

[法] 彭加勒 著

李醒民 译

● 现代文化丛书

科学的价值



光明日报出版社

070785

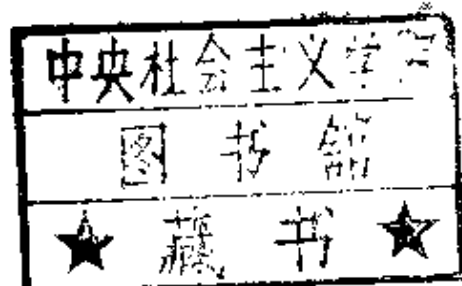
现代文化译丛

科学的价值

[法]昂利·彭加勒 著

李醒民 译

石雷 校



光明日报出版社

12-413
Jules Henri Poincaré
The Foundations of Science
Authorized Translation by G.B. Halsted
The Science Press, New York, 1913

根据纽约科学出版社1913年版译出

科学的价值

〔法〕彭加勒 著

李醒民 译

•
光明日报出版社出版
新华书店北京发行所发行
国防大学第二印刷厂印刷

•
开本850×1168毫米 1/32 印张17.25 字数433千字 插页2

1988年5月北京第一版 1988年5月北京第一次印刷

印数1—15,000册

ISBN7-80014-109-8/B·0064

定价：4.65元

中 译 者 前 言

朱尔·昂利·彭加勒(Jules Henri Poincaré, 1854—1912)是法国著名的数学家、天文学家、物理学家和科学哲学家,他以其出众的才华、渊博的学识、广泛的研究和杰出的贡献而遐迩闻名,赢得了国际性的声誉。

昂利·彭加勒1854年4月29日生于法国南希(Nancy)。他的父亲是一位第一流的生理学家兼医生、南希医科大学教授。他的母亲是一位善良、机敏、聪明的女性。他的叔父曾升迁为国家道路桥梁部的检查官。他的堂弟雷蒙·彭加勒(Raymond Poincaré)曾几度组阁,出任总理兼外交部长,并于1913年1月至1920年初任法兰西第三共和国第九届总统。

昂利·彭加勒自幼受到良好的家庭教育,很早就对自然历史和经典名著表现出极大的兴趣。十五岁时,他深深地爱上了数学。1872年到1875年,他在巴黎高等工业学校学习。从该校毕业后,年方二十一岁的彭加勒又进入国立高等矿业学校深造,打算作一名工程师,但一有空,他就劲头十足地钻研数学,并在微分方程一般解的问题上初露锋芒。1879年8月1日,他由于这个课题的论文获得数学博士学位。在煤矿见习期间,他虽然具有一个真正的工程师的勇气,但是这个职业与他的志趣不相投。在得到博士学位四个月,他应聘到卡昂(Caen)大学作数学分析教师。两年后,他升迁到巴黎大学执教。除了在欧洲参加科学会议和1904年应邀到美国圣路易斯(San Luis)博览会讲演外,他一生的其余时间都

是在巴黎大学度过的。

彭加勒是一位杰出的科学开拓者和敏锐的思想家。他在数学、天文学、物理学和科学哲学等领域都有开创性的贡献和重要建树。在短暂的一生里(他仅活了五十八岁),他却写了将近五百篇科学论文和三十部专著,其中还不包括颇受欢迎的科学哲学著作和趣味盎然的科普著作(为此他被认为是法国的散文大师)。这一切,使他成为当时世界上最有智慧、最有影响的科学家之一。他被熟悉他的工作的人誉为“理性科学的活跃智囊”、“起统帅作用的天才”、“本世纪初唯一留下的全才”。

科学上的巨大成就使彭加勒赢得了法国政府所能给予的一切荣誉,也赢得了英国、俄国、瑞典、匈牙利等国的奖赏。1887年,他被选为巴黎科学院成员,1906年当选为巴黎科学院主席。1908年,他被选为法国科学院院士,这是一个法国科学家所能得到的最高荣誉。

彭加勒是一位堪与高斯(C.F.Gauss)媲美的大数学家。可以说,十九世纪数学的发展一开始就在数学巨人高斯的身影笼罩之下,而后来却在同样一位数学大师彭加勒的支配之中。彭加勒被认为是十九世纪末和本世纪初的数学主宰,是对数学和它的应用具有全面知识的最后一个人。彭加勒在数学的四个主要部门——算术、代数、几何、解析——中的成就都是开创性的,尤其在函数论、代数几何学、数论、代数学、微分方程、代数拓扑学等分支都有卓越贡献。彭加勒说过,数学家具有两种截然相反的倾向。有的人具有不断扩张版图的兴趣,在攻克某个难题后,便抛开这个问题,急着出发进行新的远征。另外的人则专心致志地围绕这个问题,从中引出所有能够引出的结果。彭加勒本人则属于前一种类型。法国数学家、彭加勒的传记作家达布(G.Darboux)谈到

彭加勒这一特点时说：“他一旦达到绝顶，便不走回头路。他乐于迎击困难，而把沿着既定的宽阔大道前进、肯定更容易到达终点的工作留给他人。”

在天文学方面，彭加勒的主要工作有三项：旋转流体的平衡形状(1885年)；太阳系的稳定性，即 n 体问题(1899年)；太阳系的起源(1911年)。彭加勒在这些问题上的解决方法在当时十分先进，以致于在四十多年后，还没有几个人能够掌握他的锐利武器。他的早期研究成果汇集在专题巨著《天体力学的新方法》(三卷本，1892、1893、1899年)中，这部巨著被认为是开辟了天体力学的新纪元，可与拉普拉斯(P. S. M. de Laplace)的《天体力学》并驾齐驱。接着该书的是另外的三卷著作《天体力学教程》。稍后又有讲演集《流体质量平衡的计算》和一本历史批判著作《论宇宙假设》。达布在评价彭加勒的这些工作时说：“在五十年间，我们生活在著名德国数学家的定理上，我们从各个角度应用、研究它们，但是没有添加任何基本的东西。正是彭加勒，第一个粉碎了这个似乎是包容一切的框架，设计并展望外部世界的新窗户。”

彭加勒讲授物理学达二十年以上，结果使他成为理论物理学所有分支的第一流专家。他特别偏好光理论和电磁理论，研究了三维连续统的振幅，弄清了导热问题以及势论方面的电磁振荡问题，论证了狄利克雷原理。值得指出的是，彭加勒对物理学革命作出了直接贡献。由于他的建议，客观上促成贝克勒耳(H. Becquerel)于1896年发现了放射性。是他的推动，使洛伦兹(H. A. Lorentz)于1904年提出了完整的经典电子论。彭加勒是相对论的先驱。早在1900年之前，他就掌握了建造相对论的必要材料：他于1895年第一个提出尝试性的建议，认为象相对性这样的原理应该是必要的；1898年，又是他第一个讨论了假定光速对所有观察者

都是常数的必要性，同时还讨论了用交换光信号确定两地同时性的问题。他在1904年还惊人地预见了新力学的大致图景。尤其使人赞叹的是，在1904年后期到1905年中期，彭加勒给洛伦兹写了三封信，其中在第三封信中完成了洛伦兹变换形成一个群的证明。这三封信的思想后来写在“论电子动力学”(1905年6月5日发表了缩写本，全文于1906年发表。需要说明的是，爱因斯坦的狭义相对论文是1905年9月发表的)一文中，为了在具有确定的正规度 $x^2+y^2+z^2+\tau^2$ ($\tau=ict$)的“四维空间”中运用不变量理论，他首次引入了虚时间坐标。这正是闵可夫斯基(H. Minkowski)1908年把狭义相对论数学化的思想精髓。

1911年的索耳未(Solvay)物理学会议使量子论越出了德语国家的国界，大大激励了彭加勒的敏锐思想，促使他在临终前的半年时间内，以难以置信的毅力和速度从事这项困难的研究，写出了长篇专题论文和一篇评述性文章。这在学术界(特别是在英国学术界)产生了很大影响，在量子论的传播和发展中作出了新贡献。此外，彭加勒在二十世纪开头就洞察到物理学危机，并对它进行了系统的分析和论述。他认为，物理学危机是物理学发展的必经阶段，它预示着一种行将到来的变革，是物理学革命的前夜，因此它是好事而不是坏事。他正确地指出，要摆脱危机，就要在新实验事实的基础上重新改造物理学，使力学让位于一个更为广泛的概念。他一再肯定经典理论的固有价值，针锋相对地批判了“科学破产”的错误观点，对科学的前途充满信心。这些看法，对物理学家清醒地认识物理学面临的大变革形势，澄清一些风靡一时的糊涂观念不无裨益。

彭加勒对科学和数学的哲学意义一直怀有浓厚的兴趣。他于1902、1905和1908年先后出版了《科学与假设》、《科学的价值》和

《科学与方法》。在他逝世后的第二年，勒邦(Le Bon)集其遗著，编辑出版了《最后的沉思》(1913年)，这是彭加勒所期望的第四本科学哲学著作。彭加勒的这些著作被译成英、德、俄、西班牙、匈牙利、瑞典、日、中等文字，几乎传遍了整个文明世界。

在科学哲学上，彭加勒继承了马赫(E. Mach)和赫兹(H. Hertz)的传统，汲取了康德(I. Kant)的一些思想，并通过对他的科学研究实践的总结和对当时科学成就的深思，提出了不少富有启发性的新思想。彭加勒是约定主义的创始人，他本人是一位温和的约定主义者。他承认科学的目的是寻求真理，即使科学原理(有别于定律)也要由实验来最终裁决，因为实验是真理的唯一源泉。他充分肯定了科学的固有价值，认为科学发展具有连续性和继承性，在科学理论的更迭中，真关系将通过溶化在更高级的和谐中而得以保留。这完全是科学实在论者所持的观点。彭加勒通过对科学的哲学反思看到，无论是康德的先验论，还是马赫的经验论，都不能说明科学理论体系的特征，为了强调在从事实过渡到定律以及由定律提升为原理时，科学家应充分享有发挥能动性的自由，他提出了约定主义。彭加勒认为，在数学及其相关的学科中，可以看出自由约定的特征。约定是我们精神自由活动的产品。我们在所有可能的约定中进行选择时，要受实验事实的引导；但它仍是自由的，只是为了避免一切矛盾起见，才有所限制。约定主义既要求摆脱狭隘的经验论，又要求摆脱先验论，它反映了当时科学界自由创造、大胆假设的要求，在科学和哲学上都有其积极意义。彭加勒的约定主义和马赫的经验主义是逻辑经验主义兴起的哲学基础，因此彭加勒理所当然地被认为是逻辑经验主义的始祖之一。彭加勒也是一位热情的理性主义者和高远的理想主义者。

彭加勒对科学方法论问题也有专门研究。关于假设、科学美、简单性原则、事实的选择、直觉与发明创造，他都有精彩的论述和独到的见解。彭加勒还兴趣十足地探讨了物理学理论的形式和系统的特点，也涉及到发明的心理学方面的问题。在数学哲学上，彭加勒在发现了数学悖论的情况下复活了直觉主义，并且形成了广泛的运动，他的立场使他成为数学直觉主义学派的先驱。他批判了罗素(B. Russell)、皮亚诺(G. Deano)等人为代表的逻辑主义和以希尔伯特(D. Hilbert)等人为代表的形式主义，但也并不是完全排斥它们。

毋庸讳言，彭加勒的科学哲学思想并非完美无缺，但是确有许多东西值得借鉴和汲取。我们相信，聪明的读者肯定会以公允的态度正确对待这一历史遗产。在这里值得指出的是，彭加勒是一位学识渊博的科学家，他在论证自己的哲学观点时，不仅大量引证了他所精通的数学、物理学、天文学方面的材料，而且也旁及化学、生物学、地质学、生理学、心理学等领域，他所掌握的材料丰富绝非纯粹哲学家所能企及；同时，他也是一位具有哲学头脑的科学家，他研究、探索的问题，往往超出了一般科学家的视野。由于他具有如此优越的条件，所以在他的有关论述中，不时迸发出令人深省的思想火花，其中有些论点可以当之无愧地列为人类的思想财富。难怪爱因斯坦称他为“敏锐的深刻的思想家”。

1912年7月17日，彭加勒在久病之后，因栓子(堵塞血管使血管发生栓塞的物质)而十分突然地去世了。在茫茫的夜空中，一颗“智多星”陨落了！这颗“智多星”曾发出了他所能发生的熠熠光亮，即使在坠入大地之前，也要把最后一道余光毫无保留地奉献给人间。1912年初，彭加勒还在思考一个新数学定理，这就是把

狭义三体问题周期解的存在归结为平面的连续变换在某些条件下不动点的存在问题。他感到自己没有精力彻底解决这个问题了，便一反通常的习惯，把这篇“未经深究和修改的论文”寄给《数学杂志》请求发表，希望它能把他其他人“引到新的、未曾料到的路线上”。同年春，彭加勒再次患病，但他还是顽强地工作着。4月，他在法国物理学会的一次讲演中又谈到他冥思苦想的量子论问题，他要求人们不要为推翻根深蒂固的旧见解而烦恼。在当月发表的评述性文章中，他明确指出：“把不连续引入自然定律”，“这样一个非同寻常的观点能够成立”，“自牛顿以来，自然哲学所经历的最引人注目的革命可能就在其中”。他甚至大胆地猜测，量子跃迁也适合于宇宙万物，宇宙会突然地从一个状态跃迁到另一个状态，但是在间歇期间，它依然是不动的。宇宙保持同一状态的各个瞬时不再能够相互区别开来，这将导致时间的不连续变化，即时间原子(atom of time)。临终前三周，即1912年6月26日，彭加勒抱病在法国道德教育联盟成立大会上发表了最后一次公开讲演。他说：“人生就是持续的斗争”，“如果我们偶尔享受到相对的宁静，那正是我们先辈顽强地进行了斗争。假使我们的精力、我们的警惕松懈片刻，我们就将失去先辈为我们赢得的成果。”他还指出：“强求一律就是死亡，因为它对一切进步都是一扇紧闭着的大门；而且所有的强制都是毫无成果的和令人憎恶的。”彭加勒的一生就是自由思考、持续斗争的一生。

可是，彭加勒本人及其思想曾被不少人误解和曲解。长期以来，在苏联、东欧、日本和我国的许多出版物中，彭加勒竟被描绘成在科学史上“兴风作浪”的反面人物，他就哲学问题所发表的见解也被斥之为“唯心主义的胡说”，“任何一句话都不可相信”。

当我们用事实·拭去他脸上厚厚的油彩和尘埃时，难道不应该作一点历史的沉思吗？

本书是依据《科学与假设》、《科学的价值》和《科学与方法》的英译合集《科学的基础》(1913年)译出，分别根据法国巴黎Ernest Flammarion 出版社1920年、1905、1922年的三个法文版本进行校对。在翻译过程中，译者参考了商务印书馆二、三十年代出版的中译本以及日译本。

值得指出的是，美国数学家霍尔斯特德(G. B. Halsted)的英译合集《科学的基础》(*The Foundations of Science*, 1913)忠实地再现了彭加勒原著的思想精髓和写作风格，它是经彭加勒首肯的权威性译本。这便给中译者的再创造（凡是真正从事过名著翻译的人都有这样的体会：翻译决不是机械式地转录或复制，在某种意义上，它是一种创造性的精神活动）提供了坚实的立足地和良好的出发点。但是，由于彭加勒本人思想博大精深，论述言简意赅，遣词刻意求工，行文灵活幽默，这就给翻译工作带来相当大的困难。“文犹质也，质犹文也。虎豹之鞶犹犬羊之鞶”。由于译者水平有限，加之又是在研究过程中断断续续译出的（原拟作为三本书分别出版），因此把虎豹之皮弄成犬羊之皮的事恐怕在所难免，企望读者不吝批评指正。

在本书的翻译和出版过程中，译者得到许良英、高崧、吴僬深、黎鸣等同志的支持和鼓励，在此一并致谢。

李醒民

一九八五年深秋于北京友谊宾馆

• 关于这方面的详细材料，请参见李醒民：“昂利·彭加勒——杰出的科学开拓者和敏锐的思想家”，《自然辩证法通讯》，1984年第3期。

作者为英译本所写的

序 言

我十分感谢霍尔斯特德博士以流畅的、忠实的译文，把我的著作如此完美地呈现在美国读者面前。

众所周知，这位学者已经不辞劳苦地翻译了欧洲的许多论著，从而为新大陆了解往昔的思想作出了卓有成效的贡献。

一些人喜欢喋喋不休地议论，盎格鲁撒克逊人(Anglo-Saxons)与拉丁人(Latins)或德意志人(Germans)的思维方式迥异；他们以截然不同的方式理解数学或理解物理学；这种方式似乎使他们优于其他一切人；他们没有感觉到需要改变它，他们甚或不知道其他人的思维方式。

在这方面，他们无疑错了，但是我不认为那是对的，至少那不再是对的。一个时期，英国人和美国人比以往更多地致力于比较深入地了解，人们就欧洲大陆想了些什么、说了些什么。

确实，每一个人都会维护自己的独特才干，假定反其道而行之，而这样的事又是可行的话，那就太可怜了。如果盎格鲁撒克逊人希望成为拉丁人，他们至多永远只不过是拙劣的拉丁人；正如法兰西人力图模仿盎格鲁撒克逊人，结果只能是东施效颦而已。

英国人和美国人已经作出了唯有他们才能够作出的科学征

服；他们还将作出其他人无法作出的科学征服。因此，假若不再有盎格鲁撒克逊人，那就未免太可悲了。

但是，欧洲大陆人也按照他们的职责作出了英吉利人无法作出的事情，从而双方都没有必要希望全世界盎格鲁撒克逊化。

人人都具有自己的独特能力，这些能力是五花八门的，科学协作的确类似于四重奏，每个人都想拉小提琴。

可是，对于小提琴手而言，要是他知道大提琴正在演奏什么，这并不是什么坏事，反过来也是如此。

实际情况是，英国人和美国人正在越来越充分地了解这一点；由此看来，霍尔斯特德博士所从事的翻译工作是适逢其时的。

首先考虑一下，数学科学关心的是什麼。人们每每说，英国人只是出于他们的实用才培育数学，甚至说他们鄙视那些怀有其他目的的人；过分抽象的思索所具有的形而上学气味使他们大为反感。

即使在数学中，英国人也总是从特殊达到一般，以致于他们从未象许多德国人所作的那样，经由集合论的大门获得成为数学组成部分的观念。可以这样说，他们始终坚持认为，人们要立足于感觉世界，永远也不要烧毁使他们与实在保持联系的桥梁。因此，他们没有能力理解，或者至少是没有能力欣赏某些比功利主义理论更为有趣的理论，例如非欧几何学。照此看来，这本书的头两编，即论述数和空间的两编，对他们来说也许是言之无物，只会使他们迷离恍恍。

但是，情况并非如此。首先，他们象人们所说的那样，是毫不妥协的实在论者吗？我没有就形而上学，至少没有就形而上学最重要的东西说他们顽固不化吗？

请回想一下贝克莱(Berkeley)的名字吧，他无疑出生在爱尔兰，但却被英国人立即接受了；在英国哲学的发展中，他标志着一个合乎规律的、必不可少的阶段。

这不是足以证明，他们不用系留气球也能升高吗？

回过头来谈谈美国吧，《一元论者》杂志不是在芝加哥出版了吗？它的评论即使在我们看来也是够大胆的，然而它却赢得了读者。

在数学中情况如何呢？你认为美国几何学家只热衷于实用吗？远非如此。他们专心致志培育的科学分支是变换群理论，该理论具有最为抽象的形式，它距实用何止十万八千里。

此外，霍尔斯特德博士每年都要定期地就所有与非欧几何学可以相比的成果发表评论，在他周围有一批对他的工作深感兴趣的人。他向这些人介绍了希尔伯特的思想，在这位声名卓著的德国学者的原理之基础上，他甚至写出了论“有理几何学”的奠基性的专题论文。

把这个原则引入教学之中，这时无疑会烧毁依赖感性直观的所有桥梁，我阻率地承认，这是一个大胆的举动，在我看来，这也许无异于莽撞。

因此，就探讨空间概念的起源而言，美国公众准备得被料想的更为充分。

而且，分析这个概念并没有为我所不知道的什么幽灵而牺牲实在。几何学的语言毕竟只是一种语言。空间仅仅是我们所相信的事物的名词。这个词的起源何在，其他词的渊源又在何处？它们隐匿着什么东西？询问这个问题是可以容许的；相反地，禁止询问则会受到词的愚弄；这必然会崇拜形而上学偶像，就象原始人跪倒在水头雕象的面前，而不敢看其内部有什么一样。

在研究自然时，盎格鲁撒克逊人的精神和拉丁人的精神之间的差别还要更大一些。

总地说来，拉丁人力求用数学形式表达他们的思想；而英国人则偏爱用实体的陈述描述它。

毫无疑问，为了认识世界，二者都仅仅依赖经验；当他们碰巧超越了这一点时，他们认为他们的预见只不过是暂时的，他们赶紧向自然界索要预言的确凿证据。

但是，经验并非一切，而且学者也不是被动的；他没有等待真理来找他自己，或者期待真理碰到他鼻尖上的机会。他必须去迎接真理，正是他的思考，向他揭示出通向真理的道路。为此就需要工具；好了，差别恰恰在这里出现了——拉丁人通常选择的工具并不是盎格鲁撒克逊人所偏爱的工具。

对于拉丁人来说，真理只能够用方程来表示；它必须服从简单的、合乎逻辑的、对称的定律，而且要使精神对数学美的爱恋得到满足。

盎格鲁撒克逊人为了描述一种现象，首先要全力以赴地构造模型，他用我们粗糙的、无其他仪器帮助的感官向我们提供的普通实体来构造模型。他也作假设，他隐含地假定，自然界在她的最细微的基元中与在复杂的集合——唯有这种集合才处在我们感官所能达到的范围内——中是相同的。他从物体推断原子。

因此，二者都作假设，这的确是必要的，因为没有假设，科学家永远也不能前进一步。事情的实质在于从不无意识地作假设。

再从这种观点来看，对这两类物理学家来说，各自对对方的情况有所了解才是可取的；在研究与他们自己的精神如此不同的精神的工作时，他们将立即辨认出，在这一工作中已经有假设的

堆积。

毋庸置疑，这还不足以使他们理解，他们恰恰象许多人一样是按他们的本份作假设的；自己眼中有木梁，却指责人家眼中有小刺；但是，通过对手的批评，他们将告诫他们的对手，可以预料，这些告诫将会给对手提供同样的帮助。

英国人的步骤在我们看来往往是粗糙的，他们所猜想、所发现的类似在我们看来常常是肤浅的；他们有时容许在遣词用语方面缺乏条理、自相矛盾，这使几何学精神感到震惊，数学方法的使用会立即使之原形毕露。但是，另一方面，最为经常的是，他们没有察觉到这些矛盾，这是十分幸运的；要不然，他们肯定会抛弃他们的模型，而不会从中推出辉煌成果的——他们经常是从模型获得这些结果的。

于是，当他们最终察觉到这些真正的矛盾时，它们有利于向他们揭示出他们概念的假设性特征，相反地，数学方法由于其明显的严密和固定的程序，时常在我们身上激起毫无正当理由的自信，它妨碍我们环顾我们自己。

可是，从另一种观点来看，两种概念的形成是很不相同的，归根结底，它们之所以大相径庭，是因为它们有共同的缺陷。

英国人希望用我们看得见的东西构造世界。我的意思是，我们是用肉眼看的，而不是用显微镜看的，更不是用比较精妙的显微镜即受科学归纳法指导的人脑来看的。

拉丁人想要用公式构造世界，但是这些公式依然是我们看得见的东西的完美表示。换句话说，二者都用已知的东西构造未知的东西，他们却辩解说不存在另一种作法。

如果未知的东西是单纯物而已知的东西是复合物，那么这合理吗？

假使我们认为单纯物与复合物一样，我们岂不是要从中得出荒谬的观念，或者倘若我们力求把元素理解为单纯物，而元素本身却是化合物，我们岂不是也要得出错误的观念？

某一天，某人在我们感官表明的复杂的集合物下发现了简单得多的、甚至与该集合物不相似的东西——当牛顿用更简单的、等价的然而却不相同的万有引力定律取代开普勒三定律时情况就是这样——每一项重大的进步岂不是正好在这一时刻完成的吗？

人们有理由询问，我们是否恰恰处在这样一个革命的前夜，甚或是处在一个更为重要的时刻。物质似乎将要丧失它的最牢固的属性即质量，它本身似乎将要分解为电子。届时力学必须让位给一个更为广泛的概念，这种概念能够解释力学，而力学却不能解释这种概念。

这样一来，无论英国人用实体模型建构以太，还是法国人把动力学定律用于以太，他们的企图都是徒劳的。

正是未知的以太解释已知的物质；而物质却不能解释以太。

彭加勒

现代文化丛书编委会

主 编：李盛平

副主编：肖金泉

编 委：邓正来 王 伟 杨玉生 王志刚 于 沛
于 硕 马在新 王 波 白若冰 孙立平
刘再平 刘尔铎 吕 朴 朱青生 吴佛深
张 猛 金成基 陆瑞君 杨 全 范 进
周 星 周振想 桑思奋 贾 湛 顾 昕
曾 胡 黄正篱 程方平 焦宏昌 黎 鸣
缪晓非

目 录

中译者前言	1
作者为英译本所写的序言	1

第一部分 科学与假设

引言	3
第一编 数与量	7
第一章 数学推理的本性	7
第二章 数学量和经验	20
第二编 空间	32
第三章 非欧几何学	32
第四章 空间和几何学	45
第五章 经验和几何学	61
第三编 力	73
第六章 经典力学	73
第七章 相对运动和绝对运动	88
第八章 能和热力学	96
第四编 自然界	108
第九章 物理学中的假设	108
第十章 现代物理学的理论	122
第十一章 概率演算	138

第十二章 光学和电学	157
第十三章 电动力学	167
第十四章 物质的终极	181

第二部分 科学的价值

引言	187
第一编 数学科学	192
第一章 数学中的直觉和逻辑	192
第二章 时间的量度	206
第三章 空间的概念	220
第四章 空间及其三维性	241
第二编 物理科学	265
第五章 解析和物理学	265
第六章 天文学	276
第七章 数学物理学的历史	284
第八章 数学物理学现在的危机	290
第九章 数学物理学的未来	302
第三编 科学的客观价值	309
第十章 科学是人为的吗?	309
第十一章 科学和实在	330

第三部分 科学与方法

引言	349
第一编 科学和科学家	352

第一章	事实的选择	352
第二章	数学的未来	359
第三章	数学创造	374
第四章	偶然性	387
第二编	数学推理	407
第一章	空间的相对性	407
第二章	数学定义和教学	424
第三章	数学和逻辑	442
第四章	新逻辑	455
第五章	逻辑学家的最新成果	468
第三编	新力学	482
第一章	力学和儒	483
第二章	力学和光学	493
第三章	新力学和天文学	508
第四编	天文科学	519
第一章	银河与气体理论	519
第二章	法国的大地测量学	531
总论		541

第一部分

科学与假设

引 言

对于一个浅薄的观察者来说，科学的真理是无可怀疑的；科学的逻辑是确实可靠的，假如科学家有时犯错误，那只是由于他们弄错了科学规则。

数学的真理是用一连串无懈可击的推理从少数一目了然的命题推演出来的，这些真理不仅把它们强加于我们，而且强加于自然本身。可以说，它们支配着造物主，只容许他在比较少的几个答案中选择。因此，为数不多的实验将足以使我们知道他作出了什么选择。从每一个实验，通过一系列的数学演绎，便可推出许多结果，于是每一个实验将使我们了解宇宙之一隅。

对于世界上的许多人来说，对于获得第一批物理学概念的中学生来说，科学确实性的来源就在于此。这就是他们所理解的实验和数学的作用。一百年前，许多学者就持有同样的想法，他们梦想用尽可能少的实验来构造世界。

人们略加思索，便可以察觉到假设所起的作用；数学家没有它便不能工作，更不用说实验家了。于是人们思忖、考虑所有这些建筑物是否真正牢固，是否吹一口气会使之倾倒。以这样的方式怀疑是浅薄的。怀疑一切和信仰一切二者同样是方便的答案；每一个都使我们不用思考。

不要对假设简单地加以责难，因此我们应当仔细地审查假设的作用。于是，我们将认识到，不仅假设是必要的，而且它通常也是合理的，我们也将看到，存在着几类假设；一些是可以检验

的，它们一旦被实验确证后就变成富有成效的真理；另一些不会使我们误入歧途，它们对于坚定我们的思想可能是有用的；最后，其余的只是表面看来是假设，它们可化归为伪装的定义或约定。

最后的这些假设尤其在数学及其相关的科学中遇到。这些科学正是由此获得了它们的严格性；这些约定是我们精神自由活动的产物，我们的精神在这个领域内自认是无障碍的。在这里，我们的精神能够作出裁决，因为它能颁布法令；然而，我们要知道，尽管这些法令强加于**我们的科学**——没有它们便不可能有科学，但它们并没有强加于自然界。可是，它们是任意的吗？不，否则它们将毫无结果了。实验虽然给我们以选择的自由，但同时又指导我们辨明最方便的路径。因此，我们的法令如同一位专制而聪明的君主的法令，他要咨询国家的顾问委员会才颁布法令。

一些人受到某些科学基本原理中的可辨认出的这种自由约定的特点的冲击。他们想过分地加以推广，同时，他们忘掉了自由并非放荡不羁。他们由此走到了所谓的**唯名论**，他们自问道：学者是否为他本人的定义所愚弄，他所思考、他所发现的世界是否只是他本人的任性所创造。^①在这些条件下，科学也许是可靠的，但却丧失了意义。

假若如此，科学便无能为力了。现在，我们每天看到它正是在我们的眼皮底下起作用。如果它不能告诉我们实在的东西，情况就不会这样。可是，它能够达到的并不是象朴素的教条主义者所设想的事物本身，而只是事物之间的关系。在这些关系之外，不存在可知的实在。

这就是我们将要得出的结论，为此我们必须考察一系列学

① 参见勒卢阿(Le Roy)先生，“科学和哲学”，《形而上学和道德评论》1901年。

利——从算术和几何学到力学和实验物理学。

数学推理的本性是什么？它象通常想象的那样果真是演绎的吗？更进一步的分析向我们表明，情况并非如此，它在某种程度上带有归纳推理的性质，正因为这样它才非常富有成效。它还保持着某种绝对严格的特征；这是我们首先必须指出的。

现在，由于弄清楚了数学交给研究者手中的一种工具，我们再来分析另一个基本的概念，即数学量。它是我们在自然界中发现的呢，还是我们自己把它引入自然界的呢？而且，在后一种情况下，我们不会冒把每一事物密切结合起来的危险吗？把我们感觉到的未加工的材料和数学家称之为数学量的极其复杂、极其微妙的概念比较一下，我们便不得不承认一种差别；我们希望把每一事物强行纳入的框架原来是我们自己所构造；但是我们并不是随意创造它的。可以说，我们是按尺寸制造的，因此我们能够使事实适应它，而不改变事实的基本东西。

我们强加给这个世界的另一个框架是空间。几何学的第一批原理从何而来？它们是通过逻辑强加给我们的吗？罗巴切夫斯基 (Lobachevsky) 通过创立非欧几何学证明不是这样。空间是由我们的感官揭示的吗？也不是，因为我们的感官能够向我们表明的空间绝对不同于几何学家的空间。几何学来源于经验吗？进一步的讨论将向我们表明情况并非如此。因此，我们得出结论说，几何学的第一批原理只不过是约定而已；但是，这些约定不是任意的，如果迁移到另一个世界（我称其为非欧世界，而且我试图想象它），那我们就会被导致采用其他约定了。

在力学中，我们会得出类似的结论，我们能够看到，这门科学的原理尽管比较直接地以实验为基础，可是依然带有几何学公设的约定特征。迄今还是唯名论获胜；但现在我们看看真正的物理

科学。在这里，舞台发生了变化；我们遇到了另一类假设，我们看到它们是富有成效的。毫无疑问，乍看起来，理论对我们来说似乎是脆弱的，而且科学史向我们证明，它们是多么短命；可是它们也不会完全消灭，它们每一个总要留下某种东西。正是这种东西，我们必须设法加以清理，因为在那里，而且唯有在那里，才存在着真正的实在。

物理科学的方法建立在归纳的基础上，当一种现象初次发生的境况复现时，归纳法使我们预期这种现象会重复。一旦**所有**这些境况能够复现，那就可以毫无顾忌地应用这个原理；但是这是从来没有出现过的；其中有些境况总是缺少的。我们可以绝对确信它们是不重要的吗？显然不能。那也许是可能的，但不会是严格可靠的。由此可见概率概念在物理科学中起着多么重要的作用。因而，概率计算不仅仅是玩纸牌人的娱乐或响导，我们必须深究其基本原理。在这方面，我只能给出很不完善的结果，因为这种使我们辨别概率的模糊的本能太难加以分析了。

在研究了物理学家工作的条件之后，我想适当向他说明一下其中的成果。为此，我举出了光学史和电学史中的例子。我们将看到，菲涅耳(Fresnel)的观念、麦克斯韦(Maxwell)的观念从何而来，安培(Ampère)和电动力学的其他奠基者都作了那些无意识的假设。

第一编 数 与 量

第一章 数学推理的本性

I

数学科学的可能性本身似乎是一个不可解决的矛盾。如果这门科学只是表面看来是演绎的，那么那种没有人想到去怀疑的完美的严格性从何而来呢？相反地，如果数学所阐明的一切命题能够依据形式逻辑的规则相互演绎，那么它为什么没有变成庞大的同义反复呢？三段论法不能告诉我们本质上新颖的东西，假使每一事物都来自同一律，那么每一事物都必定能归入其中。这样一来，我们难道将要承认，所有那些充斥许多书中的定理的陈述无非是A即A的转弯抹角的说法？

毋庸置疑，我们能够返回到公理，它们是所有这些推理的源泉。如果我们断定这些推理不能化归为矛盾律，如果我们在其中甚至看到了不具有数学必要性的经验事实，那么我们还有把它们列入先天综合判断的对策。这不是解决困难，而只不过是使之洗练而已；即使综合判断的本性在我们看来并不神秘，然而矛盾还不会消失，它只是后退了；三段论推理依然不能给予它的材料添加任何东西；这些材料化归为几个公理，我们在结论中不会发现其他东西。

无论什么定理，如果没有新公理参与它的证明之中，它就不会是新的；推理只能借用直接的直觉给我们以直接自明的真理；它恐怕只是中间的寄生物，因此我们难道没有充分的理由去询问，整个三段论工具是否只是有助于掩饰我们的借用？

翻开任何一本数学书，这种矛盾将会给我们以更大的冲击；在每一页上，作者都要阐述他推广一些已知的命题的意图。数学方法是从特殊到一般吗，假若如此，为何又能够把它称为演绎的呢？

最后，如果数学是纯粹分析的，或者它能够从少数综合判断通过分析导出，那么博大精深的精神一眼就能察觉它的所有真理；不仅如此，我们甚至可以预期，人们总有一天会发明出一种足够简单的语言来描述它们，使它们对于通常的智力来说也是自明的。

如果我们不赞同这些结果，那就必须承认，数学推理本来就有一种创造能力，从而不同于三段论。

该差别甚至必须是深刻的。例如，按照某一法则，用于两个相等的数的同一一致运算将给出恒等的结果，我们在频繁使用这一法则时找不出其中的奥秘。

所有这些推理方式，不管它们是否可化归为真正的三段论，它们依然保持着分析的特征，正因为如此，它们才是软弱无力的。

II

这里要讨论的是老问题；莱布尼兹(Leibnitz)企图证明 2 加 2 得 4；让我们看一下他的证明吧。

我将假定数 1 已被定义，又假定运算 $x+1$ 意谓把单位 1 加

在已知数 x 上。

这些定义不管是什么，它们都没有进入推理过程。

然后我通过等式

$$(1) 1 + 1 = 2; (2) 2 + 1 = 3; (3) 3 + 1 = 4$$

定义数 2，3 和 4。

用同样的方式，我通过下述关系定义运算 $x + 2$ ：

$$(4) x + 2 = (x + 1) + 1。$$

由于预先假定了这一切，于是我们有

$$2 + 1 + 1 = 3 + 1 \quad (\text{定义 } 2),$$

$$3 + 1 = 4 \quad (\text{定义 } 3),$$

$$\therefore 2 + 2 = (2 + 1) + 1 \quad (\text{定义 } 4),$$

由此可得

$$2 + 2 = 4 \quad \text{证毕。}$$

不能否认，这个推理是纯粹分析的。可是若问任何一个数学家：“这不是真正的证明”，他将会对你说：“这是核验。”我们仅限于比较两个纯粹约定的定义，并查明它们是恒等的；我们没有认识到什么新东西。**核验**不同于真的证明，正因为它是纯粹分析的，正因为它是毫无结果的。其所以毫无结果，正因为结论不过是翻译成另一种语言的前提。相反地，真的证明是富有成效的，因为这里的结论在某种意义上比前提普遍。

等式 $2 + 2 = 4$ 是如此易受核验，只因为它是特殊的。数学中的每一个特殊的陈述总是能够以这种相同的方式核验。但是，如果数学能够化归为一系列这样的核验，它就不会是科学了。例如，棋手并没有在赢棋中创立科学。没有普遍性便没有科学。

人们甚至可以说，精密科学的真正目的就在于使我们摆脱这些直接的核验。

III

因此，让我们看看几何学家是如何工作的，并且力图把握他的工作程序。

这项任务并非没有困难；随便翻开一本书，并分析其中的任何证明，这是不够的。

我们首先必须撇开几何学，由于与公设的作用、空间概念的本性和起源有关的问题相当困难，因而几何学中的疑问是错综复杂的。出于类似的理由，我们也不能转向微积分。我们必须寻找依然是纯粹的数学思想，也就是说，必须在算术中去寻找。

选择还是必要的；在数论的比较高深的部分，原始数学命题已经经受了如此深刻的提炼，以致于它们变得难以分析了。

因此，正是在算术的开头，我们必须期待找到我们寻求的解释，但是恰恰是在最基本的定理的证明中，发生了这样的情况：经典论文的作者表现得最不精确、最不严格。我们不必把这作为一种罪过归咎于他们；他们服从了必然性；初学者没有受到真正的数学严格性的训练；他们在其中只能看到无用的、使人厌烦的细碎；企图使他们过早地变得更为精密，那不过是白费时间；他们必定会迅速地、但却是按部就班地通过，而科学奠基人却是缓慢地越过这条道路的。

为了习惯于这种充分的严格性——它似乎应该自然而然地施加在一切健全的精神之上，为什么要有如此长的必要的准备呢？这是一个逻辑的和心理的问题，完全值得加以研究。

但是，我们不去处理它；它不是我们的目的，我们必须重新证明最基本的定理，为了不使初学者烦恼，我们不是把这些定理留下的粗糙的形式给予他们，而是把训练有素的几何学家的满意

的形式给予他们。

加法的定义。我假定已经定义了运算 $x+1$ ，即把数 1 加到已知数 x 上。

这个定义不管是什么，都没有进入我们的后继的推理之中。

我们现在要定义运算 $x+a$ ，就是把数 a 加到已知数 x 上。

假定我们定义了运算

$$x+(a-1),$$

则运算 $x+a$ 将用等式

$$x+a=[x+(a-1)]+1 \quad (1)$$

来定义。

只有我们知道 $x+(a-1)$ 是什么，然后我们才能知道 $x+a$ 是什么，正如我假定过的，从我们知道 $x+1$ 是什么开始，我们就能相继地借助递归定义运算 $x+2$ ， $x+3$ 等等。

这个定义值得注意一下：它具有有一种特殊的性质，这种性质已经把它与纯粹逻辑的定义区别开来；等式 (1) 包含着无穷个不同的定义，只要人们知道前者，每一个定义都有意义。

加法的特性 **结合性**。我说

$$a+(b+c)=(a+b)+c。$$

事实上，该定理对 $c=1$ 而言为真，于是可写出

$$a+(b+1)=(a+b)+1，$$

该式除符号有差别外，无非是我刚才定义加法的 (1) 式。

假定该定理对 $c=\gamma$ 而言为真，我说它对 $c=\gamma+1$ 亦为真。

事实上，设

$$(a+b)+\gamma=a+(b+\gamma)，$$

由此可得

$$[(a+b)+2]+1=[a+(b+2)]+1,$$

或者根据定义(1)

$$(a+b)+(\gamma+1)=a+(b+\gamma+1)=a+[b+(\gamma+1)],$$

这表明，通过一连串的纯粹分析的演绎，该定理对 $\gamma+1$ 为真。

由于对 $c=1$ 为真，从而我们相继看到，它对 $c=2$ ， $c=3$ 等也是如此。

交换性。 1° 我说

$$a+1=1+a。$$

该定理显然对 $a=1$ 来说为真；我们能够用纯粹分析的推理来验证，若它对 $a=\gamma$ 为真，则它对 $a=\gamma+1$ 也为真；现在，该定理对 $a=1$ 为真，因而它对 $a=2$ ， $a=3$ 等亦为真，这可用下述说法来描述：所陈述的命题通过递归而证明。

2° 我说

$$a+b=b+a。$$

该定理刚才针对 $b=1$ 已被证明；可以用分析来验证，若它对 $b=\beta$ 为真，则它对 $b=\beta+1$ 亦为真。

因此，该命题通过递归而成立。

乘法的定义 我们将用下述等式来定义乘法：

$$a \times 1 = a,$$

(1)

$$a \times b = [a \times (b-1)] + a。$$

(2)

象等式(1)一样，等式(2)包含着无穷个定义，只要定义了 $a \times 1$ ，就能使我们相继定义 $a \times 2$ ， $a \times 3$ 等等。

乘法的特性 分配性。我说

$$(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)。$$

我们用分析验证，该等式对 $c=1$ 而言为真；其次，若该定理对 $c=\gamma$ 为真，则它对 $c=\gamma+1$ 亦为真。

因此，该命题通过递归而证明。

交换性 1° 我说

$$a \times 1 = 1 \times a$$

该定理对 $a=1$ 而言是显而易见的。

我们用分析验证，若该定理对 $a=2$ 为真，则它对 $a=2+1$ 亦为真。

2° 我说

$$a \times b = b \times a。$$

该定理对于 $b=1$ 而言刚刚证明过了。我们可以用分析验证，若它对 $b=\beta$ 为真，则它对 $b=\beta+1$ 亦为真。

IV

我在这里不再进行这种一连串单调的推理。但是，正是这种单调的东西，更清楚地把一致的、在每一步都要再次遇到的程序显示出来。

这种程序就是递归证明。我们首先针对 $n=1$ 规定一个定理，然后我们证明，若该定理对 $n-1$ 为真，则对 n 也为真，从而得出结论：它对所有的整数都为真。

我们刚才看到，如何可以用递归法来证明加法法则和乘法法则，也就是代数计算法则；这种计算是变换的工具，它有助于形成更多的各种不同的组合，远非简单的三段论所能相比；但是，

它依然是纯粹分析的工具，不能告诉我们任何新东西。如果数学没有其他工具，它就会因之即刻阻障自己的发展；但是，它重新求助于同一程序，即求助于递归推理，从而它能够继续前进。

如果我们密切注视一下，我们在每一步都会再次遇到这种推理方式，它或者是以我们刚才给予它的简单形式出现的，或者是以或多或少修正了的形式出现的。

于是，我们在这里有了典型的数学推理，我们必须更为仔细地审查它。

V

递归推理的主要特征是，它包括着无穷个三段论，可以说它浓缩在单一的公式中。

为了更清楚地看到这一点，我想依次说明这些三段论，如果你容许我形容一下的话，它们就好象“瀑布”一样直泻下来。

这些当然都是假设的三段论。

定理是对数 1 为真。

现在，若它对 1 为真，则它对 2 亦为真。

故它对 2 为真。

现在，若它对 2 为真，则它对 3 亦为真。

故它对 3 为真，如此等等。

我们看到，每一个三段论的结论都是下一个三段论的小前提。

而且，我们的所有三段论的大前提都能简化为单一的公式。

若定理对 $n-1$ 为真，则它对 n 亦为真。

其次，我们看到，在递归推理中，我们仅限于陈述第一个三段论的小前提和把所有大前提作为特例包括进来的普遍方式。

从而，这一连串永无休止的三段论就简化为几行短语。

正如我上面已经解释的，现在很容易理解一个定理的每一个特殊结果为何都能够用纯粹分析的程序来核验。

如果我们不去证明我们的定理对于所有数为真，例如我们只希望证明它对6这个数为真，那么建立我们级联的头五个三段论在我们看来就足够了；如果我们想针对数10证明该定理，那只需要9个三段论；数越大，需要的三段论也就越多；然而，不管这个数多么大，我们总能达到目的，从而分析核验是可能的。

可是，无论我们走得多么远，我们也无法上升到对于一切数都适用的普遍定理，而唯有普遍的定理，才是科学的目标。欲达此目的，需要无穷个三段论；这就必须跨越只局限于形式逻辑方法的分析家的忍耐力永远也无法填满的深渊。

起初我曾问过，人们为什么不想象出一个神通广大的精神，一眼就洞察到整个数学真理。

现在很容易回答了；棋手能够预料四、五步棋，不管他多么非凡，他也只能准备有限步棋；假使他把他的本领用于算术，他也不能凭借单一的直接直觉洞察算术的普遍真理；为了获得最些微的定理，他也不得不借助于递归推理，因为这是能使我们从有穷通向无穷的工具。

这个工具总是有用的，因为它容许我们跨越我们所希望的那那么多的阶梯，它使我们省去冗长的、使人厌烦的和单调的核验，而这种核验会很快地变得不能实施。但是，只要我们以普遍的定理为目的，它就变得必不可少了，而分析的核验虽则可以使我们从有穷接近这一目的，却永远无法使我们达到它。

在算术领域，我们可以认为我们自己距微积分相当遥远，然而，正如我们刚刚看到的，数学无穷的观念已经起着举足轻重的

作用，没有它便没有科学，因为没有它就不会有普遍的东西。

VI

递归推理所依据的判断能够处于其他形式之下；例如，我们可以说，在不同整数的无穷个集合中，总存在着一个比所有其他数都小的数。

我们能够很容易地从一个陈述推到另一个陈述，由此便产生了已经证明过递归推理的合法性的幻觉。

但是，我们总会受到阻碍，我们总会达到不可证明的公理，而这个公理实际上只不过是待证明的、翻译成另一种语言的命题罢了。

因此，我们无法摆脱这样一个结论：递归推理的法则不能简化为矛盾律。

对我们来说，这个法则也不能从经验而来；经验能够告诉我们，该法则对头十个数或头一百个数为真；例如，它不能到达无穷系列的数，而只能到达这个系列的一部分，不管该部分或长或短，但总是有限的。

现在，假若只是那样一个问题，则矛盾律也就足够了；它总会容许我们展开象我们所希望的那么多的三段论；只有在把无穷个三段论包括在单一的公式中时，只有在无穷面前时，矛盾律才会失效，也就是在那里，经验变得软弱无力。这个法则是分析证明和经验难以得到的，它是先验综合判断的真正典范。另一方面，我们也不能认为它象几何学的某些公设那样是一种约定。

可是，这种判断为什么以不可遏止之势迫使我们服从呢？那是因为，它只是证实了精神的威力，我们的精神知道，它本身能够想象得出，只要这种行为一次是可能的，同样的行为就可以重

复无穷次。精神对这种威力有一种直接的直觉，而经验只不过是
为利用它提供机会，从而能够意识到它。

但是，有人会问，如果未加工的经验不能证明递归推理的合
法性，那么借助于归纳的实验也是这样吗？我们陆续看到，一个
定理对 1，2，3 等数为真；我们说，**这个规律是明显的**，它象
每一个以为数很多、但却是有限的观察为基础的物理学定律一样，
有着相同的根据。

必须承认，在这里存在着与通常的归纳程序酷似之处。不过，
也有本质的差别。用于物理科学中的归纳总是不可靠的，因为它
建立在宇宙具有普遍秩序的信仰上，而这种秩序却是在我们之外
的。相反地，数学归纳法即递归证明却必然强加于我们，因为它
只是证实了精神本身的特性。

VII

正如我前面已经说过的，数学家总是力图**推广**他们所得到的
命题，不必另找例子，我刚才已经证明了等式：

$$a + 1 = 1 + a,$$

后来利用它建立等式

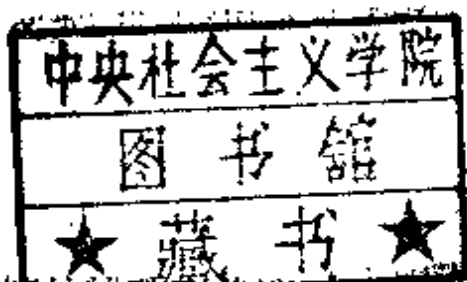
$$a + b = b + a,$$

该等式显然更为普遍。

因此，象其他科学一样，数学也能够从特殊到普遍。

在开始这项研究时，这似乎是一个我们不可理解的事实，但
是由于我们弄清了递归证明和普通归纳的类似性，这个事实在我
们看来就不再神秘了。

毫无疑问，数学中的递归推理和物理学中的归纳推理建立在
不同的基础上，但是它们的步调是相同的，它们在同一方向上前



进着，也就是说，从特殊到普遍。

让我们稍微比较仔细地审查一下这种情况。

为了证明等式

$$a + 2 = 2 + a,$$

只要把法则

$$a + 1 = 1 + a \quad (1)$$

运用两次就足够了，而且可以写出

$$a + 2 = a + 1 + 1 = 1 + a + 1 = 1 + 1 + a = 2 + a. \quad (2)$$

无论如何，用纯粹分析的方法从等式(1)如此演绎出来的等式(2)决不仅仅是(1)式的特例；它是完全不同的某种东西。

因此，我们甚至不能说：在数学推理的真正分析和演绎的部分，我们是在该词的通常意义上从普遍到特殊。

与等式(1)的两个数相比，等式(2)的两个数只不过是更为复杂的组合而已，分析仅仅用来把进入这些组合中的元素分开并研究它们的关系。

因此，数学家是“通过构造”而工作的，他们“构造”越来越复杂的组合。他们通过分析这些组合、这些集合体，可以说返回到它们的初始元素，他们察觉到这些元素的关系，并从它们推导出集合体本身的关系。

这是纯粹分析的步骤，但是它无论如何不是从普遍到特殊的步骤，因为很明显，不能把集合体视为比它们的元素更特殊。

人们正当地赋予这种“构造”程序以重大的意义，一些人还力图从中发现精密科学进步的必要条件和充分条件。

无疑地，这样做是必要的；但并不是充分的。

要使一种构造物有用而不白费心血，而且可以作为人们希望攀登的阶梯，那么它首先必须具有一种统一性，这种统一性能使我

们从中看到某种东西，而不只是看到它的元素本身的并置。

或者，更确切地讲，考虑构造物，而不是考虑它的元素本身，必定有某些好处。

这种好处能够是什么呢？

例如，为什么对总是可以分解为三角形的多边形推理，而不对基本的三角形推理呢？

这是因为属于任何边数的多边形的特性可以用于任何特定的多边形。

相反地，通过直接研究基本三角形的关系发现这些特性，结果就要耗费大量的精力。知道了普遍定理便节省了这些精力。

因此，一个构造物要变得有趣，只有当它能够与其他类似的构造物并列，从而形成同一个种的类。

如果四边形不只是两个三角形的并置，这是因为它属于多边形的一种。

而且，人们必定能够证明这个种的特性，而不必迫使去对每一个类去相继建立它们。

欲达此目的，我们必须攀登一个或多个阶梯，从特殊上升到普遍。

“通过构造”的分析程序没有迫使我们下降，而是让我们留在同一水平线上。

我们只有借助数学归纳法才能攀登，唯有它能够告诉我们某种东西。没有在某些方面与物理学归纳法不同的、但却同样有效的数学归纳法的帮助，则构造便无力去创造科学。

最后要注意，只有同样的运算能够无穷地重复，这种归纳法才是可能的。这就是为什么国际象棋的理论从来也不能变成科学，因为同一象棋比赛的不同走法彼此并不相似。

第二章 数学量和经验

如果人们想知道数学家对连续统作何理解，就不应询问几何学。几何学家总是企图或多或少地想象他所研究的图形，但是他的表示在他看来仅仅是一种工具；在制定几何学时，他要利用空间，正如他用粉笔画图一样；对非本质的东西不应当赋予过多的意义，其重要性并不比粉笔的白色更多一些。

纯粹的解析家并不害怕这一危险。他使数学科学脱离所有无关的元素，而且能够回答我们的问题：“严格地说来，数学家就其进行推理的这个连续统是什么呢？”许多对他们的学科进行沉思的解析家已经作出了回答；例如，塔纳里（Tannery）先生在他的《单变数函数论导论》一书中就这样作了。

让我们从整数的标度开始；在两个连续步骤之间插入一个或多个中间步骤，然后在这些新步骤中再插入其他步骤，如此类推，以至无穷。这些步骤将是所谓的分数、有理数或可通约数。但是，这还不够；无论如何，在这些已经是无穷个数的项之间，还必须插入称之为无理数或不可通约数的其他数。

在更进一步之前，我们要注意一下。如此设想的连续统，只不过是按某种顺序排列起来的无穷个虽则为真、但却相互外在的数的个体之集合物。这不是通常的概念，其中假定，在连续统的元素之间，存在着使它们成为一个整体的密切的结合物，在那里，点不是在线之先，而是线在点之先。从“连续统是多样性的统一”这一受人称颂的公式中，只保留着多样性，统一性却消失了。解析

家在象他们所作的那样定义连续统时，他们仍然是正确的，因为只要他们称赞他们的严格性，他们总是以此公式推理的。这足以告诉我们，真正的数学连续统是与物理学家的连续统和形而上学家的连续统大相径庭的东西。

也许可以说，满足于这个定义的数学家受到词的愚弄，为了解释这些中间步骤如何被插入，为了证明这样作是可能的，就必须精确地讲出这些中间步骤的每一个是什么。但是，那就错了；在他们的推理^①中所运用的这些步骤的唯一特性是在如此如此的步骤之前或之后排列的特性；因此，也唯有这一特性应当出现在定义中。

这样看来，中间项应该如何插入不需要我们涉及；另一方面，没有一个人会怀疑这种操作的可能性，除非他忘记了，在几何学家的语言中，可能的仅仅意味着无矛盾。

不管怎样，我们的定义还不完善，我将在这段冗长的题外话之后再谈及它。

不可通约数的定义 柏林学派的数学家，尤其是克罗内克(Kronecker)，不用整数之外的任何材料，致力于构造分数和无理数的这一连续标度。照此看来，数学连续统大概是精神的纯粹创造，经验并未参与其中。

有理数概念对他们来说似乎没有困难，他们主要力求定义不可通约数。可是，在这里介绍他们的定义之前，我必须作一个声明，以保证不引起那些不熟悉几何学家习惯的读者的惊奇。

数学家研究的不是物体，而是物体之间的关系；因此，只要关系不变，这些物体被其他物体代换对他们来说是无关紧要的。在他们看来，内容是不重要的，他们感兴趣的只是形式。

^① 以及包括在特殊约定中的推理，这些约定用来定义加法，我将在后面谈到它们。

不想到这一点，就无法理解戴德金(Dedekind)仅把一种符号命名为**不可通约数**，也就是说，这种数完全不同于应当是可度量的、并且几乎是可触知的量的普通观念。

现在，让我们看看戴德金的定义是什么：

可通约数能够以无穷方式分为两类，服从这个条件的第一类中的任何数都大于第二类中的任何数。

也可能会出现这种情况：在第一类数中，有一个数小于所有其他数；例如，如果我们把所有大于2的数和2本身排在第一类，把所有小于2的数排在第二类，那么很清楚，2将是第一类所有数中最小的。数2可以选来作为这种分类的符号。

相反地，也可能会出现下述情况：在第二类数中，有一个数大于所有其他数；例如，如果把所有大于2的数排在第一类，把所有小于2的数和2本身排入第二类，情况就是这样。在这里，数2再次可以选作分类的符号。

但是，同样完全可以发生下述情况：在第一类中既不存在小于所有其他数的数，在第二类中也不存在大于所有其他数的数。例如，假定我们把其平方大于2的所有可通约数放入第一类，把其平方小于2的所有可通约数放入第二类。这里没有其平方恰恰是2的数。显然，在第一类中没有小于所有其他数的数，因为不管一个数的平方多么接近2，我们总是能够找到一个可通约数，其平方更接近于2。

按照戴德金的观点，不可通约数

$$\sqrt{2}$$

无非是可通约数分类的这一特殊式样的符号，于是，对于每一种分类式样，对应着一个可通约数或不可通约数作为它的符号。

可是，满足这一点也许未免过于轻视这些符号的来源了；依

然要解释，我们如何被导致把一种具体的存在赋予它们，此外，甚至对于分数本身来说，一开始不就存在着困难吗？如果我们预先不了解我们认为是无穷可分的内容即连续统，我们会有这些数的概念吗？

物理连续统 我们自问，数学连续统的概念是否只是从经验而来。如果是，那么经验的粗糙材料——这就是我们的感觉——也许易于度量。我们可能被诱使认为，它们实际上就是如此，因为最近有人企图去测量它们，甚至提出了一个通称费希纳(Fechner)定律的规律，按照这个定律，感觉与刺激的对数成正比。

然后，如果我们较为仔细审查一下曾经试图建立这个定律的实验，我们将会得出绝然相反的结论。例如，人们观察到，10克的重物A和11克的重物B产生相同的感受，重物B与12克的重物C同样无法区分，但是重物A却很容易与重物C区别开来。于是，经验的粗糙结果可以用下述关系来表示：

$$A=B, B=C, A<C,$$

这可以视为物理连续统的公式。

可是，这里存在着与矛盾律无法容忍的背离，消除这一背离的需要迫使我们发明数学连续统。

因此，我们不能不得出结论：这一概念完全是由精神创造的，但是经验为它提供了机会。

我们无法相信，等于第三个量的两个量互不相等，因此我们可以假定，尽管A不同于B，B不同于C，但是由于我们的感官不完善，不容许我们区别它们。

数学连续统的创造 第一阶段。迄今为止，为了说明事实起

见，只要在A和B之间插入几项就足够了，这几项依然是离散的。如果我们求助于某些工具以弥补我们感官的软弱无力，例如我们使用显微镜，那么现在会发生什么情况呢？象以前不可区别的A和B项，现在也似乎可以区分了；可是，在现在变得可区分的A和B之间再插入一个新项D，则我们既不能把它与A区别开来，也不能把它与B区别开来。除非使用最完善的方法，我们经验的粗糙结果总是表示具有内在矛盾的物理连续统的特征。

只有在已经区分开来的项中连续不断地插入新项，我们才能摆脱它，而且这一操作必须无限期地进行。如果我们能够想象某种威力强大的工具，足以把物理连续统分解为离散的元素，就象望远镜把银河分解为恒星那样，我们就可以设想中止这种操作。但是，我们不能想象这一点；事实上，我们正是用眼睛观察显微镜放大的图象的，因此这个图象必然总是包含着视觉的特征，从而包含着物理连续统的特征。

直接观察到的长度和用显微镜放大一倍的这一长度之半无法区分。整体与部分是齐性的；这是一个新的矛盾，确切地讲，如果假定项数是有穷的才是这样的；事实上，很清楚，包含比整体少的项的部分不可能类似于整体。

当项数被认为是无穷时，矛盾就不存在了；例如，没有什么东西妨碍人们认为整数的集合类似于偶数的集合，虽则偶数只不过是整数的一部分；事实上，每一个整数都对应着一个偶数，即对应着整数的倍数。

但是，精神可以创造出用无穷数目的项形成的连续统的概念，这并不仅仅是为了避免包含在经验材料中的这种矛盾。

一切都象在整数序列中发生的一样。我们有能力设想，一个单位能够加到多个单位的集合中；多亏经验，我们才有机会锻炼

这种能力，我们逐渐意识到它；可是，从这时起，我们感到我们的能力没有限度，我们能够无限地数下去，尽管我们从来还没有数过多于有穷数目的对象。

同样地，只要我们可以在一个级数的两个相继项之间插入中间项，我们便会发觉，这种操作能够超越所有限度而继续下去，也就是说，没有使我们停止的固有理由。

为简便起见，让我们把按照与可通约数的标度相同的规则形成的项的每一个集合称为一阶数学连续统。如果我们进而按照形成不可通约数的规律插入新的步骤，我们将会得到我们所谓的二阶连续统。

第二阶段。迄今，我们仅仅是迈出了第一步；我们解释了一阶连续统的起源；但是，有必要看到，为什么甚至连它们也不是充分的，为什么必须发明不可通约数。

如果我们试图想象一条线，那么它必须具有物理连续统的特征，也就是说，除非用某一宽度，否则我们将无法描绘它。于是，两条线在我们看来似乎形成了两条狭带，如果我们满足于这种粗糙的图象，那么显而易见，若两线相交，则它们将有公共部分。

可是，纯粹几何学家却作出进一步的努力；他完全放弃了感官的帮助，试图达到没有宽度的线的概念、没有广延的点的概念。他只有把线视为不断变窄的带子的极限，把点视为不断缩小的面积的极限，才能够得到这个概念。其次，不管我们的两条相交的带子多么窄，它们总有公共的面积，带子越窄，面积越小，它们的极限将是纯粹几何学家所谓的点。

这就是人们说两条相交的线具有公共点的原因，这个真理似乎是直觉的。

然而，如果线被设想为一阶连续统，也就是说，在几何学家

所画的线上只能找到具有有理数坐标的点，那它就含有矛盾。例如，只要人们坚持直线和圆的存在，则矛盾是很明显的。

事实上，很清楚，例如唯有其坐标是可通约数的点才被认为是真实的，那么正方形的内接圆和这个正方形的对角线便不会相交，因为交点的坐标是不可通约的。

这还不可能是充分的，因为我们以这种方式得到的只是某些不可通约数，而不是全部不可通约数。

可是，设想一下一直线分为两条射线。每条射线在我们的想象中似乎都是某种宽度的带子；而且，这两条带子将相互叠加，由于在它们之间必须没有空隙。这个公共部分在我们看来好象是一点，当我们力图把带子想象得越来越窄时，该点将总是保留着，以致于我们承认，若一直线被切割为两条射线，则它们的公共边界是一个点，这是直觉的真理；在这里我们辨认出戴金德的概念：不可通约数被视之为两类有理数的公共边界。

这就是二阶连续统的起源，这恰恰是所谓的数学连续统。

摘要。简而言之，精神具有创造符号的能力，从而正是精神，构造了只是符号特殊系统的数学连续统。其能力只是受到避免矛盾的必要性的限制；但是，只有经验向精神提供刺激物，精神才能利用这种能力。

在所考虑的情况下，这种刺激物是从感觉的粗糙材料中引出的物理连续统的概念。不过，这个概念导致了一系列的矛盾，必须使我们自己相继从这些矛盾中摆脱出来。照此办理，我们势必想象出越来越复杂的符号系统。至今，我们所想象的系统不仅无内部矛盾（在我们已经过的所有阶段就是如此），而且与各种所谓的直觉的命题也无矛盾，这些直觉命题是从或多或少经过提炼

的经验概念中引申出来的。

可测的量 迄今为止，我们所研究的量都不是**可测的**；我们固然能够说这些量中的一个给定量是否比另一个大，但却不能说它是否比另一个大一倍还是大两倍。

截止目前，我仅仅考虑了我们的项排列的顺序。可是，就大多数应用来说，这并不充分。我们必须学会对把任何两项分开的区间进行比较。只有在这个条件的基础上，连续统才会变为可测的量，算术运算才是可应用的。

这只能借助新的、特殊的**约定**来进行。我们将**公认**，在这样的情况下，A项和B项之间的区间等于C项和D项之间的区间。例如，在我们的著作的开头，我们曾以整数的标度排列，我们设在两个相继步骤之间插入 n 个中间步骤；好了，这些新步骤根据约定将被视为是等距离的。

这是定义两个量的加法的方式，因为若区间AB根据定义等于区间CD，则区间AD根据定义将是区间AB和CD之和。

这个定义在很大程度上是任意的。但是也不完全如此。它服从某些条件，例如服从加法交换律和结合律。不过，一旦选定的定义满足这些法则，选择就无关紧要了，详述它也就无用了。

几点评论 现在，我们能够讨论几个重要的问题：

1° 精神的创造力由于数学连续统的创造而枯竭了吗？

不，杜布尔-雷蒙 (Du Bois-Reymond) 以引人注目的方式证明了这一点。

我们知道，数学家区分不同阶的无穷小，二阶无穷小不仅在绝对的方面上是无穷小，而且相对于一阶无穷小也是无穷小。不难设想分数阶的无穷小乃至无理数阶的无穷小，从而我们再次发

现数学连续统的标度，这正是我们在前几页所处理的问题。

再者，有些无穷小相对于一阶无穷小是无穷小，相反地，它们相对于 $1+\epsilon$ 阶无穷小则是无穷大，而不管 ϵ 可能多么小。于是，这里有插入级数中的新项，如果可以容许我回复到不久前使用过的、虽不怎么通用但却十分方便的措词，那么我将说，这样便创造了一种三阶连续统。

要再进一步是很容易的，但这却是无用的；人们只能想象没有应用可能的符号，但没有一个人想这样作。考虑到不同阶的无穷小而导致的三阶连续统本身并没有有实用到足以赢得公民身份，几何学家只是把它视为珍奇的玩意儿。精神运用它的创造能力，只有在经验需要它的时候才行。

2° 一旦有了数学连续统的概念，人们能免除类似于产生这个概念的那些矛盾吗？

不能，我将举一个例子。

人们必须很博学，才不致认为凡曲线都有切线是明显的；事实上，如果我们把这个曲线和一条直线画为两条窄带，我们总是能够如此安排它们，使它们有公共部分而不相交。其次，如果我们想象这两条带子的宽度无限地缩小，这个共同部分将总是继续存在，可以说到达极限，两线将有共同点而不相交，也就是说，它们将相切。

以这种方式推理的几何学家只是有意或无意地正在作我们在上面已经作过的事情，即证明两线相交有一公共点，他的直觉好象是合理的。

可是，直觉也许会欺骗他。我们能够证明，存在着没有切线的曲线，如果这样的曲线被定义为二阶解析连续统的话。

毫无疑问，类似于我们上面已经讨论的某些技巧也许足以消

除矛盾；但是，因为这只有在十分例外的情况下才会遇到，它没有受到进一步的注意。

我们不想试图把直觉与解析调和起来，我们甘愿牺牲二者之一，因为解析依然是无懈可击的，所以我们决定舍弃直觉。

多维物理连续统 我们在上面讨论了从我们感觉的直接材料引出的物理连续统，或者，如果你乐意的话，也可以说是从费希纳实验的粗糙结果引出的物理连续统；我已经表明，这些结果概括在下述矛盾的公式中：

$$A=B, B=C, A<C。$$

现在让我们看看，这一概念怎样推广，如何从它得出多维连续统的概念。

考虑任何两个感觉的集合。或者我们能够把它们一一辨别开来，或者我们不能辨别，正象在费希纳实验中那样，10克的重物能够与12克的重物区别开来，但不能与11克的重物区别。这就是构造多维连续统所需要的一切。

让我们把这些感觉集合中的一个集合称为一个**元素**。这类似于数学家的点；不过也不是完全相同的东西。我们不能说我们的元素没有广延，由于我们无法把它与邻近的元素加以区别，从而它犹如被一种烟雾包围着。假如可以容许用天文学作比，那么我们的“元素”也许象星云，而数学点则象恒星。

这已得到承认，如果我们借助于每一个元素都与前一个可以区分的相继元素的系列，能够从它们中的任何一个到达另一个，那么元素的系统将形成一个**连续统**。这种**线性系列**就是数学家的**线**，而孤立的**元素**则是点。

在进一步之前，我们必须解释所谓**截量**意味着什么。考虑一

个连续统 C ，并从中取出它的某些元素，我们暂时将认为这些元素不再属于这个连续统。如此取出的元素的集合将被称之为截量。于是便发生了下述情况：由于这个截量， C 可以再分为许多不同的连续统，留下的元素的集合不再形成唯一的连续统。

于是，在 C 上将有两个元素 A 和 B ，必须认为它们属于两个不同的连续统，而且人们将承认这一点，因为不可能在 C 中找到一个相继元素的线性系列，这些第一个是 A 而最后一个是 B 的元素中的每一个都与前一个不可区分，这个系列中的元素之一不能与截量中的元素之一区分开来。

相反地，也可能出现这样的情况：所作出的截量不足以再分割连续统 C 。为了对物理连续统进行分类，我们必须严格地审查，必须用来再分它们的截量是什么。

如果一个物理连续统 C 能够被一个截量再分，而这个截量可以变为都可以相互区分的有限数目的元素（从而既不形成一个连续统，也不形成许多连续统），那么我们将说 C 是一维连续统。

相反地，如果 C 只能被本身是连续统的截量再分，我们便说 C 有多维。如果是一维连续统的截量就足以再分，我们便说 C 有两维；如果是二维连续统的截量就足以再分，我们便说 C 有三维，如此等等。

这样一来，由于两个感觉集合是可区分的或不可区分的这一十分简单的事实，便定义了多维物理连续统的概念。

多维数学连续统 通过完全类似于我们在本章开头所讨论的过程， n 维数学连续统的概念由此十分自然地涌现出来。你知道，这种连续统的点在我们看来好象是用称之为其坐标的 n 个不同的量的系统来定义的。

这些量并非需要总是可测的；例如，有一种与测量这些量无关的几何学的分支，在这种几何学中，例如需要了解的问题只是，在曲线ABC上，点B是否在点A和点C之间，而不需要了解弧AB是等于弧BC呢，还是比弧BC大一倍呢。这就是所谓的**拓扑学**。

这是一门完整的学说，它吸引了绝大多数几何学家的注意力，我们从中看到，一系列值得注意的定理一个从另一个里涌现出来。这些定理与通常的几何学的定理的不同之处在于，它们纯粹是定性的，即使图形被拙劣的绘图员画得严重歪曲了比例，由于颤抖而把直线画得多少有些弯曲，这些定理依然为真。

由于我们希望接着把测量引入刚刚定义的连续统，于是这个连续统变为空间，几何学诞生了。但对此的讨论留待第二编进行。

第二编 空 间

第三章 非欧几何学

每一个结论必须假定先有前提；这些前提本身或者是自明的而不需要证明，或者只能依赖其他命题而建立，鉴于我们不能这样追溯到无穷，每一门演绎科学，尤其是几何学，必须以某一数目的不可证明的公理为基础。因此，有关几何学的论著，都是以陈述这些公理开始的。不过，在这些公理中，也要有所区分：例如，“等于同一量的一些量彼此相等”就不是几何学命题，而是解析命题。我认为它们是**先验**分析判断，我不愿去理会它们。

可是，我必须强调几何学所特有的其他公理。大多数专著中都明确地陈述了这三个公理：

- 1° 通过两点只能作一条直线；
- 2° 直线是一点到另一的最短的路径；
- 3。通过一给定点只能引一条直线与已知直线平行。

一般地，虽然第二条公理的证明被省略了，但是从其他两条公理以及从许多默认而没有陈述出来的公理中，可以把它演绎出来，我将进一步解释这一点。

人们长期以来也想证明第三条公理，即所谓的**欧几里得公设**，但总是白费气力。人们为这一幻想所耗费的巨大精力真是不可思议。最后，在十九世纪最初的二十五年，几乎在同一时期，匈牙

利的鲍耶(Bolyai)和俄国的罗巴切夫斯基无可辩驳地指出,这种证明是不可能的;他们差不多使我们摆脱了“无公设”的几何学发明家;从此以后,法国科学院每年仅收到一两篇新证明的论文。

问题并没有结束;不久,由于黎曼(Riemann)发表了题为“几何学的基本假设”的著名论文,问题才获得了巨大进展。这篇论文引出了许多新近的著作,我将进一步谈论它们,在这些著作中,引用一下贝尔特拉米(Beltrami)和亥姆霍兹(Helmholtz)的著作是合适的。

鲍耶—罗巴切夫斯基几何学 假如可以从其他公理导出欧几里得公设,那么显而易见,在否定该公设和承认其他公理时,我们便会导致出矛盾的结果;因此,不可能在这样的前提上建立首尾一贯的几何学。

现在,这恰恰是罗巴切夫斯基所作的。

他开始假定:**通过一给定点能够引两条与已知直线平行的直线。**

此外,他仍保留了欧几里得的所有其他公理。从这些假设出发,他推演出一系列定理,在其中不可能找到任何矛盾,而且他构造出一种几何学,其完美的逻辑决不亚于欧几里得几何学。

当然,这些定理与我们习用的定理截然不同,乍看起来,它们不能不使人们稍感困惑。

例如,三角形的三个角之和总是小于两直角,这个和和两直角之差与三角形的曲面成正比。

不可能构造一个与已知图形相似、但大小不同的图形。

如果我们把圆周分为 n 等分,并在各分点引切线,若圆的半径足够小,这 n 个切线将形成一个多边形;可是,若这个半径足够大,

它们将不相交。

多举这些例子是无用的；罗巴切夫斯基的命题与欧几里得的命题毫不相干，但它们在逻辑却是相互密切关联的。

黎曼几何学 设想一个唯一地由没有厚度（高度）的生物栖息的世界；并假定这些“无限扁平”的动物都在同一平面而不能离开。此外，还要承认这个世界距其他世界足够远，以致摆脱了其他世界的影响。当我们正在作这些假设时，我们不妨再赋予这些生物以理性，并相信它们能够创造几何学。在此情况下，它们将肯定认为空间只有二维。

不过，现在假定，这些想象的动物虽则依然没有厚度，但它的体形却是球形的而不是平面形的，它们都在同一球上，没有能力走出去。它们将怎样构造几何学呢？首先，很清楚，它们将认为空间只有二维；对它们来说，起直线作用的将是球面上一点到另一点的最短路径，即大圆弧；一句话，它们的几何学将是球面几何。

它们所谓的空间将是它们必须停留于其上的这个球面，在这个球面上，发生着它们能够了解的一切现象。因此，它们的空间将是**无界的**，因为在一个球面上人们总是能够一直向前而永远也不会停下来，不过它们的空间将是**有限的**；人们从来也不能找到它的终点，但却可以绕它转圈子。

好了，黎曼几何学是扩展到三维的球面几何。为了构造它，这位德国数学家不仅不得不抛弃欧几里得公设，而且也不得不抛弃第一条公理：**通过两点只能作一条直线**。

一般地讲，在球面上，通过两已知点我们只能引一个大圆（正如我们刚才看到的，对于我们想象的生物来说，这种大圆可以起直线的作用）；但是也有例外：若两已知点在对径上，则通过它

们能引无数个大圆。

同样地，在黎曼几何学（至少在它的各种形式之一）中，通过两点一般只能引一条直线；但是也有例外情况，即通过两点能引无数条直线。

在黎曼几何学和罗巴切夫斯基几何学之间存在着某种对立的東西。

例如。三角形三个角之和是：

在欧几里得几何学中等于两直角；

在罗巴切夫斯基几何学中小于两直角；

在黎曼几何学中大于两直角。

通过一给定点能够引与已知直线共面但无论在什么地方也不与之相交的直线数是：

在欧几里得几何学中等于 1；

在黎曼几何学中等于 0；

在罗巴切夫斯基几何学中等于无穷。

而且，黎曼空间虽则是无界的，但却是有限的，这是在上而给予这两个词的意义而言的。

常曲率面 一种反对意见依然是可能的。罗巴切夫斯基和黎曼的定理没有表现出矛盾；可是，这两位几何学家无论从他们的假设中引出多么多的结果，他们也必须在穷尽这些结果之前停下来，不然其数目将是无穷的了；而且，谁能够说，假如他们把演绎推得更远一些，他们最终不会得出某些矛盾吗？

对于黎曼几何学而言，只要把它限制在两维，就没有这种困难；事实上，正如我们看到的，两维黎曼几何学与球面几何毫无差别，它只是普通几何学的一个分支，因而毋庸讨论。

同样，贝尔特拉米把罗巴切夫斯基的两维几何学看作是普通几何学的一个分支，他也驳斥了有关的反对意见。

在这里，且看他是如何完成它的。考虑曲面上的任何图形。设想这个图形以下述方式画在一个可弯曲而不可扩展的、紧贴在这个曲面的画布上：当这个画布移动和变形时，这个图形的各种线条能改变它们的形态而不改变它们的长度。一般说来，这个可弯曲而不可扩展的图形在不离开该曲面的情况下是不能移动的；但是，也有某些特殊的曲面可以这样移动；这就是常曲率面。

如果我们再谈谈上面所作的比喻，设想没有厚度的生物生活在这些曲面之一上，那么它们将认为其所有线条在长度上依然保持不变的图形的运动是可能的。相反地，对于生活在可变曲率面上的无厚度的动物来说，这样一种移动似乎是荒谬的。

这些常曲率面分为两类：

一些是**正曲率**的，它们能够变形而紧贴在球面上。因此，这些曲面的几何学本身化为球面几何，这就是黎曼几何学。

其余是**负曲率**的。贝尔特拉米证明，这些曲面几何学无非是罗巴切夫斯基几何学。这样一来，黎曼和罗巴切夫斯基的二维几何学便与欧几里得几何学相互关联。

非欧几何学的解释 就这样，便消除了迄今对于二维几何学的反对意见。

可以很容易地把贝尔特拉米的推理推广到三维几何学。不排除四维空间的精神将不会从中看到困难，但这种精神寥寥无几。因此，我宁可在其他方面继续讲下去。

考虑某一平面，我将称其为基本平面，并编制一种词典，使写在两列中的两组术语一一对应，就象在普遍词典中其意义相同

的两种语言的词相互对应一样：

空间：位于基本平面以上的空间部分。

平面：与基本平面正交的球面。

直线：与基本平面正交的圆。

球面：球面。

圆：圆。

角：角。

两点之间的距离：这两点以及基本平面与通过这两点的、并与之正交的圆的交点之交比的对数。如此等等。

现在，以罗巴切夫斯基定理为例，并借助于这本词典翻译它们，正如我们用德英词典翻译德文一样。**这样，我们将得到普通几何学的定理。**

例如，有一罗巴切夫斯基定理：“三角形的三个角之和小于两直角”，它可这样翻译：“如果一曲线三角形的三边延长后是与基本平面正交的圆弧线，则这个曲线三角形的三个角之和小于两直角。”于是，不管把罗巴切夫斯基假设的结果推得多么远，它们将永远也不会导致矛盾。事实上，假如两个罗巴切夫斯基定理是矛盾的，那么它势必与借助于我们的词典所翻译的这两个定理的译文相同，但是这些译文是普通几何学的定理，而没有人对普通几何学无矛盾表示怀疑。这种可靠性从何而来呢？它被证明是正当的吗？这是一个我无法在这里处理的问题，因为说起来话就长了，因此，不存在我在上面所阐述的反对意见。

这并非一切。罗巴切夫斯基几何学可以被具体地加以解释，而并不是空洞的逻辑练习，它还可以应用；在这里，我无暇谈论这些应用，也无暇谈及克莱因(Klein)和我为积分线性微分方程从它们得到的帮助。

而且，这种解释并不是唯一的，人们可以编制许多类似于前述词典的词典，它们都能使我们通过简单的“翻译”，把罗巴切夫斯基定理变换为普通几何学定理。

隐公理 在我们的专著中明确陈述的公理是几何学的唯一基础吗？由于注意到，在它们被相继抛弃后，还留下某些与欧几里得、罗巴切夫斯基和黎曼的理论共同的命题，所以我们确信它们并不是几何学的唯一基础。这些命题必须建立在几何学家没有陈述但却公认的前提上。试图把它们从经典证明中清理出来，这是有趣的事。

斯图亚特·穆勒(Stuart Mill)宣称，每一个定义都包含着公理，因为在定义时，人们隐含地断言被定义的对象的存在。这未免走得太远了；在数学中，在下定义之后，免不了接着要证明被定义的对象的存在，人们之所以一般省去证明，是因为读者能够很容易地补充它。绝对不要忘记，当涉及到数学实体时，当谈论物质的对象问题时，“存在”这个词并非与之同义。一个数学实体存在，只要它的定义既在自身之内不隐含矛盾、又与已经公认的命题不发生矛盾就可以了。

不过，即使斯图亚特·穆勒的观察不能用于所有定义，但对于它们中的一些依然是正确的。平面有时被如下定义：

平面是这样一种面，即连结该面任何两点的直线全部在这个面上。

这个定义明显地隐藏着一个新公理；的确，我们必须改变它，这也许更为可取，不过我们为此应该明确地陈述公理。

其他定义也能引起并非不重要的思考。

例如，二图形相等的问题；两图形相等，只有它们能够叠合

才行；要使它们叠合，则必须移动一个，直至它与另一个重合；可是，如何移动它呢？如果我们问这个问题，那么我们无疑会被告知，必须在不改变其形状的情况下移动它，就象它是一个刚体一样。因此，显然会出现循环论证。

事实上，这个定义并没有定义什么；对于生活在只有流体的世界的生物来说，它是毫无意义的。假如它在我们看来似乎是清楚的，那是因为我们利用了天然固体的性质，天然固体与所有尺度都不可改变的理想固体并没有很大的差别。

尽管这个定义可能是不完善的，但它也隐含着公理。

刚性图形运动的可能性并不是自明的，或者至少就欧几里得公设的样式来看是如此，它不象先验分析判断那样。

再者，在研究几何学的定义和证明时，我们看到，人们被迫在毫无证据的情况下不仅承认这种运动的可能性，此外还要承认它的某些性质。

可以立即从直线的定义中看到这一点。人们给出了许多有缺陷的定义，但是真正的定义却隐含在直线所参与的一切证明中：

“刚性图形的运动可以这样发生：属于这个图形的线的各点依然不动，而处于这条线外的各点则运动。这样的线被称之为直线。”在这个陈述中，我们故意把定义和它所隐含的公理隔离开来。

许多证明，例如三角形全等情况的证明，从一点向一直线引垂线的证明，都预先假定了未陈述出的命题，因为它们需要承认，在空间以某种方式移动图形是可能的。

第四种几何学 在这些隐含的公理中，有一个公理在我看来似乎是值得加以注意的，因为抛弃了它，便能够构造出象欧几里得、罗巴切夫斯基和黎曼的几何学一样的首尾一贯的第四种几何

学。

为了证明在一点A总可以向一直线AB引垂线，我们考虑一直线AC，它可以绕A点移动且开始时与固定的直线AB重合；我们使它绕点A移动，直到它转到AB的延长线上。

这样一来，便预先假定了两个命题：首先，这样的转动是可能的，其次，转动可以继续下去，直到两条直线互为延长线时为止。

如果承认第一点而否认第二点，我们便有可能得到一系列定理，这些定理甚至比罗巴切夫斯基和黎曼的定理更奇异，但同样没有矛盾。

我只想引用这些定理中的一个，它并不是最奇特的：**一真实的直线可以垂直于它本身。**

李定理。在经典证明中，隐含地引入的公理数比所需要的要多，把它简化到最少也许是引人入胜的。希尔伯特(Hilbert)仿佛已对这个问题作出了最后的解答。首先，人们大概会先验地询问，这种简化是否可能，必要的公理数和可以想象的几何学数是否不是无穷的。

索弗斯·李(Sophus Lie)定理支配着这一整个讨论。它可以这样陈述：

假定下述前提得到公认：

1°空间有 n 维；

2°刚性图形的运动是可能的；

3°要确定这个图形在空间的位置需要 p 个条件。

适合于这些前提的几何学数将是有限的。

甚至还可以附加说，如果 n 是已知的，能够指定最高极限为 p 。

因此，如果承认运动的可能性，那么只能发明有限（甚至是相当少的）数目的三维几何学。

黎曼几何学 可是，这个结果似乎受到黎曼的反驳，因为这位学者构造了无数不同的几何学，以他名字命名的几何学只是一个特例。

他说，一切均取决于如何定义曲线的长度。现在，有无数定义这一长度的方法，它们中的每一个都可以成为新几何学的起点。

这是完全正确的，不过这些定义中的大多数都与刚性图形的运动格格不入，而在李定理中，则假定这种运动是可能的。因此，这些黎曼几何学尽管在许多方面如此有趣，但它们永远不过是纯粹分析的，是不适合于类似于欧几里得那样的证明的。

希尔伯特几何学 最后韦罗纳塞(Veronese)先生和希尔伯特先生曾构想出更新奇的几何学，他们称其为“**非阿基米德(Archimedes)几何学**”，他们舍弃**阿基米德公理**，而建立新的几何学，根据这条公理，凡以足够大的整数乘以给定的长度，最终必然超过原先给定的任何大的长度。在一条非阿基米德直线上遍布着普通几何学的点，但尚有无穷的点夹在其中，这样一来，旧派几何学家认为相邻接的两截段之间，现在就可以插入无穷多的新点。一句话，按前一章的说法，非阿基米德空间不再是二维连续统，而是三维连续统。

关于公理的本性 大多数数学家仅仅把罗巴切夫斯基几何学视为纯粹的逻辑珍品；可是，他们之中的有些人走得更远。由于许多几何学是可能的，我们的几何学肯定是真的吗？经验无疑教

导我们，三角形三个角之和等于两直角；但是，这是因为我们所涉及的三角形太小了；按照罗巴切夫斯基的观点，差别正比于三角形的面积；当我们计算较大的三角形时，或者当我们的测量变得更精确时，这种差别不能被感觉到吗？因此，欧几里得几何学只不过是暂时的几何学。

为了讨论这种意见，我们首先应该问我们自己，几何学公理的本性是什么？

它们是象康德（Kant）所说的先天综合判断吗？

于是，它们以如此强大的力量强加于我们，以致我们既不能设想相反的命题，也不能在其上建设理论大厦。从而也不会有非欧几何学了。

为了确信这一点，让我们举一个名副其实的先天综合判断，例如下述我们在第一章中已经看到它的举足轻重的作用的例子：

如果一定理对数 1 为真，而且若已证明，只要它对 n 为真，则它对 $n+1$ 亦为真，那么它将对所有的正整数都为真。

可是，企图否认这一命题而摆脱它，企图建立一种类似于非欧几何学的伪算术——那是不能作到的；乍一看，人们甚至会被诱使认为这些判断是分析的。

再者，重新谈谈我们虚构的无厚度的动物吧，我们不能相信，假如这些动物的精神象我们一样，它们会采纳与它们的一切经验相矛盾的欧几里得几何学。

我们能够因此得出几何学公理是经验的真理的结论吗？可是，我们没有作关于理想直线或圆的实验；人们只能针对物质的对象作实验。这样一来，应该作为几何学基础的实验能够建立在什么之上呢？答案是很容易的。

我们在上面已经看到，我们在推理时总是把几何图形看作象

固体一样起作用。因此，几何学能够从经验中借用的东西也许是这些固体的性质。

光的性质及其直线传播也导致了几何学的某些性质，尤其是射影几何学的性质，以致于从这种观点看来，人们会被诱使说，度量几何学是固体的研究，而射影几何学则是光的研究。

但是，困难依然存在，而且它是难以克服的。假如几何学是实验科学，它就不会是精密科学，它就应该是继续修正的对象。不仅如此，从此以后每天都会证明它有错误，因为我们知道，没有严格的刚体。

因此，几何学的公理既非先验综合判断，亦非经验的事实。

它们是**约定**；我们在所有可能的约定中进行选择，要受实验事实的**引导**；但选择依然是**自由的**，只是受到避免一切矛盾的必要性的限制。因此，尽管决定公设取舍的实验定律仅仅是近似的，但公设依然**严格为真**。

换句话说，**几何学的公理（我不谈算术的公理）只不过是伪装的定义。**

于是，我们想到这样一个问题：欧几里得几何学为真吗？

这个问题毫无意义。

这好比问米制是否为真，旧制是否为假；笛卡儿坐标是否为真，极坐标是否为假。一种几何学不会比另一种几何学更真；它只能是**更为方便**而已。

欧几里得几何学现在是、将来依然是最方便的：

1°因为它是最简单的；它之所以如此，不仅仅由于我们的智力习惯，或者由于我不知道的我们对于欧几里得空间的直接的直觉；它本身是最简单的，恰如一次多项式比二次多项式简单；而球面三角的公式比平面三角的公式复杂，对于不了解这些公式的

几何意义的解析家来说，情况似乎依然如此。

2°因为它充分完美地与天然固体的性质相符合，这些固体是我们的手和我们的眼睛所能比较的，我们用它们制造我们的测量工具。

第四章 空间和几何学

让我们由一个小悖论开始。

假如存在着一种生物，具有象我们一样的精神，并且具有象我们一样的感官，但先前没有受过教育，它们能够从适当选择的外部世界中得到这样一些印象，致使它们可以构造不同于欧几里得的几何学，并能把外部世界的现象限制在非欧空间，甚或限制在四维空间。

至于我们，我们所受的教育是在我们的现实世界完成的，假使我们突然被运送到这个新世界上，我们会毫无困难地把该世界上的各种现象归诸于我们的欧几里得空间。反之，假使这些生物被运送到我们的环境中，它们可能会把我们的现象与非欧几里得空间联系起来。

情况不仅仅如此；我们只用很少气力同样能作到这一点。一个毕生致力于此的人，也许能够认识到四维空间。

几何学空间与感性空间 人们经常说，外部世界的映象被局限在空间中，甚至还说，若无这一条件便不能形成映象。人们也说，这种空间因而是为我们的感觉和我们的表象准备好了的**框架**，它等价于几何学家的空间，它具有几何学家的空间的一切性质。

对于如此思考的所有健全的精神来说，前面的叙述必定是十分离奇的。不过，让我们看看，他们是否不受幻觉的影响，而幻觉经过深刻的分析是可以消除的。

首先，严格意义上所说的空间的性质是什么？我所指的空间是几何学的对象，我将称其为**几何学空间**。

下面是它的几个最主要的特征：

1°它是连续的；

2°它是无限的；

3°它有三维；

4°它是均匀的，也就是说，它的所有点都相互等价；

5°它是各向同性的，也就是说，通过同一点的所有直线相互等价。

现在，把它与我们的表象和我们的感觉的框架相比，我可以称这个框架为**知觉空间**。

视觉空间。 首先考虑一个纯粹视觉的印象，它来自在视网膜末端形成的映象。

粗略的分析向我们表明，这个映象是连续的，但是只有二维，这已经有别于几何学空间，我们可以称其为**纯粹视觉空间**。

此外，这个映象被局限在一个有限的框架内。

最后，还有另一种并非不重要的差别：**这种纯粹视觉空间不是均匀的**。除了可以在视网膜上形成的映象以外，视网膜上的所有点并不起相同的作用。黄斑无论如何也不能认为与视网膜边缘的点等价。事实上，不仅同一对象在那里产生了更为逼真的印象，而且在每一个**有限的**框架内，占据框架中心的点永远也不会与接近视网膜边缘的点相同。

毋庸置疑，更为深刻的分析会向我们证明，视觉空间的这种连续性和它的二维只不过是一种幻觉；因此，它与几何学空间的差别还会更多，但是我们注意到，这个结果在第二章已经充分验

证了。

不管怎样，视觉能使我们判断距离，从而能使我们领悟第三维。但是，每一个人都知道，为了清晰地辨认对象，这种对于第三维的领悟本身变为必须作出的调节尝试的感觉，以及双目会聚的感觉。

这些感觉是肌肉感觉，它们完全不同于给我们以头两维概念的视觉。因此，第三维在我们看来似乎并没有起与其他两维相同的作用。所以，所谓的**完全视觉空间**并不是各向同性空间。

的确，它恰恰有三维，这意味着，我们的视觉元素（至少它们联合起来形成广延概念）当其中三个已知时，其余则完全被确定；用数学的语言来说，它们将是三个独立变数的函数。

不过，让我们稍为比较仔细地审查一下这个问题吧！第三维以两种不同的方式向我们揭示出来：调节的尝试和眼睛的会聚。

无疑地，这两种指示总是一致的，在它们之间存在着恒定的关系，或者用数学术语来说，测量这两个肌肉感觉的两个变数在我们看来似乎不是独立的；或者，为避免求助于已经精炼的数学概念，我们可以再次返回到第二章的语言，把同一事实陈述如下：如果两个会聚感觉A和B是不可区分的，则相应伴随它们的两个调节感觉A'和B'将同样是不可区分的。

但是，可以说，我们在这里有实验事实；没有什么先验的东西妨碍我们作相反的假定，如果出现相反的情况，如果这两个肌肉感觉相互完全独立，我们便不得不多计及一个独立变数，“完全视觉空间”对我们来说似乎是四维物理连续统。

我还要再说一句，我们在这里甚至有**外部**经验事实。没有什么东西妨碍我们假定有一种生物，它具有象我们那样的精神和感官，它处在这样一个世界上，光只有在穿过复杂形式的反射介质

后，才能到达它那里。作为我们判断距离的两个指示不会再以恒定的关系相关联。在这样一个世界上受它的感觉教育的生物，无疑会把四维赋予完全视觉空间。

触觉空间和动觉空间 “触觉空间”比视觉空间更为复杂，而且离几何学空间更远。对于触觉，没有必要去重复我对于视觉所作的讨论。

不过，除了视觉和触觉材料外，还有其他感觉。这些感觉对于空间概念的产生同样有贡献，而且比视觉和触觉更大。每一个人都知道这些；它们伴随着我们所有的动作，通常称之为肌肉感觉。

相应的框架就构成了所谓的**动觉空间**。

每一肌肉都会产生一种特殊的、能够增加或减少的感觉，以致于我们肌肉感觉的总数取决于与我们所有的肌肉同样多的变数。从这种观点来看，**我们的肌肉有多少，动觉空间就有多少维**。

我知道人们会说，如果肌肉感觉有助于形成空间概念，那是因为我们感觉到每一动作的**方向**，它成为感觉的一个组成部分。如果这是真的，如果肌肉感觉在不伴随这种几何学的方向感觉的情况下就不能产生，那么几何学空间确实就是强加给我们感觉的一种形式。

但是，当我分析我的感觉时，我丝毫也没有觉察到这一点。

我所看到的是相应于在同一方向动作的感觉，它们在我的头脑中仅仅通过**观念联系**而结合。正是这种联系，我们称之为“方向感觉”，它是可以简化的。因此，这种感觉不能在单一的感觉中找到。

这种联系极其复杂，因为根据四肢的位置，同一肌肉的收缩

可以对应于十分不同的方向的运动。

而且，这种联系显然被得到了；象所有的观念联系一样，它也是**习惯**的结果，这种习惯本身是由许多**经验**引起的；毫无疑问，如果我们的感觉训练是在不同的环境中完成的，在那里我们会受到各种不同印象的影响，那就必然产生相反的习惯，我们的肌肉感觉就可能会按照其他规律相联系。

知觉空间的特征 由此可见，在视觉、触觉和动觉这三种形式之下的知觉空间基本上与几何学空间不同。

它既不是均匀的，也不是各向同性的；人们甚至不能说它有三维。

人们常说，我们把外部感觉的对象“投影”于几何学空间；我们把它们“局限”起来。

这有意义吗？若有，其意义又是什么？

这意味着我们在几何学空间中**想象**外部对象吗？

我们的表象只是我们感觉的复制品；因此，它们只能和这些感觉排列在同一框架内，也就是说，排列在知觉空间内。

正如画家不能在平面画布上画出具有三维的对象一样，我们也不能在几何学空间中想象外部物体。

知觉空间仅仅是几何学空间的映象，映象由于透视而改变了形状，我们只能通过把对象纳入透视规则来想象它们。

因此，我们无法在几何学空间中**想象**外部物体，而我们可以就这些物体**推理**，犹如它们处在几何学空间中一样。

其次，当我们说我们把这样一个物体“局限”在空间这样一点，这意味着什么呢？

这仅仅意味着，我们想象为了达到那个对象所必要的动作；

人们可能不这样说：为了想象这些动作，必须把动作本身投影在空间，从而空间的概念必须预先存在。

当我说我们想象这些动作时，我只是意指我们想象伴随这些动作的肌肉感觉，这些肌肉感觉没有一点几何学的特征，从而根本不含空间概念预先存在的意思。

状态变化和位置变化 可是，有人会说，如果几何学空间的观念没有强加于我们的精神，另一方面，如果我们的感觉没有一个能够提供这一观念，那么它是怎样产生的呢？

这是现在必须考察的问题，需要花费一些时间，不过我能够用几句话概述一下我就其所提出的尝试性解释。

我们的感觉若孤立起来，没有一个能够使我们产生空间观念，我们只有研究这些感觉相继发生的规律，才能得到这一观念。

我们首先看到，我们的印象易于变化；但是在这些变化中，我们马上就可以作出区分。

在一个时期我们说，产生这些印象的对象改变了状态，在另一个时期我们说，它们改变了位置，它们仅仅发生了位移。

不管一个对象改变它的状态，还只是改变它的位置，在我们看来，这总是以相同的方式解释的：**由于印象集合的改变。**

可是，我们怎样去区别这二者呢？这是很容易说明的。如果只有位置变化，我们就能够作出某些动作恢复初始的印象集合，这些动作使我们在同一**相对的**地位面对运动对象。从而，我们**矫正**所发生的改变，我们通过相反的改变重建初始状态。

例如，如果是视觉的问题，如果对象在我们眼前改变它的位置，那么我们能够“用眼睛追踪它”，通过眼球的适当动作，保持它的映象在视网膜的同一点。

这些动作之所以被我们意识到，因为它们是由主观意志所控制的，因为肌肉感觉伴随着它们，但是这并不意味着我们在几何学空间想象它们。

这样一来，表示位置变化特性的东西，把位置变化与状态变化区别开来的东西，就在于位置变化能够用这种方法加以**矫正**。

因此，我们从印象总和A到印象总和B，正好有两种不同的途径：

1°不受主观意志控制而且不经受肌肉感觉；当对象改变位置时发生这种情况；

2°受主观意志控制而且伴随肌肉感觉；当对象不动而我们相对于对象作相对运动时，便发生这种情况。

果真如此，从印象总和A到印象总和B仅仅是位置变化。

由此可知，若不借助于“肌肉感觉”，则视觉和触觉不能给我们以空间概念。

这个概念不仅不能从单一的感觉得到，甚或不能从**感觉系列**得到，而且，**不可动**的生物从来也不可能获得空间概念，因为它不能通过它的动作矫正外部对象位置变化的结果，从而没有理由把位置变化和状态变化区别开来。如果它的运动是不受意志控制的，或者没有任何感觉相伴随，它也不能获得空间概念。

补偿的条件 有一种补偿能使两个在其他方面相互独立的变化彼此矫正，象这样的补偿怎么是可能的？

一个**已经熟悉几何学**的精神会如下推理：

显然，如果存在着补偿，那么以外部对象的各部分为一方，以各种感觉器官为另一方，都必须在两种变化之后处于同一**相对**位置。为此，在这种情况下，外部对象的各部分同样必须相互之

间保持同一相对位置，我们身体的各部分相互之间也必须如此。

换句话说，在第一种变化中，外部对象必须象刚体那样移动，在矫正第一种变化的第二种变化中，它也必须随着我们整个身体象刚体那样移动。

在这些条件下，补偿可以发生。

但是，由于我们还没有形成空间概念，迄今**我们对几何学还一无所知**，因此我们不能这样推理，我们不能先验地预见补偿是否可能。不过，经验告诉我们，补偿有时会发生，而且正是根据这一经验事实，我们才开始把状态变化与位置变化区别开来。

固体和几何学 在周围的对象中，存在着一些经常经受位移的对象，这些位移同时易于受到我们自己身体的**相关动作**的矫正；这些对象就是**固体**。

其他形状可变的对象，仅仅是例外地经受同样的位移（位置变化而不是形状变化）。当一个物体改变其位置**和其形状**时，我们不再能够用适当的动作使我们的感官**相对于**这个物体返回到同一位置；从而，我们不再能够重建整个原始印象。

只是到后来，作为新经验的结果，我们才学会如何把可变形的物体分解为较小的部分，致使每一部分几乎按照与固体相同的规律移动。就这样，我们把“形变”与其他状态变化区别开来；在这些形变中，每一部分仅仅经受了能够加以矫正的位置变化，但是它们的集合所经受的改变却更为深刻，而且不易受相关动作的矫正。

这样的概念已经十分复杂，它必然在比较晚的时候才能出现；而且，如果固体的观察未曾告诉我们区别位置变化，这个概念也不能产生。

所以，假使在自然界没有固体，那么便不会有几何学。

另一种议论也值得认真注意。设一固体相继占据位置 α 和 β ；它在第一个位置，使我们感受到印象总和A，在第二个位置，使我们感受到印象总和B。现在，设有第二个物体，它具有与第一个固体完全不同的性质，例如颜色不同。设它从位置 α 移到位置 β ，它在 α 时使我们感受到印象总和A'，在 β 时使我们感受到印象总和B'。

一般说来，总和A与总和A'毫无共同之处，总和B与总和B'亦然。因此，从总和A到总和B，以及从总和A'到总和B'的转变，一般而言是本身毫无共同之处的两种变化。

可是，我们认为这两种变化是位移，而且我们认为它们是**相同的位移**。这是怎么一回事呢？

这仅仅是因为，它们二者能够受到我们身体**同一**相关动作的矫正。

所以，“相关动作”构成了两个现象的**唯一联系**，否则，我们永远也不会梦想把它们连接起来。

另一方面，我们身体由于有许多关节和肌肉，因而可以作出各种不同的动作；但是，所有动作都不能“矫正”外部对象的变动；只有我们的整个身体，或者至少我们起作用的感官作为一个整体移动时，即它们的相对位置不变或以固体那样移动时，这样的动作才能矫正外部对象的变动。

让我们概括一下：

1°首先我们可以区分两种现象范畴：

一些是不受主观意志控制的、不伴随肌肉感觉的，我们把它归诸于外部对象；这些是外部变化；

另一些在性质上恰恰相反，我们把它们归诸于我们自己身体

的动作，这些是内部变化。

2° 我们注意到，这些范畴每一个的某些变化可以受到另一范畴相关变化的矫正。

3° 在外部变化中，我们区分出与另一范畴相关的变化；我们称这些变化为位移；同样，在内部变化中，我们区分出与第一个范畴相关的变化。

由于这种相关性，我们称之为位移的现象的特殊种类就被这样定义了。

这些现象的规律构成几何学的对象。

均匀性定律 在这些规律中，第一个就是均匀性定律。

设由于外部变化 α ，我们从印象总和A到印象总和B，接着这一变化 α 受到相关的、由主观意志控制的动作 β 的矫正，于是我们恢复到总和A。

现在，设另一个外部变化 α' 使我们重新从总和A到总和B。

经验告诉我们，这个变化 α' 象 α 一样，也易受相关的、由主观意志控制的动作 β' 的矫正，这个动作 β' 与校正 α 的动作 β 相应于同样的肌肉感觉。

这个事实通常被说成是：**空间是均匀的和各向同性的。**

也可以说，一个动作一旦产生之后，它可以第二次、第三次地重复，如此类推，而它的特性却保持不变。

在第一章，我们讨论了数学推理的本性，我们看到了必须赋予无限地重复同一操作的推理的重要性。

数学推理正是从这种重复中获得它的能力的；因此，正是由于均匀性定律，它才把支撑点放在几何学事实上。

为完全起见，除均匀性定律外，还应当添加许多其他类似的

定律，我不愿讨论其中的细节，但是数学家用一句话把它们概括为：多个位移形成“一个群”。

非欧几里得世界 如果几何学空间是强加在我们**每一个**单独考虑的表象上的框架，那么就不可能拆除这个框架来想象映象，而且我们也丝毫不能改变我们的几何学。

然而情况并非如此；几何学只不过是这些映象前后相继的规律的概要。于是，没有什么东西妨碍我们想象一系列表象，这些表象在各方面与我们通常的表象类似，但前后相继的规律不同于我们习惯的规律。

其次，我们能够设想在这些定律遭到倾覆的环境中接受教育的生物，它们必定具有与我们截然不同的几何学。

例如，假定有一个用大球面包围起来的世界，它服从下述定律：

温度不是均匀的；在中心温度最高，随着距中心距离的增大，温度成比例地减小，当接近包围这个世界的球面时，温度降至绝对零度。

让我再把这个温度变化规律精确地说明一下：设 R 是有限球面的半径，设 r 是所考虑的点到这个球面中心的距离。绝对温度将与 $R^2 - r^2$ 成比例。

我将进而假定，在这个**个**世界上，一切物体都具有同一膨胀系数，从而任何量尺的长度都与它的绝对温度成比例。

最后，我将假定，一物体从一点转移到温度不同的另一点后，它能立即与新环境处于热平衡。

在这些假设中，丝毫没有什么是矛盾的或不可想象的。

于是，一个可动对象越接近有限球面，它会成比例地愈变愈

小。

首先要注意，从我们通常的几何学的观点来看，尽管这个世界是有限的，但是对于这个世界的居民来说，它似乎是无限的。

事实上，当这些居民试图接近有限球面时，它们逐渐变冷，而且变得愈来愈小。因此，它们迈出的步子也愈来愈小，结果它们永远也不能到达有限球面。

对于我们来说，如果几何学只是研究刚体运动的规律的话，那么对这些假想的生物而言，几何学将研究我刚刚说过的**因温度差而变形的**固体的运动规律。

毫无疑问，在我们的世界上，由于或热或冷，天然固体同样经受形状和体积的变化。但是，在奠定几何学的基础时，我们忽略了这些变化，因为除了这些变化微乎其微外，它们也不规则，从而在我们看来似乎是偶然的。

在我们假设的世界上，情况不再是这样，这些变化遵循规则的、十分简单的定律。

而且，组成这个世界的居民的身体之各固体部分会经受同样的形状变化和体积变化。

我还要作另外的假设；我将假定，光通过各种折射媒质传播，而且折射率与 $R^2 - r^2$ 成反比。很容易看到，在这些条件下，光线不可能是直线的，而是圆形的。

为了证实前面所说的东西，在我看来依然是要证明，外部对象位置的某些变化能够被居住在这个想象世界上的有知觉生物的相关动作**矫正**，用这种方式来恢复这些有知觉生物所体验过的原始印象集合。

事实上，假定一对象被移动，同时经受了形变，它不象刚体，而象与上面假定的温度定律严格一致的固体那样经受了不相等的

膨胀。为简洁起见，请容许我把这样的运动叫作**非欧几里得位移**。

假如一个有知觉的生物恰恰在附近，它的印象将被该对象的位移所改变，但是它能够通过以合适的方式运动而重建这些印象。只要最后该对象和被视为单一个体的有知觉的生物之集合经受了一种特殊位移就足够了，我刚才把这种位移叫作**非欧几里得位移**。倘若假定这些生物的四肢与它们居住的世界的其他物体按照同一规律膨胀，那么这就是可能的。

从我们通常的几何学的观点来看，尽管物体在这种位移中发生了形变，而且它们的各部分不再处于同一相对位置，不过我们将看到，有知觉的动物的印象再次变成相同的了。

事实上，虽然各部分的相互距离可以改变，但是原来接触的部分又处于接触中。因此，触觉印象没有变化。

另一方面，考虑到上面关于光线折射和曲率所作的假设，则视觉印象也依然相同。

因此，这些假想的生物象我们一样，可以把它们目睹的现象进行分类，也可以在这些现象中区分出易于受到被相关的、由主观意志支配的动作而矫正的“位置变化”。

假使它们构造几何学，将不会象我们那样研究刚体的运动；它们的几何学将研究它们如此区分的位置变化，这种变化无非是“**非欧几里得位移**”；**它们的几何学将是非欧几何学**。

这样一来，象我们自己一样的生物，由于在这样一个世界受教育，它们不会有与我们相同的几何学。

四维世界 正如我们能够想象非欧几里得世界一样，我们也能够想象四维世界。

视觉——即使用一只眼睛——和与眼球运动有关的肌肉感觉

一起，便足以告诉我们三维空间。

外部对象的映象描绘在二维画布的视网膜上；它们是**透视图**。

但是，因为眼睛和物体是可动的，所以我们依次看到从不同的观察点得到的同一物体的各种透视图。

同时，我们发现，从一个透视图到另一个透视图的转换常常伴随着肌肉感觉。

如果从透视图A到透视图B的转换以及从透视图A'到透视图B'的转换伴随着同样的肌肉感觉，我们把它们相互比拟为同一性质的操作。

其次，研究一下这些操作结合在一起的规律，我们认识到，它们形成一个群，这个群的结构与刚体运动的结构相同。

现在，我们看到，正是从这个群的特性，我们引出了几何学空间的概念和三维的概念。

这样一来，我们明白了三维空间的观念如何从这些透视图的展示中产生出来，尽管它们中的每一个仅仅是二维的，这是由于**它们按照某些规律相互跟随**。

好了，正如三维图形的透视图能够作在平面上一样，我们也能够把四维图形的透视图作在三维(或二维)的图画上。对于几何学家来说，这只不过是儿戏而已。

我们甚至能够从许多不同的观察点对同一图形作出许多透视图。

我们能够想象这些透视图，由于它们只有三维。

试设想一下同一对象的各个透视图依次相继出现，从一个到另一个的转换伴随着肌肉感觉。

当这些转换中的两个与相同的肌肉感觉联系时，我们当然要把二者看作是**两个相同性质的操作**。

其次，没有什么东西妨碍我们设想，这些操作按照我们选择的任何定律结合，例如为了形成一个与四维刚体运动具有同一结构的群。

在这里，没有什么是不可图示的，但是，这些感觉恰恰是那些具有二维视网膜又能在四维空间里运动的生物所感受到的感觉。

在这种意义上，我们可以说，第四维是可以想象的。

按这样的方式，不可能表示我们在前一章讲过的希尔伯特空间，因为这个空间已不是二维连续统。所以，它与我们平常的空间大相径庭。

结论 我们看到，在几何学的起源中，经验起着必不可少的作用；但是，如果由此得出几何学是——即使部分地是——经验科学的结论，那可就错了。

假如几何学是经验的，那它只能是近似的和暂时的。多么粗糙的近似啊！

几何学只可能是研究固体的运动；但是实际上，它并不是用来从事天然固体的研究，它把某些绝对刚性的理想固体作为对象，这些理想固体只不过是天然固体的一种简化的和相差很远的图象。

这些理想固体的概念来自我们精神的全部作用，经验仅仅是导致我们从这些作用中产生出这一概念的一个机会。

几何学的对象是研究特殊的“群”；不过，一般的群概念在我们的精神预先存在着，至少是潜在地存在着。它不是作为我们感性的形式，而是作为我们知性的形式强加于我们。

在所有可能的群中，必须选择出的可以说只是**标准的群**，我

们将把自然现象归属于它。

在这一选择中，经验引导我们，而没有把它强加于我们；经验没有告诉我们那一个是最真实的几何学，而是告诉我们那一个是最方便的几何学。

要注意，我没有放弃使用通常几何学的语言，也能描述上面设想的奇异的世界。

事实上，即使我们迁移到那个世界，我们也不必改变语言。

在那里受教育的生物无疑发现，创造一种不同于我们的、更好地适应它们印象的几何学是比较方便的。至于我们，面对同一印象，可以肯定地说，我们会发现不改变我们的习惯是比较方便的。

第五章 经验和几何学

1. 在前文中，我已经花了许多时间力图证明，几何学原理不是经验的事实，尤其是欧几里得的公设不能用实验来证明。

不管已经给出的那几个理由在我看来是多么具有决定性，我认为还应该强调这一点，因为在这里，不正确的观念在许多人的头脑中是根深蒂固的。

2. 如果我们用材料制作一个圆圈，测量它的半径和周长，并看到这两个长度之比等于 π ，那么我们想作什么呢？我们想作用来制造这个**圆形东西**的物质特性的实验，以及用来制造量尺的物质特性的实验。

3. 几何学和天文学问题也可以以另一种方式提出。如果罗巴切夫斯基几何学是真实的，那么十分遥远的恒星的视差将是有限的；如果黎曼几何学是真实的，视差将是负的。这些似乎是在实验能及的范围内的结果，可以期望，天文观察能使我们在三种几何学之间作出抉择。

但是，在天文学中，直线只是意味着光线的路径。因此，如果发现了负视差，或者证明了一切视差都大于某一极限，那么两条道路向我们敞开着；我们即可以放弃欧几里得几何学，也可以修正光学定律，假定光严格说来不是以直线传播的。

不用说，所有的世界都会认为后一种解决办法比较有利。

因此，欧几里得几何学一点也不害怕新颖的实验。

4. 某些现象在欧几里得空间可能站得住脚，而在非欧几里

得空间则不可能站得住脚，以致经验在证实这些现象时便与非欧几里得假设直接矛盾，情况果真如此吗？就我的本份而言，我没有思索这样一个能够被提出的问题。按照我的见解，它正好等价于下述问题，其荒谬程度在所有的人看来都是一目了然的：存在着用米和厘米可以表示的长度，但却不能用呎、英尺和英寸来测量，以致当经验弄清这些长度存在时，它却直接与度为六英尺的假设相矛盾吗？

比较仔细地考察一下这个问题吧。我假定，直线在欧几里得空间具有任何两种特性，我将称其为A和B；在非欧几里得空间，它还具有特性A，但不再具有特性B；最后，我假定，在欧几里得空间和非欧几里得空间中，直线只是具有特性A的线。

果真如此，经验就能够在欧几里得的假设和罗巴切夫斯基的假设之间作出裁决了。结果查明，能用实验检验的一个确定的具体的对象，例如一束光线，具有特性A；我们便可以断定，它是直线，接着我们再研究它是否具有特性B。

然而，情况并非如此；没有一种特性象特性A那样，能够作为一种绝对标准使我们辨认直线以及区分直线和其他每一种线。

例如，我们是否可以说：“这样的特性如下：直线是这样一种线，即就是使包含该线的图形运动，而该图形各点的相互距离不变，从而这个线上的所有点依然是固定的？”

事实上，这就是在欧几里得空间或非欧几里得空间中属于直线、且唯一属于直线的特性。但是，我们怎样用实验来弄清它是否属于这个或那个具体对象呢？这就必须测量距离，可是人们怎么会知道，我用材料作成的仪器所测量的具体大小实际上表示的是抽象的距离呢？

我们只不过是把困难向后推了一下而已。

其实，我刚才说过的特性不仅仅是直线的特性，它是直线和距离二者的特性。为了把它作为绝对标准，我们不仅必须证实，除直线和距离之外，它不属于任何线，而且还必须证实，它不属于直线之外的线以及不属于距离之外的数量。不过，这是不正确的。

因此，不可能设想一种能够在欧几里得体系加以解释、而在罗巴切夫斯基体系不能加以解释的具体实验，于是我可以得出结论：

经验在任何时候都不会与欧几里得公设矛盾；另一方面，任何经验永远也不会与罗巴切夫斯基公设矛盾。

5. 但是，欧几里得(或非欧几里得)几何学永远不能直接与实验矛盾，这还是不够的。它能够与经验一致，只是因为违背了充足理由律和空间相对性原理，这种情况不可能发生吗？

我愿自我解释一下：考虑任何一个物质系统；一方面，我必须注意这个系统各物体的“状态”(例如，它们的温度，它们的电势等等)，另一方面，必须注意它们在空间的位置；而且，在使我们规定这个位置的数据中，我们能够把规定这些物体相对位置的相互距离与规定该系统绝对位置和它在空间的绝对取向的条件区别开来。

在这个系统中将要发生的现象的规律取决于这些物体的状态和它们的相互距离；但是，因为空间的相对性和无源性，它们将不依赖该系统的绝对位置和取向。

换句话说，物体在任何时刻的状态和它们的相互距离仅取决于这些同样的物体的状态和它们在初始时刻的相互距离，但是完全不依赖该系统的绝对初始位置和绝对初始取向。简而言之，这就是我所命名的**相对性定律**。

迄今，我是作为一个欧几里得几何学家讲话。正如我已经说过的，无论什么经验，都容许按照欧几里得假设进行解释；但是，它同样容许按照非欧几里得假设进行解释。好了，我们作了一系列实验；我们根据欧几里得假设解释它们，而且我们认出，这些如此解释的实验没有违背这个“相对性定律”。

我们现在根据非欧几里得假设解释它们：这总是可能的；在这个新解释中，不同物体的非欧几里得距离一般不同于原来解释中的欧几里得距离。

以这种新方式解释的实验还会与我们的“相对性定律”一致吗？如果不存在这种一致，我们也没有权利说经验证明了非欧几里得几何学的谬误吗？

很容易看到，这是杞人忧天；事实上，为了十分严格地使用相对性定律，必须把它应用到整个宇宙。这是因为，如果仅仅考虑这个宇宙的一部分，如果这部分的绝对位置恰恰改变了，那么它与宇宙其他物体的距离同样也会改变，因而这些物体对所考虑的宇宙这部分的影响便会增大或减小，这就要修正在那里发生的现象的定律。

可是，假如我们的系统是整个宇宙，那么经验便不能给出它在空间的绝对位置和取向的信息。不管我们的仪器多么完善，它们能够告诉我们的一切将是宇宙各部分的状态和它们的相互距离。

于是，我们的相对性定律可以陈述如下：

在任何时刻我们根据我们的仪器能够得到的读数将仅仅依赖于我们根据同一仪器在初始时刻能够得到的读数。

现在，这样一种陈述与经验事实的每一种解释无关。如果定律在欧几里得解释中为真，那么它在非欧几里得解释中亦为真。

请容许我在这里插一点话。我在上面已说过规定系统各物体的位置的数据；我同样要说规定它们的速度的数据；我接着必须把各物体相互距离改变的速度区别开来；另一方面，必须区别系统的平动速度和转动速度，也就是它的绝对位置和取向变化的速度。

为了使人们十分满意，相对性定律可以这样叙述：

物体在任何时刻的状态和它们的相互距离，以及这些距离在同一时刻变化的速度，将仅仅取决于这些物体在初始时刻的状态和它们的相互距离以及这些距离在初始时刻的变化速度，但是它们既不依赖于系统的绝对初始速度，也不依赖于它的绝对取向，还不依赖于绝对位置和取向在初始时刻的变化速度。

不幸的是，这样陈述的定律与实验不符，至少是在这些实验按通常那样解释时。

设一个人被运送到总是阴霾密布的行星上，以致他永远也看不到其他恒星；他生活在这个行星上，仿佛行星在空间中是孤立的一样。不过，这个人既可以通过测量行星的扁率（通常借助于天文观察来完成，但也能够借助于纯粹的大地测量方法），也可以重作傅科(Foucault)摆实验，从而可以意识到行星转动。因此，这个行星的绝对转动便变得很明显。

这是一个使哲学家震惊、使物理学家不得不接受的事实。

我们知道，牛顿从这一事实中推断出绝对空间的存在；我自己完全不能采纳这一观点。我将在第三编解释其中的缘由。目前，我不打算着手解决这个难题。

因此，在陈述相对性定律时，我们必须听任把规定物体状态数据中的各种速度包括在内。

无论如何，这个困难对于欧几里得几何学与对于罗巴切夫斯

基几何学都是一样的；因此，我不需要为此而烦恼，我只是顺便提到它。

重要的是这个结论：实验不能在欧几里得几何学和罗巴切夫斯基几何学之间作出裁决。

6. 总而言之，无论我们从那一方面进行考察，都不可能 在几何学经验主义中发现合理的意义。

实验只不过告诉我们物体相互之间的关系，至于物体与空间的关系，或者空间各部分的相互关系，没有一个实验影响到或能够影响到。

“是的”，你回答说：“单一的实验是不够的，因为它只能给我 一个带有许多未知数的方程，可是当我作了足够的实验后，我就有了足以计算所有未知数的方程。”

知道船的主桅的高度还不足以计算船长的年龄。当你测量了船上每一块木头，你就会得到许多方程，可是你还不知道他的年龄。你所测量的一切仅仅与木块有关，它们只能向你揭示与这些木块有关的东西。正是这样，你的实验无论多么多，它们只是影响到物体相互之间的关系，而丝毫也不能向我们揭示空间各部分的相互关系。

7. 你又要说，如果实验与物体有关，那么它们至少与 物体的几何学特性有关吧？

可是，首先一个问题是，你是如何理解物体的几何学特性呢？我假定它就是物体与空间的关系问题；因此，这些特性是只涉及到物体相互之间关系的实验所无法达到的。仅仅这一点就足以证明，不可能存在这些特性的问题。

还是让我们从理解物体的几何学特性这个词语的 意义 开始吧。当我说一个物体由许多部分组成时，我假定我在其中没有陈

述几何学特性，即使我同意把我认为最小的部分不恰当地称之为点，这依然是对的。

当我说，某一物体的某一部分与另一物体的某一部分接触时，我陈述了关于这两个物体相互关系的命题，而没有陈述它们与空间关系的命题。

我假定你将承认我的观点，这一切并不是几何学特性；我至少确信，你将承认我所说的，这些特性与度量几何学的全部知识无关。

预先假定了这一点后，我设想我们有一个固体，它是由共同连接在一个端点O上的八根细铁棒OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH构成的。此外，设我们有第二个物体，例如一块用三个小墨点标记的木块，我称其为 α, β, γ 。我进一步假定，已弄清 $\alpha\beta\gamma$ 可以与AGO接触（我意指 α 与A, β 与G, γ 与O同时接触），然后我可以相继使 $\alpha\beta\gamma$ 与BGO, CGO, DGO, EGO, FGO接触，其次与AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO接触着，接着使 $\alpha\gamma$ 与AB, EC, CD, DE, EF, FA接触。

这些是我们在预先没有任何空间形式或空间度量特性概念的情况下就可以作出的决定。它们决不涉及“物体的几何学特性”。如果物体按照与罗巴切夫斯基群相同结构的群（我意指按照与罗巴切夫斯基几何学中的固体相同的定律）而运动，那么这些决定将是不可能的。因此，它们足以证明，这些物体按照欧几里得群运动，或者至少物体不按照罗巴切夫斯基群运动。

显而易见，这些决定与欧几里得群一致。

这是因为，这些决定能够在下述条件下作出：如果物体 $\alpha\beta\gamma$ 是我们通常几何学的呈现为直角三角形形式的刚体，如果点ABC DEFGH是多面体的顶点，而多面体又是由我们通常几何学的两个

正六棱锥形成的，且具有公共底面ABCDEF，其一顶点为G，另一顶点为H。

现在假定，不是前面的决定，而是注意到，如上所述的 $\alpha\beta\gamma$ 能够依次用于AGO, BGO, CGO, DGO, HGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO，然后 $\alpha\beta$ (而不再是 $\alpha\gamma$)能够依次用于AB, BC, CD, DE, EF和FA。

如果非欧几何学是真实的，如果物体 $\alpha\beta\gamma$ 和OABCDEFGH是刚体，如果第一个物体是直角三角形而第二个物体是适当大小的对顶正六棱锥，那么这些就是可以作出的决定。

因此，如果物体按照欧几里得群运动，那么这些新决定是不可能的；但是，如果假定物体按照罗巴切夫斯基群运动，那么它们就变成可能的了。因此(如果人们作出了它们)，它们就足以证明，上述物体不能按照欧几里得群运动。

就这样，即使不就空间的形式、空间的本性、物体和空间的关系作任何假设，即使不赋予物体以任何几何学特性，我也作出了观察资料，能够使我证明，在一种情况下物体按照其结构是欧几里得群的群而运动，在另一种情况下物体按照其结构是罗巴切夫斯基群的群而运动。

而且，人们不能说，第一种决定的集合构成了证明空间是欧几里得空间的实验，第二种决定的集合构成了证明空间是非欧几里得空间的实验。

事实上，人们能够设想(我说设想)，如此运动的物体使第二组决定成为可能的。其证据在于，初次遇到的技工，只要他愿意卖力花钱，就能制造这样的物体。可是，你不要由此得出结论，说空间是非欧几里得空间。

不仅如此，虽然技工制造出我刚才所说的奇怪的物体，但是

因为普通物体继续存在，所以有必要得出结论说，空间同时是欧几里得空间和非欧几里得空间。

例如，假定我们有一个半径为R的大球面，温度从这个球的中心到球表面按照我在描述非欧几里得世界时所讲过的规律减小。

我们可以有这样的物体，其膨胀可以忽略不计，其行为象通常的刚体一样；另一方面，我们也可以有膨胀率很大的物体，其行为象非欧几里得固体。我们可以有两个对顶棱锥OABCDEFGH和O'A'B'C'D'E'F'G'H'以及两个三角形 $\alpha\beta\gamma$ 和 $\alpha'\beta'\gamma'$ 。第一个对顶棱锥是直线的，而第二个是曲线的；三角形 $\alpha\beta\gamma$ 是用不会膨胀的物质作成的，而另一个则是用极易膨胀的物质作成的。

于是，用对顶棱锥OAH和三角形 $\alpha\beta\gamma$ 就可以作出第一种观察资料，用对顶棱锥O'A'H'和三角形 $\alpha'\beta'\gamma'$ 就可以作出第二种观察资料。这样一来，实验似乎先证明欧几里得几何学为真，接着又证明它为假。

因此，实验与空间无关，而与物体有关。

补 遗

8. 为使内容完整起见，我应当谈一个十分棘手的问题，这也许需要太长的篇幅；在这里，我只想概括地介绍一下我在《形而上学和道德评论》和《一元论》杂志中详述过的东西。当我说，空间有三维，我们意味着什么呢？

我们已经看到我们的肌肉感觉向我们揭示出的那些“内部变化”的重要性。它们可以用来表征我们身体的各种**姿势**的特征。任取这些姿势中的一个A作为起点。当我们从这个初始姿势到任何一个其他的姿势B时，我们感觉到一个肌肉感觉系列，这个系列

S将确定B。不管怎样，让我们注意一下，我们常常会把两个系列S和S'视为确定了同一姿势B(由于初始姿势A和最终姿势B依然相同，中间姿势和相关感觉可以不同)。可是，我们将如何辨认这两个系列等价呢？因为它们可以用来补偿同一外部变化，或者更一般地说，因为当这是一个补偿外部变化的问题时，一个系列能够被另一个代替。

在这些系列中，我们区分出唯有它们自己就能够补偿外部变化的系列，我们称其为“位移”。因为我们不能在两个十分接近的位移之间作出区分，所以这些位移的总和就呈现出物理连续统的特征；经验告诉我们，它们是六维物理连续统的特征；但是，我们还不知道空间本身有多少维，我们首先必须解决另一个问题。

空间的点是什么？每一个人都认为他了解这个问题，可是那是幻觉。当我们试图想象空间的点时，我们看到的只是白纸上的黑点、黑板上的白斑，这总是一个东西。因此，该问题应当如下理解：

当我说，对象B处于对象A刚才所占据的同一点时，我意指什么呢？或者更进一步，是什么标准将使我认识到这一点呢？

我意味着，**虽然我没有移动**(这是我的肌肉感觉告诉我的)，可是我的第一个手指刚才接触了对象A，现在却接触着对象B。我可以用其他标准；例如另一个手指或视觉。但是，第一个标准是充分的；我知道，如果它回答是，那么所有其他标准将给出同一回答。我是**通过经验**知道它的，我不能**先验地**知道它。由于同一理由，我说触觉不能超距地进行；这是陈述同一经验事实的另一种方式。相反地，若我说视觉可以超距地进行作用，则其意指当其他标准回答否时，视觉提供的标准可以回答是。

事实上，对象虽然离开了，可是它可以在视网膜的同一点形

成它的映象。视觉回答是，因为对象依然停留在同一点，触觉回答否，是因为我刚才接触对象的手指现在不再接触它了。假如经验向我们表明，当另一个手指说否时，一个手指可以回答是，那么我们同样应该说，触觉超距地进行作用。

简而言之，对于我的身体的每一个姿势，我的第一个手指确定一点，正是这而且唯有这，才规定了空间的一点。

这样一来，每一个姿势都对应于一点；但是，常常也出现这种情况，同一点却有许多不同的姿势相对应（在这种情况下，我们说我们的手指没有移动，但身体的其余部分却运动了）。因此，我们在姿势变化中区分出手指没有在那里移动的姿势变化。我们是怎样被引导到这儿的？正因为我们常常注意到，在这些变化中，与手指接触的对象依然与手指接触着。

因此，借助于我们这样区分的变化之一，让我们把所有能够从每一个其他姿势得到的姿势归入同一类。空间的同一点将对应于该类的所有姿势。所以，一点将对应于每一类，而一类将对应于每一点。可是，人们可以说，经验达到的不是点，而正是这个变化类，或者更恰当地讲，正是肌肉感觉的对应类。

而且，当我们说空间有三维，我们仅仅意味着，这些类的总和在我们看来似乎具有三维物理连续统的特征。

人们可能被诱导得出结论说，正是经验告诉我们空间有多少维。但是，实际上，在这里也是我们的经验与空间无关，而与我们的身体以及我们的身体和邻近的对象的关系有关。而且，我们的经验是极其粗糙的。

在我们的头脑中，预先存在着一定数目的群的潜在观念——李已经展开了群论。我们将选择那一个群，以使用它作为一种标准比较自然现象呢？而且，这个群选定之后，我们将采用它的那

一个子群来表征空间点的特征呢？经验通过向我们表明那一种选择本身最适合于我们身体的特性来引导我们。但是，它的作用仅限于此。

祖 传 的 经 验

常常有人说，如果个人的经验不能够创造几何学，那么对于祖传的经验而言情况则不然。这意味着我们不能用实验证明欧几里得公设，而我们的祖先却能作到这一点吗？一点也不。这意味着，通过自然选择，我们的精神本身**适应了**外部世界的条件，它采用了对于人种来说是**最有利的**几何学，或者换句话说，是**最方便**的几何学。这与我们的经验完全相符；几何学不是真实的，它是有利的。

第三编 力

第六章 经典力学

英国人把力学当作经验科学来讲授；在大陆，力学总是或多或少地被作为演绎的和先验的科学来讲述。不言而喻，英国人是正确的；可是，其他方法为何能够坚持得如此长久？为什么大陆学者企图摆脱他们的前辈的惯例，可是总是不能完全获得自由呢？

另一方面，假使力学原理只是起源于实验，那么它们因此只不过是近似的和暂时的吗？在某一天不会有新实验导致我们修正甚或抛弃它们吗？

这是很自然地强加在它们之上的疑问，解答的困难主要在于下述事实：有关力学的专著没有明确区分什么是实验、什么是数学推理、什么是约定、什么是假设。

这并非问题的全部：

1° 没有绝对空间，我们能够设想的只是相对运动；可是通常阐明力学事实时，就好象绝对空间存在一样，而把力学事实归诸于绝对空间。

2° 没有绝对时间；说两个持续时间相等是一种本身毫无意义的主张，只有通过约定才能得到这一主张。

3° 不仅我们对两个持续时间相等没有直接的直觉，而且我们甚至对发生在不同地点的两个事件的同时性也没有直接的直觉：

我在“时间的测量”一文中已解释了这一点。^①

4° 最后，我们的欧几里得几何学本身只不过是一种语言的约定；力学事实是根据非欧几里得空间陈述的，非欧几里得空间虽说是一种不怎么方便的向导，但它却象我们通常的空间一样合理；这种陈述因而变得相当复杂，但是它依然是可能的。

于是，绝对空间、绝对时间、几何学本身并不是强加在力学上的条件；就象法语在逻辑上并不先于人们用法语表述的真理一样，所有这一切东西也不先于力学。

我们可能试图用与所有这些约定无关的语言来阐述力学的基本定律；于是，我们无疑会更清楚这些定律是什么；这是昂德拉德(Andrade)先生在他的《力学物理学教程》中试图去作的东西，至少是部分地试图去作的东西。

这些定律的阐述当然变得相当复杂，因为正是为了节略和简化这一阐述，人们才特意发明了这一切约定。

至于我，除了涉及绝对空间外，我将把这一切困难置之脑后；并不是我没有意识到它们，决非这样；可是，我在本书的头两篇已充分地考察了它们。

因此，我将**暂且**承认绝对空间和欧几里得几何学。

惯性原理 一个不受力作用的物体只能作匀速直线运动。

这是先验地强加在精神上的真理吗？假若如此，希腊人为何没有认出它呢？他们怎么会相信，当产生运动的原因中止，运动也就停止呢？或者，他们怎么会相信，每一物体若无阻碍，将作最高贵的圆运动呢？

^① 《形而上学和道德评论》，第VI卷，第1—13页(1898年1月)。

如果人们说，物体的速度不能改变，只要没有使它改变的理由，那么人们不能同样地坚持，这个物体的位置不能改变或它的轨道的曲率不能改变，只要没有外部原因参与更变它们吗？

惯性原理不是先验的真理，它因而是经验的事实吗？但是，任何人在任何时候实验过不受每一个力作用的物体吗？假若如此，又如何知道这些物体不受力的作用呢？通常引用的例子是一个球能在大理石板上滚动很长时间；可是，我们为什么说它没有受到力的作用呢？这是因为它远离所有其他物体，从而经验不到来自这些物体的可感觉的作用吗？可是，如果把它无约束地抛到空中，它也没有远离地球；每一个人都知道，在这种情况下，它经受了归因于地球引力的重力的影响。

力学教师通常很快地讲完球的例子；但他们附加说，惯性原理间接地被这些结果证实了。他们没有正确地表示它们，他们显然意味着，证实比较普遍的原理的各种结果是可能的，惯性原理只不过是其中的一个特例而已。

对于这个普遍原理，我将提出下述陈述：

物体的加速度仅取决于这个物体和邻近物体的位置以及它们的速度。

数学家会说，宇宙中一切物质分子的运动都取决于二阶微分方程。

这实际上是惯性定律的自然推广，为了使之更加清楚，我要请求你容许我作一点虚构。正如我上面说过的，惯性定律并非先验地强加于我们；其他定律同样可以完全与充足理由律相容。如果一个物体不受力的作用，那么与其假定它的速度不变，倒不如假定它的位置不变，要不然就假定它的加速度不变。

好了，让我们暂时设想，这两个假设的定律之一是自然规律，

它代替了我们的惯性定律。什么可以是它的自然推广呢？稍加思索就会使我们明白。

在第一种情况下，我们必须假定，物体的速度仅仅取决于它的位置和邻近物体的位置；在第二种情况下，我们必须假定，物体的加速度的变化仅仅取决于这个物体的位置和邻近物体的位置，以及它们的速度和加速度。

或者，用数学语言来说，运动微分方程在第一种情况下是一阶的，而在第二种情况下是三阶的。

让我们稍微修改一下我们的虚构。设有一个类似于我们太阳系的世界，但是由于奇怪的机遇，在那里行星的轨道没有离心率和倾角。进而假定这些行星的质量太小，以致它们的相互摄动难以觉察到。居住在这些行星之一上的天文学家不能不得出结论说，恒星的轨道只能是圆的，且平行于某一平面；于是，恒星在给定时刻的位置便足以确定它的速度和它的整个路程。他们可能采纳的惯性定律也许是我已经提到的两个假设的定律中的第一个。

现在，设想在某一天来自遥远星座的一个大质量天体以高速通过这个系统。所有的轨道都被大大地扰乱了。我们的天文学家还不会十分惊讶；他们会十分明确地预言，新星乃是唯一的祸首。他们也许说：不过，当新星远离之后，秩序将自然地得以重建；无疑地，行星到太阳的距离将不会回复到灾变前的状态，但是当扰乱的星球远离时，轨道将再次变成圆的。

当扰乱的天体远离之后，不过轨道不再变为圆形，而变成椭圆形，只有在此时，这些天文学家才会逐渐意识到他们的错误和改造整个力学的必要性。

我已经详细地讲述了这些假设，因为在我看来，人们似乎只有把被推广的惯性定律与相反的假设相对照，才能清楚地理解它

实际上是什么。

好了，现在这个被推广的惯性定律用实验证实了吗，或者它能够被证实吗？当牛顿写《原理》一书时，他完全以为这个真理是通过实验获得的和证明的真理。在他看来之所以如此，不仅是由于我将要进一步谈及的拟人说的影响，而且也受到伽利略(Galileo)工作的影响。甚至从开普勒(Keppler)定律本身起就是这样的；事实上，按照这些定律，行星的路线完全由它的初始位置和初始速度来决定；这恰恰是我们所推广的惯性定律要求的東西。

由于这个原理只是表面上是真实的，由于人们必然会担心在某一天它被我刚才与之对照的类似的一个原理代替，我们必定会被某种令人惊异的机遇引人歧途，就象在上面所提出的虚构中，我们设想的天文学家导致出错误一样。

这样的假设太靠不住了，不值得在此停留。没有一个人相信这样的巧合能够发生；毫无疑问，两个离心率的概率正好在误差范围内是零，例如，它与在误差范围内一个概率恰恰等于0.1，另一个概率等于0.2简直是一样的。一个简单事件的概率并不小于一个复杂事件的概率；可是，如果头一个发生了，我们不会同意把它归因于机遇；我们不会相信，自然界故意欺骗我们。由于抛弃了这类错误的假设，因而可以承认，就天文学而言，我们的定律被实验证实了。

然而，天文学不是物理学的全部。

我们不会害怕在某一天新实验将要在物理学某些领域否定该定律吗？实验定律总是要受到修正的；人们总是期望看到用更为精确的定律代替它。

可是，没有一个人认真地认为我们正在谈论的定律永远将被抛弃或修正。为什么？恰恰是因为它永远不能受到决定性的检

验。

首先，为了这个试验是完善的，必须在某一时间之后，宇宙中的所有天体应该回复到它们的初始位置以及初始速度。接着，就可以看到，从这一时刻开始，它们是否返回到它们的原始路线。

但是，这种检验是不可能的，它只能部分地使用，而且不管作得多么好，将总是有一些天体不能回复到它们的初始位置；从而，对于该定律的每一次背离都容易找到它的解释。

这并非一切；我们在天文学中看到我们研究其运动的天体，我们通常假定它们不受其他不可见天体的作用。在这些条件下，我们的定律的确或者被证实，或者没有被证实。

不过，在物理学中情况并不一样；如果物理现象都是由于运动，那就是我们看不见的分子的运动。其次，在我们看来，如果我们看得见的物体之一的加速度除了依赖于其他可见的物体或我们预先可以承认其存在的不可见的分子的位置或者速度外，似乎还依赖于**另外的东西**，那么就没有什么妨碍我们假定，这种**另外的东西**就是我们以前未曾怀疑其存在的其他分子的位置和速度。该定律本身将依然得到保护。

请容许我使用数学语言以另一种形式描述一下同一思想。假定我们观察几个分子，并查明它们的 $3n$ 个坐标满足 $3n$ 个四阶（不象惯性定律所要求的二阶）微分方程组。我们知道，通过引入 $3n$ 个辅助变量， $3n$ 个四阶方程组能够被简化为 $6n$ 个二阶方程组。其次，如果我们假定这 $3n$ 个辅助变量代表几个不可见分子的坐标，那么结果就重新与惯性定律一致。

总而言之，这个在某些特殊情况下用实验证实的定律，可以毫不犹豫地推广到最普遍的情况中去，因为我们知道，在这些普

遍的情况中，实验既不能够进一步证实它，也不能够反驳它。

加速度定律 一个物体的加速度等于作用在它上面的力除以它的质量。

这个定律能够用实验检验吗？为此，必须测量在这个陈述中要计算的三个量：加速度、力和质量。

我假定能够测量加速度，因为我把在时间测量中产生的困难抛弃了。可是，怎样测量力或质量呢？我甚至不知道它们是什么。

什么是**质量**呢？按照牛顿的观点，质量是体积与密度之积。按照汤姆孙(Thomson)和泰特(Tait)的观点，最好说密度是质量除以体积之商。什么是**力**呢？拉格朗日(Lagrange)回答说，力是使物体运动或企图使物体运动的东西。基尔霍夫(Kirchhoff)则说，力是质量与**加速度**之积。但是，为什么不说质量是力除以加速度之商呢？

这些困难是无法解决的。

当我们说力是运动的原因时，我们是在谈论形而上学，人们若满足这个定义，肯定毫无成果。要使一个定义有任何用处，它必须告诉我们如何**测量**力；而且，这就足够了；它根本没有必要告诉我们力**本质上**是什么，或者它是运动的原因还是运动的结果。

因此，我们必须首先定义两力之相等。我们什么时候可以说两力相等呢？我们被告知，只有当它们施于相同的质量，使之产生相同的加速度时，或者当它们彼此直接相反从而出现平衡时。这个定义只不过是赝品而已。我们不能使施加到一个物体上的力脱离而使它依附于另一个物体，犹如不能使机车脱钩而把它挂到

另一节车厢上一样。因此，我们不可能知道，施加于一个物体的力，**如果**把它施加于另一个物体，那么它会使另一个物体产生多大的加速度。我们也不可能知道，**如果**两个力曾经是直接相反的，当它们不直接相反时，它们会怎样作用。

可以说，当我们用测力计测量力时，或者使力与一个重物平衡时，我们正是企图使这个定义具体化。为简单起见，我将假定两个竖直向上的力 F 和 F' 分别施加在两个物体 C 和 C' 上；我把同一个重物 P 先挂在物体 C 上，然后挂到物体 C' 上；如果在两种情况下出现了平衡，我将得出结论说，两力 F 和 F' 彼此相等，因为它们每一个都等于物体 P 的重量。

但是，我能够确信当我把物体 P 从第一个物体移到第二个物体时，物体 P 保持同一重量吗？远非如此；**我确信情况截然相反**；我知道，重力的强度从一点到另一点是变化的，例如，它在两极比在赤道为强。无疑地，差别是极其微小的，实际上我们可以不考虑它；但是，适当构造的定义应该具有数学严格性；这种严格性却不足。我就重力所说的话显然适用于测力计的弹性力，温度和许多情况都可以使弹性力变化。

问题并未就此而已；我们不能说物体 P 的重量可以施于物体 C 且直接与力 F 平衡。施加于物体 C 的，是物体 P 加于物体 C 上的作用 A ；一方面，物体 P 部分地受到它的重力的作用；另一方面，受到物体 C 施加在 P 上的反作用 R 。结果，力 F 等于力 A ，因为 F 与 A 平衡；根据作用与反作用相等原理，力 A 等于 R ；最后，力 R 等于 P 的重量，因为 R 与 P 平衡。正是从这三个相等中，我们从而推论出 F 与 P 的重量相等。

因此，在定义两个力相等时，我们不得不引入作用与反作用相等原理；**由于这个原因，这个原理必须不再被认为是经验定律。**

而是一个定义。

在这里要辨认两个力相等，我们于是具有两个法则：相互平衡的两力相等；作用力与反作用力相等。但是，正如我们在上面看到的，这两个法则是不充分的；我们不得不求助于第三个法则，并且假定某些力，例如物体的重量，在大小和方向上均为常数。但是，正如我已说过的，第三个法则是经验定律，它仅仅是近似真实的；它是一个拙劣的定义。

因此，我们被迫回到基尔霍夫的定义：**力等于质量乘以加速度**。这个“牛顿定律”本身不能认为是经验定律，它现在仅仅是定义而已。但是，这个定义也不充分，因为我们不知道质量是什么。它无疑能使我们计算在不同时刻施加在同一物体上的两个力的关系；但它无法告诉我们施加在两个不同物体上的两个力的关系。

为了完善这个定义，必须重新返回到牛顿第三定律（作用与反作用相等），再次认为它不是经验定律，而是一个定义。两个物体A和B相互作用，A的加速度乘以A的质量等于B施加于A上的作用力；用同样的方式，B的加速度与其质量之积等于A施加于B的反作用力。按照定义，因为作用力等于反作用力，所以A和B的质量与它们的加速度成反比。在这里，我们定义了这两个质量之比，而且证实这个比率是常数的正是实验。

假使只有物体A和B在场，它们不受世界上其余物体的作用，那么这个定义便是十分完美的。可是情况根本不是这样；A的加速度不仅仅是由于B的作用，而且也是由于其他物体C，D，……的作用。为了运用前面的法则，因此必须把A的加速度分解为许多分量，并辨认这些分量中的那一个是由于B的作用。

如果我们假定C施加于A的作用力简单地加在B施加于A的作用力上，而且改变B施加于A的作用的物体C并不存在，或者改变

C施加于A的作用力的物体B并不存在,那么这种分解还是可能的,因此,如果我们假定任何两个物体相互吸引,它们的相互作用沿着它们的连线,而且仅取决于它们相隔的距离;换句话说,如果我们假定**有心力假设**,那么这种分解也是可能的。

你知道,为了确定天体的质量,我们利用完全不同的原理。万有引力定律教导我们,两个物体的引力与它们的质量成正比;若 r 是它们之间的距离, m 和 m' 是它们的质量, k 是常数,则它们的引力将是 kmm'/r^2 。

于是,我们正在测量的不是作为力与加速度之比的质量,而是引力质量;它不是物体的惯性,而是它的引力。

这是间接过程,这个过程的使用在理论上并不是必不可少的。很可能,引力与距离的平方成反比,而不与质量的乘积成正比,它等于 f/r^2 ,而不是我们所具有的 $f=kmm'$ 。

假若如此,我们通过观察天体的**相对运动**,仍然可以测量这些天体的质量。

可是,我们有权利承认有心力假设吗?这个假设是严格地正确吗?能肯定它永远不会与实验矛盾吗?谁敢肯定这一点呢?如果我们必须抛弃这个假设,那么如此辛苦建造起来的整个大厦就要崩溃了。

我们不再有权利说A的加速度的分量是由于B的作用。我们无法把它与由于C或另外的物体的作用所产生的加速度区别开来。测量质量的法则变得不能应用了。

作用与反作用相等原理还留下什么东西呢?如果舍弃了有心力假设,这个原理显然应该如下陈述:施加于与所有外部作用隔离的系统中的各物体上的几何合力将为零。或者,换句话说,**这个系统重心的运动将是匀速直线运动。**

我们似乎有办法定义质量；重心的位置显然取决于质量所具有的值；有必要以这样的方式安排这些值，使重心的运动可以是匀速直线运动；如果牛顿第三定律是真实的，这总是可能的，而一般说来，这只有在一种方式下才可能。

但是，不存在与所有外部作用隔离的系统；宇宙的各个部分都或多或少地受到所有其他部分的作用。**重心运动定律只有应用于整个宇宙时才是严格真实的。**

但是，为了由此得到质量的值，有必要观察宇宙重心的运动。这个结果的荒谬是显而易见的：我们只知道相对运动；宇宙重心的运动对我们来说依然是永远不可知的。

因此，什么东西也没有留下来，我们的努力毫无成果；我们被迫退到下述定义，这只不过是一个无能为力的声明：**质量是为计算方便而引入的系数。**

我们能够通过把不同的值赋予所有质量而重建全部力学。这种新力学既不会与经验相矛盾，也不会与动力学的普遍原理（惯性原理、力与质量和加速度成正比、作用和反作用相等以及重心的匀速直线运动、面积原理）相矛盾。

只是这种新力学的方程**不怎么简单**。让我们清楚地理解一下：不怎么简单的只可能是头些项，这就是经验已经使我们知道的那些项；人们也许可以稍微改变一下质量，而不使**完全**方程在简单性方面有所得或有所失。

赫兹(Hertz)曾经提出了一个问题：力学原理是否是严格真实的。他说：“在许多物理学家看来，最间接的经验在任何时候都可以改变牢不可破的力学原理，这是不可思议的；可是，从经验中得来的东西总可以由经验矫正。”

由于我们刚才所说的，这些担心似乎是毫无根据的。对我们

来说，动力学原理乍看起来好象是实验的真理；但是我们不得不把它们作为定义来使用。正是按照**定义**，力等于质量与加速度之积；于是，这里就有一个今后不受任何进一步的实验影响的原理。同样根据定义，作用等于反作用。

但是，有人会说，这些不可检验的原理完全没有任何意义；实验不能反驳它们；然而，它不能告诉我们任何有用的东西；这样一来，研究动力学有什么用处呢？

这种轻率的定罪未免太不公平了。在自然界中没有任何**完全**孤立的、完全摆脱一切外部作用的系统；可是，有**几乎**孤立的系统吗？

如果这样一个系统被观察到了，人们不仅可以研究它的各部分相对于另外部分的相对运动，而且也可以研究它的重心相对于宇宙其他部分的运动。我们接着查明，这个重心的运动是匀速直线运动，这与牛顿第三定律一致。

这是经验的真理，但经验不能使它失效；事实上，比较精确的实验能告诉我们什么呢？它会告诉我们，定律只不过是差不多真实的；可是，我们早已知道了这一事实。

现在我们能够理解，经验为何能作为力学原理的基础，可是从来也不能与它们矛盾。

拟人的力学 有人会说：“基尔霍夫仅仅是遵循倾向于唯名论的数学家的一般趋势行动；作为一个能干的物理学家，也不能使他避免这一点。他想定义力，为此他采用了呈现在眼前的第一个命题；但是我们不需要力的定义：力的观念是原始的、不可约的、不能定义的；我们都知道它是什么，我们对它有一种直接的直觉。这种直接的直觉来自费力的概念，我们自幼就熟悉这一概

念了。”

但是，首要的是，即使这种直接的直觉使我们了解到力本身的真正本性，可它作为力学的基础还是不够的；况且，它也许是完全无用的。重要的是，不在于了解力是什么，而是了解如何测量力。

对于力学家来说，凡是不能告诉我们测量力的都是无用的，例如，这就象热和冷的主观概念对于研究热的物理学家来说无用一样。这种主观概念不能用数来表示，因而它毫无用处；一个科学家的皮肤是热的不良导体，因而他永远不会感到冷，也不会感到热，可是他能够象任何其他人那样读温度计，这就足以使他构造整个热理论。

现在，对我们来说，这种直接的费力概念不能用来测量力；例如，很清楚，我提五十公斤重物就会感到比惯于负重的人劳累。

可是，还有比这更多的东西：这种费力的概念没有告诉我们力的真正本性；它本身最终归结为肌肉感觉的记忆，而且人们无法坚持，当太阳吸引地球时，太阳感受到肌肉感觉。

在那里能够探寻的只是一种符号，它并不比几何学家所使用的箭号精确和方便，可是正因为这样它才远离实在。

在力学的诞生中，拟人说起了显著的历史作用；也许它有时还将提供一种符号，这对某些精神来说似乎是方便的；不过，它不能作为真正的科学创造者或哲学创造者工作的基础。

“线学派” 昂德拉德先生在他的《力学物理学教程》中使拟人的力学恢复了生机。为了与基尔霍夫所属的力学学派相对抗，他奇怪地自称线学派。

这个学派企图把一切都归结为“可以忽略质量的某些物质系

统来考虑，设想该系统处于张力状态，能够把很大的力量传给遥远的物体，这些系统的理想型式是线。”

传递任何力的线在这个力的作用下稍稍伸长；线的方向给我们告诉了力的方向，其大小由线的伸长来测量。

于是，人们可以想象这样一个实验。物体A系到线上；在线的另一端施加任何一种力，改变力的大小直到线伸长 α ；记下物体A的加速度；分开A，把物体B系到同一条线上；重新施加同一力或另外的力，改变力的大小直到线再次伸长 α ；记下物体B的加速度。然后，用A和B重新开始实验，但是使线伸长 β 。四个观察到的加速度应当成比例。这样一来，我们就对上面所阐述的加速度定律进行了实验检验。

或者，最好使一个物体同时受到具有相等张力的几个等价线的作用，并用实验寻找使物体处于平衡的所有这些线的方向。这样一来，我们就对力的合成法则进行了实验检验。

可是，我们到底作了什么呢？我们定义了这条线经受形变时所受到的力，这是有足够的道理的；我们进而假定，如果把一个物体系到这条线上，通过线传递给它的力量等于物体施加在这条线上的作用力；归根结底，我们因之使用了作用与反作用相等原理，可是并没有认为它是实验的真理，而认为它正是力的定义。

这个定义恰如基尔霍夫的定义一样，是约定的，但远非是普遍的。

并非所有的力都是通过线传递的（况且，为了能够比较这些力，它们都必须通过等价的线传递）。即使可以承认地球是用某种不可见的线系到太阳上，那么至少应该同意，我们没有办法测量它的伸长。

因此，我们的定义十有九是错误的；我们不能赋予它以任何

意义，于是必须回到基尔霍夫的定义。

那么，为什么要费这个周折呢？你同意，力的某个定义只有在某些特殊情况下才有意义。在这些情况下，你用实验证实，它导致了加速度定律。依据这个实验，你于是把加速度定律作为在所有其他情况下的力的定义。

把加速度定律作为所有情况下的定义，认为上述实验不是这个定律的检验，而是反作用原理的检验，或者是证明了弹性体的形变仅取决于它所受到的力，这不是会更简单一些吗？

你的定义能被接受的条件永远不会完全满足，线永远不会没有质量，线除受到系在它的末端的物体的反作用之外永远不会免受其他力的作用，这都没有考虑在内。

不过，昂德拉德的观点是十分有趣的；即使这些观念不能满足我们的逻辑要求，但它们却能使我们更好地理解力学基本观念的历史起源。它们提出的见解向我们表明，人类精神如何从朴素的拟人说上升到当今的科学概念。

我们在开始时看到一种很特殊的、总之是相当粗糙的实验；在结束时，我们看到极普遍、极精确的定律，我们认为它的可靠性是绝对的。可以说，由于认为它是约定，我们自己才自愿地把这种可靠性给予它。

那么，加速度定律、力的合成法则仅仅是任意的约定吗？是的，是约定；要说是任意的，那就不对了；它们能够是约定，即使我们没有看到导致科学创造者采纳约定的实验，这些实验尽管可能是不完善的，但也足以证明约定是正当的。我们最好时时留心回想这些约定的实验根源。

第七章 相对运动和绝对运动

相对运动原理 人们有时力图把加速度定律与更为普遍的原理联系起来。任何系统的运动必须服从同样的定律，不管它是相对于固定轴而言还是相对于作匀速直线运动的可动轴而言。这就是相对运动原理，它由于两条理由迫使我们接受：第一，最一般的经验证实它，第二，相反的假设与精神格格不入。

于是，让我们接受它吧，并考虑一个受力的物体，相对于以等于该物体的初始速度匀速运动的观察者，这个物体的相对运动必须等同于它从静止开始的绝对运动。由此我们得出结论，它的加速度不能依赖于它的绝对速度；人们甚至企图由此推导出加速度定律的证明。

在理学学士学位的条例中，长期以来已有这一证明的痕迹。显然，这种企图是无效的。妨碍我们证明加速度定律的障碍在于，我们没有力的定义；这个障碍作为一个整体依旧存在，由于我们所乞灵的原理没有向我们提供所缺少定义。

相对运动原理依然是极为有趣的，它本身值得人们研究。首先，让我们试图用精确的方式阐述它。

我们在上面已经说过，形成孤立系统一部分的不同物体的加速度只取决于它们的相对速度和位置，而不取决于它们的绝对速度和位置，只要相对运动所参照的可动轴作匀速直线运动。或者，如果我们乐意的话也可以说，它们的加速度只取决于它们的速度差和坐标差，而不取决于这些速度和坐标的绝对值。

如果这个原理对相对加速度为真，或者更确切地讲对加速度之差为真，那么把它与反作用定律结合起来，我们将会由此导出，它对绝对加速度亦为真。

其次，留下要看的是，我们怎么可以证明加速度之差仅取决于速度差和坐标差，或者用数学语言来讲，这些坐标差满足二阶微分方程。

这种证明能够从实验或先验的思考中推导出来吗？

回想一下我们上面说过的话，读者自己便能够作出回答。

事实上，这样阐述的相对运动原理与我们上面所谓的广义惯性原理非常类似；但它完全不是一回事，因为它是一个坐标差问题，而不是坐标本身的问题。因此，与旧原理相比，新原理告诉我们更多的东西，不过同一讨论还是适用的，并且会得出同一结论；没有必要赘述了。

牛顿的论据 在这里，我们碰到了十分重要的、甚至使人感到有些困惑的问题。我说过，相对运动原理在我们看来不仅仅是实验的结果，而且每一个相反的先验假设都会与精神格格不入。

可是，为什么只有当可动轴作匀速直线运动时，该原理才为真呢？如果这个运动是变化的，或者无论如何它变为匀速转动，这个原理似乎应当以同样的力量强加于我们。现在，在这两种情况下，该原理并不为真。

关于轴的运动是直线的而非匀速的情况，我不想多说；这个悖论经不起短暂的审查。倘若我站在车上，倘若车碰到障碍物突然停下来，尽管我没有直接受到任何力的作用，我还是要被抛到我的前方。这没有什么秘密；即使我没有经受外力的作用，可车

子本身却受到外力的冲击。当两物体中的一个或另一个的运动由于外部原因而发生变化时，在二者的相对运动中不会有什么荒谬之处。

我愿仔细地讨论一下相对于匀速转动轴作相对运动的例子。假如天空总是阴云密布，假如我们无法观察星星，我们仍能得出地球转动的结论；我们可以从地球的扁平度，或者重作傅科摆实验了解这一点。

可是，在这种情况下，说地球转动会有什么意义吗？如果没有绝对空间，人们能够不绕着其他东西旋转吗？另一方面，我们怎么可以承认牛顿的结论而相信绝对空间呢？

但是，这并不足以断言所有可能的解答对于我们来说同样是不相容的；为了使我们明智地选择，我们必须分析在每一种情况下我们不相容的理由。因此，请原谅我在下面作一较长的讨论吧。

让我们继续我们的虚构吧：阴云遮蔽着星球，使我们无法看到它们，甚至不知道它们的存在；这些人怎样知道地球转动呢？

无疑地，他们甚至将会比我们的祖先更坚定地认为养育他们的大地是固定的和不动的；他们会更长久地等待哥白尼(Copernicus)的出现。但是，哥白尼最终会来到的——他是怎样来到的呢？

在这个世界学力学的学生起初不会面临绝对的矛盾。在相对运动理论中，除了真实力外，还会遇到两个虚设力，它们被称为普遍离心力和复合离心力。因此，我们设想的科学家可以把这两个力视为真实的，以此解释一切，他们不会在其中发现广义惯性原理的任何矛盾，因为这些力其一象真实的引力一样，依赖于系统各部分的相对位置，另一种象真实的摩擦力一样，依赖于它们的相对速度。

可是，许多困难不久便会唤起他们的注意；假如他们成功地实现了孤立系统，那么这个系统的重心几乎不会有直线路程。为了解释这一事实，他们求助于离心力，他们认为这个力是真实的，并无疑把它归咎于物体的相互作用。只是他们不会看到，在大距离时，即就是说随着孤立程度实现得越好，这些力就变为零；决不是这样；离心力随着距离变大而无限地增加。

这个困难对于他们来说似乎已经是够大的了；可是，困难不会使他们长期停滞不前；他们会很快地设想出类似于我们的以太的十分微妙的媒质，所有物体都沉浸在这种媒质中，并受到媒质的排斥作用。

可是，这并非一切。空间是对称的，但运动定律却不会显示出任何对称性；它们应该有左右之分。例如，旋风总是向一个方向旋转，由于对称的缘故，这些旋风应该无偏向地左旋或右旋。即使我们的科学家通过他们的努力成功地使他们的宇宙变得完全对称，这种对称性也不会继续下去，尽管表面上没有什么理由表明，对称性应在一个方向上受到扰乱，而不应在另一个方向受到扰乱。

他们无疑会摆脱困难，他们会发明出与托勒密（Ptolemy）玻璃球一样平常的东西，如此继续下去，情况愈益复杂，直到长期盼望的哥白尼说，假定地球转动是比较简单的，复杂性才被一扫而光。

正如我们的哥白尼向我们说过的：假定地球转动比较方便，因为这样一来天文学定律可以用更为简单的语言来描述；这位哥白尼也会说：假定地球转动比较方便，因为这样一来力学定律可以用更为简单的语言来描述。

这并不妨碍我们坚持，绝对空间，也就是了解地球实际上是否运动必须参照的标志，并没有客观存在性。因此，“地球转

动”这个断言毫无意义，因为它无法用实验检验；因为这样的实验不仅无法实现或不能被最大胆的朱尔·韦尔内(Jules Verne)梦想到，而且也无法想象它没有矛盾；确切地讲，“地球转动”和“假定地球转动比较方便”这两个命题具有相同的意义；一个命题并不比另一个命题包含更多的意思。

也许人们不会满意这一点，他们将发现，在所有假设中，确切地讲，在我们就这个问题所能够作出的一切约定中，其中之一比其他的都方便，这已经是令人震惊的了。

但是，如果当它是天文学问题时，人们可以毫无困难地承认它，那么在涉及到力学时，它为什么会令人震惊呢？

我们看到，物体的坐标是由二阶微分方程确定的，这些坐标之差也是这样确定的。这就是我们所谓的广义惯性原理和相对运动原理。如果这些物体的距离同样由二阶微分方程来确定，那么精神似乎完全应该被满足。在什么程度上精神才能得到满足呢，为什么精神不满意它呢？

为了说明这一点，我们再举一个简单的例子。我假定一个类似于我们太阳系的系统，但是人们无法觉察到这个系统之外的固定恒星，以致于天文学家只能观察到行星和太阳的相互距离，而不能观察到行星的绝对经度。如果我们直接从牛顿定律推导出规定这些距离的变分的微分方程，那么这些方程将不是二阶的。我的意思是，除牛顿定律外，如果人们知道这些距离的初始值和它们对于时间的导数的初始值，那还不足以确定这些相同的距离在后继时刻的值。假如，还缺少一个数据，这个数据也许是天文学家所谓的面积常数。

不过，在这里可以采取两种不同的观点；我们可以区分两类常数。在物理学家的眼中，世界化归为一系列现象，一方面，这

些现象只依赖于初始现象；另一方面，依赖于把推论和前提结合起来的定律。于是，如果观察资料告诉我们某量是常数，我们将在两种概念间作出抉择。

或者我们将假定，存在着一个要求这个量不变的定律，可是在很长一段时间之初，它碰巧不是另一个值，而是这个值，并且这个值不得不保持至今。于是，这个量被称之为**偶然常数**。

或者我们反过来将假定，存在着一个自然定律，它把这样一个值、而不是另外一个值给予这个量。于是，我们便可以称其为**本质常数**。

例如，按照牛顿定律，地球的公转周期必须是常数。可是，如果它是366个恒星日多一点，而不是300或400个恒星日，那么这就是我不知道初始机遇是什么的结果。这是一个偶然常数。相反地，如果在引力表示式中所标出的距离指数等于-2而不等于-3，那么这并不是出于偶然，而是因为牛顿定律要求它如此。这是**本质常数**。

我不知道这种赋予偶然以它的作用的方式本身是否合法，也不知道这种区分是否在某程度上是人为的；但至少可以肯定，只要自然界含有秘密，那么这种区分在应用中将是极为任意的，并且总是不确定的。

至于面积常数，我们习惯于把它看作是偶然的。可以肯定我们设想的天文学家会同样作吗？假如他们把两个不同的太阳系加以比较，那么他们便会想到，这个常数可以具有许多不同的值；不过在开始时，我恰好已假定，他们的系统看来是孤立的，他们观察不到这个系统之外的恒星。在这些条件下，他们只能看到一个唯一的常数，它具有唯一的、绝对不变的值；毫无疑问，他们会认为它是**本质常数**。

为了防止一种异议，顺便再说一点：这个想象世界的居民既不能象我们那样观察、也不能象我们那样确定面积常数，因为他们无法测量绝对经度；这并不排除他们会很快地注意到某一常数，他们自然地把它引进他们的方程中，它无非是我们所谓的面积常数。

但是，我们看到，又会出现其他问题。如果认为面积常数是本质常数——因为它取决于自然定律——那么要计算行星在任何时刻的距离，只要知道这些距离的初始值和它们的导数的初始值就足够了。从这种新观点出发，用二阶微分方程就可以确定这些距离。

可是，这些天文学家的思想会完全满意吗？我不相信这一点；首先，他们会立即察觉，在微分他们的方程并因而提高方程的阶时，这些方程变得更简单了。尤其给他们以深刻印象的是来自对称性的困难。于是必须假定，不同的定律依赖于行星集合所描绘的某一多面体或对称多面体的图形，只有把面积常数视为偶然常数，人们才能避免这个结果。

我举了一个十分特殊的例子，因为我假定天文学家根本没有考虑地上的力学，他们的视野局限于太阳系。我们的宇宙比他们的宇宙广大，因为我们有固定的恒星，但是我们的宇宙还是有限的，因此我们可以对我们的整个宇宙进行推理，就象天文学家对他们的太阳系进行推理一样。

于是我们看到，我们能够得出结论，确定距离的方程是超过二阶的。为什么我们会为此而震惊呢，为什么我们发现它对于依赖这些距离一阶导数的初始值的一系列现象是十分自然的，而我们却不敢大胆承认它们依赖二阶导数的初始值呢？这只能是因为通过经常研究广义惯性原理及其结果在我们身上所造成的思想习

惯。

在任何时刻的距离值依赖于距离的初始值，依赖于距离的一阶导数，也依赖于其他东西。这种**其他东西**是什么呢？

如果我们不承认这只能是二阶导数之一，那我们就只有选择假设了。或者如我们通常所作的那样，可以假定这种其他东西是宇宙在空间的绝对取向，或者可以假定这个取向变化得很迅速；这种假定可能是正确的；它肯定是几何学最方便的解，它不是哲学家最满意的，因为这种取向不存在。

或者可以假定，这种其他东西是某种不可见的物体的位置或速度；有些人已经这样作了，他们甚至把它叫作 α 体，尽管除了它的名称之外，我们注定永远什么也不知道。这是一种技巧，它完全类似于我在思考惯性原理的那一段末尾中所说的技巧。

但是，困难毕竟是人为的。倘若我们仪器的未来的指示只能够取决于以前已经给予我们的指示或可能给予我们的指示，那么这就是所需要的一切。现在，就此而论，我们尽管放心好了。

第八章 能和热力学

能量学 (energetics) 经典力学所固有的困难导致某些思想家提出一种新体系，他们称其为**能量学**。

能量学是作为能量守恒原理发现的结果而出现的。亥姆霍兹给它以最终形式。

能量学是通过定义在这个理论中起基本作用的两个量而开始的。它们是**动能**或**活力**以及**势能**。

自然界中的物体系所能经历的一切变化遵从两条实验定律：

1° 动能和势能之和是常数。这是能量守恒原理。

2° 如果一个物体在时间 t_0 处于A，在时间 t_1 处于B，那么它总是以这样的路线从第一种情形达到第二种情形，即在把这两个时间 t_0 和 t_1 分开的时间间隔内，两种能之差的**平均值**要尽可能地小。

这是哈密顿(Hamilton)原理，它是最小作用原理的形式之一。

与经典理论相比较，能量学理论具有下述优点：

1° 它比较完善；也就是说，哈密顿原理和能量守恒原理告诉我们的东西比经典理论的基本原理为多，而且它排除了某些事实上无法实现的运动，但这些运动却可以和经典理论相容。

2° 它使我们省去了原子假设，对于经典理论来说，这个假设几乎是不可避免的。

但是，能量的两种定义会产生一些困难：

这些困难几乎象在第一个体系中的力和质量的定义所产生的

困难一样大。但是，可以比较容易地克服它们，至少在最简单的情况下是这样。

设有一个由一定数目的质点形成的孤立系统；设这些质点受到只依赖于它们的相对位置和相互距离、而不依赖于它们的速度和力的作用。根据能量守恒原理，力函数必须存在。

在这个简单的情况下，能量守恒原理的阐述极其简单。实验可达到的某一量必须保持常数。这个量是两项之和；第一项只依赖于质点的位置，而不依赖于它们的速度；第二项与这些速度的平方成比例。这种分解只能以单一的方式进行。

我把第一项称为 U ，它是势能；我把第二项称为 T ，它是动能。

的确，若 $T+U$ 是常数，则 $T+U$ 的任何函数

$$\Phi(T+U)$$

也是这样。

但是，这个函数并不是这样两项之和：一项不依赖于速度，另一项与这些速度的平方成正比。在这些保持为常数的函数中，只存在一种享有这个特性的函数，即 $T+U$ （或 $T+U$ 的线性函数，这归根结底是一回事，因为这个线性函数总可以通过单位和原点变化而变为 $T+U$ ）。于是，这就是我们所谓的能；我们将称第一项为势能，第二项为动能。因此，能量的这两种定义能够贯彻到底，没有任何模棱两可之处。

这与质量的定义相同。动能或活力可以十分简单地用所有质点的质量和相对于它们之一的相对速度来描述。这些相对速度是观察可以达到的，当我们知道作为这些相对速度函数的动能表示式时，那么这个表示式的系数将给我们以质量。

因此，在这种简单情况下，可以毫无困难地定义基本观念。

但是，在比较复杂的情况下，困难就出现了，例如，若力不只是依赖于距离，而且也依赖于速度，则情况就是如此。比如，韦伯 (Weber) 设想两个电分子的相互作用不仅依赖于它们的距离，而且也依赖于它们的速度和加速度。如果质点按照类似的规律相互吸引，那么 U 便依赖于速度，而且必须包含与速度平方成比例的项。

在这些与速度平方成比例的项中，如何区分来自 T 的项和来自 U 的项呢？从而如何区分能的两部分呢？

还有，如何定义能本身呢？当表征 $T+U$ 特点的性质，即其为一特殊形式的两项之和的性质消失时，我们不再有理由把 $T+U$ 作为定义而不把 $T+U$ 的任何其他函数作为定义。

但是，这并非问题的全部；我们不仅必须考虑在严格意义上所谓的机械能，而且必须考虑其他形式的能：热、化学能、电能等等。能量守恒原理应该写成：

$$T+U+Q=\text{常数},$$

在这里， T 表示可觉察的动能， U 表示位置的势能，它只取决于物体的位置， Q 表示在热形式、化学形式或电形式下的分子内能。

如果这三项是完全清楚的，如果 T 与速度的平方成比例， U 与这些速度和物体的状态无关， Q 与速度和物体的位置无关而仅仅与它们的内部状态有关，那么一切都会顺利地进行。

能的表示式只能以唯一的方式分解为这一形式的三项。

但是，情况并不是这样；考虑一下带电体；由带电体的相互作用而产生的静电能显然取决于它们的电荷，也就是说，取决于它们的状态；可是，静电能同样也依赖于它们的位置。如果这些物体处于运动之中，那么从电动力学的角度来看，它们将相互作用，电动力学能将不仅与它们的状态和位置有关，而且与它们的速度

有关。

因此，我们没有任何办法把成为 T 、 U 和 Q 的部分的项分开，也没有任何办法把能的三部分分开。

若 $(T+U+Q)$ 是常数，则任何函数 $\Phi(T+U+Q)$ 也是常数。

如果 $T+U+Q$ 是我上面所考虑的特殊形式，结果便不会有模棱两可之处；在依然是常数的函数 $\Phi(T+U+Q)$ 中，只可能有一种函数具有这种特殊形式，我愿称其为能。

但是，正如我已经说过的，严格讲来情况并非如此；在依然是常数的函数中，没有一个函数能够严格地放在这种特殊形式之下，因此，怎么在它们中间选择可以称之为能的函数呢？我们没有任何手段去指导我们作出抉择。

对我们来说，能量守恒原理只剩下一一种陈述：**存在着依然是恒定的某种东西**。在这种形式下，它也超出了实验所及的范围，并变成一种同义反复。很清楚，如果世界受规律支配，那么将存在始终是常数的量。象牛顿定律一样，由于类似的理由，建立在实验基础之上的能量守恒原理不再能够被实验否定。

这一讨论表明，在从经典体系到能量学体系的过渡中，人们获得了进步；可是，与此同时，这一讨论也表明，这种进步是不够的。

另一种反对意见在我看来似乎更为严重：最小作用原理可适用于可逆现象；但是，当涉及到不可逆现象时，它根本不满足；亥姆霍兹企图把它推广到这类现象，但没有取得成功，而且他也不可能取得成功；在这方面，一切事情还有待去作。

最小作用原理陈述本身也与理智有些不相容。不受力的作用而要求在一面上运动的物质分子，在从一点到另一点时，取道短程线，也就是说，取道最短的路径。

这个分子似乎知道它必须被引到那一点，并且似乎预见到它沿这样一条路线到达该点所需要的时间，然后选择最适宜的路径。在我们看来，这种陈述可以说把分子描述成一种活生生的和自由的生物。显然，最好用一个不怎么使人讨厌的陈述来代替它，在那里，正如哲学家所说的，终极因似乎不会代替结果因。

热力学^① 在自然哲学的各个分支中，热力学两条基本原理的作用日益变得重要了。在放弃四十年前用分子假设阐明的雄心勃勃的理论时，我们今天正在力图把整个数学物理学大厦仅仅建立在热力学上。迈尔(Mayer)和克劳修斯(Clausius)的两个原理能保证其基础牢固得足以持续一段时间吗？无人怀疑这一点；但是，这种信念从何而来呢？

某一天，一位著名的物理学家向我谈到误差律时及时地说过：“全世界之所以坚定地相信它，是因为数学家设想它是观察事实，而观察家则设想它是数学定理。”就能量守恒原理而言，长期以来就是如此。它今天不再是这样了；没有人不知道这是实验事实。

然而，我们有什么权利认为该原理比用来证明它的实验更普遍、更精确呢？这也就是询问，正如人们每天所作的那样推广经验材料是否合法，在如此之多的哲学家为解决它而枉费心机之后，我不敢冒昧地讨论这个问题。有一件事情是可靠的；假如我们不具备这种能力，科学便不会存在，或者至少变成一种存货清单，变成孤立事实的断言，这样科学对于我们来说就会毫无价值，由于它不可能满足我们对秩序与和谐的渴望，同时也由于它不能作出预见。因为在任何事实之先的情况大概从来也不会同时复现，

① 下文是我的著作《热力学》序言中的一部分。

所以第一次推广已经是必要的，以便预见在这些情况有一点点变化之后，这个事实是否会再次产生。

但是，每一个命题都可以用无穷的方式推广。在所有可能的推广中，我们必须选择，我们只能选择最简单的。因此，我们有可能认为，好象简单定律——其他事情都相同——比复杂定律更有希望。

半个世纪之前，人们已坦白地承认这一点，并且宣布自然界喜欢简单性；从此以后，自然界十分经常地指责我们说谎。今天，我们不再承认这种意向，我们仅保留必不可少的那么多的意向，以使科学不致变得不可能。

在不怎么多的、表现出某些偏差的基础上形成普遍的、简单的和精确的定律时，我们只不过是服从了一种需要，我们的精神不能摆脱这种需要。

可是，还有更多的东西，这就是我为什么要详细讲述该论点的原因。

没有人怀疑从一切特殊定律得到的迈尔原理注定比这些定律的寿命要长，正如牛顿定律比它从中产生的开普勒定律寿命要长，如果考虑到摄动，开普勒定律仅仅是近似的。

为什么这个原理在所有的物理学定律中占据着如此优越的地位呢？其中有许多小理由。

首先人们认为，在不承认永恒运动可能性的情况下，我们不能排斥它，甚或不能怀疑它的绝对严格性；当然，我们对这样的前景保持着警惕，我们自己认为，肯定迈尔原理比否定迈尔原理要稳妥一些。

给人以深刻印象的迈尔原理的简单性同样有助于增强我们的信心。在直接从实验推出的定律中，例如在马略特 (Mariotte) 定

律中，简单性在我们看来似乎反倒成为怀疑的理由。但是，在这里情况并非如此：我们发现，乍看起来毫无联系的元素，它们本身以未曾料到的顺序排列起来，形成一个和谐的整体；我们决不相信，没有预见到的和谐只是偶然性的结果。这就好象我们花费的力气越大，我们赢得的胜利也就越发可贵，或者说自然界愈是小心翼翼地对我们隐藏她的秘密，我们确信愈能从她那里夺取真正的秘密。

然而，这些不过是微不足道的理由；为了把迈尔定律作为一个绝对的原理建立起来，必须进行比较深入的讨论。但是，如果人们试图这样作，那么他们就会发现，这个绝对的原理甚至不容易陈述。

在每一个特例中都可以清楚地看到能是什么，至少能够给它一个暂时性的定义；但是要找到一个普遍的定义则是不可能的。

如果我们力图把这个原理加以十分普遍的阐述，并把它应用到宇宙，那么我们就看到它化为乌有，也可以说，除了**存在着某种依然是恒定的东西**之外，它什么也没有留下。

但是，连这句话也有一些意义吗？按照决定论者的假设，宇宙的状态是由数目极大的几个参数决定的，我们将称其为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。只要已知这几个参数在任一时刻的值，那么同样也就知道了它们对于时间的导数，从而能够计算出这些参数在此之前或之后的时刻的值。换句话说，这几个参数满足 n 个一阶微分方程。

这些方程容许有 $n-1$ 个积分，从而存在着 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 $n-1$ 个函数，它们依然是常数。假如我们说**存在着某种依然是恒定的东西**，我们所说的只不过是同义反复而已。我们甚至很难说出，在所有这些积分中，那一个应该保留能的名称。

此外，当把迈尔原理应用到有限系统时，就不能在这种意义上理解它。

于是人们假定，我们的参数中有 p 个是独立地变化的，以致于在几个参数和它们的导数之间，我们只有 $n-p$ 个关系，而且它们一般说来是线性的。

为了简化陈述，例定外力做功之和是零，散发到外界的热量也是零。这样一来，我们的原理的意义将是：

在这 $n-p$ 个关系中存在着一组组合，其左端是全微分；然后，根据 $n-p$ 个关系，这个微分为零，它的积分便是常数，这个积分被称之为能。

但是，几个参数的变化怎么会可能是独立的呢？这种情况只有在外力的影响下才能发生（为简单起见，虽然我们已假定这些力的作用的代数和是零）。事实上，假使这个系统完全与外部作用隔离，那么我们的几个参数在给定时刻的值是足以决定该系统在任一后继时刻的状态，倘若我们总是保留决定论的假设的话；因此，我们又回到了与上面一样的困难。

如果该系统未来的状态完全不由现在的状态来决定，这是因为它还依赖于该系统之外的物体的状态。可是，在规定该系统状态的参数 x 之间，很可能存在独立于外部物体的这一状态的方程吗？另外，如果我们在某些情况下相信我们能够找到这样的方程，这不仅仅是由于我们无知，而且还因为这些物体的影响太微弱，以致我们用实验不能检测到吗？

如果这个系统不能被看作是完全孤立的，那么很可能，它的内能的严格精确的表示式将取决于外部物体的状态。再者，我在上面已经假定外力做功之和为零，如果我们力图摆脱这个有点人为的限制，那么陈述就会变得更加困难。

要在绝对的意义上阐述迈尔原理，从而必须把它推广到整个宇宙，于是我们发现我们企图避免的困难又呈现在面前了。

总之，利用日常语言，能量守恒定律只能有一种意义，这就是存在着一种对一切可能性都是共同的特征；可是，按照决定论的假设，只有一种可能性，从而这个定律不再有任何意义。

相反地，按照非决定论的假设，它却有意义，即使在绝对的意义理解它；它也许是对自由的一种限制。

但是，自由这个词使我想到了，我正在离开主题，正要跑到数学和物理学领域之外。因此，我要自我克制，并在这一整个讨论中只强调一个印象，即迈尔原理具有足够灵活的形式，足以使我们把所希望的几乎任何东西都放入其中。由此看来，我没有意指它对应于非客观实在的东西，也没有意指它仅仅化为一种同义反复，因为在每一个特例中，只要人们不企图把它推向绝对，它就具有十分清楚的意义。

这种灵活性是人们相信它的持久性的理由，另一方面，因为它只有溶入更高级的和谐中才会消失，所以我们可以满怀信心地依靠它去工作，可以预先肯定，我们的努力不会白费。

我刚刚说过的东西几乎都适用于克劳修斯原理。与它不同的是，它是用不等式来表示的。也许人们会说，它与一切物理定律相同，由于这些定律的精确性总是受到观察误差的限制。但是，它们至少自命为一级近似，人们希望用愈来愈精确的定律逐渐代替它们。另一方面，如果克劳修斯原理化为不等式，那么这并不是我们的观察手段不完善的缘故，而是由该问题的真正本性引起的。

第三编总的结论

这样一来，力学原理以两种不同的姿态出现在我们的面前。一方面，它们是建立在实验基础上的原理，就几乎孤立的系统而言，它们被近似地证实了。另一方面，它们是适用于整个宇宙的公设，被认为是严格真实的。

如果这些公设具有普遍性和明确性，而这些性质反为引出它们的实验事实所缺乏，那么，这是因为它们经过最终分析便化为约定而已，我们有权利作出约定，由于我们预先确信，实验永远也不会与之矛盾。

然而，这种约定不是完全任意的；它并非出我们的胡思乱想；我们之所以采纳它，是因为某些实验向我们表明它是方便的。

这样就可以解释，实验如何能够建立力学原理，可是实验为什么不能推翻它们。

与几何学作一下比较：几何学的基本命题，例如欧几里得的公设，无非是些约定，再问它们是真还是假，正如问米制是真还是假一样没有道理。

这些约定只是方便的，正是某些实验告诉我们这一点。

乍一看，类比是圆满的；实验的作用似乎是相同的。因此，人们将会说：或者力学必须被看作是实验科学，于是同样的结论对几何学而言也成立；或者相反，几何学是演绎科学，于是人们可以说力学也是如此。

这样的结论也许是不合理的。实验引导我们把几何学的基本约定视为比较方便的东西而加以采纳，但这些实验所依据的对象与几何学所研究的对象毫无共同之处；它们与固体的性质有关、

与光的直线传播有关。它们是力学实验、光学实验，它们无论如何不能被看作是几何学的实验。甚至可以说，我们的几何学在我们看来似乎是方便的主要理由在于，我们身体的各部分、我们的眼睛、我们的四肢，都具有固体的性质。为此，我们的基本实验主要是生理学实验，这些实验与作为几何学家必须研究的对象即空间无关，而与他的身体，也就是说，与他为从事这一研究必须利用的仪器有关。

相反地，力学的基本约定和向我们证明它们是方便的实验与严格相同的对象或类似的对象有关。约定的和普遍的原理是实验的和特殊的原理的自然而直接的推广。

让别人不要说我在科学之间划一道人为的防线吧；而且，假如我用一道屏障把严格意义上所谓的几何学与固体的研究分隔开来，我同样能够在普遍原理的实验式的力学和约定式的力学之间设立一道屏障。事实上，在把这两门科学分开时，我把它们都弄得支离破碎了，当约定式的力学被孤立时，它所留下的只是微不足道的东西，而且无论如何也不能和被称之为几何学的这门学科的华美主体相比，谁看不到这一切呢？

现在人们看到，力学教学还应该是实验的。

只有这样，才能够使我们了解科学的起源，这对于完整地理解科学本身是必不可少的。

此外，我们研究力学，那是为了应用它；只有它始终是客观的，我们才能够应用它。现在，正如我们看到的，原理在普遍性和可靠性方面有所得，它们在客观性方面就有所失。因此，我们尤其要尽早熟悉原理的客观性方面，只有从特殊到普遍，而不是反其道而行之，我们才能做到这一点。

原理都是约定或隐蔽的定义。可是，它们是从实验定律引出

的；可以说，这些定律被提升为原理，我们的精神把绝对的价值归于它们。

有些哲学家推广得太过分了；他们认为原理就是整个科学，从而认为全部科学都是约定的。

这种自相矛盾的学说就是所谓的唯名论，它经不起审查。

定律怎么能变成原理呢？它表示出两个真实项A和B之间的关系。但它并非严格为真，它仅仅是近似的。我们任意引入一个或多或少是虚构的中间项C，**按照定义**，C恰好与A有该定律所表示的关系。

于是，我们的定律被分为两部分：其一是绝对而严格的原理，它表示A和C的关系；其二是实验的定律，它是近似的，可修正的，表示C和B的关系。很清楚，不管这种分解推得多么远，总有一些定律留下来。

现在，我们将到严格意义上所谓的定律的领域中去。

第四编 自然界

第九章 物理学中的假设

实验和推广的作用 实验是真理的唯一源泉。唯有它能够告诉我们新东西，唯有它能够给我们可靠性。这是毋庸置疑的两点。

然而，假如实验即是一切，那给教学物理学还会留下什么位置呢？实验物理学与这样一个无用的、也许甚至有危险的助手有什么关系呢？

可是教学物理学还是存在着，它作出了无可怀疑的贡献，在这里我们有一个必须说明的事实。

要说明的是，只有观察还是不够的。我们必须利用我们的观察资料，去作我们必须推广的工作。这正是人们一向所作的事情；只是由于记着过去的错误，才使他们越来越小心谨慎，他们愈来愈多地进行观察，而愈来愈少地从事推广。

每一个时代的人都嘲笑前一个时代的人，指责他们推广得太快了、太天真了。笛卡儿(Descartes)曾嘲笑爱奥尼亚人可怜；但是笛卡儿本人又使我们发笑。无疑地，我们的孩子某一天将会讥笑我们。

但是，我们不能直接达到目标吗？这不是避免我们预见的嘲笑的方法吗？我们不能满足于赤裸裸的实验吗？

是的，这是不可能的；这就完全误解了科学的真实本性。科学家必须按顺序配置。科学是用事实建立起来的，正如房子是用石块建筑起来的。但是，一堆事实并不是科学，正如一堆石块不是房子一样。

尤其是，科学家必须预见。卡莱尔(Carlyle)在某处曾经说过与此类似的话：“没有什么比事实更为重要了。让·桑·泰尔(Jean Sans Terre)曾经过这里。这里有一些值得赞美的东西。这里有一种实在，为此实在我愿献出世界上所有的理论。”卡莱尔是培根(Bacon)的同胞；但培根却不这样说。那是历史学家的语言。物理学家宁愿说：“让·桑·泰尔曾经过这里，这件事与我无关，因为他永远也不会再从这条道路经过。”

我们大家知道，有好的实验，也有不好的实验。不好的实验再多也无用；尽管人们作了千百个实验，但是真正的大师，例如巴斯德(Pasteur)的工作的一个片断就足以使人们忘却那些实验。培根也许完全理解这一点；正是他发明了**判决实验**(Experimentum Crucis)这个词。但是卡莱尔却不能理解它。事实就是事实。一个小学生读了温度计上的某一数目；他毫不在意地记下了这个数目；不要紧，他读了它，假如这只是一个可以计及的事实，那么这里就有一个和国王让·桑·泰尔旅行具有同一等级的实在。为什么这位小学生所作出的这个读数的事实没有意思，而熟练的物理学家所作出的另一读数的事实相反地就十分重要呢？这是因为从第一个读数中我们不能推论出任何东西。那么，什么是好的实验呢？好的实验就是除了一件孤立的事实外，还能告诉我们一些东西；好的实验能使我们预见，也就是说，能使我们推广。

因为没有推广，便不可能预知。人们工作过的环境从来也不会同时统统复现。从而，观察过的行为永远不会发生；能够肯定

的唯一事情就是，在类似的环境下类似的行为将产生，这就是说，那时已经推广了。

不管人们多么胆怯，还是必须进行内插。实验只给我们一定数目的孤立的点。我们必须用一条连续的线把这些点连结起来。这就是名副其实的推广。但是，我们还要作得更多一些；我们所划的曲线将通过观察到的点之间，并邻近这些点；它不会通过这些点本身。这样一来，人们并未仅限于推广实验，而且还要矫正它们；如果物理学家企图逃避这些矫正，而仅以亦裸裸的实验为满足，那么他便会被迫说出一些十分离奇的定律来。

因而，亦裸裸的事实对我们来说是不够的；这就是为什么我们必须有经过整理的科学，或者宁可说必须有经过组织的科学。

人们常说，必须毫无先入之见地作实验。这是不可能的。这不仅会使一切实验毫无结果，而且人们作过这种尝试，都一事无成。每一个人在自己的思想中都有自己的关于世界的概念，他无法轻易地摆脱它。假如，我们必须使用语言；我们的语言正是由先入之见构成的，而不可能是其他。不过这些是无意识的先入之见，它们比别的先入之见还要危险一千倍。

如果我们引入了其他我们已经充分意识到的先入之见，那么我们只会更加不幸，我们可以这样说吗？我认为不能。我宁可相信它们将起到相互平衡的作用——我将要说它们是解毒剂；一般说起，它们将难以相互一致——它们将彼此冲突起来，因此我们不得不从各个方面考察事物。这足以使我们不受束缚。由于他能够选择主人，他不再是奴隶了。

于是，依靠推广，每一个观察到的事实都能使我们预见大量的其他事实；不过，我们务必不要忘记，只有第一个事实是确实的，其他的仅仅是大概的。一种预见在我们看来不管建立得多么

牢固，如果我们着手检验它，我们从来也没有**绝对地**保证实验不会与它矛盾。可是，这种可能性常常如此之大，以致于我们实际上可以满足它。与其根本不去预见，还不如作**即使不确实**的预见。

因此，当机会来到时，我们永远也不要不屑于去检验。但是所有的实验都是长期的、困难的；勤勉的人没有几个；而我们需要预见的事实的数目是巨大的。与这样大的数目相比，我们能够作出的直接检验的数目永远只不过是沧海之一粟而已。

我们必须最充分地利用我们能够直接得到的这几个结果；很有必要从每一个实验中获得最大的可能的预见数，而且具有最高程度的可能性。可以说，这个问题就是增加科学机器的收益。

让我们把科学和应该不断扩充的图书馆比较一下。图书馆员用于采购的资金并不充裕。他应当尽量不浪费资金。

正是实验物理学被委托作采购工作。而且，唯有它能使图书馆丰富起来。

至于数学物理学，其任务将是编制书目。即使书目编得再好，图书馆也不会更丰富些，但却有助于读者使用它的丰富藏书。

而且，由于它把藏书的脱漏告诉图书馆员，因而能使图书馆员有远见地使用他的资金；这是更为重要的，因为资金严重匮乏。

于是，数学物理学的作用就是如此。它必须以这样的方式直接推广，以便增加我刚才所说的科学的收益。它用什么方法达到这一点，它如何能够安全地去作，这就是留给我们去研究的问题。

自然界的统一 首先，让我们注意一下，每一种推广在某种程度上都含有对自然界的统一性和简单性的信念。至于统一性，不存在什么困难。如果宇宙的各部分不象一物的各部件，它们就

不会相互作用，它们就不会彼此了解；尤其是，我们只能知其一部分。因此，我们不去问自然是否是一个整体，而要问它为何是一个整体。

至于第二点，就不是那么容易的事情了。不能肯定自然界是简单的。我们能够假定它是这样而毫无危险地行动吗？

有一段时间，马略特定律的简单性成为用来证明其正确的论据。菲涅耳(Fresnel)在与拉普拉斯(Laplace)的谈话中曾经说过，自然界不关心解析上的困难，后来为了不过分强烈地触犯盛行的观点，他感到不得不加以解释。

今天，观念大大地改变了；可是，那些不相信自然规律是简单的人还往往不得不象他们相信似地去行动。他们无法完全摆脱这种必要性，除非使一切推广、从而使整个科学变为不可能。

很清楚，任何事实都能够以无穷的方式推广，它是一个选择问题。选择只能够受简单性的考虑的引导。让我们举一个最平常的例子，即内插法的例子。我们在观察所给的点之间，划一条尽可能规则的连续线。我们为什么要避开那些造成角的点和太突然的转折呢？我们为什么不使我们的曲线描绘出最为变幻莫测的之字形呢？这是因为我们预先知道或我们自信知道，所表示的定律不会象那样复杂。

由木星卫星的运动，或由大行星的摄动，或由小行星的摄动，我们可以计算木星的质量。如果我们取这三种方法所获得的测定值的平均数，我们就得到三个十分接近、但又不同的数。我们可以假定引力系数在三种情况下不同，来解释这一结果。观察结果可以肯定是比较好地表示出来了。我们为什么要拒绝这种解释呢？这不是因为它是荒谬的，而是因为它不必要地复杂化了。我们只是在不得已的时候接受它，现在还不必这样。

总而言之，通常认为每一个定律都是简单的，直到相反的东西被证明为止。

由于我刚才解释的原因，这种习惯被强加于物理学家。但是，在每天向我们显示出更丰富、更复杂的新细节的发现面前，我们将如何证明这种习惯是正当的呢？我们如何使它与自然界的统一性的信念一致呢？因为假如每一个事物都与其他一切事物有关，那么如此之多的不同因素参与的关系就不会是简单的。

倘若我们研究科学的历史，我们看到发生了两种可以说是相反的现象。有时简单性隐匿在复杂的外表下；有时简单性则是表面的，它隐藏着极其复杂的实在。

有什么比行星摄动更复杂呢？有什么比牛顿定律更简单呢？正如菲涅耳所说的，自然界在那里玩弄解析困难，同时却仅仅使用简单的方法，通过把这些方法结合起来，自然界就产生了我不知道的难以解决的纷乱。简单性正是隐藏在这里，我们必须去发现它。

相反的例子也相当多。在气体运动论中，人们处理以极大速度运动的分子，它们的路径由于频繁的碰撞而发生变化，具有最为变幻莫测的形状，而且在每一个方向通过空间。可观察的结果则是马略特的简单定律。每一个个别的事实是复杂的。大数定律在平均中重建起简单性。在这里，简单性仅仅是表面的，只是我们感官的粗糙妨碍我们洞察复杂性。

许多现象都服从比例定律。但原因何在呢？因为在这些现象中，有一些东西是很小的。因此，观察到的简单定律只是普遍解析法则的结果，按照这一法则，函数的无穷小增量与变量的增量成比例。因为实际上我们的增量不是无穷小，但它十分小，所以比例定律只是近似的，简单性只是表面的。我刚才所说的适用于小运动的叠加法则，使用这个法则也是富有成效的，这是光学的

基础。

牛顿定律本身又如何呢？它的简单性如此长久地未被发现，这也许只不过是表面的。谁知道它是否由于某种复杂的机制，由于受到不规则运动激励的难以捉摸的物质的影响呢，谁知道它是否只有通过平均作用和大数作用才变简单了呢？无论如何，不假定真实定律包含互补项是困难的，这些项在小距离的情况下是可以察觉的。假如在天文学中这些项作为牛顿定律的修正可以忽略，假如由此恢复了它的简单性，那只是因为天体的距离极大的缘故。

毫无疑问，如果我们的研究方法变得越来越深刻，我们便可以在复杂的东西之下发现简单的东西，然后在简单的东西之下发现复杂的东西，接着再在复杂的东西之下发现简单的东西，如此循环不已，我们不能预见最后的期限是什么。

我们必须停止在某个地方，要使科学是可能的，当我们找到简单性时，我们就必须停下来。这是唯一的基础，我们能够在这个基础上建立我们推广的大厦。但是，这种简单性仅仅是表面的，这个基础将是足够牢固的吗？这是必须研究的问题。

为此目的，让我们看看，关于简单性的信念在我们的推广中起什么作用。我们已在充分多的特例中验证了简单的定律；我们不承认这种如此常常重复的一致只是机遇的结果，我们得出结论：定律必须在普遍情况下为真。

开普勒注意到，第谷(Tycho)所观察的行星的位置都在一个椭圆上。他从来也没有想到，由于机遇的奇怪作用，第谷每次观察天象，都是在行星的真实轨道正巧与这个椭圆相交之时。

或者简单性是真实的，或者它掩盖着复杂的实在，这有什么关系呢？或者它是由于降低个体差异的大数的影响，或者它是由

于容许我们忽略某些项的一些量或大或小的作用，它决不是由于机遇。这种简单性不管是真实的还是表面的，总是有原因的。这样一来，我们总是能够遵循同一推理过程，如果简单性在几个特例中被发现，我们便能够合理地假定，它在类似的情况下还是可靠的。否认这一点也就是赋予机遇一种不能允许的作用。

可是，其中仍有区别。如果简单性是真实的和基本的，那么即使我们测量手段的精度提高了，这种简单性依然如故。因此，如果我们相信自然界本质上是简单的，我们必然能从近似的简单性推论出严格的简单性。这是以前所作过的东西；这是我们没有权利去作的东西。

例如，开普勒定律的简单性仅仅是表面的。这并不妨碍它们可以十分近似地用于类似于太阳系的一切系统；但是，这却使它们不是严格正确的。

假设的作用 一切推广都是假设。因此，假设有着必不可少的作用，这是谁也无法辩驳的。不过，它应当总是尽可能早地、尽可能经常地受到检验。当然，如果它经不起这种检验，人们就应该毫无保留地抛弃它。这正是我们通常所作的工作，但是有时人们却有点儿病态心理。

好了，甚至这种病态心理也不是正当的。真正抛弃了他的假设之一的物理学家反而应当十分高兴；因为他得到了一个未曾料到的发现机会。我想，他的假设并不是毫无考虑地采纳的；这个假设考虑了一切似乎能够参与现象的已知因素。如果检验不支持它，那正是因为存在着某些未曾料到的、异乎寻常的东西；那正是我们将要去寻找的未知的新颖的东西。

可是，被抛弃的假设是毫无成效的吗？远非如此，可以说，

它比真实的假设贡献更大。它不仅是决定性实验的诱因，而且若不作这个假设，这个实验即使碰巧作成功，也不会从中推出什么东西。人们不会看到异常的东西，人们只不过多编入了一个事实，而不能从中推出什么结果。

现在要问，在什么情况下利用假设而毫无危险呢？

服从实验的坚定决心是不够的；还有危险的假设；首先，尤为重要的是不言而喻的和无意识的假设。由于我们是在不了解实验的情况下作假设的，因此我们无力抛弃这些假设。可是在这里，数学物理学再次能帮助我们。因为数学物理学是以精确为特征的，所以它迫使我们制定一切假设，我们在没有它时也可以作假设，但却是无意识地作出的。

此外，我们要注意，重要的是不要过分地增加假设，只能一个接一个地作假设。如果我们在若干假设的基础上构造理论，如果实验否定它，我们前提中的那一个必须改变呢？这将是不可不知道的。相反地，如果实验成功了，我们认为我们一举证明了所有的假设吗？我们会相信只用一个方程就能决定几个未知数吗？

同样，我们务必区分各类假设。其中一类假设是极其自然的，人们几乎不能避免它。人们不得不假定十分遥远的物体的影响完全可以忽略，小移动遵循线性定律，结果是其原因的连续函数。我同样将要讲对称性所给予的条件。事实上，这一切假设形成了数学物理学所有理论的公共基础。它们是最后才能被舍弃的东西。

还有第二类假设，我将称其为中性假设。在大多数问题中，解析家在计算之初就假定，或者物质是连续的，或者相反，物质是由原子构成的。他可以作相反的假定，而不改变他的结果。他只可能比较费神地得到这些结果；这就是一切。因此，譬如实验证

实了他的结论，他可以认为他证明了原子的真实存在吗？

在光学理论中，引入了两种矢量，其一被看作速度，其二被看作涡旋。这里还是一个中性假设，因为采取正好相反的假设也能得到同样的结论。因此，实验成功也不能证明第一个矢量实际上是速度，实验只能证明一件事，即它是矢量。这是在前提中实际引入的唯一假设。为了把我们软弱的精神所要求的具体的外观给予它，那就必须或者视其为速度，或者视其为涡旋，按同样的方式，或者必须用字母 x 表示它，或者必须用字母 y 表示它。然而，不管结果如何，正象这不证明把它称为 x 而不称为 y 是对还是错一样，这也不证明把它看作速度是对还是错。

只要这些中性假设的特征不被误解，它们就永无危险。这些假设可能是有用的，它们或者作为计算的技巧，或者有助于我们理解具体的图象，或者如人们所说的那样坚定我们的思想。从而没有排除它们的机会。

第三类假设是真正的推广。它们是实验必须证实或否证的假设。不管宣布其合理或不适用，它们将总是富有成效的。但是，由于我已经提出的理由，它们将只有在它们为数不多的情况下才是富有成效的。

数学物理学的起源 让我们进一步深究一下，比较仔细地研究一个容许数学物理学发展的条件。我们立即看到，科学家的努力总是为了把实验直接给出的复杂现象分解为为数众多的基本现象。

这可以用三种不同的方式来作：首先，在时间里分解。其目的仅仅是把每一时刻与紧挨着它的前一时刻联系起来，而不是把现象的渐次发展作为一个整体包容进去。人们承认，世界的现实

状态只依赖于紧挨着的过去，也可以说，它不受遥远的过去的记忆的直接影响。由于这个公设，我们不去直接研究现象的整个连续过程，可以只限于写它的“微分方程”。我们用牛顿定律代替开普勒定律。

其次，我们尝试在空间中分解现象。实验给予我们的是一堆混乱的事实，这些事实在具有很大的广延的舞台上演出。我们必须试图去发现基本的现象，这些现象反而局限于很小的空间区域。

举几个例子也许可以更充分地理解我的意思。假如我们希望研究正在冷却的固体的温度分布的所有复杂情况，我们永远也不会成功。如果我们认为固体的一点不能直接把它的热传给遥远的点，那么一切就变得简单了；该点将把它的热仅传给紧邻接的点，然后热流逐渐地到达固体的其他部分。基本现象是两个相邻点之间的热交换。只要我们承认——这是很自然的——该点不受距离是易觉察的分子的温度的影响，那么问题就被严格限制了，也就比较简单了。

我折弯一根棒。它将呈现出十分复杂的形状，直接研究这种形变是不可能的。但是，不管怎样，我能够着手处理它，只要我注意到棒的弯曲是棒的很少的要素形变的结果，而且这些要素每一个的形变只与直接施加在它上面的力有关，而与可能作用在其他要素上的力根本无关。

我可以毫不费力地举出许多例子，在所有这些例子中，我们认为不存在超距作用，或者至少认为不存在大距离的作用。这是一种假设。它并非总是为真，引力定律向我们证明了这一点。因此，它必须受到检验。如果它被证实了，即使是近似地证实了，那也是宝贵的，因为它能使我们至少用逐次逼近法来建造数学

物理学。

如果这个假设经不起检验，那我们就必须寻找其他类似的东西；因为还有其它方法达到基本现象。如果几个物体同时作用，那么它们的作用可以是独立的，而且或者作为矢量，或者作为标量，可以简单地相加。基本现象因而是孤立物体的作用。或者，我们可以处理小运动，或更普遍地处理小变化，这服从众所周知的叠加律。于是，所观察到的运动将被分解为简单的运动，例如声被分解为谐音，白光被分解为单色光。

当我们发现在什么方向对于寻找基本现象来说是可取的时候，我们用什么方法才能达到目的呢？

首先，常常会发生这些情况，为了检测假设，或者更恰当地讲为了检测它对我们有用的部分，没有必要深入到机制之内；大数定律就足够了。

让我们再举一个热传播的例子。每一个分子都向很邻近的分子发出辐射线。我们并不需要知道按照什么定律。如果我们就此作出假定，那么它可能是中性假设，从而它是无用的、不能检验的。事实上，由于平均作用和媒质的对称性，所有差别都被拉平了，而且不管作了什么假设，结果总是相同的。

在电理论和毛细现象理论中，也出现了同样的情况。邻近的分子相互吸引和排斥。我们不需要知道按照什么定律；在我们看来，只要这种引力仅在小距离内才可察觉，只要分子是极多的，只要媒质是对称的就足够了，我们只要让大数定律起作用就行了。

在这里，基本现象的简单性再次隐藏在可观察的总现象的复杂性下面；但是，这种简单性本身只是表面的，它隐藏着极其复杂的机制。

达到基本现象的最好方法显然是实验了。我们应当用实验设法分离出自然界供给给我们研究的一团复杂的乱丝，仔细地研究尽可能多的孤立的要素。假如，自然界的白光可以借助于棱镜分解为单色光，可以借助于起偏振镜分解为偏振光。

不幸的是，这既非总是可能的，亦非总是充分的，有时思想要超过实验。我将只引证一个例子，这个例子经常强有力震撼着我。

如果我分解白光，我将能够把光谱的一小部分孤立起来，但是这部分无论多么小，它总会保持一定的宽度。同样地，所谓**单色光**的自然光给我们一条十分窄的线，但是不管怎样，它并不是无限窄。可以设想，在用实验研究这些自然光的特性时，用越来越精细的光谱线来试验，最后便通过一个极限，于是可以说，我们成功地了解到严格的单色光的性质。

这不可能是精确的。设从同一光源发出两束光线，我们先使它们在两个垂直平面上偏振，然后使它们返回到同一差偏面，再试图使它们发生干涉。如果光严格是单色的，那么它们就会干涉。用我们的接近单色的光作实验，就没有干涉现象，无论谱线多么窄也不行。为了发生干涉，就必须使谱线比已知的最精细的谱线还要窄几百万倍。

可是在这里，我们被通过极限欺骗了。思想必须超过实验，假如能成功地作到这一点，那正是因为思想容许自己受简单性本能的指导。

知道基本事实，能使我们把问题写为方程。此外只要通过组合，从这个方程导出能够观察和能够检验的复杂事实就行了。这就是所谓的**积分**，它是数学家的事务。

人们可能要问，在物理科学中，推广为什么如此迅速地采取

数学形式呢？现在，理由是很容易看到的。这不仅因为我们具有用数字表示的定律；还因为可观察的现象是由大量的**完全相似**的基本现象叠加而成的。从而很自然地引入了微分方程。

每一个基本现象服从简单的定律还是不够的；所有这些现象组合在一起必须服从同样的定律。唯有这样，数学的介入才会有用处；数学实际上教导我们把同类的东西与同类的东西组合起来。数学的目的在于了解组合的结果，不需要重新一个一个地组合。如果我们不得不数次重复同一运算，那么由于它通过一种归纳法预先告诉我们操作的结果，就能使我们避免这种重复。在上面的关于数学推理的那一章中，我已经解释了这一点。

但是，就这一点而言，所有的运算必须是同类的。在相反的情况下，显然必须在实际上一个接一个地顺从进行运算，而数学也就变得无用了。

可是，多亏物理学家所研究的物质的近似的齐性，数学物理学才可能诞生。

在自然科学中，我们再也找不到这些条件：齐性、远离部分的相对独立性、基本事实的简单性；这就是为什么博物学家被迫求助于其他推广方法的原因。

第十章 现代物理学的理论

物理学理论的意义 外行人看到科学理论这么短命而大受冲击。在经过一些年代的繁荣兴旺之后，他们看到这些理论一个一个地被抛弃了；他们看到废墟堆积在废墟之上；他们预见今天风靡一时的理论不久也会遭到这种命运，因此他们得出结论说，这些理论是完全无用的。这就是他们所谓的**科学的破产**。

他们的怀疑论是肤浅的；他们根本没有考虑科学理论的目的和作用；否则他们就会明白，这些废墟可能还对某些东西有好处。

菲涅耳曾把光归因于以太的运动，没有什么理论比菲涅耳的理论更牢固了。可是现在，人们却偏爱麦克斯韦的理论。这意味着菲涅耳的工作是徒劳的吗？不，因为菲涅耳的目的不在于弄清楚是否实际上有以太，以及它是否由原子构成，这些原子实际上是否在这个或那个方向运动；他的目标是预见光学现象。

而且，菲涅耳理论在今天以及在麦克斯韦之前总是容许作到这一点。微分方程总是真实的；它们总是能够用同样的步骤来积分，且积分的结果总是保持它们的值。

请人们不要说，我们这样作是把物理学理论仅仅变为实用处方的作用；这些方程表示某些关系，如果方程依然为真，正是因为这些关系保存着它们的实在。它们现在象过去一样地告诉我们，在一些事物和另一些事物之间存在着某种关系；只不过这种东西我们以前称为**运动**；现在我们却称其为**电流**。但是，这些名称仅

仅是代替真实对象的影象，自然界永远将真实对象向我们隐藏着。这些真实对象之间的真正关系是我们能够得到的唯一的实在，而唯一的条件是，在这些对象之间与在我们被迫用来代替它们的影象之间存在着相同的关系。如果我们知道这些关系，那么我们若认为用一种影象代替另一种影象是方便的，又有什么要紧的呢。

假定某些周期现象(例如电振荡)实际上是由于某些原子的振动，这些原子的行为象摆一样，的确在这个方向或那个方向运动着，这既不可靠，也没有什么趣味。但是，在电振荡、摆运动和一切周期现象之间存在着密切的关系，而这种关系又对应于深刻的实在；这种关系，这种类似，或恰当地讲，这种平行性扩展到细节；它是更为普遍的原理，即能量原理和最小作用原理的结果；这是我们能够证实的东西；这就是在一切装束下总是依然如故的真理，我们可能认为这样打扮它是有用处的。

人们已提出许多色散理论；起初是不完善的，只包含一小部分真理。后来，亥姆霍兹的理论出现了；接着人们用各种方法修正它，连亥姆霍兹本人也在麦克斯韦原理的基础上设想出另一种理论。但是，值得注意的是，亥姆霍兹之后的所有科学家，从表面上大相径庭的出发点开始，都达到同一方程。我敢说，这些理论同时是真实的，不仅因为它们使我们预见相同的现象，而且也因为它们预先表述了真实的关系，即吸收关系和反常色散关系。在这些理论的前提中，真实的东西就是对所有作者都是共同的东西；这就是一些事物之间的某种关系的证实，至于物的名称则随作者而异。

气体运动论也引起了许多非议，如果我们自命在其中看到了绝对真理，那就不可能答复了。但是，这一切非议并没有否认它曾经是有用的，尤其是它向我们揭示了真实的关系，即气体压力

和渗透压的关系，要是没有它，这种关系还在深藏着。因此，在这个意义上，它可以说是真实的。

当物理学家在两种对他来说同样可贵的理论之间发现矛盾时，他有时说：“我们不必为此烦恼，虽然我们看不到链条的中间环节，但是让我们牢牢地握住它的两端。”如果必须把外行人理解的意义赋予物理学理论的话，感到窘迫的神学家的这个论据恐怕是可笑的。在遭到矛盾的情况下，至少有一种理论必须被认为是假的。倘若在它们中只寻找应该寻找的东西，情况就不同了。也许它们二者都表达了真实的关系，也许矛盾仅仅处在我们用来覆盖实在的影象之中。

对于那些感到我们过多地限制科学家可以进入的领域的人，我要回答：我们禁止你们而你们却感到遗憾的这些问题不仅是无法解决的，而且它们是虚幻的、毫无意义的。

有些哲学家妄称，整个物理学都可以用原子的相互碰撞来解释。假若他只是意指，在物理现象之间与在为数众多的小球的相互碰撞之间存在着同一关系，那就再好不过了，这是可验证的，它也许是真实的。但是，他还意指其他东西；我们以为我们是理解这一点的，因为我们以为我们知道碰撞本身是什么；为什么呢？只因为我们常常看台球游戏。我们能认为上帝凝视他的造化时，与我们注视台球比赛时有同样的感觉吗？如果我们不想把这种稀奇古怪的意义赋予他的断语，如果我们也不想作出我刚才解释的且是最好的限制意义，那么这个断语便毫无意义了。

因此，这一类假设只有隐喻的意义。与诗人不禁用隐喻一样，科学家也不应该禁用这类假设；但是，他们应该知道，它们是有价值的。它们对于精神的某种满足而言可能是有用的，倘若它们只是中性假设，它们就不是有害的。

这些思考向我们说明，为什么某些料想被抛弃了的、最终被实验宣告不适用的理论会突然死灰复燃并重获新生。正是因为它们表达了真实的关系；而且还因为，由于各种各样的理由，当我们感到有必要用另一种语言陈述同一关系时，它们并没有停止这样作。因此，它们保持了一种潜在的生命。

仅仅在十五年前，那有比库仑(Coulomb)流体更可笑、更幼稚的过时了的东西呢？可是现在，它们又以电子的名义重新出现了。这些永久带电分子与库仑电分子的区别何在呢？的确，在电子中，电是由微小的、十分微小的物质承载着；换句话说，它们具有质量(可是这一点现在有争议)；但是，库仑并没有否认他的流体有质量，即使他否认了，那也只是勉强的。断言对于电子的信念不会再遭到挫折也许是急燥的；注意到这种未曾料到的复活，没有人不感到奇怪的。

但是，最显著的例子是卡诺(Carnot)原理。卡诺是从一个错误的假设出发建立这个原理的。当人们看到，热不能够创生，但可以转化为功，于是便完全抛弃了卡诺的观念；其后，克劳修斯重新研究它们，才使它们最后获胜。卡诺原理在它的原始形式下除了表达出真实的关系外，还表达了其他不正确的关系，即过时的观念的残余；但是，后者的存在并没有改变其他的实在性。克劳修斯只是象人们砍掉枯枝一样地抛弃了它们。

其结果是热力学的第二个基本定律。在那里总是有相同的关系；虽然这些关系至少在表面上不再继续存在于同样的对象之间。这足以使该原理保留它的价值。甚至卡诺的推理也并未因此而消灭；它们被用于沾染有错误的资料中；但是，它们的形式(也就是说基本的东西)依然是正确的。

我刚才讲过的话同时也阐明了象最小作用原理或能量守恒原

理这样的普遍原理的作用。

这些原理具有极高的价值；它们是在许多物理定律的陈述中寻求共同点时得到的，因此，它们仿佛代表着无数观察的精髓。

不过，正是从它们的普遍性产生了一种结果，即它们不再能够被证实，我在第八章已对此引起注意。由于我们没有给出能量的一般定义，因此能量守恒原理仅仅意味着存在着保持不变的某种东西。好了，不管未来的实验给予我们关于这个世界的新概念是什么，我们总能预先保证，将存在保持不变的某种东西，人们可以称之为能。

这是说该原理没有意义而且消失在同义反复中了吗？根本不是；它意味着，我们称之为能的各种东西被真实的亲缘关系结合起来；它断定在它们之间存在着真正的关系。但是，如果这个原理有意义，它就可能为假；也许我们没有权利无限地推广它的应用，可是在该术语的严格意义上，它预先肯定可以检验；然则我们如何知道它什么时候将获得我们能够合理地赋予它的一切推广呢？只有当它不再对我们有用，即不再使我们正确地预见新现象之时。在这样的情况下，我们将确信所肯定的关系不再是真实的；否则，它可能是富有成效的；实验即使不直接与该原理的新推广相矛盾，但也可以宣布它不适用。

物理学和机械论 大多量理论家对于从力学或动力学中借用的解释都有一种经常的偏爱。有些人只要能够用按照某些定律相互吸引的分子运动解释一切现象，他们就会心满意足。另一些人的要求更多；他们想废除超距引力；他们的分子沿直线路径运动，这些分子只有在受到碰撞时才能从直线路径偏离。还有的人象赫兹(Hertz)那样已取消了力，但却假定它们的分子服从几何连接

物，例如这些连接物类似于我们的联动装置的连接物；他们这样试图把动力学化为一种运动学。

一句话，大家都想把自然界曲解成某种形式，在这种形式之外，他们的思想是不会感到满意的。对此，自然界将是充分柔顺的吗？

我们在第十二章提出麦克斯韦理论时，将考察这个问题。每当能量原理和最小作用原理被满足的时候，我们将不仅看到总是存在着一种可能的力学解释，而且也看到总有无穷多的解释。借助于众所周知的柯尼克(König)关于联动装置的定理，可以证明，我们能够用仿效赫兹的连接物，或者用有心力，以无穷的方式解释一切。毫无疑问，同样可以顺利地证明，一切总是能够用简单的碰撞来解释。

为此，我们不需要以我们感觉到的、我们直接观察其运动的通常的物质为满足。或者我们将假定，这种普通物质是由原子构成的，我们无法知道原子的内部运动，唯有整体位移总是能为我们的感官所感受。或者我们将设想某些微妙的流体，叫它们以太也好，叫其他名字也好，它们在物理学理论中总是起着如此巨大的作用。

人们往往更进一步，把以太看作是唯一的原始物质，或者甚至看作是唯一真实的物质。比较稳健的人则把普通物质视为凝聚的以太，这是不足为怪的；但是，另外的人则进而减小它的重要性，简直把它看作是以太奇点的几何轨迹。例如，在开耳芬勋爵(Lord Kelvin)看来，我们称之为**物质**的东西，只不过是以太被涡旋运动激发的点的轨迹；在黎曼看来，物质是以太不断消失的点的轨迹；在最近的其他作者，例如维歇特(Wiechert)或拉摩(larmor)看来，物质是以太经历一种具有十分特殊的性质的扭转的点

的轨迹。如果我们试图采取这些观点之一，我要问我自己，我们有什么权利在这是真实的物质的借口之下，把在通常的物质即只不过是虚假的物质中观察到的力学性质推广到以太呢。

当人们察觉到热是不可创生的时候，便抛弃了古老的流体、热质、电等等。但是，也是因为另外的理由抛弃了它们。在使它们物质化的过程中，可以说强调了它们的个性，即在它们中间挖了一道深渊。待到我们比较强烈地感觉到世界的统一性，觉察到把世界的各个部分连接在一起的密切关系时，这个深渊必然会被填平。古代的物理学家在增加流体时不仅创造了不必要的实体，而且他们也割裂了真正的联系。

就一种理论而言，它不肯定错误的关系还是不够的，它还必须不隐藏真实的关系。

我们的以太实际存在吗？

我们知道我们的以太信念的起源。如果光从遥远的恒星抵达我们，那么在它离开恒星但还没有射到地球上需要几年时间；因此，它必须寄托在某个地方，也就是，必须由某种实物的支持者承载着。

同样的观念也可以用更数学化的、更抽象的形式来描述。我们查明的东西都是实物分子所经历的变化；例如，我们看到，我们的照相底片感受到一些现象的结果，这些现象的场所实际上是几年前恒星的白炽物质。可是，在通常的力学中，所研究的系统的状态只依赖于紧挨着的先前时刻的状态；因此，该系统满足微分方程。相反地，假使我们不相信以太，那么实物宇宙的状态就不仅取决于紧挨着的先前的状态，而且也取决于以往许多状态；该系统将满足有限差分方程。正是为了避免与力学普遍定律的这种背离，我们才发明了以太。

这还只不过是迫使我们用以太充满星际空间，而不是使它渗透到实物媒质本身之内去。斐索(Fizeau)实验则更进一步。通过在空气或运动的水中传播的光线的干涉，该实验似乎向我们表明，存在着两种相互渗透且相对地改变位置的不同媒质。

我们似乎用手指接触到以太。

可是，还可以构想出使我们更密切地接触到以太的实验。假定牛顿的作用与反作用相等原理**唯有**用于物质时不再为真，并假定我们已证实了这一点。那么，施加在所有实物分子上的全部力的几何和就不再是零了。因此，如果我们不希望改变整个力学，那就必须引入以太，以便使物质表观上经受的这种作用与物质对于某物的反作用相平衡。

或者再假定，我们发现光现象和电现象受地球运动的影响。我们有可能得出结论说，这些现象不仅可以向我们揭示物体的相对运动，而且这似乎是它们的绝对运动。另一方面，以太也许是必要的，以便这些所谓的绝对运动不是物体对于空虚空间的位移，而是物体对于某种具体物的位移。

我们究竟能达到这一点吗？我没有这种希望，我将马上说出其中的缘由来，可是这种希望并不是荒诞不经的，因为其他人也曾有过。

例如，假如洛伦兹(Lorentz)理论——我将在第十三章进一步详细地谈论它——为真，则牛顿原理就不可能**单独**用于物质，而其差别不难由实验看出。

另一方面，人们就地球运动的影响已作出了许多研究。其结果总是否定的。但是，人们之所以进行这些实验，是因为他们不敢预先确信这个结果，事实上，按照流行的理论，补偿只可能是近似的，人们也许期望看到精确的方法给出肯定的结果。

我认为，这样的希望是虚幻的；证明这类成功多少会向我们打开一个新世界，这是人人都感兴趣的。

现在，必须容许我说几句题外话，事实上，我必须解释，尽管有洛伦兹，但我为什么不相信更精密的观察任何时候都能证实除物体的相对位移之外的任何东西。人们已经作了许多实验，这些实验揭示了一阶项；其结果都是否定的；这会是偶然的吗？没有一个人接受这一点；人们企图找出普遍的解释，洛伦兹找到了它；他表明，一阶项必然相互抵消，但二阶项则不然。于是，人们作了更精密的实验；结果也是否定的；这也不是偶然性的作用；必须作出解释；解释被找到了；解释总是找得到的；从来也不缺少假设。

但是，这是不够的；谁不感到这还是把更大的作用赋予了偶然性呢？没有某一情况正好消除了一阶项，而另外的截然不同的、但恰恰却是适时的情況全力消除了二阶项，引起这种情况的奇异的一致也不可能是偶然的吗？是的，对于这两种情况，必须找到相同的解释，因此每一件事都使我们有可能认为，这种解释将同样地适用于高阶项，而且这些项的相互抵消将是严格的、绝对的。

科学的现状 在物理学发展史中，我们可以区分出两种相反的趋势。

一方面，在有些似乎注定永远毫无联系的对象之间，正在不断地发现新的结合物；散乱的事实不再各不相干了；它们倾向于排列成庄严的综合。科学向统一性和简单性进展。

另一方面，观察每天都向我们揭示出新现象；它们必须长久地等待它们的位置，有时为了给它们谋求位置，人们必须拆毁大

厦的一角。正是在已知的现象中，我们粗糙的感官向我们指出了均匀性，我们日复一日地察觉到更多的变化的细节；我们以为简单的东西变复杂了，科学似乎向多样性和复杂性进展。

这两种相反的趋势似乎轮番取胜，但是那一个将最终赢得胜利呢？倘若是前者，则科学是可能的；但是没有东西先验地证明这一点，而且人们可能有理由担心，在徒劳地作出了企图把自然界本身强行纳入我们的统一模型的努力之后，我们却被不断高涨的新发现的洪流所淹没，于是我们必须放弃对它们进行分类，抛弃我们的理想，把科学变成无数处方的记录。

对于这个问题，我们不能作出回答。我们所能作的一切就是观察今日的科学，并把它与昨天的科学进行比较。我们无疑可以从这种审查中获得某种激励。

半个世纪之前，希望继续不断地高涨。能量守恒及其转化的发现向我们揭示了力的统一。这表明，热现象可以用分子运动来解释。人们虽然没有确切地了解这些运动的本性是什么，但是没有人怀疑不久就可以知道它。至于光，任务似乎圆满地完成了。涉及到电，事情并未有多大进展。电刚刚兼并了磁。这是迈向统一的引人注目的一步，是决定性的一步。但是，电本身应该如何进入普遍的统一，它应该如何归并到万能的机制里呢？对此，人们还没有任何设想。可是，谁也不怀疑这种归并的可能性，人们曾对它满怀信心。最后，就物体的分子性质而言，归并似乎还比较容易，但是全部细节依然是不明确的。一句话，希望是远大的、生气勃勃的，但却是模糊的。

今天，我们看到了什么呢？

首先，是基本的进步、长足的进步。电和光的关系现在已知了；光、电、磁这三个原来分开的领域现在形成了一个领域；而

且这种兼并似乎是最终的。

然而，这种胜利也使我们付出了一些代价。光现象本身作为特例归在电现象之下；只要它们依然是孤立的，就容易用设想它们的全部细节均已知的运动来解释它们，那是当然的事情；但是现在，一种解释要是可以接受的，它就必须能够顺利地推广到整个电学领域。可是，这却是一件并非没有困难的事情。

我们所取得的最满意的理论是洛伦兹的理论，正如我们在最后一章将要看到的，洛伦兹用小带电粒子的运动来解释电流；无疑地，这是一种对已知事实作出了最好解释的理论，是把为数最多的真实关系阐明出来的理论，是在最后的建筑物中可以找到最多的遗迹的理论。然后，它还有我上面已经指出的严重缺点：它与牛顿的作用与反作用相等的定律是对抗的；或者确切地讲，在洛伦兹看来，这个原理不能单独地用于物质；要是它是真实的，那就必须考虑以太对物质的作用和物质对以太的反作用。现在，从我们目前了解的情况来看，事情大概不会以这样的方式发生。

不管怎样，多亏洛伦兹，斐索关于动体光学的结果、正常色散和反常色散定律以及吸收定律才找到了它们相互间的联系，而且也找到了与以太的其他特性的联系，这种联系无疑是通过永远也割不断的结合物连接在一起的。看看新的塞曼(Zeeman)效应已经方便地找到了它的位置，而且它甚至有助于分类法拉第(Faraday)的磁致旋光，这是使麦克斯韦的努力落了空的工作；这种方便充分地证明，洛伦兹的理论并不是注定要崩溃的人为的集合物。它恐怕必须被修正，但不会被消灭。

但是，洛伦兹的目的无非是把全部动体光学和动体电动力学包容在一个整体内；他从来也没有妄求给它们一种力学解释。拉摩则更进一步，他在主要方面保留了洛伦兹理论，可以说在它上

面嫁接了麦卡拉(MacCullagh)关于以太运动方向的观念。在他看来，以太的速度象磁力一样，可能具有相同的方向和相同的大小。不管这种尝试多么巧妙，洛伦兹理论的缺点依然存在，甚至还加重了。就洛伦兹而言，我们不知道以太的运动是什么；由于这种无知，我们可以假定它们在补偿物质运动时恢复了作用与反作用相等。对拉摩来说，我们知道以太的运动，我们能够确定没有发生补偿。

如果拉摩失败了——在我看来他好象是这样——这意味着力学解释是不可能的吗？远非如此：我在上面已经说过，当现象服从能量原理和最小作用原理时，就容许有无数力学解释；因此，就光现象和电现象而言，情况也是如此。

但是，这还不够：要使力学解释是有效的，它必须是简单的；要在所有可能的解释中选择有效的解释，除了作出选择的必要性外，还应当有其他理由。可是，我们迄今还没有一种满足这个条件从而有某种效用的理论。我们必须为此而悲叹吗？那样就会忘记追求的目标是什么了；这不是机械论；真正的、唯一的目的是统一性。

因此，我们必须节制我们的奢望；让我们不要试图去阐述力学解释吧；让我们以表明我们总是能够找到我们所希望的解释为满足吧。在这方面，我们是有成就的；能量守恒原理已得到证实，第二条原理即最小作用原理终于参与其中，处于适合于物理学的形式之下。至少就服从拉格朗日(Lagrange)方程，也就是说服从力学的最普遍定律的可逆现象而言，它也总是被证实。

不可逆现象就更难对付了。可是，这些现象也正在被协调，并逐渐趋向于统一；在我们看来，照亮它们的光线来自卡诺原理。长期以来，热力学正是专门研究物体的膨胀和它们的状态变化。

过去一段时间，它变得更大胆了，而且显著地扩大了它的范围。我们把伽伐尼电池组理论和热电现象理论都归功于它，在整个物理学中，没有它不去探索的角落，而且它也钻研化学本身。

相同的定律统治着每一个地方；在各种外观下，处处可以再次发现卡诺原理；处处也可以发现熵这个如此异常抽象的概念，它象能这个概念一样普遍，而且象能一样好象隐匿着实在。辐射热以往似乎不能用它来说明；但是在最近，我们看到辐射热也服从相同的定律。

在这方面，又向我们揭示出新的类似，这些类似常常可以追溯到细节；欧姆(Ohm)电阻类似流体和粘滞性；滞后现象更类似于固体的摩擦。在一切情况下，摩擦好象是各种各样的不可逆现象复制出的模型，这种亲缘关系是真实的、深刻的。

关于这些现象，人们也曾找过严格意义上所谓的力学解释。这些现象几乎不适合于力学解释。要找到这一解释，必须假定不可逆性仅仅是表观的，基本现象是可逆的，而且服从已知的动力学定律。但是，要素为数极多，而且越来越混在一起，以致在我们粗糙的眼光看来，一切似乎都趋向于均匀，即每一种事物都向同一方向前进，而没有返回的希望。因此，表观的不可逆性仅仅是大数定律的结果。但是，只有具有无限敏锐感官的生物，象虚构的麦克斯韦妖，才能够解开这团乱麻，使宇宙的进程倒过来。

这个依附于气体运动论的概念花费了巨大的努力，总的说来却不是富有成果的；但它可以变得富有成果。这不是审查它是否导致矛盾、是否与事物的真正本性一致的地方。

不管怎样，我们把古伊(Gouy)先生关于布朗(Brown)运动的有独创性的观念讲一讲。在这位科学家看来，这种奇异的运动可能背离了卡诺原理。那些处于无规则运动的粒子比致密的网结还

要小；因此，它们可能适于解开那团乱麻，从而使世界逆行。我们几乎可以看到麦克斯韦妖正在起作用呢。

总而言之，原先已知的现象越来越合适地被分门别类，但是新现象也来索要它们的位置；其中大多数，象塞曼效应，立即就找到了位置。

然而，我们还有阴极射线、X射线、铀射线和镭射线。这里有一个人们未曾料想到的完整的世界。多少不速之客必须在此暂宿呢！

还没有人能预见它们将要占据的位置。可是，我不相信它们将消灭这普遍的统一性；我想它们将进一步完善它。事实上，新辐射好象与发光现象相关联；它们不仅激发出荧光，而且有时在同样的条件下也发出荧光。

它们与在紫外线的作用下产生电火花的原因也不是没有亲缘关系的。

最后，尤其是，人们认为在所有这些现象相中可以找到真实的离子，这些离子确实是由比在电解液中大得不可比拟的速度激励的。

这都是十分模糊的，但是将来都会变得比较精确。

磷光、光对电火花的作用，这些现象曾经是当孤立的领域，从而被研究者多少忽视了。现在，人们可望建设一条新路线，使它们与科学其他领域的联络更为方便。

我们不仅发现新现象，而且在我们认为已经知道的现象中，也揭示出未曾预见到的方面。在自由以太中，定律依然保持着它们庄严的简单性；但是，严格意义上所谓的物质似乎越来越复杂，人们就它所说的一切永远只不过是近似的，而我们的公式每时每刻都要求新项。

然而，框架未被打破；在我们曾认为是简单的对象中我们已辨认出的关系，当我们知道了它们的复杂性时，它们在这些相同的对象中还继续存在着，唯有这一点是重要的。的确，为了更紧密地包容自然界的复杂性，我们的方程变得越来越复杂；但是，容许相互推导这些方程的关系却丝毫也没有变化。简而言之，这些方程的形式依然如故。

以反射定律为例：菲涅耳已用简单而富有魅力的理论建立了反射定律，实验似乎证实了他的理论。自那时以来，更精密的研究证明，这种证实只不过是近似的；这些研究处处显示出椭圆偏振的迹象。但是，由于一级近似给予我们的帮助，我们立即找到了这些异常的原因，这就是转变层的存在；菲涅耳的理论在它的主要方面依然不变。

可是，还有一个我们不得不进行思考的问题：如果人们起初就怀疑关系所关联的对象的复杂性，那么所有这些关系会依然不被察觉吗。长期以来就有人说过：假使第谷有精确十倍的仪器，那就既不会有开普勒或牛顿，也不会有天文学。当观察手段已经变得十分完善时，一门科学诞生得太迟是一件不幸的事。今天物理化学的情况就是这样；它的奠基者们在一般了解中受到第三位和第四位小数的困扰；所幸的是，他们都是具有坚定信念的人。

人们对物质的特性了解得越充分，就越是看到连续性处于统治地位。自从安德鲁斯(Andrews)和范·德瓦尔斯(van der wals)的工作之后，我们才获得了从液态如何过渡到气态以及这种过渡并非突然的观念。同样地，在液态和固态之间也没有什么鸿沟，在最近的一次会议录中，我们同时看到了关于液体刚性的研究成果和关于固体流动的专题论文。

由于这种趋势，简单性无疑丧失了，从前用几条直线表示的

一些现象，现在必须用多少有点复杂的曲线把这些直线连结起来。作为补偿的表示，却显著地获得了统一性。这些被割裂的范畴使精神受到安慰，但它们并不能使精神满足。

最后，物理学方法已经侵入到新的领域，即化学领域，物理化学诞生了。它还很年轻，但是我们已经看到，它将能使我们把诸如电解、渗透作用和离子运动这样的现象关联起来。

从这一仓促的讲解中，我们会得出什么结论呢？

总而言之，我们已趋近统一了；我们并未象五十年前希望的那般迅速，我们也没有总是采取预定的道路；但是，我们却赢得了如此之多的地盘。

第十一章 概率演算

在这里考察一下关于概率演算的思想，无疑会使人感到惊讶。它与物理科学的方法有什么关系呢？

可是，我要提出而不去解决的问题自然地呈现在思考物理学的哲学家的面前。

正是针对这一情况，我在前两章常常不得不使用“概率”和“偶然性”的词汇。

正如我在上面已经说过的：“预言的事实只能是或然的。一个预言在我们看来不管多么牢固，我们任何时候也不能绝对保证，实验不会证伪它。然而，其概率往往是很大的，以致我们实际上可以感到满意。”

稍后，我又补充说：“看一看简单性的信念在我们的推广中所起的作用。在为数众多的特例中，我们已经证实了简单的定律；我们拒不承认这种如此经常重复的一致只能是偶然性的结果。……”

这样，在许多情况下，物理学家与只盼望机遇的赌徒处在同一位置上。他象运用归纳推理一样，也常常或多或少有意识地需要概率演算，这就是我不得不插几句话的原因，以便稍为比较仔细地审查一下这种演算的价值以及相信它有什么好处。

概率演算这个名字本身就是一个悖论。与确实性相对的概率是我们所不知道的，我们如何能够演算我们不知道的东西呢？可是，许多著名的学者已经从事这种演算，而且不能否认，科学从

中已获得了不少的好处。我们如何能够解释这个表面上的矛盾呢？

概率被定义了吗？它到底能够被定义吗？如果不能定义，那我们怎么敢针对它进行推理呢？人们将说，这个定义是很简单的：一个事件的概率是有利于这个事件的事例数与可能的事例总数之比。

一个简单的例子将表明，这个定义是多么不完善。我掷出了两个骰子。要使这两个中的一个至少出现六点的概率是多少？每一个骰子能够显示出六个不同的点，可能的事例数是 $6 \times 6 = 36$ ，有利的事例数是11，概率是 $11/36$ 。

这是正确的答案。但是，难道我不可以同样说：两个骰子上现出的点能够形成 $6 \times 7 / 2 = 21$ 种不同的组合吗？在这些组合中，6个是有利的，概率是 $6/21$ 。

现在，为什么第一种枚举可能事例的方法比第二种合理呢？无论如何，这不是我们的定义所能告诉我们的。

因此，我们只好用下述说法完善我们的定义：“一个事件的概率是有利于这个事件的事例数与可能的事例总数之比，倘若这些事例同样是或然的话。”这样一来，我们便被迫用或然定义或然了。

我们怎么能够知道，两个可能事例同样是或然的呢？这难道是依据约定吗？如果我们在每个问题的开头都放一个约定，那可就好了。于是，除了应用算术和代数法则以外，我们将无事可作，而且我们将完成我们的演算，我们的结果毫无怀疑的余地。但是，如果我们希望稍微应用一下这个结果，那么我们就必须证明我们的约定是合理的，于是我们将发现我们恰恰面临着我们企图回避的困难。

人们能说健全的感官足以向我们表明应该采纳什么约定吗？哎呀！贝尔特朗德(Bertrand)先生为了自娱而讨论了下述的简单问题：“圆的弦可比内接正三角形之边大的概率是多少？”这位杰出的几何学家采纳了健全的感官似乎同样都能说出的两个约定，他发现一个概率是 $1/2$ ，另一个概率是 $1/3$ 。

似乎从所有这一切就能断言，概率演算是一门无用的科学，而且我们必须怀疑这种糊模的本能，可我们刚才还称其为健全的感官，并习惯于求助它来证明我们的约定是合理的呢。

但是，我们也不能赞成这个结论；没有这种模糊的本能我们便无从作起。没有它科学则是不可能的，没有它我们既不能发现定律又不能应用定律。例如，我们有权利陈述牛顿定律吗？毋庸置疑，许多观察都与它相符；但这不是偶然性的简单结果吗？此外，这个定律几个世纪以来都为真，我们怎么知道它明年还将为真呢？对于这种异议，你会感到无从回答，除非说：“那是极其不可能的。”

但是，姑且承认这个定律吧。依靠它，我自信我们能够计算一年后的位置。我有权利相信这一点吗？谁能够告诉我，在从现在到那时这段时间内，一个以极大速度运动的巨大质量不会通过太阳系附近，从而产生未预见到的扰乱呢？在这里，只能再一次回答：“那是极其不可能的。”

从这种观点来看，全部科学只可能是概率演算的无意识的应用而已。否定这种演算就是否定整个科学。

在有些科学问题中，插入概率演算是比较明显的，我不打算多谈这些问题了。这些问题的最前沿有内插法问题，在内插法中，已知一定数目的函数值，我们企图猜测中间值。

我同样要提到著名的观察误差理论，我以后还要提及它；气

体运动论这个众所周知的假设假定，每一个气体分子都描绘出极复杂的轨道；但是，由于大数的效果，唯一可观察的平均现象服从马略特和盖-吕萨克(Gay-Lussac)的简单定律。

所有这些理论都建立在大数定律的基础上，概率演算显然会毁坏它们。的确，它们只有特殊的利益，除了涉及到内插法外，这些都是我们心甘情愿付出的牺牲。

但是，正如我上面说过的，受到怀疑的不仅仅是这些部分的牺牲；而是整个科学的合法性将受到挑战。

我确实知道有人可能会说：“我们是无知的，可是我们必须行动。为了行动，我们无暇全力以付地进行充分的调查，以消除我们的无知。况且，这样的调查也需要无数的时间。因此，我们必须在未知之前作决定；不论成功与否，我们不得不这样作，我们必须在没有完全相信这些法则的情况下遵循它们。我所知道的并不是某一事物是真实的，不过在我看来，最好的方针就是当它是真实的而去行动。”从那时起，概率演算，从而科学本身都只有实用的价值了。

不幸的是，困难并没有因此而消失。赌徒想一举获胜；他询问我的意见。如果我向他提出建议，那么我要运用概率演算，但是我不能保证成功。这就是我所谓的**主观概率**。在这种情况下，我必须满足于我刚才给出梗概的解释。但是，假定一观察者在赌博现场，他记下各盘的输赢，赌博继续了很长时间。当他汇总他的记录时，他将发现事件的发生与概率演算的规律一致。这就是我们所谓的**客观概率**，正是这个现象必须加以解释。

有许多保险公司应用概率演算法则，它们把红利分给它们的股东，这些红利的客观实在性是无可辩驳的。乞灵于我们的无知和行动的必要性不足以解释它们。

因此，绝对的怀疑论是不可接受的。我们可以怀疑，但是我们不能整个儿宣布不适用。必须进行讨论。

I. 概率问题的分类 为了把现有的关于概率的问题加以分类，我们可以从许多不同的观点来考察它们，首先从**普遍性的观点**来考察它们。我在上面已经说过，概率是有利事例数与可能事例数之比。由于没有较好的名词，我所谓的普遍性将随着可能事例数增加。这个数可以是有限的，例如我们掷一局骰子，其可能事例数是36。这是一次普遍性。

但是，例如我们要问，圆内的点在内接正方形内的概率是多少，那么圆内有多少点便有多少可能事例，也就是说有无穷多可能事例。这是二次普遍性。普遍性还能够向前推进。我们可以问函数将满足已知条件的概率。于是，人们能设想出多少不同的函数，就有多少可能事例。这是三次普遍性，例如当我们企图寻找与有限的观察数相符合的最可几的定律时，我们就上升到三次普遍性了。

我们可以使自己站在完全不同的观点上。如果我们不是无知的，那就不会有概率，无非为确定性留下了位置。但是，我们的无知不能是绝对的，因为那样就根本不会再有任何概率，由于甚至要达到不确定的科学，还需要一点光明才行。因此，概率问题可以按照这种无知的或深或浅来进行分类。

在数学中，我们甚至可以提出概率问题。从对数表中随意取出的对数的第五位小数是9，其概率若何？可以毫不犹豫地回答，这个概率是 $1/10$ ；在这里，我们具有该问题的所有数据。我们不用求助对数表就能够计算我们的对数，但我们不想去自找麻烦。这是第一级无知。

在物理科学中，我们的无知变得更大。一个系统在给定时刻的状态取决于两件事：它的初始状态和状态变化所依据的定律。如果我们知道这个定律和这个初始状态，那么我们将有一个待解决的数学问题，我们又落回到第一级无知上。

但是，常常会发生这种情况：我们知道定律，却不知道初始状态。例如，可以问小行星目前的分布如何？我们知道，自古以来它们是服从开普勒定律的，但是我们不知道它们的初始分布。

在气体运动论中，我们假定气体分子沿直线轨道运动，并服从弹性体碰撞定律。但是，因为我们不知道它们的初始速度，所以我們也不知道它们现在的速度。

概率演算只能使我们预言由这些速度组合引起的平均现象。这是第二级无知。

最后，不仅初始条件，而且定律本身都可能是未知的。这样，我们便达到第三级无知，至于现象的概率，一般说来我们根本不再能肯定任何东西。

人们往往不是借助于或多或少的关于定律的不完善的知识试图猜测事件，事件可能是已知的，我们想去寻找定律；或者，我们不是由原因推导结果，而是希望从结果推导原因。这些是所谓的原因概率问题，从它们的科学应用的观点来看是最有趣的。

我和一位先生玩纸牌游戏，我知道他是很诚实的。他正准备发纸牌。他翻出王牌的概率是多少？是 $1/8$ 。这是结果概率问题。我和一位不相识的先生玩牌，他发了十次牌，而翻出六次王牌。他是骗子的概率是多少？这是原因概率中的问题。

有人可能会说，这是实验方法的基本问题。我观察到 x 的 n 个值和 y 值。我发现，后者与前者之比实际上是常数。这里有一个事件，其原因何在呢？

大概存在着 y 与 x 成比例的普遍定律吧，大概小小的发散是由于观察的错误吧？这是人们正在不断询问的一种类型的问题，每当我们从事科学工作时，我们都在无意识地解决它。

现在，我将把这些不同范畴的问题提出来加以评论，同时依次讨论我上面所谓的主观概率和客观概率。

II. 数学中的概率 自1882年以来，不可能把圆周弄成正方形已被证明；但是，即使在那时之后，所有科学家都认为，这种不可能性是如此之“可几”，以致科学院不经审查就抛弃了一些不幸的狂人每年递交的关于这个课题的论文，哎呀，这些论文可真是太多了！

科学院错了吗？显然不是这样，它清楚地知道，这样作不会冒一点扼杀重大发现的危险。科学院没有证明这是对的，但它十分清楚地了解，它的本能不会犯错误。假使你要问科学院院士，他们会回答说：“我们曾作过比较，是无名学者能够解决长期努力依然悬而未决的问题的概率大，还是地球上多了一个狂人的概率大；在我们看来，第二个概率好象比较大。”这些是十分充足的理由，但它们毫无数学根据，它们纯粹是心理的。

如果你再进一步追问他们，他们会补充道：“你为什么要假定超越函数的特别值是代数数呢？如果 π 是一个代数方程的根，你为什么要假定这个根是函数 $\sin 2x$ 的周期，而同一方程的其他根则又不然呢？”总而言之，他们要求助于以模糊形式出现的充足理由律。

然而，他们能够从中推出什么呢？至多不过推出使用它们的时间的行为规则，与其阅读引起他们合理怀疑的学究式的文章，倒不如把时间花在日常工作上更有用。但是，我上面所谓的客观

概率与这里的第一个问题毫无共同之处。

至于第二个问题，则是另外的样子。

考虑一下我在对数表中找出的头10,000个对数。在这10,000个对数中，我随意取出其中之一。它的第三位小数是偶数的概率是多少？你将毫不犹豫地回答是 $1/2$ ；事实上，如果你在対数表中挑出这10,000个数的第三位小数，你将发现偶数和奇数几乎一样多。

或者如果你乐意的话，让我们写出与10,000个对数对应的10,000来数来；若相应的对数的第三位小数为偶数，则这些数中的每一个是+1，若为奇数，则是一1。接着，取这10,000个数的平均值。

我会毫不迟疑地说，这10,000个数的平均值大概是0，如果我实际去计算它，我便可以证实它是极小的。

但是，即使这一验证也是不需要的。我可以严格地证明，这个平均值小于0.003。为了证明这个结果，我不得不作相当冗长的演算，这里没有它的篇幅，为此我只好引用我在1899年4月15日出版的《科学概论》中的一篇文章。我希望引起注意的唯一之点如下：在这一计算中，我只需要把两件事实作为我的例子的基础，也就是说，对数的一阶导数和二阶导数在所考虑的区间依然处在某些极限之间。

因而，这一性质是真实的重要结果不仅是对数的，而且也是任何连续函数的，因为每一个连续函数的导数都是有限的。

如果我预先确定了这个结果，首先是因为我就其他连续函数常常观察到相似的事实；其次，是因为我在心里以或多或少的无意识的和不完善的方式作过推理，这种推理能使我得出前面的不等式，正如一位娴熟的演算能手，在作完乘法之前，就考虑到它

大约是多少了。

此外，由于我所谓的我的直觉只不过是真实推理片断的不完善的概括，这就明白了观察为何能证实我的预见，客观概率为何与主观概率一致。

我将选择下述问题作为第三个例子：随便取一个数 u ， n 是一个很大的已知整数。 $\sin nu$ 的概值是什么？这个问题本身毫无意义。为了使它有意义，就需要约定。我们将公认，数 u 处在 a 和 $a+da$ 之间的概率等于 $\phi(a)da$ ，因此它与无穷小区间的 da 成比例，而且等于这区间与仅依赖于 a 的函数 $\phi(a)$ 之积。至于这个函数，我可以任意选择它，但是我必须假定它是连续的。当 u 增加 2π 时， $\sin nu$ 的值依然相同，因此我可以在不失去普遍性的情况下设想， u 处在 0 与 2π 之间，这样我便有可能假定， $\phi(a)$ 是周期函数，其周期是 2π 。

所求的概值可以方便地用单积分表示，很容易证明，这个积分小于

$$2\pi M_k/n^k,$$

M_k 是 $\phi(u)$ 的 k 阶导数的极大值。于是我们看到，如果 k 阶导数是有限的，那么当 n 无限增加时，我们的概值将趋于 0 ，而且比 $1/n^{k-1}$ 更快地趋于 0 。

因此，当 u 很大时， $\sin nu$ 的概值是零。要定义这个值，我需要约定；但是，**无论约定是什么**，其结果总是相同的。在假定函数 $\phi(a)$ 是连续的和周期的时，我只是给我自己加了很少的限制，这些假设是如此自然，以致我们可以自问，如何能够避免它们。

通过对前述三个在各方面如此不同的例子的审查，已经使我们一方面窥见到哲学家所谓的充足理由律是什么，另一方面窥见

到对所有连续函数都是共同的某些性质这一事实的重要性。研究物理科学中的概率将导致我们得到同一结果。

Ⅲ. 物理科学中的概率 我现在来到与我们所谓的第二级无知有关的问题上，即在这些问题中，我们知道定律，但是不知道系统的初始状态。我能举出许多例子，但只想举一个。在黄道带上小行星目前大概的分布如何？

我知道它们服从开普勒定律。我们甚至根本不用改变问题的性质就可以假定，它们的轨道都是圆的，并且处在同一平面上，我们知道这个平面。另一方面，谈到它们的初始分布，我们却一无所知。不过，我们却毫不犹豫地断定，它们的分布现在几乎是均匀的。为什么呢？

设 b 是小行星在初始时刻的黄经，也就是说，初始时刻是零。设 a 是它的平均运动。它在目前时刻，即在 t 时刻的黄经将是 $at+b$ 。说目前的分布是均匀的，也就是说 $at+b$ 倍数的正弦和余弦的平均值是零。为什么我们肯定这一点呢。

让我们用平面上的一点来代表每一个小行星，也就是说，用坐标恰恰是 a 和 b 的点来代表。这一切表示点将被包括在该平面的某一区域内，但是当点很多时，这个区域看来好象布满了点，关于这些点的分布，我们一无所知。

当我们想把概率演算用于这样的问题时，我们怎么作呢？在该平面的某一部分可以找到一个或多个表示点的概率是多少？由于我们无知，我们只好作任意的假设。为了说明这个假设的性质，请容许我利用粗糙的但却是具体的影象，以代替数学公式。让我们设想，在我们平面的表面上，铺一层虚构的实物，其密度是可变的，但却是连续地变化的。然后我们约定说，在该平面一部分

上找到表示点的概率与在那里找到的虚构的物质之量成比例。因此，如果我们在该平面上有相同范围的两个区域，那么在这一区域或那一区域找到一个小行星的表示点的概率将与在这一区域或那一区域虚构物质的平均密度彼此一样。

于是，这里有两种分布：一种是真实的，表示点很多、十分密集，但却象原子假设中的物质分子一样是离散的；另一种远离实在，其中我们的表示点被连续的虚构物质所代替。我们知道，后者不能是真实的，但我们的无知迫使我们采纳它。

倘若我们还有关于表示点真实分布的某些观念的话，我们就可以这样排列它，使得在某范围的一个区域中，这种虚构的连续物质的密度几乎与表示点的数目成比例，或者如果你愿意的话，也可以说与包含在那个区域中的原子数成比例。甚至这也是不可能的，而我们的无知太厉害了，以致我们被迫任意选择函数，来定义我们虚构物质的密度。我们只受我们几乎不能避免的假设的限制，我们可以假定这个函数是连续的。正如我们将要看到的，这足以使我们得出结论。

小行星在时刻 t 的可几分布是什么？或者确切地讲，黄经在时刻 t 的正弦，即 $\sin(at+b)$ 的大概值是多少？起初我们作出了任意的约定，但是我们若采用它，则这个大概值就完全确定了。把平面分成面积元。考虑 $\sin(at+b)$ 在每一个面元中心的值；把这个值乘以面元的面积和虚构物质的相应密度。然后，取该平面所有面元之和。按照定义，这个和将是我们所求的平均概值，它是用二重积分表示的。

人们乍看起来可能认为，平均值取决于定义虚构物质密度的函数的选择，由于这个函数 ϕ 是任意的，按照我们所作的任意选择，我们能够得到任何平均值。但却并非如此。

简单的演算表明，当 t 增加时，我们的二重积分急剧地减小。

因此，我完全无法告诉，关于这个或那个初始分布我们能作什么假设；但是，不论作什么假设，结果将是相同的，这使我摆脱了我的困难。

无论函数 ϕ 是什么，当 t 增加时，则平均值趋于零，而且由于小行星肯定已完成了极大次数的旋转，所以我可以断言，这平均值是很小的。

我可以象我希望地那样选择 ϕ ，不过总有一个限制：这个函数必须是连续的；而且，事实上，从主观概率的观点来看，选择非连续函数也许是不合理。例如，我有什么理由假定，初始黄经必须严格为 0° ，而不能处在 0° 和 1° 之间呢？

但是，如果我们采用主观概率的观点，如果我们从我们设想的虚构物质是连续的分布过渡到我们的表示点有如分立的原子的真实分布，那么困难就出现了。

$\sin(at+b)$ 的平均值将十分简单地用

$$1/n \sum \sin(at+b)$$

来表示， n 是小行星的数目。作为与连续函数有关的三重积分的替代，我们将有离散项之和。可是，没有人会认真地怀疑这个平均值实际上是很小的。

由于表示点是十分密集的，我们的离散和一般来说与积分的差异将是极其微小的。

当离散项的数目无限增加时，积分就是这些项之和趋近的极限。如果项很多，和与它的极限相差也很小，也就是说与积分相差很小。我就积分所说的一切对于和本身而言还将为真。

然而也有例外。例如，对于一切小行星来说，如果

$$b = \pi/2 - at$$

那么所有行星在时间 t 的黄经都是 $\pi/2$ ，其平均值显然等于1。为使情况如此，在时刻0时，有必要让小行星都处在特殊形状的螺旋上，这个螺旋的螺纹是十分密集的。每一个人都承认，这样一个初始分布是极为不可能的（而且，即使假定它实现了，这种分布在目前，例如在1900年1月1日也不会是均匀的，但是在几年后，它却会变均匀。

可是，我们为什么认为这种初始分布是不可能的呢？这是必须解释的，因为如果我们没有理由把这个怪诞的假设视为不可能的而加以拒绝，那么一切都会毁坏的，而且我们再也不能对某个分布的概率作出任何肯定了。

我们将再次求助充足理由律，我们总是必须重新提起它。我们可以承认，开始时行星几乎分布在一条直线上。我们可以承认，它们是不规则分布的。但是，在我们看来，似乎没有充足的理由认为，某种未知的原因引起它们沿着如此规则却又如此复杂的曲线运行，这仿佛是特意如此选择的，从而使目前的分布不可能均匀。

VI. 红与黑 象轮盘赌这样的机遇游戏所产生的问题，基本上与我刚才论述的问题完全类似。

例如，把一个轮盘分为极多的红黑相间的等分。用力使指针旋转，在转了许多圈之后，它停在这些分格之一上。这个分格是红的概率显然是 $1/2$ 。

指针旋转的角度为 θ ，且包括几个整圈。用力转动指针，使这个角度处于 θ 与 $\theta+d\theta$ 之间，我不知道其概率是多少；但是我能够作出约定。我能够假定，这个概率是 $\phi(\theta)d\theta$ 。至于函数 $\phi(\theta)$ ，我能够以完全任意的方式选择它。在我作出选择时，没有

什么东西能够指导我，但是我自然地导致假定这个函数是连续的。

设 ϵ 是每一个红分格和黑分格的长度(在半径为1的圆周上测量)。

我们必须计算 $\phi(\theta)d\theta$ 的积分，一方面把它扩大到所有红分格，另一方面把它扩大到所有黑分格，并把结果进行比较。

考虑区间 2ϵ ，它包括红分格和接着的黑分格。该 M 和 m 是函数 $\phi(\theta)$ 在这个区间的最大值和最小值。扩大到红分格的积分将小于 $\Sigma M\epsilon$ ；扩大到黑分格的积分将大于 $\Sigma m\epsilon$ ；因此，二者之差将小于 $\Sigma (M-m)\epsilon$ 。但是，如果假定函数 θ 是连续的；此外，如果区间 ϵ 相对于指针旋转过的总角度来说很小，那么差 $M-m$ 将是很小的。因此两个积分之差将很小，概率将十分接近于1/2。

我们看到，在对函数 θ 一无所知的情况下，我必须象概率是1/2那样去行动。另一方面，如果我站在客观的观点上观察若干次，那么我就会理解，为什么观察使我得到红的次数与黑的次数大约一样多。

所有的赌博者都知道这个客观规律；但它却使他们陷入了值得注意的错误之中，这种错误虽则常常被揭露出来，但他们总是一再坠落其中。例如，当红的连赢六次时，他们押在黑的上，以为他们这回准胜；他们说，因为红的连赢七次是十分稀少的。

实际上，他们获胜的概率依然是1/2。的确，观察表明，七个接连红的系列是十分稀少的，但是六个红接着一个黑的系列同样也是十分稀少的。他们注意到七个红的系列是罕有的；如果他们没看到六个红和一个黑的稀罕，那只是因为这样的系列没有引起注意。

V. 原因概率 我们现在谈谈原因概率问题，从科学应用的观点来看，这是最重要的问题。例如，两个恒星在天球上十分接近。这种表面上的接近仅仅是偶然的结果吗？这些恒星虽然几乎在同一视线上，它们处在与地球具有极其不同的距离的位置上、从而相互之间十分遥远吗？或者，这种表面的接近也许与实际的接近是一致的？这是原因概率的问题。

我首先想起，在迄今我们所关注的所有结果概率问题中，起初我们总是必须作出或多或少被证明是合理的约定。在大多数情况下，如果结果在某种程度上不依赖于这个约定，这仅仅是因为某些假设容许我们先验地排除不连续函数，或者说排除某些荒谬的约定。

当我们处理原因概率时，我们将会发现某些类似的东西。一个结果可以由原因A或原因B产生。该结果刚刚被观察到了。我们要问它由原因A产生的概率。这是**后验**的原因概率。但是，如果没有或多或少被证明是合理的约定**预先**告诉我原因A起作用的**先验**的概率是多少，那么我就不能计算后验的原因概率；我意指的是对于一些没有观察到该结果的人而言的这个事件的概率。

为了解释得更清楚，我回到上面提到的玩纸牌游戏的例子。我的对手首先发牌，他翻出王。他是骗子的概率是多少？通常讲授的公式给出的是 $8/9$ ，结果显然是相当令人惊奇的。如果我比较仔细地检查一下结果，那么我会看到，这个演算仿佛**在我坐到桌旁之前就作过了**，我已经认为在两次中有一次我的对手是不诚实的。这是一个荒谬的假设，因为在此种情况下我肯定不会和他玩了，这便解释了结论的荒谬性。

关于先验概率的约定是不合理的，这就是为什么后验概率演算把我引向不能容许的结果。我们看到这个预备约定的重要性。

我甚至还想补充说，如果不作预备约定，后验概率问题便毫无意义。预备约定总是必须作出的，或者直截了当地作出，或者不言而喻地作出。

再举一个更具有科学特点的例子。我想确定一个实验定律。当我了解这个定律时，这个定律能够用曲线来描述。我作了若干孤立的观察；其中每一个都可用一点来表示。当我得到这些不同的点时，我在它们之间引一条曲线，尽可能使点靠近它们，可还是保持曲线的规则形状，没有角点，或者没有太急剧的弯曲，或者曲率半径没有突然的变化。在我看来，这个曲线将表示盖然定律，我不仅假定它将告诉我所观察到的值之间的中间值，而且假定它将给我比直接观察更正确的观察值。这就是我使曲线通过点的附近而不通过点本身的原因。

这里有原因概率的问题。结果是我记录的测量；这些结果取决于下述两个原因的组合：现象的定律和观察的误差。知道了结果，我们必须寻求现象服从这个或那个定律的概率以及观察受这个或那个误差影响的概率。于是，最可几定律对应于所画的曲线，而最可几误差则由相应点与这个曲线的距离来表示。

但是，在任何观察之前，如果我没有形成某一定律的概率的先验观念以及我所面临的误差偶然性的先验观念，那么这个问题将毫无意义。

如果我的仪器是好的（而且我在观察前已了解这一点），我就不会容许我的曲线与表示初步测量的点偏离得太多。如果仪器不好，我可以使曲线离点稍远一些，以便得到弯曲较少的曲线；我将较多地牺牲规则性。

我为什么企图画一条没有曲折的曲线呢？这是因为，我先验地认为定律是用连续函数（或用其高阶导数是很小的函数）表示

的，这种定律比不满足这些条件的定律更可行。没有这种信念，我们所谈的问题就没有意义；解释就是不可能的；从有限数目的观察中无法推导出定律；科学便不存在了。

五十年前，物理学家认为，在其他情况相同时，简单的定律比复杂的定律更可行。他们甚至求助于这个原则来袒护马略特定律，反駁勒尼奧(Regnault)实验。今天，他们拒斥这种信念；可是，有多少次他们被迫象他们持有这种信念一样地去行动！不管情况怎样，这种倾向遗留下来的是对于连续性的信念，我们刚才看到，假如这种信念本身不得不消失的话，实验科学就变得不可能了。

VI. 误差理论 我们就这样被导致来谈误差理论，这个理论直接与原因概率问题相关。在这里我们再次发现**结果**，即若干不一致的观察，我们企图去推测**原因**，这些原因一方面是所测量的量的真值，另一方面是在每次孤立观察中所产生的误差。有必要计算每一个误差的后验的可能量是多少，从而计算所测量的量的可行值。

但是，正如我刚刚解释的，如果我们不先验地承认，也就是说在所有观察之前不承认误差概率定律，那我们就不可能知道如何着手进行这种计算。误差定律存在吗？

所有计算家承认的误差定律是高斯(Gauss)定律，它是用某一超越曲线表示的，该曲线以“钟形曲线”的名字而闻名。

但是，首先回想一下系统误差和偶然误差的经典区别是恰当的。如果我们用过长的米尺度量长度，我们将总是得到太小的数，而且度量多次也是无用的；这就是系统误差。即使我们用精确的米尺度量，但是我们会犯错误；不过，我们有时错得多，有时

错得少，当我们取多次测量的平均值时，则误差将趋于减小。这就是偶然误差。

显而易见，系统误差原来不能满足高斯定律；但是，偶然误差能满足吗？人们尝试作了大量的证明；几乎所有的证明都是粗制滥造的谬论。不管怎样，我们可以从下述假设出发证明高斯定律：所造成的误差是大量的部分误差和独立误差的结果；每一个部分误差是很小的，而且服从任一概率定律，只要正误差的概率与相等的负误差的概率相同。显然，这些条件常常能被满足，但并非总是如此，对于满足这些条件的误差来说，我们可以保留偶然误差的名称。

我们看到，最小二乘法并非在每一种情况下都是合理的；一般说来，物理学家比天文学家更怀疑它。无疑地，这是因为天文学家除了遇到与物理学家一样的系统误差以外，还必须与极重要的误差来源作斗争，这种误差来源完全是偶然的；我指的是大气波动。于是，听到物理学家和天文学家讨论观察方法是很奇怪的。物理学家相信一次好的测量比多次不好的测量更有价值，他们首先关心的是凭借预防最小的系统误差来消除误差，而天文学家对他说：“但是，你这样只能观察少数恒星；偶然误差将不会消失。”

我们应该得出什么结论呢？我们必须继续利用最小二乘法吗？我们必须识别。我们已消除了我们可以怀疑的一切系统误差；我们清楚地知道还有其他误差，不过我们无法检查出它们；我们必须下定决心，采用一个确定的数值，可以把它看作是可几值；为此，显然最好的作法是应用高斯方法。我们只应用与主观概率有关的实用法则。在这里无需多说。

但是，我们希望更进一步，不仅肯定可几值是这么多，而且

肯定结果的可几误差是这么多。**这是绝对不合理的**，只有我们保证所有的系统误差都被消除了，它才是真的，但是对此我们绝对一无所知。我们有两个误差系列，应用最小二乘法则，我们发现，第一个系列的可几误差比第二个系列的误差小一倍。但是，第二个系列可以比第一个系列好，因为第一个系列也许受到了很大的系统误差的影响。我们能够说的一切就是，第一个系列**可能比第二个系列好**，因为它的偶然误差较小，我们没有理由肯定一个系列的系统误差比另一个的大，我们关于这点的无知是绝对的。

VII. 结论 在前文中，我已提出了许多还没有解决的问题。可是，我并不懊悔把它们写了出来，因为它们也许会引起读者对这些棘手的疑问进行思考。

不管情况怎样，其中某些方面似乎令人满意地建立起来了。为了着手进行任何概率演算，甚至为了使这种演算有意义，就必须承认一种假设或总是具有某种程度任意性的约定是出发点。在选择这个约定时，我们只能以充足理由律为向导。

不幸的是，这个原则是十分模糊的、十分灵活的，在我们刚刚作出的粗略审查中，我们看到它采取了许多不同的形式。我们最为经常遇到的形式是对于连续性的信念，这种信念很难用无可置疑的推理去证实，但是若没有它，整个科学就会是不可能的。最后，概率演算可以富有成效地应用的问题，是结果独立于起初所作的假设的问题，只要这个假设满足连续性条件就行。

第十二章 光学和电学

菲涅耳理论 在物理学的发展中，人们能够选择的最好例子^①就是光理论以及它与电理论的关系。多亏菲涅耳，光学才成为物理学中得到最充分发展的一部分；所谓的波动说的确形成了使我们心满意足的一个整体。然而，我们不必向它要求它不能够给予我们的东西。

数学理论的目标并不在于向我们揭示事物的真实本性；这是没有道理的要求。它们的唯一目的是协调实验向我们揭示出的物理学定律，但是若没有数学的帮助，我们甚至不能叙述这些定律。

以太是否真正存在，并没有什么关系；这是形而上学家的事情。对我们来说，主要的事情是，一切都象以太存在那样发生着，这个假设对于解释现象是方便的。归根结底，我们有任何其他理由相信物质客体的存在吗？那也仅仅是一种方便的假设；只是这个假设永远是方便的，而以太在某一天却要作为无用的东西被抛弃。

然而，即使在那一天，光学定律以及用解析法变换它们的方程依然是真的，至少是一级近似。于是，研究把这一切方程联合起来的学说总是有用的。

波动说建立在分子假设的基础上。对于那些以为他们从而发

^① 这一章是我的下述两部著作的序言一部分：《光的数学理论》(Paris, Naud, 1920) 和《电学与光学》(Paris, Naud, 1931)。

现了隐藏在定律之后的原因的人来说，这是有利条件。对于其他人而言，这却是怀疑的理由。但是，在我看来，这种怀疑象前者的幻想一样，似乎都是不可靠的。

这些假设只起了次要的作用。人们可以牺牲它们。人们通常没有这样作，因为那样就会使解释失去明晰性；但是，这是唯一的理由。

事实上，如果我们较为仔细地去观察，那么就会看到，人们只从分子假设借用了两件事：能量守恒原理和方程的线性形式，这是小运动的普遍定律，犹如一切小变化的普遍定律。

这说明了，当我们采纳光的电磁理论时，菲涅耳的大多数结论为什么依然不变。

麦克斯韦理论 我们知道，麦克斯韦用密切的结合物把直到当时还完全互不相干的物理学的两部分——光学和电学——联系起来了。由于菲涅耳的光学这样溶合到更宽广的整体中、溶合于更高级的和谐中，因而它依然是充满活力的。它的各部分继续有效，各部分的相互关系还是相同的。唯有我们用来描述这些关系的语言变化了；另一方面，在光学的不同部分和电学领域之间，麦克斯韦向我们揭示出以前未曾料到的其他关系。

当法国读者第一次打开麦克斯韦的书时，便觉得不大自在，甚至在起初，常常是怀疑与赞美掺合在一起。只有在经过长期了解、并花费了许多努力之后，这种感觉才会消失。甚至还有一些著名人物永远不会摆脱这种感觉。

为什么我们这样难以适应这位英国科学家的观念呢？无疑地，这是因为大多数有知识的法国人所受的教育使他们预先倾向于欣赏精确性和逻辑，把它们抬高到其他一切特性之上。

在这方面，古老的数学物理学理论完全能使我们满意。我们所有的大师，从拉普拉斯到柯西(Cauchy)，都是在同一条路上行进的。从明确陈述的假设开始，他们演绎出具有数学严格性的结论，然后把它们与实验相比较。他们的目的似乎是把与天体力学一样的精确性给予物理学的每一个分支。

对于习惯于赞美这样的模型的人来说，无法使他对一种理论心满意足。他不仅不容许出现丝毫矛盾，而且要求各部分在逻辑上相互关联，要求不同假设的数目减到最小限度。

事情并没有就此而已，他还有其他要求，在我看来这似乎是不合理的。在我们感觉能够达到的、实验能够告诉我们的物质背后，他还期望看到另外的物质，在他的眼中，唯一真实的物质只具有纯粹的几何学性质，其原子无非是仅仅服从动力学定律的数学点而已。可是，这些原子是不可见的，而且没有颜色，由于没有意识到的矛盾，他企图去想象它们，尽可能近似地认为它们与普遍物质一致。

只有这样，他才会完全满意，他设想他已洞察到宇宙的秘密了。即使这种满意是骗人的，他也很难抛弃它。

因此，在打开麦克斯韦的书时，法国人期望发现现象建立在以太假设基础上的物理光学那样合乎逻辑、那样精确的理论整体；他这样就要作好失望的准备，为了使读者不致扫兴，我乐于径直地告诉他，他在麦克斯韦的书中必须寻找什么，他在那里不能寻找什么。

麦克斯韦没有对电和磁作力学解释，他只限于证明这样的解释是可能的。

他也表明，光现象仅仅是电磁现象的特例。因此，从每一种电学理论出发，人们都能够推导出光理论。

不幸的是，相反的情况并不为真；从对于光的圆满解释，并非总是能够容易地推导出对电现象的圆满解释。这是不容易的，尤其是，倘若我们希望从菲涅耳理论开始的话。毫无疑问，这不是不可能；但是，不管怎样，我们必须询问，我们是否将要被迫抛弃我们以为肯定获得的极好的结果。这好象是倒退了一步；许多思想健全的人并不甘心容忍它。

即使读者乐于限制他的欲望，他还会遇到其他困难。英国科学家并不力图去建设一座最终的、妥善整理的大厦；他们似乎更愿意建筑大量临时的、独立的建筑物，在这些建筑物中，交流是很困难的，有时还是不可能的。

把麦克斯韦用电介质中的压力和张力来解释电引力的那章作为一个例子吧。这章可以删去，书的其余部分并不因此而显得不清楚和不完全；另一方面，这章本身包含着完整的理论，人们不读它的上下文就可以理解它。但是，这章不仅仅独立于该书的其余部分；它也难以与该书的基本观念一致。麦克斯韦甚至没有试图使它们一致起来；他只是说：“我未能迈出下一步，也就是说，未能对这些电介质应力作力学思考。”

这个例子足以使我焕然冰释；本来我还可以引用许多其他例子。在谈到专论磁致旋转偏振的论文时，谁会怀疑光现象和磁现象之间存在着等同性呢？

因此，人们不要自以为他能够避免一切矛盾；人们必须顺从它。事实上，只要人们不把两种矛盾的理论混在一起，只要人们不在它们之中寻求事物的基础，那么这两种理论都可以成为有用的研究工具；假如麦克斯韦没有向我们打开如此新颖、如此歧异的路径，也许我们在谈他的书时不会受到这么多的启发。

然而，基本观念却因而变得不大分明了。迄今这种情况多数

出现在通俗书刊中，这是完全撇在一旁的唯一之点。

因此，我感到，最好使它的重要性突现出来，我应该解释这种基本观念在何处。可是，为此必须作简短的讨论。

物理现象的力学解释 在每一个物理现象中，都存在着若干实验能直接达到而且容许我们测量的参数。我将把这些参数称为 q 。

其次，观察告诉我们这些参数的变化规律；这些规律一般能够以微分方程的形式提出，这些微分方程把参数 q 与时间联系起来。

要给这些现象以力学解释，必须作些什么呢？

人们将试图用普通物质的运动，或者用一种或多种假想的流体来解释它。

这些流体将被认为是由为数极多的孤立的分子 m 构成的。

我们何时能说我们对现象有了圆满的力学解释呢？一方面，要待我们知道这些假想的分子 m 的坐标所满足的微分方程式，而且这些方程必须符合动力学原理；另一方面，要待我们知道把分子 m 的坐标定义为参数 q 的函数之关系才行，这些参数 q 是可由实验得知的。

正如我已经说过的，这些方程必须符合动力学原理，尤其要符合能量守恒原理和最小作用原理。

这两个原理的第一个告诉我们，总能量是常数，这个能量可以分为两部分：

1° 动能或活力，它取决于假想分子 m 的质量和它们的速度，我将称其为 T 。

2° 势能，它仅取决于这些分子的坐标，我将称其为 U 。正是两种能 T 和 U 之和是常数。

现在，最小作用原理能告诉我们什么呢？它告诉我们，系统在从时刻 t_0 所占据的初始位置到达 t_1 所占据的位置时，必须采取这样的路径，以便在两个时刻 t_0 和 t_1 之间所逝去的时间间隔内，“作用”（也就是说两个能 T 和 U 之差）的平均值尽可能地小。

如果两个函数 T 和 U 已知，这个原理足以确定运动方程。

在从一个位置到达另一个位置的所有可能的路径中，显然存在着一个路径，它使得作用平均值比任何其他的作用平均值都要小。而且，只存在一条路径；最小作用原理正是由此产生的，该原理足以确定所遵循的路径，从而确定运动方程。

这样，我们便得到了所谓的拉格朗日方程。

在这些方程中，独立变量是假想分子 m 的坐标；但是，我现在假定，人们把实验可以直接得到的参数 q 作为变量。

因此，必须把能量的两部分表示为参数 q 和它们的导数的函数。它们显然将以这种形式出现在实验家的面前。实验家自然将力图借助于他能够直接观察的量来定义势能和动能。^①

姑且承认，系统总是沿着使平均作用最小的路径从一个位置到另一个位置。

现在，不管 T 和 U 是否借助于参数 q 和它们的导数表示；不管我们是否求助于那些我们规定初始位置和最终位置的参数；最小作用原理依然总是为真。

因此，在导致从一个位置到另一个位置的所有路径中，存在着一条使平均作用最小的路径，而且只存在一条。因此，最小作用原理足以确定那些规定参数 q 变化的微分方程。

① 我补充说， U 将只取决于参数 q ， T 将取决于参数 q 和它们对于时间的导数，而且对于这些导数是二次齐次多项式。

这样得到的方程是拉格朗日方程的另一种形式。

为了形成这些方程,我们既不需要知道把参数 q 与假设分子的坐标联系起来的关系,也不需要知道这些分子的质量以及作为这些分子坐标的函数的 U 的表达式。

我们需要知道的一切是作为参数的函数 U 的表达式、作为参数 q 及其导数的函数 T 的表达式,即作为实验材料的函数的动能和势能的表达式。

于是,我们将在下述两件事中二者择一,或者对于适当选择的函数 T 和 U ,象我们刚刚所说的那样建立起来的拉格朗日方程将与从实验推导出来的微分方程等价;或者将不存在这种一致出现的函数 T 和 U 。很清楚,在后一种情况下,力学解释是不可能的。

力学解释是可能的**必要条件**在于,我们能够以这样的方式选择函数 T 和 U ,以便满足最小作用原理,这也包括能量守恒原理。

而且,这个条件是**充分的**。事实上,假定我们找到了参数 q 的函数 U ,它表示能量的一部分;假定能量的另一部分我们将用 T 来表示,它是参数 q 及其导数的函数,而且是关于这些导数的二次齐次多项式;最后,假定借助于这两个函数 T 和 U 形成的拉格朗日方程符合实验材料。

为了从中推出力学解释,什么是必要的呢?其必要条件是,能够把 U 看作是系统的势能,能够把 T 看作是同一系统的活力。

至于 U ,没有什么困难,但是能够把 T 视为物质系统的活力吗?

很容易证明,这总是可能的,甚至可以用无穷的方式去证明。我将只限于比较详细地提一下我的著作《电与光》的序言。

这样，如果不能满足最小作用原理，就不可能有力学解释；如果能够满足，就不仅有一种力学解释，而且有无数的力学解释，由此可得，只要有一种力学解释，就会有无数其他的力学解释。

还有一种意见。

在实验直接给予我们的量中，我们将把一些量看作是我们假想分子的坐标的函数；这些量是我们的参数 q 。我们将认为其他量不仅与坐标无关，而且与速度无关，或者也可以说是与参数 q 的导数无关，或者认为其他量是这些参数和它们的导数的组合。

于是，便出现了一个问题：在所有这些用实验测量的量中，我们选择那一个代表参数 q 呢？我们愿意把那一个作为这些参数的导数呢？这种选择在很大程度上依然是任意的；但是，要使力学解释是可能的，只要我们能够以符合最小作用原理的方式进行选择就足够了。

其次，麦克斯韦曾经自问，他是否能作这种选择，是否能以电现象满足这个原理的方式选择两种能 T 和 U 。实验向我们证明，电磁场的能量分为两部分——静电能和电动力能。麦克斯韦注意到，如果我们把第一个视为表示势能 U ，把第二个视为表示动能 T ；而且，如果把导体的静电荷视为参数 q ，把电流强度视为其他参数 q 的导数，那么，在这些条件下，我可以说麦克斯韦注意到电现象满足最小作用原理。从那时起，他便肯定了力学解释的可能性。

如果他在他的书的开头就解释这一观念，而不是把它放在第二卷的不引人注目的部分，那么大多数读者便不会忽略它。

于是，如果一个现象容许有一个完全的力学解释，那么它将容许有无数其他的力学解释，它们将会同样圆满地描述实验揭示出的所有特点。

这被物理学每一个分支的历史所证实；例如，在光学中，菲涅耳相信振动垂直于偏振面；纽曼(Neumann)认为振动平行于偏振面。人们长期寻找一种“判决实验”，使我们能够在这两种理论之间作出裁决，但是却没有找到它。

在电学领域内，我们可以用同样的方式断言，两种流体理论和一种流体理论二者能以同样满意的方式说明所有观察到的静电学定律。

由于我刚才回忆起的拉格朗日方程的特性，所有这些事实都可以顺利地加以解释。

现在，很容易理解麦克斯韦的基本观念是什么了。

为了证明电的力学解释的可能性，我们不需要专心致志地寻找这个解释本身；只要知道作为能量两部分的两个函数 T 和 U ，只要用这两个函数形成拉格朗日方程，然后把这些方程与实验材料相比较就足以使我们满意了。

在这一切可能的解释中，怎样作出没有实验帮助的选择呢？也许到某一天，物理学家对那些不能用实证方法达到的问题毫无兴趣，而把它们抛给形而上学家。可是，这一天尚未来到；人们不会如此轻易听命于对事物的根底永远无知。

因此，我们的选择进而只能以下述考虑为指导：在这些考虑中，个人赏识的部分是很大的；不过，有些答案众人都是反对的，因为它们太怪诞了，而另外一些答案则受到众人的偏爱，因为它们具有简单性。

关于电和磁，麦克斯韦避免作任何选择。这并不是他故意轻视用实证方法不能得到的一切东西；他致力于气体运动所花的时间充分地证明了这一点。我还要补充说，尽管他在他的大作里没有提出圆满的解释，但他早先在《哲学杂志》的一篇文章中曾试图

给出解释。他当时不得不作假设，这些假设的奇异性和复杂性后来导致他放弃了这一解释。

同样的精神贯穿在整个著作中。基本的东西，也就是说对所有理论必定是共同的东西已被突现出来；只能适合于特殊理论的一切几乎总是默默而过。这样，读者发觉自己面临着几乎没有内容的形式，起初他被诱使把它误认为是不可捉摸的、飘忽不定的影子，但是，他这样付出的艰难尝试迫使他进行思考，他终于弄明白，在他以前只是感到奇怪的理论结构中，往往有相当人为的成分。

第十三章 电 动 力 学

从我们的观点来看，电动力学的历史特别富有教益。

安培(Ampère)曾给他的不朽著作冠以《**唯一**建立在实验之上的电动力学现象的理论》这一题目。因此他以为他没有作假设，但是正如我们马上将要看到的，他作了假设；只是他毫无意识地作了假设而已。

另一方面，他的后继者却察觉到这些假设，因为安培解答中的弱点引起了他们的注意。他们作了新的假设，这时他们已充分地意识到了；但是，在达到今天的经典体系之前，人们不知把假设改变多少次了，即使今天的经典体系，也许还不是最终的；这就是我们将要看到的東西。

I. 安培理论 当安培在实验上研究电流的相互作用时，他用闭合电流、而且只能用闭合电流进行。

这并不是他否定开路电流的可能性。如果两个导体带有正电和负电，用导线把它们连接起来，那么电流就从一个导体流到另一个导体，一直持续到两个电势相等为止。

按照安培时代的观念，这就是开路电流；人们知道电流从第一个导体流向第二个导体，而没有看到电流从第二个导体流回第一个导体。

于是，安培就把具有这种性质的电流看作是开路电流，例如电容器放电电流；但是，他不能用开路电流作实验，因为这种电流的持续时间太短了。

也可以设想另一种开路电流。我假定用导线AMB把两个导体A和B连接起来。首先,运动的小导体与导体B接触,从B获得电荷,接着与B脱离接触并沿着BNA路线运动,由它们输运着电荷,再与A接触并把电荷传导给A,然后沿导线AMB流回B。

这在某种意义上是闭合电流,因为电流沿闭合电路BNAMB流动;但是,这种电流的两部分是截然不同的。在导线AMB中,电是通过固定的导体移动的,它象伏打(Volta)电流一样,要克服欧姆电阻并放出热量;我们说,它是通过**传导**移动的。在BNA部分,电由运动着的导体**携带**着;它可以说是通过**运流**移动的。

于是,如果把运流电流看作完全类似于传导电流,则电路BNAMB是闭合的;相反地,如果运流电流不是“真实电流”,例如对磁铁不起作用,那就只剩下传导电流AMB,它是开路电流。

例如,如果我们用导线把霍耳兹(Holtz)起电机的两个电极连接起来,那么带电的转盘通过运流把电从一个电极输运到另一个电极,电又通过导线的传导回到第一个电极。

但是,这种电流很难产生出可观的强度。用安培的处理手段,我们可以说这是不可能的。

总而言之,安培可以设想存在着两类开路电流,但是他无法用它们作实验,或者是因为它们不够强,或者是因为它们持续时间太短。

因此,实验只能向他表明闭合电流对闭合电流的作用,或者更精确些,是闭合电流对一段电流的作用,因为人们可使电流流过由运动部分和固定部分构成的闭合电路。于是,有可能研究运动部分在另一闭合电流作用下的位移。

另一方面,安培没有办法研究开路电流对闭合电流的作用,或者对另一开路电流的作用。

1. 闭合电流的情况 在两个闭合电流相互作用的情况中，实验向安培揭示了异常简单的定律。

在这里，我迅速地回忆起以后将对我们有用的定律。

1° 如果电流强度保持不变，如果两个电路在经历了无论什么形变和位移之后最终回复到它们的初始位置，那么电动力学作用的总功将为零。

换句话说，存在着两电路的**电动力学势**，它与电流强度之积成比例，而且依赖于电路的形状和相对位置；电动力学作用的功等于这种电势的变化。

2° 闭合螺线管的作用为零。

3° 电路C对另一个伏打电路C'的作用只取决于这个电路所产生的“磁场”。事实上，在空间的每一点，我们都能够规定具有一定大小和方向的力，这种力被称为**磁力**，它具有下述特性：

(a) C施加在磁极上的力作用于该极，它等于磁力乘以这个极的磁质量；

(b) 极短的磁针倾向于取磁力的方向，产生这种倾向的力偶与磁力、磁针的磁矩和磁针的磁倾角的正弦成比例；

(c) 如果移动电路C，那么C施加在C'上的电动力学作用所作的功将等于通过该电路的“磁力流”的增量。

2. 闭合电流对一段电流的作用 安培未能产生严格意义上所谓的开路电流，他只有一种方法即研究闭合电流对一段电流的作用。

这是用电路C作实验的，该电路由两部分构成：一部分是固定的，另一部分是可动的。例如，可动部分是一个可动导线 $\alpha\beta$ ，其末端 α 和 β 能够沿固定导线滑动。在可动导线的一个位置上， α 端处在固定导线的A点， β 端处在固定导线的B点。电流从 α 向 β 环流，也

就是说，沿可动导线从A流到B，然后沿固定导线从B返回到A。因此，这个电流是闭合的。

在第二个位置上，可动导线滑动了， α 端处于固定导线的另一点A'， β 端处于固定导线的另一点B'。然后电流从 α 到 β 环流，也就是说，沿可动导线从A'流到B'，然后总是沿着固定导线从B'流回B，接着从B到A，最后从A到A'。因此，电流也是闭合的。

如果同样的电流受到闭合电流C的作用，那么可动部分将发生位移，恰如它受到力的作用一样。安培设想，这个可动部分AB似乎受到的表观力表示C对于电流 $\alpha\beta$ 部分的作用，它与终止在 α 和 β 的开路电流通过 $\alpha\beta$ 时所受的力相同，在这里开路电流代替了闭合电流，闭合电流在到达 β 之后，还要通过电路的固定部分流回 α 。

这个假设好象是十分自然的，是安培无意识地作出的，不过，它并不是必要的，因为我们进而将要看到，亥姆霍兹反对它。然而不管怎样，这个假设容许安培阐明闭合电流对于开路电流、甚或对于电流元作用的定律，虽然安培永远未能产生出开路电流。

该定律是简单的：

1° 作用在电流元上的力施加在这个元上，这个力与电流元和磁力垂直，且与垂直于电流元的磁力的分量成比例。

2° 闭合螺线管对于电流元的作用为零。

但是，电动力学势消失了，也就是说，当其强度保持不变的闭合电流和开放电流流回到它们的初始位置时，则总功不是零。

3. 连续转动 在电动力学实验中，最引人注目的实验是产生连续转动的实验，有时也称其为**单极感应**实验。磁铁可以绕它的轴转动；电流先通过固定导线，经由N极进入磁铁，例如流过半块磁铁，再由滑动触点流出，重新流进固定导线。

于是，磁铁开始连续不断地转动，永远也不能达到平衡；这

是法拉第实验。

这怎么可能呢？如果它是形状不变的两个电路的问题，即一个是固定电路C，另一个是可绕轴转动的电路C'，那么后者永远也不会连续转动；事实上，这里存在着电动力学势；因此，当这个势是极大值时，必定有一个平衡位置。

因此，只有当电路C'由两部分构成，即一部分是固定的，另一部分可绕轴转动时，连续旋转才是可能的，情况有如法拉第实验。在这里，可以再次方便地作出区分。从固定部分到达可动部分，或者反过来，既可以用简单接触(可动部分的同一点始终与固定部分的同一点接触)来实现，也可以用滑动接触(可动部分的同一点依次与固定部分的各点接触)来实现。

只有在第二种情况下，才能发生连续转动。系统趋向于取平衡位置，这就是接着发生的事情；但是，在到达平衡位置的点时，滑动接点使可动部分与固定部分的新点连通；它改变了连接关系，从而改变了平衡条件，可以说，它致使平衡位置在系统企图达到它之前就逃离了，所以转动可以无限地进行下去。

安培假定，电路对C'可动部分的作用与C'的固定部分不存在时一样，从而与通过可动部分的电流是开路电流时一样。

因此，他得出结论说，闭合电流对于开路电流的作用，或者反过来，开路电流对于闭合电流的作用，可以导致连续转动。

但是，这个结论取决于我已阐述的假设，正如我上面说过的，亥姆霍兹不承认这个假设。

4. 两个开路电流的相互作用 在涉及到两个开路电流的相互作用，尤其是涉及到两个电流元的相互作用时，所有的实验都失败了。完培曾求助于假设。他假定：

1° 两个电流元可以简化为沿它们连线作用的力；

2° 两个闭合电流的作用是它们的各个电流元相互作用的合量，而且合量与这些电流元是孤立时的情况相同。

引人注目之处在于，安培在这里又一次无意识地作了这些假设。

不管怎样，这两个假设与关于闭合电流的实验一起，足以完全确定两个电流元相互作用的定律。但是这样一来，我们在闭合电流情况中遇到的大多数简单定律不再是真实的了。

首先，不存在电动力学势；正如我们看到的，在闭合电流作用于开路电流的情况下，也不存在任何电动力学势。

其次严格地说，不存在磁力。

事实上，我们上面已给出了这个力的三种不同的定义：

1° 加于磁极上的作用；

2° 取磁针方向的指向力偶；

3° 加于电流元上的作用。

但是，在我们现在所讨论的情况中，不仅这三个定义不再一致，而且每一个定义也失去了它的意义，事实上：

1° 磁极已不是仅仅受到施加于这个极的单一力的作用。事实上，我们看到，由电流元对磁极的作用而引起的力没有施加在该磁极上，而是施加在该电流元上；而且，它可用力偶和施加在该磁极上的力来代替；

2° 作用在磁针上的力偶已不是简单的指向力偶，因为它对于磁针轴的力矩不是零。它可以分解为严格意义上所谓的指向力偶和倾向于产生我们所说的连续转动的附加力偶；

3° 最后，作用于电流元上的力并不垂直于这个电流元。

换言之，**磁力的统一性已经消失了。**

让我们看看这种统一性在于什么。对磁极施加同一作用的两

个系统，也将把同一作用施加在无穷小的磁针上，或者施加在与这个磁极处于空间同一点的电流元上。

好吧，如果两个系统只包含闭合电流，这就是真实的；如果这两个系统包含开路电流，这就不再是真实的。

例如，只要指出下述事实就足够了：如果磁极处于A而电流元处于B，电流元方向沿着线段AB的延长线，那么这个电流元将不对这个磁极施加作用，相反却对处于A点的磁针施加作用，也对相处于A点的电流元施加作用。

5. 感应 我们知道，电动力感应的发现是紧随在安培的不朽著作之后的。

只要它仅仅是一个闭合电流问题，那就没有什么困难，而且亥姆霍兹甚至注意到，能量守恒原理对于从安培电动力学定律推导出感应定律也是充分的。但是，正如贝尔特朗德已清楚表明的，这总是建立在一个条件上，即我们另外要作若干假设。

在开路电流的情况下，能量守恒原理也容许这一推导，我们当然不能把该结果提交实验检验，因为我们不能产生这样的电流。

如果我们试图把这种分析模式用于安培的开路电流理论，那我们便得到使我们惊奇的适当结果。

首先，不能依据学者和有实际经验者都知道的公式从磁场的变化中推导出感应现象，事实上，正如我们所说的，严格地讲这里已没有磁场了。

但是，可以再深一层；如果电路C受到可变伏打系统S的感应，如果无论以什么方式使这个系统移转和变形，从而这个系统的电流强度无论按什么定律变化，但是在这些变化之后，该系统最终返回到它的初始状况，那么似乎可以自然地假定，在电路C中所感应的平均电动势是零。

如果电路C是闭合的，如果系统S只包含闭合电流，那么这就是真实的。如果人们接受安培理论，如果有开路电流，那么这就不再是真实的了。因此，就这个词通常的意义而言，感应不仅将不再是磁力流的变化，而且也不能用任何东西的变化来表示它。

II. 亥姆霍兹理论 我已经详细讨论了安培理论的结果以及他解释开路电流的方法的结果。

人们很难忽略我们这样导出的命题的自相矛盾和人为的特征。人们不得不认为“不能是这样”。

因此，我们理解亥姆霍兹为什么有可能寻求其他东西。

亥姆霍兹反对安培的基本假设，即两个电流元的相互作用化为沿它们连线作用的力。

他假定电流元不仅仅受到力的作用，而是受到力和力偶的作用。正是这一点，引起了贝尔特朗德和亥姆霍兹之间的著名论战。

亥姆霍兹用下述假设代替安培的假设：两个电流元总是具有仅依赖于它们位置和取向的电动力学势；它们相互施加的力所作的功等于这个势的变化。因此，亥姆霍兹和安培一样，也不能不作假设；但是，他至少是未作那种没有明确陈述的假设。

在唯有实验可达到的闭合电流的情况下，两种理论才是一致的。

在所有其他情况下，它们是有差别的。

首先，和安培所作的假定相反，似乎作用在闭合电流可动部分上的力与这个可动部分是孤立的且构成开路电流时作用于其上的力不同。

让我们回到我们上面讲过的电路C，它是由在固定导线上滑动的可动导线 $\alpha\beta$ 构成的。在唯一能够作出的实验中，可动部分 $\alpha\beta$ 不是孤立的，而是闭合电路的一部分。当它从AB到达A'B'时总电动力学势由于下述两个原因而变化：

1°因为A'B'相对于电路C的势与AB相对于电路C的势力不同，所以总电动力学势经历了第一个增加；

2°因为总电动力学势还要加上AA'和BB'电流元相对于C的势，所以它获得了第二个增量。

正是这种**双重的增量**，表示AB部分似乎受到的力所作的功。

相反地，如果 $\alpha\beta$ 是孤立的，那么电动力学势只经历第一个增加，唯有这第一个增量才能够量度作用在AB上的力所作的功。

其次，没有滑动接触，就没有连续转动，事实上，正如我们在谈论闭合电流时已经看到的，它是电动力学势存在的直接结果。

在法拉第实验中，如果磁铁是固定的，而磁铁之外的电流部分沿可动导线流动，那么这个可动部分便连续转动。但是，这并不意味着，如果使导线与磁铁脱离接触，并使**开路**电流沿导线流动，那么导线还会连续转动。

事实上，我刚刚说过，**孤立的**电流元所受到的作用与成为闭合电路一部分的可动电流元所受到的作用的方式不同。

另一个差别是：根据实验并根据两种理论，闭合螺线管对于闭合电流的作用为零。在安培看来，它对开路电流的作用为零；对亥姆霍兹来说，它不可能是零。

这个重要的结果从何而来呢？我们在上面已给出了磁力的三种定义。第三种定义在这里没有意义，因为电流元不再受到单一力的作用。第一种定义不再有任何意义吗？磁极事实上是什么呢？

磁极是无限长的线形磁铁的末端。这个磁铁可以用无限长的螺线管来代替。为了使磁力的定义有意义，那就必须使开放电流对于无限长的螺线管所施加的作用只依赖于这个螺线管末端的位置，也就是说，施加于闭合螺线管上的作用是零。现在，我们正好看到，情况并非如此。

另一方面，没有什么东西妨碍我们采纳第二种定义，它是建立在倾向于取磁针方向的指向力偶的测量的基础之上的。

但是，如果采纳了这种定义，那么无论是感应效应，还是电动力学效应，都将不唯一地取决于这个磁场中的力线的分布。

Ⅲ. 这些理论所引起的困难 亥姆霍兹的理论优于安培的理论；不过，它必须消除所有的困难才行。在这两种理论中，“磁场”这个词同样没有意义，或者，如果我们通过某种人为的约定给它赋予意义，那么所有电学家十分熟悉的普通定律就不再适用了；于是，导线所感应的电动势已不能用这个导线所切割的磁力线的数目来度量。

我们的矛盾之处不仅仅来自抛弃根深蒂固的语言习惯和思想习惯的困难。此外还有别的原因。如果我们不相信超距作用，那么电动力学现象就必须用媒质的变更来解释。我们所谓的“磁场”恰恰就是这种变更。于是，电动力学效应必须只依赖于这种场。

所有这些困难都是由开路电流的假设引起的。

Ⅳ. 麦克斯韦理论 这样的困难是由占统治地位的理论引起的，当麦克斯韦来到时，他大笔一挥就勾消了一切困难。事实上，在他看来，所有的电流都是闭合电流。

麦克斯韦设想，在电介质中，如果电场发生变化，这个电介

质就变成特殊现象的活动中心，它象电流一样地作用于电流计，麦克斯韦称其为**位移电流**。

其次，如果用导线把带有相反电荷的两个导体连通起来，那么在放电时，在这个导线中就有开路传导电流；同时，在附近的电介质中便产生位移电流，它使这个传导电流闭合。

我们知道，麦克斯韦理论可以解释光现象，光现象是由极其迅速的电振动引起的。

在当时，这样的概念只不过是一个大胆的假设，没有实验可以支持它。

二十年后，麦克斯韦的观念得到了实验证实。赫兹成功地制作了电振动装置，它能重演光的一切特性，而电振动与光的差别仅在于它们的波长不同；也就是说，正如紫光与红光的差别一样。他在某种程度完成了光的综合。

可以说，赫兹并没有直接证明麦克斯韦的基本观念，即位移电流对于电流计的作用。这在某种意义上是真实的。简言之，他所证明的是，电磁感应并不是象我们设想的那样瞬时传播的；而是以光速传播的。

但是，假定不存在位移电流，而感应以光速传播，或者假定位移电流产生感应效应，而感应瞬时地传播，**归根结底是一回事**。

乍看起来，人们不能看到这一点，但是用分析可以证明它，我甚至认为没有必要在这里概述了。

V. 罗兰(Rowland)实验 可是，正如我上面说过的，有两类开路感应电流。第一类是电容器或无论什么导体的放电电流。

也有另一种情况，放电描绘了一个闭合的恒值线，放电在电路的一部分中是靠传导移动的，在电路的另一部分中是靠运流移

动的。

对于第一类开路电流，问题可以认为是解决了，它们通过位移电流而闭合。

对于第二类开路电流，答案看来好象更为简单。如果电流是闭合的，它似乎只能通过运流电流本身闭合。为此，只要假定“运流电流”即运动着的带电导体能够作用于电流计就足够了。

但是，实验证据还是贫乏的。事实上，即使尽可能地增大导体的电荷和速度，要得到足够的电流强度似乎还很困难。

正是罗兰这位技艺极为高超的实验家首次战胜了这些困难，他使一个圆盘得到了很强的静电荷和极大的转速。放在圆盘旁边的一个无定向的磁装置发生了偏离。

罗兰作了两次实验，一次在柏林，一次在巴尔的摩。此后希姆斯特德(Himstedt)又重复了这个实验。这两位物理学家甚至声称，他们成功地进行了定量测量。

罗兰定律被所有物理学家毫无疑义地承认了。

而且，每一件事似乎都证实了它。电火花肯定产生磁效应。现在，电火花放电是由于从一个电极取走粒子并把它们的电荷传输到另一个电极，这难道不可能吗？正是在电火花的光谱中，我们辨认出电极金属的谱线，这难道不是证据吗？电火花因而也许是真正的运流电流。

另一方面，人们也承认，在电解液中电是由运动着的离子携带的。因此，电解液中的电流可能也是运流电流；现在，它作用于磁针。

阴极射线的情况也一样。克鲁克斯(Crookes)把这些射线归因于带电的且以很大速度运动的极稀薄的物质。换句话说，他认为它们是运流电流。现在，这些阴极射线能被磁铁偏转。根据作用

与反作用原理，它们反过来也应使磁针偏转。

的确，赫兹以为他证明了阴极射线没有携带电，它们不作用于磁针。但是，赫兹错了。首先，佩兰(Perrin)成功地收集了这些射线携带的电，而赫兹曾否认这种电的存在；这位德国科学家好象受了由X射线的作用而引起的效应的欺骗，当时还没有发现X射线。此后以及最近，阴极射线对磁针的作用才被明确地提了出来。

这样一来，电火花、电解电流、阴极射线，所有这些被视之为运流电流的现象都以同样的方式作用在电流计上，而且符合罗兰定律。

VI. 洛伦兹理论 我们马上要再进一步。根据洛伦兹理论，传导电流本身可以是真实的运流电流。电也许永远不可分割地和某些称之为**电子**的物质粒子联系在一起。这些电子通过物体运行就产生伏打电流。导体与绝缘体的区别就在于导体能让这些电子通过，而绝缘体则阻止电子的运动。

洛伦兹理论是十分吸引人的。它给某些现象以很简单的解释，早期的理论，甚至原始形式的麦克斯韦理论，也不能以满意的方式解释它们；例如，光行差、光波的部分曳引、磁偏振和塞曼效应。

某些反对意见还是继续存在着。电系统中的现象似乎取决于这个系统重心平动的绝对速度，这与我们关于空间相对性的观念相反。克雷米厄(Crémieu)先生为这种反对意见提供了证据，李普曼(Lippmann)先生则以引人注目的形式描述了它。设想两个以相同平动速度运动的两个带电导体；它们相对静止。但是，它们每一个都等价于运流电流，它们应该相互吸引，通过测量这个引力，我们

就能测量它们的绝对速度。

洛伦兹的坚定支持者回答道：“不！我们用那种方法测量的不是它们的绝对速度，而是它们**对于以太**的相对速度，于是相对性原理是可靠的。”

不管后来这些反对意见如何，电动力学大厦至少在它的主要方面似乎最后建成了。一切都被以最为令人满意的样子表示出来。安培理论和亥姆霍兹理论¹先是针对已不存在的开放电流而提出的，它们现在似乎不再有任何价值，而仅有历史的趣味。

这些变迁的历史还是有启发性的，它将告诉我们科学家正面临着什么陷阱，他们如何可以希望摆脱这些陷阱。

第十四章 物质的终极^①

近年来，物理学家宣布的最惊人的发现之一就是物质不复存在。我们要赶紧说这个发现还不是最终的。物质的主要特征，就是它的质量和惯性。质量处处永远不变，尽管化学变化改变了物质的一切可感知的特性，并且仿佛变成了另一种东西，但质量却始终不变。所以，如果有人证明物质的质量和惯性实际上不属于物质，而认为这只不过是它的一种装饰，甚至最永恒的质量也是可以改变的，那么人们将肯定说，物质是不存在的。而人们所宣称的，恰恰是这一点。

我们至今所能观察的速度是很缓慢的，因为那些使我们的所有汽车都望尘莫及的天体，其速度仅达到每秒60或100公里；不错，光的速度是它的三千多倍，不过这并非物质在移动，这是经过相对不动质体时的一种扰动，有如海洋的波浪。在对这些小速度的现象进行观察时，都表示质量是永恒的，但是从未有人问过，在较大的速度时，是否也是这样？

倒是那些极小的物体反而打破了最快的行星即水星的记录，我是说在阴极射线与镭射线中运动的微粒。人们知道这些射线确是来自分子的轰击。由此发射出的微粒都带有负电，人们可以用法拉第圆筒收集它们而证实这一点。因为它们带有电荷，所以会被磁场或电场偏转，通过比较这些偏转，我们可以知道它们的速度

^①参阅勒邦著：《物质的进化》。（译者附注：英译本没有收入此章，根据内容看，它大概是彭加勒在《科学与假设》后来的版本中补写的。）

以及电荷与质量的关系。

但是，这些测量一方面使我们知道，它们的速度是极大的，其速度约为光速的十分之一或三分之一，比星球要快千倍；另一方面，它们的荷质比是非常大的。因此，每一个运动的微粒可代表一个可观的电流。但是，我们知道，电流有一种特殊的惯性，即所谓的**自感现象**。电流一旦产生后，总是具有保持不变的倾向，当人们切断电路以阻止它通行时，可以看到在断路点产生电火花。由此可知，电流极力保持它的强度，犹如一个运动中的物体总保持其速度的倾向。所以，阴极射线中的微粒能抵抗变更其速度的原因有二：首先在于它们的真正惯性，其次在于它们的自感现象。因为速度变化时，同时电流也变化。因此，微粒——人们所谓的电子——应当具有两种惯性：力学的惯性和电磁的惯性。

亚伯拉罕(Abraham)先生与考夫曼(Kaufmann)先生，一位是计算家，一位是实验家，他们曾同心协力地进行这样两种惯性的研究。他们不得不承认一种假设：他们设想所有负电子都是相同的，它们具有同一电荷，必然是不变的。我们觉察它们的不同仅仅是它们运动的速度不同。当速度变化时，真正的质量即力学的质量不变，这可以说原来是它的定义；但是，有助于形成表观质量的电磁惯性随其速度按照某种规律而增加。因此，在速度与电荷之间，存在着一个关系。我们曾经说过，这些量可以由观察射线经过磁场或电场时的偏转，通过计算而得到。研究这种关系，就可以确定两种惯性的分量。其结果十分令人惊奇：**真实质量等于零**。这当然应该承认最初的假设，因为理论曲线与实验曲线符合得相当好，所以这个假设是很可能的。

因此，这些负电子没有真实质量；如果它们具有惯性，是由于它们在改变速度时扰动以太。它们的表观惯性仅仅是租借品，

它不属于它们，而属于以太。但是，这些负电子不全是物质的，因此人们可能认为，在它们之外还有具有真正惯性的真正物质。有些射线，例如戈德斯坦(Goldstein)的极隧射线、镭的 α 射线，也是抛射物之雨，不过这些抛射物带正电，这些正电子也没有质量吗？不能这样说，因为它们比负电子重得多、慢得多。于是，有两种可以承认的假设：或者因为电子较重，除了它们借来的电磁惯性而外，它们本身还是具有力学惯性，从而只有它们才是真正的物质；或者它们也同别的东西一样没有质量，如果它们比较重，是由于它们比较小，虽然这种说法似乎有点荒诞不经；因为在这种观念中，微粒将不过是以太中的空隙，唯有它是实在的，唯独它是具有惯性。

迄今还是没有过于连累物质，我们还可以采取第一种假设，甚或除了相信正电子和负电子之外，还有中性原子。根据洛伦兹最近的研究，我们就要丧失这最后的办法了。地球迅速地移动，我们也受其牵引；光现象或电现象不会因这种移动而变化吗？人们冥思苦想了好长时间，并且曾经假定，随着仪器相对于地球运动方向的不同，观察理应具有不同的结果。实际并非如此，最精密的测量也没有得出这样的结果。在这里，实验证实了物理学家都讨厌的事情：事实上，假如人们找到某种东西，那么人们不仅能知道地球相对于太阳的相对运动，而且还将知道它在以太中的绝对运动。但是，有许多人难以相信，除了相对运动之外，任何实验也不会得到其他结果，他们倒是乐于承认物质是没有质量的。

因此，人们对于所取得的否定结果并不感到十分惊异。这些结果与讲授的理论相反，但它们能满足于在这些理论之前的一种深刻的本能。而且，还要根据结果对这些理论加以修正，以便使它们与事实相符合。斐兹杰惹(Fitzgerald)用一种令人惊讶的假设

这样作了：他认为物体沿着地球运动的方向运动时，必须收缩一亿分之一。球会变成椭球，如果让它转动，其形变总是使短轴平行于地球的速度。由于测量仪器所受的形变与被测量的物体相同，人们一点也察觉不到收缩，除非人们不留意去确定光线经过物体的长度所需要的时间。

这个假设可以解释观察到的事实。可是这还不够：总有一天人们可以进行更精密的观察；那时可以得到肯定的结果吗？这些观察可以使我们测量地球的绝对运动吗？洛伦兹并没有这样想。他相信这种测量永远是不可能的；许多物理学家的共同本能以及迄今各种实验所遭受到的失败，都足以证明他的想法。因此，我们可以认为，这种不可能是自然界的普遍定律；并且承认这是一个公设。可是，后果将如何呢？这正是洛伦兹所寻求的东西，他发现所有原子、所有正电子和负电子都具有惯性，按照同一规律随速度变化。这样，一切物质的原子都是由小而重的正电子和大而轻的负电子构成，至于可感觉的物质在我们看来似乎不带电，那是因为这两种电子在数目上几乎是相等的。这两者都没有质量，而只有假借的惯性。在这个系统中没有真正的物质，只有以太中的孔洞。

按照朗之万(Langevin)先生的见解，物质也许是液化的以太，而且丧失了它的一切特性；当物质移动时，并不是这种液化的质体在以太中移动，而是液化向以太各部分逐渐扩充，同时在后方已变成液体的部分又逐渐恢复原状。物质在运动中不保持其原形。

这就是最近对于这个问题研究的概况；现在，考夫曼先生又发表了新的实验。速度极大的负电子，必然受到斐兹杰惹收缩，因此速度与质量的关系也发生变化；可是，最近的实验不能证实这种预见；不过，一切都要复灭了，而物质将会获得存在的权力。但是，这些实验是不容易的，在今日想要作最后的结论，还为时尚早。

第二部分

科学的价值



引 言

追求真理应该是我们活动的目标；它是值得我们活动的唯一的目的。毫无疑问，我们首先应当努力减轻人类的痛苦，但是为什么要这样做呢？不受痛苦，这是一个消极的理想，世界一日不灭，痛苦终不能已。如果我们希望越来越多地使人们摆脱物质烦恼，那正是因为他们能够在对真理的研究和思考之中享受到自由。

但是，真理有时使我们惊惧。事实上，我们知道，它有时是骗人的，它是一个幽灵，除了长久地隐匿而外，它从未使自己显示一瞬间，你可以竭力穷追，但终不可得。正如某些希腊人，如亚里士多德(Aristotle)或其他人所说，欲有所为，当先知止。我们也知道，真理是怎样故意使人痛苦，我们不知道，幻想是否不仅使我们倍感安慰，甚至使我们更加激奋，因为正是幻想给我们以信念。当幻想消失之时，我们还能奋发为雄、毫不失望吗？套上挽具的马，如果不遮其双眼，它就不肯前进。于是，欲求真理，必须独立，必须完全地独立。相反地，如果我们希望有所作为，希望坚强有力，那么就应当联合起来。这就是我们许多人为什么害怕真理，我们认为害怕真理是软弱的一个原因。但是，不应该害怕真理，因为唯有真理才是美的。

当我在这里谈到真理时，毫无疑问，我首先涉及的是科学真理；但我也意指道德真理，我们所谓的正义只是一个方面。也许我滥用了词汇，在一个名称下把两个毫无共同之处的东西结合在一

起；由实证而来的科学真理与由感觉而来的道德真理没有什么相似之处。然而我不能把它们分开，无论是谁，当他热爱其中的一个真理时，他就不得不热爱另一个。为了发现科学真理，以及为了发现道德真理，必须使精神不带偏见，不徇私情，必须绝对诚心诚意。这两种真理一旦被发现，它们将给我们带来同样的欢乐。无论那一种真理，当我们一觉察到它时，它就放射出同样的光辉，以致于我们或者必须正视它，或者闭上眼睛。最后，这两种真理时而吸引我们，时而远离我们，它们从来也不是固定不变的：当我们认为已经接近它们时，我们发觉我们还得继续前进，从而使得追求它们的人从来也不考虑休息。必须附带说说，害怕其中一个的人也必将害怕另一个，由于他们在每一件事情上特别关心结果。一句话，我喜欢两种真理，因为有同样的理由使我们热爱它们，因为有同样的理由使我们害怕它们。

如果我们不应该害怕道德真理，那么我们就更应该不畏惧科学真理。首先，科学真理不能与伦理学冲突。伦理学和科学各有它们自己的领域，其领域虽相接而不相犯。伦理学向我们表明我们应该追求的目标，在指出目标之后，科学教导我们如何达到它。由于它们从来也不能相遇，因而它们永远不会发生冲突。不可能有道德的科学，正如不可能有科学的道德一样。

但是，假使人们害怕科学，那就是因为它不能给我们带来幸福。科学当然不能给我们带来幸福。我们甚至可以询问，兽类是否比人类少经受痛苦。假使人与兽类无异，不知他必然要死，自以为长生不老，而视地上为极乐世界，我们会因此而感到遗憾吗？当我们品尝了苹果，痛苦并不能使我们忘记它的美味。我们总是能够回味它。我们还能做其他事情吗？我们进而要问，一个由明变盲的人是否就不渴望光明呢。因此，人类不能通过科学而得到

幸福，但是假若没有科学，人类今天便会更加不幸。

但是，如果真理是值得追求的唯一目的，我们可以希望得到它吗？这是毋庸置疑的。看过我的小册子《科学与假设》的读者已经知道，我就这个问题进行了思考。稍纵即逝的真理决非大多数人所谓的真理。这意味着我们最合理、最迫切的渴望是虚无缥缈的吗？或者，我们无论如何能够在某个侧面接近真理吗？这是必须予以研究的问题。

首先要问，我们有什么手段来处置这个问题呢？人类的智力，狭义地讲科学家的智力，容纳不下无限变化吗？这个论题是连篇累牍也写不完的，在以下几页中，我只能稍微涉及一下它。众所周知，几何学家的精神不同于物理学家或自然科学家的精神，但是数学家本身也并非相互类似，一些人只承认不可改变的逻辑，另一些人则诉诸直觉，并且从中看到发现的唯一源泉。这也许是不信任的原因。对于如此相异的精神来说，数学理论本身能够在同一天出现吗？对所有人并非相同的真理依然是真理吗？可是更为仔细地观察一下，我们看到这些十分不同的工作者为共同的任务协作起来，没有他们的协作，任务是不能完成的。这已使我们放心了。

其次，有必要审查一下在我们看来好象是封闭的自然界的框架^{*}，我们称这些框架为时间和空间。在《科学与假设》中，我已经指出，它们的价值如何是相对的，不是自然界把它们强加于我们，而是我们把它们强加于自然界，因为我们发觉它们是方便的。可

* 此处的“框架”一词，法文原著是cadre，英译本正确地译为frame，而没有译为notion或concept（概念）。在《唯物主义和经验批判主义》俄文版中，该词被列宁误译为понятие（概念），中文版沿用了这一错误。详见李醒民：“对《唯物主义和经验批判主义》两处译文的商榷”，《教学与研究》，1983年第4期。——译者注

是，我几乎没有过多地谈论空间，特别是量的空间，即其集合构成几何学的数学关系。我应该证明，正如与空间相同一样，它与时间也相同，还与“定性的空间”相同。特别是，我应该研究，我们为什么要把三维赋与空间。我可能会得到谅解，因为我再次提到这些重要问题。

其主要对象是研究这些空虚框架的数学分析是精神的空洞游戏吗？它给予物理学家的只不过是方便的语言，这难道不是平庸的贡献吗？严格地讲，没有这种贡献，也能够作到这一点。甚至人们无须担心这种人为的语言可能成为设置在实在和物理学家眼睛之间的屏障吗？远非如此，没有这种语言，事物的大多数密切的类似对我们来说将会永远是未知的。而且，我们将永远不了解世界的内部和谐，我们将看到，这种和谐是唯一真实的客观实在。

这种和谐的最好表达方式就是定律。定律是人类精神最近代的产物之一，还有人生活在永恒的奇迹中而不觉得奇怪。相反地，正是我们，应当为自然的合乎规律性而惊奇。人们要求他们的上帝用奇迹证明规律的存在，但是永恒的奇迹就是永远也没有这样的奇迹。因此，世界之所以是神圣的，正因为它是和谐的。假使它受任意性支配，什么能向我们证明它不受机遇支配呢？

我们把定律的这一胜利归功于天文学，正是这一胜利与其说使科学所研究的对象的材料显得壮观，倒不如说使科学本身蔚为壮观。因此，天体力学应该是数学物理学的第一个典范，这是十分自然的。可是从那时起，这门科学已经发展了，它还正在发展着，甚至是一日千里地发展着。已经有必要在1900年我所描绘的图象中修正几点，我曾在《科学与假设》中专辟二章加以论述。在1904年圣路易斯博览会的讲演中，我曾试图展望前进的道路，什

么是这一研究的成果，这将是读者在不久的将来可以看到的。

科学的进步似乎使得过去牢固建立起来的、甚至被视为基本的原理发生了动摇。然而，没有什么东西表明它们是不可挽救的，即使它们不能原封不动地存在，它们也能够经过修正而继续有效。科学的发展不能与改造城市相提并论，可以无情地破坏一个旧的而另建一个新的来代替。可是科学的进步犹如动物形体的进化，由于不断地发展，以致一般人已难以辨认了，但在行家看来，数世纪之前的踪迹总是能够追寻的。人们必定不这样想：旧原理是无结果的和徒劳的。

假如我们在这儿停下来，我们在这些段落中会发现相信科学的价值的一些理由。但是许多道理使我们怀疑它，怀疑的印象依然存在，现在需要把事情弄正确。

一些人把约定在科学中的作用夸大了，它们甚至走得如此之远，以致说定律，即科学事实本身是科学家创造的。他们在唯名论的方向上走得太远了。不，科学定律不是人为的创造，我们没有理由把它们看作是偶然的，尽管不可能证明它们不是偶然的。

人类的理智在自然界中所发现的和谐存在于这种理智之外吗？不能！毫无疑问，一个完全独立于想象它、看见它或感觉到它的精神之外的实在是不可能的。作为外在的世界即使存在着，我们也永远达不到。我们称之为客观实在的东西，归根结底对大多数思维者是共同的，而且对所有的思维者也应当是共同的，我们将看到，这种共同的部分只能是数学定律所表示的和谐而已。正是这种和谐，才是唯一的客观实在，才是我们所能得到的唯一真理。当我进而说，世界的普遍和谐是众美之源时，那么这将被理解为，我们应该把价值与缓慢而艰难的进步联系起来，这种进步能一点一滴地使我们更好地了解这种和谐。

第一编 数学科学

第一章 数学中的直觉和逻辑

I

研究一下伟大数学家或一般数学家的著作，人们不能不注意到并区分出两种相反的趋势，或者毋宁说是两种完全不同的精神类型。一些人尤其专注于逻辑；读读他们的著作，人们被诱使相信，他们运用沃邦*的方法，只是一步一步地前进。这种方法推动他们有步骤地工作，去夺取一个更为有利的位置，而没有随便抛弃任何东西。另一些人受直觉指引，他们象勇敢的前卫骑兵，迅猛出击，但有时也要冒几份风险。

所探讨的问题迫使他们采取这种或那种方法。虽然人们往往称前者为**解析家**，称后者为**几何学家**；但是这并不妨碍第一种人依然是解析家，即使当他们研究几何学的时候；而另一种人还是几何学家，即使当他们从事纯粹解析的时候。正是他们的精神的本性，使他们成为逻辑主义者和直觉主义者，当他们处理新课题时，他们也不能把它撇到一边。

* 沃邦(Marquis de Vauban, 1633—1707)，法国有名望的军事工程师和元帅。

——译者注

在数学家中间，并非教育能助长一种趋势而抑制另一种趋势。数学家是天生的，不是人为的，他似乎生来就是几何学家或解析家。我乐于引证一些例子，这样的例子实在太多了；但是，为了强调对照，我愿以一个极端的例子开始，请允许我在两个活着的数学家中寻找例证吧。

梅雷(Méray)先生想证明，二项式方程总是有根，或者用通俗的话说，角总是可以剖分。如果存在着任何用直接的直觉可以感受的真理，那么它就是这样的真理。谁会怀疑一个角总是可以分为任意等分呢？梅雷先生却不如此观之；在他看来，这个命题根本不是明白的，他需要几页篇幅去证明它。

另一方面，看看克莱因(Felix Klein)教授，他正在研究函数论的一个最抽象的问题：确定在给定的黎曼(Riemann)曲面上，是否总是存在着具有已知特性的函数。这位著名的德国数学家作了些什么呢？他用电导率按某些规律变化的金属面代替他的黎曼曲面。他把金属面上的两个点与电池的两极联接起来。他说，电流必定通过金属面，电流在面上的分布将确定一个函数，该函数的特性恰恰就是说明所要求的特性。

毋庸置疑，克莱因教授完全了解，他在这里提供的仅是一个梗概；不过，他还是毫不犹豫地发表了它；他恐怕认为，他从中发现，即使这不是严格的证明，但至少在信念上是可靠的。逻辑主义者极端厌恶地排斥这种概念的形成，或者更确切地讲，他不可能排斥它，因为在他的思想中从来也没有产生过这种概念。

请容许我再比较两个人，他们俩是法国科学的光荣，最近去世了，可是他们的业绩早就永垂不朽。我讲的是贝尔特朗德(Bertrand)先生和埃尔米特(Hermite)先生。他们同时在同一学校上学；他们受相同的教育，处于同样的影响之下；可是差别却何等

之大！这不仅在他们的著作中显现出来，而且在他们的教学、谈吐方式，甚至在他们的外表中都有所表现。这两个人的风采在他们所有学生的脑海里铭刻下永不磨灭的印记；对于那些乐于聆听他们的教导的人来说，这种记忆依然历历在目，我们很容易回想起它。

贝尔特朗德在讲演时总是动来动去；他时而仿佛与某些外来之敌战斗，时而用手势描绘他所研究的图形的轮廓。显然，他想象着，并试图去描绘它，这就是他为什么要借助于手势的原因。而埃尔米特则迥然不同；他的双眼似乎避免与世界接触；他寻求真理的妙诀不在心外，而在心内。

在本世纪的德国几何学家中间，有两个人尤其遐迩闻名，这两位科学家奠定了广义函数论，他们是维尔斯特拉斯(Weierstrass)和黎曼。维尔斯特拉斯把一切都归结为级数及其解析变换；为了更好地表示，他把解析化为类似于算术的拓展；翻阅他的全部著作，你找不到一张插图。相反地，黎曼却同时求助于几何学；他的每一个概念都是一幅图象，人们一旦明白了它的意义，便会永志不忘。

其后，李(Lie)是一位直觉主义者；读其著述时，疑团顿生，经他道破之后，人们便焕然冰释；你同时看到，他用图形思维。而科瓦列夫斯基夫人(Madame Kovalevski)则是一位逻辑主义者。

在我们的学生中间，我们也注意到同样的差别；一些人更喜欢“用解析”处理他们的问题，另一些人则“用几何学”。前者不能“在空间中想象”，后者则对冗长的计算十分厌倦，很快就变得晕头转向。

对于科学的进步来说，这两类精神同样是必要的；逻辑主义

者如同直觉主义者都获得了其他人没有作出的巨大成就。谁胆敢冒昧地说，他宁愿维尔斯特拉斯永远不著书立说，或者宁愿世上从来就没有黎曼这个人呢？而且，分析和综合二者都有其合法任务。比较周密地研究一下它们在科学史中所起的作用，是饶有兴味的。

II

太奇怪了！如果我们浏览一下古人的著作，我们情不自禁地把他们统统归入直觉主义者之列。然而，人的本性总是相同的；它在本世纪开始创造出专注于逻辑的精神，这几乎是不可能的。

假使我们使自己置身于古代几何学家所处时代的占统治地位的观念潮流中，那么我们会清楚地认识到，他们之中的许多人在倾向性上都是解析家。例如，欧几里得(Euclid)创造了科学结构，他的同代人没有从中挑出毛病。在这个庞大的建筑物中，它的每一个部件不管怎样都归因于直觉，可是，我们今天依然可以毫不费力地从中辨认出一位逻辑主义者的工作。

变化的不是精神，而是观念；直觉精神依然是相同的；可是，他们的读者却要求他们做出较大的保留。

这种演变的原因是什么呢？

直觉是不难发现的。它不能给我们以严格性，甚或不能给我们以可靠性；这一点愈来愈得到公认。

让我们举一些例子。我们知道，存在着没有导数的连续函数。没有什么东西比逻辑给予我们的命题更让直觉震惊了。我们的祖先不假思索地断言：“每一个连续函数都有导数，这是很明白的，因为每一条曲线都有切线。”

直觉怎样能够在这一点上欺骗我们呢？正因为当我们试图想象曲线时，我们无法把它描绘得没有宽度；正是这样，当我们描

绘直线时，我们把它看成某一宽度的直带。我们清楚地认识到，这些线没有宽度；我们力求把它们想象都越来越窄，从而趋近极限；我们在一定的限度内这样作，但是我们从来也不会达到这一极限。于是，很显然，我们总是可以把这两条窄带——一条直的、一条曲的——画在这样的位置上，使得它们轻微地相触而不相交。若不管严密的解析，从而我们将得出结论：曲线总是有切线。

我愿把狄利克雷(Dirichlet)原理作为第二个例子，如此众多的数学物理学定理都建立在该原理之上；今天，我们通过十分严格、十分冗长的推理证明它；相反，在此之前，我们却满足于概括的证明。与一任意函数相关的某一积分永远不为零。人们由此断定，它必定有极小值。这一推理中的缺点直接冲击着我们，因为我们使用了抽象的术语——**函数**，因为我们熟悉，当在最普遍的意义理解这个词时，函数能够呈现出的所有特异性。

但是如果我们利用具体的图象，那我们就没有同样的函数。例如我们把这个函数看作是电势，情况就不同了；可以认为，断言能够达到静电平衡是合理的。然而，物理比较也许能唤起一些模糊的怀疑。但是，如果谨慎地把推论翻译成几何学的语言，即介于分析语言和物理学语言之间的语言，那么毫无疑问，这种怀疑便不会产生，这样一来，人们即使在今天还能欺骗许多没有预先告诫的读者。

因此，直觉没有给我们以可靠性。这就是演化为什么必然发生的原因；现在，让我们看看它是如何产生的。

人们将立即注意到，除非严格性先进入定义中，否则就无法在推论中引入严格性。因为数学家所处理的大部分对象长期以来都没有完全定义；他们假定它们是已知的，由于他们借助于感觉和想象来描述它们；但是，人们仅有粗糙的图象，而没有一个推

理能够赖以成立的精确观念。因此，逻辑主义者必须付出他们的努力。

在不可通约数的情况中就是这样。我们归因于直觉的连续性的模糊观念分解为关于整数的不等式的复杂系统。

借助于这种方法，由通过极限或考虑到无穷小而引起的困难终于被消除了。今天，在解析中，仅仅剩下整数，或者说，整数的有穷或无穷的系统被相等或不等的网格约束在一起。正如数学家们所说，数学被算术化了。

III

第一个问题呈现出来。这种演化终结了吗？我们最终达到绝对的严格性了吗？在每一个演化阶段，我们的祖先也曾认为，他们已经达到了严格性，如果他们欺骗了自己，我们同样也欺骗我们自己吗？

我们自信，我们在推理中不再诉诸直觉；哲学家告诉我们，这是一种假象。纯逻辑永远也不能使我们得到任何东西；它不能创造任何新东西；任何科学也不能仅仅从它产生出来。在某种意义上，这些哲学家是对的；要构成算术，象要构成几何学或构成任何科学一样，除了纯逻辑之外，还需要其他东西。为了称呼这种东西，我们只好使用**直觉**这个词。可是，在这同一个词后，潜藏着多少不同的意思呢？

比较一下这四个公理：（1）等于第三个量的两个量相等；（2）若一定理对数1为真，假定它对 n 为真，如果我们证明它对 $n+1$ 为真，则它对所有整数均为真；（3）设在一一直线上，C点在A与B之间，D点在A与C之间，则D点将在A与B之间；（4）通过一个定点，仅有一条直线与已知直线平行。

所有这四个公理都归之于直觉，不过第一个阐明了形式逻辑诸法则中的一个法则；第二个是真实的**先验**综合判断，它是严格的数学归纳法的基础；第三个求助于想象；第四个是伪定义。

直觉不必建立在感觉明白之上；感觉不久便会变得无能为力；例如，我们无法想象千角形，可是我们能够通过直觉一般地思考多角形，多角形把千角形作为一个特例包括起来。

你们知道彭赛列(Poncelet)借助**连续性原理**所推断的东西。彭赛列说，对实量为真之理对虚量也应为真；对有实渐近线的双曲线为真之理从而对有虚渐近线的椭圆也应为真。彭赛列是十九世纪最具有直觉思想的人之一；他对直觉是如此之酷爱，如此之夸耀；他把连续性原理视为他的一个最大胆的概念，这个原理还不依赖感觉的明白。更确切地说，把双曲线看作与椭圆类似，是与这种明白相矛盾的。这只是一种早熟的、本能的概括，而且我不想为之辩护。

于是，我们有多种直觉；首先，求助于感觉和想象；其次，通过归纳进行概括，而归纳可以说是摹写实验科学的程序；最后，我们有纯粹数的直觉，我刚才阐述的第二个公理即由此而生，它能够创造真正的数学推理。我在上面已用例子表明，前两个公理不能给我们以必然性；但是，谁当真会怀疑第三个呢，谁会怀疑算术呢？

于是，在今日的解析中，当人们想千方百计地追寻严格性时，除了三段论或诉诸纯粹数的直觉外，则别无它法，唯有这种直觉不会欺骗我们。可以说，绝对严格性今天已被达到。

IV

哲学家还作出另外的诘难，他们说：“你在严格性方面有所得，你将在客观性方面有所失。你只有割断把你和实在连接起来

的结合物，你才能够达到你的逻辑理想。你的科学是确实可靠的，但是只有把它束缚在象牙塔内，断绝它与外界的所有联系，它才能够继续存在下去。若试图稍稍应用它，它就会从这个囚禁之处逃逸出去。”

例如，我企图证明，某一特性附属于某一对象，该对象的概念乍看起来似乎不可定义，因为它是直觉的。起初，我或者失败，或者必须满足近似的证明；我决定给我的对象下精确的定义，这使我以无可指责的方式确立这一特性。

哲学家说：“于是，依然要证明，对应于这个定义的那个对象的确与你通过直觉所认识的对象是相同的；或者依然要证明，你自信你立即辨认出的、与你的直觉观念一致的、真实而具体的对象对应于你的新定义。然后，你才能断言，它具有所述的那种特性。你只不过是转移了困难而已。”

情况并非如此；困难没有转移，它只是被分开了。所确立的命题实际上由两种不同的真理构成；首先，人们究竟能否区别二者。其一是数学的真理，它现在已被严格地建立起来了。其二是实验的真理。唯有经验能够告诉我们，某个真实而具体的对象对应于或不对应于某个抽象的定义。这第二种真理在数学上未被证明，它也不能用数学证明，物理科学和自然科学的经验定律同样也不能用数学证明。要打破砂锅问到底也许就不合道理了。

于是，把长期以来错误地混为一谈的东西区分开来，这不是一大进展吗？这意味着统统驳回了哲学家的这一诘难吗？我不想那样说；数学科学在变成严格的科学时，它获得如此人为的特征，以致给每一个人都留下了印象；它忘记了它的历史起源；我们看到问题应该怎么回答，我们不再理会问题如何提出和为何提出。

这向我们表明，逻辑不是充分的；证明的科学并非全部科学，

直觉作为补足物必然保持它的作用，我正要说直觉作为平衡物或作为逻辑的矫正物。

在讲授数学科学时，我有机会坚持直觉应该占有的地位。没有直觉，年轻人在理解数学时便无从着手；他们不可能学会热爱它，他们从中看到的只是空洞的玩弄词藻的争论；尤其是，没有直觉，他们永远也不会有应用数学的能力。但是，现在我首先要谈谈直觉在科学本身中的作用。如果直觉对学生是有用的，那么对有创造性的科学家来说，它更是须臾不可或缺的。

V

我们寻求实在，可是实在是什么呢？生理学家告诉我们，有机体是由细胞形成的；化学家附加道，细胞本身是由原子形成的。这意味着这些原子或这些细胞构成实在，或确切地讲，构成唯一的实在吗？这些细胞排列的方式和导致个体统一的方式不也是比孤立的要素的实在更为有趣的实在吗？除了用显微镜外，从未研究过大象的博物学家能够认为他已经充分地了解这种动物吗？

好了，在数学中也有一些与此类似的东西。可以说，逻辑主义者因之把每一个证明分为许多基本演算；当我们已经相继审查了这些演算，并确认每一个都正确无误的时候，我们必须认为我们已经抓住了该证明的真正意义吗？即使当我们博闻强记，正好运用发明者排列基本运算的顺序而重演它们，从而能够重复这一证明时，我们可以理解它吗？显然不能；我们还没有掌握全部实在。我不知道什么东西造成了证明的一致，这将使我们感到十分困惑。

纯粹解析把许多程序提供给我们使用，它保证这些程序是确实可靠的；它向我们开辟了成千条不同的大道，我们可以满怀信心地迈步在这些大道上；我们确信不会遇到任何障碍；但是，在

所有这些道路中，那一条会最迅速地把我们引向我们的目标呢？谁将告诉我们应该选择那一条呢？我们需要使我们具有一览遥远目标的本领，直觉就是这样的本领。为了选择这样一条路线，必须具有探索者的本领；对于那些追逐他的足迹、欲知他为什么要选择那条路线的人来说，情况也是如此。

假如你正在观棋，要弄懂一盘比赛，仅知道棋子走动的规则是不够的。那只能使你辨认每一步符合这些规则，这种知识的确没有多少价值。如果读数学书的人仅仅是一位逻辑主义者，那么他也会这样作。要弄懂棋赛完全是另一回事；必须了解棋手为什么走这个棋子而不走那个棋子，他可以在不违犯下棋规则的情况下走那一步的。可以察觉出使这一系列相继的步子成为一种有机的整体的内在根据。有充分理由表明，对于棋手本人是有必要的，对发明家来说也是这样。

让我们撇开这种比较而返回到数学上来吧。

例如，看看连续函数观念所发生的情况。起初，这仅仅是可感觉的图象，例如用粉笔在黑板上勾划的连续痕迹的图象。然后，它渐渐地变得精细了；不久，它被用来构造复杂的不等式系统，这可以说是摹写了原始图象的全部线条；这座建筑物竣工后，拱架好象被拆除了，临时作为支架而此后毫无用处的粗糙表象被抛弃了；保留下来的仅仅是建筑物本身，在逻辑主义者看来，该建筑物是无懈可击的。但是，倘若原始图象从我们的记忆中统统消失，那么所有这些不等式以这种方式相互堆叠，究竟是怎样借助于随想而神悟的呢？

也许你认为我使用了过多的比喻；可是，请原谅我再作一个比喻。你无疑见过形成某些海绵骨骼的硅质针状的纤细集合物。当有机物质消失时，留下的只是易脆的美丽的网眼薄纱。的确，

除了二氧化硅外别无它物，可是有趣的是这种二氧化硅所具有的形状，如果我们不知道正好使二氧化硅呈现这一形状的活海绵，我们便不能理解它。因而，这正是我们祖先的古老的直觉观念，即使当我们已经抛弃了它们，它们的形式还铭刻在我们用来代替它们的逻辑结构上。

对于发明家来说，这种集合物的观点是必不可少的；无论谁想真正了解发明家，同样也少不了它。逻辑能够把它给予我们吗？不能；数学家给它起的名字足以证明这一点。在数学中，逻辑被称为**解析**，解析意味着**分解、分析**。因此，除了解剖刀和显微镜外，不会有其他工具。

这样一来，逻辑和直觉各有其必要的作用。二者缺一不可。唯有逻辑能给我们以可靠性，它是证明的工具；而直觉则是发明的工具。

VI

但是，在提出这个结论时，我总是顾虑重重。当初，我区分了两种类型的数学精神，一类是逻辑主义者和解析家，另一类是直觉主义者和几何学家。好，解析家也是发明家。我前面列举的人名足以说明这一事实，没有必要详述了。

在这里，存在着一个需要解释的矛盾，至少在表面上是这样。首先，正象形式逻辑规则要求这些逻辑主义者那样，他们总是从一般到特殊，你认为就是这样吗？于是，他们无法开拓科学的疆界；科学的征服只能靠概括进行。

在《科学与假设》的一章中，我有机会研究了数学推理的本性，而且我已经表明，在不失去绝对严格性的情况下，通过我称之为**数学归纳法**的程序，这种推理如何把我们从特殊提升到一般。正

是借助于这种程序，分析才促成了科学的进步，如果我们审查一下他们证明的细节，我们将会发现，它每时每刻都可与亚里士多德经典的三段论相比。因此，我们已经看到，解析家并非仿效经院哲学家，仅仅是三段论的制造者。

还有，你认为他们看不到他们希望到达的目标，总是一步一步地摸索着前进吗？他们必须推测通向那里的道路，为此他们需要向导。这个向导首先是类比。

例如，分析中一种宝贵的证明方法是建立在使用强函数之上的方法。我们知道，它已经用来解决了许多问题；那么，希望把它应用到新问题中的发明家的作用何在呢？最初，他必须辨认这个问题与用这种方法已经解决的那些类似的问题；然后，他必须考察这个新问题在什么方面与其他问题不同，从而推断应用该方法所必需的修正。

但是，人们怎样察觉这些类似和这些差别呢？在我刚才举的例子中，它们几乎总是一目了然的，但是我可以找到它们潜藏得比较深的其他例子，为了发现它们，往往需要非同寻常的洞察力。为了不让这些隐藏的类似逃脱，就是说为了成为一个发明者，解析家必须在不借助于感觉和想象的情况下，直觉到一项推理的一致性由什么构成，也可以这样说，它的精髓和内心深处的灵魂由什么构成。

当人们与埃尔米特先生谈论时，他从来也不乞灵于一幅感觉图象，但是你立即就会察觉，最抽象的实体对他来说都象栩栩如生的存在一样。他虽然不目视它们，但心里却领悟出它们不是人为的集合物，它们具有某一内部统一的原则。

然而，有人会说，它还是直觉。我们难道能够得出结论说，最初所作出的区分仅仅是表面的，仅存在一种精神，所有的数学

家，至少那些有发明能力的数学家都是直觉主义者吗？

不能，我们的区分对应于某种实在的东西。我在上面已经说过，存在着许多类型的直觉。我说过，严格的数学归纳法所源自的纯粹数的直觉与主要凭恰当地称也之想象的可觉察的直觉，是何等大相径庭。

把它们分隔开的鸿沟没有起初看到的那么幽深吗？稍加注意，我们能够辨认出这种纯粹的直觉不借助于感觉就无法作吗？这是心理学家和玄学家的事情，我不想讨论这个问题。此事虽未确定，但在分辨和坚持两种类型的直觉之间的基本差别方面，足以证明我是正确的；它们没有相同的对象，它们似乎发挥出我们心灵的两种不同的本能；人们也许会想象两盏探照灯，引导陌生人相互往来于两个世界的情景。

正是纯粹数的直觉、纯粹逻辑形式的直觉，启发和引导我们称之为**解析家**的人。就是这种直觉，不仅使他们能够证明，而且使他们能够发明。借助这种直觉，解析家一眼就察觉到逻辑大厦的总蓝图，而且似乎在没有感觉介入的情况下也是这样。正如我们已经看到的，想象并非总是确实无误的，凭借直觉，解析家在舍弃想象帮助的情况下也能够勇往直前，而不担心上当受骗。因此，不要这种帮助而能够有所作为的人是幸运的！我们必然羡慕他们；可是，这样的人却为数甚少！

到那时，在解析家中间将有发明家，可是他们却寥寥无几。

如果我们希望仅凭纯粹直觉放眼眺望，那么我们中的大多数人立即就会感到头晕目眩。由于我们软弱无力，我们需要一个比较结实的手杖；而且，不管我刚才讲的例外，没有一个人怀疑可觉察的直觉在数学中是最有用的发明工具。谈到这些见解，又有一个问题提了出来，我既无暇解决它，甚或无暇就它所容许的发

展阐述它。这就是，有作出新的区分、有在解析家中间区分出首先使用纯粹直觉的人和首先专注于形式逻辑的人的余地吗？

例如，我刚才列举的埃尔米特不能归之于几何学家之中，而他却使用可觉察的直觉；但是，他也不能恰当地被称为逻辑主义者。他毫不隐讳他对从一般开始、到特殊终结的纯粹演绎程序的反感。

第二章 时间的量度

I

只要我们不越出意识的范围，时间的概念相对而言是清楚的。我们不仅可以毫无困难地把现在感觉与过去感觉的记忆或将来感觉的期望区分开来，而且我们可以十分明确地知道，当我们谈到我们记忆的两个意识现象时，我们意味着一个曾在另一个之前；或者，当我们谈到两个预期的意识现象时，我们意味着一个将在另一个之先。

当我们说两个意识事实是同时的时候，我们意指它们相互之间深深地渗透，以致于在不肢解它们的情况下无法把它们分开加以分析。

我们排列意识现象的次序不容许任何任意性。它强加于我们，我们不能改变它。

我们只有唯一的注意之点必须加上。对于已经变成能够在时间中进行分类的记忆的感觉集合物来说，它应该不再是现实的，我们必然会丧失它的无限复杂性的感觉，否则它依然是现存的。可以说，它必须在观念结合中心的周围结晶，该中心将是某种类似于标签的东西。只有当它们这样丧失了全部生命时，我们才能够把我们的记忆在时间中分类，犹如植物学家把枯花排列在他的标本集中一样。

然而，这些标签在数目上只能是有限的。因此，心理的时间

应当是间断的。在任何两个瞬时之间存在着的其他瞬时的感觉从何而来呢？我们在时间中排列我们的记忆，但是我们知道，依然存在着空间隔。假若时间不是预先存在于我们精神中的形式，那么此事如何发生呢？如果这些空间隔是由它们的内容向我们揭示出来的，那么我们怎样能够知道存在着空间隔呢？

II

但是，这并非一切；我们希望不仅把我们自己意识的现象纳入这个形式中，而且也希望把作为其场所的其他意识的现象纳入这个形式中。不过，我们更希望把物理事实，即我们不知道我们用什么占据空间这一事实和意识无法直接寻找的事实，都纳入其中。这是必不可少的，因为没有它，科学便不会存在。简而言之，心理的时间已给予我们，我们需要创造出科学的和物理的时间。困难就在这里出现了，更准确地说，这里有两个困难。

设想两个意识，它们象两个互不沟通的世界。我们有什么权利试图把它们纳入同一模型、用同一标准量度它们呢？这不是如同用克量度长度、用米量度重量吗？而且，我们为什么要讲量度呢？我们也许知道某事实在另一事实之先，但是它在先多少，我们却一无所知。

因此，有两个困难：（1）心理的时间是定性的时间，我们能够把它变换为定量的时间吗？（2）我们能够把发生在不同世界的事实归之于同一量度吗？

III

第一个困难早就被注意到了；它曾经是长时期讨论的课题，人们可以说，该问题已被解决了。我们没有两个时间间隔相等的

直觉。自信他们具有这种直觉的人是容易受幻觉欺骗的人。当我说，从正午到一时所经过的时间与从二时到三时所经过的时间相同，这一断言有什么意义呢？

略加思索即可指出，它独自根本没有意义。只有通过确实具有某种程度任意性的定义，它才可以获得我愿意赋予它的意义。心理学家能够放弃这个定义；物理学家和天文学家却不能；让我们看看他们如何处理吧。

为了量度时间，他们使用摆，他们通过定义假定，这个摆的全部节拍都是相等的持续时间。但是，这仅仅是一级近似；温度、空气阻力、大气压都使摆的步调发生变化。如果我们能够避免这些误差的来源，我们就会得到更为接近的近似值，但它还只是一种近似。迄今被忽略的原因有电的、磁的或其他的原因，它们可以引入微不足道的扰动。

事实上，最精密的记時計必须不时地校准，校准借助于天文观察来进行；可以作这样的安排：当同一恒星通过子午线时，恒星钟指示同一时刻。换句话说，正是恒星日，即地球旋转的周期，才是时间的恒定单位。通过用新定义代替建立在摆的节拍基础上的定义，人们假定地球绕地轴的两个完全的转动具有相同的持续时间。

不管怎样，天文学家还不满足于这个定义。他们中的许多人认为，潮汐象制动器一样作用于我们的行星，地球的转动变得越来越慢。这样就能解释月球运动的表观加速度，月球似乎运行得比理论所容许的更快，因为我们用以计时的地球正在变慢。

IV

有人会说，这一切并不重要；毫无疑问，我们的测量仪器是

不完善的，但是我们足以想象出一种理想的仪器。这种打算无法实现，不过可以充分地设想它，同样也可以充分设想把严格性赋予时间单位的定义。

令人烦恼的并不在于定义的严格性。当我们利用摆量度时间时，我们含蓄地承认什么公设了吗？它就是，**两个等价现象的持续时间是相同的**；或者，如果你愿意的话，也可以说相同的原因在相同的时间产生相同的结果。

乍看起来，这是两个持续时间相等的有效的定义。不过，要当心。在某一天，实验不可能与我们公设发生矛盾吗？

让我说明其中的缘故吧。假设在世界的某地发生现象 α ，从而在某一时刻结束时引起结果 α' 。在距离第一个地点十分遥远的另一地点发生现象 β ，从而引起结果 β' 。现象 α 和 β 是同时的，以至于结果 α' 和 β' 也是同时的。

在以后的时期，现象 α 与以前近似相同的条件下重现，现象 β 也在该世界十分遥远的地点并且几乎在相同的环境下同时复现。结果 α' 和 β' 也重现了。让我假定，结果 α' 明显地在结果 β' 之前发生。

假使经验使我们目睹了这样的情景，那么这将与我们的公设发生矛盾。因为经验会告诉我们，第一个持续时间 $\alpha\alpha'$ 等于第一个持续时间 $\beta\beta'$ ，而第二个持续时间 $\alpha\alpha'$ 却小于第二个持续时间 $\beta\beta'$ 。另一方面，我们的公设必须要求两个持续时间 $\alpha\alpha'$ 彼此相等，同样两个持续时间 $\beta\beta'$ 也应该彼此相等。从经验推断出的相等和不等与从公设推断出的两个相等水火不容。

现在，我们能够断言我刚刚作出的假设是荒诞无稽的吗？它们一点也不与矛盾律背道而驰。毋庸置疑，在不违反充足理由律的情况下，它们似乎不会发生。但是，为了证明一个定义是根本

的，我宁可选择其他保证。

V

但是，这并不是问题的全部。在物理实在中，一个原因并不产生一种结果，而是许多截然不同的原因共同产生它，我们没有任何办法区分每一个原因的作用。

物理学家力图作出这一区分；但是他们只能近似地作出，无论他们如何进步，他们也不能精确地作出。摆的运动唯一取决于地球的引力，这是近似真实的；但是，严格地说来，每一种引力，甚至天狼星的引力也作用在摆上。

在这些条件下，十分清楚，产生一定结果的原因只能近似地复现。于是，我们应该修正我们的公设和我们的定义。我们不应说：“相同的原因在相同的时间产生相同的结果。”我们应该说：“几乎同样的原因在几乎相同的时间产生几乎相同的结果”。

因此，我们的定义无非是近似的。而且，正如加利农（Galison）先生在最近的学术论文^①中十分公正地指出的：

地球旋转的速度是任何现象的一种情况；如果这个旋转速度变化，那么在这个现象复现时，就不再构成依然相同的情况。可是，假定这个旋转速度不变就是假定我们知道如何量度时间。

因此，我们的定义还不能令人满意；当我在上面所说的天文

^① *Etude sur les diverses grandeurs* (《各种量的研究》), Paris, Gauthier-Villars, 1897.

学家断言地球的旋转正在减慢时，他们含蓄地采纳的定义肯定不是这个定义。

在他们看来，这个断言有什么意义呢？只有通过分析他们为其主张所提出的证据，我们才能够理解它。他们首先说，产生热的潮汐摩擦必定使活劲(*Vis Viva*)消灭。因此，他们祈求于活劲原理或能量守恒原理。

他们接着说，除非针对地球旋转减慢作出校正，否则按照牛顿定律计算出的月球的长期加速度便会小于由观察推断出的加速度。因此，他们求助于牛顿定律。换句话说，他们用下述方式定义持续时间：时间应该如此定义，以使牛顿定律和活劲原理可以成立。牛顿定律是实验的真理；就这一点而论，它只不过是近似的，这表明，我们依然只有通过近似下定义。

如果现在假定，另一种度量时间的方法被采纳，牛顿定律赖以建立的实验无一不具有相同的意义。只是该定律的表述不同而已，因为它被翻译为另一种语言；更不用说，它显然变复杂了。这样一来，天文学家毫无保留地采纳的定义可一言以蔽之曰：时间应该如此定义，以使力学方程式尽可能地简单。换句话说，没有一种度量时间的方法比另一种更真实；普遍采用的方法只不过是更方便而已。我们没有权利说两个时钟一个运转正常，另一个运转不正常；我们只能说，与第一个时钟的指示一致是有利的。

正如我已经说过的，刚才牵绊我们的困难经常被揭示出来，在考虑到这个困难的最新著作中，除了加利农先生的小册子之外，我愿提及昂德拉德(*Anbrade*)的力学专题论文。

VI

第二个困难直到现在还没有引起更多的注意；可是它完全类似于前一个；即使从逻辑上看，我也应当首先谈谈它。

两个心理现象发生在两个不同的意识中；当我说它们是同时的时候，我意指什么呢？当我说发生在每一个意识之外的物理现象在心理现象之前或之后的时候，我意指什么呢？

1572年，第谷·布拉赫(Tycho-Brahe)在天空中发现了一颗新星。在遥远的天体发生了大爆炸；可是，它是在很早以前发生的；至少在两百年前，因为光从该恒星到达地球需要这么长的时间。因此，这次大爆炸发生在美洲大陆发现之前。

好啦，我就谈这些。由于该恒星的卫星大概无人居住，因而就这个也许没有目击者的壮观现象而论，当我说这个现象处在克里斯托弗·哥伦布(Christopher Columbus)的意识中形成西班牙岛的视觉图象之前时，我意味着什么呢？

稍加思索就可以充分地认识到，所有这些断言本身并没有意义。它们只有作为约定的结果才会有意义。

VII

我们首先应该扪心自问，人们怎么会有把如此之多互不渗透的世界纳入同一框架内的观念呢。我们希望向我们自己描述外部世界，而且唯有这样作，我们才感到我们理解了它。我们知道，我们从来也没有达到这种描述，因为我们太无能为力了。但是，

* 西班牙岛(the isle of Espanola)属厄瓜多尔，位于东经89°42'，南纬1°25'——译者注

我们至少期望能够设想出可以作出这种描述的全知全能的神智，它是一种能够洞察一切、能够在它的时间中进行分类的伟大意识，就象我们把我们所知道的一鳞半爪在我们的时间中进行分类一样。

这个假设的确是粗糙的、不完整的，因为这个神智只不过是半神半人而已；在一种意义上它是无限的，而在另一种意义则是有限的，由于它对过去仅有不完善的记忆；它不会有其他记忆，要不然一切记忆对它来说都是现存的，从而它不会有时间。不过，当我们谈到时间时，就发生在我们之外的一切而论，我们无意识地采纳了这个假设吗？我们没有把我们自己放在这个不完美的神的位置上吗？假使神存在，即便无神论者也把他们自己置于此神的位置上了吗？

我刚才所说的也许已向我们表明，我们为什么要力图把一切物理现象都纳入同一框架内。但这不能认为是同时性的定义，因为这个假想的神智即使存在，它对我们来说也是神秘莫测的。因此，有必要寻求另外的途径。

Ⅷ

适用于心理的时间的普通定义已不再能使我们满足。两个同时的心理事实是如此密切地结合在一起，以致于在不破坏它们的情况下无法把二者分开加以分析。两个物理事实也是同样的吗？我的现在对于我昨天的过去不是比天狼星的现在更近吗？

也曾有人说过，当两个事实的相继顺序可以任意颠倒时，则它们应该被视为是同时的。显而易见，这个定义不会适用于发生在相距很远之处的两个物理事实，在涉及到它们时，我们甚至无法理解这种可逆性是什么；此外，相继本身必须首先定义。

IX

让我们接着试图考虑一下所谓同时或居先寓意何在，为此让我们分析几个例子。

我写了一封信；后来我的朋友读到我写给他的信。这两个事件就其发生的场所而言显现于两个不同的意识中。在我写这封信时，我有信的视觉图象，而轮到我的朋友读这封信时，他有同样的视觉图象。尽管这两个事实发生在互相隔绝的世界，但是我毫不犹豫地认为第一个事实在第二个事实之先，因为我相信第一个是第二个的原因。

我听到雷鸣，我得出结论说，发生了放电现象；我毫不犹豫地认为，该物理现象先于我的意识中觉察到的听觉印象，因为我相信闪电是雷鸣的原因。

然后，看看我们遵循的法则吧，我们只能遵循一个法则：当一个现象作为另一个现象的原因出现在我们面前时，我们认为它在前面。因此，我们正是通过原因来确定时间的；但是，当两个事实在我们看来似乎以恒定的关系联系在一起时，我们怎样辨认哪一个是什么原因、哪一个结果是结果呢？我们假定，在先的事实和居先是另一个事实的原因和结果的原因。此时，我们正是用时间确定原因的。怎样把我们自己从预期理由^{*}中拯救出来呢？

我们时而说**先后即因果**，时而说**因果即先后**；我们能摆脱这种循环论证吗？

* *Petitio Principii* (预期理由)，拉丁语，逻辑术语。预期理由是一种逻辑错误，它把尚待证明的判断作为证明论题的论据。预期理由又称“窃取论点”或“巧词”。——译者注

X

我们不去注意我们如何成功地摆脱循环论证，因为我们不能够完全取得成功，可是我们要查看一下，我们怎样试图摆脱它。

我实行有意的行为A，其后我感受到感觉D，我认为它是行为A的结果；另一方面，由于无论什么理由，我推断出，这个结果不是直接的，而是在我的意识之外，由我没有目睹的两个事实B和C偶然发生而引起的，按这样的方式，B是A的结果，C是B的结果，而D则是C的结果。

可是，其根据何在呢？如果我认为，有理由把四个事实A、B、C、D视为用因果关系相互结合在一起，那么为什么要按因果顺序ABCD排列它们，同时按时间顺序ABCD排列它们，而不按任何其他顺序排列它们呢？

我清楚地看到，在行为A中，我有主动之感，而在经受感觉D时，我有被动之感。这就是为什么我认为A是初始原因而D是最终结果；这就是为什么我把A放在链的始端而把D放在链的终端；但是，为什么把B放在C之前，而不把C放在B之前呢？

倘若这个问题提出来，答案通常是：C的原因正好是B，因为我们总是看到，B发生在C之前。当我们目睹这两个现象时，它们按某一顺序发生；当类似的现象在我们未目睹它们的情况下发生时，没有把这个顺序颠倒的理由。

可是，无疑要谨慎小心；我们永远也不能直接认识物理现象B和C。我们认识的是B和C各自产生的感觉B'和C'。我们的意识直接告诉我们，B'在C'之先，于是我们假定，B和C按同一顺序相继发生。

事实上，这个法则似乎是很自然的，可是我们往往不得不违

反它。我们只是在乌云放电之后数秒钟才听到雷声。有两个闪电、一个远，另一个近，尽管第二个闪电的声音在第一个闪电的声音之前传到我们这儿，但是第一个闪电不能先于第二个闪电吗？

XI

还有另一个困难：我们真有权利谈论一个现象的原因吗？假使宇宙的所有部分在某种程度上相互关联，那么任何一个现象将不可能是单一原因的结果，而是不可胜数的原因的结果；人们常说，一个现象是在某一时刻之前整个宇宙状态的结果。适用于如些复杂的情况的法则怎样表述呢？可是唯有这样，这些法则才可能是普遍的和严格的。

不要在这一无限的复杂性中晕头转向，让我们作一个比较简单的假设。例如，考虑三个星球：太阳、木星和土星；让我们把它们简化为质点，并把它们与世界的其余部分隔离开来。三个天体在给定时刻的位置和速度足以决定它们在下一个时刻的位置和速度，从而足以决定它们在任何时刻的位置和速度。它们在时刻 t 的位置决定它们在时刻 $t+h$ 的位置以及在时刻 $t-h$ 的位置。

甚至可以更进一步；木星在时刻 t 的位置与土星在时刻 $t+a$ 的位置一起决定木星在任何时刻的位置和土星在任何时刻的位置。

木星在时刻 $t+e$ 和土星在时刻 $t+a+e$ 所占据的位置的集合，通过象牛顿定律那样精确、但却比它复杂的定律，与木星在时刻 t 和土星在时刻 $t+a$ 所占据的位置的集合结合在一起。那么，为什么不把这些集合中的一个视为另一个的原因——这会导致认为木星的时刻 t 和土星的时刻 $t+a$ 是同时的——呢？

的确，在答案中仅有方便和简单的理由，这是十分强有力的。

可是，让我们举些不怎么人为的例子；为了理解学者隐含地假定的定义，让我们观看一下他们的工作和他们研究同时性所依据的法则。

我将举两个简单的例子：光速的量度和经度的确定。

当一位天文学家告诉我，他的望远镜此刻向他揭示出的某一恒星现象不过是在五十年前发生的，我寻思他的意思，为此我将首先反问他，他是如何了解到这一点的，也就是说，他是如何量度光速的。

他以下述**假定**开始：光具有不变的速度，尤其是，光速在所有方向都是相同的。这是一个公设，没有这个公设，便不能试图量度光速。这个公设永远无法直接用经验证实；如果不同的测量结果不一致，那么它必然与实验相矛盾。我们应当认为我们自己是幸运的，因为这种矛盾没有发生，可能发生的轻微的不一致能够很容易地加以解释。

无论如何，类似于充足理由律的这个公设已被每一个人所接受；我想强调的是，它向我们提供了研究同时性的新法则，这个新法则与我在上面所描述的法则截然不同。

在采取这个公设后，让我们看看，光速如何量度。你知道，罗麦(Roemer)利用木星的卫星蚀，察看该事件滞后于卫星蚀预言多少。但是，这个预言是怎样作出的呢？它是借助于天文学定律作出的，例如牛顿定律。

如果我们认为光速具有与所采用的数值稍许不同的数值，并假定牛顿定律仅仅是近似的，那么观察到的事实此时也不能完满地解释吗？能够解释，只不过这会导致用另一个更复杂的定律代

替牛顿定律。就光速而言，数值这样来选定，以便使适合于这个数值的天文学定律尽可能简单。当航海家或地理学家确定经度时，他们恰恰必须解决我们正在讨论的问题；他们不在巴黎，但他们却不得不计算巴黎时间。他们怎样完成这一任务呢？他们携带着与巴黎时间相符合的计时设备。同时性的定性问题取决于时间度量的定量问题。我不需要处理与后一个问题有关的困难，因为我在上面已详细地强调了它们。

或者，他们观察天文现象，例如观察月蚀，他们假定，这个现象从地球的所有地点同时可以看到。这不完全正确，因为光的传播不是瞬时的；如果要求绝对的精确，那就应该按照复杂的法则进行矫正。

或者，他们利用电报。首先十分清楚，例如，在柏林接收到信号迟于从巴黎发送同一信号。这就是上面分析过的因果法则。但是，迟多少呢？一般说来，传送的持续时间被略而不计，两个事件被看作是同时的。不过，为严格起见，还应当通过复杂的计算进行一点修正；实际上并没有这样作，因为矫正完全处于观察误差范围之内。从我们的观点来看，矫正的理论的必要性是不可或缺的，这种必要性是严格的定义所要求的。从这一讨论出发，我想强调两件事：（1）所使用的法则是各种各样的。（2）很难把同时性的定性问题与时间度量的定量问题分隔开来；无论是利用時計，还是采用象光速那样的传播速度行进计算，情况都是如此，因为若不量度时间，这样的速度也不能量度。

XIII

结论是：我们既没有同时性的直觉，也没有两个持续时间相等的直觉。假使我们认为我们有这种直觉，这不过是幻想而已。

我们借助于某些法则代替直觉，我们几乎总是应用它们而不自知。

但是，这些法则的本性是什么呢？既没有普遍的法则，也没有严格的法则；几乎没有多少法则适用于每一个特例。

这些法则并未强加在我们身上，我们必然对发明其他法则感兴趣；但是，只要法则不使物理学、力学和天文学的定律复杂化，它们就不会被抛弃。

因此，我们之所以选择这些法则，并不是因为它们是真实的，而是因为它们方便的。我们可以把它们概括如下：“两个事件同时，或者它们的相继顺序、两个持续时间相等，是这样来定义，以使自然定律的表述尽可能简单。换句话说，所有这些法则、所有这些定义，只不过是下意识的机会主义的产物。”

第三章 空间的概念

1. 引言

在我迄今专论空间的文章中，我尤为强调非欧几何学所引起的问题，而把其他比较难以研究的问题，例如有关维数的问题，几乎完全撇在一边。我考虑的所有几何学皆以三维连续统为公共基础，而三维连续统对所有几何学都相同，仅因人们在其中所画图形或当人们想要度量它时，它本身才有所分化。

在这个本来是无定形的连续统中，我们可以设想线和面的网络，然后我们可以一致认为，这个网的网格彼此相等，只有在这一约定之后，这个连续体才变得可度量，变为欧几里得空间或非欧空间。因此，两种空间中的这个或那个能够中立地从这一无定形的连续统中产生出来，犹如在一张空白纸上可以中立地画直线或圆一样。

我们知道，在空间中有内角之和等于两直角的直线三角形；但是，我们同样也知道有内角之和小于两直角的曲线三角形。一种的存在并不比另一种的存在更不确定。若称前者之边为直线，则采用的是欧几里得几何学；若称后者之边为直线，则采用的是非欧几何学。这样一来，询问采用什么几何学合适就是询问把什么线称为直线合适吗？

很明显，实验不能解决这样的问题；例如，人们不应当询问，经验决定我该称AB为直线，还是称CD为直线。另一方面，

我也不能说，我没有权利把直线的名称给予非欧三角形之边，因为它们与我们直觉到的直线的永恒观念不一致。当然，我们姑且承认，我有欧几里得三角形的直觉观念，可是我同样有非欧三角形之边的直觉观念。为什么我有权利把直线的名称用于第一种观念，而不用于第二种观念呢？这个音节在哪一点上形成这个直觉观念的组成部分呢？显然，当我们说欧几里得直线是**真实直线**而非欧直线不是真实直线时，我们只不过意味着，相对于第二种直觉观念而言，第一种直觉观念对应于**更为值得注意的对象**。但是，我们怎样决定这个对象是更为值得注意的呢？我在《科学与假设》中已研究过这个问题。

在这里，我们看到经验获得应用。如果欧几里得直线比非欧直线更为值得注意，这主要是因为它与某些值得注意的自然对象相差无几，而非欧直线却与这些对象大相径庭。但是，可以说，非欧直线的定义是人为的；如果在我们采用它的时候，我们将看到，两个不同半径的圆获得了非欧直线的名称，而两个相同半径的圆，一个能够在另一个不能满足它的情况下满足该定义，如果此时我们把这些所谓的直线之一不变形地加以移动，它将不再是直线。但是，我们凭什么权利把这两个图形——欧几里得几何学把它们称为具有同一半径的两个圆——看作是相等的呢？这正是因为，通过把它们中的一个不变形地移动，我们能够使它与另一个重合。为什么我们说这一移动要在不变形的情况下实现呢？要给它一个充分的理由是不可能的。在所有被表达的运动中，有一些运动欧几里得几何学家说它们不伴随变形；而有另一些运动非欧几何学家却会说它们不伴随变形。在第一种运动中，即在所谓的欧几里得运动中，欧几里得直线依然是欧几里得直线，而非欧直线并非保持非欧直线；在第二种运动中，或者说在非欧运动

中，非欧直线依然是非欧直线，而欧几里得直线并非保持欧几里得直线。因此，无法证明，把非欧三角形之边称为直线是没有根据的；不过可以指出，如果人们继续把没有变形的运动称为欧几里得运动，那则是毫无道理的；但是，同时还可以指出，如果非欧运动被称为无变形的运动，那么把非欧三角形之边称为直线同样是毫无道理的。

现在，当我们说欧几里得运动是无形变的**真实**运动时，我们想说什么呢？我们只是说它们比其他转动**更为值得注意**。为什么它们更为值得注意呢？这正是因为某些值得注意的天然物体即固体经历几乎类似的运动。

人们能够想象非欧空间吗？当我们接着问这个问题时，这就意味着，我们能够想象这样一个世界——在这个世界上，值得注意的自然对象几乎倾向于非欧直线的形状，值得注意的天然物体频繁地经历几乎类似于非欧运动的运动——吗？我在《科学与假设》中已经表明，对这个问题应该作肯定的回答。

人们往往注意到，假如宇宙中的所有物体同时以同一比例膨胀，我们便无法觉察这一事实，因为我们的所有测量仪器象被量度的对象本身一样同时增大。在膨胀之后，这个世界按照它的进程继续运行，如此非同寻常的事件我们居然一无所知。换句话说，两个相互类似的（该词类似于欧几里得几何学第VI编的意义）世界将绝对不可区分。但是，事情不止于此；不仅在世界相等或类似的条件下，也就是说，假如在我们通过改变坐标系或改变与长度有关的标尺从一个世界到达另一个世界的条件下，它们是不可区分的；而且在通过任何“点变换”从一个世界到另一个世界的条件下，它们还将是不可区分的。我想解释一下我的意思。我假定，一个世界的一点且是唯一的点与另一个世界的各个点对

应，反之亦然；此外，一点的坐标是对应点的连续函数，在其他方面完全是任意的。我还假定，在第二个世界中，恰恰处于对应点的具有同一本性的对象对应于第一个世界的各个对象。我最后假定，在初始时刻满足的这个对应关系被无限期地保持下去。我们便无法把这两个世界彼此区分开来。空间的相对性通常没有在此如此广泛的意义上理解；无论如何，这样理解它是正当的。

如果这些世界之一是我们的欧几里得世界，它的居民习惯称谓的直线将是我们的欧几里得直线；但是，就他们所居住的世界和他们习惯称谓的无变形的运动而言，第二个世界的居民习惯称谓的直线却是曲线，这种曲线具有与前者相同的特性。因此，他们的几何学将是欧几里得几何学，而他们的直线并非我们的欧几里得直线。所谓从我们的世界转移到他们的世界的点变换，就是它的变换。* 这些人的直线将不是我们的直线，但是它们彼此之间的关系与我们的直线相互之间的关系相同。正是在这个意义上，我说他们的几何学将是我们的几何学。另外，我想尽全力宣布，他们欺骗他们自己，他们的直线不是真实直线，如果我们还不愿意承认这样的主张毫无意义的话，那么我们至少必须相信，这些人没有任何方法辨认他们的错误。

2. 定性几何学

所有这一切相对说来都易于理解，我已经多次重复了，我想不需要进一步详述这个问题了。欧几里得空间不是强加于我们感觉的形式，因为我们能够想象非欧空间；但是，两种空间——欧几里得空间和非欧空间——均以我在开始提到的无定形连续统作为共同的基础。从这种连续统出发，我们既能够得到欧几里得空间，又能得到罗巴契夫斯基（Lobachevsky）空间，犹如我们在

一个问题：它是这个还是那个？在没有想象出二者择一的两个措词的情况下，他无法表述它。如果无法想象出这些措词之一，那么诉诸实验既无用，也不可能。无须观察就可以知道，时钟的指针在表面没有指示15时，因为我们预先知道只有12时，我们也无须查看指针是否在15的刻度处，因为根本就没有这个刻度。

同样也要注意，在拓扑学中，经验主义者摆脱了能够把他们难倒的一个最严重的反对理由，摆脱了使他们把自己的论点用于欧几里得几何学真理的全部努力事先落空的困境。欧几里得几何学的真理是严格的，而实验仅仅是近似的。在拓扑学中，近似的实验足以得出严格的定理，例如，如果人们看到空间既不能有两维，也不能小于二维，或者既不能有四维，也不能大于四维，那么我们可以肯定，它严格地有三维，由于它不会有两维半或三维半。

在拓扑学的所有定理中，最重要的是在谈到空间有三维时所阐述的定理。这就是我正准备考虑的定理，我想用这句话提出问题：当我们说空间有三维时，我们意味着什么呢？

3. 多维物理连续统

我在《科学与假设》中已解释过，我们从何处推导出物理连续统的概念，数学连续统的概念怎样由它产生。正巧，我们能够相互区分两种印象，而无法把每一个与第三个区分开来。例如，我们能够毫无困难地把12克的重物与10克的重物区别开来，而11克的重物既不能与12克的重物区别开来，也不能与10克的重物区别开来。

把这样一个陈述翻译成符号，则可以写为：

$$A=B, B \neq C, A < C$$

这就是物理连续统的公式，虽然粗糙的经验把它给予我们，但是由此却产生了无法容忍的矛盾，只有引入数学连续统方能消除这个矛盾。这就是其步骤（有公度数和无公度数）在数目上是无限的但却是互为外部的尺度，这些步骤不象与前述公式一致的物理连续统那样互相侵犯。

可以说，物理连续统犹如无法分辨的星云，最完善的仪器也不能成功地分辨它。毫无疑问，如果我们不用手判断重量，而用可靠的天平来称量重量，那么我们便能把11克的重物与10克的重物和12克的重物区别开来，我们的公式变成：

$$A < B, B < C, A < C$$

但是，我们总可以在A和B之间、B和C之间找到新元素D和E，这样一来

$$A = D, D = B, A < B, B = E, E = C, B < C,$$

困难只不过向后退去，星云依然无法分辨；唯有精神才能够分辨它，作为精神产物的数学连续统把星云分解为恒星。

不过，到这时我们还没有引入维数的概念。当我们说数学连续统或物理连续统有两维或三维时，这意味着什么呢？

要研究物理连续统，我们首先必须引入**度量**的概念。我们已经看到，物理连续统的特征是什么。这个连续统的每一个元素都由印象流形组成；可以发生下面两种情况：或者，一个元素不能与同一连续统的另一个元素区分开来，即使这个新元素对应于差别不大的印象流形；或者相反地，区分是可能的；最后，两个元素与第三个不可区分，不过它们却可以相互区分，这种情况也可能发生。

设A和B是连续统C的两个可区分的元素，可以找到都属于同一个连续统的元素系列 $E_1, E_2, \dots, E_n$ ，这一切都属于连续统C，

于是它们中的每一个与先前的都不可区分， E_1 与A不可区分， E_n 与B不可区分。因此，我们可以沿着一条连续的路线从A走到B，而且不离开C。如果这个条件对连续统C的任何两个元素A和B都满足，我们就可以说，这个连续统C是**完全连在一起的**。现在，让我们区分C的某些元素，这些元素或者都可以相互区分，或者它们本身形成一个或几个连续统。在C的所有元素中，这样任意选择的元素的集合物将形成我所谓的**截量**。

在C中取任何两个元素A和B。我们能找到这样的元素系列 $E_1, E_2, \dots, E_n$ ；以致于（1）它们都属于C；（2）它们的每一个都与接着的元素不可区分， E_1 与A不可区分， E_n 与B不可区分；（3）此外，没有一个元素E与截量的任何元素不可区分。或者相反，在满足头两个条件的每一个系列 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 中，将存在元素E，它与该截量的一个元素不可区分。在第一种情况下，我们能够通向一条连续的路线从A走到B，同时不离开C，也不遇到截量；在第二种情况下则不可能。

对于连续统C的任何两个元素A和B而言，如果这时总是呈现出第一种情况，我们将说，尽管有截量，C依然是完全连在一起的。

例如，倘若我们按某一方式选择截量，而在其他方面则是任意的，那么连续统或者依然是完全连在一起的，或者它不再完全连在一起；在上一假设中，我们将说它被截量分割。

要注意，所有这些定义在提出时是唯一地从这个十分简单的事实中构造出来的，两个印象流形有时能够区分，有时不能够区分。假定要分割一个连续统，如果把相互都不可区分的若干元素视为截量，我们就说这个连续统是**一维的**；相反地，要分割一个连续统，如果必须把形成一个或多个连续统的元素本身的系统视

为截量，我们就说这个连续统是多维的。

如果形成一个或多个一维连续统的截量足以分割连续统 C ，我们便说 C 是二维连续统；如果形成一个或多个至多是两维连续统的截量足以分割连续统 C ，我们便说 C 是三维连续统；如此等等。

为了证明这个定义是正当的，最好审查一下几何学家是否在他们工作的开始用这种方法引入三维概念。现在，我们看到什么呢？通常，他们是这样开始的：把面定义为体或空间的部分的边界，把线定义为面的边界，把点定义为线的边界，而且他们坚决主张，同一程序不能够进一步推下去。

这正好是上面给出的观念：为了分割空间，需要称之为面的截量；为了分割面，需要称之为线的截量；为了分割线，需要称之为点的截量；我们不能进一步走下去，点不能被分割，所以点不是连续统。于是，能够被不是连续统的截量分割的线将是一维连续统；能够被一维的连续截量分割的面将是二维连续统；最后，能够被二维连续截量分割的空间是三维连续统。

这样看来，我刚才所下的定义与通常的定义基本上没有差别；我只不过是给它一种可适用的形式，而不是给它以数学连续统的形式。因为，只有物理连续的形式可以被表示，并且力图保持它的全部精确性。

此外，我们看到，这个定义不仅仅适用于空间；在我们感官感知的一切事物中，我们都能发现物理连续统的特征！这便容许相同的分类；在前述定义的意义下，很容易找到四维连续统、五维连续统的例子；这样的例子是精神自然而然地想象出来的。

最后，如果我有时间的话，我应该解释一下，我上面谈到的、黎曼称之为拓扑学的这门科学教导我们在同一维数的连续统

之间进行区分，这些连续统的分类也建立在截量考虑的基础上。

从这一概念产生出多维数学连续统的概念，其方法与一维物理连续统产生一维数学连续统的方法相同。公式

$$A > C, A = B, B = C,$$

概括了粗糙的经验材料，它隐含着无法容忍的矛盾。为了摆脱这个矛盾，有必要引入新概念，但是依然保留多维物理连续统的基本特征。一维数学连续统容许其分割在数目上是无限的尺度，该尺度对应于同样大小的有公度的或无公度的值。要得到 n 维数学连续统，只要取 n 个相同的尺度，使其分割对应于称之为坐标的 n 个独立的量的不同值就足够了。从而，我们将有 n 维物理连续统的图象，在作出不允许我上面所讲过的矛盾的决定的之后，这个图象将象数学连续统一样可信。

4. 点的概念

现在，情况似乎是，我们在开始向我们提出的问题都得到了解答。当我们说空间有三维时，这就是说，我们意指空间的点的流形满足我刚才提出的三维物理连续统的条件。只有知道什么是空间的点的流形、甚或什么是空间的一个点时，我们才会心满意足。

目前，事情并非象人们设想的那样简单。每一个人都自信他知道是什么，正因为我们对它了解得过于彻底，我们才认为不需要定义它。的确，我们不能要求知道如何定义点，因为在从定义追溯定义中，我们必须停顿下来的时刻必将到来。但是，我们何时应该止步呢？

首先，当我们达到我们感官感知的对象或能够想象出这个对象时，我们将停步不前；于是定义将变得毫无用处，我们没有给

小孩定义羊，我们对他说：看，这就是一只羊。

然后我们应该问问自己，是否可以这样来想象空间的点。那些回答是的人没有考虑，他们实际上想象的是用粉笔在黑板上所画的白点或用钢笔在白纸上所画的黑点，他们只能想象对象，或者确切地讲，只能想象这个对象在他们的感官上造成的印象。

当他们企图想象点时，他们想象的是十分微小的对象使他们感觉到的印象。不需要进而说两个不同的对象——尽管二者很小——可以产生截然不同的印象，但是我不愿详细讲述这个困难，这还需要作一些讨论。

但是，它还不是那个问题，描述一个点并不充分，必须描述一个确定的点，并且有办法把它与其他点区别开来。事实上，我们可以把我上面陈述的法则用于连续统，人们借助于这些法则能够分辨出连续统的维数，我们必须依赖这个连续统的两个元素有时能区分开来、有时不能区分开来的事实。因此，在某些情况下，我们有必要了解如何想象一个特定的元素，如何把它与其他元素区分开来。

问题在于了解，我一小时前想象的点与我现在想象的这个点是相同的点，或者它是不相同的点。换句话说，我们如何知道，对象A在时刻 α 所占据的点是否与对象B在时刻 β 所占据的点是同一点，或者更明确地讲，这意味着什么？

我坐在我的房间里；一个物体放在我的桌子上；在一秒钟内，我没有动，也没人接触该物体。我被诱使说，这个物体在这一秒之初所占据的点A与它在这一秒之末所占的点B相同。完全不是这样；从A点到B点是三万米，因为该物体被携带着和地球一起运动。我们无法知道，一个不管是大是小的物体是否不改变它在空间中的绝对位置，我们不仅不能断言它，而且这一断言毫无意

义，在任何情况下都不能与任何表示一致起来。

但是，我们可以接着问我们自己，一个物体对于另一个物体的相对位置是否变化了，而且首先要向这个物体对于我们身体的相对位置是否变化了。如果这个物体给我们造成的印象没有变化，我们将倾向于断定，二者都未改变这个相对位置；如果印象变化了，我们将断定，这个物体或者状态变化了，或者相对位置变化了。依然要确定两个中的哪一个变化了。我在《科学与假设》中已解释过，我们怎样被引导去区分位置变化。而且，我想进一步回到这个问题上。因此，我们终于了解到，物体对于我们身体的相对位置是否依然相同。

如果我们现在看到，两个物体相对于我们的身体保持它们的相对位置，那么我们就得出结论说，这两个物体彼此之间的相对位置没有变化；但是，我们仅仅是依据间接的推理达到这个结论的。我们直接知道的只不过是物体相对于我们身体的相对位置。**更加毋庸置疑的是**，仅仅依据间接的推理，我们认为我们知道（而且，这种自信是虚妄的）物体的绝对位置是否没有变化。

简而言之，我们自然而然地使所有外部物体所参照的坐标系是与我们的身体恒定地密切关联的坐标系，它随着我们一起移动。

不可能想象绝对空间；当我力图想象物体和我自己同时在绝对空间运动时，我实际上想象我自身不动，似乎各种物体和在我之外、名曰我的人绕着我运动。

如果我们使每一种事物都参照与我们身体密切关联的坐标轴，困难会得到解决吗？而且，我们能知道用事物相对于我们自己的相对位置来定义的点是什么吗？许多人将回答能，并且说坐标轴“定域”外部对象。

这意味着什么呢？定域对象仅仅意味着想象必须接近它的动作。我愿解释我的意思。这不是描述在空间的动作本身的问题，而仅仅是想象伴随这些动作的、不以空间概念的预先存在为先决条件的肌肉感觉本身。

假如我们设想，两个不同的对象相对于我们自己相继占据同一相对位置，这两个对象给我们造成的印象将截然不同：如果我们把它们定域在同一点，这只不过是因为，必须作出相同的动作才能达到它们；除此之外，人们不能直接看到它们会有共同之处。

但是，在给定一个对象后，我们能够设想出同样使我们到达它的许多不同的动作系列。此时，如果我们通过想象使我们达到这一点的动作所伴随的肌肉感觉系列来想象一个点，那么将存在着想象同一点的许多完全不同的方式。倘若人们不满意这个解决办法，例如希望除肌肉感觉而外，再引入视觉，这便多了一两个想象这同一类的方式，只不过增大了困难而已。在任何情况下，都要提出下述问题：我们为什么认为，如此相互不同的表示还能描述同一点？

另外尚须注意，我刚才说过，我们自然而然地使外部对象参照于我们自己的身体；我们携带着作为空间所有点的参照物的坐标系与我们一起移动，这个坐标系好象与我们的身体恒定地联系在一起。我们应该注意，严格地讲来，我们不能说与我们的身体恒定地联系在一起的坐标系，除非我们身体各个部分本身相互之间恒定地联系在一起。由于情况并非如此，所以在把这些虚构的坐标系作为外部对象的参照物之前，我们应当假定我们身体恢复到原来的姿式。

5. 位移的概念

在《科学与假设》中，我已经表明，我们身体的动作在空间概念的起源中起举足轻重的作用。对于完全不能动的生物而言，既不会有空间，也不会有几何学；外部对象在他周围徒然地移动着，这些位移在他的印象中所引起的变化不会被这种生物归咎于位置的变化，而只会归咎于状态的变化；这种生物无法把这两种变化区别开来，这种区别对我们来说是根本的，而对它则没有意义。

我们迫使我们身体器官所作的动作作为一种作用，招致外部对象在我们感官上产生的印象发生变化；其他原因同样可以使印象变化；但是，我们被引导区分我们自己的运动所产生的变化，我们由于两个理由容易分辨它们：（1）因为它们是随意的；（2）因为它们被肌肉感觉所伴随。

这样看来，我们自然而然地把我们的印象可能经受的变化分为两个范畴，我也许给它们取的是不恰当的名称：（1）内在变化，这种变化是随意的，被肌肉感觉所伴随；（2）外在变化，它具有相反的特征。

于是我们看到，在外在变化中，有一些能够被矫正，因为内在变化使一切恢复到原来的状态；另一些则不能用这种方式矫正（情况是这样：当外部对象被移动时，这时我们可以通过改变我们自己的位置，相对于这个对象恢复到与以前相同的相对位置，以便建立原先的印象集合；如果这个对象没有被移动，但是它的状态变化了，那是不可能的）。由此在外在变化中出现了新的区分：能够被这样矫正的外在变化，我们称之为位置变化；其余的称之为状态变化。

例如，设想一个一半为蓝、一半为红的球；首先，它的蓝半

球呈现在我们面前，接着它自己旋转，使它的红半球呈现在我们面前。现在，设想一个盛蓝色液体的球形瓶，它由于化学作用而变成红色。在两种情况下，红色的感觉代替了蓝色的感觉；我们的感官经历了相同的印象，这些印象按同一顺序相继发生，可是我们却认为这两个变化截然不同；第一个是位置变化，第二个是状态变化。为什么呢？因为在第一种情况下，对我来说，只要转动球，就足以使蓝半球对着我，重建原来的蓝色感觉。

还有更多的东西；如果两半球不是红色和蓝色，而是黄色和绿色，我们应当怎样解释球的翻转呢？刚才，红色接着蓝色发生，现在是绿色接着黄色发生；然而，我却说两个球经受了相同的翻转，每一个都绕着它的轴转动；可是我不能说，绿和黄的关系与红和蓝的关系是一样的；那么，我是怎样被导致判定两个球经历了**相同的位移**呢？显然，在这种情况下，我都能通过转动球作同样的动作，重建原来的感觉，而且我知道，我作了相同的动作，因为我感知到相同的肌肉感觉；因此，要了解它，我不需要预先知道几何学，不需要想象我的身体在几何学空间中的动作。

另一个例子是：一个对象在我眼前移动；它的图象开始在视网膜的中央形成；接着在视网膜的边缘形成；过去的感觉通过终止于视网膜中央的一个神经纤维传达给我；新出现的感觉通过起始于视网膜边缘的**另一个神经纤维**传达给我；这两个感觉在质上迥然不同；在这种情况下，我怎么能够区分它们呢？

再者，我为什么被导致判定这两个质上不同的感觉表示被移动的同—图象呢？这是因为我**能够用眼睛追踪对象**，通过眼睛随意的、被肌肉感觉所伴随的位移，使图象恢复到视网膜中央，重建原来的感觉。

我假定，红色对象的图象从视网膜的中央A移到边缘B，接着

蓝色对象的图象循序从视网膜的中央A移到边缘B；我应该判定，这两个对象经历了**相同**的位移。为什么呢？因为在这两种情况下，我能够建立原来的感觉，为了作到这一点，我的眼睛实施了**相同的动作**，我之所以知道我的眼睛实施了相同的动作，是因为我感知到**相同的肌肉感觉**。

假使我的眼睛不会运动，我会有什么理由假定，视网膜中央的红色感觉和视网边缘的红色感觉的关系与视网膜中央的蓝色感觉和视网边缘的蓝色感觉的关系相同呢？我只不过有四个质的不同的感觉而已，如果要问我，它们是否按我刚才陈述的比较联系在一起，这个问题在我看来似乎是滑稽可笑的，犹如有人问我，在听觉、触觉和嗅觉之间是否存在着类似的比较。

现在，让我们考虑一下内在变化，即由我们身体的随意运动产生的、被肌肉感觉所伴随的变化。它们导致了以下这两个观察，这两个观察类似于我们刚刚针对外在变化的对象所作的观察。

1. 我可以假定，我的身体从一点运动到另一点，但却保持着**相同的姿势**；因此，我身体的各部分保持或恢复了同一**相对位置**，尽管它们在空间中的绝对位置可以改变。我可以假定，不仅我身体的位置变化了，而且身体的姿势也不再相同，例如我的臂膀先前弯曲而现在伸直了。

因此，我应该区分姿势不变的简单位置变化和姿式变化。在我看来，二者都属于肌肉感觉形式。那么，我是怎样被引导区分它们呢？正是前者，可以用来校正外在变化，而后者却不能，或者至少只能给出不完善的校正。

我着手解释这一事实，正象我向已经通晓几何学的人解释它一样，但是不要由此得出结论说，要作出这一区分必须已经通晓

几何学；在通晓几何学之前，我虽则未能解释该事实，但是（可以说在实验上）却确定了它。但是，只是为了在两类变化之间作出区分，我不需要解释该事实，**确定**它就使我心满意足了。

无论情况如何，解释是容易的。假定外部对象被移动，如果我们希望我们身体的不同部分相对于这个对象恢复到它们初始的相对位置的话，那么这些不同部分彼此之间必须同样地恢复它们的初始相对位置。只有满足这后一个条件的内在变化才能够矫正由那个对象位移产生的外在变化。因此，如果我的眼睛相对于我的手指的相对位置变化了，那么我还能使眼睛相对于该对象移到它的初始相对位置，并从而重建原来的视觉，但此时手指相对于该对象的相对位置将发生变化，触觉将无法重建起来。

2. 我们同样确定，相同的外在变化可以被相应于不同肌肉感觉的两个内在变化矫正。在这里，我能够在未通晓几何学的情况下再次确定这一点；我不需要其他任何东西；但是我使用几何学语言着手对该事实作出解释。为了从位置A到位置B，我可以采取几条路线。肌肉感觉系列S将对应于第一条路线；另一个肌肉感觉系列S'——一般说来是完全不同的，因为使用的肌肉不同——将对应于第二条路线。

我怎样被导致认为这两个系列S和S'对应于同一位移AB呢？正是因为这两个系列能够矫正同一外在变化。此外，它们毫无共同之处。

让我们现在考虑两个外在变化： α 和 β ，例如，它们将是半蓝半红的球的转动和半黄半绿的球的转动；这两个变化没有共同之处，因为在我们看来，一个从蓝色变为红色，另一个从黄色变为绿色。另一方面，考虑两个内在变化系列S和S'；象其他系列一样，它们将毫无共同之处。但是，我说 α 和 β 对应于相同的位

移， S 和 S'' 也对应于相同的位移。为什么呢？仅仅是因为 S 能够矫正 α 以及 β ， α 能够被 S'' 以及 S 校正。于是，提出了一个问题：如果我已确定 S 矫正 α 和 β ， S'' 矫正 α ，我同样可以肯定 S'' 矫正 β 吗？唯有实验才能够告诉我们这个规律是否被证实。如果它未被证实，至少未被近似地证实，那么就不会有几何学，不会有空间，因为我们对内在变化和外在变化的分类不会有更多的兴趣——尽管我刚才已作过这种分类，而且对区分状态变化和位置变化也不会有更多的兴趣。

看看经验在这一切中起什么作用是饶有兴味的。经验向我表明，某一规律被近似地证实了。经验没有告诉我，空间是何种状态，它是否满足所述的条件。事实上，在所有经验之前，我就知道空间满足这个条件，或者不可能有空间；我也没有任何权利说，经验告诉我几何学是可能的；我十分清楚地看到，几何学是可能的，因为它没有隐含矛盾；经验仅仅告诉我们几何学是有用的。

6. 视觉空间

正如我刚刚解释的，虽然动觉印象在空间概念的起源中完全具有举足轻重的影响，没有它们空间概念永远也不会产生，但是再审查一下视觉印象的作用，研究一下“视觉空间”有多少维，并不是索然无味的，为此目的，让我们把§3的定义用于这些印象。

第一个困难出现在眼前：考虑刺激视网膜某一点的红颜色的感觉；另一方面，考虑刺激视网膜同一点的蓝颜色的感觉。我们必须有某些方法来分辨这两个在质上不同的、有某些共同之处的感觉。现在，根据前节所陈述的想法，我们只有通过眼睛的移动和这些移动所引起的观察结果来分辨。假使眼睛不可动，或者我

们对它的移动毫无意识，我们便不能分辨这两个不同质的、有某些共同之处的感觉；我们便不能分解它们，给它们赋予几何学的特征。没有肌肉感觉，视觉就不会有几何学的特征，以致于可以说，没有纯粹的视觉空间。

为了消除这个困难，只考虑同一本性的感觉，例如红色感觉，这些感觉仅仅就它们刺激视网膜的点而言与另外的感觉不同。很清楚，为了把所有同样颜色的感觉统一在同一类，我没有理由在所有可能的视觉中作出这种任意的选择，而不管受刺激的视网膜上的点是什么。倘若以前我没有学会用我刚才看到的方法区分状态变化和位置变化，也就是说，假如我的眼睛不可动，那么我永远也不会想到它。在我看来，刺激视网膜不同部位的同样颜色的两个感觉似乎在质上是截然不同的，正如两个不同颜色的感觉一样。

在把我局限于红色感觉时，我从而把人为的限制因素强加于我，我有意地忽略了该问题的整个一面；但是，只是通过这种技巧，我才能够分析视觉空间，而不与任何动觉相混。

设想在视网膜上画一条线，把它的表面一分为二；保留刺激这条线上的点的红色感觉或与它们不同、但由于太小以致无法与它们区分的红色感觉。这些感觉的集合将形成一种类似于截量的东西，我称之为 C ；很清楚，这个截量足以把可能的红色感觉的流形分割开来，如果我取刺激分别位于该线两边的两个点的两个红色感觉，若在某一时刻不通过属于该截量的感觉，我便不能沿连续的途径从这些感觉的一个传递到另一个。

因此，如果截量有 n 维，我的红色感觉的总流形——或者你乐意的话，也可说整个视觉空间——将有 $n+1$ 维。

现在，我把刺激截量 C 上的点的红色感觉区分开来。这些感

觉的集合将形成新截量 C' 。很清楚，在始终给分割这个词以相同意义的情况下，这将分割截量 C 。

因此，如果截量 C' 有 n 维，那么截量 C 将有 $n+1$ 维，而整个视觉空间将有 $n+2$ 维。

如果刺激视网膜同一点的红色感觉被认为是等价的，那么化为单一元素的截量 C' 便有0维，而视觉空间便有二维。

然而，人们往往说，眼睛给我们以三维的感觉，使我们在某种程度上辨认对象的距离。当我们试图分析这一感觉时，我们确定，它或者归因于眼睛会聚的意识，或者归因于睫肌使图象聚焦的调节尝试的意识。

因此，刺激视网膜同一点的两个红色感觉将被认为是恒等的，只要它们被相同的会聚感觉所伴随，而且也要被相同的调节尝试的感觉所伴随，或者至少要被具有如此微不足道的差别的会聚和调节感觉所伴随，以致于这些感觉无法区分开来。

为此缘故，截量 C' 本身是连续统，截量 C 大于一维。

但是，很凑巧，经验告诉我们，当两个视觉被同一会聚感觉伴随时，那么它们同样也被同一调节感觉所伴随。于是，如果我们用被某一会聚感觉伴随的截量 C' 的所有感觉形成新截量 C'' ，那么按照前述的规律，它们将完全是不可区分的，而且可以被认为是等价的。因此， C'' 将不是连续统，且有0维；因为 C'' 分割 C' ，所以它将导致 C' 有一维， C 有二维，而**整个视觉空间有三维**。

但是，如果经验告诉我们相反的情况，如果某一会聚感觉并非总是被相同的调节感觉所伴随，事情还会一样吗？在这种情况下，两个刺激视网膜同一点并被同一会聚感觉所伴随的感觉，两个因此而属于截量 C'' 的感觉，都能够区分开来，因为它们被两个不同的调节感觉所伴随。因此， C'' 本身也是连续统，且至少有一

维；于是 C' 应该有两维， C 应该有三维，而**整个视觉空间 应该有四维。**

正是经验告诉我们空间有三维，因为我们最终把三维赋予空间是从实验规律中提出来的，人们可以这样说吗？但是，我们在那里完成的仅仅是生理学实验；还有，要使会聚感觉和调节感觉之间不一致，只要在眼睛上戴上合适构造的眼镜就足够了，我们能说戴上眼镜就足以使空间具有四维吗，制造眼镜的人给空间多加了一维吗？显然不能；我们所能说的一切就是，经验告诉我们，赋予空间以三维是方便的。

但是，视觉空间仅仅是空间的一部分，即使在这个空间的概念中，正如我在开始时解释的那样，也存在着某些人为的成分。真实的空间是动觉空间，这就是我在下一章将要考察的内容。

第四章 空间及其三维性

1. 位移群

让我们简要地概括一下所得到的结果。我们打算研究所谓空间有三维意味着什么，我们首先要问，什么是物理连续统，何时可以说有 n 维。如果我们考虑一下不同的印象系统并把它们相互比较，我们往往辨认出，这两个印象系统是不可区分的（这通常用下述说法来表示：它们相互之间太接近了，我们的感觉太粗糙了，以致于我们无法区分它们），此外我们确定，这两个感觉系统尽管与第三个系统不可区分，但它们二者有时却可以彼此区分。在这种情况下，我们说这些印象系统的流形形成物理连续统 C 。而这些系统中的每一个称为该连续统 C 的**元素**。

这个连续统有多少维呢？首先取 C 的两个元素 A 和 B ，设存在着完全属于连续统 C 的元素的系列 Σ ，该系列是这样的： A 和 B 是这个系列的外项，该系列的每一项与前一项不可区分。如果这样的系列 Σ 能够被找到，我们就说 A 和 B 相互联合；如果 C 的任何两个元素相互联合，我们就说 C 是完全连成一片的。

现在，在连续统 C 中以完全任意的方式取一定数目的元素。这种元素的集合将被称为**截量**。在把 A 和 B 联合起来的各种系列中，我们将区分出两类系列：一种是其元素与该截量的一个元素不可区分的系列（我们将说，这些系列**切断**截量），一种是其**所有元素**

与该截量的所有元素不可区分的系列。如果把A和B联合起来的所有系列 Σ 切断截量，我们将说A和B被截量隔离，截量分割C。如果我们不能在C中找到被截量隔离的两个元素，我们将说截量没有分割C。

在拟定了这些定义后，倘若连续统C不能被本身不形成连续统的截量分割，则这个连续统有一维；在相反的情况下，它有多维。若形成一维连续统的截量足以分割C，则C将有二维；若形成二维连续统的截量足以分割C，则C将有三维，等等。由于这些定义，我们总是能够辨认出任何物理连续统有多少维。只是尚需发现一种物理连续统，它可以说是等价于空间，在这样一种连续统中，这个连续统的元素对应于空间的每一个点，不可区分的元素对应于空间中相互之间十分接近的点。于是，空间将具有与连续统一样多的维数。

能够表示的这个物理连续统的中介物是必不可少的；因为我们无法想象空间，其理由很多。空间是数学连续统，它是无限的，而我们只能想象物理连续统和有限的对象。我们称之为点的空间的不同元素是完全相同的，为了应用我们的定义，我们必须了解如何相互区分这些元素，至少在它们不太接近的情况下应该如此。最后，绝对空间是胡言乱语，我们必须把与我们身体（我们必须始终假定我们身体恢复到原先的姿式）恒等地关联在一起的坐标系作为空间的参照系，以此作为出发点。

再者，我试图用我们的视觉形成与空间等价的物理连续统；这的确是容易的，这个实例尤其适合于讨论维数；这一讨论能够使我们在某种程度上看到，谈论“视觉空间”有三维是可以容许的。只是这种解决办法是不完善的和不自然的。我已经解释了其中的原因，必须把我们的努力转向动觉空间，而不是视觉空间。另

外，我回想起，我们在位置变化和状态变化之间作出区分的根源是什么。在我们的印象所发生的变化中，我们首先区分随意的、被肌肉感觉所伴随的**内在**变化和具有相反特征的**外在**变化。我们确定，会发生这种情况：外在变化可以被重建原来的感觉的内在变化**矫正**。能够被内在变化矫正的外在变化叫**位置变化**，不能被内在变化矫正的外在变化叫**状态变化**。能够被外在变化矫正的内在变化叫**整个身体的位移**，其余的叫**姿势变化**。

现在，设 α 和 β 是两个外在变化， α' 和 β' 是两个内在变化。假定 α 可以被 α' 或 β' 矫正， α' 能够矫正 α 或 β ；经验接着告诉我们， β' 同样能够矫正 β 。在这种情况下，我们说 α 和 β 对应于**相同的位移**，也说 α' 和 β' 对应于**相同的位移**。在作出这些先决条件后，我们能够设想一个物理连续统，我们可把它称为**位移连续统或位移群**，我们可用下述方式定义它。这个连续统的元素必须是能够矫正外在变化的内在变化。这两个内在变化 α' 和 β' 在下述情况下必须被看作是**不可区分**的：（1）如果它们本来就是如此，也就是说，它们彼此之间太接近了；（2）如果 α' 能够矫正与本来和 β' 不可区分的第三个内在变化一样的外在变化。在第二种情况下，可以说，它们按照约定将是不可区分的，我意味着借助一致赞同忽略可以区分它们的事实。

现在我们的连续统被彻底定义了，因为我们知道它的元素，并且规定在什么条件下它们可以被认为是不可区分的。从而我们具有应用我们的定义和确定这个连续统有多少维所必需的一切东西。我们将公认它有**六维**。因此，位移连续统并不等价于空间，因为维数不同；它仅仅与空间相关。现在，我们怎样知道这个位移连续统有六维呢？我们是**根据经验**知道它的。

要叙述能够获得这一结果的实验也许是很容易的。可以看到，

能够在连续统中作出截量，该截量分割连续统，其本身亦是连续统；这些截量本身能够被其他二阶截量分割，二阶截量还是连续统，这种作法只有在六阶截量之后才会停止，六阶截量不再是连续统了。从我们的定义来看，这意味着位移群有六维。

我已经说过，那是容易的，但是确切地讲，却是冗长的；它不会有点肤浅吗？我们看到，这个位移群与空间相关，空间可以由它产生，但是它不等价于空间，因为它没有相同的维数；当我们要说明这个连续统的概念如何能够形成和空间概念如何可以从它导出时，总是有人质问，为什么三维空间比这个六维连续统更使我们熟悉，总是有人怀疑，用这种迂回办法，空间概念是否能在人类精神中形成。

2. 两点的恒等

点是什么？我们怎么知道空间两点是恒等还是不同？或者，换句话时，当我们说：对象A在时刻 α 占据 对象B在 时刻 β 所占据的点时，这意味着什么呢？

这是我们在前章§4给我们自己提出的问题。正如我已经说明过的，它不是把对象A和B在绝对空间中的位置进行比较的问题；这样讨论问题显然是没有意义的。它是把这两个对象的位置相对于和我们的身体恒定地联系在一起的坐标系比较的问题，倘若我们的身体总是以相同的姿势移动的话。

我假定，在时刻 α 和 β 之间，我既没有移动我的身体，也没有移动我的眼睛，我是从我的肌肉感觉知道这一点的。我的头、我的臂或我的手也没有运动。我弄清，在时刻 α ，我归因于对象A的印象传达给我，一些是通过我的一个视觉神经纤维传达给我的，另一些是通过我的手指的一个敏感的触觉神经传达给我的；我查

明，在时刻 β ，我归因于对象B的另外的印象传达给我，一些是通过同一视觉神经纤维，另一些是通过同一触觉神经。

在这里，我有必要停下来加以解释：我是怎样被告知，我归因于A的这个印象和我归因于B的印象这两个不同质的印象是通过同一神经传达给我的呢？以视觉为例，A产生两个同时并起的感觉，即纯粹的光感 a 和色感 a' ，B以同一方式同时产生光感 b 和色感 b' ，如果这些不同的感觉通过同一视网膜纤维传达给我，那么 a 与 b 恒等，但是一般说来，不同的身体产生的色感 a' 和 b' 是不同的，我们必须作出上述假定吗？在那种情况下，伴随 a' 的感觉 a 与伴随 b' 的感觉 b 应该恒等，这说明所有这些感觉是通过同一纤维传达给我的。

无论如何，可以同意这个假设，尽管我可能更喜欢相当复杂的假设，但是可以肯定，我们通过某种方式被告知，在 $a+a'$ 和 $b+b'$ 这些感觉之间有某些共同之处，没有这一点，我们就会无法辨认对象B代替了对象A。

因此，我不再进一步坚持，我回想起我刚才作出的假设：我假定我已经查明，我归因于B的印象是在时刻 β 通过同一视觉及触觉纤维传达给我的，在时刻 α ，这些纤维把我归因于A的印象传达给我。如果情况确是如此，我们将毫不犹豫地断言，B在时刻 β 所占据的点恒等于A在时刻 α 所占据的点。

我刚刚阐明了这些点恒等的两个条件：一个与视力有关，另一个与接触有关。让我们分别考虑它们。第一个是必要的，但不是充分的。第二个同时是必要的和充分的。通晓几时学的人会用下述方式轻而易举地解释这一点：设O是视网膜上的一点，物体A在时刻 α 的图象在这里形成；设M是空间的一点，这个物体A在时刻 α 占据该点；设M'是物体B在时刻 β 所占据的空间的点。由于这

个物体B在O形成它的图象，因而没有必要使点M和M'重合；因为视力是超距作用的，只要三点OMM'在一条直线上就足够了。因此，两个对象在O形成它们的图象这一重合是必要的，但对点M和M'重合而言，却不是充分的。现在，设P是我的手指占据的点，而且手指依然留在那里，因为它没有移动。由于接触不是超距作用，所以若物体A在时刻 α 接触我的手指，正是因为M和P重合；若B在时刻 β 接触我的手指，正是因为M'和P重合。因而M和M'重合。这样一样，如果A在时刻 α 接触我的手指，则B在时刻 β 接触我的手指，这一重合对于M和M'重合而言同时是必要的和充分的。

但是，我们这些迄今还不了解几何学的人不能这样推理：我们能够作的一切就是通过实验弄清，与视力有关的第一个条件可以在没有与接触有关的第二个条件的情况下得到满足，但是若没有第一个条件，第二个条件则无法满足。

假定经验告诉我们相反的东西，这是完全应该的；这个假设没有包含荒谬的东西。因此，假定我们根据实验已经查明，与接触有关的重合可以在与视力有关的重合未被满足的情况下得到满足，相反地，与视力有关的重合在与接触有关的重合未被满足的情况下却不能得到满足。很清楚，倘若如此，我们就应该得出结论：接触能够超距地施加，而视力却不能超距地起作用。

但是，这并非一切；直到我假设确定对象的位置之时，我仅仅利用了我的眼睛和一个手指；可是，我同样也能够使用其他手段，例如使用我的所有其他手指。

我假定，我的第一个手指在时刻 α 接受到我归因于对象A的触觉印象。我作出对应于肌肉感觉系列S的一系列动作。在这些动作之后，在时刻 α' ，我的第二个手指接受到我同样归因于A的触觉印象。后来，正如我的肌肉感觉告诉我的，在时刻 β ，由于我

没有移动，这第二个手指把我此时归因于对象B的触觉印象传达给我；接着，我作出对应于肌肉感觉系列S'的一系列动作。我知道，这个系列S'与系列S相反，它对应于相反的动作。我知道，这是因为许多以前的经验向我表明，如果我相继作出两个对应于S和S'的动作系列，那么就可以重建原来的印象，换句话说，这两个系列相互补偿。在决定了这一切后，我能够期望在时刻 β' ，即当第二个动作系列结束时，我的第一个手指可以感觉到归因于对象B的触觉印象吗？

为了回答这个问题，已经通晓几何学的人会如下进行推理：在时刻 α 和 α' 之间，存在 α 着对象A不移动的可能性，在时刻 β 和 β' 之间，也存在着对象B不移动的可能性；他们采取了这一点。在时刻 α ，对象A占据了空间某一点M。现在，在这一时刻，它接触了我的第一个手指，因为接触不是超距离作用的，所以我的第一个手指同样也在M点。我后来作了动作系列S，在这个系列结束时，即在时刻 α' ，我确定对象A接触了我的第二个手指。我由此得出结论，这第二个手指当时在M，也就是说，动作S具有导致第二个手指代替第一个手指的效果。在时刻 β ，对象B接触到我的第二个手指：因为我没有移动，这第二个手指依然在M；因此对象B到达M；按照假设，直到时刻 β' ，它没有移动。但是，在时刻 β 和 β' 之间，我作了动作S'；因为这些动作与动作S相反，所以它们必然对导致第一个手指代替第二个手指有影响。因此，在时刻 β' ，这第一个手指将在M；因为对象B同样也在M，所以这个对象B将接触我的第一个手指。对于所提出的问题，因此应该作出肯定的回答。

我们这些迄今还不通晓几何学的人不能够这样推理；可是我们查明，这一预期通常总是实现着；我们总是能够用下面的说法

解释例外：对象A在时刻 α 和 α' 之间运动了，或对象B在时刻 β 和 β' 之间运动了。

但是，给定的相反结果不会经历到吗？这种相反的结果本身不会是荒谬的吗？显然不会。如果经验给出了这个相反的结果，那么我们应该作些什么呢？从而所有的几何学都会变得不可能吗？世界上绝没有这回事。我们自己应该满足于这个结论：**接触能够超距地进行。**

当我说，接触不超距地进行而视力超距地进行时，这个断言只有一个意义，这个意义如下所述：为了辨认B在时刻 β 是否占据A在时刻 α 占据的点，我能够使用大量不同的标准。或者我的眼睛介入，或者我的第一个手指介入，或者我的第二个手指介入等等；好了，为了其他一切标准能够被满足，与我的一个手指相关的标准被满足就充分了，但是与我的眼睛有关的标准能够被满足却并不充分。这就是我断言的意思，我满足于肯定通常已被证实的实验事实。

在上一章末尾，我们分析了视觉空间；我们看到，为了产生这种空间，有必要引入视网膜感觉、会聚感觉和调节感觉；如果后两种感觉并非总是一致的话，那么视觉空间会有四维，而不是三维；我们也看到，如果我们只引入视网膜感觉，我们会得到仅有二维的“纯粹视觉空间”。另一方面，考虑一下触觉空间，触觉空间把我们自己限制在单一手指的感觉范围内，简言之，即限制在这个手指能够占据的位置的集合内。这种触觉空间，我们将在下节进行分析，我请求允许我在一段时间内不去进一步考虑它，我说这种触觉空间有三维。为什么严格地所谓的空间的维数与触觉空间维数相同而比纯粹视觉空间多呢？这正是因为接触不能超距作用，而视力却可以超距作用。这两个断言具有相同的意义，

我们刚刚看到这意味着什么。

为了不中断讨论，我急急忙忙地越过了一点，现在我要返回到这点上。虽然A在时刻 α 和B在时刻 β 作用在我视网膜上的印象在质上是不同的，可是我怎么知道它们是通过同一视网膜纤维传达的呢？我已提出了一个简单的假设，同时还附加了其他的显然更为复杂的假设，这些附加的假设在我看来大概比较真实。在这里，还有我已经稍微提了一下的这些假设。如果红色对象A和蓝色对象B在视网膜的同一点上形成图象，我们怎么知道A在时刻 α 和B在时刻 β 产生的印象有某些共同之处呢？我们可以排除上面所作的简单假设，并且可以假定，这两个在质上相异的印象是通过两个不同的、尽管是邻近的神经纤维传达的。还有，我有什么手段知道这些神经纤维是邻近的呢？假如眼睛不可动，恐怕我们不会有什么手段。正是眼睛的移动告诉我们，在A点的蓝色感觉和在B点的蓝色感觉之间的关系与在A点的红色感觉和在B点的红色感觉之间的关系相同。事实上，它们向我们表明，对应于相同的肌肉感觉的相同动作，把我们从第一种印象带到第二种印象，或从第三种印象带到第四种印象。我没有强调这些想法，正如人们看到的，它们属于洛策(Lotze)所建立的局部符号的问题。

3. 触觉空间

这样一来，我们知道如何辨认两点，即A在时刻 α 所占据的点和B在时刻 β 所占据的点的恒等，可是只不过要凭借一个条件，也就是我在时刻 α 和 β 之间没有移动。对于我们的对象而言，这还不够。因此，设我以任何方式在这两个时刻之间的时间间隔内运动，我如何知道，A在时刻 α 所占据的点恒等于B在时刻 β 所占据

的点呢？我假定，在时刻 α ，对象A与我的第一个手指接触，在时刻 β ，对象B以同样的方式接触这第一个手指；但是在同一时间，我的肌肉感觉告诉我，在该时间间隔内我的身体运动了。我已考虑过两个肌肉感觉系列S和S'，我说过，有时我们可以把这样两个系列S和S'看作是彼此相反的，因为我们通常观察到，当这两个系列彼此相继发生时，我们原来的印象便重建起来。

另外，如果我的肌肉感觉告诉我，我在两个时刻 α 和 β 之间运动，可是却是如此运动，以致于我相继感觉到我认为是相反的两个肌肉感觉系列S和S'，那么我还将断定，仿佛我没移动一样，如果我查明我的第一个手指在时刻 α 接触A而在时刻 β 接触B，那么A在时刻 α 所占据的点和B在时刻 β 所占据的点是恒等的。

正如人们将要看到的，这个解答还不完全令人满意。事实上，让我们看一看，它会使我们赋予空间多少维。我希望比较A和B在时刻 α 和 β 所占据的两点，或者（这相当于同一件事，因为我假定，我的手指在时刻 α 接触A、在时刻 β 接触B）我希望比较我的手指在两个时刻 α 和 β 所占据的两个点。为了进行这种比较，我利用的唯一手段就是肌肉感觉系列 Σ ，该系列在这两个时刻之间伴随着我身体的动作。各种可以想象得到的系列 Σ 显然形成了维数很大的物理连续统。正如我已经作过的，当S和在上面给予这个代码的意义上彼此相反时，让我们一致不要认为两个系列 Σ 和 $\Sigma + S + S'$ 是截然不同的；不管这种一致，截然不同的系列 Σ 还将形成物理连续统，维数将变小，但依然是很大的。

空间的一个点对应于这些系列 Σ 中的每一个；两点M和M'从而对应于两个系列 Σ 和 Σ' 。直到目前我们使用的手段能够使我们辨认出M和M'在两种情况下并非截然不同：（1）如果 Σ 与 Σ' 恒等；（2）如果 $\Sigma' = \Sigma + S + S'$ ，S和S'是彼此相反的。倘若在所

有其他情况下我们应该把 M 和 M' 看作是截然不同的，那么点的流形的维数便与截然不同的系列 Σ 的集合相同，也就是说大于三维。

对于已经通晓几何学的人来说，下述解释也许容易理解。在可以想象得到的肌肉感觉系列中，存在着这样一些肌肉感觉系列，它们对应于手指未尝移动的动作系列。我要说，如果人们不把系列 Σ 和 $\Sigma + \sigma$ ——在这里，系列 σ 对应于手指未尝移动的动作——看作是截然不同的话，那么系列的集合将构成三维连续统，但是，如果人们认为两个系列 Σ 和 Σ' ——除非 $\Sigma' = \Sigma + S + S'$ ， S 和 S' 是相反的——是截然不同的，那么系列的集合将构成大于三维的连续统。

事实上，设在空间中有一个面 A ，在这个面上有一条线 B ，在这条线上有一点 M 。设 C_0 是所有系列 Σ 的集合。设 C_1 是在对应的动作结束时，手指在面 A 上的系列 Σ 的集合， C_2 或 C_3 是在对应的动作结束时，手指在线 B 上或点 M 上的系列 Σ 的集合。很清楚，首先 C_1 将构成分割 C_0 的截量， C_2 将构成分割 C_1 的截量， C_3 将构成分割 C_2 的截量。按照我们的定义，由此便导致，如果 C_3 是 n 维连续统， C_0 将是 $n+3$ 维物理连续统。

因此，设 Σ 和 $\Sigma' = \Sigma + \sigma$ 是形成 C_3 一部分的两个系列；对于二者而言，在动作结束时，手指在 M 处；由此导致，在系列 σ 开始和终结时，手指在同一点 M 。因此，这个系列 σ 是对应于手指未尝移动的那些动作中的一个动作。假使 Σ 和 $\Sigma + \sigma$ 被视为截然不同的， C_3 的所有系列将混成一个系列；因此 C_3 将有 n 维，而 C_0 将有三维，正如我希望证明的那样。相反地，假使我不认为 Σ 和 $\Sigma + \sigma$ 混成一体（除非 $\sigma = S + S'$ ， S 和 S' 是相反的），那么很清楚， C_3 将包含大量的截然不同的感觉的系列；因为手指若不移动，身体

就可以采取许多不同的姿势。于是， C_s 将形成连续统， C_o 将大于三维，这也是我希望证明的。

我们这些还不通晓几何学的人不能用这种方式推理；我们只能证实。但是，接着产生了一个问题：在通晓几何学之前，我们怎么可以把这些手指未尝移动的系列 σ 与其他系列区分开来呢？事实上，只有在作出这种区分后，我们才能认为 Σ 和 $\Sigma + \sigma$ 是恒等的，而且正如我们刚才看到的，唯有在这一条件的基础上，我们才能够得到三维空间。

我们可以区分系列 σ ，因为常常发生这样的情况：当我们进行对应于这些肌肉感觉系列 σ 的动作时，通过我称之为第一个手指的神经传送给我们的触觉存留着，不因这些动作而变化。唯有经验告诉我们，而且唯有经验才能够给我们这一切。

如果我们已经区分了由两个相反系列的结合而形成的肌肉感觉系列 $S + S'$ ，那正是因为它们保持着我们印象的总数；如果我现在区分系列 σ ，正是因为它们使我们的印象保持一定。（当我说，肌肉感觉系列 S “保持着”我们一个印象 A 时，我意指我们要弄清楚，我们是否感觉到印象 A ，接着感觉到肌肉感觉 S ，我们是否还感觉到在这些感觉 S 之后的印象 A 。）

我在上面已说过，经常发生系列 σ 不改变我们的第一个手指感知到的触觉印象的情况；我经常这样说，但并非总是这样说。当我说，在与这个手指接触的对象 A 也不运动的条件下，如果该手指不运动，那么触觉印象便不会改变时，这就是我用我们的日常语言所描述的东西。在通晓几何学之前，我无法作出这种解释；我能作的一切就是弄清楚，这个印象经常存留着，但并非总是存留着。

然而，经常继续的印象足以使系列 σ 显著地呈现在我们面前的

前，导致我们把系列 Σ 和 $\Sigma + \sigma$ 归入同一类，因此不能认为它们是截然不同的。在这些条件下，我们看到，它们将产生三维的物理连续统。

接着看看我的第一个手指产生的三维空间。我的每一个手指将产生与之同类的空间。依然要考虑，我们怎么可以认为它们与视觉空间恒等——与几何学空间恒等。

但是，在进一步论述之前有一个考虑：照前所述，我们知道空间的点，或者更一般地说，知道我们身体的最终位置，只有通过肌肉感觉系列，才向我们揭示出把我们从某一初始位置带到这个最终位置的动作。然而，很清楚，这个最终位置一方面将取决于这些动作，另一方面将取决于我们出发的初始位置。现在，这些动作被我们的肌肉感觉揭示给我们；可是无法告诉我们初始位置；我们无法把它与所有其他可能的位置区分开来。显然，这明确地提出了空间的本质的相对性。

4. 各种空间的恒等

因此，我们可以把两个连续统 C 和 C' 加以比较，例如，一个是由我的第一个手指 D 产生的，另一个是由我的第二个手指 D' 产生的。这两个物理连续统均有三维。把我从某一初始位置带到某一最终位置^①的肌肉感觉系列对应于连续统 C 的每一个元素，或者如果你乐意的话，也可以说对应于第一触觉空间的每一点。而且，如果 σ 是我们所知道的不使手指 D 运动的系列，那么第一触觉空间的同一点将对应于 Σ 和 $\Sigma + \sigma$ 。

① 我们不说使空间参照于与我们的身体不变地结合在一起的坐标系，为了与前述的东西一致，也许最好说我们使空间参照于与我们身体的初始位置不变地结合在一起的坐标系。

类似地，感觉系列 Σ' 对应于连续统 C' 的每一个元素，或对应于第二触觉空间的每一点，如果 σ' 是不使手指 D' 运动的系列，那么同一点将对应于 Σ' 和 $\Sigma' + \sigma'$ 。

使我们把标记为 σ 的各种系列与称之为 σ' 的各种系列区别开来的方法是：前者不改变手指 D 感觉到的触觉印象，后者保持手指 D' 感觉到的触觉印象。

现在看一看我们查明了什么：在开始，我的手指 D' 感知到感觉 A' ；我作出产生肌肉感觉 S 的动作；我的手指 D 感觉到印象 A ；我作出产生感觉系列 σ 的动作；我的手指 D 继续感觉到印象 A ，因为这是系列 σ 的独特性质；我然后作出产生肌肉感觉系列 S' 的动作， S' 在上面给予这个记号的意义上与 S 相反。于是我确定，我的手指 D' 重新感觉到印象 A' 。（当然，这要理解为适当地选择 S_0 。）

这意味着，保持手指 D' 的触觉印象的系列 $S + \sigma + S'$ 是我称之为 σ' 的系列中的一个。相反地，如果人们采取任何系列 σ' ，那么 $S' + \sigma' + S$ 将是我称之为 σ 的系列中的一个。

从而，若适当地选择 S ，则 $S + \sigma + S'$ 将是系列 σ' ，使 σ 以所有可能的方式变化，我们将得到所有可能的系列 S' 。

由于我们还不通晓几何学，我们自己仅局限于证实那一切，但是在这里，问题在于通晓几何学的人应该怎样解释事实。在开始，我的手指 D' 在点 M 与对象 a 接触，这使手指感觉到印象 A' 。我作出对应于系列 S 的动作；我已经说过，这个系列应该适当地选择，我愿这样作出这一选择，以便这些动作把手指 D 带到手指 D' 原来所占据的点，也就是说带到点 M ；这个手指 D 从而将与对象 a 接触，这将使手指感觉到印象 A 。

接着，我作出对应于系列 σ 的动作；在这些动作中，根据假

设；手指D的位置没有改变，这个手指因而依然与对象a接触，并继续感觉到印象A。最后，我作出对应于系列S'的动作。当S'与S相反时，这些动作把手指D'带到手指D原先所占据的点，即带到点M。正如可以假定的那样，若对象a不移动，这个手指D'将与这个对象接触，并将重新感觉到印象A'……证毕。

让我们看看结果吧。我考虑一个肌肉感觉系列 Σ 。第一触觉空间的一个点将对应于这个系列。现在，再选取两个我刚才谈到的彼此相反的系列S和S'。第二触觉空间的一点N将对应于系列 $S + \Sigma + S'$ ，因为正如我们说过的，在第一空间或第二空间的点对应于任何肌肉感觉系列。

我将考虑如此定义的两个点N和M，它们可以视为对应的。什么东西授权我这样作呢？要使这个对应是可以接受的，其必要条件是，如果在第一空间对应于两个系列 Σ 和 Σ' 的两点M和M'是恒等的，第二个空间的两个对应点N和N'同样也是如此，那么这两点对应于两个系列 $S + \Sigma + S'$ 和 $S + \Sigma' + S'$ 。现在，我们要看看，这个定义会被满足。

首先要注意的一点是：因为S和S'是彼此相反的，我们便有 $S + S' = 0$ ，从而 $S + S' + \Sigma = \Sigma + S + S' = \Sigma$ ，或者还有 $\Sigma + S + S' + \Sigma' = \Sigma + \Sigma'$ ；但是，由此不能得出我们有 $S + \Sigma + S' = \Sigma$ 的结论；这是因为，尽管我们用加号表示我们感觉的相继发生，可是很清楚，这个相继发生的次序并非没有差别：因此，我们不能象在通常加法中那样颠倒各项的次序；简而言之，我们的运算是结合的，而不是交换的。

这样确定之后，为了 Σ 和 Σ' 可以对应于第一空间同一点 $M = M'$ ，其充要条件是我们有 $\Sigma' = \Sigma + \sigma$ 。于是我们将有 $S + \Sigma' + S' = S + \Sigma + \sigma + S' = S + \Sigma + S' + S + \sigma + S'$ 。

可是，我们刚刚确定， $S + \sigma + S'$ 是系列 σ' 中的一个。从而我们将有 $S + \Sigma' + S' = S + \Sigma + S' + \sigma'$ ，这意味着系列 $S + \Sigma' + S'$ 和 $S + \Sigma + S'$ 对应于第二空间的同一点 $N = N'$ 。证毕。

因此，我们两个空间一一对应；它们能够相互“交换”；它们是同构的。我们如何被引导得出它们是恒等的结论呢？

考虑两个系列 σ 和 $S + \sigma + S' = \sigma'$ 。我经常说，但并非总是说，系列 σ 保持着手指D感知到的触觉印象A；同样地，经常发生这种情况，但并非总是发生，系列 σ' 保持着手指D'感知到的触觉印象A'。现在我确定，**十分经常地**（也就是说，比我刚才所说的“经常”更为经常）发生下述情况：当系列 σ 保持手指D的印象A时，系列 σ' 同时保持手指D'的印象A'；相反地，如果第一个印象改变了，则第二个印象也同样改变。这**十分经常地**发生着，但并非总是发生。

我们说，把印象A给予手指D的未知对象a是与把印象A'给予手指D'的未知对象a'恒等的，以此解释上述经验事实。实际上，当第一个对象运动——这是印象A的消失告诉我们的——时，第二个对象也同样运动，因为印象A'同样也消失。当第一个对象依然不动时，第二个对象也依然不动。倘若这两个对象恒等，当第一个对象在第一个空间的M点，第二个对象在第二个空间的N点时，那么这两点也恒等。这就是我们怎样被导致认为这两个空间是等价的；或者更恰当地讲，当我们说它们是恒等的时候，我们意味着什么。

我们刚才就两个触觉空间的恒等所说的一切，使得讨论触觉空间和视觉空间恒等的问题变得毫无必要，该问题能够用同样的方式去处理。

5. 空间和经验主义

情况似乎是，我正准备得出与经验主义观念一致的结论。事实上，我试图明显地提出经验的作用，并分析介入三维空间起源中的经验事实。可是，这些事实的重要性无论怎样，总是存在着一个不应该忘记的事情，而且我曾不止一次地注意到它。这些经验事实经常被证实，但并非总是被证实。这显然不意味着，空间经常有三维但并非总是有三维。

我完全知道，人们要拯救自己是很容易的，如果事实未被证实，他们会轻而易举地解释道，外部对象运动了。如果经验接着出现，我们说它教导我们以空间；如果经验没有接着发生，我们赶紧责怪外部对象运动了；换句话说，如果经验没有接着发生，经验就要受到轻击。

这些轻击是合理的；我没有拒绝承认它们；可是，它们足以告诉我们，空间的特性不是严格地所谓的经验真理。如果我们通过给予其他类似的轻击，希望证实其他规律，我们也会获得成功。我们并非总是能够根据同样的理由证实这些轻击吗？人们至多会对我们说：“你们的轻击无疑是合理的，可是你们滥用它们；为什么外部对象如此经常地运动呢？”

总而言之，经验并没有向我们证明空间有三维；它只是向我们证明，把三维赋予空间是方便的，因为这样一来，轻击的数目便被简化为最小。

我愿附加几句话，经验促使我们仅仅与作为物理连续统的表象空间联系，它从来也没有促使我们与作为数学连续统的几何空间联系。经验最大限度似乎只能告诉我们，给予几何空间以二维是方便的，以致它可以有表象空间那么多的维数。

经验问题可以在另一种形式下提出来。例如，在三维空间之外设想物理现象、力学现象是不可能的吗？我们从而应该有客观的实验证据，也可以说，应该有独立于我们生理学的、独立于我们表示方式的实验证据。

但是，事情并非如此；我在这里不想全面地讨论这个问题，我将仅限于回忆赫兹(Hertz)力学给予我们的引人注目的例子。你知道，大物理学家并不相信严格地所谓的力的存在；他假定，可见的质点隶属于把它们与其他不可见的质点连接起来的某些不可见的结合物，我们归之于力的东西就是这些不可见的结合物的作用。

可是，这只是他的思想的一部分。假设由 n 个质点形成的系统是可见的或不可见的；这总共将给出 $3n$ 个坐标；让我们把这些坐标视为 $3n$ 维空间中的单一质点的坐标。这个单一质点凭借我刚刚讲过的结合物被强制在一个曲面(任何小于 $3n$ 的维数)上；它在这个面上从一点到另一点，总是会采取最短的路径；这恐怕是概括整个力学的唯一的原理。

关于这个假设，人们也许会作出无论什么样的设想，我们或者被它的简单性所诱惑，或者因它的人为特征而厌恶，赫兹能够想象的、并认为它比我们习用的假设更为方便的简单事实足以证明，我们通常的观念，尤其是空间的三维性丝毫也没有以一种无形的力量强加于力学。

6. 精神和空间

因此，经验只不过起了唯一的作用，它作为机会而有用。可是，这种作用并非不怎么十分重要；我认为，必须给予它以重要性。假如存在强加于我们感觉的先验的形式，而且这就是三维空

间，那么这种作用便毫无用处。

这种形式存在吗？或者，倘若你乐意的话，我们能够想象大于三维的空间吗？首先，这个问题意味着什么呢？很清楚，在该词的真正意义上，我们无法想象四维空间或三维空间；我们首先不能把它们想象成空虚的，而且我们既不能想象在四维空间中的对象，也不能想象在三维空间中的对象：（1）因为这两种空间都是无限的，我们无法想象在空间之中的图形，也就是说，若未描述整体，我们无法想象在整体之中的部分，由于整体是无限的，要描述它是不可能的；（2）因为这两种空间是数学连续统，我们只能想象物理连续统；（3）因为这两种空间是均匀的，我们容纳我们的感觉的、有限的框架不可能是均匀的。

这样一来，所提出的问题仅能用一种方式来理解：我们可以设想，当上述经验的结果不同时，我们必然被导致把三维以上赋予空间吗？例如，可以设想眼睛的调节感觉没有必要永恒地与眼睛的会聚感觉一致吗？或者，我们在§2已经讲到经验，我们用“接触并非超距作用”的说法表达经验的结果，这些经验必然导致我们得出一个相反的结论吗？

可是，说真的，这显然是可能的；从人们想到经验的时刻起，恰恰就在那里想象经验可能给予的两种相反的结果。这是可能的，但并不是充分的，因为我们不得不推翻许多联想，而这些联想却是个人长期的经验和人类更为久远的经验的成果。正是这些联想（或者至少是我们从我们祖先那里继承下来的那一部分联想），构成这种先验的形式（我们就此说过，我们有纯粹直觉）吗？不过，我的确没有看到人们应该宣称它无法分析以及应该使我摒弃研究它的起源和权利之理由。

当说到我们的感觉被“延长”时，这只能意味着，使我们能够

达到引起感觉的对象的动作，换句话说，使我们能够防御该对象的动作与我们的某些肌肉感觉相对应，人们总是把我们的感觉和我们的某些肌肉感觉联想在一起。其原因恰恰在于，这种联想对于生物体的防卫来说是有用的，这在物种的历史上是如此古老，以致在我们看来，它似乎是坚不可摧的。无论如何，它只不过是联想而已，我们能够设想，它可以被破坏；这样一来，我们不可说，若感觉不进入空间，它便不能进入意识，可是事实上，感觉在未进入空间，即未卷入这种联想的情况下，是不会进入意识的。

我不再能理解人们的下述说法：时间观念在逻辑上是继空间之后出现的，因为我们只有在形成直线的条件下才能够想象时间；以及时间在逻辑上是继垦荒种植之后出现的，因为时间通常被描述为手持镰刀之神。人们无法同时想象时间的不同部分，不用说，这是因为，这些部分的基本特征严格地讲来不是同时的。这并不意味着我们没有时间的直觉。照此看来，我们也不会有空间的直觉，因为我已经提到的理由，我们无法在该词的恰当的意义上描述它。我以直线的名义想象的东西是一种粗糙的图象，它不象几何直线，就如同它不象时间本身一样。

为什么说把第四维赋予空间的每一个尝试总是把这一维回归到其他三维之一呢？这是很容易理解的。考虑一下我们的肌肉感觉和它们可能形成的“系列”。由于大量的经验，这些系列的观念以十分复杂的基本材料联系在一起，我们的系列被分类。为了语言上的方便，请允许我用完全粗糙的、甚至不精确的方式来描述我的思想；我们的肌肉感觉系列分为对应于空间三维的三类。当然，这种分类更为复杂，但它足以使我的推理变得可以理解。如果我希望设想第四维，我可以假定构成第四类一部分的另一个肌

肉感觉系列。可是，因为我的**所有**肌肉感觉已被纳入三个预先存在的类之一，所以我只能想象属于这三类之一的系列，以致我的第四维被回归到其他三维之一。

这证明了什么呢？这证明，也许有必要摧毁旧的分类，并用新的分类代替它，在新分类中，肌肉感觉系列应该分为四类。困难也许消失了。

有时，它以引人注目的形式被提出来。假定我被禁锢在由四个墙壁、地板和天花板形成的六个不可逾越的界面内的房间中；我不可能走出去，也不可能想象会走出去。对不起，你不能设想门打开了或者两个墙壁分开了吗？可是，不用说，你回答道，人们必须假定这些墙壁依然不动；而且，我假定完全处于静止的墙壁将相对于我运动。是的，然而这样的相对运动不能是任意的；当对象静止时，它们相对于任何坐标系的相对运动是刚体运动；现在，你所设想的表观运动不符合刚体运动定律。是的，可是正是经验教导我们以刚体运动定律；没有什么东西妨碍我们**设想**这些定律是不同的。总而言之，我设想我走出了禁闭室，我只是设想，当我运动时，墙壁似乎裂开了。

因此，我相信，即使空间被理解为三维数学连续统，尽管它是无定形的，构造它的也是精神，可是精神并未用不存在的东西来构造它；精神需要材料和模型。这些材料象这些模型一样，预先存在于精神内。然而，没有强加于精神的唯一模型；精神作了**选择**；精神可以选择，例如可以在四维空间和三维空间之间作出选择。此时，经验的作用是什么呢？它给出进行选择所遵循的指示。

另一个问题是：空间由何处得到它的量的特征呢？它来自肌肉感觉系列在空间起源中所起的作用。这些是**可以自身重复**的系

列，数就是从它们的重复中产生出来的；正因为它们本身能够无限地重复，所以空间是无限的。最后，我们在第3节的末尾已经看到，正是因为这一点，空间才是相对的。同样也是重复，赋予空间以基本特征；现在，重复要以时间为先决条件，这足以说明，时间从逻辑上讲在空间之前。

7. 半规管的作用

迄今，我没有谈到生理学家有理由赋予重要意义的某些器官的作用，我指的是半规管*。大量的实验充分地表明，这些管道对于我们的定向感觉来说是必不可少的；可是，生理学家不完全一致；两种相反的理论提了出来其一是马什-德拉热(Mach-De-lage)的理论，其二是德·西翁(de Cyon)先生的理论。

德·西翁先生是一位生理学家，他因心脏的神经分布的重要发现而遐迩闻名；不过，我不能赞同他关于摆在我们面前的这个问题的看法。由于我不是生理学家，所以我小心翼翼地批评他与马什-德拉热的理论针锋相对的实验；无论如何，在我看来，这些实验不是令人信服的，因为在许多实验中，一个半规管中的总压力引起变化，而在生理学上，变化的却是该管道两端上的压力差；在其他实验中，该器官易受严重的损害，这必然改变它们的机能。

而且，这还不算是重要的；假如实验是无可指责的，它们与旧理论相比必定是可信的。就新理论而言，它们不会是可信的。事实上，如果我正确地理解了该理论，通过我的解释，足以使人们认识到，确信实验证实了理论是不可能的。

* 半规管(the semicircular canal)是耳中的一种骨管。——译者注

三对半规管作为唯一的机能，能够告诉我们空间有三维。日本的鼯鼠只有两对半规管；它们也许自信空间只有二维，它们以最奇怪的方式显示出这种看法；它们各自把鼻子放到前一个的尾巴下，排列成圆圈，只要这样排好后，它们就急速地旋转。八目鳗只有一对半规管，它们认为空间只有一维，可是它们的表现不怎么狂乱。

显而易见，这样的理论是不可接受的。感觉器官被指派告诉我们在外部世界所发生的**变化**。我感到不可理解的是，造物主为什么给我们以感官，这些感官注定无休止地大叫大嚷：记住空间有三维，因为这三维的数目不易受到变化。

因此，我们必须返回到马什-德拉热先生的理论。半规管神经所能告诉我们的是该管道两端的压力差，由此可知：（1）垂直于与头部牢固地结合在一起的三个坐标轴的方向；（2）头的重心平移加速度的三个分量；（3）头转动所引起的离心力；（4）头转动的加速度。

从马什-德拉热先生的实验可得，最后这个指标是最重要的；毫无疑问，因为半规管神经对压力差本身没有对压力差的急剧变化敏感。前三个指标从而可以忽略。

知道头在每一时刻的转动加速度，我们通过无意识的整合作用，由此推断头关于作为原点的某一初始取向而言的最终取向。因此，环形半规管有助于向我们告知我们已经进行的动作，而且是按照与肌肉感觉相同的根据告知我们的。所以，当我们在上面谈到系列S或系列 Σ 时，我们应该说，这些不仅仅是肌肉感觉系列，而且它们又是肌肉感觉系列和由半规管引起的感觉的系列。除了这句附言外，在前面所述的东西中，我们不会有什么改变。

在系列S和 Σ 中，半规管的这些感觉显然占据着十分重要的

地位。可是，仅有它们还不够，因为它们只能告诉我们头的移动；它们没有告诉我们身体的相对移动或身体的其他器官相对于头的移动。而且，它们似乎只告诉我们头的转动，而没有告诉头可能经受的平移。

第二编 物理科学

第五章 解析和物理学

I

你无疑常常被询问，数学有什么用处，这些完全是头脑所产生的精致结构不是人为的吗，不是出自我们的任性吗？

在提出这个问题的那些人当中，我应该作出区分；只求实用的人要求我们的无非是生财之道。这些是非曲直无须作答；相反地，可以恰当地询问他们，骤敛如此之多的财富有什么用处呢，而且为赚钱逐利而耗费时日，我们不得不把唯一能使我们获得精神享受的艺术和科学置之脑后，这岂不是“为生活而牺牲生存的全部理由”吗？

此外，仅以应用为目的科学是不可能有的；真理只有结合在一起才是丰富的。如果我们仅仅使自己囿于期望从中得到直接结果的真理，那就会失去中间环节而不再成为一体。

最藐视理论的人，他们天天吃理论的食粮而不自知。倘若失去这种食粮，进步会立即中止，我们将会象古老的中国那样，不久便会停滞不前。

够了，别说顽固不化的实用者了！此外，还有这样一些人，他们仅对自然兴味盎然，他们询问我们，我们是否能使他们更彻

底地认识自然。

要答复这些人，我只须向他们指出两座已经粗凿而成的纪念碑：天体力学和数学物理学。

他们无疑应该承认，这些建筑物是很有价值的，它们没有给我们添麻烦。可是，这还不够。数学有三个目的。它必定提供了一种研究自然的工具。但这并非一切：它具有哲学的目的，我敢坚持，它还具有美学的目的。它必定能帮助哲学家揣摩数、空间、时间的概念。尤其是，数学行家能由此获得类似于绘画和音乐所给予的乐趣。他们赞美数和形的微妙和谐；当新发现向他们打开了意想不到的视野时，他们惊叹不已；他们感到美的特征，尽管感官没有参与，他们难道不乐在其中吗？只有少数有特权的人才充分享受其中的乐趣，这是真的，对所有最杰出的艺术家来说，情况难道不也是这样吗？

这就是为什么我毫不犹豫地说，为数学而数学是值得的，为不能应用于物理学以及其他科学而研究数学是值得的。即使物理学的目的和美学的目的不统一，我们也不应该牺牲两者中的任何一个。

可是另外还有：这两个目的是不可分割的，得到其一的最好办法是对准另一个，或者至少从来也不丧失对于它的洞察。这就是我在陈述纯粹科学及其应用之间的关系的本性时正准备试图证明的东西。

对物理学家来说，数学家不应当仅仅是公式的提供者；在他们之间应该有更密切的协作。数学物理学和纯粹解析不仅仅是维持睦邻关系的两大强国；它们互通有无，它们的精神是相同的。当我指出物理学从数学得到什么和数学反过来从物理学借用什么时，这一切将会了如指掌。

II

物理学家不能要求解析向他揭示新的真理；解析最大限度只能帮助他预见真理。长期以来，人们依旧梦想排斥实验，或梦想依靠某些不成熟的假设构造整个世界。一个时期之前人们为之自鸣得意的那一切建筑物，今天留下的只不过是它们的废墟而已。

因此，一切定律都是从实验推出；但是要阐明这些定律，则需要有专门的语言；日常语言太贫乏了，而且太模糊了，不能表示如此微妙、如此丰富、如此精确的关系。

从而，这是物理学家不能够没有数学的一个理由；数学为他提供了他能够进行表述的唯一语言。精妙的语言不是无关紧要的东西；仅就物理学而言，发明**热**这个词的无名氏使多代人陷入错误之中。热被当作实物来看待，只是因为它被一种独立存在的实体所标示，而且人们认为热是不可消灭的。

另一方面，发明**电**这个词的人却交了不应有的好运，无保留地把电守恒这个新定律给予物理学，由于纯粹的机遇，这个定律被认为是正确无误的，至少直到目前是这样。

好吧，继续作比喻吧，舞文弄墨的作家，他们把语言视为艺术的对象，同时把它当作更为得心应手的工具，当作更善于表达思想的细微差别的工具。

接着，我们了解到，正是凭借此，以追求纯粹美为目的的解析家有助于创造一种使物理学家更为心满意足的语言。

可是这并非一切：定律虽然出自实验，但是并非直接而来。实验是个别的，而由它推出的定律却是普遍的；实验仅仅是近似的，而定律则是精确的，或者至少自称是精确的。实验总是在复杂的条件下完成的，而定律的表述则消除了这些复杂性。这就是

所谓的“矫正系统误差”。

一句话，为了从实验得到定律，就必须加以推广；这就是强加在最为小心谨慎的观察者身上的必然性。但是如何推广呢？每一个特殊真理显然都可以用无限的方式加以扩展，必须在我们面前铺开的不计其数的道路中作出选择，至少应该作出临时性的选择；在这种选择中，什么将引导我们呢？

这只能是类比。但是，这个词是多么模糊啊！原始人仅仅知道粗糙的类比，这是些给感官以印象的类比，颜色或声音的类比。他从来也不可能梦想到光与辐射热相类似。

是什么东西教导我们认出这些眼睛看不到而理性却能推测的、真正的和深奥的类似呢？

这就是轻内容而重纯粹形式的数学精神。正是数学精神，教导我们把相同的名称给予仅在材料方面有差别的事物，例如用同一名称称呼四元数的乘法和整数的乘法。

如果我刚才讲过的四元数未被英国物理学家如此果断地加以利用，许多人无疑认为它们只不过是无用的空想，可是在教导我们比较外观毫不相干的事物的过程中，它们已促使我们更巧妙地洞察自然的秘密。

这就是物理学家应该期望解析所作的帮助；但是要使解析能够提供帮助，就必须以最广泛的方式研究这门科学，而不能期待直接的效用——数学家必须象艺术家那样去工作。

我们要求数学家帮助我们在我们面前设立的迷宫中辨认、识别我们的道路。现在，数学家站得最高，看得最远。例子不胜枚举，我仅限于举最有名的。

第一个例子将向我们表明，改变语言如何足以揭示以前意想不到的普遍性。

当牛顿定律代替开普勒定律时，我们还只是知道椭圆运动。现在，就这一运动而论，两个定律仅仅在形式上不同；我们运用简单的微分法就可把一个定律变为另一个定律。可是，从牛顿定律出发，通过直接推广，就可以推导出摄动的所有结果和整个天体力学。另一方面，如果固守开普勒的表述，永远也不会有人把摄动行星的轨道看作是椭圆的自然推广，因为这些轨道是很复杂的曲线，从来也没有人写出曲线的方程。这样一来，观察的进步只会用来制造更多的混乱。

第二个例子同样值得考虑。

当麦克斯韦(Maxwell)开始他的研究时，被公认的电动力学定律直到他所处的时代能说明所有已知的事实。得以使它们无效的不是新实验。然而，麦克斯韦独具慧眼，他在考察它们时看到，电动力学方程只要附加一项，就变得比较对称，而且这一项极为微小，与旧方法相比，它不会产生可觉察的影响。

你知道，麦克斯韦的先验观点等了二十年才得到实验证实；或者，你如果乐意的话，也可以说麦克斯韦早在实验之前二十年就有先见之明。这一成就是怎样获得的呢？

这是因为麦克斯韦深深地沉浸在数学对称性的感觉之中；如果其他人在他之前没有为对称性本身之美而研究对称性，他能够大功告成吗？

正因为麦克斯韦习惯“用矢量思考”，可是矢量引入解析却是通过虚数理论。发明虚数的人几乎没有猜想到为研究现实世界能从虚数得到什么好处，他们给虚数取的名字就是充足的证据。

总而言之，麦克斯韦恐怕不是一位能干的解析家，不过这种能力对他来说可能只是无用的、讨厌的思想包袱。另一方面，他在最大程度上具有数学类比的内在感觉。因此，他在数学物理学

上成就卓著。

麦克斯韦的例子还告诉我们另外的事实。

应该如何看待数学物理学的方程呢？我们可以只推导一切结果并把它们视为不可捉摸的实在吗？远非如此：它们尤其应当告诉我们，能够改变什么，应该改变什么。只有这样，我们才能由它们得到某些有用的东西。

第三个例子向我们表明，我们如何可以察觉在物理学上既无表观关系、亦无真实关系的现象之间的数学类比，结果这些现象之一的规律有助于我们推测另一个现象的规律。

十分相同的方程，如拉普拉斯(Laplace)方程，在牛顿引力理论、液体运动理论、电势理论、磁理论、热传播理论以及其他许多理论中都遇到了。其结果是什么呢？这些理论似乎是相互复制出来的图画；它们相得益彰，彼此借用语言；试问一下电学家，由于受到流体动力学和热理论的启发，他们发明了力流(flow of force)这个术语，他们是否不为他们的作法而自我庆幸。

从而，数学类比不仅可以使我们预见物理类比，而且即使物理类比失败了，数学类比依然是有用的。

总之，数学物理学的目的不仅仅便于物理学家进行某些常数的数值计算或某些微分方程的积分。此外，它尤其能使物理学家揭示出事物的隐藏的和諧，使其以新的方式看待事物。

在解析的所有部分中，可以说，提得最高的、最纯粹的部分，在那些知道如何利用它们的人的手中，将是最富有成果的部分。

III

现在让我们看看，解析受赐于物理学。

想不到认识自然的欲望对于数学的发展具有最持久、最有效

的影响，就必然会完全忘记科学的历史。

首先，物理学家向我们提出问题，期望我们解决它们。可是，在向我们提出问题时，物理学家为此预付了大量报酬，如果我们解决了问题，我们便报答了他。

如果我可以被容许继续与优秀的艺术家比较的话，那么忘记外部世界存在的纯粹数学家也许就象这样一个画家：他知道如何把色和形协调地组合起来，但却缺乏模特儿。他的创造力不久便会枯竭。

数字和符号可以形成的组合无限多。在这么多的组合中，我们将怎样选择那些值得引起我们注意的组合呢？我们将让我们自己仅仅受到任性的引导吗？而且，这种任性本身不胜其烦，无疑会使人与人相殊，我们很快就会互不理解。

然而，这只是该问题无关紧要的一面。毫无疑问，物理学将防止我们彷徨歧路，而且也将保护我们免除令人可畏的危险；物理学将防止我们在同一个圈子里不停地团团转。

历史证明，物理学不仅促使我们在一大堆流行的问题中作出选择；而且它也迫使我们研究那些若无物理学我们永远也梦想不到的问题。不管怎样，虽然人的想象可以变化，但是自然的变化更加丰富多采。为了追求她，我们必须选取我们忽视了的道路，这些路线往往能把我们引向绝顶，我们从那里将会发现新的疆域。物理学多么有用啊！

运用数字符号就象运用物理实在一样；正是在比较事物的不同方面的过程中，我们能够领悟它们的内部和谐，唯有这种内部和谐才是美的，从而值得我们努力追求。

我要引证的第一个例子太古老了，我们很自然地遗忘了它；不过，它却是最重要的。

数学思维的唯一对象是整数。正是外部世界把连续统给予我们，我们无疑发明了连续统，但却是外部世界强使我们发明的。没有外部世界，就不会有微积分；整个数学科学便会归并为算术或置换理论。

相反地，我们几乎把我们的所有时间和我们的全部精力投入连续统的研究。谁会为此而懊悔不已呢？谁会认为这些时间和精力付之东流了呢？解析在我们面前展现了算术从未预料到的无限视野；它让我们一览宏伟的集合物，这些集合物的排列是简单的、对称的；相反地，在数论中盛行的是没有预见性的观点，也可以说是每走一步都要停下来的观点。

毫无疑问，有人会说，在整数之外没有严格性，从而没有数学真理；整数到处隐藏着，我们必须全力揭开掩盖它的明显的屏幕，即便这样做，我们也必然要陷入没完没了的反复。但愿我们不是这样的力求语言纯正的人，让我们感谢连续统吧，纵令一切都出自整数，可是唯有连续统才能够创造出从那里出发的如此之多的东西。

埃尔米特先生把连续变量引入数论，获得了令人惊叹的成果，我还需要回忆这件事吗？这样，整数独有的领域被侵犯，这一侵犯在无序统治的地方建立起有序。

看看我们归功于连续统，从而归功于物理性质的东西吧。

傅里叶(Fourier)级数是不断被使用的精密分析工具，正是用这种手段，才能描述非连续函数；为了解决与热传播有关的物理学问题，傅里叶发明了它。当然，如果这个问题未被提出，我们也许永远也不敢承认非连续性；我们还会长期地把连续函数视为唯一真实的函数。

函数概念由此被显著地推广了，并经一些逻辑解析家之手获

得了意想不到的发展。这些解析家便这样冒险闯入最纯粹的抽象统治的领域，并且尽可能地远离了真实的世界。然而，正是物理学问题，给他们提供了机会。

继傅里叶级数之后，其他类似的级数也进入解析领域；它们是通过同一大门而进入的；它们是考虑到应用而被设想出来的。

二阶偏微分方程理论有类似的历史。它主要是借助物理学和为了物理学而得以发展的。然而，它可以采取许多形式，因为这样的方程不足以确定未知函数，必须使称之为极值条件的互补条件与之伴随；由此产生了许多不同的问题。

假如解析家沉湎于他们的自然倾向，那么他们永远也不知道除一之外的东西，科瓦列夫斯基夫人(Madame Kovalevski)在她的著名论述中处理了这个问题。可是，还有许多其他可能会忽视的东西。物理学、电、热的每一个理论都在新的方面向我们描述这些方程。因此，可以说，没有这些理论，我们便不会知道偏微分方程。

不需要添加例子了。我足以能够得出结论：当物理学家请求我们解决问题时，这不是他们加在我们身上的麻烦，相反地，我们应该感谢他们的功劳。

IV

可是，问题并未到此而止；物理学不仅给我们提供解决问题的机会；而且它帮助我们找到解决问题的方法，为此有两种途径。它使我们预见答案；它以论据启迪我们。

我已在上面谈过拉普拉斯方程，在许多不同的物理学理论中都会遇到它。在几何学中，在保角表示理论和纯粹解析中，在虚数理论中，也可以再次发现它。

在这方面，在研究复变函数时，解析家发现许多物理图象，象他作为通常工具的几何学图形一样，他可以同样成功地使用这些物理图象。多亏这些图象，他才能对仅仅相继向他显示出来的纯粹演绎一目了然。这样，他把解的孤立成分聚集起来，在能够证明之前，他凭借直觉进行推测。

在证明之前推测！我需要回忆那些如此作出的重要发现吗？物理类比容许我们提出的、我们无法用严格推理确立的真理是何其之多！

例如，数学物理学采用大量的级数展开。没有什么怀疑这些展开收敛；但是缺乏数学确实性。对于继我们之后而来的研究者来说，这些展开确信可以被征服。

另一方面，物理学不仅向我们提供解答；另外，它也在某种程度上向我们提供论据。这将足以使我回想起，在关于黎曼曲面的问题中，克莱因如何求助于电流的特性。

的确，在解析家加在这个词的意义上，这种论据是不严格的。在这里，产生了一个问题：对于解析家来说并不充分严格的证明对物理学家来说怎么能够充分严格呢？看起来，不可能有两种严格，要么严格，要么不严格，而且在没有严格性的地方也不会有演绎。

通过在把数应用于自然现象的条件下的回忆，这个表观的悖论将会得到充分的理解。一般说来，在寻求严格性中所遇到的困难从何而来呢？在试图确立某个量趋于某一极限，或某个函数是连续的，或它具有导数的过程中，我们几乎总是要遇到困难。

现在，众所周知，物理学家用实验量度的数只能是近似的；任何函数与你从非连续函数中选择的函数几乎总是没有多少差别，同时与你从连续函数中选择的函数几乎总是没有多少差别。

因此，物理学家可以按照意愿假定，所研究的函数是连续的或者是不连续的；它有导数或者没有导数；他们可以这样作，既不怕与目前的实验发生矛盾，也不怕与任何未来的实验发生矛盾。我们看到，由于这种自由，他开了把解析家难倒的困难的玩笑。他总是可以推理，犹如在他的计算中所出现的所有函数是整多项式一样。

这样一来，使物理学家感到满足的概观并不是解析家所要求的演绎。但是，不能由此得出结论说，一个在发现中不能帮助另一个。如此之多的物理学已经转化为严格的证明，以致这种证明在今天是很容易的。还有许多例子，我担心过多地引证它们会使读者生厌。

我希望我所说的东西足以证明，纯粹解析和数学物理学可以相辅相成，而不会彼此拆台，这两门科学中的每一个都应当为加强它们的联盟而欢欣鼓舞。

第六章 天文学

政府和议会必然感到，天文学是一门耗资庞大的科学：最小的仪器动辄花费数十万元，最小的天文台其费用以百万元计；每次日食、月食，还要给予临时拨款。这一切为的都是遥远的星球，它们对我们的竞选全然无知，多半永远也不可能参加选举。情况必然是，我们的政治家保留着理想主义的残余，他们对什么是宏伟的东西还保留着模糊的本能；确实，我认为他们受到中伤；他们应该受到鼓励，并证明这种本能没有欺骗他们，他们也不是被那种理想主义愚弄的人。

事实上，我应该向他们谈谈导航，没有人会低估导航的重要性，导航需要天文学。但是，这必定只是领会该问题的次要的一面。

天文学之所以是有用的，因为它能使我们超然自立于我们自身之上；它之所以有用，因为它是宏伟的；这就是我应该说的。天文学向我们表明，人的躯体是何等渺小，人的精神是何等伟大，因为人的理智能够包容星汉灿烂、茫无际涯的宇宙，并且享受到它的无声的和谐，在它那里，人的躯体只不过是沧海一粟而已。这样一来，我们意识到我们的能力，这是一种花费越多收效越大的事业，因为这种意识使我们更加坚强有力。

但是，我希望首先说明的是，由于天文学把能够理解自然的灵魂赋予我们，它在多大程度上促进了比较直接有用的其他学科的工作。

想一想，假使人类处于阴云始终密布的天空之下，就象处于木星上那样，从来也不知道有其他星球，人类的声誉便会一落千丈。你想过没有，在这样一个世界上，我们会是现在这种样子吗？我清楚地知道，在这个昏暗的苍穹之下，⁶⁶ 我们被剥夺了生物体所必需的阳光，就象生息在地球上的生物体失去了阳光一样。可是，如果你乐意的话，我们可以假定，这些阴云是发磷光的，放射出柔和的、持续的光。由于我们正在作假设，我们不再会失去另外的东西。好了！我重复我的问题：你想过没有，在这样一个世界上，我们会是现在这种样子吗？

星辰不仅向我们发出可见光，射入我们的肉眼，而且它们也向我们发出一种极为微妙的光，照亮我们的精神，我将极力向你表明精神的作用。你知道，几千年前地球上的人类的状况和今日的状况，在太古时代，人类在大自然中是孤立的，大自然的每一种事物对他来说都是神秘莫测的，他对不可理解的自然力的每一种异乎寻常的表现都感到惊恐不安，他没有能力认识任何事物的运行规律，以为它们是变幻无常的；他认为一切现象都是幻想出来的、苛刻的而实际并不存在的神怪的巨大作用的结果，为了在这个世界上过活，他借助于在恳求获得执行人或代理人的善意恩典中所使用的类似的方法，力图去迎合神怪。即使失败了，他仍执迷不悟，与当今的遭到拒绝的乞丐仍不灰心丧气、继续沿街乞讨相比，他真是有过之而无不及。

今天，我们不再乞求自然；我们支配自然，因为我们发现了她的某些秘密，我们每天都将发现她的其他秘密。我们以规律的名义支配自然，她不能对此提出异议，因为这些规律是她的规律；我们不能疯狂地要求自然改变这些规律，我们首先必须服从它们。**只有服从自然，才能支配自然。**

从昔日的状况变到今日的状况，我们的灵魂必须经受多么大的变革啊！任何一个人是否相信，没有星辰的教训，终日处在阴霾笼罩的天幕之下，他们能够变化得如此之快吗？这一变化是可能的呢，还是至少不会慢很多呢？

首先，正是天文学教导我们存在着规律。首次注意观察天象的古巴比伦的迦勒底(Chaldea)人看到，如此众多的发光点并非乌合之众，它们象纪律森严的军队。毋庸置疑，他们不了解这种纪律的准则，繁星点点的夜空的和谐壮观便足以给他们以规律性的印象，这本身已经是伟大的成果。此外，希帕克(Hipparchus)、托勒密(Ptolemy)、哥白尼(Copenicus)、开普勒一个接一个地觉察到这些准则，最后无须回忆，正是牛顿，阐明了所有自然定律中最熟悉、最精确、最简单、最普遍的定律。

仰观如是，俯察亦然；我们清楚地看到，我们小小的地上的世界表面看来是无序的，可是我们在这里也再次发现天体研究向我们揭示出的和谐。它也是有规则的，它也服从永远不变的规律，但是规律更复杂，它们表面上互相冲突，未经其他观测训练的眼睛也许看到的只是混沌、只是偶然和任性的统治。纵使我们对星辰，一些大胆的人也许还想试图预见物理现象；但是，他们必然会屡遭失败，他们只会引起凡夫俗子的耻笑；难道我们没有看到，即使在今日，气象学家有时也会受骗，一些人不是总想嘲笑他们吗？

如果物理学家没有天文学家成就的出色例证来坚定他们的信念，那么物理学家会被如此之多的牵制弄得垂头丧气，他们将要多么经常地陷入绝望的境地啊！天文学家的成就向他们证明，自然服从规律，剩下的只是了解规律是什么；为此，他们只需要耐心，他们有权利要求怀疑论者应该信任他们。

这并非问题的全部：天文学不仅教导我们存在着规律，而且教导我们无法摆脱规律，在这里没有与之调和的余地。如果我们仅仅知道地上的世界——在这里，每一种基本的自然力在我们看来总是与另一种自然力相抵触——那么要理解上述事实需要多少时间呢？天文学教导我们，规律是无限精确的，如果我们阐明的规律是近似的，那只是因为我們不完全了解它们。古代最科学的头脑亚里士多德还把作用归于偶然、机遇，他似乎认为，自然规律，至少是地球上的自然规律只是确定现象的大致特征。为了纠正认为自然不可理解的谬论，天文学预言的日渐精确起了多么大的作用啊！

但是，这些规律象人为的规律那样不是局域的、不因地而异吗；在宇宙一隅，例如在我们地球上或我们小小的太阳系内是真理的东西，稍微远离一些不会变成谬误吗？其次，可不可以询问，因地而异的规律是否不因时而异，它们是否是简单的习惯、昙花一现的和短命的？又是天文学再次回答这个问题。考虑一下双星；它们的轨道是圆锥曲线；这样，在望远镜所及的距离内，都没有超出服从牛顿定律的领域。

甚至这个定律的简单性对我们来说也是一种训诫；多么复杂的现象都包含在该定律表述的两个界限内；不了解天体力学的人至少可以从这门科学所处理的范围中形成关于它的一些观念；而且可以期望，物理现象的复杂性同样隐藏在我们还不知道的某个简单的原因中。

因此，正是天文学向我们指出，什么是自然规律的普遍特征；可是，在这些特征中，有一个最微妙、最重要的特征，我请求允许我着重强调一下。

象毕达哥拉斯(Pythagoras)、柏拉图(Plato)或亚里士多德这

些古人是如何理解宇宙的秩序呢？宇宙的秩序或者被看作是一劳永逸地确定了的、永世不变的模式，或者被看作是世界试图趋近的理念。开普勒本人也曾这样设想，例如在他寻求行星到太阳的距离是否与正五面体有某种关系时。这种理念虽说不是无稽之谈，但却毫无成效，因为自然并非如此造成。牛顿向我们表明，定律只不过是世界的目前状态和它的紧接着的后继状态之间的必然关系而已。自牛顿之后发现的所有其他定律概莫例外；定律一般是微分方程；可是，正是天文学为定律提供了第一个模型，没有这个模型，我们无疑将会长期无所适从。

天文学也教导我们轻视外观。当哥白尼证明，被认为是最稳定的东西处于运动之中，被认为正在运动的东西是固定不动时，他向我们表明，从我们感觉的直接材料直接得到的朴素推论是多么不可靠。的确，他的观念不容易获胜，但是一旦获胜之后，就不再有我们不能够摆脱的根深蒂固的观念。我们怎样才能估价这样赢得的新武器的价值呢？

古人认为万物皆为人而设，这种错觉必定是十分顽固的，由于它在任何时候都必然遭到反对。然而，必须剥去它的外衣；否则，人们将只能是永远近视的，无法看到真理。为了理解真理，人们必须要超然自立于自身之外，也可以说，从许多不同的观点来沉思自然；要不然，我们将始终只知其一而不知其二。现在，超脱自身是把万物归诸于他自己的人无法作到的。谁能把我们从这种错觉中解救出来呢？正是那些向我们表明地球仅仅是太阳系最小的行星之一，而太阳系本身只不过是恒星世界无限空间中一个微不足道的点的人。

与此同时，天文学家还教导我们不要害怕大数。这不仅对于了解天象来说是需要的，而且对于了解地球本身来说也是必不可

少的，这并不象我们今天看来的那么容易。让我们试图追溯并想象一下，假如告诉古希腊人说，红光每秒振动四百万亿次，他们会想些什么呢？毫无疑问，这样的主张在他们看来好象是纯粹的狂言乱语，他们从来也不会屈尊去检验它。今天，假设在我们看来似乎不再是荒诞不经的，因为它迫使我们设想比我们的感官能够向我们揭示的大得多或小得多的对象，我们不再存有束缚我们前辈的那些顾忌了，前人只是因为害怕它们，才妨碍了他们去发现某些真理。可是，原因何在呢？这是因为我们看到天不断地扩大着；因为我们知道太阳距地球1.5亿公里，最近的恒星的距离比这还要大几十万倍。在习惯于思考无穷大之后，我们也变得易于理解无穷小。由于所接受到的教育，我们的想象犹如不被太阳所眩的鹰眼一样，能够洞察面临的真理。

我能否这样说，正是天文学造就了我们能够理解自然的灵魂；在终日阴霾笼罩、没有星辰的天空之下，地球本身对我们来说也是永远不可认识的；我们在那里看到的只是任性和无序；不认识世界，我们永远也不能征服世界；我的这一切说法错了吗？什么样的科学更有用呢？在这样说时，我自己置身于只重视实际应用的人的观点上了。确实，这种观点不是我的；至于我，却与此相反，如果我赞美工业的成就，那尤其是因为，当工业成就使我们摆脱了物质的牵累时，便会有一天给大家以思考自然的余暇。我不说：科学是有用的，因为它教导我们制造机器。我要说：机器是有用的，因为它们为我们作功，将在某一天给我们留下更充裕的从事科学的时间。但是，最后值得指出的是，在这两种观点之间没有对抗性，倘若有人追求无私的目标，其他人也都会追随他的。

奥古斯丁·孔德(Auguste Comte)在某处说过，企图了解太

阳的构成是无用的，因为这种知识对社会学毫无用处。他为何如此目光短浅呢？用孔德的话来说，人类从神学状态过渡到实证状态，难道我们刚才没有看到，这正是由于天文学家所为吗？为此他解释道，那是已经发生过的事情。但是，他怎么不理解剩下要作的事情并非不怎么重要，也许并非不是无用的呢？他好象谴责物理天文学，可是这门科学已经开始结出果实了，它将给我们更多的东西，因为它的历史只是始于昨天。

人们首先发现了太阳的本性，但实证主义的创始人想阻止我们认识它，在地球上本来存在、但是依然没有被发现的物质却在太阳上发现了；例如，几乎象氢一样轻的氦即是如此。这已经驳斥了孔德。我们以完全不同的方式把珍贵的教益归功于分光镜；它向我们表明，在遥远的恒星上有相同的物质。人们必然会问，地上的元素是否由于某种机遇而使比较纤细的原子聚集在一起，由它们构成更复杂的大厦，即化学家所谓的原子；在宇宙的其他区域，另外一些偶然的相遇是否造成了完全不同的大厦。现在我们知道，情况并非如此，我们的化学定律是自然的普遍定律，这些定律绝非偶然，促使我们在地球上诞生也不是偶然性的作用。

但是，有人会说，天文学把它所能给予的一切给了其他科学，现在天上为我们赢得了使我们能够研究地上自然的工具，天空可以毫无威胁地把它永远遮蔽起来了。在我们刚才说过那些之后，还需要回答这种异议吗？人们在托勒密时代也会推出同样的结论；当时人们也认为，他们无所不知，可实际上他们还不得不事事学习。

恒星是宏伟的实验室、巨大的坩埚，这是化学家梦想不到的。在那里，温度之高是我们无法达到的。它们的唯一不足之处就是距我们远了一点；但是望远镜将使它们马上与我们接近起来，于是我们将会看到，物质在那里是如何作用的。这对物理学家和化

学家来说多么幸运啊！

在千千万万个形形色色的星球中，物质向我们显示出它的本来面目：有的似乎是由稀薄的气体形成的星云，有的是发光的，我不知道发光的秘密来源是什么，甚至有的是白炽的恒星，有的是如此相似的行星，可有的又是如此不同的行星。

或许，星球甚至将在某一天向我们透露有关生命的信息；这似乎是痴人作梦，我一点也看不到这如何能够被认识；可是，一百年后，研究星球的化学家也许不会再是愚蠢的梦想家了吧！

纵使我们的眼界有限，但是并非偶然的、十分诱人的希望依然存在，过去收获已经不少，我们可以确信，未来的收获将比过去更多。

总而言之，占星术的信念对于人类有多少用处，这是令人难以置信的。如果说开普勒和第谷·布拉埃之所以起作用，正是因为他们向幼稚的国王兜售所发现的星球交会的预言。假使这些君主不这样轻信，我们也许还认为自然是反复无常的，我们还沉迷于无知。

第七章 数学物理学的历史

物理学的过去和未来 数学物理学的现状如何？它可能向自己提出的问题是什么？它的未来如何？它的方向正要受到修改吗？今后十年，对我们的直接后继者来说，这门科学的目的和方法会呈现出与我们自己所看到的相同的模样吗？或者相反地，我们正要目睹引人注目的变革吗？在我们今天着手进行研究时，这是一些不得不提及的疑问。

如果说提出这些疑问是轻而易举的话，那么要回答它们却是相当困难的。倘若我们被诱使冒险作预言，那么只要想一想，某些人曾经询问一百年前的最著名的学者，十九世纪这门科学会是什么样的，而这些学者却作出了愚蠢的回答，于是我们便会轻易地抵制这一诱惑。这些学者曾认为他们大胆地作了预言，而在那次经历之后，我们却发现他们是何等胆怯。因此，请不要期望我作任何预言。

可是，即使象所有谨慎的医生一样，我不愿对病势的发展和后果作出预测，但却也不能不作一点诊断；是的，不错，那里存在着严重危机的迹象，似乎我们可以期待一种行将到来的变革。然而，不必太担心；我们确信，病人不会因此而死亡，我们甚至可以期望，这次危机将有益于健康，因为过去的历史似乎向我们保证了这一点。事实上，这次危机并不是第一次，为了理解它，重要的是要回顾先前发生过的那些危机。原谅我作一个简短的历史概述吧。

中心力物理学 正如我们知道的，数学物理学诞生于天体力学，而天体力学在十八世纪末产生，当时天体力学本身得到了全面的发展。尤其是在早年，幼儿酷似其母。

天文学的世界是由质量形成的，这些质量很大，可是无疑相距极其遥远，以致于在我们看来，它们似乎只不过是质点而已。这些质点相互吸引，引力的大小与距离的平方成反比，这种引力是影响它们运动的唯一的力。如果我们的感官敏锐到足以向我们表明物理学家所研究的物体的所有细节，那么由此所揭示出的景象就几乎与天文学家所注视的景象没有什么差别。在那里，我们也会看到，这些质点相互远隔，它们的间隔与它们的尺度相比极大，而且按照固定的规律描绘轨道。这些无限小的星球是原子。象星球本身一样，原子相互吸引或排斥，这种引力或斥力沿着连结它们的直线，仅与距离有关。这种力作为距离的函数而变化，其规律也许不是牛顿定律，而是类似的定律；它的指数不是一 2 ，我们也许有不同的指数，从这种指数变化中产生出所有各种各样的物理现象，产生出形形色色的性质和感觉，产生出我们周围的五光十色的、万籁齐鸣的整个世界；一言一蔽之，产生出整个自然界。

这是最纯朴的、最基本的概念。为了解释所有的事实，唯一遗留下来的问题是要寻找在不同的情况中应当赋予这个指数以什么样的值。例如，正是在这个模型的基础上，拉普拉斯构造了他的优美的毛细现象理论；他认为毛细现象只是吸引的特例，或者如他所说，只是万有引力的特例，人们在《天体力学》五卷之一中找到它时，并不感到惊讶。最近，布赖奥特 (Briot) 相信，他通过证明以太原子以反比于距离的六次方的力相互吸引，洞察到光学的最后秘密；而麦克斯韦本人没有在某处说过气体原子以反比

于距离的五次方相斥吗？我们有指数 -6 或 -5 ，而不是一 2 ，然而它始终是指数。

在这个时代的理论中，只有一个例外，那就是傅里叶理论；在傅里叶理论中，实际上存在着相互超距作用的原子；这些原子彼此传导热，但是它们不吸引，也从来不运动。从这种观点出发，无论在傅里叶同代人的眼中，还是在傅里叶本人的眼中，傅里叶理论必然是一种不完善的、暂时性的理论。

这一概念并非毫无长处；它是富有魅力的，我们中间的许多人并未最终抛弃它；他们知道，只有耐心地分析感觉向我们提供的错综复杂的材料，人们才能达到事物的终极要素；我们必须循序渐近，不可忽略中间环节；我们的祖先期望越阶而趋，结果铸成大错；但是他们相信，当人们达到这些终极要素时，他们在那里将再次发现天体力学惊人的简单性。

这种概念也不是无用的；它给我们提供了无法估计的好处，因为它促使物理定律的基本概念变得精确了。我将说明我自己的意思；古人是怎样理解定律的？对他们来说，定律是内在和谐，是静态的，也可以说是永远不变的；要不然，定律就象自然力图摹拟的模特儿一样。在我们看来，定律是某种完全不同的东西；它是今天的现象和明天的现象之间的恒定关系；总而言之，它是微分方程式。

看看物理定律的理想形式吧；好了，牛顿定律就是所表达出的第一个理想形态。如果说人们当时在物理学中服从这种形式，那恰恰是由于极力模仿牛顿定律，摹拟天体力学。而且，这就是我在第六章中力图阐明的观念。

原理物理学 无论如何，中心力的概念的充分完善不是一天

的事情，这就是我刚才说的那些危机中的第一次危机。

当时作了些什么呢？我们抛弃了洞察宇宙结构细节的企图，抛弃了隔离这个庞大的机械装置的部件的企图，抛弃了逐个分析使它们处于运动的力的企图，我们满足于把某些普遍原理作为指导，这些原理的描述对象使我们用不着进行这样细微的研究。怎么会这样呢？假定我们面前有一台机器；只能看到前轮和后轮转动，但是联动机件、把运动从一部分传送到另一部分的运转部分却隐藏在内部，我们无法看见；我们不知道，传动是通过齿轮还是皮带进行的，或是通过连杆或其他机械装置进行的。我们能说，只要不容许我们把这台机件拆卸为部件，我们就不可能了解它吗？你清楚地知道，我们不必这样作，能量守恒原理足以使我们确定最有意义的特征。我们很容易查明，后轮比前轮转动慢十倍，因为这两个轮是可以看见的；我们能够由此得出结论说，施加于一个轮的力偶与施加于另一个轮的十倍大的力偶均衡。为此不需要识破这种平衡的机制，不需要了解这些力在机器内部如何相互补偿；人们足以确信，这种补偿不能不发生。

好了，谈到宇宙，能量守恒原理能够给我们同样的好处。宇宙也是机器，这台机器比工业中的所有机器要复杂得多，它的几乎所有的部分都对我们深深地隐藏着。但是，通过观察我们能够看见的那些部分的运动，借助于这个原理，我们就能够得出依然是可靠的结论，而不管使它们运转的可见的机械装置的细节可能是什么。

能量守恒原理，或迈尔（Mayer）原理肯定是最重要的原理，但它并不是唯一的原理；还有其他原理，我们能够从中得到同样的利益。这些原理是：

卡诺（Carnot）原理或能量退降原理。

牛顿原理或作用与反作用相等原理。

相对性原理，根据该原理，对于静止的观察者就象对于作匀速运动的观察者一样，物理现象的定律必然是相同的；因此，我们没有而且也不可能有任何办法辨别我们是否作匀速运动。

质量守恒原理或拉瓦锡（Lavoisier）原理。

我想加上最小作用原理。

把这五、六个普遍原理应用于不同的物理现象，就足以使我们认识它们，我们有理由期望了解它们。这种新数学物理学的最显著的例子无疑是麦克斯韦的光的电磁理论。以太是什么；它的分子如何排列，这些分子相互吸引还是相互排斥，我们对此一无所知；可是我们知道，这种媒质同时传播光振动和电振动；我们知道，这种传播的发生方式与力学的普遍原理相一致，并且足以使我们建立起电磁场方程。

这些原理都是大胆推广的实验的结果；但是它们看起来好象是从它们的真正的普遍性得到高度的可靠性。事实上，原理愈普遍，检验它们的机会就愈频繁，受检验的次数愈增加，采取的形式愈多样，结果就不再留有怀疑的余地。

旧物理学的效用 这是数学物理学历史的第二个阶段，我们还没有从中摆脱出来。我们能说第一阶段毫无用处了吗？我们能说科学在五十年间误入歧途了吗？我们能说往昔的千辛万苦偶因一念之差，终成千里之谬，于是可以付之东流吗？世界上绝没有这样的事。没有第一阶段，难道你能设想第二阶段存在吗？中心力的假设包含了所有的原理；它把它们作为必然的结果而包括进去；它包括能量守恒和质量守恒这两个原理，也包括作用与反作用相等原理以及最小作用原理；的确，这些原理似乎不是实验的

真理，而是定理；同时，这些原理的表述比它们目前的形式更为精确，但却不大普遍。

正是我们祖先的数学物理学，使我们逐渐熟悉了这些不同的原理，使我们习惯于透过伪装它们的各种外衣而辨认出它们。人们把它们与经验材料加以比较，从而看到，修正它们的表述，以便使它们适应于这些材料是多么必要；因此，它们得以扩展和加强。这样一来，它们终归被视为实验的真理；中心力的概念从而变成无用的支架，或者确切地说，变成一种障碍，因为它使原理带有假设的特征。

于是，框架没有打破，因为它们是具有弹性的；不过它们扩大了；我们的祖先建造它们并非劳而无功，在今日的科学中，我们辨认出他们所描绘出的梗概的普遍特性。

第八章 数学物理学现在的危机

新危机 我们现在正要进入第三个时期吗？我们处在第二次危机的前夜吗？我们赖以建设一切的这些原理本身也要崩溃吗？这在一段时间曾经是中肯的疑问。

当我这样说时，你无疑会想起镭这个当代伟大的革命家，事实上，我将马上回过头来谈论它；可是，还有其他一些东西。不仅能量守恒定律成问题，而且所有其他的原理也同样遭到危险，正如在它们相继接受审查时我们将要看到的那样。

卡诺原理 让我们从卡诺原理开始。这是唯一的¹不以中心力假设的直接结果而出现在眼前的原理；不仅如此，情况似乎是这样：即使它与那个假设不直接发生矛盾，但是若不作出某种努力，它至少不与那个假设一致。假如物理现象毫无例外地起因于原子的运动，而原子的相互引力仅仅依赖于距离，那么所有这些现象看来应当是可逆的；假如所有的初速度反向，这些总是受到同样的力的原子应当反方向沿着它们的轨道运行，就象地球运动的初始条件被颠倒，它在逆行方向上描绘出的椭圆轨道与在顺行方向上描绘出的轨道相同一样。为此缘故，假若一种物理现象是可能的，那么相反的现象同样应该是可能的，人们当然可以追溯时间的进程。可是，在自然界中并非如此；这恰恰是卡诺原理教导我们的：热能够从热的物体传到冷的物体；此后却不可能使它采取相反的路线而建立起已被消除的温度差。运动能够因摩擦全

部耗散而转化为热；相反的转化却只能部分地进行。

我们力求调和这个表面上的矛盾。假使世界趋向于一致，这并不是因为初看起来不相似的终极要素倾向于变得越来越没有多大差别；而是因为这些要素杂乱无章地移动，它们以混合而告终。由于具有能够区分一切要素的慧眼，因而种类总是很多的；这个粉末的每一个粒子都保持着它的本性，而不模仿它邻近的粒子；但是，当混合变得越来越充分时，我们粗糙的感官只能察觉到一致。例如，这就是温度趋于平均分布而没有逆向的可能性的原因。

一滴葡萄酒滴入盛水的玻璃杯；不管液体的内在运动规律如何，我们马上将会看到，水染成了均匀的玫瑰色，从这时起，人们无论如何把玻璃杯摇动多么长的时间，葡萄酒和水恐怕也不能再次分开。在这里，我们有不可逆物理现象的典型例子：把一粒大麦藏在一堆小麦之中，这是很容易的；其后，要找到它、取出它，这实际上是不可能的。麦克斯韦和玻耳兹曼（Boltzmann）已经解释了这一切；但是，只是吉布斯（Gibbs）在他的《统计力学的基本原理》一书中最清楚地理解了它，因为该书多少有点深奥难解，读它的人寥寥无几。

在采纳这种观点的人看来，卡诺原理只不过是一个不完善的原理，是对我们感官的弱点的一种承认；正因为我们的双眼不敏锐，以致于我们无法区分混合的要素；正因为我们的双手不灵巧，以致于我们不能迫使它们分开；能够一个一个地拣选分子的虚构的麦克斯韦妖完全可以强使世界返回到原处。世界能够逆行吗？这并非不可能，只不过是无限不可几而已。机遇就是我们应当长时间地等待容许逆行的境遇的集合；但是，机遇或早或迟将出现，不过要在许多年之后，其数目要用几百万个数字才能书写

出来。无论如何，这些余地完全是理论上的；它们不会使我们焦虑不安，卡诺原理依然保持它的全部实际价值。然而，在这里情况有所变化。很早之前，生物学家借助于他的显微镜观察到，在他制备的悬浮液中，有小粒子无规则地运动着；这就是布朗运动。布朗（Brown）起初认为这是生命现象，但不久他看到，无生命体的活跃之状并不亚于其他有生命体；于是他把这个问题的移交给物理学家。不幸的是，物理学家长期以来对这个问题不感兴趣；人们猜想，这是光照射显微镜下的悬浮液；由光生热；从而引起温度不均和液体中的内部液流，液流产生了所提到的运动。

古伊（Gouy）先生想到比较周密地进行观察，他看到或者据认他看到，这种解释是站不住脚的，粒子越小，运动变得越活跃，可是它们不受光照方式的影响。于是，如果运动永不停止，或者更确切地说，如果运动在不从外部能源获得能量的情况下不断地再生，那么我们应当相信什么呢？诚然，我们不应该为此缘故而不再相信能量守恒，但是我们亲眼看到，运动时而因摩擦转化为热，相反地，热时而又变为运动，而且这种转化毫无损失，因为运动永远持续进行着。这与卡诺原理针锋相对。如果情况如此，为了观察世界逆行，我们不再需要麦克斯韦妖的无限敏锐的眼睛；我们的显微镜就足够了。过大的物体，例如十分之一毫米的物体，从四面八方受到运动着的原子的碰撞，但是物体并不运动，因为这些撞击为数极多，偶然性法则使得它们相互抵消；粒子较小，受到的撞击过少，这种抵消肯定不能全部发生，它们便可以持续不断地移动。眼看我们的原理之一已处于危险之中。

相对性原理 让我们转向相对性原理：这不仅被日常经验所证实，不仅是中心力假设的必然结果，而且不可抗拒地强加于我

们健全的感觉中，可是它也受到攻击。考虑两个带电体；在我们看来，尽管它们表面上是静止的，但是它们二者却随地球一起运动；罗兰（Rowland）告诉我们，运动着的电荷等价于电流；因此，这两个带电体等价于同方向上的两个平行电流，而且这两个电流应该相互吸引。通过量度这种引力，我们将会量度出地球的速度；这不是相对于太阳或固定恒星的速度，而是它的绝对速度。

我完全知道所说的意思：所量度的不是地球的绝对速度，而是它相对于以太的速度。这是多么不能令人满意的事情啊！从这样理解的相对性原理出发，我们不再能推断出任何结论，情况难道不明显吗？相对性原理不再能够告诉我们任何东西，恰恰是因为它不再害怕任何矛盾。如果我们成功地量度了一切，我们总可以自由地说，这不是绝对速度，即便它不是相对于以太的速度，但总可以是相对于某种未知的流体的速度，我们能够用这种流体充满空间。

实际上，实验已经担当起摧毁相对性原理的这种解释的任务，量度地球相对于以太速度的尝试导致了否定的结果。这一次，实验物理学比数学物理学对该原理更有信心；理论家为了与他们的其他普遍观点相一致，不想保留这个原理；但是实验却顽强地固守它。实验手段几经改变；迈克耳逊（Michelson）终于把精确度推进到它的最后极限；从中也得到否定的结果。今天，数学家不得不使用他们的全部智慧，来准确地解释这种否定结果。

他们的任务并非轻而易举，即使洛伦兹（Lorentz）达到了这一点，那也只不过是堆积假设而已。

最有独创性的思想是地方时思想。设想两个观察者希望用光信号来校准他们的時計；他们交换信号，但是他们知道，光

传递并不是瞬时的，所以他们仔细地交互校验。当B地接收到从A地发出的信号时，它的时钟所指示的时间不应与A地的时钟在发送信号时刻所指示的时间相同，这个时间要加上表示传递持续时间的常数。例如，设A地的时钟指向时间0时，A地发送它的信号，B地接收到信号时，其时钟指向时间 t 。如果所慢的时间 t 表示传递的持续时间，那么时钟便被校准，为了检验它，在B地时钟指向0时轮到由B地发出信号；于是，当A地时钟指向 t 时，A地应当接收到信号；这样一来，時計已被校准。

实际上，它们在同一物理瞬时所指示的是相同的时间，但却是在一个条件下，即两地是固定的。另外，传递持续时间在两个方向上并不是相同的，例如，因为A地向前运动遇到从B发出的光振动，而B地在从A发出光振动之前就离开了。因此，用那种方法校准的钟表指示的不是真实时间；它们将指示所谓的**地方时**，结果它们中的一个将比另一个慢。这没有什么关系，因为我们无法察觉到它。例如，在A地发生的一切现象都将延迟，但是所有一切都同样如此，而且观察者不会察觉到它，因为他的钟表也变慢了；这样一来，正如相对性原理所要求的，他将无法知道，他是处于静止还是处于绝对运动之中。

不幸的是，这还不够，还需要有辅助假设；必须承认，运动着的物体在运动方向经受均匀的收缩。例如，地球的直径之一由于我们行星的运动而收缩二亿分之一，而其余的直径则保持它的正常长度。从而，最后的微小差别被补偿。然而，还有关于力的假设。在被匀速平移所激励的世界中，力不管它们的来源如何，是重力还是弹性力，都要按照某一比率减小；或者更确切地说，对于垂直于平移的分力而言才会发生这种情况；平行于平移的分力不会变化。现在，继续讲我们的两个带电体的例子；这两个带

电体相互排斥，可是与此同时，如果二者都匀速平移，它们便等价于两个同一方向的平行电流，结果互相吸引。

因此，这种电动引力削弱静电斥力，总斥力比两个带电体处于静止时要微弱。但是，由于要量度这个斥力，我们必须用另一个力与之平衡，而所有其他的力都按相同的比率减小，以致于我们什么也察觉不到。这样，一切似乎都安排好了，但是所有的疑问都烟消云散了吗？如果人们可以用传播速度与光速不同的非光信号通讯，会发生什么情况呢？在用光学程序校准钟表后，如果我们希望借助于这些新信号检验是否校准，那么我们便会观察到差异，这种差异使两地的公共平移变得很明显。假使我们和拉普拉斯一起承认，万有引力传递得比光快一百万倍，这样的信号是不可思议的吗？

这样一来，在后来这几个回合，相对性原理被勇敢地保全下来，可是防卫愈勇，证明攻击愈烈。

牛顿原理 现在，让我们谈谈牛顿关于作用与反作用相等的原理。这个原理和前述的原理密切相关，的确，一个原理的倒塌好象包含着另一些原理的倒塌。因此，我们不必为在这里发现同样的困难而大惊小怪。

我已在上面列举了从这一原理引申出来的新理论。

根据洛伦兹理论，电现象起因于所谓电子的小带电粒子的位移，电子沉浸在我们称为以太的媒质中。这些电子的运动引起周围以太扰动，以太扰动以光速沿每一个方向传播，当扰动到达与原先处于静止的其他电子相接触的以太区域时，促使这些电子本身也振动起来。因此，电子相互作用，但是这种作用不是直接的，而是通过以太作为媒介而实现的。在这些条件下，至少对于

仅考虑物质的即电子的运动而对他无法看见的以太的运动一无所知的观察者来说，在作用与反作用之间能够存在补偿吗？显然不能。即使补偿能够存在，它也不可能是同时的。扰动是以有限的速度传播的；因此，只有当第一个电子很久以前开始静止时，扰动才能到达第二个电子。从而，第二个电子在延迟一段时间之后才受到第一个电子的作用，但是在这个瞬时，它肯定没有反作用于第一个电子，因为在第一个电子周围不再有任何扰动。

对事实的分析容许我们更为精密。例如，设想一下类似于无线电报中所用的赫兹（Hertz）振荡器；它向各个方向发射能量；但是我们可以给它装上抛物柱面镜，正如赫兹对他的小振荡器所作的那样，以便产生的全部能量向一个方向发射。按照洛伦兹理论，接着会发生什么情况呢？这个装置发生反冲，仿佛它是大炮，而发射的能量是炮弹；这与牛顿原理相反，因为我们的抛射体在这里没有质量，它不是物质，它是能量。而且，这种情况与装有反射镜的灯塔相同，因为光无非是电磁场的扰动。这种灯塔应当反冲，犹如它发出的光是抛射体。能够引起这种反冲的力是什么力呢？它就是所谓的麦克斯韦-巴托利（Bartholi）压力。这种压力极小，即使用最灵敏的辐射计，也很难为它提供证据；但是它的确存在着，这就够了。

假使从我们的振荡器发出的全部能量射到接受器上，那么这就象接收器受到机械冲击那样起作用，在某种意义上，这相当于振荡器反冲的补偿；反作用等于作用，但它并不是同时的；接受器将继续运动，但并不是在振荡器反冲的时刻。假如能量无限期地传播而没有遇到接受器，补偿就永远不会发生。

空间把振荡器和接受器分隔开来，扰动必须通过空间才能从一个传递到另一个，这种空间并非空无所有，它不仅充满着以

太，而且也充满着空气，甚或在星际空间中也充满着某种稀薄的、但却是不可称量的流体；这种物质在能量到达它的时刻象接受器一样经受冲击，当扰动离开它时本身又发生反冲；我们可以这样说吗？这样说固然可以拯救牛顿原理，但并不是真实的。如果能量在扩散中总是附属于某种物质基础，那么运动着的物质便随身携带着光，而斐索（Fizeau）已经证明情况并不是这样，至少对于空气而言并非如此。后来，迈克耳逊和莫雷（Morley）证实了这一事实。也可以假定物质本身的运动严格地被以太的运动补偿；但是这会把我们引向与原先相同的见解。这样理解该原理将能解释一切，因为不管可见的运动如何，我们总是可以设想与之补偿的假设的运动。但是，如果它能解释一切，这是因为它不能使我们预见一切；它不能使我们在各种可能的假设中作出决断，由于它预先解释了一切。因此，它变得毫无用处。

这样一来，就以太运动所必须作出的假定并不十分令人满意。如果电荷加倍，那就可以自然地想象，以太的各种原子的速度也加倍；可是，由于补偿作用，以太的平均速度必然是四倍。

这就是为什么我始终认为，与牛顿原理针锋相对的理论结果终将在某一天被抛弃，然而最近关于从镭发射出的电子运动的实验似乎反而使它们更加巩固。

拉瓦锡原理 我将讨论关于质量守恒的拉瓦锡原理。当然，在没有动摇整个力学的情况下，这个原理也不会被触动。现在，某些人认为，在我们看来它之所以是真实的，仅仅是因为在力学中考虑的只是中等的速度，对于其速度与光速可以比较的物体而言，它就不再是真实的了。现在，据说这些速度在目前是可以达到的；阴极射线和镭射线可能是由十分微小的粒子或电子组成，它

们无疑以比光速小的速度运动，其速度可能是光速的十分之一或三十分之一。

无论用电场还是用磁场，都能使这些射线偏转，通过比较这些偏转，我们还可以同时量度电子的速度和它们的质量（或者更确切地讲，量度它们的质量与它们的电荷的关系）。可是，当注意到这些速度接近光速时，人们决定必须进行矫正。这些带电的分子若不促动以太，便不能发生位移；要使它们处于运动，必须克服双重的惯性：分子本身的惯性和以太的惯性。因此，人们所量度的总质量或表观质量由两部分构成——分子的真实质量或机械质量与表示以太惯性的电动力学质量。

亚伯拉罕（Abraham）的计算和考夫曼（Kaufmann）的实验接着表明，恰恰是所谓的机械质量为零，电子的质量，或者至少是负电子的质量全部来自电动力学质量。这迫使我们改变质量的定义；我们已不再能够区分机械质量和电动力学质量，因为这时前一个会消失，不存在除电磁惯性以外的质量。不过，在这种情况下，质量再不可能是不变的；它随着速度而增大，它甚至与方向有关，以高速运动的物体，就倾向于使其偏离它的路线的力与倾向于加速它前进或抑制它前进的力而言，并不是反抗相同的惯性。

还有一种对策：物体的终极要素是电子，一些电子带负电，另一些带正电。负电子没有质量，这已被承认；但是，正电子*就我们所知的点滴情况而言似乎更大一些。也许正电子除它们的电动力学质量之外还有真实的机械质量。于是，物体的真实质量

* 彭加勒在这里所说的“正电子”实际上是后来发现的原子核，它不是狄拉克（Dirac）在1928年预言、安德森（Anderson）在1932年发现的正电子。——译者注

是它的正电子的机械质量之和，负电子未计算在内；这样定义的质量必定还是不变的。

哎呀！这种对策也无法使我们自圆其说。请回想一下，我们已谈及相对性原理和为拯救它所作的努力。它不仅仅是一个有可能拯救的原理，它是迈克耳逊实验的毋庸置疑的结果。好了，正如上面看到的，为了解释这些结果，洛伦兹被迫假定，所有的力不管其来源如何，在被匀速平移所激励的媒质中，总是以相同的比率减小；这不是充分的；对于真实力而言，不足以发生这种情况，对于惯性力而言，情况也必然相同；因此，它是必要的，洛伦兹说，**所有粒子的质量在与电子的电磁质量相同的程度上受平移的影响。**

这样一来，象电动力学质量一样，机械质量也按照同样的规律变化；因此，它们不可能是恒定的。

难道我需要指出拉瓦锡原理的崩溃牵连到牛顿原理的崩溃吗？牛顿原理表明，孤立系统的重心在直线上运动；但是，如果不再有不不变的质量，那就不再有重心，我们甚至不再知道这是什么。这就是为什么我在上面说，关于阴极射线的实验似乎证实了洛伦兹对于牛顿原理的怀疑。

如果这一切结果被确定，由此便会产生全新的力学，这种新力学尤其可以用下述事实来描述它的特征：没有什么速度能够超过光速^①，就好象任何温度不能低于绝对零度一样。对于作平移运动而又未觉察出这种平移的观察者来说，不再有任何表观速度能够超过光速；如果我们没有回想这位观察未使用与固定的观察者相同的时钟，而实际上使用的是指示“地方时”的时钟，那么这

① 因为物体使不断增大的惯性对抗倾向于使它们的运动加速的原因；当物体的速度接近光速时，这种惯性会变为无穷大。

便会产生矛盾。

于是，我们在这里面临着一个使我满意地说明的问题。假如不再有任何质量，那么牛顿定律变成什么呢？质量有两个方面：它同时是惯性系数和作为因子进入牛顿引力中的引力质量。假如惯性系数不是恒定的，那么引力质量能够是不变的吗？这还是个疑问。

迈尔原理 在我们看来，能量守恒原理至少还保留着，它似乎比较牢固。我应当向你回忆它本身是如何受到怀疑的吗？这个事件比前述事件引起了更大的骚动，它被写进所有的学术论文中。从贝克勒耳（Becquerel）最初的工作开始，尤其是当居里夫妇（Curies）发现了镭时，人们看到，放射性物体是无穷无尽的辐射源。它的放射性在数月和数年内似乎毫无变化地持续着。这本身就是对能量守恒原理的严峻考验；这些辐射实际上是能量，这种能量从同样的一点点镭放出，而且源源不断地放出。但是，这些能量太微弱，以致于无法量度；这至少是一种信仰，我们不会过多地忧虑。

当居里想到把镭放入量热器中时，情况为之一变；于是人们看到，持续不断产生的热量是十分显著的。

所提出的解释为数众多；但是，在这样的情况下，我们不能说情况越来越好。就它们之中没有一个解释优于其他解释而言，我们不能担保在它们之中存在着一种合适的解释。无论如何，从某一时期以来，这些解释中的一个似乎占了上风，我们也许有理由期望，我们掌握着打开秘密的钥匙。

拉姆齐（W. Ramsay）先生极力证明，镭处在变化的过程中，它储藏着大量的能，但并不是取之不尽的。而且，镭的变化所产

生的热量比所有已知的变化多一百万倍；钍的耗尽期是1250年，这个时间相当短暂，你看到，我们确信至少从现在起有数百年时间解决这个问题。而在等待的过程中，我们的疑虑依然存在。

第九章 数学物理学的未来

原理和实验 在如此之多的废墟中间，还有什么东西屹立常存呢？最小作用原理迄今未经触动，拉摩(Larmor)似乎相信，它会比其他原理久长；事实上，它是更加模糊、更为普遍。

面临原理的这种普遍崩溃，数学物理学将采取什么态度呢？首先，在过度激动之前，最好先问问，那一切是否是真的。所有这些违背原理的现象只有在无限小的事物中才能遇到；要看见布朗运动，就需要显微镜；电子是很轻的；镭也十分稀少，人们从未一次得到过多于几毫克的镭。于是，人们也许会问，除了已经看到的无限小的事物以外，是否还存在着与之相平衡的其他未看到的无限小的事物呢？

这样就存在着一个预审案件，似乎只有实验才能够对它作出判决。因此，我们只好把麻烦事交给实验家，在等待他们最终裁决这一争端时，不必预先使自己陷入这些令人不安的问题之中，而要继续安心作我们的工作，就象这些原理仍然是无可争议的那样。当然，在没有离开这些原理可以十分保险地应用的领域，我们还有许多事情要作；在这个疑虑重重的时期，我们可以充分地发挥我们的能动性。

解析家的作用 谈到这些疑虑，我们难道真的无论怎样作也无法使科学摆脱它们吗？事实上，必须指出，不仅实验物理学能够使它们产生；数学物理学也为它们的产生起了很大的作用。正

是实验家发现镭放出能量，但却是理论家明显地提出光越过运动着的媒质传播所产生的所有困难；倘若没有理论家，我们也许还不会意识到这些困难。好了，如果说理论家竭尽全力使我们陷入这一困境，那么他们帮助我们摆脱困境也是合乎情理的。

他们必须对所有这些新观点进行批判性的审查，我刚才在你面前概述了这些新观点，要抛弃那些原理，只有在作出拯救它们的忠诚努力之后。在这种意义上他们能够作些什么呢？这就是我想力图说明的问题。

要得到比较满意的动体电动力学理论，问题首先在于尽心竭力。正如我在上面已经充分表明的，在那里存在着重重困难。堆积一大堆假设是无用的，我们不能立即满足所有的原理；迄今，人们只有在牺牲其他原理的前提下才能成功地保护一些原则；但是，得到较好结果的全部希望还没有失去。于是，让我们采纳洛伦兹理论，在各种意义上审查它，一点一滴地修正它，也许一切将会安排就绪。

例如，不假定动体在运动方向经受收缩，不假定无论这些物体的本性和它们另外所受的力如何，这种收缩都是相同的，我们不能作出更简单、更自然的假设吗？例如，我们可以设想，当以太相对于弥漫在它之中的物质媒质运动时，以太应当被修改，而当以太这样被修改时，它不再以同一速度在各个方向传递扰动。以太能够比较迅速地传递在平行于媒质运动方向所传播的扰动，而不管它与媒质运动的方向相同还是相反，而在垂直于媒质的运动方向，它却不会迅速地传递所传播的扰动。波面不可能再是球面，而是椭球面，我们能够免除所有物体的异常收缩。

我仅仅是作为一个例子而引用这一点的，因为必须试图去作的修改显然易受无数变化的影响。

光行差和天文学 天文学也有可能在某一天向我们提供这方面的材料；主要是天文学，提出了使我们认识光行差现象的问题。如果我们粗制滥造光行差理论，我们便得出十分稀奇古怪的结果。由于地球的运动，恒星的表观位置不同于它们的实际位置，因为地球的运动是可变的，所以这些表观位置也变化着。我们无法确定真实位置，但是我们能够观察到表观位置的变化。因此，光行差的观察向我们指出的不是地球的运动，而是这种运动的变化。它们因而不能给我们提供关于地球绝对运动的信息。

这至少在一级近似上是正确的，但是倘若我们能够鉴别数千分之一秒，情况就不再相同了。这时，可以看到，摆动的幅度不仅取决于运动的变化，即众所周知的、由于我们的行星沿它的椭圆轨道运动的变化，而且取决于这种运动的平均值，以致于对所有的恒星而言，光行差常数不会完全相同，这个差异能告诉我们地球在空间的绝对运动。

于是，在另一种形式下，这便是相对性原理的崩溃。的确，我们远非能鉴别千分之一秒，但是有些人毕竟说，地球的总绝对速度也许比它相对于太阳的相对速度大得多。假如，假如它是每秒300公里而不是每秒30公里，那么这足以使该现象成为看得见的。

我认为，这样进行推论，人们承认的是过于简单的光行差理论。我已经告诉过你，迈克耳逊向我们指出，要证明绝对运动，物理程序是无能为力的；我相信，不管有多大精确性，同样的结论对于天文学程序也是正确的。

无论如何，天文学在这方面将向我们提供的材料会在某一天对物理学家来说十分珍贵。同时，我认为，理论家只要想起迈克耳逊实验，他们就可以预期否定的结果，在构造能够预先解释这

个现象的光行差理论中，他们将会完成有益的工作。

电子和光谱 这种电子动力学能够从许多方面加以研究，但是在指向那里的道路中，有一条道路有点被忽视，然而这条道路有可能使我们都到最令人惊异的结果。正是电子的运动产生发射光谱线；这已被塞曼(Zeeman)效应证明；在白炽物体中，振动之物对磁铁敏感，因此而带电。这虽然是十分重要的基本之点，但是没有一个人再前进一步。光谱线为什么按照整齐规律分布呢？实验家研究了这些规律的最小细节；它们是十分准确的和比较简单的。这些分布的最初研究使人们回想起在声学中所遇到的谐音；不过差别还是很大的。不仅振动数不是一个数的累次倍数，而且我们甚至找不到任何与那些超越方程的根类似的东西，我们被如此之多的数学物理学问题引向超越方程：任何形状的弹性体的振动问题，任何形状发生器中的赫兹振荡器问题，关于固体冷却的傅里叶问题。

这些规律比较简单，但是它们具有完全不同的性质，现仅举这些差别之一，对于高阶谐音而言，振动数倾向于有限的界限，而不是无限期地增加。

这还未被解释，我相信我们在这里有自然界最重要的秘密之一。日本物理学家长冈先生最近提出了解释；在他看来，原子是由大量很小的负电子形成的环围绕着大正电子构成的。具有环的土星就是这样的。这是很有趣的尝试，但是还不完全令人满意；这一尝试应该加以修补。可以说，我们将洞察到物质内部最深处。从我们今天所占有的特定观点来看，当我们认识到，白炽物体的振动为什么与普通的弹性振动如此不同，电子的行为为什么不象我们熟悉的物质的行为时，我们将会更充分地理解电子的动力学，

也许我们将会更容易使它与那些原理相一致。

先于实验的约定 现在，假定所有这些努力均以失败而告终，而我们毕竟不相信它们总是失败，那么我们必须作些什么呢？有必要试图用我们法国人所谓的助一臂之力来修补这些破碎的原理吗？这显然总是可能的，我一点也没有收回我上面已经说过的东西。

如果你想寻衅与我争吵的话，你必定会说，难道你过去没有写过，原理虽然来自实验，现在实验却攻不破它们，因为他们变成了约定吗？而现在你却告诉我们，最近的实验成果使这些原理处于危险之中。

好了，以前我是正确的，今天我也不是错误的。以前我是正确的，现在正在发生的東西是它的新证据。例如居里关于镭的量热实验。有可能使它与能量守恒原理一致吗？这已被用许多方法尝试。在它们之中，有一种方法我希望你注意一下；这不是今天倾向于占优势的解釋，而是已被提出的解釋的一种。有人猜想，镭只不过是媒介物而已，它储藏著本性未知的辐射，这种辐射通过空间在每一个方向上迅速传播，能越过除镭以外的所有物体，而且不因越过物体而变化，不施加任何作用于物体。镭只是从物体中获取它们的一点能量，然后以各种形式把能量给我们散发出来。

何等有利的解釋！多么方便啊！首先，它是无法证实的，从而是驳不倒的。其次，它将再次用来解釋对于迈尔原理的任何贬损；它不仅预先回答居里的异议，而且预先回答将来的实验家能够提出的所有非难。这种新的、未知的能量可以为一切服务。

这恰恰是我说过的东西，此外，有情况向我们表明，我们的原理并没有被实验攻破。

但是，由于这种打击，我们得到了什么呢？该原理未经触动，可是从此以后它有什么用处呢？它能使我们预见，在某种情况下我们可以期待这样的总能量；它限制我们；可是现在，新能量的这种无限的供应供我们支配，我们不再受任何东西的限制；正如我在《科学与假设》中所写的，如果原理不再多产，经验即便不与它矛盾，仍将直接宣布它无用。

未来的数学物理学 因此，这也许不必去作，有必要重新建设。如果我们减小这种必要性，那么我们可能会再次受到安慰。没有必要由此得出结论说，科学只能够编织珀涅罗珀之网^{*}，它只能以短命的结构出现，这种结构不久便不得不被它自己的双手从头到底拆毁。

正如我已经说过的，我们已经度过了一次同样的危机。我已向你指出，在数学物理学的第二阶段，即原理物理学阶段，我们发现第一阶段即中心力物理学的踪迹；如果我们一定要了解第三阶段的话，那将正好是同样的情形。这正象蜕皮的动物一样，撑破它的过于狭小的外壳，换上新的外壳；在新表皮之下，人们将能辨认出有机体保留下来的本质特性。

我们无法预见，我们正准备在什么道路上扩展；也许气体分子运动论正要经历发展，而且正要作为其他理论的范例。于是，在我们初看起来好象是简单的事实只不过是数量极大的基本事实的结果，这仅仅是偶然性规律为共同的目的而作出的配合。但是，

* a penelope's web. 在希腊神话中，珀涅罗珀是奥德修斯(Odysseus)忠贞的妻子，奥德修斯外出二十年未归，珀涅罗珀相信他一定会回来。在此期间，为了谢绝求婚者，她作辞说要给奥德修斯的父亲织寿衣(珀涅罗珀之网)，待织成之后，才能作出改嫁的决定。为了拖延时间，她白天忙着织网，晚上又把白天织好的网拆掉。——译者注

物理学定律会采取全新的面目；它不再只是微分方程，它具有统计规律的特点。

也许我们还要构造一种全新的力学，我们只不过是成功地瞥见到它，在这种力学中，惯性随速度而增加，光速会变为不可逾越的极限。通常的比较简单的力学可能依然是一级近似，因为它对不太大的速度还是正确的，以致于在新动力学中还可以找到旧动力学。我们不必后悔相信了那些原理，因为太大的速度对于旧公式而言总还只是例外而已，在实践中最可靠的办法还是象我们继续相信它们那样去行动。它们是非常有用的，有必要为它们保留一席之地。倘若决定完全排除它们，就会使人们失去宝贵的武器。我匆忙得出结论说，我们还未达到这种地步，直到目前为止，并没有什么东西证明那些原理不会摆脱冲突，从而取得胜利并且保持完整。^①

^① 关于数学物理学的这些见解是从我的圣路易斯讲演中节录的。（译者附注：彭加勒于1904年9月在美国圣路易斯国际技艺和科学博览会上发表了题为“数学物理学的现状和未来”的讲演。）

第三编 科学的客观价值

第十章 科学是人为的吗？

1. 勒卢阿先生的哲学

怀疑论者的存在有许多理由吗，我们应当把这种怀疑论推向极端或者中途而止吗？走极端是最诱人、最容易的解决办法，这与对搭救遇难船只上的一切都丧失信心的许多人所采取的解决办法一模一样。

在受这种倾向启发而产生的著作中，首推勒卢阿(Le Roy)先生的著作。这位思想家不仅是哲学家和享有盛誉的作家，而且还具有精密科学和物理学的深邃知识，他甚至在数学发明方面也显示出罕见的才能。

勒卢阿先生的学说引起了为数众多的议论，现在让我们用几句话概述一下他的学说。

科学仅仅是由约定组成的，科学表面上的确实性只是归因于这种情况；科学事实是科学家人为的产物，科学定律更有理由是这样。因此，科学不能教导我们以任何真理，它只能作为行动规则为我们所用。

在这里，我们看到了称之为唯名论的哲学理论；在这一理论中并非一切都是虚伪的，我们必须相信它的合理方面，离开合理方面，则不应随波逐流。

这并非一切；勒卢阿的学说不仅是唯名论的，此外还有其他特点，它无疑受柏格森(Bergson)的反理智主义的影响。对勒卢阿来说，理智由于它的所有接触而发生畸变，这对于其必要的“言语”工具来说则更为正确。实在只存在于我们短暂而变动的印象之中，这种实在当我们与之相接触时，它便会悠然而逝。

勒卢阿还不是一位怀疑论者；如果他把理智看作是完全无能为力，那只不过是把更大的地盘给予其他认识源泉，例如感情、情绪、本能、信仰。

不管我多么敬重勒卢阿先生的才干，不管这种论点多么独出心裁，但是我还是不能全盘接受它。当然，我与勒卢阿先生在许多观点上一致，他甚至多处引用我的著作以支持他的观点，对此我决无意加以拒绝。我本人只想说明一下，我为什么不能在各个方面与他并肩而趋。勒卢阿先生常常抱怨别人指责他为怀疑论者，尽管这种责难也许是不公正的，却不能不如此。反对他的那些表面现象难道不正是这样吗？勒卢阿先生在理论上是一个唯名论者，而在情感上却是一个实在论者，只是由于信仰的绝望作用，他似乎摆脱了绝对的唯名论。

排斥分析和“言语”的反理智主义哲学甚至宣布其自身亦是不可言传的；这种哲学本质上是内心的，或者至少说来，只有它的否定结论可以传达；对于外部观察者来说，它采取怀疑论的具体形式，这又何足为怪呢？

这种哲学的弱点就在于此；如果这种哲学力求保持自信，那么它的力量就要消耗在否定和激情的呐喊中。每一个作者都可以重复这种否定和这种呐喊，可以改变它的形式，但却不能附加任何东西。

可是，保持缄默不是更合乎逻辑吗？请留意，你已经写出了

长篇文章；为此，必须使用词汇。由此看来，与毫无哲学头脑而单纯活着的动物相比，你不是更加东拉西扯，最终离生命和真理更为遥远吗？这种动物岂不是成了真正的哲学家吗？

无论如何，因为没有一个人画出与真人完全一样的肖像，我们难道能得出结论，说最好的画像不必去画吗？当动物学家解剖动物时，他的确“改变了它”。在解剖它时，他宣布他自己从未完全了解它；但是，若不解剖它，他对动物会毫无所知，其结果便没有什么可讲的。

确实，人类具有理智之外的其他力量；从来也没有一个人足以否定这一点。第一个来到者使这些盲目的力量起作用，或者让它们起作用；哲学家必须论及它们；为了谈论它们，他必须了解他能够了解的关于它们的仅有的一点东西，因此他应当看到它们的行动。情况怎么样呢？如果不用其理智，那么用什么观察力呢？感情、本能可以指导理智，但却不能使理智变得毫无用处；感情、本能可以指挥眼之所向，但却不能代替眼睛。可以同意这样一个假定：感情是工人，而理智仅仅是工具而已。可是，理智即使对于盲目力量的行为来说是不必要的，但至少对于哲学思维来说，难道不是必不可少的工具吗？因此，说哲学家实际上是反理智主义者，这是不可能的。也许我们将宣称行动是“至高无上的”，但是得出此结论的，却总是我们的理智；接着行动的优越地位，理智也将保持其“思维之箭”的优势。这也是一种并未受到轻视的最高权力。

请原谅这些简短的反应，也请原谅反应的简洁，因为它们几乎没有触及问题。理智主义的作用并不是我希望研讨的课题：我希望谈谈科学，对科学没有什么可怀疑的；根据定义，也可以这样说，科学是理智主义的或者根本不是理智主义的。明确地讲，

问题在于科学是否存在。

2. 科学，行动规则

在勒卢阿先生看来，科学仅仅是行动规则而已。我们没有能力认识任何事物，而且还要投入其中，于是我们不得不有所行动，不顾一切地建立起规则。正是这些规则的总体，即是所谓的科学。

例如，人们为了娱乐，便制定了游戏规则，象博奕之类的规则，这些规则比科学本身更为严格，它们能够以普遍同意为其存在的证据。同样，当我们无法作出选择，而又不得不作出选择时，我们就掷硬币，由其正反而决断。

与科学一样，博奕规则确实是一种行动规则，但是任何人试作一下比较，难道看不到它们的差别吗？游戏规则是一种任意的约定，即使采取相反的约定，**亦无妨碍**。与此不同，科学规则却是一种富有成效的行动规则，需要附带说明的是，至少就一般情况而言，如果反其道而行之，就不会成功。

如果我说，欲制取氢，使酸作用于锌，那么我就详细说明了一个成功的规则；假若我说，使蒸馏水作用于金，这也是一个规则，只是它不会成功。因此，如果科学的“处方”象行动规则一样具有价值，那是因为我们知道，它们会取得成功，至少就一般情况而言是这样。可是，要认识这一点就是要认识某些事物，那么，为什么要告诉我们，说我们不能认识任何事物呢？

科学能够预见，并且正因为它能够预见，所以它才是有用的，才能作为行动规则使用。我了解得很清楚，科学预见常常与事实相矛盾；这表明，科学是不完善的，如果我附带说，科学始终是这样，我至少确信，这是一个永远也不会被否定的预言。科学家所犯的错误总是比随便作预言的预言家为少。此外，科学进步虽

然缓慢，但却是持续不断的，以致科学家尽管越来越大胆地预言，但所犯错误反而越来越少。这虽则微不足道，但却是充分的。

我清楚地知道，勒卢阿先生在一些地方曾经说过，科学比人们设想的那样更为经常地犯错误，慧星有时蒙骗了天文学家，科学家显然也是人，他们不愿意谈他们的错误，如果他们谈了错误，他们将会算出，其失败多于胜利。

勒卢阿先生当时显然弄巧成拙。如果科学没有取得成功，它不能作为行动规则，那么它从何处获得它的价值呢？因为科学是“充满活力的”，也就是，因为我们热爱它和相信它吗？炼金术士具有制造黄金的处方，他们喜欢并信仰这些处方，而我们的处方是好处方，因为它们取得了成功，尽管我们的信仰不怎么强烈。

无法逃脱这些进退维谷的处境；或者科学不能作出预见，而且作为一种行动规则毫无价值；或者科学能程度不同地勉强作出预见，而且作为一种认识手段并非毫无价值。

人们甚至不应该说行动是科学的目的；我们也许从未对天狼星施加任何影响，我们难道能够以此为借口而责难对于天狼星的研究吗？相反地，依我之见，认识才是目的，而行动则是手段。我自己庆幸工业的发展，不只是因为工业为科学的倡导者提供了一个有力的证据，尤其是因为工业给予科学家以自信心，工业向科学家开拓了广阔的经验领域，使他们在那里制服极为庞大的自然力。没有这种稳定因素，谁知道科学家被一些故弄玄虚的新奇事物的幻想所诱惑，是否会离开坚实的基础呢，还是相信他们只是作了一场梦，是否会陷入绝望呢？

3. 未加工的事实与科学的事实

在勒卢阿先生的论点中，最荒谬的就是主张**科学家创造事实**；

而且这又是其主要论点，是最引写人讨论的论点之一。

他也许会说(我完全相信，这是一个让步)，科学家并没有创造未加工的事实，但他们至少创造了科学的事实。

未加工的事实和科学的事实之间的这种区别，据我看来，似乎并非自然而然是不合理的。但是，我首先要抱怨，其界限既不能严格地、也不能精确地划出；然而，作者似乎假定，未加工的事实不是科学的，而是科学的外围。

最后，我不能承认下述观点：科学家之所以能自由地创造科学的事实，是因为给予科学家的正是未加工的事实。

勒卢阿先生所举的例子使我极为惊讶。第一个例子来自原子运动。原子竟被选来作为事实的例子！我公开声明，这种选择使我十分为难，对此我宁可一言不发。我显然误解了作者的思想，我不能够富有成效地讨论它。

第二个例子是日蚀，在这里，未加工的现象是光亮和阴影的变化，可是天文学家若不引入两个外来的要素，即时钟和牛顿定律，就不能介入其中。

最后，勒卢阿先生引用了地球的自转；我们若说这不是事实，他必定会反驳说：地球自转无论对于坚信它的伽利略来说，还是对于否认它的宗教裁判所的审判官来说都是一个事实。问题依然是，在与刚才所讲的相同的意义上，这不是一个事实，若给两种说法同样的名称，则必然使作者本人陷入混乱之中。

于是，这里有四个等级：

1)不学无术的人说，天变暗了。

2)天文学家说，日食发生在九时。

3)天文学家又说，日食发生在根据由牛顿定律制定的表格所推算出的时间之内。

4)伽利略最后说，日蚀是地球绕太阳旋转的结果。

可是，未加工的事实与科学的事实的界限在那里呢？若读勒卢阿的论文，人们会相信，这个界限在第一等级和第二等级之间，但是谁看不到，第二等级和第三等级存在着较大的间隔，第三等级和第四等级的间隔更大。

容许我引用两个例子，也许对我们有点启发。

我借助于可动的反射镜观察电流计的偏转，反射镜把明亮的影像或光点投射到刻度尺上。未加工的事实是：我看到光点移到刻度尺上，而科学的事实则是：电流通过回路。

再举一个例子：当我作一个实验时，我想使结果得到某些矫正，因为我知道，我必定造成了误差。这些误差分为两类，一些是偶然误差，我将通过取平均值来矫正它们；另一些是系统误差，我只有详尽地研究它们产生的原因才能加以矫正。此时，最初得到的事实是未加工的事实，而科学的事实则是在完成矫正后的最终结果。

思考一下这后一个例子，将导致我们把第二等级再加以细分，并用下述说法来代替：

2)我说：日食发生在九时；

2a)当我的钟表指向九时时，日食发生了；

2b)我的钟表慢十分钟，日食发生在九点十分。

这还不是全部。第一等级也应当细分，而且这两个细分的等级之间并非是最小的间隔；一个目睹日食的人感觉到昏暗的印象，这种印象又促使他作出天空变暗了的结论，必须把印象和结论区别开来。在某种意义上，只有第一个事实才是真正的未加工的事实，而第二个事实则已经是一种科学的事实。

而现在的等级已有六个，尽管没有理由止于这个数目，

但是我们将在这里停下来。

开始引起我注意的正是这一点。在六个等级中的第一个等级，事实还是完全未加工的，也可以说是单独的，它与所有其他可能的事实完全不同。从第二等级起，情况已经不再相同了。事实的表述总是要与无数的其他事实相配合。只要语言介入其中，我就能按我的要求，用有限数目的词汇描述我的印象所包含的无限数目的细微差别。当我说，天变暗了，这便很好地描述了我目前感觉到的日食的印象；甚至在色彩的浓淡方面，我也能想象出许多细微的差别，以代替实际显示出来的差别，如果出现了稍微不同的色彩浓淡，我还可以用下述说法表述这一**另外**的事实：天变暗了。

其次应该注意，即使在第二等级，一个事实的表述只能**为真**或**为假**。这并非对任何命题都是如此；如果这个命题是一种约定的表述，那么在该词的本来意义上，便不能说这一表述**为真**，这是由于事实不能与我无关而为真，它之所以为真，只是因为我希望它为真。

例如，当我说长度的单位是米时，这是我颁布的一条法令，它并不是强迫我要弄清楚的一些事情。我想起，我在其他地方已经表明，例如欧几里得公设问题也是同样的。

当别人问我：天正在变暗吗？我总是知道，我应当回答是或否。虽然无限可能的事实都可以容许同一表述：天变暗了，但是我经常能够知道，实际显现出来的事实是否与这一陈述相应。事实分为一些类型，如果有人问我，我所确认的事实属于还是不属于这样一种类型，那么我将会毫不犹豫地予以回答。

毋庸置疑，这种分类是充分任意的，以便给人们的自由和随想留下较大的余地。一言以蔽之，这种分类是一种约定。**这种约**

定被提出来时，假使有人问我：这样一个事实为真吗？我始终能够知道该回答什么，我的答复将由我的感觉的证据给予我。

因此，在日蚀时，若要问：天正在变暗吗？世人都将回答：是。无疑，讲以明为暗，以暗为明语言的人将会回答：否。可是，这又有什么意义呢？

同样，在数学中，**当我拟定了作为约定的定义和公设以后**，一个定理就只能为真或者为假。但是，要回答这个定理是否为真，就不再需要我将要求助的感觉证据，而要求助于推理。

事实的陈述总是可验证的，为了验证，我们要么求助于我们感觉的证据，要么求助于这种证据的记忆。这彻底地表示了一个事实的特点。假若你向我提出问题：这样一个事实为真吗？我将以反问你而开始：是否有必要精确地陈述约定。换句话说，我要反问你：你说什么语言。一旦确定了这一点，我将询问我的感觉，以便回答是或否。但是，作出回答的将是**我的感觉**，而不是你，虽然你对我说：我给你说英语还是法语。

当我们通过接着的等级时，会有某些变化吗？当我观察电流计时，正如我刚才说过的，如果我问一个无知的旁观者：电流正在通过吗？他注视着导线，极力看有什么东西流动；但是，我如果向理解我语言的助手提出同一问题，他将会了解，我的意思是：光点移动吗？于是他便注视刻度尺。

那么，未加工的事实陈述和科学的事实陈述之间有什么差别呢？其差别正如同一个未加工的事实用法语陈述和用德语陈述的差别一样。科学的陈述不过是把未加工的陈述翻译成一种主要与通用的德语或法语不同的语言，因为它是供极少数人使用的。

我们还是不要走得太远了。为了测量电流，我可以**使用各种型号的电流计或电力计**。而且，当我说在这个回路中**流动着若干**

安培的电流时，这便意味着：如果我把这样一个电流计接入这个回路，我将看到光点移到刻度a；但是，这同样意味着：如果我把这样一个电力计接入这个回路，我将看到光点移到刻度b。这还意味着许多其他事情，因为电流本身不仅能用力学效应来显示，而且也能用化学、热学、光学等效应来显示。

因此，在这里同一个陈述可以适应于数目极多的完全不同的事实。为什么呢？正因为我承认一个规律，根据这一规律，无论何时这样一个力学效应发生的话，这样一个化学效应也将发生。以前的大量实验从未表明这一规律失败过，从而我认识到，我能够用同样的陈述表示总是密切相关的两个事实。

当有人问我：电流正在流动吗？我能够理解，这意味着：这样一个力学效应将发生吗？但是我也明白，这也意味着：这样一个化学效应将发生吗？然后我将验证，是存在力学效应，还是存在化学效应；这将是无关紧要的，因为在两种情况下，答案必定是相同的。

这一规律是否某一天会被证伪？是否能够觉察到，力学效应和化学效应二者的一致不是永恒的？到那一天，将必然要改变科学语言，以便使它从严重的模棱两可的境况中摆脱出来。

此后怎么样呢？用来描述日常生活的普通语言能设想它免除了模棱两可吗？

因此，我们能得出日常生活的事实是语法专家的产品的结论吗？

你若问我：电流存在吗？我将通过试验解决力学效应是否存在的问题，我弄清问题后回答道：是的，电流存在。你立刻就明白，这意味着力学效应存在着，而且我没有检查过的化学作用也同样存在着。现在，假定一种不可能有的事情，让我们设想，我

们确信为真的规律不是真的，化学效应也不存在。在这一假设之下，将存在两种不同的事实，一种是直接观察到的事实，其为真，另一种是推论出的事实，其为假。可以严格地讲，我们创造了第二种事实。这样一来，那种错误是人类在创造科学事实中个人协作的不可避免的成分。

但是，如果我们能够说，所述的事实为假，这正是因为它是我们思想的自由和任意的创造，是隐蔽的约定，在这种情况下，它既不为真亦不为假。事实上，它是可验证的，虽然我没有作出验证，但是我能作到这一点。如果我回答错了，那是因为我回答得太急躁了，我没有来得及询问自然界，只有自然界才知道这个秘密。

实验之后，当我矫正偶然误差和系统误差，使科学事实明白地表示出来时，情况是相同的；科学事实无非是把未加工的事实翻译成另一种语言。当我说，现在是这样一个时刻，这是下述说法的简化：在我的钟表所指示时刻与某星球通过子午线所标志的时刻之间存在着这样一个关系。这种语言约定一经正式通过，当有人问我：现在是这样一个时刻吗？这时回答是或否，将不会取决于我。

让我们讨论第三等级：日食发生在由牛顿定律推算出的表格所示的时间内。这还是语言的一种约定，对于了解天体力学的人或持有天文学家计算出的表格的人来说，这是十分清楚的。若有人问我：日食发生在所预言的时刻吗？我翻翻航海天文历，看到日食发生在九时的预告，便明白问题意味着：日食发生在九时吗？在这里，我没有必要改变我的结论。**科学事实只不过是翻译成方便语言的未加工的事实而已。**

确实，在最后阶段，事情发生了变化。地球自转吗？这是一

一个可验证的事实吗？伽利略和宗教裁判所的最高审判官为了解决争端，他们能够诉诸于他们的感觉吗？与此相反，他们在表面上是一致的，不论他们积累什么经验，他们依然只是在表面上一致，而在解释方面从来也没有一致过。正是由于这个缘故，他们被迫求助于如此非科学的辩论程序。

这就是为什么我想，他们对于**事实**的意见不同：对于他们辩论的地球自转的题目，以及对于我们迄今进行评论的未加工的事实与科学的事实，我们没有权利赋予同一名称。

由以上所述可知，没有必要研究未加工的事实是否是科学的外围，因为既没有无科学事实的科学，也没有无未加工事实的科学事实，科学事实只不过是未加工事实的翻译而已。

于是，人们有权利说科学家创造了科学的事实吗？首先，科学家并没有**凭空**创造科学的事实，他用未加工的事实制作出科学的事实。因而，科学家不能自由而**随意地**制作科学的事实。工人不管如何有本领，他的自由总是受到他所加工的原材料性质的限制。

归根到底，当你说科学事实的这种自由创造，当你把手持钟表积极参与日食现象研究的天文学家作为例子时，你究竟意味着什么呢？你意味着日食发生在九时吗？可是，如果天文学家希望日食在十时发生，事情难道只取决于他，他只需将他的钟表拨快一小时吗？

然而，天文学家若闹此恶作剧，他显然犯下了含糊其词的过错。当他告诉我：日食发生在九时，我理解九时就是由钟表的粗略指示推断出的时刻，而且钟表的摆是用通常的规则进行了一系列的矫正。如果他仅仅给了我粗略的指示，或者如果他作出了与通常规则相反的矫正，那么他就在没有预先告知我的情况下改变

了约定的语言。反之，如果他预先留心告知我，我便没有什么可责难的，但是此时总是用另一种语言表述相同的事实。

总而言之，**科学家就事实而创造的一切不过是他阐述这一事实的语言**。如果他预言了一个事实，他将使用这种语言，对于所有讲这种语言和理解这种语言的人来说，他的预言便摆脱了模棱两可。而且，这种预言一旦作出，它便明显地不依赖于科学家，不管它是否能付诸实现。

勒卢阿先生的论点还留下什么东西吗？还有这样一个问题：科学家积极参与选择有观察价值的事实。一个孤立的事实本身并没有什么重要性，如果人们有理由设想，它有助于预言其他事实，或者更好些，如果在作出预言时，它的检验是一个规律的证实，那么它就变得使人感兴趣了。谁将选择符合这些条件且享有科学城邦受尊敬的荣誉市民权的事实呢？这就是科学家的自由活动。

这还不是一切。我已经说过，科学的事实就是把未加工的事实翻译成某种语言；我还想加一句，每一个科学的事实都是由许多未加工的事实形成的。这已由上述各例充分证明。比如，就日食的时刻而言，我的钟表在日食的瞬间指示的是 α 时刻；在某星最后通过子午线的瞬间，我的钟表指示的是 β 时刻，我们把它作为赤经的来源。在同一颗星通过前述位置的时刻，我的钟表指示的是 γ 时刻。现在有三种不同的事实（还应当注意，它们中的每一个本身都是两个同时发生的未加工的事实引起的；但是让我们忽略这一点）。这样一来，我可以说，日食发生在 $24(\alpha - \beta) / (\beta - \gamma)$ 时刻，从而三个事实组合成一个单纯的科学事实。我可以断言，三个读数 α, β, γ 在我的钟表上指出的是三个不同的时刻，我们对此毫无兴趣，唯一有趣的事情是三者的组合 $(\alpha - \beta) / (\beta - \gamma)$ 。在这个结论中，能发现我的精神的自由活动。

但是,我的能力已经耗尽到如此程度;我不能使这个组合 $(\alpha-\beta)/(\beta-\gamma)$ 具有这样一个值而不具有另外的值,因为我既不能影响 α 的值,也不能影响 β 或 γ 的值,它们强使我把它们作为未加工的事实。

总而言之,事实就是事实,如果它们以证实了一种预言而出现,这并非是我们自由活动的结果。在未加工的事实和科学的事实之间不存在精确的界限;我们只能说,事实的这样一种阐述比另外的阐述更为粗糙,或者相反地,更为科学而已。

4. 唯名论和一般不变性

如果我们从事实过渡到定律,那么很清楚,科学家自由活动的成分将变得更大。但是,勒卢阿先生没有使这种成分变得太大吗?这就是我们将要考察的问题。

我首先回想起他所举的例子。当我说:磷在44度时熔化,我自信我阐述了一个定律;实际上,这恰恰是磷的定义;假使有人发现了一种物质,该物质有磷所具有的其他性质,但却不在44度熔化,那么我将给它另外一个名称,这就是一切,而该定律将依然为真。

当我说自由下落的重物在空间所通过的距离与时间的平方成正比,情况也是这样,我只是给出了自由落体的定义。无论何时该定义不能付诸实现,我将会说,落体不是自由的,而该定律永远也不会错。很清楚,如果把定律降低为那样的东西,那么它们不能用以预言;而且它们会毫无用处,既不能作为认识的手段,也不能作为行动的准则。

当我说磷在四十四度时熔化时,我的意思是:具有这样一种性质(即磷的所有性质,熔点除外)的所有物质都在44度熔化。如

此理解，我的主张的确是一个定律，而且这个定律对我是有用的，因为我如果遇到了具有这些性质的物质，我便能作出预言，它将在44度熔化。

毫无疑问，定律可以被发现其为假。到那时我们将在化学论文中谈道：“有两种物质，化学家长期在磷的名称之下把二者混淆起来；这两种物质只在熔点方面不同。”化学家得到两种物质的分离态显然不是头一回了，他们起初不能区分它们；例如，铈和镨长期混同在狄狄米乌姆(*didymium*)的名称之下。

我不认为化学家很担心，类似于磷的不幸事件总是会发生。假使意想不到的事发生了，两种物质大概不会全然具有**同一密度、同一比热**等等，以致在仔细地确定了密度之后，人们还能够预见熔点。

此外，这是不重要的。需要充分注意的是，只要存在着定律，不管其真假如何，都不能使之处于同义反复。

如果我们不知道地球上一种物质不在44度熔化，可是却具有磷的其他一切性质，那么我们便不能知道在其他行星上，是否不存在该物质，话可以这样说吗？毫无疑问，可以坚持这种说法，而且它暗示着，所述的定律可以作为居住在地球上的我们的行动规则，但是从认识的观点看来，它还不具有普遍的价值，它的重要性只能归因于把我们偶然安置在这个星球上的机会。这是可能的，可是，如果这样，定律就会毫无价值，这并非因为它变成了约定，而是因为它为假。

同样的结论对于落体也是正确的。如果我不知道，在这样一个事件中，落体在别处将是**大概**自由的或**近似**自由的，那么给予依照伽利略定律发生的落体以自由下落的名称，对我来说并没有什么用处。于是，上述定律是这样一个定律，它可以为真或为假，

但是却不能化为约定。

假定天文学家发现了不严格服从牛顿定律的星体。他们将在两种看法之间作出抉择；他们可以说，引力并不十分严格地与距离的平方成反比，或者他们也可以说，引力并不是作用在该星体上的唯一的力，此外还有不同种类的力。

在第二种情况下，牛顿定律将被看作是引力的定义。这是唯名论者的看法。在两种看法之间的选择是自由的，而且要出于方便的考虑，虽然这些考虑常常是如此之强烈，以致实际上几乎没有一点这种自由度。

我们能够把(1)星体服从牛顿定律这个命题分解为两个其他命题：(2)引力服从牛顿定律；(3)引力是作用于星体的唯一的力。在这种情况下，命题(2)肯定是一个定义，它超越了实验检验；但是它却建立在能够进行检验的命题(3)之上。这确实是必要的，由于原命题(1)能预言可检验的未加工的事实。

由于这些技巧，科学家用无意识的唯名论把他们所谓的原理凌驾于定律之上。当一个定律被认为由实验充分证实时，我们可以采取两种态度。我们可以把这个定律提交讨论；于是，它依然要受到持续不断的修正，毋庸置疑，这将以证明它仅仅是近似的而终结。或者，我们也可以通过选定这样一个约定，使命题肯定为真，从而把定律提升为**原理**。为此，程序总是相同的。原来的定律阐述了两个未加工的事实A和B之间的关系；在这两个未加工的事实之间插入了一个抽象的、或多或少虚构的中介物C（例如前例中不可捉摸的实在，即引力）。于是，我们就有A和C的关系，我们可以假定该关系是严格的，它就是**原理**；而C和B的关系依然是需要受到修正的**定律**。

可以这样说，由此结晶而成的原理不再受到实验的检验。它

既不为真也不为假，只是方便而已。

在前面，用那种方法常常得到巨大的利益，可是十分清楚，如果**所有的定律**都被转变为原理，那么科学便会**一无所获**。每一个规律都可以分解为原理和定律，因此很清楚，这种分解无论推得多么远，规律将始终存在。

所以，唯名论具有范围，这点人们必定不能分辨出来，即使他们研究了勒卢阿先生主张的真正字面意义。

科学的迅速考察将使我们更好地了解这些界限是什么。唯名论的看法只有当它是方便的时候，才被证明是正确的；什么时候它才是这样的呢？

实验告诉我们物体之间的关系，这是未加工的事实，这些关系是极其复杂的。为了避免直接正视物体A和物体B的关系，我们在它们之间引入了一个中介物即空间，这样我们便面对着三个不同的关系：物体A与空间图形A'的关系，物体B与空间图形B'的关系，两个图形A'和B'相互之间的关系。这种迂回曲折为什么有利呢？这是因为A和B的关系虽然是复杂的，但它与A'和B'的简单关系几乎没有什么不同；以致这种复杂的关系可以用A'和B'之间的简单关系和另外两个关系来代替，这两个另外的关系也告诉我们：一方面A和A'的差别、另一方面B和B'的差别都是**很小的**。例如，如果A和B是两个天然固体，由于稍稍变形而发生位移，那么我们就便想象两个可动的**刚性**图形A'和B'。这两个图形A'和B'的相对位移的规律是十分简单的，它们是几何学的规律。此后，我们还要补充一点，与A'只有很小差别的物体A由于热效应而膨胀，由于弹性效应而弯曲。正因为这些膨胀和弯曲十分微小，对于我们的头脑来说，它们是比较容易研究的。如果我们希望用同一表述概括固体的位移、膨胀和弯曲，请想一想，我们将需要多么复杂的

语言啊？

A和B之间的关系是一个粗糙的规律，它可以被分解，我们现在有两个定律，它们描述的是A和A'的关系，B和B'的关系，我们还有一个原理，它描述的是A'和B'的关系。正是这些原理的集合被称为几何学。

其他两个问题也需注意。我们现在有两个物体A和B的关系，我们可用两个图形A'和B'的关系来代替它；但是，同样两个图形A'和B'之间的这种相同关系也能够同样很好地用另外两个物体A''和B''之间的关系来代替，即使A''和B''完全不同于A和B也有好处。在许多情况下都是这样。如果原理和几何学未被发明出来，在研究了A和B的关系之后，我们必须重新开始研究A''和B''的关系。这就是为什么几何学如此珍贵的原因。就粗糙的情形来考虑，几何关系能够有利地代替可以被认为是力学的关系，它也能够代替另外的可以被看作是光学的关系，如此等等，不一而足。

然而，不允许人们说：这证明几何学是实验科学；几何学原理是从规律中抽取出来的，在使几何学原理与规律分离的过程中，你人为地把几何学本身从诞生它的科学中割裂开来。其他科学同样具有原理，我们称其为实验科学并没有什么妨碍。

必须承认，不进行这种自称是人为的分离是困难的。我们知道固体运动学在几何学起源中所起的作用；能够因此而说几何学只不过是实验运动学的一个分支吗？而且，光的直线传播定律对于几何学原理的形成也有贡献。难道几何学必须看作是运动学的分支和光学的分支吗？此外，我还想起我们的欧几里德空间，欧氏空间是几何学的固有对象，由于方便的缘故，它被从一定数目的类型中选择出来，这些类型预先存在于我们的思想中，我们称其为群。

如果我们转向力学，我们还会看到数量极大的原理，它们的起源是类似的，它们的有效范围，也可以说“作用半径”，是比较小的，没有理由把它们与原有的力学分开，也没有理由把这门科学看作是演绎的。

最后，在物理学中，原理的作用更为削弱。事实上，只有当原理所起的作用是有利的时候，我们才引入它们。现在它们之所以是有利的，恰恰是因为它们只有几个，由于它们每一个几乎都能代替大量的定律。因此，增加它们的数量是毫无意义的。何况，结局是必然的，为此就需要舍弃抽象而把握实在。

这就是唯名论的范围，该范围是狭小的。

然而，勒卢阿先生固执已见，以另外的形式提出问题。

由于我们的规律的表述随着我们采取的约定而变化，由于这些约定甚至可以修改这些规律的天然关系，因此在复写这些规律时，存在着一些独立于这些约定的东西吗？也就是说，存在着一些可以起到**一般不变性**作用的东西吗？例如，在与我们不同的世界中受教育的生物所提出的虚构会导致创造出非欧几何学。如果这些生物后来突然移居到我们的世界上，它们会观察到与我们相同的规律，但是它们却以完全不同的方式表述这些规律。在两种表述之间本质上还具有一些共同之处，这是因为这些生物与我们的差异还不够大。可以设想更为奇异的生物，将使两种表述系统的共同部分越来越小。从而共同部分将减小到趋于零吗？或者将遗留下不可缩小的被认为是一般不变性的残余吗？

问题要求精确的陈述。人们期望这种表述的共同部分可以用词汇表达吗？很清楚，没有对于所有语言都是通用的词汇，我们也不能以构造我所不了解的一般不变性为托辞，这种一般不变性理应同时被我们以及我刚才提到的那些虚构出非欧几何学的生物

所理解；我们同样不能构造这样一种用语，它能为不懂法语的德国人所理解，也能为不懂德语的法国人所理解。但是，我们有固定的规则，容许我们把法语表述翻译成德语，反过来也是一样。正是为此，人们才编制了语法和词典。也存在着把欧几里德语言翻译为非欧几里德语言的规则，或者如果没有这样的规则，它们也能被制定出来。

即使既无译员亦无词典，如果德国人和法国人在相互隔绝的世界里生活了若干世纪之后突然接触，你能认为，在德语书籍中记载的科学与在法语书籍中记载的科学之间会毫无共同之处吗？法国人和德国人最终无疑会相互了解的，正象西班牙人人侵之后，美洲的印第安人最终了解了他们的征服者的语言一样。

而且，也可以说，即使法国人不学德语，无疑也能理解德语，这是因为在法国人和德国人之间，依然有某种共同之处，由于他们两者都是人。我们还能理解我们假设的非欧几何学家，尽管他们不是人，却仍然是某种具有人性的生物。但是在任何情况下，即便是最低限度的人性也是必不可少的。

这是合理的，可是我将首先注意到，在非欧几何学家身上具有的那一点人性不仅足以使我们有可能翻译他们的**少量**语言，而且足以使我们有可能翻译他们的**全部**语言。

现在，我承认必定存在着最低限度的人性；假定有一种我不了解的什么流体，它渗入到我们的物质分子中间，既无任何作用施加于它，物质分子也不受到来自它的任何作用。又假定有某种生物，它们能感觉到这种流体的影响，而不能感觉到我们的物质的影响。很清楚，这些生物的科学完全不同于我们的科学，寻求这两种科学的共同“不变性”是白费气力。或者，假如这些生物排斥我们的逻辑，例如不承认矛盾律，事情又该怎么样呢？

我有理由认为，审查这一假设毫无意义。

如果我们不把狂想推得太远，假如我们只引入虚构的生物，这些生物具有类似于我们的感觉，能够感觉相同的印象，而且承认我们的逻辑原理，那么我们将能够得出结论，不管它们的语言与我们的语言多么不同，但总能够翻译。现在，翻译的可能性隐含着不变性的存在。翻译就是精确地分离出这种不变性。例如，破译密码就是在进行字母变更时，寻求密件中保留的不变的东西。

现在，很容易理解这种不变者的本性是什么了，一句话就会使我们满足。不变的规律就是未加工的事实之间的关系，而“科学的事实”之间的关系总是要保留与某些约定有关的东西。

第十一章 科学和实在

5. 偶然性和决定论

我不打算在这里论述自然规律的偶然性问题，显然这是一个不能解决的问题，关于这个问题我已经写得很多了。我只希望促使大家注意赋予偶然性一词的各种意义，以及区别这些意义多么有好处。

如果我们考虑任何特定的规律，我们可以预先确定，它只能是近似的。事实上，它是从实验检验中推断出来的，这些检验曾经是，而且只能是近似的。我们总是期望，更精确的测量将促使我们把新项添加到我们的公式中去；这就是所发生的事情，例如在马略特(Marriott)定律的情况下就是这样。

而且，任何规律的陈述必然是不完全的。这一表述应当包括**所有前提**的表述，由于这些前提，一个已知的结果能够发生。我们应当首先描述作实验的**一切条件**，然后才能够陈述定律：如果所有条件得到满足，那么现象就会发生。

只有当我们描述了整个宇宙在瞬时 t 的状态，我们才能确信，我们没有遗漏这些条件中的**任何一个**；事实上，这个宇宙的所有部分都可以对在瞬时 $t+dt$ 必然发生的现象施加或大或小的影响。

现在十分清楚，这样一种描述不应在规律的表述中出现；而且，要是这样作了，规律就会变得无法应用了；假如要求如此之多的条件，那么在任何时刻也绝无实现它们的机会。

而且，因为人们永远不能确定没有遗漏某些基本条件，所以不能说：要是某某条件实现了，这样一个现象将发生；人们只能说：要是某某条件实现了，这样一个现象大概将发生。

引力定律是所有已知定律中最完善的定律，我们以此为例而论之。引力定律能使我们预见行星的运动。例如，当我用它计算土星轨道时，我忽略了恒星的作用，而且在这样作时，我确认没有欺骗我自己，因为我知道，这些恒星太遥远了，以致不能感觉到它们的作用。

接着，我将不太确信地宣布，土星的坐标在这样一个时刻处于某某范围之间。可是，这种确实性是绝对的吗？在宇宙中不会存在一些巨大的物质块，其质量比所有已知恒星更大、其作用可以达到遥远的距离吗？这种物质块可能有非常大的速度，在其影响迄今依然不能被我们感觉到的距离处一直运动，此后有可能突然通过我们附近。它确实会在我们太阳系产生我们不能预见到的巨大扰动。我们所能说的一切就是，这样一个事件完全不可能，然后我们必须使自己限于下述说法：“土星大概将处于天空某点附近”，以此代替“土星将处于天空某点附近”的说法。虽然这种可能性实际上等价于可靠性，但它仍只不过是可能性而已。

由于这一切理由，任何时候也没有一个特定的定律不是近似的和可几的。科学家从来也没有放弃对于这一真理的承认，我们仅仅相信，每一个定律不管其正确与否，都可以用另一个更精确更可几的定律来代替，这种新定律本身将不过是暂时的而已，同样的进程能够无限地继续下去，以致科学在进步中将具有越来越可几的定律，其近似程度将以精确性和可能性与可靠性的差别象你随意选取的那样小而终结。

假如这样考虑问题的科学家是正确的，那么，尽管每一个特

别提到的定律可以被证明是偶然的，能说那些自然定律都是偶然的吗？或者，在得出一些自然定律为偶然的结论之前，人们必须承认这种进步有一个终点吗？科学家由于在追求越来越精确的近似程度中遇到阻碍，他们会在某天洗手不干吗？在超越某种限度之后，他们在自然界中看到的只是变幻莫测的现象吗？

在我刚刚谈过的思想中（我认为它们是科学的思想），每一个定律只不过是**不完善的和暂时的**陈述而已，它必定在某一天被另一个优越的定律所代替，前者只不过是后者粗糙的翻版而已。因此，毫无自由意志干预的余地。

依我之见，似乎气体运动论将为我们提供一个显著的实例。

你知道，在这个理论中，气体的所有性质都可由简单的假设来说明；人们假定，气体的所有分子以很大的速度在每一个方向上运动，其路径为直线，只有当一个分子通过容器壁或其他分子附近时，才发生扰乱。我们粗糙的感觉使我们能够观察到的效应是**平均**效应，用这些平均值可以补偿大的离差，或者最低限度，离差没有补偿是极为不可能的；这样一来，能够观察到的现象遵从简单的定律，例如马略特定律或盖-吕萨克（Gay-Lussac）定律。但是，这种离差的补偿只是或然的。分子不断地改变位置，在这些持续的位移中，分子所形成的径迹接连通过一切可能的组合。这些组合为数极大，它们几乎都适合于马略特定律，只有几个与此背离。这些背离虽能发生，但必须长时期等待才行。如果在一个足够长的时间内观察气体，最终肯定也可以看到对于马略特定律的极短时间的背离。这必须等待多久呢？如果要求计算可能的年数，人们便会发现，这个数目太大了，只写出所使用的数字位数，就需要十位。不要紧，总还是足以作到的。

我不想在这里讨论这一理论的价值了。显然，如果马略特

定律被采用了，那么此后它看来好象只是偶然的，因为它变得不正确的一天终将到来。可是，你能认为气体运动论的信徒就是决定论的敌手吗？远非如此，他们是力学家中最走极端的人。他们所设想的分子遵循确定的路径，只有在力的影响下才离开原来的路径，该力随着距离而变化，服从完全确定的规律。在他们的体系中，既没有为自由或所谓的演变因素留下最小的余地，也没有为可以称之为偶然的任何事物留下最小的余地。为了避免误解，我再附加一句，马略特定律本身没有任何进化；在我不知道多少世纪之后，它失去其真；但是在一秒的若干分之一后，它又复归为真，并且在不可胜数的世纪内亦为真。

由于我讲了演变一词，让我们来除掉另一个误解。人们常说，谁知道规律是否不演变？谁知道是否我们不会在某一天发现，石炭纪时代的规律与今天的规律全然不同？对此，我们必须了解什么呢？我们想一想，当我们知道地球的过去状态，从它的现在状态我们能推论出什么？这一推论是如何作出的呢？它是借助于假定为已知的定律推出的。定律是前提和结果之间的关系，定律能使我们同样好地从前提推出结果，即能预见未来，也能使我们同样好地从结果推出前提，即能由现在得知过去。了解恒星现在位置的天文学家能够根据牛顿力学由此推出它们的未来位置，这就是他在制定星历表时所作的东西；他同样能够由此推出它们的过去位置。他这样作出的计算不能告诉他，牛顿定律将在未来丧失其真，由于这个定律恰好是他的出发点；计算也不能告诉他，牛顿定律在过去不为真。关于未来，他的星历表有一天能够受到检验，我们的子孙也许将清楚地认识到，星历表为假。但是，关于过去，关于没有证人的地质学的过去，计算结果由于与我们力图从现在推断过去所得的推测结果相同，它们因其真正的本性便逃

避了每一种检验。这样一来，即使自然规律在石炭纪时代与在当代不相同，我们也将永远无从得而知之，由于我们无法知道石炭纪时代的任何东西，我们只能从这些规律具有持久性的假设推知当时的一些东西。

也许有人会说，这种假设必定会导致出矛盾的结果，我们将不得不放弃它。例如，关于生命的起源，我们可以得出结论：现存的生命是一直存在着的，由于当今的世界向我们表明，生命总是由生命而生；我们也可以得出结论：现存的生命并非一直存在着，由于现存的物理学定律适用于地球的目前状态，这告诉我们：有一个时期，地球太热了，在它上面不可能有生命。但是，这类矛盾总是能够通过两种途径来消除；可以假定，实际的自然规律并非恰恰就是我们所设想的那样；也可以假定，自然规律实际上就是我们所设想的那样，但是它并非总是如此。

显然，我们永远也不能充分清楚地认识自然规律，因此我们不能采纳这两种解决办法中的第一个，我们被迫臆想自然规律的演变。

另一方面，想象一下这样一种演变吧。如果你愿意的话，可以接受下述观点：就有证据的这种演变而言，人类持续的时间够长的了。比如，在石炭纪时代和第四纪时代，**相同的前提**会产生不同的结果。这明显地意味着，前提是完全相同的；要是所有细节都等同的话，那么石炭纪时代与第四纪时代便会无法辨别。显然，这不是所假定的东西。问题依然在于，这一前提伴随着这一附带的细节便产生这样一个结果；同一前提伴随着另一附带的细节便产生另一结果。时间并未没人进入事件之中。

例如，不完美的科学所陈述的规律断言，这一前提总是产生这一结果，无须考虑附带的细节，我说这种定律只是近似的和可

几的，它必然要被考虑到这些附带细节而产生的更近似、更可几的另一个定律所取代。因此，我们经常回过头来谈论上面分析过的过程，假若人们发现了这类事情，那就不会说什么规律演变了，而细节却没有变化。

因此，在这里，偶然性一词具有几种不同的意义。勒卢阿先生虽然记住了这些意义，但并没有充分地区别它们，而且引入了一种新的意义。实验定律仅仅是近似的，如果一些定律在我们看来好象是严密的，那只是因为人们人为地把它们变换成我们在上面称之为原理的东西。我们自由地做出了这种变换，因为决定我们去作变换的随想分明是某种偶然的东西，所以我们便把这种偶然性转移到定律本身。正是在这一意义上，我们有权利说，决定论意味着自由，由于我们可以自由地变成决定论者。也许人们将会发现，这必须给唯名论广阔的余地，而且偶然性一词这种新意的引入对于解决所有这些自然出现的、以及我们刚刚谈到的问题并没有太大的帮助。

我一点也不想在这里审查归纳原理的基础；我十分清楚地知道，我是不会成功的，证明这一原理正如与在没有这一原理的情况下要取得进步同样困难。我只希望表明，科学家如何运用以及如何被迫运用归纳原理。

当相同的前提重现时，相同的结果必定同样地重现；这是归纳原理通常的陈述。但是，要把归纳原理缩减为这些话，该原理就无用了。因为人们能够说，要使相同的前提重现，有必要使整个环境重现，由于没有一个完全无差别的事物，所以有必要严格地重现所有细节。因为这样的事永远也不会发生，所以该原理不能应用。

因此，我们应当修改我们的表述说：假若前提A一旦产生了结果B，那么与A稍微不同的前提A'将产生与B稍微不同的结果B'。

可是，我们如何辨认前提A和A'是“稍微不同的”呢？如果某一环境能够用数来描述，这个数在两种情况下有非常接近的值，那么“稍微不同的”这一用语的意义是相对清楚的；于是该原理表明，结果是前提的连续函数。作为一种实际规则，我们达到了这个我们有权利进行内插的结论。事实上，这就是科学家每天所做的事情，没有内插法，整个科学将是不可能的。

还要论述一件事。我们所探求的规律可用曲线来描绘。实验告诉我们这个曲线的某些点。根据我们刚才叙述的原理，我们相信这些点可以用一条连续的曲线连结起来。我们可凭目视描绘出这条曲线。新实验将给曲线提供新点。如果这些新点在我们原先描绘的曲线之外，我们将修改我们的曲线，但是并没有放弃我们的原理。无论点多么多，我们总可以通过任意点引出一条连续的曲线。毫无疑问，如果这条曲线太不规则，那么我们会感到震惊（我们甚至会怀疑实验有误差），可是并没有直接认为原理错了。

此外，在一种现象的细节当中，也有一些我们认为是微不足道的东西，如果A和A'仅仅在这些附带的细节方面有差别，我们将认为它们二者是稍微不同的。例如，我弄清了氢和氧在电火花的影响下能够化合，我确信，尽管木星的黄经可以在空间显著地改变位置，但是这两种气体仍能重新化合。例如，我们假定，遥远天体的状态对于地球上的现象不会有可以感觉到的影响，事实上这似乎是不可缺少的，但是存在着一些场合，在这些场合下，实际上无关紧要的细节的选择容许更大的任意性，或者如果你愿意的话，也可以说需要更多的智慧。

还应注意的一点是：假如在自然界中不存在相互类似或几乎相同的大量物体，例如，假如我们不能从一些磷推断另外一些磷，那么归纳原理将无法应用。

如果我们深思一下这些需要考虑的事情，那么决定论和偶然性的问题似乎以新的面目呈现在我们眼前。

假定我们能够把宇宙中的一切现象包括到时间的序列之中。我们能够设想被称之为**序列**的东西；我的意思是指前提和结果之间的关系。我不希望讲恒定关系或规律，我分别（也可以说单独）面对所认识的不同序列。

然后我们能够辨认出，在这些序列中没有两个是完全相同的。正如我们刚刚叙述过的，如果归纳原理为真，那么将会有几乎相同的东西，并且可以并驾齐驱归入一类。换句话说，可以作出一个序列的分类。

决定论最终可以归并为这样一种分类的可能性和合理性。这就是前面的分析留下的一切。也许在这一有节制形式之下，决定论似乎不会使伦理学家闻风丧胆。

无疑可以说，我们经过一段迂回又不得不回到了勒卢阿先生的结论上：我们是自发的决定论者，在一段时间之前，我们好象还是反对这一结论的。事实上，所有分类都可以设想为分类者的积极干预。我同意，可以坚持这一点，可是在我看来，这种迂回似乎并非无用，它多少有助于启发我们的思想。

6. 科学的客观性

我想用这节的标题提出我要达到的问题：什么是科学的客观价值？就客观性而言，我们首先应该了解些什么呢？

保证我们所生活的世界的客观性就在于这个世界对于我们和其他思维者是共同的。由于我们与其他人相交流，我们从他们那儿接受了现成的推理；我们知道，这些推理并非来源于我们，同时我们也清楚地认识到，它们是象我们自己一样的有理性的人的

成果。因为这些推理看来好象适合于我们感觉的世界，所以我们认为，我们可以推出这些有理性的人象我们一样看到了相同的事物；于是我们知道我们并没有作梦。

因此，这就是客观性的第一个条件：客观的东西必定对于多数精神是共同的，因而能由一人传达给其他人，由于这种传达只能通过“交谈”，可是，这种“交谈”却引起了勒卢阿先生的极大怀疑。所以，我们甚至被迫得出结论：不交谈，就没有客观性。

其他人的感觉对我们来说是一个永恒封闭的世界，我们无法验证，我称之为红色的感觉与我的邻人称之为红色的感觉是相同的。

假定一个樱桃和一株红罂粟使我产生了感觉A，而使他产生了感觉B。相反地，一片叶子使我产生了感觉B，而使他产生了感觉A。十分清楚，我们将永远对此一无所知，由于我把红色称为感觉A，把绿色称为感觉B，而他则称第一个为绿色，第二个为红色。为了补偿，我们能够确定，在他看来与在我看来一样，樱桃和红罂粟产生了相同的**感觉**，由于他对他的感觉给以相同的名称，而我对我的感觉也给以相同的名称。

因此，感觉是不可传达的，或者毋宁说，感觉的纯粹的质是不可传达的、永远无法解释的。可是感觉之间的关系并非如此。

从这一观点看来，凡是客观的东西都缺乏一切质，仅仅是纯粹的关系。当然，我不至于走得太远，说什么客观性只是纯粹的量（这就不得不扯得太远了，以致关系的本性遂成问题），但是我们听说，某一个人多么得意忘形，竟说什么世界只不过是微分方程式而已。

虽则对这种荒谬的主张持有保留，我们仍然必须承认，没有什么东西是客观的，客观的东西是不能传达的，因此，唯有感觉

之间的关系才会具有客观的价值。

也许有人会说，审美感对整个人类是共同的，它证明了，我们感觉的质对于所有人来说也是相同的，因此是客观的。可是，如果我们思考一下这个问题，我们便会看到，上述证明是不完善的；被证明的东西在于，无论在让和皮埃尔给以同一名称的感觉而言，或者就这些感觉的相应组合而言，在让身上和在皮埃尔身上同样能够激起这种审美感；因为这种情感在皮埃尔身上与他称之为红色的感觉A相联系，同样地，它在让身上与他称之为红色的感觉B相联系；或者更好一点，因为这种情感并不是由感觉的质本身所激起，而是由我们经受无意识印象的感觉关系的和谐组合所激起。

这样一种感觉是美的，并不是因为它具有这样一种质，而是因为它在我们观念联系的基本材料中占据这样一个位置，以致于如果不使处于导线另一端且相应于艺术情感的“接收机”工作起来，它就不能被激发。

无论我们采取道德的观点、美学的观点或是科学的观点，事情总是相同的。除了对所有人都是同一的事物以外，没有什么事物是客观的；现在，只有能够比较，只有这种比较能够转化为从一个精神可以传达给另一个精神的“交换货币”时，我们才能说这样的同一性。因此，除了通过“交谈”可以传达的事物即可以理解的事物以外，再也没有任何事物具有客观的价值了。

然而，这只是问题的一个方面。完全无序的集合没有客观的价值，由于它是不可理解的，但是，即使是有序的集合，如果它不与实际经验过的感觉相对应，那么它也不再具有客观的价值。在我看来，提出这个条件似乎是多余的，要不是最近无人坚持物理学不是经验科学，我也许还想不到这一点。尽管这一见解没有

机会为物理学家或哲学家所采纳，但是最好还是警告一下，以便不要让他们在斜坡上滑得太远了。因此，两个条件必须得到满足，第一要把实在与梦幻分离开来，第二要把实在^①与传奇小说加以区别。

现在，什么是科学呢？我在前文中已经解释过了，科学首先是一种分类方法，是把表面孤立的事实汇集到一起的方法，尽管这些事实被某些自然的和隐秘的亲缘关系约束在一起。换言之，科学是一种关系的体系。我们刚才已经说过，唯有在关系中才能找到客观性；在被视之为彼此孤立的存在中寻求客观性，只能是白费气力。

由于科学只能使我们认识到关系，便说科学不能有客观价值，这是倒行逆施的推理，因为严格地讲，科学只是那种能够被看作为客观的关系。

例如，为了称呼外部对象，人们发明了**客体**这个词，外部对象是真实的**对象**，而不是稍纵即逝的现象，因为它们不仅是感觉群，而且是用不变的结合物粘结起来的群，正是这种结合物，而且只有这种结合物才是客体本身，这种结合物就是关系。

因此，当我们问什么是科学的客观价值时，这并不意味着：科学使我们认识到事物的真实本性吗？而是意味着：科学使我们认识到事物的真实关系吗？

对于第一个问题，没有一个人会毫不犹豫地作出否定的回答；但是我想我们可以更进一步：不仅科学不能使我们认识到事物的本性，而且无论什么东西也不能使我们认识到它，即使那一种神灵知道它，也无法找到描述它的词汇。不仅我们不能揣摩出

^① 我在这里使用了“实在的”一词，它是“客观的”同义词，我这样的用法与一般习惯相一致，我也许错了，我们的梦虽然是实在的，但它们并不是客观的。

答案，而且即使有人把答案给予我们，我们也不可能理解它；我甚至扪心自问，我们是否真正地理解这个问题。

因此，当一种科学理论自命能使我们认识热是什么、电是什么或生命是什么时，则可预先断定它必将失败；它所能给我们的仅仅是粗糙的印象。所以，它是暂时的、易于摧毁的。

第一个问题是无理的，还剩下第二个问题。科学能够使我们认识事物的真实关系吗？科学所结合在一起的东西能够被分离开来吗，科学所分离开来的东西能够被结合在一起吗？

为了弄清楚这个新问题的意义，必须涉及上面讲过的关于客观性的条件。这些关系具有客观的价值吗？这意味着：这些关系对所有人都是相同的吗？它们对我们的后人还将是相同的吗？

很清楚，它们对科学家和对不学无术的人来说并不是相同的。可是，这是不重要的，因为假如不学无术的人没有立即理解它们，科学家可以成功地用一系列实验和推理使他理解它们。重要的事情是，所有通过作实验了解它们的人都能够有一些地方取得一致。

问题在于必须明白，这种一致是否是持久的，我们的后继者是否会保留它。也可以这样询问，今天的科学作出的统一是否会被明天的科学进一步确证。为了证实事情确是如此，我们不能乞灵于任何**先验**的理由；这是一个事实方面的问题，科学已经存在足够长的时间了，我们能够通过探询科学的历史弄清楚，科学建造的大厦是否能够经受时间的考验，或者它是否只是一时的建筑物。

现在我们看到了什么呢？我们乍看起来好象是，理论只持续了一天，废墟堆积在废墟之上。今天理论诞生了，明天它们形成了，后天它们是经典的，第四天它们被废弃了，第五天它们被遗

忘了。可是，只要我们更为细致地观察一下，我们便会看出，这样死去的东​​西就是名副其实的、自称能使我们认识到事物是什么的理论。然而，在它们之中总有某些东​​西幸存下来。如果一种理论能使我们认识到真实的关系，那么人们最终会得到这种关系，而且会发现，这种关系再次以新的伪装出现在另一种取代了旧理论而居于统治地位的理论之中。

只举一个简单的例子：以太波动理论教领我们，光是一种运动；今日之风尚却赞同电磁理论，该理论教导我们，光是一种流。我们没有考虑，我们是否能使它们相协调，是否可以说光是一种流，而这种流又是运动。因为在任何情况下，这种运动大概并不等同于旧理论的支持者所设想的运动，所以即使说旧理论被废弃了，我们也必定认为我们自己是有道理的。可是，在旧理论中也有某些东​​西保留下来，因为在麦克斯韦意谓的假设流与菲涅耳(Fresnel)意谓的假设运动之间存在着相同的关系。因此，存在着某些保留下来的东​​西，这种东​​西是基本的。这就说明了，我们看到现在的物理学家如何毫无困难地从菲涅耳的语言变为麦克斯韦的语言。毋庸置疑，许多被认为是牢固确立起来的联接关系被抛弃了，但是最大多数却保留下来了，并且它们好象必须保留下来。另外，对于这些联接关系来说，什么是它们的客观性的衡量标准呢？好啦，这种衡量标准与我们对于外部对象的信念完全相同。外部对象是这样的实在，以致在我们看来，它们在我们身上引起的感觉似乎是由我们所了解的某种不可破坏的结合物相互结合起来的，而不是由一日的偶然机遇相互结合起来的。同样地，科学也好象向我们揭示出现象之间的其他更为精致、更为牢固的结合物；这些结合物象细丝一样，它们长期存在而未被觉察，但是一旦注意到了，就没有办法不会看到它们。因此，它们和给予

外部对象以实在性的结合物相比，并非是更不真实的；只是最近我们知道，它们是很小的物质，因为在这两种结合物中，一些不能在另一些之前消灭。

例如，可以说，以太并不比任何外部物体更不真实；说这个物体存在着，就是说在这个物体的颜色、味道、气味之间存在着一种牢固而持久的内部结合剂；说以太存在着，就是说在所有光学现象之间存在着一种自然的亲缘关系，这两种说法无论那一个也不比另一个更没有价值。

在某种意义上，科学的综合比通常意义的综合甚至具有更多的实在性，由于科学的综合包括了更多的关系，并且倾向于把部分综合吸收在自身之中。

可以说，科学仅仅是一种分类方法，而且分类方法不会为真，而只是方便的。但是方便的就为真，这种为真不仅对我来说是如此，而且对所有人都是如此；对于我们的子孙来说仍然是方便的东西即为真；最后，不能是偶然的东西即为真。

总而言之，唯一的客观实在在于事物之间的关系，由此产生宇宙的和谐。毫无疑问，这些关系、这种和谐不能认为存在于构想出它们的精神之外。但是，它们仍然是客观的，因为对于所有的思维者来说，它们现在是、将来会变成、或者将来永远是共同的。

这将容许我们返回到地球自转的问题，该问题将同时给予我们用例子阐明以上事实的机会。

7. 地球的自转

我在《科学与假设》中说过：“……因此，地球转动这个断言没有意义，……确切地讲，地球转动和假定地球转动比较方便这两

个命题具有相同的意义。”

这些话引起了不可思议的解释。一些人认为，他们在这些话中看到了托勒密体系的复活，也许还看到了宣布伽利略有罪是有正当理由的。

用心读完全文的人无论如何也不会得出上述结论。例如，地球转动这一真理被放到与欧几里得公设相同的立足点上。这难道是否定它吗？可以用同一语言十分恰当地说：外部世界是存在的与假定外部世界存在更为方便，这样两种主张具有同一个意义。这样，地球转动的假设和外部对象真正存在的可靠性具有相同的程度。

我刚才在第四小节作了说明，现在我们可以再进一步。我们说过，物理学理论所表示的真关系愈多，那么它就愈真。按照这种新原理，让我们考察一下我们所讨论的问题。

是的，不存在绝对空间；因此，这样两个矛盾的假设：“地球转动”和“地球不转动”，它们中的无论那一个都不比另一个更真。在运动学的意义上，为了肯定一个而否定另一个，就不得不承认绝对空间的存在。

但是，如果一个揭示了真关系而另一个则瞒着我们，那么我们仍然能够认为，前者在物理学上比后者更真，因为前者具有更为丰富的内容。现在，关于此事恐怕没有什么疑问了。

看看恒星的视周日运动、其他天体的视周日运动，此外还有地球成扁平状、傅科摆的摆动、旋风的旋转、贸易风诸如此类的现象吧。在托勒密的信徒看来，所有这些现象其间没有结合物；在哥白尼的信徒看来，它们都是由同一种原因引起的。在谈到地球转动时，我坚信所有这些现象具有内部关系，这是正确的，并且继续是正确的，尽管绝对空间不存在，而且不能存在。

关于地球自转就到此为止；就地球公转而言，我们将要说些什么呢？在这里，我们还有三种现象，对托勒密的信徒而言，它们是完全独立的，对哥白尼的信徒而言，它们被归诸于同一来源；它们是行星在天球上的视位移、恒星的光行差以及视差。所有周期是一年的行星容许有差异，而且这一周期恰恰等于光行差的周期，此外还恰恰等于视差的周期，这一切是偶然的吗？采纳托勒密体系的人必定回答“是”；采纳哥白尼体系的人必定回答“否”；后一体系断言，在这三种现象之间存在着结合物，尽管没有绝对空间，这种结合物也为真。

在托勒密体系中，天体运动不能用中心力的作用来解释，天体力学是不可能有的。天体力学向我们揭示的所有天体现象之间的内部关系都是真关系；承认地球不动就不得不否定这些关系，这便会使我们受到愚弄。

因此，伽利略为之而蒙受迫害的真理依然是真理，尽管对庸人来说，它并不具有完全相同的意义，并且它的真意义更为微妙、更为深奥、更为丰富。

8. 为科学而科学

我希望捍卫为科学而科学的准则，并不是为了反对勒卢阿先生；这一原则也许受到他的非难，可是他也修习它，因为他热爱真理，追求真理，达到了没有真理便不能生存的地步。但是，我还有一些想法需要表白。

我们不可能了解所有的事实，因而必须选择那些有了解价值的事实。在托尔斯泰(Tolstoi)看来，科学家任意地作这种选择，而不是以实际应用为目的而作这种选择，这总会是合情合理的。相反地，科学家却认为，某些事实比另外一些事实更有趣，因为

它们使未完成的和谐完满起来，或者因为它们使人们预见到大量的其他事实。要是科学家错了，要是他们无保留要求的事实的这种等级制度只不过是痴心妄想，那么就不会有为科学而科学，因此也就不会有科学。就我而言，我相信科学家是对的，例如，我在前面已经表明什么是天文学事实的高度价值，这并不是因为天文学事实能够实际应用，而是因为它们是所有事实中最富有教育意义的事实。

只是由于科学和艺术，文明才具有价值。一些人面对为科学而科学的准则大惊小惊；可是它却与为生存而生存一样有效，即使生存只是痛苦；假如我们不相信一切欢乐都具有同等地位，假如我们不希望承认文明的目标就是向酒徒提供美酒，那么上述准则甚至便与为幸福而幸福一样有效。

每一种行为都应该有目的。我们必须苦斗，我们必须工作，我们必须为娱乐留有一席之地，这除了自我欣赏而外，至少还为了其他人有一天也可以欣赏。

凡不是思想的东西都是纯粹的无；因为我们只能够思考思想，因为我们用来谈论事物的全部词语只能够表述思想，因此断言存在思想以外的某些事物是一种毫无意义的主张。

然而——对于相信时间的人来说却存在着一个不可思议的矛盾——地质史向我们表明，生命仅仅是两个永恒死亡之间的短暂插曲，即使在这一插曲中，有意识的思想持续了并且将只能持续一瞬间。思想只不过是漫漫长夜中的一线闪光而已。

但是，正是这种闪光即是一切事物。

第三部分

科学与方法

引 言

我在这里所汇集的各种研究，都或多或少地直接与科学方法论问题有关。科学方法不外乎观察和实验；如果科学家有无限的时间供自由支配，那只需要对他说：“看吧，请充分注意”；但是，因为没有时间看每一个事物，尤其是因为没有时间充分看每一个事物，而且因为不看比看错了还要好些，所以他必须作选择。因此，第一个问题是，他应该怎样作这个选择。这个问题不仅摆在物理学家的面前，而且也摆在历史学家的面前；它同样也摆在数学家的面前，能够指导他们的原则是类似的。科学家本能地遵循着这些原则，人们通过深思这些原则，就能够预言数学物理学的未来。

我们还应该明白，如果我们观察一个正在工作的科学家，首先必须了解发明的心理机制，尤其是必须了解数学创造的心理机制，那么我们就更能明确地理解这些原则。观察数学家工作的过程，对心理学家特别有启发。

在所有以观察为根据的科学中，由于我们的感官和仪器不完善，因此叙述必然会出现误差。所幸的是，我们可以假定，在某些条件下，这些误差部分地自我补偿，以致在平均值中消失了；这种补偿是出于偶然性。但是，什么是偶然性呢？这种观念很难被证明是合理的，甚或很难定义它；不过，我刚才就观察误差所说的话表明，科学家不能忽略它。因此，有必要给这个如此不可缺少、而又如此难以捉摸的概念下一个尽可能精确的定义。

总而言之，这是一些适用于整个科学的通则；例如，数学发明的机制与一般发明的机制并没有明显的差异。后面，我将要比较详细地讨论一下与某些专门科学有关的问题，首先讨论与纯粹数学有关的问题。

在研究这些问题的各章中，我要处理一些略微有点抽象的题目。我首先必须谈谈空间概念；每一个人都知道，空间是相对的，或确切地讲，每一个都这样说，但是许多人还以为，仿佛他们相信空间是绝对的；只要稍微思考一下不管用什么方法察觉到他们面临什么矛盾就足够了。

所讲授的问题有其重要性，首先在于这些问题的本身，其次是因为，思考使新观念渗透到未开发的头脑中的最好方式，同时就是思考这些概念是如何被我们的祖先获得的，从而也就是思考它们的真实起源，也可以说，实际上是思考它们的真正本性。为什么儿童一点也不理解科学家常常满意的定义呢？为什么必须给他们其他东西呢？这是我在下一章向自己提出的问题，我认为，它们的答案会启发从事科学的逻辑的哲学家作有益的思考。

另一方面，许多几何学家认为，我们能够把数学还原为形式逻辑的法则。人们为此作出了空前的努力；为达此目的，例如有些人毫不犹豫地把我们概念发生的历史顺序颠倒过来，企图用无穷解释有穷。对于所有公正地探讨这个问题的人来说，我相信我已经成功地证明了这是虚妄的幻想。我希望读者理解这个问题的重要性，原谅我对它所作的枯燥论述吧。

最后关于力学和天文学的两章比较容易读。

力学似乎就要经历一场彻底的革命。原来似乎牢固建立起来的观念受到大胆的革命者的攻击。的确，要马上决定赞成他们恐怕为时尚早，只因为他们是革新者。

但是，阐述一下他们的学说还是有趣的，这正是我试图要作的事情。我尽可能地按照历史顺序；因为新观念似乎太令人惊讶了，除非我看清了它们是如何产生的。

天文学向我们展示了宏伟的景象，提出了巨大的问题。我们不能梦想把实验方法用于它们；我们的实验室太小了。但是，通过与这些实验室容许我们得到的现象进行类比，仍然可以引导天文学家。例如，银河是为数众多的恒星的集合，这些恒星的运动乍看起来似乎是变幻莫测的。但是，由于气体运动论使我们了解到气体分子的特性，我们难道不可以把恒星的集合与气体分子的集合作一比较吗？这样一来，正是通过迂回曲折的道路，物理学家的方法最终可以帮助天学家。

最后，我尽力简短地叙述了法国大地测量学的发展史；我表明，通过大地测量学家的持续不懈的努力以及经常蒙受的危险，他们为我们取得了我们具有的关于地球外形的知识。然而，这是一个方法问题吗？是的，毫无疑问，这个历史事实上教导我们，为了完成严肃的科学工作，必须多么谨慎，为了获得一位新的小数，要花费多少时间和精力啊。

第一编 科学和科学家

第一章 事实的选择

托尔斯泰(Tolstoi)在某处解释,“为科学而科学”在他看来为什么是荒谬绝伦的概念。由于事实的数目实际上是无限的,我们不能了解所有的事实。因此,选择是必要的。于是我们可以让这种选择取决于我们好奇心的纯粹任性;可是让我们自己受实用的指导,即受我们实际的需要、尤其是道德的需要的指导岂不更好;我们的作法与数地球上瓢虫的数目毫无二致吗?

很清楚,对托尔斯泰来说,实用一词并不具有当代大多数人赋予它的意义。对于工业应用、电或汽车的奇迹,他不仅不关心,而且甚至视其为道德进步的障碍;在他看来,实用只不过是使人们变得更完善而已。

依我之见,无论是这一理想或那一理想,不用说都不能使我满意;我既不需要贪婪而自私的富豪统治,也不需要伪善而平庸的民主,这种民主只不过是改头换面而已。假如在那里居住着智者,这些智者毫无好奇心,避免一切过度行为,那么他们不会死于疾病,而将死于无聊。但是,这是各人的好恶,不是我希望讨论的问题。

问题依然没有解决,还会引起我们的注意。如果我们的选择仅仅取决于任性或直接的实用,那么就不会有“为科学而科学”,

其结果甚至无科学可言。但是，那是真的吗？毋庸置疑，有必要作选择。不管我们的能动性如何，事实跑得比我们快，我们不能够捉住它们。当科学家发现一种事实时，在他身体一立方毫米内已经发生了数以亿计的事实。希望把自然包容于科学之内，不啻企图把整体放入局部之中。

但是，科学家相信，事实有秩序可寻，在它们之中可作出明智的选择。科学家是对的，因为要是不那样的话便不会有科学，而科学却存在着。人们只要睁眼看看，工业上的成就虽为许多实用者所促进，假若只有实用者，而没有下述一些人在前面作出的无私贡献，那么工业成就将会暗淡无光。这些人贫困潦倒，从未想到实用，而且具有与任性绝然不同的指导原则。

正如马赫所说，这些贡献使他们的后继者免除了思考的烦扰。仅仅着眼于直接应用的那些人，他们不会给后世留下任何东西，当面临新的需要时，一切都必须重新开始。现在，大多数人都都不爱思考，当本能引导他们时也许是侥幸的，最通常的情况是，当他们追求直接的、永远相同的目的时，本能引导他们比理性指导纯粹的智力更为得宜。但是，本能是惯例，如果思想不使之丰富，人类便不会比蜂蚁有更多的进步。于是，对于那些不爱思考的人来说，有必要去想想，并且因为这些人数量众多，所以必须使我们每一种思想尽可能经常有用，这就是为什么定律愈普遍，其价值也越大。

这表明，我们应当如何选择：最有趣的事实就是可以多次运用的事实，这些事实是具有一再复现机会的事实。我们幸好出生在具有这种事实的世界中。假定不是六十种元素，而是六百亿种，它们没有多少共同之处，另一些是稀有的，但却均匀地分布着。那么，每当我们捡起一块石子时，它都十分可能由某种未知的物

质构成，我们所知道的其他石子的情况对它毫无用处。在每一个新对象面前，我们会象新出生的婴儿一样，照此办理，我们只能服从我们的任性或我们的需要。如果只有个体而无种类，如果遗传不能使子孙与祖先相似，那么生物学家同样会茫然无措。

在这样一个世界中便不会有科学，也许连思想、甚至连生活也不可能，因为进化在这里不能发展保持的本能。幸亏情况并非如此，象我们习惯于所有的好运一样，这是不能鉴别出它的真正的价值的。

哪一些事实是很可能复现的事实呢？它们首先是简单的事实。很清楚，在一个复杂的事实中，一千个条件与机遇结合在一起，只有一个机遇能把它们结合起来，而此机遇几乎不可能。但是，有简单的事实吗？如果有，如何认识它们呢？我们有什么把握确信，我们设想的简单事物没有隐藏惊人的复杂性呢？我们所能说的一切就是，我们应该宁可选择**似乎是简单的事实**，而不选择那些我们肉眼辨认出不相似元素的事实。于是，只能是二者择一：或者这种简单性是真实的，或者元素密切地混合起来，以致于无法区分。在第一种情况下，存在我们重新遇到这个同一简单事实的机遇，无论它在整体上是纯粹的，还是它本身作为元素进入复杂的复合体中。第二种情况下，这种密切的混合同样比异质的混合复现的机遇更多。机遇知道如何混合，而不知道如何分解，不知道如何用许多元素建造秩序井然的大厦，在这个大厦内，某些事物可以区分，但必须特意作成。因此，似乎是简单的事实——即使它们并非如此——将更容易被机遇恢复。

这证实了科学家本能地采取的方法，进一步确证它的也许是，经常复现的事实对我们来说似乎是简单的，恰恰因为我们经常用到它们。

但是，简单的事实在那里呢？科学家在两种极端情形下寻求它，其一是无穷大，其二是无穷小。天文学家找到了它，因为星球之间的距离极其遥远，远到它们中的每一个都看来好象是一个点，远到质的差别可以忽略不计，由于一个点比一个具有形状和质地的物体简单。另一方面，物理学家找到了基元现象，他们想象把物体分割为无限小的立方体，因为问题的条件在从物体的一点到另一点时经受了缓慢而连续的变化，在这些小立方体的每一个间隔内，条件可以认为是恒定的。用同样的方式，生物学家本能地认为细胞比整个动物更为有趣，结果证明他是明智的，由于对于能够认出细胞相似性的人来说，属于各种各样的有机体的细胞比有机体本身更相象。而社会学家却大为困惑，对他来说，元素是人，这太不相似了，太变幻莫测了，太反复无常了，一言以蔽之，太复杂了；此外，历史从来也不会重演。那么，如何选择有趣的、可以重演的事实呢？方法恰恰在于事实的选择。首先需要着手创造方法，并且已想象出许多，因为没有方法会自行产生，于是社会学是方法最多而结果最少的科学。

因此，以规则的事实开始是合适的。但是，当规则牢固建立之后，当它变得毫无疑问之后，与它完全一致的事实此后就没有意义了，因为它们不能再告诉我们任何新东西。于是，正是例外变得重要起来。我们不去寻求相似，我们尤其要全力找出差别，在差别中我们首先应选择最受强调的东西，这不仅因为它们最为引人注目，而且因为它们最富有指导作用。一个简单的例子将使我的思想更加清楚：设一个人想通过观察曲线的若干点来确定曲线。只使自己关心实用的实用者将仅仅观察那些他因某些特殊目标而需要的点。这些点不适当地分布在曲线上，它们在某些区域上密集，在另一些区域上稀疏，以致于不可能用一条连续的线将

它们连结起来，而且对于其他应用而言，它们是无用的。科学家将以不同的方式着手进行。当他希望为曲线本身而研究曲线时，他将使所观察之点规则地分布；当他足以知道他将用一条规则的线连结这些点时，他就会得到完整的曲线。为此他如何进行呢？如果他决定了曲线的端点，他没有停在这个端点的附近，而首先返回另一端，在这两个端点确定后，最有指导意义的点将处于中点，依此类推下去。

法则一经确立，我们首先就要寻找这个法则具有最大失效机遇的情况。因此，在其他理智当中，天文事实和地质经历是饶有兴味的。当遍及十分遥远的空间或回溯十分久长的时间时，我们会发现，我们有用的法则完全失效了，这些重大的失效，有助于我们更好地观察、理解可能发生在我们较近之处，即发生在我们生活和行动中的世界的小角落内的微小变化。由于我们到与我们毫无关系的遥远的国家去旅行，我们将会更清楚地了解这个角落。

但是，我们的目的主要不在于弄清相似和差异，尤其是要认出隐藏在表观偏离之内的类似性。特殊的法则乍看起来似乎是不一致的，然而通过较为详尽的观察，我们看到它们大体上相互类似。就实质而言，各法则是不同的，但是就形式而言，就它们各部分的次序而言，它们是相象的。当我们以这种倾向性观察它们时，我们将看到它们扩大并且有助于包容每一事物。正是这一点，构成了某些事实的价值，这些事实最终使集合完善，表明它是其他已知集合的正确图象。

我将不再进一步坚持，但是这几句话已足以表明，科学家并非随意选择他所观察的事实。诚如托尔斯泰所言，科学家并没有去数瓢虫的数目，因为瓢虫无论多么有趣，其数目也是任意可变

的问题。科学家力图把许多经验和许多思想浓缩在一个小容积内，这就是为什么一本物理学的小册子包含着如此之多的以往的经验，以及几千倍预先已知其结果的可能的经验。

然而，我们迄今还只是看到问题的一个方面。科学家研究自然，并非因为它有用处；他研究它，是因为他喜欢它，他只所以喜欢它，是因为它是美的。如果自然不美，它就不值得了解；如果自然不值得了解，生活也就毫无意义。当然，我在这里所说的美，不是给我们感官以印象的美，也不是质地美和表观美。并非我小看上述那种美，完全不是，而是这种美与科学无关。我的意思是说那种比较深奥的美，这种美在于各部分的和谐秩序，并且纯粹的理智能够把握它。正是这种美使物体，也可以说使结构具有让我们感官满意的彩虹般的外表。没有这种支持，这些倏忽即逝的梦幻之美其结果就是不完美的，因为它是模糊的、总是短暂的。相反，理性美可以充分达到其自身，科学家之所以投身于长期而艰巨的劳动，也许为此缘故甚于为人类未来的福利。

因此，正是对这种特殊美，即对宇宙和谐的意义追求，才使我们选择那些最适合于为这种和谐起一份作用的事实，正如艺术家在他的模特儿的特征中选择那些能使图画完美并赋予它以个性和生气的事实。我们无需担心，这种本能的和未公开承认的偏见将使科学家偏离对真的追求。人们可以梦想一个和谐的世界，但是真实的世界在它之后又何其之远！永远活在人们心目中的最伟大的艺术家希腊人所构想的天空与我们今日所了解的真实天空相比，是多么蹩脚啊！

正因为简单是美的，正因为壮观是美的，所以我们宁可寻求简单的事实、壮观的事实；我们乐于追寻星球的壮观路线；我们乐于用显微镜观察极其微小的东西，这也是一种壮观；我们乐

于寻找过去地质时代的遗迹，它之所以吸引人，是因它年代久远。

我们还看到，象对于实用的渴望一样，对于美的渴望也导致我们作相同的选择。因此，按照马赫的看法，这种思维之经济、劳力之经济是科学的永恒趋势，同时也是美的源泉和实际利益的源泉。我们所赞美的大厦是建筑师知道如何使中间与末端成比例的大厦，在这样的大厦中，支柱承担着加于其上的重量而毫无重压之感，象埃雷克泰米的优美的女像柱一样。

这种一致从何而来呢？在我们看来好象美的事物是其本身最适合于我们理智的事物，因此它们同时是这种理智最了解如何使用的工具，事情只不过是如此吗？或者，这是进化和自然选择的游戏吗？最能使他们的理想与他们的最高利益协调的民族消灭了其他民族并取而代之了吗？所有这一切以追求他们的理想为目标，没有考虑到后果，而这种追求却导致一些人消灭，另一些人称霸。人们被诱使相信它。假如希腊人征服了野蛮人，假如希腊思想的继承者欧洲人统治了世界，那是因为野蛮人爱好刺眼的颜色和聒耳的鼓声，这只能充塞他们的感官，而希腊人则爱好潜藏在感性美之后的理性美，这种理性美使理性变得可靠、有力。

毫无疑问，这样的胜利会使托尔斯泰惊异，他不乐意承认它确实是有用的。但是为真理本身的美而忘我追求真理也是合情合理的，这种追求能使人变得更完善。我清楚地知道，这里存在着错误，科学家并非总是由此引出他能够在其中发现的宁静，甚至在这里也有品质恶劣的科学家。

因此，我们难道必须抛弃科学而仅仅研究道德吗？

什么！当道德家从他们的受人尊敬的地位跌落下去的时候，你能够设想他们是无可挽救的吗？

第二章 数学的未来

为了预见数学的未来，正确的方法是研究它的历史和现状。

在某种意义上，这不正是我们数学家的专业程序吗？我们习惯于**外插法**，这是一种从过去和现在推测未来的方法，因为我们充分地了解这种方法的含义，所以关于它给予我们的结果的有效范围，我们不会冒受骗的危险。

迄今我们已经有了不幸的预言家。他们轻率地重申，所有能够解答的问题都被解决了，除了拾遗之外，没有什么可作的了。幸好，过去的情况使我们消除了疑虑。有人往往以为，所有问题都被解决了，或者至少已列出了一切容许的解的清单。可是，解这个词的意义扩大了，不可解的问题变得最使大家感兴趣，未曾料到的其他问题呈现在眼前。对于希腊人来说，好解就是只使用直尺和圆规的解；后来，它变成用求根法得到的解，接着它又变成只利用代数函数和对数函数的解。这样一来，悲观主义者发现他们自己总是被挫败、总是被迫退却，因此我现在认为不再有悲观主义者了。

所以，我的注意力并不是反对他们，因为他们已经消亡了；我完全知道，数学将继续发展，但是问题在于它怎么发展、在什么方向发展？你将回答：“在各个方向发展”，这部分地正确；如果它完全正确，那可有点骇人听闻了。我们的丰富资料不久便会成为累赘，资料的积累也会造成一堆费解的大杂烩，犹如无知的人而对未知的真理那样莫名其妙。

历史学家、物理学家甚至都必须在事实中作出选择；科学家的头脑只能顾及宇宙之一隅，永远也不能囊括整个宇宙；以致于在自然界提供的不可胜数的事实中，一些将被忽略，另一些则被保留下来。

不用说，在数学中正是这样；几何学家已不能迅速地把握所有呈现在他面前的杂乱的事实；更有甚者，正是他——我几乎要称他的任性——创造这些事实。他把各个元素收集在一起构造全新的组合；一般说来，自然并没有把预先准备好的组合给予他。

毫无疑义，有时会发生这种情况：数学家着手解决问题是为了满足物理学的需要；物理学家或工程师请求他计算某些应用方面的数值。难道能够说，我们几何学家应当仅限于听候命令，而不因我们自己的欢娱来经营科学，只是力图使我们自己迁就我们庇护人的需求吗？假如数学除了帮助那些研究自然的人而外没有其他目的，那我们就只好听候命令了。这种看问题的方式合理吗？这绝不合理；如果我们不为科学而经营精密科学，那我们就不可能创造出数学工具，待到物理学家提出请求的那一天，我们就会无能为力。

物理学家研究一种现象，也不是要等到物质生活的某种急迫需要使它成为他们必不可少的东西；他们是对的。假使十八世纪的科学家因为电在他们的眼中只是好奇的玩意儿而没有实际利益，因此忽略电的研究，那么在二十世纪，我们就不可能有电报，也不可能有电化学、电技术。所以，不得不进行选择物理学家并没有仅仅以实用性来指导他们的选择。可是，他们怎样在自然事实之间选择呢？我们在上一章已作了解释：使他们感兴趣的事实是能够导致发现规律的事实，这些事实因而类似于许多其他在我们看来似乎不是孤立的、而是与另外的东西聚集在一起的事实。

孤立的事实吸引着大家的眼睛，吸引着外行人的眼睛和科学家的眼睛。但是，唯有名副其实的物理学家才知道，如何观察把许多事实联系在一起的结合物是哪一個，这些事实的类似是深刻的，但却是隐蔽的。牛顿(Newton)的苹果故事恐怕不是真实的，而是象征性的；不过，让我们把它当作真实的谈一谈吧。好啦，我们必须认为，在牛顿之前，好多人都看见过苹果落地；没有一个人知道从中得出什么结论。假如没有能够在其背后隐藏着某种东西的事实中作出分辨和选择、以及识别什么正在隐藏着的精神，假如没有在未加工的事实中察觉事实精髓的精神，事实也是毫无成果的。

我们在数学中正好发现同样的东西。从我们正在处理的各种各样的元素中，我们能够得到无数个不同的组合；但是，这些组合中的一个倘若是孤立的，则其毫无价值可言。我们常常含辛茹苦地构造它，但是它却没有效用，也许至多不过是为初等教育提供练习而已。当这个组合在一类相似的组合中找到了位置时，当我们注意到这种类似时，它就完全是另外一个样子了。我们就不再是面对一个事实，而是面对一个定律。在那一天，真正的发现者将不是耐心地建造某些组合的工匠；真正的发现者将是揭示它们的亲缘关系的人。前者看到的只是未加工的事实，只有后者才能察觉到事实的精髓。往往为了确定这种亲缘关系，足以使他创造出新名词，这个名词是有创造力的。科学史向我们提供了大量大家都熟知的例子。

著名的维也纳哲学家马赫(Mach)曾经说过，科学的作用在于产生思维经济，正象机器产生劳力经济一样。这是十分正确的。原始人用他的手指或借助于石子来计算。在给儿童教乘法表时，我们使他们以后节省了用一堆石子进行计算的辛劳。某人已经发

现，用石子或其他东西计算， 6×7 等于42，他特意把这个结果记录下来，因此我们不需要重复它了。他没有白费他的时间，即使他是为消遣而计算的：他作运算只花了两分钟；如果十亿个人在他之后重复作这个运算，那总共就要花费二十亿分钟时间。

于是，事实的重要性用它产生的效益来衡量，也就是说，用它容许我们节省的思维数量来衡量。

在物理学中，具有最大效益的事实是进入十分普遍的定律中的事实，这些事实能够使我们根据定律预见大量的其他事实，在数学中情况正是如此。设想我从事一项复杂的运算，费力地达到了一个结果：如果我由此还不能预见其他类似运算的结果，还不能可靠地指导运算以避免人们在首次尝试中不得不进行的摸索，那么我就没有补偿我的辛劳。另一方面，如果这些摸索本身最终向我揭示出刚刚处理的问题类似于更为广泛一类的其他问题，如果它们一举向我表明这些问题的相似和差异，一句话，如果它们使我察觉到推广的可能性，那么我就没有白费我的时间。因此，这不是我已经赢得的一个新结果，而是一种新的能力。

首先想到的简单例子是代数公式的例子，当我们最后用数字代替字母时，这些公式便把一种类型的数值问题的答案给予我们。多亏它，一次代数运算就使我们省去不断重新开始新的数值计算的辛苦。但是，这只是一个粗糙的例子，我们大家都知道，还有不能用公式表示的、更为珍贵的类似性。

既然在把早就已知的而迄今依然分离的、似乎相互陌生的元素统一起来时，新结果突然在表面上由不一致统治的地方引入秩序，那么它就是有价值的。于是，它容许我们一眼看到这些元素中的每一个以及它在集合中的位置。这个新事实不仅仅因其自身而珍贵，而且唯有它才能使它所结合的一切旧事实具有价值。我

们的精神象我们的感官一样，也是软弱的，如果世界的复杂性不是和谐的，它就会在这种复杂性中茫然无措；它象一个眼睛近视的人一样，只能看到细微末节，在审查下一个枝节前，它又会被迫忘掉先前的每一个枝节，因为它不能囊括整体。唯一值得我们注意的事实是那些把秩序引入到这种复杂性中去的事实，从而使我们的精神可以理解的事实。

数学家把重大的意义与他们的方法和他们的结果的雅致联系起来。这不是纯粹的浅薄涉猎。在解中、在证明中给我们以雅致感的实际上是什么呢？是各部分的和谐，是它们的对称、它们的巧妙平衡；一句话，雅致感是所有引入秩序的东西，是所有给出统一、容许我们清楚地观察和一举理解**整体**和细节的东西。可是，这正好就是产生重大结果的东西；事实上，我们越是清楚地、越是一目了然地观察这个集合，我们就越是彻底地察觉到它与其他邻近对象的类似性，从而我们就有更多的机会推测可能的推广。在意外地聚合了我们通常没有汇集到一起的对象时，雅致可以产生意想不到的感觉；在这里，它再次是富有成果的，因为它这样便向我们揭示出以前没有辨认出的亲缘关系。甚至当它仅仅起因于方法的简单性和提出的问题的复杂性之间的悬殊差别时，它也是富有成效的；于是，它促使我们想起这种悬殊差别的原因，而且每每促使我们看到，偶然性并不是原因，它必定能在某个未曾料到的定律中找到。简言之，数学雅致感仅仅是由于解适应于我们精神的需要而引起的满足，这个解之所以能够成为我们的工具，正是因为这种适应。因此，这种审美的满足与思维经济密切相关。我又一次想到埃雷克泰米的优美的女像柱的比喻，但是我没有必要过于经常地利用它。

正是由于同样的理由，当相当冗长的运算导致出某一简单的

引人注目的结果时，只要我们还未证明，我们即使不能预见完整的结果，至少应该**能够预见**它的大多数特性，那我们就不会心满意足。为什么呢？这个运算似乎把我们想要知道的一切都告诉给我们，究竟是什么东西妨碍我们以此为满足呢？这是因为，在类似的情况中，冗长的运算不再起作用了，与此相反，关于能使我们预见的推理——它常常有一半是直觉的——却不是这样。由于这种推理简短，我们一瞥就可见到它的所有部分，以致我们直接觉察到，为了使它适应于能够出现的同一本性的问题，我们必须改变什么。因此，它能够使我们预见这些问题的解是否将是简单的，它至少能够向我们表明是否值得从事这一运算。

我们刚才所说的一切足以表明，企图用任何机械程序来取代数学家的自由的首创精神，将是多么愚蠢啊。为了得到具有真正价值的结果，刻苦地进行运算，或者拥有整理事物的机械，都是不够的；值得花时间追求的不只是秩序，而是未曾料到的秩序。机械可以抓住未加工的事实，却总是抓不住事实的精髓。

自十九世纪中期以来，数学家越来越渴望得到绝对的严格性：他们是对的，这种倾向将越来越受到重视。在数学中，严格性不是一切，但是没有严格性便没有一切。不是严格的证明毫无价值可言。我想没有人对这个真理持有异议。但是，如果过分照字面来理解严格性，我们可能会得出结论，例如在1820年之前，还不存在数学；这显然是过分了；当时的几何学自发地理解了我们现在用冗长的论述解释的东西。这并不意味着他们根本没有看到严格性；而是他们太迅速地越过了它，要明确地领会它，就必须费心把它讲一讲。

但是，总是需要这么多的次数来讲它；在所有其他人之前第一个强调精密性的人，把我们可以力图仿效的论据给予我们；可

是，如果将来的证明都建立在这个模型的基础上，那么数学论文就会十分冗长；我担心冗长起来，不仅因为我不赞成书刊塞满图书馆，而且因为我担心这样冗长下去，我们的证明就可能失去和谐的外观，我刚才已说明了和谐的用处。

思维经济是我们应该追求的目标，因此只提供仿效的模型还是不够的。需要使我们之后的人能够省却这些模型，不去重复已经作出的论据，而用几句话概括它。而且，这一点时常被达到。例如，有一种到处都可找到的推理型式，而且处处相似。它们是完全精密的，但却颇为冗长。于是有一天，有人想到“收敛的一致性”这个用语，这个用语使这些论据变得不需要了；我们不再必须重复它们了，因为它们可以被理解。这样一来，那些克服过于繁琐的困难的人就给我们双重的帮助：他们首先告诉我们在紧急时象他们那样去作，但是尤其是，他们能够使我们在不牺牲精密性的条件下，尽可能经常地避免象他们那样去作。

我们刚才通过一个例子已经看到名词在数学中的重要性，不过还可以引用许多其他例子。正如马赫所说，人们很难相信，一个精选的名词就能使思维有多么经济。也许我在某处已经说过，数学是把同一名称给予不同事物的艺术。可以说，把这些在内容上不同而在形式上可以相似的事物纳入同一模式中是恰当的。当选好语言时，我们不胜惊讶地发现，对某一对象所作的论证可直接用于许多新对象；这里什么也没有改变，甚至连名词也没有改，因为名称已变成相同的了。

一个精选的名词通常足以消除用旧方法陈述的法则所遇到的例外；这就是为什么我们创造了负数、虚数、无穷远点等等。我们一定不要忘记，例外是有害的，因为它掩盖着定律。

好了，这是我們用以辨認产生巨大结果的事实特征之一。

多产的事实是容许这些巧妙的语言革新的事实。因此，未加工的事实往往不会使人有多大兴趣；我们可以多次指出它，但对科学并没有提供多大帮助。只有当比较有见地的思想家觉察到它所代表的关系，并用名词表征它时，它才会获得价值。

此外，物理学家的作法正好相同。他们发明了“能”这个词，这个词格外富有成效，因为它通过消除例外而创造了定律，由于它把同一名称给予内容不同而形式相似的事物。

在具有最幸运的影响的名词中，我可以挑选出“群”和“不变量”。它们使我们看到许多数学推理的实质；它们向我们表明，在多少情况下，以往的数学家是在不明其义的情况下考虑群的，他们是怎样突然地发现它们不知何故这么接近，他们原以为它们相距甚远呢。

今天，我们可以说，他们处理的是同构群。我们现在知道，在一个群中，内容几乎没有什么令人感兴趣之处，唯有形式才有考虑的价值；当我们了解一个群时，我们从而也就了解所有的同构群；由于“群”和“同构”这些名词把微妙的法则浓缩在几个符号内，并使所有的精神迅速地通晓它，因此转变是直接的，能够以充分的思维经济去完成。此外，群的观念归属于变换的观念。我们为什么要把这样的价值放在新变换的发明上呢？因为从一个定理，能使我们得到十个或二十个定理；这与在紧靠整数的右边加一个零具有同样的价值。

这一切就是迄今决定数学进展方向的东西，将来肯定还会完全一样地起决定作用。为此，所提出的问题的性质同样起一份作用。我们不能忘记，我们的目的应当是什么。按照我的观点，这个目的是双重的。我们的科学与哲学和物理学二者相毗邻，我们为的两个邻居而工作；因此，我们总是看到，而且还将继续

看到数学家在两个相反的方向上前进。

另一方面，数学科学必须反省自身；由于反省自身就是反省创造它的人类精神，因而是有用的；因为数学科学是人类精神从外界借取的东西最少的创造物之一，所以它就更加有用了。这就是为什么某些数学推测是有用的，例如专门研究公设、非寻常几何、特殊函数的推测。这些推测距通常的概念以及距自然界和应用愈远，它们就愈加充分地向我们表明，当人类精神越来越多地摆脱外部世界的羁绊时，它能够创造出什么东西，因此它们就愈加充分地让我们在本质上了解人类精神。

但是，我们必须指挥我们的主力部队向其他方面前进，即向自然界方面前进。

在这里，我们遇到了物理学家和工程师，他们对我们说：“请给我积分这个微分方程吧；我可能在一周后需要它，由于到那时我要完成一项工程。”我们回答说：“这个方程不能归入一种可积类型，你也知道可以积分的方程并不多。”“是的，我知道；但是到那时你有什么作用呢？”通常相互谅解也就够了；工程师实际上不需要无限项的积分；他需要知道积分函数总的概貌，或者说，他只要求实际上能够从这个积分推演出来的某一个数，倘若这个积分已知的话。通常它不是已知的，但是没有它我们也能计算出这个数，只要我们确切地知道工程师需要什么数以及要达到什么近似程度就可以了。

从前，只有当一个方程的解能够借助于有限数目的已知函数表示时，人们才认为解了方程；但是，这种可能性百中难得其一。我们经常能够作的，或者恰当地讲，我们应该经常力图去作的，可以说是**定性地**解决问题；也就是说，力图去了解表示未知函数的曲线的一般形状。

依然要寻找问题的**定量的解**；可是，如果未知数不能用有限的运算确定，那么它总是可以用能使我们计算它的有限收敛级数来表示。能够认为这是它的真实解吗？我们听说，牛顿曾给莱布尼兹(Leibnitz)寄了一个字谜，其内容大致是aaaaabbbbeeeei等。莱布尼兹当然一点也不理解它；但是，我们掌握这个字谜的秘诀，了解它的意思，把它译成现代词语就是：“我能够积分一切微分方程”；而我们却被诱使说，牛顿要不就是十分幸运，要不就是有奇怪的错觉。牛顿只是想说，他能够形成(用特定系数法)一个形式上满足所提出的方程的幂级数。

这样的解今天不会使我们满意，其理由有二：因为收敛太慢，因为相互紧随的项不服从任何规律。相反地， Θ 级数在我们看来好象是完美无缺的，首先因为它收敛很快(这有利于希望尽可能地得到一个数的实用者)，其次因为我们一瞥即见项的规律(这可以满足理论家的审美要求)。

但是，这样一来，就不再有可解的问题和不可解的问题；有的只是**或多或少**可以解决的问题，或者它们可以通过大体上迅速收敛的级数来解，或者它们由大体上和谐的定律来支配。不过，往往发生这种情况：不完美的解把我们引向比较完美的解。有时，级数收敛过慢，以致于计算无法实际进行，我们仅仅得以证明问题的可能性。

因此，这位工程师觉得这是一种嘲弄，这恰恰由于它没有帮助他在规定的日期完成他的工作。他不想了解它是否将会有益于二十二世纪的工程师们。但是，至于我们，我们却不这么认为，能为我们后代省却一天工作，有时也比为我们同代人节约一个小时更为使我们满意。

可以说，有时通过从经验上摸索，我们达到一个充分收敛的

公式。工程师说：“你们还需要什么？”可是，不管怎样，我们仍不满足；我们希望预见那个收敛。为什么？因为只要我们一次知道怎样预见它，我们就会知道下一次怎样预见它。我们成功了；如果我们不能再次有效地预期这样作，那么成功也不过是小事一桩而已。

随着科学的发展，对它作整体的理解也变得更加困难；于是，我们企图把它分成小块，而满足于这些小块之一；换句话说，企图使它专门化。如果我们在这条道路上继续走下去，那就会为科学的进步设置严重的障碍。正如我们所说，科学进步正是由于它的各部分之间未曾料到的结合引起的。过分专门化便会妨碍这些结合。希望象海德堡会议和罗马会议这样的会议，通过使我们彼此之间接触，象向我们打开邻近领域的视野，促使我们把邻近领域与我们自己的领域加以比较，以便探寻我们自己的小群落之外的东西；因此，这样的会议将是对刚才所提到的危险的最好补救方法。

然而，我在一般原则上拖延的时间太长了；现在是逐一详述的时候了。

让我们分别审查一下各门特殊学科，它们联合起来构成了数学；让我们看看，每门学科完成了什么，它向哪里发展，我们对它可以有什么希望。如果原先的观点是正确的，那么我们会看到，过去的最大进展发生在这些学科中的两个结合之时，发生在我们开始意识到它们形式的类似性而不管它们内容的差别之时，发生在它们相互之间如此模仿以致一个获胜而另一个也会受益之时。与此同时，我们可以在同类的结合中预见未来的进步。

算 术

与代数和分析相比，算术的进步很慢，容易看到其中的原因。

连续性的感觉是一种宝贵的指导，但是算术家却缺少它；每一个整数都与其他整数相分离——也就是说它具有自己的独立存在性。它们中的每一个都是一种例外，这就是在数论中普遍定理比较稀少的原因；这也是存在的定理隐藏得比较多，而且比较长期地使研究人员为难的原因。

如果说算术落后于代数和解析，为此最有效的作法是，力图使算术仿效这两门学科，以便从它们的进展中获得好处。因此，算术家应当把与代数的类似作为向导。这些类似是大量的，在许多情况中，即使还没有充分仔细地研究它们是否可以利用，但至少长期以来已预见到它们，甚至两门学科的语言表明，人们已清楚地认识到它们。我们这样谈论超越数，我们这样说明超越数的未来分类是超越函数分类的模型，我们迄今还没有十分明确地看到如何从一种分类过渡到另一种分类；但是，假如人们已认识到它，那么它已经被完成了，它已不再是将来的工作了。

我想起的第一个例子是同余理论，在其中可以找到与代数方程理论完全的平行性。的确，我们将会成功地完成这种平行性，例如，这种平行性必须在代数曲线理论和两个变量的同余理论之间成立。而且，当要解决与几个变量的同余有关的问题时，这将是通向解决许多不定分析问题的第一步。

代 数

代数方程理论还将长期地引起几何学家的注意，人们可以着手研究的方面是很多的、很不同的。

我们不必认为代数走到了尽头，因为它给我们以形成所有可能组合的规则；依然要寻找满足某种条件的有趣的组合。这样一来将形成一种不定分析，其中的未知数将不再是整数，而是多项

式。这时，代数将仿效算术，以致于整数与具有任意系数的整多项式或具有整系数的整多项式可以类比。

几 何 学

看起来，好象几何学包含的无非是在代数或分析中已经包括的东西；几何学事实只不过是另一种语言表达的代数事实或分析事实。因此，可以认为，在我们考察之后，没有多少特别与几何学有关的东西供我们谈论了。这也许是没有明确认识到精心构造的语言的重要性，不理解借助于表示这些事物的方法以及分类它们的方法把什么添加到事物本身之中。

首先，几何学的考虑导致我们提出新问题；如果你乐意的话，这些问题可以是解析问题，但是在解析方面，我们永远也提不出这样的问题。不过，解析因这些问题受益，正如它因满足物理学的需要而必须解决的问题受益一样。

几何学的巨大优点在于，感觉能够帮助思维，有助于发现前进的道路，许多人都偏爱把解析问题化为几何学形式。不幸的是，我们的感觉不能把我们带得很远，当我们想超越经典的三维时，感觉就无法帮助我们。这难道意味着超过感觉希望把我们束缚于其内的有限领域，我们只能依靠纯粹解析，所有大于三维的几何学都是徒劳的和无目的的吗？前一辈的大师们可能回答“是”；今天，我们如此熟悉这个概念，以致于我们甚至能在大学课程中谈及它了，而不会引起过多的惊讶。

但是，它有什么用处呢？这很容易看到：首先，它给我们以十分方便的术语，这种术语简洁地表达了通常解析语言用冗长的词语才能讲清的东西。而且，这种语言使我们用同一名称称谓相似的事物，使我们突出类似性，让我们永远不再忘记它。因此，

这种语言还能使我们在多维空间中找到我们的道路，并使我们联想起视觉空间，对我们来说，多维空间太大了，我们不能看到它，视觉空间无疑只是它的不完善的影象，但不管怎样总是一种影象。与前面所有的例子一样，这里又一次出现了与简单事物的类似性，这使我们能够理解复杂事物。

这种大于三维的几何学不是简单的解析几何学；它不是纯粹定量的，而是定性的，正是在这方面，它变得尤其有趣。有一种学科叫**拓扑学**，它把研究图形的不同元素的位置关系作为它的对象，而不管各元素的大小。这种几何学是纯粹定性的；即使图形不是严格的，是一个孩子粗略地描画的，其定理却依然为真。我们也可以创造出大于三维的拓扑学。拓扑学的重要性是巨大的，但也不能强调得太过分了；拓扑学的主要创始人之一黎曼(Riemann)从中得到的好处足以证明这一点。我们必须得到它在多维空间中的完整结构；我们因而将有一种工具，使我们实际上能在多维空间内观察，以弥补我们的感觉。

假如只讲解析语言，那么拓扑学问题也许还不会产生；或者确切地讲，我弄错了，这些问题确实出现了，由于它们的解答对于一大堆解析问题是必不可少的，但是它们是一个接一个地单独来到的，我们未能察觉到它们共同的结合物。

康托尔主义

上面我已说过，我们需要继续回到数学的第一原理，还说这对研究人类精神有什么好处。这种需要唤起了两种努力，它们在最近的数学编年史上占据了十分重要的位置。其一是康托尔主义，它对数学的贡献是尽人皆知的。康托尔(Cantor)把一种新的考虑数学无穷的方法引入科学。康托尔主义的特征之一在于，它不是

通过建立越来越复杂的构造上升到一般，不是通过构造来定义的，正如学究们所说的，它从**最高类**出发，只通过**最近类和种差**来定义。它在一些人的思想上引起的极端厌恶便由此而来，例如埃尔米特(Hermite)即是其中之一，他特别偏爱的观念就是把数学科和自然科学加以对照。就我们大多数人而言，这些偏见已经烟消云散了，但是却出现了这样的情况：我们意外地碰到了某些悖论，即某些表面上的矛盾，它们会使爱利亚人芝诺(Zeno the Eleatic)和迈加拉学派(the school of Megara)感到高兴。因此，每一个人都必须寻求补救办法。就我个人——不仅是我一个人——而言，我认为，重要的事情永远不是引入不能用有限的词完善定义的实体。不管采纳什么治疗方案，我们都可以指望象请来的医生那样高兴，因为他是仿效绝妙的病理学方面的案例来诊治的。

公 设 的 探 讨

另一方面，人们曾努力列举或多或少隐藏的公理和公设，把它们作为各种数学理论的基础。希尔伯特(Hilbert)教授获得了最辉煌的成果。乍看起来，这个领域似乎是很有限的，当花不了多长时间把目录编好后，就不会有什么事可作了。但是，当我们清点了所有的东西后，就将有许多种分类这一切的方法；一个健全的图书馆总可以找到某些要作的事情，每一种新分类法都会对哲学家有所启发。

在这里，我要结束这一考察了，我不会梦想使它完善。我认为，这些例子足以表明，数学科学通过什么机制在过去取得了进步，它将来必须在什么方向上进展。

第三章 数学创造

数学创造的发生是一个使心理学家强烈感兴趣的问题。它是一种活动,在这种活动中,人类精神似乎从外部世界所取走的东西最少,在这种活动中,人类精神起着作用,或者似乎只是自行起作用 and 按照自己的意志起作用,以致于在研究几何学思维的步骤时,我们可以期望达到人类精神的最本质的东西。

长期以来,人们已意识到这一点,数月之前,由莱桑 (Laisant) 和费尔(Fehr)编辑的《数学教学》杂志开始调查各个数学家的思想习惯和工作方法。当那项调查的结果发表时,我已写完了我的这篇文章的主要轮廓,因此我不可能利用他们的调查结果,我只想说明,大多数证据证实了我的结论;我没有说全部证据,因为当诉诸全体投票时,不可能希望会取得完全一致。

最初的事实会使我们感到惊奇,或者更确切地讲,如果我们还不这样习惯它,它就会使我们感到惊奇。有人不理解数学,这是怎么发生的呢?既然数学有求助于所有正常思想都能接受的逻辑规则,既然数学的证据建立在对一切人都是共同的原理的基础上,既然没有一个不发疯的人会否认这一点,那么在这里为何出现如此之多的不开化的人呢?

并非每一个人都能够发明,这决不是难以理解的。并非每一个人都能够记住一次学到的证明,这也可以略而不提。但是,当把数学推理加以解释之后,并非每一个人都能够理解它,我们想想这件事,似乎是十分奇怪的。可是,大多数人只能够相当吃力地仿效这

一推理：这是不可否认的，中学教员的经验确实不能否认这一点。

进而要问：在数学中为何也可能出错？健全的头脑不应当有逻辑谬误，可是有一些十分敏锐的人，他们对于发生在日常生活各种活动中的简短推理未犯错误，但是却不能毫无错误地仿效或重复数学证明，这些证明虽则较长，但毕竟只是完全类似于他们容易作出的简短推理的累积。我们还需要补充说数学家本人也不是一贯正确的吗？

答案对我来说是显而易见的。设想一个长系列的三段论，第一个的结论是下一个结论的前提：我们将能够理解这些三段论的每一个，在从前提向结论的过渡中，我们没有处于受骗的危险之中。但是，我们在某一时刻遇到一个命题作为一个三段论的结论，在过去一些时间后，我们又偶然地重新遇到它却作为另一个三段论的前提，在这两个时刻之间，这个链条的几个环节将显示出来；这样一来，可能会发生下述情况：我们忘掉了这个命题，或者还要糟糕，我们忘掉了它的意义。因此，我们可以用一个稍微不同的命题代替它，或者在保持同一阐述时，我们却赋予它以稍微不同的意义，我们面临的错误就是由此而来。

数学家常常使用法则。他当然以证明这个法则开始；当这个证明在他的记忆中还很清晰之时，他完全理解它的意义和它的关系，他没有陷入改变它的危险中。可是后来，他相信他的记忆，并进而仅仅以机械的方式应用它；不过，如果他的记忆模糊不清了，他就会统统把它用错。举一个简单的例子，这就象我们之所以有时在运算中出差错，是因为我们忘记了我们的乘法表。

照此看来，数学的特殊能力仅仅是由于十分可靠的记忆或惊人的注意力。它是一种类似于玩惠斯特牌的人的能力，玩牌人记着所玩的牌；或者再进一步，它类似于棋手的能力，棋手能够想

象为数众多的组合，并把它们记在心里。每一个高明的数学家都应该是高明的棋手，反过来也是这样；同样地，他也应该是一位高明的计算家。不用说，这有时会出现；例如，高斯(Gauss)同时是天才的几何学家和十分早慧的、精确的计算家。

但是也有例外；或者确切地讲，我弄错了；在例外不多于常规的情况下，我不能把它们叫作例外。相反地，正是高斯，才是一个例外。至于我自己，我必须承认，即使让我作加法，我也绝对不可能不出错。按同样的方式，我无非是一位蹩脚的棋手；我察觉到，采用某种走法，我会陷于某种危险；我审查了几种其他走法，因另外的理由放弃了它们，而最后我走了第一次考察的步子，其间我忘记了我已经预见到的危险。

换句话说，我的记性不是不好，但它不足以使我或为一位高明的棋手。在一段困难的数学推理中，最高明的棋手也会晕头转向，可是我为什么不会失败呢？显然，这是因为一般的推理步骤引导着我。数学证明不是演绎推理的简单并列，它是按某种次序安置演绎推理，这些元素安置的顺序比元素本身更为重要。如果我具有这种次序的感觉，也可以说这种次序的直觉，以便一眼就觉察到作为一个整体的推理，那么我已无需害怕我忘记这些元素之一，因为它们之中每一个都在排列中得到它的指定位置，而且不要我本人费心思记忆。

于是，在我看来，在重复已学到手的推理时，好象我能够发明它。这往往只是一种错觉；但是，即便如此，即便我本人没有创造它的天赋，就我重复它而言，我本人也是重新发明它。

我们知道，数学次序的这种感觉、这种直觉，使我们推测隐藏的和谐与关系，但它并不是每一个人都具有的。有些人或者没有这种如此难以定义的微妙的感觉，或者没有超常的记忆力和注

意力，因此他们绝对不可能理解较高级的数学。这种人是多数，另一些人仅略有这种感觉，但他们具有非同寻常的记忆力和高度的注意力这样的天赋。他们将一个接一个地记住各种细节；他们能够理解数学，有时也能应用，但他们不能创造。最后，还有一些人或多或少地具有所提到的特殊的直觉，因此，即使他们的记忆力毫无非同寻常之处，他们却不仅能够理解数学，而且可以成为创造者，并试图作出发明，其成功之大小取决于这种直觉在他们身上发展的程度之大小。

数学创造实际上是什么呢？它并不在于用已知的数学实体作出新的组合。任何一个人都会作这种组合，但这样作出的组合在数目上是无限的，它们中的大多数完全没有用处。创造恰恰在于不作无用的组合，而作有用的、为数极少的组合。发明就是识别、选择。

我以前已解释过如何进行这种选择；值得加以研究的数学事实是这样一些事实，通过它们与其他事实的类比，能够导致我们了解数学定律，正象实验事实能够导致我们了解物理学定律一样。它们是向我们揭示其他事实之间意外关系的事实，我们虽然早就知道其他事实，但却错误地认为它们彼此之间是毫无联系的。

在所选择出来的组合中，最富有成果的组合常常是从相距很远的领域取来的元素所形成的组合。我的意思并不是说，把尽可能相异的对象收集到一起就足以作出发明；这样形成的大多数组合都毫无成果。但是，它们之中的某些极稀有的组合却是最富有成果的。

我说过，发明就是选择；但是，这个词也许不完全严格。它使人们想起采购员，在他面前陈放着大量的货样，他逐个审视它们，以便作出选择。这里的货样多得不可胜数，他的整个一生也难以把它们审查完。事情的实际情况并不是这样。无结果的组合甚

至不出现在发明家的思想中。除了他抛弃的一些组合——尽管它们也在某种程度上具有有用组合的特征——之外，在他有意识作出的组合的范围内，仿佛实际上从来也没有无用的东西。这一切就好象发明家是一位复试主考人，他只询问已经通过初试的候选人。

不过，我迄今所说的都是在读几何学家的著作时可以观察到或可以猜测到的东西，当然要动脑筋读。

现在，比较深刻地洞察和观察一下在数学家的心灵中发生了一些什么。关于这一点，回忆一下我自己的情况是最好不过的了。不过，我将只限于讲述我是如何写出我的第一篇关于富克斯(Fuchs)函数的论文的。我请求读者原谅；我正准备使用一些专门的表述，但是读者不要害怕它们，因为没有人强迫他理解它们。例如，我将说，我是在这样的情况下找到了这样一个定理的证明的。这个定理将有一个规范的名子，许多人都不知道它，不过这并不重要；心理学家感兴趣的不是这个定理而是发现这个定理的情况。

我曾用了两周时间力图证明不可能存在任何类似于我后来称之为富克斯函数的函数。我当时一无所知；我每天独自一人坐在我的办公桌前，呆一两个小时，尝试了大量的组合，什么结果也没有得到。一天夜晚，我违反了我的习惯，饮用了黑咖啡，久久不能入睡。各种想法纷至沓来；我感到它们相互冲突，直到成对地结合起来，也就是说，造成了稳定的组合。到第二天早晨，我已确立了一类富克斯函数的存在，它们来源于超几何级数；我只能写出结果，仅花费了几个小时。

接着，我想用两个级数之商把这些函数表示出来；这种想法完全是有意识的和深思熟虑的，与椭圆函数的类比指导着我。我问我自己，如果这些级数存在，它们必须具有什么性质，我毫不费力地获得了成功，形成了我所谓的 θ 富克斯级数。

恰恰在这时，我离开了我当时居住的卡昂，参加了矿业学校主办的地质考察旅行。沿途的景致使我忘却了我的数学工作。到达库唐塞后，我登上公共汽车去某个地方。当我的脚踩上踏板的一刹那，一种想法涌上我的心头，即我通常定义富克斯函数的变换等价于非欧几何学的变换，在我先前的思想中，似乎没有什么东西为它铺平道路。我没有证明这一想法；我坐在公共汽车的座位上，继续进行已经开始的谈话，但是我感到它是完全可靠的。回到卡昂，为了问心无愧起见，我抽空证实了这一结果。

然后，我把注意力转向一些算术问题的研究，表面看来没有取得许多成果，也没有想到它们与我以前的研究有什么关系。我为我的失败而扫兴，于是前往海滨消磨几天时间，想一些其他事情。一天早晨，当我正在悬崖边散步时，一种想法浮现在我的心头，即不定三元二次型的算术变换等价于非欧几何学的变换，它正好具有同样的简洁、突然和直接可靠的特征。

返回到卡昂以后，我深思了这个结果，推导出一些结论。二次型的例子向我表明，存在着富克斯群，这些群不同于与超几何级数对应的群；我看到，我可以把 θ 富克斯级数理论应用于这些群，从而存在着一些富克斯函数，它们不同于当时我知道的、从超几何级数得到的函数。我自然而然地让我自己构造这一个函数。我向它们发起了系统的攻击，一个接一个地攻克了所有的外围工事。有一处外围工事无论怎样进攻还是岿然不动，只有攻陷它才能占领整个阵地。但是，我的全部努力乍看起来只是使困难清楚地呈现在我的面前，事情实际上就是这样。所有这些工作完全是有意识的。

紧接着，我要去瓦莱里昂山服军役；这样，我便从事截然不同的工作。一天，我正在大街行走，曾经使我感到困难的答案突然浮现在我的眼前。我无法立即深入探讨它，只是在服役结束后，

我才开始继续研究这个问题。我已有全部元素，只需排列和整理它们。就这样，我一举写出了我最后的论文，丝毫没有感到有什么困难。

我只限于举这一个例子；多举也无用。关于我的其他研究工作，我可以讲出类似的情况，其他数学家在《数学教学》杂志中所给出的意见只会证实它们。

起初，最为引人注目的是顿悟的显现，这是先前长期无意识工作的明显征兆。在数学发明中，这种无意识工作的作用在我看来似乎是不可否认的，在其他不大明显的情况下，也可以发现它的痕迹。当人们研究一个艰难的问题时，在第一次进攻中往往达不到良好的效果。于是，人们或长或短地休息一下，坐下来重新工作。在起初半小时内，象以前一样，什么也找不到，然后一个决定性的想法突然浮现在脑海。可以说，有意识的工作之所以富有成效，是因为它被打断了，休息使思想生气勃勃、精力饱满。但是，很可能是这样：这种休息充满了无意识的工作，这种工作的结果后来向几何学家揭示出与我所举的例子恰好一样的东西。只是这种揭示不是在散步或旅行时发生，而是在有意识的工作期间发生的，不过它与有意识的工作无关；有意识的工作至多起了兴奋剂的作用，犹如它是一种刺激物一样，它激发了在休息时已经达到的结果，但依然是无意识的，尽管它采取了有意识的形式。

关于这种无意识工作的条件，还可以说明如下：如果一方面有意识的工作期间在它之前，另一方面有意识的工作期间又尾随其后，那么它就是可能的，而且肯定是富有成果的。这些突如其来的灵感（已经引用的例子充分证明了这一点）只有在有意识努力工作若干天之后才会出现，尽管这些努力好象毫无成果，从中也没有得出什么好东西，而且所采取的路线似乎也是完全错误

的。因此，这些努力并不象人们设想的那样一点结果也没有；它们驱动着无意识的机器，没有它们，无意识的机器就不会运转，也不会产生出任何东西。

对于在灵感之后需要第二个时期的有意识的工作，这还比较容易理解。必须使灵感的结果成形，从它们之中推导出直接的结论，整理它们，用语言表达出证明，而尤其必须验证这一证明。我已经谈过伴随灵感的绝对确实性的感觉；在所举的例子中，这种感觉不是骗子，而且通常它的确不会骗人。但是，不能认为这个法则没有例外；这种感觉有时显得很逼真，也往往会欺骗我们，只有当我们企图进行证明时，我们才会发现这一点。当我早晨或晚上躺在床上处于半睡眠状态时，常有一些想法浮想联翩，我特别注意这一事实。

实际情况确是这样；现在，对于这种观念可作下述考察。无意识的自我，或者如我们所说的下意识的自我，在数学创造中起着重要的作用；这可由我们所说的情况中得出。但是，通常认为下意识的自我是纯粹自动的。现在，我们已看到，数学工作不是简单的机械工作，它不能用机器去完成，无论如何不能用机器圆满地完成它。这不只是应用法则的问题和按照某一固定的规律作出许多可能的组合的问题。这样得到的组合为数极多，但却是无用的、麻烦的。发明者的真正工作就在于在这些组合中进行选择，以便消除无用的组合，或者更确切地讲，躲避使他们陷入的困境，而且要使指导这种选择的法则极其精巧、极其微妙。要精确地陈述它们几乎是不可能的；与其说它们可以被表述出来，倒不如说它们可以被感觉到。在这些条件下，怎么能够设想一个机械地应用它们的筛子呢？

第一个假设现在呈现出来：下意识的自我决不劣于有意识自

我；它不是纯粹自动的；它能够识别；它机智、敏锐；它知道如何选择、如何凭直觉推测。我说什么呢？它比有意识的自我更清楚地知道如何凭直觉推测，因为它在有意识的自我失败了的地方获得成功。一句话，下意识的自我难道不比有意识的自我优越吗？你认识这个问题的充分重要性吧。布特鲁(Boutroux)在最近的讲演中表明，它如何出现在十分不同的场合中，对它作肯定的回答会得出什么结论。（也可参见同一个作者所著的《科学与宗教》第313页及其以后各页。）

这种肯定的回答是因我刚才给出的事实迫使我们作出的吗？就我自己来说，我承认我不乐于接受它。那么，让我们重新审查一下那些事实，看看它们是否与另外的解释一致。

可以肯定，在无意识的工作延续了一段时间之后，以一种顿悟的形式呈现在我们脑海中的组合，一般说来是有用的、多产的组合，这似乎是初次印象的结果。由此是否可以得出，通过微妙的直觉推测这些组合是有用的下意识的自我只不过是形成了这些组合呢？或者更确切地讲，下意识的自我是否形成了许多令人毫无兴趣的、依然是无意识的其他组合呢？

按照第二种方式观察下意识的自我，所有的组合都是由于下意识的自我的自动作用而形成的，不过只是有趣的组合才能闯入意识领域。这还是很神秘的。在我们无意识活动的无数产物中，只有一些被召唤通过阈限，其他的依旧在阈限之下，其原因何在呢？这种特权是简单的偶然性给予的吗？显然不是；例如，在我们感觉的所有刺激物中，只有最强的才能引起我们的注意，除非由于其他原因把我们的注意力吸引到不甚强的刺激物。更一般地讲，有特权的无意识的现象，即容许变成有意识的现象，就是直接或间接地最深刻地影响我们情感的现象。

关于教学证明，它似乎只能使理智感兴趣，当我们看到它也乞灵于情感时，可能会感到奇怪。这也许是忘记了数学的美感、数和形的和谐感、几何学的雅致感。这是一切真正的数学家都知道的真实的审美感，它的确属于情感。

那么，被我们赋予美和雅致这一特征的、能在我们思想上激起一种审美情感的数学实体是什么呢？它们是这样的实体：它们的元素和谐地配置，以致精神能够毫不费力地包容它们的整体，同时又能认清细节。这种和谐同时是我们审美需要的满足以及支持、指导我们思想的助手。而且，一个次序井然的整体摆在我们的双目之下，促使我们预见数学定律。于是，我们便达到下述结论：有用的组合恰恰是最美的组合，我意指最能使这种特殊情感着迷的组合，所有的数学家都知道这种情感，但是，对它的亵渎无知到常常嗤笑它的地步。

此外还发生了什么呢？在由下意识的自我盲目形成的大量组合中，几乎所有的都毫无兴趣、毫无用处；可是正因为如此，它们对审美感也没有什么影响。意识永远不会知道它们；只有某些组合是和谐的，从而同时也是有用的和美的。它们能够触动我刚才所说的几何学家的这种特殊情感，这种情感一旦被唤起，便会把我们的注意力引向它们，从而为它们提供变为有意识的机会。

这只是一个假设，可是在这里有可以证实它的观察材料：当一个顿悟抓住数学家的思想时，它往往不会欺骗他，但是正如我说过的，它有时也不经受证据的检验；好了，我们几乎总是注意到，这种人为的观念倘若是真实的，它就会使我们对于数学雅致的自然情感得到满足。

因此，正是这种特殊的审美感，起着我已经说过的微妙的筛选作用，这充分地说明，缺乏这种审美感的人永远不会成为真正的

创造者。

可是，困难并没有完全消失。有意识的自我严格地受到限制，至于下意识的自我，我们不知道它的限制，这就是为什么我们乐于假定，它在短时间内能够作出的各种组合比有意识的脑有整个一生能够完成的组合还要多。可是，这种限制是存在的。下意识的自我能够形成所有可能的组合，其数目之多远非想象力所能及，这种说法可信吗？不管怎样，这似乎是必要的，因为假使它仅仅产生一小部分组合，假使它随意地作出它们，那么我们在它们中能够选择、可以发现的有效组合的机遇就会很少。

有意识的工作总是在所有富有成果的无意识的劳动之前，也许我们应当在有意识的工作的初期寻求解释。请允许我粗略地作一比较，把我们组合中的未来元素想象为伊壁鸠鲁 (Epicurus) 的带钩原子吧。在精神完全休眠时，这些原子是不动的，也可以说，它们钩住了墙壁；因此，这种完全的休眠可以无限地延续下去，没有相遇的原子，从而在它们之间没有任何组合。

与此相反，在表面的休眠和无意识的工作期间，它们中的某些原子脱离墙壁并开始运动。它们通过封闭它们的空间（我正要说房间）向各个方向传播，犹如一群蚊虫，或者你如果喜欢学术上的比喻的话，它们就象气体运动论中的气体分子。于是，它们的相互碰撞可以产生新的组合。

初期的有意识的工作有何作用呢？显而易见，它使这些原子中的某一些可以运动，它把它们从墙壁上卸下来并使它们自由活动。我们认为，我们之所以没有作出有效的组合，是因为要把这些原子集合起来，就要使它们以无数不同的方式运动，即便如此还是找不到满意的集合。但是，通过我们的自由意志使这些原子开始运动之后，它们就不会返回到它们的初始状态。它们自由地

继续它们的运动。

好了，我们的自由意志并非随意地选择它们；它追求一个完全确定的目的。因此，可动的原子并非无论什么样的原子；它们是我们可以合理地期望从中得到所要求的答案的原子。于是，可动原子经受碰撞，从而使它们进入它们之间的组合，或者与在它们的进程中撞击到的其他静止的原子形成组合。我再次请求原谅，我的比喻是很粗糙的，但是我不知道如何用其他方法使我的思想得以理解。

不管情况如何，有形成机遇的组合仅仅是这样一些组合，即其中的元素至少有一个是由我们的自由意志自由地选择出的那些原子之一。现在，很明显，在这些组合中，可以找到我所谓的**有效的组合**。也许这是一种减少原来假设中的悖论的途径。

还有另外的意见。我们仅应用固定的法则，**全部作出了**有点冗长的运算，无意识的工作永远也不会为我们提供这个结果。我们可能以为，完全自动的下意识的自我特别适于这种工作，这是一种全部机械的方法。也许我们夜晚思考乘法因子，我们醒来时必定希望找到预先作出的乘积，或者还希望代数运算——例如证明——可以无意识地被作出来。正如观察所证明的，根本没有这种事。从这些灵感中，从无意识的工作的成果中，人们可望得到的一切只是这样的运算的出发点。至于运算本身，必须在紧随灵感之后的有意识的工作的第二个期间完成，人们在此期间验证这一灵感的结果，推出它们的结论。这些运算的法则是严格的和复杂的。它们要求纪律、注意力、意志，因而要求意识。相反地，在下意识的自我中，则是由我所说的自由统治着，倘若我用自由这个名称称呼绝对缺乏纪律和源于机遇的混乱的话。不过，这种混乱本身却容许未曾料到的组合。

我将作最后的评论：当我在上面发表某些个人的观察材料时，我谈到我在不由自主地工作时的令人激动的夜晚。这样的情况是经常发生的，不过大脑的反常活动不必要由我曾提到的物质刺激物引起。在这样的情况中，人们在他无意识的工作中呈现出的东西似乎可以部分地被过分激动的意识所领悟，可是这并不改变无意识的工作的本性。于是，我们不甚明确地理解了两种机制——如果你愿意的话，也可以说是两种自我的工作方法——的区别是什么。而且，在我看来，我从中能够作出的心理学观察材料似乎在它们的总轮廓上证实了我刚才提出的观点。

的确，这些观点需要证实，因为不管怎样，它们是而且确实依然是真正的假设：对这些问题的兴趣如此之大，以致于我一点也不后悔向读者提出了上述观点。

第四章 偶然性

I

“我们怎么竟敢谈论偶然性的定律呢？偶然性不是一切定律的对立面吗？”贝尔特朗德(Bertrand)在他的《概率运算》一书的开头这样说。概率与可靠性相对立；因此，它是我们不了解的，从而它似乎也是我们无法计算的。在这里至少表面上有一个矛盾，人们就此已经写了许多论著。

首先，什么是偶然性？古人把现象区分为表面上服从一劳永逸地确立起来的、和谐的定律的现象和归咎于偶然性的现象；后者是无法预言的现象，因为它们不服从所有的定律。在每一个领域中，精确的定律并非决定一切，它们只是划出了偶然性可能起作用的界限。在这一概念中，偶然性这个词具有精密的和客观的意义：对一个人来说是偶然性的东西对另一个人来说也是偶然性，甚至对上帝来说也是这样。

但是，这个概念不是我们今天的概念。我们变成了绝对的决定论者，即使那些想保持人类的自由意志权利的人，也让决定论至少在无机界专门统治。每一个现象不管多么微不足道，都有其原因；全能的、对自然定律了如指掌的精神，从世纪开始之时就能预见这个原因。如果这样的精神存在，那我们就无法和它玩机遇比赛；我们必输无疑。

事实上，对这种精神来说，偶然性一词便没有任何意义，或

者确切地讲，就不可能有偶然性。正因为我们软弱和无知，这个词在我们看来才有意义。即使对于我们软弱无力的人类而言，白痴所谓的偶然性也不是科学家所谓的偶然性。偶然性仅仅是我们无知的量度。按照定义，偶然发生的现象就是我们不知道它的规律的现象。

可是，这个定义完全令人满意吗？当头一批古代巴比伦的迦勒底(Chaldean)牧羊人用他们的双眼追踪恒星的运动时，他们直到当时还不知道天文学定律；他们会想到说恒星随意运动吗？如果现代物理学家研究了新现象，如果他在星期二发现了它的规律，那么他会在星期一说这个现象是偶然发生的吗？而且，为了预言现象，我们不是常常求助于贝尔特朗德的所谓的偶然性定律吗？例如，在气体运动论中，我们借助于气体分子的速度无规则变化即随意变化的假设，得到了著名的马略特(Mariotte)定律和盖-吕萨克(Gay-Lussac)定律。所有的物理学家都会同意，如果速度受无论多么简单的基本定律支配，如果分子象我们所说的那样是**有组织的**，如果它们服从某种纪律，那么可观察的定律就会极其复杂。正是由于偶然性，也可以说是由于我们的无知，我们才能引出我们的结论；于是，假如偶然性一词仅仅与无知同义，那意味着什么呢？我们必须因此而作如下说明吗？

“你请求我给你预言所发生的现象。很不幸，如果我知道这些现象的定律，那么我只有通过无法解开的运算作出预言，因而我便会放弃回答你的尝试；但是，因为我交了好运而不知道这些定律，我将会立即回答你。最令人奇怪的是，我的答案将是正确的。”

这样一来，问题必然很清楚：偶然性并非是我们给我们的无知所取的名字。在我们不知其原因的现象中，有一种是偶然发生

的现象，概率运算将会暂时给出它们的信息，另一种不是偶然发生的，只要我们未确定支配它们的定律，我们就无法谈论它，我们必须把上述两种现象区分开来。对于偶然发生的现象本身，通过概率运算给予我们的信息显然将是真实的，即使到这些现象被更充分地了解的那一天也不失其真。

人寿保险公司的理事不知道受保的每一个人何时会死，但是他依靠的是概率计算和大数定律，他没有失望，因为他把红利分给股东。在保险单签字后，即使有一个头脑十分敏锐、言行十分轻率的医生向那位理事揭示出受保人的寿命机运，这些红利也不会丧失。这位医生使经理不再无知，但他并没有影响红利，显然红利不是无知的结果。

II

为了找到一个更好的偶然性的定义，我们必须审查某些事实，我们一致认为这些事实是偶然发生的，概率运算似乎可用于它们；然后我们将研究，它们的共同特征是什么？

我们选取的第一个例子是不稳平衡；如果一个圆锥立在它的顶点，我们清楚地知道，它将倒下去，但是我们不知道它倒向哪一边；在我们看来，似乎只有偶然性才能决定。如果圆锥完全对称，如果它的轴是完全垂直的，如果除重力外它不再受其他力的作用，那么它根本不会倒下去。但是，对称性的最小欠缺将使它稍微倾斜到一边或另一边，而且如果它倾斜了，不管倾斜得多么小，它必将完全倒向那一边。即使对称性是完美无缺的，极轻微的震动、空气的轻微流动也能够使它倾斜几弧秒；这将足以决定它的倒下，甚至它倒下的方向也是起初倾斜的方向。

我们觉察不到的极其轻微的原因决定着我们不能不看到的显

著结果，可是我们却说这个结果是由于偶然性。如果我们能够正确地了解自然定律以及宇宙在初始时刻的状态，那么我们就能够正确地预言这个宇宙在后继时刻的状态。不过，即使自然定律对我们已无秘密可言，我们也只能**近似地**知道初始状态。如果情况容许我们以**同样的近似度**预见后继的状态，这就是我们所要求的一切，那我们便说该现象被预言到了，它受规律支配。但是，情况并非总是如此；可以发生这样的情况：初始条件的微小差别在最后的现象中产生了极大的差别；前者的微小误差促成了后者的巨大误差。预言变得不可能了，我们有的是偶然发生的现象。

我们的第二个例子将与第一个十分相似，我们将举出气象学上的例子。为什么气象学家以某种可靠性预报天气有这样的困难呢？为什么狂风暴雨在我们看来似乎是出于偶然，以致许多人觉得祈雨或求晴是十分自然的，而认为祈祷日蚀或月蚀是荒唐可笑的呢？我们看到，大扰动一般发生在大气处于不稳平衡的区域内。气象学家意识到，这种平衡是不稳定的，某处正在产生旋风；可是，他们不能告诉在什么地方；在任一点多十分之一度或少十分之一度，旋风就在这里突然发生而不在那里突然发生，并把它的破坏波及到它本来不会危害的地区。如果我们早知道这十分之一度，我们就能预见这个旋风，但是观察或者不够仔细，或者不够精确，由于这个理由，一切似乎都是出于偶然性的作用。在这里，我们再次发现，在观察者意识不到的极其轻微的原因和有时会产生惊人灾难的重大结果之间，存在着同样的对立。

让我们举另一个例子，即黄道带上的小行星分布。它们的初始黄经可以是任何黄经；但是，它们的平均运动是不同的，它们已旋转了这么长的时间，以致我们可以说它们现在是沿黄道带**随意**分布的。它们与太阳的初始距离的十分微小的差别，亦即它们

平均运动的十分微小的差别，都会导致它们目前黄经的巨大差异。平均运动每天超出千分之一秒，事实上三年将超出一秒，一万年将超出一度，三四百万年将超出一个圆周，自小行星从拉普拉斯(Laplace)星云分离出来，已经过去的时间不知有多少？因此，我们再次看到微小的原因和巨大的结果；或者更准确地讲，我们再次看到原因上的微小差别和结果上的巨大差别。

轮盘赌游戏乍看起来与前例有很大差异，实际上并没有什么不同。设指针绕支点在刻度盘上转动，刻度盘被等分为红黑相间的一百个扇形。若指针停在红扇形上，则算我赢；否则我输。显然，一切均取决于我给指针的初始推动。假定指针将转十圈或二十圈，不过它将比较快地停下来或不那么快地停下来，这由我推它的力的或强或弱而定。推力仅变化千分之一或两千分之一，就足以使指针停在黑扇形或下一个红扇形。这些差别是我们的肌肉感觉无法区分的，甚至最灵敏的仪器也无能为力。于是，我不可能预见我推动的指针将停在何处，这就是我的心紧张地跳动、期望全交好运的缘由。原因上的差别是难以觉察的，而结果上的差别对我来说却是至关重要的，因为它意味着我的整个利害关系。

III

在这方面，请允许我谈谈与我的论题没有多大关系的看法。若干年前，一位哲学家说过，未来由过去决定，但过去并不由未来决定；或者换句话说，知道现在，我们能够推导出未来，但是不能推导出过去；因为他说过，一个原因只能产生一个结果，而同一结果却可以由几个不同的原因产生。很清楚，没有一个科学家能够赞同这个结论。自然定律把前提和结果以下述方式结合在一起：前提完全由结果决定，犹如结果由前提完全决定一样。但

是，这位哲学家的错误从何而来呢？我们知道，由于卡诺（Carnot）原理，物理现象是不可逆的，世界趋向于均匀。当两个不同温度的物体接触时，较热的物体便把热量传给较冷的物体；因此我们可以预见，温度将相等。可是，温度一旦相等了，如果询问先前的状态，我们能够回答什么呢？我们可以说，一个是热的，另一个是冷的，但是却无法推测先前哪一个比较热。

然而，实际上温度永远也不会达到完全相等。温度差只是渐渐地逼近于零。在到达某一时刻时，我们的温度计就无法测出温度差了。但是，如果我们温度计的灵敏度提高一千倍、十万倍，我们便可以辨认出，还存在着微小的温度差，一个物体依然比另一个物体稍热一些，于是我们能够说，这个物体是先前热得多的物体。

因此，与我们在前一个例子中发现的情况相反，这里是原因上的巨大差别和结果上的微小差别。弗拉马里翁（Flammarion）曾经设想一个以大于光速的速度离开地球的观察者；在他看来，时间会改变符号。历史会倒转，滑铁卢会在奥斯德立兹*之前。好了，对于这位观察者来说，结果和原因是颠倒的；不稳平衡不再是例外。由于普遍的可逆性，一切在他看来似乎都是出自处于不稳平衡中的类似于混沌的东西，整个自然界在他看来好象都交付给偶然性了。

IV

现在，就其他例子而言，我们将从中看到某些不同的特征。

* 滑铁卢（Waterloo）是比利时一城镇，1815³年拿破仑（Napoleon）军队大败于此。奥斯德立兹（Austerlitz）是捷克中部一城市，拿破仑于1805年在此击溃俄奥联军。——译者注

首先以气体运动论为例。我们应该怎样描绘充满气体的容器呢？无数以高速运动的分子通过这个容器向各个方向飞驰。在每一时刻，它们都撞击器壁或相互碰撞，这些碰撞在十分不同的条件下发生着。在这里，尤其使我们印象深刻的不是原因的微小，而是它们的复杂性，先前的要素还可以在这里找到，并且起着重要的作用。如果分子从它的轨道向右或向左偏离一个十分微小的量——该量可与气体分子的作用半径相比较，那么它就可以避免碰撞或者在不同的条件下继续碰撞，它在碰撞后的速度方向会发生变化，也许改变九十度或一百八十度。

这并非一切；我们刚刚看到，为使分子在碰撞方向偏离一个有限量，就必须使它在碰撞前仅仅偏斜一个无穷小量。这样一来，如果分子经受了两个相继的碰撞，那么在第一次碰撞前，它将足以偏斜一个二阶无穷小量，因为它在第一次碰撞后偏离一阶无穷小量，在第二次撞击后，它便会偏离一个有限量。而且，分子将不止经受两次碰撞；它每秒钟将经受极多次数的碰撞。这样一来，如果第一次碰撞使偏离增大 A 倍（ A 是一个很大的数），那么在几次碰撞后，分子将偏离 A^n 倍。因此，偏离将变得十分大，这不仅因为 A 很大——也就是说因为小原因产生大结果，而且因为指数 n 很大——也就是说因为碰撞很多、原因很复杂。

再举第二个例子。为什么雨滴看起来是随意分布的？这又是因为决定雨滴形成的原因是复杂的。在大气中分布着离子。在一段长时间内，它们受到不断变化的空气流的作用，它们被捕获在很小的气旋上，以致它们最后分布不再与它们的初始分布有任何关系。突然，温度下降，水蒸气凝结，这些离子中的每一个都变成雨滴的核心。为了知道这些雨滴将如何分布，为了知道多少雨滴将落在每一块铺路石上，只了解离子的初始状态是不够的，还

必须计算无数变幻莫测的小气旋的影响。

如果我们使小尘粒在水中悬浮起来，那么情况又一次是相同的。水流在瓶中激起波纹，我们不知道水流的规律，我们只知道它是很复杂的。在某一时间之后，小尘粒将随意地、也可以说是均匀地分布在瓶中；这恰恰是由于这些水流的复杂性。如果小尘粒服从某一简单的定律，例如若瓶子旋转，水流绕瓶轴转动描绘出圆圈，那么情况就不再相同了，因为每一个小尘粒都会保持它的初始状态和距轴的初始距离。

考虑两种液体的混合物或两种精细尘粒的混合物，我们也会达到同样的结果。举一个世俗的例子吧，这也发生在我们洗扑克牌的时候。每洗一次牌，牌就经受了一次置换（类似于在置换论中研究的情况）。将发生什么呢？特定置换（例如，一个牌在置换前处在第 $\phi(n)$ 个位置，在置换后被放到第 n 个位置）的概率取决于打牌人的习惯。可是，如果这个打牌人洗牌的时间足够长，那将存在许多相继的置换，最终的次序将不再受其他东西支配，而是受偶然性支配；我的意思是说，所有可能的次序将同样是可几的。这个结果正是由于大量的相继置换，也可以说正是由于现象的复杂性。

最后谈谈误差理论。在这里，恰恰在于原因是复杂的和多重的。即使用最好的仪器，观察者面临的陷阱还不知有多少！他应该全力找出最大的陷阱，并避开它们。这些陷阱是产生系统误差的陷阱。但是，当他消除了这些陷阱并承认他取得了成功时，依然还存在着许多小陷阱，它们的影响积累起来也可能造成危险。偶然误差即由此而来；我们把它们归因于偶然性，因为它们的原因太复杂了、太众多了。在这里，我们再次只有微小的原因，但它们每一个都可以只产生微小的结果；正由于它们的联合和它们

为数众多，它们的结果才变得令人可怕。

V

我还可以列举第三种观点，它没有前两种观点重要，我不打算强调它。当我们试图预见一个事件并审查它的前提时，我们要努力调查先前的状况。这不可能适合于宇宙的所有部分，我们满足于知道，什么正在事件应该出现的点的邻域发生，或者什么好象与该事件有某种关系。审查不会是完全的，我们必须知道如何去选择。但是，也可能发生下述情况：我们忽略了这样一些情况，这些情况乍看起来似乎完全是在我们预见之外发生的，人们从来也没有梦想到把任何影响归咎于它，不过与我们的所有预期相反，它最终却起着重要的作用。

一个人通过大街去做生意；了解行情的某人能够讲出，他为什么在这个时刻出发，为什么沿着这条大街行走。砖瓦匠在屋顶上干活。雇用他的包工头在某种程度上可以预见他会作什么。但是，过路人不会想到砖瓦匠，砖瓦匠也不会想到他；他们似乎属于两个相互之间毫不相干的两个世界。可是，砖瓦匠不小心把一块瓦掉了下去，砸死了那位过路人，我们毫不迟疑地说，这是偶然的。

我们的软弱妨碍我们把握整个宇宙，促使我们把宇宙分为各个部分。我们在试图作这项工作时，尽可能地使人为成分少一些。可是，时时会发生这些部分中的两个相互作用的情况。于是，在我们看来，这种相互作用的结果似乎是出于偶然性。

这是设想的偶然性的第三种方式吗？并非总是；事实上，我们最为经常回想起的还是第一种和第二种。这样两个通常彼此毫不相干的世界无论何时发生相互作用，这种反作用的定律必然是十

分复杂的。另一方面，这两个世界在初始条件上的极微小的改变都足以使它们不发生反作用。要是过路人迟一秒钟通过，或者砖瓦匠早一秒钟掉下瓦片，只需要作多么小的改变啊。

VI

我们所说的一切还没有解释偶然性为什么服从规律。不管原因是微不足道的还是相当复杂的，即使我们不能预见它们在**每一个场合中的结果**，至少**平均说来**，我们可以预见它们的结果，这个事实充分吗？为了回答这个问题，我们再比较详细地研究一下已经引用过的几个例子。

我愿以轮盘赌的例子开始。我说过，指针将要停下来的地点取决于我们给予它的初始推力。具有某一值的这个推力的概率是多少？对此我一无所知，但是我不难假定，这个概率可用连续解析函数来表示。于是，推力包含在 α 和 $\alpha + \epsilon$ 的概率显然等于推力包含在 $\alpha + \epsilon$ 和 $\alpha + 2\epsilon$ 之间的概率，**倘若 ϵ 很小的话**。这是所有解析函数的共同性质。函数的微小变化与变量的微小变化成比例。

但是，我们已经假定，推力极其微小的变化足以改变指针最后停留的扇形的颜色。从 α 到 $\alpha + \epsilon$ 扇形是红的，从 $\alpha + \epsilon$ 到 $\alpha + 2\epsilon$ 扇形是黑的；因此，每一个红扇形的概率与下一个黑扇形的概率相同，从而红的总概率等于黑的总概率。

问题的材料是表示特定初始推力的概率的解析函数。可是，不管这个材料是什么，该定理依然为真，因为它取决于所有解析函数的共同性质。由此可以最终得出，我们不再需要这项材料。

我们刚才就轮盘赌的例子所说的一切也适用于小行星的例子。黄道带可以被看作是一个庞大的轮盘，许多小球以按某种定律变化的各种初始冲量在轮盘上动荡不定。由于与前例相同的理

由，它们的目前分布是均匀的，且与这个定律无关。于是我们看到，当原因上的微小差别足以引起结果上的巨大差别时，现象为什么服从偶然性定律。因此，这些微小差别的概率之所以可以看作是与这些差别本身成比例，正因为这些差别是很小的，连续函数的无穷小增量与变量的增量成比例。

举一个完全不同的例子，在这里特别插入了原因的复杂性，设一个打牌人洗一堆扑克牌。每洗一次，他都改变了牌的次序， he 可以用各种方式改变它们。为了简化说明，让我们只考虑三张牌。在洗牌前，它们占据的位置分别是123，在洗牌后它们可以占据的位置是

123, 231, 312, 321, 132, 213。

这六个假定中的每一个都是可能的，它们分别具有的概率是

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 。

这六个数之和等于1；而这就是我们关于它们所知道的一切；这六个概率自然取决于打牌人的习惯，我们不知道他的习惯。

在第二次洗牌和随后的洗牌中，将在相同的条件下重复这一过程；我的意思是，例如 P_4 总是表示三张牌在第 n 次洗牌后和第 $n+1$ 次洗牌前占据位置123、而在第 $n+1$ 次洗牌后占据位置321的概率。不管数 n 是多少，这依然为真，因为打牌人的习惯和他的洗牌方式仍旧相同。

但是，如果洗牌的次数很多，那么在第一次洗牌前占据位置123的牌，在最后一次洗牌后可能占据位置

123, 231, 312, 321, 132, 213,

这六个假定的概率显然将是相同的，都等于 $1/6$ ；不管我们不知道的数 $P_1, \dots, P_6$ 是什么，这都为真。洗牌的极多次数，也就是说原因的复杂性，却产生了均匀性。

如果多于三张牌，这也可以不加改变地应用，不过即使用三张牌，证明也相当复杂；我们只针对两张牌给出证明也就足够了。这样一来，我们只有两种可能性12，21，其概率是 p_1 和 $p_2 = 1 - p_1$ 。设 n 是洗牌的次数，并且假定，若牌最后按原来的次序则我赢，若牌最后次序颠倒则我输。于是，我的数学期望将是 $(p_1 - p_2)n$ 。

$p_1 - p_2$ 之差肯定小于1；这样一来，如果 n 很大，我的数学期望将是零。为了意识到游戏是公平的，我不需要知道 p_1 和 p_2 。

如果 p_1 和 p_2 之一等于1，而另一个等于零，那就总是有例外。**这时，它就不能适用了，因为我们的初始假定太简单了。**

我们刚才所看到的東西不仅适用于牌的混合，而且也适用于一切混合，例如粉尘的混和物和液体的混和物；即使对于气体运动论中的气体分子的混合物也同样适用。回到这个理论上来吧，设在某一时刻气体分子不能相互碰撞，但由于它们冲撞盛装它们的瓶子的内侧，它们却可以偏斜。如果瓶子的形状足够复杂，分子的分布和速度的分布不要太长时间就变均匀了。但是，如果瓶子是球形的或者它具有立方体的形状，情况就不是如此了。为什么？因为在第一种情况下，球心距任何轨道的距离将总是不变的；在第二种情况下，每一个轨道与立方体面的夹角的绝对值也是不变的。

这样，我们看到，所谓**太简单**的条件意味着什么：它们是保持某些东西、容许不变量依然存在的条件。是该问题的微分方程太简单，以致于我们不能应用偶然性定律吗？这个问题起初看来似乎缺乏精确的意义；现在我们知道，它意味着什么。如果它们保持某些东西，如果它们容许一致积分，它们就太简单。如果初始条件中的某些东西依然不变，那么很清楚，最后的解就不再能

够与初始状态无关。

我们最终达到了误差理论。我们不知道偶然误差由什么引起，而且正因为我们不知道，我们才意识到它们服从高斯定律。悖论就是这样的。解释几乎与前例中的相同。我们只需要知道一件事：误差是否很多，误差是否很小，每一个误差是否正负都有。每一个误差的概率曲线是什么？我们不知道；我们只是假定它是对称的。接着我们证明，合成误差将遵从高斯定律，这个合成定律与我们所不知道的特定定律无关。在这里，结果的简单性恰恰又源于材料的复杂性。

VII

但是，我们并没有结束悖论。我正好回想起弗拉马里翁虚构的故事，即跑得比光快的人，他的时间改变符号。我说过，在他看来，一切现象似乎都出于偶然性。从某种观点来看，这是正确的，可是所有这些现象在给定时刻不可能按照偶然性定律分布，因为分布与我们所见相同，我们看到它们是和谐地展开的，并非出自原始的混沌，我们不认为它们是受偶然性支配的。

这意味着什么呢？在弗拉马里翁的假想人物吕芒(Lumen)看来，微小的原因似乎产生巨大的结果；对我们来说，当我们以为我们看到大结果出于小原因时，事情为什么不同样地进行呢？同一推理在他的情况中不适用吗？

让我们返回到这个论据上。当原因上的微小差别产生结果上的巨大差别时，这些结果为什么按照偶然性定律分布呢？假定原因上一毫米之差产生结果上的一千米之差。如果在结果相应于一千米且具有偶数编号的情况下我赢，那么我赢的概率将是 $1/2$ 。为什么？因为要作到这一点，原因必须相应于具有偶数编号的一

毫米。现在，按照全部外观，原因在某些界限之间变化的概率与离开这些界限的距离成比例，倘若这一距离很小的话。如果不承认这个假设，那就不再会有用连续函数来表示概率的任何方法了。

现在，当大原因产生小结果时，将会发生什么情况呢？这是我们不应当把现象归咎于偶然性的情况，相反地，吕芒却把它归咎于偶然性。结果上的一毫米差别对应于原因上的一千米的差别。在两个相距几千米的界限之间包含的原因概率还与 n 成比例吗？我们没有理由假定如此，因为这个距离即 n 千米是很大的。但是，结果处于两个相隔 n 毫米界限之间的概率将正好相同，这样一来它将不与 n 成正比，虽然这个距离即 n 毫米是很小的。因此，无法用连续的曲线来表示结果概率定律。据说，在该词的解析意义上，这个曲线依然是连续的；纵坐标的无穷小变化对应于横坐标的无穷小变化。但是，实际上这个曲线不是连续的，因为纵坐标的很小的变化不可能对应于横坐标的很小的变化。要用普通铅笔画线变得不可能了；这就是我的意思。

这样一来，我们必须得出什么结论呢？吕芒没有权利说原因（他的原因，我们的结果）概率必须用连续函数来表示。但是，我们为什么有这种权利呢？正因为这种不稳平衡状态，即我们所谓的初始状态，本身只是以往长期的历史的最终结局。在这一历史进程中，复杂的原因长时间起作用：它们有助于产生元素的混合物，它们至少在小区内倾向于使一切变均匀；它们把棱角磨圆，把小丘摊平，把凹地填满。原来为它们所作的曲线不管多么随意和不规则，可是它们对于使曲线变规则起了如此多的作用，以致于最终它们向我们提供的是连续的曲线。这就是我们为什么可以满怀信心地假定曲线具有连续性的缘由。

对于这样的结论，吕芒不会有同样的理由。在他看来，复杂的原因似乎不可能是相等和规则的动因，相反地，这些原因只会创造出不等和差别。他会看到，一个愈来愈多变的世界从一种原始混沌中出现。他能够观察到的变化对他来说是未曾料到的和不可能预见的。在他看来，这些变化好象出于某种随意性；但是，这种随意性也许完全不同于我们的偶然性，因为它可能与所有的定律相对立，尽管我们的偶然性还有它的定律。所有这些方面要求冗长的解释，这也许有助于更充分地理解宇宙的不可逆性。

VII

我们曾企图定义偶然性，现在提一个问题是适当的。就这个定义是可能的而言，这样定义的偶然性有客观性吗？

对此可以表示怀疑。我们已经讲过十分微小的原因和十分复杂的原因。但是，对一个人来说是很小的原因对另一个人来说可以是很大的原因，而对一个人来说似乎是很复杂的原因对另一个来说似乎又是简单的。我已经部分地回答了这些问题，我明确说过，在什么情况下微分方程变得太简单，以致偶然性定律不再适用。但是，稍为比较仔细地审查一下这个问题是恰当的，因为我们还可以采用其他观点。

“很微小”这个短语意谓什么呢？为了理解，我们只需要回到我们已经说过的东西上。差别很微小，区间很小，只有在这个区间的界限内概率依然明显不变才可以这样说。为什么这个概率在小区间内可以认为是不变的呢？正因为我们假定，概率定律可以用连续曲线来表示，它不仅在解析意义上是连续的，而且**实际上也是连续的**，正如已经说明的那样。这意味着，它不仅没有呈现出绝对的空隙，而且也没有太尖锐或太严重的凸角或凹角。

什么给我们以作这一假设的权利呢？我们已经说过，自从乾坤初开以来，总是存在着一些复杂的原因，它们以同一方式不停地作用，促使世界趋向于均匀，永远也不能逆行。这些原因一点一滴地把凸角磨光，把凹角填平，这就是我们的概率曲线现在只显示出逐渐起伏的缘由。在若干亿年后，朝着均匀性又迈出了另一步，这些起伏又减缓了十倍；我们曲线的平均曲率半径将增大十倍。由于在我们的曲线上长度的弧不能被视为直线，因此象今天在我们看来似乎不是很小的长度，相反地，在那个时代都说它很小，因为那时曲率比现在小十倍，这个长度的弧可以明显与线段相等。

因此，“很微小”这个短语依然是相对的；但是，它不是对于某某人是相对的，而是对于世界的实际状态是相对的。当世界变得更均匀时，当所有事物更充分地融合时，它将会改变它的意义。但是，到那时，人类无疑不能再生存下去了，他们必须让位于其他生物——我应当说小得多或大得多的生物吗？由于我们的标准对所有的人依然为真，因此它保持着客观的意义。

另一方面，“很复杂”这个短语又意味着什么呢？我已经给出了一种答案，但是还有其他答案。我们已经说过的复杂原因产生越来越密切的融合，但是在多长时间之后，这种融合才会使我们满意呢？何时它才能积累充分的复杂性呢？何时我们才能充分地洗好牌呢？如果我们把两种粉末——一种是蓝的，另一种是白的——混合起来，那么到某一时刻，混合物的颜色在我们看来似乎是均匀的，这是因为我们的感官不完善；对于不得不从远处观看的远视者来说，颜色是均匀的，但是在近视者看来，颜色尚未完全均匀。而且，即使颜色在所有的眼睛看来变均匀了，我们还可以利用仪器把极限往后推。如果气体运动论是正确的，那么在气

体均匀的外观下隐藏着无限的多样性，没有什么机遇使任何人永远能够分辨出这种无限多样性。可是，如果我们接受古依(Gony)关于布朗(Brown)运动的见解，显微镜难道不是就要向我们显示出某些类似的东西吗？

因此，象第一个标准一样，这个新标准也是相对的；如果它保持着客观的特征，那正是因为一切人都有大体相同的感觉，他们的仪器的威力是有限的，况且他们只是偶尔使用仪器。

IX

在伦理学中，特别是在历史学中，情况正好相同。历史学家必须在他所研究的时代的事件中作出选择；他只描述在他看来好象是最重要的事件。因此，例如他满足于把十六世纪最重大的事件联系起来，同样也把十七世纪最引人注目的事实联系起来。如果前者足以解释后者，我们便说这些事实符合历史规律。但是，如果十七世纪有一大事件，其原因在于十六世纪的一个小事实，这个小事实没有记载，全世界都忽略了它，那么我们便说，这个大事件出于偶然。因此，这个名词与在物理科学中的意义相同；它意味着微小的原因产生巨大的结果。

最大的偶然性是伟大人物的诞生。两个生殖细胞的相遇，不同性别的相遇纯粹出于偶然性，每一个在其自身都正好包含着神秘的元素，它们相互作用必定产生天才。人们将一致认为，这些元素必然很稀有，它们的相遇更为罕见。要使输送的精子从它的路线偏斜是多么微不足道的事啊。只要使精子足以偏离十分之一毫米，拿破仑(Napoléon)就不会出生，欧洲大陆的 命 运 就会改观。没有其他例子能够更充分地使我们理解偶然性的多变特点了。

关于概率运算用于伦理学所引起的悖论，还想多说几句。有人已经证明，从来也没有那一个下议院容纳反对派成员，或者至少这样的事实是如此不可能，以致我们可以毫无顾忌地打赌，以一百万法朗对一苏*相赌。孔多桑(Condorcet)曾力求计算，需要多少陪审员实际上才不可能犯审判错误。如果我们利用这一运算结果，即使在运算的保证下，我们肯定象在打赌反对派没有代表进入下议院时一样，面临着同样的失望。

偶然性定律不适用于这些问题。如果审判并非总是按照最充分的理由给出，那么它还不如我们想到的布里杜瓦(Bridoye)*方法。这也许令人懊悔，因为当时孔多桑制度可以使避免审判错误。

这有什么意义呢？我们试图把这一种类的事实归咎于偶然性，因为它们的原因是不清楚的；但是，这不是真实的偶然性。原因对我们来说是未知的，的确，它们甚为复杂；不过，它们并非足够复杂，由于它们保存着某种东西。我们已经看到，这正是“太简单的”原因的特征。当人们汇集在一起时，他们就不再随意地、彼此独立地决断了；他们相互影响。多重原因开始起作用。它们使人们困扰，把他们向右或向左拖动，但是有一件事是他们不能打破的，这就是他们盲从的习惯。而这正是不变者。

X

事实上，在概率计算对于精密科学的应用中也包含着困难。为什么对数表的小数、为什么数 π 的小数都是按照偶然性定律分

* 苏(Sou)是法国的一种低值钱币，合5生丁(Centime)，而1法朗=100生丁。

——译者注

* 依据骰子来判决的裁判官。——译者据《科学与方法》日译本脚注。

布呢？就对数而言，我已经研究了这个问题，那是很容易的。十分清楚，自变数的微小差别将会引起对数的微小差别，但是在该对数的第六位小数，却会引起巨大的差别。我们总是能够再次找到同样的标准。

至于数 π ，呈现出较多的困难，我目前没有什么值得可讲的东西。

还会有许多其他问题尚待解决，但是在我将特别提出的问题解决之前，我不想着手解决它们。当我们达到一个简单的结果时，例如当我们找到一个约整数时，为了解释它，我们便寻求非偶然的原因。事实上，在10,000个数中，给出一个约整数例如10,000这个数的机遇的概率是十分微小的。其概率仅为万分之一。但是，要使任何其他一个数出现，其概率也只是万分之一，然而，这个结果将不会使我们感到惊讶，在我们看来，不难把它归因于偶然性；这仅仅是因为它不引人注目。

这是我们的简单的幻觉吗？或者，存在着这种思维方式是合理的情况吗？我们必定希望如此，否则整个科学便不可能了。当我们想检验一个假设时，我们怎么办呢？我们不能验证它的所有推论，因为这些推论在数目上是无限的；我们只能使我们自己满足于验证某些推论，如果我们成功了，我们便宣布该假设被证实了，因为如此之多的成功不可能出于偶然性。而且，从根本上说，这总是同样的推理。

在这里，我不能完满地证明它是正确的，由于那要花费过多的时间；但是，我至少可以说，我们发现我们自己面临着两种假设：或者是简单的原因，或者是我们称之为偶然性的复杂的原因的集合。我们发现，假定前者能够产生简单的结果是很自然的，其次，如果我们找到简单的结果，例如约整数，那么我们更乐于

把它归因于简单的原因，而不是把它归因于偶然性，简单的原因几乎肯定地给出这个结果，而偶然性给出这个结果仅有万分之一的可能。如果我们找到的结果不是简单的，那情况就不同了；确实，偶然性给出这个结果的可能性不会大于万分之一；不过，产生这个结果的偶然性再也没有简单的原因了。

第二篇 数学推理

第一章 空间的相对性

I

要想象空虚空间是不可能的；我们设想把物质客体的变化影像从中排除的纯粹空间的一切努力，例如只能导致用浅色线代替深色面这样的描述，在不使一切化为乌有和不用无(notingness)结束的情况下，我们便不能沿着他的道路走到底。空间不可简化的相对性即由此而来。

无论谁谈到绝对空间，用的都是无意义的词语。这是深思该问题的人早就宣布的真理，但是我们却常常忘记它。

我在巴黎的一个确走的地点，例如在圣贤祠，我说：我明天将再来**这里**。如果有人问我：你意味着你将返回到空间的同一点吗？我将会回答：是的；可是，我却错了，因为到明天，地球携带着圣贤祠将由此运行了一天的路程，它要超过两百万公里。假如我企图讲得更精确一些的话，也不会增加什么东西了，因为我们地球运行的这两百多万公里是相对于太阳的运动，而太阳本身又相对于银河系移动——同时银河系本身无疑也处于运动之中，虽然我们不能觉察它的速度。这样一来，我们完全不知道圣贤祠一天走了多少路程，而且永远无法知道。总而言之，我的意思是说，

明天我将再次看到圣贤祠的圆顶和三角饰，而如果圣贤祠不存在，我的话便毫无意义，空间也会消失。

这是空间相对性原理最平凡的形式之一；但是，还有另外的形式，德尔伯弗(Delbeuf)尤为坚决主张这种形式。设在某夜，宇宙的所有尺度变大了一千倍：该世界依然类似于它本身，给予类似这个词的意义，与欧几里得第Ⅵ卷内所讲的相同。只是一米长从那时起将度量为一公里，一毫米长将变成一米。我所睡的床和我本人将按同一比例加长了。当我第二天早晨醒来时，面对这样一种令人惊奇的变化，我会有什么感觉呢？咳，我根本觉察不到什么。最精密的测量也不能向我揭示出这一巨大的灾变，因为我所用的量尺与我企图测量的对象将严格按照同一比例变化。实际上，只是对于按空间仿佛是绝对的进行推理的那些人来说，这种灾变才是存在的。假如我暂且象他们那样推理，那就可以比较充分地显示出他们看问题的方式隐含着矛盾。事实上，可以比较恰当地说，由于空间是相对的，根本没有发生什么情况，这就是我们什么也觉察不到的原因。

因此，人们有权利说他知道两点之间的距离吗？没有权利这样说，因为这个距离经受了极大的变化，倘若其他距离按同一比例变化，那么我们就无法察觉它们。我们刚刚看到，当我说我明天将在这里时，这并不意味着我明天将处于我今天所在的空间的同一点，而是说明天我距圣贤祠的距离与今天的相同。而且，我们看到，这种陈述不再是充分的，我应该说，明天和今天我距圣贤祠的距离等于我身体高度的同一倍数。

可是，这并非问题的全部；我假定世界的尺度变化着，但至少世界依然总是类似于它本身。我们应当更进一步，现代物理学最使人惊讶的理论之一向我们提供了机会。按照洛伦兹(Lorentz)

和斐兹杰惹(Fitzgerald)理论，所有随地球运动的物体都经过形变。实际上，这种形变是十分微小的，由于所有平行于地球运动的尺度仅减小亿分之一，而垂直于这一运动的尺度并没有变化。不过，它微小没有什么关系，它的存在对于我正要引出的结论来说已足够了。此外，我说过它是微小的，但是实际上，我对它一无所知；我自己是顽固的幻觉的受骗者，这种幻觉使我们相信我们构想出绝对空间；我设想地球沿着它的椭圆轨道绕太阳运动，我认为它的速度是三十公里。可是，我并不知道它的真实速度(这时，我不是意指它的绝对速度，而是它相对于以太的速度，绝对速度是没有意义的)，而且我也没有办法知道它；它也许要大10倍、100倍，从而变形也要大100倍、10,000倍。

我们能够证明这种形变吗？显然不能；这里有一个棱长为一米的立方体；由于地球运动，它发生了形变，平行于地球运动的棱变小了，其他棱没有变化。如果我想用米尺确切地测量它，那么我将首先测量垂直于运动的一个棱，我将发现我的标准米尺与这个棱严格相符；事实上，这两个长度无论那一个也没有变化，因为二者都垂直于运动。然后，我希望测量其他平行于运动的棱；为了做到这一点，我移动我的米尺，并转动它使与该棱相合。但是，由于米尺改变了方向，变得平行于运动了，因而米尺本身也经受了形变，这样一来，尽管棱不是一米长，但它还是与米尺相符，我一点也发现不了什么东西。

你接着问我，如果实验不能证实洛伦兹和斐兹杰惹假设，那么这个假设有什么用处呢？我的说明是不完备的；我只是谈到了能够用米尺进行的测量；但是，在假定光速不变和与方向无关的条件下，我们也能够用光传播一段长度所花费的时间来测量长度。洛伦兹可以通过假定在地球运动方向上的光速比在垂直方向上的

光速为大，来解释这些事实。但他却宁可假定，光速在这些不同的方向上是相同的，而物体在一个方向比在另一个方向为小。假如光的波面象实物体那样经受相同的形变，那么我们永远也察觉不到洛伦兹-斐兹杰惹收缩。

无论在那一种情况下，都不是绝对数量的问题，而是用某种手段测量这一数量的问题；这种手段可以是米尺，或者是光传播的路程；我们测量的只不过是这一数量与测量手段的关系；如果这个关系改变了，我们便无法知道，究竟是这一数量变了呢，还是测量手段变了呢。

但是，我希望说明的是，在这种形变中，世界并不与它本身相类似；正方形变成长方形，圆变成椭圆，球变成椭球。可是，我们还是无法知道，这种形变是否是真实的。

显而易见，我们可以更进一步：我们可以设想无论什么样的形变，以代替其规律特别简单的洛伦兹-斐兹杰惹形变。物体可以按照我们所希望的任何复杂的规律变形，倘若一切物体都毫无例外地按照同一规律形变，我们便永远觉察不到这些变形。我所说的一切物体都毫无例外，当然包括我自身以及从不同物体发出的光线。

如果我们观察一个具有复杂形状的镜中的世界，这个镜子以千奇百怪的方式使对象发生形变，但是这个世界各个部分的相互关系不会改变；事实上，如果两个真实的对象接触，它们的影像看起来同样是接触在一起的。当然，当我们观看这个镜中的世界时，我们的确看到它发生了形变，但是这正是因为真实的世界继续在它的变形的影像旁边存在着；即使这个真实的世界隐而不见，但总会有某些事物无法隐藏，我们自身就是这样；我们能够观看，至少能够感觉，我们的身体和四肢没有变形，它们继续作

为测量手段为我们所用。但是，如果我们设想，我们身体本身象我们在镜中看到的对象一样按同一方式发生了形变，那么这些测量手段本身将会使我们失望，形变就再也不能查明了。

用同一方式考虑两个互为影像的世界；对于A世界的每一个对象P，在B世界中都有一个物体P'与之对应，作为它的影像；这个影像P'的坐标由对象P的坐标的函数决定；而且，这些函数可以是任何函数；我只假定它们最后一次选定了。在P的位置和P'的位置之间，存在着恒定的关系；至于这种关系是什么，则没有什么要紧；它是恒定的就足够了。

好了，这两个世界相互之间将是无法区分的。我的意思是，第一个世界对于它的居民来说与第二个世界对于它的居民来说相同。只要这两个世界彼此之间依然是陌生的，情况就将如此。设我们生活在世界A，我们将构造我们的科学，尤其是我们的几何学；在这个时候，B世界的居民也将构造科学，因为他们的世界是我们的世界的影像，或者更确切地讲，与我们的几何学相同。但是，在我们看来，如果有一天窗户对B世界打开了，我们将感到他们是多么可怜，我们将说：“可怜的家伙，他们自以为他们创造了几何学，可是他们所谓的几何学只是我们的几何学的奇形怪状的影像；他们的直线全都弯弯曲曲，他们的圆歪歪扭扭，他们的球突兀不平。”我们从来也不怀疑，他们会说与我们相同的话，人们永远也无法知道谁是正确的。

我们看到，应该在多么广泛的意义上来理解空间的相对性；空间实际上是无定形的，唯有处于其中的物才给予它一种形状。我们对于直线或距离所具有的直接的直觉，应该如何想象呢？我们对于距离本身没有什么直觉，正如我们所说的，在夜晚，距离变大了一千倍，倘若其他距离也经受了同样的变化，我们便不能

觉察到它。即使在夜晚B世界代替了A世界，我们也没有任何办法知道它，于是昨天的直线已不是直线了，我们永远也不会注意到。

空间的一部分并不自然而然地且在该词的绝对意义上与空间的另一部分相等；因为即便它对我们来说如此，但对B世界的居民来说却不相等；这些居民有权力排斥我们的观点，正如我们抛弃他们的观点一样。

我已在其他地方表明，从我们可以形成非欧几何学和其他类似的几何学的见解的观点来看，这些事实的推论是什么；我不愿再回到这个问题上；现在我将采取稍微不同的观点。

II

如果距离、方向、直线这种直觉——简言之，空间的这种直接的直觉——不存在，那么我们关于它所具有的信念从何而来呢？如果这只不过是一种幻觉，那么这种幻觉为什么如此牢固呢？考察一下这些问题是恰当的。我们说过，不存在关于大小的直接的直觉，我们只能够达到这一数量和我们的测量手段的关系。因此，如果我们没有测量空间的工具，我们便不能构造空间；好了，我们自己的身体就是这样的工具，我们把每一种事物与它关联起来，我们本能地利用它。我们判定外部对象的位置，就与我们的身体有关。可以说，正是我们的身体作为坐标系为我们所用。

例如，在时刻 α ，视觉向我揭示出对象A的存在；在时刻 β ，另一种感觉，例如听觉或触觉，向我揭示出另一个对象B的存在。我判断，对象B与对象A占据同一地点。这意味着什么呢？首先，这并不意味着这两个对象在两个不同的时刻占据绝对空间的同一点，即使这种点存在，我们也无从认识，因为在时刻 α 和 β 之间，

太阳系运动了，我们不能知道它的位移。这意味着，这两个对象相对于我们的身体占据同一相对位置。

可是，即使如此，那又意味着什么呢？我们从这些对象获得的印象遵循着完全不同的途径，就对象A而言是视觉神经，就对象B而言是听觉神经。从定性的观点来看，它们毫无共同之处。对于这两个对象，我们能够作出的表象完全是彼此异质的、不可通约的。我仅仅知道，要达到对象A，我只要以某种方式伸开我的右臂；即使我不作这一动作，我也想象得出伴随右臂伸开的肌肉感觉和其他类似的感觉，这种表象使人联想到对象A的表象。

现在，我也知道，我能以同样的方式伸开我的右臂达到对象B，右臂伸开伴随着同一系列的肌肉感觉。当我说这两个对象占据同一地点时，我的意思无非是上面讲过的东西。

我也知道，通过我的左臂的适当运动，我能够到达对象A，我想象伴随这一动作的肌肉感觉；通过被同一感觉伴随的左臂的同样的运动，我也能够达到对象B。

这是十分重要的，因为由此我能够防止对象A或对象B施加给我的危险。对于我们能够遭受到的每一次打击，自然界都能使我们联想到一种或多种防御办法，从而使我们自己免受伤害。同一防御办法可以防止多种打击；情况确是如此，例如右臂的同一运动可以容许我们在时刻 α 抵御对象A，在时刻 β 抵御对象B。正是这样，同一打击能够用多种方式防御，例如我们说过，或者通过右臂的某种动作，或者通过左臂的某种动作，一般地都能够达到对象A。

除了避开同一打击外，所有这些防御办法毫无共同之处，当我们说它们是终止于空间同一点的动作时，意指的就是这一事实，而不是其他什么东西。正是如此，我们所说的占据空间同一点的

这些对象，除了同一防御办法防止它们之外，它们并没有共同之处。

或者，如果你愿意的话，可以设想无数的电极线，一些是向心的，另一些是离心的。向心线向我们报告外部发生的偶然事件，离心线传送答复。联系是这样建立的：当向心线通过电流时，这便作用于中转站，这样在离心线的中转站上电流开始通过；事情是这样安排的：若同一补救办法适于排除多种毛病的话，则多个向心线可以作用于同一离心线，当同一毛病可以用多种补救办法矫正时，则一个向心线可以同时或一个一个地作用于不同的离心线。

可以说，我们的整个几何学，或者如果你乐意的话，我们几何学中一切本能的东西，正是这一复杂的联想系统，正是这种分配系统。我们所谓的我们对于直线或距离的直觉，就是我们具有的这些联想及其重要特征的意识。

很容易理解，这一重要特征本身从何而来。在我们看来，联想愈久远，似乎愈加不可破坏。但是，这些联想就其大部分而言，并不是个人的获得物，因为它们的痕迹在新生儿身上好象就存在着：它们是种族的获得物。这些获得物越是必要，自然选择就越迅速地导致之。

为此，我们所说的获得物必定在年代上是最早的，因为没有它们，生物体的防御便是不可能的。自从细胞不再仅仅是并置，而被要求相互帮助以来，就需要类似于我们所描述的机制形成有机体，以便这种帮助不偏离它的方向，而且能防止危险。

把一只蛙切去头，给它的皮肤滴一滴酸，这时它力图用最近的足揩掉酸滴，如果再切断这只足，它就用对面的足揩酸滴。在这里，我们有我刚才说过的双重防御办法，如果第一种办法行不通，

容许用第二种办法应付灾祸。正是这种多重防御办法产生了协调，这就是空间。

我们看到，为了寻找这些空间联想的最早痕迹，我们必须深入到无意识的什么深度，因为此处所及的只包含神经系统的低等部分。可是，把如此久远联想起来的東西加以分离的每一个尝试，都会遭到我们的反对，我们对这种阻力为什么感到惊讶呢？现在，正是这种阻力，才是我们所谓的几何学真理的证据；这一证据只不过表明我们对破除十分古老的习惯极为反感，我们总是证明这些习惯是有益的。

III

这样生成的空间只不过是空间而已，它不能扩展到比我的臂所能到达的更远的地方；为了扩大空间的界限，必须要有记忆参与。无论我作出多大努力，把我的手伸向远方，总有一些点在我所能达到的范围之外；假使我象水螅型珊瑚虫一样束缚在海底，只能伸开触须，那么所有这些点都在空间之外，因为我们从处于那里的物体的作用中可以经受的感觉，与容许我们到达它们的动作的观念没有联系，与适当的防御办法也没有联系。在我们看来，这些感觉似乎不可能有任何空间特征，我们不应该企图使它们局域化。

但是，我们并不象低等动物那样固定在海底；如果敌人离我们太远，我们能够首先接近他，当我们距他足够近时，我们能够伸出我们的手。这还是一种防御办法，但却是一种远距离的防御办法。另一方面，它是复杂的防御办法，腿的动作所引起的肌肉感觉的表象、臂的最后动作所引起的肌肉感觉的表象、半规管的感觉的表象等等，都进入到我们由其所形成的表象中。此外，我

们没有必要想象同时的感觉的复杂性，可是必须想象按确定的次序相互跟随的连续感觉的复杂性，这就是我刚才说必须要有记忆参与的原因。

而且要注意，为了到达同一点，我可以更接近能够达到的目标，以便不怎么伸臂就能得到。还要注意什么呢？我能够对抗同一危险的防御办法不是一种，而是一千种。所有这些防御办法都是由可以没有共同之处的感觉构成，可是我们认为它们确定了空间的同一点，因为它们可以对同一危险有反应，而且都与这种危险的概念有联系。正是这种避开同一打击的潜力，促成了这些不同防御办法的联合，正如用同一方式防御的可能性，促成了在类型上如此不同的打击的联合，可以从空间的同一点危及我们一样。这种双重的联合造成了空间每一点的独立存在，在点的概念方面再也没有其他东西了。

前面所考虑的空间，可以称之为**局部空间**，它是参照于与我们身体相联系的坐标轴的；这些坐标轴是固定的，由于我的身体不同，只是我的身体的某些部分移动。我们自然而然地使**广延空间**依赖的坐标轴是什么呢？所谓广延空间，说的是我刚才定义的新空间。从我的身体的某一初始位置开始，通过要达到一点所作的一系列动作，我定义了点。因此，坐标轴固定于我的身体的这一初始位置。

但是，我所谓的初始位置可以在我的身体相继占据的所有位置中任意选取；如果关于这些相继位置的或多或少无意识的记忆对于空间概念的产生是必要的，那么记忆就可以或多或少地追溯到过去。由此导致了空间定义本身的某种不确定性，这种不确定性恰恰构成了它的相对性。

不存在绝对空间，只存在相对于身体某一初始位置的空间。

对于象低等动物那样的固定于海底的有意识的生物来说，由于它只知道局部空间，则空间更是相对的（由于空间只可能和他的身体有关），但是这种生物不会意识到这种相对性，因为关于这种局部空间的参照轴是不变的！毫无疑问，束缚这种生物的岩石是不动的，由于它随着我们的行星一起运动；因此，在我们看来，这些轴每时每刻都在变化；但是对它来说，这些轴则不变化。我们具有一种本能，现在可以把我们的广延空间归诸于我们身体的位置A，并认为A是初始位置，在此后某些时刻，我们又把我们的广延空间归诸于位置B，我们可以反过来自由地把B看作是初始位置；因此，我们在每一时刻都进行无意识的坐标变换。我们设想的生物却缺乏这种本能，由于它不能动，他会认为空间是绝对的。在每一时刻，它的坐标系强加于它；这个坐标系实际上大大改变了，但是在他看来总是相同的，因为这总是**唯一的**坐标系。对我们来说，则完全是另一种样子，在记忆可以或多或少地追溯过去的条件下，在我们可以自由选取的坐标系中，我们每一时刻都有许多坐标系。

这并非一切；局部空间不是均匀的；这个空间的不同点不能认为是等价的，因为一些点只有花费最大的努力才能达到，而另一些点则容易达到。相反地，我们的广延空间在我们看来似乎是均匀的，我们说它的所有点是等价的。这意味着什么呢？

如果我们从某一平面A开始，那么我们能够从这个位置作出某些动作M，M的特征是由肌肉感觉的某种复杂性刻划的。但是，从另一个位置B开始，我们作出用同样的肌肉感觉刻划的动作M'。接着，设a是身体某一点的位置，例如右手食指尖，它处于初始位置A，设b是当我们从位置A出发、并作出运动M时的同一食指的位置。此后，设a'是这个食指在位置B的位置，b'是当我们从

位置B出发并作出运动M'的位置。

好了，我们习惯于说，空间的点a和b相互关联，正如点a'和b'一样，这仅仅意味着，两个动作系列M和M'是由相同的肌肉感觉伴随的。因为我意识到，在从位置A到位置B时，我的身体依然有能力作相同的动作，我知道存在着与点a'相关的一个空间点，正如任何一点b与点a相关一样，以致于两个点a和a'是等价的。这就是所谓的空间的均匀性。同时，这也是空间是相对的原因，因为不管空间是相对于轴A而言还是相对于轴B而言，它的特性依然是相同的。这样一来，空间的相对性和它的均匀性就是一种唯一的和相同的东西。

现在，如果我希望讨论大空间——这种大空间不再仅仅对我适用，而且我可以把宇宙纳入其中——那么我通过想象作用便可以得到。我想象一个巨人，他几步就可以到达行星，那么他感觉如何呢；或者，如果你乐意的话，想象存在着一个微小的世界，其中这些行星象小球一样地运动，而小人国的矮人在这些小球之一上运动，我认为自己也是矮人，那么我本人会有何种感觉呢。但是，如果我们预先没有构造局部空间和广延空间供我自己使用，那么这种想象作用对我来说是不可能的。

IV

现在，为什么所有这些空间都有三维呢？回到我们说过的“分配系统表”去吧。一方面，我们有各种可能的危险的一览表，我们用A1，A2等表示它们；另一方面，我们有各种防御办法的一览表，我将以同样的方式称其为B1，B2等。于是，在第一个一览表和第二个一览表的接触螺旋或推动把手之间，我们具有连接物，这样一来，例如当危险A3的报告告警时，它将使或者可以使相

应于防御办法B4的继电器起作用。

当我在上面讲向心线和离心线时，我唯恐人们误会我的意思，不把这看作是简单的比喻，而看作是关于神经系统的描述。这样看并不是我的思想，其理由有以下几点：首先，我不会容许我自己提出关于神经系统构造的观点，因为我不了解它，即使研究它的人讲话也很谨慎；其次，除了我的无能外，因为我完全知道，这个方案太简单化了；最后，因为在我的防御办法一览表中，一些办法描绘得十分复杂，正如我们在上面看到的，即使在广延空间的情况中，它们也是由臂的多步相继动作组成的。因此，这不是两个真实导体之间的物理连接问题，而是两个感觉系列之间的心理联系问题。

例如，如果A1和A2与防御办法B1关联，如果A1同样地与防御办法B2关联，那么A2和B2本身一般地也将关联。如果这个基本定律一般说来并不为真，那么只可能存在极大的混乱，就不会有类似于空间概念或几何学的东西。事实上，我们怎样定义空间的点呢？我们是用两种方式定义的：一方面，它是与同一防御办法B相关联的报告者A的集合；另一方面，它是与同一报告者A相关联的防御办法B的集合。如果我们的定律不为真，我们可以说A1和A2对应于同一点，因为它们二者与B1相关；但是，我们同样可以说它们与同一点并不相关，因为A1与B2相关，但B2与A2却无关。这也许是一个矛盾。

然而，从另一方面看，如果定律严格地而且总是为真，空间便完全不同于它本来的那个样子。我们应有相差悬殊的范畴，其中一方面分配给报告者A，另一方面分配给防御办法B；这些范畴极多，但它们是彼此完全分开的。空间也许是由很多的、但却是分立的点组成的；它可能是**不连续的**。没有理由认为这些点是按一种次序

而不是按另一种次序排列的，因此也没有理由赋予空间以三维。

但是，情况并非如此：请允许我暂且概述一下已经知道几何学的人的语言；这是十分恰当的，因为这是那些人最容易理解的语言，我希望我也能理解它。当我期望防御打击时，我企图达到这一打击所来自之点，但是只要我接近得很近就足够了。于是，如果对应于B1的点距对应于A1和对应于A2的点足够近的话，那么防御办法B1就可以对付A1和A2。但是，也可能发生下述情况：对应于另一个防御办法B2的点可以充分地接近对应于A1的点，而不充分地接近对应于A2的点；以致于防御办法B2可以应付A1而不能应付A2。

对于还不了解几何学的人来说，这本身只不过是把上面所陈述的定律作了不忠实的翻译而已。于是，事情将这样发生：两个防御办法B1和B2与同一警报A1关联，并且与大量的其他警报关联，我们将按A1那样的范畴来排列它们，并使它们对应于空间的同一点。但是，我们可以找到警报A2，它将与B2关联而不与B1关联，而由于补偿它将与B1关联，但B1却不与A2关联，如此等等，于是我们可以写出系列

B1, A1, B2, A2, B3, A3, B4, A4,

其中每一项都与后一项和前一项关联，而不与远离的几项关联。

这些系列的每一项都不是孤立的，而成为其他警报或其他防御办法的大量范畴的一部分，这些警报或防御办法与每一项具有相同的联系，可以认为它们属于空间的同一点，这一切就不需要再说了。因此，基本定律尽管容许有例外，但是依然几乎总是为真。由于这些例外，唯有这些范畴不是完全孤立的，而是部分地相互侵犯，在某种程度上彼此渗透，以致空间变为连续的。

另一方面，这些范畴的排列次序不再是任意的，如果我们提

及前面的系列，我们看到，必须把B2放在A1和A2之间，从而也就放在B1和B3之间，例如我们不能把它放在B3和B4之间。

因此，存在着一个次序，我们按照这一次序排列我们的对应于空间同一点的范畴，经验告诉我们，这个次序以三重登记表的形式呈现在眼前，这就是空间具有三维的原因。

V

这样一来，空间的特性，即具有三维的特性，仅仅是我们的分配系统表的特性，也可以说是人类理智的内在特性。倘若消除了某些联系，即是说消除了某些观念联想，就足以给出不同的分配系统表，并足以使空间获得四维。

一些人会为这样的结果而感到惊讶。他们将认为，外部世界应当考虑某些东西。如果维数出自造化我们的方式，那么可能有会思维的生物，它们虽则生活在我们的世界上，但造化的方式与我们不同，它们也许认为空间多于三维或少于三维。德·西翁(de Cyon)先生不是说过，日本鼠只有两对半规管，而以为空间是二维的吗？因此，假使这个会思维的生物能够构造物理学，他难道不会创造出二维或四维的物理学吗？这种物理学在某种意义上依然与我们的物理学相同，因为他是用另一种语言描述同一世界。

事实上，把我们的物理学翻译为四维几何学的语言似乎是可能的；要试图进行这种翻译，可能会事倍功半，我将限于引证赫兹(Hertz)的力学，在那里我们具有某些类似的东西。不管怎样，译文似乎总是比教科书复杂，而且似乎总是具有译文的样子，三维语言好象更适合于描述我们的世界，虽则这一描述能够严格地用另一种习语作出。此外，我们的分配系统表并不是随意作出的。在警报A1和防御办法B1之间存在着联系；这是我们理智的内在特

性；但是，这种联系为什么会发生呢？正因为防御办法B1提供了手段，可以有效地防范危险A1；这是在我们之外的事实，这是外部世界的特性。因此，我们的分配系统表仅仅是外部事实集合的翻译；如果它有三维，这是因为它本身适合于具有某些特性的世界；其中主要的特性是存在着天然固体，它们的位移明显地遵循我们所谓的刚体运动定律。因此，如果三维空间的语言容许我们最容易地描述我们的世界，那我们就不应当感到惊讶；这种语言是从我们的分配表复制的；这个表之所以建立起来，正是为了能够生活在这个世界上。

我已经说过，我们可以设想生活在我们世界上的会思维的生物，它们的分配系统表可以是四维的，从而能够在多维空间思维。但是，不能肯定，这样的生物一旦在那里诞生，它们是否能够在那里生存，他们本身是否能抵御它们可能遭受到的许多危险。

VI

最后，还有几个问题尚需议论。在可以化归为我所谓的分配系统表的原始几何学的粗糙性和几何学家的几何学的无限精确性之间，存在着引人注目的矛盾。可是，后者却诞生于前者；但并非唯一地诞生于前者；由于我们构造数学概念的能力，例如构造群的能力，必然会使它多产；在纯粹概念中，必须寻找一个最适合于这种粗糙的空间——我已试图解释了它的起源——的概念，该概念对于我们和高等动物来说是共同的。

我们曾经说过，某些几何学公设的自明性仅仅在于我们对抛弃十分古老的习惯十分反感。但是，这些公设是无限精确的，而这些习惯本质上却具有某些可变性。当我们希望思考时，我们需要无限精确的公设，因为这是避免矛盾的惟一方式；但是，在所

有可能的公设系统中，存在着一些我们不喜欢的系统，因为它们不能充分地与我们的习惯一致；这些系统不管多么可变、多么灵活，但它们却有一个弹性限度。

我们看到，即使几何学不是经验科学，但它的诞生却是与经验有关的；我们创造了它所研究的空间，但是必须使它适应于我们生活于其中的世界。我们选择了最方便的空间，但经验指导了我们的选择；因为这种选择是无意识的，我们认为它是强加给我们的；一些人说经验强加它，另一些人说我们是与我们预先创造好了的空间一起诞生的；从前面的考虑中我们看到，在这两种观点中，什么是真理部分，什么是谬误部分。

在这种其结果是构成空间的渐进训练中，很难确定什么是个体部分，什么是种族部分。例如把我们之中的一个人从出生时起就运送到完全不同的世界，在那里占优势的物体都按照非欧固体的运动规律运动，那么他能在多大程度上抛弃祖传的空间而建立全新的空间？

实际上，种族部分似乎占压倒优势；可是，如果我们把粗糙的空间、我所说过的模糊的空间、高等动物的空间归之于种族部分，那么我们不是要把几何学家无限精确的空间归因于个人的无意识的经验吗？这是一个不易解决的问题。不过，我可以引证一个事实表明，我们祖先遗传给我们的空间依然保持着某种可塑性。虽然由于折射，水下的鱼的影像出现在上部，但是一些猎人却熟悉射鱼技术。而且，他们是本能地作到这一点的：他们因此学会了修正他们旧有的方向本能；或者，如果你乐意的话，也可以说他们用A1，B2联系代替了A1，B1联系，因为经验向他们表明后者不会有什么结果。

第二章 数学定义和教学

1. 在这里我要谈谈数学中的一般定义；至少这是本章的标题，但是象行为统一规则所要求的那样把我严格地限制在这个题目中，将是不可能的；在不涉及其他几个有关问题的情况下，我将无法讨论它，因此，如果我不得不在花坛的边界时时左右漫步的话，我请求你们宽恕我。

什么是好的定义呢？对哲学家或科学家来说，正是适用于且仅仅适用于所定义的对象定义；正是满足逻辑规则的定义。但是，在教学中，情况并非如此；好定义是能被学生理解的定义。

如此之多的人不愿理解数学，这种情况是怎么发生的呢？这难道不是一种悖论吗？瞧！科学仅求助于基本的逻辑原则，例如求助于矛盾律，矛盾律可以说是我们理智的骨架，只要我们不停止思维，我们自己就不能抛开它，而有人却认为它是模糊不清的！这些人甚至还占多数！他们没有发明的能力尚可谅解，但是我们向他们说明的论证，他们竟不理解，在我们看来是十分明亮的闪光出现在他们面前时，他们竟视而不见，这是多么奇怪的事呀。

可是，不需要广泛的考察经验，就能知道这些盲人绝不是例外。这是一个不容易解决的问题，但是它应当引起所有献身于数学的人的注意。

所谓理解，意味着什么呢？这个词对于世人具有相同的意义吗？相继审查组成定理证明的每一个演绎推理，弄清它的正确性、它与游戏规则的一致性，这就是理解一个定理的证明吗？同样

地，要理解一个定义，这仅仅是辨认人们已经知道的所使用的全部词的意义并弄清它不隐含矛盾吗？

对于一些人来说，情况就是这样；当他们这样作了，他们将会说：我理解了。

对于大多数人来说，情况并非如此。几乎所有的人都更为严格；他们希望知道的不仅是证明的所有演绎推理是否正确，而且希望知道它们为什么以这种次序而不以另外的次序联系起来。对他们来说，它们似乎是由任性产生的，而不是由总是意识到所达到的目标的理智产生的，他们不认为他们理解了。

无疑地，他们本身恰恰没有意识到他们渴望的东西，他们不能系统地阐述他们的欲望，但是，如果他们得不到满足，那么他们会便会模糊地感觉到缺乏某些东西。于是，会出现什么情况呢？一开始，他们还觉察到人们摆在他们眼前的论证；但是，当这些论证仅仅是用过分纤弱的线索与处于其前和处于其后的论证联系在一起时，他们在自己的头脑里不会留下任何痕迹；他们不久便遗忘了；他们很快使一瞬间的亮光消失在永恒的黑夜中。当他们继续前进时，他们甚至再也看不到这一短暂的光亮了，因为定理是相互依赖的，他们忘记了他们所需要的定理；因此，他们便不可能理解数学了。

这并非总是他们的老师的过错；他们的头脑需要觉察指导的线索，但往往太迟钝了，以致找不到这个线索。但是，要帮助他们，我们首先必须了解，是什么东西恰恰妨碍了他们。

其他人总是询问，这有什么用处；如果他们在实践中或自然界中找不到它们，他们将不能理解这样的数学概念的正当理由。对于每一个词，他们都希望提出明显的图象；定义必须唤起这个图象，以致在证明的每一个步骤中，他们可以看到它的变换和进

展。只有在这一条件下，他们才能理解和记住。这些常常欺骗他们自己；他们不听信推理，他们着眼于图形；他们自以为他们理解了，而他们只是看见了。

2. 各种各样的倾向何其之多！我们必须反对它们吗？我们必须利用它们吗？如果我们希望反对它们，那么应该赞同这种作法吗？我们必须证明，满足于纯粹逻辑只是他们看到了事情的一个方面吗？或者我们必须说，之所以不如此廉价地满足，是因为他们所要求的东西并不是必要的吗？

换句话说，我们应该强使年轻人改变他们的思想本性吗？这样的企图是徒劳的；我们没有点金石，能够向我们透露秘密，使我们把一种金属变为另一种金属；我们所能作的一切就是对它们进行加工，并使我们适应它们的性质。

许多儿童不能成为数学家，但是我们必须给他们教数学。数学家本身并不是用同一个模子铸造出来的。读一读他们的著作，就足以把他们分为两种思想类型，例如象维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 那样的逻辑主义者，象黎曼那样的直觉主义者。在我们的学生中间也有同样的差别。一类人正如他们所说，偏爱“用解析学”处理他们的问题，另一类人则偏爱“用几何学”来处理。

企图改变这种状况是无用的，而且这样作是合乎需要的吗？最好是既有逻辑主义者，又有直觉主义者；谁敢说他宁愿维尔斯特拉斯从来不写东西，或者黎曼永远不存在呢？因此，我们必须听任思想的多样性，或者最好我们必须为之高兴。

3. 由于理解一词有许多意义，一些人易于理解的定义对另一些人来说则不易理解。我们有追求产生图象的定义，有我们限于把空洞的形式组合起来的定义，这些形式是完全不可理解的、纯粹不可理解的，抽象剥去了全部内容。

我不知道是否有必要引用例子？无论如何，让我们引用一下例子吧，分数的定义首先向我们提供了一个极端例证。在小学中，要定义分数，人们把苹果或馅饼加以分割；当然，这是在内心分割，实际上并没有这样作，因为我没有假定初等教育的预算容许如此挥霍。另一方面，在师范学校中，或者在高等学校中，却说分数是用横线分开的两个整数的组合；我们通过约定定义这些符号所服从的运算；据证明，这些运算法则与整数计算中的相同，而且我们最后根据这些法则确定，用分母乘分数则得分子。这是十分恰当的，因为我们正在向年轻人讲解他们通过分割苹果或其他对象长期以来就熟悉了的分数概念，由于严格的数学教育的熏陶，他们的思想逐渐地向往纯粹逻辑的定义。但是，人们如果要把这种办法用于初学者，那岂不是要使人惊讶得发呆么！

这也是在希尔伯特的《几何学基础》一书中所看到的定义，该书受到公正的称赞并获得了极大的荣誉。看看他事实上是如何开始的：**我们设想三个事物系统，我们将称其为点、线和面。**这些“事物”是什么呢？

我们不知道，或者我们不需要知道；想要知道它们甚至被认为是憾事；我们有权知道的一切就是这个假定告诉我们的东西；例如这就是：**两个不同的点总是决定一直线**，还要加上这样的话：**倘若不用决定一词，我们可以说两点在直线上，或者说直线通过或连结这两点。**

因此，“在直线上”只不过被定义为“决定一直线”的同义语。我认为是很好的书，但是我不应向学童推荐。可是，即便我毫无顾忌地推荐了，学童也无法读懂它。

我所举的是极端的例子，没有老师会梦想走得那么远。不过，即使未达到这样的模式，他难道不是已经招致了同样的危险吗？

假定我在一个四年级班里，教师讲道：圆是与称之为圆心的圆内一点等距的平面上的点的轨迹。好学生在他的笔记本写下这句话；差学生拉长了脸；但是，无论谁都不理解其意；于是，教师拿起粉笔，在黑板上画圆。学生认为：“啊！他为什么不同时说：圆是环形物呢，否则我们早理解了。”毫无疑问，教师是对的。学生的定义是无用的，因为它不能用于证明，而且它不能培养学生分析概念的有益习惯。但是，人们应该向他们说明，他们并不理解他们自以为知道的东西，应该引导他们意识到他们的原始概念的粗糙性，意识到他们需要使概念更精练、更精确。

4. 我将返回到这些例子；我只希望向你们说明两种对立的概念：它们处于猛烈的冲突之中。科学史可以解释这种冲突。如果我们读一下五十年前写的书，我们发现大多数推理似乎缺乏严格性。当时曾经假定，连续函数只有在通过零点时才能改变符号；今天我们证明了这一点。人们曾假定，通常的运算法则可用于不可通约数；今天我们证明了它。人们还作过许多其他假定，其中有时也会出错。

我们信赖过直觉；但直觉既不能给我们以严格性，也不能给我们以可靠性；我们愈来愈看清了这一点。例如，有人告诉我们，每一个曲线都有切线，也就是说，每一个连续函数都有导数，但这却是错误的。正如我们肯定认为的那样，我们使直觉成分越来越少。

是什么促成了这种必要的进化呢？我们并非迟钝地觉察到，如果一开始不插入定义，那么严格性就无法在推理中确立。

数学家所研究的对象长期以来没有很好地定义；因为我们用感觉或想象描述了它们，所以我们自以为了解它们；但是，就它们而言，我们只有粗糙的想象，而没有推理赖以进行的精确概念。正

是在那里，逻辑主义者完全可以指导他们的努力。

对于不可通约数来说，情况就是这样。我们把连续性观念归因于直觉，这种观念本身分解为与整数有关的复杂的不等式系统。这样便最终消除了所有的困难，我们的祖先在考虑微积分基础时，曾为这些困难感到惊讶。今天，只有整数留在解析学中，或者说，只有用等式和不等式丛结合起来的整数的有限系统或无限系统留在解析学中。我们所说的数学算术化了。

5. 但是，你认为数学在没有作出任何牺牲的情况下获得了绝对的严格性吗？根本不是这样，在严格性方面有所得，则在客观性方面有所失。正是由于它自己与实在相分离，才获得了这种完美的纯洁性。我们可以自由地在它的整个疆域驰骋，以前这里充满着障碍，而且这些障碍还没有完全消除。它们只是移到了边界，如果我们想越过这一边界而进入实用领域，就必须重新破除这些障碍。

我们已有了由不一致的元素形成的模糊的概念，在这些元素中，一些是先验的，另一些来自或多或少经过整理的经验；我们认为，我们通过直觉知道它的主要特性。今天，我们摒弃经验元素，仅仅保留先验元素；特性之一作为定义，所有其他特性都能通过严格的推理从定义导出。这都是十分恰当的，不过依然要证明，这种变成定义的特性从属于真实的客体，经验使我们了解这些客体，我们从中引出了我们模糊的直觉概念。为了证明这一点，就必须诉诸经验或求助于直觉，如果我们不能证明它，我们的定理虽则十分严格，但却毫无用处。

逻辑有时造成奇异的东西。半个世纪以来，我们看到，出现了一大堆异乎寻常的函数，它们似乎力图尽可能不类似于具有某些效用的普通函数。它们不再有连续性，或者也许有连续性，但

却没有导数等等。不仅如此，从逻辑的观点来看，正是这些奇异函数，才是最普遍的，人们无需寻找就能遇到的函数只是作为特例而出现。它们仅占据了一个很小的角落。

从前，当一个新函数被发明时，正是为了某种实用的目的；今天，为了指出我们祖先推理的错误，才特意发明新函数，人们从来也不能从中得到比这更多的东西。

如果逻辑是数学的唯一指导，它就必须从最普遍的函数开始，也就是说从最奇异的函数开始。正是初学者，必须下决心对付这个畸胎陈列馆。如果你不这样作，逻辑学家就会说，你只能逐步达到严格性。

6. 是的，也许是这样，但是我们不能使实在如此贬值，我不仅仅意指感觉得到的世界的实在，这种实在无论如何具有它的价值，因为你的学生十分之九都向你索求武器，以便与之斗争。还有一种更为微妙的实在，它造成了数学存在的真正生命，它完全不同于逻辑。

我们的身体是由细胞构成的，细胞是由原子组成的；于是，这些细胞和这些原子都是人们身体的实在吗？这些细胞排列的方式，导致个体统一的方式，不也是实在、而且不也是更有趣的实在吗？

博物学家只是用显微镜研究象，他能够认为他充分地了解这种动物吗？

这与数学中的情况相同。当逻辑学家把每一个证明分解为许多全部正确的基本演算时，他还不具有整个实在；我不了解那一种东西构成证明的统一性，这一点他完全没有注意到。

在由我们的大师们建设起来的大厦中，即使我们不理解设计师的规划，我们也要称赞砖石工的工作多么有用吗？现在，纯粹

逻辑不能使我们正确评价总效果；为此我们必须求助直觉。

以连续函数的观念为例。起初，这只是一个可感觉到的图象，用粉笔在黑板上所画的痕迹。逐渐地，它变得精练了；我们利用它构造复杂的不等式系统，该系统再现了原始图象的所有特征；当作完这一切后，正象在建成了拱门之后，我们便拆除了拱架；从这时起，支撑物无用了，这种粗糙的表示消失了，留下的只是大厦本身，在逻辑学家看来，它是无可指责的。如果教师不回忆原始图象，如果他不暂时恢复拱架，那么学生怎么能够以某种随意性凭直觉推测，所有这些不等式相互之间以这种方式搭成脚手架呢？定义在逻辑上也许是正确的，但它并没有向他显示出真正的实在。

7. 因此，我们必须回溯一下；对一个教师来说，很难教他完全不满意的東西；但是，教师的满意并不是唯一的教学目标；我们首先应该注意学生的思想是什么样的，我们希望使它变成什么样的。

动物学家主张，动物的胚胎的成长简短地重演了它的祖先在整个地质时代的全部历史。在精神发展中，情况似乎与此相同。教师应该使儿童走他的祖先走过的路；要更快些，但不要越站。为此，科学史应该是我们的第一个向导。

我们的祖先以为他们知道分数是什么，或连续是什么，或曲面的面积是什么；我们发现他们并不了解这些东西。当我们的学生认真学习数学时，他们恰恰也是这样以为他们了解数学。如果在没有预先通知的情况下我告诉他们：“不，你们不了解数学；你们以为你们理解的东西，其实你们并不理解；”我必须向你们证明在你们看来是自明的东西。”在证明中，如果我使自己立足于在你们看来没有结论明显的前提，那么这些不幸的人将怎么想呢？他

们将认为，数学科学仅仅是无用的不可捉摸的东西的任意堆积；他们或者将厌恶它，他们或者将把它作为游戏并达到象希腊诡辩家那样的精神状况。

相反地，当学生的思想后来熟悉了数学推理时，思想由于这种长期的反复训练而成熟起来，学生本人将发生疑问，于是你的证明将受欢迎。这将唤起新的疑问，儿童将相继提出问题，正象我们的祖先相继提出问题一样，只有到完美的严格性使他满意为止。怀疑一切并不是有能力，人们必须了解他为什么怀疑。

8、数学教学的主要目的是发展精神的某些能力，其中直觉并不是最不珍贵的。正是通过直觉，数学世界才依然与真实世界保持接触，即使纯粹数学家没有真实世界也能工作，但总是必须求助于它，以填平把符号与实在分隔开的鸿沟。实用者总是需要它，对于一个纯粹几何学家，应该有一百个实用者。

工程师应该接受完善的数学教育，可是数学教育对他有什么帮助呢？

看看事情的各个方面吧，迅速地看一看吧；工程师没有时间捉老鼠。在呈现在他面前的复杂的物理对象中，他应该迅速地辨认出数学工具在什么地方，我们把数学工具放在他的手里，他能够掌握这些工具。如果我们在工具和对象之间留下逻辑学家挖掘的鸿沟，他该怎么办呢？

9、除工程师而外，其他为数不多的学生将要成为教师；因此，他们必须追根穷底；对他们来说，关于本源的深刻的、严谨的知识归根结底是必不可少的。这是因为，如果他们从来不注重直觉，只是片面地看问题，那么他们就会得到错误的科学观念，而且他们也无法在他们的学生身上培养他们自己并不具备的品质。

对于纯粹的几何学家来说，这种能力是必不可少的；逻辑用于证明，直觉用于发明。知道如何批判固然不错，知道如何创造当然更好。你知道如何辨认组合是否正确；如果你没有在所有可能的组合中选择的技巧，便会陷入困境。逻辑告诉我们走这一条路保证不会遇到任何障碍；但是它不会告诉我们那一条路能达到目的。为此，必须从远处了望目标，教导我们了望的能力是直觉。没有直觉，几何学家便会象这样的作家，他只是按语法写诗，但却毫无思想。现在，它刚一出现，如果我们驱逐它、排斥它，如果我们在了解它的益处之前就轻视它，那么这种能力怎么能够发展呢。

在这里，请允许我插句话，强调一下写作练习的重要性。写作在某些考试中也许没有充分地予以重视，例如在巴黎理工学院就是这样。我被告知，写作对于十分优秀的学生紧闭大门，这些学生精通课程，透彻地理解它，不过没有能力作最少量的应用。我刚刚说过，理解这个词有几种意义：这样一些学生只是在第一个方面理解了，我们看到，他们既不足以成为工程师，也不足以成为几何学家。好了，由于必须作出选择，我宁可要完全理解的学生。

10. 但是，数学教师首先应当培养正确推理的技艺，这种技艺不也是珍贵的东西吗？我不慎忘记了这一点。应该引起我们的注意，从一开始就这样作。我忧伤地看到，几何学退化为我不了解的低级的准距快速测定术，我决不赞成某些德国教师的极端主张。但是，有足够的机会使学生练习数学那一部分中的正确推理，我所指出的不方便在这里还未呈现出来。有一长串定理，其中绝对的逻辑从最初就处于支配地位，也可以说十分自然地处于支配地位，在那里，头一批几何学家给了我们模式，我们应该不断地

仿效和赞美这些模式。

正是在第一原理的说明中，必须避免过多的不可捉摸的东西；这也许最让人丧气而且无用。我们不能证明一切，我们不能定义一切；因而总是有必要借助于直觉；问题在于，是早一点还是晚一点这样作，倘若正确地利用直觉向我们提供的前提，我们便能学会合理地推理。

11. 有可能满足如此之多的对立条件吗？尤其是，当问题在于给出定义，这是可能的吗？怎样才能找到一个简明的陈述，使它同时满足不变的逻辑法则，满足我们把握新概念在科学总体中的地位的要求，满足我们用图象进行思维的需要呢？这样一个陈述通常是找不到的，这就是人们不足以陈述定义的原因；必须为此作准备，并证明它是正当的。

这意味着什么呢？你知道，人们常常说：每一个定义都隐含着假定，因为定义肯定所定义的对象的存在。于是，从纯粹逻辑的观点看来，定义将不会被认为是正当的，直到人们既不用术语、也不用预先承认的真理**证明了**它不包含矛盾时为止。

但是，这还不够；定义是作为约定向我们陈述的；但是，如果我们希望把定义作为**任意的**约定强加给人们，那么绝大多数人都会感到反感。只有当你回答了许多问题时，他们才会满意。

正如利阿德(Liard)先生所表明的，数学定义通常是由比较简单的概念建造的真正的建筑物。但是，当许多其他组合都是可能的时候，为什么以这种方式集合这些元素呢？

这是出于任性吗？如果不是，为什么这种组合比所有其他组合更有存在的权利呢？它符合什么需要呢？人们如何预见它在科学发展中会起重要的作用、它会使我们的推理和运算简化呢？在自然界中存在着某种类似的对象，也可以说是存在着它的粗糙的

和模糊的图象吗？

这并非一切；如果以满意的方式回答所有这些问题，我们事实上将看到，有权利给新生者命名；但是，名称的选择也不是任意的；需要解释人们是受什么类似的指导的，如果把类似的名称给予不同的事物，这些事物至少仅在材料上有差别，而在形式上却相关联；它们的性质是类似的，也可以说是平行的。

以此为代价，我们可以满足所有的倾向。如果陈述恰当得足以使逻辑主义者中意，那么确证将会使直觉主义者称心。但是，还有更好的程序；若确证无论在什么地方都是可能的，它就应该先于陈述，并为陈述作准备。通过研究某些特例，便会引导人们达到普遍的陈述。

还有另外的事情：定义陈述的每一部分，其目的在于把被定义的事物与其他邻近对象的类区别开来。只有当你不仅指出了被定义的对象，而且也指出了可以恰当地与之区别的邻近对象时，只有当你把握了差别并明确地附加说，这就是在陈述定义中我为什么这样说而不那样说时，定义才算是被理解了。

不过，现在是放下一般原则，进而审查我详述过的某些抽象原理如何可以应用到算术、几何学、解析学和力学中的时候了。

算 术

12. 整数不必定义；作为回报，人们通常定义整数的运算；我认为，学生虽则记住了这些定义，但并不明白它们的意义。关于这一点，有两个理由：首先，使学生过早地学习它们，当时他们的思想还没有感到需要它们；其次，从逻辑的观点来看，这些定义是不能令人满意的。加法的好定义还未找到，只是因为我们必须停下来，我们不能够定义一切。说加法在于添加，这并不是

定义加法。人们能够作的一切就是从若干具体例子出发,并且说:我们完成的运算就是所谓的加法。

至于减法,完全是另一个样子;从逻辑上讲,减法可定义为加法的逆运算;但是,我们能够以这种方式开始吗?在这里,也是用例子开始的,在这些例子上表明了两种运算的相关性;于是,将为定义预先作了准备,并使它得到了验证。

乘法恰恰也是这样;举一个特殊的问题吧;先说明乘法可以通过把几个相等的数加在一起来解决;接着说明我们用乘法可以比较迅速地达到这一结果,乘法是学生已经知道如何按惯例去作的运算,逻辑定义将会自然地由此得出。

除法被定义为乘法的逆运算;可是还是以例子开始,该例是从分割这一熟悉的概念产生的,这个例子表明,乘法可以重新得到被除数。

还有分数运算。唯一的困难是关于乘法。最好先详述一下比例理论;只有从它才能够得到逻辑的定义;可是,要使在这个理论的开头所遇到的定义是可以接受的,就必须用许多例子为它们作准备,并努力引入分数材料,而这些例子则来自比例运算法则的经典问题。

我们也不应害怕用几何学图象使学生熟悉比例概念,这种方法是:如果他们已经学过几何学,可以诉诸于他们回忆起来的知识,如果他们没有学过几何学,则可以求助于直接的直觉,而且这将为他们以后学习几何学作好准备。最后,我想再说一句,在定义了分数乘法之后,需要通过说明它符合交换律、结合律和分配率,来证明这个定义是合理的,并让学生注意,之所以这样规定,是为了证明定义是合理的。

人们看到,几何学图象在这一切中起了什么作用;这种作用

已为哲学和科学史所证实。如果算术和几何学依然毫无联系，那么算术只可能知道整数；正是为了适应几何学的需要，算术才发明了其他内容。

几 何 学

在几何学中，我们立即就遇到了直线的概念。直线能够被定义吗？众所周知的定义，即从一点到另一点的最短路径，很难使我满意。我只应从直尺开始，首先向学生说明，人们如何通过旋转检验直尺；这种检验就是直线的真实定义；直线就是旋转轴。其次，他应当说明如何通过滑动检验直尺，于是他便具有直线的最重要的特性之一。

至于从一点到另一点的最短路径这个特性，不过是一个能够肯定地加以证明的定理，可是证明太复杂了，以致在初等教育中找不到它的位置。更值得说明的是，把一个预先检验过的直尺贴近拉紧着的线上。面对这样一些困难，人们不需要担心增加假定，以使用粗糙的实验证明它们是正当的。

需要姑且承认这些假定，如果人们承认的假定多于严格必要的假定数，弊端也不是很大的；主要的问题是学会在所承认的假定上正确地进行推理。喜欢重复的萨尔塞(Sarcey)叔叔常说，在剧院中，观众在一开始都乐于接受所有强加在他身上的假定，但帷幕一旦拉开，他就变得坚决按照逻辑看问题了。好了，数学中的情况与此正好相同。

关于圆，我们可以从圆规开始；学生乍一看便会认出所画的曲线；然后使他们观察，这个绘图工具的两点的距离始终不变，其中一个点是固定的，另一个点是可动的，这样我们将自然地引出了逻辑的定义。

平面的定义包含着公理，这一点无须隐瞒。取一个制图板，显示运动着的直尺始终保持与这个平面接触，而且还具有三个自由度。与柱面和锥面比较，在这种曲面上所划的直线只具有两个自由度；其次，取三个制图板；先显示它们将滑动，同时相互始终保持接触，这个制图板有三个自由度；最后把平面和球面加以区别，显示与第三个板接触的两个板将相互接触。

也许你为这种不断地使用运动之物而感到惊奇；这不是粗糙的技巧；它比人们起初设想的更具有哲学意义。对哲学家来说，几何学是什么呢？它是群的研究。是什么群呢？是固体运动的群。可是，要是没有某些运动着的固体，怎么定义这种群呢？

我们应该保持平行线的经典定义，说平行线是两个共面的直线无论延长得多么远都不相交吗？不应该，因为这个定义是否定的，因为它无法用实验证实，从而不能被看作是直觉的直接资料。之所以不应该，尤其是因为它对群的概念完全是陌生的，完全没有考虑固体的运动，正如我说过的，固体的运动是几何学的真正来源。首先把不变图形的直线平动定义为这个图形的所有点都具有直线轨道的运动，并通过正方形在直尺上的滑动，说明这样的平动是可能的，这岂不是更好一些？

从这个作为假定而提出的实验考察中，可以很容易地推出平行概念和欧几里得公设本身。

力 学

我不需要回到速度或加速度的定义，或者回到其他运动学概念；它们可以有利地与导数的概念联系起来。

另一方面，我愿强调一下力和质量的动力学概念。

一件事情冲击了我：受过中学教育的年轻人，不会把他们学

到的力学定律应用到真实的世界中去。这不仅仅是他们没有应用能力；他们甚至没有想到应用。对他们来说，科学世界和实在世界是用一堵不可逾越的隔墙隔离开来的。

如果我们尝试分析一下我们学生的思想状态，我们就不会为此感到惊讶了。在他们看来，真实的力的定义是什么呢？力的定义不是他们背诵的东西，而是蜷缩在他们思想的隐匿处、暗中完全指导他们思想的东西。这里有一个定义：力是箭号，人们用它来作平行四边形。这些箭号是想象的东西，它与自然界中的任何存在物都没有关系。如果向学生说明，力实际上在用箭号表示它们之前就有，那就不会发生这种情况。

我们将如何定义力呢？

我想我在其他地方已充分表明，完善的逻辑定义是没有的。只有拟人的定义，即肌肉用力的感觉；这实在太粗糙、太无用了，以致无法从它推导出任何东西。

在这里，问题在于我们如何前进：首先，要知道力的种，我们就必须相继说明这个种的所有类；它们是为数众多的、截然不同的；有装有流体的容器内壁上所受的流体压力；有线的张力；有弹簧的弹性力；有作用在物体所有分子上的重力；有摩擦力；有两个物体在接触时相互之间正常的作用与反作用力。

这只是定性的定义；还必须学会测量力。为此，先证明一个力可用另一个力代替而不破坏平衡；我们可以在天平和博尔达(Borda)双重称中找到这种代替的第一个例子。

接着证明，重力不仅可以用另一个重力代替，而且可以用不同本性的力来代替：例如，普罗尼(Prony)制动器容许用磨擦力代替重力。

两个力平衡的概念就是从这一切中产生的。

必须定义力的方向。如果一个力 F 借助于拉紧的线等价于另一个作用在所考虑的物体上的力 F' ，以致 F 可以用 F' 代替而不影响平衡，那么按照定义，系线的点将是力 F' 的作用点和等价的力 F 的作用点；线的方向将是力 F' 的方向和等价力 F 的方向。

由此可进而比较力的大小。如果一个力能够代替具有同一方向的其他两个力，它便等于两力之和；例如，演示20克的重物可以用10克的重物来代替。

这就足够了吧？还不够。我们现在知道如何比较两个具有同一方向和同一作用点的力的强度；当力的方向不同时，我们也必须学会比较。为此，设想一个用重物拉紧并通过滑轮的线；我们便说线两端的张力相同，而且等于重物的拉力。

我们的这个定义能使我们比较线的两段的张力，再利用前面的定义，我们还可以比较与这两段线具有同一方向的任何两个力，应该通过演示线的最后一段的张力对同一重物的拉力而言依然相同，而不管折转滑轮的数目与配置，来证明上述说法是合理的。最后，还必须通过演示这只有在滑轮无摩擦时才是真实的。

一旦掌握了这些定义，就可以证明，作用点、方向和强度足以确定一个力；这三个要素相同的两个力总是等价的，而且总是可以相互代替，而不管它们处于平衡还是处于运动，而且这与正在作用的其他力是什么毫无关系。

必须说明，两个共点力总是可以用一个合力来代替；而且，不管物体处于静止还是处于运动，也不管作用于物体的其他力是什么，这个合力依然是相同的。

最后必须说明，这样定义的力满足作用与反作用相等的原理。

正是实验而且唯有实验，才能告诉我们这一切。引用学生每天都作的而且不怀疑的某些共同的实验，在他们面前完成几个简

单的、经过周密选择的实验就足够了。

在通过这一切迂回曲折的道路之后，我们就可以用箭号表示力，我甚至希望，在推理的进展中，时时要从符号返回到实在。例如，不难借助于用三条线作成的仪器来图承力的平行四边形，这三条线通过滑轮，用重物拉紧，当它们作用在同一点时便处于平衡状态。

知道了力，就很容易定义质量；这时，定义应该借助动力学；没有其他作法，因为要达到的目的就是理解质量和重量之间的差别。在这里，定义应该再次由实验来引导；事实上，有一种机械似乎是特意为说明质量是什么而制作的，这就是阿脱武德机；也可以回忆一下落体定律，重力加速度对于重物体与轻物体都是相同的，而且它还随纬度不同而变化，等等。

现在，如果你告诉我，我所赞美的所有方法长期以来就在学校应用，我为此而感到惊奇，更为此而感到高兴。我知道，总的来说，我们的数学教学是好的。我不希望推翻它；那样作甚至会使我感到悲痛。我只要求逐步地改善。我们的教学不应该在一时的风尚的随意冲击下遭受突然的摇摆。在这样的骚动中，数学教学的高度的教育价值会立即蒙受损害。良好的和健全的逻辑应该继续是它的基础。用例子定义总是必要的，但是它应该为逻辑定义开辟道路，而不应该代替逻辑定义；在真正的逻辑定义只能在高等教育中有利地作出的情况下，它应该使这一点成为可以想往的。

要理解，我在这里所说的一切并不意味着放弃我在其他地方所写的东西。我常常有理由批评我今天称赞的某些定义。这些批评完全是有效的。这些定义只不过是暂时性的。但是，我们必须取道的正是它们。

第三章 数学和逻辑

引言

不求助于数学特有的原理，能够把数学化归为逻辑吗？有整整一个学派，对此富于热情，充满信心，力图去证明它。他们有自己的特殊语言，这种语言不用词，而使用符号。这种语言只能被创始人理解，以致一般人倾向于屈从内行的明确断言。稍为仔细地审查一下这些断言，看看他们是否证明了表述这些断言的专横的腔调是合理的，也许不无益处。

但是，要使问题的本性清楚，就必须开始研讨某些历史细节，尤其是回忆康托尔著作的特征。

无穷概念被人引入数学由来已久；但是，这种无穷是哲学家所谓的（变化过程的）**形成**。数学无穷仅仅是一个能够增加到超越所有界限的量：它是一个可变量，不能说它**已通过了**所有界限，而只能说它**可以通过**它们。

康托尔已着手把**实无穷**引入数学，也就是说把这样一个量引入数学：这个量不仅能够通过所有的界限，而且人们认为它已经通过了它们。他提出了象这样一些问题：空间中的点比整数多吗？空间中的点比平面上的点多吗？等等。

于是，整数的数目、空间的点的数目等等，组成了他所谓的**超限基数**，也就是说，超限基数大于所有的普通基数。而且，他

忙于把这些超限基数进行比较。在把包含无穷个元素的集合中的元素按适当的次序排列时，他也曾设想了他所谓的超限序数，我不想详述超限序数了。

许多数学家按照他的引导，提出了一系列这类问题。他们这样熟悉超限数，以致他们最终创造出依赖康托尔超限级数理论的有穷数理论。在他们看来，为了以真正的逻辑方式教算术，人们应当以建立超限基数的一般特征开始，然后在它们之中区分出一个很小的类，即普通整数的类。由于这种迂回，人们才能成功地证明与这个小类（也就是说我们的整个算术和代数）有关的一切命题，而没有利用任何逻辑之外的原理。

这个方法显然与一切健全的心理相反；可以肯定，人类精神无法用这种方式着手构造数学；我想，它的创造者也没有这样梦想把它引入中学教学中去。但是，它至少合乎逻辑吗，或者更恰当地讲，它是正确的吗？人们可以对它表示怀疑。

无论如何，使用它的几何学家为数众多。他们已习惯于公式，他们在写学术论文时企图摆脱不是纯粹逻辑的东西，这些学术论文与通常的数学书不同，公式不再与解释性的论述交替出现，这种论述已经全部消失。

不幸的是，他们得到了矛盾的结果，这就是所谓的康托尔矛盾，我们有机会回过头来谈它。这些矛盾并没有使他们灰心丧气，他们力图修正他们的结果，以消除已经摆在他们面前的那些矛盾，尽管如此，也不能保证不会产生新的矛盾。

是判决这些夸张言语的时候了。我不奢望使他们信服，因为他们在这种气氛下生活的时间太长了。而且，当他们的证明之一被驳倒时，我们确实看到，它通过轻微的变化再生了，一些证明已经从它们的灰烬中出现一些时候了。这就象很久以前希腊神话

中的九头蛇一样，它那有名的头总是可以再生。海格立斯(Hercules) * 杀死了它，因为九头蛇只有九个头或十一个头；但是，这里却有许多头，一些在英国，一些在德国、意大利、法国，连海格立斯恐怕也不得不认输。于是，我只向有健全的判断力的、毫无偏见的人诉说。

I

近年来，出版了许多纯粹数学和数学哲学方面的著作，力图把数学推理的逻辑元素隔离、孤立起来。库蒂拉特(Couturat)先生在《数学原理》一书中对这些著作作了清楚的分析 and 解释。

在库蒂拉特先生看来，新著作，尤其是罗素(Russell)和皮亚诺(Peano)的著作，最终调解了莱布尼兹和康德(Kant)之间长期以来悬而未决的争论。这些著作表明，不存在先验综合判断(康德称呼判断的用语，这种判断既不能通过分析加以证明，也不能归纳为恒等，也不能用实验来建立)，这些著作还表明，数学完全可以化归为逻辑，直觉在这里不起作用。

这就是库蒂拉特先生在刚才所引用的著作中陈述的东西；他在纪念康德的演说词中更明确地谈到了这一点，因此我听到我周围的人窃窃私语：“我充分地看到，这是康德逝世一百周年纪念。”

我们能够同意这一决定性的谴责吗？我认为不能，我将力图说明其中的缘由。

II

首先，在新数学中冲击我们的是它的纯粹的形式特征，希尔

* 亦译成赫尔克里士或赫拉克勒斯，主神宙斯之子，力大无穷，曾完成十二项英雄事迹。——译者注

伯特说：“我们设想三种事物，我们将称其为点、直线和平面。我们规定一直线将被两点决定，若不说这条直线被这两点决定，我们可以说它通过这两点，或者说这两点位于这条直线上。”我们不仅不知道这些事物是什么，而且我们也不应该企图知道它。我们不需要知道，从来也没有看到过点、直线或平面的人也能象我们一样地研究几何学。通过这个用语上或者位于……上这个用语不可能在我们身上引起形象，前者仅仅是被决定的同义语，后者仅仅是决定的同义语。

这样一来，据说为了证明一个定理，知道它意味着什么既没有必要，甚至也没有好处。几何学家可以被斯坦利·杰文斯(Stanley Jevons)设想的逻辑皮亚诺取代；或者，如果你乐意的话，可以设想一种机器，在一端输入假定，而在另一端便输出了定理，这就象传说中的芝加哥机器一样，从一端送入活猪，在另一端便转化为火腿和香肠。数学家与这些机器一样，他不需要知道他作什么。

我并不为希尔伯特几何学这种形式特征而责备他。在提出了他分配给自己的问题后，这正是他应走的道路。他希望把几何学的基本假设数简化到极小，并完全地列举它们；现在，在我们精神依然是能动的推理中，在直觉还起作用的推理中，在生动的推理中，可以说，不准引入未被觉察到的假定或公设。因此，只有在把所有几何学推理化归为纳粹机械的形式，他才能保证完成他的计划并结束他的工作。

希尔伯特对于几何学所作的东西，其他人力图把它用于算术和解析。即使他们完全成功了，康德主义者最终会哑口无言吗？也许不会，因此在把数学思想化归为空洞的形式时，它肯定是残缺不全的。

人们也承认已经规定，所有的定理都能够用纯粹解析的程序、通过有限数目的假定的简单逻辑组合推导出来，这些假定仅仅是约定；哲学家还可以有权利调查这些约定的起源，考察为什么人们断定它们比相反的假定更可取。

可是，从假定导致定理的推理的逻辑正确性不是我们注意的唯一事情。完善的逻辑的法则，它们是整个数学吗？不妨说，下棋的整个技艺归结为棋子走法的规则。在由逻辑提供的材料能够建立起来的一切结构中，人们必须作出选择；真正的几何学家能明智地作出这种选择，因为他或者受可靠的本能的引导，或者受对比较深奥、比较神秘的几何学的某种模糊的意识——我还不了解它——的引导，唯有这一切，才赋予建造起来的大厦以价值。

寻求这种本能的起源，研究这种只可意会不可言传的深刻的几何学的规律，对于不需要逻辑即是一切的哲学家来说，也可能是一件极好的工作。但是，我希望提出的并不是这个观点，我希望考虑的问题也不是这样的。对于发明家来说，所提到的本能是必要的，但是乍看起来，在研究一旦创立起来的科学时，似乎没有本能我们也能工作。好了，我希望审查的是，逻辑原则一旦被承认，人们是否真的能够证明——我不说发现——所有的数学真理而不重新诉诸直觉。

III

最近的著作能够修改我的回答吗？对于这个问题，我曾经说不能^①。我之所以说不能，这是因为“全归纳原理”在我看来似乎是数学家所必需的，同时它也不能化归为逻辑。这个原理是这

^① 参见《科学与假设》，第一章。

样陈述的：“若一种性质对数 l 为真，倘使它对 n 为真，若我们确认它对 $n+1$ 为真，则它将对所有的整数都为真。”在其中，我看到数学推理的一般优点。与人们想象的不同，我的意思并不是说，所有的数学推理都能够简化为这个原理的应用。仔细地审查一下这些推理，我们看到其中应用了许多其他类似的原理，以表示同样的基本特征。在原理的这一范畴中，全归纳原理只不过是简单的，这就是我把它选作典型的原因。

全归纳原理这一名称虽已流行，但并没有证明它是合理的。这种推理模式无非是真正的数学归纳法，它与通常的归纳法的差别仅在于它的可靠性。

IV

定义和假定

对于坚定的逻辑主义者而言，这样的原理的存在是困难的；他们如何能够摆脱困难呢？他们说，全归纳原理不是严格意义上所谓的假定或先验综合判断；它恰恰只是整数的定义。因此，它是简单的约定。要讨论这种观察它的方法，我们必须稍为仔细地审查一下定义和假定之间的关系。

让我们回到库蒂拉特先生论述数学定义的文章吧，该文发表在巴黎戈蒂埃-维拉斯和日内瓦热奥尔出版的《数学教学》杂志上，我们从中将看到**直接的定义**和**用公设定义**之间的区别。

库蒂拉特先生说：“用公设定义不适用于单个概念，而适用于概念系统；它在于枚举把概念结合起来的**基本关系**，这些关系能使我们证明它们的其他一切特性；这些关系即是公设。”

如果所有这些概念除一个而外都被预先定义，那么这个剩下

的概念按照定义将是证实这些公设的东西。

这样一来，某些不可证明的数学假定只可能是伪装的定义。这个观点往往是合理的；例如，提到欧几里得公设，我本人就承认它。

几何学的其他假定不足以完满地定义距离；于是，按照定义，在所有满足另外这些假定的量中，距离将是能使欧几里得公设为真的这样一种量。

好了，我对于欧几里得公设所承认的东西，逻辑主义者假定对于全归纳原理也为真；他们想把它仅仅看作是伪装的定义。

但是，要给他们这种权利，必须满足两个条件。斯图尔特·穆勒（Stuart Mill）说，每一个定义都隐含着假定，按照这个假定，肯定了被定义的对象的存在。依据这种说法，定义不再是可以伪装成定义的假定，相反地，它是可以伪装成假定的定义。斯图尔特·穆勒在实质性的和经验的意义上解释了存在一词；他的意思是说，在定义圆时，我们肯定在自然界中存在着圆形物。

在这种形式下，他的观点是无法接受的。数学与实物对象的存在无关；在数学中，存在一词只能有一种意义，它意味着没有矛盾。这样纠正以后，斯图尔特·穆勒的思想就变正确了；在定义一种事物时，我们肯定该定义不隐含矛盾。

因此，如果我们有一个公设系统，如果我们能够证明这些公设不隐含矛盾，那么我们便有权利认为它们表示了进入其中的一个概念的定义。如果我们不能证明这一点，就必须在没有证据的情况下承认它，于是那将是一个假定；这样一来，要在公设下寻找定义，我们应该在定义下寻找假定。

通常，要证明定义不隐含矛盾，我们要用**范例**进行，我们力图使事物的**范例**满足定义。举一个用公设定义的例子吧；我们希

望定义概念A，我们说，按照定义，A 是任何关于某些公设为真的事物。如果我们能够凭直觉证明，所有这些公设对某一对象B为真，那么定义将被证明是合理的；对象B将是A的**范例**。我们将断定，公设没有矛盾，因为存在着它们同时都为真的例证。

但是，这样的通过范例的直接证明并非总是可能的。

要确立公设不隐含矛盾，因而必须考虑可以从这些作为前提的公设中推导出的所有命题，并证明在这些命题中，没有两个是矛盾的。如果这些命题为数有限，那么直接验证就是可能的。这种情况很少发生，而且毫无趣味。如果这些命题在数上是无限的，这种直接的验证就不再能够进行了；必须求助于这样一些程序，在这些程序中，它一般说来正好必须乞求全归纳原理，而这恰恰是已被证明的东西。

这是对逻辑主义者应该满足的条件之一的解释，**进而我们将看到他们并不满意这样作。**

V

还有第二个条件。当我们下定义时，正是利用了它。

因此，我们将在说明的结果中寻找被定义的词；我们有权利肯定适合定义的公设属于用这个词所表示的事物吗？虽然有权利，倘若该词保持着它的意义，倘若我们不隐含地赋予它以不同意义的话。好了，这就是有时发生的情况，人们通常很难觉察到；需要查看一下，这个词是怎么进入我们的论述中去的，它进入的大门是否实际上不隐含与所陈述的定义不同的定义。

这个困难在所有的数学应用中均出现。数学概念给出了十分精炼、十分严格的定义；对于纯粹数学家来说，所有的疑问都消失了；但是，如果人们想把它应用于物理科学，它就不再是纯粹

概念的问题，而是具体对象的问题，具体对象往往只不过是纯粹对象的粗糙图象。说这个对象满足定义，至少近似地满足定义，就是陈述了一个新的真理，唯有经验才能够毫无疑问地提出新真理，新真理不再具有约定的公设的特征。

但是，尽管没有超越纯粹数学，我们也遇到了同样的困难。

你给出了数的微妙定义；而且，一旦给出了这个定义，你就不再去想它；因为在实际上，它并不是教给你数是什么的定义；你早就知道这一点，当在你的钢笔下进而写出数这个词时，你赋予它的意义与第一次碰到时的相同。为了知道这个意义是什么，以及它在这个短语或那个短语中意义是否相同，那就需要考察一下，你是如何被引导说数的，你是怎样把这个词引入这两个短语中的。我暂时不想详述这一点，因为我还有机会回过头来谈它。

让我们这样考虑一个词，我们明确地给出了它的定义 A；此后，我们在论述中使用它时，便隐含地假定了另一个定义 B。有可能，这两个定义指示的是同一事物。但是，正是如此，这才是一个新真理，我们必须证明或承认它是一个独立的假定。

我们将进而看到，逻辑主义者并没有满足第二个条件，正如他们没有满足第一个条件一样。

VI

数的定义很多，而且各不相同；我甚至只好放弃列举它们的作者的名字。我们不应为有如此之多的定义而惊讶。如果其中之一是令人满意的，那么人们便不会给出新的定义。如果每一个从事这个问题的新哲学家都认为他必须发明另一个定义，这是因为他不满意他的前辈的那些定义，他之所以不满意它们，因为他认

为他看到了预期理由*。

在读论述这个问题的著作时，我总是深感不安；我总是期待碰上预期理由，当我没有立即察觉到它时，我担心我遗漏了它。

这是因为，要下定义不用句子是不行的，不用许多词，或至少不用几个词，或至少不用复数词，便很难造一个句子。因此，倾斜是容易滑脱的，时刻都存在着陷入预期理由的危险。

我将只集中注意那些最能够隐藏预期理由的定义。

VII

通用书写法

在这些新研究中，皮亚诺所创造的符号语言起着十分重大的作用。它能够提供某种帮助，但是我认为，库蒂拉特先生把过大的意义赋予它，这必定会使皮亚诺本人感到惊讶。

这种语言的基本要素是某些代数符号，它们代表各种连接词：如果、与、或、因此。这些符号可以是方便的，这是有可能的；但是，说它们注定要使整个哲学发生革命，则是另一回事。人们很难相信，当把**如果**这个词写成‘ ρ ’，就能得到把它写成**如果**时所得不到的好处。

皮亚诺的这一发明起初被称之为**通用书引法** (pasigraphy)，这就是说，写数学论文的技艺是不用日常语言的一个词。后来，由于授与它以**逻辑斯谛**的头衔，它也被提高到比较突出的地位。这个似乎在军事学院使用的词汇，用来称呼高度机动的地面部队的军需军官的技艺、部队行军和驻扎的技艺；但是在这里，不要

* 预期理由(Petitio Principii)是一种逻辑错误，把未经证明的判断作为证明论题的论据。——译者注

害怕弄混，马上就可以看到，这个新名称包含着使逻辑革命的计划。

我们可以看到布拉利-福蒂 (Burali-Forti) 在题为“论超限数问题”的数学论文中所使用的新方法，该论文登载在 *Rendiconti del circolo matematico* 第XI卷上。

以谈这篇论文开始是十分有趣的，我在这里之所以把它作为例子举出来，恰恰是因为它是用新语言写出的全部论文中最重要的一篇。此外，由于有意大利文的隔行对照译文，门外汉也可以读它。

这篇论文的重要性在于，它给出了在研究超限数时所遇到的那些自相矛盾的第一个例子，多年来，那些自相矛盾一直使数学家感到绝望。布拉利-福蒂说，这篇短文的目的是证明可以存在这样两个超限数(序数) a 和 b ，以致 a 既不等于 b ，也不大于或小于 b 。

为了使读者放心，为了理解下述需要考虑的事情，读者并不需要知道超限序数是什么。

现在，康托尔精确地证明了，在两个超限数之间，正如在两个有限数之间一样，除了在一种意义或另一种意义上的相等和不等之外，不能有其他关系。但是，我希望在这里讲的，并不是这篇论文的实质；讲论文的实质会使我离题太远；我只希望考虑形式，而且正好要问，这种形式是否使它获得更多的严格性，从而它是否能补偿强加在作者和读者身上的辛劳。

首先，我们看到布拉利-福蒂如下定义数1：

$$1 = \iota T' \{K\alpha(u, h) \in (u \in U_n)\},$$

该定义十分适合于把数1的观念给予从来也没有听说过它的人。我对皮亚诺的学说了解得很不全面，我不敢冒昧地批评它，但是我仍旧担心这个定义包含着预期理由，这是由于考虑到，我在第

一部分看见数字1而在第二部分看来字母 U_n 。

不管怎样，也许布拉利-福蒂是从这个定义开始的，在简短的演算之后，便得到方程：

$$1 \in N_0, \quad (27)$$

这告诉我们，一是数。

由于我们面对着开头的一些数的定义，我们回想起库蒂拉特先生也曾定义过0和1。

零是什么？它是空类元素的数。而空类又是什么？它是无元素的类。

用空定义零，用无定义空，这实际上是滥用语言资源；于是，库蒂拉特先生对他的定义进行了改善，并写成：

$$0 = \{A; \phi x = A \cdot \bar{p} \cdot A = (x \in \phi x)\},$$

这意味着：零是满足从来也不能满足的条件的事物之数。

可是，因为从来也不的意思是决不，我看不到有什么大进步。

我赶紧附加说，库蒂拉特先生给出的数1的定义是较为满意的。

他说，1本质上是其中任何二个元素都是恒等的类中的元素之数。

我说过，在这种意义上定义1是比较满意的，因为他没有使用一这个词；作为补偿，他使用了二这个词。但是，我担心，如果问什么是二，库蒂拉特先生也许不得不利用一这个词。

VII

可是，返回到布拉利-福蒂的论文上来吧；我已经说过，他的结论与康托尔的结论直接对立。当时，哈达马(Hadamard)先生有

一天来看我，我们谈到这种致命的自相矛盾。

我说：“在你看来，布拉利-福蒂的推理似乎不是无可指责的吗？”

“不，相反地，我一点也没有感觉到要反对康托尔的推理。而且，布拉利-福蒂无权利讲**所有基数的集合**。”

“请原谅，他有权利讲，因为他总是可以设

$$\Omega = T'(N_0, E >).$$

我想知道，是谁妨碍了他，当我们把一事物叫作 Ω 时，能说这个事物不存在吗？”

这是徒劳的，我不会相信他（而且，这样作可能糟透了，因为他有权利）。这仅仅是因为我没有用足够的雄辩术来讲解皮亚诺的学说吗？也许如此，但是，在我们中间，我不认为是这样。

因此，尽管有这种通用书写法工具，问题并没有解决。这证明了什么呢？就问题只是证明数一而言，使用书写法足够了，但是，如果困难摆在面前，如果在解决时存在着自相矛盾之处，通用书写法就变得无能为力了。

第四章 新 逻 辑

I

罗 素 的 逻 辑

要证明逻辑要求，必须改变逻辑。我们看到新逻辑出现了，其中最有趣的是罗素的逻辑。要写形式逻辑，他似乎没有什么新东西，仿佛亚里士多德（Aristotle）已穷竭了它。但是，罗素划归给逻辑的地盘比经典逻辑的地盘大得多，他在这个课题上发表了许多观点，这些观点是独创性的，同时也是正确的。

首先，罗素把类的逻辑隶属于命题的逻辑，而亚里士多德的逻辑主要是类的逻辑，并把主词和谓词的关系作为它的出发点。经典的三段论，如“苏格拉底（Socrates）是人”等等，让位给假设性的三段论：“如果A为真，则B为真；然后，如果B为真，则C为真”，等等。我认为，这是一个最巧妙的观念，因为经典三段论很容易归结为假设性的三段论，而相反的变换则很困难。

不过，这并非一切。罗素的命题逻辑是研究连接词**如果**、**与**、**或**以及否定词**非**的组合规律的。罗素在这里添加了两个其他连接词**与**和**或**，为逻辑开辟了新领域。符号**与**、**或**遵循着与两个记号 $\times$ 和 $+$ 相同的规律，即交换律、结合律和分配律。这样一来，**与**就表示逻辑乘，而**或**则表示逻辑加。这也是十分有趣的。

罗素得出结论说，任何假命题都包含着所有其他真命题或假命题的意思。库蒂拉特先生说，这个结论乍看起来似乎是悖论。

不过，只要修改过一篇不好的论文，就足以辨认出罗素为何是正确的。论文作者往往花费很大的努力，却得到第一个为假的方程；可是，一旦得到方程，他接着积累最惊奇的结果只不过是游戏而已，其中一些甚至可以为真。

II

我们看看，新逻辑比经典逻辑多么丰富；符号增多了，容许各种各样的组合，**其数目不再受到限制**。人们有权利赋予这个推广以**逻辑**一词的意义吗？审查这个问题，仅仅就这个词与罗素争吵，也许是无用的。同意他的要求吧；但是，如果某些在该词的旧意义上宣布为不能化归成逻辑的真理，现在发现它们在新意义上——在某种截然不同的意义上——能够化归为逻辑，那么人们不必大惊小怪。

我们引入了大量的新概念，这些新概念不仅仅是旧概念的组合。罗素知道这一点，他不仅在第一章“命题逻辑”的开头，而且在第二章“类逻辑”和第三章“关系逻辑”中，都引入了新名词，他宣称这些名词是无法定义的。

这并非一切；他同样还引入了他宣称是不可证明的原理。但是，这些不可证明的原理诉诸于直觉和先验综合判断。当我们在数学论文中遇到它们在某种程度上明确地说明时，我们认为它们是直觉的；因为我们扩大了逻辑一词的意义，因为现在我们在《论逻辑》一书中发现了它们，它们就改变了特征吗？**它们没有改变本性，它们只是改变了地位。**

III

能够认为这些原理是伪装的定义吗？因此，总是必须有某种

途径证明它们不隐含矛盾。也许还有必要证实，演绎系列无论进行得多么远，他从来也不会面临矛盾。

我们可以尝试如下推理：我们能够证实，用于没有矛盾前提的新逻辑的演算只能同样给出没有矛盾的结果。因此，如果在 n 次演算后，我们没有遇到矛盾，在 $n+1$ 次演算后，我们也不会遇到矛盾。这样一来，不可能有矛盾开始的时刻，这表明我们将永远不会遇到矛盾。我们有权利以这样的方式推理吗？没有，因为这样便会被迫使用全归纳法；**要记住，我们迄今还不知道全归纳原理。**

因此，我们没有权利认为这些假定是伪装的定义，在我们看来仅剩下一个源泉，承认直觉对于每一个假定的新作用吧。而且，我相信，这实际上是罗素和库蒂拉特先生的思想。

这样，九个不是定义的概念和二十个不可证明的命题（我相信，假如是我演算的话，我还会找到一些），都是新逻辑即广义逻辑的基础，它们预先假定我们的直觉和（为什么不说它？）真正的先验综合判断的新的、独立的作用。关于这一点，大家似乎是一致的；但是罗素还主张，**在求助于这些直觉之后，问题即可完全解决；我们不需要作其他事情，就能够在任何新元素不参与的情况下建立整个数学，在我看来，这些主张似乎是可疑的。**

IV

库蒂拉特先生也常常跟着别人说，这些新逻辑与数的观念完全无关。我不想以计算他的说明包含多少数修饰性数词——例如基数词和序数词或者象“若干”这样的不定修饰词——而自娱。不过，我可以引用一些例子：

“两个或多个命题的逻辑积是……”

“所有命题只能有**两个**值：真和假”；

“**两个**关系的相对积是一关系”；

“关系存在于**两项**之间”，等等。

这种不方便有时并不是不可避免的，有时它也是本质的。没有两项，关系就是不可理解的；没有关系的两项的直觉，没有注意到项是两个，便不可能有关系的直觉，这是因为，如果关系是可相信的，那么它必须有两项，而且只能有两项。

V

算 术

我涉及到库蒂拉特先生所谓的**序数理论**，它是格严意义上所谓的算术的基础。库蒂拉特先生以皮亚诺的五个假定开始，正如皮亚诺和帕多阿（Padoa）所证明的，这五个假定是独立的。

1. 零是整数。
2. 零不是任何整数的后续数。
3. 整数的后续数是整数。

此外补充下面一句话也许是恰当的：

每一个整数都有后续数。

4. 如果两个整数的后续数相等，则它们相等。

第五个假定是全归纳原理。

库蒂拉特先生认为，这些假定是伪装的定义；它们由于**零公设**、**后续数公设**和**整数公设**而构成定义。

但是，我们已经看到，由于通过公设而定义是可以接受的，我们必定能够证明，它不隐含矛盾。

此处情况果真如此吗？根本不是。

证明不能用**例子**作出。我们不能取一部分整数，例如头三个，证明它们满足定义。

如果我取数列0, 2, 我看到它满足假定1, 2, 4和5；但是，要满足假定3，还必须使3是整数，从而数列0, 1, 2, 3满足这些假定；我们可以证明，它满足假定1, 2, 4, 5，但是假定3要求4是整数，数列0, 1, 2, 3, 4满足这些假定，等等。

因此，在没有证明这些假定适合于一切整数的情况下，就不可能证明它适合某些整数；我们必须放弃用例子作为证据。

然后，必须取我们的假定的所有结果，看它们是否不包含矛盾。

如果这些结果为数有限，那么这很容易的；但是，它们的数目是无限的，它们是整个数学，或至少是整个算术。

于是，该作什么呢？也许严格地说来，我们可重复第Ⅲ节的推理。

但是，正如我们说过的，**这种推理是全归纳**，恰恰是全归纳原理，它的辩护也许是争论的焦点。

VI

希尔伯特的逻辑

现在，我回到希尔伯特的**主要工作**上，他向海德堡数学家大会报告了这一成果，其法译文由皮埃尔·布特鲁先生翻译，发表在《数学教学》杂志上，由霍尔斯特德（Halsted）翻译的英译文发表在《一元论者》^①杂志上。在这一包含着深刻思想的工作中，

^① “逻辑和算术的基础”，《一元论者》(Monist) XV, 338—352.

作者的目的类似于罗素的目的，但是在许多论点上，他与他的前辈有分歧。

他说（《一元论者》杂志，第340页）：“如果我们细心考虑，我们便意识到，在逻辑法则的通常说明中，已经使用了算术的某些基本概念；例如，集的概念，也部分地使用了数的概念。我们就这样陷入循环证论之中，因此要避免悖论，必须部分地使逻辑和算术的法则同时发展。”

上面我们已经看到，希尔伯特是在通常的说明中谈逻辑原理的，同样适用于罗素的逻辑。这样一来，就罗素而言，逻辑是先于算术的；对希尔伯特来说，它们却是“同时的”。进而我们将发现，在其他方面差别还很大，当我们遇到这些差别时，我们将指出来。我宁可一步一步地追踪希尔伯特思想的发展，同时按原文引用最重要的段落。

“让我们首先把观念物1(一)作为我们考虑的基础”(第341页)。请注意，在这样作时，我们一点也没有隐含数的概念，因为可以认为1在这里仅仅是一个符号，我们根本不去试图了解它的意义。“把这个观念物与其本身分别两次、三次或多次地合在一起……”啊！这时情况不再一样了；如果我们引入了“二”、“三”、“多”、“几个”这些词，那么我们就引入了数的概念；我们不久将发现的有限整数的定义来得太迟了。我们的作者想得太周到了，他察觉到问题的这一起源。因此，在这篇报告的末尾，他力图正确地加以弥补。

希耳伯特接着引入两个简单的对象 1 和 =，并考虑这两个对象的所有组合以及它们的组合的组合等等。不言而喻，我们必须忘却这两个记号通常的意义，而且不赋予它们以任何意义。

后来，他把这些组合分为两类，即存在类和非存在类，进而

还指令这种分法是完全任意的。每一个肯定陈述都告诉我们，某一组合属于存在类；每一个否定陈述都告诉我们，某一组合属于非存在类。

VII

现在，注意一下一个至关重要的差别。在罗素看来，无论什么对象——他用 x 表示这个对象——都是绝对不确定的对象，他就此没有作任何假定；在希尔伯特看来，它是由符号 1 和 $=$ 所形成的一个组合；他不能设想引入已经定义的对象组合之外的任何东西。而且，希尔伯特以最简洁的方式阐述他的思想，我认为我必须充分地重述他的陈述（第348页）：“在假定中，任意物（相当于通常逻辑中的“每一个”和“所有”概念）只表示那些观念物和它们的相互组合，在这个阶段，它们作为基本的东西被规定下来，或者以新的方式被定义。因此，在从假定出发所进行的演绎推理中，在假定中出现的任意物只能用这样的观念物和它们的组合来代替。我们也必须及时地回想起，通过添加物和使新的观念物成为基本的东西，先前的假定的合法性扩大了，而且在必要之处，它们按照这个意义经受了变化。”

与罗素观点的悬殊差别是一目了然的。对于这位哲学家来说，我们不仅可以用已知的对象，而且可以用任何东西代替 x 。

罗素对他的观点满怀信心，这就是理解的观点。他从存在的一般观念开始，通过添加新质使它愈来愈丰富，同时对它加以限制。相反地，希尔伯特只是把已知的组合认为是可能的存在；结果（只要看看他的思想的一面），我们可以说，他采取外延的观点。

VII

让我们继续阐释希尔伯特的观念。他引入两个假定，并用他的符号语言陈述它们，但是若用寻常语言表示则为：每一个质都等于其自身，在两个恒等的量上所进行的每一个运算都给出恒等的结果。

这样陈述，它们倒是明显的，但是如此阐述它们便会歪曲希尔伯特的思想。在他看来，数学只是必须把纯粹的符号结合起来，纯粹数学家应该依靠它们推理，而不应该对它们的意义怀有偏见。因此，对他来说，他的假定就不是常人认为的那个样子。

他认为它们是用符号（=）的公设所描述的定义，该符号迄今还没有任何意义。但是，为了给这个定义辩护，我们必须证明这两个假定没有导致矛盾。

因此，希尔伯特利用了我们的第Ⅲ节的推理，他似乎并没有觉察到他正在利用全归纳法。

IX

希尔伯特论文的结尾完全是莫名其妙的，我不想去强调它。矛盾堆积着；我们感到作者模糊地意识到他所犯的预期理由的错误，他徒劳地试图去修补他的论据中的漏洞。

这意味着什么呢？在证明通过全归纳的假定定义整数并不隐含矛盾这一点上，希尔伯特象罗素和库蒂拉特一样地退却了，因为困难实在太大了。

X

几 何 学

库蒂拉特先生说，几何学是一个庞大的学说体系，全归纳原理并没有进入其中。这在某种程度上是真的；我们不能说它完全没有进入，但却是很轻微地进入的。如果我们涉及到霍尔斯特德博士按照希耳伯特原理所建立的《有理几何学》(New York, John Wiley and Sons, 1904)，我们在第 114 页首次看到归纳原理（除非我记错了，这是十分可能的）。①

确实，几何学仅仅在几年前似乎还是直觉统治的领域，它是无可争议的，今天逻辑学家似乎在这个领域大获全胜。没有什么东西能够更好地衡量希尔伯特几何学著作的重要性以及它们给我们的概念留下的深刻印记。

但是切勿弄错。几何学的基本定理归根结底是什么呢？这就是几何学的假定不隐含矛盾，我们不能在没有归纳原理的情况下证明这一点。

希耳伯特如何证明这一主要之点呢？他依靠解析，通过解析而依靠算术，通过算术而依靠归纳原理。

如果我们发明出另外一种证明，那么还必须依靠这个原理，因为假定——有必要证明它们不矛盾——的可能结果为数无穷。

XI

结 论

我们的直接结论是，归纳原理不能被视为整个世界的隐藏的

① 第二版，1907年，第86页；法文版，1911年，第97页。——英译本《科学的基础》的译者G·B·霍耳斯特德注。

定义。

这里有三个真理：

(1) 全归纳原理；

(2) 欧几里得公设；

(3) 磷在 44° 熔化的物理学定律（勒卢阿[Le Roy]先生引用的）。

这些说的是三个伪装的定义：第一个是整数的定义；第二个是直线的定义；第三个是磷的定义。

对于第二个我赞同，我不承认其他两个。我必须解释这种表面不一致的理由。

首先，我们看到，一个定义只有在它不隐含矛盾的情况下才是可接受的。我们同样已表明，对于第一个定义而言，这种证明是不可能的；另一方面，我们刚好回想起，希尔伯特对于第二个定义给出了充分的证据。

至于第三个定义，它显然不隐含矛盾。这意味着定义保证——它应该保证这一点——被定义的对象的存在吗？在这里，我们不再处于数学科学领域，而是处于物理科学领域，存在这个词不再具有相同的意义了。它不再表示没有矛盾；它意指客观的存在。

你已经看到我在三种情况之间作出区分的第一个理由；还有第二个理由。在应用中，我们必须理解这三个概念，它们是以这三个公设定义的东西呈现在我们面前的吗？

归纳原理的可能的应用是不可胜数的；例如，举一个我们在上面已经详述的应用吧，在那里，人们企图证明，假定的集合不能够导致矛盾。为此，我们考虑一个三段论系列，我们可以把这些假定作为前提，由此出发继续进行下去。

当我们完成了第 n 个三段论时,我们发现我们还能够作出另一个三段论,这就是第 $n+1$ 个三段论。于是,数 n 可以看作是相继运算的系列;它是一个通过逐次相加可以得到的数。因此,这是一个我们可以通过**逐次相减**而复归为1的数。显然,假如我们有 $n=n-1$,则我们不能作到这一点,因为这样作减法,我们总会再次得到相同的数。因此,我们被导致考虑这个数 n 的方式隐含着有限整数的定义,这个定义如下:**有限整数是能够通过逐次相加而得到的数; n 不等于 $n-1$ 就是这样。**

承认这一点后,我们作什么呢?我们证明,如果直到第 n 个三段论都没有矛盾,那么到第 $n+1$ 个三段论也不会有矛盾,而且我们得出将永远没有矛盾的结论。你说:我有权得出这个结论,因为根据定义,整数是这样一些数,对这些数而言,同样的推理是合理的。但是,这样便隐含着整数的另一种定义,该定义如下:**整数是我们可以依赖其进行递归推理的数。**在这种情况下,正是如此,我们可以说,如果直到某次数为整数的三段论没有矛盾,与此相随,其次数为下一个整数的三段论也没有矛盾,那么我们就用不着担心其数目是整数的任何次三段论有矛盾。

两个定义不是恒等的;它们无疑是等价的,但只有借助于先验综合判断;我们不能通过纯粹的逻辑程序从一个到另一个。因此,在借助于预先假定第一个定义而引入整数之后,我们没有权利采纳第二个定义。

另一方面,关于直线发生了什么情况呢?我已经多次解释过这一点,以致于不大想再次重述了,我将限于扼要地概括一下我的思路。正如在先前的情况中那样,我们没有两个在逻辑上相互可约的等价定义。我们只有用词可表达的定义。因为我们有直线的直觉,或者因为我们能够想象直线,就可以说存在我们只能意会

而不能言传的另一个定义吗？首先，我们不能在几何学空间想象它，而只能在表象空间想象它，其次，我们还能同样充分地想象这样一些对象：它们具有直线的其他特性，却不具有满足欧几里得公设的特性。这些对象是“非欧直线”，从某种观点来看，非欧直线并不是没有意义的，而是与某个球面正交的圆（真实空间的真空圆）。在这些同样能够描述的对象中，如果我们把前者（欧几里得直线）叫作直线，而不把后者（非欧直线）叫作直线，这正是通过定义而成的。

最后谈一下第三个例子，即磷的定义，我们看到，真正的定义也许是：磷是我在那边的瓶子里所看到的一些物质。

XII

既然我论及这个论题，不妨再说一说。我讲过磷的例子：“这个命题是真正的可检验的物理学定律，因为它意味着，除熔点而外，具有磷的其他一切特性的物体都象磷一样在 44° 熔化。”有人反问：“不，这个定律不是可检验的，因为如果证明，两个类似于磷的物体，一个在 44° 熔化，而另一个在 50° 熔化，那无疑总是可以说，除了熔点外，还有某种把它们区别开来的其他未知的性质。”

这完全不是我想要说的东西。我应当这样写：“所有具有这种为数有限的特性的物体（即是化学教科书上所讲的磷的特性，熔点除外）都在 44° 熔化。”

要使直线的情况和磷的情况之间的差别变得更明显，还要多作一些评论。直线在自然界中具有某些不完善的图象，其主要的图象是光线和固体的旋转轴。假定我们发现光线并不满足欧几里得公设（例如由于证明恒星具有负视差），我们将怎么办呢？或者，按照定义直线是光的轨迹，而它并不满足该公设，或者相反，

按照定义直线满足该公设，而光线却不是直线，我们将得出这样的结论吗？

确实，我们可以自由地采纳这个或那个定义，从而自由地采纳这个或那个结论；但是，采纳前者也许是愚蠢的，因为光线恐怕不仅不完全满足欧几里得公设，而且不完全满足直线的其他性质，以致于如果它偏离欧几里得直线，那么它也偏离直线的另一个不完善的图象，即固体旋转轴；而最后，它无疑会受到变化，以致昨天还是直线的线明天将不再是直线了，倘若某一物理环境变化了的话。

现在，假定我们发现磷不在 44° 熔化，而在 43.9° 熔化。我们能得出结论说，磷按定义是在 44° 熔化的，而我们称之为磷的这个物体不是真正的磷，或者相反，磷是在 43.9° 熔化的吗？在这里，我们再次自由地采纳这个或那个定义，从而自由地采纳这个或那个结论；但是，采纳前者也许是愚蠢的，因为每当我们确定了磷的熔点的一个新的小数时，我们不能改变物质的名字。

XIII

总而言之，罗素和希尔伯特每一个人都作出了强有力的努力；他们每一个人都写下了著作，其中充满了有独到见解的、深刻的、往往是有充分理由的观点。这两部著作向我们提供了许多可以加以思考的东西，我们从中可以学到许多东西。在他们的结果中，一些结果，甚至许多结果，都是可靠的，注定会长存下去。

但是，要说他们最终解决了康德和莱布尼兹之间的争论，并摧毁了康德的数学理论，这显然是不正确的。我不知道他们是否真的相信他们作到了这一点，不过，假若他们自信如此，那他们可就想错了。

第五章 逻辑学家的最新成果

II

逻辑学家试图回答前面所考虑的事情。为此，有必要改造逻辑斯谛，特别是罗素，在某些方面修改了他的有独创性的观点。由于我没有涉及到争论的细节，我乐于回到两个对我的思想来说是最重要的问题：逻辑斯谛的法则证明它们富有成效和确实可靠吗？它们真的提供了一点也不求助直觉而证明全归纳原理的手段吗？

III

逻辑斯谛的确实可靠

关于富有成效的问题，似乎库蒂拉特先生存有天真的幻想。在他看来，逻辑斯谛给发明装上了“高跷和翅膀”，在下一页这样写道：“十年前，皮亚诺出版了他的《公式汇编集》第一版。”翅膀已经装了十年了，为何至今还不动呢！

我极为尊重皮亚诺，他作了好多事（例如他的“空间填充曲线”，也许现在被抛弃了）；但是，与大多数无翼的数学家相比，他毕竟没有飞得更高、更快，他同样不过是徒步行进而已。

相反地，我看到逻辑斯谛只是给发明家套上了镣铐。它无助于简洁——与之相距甚远，如果证实1是数需要二十七个方程，那

么要证明真正的定理需要多少方程呢？如果我们和怀特海(Whitehead)一起，把个体 x 区分出唯一的数即 x 的类，然后区分出唯一的数即唯一的数是 x 的类的类，我们称前者为 cx ，称后者为 ccx ，尽管这些区分也许是有用的，你认为它们能够大大加快我们的步伐吗？

逻辑斯谛迫使我们说出我们通常已经了解的一切；它使我们一步一步地前进；这也许更有把握，但却比较缓慢。

你们逻辑学家给我们的不是翅膀，而是孩子学步用的牵引带。于是，我们有权利需要这些牵引带防止我们跌倒。这将是他们的唯一理由。当债券不生多的利息时，对于一家之长来说，至少应当考虑一下投资额。

应该盲目地遵循你们的法则吗？是的，要不然，只有直觉能够使我们在这些法则之中进行区分；不过，它们必须是确实可靠的；因为只有在确实可靠的权威面前，人们能够盲信。因此，对你们来说，这是必要的。或者你们是确实可靠的，或者根本不是。

你们没有权利对我们说：“的确我们犯了错误，但是你们也犯了错误。”对我们来说，错误是不幸的，是极大的不幸；对你们来说，这是自取灭亡。

你们也不可以反问：算术的可靠防止了加法的错误吗？运算法则是确实可靠的，可是我们看到这些错误在于**他们没有应用这些法则**；但是，在检验他们的运算时，立即可以看到他们错在何处。在这里，情况根本不是这样；逻辑学家**应用了**他们的法则，而他们还是陷入矛盾之中；这是如此准确，以致他们正准备改变他们的法则，并“牺牲类的概念”。假如这些法则是确实可靠的，那为什么要改变它们呢？

你们说：“我们并没有答应立即解决一切可能的问题。”嗨，我们没有向你们要求这么多的东西。假如你们对面临的问题**没有**给出答案，我们当然无话可说；可是，相反地，你们给我们**两个**答案，这些答案是矛盾的，从而至少一个是错的；正是这一点，才是失败之所在。

罗素企图调和这些矛盾，在他看来，这只能“通过限制或牺牲类的概念”来完成。库蒂拉特先生在发现他的尝试的成果时补充说：“在其他人失败的地方，如果逻辑学家成功了，那么彭加勒先生将忆及此语，并把解答的荣誉给予逻辑斯谛。”

但是并不如此！逻辑斯谛存在着，它有它的法典，这个法典已出了四版；或者更恰当地讲，这个法典就是逻辑斯谛本身。是罗素先生准备证明两个矛盾的推理中至少有一个违背了法典吗？一点也不是；他正在准备改变这些定律，并取消若干定律。如果他成功了，我将把解答的荣誉给予罗素的直觉，而不给予皮亚诺的逻辑斯谛，因为他将取消逻辑斯谛。

III

矛盾的留住权

对逻辑斯谛中采用的整数的定义，我提出了两个原则性的反对理由。库蒂拉特先生就第一个反对理由说了些什么呢？

在数学中，**存在**一词意味着什么呢？我说，它意味着摆脱了矛盾。库蒂拉特先生对此发生争执。他说：“逻辑的存在是与没有矛盾根本不同的另一种东西。它在于类不是空类这一事实。”说 a 存在，按定义即是断言类 a 不是空的。无疑地，断言类 a 不是空的，按定义就是断言 a 的存在。如果两个断言既不表示人们可以

看见或触到a的存在——这是物理学家或博物学家赋予它们的意义，也不表示人们可以在不引入矛盾的情况下构想a——这是逻辑学家和数学家赋予它们的意义，那么这两个断言中的一个象另一个一样，便被剥去了意义。

在库蒂拉特先生看来：“不是无矛盾证明存在，而是存在证明无矛盾。”要确立类的存在，因此必须用**范例**确立存在着属于这个类的个体：“但是，有人会说，如何证明这个个体的存在呢？为了可以推导出个体作为其一部分的类的存在，难道没有必要确立这个存在吗？好了，有必要；不管这一主张多么自相矛盾，我们永远无法证明个体的存在。个体正因为它们是个体，才总是被视为存在者……我们从未表示个体存在着，绝对地讲，只不过从未表示它在类中存在。”库蒂拉特先生发现他自己的主张是自相矛盾的，他肯定不是唯一的人。不过，该主张必须有意义。这无疑意味着，个体——它单独地在世界上，我们对它未作任何断言——的存在不能包含矛盾；就个体是独立的而言，它显然不包容任何矛盾。好了，就让它是这样吧；“绝对地讲”，我们将姑且承认个体的存在，但没有更多的东西。还需证明个体“在类中”存在，为此总是有必要证明断言“属于这样的类的这样的个体”自身内既不矛盾，也不与所采用的其他公设矛盾。

库蒂拉特先生继续说：“因此，只有坚持认为我们先证明定义没有矛盾，定义才是有效的，这种看法是专断的，并使人误入歧途。”人们不应该以比较自豪和比较有力的言词主张矛盾的留住权。“无论如何，提出证据的责任落在了那些认为这些原理是矛盾的人的身上。”在相反的情况被证明之前，人们假定公设是可以和谐共存的，正如在未拿到证据之前，假定被告无罪一样。

不用说，我不同意这种主张。但是，你们说，你们要求我们

的证明是不可能的，你们不能要求我们用牙咬住月亮。请原谅我；对你们来说那是不可能的，但是对我们来说并非不可能，我们承认归纳原理是先验综合判断。这个原理对你们与对我们一样，恐怕都是必要的。

为了证明公设系统不隐含矛盾，就必须应用全归纳原理；这个推理模式不仅没有什么“稀奇古怪”之处，而且它是唯一正确的推理。“靠得住的”是，它一直被利用着；要找到它的“范例和先例”并不难。我引用过两个这样的例子，都是从希尔伯特的文章中借来的。他并不是利用这个推理模式的唯一的人，没有这样作的人是错误的。我责备希尔伯特的原因并不在于他求助于该模式（象他这样一个天生的数学家不可能看不到证明是必要的，而且只有这一种证明是可能的），而在于他在不承认递归推理的情况下求助于它。

IV

第二个反对理由

我指出了希尔伯特文章中的逻辑斯谛的错误。今天，希尔伯特被开除了教籍，库蒂拉特先生不再认为他是逻辑斯谛的狂热信徒；于是他问，我是否在正教中发现了同样的错误。没有，在我读过的书页中，我没有看到什么错误；我不知道在他们所写的三百页的书中是否能够找到错误，我并不期望读这些东西。

不过，当他们希望把数学进行应用时，他们必定会犯这种错误。这门科学没有把对它自己的核心的永久沉思作为唯一的目标；它与自然有关系，某一天它将涉及到自然。于是，它必须摆脱纯粹字句的定义，停止开空头支票。

回到希尔伯特的例子上来吧：争论之点总是递归推理和了解公设系统是否有矛盾的问题。库蒂拉特先生无疑会说，这并没有涉及他，但是它也许将引起象他一样不主张矛盾留住权的人的注意。

如上所述，我们希望确立，无论在多少次推论之后，只要这个次数是有限的，我们将不会遇到矛盾。为此，我们必须应用归纳原理。按定义，归纳原理要应用到每一个数上，我们在这里能够通过有限的数来理解每一个数吗？显然不能，否则我们便不得不导致最使人为难的结果。

为了有权利建立一个公设系统，我们必须肯定它们不是矛盾的。这是**大多数**科学家都承认的真理，在读库蒂拉特先生的最近的文章之前，我**无论如何**应该记下这一点。但是，这表示什么呢？这意味着我们必须肯定在**有限**数目的命题之后不遇见矛盾吗？所谓**有限**数目，按定义是具有递归性质的一切特征，这样一来，如果缺乏这些特征之一——例如，假如我们临近矛盾——我们将一致说，所考虑的数目不是有限的。换句话说，我们意味着我们必须确信不遇到矛盾吗？其条件是在正要碰到矛盾时，我们一致同意停下来。陈述这样的命题就足以宣布它不适用了。

这样一来，希尔伯特的推理不仅采取了归纳原理，而且它假定这个原理不是作为简单的定义，而是作为先验综合判断给予我们。

总而言之：

证明是必要的。

唯一可能的证明是递归证明。

只有我们承认归纳原理，只有我们认为它不是作为定义，而是作为综合判断时，这才是合法的。

康托尔矛盾

现在，审查一下罗素的新论文。这篇论文是为战胜这些**康托尔矛盾**所引起的困难而写的，我们已频繁地提到这些矛盾。康托尔以为他可以构造无穷的科学；其他人沿着他开辟的道路前进，但是他们不久就与不可思议的矛盾相冲突。这些矛盾已经很多，但最显著的是：

1. 布拉利-福蒂矛盾；
2. 策默罗-柯尼希 (Zermelo-König) 矛盾；
3. 理查德 (Richard) 矛盾。

康托尔证明了，序数（所讨论的问题是超限序数，这是他所引入的新概念）能够按线性级数排列；也就是说，两个不相等的有限序数中，一个总是小于另一个。布拉利-福蒂证明情况相反事实上，他大体上是说，如果人们能把**所有的**序数按线性级数排列，这个级数便确定一个序数大于**所有的**其他序数；此后，我们^①可以加上1，再次得到一个更大的序数，这是矛盾的。

稍后，我们将回到策默罗-柯尼希矛盾，该矛盾具有稍微不同的性质。理查德^①矛盾如下所述：考虑一下用有限个数的词可以定义的所有十进制数；这些十进制数形成一个集合E，很容易看到，这个集合是可数的，也就是说，我们能够从1到无穷给这个集合中的各个十进制数**编号**。设编号已成，且如下定义数N：若集合E中的第n个数的第n位是

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

① 《科学综合评论》，1905年8月30日。

则N的第 n 位将是

1,2,3,4,5,6,7,8,1,1。

正如我们看到的，N不等于E的第 n 个数，而且当 n 是任意的时，N不属于E，但N却属于这个集合，因为我们是用有限数目的词定义它的。

我们不久将看到，理查德先生本人以其远见卓识对他的悖论作了解释，这个解释在细节上作了必要的修正后，推广到其他同类的悖论。罗素还引用了另一个十分逗人的悖论：**不能用少于一百个英语单词组成的语句定义的最小整数是什么？**

这个数是存在的；事实上，用同类语句能够定义的数显然是为数有限的，因为英语词在数目上不是无限的。因此，在它们之中，将有一个数小于其他一切数。

另一方面，这个数不存在，因为它的定义隐含着矛盾。事实上，这个数是用斜体字语句定义的，该语句由少于一百个英语单词组成；按照定义，这个数不能用同类的语句定义。

VI

锯齿形理论和无类理论

面对这些矛盾，罗素先生的态度如何呢？在分析了我们刚才讲过的那些矛盾并引用了其他矛盾后，在给予它们以厄及爱璧曼尼德（Epimenides）的形式后，他毫不迟疑地得出结论说：“一个变量的命题函数并非总是决定一个类。”命题函数（也就是说定义）并非总是决定类。“命题函数”或“范数”可以是“非断言的”。这并不意味着这些非断言命题决定空类、零类；这并不意味着不存在满足定义且能够是类中元素之一的 x 的值。这些元素存在着，

但是它们没有权利结合成一个联合体而形成类。

但是，这仅仅是开始，还需要知道如何辨认一个定义是否是断言的。为了解决这个问题，罗素在他命名的以下三种理论之间犹豫不决：

A. 锯齿形理论；

B. 限制大小理论；

C. 无类理论。

按照锯齿形理论，“当定义（命题函数）十分简单时，它们便决定类，只有在它们是复杂的和含糊的情况下，它们才不再决定类。”现在，谁来决断一个定义是否可以认为是简单的，足以受到人们的欢迎呢？关于这个问题，还没有答案，尽管没有诚恳地声明对此完全无能为力：“能使我们辨认这些定义是否是断言的法则恐怕是极其复杂的，我们不能以任何似乎可能的理由来称赞它们。这是一种缺陷，它可以通过较大的独创性和利用还没有指出的差异来补救。但是，迄今在寻找这些法则的过程中，除免去矛盾外，我还不能发现任何其他直接的原则。”

因此，这种理论依然是很含糊的；在这个黑夜中，只有一线光明——锯齿形这个词。罗素所谓的“锯齿形”，无疑是把爱壁曼尼德论据区别开来的特征。

在限制大小的理论看来，如果类太广泛，它就不可能有存在的权利了。也许它是无限的，可是它不应该如此之多。不过，我们总会再次遇到同样的困难；在哪一个精确的时刻，它开始变得如此之多呢？当然，这个困难未被解决，于是罗素转到第三种理论。

在无类理论中，他不许讲“类”这个词，这个词必须用各种迂回的说法来代替。对于仅仅讨论类和类之类的逻辑斯谛来说，这

是多么大的变化啊！有必要改造整个逻辑斯谛。试想一下，若去掉含有类的问题的所有命题，那么如何阅读逻辑斯谛的著述呢。在这些著述中只会留下一些残缺不全的词语。

尽管情况可能是这样，我们看到罗素如何犹豫不决，他如何把他迄今采纳的基本原理提出修正。需要有标准来裁决一个定义是否太复杂或太广泛，这些标准只能够求助于直觉来辩护。

罗素最后倾向的正是无类理论。尽管情况可能是这样，逻辑斯谛还必须改造，不清楚的是，能够被拯救的有多少。不用再说，唯有康托尔主义和逻辑斯谛处于考虑之列；对于某些东西有用的真正的数学可以按照它自身的原则继续发展，而不必为在它之外掀起的风暴伤脑筋，数学由于其平常所取得的成就而一步一步地前进着，这些成就是决定性的，从来也不会被抛弃。

VII

真实的答案

在这些不同的理论中，我们应当选择什么呢？在我看来，答案似乎包含在我上面讲过的理查德先生的信中，该信可在1905年6月30日的《科学综合评论》上找到。在提出了我们所谓的理查德矛盾后，他对它作了解释。请回忆一下，我们已经说过这个矛盾。**E是能用有限个数的词定义的所有数的集合，但我们并未引入集合E本身的概念。**

现在，我们用有限个数的词定义了N，不过，我们的确是借助于集合E的概念定义的。这就是N不是E的一部分的原因。在理查德先生所挑选的例子中，结论是以十分明显的方式表示的，在查阅该信本身的正文时，这种明显性还是很强烈的。不过，同一解

释也适用于其他容易辩护的矛盾。因此，可以被视为非断言的定义是包含循环论证的定义。以前的例子充分地证明我就此意谓的东西。这就是罗素所谓的“锯齿形”吗？我提出这个问题，但不想回答它。

VI

归纳原理的证明

现在，让我们审查一下自命的归纳原理的证明，尤其是怀特海和布拉利-福蒂的证明。

首先，我们将谈谈怀特海的证明，并且利用一下罗素在他的最近的论文中所恰当地引入的某些新术语。所谓**递归类**，即是每个类都包含零，而且若它包含 n ，则也包含 $n+1$ 。所谓**归纳数**，即是每个数都是**所有**递归类的一部分。在怀特海的证明中起主要作用的这一后来的定义，在什么条件下是“断言的”，从而是可以接受的呢？

按照已经讲过的东西，关于**所有**递归类，必须理解为归纳数概念没有进入其定义中的所有类。否则，我们将再次陷入产生矛盾的循环论证之中。

现在，怀特海没有采取这种预防措施。因此，怀特海的推理是靠不住的；正是同一推理导致了矛盾。当它给出错误的结果时，它就是不合理的；在由于机遇而导致出正确的结果时，它依然是不合理的。

包含着循环论证的定义什么也没定义。不用说，我们确信，不管我们给我们的定义赋予什么意义，至少零属于归纳数的类；问题并不在于了解这个类是否是空的，而在于它是否能够被严格

地划界。“非断言的”类并不是空类，而是其界限没有确定的类。

毋庸赘言，这个特殊的反对理由依然使应用于所有证明的普遍反对理由有效。

IX

布拉利-福蒂给出了另一种证明。^①但是，他不得不假定两个公设：

第一，至少总是存在着一个无限类。

第二个是这样表述的：

$$u \in K(K - \epsilon A) \cdot 0 \cdot u < v' u$$

第一个公设并不被已证明的原理更明显。第二个不仅不明显，而且如怀特海已证明的，它是错误的；此外，正象任何新手都能一眼看到的，公理是否是用可理解的语言陈述的，因为它意味着，用一些对象所形成的组合数小于这些对象数。

X

策默罗假定

策默罗所作的著名证明依据下述假定：在任何集合中（或者在集合的集合物的集合中亦可），我们总是能够随意地选取一个元素（即使集合的这个集合物包含着无限的集合）。这个假定已被应用了无数次而没有陈述，但是一旦陈述出来，就发生了疑问。有些数学家，例如波莱尔坚决反对它；另一些数学家则赞美它。让我们根据罗素最近的文章看一看，他是怎样思考它的。他没有讲出结果，但他的思考却十分富有启发性。

^① 在他的文章“有限类”中，*Atti di Torino*，第32卷。

首先，举一个形象化的例子：设我们有整数那么多双鞋，这样我们便能够从1到无穷给**双数**编号，我们将有多少双鞋呢？鞋的数目将等于双数吗？如果在每一双鞋中，右脚鞋与左脚鞋可以区分，情况就是如此；事实上，只要我们把号码 $2n-1$ 给予第 n 双鞋的右脚鞋，把号码 $2n$ 给予第 n 双鞋的左脚鞋就足够了。如果右脚鞋与左脚鞋正好一样，情况就不同了，因为类似的操作变得不可能了——除非我们承认策默罗的假定，由于这时我们可以**随意**地在每一双鞋中选取一鞋，把它看作是右脚鞋。

XI

结 论

真正建立在分析逻辑原则基础上的证明将组成一系列的命题。一些原则作为前提将是恒等式或定义；另一些将能从前提一步一步地推导出来。但是，尽管每一个命题和紧接着的命题之间的结合物是直接自明的，好象也无法一眼看到我们是如何从前者到达后者的，于是我们可能被诱使把它们看作是新的真理。不过‘如果我们相继用它们的定义来代替不同的表述，如果这种操作进行得尽可能远，那么最终将仅仅留下恒等式，于是一切都将化成同义反复。因此，逻辑依然是无结果的，除非我们通过直觉使之富有成果。

这是我很久之前写的东西；逻辑斯谛的意见相反，并认为通过实际证明新真理而证明了相反的意见。他们的手法如何？在把刚刚描述的程序用于它们的推理时，即用它们的定义代替所定义的名词时，我们为什么看不见它们象通常的推理那样分解为恒等式呢？正是因为这种程序无法应用于它们。为什么不能应用呢？

因为它们的定义不是断言的，呈现出我上面已指出的这种隐藏的循环论证；非断言的定义不能代替所定义的名词。在这些条件下，**逻辑斯谛不是无结果的，但却产生矛盾。**

正是对于实无穷存在的相信，诞生了这些非断言的定义。让我解释一下。在这些定义中，出现了“所有”一词，正如我们在上面引用的例子中所看到的那样。当“所有”一词是无穷数目对象的问题时，它具有十分精确的意义；当对象为数无穷时，要具有另一种意义，还要求存在实（给定的完全的）无穷。要不然，**所有**这些对象都不能看作是先于它们的定义的公设性的东西，而且，如果概念N的定义依赖于**所有**对象A，它就可能受到循环论证的影响，即使在概念N本身没有介入的情况下，在对象A中也存在着一些难以下定义的对象。

形式逻辑的法则仅仅表示所有可能分类的性质。但是，要使它们可以应用，那就必须使这些分类是不变的，而且我们在推理的过程中不需要修正它们。如果我们只是把有限数目的对象加以分类，那么我们就很容易保持我们的分类不变。如果对象为数**无限**，也就是说，如果人们不断地发现新对象，未曾料到的对象产生了，那么便可能发生这样的情况：新对象的出现可能要求修正分类，从而使我们面临矛盾。

不存在实（给定的完全的）无穷。康托尔主义者忘记了这一点，他们陷入了矛盾之中。的确，康托尔主义是有用处的，但是这只有在应用于其名词已被严格定义的真实问题中才行，于是我们能够毫无顾忌地前进。

象康托主义者一样，逻辑斯谛也忘记了这一点，而且碰到了同样的困难。但是，问题是要知道，他们是偶然地误入歧途呢，还是受到必然性的驱使呢。在我看来，该问题是无可怀疑的；在

罗素的逻辑中，对于实无穷的确信是基本的东西。正是这一点，把它与希尔伯特的逻辑区分开来。希尔伯特采取扩张的观点，正是为了避免康托尔主义的矛盾。罗素采取理解的观点。因此，在他看来，**种**先于属，而最高种则先于一切。如果**最高种**是有穷的，那不会有不方便之处；但是，如果它是无穷的，那就必须以无穷作为公设，也就是说，认为无穷是实（给定的完全的）无穷。

我们没有唯一的无穷类；当我们用新条件限制概念，从种到达属时，这些条件还是为数无穷的。因为它们一般表示，所设想的对象描述了与无穷类的所有对象的某种关系。

但是，那是过去的事。罗素已觉察到危险，并采取了对策。他正准备改变一切，这是很容易理解的，他不仅准备引入新的原理——这些原理容许以前禁止的操作，而且准备禁止他先前认为合理的操作。他不满足于欣赏他所创造的东西，他正准备创造他所欣赏的东西，这是重要的。他没有给建筑物附加新的侧厅，他挖掘它的基础。

旧逻辑斯谛死去了，锯齿形理论和无类理论就继承权问题正在进行的争论已经达到如此程度。要评价新理论，我们还要等它到来才行。

第三编 新 力 学

第一章 力学和镭

I

引 言

自牛顿以来，动力学的普遍原理被认为是物理学的基础，看来好象是不可动摇的，它们就要被抛弃或至少要进行彻底的修正吗？多年来，这是不少人扪心自问的问题。在他们看来，镭的发现推翻了我们认为是最牢固的科学教条：一方面是金属不可能嬗变；另一方面是力学的基本公设。也许人们过于匆忙地认为这些新奇的东西最终确立了，并且正在打破我们昨天的偶像；在采取这种立场之前，等待更多、更可信的实验也许是恰当的。从现在开始，有必要了解一下新学说和论据，他们所依据的这些东西是十分重要的。

首先，让我们简单地回顾一下那些基本原理，它们是：

A. 孤立的、不受所有外力作用的质点的运动是匀速直线运动；这是惯性原理：没有力便没有加速度。

B. 运动质点的加速度与所有力的合力所取的方向相同；它等于这个合力与系数之商，该系数称之为运动质点的**质量**。

这样定义的运动质点的质量是常数；它与这个质点所获得的

速度无关，不管该力平行于这个速度还是垂直于这个速度，情况都一样，若力平行于速度，它仅有助于使质点的运动加速或延缓，相反地，若力垂直于速度，它有助于使运动偏向右边或左边，也就是说使轨道弯曲。

C. 作用在质点上的所有力都来自其他质点的作用；它们仅取决于这些不同质点的**相对位置**和速度。

把B和C两个原理结合起来，我们就达到**相对运动原理**，由于这个原理，系统的运动定律是相同的，不管我们使这个系统参照于固定轴，还是参照于以匀速直线运动的可动轴，于是不可能把绝对运动和关于这个运动轴的相对运动区别开来。

D. 如果质点A作用于另一个质点B，那么B物便反作用于A物，这两个作用是两个大小相等方向相反的力。这是**作用和反作用相等原理**，或更简短些，是**反作用原理**。

天文观察和最普遍的物理现象似乎完美地、经常地、十分精确地证实了这些原理。现在可以说，这是真的，不过正是因为从来处理的都是十分小的速度；例如，水星最大的速度也不到每秒100公里。假使这个行星运动快一千倍，它的行为还会相同吗？我们看到，也不需要焦虑；不管机动车进步到什么程度，在我们必须放弃把经典的动力学原理应用于我们的机器之前，还有很长的时间。

那么，我们如何使实际速度达到比水星速度大一千倍，例如使它达到光速的十分之一或三分之一，或者更接近于光速呢？这可以借助于阴极射线和镭射线达到。

我们知道，镭放射出三种射线，分别用三个希腊字母 α , β , γ 来表示；以下如无特别声明，将总是讨论 β 射线，它类似于阴极射线。

在阴极射线发现后，出现了两种理论：克鲁克斯(Crookes)把该现象归因于真实的分子轰击；赫兹把它归因于以太的特殊波动。这是一百年前关于光理论使物理学家对立的争论的复活；克鲁克斯采取了光学上已经废弃了的发射说；赫兹坚持波动说。事实的裁决似乎有利于克鲁克斯。

首先，人们已经认识到，阴极射线带有负电荷；它们能被磁场和电场偏离，这些偏离恰恰与同一种场在由极高速度和极强电荷所激发的抛射粒子上产生的偏离一样。这两种偏离依赖于两个量：一个是速度；另一个是抛射粒子的电荷与它的质量的关系；我们无法知道这个质量的绝对值，也无法知道电荷的绝对值，而只知道它们的关系；事实上，很清楚，如果我们同时使电荷和质量加倍，而不改变它的速度，那么我们将使有助于抛射体偏离的力加倍，不过因为质量也加倍了，所以观察到的加速度和偏离将是不变的。因此，观察两个偏离将给我们决定这两个未知数的两个量。我们发现，速度从每秒10,000公里到30,000公里；至于荷质比，它是很大的。我们可以把它与电解中的氢离子的相应的荷质比比较一下；于是我们发现，阴极抛射粒子所携带电量大约比相等质量的氢在电解液中所能够携带的电量多一千倍。

为了证实这些观点，我们需要直接测量这一速度，以便与如此计算的速度加以比较。J.J.汤姆孙(Thomson)给出了一百多倍的结果，这太小了；不过，这些实验也暴露了某些错误的原因。该问题由维歇特(Wiechert)再次有条理地加以处理，其中利用了赫兹的振动；结果发现与该理论一致，至少就大小的数量级而言是这样；重作一下这些实验也许是极为有趣的。不管情况如何，波动理论对于解释事实的这一复杂性似乎是无能为力的。

就镭的 β 射线所作的同样的计算给出了更大的速度：100,000

或 200,000 公里，或者还要更多一些。这些速度大大超过了我们已知的所有速度。的确，人们早就知道光达到每秒 300,000 公里；但是光并没有运载物质，只要我们采用阴极射线的发射说，可能物质分子实际上以上述速度被激励，因此研究一下通常的力学定律是否还适用于这些分子是恰当的。

II

纵质量和横质量

我们知道，电流产生感应现象，尤其是**自感应**现象。当电流增加时，自感电动势升高，它有助于反向电流；相反地，当电流减少时，自感电动势有助于维持反向电流。因此，自感应反抗电流强度的每一变化，正如在力学中物体的惯性反对它的速度的每一变化一样。**自感应是真正的惯性**。一切就好象不使周围的以太运动电流本身就无法建立起来一样，因而一切就好象这种以太的惯性有助于使这个电流的强度保持不变一样。要产生电流，需要克服这种惯性，要使电流停止，必须再次克服这种惯性。

阴极射线是带负电的抛射体的雨点，可以比之为电流。无疑地，这种电流乍看起来至少与普通传导电流不同，在传导电流的情况下，物质并不运动，而电通过物环流。这就是**运流电流**，其中电依附于物质载体，由这种载体的运动携带着。但是，罗兰 (Rowland) 已经证明，运流电流象传导电流一样，产生相同的磁效应；运流电流也产生相同的感应效应。首先，如果情况并非如此，那么便会违背能量守恒原理；此外，克雷米厄 (Cremieu) 和彭德 (Pender) 使用了一种方法，**直接**证实了这些感应效应。

如果阴极粒子的速度变化，相应的电流强度将同样地变化；

从而将增强自感效应，这将有助于反抗这一变化。因此，这些粒子将具有双重惯性：其一是它们本身的固有惯性，其二是由于自感应而引起的表观惯性，它产生相同的效应。从而，它们将具有总表观质量，这由它们的真实质量和电磁起源的虚设质量构成。计算表明，这种虚设质量随速度而变化，当抛射粒子的速度增加或减小时，或者当速度偏折时，自感应的惯性力不相同，因此，就总表观惯性力而言，情况也是如此。

当施加于粒子的真实力平行于它的速度从而有助于加速运动时，同样地当真实力垂直于这个速度从而有助于使方向改变时，总表观质量是不同的。因此，必须把**总纵质量**和**总横质量**区别开来。而且，这两个总质量取决于速度。从亚伯拉罕(Abraham)的理论工作可以得出这一点。

在我们于前一节所说的测量中，我们通过测量两个偏离确定了什么呢？一方面，确定了速度，另一方面，确定了电荷与**总横质量**之比。在这些条件下，我们如何在总质量中辨出真实质量部分和虚设的电磁质量部分呢？如果我们只有严格意义上的所谓的阴极射线，也不会梦想这个问题；但是，有幸地是，我们还有镭射线，正如我们看到的，镭射线速度极大。这些射线并不完全相同，在电场和磁场的作用下，它们也不沿同一路径运动。人们发现，电偏离是磁偏离的函数，我们能够用灵敏的照相底片接收到两种场作用的镭射线，拍摄出表示这两种偏离关系的曲线。这是考夫曼(Kaufmann)所作的工作，他从中推导出速度和电荷与总表观质量之比之间的关系，这个比率我们将称之为 ϵ 。

人们可以假定有几种射线，每一种的特征由不变的速度、不变的电荷和不变的质量来表征。但是，这种假设是不大可能的；事实上，质量相同的粒子为什么总会具有相同的速度呢？假定电

荷以及**真实质量**对于所有的抛射粒子都是相同的，这些粒子的差别仅仅在于它们的速度，这样会更自然一些。如果比率 ϵ 是速度的函数，这并不是因为真实质量随这个速度变化；而是由于虚设电磁质量依赖于这个速度，唯一能够观察到的总表观质量必须依赖于它，尽管真实质量不依赖于它，并且可以是常数。

亚伯拉罕的计算让我们了解到**虚设质量**作为速度函数变化的规律；考夫曼的实验使我们知道**总质量**的变化规律。因此，比较这两个规律，将能使我们确定**真实质量**与**总质量**之比。

这就是考夫曼以往确定这个比率的方法；结果使人极为惊讶：**真实质量是零**。

这导致出根本未曾料到的概念。仅就阴极粒子所证明的东西被推广到一切物体。我们称之为质量的东西也许只不过是伪装；一切惯性恐怕都是电磁起源。可是，质量不再是常数，它会随速度而增大；对于直到每秒1000公里的速度而言，质量还明显地是常数，随后质量便增加，对于光速而言，质量变为无穷大。横质量不再等于纵质量；如果速度不太大，它们只可能是近似相等。力学原理B不再是正确的。

III

极隧射线

在我们现在所处的时刻，这个结论似乎为时尚早。人们能够把仅仅对于这样的光粒子证明的东西用于所有的物质吗？这种光粒子仅仅是物质的射气，也许不是真正的物质。但是，在讨论这个问题之前，必须先谈谈另一种射线。我要提到**极隧射线**，即哥耳德斯坦(Goldeistein)的 Kanalstrahlen。阴极在放射出带负电的

阴极射线的同时，也放射出带正电的极隧射线。一般地，这些极隧射线并不被阴极排斥，而是局限于这个阴极的最接近的邻域，在这里它们形成不是很容易觉察到的“羚羊皮软垫”；但是，如果给阴极钻孔，如果阴极几乎完全堵塞了真空管，那么极隧射线便向阴极**后面**延伸，其方向与阴极射线的方向相反，这样便可以研究它们了。正因为如此，才有可能证明它们带正电荷，证明它们象阴极射线那样，磁偏离和电偏离还是存在的，只不过是微弱而已。

镭也放射出类似于极隧射线的射线，这种射线比较容易吸收，人们称之为 α 射线。

象对于阴极射线那样，我们能够测量两种偏离，并从中推导出速度和比率 e 。其结果不象阴极射线那样是常数，而且速度以及比率 e 都比较小；正粒子带电少于负粒子；或者，如果我们假定电荷相等而符号相反，则正粒子比负粒子大得多，这样更自然一些。这些粒子一些带正电，另一些带负电，它们被称为**电子**。

IV

洛伦兹理论

但是，电子并不只是向我们表明它们存在于具有极大速度的这些射线中。我们将看到它们起着十分不同的作用，正是它们可以解释光学和电学的主要现象。引人注目的卓越综合归功于洛伦兹。

物质仅仅是由携带着大量电荷的电子构成的，在我们看来它似乎是中性的，这是因为这些电子的相反符号的电荷**相互补偿**

了。例如，我们可以设想一种由大正电子形成的太阳系，在大正电子的周围，中心电子所带的正电吸引着许多小行星即负电子。这些行星的负电荷与太阳的正电荷平衡，以致所有这些电荷的代数和是零。

所有这些电子都飘浮在以太中。以太处处完全相同，以太中的扰动象光或赫兹的真空中的振动一样，是按同一规律传播的。除了电子和以太，别无它有。当光波进入电子很多的以太部分时，这些电子在以太扰动的影响下便处于运动之中，它们于是作用于以太。这样就可以解释折射、色散、双折射和吸收。正是如此，如果由于某种原因使电子处于运动，它就会扰动它周围的以太，从而引起光波，这可以解释白炽物体的发光。

在某些物体内，例如在金属内，有不动的电子，在不动的电子之间，享有充分自由的运动电子环流着，不过它们不能逃逸出金属物体，不能越出金属与外部空间的界面，或金属与空气、与任何其他非金属物体的界面。在金属物体内，这些可动的电子的行为象盛装气体瓶内的气体分子一样，按照气体运动论运动。但是，在电势差的影响下，带负电的可动电子全都趋向于一方，而带正电的可动电子全都趋向另一方。这样就产生了电流，**这就是这些物体成为导体的原因**。另一方面，如果我们接受与气体运动论相似的观点的话，那么温度越高，电子的速度也越大。当这些可动的电子之一碰到金属物体的表面时——它不能通过这个边界，它就象碰到台球盘橡皮边的台球一样被反弹回来，它的速度便经受到突然的方向变化。但是，当电子改变方向时，正如我们进而将要看到的，它变成光波源，这就是灼热的金属是白炽的原因。

在其他物体，诸如电介质和透明体中，可动电子几乎没有多

少自由度。它们依然被束缚到吸引它们的不动电子上。它们距不动电子愈远，这种引力变得也就越大，愈倾向于把它们拉回来。因此，它们只能作小漂移；它们不再能够环流，而只能在它们的平均位置附近振动。这就是这些物体不是导体的原因；而且，这些物体往往是透明的，具有折射能力，由于光振动可以传递给易受振动影响的可动电子，从而便导致扰动。

在这里，我无法给出计算的细节；我仅限于说，这种理论解释了所有已知的事实，并且可以预言象塞曼(Zeeman)效应这样的新事实。

V

力学的结果

我们现在可能面临着两个假设：

1° 正电子具有比它们的虚设电磁质量大得多的真实质量；唯独负电子没有真实质量。我们甚至可以假定，除了两种符号的电子外，还存在着只具有真实质量的中性原子。在这种情况下，力学不受影响；不需要触动力学定律；真实的质量是常数；正如我们已经知道的，运动仅仅受到自感效应的扰乱；而且，除了负电子外，这些扰动几乎是可以忽略的，因为没有真实质量的负电子不是真正的物质；

2° 可是，还有另外的观点；我们可以假定，不存在中性原子，正电子正象负电子一样，也没有真实质量。但是，真实质量消失，或者是**质量**一词不再有任何意义，否则就必须把它称为虚设电磁质量；在这种情况下，质量不再是常数，横**质量**不再等于纵**质量**，力学原理将被推翻。

首先作一点说明。我们说过，对于同一电荷，正电子的总质量远远大于负电子的总质量。于是，设想用正电子除具有虚设质量外还具有显著的真实质量来解释这种差别，是很自然的。这使我们回到第一个假设。但是，我们同样可以假定，正电子象负电子一样，真实质量都是零，但是正电子的虚设质量大得多，由于它比负电子小得多。我经过考虑后说：小得多。事实上，在这一假设中，惯性完全起源于电磁；它本身归结为以太的惯性；电子就其本身而言不再是任何物；它们只不过是以太中的孔眼，而以太则绕着这些孔眼运动；这些孔眼越小，以太就越多，从而以太的惯性也就越大。

我们将怎样在这两个假设之间裁决呢？象考夫曼对待 β 射线那样处理极隧射线吗？这是不可能的；这些射线的速度太小了。因此，每一个人应该按照他的气质裁决吗？这样作岂不使保守派趋向一边而喜新者趋向另一边吗？但是，也许充分地考虑到革新者的论据后，必定会产生一些其他想法。

第二章 力学和光学

I

光 行 差

你知道布拉德雷所(Bradley)发现的光行差现象是什么吗?从恒星发出的光通过望远镜要花费一定的时间;在这段时间内,由地球运动携带着的望远镜也移动了。因此,如果把望远镜对准恒星的**真实**方向,当光线到达物镜时,那么在光网路的光线交叉处就形成了物像;当光线到达光网路的平面时,这个交叉处便不在同一点了。从而要使物像落在光线交叉处,我们不得不稍为改变一下望远镜的方向。结果,天文学家将不把望远镜对准光线绝对速度的方向,也就是说朝向恒星的真实位置,而恰恰对准光线参照于地球的相对速度方向,也就是说朝向所谓的恒星表观位置。

光速是已知的;因此我们可以假定,我们具有计算地球**绝对**速度的手段。(我马上将要解释我在这里使用的绝对一词。)这是不可能的;我们虽则知道我们所观察的恒星的表观位置;但是我们并不知道它的真实位置;我们只知道光速的大小,而不知道它的方向。

因此,如果地球的绝对速度是匀速直线的,我们从来也不会想到光行差现象;但是,它是可变的;它由两部分组成:太阳系的**速度**,这是匀速直线的;地球相对于太阳的**速度**,这是可变的。如果只存在太阳系的速度即不变的部分,那么观察到的方向

就是不变的。人们如此观察到的这个位置被称为恒星的**平均表观位置**。

现在，同时考虑地球速度的两部分，我们将有实际的表观位置，它绕平均表观位置描绘出一个小椭圆，我们观察到的正是这个椭圆。

忽略很小的量，我们将看到，这个椭圆的大小仅取决于地球**相对于**太阳的速度与光速之比，因此只有地球对于太阳的相对速度有用。

不过，请等一等！这个结果不是严格的，而仅仅是近似的；让我们把近似度稍微向前推进一下。于是，这个椭圆的大小将取决于地球的绝对速度。让我们针对不同的恒星比较椭圆的长轴：我们至少在理论上将有办法确定这个绝对速度。

这事也许没有乍看起来那样令人震惊；事实上，问题不在于相对于绝对虚空的速度，而是相对于以太的速度，**按定义**，以太被认为是绝对静止的。

而且，这种方法纯粹是理论性的。实际上，光行差是很小的；光行差椭圆的变化也是很小的，如果我们在一阶量上考虑光行差，从而这些变化可视为二阶量：太约百万分之一弧秒，我们的仪器绝对看不到它们。最后，我们将进一步看到，为什么应该抛弃前面的理论，为什么我们不能确定这个绝对速度，即使把我们仪器的精度提高一万倍！

人们可以设想一些其他方法，事实上人们已经这样作了。光速在水中与在空气中并不相同；先通过充空气的望远镜，然后通过充水的望远镜，观察恒星的两个表观位置，难道我们不能把它们加以比较吗？结果是否定的；地球运动并没有改变反射和折射的视定律。这个现象可以有两种解释：

1° 可以假定以太不是静止的，不过它却被运动的物体曳引着。于是，地球运动没有改变折射现象，这一点也不奇怪，因为三棱镜、望远镜和以太这一切东西一起作同一平移。至于光行差本身，可以用在星际空间中的静止以太和被地球运动所曳引的以太之分界面上所发生的折射来解释。正是基于这个假设（以太完全被曳引），建立了赫兹的动体电动力学理论。

2° 相反地，菲涅耳(Fresnel)假定，以太在虚空中是绝对静止的，在空气中几乎是绝对静止的，不管空气的速度多大，而且以太只能部分地被折射媒质携带。洛伦兹给这种理论以更满意的形式。在他看来，以太是静止的，只有电子处于运动之中；在虚空中，仅仅是以太的问题，在空气中，情况几乎是这样，曳引是零或几乎是零；在折射媒质中，扰动是同时由以太的振动和通过以太影响而处于运动中的电子的振动引起的，波动部分地被曳引。

为了在这两种假设之间裁决，我们有斐索(Fizeau)实验，该实验通过测量干涉条纹比较静止空气或运动空气中的光速。这些实验证实了菲涅耳的部分曳引假设。迈克耳逊(Michelson)以同样的结果重复了这些实验。因此，必须抛弃赫兹的理论。

II

相对性原理

但是，如果以太不被地球的运动拖动，可以借助于光现象证明地球的绝对速度(或更确切地讲，是地球相对于不动以太的速度)吗？实验作出了否定的回答，可是人们还是以各种可能的方式改变实验程序。无论使用什么方法，永远只能揭示出相对速度；我意指某些物体相对于其他物体的速度。事实上，如果光源

和观察仪器在地球上并参与地球的运动，那么实验结果总是相同的，不管仪器相对于地球轨道运动的取向是什么。如果光行差出现了，那正是因为光源即恒星相对于观察者在运动着。

如果我们忽略光行差的二阶微量，迄今的假设完全可以解释这一普遍结果。该解释依赖于洛伦兹引入的**地方时**概念，我将力图讲清楚它。设有两个观察者，一个位于A，另一个位于B，希望借助于光信号来对他们的钟。他们商定，当B的钟指向一个确定的时刻时，他将发出一个信号给A，而A在看到信号时把他的钟拨到那个时刻。如果仅仅是这样作，会存在系统误差，因为当光从B到A时要花费某一时间 t ，A的钟比B的钟慢时间 t 。这个误差容易矫正。交换信号就足够了。A本身也必须向B发信号，在这一新校准之后，B的钟将比A的钟慢时间 t 。于是，取两次校准的算术平均值将是充分的。

但是，这种方式假定，光从A到B与光从B返回A要花费相同的时间。如果观察者是不动的，这是正确的；如果他们作公共平移，情况就不再是如此了，例如，这是因为A到那时将遇到从B发出的光，而在光从A发出之前，B将离开。因此，如果观察者处于公共平移之中，如果他们不怀疑这一点，那么他们的校准将是有缺陷的；他们的钟将不是指示同一时间；每一个钟都将显示属于钟所在地点的**地方时**。

如果静止以太只能向他们传达都是同一速度的光信号，如果他们可以发出的其他信号都是通过与他们一起平移的媒质传播的，那么两个观察者将无法觉察到这一点。每一个人观察到的现象将稍早或稍迟；只有当不存在平移，他们便会在同一时刻看到它；可是，由于用钟观察到的东西是错的，人们又觉察不到这一事实，从而外观将没有什么变化。

由此可知，只要我们忽略光行差的平方，补偿就很容易得到解释，以期以来，实验并没有精确得足以有必要考虑光行差的平方。后来，迈克耳逊构想出更为精密的程序：他使沿不同路线传播的光线在平面镜反射后发生干涉；每一条路径大约是一米，干涉条纹许可辨认出千分之一毫米，从而就不能忽略光行差的平方了，可是结果还是否定的。因此，需要完善理论，该理论由洛伦兹-斐兹杰惹假设完成了。

这两位物理学家假定，所有作平移的物体都在平移的方向经受收缩，而它们的垂直于平移方向的尺度依然不变。**这种收缩对于所有物体来说都是相同的**，而且，它很小，对于象地球那样的速度而言，它大约是二亿分之一。此外，即使我们的测量仪器精密得多，也无法揭示它；事实上，我们的量杆象被测量的物体一样，经历同样的收缩。如果我们把物体以及米尺对准地球运动的方向，米尺与所测量的物体严格相符，那么在另一取向它们依然严格相符，尽管物体和米尺在长度以及取向上都发生了变化，这恰恰是因为变化对于物体和对于米尺来说是相同的。可是，如果我们现在不是用米尺，而是用光通过物体所花费的时间来测量长度，那情况就完全不同了，这正是迈克耳逊所作的工作。

在静止时的球体，当它运动时就变成扁平的旋转椭球体的形状；可是观察者将总是认为它是球体，因为他本人也经受了类似的形变，所有作为参照点的物体也是如此。相反地，严格保持球形的光的波面在他看来似乎被拉长为椭球面。

接着发生了什么呢？设观察者和光源一起平移：从光源发出的波面将是球面，这些球面以相继的源为中心；从这个中心到源的实际位置的距离与在发射后逝去的时间成正比，也就是说与球面的半径成正比。因此，所有这些球面关于源的实际位置 S 互为位似

球面。可是，对于我们的观察者来说，由于收缩，所有这些球面将似乎拉长成椭面，而且所有这些椭面关于点S将是位似椭面；所有这些椭面的离心率是相同的，只取决于地球的速度。我们将如此选择收缩定律，以便使点S可以处在椭球的子午面的焦点上。

这时，补偿是**严格的**，人们正是这样解释迈克耳逊实验的。

我上面已经说过，按照通常的理论，光行差的观察会给出我们地球的绝对速度，如果我们的仪器精密一千倍的话。我必须修正这种说法。是的，观察到的角度会受到绝对速度效应的影响，但是我们用来测量角度的分度圆却会因收缩而发生形变：它们变成了椭圆；从而导致所测量的角度出现误差，**这第二种误差可以严格补偿第一种误差。**

乍看起来，洛伦兹-斐杰惹收缩似乎是异乎寻常的；现在，我们能够说的有利于它的一切就是，如果我们用光通过一长度所需要的时间来**定义**长度，那么它只不过是迈克耳孙实验结果的直接翻译。

无论如何，人们不可能逃脱下述印象：相对性原理是普遍的自然定律，人们用任何想象的方法永远只能证明相对速度，所谓相对速度，我不仅意指物体对于以太的速度，而且也意指物体彼此相关的速度。如此之多的不同实验给出了一致的结果，以致于我们感到有必要把相称的价值赋予相对性原理，例如与等价原理相称的价值。无论如何，恰当的作法是，看看这种观察事物的方法可以导致我们得到什么结果，然后把这些结果与实验加以对照。

III

反作用原理

让我们看看，在洛伦兹理论中，作用和反作用相等原理变成什么。考虑一个电子A，它由于某种原因开始运动；它在以太中产生扰动；在某一时间末，这种扰动到达另一个电子B，B将离开它的平衡位置。在这些条件下，作用和反作用不能相等，至少在不考虑以太，而只考虑电子的情况下是这样，电子是**唯一可观察的**，由于我们的物质是由电子构成的。

实际上，正是电子A扰动了电子B；即使在电子B可以作用于A的情况下，这种反作用可以等于作用，但是也决不是同时的，因为电子B只有在传播作用所必需的某一时间之后才能开始运动。把这个问题作一比较严格的计算，我们得到下述结果：设一个赫兹放电器置于抛物柱面镜的焦点，与之机械相接；这个放电器发射电磁波，镜子向同一方向反射所有这些波；因此，放电器将向确定的方向幅射能量。好了，计算表明，放电器象发射出炮弹的大炮一样反冲。在大炮的例子中，反冲是作用和反作用相等的自然结果。大炮之所以反冲，是因为受到大炮作用的炮弹对大炮发生反作用。但是在电子的例子中，情况不再相同了。发出的东西不再是实物炮弹，它是能量，而能量没有质量，它没有相对应的物。我们可以简单地考虑一个带有反射器的灯，来代替放电器，反射器可以把灯的光线集中到一个方向。

的确，如果从放电器或从灯中发射出的能量遇到实物对象，这个对象便受到机械推力，犹如受到真实炮弹打击一样，而且这一推力将等于放电器和灯的反冲力，倘若在途中没有能量损失且对象吸收了全体能量的话。因此，人们被诱使说，在作用与反作

用之间还存在着补偿。但是，这种补偿即便是完全的，可也总是延迟的。如果光在离开光源后，在通过星际空间时永远没有遇到实物物体，那就永远也不会发生补偿；如果受冲击的物体不是完全吸收的，补偿就是不完全的。

这种力学作用太小无法进行测量吗，或者它们可受实验检验吗？这些作用无非是由**麦克斯韦-巴托利**(Bartholi)压力引起的；麦克斯韦由静电学和磁学的计算预言了这些压力；巴托利根据热力学的考虑达到了同一结果。

彗尾正是这样被解释的。小粒子是从慧核中分离出来的；它们受到太阳光的冲击，被推向后部，犹如受到来自太阳的弹雨一样。这些粒子的质量如此之小，以致这种排斥力反抗牛顿引力而使小粒子离开慧核；这样，在远离太阳运动时，它们便形成彗尾。

直接的实验验证是不容易得到的。首次努力导致了**辐射计**的建造。这个仪器发生**逆转**，其方向与理论方向相反，自从它被发明以来，对它的旋转的解释是完全不同的。最后，一方面使真空装置更完善，另一方面不给叶片一面涂黑，直接使光线束照射在叶片一面上，终于取得了成功。辐射度的影响和其他扰动原因通过一系列的费力的预防办法被消除了，人们得到十分微小的偏离，不过这看来好象是与理论符合的。

我们在前面讲过的赫兹理论以及洛伦兹理论都同样预示了麦克斯韦-巴托利压力的同一效应。不过，还有差别。例如，设能量以光的形式通过透明媒质从光源到达任何物体。麦克斯韦-巴托利压力将不仅在离开时对光源、到达时对被照射的物体施加作用，而且也对它传播时通过的透明媒质的物质施加作用。当光波到达这种媒质的新区域时，这种压力将把分布在那里的物质向前推，而在波离开这个区域时，它将把物质向后推。这样一来，光源的

反冲力使作为对应物的、与光源接触的透明物质向前运动；稍后，这同一物质的反冲力又使作为对应物的、位于稍远处的透明物质向前运动，如此等等。

可是，补偿是完全的吗？不管作为透明媒质的物质是什么，麦克斯韦-巴托利压力对于它的作用等于它作用在光源上的反作用吗？或者，由于媒质没有折射能力且比较稀少，这种作用也很小，以至于在虚空中变为零吗？

赫兹把物质视为与以太机械地关联的，以致于以太可以完全被物质曳引，如果我们承认赫兹的理论，那就必须对第一个问题回答是，对第二个问题回答否。

因此，存在着象作用和反作用相等原理所要求的完全补偿，即使在折射最小的媒质中，即使在空气中，即使在星际虚空中，也足以假定有物质的残余，不管它多么稀薄。

但是，我们在上面已经看到，斐索实验不容许我们保留赫兹理论；因此，必须采纳洛伦兹理论，从而必须抛弃反作用原理。

IV

相对性原理的结果

我们在上面已经看到迫使我们把相对性原理看作是普遍的自然定律的理由。让我们看看，这个原理会导致什么结果。能够认为它最终被证明了吗？

首先，它迫使我们推广洛伦兹和斐兹杰惹关于所有物体在平移方向收缩的假设。尤其是，我们必须把这个假设扩展到电子本身。亚伯拉罕把这些电子看作是球形的和不会变形的；在我们看来，必须承认这些在静止时是球形的电子在运动时经受了洛伦兹

收缩，从而变形为扁平的椭球。

电子的这一形变将影响它们的力学性质。事实上，我已经说过，这些带电的电子的位移是真正的运流，它们的表观惯性源于这种电流的自感应：专就负电子而论。对于正电子而言，我们还不知道是否如此。好了，电子的形变仅取决于它们的速度，这一形变将改变它们表面的电分布，从而改变它们产生的运流的强度和这种电流的自感应作为速度的函数而变化的规律。

以这种代价，补偿将是完全的，而且符合相对性原理的要求，但只是在下述两个条件下才行：

1°正电子没有真实质量，而只有虚设的电磁质量；或者至少是这样，即使它们的真实质量存在着，也不是常数，而是按照与它们的虚设质量相同的规律随速度变化；

2°所有的力都是电磁起源，或者至少它们按照与电磁起源的力相同的规律随速度而变化。

还是洛伦兹，完成了这一引人注目的综合；让我们停一下，再看看由此得出了什么结果。首先，不再存在物质，因为正电子不再具有真实质量，或者至少不再有不变的真实质量。我们力学的现存原理曾建立在质量不变的基础上，因而必须加以修正。再者，电磁解释必须考虑到所有已知的力，尤其是引力，或者至少引力定律必须如此修正，以便这种力按照与电磁力相同的方式随速度变化。我们还要回到这一点。

乍看起来，这一切好象有点人为色彩。尤其是，电子的这种形变似乎完全是假设性的。不过，事情可以用另外的方式来描述，以便避免在推理的基础上提出这一变形假设。把电子看作质点，要问在不违背相对性原理的情况下，它们的质量作为速度的函数应该如何变化。或者讲得更恰当一些，就是要问：在电场或磁场

的影响下，它们的加速度应该是什么，才不致违背相对性原理，而且当我们假定速度很小时，我们又回到通常的定律。我们将发现，质量的变化或加速度的变化必定象电子经受了洛伦兹形变似的。

V

考夫曼实验

于是，在我们面前有两种理论：一种是电子不可能形变的理论，这就是亚伯拉罕的理论；另一种是电子经受洛伦兹形变的理论。在两种情况下，它们的质量随速度而增加，当速度变得等于光速时，质量变为无穷大；不过，变化规律是不同的。考夫曼所使用的方法揭示出质量变化的规律，从而似乎给予我们在两种理论之间作出裁决的实验手段。

不幸的是，他的第一批实验不能足够精确地作到这一点；于是，他决定以较多的预防措施重复这些实验，他十分细心地测量了场的强度。在其新形式下，**这些实验有利于亚伯拉罕理论**。于是，相对性原理不可能具有我们被诱使赋予它的精确价值；不再有理由相信正电子象负电子一样被剥夺了真实质量。不过，在肯定地采纳这个结论之前，有必要再作一点思考。问题是如此重要，以致人们希望另外的实验家^①重复考夫曼实验。很不幸，这个实验十分棘手，只有与考夫曼具有同样才干的物理学家才能成功地进行。人们严格地采取了一切预防措施，我们没有发现提出什么异议。

^① 本书付印时，我获悉布赫尔(Bucherer)先生采取了新的预防措施，重复了这个实验，他得到了与考夫曼相反的结果，证实了洛伦兹的观点。

不过，还有一点我希望引起注意：这就是静电场的测量，一切均与这一测量有关。这个场是在电容器的两个极板之间产生的；在这两个极板间，造成了极好的真空，以便得到完全绝缘。然后，测量两个极板的电势差，用离极板的距离除以这个电势差便得到场强。这假定电场是均匀的；这是可靠的吗？在一个极板的附近，例如负极板的附近，电势不会突然下降吗？在金属和真空的界面处可能有电势差，这种电势差在正的一面和负的一面可以不同；导致我这样想的是水银和真空之间的电势效应。不管情况如此的几率多么小，似乎还应当考虑它。

VI

惯性原理

在新动力学中，惯性原理还是正确的，也就是说，孤立的电子将作匀速直线运动。至少，这是普遍假定的；不过，林德曼(Lindemann)反对这种观点；我不想参加这一讨论，我在这里不能详述它，因为它具有过于困难的性质。无论如何，对该理论稍作修正，便足以庇护它免受林德曼的反驳。

我知道，浸在流体里的物体在运动时要经受显著的阻力，这是因为我们的流体是粘滞的；在理想流体中，完全没有粘滞性，物体便在其后激起液体波，如船的尾流；开始时，必须用很大的力量使之运动，由于这不仅仅必须使物体本身运动，而且还必须使物体尾波的液体运动。但是，一旦获得运动，运动本身就会在毫无阻力的情况下继续进行下去，因为物体在行进中仅仅携带着液体的扰动，液体的总活劲(vis viva)不会增加。因此，一切就好象惯性增加一样地发生着。在以太中前进的电子也以相同的方式

式行动：在电子周围，以太也会被激起，但是这种扰动伴随着物体而运动；因此，对于和电子一起运动的观察者来说，伴随这个电子的电场和磁场似乎是不变的，只有在电子的速度变化时它们才变化。从而，要使电子运动就必须用力，由于必须产生这些场的能量；相反地，一旦获得了运动，就不需要力维持运动了，由于所产生的能量仅仅象尾流一样在电子之后前进。因此，这一能量只是增加电子的惯性，正如液体的扰动增加浸在理想流体中的物体的惯性一样。无论如何，负电子至少没有除此以外的惯性。

在洛伦兹假设中，活劲仅仅是以太的能量，它不与 v^2 成比例。无疑地，如果 v 很小，活劲明显地与 v^2 成比例，运动量明显地与 v 成比例，两种质量明显不变且彼此相等。但是，**当速度趋近于光速时，活劲、运动量和两种质量便无限地增加。**

在亚伯拉罕的假设中，描述稍为复杂些，不过，我们刚才说过的东西本质上依然正确。

这样一来，当速度等于光速时，质量、运动量、活劲变为无穷大。由此可得，**没有什么物体能够以任何方式获得超越于光速的速度。**事实上，随着物体速度的增加，它的质量也成比例地增加，于是它的惯性成为越来越大的阻力，以反抗速度的任何新增加。

于是，问题提了出来：让我们姑且承认相对性原理吧；运动的观察者没有任何手段察觉他自己的运动。因此，如果没有一个处于绝对运动的物体能够超过光速，而可以象你选择地那样接近光速，那么就它对于我们观察者的相对运动而言，情况应该相同。于是，我们可以尝试如下推理：观察者可以得到200,000公里的速度；相对于观察者作相对运动的物体也可以得到同一速度；物体的绝对速度从而将是400,000公里，这是不可能的，因为这已

超过了光速。这仅仅是外观，当考虑到洛伦兹如何估价地方时时，这种矛盾就消失了。

VII

加 速 度 波

当电子运动时，它在周围的以太中产生扰动；如果它的运动是匀速直线运动，这种扰动便成为我们上节所说的尾流。但是，如果运动是曲线的或变化的，情况就不一样了。于是，该扰动可以看作是两种另外的扰动的叠加，朗之万(Langevin)把这两种扰动命名为**速度波**和**加速度波**。速度波仅仅是在匀速运动中出现的波。

至于加速度波，这是完全类似于光波的扰动，它是电子在经受加速的时刻从电子发出的，从而它通过连续的球面波以光速传播。由此可得：在匀速直线运动中，能量完全守恒；但是，当有加速度时，就要损失能量，能量以光波的形式耗散，越过以太而传播到无穷远处。

不过，这种加速度波的效应，尤其是相应的能量损失在大多数情况下是微不足道的，这就是说，不仅在普通力学中和天体运动中是这样，而且在镭射线中也是如此，镭射线的速度很大，但却没有加速度。于是我们可以有限度地应用力学定律，使力等于加速度与质量之积，不过这个质量按照上面所说明的规律随速度而变化。因此我们说，该运动是**准稳运动**。

在加速度大的所有情况中，问题就不同了，这主要有下述几个方面：

1°在白炽气体中，某些电子作频率很高的振动；位移是很小的，速度是有限的，而加速度很大；从而把能量传给以太，这就

是为什么这些气体辐射出与电子振动的周期相同的光。

2°相反地，当气体接收光时，这些电子便以极强的加速度振动，它们吸收光。

3°在赫兹放电器内，在金属内环流的电子在放电的瞬间经受了突然加速，从而获得高频振动。由此便导致部分能量以赫兹波的形式辐射出去。

4°在白炽金属中，在这个金属内的电子被激发而具有很大的速度；在接近金属表面时，由于它们不能通过表面，它们被反射而且经历显著的加速。这就是金属发射光的原因。用这种假设，可以圆满地解释黑体的光发射定律的细节。

5°最后，构成阴极射线的负电子由于受到激励而具有极大的速度，当这些阴极射线撞击到对阴极时，突然受到阻碍。因为它们这样经受了加速，它们便在以太中产生波动。按照某些物理学家的观点，这就是伦琴 (Röntgen) 射线的来源，伦琴射线只不过是波长很短的光线而已。

第三章 新力学和天文学

I

万有引力

质量可以用两种方式定义：

1° 按照力与加速度之商定义；这是质量的真正定义，这度量的是物体的惯性。

2° 借助牛顿定律，按照物体施加于外部物体的引力定义。因此，我们能把作为惯性系数的质量和作为引力系数的质量区别开来。根据牛顿定律，在这两个系数之间存在着严格的比例。但是，人们仅仅针对动力学的普遍原理可以适用的速度证明了这一点。现在，我们看到，作为惯性系数的质量随速度而增加；我们能够得出结论说，作为引力系数的质量同样随速度增加，而且依然与惯性系数成比例吗？或者相反，这个引力系数依然是常数吗？这是一个我们没有办法裁决的问题。

另一方面，由于两个相互吸引的物体的速度一般说来是不同的，如果引力系数取决于速度，那么这个系数将如何取决于这两个速度呢？

关于这个论题，我们只能够作假设，但是我们自然不得不研究，这些假设中那一个可能与相对性原理一致。有大量的假设；我在这里要提到的只有一个假设，即洛伦兹假设，我将简要地叙述它。

首先考虑处于静止的电子。两个相同符号的电子相互排斥，两个相反符号的电子相互吸引；在通常的理论中，它们的相互作用与它们的电荷成比例；因此，如果有四个电子，有两个正电子A和A'，有两个负电子B和B'，而且这四个电子的电荷在绝对值上是相同的，那么在相同的距离，A对A'的斥力等对B对B'的斥力，也等于A对B'的引力或等于A'对B的引力。因此，如果A和B相距很近，A'和B'也相距很近，而且我们审查了系统A+B对于系统A'+B'的作用，那么我们将有严格相互补偿的两个斥力和两个引力，其总作用将是零。

现在，恰恰应该把物质分子视为一种太阳系，一些正电子和一些负电子在其中环行，按这样的方式，**所有电荷的代数和是零**。因此，物质分子完全类似于我们说过的系统A+B，以致两个分子相互之间总的电作用应为零。

但是，实验向我们表明，这两个分子由于牛顿万有引力而相互吸引；于是我们可以作出两个假设：我们可以假定万有引力和静电引力没有关系，前者是由截然不同的原因引起的，它在某种程度上可简单地叠加；要不然，我们可以假定静电引力不与电荷成比例，电荷+1施加给电荷-1的引力大于两个+1电荷或两个-1电荷的相互斥力。

换句话说，由正电子产生的电场和由负电子产生的电场可以叠加，可是它们依然是独立的。正电子对于由负电子产生的场比对于由正电子产生的场更敏感；对于负电子而言，情况正好相反。很清楚，这个假设在某种程定上使静电学复杂化了，它使万有引力化归于静电学。总之，这是富兰克林(Franklin)的假设。

现在，如果电子运动，会发生什么情况呢？正电子将在以太中引起扰动，在那里产生电场和磁场。对于负电子来说，情况将

是一样的。因此，正电子以及负电子由于这些不同场的作用而经受机械冲力。按照通常的理论，由正电荷的运动所产生的电磁场，对于两个符号相反而绝对电荷相同的电子施加大小相等、方向相反的作用。从而我们不能方便地区分由正电子运动所产生的场和由负电子运动所产生的场，我们仅考虑这两个场的代数和，也就是说只考虑合成场。

相反地，在新理论中，源于正电子的电磁场对于正电子的作用遵循通常的定律；它与源于负电子的电磁场对于负电子的作用相同。现在，让我们考虑源于正电子的场对于负电子的作用（或者反过来）；它仍将遵循同一定律，不过**具有不同的系数**。每一个电子对于由异名电子产生的场比对于由同名电子所产生的场更为敏感。

这就是洛伦兹假设，对于速度不大的情况，它简化为富兰克林假设；因而，对于这些小速度，它能解释牛顿定律。而且，因为万有引力化归为电动力学起源的力，洛伦兹的普遍理论将适用，从而将不违背相对性原理。

我们看到，牛顿定律不再适用于高速，对于运动物体来说，必须修正它，对于运动的电而言，正好也必须以相同的方式修正静电学定律。

我们知道，电磁扰动是以光速传播的。我们回想起，按照拉普拉斯的计算，万有引力至少是以比光快一千万倍的速度传播的，从而它不会是电磁起源，因此我们可能要放弃前述的理论。拉普拉斯的结果是众所周知的，但是人们一般不了解它的意义。拉普拉斯设想，如果万有引力的传播不是瞬时的，那么它的传播速度便与被吸引的物体的速度结合在一起，就象光行差现象中的光所发生的情况一样，从而有效力不是沿着连结两物体的直线，

而是与这条直线成一小角度。这是极为特殊的假设，还没有充分证实，无论如何，它与洛伦兹假设大相径庭。拉普拉斯的结果不成其为反对洛伦兹理论的证据。

II

与天文观察比较

前面的理论能够与天文观察一致吗？

首先，如果我们采纳这些理论，那么轨道运动的能量就会因**加速度波**效应而不断消散。由此可得，星球的平均运动会不断减速，仿佛这些星球在有阻力的媒质中运动一样。不过，这种效应极其微弱，以致最精密的观察也分辨不出。天体的加速度比较微弱，以致加速度波效应可以忽略，运动可以被看作是**准稳运动**。确实，加速度波效应不断积累，但是这种积累太慢，要使它变明显，需要观察数千年。因此，让我们把运动视为准稳运动作一下计算，这是在下述三个假设下进行的：

A. 承认亚伯拉罕假设(电子不能变形)，并保持牛顿定律的通常形式；

B. 承认洛伦兹关于电子变形的假设，并保持通常的牛顿定律；

C. 承认洛伦兹关于电子的假设，象我们在前一节所作的那样修正牛顿定律，以便使它变得与相对性原理一致。

在水星运动中，这种效应将是最为显著的，因为这个行星具有最大的速度。蒂塞朗(Tisserand)在承认韦伯(Weber)定律的前提下，从形式上作出了类似的计算；同时，韦伯也企图解释静电现象和电动力学现象，他假定，电子(它们的名字还没有发明出

来)沿着连结它们的直线相互施加引力和斥力,这些力不仅取决于它们的距离,而且也取决于这些距离的一阶和二阶导数,从而取决于它们的速度和加速度。韦伯的这个定律虽然不同于今日趋向盛行的那些定律,但是仍然与它们有某种类似之处。

蒂塞朗发现,如果牛顿引力符合韦伯定律,那么对于水星近日点,从中便可得出 $14''$ 的长期变化,这是在它被观察到而人们却无法解释的意义上而言的,不过计算值比较小,由于观察值是 $38''$ 。

让我们重提假设A, B和C,首先研究一下被一个固定中心吸引的行星的运动。假设B和C不再区分了,这是因为,如果吸引点是固定的,那么它所产生的场是纯粹静电场,其中引力与距离平方成反比而变化,这与库仑静电定律一致,与牛顿定律等价。

倘若把新定义视为活劲,那么活劲方程仍然适用。按同一方式,面积方程被另一个等价于它的方程代替;动量矩是常数,而运动量必须按新动力学来定义。

唯一敏感的效应将是近日点的长期进动。依据洛伦兹理论,对于这一进动,我们将发现它是韦伯定律所给出的结果之半;依据亚伯拉罕理论,它是五分之二。

现在,如果我们设两个运动物体绕它们的公共重心运动,该效应只有很小的差别,尽管计算可能稍为复杂一些。因此,水星近日点的进动在洛伦兹是 $7''$,而在亚伯拉罕理论中是 $5''.6$ 。

而且,该效应与 $n^3 a^2$ 成比例,其中 n 是恒星的平均运动, a 是它的轨道的半径。对于行星来说,借助于开普勒定律,于是该效应与 $\sqrt{a^6}$ 成反比地变化;因此,除水星而外,它是不可觉察的。

对于月球来说,尽管 n 很大,因为 a 极小,它同样是不可觉察。

的；对于金星而言，它比水星小五倍，对于月球而言，它比水星小六百倍。关于金星和地球，我们可以附加说，近日点的进动（对于这种进动的同一角速度而言）很难通过天文观察辨认，因为它们的轨道的偏心率比水星小得多。

总而言之，天文观察唯一敏感的效应是水星近日点的进动，这是在被观察到而没有被解释的意义上而言的，不过该效应特别微弱。

不能把这看作是有利于新动力学的论据，由于对于大部分水星异常，总是必须寻找另外的解释；不过，还不能把这看作是反对新动力学的论据。

III

勒萨热理论

把这些见解与早就提出的用以解释万有引力的理论比较一下，是很有趣的。

设在星际空间中，十分精细的微粒以高速在每一个方向上环流。在空间中孤立的物体明显地将不受这些微粒冲击的影响，因为这些冲击均等地分布在所有方向上。但是，如果有两个物体A和B，那么物体B将起屏蔽作用，并将拦截部分微粒，没有它，微粒便会撞击A。于是，A在与B相反的方向上受到的冲击将不再有对应的东西，或者现在将仅仅部分地补偿，这将把A推向B。

这就是勒萨热(Lesage)理论；我们先采取普通力学的观点来讨论它。首先，这种理论所要求的冲击是如何发生的呢？它是按理想弹性体的定律发生的，还是按非弹性体的定律发生的，抑或是按折衷的定律发生的呢？勒萨热的微粒不能象理想弹性体那样作

用；否则，其效应会是零，由于物体B所拦截的微粒会被从物体B弹回的其他微粒替代，计算证明，补偿是完全的。因此，冲击必然使微粒损失能量，这一能量将以热的形式出现。可是，热是怎样产生的呢？请注意，引力能够穿过物体；因此，如以地球而论，我们务必不要把它想象成一个固体屏障，而要把它想象成由为数极多的很小的球形分子构成的，这些分子单独起着小屏障的作用，但是在这些分子之间，勒萨热的微粒可以自由环流。这样一来，不仅地球不是固体屏障，而且它甚至也不是筛子，因为虚空占据的空间比充实的空间多得多。要认识这一点，请回想一下，拉普拉斯已经证明，引力在穿过地球时，它至多减弱千万分之，他的证明是完全令人满意的：事实上，如果引力被它穿过的物体吸收，它就不再可能与质量成比例；对于大物体而言，引力比对小物体**相对地**弱一些，因为它要穿过较大的厚度。因此，太阳对地球的引力比太阳对月球的引力**相对地**弱一些，由此会导致在月球的运动中有很明显不均衡。因此，如果我们采纳勒萨热理论，我们就应得出结论说，构成地球的球形分子的总表面至多是地球总表面的千万分之一。

达尔文(Darwin)曾证明，当我们假定粒子完全没有弹性时，勒萨热理论就严格地导致牛顿定律。于是，地球施加在距离为1处的质量是1上的引力，同时与构成地球的球形分子的总表面积 S 、微粒的速度 v 、由微粒形成的介质的密度 ρ 的平方根成比例。所产生的热将与 S 、密度 ρ 以及速度 v 的立方成正比。

但是，必须考虑在这样的介质中运动的物体所经受的阻力，事实上，物体不反抗某些冲击就不能运动，相反地，当冲击在相反方向到来之前，它又离开了，以致于在静止状态实现的补偿再也不能继续下去了。计算出的阻力与 S 、 ρ 和 v 成正比；现在，我

们知道，天体就好象它们没有经受阻力一样地运动着，观察的精度容许我们为媒质的阻力设置一个界限。

这种阻力随 $S\rho v$ 变化，而引力随 $S\sqrt{\rho v}$ 变化，我们看到，阻力和引力平方之比与乘积 Sv 成反比。

因此，我们有乘积 Sv 的较低界限。我们已经有 S 的较高界限（根据引力被它所穿过的物体的吸收来决定）；因此，我们有速度 v 的较低界限，它至少必须是光速的 24×10^{17} 倍。

由此我们可以导出 ρ 和所产生的热量；这一热量足以使温度在一秒钟内升高到 10^{26} 度；在给定时间内，地球能够接收的热量比太阳在同一时间发出的热量多 10^{20} 倍；我不是说的太阳向地球发射的热量而是太阳向所有方向辐射出的热量。

显而易见，地球不能长期经受这种状况。

如果我们反对达尔文的观点，而赋予勒萨热微粒以不完全的、但却不是零的弹性，那么我们会得出希奇古怪的结果。实际上，这些微粒的活动不会完全转化为热，但是所产生的引力同样是较小的，从而只有转化为热这一部分活动对于产生引力有贡献，这便归结为同一事实；明智地使用强有力的定理，能使我们解释这一点。

可以改变勒萨热理论；把微粒置之不论，设想来自空间各个点的光波在所有方向穿越以太。当物体接收到光波时，由于麦克斯韦-巴托利压力，光波便向它施加力学作用，恰如它受到实物抛射体的冲击一样。因此，所讨论的光波可以起勒萨热微粒的作用。例如，这是托姆西纳(Tommasina)先生所假定的东西。

困难并没有因为这一切而消除了；传播速度只能是光速，对于媒质阻力来说，我们这样便得出不能容许的数字。此外，如果光完全被反射，效应就是零，正如在理想弹性微粒的假设中那

样。要有引力，必须使光部分地被吸收；但是，还会产生热。这些计算基本上与用勒萨热通常理论所作出的计算没有差别，该结果保持着相同的奇异特征。

另一方面，引力不被它所穿过的物体吸收，或者不会完全被吸收；我们所知道的光并不是这样。能够产生牛顿引力的光与普通光显著不同，例如它是波长很短的光。这还不算，如果我们的眼睛对这种光敏感，那么整个天空在我们看来似乎比太阳还要明亮得多，以致太阳也许成为黑色而特别显眼，这样太阳就会引起我们的反感，而不是引起我们的兴趣。由于这一切理由，容许解释引力的光更象伦琴射线，而不是更象普通光。

此外，X射线也不充分；不管这种射线在我们看来可以有多大的贯穿能力，它们也不能通过整个地球；因此，必须设想X'射线的贯穿能力比普通X射线的贯穿能力大。而且，一部分X'射线的能量必须消失，否则就不会有引力。如果你不希望它转化为热——这会导致产生大量的热，你就必须假定，它在每一个方向以二次射线的形式射出去，二次射线可以称为X''，X''比X'射线贯穿能力更大，否则它们本身便会扰乱引力现象。

当我们试图给予勒萨热理论以生命力时，我们就不得不作这样复杂的假设。

但是，我们所说的一切都预先假定力学的普通定律。如果我们承认新动力学，事情会变得更好吗？首先，我们能够保持相对性原理吗？让我们先赋予勒萨热理论以它的初始形式，并假定实物微粒穿过空间；如果这些微粒是完全弹性的，它们碰撞的规律能够与相对性原理一致，但是我们知道，它们的效应却是零。因此，我们必须假定这些微粒不是弹性的，从而很难设想碰撞定律符合相对性原理。此外，我们还会发现显著的热量产生了，不过还有

可以觉察到的媒质的阻力。

如果我们把这些微粒置之不论，而转向麦克斯韦-巴托利压力的假设，困难也不会小一些。这是洛伦兹本人1900年4月25日在向阿姆斯特丹科学院所作的专题报告中试图去做的工作。

考虑一个沉浸在以太中的电子系统，光波在每一方向透过以太；这些电子之一被这些光波之一冲击而开始振动；其振动将与光振动同步；不过，如果电子吸收一部分入射能，它可能有相位差。事实上，如果它吸收能量，这是因为以太的振动**激励**电子；因此，电子必须比以太作用缓慢。运动的电子类似于运流；因此，每一个磁场，尤其是由光扰动本身产生的磁场必然对这个电子施加力学作用。这种作用是很微弱的；而且，每过一个周期，它都改变电流的符号；不管怎样，如果在电子振动和以太振动之间有相位差，平均作用便不为零。平均作用与相位差成正比，从而与电子所吸收的能量成正比。在这里，我不能涉及计算的细节；只是可以充分地说，最终结果是任何两个电子的引力，该引力与距离的平方成反比，与两个电子所吸收的能量成正比。

因此，没有光吸收，从而没有热量产生，就不可能有引力，这就是决定洛伦兹放弃这一理论的缘由，归根结底，这一理论与勒萨热-麦克斯韦-巴托利理论没有什么差别。如果他把计算推到极端，他也许还会更为沮丧。他可能发现，地球的温度每秒不得不增加 10^{13} 度。

IV

结 论

我已极力用几句话尽可能完备地给出这些新学说的思想：我

曾试图解释它们是如何诞生的；否则，读者也许会为它们的大胆而惊恐不安。新理论还未被证明；远远没有证明；只是它们建立在具有充分权重的概率的集合上，我们没有权利蔑视它们。

新实验无疑将告诉我们，我们最终应该如何思考它们。问题的棘手之处在于考夫曼实验和可以着手证实它的实验。

在结论中，请容许我告诫一句。假定在数年之后，这些理论经受了新的检验并取得胜利；那时，我们的中学教育将发生很大的危险；某些教师无疑将希望为新理论谋求地盘。新事物是如此吸引人，它好象没有高速进展，这使人如此难以忍受！至少将希望向学生打开视野，在给他们教普通力学之前，让他们知道，普通力学的时代已经过去，它充其量只对往昔的傻瓜拉普拉斯有足够的价值。于是，他们将不习惯普通力学。

让他们知道，普通力学仅仅是近似的，这样作好吗？好的；不过为时已晚，当普通力学已经渗透到他们的身心本身时，当他们将养成只是通过它进行思考的癖好时，当不再存在他们不学它的危险时，那时人们便可以方便地向他们说明它的界限。

他们必须经历的，正与普通力学一致；他们永远必须使用的，唯有普通力学。无论汽车进步到何种程度，我们的交通工具从来也达不到普通力学不再正确的速度。新力学仅仅是奢侈品，只有当必需品有保障后，我们才应当设想奢侈品。

第四编 天文科学

第一章 银河与气体理论

在这里提出的见解迄今还未引起天文学家的注意；除了开耳芬勋爵 (Lord Kelvin) 的坦率思想外，在这里没有任何东西可引用了，他的思想开辟了研究的新领域，但是还有待贯彻到底。我没有什么独到见解的结果要透露，我能够作的一切就是给出所述问题的观念，但是迄今还没有一个人着手解决它。

每一个人都知道，大量的现代物理学家如何描述气体的组成；气体是由不计其数的分子形成的，这些分子以高速在每一个方向飞来飞去。这些分子也许彼此超距作用，但是这种作用随距离增加而急剧减小，以致它们的轨道依然明显地是直线；只有当两个分子碰巧跑得相互十分接近时，它们就不再是这样了；在这种情况下，它们相互之间的引力或斥力使它们向右或向左偏折。这就是人们有时所说的碰撞；但是，碰撞一词不是按它的通常意义来理解的；两个分子没有必要进入接触状态，只要它们彼此充分接近，使它们的相互吸引变得明显就足够了。它们可经受的偏折的规律与真正的碰撞毫无二致。

乍看起来，这种不计其数的微尘的杂乱无章的碰撞，只能引起无法解决的混乱，面临这种状况，解析必定也会畏葸不前。但是，大数定律，即偶然性的最高定律，能够给我们以帮助；面对

半无秩序，我们必定束手无策，但是在极度无秩序时，统计规律重建起我们精神能够在其中重新找到的一种平均秩序。正是这种平均秩序的研究，构成气体运动论；它向我们表明，分子的速度均等地分布在各个方向上，这些速度的大小因分子不同而异，但是，即使这种变化也服从所谓的麦克斯韦定律。这个定律告诉我们，有多少分子以某一速度运动。只要气体偏离这个定律，分子的相互碰撞由于改变了它们的速度的大小和方向，趋向于使气体迅速地恢复原状。物理学家力求用这种方法解释气体的实验性质，都取得了成功；例如，马略特(Mariotte)定律即是。

现在，考虑一下银河；我们在其中也可以看到不计其数的微尘；只是这种微尘的颗粒不是原子，它们是恒星；这些颗粒也以高速运动着；它们彼此超距作用，不过这种作用在大距离时如此微弱，以致于它们的轨道是直线的；可是，它们之中的两个可以不时地接近，足以从它们的路线偏离，犹如慧星运行到十分接近木星那样。一句话，在巨人的眼里，他们看我们的太阳恐怕象我们看我们的原子，银河似乎仅仅是一个气泡而已。

开耳芬勋爵的主导思想就是这样的。从这一比较中可以得出什么呢？它精确到何种程度呢？这就是我们必须一起研究的问题；但是，在达到确定的结论之前，为了避免过早作出判断，我们要预见到，气体运动论对于天文学家来说将是一个模型，他不应该盲目遵从这个模型，不过他从中可以有利地启迪灵感。直到现在，天体力学仅仅研究了太阳系或某些双星系统。面对银河显示出的集合物，或恒星团，或可以分解的星云，天体力学退缩了，因为它在其中看到的只是混沌。但是，银河并不比气体复杂；统计方法建立在概率演算的基础上，它适用于气体，也适用于银河。首先，重要的是，要把握两种情况的类似以及它们的差异。

开耳芬勋爵极力用这种方式确定银河的尺度；为此，我们便归结为计数用望远镜所能看到的恒星；但是，我们无法保证，在我们看见的恒星之后，不存在我们看不见的其他恒星；因此，我们用这种方法能够测量的不可能是银河的大小，它是我们仪器的视野。新理论终归向我们提供了其他对策。事实上，我们知道距我们最近的恒星的运动，我们能够形成关于它们的速度大小与方向的概念。假如上面所提出的观念是正确的，这些速度就应该遵守麦克斯韦定律，可以说，它们的平均值将告诉我们，那一个对应于我们虚设的气体的温度。但是，这个温度本身取决于我们的气泡的大小。实际上，假设在虚空中是自由的气体质量的元素按照牛顿定律相互吸引，那么它们将如何作用呢？气体元素将呈球形；而且，由于引力，中心的密度将较大，压力从表面到中心也将增加，因为外部的重力被引向中心；最后，越向中心，温度越增加；温度和压力通过所谓的绝热定律相关联，犹如在相继的大气层中所发生的情况一样。正是在表面，压力将是零，它将与绝对温度相同，也就是说，与分子的速度相同。

在这里，问题出现了：我已经说过绝热定律，但是这个定律对于各个气体是不同的，因为它取决于它们两者的比热之比；对于空气和相似的气体，这个比是1.42；但是，把银河类比为空气，这恰当吗？显然不恰当；象水银蒸汽、象氦、象氮，都应视为单原子气体。也就是说，比热之比应该等于1.66。事实上，例如我们的一个分子就是一个太阳系；而行星是微不足道的角色，太阳才算数，因此我们的分子实际是单原子的。即使我们以双星为例，很可能，一个接近于它的陌生恒星的作用在能够扰乱这两个组元的相对轨道之前，便足以明显地使该系统的一般平移运动偏折；简言之，双星的行为象不可分割的原子一样。

无论如何，气体球越大，在其中心的压力从而还有温度也越大，因为压力随所有迭加层的重量增加。我们可以假定，我们几乎处于银河系的中心，通过观察恒星的平均固有速度，我们将知道，那一个对应于我们气体球的中心温度，我们将确定它的半径。

我们可以通过下述考虑得到该结果的概念：银河是球形的，在银河中，质量是以均匀的方式分布的；由此可得，其中的恒星描绘出具有同一中心的椭圆。如果我们假定速度在表面变为零，我们便可以根据活劲方程计算中心的速度。于是我们发现，这个速度与球的半径和它的密度的平方根成正比。如果这个球的质量是太阳的质量，而它的半径是地球轨道的半径，这个速度（很容易看出）就是地球在它的轨道的速度。但是，在我们假定的情况下，太阳的质量应该分布在半径大1,000,000倍的球内，这个半径是最近恒星的距离；因此，密度要小 10^{18} 倍；速度是同一数量级，因此半径必须大 10^9 倍，是最近的恒星距离的 1,000 倍，由此可知银河系中的恒星大约是十亿个。

但是你会说，这些假设与实际大相径庭：首先，银河不是球形的，我们将马上回到这一点，而且气体运动论也与均匀球的假设不相容。但是，在按照这个理论进行严格的计算时，我们无疑应该得到不同的结果，不过大小的数量级相同；现在，在这样一个问题中，材料是如此不肯定，以致大小的数量级是追求的唯一目的。

在这里，第一个评论呈现出来：通过近似计算，我再次得到开耳芬勋爵的结果，这明显地与观察者用他们的望远镜作出的估价相一致；于是，我们必须得出结论说，我们十分接近于洞察银河系。可是，这能使我们回答另一个问题。我们之所以能够看到

恒星，是因为它们闪闪发光；但是，不可能有暗星在星际空间环行而长期以来人们不知道它们的存在吗？然而，开耳芬勋爵的方法给予我们的是包括暗星在内的恒星总数；因为他的数字与望远镜给予我们的数字可以比较，因此这意味着，不存在暗物质，或者至少没有象明物质那么多的暗物质。

在进一步之前，我们必须从另一个角度观察问题。银河确实如此构成了严格意义所谓的气体图象吗？你知道，克鲁克斯引入了物质的第四态的概念，其中变得太稀薄的气体就不再是真正的气体了，而成为他所谓的辐射物质。考虑一下银河的微小密度，它是气体物质的图象还是辐射物质的图象？被称之为**自由程**的这一思考将向我们提供答案。

气体分子的轨道可以看作是由很小的弧连结起来的直线线段形成的，这些小弧相应于依次的碰撞。这些线段每一个的长度就是所谓的自由程；当然，对于所有的线段而言，这个长度是不同的；但是我们可以取平均值；这就是所谓的**平均自由程**。气体的密度越小，平均自由程越大。如果平均自由程比把气体装于其中的容器的尺度还大，以致于分子有机会不经历碰撞而越过整个容器，那么容器中的物质就是辐射物质；如果情况相反，它就是气体物质。由此可得，同一流体在小容器中可以是辐射物质，而在大容器中可以是气体物质。在克鲁克斯管中，这也许是要使真空完善一些，就必须使管子大一些的原因。

那么，对于银河来说，情况如何呢？这是密度十分微小的气团，但是它的尺度很大；恒星有机会越过它而不经受碰撞，也就是说它有机会充分接近另一个恒星而不明显地偏离它的路线吗？所谓**充分接近**，我们意指什么呢？这必然有一点任意性；把它看作是从太阳到海王星的距离吧，这也许显示出十二度的偏离；因

此，假定我们的每一个恒星都被这一半径的保护球环绕着；直线能够在这些球之间通过吗？按银河系的恒星的平均距离，这些球的半径被认为在大约十分之一秒的角度之下；而我们有十亿个恒星。试把十亿个半径为十分之一秒的小圆放在天球上。这些小圆有机会多次把天球复盖吗？差之甚远；它们将仅仅复盖天球的一万六千分之一。因此，银河不是气体物质的图象，而是克鲁克斯的辐射物质的图象。不过，由于我们以前的结论幸亏并不精确，我们无须明显地修正它们。

但是，还有另一个困难：银河不是球形的，我们迄今进行的推理都把它看作好象是球形的，由于这是在空间孤立的气体能够取的平衡的形式。为了加以修正，存在着其形状是球形的恒星团。迄今我们所说的东西能较好地适用于它。赫谢尔 (Herschel) 曾经努力解释它们的值得注意的现象。他假定星团中的恒星是均匀地分布的，从而星团是均匀球；每一个恒星都描绘出椭圆，它们同时经过所有这些轨道，这样一来，在一个周期结束时，星团再次呈现出它的初始构形，这种构形是稳定的。不幸的是，星团似乎并不是均匀的；我们发现在中心有凝聚作用，即使它是均匀球，我们也应该观察到，由于在中心处比较致密；不过，人们不会着重指出这一点。因此，我们宁可把星团与处于绝热平衡的气体相比拟，这时气体呈现球形，因为这是气体团平衡的图象。

但是，你将说，这些星团比银河小得多，它们甚或构成银河的一部分，尽管它们比较致密，它们相反地却显示出在某种程度上类似于辐射物质；现在，只有通过分子无数的碰撞，气体才能达到它们的绝热平衡。这也许被校准了。设星团中的恒星恰恰具有足够的能量，使它们到达表面时，它们的速度变为零；于是，它们可以毫无碰撞地越过星团；不过在到达表面后，它们将返回，

并重新越过星团，在多次穿越之后，它们最终将由于碰撞而偏离；在这些条件下，我们还会有可以视为气体的物质；如果在星团中偶尔有速度较大的恒星，它们会长期地摆脱星团，它们离开星团，永远也不复返。由于这一切理由，审查一下已知的星团，尝试解释密度定律，看看它是否是气体的绝热定律，也许是有趣的。

不过，回到银河上来吧，银河不是球形的，它反而显得好象一只扁平的圆盘。于是很清楚，以速度为零从表面出发的质量将以不同的速度到达中心，其速度取决于它是从圆盘中部附近的表面出发，还是恰恰从圆盘边缘的表面出发；在后一种情况下，速度可以显著地增大。好了，直到目前，我们假定我们观察到的恒星的固有速度必须与类似的质量可以获得的速度相比较，这包含着某种困难。我们在上面已经给出了银河尺度的值，我们是从观察到的固有速度推导出它的，这一固有速度与地球在它的轨道的速度具有同一数量级；但是，我们如此测量的尺度是那一个呢？它是厚度吗？它是圆盘的半径吗？它无疑是某种中介物；但是，我们此时能够就厚度本身或圆盘半径说些什么呢？要作出计算，尚缺少材料；我将限于看一看把至少是近似的估价建立在比较深入地讨论固有运动的基础上的可能性。

于是，我们发现我们面临着两个假设：或者银河的恒星受速度的推动，其中大部分速度平行于银河平面，不过却均匀地分布在平行于这个平面的所有方向上。如果情况如此，那么固有运动的观察应该表明平行于银河的分量占优势。这一点之所以被确定，是因为我不知道，从这种观点出发以往是否作过系统的讨论。另一方面，这样的平衡仅仅是暂时的，这是由于分子——我指意恒星——在很长的路程中因碰撞而在垂直于银河的方向上获得显

著的速度，并会最终离开银河平面，以致于这个系统趋向于球形，这是孤立气体物质平衡的唯一图象。

要不然，整个系统便受到公共旋转的推动，由于这种理由，它象地球、象木星、象一切快速转动的物体一样，是扁平的。只是因为扁平度很显著，所以旋转必定很急剧；无疑很急剧，但必须在这个词通常使用的意义上来理解。银河的密度比太阳的密度小 10^{25} 倍；旋转速度比太阳小 $\sqrt{10^{25}}$ 倍，因此就扁平而言，它也许与太阳相当；速度比地球速度慢 10^{12} 倍，也就是说每百年三十分之一弧秒，这也许是十分急剧的旋转，要使稳定平衡是可能的，这几乎是过分急剧了。

在这个假设中，可观察的固有运动在我们看来好象是均匀分布的，平行于银河平面的分量不再占优势。关于旋转本身，它们无法告知我们任何东西，由于我们也属于转动系统。假如螺旋状星云是在我们之外的另一个银河系，它们不具有这种旋转，从而我们可以研究它们的固有运动。的确，它们十分遥远；如果一个星云具有银河般大小，如果它的视半径比如是 $20''$ ，它的距离就是银河半径的10,000倍。

不过，这没有什么关系，由于我需从它们得知的信息不是我们系统的平移，而是它的旋转。恒星正是通过它们的表观运动，向我们揭示出地球的周日旋转，尽管它们的距离很大。不幸的是，银河的可能旋转不管相对地讲可能多么急剧，绝对地看来也是很慢的，而且在星云上标点不能十分精确；因此，要获悉任何信息，也许需要观察数千年才行。

无论如何，在第二个假设中，银河系的图象可能是最后平衡的图象。

我不想进一步讨论这两个假设的相对价值，因为还有第三个

也许是更为可能的假设。我们知道，在不可分解的星运中，有几类还是可以区分的：象猎户座星云那样的不规则状星云，行星星云和环状星云，螺旋状星云。人们已确定了前两个家族的光谱，其光谱是不连续的；因此，这些星云不是由恒星形成的；此外，它们在天上的分布似乎与银河有关；它们或者有远离银河的趋向，或者相反，有接近银河的趋向，因此它们成为银河系的一部分。另一方面，螺旋状星云一般被认为与银河无关；人们假定，它们象银河一样，是由大量的恒星形成的，一句话，它们是距我们十分遥远的另外一些银河。斯特拉托诺夫 (Stratonoff) 的最新研究倾向于使我们认为，银河本身也是螺旋状星云，这是我想说的第三个假设。

螺旋状星云太规则了，太稳定了，它决非出自偶然，我们怎样才能解释它呈现出的十分规则的外观呢？首先，要考察这些表现之一，只要看看质量旋转就足够了；我们甚至可以看到旋转的方向是什么；一切螺旋半径都在同一方向弯曲；显然，**运动着的翼状物**落在回转运动的**枢轴**之后，这便决定了旋转方向。但是，这并非一切；显而易见，这些星云不能类比为处于静止的气体，甚至也不能类比为在匀速转动支配下的处于相对平衡的气体；必须把它们与内流在其中占优势的处于永恒运动的气体相比较。

例如，设中心核的旋转是急剧的（你知道，关于这个词我意指什么），由于太急剧，以致建立不起稳定平衡；于是，在赤道，离心力超过引力，从而驱使中心核离散，恒星便趋向于逃逸到赤道，以致形成辐散流；但是，在离开时，由于它们的转矩依然不变，而半径矢量却增长，它们的角速度将减小，这就是运动着的翼状物似乎落后的原因。

从这种观点出发，便不可能有真正的永恒运动，中心核不断

地失去物质，这些物质离开核后永远不会返回，从而中心核会逐渐耗尽。不过，我们可以修正这个假设。恒星丧失速度，与它逃逸成正比，从而最终会停下来；在这个时刻，引力重新恢复了对它的所有权，导致它返回中心核；于是将存在向心流。如果我们采用在战斗中实施前沿调换的军队作比喻，便可以假定向心流是第一梯队，离心流是第二梯队；事实上，复合离心力必定会被星云中心层施加在外层上的引力补偿。

此外，在某一时间末，可建立一种永恒状态；星团受到弯曲，运动着的翼状物施加在回转枢轴上的引力有助于使回转运动减慢；枢轴施加在运动翼上的引力有助于使这个翼加速，这不再增大它的滞后了，以致于最后所有半径都以匀速旋转。我们还可以假定，中心核旋转得比半径快。

问题依然存在：为什么这些向心的和离心的星团倾向于在半径浓缩，而一点也不向各处发散呢？为什么这些射线规则地分布呢？如果星团浓缩，那正是因为已经存在的星团对在它们附近的、从核逃离出去的恒星施加了引力。在产生了不均衡后，它有助于在这个方面增进它自身。

为什么辐射线本身规则地分布呢？这一点并不明显。设不存在旋转，所有恒星都在互成直角的平面上，它们的分布方式关于这两个平面为对称。

由于对称性，它们没有理由逃离这个平面，它们的对称性也不会改变。因此，这种构形可以给我们以平衡，但**这是不稳平衡**。

相反地，如果存在着旋转，我们将发现与四条弯曲的射线类似的平衡构形，这些射线彼此相等，且以 90° 相交，如果旋转足够急剧，这种平衡便是稳定的。

我不想使之更为精确：即使你看到这些螺旋形也许可以在某

一天仅仅用万有引力定律和统计考虑来解释，统计考虑使我们想起气体理论的见解。

所讲过的内流表明，系统地讨论一下整个固有运动是有趣的；这要用一百年才可能完成，这时第二版的天体图才出版，才能与第一版进行比较，我们现在正在做这项工作。

不过，在结论中，我希望你注意一个问题，这就是银河或星云的年龄问题。如果我们所想所见的东西有效，我们便能够得到关于年龄的看法。气体给予我们统计平衡的模型，这种统计平衡只是由于大量的碰撞才建立起来。如果碰撞很稀少，那么统计平衡只有在很长时间之后才能出现；如果银河（或者至少是包括在银河内的星团）以及星云真正达到这一平衡，那么这便意味着，它们十分古老，我们将有它们年龄的下限。同样地，我们应该有它们年龄的上限；这一平衡不是最终的，它不能一直持续下去。我们的螺旋状星云可与被永恒运动所激励的气体相比较；但是，运动的气体是粘滞的，它们的速度最终会逐渐消逝。就螺旋状星云而言，对应于粘滞性（这取决于分子的机遇）的量极其微小，以致于现有状态可以存留很长时间，但并不会永远持续下去，因此我们的银河系不能永世长存，它的寿命不是无限的。

这并非一切。考虑一下我们的大气：在表面，无穷小的温度必定处于支配地位，分子的速度接近于零。但是，这仅仅是平均速度的问题；作为碰撞的结果，这些分子之一可以获得（实际上，的确如此）巨大的速度，于是它将冲出大气，一旦冲出去了，它便永不复返；因此，我们的大气便这样极其缓慢地枯竭。由于同一机制，银河也不时地失去恒星，它的持续时间同样有限。

好啦，可以肯定，如果我们按这种方式计算银河的年龄，我们将会得到巨大的数字。但是，在这里出现了困难。某些物理学

家依据其他考虑推断，太阳只能存在短暂的时间，大约是五千万年；我们的最小值比这大得多。我们必须相信银河的演化开始于物质还是暗的时候吗？但是，由暗物质构成的恒星如何同时都达到持续时间如此之短的成熟期呢？或者，它们必须相继达到成熟期，而与已经熄灭的恒星或将在某一天发亮的恒星相比，我们看到的恒星仅是极微小的一部分吗？但是，根据缺乏暗物质的显著的比例，这怎么与我们上面所说的一致呢？我们应该抛弃两个假设之一吗，而且应该抛弃哪一个呢？我仅限于指出困难，没有自命去解决它；因此，我将用大疑点来作结。然而，提出问题也是饶有兴味的，即使解决它们的日期似乎还十分遥远。

第二章 法国的大地测量学

每一个人都理解，我们对于了解地球的形状和大小感兴趣；不过，有些人也许会为追求精确性而惊奇。这是无用的奢侈品吗？大地测量学家花费这么多的精力有什么用处呢？

倘若把这个问题提交国会议员，我想他们会说：“我不得不认为，大地测量学是最有用的科学之一；因为它是使我们耗费巨资的科学之一。”我将力图稍为精确地给你作出回答。

长期研究可以免除大量的摸索、错误的计算和无用的开支，没有长期的研究，就无法着手从事巨大的技术工程、和平工程以及战争工程。这些研究只能以良好的地图为基础。但是，如果不以坚实的框架为基础来绘图，地图将不过是毫无价值的离奇图案。这就象要使没有骨骼的人体站立起来一样。

现在，大地测量给了我们这个框架；因此，没有大地测量学，就没有良好的地图；没有良好的地图，就没有巨大的公共工程。

毫无疑问，这些理由将足以为许多花费辩护；不过，这不是实际工作者的论据。在这里，不坚持这些理由是合适的；全面地考虑一下，还有其他程度更高、更重要的理由。

于是，我们将提出另一个问题：大地测量学能够更好地帮助我们了解自然吗？它会使我们理解它的统一与和谐吗？实际上，孤立的事实只有微小的价值，只有当它们为新征服作准备时，科学的征服才是宝贵的。

因此，如果在地球的椭球面上发现一个小丘，这一发现本身

并没有很大意义。另一方面，如果在寻找这种隆起的原因时我们希望洞察新的秘密，那么它就变得宝贵了。

好啦，在十八世纪，当莫培督（Maupertuis）和拉孔达明（La Coudamine）冒着这样一种违背社会潮流的危险时，这不仅仅是为了了解我们行星的形状，这是整个世界体系的问题。

如果地球是扁平的，那么牛顿便获得胜利，万有引力学说和整个现代天体力学也随他一起获胜。

今天，在牛顿派胜利之后一个半世纪，你认为大地测量学没有什么要告诉我们的了吗？

我们不知道在我们地球内有什么。矿井和钻孔使我们知道1千米或2千米厚度的地层，也就是说，知道地球总质量的百万分之一；但是，下面的情况如何呢？

在朱尔·凡尔纳（Jules Verne）所幻想的奇异旅行中，也许到地心去旅行能使我们进入最无人探测的区域。

不过，尽管我们不能够到达这些深埋的岩石，它们施加在摆上的引力却从远处起作用，并使地球的椭球形状发生变形。因此，大地测量学能够从远处探查它们，也就是说，能够告诉我们它们的分布。这样一来，它将使我们实际上洞察那些神秘的区域，朱尔·凡尔纳只不过是通過想象向我们描绘了那些区域。

这不是空洞的幻想。法耶（Faye）先生比较了一切测量，得到一个经过完善计算的、使我们惊异的结果。在海洋的深处，有密度很大的岩石；相反的，在大陆下，却是空的空间。

新的观察材料也许将修正这些结论的细节。

无论如何，我们尊敬的老前辈已经告诉我们应该在那里探索，而且还告诉我们，大地测量学家向渴望了解地球内部组成的地质学家教了些什么，甚至向希望思索这个行星的过去和起源的

思想家教了些什么。

现在要问，我为什么要给本章冠以**法国的大地测量学**的题目呢？这是因为，在每一个国家，这门科学比其他科学具有更多的民族特征。其原因是显而易见的。

必须要有竞争。科学竞争总是有礼貌的，或者至少几乎总是有礼貌的，无论如何，竞争是必不可少的，因为竞争总是富有成果的。

好啦，在那些要求长期努力和众人协作的事业中，个人是不被人注意的，当然这是不自主的；没有一个人有权利说：这是我的成果。因此，竞争不是在人与人之间，而是在发生竞争的民族与民族之间。

这样一来，我们便有可能寻找法国所作的贡献。我自信，我们有权利为她所作出的贡献而自豪。

十八世纪初，在牛顿派和卡西尼（Cassini）之间发生了长期的争论；牛顿派认为地球是扁平的，这是万有引力理论所要求的；卡西尼受到不精确的测量的蒙骗，认为地球是伸长的。只有直接观察才能解决这个问题。正是我们的科学院，着手进行这一项对那个时代来说是庞大的任务。

当时，莫培督和克罗莱特（Clairaut）测量了北极圈的子午度，布居埃（Bouguer）和拉孔达明前往安第斯山，该地区当时是西班牙属地，今天是厄瓜多尔共和国。

我们的使者经受了千辛万苦。当时的旅行并不象今天那么容易。

确实，莫培督进行工作的国家并非不毛之地，据说，在拉普兰人中间，他甚至享受到真正的北极航海探险者从来也不知道的甜美的心灵满足。在今天，差不多正是这个地区，舒适的轮船每年夏季都运载许多游客和年轻的英国人到那里观光。但是在当

时，库克（Cook）旅行社还未成立，莫培督实际认为，他完成了一项北极探险事业。

也许他并不是完全错了。今天，俄国人和瑞典人也在斯匹次卑尔根群岛进行类似的测量，这是一个真正的冰帽复盖的地区。不过，他们有截然不同的办法，而且时间差弥补了纬度差。

在被阿卡基阿（Akakia）医生的魔爪抓伤后，莫培督的名字才大大地影响了我们；这位科学家不幸惹怒了伏尔泰（Voltaire），他当时是精神之王。莫培督先是被过度地颂扬；不过，这正如君主给某人的褒赏越多，某人就越担心君主的不满，因为以后的日子是令人可怖的。伏尔泰本人多少知道这一点。

伏尔泰把莫培督称为我的和蔼可亲的思想大师，北极圈的侯爵，把世界和卡西尼碾平的亲爱的压延机，甚至极度地奉承莫培督是伊萨克·莫培督爵士（Sir Isac Maupertuis）；他致函莫培督说：

“只有普鲁士国王可与你相提并论；只不过他不是几何学家。”然而不久，伏尔泰便翻脸不认人，不再把莫培督奉若神明了，尽管在往昔伏尔泰把他视为亚尔古英雄*或者说什么从奥林匹斯山**祈求到的众神商议会期待他的工作，但是后来却扬言要把他拘禁到疯人院。伏尔泰不再谈他的卓越思想了，反而指责他骄横，认为他的工作不过是用很少一点科学镀了一下外表，其实充满了荒谬绝伦之处。

我不想仔细地讲述这些滑稽可笑的英雄的争论；不过，请允许我思索一下伏尔泰的两行诗句。在他的“适度论”（不是在颂扬和

* 亚尔古英雄（Argonaut），或译阿耳戈英雄，是希腊神话中随伊阿宋到海外觅取金羊毛的英雄。——译者注

** 奥林匹斯山（Olympus），在希腊境内。在希腊神话中，它是诸神的住所，后借喻天堂、天国。——译者注

批评中的适度的问题)中,诗人写道:

您在阴郁的地区证实了

牛顿没有出国就觉察到的东西。

这两行诗(它们代替了起初的夸大其辞的颂扬)是十分不公正的,伏尔泰无疑是太有见识了,他不至于不知道这一点。

当时,这些发现仅仅被认为不离开人们的住所就能够完成。

今天,确切的讲,它是一种理论,人们也许认为它的价值不大。

这是误解了科学的目的。

自然界是受随意支配的呢,还是存在着和谐的法则?这是个问题。只有当科学向我们揭示出这种和谐时,科学才是美的,才值得人们去培育。但是,如果不从理论与实验符合出发,我们能够从何处揭示这种和谐呢?因此,探求这种符合存在与否,这正是我们的目的。从而,我们必须把理论与实验这两个术语加以比较,它们二者都是必不可少的。舍其一而取其二是愚蠢的举动。脱离实验的理论是空洞的理论,脱离理论的实验是盲目的实验;使二者分离,每一个都会无用,都没有什么好处。

因此,莫培督应该得到他的一份荣誉。的确,莫培督的荣誉不能与具有非凡才智的牛顿的荣誉相比;甚至也无法与他的合作者克莱罗特的荣誉相比。可是,不要轻视,因为他的工作是必要的,在十七世纪,英国胜过法国,如果说法国在十八世纪完全洗刷了她的耻辱,这不仅归功于克莱罗特、达朗伯(d'Alembert)、拉普拉斯的创造能力;而且也归功于莫培督和拉孔达明的长期艰苦奋斗。

我们达到了可以称之为大地测量学的第二个英雄时期。法国

国内分裂了。全欧洲都出兵反对她；大规模的战斗似乎转移了她的所有精力。与此不同；她还有力量为科学服务。当时的人们在事业面前并没有畏葸不前，他们是充满信心的人。

德朗布勒（Delambre）和梅谢恩（Méchain）受命去测量从敦刻尔克到巴塞罗那的弧线。这时，已无法去拉普兰或秘鲁；敌军封锁了我们去那里的道路。虽然考察队要去的地方并不遥远，但是这个值得纪念的事件还是备受艰难，障碍甚至危险还是如此之大。

在法国，德朗布勒与多疑的市政当局的敌意作斗争。人们知道，尖塔可以从远处看到，并且能够精确地瞄准，它们常被用来作为大地测量学家的标志点。但是，在德朗布勒经过的地区已没有任何尖塔了。某位地方行政长官经过那里时，夸口要把在下层人士居住的低矮屋顶上耸起的尖塔统统拆除。于是，不得不用木板建造尖塔，并用白布复盖，以便使尖塔更显眼。这完全是另一码事：用白布！在新近解放的山巅上，竟敢升起反革命的可恶旗帜，这个轻举妄动的人是什么东西？必须用兰带和红带镶在白布的边上。

梅谢恩在西班牙进行测量，他的困难是另一些困难；不过困难也不少。西班牙农民是敌对的。此处并不缺少教堂的尖塔：但是，在它们上面安放神秘的、也许有点恶魔似的仪器，这不是亵渎圣物吗？法国革命家曾是西班牙的同盟者，但是同盟者却嗅出了一点利害关系。

梅谢恩写道：“他们不停地恐吓要杀死我们。”所幸的是，多亏僧侣的告诫和主教的许可证，这些凶恶的西班牙人仅满足于恐吓。

若干年后，梅谢恩又到西班牙进行第二次考察：他提出把子午线由巴塞罗那延长到巴利阿里克斯。这是首次通过观察设置在遥

远岛屿的高山上的标志，尝试把三角测量越过大海湾。这项事业经过周密的构想和妥善的准备；然而它还是失败了。

这位法国科学家遇到了各种困难，他在通信中痛苦地抱怨这些困难。他也许有些夸大似地写道：“地狱啊，地狱和从地球上涌出的一切灾祸，诸如骚动、战争、瘟疫和阴谋诡计，统统都跑出来进攻我！”

事实是，他发现他的合作者自恃固执有余，健全意志不足，成干个偶然事件妨碍了他的工作。瘟疫倒没有什么，畏惧瘟疫的心理却更为可怕；所有这些岛屿都防范附近的岛屿，唯恐它们受到邻岛的感染。只是在好多星期之后，在用醋把他的纸张涂过的情况下，梅谢恩才获准登陆；这是当时的抗菌法。

他呕吐、患病，刚要请求召回，他却去世了。

阿拉哥（Arago）和毕奥（Biot）荣幸地承接了这项未竟之事业，继续去完成它。

多亏西班牙政府的支持和几个主教发给的护照，尤其是由于一位威名四扬的土匪头子的保护，行动计划迅速地进展着。各项工作相继完成了，当风暴突然发作时，毕奥已返回法国。

正在这时，整个西班牙为捍卫她的独立，而与法国兵戈相见。为什么这个陌生人爬到山上设立标志呢？显然是为法国军队传递信号。阿拉哥虽然能够逃脱老百姓的眼睛，但最终还是变成了囚犯。在狱中，他唯一的消遣就是读报，他在西班牙报纸看到他自己被处死刑的消息。当时的报纸有时过早地发布新闻。他获悉，他象基督徒一样，是英勇地死去的，他从中至少得到了安慰。

甚至监狱也不安全了；他不得不越狱逃跑，到达阿尔及尔。在那里，他搭乘阿尔及尔的船至马赛。这只船被西班牙海盗夺

走，眼看着阿拉哥被押解回西班牙，从一个土牢拖到另一个土牢，他生活在歹徒中间，受尽了最骇人听闻的折磨。

假如船上只有他的臣民和旅客，奥斯曼帝国在北非的官员也不会说什么。但是，船上却有两头狮子，这是非洲君主呈献给拿破仑(Napoleon)的礼品。于是，这位北非官员以战争相威胁。

船和囚犯都获释了。他们理应顺利地到达，因为船上有天文学家；但是，这位天文学家晕船，而阿尔及尔海员想去马赛，结果却抵达布日伊。阿拉哥由此到阿尔及尔，再步行到卡比利亚，途中历尽艰难险阻。他被长期阻留在非洲，随时都有成为囚犯的危险。最后，他终于回到了法国；他把他的观察资料藏在衬衣底下保护起来，更值得注意的是他的仪器，这些东西经过那么多骇人的冒险都没有受损伤。

到这一时刻，法国不仅占据了最重要的地位，而且她几乎是唯一地登上了大地测量学舞台的国家。

在随后的若干年内，法国依然很活跃，我们参谋部的地图就是典范。可是，新的观察方法和计算方法尤其从德国和英国传给我们。只是在最近四十年，法国才恢复了她的地位。

她应该把这归功于经过严格训练的军官佩里埃(Perrier)将军，他到达西班牙和非洲的接界处，成功地完成了这项真正具有冒险性的事业。他在地中海两岸的四个制高点上设置了观测站。他们花了好几个月时间等待天朗气清的好天气。终于看到了从300公里外海的那一边传来的一点光线。事业成功了。

今天，人们设想出更为大胆的方案。从尼斯附近的高山将向科西嘉岛发出光信号，现在不是为了大地测量学的测定，而是为了测量光速。距离只有200公里；不过，使光线通过这一路程，借助设置在科西嘉岛上的镜面反射后返回尼斯。光线在途中不应

离开正道，以便它必须严格地回到出发点。

从那时以来，法国大地测量学的积极性从来也没有松懈。我们没有更多的这样的令人惊讶的冒险可讲了；但是所完成的科学工作却是巨大的。法国海外的版图象母国的领土一样，被精确测量的三角形复盖。

我们变得越来越严格了，我们的前辈称赞的东西今天不再使我们满意了。但是，随着我们追求更高的精确性，困难也大大增加了；我们周围布满了陷阱，我们必须警惕许多预料不到的误差原因。因此，需要创造愈来愈精密的仪器。

在这里，法国再次没有让人家把她远远甩在后面。人们对我们的基点测量装置和角度测量器械赞口不绝，我也可以提一下德福尔热(Defforges)上校的摆，它能使我们以前所未闻的精确性测定重力。

法国大地测量学的未来目前掌握在军队地理服务机构的手中，该机构先后由巴索特(Bassot)将军和贝托特(Berthaut)将军指挥。要使大地测量成功，光有科学才能是不够的；还必须在各种气候条件下能够吃苦耐劳；首领必须能够赢得他的合作者的尊敬，并能使土著帮工服从他的指挥。这些都是军事素质。此外，人们知道，在我们的军队中，科学与勇气总是并肩前进。

我还要说一点，军事组织保证了必需的行动一致。科学家唯恐失去他们的独立性，他们过份看重他们的名声，他们虽然相距十分遥远，可是还必须步调一致，这就更难使他们同心协力地进行工作。在以前的大地测量学家中间，常常发生争执，一些争执还长时间地引起回响。科学院长期回荡着布居埃和拉孔达明的争吵。我并不意味着说士兵们没有那种欲望，而是纪律限制了他们敏感的自负。

几个外国政府要求我们的服务机构组织他们的大地测量业务：这证明法国的科学影响在国外并没有衰落。

我们的水文工程师作为光荣的分遣部队也对公共成就作出了贡献。我们海岸线的测量，我们殖民地区域的测量，潮汐的研究，都向他们提供了广泛的研究领域。最后，我可以提一下法国的一般测量水准，这是用拉拉芒德（Lallamand）先生的巧妙而精密的方法进行的。

有这样的人，我们对未来充满信心。而且，他们的工作有的是；我们的殖民地帝国向他们开辟了探索的庞大的地盘。这并非一切：国际大地测量学协会已经认识到重新测量基多弧的必要性，以前拉孔达明曾确定过它。正是法国，承担了这项工作；她有充分的权利完成它，因为可以说我们的祖辈曾对科迪勒拉山进行了科学的征服。此外，这些权利是毫无争议的，我们的政府已着手训练他们。

莫兰（Maurain）上尉和拉科姆伯（Lacombe）上尉结束了首次勘测，他们完成外交使命，穿越最艰险的地区，登上最陡峭的山峰，其速度之神速值得称赞。这赢得了厄瓜多尔总统阿尔法罗（Alfaro）将军的赞誉，他称他们是“铁人”。

于是，最后的远征在布尔热瓦斯（Bourgeois）中校（当时是少校）指挥下出发。获得的结果证实了所怀的希望。但是，我们的工作人员遇到了未曾料到的气候方面的困难。他们每一个人被迫不止一次地在4,000米的高处停留几个月，由于云层密布、风雪交加，他看不见他对准的信号，这些信号无法暴露在他的眼前。但是，由于他们坚忍不拔、勇气十足，从中所得到的结果只是推迟了，也增加了经费开支，测量的精度并没有因此而受到影响。

总 论

在前面，我试图解释，科学家在向他的好奇心所提供的无数事实中间进行选择时，他应该如何指导自己，因为实际上，他的思想的自然局限迫使他不得不作出选择，尽管选择总是一种牺牲。我首先通过普遍的考虑详述了它，同时一方面回顾了所要解决的问题的本性，另一方面尝试比较充分地理解作为解决问题基本工具的人类精神的本性。然后，我用例子来解释它；我不去无限地堆积例子；我也必须作选择，我自然选择我研究得最多的问题。其他人无疑作不同的选择；但是，不管差别如何，因为我相信，他们会达到同样的结论。

事实是有等级的：一些事实没有什么影响；它们告诉我们的无非是它们自己。审查它们的科学家只不过是得知了一个事实，它们不能更多地预见新的事实。这样的事实仅出现一次，它们似乎注定不会复现。

另一方面，也有多产的事实；它们中的每一个都告诉我们新定律。由于必须作出选择，科学家应该专注的正是这些事实。

毋庸置疑，这种分类是相对的，它与我们精神的软弱有关。成果微小的事实是复杂的事实，各种各样的情况都能对它们施加可觉察的影响，情况不可胜数而且形形色色，我们无法完全辨别它们。但是，我应该更为恰当地说，这些就是我们认为的复杂的事实，由于这些情况的错综复杂超过了我们精神的理解范围。毫无疑问，比我们精神更庞大、更精细的精神也许能够看出它们的

差异。但是，不要紧，我们不能使用高级的精神，而只能使用我们自己的精神。

成果巨大的事实是我们认为简单的事实；也许它们实际上是简单的，因为它们仅仅受到少数完全确定的情况的影响，也许它们仅仅呈现出简单的外观，因为与它们有关的各种情况服从偶然性规律，以致最终达到相互补偿。这是最为经常发生的事。于是，我们不得不比较仔细地审查一下偶然性是什么。

我们看到偶然性定律适用的事实变得容易接近科学家，在这些定律不适用的问题的异常复杂性面前，科学家便丧失了信心。我们看到，这些考虑不仅适用于物理科学，而且也适用于数学科学。对于物理学家和数学家来说，证明方法是不同的。但是，发明方法却是十分类似的。在两种情况下，其方法在于从事实过渡到定律以及寻找能够导致定律的事实。

为了阐明这一点，我已表明正在起作用的数学家的精神，它在下述三种形式指导下：数学发明家和创造者的精神；无意识的几何学家的精神，在我们久远的祖先之中，在我们朦胧不清的幼童时代，这种精神已为我们构造出本能的空间概念；青少年的精神，中学教师向他们揭示了头批科学原理，试图对根本的定义作出理解。我们处处可以看到直觉的作用和推广的作用，没有它们，数学家的这三个进展阶段——如果我可以这样表达我的意思的话——也许同样是软弱无力的。

在证明本身之中，逻辑并非一切；正确的数学推理是真正的归纳，它在许多方面不同于物理学的归纳，但在从特殊到一般这一点上却与之相似。要把这种程序颠倒，要把数学归纳法化归为逻辑法则，为此所作的一切努力其结果只能失败，由于使用外行人无法接受的语言而把错误隐藏起来了。

我曾经举过物理学中的一些例子，它们向我们显示了成果巨大的事实的不同情况。考夫曼关于镭射线的实验同时引起了力学、光学和天文学的革命。这是为什么呢？因为随着这些科学的发展，我们越充分地辨认出联接它们的结合物，从而我们觉察到全体科学总图象的形式。存在着对几门科学来说是共同的事实，它们似乎是在各个方向分叉的溪流的源泉，可以把它们比之为圣戈塔尔德的小山，泉水从这里流到四个不同的溪谷。

因此，我们能够比我们的前辈以更深邃的洞察力选择事实，先辈们把这些溪谷看作是截然不同的，是由不可逾越的屏障隔开的。

我们必须选择的总是简单的事实，但是在这些简单的事实中，我们必须偏爱坐落在圣戈塔尔德小山之上的那种事实，我刚才说过这座小山。

当科学没有直接的结合物时，它们还可以通过类比相互说明。当我们研究了气体所服从的规律时，我们知道我们抓住了一个成果巨大的事实；可是，我们还是低估了这个成果的价值，由于从某种观点来看，气体是银河的图象，仅仅对物理学家来说似乎有趣的那些事实，不久以后会向天文学打开根本预料不到的视野。

最后，当大地测量学家看到，必须把他的望远镜移动数弧秒，才能看到他千辛万苦地设立起来的信号标志，这是一个微不足道的事实；不过，这却是一个成果巨大的事实，这不仅是因为它向大地测量学家揭示出在地球上存在着一个小的隆起部分——这个小丘本身也没有过大的兴趣，而且因为这一隆起给他以物质在地球内部分布的信息，通过这个信息我们便可以推知我们行星的过去、它的未来和它的发展规律。