76.49	87.41	98.34
49	11.32	22.63	33.95	45.27	56.59	67.90	79.22	90.54	101.85
50	11.72	23.45	35.17	46.89	58.62	70.34	82.06	93.78	105.51

表八　由太陽測高弧減去之視差及蒙氣差之改正數

視高弧	攝氏溫度 −10°		0°		+10°		+20°		+30°		+40°		+50°		視高弧
°	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	°
0	36	36	35	15	34	00	32	50	31	45	30	45	29	50	0
1	26	10	25	12	24	18	23	28	22	42	22	00	21	20	1
2	19	35	18	51	18	11	17	34	16	59	16	26	15	57	2
3	15	20	14	46	14	15	13	46	13	18	12	53	12	30	3
4	12	31	12	03	11	37	11	13	10	50	10	30	10	11	4
5	10	29	10	05	9	44	9	24	9	05	8	48	8	32	5
6	8	59	8	38	8	20	8	03	7	47	7	32	7	18	6
7	7	49	7	31	7	15	7	00	6	46	6	33	6	21	7
8	6	55	6	39	6	25	6	12	5	59	5	48	5	37	8
9	6	11	5	57	5	44	5	32	5	21	5	11	5	01	9
10	5	34	5	22	5	10	4	59	4	49	4	39	4	30	10
11	5	04	4	52	4	42	4	32	4	23	4	14	4	06	11
12	4	39	4	29	4	19	4	10	4	01	3	53	3	46	12
13	4	17	4	07	3	58	3	50	3	42	3	35	3	28	13
14	3	58	3	49	3	41	3	33	3	26	3	19	3	13	14
15	3	42	3	34	3	26	3	19	3	12	3	06	3	00	15
16	3	27	3	19	3	12	3	05	2	59	2	53	2	47	16
17	3	14	3	07	3	00	2	54	2	48	2	42	2	37	17
18	3	02	2	55	2	49	2	43	2	37	2	32	2	27	18
19	2	52	2	45	2	39	2	33	2	28	2	23	2	19	19
20	2	42	2	36	2	30	2	25	2	20	2	15	2	11	20
21	2	33	2	27	2	22	2	17	2	12	2	08	2	04	21
22	2	26	2	20	2	15	2	10	2	06	2	02	1	58	22
23	2	18	2	13	2	08	2	03	1	59	1	55	1	51	23
24	2	12	2	07	2	02	1	58	1	54	1	50	1	46	24
25	2	05	2	00	1	56	1	52	1	48	1	44	1	41	25
26	2	00	1	55	1	51	1	47	1	43	1	39	1	36	26
27	1	55	1	50	1	46	1	42	1	38	1	35	1	32	27
28	1	49	1	45	1	41	1	37	1	34	1	31	1	28	28
29	1	45	1	41	1	37	1	33	1	30	1	27	1	24	29
30	1	41	1	37	1	33	1	30	1	26	1	23	1	21	30
32	1	33	1	29	1	26	1	23	1	19	1	17	1	15	32
34	1	26	1	22	1	19	1	16	1	13	1	11	1	09	34
36	1	19	1	16	1	13	1	10	1	08	1	05	1	03	36
38	1	13	1	10	1	07	1	04	1	02	1	00	0	58	38
40	1	08	1	05	1	02	1	00	0	58	0	56	0	54	40
42	1	03	1	00	0	58	0	56	0	54	0	52	0	50	42
44	0	59	0	56	0	54	0	52	0	50	0	48	0	47	44
46	0	54	0	52	0	50	0	48	0	46	0	45	0	43	46
48	0	51	0	49	0	47	0	45	0	44	0	42	0	41	48
50	0	47	0	45	0	43	0	41	0	40	0	38	0	37	50
55	0	39	0	37	0	36	0	35	0	33	0	32	0	31	55
60	0	32	0	30	0	29	0	28	0	27	0	26	0	25	60
65	0	25	0	24	0	23	0	22	0	21	0	20	0	20	65
70	0	20	0	19	0	18	0	17	0	17	0	16	0	15	70
75	0	14	0	14	0	13	0	12	0	12	0	12	0	11	75
80	0	10	0	09	0	09	0	09	0	08	0	08	0	08	80
85	0	04	0	04	0	04	0	04	0	04	0	04	0	03	85
90	0	00	0	00	0	00	0	00	0	00	0	00	0	00	90

表九 由太陽繞子午線之高弧測定緯度

$(A = \cos d \cos l \operatorname{cosec} k)$

l \ k	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	l \ k
0	9.51	8.14	7.12	6.31	5.67	5.15	4.70	4.33	4.01	3.74	3.49	3.27	3.08	0
1	9.53	8.16	7.13	6.33	5.69	5.16	4.72	4.35	4.03	3.75	3.50	3.29	3.09	1
2	9.54	8.17	7.14	6.34	5.70	5.17	4.73	4.36	4.04	3.76	3.52	3.30	3.11	2
3	9.54	8.17	7.15	6.35	5.71	5.18	4.74	4.37	4.05	3.77	3.53	3.31	3.12	3
4	9.54	8.17	7.15	6.35	5.71	5.19	4.75	4.38	4.06	3.78	3.54	3.32	3.13	4
5	9.53	8.17	7.15	6.35	5.71	5.19	4.76	4.39	4.07	3.79	3.55	3.33	3.14	5
6	9.51	8.16	7.14	6.35	5.71	5.19	4.76	4.39	4.07	3.80	3.55	3.34	3.15	6
7	9.49	8.14	7.13	6.34	5.71	5.19	4.76	4.39	4.07	3.80	3.56	3.34	3.15	7
8	9.47	8.12	7.12	6.33	5.70	5.18	4.75	4.39	4.07	3.80	3.56	3.35	3.16	8
9	9.44	8.10	7.10	6.31	5.69	5.17	4.74	4.38	4.07	3.80	3.56	3.35	3.16	9
10	9.41	8.07	7.07	6.29	5.67	5.16	4.73	4.37	4.06	3.79	3.55	3.34	3.16	10
11	9.36	8.04	7.04	6.27	5.65	5.14	4.72	4.36	4.05	3.78	3.55	3.34	3.15	11
12	9.31	8.00	7.01	6.24	5.63	5.13	4.70	4.35	4.04	3.77	3.54	3.33	3.15	12
13	9.25	7.95	6.97	6.21	5.60	5.10	4.68	4.33	4.03	3.76	3.53	3.32	3.14	13
14	9.19	7.90	6.93	6.18	5.57	5.08	4.66	4.31	4.01	3.75	3.52	3.31	3.13	14
15	9.13	7.85	6.89	6.14	5.54	5.05	4.64	4.29	3.99	3.73	3.50	3.30	3.12	15
16	9.06	7.79	6.84	6.10	5.51	5.02	4.61	4.27	3.97	3.71	3.49	3.29	3.10	16
17	8.98	7.73	6.79	6.05	5.47	4.98	4.58	4.24	3.95	3.69	3.47	3.27	3.09	17
18	8.90	7.66	6.73	6.00	5.42	4.95	4.55	4.21	3.92	3.67	3.45	3.25	3.08	18
19	8.81	7.59	6.67	5.95	5.38	4.91	4.51	4.18	3.89	3.64	3.43	3.23	3.06	19
20	8.72	7.51	6.60	5.90	5.33	4.86	4.47	4.15	3.86	3.62	3.40	3.21	3.04	20
21	8.63	7.43	6.54	5.84	5.28	4.82	4.43	4.11	3.83	3.59	3.37	3.19	3.02	21
22	8.53	7.35	6.46	5.78	5.22	4.77	4.39	4.07	3.80	3.56	3.34	3.16	2.99	22
23	8.42	7.26	6.39	5.71	5.16	4.72	4.35	4.03	3.76	3.52	3.31	3.13	2.97	23
24	8.31	7.17	6.31	5.64	5.10	4.66	4.30	3.99	3.72	3.49	3.28	3.10	2.94	24
25	8.20	7.07	6.23	5.57	5.04	4.61	4.25	3.94	3.68	3.45	3.25	3.07	2.91	25
26	8.08	6.97	6.14	5.49	4.98	4.55	4.19	3.89	3.63	3.41	3.21	3.04	2.88	26
27	7.96	6.87	6.05	5.42	4.91	4.49	4.14	3.84	3.59	3.37	3.17	3.00	2.85	27
28	7.83	6.76	5.96	5.34	4.84	4.43	4.08	3.79	3.54	3.32	3.13	2.96	2.81	28
29	7.71	6.65	5.87	5.25	4.76	4.36	4.02	3.74	3.49	3.28	3.09	2.93	2.78	29
30		6.54	5.77	5.17	4.69	4.29	3.95	3.68	3.44	3.23	3.05	2.89	2.74	30
31			5.67	5.08	4.61	4.22	3.90	3.62	3.39	3.18	3.00	2.85	2.70	31
32				4.99	4.53	4.15	3.83	3.56	3.33	3.13	2.96	2.80	2.66	32
33					4.45	4.07	3.77	3.50	3.28	3.08	2.91	2.76	2.62	33
34						4.00	3.70	3.44	3.22	3.03	2.86	2.71	2.58	34
35							3.63	3.38	3.16	2.97	2.81	2.66	2.54	35
36								3.31	3.10	2.92	2.76	2.62	2.49	36
37									3.04	2.86	2.70	2.57	2.44	37
38										2.80	2.65	2.52	2.40	38
39											2.60	2.46	2.35	39
40												2.41	2.30	40
41													2.25	41

表　九　（接　前）

l \ k	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	31°	k \ l
0°	2.90	2.75	2.61	2.48	2.36									0°
1	2.92	2.76	2.62	2.49	2.37	2.26								1
2	2.94	2.78	2.64	2.51	2.39	2.28	2.18							2
3	2.95	2.79	2.65	2.52	2.40	2.29	2.19	2.10						3
4	2.96	2.80	2.66	2.53	2.41	2.30	2.20	2.11	2.02					4
5	2.97	2.81	2.67	2.54	2.42	2.32	2.21	2.12	2.03	1.95				5
6	2.98	2.82	2.68	2.55	2.43	2.33	2.22	2.13	2.04	1.96	1.89			6
7	2.98	2.82	2.69	2.56	2.44	2.33	2.23	2.14	2.05	1.97	1.90	1.83		7
8	2.99	2.83	2.69	2.56	2.45	2.34	2.24	2.15	2.06	1.98	1.91	1.84	1.77	8
9	2.99	2.83	2.70	2.57	2.45	2.35	2.25	2.15	2.06	1.99	1.92	1.84	1.78	9
10	2.99	2.84	2.70	2.57	2.46	2.35	2.25	2.16	2.07	2.00	1.92	1.85	1.79	10
11	2.99	2.83	2.70	2.57	2.46	2.35	2.25	2.16	2.08	2.00	1.93	1.86	1.79	11
12	2.98	2.83	2.70	2.57	2.46	2.35	2.26	2.17	2.08	2.00	1.93	1.86	1.80	12
13	2.98	2.82	2.69	2.57	2.46	2.35	2.26	2.17	2.08	2.00	1.93	1.86	1.80	13
14	2.97	2.81	2.69	2.56	2.45	2.35	2.25	2.17	2.08	2.01	1.93	1.87	1.80	14
15	2.96	2.81	2.68	2.56	2.45	2.35	2.25	2.16	2.08	2.00	1.93	1.87	1.80	15
16	2.95	2.80	2.67	2.55	2.44	2.34	2.25	2.16	2.08	2.00	1.93	1.87	1.80	16
17	2.94	2.79	2.66	2.54	2.43	2.33	2.24	2.15	2.07	2.00	1.93	1.86	1.80	17
18	2.92	2.78	2.65	2.53	2.42	2.33	2.23	2.15	2.06	2.00	1.93	1.86	1.80	18
19	2.90	2.76	2.64	2.52	2.41	2.32	2.22	2.14	2.06	1.99	1.92	1.85	1.80	19
20	2.89	2.75	2.62	2.51	2.40	2.30	2.21	2.13	2.05	1.98	1.92	1.85	1.79	20
21	2.87	2.73	2.61	2.49	2.39	2.29	2.20	2.12	2.04	1.97	1.91	1.84	1.79	21
22	2.84	2.71	2.59	2.48	2.37	2.28	2.19	2.11	2.03	1.96	1.90	1.84	1.78	22
23	2.82	2.69	2.57	2.46	2.36	2.26	2.18	2.10	2.02	1.95	1.89	1.83	1.77	23
24	2.80	2.66	2.55	2.44	2.34	2.25	2.16	2.08	2.01	1.94	1.88	1.82	1.76	24
25	2.77	2.64	2.52	2.42	2.32	2.23	2.14	2.07	2.00	1.93	1.87	1.81	1.75	25
26	2.74	2.61	2.50	2.39	2.30	2.21	2.13	2.05	1.98	1.91	1.85	1.79	1.74	26
27	2.71	2.59	2.47	2.37	2.27	2.19	2.11	2.03	1.96	1.90	1.84	1.78	1.73	27
28	2.68	2.56	2.44	2.34	2.25	2.17	2.09	2.01	1.95	1.88	1.82	1.77	1.71	28
29	2.65	2.53	2.42	2.32	2.23	2.14	2.06	1.99	1.93	1.86	1.80	1.75	1.70	29
30	2.61	2.49	2.39	2.29	2.20	2.12	2.04	1.97	1.91	1.84	1.79	1.73	1.68	30
31	2.58	2.46	2.36	2.26	2.17	2.09	2.02	1.95	1.88	1.82	1.77	1.71	1.66	31
32	2.54	2.43	2.32	2.23	2.14	2.06	1.99	1.92	1.86	1.80	1.75	1.69	1.65	32
33	2.50	2.39	2.29	2.20	2.11	2.04	1.97	1.90	1.84	1.78	1.73	1.67	1.63	33
34	2.46	2.35	2.25	2.17	2.08	2.01	1.94	1.87	1.81	1.76	1.70	1.65	1.61	34
35	2.42	2.31	2.22	2.13	2.05	1.98	1.91	1.85	1.79	1.73	1.68	1.63	1.59	35
36	2.38	2.27	2.18	2.10	2.02	1.95	1.88	1.82	1.76	1.71	1.66	1.61	1.56	36
37	2.33	2.23	2.14	2.06	1.98	1.91	1.85	1.79	1.73	1.68	1.63	1.58	1.54	37
38	2.29	2.19	2.10	2.02	1.95	1.88	1.82	1.76	1.70	1.65	1.60	1.56	1.52	38
39	2.24	2.15	2.06	1.98	1.91	1.85	1.78	1.73	1.67	1.63	1.58	1.54	1.49	39
40	2.20	2.10	2.02	1.94	1.88	1.81	1.75	1.70	1.64	1.60	1.55	1.51	1.47	40
42	2.10	2.01	1.94	1.86	1.80	1.74	1.68	1.63	1.58	1.54	1.49	1.45	1.42	42
44			1.85	1.78	1.72	1.66	1.61	1.56	1.51	1.47	1.43	1.40	1.36	44
46					1.64	1.58	1.53	1.49	1.45	1.41	1.37	1.34	1.30	46
48							1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.27	1.24	48
50									1.30	1.27	1.24	1.21	1.18	50

表 九 （接 前）

l \ h	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	44°	l \ h
9°	1.72													9°
10	1.72	1.66												10
11	1.73	1.67	1.62											11
12	1.73	1.68	1.62	1.57										12
13	1.74	1.68	1.63	1.58	1.53									13
14	1.74	1.68	1.63	1.58	1.53	1.48								14
15	1.74	1.69	1.63	1.58	1.53	1.49	1.44							15
16	1.74	1.69	1.63	1.58	1.53	1.49	1.45	1.41						16
17	1.74	1.69	1.64	1.59	1.53	1.49	1.45	1.41	1.37					17
18	1.74	1.69	1.63	1.59	1.53	1.49	1.45	1.41	1.37	1.33				18
19	1.74	1.68	1.63	1.58	1.53	1.49	1.45	1.41	1.37	1.33	1.30			19
20	1.73	1.68	1.63	1.58	1.53	1.49	1.45	1.41	1.37	1.33	1.30	1.27		20
21	1.73	1.68	1.63	1.58	1.53	1.49	1.45	1.41	1.37	1.33	1.30	1.27	1.24	21
22	1.72	1.67	1.62	1.58	1.53	1.49	1.45	1.41	1.37	1.33	1.30	1.27	1.24	22
23	1.72	1.66	1.62	1.57	1.53	1.48	1.44	1.41	1.37	1.33	1.30	1.27	1.24	23
24	1.71	1.66	1.61	1.57	1.52	1.48	1.44	1.41	1.37	1.33	1.30	1.27	1.24	24
25	1.70	1.65	1.60	1.56	1.51	1.47	1.43	1.40	1.36	1.33	1.30	1.26	1.23	25
26	1.69	1.64	1.59	1.55	1.51	1.47	1.43	1.39	1.36	1.32	1.29	1.26	1.23	26
27	1.68	1.63	1.58	1.54	1.50	1.46	1.42	1.38	1.35	1.32	1.29	1.26	1.23	27
28	1.66	1.62	1.57	1.53	1.49	1.45	1.41	1.38	1.34	1.32	1.28	1.25	1.22	28
29	1.65	1.60	1.56	1.52	1.48	1.44	1.40	1.37	1.34	1.31	1.27	1.24	1.22	29
30	1.63	1.59	1.55	1.50	1.46	1.43	1.39	1.36	1.33	1.30	1.27	1.24	1.21	30
31	1.62	1.57	1.53	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.32	1.29	1.26	1.23	1.20	31
32	1.60	1.56	1.52	1.48	1.44	1.40	1.37	1.34	1.31	1.28	1.25	1.22	1.19	32
33	1.58	1.54	1.50	1.46	1.42	1.39	1.36	1.33	1.30	1.27	1.24	1.21	1.18	33
34	1.56	1.52	1.48	1.45	1.41	1.38	1.34	1.31	1.28	1.25	1.23	1.20	1.18	34
35	1.54	1.50	1.47	1.43	1.39	1.36	1.33	1.30	1.27	1.24	1.21	1.19	1.16	35
36	1.52	1.48	1.45	1.41	1.38	1.34	1.31	1.28	1.26	1.23	1.20	1.18	1.15	36
37	1.50	1.46	1.43	1.39	1.36	1.33	1.30	1.27	1.24	1.21	1.19	1.17	1.14	37
38	1.48	1.44	1.41	1.37	1.34	1.31	1.28	1.25	1.23	1.20	1.17	1.15	1.13	38
39	1.46	1.42	1.38	1.35	1.32	1.29	1.26	1.24	1.21	1.18	1.16	1.14	1.11	39
40	1.43	1.40	1.36	1.33	1.30	1.27	1.24	1.22	1.19	1.17	1.14	1.12	1.10	40
42	1.38	1.35	1.32	1.29	1.26	1.23	1.20	1.18	1.16	1.13	1.11	1.09	1.07	42
44	1.33	1.30	1.27	1.24	1.21	1.19	1.16	1.14	1.12	1.09	1.07	1.05	1.04	44
46	1.27	1.24	1.22	1.19	1.16	1.14	1.12	1.10	1.07	1.05	1.04	1.02	1.00	46
48	1.21	1.19	1.16	1.14	1.11	1.09	1.07	1.05	1.03	1.01	.99	.98	.96	48
50	1.15	1.13	1.10	1.08	1.06	1.04	1.02	1.00	.98	.97	.95	.94	.92	50
55	1.00	.98	.96	.94	.92	.91	.89	.88	.86	.85	.84	.82	.81	55
60						.76	.75	.74	.73	.72	.71	.70	.69	60
65											.58	.57	.57	65

表　九　（接　前）

l \ k	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	k \ l
22°	1.21													22°
23	1.21	1.18												23
24	1.21	1.18	1.15											24
25	1.20	1.18	1.15	1.12										25
26	1.20	1.17	1.15	1.12	1.10									26
27	1.20	1.17	1.14	1.12	1.10	1.07								27
28	1.19	1.17	1.14	1.12	1.09	1.07	1.05							28
29	1.19	1.16	1.14	1.11	1.09	1.07	1.04	1.02						29
30	1.18	1.16	1.13	1.11	1.08	1.06	1.04	1.02	1.00					30
31	1.18	1.15	1.13	1.10	1.08	1.06	1.04	1.02	1.00	0.98				31
32	1.17	1.14	1.12	1.10	1.07	1.05	1.03	1.01	.99	.97	0.95			32
33	1.16	1.14	1.11	1.09	1.07	1.05	1.03	1.01	.99	.97	.95	0.93		33
34	1.15	1.13	1.10	1.08	1.06	1.04	1.02	1.00	.98	.96	.94	.93	0.91	34
35	1.14	1.12	1.10	1.07	1.05	1.03	1.01	.99	.98	.96	.94	.92	.91	35
36	1.13	1.11	1.09	1.07	1.05	1.03	1.01	.99	.97	.95	.93	.92	.90	36
37	1.12	1.10	1.08	1.06	1.04	1.02	1.00	.98	.96	.94	.93	.91	.90	37
38	1.11	1.08	1.06	1.04	1.02	1.01	.99	.97	.95	.94	.92	.90	.89	38
39	1.09	1.07	1.05	1.03	1.01	1.00	.98	.96	.94	.93	.91	.90	.88	39
40	1.08	1.06	1.04	1.02	1.00	.98	.97	.95	.93	.92	.90	.89	.87	40
42	1.05	1.03	1.01	.99	.98	.96	.94	.93	.91	.90	.88	.87	.86	42
44	1.02	1.00	.98	.97	.95	.93	.92	.90	.89	.88	.86	.85	.84	44
46	.98	.97	.95	.93	.92	.90	.89	.88	.86	.85	.84	.82	.81	46
48	.94	.93	.92	.90	.89	.87	.86	.85	.83	.82	.81	.80	.79	48
50	.91	.89	.88	.86	.85	.84	.83	.82	.80	.79	.78	.77	.76	50
55	.80	.79	.78	.77	.76	.75	.74	.73	.72	.71	.70	.69	.68	55
60	.68	.67	.67	.66	.65	.64	.64	.63	.62	.61	.61	.60	.60	60
65	.56	.56	.55	.54	.54	.53	.53	.52	.52	.51	.51	.50	.50	65
70	.....	.....	.43	.43	.42	.42	.42	.41	.41	.41	.40	.40	.40	70

l \ k	58°	59°	60°	61°	62°	63°	65°	67°	69°	71°	73°	78°	83°	k \ l
35	0.89													35
36	.88	0.87												36
37	.88	.86	0.85											37
38	.87	.86	.84	0.83										38
39	.87	.85	.84	.82	0.81									39
40	.86	.84	.83	.82	.80	0.79								40
42	.84	.83	.82	.80	.79	.78	0.75							42
44	.82	.81	.80	.79	.78	.76	.74	0.72						44
46	.80	.79	.78	.77	.76	.75	.72	.70	0.69					46
48	.78	.77	.76	.75	.74	.73	.71	.69	.67	0.65				48
50	.75	.74	.73	.72	.71	.70	.69	.67	.65	.63	0.62			50
55	.68	.67	.66	.65	.64	.64	.62	.61	.60	.58	.57	0.54		55
60	.59	.58	.58	.57	.57	.56	.55	.54	.53	.52	.51	.49	0.46	60
65	.49	.49	.48	.48	.48	.47	.47	.46	.45	.44	.43	.42	.40	65
70	.39	.39	.39	.39	.38	.38	.38	.37	.37	.36	.36	.35	.34	70

表十 $m=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\tau}{\sin 1''}$之數值

τ	0^m	1^m	2^m	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m	8^m
s	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$
0	0.00	1.96	7.85	17.67	31.42	49.09	70.68	96.20	125.65
1	0.00	2.03	7.98	17.87	31.68	49.41	71.07	96.66	126.17
2	0.00	2.10	8.12	18.07	31.94	49.74	71.47	97.12	126.70
3	0.00	2.16	8.25	18.27	32.20	50.07	71.86	97.58	127.22
4	0.01	2.23	8.39	18.47	32.47	50.40	72.26	98.04	127.75
5	0.01	2.31	8.52	18.67	32.74	50.73	72.66	98.50	128.28
6	0.02	2.38	8.66	18.87	33.01	51.07	73.06	98.97	128.81
7	0.02	2.45	8.80	19.07	33.27	51.40	73.46	99.43	129.34
8	0.03	2.52	8.94	19.28	33.54	51.74	73.86	99.90	129.87
9	0.04	2.60	9.08	19.48	33.81	52.07	74.26	100.37	130.40
10	0.05	2.67	9.22	19.69	34.09	52.41	74.66	100.84	130.94
11	0.06	2.75	9.36	19.90	34.36	52.75	75.06	101.31	131.47
12	0.08	2.83	9.50	20.11	34.64	53.09	75.47	101.78	132.01
13	0.09	2.91	9.64	20.32	34.91	53.43	75.88	102.25	132.55
14	0.11	2.99	9.79	20.53	35.19	53.77	76.29	102.72	133.09
15	0.12	3.07	9.94	20.74	35.46	54.11	76.69	103.20	133.63
16	0.14	3.15	10.09	20.95	35.74	54.46	77.10	103.67	134.17
17	0.16	3.23	10.24	21.16	36.02	54.80	77.51	104.15	134.71
18	0.18	3.32	10.39	21.38	36.30	55.15	77.93	104.63	135.25
19	0.21	3.40	10.54	21.60	36.58	55.50	78.34	105.10	135.80
20	0.22	3.49	10.69	21.82	36.87	55.84	78.75	105.58	136.34
21	0.24	3.58	10.84	22.03	37.15	56.19	79.16	106.06	136.88
22	0.26	3.67	11.00	22.25	37.44	56.55	79.58	106.55	137.43
23	0.28	3.76	11.15	22.47	37.72	56.90	80.00	107.03	137.98
24	0.32	3.85	11.31	22.70	38.01	57.25	80.42	107.51	138.53
25	0.34	3.94	11.47	22.92	38.30	57.60	80.84	107.99	139.08
26	0.37	4.03	11.63	23.14	38.59	57.96	81.26	108.48	139.63
27	0.40	4.12	11.79	23.37	38.88	58.32	81.68	108.97	140.18
28	0.43	4.22	11.95	23.60	39.17	58.68	82.10	109.46	140.74
29	0.46	4.32	12.11	23.82	39.46	59.03	82.52	109.95	141.29
30	0.49	4.42	12.27	24.05	39.76	59.40	82.95	110.44	141.85
31	0.52	4.52	12.43	24.28	40.05	59.75	83.38	110.93	142.40
32	0.56	4.62	12.60	24.51	40.35	60.11	83.81	111.43	142.96
33	0.59	4.72	12.76	24.74	40.65	60.47	84.23	111.92	143.52
34	0.63	4.82	12.93	24.98	40.95	60.84	84.66	112.41	144.08
35	0.67	4.92	13.10	25.21	41.25	61.20	85.09	112.90	144.64
36	0.71	5.03	13.27	25.45	41.55	61.57	85.52	113.40	145.20
37	0.75	5.13	13.44	25.68	41.85	61.94	85.95	113.90	145.76
38	0.79	5.24	13.62	25.92	42.15	62.31	86.39	114.40	146.33
39	0.83	5.34	13.79	26.16	42.45	62.68	86.82	114.90	146.89
40	0.87	5.45	13.96	26.40	42.76	63.05	87.26	115.40	147.46
41	0.91	5.56	14.13	26.64	43.06	63.42	87.70	115.90	148.03
42	0.96	5.67	14.31	26.88	43.37	63.79	88.14	116.40	148.60
43	1.01	5.78	14.49	27.12	43.68	64.16	88.57	116.90	149.17
44	1.06	5.90	14.67	27.37	43.99	64.54	89.01	117.41	149.74
45	1.10	6.01	14.85	27.61	44.30	64.91	89.45	117.92	150.31
46	1.15	6.13	15.03	27.86	44.61	65.29	89.89	118.43	150.88
47	1.20	6.24	15.21	28.10	44.92	65.67	90.33	118.94	151.45
48	1.26	6.36	15.39	28.35	45.24	66.05	90.78	119.45	152.03
49	1.31	6.48	15.57	28.60	45.55	66.43	91.23	119.96	152.61
50	1.36	6.60	15.76	28.85	45.87	66.81	91.68	120.47	153.19
51	1.42	6.72	15.95	29.10	46.18	67.19	92.12	120.98	153.77
52	1.48	6.84	16.14	29.36	46.50	67.58	92.57	121.49	154.35
53	1.53	6.96	16.32	29.61	46.82	67.96	93.02	122.01	154.93
54	1.59	7.09	16.51	29.86	47.14	68.35	93.47	122.53	155.51
55	1.65	7.21	16.70	30.12	47.46	68.73	93.92	123.05	156.09
56	1.71	7.34	16.89	30.38	47.79	69.12	94.38	123.57	156.67
57	1.77	7.46	17.08	30.64	48.11	69.51	94.83	124.09	157.25
58	1.83	7.60	17.28	30.90	48.43	69.90	95.29	124.61	157.84
59	1.89	7.72	17.47	31.16	48.76	70.29	95.74	125.13	158.43

表十（接前）　$\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\tau}{\sin 1''}$之數值

τ	9^m	10^m	11^m	12^m	13^m	14^m	15^m	16^m
s	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$
0	159.02	196.32	237.54	282.68	331.74	384.74	441.63	502.46
1	159.61	196.97	238.26	283.47	332.59	385.65	442.62	503.50
2	160.20	197.63	238.98	284.26	333.44	386.56	443.60	504.55
3	160.80	198.28	239.70	285.04	334.29	387.48	444.58	505.60
4	161.39	198.94	240.42	285.83	335.15	388.40	445.56	506.65
5	161.98	199.60	241.14	286.62	336.00	389.32	446.55	507.70
6	162.58	200.26	241·87	287.41	336.86	390.24	447.54	508.76
7	163.17	200.92	242.60	288.20	337.72	391.16	448.53	509.81
8	163.77	201.59	243.33	289.00	338.58	392.09	449.51	510.86
9	164.37	202.25	244.06	289.79	339.44	393.01	450.50	511.92
10	164.97	202.92	244.79	290.58	340.30	393.94	451.50	512.98
11	165.57	203.58	245.52	291.38	341.16	394.86	452.49	514.03
12	166.17	204.25	245.25	292.18	342.02	395.79	453.48	515.09
13	166.77	204.92	246.98	292.98	342.88	396.72	454.48	516.15
14	167.37	205.59	247.72	293.78	343.75	397.65	455.47	517.21
15	167.97	206.26	248.45	294.58	344.62	398.58	456.47	518.27
16	168.58	206.93	249.19	295.38	345.49	399.52	457.47	519.34
17	169.19	207.60	249.93	296.18	346.36	400.45	458.47	520.40
18	169.80	208.27	250.67	296.99	347.23	401.38	459.47	521.47
19	170.41	208.94	251.41	297.79	348.10	402.32	460.47	522.53
20	171.02	209.62	252.15	298.60	348.97	403.26	461.47	523.60
21	171.63	210.30	252.89	299.40	349.84	404.20	462.48	524.67
22	172.24	210.98	253.63	300.21	350.71	405.14	463.48	525.74
23	172.85	211.66	254.37	301.02	351.58	406.08	464.48	526.81
24	173.47	212.34	255.12	301.83	352.46	407.02	465.49	527.89
25	174.08	213.02	255.87	302.64	353.34	407.96	466.50	528.96
26	174.70	213.70	256.62	303.46	354.22	408.90	467.51	530.03
27	175.32	214.38	257.37	304.27	355.10	409.84	468.52	531.11
28	175.94	215.07	258.12	305.09	355.98	410.79	469.53	532.18
29	176.56	215.75	258.87	305.90	356.86	411.73	470.54	533.26
30	177.18	216.44	259.62	306.72	357.74	412.68	471.55	534.33
31	177.80	217.12	260.37	307.54	358.62	413.63	472.57	535.41
32	178.43	217.81	261.12	308.36	359.51	414.59	473.58	536.50
33	179.05	218·50	261.88	309.18	360.39	415.54	474.60	537.58
34	179.68	219.19	262.64	310.00	361.28	416.49	475.62	538.67
35	180.30	219.88	263.39	310.82	362.17	417.44	476.64	539.75
36	180.93	220.58	264.15	311.65	363.07	418.40	477.65	540.83
37	181.56	221.27	264.91	312.47	363.96	419.35	478.67	541.91
38	182.19	221.97	265.68	313.30	364.85	420.31	479.70	543.00
39	182.82	222.66	266.44	314.12	365.75	421.27	480.72	544.09
40	183.46	223.36	267.20	314.95	366.64	422.23	481.74	545.18
41	184.09	224.06	267.96	315.78	367.53	423.19	482.77	546.27
42	184.72	224.76	268.73	316.61	368.42	424.15	483.79	547.36
43	185.35	225.46	269.49	317.44	369.31	425.11	484.82	548.45
44	185.99	226.16	270.26	318.27	370.21	426.07	485.85	549.55
45	186.63	226.86	271.02	319.10	371.11	427.04	486.88	550.64
46	187.27	227.57	271.79	319.94	372.01	428.01	487.91	551.73
47	187.91	228.27	272.56	320.78	372.92	428.97	488.94	552.83
48	188.55	228.98	273.34	321.62	373.82	429.93	489.97	553.93
49	189.19	229.68	274.11	322.45	374.72	430.90	491.01	555.03
50	189.83	230.39	274.88	323 29	375.62	431.87	492.05	556.13
51	190.47	231.10	275.65	324.13	376.52	432.84	493.08	557.24
52	191.12	231.81	276.43	324.97	377.43	433.82	494.12	558.34
53	191.76	232.52	277.20	325.81	378.34	434.79	495.15	559.44
54	192.41	233.24	277.98	326.66	379.26	435.76	496.19	560.55
55	193.06	233.95	278.76	327.50	380.17	436.73	497.23	561.65
56	193.71	234.67	279.55	328.35	381.08	437.71	498.28	562.76
57	194.36	235.38	280.33	329.19	381.99	438.69	499.32	563.87
58	195.01	236.10	281.12	330.04	382.90	439.67	500.37	564.98
59	195.66	236.82	281.90	330.89	383.82	440.65	501.41	566.08

表十一 地方經緯度表

地名	經度（度）			經度（時）			緯度		
	度	分	秒	時	分	秒		度	分	秒
首都(南京)	東 118	46	33	7	55	06.2	北	32	03	38
江蘇(鎮江)	119	25	02	7	57	40.1		32	13	05
安徽(懷寧)	117	02	13	7	48	08.9		30	37	00
江西(南昌)	115	51	13	7	43	24.9		28	37	12
浙江(杭縣)	120	09	37	8	00	38.5		30	18	20
福建(閩侯)	東 119	27	13	7	57	48.9	北	26	02	24
湖北(武昌)	114	11	13	7	36	44.9		30	34	48
湖南(長沙)	112	46	13	7	31	04.9		28	13	00
廣東(番禺)	112	54	58	7	31	39.9		23	10	00
廣西(桂林)	110	13	33	7	20	54.2		25	13	07
河北(北平)	東 116	28	13	7	45	52.9	北	39	54	23
河南(開封)	114	32	13	7	38	08.9		34	52	26
山東(歷城)	117	08	13	7	48	32.9		36	45	24
山西(陽曲)	112	30	31	7	30	02.1		37	53	30
陝西(長安)	108	54	33	7	15	38.2		34	16	00
四川(成都)	東 104	12	13	6	56	48.9	北	30	41	00
雲南(昆明)	102	51	13	6	51	24.9		25	00	00
貴州(貴陽)	106	35	33	7	06	22.2		26	30	20
甘肅(皋蘭)	103	52	13	6	55	28.9		36	08	00
寧夏(寧夏)	106	15	00	7	05	00.0		38	29	47
熱河(承德)	東 117	54	00	7	51	36.0	北	41	00	00
察哈爾(張北)	114	49	00	7	39	16.0		40	48	00
綏遠(歸綏)	111	38	00	7	26	32.0		40	48	00
遼寧(瀋陽)	123	43	13	8	14	52.9		41	51	00
吉林(吉林)	126	55	13	8	27	40.9		43	47	00
黑龍江(龍江)	東 123	57	13	8	15	48.9	北	47	46	00
蒙古(庫倫)	106	57	00	7	07	48.0		47	58	00
新疆(迪化)	88	32	13	5	54	08.9		43	27	00
青海(西寧)	101	49	17	6	47	17.1		36	34	03
西康(康定)	102	13	00	6	48	52.2		30	03	00
前藏(布達拉)	東 91	38	13	6	06	32.9	北	30	30	00
後藏(扎什倫布)	89	08	13	5	56	32.9		30	00	00

表十二　天文學常數

	秒	
太陽視差	8.80	巴黎會議
章動差常數	9.21	
光行差常數	20.47	

	秒　　秒	
總歲差	$50.2564+0.000222(t-1900)$	牛考卜
赤經歲差	$46.0850+0.000279(t-1900)$	
赤緯歲差	$20.0468-0.000085(t-1900)$	
黃道周轉速度	$0.4711-0.000007(t-1900)$	

	度 分 秒　秒	
黃道周轉軸之黃經（動黃道在定黃道上之昇交點）	$173\ 57\ 3.6+32.862\ (t-1900)$	牛考卜
黃赤交角	$23\ 27\ 8.26-0.4684(t-1900)$	

	分　秒	
太陰之赤道地平視差	57 2.70	(Brown)
地球太陰間平均距離	384403 公里 = 238857 美政里 = 60.2665 半徑	
地球太陽間平均距離	149504201 公里 = 92897416 美政里	
光速	每秒 299860 公里 = 186324 美政里	
光行過單位距離需時	498.58 秒	

	秒	
重力常數（告司）	$=0.017202099=3548.18761$	

	分　分	
重力每秒加速度	$g=9.8060-0.0260^*$	

	分　分	
秒擺之長	$L=0.993549-0.002631\cos 2l-\frac{2h}{R}L^*$	

年長 日 日

回歸年（卽歲實）365.24219879—0.0000000614(t—1900)
恆星年 365.25636042+0.0000000011(t—1900) } 牛考卜
最卑年 365.25964134+0.0000000304(t—1900)
交會年 Eclipse 346.620031 +0.00000032 (t—1900)

月長 日 日 時 分 秒

朔周月（卽朔實）29.530 588=29 12 44 2.8
回歸月 27.321 582=27 7 43 4.7
恆星月 27.321 661=27 7 43 11.5 } Brown
最卑月 27.554 550=27 13 18 33.1
交周月 Nodical 27.212 220=27 5 5 35.8

日長 時 分 秒

恆星日 23 56 4.091 平太陽時
平太陽日 24 3 56.555 恆星時

太陽赤道在黃道上昇交點之黃經 73 度 40 分 +50.25(t—1850)秒

地球之常數（1909 年 Hayford's Spheroid）

赤道半徑 a=6378.388 公里 =3963.34 美政里
極半徑 b=6356.909 公里 =3946.99 美政里
扁率 $\frac{a-b}{a}=\frac{1}{297.0}$.
兩心差對數 $\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=e\right)$ $\log e=8.913804$.
半徑對數 $\log \rho=9.999\,2695+0.000\,7324\cos 2l-0.000\,0019\cos 4l$.

分 秒 秒

地理緯度 l 與屬地心緯度 l' 之差

$$l'-l=11\,35.66\sin 2l+1''.17\sin 4l.$$

緯度 1 度之距離（美政里）

$$= 69.0569 - 0.3494 \cos 2l + 0.0007 \cos 4l.$$

經度 1 度之距離（美政里）

$$= 69.2316 \cos l - 0.0584 \cos 3l + 0.0001 \cos 5l.$$

1 公尺 = 39.37 美寸 (1866 年制). 1 美尺 = 0.3048006 公尺.

1 美政里 = 0.868362 海里或地理里.

1 海里 = 1.151594 美政里.

*l 爲緯度, h = 高出海平面之公尺數, $\log R = 6.80416$.

火星北極位置 $\alpha = 21^h10^m0^s + 1^s.565(t-1905)$

$\delta = 54°30'0'' + 12''.60(t-1905)$

木星北極位置 $\alpha = 17^h52^m0^s.84 + 0^s.247(t-1910)$

$\delta = 64°33'34''.6 - 0''.60\ (t-1910)$

火星自轉周期 $24^h37^m22^s.654$

木星自轉周期 *I.* 9 50 30. 004

II. 9 55 40. 632

表　十　三

日月行星之半直徑

天體名	在單位距離	在平均最小距離	公里數	美政里數	推算者
	分　秒				
太陽	15 59.63		695553.46	432196.01	Auwers.
太陰	15 32.58		1737.99	1079.93	Newcomb.
水星	3.34	5.45	2420.89	1504.27	Le Verrier.
金星	8.41	30.40	6095.71	3787.69	Auwers.
火星	4.68	8.94	3392.14	2107.78	Hartwig.
木星（赤道的）	1 38.47	23.43	71372.71	44348.86	Sampson
木星（兩極的）	1 31.91	21.87	66617.91	41394.37	Sampson.
土星（赤道的）	1 23.33	9.76	60393.99	37530.11	Struve.
土星（兩極的）	1 14.57	8.73	54049.59	33584.79	Struve.
天王星	34.28	1.88	24846.72	15439.00	Barnard, See, Wirtz.
海王星	36.56	1.26	26499.30	16465.87	Barnard.

註 (1)前二行半直徑之分秒數,乃自地心所見者.

(2)單位距離乃日地間平均距離也.平均最小距離者,意謂平均距離與單位距離之較也.

(3)表內單位距離行下月之半直徑係在平均距離者.

表 十 四

1932年1月1日格林維基晨前夜半時行星軌道根數

天體名	平均距離	一恆星周內之回歸年數	一恆星周內每平日之平行	一會合周內之回歸年數	兩心差
			秒		
水星	0.387099	0.24085	14732.420	0.31726	0.2056208
金星	0.723331	0.61521	5767.670	1.59872	0.0068054
地球	1.000000	1.00004	3548.193		0.0167376
火星	1.523688	1.88089	1886.519	2.13539	0.0933423
木星	5.202803	11.86223	299.128	1.09211	0.0483902
土星	9.538843	29.45772	120.455	1.03518	0.0557795
天王星	19.190978	84.01529	42.23	1.01209	0.0471342
海王星	30.070672	164.78829	21.53	1.00614	0.0085540

天體名	黃道交角	交點平黃經	卑點平黃經	星在元時平黃經	以太陽計之質量對數
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
水星	7 0 12.5	47 31 30.8	76 23 50.9	129 52 54.33	3.2218487－10
金星	3 23 38.2	76 4 3.5	130 36 51.5	348 54 53.63	4.3893398－10
地球			101 46 15.7	99 56 33.96	4.4822896－10
火星	1 51 0.4	49 1 59.3	334 48 26.1	299 5 29.11	3.5095499－10
木星	1 18 25.0	99 45 41.0	13 13 37.1	129 39 59.74	6.9799082－10
土星	2 29 27.7	113 3 45.5	91 42 55.2	298 5 17.30	6.4557335－10
天王星	0 46 22.2	73 39 4.5	169 33 42.7	20 55 54.05	5.6407528－10
海王星	1 46 34.3	131 1 50.4	44 2 10.3	155 22 53.39	5.7055338－10

註 1.有衛星者質量乃本星衛星質量之和.

2.地球質量若將月質除外,其對數爲4.4769900－10.

3.諸黃經數皆屬日心黃經也.

太陽子表

名稱		符號	軌道半長徑（天文單位）	與太陽之平均距離（百萬英里爲單位）	恒星周期（平均太陽日）	周期年數
屬地行星	水星	☿	0.387099	36.0	87.96926	0.24
	金星	♀	0.723332	67.2	224.7008	0.62
	地球	⊕	1.000000	92.9	365.2564	1.00
	火星	♂	1.523691	141.5	686.9505	1.88
	穀神星	①	2.767265	257.1	1681.414	4.60
	愛神星	㊸③	1.4581	135.5	643.1	1.76
遠大行星	木星	♃	5.202800	483.3	4332.580	11.86
	土星	♄	9.538861	886.9	10759.22	29.46
	天王星	♅	19.18329	1781.9	30686.82	84.02
	海王星	♆	30.05508	2791.6	60181.11	164.78

名稱		符號	視直徑	平均直徑		質量	
				英里	⊕=1	⊙=1	⊕=1
	太陽	⊙	32分04秒（平均）	866400	109.4	1.000	332000
	月球	☾	31分07秒（平均）	2163	0.273	$\frac{1}{27058000}$	$\frac{1}{81.5}$
屬地行星	水星	☿	5秒至13秒	3030	0.382	$\frac{1}{7000000}$	$\frac{1}{21}$
	金星	♀	11秒至67秒	7700	0.972	$\frac{1}{407000}$	0.82
	地球	⊕		7917.6	1.000	$\frac{1}{332000}$	1.000
	火星	♂	3.6秒至25秒	4230	0.534	$\frac{1}{3093500}$	$\frac{1}{9.32}$
	穀神星	①	0.25秒至0.5秒	488？	$\frac{1}{16.22}$？		$\frac{1}{7000}$？
遠大行星	木星	♃	32秒至50秒	86500	10.92	$\frac{1}{1047.35}$	317.7
	土星	♄	14秒至20秒	73000	9.17	$\frac{1}{3502}$	94.8
	天王星	♅	3.8秒至4.1秒	31900	4.03	$\frac{1}{22760}$	14.6
	海王星	♆	2.7秒至2.9秒	34800	4.39	$\frac{1}{19500}$	17.0

系之根數

公轉速度（每秒英里數）	公轉速度（每秒公里數）	軌道偏心率	對於黃道之傾斜角
23 至 35	47.84	.20560	7 度 00 分 8 秒
21.9	35.00	.00684	3 23 35
18.5	29.76	.01677	0 00 00
15.0	24.11	.09326	1 51 2
11.1	17.89	.07631	10 37 10
15.3	24.64	.2228	10 49 30
8.1	13.05	.04825	1 18 41
6.0	9.64	.05607	2 29 40
4.2	6.80	.04634	0 46 20
3.4	5.42	.00896	1 47 2

體積（⊕=1）	平均密度（⊕=1）	平均密度（水=1）	自轉周期	赤道與軌道之傾斜	橢率	表面重力（⊕=1）
1.300000	0.25	1.39	25 日 7 時 48 分 ±	7 度 15 分	?	27.65
0.0204	0.61	3.39	27 7 43	6 度 33 分（平均）	?	$\frac{1}{6}$
0.056	0.85	4.7	88 日	?	?	0.43
0.92	0.89	4.94	225 日	小	?	0.82
1.000	1.000	5.55	23 時 56 分 4.09 秒	23 度 27 分 8 秒	$\frac{1}{295}$	1.00
0.152	0.71	3.92	24 37 22.67	24 度	$\frac{1}{200}$	0.38
$\frac{1}{4270}$?	?	?	?	?	?	$\frac{1}{265}$
1309	0.24	1.32	9 55 ±	3 度 05 分	$\frac{1}{17}$	2.65
760	0.13	0.72	10 14 ±	26 49	$\frac{1}{9.2}$	1.18
65	0.22	1.22	?	?	$\frac{1}{11}$	0.90
85	0.20	1.11	?	?	?	0.89

表丑　衞

星名	發見者	以本星赤道半徑計之距離	平均距離英里數	恆星周期
月		60.27035	238840	27日 7時43分11.5秒
				火星
1 Phobos	Hall, 1877	2.771	5850	7時39分15.1秒
2 Deimos	Hall, 1877	6.921	14650	1日 6時17分54.0秒
				木星
5 無名	Barnard, 1892	2.551	112500	11時57分22.6秒
1 Io	Galileo, 1610	5.933	261000	1日 18 27 33.5
2 Europa	Galileo, 1610	9.439	415000	3 13 13 42.1
3 Ganymede	Galileo, 1610	15.057	664000	7 3 42 33.4
4 Callisto	Galileo, 1610	26.486	1167000	16 16 32 11.2
6 無名	Perrine, 1905	162.92	7185000	253.4
7 無名	Perrine, 1905	167.86	7403000	265.0
8 無名	Melotte, 1908		15600000	631.2
9 無名	Nicholson, 1914		18900000	636
				土星
1 Mimas	W.Herschel, 1789	3.11	117000	22時37分 5.7秒
2 Enceladus	W.Herschel, 1789	3.98	157000	1日 8 53 6.9
3 Tethys	J.D.Cassini, 1684	4.95	186000	1 21 18 25.6
4 Dione	J.D.Cassini, 1684	6.34	238000	2 17 41 9.3
5 Rhea	J.D.Cassini, 1672	8.86	332000	4 12 25 11.6
6 Titan	Huyghens, 1655	20.48	771000	15 22 41 23.2
7 Hyperion	Bond, 1848	25.07	934000	21 6 39 27.0
8 Iapetus	Cassini, 1671	59.58	2225000	79 7 54 17.1
9 Phoebe	Pickering, 1898	213.5	8000000	546.5
10 Themis	Pickering, 1905	24.3?	906000?	20 20
				天王星
1 Ariel	Lassel 1851	7.52	120000	2日12時29分21.1秒
2 Umbriel	Lassel 1851	10.46	167000	4 3 27 37.2
3 Titania	W.Herschel, 1787	17.12	273000	8 16 56 29.5
4 Oberon	W.Herschel, 1787	22.90	365000	13 11 7 6.4
				海王星
1 無名	Lassel, 1846	12.93	221500	5日21時 2分44.2秒

星表

會合周期	軌道交黃道斜角	軌道交本星道斜角	偏心率	直徑英里	質量 水星=1	星等	註
29日12時44分2.7秒	5度08分40秒		0.05491	2162	$\frac{1}{81.5}$	−12.5	比重3.44
衛星							
	26度17.2分	28度±	0	35?	?	14	與本星道赤道合面
	25 47.2	28度±	0	10?	?	13	
衛星							
0.49823562日	2度20分23秒			100	?	13	
1日18時28分35.9秒	2 08 3		0	2500	.00001688	6.5	
3 13 17 53.7	1 38 57		0	2100	.00002323	6.5	
7 3 59 35.9	1 59 53		.0013	3550	.00008844	6	
16 18 5 6.9	1 57 00		.0072	2960	.00004248	7	
266.60日		28.4度 交本星		100		14	
276.67日		31.4度 赤道面		40		16	
						17	
				11至17		19	
衛星							
內五衛星道及光環在黃道上之昇交點在1900年之黃經爲168度10分35秒	28度10分10秒	約27度	0	600	?	15	五內道與光環面合
		內五衛星交天赤道面角爲6度57分43秒	0	800	?	14	
			0	1200	?	11	
		(1900)	0	1100	?	11	
			0	1500	?	10	
	27 38 49		.0299	3500	$\frac{1}{4600}$	9	
	27 4.8		.1189	500	?	16	
	18 31.5		.0296	2000	?	11	
?	5 6		.22	50	?	17	退行
	39 00 ?		.23	30	?		
衛星							
1900年軌道在黃道昇交點之經度爲165度32分	97度51分 = −82度09分		0	500	?	15	皆退行
		交天赤道斜角75度18分	0	400	?	16	
			0	1000	?	13	
		(1900)	0	800	?	14	
衛星							
軌道在黃道昇交點184度25分(1900)	145度12分 = −34度48分	120度05分 (1900)	0	2000	?	13	退行

有名小行星之軌道　寅表

符號	星名	平衝光等	基準光等	平黃經	黃赤交角	偏心率	軌道半長徑	恆星周期	發見日期
				度 分	度 分		單位		年 月 日
1	Ceres	7.4	4.0	262 52	10 36	0.079	2.766	4.600	1801 1 1
2	Pallas	8.0	4.5	259 45	34 44	0.235	2.772	4.615	1802 3 28
3	Juno	8.7	5.5	171 54	13 2	0.256	2.670	4.362	1804 9 1
4	Vesta	6.5	4.0	102 17	7 8	0.089	2.362	3.629	1807 3 29
5	Astraea	9.9	6.9	353 41	5 20	0.190	2.576	4.135	1845 2 8
6	Hebe	8.5	5.8	98 37	14 48	0.201	2.426	3.778	1847 7 1
7	Iris	8.4	5.8	290 43	5 28	0.231	2.386	3.686	1847 8 13
8	Flora	8.9	6.8	242 27	5 53	0.157	2.201	3.266	1847 10 18
9	Metis	8.9	6.3	70 20	5 36	0.123	2.387	3.687	1848 4 26
10	Hygiea	9.5	5.4	181 58	3 49	0.114	3.139	5.562	1849 4 12
323	Brucia	13.0	11.0	191 17	19 21	0.275	2.158	3.169	1892 12 20
433	Eros	9.7	10.6	204 35	10 50	0.223	1.458	1.761	1898 8 13
434	Hungaria	11.8	10.4	301 24	22 30	0.074	1.944	2.712	1898 9 13
531	Zerlina	14.0	10.5	119 33	24 33	0.190	2.802	4.692	1904 4 12
719	Albert	17.6	14.5	75 38	10 50	0.541	2.585	4.156	1911 10 3
887	Alinda	17.1	14.1	265 45	8 58	0.533	5.529	4.023	1918 1 2
944	Hidalgo	17.1	9.9	100 30	43 4	0.653	2.717	13.670	1920 10 31
1036	Ganymed	13.7	10.5	21 19	26 9	0.539	2.666	4.353	1924 10 23
1000	Pizzia	13.8	9.6	154 45	20 46	0.259	3.181	5.674	1923 8 12
1001	Gaussia	13.0	8.8	27 36	9 22	0.144	3.190	5.698	1923 8 8
1002	Orbersia	14.0	10.4	101 6	10 47	0.150	2.789	4.658	1923 8 5
153	Hilda	12.6	7.3	194 59	7 9	0.159	3.969	7.806	1875 11 2
190	Ismene	12.0	6.7	259 33	6 3	0.168	3.936	7.811	1878 9 22
334	Chicago	12.0	6.8	82 32	4 38	0.042	3.904	7.714	1892 8 23
361	Bononia	13.3	8.0	71 33	12 24	0.208	3.950	7.850	1893 3 11
499	Venusia	13.0	7.7	303 56	2 56	0.209	3.941	7.822	1902 12 24
748	Simeisa	13.5	8.2	239 24	2 15	0.154	3.957	7.872	1913 3 14
958	1921 KC	14.3	8.9	99 24	5 38	0.203	3.955	7.865	1921 9 28
279	Thule	13.8	8.0	118 28	2 21	0.058	4.255	8.778	1888 10 25
588	Achilles	14.2	7.7	252 28	10 18	0.150	5.238	11.989	1906 2 22
617	Patroclus	12.6	5.9	234 12	22 6	0.140	5.190	11.823	1906 10 17
624	Hektor	13.2	6.4	162 24	18 10	0.030	5.249	12.025	1907 2 10
659	Nestor	14.4	7.7	30 58	4 32	0.107	5.177	11.779	1903 3 23
884	Priamus	14.0	7.3	300 27	8 51	0.118	5.256	12.054	1917 9 22
911	Agamemnon	13.6	6.9	266 51	21 57	0.086	5.155	11.702	1919 3 19

註　表之平衝光等乃小行星在衝日時之光等,基準光等乃在天文單位距離之光等,軌道根數乃依 1925.0 年之春分點.

表卯　最大光輝星

西名	中名	赤經(1900)	赤緯(1900)	星等	星品	自行	視差	距離	絕對光等	徑行速度	色
		時 分	度 分			秒	秒	光年		每秒公里	
α Eridani	水委一	1 34	−57 44	0.6	*B* 5	0.093	0.049*S*	67	−1.0		白
α Tauri	畢宿五	4 30	+16 18	1.1	*K* 5	0.205	0.057	57	−0.1	+54.5	赤
‖α Aurigae	五車二	5 09	+45 54	0.2	*G* 0	0.439	0.075*S*	43	−0.4	+30.2*	黃
‖β Orionis	參宿七	5 10	− 8 19	0.3	*B* 8*p*	0.005	0.006	543	− .8	+22.6*	白
α Orionis	參宿四	5 50	+ 7 23	1.0−1.4	*M* 1	0.032	0.017*S*	192	−2.8	+21.3*	赤
α Carinae	老人	6 22	−52 38	−0.9	*F* 0	0.022	0.005*S*	652	−7.4	+20.2	青白
‖α Can. Major.	天狼	6 41	−16 35	−1.6	*A* 0	1.315	0.371*S*	9	−1.2	− 7.4*	青白
α Can. Minor.	南河三	7 34	+ 5 29	0.5	*F* 5	1.242	0.312*S*	10	3.0	− 4.3	白
β Geminorum	北河三	7 39	+28 16	1.2	*K* 0	0.623	0.101*S*	32	1.2	+ 3.6	橙
α Leonis	軒轅十四	10 03	+12 27	1.3	*B* 8	0.244	0.058*S*	56	0.1		白
α Crucis	十字架二	12 21	−62 33	1.0	*B* 1	0.048	0.030	109	−1.6	+19.	白
α Virginis	角宿一	13 20	−10 38	1.2	*B* 2	0.051	0.009*S*	362	−4.0	+ 1.6*	白
β Centauri	馬腹一	13 57	−59 53	0.9	*B* 1	0.039	0.036	91	−1.3	+12.0*	赤
α Bootis	大角	14 11	+19 42	0.2	*K* 0	2.287	0.080*S*	41	−0.3	− 5.0	橙
‖α Centauri	南門二	14 33	−60 25	0.3	*G* 0	3.682	0.758	4	4.7	+22.2	赤
‖α Scorpii	心宿二	16 23	−26 12	1.2	*M* 2*p*	0.032	0.026*S*	126	−1.7	− 3.1*	赤
α Lyrae	織女一	18 34	+38 41	0.1	*A* 0	0.348	0.124*S*	26	0.6	−13.8	青白
α Aquilae	河鼓二	19 46	+ 8 36	0.9	*A* 5	0.659	0.204*S*	16	2.4	−33.	黃
α Cygni	天津四	20 38	+44 55	1.3	*V* 2*p*	0.004	0.005	652	−5.2	− 4.	白
α P. Australis	北落師門	22 52	−30 09	1.3	*A* 3	0.367	0.137	24	2.0	+ 6.7	橙

註　視差後附有*S*者，乃示分光器所決定之數同此．徑行速度附有*者，乃示其星爲分光的雙星，‖乃示其爲視雙星．

近星辰表

星名	赤經(1900) 時	分	赤緯(1900) 度	分	星等	星品	視差 秒	自行 秒	絕對光等	光輝
太陽					−26.7	*G*0			4.8	1.00
Prox. Cen.	14	22.8	−62	15	11.2	*M*(?)	0.765	3.76	15.6	.00005
α Cen. A	14	32.8	−60	25	0.3	*G*2	.758	3.68	4.7	1.10
α Cen. B	14	32.8	−60	25	1.7	*K*3	.760	3.68	6.1	0.30
Barnard	17	52.9	+ 4	25	9.7	*Mb*	.538	10.30	13.3	.0004
Wolf 359	10	51.6	+ 7	36	13.5	*M*4*e*	.404		16.5	.00002
Ll. 21185	10	57.9	+36	38	7.6	*Mb*	.392	4.78	10.6	.005
Sirius A	6	40.7	−16	35	− 1.6	*A*0	.371	1.32	1.2	28.
Sirius B	6	40.7	−16	35	8.4	*F*	.349		11.2	.0028
B. D. −12.4523	16	24.8	−12	24	9.5	*M*5	.340		12.2	.001
Innes	11	12.0	−57	02	12.	——	.317	2.69	14.7	.00001
C. Z. −5h243	5	7.7	−44	59	9.2	*K*2	.315	8.75	11.7	.002
τ Cet	1	39.4	−16	28	3.6	*K*0	.312	1.92	6.1	.30
Procyon A	7	34.1	+ 5	29	0.5	*F*5	.312	1.24	3.0	5.2
Procyon B	7	34.1	+ 5	29	12.5	——	.310		15.0	.00008
ε Eri	3	28.2	− 9	48	3.8	*K*0	.300	.97	6.3	.25
61 Cyg. A	21	02.4	+38	15	5.6	*K*7	.300	5.20	8.0	.052
61 Cyg. B	21	02.4	+38	15	6.3	*K*8	.292	5.20	8.7	.028
Lac 9352	22	59.4	−36	26	7.1	*Ma*	.287	6.90	9.4	.014
Bu 8798 A	18	41.7	+59	29	9.3	*Mb*	.287	2.31	11.6	.002
Bu 8798 B	18	41.7	+59	29	10.0	*Mb*	.282		12.3	.001
Grmb 34 A	0	12.7	+43	27	8.1	*Ma*	.282	2.89	10.3	.006
Grmb 34 B	0	12.7	+43	27	10.7	*Mb*	.281		12.9	.0006
ε Indi	21	55.7	−57	12	4.7	*K*5	.257	4.70	6.9	.14
Kruger 60 A	22	24.4	+57	12	9.6	*Mb*		.87	11.6	.002
Kruger 60 B	22	24.4	+57	12	11.3	——			13.3	.0004
Van Maanen	0	43.9	+ 4	55	12.3	*F*0	.255	3.01	14.3	.0002
Lac 8760	21	11.4	−39	15	6.6	*Ma*	.253	3.53	8.6	.030
Anon	2	05.3	+52	05	9.2		.239	0.49	11.1	.003
Gould 32416	23	59.5	−37	15	8.2	*Ma*	.220	6.11	9.9	.009
Oe. Arg. 17415	17	37.0	+68	26	9.1	*Mb*	.213	1.33	10.7	.001
+20.2465	10	14.2	+20	22	9.2	*Ma*	.207	.49	10.8	.004
Altair	19	45.9	+ 8	36	0.9	*A*5	.204	.66	2.4	9.1
O^2 Eri A	4	10.7	− 7	49	4.5	*G*5	.203	4.08	6.0	.33
O^2 Eri B	4	10.7	− 7	49	9.7	*A*0	.203	4.08	11.2	.003
O^2 Eri C	4	10.7	− 7	49	10.8	*Mb*	.203	4.08	12.3	.001

註　本表之星乃去地不過 5 星里 Parsecs 者.光輝乃以太陽爲單位之光度.

Wolf 359 已知其爲最微星體.

表巳 聯星軌道（1900年經緯）

次序	星名	赤經	赤緯	周期	半長徑	偏心率	過近點	星等	推測者
		時 分	度 分	年	秒				
1	Ll. 9091	4 45.7	+10 54	5.5 ± 0.1	0.62	0.760	1896.40	8.0:8.0	See
2	K Pegasi	21 40.1	+25 11	11.42± 0.4	0.42	0.490	1896.03	4.3:5	See
3	δ Equulei, A.B.	21 9.6	+ 9 37	11.45± 0.2	0.45	0.165	1892.80	4.5:5	See
4	ζ Sagittarii	18 56.3	−30 1	18.85± 1.0	0.69	0.279	1878.80	3.9:4.4	See
5	42 Comae Ber.	13 5.1	+18 4	25.56± 0.1	0.64	0.461	1885.69	6:6	See
6	ζ Herculis	16 37.6	+31 47	35.00± 0.3	1.43	0.497	1864.80	3:6	See
7	η Coronae Bor.	15 19.1	+30 39	41.60± 0.1	0.91	0.267	1892.50	5.5:6	See
8	Sirius	6 40.4	−16 34	51.8 ± 0.2	7.62	0.600	1893.77	−1.4:9	Burnham
9	γ Androm, B.C.	1 57.8	+41 51	54.0 ± 1.0	0.37	0.857	1892.1	5.5:7	See
10	ξ Ursae Maj.	11 12.9	+32 6	60.00± 0.1	2.50	0.397	1875.20	4:5	See
11	ζ Cancri, A.B.	8 06.2	+17 58	60.0 ± 0.5	0.85	0.340	1870.40	5.5:6.0	See
12	γ CoronaeBor.	15 38.5	+26 36	73.0 ± 2.0	0.73	0.482	1841.0	4:7	See
13	α Centauri	14 32.6	−60 25	81.10± 0.3	17.70	0.528	1875.70	1:2	See
14	70 Ophiuchi	18 0.4	+ 2 33	88.40± 1.0	4.54	0.500	1896.47	4.5:6	See
15	φ Ursae Maj.	9 45.3	+54 33	97.0 ± 5.0	0.34	0.440	1884.0	5.5:5.5	See
16	ω Leonis	9 23.1	+ 9 30	116.2 ± 1.0	0.88	0.537	1842.1	6:7	See
17	ξ Bootis	14 46.8	+19 31	128.0 ± 1.0	5.56	0.721	1903.9	4.5:6.5	See
18	γ Virginis	12 36.6	− 0 54	194.0 ± 4.0	3.99	0.897	1836.5	3:3.2	See
19	η Cassiopeiae	0 42.9	+57 18	195.8 ±10.0	8.21	0.514	1907.8	4:7	See
20	σ Coronae Bor.	16 11.0	+34 7	370.0 ±25	3.82	0.540	1821.8	6:7	See
21	36 Andromedae	0 49.6	+23 5	349.1 ?	1.54	0.634	1798.8	6:7	Doberck
22	α Geminorum	7 28.2	+32 8	997 ??	7.54	0.344	1750.3	2.5:3	Thiele

註 Ll. 乃 Lalande 之簡寫, Lac 乃 Lacaille 之簡寫.

表午　變星

次序	星名	1900年位置 赤經 時	分	赤緯 度	分	星等變限	周期日數	註
1	T. Ceti	0	16.7	−20	37	5.1−7.0	65±	極不規則
2	R. Andromedae	0	18.8	+38	1	5.6−12.8	410.7	
3	α Cassiopeiae	0	34.5	+55	59	2.2−2.8		無周期性
4	o Ceti (Mira)	2	14.3	−	3 26	1.7−9.5	331.6	光及時日不規則
5	ρ Persei	2	58.8	+38	27	3.4−4.2	33？	極不規則
6	β Persei (Algol)	3	1.7	+40	34	2.3−3.5	2日20時48分55.43秒	周期現縮短
7	λ Tauri	3	55.1	+12	12	3.4−4.2	3 22 52 12	大陵五一類不規則
8	ε Aurigae	4	54.8	+43	41	3.0−4.5		非周期性
9	α Orionis	5	49.7	+	7 23	0.7−1.5		非周期性
10	η Geminorum	6	8.8	+22	32	3.2−4.2	231.4	
11	ζ Geminorum	6	58.2	+20	43	3.7−4.5	10日 3時41分30.6秒	
12	R Canis Maj.	7	14.9	−16	12	5.9−6.7	1 3 15 46	大陵五一類
13	R Leonis Min.	9	39.6	+34	58	6.0−13.0	370.5	
14	R Leonis	9	42.2	+11	54	5.2−10.0	312.8	
15	U Hydrae	10	32.6	−12	52	4.5−6.3	195± ？	極不規則
16	R Ursae Maj.	10	37.6	+69	18	6.0−13.2	302.1	
17	R Hydrae	13	24.2	−22	46	3.5−5.5	425.15	周期縮短
18	S Virginis	13	27.8	−	6 41	5.7−12.5	376.4	
19	R Boötis	14	32.8	+27	10	5.9−12.2	223.4	
20	δ Lebrae	14	55.6	−	8 7	5.0−6.2	2日 7時51分22.8秒	大陵五一類
21	R Coronae	15	44.4	+28	28	5.8−13.0		非周期性
22	R Serpentis	15	46.1	+15	26	5.6−13.0	357.0	
23	α Herculis	17	10.1	+14	30	3.1−3.9	60至90日	非周期性
24	U Ophiuchi	17	11.5	+	1 19	6.0−6.7	20時 7分42.56秒	
25	ν Herculis	17	13.6	+33	12	4.6−5.4		不規則周期性
26	X Sagittarii	17	41.3	−27	48	4.0−6.0	7日 0時17分57秒	
27	W Sagittarii	17	58.6	−29	35	4.8−5.8	7 14 16 13	
28	Y Sagittarii	18	15.5	−18	54	5.8−6.6	5 18 33 24.5	
29	R Scuti	18	42.1	−	5 49	4.7−9.0	71.1	極不規則
30	β Lyrae	18	46.4	+33	15	3.4−4.5	12日21時47分23.72秒	
31	R Lyrae	18	52.3	+43	49	4.0−4.7	46.4	
32	χ Cygni	19	46.7	+32	40	4.0−13.5	406.02	周期縮短
33	η Aquilae	19	47.4	+	0 45	3.5−4.7	7日 4時11分59秒	
34	S Sagittae	19	51.4	+16	22	5.6−6.4	8 9 11 48.5	
35	X Cygni	20	39.5	+35	14	6.4−7.7	16 9 15 7	
36	T Vulpeculae	20	47.2	+27	53	5.5−6.5	4日10時27分50.4秒	
37	T Cephei	21	8.2	+68	5	5.2−10.7	387	
38	μ Cephei	21	40.4	+58	19	4.0−5.5	430±	極不規則
39	δ Cephei	22	25.4	+57	54	3.7−4.9	5日 8時47分 9.3秒	
40	β Pegasi	22	58.9	+27	32	2.2−2.7		非周期性
41	R Aquarii	23	38.6	−15	50	5.8−11.	387.16	
42	R Cassiopeiae	23	53.3	+50	50	4.8−12.	429.5	

表未　地球大小

推算者	發表年	赤道半徑 a	極半徑 b	扁率 e
Bessel 白塞爾	1841 年	6377397 公尺	6356079 公尺	$\frac{1}{299.15}$
Clarke 克拉克	1866	6378206	6356584	$\frac{1}{294.98}$
Clarke 克拉克	1880	6378249	6356515	$\frac{1}{293.47}$
Hermert 賀莫特	1907	6378200	6356818	$\frac{1}{298.35}$
Hayford 海佛德	1909	6378388	6356909	$\frac{1}{297.0}$

測地學及地球物理學之國際聯盟1924 年在馬德利德會議,決議採用海佛德數值;但1911 年天文學界在巴黎會議,決議採賀莫特之赤道半徑,海佛德扁率,故現今所用者爲

$$a = 6378200.00 \text{ 公尺},$$

$$b = 6356724.56 \text{ 公尺},$$

$$e = \frac{1}{297.0}.$$

表申　地球上各處之面積

陸地	面積	海洋	面積	各國	面積
	平方公里		平方公里		
亞洲	44309800	太平洋	165715490	中國	11081000
歐洲	9913400	大西洋	81657800	全俄	20415754
非洲	29817800	印度洋	73441960	美國	7801750
北美洲	24357700	其他	40464010	日本	680716
南美洲	17744900			法國	550765
澳洲	8962500			西班牙	504511
其他	13613000			德國	472034
				意國	301254
				英國	346050
共計	148719100	共計	361279260	葡萄牙	91916

表酉　地面重力表

緯度 l	g_0 每秒每秒公分	緯度 l	g_0 每秒每秒公分	緯度 l	g_0 每秒每秒公分	高度 h 公尺	g_h-g_0 每秒每秒公分
0°	978.030	30°	979.321	60°	981.914	0	0.0000
1	032	31	400	61	992	1	−0.0003
2	036	32	481	62	982.068	2	−0.0006
3	044	33	562	63	142	3	−0.0009
4	055	34	646	64	215	4	−0.0012
5	069	35	730	65	285	5	−0.0015
6	978.086	36	979.815	66	982.354	6	−0.0019
7	107	37	902	67	420	7	−0.0022
8	130	38	989	68	485	8	−0.0025
9	156	39	980.077	69	546	9	−0.0028
10	186	40	166	70	606	10	−0.0031
11	978.218	41	980.255	71	982.663	20	−0.0062
12	253	42	345	72	718	30	−9.0093
13	291	43	435	73	770	40	−0.0123
14	332	44	525	74	820	50	−0.0154
15	376	45	616	75	866	60	−0.0184
16	978.422	46	980.706	76	982.911	70	−0.0216
17	471	47	797	77	952	80	−0.0247
18	523	48	887	78	990	90	−0.0278
19	577	49	977	79	983.026	100	−0.0309
20	634	50	981.066	80	058	200	−0.0617
21	978.693	51	981.155	81	983.088	300	−0.0926
22	754	52	244	82	115	400	−0.1234
23	818	53	331	53	138	500	−0.1543
24	884	54	418	84	159	600	−0.1852
25	952	55	503	85	176	700	−0.2160
26	979.022	56	981.588	86	983.190	800	−0.2 69
27	094	57	672	87	201	900	−0.2777
28	168	58	754	88	209	1000	−0.3086
29	244	59	835	89	214	2000	−0.6172
30	321	60	914	90	216	3000	−0.9258

註　推算時所用之公式乃海爾莫特(Helmert)1910年公佈之式,即

$$g_0 = 978.030(1 + 0.005302\ sin\ l - 0.000007\ sin^2 2l),$$

$$g_h = g_0 - 0.0003086\ h.$$

表成 最光明雙星

西名	中名	星等	距離	西名	中名	星等	距離
			秒				秒
Mizar	開陽	2.4, 4.0	14.5	γ Leonis	軒轅十二	2.5, 4.0	3.0
Castor	北河二	2.5, 3.0	5.6	β Scorpii	房宿四	2.5, 5.5	13.0
γ Virginis	東上相	3.0, 3.2	5.0	θ Serpentis	徐	4.4, 6.0	21.0
γ Arietis	婁宿二	4.2, 4.5	8.9	44i Boötis	天槍增四	5.0, 6.0	4.8
ζ Aquarii	墳墓一	3.5, 4.4	3.5	π Boötis	左攝提二	4.3, 6.0	6.0

表亥 最美色之雙星

西名	中名	星等	距離	顏色
γ Andromedae	天大將星一	2.2,5.5	10 秒	橙,綠
α Canum Venat.		3.2,5.7	20	金黃,淡紫
β Cygni	輦道增七	3.3,5.5	34	金黃,青
ε Boötis	梗河一	2.4,6.5	2.9	金黃,青
95 Herculis		5.5,5.8	6	金黃,淡青
α Herculis	帝座	4.0,5.5	4.7	紅,濃綠
γ Delphini	瓠瓜二	3.4,5.0	11	金黃,淡青綠
32 Eridani		4.7,7.0	6.7	淺黃,深綠
ε Hydrae	蛇腹二	3.5,7.5	3.5	黃,藍
ζ Lyrae		4.5,5.5	44	黃,綠
ι Cancri	軒轅增二十二	4.5,6.0	30	淡橙,藍
0 Cygni	天津增三十八	4.3,7.5,5.5	337.8,106.8	黃,藍
24 Coma Beren.	五諸侯增五	5.6,7.0	21	橙,淡紫
0 Cephei	天鈎九	5.4,8.0	2.5	金黃,淡青
94 Aquarii		5.5,7.5	11	紫紅,淡綠
39 Ophiuchi	天江增六	5.7,7.5	12	黃,藍
41 Aquarii		5.8,8.5	4.8	黃,藍
2 Canum Venat.	常增六	6.0,9.0	11	金黃,淡青
52 Cygni		4.6,9.0	7	橙,藍
55 Piscium		6.0,9.0	6	橙,藍
κ Geminorum	積薪	3.8,9.0	6	橙,藍
ρ Orionis		5.1,9.0	6.8	橙,藍
54 Hydrae		5.2,8.0	9	黃,紺
η Persei	天船一	4.2,8.5	28	黃,藍
ψ Draconis	女史增一	4.8,6.0	31	黃,淡紫
0 Draconis	扶筐四	4.7,8.5	32	金黃,淡紫
η Cassiopeiae	王良三	4.7,7.0	5.7	金黃,紫
23 Orionis		5.4,7.0	32	白,藍
δ Herculis	魁	3.6,8.0	18	白,紺
0 Capricorni	牛宿五	6.3,7.0	22	白,藍
17 Virginis	謁者增二	6.5,7.0	20	紫紅
ξ Boötis	左攝提增一	4.5,6.5	4.2	淡紅黃

甲表 星座

次序	簡寫	星名 丁臘	星名寫法	中名	位置	肉眼星數
1	And	Andromeda	Andromedae	仙女,公主	北天	37
2	Ant	Antlia	Antliae	抽氣機	南天	3
3	Aps	Apus, Avis Indica	Apodis	天燕	南天	8
4	Aqr	Aquarius	Aquarii	寶瓶宿,寶瓶	赤道	36
5	Aql	Aquila, Iwith Antinousl	Aquilae	天鷹,日鳥	赤道	28
6	Ara	Ara	Arae	天壇,大臺	南天	8
7	Arg	Argo, Argo Navis	Argus	天舟,船	南天	125
8	Ari	Aries	Arietis	雄羊宿,白羊	北天	15
9	Aur	Auriga	Aurigae	御夫,御車	北天	35
10	Boo	Boötes	Bootis	牧夫,守熊人	北天	36
11	Cae	Caelum, Caela Sculptoris	Coeli	彫刻具	南天	4
12	Cam	Camelopardus	Camelopardalis	鹿豹	北天	22
13	Cnc	Cancer	Cancri	巨蟹宿,巨蟹	北天	15
14	CVn	Canes Venatici	Canum Venaticorum	獵犬	北天	11
15	CMa	Canis Major	Canis Majoris	大犬	南天	41
16	CMi	Canis Minor	Canis Minoris	小犬	南天	8
17	Cap	Capricornus	Capricorni	山羊宿,磨羯	南天	21
18	Car	Carina	Carinae	龍骨	南天	34
19	Cas	Cassiopeia	Cassiopeiae	仙后,岳母	北天	38
20	Cen	Centaurus	Centauri	半人馬,半人牛	南天	56
21	Cep	Cepheus	Cephei	仙王,皇帝	北天	27
22	Cet	Cetus	Ceti	鯨魚,海獸	赤道	37
23	Cha	Chamaeleon	Chamaeleontis	蝘蜓	南天	7
24	Cir	Circinus	Circini	步弓	南天	4
25	Col	Columba,	Columbae	天鴿	南天	12
26	Com	Coma, Coma Berenices	Comae	后髮	北天	18
27	CrA	Corona Australis	Coronae A.	南冕	南天	8
28	CrB	Corona Borealis	Coronae B.	北冕,北冕旋	北天	15
29	Crv	Corvus	Corvi	烏雅,烏雅	南天	8
30	Crt	Crater	Crateris	巨爵,酒瓶	南天	15

星座（接前）

次序	簡寫	臘丁名	星名寫法	中名	位置	肉眼星數
31	Cru	Crux, Crux Australis	Crucis	南十字	南天	9
32	Cyg	Cygnus	Cygni	天鵝,雁鵝	南天	61
33	Del	Delphinus	Delphini	海豚,魚將軍	北天	8
34	Dor	Dorado	Doradus	劍魚	南天	9
35	Dra	Draco	Draconis	天龍	南天	52
36	Equ	Equuleus	Equulei	小馬,駒	赤道	4
37	Eri	Eridanus	Eridani	波江,天河	赤道	56
38	For	Fornax, Fornax Chemica	Fornacis	天爐	南天	5
39	Gem	Gemini	Geminorum	雙子宿,雙兄,陰陽	南天	33
40	Gru	Grus	Gruis	天鶴	南天	14
41	Her	Hercules	Herculis	武仙,熊人	北天	49
42	Hor	Horologium	Horologii	時表	南天	5
43	Hya	Hydra	Hydrae	長蛇,水蛇	赤道	40
44	Hyi	Hydrus	Hydri	水蛇	南天	8
45	Ind	Indus	Indi	印第安	南天	8
46	Lac	Lacerta	Lacertae	蝎虎	南天	16
47	Leo	Leo	Leonis	獅子宿,獅子	赤道	32
48	LMi	Leo Minor	Leonis Minoris	小獅	北天	8
49	Lep	Lepus	Leporis	野兔,天兔	南天	19
50	Lib	Libra	Librae	天秤宿,天秤	赤道	18
51	Lup	Lupus	Lupi	豺狼	南天	32
52	Lyn	Lynx	Lyncis	天貓	北天	17
53	Lyr	Lyra	Lyrae	天琴,琵琶	北天	18
54	Men	Mensa, Mons Mensa	Mensae	山案	南天	2
55	Mic	Microscopium	Microscopii	顯微鏡	南天	4
56	Mon	Monoceros	Monocerotis	麒麟	赤道	27
57	Mus	Musca, Musca Australis	Muscae	蒼蠅	南天	11
58	Nor	Norma	Normae	矩尺	南天	8
59	Oct	Octans	Octantis	南極座	北天	5
60	Oph	Ophiuchus, Serpentarius	Ophiuchi	持蛇夫,醫生,逐蛇	赤道	41

星座（接前）

次序	簡寫	臘丁名	星名寫法	中名	位置	肉眼星數
61	Ori	Orion	Orionis	獵戶	赤道	58
62	Pav	Pavo	Povonis	孔雀	南天	21
63	Peg	Pegasus	Pegasi	飛馬	北天	38
64	Per	Perseus	Persei	英仙,大將	北天	46
65	Phe	Phoenix	Phoenicis	鳳凰	南天	18
66	Pic	Pictor,Equuleus Pictoris	Pictoris	繪架	南天	8
67	Psc	Pisces	Piscium	雙魚宿,雙魚	赤道	30
68	PsA	Pisces Australis	Piscis Australis	南魚	南天	10
69	Pup	Puppis	Puppis	艫	南天	53
70	Pyx	Pyxis	Pyxidis	羅針盤	南天	4
71	Ret	Reticulum	Reticuli	網罟	南天	7
72	Sge	Sagitta	Sagittae	天箭,箭	北天	6
73	Sgr	Sagittarius	Sagittarii	人馬宿,人馬	南天	48
74	Sco	Scorpio	Scorpii	天蝎宿,天蝎	南天	32
75	Scl	Sculptor	Sculptoris	玉夫	南天	11
76	Sct	Scutum	Scuti	楯	北天	6
77	Ser	Serpens	Serpentis	巨蛇,毒蛇	赤道	25
78	Sex	Sextans	Sextantis	量天尺	赤道	5
79	Tau	Taurus	Tauri	金牛宿,金牛	赤道	59
80	Tel	Telescopium	Telescopii	遠鏡	南天	6
81	Tou	Toucan	Tucanae	杜鵑	南天	6
82	Tri	Triangulum	Trianguli	北三角,三角形	北天	5
83	TrA	Triangulum Australe	Trianguli Aust	南三角	北天	5
84	UMa	Ursa Major	Ursae Majoris	大熊	北天	45
85	UMi	Ursa Minor	Ursae Minoris	小熊	北天	14
86	Vel	Vela	Velorum	帆	北天	28
87	Vir	Virgo	Virginis	室女宿,列女,雙女	赤道	38
88	Vol	Volans, Piscis Volans	Volantis	飛魚	南天	7
89	Vul	Vulpecula	Vulpeculae	狐狸	北天	15

註　星名寫法即物主位的寫法,意即某座的某星也.

乙表 西星專名

西名	中名	星座	星表紀數	西名	中名	星座	星表紀數
Achernar	水委一	波江	84	Iclarkrau	房宿三	天蝎	724
Albireo	羣道增七	天鵝	906	Kaus Borealis	斗宿二	人馬	855
Alcyone	昴宿六	金牛	208	Kaus Media	箕宿二	人馬	848
Aldebaran	畢宿五	金牛	251	Kochab	帝(北極二)	小熊	667
Alderamin	天鉤五	仙王	996	Maia	昴宿四	金牛	205
Algenib	壁宿一	飛馬	7	Markab	室宿一	飛馬	1071
Algol	大陵五	英仙	163	Mebsuta	井宿五	雙子	358
Alhena	井宿三	雙子	354	Menkar	天囷一	鯨魚	159
Alioth	玉衡(北斗五)	大熊	592	Merope	昴宿五	金牛	207
Alkaid	搖光(北斗七)	大熊	621	Mintaka	參宿三	獵戶	297
Almaac	天大將軍一	仙女	110	Mira	蒭藁增二	鯨魚	119
Alphard	星宿一	長蛇	466	Mirach	奎宿九	仙女	58
Alpheratz	壁宿二	仙女	2	Mirfac	天船三	英仙	182
Altair	河鼓二	天鷹	920	Mizar	開陽(北斗六)	大熊	607
Ancha	泣二	寶瓶	1035	Nashira	壘壁陣三	山羊	1008
Antares	心宿二	天蝎	757	Nushaba	箕宿一	人馬	835
Arcturus	大角	牧夫	638	Pleione	昴宿增十二	金牛	212
Asellus Austrinus	鬼宿四	巨蟹	439	Polaris	勾陳一	小熊	75
Asellus Boreus	鬼宿三	巨蟹	438	Pollux	北河三	雙子	406
Asterope	昴宿三	金牛	206	Praesepe	積尸增三	巨蟹	435
Atlas	昴宿七	金牛	211	Prima Giedi	牛宿增六	山羊	943
Bellatrix	參宿五	獵戶	291	Procyon	南河三	小犬	401
Benetnasch	搖光(北斗七)	大熊	621	Qubenelgenubi	氐宿一	天秤	65
Betelgeuze	參宿四	獵戶	324	Regulus	軒轅十四	獅子	496
Canopus	老人	天舟	349	Rigel	參宿七	獵戶	283
Capella	五車二	御夫	282	Scheat	室宿二	飛馬	1069
Castor	北河二	雙子	395	Secunda Giedi	牛宿二	山羊	945
Celaeno	昴宿增六	金牛	201	Sirius	天狼	大犬	360
Dabih Major	牛宿一	山羊	948	Situla	虛梁三	寶瓶	1049
Dabih Minor	牛宿增十二	山羊	947	Spica	角宿一	室女	608
Deneb	天津四	天鵝	964	Taygeta	昴宿二	金牛	203
Deneb Algedi	壘壁陣四	山羊	1014	Vega	織女一	天琴	864
Denebola	五帝座一	獅子	558	Vindemiatrix	東次將	室女	596
Dubhe	天樞(北斗一)	大熊	532	Wasat	天廩二	雙子	384
Electra	昴宿一	金牛	202	Zavijava	右執法	室女	559
Fomalhaut	北落師門	南魚	1064				

表丙　恆星中名檢查表

紫微垣

太子(北極一) 691
帝(北極二) 667
庶子(北極三) 650
后宮(北極四) 635
四輔增一 467
勾陳一 75
勾陳二 842
勾陳三 782
勾陳四 716
勾陳五 48
勾陳六 1065
勾陳增九 753
天柱增二 944
御女一 902
御女四 858
女史增一 824
柱史 856
尚書增一 817
天牀五 671
陰德增一 512
六甲二 363
五帝內座二 108
華蓋三 64
華蓋五 69
杠一 204
杠五 104
杠七 103
右樞(右垣一) 632
少尉(右垣二) 582
上輔(右垣三) 547
少輔(右垣四) 470
上衞增二 339
少衞(右垣六) 261
上丞(右垣七) 176
左樞(左垣一) 692
上宰(左垣二) 730
少宰(左垣三) 756
上弼(左垣四) 787
少弼(左垣五) 884
上衞增一 1002
上衞增二 1013
少衞(左垣七) 1077
少衞增三 1032
少衞增八 1099
天乙 623
天樞(北斗一) 532
天璇(北斗二) 529
天璇增一 511
天璣(北斗三) 561
天權(北斗四) 568
玉衡(北斗五) 592
開陽(北斗六) 607
搖光(北斗七) 621
天槍二 640
天槍三 646
天槍增四 676
元戈 639
太陽守 555
太尊 535
勢四 524
勢增四 508
勢增十一 515
文昌二 486
文昌四 472
內階一 429
內階四 468
內階增三 402
三師一 449
三師增一 455
八穀一 325
八穀增六 318
八穀增十四 267
八穀增二十六 343
八穀增三十 368
傳舍六 151
傳舍七 184
傳舍八 186
傳舍九 187
天廚一 895
天廚三 923
天棓一 825
天棓二 810
天棓三 806
天棓四 830
天棓五 815

太微垣

五帝座一 558
內屏一 553
內屏二 554
內屏三 562
內屏四 564
右執法(右垣一) 559
西上將(右垣二) 543
西次將(右垣三) 545
西次相(右垣四) 538
西上相(右垣五) 537
左執法(左垣一) 572
東上相(左垣二) 587
東次相(左垣三) 593
東次將(左垣四) 596
郎位一 575
郎位七 574
郎位十一 583
常陳一 594
常陳四 580
常陳增三 603
上台一(三台一) 446
上台二(三台二) 451
上台增一 420
上台增四 426
中台一(三台三) 500
中台二(三台四) 504
下台一(三台五) 541
下台二(三台六) 540
少微二 526
少微三 519
靈臺一 533
靈臺增五 531
明堂二 550
明堂增六 539

天市垣

帝座 788
侯 809
宦者三 784
斗一 754
斛一 778
斛二 781
列肆一 746
列肆二 762
車肆二 775
市樓二 813
宗正一 818
宗正二 822
宗正增二 799
宗人二 831
宗人四 836
宗人增一 838
宗一 869
宗二 870
帛度二 841
屠肆一 852
河中(右垣一) 763
河間(右垣二) 747
鄭(右垣四) 720
周(右垣五) 707
周增七 704
周增八 702

前接

獨(右垣七)	706	七公增五	673	亢宿		騎官四	668
巴(右垣八)	712	七公增七	702	亢宿一	634	騎官八	672
梁(右垣九)	739	七公增九	695	亢宿二	636	騎官十	656
楚(右垣十)	742	七公增十四	760	亢宿三	648	車騎一	679
韓(右垣十一)	768	七公增十五	767	亢宿四	643	騎陣將軍	673
魏(左垣一)	789	角宿		亢宿增七	660	房宿	
趙(左垣二)	804	角宿一	608	亢宿增十	664	房宿一	722
九河(左垣三)	821	角宿二	612	大角	638	房宿二	719
中山(左垣四)	839	角宿增三	611	右攝提一	625	房宿三	724
中山增一	829	平道一	598	右攝提二	618	房宿四	728
齊增五	905	天田二	628	左攝提二	658	房宿增二	714
吳越(左垣六)	889	天田增一	602	左攝提三	659	房宿增三	701
吳越增一	882	周鼎一	600	左攝提增一	666	房宿增四	710
徐(左垣七)	879	進賢增五	591	折威七	674	房宿增五	715
東海(左垣八)	849	進賢增八	585	頓頑二	681	鉤鈐一	731
燕(左垣九)	827	天門二	609	頓頑增一	687	鉤鈐二	732
南海(左垣十)	811	天門增四	604	陽門二	661	鍵閉	738
宋(左垣十一)	785	平一	605	氐宿		西咸二	721
天紀一	750	平二	630	氐宿一	665	西咸三	717
天紀三	783	庫樓一	624	氐宿二	680	東咸一	761
天紀六	791	庫樓二	652	氐宿三	698	東咸二	755
天紀九	826	庫樓三	631	氐宿四	685	東咸三	751
天紀增一	771	庫樓五	610	氐宿增一	670	東咸四	764
女牀一	790	庫樓七	586	氐宿增二十	688	東咸增一	769
女牀二	792	庫樓十	576	帝席一	633	日	703
女牀三	796	柱三	641	梗河一	663	從官二	711
貫索二	697	柱四	645	梗河二	653	心宿	
貫索三	693	柱五	644	梗河三	649	心宿一	744
貫索四	699	柱七	622	梗河增一	675	心宿二	757
貫索五	705	柱九	616	梗河增三	677	心宿三	766
貫索七	723	柱十一	606	梗河增五	662	心宿增二	737
貫索增三	689	衡一	619	招搖	651	心宿增三	743
七公二	745	衡二	620	天乳	709	心宿增四	752
七公三	734	衡三	627	天輻一	700	心宿增五	758
七公四	718	南門一	615	騎官一	696	積卒增二	729
七公六	690	南門二	654	騎官二	682	尾宿	
七公七	684	南門增二	655	騎官三	669	尾宿一	776

前接

尾宿二 774
尾宿三 779
尾宿四 786
尾宿五 801
尾宿六 819
尾宿七 812
尾宿八 805
尾宿九 801
天江三 794
天江四 797
天江增七 798
傳說 823
龜一 780
龜三 800
龜四 772
龜五 779
箕　宿
箕宿一 835
箕宿二 848
箕宿三 850
箕宿四 844
糠 798
杵二 802
杵三 795
杵增一 833
斗　宿
斗宿一 866
斗宿二 855
斗宿三 843
斗宿增三 851
天籥三 816
天籥六 803
天籥八 820
天籥增二 828
天弁一 862
天弁二 865
天弁四 870
天弁七 890
建二 887
建三 893
建五 899
建六 900
建增六 875
狗一 910
狗二 903
狗增六 894
狗國一 925
狗國二 928
狗國三 932
狗國四 927
天淵二 898
天淵三 901
天淵增一 922
天淵增二 929
籠一 853
籠六 891
籠八 880
籠十一 861
牛　宿
牛宿一 948
牛宿二 945
牛宿六 951
牛宿增六 943
牛宿增七 946
牛宿增十二 947
天桴一 936
天桴四 921
河鼓一 926
河鼓二 920
河鼓三 916
右旗一 909
右旗二 913
右旗三 904
右旗八 911
左旗二 914
左旗三 918
左旗四 919
左旗五 931
左旗九 939
左旗增十 933
織女一 864
織女二 867
織女增二 868
織女增三 854
漸臺二 873
漸臺三 883
漸臺增三 892
輦道一 881
輦道三 896
輦道增四 915
輦道增七 906
輦道增九 908
天田二 974
天田三 982
天田四 966
女　宿
女宿一 969
女宿二 976
女宿四 970
敗瓜一 955
瓠瓜一 961
瓠瓜二 967
瓠瓜三 965
瓠瓜四 959
瓠瓜五 958
瓠瓜增五 960
天津一 950
天津二 917
天津三 940
天津四 964
天津六 989
天津七 993
天津八 988
天津九 968
天津增六 937
天津增十六 952
天津增二十 984
天津增二十八 992
天津增三十 973
天津增三十八 941
奚仲一 897
奚仲二 907
奚仲三 912
奚仲增四 942
扶筐三 857
扶筐四 877
扶筐增一 846
周一 980
秦一 981
代一 996
晉 1000
燕 999
虛　宿
虛宿一 1001
虛宿二 990
司非一 987
泣二 1035
離瑜二 991
離瑜增一 978
天壘城一 1007
天壘城十 986
敗臼一 1018
敗臼二 1022
敗臼三 1061
敗臼增一 1046
危　宿
危宿一 1024
危宿二 1029

接前

危宿三 1011
危宿增六 1023
墳墓一 1043
墳墓二 1037
墳墓三 1048
墳墓四 1041
蓋屋一 1021
虛梁三 1049
天錢三 1010
天錢四 1028
人二 997
杵二 1030
臼二 1012
臼三 1027
臼四 1038
臼增一 1017
車府三 1039
車府四 1004
車府五 979
車府六 983
車府增三 985
車府增八 1005
車府增十一 1050
造父一 1045
造父二 1031
造父五 1015
天鉤三 954
天鉤四 972
天鉤五 995
天鉤八 1060
天鉤九 1084

室宿

室宿一 1071
室宿二 1069
離宮一 1056
離宮二 1059
離宮四 1055
離宮五 1085
離宮六 1087
螣蛇一 1047
螣蛇三 1016
螣蛇十 1040
螣蛇十二 1105
螣蛇十六 1070
螣蛇十九 1096
螣蛇二十 1103
螣蛇二十一 1100
螣蛇二十二 1097
螣蛇增一 971
螣蛇增十九 5
雷電一 1053
雷電四 1074
雷電六 1090
壘壁陣一 1009
壘壁陣二 1006
壘壁陣三 1008
壘壁陣四 1014
壘壁陣五 1025
壘壁陣六 1044
壘壁陣七 1062
壘壁陣八 1078
壘壁陣十一 1
羽林軍八 1051
羽林軍二十四 1058
羽林軍二十六 1063
羽林軍二十八 1075
羽林軍二十九 1079
羽林軍三十 1072
羽林軍三十一 1093
羽林軍三十四 1086
羽林軍三十八 1082
羽林軍四十五 1102
北落師門 1064
八魁一 6
八魁二 1111

壁宿

壁宿一 7
壁宿二 2
壁宿增六 1106
壁宿增二十二 16
天厩一 8
天厩三 9
霹靂一 1068
霹靂二 1081
霹靂三 1089
霹靂四 1098
霹靂五 1107
雲雨一 1088
雲雨四 1101
鈇鑕二 83
鈇鑕三 88
鈇鑕四 106
鈇鑕五 101

奎宿

奎宿一 45
奎宿二 33
奎宿四 24
奎宿五 25
奎宿六 23
奎宿七 37
奎宿八 43
奎宿九 58
奎宿十 52
奎宿十一 62
奎宿十三 66
奎宿十四 63
奎宿十五 61
奎宿十六 51
奎宿增十三 60
奎宿增十五 49
奎宿增十六 59
奎宿增十九 54
王良一 3
王良二 20
王良三 35
王良四 26
王良五 17
王良增四 12
王良增十四 40
策 42
附路 22
軍南門 57
閣道一 121
閣道二 93
閣道三 71
閣道五 34
閣道六 31
外屏一 36
外屏二 50
外屏四 78
外屏五 86
外屏六 96
外屏七 109
天溷二 44
天溷四 32
天溷增二 21
天溷增三 41
天溷增五 47
天溷增六 39
土司空 29

婁宿

婁宿一 97
婁宿二 95
婁宿三 113
婁宿增五 102
婁宿增六 94
婁宿增十一 112
天大將軍一 110

接前

天大將軍二 87
天大將軍三 22
天大將軍四 77
天大將軍六 81
天大將軍七 85
天大將軍九 114
天大將軍十 117
天大將軍十一 116
天大將軍增一 67
天大將軍增二 68
天大將軍增三 74
天大將軍增八 126
右更一 73
右更二 79
右更四 90
左更增七 155
天倉一 10
天倉二 55
天倉三 70
天倉四 92
天倉五 89
天倉六 105
天倉增十五 72
天倉增二十一 91
天庾三 138
胃宿
胃宿一 135
胃宿二 142
胃宿三 144
胃宿增三 152
胃宿增五 131
大陵二 150
大陵三 164
大陵五 163
大陵六 162
大陵七 145
大陵增九 122
大陵增十三 134
大陵增十六 148
大陵增十八 165
大陵增二十 174
積尸 154
天船一 143
天船二 160
天船三 182
天船五 196
天船六 226
天船七 228
天船增二 177
天船增四 188
積水 225
天廩一 189
天廩三 185
天廩四 183
天困一 159
天困二 181
天困三 156
天困四 140
天困六 124
天困八 137
天困九 129
天困增十一 178
天困增十五 194
天困增十七 169
昴宿
昴宿一 202
昴宿二 203
昴宿三 206
昴宿四 205
昴宿五 207
昴宿六 208
昴宿七 211
昴宿增六 201
昴宿增十二 212
月 224
卷舌一 199
卷舌二 217
卷舌三 218
卷舌四 215
卷舌增七 198
礪石四 237
天陰二 172
天陰四 167
天陰增六 166
芻藁一 123
芻藁六 120
芻藁增二 119
天苑一 219
天苑三 200
天苑四 192
天苑五 173
天苑六 153
天苑七 139
天苑八 141
天苑九 149
天苑十 161
天苑十一 179
天苑十二 193
天苑十三 209
天苑十四 213
天苑十六 221
天苑增三 171
天苑增四 170
天苑增九 128
天苑增十三 175
天苑增十四 190
天苑增十七 168
畢宿
畢宿一 246
畢宿二 241
畢宿三 238
畢宿四 235
畢宿五 251
畢宿六 247
畢宿七 244
畢宿八 220
畢宿增三 223
畢宿增七 229
畢宿增十二 239
畢宿增十三 248
畢宿增十六 249
附耳 256
附耳增一 255
天街二 232
天街增二 240
天街增三 243
天高一 270
天高增一 274
天高增四 293
諸王一 320
諸王六 258
諸王增四 314
五車一 266
五車二 282
五車三 328
五車四 329
五車五 292
柱一 268
柱二 269
柱三 272
柱五 316
柱七 295
咸池三 284
天潢五 280
天關 305
天關增二 308
天節二 250
九洲殊口二 227

前接

九洲殊口四 252
九洲殊口增十一 230
參旗四 264
參旗六 262
參旗七 263
參旗八 265
參旗增四 271
參旗增五 277
九游二 260
九游增四 257
天園一 80
天園二 99
天園三 118
天園四 125
天園五 132
天園六 157
天園九 214
天園十 236
天園十一 242
天園十二 253
天園增一 133
天園增三 180
天園增六 231
觜宿
觜宿二 300
司怪一 326
司怪二 334
司怪四 323
座旗六 362
參宿
參宿一 309
參宿二 304
參宿三 297
參宿四 324
參宿五 291
參宿六 315
參宿七 283
參宿增一 307
參宿增三 289
參宿增五 288
參宿增七 290
參宿增十八 332
參宿增三十八 285
伐二 301
伐三 303
玉井一 279
玉井三 276
軍井三 287
屏一 281
屏二 273
廁一 299
廁二 294
廁三 312
廁四 319
廁增六 327
廁增七 313
井宿
井宿一 346
井宿二 350
井宿三 354
井宿四 359
井宿五 358
井宿七 374
井宿八 382
井宿增一 342
井宿增十三 369
鉞 341
水府一 335
水府二 337
水府四 338
天籥二 384
五諸侯一 365
五諸侯二 378
五諸侯三 387
五諸侯四 396
五諸侯五 413
五諸侯增二 391
五諸侯增三 392
北河一 390
北河二 395
北河三 406
北河增二 398
北河增四 404
積薪 405
水位一 393
水位三 418
水位四 423
水位增四 408
南河二 389
四瀆三 352
四瀆四 348
四瀆增一 357
闕邱一 361
闕邱增三 379
闕邱增七 403
軍市一 347
軍市增二 353
軍市增五 375
天狼 360
天狼增二 370
天狼增四 376
天狼增五 371
丈人一 311
丈人二 298
子二 321
子增一 330
孫一 344
孫增一 345
老人 349
老人增一 367
老人增二 356
老人增三 331
弧矢一 377
弧矢二 388
弧矢三 409
弧矢七 372
弧矢八 364
弧矢九 383
弧矢增二 373
弧矢增七 385
弧矢增十七 411
弧矢增十九 407
弧矢增二十二 419
弧矢增二十三 414
弧矢增二十四 394
鬼宿
鬼宿三 438
鬼宿四 439
積尸增三 435
爟增三 417
外廚增三 428
天記 456
天記增一 474
天記增二 498
天狗一 434
天狗四 436
天狗六 445
天社一 422
天社二 437
天社三 443
天社五 465
天社六 476
天社增一 416
天社增二 444
天社增三 453
柳宿
柳宿一 432
柳宿二 433

前接

柳宿五 442
柳宿八 459
柳宿增三 448
柳宿增十 424
酒旗二 473
星宿
星宿一 466
星宿四 480
軒轅一 450
軒轅二 452
軒轅三 461
軒轅四 463
軒轅九 483
軒轅十 488
軒轅十一 501
軒轅十二 503
軒轅十三 494
軒轅十四 496
軒轅十五 482
軒轅十六 513
軒轅增二十二 441
軒轅增三十八 492
軒轅增四十二 490
軒轅增四十六 479
御女 495
內平增六 475
張宿
張宿二 497
張宿三 506
張宿五 481
張宿增一 493
翼宿
翼宿一 528
翼宿二 546
翼宿三 552
翼宿五 522
翼宿七 542
翼宿十六 536
軫宿
軫宿一 569
軫宿二 566
軫宿三 577
軫宿四 581
青邱五 548
青邱七 551
近南極
海山一 510
海山二 520
海山五 549
海山六 556
海山增一 516
十字架一 578
十字架三 589
十字架四 567
馬尾三 565
馬腹一 629
蜜蜂一 588
蜜蜂三 584
三角形一 682
三角形二 713
三角形三 770
三角形增一 736
三角形增二 694
異雀一 814
異雀二 834
異雀三 765
異雀四 749
異雀五 637
異雀六 733
異雀八 657
孔雀四 872
孔雀五 874
孔雀六 934
孔雀八 863
孔雀九 924
孔雀十 998
孔雀十一 949
孔雀增二 847
波斯二 957
蛇尾一 14
蛇尾三 120
蛇尾四 100
蛇腹一 146
蛇腹二 136
蛇首一 107
蛇首二 210
鳥喙一 1036
鳥喙四 18
鳥喙五 27
鳥喙六 11
鳥喙七 1108
鶴一 1026
鶴二 1054
鶴三 1057
鶴五 1080
鶴六 1066
鶴七 1076
鶴八 1073
鶴十二 1034
鶴增二 1042
火鳥一 1092
火鳥二 1094
火鳥三 1095
火鳥四 4
火鳥五 13
火鳥六 15
火鳥七 28
火鳥八 19
火鳥九 53
火鳥十 76
水委一 84
水委二 56
水委三 30
附白一 216
夾白一 286
夾白二 234
金魚一 233
金魚二 254
金魚三 306
金魚四 317
金魚增一 366
海石一 427
海石三 477
海石四 485
海石五 487
海石增一 458
海石增二 447
飛魚一 454
飛魚二 380
飛魚三 431
飛魚五 386
南船一 502
南船二 514
南船三 520
南船四 499
南船五 460
南船增一 507
小斗一 571
小斗三 517
小斗四 532
小斗八 430

表丁　恆星西名檢查表

Andromeda			22	β	1001		α	802	9	λ	102
1	o	1067	31	o	1021		β	795	13	α	113
3		1070	33	ι	1025		δ	800	35		135
16	λ	1096	34	α	1024		ε^1	780	39		142
17	ι	1097	43	θ	1035		ζ	779	41		144
19	κ	1100	48	γ	1037		η	772	48	ε	155
20	ψ	1103	52	π	1041		θ	833	57	δ	167
21	α	2	55	ζ	1043	Argo			58	ζ	172
25	σ	9	57	σ	1044		α	349	Auriga		
29	π	23	62	η	1048		β	460	3	ι	266
30	ε	24	63	κ	1049		γ	422	7	ε	268
31	δ	25	71	τ	1058		δ	443	8	ζ	269
34	ζ	33	73	λ	1062		ε	427	10	η	272
35	ν	37	76	δ	1063		ζ	419	11	μ	280
37	μ	43	86	o^1	1072		η	521	13	α	282
43	β	58	88	o^2	1075		θ	520	15	λ	284
46	ξ	68	90	ϕ	1078		ι	462	25	χ	295
48	ω	74	91	ψ^1	1079		κ	465	30	ξ	318
50	υ	81	93	ψ^2	1082		λ	456	32	ν	316
53	τ	65	98	b^1	1086		ν	356	33	δ	325
57	γ	110	101	b^3	1093		ξ	411	34	β	328
Antlia			105	ω^2	1102		π	383	37	θ	329
	α	509	Aquila				ρ	421	44	κ	342
	ε	469	13	ε	882		σ	394	58	ψ^7	362
		527	16	λ	890		τ	367	Bootes		
Apus			17	ζ	889		υ	487	4	τ	618
	α	657	38	μ	909		ϕ	491	8	η	625
	β	765	44	σ	913		χ	416	12	d	633
	γ	749	50	γ	916		ψ	474	16	α	638
	δ^1	733	53	α	920		ω	499	19	λ	639
Aquarius			55	η	921		a	440	21	ι	640
2	ε	969	60	β	926		h	464	23	θ	646
3		970	65	θ	938	Aries			25	ρ	649
6	μ	976	67	ρ	939	5	γ	95	27	γ	651
13	ν	986	Ara			6	β	97	28	σ	653

接前

29	π	658
30	ζ	659
34		662
36	ε	663
37	ξ	666
42	β	673
43	ψ	675
44	ι	676
45	θ	677
49	δ	684
51	μ	690
53	ν^2	695
Caelum		
	α	259
Camelopardus		
9		261
10		267
2H		184
5H		204
22H		339
24H		363
1H^1		176
Cancer		
8		418
16	ζ	423
17	β	424
41	ε	435
43	γ	438
48	ι	441
65	α	448
Canes Venatici		
8		580
12		594
20		603
25		614
17H		613
Canis Major		
1	ζ	345
2	β	347
5	ξ^2	353
9	α	360
13	κ	364
14	θ	370
20	ι	371
21	ε	372
22		373
23	γ	376
24	o^2	375
25	δ	377
	λ	351
Canis Minor		
3	β	389
6		393
10	α	401
Capricornus		
5	α^1	943
6	α^2	945
8	ν	946
9	β	948
11	ρ	951
16	ψ	966
18	ω	974
22	η	980
23	θ	981
24	A	982
32	ι	996
34	ζ	999
36	b	1000
39	ε	1006
40	γ	1008
43	κ	1009
49	δ	1014
16B		947
Carina		
	G	457
	I	507
	N	355
	P	514
	Q	399
	a	458
	o	447
	h	477
	l	485
	q	502
	s	510
	u	525
	w	534
Cassiopeia		
7	ρ	1105
11	β	3
15	κ	20
17	ζ	22
18	α	26
24	η	35
25	ν	34
27	γ	42
36	ψ	69
37	δ	71
45	ε	93
50		104
1H		1091
35H	ι	121
Centaurus		
1	i	616
4	h	622
5	θ	631
65G		557
183		599
194		626
	α^2	654
	β	629
	γ	586
	δ	565
	ε	615
	ζ	624
	η	652
	ι	606
	κ	668
	λ	549
	μ	620
	ν	619
	ξ^2	597
	π	544
	σ	576
	υ	642
	ϕ	627
	B	560
	o^1	661
	α	644
	$\aleph$	590
Cepheus		
1	κ	944
2	θ	954
3	η	972
5	α	995
8	β	1002
10	ν	1015
11		1013
21	ζ	1031
24		1032

接前

27	δ	1045
32	ι	1060
34	o	1084
35	γ	1099
6H		971
36H		1065
43H		48
Cetus		
2		1111
8	ι	10
13		21
16	β	29
20		41
31	η	55
45	θ	70
52	τ	89
53	χ	91
55	ζ	92
59	υ	106
65	ξ^1	115
68	o	119
72	ρ	123
73	ξ^2	124
76	σ	128
82	δ	129
86	γ	137
87	μ	140
89	π	139
91	λ	156
92	α	159
94		169
96	κ	178
Chamaeleon		
	β	571
	γ	517
	δ^2	523
	θ	430
Circinus		
	β	683
Columba		
	α	311
	β	321
	γ	330
	ε	298
	η	331
	κ	344
Coma		
12		574
15		575
23		583
43		600
Corona Australis		
	α	891
	ε	880
	θ	861
Corona Borealis		
2	η	689
3	β	693
4	θ	697
5	α	699
7	ζ	702
8	γ	705
Corvus		
2	ε	566
4	γ	569
7	δ	577
9	β	581
Crater		
7	α	582
11	β	536
12	δ	542
15	γ	546
27	ζ	552
Crux		
	β	589
	γ	578
	δ	567
	ε	573
	θ^1	563
Cygnus		
1	κ	897
6	β	906
8		908
10	ι	907
13	θ	912
15		915
18	δ	917
24	ψ	930
28	b^2	937
30		940
31	o^1	941
33		942
37	γ	950
41		952
50	α	964
53	ε	968
54	λ	973
58	ν	977
59	f^1	979
61		984
62	ξ	983
63	f^2	985
64	ζ	988
65	τ	989
66	υ	993
67	σ	992
72		1005
73	ρ	1004
Delphinus		
2	ε	955
4	ζ	958
6	β	959
9	α	961
11	δ	965
12	γ	967
Dorado		
	α	254
	β	306
	γ	233
	δ	317
	ζ	278
	θ	286
Draco		
1	λ	547
5	κ	582
10	i	623
11	α	632
13	θ	730
14	η	756
22	ζ	787
23	β	806
24	ν^1	808
28	ω	817
31	ψ^1	824
33	γ	830
36		846
39	b	857
43	ϕ	856
44	χ	858
47	o	877

前接

52	υ	884		θ	157	77	κ	405	85	ι	815
57	δ	895		ι	133	78	β	406	86	μ	821
60	τ	902		κ	125	81	g	408	91	θ	826
63	ε	923		υ^2	214	83	ϕ	413	92	ξ	829
114B		773		ϕ	118	37H	χ	417	102		841
1H		467		χ	99	Grus			103	o	839
9H		512		o	180		α	1026	110		869
66H^1		725		y	195		β	1054	111		871
Equuleus			Fornax				γ	1018	Horologium		
5	γ	887		β	147		δ^1	1042		α	231
8	α	990		δ	197		ε	1057		β	158
Eridanus				ν	111		ζ	1066	Hydra		
2	τ^2	149	Gemini				θ	1073	4	δ	432
3	η	153	1		334		ι	1076	5	σ	433
11	τ^3	161	7	η	341		λ	1022	11	ε	442
12		171	13	μ	346		μ^1	1034	22	θ	459
13	ζ	173	18	ν	350	Hercules			30	α	466
18	ε	192	24	γ	354	1	χ	718	35	ι	480
19	τ^5	193	27	ε	358	11	ϕ	734	38	κ	481
23	δ	200	31	ξ	359	20	γ	747	40	υ^2	493
27	τ^6	209	34	θ	365	22	τ	745	41	λ	497
28	τ^7	213	38	o	369	24	ω	754	42	μ	506
34	γ	219	43	ζ	374	27	β	763	46	γ	605
36	τ^9	221	46	τ	378	30	g	760	49	π	630
38	o^1	227	54	λ	382	35	σ	767	52		647
40	o^2	230	55	δ	384	44	η	771	25H	ν	522
41	υ^4	236	56		385	58	ε	783		ξ	548
43	υ^5	242	60	ι	387	60		784		o	551
48	ν	252	62	ρ	390	64	α	788	Hydrus		
52	υ^7	253	64	b^1	391	65	δ	789		α	107
53		257	65	b^2	392	67	π	790		β	14
57	μ	260	66	α	395	68	u	791		γ	216
67	β	276	69	υ	396	69	e	792		δ	120
69	λ	279	71	o	398	75	ρ	796		ε	136
	α	84	75	σ	404	76	λ	804		η^2	100

接前

	λ	38
Indus		
	α	957
	δ	1019
	ε	1020
	η	963
Lacerta		
2		1039
3		1040
7		1047
10		1050
1*H*		1033
Leo		
4	λ	471
5	ξ	473
14	ι	482
17	ε	483
24	μ	488
27	ν	490
29	π	492
30	η	494
31	*A*	495
32	α	496
36	ζ	501
41	γ	503
47	ρ	513
54		526
61	P^2	531
63	χ	533
68	δ	537
70	θ	538
74	Φ	539
77	σ	543
78	ι	545
91	υ	550
94	β	558
68*B*	*R*	484
Leo Minor		
10		475
31		508
37		515
41		519
46		524
Lepus		
2	ε	273
5	μ	281
6	λ	287
9	β	294
11	α	299
13	γ	312
14	ζ	313
15	δ	319
16	η	327
Libra		
9	α	665
19	δ	670
24	ι	680
27	β	685
31	ε	688
38	γ	698
42		701
43	κ	703
45	λ	714
46	θ	717
48		721
Lupus		
5	χ	711
83*G*		686
113*G*		696
	α	646
	β	668
	θ	729
	ι	641
	κ	678
	π	672
	τ^1	645
	ϕ^2	687
Lynx		
2		343
15		368
24		402
27		420
31		426
38		461
40		463
145*B*		452
Lyra		
2	μ	854
3	α	864
4	ε^1	867
5	ε^2	868
10	β	873
13	*R*	881
14	γ	883
17		892
21	θ	896
Mensa		
	γ	310
Microscopium		
	γ	978
	θ^1	994
Monoceros		
8		348
13		352
15	*S*	357
18		361
22		379
26		403
30		428
Musca		
	α	584
	γ	579
	δ	595
	ε	570
	η	601
	λ	556
Norma		
	γ^2	741
	δ	727
Octans		
	β	1052
	δ	637
	θ	1109
	ν	1003
Ophiuchus		
1	δ	739
4	ψ	751
5	ρ	752
7	χ	755
8	Φ	761
9	ω	764
13	ζ	768
20		775
25	ι	778
27	κ	781
35	η	785
40	ξ	793
42	θ	794
44		797
45	*d*	798

接　前

49	σ	799	62	χ^2	333	68	υ	1087		μ	27
51		803	67	ν	335	70		1090		ψ	98
55	α	809	69	f^1	338	84	ψ	1106	Pictor		
58		816	70	ξ	337	88	γ	7	47*G*		336
60	β	818	Pavo			Perseus				α	366
62	γ	822		β	962	13	θ	134		γ	322
64	ν	827		γ	998	15	η	143		δ	340
67		831		δ	934	18	τ	150		η^2	275
70		836		ε	924	23	γ	160	Pisces		
72		838		ζ	863	25	ρ	162	6	γ	1081
Orion				η	814	26	β	163	8	κ	1088
1	π^3	262		κ	874	33	α	182	10	θ	1089
3	π^4	263		λ	872	35	σ	188	17	ι	1098
7	π^1	264		ξ	847	38	o	198	18	λ	1101
8	π^5	265		π	834	39	δ	196	28	ω	1107
11		271		ρ	956	41	ν	199	30		1110
15		277		ϕ	953	44	ζ	215	33		1
19	β	283	Pegasus			45	ε	217	63	δ	36
20	τ	285	1		997	46	ξ	218	71	ε	50
22	o	288	8	ε	1011	47	λ	225	83	τ	62
24	γ	291	10	κ	1012	48	o	226	84	χ	61
25		290	14		1017	51	μ	228	90	ν	66
28	η	289	22	ν	1023		ι	164	98	μ	78
34	δ	297	24	ι	1027		υ	82	99	η	79
37	ϕ^1	300	26	θ	1029		ϕ	87	106	ν	86
41	θ^1	301	29	π	1030	Phoenix			110	o	90
43	θ^2	302	32		1038	11*G*		1095	111	ξ	96
44	ι	303	42	ζ	1053		α	15	113	α	109
46	ε	304	44	η	1055		β	53	Pisces Australis		
48	σ	307	47	λ	1056		γ	76	4		991
50	ζ	309	48	μ	1059		δ	80	9	ι	1010
53	κ	315	53	β	1069		ε	4	14	μ	1028
54	χ^1	323	54	α	1071		η	30	17	β	1046
58	α	324	55		1074		ι	1094	18	ε	1051
61	μ	332	62	τ	1085		λ^1	19	22	γ	1061

接前

24	α	1064	34	σ	876	20	σ	744	41	γ	720
Puppis			38	ζ	885	21	α	757	50	σ	746
(3)	l	407	39	o	887	22		758	55	ξ	811
108G		397	40	τ	888	23	τ	766	65	o	813
218G		415	41	π	893	24		769	58	η	849
	I	381	42	ψ	894	26	ε	774	63	θ	879
	P	412	44	ρ	899	34	ν	801	Sextans		
	a	414	46	ν	900	35	λ	805	2		479
	o	409	47	χ	903	94B	o^2	740	Taurus		
	f	400	52	h	910	1H	γ	674	1	o	183
	q	425	58	ω	925	3H		700	2	ξ	185
Pyxidis			59	b	927		ζ^2	777	5	f	189
	β	436	60	A	928		η	786	10		194
	γ	445	62	C	932		θ	807	16		201
Reticulum			31B	W	832		ι^1	819	17		202
	α	234	38B		837		κ	812	19	q	203
	β	210	66B		845		μ^1	776	20		205
	δ	222	100B		860		G	823	21		206
	η	245		a	901	Sculptor			23		207
	κ	191		β^1	898		α	46	25	η	208
Sagitta				η	844		β	1092	27		211
6	β	914		θ^1	929		γ	1083	28		212
7	δ	919		ι	922		δ	1104	35	λ	220
8	ζ	920	Scorpio			Scutum			37	A	224
12	γ	931	1	b	710	2H		859	38	ν	223
Sagittarius			2	A	715	3H		862	40	μ	229
3	X	820	5	ρ	719	4H		865	50	ω	232
4		828	6	π	722	6H		870	52	Φ	237
10	γ	835	7	δ	724	Serpens			54	γ	235
13	μ	843	8	β	928	21	ι	704	61	δ	238
19	δ	848	9	ω^1	931	24	α	706	64		239
20	ε	850	10	ω^2	732	28	β	707	65	κ	240
22	λ	855	13	c^1	735	32	μ	709	68		241
27	Φ	866	14	ν	738	35	κ	708	69	ν	243
32	ν^1	875	19		743	37	ε	712	71		244

接　前

74	ε	246
77	θ^1	247
78	θ^2	248
86	ρ	250
87	α	251
91	σ^1	255
92	σ^2	256
94	τ	258
102	ι	270
104	π	274
112	β	292
114	ε	293
119		296
123	ζ	305
126		308
132		314
136		320
139		326
264		249
Telescopium		
	α	853
	λ	878
	ξ	936
	ρ	886
Toucan		
	α	1036
	β^1	18
	γ	1080
	ε	1108
	ζ	11
	κ	65
Triangulum		
2	α	94
4	β	114
9	γ	117
Triangulum Australe		
	α	770
	β	713
	γ	682
	δ	736
	ε	694
	ζ	748
Ursa Major		
1	ο	429
8	ρ	449
9	ι	446
10		450
12	κ	451
13	σ^2	455
23	h	468
24	d	470
25	θ	472
29	υ	486
33	λ	500
34	μ	504
36		511
48	β	529
50	α	532
52	ψ	535
53	ξ	540
54	ν	541
63	χ	555
64	γ	561
69	δ	568
77	ε	592
79	ζ^1	607
85	η	621
30*H*		505
Ursae Minor		
1	α	75
4		635
5		650
7	β	667
13	γ^2	691
16	ζ	716
22	ε	782
23	δ	842
2*H*		671
		935
Vela		
	α	444
	M	478
	N	476
	P	516
	b	437
	c	453
	e	434
	i	530
	π	489
	q	498
	ϖ	518
Virgo		
2	ξ	553
3	ν	554
5	β	559
8	π	562
15	η	572
26	χ	585
29	γ	587
40	ψ	590
43	δ	593
47	ε	596
51	θ	598
60	σ	602
61		604
67	α	608
69		609
74	*l*	611
79	ζ	612
93	τ	628
98	κ	634
99	ι	636
100	λ	643
105	φ	648
107	μ	660
109		664
Volans		
	α	454
	β	431
	γ^2	380
	δ	386
	ζ	410
Vulpecula		
6		905
15		933
29		960

表戊　中西對照恆星錄

紀數	星等	中名	西名
1	4.8	壘壁陣十一	33 Piscium
2	2.1	壁宿二	21 α Andromedae
3	2.4	王良一	11 β Cassiopeiae
4	3.8	火鳥四	ε Phoenicis
5	5.0	螣蛇增十九	
6	5.0	八魁一	
7	2.9	壁宿一	88 γ Pegasi
8	4.0	天厩一	
9	4.5	天厩三	25 σ Andromedae
10	3.8	天倉一	8 ι Ceti
11	4.3	鳥喙六	ζ Tucanae
12	5.0	王良增四	
13	4.0	火鳥五	
14	2.9	蛇尾一	β Hydri
15	2.4	火鳥六	α Phoenicis
16	4.0	壁宿增二十二	
17	4.0	王良五	
18	4.3	鳥喙四	β^1 Tucanae
19	4.8	火鳥八	λ^1 Phoenicis
20	4.2	王良二	15 K Cassiopeiae
21	4.7	天潤增二	13 Ceti
22	3.8	附路	17 ζ Cassiopeiae
23	4.4	奎宿六	29 π Andromedae
24	4.6	奎宿四	30 ε Andromedae
25	3.5	奎宿五	31 δ Andromedae
26	2.4	王良四	18 α Cassiopeiae
27	5.0	鳥喙五	μ Phoencis
28	4.6	火鳥七	
29	2.2	土司空	16 β Ceti
30	4.5	水委三	η Phoenicis
31	4.7	閣道六	22 o Cassiopeiae
32	5.0	天潤四	
33	4.3	奎宿二	34 ζ Andromedae
34	5.0	閣道五	25 ν Cassiopeiae
35	3.6	王良三	24 η Cassiopeiae
36	4.5	外屏一	63 δ Piscium
37	4.4	奎宿七	35 ν Andromedae
38	5.0	近蛇尾一	λ Hydri
39	5.0	天潤增六	
40	5.0	王良增十四	
41	4.9	天潤增三	20 Ceti
42	2.3	策	27 γ Cassiopeiae
43	3.9	奎宿八	37 μ Andromedae
44	5.0	天潤二	
45	4.0	奎宿一	
46	4.3	近土司空南	α Sculptoris
47	5.0	天潤增五	
48	4.5	勾陳五	43H Cephei
49	5.0	奎宿增十五	
50	4.4	外屏二	71 ε Piscium
51	5.0	奎宿十六	
52	5.0	奎宿十	
53	3.4	火鳥九	β Phoenicis
54	5.0	奎宿增十九	

紀數	星等	中名	西名
55	3.6	天倉二	31 η Ceti
56	4.0	水委二	
57	5.0	軍南門	
58	2.4	奎宿九	43 β Andromedae
59	5.0	奎宿增十六	
60	5.0	奎宿增十三	
61	4.9	奎宿十五	84 χ Piscium
62	4.7	奎宿十一	83 τ Piscium
63	5.0	奎宿十四	
64	5.0	華蓋三	
65	4.9	近鳥喙五	κ Tucanae
66	4.7	奎宿十三	90 υ Piscium
67	4.0	天大將軍增一	
68	4.9	天大將軍增二	46 ξ Andromedae
69	5.0	華蓋五	36 ψ Cassiopeiae
70	3.8	天倉三	45 θ Ceti
71	2.8	閣道三	37 δ Cassiopeiae
72	5.0	天倉增十五	
73	5.0	右更一	
74	4.9	天大將軍增三	48 ω Andromedae
75	2.1	勾陳一	1 α Ursae Minoris
76	3.3	火鳥十	γ Phoenicis
77	5.0	天大將軍四	
78	5.0	外屏四	98 μ Piscium
79	3.8	右更二	99 η Piscium
80	3.9	天園一	δ Phoenicis
81	4.2	天大將軍六	50 υ Andromedae
82	3.7	天大將軍三	υ Persei
83	5.0	鐵鑕二	
84	0.5	水委一	α Eridani
85	4.9	天大將軍七	53 τ Andromedae
86	4.6	外屏五	106 ν Piscium
87	4.2	天大將軍二	φ Persei
88	5.0	鐵鑕三	
89	3.7	天倉五	52 τ Ceti
90	4.5	右更四	110 ο Piscium
91	4.8	天倉增二十一	53 χ Ceti
92	3.9	天倉四	55 ζ Ceti
93	3.5	閣道二	45 ε Cassiopeiae
94	3.6	婁宿增六	2 α Trianguli
95	4.0	婁宿二	5 γ Arietis
96	4.9	外屏六	111 ξ Piscium
97	2.7	婁宿一	6 β Arietis
98	4.1	近天園二	ψ Phoenicis
99	3.6	天園二	χ Eridani
100	4.6	蛇腹四	η^2 Hydri
101	4.0	鐵鑕五	
102	4.8	婁宿增五	9 λ Arietis
103	5.0	杠七	
104	4.1	杠五	50 Cassiopeiae
105	5.0	天倉六	
106	4.2	鐵鑕四	59 υ Ceti
107	3.0	蛇首一	α Hydri
108	5.0	五帝內座二	
109	3.9	外屏七	113 α Piscium
110	2.2	天大將軍一	57 γ Andromedae

紀數	星等	中名	西名
111	4.8		ν Fornacis
112	5.0	婁宿增十一	
113	2.2	婁宿三	13 α Arietis
114	3.1	天大將軍九	4 β Trianguli
115	4.6	天囷五	65 ξ Ceti
116	5.0	天大將軍十一	
117	4.1	天大將軍十	9 γ Trianguli
118	3.7	天園三	φ Eridani
119	變	蒭藁增二	68 ο Ceti
120	4.2	蛇腹三	δ Hydri
121	4.6	閣道一	35 H. ι Cassiopeiae
122	5.0	大陵增九	
123	4.9	蒭藁一	72 ρ Ceti
124	4.3	天囷六	73 ξ² Ceti
125	4.3	天園四	κ Eridani
126	5.0	天大將軍增八	
127	5.0	天囷十	
128	4.8	天苑增九	76 σ Ceti
129	4.0	天囷九	82 δ Ceti
130	5.0	蒭藁六	
131	5.0	胃宿增五	
132	4.0	天園五	
133	3.9	天園增一	ι Eridani
134	4.3	大陵增十三	13 θ Persei
135	4.6	胃宿一	35 Arietis
136	4.2	蛇腹二	ε Hydri
137	3.6	天囷八	86 γ Ceti
138	5.0	天廋三	
139	4.3	天苑七	89 π Ceti
140	4.3	天囷四	87 μ Ceti
141	4.0	天苑八	
142	4.6	胃宿二	39 Arietis
143	3.9	天船一	15 η Persei
144	3.7	胃宿三	41 Arietis
145	4.0	大陵七	
146	5.0	蛇腹一	
147	4.2		β Fornacis
148	5.0	大陵增十六	
149	4.8	天苑九	2 τ² Eridani
150	4.0	大陵二	18 τ Persei
151	5.0	傳舍六	
152	4·0	胃宿增三	
153	4.1	天苑六	3 η Eridani
154	5.0	積尸（胃宿屬）	
155	4.6	左更增七	48 ε Arietis
156	4.7	天囷三	91 λ Ceti
157	3.0	天園六	θ Eridani
158	5.0		β Horologii
159	2.8	天囷一	92 α Ceti
160	3.1	天船二	23 γ Persei
161	4.1	天苑十	11 τ³ Eridani
162	變	大陵六	25 ρ Persei
163	變	大陵五	26 β Persei
164	4.2	大陵三	ι Persei
165	5.0	大陵增十八	
166	4.0	天陰增六	

紀數	星等	中名	西名
167	4.5	天陰四	57 δ Arietis
168	4.0	天苑增十七	
169	5.0	天囷增十七	94 Ceti
170	3.0	天苑增四	
171	3.8	天苑增三	12 Eridani
172	4.8	天陰二	58 ζ Arietis
173	4.9	天苑五	13 ζ Eridani
174	5.0	大陵增二十	
175	5.0	天苑增十三	
176	4.8	上丞(紫微右垣七)	1H¹ Camelopardalis
177	5.0	天船增二	
178	5.0	天囷增十一	96 κ Ceti
179	4.0	天苑十一	
180	4.3	天廐增三	ε Eridani
181	5.0	天囷二	
182	1.9	天船三	33 α Persei
183	3.8	天廩四	1 ● Tauri
184	4.2	傳舍七	2H Camelopardalis
185	3.8	天廩三	2 ξ Tauri
186	5.0	傳舍八	
187	5.0	傳舍九	
188	4.4	天船增四	35 σ Persei
189	4.3	天廩一	5 f Tauri
190	4.0	天苑增十四	
191	4.8		κ Reticuli
192	3.8	天苑四	18 ε Eridani
193	4.3	天苑十二	19 τ⁵ Eridani
194	4.4	天囷增十五	10 Tauri
195	4.5	天廐增四	y Eridani
196	3.2	天船五	39 δ Persei
197	4.9		δ Fornacis
198	3.9	卷舌增七	38 ● Persei
199	3.9	卷舌一	41 υ Persei
200	3.7	天苑三	23 δ Eridani
201	3.4	昴宿增六	16 Tauri
202	3.8	昴宿一	17 Tauri
203	4.3	昴宿二	19 q Tauri
204	4.7	杠一	5H Camelopardalis
205	4.1	昴宿四	20 Tauri
206	5.8	昴宿三	21 Tauri
207	4.3	昴宿五	23 Tauri
208	2.9	昴宿六	25 η Tauri
209	4.3	天苑十三	27 τ⁶ Eridani
210	3.8	蛇首二	β Reticuli
211	3.7	昴宿七	27 Tauri
212	5.2	昴宿增十二	28 Tauri
213	5.0	天苑十四	28 τ⁷ Eridani
214	4.1	天廐九	υ² Eridani
215	3.0	卷舌四	44 ζ Persei
216	3.1	附白一	γ Hydri
217	3.0	卷舌二	45 ε Persei
218	4.1	卷舌三	46 ξ Persei
219	3.3	天苑一	34 γ Eridani
220	3.3	畢宿八	35 λ Tauri
221	4.6	天苑十六	36 τ⁹ Eridani
222	4.3	近夾白二	δ Reticuli

紀數	星等	中名	西名
223	4.0	畢宿增三	38 ν Tauri
224	4.5	月	37 A Tauri
225	4.3	積水（胃宿屬）	47 λ Persei
226	4.0	天船六	48 o Persei
227	4.1	九洲殊口二	38 o' Eridani
228	4.3	天船七	51 μ Persei
229	4.3	畢宿增七	49 μ Tauri
230	4.5	九洲殊口增十一	40 o^2 Eridani
231	3.8	天園增六	α Horologii
232	4.8	天街二	50 ω Tauri
233	4.3	金魚一	γ Doradus
234	3.4	夾白二	α Horologii
235	3.9	畢宿四	54 γ Tauri
236	3.8	天園十	41 υ^4 Eridani
237	5.0	礪石四	52 ϕ Tauri
238	3.9	畢宿三	61 δ Tauri
239	4.9	畢宿增十二	64 Tauri
240	4.1	天街增二	65 κ Tauri
241	4.3	畢宿二	68 Tauri
242	3.9	天園十一	43 υ^5 Eridani
243	4.2	天街增三	69 υ Tauri
244	4.6	畢宿七	71 Tauri
245	5.0		η Reticuli
246	3.5	畢宿一	74 ε Tauri
247	4.2	畢宿六	77 θ^1 Tauri
248	3.6	畢宿增十三	78 θ^2 Tauri
249	4.8	畢宿增十六	264B Tauri
250	4.7	天節二	86 ρ Tauri
251	1.1	畢宿五	87 α Tauri
252	4.1	九洲殊口四	48 υ Eridani
253	3.8	天園十二	52 υ^7 Eridani
254	3.5	金魚二	α Doradus
255	5.2	附耳增一	91 σ^1 Tauri
256	4.9	附耳	92 σ^2 Tauri
257	4.0	九游增四	53 Eridani
258	4.3		94 τ Tauri
259	4.6		α Cocli
260	4.1	九游二	57 μ Eridani
261	4.4	少衛（紫微右垣六）	9 Camelopardalis
262	3.2	參旗六	1 π^3 Orionis
263	4.0	參旗七	3 π^4 Orionis
264	4.8	參旗四	7 π^1 Orionis
265	3.9	參旗八	8 π^5 Orionis
266	2.9	五車一	3 ι Aurigae
267	4.2	八穀增十四	10 Camelopardalis
268	3.2	柱一（畢宿屬）	7 ε Aurigae
269	3.9	柱二（畢宿屬）	8 ζ Aurigae
270	4.7	天高一	102 ι Tauri
271	4.6	參旗增四	11 Orionis
272	3.3	柱三（畢宿屬）	10 η Aurigae
273	3.4	屏二	2 ε Leporis
274	5.0	天高增一	104 m Tauri
275	4.9		η^2 Pictoris
276	2.9	玉井三	67 β Eridani
277	4.9	參旗增五	15 Orionis
278	4.7		ζ Doradus

紀數	星等	中名	西		名
279	4.3	玉井一	69	λ	Eridani
280	4.9	天潢五	11	μ	Aurigae
281	3.3	屏一	5	μ	Leporis
282	0.2	五車二	13	α	Aurigae
283	0.3	參宿七	19	β	Orionis
284	4.8	咸池三	15	λ	Aurigae
285	3.6	參宿增三十八	20	τ	Orionis
286	4.8	夾白一		θ	Doradus
287	4.2	軍井三	6	λ	Lepories
288	4.6	參宿增五	22	ο	Orionis
289	3.4	參宿增三	28	η	Orionis
290	4.7	參宿增七	25		Orionis
291	1.7	參宿五	24	γ	Orionis
292	1.7	五車五	112	β	Tauri
293	4.8	天高增四	114	ο	Tauri
294	3.0	廁二	9	β	Leporis
295	5.0	柱七(畢宿屬)	25	χ	Aurigae
296	4.9		119		Tauri
297	2.5	參宿三	34	δ	Orionis
298	3.9	丈人二		ε	Columbae
299	2.7	廁一	11	α	Leporis
300	4.5	觜宿二	37	φ	Orionis
301	4.4	伐二	41	θ^1	Orionis
302	4.9		43	θ^2	Orionis
303	3.0	伐三	44	ι	Orionis
304	1.7	參宿二	46	ε	Orionis
305	3.0	天關	123	ζ	Tauri
306	3.7	金魚三		β	Doradus
307	3.8	參宿增一	48	σ	Orionis
308	4.8	天關增二	126		Tauri
309	1.9	參宿一	50		Orionis
310	5.0			γ	Mensae
311	2.7	丈人一		α	Columbae
312	3.8	廁三	13	γ	Leporis
313	3.6	廁增七	14	ζ	Leporis
314	5.0	諸王增四	132		Tauri
315	2.2	參宿六	53	κ	Orionis
316	4.2	柱五(畢宿屬)	32	υ	Aurigae
317	4.5	金魚四		δ	Doradus
318	4.9	八穀增六	30	ξ	Aurigae
319	3.9	廁四	15	δ	Leporis
320	4.6	諸王一	136		Tauri
321	3.1	子二		β	Columbae
322	4.3			γ	Pictoris
323	4.5	司怪四	54	χ^1	Orionis
324	0.9	參宿四	58	α	Orionis
325	3.9	八穀一	33	δ	Aurigae
326	4.7	司怪一	139		Tauri
327	3.7	廁增六	16	η	Leporis
328	2.1	五車三	34	β	Aurigae
329	2.7	五車四	37	θ	Aurigae
330	4.3	子增一		γ	Columbae
331	4.0	老人增三	井	η	Columbae
332	4.2	參宿增十八	61	μ	Orionis
333	4.7		62	χ^2	Orionis
334	4.1	司怪二	1		Geminorum

紀數	星等	中名	西名
335	4.5	水府一	67 ν Orionis
336	5.0		47G Pictoris
337	4.4	水府二	70 ξ Orionis
338	4.9	水府四	69 f^1 Orionis
339	4.7	上衞增二（紫微右垣屬）	22H Camelopardalis
340	4.8		δ Pictoris
341	3.2	鉞	7 η Geminorum
342	4.4	井宿增一	44 κ Aurigae
343	4.3	八穀增二十六	2 Lyncis
344	4.5	孫一	κ Columbae
345	3.2	孫增一	1 ζ Canis Majoris
346	3.2	井宿一	13 μ Geminorum
347	2.0	軍市一	2 β Canic Majoris
348	4.4	四瀆四	8 Monocerotis
349	1.0	老人	α Argûs
350	4.0	井宿二	18 ν Geminorum
351	4.6		λ Canis Majoris
352	4.4	四瀆三	13 Monocerotis
353	4.5	軍市增二	5 ξ^2 Canis Majoris
354	1.9	井宿三	24 γ Geminorum
355	4.5		N Carinae
356	3.2	老人增二	υ Argûs
357	4.6	四瀆增一	15 s Monocerotis
358	3.2	井宿五	27 ε Geminorum
359	3.4	井宿四	31 ξ Geminorum
360	1.4	天狼	9 α Canis Majoris
361	4.8	闕邱一	18 Monocerotis
362	5.0	座旗六	58 ψ^7 Aurigae
363	4.6	六甲二	24H Camelopardalis
364	3.9	弧矢八	13 κ Canis Majoris
365	3.6	五諸侯一（井宿屬）	34 θ Geminorum
366	3.3	金魚增一	α Pictoris
367	2.8	老人增一	τ Argûs
368	4.5	八穀增三十	15 Lyncis
369	4.7	井宿增十三	38 ε Geminorum
370	4.2	天狼增二	14 θ Canis Majoris
371	4.4	天狼增五	20 ι Canis Majoris
372	1.6	弧矢七	21 ε Canis Majoris
373	3.5	弧矢增二	22 Canis Majoris
374	3.8	井宿七	43 ζ Geminorum
375	3.0	軍市增五	24 σ^2 Canis Majoris
376	4.1	天狼增四	23 γ Canis Majoris
377	2.0	弧矢一	25 δ Canis Majoris
378	4.3	五諸侯二（井宿屬）	46 τ Geminorum
379	4.1	闕邱增三	22 Monocerotis
380	3.6	飛魚二	γ^2 Volantis
381	4.5		1 Puppis
382	3.7	井宿八	54 λ Geminorum
383	2.7	弧矢九	π Argûs
384	3.3	天鐘二	55 δ Geminorum
385	4.8	弧矢增七	56 Geminorum
386	3.9	飛魚五	δ Volantis
387	3.8	五諸侯三（井宿屬）	60 ι Geminorum
388	2.4	弧矢二	31 η Canis Majoris
389	3.1	南河二	3 β Canis Minoris
390	4.2	北河一	62 ρ Geminorum

紀數	星等	中名	西		名
391	5.0	五諸侯增二(井宿屬)	64	b^1	Geminorum
392	5.0	五諸侯增三(井宿屬)	65	b^2	Geminorum
393	4.8	水位一	6		Canis Minoris
394	3.0	弧矢增二十四		σ	Argûs
395	1.6	北河二	6	α	Geminorum
396	4.3	五諸侯四(井宿屬)	69	υ	Geminorum
397	4.5		180G		Puppis
398	4.9	北河增二	71	o	Geminorum
399	4.9			Q	Carinae
400	4.7			f	Puppis
401	0.5	南河三	10	α	Canis Minoris
402	4.9	內階增三	24		Lyncis
403	4.1	闕邱增七	26		Monocerotis
404	4.4	北河增四	75	σ	Geminorum
405	3.6	積薪	77	π	Geminorum
406	1.3	北河三	78	β	Geminorum
407	4.2	弧矢增十九	(3)	ι	Puppis
408	5.0	水位增四	81	g	Geminorum
409	3.4	弧矢三		c	Puppis
410	3.8			ζ	Volantis
411	3.4	弧矢增十七		ξ	Argûs
412	4.1			ρ	Puppis
413	4.9	五諸侯五(井宿屬)	83	ϕ	Geminorum
414	3.7	弧矢增二十三		α	Puppis
415	4.3		218G		Puppis
416	3.6	天社增一		χ	Argûs
417	5.0	爟增三	37H	χ	Geminorum
418	5.0	水位三	8		Cancri

紀數	星等	中名	西		名
419	2.3	弧矢增二十二		ζ	Argûs
420	4.8	上台增一	27		Lyncis
421	2.9	近弧矢增三十二		ρ	Argûs
422	1.9	天社一		γ	Argûs
423	4.6	水位四	16	ζ	Cancri
424	3.7	柳宿增十	17	β	Cancri
425	4.5			q	Puppis
426	4.4	上台增四	31		Lyncis
427	1.7	海石一		ε	Argûs
428	3.9	外廚增三	30		Monocerotis
429	3 5	內階一	1	o	Ursae Majoris
430	4.2	小斗八		θ	Chamaeleontis
431	3.6	飛魚三		β	Volantis
432	4.2	柳宿一	4	δ	Hydrae
433	4.5	柳宿二	5	σ	Hydrae
434	4.1	天狗一		e	Velorum
435	3.9	天狗四		β	Pyxidis
436	3.7	天社二		b	Velorum
437	4.7	鬼宿三	43	γ	Cancri
438	6.3	積尸增三(鬼宿屬)	41	ε	Cancri
439	4.1	鬼宿四	47	δ	Cancri
440	3.7	天狗五		α	Argûs
441	4.1	軒轅增二十二	48	ι	Cancri
442	3.5	柳宿五	11	ε	Hydrae
443	2.0	天社三		δ	Argûs
444	4.0	天社增二		α	Velorum
445	4.4	天狗六		γ	Pyxidis
446	3.1	上台一(三台一)	9	ι	Ursae Majoris

紀數	星等	中名	西名
447	4.0	海石增二	*o* Carinae
448	4.3	柳宿增三	65 *α* Carinae
449	5.0	三師一	8 *ρ* Ursae Majoris
450	4.2	軒轅一	10 Ursae Majoris
451	3.7	上台二（三台三）	12 *κ* Ursae Majoris
452	4.7	軒轅二	145*B* Lyncis
453	3.7	天社增三	*C* Velorum
454	4.1	飛魚一	*α* Volantis
455	4.8	三師增一	13 σ^2 Ursae Majoris
456	2.3	天記	*λ* Argûs
457	4.5		*G* Carinae
458	3.5	海石增一	*α* Carinae
459	3.8	柳宿八	22 *θ* Hydrae
460	1.7	南船五	*β* Argûs
461	3.8	軒轅三	38 Lyncis
462	2.2	海石二	*ι* Argûs
463	3.4	軒轅四	40 Lyncis
464	5.0	近張宿五	*h* Argûs
465	2.6	天社五	*κ* Argûs
466	2.2	星宿一	30 *α* Hydrae
467	4.5	四輔增一	1*H* Draconis
468	3.7	內階四	23 *h* Ursae Majoris
469	4.4		*ε* Antliae
470	4.6	少輔（紫微右垣四）	24 *α* Ursae Majoris
471	4.6	軒轅八	4 *λ* Leonis
472	3.3	文昌四	25 *θ* Ursae Majoris
473	5.0	酒旗二	5 *ξ* Leonis
474	3.5	天記增一	*ψ* Argûs
475	4.6	內平增六	10 Leonis Minoris
476	3.0	天社六	*N* Velorum
477	4.2	海石三	*h* Carinae
478	4.4		*M* Velorum
479	4.8	軒轅增四十六	2 Sextantis
480	4.2	星宿四	35 *ι* Hydrae
481	4.9	張宿五	38 *κ* Hydrae
482	3.7	軒轅十五	14 *o* Leonis
483	3.1	軒轅九	17 *ε* Leonis
484	5-10		68*B* *R* Leonis
485	變	海石四	*ι* Carinae
486	3.9	文昌二	29 Ursae Majoris
487	3.0	海石五	*υ* Argûs
488	4.1	軒轅十	24 *μ* Leonis
489	4.4		*m* Velorum
490	5.0	軒轅增四十二	27 *ν* Leonis
491	3.7		*φ* Argûs
492	5.0	軒轅增三十八	29 *π* Leonis
493	4.7	張宿增一	40 υ^2 Hydrae
494	3.6	軒轅十三	30 *η* Leonis
495	4.6	御女（星宿屬）	31 *A* Leonis
496	1.4	軒轅十四	32 *α* Leonis
497	3.9	張宿二	41 *λ* Hydrae
498	4.0	天記增二	*q* Velorum
499	3.6	南船四	*ω* Argûs
500	3.6	中台一（三台三）	33 *λ* Ursae Majoris
501	3.8	軒轅十一	36 *ζ* Leonis
502	3.4	南船一	*q* Carinae

紀數	星等	中名	西		名
503	2.3	軒轅十二	41	γ	Leonis
504	3.2	中台二(三台四)	34	μ	Ursae Majoris
505	5.0		30H		Ursae Majoris
506	4·1	張宿三	42	μ	Hydrae
507	4.0	南船增一		I	Carinae
508	4.4	勢增四	31		Leonis Minoris
509	4.4			α	Antliae
510	4.1	海山一		ε	Carinae
511	4.9	天璇增一	36		Ursae Majoris
512	5.0	陰德增一	9H		Draconis
513	3.8	軒轅十六	47	ρ	Leonis
514	3.6	南船二		P	Carinae
515	4.8	勢增十一	37		Leonis Minoris
516	4.0	海山增一		P	Velorum
517	4.1	小斗二		γ	Chamaelentis
518	4.4			χ	Velorum
519	5.0	少微三	41		Leonis Minoris
520	3.0	南船三		θ	Argûs
521	變	海山二		η	Argûs
522	3.3	翼宿五	25H	ν	Hydrae
523	4.6	小斗四		δ^2	Chamaeleontis
524	3.9	勢四	46		Leonis Minoris
525	3.8			ϰ	Carinae
526	4.3	少微二	54		Leonis
527	4.6				Antliae
528	4.1	翼宿一	7	α	Crateris
529	2.4	天璇(北斗二)	48	β	Ursae Majoris
530	4.6			i	Velorum

紀數	星等	中名	西		名
531	5.0	靈台增五	61	P^2	Leonis
532	2.0	天樞(北斗一)	50	ε	Ursae Majoris
533	4.6	靈台一	63	χ	Leonis
534	4.0			χ	Carinae
535	3.2	太尊	52	ψ	Ursae Majoris
536	4.5	翼宿十六	11	β	Crateris
537	2.6	西上相(太微右垣五)	68	δ	Leonis
538	3.4	西次相(太微右垣四)	70	θ	Leonis
539	4.6	明堂增六	74	Φ	Leonis
540	3.8	下台二(三台六)	53	ξ	Ursae Majoris
541	3.7	下台一(三台五)	54	ν	Ursae Majoris
542	3.8	翼宿七	12	δ	Crateris
543	4.2	西上將(太微右垣二)	77	σ	Leonis
544	4.4	近海山三		π	Centauri
545	4.1	西次將(太微右垣三)	78	ι	Leonis
546	4.2	翼宿二	15	γ	Crateris
547	4.1	上輔(紫微右垣三)	1	λ	Draconis
548	3.7	青邱五		ξ	Hydrae
549	3.3	海山五		λ	Centauri
550	4.5	明堂二	91	υ	Leonis
551	5.0	青邱七		ο	Hydrae
552	4.9	翼宿三	27	ζ	Crateris
553	4.8	內屏一	2	ξ	Virginis
554	4.2	內屏二	3	ν	Virginis
555	3.8	太陽守	63	χ	Ursae Majoris
556	3.8	海山六		λ	Muscae
557	4.3		65	G	Centauri
558	2.2	五帝座一	94	β	Leonis

紀數	星等	中名	西名
559	3.8	右執法（太微右垣一）	5 β Virginis
560	4.6		β Centauri
561	2.5	天璣（北斗三）	64 γ Ursae Majoris
562	4.6	內屏三	8 π Virginis
563	4.5		θ^1 Crucis
564	4.2	內屏四	9 ρ Virginis
565	2.8	馬尾三	δ Centauri
566	3.2	軫宿二	2 ε Corvi
567	3.1	十字架四	δ Crucis
568	3.4	天權（北斗四）	69 δ Ursae Majoris
569	2.7	軫宿一	4 γ Corvi
570	4.2		ε Muscae
571	4.3	小斗一	β Chamaeleontis
572	4.0	左執法（太微左垣一）	15 η Virginis
573	3.5		ε Crucis
574	4.8	郎位七	12 Comae
575	4.6	郎位一	15 Comae
576	4.1	庫樓十	σ Centauri
577	3.1	軫宿三	7 δ Corvi
578	1.6	十字架一	γ Crusis
579	4.0		γ Muscae
580	4.3	常陳四	8 Canum Venaticorum
581	3.0	軫宿四	9 β Corvi
582	3.9	少尉（紫微右垣二）	5 κ Draconis
583	4.9	郎位十一	23 Comae
584	2.9	蜜蜂三	α Muscae
585	4.8	進賢增八	26 χ Virginis
586	2.4	庫樓七	γ Centauri
587	2.9	東上相（太微左垣二）	29 γ Virgini
588	3.3	蜜蜂一	β Muscae
589	1.5	十字架三	β Crucis
590	4.3	近庫樓六	κ Centauri
591	5.0	進賢增五	40 ψ Virginis
592	1.8	玉衡（北斗五）	77 ε Ursae Majoris
593	3.7	東次相（太微左垣三）	43 δ Virginis
594	2.8	常陳一	12 Canum Venaticorum
595	3.6		δ Muscae
596	3.0	東次將（太微左垣四）	47 ε Virginis
597	4.4		ξ^2 Centauri
598	4.4	平道一	51 θ Virginis
599	4.7		183G Centauri
600	4.3	周鼎一	43 Comae
601	4.9		η Muscae
602	5.0	天田增一（角宿屬）	60 σ Virginis
603	4.7	常陳增三	20 Canum Venaticorum
604	4.8	天門增四	61 Virginis
605	3.3	平一	46 γ Hydrae
606	3.0	柱十一（角宿屬）	ι Centauri
607	2.1	開陽（北斗六）	79 ζ^1 Ursae Majoris
608	1.2	角宿一	67 α Virginis
609	4.9	天門二	69 Virginis
610	4.0	庫樓五	d Centauri
611	4.8	角宿增三	74 ι Virginis
612	3.4	角宿二	79 ζ Virginis
613	5.0	近庫樓五	17H Canum Venaticorum
614	4.9		25 Canum Venaticorum

紀數	星等	中名	西名
615	2.6	南門一	ε Centauri
616	4.2	柱九(角宿屬)	1 *i* Centauri
617	4.6		*M* Centauri
618	4.5	右攝提二	4 τ Boötis
619	3.5	衡一	ν Centauri
620	3.3	衡二	μ Centauri
621	1.9	搖光(北斗七)	85 η Ursae Majoris
622	4.7	柱七(角宿屬)	4 *h* Centauri
623	4.8	天乙	10 *i* Draconis
624	2.8	庫樓一	ζ Centauri
625	2.8	右攝提一	8 η Boötis
626	4.8		294*G* Centauri
627	4.0	衡三	φ Centauri
628	4.3	天田二(角宿屬)	93 τ Virginis
629	0.8	馬腹一	β Centauri
630	3.5	平二	49 π Hydrae
631	2.1	庫樓三	5 θ Centauri
632	3.6	右樞(紫微右垣一)	11 α Draconis
633	4.8	帝席一	12 *d* Boötis
634	4.4	亢宿一	98 κ Virginis
635	5.0	后宮(北極四)	4 Ursae Minoris
636	4.2	亢宿二	99 ι Virginis
637	4.1	異雀五	δ Octantis
638	0.3	大角	16 α Boötis
639	4.3	元戈	19 λ Boötis
640	4.8	天槍二	21 ι Boötis
641	3.9	柱三(角宿屬)	ι Lupi
642	4.4		υ Centauri
643	4.5	亢宿四	100 λ Virginis
644	4.6	柱五(角宿屬)	α Centauri
645	4.6	柱四(角宿屬)	τ^1 Lupi
646	4.2	天槍三	23 θ Boötis
647	5.0		52 Hydrae
648	5.0	亢宿三	105 φ Virginis
649	3.7	梗河三	25 ρ Boötis
650	4.4	庶子(北極三)	5 Ursae Minoris
651	3.0	招搖	27 γ Boötis
652	2.7	庫樓二	η Centauri
653	4.5	梗河二	28 σ Boötis
654	0.2	南門二	α^2 Centauri
655	3.4	南門增二	α Circini
656	2.5	騎官十	α Lupi
657	3.8	異雀八	α Apodis
658	4.6	左攝提二	29 π Boötis
659	3.9	左攝提三	30 ζ Boötis
660	3.9	亢宿增七	107 μ Virginis
661	3.8	陽門二	C^1 Centauri
662	5.0	梗河增五	34 Boötis
663	2.6	梗河一	36 ε Boötis
664	3.7	亢宿增十	109 Virginis
665	2.7	氐宿一	9 α Librae
666	4.6	左攝提增一	37 ξ Boötis
667	2.2	帝(北極二)	7 β Ursae Minoris
668	2.7	騎官四	β Lupi
669	3.3	騎官三	κ Centauri
670	4.9	氐宿增一	19 δ Librae

紀數	星等	中名	西名
671	4.9	天牀五	2*H* Ursae Minoris
672	3.8	騎官八	π Lupi
673	3.6	七公增五	42 β Boötis
674	3.6	折威七	1 γ Scorpii
675	4.6	梗河增一	43 ψ Boötis
676	4.9	天槍增四	44 *i* Boötis
677	5.0	梗河增三	45 *c* Boötis
678	4.2	騎陣將軍	κ Lupi
679	3.5	車騎一	ζ Librae
680	4.3	氐宿二	24 ι Librae
681	5.0	頓頑二	1 Lupi
682	3.0	三角形一	γ Trianguli Australis
683	4.0		β Circini
684	3.5	七公七	49 δ Boötis
685	2.8	氐宿四	27 β Librae
686	3.4	騎官二	83*G* Lupi
687	4.7	頓頑增一	ϕ^2 Lupi
688	5.0	氐宿增二十	31 ε Librae
689	5.0	貫索增三	2 η Coronae Borealis
690	4.3	七公六	51 μ Boötis
691	3.1	太子（北極一）	13 γ^2 Ursae Minoris
692	3.4	右樞（紫微左垣一）	12 ι Draconis
693	3.7	貫索三	3 β Coronae Boraelis
694	4.1	三角形增二	ε Trianguli Australis
695	5.0	七公增九	53 γ^2 Boötis
696	3.0	騎官一	113*G* Lupi
697	4.2	貫索二	4 θ Coronae Borealis
698	4.1	氐宿三	38 γ Librae

紀數	星等	中名	西名
699	2.3	貫索四	5 *a* Coronae Borealis
700	3.9	天輻一	3*H* Scorpii
701	5.0	房宿增三	42 Librae
702	4.6	七公增七	7 ζ Coronae Borealis
703	5.0	日	43 κ Librae
704	4.5	周增七（天市右垣屬）	21 ι Serpentis
705	3.9	貫索五	8 γ Coronae Borealis
706	2.8	蜀（天市右垣七）	24 α Serpentis
707	3.7	周（天市右垣五）	28 β Serpentis
708	4.2	周增八（天市右垣屬）	35 κ Serpentis
709	3.6	天乳	32 μ Serpentis
710	4.7	房宿增四	1 δ Scorpii
711	4.2	從官二（房宿屬）	5 χ Lupi
712	3.8	巴（天市右垣八）	37 ε Serpentis
713	3.1	三角形二	β Trianguli Asutralis
714	4.9	房宿增二	45 λ Librae
715	4.6	房宿增五	2 *A* Scorpii
716	4.3	勾陳四	16 ζ Ursae Minoris
717	4.4	西咸三	46 θ Librae
718	4.6	七公四	1 χ Herculis
719	4.0	房宿二	5 ρ Scorpii
720	4.0	鄭（天市右垣四）	41 γ Serpentis
721	4.6	西咸二	48 Librae
722	3.0	房宿一	6 π Scorpii
723	4.2	貫索七	13 ε Coronae Borealis
724	2.7	房宿三	7 δ Scorpii
725	5.0		66H^1 Draconis
726	4.9		48*B* Scorpii

紀數	星等	中名	西名
727	4.8		δ Normae
728	2.9	房宿四	8 β Scorpii
729	4.4	積卒增二	θ Lupi
730	4.1	上宰(紫微左垣二)	13 θ Draconis
731	4.3	鉤鈐一	9 ω^1 Scorpii
732	4.6	鉤鈐二	10 ω^2 Scorpii
733	4.7	異雀六	δ^1 Apodis
734	4.8	七公三	11 φ Herculis
735	4.7		13 o^1 Scorpü
736	4.0	三角形增一	δ Trianguli Australis
737	4.6	心宿增二	13 o^1 Scorpii
738	3.9	鍵閉	14 ν Scorpii
739	3.0	梁(天市右垣九)	1 δ Ophiuchi
740	4.8		94B o^2 Scorpii
741	4.2		γ^2 Nolmae
742	3.3	楚(天市右垣十)	2 ε Ophiuchi
743	4.9	心宿增三	19 Scorpii
744	3.0	心宿一	20 σ Scorpii
745	3.9	七公二	22 τ Herculis
746	4.8	列肆一	50 σ Serpentis
747	3.8	河間(天市右垣二)	20 γ Herculis
748	5.0		ζ Trianguli Australis
749	3.9	異雀四	γ Apodis
750	4.7	天紀一	19 ξ Cornae Borealis
751	4.6	東咸三	4 ψ Ophiuchi
752	4.7	心宿增四	5 ρ Ophiuchi
753	5.0	勾陳增九	21 η Ursae Minoris
754	4.7	斗一	24 ω Herculis
755	4.9	東咸二	7 χ Ophiuchi
756	2.9	少宰(紫微左垣三)	14 η Draconis
757	1.3	心宿二	21 α Scorpii
758	4.8	心宿增五	22 Scorpii
759	4.5		72G N Scorpii
760	5.0	七公增十四	30 g Herculis
761	4.4	東咸一	8 φ Ophiuchi
762	3.8	列肆二	10 λ Ophiuchi
763	2.8	河中(天市右垣一)	27 β Herculis
764	4.5	東咸四	9 ω Ophiuchi
765	4.2	異雀三	β Apodis
766	2.8	心宿三	23 τ Scorpii
767	4.3	七公增十五	35 σ Herculis
768	2.7	韓(天市右垣十一)	13 ζ Ophiuchi
769	5.0	東咸增一	24 Scorpü
770	1.9	三角形三	α Triangali Australis
771	3.7	天紀增一	44 η Herculis
772	3.6	龜四	η Arae
773	4.9		114β Draconis
774	2.3	尾宿二	26 ε Scorpii
775	4.7	軍肆二	20 Ophiuchi
776	3.3	尾宿一	μ^1 Scorpii
777	3.5	尾宿三	ζ^2 Scorpii
778	4.1	斛一	25 ι Ophiuchi
779	3.0	龜五	ζ Arae
780	4.1	龜一	ε^1 Arae
781	3.4	斛二	27 κ Ophiuchi
782	4.4	勾陳三	22 ε Ursae Minoris

紀數	星等	中名	西		名	紀數	星等	中名	西		名
783	3.9	天紀三	58	ε	Herculis	811	3.6	南海（天市左垣十）	55	ε	Serpentis
784	4.9	宦者三	60		Herculis	812	2.6	尾宿七		κ	Scorpii
785	2.6	宋（天市左垣十一）	35	η	Ophiuchi	813	4.7	市樓二	56	ο	Serpentis
786	3.4	尾宿四		η	Scorpii	814	3.5	孔雀一		η	Pavonis
787	3.2	上衛（紫微左垣四）	22	ζ	Draconis	815	3.9	天棓五	85	ι	Herculis
788	3.3	帝座	64	α	Herculis	816	4.8	天籥三	58		Ophiuchi
789	3.2	魏（天市左垣一）	65	δ	Herculis	817	4.9	尚書增一	28	ω	Draconis
790	3.3	女牀一	67	π	Herculis	818	2.9	宗正一	60	β	Ophiuchi
791	4.8	天紀六	68	υ	Herculis	819	3.1	尾宿六		ι^1	Scorpii
792	4.8	女牀二	69	e	Herculis	820	4.4	天籥八	3	X	Sagittarii
793	4.4	天江增七	40	ξ	Ophiuchi	821	3.5	九河（天市左垣三）	86	μ	Herculis
794	3.3	天江三	42	θ	Ophiuchi	822	3.8	宗正二	62	γ	Ophiuchi
795	2.7	杵三（箕宿屬）		β	Arae	823	3.2	傅說		G	Scorpii
796	4.1	女牀三	75	ρ	Herculis	824	4.5	女史增一	31	ψ^1	Draconis
797	4.1	天江四	44		Ophiuchi	825	3.9	天棓一			
798	4.3	楝	45	d	Ophiuchi	826	4.0	天紀九	91	θ	Herculis
799	4.4	宗正增二	49	σ	Ophiuchi	827	3.7	燕（天市左垣九）	64	ν	Ophiuchi
800	3.8	龜三		δ	Arae	828	4.8	天籥增二	4		Sagittarii
801	2.8	尾宿九	34	ν	Scorpii	829	3.9	中山增一	92	ξ	Herculis
802	2.9	杵二（箕宿屬）		α	Arae	830	2.4	天棓四	33	γ	Draconis
803	4.8	天籥六	51		Ophiuchi	831	4.0	宗人二	67		Ophiuchi
804	4.4	趙（天市左垣二）	76	λ	Herculis	832	4.3		31B	ω	Sagittarii
805	1.8	尾宿八	35	λ	Scorpii	833	3.8	杵增一（箕宿屬）		θ	Arae
806	3.0	天棓三	23	β	Draconis	834	4.4	孔雀二		π	Pavonis
807	2.0	尾宿五		θ	Scorpii	835	3.1	箕宿一	10	γ	Sagittarii
808	4.9		24	ν^1	Draconis	836	4.1	宗人四	70		Ophiuchi
809	2.1	侯	55	α	Ophiuchi	837	4.7		38B		Sagittarii
810	4.8	天棓二	25	ν^2	Draconis	838	3.7	宗人增一	72		Ophiuchi

紀數	星等	中名	西		名
839	3.8	中山(天市左垣四)	103	o	Herculis
840	4.5			ε	Telescopii
841	4.3	帛度二	102		Herculis
842	4.4	勾陳二	23	δ	Ursae Minoris
843	4.0	斗宿三	13	μ	Sagittarii
844	3.1	箕宿四		η	Sagittarii
845	4.7		66B		Sagittarii
846	5.0	扶筐增一	36		Draconis
847	4.2	孔雀增二		ξ	Pavonis
848	2.9	箕宿二	19	δ	Sagittarii
849	3.4	東海(天市左垣八)	58	η	Serpentis
850	1.9	箕宿三	20	ε	Sagittarii
851	5.0	斗宿增三	21		Sagittarii
852	3.9	屠肆一	109		Herculis
853	3.7	廩一		α	Telescopii
854	5.0	織女增三	2	μ	Lyrae
855	2.9	斗宿二	22	λ	Sagittarii
856	4.2	柱史	43	ϕ	Draconis
857	4.9	扶筐三	39	b	Draconis
858	3.7	御女四(紫微垣屬)	44	χ	Draconis
859	4.7		2H		Scuti
860	5.0		100B		Sagittarii
861	4.4	廩十一		θ	Coronae Australis
862	4.1	天弁一	3H		Scuti
863	4.0	孔雀八		ζ	Pavonis
864	0.1	織女一	3	α	Lyrae
865	4.7	天弁二	4H		Scuti
866	3.3	斗宿一	27	Φ	Sagittarii
867	4.7	織女二	4	ε^1	Lyrae
868	4.6	織女增二	5	ε^2	Lyrae
869	4.3	宗一	110		Herculis
870	4.4	天弁四	6H		Scuti
871	4.4	宗二	111		Herculi
872	4.4	孔雀四		λ	Pavonis
873	變	漸臺二	10	β	Lyrae
874	變	孔雀五		κ	Pavonis
875	5.0	建增六	32	ν^1	Sagittarii
876	2.1	斗宿四	34	σ	Sagittarii
877	4.7	扶筐四	47	o	Draconis
878	4.9			λ	Telescopii
879	4.3	徐(天市左垣七)	63	θ	Serpentis
880	4.9	廩八		ε	Coronae Australis
881	4.3	輦道一	13	R	Lyrae
882	4.2	吳越增一	13	ε	Aquilae
883	3.3	漸臺三	14	γ	Lyrae
884	4.9	少弼(紫微左垣五)	52	υ	Draconis
885	2.6	斗宿六	38	ζ	Sagittarii
886	5.0			ρ	Telescopii
887	3.9	建二	39	o	Sagittarii
888	3.5	斗宿五	40	τ	Sagittarii
889	3.0	吳越(天市左垣六)	17	ζ	Aquilae
890	3.5	天弁七	16	λ	Aquilae
891	4.2	廩六		α	Coronae Australis
892	5.0	漸臺增三	17		Lyrae
893	3.0	建三	41	π	Sagittarii
894	4.8	狗增六	42	ψ	Sagittarii

紀數	星等	中名	西		名
895	3.2	天廚一	57	δ	Draconis
896	4.5	輦道三	21	θ	Lyrae
897	4.0	奚仲一	1	κ	Cygni
898	4.1	天淵二		β^1	Sagittarii
899	4.0	建五	44	ρ	Sagittarii
900	4.4	建六	46	υ	Sagittarii
901	4.1	天淵三		α	Sagittarii
902	4.6	御女一（紫微垣屬）	60	τ	Draconis
903	4.9	狗二	47	χ	Sagittarii
904	3.4	右旗三	30	δ	Aquilae
905	4.6	齊增五（天市左垣屬）	6		Vulpeculae
906	3.1	輦道增七	6	β	Cygni
907	3.9	奚仲二	10	ι	Cygni
908	4.8	輦道增九	8		Cygni
909	4.6	右旗一	38	μ	Aquilae
910	4.7	狗一	52	h	Sagittarii
911	4.9	右旗八	39	κ	Aquilae
912	4.7	奚仲三	13	θ	Cygni
913	5.0	右旗二	44	σ	Aquilae
914	4.4	左旗二	6	β	Sagittae
915	5.0	輦道增四	15		Cygni
916	2.8	河鼓三	50	γ	Aquilae
917	3.0	天津二	18	δ	Cygni
918	3.7	左旗三	7	δ	Sagittae
919	4.9	左旗四	8	ζ	Sagittae
920	0.9	河鼓二	53	α	Aquilae
921	變	天桴四	55	η	Aquilae
922	4.1	天淵增一		ι	Sagittarii
923	4.0	天廚三	63	ε	Draconis
924	4.0	孔雀九		ε	Pavonis
925	4.8	狗國一	58	ω	Sagittarii
926	3.9	河鼓一	60	β	Aquilae
927	4.6	狗國四	59	b	Sagittarii
928	4.9	狗國二	60	A	Sagittarii
929	4.7	天淵增二		θ^1	Sagittarii
930	4.8		24	ψ	Cygni
931	3.7	左旗五	12	γ	Sagittae
932	4.6	狗國三	62	o	Sagittarü
933	4.8	左旗增十	15		Vulpeculae
934	3.6	孔雀六		δ	Pavonis
935	變				Ursae Minoris
936	4.8			ξ	Telescopii
937	4.8	天津增六	28	b^2	Cygni
938	3.4	天桴一	65	θ	Aquilae
939	5.0	左旗九	67	ρ	Aquilae
940	4.2	天津三	30		Cygni
941	3.9	天津增三十八	31	o^1	Cygni
942	4.4	奚仲增四	33		Cygni
943	4.7	牛宿增六	5	α^1	Capricorni
944	4.4	天柱增二	1	κ	Cephei
945	3.8	牛宿二	6	α^2	Capricorni
946	5.0	牛宿增七	8	ν	Capricorni
947	6.2	牛宿增十二	16B		Capricorni
948	3.2	牛宿一	9	β	Capricorni
949	2.0	孔雀十一		α	Pavonis
950	2.3	天津一	37	γ	Cygni

紀數	星等	中名	西名
951	5.0	牛宿六	11 ρ Capricorni
952	4.1	天津增十六	41 Cygni
953	4.7		φ Pavonis
954	4.3	天鈎三	2 θ Cephei
955	4.0	敗瓜一	2 ε Delphini
956	5.0		ρ Pavonis
957	3.2	波斯二	α Indi
958	4.7	瓠瓜五	4 ζ Delphini
959	3.7	瓠瓜四	6 β Delphini
960	4.8	瓠瓜增五	29 Vulpeculae
961	3.9	瓠瓜一	9 α Delphini
962	3.6	孔雀七	β Pavonis
963	4.7		η Indi
964	1.3	天津四	50 α Cygni
965	4.5	瓠瓜三	11 δ Delphini
966	4.2	天田四(牛宿屬)	16 ψ Capricorni
967	4.1	瓠瓜二	12 γ Delphini
968	2.6	天津九	53 ε Cygni
969	3.6	女宿一	2 ε Aquarii
970	4.6	女宿四	3 Aquarii
971	4.6	螣蛇增一	6H Cephei
972	3.6	天鈎四	3 η Cephei
973	4.5	天津增三十	54 λ Cygni
974	4.4	天田二(牛宿屬)	18 ω Capricorni
975	3.7		β Indi
976	4.8	女宿二	6 μ Aquarii
977	4.0	天津五	58 ν Cygni
978	4.8	離瑜增一	γ Microscopii
979	4.8	車府五	59 f^1 Cygni
980	4.8	周一(十二國屬)	22 η Capricorni
981	4.1	秦一(十二國屬)	23 θ Capricorni
982	4.6	天田三(牛宿屬)	24 A Capricorni
983	3.9	車府六	62 ξ Cygni
984	4.8	天津增二十九	61 Cygni
985	4.9	車府增三	63 f^2 Cygni
986	4.4	天壘城十	13 ν Aquarii
987	4.8	司非一	5 γ Equulei
988	3.5	天津八	64 ζ Cygni
989	3.9	天津六	65 τ Cygni
990	4.1	虛宿一	8 α Equulei
991	4.8	離瑜二	4 Piscis Australis
992	4.3	天津增二十八	67 σ Cygni
993	4.4	天津七	66 υ Cygni
994	5.0		θ^1 Microscopü
995	2.6	天鈎五	5 α Cephei
996	4.5	化一	32 ι Capriconi
997	4.2	人二	1 Pegasi
998	4.2	孔雀十	γ Pavonis
999	4.1	燕(十二國屬)	34 ζ Capricorni
1000	4.7	晉(十二國屬)	36 b Capricorni
1001	3.3	虛宿一	22 β Aquarii
1002	3.4	上衞增一(紫微左垣屬)	8 β Cephei
1003	3.7		ν Octantis
1004	4.2	車府四	73 ρ Cygni
1005	5.0	車府增八	72 Cygni
1006	4.7	壘壁陣二	39 ε Capricorni

紀數	星等	中名	西名
1007	4.8	天壘城一	23 ξ Aquarii
1008	3.7	壘壁陣三	40 γ Capricorni
1009	4.8	壘壁陣一	43 κ Capricorni
1010	4.4	天錢三	9 ι Piscis Australis
1011	2.5	危宿三	8 ε Pegasi
1012	4.2	臼二	10 κ Pegasi
1013	4.8	上衛增二（紫微左垣屬）	11 Cephei
1014	2.9	壘壁陣四	49 δ Capricorni
1015	4.4	造父五	10 ν Cephei
1016	4.3	螣蛇三	81 π² Cygni
1017	4.9	臼增一	14 Pegasi
1018	3.2	敗臼二	γ Gruis
1019	4.5		δ Indi
1020	4.8		ε Indi
1021	4.7	蓋屋一	31 ο Aquarii
1022	4.5	敗臼二	λ Gruis
1023	4.9	危宿增六	22 ν Pegasi
1024	3.2	危宿一	34 α Aquarii
1025	4.4	壘壁陣五	33 ι Aquarii
1026	1.9	鶴一	α Gruis
1027	3.9	臼三	24 ι Pegasi
1028	4.6	天錢四	14 μ Piscis Australis
1029	3.7	危宿二	26 θ Pegasi
1030	4.3	杵二（危宿屬）	29 π Pegasi
1031	3.6	造父二	21 ζ Cephei
1032	5.0	少衛增三（紫微左垣屬）	24 Cephei
1033	4.6		1H Lacertae
1034	4.9	鶴十二	μ¹ Gruis
1035	4.3	泣二	43 θ Aquarii
1036	2.9	鳥喙一	α Tucanae
1037	3.9	墳墓二	48 γ Aquarii
1038	5.0	臼四	32 Pegasi
1039	4.7	車府三	2 Lacertae
1040	4.6	螣蛇十	3 Lacertae
1041	4.6	墳墓四	52 π Aquarii
1042	4.1	鶴增二	δ¹ Gruis
1043	3.8	墳墓一	55 ζ Aquarii
1044	4.8	壘壁陣六	57 σ Aquarii
1045	變	造父一	27 δ Cephei
1046	4.4	敗臼增一	17 β Piscis Australis
1047	3.8	虛梁三	63 κ Aquarii
1048	4.1	螣蛇一	7 Lacertae
1049	5.2	墳墓三	62 η Aquarii
1050	5.0	車府增十一	10 Lacertae
1051	4.2	羽林軍八	18 ε Piscis Australis
1052	4.4		β Octantis
1053	3.6	雷電一	42 ζ Pegasi
1054	2.1	鶴二	β Gruis
1055	3.1	離宮四	44 η Pegasi
1056	4.2	離宮一	47 λ Pegasi
1057	3.7	鶴三	ε Gruis
1058	4.4	羽林軍二十四	71 τ Aquarii
1059	3.7	離宮二	48 μ Pegasi
1060	3.7	天鉤八	32 ι Cephei
1061	4.6	敗臼三	22 γ Piscis Australis
1062	3.8	壘壁陣七	73 λ Aquarii

紀數	星等	中名	西名
1063	3.5	羽林軍二十六	76 δ Aquarii
1064	1.3	北落師門	24 α Piscis Australis
1065	5.0	勾陳六	36H Cephei
1066	4.1	鶴六	ζ Gruis
1067	3.6	軍府增十六	1 ο Andromedae
1068	4.6	霹靂一	4 β Piscium
1069	2.7	室宿二	53 β Pegasi
1070	5.0	螣蛇十六	3 Andromedae
1071	2.6	室宿一	54 α Pegasi
1072	4.8	羽林軍三十	86 o^1 Aquarii
1073	4.4	鶴八	θ Gruis
1074	4.7	雷電四	55 Pegasi
1075	3.8	羽林軍二十八	88 c^2 Aquarii
1076	4.1	鶴七	ι Gruis
1077	4.6	少微（紫微左垣七）	33 π Cephei
1078	4.6	壘壁陣八	90 φ Aquarii
1079	4.5	羽林軍二十九	91 ψ^1 Aquarii
1080	4.0	鶴五	γ Tucanae
1081	3.9	霹靂二	6 γ Piscium
1082	4.6	羽林軍三十八	93 ψ^2 Aquarii
1083	4.3		γ Sculptoris
1084	4.9	天鉤九	34 ο Cephei
1085	4.6	離宮五	62 τ Pegasi
1086	4.2	羽林軍三十四	98 b^1 Aquarii
1087	4.6	離宮六	68 υ Pegasi
1088	4.9	雲雨一	8 κ Piscium
1089	4.4	霹靂三	10 θ Piscium
1090	4.6	雷電六	70 Pegasi
1091	4.9		1H Cassiopeiae
1092	4.6	火鳥一	β Sculptoris
1093	4.7	羽林軍三十一	101 b^3 Aquarii
1094	4.9	火鳥二	ι Phoenicis
1095	4.9	火鳥三	11G Phoenicis
1096	4.0	螣蛇十九	16 λ Andromedae
1097	4.3	螣蛇二十二	17 ι Andromedae
1098	4.3	霹靂四	17 ι Piscium
1099	3.4	少衛增八（紫微左垣屬）	35 γ Cephei
1100	4.4	螣蛇二十一	19 κ Andromedae
1101	4.6	雲雨四	18 λ Piscium
1102	4.7	羽林軍四十五	105 ω^2 Aquarii
1103	5.0	螣蛇二十	20 ψ Andromedae
1104	4.6		δ Sculptoris
1105	4.8	螣蛇十二	7 ρ Cassiopeiae
1106	4.8	壁宿增六	84 ψ Pegasi
1107	4.0	霹靂五	28 ω Piscium
1108	4.6	鳥喙七	ε Tucanae
1109	4.6		θ Octantis
1110	4.7	壘壁陣十二	30 Piscium
1111	4.6	八魁二	2 Ceti

註　原帆檣座(Malus)中之 a、h 二星改歸天舟座中，因帆檣座之名現已不用也.

希臘字母

字母	名稱	字母	名稱
A, α	Alpha	N, ν	Nu
B, β	Beta	Ξ, ξ	Xi
Γ, γ	Gamma	O, o	Omicron
Δ, δ	Delta	Π, π	Pi
E, ε	Epsilon	P, ρ	Rho
Z, ζ	Zeta	Σ, σ, s	Sigma
H, η	Eta	T, τ	Tau
$\Theta, \theta, \vartheta$	Theta	Υ, υ	Upsilon
$I, \imath$	Iota	Φ, ϕ	Phi
K, κ	Kappa	X, χ	Chi
Λ, λ	Lambda	Ψ, ψ	Psi
M, μ	Mu	Ω, ω	Omega

表己　中英美法度量比較表

長度表甲（營造尺庫平制）

（一）舊制（此制已廢）

1 里 =18 引 =180 丈 =360 步 =1800 尺

1 尺 =10 寸 =100 分 =1000 釐 =10000 毫

$$1\text{ 尺} = \frac{\text{子午圈周}}{129600000}$$

200 里 =1 度

1 周 =360 度

1 尺 =0.30864 米突（公尺）

1 米突 =3 尺 2 寸 4 分

（二）新制（民國四年一月六日公佈，同上而尺度稍大）

1 尺 =32 生的米突（公分）=1.0498699 英尺 =1.0498667 美尺

1 米突 =3 尺 1 寸 2 分 5 釐

長度表乙（萬國權度通制皆以十進位）

公里 = 啓羅米突　(籽) Kilometre
公引 = 海克脫米突 (粨) Hectometre
公丈 = 特卡米突　(籽) Decametre
公尺 = 米突　　(粔) Metre
公寸 = 特西米突　(粉) Decimetre
公分 = 生的米突　(糎) Centimetre
公釐 = 密理米突　(粍) Millimetre

1 英碼(yard) =3 英尺(feet)=0.914399 公尺
1 美碼　　=3 美尺　　=0.9144018 公尺
1 英里(mile) =5280 英尺 =1.6093424 公里
1 美里　　=5280 美尺 =1.6093472 公里
1 英海里或地理里 =1.15152 英里 =6080 英尺
　　=1853.18 公尺
1 美海里或地理里 =1.151594 美里 =6080.2 美尺
　　=1853.249 公尺

（附）海關尺

1 尺 =1.15992 營造尺(新制) =0.358 公尺 =1.175 英尺
1 新營造尺 =0.8621284 海關尺

重量表甲（營造尺庫平制）

1 斤 =16 兩
1 兩 =10 錢 =100 分 =1000 釐 =10000 毫
純水 1 立方寸在攝氏寒暑表 4 度時之重量爲 0.878475 兩
1 兩 =4 度純水 1.13833632 立方寸
1 兩 =37.301 公分（萬國權度通制）

重量表乙（萬國權度通制,皆以十進位）

公噸＝1000 啓羅克蘭謨＝法噸 Tonne

公石＝100 啓羅克蘭謨　　Quintal

公衡＝10 啓羅克蘭謨　　Myriagramme

公斤＝啓羅克蘭謨　（忓）

公兩＝海克脫克蘭謨（甪）

公錢＝特卡克蘭謨　（玷）

公分＝克蘭謨　　（克）Gramme

公釐＝特西克蘭謨　（籿）

公毫＝生的克蘭謨　（氂）

公絲＝密理克蘭謨　（厘）

1 英噸(ton)＝2240 磅(pound)＝1.016048 公噸

1 美噸　＝2000 磅　＝0.907185818 公噸

1 公噸　＝2204.62 磅

1 磅　＝0.453592909 公斤＝12.16034178 兩

附　錄

(甲)　歲差　自行　章動　光行差　恒星歲周視差

(一)地球公轉能影響天體在天球上之視位　茲詳論因地球軌道行所生天體屬地心視位之差,其由軌道面及赤道面之移動所生之差亦併論之.

天文根數之變異,分長差及短差二種.長差乃極緩之變動,幾與時成比;短差較快,在其二限數間往復之期甚短,除在極小時間外不能認爲與時成比(長差亦有周期,惟極長耳,故二者之分並不銳利).天體(或天球平面)在某時之眞位置乃其在該時之實佔的位置,其平均位置者乃其不受周期性差之影響所應佔之位置也.地道面乃一行動極慢之面.茲以1800年年首爲元時,卽以其時地道面之位置爲定面,用作歸引之標準.赤道面亦一行動極慢之面也.其交定道之斜度及其交點線之方向,亦常變而致黃道斜度及春分點均有變異.故星之黃緯度及赤緯均因其基本面之移動而有變異,黃經及赤經亦均因春分點之移動而有變異.歲差題下所論者,乃由平均黃道及平均赤道之行動所生之長差也.章動題下所論者,乃由眞黃道及眞赤道之行動與平黃道及平赤道之行動之較所生之周期性差也.

歲　差

(二)月日歲差　日月攝地球赤道凸出之物質,致赤道面不斷的退移其位置,而不變其交定黃道之斜角.星由定黃道所計之黃經因以逐年增益.此曰月日歲差,乃赤道沿黃道行所生之影響也.

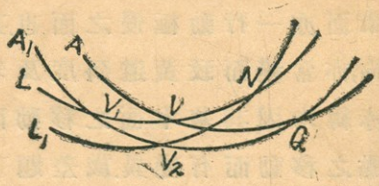
(三)行星歲星　行星與地球間之互攝,恆有使地球離開

旋轉面之勢,卽變其軌道面之位置也.於此例赤道爲固定的而黃道爲行動的,其影響乃致交點線向前轉動,而星之赤經逐年減損.此曰行星歲差,乃黃道沿赤道行所生之差也.

月日歲差不影響於星之黃緯,但因變其黃經,故亦變其赤經緯.行星歲差不影響於星之赤緯,但因變其赤經,故亦變其黃經緯.此可由黃赤經緯之互推公式而知也.

(四) 黃道斜角 平黃道面之位置,因行星互攝之作用,而生移動而赤道者不變,故其相交之斜角生有變異.日月生歲差之作用,並不變此斜角,但因行星令其生變,日月之攝力亦隨之而變,故又使平赤道在定黃道上之斜角生微小之變.由此斜角之變,乃生星之座標線之變.此變是長差性,推總歲差時須併入也.

(五) 求在某時黃經總歲差及平黃道之位置 設NL爲定黃道（卽在1800年年首之平黃道）,AQ爲平赤道,V爲平春分點（卽稱曰1800年平春分點）.圖內黃經係由V計向N.設VV_1爲在t時內之月日歲差,A_1Q爲在$1800+t$時之平赤道.因行星之作用,黃道於此時內已移至NL_1,故V_1V_2爲在t時內之行星歲差,V_2爲在$1800+t$時之平春分點.



第一圖

此N點可稱曰平黃道在定黃道上之昇交點.NV與NV_2之較稱曰黃經總歲差（在黃經內之總差）,乃星黃經變異之一部衆星所公有者也.

設 ε_0＝1800年黃道之平斜角 ＝NVQ,

ε_1＝在$1800+t$時定黃道之斜角＝NV_1Q,

ε ＝在$1800+t$時黃道之平斜角＝NV_2Q,

θ ＝在 t 時內之行星歲差 $=V_1V_2$,

ψ ＝在 t 時內之月日歲差 $=VV_1$,

ψ_1＝在 t 時內之總歲差　$=NV_2-NV$,

Π ＝在 $1800+t$ 時平黃道在定黃道上自 1800 年平春分點計來之昇交點黃經度 $=VN$,

π ＝在 $1800+t$ 時平黃道對定黃道之斜角 $=V_1NV_2$.

前五數乃由觀測推得,據斯得路佛及彼得,其在 1800 年元時之數如下:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_0&=23^\circ 27'54''.22\\
\varepsilon_1&=\varepsilon_0+0''.00000735t^2\\
\varepsilon&=\varepsilon_0-0''.4738t-0''.0000014t^2\\
\theta&=0''.15119t-0''.00024186t^2\\
\psi&=50''.3798t-0''.0001084t^2
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(一)$$

由此則可得 ψ_1、Π 及 π 矣.在三角形 NV_1V_2 內有

$$\pi=V_1NV_2 \qquad \theta=V_1V_2$$
$$180^\circ-\varepsilon=NV_2V_1 \qquad \Pi+\psi=NV_1$$
$$\varepsilon_1=NV_1V_2 \qquad \Pi+\psi_1=NV_2$$

故依告司公式乃有

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}\pi\sin\frac{1}{2}(\psi-\psi_1)&=\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_1)\\
\cos\frac{1}{2}\pi\cos\frac{1}{2}(\psi-\psi_1)&=\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_1)\\
\sin\frac{1}{2}\pi\sin(\Pi+\frac{1}{2}\psi+\frac{1}{2}\psi_1)&=\sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_1)\\
\sin\frac{1}{2}\pi\cos(\Pi+\frac{1}{2}\psi+\frac{1}{2}\psi_1)&=\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_1)
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(二)$$

$\frac{1}{2}\theta$ 及 $\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_1)$ 之角均極小,其餘弦均可謂之爲一,$\frac{1}{2}\pi$ 及 $\frac{1}{2}(\psi-\psi_1)$ 亦同此,並其正弦均可用以其弧代之.故由前二式得

$$\psi-\psi_1=\theta\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_1),$$

而取用 $$\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_1)=\cos(\varepsilon_0-0''.2369t)$$

$$=\cos\varepsilon_0+0''.2369\ t\ \sin 1''\sin\varepsilon_0$$

當無大差.故代入由(一)來之 θ 及 ε_0 數值,乃有

$$\psi-\psi_1=0''.1387\ t-0''.0002218\ t^2,$$

$$\psi_1=50''.2411\ t+0''.0001134\ t^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(三)$$

由(二)之後二式之平方和得

$$\pi^2=\theta^2\sin^2\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_1)+(\varepsilon-\varepsilon_1)^2,$$

因可取用下之等式

$$\sin^2\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_1)=\sin^2\varepsilon_0-0''.2369\ t\ \sin 1''\sin 2\varepsilon_0,$$

故代入 θ、ε_0 及 $\varepsilon-\varepsilon_1$ 之值乃得

$$\pi^2=0''.228111t^2-0''.0000033234\ t^3,$$

即 $$\pi\ =0''.4776\ t-0''.0000035\ t^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(四)$$

以(二)之第四式除第三式得

$$\tan(\Pi+\frac{1}{2}\psi+\frac{1}{2}\psi_1)=\frac{\theta}{\varepsilon-\varepsilon_1}\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_1).$$

其 $$\frac{\theta}{\varepsilon-\varepsilon_1}=\frac{0.15119\ t-0.00024186\ t^2}{-0.4738\ t-0.00000875\ t^2}=-0.3191+0.00051636t,$$

$$\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon_1)=\sin\varepsilon_0-0''.2369\ t\ \sin 1''\cos\varepsilon_0,$$

由是得 $$\tan(\Pi+\frac{1}{2}\psi+\frac{1}{2}\psi_1)=-0.127062+0.00020595\ t.$$

故若令 $$\tan\Pi_0=-0.127062,$$

或 $$\Pi_0=172^\circ\ 45'\ 31'',$$

及 $$\Pi_1=\Pi+\frac{1}{2}\psi+\frac{1}{2}\psi_1,$$

則有

$$\tan \Pi_1 - \tan \Pi_0 = (\Pi_1 - \Pi_0) \sin 1'' \sec^2 \Pi_0 = 0.00020595\, t,$$

$$\Pi_1 - \Pi_0 = \frac{0.00020595\, t \cos^2 \Pi_0}{\sin 1''} = 41''.805\, t,$$

乃得

$$\Pi_1 = \Pi + \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}\psi_1 = 172°45'31'' - 41''.805\, t,$$

由此減去下數

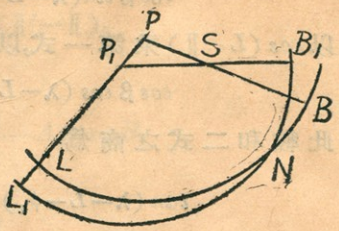
$$\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}\psi_1 = 50''.310\, t,$$

乃得

$$\Pi = 172°45'31'' - 8''.505\, t. \quad \cdots\cdots (五)$$

由(三)式定總歲差,而(四)及(五)可定平黃道位置.

(六) 求某星在1800年元時黃經緯歲差　設 LNB 爲在1800年之定黃道, L_1NB_1 爲在 $1800+t$ 時之平黃道, P 及 P_1 爲其極, N 爲聯 P 及 P_1 大圈 PP_1L_1 之極,以 S 爲星,並令



第二圖

L = 星在1800年自該年平春分點計之平黃經,

B = 星在1800年之平黃經,

λ, β = 星在 $1800+t$ 時之平黃經緯,

則由圖有

$$NB = L - \Pi \qquad SB = B$$

$$NB_1 = \lambda - \Pi - \psi_1 \qquad SB_1 = \beta$$

且在三角形 PSP_1 有

$$PP_1 = LL_1 = \angle LNL_1 = \pi,$$

$$PS = 90° - B,$$

$$P_1S = 90° - \beta,$$

$$SPP_1 = BL = 90° + L - \Pi,$$

$$SP_1P = 180° - L_1B_1 = 180° - (90° + \lambda - \Pi - \psi_1)$$

$$= 90° - (\lambda - \Pi - \psi_1),$$

故依三角公式得

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta\cos(\lambda-\Pi-\psi_1) &= \cos B\cos(L-\Pi) \\ \cos\beta\sin(\lambda-\Pi-\psi_1) &= \cos B\sin(L-\Pi)\cos\pi + \sin B\sin\pi \\ \sin\beta &= -\cos B\sin(L-\Pi)\sin\pi + \sin B\cos\pi \end{aligned}\right\} \text{(六)}$$

此式頗冗長，乃推其概式如下．設以 $\cos\pi = 1$，則可略去 π 之平方，並以 $\sin(L-\Pi)$ 乘第一式，以 $\cos(L-\Pi)$ 乘第二式，其較爲

$$\cos\beta\sin(\lambda - L - \psi_1) = \sin\pi\sin B\cos(L-\Pi).$$

以 $\cos(L-\Pi)$ 乘第一式，以 $\sin(L-\Pi)$ 乘第二式，其和爲

$$\cos\beta\cos(\lambda - L - \psi_1) = \cos B + \sin\pi\sin B\sin(L-\Pi).$$

此較和二式之商爲

$$\tan(\lambda - L - \psi_1) = \frac{\sin\pi\tan B\cos(L-\Pi)}{1 + \sin\pi\tan B\sin(L-\Pi)},$$

此式展爲級數得

$$\lambda - L - \psi_1 = \pi\tan B\cos(L-\Pi) - \frac{1}{2}\pi^2\tan^2 B\sin 2(L-\Pi) - \cdots\cdots.$$

因略去 π 之平方而僅取其第一項亦足應用，故得

$$\lambda - L = \psi_1 + \pi\tan B\cos(L-\Pi) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(七)}$$

ψ_1 乃星公有之黃經歲差，$\pi\tan B\cos(L-\Pi)$ 乃隨星而異之歲差也．

由（六）之末一式得

$$\sin\beta - \sin B = -\sin\pi\cos B\sin(L-\Pi).$$

同前法略去 π^2，得

$$\beta - B = -\pi\sin(L-\Pi)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(八)}$$

此 ψ_1、π 及 Π 在 $1800+t$ 時之值可由（三）、（四）、（五）推得，則由（七）、（八）

可得所求之黃經緯歲差,卽可得星在某日時之平均位置矣.

(七) 求在任二時之間黃經緯差　設已知 $1800+t$ 時之 λ 及 β 而 $1800+t'$ 時之 λ' 及 β' 爲所求之數.以 L 及 B 爲 1800 年之黃經緯,則依(七)乃有

$$\lambda-L=\psi_1+\pi\tan B\cos(L-\Pi),$$

$$\lambda'-L=\psi'_1+\pi'\tan B\cos(L-\Pi').$$

其 ψ'_1、π'、Π' 乃以 t' 代 t 由(三)、(四)、(五)得來者.如以第一式由第二式減去,並引用二助數 a 及 A,其數由下式定之,

$$a\sin A=(\pi'+\pi)\sin\frac{1}{2}(\Pi'-\Pi),$$

$$a\cos A=(\pi'-\pi)\cos\frac{1}{2}(\Pi'-\Pi),$$

乃得

$$\lambda'-\lambda=\psi'_1-\psi_1+a\cos\left(L-\frac{\Pi'+\Pi}{2}-A\right)\tan B,$$

同此由(八)乃得

$$\beta'-\beta=-a\sin\left(L-\frac{\Pi'+\Pi}{2}-A\right).$$

求 A 及 a 之值,可依下式

$$\tan A=\frac{\pi'+\pi}{\pi'-\pi}\tan\frac{1}{2}(\Pi'-\Pi)=\frac{t'+t}{t'-t}\tan\frac{1}{2}(\Pi'-\Pi),$$

或利用(五)而得

$$A=\left(\frac{t'+t}{2}\right)\frac{\Pi'-\Pi}{t'-t}=-8''.505\left(\frac{t'+t}{2}\right),$$

故 $\cos A$ 可作爲一而有

$$a=\pi'-\pi.$$

亦可於上式內以 $\tan\beta$ 代 $\tan B$,因如此所生在 $\lambda'-\lambda$ 之誤僅爲含 π^2 之一項耳,至於 L 則作爲 $\lambda-\psi_1$. 故若以

$$L-\frac{\Pi'-\Pi}{2}-A=\lambda-M,$$

並代諸常數之值,則下式將爲推算自 $1800+t$ 時至 $1800+t'$ 時之歲差之用.

$$\left.\begin{aligned} M&=172°45'31''+t\cdot 50''.241-(t'+t)8''.505\\ \lambda'-\lambda&=(t'-t)[50''.2411+(t'+t)0''.0001134]\\ &\quad+(t'-t)[0''.4776-(t'+t)0''.0000035]\cos(\lambda-M)\tan\beta\\ \beta'-\beta&=-[t'-t)[0''.4776-(t'+t)0''.0000035]\sin(\lambda-M)\end{aligned}\right\}\text{(九)}$$

此與白塞爾式相同,惟此所用者,乃彼得之常數及 t 與 t' 所歸之元時爲 1800 年耳.

(八) 求某時黃經一歲之歲差 若以 $t'-t$ 除(九),其商

$$\frac{\lambda'-\lambda}{t'-t},\qquad\frac{\beta'-\beta}{t'-t},$$

即爲二時之間之平均歲差.若令 t' 及 t 之較爲無窮小之數(即謂 $t'=t$ 也),則此二商數成爲微係數而爲 $1800+t$ 時之歲差,即

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt}&=50''.2411+0''.0002268\,t\\ &\quad+[0''.4776-0''.0000070\,t]\cos(\lambda-M)\tan\beta\\ \frac{d\beta}{dt}&=-[0''.4776-0''.0000070\,t]\sin(\lambda-M)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(十)}$$

其 $M=172°45'31''+33''.23\,t$.

例題 角宿第一星在 1800 年年首之

平黃經 $L=201°3'5''.97$,

平黃緯 $B=-2°2'22''.64$,

求其在 1860 年年首之平黃經緯.

第一法用(七)、(八)二式直接求之.用(三)、(四)、(五)以 $t=60$ 推算得

$$\phi_1=50'14''.874,$$

$$\pi=28''.6434,$$

$$\Pi=172°37'1''.$$

由是得

$$L-\text{Ⅱ}=28°26'5'',$$

$$\pi\ tan\ B\ cos\ (L-\text{Ⅱ})=-0''.897,$$

$$\pi\ sin\ (L-\text{Ⅱ})=+13''.639.$$

然後由(七)(八)二式得歲差積數爲

$$\lambda-L=50'14''.874-0''.897=50'13''.977,$$

$$\beta-B=-13''.639.$$

其在 1860.0 之平黃經緯得爲

$$\lambda=\ \ 201°53'\ 20''.95,$$

$$\beta=-\ \ 2°\ 2'\ 36''.28.$$

第二法由歲差推之.自 1800 年至 1860 年六十年中之平均歲差乃 1830 年一歲之差.故在(十)內以 $t=30$, 以 λ_0 及 β_0 爲星在 1830 年之黃經緯,則有

$$\frac{d\lambda}{dt}=50''.2479+0''.4774\ cos(\lambda_0-m)tan\beta_0,$$

$$\frac{d\beta}{dt}=-0''.4774\ sin\ (\lambda_0-M),$$

$$M=173°2'8''.$$

推算時可用 λ_0 及 β_0 之概數.加三十年間之差於 L 而免去其含 π 諸項卽得其概數爲

$$\lambda_0=201°28'.2,\qquad \beta_0=-2°2'.6,$$

故 $\lambda-M=28°26'.1$, 而

$$\frac{d\lambda}{dt}=50''.2329,\qquad \frac{d\beta}{dt}=-0''.2274.$$

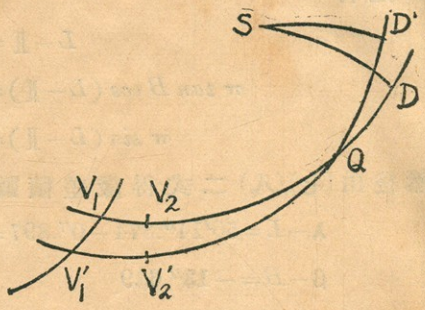
以 60 乘之,乃得自 1800 至 1860 之總差爲

$$\lambda-L=50'13''.97,\qquad \beta-B=-13''.64,$$

此與上得者合.

(九) 已知星在1800+t時之平赤經緯求其在另一時(1800

+t'）之平赤經緯　設V_1V_1'爲1800年定黃道，V_1Q爲1800+t時平赤道，$V_1'Q$爲1800+t'時平赤道，Q爲二赤道之昇交點，此點之位置求之如下，$V_1V'_1$弧乃在$t'-t$間之月日歲差，故以t'代t時由(一)得來之數，皆以$'$誌之，以別其餘，則在三角形$QV_1V'_1$有



第三圖

$$V_1V'_1=\psi'-\psi,\qquad QV_1V'_1=180°-\varepsilon_1,\qquad QV'_1V_1=\varepsilon'_1,$$

並以　$QV_1=90°-z,\qquad QV'_1=90°+z',\qquad V_1QV'_1=\Theta,$

依告司公式乃得

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}\Theta\sin\frac{1}{2}(z'+z)&=\sin\frac{1}{2}(\psi'-\psi)\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)\\
\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}(z'+z)&=\cos\frac{1}{2}(\psi'-\psi)\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)\\
\sin\frac{1}{2}\Theta\sin\frac{1}{2}(z'-z)&=\cos\frac{1}{2}(\psi'-\psi)\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)\\
\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}(z'-z)&=\sin\frac{1}{2}(\psi'-\psi)\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)
\end{aligned}\right\}\text{(十一)}$$

而Θ、z及z'可定矣．但因$\frac{1}{2}(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)$乃極小之角，故可以其餘弦等於一，以其弧代其正弦，在$\frac{1}{2}(z'-z)$弧之例亦可如此，乃得下之簡式，且甚精確，

$$\left.\begin{aligned}
\tan\frac{1}{2}(z'+z)&=\tan\frac{1}{2}(\psi'-\psi)\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)\\
\frac{1}{2}(z'+z)&=\frac{\frac{1}{2}(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)}{\tan\frac{1}{2}(\psi'-\psi)\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)}\\
\sin\frac{1}{2}\Theta&=\sin\frac{1}{2}(\psi'-\psi)\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)
\end{aligned}\right\}\text{……(十二)}$$

若 V_2 及 V'_2 爲平春分點在 $1800+t$ 及 $1800+t'$ 時之二位置，V_1V_2 爲前者之行星歲差，$V'_1V'_2$ 爲後者之行星歲差，而以 θ 及 θ' 代之，乃有

$$V_2Q=90°-z-\theta,$$
$$V'_2Q=90°+z'-\theta',$$

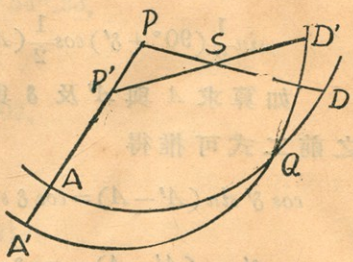
若以

$\alpha,\delta=S$ 星在 $1800+t$ 時之已知的平赤經緯，

$\alpha',\delta'=$ 在 $1800+t'$ 時之所求的平赤經緯

則有 $\alpha=V_2D$，及 $\alpha'=V'_2D'$，最後乃有

$$QD=V_2D-V_2Q=\alpha+z+\theta-90°,$$
$$QD'=V'_2D'-V'_2Q=\alpha'+z'+\theta'-90°.$$



第 四 圖

設 P 及 P' 爲在 $1800+t$ 及 $1800+t'$ 時之二赤極，AQD 及 $A'QD'$ 爲在此二時之赤道位置，S 爲星，Q 爲引聯 P 及 P' 之大圈 $PP'A'$ 之極，故 $PP'=AA'=AQA'=\Theta$，且在三角形 $PP'S$ 內有

$$PS=90°-\delta,\qquad P'S=90°-\delta',\qquad PP'=\Theta,$$
$$SPP'=AD=90°+QD=\alpha+z+\theta,$$
$$SP'P=180°-A'D'=90°-QD'=180°-(\alpha'-z'+\theta').$$

依三角公式乃得

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta'\sin(\alpha'-z'+\theta')&=\cos\delta\sin(\alpha+z+\theta)\\ \cos\delta'\cos(\alpha'-z'+\theta')&=\cos\delta\cos(\alpha+z+\theta)\cos\Theta-\sin\delta\sin\Theta\\ \sin\delta'&=\cos\delta\cos(\alpha+z+\theta)\sin\Theta+\sin\delta\cos\Theta\end{aligned}\right\}\text{(十三)}$$

至此則本題已得精確解法矣．先用(十一)求 Θ、z 及 z'．乃用(十三)以由(一)所得之 ε、ψ、θ 爲 $1800+t$ 時之值．ε'、ψ'、θ' 爲在 $1800+t'$ 時之值而求 α_1 及 δ_1.

引用一補助角可使(十三)適於用對數推算,或以 C 代在 S 處之角,且爲簡便計以

$$A=a+z+\theta, \qquad A'=a'-z'+\theta' \cdots\cdots\cdots\cdots (十四)$$

則依告司公式乃有

$$\cos\frac{1}{2}(90^\circ+\delta')\sin\frac{1}{2}(A'+C)=\cos\frac{1}{2}(90^\circ+\delta-\Theta)\sin\frac{1}{2}A,$$

$$\cos\frac{1}{2}(90^\circ+\delta')\cos\frac{1}{2}(A'+C)=\cos\frac{1}{2}(90^\circ+\delta+\Theta)\cos\frac{1}{2}A,$$

$$\sin\frac{1}{2}(90^\circ+\delta')\sin\frac{1}{2}(A'-C)=\sin\frac{1}{2}(90^\circ+\delta-\Theta)\sin\frac{1}{2}A,$$

$$\sin\frac{1}{2}(90^\circ+\delta')\cos\frac{1}{2}(A'-C)=\sin\frac{1}{2}(90^\circ+\delta+\Theta)\cos\frac{1}{2}A.$$

如算求 A 與 A' 及 δ 與 δ' 之較,可得更確之數.蓋由(十三)之前二式可推得

$$\cos\delta'\sin(A'-A)=\cos\delta\sin A\sin\Theta\left[\tan\delta+\tan\frac{1}{2}\Theta\cos A\right],$$

$$\cos\delta'\cos(A'-A)=\cos\delta-\cos\delta\cos A\sin\Theta\left[\tan\delta+\tan\frac{1}{2}\Theta\cos A\right],$$

故若以

$$p=\sin\Theta\left(\tan\delta+\tan\frac{1}{2}\Theta\cos A\right),$$

乃有

$$\tan(A'-A)=\frac{p\sin A}{1-p\cos A},$$

乃依那畢亞同類式而得

$$\tan\frac{1}{2}(\delta'-\delta)=\tan\frac{1}{2}\Theta\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}.$$

} ……(十五)

例題 極星1755年之平均位置爲

$$\alpha=10^\circ55'44''.955, \qquad \delta=87^\circ59'41''.12.$$

試求其與1820年平赤道及春分點相當之位置.

在1755年以 $t=-45$,在1820年以 $t'=+20$,依(一)得

在1755 年	在1820 年
$\phi=-37'\ 47''.31$	$\phi'=+16'\ 47''.55$
$\theta=-7''.29$	$\theta'=+2''.93$
$\varepsilon_1=23°27'\ 54''.23488$	$\varepsilon'_1=23°27'\ 54''.22294$

故

$$\frac{1}{2}(\phi'-\phi)=27'\ 17''.43,$$

$$\frac{1}{2}(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)=-0''.00597,$$

$$\frac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)=23°27'\ 54''.23,$$

以此由(十二)得

$$\frac{1}{2}(z'+z)=+25'\ 2''.02,$$

$$\frac{1}{2}(z'-z)=-1''.89,$$

$$z=+25'\ 3''.91,$$

$$z'=+25'\ 0''.13,$$

$$\log\sin\frac{1}{2}\Theta=7.499823.$$

然後依(十五)得

$$A=\alpha+z+\theta=11°20'\ 41''.57.$$

$\log p$	9.256676	$\log\tan\frac{1}{2}\Theta$	7.499825
$\log\sin A$	9.293836	$\log\cos\frac{1}{2}(A'+A)$	9.989446
$\log\cos A$	9.991430	$\log\sec\frac{1}{2}(A'-A)$	0.000101
$\log p\cos A$	9.248106	$\log\tan\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$	9.489372
$\log\frac{1}{1-p\cos A}=\operatorname{colog}(1-p\cos A)$	0.084629		
$\log\tan(A'-A)$	8.635141		

$$A'-A=2°28'18''.08 \qquad \delta'-\delta=21'12''.99$$

$$A'=13°48'59''.65$$

$$\alpha'=A'+z'-\theta'=14°13'56''.85 \qquad \delta'=88°20'54''.11$$

（十）求赤經緯一歲之歲差 算求一歲之差,則 Θ 之平方成爲不覺之數,故以下式代（十五）,

$$A'-A=\alpha'-\alpha-(z'+z)+\theta'-\theta=\Theta \sin\alpha \tan\delta.$$

且依（十二）得

$$z'+z=(\psi'-\psi)\cos\varepsilon_1,$$

$$\Theta=(\psi'-\psi)\sin\varepsilon_1.$$

其數亦甚確.以此數代入上式,且以 $(t'-t)$ 除之,得

$$\frac{\alpha'-\alpha}{t'-t}=\frac{\psi'-\psi}{t'-t}\cos\varepsilon_1-\frac{\theta'-\theta}{t'-t}+\frac{\psi'-\psi}{t'-t}\sin\varepsilon_1\sin\alpha\tan\delta,$$

乃能由之推求 $1800+t$ 與 $1800+t'$ 間之一歲之差,所用時之單位爲一年.但欲此式表明其在 $1800+t$ 時之變率,則須令 $t'-t$ 成無窮小,亦即該式須成下式,

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon_1-\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon_1\sin\alpha\tan\delta,$$

同此由（十五）之末一式更得

$$\frac{d\delta}{dt}=\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon_1\cos\alpha.$$

然後以

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon_1-\frac{d\theta}{dt}\\ n&=\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon_1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(十六)$$

由（一）得

$$\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon_1=(50''.3798-0''.0002168\,t)\cos\varepsilon_1$$

$$=46''.2135-0''.00019887\,t,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0''.1512 - 0''.00048372\,t,$$

故得

$$\left.\begin{aligned} m &= 46''.0623 + 0''.0002849\,t \\ n &= 20''.0607 - 0''.0000863\,t \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (十七)$$

而在 $1800+t$ 時赤經緯一歲之差,由下式求之

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n\sin\alpha\tan\delta \\ \frac{d\delta}{dt} &= n\cos\alpha \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (十八)$$

此式亦可用以求二時間之積差,只須以二時間之年數乘其在二時中間時一歲之差耳.

例題　角宿第一星在 1800 年之平赤經緯爲

$$\alpha = 13^h14^m40^s.5057,$$

$$\delta = -10^\circ\ 6'\ 46''.843,$$

求其在 1860 年之平赤經緯 α' 及 δ'.

在 1830 年時以 $t=30$ 由(十七)得

$$m = 46''.0708, \qquad n = 20''.0581.$$

乃先求其概數如下,以 $\alpha'=\alpha$、$\delta'=\delta$,則由(十八)得

$$\frac{d\alpha}{dt} = +47''.22, \qquad \frac{d\delta}{dt} = -19''.00.$$

故六十年間差之概數爲

在赤經內, $+2833'' = +188^s.9$,　　在赤緯內, $-1140''$,

加於 α 及 δ 得在 1860 年赤經緯之概數爲

$$\alpha' = 13^h17^m49^s.4, \qquad \delta' = -10^\circ 25' 47''.$$

此二數與 α、δ 二數之平均數爲

$$\alpha_0 = 13^h16^m15^s, \qquad \delta_0 = -10^\circ 16' 17'',$$

由此利用(十八),乃得在 1830 年較確之一歲之差爲

$$\frac{d\alpha}{dt}=+47''.2579, \qquad \frac{d\delta}{dt}=-18''.9582.$$

而六十年間之眞差乃爲

在赤經，$+2835''.474=3^m9^s.0316$，　在赤緯，$-18'57''.492$，

加於 α 及 δ 乃得在 1860 年之平均位置爲

$$\alpha'=13^h17^m49^s.5373, \qquad \delta'=-10°25'44''.335,$$

此數與用（九）之繁法所得者頗相合.

（十一）求赤極在某時之位置　歲差使赤極繞黃極（大概）行一小圈，其距極度等於黃道斜度.若不計黃道斜度之變，此極繞行一圈之需時爲下式之 t，

$$50''.2411\,t+0''.0001134\,t^2=360°\times60\times60=1296000'',$$

卽得

$$t=24447\text{ 年}.$$

惟歲差之數非十分準確，故此周期數亦非確，有取爲 24500 年，亦有取爲 25000 年者.

欲求赤極在任何時如 $1800+t$ 時之位置，則設第四圖之 P 爲在 $1800+t$ 時之赤極，P' 爲在 $1800+t'$ 時之赤極，P' 自 $1800+t$ 年春分點計來之赤經等於 Q 之赤經減去 90 度.Q 之赤經爲第三圖之 V_2Q，在（九）內曾得爲

$$V_2Q=90°-z-\theta.$$

故若以

$A,D=$ 赤極在 $1800+t'$ 時準 $1800+t$ 年赤道及春分點之赤經緯，

則有

$$A=-z-\theta,$$

$$D=90°-\Theta.$$

先求得在 $1800+t, 1800+t'$ 時之 ψ、ψ'、ε、ε'、θ，再依（十二）求得 z 及 Θ，則 A 及 D 亦求得矣.

若略去ε之變異,而以$z'=z$並略去θ,則有

$$\left.\begin{aligned} \tan A &= -\tan\frac{1}{2}(\phi'-\phi)\cos\varepsilon_0 \\ \sin(45^\circ-\frac{1}{2}D) &= \sin\frac{1}{2}(\phi'-\phi)\sin\varepsilon_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{(十九)}$$

由A之正切求A角雖覺不甚清晰,然$\phi'-\phi$不大過360度時$\cos A$與$\cos\frac{1}{2}(\phi'-\phi)$必有同樣之符號,此可由(十一)得知者也.是由正切求A角亦不模糊矣.此一較簡之法也.

例如求赤極在14000年準1850年春分點之位置,則以$t=50$,$t'=12200$,由是$\phi'-\phi=165^\circ 33'$,及

$$A=277^\circ 52', \qquad D=43^\circ 28'.$$

織女一在1850年之位置爲

$$\alpha=177^\circ 58', \qquad \delta=38^\circ 39',$$

故在14000年時赤極行至織女一,相去僅約五度,是彼時該星爲極星也.

恆星自動

(十二)　由測得星之視位推得其平均位置,知在相去甚遠之二時,其平均位置之變異不與歲差累積之數相合,似各星有其不同之微小行動,此行動卽曰自行,半由星在空間之絕對行動,半由於日率行星之行動,致吾人之注目點有變而使星有視行也.星在天球上之行道多認與大圈之弧相合,其在此大圈上之自行與時相比(卽以平速行).然此均非事實,不過視星所行其道之部分雖歷數百年亦屬甚小,不能覺其不爲平速,或不合於在大圈上之行動也.

欲分別自行及歲差,則在二時所測星之平均位置,須準於同一春分點.設α及δ爲在$1800+t$時測得之平均位置,α'及δ'爲在$1800+t'$時者.若自第一位置起,着手推求$t'-t$時間之歲差

積數,求在 $1800+t'$ 時 (α') 及 (δ') 之值,則在此時間內之全自行歸準於 $1800+t'$ 年春分點者爲

$$\Delta\alpha'=\alpha'-(\alpha'), \qquad \Delta\delta'=\delta'-(\delta').$$

但若自第二位置起,着手化之歸於第一時,求得 (α) 及 (δ),則在此時間內之自行歸準於 $1800+t$ 年者爲

$$\Delta\alpha=(\alpha)-\alpha, \qquad \Delta\delta=(\delta)-\delta.$$

(十三) 已知星之自行,化其在某元時之平均位置爲在他一元時者 設 α、δ 爲在 $1800+t$ 時之平均位置,$d\alpha$ 及 $d\delta$ 爲其準該時春分點之赤經緯歲自行(卽在赤經緯內之行數),化歸於 $1800+t'$ 時,須先用下式求其在二時間之自行全數,

$$\Delta\alpha=d\alpha(t'-t), \qquad \Delta\delta=d\delta(t'-t).$$

然後乃以

$$(\alpha)=\alpha+\Delta\alpha, \qquad (\delta)=\delta+\Delta\delta,$$

由(九)、(十)二節內之式推求歲差,於式內以 (α) 及 (δ) 代 α 及 δ.

若所給之自行 $(\Delta\alpha', \Delta\delta')$ 係在 $1800+t'$ 時之數,須先用 α 及 δ 之數推求歲差,若 (α') 及 (δ') 爲所得之數,最末須用 $\alpha'=(\alpha')+\Delta\alpha'$ 及 $\delta'=(\delta')+\Delta\delta'$.

(十四) 自某元時星之赤經緯自行化歸於他元時者 在第四圖設 P 及 P' 爲在 $1800+t$ 及 $1800+t'$ 二時之二赤極.設星 S 變其位置,則三角形 SPP' 之邊角當然變動,僅其 PP' 爲不變之邊,故本題卽在推其邊角間變動之關係.由(九)節之代字(因 z、θ、z'、θ' 無關於星之位置)乃有

$$d(SPP')=d(\alpha+z+\theta)=d\alpha,$$

$$d(SP'P)=d(180^\circ-\alpha'+z'-\theta')=-d\alpha',$$

$$d(SP)=-d\delta,$$

$$d(SP')=-d\delta',$$

然後依三角的微分公式有

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta'.d\alpha' &= d\alpha\cos\delta\cos\gamma+d\delta\sin\gamma \\ d\delta' &= -d\alpha\cos\delta\sin\gamma+d\delta\cos\gamma \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(二十)$$

γ 乃在星處之角,其值由下式定之,

$$\sin\gamma=\frac{\sin\Theta\sin(\alpha+z+\theta)}{\cos\delta'}=\frac{\sin\Theta\sin(\alpha'-z'+\theta')}{\cos\delta},$$

$$\cos\gamma=\frac{\cos\Theta-\sin\delta\sin\delta'}{\cos\delta\cos\delta'}.$$

推算時僅由正弦求 γ 值卽已無誤,因 $\cos\gamma$ 除在星逼近赤極致 $\cos\Theta<\sin\delta\sin\delta'$ 外恆爲正數也.

無論 da、$d\delta$、$d\alpha'$、$d\delta'$ 指一歲之自行數,或二時間之自行全數,(十二)均可應用.

所謂三角的微分公式,其基本式如下:

$$\left.\begin{aligned} da-\cos C\,db-\cos B\,dc &= \sin b\sin C\,dA \\ -\cos C\,da+db-\cos A\,dc &= \sin c\sin A\,dB \\ -\cos B\,da-\cos A\,db+dc &= \sin a\sin B\,dC \end{aligned}\right\}$$

由之消去 da 可得另二式.再由此二式消去 db 又得一式,若由之消去 dA 又得一式.此最後一式之各項或以 $\sin b\sin C$ 或以其等數 $\sin c\sin B$ 除之,又得一式.其詳見弧三角學專書.A、B、C 及 a、b、c 乃弧三角形之三角三邊也.

例題　在 1755 年極星之平均位置爲

$$\alpha=10^\circ55'44''.955,\qquad \delta=87^\circ59'41''.12,$$

用歲差化其爲在 1820 年之位置得

$$(\alpha')=14^\circ13'56''.85,\qquad (\delta')=88^\circ20'54''.11.$$

但星之 1820 年平均位置據白塞爾由測所得者爲

$$\alpha'=14^\circ15'22''.575,\qquad \delta'=88^\circ20'54''.27.$$

故其準 1820 年春分點自 1755 年至 1820 年之自行爲

$$\Delta\alpha' = +85''.725, \qquad \Delta\delta' = +0''.16,$$

即其一歲之自行爲

$$d\alpha' = +1''.31885, \qquad d\delta' = +0''.00246.$$

欲化此自行爲1755年之數,可用(二十)而以$d\alpha'$換$d\alpha$以$d\delta'$換$d\delta$,並以γ爲負數,因在由1820至1755之時間內$\odot$爲負數也. 如欲免去如此之掉換代字及符號,可由(二十)推成下式:

$$\cos\delta . d\alpha = d\alpha' \cos\delta' \cos\gamma - d\delta' \sin\gamma$$

$$d\delta = d\alpha' \cos\delta' \sin\gamma + d\delta' \cos\gamma.$$

由(九)節之題算得

$$\log\sin\odot = 7.800851, \qquad \alpha + z + \theta = 11°20'41''.57.$$

以此二數及 $\delta' = 88°20'54''.27$ 得

$$\log\sin\gamma = 8.634966, \qquad \log\cos\gamma = 9.999596,$$

故爲1755年得有

$$d\alpha = +1''.08228, \qquad d\delta = +0''.004098.$$

若在1755年星之平均位置及自行均爲已知,即

$$\alpha = 10°55'44''.955, \qquad \delta = 87°59'41''.12,$$

$$d\alpha = +1''.08228, \qquad d\delta = +0''.004098,$$

而求在1820年之平均位置,則須先取

$$(\alpha) = 10°55'44''.955 + 1''.08228 \times 65 = 10°56'55''.30$$

$$(\delta) = 87°59'41''.12 + 0''.004098 \times 65 = 87°59'41''.39,$$

再用此數代(十四)、(十五)之 α 及 δ,由之而得

$$\alpha + z + \theta = A = 11°21'51''.92,$$

$$\log p = 9.256691,$$

$$A' - A = 2°28'33''.45,$$

$$\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 10'36''.44,$$

遂得

$$\alpha' = 14°15'\,22''.57, \qquad \delta' = 88°20'\,54''.27,$$

與白塞爾所記之數相同.

(十五) 求在大圈上之自行　如以 ρ 代此自行,以 χ 代大圈與星之赤緯圈所成自北向東計之角,則有

$$\rho \sin\chi = \Delta\alpha \cos\delta, \qquad \rho\cos\chi = \Delta\delta,$$

故在前題求得極星在 1755 年之

$$\rho = 0''.03809, \qquad \chi = 83°49'.4,$$

而在 1820 年爲

$$\rho = 0''.03809, \qquad \chi' = 86°17'.8.$$

χ' 乃指在第二元時之數,ρ 在二時爲同數.

$\chi' = \chi + \gamma$ 乃顯見之事,故若求得在一元時之 ρ 及 χ,只須推算 γ 卽可化成在第二元時之數,因由(二十)可有下式也.

$$\cos\delta'\, d\alpha' = \rho \sin(\chi+\gamma) = \rho \sin\chi'$$

$$d\delta' = \rho\cos(\chi+\gamma) = \rho\cos\chi'$$

章　　動

(十六)　因月日歲差合黃道斜角之減小,遂致平赤極繞黃極轉行而漸近黃極.但同時眞赤極亦有一小行動,繞平黃極行成小橢圓,約十九年一周.如此行動曰章動,其周期卽月道之交黃道點轉行一周之時.章動含有黃道斜角之章動 $\Delta\varepsilon$ 及春分點之黃經章動 $\Delta\lambda$,若不計其不易覺之極微諸項及其他短期之動,則其在 1800 年之數爲下式所表顯

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\varepsilon = {} & 9''.2231 \cos\Omega - 0''.0897 \cos 2\Omega + 0''.0886 \cos 2\mathbb{C} \\
& + 0''.5510 \cos 2\odot + 0''.0093 \cos(\odot - \Gamma) \\
\Delta\lambda = {} & -17''.2405 \sin\Omega + 0''.2073 \sin 2\Omega - 0''.2041 \sin 2\mathbb{C} \\
& + 0''.0677 \sin(\mathbb{C} - \Gamma') - 1''.2694 \sin 2\odot \\
& + 0''.1279 \sin(\odot - \Gamma) - 0''.0213 \sin(\odot + \Gamma)
\end{aligned}\right\} \text{(二十一)}$$

式內 ☊＝月道昇交點準平春分點之黃經，

☾＝月之眞黃經，

☉＝日之眞黃經，

Γ＝日卑點之眞黃經，

Γ′＝月卑點之眞黃經.

Δλ之數亦曰春分點差(Equation of the equinoxes).

在Δε式內 $\cos$☊之係數通稱曰章動常數.在Δλ式內 $\sin$☊之係數等於該常數乘以$-2\cot 2\varepsilon_0$,而ε_0爲23度27分54.2秒,然此常數非永不變者,據彼得(Peters)章動在1900年之式爲

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varepsilon = {} & 9''.2240\cos☊ - 0''.0896\cos 2☊ + 0''.0855\cos 2☾ \\ & + 0''.5507\cos 2☉ + 0''.0092\cos(☉+\Gamma) \\ \Delta\lambda = {} & -17''.2577\sin☊ + 0''.2073\sin 2☊ - 0''.2041\sin 2☾ \\ & + 0''.0677\sin(☾-\Gamma') - 1''.2695\sin 2☉ \\ & + 0''.1275\sin(☉-\Gamma) - 0''.0213\sin(☉+\Gamma)\end{aligned}\right\}\text{(二十二)}$$

因月日之攝地並不擾及黃道之位置,僅感動赤道之位置及其交黃道之點耳,故章動不變星之黃緯而使其黃經所受之影響則同爲增加Δλ之數.

(十七) 求某星在某時赤經緯章動 設α及δ爲星在某時之平赤經緯,α'及δ'爲在該時之眞赤經緯或平均位置之改正章動者.設在該時Δε及Δλ式應用之係數爲由1800及1900年之數用間求法推求者.然後乃由曆書取在該日時之☊、☾、☉、Γ及Γ′數值,則可推求Δε及Δλ矣.於是或用精法或用概法進而解算本題.

用(十一)、(十三)、(十四)式以$\varepsilon+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon$、Δε、Δλ、$\alpha+z$及$\alpha'-z'$代$\frac{1}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon_1)$、$\varepsilon'_1-\varepsilon_1$、$\psi'-\psi$、$A$及$A'$是一確法也.

先由已知之 α 及 δ 及平斜角 ε 求平黃經緯 λ 及 β，然後用眞黃經 $\lambda+\Delta\lambda$、眞黃緯 β 及眞斜角 $\varepsilon+\Delta\varepsilon$，可推求眞赤經緯 α' 及 δ'，是又一精法也.

但因 $\Delta\varepsilon$ 及 $\Delta\lambda$ 爲極小之數，可用微分式之概法亦甚確而便利多矣.設 $\Delta\lambda$ 及 $\Delta\varepsilon$ 變 λ 及 ε 之影響（β 爲常數）由下式顯之，式內之 η 角乃在星處之角也.

$$\alpha'-\alpha=\Delta\lambda\frac{\cos\eta\cos\beta}{\cos\delta}-\Delta\varepsilon\cos\alpha\tan\delta,$$

$$\delta'-\delta=\Delta\lambda\sin\eta\cos\beta+\Delta\varepsilon\sin\alpha,$$

而

$$\cos\beta\cos\eta=\cos\varepsilon\cos\delta+\sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha,$$

$$\cos\beta\sin\eta=\sin\varepsilon\cos\alpha.$$

以下二式代入上二式乃得

$$\alpha'-\alpha=\Delta\lambda(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta)-\Delta\varepsilon\cos\alpha\tan\delta,$$

$$\delta'-\delta=\Delta\lambda\sin\varepsilon\cos\alpha+\Delta\varepsilon\sin\alpha.$$

故爲 1800 年代入 $\Delta\lambda$ 及 $\Delta\varepsilon$ 而以 $\varepsilon=23°27'54''$，爲 1900 年代入 $\Delta\lambda$ 及 $\Delta\varepsilon$ 而以 $\varepsilon=23°27'7''$，乃有

$$\alpha'-\alpha=$$

$$-(15''.8148+6''.8650\sin\alpha\tan\delta)\sin☊-9''.2231\cos\alpha\tan\delta\cos☊$$

一五·八三二一　六·八六八二　　九·二二四〇

$$+(0''.1902+0''.0825\sin\alpha\tan\delta)\sin 2☊+0''.0897\cos\alpha\tan\delta\cos 2☊$$

$$-(0''.1872+0''.0813\sin\alpha\tan\delta)\sin 2☾-0''.0886\cos\alpha\tan\delta\cos 2☾$$

$$+(0''.0621+0''.0270\sin\alpha\tan\delta)\sin(☾-\Gamma')$$

$$-(1''.1644+0''.5055\sin\alpha\tan\delta)\sin 2☉-0''.5510\cos\alpha\tan\delta\cos 2☉$$

$$+(0''.1173+0''.0509\sin\alpha\tan\delta)\sin(☉-\Gamma)$$

$$-(0''.0195+0''.0085\sin\alpha\tan\delta)\sin(☉+\Gamma)$$

$$-0''.0093\cos\alpha\tan\delta\cos(☉+\Gamma),$$

$$\delta'-\delta=-6''.8650\cos\alpha\sin\Omega+9''.2231\sin\alpha\cos\Omega$$

六·八六八二　　九·二二四〇

$$+0''.0825\cos\alpha\sin 2\Omega-0''.0897\sin\alpha\cos 2\Omega$$
$$-0''.0813\cos\alpha\sin 2\odot+0''.0886\sin\alpha\cos 2\odot$$
$$+0''.0270\cos\alpha\sin(\odot-\Gamma')$$
$$-0''.5055\cos\alpha\sin 2\odot+0''.5510\sin\alpha\cos 2\odot$$
$$+0''.0509\cos\alpha\sin(\odot-\Gamma)$$
$$-0''.0085\cos\alpha\sin(\odot+\Gamma)+0''.0093\sin\alpha\cos(\odot+\Gamma).$$

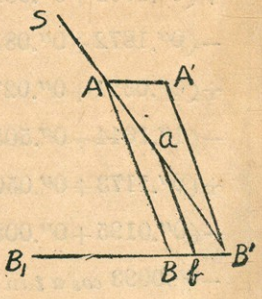
在1900年其係數之在此百年中顯有變異者於1800年之數下以中文數字書之.此式諸項僅爲對觀測有可覺之影響者,而尙非彼得之全式.

推算章動最爲繁難,多有製成表俾便於推算者,其中以尼谷來所製者爲最簡.該表之元時爲1850,其常數係採用彼得者雖有該表之助而推算仍甚冗長.若常求章動之數,尙須完備之表.

光 行 差

(十八) 以遠鏡測星之視方向,因地及光之行動致所見之方向不合於星之眞方向.蓋遠鏡當光經過鏡筒時,已隨地行而變位也.

設以 t 及 t' 分別光達到物鏡及目鏡之二時頃.設 A、B 爲物鏡及目鏡在 t 時之位置,A'、B' 爲其在 t' 時者,BB' 爲地球在 $t'-t$ 間之行動.在此時間由星射來之光線 SAB' 行於 AB' 線,可見 $B'A$ 爲星之眞方向,$A'B'$ 乃由遠鏡所見之視方向也.設地球在如此微小時間內之行動爲以平速行於直線,而



第 五 圖

光之行亦以平速,則 BA 及 $B'A'$ 爲二平行線,且光線由 A 至 B' 時恆常在遠鏡筒內而與其筒軸合,例如遠鏡行至 ba,則光正到 a,於是乃有

$$Aa : Bb = AB' : BB'.$$

如此由地合光之行動而生之方向差,是曰恆星光行差.如再計算光體(如在行星之例)之行動,則更有所謂行星光行差.

星因光行差之移動,完全在過星及測者行動線之平面內,故視之若該在面內移向測者所向之前.所以 $AB'A'$ 爲其光行差全數.設將該面展至天球,則爲過星及 BB' 線遇天球二點之大圈面,星之移動乃此大圈張 $SB'A'$ 角之弧(由星向測者行向量之).

(十九)求星在測者行向內之光行差 設

$\theta = AB'B_1 =$ 星準 $B'B_1$ 線之眞方向.

$=$ 天球上過星及測者所向點所作大圈之弧,

$\theta' =$ 星準同一線之視方向 $= ABB_1$,

$V =$ 光之速度,

$v =$ 測者之速度,

則在行動面內之光行差爲 $A'B'A = B'AB = \theta' - \theta$.由三角形 ABB' 乃有

$$\frac{\sin(\theta'-\theta)}{\sin\theta'} = \frac{BB'}{AB'} = \frac{v}{V}.$$

因 $\theta'-\theta$ 甚微小,可用其弧代正弦,若以

$$k = \frac{v}{V\sin 1''} \quad \text{(二十四)}$$

乃有

$$\theta' - \theta = k\sin\theta' \quad \text{(二十五)}$$

此常數乃由光及測者之速度而得知也.

（二十） 地面上測者之行動,乃合地球軌道行及自轉其軸之行而成者,卽合其逐日及逐年之行而成者.故光行差可分別論之.光行年差乃全差之一部由地逐年行動而生者,可稱曰地心光行差.光行日差乃全差之一部,由地逐日行動而生,隨測者在地面上之位置而異,在極處則爲零.

（二十一）**求星之黃經緯光行年差** 設

λ, β = 星之眞黃經緯,

λ', β' = 星之視黃經緯（受有光行差之影響）,

$\odot$ = 日之眞黃經.

地球視若所向天球之點乃在黃道上之一點,其黃經爲 $90° + \odot$（不計地道偏心率）.

第 六 圖

設 BE 爲黃道之一弧,E 爲地球行動之起點,S 爲星之眞位置,若引 SB 垂於 BE,則於正三角形 SBE 有

$$SB = \beta, \qquad BE = 90° + \odot - \lambda, \qquad SE = \theta.$$

故若以 γ 代 E 角,則有

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta \sin\gamma &= \sin\beta \\ \sin\theta \cos\gamma &= \cos\beta \cos(\odot - \lambda) \\ \cos\theta &= -\cos\beta \sin(\odot - \lambda) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\text{(二十六)}$$

星之視位在此 ES 大圈上去 S 有 θ' 遠之處,故若設 S 爲視位,γ 角仍未變,乃有

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta' \sin\gamma &= \sin\beta' \\ \sin\theta' \cos\gamma &= \cos\beta' \cos(\odot - \lambda') \\ \cos\theta &= -\cos\beta' \sin(\odot - \lambda') \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\text{(二十七)}$$

是以苟知星之眞位置可用（二十六）定 γ 及 θ,然後由（二十

五）求θ',最後由(二十七)求λ'及β',此乃精確解法也.但有一較便之法如下.由(二十六)及(二十七)求得

$$\sin\theta'\cos\theta\cos\gamma=-\cos\beta\cos\beta'\sin(\odot-\lambda)\cos(\odot-\lambda'),$$

$$\sin\theta\cos\theta'\cos\gamma=-\cos\beta\cos\beta'\cos(\odot-\lambda)\sin(\odot-\lambda'),$$

其較爲

$$\sin(\theta'-\theta)\cos\gamma=-\cos\beta\cos\beta'\sin(\lambda'-\lambda),$$

由之得

$$\lambda'-\lambda=-\frac{(\theta'-\theta)\cos\gamma}{\cos\beta\cos\beta'}=-\frac{k\sin\theta'\cos\gamma}{\cos\beta\cos\beta'},$$

或

$$\lambda'-\lambda=-k\frac{\cos(\odot-\lambda')}{\cos\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots(二十八)$$

再由(二十六)及(二十七)得

$$\cot\gamma=\cot\beta'\cos(\odot-\lambda')=\cot\beta\cos(\odot-\lambda).$$

依此可由β及λ'求得β',而λ'乃先由(二十八)求得者也.然亦可求β'與β之較,如此則

$$\tan\beta'-\tan\beta=\tan\beta'\left[\frac{\cos(\odot-\lambda')-\cos(\odot-\lambda)}{\cos(\odot-\lambda')}\right],$$

$$\sin(\beta'-\beta)=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)\sin[\odot-\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda)]\sin\beta'\cos\beta}{\cos(\odot-\lambda')},$$

由此以$2\sin\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)=\sin(\lambda'-\lambda)$,可利用(二十八)而得

$$\beta'-\beta=-k\sin[\odot-\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda)]\sin\beta'\cdots\cdots\cdots(二十九)$$

(二十八)及(二十九)均甚精確.但因k之值,僅約20秒,於(二十九)之右邊以λ及β換λ'及β'亦甚準確,故黃經緯光行年差之式乃爲

$$\left.\begin{aligned}\lambda'-\lambda&=-k\cos(\odot-\lambda)\sec\beta\\ \beta'-\beta&=-k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(三十)$$

其 k 之數據斯得路佛爲

$$k=20''.4451.$$

微分（二十六）可直接推得（三十）.

若展開（二十八）及（二十九）而留其二次方諸項,則見下數須加于（三十）之右側.

$$-\frac{1}{2}k^2 sin\ 1'' sin\ 2(\odot-\lambda) sec^2\beta$$

及

$$-\frac{1}{4}k^2 sin\ 1'' tan\beta-\frac{1}{4}k^2 sin\ 1'' cos\ 2(\odot-\lambda) tan\ \beta.$$

但 $-\frac{1}{4}k^2\ sin\ 1'' tan\beta$ 係常數可免去,因其含於表明星之平均位置之式內,卽所謂星位置之非周期性的變異也.故只留周期性諸項（卽含⊙之項）則更完美之式爲

$$\left.\begin{aligned}\lambda'-\lambda&=-20''.4451\ cos(\odot-\lambda) sec\ \beta\\&\quad-\ 0''.0010133\ sin\ 2(\odot-\lambda) sec^2\beta\\\beta'-\beta&=-20''.4451\ sin(\odot-\lambda) sin\ \beta\\&\quad-\ 0''.0005067\ cos\ 2(\odot-\lambda) tan\ \beta\end{aligned}\right\}\quad(三十一)$$

其末項僅於近極之星有所覺察.

二次方諸項未爲 $tan\beta$ 或 $sec\beta$, 所乘者純無覺察之可能,推上式時並未加入.

由（三十）頗易證明,若星實行於與黃道面平行之大圈內,則有同樣之光行差影響.此圈之徑等於星之距離乘以 k. 其在平面之切天球於星之平均位置處者,所作之投影（由地見之）爲橢圓形,其長徑爲 $sin\ k$, 短徑爲 $sin\ k\ sin\ \beta$, 天球半徑爲一.其視若晝行此橢圓一周之期爲一恆星年.

（二十二）求赤經緯光行年差 設

A, D= 地行所自之點（E）之赤經緯,

則在 E 點及星及赤極所成之三角形,有其邊爲 $90°-D$, $90°-\delta$ 及

θ,其對 θ 邊之角爲 $A-\alpha$.設若 θ 邊有變,則 $A-\alpha$ 角及 $90°-\delta$ 邊之相當的變異可由三角微分式推定之.其 E 角及 $90°-D$ 邊乃不變者.故有

$$\cos\delta\cdot d\alpha=-d\theta\sin C,$$
$$d\delta=-d\theta\cos C,$$

C 乃指在星處之角.欲定 C 角則由三角形用下式求之,

$$\sin\theta\sin C=\cos D\sin(A-\alpha),$$
$$\sin\theta\cos C=\cos\delta\sin D-\sin\delta\cos D\cos(A-\alpha).$$

在(二十五)式可用 $\sin\theta$ 代 $\sin\theta'$,故以 $\alpha'-\alpha$ 及 $\theta'-\theta$ 代 $d\alpha$ 及 $d\theta$ 乃得

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=-k\sec\delta\cos D\sin(A-\alpha)\\ \delta'-\delta&=-k[\cos\delta\sin D-\sin\delta\cos D\cos(A-\alpha)]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(三十二)$$

A 及 D 之數可由赤道黃道與過 E 之赤緯圈所成之三角形用下式推求之,

$$\left.\begin{aligned}\cos D\cos A&=-\sin\odot\\ \cos D\sin A&=\cos\odot\cos\varepsilon\\ \sin D&=\cos\odot\sin\varepsilon\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(三十三)$$

若於展開 $\sin(A-\alpha)$ 及 $\cos(A-\alpha)$ 後代此值於求 $\alpha'-\alpha$ 及 $\delta'-\delta$ 之式內,則有

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=-k\sec\delta\,(\cos\odot\cos\varepsilon\cos\alpha+\sin\odot\sin\alpha)\\ \delta'-\delta&=-k\cos\odot(\sin\varepsilon\cos\delta-\cos\varepsilon\sin\delta\sin\alpha\\ &\quad -k\sin\odot\sin\delta\cos\alpha\end{aligned}\right\}(三十四)$$

若不去其二次方諸項,而僅去其不含 $\odot$ 之項(即非周期性諸項),則見赤經光行差更應加有下項,

$$-\frac{1}{4}k^2\sin 1''(1+\cos^2\varepsilon)\cos 2\odot\sin 2\alpha\sec^2\delta$$

$$+\frac{1}{2}k^2 \sin 1'' \cos \varepsilon \sin 2\odot \cos 2\alpha \sec^2 \delta,$$

而赤緯光行差加有下項

$$+\frac{1}{8}k^2 \sin 1''[\sin^2 \varepsilon - (1+\cos^2 \varepsilon)\cos 2\odot \cos 2\alpha] \tan \delta$$

$$-\frac{1}{4}k^2 \sin 1'' \cos \varepsilon \sin 2\odot \sin 2\alpha \tan \delta.$$

於此諸項內代入 k 值，以 $\varepsilon = 23$ 度 27 分 30 秒（爲 1850 年），且略去不可覺之數，則（三十四）之改正數爲

$$\left.\begin{array}{ll} \text{在}(\alpha'-\alpha), & -0''.000931 \sin 2(\odot-\alpha)\sec^2\delta \\ \text{在}(\delta'-\delta), & -0''.000466 \cos 2(\odot-\alpha)\tan\delta \end{array}\right\} \cdots\cdots(三十五)$$

例題一　角宿第一星 1860 年一月十日之平黃經緯爲

$$\lambda = 201°53'22''.33, \qquad \beta = -2°2'36''.29,$$

日之黃經爲

$$\odot = 239°30'.$$

故依（三十）求得黃經緯光行差爲

$$\lambda' - \lambda = -0''.85, \qquad \beta' - \beta = +0''.73.$$

其相當之平赤經緯爲

$$\alpha = 13^h17^m49^s.62, \qquad \delta = -10°25'44''.9,$$

由此數用（三十四）以 $\varepsilon = 23°24'.4$ 求得赤經緯光行差爲

$$\alpha' - \alpha = -0''.53 = -0^s.035, \qquad \delta' - \delta = +0''.99.$$

例題二　1820 年年首極星之平均位置爲

$$\alpha = 0^h57^m1^s.505 = 14°15'22''.57,$$

$$\delta = 88°20'54''.27,$$

於此日時

$$\odot = 280°0', \qquad \varepsilon = 23°27'.8,$$

準此用（三十四）求得赤經緯光行差爲

$$\alpha' - \alpha = +62''.51 = +4^s.167, \qquad \delta' - \delta = +20''.27.$$

(三十五)之增加數在此例爲 $-0''.158=-0^s.011$ 及 $+0.''016$,故改正後之數爲

$$\alpha'-\alpha=+4^s.156, \qquad \delta'-\delta=+20''.29.$$

(二十三)推赤經緯光行差之告司表　若有 a 及 A 二數係爲下式條件所定者

$$a\sin(\odot+A)=k\sin\odot,$$
$$a\cos(\odot+A)=k\cos\odot\cos\varepsilon,$$

則(三十四)可以下式表顯之

$$\alpha'-\alpha=-a\sec\delta\cos(\odot+A-\alpha),$$
$$\delta'-\delta=-a\sin\delta\sin(\odot+A-\alpha)-k\cos\odot\cos\delta\sin\varepsilon$$
$$=-a\sin\delta\sin(\odot+A-\alpha)-\frac{1}{2}k\sin\varepsilon\cos(\odot+\delta)$$
$$-\frac{1}{2}k\sin\varepsilon\cos(\odot-\delta).$$

告司所立之第一表給有以日黃經爲主數之 A 及 $\log a$ 之數.由此數卽能推赤經光行差及赤緯光行差之第一部.其第二第三部,則直接由第二表取之.第二表乃以 $\odot+\delta$ 及 $\odot-\delta$ 爲主數.此表曾經尼谷來復算一次,採用 $k=20.4451$ 秒.ε 之值係用 1850 年之數.ε 之變率甚緩,故此表除需要特別精確外,可敷十九世紀之用.

(二十四)　以上論光行差之公式,皆爲便利計,謂地道爲正圓,其軌道行爲平速.茲改正之使合於地之眞橢圓軌道行.

設 u 爲地在軌道內自過卑點後歷 t 時之眞卑點角,r 爲帶徑,a 爲平均日地距卽地道半長徑,乃有

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos u}.$$

地之行動眞方向,並非如在圓軌道垂於日之方向,但在切於該曲線之方向內.如以此切線與帶徑所成之角爲 $90°-i$,則

依曲線理乃有

$$\cot(90^\circ - i) = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du},$$

故由上之橢圓公式乃有

$$\tan i = \frac{e \sin u}{1 + e \cos u}.$$

若於（三十）內以⊙$-i$代⊙,則地之眞方向計在內矣.

如以v_1爲地在t時軌道行之速度眞數,則有

$$v_1 = r \sec i \frac{du}{dt}.$$

如f爲在t時內帶徑所畫之面積,F爲在周期內所畫之全面積,則依刻白爾律乃有

$$\frac{f}{t} = \frac{F}{T},$$

或

$$\frac{df}{dt} = \frac{F}{T}.$$

由橢圓理又有

$$F = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{du}{dt},$$

故

$$\frac{du}{dt} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T r^2},$$

以此代入v_1之值內,並將r值亦代入,則有

$$v_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{2\pi}{T} (1 + e \cos u) \sec i.$$

此速率之平均值乃去其隨u及i而生之周期性諸項所應有之數（見一節）.如以v代其平速,則有

$$v = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{2\pi}{T} \quad \text{……(三十六)}$$

$$v_1 = v(1 + e \cos u) \sec i \quad \text{……(三十七)}$$

若 V 爲光之速度,且以

$$k_1=\frac{v_1}{V\sin 1''}=k(1+e\cos u)\sec i,$$

乃可於(三十)內以 k_1 代 k,$\odot-i$ 代 $\odot$,即得下式

$$\lambda'-\lambda=-k(1+e\cos u)\cos(\odot-\lambda-i)\sec i\sec\beta,$$

$$\beta'-\beta=-k(1+e\cos u)\sin(\odot-\lambda-i)\sec i\sin\beta.$$

而合於眞橢圓軌道行之例矣.展開其 $(\odot-\lambda-i)$ 之正弦及餘弦乃有

$$\cos(\odot-\lambda-i)\sec i=\cos(\odot-\lambda)+\sin(\odot-\lambda)\tan i,$$

$$\sin(\odot-\lambda-i)\sec i=\sin(\odot-\lambda)-\cos(\odot-\lambda)\tan i,$$

代入 $\tan i$ 之值,則有

$$\lambda'-\lambda=-k\cos(\odot-\lambda)\sec\beta-ke\cos(\odot-u-\lambda)\sec\beta,$$

$$\beta'-\beta=-k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta-ke\sin(\odot-u-\lambda)\sin\beta.$$

日之卑點黃經爲

$$\Gamma=\odot-u,$$

引其入式最末乃有

$$\left.\begin{aligned}\lambda'-\lambda&=-k\cos(\odot-\lambda)\sec\beta-ke\cos(\Gamma-\lambda)\sec\beta\\ \beta'-\beta&=-k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta-ke\sin(\Gamma-\lambda)\sin\beta\end{aligned}\right\}\text{(三十八)}$$

此式不同於(三十)者只在其有第二項,即爲軌道有偏心之改正數也.此數甚小,因 $e=0.01677$,故 ke 僅等於 0.3429 秒,但此項之數在恆星幾不變而可長期用之.故可作爲不變的改正數,或爲有長差的改正數,均可以之併入星之平均位置,且於光行年差更無須如此之改正,故在恆星其由圓道推出之(三十)及(三十三)均可作爲完善公式.

(二十五)日之光行差　因 β 小於 1 秒,故在赤黃緯無可覺之光行差.惟在此例 λ 爲變數,故其黃經光行差須用(三十八)式推求.故以 $\odot$ 代 λ,日之光行差乃由下式推之

$$\odot'-\odot=-20''.4451-0''.3429\cos(\Gamma-\odot)\cdots\cdots(三十九)$$

在十九世紀可用 $\Gamma=280$ 度，其差不足 0.01 秒.

由此可推得日之赤經緯光行差之算式，但實際所用之法係將日視作行星類，故用行星光行差法，下當另述.

(二十六) 求赤經緯光行日差　設

v' = 地球赤道上一點因地球自轉而生之速度.

$$k'=\frac{v'}{V\sin 1''}=k\cdot\frac{v'}{v}\cdots\cdots(四十)$$

在赤道上所見星之位置，其光行日差可如推光行年差法推求之，只須以赤道代黃道，以赤經緯代黃經緯耳.然後以測地之天底點代日之位置（因測者之行動係自其地平面西點起行，其西點係在天底點之赤經前 90 度處，而地球軌道行所自之點係在日之黃經前 90 度處），故以

Θ = 天頂點之赤經或恆星時，

則於（三十）式以 $180+\Theta$、α、δ 及 k' 代其 $\odot$、λ、β 及 k，即使之應用於此例矣.是在地球赤道上一點之光行日差算式爲

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=k'\cos(\Theta-\alpha)\sec\delta\\ \delta'-\delta&=k'\sin(\Theta-\alpha)\sin\delta\end{aligned}\right\}$$

因地面各點皆行於與赤道平行之一平面內，而此面乃與天球赤道面相合，故此式可用之於地面各點，惟須於 k' 式內引用各該點之實在速度而已.此速度隨緯度圈周而異，亦即隨該圈周之半徑而異，而此半徑在緯度 ϕ 處爲 $\rho\cos\phi'$，其 ϕ' 乃屬地心緯度，ρ 乃在該緯度處之地球半徑也.故僅以 $v'\rho\cos\phi'$ 代 v'，或 $k'\rho\cos\phi'$ 代 k'，則得在地面任何點光行日差之式爲

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=k'\rho\cos\phi'\cos(\Theta-\alpha)\sec\delta\\ \delta'-\delta&=k'\rho\cos\phi'\sin(\Theta-\alpha)\sin\delta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(四十一)$$

k' 尙須設法推定，由（三十六）有

$$v=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{2\pi}{T},$$

其 T 乃恆星年之恆星日數,推得之 v 乃每恆星日之數.地球赤道上一點在一恆星日內之行動,等於赤道之圓周,故若 a' 爲赤道半徑,其速度 v' 苟與 v 係屬同樣單位,則如下式

$$v'=2\pi a',$$

由是得

$$\frac{v'}{v}=\frac{Ta'\sqrt{1-e^2}}{a}.$$

但若以

$p=$日之平均地平視差,

則有

$$\sin p=\frac{a'}{a},$$

且得

$$k'=k\,T\sin p\sqrt{1-e^2},$$

如用斯得路佛之 k 值 $=20.4451$ 秒,白塞爾之 T 值$=366.25637$ 日,因格之 p 值 $=8.57116$ 秒,及 e 值 $=0.01677$,則

$$k'=0.31112\text{秒}.$$

此數如此之小,故在(四十一)內可以 $\cos\phi$ 代 $\rho\cos\phi'$ 並無可覺之錯誤,而光行日差,可由下式求之矣.

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=0''.311\cos\phi\cos(\odot-\alpha)\sec\delta\\ \delta'-\delta&=0''.311\cos\phi\sin(\odot-\alpha)\sin\delta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\text{(四十二)}$$

$\odot-\alpha$ 之數乃星之時角,由此可見一星在子午線上其赤經光行日差爲

$$+0''.311\cos\phi\sec\delta=+0^s.0207\cos\phi\sec\delta,$$

而赤緯光行日差爲零.

在一恆星日內每星視若行一小橢圓,其長徑爲 $k'\cos\phi$,短

徑爲 $k'\cos\phi\sin\delta$,其圓之半徑爲一.在極處 $\cos\phi=0$ 此橢圓成爲一點,乃無光行日差.

(二十七) 光之速度 斯得路佛推定 k 之值係取諸星在年內各季之視位比較而定之,並非由已知光之速度也.故可由此常數推定光之速度.由前節有

$$V=\frac{v'}{k'\sin 1''}=\frac{v'}{T\sin p\sin k\sqrt{1-e^2}},$$

若以 v' 等於地球赤道上一點因地自轉而具之速度,則 V 爲光每秒之速度.故若以 $v'=\frac{2\pi a'}{n}$,則有下式可由光行差常數定光之速度,

$$V=\frac{2\pi a'}{nT\sin p\sin k\sqrt{1-e^2}} \quad \text{……(四十三)}$$

由此式所得之數或爲每恆星秒或每平秒之速度,須視所用之 n 爲86400抑或86164而定,此二數乃一恆星日所合之二種秒數也.若用白塞爾之赤道半徑數值（即3962.802英里）且 T、p、k、e 之值同於上用之數,乃有

每恆星秒, $V=191058$ 英里 $=307473000$ 公尺,

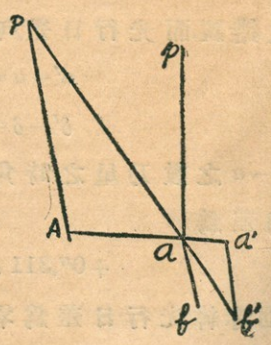
每 平 秒, $V=191581$ 英里 $=308314000$ 公尺.

光行經日地平均距離所需之時爲

$$\frac{a}{V}=\frac{nT\sin k\sqrt{1-e^2}}{2\pi}=497^s.78$$

$$=8^m\,17^s.78 \text{ 平時.}$$

(二十八) 行星光行差 若所測之天體爲行星其行動與地有相與之關係,則上所論之光行差於此例不爲完備,必須更計由行星至地球光所行之時間,蓋於此時內已覺出行星換移位置也.設光



第 七 圖

線於 t 時到達遠鏡者乃係於 T 時自行星發出.設 P 爲在 T 時行星所佔空間之位置,p 爲其在 t 時之位置,A 爲遠鏡之物鏡在 T 時之位置,a 爲其在 t 時之位置,ab 爲遠鏡在 t 時之軸,$a'b'$ 爲其在 t' 時之軸,斯時乃光正到目鏡之時也.由此可見

第一. AP 線爲行星在 T 時之眞方向,

第二. ap 線爲行星在 t 時之眞方向,

第三. ba 或 $b'a'$ 線爲行星在 t 時或 t' 時之視方向(其二時之較可作爲無限小),

第四. $b'a$ 線爲行星除去恆星光行差在 t 時之視方向.

因 P、a、b' 皆在一直線內,故若光以平速行則 Pa、ab' 二部分將與 $t-T$, $t'-t$ 二時間成比例,因光之速度甚大,$t'-T$ 之時間當然甚小,故在此時間內可設地球之行動爲平速而且爲直線,致 A、a、a' 亦皆在一線內,其 Aa、aa' 二部分亦與 $t-T$, $t'-t$ 二時同成比例,故可見 Ap 線與 $b'a'$ 線平行,而第一項位置與第三項位置相同,即在 T 時行星之眞位置同於在 t 時之視位置也.

$t-T$ 之時間爲 Pa 距離與光行平均距離(作爲單位)之時間 497.28 秒之積.推算時用 Pa 或 PA 或 pa 均不能使 $t-T$ 時間有可覺之差.

由此諸理,乃有三法可由在某指定時行星或彗星之眞位置求其視位置.

I. 由所指定時 t 減去光由行星至地所需之時間,乃得 T 時,斯即行星之眞位置同於在 t 時之視位置之時也.

II. 已知在 t 時之眞位置及距離而推算 $t-T$ 之時間.然後利用行星之日周行動(或在黃經緯度內,或在赤經緯度內),可由在 t 時之眞位置推求在 T 時之眞位置,如此求得之眞位置,即在 t 時之視位置也.

III 算得由在 t 時之地所見行星在 T 時之眞位置（即 aP 方向），於其上加恆星光行差，其結果即爲在 t 時之視位置也.

設 α 及 δ 爲一行星或彗星在 t 時之眞赤經緯，α' 及 δ' 爲在同時之視赤經緯，r 其去地之距離，日地平均距離爲一，$\Delta\alpha$、$\Delta\delta$ 爲行在赤經緯內，每時之行動，則依 *II* 法乃有

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=-r'k''\Delta\alpha\\ \delta'-\delta&=-r'k''\Delta\delta\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(四十四)}$$

其

$$k''=\frac{497.78}{3600},\qquad \log k''=9.14073.$$

此式若以 r' 爲地之帶徑，即可用以推算日之赤經緯光行差.

恆星之屬日心視差或歲周視差

（二十九） 恆星之屬日心視差，乃其由地與由日所見眞位置之較也.若地道爲圓，其半徑爲日地平均距離，則任何星之屬日心與屬地心位置之最大較數，乃於地帶徑正與星日聯線成直角時遇之.故此最大較數與星之地平屬地心視差相應，其影響於星之視位者，可依日周視差法求之，惟於此則用推求光行差法考之，因其所得之算式相類似也.

設稱此日地平均距離，在星處所張之最大角爲星之歲周視差常數，或簡稱星之歲周視差（亦曰恆星視差），並以

$p=$ 歲周視差，

$a=$ 日地平均距離，

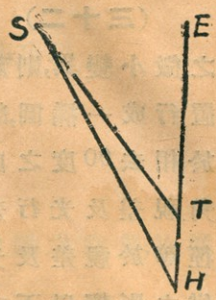
$\Delta=$ 日星距離，

乃有

$$\sin p=\frac{a}{\Delta}.$$

如以 $a=1$,則在如此小數乃有

$$p=\frac{1}{\Delta \sin 1''}.$$



第八圖

(三十)已知星之歲周視差求其在某時之屬日心黃經緯視差　設 T 爲地在軌道內之位置,H 爲日之位置.設過 S 星及 HT 線作一平面,此面與黃道面交於 HT 線,HT 線延長之遇天球於黃道內之 E 點,其黃經爲地球之屬日心黃經即 $180°+\odot$ ($\odot$ 乃日在某定時之屬地心黃經).若以

r = 在某定時之日地距離,

θ = SHE 角,

θ' = STE 角,

由三角形 SHT 乃有

$$\sin(\theta'-\theta)=\frac{r}{\Delta}\sin\theta',$$

或

$$\theta'-\theta=p\,r\sin\theta' \quad \text{.....(四十六)}$$

此式與(二十五)由黃道上一點 E 量計光行差相應,惟在此例此點之黃經爲 $180°+\odot$,而在彼例則爲 $90°+\odot$,故光行差之算式如以 pr 代 k 及 $180°+\odot$ 代 $90°+\odot$ 或以 $90°+\odot$ 代 $\odot$,可立卽用之於視差矣.是以由(三十)乃有

$$\left.\begin{aligned}\lambda'-\lambda&=-p\,r\sin(\lambda-\odot)\sec\beta\\ \beta'-\beta&=-p\,r\cos(\lambda-\odot)\sin\beta\end{aligned}\right\} \text{.....(四十七)}$$

(三十一)已知星之歲周視差求其屬日心赤經緯視差

由(三十四)以 pr 代 k 及 $90°+\odot$ 代 $\odot$ 乃卽有

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=-pr\sec\delta\ (\cos\odot\sin\alpha-\sin\odot\cos\varepsilon\cos\alpha)\\ \delta'-\delta&=-pr\sin\odot(\cos\varepsilon\sin\delta\sin\alpha-\sin\varepsilon\cos\delta)\\ &\quad -pr\cos\odot\sin\delta\cos\alpha\end{aligned}\right\} \text{(四十八)}$$

（三十二） 由（四十七）可見苟不計因地道爲橢圓所生之微小變異，則歲周視差致星視若於一恆星年中繞其平均位置行成一橢圓，頗類於光行年差之影響．但其最大及最小值處於相去90度之處遇之，故視差與光行差橢圓之長徑相交成直角．視差及光行差二者合併之影響仍使星行成一小橢圓，其長徑等於視差及光行差橢圓二長徑所作之直三角形之弦．此合併之影響以下式顯之（以 $r=1$ 認地道爲圓形也），

$$(\lambda'-\lambda)=-[k\cos(\odot-\lambda)-p\sin(\odot-\lambda)]\sec\beta,$$

$$(\beta'-\beta)=-[k\sin(\odot-\lambda)+p\cos(\odot-\lambda)]\sin\beta,$$

若以 c 及 γ 由下式之情形而定

$$c\sin\gamma=k\sin\lambda-p\cos\lambda,$$

$$c\cos\gamma=k\cos\lambda+p\sin\lambda,$$

或

$$c\sin(\lambda-\gamma)=p,$$

$$c\cos(\lambda-\gamma)=k,$$

則上式成爲

$$(\lambda'-\lambda)=-c\cos(\odot-\gamma)\sec\beta,$$

$$(\beta'-\beta)=-c\sin(\odot-\gamma)\sin\beta,$$

式內之 c 已得等於 $\sqrt{k^2+p^2}$．此合併影響之式完全與光行差之式相類．

恆星之平均位置及視位置

（三十三） 有前之諸式吾人得以由視位置推求平均位置或由平均位置推求視位置，但其式之形樣頗使推算困難，白塞爾乃立一妙法致其應用簡便．

在恆星錄中祇列有在某元時之平均位置，並列有每星之赤經緯歲差，故在元時前後之時星之平均位置可推求之如解（十）節之例題，但歲差乃變數故須加入其長差，即歲差在百年

中之變異也,末後再加入星之自行.

設星錄之元時爲 t_0,求在 t 時之平均位置,乃以

p = 在元時 t_0 之歲差,

Δp = 歲差之長差,

μ = 自行,

則因推算在 $t-t_0$ 時內之全歲差,須用此時間中點之歲差,故推求在 t 時平均位置之算式乃爲

$$\left[p+\frac{\Delta p}{200}(t-t_0)+\mu\right](t+t_0).$$

此式可兼用於赤經緯(一歲之自行亦爲變數,其在元時之數亦並不能向前推用而不加改正.但爲免去另加改正,可於歲差之長差內併入其變數,阿幾蘭德之星錄卽如此作成).

旣如此推得在任何年年首之平均位置,如欲求在該年年首後之 τ 時之視位置,須先加在 τ 時內之歲差及自行求得在該日時之平均位置,然後再加章動及光行差求其視位置.故若以 α 及 δ 爲在年首之平赤經緯,α' 及 δ' 爲在 τ 時之視赤經緯,μ 及 μ' 爲在一歲內之赤經緯自行依(十八),(二十三)及(二十四)乃有(τ 以年之分數計之)

$$\alpha'=\alpha+\tau(m+n\sin\alpha\tan\delta)+\tau\mu \qquad \text{(歲差及自行)}$$

章動

$$-(15''.8148+6''.8650\sin\alpha\tan\delta)\sin☊ \qquad \text{在1800年}$$

$$\text{一五.八三二一　六.八六八二} \qquad \text{在1900年}$$

$$+(0.1902\ +0.0825\sin\alpha\tan\delta)\sin 2☊$$

$$-(0.1872\ +0.0813\sin\alpha\tan\delta)\sin 2☾$$

$$+(0.0621\ +0.0270\sin\alpha\tan\delta)\sin(☾-\Gamma')$$

$$-(1.1644\ +0.5055\sin\alpha\tan\delta)\sin 2☉$$

$$+(0.1173\ +0.0509\sin\alpha\tan\delta)\sin(☉-\Gamma)$$

$$-(0.0195\ +0.0085\sin\alpha\tan\delta)\sin(☉+\Gamma)$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
-9''.2231\ \cos\alpha\tan\delta\cos\Omega & \text{在 1800}\\
\text{九.二二四〇} & \text{在 1900}\\
+0.0897\ \cos\alpha\tan\delta\cos 2\Omega & \\
-0.0886\ \cos\alpha\tan\delta\cos 2\mathbb{C} & \\
-0.5510\ \cos\alpha\tan\delta\cos 2\odot & \\
-0.0093\ \cos\alpha\tan\delta\cos(\odot+\Gamma) &
\end{array}\right\}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
-20''.4451\ \cos\varepsilon\cos\odot\cos\alpha\sec\delta\\
-20.\ 4451\ \sin\odot\sin\alpha\sec\delta,
\end{array}\right\}\text{(光行差)}
$$

$$
\delta'=\delta+\tau.n\cos\alpha+\tau\mu' \qquad \text{(歲差及自行)}
$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
-6''.8650\ \cos\alpha\sin\Omega+9''.2231\ \sin\alpha\cos\Omega & \text{在 1800}\\
\text{六·八六八二}\qquad\qquad\text{九·二二四〇} & \text{在 1900}\\
+0.0825\ \cos\alpha\sin 2\Omega-0.0897\ \sin\alpha\cos 2\Omega & \\
-0.0813\ \cos\alpha\sin 2\mathbb{C}+0.0886\ \sin\alpha\cos 2\mathbb{C} & \\
+0.0270\ \cos\alpha\sin(\mathbb{C}-\Gamma') & \\
-0.5055\ \cos\alpha\sin 2\odot+0.5510\ \sin\alpha\cos 2\odot & \\
+0.0509\ \cos\alpha\sin(\odot-\Gamma) & \\
-0.0085\ \cos\alpha\sin(\odot+\Gamma)+0.0093\ \sin\alpha\cos(\odot+\Gamma) &
\end{array}\right\}\text{章動}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
-20''.4451\ \cos\varepsilon\cos\odot(\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta)\\
-20.\ 4451\ \sin\odot\cos\alpha\sin\delta
\end{array}\right\}\text{(光行差)}
$$

至此可考察 $\sin\Omega$、$\sin 2\Omega$、$\sin 2\mathbb{C}$、$\sin 2\odot$ 等等之二係數，在求 α' 之式內各例均幾成 m 與 n 之比（此種關係並非偶然乃章動理應有者，章動僅歲差之周期性部分耳），依白塞爾法乃以

$$
\begin{array}{ll}
6''.8650=ni & 15''.8148=mi+h\\
\text{六.八六八二} & \text{一五.八三二一}\\
0.0825\ =ni' & 0.1902\ =mi'+h'
\end{array}
$$

$$0.0813 = ni'' \qquad 0.1872 = mi'' + h''$$
$$0.0270 = ni''' \qquad 0.0621 = mi''' + h'''$$
$$0.5055 = ni^{IV} \qquad 1.1644 = mi^{IV} + h^{IV}$$
$$0.0509 = ni^{V} \qquad 0.1173 = mi^{V} + h^{V}$$
$$0.0085 = ni^{VI} \qquad 0.0195 = mi^{VI} + h^{VI}$$

故有

$$\alpha' = \alpha + [\tau - i \sin \Omega + i' \sin 2\Omega - i'' \sin 2\mathbb{C} + i''' \sin(\mathbb{C} - \Gamma')$$
$$- i^{IV} \sin 2\odot + i^{V} \sin(\odot - \Gamma) - i^{VI} \sin(\odot + \Gamma)][m + n \sin \alpha \tan \delta]$$
$$- [9''.2231 \cos \Omega - 0''.0897 \cos 2\Omega + 0''.0886 \cos 2\mathbb{C}$$
$$\text{九.二二四〇}$$
$$+ 0''.5510 \cos 2\odot + 0''.0093 \cos(\odot + \Gamma)] \cos \alpha \tan \delta$$
$$- 20''.4451 \cos \varepsilon \cos \odot \cos \alpha \sec \delta$$
$$- 20''.4451 \sin \odot \sin \alpha \sec \delta$$
$$+ \tau\mu$$
$$- h \sin \Omega + h' \sin 2\Omega - h'' \sin 2\mathbb{C} + h''' \sin(\mathbb{C} - \Gamma')$$
$$- h^{IV} \sin 2\odot + h^{V} \sin(\odot - \Gamma) - h^{VI} \sin(\odot + \Gamma),$$

及

$$\delta' = \delta + [\tau - i \sin \Omega + i' \sin 2\Omega - i'' \sin 2\mathbb{C} + i''' \sin(\mathbb{C} - \Gamma')$$
$$- i^{IV} \sin 2\odot + i^{V} \sin(\odot - \Gamma) - i^{VI} \sin(\odot + \Gamma)] n \cos \alpha$$
$$+ [9''.2231 \cos \Omega - 0''.0897 \cos 2\Omega + 0''.0886 \cos 2\mathbb{C}$$
$$\text{九.二二四〇}$$
$$+ 0''.5510 \cos 2\odot + 0''.0093 \cos(\odot + \Gamma)] \sin \alpha$$
$$- 20''.4451 \cos \varepsilon \cos \odot (\tan \varepsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta)$$
$$- 20''.4451 \sin \odot \cos \alpha \sin \delta$$
$$+ \tau\mu'.$$

依白塞爾原用之代字（美國曆書於1865年採用之）乃

有

$$A=\tau-i\sin\Omega+i'\sin 2\Omega-i''\sin 2\odot+i'''\sin(\odot-\Gamma')$$
$$-i^{IV}\sin 2\odot+i^{V}\sin(\odot-\Gamma)-i^{VI}\sin(\odot+\Gamma),$$
$$B=-9''.2231\cos\Omega+0''.0897\cos 2\Omega-0''.0886\cos 2\odot$$
九.二二四〇
$$-0''.5510\cos 2\odot-0''.0093\cos(\odot+\Gamma),$$
$$C=-20''.4451\cos\varepsilon\cos\odot,$$
$$D=-20''.4451\sin\odot,$$
$$E=-h\sin\Omega+h'\sin 2\Omega-h''\sin 2\odot+h'''\sin(\odot-\Gamma')$$
$$-h^{IV}\sin 2\odot+h^{V}\sin(\odot-\Gamma)-h^{VI}\sin(\odot+\Gamma),$$

此乃與時有關而與星之位置完全無關者也.復有

$$a=m+n\sin\alpha\tan\delta \qquad a'=n\cos\alpha$$
$$b=\cos\alpha\tan\delta \qquad b'=-\sin\alpha$$
$$c=\cos\alpha\sec\delta \qquad c'=\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta$$
$$d=\sin\alpha\sec\delta \qquad d'=\cos\alpha\sin\delta,$$

此乃與星之位置有關者也.由此遂有

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=\alpha+Aa+Bb+Cc+Dd+E+\tau\mu\\ \delta'&=\delta+Aa'+Eb'+Cc'+Dd'+\tau\mu'\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(四十九)}$$

每年內每日 A、B、C、D 之對數均載在曆書中.E 總小於 0.05 秒,故可略去不用.a、b、c、d 等之對數,亦常載於星錄中,苟不載者,亦可由上式推之.若赤經係以時數計,上式所給之 a、b、c、d 須以 15 除之.

(三十四) 若代入 m 及 n 之值,即

在 1800 年 $m=46''.0623$, $n=20''.0607$,

在 1900 年 $m=46''.0908$, $n=20''.0521$,

乃得 i、i' 等等之值如下:

	i	i'	i''	i'''	i^{IV}	i^{V}	i^{VI}
1800	0.34221	0.00411	0.00405	0.00135	0.02520	0.00254	0.00042
1900	0.34252				0.02521		

	h	h^{IV}
1800	+0″.052	+0″.004
1900	+0″.045	+0″.003

其 h'、h''、h'''、h^{V}、h^{VI} 均爲不可覺察之微數.

A 式內含 i^{V} 及 i^{VI} 之諸項可併爲一項,因以

$$j\cos J = (i^{V}-i^{VI})\cos\Gamma,$$

$$j\sin J = -(i^{V}+i^{VI})\sin\Gamma,$$

乃有

$$i^{V}\sin(\odot-\Gamma)-i^{VI}\sin(\odot+\Gamma)=j\sin(\odot+J).$$

並在 1800 年以 $\Gamma=279°30'8''$,在 1900 年 $\Gamma=281°12'42''$,乃得

	j	J
1800	+0.00294	83° 10′
1900	+0.00293	81° 55′

故 A、B、E 之值可顯之如下

$$A=\tau-0.34221\sin\Omega-0.02520\sin 2\odot+0.00294\sin(\odot+83°10')$$

〇.三四二五二　　〇.〇〇二九三　　八一五五

$$+0.00411\sin 2\Omega-0.00405\sin 2\mathbb{C}+0.00135\sin(\mathbb{C}-\Gamma'),$$

$$B=-9''.2231\cos\Omega-0''.5510\cos 2\odot-0''.0093\cos(\odot+279°30')$$

九.二二四〇　　二八一一三

$$+0.0897\cos 2\Omega-0.0886\cos 2\mathbb{C},$$

$$E=0''.052\sin\Omega-0''.004\sin 2\odot.$$

〇.〇四五　　〇.〇〇三

此數頗與彼得之數相合.

（三十五） 若星錄不載有 a、b、c 等等之對數,白塞爾復立一法,多有用之者.以

$$f=mA+E \qquad i=C\tan\varepsilon$$
$$g\cos G=nA \qquad h\cos H=D$$
$$g\sin G=B \qquad h\sin H=C$$

乃有

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=\alpha+f+\tau\mu+g\sin(G+\alpha)\tan\delta+h\sin(H+\alpha)\sec\delta\\ \delta'&=\delta+i\cos\delta+\tau\mu'+g\cos(G+\alpha)+h\cos(H+\alpha)\sin\delta\end{aligned}\right\}\text{（五十）}$$

一年內每日 f、$\log g$、G、$\log h$、H、$\log i$ 及 $\log\tau$ 之值均載於曆書中.

（三十六） 反轉上定之正負符號,可化星之視位置爲平均位置且歸準於任何日眇之平春分點.此所謂星之視位置者,乃屬地心視位置也.由地平所見之測位置與之相較,猶有光行日差及蒙氣差之尙待改正.前者之改正隨測者之緯度及星之時角而異,後者隨星之天頂距而異.故須知測地之位置及地方時方能引二改正數入於星位之推算（視位置及眞位置之意義乃相對的,學者視之不可拘執太甚.例如在論視差時,由地心所見之星位乃曰眞位置,而由地面所見者,設無蒙氣差,對前者而言,乃曰視位置.但論及蒙氣差之影響時,則地面所見無蒙氣差之星位,又曰眞位置,而爲蒙氣差所影響者,對前者而言,乃曰視位置矣.在他例亦然）.

（三十七）**假年** 前屢稱年首二字而未加以註釋.爲推算星之位置,白塞爾曾擬一假年,由日之平黃經爲 280° 時啓始,以求一致及精確.此時不與回歸年在格林維基子午線開始之時相合,卽平太陽不於此時在格林維基子午線上,但其所在之子午線去格林維基之距離能由日之平速推定之.此假年所起之

子午線年各不同.但因日之平赤經等於其平黃經,在此子午線假年開始時之恆星時恆等於18時40分（=280度）.有此元時,故由年首計恆星時乃顯簡便,而星錄且皆採用之爲其元時矣. $\log A$ 之數值內含一年之分數(τ),其時之原點亦須同此.曆書中不僅載有 A、B、C、D 之對數,復有 τ 之數值（或其對數）,此數即由此假年年首計起,且化爲平回歸年之分數.故推算觀測不能不藉曆書之助也.

（三十八）日之平行及年之長　依照白塞爾1800年正月0日巴黎平午時日之平黃經爲

279度　54分　1.36秒,

在365.25平日內日之恆星天行動爲

360度 −22.617656秒.

所謂正月0日者,乃指通俗時日之歲前十二月三十一日平午也.正月一日、二日等等乃指去元時爲一日、二日等等也.此在通俗時日乃謂第一日、第二日等等也（自1925年天文日已改用晨前夜半爲日之始時而不復用平午矣）.

此恆星天行動乃歸準於黃道之一定點,而平黃經乃歸準於行動之春分點.故平黃經在任何時內之變異,乃在該時內之恆星天行動加總歲差.故若採用白塞爾之歲差常數,則有

在365.25日內日之恆星天行動 $=360^\circ - 22''.617656$

總歲差 $= +50''.22350 + 0''.000244361\,t$

在365.25日內日之平行 $=360^\circ + 27''.605844 + 0''.000244361\,t$,

以365.25除之得

每日平行 $=59'8''.3302 + 0''.0000006902\,t$.

其 t 乃自1800年後之積年數也.此第二項所表之平行的長差,乃致回歸年之長生有常差.回歸年乃於日之平黃經恰爲360-

度時終了,故每日平行除 360 度,卽得回歸年之長.如以

$$Y=\text{回歸年之平太陽日數},$$

則得

$$Y=365^d.242220027-0^d.00000006886\,t,$$

其第二項在 $t=100$ 之數值爲 0.595 秒,卽在百年中回歸年縮短之數也.

恆星年之長爲不變的,於 365.25 日加以恆星天行動之速度行 22.617656 秒所需之時,卽得其長.如以

$$Y'=\text{恆星年之長},$$

依下之比

$$(360^\circ-22''.617656):360^\circ=365^d.25:Y',$$

乃得

$$Y'=365.256374416\text{ 平日}$$
$$=366.256374416\text{ 恆星日}.$$

(三十九) 日之平黃經之元時 此乃指示通用年起始之時頃也.在此時頃日之黃經卽常稱曰元時,而以 E 表之.其在任一年 $(1800+t)$ 正月 0 日之數值之推法,乃在爲每平年（非閏年）加 365 日日之行數,而每一閏年加 366 日日之行數. 365 日行數由上數 365.25 日行數,減去四分每日平速行之一（卽 14′ 47″.083）得之.故若 f 爲 4 除 t 之商,則在巴黎當 $1800+t$ 年正月 0 日之元時,

$$\left.\begin{aligned}E=&279^\circ 54'1''.36+27''.605844\,t\\&+0''.0001221805\,t^2-(14'47''.083)f\end{aligned}\right\}\cdots(五十一)$$

欲用此式於 1800 前之年須用 $f-4$ 代 f.故 $(-14'47''.083)$ 之乘數在 1799、1798、1797、1796、1795 等等年將爲 -1、-2、-3、-4、-1 等等.但依此法定 f 值,使所得在閏年年首之平黃經多一

日行速（因所增之一日至二月底方加也），故在此等年之元時乃爲正月一日，而非正月0日．設有一表載有年中每日平午時之平黃經，係依式由正月0日平黃經算來者．則在正二月之行數用其次一日之主數(Argument)即可使該表應用於閏年．

（四十）求假年之首　設 k 爲由任一假年首至該年正月0日相距之平時，則有

$$k=\frac{E-280^\circ}{\text{每日平行}}.$$

若用 59′8″.3302 爲每日平行數，乃得

$$k=-0.10107289+0.0077799535\,t$$
$$-\frac{1}{4}f+0.000000034433\,t^2.$$

此爲平日之分數，等於在巴黎東假年起始處之子午線地球經度．

（四十一）　在白塞爾表(Tabulae Regiomontanae)內，主數爲推日時(Reduced date)，乃在東經 k 處子午線計起之數（在東經 k 處假年首恆爲正月0日）．若 d 爲巴黎西任何地之經度，其平午之時頃與假年子午線之 $k+d$ 時頃相應．故 $k+d$ 乃用於該地平時之歸化數，俾得用以入該表之主數也．

但若已知在 d 地之恆星時，則可立時算得與假年首相去之恆星日時數，故在載 $\log A$、$\log B$ 等等備推星用之表內，主數爲在假年子午線之恆星日時．用此日時，第一須知此表乃對於假年子午線恆星時 $18^h\,40^m$ 立卽有效，無須日時之推算．對其他子午線在恆星時 $18^h\,40^m$ 時其表之主數將爲推日時，但在其他恆星時 g 其主數須於推日時再加

$$\frac{g-18^h40^m}{24^h}.$$

此須恆使 <1 且爲正數，或加

$$g'=\frac{g+5^h20^m}{24^h}.$$

而於 $g+5^h20^m \gtrless 24^h$ 時減去一整日.是欲使地方日時可與表內所設者相應須設其日始於具有赤經 18^h40^m 之點正在子午線之時頃.故無論何時日之赤經正爲 18^h40^m 而所擬之點在日之前中天,必須於通常之計法多加一日.故爲該表備主數之式爲

$$主數=推日時+g'+i,$$

由年首至日赤經 $=g$ 時須使 $i=0$, 過此時須使 $i=+1$. g' 之值載在白塞爾表第16頁與 g 之某值相應,k 之值則在表 I 內.

德伯林曆書(Berlin Jahrbuch)亦載有在假年日時之 $log\ A$、$log\ B$、$log\ C$、$log\ D$ 之值,其歲差章動光行差之常數,同於白塞爾表所用者.

(四十二)平時恆星時互推 在某地化平時 T 爲恆星時 ⊙, 以 $⊙=T+V$ 求之.V 乃平太陽赤經而等於 $V_0+9^s.8565T_0$. V_0 乃在格林維基平午時 V 之值,T_0 乃格林維基平時.但此並未論及章動之影響,茲再精確述其意義.第一,第一平太陽(以 $⊙_1$ 代之)以平速行於黃道與眞太陽同時回至卑點,此假太陽之黃經準於平春分點稱曰日之平黃經.第二,第二平太陽(以 $⊙_2$ 代之)以平速行於赤道與第一平太陽同時回至春分點.第三,恆星日始於眞春分點中天之時,恆星時乃春分點之時角也.

由此可見

$⊙_2$ 之平赤經 $=⊙_1$ 之平黃經 $=$ 日之平黃經.

且因 $⊙_2$ 在子午線上時,其由眞春分點計來之赤經,亦正爲眞春分點之時角,又可見

$V_0=$ 在平午時之恆星時

$=⊙_2$ 之眞赤經

$=\odot_2$之平赤經＋春分點在赤經內之章動

＝日之平黃經＋春分點在赤經內之章動.

春分點在赤經內之章動（簡稱曰春分點赤經章動）可用(十八)節求赤經緯章動之通式而以$d=0, \delta=0$推得之,即得

春分點赤經章動$=\Delta\lambda \cos\varepsilon$,

此即航海通書中所載之春分點赤經差也.

因章動數已含於通書所載之V_0數中,故推算時苟有通書可查,即無須注意章動矣.

在1750與1850年間作二種時之互推,有白塞爾表足資便利.其表VI載有在假年子午線每日平午時第二平太陽赤經,業經改正其春分點之太陽的章動.因此假年恆起於日之同平黃經（或第二平太陽之此數赤經）,故此表之數爲通用的,可用於任何一年.由此表爲某指定日時（須爲上所言之推日時）取下之數須再經改正春分點赤經之太陰的章動.此章動數於表IV中自1750至1850年逐日載之.如此乃得在假年子午線該指定日平午之恆星時($=V_0$).在其他子午線任何指定之平時須變爲相當之恆星時（或恆星時變爲平時）.其變法同前,用V_0代假年子午線一如其用代格林維基子午線,於此所用地方之經度乃$k+d$,d爲地方自巴黎之西經,k爲假年子午線自巴黎之東經（其數載在表I內）.

行星或彗星視位置之推算

(四十三) 行星（或彗星）之測得位置除去所受蒙氣差光行日差屬地心視差之影響後,乃得準測時之眞赤道及眞春分點之屬地心視位置而尙蒙有行星光行差之影響.由三次或多次不同時之觀測推步行星,須使其在此諸時之位置,皆歸準於同一之定面.故最好化歸之於測時之年首.如測事所佔之

時超過一年,則可化歸之於任何指定之年首.推算時須於每一屬地心視位置加入下數.

第一. (四十四)之光行差,惟須反其符號.算時可以 r 等於行星在測時與測者之實距離.此可由下式求之

$$\frac{r'}{r}=\frac{sin\,(\delta-\gamma)}{sin\,(\delta'-\gamma)}.$$

其 r' 卽星至測者之距離,r 乃星之屬地心距離,δ 及 δ' 乃星之屬地心及測得赤緯.其 γ 乃假設之角由下式定之

$$tan\,\gamma=\frac{tan\,\phi'\,cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}{cos\left[\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)-\Theta\right]}.$$

其 ϕ' = 測地之屬地心緯度,

Θ = 恆星時 = 測者子午線在測時之赤經,

α = 星之屬地心赤經.

α' = 星之測得赤經.

第二. 在測日之章動,惟反其符號.

第三. 自測日至所定元時之歲差,爲減爲加須視測元時在測日前或後.

但章動及歲差可依用於恆星之 A、B 常數之助併而算之. A 及 B 須用當日之數. a、b、a'、b' 之推算一如(三十三)節之法,惟用行星之赤經緯,然後於已經改正光行差之 α 及 δ 再分別加入 $-(Aa+Bb)$ 及 $-(Aa'+Bb')$. 如此所得之位置,乃行星準年首平春分點之眞位置.若測事非在同一年內所作者,更須加入一歲之歲差數(c 爲赤經一歲之差,c' 爲赤緯一歲之差). 俾歸準於同一元時.

若行星距離非所知,則光行差須依(二十八)節之第 III 法計入之.

(乙) 黃道斜角及星之絕對赤經緯之測定

(四十四) 定黃道斜角法之顯明者,厥爲在南北兩至時量日之視赤緯,因多認在此二點日恰在黃道內其赤緯同於其斜角也.實際雖不知日之絕對的赤緯,而僅取六月二十一及十二月二十一兩日日中天時赤緯較之半數,卽得近似之斜角.古人依此理用立表視其在年內午時最長及最短之影而量斜角,頗著成效.

日之赤緯乃測得之數測由日在子午線內之眞天頂距 ζ 並已知之測地緯度 ϕ,卽可依下式推得日之赤緯,惟日在測者天頂北時須換其 ζ 之符號.

$$\delta = \phi - \zeta.$$

夫日之赤緯,僅於日在至點赤緯最大時同於黃道斜角.然日多不能於同時在該測地子午線內,且恰在至點.但可於日近至點時前後接連數日,量其中天時之赤緯而間求其最大值.更有一簡法,卽化每次測數於至點時.但此法須知日於何時到達至點,而此須知春分點之所在.

春分點之位置,可於近春分時前後數日內測日之赤緯,而用間求法得其赤緯爲零之時定之.同時取日之中天時刻與所用之標準星之中天時刻而比較之,以定該星去春分點之距離(卽該星之赤經).然後可以該星爲定點日至任何定點(例如至點)之時頃均可資而定之矣.但直接間求春分點仍不如化每次測數於春分時爲較簡,而此僅須略知黃道斜角而已.

(四十五) 黃道斜角之測定 設 D 爲日之視赤緯,係由於近至點時一次觀測所得者.A 爲在測時日之視赤經,係由太陽表推得者.G 爲同時之黃道視斜角.若日確在黃道內則有

$$\sin A \tan \varepsilon = \tan D.$$

但求精確須計及日之黃緯β,故有下式,

$$\tan D-\tan\varepsilon\sin D=\frac{\sin\beta}{\cos D\cos\varepsilon}.$$

若以

$$\tan D'=\tan\varepsilon\sin D\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(五十二)$$

則該式成爲

$$\tan D-\tan D'=\frac{\sin(D-D')}{\cos D\cos D'}=\frac{\sin\beta}{\cos D\cos\varepsilon}.$$

因β不能過一分,故變成下式,亦甚準確,

$$D-D'=\beta\sec\varepsilon\cos D\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(五十三)$$

故若將改正數$\beta\sec\varepsilon\cos D$由已知之赤緯$D$減去,乃得化出之赤緯$D'$,由此依(五十二)而推得$\varepsilon$矣.可見$D'$乃黃道與過日心之赤緯圈相交之點之赤緯也.故可稱此$\beta\sec\varepsilon\cos D$數爲黃道歸化數(Reduction to the ecliptic).然近於至點時此歸化數與β數相差幾不可覺,因$\cos\varepsilon$及$\cos D$幾相等也.故於此題可由$D'=D-\beta$求化出之赤緯(Reduced delination),然後乃依(五十二)而有

$$\tan\varepsilon=\tan D'\operatorname{cosec}A\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(五十四)$$

算時不多由此式直接求ε而常將其展爲級數,藉得ε與D'之較.因A於近北至點時幾爲90度,若以

$$\mu=90^\circ-A,$$

μ將爲一微小之角,其餘弦及正割均與一相差無幾,而(五十四)可以$\tan D'=\tan\varepsilon\cos\mu$代之並依法展爲級數,

$$D'-\varepsilon=q\sin 2\varepsilon+\frac{1}{2}q^2\sin 4\varepsilon+\frac{1}{3}q^3\sin 6\varepsilon+\cdots\cdots,$$

其

$$q=\frac{\cos\mu-1}{\cos\mu+1}=-\tan^2\frac{1}{2}\mu,$$

其諸項皆爲弧之計數,化爲秒數.並以

x＝至點歸化數，

或

$$x=\frac{\tan^2\frac{1}{2}\mu}{\sin 1''}\sin 2\varepsilon-\frac{\tan^4\frac{1}{2}\mu}{2\sin 1''}\sin 4\varepsilon+\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(五十五)}$$

乃有在北至點時

$$\varepsilon=D'+x=D-\beta+x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(五十六)}$$

此歸化數 x 可依擬定之 ε 數作成表，而以 μ 爲主數（亦可曰題數）．表內數因斜角變而生之變數，亦可列於表內．故此等數頗易於使之合於任何擬定之斜角也．

爲南至點，可用 $\mu=270°-A$ 而（五十四）成爲

$$\tan D'=-\tan\varepsilon\cos\mu,$$

展開之乃爲代數的和數 $D'+\varepsilon$．但爲避去 ε 之符號改變致須用二式，可於演算時以由南至點所得之斜角爲負．此僅變歸化數 x 之符號而已．

由此表取數設有不合，則在赤經或在 μ 之錯誤，將使算得之 ε 蒙有如何之錯誤，此必須知者也．試準 ε 及 A 微分（五十四）乃得（$A=\pm 90°-\mu$）

$$d\varepsilon=\frac{1}{2}\tan\mu\sin 2\varepsilon\,d\mu.$$

設若表列日之赤經有約如一秒之錯誤（實例均較小），則代 $d\mu=15$ 秒，$\varepsilon=23$ 度 27.5 分於式內，乃得

$$d\varepsilon=5''.48\tan\mu.$$

在 $\mu=10°$，此乃給 $d\varepsilon=0''.97$．日之行動每日約一度，故在近至點之十日內 μ 或小於 10 度．是縱赤經之錯誤大至 15 秒，而算得之斜角之錯誤尙不足一秒焉．苟測視於至點前後相稱之時行之，併而推之，且可完全免去此項錯誤．因 μ 時有相等而相反之數，$d\varepsilon$ 亦然，致其錯誤互相抵銷也．

如此推得之斜角均數,卽可視爲在至點時之斜角.未受赤經錯誤之影響,惟僅受測視錯誤之影響及蒙氣差視差或測地緯度之錯誤之影響而已.於南北兩至點時測取均數可免測地緯度差.蒙氣差之錯誤不能全去,因此項錯誤在不同之天頂距數各不同能相差至47度之多,在現所知之太陽視差數,由其所生之錯誤,並非甚大.

但於取均數前須由在兩至點時之各數內減去斜角之章動,然後乃得平斜角.再以其一歲之縮數改正之,使其化歸於年首之元時.此縮數在(一)內所用者爲 0.4738 秒,然此乃係彼得由理推得之數.其由相距長期之觀測直接所得者,據白塞爾爲 0″.457 秒,據彼得 0.4645 秒.

合併歷年在一地所作之測定,並非每年必須在兩至點時測之,只要統計之在兩點所作之測定次數相等而已.

例題 試由寇芮茵(Coffin)與培基(Page)二人在華盛頓觀象臺用牆環(Mural circle)測得之日心視赤緯推求黃道斜角

1846	D	1846	D
6 月 16	23° 21′ 56″.02	12 月 14	−23° 14′ 17″.26
6 19	26 28 .19	12 15	17 33 .82
6 20	27 6 .79	12 16	20 22 .94
6 23	26 39 .92	12 18	24 32 .69
6 27	20 17 .84	12 21	27 20 .43
		12 22	27 19 .64
		12 23	26 49 .82
		12 29	14 1 .20

以 $5^h8^m11^s.2$ 爲華盛頓準格林維基之經度,由曆書檢得在華盛頓視午日有下列之赤經及黃緯.

1846	A	β	1846	A	β
6 月 16	$5^h38^m37^s.13$	$+0''.18$	12 月 14	$17^h26^m52^s.73$	$+0''.35$
6 19	5 51 5 .77	−0 .19	12 15	17 31 18 .43	+0 .46
6 20	5 55 15 .44	−0 .32	12 16	17 35 44 .38	+0 .57
6 23	6 7 44 .44	−0 .63	12 18	17 44 36 .91	+0 .72
6 27	6 24 22 .00	−0 .72	12 21	17 57 56 .69	+0 .70
			12 22	18 2 23 .39	+0 .64
			12 23	18 6 50 .09	+0 .50
			12 29	18 33 28 .11	−0 .19

設無表可資推化,則須先依（五十四）化在夏至之測視. 由測得之 D 減去 β 乃有

	D'	$\log \tan D'$	$\log \operatorname{cosec} A$	$\log \tan \varepsilon$	ε
6 月 16	23°21′55″.84	9.6355081	0.0018927	9.6374008	23°27′23″.61
19	26 28 .38	.6370823	03278	4101	25 .22
20	27 7 .11	.6373056	00930	3986	23 .23
23	26 40 .55	.6371524	02478	4002	23 .51
27	20 18 .56	.6349452	24592	4044	24 .25

視斜角 = 23 27 23 .96

茲更列依級數法,即依（五十五）推得之數以資比較.此法若無推化之表可用,實較不便.

	μ	D	至點歸化數	爲日黃緯之減數	ε
6 月 16	$+27^m22^s.87$	23°21′56″.02	+5′27″.77	−0″.18	23°27′23″.61
19	+ 8 54 .23	26 28 .19	0 26 .84	+0 .19	25 .22
20	+ 4 44 .56	27 6 .79	0 16 .13	+0 .32	23 .24
23	− 7 44 .44	26 39 .92	0 42 .96	+0 .63	23 .51
27	−24 22 .00	20 17 .84	7 5 .69	+0 .72	24 .52

視斜角 = 23 27 23 .96

章　動 = + 8 .24

1846 正月 0 日歸化數 = 0″.4645 ×0.469 = + 0 .22

1846.0 平斜角 = 23 27 32 .42

同法在冬至點有

	μ	D	至點歸化數	爲日黃緯之減數	ε
12月14	+33m 7s.27	−23°14′ 17″.26	−13′ 6″.48	−0″.35	23°27′ 24″.09
15	+28 41 .57	17 33 .82	9 50 .24	−0 .46	24 .52
16	+24 15 .62	20 22 .94	7 1 .98	−0 .57	25 .49
18	+15 23 .09	24 32 .69	2 49 .70	−0 .72	23 .11
21	+ 2 3 .31	27 20 .43	0 3 .03	−0 .70	24 .16
22	− 2 23 .39	27 19 .64	0 4 .09	−0 .46	24 .37
23	− 6 50 .09	26 49 .82	0 33 .49	−0 .50	23 .81
29	−33 28 .11	14 1 .20	13 23 .05	+0 .19	24 .06

視斜角 = 23 27 24. 20
章 動 = + 8. 98
1846 正月 0 日歸化數 = 0″.4645×0.971 = + 0. 45
1846.0 平斜角 = 23 27 33. 63

併兩至時所得而取其中數，俾消去所擬華盛頓緯度（於此用 38°53′39″.25）之錯誤，最後乃有

在 1846.0 測而得之平斜角 = 23°27′ 33″.03,

其由彼得算式(一)用 0″.4645 爲歲縮之數所得者 } = 23 27 32 .85

其 1846 年之章動數係由下式推得

$$\Delta\varepsilon = 9''.2235\cos\Omega - 0''.0897\cos 2\Omega + 0''.0886\cos 2\mathbb{C} + 0.5509\cos 2\odot + 0.0093\cos(\odot + \Gamma),$$

在北至點（六月二十一日九時）以

$\Omega = 214°27'$,

$\mathbb{C} = 69°$,

$\odot = 90°$,

$\Gamma = 280°$,

在南至點（十二月二十一日十六時）以

$\Omega = 204°45'$,

$\mathbb{C} = 319°$,

$$\odot = 270°,$$

$$\Upsilon = 280°.$$

按理各次觀測須分別推算其章動數.

斜角之長差,由相間極長之元時較其數值而定之,白拉里自1753年至1760年推得在1757.295之平斜角爲23度28分14.055秒.道派特(Dorpat)觀象台觀測之結果得 1825.0 之平斜角爲23度27分 42.607 秒,故

$$\text{每年變數} = -\frac{31.448}{67.705} = -0''.4645.$$

白塞爾得爲 −0.457 秒,乃以白拉里測數較其自測數而得者也.

斜角長差亦可依理推算之,彼得所得之數爲0.4738秒.

(四十六) 春分點及恆星絕對位置之測定　恆星之赤緯或直接由固定之測器量得之,或測其子午線天頂距改正蒙氣差而由 $\delta = \phi - \zeta$ 推得之.既得測時之視赤緯乃依前論之式化爲某元時之平赤緯.

春分點之位置,只須先求得一恆星之赤經即可確定,而星之赤經可於日在兩分點時測得日與星之赤經較數而推得之.故此須選一亮星俾於晝間得見,春分秋分日均可,惟星須近赤道者.於近兩分點時日,用恆星鐘記日及星中天時之時刻,於日中天時且量其赤緯.設

T = 日中天時之表記時,

t = 星中天時之表記時,

A, D, β = 日在 T 時之視赤經緯及黃緯,

α = 星之在 t 時之視赤緯,

ε = 在 T 時之視斜角,

則日之赤緯可依(五十三),即

$$D' = D - \beta \sec \varepsilon \cos D$$

得之.依(五十二)乃有

$$\sin A = \tan D' \cot \varepsilon \cdots\cdots\cdots\cdots(五十七)$$

A 是以知,乃由下式求 α.

$$\alpha = A + (t-T) \cdots\cdots\cdots\cdots(五十八)$$

此 $t-T$ 乃測時之眞恆星時間距,鐘表率之差已改正者也.

如此之觀測須於各分點日之前後連作數日.每次星之視赤經須改正光行差章動及歲差之影響,若知其自行及歲周視差,亦須改正之.故由每次觀測數乃化之得一在定元時之平赤經數.欲知必如何測定此多次之數,始能消免與 A 有關之根數之常差(Constant errors),故須研究此差之影響.所以只論常差者,因觀測偶生之差,可用多次測定,取其中數而消減之幾盡也.

設所擬斜角之改正數須爲 $d\varepsilon$,則 A 之相當改正數由微分(五十七)得爲

$$dA = -d\varepsilon \frac{2 \tan A}{\sin 2\varepsilon}.$$

赤緯 D' 之改正數由緯度 ϕ 及天頂距 ζ 之改正數組成之.因 $D=\phi-\zeta$, 故有

$$dD = d\phi - d\zeta.$$

但 $d\zeta$ 本身含有蒙氣差及日之視差之改正數,並含有影響天頂距之測器差.以 dr 表蒙氣差改正數, $dp \sin \zeta$ 表日視差改正數, $f(\zeta)$ 表天頂距測器差改正數,乃有

$$dD = d\phi - [dr - dp \sin \zeta + f(\zeta)].$$

此改正數對 A 之影響可準 D'(以 dD 等於 dD')微分(五十七)而得爲

$$dA = dD \frac{2 \tan A}{\sin 2D'}.$$

若以 α' 表除盡一切常差之恆星平赤經,乃有

$$\alpha' = \alpha + [d\phi - dr + dp \sin\zeta - f(\zeta)]\frac{2\tan A}{\sin 2D'} - d\varepsilon\frac{2\tan A}{\sin 2\varepsilon}.$$

由此式顯見在近春秋分時作一次觀測,如其時恰當其天頂距(或赤緯)相同,則取其中數幾可免盡一切常差.蓋在第一測時赤緯爲D'赤經爲A,而在第二測時赤緯仍爲D',則將得赤經爲$180°-A$,其正切恰爲A之正切之負數也.在此兩季時溫度不能相同.故在兩次觀測,蒙氣差表之錯誤不能一樣,並溫度之變亦能變測器之改正數,惟緯度及視差之改正數則仍相同耳.故若α_1爲由秋分時觀測推得之平赤經,則改正之赤經將爲

$$\alpha' = \alpha_1 - [d\phi - dr_1 + dp \sin\zeta - f_1(\zeta)]\frac{2\tan A}{\sin 2D'} + d\varepsilon\frac{2\tan A}{\sin 2\varepsilon},$$

其dr_1及$f_1(\zeta)$爲此同大天頂距之改正數,但所在之溫度不同矣.於是由二次所得α'之平均值乃爲

$$\alpha' = \frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1) + [dr_1 - dr + f_1(\zeta) - f(\zeta)]\frac{\tan A}{\sin 2D'}.$$

此平均數業已消盡緯度及所擬斜角之差,只有蒙氣差及測器差二者因溫度不同所生之錯誤差矣.春秋分時溫度相差甚微,可設現時之蒙氣差表不覺有$dr_1 - dr$之數.而欲消盡測器所受溫度不同之影響,只能研究其在各溫度時所生之差錯.

準上之討論,則星之絕對赤經可於二分時測定之.惟欲求精確,須使於近春分點時測得一赤經A而必於近秋分時測得一赤經$180°-A$.於春分後秋分前在赤緯0度及$+2$度間,於春分前及秋分後在0度及-2度間,作觀測而視爲相應,則恰合此情境.在$+2$度及$+4$度間,-2度及-4度間亦然.其餘類推.因欲完全消盡差錯,此類觀測可展至$+14$度及-14度.

例題　下列係1846年在華盛頓測日及壁宿一在子午線上之數.

二月二十三日 $D = -9°46'\,15''.85$　十月十七日 $D = -9°17'\,53''.12$

二月二十三日 $T=22^h26^m28^s.11$ 十月十七日 $T=13^h28^m40^s.01$

二月二十三日 $t=0\ 5\ 18.99$ 十月十七日 $t=0\ 5\ 22.97$

此中天時刻係依所擬鐘表率及差誤數所改正者.

在此二測日黃道視斜角及日黃緯如下:

	二月二十三日	十月十七日
ε	$23°27'26''.10$	$23°27'24''.35$
β	$+\ 0.33$	$-\ 0.13$

由之得（數前冠以 n 乃指其爲負數也）

$-\beta \sec\varepsilon \cos D$	-0.35	$+\ 0.14$
D'	$-\ 9\ 4616.20$	$-9\ 17\ 52.98$
$\log\tan D'$	$n9.236063$	$n9\ 214105$
$\log\cot\varepsilon$	0.362585	0.362595
$\log\sin A$	$n9.598648$	$n9.576700$
A	$22^h26^m28^s.17$	$13^h28^m40''.14$
$A-T$	$+\ 0.06$	$+\ 0.13$
$t+A-T=\alpha$	$0\ 5\ 19.05$	$0\ 5\ 23.10$
1850.0 歸化數	$+\ 12.15$	$+\ 8.12$
1850.0 平均 $\alpha=$	$0\ 5\ 31.20$	$0\ 5\ 31.22$

於此用歸化數於 1850 年者因可直由 1847 年華盛頓觀測書之視位化平位表檢取之也.取此二次測數之中數,乃有

壁宿一在 1850.0 之平赤經 $=0^h5^m31^s.21$.

(四十七) 作一組之多次觀測,乃得依此確定一星之赤經而用爲基本星.其他諸星之赤經均可由其中天時刻與基本星相差之時定之.但近時多不限此類觀測於量定一星.蓋常用此多數基本星爲時星(Clock stars 或 Time stars 乃近赤道之星用以求鐘表改正數及鐘表率者也),能使其相與之赤經數（由

其在數年內或一年內之測得中天時刻推定者）愈確也.故設此時星之相與赤經數極確,則此所作日之觀測,乃以定此諸星絕對赤經之公共改正數爲目的.準此若在每次觀測,以依基本星而定之鐘表改正數,加於日心中天時之鐘表時刻,直接推定日之視赤經,復以之與由測得赤緯推算而得之視赤經相較,乃得此諸星所需之公共赤經改正數.前節關於在兩分點作觀測之論述於此有同樣之用處.

故在前例題以其所給之日中天時鐘表時刻爲測得赤經（因其曾經改正鐘表差誤,而差誤乃依多數基本星而推定者也）,乃有

	二月二十三日	十月十七日
日之測得赤經	$22^h26^m28^s.11$	$13^h28^m40^s.01$
日之算得赤經	22 26 28 .17	13 28 40 .14
諸時星之改正數	+ 0 .06	+ 0 .13

由之得

諸時星赤經之平均改正數 $=+0.10$ 秒.

（丙）　弧三角公式

（四十八）弧三角基本公式亦可用解析幾何之理推之如下　設第九圖圓球之半徑爲一.O 爲球心.B 點在 OX 線內.A 點在 XY 面內.C 點之座標數值爲 x、y、z. 如由 C 引 CP 垂於 XY 面,引 CP' 垂於 OX, 則可以 ABC 弧三角形之各部分表明 x、y、z.

$$OP' = x = \cos a,$$

$$PP' = y = \sin a \cos B,$$

$$CP = z = \sin a \sin B.$$

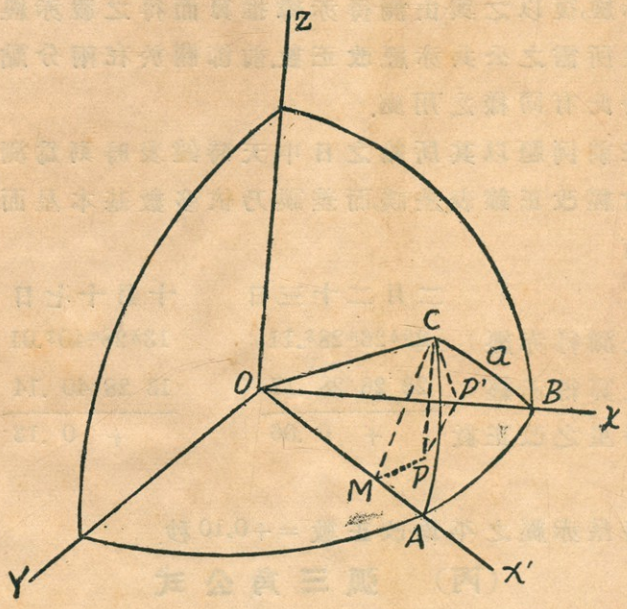
如將 X、Y 二軸線轉動,使 X 軸線通過 A 點,而命 C 之座標數值

爲 x'、y'、z'，此時 y' 爲負數故有

$$OM = x' = \cos b,$$

$$MP = y' = -\sin b \cos A,$$

$$CP = z' = \sin b \sin A.$$



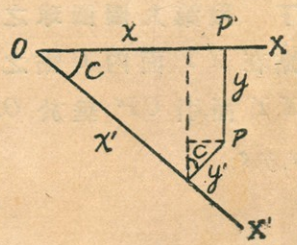
第 九 圖

由第十圖，此二種座標數值有如下之關係，

$$x = x' \cos c - y' \sin c,$$

$$y = x' \sin c + y' \cos c,$$

$$z = z',$$



第 十 圖

故得

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A,$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A.$$

B 角及 C 角之公式類此,此卽弧三角之基本公式也.

如以天文三角形 PZS 與 ABC 比,則有

$$A = PZS = 180° - A, \qquad a = PS = 90° - \delta$$
$$b = ZS = 90° - h, \qquad B = ZPS = t,$$
$$c = PZ = 90° - \phi,$$

A、h、ϕ、δ、t 乃地平經、高弧、緯度、赤緯、時角也.代入基本式內,則有

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= \sin\phi\sin h - \cos\phi\cos h\cos A \\ \cos\delta\cos t &= \cos\phi\sin h + \sin\phi\cos h\cos A \\ \cos\delta\sin t &= \cos h\sin A \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{(五十九)}$$

若以天頂距 ζ 代 $90° - h$,則有

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= \sin\phi\cos\zeta - \cos\phi\sin\zeta\cos A \\ \cos\delta\cos t &= \cos\phi\cos\zeta - \sin\phi\sin\zeta\cos A \\ \cos\delta\sin t &= \sin\zeta\sin A \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{(六十)}$$

使此式適於用對數推算,須引用二助數,此二助數有如下之關係,

$$\left.\begin{aligned} m\sin M &= \sin\zeta\cos A \\ m\cos M &= \cos\zeta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{(六十一)}$$

則上三式可寫爲下式矣,

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= m\sin(\phi - M) \\ \cos\delta\cos t &= m\cos(\phi - M) \\ \cos\delta\sin t &= \sin\zeta\sin A \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{(六十二)}$$

消去 m 乃有如下之簡式,

$$\left.\begin{aligned} \tan M &= \tan\zeta\cos A \\ \tan t &= \frac{\tan A\sin M}{\cos(\phi - M)} \\ \tan\delta &= \tan(\phi - M)\cos t \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{(六十三)}$$

已知 h、A 及 ϕ 而求 δ 及 t 須用此式.並須知依照 A 大於或小於 180 度而以 t 爲大於或爲小於 180 度,因時角與地平經須在子午線之一邊也.

（四十九） 欲求 PSZ 角（以 q 代之）,若已知 ζ、A 及 ϕ,則有

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\cos q &= \sin\zeta\sin\phi+\cos\zeta\cos\phi\cos A \\ \cos\delta\sin q &= \cos\phi\sin A \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(六十四)$$

乃解之如下式,

$$\left.\begin{aligned} f\sin F &= \sin\zeta \\ f\cos F &= \cos\zeta\cos A \\ \cos\delta\cos q &= f\cos(\phi-F) \\ \cos\delta\sin q &= \cos\phi\sin A \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(六十五)$$

（五十） 若 δ 及 A 爲已知而求 t 及 ζ,則有（ϕ 當然爲已知數）

$$\left.\begin{aligned} \cos t\sin\phi-\sin t\cot A &= \cos\phi\tan\delta \\ \cos\zeta\sin\phi-\sin\zeta\cos\phi\cos A &= \sin\delta \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(六十六)$$

第一式解之如下式,

$$\left.\begin{aligned} b\sin B &= \sin\phi \\ b\cos B &= \cot A \\ \sin(B-t) &= \frac{\cos\phi\tan\delta}{b} \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(六十七)$$

第二式解之如下式,

$$\left.\begin{aligned} c\sin C &= \sin\phi \\ c\cos C &= \cos\phi\cos A \\ \sin(C-\zeta) &= \frac{\sin\delta}{c} \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(六十八)$$

若已知 h 及 A 而欲同時求 δ、t 及 q,則以用告司公式爲便,而以 $A=180°-A$, $b=\zeta$, $c=90°-\phi$, $a=90°-\delta$, $B=t$, $C=q$.

(五十一)　若已知 δ、t 及 ϕ 而求 ζ 及 A,則以

$$A=t, \qquad a=\zeta,$$
$$b=90^\circ-\delta, \qquad B=180^\circ-A,$$
$$c=90^\circ-\phi,$$

乃有下式

$$\left.\begin{aligned} \cos\zeta &= \sin\phi\sin\delta+\cos\phi\cos\delta\cos t \\ \sin\zeta\cos A &= -\cos\phi\sin\delta+\sin\phi\cos\delta\cos t \\ \sin\zeta\sin A &= \cos\delta\sin t \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(六十九)}$$

使其適於對數推算,乃有

$$\left.\begin{aligned} m\sin M &= \sin\delta \\ m\cos M &= \cos\delta\cos t \\ \cos\zeta &= m\cos(\phi-M) \\ \sin\zeta\cos A &= m\sin(\phi-M) \\ \sin\zeta\sin A &= \cos\delta\sin t \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(七十)}$$

其 m 爲正數.

消去 m 乃有下式,

$$\left.\begin{aligned} \tan M &= \frac{\tan\delta}{\cot t} \\ \tan A &= \frac{\tan t\cos M}{\sin(\phi-M)} \\ \tan\zeta &= \frac{\tan(\phi-M)}{\cos A} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(七十一)}$$

其 A 爲大於或小於 180°,須照 t 大於或小於 180° 而定.

(五十二)　若已知 ϕ、δ 及 t 而求 q 及 ζ 可用下式,

$$\left.\begin{aligned} \cos\zeta &= \sin\phi\sin\delta+\cos\phi\cos\delta\cos t \\ \sin\zeta\cos q &= \sin\phi\cos\delta-\cos\phi\sin\delta\cos t \\ \sin\zeta\sin q &= \cos\phi\sin t \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(七十二)}$$

解之如下式,

$$\left.\begin{aligned} n\sin N &= \cos\phi\cos t \\ n\cos N &= \sin\phi \\ \cos\zeta &= n\sin(\delta+N) \\ \sin\zeta\cos q &= n\cos(\delta+N) \\ \sin\zeta\sin q &= \cos\phi\sin t \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(七十三)$$

消去 n 乃有

$$\left.\begin{aligned} \tan N &= \cot\phi\cos t \\ \tan\zeta\sin q &= \frac{\tan t\sin N}{\sin(\delta+N)} \\ \tan\zeta\cos q &= \cot(\delta+N) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(七十四)$$

若欲同時求 ζ、A 及 q，可用告司公式.

（五十三） 若已知 δ、α 及 ε 而求黃經緯 λ 及 β，則在 PQS 弧三角形以（P 爲赤極，Q 爲黃極，S 爲星）

$$A=QPS=90^\circ+\alpha, \qquad a=QS=90^\circ-\beta, \qquad c=PQ=\varepsilon,$$

$$B=PQS=90^\circ-\lambda, \qquad b=PS=90^\circ-\delta,$$

乃有

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \cos\varepsilon\sin\delta-\sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha \\ \cos\beta\sin\lambda &= \sin\varepsilon\sin\delta+\cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha \\ \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(七十五)$$

使其適於對數推算，乃有

$$\left.\begin{aligned} m\sin M &= \sin\delta \\ m\cos M &= \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\beta &= m\sin(M-\varepsilon) \\ \cos\beta\sin\lambda &= m\cos(M-\varepsilon) \\ \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(七十六)$$

其 m 爲一正數.如以

$$k=\frac{m}{\cos\delta}, \qquad k'=\frac{\cos\beta}{m},$$

代入式內，乃得更便利之式如下：

$$\left.\begin{aligned} k\sin M&=\tan\delta\\ k\cos M&=\sin\alpha\\ k'\sin\lambda&=\cos(M-\varepsilon)\\ k'\cos\lambda&=\cos M\cot\alpha\\ \tan\beta&=\sin\lambda\tan(M-\varepsilon)\\ \frac{\cos\beta\sin\lambda}{\cos\delta\sin\alpha}&=\frac{\cos(M-\varepsilon)}{\cos M}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(七十七)}$$

末一式乃爲證明推算是否準確之用.

(五十四) 若欲求 QSP 角(以 η 代之,或以 $90°-E$ 代之),則於 QPS 三角形有(此角亦可用告司公式求之)

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta\cos\eta&=\cos\varepsilon\cos\delta+\sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha\\ \cos\beta\sin\eta&=\sin\varepsilon\cos\alpha\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(七十八)}$$

解之如下式,

$$\left.\begin{aligned} n\sin N&=\sin\varepsilon\sin\alpha\\ n\cos N&=\cos\varepsilon\\ \cos\beta\cos\eta&=n\cos(N-\delta)\\ \cos\beta\sin\eta&=\sin\varepsilon\cos\alpha\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(七十九)}$$

(五十五) 若已知 β、λ 及 ε 而求 α 及 δ,則用

$$\left.\begin{aligned}\sin\delta&=\cos\varepsilon\sin\beta+\sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda\\ \cos\delta\sin\alpha&=-\sin\varepsilon\sin\beta+\cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda\\ \cos\delta\cos\alpha&=\cos\beta\cos\lambda\end{aligned}\right\}\cdots\text{(八十)}$$

解之如下式,

$$\left.\begin{aligned} m\sin M&=\sin\beta\\ m\cos M&=\cos\beta\sin\lambda\\ \sin\delta&=m\sin(M+\varepsilon)\\ \cos\delta\sin\alpha&=m\cos(M+\varepsilon)\\ \cos\delta\cos\alpha&=\cos\beta\cos\lambda\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(八十一)}$$

或解之如下式均可適於對數算法，

$$\left.\begin{aligned} k\ \sin M &= \tan \beta \\ k\ \cos M &= \sin \lambda \\ k' \sin\ \alpha &= \cos\ (M+\varepsilon) \\ k' \cos\ \alpha &= \cos M \cot \lambda \\ \tan \delta &= \sin \alpha \tan (M+\varepsilon) \\ \frac{\cos \delta \sin \alpha}{\cos \beta \sin \lambda} &= \frac{\cos\ (M+\varepsilon)}{\cos M} \end{aligned}\right\} \quad \text{(八十二)}$$

末一式爲證明之用.

（五十六） 若欲求 $\eta = 90° - E$，則用

$$\left.\begin{aligned} \cos \delta \cos \eta &= \cos \varepsilon \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \beta \sin \lambda \\ \cos \delta \sin \eta &= \sin \varepsilon \cos \lambda \end{aligned}\right\} \quad \text{(八十三)}$$

使之適於對數算法，須變之如下式，

$$\left.\begin{aligned} n \sin N &= \sin \varepsilon \sin \lambda \\ n \cos N &= \cos \varepsilon \\ \cos \delta \cos \eta &= n \cos\ (N+\beta) \\ \cos \delta \sin \eta &= \sin \varepsilon \cos \lambda \end{aligned}\right\} \quad \text{(八十四)}$$

此角亦可用告司公式求之.

按星之位置有平、視、眞三項之別，黃赤道及春分點亦有平，眞之分，最易糾纏不清.而此則多與章動、歲差、自行、光行差、視差、蒙氣差有關.苟非習之有素，難免不生誤解.爲易於明瞭起見，乃詳述其算法於此附錄中.三角公式最爲重要，故亦另詳其推演之法.本附錄所用之代字異於編中所用者.蓋欲取同於歐美曆書，俾易比較也.

（大學用書之一）

代數方程式論

L. E. Dickson: Introduction to the Theory of Algebraic Equations

黃緣芳譯　精裝實售一元

本書分上下二篇：上篇論 Lanrange-Cauchy-Abel 諸氏之普通代數方程式論；下篇則論列 Galois氏之代數方程式論。凡如何用代數解及如何用羣解方程式，以及五次以上方程式不能利用有理或無理豫解式之助解等問題，無不詳爲論述。且敍述力求淺顯，立言皆從初等代數出發，不牽連及算學上其他各門類。並附有例解及初等習題甚多，以資讀者練習。

方程式論

倪德基譯　原售一元二角　改售一元〇五分

（算學叢書之一）

Florian Cajori著

著者本多年研究之心得，採數十名家之精華，輯爲本書。選材豐富審愼，說理淺顯條暢。論方程式之性質也，由淺而深；述方程式之解法也，由簡而繁；不變式與協變式，化法難而不切實用則刪除之；置換法置換羣及有理範圍，應用廣而領悟不易則詳論之；葛羅華（Galois）之理論，其理艱深，則多設例題以明之；霍納（Horner）牛頓（Newton）之近似法，其法便利則採用之。凡已習初等代數、幾何、三角及解析幾何，而欲進習高等算學者，是殆不可不讀此書。

中華書局出版

中1918〔全〕26,5.

丁錫華編譯

天空現象談

原定價一角
改定價九分

·通俗教育叢書之一·

本書用淺顯通俗之白話文，將天空的現象，作一系統的敍述。全書分十一章：㈠天體，㈡太陽，㈢太陽之光熱，㈣太陽之運動，㈤太陽系及八大行星，㈥地球，㈦月，㈧日月蝕，㈨慧星，㈩流星，⑪恆星及天河。並插附地與月比較太陽大小圖，太陽系及八大行星圖，人立海岸望船行圖，地球四季圖，地球晝夜圖，月之盈虛圖，日蝕、月蝕圖，慧星圖等，學者對照研究，極饒興趣。

科學小叢書兩種

奇妙的地球

蕭覺先著

原定價一角　改定價九分

人們賴以生息的地球，當初一般人對牠竟莫名其妙，後經科學家的研究，於是對於地球上的種種事實，有了詳細的考察。本書就是介紹科學家研究的結果。全書分八個段落：㈠引言，㈡地球的形式和大小，㈢自轉和公轉，㈣地球的內部，㈤地球的外表，㈥傾斜的地球㈦地球上的災害㈧餘言。

風

鄒盛文編譯

原定價一角
改定價九分

本書內容，分十一段：㈠總說，㈡風的成因，㈢空氣的循環，㈣地球自轉的影響，㈤氣溫氣壓和風的關係，㈥氣壓和氣流的關係，㈦旋風系和逆旋風系，（附貿易風和無帶風），㈧風向和風力的階級——風的種類，㈨風速的變化，㈩風的觀測，⑪風的利害作用。全書用白話寫出，極易領悟。

中華書局發行

中1623〔全〕26,3.

·學生叢書兩種·

談天

丁錫華譯述　三角五分

全書分十二章：第一章談月，詳述月之表面、光與熱、運行及盈虧、成因及年齡、與人生之關係等；第二章談太陽，詳述太陽之光熱、本質、黑點、運動以及與人生之關係等；第三章談地球；第四第五第六三章詳述遊星、彗星、隕星與流星等；第七章談月蝕及日蝕；第八章論曆，詳述曆之種類、時間與季節等事項；第九章談恆星及星座，如恆星之本體及等級、銀河、變光星……等；第十章談北天，如大熊星座、小熊星座、龍星座……等；第十一章談動物圈，如金牛星座、雙子星座、巨蟹星座……等；第十二章談南天，如獵戶星座、大犬星座、小犬星座……等。凡天空現象，均論述無遺。

地談

史禮綏譯述　四角五分

本書分四編：第一編爲行星之地球，分六章：㈠地球之狀態，㈡地球之運動，㈢經緯度之測定法，㈣晝夜五帶及四季，㈤地球之內部，㈥地球之將來。第二編爲陸地，分八章：㈠水陸之分布，㈡大陸及島嶼，㈢海岸線，㈣地勢，㈤地殼之構造及發育，㈥火山及噴氣孔，㈦溫泉，㈧地震。第三編爲水，分三章：㈠陸地之水及其作用，㈡海岸，㈢潮汐。第四編爲大氣，分四章：㈠大氣之高度及其性狀，㈡大氣之溫度，㈢大氣之壓力及風，㈣大氣之深度。此外並論及生活於地表之植物、動物之地理分佈種類。凡地球與天體之關係，以及地表上所有之一切，均有詳細之討論，引證確切，說理明白。

中華書局出版

中1609(全)26,1.

·初中學生文庫單行本·

天文和地球

許達年先生譯

天空的神秘

原定價七　角　改售價六　角

本書敘述一般人所驚異的天空現象，凡天體之運行，太陽之光熱，月影之虧盈，八大行星之距離、大小、光明，世界上學者對於火星的特殊研究，流星，彗星等之形成，以及宇宙開闢論之各家學說，無不悉數參入，于以研究天空現象最完善的讀物。本書因爲專供一般人之瀏覽，故敘述異常生動，說理亦頗淺顯，不必要之難解定律，以及測算方法，概不列入。全書附插圖八十幅，以便參閱。

日常氣象學

原定價六　角　改售價五　角

本書敘述日常氣象的諸種現象，見大氣層之高度成分，氣溫之變化升降，地面溫度之分佈，氣壓之變化與比測，雲層之區別，雨露霜雪雹霰之成因，及其對於人類生活之關係，風力風向之敘述，一般空中光暉之現象，低氣壓高氣壓之形成，以及雷電之各項說明，皆有詳細的敘述，最後農以天氣預報一章，尤爲切合實際應用。內附精美之插圖多幅，以與文字相參照，閱之更易明瞭，且能增進興趣。

地球

原定價七　角　改售價六　角

本書以淺鬆一般的常識爲主旨，將地球上的一切自然現象，敘述無遺。全書共十六章，凡地球本體之研究，海底和海面，海水，海水的變動，極海，侵蝕作用，地殼的變動，谷、冰河、海和陸的爭鬥，火山、溫泉、地球是什麼東西構成的，地球是怎樣組成的，地球的歷史等，均有詳細的說明。譯筆流暢，統計準確，插圖尤爲精美悅目，便於對照閱讀。讀畢本書，於地球本體之現象，可瞭然矣。

中華書局出版

中2081〔全〕

期限卡
Date Due
69.11.-7
69 12 19
國立政治大學圖書館

著者 Author 盧介卿
書碼 Call No. 520 800 1:2
書名 Title (高等)天文學
登錄號碼 Accession No. 216181

月日 Date		借閱者 Borrower's Name	月日 Date		借閱者 Borrower's Name
9	25	~~[illegible]~~			

國立政治大學圖書館

書碼 520 800 1:2
登錄號碼 216181