

## 第 2 版前言

本书是单辉祖主编《材料力学教程》的第 2 版。是根据高等工业院校《材料力学教学基本要求》修订而成。可作为一般高等工业院校中、少学时类材料力学课程的教材,也可作为多学时类材料力学课程基本部分的教材,还可供有关工程技术人员参考。

本书包括绪论、轴向拉伸与压缩、扭转、梁的内力、梁的应力、梁的变形、应力状态分析与强度理论、组合变形、压杆稳定问题、疲劳强度问题、能量法及材料力学性能的进一步研究等十二章。其中带有 \* 号的章节与用小字排印的部分为选学内容。为便于学习,每章后均附有复习题和习题,并在附录中给出了答案。

本书第 1 版于 1982 年 2 月出版,自出版以来,先后印刷 16 次,发行近 50 万册,受到广大教师与学生的普遍欢迎,并于 1986 年获国家教委首届优秀教材一等奖。第 2 版除仍保持原教材的特点外,在论述、表达、内容更新与应用等方面,又有明显提高。进一步加强了基本理论与基本概念的论述,增加了复合材料的拉伸力学性能、计算梁位移的麦考利法、温度与应变速率对材料力学性能的影响等内容,同时,为便于教学,将原书的第十一章线弹性断裂力学简介,改成为含裂纹体的断裂与材料的断裂韧度,即由一章缩减为一节。此外,为了加深学生对基本概念与基本公式的认识与理解,提高分析与解决问题的能力,在第 2 版中还增加了大量的例题与习题。

本书仍由单辉祖任主编,方汝溶、杨乃文、吴鹤华与郭明洁等参加了部分修订工作。

本书虽经修订,但疏漏与欠妥之处仍感难免,希望使用本书的教师和读者批评指正。

编者

## 第1版前言

本书是根据高等工业院校《材料力学教学大纲》(90学时类)编写的。可以作为中央电视大学材料力学课程的教材,也可作为一般高等院校中、少学时类材料力学课程的教材。

本书包括绪论、轴向拉伸与压缩、扭转、梁的内力、梁的应力、梁的变形、应力状态理论与强度理论、组合变形杆件的强度计算、压杆稳定问题、疲劳强度问题、线弹性断裂力学简介及能量法等十二章。其中第十二章和其它章节中带有\*号的部分和用小字排印的部分为选学内容。为便于学习,每章后均附有复习题和习题,全部习题均给出答案。

参加本书编写和讨论的有阮孟光、高镇同、施振东、潘孝禄、张行、吴鹤华和单辉祖。本书由单辉祖主编,阮孟光、施振东审阅。本书习题的答案由韩耀新、崔德瑜、顾志芬和罗又华完成,李维伯审校。在编写过程中,还得到北京航空学院材料力学教研室很多同志的支持和帮助,谨此致谢。

由于教学急需,编写时间短促,在本书的编写中,参考了北航等三院校合编的《材料力学》\*的部分内容。限于编者水平,书中可能存在不少缺点和欠妥之处,希望广大教师和读者批评指正。

编者

---

\* 该书由北京航空学院、西北工业大学、南京航空学院合编,单辉祖主编,国防工业出版社出版。

## 目 录

<b>第一章 绪论</b> .....	(1)
§ 1-1 材料力学的任务 .....	(1)
§ 1-2 材料力学的基本假设 .....	(3)
§ 1-3 杆件变形的基本形式 .....	(4)
复习题 .....	(6)
<b>第二章 轴向拉伸与压缩</b> .....	(7)
§ 2-1 引言 .....	(7)
§ 2-2 内力概念与拉(压)杆的内力 .....	(8)
§ 2-3 应力概念与拉(压)杆横截面上的应力 .....	(12)
§ 2-4 拉(压)杆斜截面上的应力 .....	(16)
§ 2-5 材料在拉伸与压缩时的力学性能 .....	(19)
§ 2-6 许用应力与强度条件 .....	(28)
§ 2-7 虎克定律与拉(压)杆的变形 .....	(33)
§ 2-8 简单拉、压静不定问题 .....	(40)
§ 2-9 连接部分的强度计算 .....	(47)
复习题 .....	(55)
习题 .....	(57)
<b>第三章 扭转</b> .....	(72)
§ 3-1 引言 .....	(72)
§ 3-2 扭力矩与扭矩 .....	(73)
§ 3-3 剪应力互等定理与剪切虎克定律 .....	(76)
§ 3-4 圆轴扭转横截面上的应力 .....	(80)
§ 3-5 极惯性矩与抗扭截面模量 .....	(84)
§ 3-6 圆轴扭转斜截面上的应力 .....	(87)

§ 3-7	圆轴扭转破坏与强度条件 .....	(89)
§ 3-8	圆轴扭转变形与刚度条件 .....	(93)
§ 3-9	简单静不定轴 .....	(97)
* § 3-10	矩形截面轴的扭转应力与变形 .....	(99)
* § 3-11	密圈螺旋弹簧的应力与变形 .....	(103)
	复习题 .....	(107)
	习题 .....	(108)
<b>第四章</b>	<b>剪力与弯矩</b> .....	<b>(117)</b>
§ 4-1	引言 .....	(117)
§ 4-2	梁的载荷与支反力 .....	(118)
§ 4-3	剪力与弯矩 .....	(121)
§ 4-4	剪力、弯矩方程与剪力、弯矩图 .....	(124)
§ 4-5	剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系 .....	(131)
* § 4-6	非均布载荷梁的剪力与弯矩 .....	(136)
	复习题 .....	(139)
	习题 .....	(140)
<b>第五章</b>	<b>梁的应力</b> .....	<b>(145)</b>
§ 5-1	引言 .....	(145)
§ 5-2	对称弯曲正应力 .....	(145)
§ 5-3	惯性矩与移轴公式 .....	(151)
§ 5-4	对称弯曲剪应力 .....	(157)
§ 5-5	梁的强度条件 .....	(165)
§ 5-6	提高梁强度的主要措施 .....	(171)
* § 5-7	非对称弯曲正应力 .....	(176)
	复习题 .....	(182)
	习题 .....	(183)
<b>第六章</b>	<b>梁的变形</b> .....	<b>(195)</b>
§ 6-1	引言 .....	(195)
§ 6-2	挠曲轴近似微分方程 .....	(196)
§ 6-3	计算梁位移的积分法 .....	(198)

§ 6-4	计算梁位移的麦考利法	(205)
§ 6-5	计算梁位移的叠加法	(212)
§ 6-6	简单静不定梁	(216)
§ 6-7	提高弯曲刚度的主要措施	(223)
	复习题	(224)
	习题	(225)
<b>第七章</b>	<b>应力状态分析与强度理论</b>	<b>(235)</b>
§ 7-1	引言	(235)
§ 7-2	平面应力状态应力分析	(237)
§ 7-3	应力圆	(239)
§ 7-4	极值应力与主应力	(243)
§ 7-5	三向应力状态的最大应力	(246)
§ 7-6	广义虎克定律	(249)
§ 7-7	关于断裂的强度理论	(251)
§ 7-8	关于屈服的强度理论	(255)
§ 7-9	薄壁圆筒的强度计算	(260)
	复习题	(263)
	习题	(264)
<b>第八章</b>	<b>组合变形</b>	<b>(271)</b>
§ 8-1	引言	(271)
§ 8-2	弯拉(压)组合强度计算	(272)
§ 8-3	偏心压缩(拉伸)强度计算	(275)
§ 8-4	弯扭组合与弯拉(压)扭组合的强度计算	(278)
	复习题	(285)
	习题	(285)
<b>第九章</b>	<b>压杆稳定问题</b>	<b>(294)</b>
§ 9-1	稳定性概念	(294)
§ 9-2	临界载荷的欧拉公式	(296)
§ 9-3	中柔度杆的临界应力	(300)
§ 9-4	压杆的稳定条件	(306)



复习题 .....	(311)
习题 .....	(312)
<b>第十章 疲劳强度问题 .....</b>	<b>(320)</b>
§ 10-1 引言 .....	(320)
§ 10-2 交变应力及其类型 .....	(321)
§ 10-3 $S-N$ 曲线和材料的疲劳极限 .....	(323)
§ 10-4 影响构件疲劳极限的主要因素 .....	(325)
§ 10-5 构件的疲劳强度计算 .....	(332)
复习题 .....	(340)
习题 .....	(340)
<b>第十一章 能量法 .....</b>	<b>(344)</b>
§ 11-1 引言 .....	(344)
§ 11-2 外力功与应变能计算 .....	(344)
§ 11-3 单位载荷法 .....	(351)
§ 11-4 静不定问题分析 .....	(359)
§ 11-5 冲击载荷与冲击应力 .....	(363)
复习题 .....	(369)
习题 .....	(369)
<b>第十二章 材料力学性能的进一步研究 .....</b>	<b>(378)</b>
§ 12-1 引言 .....	(378)
§ 12-2 温度对材料力学性能的影响 .....	(378)
§ 12-3 应变速率对材料力学性能的影响 .....	(379)
§ 12-4 含裂纹体的断裂与材料的断裂韧度 .....	(381)
复习题 .....	(385)
<b>附录 .....</b>	<b>(386)</b>
附录一 截面的几何性质 .....	(386)
附录二 梁的挠度与转角 .....	(389)
附录三 型钢规格表 .....	(392)
附录四 中英名词对照 .....	(408)
附录五 习题答案 .....	(416)

# 第一章 绪 论

## § 1-1 材料力学的任务

在工程实际中,各种机械与结构得到广泛应用。组成机械与结构的零、构件,统称为**构件**。当机械与结构工作时,构件受到外力作用,同时,其尺寸与形状亦发生变化。构件尺寸与形状的变化称为**变形**。

实践表明:作用力愈大,构件的变形亦愈大;而当作用力过大时,构件则将发生破坏。显然,构件工作时发生意外破坏是不容许的。对于许多构件,工作时产生过大变形一般也是不容许的。例如,如果齿轮轴的变形过大(图 1-1),势必影响齿间的正常啮合。

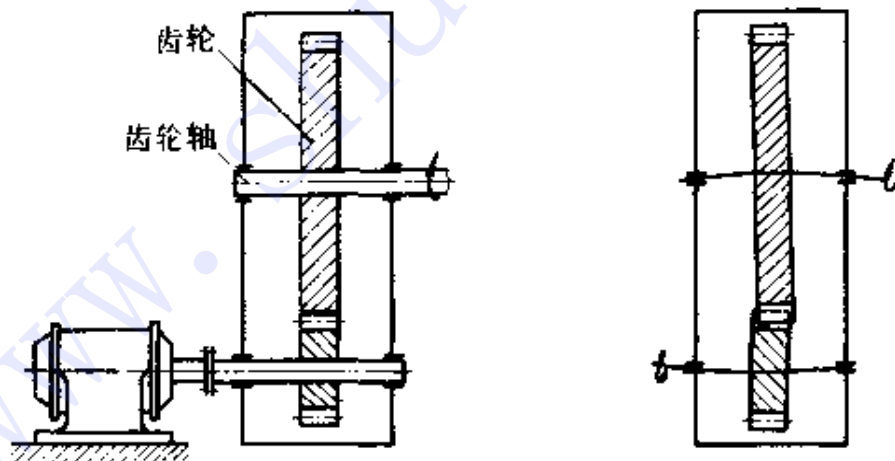


图 1-1

实践中还发现,有些构件在某种外力作用下,将发生不能保持其原有平衡形式的现象。例如轴向受压的细长杆件(图 1-2),当所加压力达到或超过一定数值时,杆件将从直线形状突然变弯,而且往往是显著的弯曲变形。在一定外力作用下,构件发生不能保持其

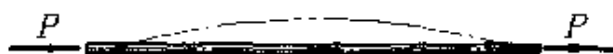


图 1-2

原有平衡形式的现象,称为**失稳**。显然,构件工作时产生失稳一般也是不容许的。例如图 1-3 所示桁架,在外力作用下杆 2 轴向受压,如果该杆失稳,桁架将不能正常工作。

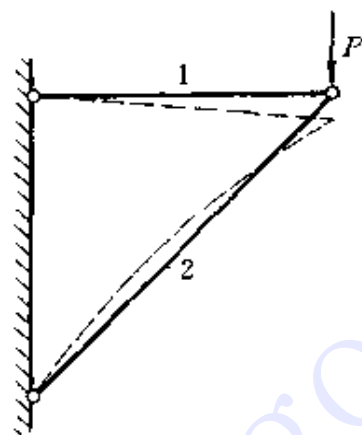


图 1-3

针对上述情况,对构件设计提出如下要求:

1. 构件应具备足够的**强度**(即抵抗破坏的能力),以保证在规定的使用条件下不发生破坏;
2. 构件应具备足够的**刚度**(即抵抗变形的能力),以保证在规定的使用条件下不产生过分的变形;
3. 构件应具备足够的**稳定性**(即保持原有平衡形式的能力),以保证在规定的使用条件下不产生失稳现象。

以上三项是保证构件安全工作的基本要求。一般而言,为构件选用较好的材料与较大的截面尺寸,上述要求通常是可以满足的,但是,由此又可能造成材料浪费与结构笨重。可见,安全与经济以及安全与重量之间存在矛盾。所以,如何合理地选用材料,如何恰当地确定构件的截面形状与尺寸,便成为构件设计中的一个十分重要的问题。

**材料力学**的主要任务是:研究构件在外力作用下的变形、受力



与破坏的规律,为合理设计构件提供有关强度、刚度与稳定性分析的基本理论与方法。

## § 1-2 材料力学的基本假设

制造构件所用的材料是多种多样的,其具体组成和微观结构则更是非常复杂。为了便于进行强度、刚度和稳定性分析,现根据材料的主要性质作如下假设。

### 1. 连续性假设

在材料力学中,通常假设构件的整个体积内均毫无空隙地充满了物质。实际上,在一般工程材料的内部均存在不同程度的空隙(包括材料的缺陷和夹杂等),然而,当空隙的大小和构件尺寸相比极为微小时,通常即可将它们忽略不计,而认为材料是密实的。这样,构件中的一些物理量(例如各点的位移)即可用坐标的连续函数表示,并可采用无限小的分析方法。至于空隙或缺陷的影响不能忽略的情况,将在第十二章中专门讨论。

### 2. 均匀性假设

材料在外力作用下所表现的性能,称为**力学性能或机械性能**。对于实际材料,其基本组成部分的力学性能往往存在不同程度的差异。例如,金属是由微小的晶粒所组成,各个晶粒的力学性能不完全相同,晶粒交界处的晶界物质与晶粒本身的力学性能也不相同。但是,由于构件的尺寸远大于其组成部分的尺寸(例如一立方毫米的钢材中包含了数万甚至数十万个晶粒),因此,按照统计学的观点,仍可将材料看成是均匀的,即认为材料的性能与其在构件中的位置无关。按此假设,从构件内部任何部位所切取的微小单元体(简称**微体**),都具有与构件完全相同的性质。同样,通过试件所测得的材料性能,也可用于构件内的任何部位。

### 3. 各向同性假设

沿各个方向均具有相同力学性能的材料,称为**各向同性材料**。例如玻璃即为典型的各向同性材料。至于工程中常用的金属,就其

单个晶粒来说,属于各向异性体,但由于构件中所含晶粒极多,而且它们在构件中的排列又极不规则,所以,按统计学的观点,仍可将金属看成是各向同性材料。至于由增强纤维(碳纤维、玻璃纤维等)与基体材料(环氧树脂、陶瓷等)制成的复合材料(图 1-4),则属于各向异性材料,应按各向异性问题处理。

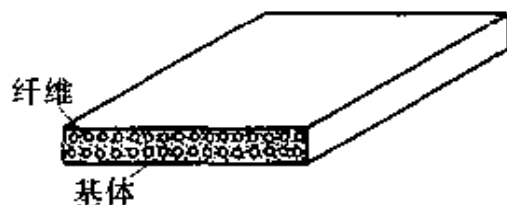


图 1-4

综上所述,在材料力学中,将实际材料一般均看作是连续、均匀和各向同性的可变形固体。实践表明,在此基础上所建立的理论及有关计算结果,是符合工程要求的。

### § 1-3 杆件变形的基本形式

横向尺寸远小于纵向尺寸的构件,称为杆件(图 1-5)。杆件是工程中最常见、最基本的构件,也是材料力学的主要研究对象。

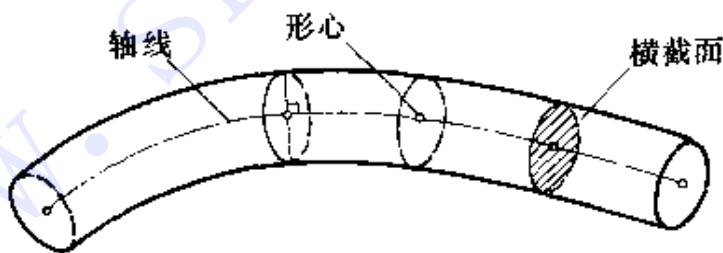


图 1-5

杆件的形状和尺寸由其轴线和横截面确定(图 1-5),轴线通过横截面的形心,横截面与轴线相正交。根据轴线与横截面的特征,杆件又可分为**等截面杆**与**变截面杆**(图 1-6, *a, b*)、**直杆**与**曲杆**(图 1-6, *c*),等截面直杆通常简称为**等直杆**。等直杆的计算原理,一般也可近似地用于曲率较小的曲杆和截面无急剧变化的变截面

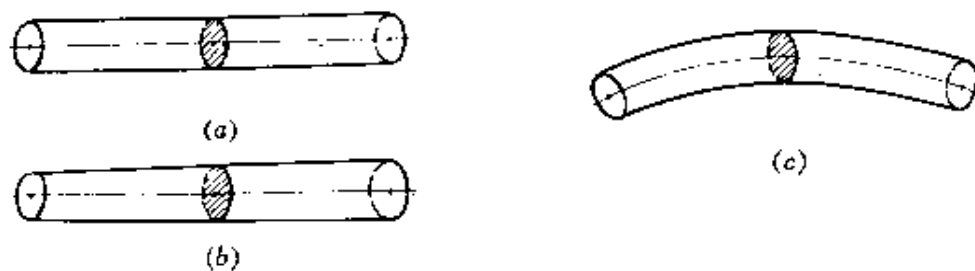


图 1-6

杆。

在不同形式的外力作用下, 杆件的变形形式也相应不同。杆件变形的基本形式有三种: **轴向拉伸或压缩**(图 1-7, *a, b*)、**扭转**(图 1-7, *c*) 和 **弯曲**(图 1-7, *d*)。杆件的变形或属于基本变形形式, 或属于几种基本变形形式的组合形式。例如图 1-8 所示杆, 其变形形式即属于拉、扭组合变形。

本书将首先研究变形的基本形式, 然后研究变形的组合形式。

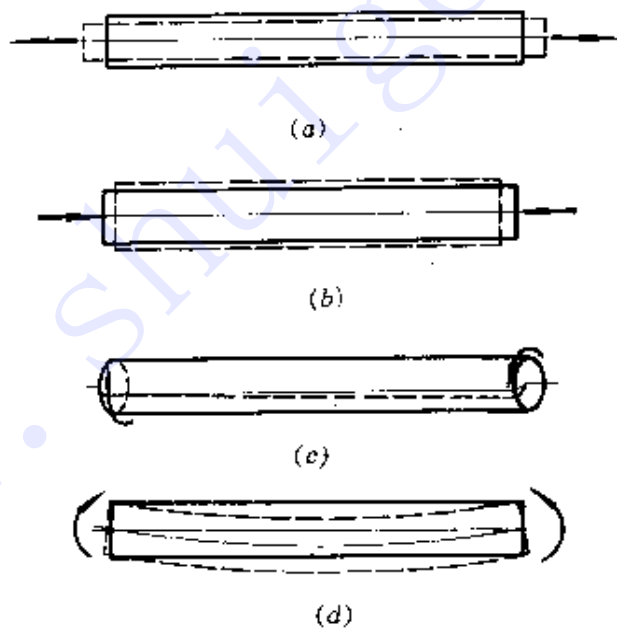


图 1-7

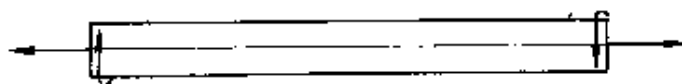


图 1-8

## 复 习 题

1. 何谓构件?何谓变形?
2. 何谓构件的强度、刚度与稳定性?
3. 构件设计的基本要求是什么?存在哪些矛盾?
4. 材料力学主要研究什么问题?
5. 材料力学的基本假设是什么?各有何依据?均匀性假设与各向同性假设的区别是什么?
6. 杆件的轴线与横截面之间有何关系?
7. 杆件的基本变形有几种?试各举一例。

## 第二章 轴向拉伸与压缩

### § 2-1 引 言

在机械与工程结构中,许多构件受到拉伸或压缩的作用。例如图 2-1(a) 所示操纵杆,图 2-1(b) 所示连杆,即分别为杆件受拉伸与压缩的实例。

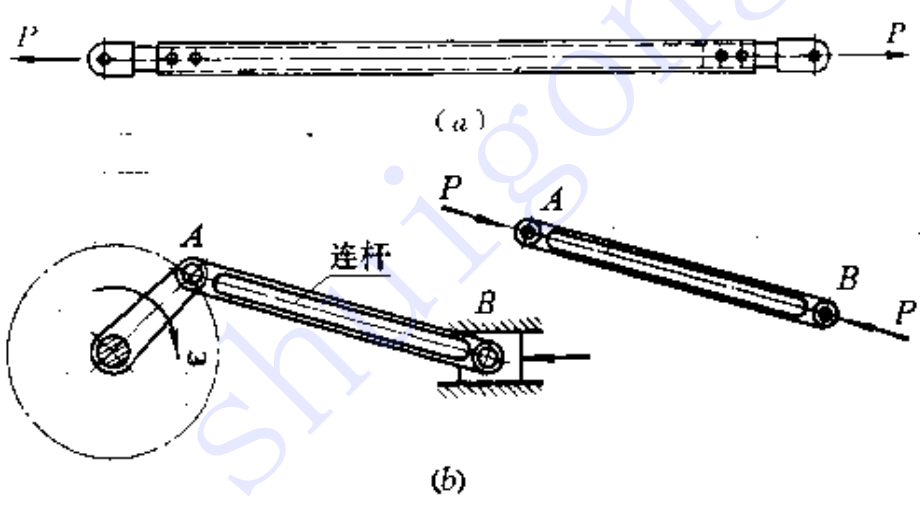


图 2-1

上述构件的共同特点是:杆件是直杆;外力或其合力的作用线沿杆件轴线。在这种情况下,杆件的主要变形为轴向伸长或缩短(图 2-2)。以轴向伸长或缩短为主要特征的变形形式,称为轴向拉伸或轴向压缩。以轴向伸长或缩短为主要变形的杆件,称为拉(压)杆。

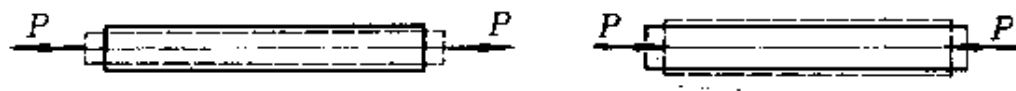


图 2-2



本章研究拉(压)杆的强度和刚度问题, 并结合其受力与变形分析, 介绍材料力学的基本概念和分析方法。

## § 2-2 内力概念与拉(压)杆的内力

### 一、内力与截面法

在外力作用下, 构件发生变形, 同时, 构件内部相连各部分之间产生相互作用力。在外力作用下, 构件内部相连两部分之间的相互作用力称为**内力**。构件的强度、刚度及稳定性, 与内力的大小及其在构件内的分布方式密切相关。因此, 内力分析是解决构件强度、刚度与稳定性问题的基础。

由理论力学可知, 为了分析两物体之间的相互作用力, 必须将该二物体分离。同样, 要分析构件的内力, 例如要分析图 2-3(a) 所示构件截面  $m-m$  的内力, 也必须假想地沿该截面将构件切开, 于是, 得切开截面上的内力如图 2-3(b) 所示。由连续性假设可知, 内力是作用在切开截面上的连续分布力。

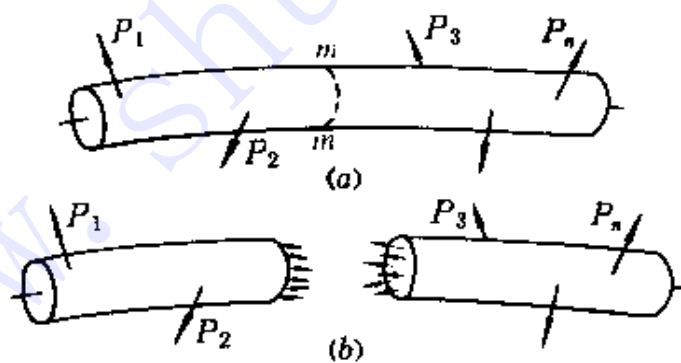


图 2-3

对于假想切开后的每一部分, 在外力及切开面内力的作用下处于平衡状态, 因此, 根据任一部分的平衡条件, 即可由已知外力确定切开面上的内力, 或更确切地说, 确定内力的合力或合力偶矩。内力的合力与合力偶亦简称为内力。

将构件假想地切开以显示内力, 并由平衡条件确定其合力与

合力偶矩的方法,称为**截面法**。

## 二、轴力

图 2-4(a) 所示拉杆,承受轴向载荷  $P$ 。为了研究杆的内力,在任一横截面  $m-m$  处假想地将其切开,并任选一段,例如左段(图 2-4, b),作为研究对象。由于外力作用线沿杆件轴线,故截面  $m-m$  上的内力的合力也沿杆件轴线。设该力为  $N$ ,则由左段杆的平衡方程

$$\sum X = 0, \quad N - P = 0$$

得

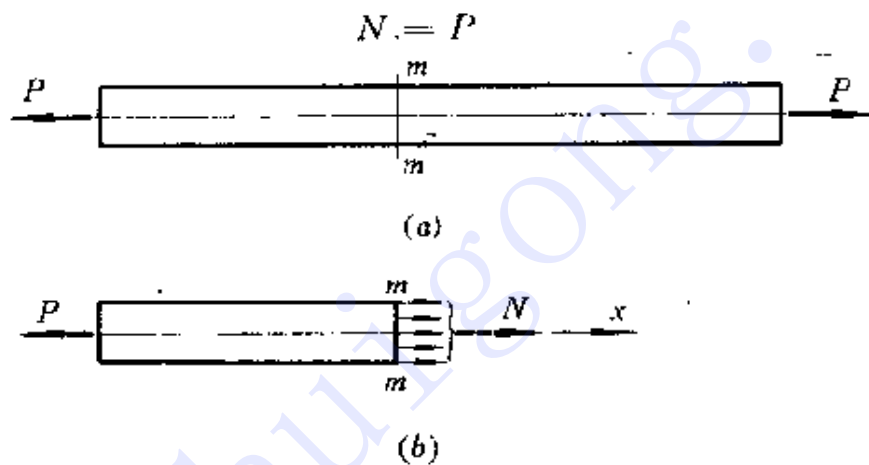


图 2-4

对于图 2-5 所示压杆,同样可求出其横截面上的内力为

$$N = P$$

该内力的作用线也沿杆件轴线。

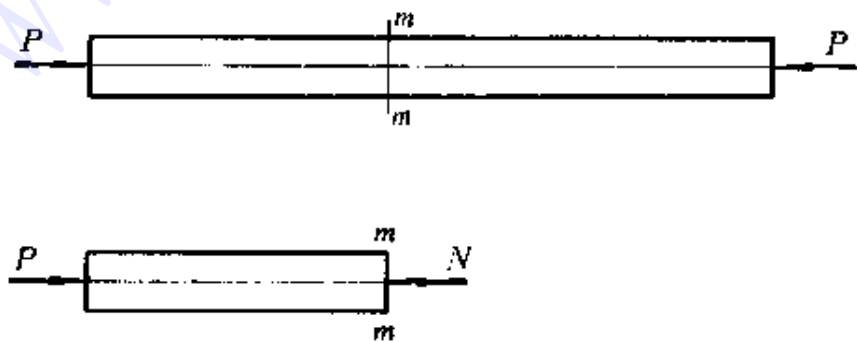


图 2-5

可见,不论是拉杆,还是压杆,横截面上的内力均沿杆件轴线。作用线垂直于所切横截面并通过其形心的内力称为**轴力**。轴力或为拉力(图 2-4, *b*),或为压力(图 2-5),为区别起见,通常规定拉力为正,压力为负。

综上所述,可将计算轴力的方法概述如下:

1. 在需求轴力的横截面处,假想地将杆切开,并任选一段为研究对象;
2. 画所选杆段的受力图,为计算方便,可将轴力假设为拉力;
3. 建立所选杆段的平衡方程,由已知外力计算切开截面上的未知轴力。

### 三、轴力图

现在研究拉(压)杆受力的一般情况。

图 2-6(a) 所示杆,承受三个轴向载荷。由于在横截面 *B* 处作用有外力,杆件 *AB* 与 *BC* 段的轴力将不相同,需分段研究。利用截面法,在 *AB* 段内任一横截面 1-1 处将其切开,并选左段为研究对象(图 2-6, *b*),由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad N_1 - 2P = 0$$

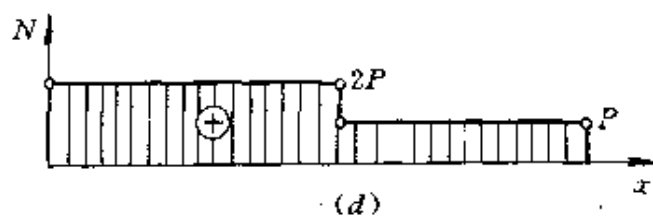
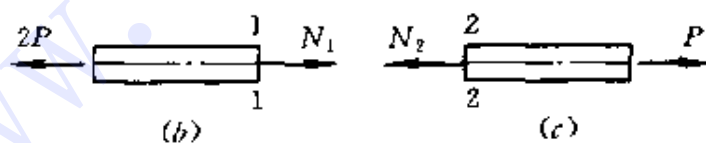
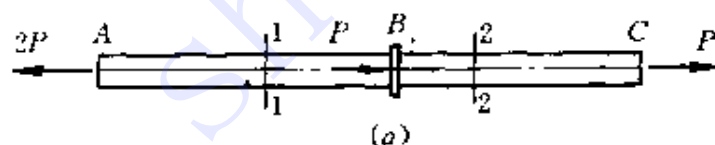


图 2-6

得  $AB$  段的轴力为

$$N_1 = 2P$$

对于  $BC$  段, 仍用截面法, 在任一横截面 2-2 处将其切开, 并为计算简单, 选右段为研究对象(图 2-6, c), 由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad P - N_2 = 0$$

得  $BC$  段的轴力为

$$N_2 = P$$

以上分析表明, 在  $AB$  与  $BC$  杆段内, 轴力不同。为了形象地表示轴力沿杆轴(即杆件轴线)的变化情况, 以平行于杆轴的坐标  $x$  表示横截面的位置, 垂直于杆轴的另一坐标  $N$  表示轴力, 于是得轴力沿杆轴的变化曲线如图 2-6(d) 所示。表示轴力沿杆轴变化情况的图线, 称为轴力图。

**例 1** 图 2-7(a) 所示右端固定杆, 承受轴向载荷  $P_1$  与  $P_2$ , 已知  $P_1 = 20\text{kN}$ (千牛),  $P_2 = 50\text{kN}$ , 试画杆的轴力图, 并求最大轴力值。

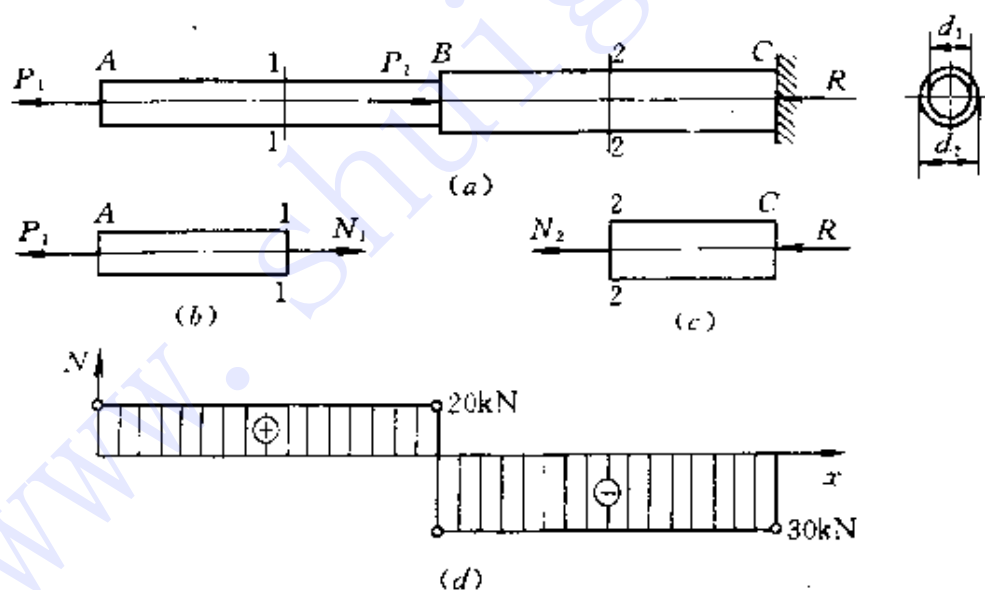


图 2-7

解 1. 计算支反力

设杆右端的支反力为  $R$ , 则由整个杆的平衡方程

$$\sum X = 0, \quad P_2 - P_1 - R = 0$$

得

$$R = P_2 - P_1 = 50 - 20 = 30\text{kN}$$

### 2. 分段计算轴力

设  $AB$  与  $BC$  段的轴力均为拉力, 并分别用  $N_1$  与  $N_2$  表示, 则由图 2-7(b)、(c) 可知,

$$N_1 = P_1 = 20\text{kN}$$

$$N_2 = -R = -30\text{kN}$$

所得  $N_2$  为负, 说明  $BC$  段轴力的实际方向与所设方向相反, 即应为压力。

### 3. 画轴力图

根据上述轴力值, 画轴力图如图 2-7(d) 所示。可见, 轴力的最大绝对值为

$$|N|_{\max} = 30\text{kN}$$

## § 2-3 应力概念与拉(压)杆横截面上的应力

轴力确定后, 现在研究杆件横截面上的内力分布规律。

### 一、应力概念

如上所述, 内力是构件内部相连两部分之间的相互作用力, 并沿截面连续分布。为了描写内力的分布情况, 现引入应力的概念。

如图 2-8(a) 所示, 在截面  $m-m$  上任一点  $K$  的周围取一微小面

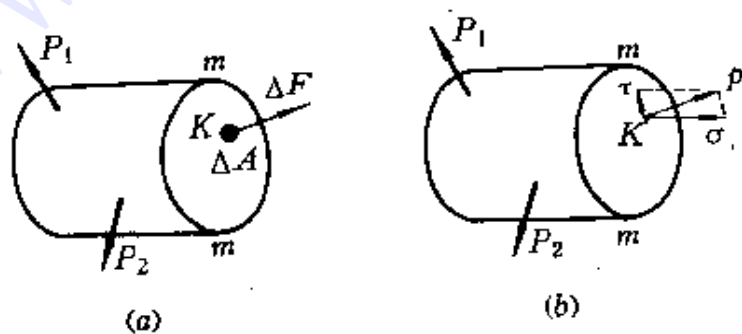


图 2-8



积  $\Delta A$ , 并设作用在该面积上的内力为  $\Delta F$ , 则  $\Delta F$  与  $\Delta A$  的比值, 称为  $\Delta A$  内的平均应力, 并用  $\bar{p}$  表示, 即

$$\bar{p} = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2-1)$$

一般情况下, 内力沿截面并非均匀分布, 平均应力  $\bar{p}$  之值及其方向将随所取面积  $\Delta A$  的大小而异。为了更精确地描写内力的分布情况, 应使  $\Delta A$  趋于零, 由此所得平均应力  $\bar{p}$  的极限值, 称为截面  $m-m$  上  $K$  点处的应力或总应力, 并用  $p$  表示, 即

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2-2)$$

显然, 应力  $p$  的方向即  $\Delta F$  的极限方向。为分析方便, 通常将应力  $p$  沿截面法向与切向分解为两个分量(图 2-8,  $b$ )。沿截面法向的应力分量称为正应力, 并用  $\sigma$  表示; 沿截面切向的应力分量称为剪应力, 并用  $\tau$  表示。应力  $p$  与正应力  $\sigma$ 、剪应力  $\tau$  之间的关系为

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2-3)$$

由式(2-1)可知, 应力的量纲为  $[F]/[L]^2$ 。在国际单位制中<sup>①</sup>, 力与面积的基本单位分别为牛顿(N)与平方米( $m^2$ ), 应力的基本单位为牛/米<sup>2</sup>( $N/m^2$ ), 并称为帕斯卡(Pascals), 简写为 Pa。应力的常用单位为百万帕或兆帕(MPa)<sup>②</sup>, 其值为

$$1\text{MPa} = 10^6\text{Pa} = 10^6\text{N/m}^2 \quad (2-4)$$

在工程应用中, 常以毫米(mm)作为长度单位, 相应的应力单位为  $N/mm^2$ , 此单位与帕斯卡的关系为

$$1\text{N/mm}^2 = 1\text{MPa} \quad (2-5)$$

## 二、拉(压)杆横截面上的应力

现在研究拉(压)杆横截面上的应力。

首先观察杆的变形。图 2-9(a)所示为一等截面直杆。试验前,

<sup>①</sup> 国际单位制简称为 SI, 它是由第 11 届国际计量大会(1960)通过的一种新型单位制, 并在世界范围内得到广泛采用。

<sup>②</sup> 在国际单位制中, M 为字冠, 代表  $10^6$ 。

在杆表面等间距地画上纵线与横线, 然后, 在杆两端施加轴向载荷  $P$ 。从试验中观察到(图 2-9,  $b$ )<sup>①</sup>: 各纵、横线仍为直线, 并分别平行、垂直于杆轴, 所有正方形网格均变为大小相同的长方形。

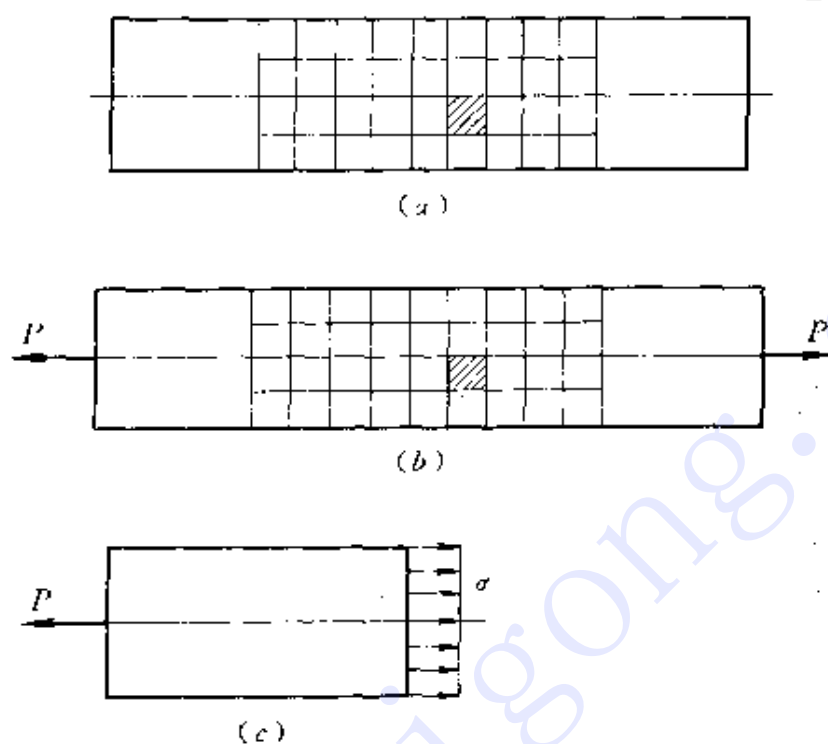


图 2-9

根据上述现象, 对杆内变形作如下假设: 变形后, 横截面仍保持平面, 且仍与杆轴垂直, 只是各横截面间沿杆轴相对平移。

如果设想杆件是由无数纵向“纤维”所组成, 则由上述假设可知, 任意两横截面间的所有纤维的变形均相同。对于均匀性材料, 如果变形相同, 则受力也相同。由此可见, 横截面上各点处仅存在正应力  $\sigma$ , 并沿截面均匀分布(图 2-9,  $c$ )。

设杆件横截面的面积为  $A$ , 轴力为  $N$ , 则根据上述假设可知, 横截面上各点处的正应力均为

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2-6)$$

或

<sup>①</sup> 例如用橡皮做试件, 其表面变形即能清晰地看到。

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

式(2-6)为拉(压)杆横截面上的正应力公式, 并已为试验所证实, 适用于横截面为任意形状的等截面直杆。

由式(2-6)可知, 正应力与轴力具有相同的正负符号。轴向拉伸时, 轴力为正, 相应的应力即拉应力亦为正; 轴向压缩时, 轴力为负, 相应的应力即压应力亦为负。

应该指出, 当作用在杆上的外力, 沿横截面非均匀分布时, 外力作用点附近横截面上的应力, 亦为非均匀分布。但**圣维南(Saint-Venant)原理**指出, “力作用于杆端的方式不同, 只会使与杆端距离不大于杆横向尺寸的范围受其影响”。此原理已为大量试验与计算所证实。例如, 图 2-10(a) 所示承受集中力  $P$  作用的杆, 其截面宽度为  $h$ , 在  $x = h/4, h/2$  的横截面 1-1、2-2 上, 应力虽为非均匀分布(2-10, b), 但在  $x = h$  的横截面 3-3 上, 则趋向均匀(图 2-10, c)。因此, 只要外力合力的作用线沿杆件轴线, 在离外力作用

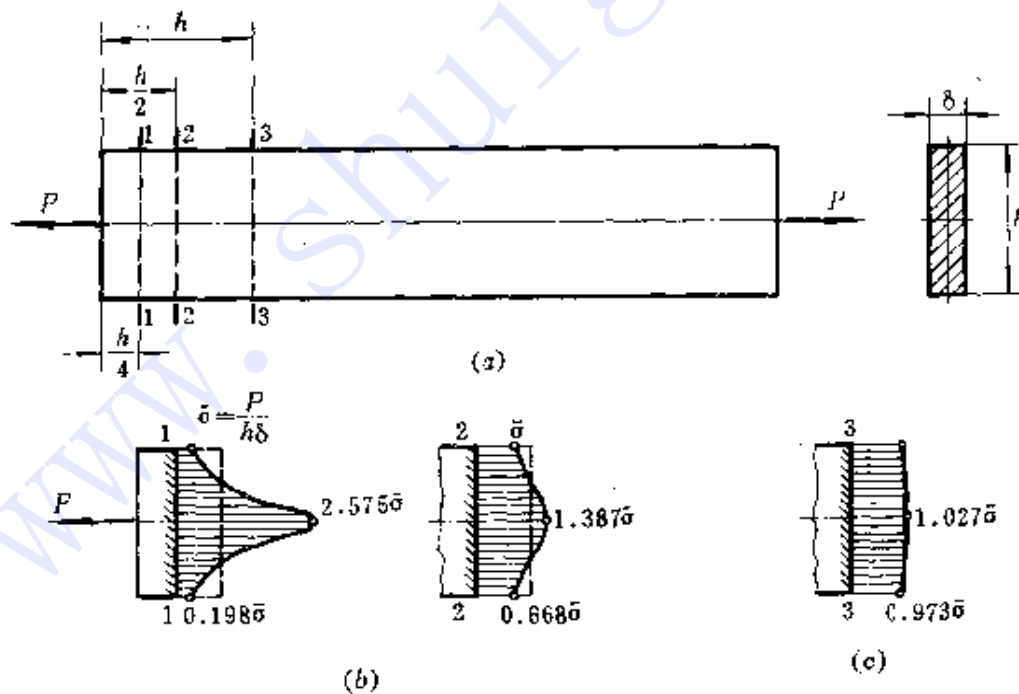


图 2-10

面稍远处, 横截面上的应力分布均可视为均匀的。至于载荷作用处的应力分析, 则将在 § 2-9 中讨论。

**例 2** 图 2-7(a) 所示圆截面杆, 直径  $d_1 = 20\text{mm}$ ,  $d_2 = 30\text{mm}$ , 试计算横截面 1-1 与 2-2 上的正应力。

解 根据例 1 之分析, 横截面 1-1 与 2-2 上的轴力分别为

$$N_1 = 20\text{kN}(\text{拉力})$$

$$N_2 = -30\text{kN}(\text{压力})$$

由式(2-6)可知, 横截面 1-1 上的正应力为

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{N_1}{A_1} = \frac{4N_1}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 20 \times 10^3}{\pi \times 20^2} = 63.7\text{N/mm}^2 \\ &= 63.7\text{MPa}(\text{拉应力})\end{aligned}$$

同理, 得横截面 2-2 上的正应力为

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times (-30) \times 10^3}{\pi \times 30^2} = -42.4\text{N/mm}^2 \\ &= -42.4\text{MPa}(\text{压应力})\end{aligned}$$

## § 2-4 拉(压)杆斜截面上的应力

以上研究了拉(压)杆横截面上的应力, 为了更全面地了解杆内的应力情况, 现在研究斜截面上的应力。

考虑图 2-11(a) 所示拉(压)杆, 利用截面法, 沿任一斜截面  $m-m$  将杆切开, 该截面的方位以其外法线  $n$  与  $x$  轴的夹角  $\alpha$  表示。由前述分析可知, 杆内各纵向纤维的变形相同, 因此, 在相互平行的截面  $m-m$  与  $m'-m'$  间各纤维的变形也相同(图 2-11, b)。因此, 斜截面  $m-m$  上的应力  $p_\alpha$  沿截面均匀分布。

设杆件横截面的面积为  $A$ , 则斜截面  $m-m$  的面积为

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha}$$

根据左段杆的平衡条件可知,

$$p_\alpha A_\alpha = P$$

于是得

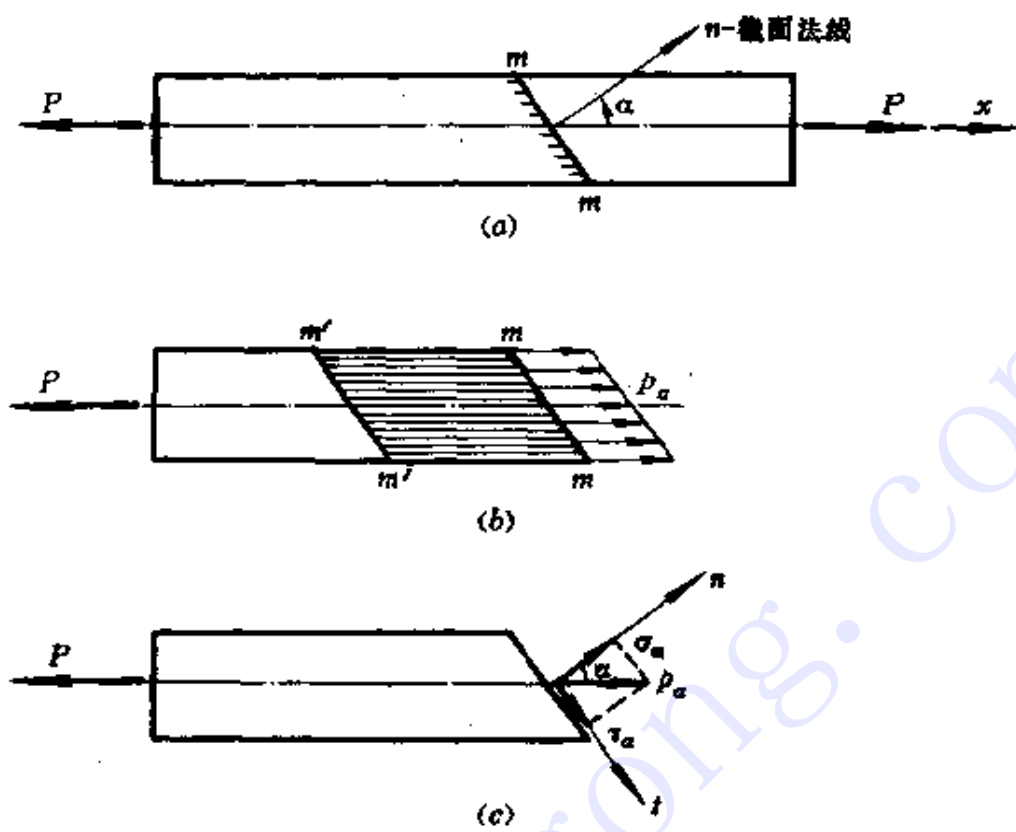


图 2-11

$$p_a = \frac{P}{A_a} = \frac{P \cos \alpha}{A}$$

或

$$p_a = \sigma \cos \alpha \tag{a}$$

式中,  $\sigma = P/A$  为杆件横截面上的正应力。

应力  $p_a$  的方向与杆轴平行, 而与截面法线  $n$  成  $\alpha$  角。为研究方便, 将  $p_a$  沿截面法向与切向分解(图 2-11, c), 得斜截面上的正应力与剪应力分别为

$$\sigma_a = p_a \cos \alpha \tag{b}$$

$$\tau_a = p_a \sin \alpha \tag{c}$$

将式(a) 代入式(b)、(c), 得

$$\sigma_a = \sigma \cos^2 \alpha \tag{2-7}$$

$$\tau_a = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \tag{2-8}$$

可见, 在杆的任一斜截面上, 不仅存在正应力, 而且存在剪应力, 其



大小则均随截面方位而变化。

由式(2-7)可知, 当  $\alpha = 0^\circ$  时, 正应力  $\sigma_\alpha$  最大, 其值为

$$\sigma_{\max} = \sigma \quad (2-9)$$

即拉(压)杆的最大正应力发生在横截面上, 其值为  $\sigma$ 。

由式(2-8)可知, 当  $\alpha = 45^\circ$  时, 剪应力  $\tau_\alpha$  最大, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} \quad (2-10)$$

即拉(压)杆的最大剪应力发生在与杆轴成  $45^\circ$  的斜截面上, 其值为  $\sigma/2$ 。

式(2-7) ~ (2-10) 同样适用于轴向受压的等截面杆。

为便于应用式(2-7)与式(2-8), 兹对方位角  $\alpha$  与应力  $\sigma_\alpha$ 、 $\tau_\alpha$  的正负符号作如下规定: 以  $x$  轴为起点, 方位角  $\alpha$  为逆时针转向者为正, 反之为负; 正应力  $\sigma_\alpha$  仍以拉为正, 压为负; 将截面外法线  $n$  沿顺时针方向旋转  $90^\circ$ , 与该方向同向之剪应力  $\tau_\alpha$  为正, 反之为负。按此规定, 因 2-11(c) 所示之  $\alpha$ 、 $\sigma_\alpha$  与  $\tau_\alpha$  均为正。

**例 3** 图 2-12(a) 所示轴向受压等截面杆, 横截面面积  $A = 400\text{mm}^2$ , 载荷  $P = 50\text{kN}$ , 试求  $\alpha = 40^\circ$  截面上的应力。

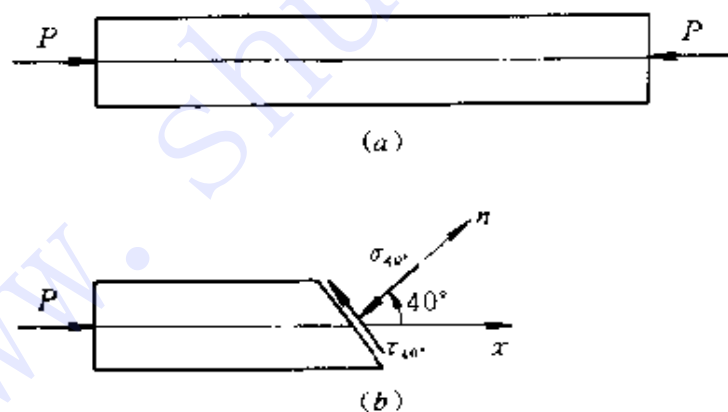


图 2-12

**解** 杆件横截面上的正应力为

$$\sigma = \frac{N}{A} = -\frac{50 \times 10^3}{400} = -125.0\text{MPa}$$

由式(2-7)与式(2-8), 得  $\alpha = 40^\circ$  截面的正应力与剪应力分别为

$$\sigma_{40} = \sigma \cos^2 \alpha = -125 \times \cos^2 40^\circ = -73.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{40} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = -\frac{125}{2} \times \sin 80^\circ = -61.6 \text{ MPa}$$

该截面及其上应力的方向如图 2-12(b) 所示。

## § 2-5 材料在拉伸与压缩时的力学性能

构件内的应力随外力增大而增大,但在一定应力作用下构件是否破坏,则与材料的力学性能有关。此外,为了分析构件的变形,同样也需要了解材料的力学性能。

### 一、拉伸试验与应力 - 应变曲线

材料的力学性能由试验测定。拉伸试验是研究材料力学性能最常用、最基本的试验。常用的标准拉伸试件如图 2-13 所示,标记  $m$ 、 $n$  之间的杆段为试验段,其长度  $l$  称为**标距**。

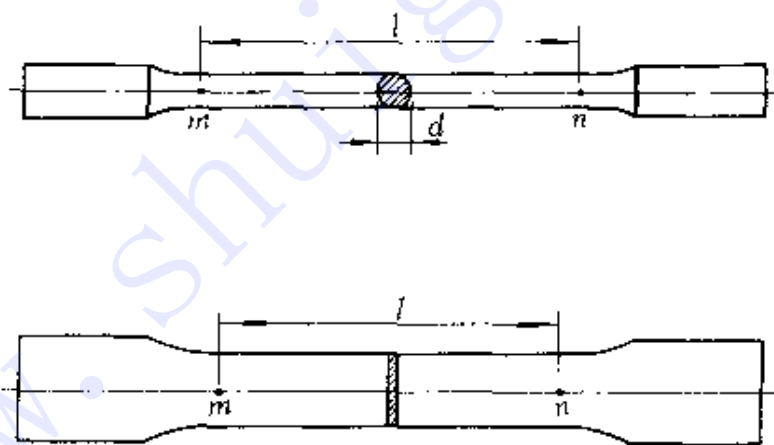


图 2-13

试验时,首先将试件安装在试验机的夹头内,并在标记  $m$ 、 $n$  处装上测量变形的仪器。然后开动机器,缓慢加载。随着载荷增加,试件逐渐被拉长,试验段的伸长用  $\Delta l$  表示。试验一直进行到试件断裂为止。一般试验机均附有绘图装置,能自动绘出载荷  $P$  与伸长  $\Delta l$  间的关系曲线,该曲线反映了试件所受拉力与相应伸长间的关系,称为试件的**拉伸图**。例如图 2-14 所示即为低碳钢的拉伸图。

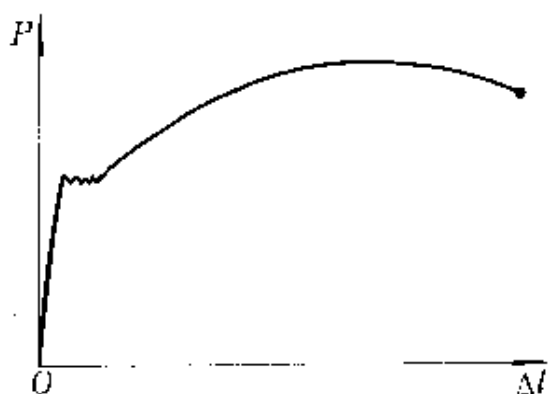


图 2-14

显然,试件的拉伸图不仅与试件的材料有关,而且与试件横截面尺寸及其标距的大小有关。例如,试验段的横截面面积愈大,将其拉断所需之拉力愈大。因此,不宜用试件的拉伸图表征材料的拉伸性能。

为了消除试件横截面尺寸的影响,采用横截面单位面积上的内力(即应力 $\sigma$ )表示材料的受力程度;为了消除试件试验段长度的影响,采用单位长度的变形(即 $\Delta l/l$ )度量材料的变形程度。

单位长度的变形,称为**正应变**,并用 $\epsilon$ 表示,即

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2-11)$$

正应变是两个长度的比值,为一无量纲量。

将拉伸图的纵坐标 $P$ 除以试件横截面的原面积 $A$ ,而将其横坐标 $\Delta l$ 除以试验段原长 $l$ ,由此所得曲线即只反映材料的力学性能。此曲线称为**应力-应变曲线**或**应力-应变图**。以下即以应力-应变图为基础,并结合试验过程中所观察到的现象,介绍几种典型材料的力学性能。

## 二、低碳钢在拉伸时的力学性能

低碳钢是工程中广泛应用的金属材料,其应力-应变图也具有典型意义,因此,首先研究低碳钢的力学性能。

图 2-15 所示为低碳钢 A3 的应力-应变曲线。从图中可以看

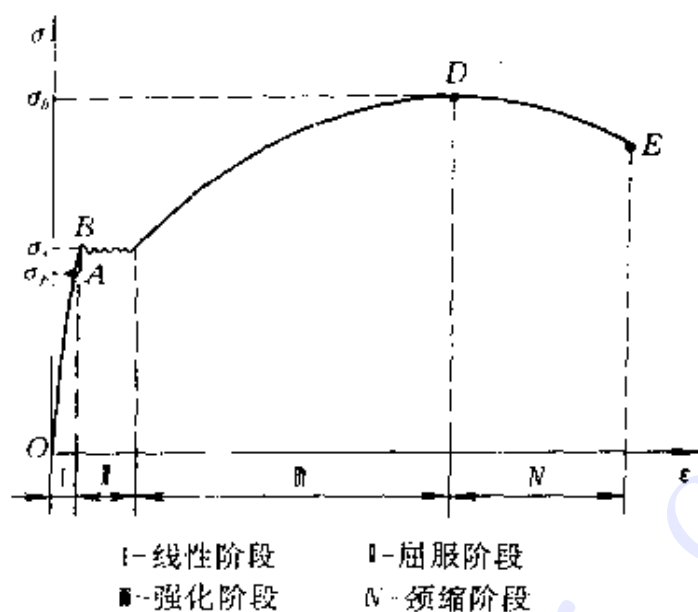


图 2-15

出,其应力应变关系呈现如下四个阶段。

### 1. 线性阶段

在拉伸的初始阶段,应力-应变曲线为一直线(图中之 $OA$ ),说明在此阶段内,正应力与正应变成正比,即

$$\sigma \propto \epsilon$$

此阶段的应力最高限,即图中 $A$ 点所对应的应力,称为材料的**比例极限**,并用 $\sigma_p$ 表示。低碳钢 A3 的比例极限 $\sigma_p \approx 200\text{MPa}$ 。

### 2. 屈服阶段

超过比例极限之后,应力与应变之间不再保持正比关系。当应力增加至某一定值时,应力-应变曲线出现水平线段(有微小波动)。在此阶段内,应力几乎不变,而变形却急剧增长,材料失去抵抗继续变形的能力,此种现象称为**屈服**,相应的应力,称为材料的**屈服应力或屈服极限**,并用 $\sigma_s$ 表示,低碳钢 A3 的屈服应力 $\sigma_s \approx 240\text{MPa}$ 。如果试件表面光滑,则当材料屈服时,试件表面将出现与轴线约成 $45^\circ$ 的线纹(图 2-16)。如前所述,在杆件的 $45^\circ$ 斜截面上,作用有最大剪应力,因此,上述线纹可能是材料沿该截面产生滑移所造成,故通常称为**滑移线**。

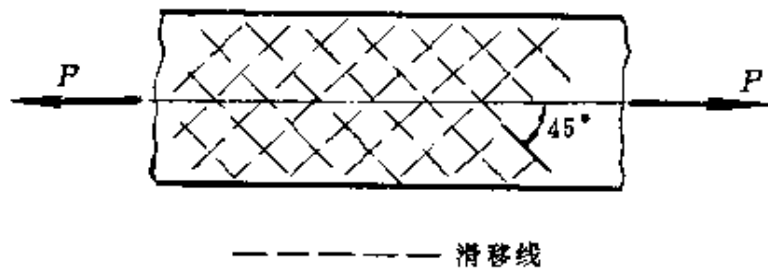


图 2-16

### 3. 强化阶段

经过屈服阶段之后,材料又增强了抵抗变形的能力。这时,要使材料继续变形需要增大应力,此种现象称为**强化**。强化阶段的最高点  $D$  所对应的应力,称为材料的**强度极限**,并用  $\sigma_b$  表示。低碳钢 A3 的强度极限  $\sigma_b \approx 380\text{MPa}$ 。强度极限是材料所能承受的最大应力。

### 4. 颈缩阶段

当应力增长至最大值  $\sigma_b$  之后,试件的某一局部显著收缩(图 2-17),产生所谓**颈缩**。颈缩出现后,使试件继续变形所需之拉力迅速减小,相应的应力 - 应变曲线明显下降,最后在颈缩处断裂。

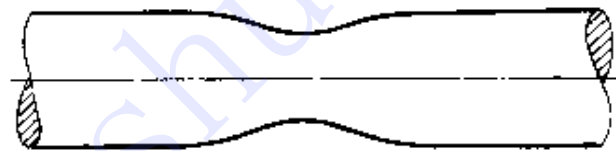


图 2-17

综上所述,在整个拉伸过程中,材料经历了线性、屈服、强化与颈缩四个阶段,并存在三个特征点,相应的应力依次为比例极限、屈服应力与强度极限。对于低碳钢,屈服应力与强度极限为衡量其强度的主要指标。

## 三、材料在卸载与再加载时的力学性能

试验表明,如果在比例极限之前停止加载,并将载荷逐渐减小至零,即卸去载荷,则可以看到,在卸载过程中应力与应变之间仍保持正比关系,并沿直线  $AO$  回到  $O$  点(图 2-18,  $a$ ),变形完全消

失。卸载后可以消失的变形称为**弹性变形**。此种仅产生弹性变形的现象, 一直持续到应力-应变曲线的某点  $M$ , 与该点对应的正应力, 称为材料的**弹性极限**, 并用  $\sigma_e$  表示。

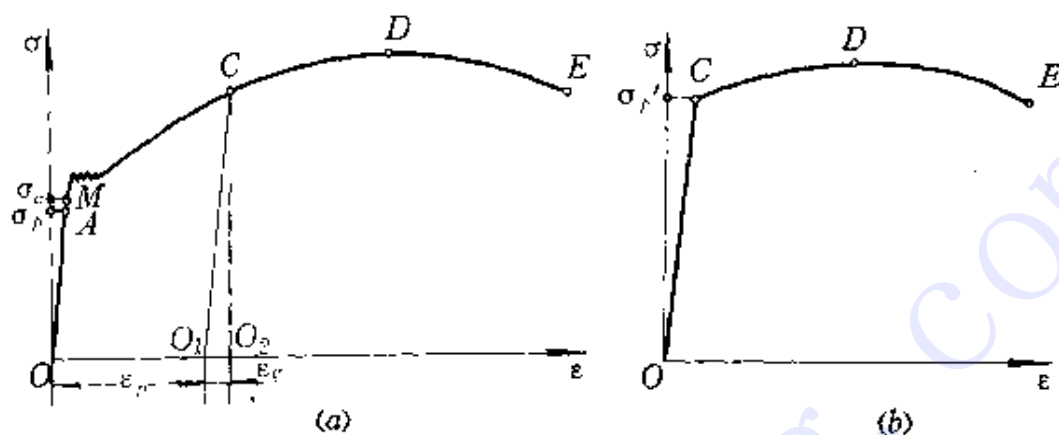


图 2-18

对于低碳钢等许多材料, 其弹性极限与比例极限非常接近, 因而在应用中, 对二者常不加严格区别, 尽管它们的物理意义完全不同。

现在研究应力超过弹性极限时材料的变形。

如图 2-18(a) 所示, 当加载至强化阶段某一点  $C$  逐渐减小载荷, 则卸载过程中的应力-应变关系沿直线  $CO_1$  变化, 该直线几乎与  $OA$  平行。线段  $\overline{O_1O_2}$  代表随着卸载而消失的应变即弹性应变; 而线段  $\overline{OO_1}$  则代表应力减小至零时残留的应变, 称为**塑性应变**或**残余应变**。可见, 当应力超过弹性极限后, 材料的应变包括弹性应变与塑性应变。

试验中还发现, 如果卸载至  $O_1$  点后立即重新加载, 则加载时的应力-应变关系基本上沿卸载时的直线  $O_1C$  变化, 过  $C$  点后仍沿原曲线  $CDE$  变化, 并至  $E$  点断裂。因此, 如果将卸载后已有塑性变形的试件当作新试件重新进行拉伸试验, 其应力-应变曲线将如图 2-18(b) 所示, 与同样材料但未经卸载的应力-应变曲线相比 (图 2-18, a), 材料的比例极限或弹性极限得到提高 ( $\sigma_p' > \sigma_p$ ), 而断裂时的残余变形则减小。这种由于预加塑性变形, 而使材料的比例极限或弹性极限提高的现象, 称为**冷作硬化**。工程中常利用冷作



硬化,以提高某些构件(例如钢筋与链条等)在弹性范围内的承载能力。

试件断裂时的残余变形最大。断裂时试验段的残余变形  $\Delta l_0$  与试验段原长  $l$  的比值,称为材料的**延伸率**,并用  $\delta$  表示,即

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l} \times 100\% \quad (2-12)$$

材料能经受较大塑性变形而不破坏的能力,称为材料的**塑性**或**延性**。所以,延伸率是衡量材料塑性的重要指标。低碳钢 A3 的延伸率  $\delta \approx 25\% \sim 27\%$ 。

延伸率大的材料,在轧制或冷压成型时不易断裂,并能抵抗较大的冲击载荷。在工程中,通常将延伸率较大(例如  $\delta \geq 5\%$ )的材料称为**塑性材料**或**延性材料**;延伸率较小的材料称为**脆性材料**。结构钢与硬铝等为塑性材料,而工具钢、铸铁与玻璃等则属于脆性材料。

衡量材料塑性的另一指标是**断面收缩率**。设试验段横截面的原面积为  $A$ ,断裂后断口的横截面面积为  $A_1$ ,所谓断面收缩率即为

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \quad (2-13)$$

低碳钢 A3 的断面收缩率  $\psi \approx 60\%$ 。

#### 四、其它材料拉伸时的力学性能

图 2-19 所示为铬锰砂钢与硬铝等的应力 - 应变曲线。可以看出,它们断裂时均具有较大的残余变形,即均属于塑性材料。不同的是,有些材料无明显的屈服阶段,有些则不存在颈缩现象。

对于不存在明显屈服阶段的塑性材料,工程中常以卸载后产生 0.2% 残余应变的应力作为屈服应力,称为**条件屈服应力**或**条件屈服极限**,并用  $\sigma_{0.2}$  表示。如图 2-20 所示,在横坐标  $\epsilon$  轴上取  $\overline{OC} = 0.2\%$ ,自  $C$  点作直线平行于  $OA$ ,并与应力 - 应变曲线相交于  $D$ ,与  $D$  点对应的正应力即为条件屈服应力  $\sigma_{0.2}$ 。

至于脆性材料,例如铸铁等,从开始受力直至断裂,变形始终

很小, 既不存在屈服阶段, 也无颈缩现象。图 2-21 所示为铸铁拉伸时的应力 - 应变曲线, 断裂时的应变仅为 0.4% ~ 0.5%, 断口则垂直于试件轴线, 即断裂发生在最大拉应力作用面。

铸铁应力 - 应变曲线的另一特点是: 当应力不大时, 应力和应变之间即不成正比。但是, 由于在实际使用的应力范围内, 应力 -

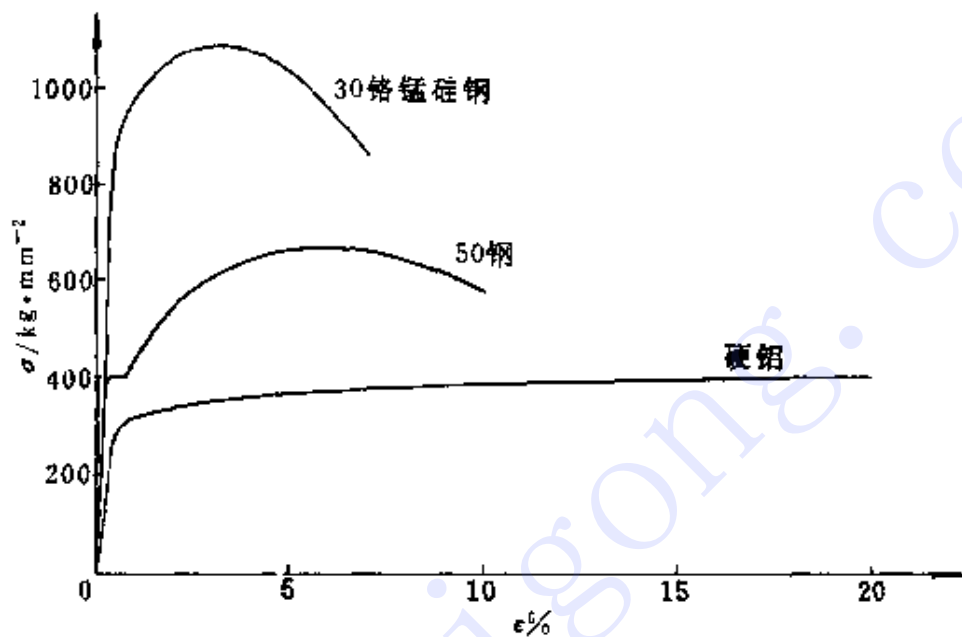


图 2-19

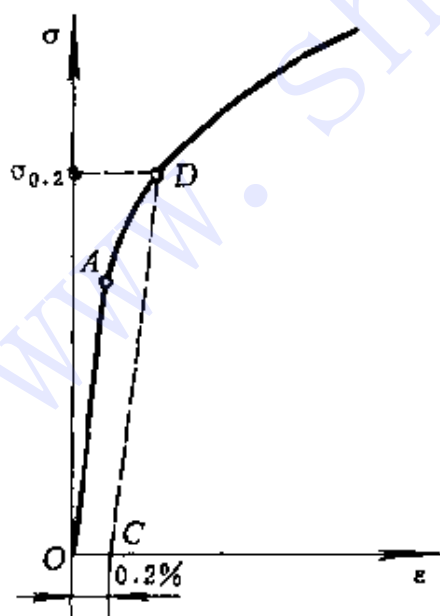


图 2-20

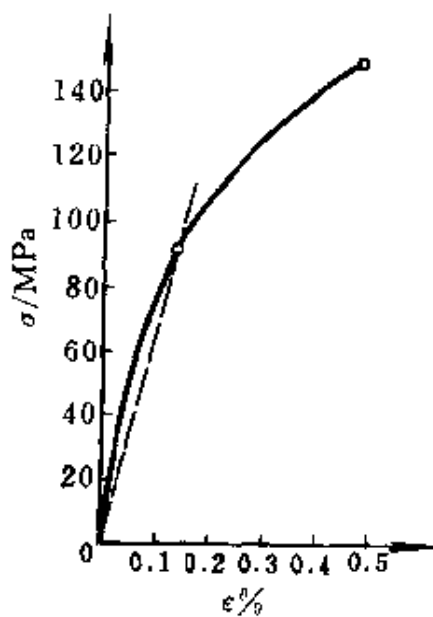


图 2-21

应变曲线的曲率很小, 因此, 在实际计算时常以直线(图 2-21 中的虚线)代替曲线。

近年来, 复合材料得到广泛应用。复合材料具有强度高、刚度大与比重小的特点。碳 / 环氧(即碳纤维增强环氧树脂)是一种常用复合材料, 图 2-22 所示为该材料沿纤维方向与垂直于纤维方向拉伸时的应力 - 应变曲线。可以看出, 材料的力学性能随加力方向变化, 即为各向异性, 而且, 断裂时残余变形很小。其它复合材料亦具有类似特点。

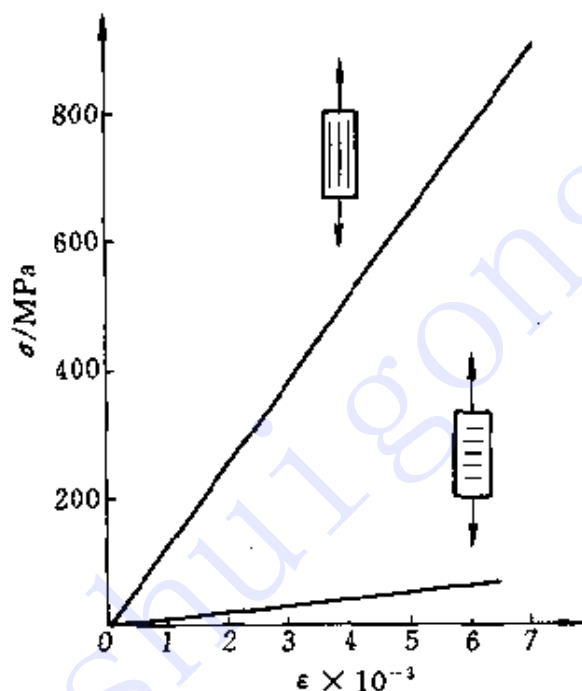


图 2-22

### 五、材料在压缩时的力学性能

材料受压时的力学性能由压缩试验测定。一般细长杆件压缩时容易产生失稳现象, 故在金属压缩试验中, 常采用短粗圆柱形试件。

低碳钢压缩时的应力 - 应变曲线如图 2-23(a) 所示, 为便于比较, 图中同时画出了拉伸时的应力 - 应变曲线。可以看出, 在屈服之前, 压缩曲线与拉伸曲线基本重合, 压缩与拉伸时的屈服应力大致相同。不同的是, 随着压力继续增加, 低碳钢试件将愈压愈

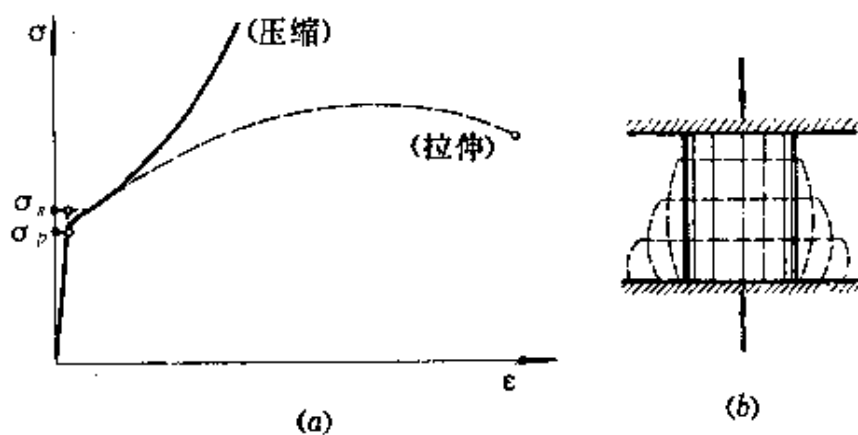


图 2-23

“扁”(图 2-23, b)。

铸铁压缩时的应力 - 应变曲线如图 2-24(a) 所示, 与拉伸相似, 其线性阶段也较短。不同的是, 压缩强度极限远高于拉伸强度极限(约 3 倍 ~ 4 倍)。其它脆性材料如混凝土与石料等亦具有上述特点, 故脆性材料宜用作承压构件。铸铁压缩破坏形式如图 2-24(b) 所示, 断口的方位角约为  $55^\circ \sim 60^\circ$ 。由于该截面上存在较大剪应力, 所以, 铸铁压缩破坏的方式是剪断。

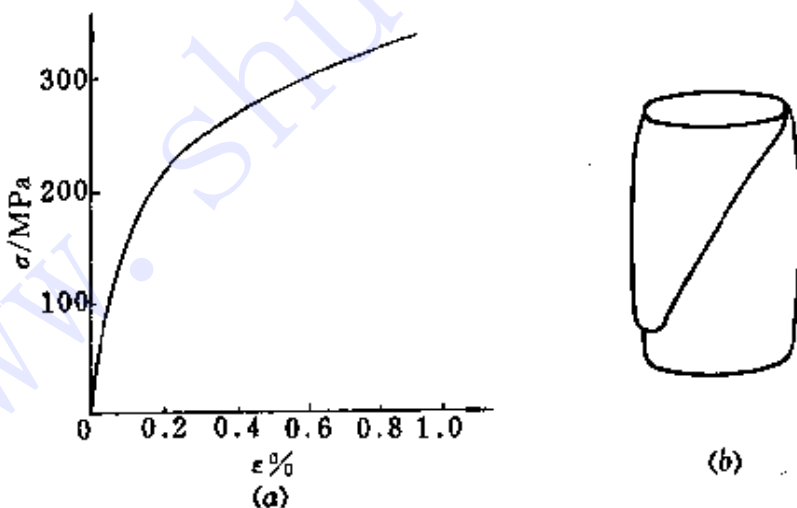


图 2-24

为便于查阅与比较, 现将几种常用金属材料的力学性能列于表 2-1 中。应该指出, 材料的力学性能并非固定不变。在不同温度与加载方式时(例如缓慢加载, 高速加载或反复加载), 材料的力学

性能亦将有所不同。表中所列数据是在常温与静载荷(即缓慢加载)的条件下测得的。至于反复加载、高速加载与高温条件下材料的力学性能,将在第十章与第十二章介绍。

表 2-1

材料名称	牌号	代号	$\sigma_s$ /MPa	$\sigma_b$ /MPa	$\delta_5^l$ /%
普通碳素钢	甲 3	A3	235	372 ~ 392	27 ~ 25
	甲 5	A5	274	490 ~ 519	21
优质碳素钢	35	35	314	529	20
	45	45	353	598	16
	55	55	382	647	13
低合金钢	15 锰钒	15MnV	392	529	18
	16 锰	16Mn	343	510	21
合金钢	20 铬	20Cr	539	833	10
	40 铬	40Cr	784	980	9
	30 铬锰硅	30CrMnSi	882	1078	8
铝合金	硬铝	LY12	274	412	19

① $\delta_5$  表示  $l = 5d$  标准试件的延伸率(参阅图 2-13)。

## § 2-6 许用应力与强度条件

由以上试验可知,当正应力达到强度极限  $\sigma_b$  时,会引起断裂;当正应力达到屈服应力  $\sigma_s$  时,将出现显著的塑性变形。显然,构件工作时发生断裂或显著塑性变形一般均不容许,故强度极限  $\sigma_b$  与屈服应力  $\sigma_s$  统称为材料的**极限应力**,并用  $\sigma^0$  表示。对于脆性材料,强度极限为其唯一强度指标,故以  $\sigma_b$  作为极限应力;对于塑性材料,由于  $\sigma_s < \sigma_b$ ,故通常以  $\sigma_s$  作为极限应力。

根据分析计算所得构件之应力,称为**工作应力**或**计算应力**。在理想的情况下,为了充分利用材料的强度,似宜使构件的工作应力接近于材料的极限应力。但实际上不可能,原因是:作用在构件上的外力常常估计不准确;构件的外形与所承受的外力往往很复杂,计算所得应力通常均带有近似性;实际材料的组成与品质等难免

存在差异,不能保证构件所用材料与标准试件具有完全相同的力学性能,这种差别在脆性材料中尤为显著;等等。所有这些因素,都有可能使构件的实际工作条件比设想的要偏于不安全的一面。除以上原因外,为了确保安全,构件还应具适当的强度储备,特别是对于因损坏将带来严重后果的构件,更应给予较大的强度储备。

由此可见,构件工作应力的最大容许值,必须低于材料的极限应力。对于由一定材料制成的具体构件,工作应力的最大容许值,称为材料的许用应力,并用 $[\sigma]$ 表示。许用应力与极限应力的关系为

$$[\sigma] = \frac{\sigma}{n} \quad (2-14)$$

式中, $n$ 为大于1的系数,称为**安全系数**。

如上所述,安全系数是由多种因素决定的。各种材料在不同工作条件下的安全系数或许用应力,可从有关规范或设计手册中查到。在一般强度计算中,对于塑性材料,按屈服应力所规定的安全系数 $n_s$ ,通常取为1.5~2.0;对于脆性材料,按强度极限所规定的安全系数 $n_b$ ,通常取为2.5~3.0,甚至更大。

根据以上分析,为了保证拉(压)杆在工作时不致因强度不够而破坏,杆内的最大工作应力 $\sigma_{\max}$ 不得超过材料拉伸(压缩)的许用应力 $[\sigma]$ ,即要求

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma] \quad (2-15)$$

上述判据称为拉(压)杆的**强度条件**。对于等截面拉(压)杆,上式则变为

$$\frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma] \quad (2-16)$$

利用上述条件,可以解决以下几类强度问题。

### 1. 校核强度

当已知拉(压)杆的截面尺寸、许用应力和所受外力时,检查该杆是否满足强度要求,即判断该杆在所述外力作用下能否安全工作。



## 2. 选择截面尺寸

如果已知拉(压)杆所受外力和许用应力, 根据强度条件可以确定该杆所需横截面面积。例如对于等截面拉(压)杆, 其所需横截面面积为

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]} \quad (2-17)$$

## 3. 确定承载能力

如果已知拉(压)杆的截面尺寸和许用应力, 根据强度条件可以确定该杆所能承受的最大轴力, 其值为

$$[N] = A[\sigma] \quad (2-18)$$

最后还应指出, 如果工作应力  $\sigma_{\max}$  超过了许用应力  $[\sigma]$ , 但只要超过量(即  $\sigma_{\max}$  与  $[\sigma]$  之差)不大, 例如不超过许用应力的 5%, 在工程计算中仍然是允许的。

**例 4** 图 2-25 所示空心圆截面杆, 外径  $D = 20\text{mm}$ , 内径  $d = 15\text{mm}$ , 承受轴向载荷  $P = 20\text{kN}$  作用, 材料的屈服应力  $\sigma_s = 235\text{MPa}$ , 安全系数  $n_s = 1.5$ , 试校核杆的强度。



图 2-25

**解** 杆件横截面上的正应力为

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{4 \times 20 \times 10^3}{\pi(20^2 - 15^2)} = 145.5\text{MPa}$$

根据式(2-14)可知, 材料的许用应力为

$$[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s} = \frac{235}{1.5} = 156.7\text{MPa}$$

可见, 工作应力小于许用应力, 说明杆件能够安全工作。

**例 5** 图 2-26(a) 所示吊环, 由圆截面斜杆  $AB$ 、 $AC$  及横梁  $BC$  所组成。已知吊环的最大吊重  $P = 500\text{kN}$ , 斜杆用锻钢制成, 其许用应力  $[\sigma] = 120\text{MPa}$ , 斜杆与拉杆轴线的夹角  $\alpha = 20^\circ$ , 试确定斜

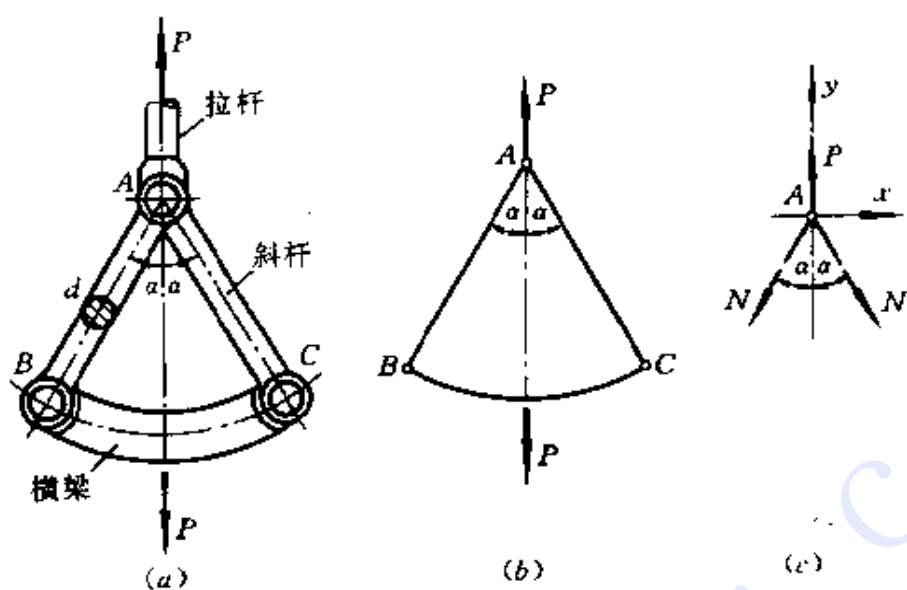


图 2-26

杆的直径。

解 1. 轴力分析

吊环的计算简图和接点 A 的受力分别如图 2-26(b)、(c) 所示。

设斜杆的轴力为  $N$ , 则由平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad P - 2N\cos\alpha = 0$$

得

$$N = \frac{P}{2\cos\alpha} = \frac{500}{2\cos 20^\circ} = 266\text{kN}$$

2. 截面设计

根据式(2-17), 得斜杆横截面所需面积为

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

或要求

$$\frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

由此得斜杆横截面的直径为

$$d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma]}}$$

将有关数据代入上式, 得

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \times 266 \times 10^3}{\pi \times 120}} = 53.1 \text{ mm}$$

取  $d = 53.0 \text{ mm}$ 。

**例 6** 图 2-27(a) 所示支架, 由杆 1 与杆 2 组成, 在接点 B 承受垂直载荷  $P$  作用, 试计算载荷  $P$  的最大允许值  $[P]$ 。已知杆 1、2 的横截面面积均为  $A = 100 \text{ mm}^2$ , 许用拉应力为  $[\sigma_+] = 200 \text{ MPa}$ , 许用压应力为  $[\sigma_-] = 150 \text{ MPa}$ 。

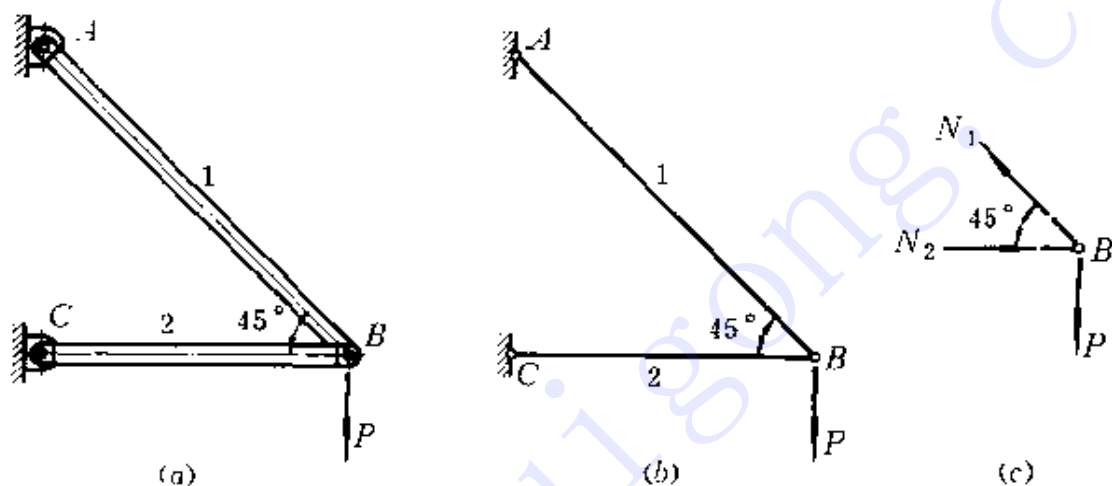


图 2-27

**解 1. 轴力分析**

支架的计算简图和接点 B 的受力分别如图 2-27(b)、(c) 所示。设杆 1、2 的轴力分别为  $N_1$  和  $N_2$ , 则由平衡方程

$$\sum X = 0, N_2 - N_1 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0, N_1 \sin 45^\circ - P = 0$$

得

$$N_1 = \sqrt{2} P \text{ (拉)} \quad (a)$$

$$N_2 = P \text{ (压)} \quad (b)$$

**2. 确定  $P$  的许用值**

杆 1 的强度条件为

$$\frac{N_1}{A} \leq [\sigma_+]$$

将式(a)代入上式,即要求

$$\frac{\sqrt{2}P}{A} \leq [\sigma_+]$$

由此得

$$P \leq \frac{A[\sigma_+]}{\sqrt{2}} = \frac{100 \times 200}{\sqrt{2}} = 14.14\text{kN}$$

杆2的强度条件为

$$\frac{N_2}{A} \leq [\sigma_-]$$

将式(b)代入上式,即要求

$$\frac{P}{A} \leq [\sigma_-]$$

由此得

$$P \leq A[\sigma_-] = 100 \times 150 = 15.0\text{kN}$$

可见, 支架所能承受的最大载荷即许用载荷为

$$[P] = 14.14\text{kN}$$

## § 2-7 虎克定律与拉(压)杆的变形

当杆件承受轴向载荷时,其轴向与横向尺寸均发生变化(图2-28)。杆件沿轴线或载荷方向的变形称为**纵向变形**或**轴向变形**;

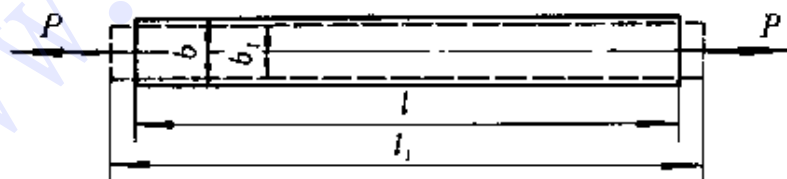


图 2-28

垂直轴线或载荷方向的变形称为**横向变形**。如图所示, 设杆件原长为  $l$ , 宽度为  $b$ , 受力后, 杆长变为  $l_1$ , 宽度变为  $b_1$ , 则杆的纵向与横向变形分别为

$$\Delta l = l_1 - l$$

$$\Delta b = b_1 - b$$

本节研究纵向与横向变形的规律。

### 一、拉(压)杆的轴向变形与虎克定律

前述试验表明,在比例极限内,正应力与正应变成正比,即

$$\sigma \propto \epsilon$$

如果引进比例系数  $E$ , 则

$$\sigma = E\epsilon \quad (2-19)$$

上述关系式称为**虎克定律**。比例系数  $E$  称为材料的**弹性模量**, 其值随材料而异, 并由实验测定。实际上, 应力 - 应变图中初始直线  $OA$  之斜率(图 2-15), 即等于弹性模量之值。由式(2-19)可知, 弹性模量  $E$  与应力  $\sigma$  具有相同的量纲。在国际单位制中, 弹性模量的常用单位为  $\text{GPa}$ (吉帕), 其值为

$$1\text{GPa} = 10^3\text{MPa} \quad (2-20)$$

试验表明, 式(2-19)同样适用于轴向压缩情况。

现在, 利用虎克定律研究拉(压)杆的轴向变形。

由式(2-6)与式(2-11)可知, 拉(压)杆横截面上的正应力与轴向正应变分别为

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{N}{A}$$
$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

将上述关系式代入式(2-19), 于是得

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (2-21)$$

上述关系式仍称为虎克定律。它表明, 在比例极限内, 杆的轴向变形  $\Delta l$  与轴力  $N$  及杆长  $l$  成正比, 与  $EA$  成反比。乘积  $EA$  称为杆的**截面抗拉(压)刚度**, 或简称为**抗拉(压)刚度**。显然, 在一定轴向载荷作用下, 抗拉(压)刚度愈大, 杆的轴向变形愈小。

由式(2-21)可知, 轴向变形  $\Delta l$  与轴力  $N$  具有相同的正负号, 即伸长为正, 缩短为负。

## 二、拉(压)杆的横向变形与泊松比

根据式(2-11)可知,拉(压)杆的横向正应变为

$$\epsilon' = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b_1 - b}{b} \quad (2-22)$$

试验表明,轴向拉伸时,杆沿轴向伸长,其横向尺寸减小,轴向压缩时,杆沿轴向缩短,其横向尺寸则增大(图 2-2),即横向正应变与轴向正应变恒为异号。试验还表明,在比例极限内,横向正应变  $\epsilon'$  与轴向正应变  $\epsilon$  成正比。设横向正应变与轴向正应变之比的绝对值用  $\mu$  表示,则由上述试验可知

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| = - \frac{\epsilon'}{\epsilon}$$

或

$$\epsilon' = - \mu \epsilon \quad (2-23)$$

比例系数  $\mu$  称为材料的泊松比。在比例极限内,  $\mu$  为一常数,其值随材料而异,并由试验测定。

将式(2-19)代入式(2-23),得

$$\epsilon' = - \mu \frac{\sigma}{E} \quad (2-24)$$

弹性模量  $E$  与泊松比  $\mu$  均为材料的弹性常数,几种常用材料的  $E$ 、 $\mu$  值如表 2-2 所示。

表 2-2

弹性常数	钢与合金钢	铝合金	铜	铸 铁	木(顺纹)
$E/\text{GPa}$	200 ~ 220	70 ~ 72	100 ~ 120	80 ~ 160	8 ~ 12
$\mu$	0.25 ~ 0.30	0.26 ~ 0.34	0.33 ~ 0.35	0.23 ~ 0.27	—

**例 7** 图 2-29 所示圆截面杆,用铝合金制成,承受轴向拉力  $P$  作用。已知杆长  $l = 100\text{mm}$ ,杆径  $d = 10\text{mm}$ ,轴向伸长  $\Delta l = 0.182\text{mm}$ ,横向变形  $\Delta d = -0.00545\text{mm}$ ,试计算杆的轴向正应变  $\epsilon$ 、横向正应变  $\epsilon'$  及材料的泊松比  $\mu$ 。

**解** 根据式(2-11)与式(2-22),得杆的轴向与横向正应变分



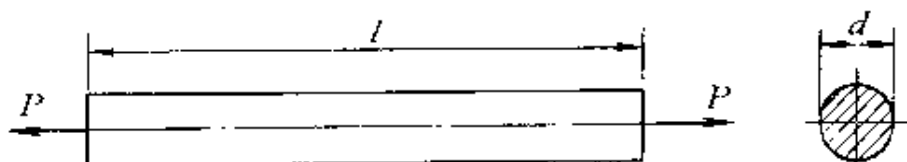


图 2-29

别为

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.182}{100} = 1.82 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon' = \frac{\Delta d}{d} = \frac{-0.00545}{10} = -5.45 \times 10^{-4}$$

于是,由式(2-23)得材料的泊松比为

$$\mu = -\frac{\epsilon'}{\epsilon} = \frac{5.45 \times 10^{-4}}{1.82 \times 10^{-3}} = 0.299$$

**例 8** 图 2-7(a) 所示杆 AC, AB 与 BC 段的长度均为  $l = 100\text{mm}$ , 其杆径分别为  $d_1 = 20\text{mm}$  与  $d_2 = 30\text{mm}$ , 材料的弹性模量为  $E = 200\text{GPa}$ , 试计算杆 AC 的长度改变量  $\Delta l$ 。

解 根据例 2 之分析, AB 与 BC 段的轴力分别为

$$N_1 = 20\text{kN}$$

$$N_2 = -30\text{kN}$$

由式(2-21)可知, AB 与 BC 段的轴向变形分别为

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA_1} = \frac{4N_1 l}{E\pi d_1^2}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA_2} = \frac{4N_2 l}{E\pi d_2^2}$$

所以,整个杆件的轴向变形为

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{4l}{E\pi} \left( \frac{N_1}{d_1^2} + \frac{N_2}{d_2^2} \right) \\ &= \frac{4 \times 100}{200 \times 10^3 \times \pi} \left( \frac{20 \times 10^3}{20^2} - \frac{30 \times 10^3}{30^2} \right) \\ \Delta l &= -0.0106\text{mm} \end{aligned}$$

$\Delta l$  为负,即 AC 杆缩短 0.0106mm。

**例 9** 图 2-30 所示螺栓, 内径  $d_1 = 15.3\text{mm}$ , 被连接部分的总长度  $l = 54\text{mm}$ , 拧紧时螺栓 AB 段的伸长  $\Delta l = 0.04\text{mm}$ , 钢的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.3$ , 试计算螺栓横截面上的正应力

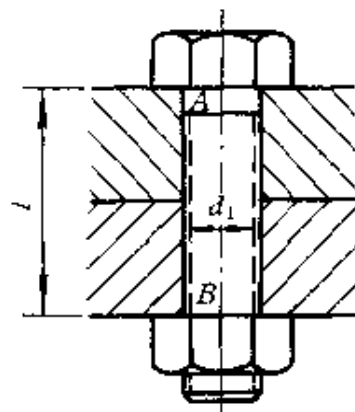


图 2-30

及螺栓的横向变形。

解 螺栓的轴向正应变为

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.04}{54} = 7.41 \times 10^{-4}$$

将所得  $\epsilon$  值代入式(2-19), 得螺栓横截面上的正应力为

$$\sigma = E\epsilon = 200 \times 10^3 \times 7.41 \times 10^{-4} = 148.2 \text{MPa}$$

根据式(2-23), 螺栓的横向正应变为

$$\epsilon' = \nu \epsilon = 0.3 \times 7.41 \times 10^{-4} = 2.22 \times 10^{-4}$$

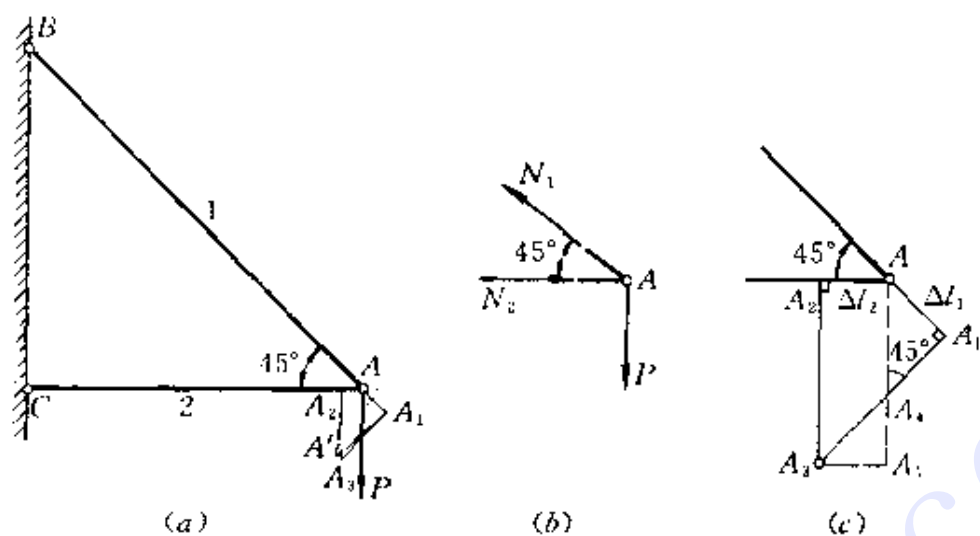


图 2-31

设杆 1 的伸长为  $\Delta_1$ , 并用  $\overline{AA_1}$  表示(图 2-31, a), 杆 2 的缩短为  $\Delta_2$ , 并用  $\overline{AA_2}$  表示, 则由虎克定律可知:

$$\Delta_1 = \overline{AA_1} = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{14.14 \times 10^3 \times 1000}{200 \times 10^3 \times 100} = 0.707 \text{mm}$$

$$\Delta_2 = \overline{AA_2} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{10 \times 10^3 \times 707}{10 \times 10^3 \times 4000} = 0.177 \text{mm}$$

### 2. 确定接点 A 位移后的位置

加载前, 杆 1 与杆 2 在接点 A 相连; 加载后, 各杆的长度虽然改变, 但仍连接在一起。因此, 为了确定接点 A 位移后的位置, 可以 B、C 为圆心, 并分别以  $BA_1$ 、 $CA_2$  为半径作圆(图 2-31, a), 其交点  $A'$  即为接点 A 的新位置。

通常, 杆的变形均很小(例如杆 1 的变形不足其杆长的千分之一), 上述弧线( $\widehat{A_1 A'}$  与  $\widehat{A_2 A'}$ ) 必很短, 因而可用其切线代替。于是, 过  $A_1$ 、 $A_2$  分别作  $BA_1$ 、 $CA_2$  的垂线(图 2-31, a, c), 其交点  $A_3$  亦可视为接点 A 的新位置。

### 3. 计算接点 A 的位移

由图 2-31(c) 可知, 接点 A 的水平与垂直位移分别为

$$\Delta_A = \overline{AA_2} = \Delta_2 = 0.177 \text{mm}$$

$$f_A = \overline{AA_5} = \overline{AA_4} + \overline{A_4 A_5} = \frac{\Delta_1}{\sin 45^\circ} + \frac{\Delta_2}{\text{tg} 45^\circ} = 1.18 \text{mm}$$

#### 4. 讨论

与结构原尺寸相比为很小的变形, 称为小变形。在小变形的条件下, 通常即可按结构原有几何形状与尺寸计算支反力与内力, 也可采用以切线代替圆弧的方法确定位移。因此, 小变形为一重要概念, 利用此概念, 可使许多问题的分析计算大为简化。

**例 11** 图 2-32(a) 所示结构, 由横梁  $AB$  与斜撑杆  $CD$  组成, 并承受载荷  $P_1$  与  $P_2$  作用, 试求梁端  $A$  点的垂直位移  $f_A$ 。已知:  $P_1 = 5\text{kN}$ ,  $P_2 = 10\text{kN}$ ,  $l = 1000\text{mm}$ ; 斜撑杆  $CD$  为铝管, 弹性模量  $E = 72\text{GPa}$ , 横截面面积  $A = 440\text{mm}^2$ 。设横梁很刚硬, 变形很小, 可视为刚体。

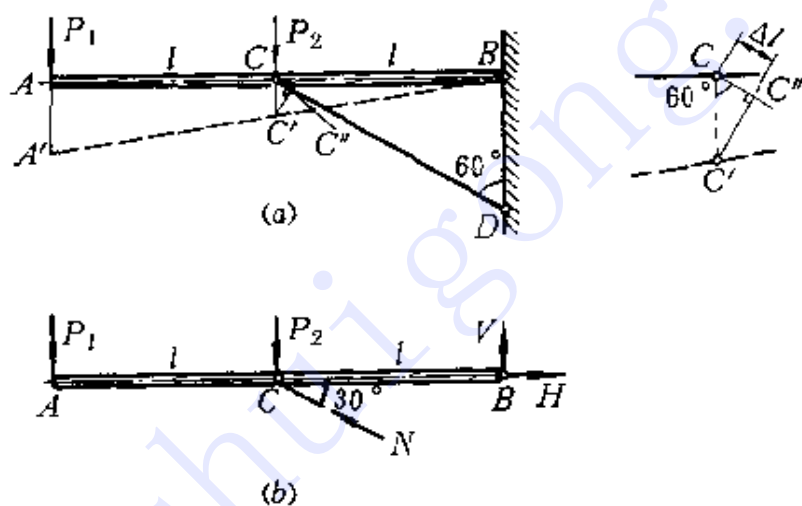


图 2-32

解 1. 计算杆件的轴向变形

设斜撑杆承受的压力为  $N$ , 则梁  $AB$  的受力情况如图 2-32(b) 所示, 由平衡方程

$$\sum M_B = 0, \quad P_1 \times 2l + P_2 l - N l \sin 30^\circ = 0$$

得

$$N = \frac{2P_1 + P_2}{\sin 30^\circ} = \frac{2 \times 5 + 10}{0.5} = 40\text{kN}(\text{压})$$

由虎克定律可知, 斜撑杆的缩短为

$$\Delta l = \frac{N l_{CD}}{EA} = \frac{N l}{EA \cos 30^\circ}$$

$$= \frac{40 \times 10^3 \times 1000}{72 \times 10^3 \times 440 \times 0.866} = 1.46\text{mm}$$

## 2. 计算 A 点的垂直位移

首先, 沿  $CD$  取  $\overline{CC''} = \Delta l$  (图 2-32, a), 并过  $C$  和  $C''$  分别作  $CB$  和  $CD$  的垂线得交点  $C'$ ; 然后, 过  $A$  点作铅垂线, 过  $B, C'$  连直线并将其延长, 它们的交点  $A'$  即位移后  $A$  点的新位置。可见,  $A$  点的垂直位移为

$$f_A = \overline{AA'} = 2\overline{CC'} = \frac{2 \times \Delta l}{\cos 60^\circ} = \frac{2 \times 1.46}{0.5} = 5.84\text{mm}$$

## § 2-8 简单拉、压静不定问题

在前面所讨论的问题中, 支反力与轴力均可通过静力平衡方程确定。由静力平衡方程可确定全部未知力(包括支反力与内力)的问题, 称为**静定问题**。例如图 2-33(a) 所示桁架即属于静定问题。

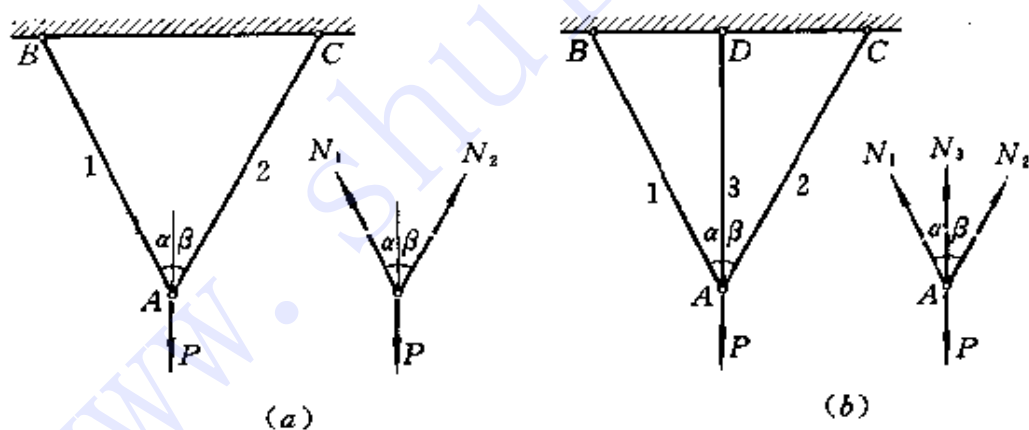


图 2-33

然而, 如果在上述桁架中增加一杆  $AD$  (图 2-33, b), 则未知轴力变为三个 ( $N_1, N_2$  和  $N_3$ ), 但有效平衡方程仍然只有两个, 显然, 仅由两个平衡方程尚不能确定三个未知轴力。根据静力平衡方程尚不能确定全部未知力的问题, 称为**静不定问题**。

静定问题未知力的数目, 等于有效平衡方程的数目。静不定问

题未知力的数目, 多于有效平衡方程的数目, 二者之差称为**静不定度**。例如图 2-33(b) 所示结构即为一度静不定桁架。

为了确定静不定问题的未知力, 除应利用平衡方程外, 还必须研究变形, 并藉助变形与内力间的关系, 以建立足够数量的补充方程。现在即以图 2-34(a) 所示桁架为例, 介绍分析静不定问题的基本方法。

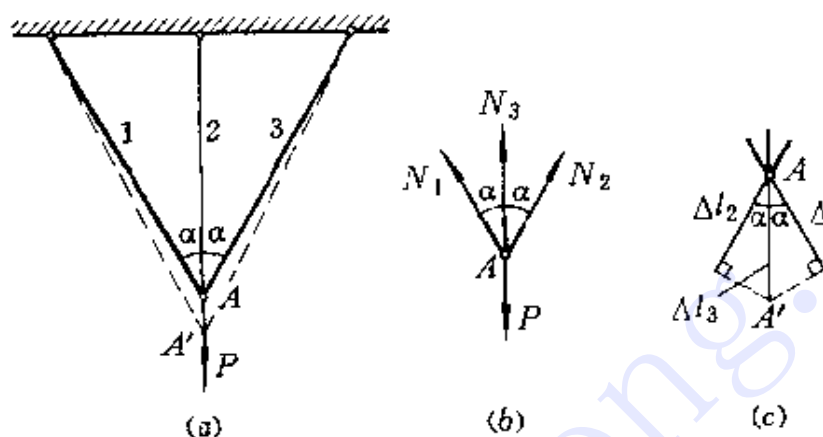


图 2-34

设杆 1 与杆 2 的横截面面积, 弹性模量均相同, 即  $A_1 = A_2, E_1 = E_2$ , 杆 3 的横截面面积与弹性模量分别为  $A_3$  与  $E_3$ , 现在分析在垂直载荷  $P$  作用时各杆的轴力。

在载荷  $P$  作用下, 三杆均伸长, 故可设三杆均受拉, 接点  $A$  的受力情况如图 2-34(b) 所示, 其平衡方程为

$$\sum X = 0, \quad N_2 \sin \alpha - N_1 \sin \alpha = 0 \quad (a)$$

$$\sum Y = 0, \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 - P = 0 \quad (b)$$

由式(a)得

$$N_1 = N_2$$

将上式代入式(b), 得

$$2N_1 \cos \alpha + N_3 - P = 0 \quad (c)$$

现在研究桁架的变形, 以建立补充方程。

如图 2-34(a) 所示, 三杆原交于一点  $A$ , 因有铰链相连, 变形后它们仍应交于一点。此外, 由于杆 1 和杆 2 的受力和抗拉刚度均相



同, 接点  $A$  应沿铅垂方向下移, 各杆的变形关系如图 2-34(c) 所示。从变形图中可以看出, 为保证三杆变形后仍交于一点, 即保证结构的连续性, 杆 1、2 的伸长  $\Delta l_1$  与杆 3 的伸长  $\Delta l_3$  之间应满足如下关系:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha \quad (d)$$

保证结构连续性所应满足的变形几何关系, 称为**变形协调条件**或**变形协调方程**。变形协调条件即为求解静不定问题的补充条件。

各杆变形间的几何关系确定后, 利用变形和内力间的关系, 即可建立用内力表示的变形协调方程。如 § 2-7 所述, 若三杆均处于线弹性阶段, 则由虎克定律可知, 各杆的变形与内力间存在如下关系:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} = \frac{N_3 l_1 \cos \alpha}{E_3 A_3}$$

式中,  $l_1$  与  $l_3$  分别代表杆 1 与杆 3 的长度。将上述关系式代入式 (d), 得以轴力表示的变形协调方程即补充方程为

$$N_1 = \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha \cdot N_3 \quad (e)$$

最后, 联立求解平衡方程 (c) 与补充方程 (e), 于是得

$$N_1 = N_2 = \frac{P \cos^2 \alpha}{\frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + 2 \cos^2 \alpha}$$

$$N_3 = \frac{P}{1 + 2 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha}$$

所得结果均为正, 说明各杆轴力均为拉力的假设是正确的。

由以上解答可以看出, 杆的轴力  $N_i$  不仅与载荷  $P$  及杆间夹角  $\alpha$  有关, 而且与杆的抗拉(压)刚度有关。一般说来, 增大某杆刚度, 该杆的轴力亦相应增大。实际上, 这也正是静不定问题区别于静定问题的一个重要特征。

图 2-34(a) 所示结构为一度静不定桁架, 三杆中有一杆(例如杆 3) 对于维持平衡是“多余”的, 此“多余”杆件的变形必须与其余杆件的变形相协调, 因而可以建立一个补充条件。如果再增加一杆 AG(图 2-35), 则此桁架变为二度静不定, 但杆 AG 的变形也必须与其它杆件的变形相协调, 因而又增加一个补充条件, 即共有两个补充条件。依此类推,  $n$  度静不定问题必有  $n$  个补充条件, 相应建立  $n$  个补充方程。

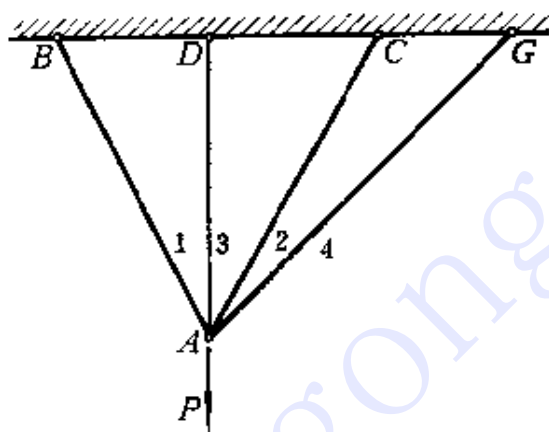


图 2-35

综上所述, 求解静不定问题必须考虑以下三方面: 满足力的平衡方程; 满足变形协调条件; 符合力与变形间的物理关系(如在线弹性范围之内, 即符合虎克定律)。概言之, 即应综合考虑静力学、几何与物理三方面。材料力学的许多基本理论, 也正是从这三方面进行综合分析后建立起来的。

**例 12** 图 2-36(a) 所示杆 AB, 两端固定, 在横截面 C 处承受轴向载荷  $P$  作用, 试求杆两端的支反力。

**解** 1. 静力学方面

在载荷  $P$  作用下, AC 段伸长, CB 段缩短, 未知反力  $R_A$  与  $R_B$  的方向如图 2-36(b) 所示, 并与载荷  $P$  组成一共线力系, 其平衡方程为

$$\sum X = 0, \quad P - R_A - R_B = 0 \quad (a)$$

两个未知力, 一个平衡方程, 故为一度静不定。

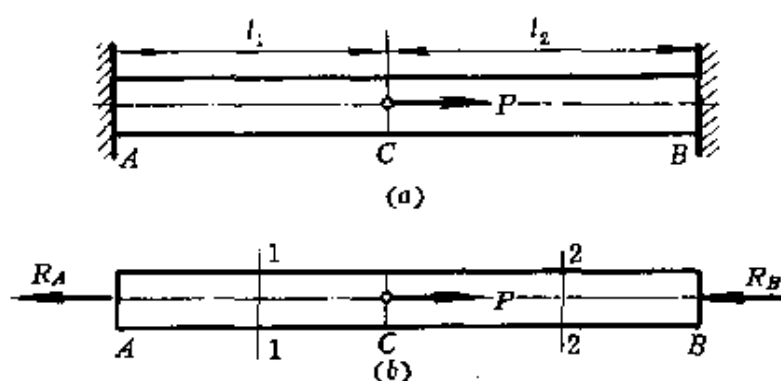


图 2-36

### 2. 几何方面

根据杆端约束条件可知, 受力后杆虽变形, 但其总长不变, 所以, 变形协调方程为

$$\Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = 0 \quad (b)$$

### 3. 物理方面

由图 2-36(b) 可以看出, AC 与 CB 段的轴力分别为

$$N_1 = R_A$$

$$N_2 = -R_B$$

故由虎克定律可知, AC 与 CB 段的轴向变形分别为

$$\Delta l_{AC} = \frac{R_A l_1}{EA} \quad (c)$$

$$\Delta l_{CB} = -\frac{R_B l_2}{EA} \quad (d)$$

式中,  $l_1$  与  $l_2$  分别代表 AC 与 CB 段的长度, EA 代表截面抗拉(压)刚度。

将式(c)、(d)代入式(b), 即得补充方程为

$$\frac{R_A l_1}{EA} - \frac{R_B l_2}{EA} = 0$$

或

$$R_A l_1 - R_B l_2 = 0 \quad (e)$$

最后, 联立求解平衡方程(a)与补充方程(e), 于是得

$$R_A = \frac{Pl_2}{l_1 + l_2}$$

$$R_B = \frac{Pl_1}{l_1 + l_2}$$

**例 13** 图 2-37(a) 所示结构, 杆 1、2 的弹性模量与横截面面积相同, 即  $E_1 = E_2 = E, A_1 = A_2 = A$ , 梁  $BD$  为刚体, 载荷  $P = 50\text{kN}$ , 许用拉应力  $[\sigma_+] = 160\text{MPa}$ , 许用压应力  $[\sigma_-] = 120\text{MPa}$ , 试确定各杆的横截面面积。

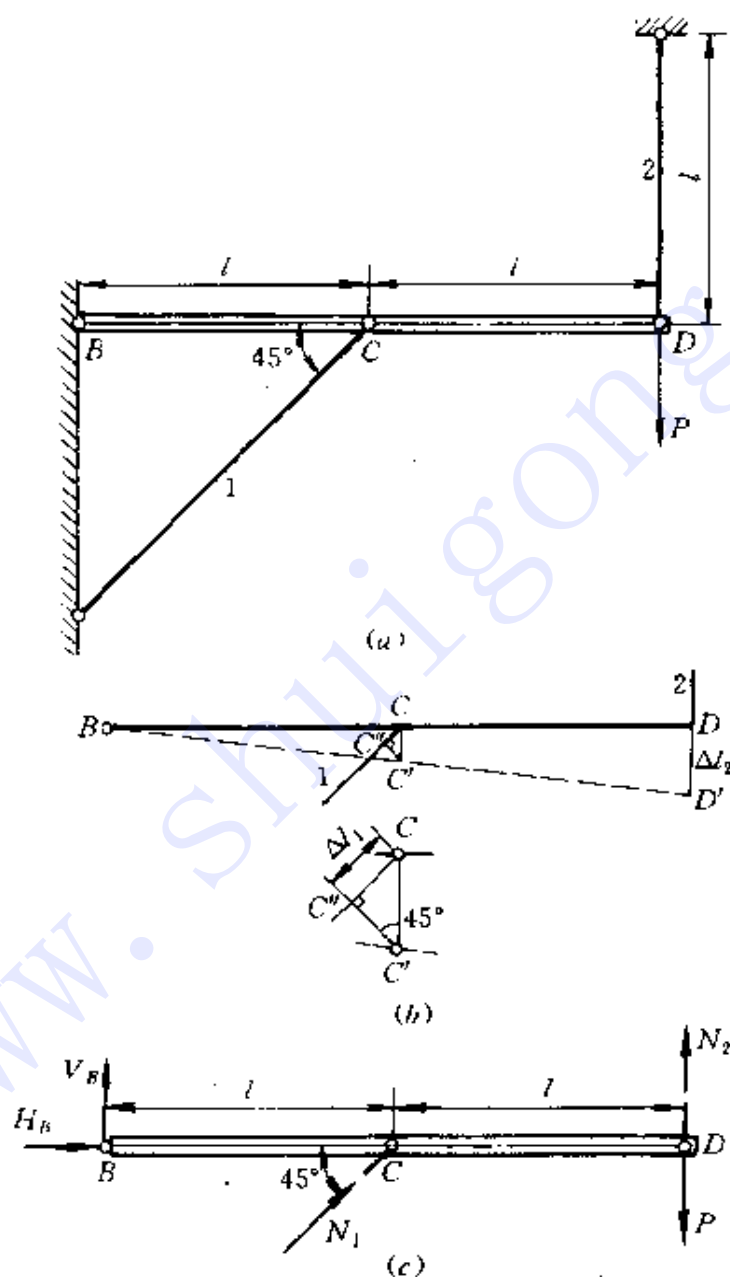


图 2-37

### 解 1. 问题分析

在载荷  $P$  作用下, 梁  $BD$  绕  $B$  点沿顺时针方向作微小转动, 杆 1 缩短, 杆 2 伸长(图 2-37(b)). 与此相应, 杆 1 受压, 杆 2 受拉, 梁  $BD$  的受力情况如图 2-37(c) 所示。

作用在梁  $BD$  上的各力组成一个平面一般力系, 其中轴力  $N_1$ 、 $N_2$  与支反力  $H_B$ 、 $V_B$  均为未知, 而有效平衡方程只有三个, 故为一次静不定。

### 2. 建立平衡方程

由平衡方程

$$\sum M_B = 0, \quad N_1 \sin 45^\circ \times l + N_2 \times 2l - P \times 2l = 0$$

得

$$N_1 + 2\sqrt{2}N_2 - 2\sqrt{2}P = 0 \quad (\text{a})$$

在本例中, 因只需求轴力  $N_1$  与  $N_2$ , 而另外两个平衡方程 ( $\sum X = 0$ 、 $\sum Y = 0$ ), 将包括未知反力  $H_B$  与  $V_B$ , 故可不必列出。

### 2. 建立补充方程

由图 2-37(b) 可知,

$$\overline{DD'} = 2\overline{CC'}$$

但由于

$$\overline{DD'} = \Delta_2$$

$$\overline{CC'} = \frac{\overline{CC''}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}\Delta_1$$

所以, 变形协调方程为

$$\Delta_2 = 2\sqrt{2}\Delta_1 \quad (\text{b})$$

根据虎克定律,

$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{\sqrt{2}N_1 l}{EA}$$

$$\Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{N_2 l}{EA}$$

将上述关系代入式(b), 得补充方程为

$$N_2 = 4N_1 \quad (c)$$

### 3. 轴力计算与截面设计

联立求解平衡方程(a)与补充方程(c),得

$$N_1 = \frac{2\sqrt{2}P}{8\sqrt{2}+1} = \frac{2\sqrt{2} \times 50}{8\sqrt{2}+1} = 11.49\text{kN}$$

$$N_2 = \frac{8\sqrt{2}P}{8\sqrt{2}+1} = \frac{8\sqrt{2} \times 50}{8\sqrt{2}+1} = 45.9\text{kN}$$

由此得杆1、2所需之横截面积分别为

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma_-]} = \frac{11.49 \times 10^3}{120} = 95.8\text{mm}^2$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma_+]} = \frac{45.9 \times 10^3}{160} = 287\text{mm}^2$$

但是,由于已选定 $A_1 = A_2$ ,且上述轴力正是在此条件下所求得,因此,应取

$$A_1 = A_2 = 287\text{mm}^2$$

否则,各杆的轴力及应力将随之改变。

### 4. 讨论

需要指出,在画受力图与变形图时,宜使受力图中的拉力或压力,分别与变形图中的伸长或缩短一一对应,这样,在利用虎克定律建立变形 $\Delta l$ 与轴力 $N$ 间的关系时,仅需考虑其绝对值即可。

## § 2-9 连接部分的强度计算

拉(压)杆与其它构件之间,或一般构件与构件之间,常采用耳片、轴销、螺栓、铆钉与键等相连接(图2-38),本节介绍连接件的强度计算。

应该指出,连接件的受力与变形均较复杂,在工程实际中,通常采用简化分析方法。其要点是:一方面对连接件的受力与应力分布进行某些简化,从而计算出各部分的名义应力;同时,对同类连接件进行破坏实验,并采用同样的计算方法,由破坏载荷确定材料



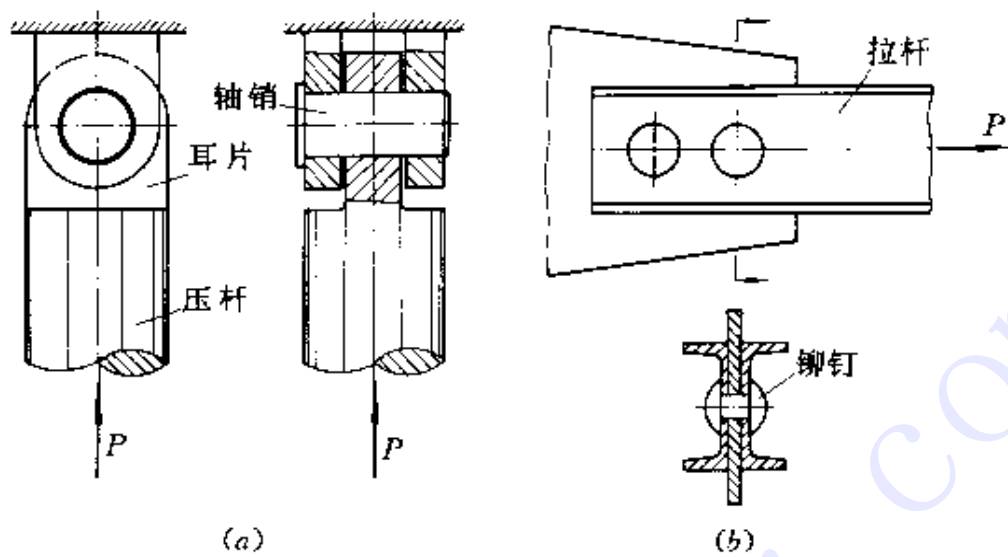


图 2-38

的极限应力。实践表明, 只要简化合理, 并有充分的试验数据, 此种分析方法仍然是可靠的。下面即以上述轴销、耳片连接为例, 介绍分析方法。

### 一、剪切与剪切强度条件

考虑图 2-38(a) 所示轴销, 其受力情况如图 2-39(a) 所示。可以看出, 作用在轴销上的外力具有以下特点: 外力垂直于轴销的轴线, 且作用线之间的距离很小(因为一般轴销都是短而粗的)。实验表明, 当外力过大时, 轴销将沿横截面 1-1 与 2-2 被剪断(图 2-39,

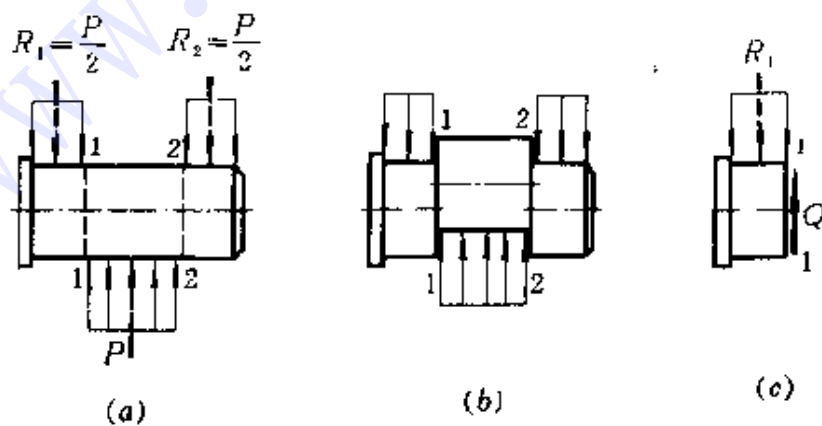


图 2-39

b)。横截面 1-1 与 2-2 称为**剪切面**。因此, 对于轴销等受剪连接件, 必须考虑其剪切强度问题。

首先分析轴销的内力。仍用截面法, 沿剪切面 1-1 假想地将轴销切开。由左段的受力可知(图 2-39, c), 横截面上的内力等于外力  $R_1$ , 并位于该截面内。作用线位于所切横截面的内力, 称为**剪力**, 并用  $Q$  表示。

在工程计算中, 通常均假定剪切面上的剪应力均匀分布。设剪切面的面积为  $A$ , 则剪切面上的剪应力为

$$\tau = \frac{Q}{A} \quad (2-25)$$

因此, 为保证连接件在工作时不被剪断, 剪切面上的剪应力不得超过连接件的许用剪应力  $[\tau]$ , 即要求

$$\frac{Q}{A} \leq [\tau] \quad (2-26)$$

式(2-26)称为**剪切强度条件**。许用剪应力等于连接件的剪切极限应力除以安全系数。如上所述, 剪切极限应力之值, 也是按式(2-25)并由剪切破坏载荷确定。

## 二、挤压与挤压强度条件

在外力作用下, 销与孔直接接触, 接触面上的应力称为**挤压应力**。实验表明, 当挤压应力过大时, 在孔、销接触的局部区域内, 将产生显著塑性变形(图 2-40), 以致影响孔、销间的正常配合, 显然, 此种显著塑性变形通常亦不容许。

在局部接触的圆柱面上, 挤压应力的分布如图 2-41(a) 所示, 最大挤压应力  $\sigma_{bs}$  发生在该表面的中部。设挤压力为  $F_b$ , 耳片的厚度为  $t$ , 销或孔的直径为  $d$ , 则根据试验与分析结果, 最大挤压应力为

$$\sigma_{bs} \approx \frac{F_b}{td} \quad (2-27)$$

由图 2-41(b) 可知, 受压圆柱面在相应径向平面上的投影面积亦为  $td$ , 因此, 最大挤压应力  $\sigma_{bs}$  数值上即等于上述径向截面的平均

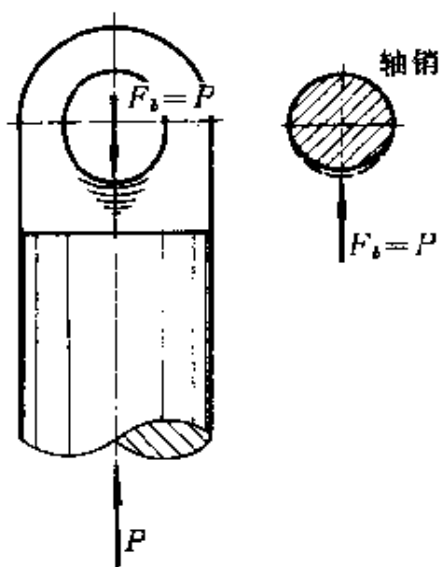


图 2-40

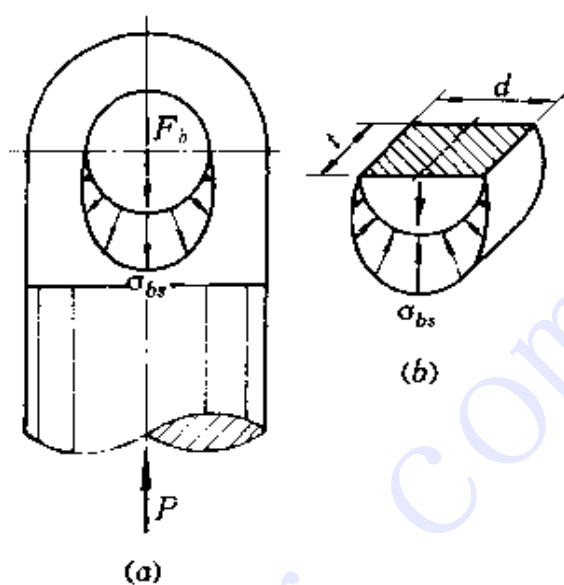


图 2-41

压应力。

由上述分析可知, 为防止挤压破坏, 最大挤压应力  $\sigma_{bs}$  不得超过连接件的许用挤压应力  $[\sigma_{bs}]$ , 即要求

$$\sigma_{bs} \leq [\sigma_{bs}] \quad (2-28)$$

式(2-28)称为**挤压强度条件**。许用挤压应力等于连接件的挤压极限应力除以安全系数。

应该指出, 对于不同类型的连接件, 其受力与应力分布亦不相同, 应根据其特点, 进行分析计算。

**例 14** 图 2-42(a) 所示铆接接头, 板厚  $t = 2\text{mm}$ , 板宽  $b = 15\text{mm}$ , 铆钉直径  $d = 4\text{mm}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 100\text{MPa}$ , 许用挤压应力  $[\sigma_{bs}] = 300\text{MPa}$ , 许用拉应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 试求接头的许用载荷。

**解** 1. 破坏形式分析

根据经验, 上述铆接接头的破坏形式可能有以下四种: 铆钉沿横截面 1-1 被剪断(图 2-42, a); 铆钉与孔壁互相挤压, 使铆钉与孔壁产生显著塑性变形(图 2-42, b); 板沿截面 2-2 被拉断(图 2-42, b); 板沿截面 3-3 被剪断(图 2-42, c)。实验表明, 当边距  $a$  足够大, 例如大于铆钉直径  $d$  的两倍, 最后一种形式的破坏通常即可避免。

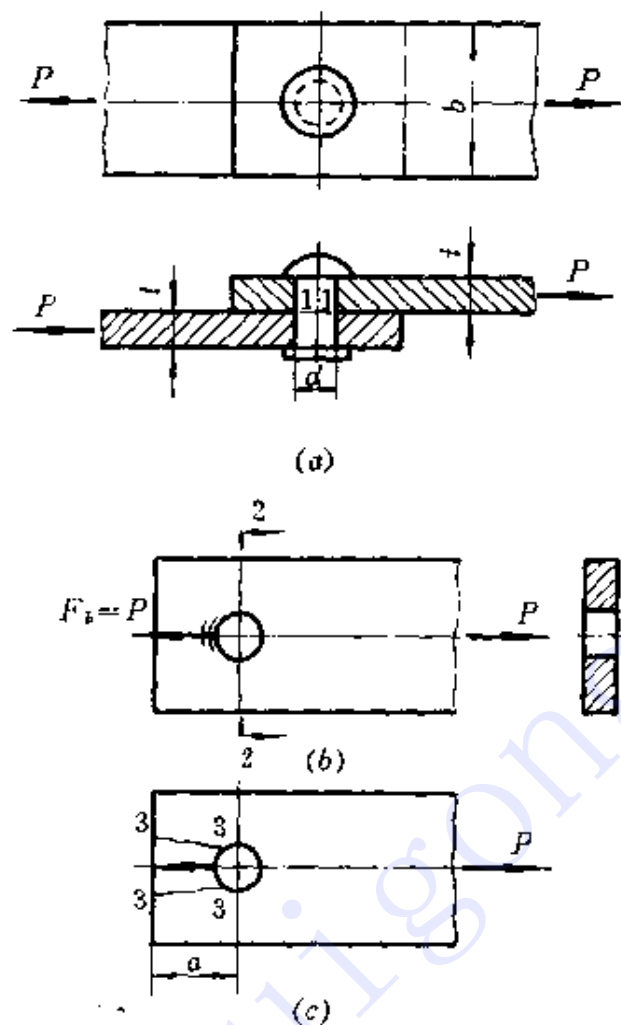


图 2-12

因此, 铆接接头的强度分析, 主要是针对前三种破坏形式而言。

## 2. 剪切强度分析

铆钉剪切面 1-1 上的剪力为

$$Q = P$$

根据剪切强度条件(2-26), 要求

$$\frac{4P}{\pi d^2} \leq [\tau]$$

因此, 从铆钉的剪切强度考虑, 接头的许用载荷为

$$[P_1] = \frac{\pi d^2 [\tau]}{4} = \frac{\pi \times 4^2 \times 100}{4} = 1.257 \text{kN}$$

## 3. 挤压强度分析

铆钉与孔壁的最大挤压应力为

$$\sigma_{hr} = \frac{P}{td}$$

根据挤压强度条件(2-28), 要求

$$\frac{P}{td} \leq [\sigma_{hr}]$$

因此, 从挤压强度考虑, 接头的许用载荷为

$$[P_1] = td[\sigma_{hr}] = 2 \times 4 \times 300 = 2.40\text{kN}$$

#### 4. 拉伸强度分析

横截面 2-2 上的正应力最大, 其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{(b-d)t}$$

因此, 从板的拉伸强度考虑, 接头的许用载荷为

$$[P_2] = (b-d)t[\sigma] = (15-4) \times 2 \times 160 = 3.52\text{kN}$$

综合考虑以上三方面, 可见接头的许用载荷为

$$[P] = [P_1] = 1.257\text{kN}$$

**例 15** 图 2-43(a) 所示直径为  $d$  的受拉杆件, 其端部的直径

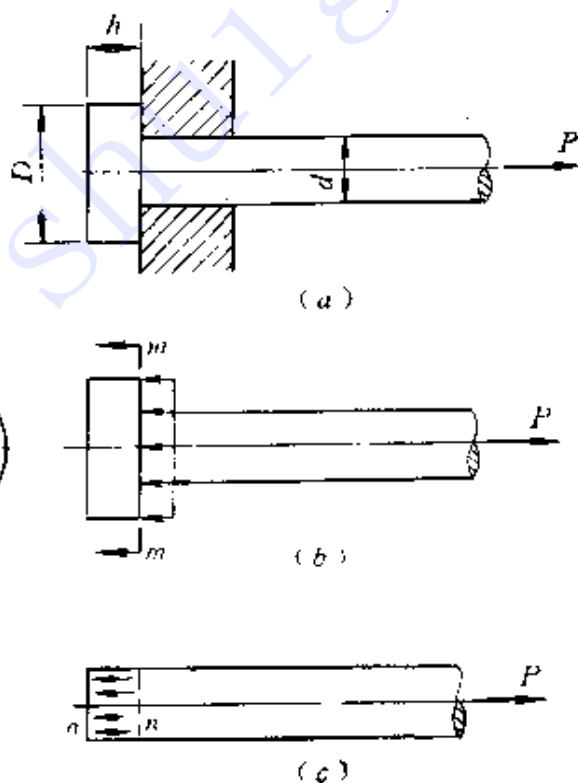


图 2-43

与高度分别为  $D$  与  $h$ 。已知拉力  $P = 11\text{kN}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 90\text{MPa}$ , 许用挤压应力  $[\sigma_{br}] = 200\text{MPa}$ , 许用拉应力  $[\sigma] = 120\text{MPa}$ , 试确定  $d$ 、 $D$  与  $h$  之值。

解 1. 受力分析

杆的受力如图 2-43(b) 所示, 圆环形表面  $m-m$  为挤压面, 圆柱面  $n-n$  为剪切面(图 2-43,c)。

2. 确定直径  $d$

杆件横截面上的拉应力为

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

根据拉伸强度条件, 要求

$$\frac{4P}{\pi d^2} \leq [\sigma]$$

由此得

$$d \geq 2\sqrt{\frac{P}{\pi[\sigma]}} = 2\sqrt{\frac{11 \times 10^3}{\pi \times 120}} = 10.8\text{mm}$$

取

$$d = 11.0\text{mm}$$

3. 确定端部直径  $D$

挤压面  $m-m$  上的挤压应力为

$$\sigma_{br} = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)}$$

根据挤压强度条件, 要求

$$\frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)} \leq [\sigma_{br}]$$

由此得

$$D \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma_{br}]} + d^2} = \sqrt{\frac{4 \times 11 \times 10^3}{\pi \times 200} + 11^2} = 13.82\text{mm}$$

取

$$D = 14.0\text{mm}$$

4. 确定端部高度  $h$



剪切面  $n-n$  上的剪应力为

$$\tau = \frac{P}{\pi dh}$$

根据剪切强度条件, 要求

$$\frac{P}{\pi dh} \leq [\tau]$$

由此得

$$h \geq \frac{P}{\pi d[\tau]} = \frac{11 \times 10^3}{\pi \times 11 \times 90} = 3.54 \text{mm}$$

取

$$h = 4.0 \text{mm}$$

**例 16** 图 2-44(a) 所示拉杆, 用四个直径相同的铆钉固定在格板上, 拉杆与铆钉的材料相同, 试校核铆钉与拉杆的强度。已知载荷  $P = 80 \text{kN}$ , 板宽  $b = 80 \text{mm}$ , 板厚  $t = 10 \text{mm}$ , 铆钉直径  $d =$

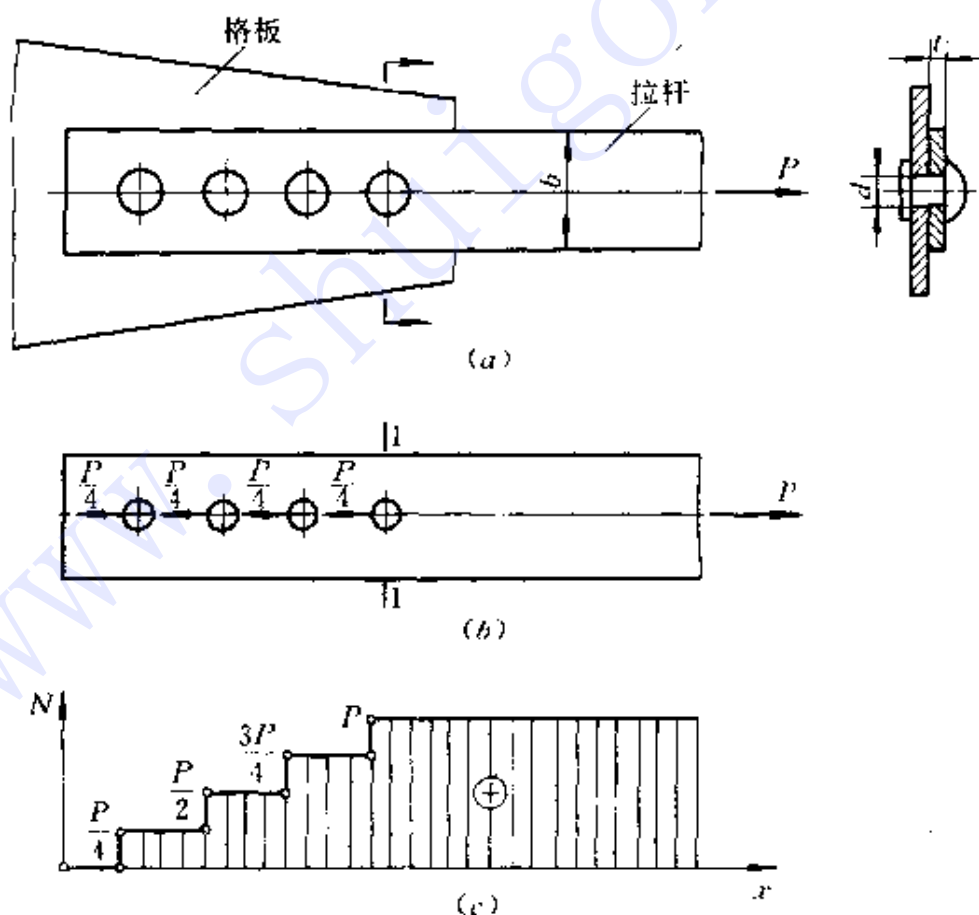


图 2-44

16mm, 许用剪应力 $[\tau] = 100\text{MPa}$ , 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 300\text{MPa}$ , 许用拉应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。

### 解 1. 铆钉的剪切强度计算

首先计算各铆钉剪切面上的剪力。分析表明, 当各铆钉的材料与直径均相同, 且外力作用线通过铆钉群剪切面的形心时, 通常即认为各铆钉剪切面上的剪力相同。因此, 对于图 2-44(a) 所示铆钉群, 各铆钉剪切面上的剪力均为

$$Q = \frac{P}{4} = \frac{80}{4} = 20\text{kN}$$

而相应的剪应力则为

$$\tau = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 20 \times 10^3}{\pi \times 16^2} = 99.5\text{MPa} < [\tau]$$

### 2. 铆钉的挤压强度计算

在本例中, 铆钉所受挤压力等于铆钉剪切面上的剪力, 即

$$F_b = Q = 20\text{kN}$$

因此, 最大挤压应力为

$$\sigma_{bs} = \frac{F_b}{td} = \frac{20 \times 10^3}{10 \times 16} = 125\text{MPa} < [\sigma_{bs}]$$

### 3. 拉杆的拉伸强度计算

拉杆的受力情况及轴力图分别如图 2-44(b)、(c) 所示。显然, 横截面 1-1 上的正应力最大, 其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{(b-d)t} = \frac{80 \times 10^3}{(80-16) \times 10} = 125\text{MPa} < [\sigma]$$

可见, 铆钉与拉杆均满足强度要求。

## 复 习 题

1. 轴向拉伸与压缩的外力与变形有何特点? 试列举轴向拉伸与压缩的实例。

2. 何谓内力? 何谓截面法?

3. 何谓轴力?轴力的正负符号是如何规定的?如何用截面法计算轴力?如何画轴力图?

4. 何谓平均应力与应力?何谓正应力与剪应力?应力的量纲与单位是什么?

5. 拉(压)杆横截面上的正应力公式是如何建立的?该公式的应用条件是什么?何谓圣维南原理?

6. 拉(压)杆斜截面上的应力公式是如何建立的?最大正应力与最大剪应力各位于何截面,其值为何?正应力、剪应力与方位角的正负符号是如何规定的?

7. 低碳钢在拉伸过程中表现为几个阶段?各有何特点?何谓比例极限、屈服应力与强度极限?何谓弹性应变?何谓塑性应变?

8. 何谓塑性材料?何谓脆性材料?如何衡量材料的塑性?试比较塑性材料与脆性材料的力学性能的特点?

9. 金属材料试件在轴向拉伸与压缩时有几种破坏形式,各与何种应力有关?

10. 何谓许用应力?安全系数的确定原则是什么?何谓强度条件?利用强度条件可以解决哪些形式的强度问题?

11. 虎克定律是如何建立的?有几种表示形式?该定律的应用条件是什么?何谓截面抗拉(压)刚度?

12. 何谓弹性模量?何谓泊松比?其量纲是什么?

13. 何谓小变形?如何利用切线代替圆弧的方法确定接点的位移?

14. 何谓静定与静不定问题?试述求解静不定问题的方法与步骤?画受力图与变形图时应注意什么?与静定问题相比较,静不定问题有何特点?

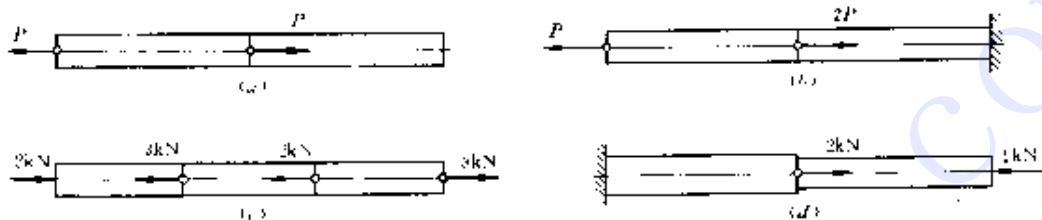
15. 如何计算连接件的剪应力与挤压应力?如何分析其强度问题?

16. 试指出下列概念的区别:内力与应力;正应力与剪应力;纵向变形与正应变;比例极限与弹性极限;弹性变形与塑性变形;延伸率与正应变;强度极限与极限应力;工作应力与许用应力;变

形与位移。

## 习 题

题 2.1 试计算图示各杆的轴力, 并指出其最大值。

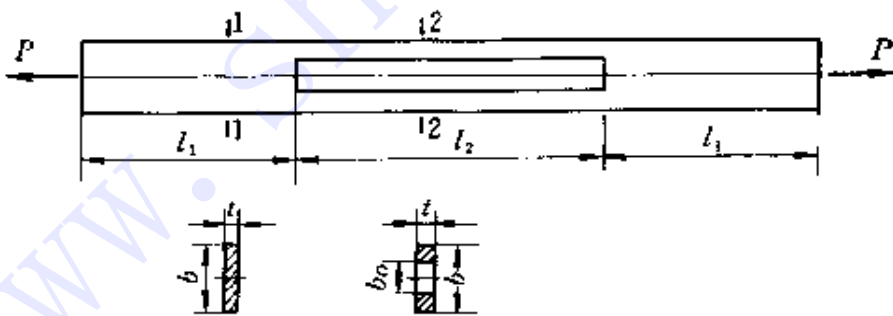


题 2.1 图

题 2.2 试画题 2.1 所示各杆的轴力图。

题 2.3 一空心圆截面杆, 内径  $d = 30\text{mm}$ , 外径  $D = 40\text{mm}$ , 承受轴向拉力  $P = 40\text{kN}$  作用, 试求横截面上的正应力。

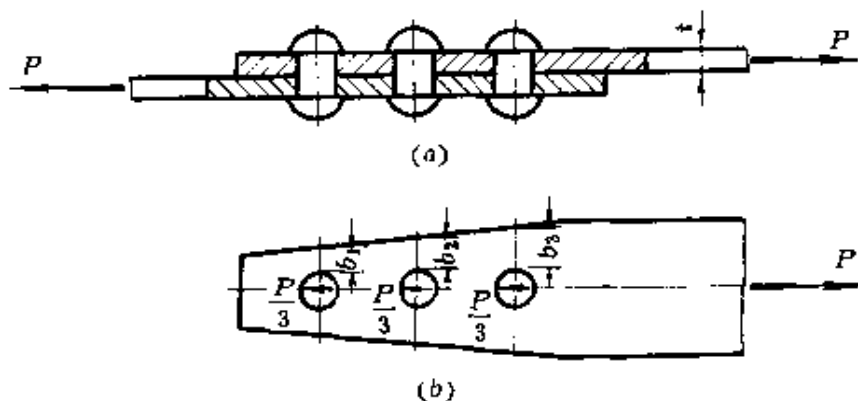
题 2.4 图示中段开槽的板件, 两端承受轴向载荷  $P$  作用, 试计算截面 1-1 与 2-2 上的正应力。已知载荷  $P = 14\text{kN}$ , 板宽  $b = 20\text{mm}$ , 槽宽  $b_0 = 10\text{mm}$ , 板厚  $t = 4\text{mm}$ 。



题 2.4 图

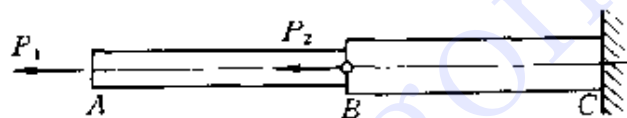
题 2.5 题 2.1(c) 所示杆, 若该杆的横截面面积  $A = 50\text{mm}^2$ , 试计算杆内的最大拉应力与最大压应力。

题 2.6 图(a)所示铆接件, 板件的受力情况如图(b)所示。已知  $P = 7\text{kN}$ ,  $t = 1.5\text{mm}$ ,  $b_1 = 4\text{mm}$ ,  $b_2 = 5\text{mm}$ ,  $b_3 = 6\text{mm}$ 。试计算板内的最大拉应力。



题 2.6 图

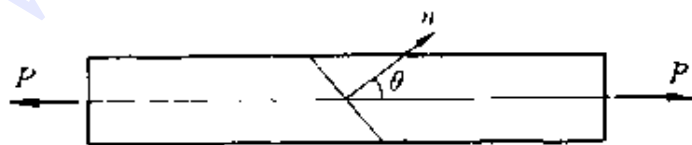
题 2.7 图示圆截面杆, 承受轴向载荷  $P_1 = 50\text{kN}$  与  $P_2$  作用,  $AB$  与  $BC$  段的直径分别为  $d_1 = 20\text{mm}$ 、 $d_2 = 30\text{mm}$ , 如欲使  $AB$  与  $BC$  段横截面上的正应力相同, 试求载荷  $P_2$  之值。



题 2.7 图

题 2.8 题 2.7 图所示圆截面杆, 已知载荷  $P_1 = 200\text{kN}$ ,  $P_2 = 100\text{kN}$ ,  $AB$  段的直径  $d_1 = 40\text{mm}$ , 如欲使  $BC$  段与  $AB$  段横截面上的正应力相同, 试求  $BC$  段的直径。

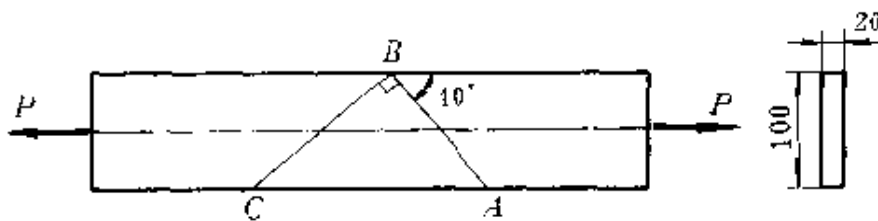
题 2.9 图示木杆, 承受轴向载荷  $P = 10\text{kN}$  作用, 杆的横截面面积  $A = 1000\text{mm}^2$ , 粘接面的方位角  $\theta = 45^\circ$ , 试计算该截面的正应力与剪应力, 并画出应力的方向。



题 2.9 图

题 2.10 题 2.9 所述木杆, 若欲使粘接面上的正应力为其剪应力的两倍, 则粘接面的方位角  $\theta$  应为何值。

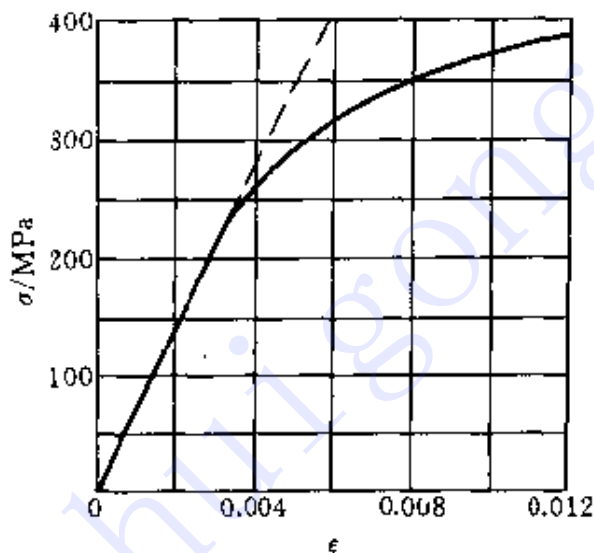
题 2.11 图示板件, 承受轴向载荷  $P = 200\text{kN}$ , 试计算互垂截面  $AB$  与  $BC$  上的正应力与剪应力, 以及板内的最大正应力与最



题 2.11 图

大剪应力。

题 2.12 某材料的应力 - 应变曲线如图所示, 试确定材料的比例极限  $\sigma_p$  与屈服极限  $\sigma_{0.2}$ 。



题 2.12 图

题 2.13 试根据题 2.12 图所示应力 - 应变曲线, 确定  $\sigma = 350\text{MPa}$  时材料的应变, 及相应的弹性应变  $\epsilon_e$  与塑性应变  $\epsilon_p$ 。

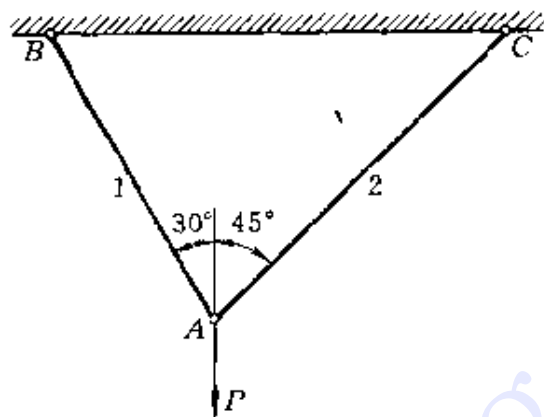
题 2.14 一直径为  $d = 10\text{mm}$  的试件, 标距  $l_0 = 50\text{mm}$ , 拉伸断裂后, 两标点间的长度  $l_1 = 63.2\text{mm}$ , 颈缩处的直径  $d_1 = 5.9\text{mm}$ , 试确定材料的延伸率与断面收缩率, 并判断属于何种材料(脆性或塑性)。

题 2.15 一空心圆截面杆, 内径  $d = 15\text{mm}$ , 承受轴向压力  $P = 20\text{kN}$  作用。已知材料的屈服应力  $\sigma_s = 240\text{MPa}$ , 安全系数  $n_s = 1.6$ 。试确定杆的外径  $D$ 。

题 2.16 图示桁架, 杆 1、2 的横截面均为圆形, 直径分别为

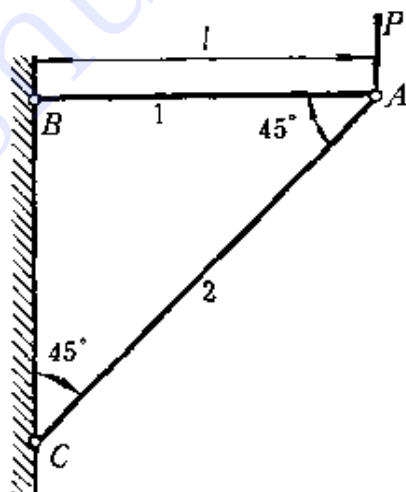


$d_1 = 30\text{mm}$  与  $d_2 = 20\text{mm}$ , 两杆材料相同, 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。该桁架在接点  $A$  处承受铅垂方向的载荷  $P = 80\text{kN}$  作用, 试校核桁架的强度。



题 2.16 图

题 2.17 图示桁架, 杆 1 为圆截面钢杆, 杆 2 为方截面木杆, 在接点  $A$  处承受铅垂方向的载荷  $P$  作用, 试确定钢杆的直径  $d$  与木杆截面的边宽  $b$ 。已知载荷  $P = 50\text{kN}$ , 钢的许用应力  $[\sigma_s] = 160\text{MPa}$ , 木的许用应力  $[\sigma_w] = 10\text{MPa}$ 。



题 2.17 图

题 2.18 断裂的铬锰硅钢管需加套管修理, 若套管的材料为 20 钢, 试确定套管的外径  $D_0$ 。已知铬锰硅钢与 20 钢的屈服应力分别为  $\sigma_s = 900\text{MPa}$ 、 $\sigma'_s = 250\text{MPa}$ , 铬锰硅钢管的内、外径分别  $d =$

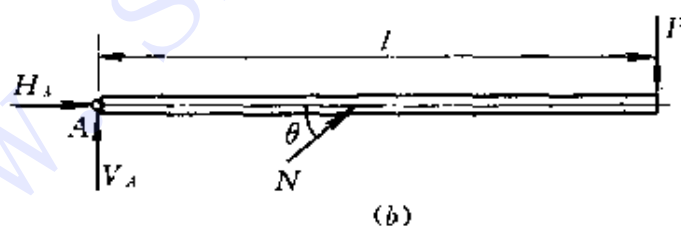
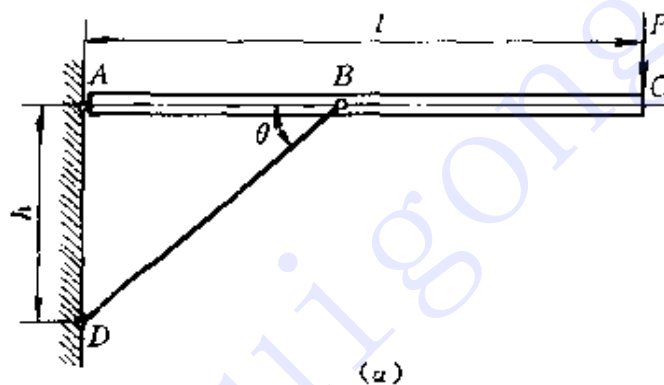


题 2.18 图

27mm 与  $D = 30\text{mm}$ 。

题 2.19 题 2.16 所述桁架, 试定载荷  $P$  的许用值  $[P]$ 。

题 2.20 图(a) 所示结构,  $AC$  为刚性梁,  $BD$  为斜撑杆, 载荷  $P$  作用于截面  $C$ 。试问: 为使斜撑杆的重量最轻, 斜撑杆与梁之间的夹角  $\theta$  应取何值。



题 2.20 图

解: 1. 斜撑杆的受力分析

设斜撑杆的轴力为  $N$ , 则梁  $AC$  的受力如图(b) 所示。由平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad N \sin \theta \cdot \frac{h}{\tan \theta} - Pl = 0$$

得

$$N = \frac{Pl}{h \cos \theta}$$

## 2. 最轻重量设计

设斜撑杆的许用应力为 $[\sigma]$ , 则其横截面积为

$$A = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{Pl}{[\sigma] h \cos \theta}$$

与此相应, 杆的体积为

$$V = Al_{BD} = \frac{Pl}{[\sigma] h \cos \theta} \frac{h}{\sin \theta} = \frac{2Pl}{[\sigma] \sin 2\theta}$$

显然, 欲使斜撑杆的重量最轻, 应使其体积最小。由上式, 得

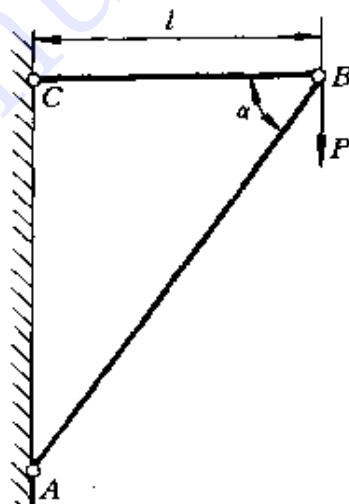
$$\sin 2\theta = 1$$

由此得

$$\theta = 45^\circ$$

题 2.21 图示桁架, 承受垂直载荷  $P$  作用。已知杆的许用应力为 $[\sigma]$ , 试问在接点  $B, C$  的位置保持不变的条件下, 欲使结构重量最轻,  $\alpha$  应取何值(即确定接点  $A$  的最佳位置)。

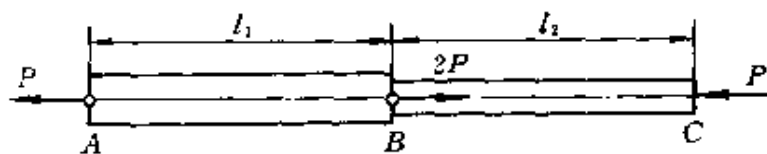
提示: 参阅题 2.20。



题 2.21 图

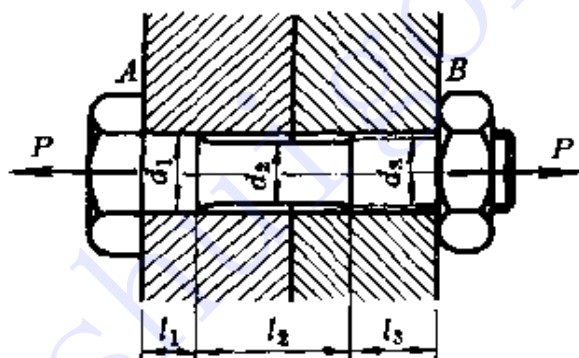
题 2.22 图示阶梯形杆  $AC$ ,  $P = 10\text{kN}$ ,  $l_1 = l_2 = 400\text{mm}$ ,  $A_1 = 2A_2 = 100\text{mm}^2$ ,  $E = 200\text{GPa}$ , 试计算杆  $AC$  的轴向变形  $\Delta l$ 。

题 2.23 图示螺栓, 拧紧时产生  $\Delta l = 0.10\text{mm}$  的轴向变形,



题 2.22 图

试求预紧力  $P$ , 并校核螺栓的强度。已知:  $d_1 = 8.0\text{mm}$ ,  $d_2 = 6.8\text{mm}$ ,  $d_3 = 7.0\text{mm}$ ;  $l_1 = 6.0\text{mm}$ ,  $l_2 = 29\text{mm}$ ,  $l_3 = 8\text{mm}$ ;  $E = 210\text{GPa}$ ,  $[\sigma] = 500\text{MPa}$ 。

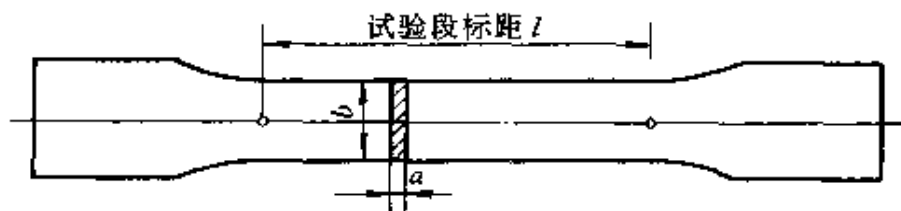


题 2.23 图

题 2.24 图示硬铝试件, 厚度  $a = 2\text{mm}$ , 试验段板宽  $b = 20\text{mm}$ , 标距  $l = 70\text{mm}$ , 在轴向拉力  $P = 6\text{kN}$  的作用下, 测得试验段伸长  $\Delta l = 0.15\text{mm}$ , 板宽缩短  $\Delta b = 0.014\text{mm}$ , 试计算硬铝的弹性模量  $E$  与泊松比  $\mu$ 。

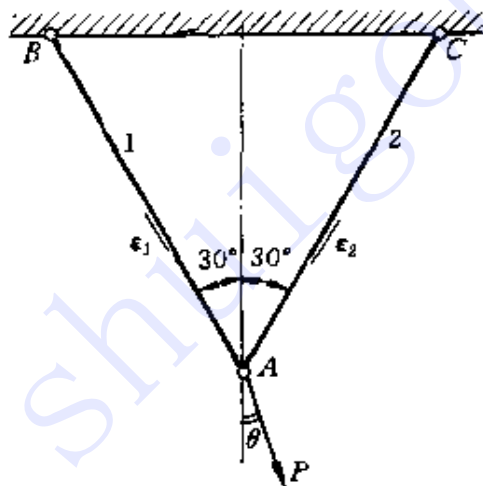
题 2.25 一外径  $D = 60\text{mm}$ , 内径  $d = 20\text{mm}$  的空心圆截面杆, 两端承受轴向拉力  $P = 200\text{kN}$  作用, 若弹性模量  $E = 80\text{GPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.30$ , 试计算该杆外径的改变量  $\Delta D$ 。

题 2.26 图示桁架, 杆 1、2 的横截面面积与材料均相同, 在接点 A 处承受载荷  $P$  作用。从试验中测得杆 1、2 的纵向正应变分



题 2.24 图

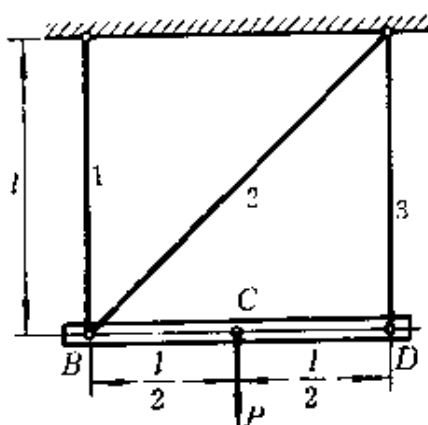
别为  $\epsilon_1 = 4.0 \times 10^{-4}$  与  $\epsilon_2 = 2.0 \times 10^{-4}$ , 试确定载荷  $P$  及其方位角  $\theta$  之值。已知:  $A_1 = A_2 = 200\text{mm}^2$ ,  $E_1 = E_2 = 200\text{GPa}$ 。



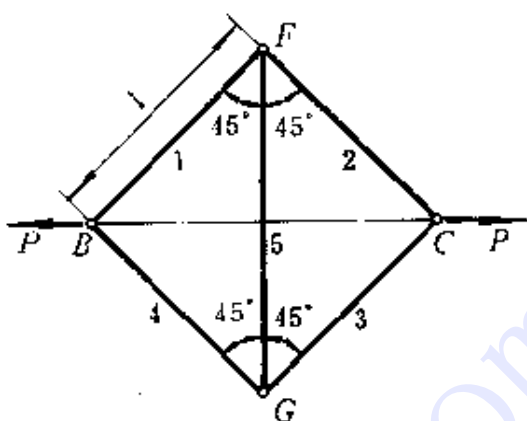
题 2.26 图

题 2.27 题 2.17 所述桁架, 若杆  $AB$  和  $AC$  的横截面面积分别为  $A_1 = 400\text{mm}^2$ 、 $A_2 = 8000\text{mm}^2$ , 杆  $AB$  的长度  $l = 1.5\text{m}$ , 钢与木的弹性模量分别为  $E_s = 200\text{GPa}$ 、 $E_w = 10\text{GPa}$ 。试计算接点  $A$  的水平与垂直位移。

题 2.28 图示结构, 梁  $AB$  为刚体, 杆 1、2、3 的材料和横截面面积相同, 在梁  $AB$  的中点  $C$ , 承受铅垂方向的载荷  $P$ , 试计算  $C$  点的水平与垂直位移。已知载荷  $P = 20\text{kN}$ , 杆 1、2、3 的横截面面积均为  $A = 100\text{mm}^2$ , 弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 梁长  $l = 1000\text{mm}$ 。



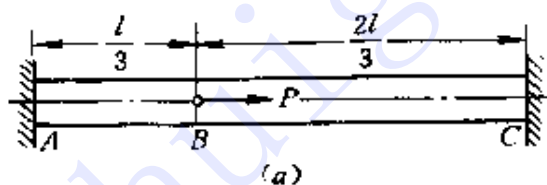
题 2.28 图



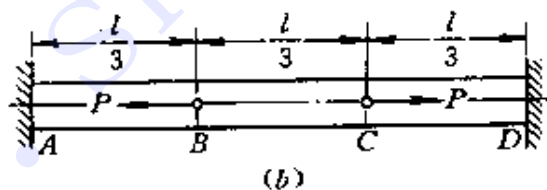
题 2.29 图

题 2.29 图示桁架, 承受载荷  $P$  作用。已知各杆的横截面积均为  $A$ , 材料的弹性模量均为  $E$ , 试计算接点  $B$ 、 $C$  间的相对位移  $\Delta_{B/C}$ 。

题 2.30 图示两端固定等截面直杆, 横截面的面积为  $A$ , 承受轴向载荷  $P$  作用, 试计算杆内横截面上的最大拉应力与最大压应力。



(a)



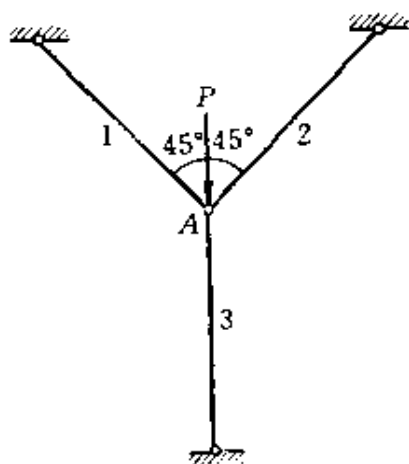
(b)

题 2.30 图

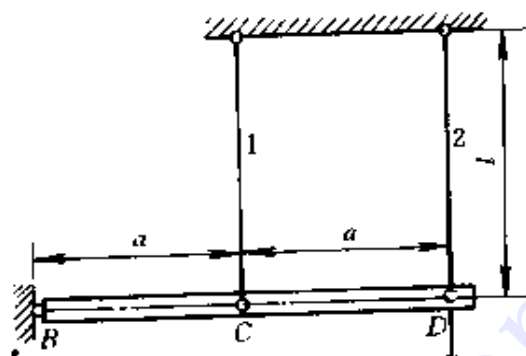
题 2.31 图示桁架, 各杆的横截面积、长度和弹性模量均相同, 并分别为  $A$ 、 $l$  与  $E$ , 在接点  $A$  处承受铅垂方向的载荷  $P$  作用, 试计算接点  $A$  的垂直位移。

题 2.32 图示结构, 梁  $BD$  为刚体, 杆 1、2 用同一种材料制成, 横截面积均为  $A = 300\text{mm}^2$ , 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 载荷  $P = 50\text{kN}$ , 试校核杆 1、2 的强度。



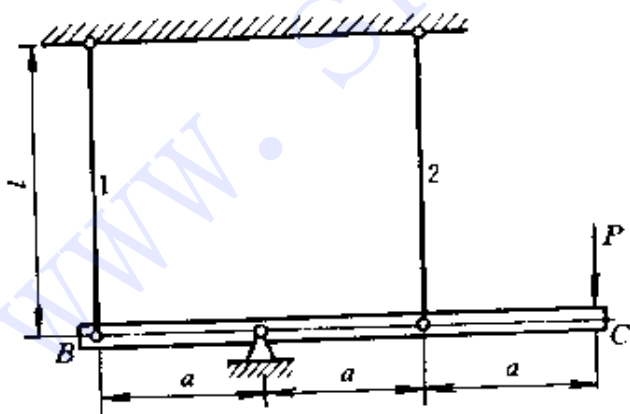


题 2.31 图

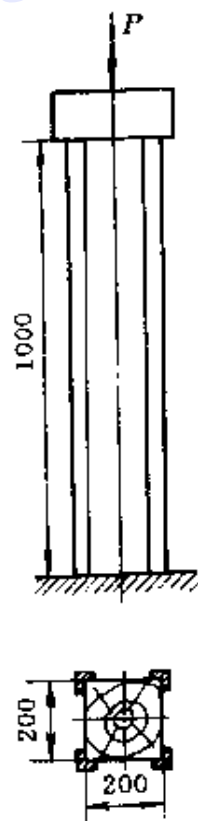


题 2.32 图

题 2.33 图示结构, 杆 1、2 的弹性模量均为  $E$ , 横截面面积均为  $A$ , 梁  $BC$  为刚体, 载荷  $P = 20\text{kN}$ , 许用拉应力  $[\sigma_+] = 160\text{MPa}$ , 许用压应力  $[\sigma_-] = 110\text{MPa}$ , 试确定各杆的横截面面积。



题 2.33 图

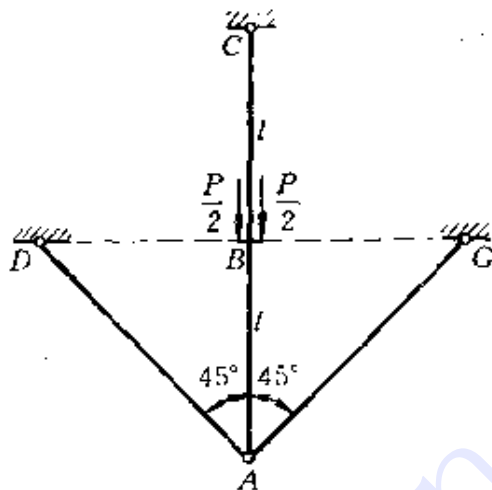


题 2.34 图

题 2.34 图示木柱, 由四根横截面面积均为  $A = 186\text{mm}^2$  的角钢所加强。已知木杆的弹性模量  $E_w = 10\text{GPa}$ , 钢的弹性模量  $E_s$ ,

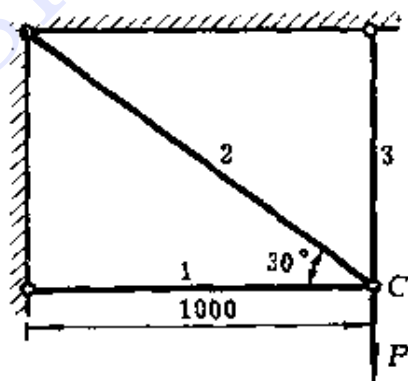
$= 200\text{GPa}$ , 立柱承受轴向载荷  $P = 100\text{kN}$ , 试计算木柱与角钢所受压力与横截面上的正应力。

题 2.35 图示桁架, 各杆的横截面面积与弹性模量均相同, 试计算在载荷  $P$  作用时各杆的轴力。



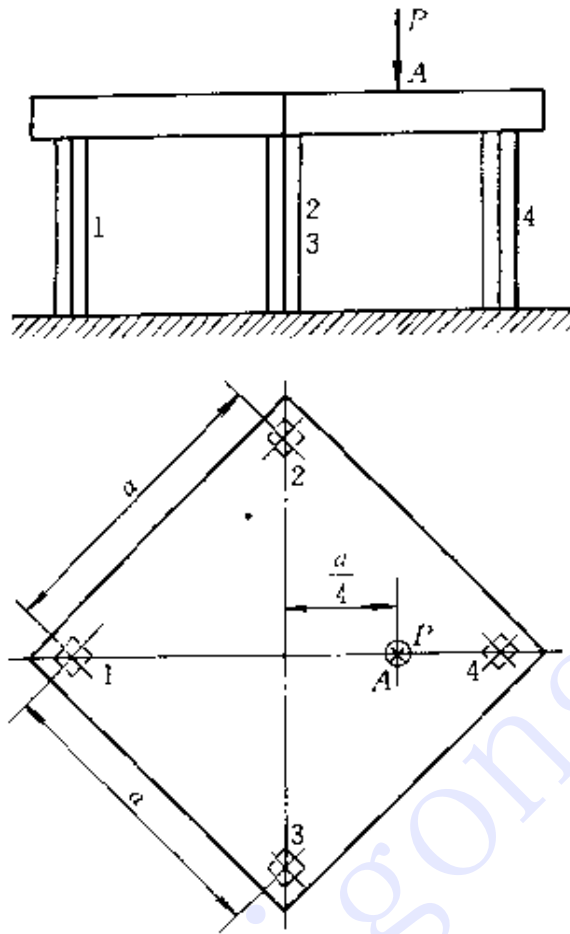
题 2.35 图

题 2.36 图示桁架, 杆 1、2、3 分别用铸铁、铜和钢制成, 许用应力分别为  $[\sigma_1] = 80\text{MPa}$ 、 $[\sigma_2] = 60\text{MPa}$ 、 $[\sigma_3] = 120\text{MPa}$ , 弹性模量分别为  $E_1 = 160\text{GPa}$ 、 $E_2 = 100\text{GPa}$ 、 $E_3 = 200\text{GPa}$ 。若载荷  $P = 160\text{kN}$ ,  $A_1 = A_2 = 2A_3$ , 试确定各杆的横截面面积。



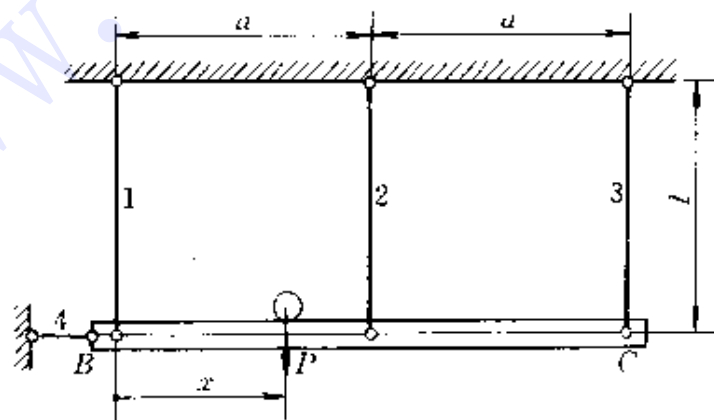
题 2.36 图

题 2.37 图示刚性平台, 由四根相同的立柱支持, 设载荷  $P$  作用于平台  $A$  点, 试求各立柱所受压力。



题 2.37 图

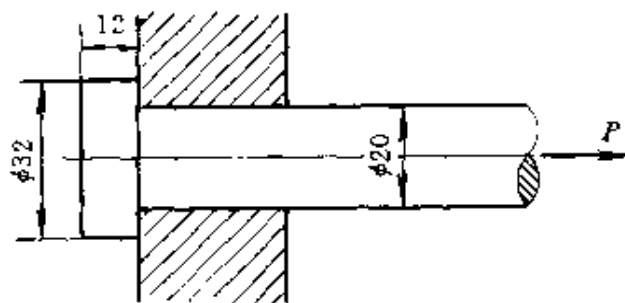
题 2.38 图示结构, 梁  $BC$  为刚体, 杆 1、2、3 的材料、横截面积均相同, 载荷  $P$  可沿横梁移动, 其活动范围为  $0 \leq x \leq 2a$ , 试求各杆的最大轴力值。



题 2.38 图

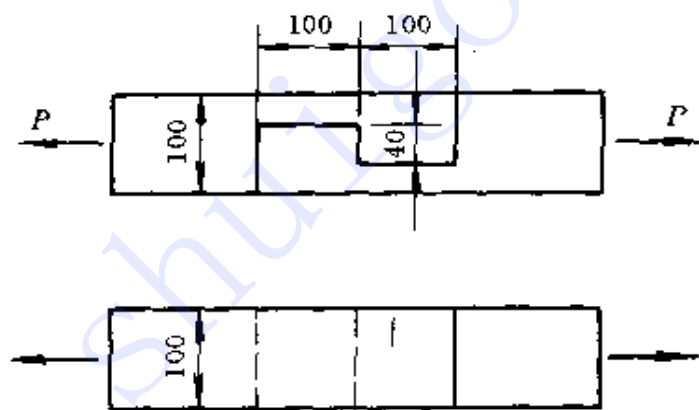
提示: 将各杆的轴力表示为  $x$  的函数, 从而确定轴力的最大值。

题 2.39 试计算图示杆件的许用拉力  $[P]$ 。已知许用应力  $[\sigma] = 120\text{MPa}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 90\text{MPa}$ , 许用挤压应力  $[\sigma_b] = 240\text{MPa}$ 。



题 2.39 图

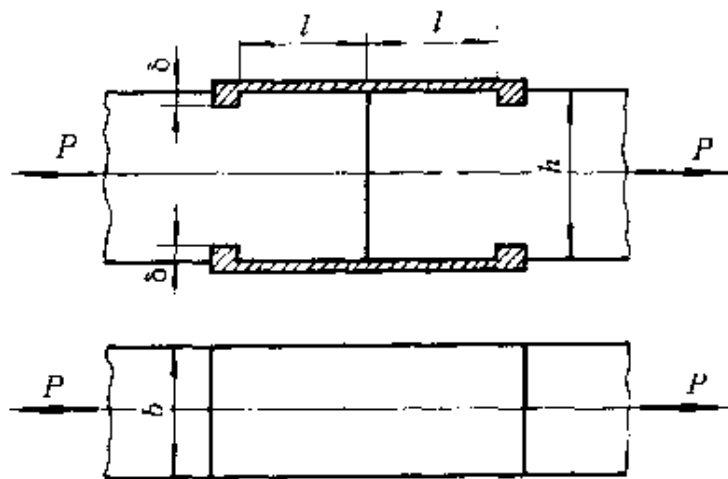
题 2.40 图示木榫接头,  $P = 50\text{kN}$ , 试求接头的剪切与挤压应力。



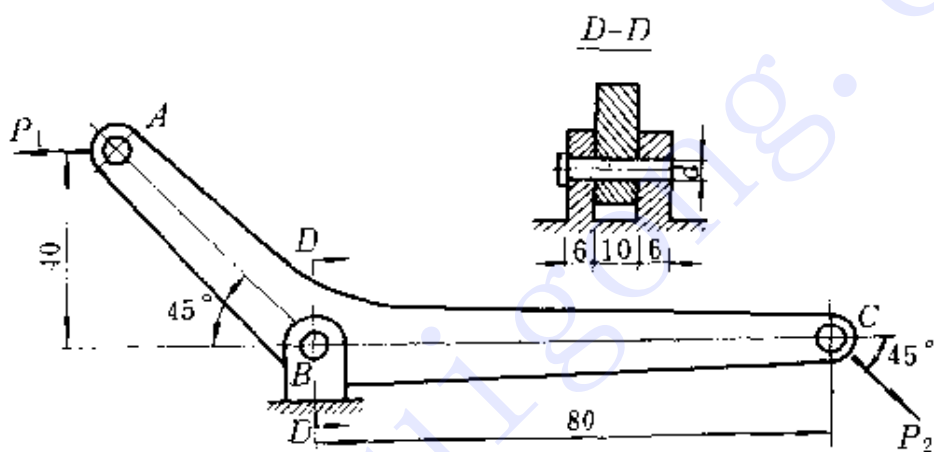
题 2.40 图

题 2.41 图示两根矩形截面木杆, 用两块钢板连接在一起, 承受轴向载荷  $P = 45\text{kN}$  作用。已知木杆的截面宽度  $b = 250\text{mm}$ , 沿木材的顺纹方向, 许用拉应力  $[\sigma] = 6\text{MPa}$ , 许用挤压应力  $[\sigma_b] = 10\text{MPa}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 1\text{MPa}$ , 试确定接头的尺寸  $\delta$ ,  $l$  与  $h$ 。

题 2.42 图示摇臂, 承受载荷  $P_1$  与  $P_2$  作用, 试确定轴销  $B$  的直径  $d$ 。已知载荷  $P_1 = 50\text{kN}$ ,  $P_2 = 35.4\text{kN}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 100\text{MPa}$ , 许用挤压应力  $[\sigma_b] = 240\text{MPa}$ 。

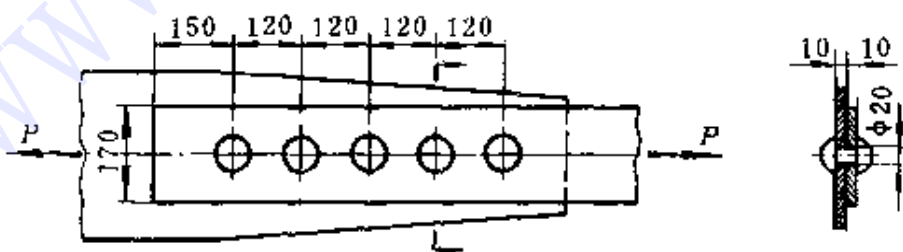


题 2.41 图



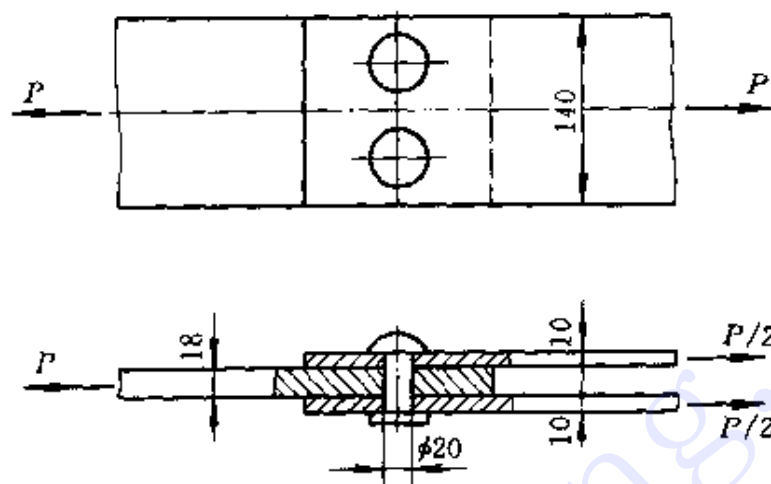
题 2.42 图

题 2.43 试校核图示铆接接头的强度, 铆钉与板件的材料相同, 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 120\text{MPa}$ , 许用挤压应力  $[\sigma_{bs}] = 340\text{MPa}$ , 载荷  $P = 230\text{kN}$ .



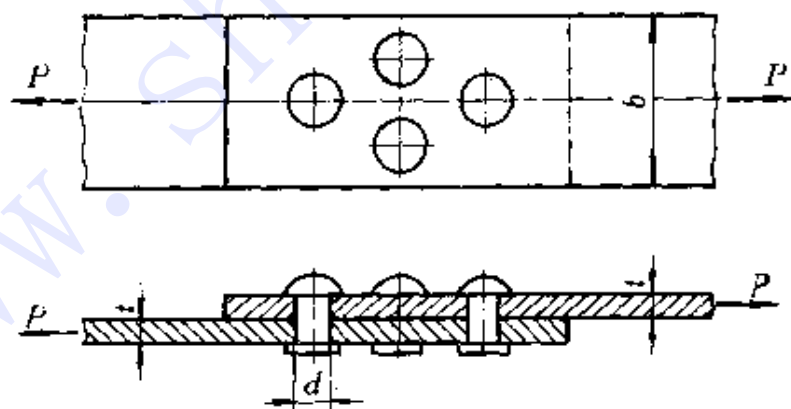
题 2.43 图

题 2.44 图示接头, 承受轴向载荷  $P$  作用, 试计算接头的许用载荷。已知: 铆钉直径  $d = 20\text{mm}$ , 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 120\text{MPa}$ , 许用挤压应力  $[\sigma_{bs}] = 340\text{MPa}$ 。板件与铆钉的材料相同。



题 2.44 图

题 2.45 图示接头, 承受轴向载荷  $P$  作用, 试校核接头的强度。已知: 载荷  $P = 80\text{kN}$ , 板宽  $b = 80\text{mm}$ , 板厚  $t = 10\text{mm}$ , 铆钉直径  $d = 16\text{mm}$ , 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 120\text{MPa}$ , 许用挤压应力  $[\sigma_{bs}] = 340\text{MPa}$ 。板件与铆钉的材料相同。



题 2.45 图



## 第三章 扭 转

### § 3-1 引 言

图 3-1(a) 所示传动轴, 在其两端垂直于杆件轴线的平面内, 作用一对大小相等、方向相反的力矩。在上述力矩作用下, 传动轴产生图 3-1(b) 所示的变形。

又如, 图 3-2(a) 所示驾驶盘轴, 在轮盘边缘作用一对方向相

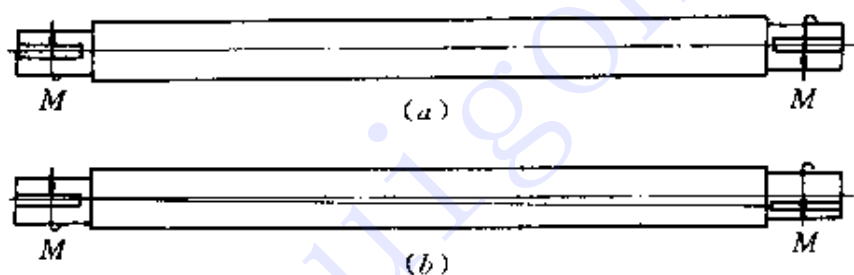


图 3-1

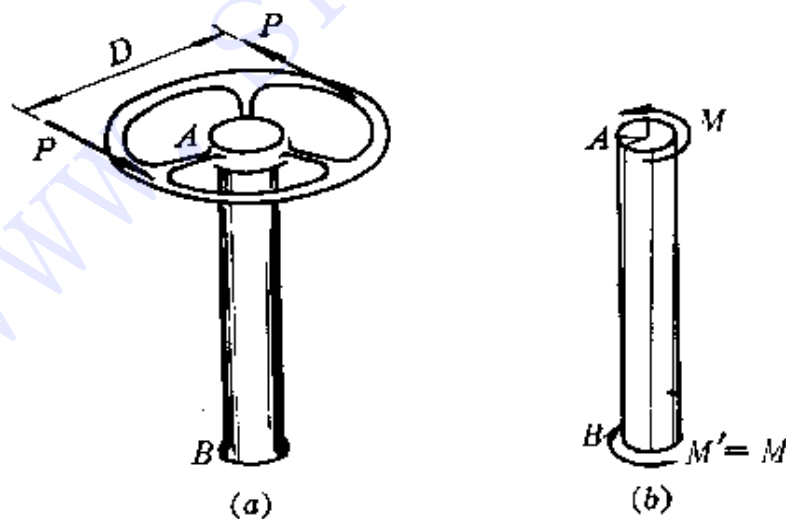


图 3-2

反的切向力  $P$  构成一力偶, 其矩为  $M = PD$ 。根据平衡条件可知, 在轴的另一端, 必存在一反作用力矩, 其值  $M' = M$ 。在力矩  $M$  与  $M'$  的作用下, 轴的变形如图 3-2(b) 所示。

可以看出, 这些构件的共同特点是: 构件为直杆, 并在垂直于杆件轴线平面内作用有力矩或力偶。在这种情况下, 杆件各横截面绕轴线作相对旋转(图 3-3), 即产生扭转变形。使杆产生扭转变形的外力矩与外力偶矩, 统称为**扭力矩**。凡是以扭转变形为主要变形的直杆称为**轴**, 轴的变形以横截面间绕轴线的相对角位移即**扭转角**表示。

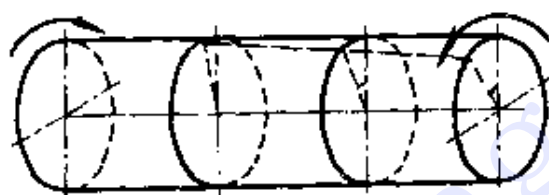


图 3-3

本章研究轴的外力、内力、应力与变形, 并在此基础上讨论轴的强度与刚度计算。螺旋弹簧的主要变形为扭转, 故亦属本章研究之列。

## § 3-2 扭力矩与扭矩

### 一、功率、转速与扭力矩之间的关系

作用在轴上的扭力矩, 一般可通过力的平移, 并利用平衡条件确定。但是, 对于传动轴等转动构件, 通常只知道它们的转速与所传递的功率。因此, 在分析内力之前, 首先需要根据转速与功率计算轴所承受的扭力矩。

由理论力学可知, 力偶在单位时间内所作之功即功率  $N_p$ , 等于该力偶之矩  $M$  与相应角速度  $\omega$  之乘积, 即

$$N_p = M\omega$$

在工程实际中, 功率  $N_p$  的常用单位为 kW(千瓦), 转速  $n$  的常

用单位为  $r/\text{min}$ (转/分), 在这种情况下, 上式变为

$$N_p \times 10^3 = M \times \frac{2\pi n}{60}$$

由此得

$$M = 9549 \frac{N_p}{n} \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (3-1)$$

例如, 图 3-4 所示轴  $AB$ , 由电机带动, 已知轴的转速  $n = 1450 r/\text{min}$ , 由电机输入的功率  $N_p = 10 \text{kW}$ , 则由式(3-1)可知, 电机通过联轴器作用在轴  $AB$  上的扭力矩为

$$M = \frac{9549 \times 10}{1450} = 65.9 \text{N} \cdot \text{m}$$

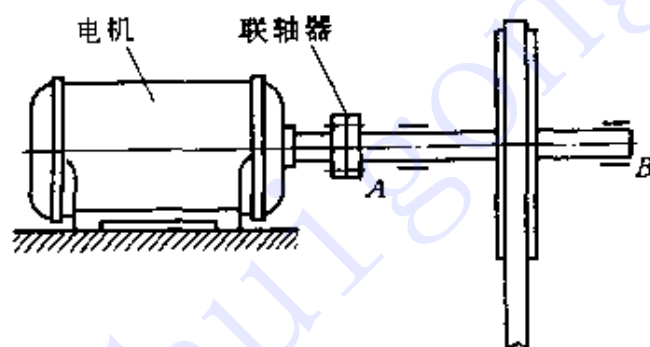


图 3-4

## 二、扭矩与扭矩图

作用在轴上的外力矩确定后, 现在研究轴的内力。

考虑图 3-5(a) 所示轴  $AB$ , 在其两端作用一对方向相反、大小均为  $M$  的扭力矩。为了分析轴的内力, 利用截面法, 在轴的任一横截面  $m-m$  处将其切开, 并任选一段, 例如左段(图 3-5, b), 作为研究对象。可以看出, 为了保持该段轴的平衡, 横截面  $m-m$  上的分布内力必构成一力偶, 且其矩的矢量方向垂直于截面  $m-m$ 。矢量方向垂直于所切横截面的内力偶矩, 称为**扭矩**, 并用  $T$  表示。所以, 轴受扭时横截面上的内力为扭矩。

根据左段轴的平衡, 由

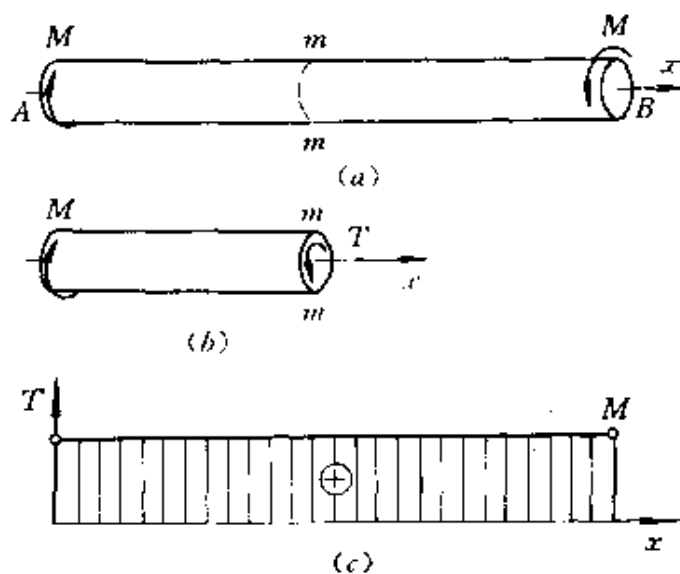


图 3-5

$$\sum M_x = 0, \quad T - M = 0$$

得

$$T = M$$

关于扭矩的正负符号, 通常规定如下: 按右手螺旋法则将扭矩用矢量表示, 若矢量方向与横截面的外法线方向一致, 则该扭矩为正, 反之为负。按此规定, 图 3-5(b) 所示扭矩为正。

在一般情况下, 轴内各横截面的扭矩不尽相同。为了形象地表示扭矩沿轴线的变化情况, 亦可采用图线表示。表示扭矩沿轴线变化情况的图线, 称为**扭矩图**。作图时, 以平行于轴线的坐标表示横截面的位置, 垂直于轴线的另一坐标表示扭矩。例如, 上述 AB 轴的扭矩图即如图 3-5(c) 所示。

**例 1** 图 3-6(a) 所示传动轴, 转速  $n = 500 \text{r/min}$ , 轮 B 为主动轮, 输入功率  $N_B = 10 \text{kW}$ , 轮 A 与轮 C 均为从动轮, 输出功率分别为  $N_A = 4 \text{kW}$ 、 $N_C = 6 \text{kW}$ 。试计算轴的扭矩, 并画扭矩图。

解 1. 扭力矩计算

由式(3-1)可知, 作用在轮 A、B 与轮 C 上的扭力矩分别为

$$M_A = \frac{9549 N_A}{n} = \frac{9549 \times 4}{500} = 76.4 \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_B = \frac{9549 N_B}{n} = \frac{9549 \times 10}{500} = 191 \text{N} \cdot \text{m}$$

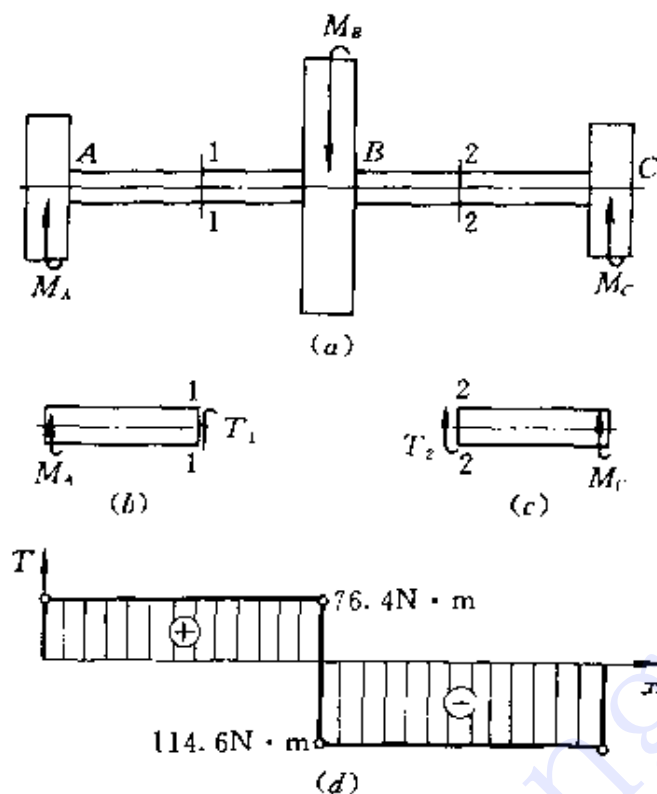


图 3-6

$$M_C = \frac{9549N_C}{n} = \frac{9549 \times 6}{500} = 114.6 \text{ N}\cdot\text{m}$$

### 2. 扭矩计算

设 AB 与 BC 段的扭矩均为正, 并分别用  $T_1$  和  $T_2$  表示, 则由图 3-6(b)、(c) 可知

$$T_1 = M_A = 76.4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$T_2 = -M_C = -114.6 \text{ N}\cdot\text{m}$$

### 3. 作扭矩图

根据上述分析, 作扭矩图如图 3-6(d) 所示, 扭矩的最大绝对值为

$$|T|_{\max} = |T_2| = 114.6 \text{ N}\cdot\text{m}$$

## § 3-3 剪应力互等定理与剪切虎克定律

扭转应力分析是一个比较复杂的问题。本节首先研究比较简

单的薄壁圆管的扭转应力, 并结合其受力与变形分析, 介绍有关概念与定理。

### 一、薄壁圆管的扭转应力

取一薄壁圆管, 在其表面等间距地画上纵线与圆周线(图 3-7, a), 然后在圆管两端施加扭力矩  $M$ 。从试验中观察到(图 3-7, b): 各圆周线的形状不变, 仅绕轴线作相对转动; 而当变形很小时, 各圆周线的大小与间距亦不改变, 各纵线倾斜同一角度, 所有矩形网格均变为同样大小的平行四边形。

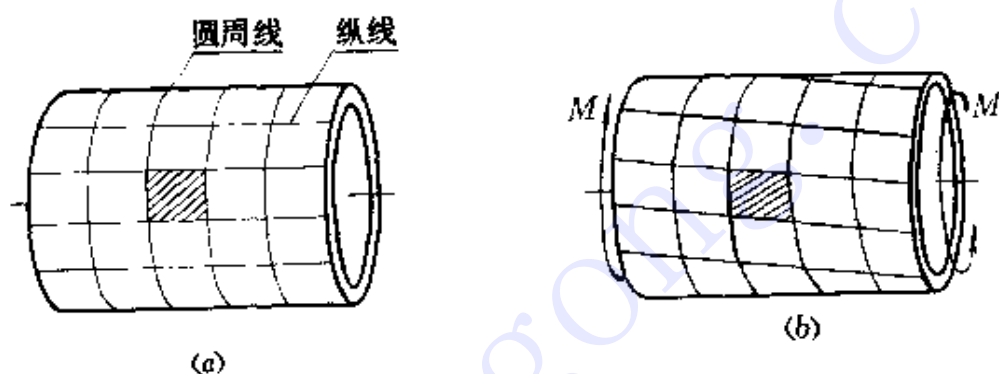


图 3-7

以上所述为圆管的表面变形情况。由于管壁很薄, 也可近似认为管内变形与管表面变形相同。这样, 如果用相距无限近的两个横截面以及夹角无限小的两个径向纵截面, 从圆管中切取一微体  $abcd$ (图 3-8), 则上述现象表明: 微体既无轴向正应变, 也无横向正应变, 只是相邻横截面  $ab$  和  $cd$  之间发生相对错动, 即产生剪切变形; 而且, 沿圆周方向所有微体的剪切变形均相同。

由此可见, 在圆管横截面上的各点处, 仅存在垂直于半径方向的剪应力  $\tau$ (图 3-9), 它们沿圆周大小不变, 而且, 由于管壁很薄, 沿壁厚也可近似视为均匀分布。

设圆管的平均半径为  $R_0$ , 壁厚为  $t$ (图 3-10), 则作用在微面积  $dA = tR_0 d\theta$  上的微剪力为  $\tau tR_0 d\theta$ , 它对轴线  $O$  的力矩为  $R_0 \cdot \tau tR_0 d\theta$ 。由静力学可知, 横截面上所有微力矩之和, 应等于该截面的扭矩  $T$ , 即



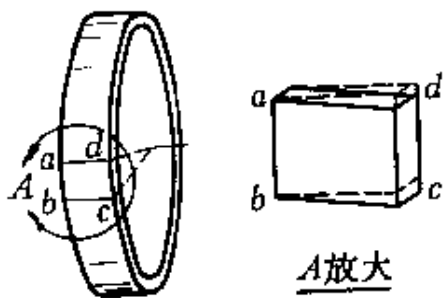


图 3-8

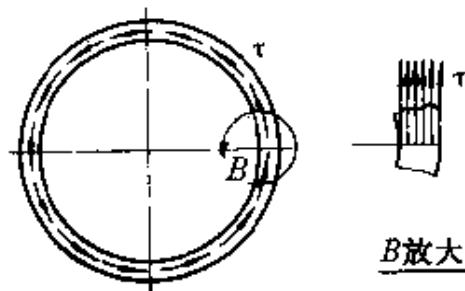


图 3-9

$$T = \int_0^{2\pi} \tau t R_0^2 d\theta = 2\pi R_0^2 \tau t$$

由此得

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2 t} \quad (3-2)$$

此即薄圆管扭转剪应力公式。精确分析表明, 当  $t \leq R_0/10$  时, 该公式足够精确, 最大误差不超过 4.52%。

## 二、纯剪切与剪应力互等定理

现在进一步研究图 3-8 所示微体的应力情况。

设该微体的边长分别为  $dx$ 、 $dy$  与  $t$  (图 3-11), 则由以上分析可知, 在微体的左、右侧面, 分别作用有由剪应力  $\tau$  构成的剪力  $\tau t dy$ , 它们的方向相反, 因而构成一力矩为  $\tau t dy \cdot dx$  的力偶。然而, 由于微体处于平衡状态, 因此, 在微体的顶面与底面, 也必然同时存在剪应力  $\tau'$ , 并构成力矩为  $\tau' t dx \cdot dy$  的反向力偶, 以与上述力偶平

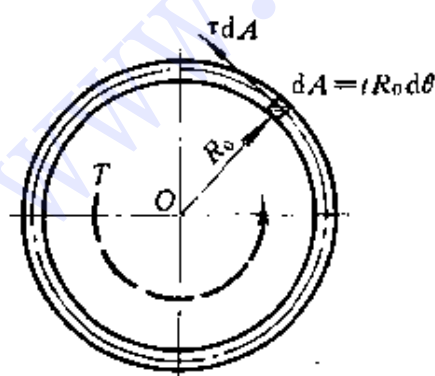


图 3-10

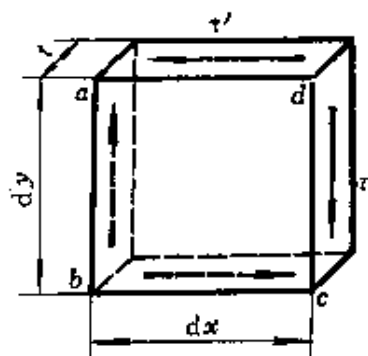


图 3-11

衡,即

$$\tau dy dx = \tau' dx dy$$

由此得

$$\tau = \tau' \quad (3-3)$$

于是得出结论:在微体的两个互垂截面上,垂直于截面交线的剪应力数值相等,而方向则均指向或离开该交线.此规律简称为**剪应力互等定理**。

由以上分析还可以看出,在上述微体的四个侧面上,仅存在剪应力而无正应力,此种应力状态称为**纯剪切**。

### 三、剪切虎克定律

在剪应力  $\tau$  作用下,微体发生剪切变形,互垂棱边所夹直角发生改变(图 3-12)。互垂棱边所夹直角的改变量称为**剪应变**,并用  $\gamma$  表示,其单位为弧度(rad)。

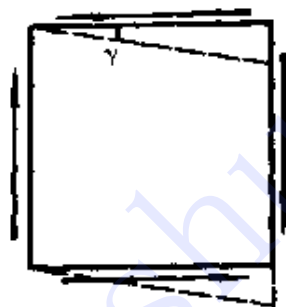


图 3-12

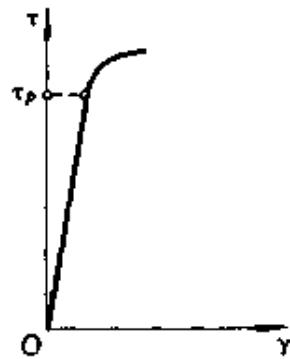


图 3-13

薄壁圆管的扭转试验表明(图 3-13):当剪应力不超过材料的剪切比例极限  $\tau_p$  时,剪应力与剪应变成正比,即

$$\tau \propto \gamma$$

如果引进比例系数  $G$ ,则

$$\tau = G\gamma \quad (3-4)$$

式(3-4)称为**剪切虎克定律**。比例系数  $G$  称为**剪切弹性模量**,其值随材料而异,并由实验测定。例如,钢的剪切弹性模量  $G = 75 \sim 80\text{GPa}$ ,铝与铝合金的剪切弹性模量  $G = 26 \sim 30\text{GPa}$ 。

还应指出,理论与试验研究均表明,弹性模量  $E$ 、剪切弹性模量  $G$  与泊松比  $\mu$  之间存在如下关系

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (3-5)$$

因此,当已知任意两个弹性常数后,由上式可以确定第三个弹性常数。

**例 2** 图 3-14(a) 所示边长为  $a$  的正方形板件  $ABCD$ , 在剪应力  $\tau$  作用下,其变形如图 3-14(b) 所示。现由试验测得  $BC$  边相对于  $AD$  边的位移为  $\Delta s = a/1000$ , 试计算直角  $BAD$  的剪应变  $\gamma$  及作用在板件边缘的剪应力  $\tau$ 。材料的剪切弹性模量  $G = 80\text{GPa}$ 。

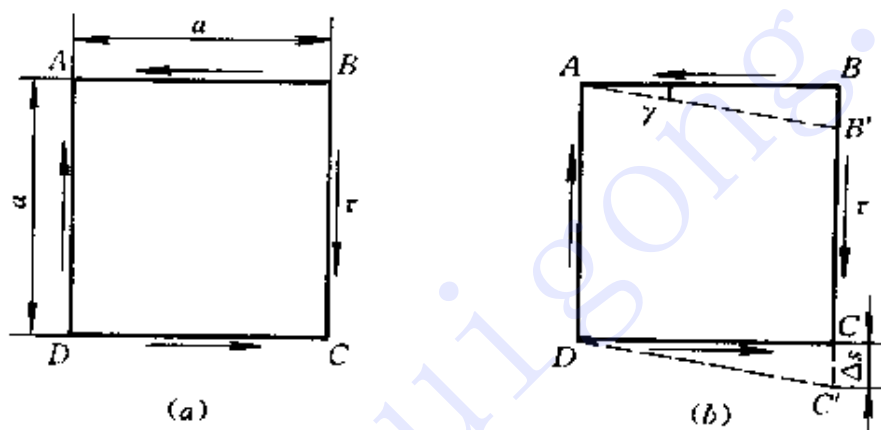


图 3-14

解 由图 3-14(b) 可知

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a} = \frac{1}{1000} = 1.00 \times 10^{-3}$$

由于变形很小,即  $\gamma$  为一很小之量,所以

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = 1.00 \times 10^{-3} \text{rad}$$

根据剪切虎克定律可知,剪应力为

$$\tau = G\gamma = 80 \times 10^3 \times 1.00 \times 10^{-3} = 80.0 \text{MPa}$$

### § 3-4 圆轴扭转横截面上的应力

工程中最常见的轴为圆截面轴,它们或为实心,或为空心。本

节 研究圆轴扭转时横截面上的应力分布规律, 即确定横截面上各点处的应力。

### 一、扭转剪应力的一般公式

显然, 此种问题仅仅利用静力学条件是无法解决的, 而应从研究变形入手, 并利用应力应变关系以及静力学条件, 即从几何、物理与静力学三方面进行综合分析。

#### 1. 几何方面

试验指出, 圆轴扭转时的表面变形与薄壁圆管的情况相似(图 3-7), 即: 各圆周线的形状不变, 仅绕轴线作相对转动; 而当变形很小时, 各圆周线的大小与间距均不改变。

根据上述现象, 对轴内变形作如下假设:

(1) 变形后, 横截面仍保持平面, 其形状与大小均不改变, 半径仍为直线, 此假设称为圆轴扭转的平面假设;

(2) 变形后, 横截面间的距离保持不变。

概言之, 圆轴扭转时, 各横截面如同刚性圆片, 并仅绕轴线作相对转动。此假设得到了理论与试验的证实。

上述假设说明了圆轴变形的总体情况。为了确定横截面上各点处的应力, 还应了解轴内各点处的变形。为此, 用相距  $dx$  的两个横截面以及夹角无限小的两个径向纵截面, 从轴内切取一楔形体  $O_1 ABCDO_2$  来分析(图 3-15, a)。

根据上述假设, 楔形体的变形如图中虚线所示, 轴表面的矩形  $ABCD$  变为平行四边形  $ABC'D'$ , 距轴线  $\rho$  处的任一矩形  $abcd$  变为平行四边形  $abc'd'$ , 即均在垂直于半径的平面内产生剪切变形。

设上述楔形体左、右端两横截面间的相对转角即扭转角为  $d\phi$ , 矩形  $abcd$  的剪应变为  $\gamma_\rho$ , 则由图可知,

$$\gamma_\rho \approx \operatorname{tg}\gamma_\rho = \frac{\overline{dd'}}{ad} = \frac{\rho d\phi}{dx}$$

由此得

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{a})$$

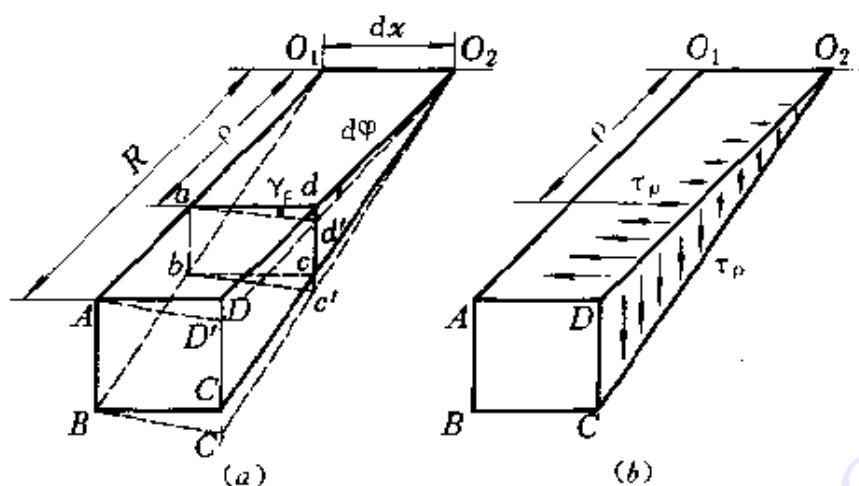


图 3-15

式中,  $d\phi/dx$  代表扭转角沿杆轴的变化率。对于同一横截面,  $d\phi/dx$  为一定值, 由此可知, 剪应变  $\gamma_\rho$  与  $\rho$  成正比。

## 2. 物理方面

由剪切虎克定律可知, 在弹性范围内, 剪应力与剪应变成正比, 于是得横截面上  $\rho$  处的剪应力为

$$\tau_\rho = G_\rho \frac{d\phi}{dx} \quad (b)$$

而其方向则垂直于该点处的半径(图 3-15, b)。

式(b)表明: 扭转剪应力  $\tau_\rho$  与  $\rho$  成正比, 即剪应力沿半径方向呈线性变化; 而在离圆心等远的各点处, 剪应力值则均相同。实心与空心圆轴的扭转剪应力分布分别如图 3-16(a)、(b) 所示。

## 3. 静力学方面

以上建立了式(b), 但由于  $d\phi/dx$  之值尚为未知, 所以, 由该式尚不能确定剪应力的大小, 此问题需利用剪应力与扭矩间的静力学关系才能解决。

如图 3-17 所示, 在距圆心  $\rho$  处的微面积  $dA$  上, 作用有微剪力  $\tau_\rho dA$ , 它对圆心  $O$  的力矩为  $\rho\tau_\rho dA$ 。在整个横截面上, 所有微力矩之和应等于该截面的扭矩, 因此

$$\int_A \rho\tau_\rho dA = T$$

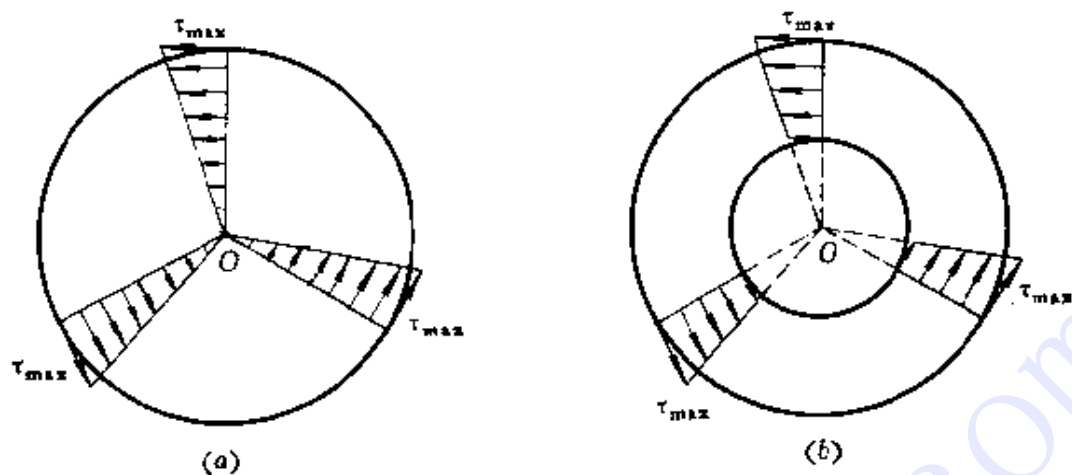


图 3-16

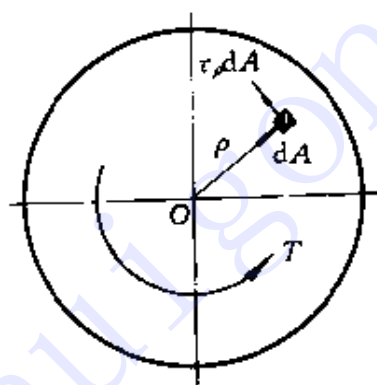


图 3-17

将式(b)代入上式,得

$$G \frac{d\phi}{dx} \int_A \rho^2 dA = T$$

积分  $\int_A \rho^2 dA$  仅与截面尺寸有关,称为截面的**极惯性矩**,并用  $I_p$  表示,即

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (3-6)$$

于是得

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \quad (3-7)$$

此即圆轴扭转变形的基本公式。

最后,将式(3-7)代入式(b),得



$$\tau_{\rho} = \frac{T\rho}{I_p} \quad (3-8)$$

此即圆轴扭转剪应力的一般公式。

## 二、最大扭转剪应力

由式(3-8)可知, 在  $\rho = R$  即圆截面边缘各点处, 剪应力最大, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{I_p} = \frac{T}{\frac{I_p}{R}}$$

在上式中,  $I_p/R$  也是一个仅与截面尺寸有关的量, 称为**抗扭截面模量**, 并用  $W_p$  表示, 即

$$W_p = \frac{I_p}{R} \quad (3-9)$$

于是, 圆轴扭转的最大剪应力即为

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \quad (3-10)$$

可见, 最大扭转剪应力与扭矩成正比, 与抗扭截面模量成反比。

应该指出, 式(3-7)、式(3-8)与式(3-10)的应用是有条件的, 它们只适用于圆截面轴, 而且, 横截面上的最大剪应力不得超过材料的剪切比例极限。

## § 3-5 极惯性矩与抗扭截面模量

现在研究极惯性矩与抗扭截面模量的计算公式。

### 一、实心圆截面

如图 3-18 所示, 对于直径为  $d$  的圆截面, 若以厚度为  $d\rho$  的环形面积为微面积, 即取

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

则由式(3-6)与式(3-9)可知, 圆截面的极惯性矩为

$$I_p = \int_0^{d/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3-11)$$

而其抗扭截面模量则为

$$W_p = \frac{2I_p}{d} = \frac{\pi d^3}{16} \quad (3-12)$$

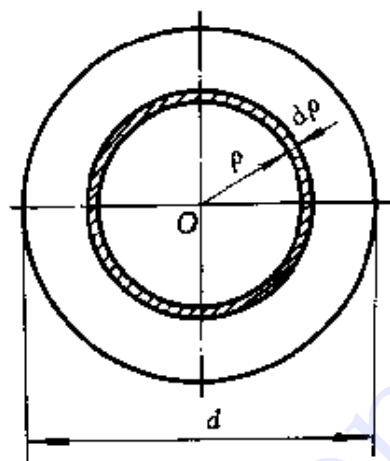


图 3-18

## 二、空心圆截面

对于内径为  $d$ 、外径为  $D$  的空心圆截面(图 3-19),按上述计算方法,其极惯性矩为

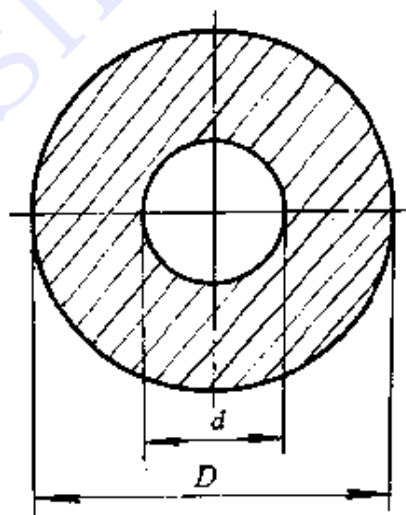


图 3-19

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \quad (3-13)$$

式中,  $\alpha = d/D$ , 代表内、外径的比值。由此, 得空心圆截面的抗扭截面模量为

$$W_p = \frac{2I_p}{D} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \quad (3-14)$$

### 三、薄壁圆截面

对于薄壁圆截面(图 3-10), 由于其内径与外径的差值很小, 可用平均半径  $R_0$  代替  $\rho$ , 这样, 薄壁圆截面的极惯性矩为

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \approx R_0^2 \int_A dA$$

由此得

$$I_p = 2\pi R_0^3 t \quad (3-15)$$

而其抗扭截面模量则为

$$W_p = \frac{2\pi R_0^3 t}{R_0} = 2\pi R_0^2 t \quad (3-16)$$

实际上, 式(3-15)亦可由式(3-13)并略去高阶小量后得到。

**例 3** 图 3-20(a) 所示空心圆截面轴, 承受扭力矩  $M$  作用。已知轴的内、外径分别为  $d = 20\text{mm}$  与  $D = 36\text{mm}$ , 扭力矩  $M = 100\text{N} \cdot \text{m}$ 。试计算横截面上的最大与最小扭转剪应力。

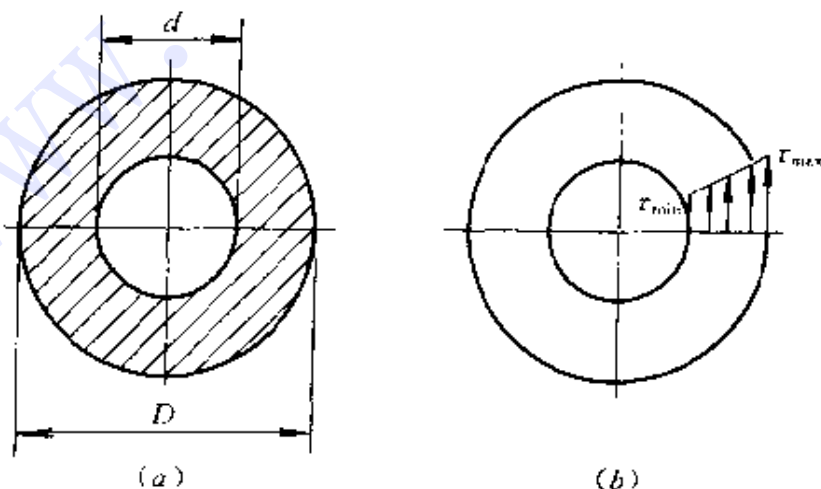


图 3-20

解 轴的扭矩为

$$T = M = 1.0 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

由前述分析可知, 空心圆轴的扭转剪应力分布如图 3-20(b) 所示, 最大与最小扭转剪应力分别为

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \quad (\text{a})$$

$$\tau_{\min} = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} \quad (\text{b})$$

由式(3-14)与式(3-13)可知, 空心圆截面的极惯性矩与抗扭截面模量分别为

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \times 36^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{20}{36} \right)^4 \right] \\ &= 1.492 \times 10^5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \times 36^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{20}{36} \right)^4 \right] \\ &= 8.29 \times 10^3 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

将有关数据代入式(a)、(b), 于是得

$$\tau_{\max} = \frac{1.0 \times 10^5}{8.29 \times 10^3} = 12.07 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = \frac{1.0 \times 10^5 \times 20}{1.492 \times 10^5 \times 2} = 6.70 \text{ MPa}$$

### § 3-6 圆轴扭转斜截面上的应力

以上研究了圆轴扭转横截面与径向纵截面上的应力, 并已知在截面边缘各点处的剪应力最大。为了更全面地了解应力情况, 现在研究轴表层斜截面上的应力。

首先, 用横截面、径向纵截面以及与轴表面相距无限近的同轴圆柱面从轴表层切取一微体  $ABCD$  (图 3-21, a), 然后, 在垂直于轴表面的任一斜截面  $mm'$  处将该微体切开 (图 3-21, b), 并选其左部  $mBm'$  为研究对象。

设斜截面  $mm'$  的方位以其外法线  $O_n$  与  $x$  轴的夹角  $\alpha$  表示, 该截面的应力与面积分别用  $\sigma_\alpha$ 、 $\tau_\alpha$  与  $dA$  表示, 则作用在斜截面  $mm'$

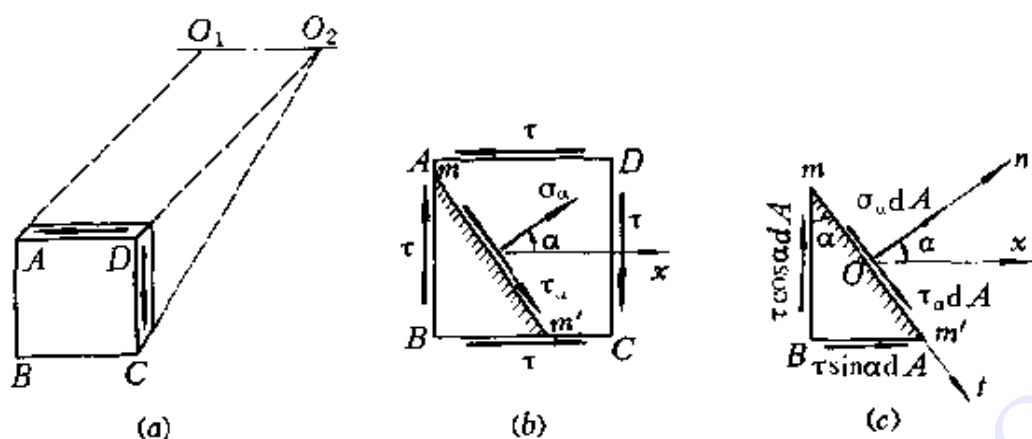


图 3-21

上的法向与切向力分别为  $\sigma_\alpha dA$  与  $\tau_\alpha dA$  (图 3-21.c), 作用在截面  $mB$  与  $Bm'$  上的剪力分别为  $\tau \cos \alpha dA$  与  $\tau \sin \alpha dA$ 。在上述各力作用下, 微体  $mBm'$  处于平衡状态。如果沿截面  $mm'$  的法向与切向分别建立坐标轴  $n$  与  $t$ , 则微体的平衡方程为

$$\sum N = 0, \quad \sigma_\alpha dA + \tau \cos \alpha dA \cdot \sin \alpha + \tau \sin \alpha dA \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum T = 0, \quad \tau_\alpha dA - \tau \cos \alpha dA \cdot \cos \alpha + \tau \sin \alpha dA \cdot \sin \alpha = 0$$

由上述方程分别得

$$\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha \quad (3-17)$$

$$\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha \quad (3-18)$$

可见, 斜截面上的正应力与剪应力均随截面方位变化。

由式(3-17)可知, 在  $\alpha = -45^\circ$  与  $\alpha = 135^\circ$  的截面上(图 3-22.a), 作用有最大拉应力, 其值为

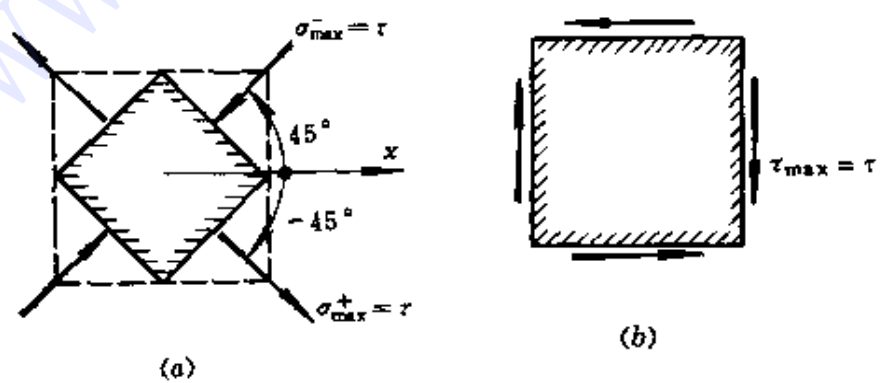


图 3-22

$$\sigma_{\max}^+ = \tau \quad (3-19)$$

在  $\alpha = 45^\circ$  与  $\alpha = -135^\circ$  的截面上, 作用有最大压应力, 其值为

$$\sigma_{\max}^- = \tau \quad (3-20)$$

由式(3-18)可知, 当  $\alpha = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  与  $\alpha = 270^\circ$  时, 即在微体的纵、横截面上, 剪应力取极值, 其绝对值均等于  $\tau$  (图 3-22, b), 即

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = \tau \quad (3-21)$$

### § 3-7 圆轴扭转破坏与强度条件

轴的扭转应力确定后, 现在研究轴的破坏形式与极限应力, 以建立轴的强度条件。

#### 一、扭转破坏试验

扭转试验是用圆截面试件在扭转试验机上进行的。实验表明: 塑性材料试件在受扭的过程中, 先是发生屈服, 这时, 在试件表面的横向与纵向出现滑移线(图 3-23, a), 如果继续增大载荷, 试件最后沿横截面被剪断(图 3-23, b), 即滑移与剪断均发生在最大剪应

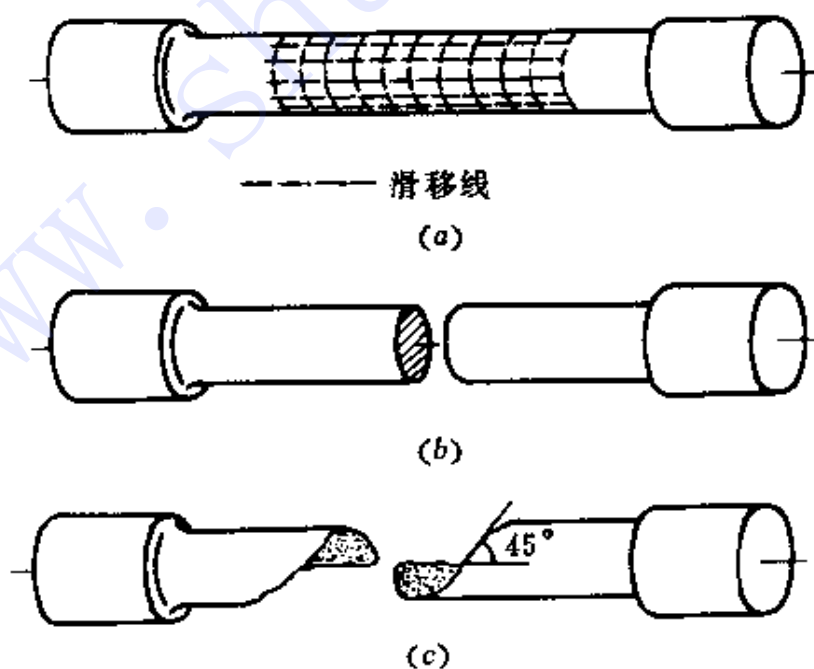


图 3-23



力的作用面;脆性材料试件受扭时,变形则始终很小,最后在与轴线约成 $45^\circ$ 倾角的螺旋面发生断裂(图3-23,c),即断裂发生在最大拉应力作用面。

上述情况表明,对于受扭轴,破坏的标志仍为屈服或断裂。试件扭转屈服时横截面上的最大剪应力,称为**扭转屈服应力**,并用 $\tau_s$ 表示;试件扭转断裂时横截面上的最大剪应力,称为**扭转强度极限**,并用 $\tau_b$ 表示。 $\tau_s$ 与 $\tau_b$ 统称为**扭转极限应力**,并用 $\tau'$ 表示。

## 二、轴的强度条件

将材料的扭转极限应力 $\tau'$ 除以安全系数 $n$ ,得材料的许用剪应力为

$$[\tau] = \frac{\tau'}{n} \quad (3-22)$$

因此,为保证轴工作时不致因强度不够而破坏,最大扭转剪应力 $\tau_{\max}$ 不得超过材料的许用剪应力 $[\tau]$ ,即要求

$$\tau_{\max} = \left( \frac{T}{W_p} \right)_{\max} \leq [\tau] \quad (3-23)$$

此即圆轴扭转强度条件。对于等截面圆轴,其最大扭转剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p}$$

因此,等截面圆轴的扭转强度条件为

$$\frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau] \quad (3-24)$$

理论与实验研究均表明,材料纯剪切时的许用剪应力 $[\tau]$ 与许用应力 $[\sigma]$ 之间存在下述关系:

$$\text{对于塑性材料,} \quad [\tau] = (0.5 \sim 0.6)[\sigma] \quad (3-25)$$

$$\text{对于脆性材料,} \quad [\tau] = (0.8 \sim 1.0)[\sigma_+] \quad (3-26)$$

所以,扭转许用剪应力亦可利用上述关系确定。

**例4** 图3-24(a)所示轴,在横截面A、B、C处承受扭力矩作用。已知 $M_A = 150\text{N}\cdot\text{m}$ , $M_B = 50\text{N}\cdot\text{m}$ , $M_C = 100\text{N}\cdot\text{m}$ ,许用剪应力 $[\tau] = 90\text{MPa}$ ,试校核轴的强度。

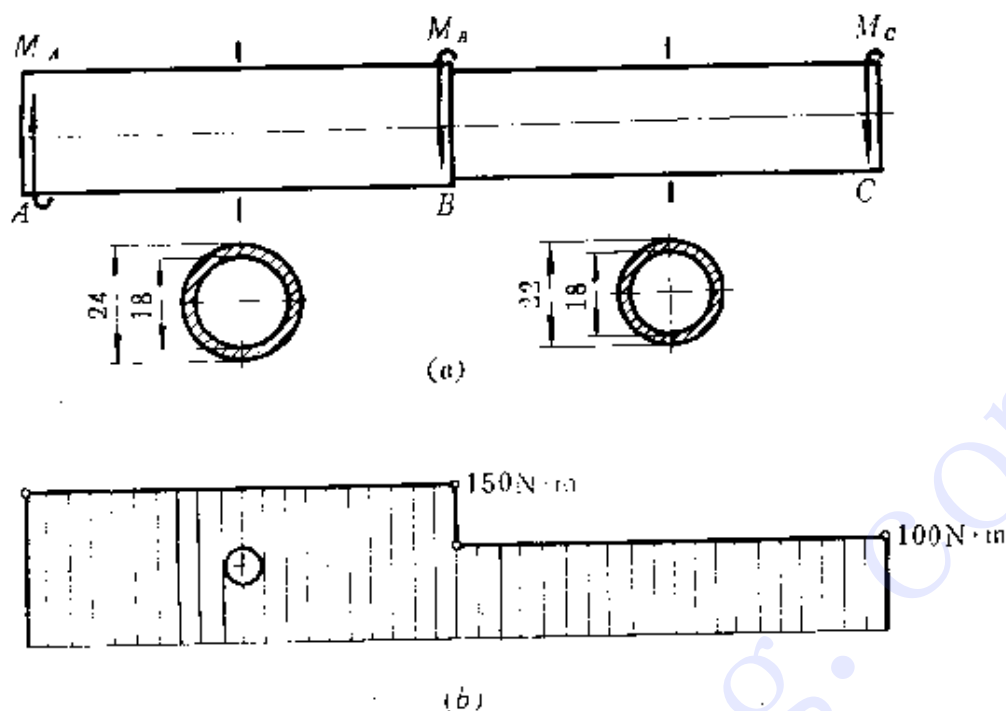


图 3-24

解 轴的扭矩图如图 3-24(b) 所示。AB 段的扭矩最大, 显然应该校核; BC 段的扭矩虽然较小, 但由于该段的横截面尺寸也较小, 所以也应校核。

根据式(3-10)与式(3-14), 得 AB 和 BC 段的最大扭转剪应力分别为

$$\begin{aligned} \tau_{\max, 1} &= \frac{16T_1}{\pi D_1^3 \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{D_1} \right)^4 \right]} \\ &= \frac{16 \times 150 \times 10^3}{\pi \times 24^3 \left[ 1 - \left( \frac{18}{24} \right)^4 \right]} = 80.8 \text{ MPa} \\ \tau_{\max, 2} &= \frac{16T_2}{\pi D_2^3 \left[ 1 - \left( \frac{d_2}{D_2} \right)^4 \right]} \\ &= \frac{16 \times 100 \times 10^3}{\pi \times 22^3 \left[ 1 - \left( \frac{18}{22} \right)^4 \right]} = 86.7 \text{ MPa} \end{aligned}$$

剪应力  $\tau_{\max, 1}$  与  $\tau_{\max, 2}$  均小于许用剪应力, 说明轴的扭转强度符合要求。

**例 5** 某传动轴, 横截面上的最大扭矩  $T = 1.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 若许

用剪应力 $[\tau] = 50\text{MPa}$ , 试按下列两种方案确定轴的横截面尺寸, 并比较其重量。

(1) 实心圆截面轴;

(2) 空心圆截面轴, 其内、外径比值  $d_1/D = 0.9$ 。

解 1. 确定实心圆轴的直径

根据式(3-12)与式(3-24)可知, 实心圆轴的扭转强度条件为

$$\frac{16T}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

由此得

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} \quad (3-27)$$

将有关数据代入上式, 得实心圆轴的直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times 1.5 \times 10^3 \times 10^3}{\pi \times 50}} = 53.5\text{mm}$$

取

$$d = 54\text{mm}$$

2. 确定空心圆轴的内、外径

根据式(3-14)与式(3-24)可知, 空心圆轴的扭转强度条件为

$$\frac{16T}{\pi D^3(1 - \alpha^4)} \leq [\tau]$$

由此得

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi(1 - \alpha^4)[\tau]}} \quad (3-28)$$

将有关数据代入上式, 得空心圆轴的外径为

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times 1.5 \times 10^6}{\pi \times (1 - 0.9^4) \times 50}} = 76.3\text{mm}$$

而其内径则相应为

$$d_1 = 0.9D = 0.9 \times 76.3 = 68.7\text{mm}$$

取

$$D = 76\text{mm}, \quad d_1 = 68\text{mm}$$

3. 重量比较与轴截面的合理设计

两根长度与材料均相同的轴, 其重量比等于其横截面面积之

比,因此,上述空心与实心圆轴的重量比为

$$\beta = \frac{\frac{\pi(D^2 - d_1^2)}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{76^2 - 68^2}{54^2} = 0.395$$

上述数据说明,空心轴远比实心轴轻。因此,一些大型轴或对于减轻重量有特殊要求的轴,通常均作成空心的。

空心圆轴之所以比实心圆轴优越,可从扭转剪应力的分布图中得到说明。如图 3-25(a) 所示,当截面边缘的最大剪应力达到许用剪应力值时,圆心附近各点处的剪应力仍很小。因此,为了合理地利用材料,宜将材料放置在远离圆心的部位,即作成空心的(图 3-25, b)。显然,半径  $R_0$  愈大、壁厚  $t$  愈小,即比值  $R_0/t$  愈大,剪应力分布愈均匀,因而材料的利用率愈高。但也应注意到,如果比值  $R_0/t$  过大(例如低碳钢管的  $R_0/t \geq 60$ ),管在受扭时将产生皱损现象而降低其抗扭能力。因此,设计时应全面考虑。

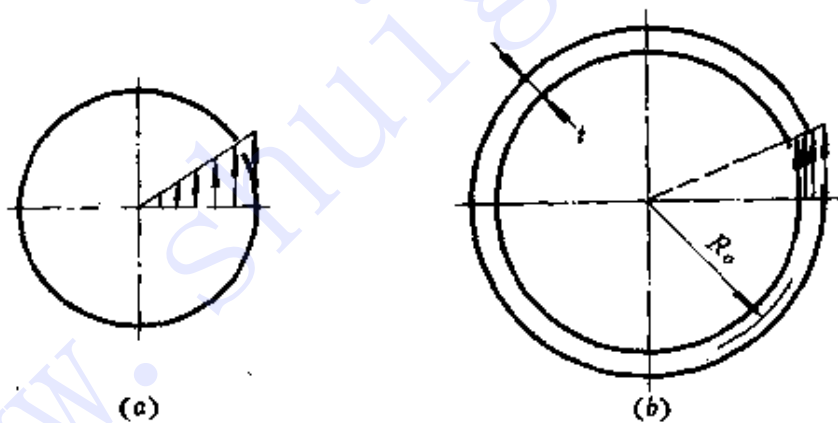


图 3-25

## § 3-8 圆轴扭转变形与刚度条件

### 一、圆轴扭转变形

如前所述,轴的扭转变形,用横截面间绕轴线的相对角位移即扭转角  $\phi$  表示。

由式(3-7)可知,相距  $dx$  的两横截面间的扭转角为

$$d\phi = \frac{T}{GI_p} dx$$

因此,相距  $l$  的两横截面间的扭转角则为

$$\phi = \int_l d\phi = \int_l \frac{T}{GI_p} dx \quad (3-29)$$

由此可知,对于长为  $l$ 、扭矩  $T$  为常数的等截面圆轴(图 3-26),由于  $T$ 、 $G$  与  $I_p$  均为常数,则由上述公式,得两端横截面间的扭转角为

$$\phi = \frac{Tl}{GI_p} \quad (3-30)$$

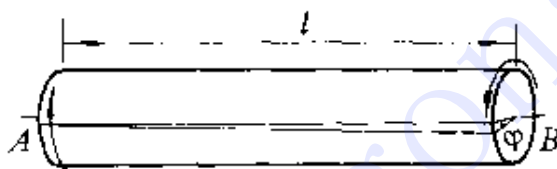


图 3-26

上式表明,扭转角  $\phi$  与扭矩  $T$ 、轴长  $l$  成正比,与  $GI_p$  成反比。乘积  $GI_p$  称为圆截面轴的截面抗扭刚度,或简称为抗扭刚度。

## 二、圆轴扭转刚度条件

设计轴时,除应考虑强度问题外,对于许多轴,还常常对其变形有一定限制,即应满足刚度要求。

在工程实际中,通常是限制扭转角沿轴线的变化率  $d\phi/dx$  或单位长度内的扭转角,使其不超过某一规定的许用值  $[\theta]$ 。由式(3-7)可知,扭转角的变化率为

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \quad (3-31)$$

所以,圆轴扭转的刚度条件为

$$\frac{T}{GI_p} \leq [\theta] \quad (3-32)$$

在上式中,  $[\theta]$  代表单位长度许用扭转角。对于一般传动轴,

$[\theta]$  为  $0.5^\circ/\text{m} \sim 1^\circ/\text{m}$ ; 对于精密机器与仪表的轴,  $[\theta]$  之值可根据有关设计标准或规范确定。

应该指出, 扭转角变化率  $d\phi/dx$  的单位为  $\text{rad}/\text{m}$  或  $\text{rad}/\text{mm}$ , 而单位长度许用扭转角的单位一般为  $^\circ/\text{m}$ , 因此, 在使用公式 (3-32) 时, 应注意使其统一。

**例 6** 图 3-27 所示圆截面轴 AC, 承受扭力矩  $M_A$ 、 $M_B$  与  $M_C$  作用, 试计算轴的总扭转角。已知  $M_A = 200\text{N} \cdot \text{m}$ ,  $M_B = 500\text{N} \cdot \text{m}$ ,  $M_C = 300\text{N} \cdot \text{m}$ ,  $l_1 = l_2 = 2\text{m}$ ,  $d = 40\text{mm}$ ,  $G = 80\text{GPa}$ 。

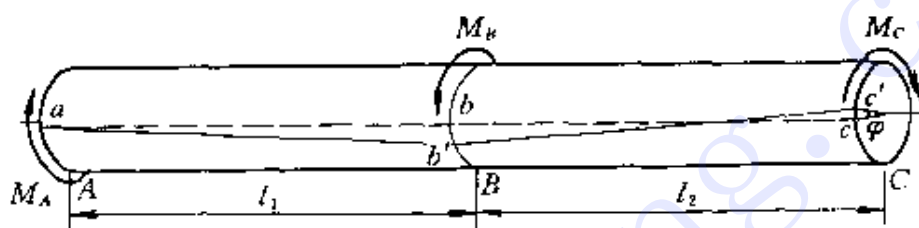


图 3-27

解 利用截面法, 得 AB 与 BC 段的扭矩分别为

$$T_1 = M_A = 200\text{N} \cdot \text{m}$$

$$T_2 = -M_C = -300\text{N} \cdot \text{m}$$

由于各段轴的扭矩不同, 为了计算轴的总扭转角, 首先需要求出每一段轴的扭转角。

设 AB 与 BC 段的扭转角分别为  $\phi_{AB}$  与  $\phi_{BC}$ , 则由式 (3-30) 可知

$$\begin{aligned} \phi_{AB} &= \frac{T_1 l_1}{GI_p} = \frac{32T_1 l_1}{G\pi d^4} = \frac{32 \times 200 \times 10^3 \times 2 \times 10^3}{80 \times 10^3 \times \pi \times 40^4} \\ &= 1.99 \times 10^{-2} \text{rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{BC} &= \frac{T_2 l_2}{GI_p} = \frac{32T_2 l_2}{G\pi d^4} = \frac{32 \times (-300 \times 10^3) \times 2 \times 10^3}{80 \times 10^3 \times \pi \times 40^4} \\ &= -2.99 \times 10^{-2} \text{rad} \end{aligned}$$

由此得轴 AC 的总扭转角为

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{AB} + \phi_{BC} = 1.99 \times 10^{-2} - 2.99 \times 10^{-2} \\ &= -1.00 \times 10^{-2} \text{rad} \end{aligned}$$

各段轴的扭转角的转向, 由相应扭矩的转向而定, 所以, 扭转角的正负亦随扭矩的正负而定。在本例中,  $T_1$  为正,  $\phi_{AB}$  亦为正;  $T_2$



为负,  $\phi_B$  亦为负。

在图 3-27 中, 同时画出了扭转时母线  $ac$  的位移情况, 它由直线  $abc$  变为折线  $ab'c'$ , 由此可更清晰地显示扭转变形的情况。

**例 7** 某传动轴, 其扭矩  $T = 200\text{kN} \cdot \text{m}$ , 若单位长度许用扭转角  $[\theta] = 0.3^\circ/\text{m}$ , 剪切弹性模量  $G = 80\text{GPa}$ , 试根据刚度要求设计轴径  $d$ 。

**解** 根据式(3-32)与式(3-11)可知, 实心圆轴的扭转刚度条件为

$$\frac{32T}{G\pi d^4} \leq [\theta]$$

由此得

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32T}{G\pi[\theta]}} \quad (3-33)$$

在本例中, 单位长度的许用扭转角为

$$\begin{aligned} [\theta] &= 0.3^\circ/\text{m} = 0.3 \times \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{1000} \\ &= 5.24 \times 10^{-6} \text{rad/mm} \end{aligned}$$

将上述  $[\theta]$  值与有关数据代入式(3-33), 得

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \times 200 \times 10^3 \times 10^3}{80 \times 10^3 \times \pi \times 5.24 \times 10^{-6}}} = 148\text{mm}$$

取

$$d = 150\text{mm}$$

**例 8** 试检查例 6 所述轴是否符合刚度要求, 设单位长度许用扭转角  $[\theta] = 1^\circ/\text{m}$ 。

**解** 该轴为等截面轴, 而  $BC$  段的扭矩最大, 故由式(3-31)可知, 该段的扭转角变化率亦最大, 其值为

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= \frac{T_2}{GI_p} = \frac{32T_2}{G\pi d^4} = \frac{32 \times 300 \times 10^3}{80 \times 10^3 \times \pi \times 40^4} \frac{180 \times 10^3}{\pi} \\ &= 0.855^\circ/\text{m} < [\theta] \end{aligned}$$

可见, 该轴符合刚度要求。

### § 3-9 简单静不定轴

前面所研究的轴, 其支反力矩与扭矩均可由平衡条件确定, 即均属于静定轴。然而, 当轴的未知力矩(支反力矩与扭矩)的数目, 多于有效平衡方程的数目时, 则成为静不定轴。

由前述分析可知, 欲求解扭转静不定问题, 除应利用平衡条件外, 尚需建立变形补充方程。现以图 3-28(a) 所示静不定轴为例, 介绍分析方法。

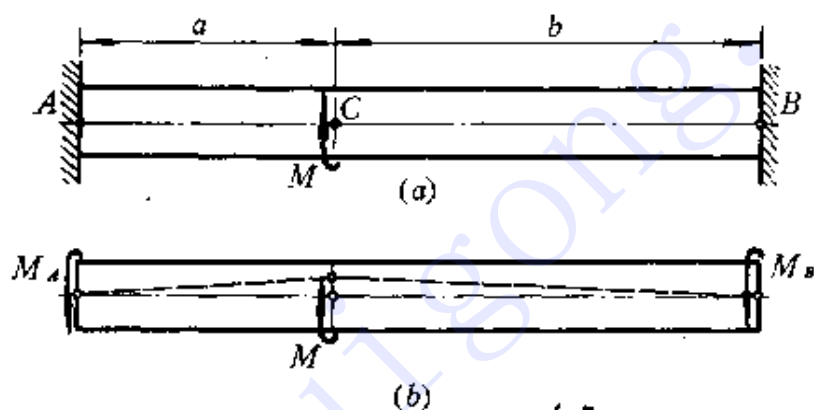


图 3-28

设  $A$ 、 $B$  端的支反力矩分别为  $M_A$  与  $M_B$  (图 3-28, b), 则轴的平衡方程为

$$\sum M_r = 0, \quad M_A + M_B - M = 0 \quad (a)$$

两个未知力矩, 一个平衡方程, 故为一度静不定。

根据轴两端的约束条件可知, 横截面  $A$ 、 $B$  间的相对转角为零, 所以, 轴的变形协调条件为

$$\phi_{AB} = \phi_{AC} + \phi_{CB} = 0 \quad (b)$$

由式(3-30)可知,  $AC$  与  $CB$  段的扭转角分别为

$$\phi_{AC} = \frac{T_1 a}{GI_p} = -\frac{M_A a}{GI_p}$$

$$\phi_{CB} = \frac{T_2 b}{GI_p} = \frac{M_B b}{GI_p}$$

将上述关系式代入式(b), 即得变形补充方程为

$$-\frac{M_A a}{GI_p} + \frac{M_B b}{GI_p} = 0 \quad (c)$$

最后, 联立求解平衡方程(a) 与补充方程(c), 于是得

$$M_A = \frac{Mb}{a+b}$$

$$M_B = \frac{Ma}{a+b}$$

支反力矩确定后, 即可按以前所述方法分析轴的内力、应力与变形, 并进行强度与刚度计算。

**例9** 图3-29(a)所示芯轴与套管, 两端用刚性平板连接在一起。设作用在刚性平板上的扭力矩为  $M$ , 芯轴与套管的抗扭刚度分别为  $G_1 I_{p1}$  与  $G_2 I_{p2}$ , 试计算芯轴与套管的扭矩。

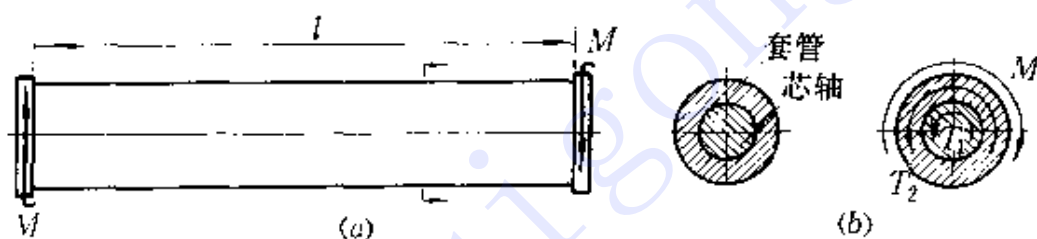


图 3-29

**解** 设芯轴与套管的扭矩分别为  $T_1$  与  $T_2$ , 则由图3-29(b)可知

$$T_1 + T_2 - M = 0 \quad (a)$$

两个未知扭矩, 一个平衡方程, 故为一次静不定。

如上所述, 芯轴与套管的两端由刚性平板相连接, 因此, 芯轴的扭转角  $\phi_1$  与套管的扭转角  $\phi_2$  应相等, 即

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (b)$$

根据式(3-30)可知,

$$\phi_1 = \frac{T_1 l}{G_1 I_{p1}}$$

$$\phi_2 = \frac{T_2 l}{G_2 I_{p2}}$$

将上述关系式代入式(b), 得变形补充方程为

$$\frac{T_1 l}{G_1 I_{p1}} = \frac{T_2 l}{G_2 I_{p2}}$$

或

$$\frac{T_1}{G_1 I_{p1}} = \frac{T_2}{G_2 I_{p2}} \quad (c)$$

最后, 联立求解平衡方程(a)与补充方程(c), 于是得

$$T_1 = \frac{G_1 I_{p1}}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}} M$$

$$T_2 = \frac{G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}} M$$

由上式可知,

$$T_1 : T_2 = G_1 I_{p1} : G_2 I_{p2}$$

即扭矩按刚度比分配。

### \* § 3-10 矩形截面轴的扭转应力与变形

前面研究的轴均为圆截面轴。在工程实际中, 有时也碰到一些非圆截面轴, 其中较常见的是矩形截面轴。

实验与分析表明: 矩形截面轴扭转时, 横截面将由平面变为曲面, 即产生翘曲现象(图 3-30), 根据平面假设所建立的圆轴扭转公式, 对于矩形截面轴已不适用。

弹性理论指出: 矩形截面轴扭转时, 横截面边缘各点处的剪应力平行于截面周边(图 3-31), 角点处的剪应力为零; 最大剪应力  $\tau_{\max}$  发生在截面的长

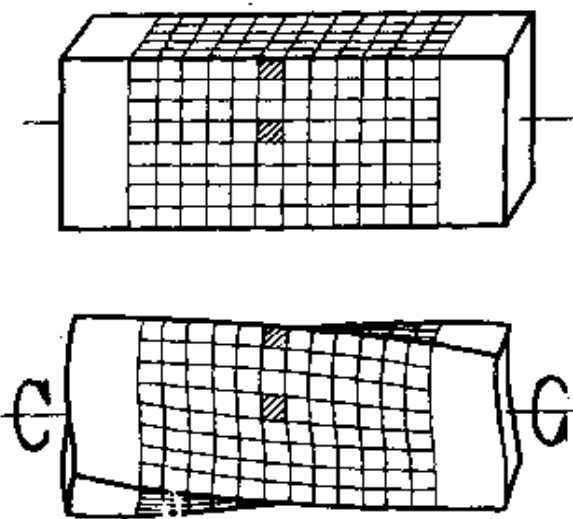


图 3-30

边中点处, 而短边中点处的剪应力  $\tau_1$  也有相当大的数值。根据研究结果

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_k} = \frac{T}{ahb^2} \quad (3-34)$$

$$\tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (3-35)$$

$$\phi = \frac{Tl}{GJ_k} = \frac{Tl}{G\beta hb^3} \quad (3-36)$$

式中,  $h$  和  $b$  分别代表矩形截面长边和短边的长度, 系数  $\alpha$ 、 $\beta$  与  $\gamma$  与比值  $h/b$  有关, 其值见表 3-1。

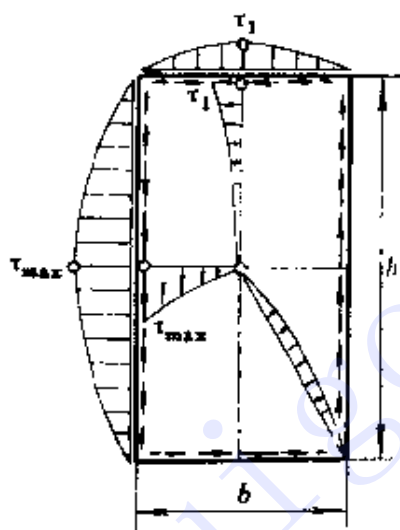


图 3-31

表 3-1

$h/b$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
$\gamma$	1.000	0.859	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

上述结论与实验现象是一致的。从试验中观察到(图 3-30): 杆表面棱边处的剪应变为零; 而距棱边中点愈近, 剪应变愈大, 在侧面的中线处, 剪应变最大。

关于横截面边缘各点处的剪应力平行于周边以及角点处的剪应力为零的结论, 也可利用剪应力互等定理得到证实。如图 3-32 所示, 若横截面边缘某点  $A$  处的剪应力不平行于周边, 即存在有垂

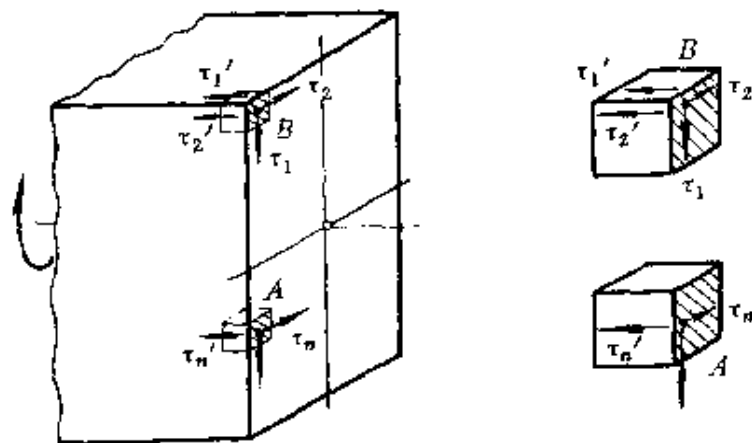


图 3-32

直于周边的剪应力分量  $\tau_n$  时, 则根据剪应力互等定理可知, 杆表面必存在有剪应力  $\tau_n'$ , 而且  $\tau_n' = \tau_n$ 。然而, 当杆表面无轴向剪切载荷作用时,  $\tau_n' = 0$ , 可见,  $\tau_n = 0$ , 即截面边缘的剪应力一定平行于周边。同样, 在截面的角点处, 例如  $B$  点, 由于该处杆表面的剪应力  $\tau_1'$  和  $\tau_2'$  均为零,  $B$  点处的剪应力分量  $\tau_1$  和  $\tau_2$  也必为零。所以, 横截面上角点处的剪应力必为零。

**例 10** 某矩形截面杆, 横截面如图 3-33 所示。若扭矩  $T = 2\text{kN} \cdot \text{m}$ , 试求横截面上  $A$ 、 $B$  点处的剪应力。

解 由图可知,  $h = 100\text{mm}$ ,  $b = 40\text{mm}$ , 所以

$$\frac{h}{b} = \frac{100}{40} = 2.5$$

从表 3-1 查得, 当  $h/b = 2.5$  时,  $\alpha = 0.258$ ,  $\gamma = 0.766$ 。于是由式 (3-34) 与式 (3-35) 可知

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{T}{\alpha hb^2} = \frac{2 \times 10^3 \times 10^3}{0.256 \times 100 \times 40^2} = 48.8\text{MPa}$$

$$\tau_B = \gamma \tau_{\max} = 0.766 \times 48.8 = 37.4\text{MPa}$$

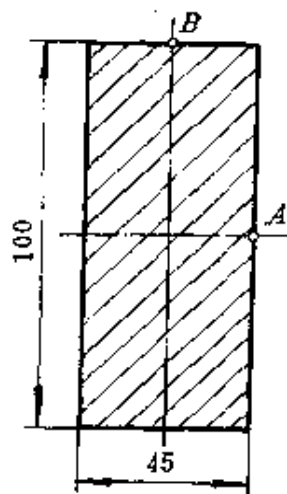


图 3-33

**例 11** 材料、横截面面积与杆长均相同的两根轴, 一为圆形截面, 另一为正方形截面(图 3-34)。若作用在轴端的扭力矩也相同, 试计算上述二轴的最大扭转剪应力与扭转变形, 并进行比较。



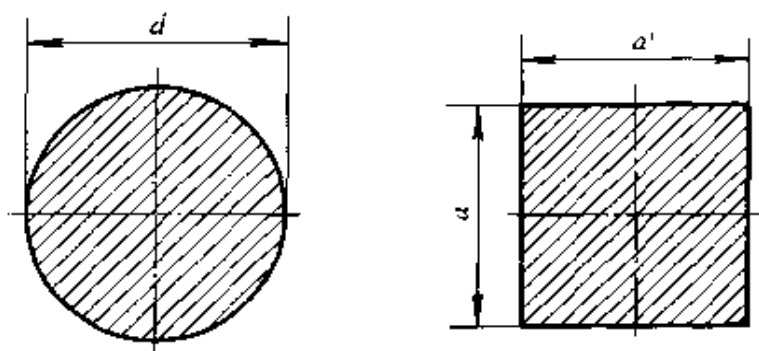


图 3-34

解 1. 几何尺寸关系

设圆形截面的直径为  $d$ , 正方形截面的边宽为  $a$ , 则其面积分别为

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A_s = a^2$$

由于上述二截面的面积相等, 即

$$a^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

于是有

$$a = \frac{\sqrt{\pi} d}{2}$$

2. 扭转应力与变形分析

由式(3-10)、(3-12)、(3-30) 与式(3-11) 可知, 圆形截面轴的最大扭转剪应力与扭转变形分别为

$$\tau_{c, \max} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\phi_c = \frac{32Tl}{G\pi d^4}$$

由式(3-34)、(3-36) 与表 3-1 可知, 正方形截面轴的最大扭转剪应力与扭转变形分别为

$$\tau_{s, \max} = \frac{T}{\alpha a^3} = \frac{T}{0.208a^3}$$

$$\phi_c = \frac{Tl}{G\beta a^4} = \frac{Tl}{0.141Ga^4}$$

### 3. 抗扭性能比较

根据以上分析, 于是得

$$\frac{\tau_{c, \max}}{\tau_{s, \max}} = \frac{16 \times 0.208}{\pi} \left( \frac{a}{d} \right)^3 = 0.737$$

$$\frac{\phi_c}{\phi_s} = \frac{32 \times 0.141}{\pi} \left( \frac{a}{d} \right)^4 = 0.886$$

上述计算表明, 无论是扭转强度或是扭转刚度, 圆形截面轴都比方形截面轴好。

## \* § 3-11 密圈螺旋弹簧的应力与变形

弹簧是工程中的一种常用零件, 在减振装置、控制机构与仪表中得到广泛应用。本节研究最常见的圆柱形密圈螺旋弹簧在轴向拉伸或压缩时的应力与变形。

### 一、弹簧的应力

图 3-35(a) 所示圆柱形密圈螺旋弹簧, 沿弹簧轴线承受拉力  $P$  作用。所谓密圈螺旋弹簧, 是指螺旋升角  $\alpha$  很小 (例如小于  $5^\circ$ ) 的螺旋弹簧。弹簧的平均直径用  $D$  表示, 弹簧丝的横截面为圆形, 其直径用  $d$  表示。

首先, 利用截面法, 以通过弹簧轴线的平面将弹簧丝切断, 并选择其上部为研究对象 (图 3-35, b)。如上所述, 由于螺旋升角  $\alpha$  很小, 因此, 所切截面可近似看成是弹簧丝的横截面。于是, 根据平衡条件可知, 在弹簧丝的横截面上, 必然同时存在剪力  $Q$  以及扭矩  $T$ , 其值分别为

$$\begin{aligned} Q &= P \\ T &= \frac{PD}{2} \end{aligned} \quad (\text{a})$$

假设与剪力相应的剪应力  $\tau_Q$  在横截面上均匀分布 (图 3-35, c) 则

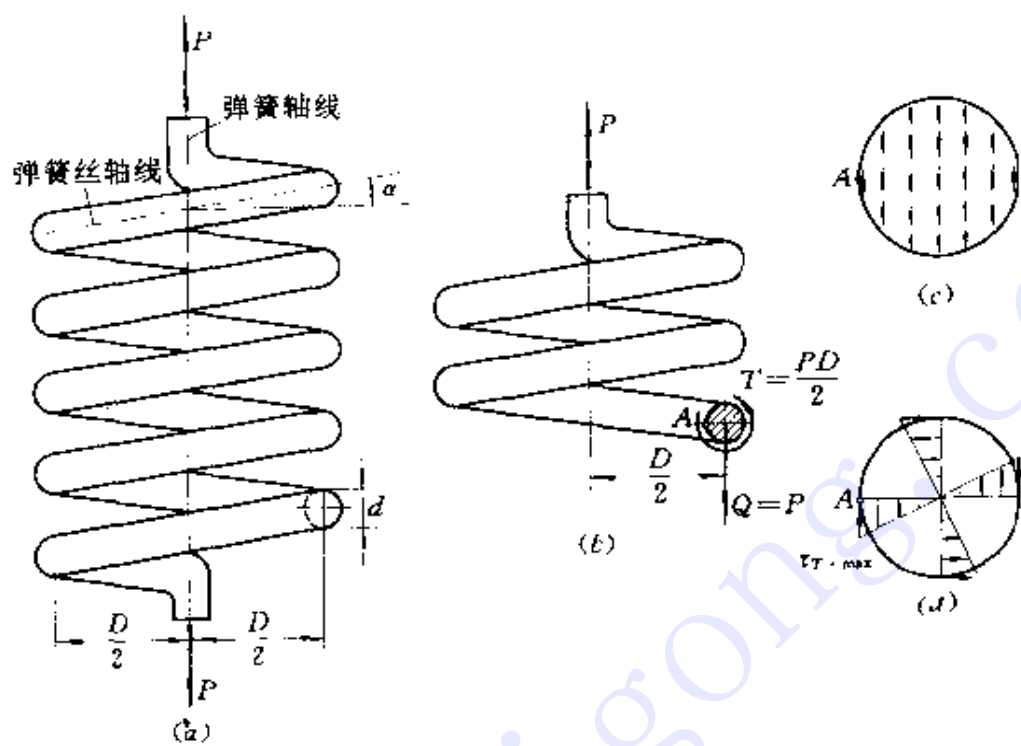


图 3-35

$$\tau_Q = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

至于与扭矩  $T$  相应的剪应力  $\tau_T$ , 如果将弹簧丝的曲率忽略不计, 即将其看成是直杆, 则扭转剪应力的分布如图 3-35(d) 所示, 最大剪应力为

$$\tau_{T, \max} = \frac{PD}{2} \frac{16}{\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3}$$

显然, 横截面上任一点处的总剪应力应为上述两种剪应力的矢量和, 而最大剪应力则发生在截面内侧点  $A$  处, 其值为

$$\tau_{\max} = \tau_{T, \max} + \tau_Q = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right) \quad (3-37)$$

由上式可知, 当弹簧的直径  $D$  远大于弹簧丝的直径  $d$ , 例如当  $D/d \geq 10$  时, 比值  $d/(2D)$  与 1 相比可以忽略, 即略去剪力的影

响,于是,式(3-37)简化为

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (3-38)$$

但是,对于比值  $D/d < 10$  的弹簧,或在计算精度要求较高的情况下,则不仅与剪力相应的剪应力不能忽略,而且还应考虑弹簧丝曲率的影响,这时,最大剪应力为

$$\tau_{\max} = K \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left( \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0.615}{m} \right) \quad (3-39)$$

式中,  $K$  为修正系数;  $m = D/d$ , 称为**弹簧指数**。

由以上分析可知,弹簧危险点处于纯剪切应力状态,所以,弹簧的强度条件为

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (3-40)$$

式中,  $[\tau]$  为弹簧丝的许用剪应力。

## 二、弹簧的变形

在轴向载荷作用下,弹簧沿载荷作用方向伸长或缩短。分析表明,影响弹簧变形的内力是扭矩,因此,弹簧的伸长或缩短,主要是由弹簧丝的扭转变形造成的。

如图 3-36(a) 所示,设将长为  $ds$  的微段看成是弹性体,而将弹簧的其余部分(即  $mA$  与  $Bn$  部分)暂时视为刚体,则当微段  $ds$  在扭矩  $T$  作用下产生扭转变形  $d\phi$  时,截面  $B$  的形心与载荷作用点  $n$  的连线  $Bn$  将随之转至  $Bn'$  (图 3-36, b), 载荷作用点的垂直位移分量则为

$$d\lambda = \overline{mn'} \sin\theta = \overline{Bn} d\phi \sin\theta \quad (b)$$

由式(3-7)可知,

$$d\phi = \frac{Tds}{GI_p} = \frac{16PDds}{G\pi d^4} \quad (c)$$

由图 3-36(b) 可以看出,

$$\overline{Bn} = \frac{D}{2 \sin\theta} \quad (d)$$

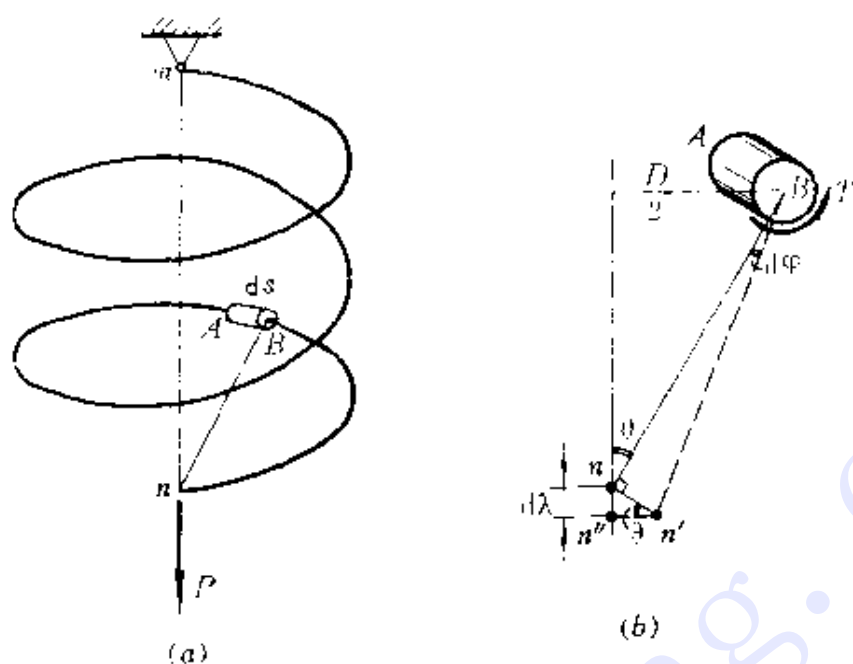


图 3-36

将式(c)、(d)代入式(b), 于是得

$$d\lambda = \frac{8PD^2}{G\pi d^4} ds$$

此即由微段扭转变形所引起的载荷作用点的轴向位移。由此可见, 弹簧的轴向变形为

$$\lambda = \int_0^s \frac{8PD^2}{G\pi d^4} ds = \frac{8PD^2s}{G\pi d^4} \quad (e)$$

式中,  $s$  为弹簧丝的总长。对于由  $n$  圈弹簧丝组成的密圈螺旋弹簧, 其总长为

$$s \approx n\pi D$$

将上式代入(e), 于是得

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} \quad (3-41)$$

此即弹簧的轴向变形公式。

式(3-41)也可写成为

$$\lambda = \frac{P}{\frac{Gd^4}{8D^3n}} = \frac{P}{C} \quad (3-42)$$

式中,  $C = Gd^4 / (8D^3n)$  称为**弹簧常数**,代表使弹簧产生单位长度的轴向变形所需之力。弹簧常数的量纲为  $[F]/[L]$ ,常用单位为  $N/mm$  或  $kN/m$ 。

由式(3-39) ~ (3-41)可以看出,在一定载荷作用下,所用材料的许用剪应力愈高,则弹簧丝的直径愈细,弹簧的刚度愈小。减振用的弹簧须具有较大的柔度,因而要求材料具有较高的强度。在静载荷的情况下,常用弹簧钢的许用剪应力可达  $400MPa$ ,而直径为  $6mm \sim 8mm$  的铬钒合金钢弹簧的许用剪应力甚至可高达  $700MPa$ 。

**例 12** 一密圈螺旋弹簧,平均直径  $D = 160mm$ ,弹簧丝直径  $d = 20mm$ ,弹簧的圈数  $n = 5$ ,承受轴向压力  $P = 1kN$ ,剪切弹性模量  $G = 80GPa$ ,弹簧丝的许用剪应力  $[\tau] = 400MPa$ ,试校核弹簧的强度,并计算其轴向变形。

解 1. 校核强度

弹簧指数为

$$m = \frac{D}{d} = \frac{160}{20} = 8.0 < 10$$

因此,应按式(3-39)计算最大剪应力。由该式得

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{8 \times 1 \times 10^3 \times 160}{\pi \times 20^3} \left( \frac{4 \times 8.0 - 1}{4 \times 8.0 - 4} + \frac{0.615}{8.0} \right) \\ &= 60.3MPa < [\tau]\end{aligned}$$

2. 计算弹簧的轴向变形

根据式(3-41),得弹簧的轴向变形为

$$\lambda = \frac{8 \times 1 \times 10^3 \times 160^3 \times 5}{80 \times 10^3 \times 20^4} = 12.8mm$$

## 复 习 题

1. 扭转的外力与变形各有何特点?试列举扭转的实例。
2. 轴的转速、所传功率与扭力矩之间有何关系,该公式是如



何建立的?

3. 何谓扭矩?扭矩的正负符号是如何规定的?如何计算扭矩?  
如何画扭矩图?

4. 薄壁圆管扭转剪应力公式是如何建立的?该公式的应用条件是什么?

5. 何谓剪应力互等定理?该定理是如何建立的?应用条件是什么?

6. 何谓剪应变,其单位与量纲是什么?何谓剪切虎克定律?该定律的应用条件是什么?

7. 圆轴扭转剪应力公式是如何建立的?基本假设是什么?该公式的应用条件是什么?为什么?

8. 如何计算圆截面的极惯性矩?如何计算最大扭转剪应力?空心圆截面轴何以比实心圆截面轴合理?

9. 圆轴表层斜截面上的应力公式是如何建立的?最大正应力与最大剪应力各为何值?各位于何截面?

10. 金属材料圆轴受扭时有几种破坏形式?各与何种应力有关?

11. 何谓扭转角?其单位是什么?如何计算圆轴的扭转角?何谓抗扭刚度?圆轴扭转刚度条件是如何建立的?应用该条件时应注意什么?

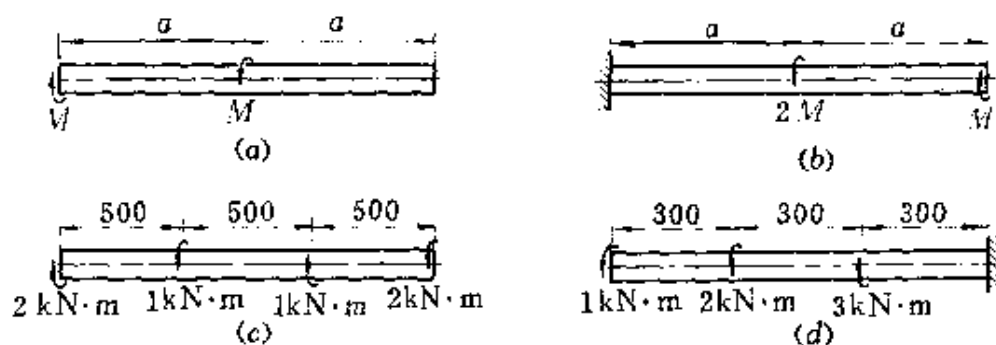
12. 如何求解扭转静不定问题?如何建立补充方程?

13. 矩形截面轴的扭转剪应力分布有何特点?如何计算最大扭转剪应力与扭转变形?

14. 弹簧应力与弹簧变形公式是如何建立的?何谓弹簧指数与弹簧常数?如何计算弹簧常数?

## 习 题

题 3.1 试求图示各轴的扭矩。



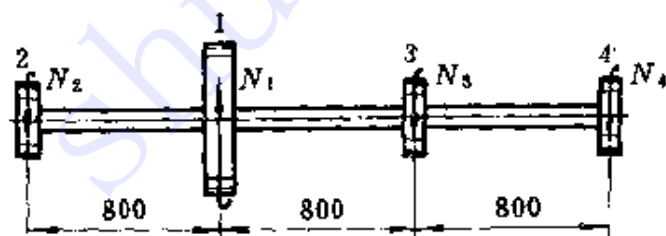
题 3.1 图

题 3.2 试画题 3.1 所示各轴的扭矩图。

题 3.3 某传动轴, 由电机带动, 已知轴的转速  $n = 1000 \text{ r/min}$  (转 / 分), 电机输入的功率  $N_p = 20 \text{ kW}$ , 试求作用在轴上的扭转矩。

题 3.4 某传动轴, 转速  $n = 300 \text{ r/min}$ , 轮 1 为主动轮, 输入功率  $N_1 = 50 \text{ kW}$ , 轮 2、3、4 为从动轮, 输出功率分别为  $N_2 = 10 \text{ kW}$ 、 $N_3 = N_4 = 20 \text{ kW}$ 。

- (1) 试画轴的扭矩图并求轴的最大扭矩;
- (2) 若将轮 1 与轮 3 的位置对调, 试分析对轴的受力是否有利。



题 3.4 图

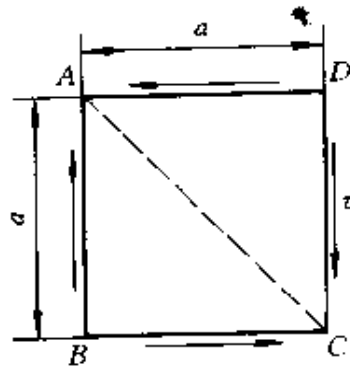
题 3.5 某受扭圆管, 外径  $D = 44 \text{ mm}$ , 内径  $d = 40 \text{ mm}$ , 横截面上的扭矩  $T = 750 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 试计算圆管横截面与纵截面上的扭转剪应力。

题 3.6 某材料的弹性模量  $E = 125 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.34$ , 试计算其剪切弹性模量  $G$ 。

题 3.7 一受扭薄壁圆管, 外径  $D = 42 \text{ mm}$ , 内径  $d = 40 \text{ mm}$ ,

扭力矩  $M = 500\text{N} \cdot \text{m}$ , 剪切弹性模量  $G = 75\text{GPa}$ , 试计算管表面纵线的倾斜角。

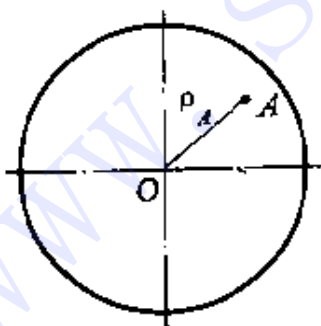
题 3.8 图示正方形板件  $ABCD$ , 边长为  $a$ , 承受剪应力  $\tau$  作用, 材料的剪切弹性模数为  $G = 70\text{GPa}$ 。设由实验测得对角线  $AC$  的伸长变形为  $\Delta l = a/2000$ , 试求剪应力  $\tau$ 。



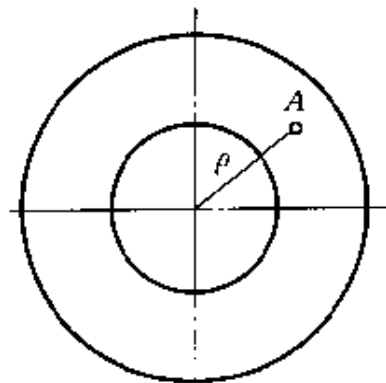
题 3.8 图

题 3.9 一受扭薄壁圆管, 内径  $d = 30\text{mm}$ , 外径  $D = 32\text{mm}$ , 材料的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.25$ , 设圆管表面纵线的倾斜角  $\gamma = 1.25 \times 10^{-3}\text{rad}$ , 试求管承受的扭力矩。

题 3.10 图示圆截面轴, 直径  $d = 50\text{mm}$ , 扭矩  $T = 1\text{kN} \cdot \text{m}$ , 试计算  $\rho_A = 20\text{mm}$  处  $A$  点的扭转剪应力  $\tau_A$ , 以及横截面上的最大扭转剪应力  $\tau_{\max}$ 。



题 3.10 图



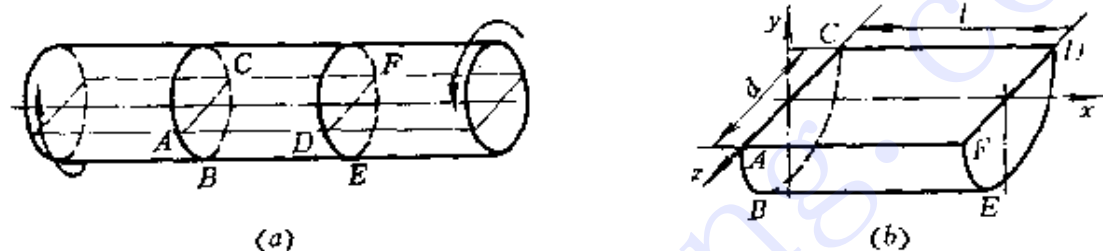
题 3.11 图

题 3.11 图示空心圆截面轴, 外径  $D = 40\text{mm}$ , 内径  $d = 20\text{mm}$ , 扭矩  $T = 1\text{kN} \cdot \text{m}$ , 试计算  $\rho = 15\text{mm}$  处  $A$  点的扭转剪应力  $\tau_A$ , 以及横截面上的最大与最小扭转剪应力。

题 3.12 一直径为  $d = 90\text{mm}$  的圆截面轴, 转速  $n = 45\text{r/min}$ , 设横截面上的最大扭转剪应力  $\tau_{\max} = 50\text{MPa}$ , 试求轴所传递的功率。

题 3.13 当薄壁圆管的  $R_0/t \geq 10$  时, 试证明按公式(3-2) 计算扭转剪应力的最大误差不超过 4.53%。

题 3.14 在图(a) 所示圆轴内, 用横截面  $ABC$ 、 $DEF$  与径向纵截面  $ADFC$  切出单元体  $ABCDEF$ (图 b), 试绘各截面上的应力分布图, 并说明该单元体是如何平衡的。

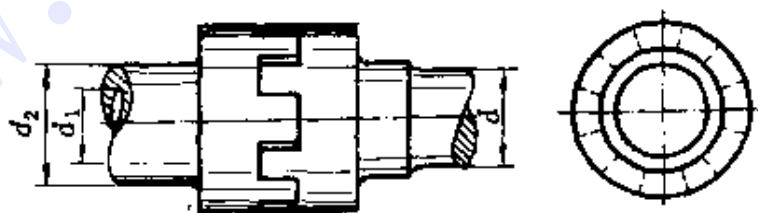


题 3.14 图

题 3.15 试求题 3.10 所述轴的最大拉应力与最大压应力。

题 3.16 某圆截面钢轴, 承受扭力矩  $M = 2.0\text{kN}\cdot\text{m}$ , 已知许用剪应力  $[\tau] = 50\text{MPa}$ , 试确定轴径。

题 3.17 实心轴与空心轴通过牙嵌离合器相连接。已知: 轴的转速  $n = 100\text{r/min}$ ; 传递功率  $N_p = 10\text{kW}$ ; 许用剪应力  $[\tau] = 80\text{MPa}$ 。试确定实心轴的直径  $d$  与空心轴的内、外径  $d_1$ 、 $d_2$ , 若  $d_1/d_2 = 0.6$ 。



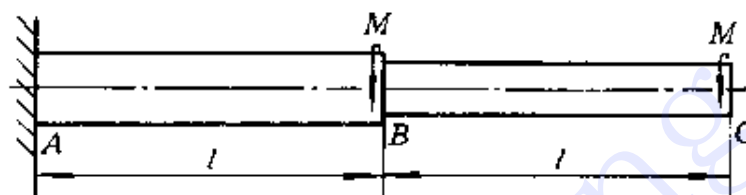
题 3.17 图

题 3.18 一圆截面试件, 直径  $d = 20\text{mm}$ , 当扭力矩  $M = 230\text{N}\cdot\text{m}$  时, 测得标距  $l_0 = 100\text{mm}$  范围内轴的扭转角  $\phi = 0.0174\text{rad}$ , 试确定剪切弹性模量  $G$ 。

题 3.19 某圆截面轴, 直径  $d = 100\text{mm}$ , 转速  $n = 120\text{r/min}$ , 材料的剪切弹性模量  $G = 80\text{GPa}$ , 设由实验测得该轴  $1\text{m}$  长度内的扭转角  $\phi = 0.02\text{rad}$ , 试求该轴所传递的功率。

题 3.20 题 3.1(c) 所示轴, 轴径  $d = 50\text{mm}$ , 剪切弹性模量为  $G = 80\text{GPa}$ , 试计算该轴的总扭转角, 并画出轴表面母线的位移情况。

题 3.21 图示圆截面轴,  $AB$  与  $BC$  段的直径分别为  $d_1$  与  $d_2$ , 且  $d_1 = 4d_2/3$ , 试求轴内的最大剪应力、最大正应力以及截面  $C$  的转角, 并画出轴表面母线的位移情况, 材料的剪切弹性模量为  $G$ 。



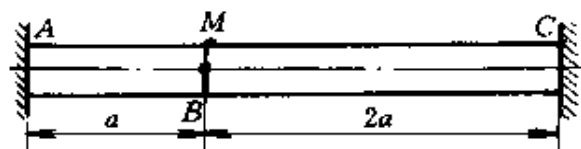
题 3.21 图

题 3.22 某圆截面钢轴, 转速  $n = 250\text{r/min}$ , 所传功率  $N_p = 60\text{kW}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 40\text{MPa}$ , 单位长度的许用扭转角  $[\theta] = 0.8^\circ/\text{m}$ , 剪切弹性模量  $G = 80\text{GPa}$ , 试设计轴径。

题 3.23 如将题 3.22 所述轴改为  $\alpha = 0.8$  的空心轴, 则其外径  $D$  与内径  $d$  应分别为何值。与原设计的实心轴相比, 空心轴的重量为其百分之几?

题 3.24 题 3.21 所述轴, 若扭矩  $M = 1\text{kN} \cdot \text{m}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 80\text{MPa}$ , 单位长度许用扭转角  $[\theta] = 0.5^\circ/\text{m}$ , 剪切弹性模量  $G = 80\text{GPa}$ , 试确定轴径  $d_1$  与  $d_2$ 。

题 3.25 图示圆截面轴, 直径为  $d$ , 材料的剪切弹性模量为  $G$ , 截面  $B$  的转角为  $\phi_B$ , 试求所加扭矩  $M$  之值。



题 3.25 图

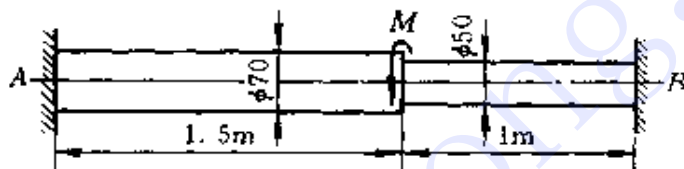
题 3.26 试确定图示轴的直径。已知扭力矩  $M_1 = 400\text{N} \cdot \text{m}$ ,  $M_2 = 600\text{N} \cdot \text{m}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 40\text{MPa}$ 。



题 3.26 图

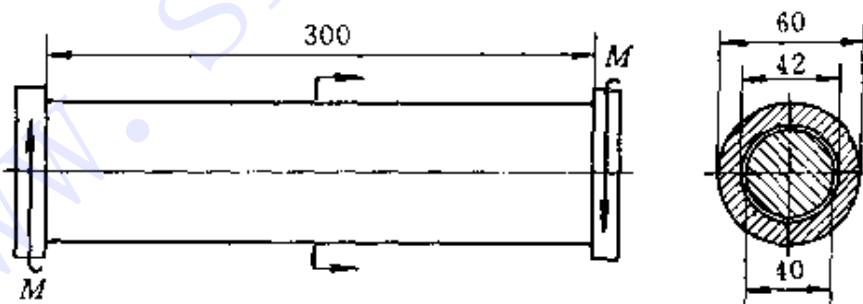
题 3.27 题 3.26 所述轴, 若单位长度的许用扭转角  $[\theta] = 0.25^\circ/\text{m}$ , 剪切弹性模量  $G = 80\text{GPa}$ , 试确定轴径。

题 3.28 图示两端固定的圆截面轴, 承受扭力矩  $M$  作用, 若许用剪应力  $[\tau] = 60\text{MPa}$ , 试确定许用扭力矩  $[M]$ 。



题 3.28 图

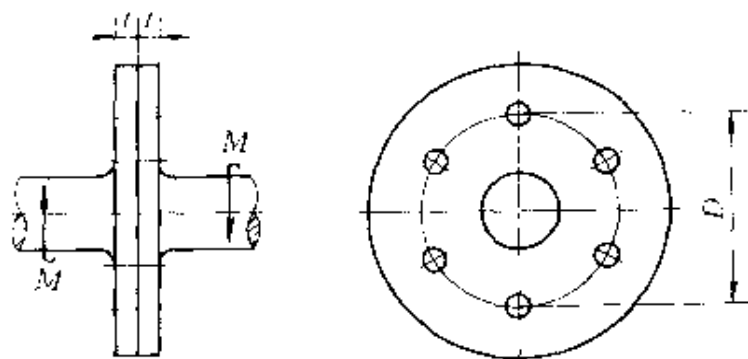
题 3.29 图示组合轴, 由套管与芯轴并藉两端的刚性平板牢固地连接在一起。设作用在刚性平板上的扭力矩为  $M = 2\text{kN} \cdot \text{m}$ , 套管与芯轴的剪切弹性模量分别为  $G_1 = 40\text{GPa}$ ,  $G_2 = 80\text{GPa}$ , 试求套管与芯轴的扭矩及最大扭转剪应力。



题 3.29 图

题 3.30 图示两轴, 由突缘并径螺栓相连接, 螺栓的材料相同、直径为  $d$ , 并均匀地排列在直径为  $D$  的圆周上, 突缘的厚度为  $t$ , 轴所承受的扭力矩为  $M$ , 试计算螺栓的挤压应力与剪切面上的剪应力。



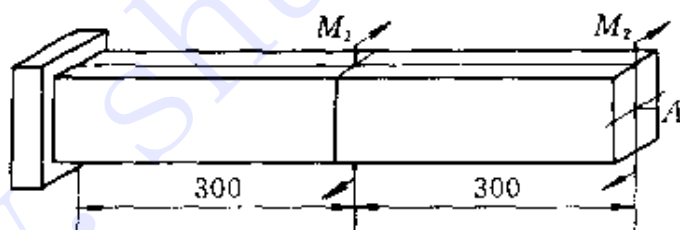


题 3.30 图

题 3.31 试确定题 3.30 所述螺栓的直径。已知扭矩  $M = 5.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 螺栓位于直径为  $D = 100 \text{ mm}$  的圆周上, 突缘厚度  $t = 10 \text{ mm}$ , 螺栓的许用剪应力  $[\tau] = 100 \text{ MPa}$ , 许用挤压应力  $[\sigma_{hc}] = 300 \text{ MPa}$ 。

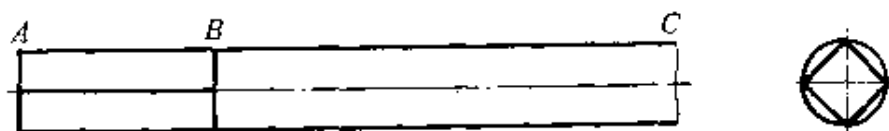
题 3.32 横截面面积、杆长与材料均相同的两根轴, 截面分别为正方形与  $h/b = 2$  的矩形, 试比较其抗扭刚度。

题 3.33 图示  $90 \times 60 \text{ mm}$  的矩形截面轴, 承受扭矩  $M_1$  和  $M_2$  作用, 且  $M_1 = 1.6M_2$ , 已知许用剪应力  $[\tau] = 60 \text{ MPa}$ , 剪切弹性模量  $G = 80 \text{ GPa}$ , 试求  $M_2$  的许用值及截面 A 的转角。



题 3.33 图

题 3.34 图示轴, AB 段因安装手轮, 截面为矩形。试从强度方面考虑, 轴的许用扭矩因此降低多少(用百分比表示)。



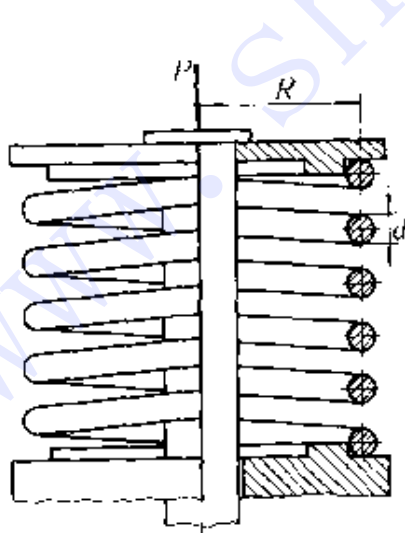
题 3.34 图

题 3.35 某密圈螺旋弹簧的平均直径  $D = 125\text{mm}$ , 弹簧丝直径  $d = 18\text{mm}$ , 承受轴向载荷  $P = 500\text{N}$  作用, 如剪切弹性模量  $G = 80\text{GPa}$ , 试求弹簧的最大剪应力, 并计算使弹簧产生  $\lambda = 8\text{mm}$  的轴向变形的弹簧圈数。

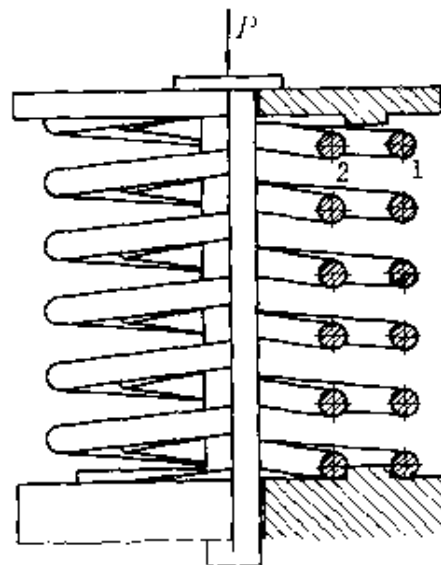
题 3.36 题 3.35 所述弹簧, 若弹簧圈数  $n = 10$ , 试计算其弹簧常数。

题 3.37 图示密圈螺旋弹簧, 其平均半径  $R = 20\text{mm}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 480\text{MPa}$ , 剪切弹性模量  $G = 80\text{GPa}$ 。若欲使该弹簧在轴向载荷  $P = 1\text{kN}$  作用时恰好产生  $\lambda = 30\text{mm}$  的轴向变形, 试确定弹簧丝的直径  $d$  与弹簧圈数  $n$ 。

题 3.38 图示某发动机的气门控制装置, 由弹簧 1、2 所组成, 两弹簧的丝径、圈数、许用剪应力与剪切弹性模量均相同, 依次为  $d = 10\text{mm}$ ,  $n = 10$ ,  $[\tau] = 480\text{MPa}$  与  $G = 80\text{GPa}$ , 弹簧的平均半径分别为  $R_1 = 50\text{mm}$ ,  $R_2 = 30\text{mm}$ 。试确定轴向压力的许用值  $[P]$ 。



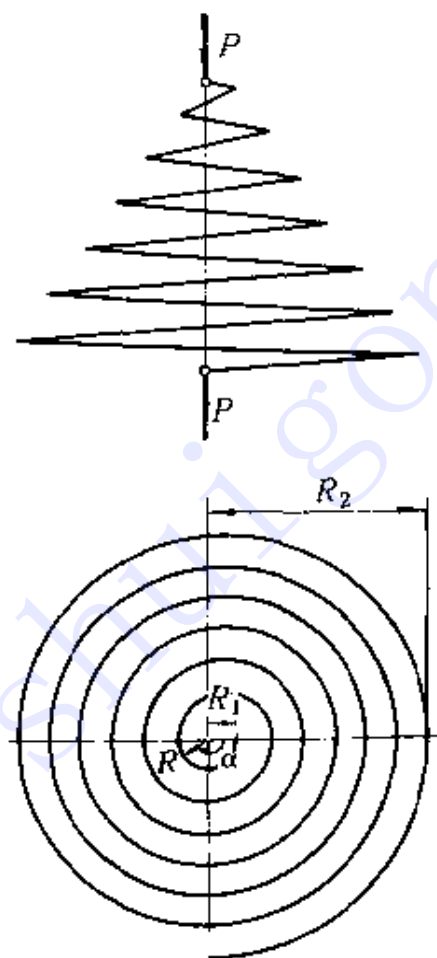
题 3.37 图



题 3.38 图

\* 题 3.39 图示锥形弹簧, 承受轴向压力  $P$  作用。试计算  $P$  的许用值及弹簧的轴向缩短。已知弹簧丝的直径  $d = 20\text{mm}$ , 弹簧顶部的半径  $R_1 = 50\text{mm}$ , 底部的半径  $R_2 = 200\text{mm}$ , 弹簧圈数  $n = 10$ , 许用剪应力  $[\tau] = 300\text{MPa}$ , 剪切弹性模量  $G = 80\text{GPa}$ 。弹簧的俯视图为一螺线, 其方程为

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}$$



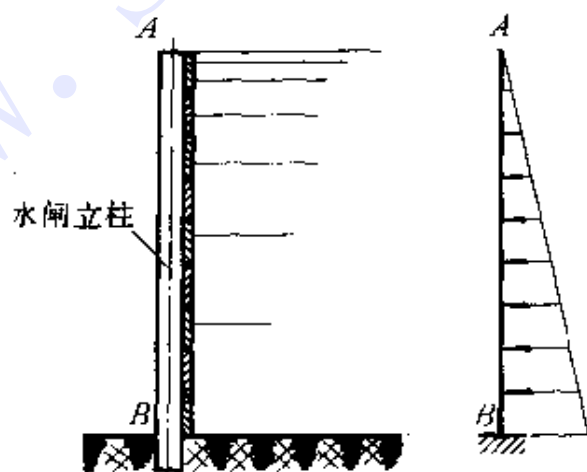
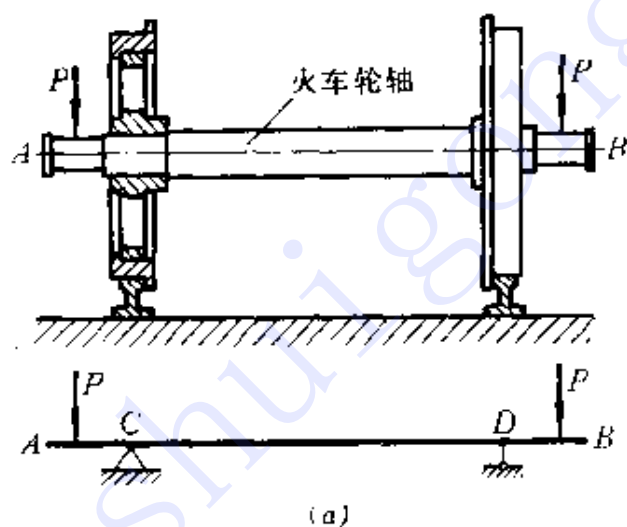
题 3.39 图

\* 题 3.40 一密圈螺旋弹簧, 簧丝的截面为矩形, 其边长  $a = 20\text{mm}$ , 弹簧的平均半径  $R = 100\text{mm}$ , 剪切弹性模量  $G = 80\text{GPa}$ , 弹簧圈数  $n = 20$ 。试计算在轴向载荷  $P = 1\text{kN}$  作用时弹簧丝的最大剪应力与弹簧的轴向变形。

## 第四章 剪力与弯矩

### § 4-1 引言

在工程实际中, 存在大量的受弯构件。例如, 图 4-1(a) 所示火车轮轴, 图 4-1(b) 所示水闸立柱, 均为受弯构件的实例。



(b)

图 1-1

一般说来,当杆件承受垂直于其轴线的外力,或在其轴线平面内作用有外力偶时(图 4-2, a),杆的轴线将由直线变为曲线。以轴线变弯为主要特征的变形形式,称为**弯曲**。凡是以弯曲变形为主要变形的杆件,称为**梁**。

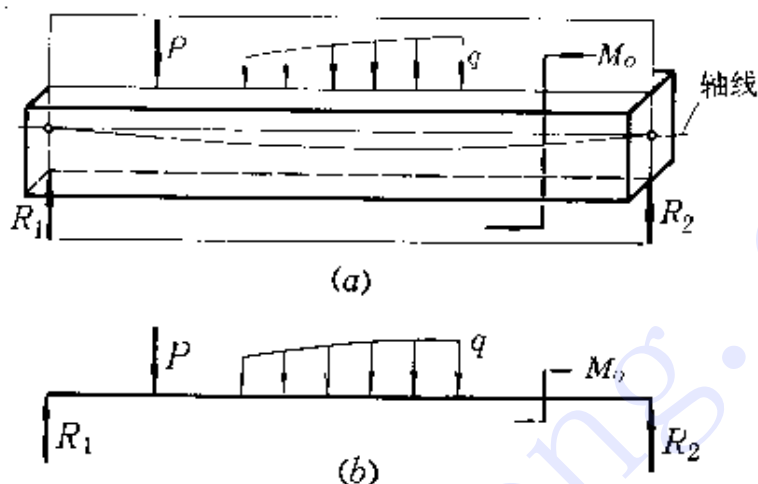


图 4-2

梁是机械与工程结构中最常见的构件。在分析计算时,通常用轴线代表梁,例如图 4-2(a) 所示梁的计算简图即如图 4-2(b) 所示。

本章研究梁的外力与内力,并为简单起见,仅研究所有外力均作用在同一平面内的梁,实际上,这也是最常见的梁。

## § 4-2 梁的载荷与支反力

### 一、梁的载荷

作用在梁上的外力,包括载荷与支反力,最常见的载荷有以下三种。

(1) 集中载荷 通过微小梁段作用在梁上的横向力。例如图 4-1(a) 所示作用在火车轮轴上的外力  $P$ 。

(2) 集中力偶 通过微小梁段作用在梁轴平面内的外力偶。例如图 4-2(a) 所示作用在梁上的外力偶  $M_0$ 。

(3) 分布载荷 沿梁全长或部分长度连续分布的横向力。例如图 4-1(b) 所示作用在水闸立柱上的外力。

分布载荷的大小用所谓载荷集度表示。如图 4-3 所示, 设梁段  $\Delta x$  上分布载荷的合力为  $\Delta P$ , 则当  $\Delta x$  趋于零时, 比值  $\Delta P/\Delta x$  的极限即称为**载荷集度**, 并用  $q$  表示, 即

$$q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} \quad (4.1)$$

载荷集度的常用单位为  $\text{N/mm}$  或  $\text{kN/m}$ 。当载荷均匀分布时, 载荷集度  $q$  为常值; 当载荷非均匀分布时(图 4-3), 载荷集度  $q$  沿梁轴变化, 即  $q = q(x)$ 。

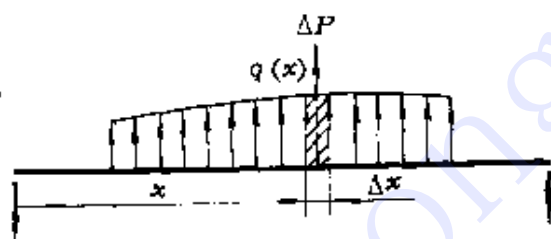


图 4-3

## 二、支座形式与支反力

作用在梁上的另一类外力为支座对梁的反作用力。最常见的支座及相应的支反力如下。

(1) 可动铰支座 如图 4-4(a) 所示, 可动铰支座仅限制支承

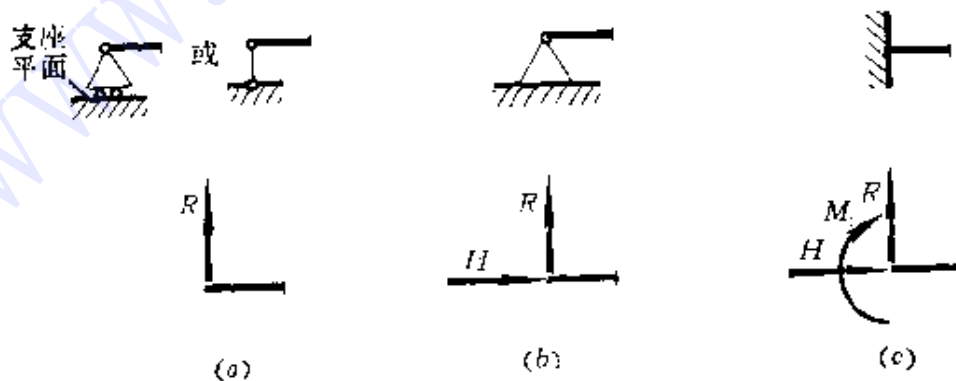


图 4-4



处垂直于支承平面的线位移, 与此相应, 仅存在垂直于支承平面的反力  $R$ 。

(2) 固定铰支座 如图 4-4(b) 所示, 固定铰支座限制支承处沿任何方向的线位移, 因此, 相应支反力可用两个分力表示, 例如水平反力  $H$  与垂直反力  $R$ 。

(3) 固定端 如图 4-4(c) 所示, 固定端限制梁端的线位移与角位移, 因此, 相应支反力可用三个分量表示: 沿梁轴方向的支反力  $H$ 、垂直于梁轴方向的支反力  $R$  以及位于梁轴平面内的支反力矩  $M$ 。

### 三、梁的类型

如前所述, 本章所讨论之梁, 外力均作用在同一平面内。平面力系的有效平衡方程只有三个, 因此, 如果作用在梁上的支反力 (力或力矩) 也正好是三个, 则恰可由平衡方程确定, 此种梁称为**静定梁**。最常见的静定梁有以下三种。

(1) 简支梁 一端固定铰支, 另一端为可动铰支的梁(图 4-5, a)。

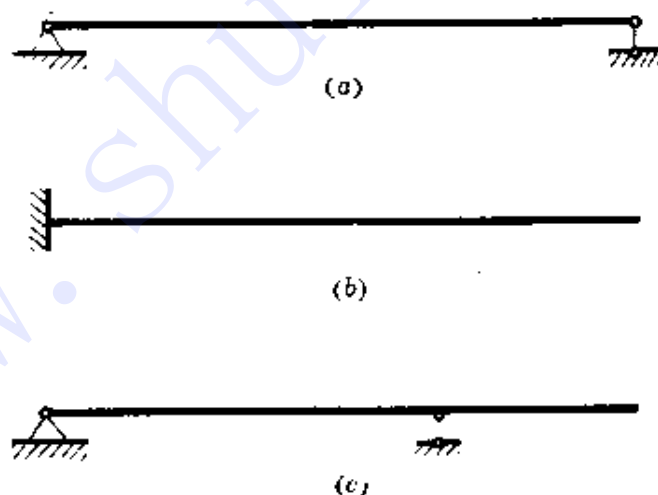


图 4-5

(2) 悬臂梁 一端固定、另一端自由的梁(图 4-5, b), 例如图 4-1(b) 所示梁。

(3) 外伸梁 具有一个或两个外伸部分的简支梁(图 4-5, c), 例如图 4-1(a) 所示梁。

如果梁上支反力的数目,超过有效平衡方程的数目,则仅靠平衡方程不能求解,仅靠平衡方程尚不能确定全部支反力的梁,称为静不定梁或超静定梁。求解静不定梁需要考虑梁的变形,具体解法将在 § 6-6 中讨论。

### § 4-3 剪力与弯矩

考虑图 4-6(a) 所示任意梁,其上外力均为已知。现在研究任一横截面  $m-m$  上的内力。截面  $m-m$  的形心的横坐标为  $x$ ,以后即将该截面简称为  $x$  截面或截面  $x$ 。

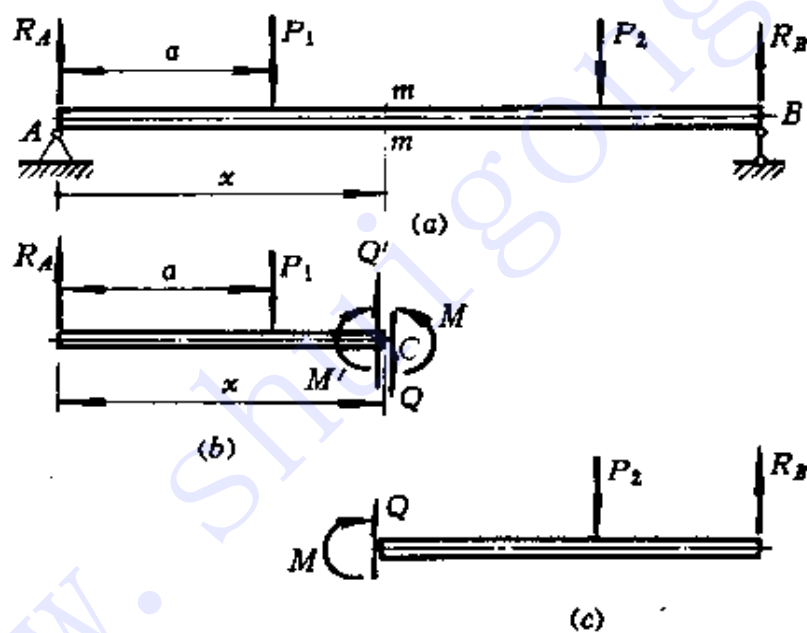


图 4-6

首先,利用截面法,在截面  $x$  处将梁假想地切开,并任选一段,例如左段,作为研究对象。在左段梁上(图 4-6,  $b$ ),作用有已知外力  $R_A$  与  $P_1$ ,在截面  $x$  上,则一定存在内力以维持该段梁的平衡。

为了揭示上述内力的特点,将左段梁上的所有外力均向截面  $x$  的形心  $C$  简化,得主矢量  $Q'$  与主矩  $M'$  (图 4-6,  $b$ )。由于外力均垂直于梁轴,主矢量  $Q'$  也垂直于梁轴,即平行于横截面。由此可见,当梁弯曲时,横截面上必然同时存在两种内力分量:与主矢量  $Q'$

平衡的内力  $Q$ ; 与主矩  $M'$  平衡的内力偶矩  $M$ 。内力  $Q$  即前述剪力; 矢量位于所切横截面的内力偶矩  $M$ , 称为弯矩。

根据左段梁的平衡条件, 由平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad R_A - P_1 - Q = 0$$

得

$$Q = R_A - P_1$$

由平衡方程

$$\sum M_C = 0, \quad M + P_1(x - a) - R_A x = 0$$

得

$$M = R_A x - P_1(x - a)$$

截面  $x$  上的内力亦可利用右段梁的平衡条件求得(图 4-6, c)。

关于剪力与弯矩的正负符号, 兹规定如下: 在所切横截面的内侧切取微段(图 4-7, a), 凡企图使微段沿顺时针方向转动的剪力为正; 使微段弯曲呈凹形的弯矩为正(图 4-7, b)。按此规定, 图 4-6 中所示之剪力与弯矩均为正。

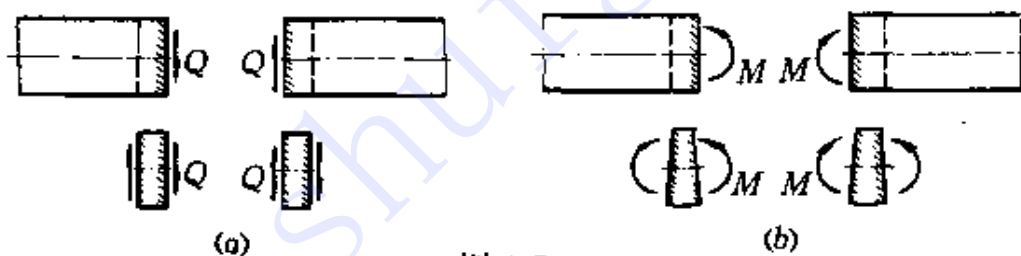


图 4-7

综上所述, 可将计算剪力与弯矩的方法概括如下:

(1) 在需求内力的横截面处, 假想地将梁切开, 并任选一段为研究对象;

(2) 画所选梁段的受力图, 图中, 剪力  $Q$  与弯矩  $M$  可假设为正;

(3) 由平衡方程  $\sum Y = 0$  计算剪力  $Q$ ;

(4) 由平衡方程  $\sum M_C = 0$  计算弯矩  $M$ , 式中,  $C$  为所切横截面的形心。

例 1 图 4-8(a) 所示悬臂梁, 长为  $l$ , 承受均布载荷  $q$  作用, 试

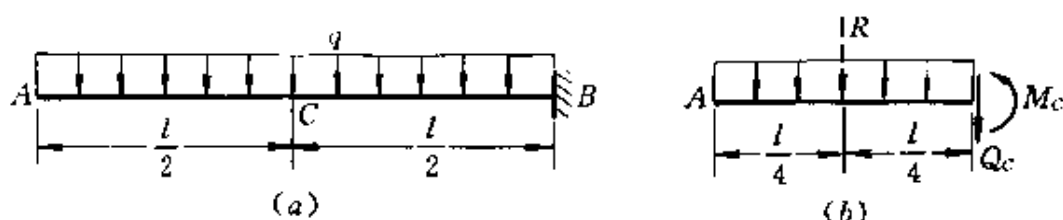


图 4-8

求距左端  $l/2$  处的横截面  $C$  的剪力与弯矩。

解 在截面  $C$  处将梁假想地切开, 左段的受力如图 4-8(b) 所示。在该段梁上, 分布载荷的合力为

$$R = \frac{ql}{2}$$

并作用在距左端  $l/4$  处。

根据左段梁的平衡方程  $\sum Y = 0$  与  $\sum M_C = 0$ , 得截面  $C$  的剪力与弯矩分别为

$$Q_C = -R = -\frac{ql}{2}$$

$$M_C = -R \frac{l}{4} = -\frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = -\frac{ql^2}{8}$$

例 2 图 4-9(a) 所示外伸梁, 承受集中力  $P$  与力矩为  $M_0 = Pl$  的集中力偶作用, 试计算横截面  $A_+$  与  $D_-$  的剪力与弯矩。截面  $A_-$  代表距横截面  $A$  无限近并位于其右侧的截面; 截面  $D_-$  代表距横截面  $D$  无限近并位于其左侧的横截面。

解 1. 计算支反力

设支座  $A$ 、 $B$  处的垂直反力分别为  $R_A$  与  $R_B$ , 则由平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad R_B l - P \times 2l - Pl = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad R_B - R_A - P = 0$$

得

$$R_A = 2P, \quad R_B = 3P$$

2. 计算截面  $A_+$  的剪力与弯矩

在截面  $A_+$  处假想地将梁切开, 并选左段为研究对象(图 4-9, b), 由平衡方程  $\sum Y = 0$ , 得截面  $A_+$  的剪力为

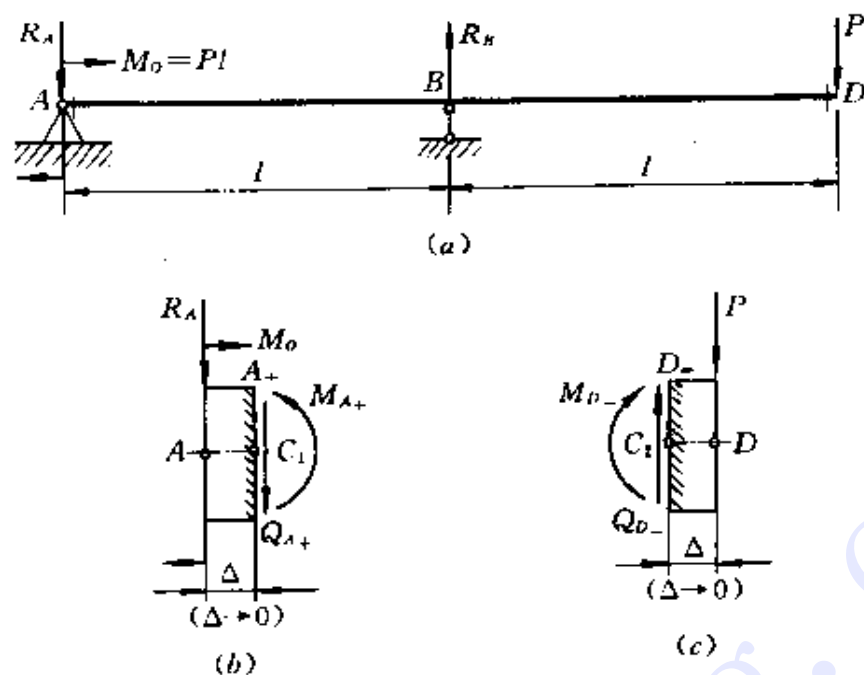


图 4-9

$$Q_{A+} = -R_A = -2P$$

由平衡方程  $\sum M_{C_1} = 0$  ( $C_1$  为截面  $A$  的形心), 得该截面的弯矩为

$$M_{A+} = M_O - R_A \times \Delta = Pl - 2P \times 0 = Pl$$

### 3. 计算截面 $D_-$ 的剪力与弯矩

在截面  $D_-$  处假想地将梁切开, 并为计算简单, 选择切开后的右段为研究对象(图 4-9,c), 由平衡方程  $\sum Y = 0$  与  $\sum M_{C_2} = 0$ , 得

$$Q_{D-} = P$$

$$M_{D-} = -P \times 0 = 0$$

## § 4-4 剪力、弯矩方程与剪力、弯矩图

以上分析表明, 在梁的不同横截面上, 剪力与弯矩一般均不相同, 即剪力与弯矩沿梁轴变化。

如果沿梁轴选取坐标  $x$  表示横截面的位置, 并建立剪力、弯矩与坐标  $x$  间的解析关系式, 即

$$Q = Q(x)$$

$$M = M(x)$$

则上述方程分别称为**剪力方程**与**弯矩方程**。

表示剪力与弯矩沿梁轴变化情况的另一重要方法为图示法。作图时,以  $x$  为横坐标轴,以剪力  $Q$  或弯矩  $M$  为纵坐标轴,分别绘制剪力与弯矩沿梁轴变化的曲线,上述曲线分别称为**剪力图**与**弯矩图**。

必须指出,研究剪力与弯矩沿梁轴的变化情况,对于解决梁的强度与刚度问题都是必不可少的。因此,剪力、弯矩方程与剪力、弯矩图是分析弯曲问题的重要基础。

下面举例说明建立剪力、弯矩方程与绘制剪力、弯矩图的方法。

**例 3** 图 4-10(a) 所示简支梁,承受均布载荷  $q$  作用,试建立

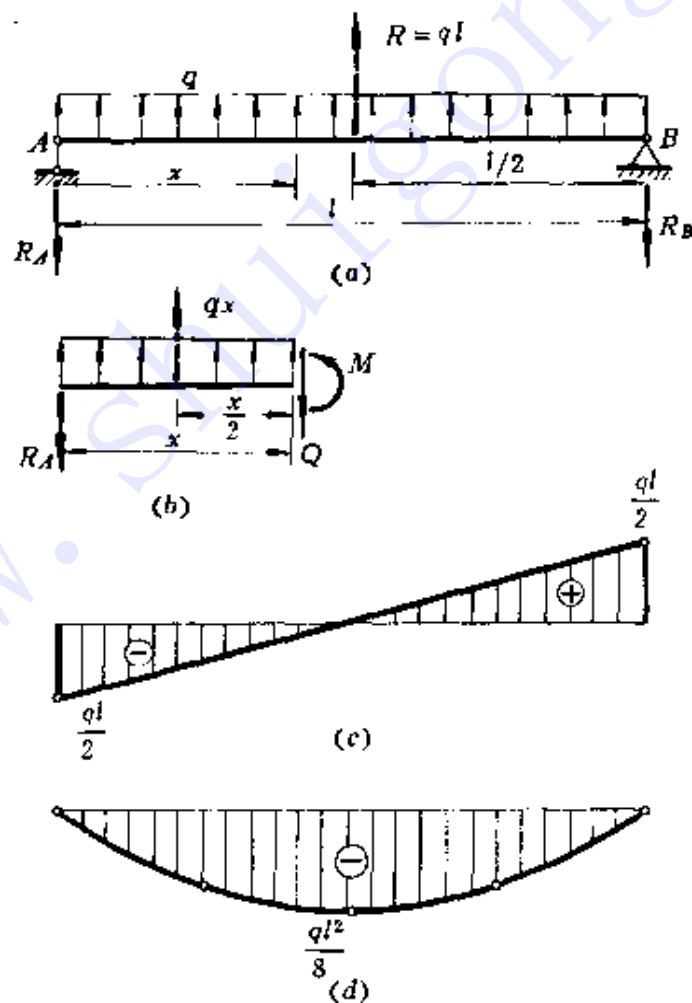


图 4-10



梁的剪力、弯矩方程, 并绘制剪力、弯矩图。

解 1. 计算支反力

分布载荷的合力为  $R = ql$ , 并作用在梁的中点, 所以, 支座  $A$ 、 $B$  的支反力为

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

2. 建立剪力、弯矩方程

如图所示, 以截面  $A$  的形心为  $x$  轴的原点, 并在截面  $x$  处切取左段为研究对象(图 4-10,  $b$ ), 可以看出, 左段梁上分布载荷的合力为  $qx$ , 并作用在该段梁的中点, 根据平衡条件, 得

$$Q = -R_A + qx = -\frac{ql}{2} + qx \quad (a)$$

$$(0 < x < l)$$

$$M = -R_A x + qx \cdot \frac{x}{2} = -\frac{ql}{2}x + \frac{q}{2}x^2 \quad (b)$$

$$(0 \leq x \leq l)$$

3. 画剪力、弯矩图

由式(a)可知, 剪力  $Q$  为  $x$  的线性函数, 且  $Q(0) = -ql/2$ ,  $Q(l) = ql/2$ , 所以, 梁的剪力图如图 4-10(c) 所示。

由式(b)可知, 弯矩  $M$  为  $x$  的二次函数, 其图形为二次抛物线。由式(b)求得  $M$ 、 $x$  的一些对应值如下表:

$x$	0	$l/4$	$l/2$	$3l/4$	$l$
$M$	0	$-3ql^2/32$	$-ql^2/8$	$-3ql^2/32$	0

根据上述  $x$ 、 $M$  值绘制曲线, 即得梁的弯矩图(图 4-10,  $d$ )。

由剪力、弯矩图可知:

$$Q_{\max} = \frac{ql}{2}$$

$$|M|_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

**例 4** 图 4-11(a) 所示简支梁, 在截面  $C$  承受集中力  $P$  作用, 试建立梁的剪力、弯矩方程, 并绘制剪力、弯矩图。

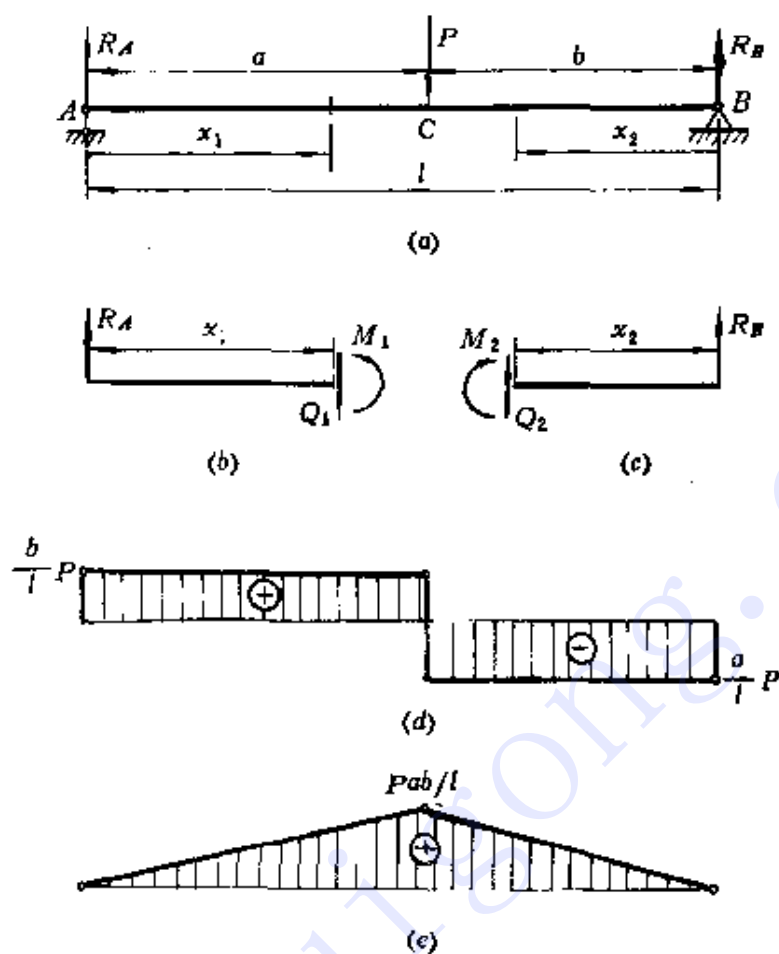


图 4-11

解 1. 计算支反力

由平衡方程  $\sum M_B = 0$  与  $\sum M_A = 0$ , 得 A、B 端的支反力分别为

$$R_A = \frac{bP}{l}, \quad R_B = \frac{aP}{l}$$

2. 建立剪力、弯矩方程

由于在截面 C 处作用有集中力 P, 故应将梁划分为 AC 与 CB 两段, 分段建立剪力与弯矩方程。

对于 AC 段, 选 A 点为原点, 并用坐标  $x_1$  表示横截面的位置, 则由图 4-11(b) 可知, AC 段的剪力与弯矩方程分别为

$$Q_1 = R_A = \frac{bP}{l} \quad (0 < x_1 < a) \quad (a)$$

$$M_1 = R_A x_1 = \frac{bP}{l} x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a) \quad (b)$$

对于  $CB$  段, 为计算简单, 选  $B$  点为原点, 并用坐标  $x_2$  表示横截面的位置, 则由图 4-11(c) 可知, 该段的剪力与弯矩方程分别为

$$Q_2 = -R_B = -\frac{aP}{l} \quad (0 < x_2 < b) \quad (c)$$

$$M_2 = R_B x_2 = \frac{aP}{l} x_2 \quad (0 \leq x_2 \leq b) \quad (d)$$

### 3. 画剪力、弯矩图

根据式(a)、(c)画剪力图如图 4-11(d) 所示; 根据式(b)、(d)画弯矩图如图 4-11(e) 所示。

可以看出: 横截面  $C$  的弯矩最大, 其值为

$$M_{\max} = \frac{Pab}{l}$$

如果  $a > b$ , 则  $BC$  段的剪力的绝对值最大, 其值为

$$|Q|_{\max} = \frac{aP}{l}$$

由剪力、弯矩图中可以看出, 在集中力作用处, 其左、右两侧横截面上的弯矩相同, 而剪力则发生突变, 突变量等于该集中力之值。

**例 5** 图 4-12(a) 所示简支梁, 在截面  $C$  处承受力矩为  $M_0$  的集中力偶作用, 试建立剪力、弯矩方程, 并绘剪力、弯矩图。

解 1. 计算支反力

由平衡方程  $\sum M_B = 0$  与  $\sum Y = 0$ , 得

$$R_A = \frac{M_0}{l}, \quad R_B = \frac{M_0}{l}$$

### 2. 建立剪力、弯矩方程

以集中力偶的作用面  $C$  为分界面, 将梁划分为  $AC$  与  $CB$  两段, 并分别用  $Q_1, M_1$  与  $Q_2, M_2$  代表其内力, 可以看出

$$Q_1 = -R_A = -\frac{M_0}{l} \quad (0 < x_1 \leq a) \quad (a)$$

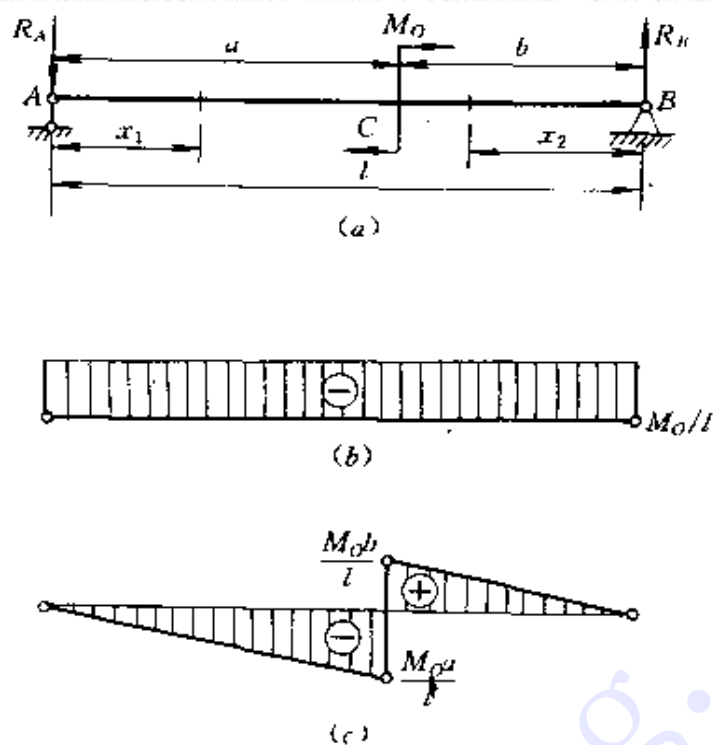


图 4-12

$$M_1 = -R_A x_1 = -\frac{M_o}{l} x_1 \quad (0 \leq x_1 < a) \quad (b)$$

$$Q_2 = -R_B = -\frac{M_o}{l} \quad (0 < x_2 \leq b) \quad (c)$$

$$M_2 = R_B x_2 = \frac{M_o}{l} x_2 \quad (0 \leq x_2 < b) \quad (d)$$

### 3. 画剪力、弯矩图

根据式(a)、(c)画剪力图如图 4-12(b) 所示; 根据式(b)、(d)画弯矩图如图 4-12(c) 所示。

由剪力、弯矩图中可以看出, 在集中力矩作用处, 其左、右两侧横截面上的剪力相同, 而弯矩则发生突变, 突变量等于该集中力矩之值。

**例 6** 图 4-13(a) 所示简支梁, 负载  $P$  可沿梁轴移动 ( $0 < \eta < l$ )。试问:

(1) 负载位于何位置时, 梁的最大剪力最大, 并确定该剪力之值;

(2) 负载位于何位置时, 梁的最大弯矩最大, 并确定该弯矩之值。

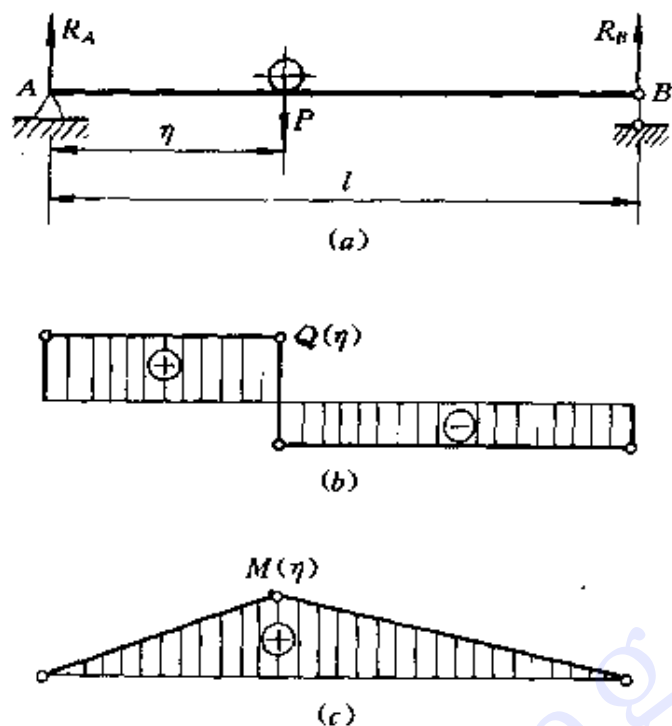


图 4-13

解 1. 梁的剪力与弯矩图

当负载位于  $\eta$  截面时, 支座 A 的支反力为

$$R_A = \frac{(l - \eta)P}{l}$$

梁的剪力与弯矩图分别如图 4-13(b)、(c) 所示, 最大剪力为

$$Q(\eta) = R_A = \frac{(l - \eta)P}{l} \quad \left( \text{当 } \eta < \frac{l}{2} \text{ 时} \right) \quad (a)$$

而最大弯矩则为

$$M(\eta) = R_A \eta = P\eta \left( 1 - \frac{\eta}{l} \right) \quad (b)$$

2. 剪力与弯矩的最大值

由式(a)可知, 当  $\eta$  接近于零, 即负载靠近支座 A 时, 剪力  $Q(\eta)$  最大, 其值为

$$Q_{\max} = Q(0) = P$$

根据式(b), 由

$$\frac{dM(\eta)}{d\eta} = P \left( 1 - \frac{2\eta}{l} \right) = 0$$

得

$$\eta = \frac{l}{2}$$

即负载位于梁跨度中点时, 弯矩  $M(\eta)$  最大, 其值为

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4}$$

## § 4-5 剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系

在外载荷作用下, 梁内产生剪力与弯矩。本节研究剪力、弯矩与载荷集度三者间的关系, 及其在绘制剪力、弯矩图中的应用。

### 一、剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系

图 4-14(a) 所示梁, 承受集度为  $q = q(x)$  的分布载荷作用。这里, 坐标轴  $x$  的正向为自左向右, 载荷集度则规定为方向向上者为正。为了研究剪力与弯矩沿梁轴的变化, 用坐标分别为  $x$  与  $x + dx$  的横截面从梁中切取一微段来分析(图 4-14, b)。

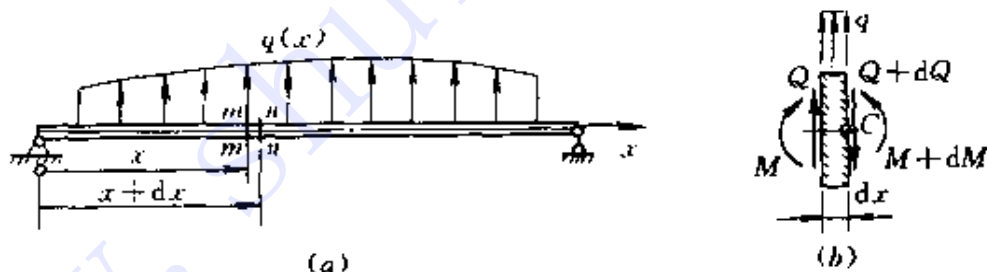


图 4-14

如图所示, 设截面  $x$  的内力为  $Q, M$ , 由于内力沿梁轴连续变化, 截面  $x + dx$  的内力应为  $Q + dQ$  与  $M + dM$ 。此外, 在该微段上还作用有集度为  $q(x)$  的分布载荷。

在上述各力作用下, 微段处于平衡状态, 平衡方程为

$$\sum Y = 0, \quad Q + qdx - (Q + dQ) = 0 \quad (a)$$

$$\sum M_c = 0, \quad M + dM - qdx \frac{dx}{2} - Qdx - M = 0 \quad (b)$$



由式(a)得

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad (4-2)$$

由式(b)并略去二阶微量  $q(dx)^2/2$ , 得

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (4-3)$$

将式(4-3)代入式(4-2), 还可得

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q \quad (4-4)$$

上述关系式表明: 剪力图某点处的切线斜率, 等于相应截面处的载荷集度; 弯矩图某点处的切线斜率, 等于相应截面处的剪力; 而弯矩图某点处的二阶导数, 则等于相应截面处的载荷集度。

以上即剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系。从数学方面看, 它们反映了  $M$ 、 $Q$ 、 $q$  间的函数关系, 从力学方面考虑, 它们代表了微段的平衡方程。

## 二、利用剪力、弯矩与载荷集度间的关系绘制剪力、弯矩图

由式(4-2)、(4-3)与式(4-4)可以看出, 梁的载荷与剪力、弯矩图之间存在如下关系。

### 1. 在无分布载荷作用的梁段

由于  $q(x) = 0$ ,  $dQ/dx = q(x) = 0$ , 因此,  $Q(x) = \text{常数}$ , 即剪力图为水平直线。由于  $Q(x) = \text{常数}$ , 故  $dM/dx = Q(x) = \text{常数}$ , 即相应的弯矩图为直线, 其斜率则随  $Q$  值而定。

由此不难看出, 对于仅有集中载荷作用的梁, 其剪力与弯矩图一定是由直线构成的(参阅图 4-11、4-12 与图 4-13)。

### 2. 在均布载荷作用的梁段

由于  $q(x) = \text{常数} \neq 0$ ,  $dQ/dx = \text{常数} \neq 0$ , 因此, 剪力图为倾斜直线, 其斜率随  $q$  值而定, 而相应的弯矩图则为二次抛物线。

由此不难看出, 当分布载荷向上即  $q > 0$  时,  $d^2M/dx^2 = q > 0$ , 弯矩图为凹曲线(参阅图 4-10); 反之, 当分布载荷向下即  $q < 0$  时, 弯矩图为凸曲线。此外, 由于  $dM/dx = Q$ , 因此, 在  $Q = 0$  的横

截面处, 弯矩图相应存在极值点。

下面举例说明上述关系的具体应用。

**例 7** 试利用剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系检查图 4-10(a) 所示梁的剪力、弯矩图。

**解** 在该梁上, 作用有方向向上的均布载荷, 即  $q(x) = \text{常数} > 0$ , 所以, 剪力图为上倾直线, 弯矩图为凹曲线。

在  $x = l/2$  处, 剪力为零, 而弯矩图上相应存在极值点, 这种对应关系也是正确的。

**例 8** 图 4-15(a) 所示简支梁, 在截面 B、C 处各作用一集中力  $P$ , 试利用剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系绘制梁的剪力、弯矩图。

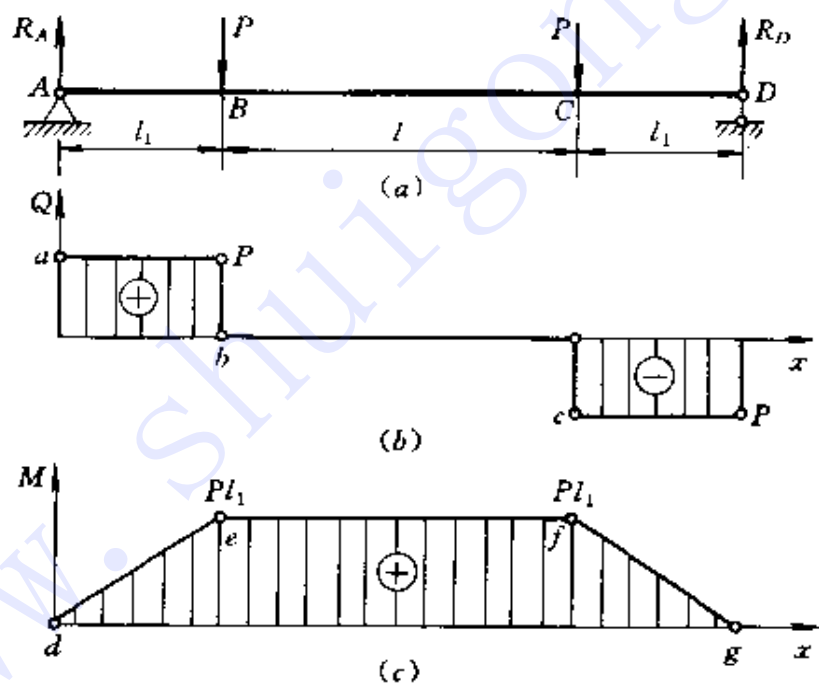


图 4-15

**解** 1. 计算支反力

由对称条件可知, A、D 端的支反力为

$$R_A = R_D = P$$

2. 画剪力图

将梁划分为 AB、BC 与 CD 三段, 由于梁上无分布载荷作用,

各段梁的剪力图均为水平直线,而弯矩图则为倾斜直线。

利用截面法,求得各段梁的起点的剪力分别为

$$Q_{A_+} = P$$

$$Q_{B_+} = 0$$

$$Q_{C_+} = -P$$

上述截面的剪力值,在  $x-Q$  平面内依次对应  $a, b, c$  三点(图 4-15,  $b$ )。于是,在  $AB, BC$  与  $CD$  段内,分别过  $a, b, c$  画水平直线,即得梁的剪力图。

### 3. 画弯矩图

如上所述,  $AB, BC$  与  $CD$  段的弯矩图均为倾斜直线。利用截面法,求得各段起点与终点的弯矩分别为

$$M_{A_+} = 0$$

$$M_{B_-} = M_{B_+} = Pl_1$$

$$M_{C_-} = M_{C_+} = Pl_1$$

$$M_{D_-} = 0$$

上述截面的弯矩值,在  $x-M$  平面内依次对应  $d, e, f, g$  四点(图 4-15,  $c$ )。于是,分别连直线  $de, ef$  与  $fg$ ,即得梁的弯矩图。

由图 4-15( $b$ )、( $c$ ) 可以看出,在  $BC$  段内,剪力为零,弯矩为常数,这种受力状态称为**纯弯曲**。

**例 9** 图 4-16( $a$ ) 所示简支梁,右半段承受均布载荷  $q$  作用,试绘梁的剪力与弯矩图。

解 1. 计算支反力

由平衡方程  $\sum M_B = 0$  与  $\sum Y = 0$ ,得支座  $A, B$  的支反力分别为

$$R_A = \frac{ql}{8}$$

$$R_B = \frac{3ql}{8}$$

2. 计算剪力、弯矩值

将梁划分为  $AC$  与  $CB$  两段,利用截面法求得各段起点与终点

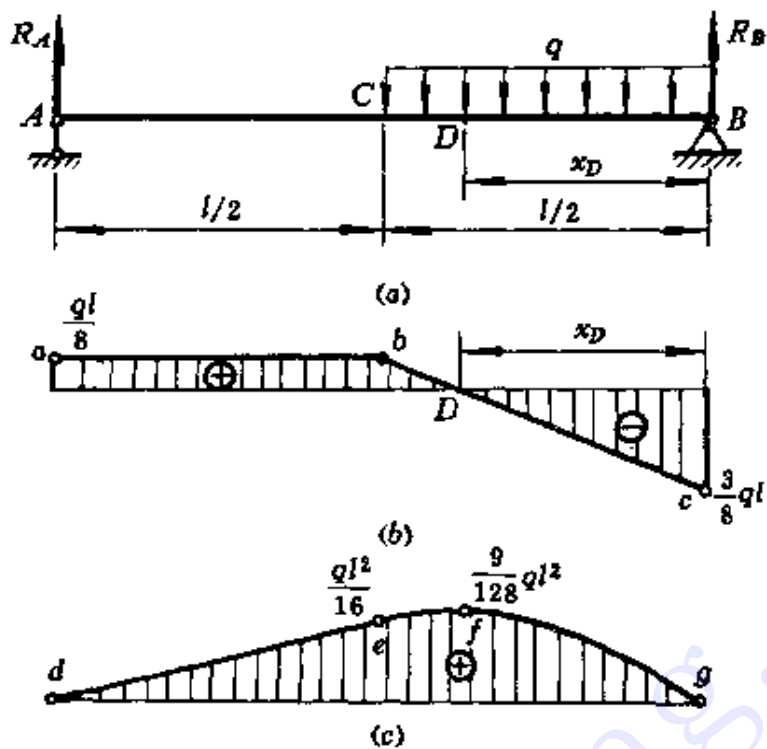


图 4-16

的剪力与弯矩如下表所示。

梁段	AC		CB	
截面	A <sub>+</sub>	C <sub>-</sub>	C <sub>+</sub>	B <sub>-</sub>
剪力	$ql/8$	$ql/8$	$ql/8$	$-3ql/8$
弯矩	0	$ql^2/16$	$ql^2/16$	0

根据上述数据, 在  $x-Q$  平面内确定  $a, b, c$  三点, 在  $x-M$  平面内确定  $d, e, g$  三点。

### 3. 判断剪力与弯矩图的形状

根据剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系, 可知剪力、弯矩图的形状具有下述特征。

梁 段	AC	CB
载荷集度	$q(x) = 0$	$q(x) = \text{常数} < 0$
剪力图	水平直线	下斜直线
弯矩图	斜 线	凸曲线

### 4. 绘制剪力与弯矩图

根据以上分析, 过  $a$ 、 $b$  与  $b$ 、 $c$  分别连直线得剪力图(图 4-16,  $b$ )。

由剪力图中看到, 在  $\overline{CB}$  段的横截面  $D$  处,  $Q = 0$ , 可见  $M$  曲线在该截面处存在极值。设  $\overline{BD} = x_D$ , 则由图 4-16( $b$ ) 可知,

$$x_D : \left( \frac{l}{2} - x_D \right) = \frac{3ql}{8} : \frac{ql}{8}$$

由此得

$$x_D = \frac{3l}{8}$$

所以, 截面  $D$  的弯矩为

$$\begin{aligned} M_D &= R_B x_D - \frac{q}{2} x_D^2 = \frac{3ql}{8} \frac{3l}{8} - \frac{q}{2} \left( \frac{3l}{8} \right)^2 \\ &= \frac{9ql^2}{128} \end{aligned}$$

由坐标  $(x_D, M_D)$  在  $x$ - $M$  平面内得极值点  $f$ (图 4-16,  $c$ )。于是, 过  $d$ 、 $e$  连直线, 过  $e$ 、 $f$ 、 $g$  绘制以  $f$  点为极值点的凸曲线, 即得弯矩图(图 4-16,  $c$ )。

## \* § 4-6 非均布载荷梁的剪力与弯矩

前面讨论了集中载荷与均布载荷作用时梁的内力, 现在研究非均布载荷作用的情况。

### 一、非均布载荷的合力

考虑图 4-17 所示梁, 在区间  $AB$  内作用有分布载荷  $q = q(x)$ 。可以看出, 在截面  $x$  处, 微段  $dx$  上分布载荷的合力为  $q(x)dx$ , 它对坐标原点  $O$  的力矩为  $xq(x)dx$ , 所以, 在整个  $AB$  区间内, 分布载荷的合力为

$$R = \int_{x_A}^{x_B} q(x) dx \quad (4-5)$$

而其作用线至原点  $O$  的距离则为

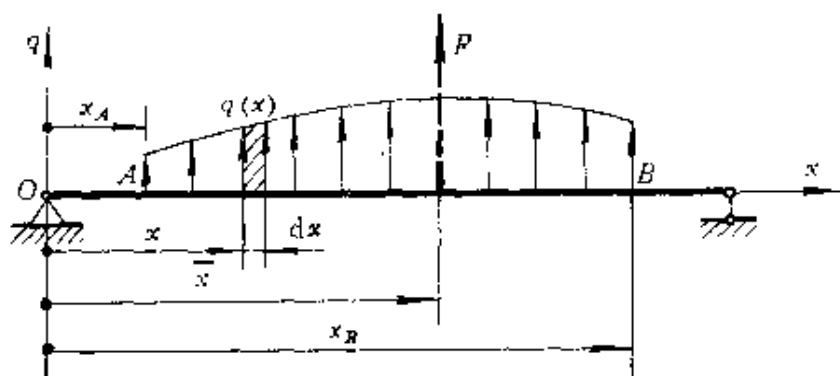


图 4-17

$$\bar{x} = \frac{\int_{x_A}^{x_B} xq(x)dx}{R} \quad (4-6)$$

式(4-5)与式(4-6)表明,在区间 AB 内,分布载荷的合力数值上即等于该区间内载荷分布图的面积,而载荷作用线则通过其形心。

## 二、线性分布载荷作用时梁的剪力与弯矩

最常见的非均布载荷为线性分布载荷,其集度为

$$q = ax + b$$

式中, a、b 为常数。

在线性分布载荷作用时,由于 q 是 x 的一次函数,梁的剪力 Q 必为 x 的二次函数,而弯矩 M 则为 x 的三次函数,即剪力图为二次抛物线,弯矩图为三次曲线。

在线性分布载荷作用时, M 曲线的凹凸性仍由 q 的正负来确定,在 q = 0 的横截面处, Q 曲线相应存在极值点。

**例 10** 图 4-18(a) 所示简支梁,承受线性分布载荷作用,载荷集度的最大绝对值为 q<sub>0</sub>,试建立梁的剪力、弯矩方程,并画剪力、弯矩图。

**解** 1. 计算支反力

由式(4-5)与式(4-6)可知,线性分布载荷的合力为



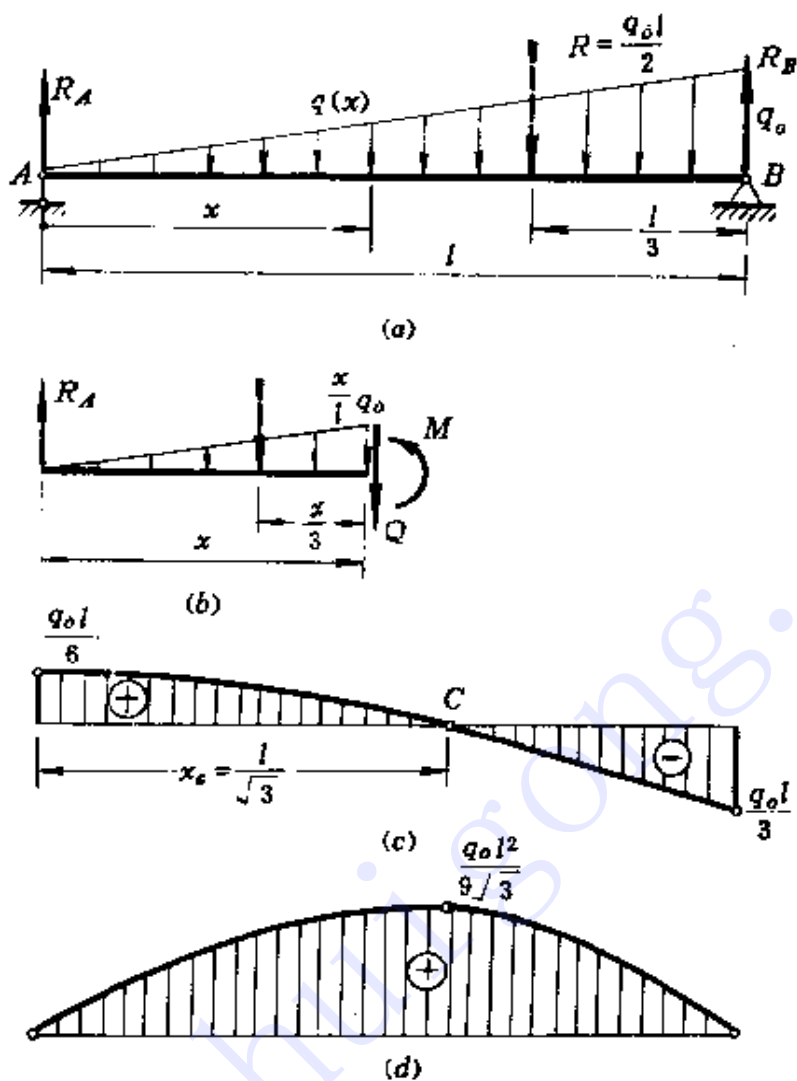


图 4-18

$$R = \frac{q_0 l}{2}$$

并作用在距 B 端  $l/3$  处。由平衡方程  $\sum M_B = 0$  与  $\sum M_A = 0$ , 得 A、B 端的支反力分别为

$$R_A = \frac{q_0 l}{6}$$

$$R_B = \frac{q_0 l}{3}$$

## 2. 建立剪力与弯矩方程

由图 4-18(b) 可知, 在截面  $x$  处, 载荷集度的数值为  $q_0 x/l$ , 所

以,梁的剪力与弯矩方程分别为

$$Q = R_A - \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{l} q_0 = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l} x^2 \quad (\text{a})$$

$$M = R_A x - \left( \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{l} q_0 \right) \frac{x}{3} = \frac{q_0 l}{6} x - \frac{q_0}{6l} x^3 \quad (\text{b})$$

### 3. 画剪力与弯矩图

由式(a)、(b)可知,剪力图为二次抛物线,弯矩图为三次曲线。由上述方程求出几个截面的剪力与弯矩后,即可画出梁的剪力与弯矩图,分别如图4-18(c)、(d)所示。

在 $x=0$ 处, $q=0$ ,故剪力图在该截面处存在极值;在 $x>0$ 处, $q<0$ ,故弯矩图为凸曲线。

由图4-18(c)可知,截面C的剪力 $Q=0$ ,说明 $M$ 曲线在该截面处存在极值。

由式(a),令

$$Q = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l} x^2 = 0$$

得截面C的横坐标为

$$x_c = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

将所得 $x_c$ 值代入式(b),即得截面C的弯矩即最大弯矩为

$$M_c = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}$$

## 复 习 题

1. 作用在梁上的常见载荷有几种?何谓载荷集度?
2. 梁的支座有几种?相应支反力各为何?
3. 何谓剪力?何谓弯矩?如何计算剪力与弯矩?并如何确定其正负符号?
4. 如何建立剪力、弯矩方程?如何画剪力、弯矩图?

5. 在集中力与集中力偶作用处, 梁的剪力与弯矩图各有何特点?

6. 如何建立剪力、弯矩与载荷集度间的关系? 它们的意义是什么? 在建立上述关系时, 对于载荷集度与坐标  $x$  的选取有何规定?

7. 在无载荷作用的梁段, 剪力与弯矩图各有何特点? 在均布载荷作用的梁段, 剪力与弯矩图又各有何特点?

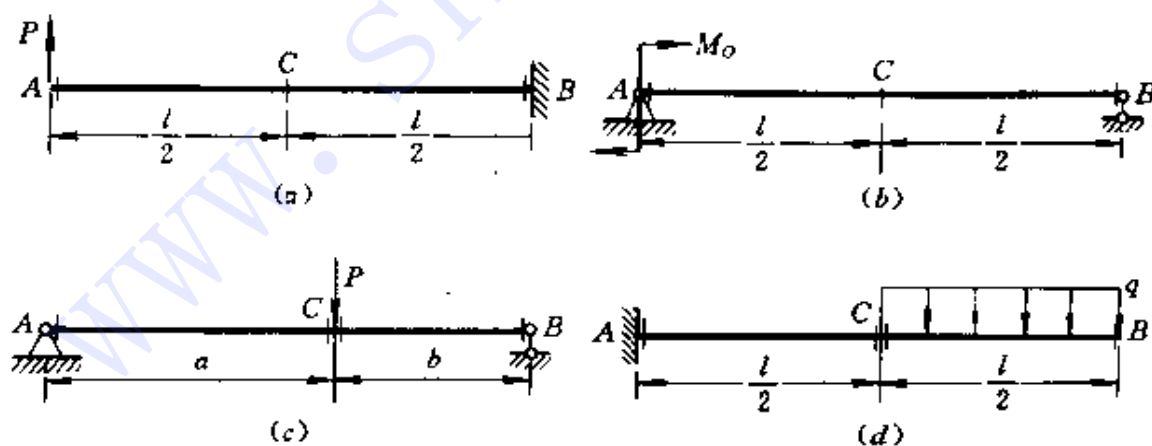
8. 试述利用剪力、弯矩与载荷集度间的关系画剪力、弯矩图的方法与步骤。

9. 如何计算非均布载荷的合力及其作用位置?

10. 在线性分布载荷作用的梁段, 梁的剪力与弯矩图各有何特点?

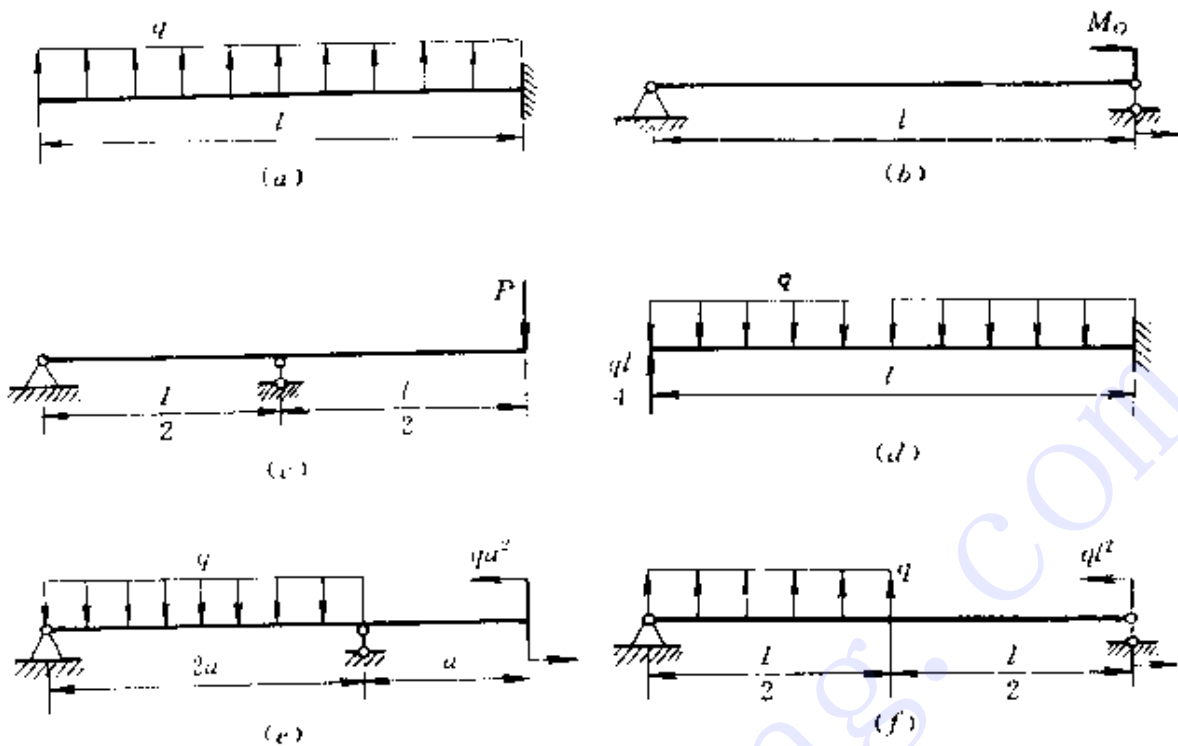
### 习 题

题 4.1 试计算图示各梁指定截面(标有细线者)的剪力与弯矩。



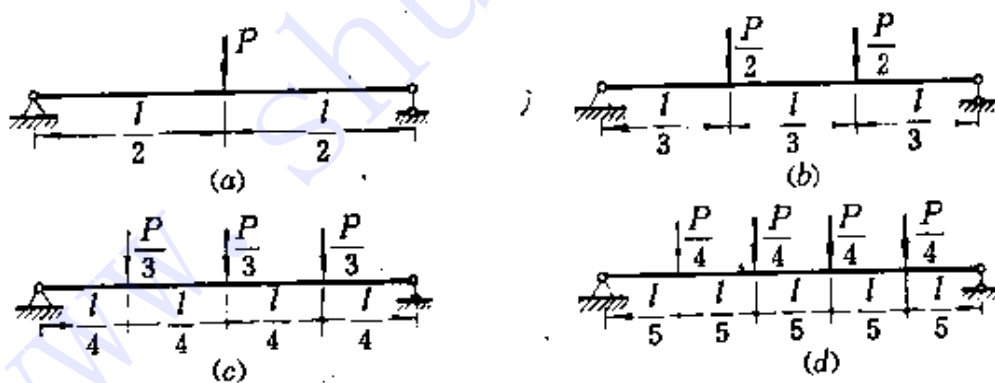
题 4.1 图

题 4.2 试建立图示各梁的剪力与弯矩方程, 并画剪力、弯矩图。



题 4.2 图

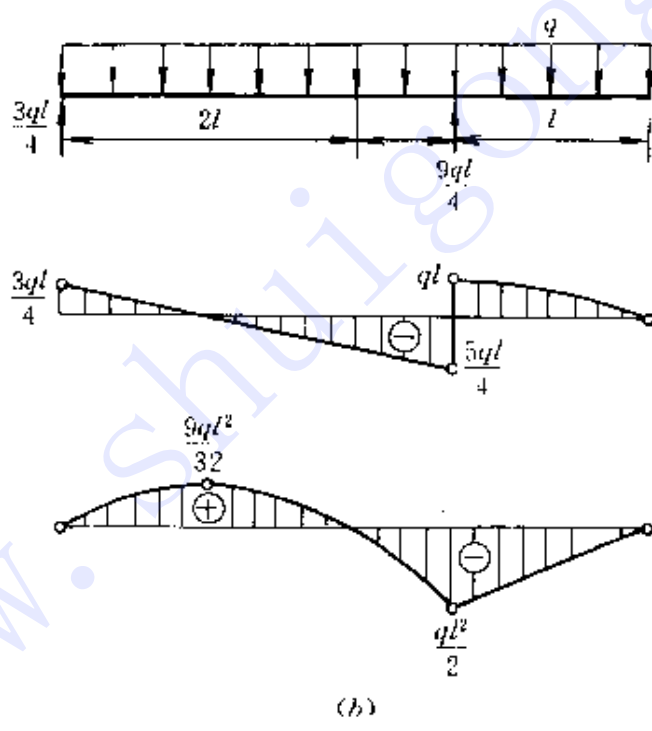
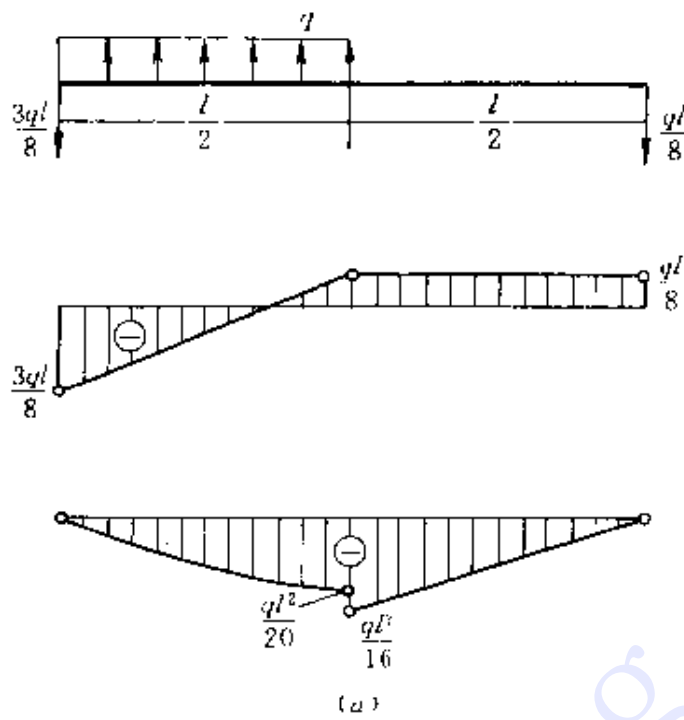
题 4.3 图示简支梁, 载荷  $P$  可按四种方式作用于梁上, 试分别画弯矩图, 并从强度方面考虑, 何种加载方式最好。



题 4.3 图

题 4.4 试利用剪力、弯矩与载荷间的关系检查图示剪力、弯矩图, 并将错误加以改正。

题 4.5 试在下列两种情况下, 建立剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系。

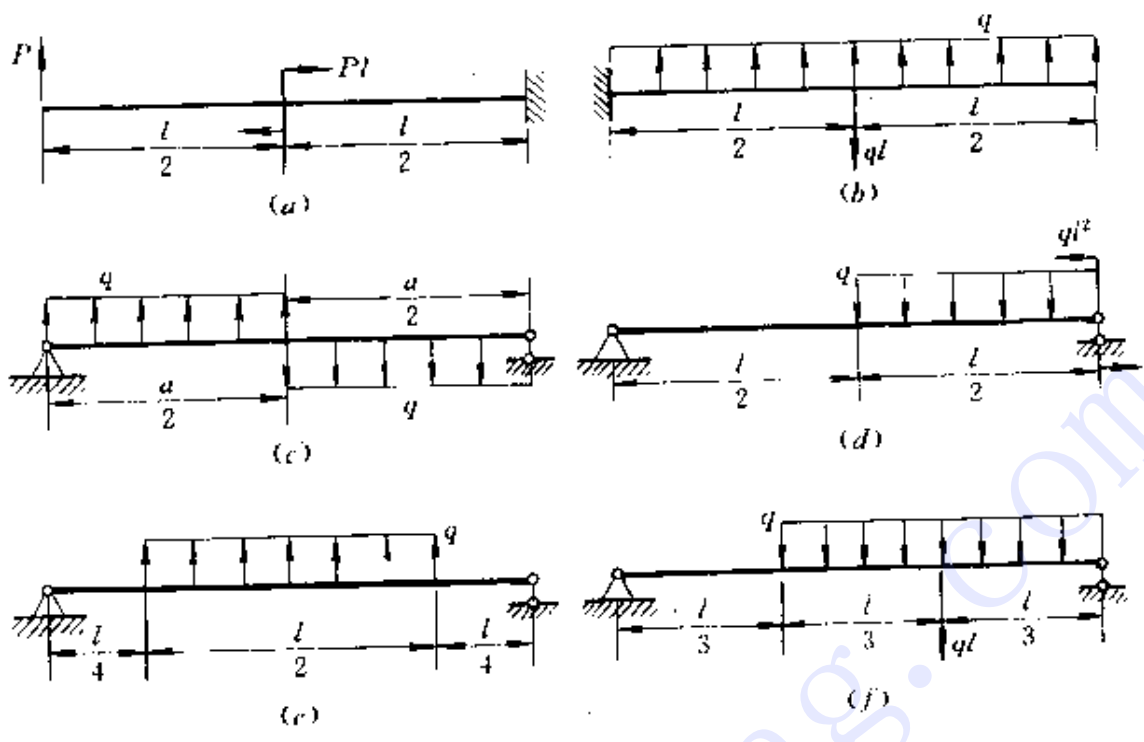


题 4.4 图

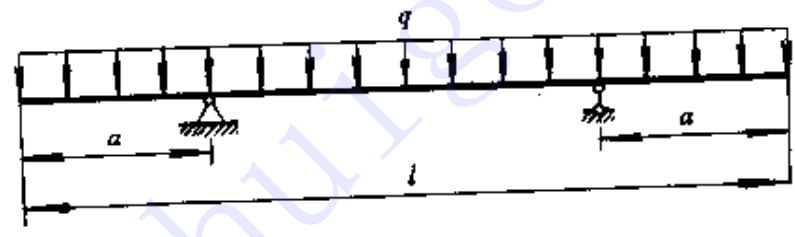
- (1) 分布载荷以方向向下者为正, 坐标轴  $x$  为自左向右;
- (2) 分布载荷以方向向上者为正, 坐标轴  $x$  为自右向左。

题 4.6 图示各梁, 试利用剪力、弯矩与载荷集度间的关系绘其剪力、弯矩图。

题 4.7 图示外伸梁, 承受均布载荷  $q$  作用。试问当  $a$  为何值



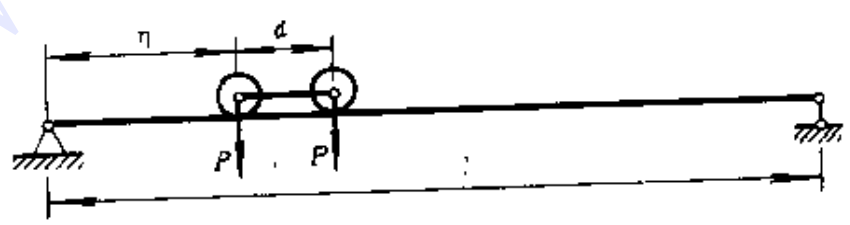
题 4.6 图



题 4.7 图

时梁的最大弯矩(即  $|M|_{\max}$ ) 最小。

题 4.8 图示简支梁, 梁上小车可沿梁轴移动, 两轮对梁之压力均为  $P$ 。试问:



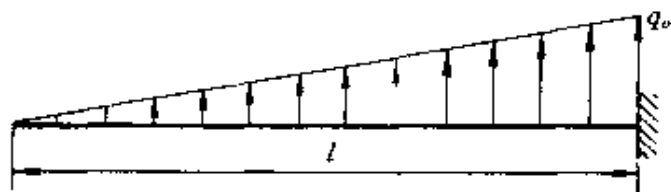
题 4.8 图

(1) 小车位于何位置时, 梁的最大弯矩最大, 并确定该弯矩之值;



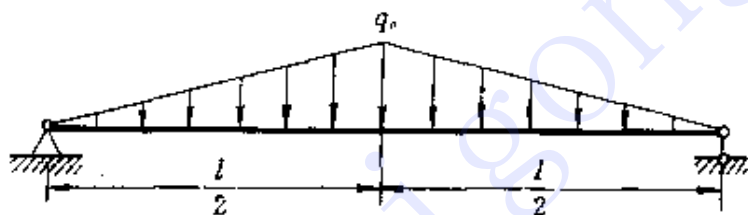
(2) 小车位于何位置时, 梁的最大剪力最大, 并确定该剪力之值。

题 4.9 图示悬臂梁, 承受三角形分布载荷, 载荷集度的最大值为  $q_0$ , 试建立梁的剪力、弯矩方程, 并画剪力、弯矩图。



题 4.9 图

题 4.10 图示简支梁, 承受三角形分布载荷, 载荷集度的最大绝对值为  $q_0$ , 试利用剪力、弯矩与载荷间的微分关系画剪力、弯矩图。



题 4.10 图

## 第五章 梁的应力

### § 5-1 引言

由前述分析可知,在一般情况下,梁内同时存在剪力与弯矩。因此,在梁的横截面上,将同时存在剪应力与正应力(图 5-1, a)。因为只有切向微内力  $\tau dA$  才可能构成剪力(图 5-1, b);只有法向微内力  $\sigma dA$  才可能构成弯矩。梁弯曲时横截面上的剪应力与正应力,分别称为**弯曲剪应力**与**弯曲正应力**。

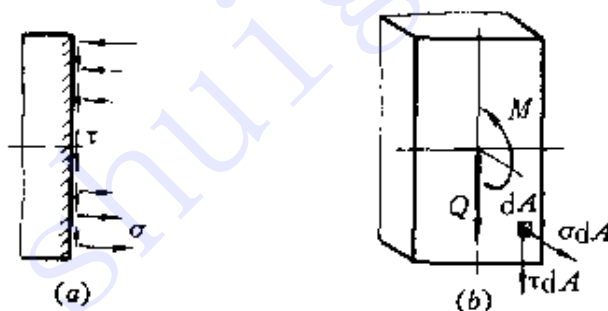


图 5-1

本章研究梁的应力、强度计算与梁的设计。

### § 5-2 对称弯曲正应力

在机械与工程结构中,最常见的梁往往至少具有一个纵向对称面,而外力则作用在该对称面内(图 5-2)。在这种情况下,梁的变形对称于纵向对称面,这种变形形式,称为**对称弯曲**。本节研究对称弯曲时梁的弯曲正应力。

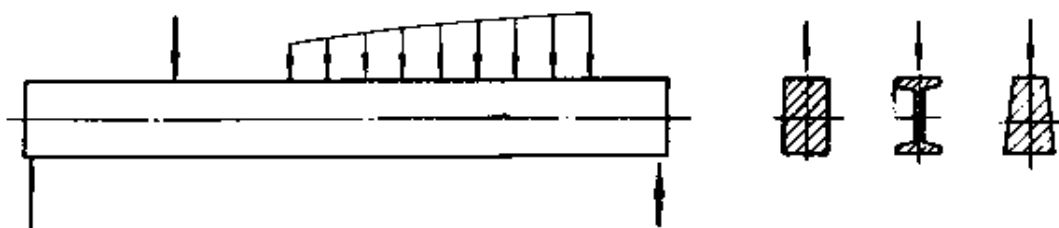


图 5-2

### 一、基本假设

首先观察梁的变形。取一根对称截面梁(例如矩形截面梁), 在其表面画上纵线与横线(图 5-3, a)。然后, 在梁两端纵向对称面内, 施加一对大小相等、方向相反的力偶, 使梁处于纯弯曲受力状态。从实验中观察到(图 5-3, b):

(1) 横线仍为直线, 只是横线间作相对转动, 但仍与纵线正交;

(2) 纵线变为弧线, 而且, 靠近梁顶面的纵线缩短, 靠近梁底面的纵线伸长;

(3) 在纵线伸长区, 梁的宽度减小, 而在纵线缩短区, 梁的宽度则增加, 情况与轴向拉、压时的变形相似。

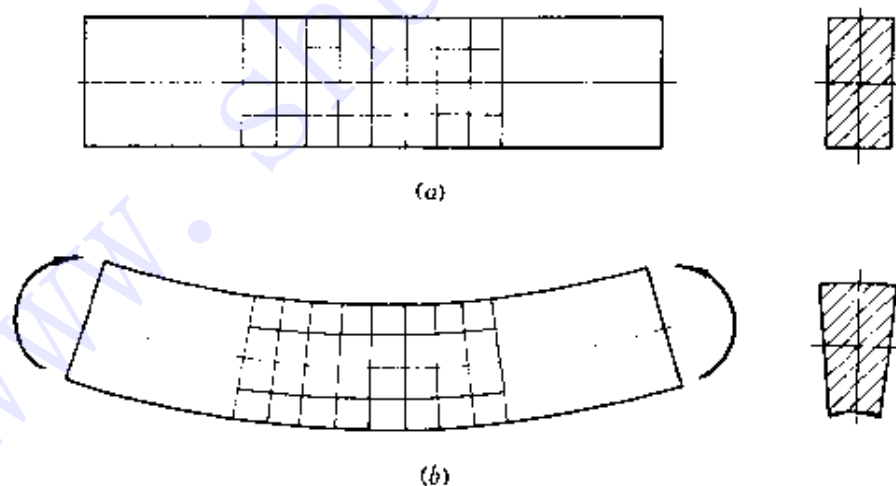


图 5-3

根据上述现象, 对梁内变形与受力作如下假设:

(1) 变形后, 横截面仍保持平面, 且仍与纵线正交, 称为弯曲问题的平面假设;

(2) 梁内各纵向“纤维”仅承受轴向拉应力或压应力, 即处于所谓**单向受力状态**。

上述假设已为实验与理论分析所证实。

根据平面假设, 梁变形后横截面仍与各纵线正交, 即横截面上各点处均无剪应变, 因此, 梁纯弯时横截面上无剪应力。

根据平面假设, 当梁弯曲时, 部分“纤维”伸长, 部分“纤维”缩短(图 5-3, b), 由伸长区到缩短区, 其间必存在一长度不变的过渡层, 称为**中性层**(图 5-4)。中性层与横截面的交线, 称为**中性轴**。对称弯曲时, 梁的变形对称于纵向对称面, 因此中性轴必垂直于截面的纵向对称轴。

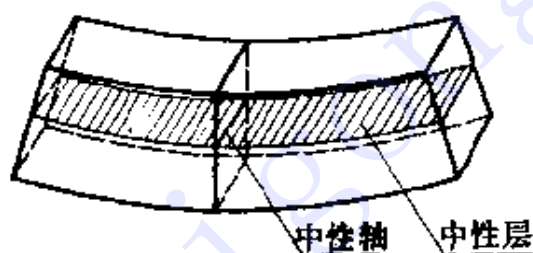


图 5-4

概括地说, 纯弯曲时梁的所有横截面仍保持平面, 并绕中性轴作相对转动, 而纵向“纤维”则均处于单向受力状态。

## 二、弯曲正应力一般公式

现在, 根据上述分析, 进一步考虑几何, 物理与静力学三方面, 以建立弯曲正应力公式。

首先, 研究纵向“纤维”的变形。为此, 用横截面 1-1 与 2-2 从梁中切取长为  $dx$  的一微段, 并沿截面纵向对称轴与中性轴分别建立  $y, z$  轴(图 5-5, a)。梁弯曲后, 纵坐标为  $y$  的纵线  $\overline{ab}$  变为弧线  $\widehat{a'b'}$ (图 5-5, b)。设截面 1-1 与 2-2 间的相对转角为  $d\theta$ , 中性层  $\widehat{O_1O_2}$  的曲率半径为  $\rho$ , 那么, 纵线  $ab$  的变形即为

$$\Delta l = (\rho + y)d\theta - dx = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = yd\theta$$

而其正应变则为

$$\epsilon = \frac{yd\theta}{dx} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

(a)

实际上, 由于距中性层等远各“纤维”的变形相同, 所以, 上述正应变  $\epsilon$  即代表纵坐标为  $y$  的任一“纤维”的正应变。

如前所述, 假设各“纤维”处于单向受力状态, 因此, 当正应力不超过材料的比例极限时, 即可应用虎克定律(2-19), 由此得横截面上  $y$  处的正应力为

$$\sigma = E\epsilon = \frac{Ey}{\rho} \quad (b)$$

式(b)表明,  $\sigma$  与  $y$  成正比, 即正应力沿截面高度呈线性变化, 而中性轴上各点处的正应力则均为零(图 5-6)。

以上建立了公式(b), 但由于中性轴的位置与中性层曲率半径  $\rho$  的大小均为未知, 所以, 由式(b)尚不能确定正应力的大小。这些问题必须利用应力与内力间的静力学关系才能解决。

如图 5-7 所示, 横截面上各点处的法向微内力  $\sigma dA$  组成一空间平行力系, 而且, 由于横截面上没有轴力, 仅存在位于  $x$ - $y$  平面的弯矩  $M$ , 因此,

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad (c)$$

$$\int_A y\sigma dA = M \quad (d)$$

将式(b)代入式(c), 得

$$\int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

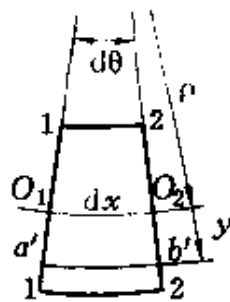
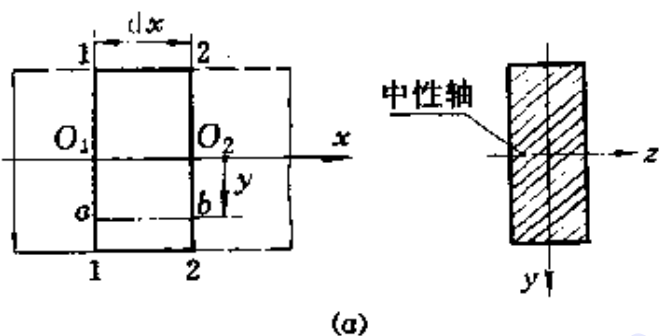


图 5-5

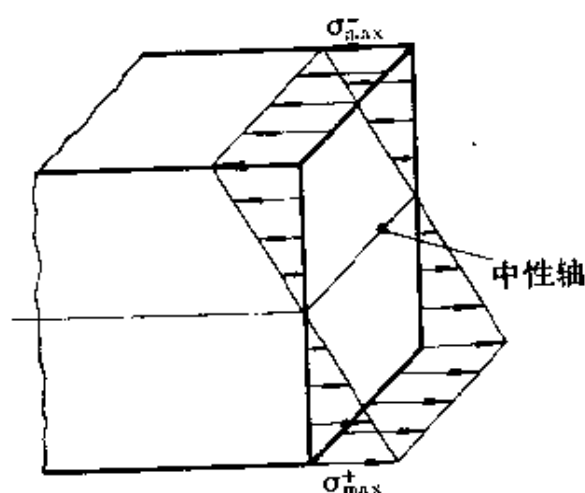


图 5-6

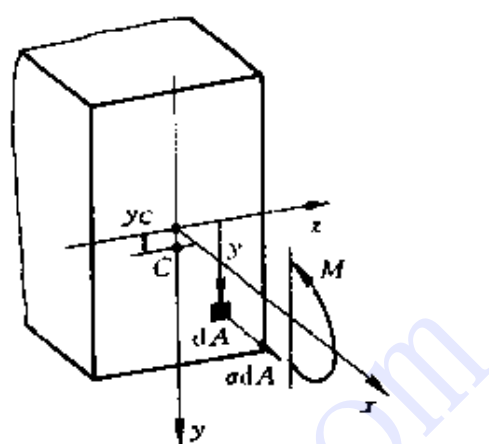


图 5-7

或

$$\int_A y dA = 0 \quad (e)$$

由理论力学可知, 截面形心  $C$  的纵坐标为

$$y_c = \frac{\int_A y dA}{A}$$

将式(e) 代入上式, 得

$$y_c = 0$$

由此可见, 中性轴通过截面形心。

将式(b) 代入式(d), 并令

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (5-1)$$

从而有

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M$$

由此得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \quad (5-2)$$

此即用曲率表示的弯曲变形公式。式中,  $I_z$  称为截面对  $z$  轴的惯性矩。



由式(5-2)可以看出,中性层的曲率  $1/\rho$  与弯矩  $M$  成正比,与  $EI_z$  成反比。乘积  $EI_z$  称为**截面抗弯刚度**或简称为**抗弯刚度**。惯性矩  $I_z$  综合地反映了横截面的形状与尺寸对弯曲变形的影响。

中性轴的位置与中性层的曲率半径确定后,弯曲正应力的大小亦随之确定。将式(5-2)代入式(b),于是得横截面上  $y$  处的正应力为

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad (5-3)$$

此即弯曲正应力的一般公式。

### 三、最大弯曲正应力

由式(5-3)可知,在  $y = y_{\max}$  即横截面上离中性轴最远的各点处,弯曲正应力最大,其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{\frac{I_z}{y_{\max}}}$$

式中,比值  $I_z/y_{\max}$  仅与截面的形状与尺寸有关,称为**抗弯截面模量**,并用  $W_z$  表示,即

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (5-4)$$

于是,最大弯曲正应力即为

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \quad (5-5)$$

可见,最大弯曲正应力与弯矩成正比,与抗弯截面模量成反比。抗弯截面模量  $W_z$  综合地反映了横截面的形状与尺寸对弯曲正应力的影响。

应该指出,以上公式虽然是在纯弯曲的情况下建立的,但在一定条件下,同样适用于非纯弯曲,此问题将在 § 5-4 中详细讨论。

**例 1** 图 5-8(a) 所示悬臂梁,梁端承受矩为  $M_0 = 20.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$  的集中力偶作用,试计算梁内的最大弯曲正应力及梁轴的曲率半径。梁用工字形型钢即所谓**工字钢**制成,其牌号为 №18,钢的弹

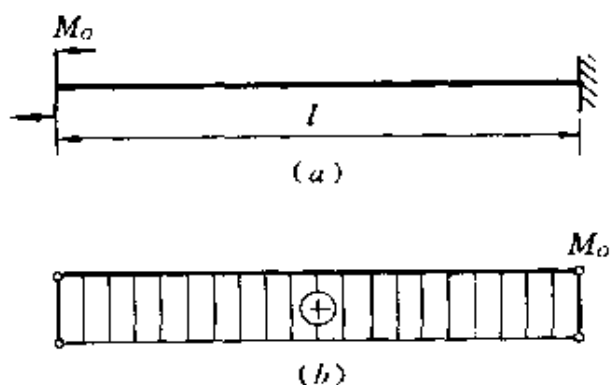


图 5-8

性模量  $E = 200\text{GPa}$ 。

解 1. 内力与应力分析

梁的弯矩图如图 5-8(b) 所示, 各截面的弯矩均为

$$M = M_0 = 20.0\text{kN} \cdot \text{m}$$

由型钢规格表查得(见附录三), №18 工字钢截面的惯性矩与抗弯截面模量分别为

$$I_z = 1.66 \times 10^7 \text{mm}^4$$

$$W_z = 1.85 \times 10^5 \text{mm}^3$$

根据式(5-5), 得梁的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{20.0 \times 10^3 \times 10^3}{1.85 \times 10^5} = 108.1\text{MPa}$$

2. 梁的变形分析

由于各横截面的弯矩相同, 故由式(5-2)可知, 梁轴各截面处的曲率也相同, 受力后轴线变为圆弧, 其半径则为

$$\rho = \frac{EI_z}{M} = \frac{200 \times 10^3 \times 1.66 \times 10^7}{20.0 \times 10^6} = 1.66 \times 10^5 \text{mm}$$

### § 5-3 惯性矩与移轴公式

以上分析表明, 为了计算弯曲正应力与弯曲变形, 必须知道截面的惯性矩。本节介绍惯性矩计算的基本公式。

## 一、简单截面的惯性矩

常见的简单截面有矩形与圆形截面等, 其惯性矩可根据式(5-1)并经积分得到。

### 1. 矩形截面的惯性矩

图 5-9 所示矩形截面, 高为  $h$ , 宽为  $b$ ,  $z$  轴通过截面形心  $C$ , 并平行于矩形底边。为了计算截面对  $z$  轴的惯性矩, 可取宽为  $b$ 、高为  $dy$  且平行于  $z$  轴的狭长条为微面积, 即取

$$dA = bdy$$

于是, 由式(5-1)得矩形截面对  $z$  轴的惯性矩为

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12} \quad (5-6)$$

而其抗弯截面模量则为

$$W_y = \frac{hb^3}{12} \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} \quad (5-7)$$

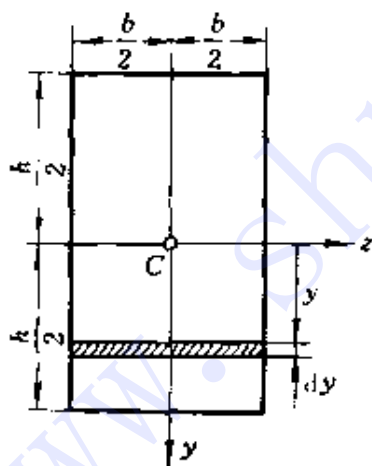


图 5-9

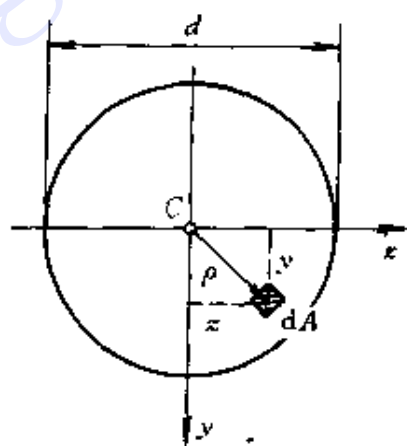


图 5-10

### 2. 圆形截面的惯性矩

图 5-10 所示圆形截面, 直径为  $d$ ,  $z$  轴通过截面形心  $C$ , 即所谓形心轴。

从图中可以看出

$$\rho^2 = y^2 + z^2$$

所以,截面的极惯性矩为

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA$$

或 
$$I_p = 2I_z \quad (a)$$

将式(3-11)代入式(a),于是得圆形截面对形心轴  $z$  的惯性矩为

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} \quad (5-8)$$

而其抗弯截面模量则为

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \quad (5-9)$$

同理,得空心圆截面对  $z$  轴的惯性矩与抗弯截面模量分别为

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - a^4) \quad (5-10)$$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - a^4) \quad (5-11)$$

式中:  $D$  为空心圆截面的外径;  $a$  为内、外径的比值。

至于三角形与梯形等其它简单截面的惯性矩,可从附录一中查得。

## 二、组合公式

在工程实际中,常常碰到一些形状比较复杂的截面(图5-11),这些截面通常可看成是由若干简单截面或标准型材截面所组成,即所谓**组合截面**。现在研究组合截面的惯性矩。

设组合截面由  $n$  部分所组成,其组成部分的面积分别为  $A_i$ ,

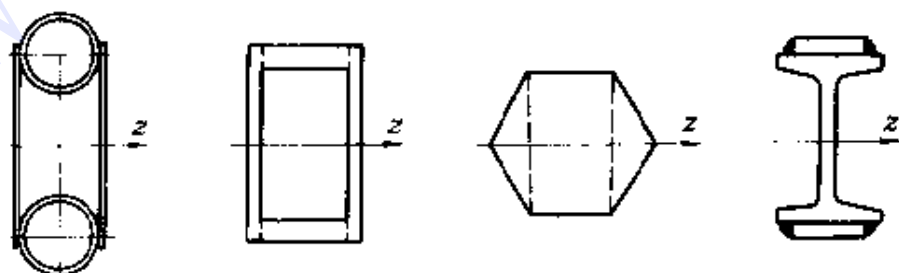


图 5-11

$A_2, \dots, A_n$ , 它们对  $z$  轴的惯性矩分别为  $I_z^{(1)}, I_z^{(2)}, \dots, I_z^{(n)}$ , 则根据积分原理可知, 组合截面对  $z$  轴的惯性矩为

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \dots + \int_{A_n} y^2 dA$$

由此得

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + \dots + I_z^{(n)} = \sum_{i=1}^n I_z^{(i)} \quad (5-12)$$

即: 组合截面对任一轴的惯性矩, 等于其组成部分对同一轴的惯性矩之和。关系式(5-12) 称为惯性矩的**组合公式**。

### 三、移轴公式

由上述分析可以看出, 要计算组合截面对某轴  $z$  的惯性矩, 首先需要计算各组成部分对该轴的惯性矩。然而, 在很多情况下, 各组成部分本身的形心轴  $z_0$  与  $z$  轴并不重合(图 5-12), 因此, 需要确定同一截面对于上述二平行轴的两个惯性矩之间的关系。

如图 5-13 所示, 设  $z_0$  轴为形心轴,  $z$  轴与  $z_0$  轴平行, 相距为  $a$ , 微面积  $dA$  在  $y-z$  与  $y_0-z_0$  坐标系中的纵坐标分别为  $y$  与  $y_0$ , 则由式(5-1) 可知, 截面对  $z$  轴的惯性矩为

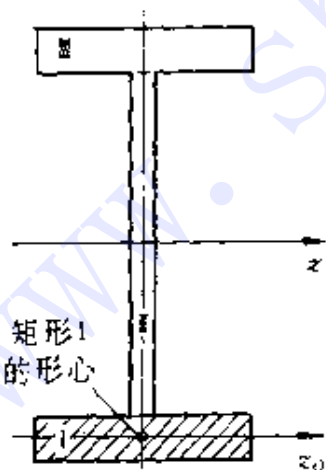


图 5-12

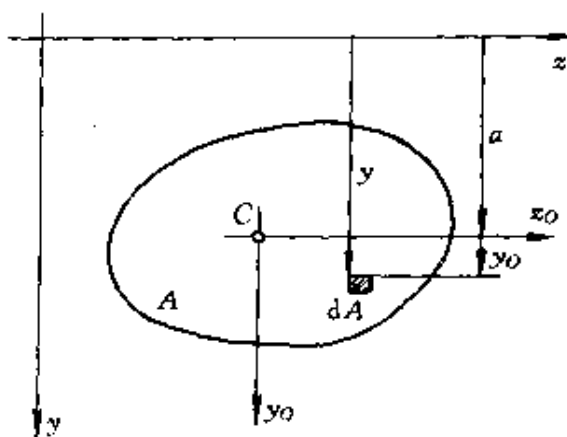


图 5-13

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_A (y_0 + a)^2 dA$$

或

$$I_z = \int_A y_0^2 dA + 2a \int_A y_0 dA + Aa^2$$

在上式中:右端第一项代表截面对形心轴  $z_0$  的惯性矩  $I_{z_0}$ ;至于第二项,由于  $z_0$  轴通过截面形心,积分  $\int_A y_0 dA$  应为零。于是得出结论:

$$I_z = I_{z_0} + Aa^2 \quad (5-13)$$

即:截面对于任一轴  $z$  的惯性矩,等于对平行形心轴  $z_0$  的惯性矩,加上截面面积与两轴间距离平方之乘积。关系式(5-13)称为惯性矩的平行移轴公式或简称为移轴公式。利用移轴公式,既可由  $I_{z_0}$  计算  $I_z$ ,也可由  $I_z$  计算  $I_{z_0}$ 。

**例2** 宽度为  $b = 6\text{mm}$ 、厚度为  $t = 2\text{mm}$  的钢带,环绕在直径为  $D = 1400\text{mm}$  的带轮上(图5-14),已知钢带的弹性模量为  $E = 200\text{GPa}$ ,试求钢带内的最大弯曲正应力与钢带承受的弯矩。

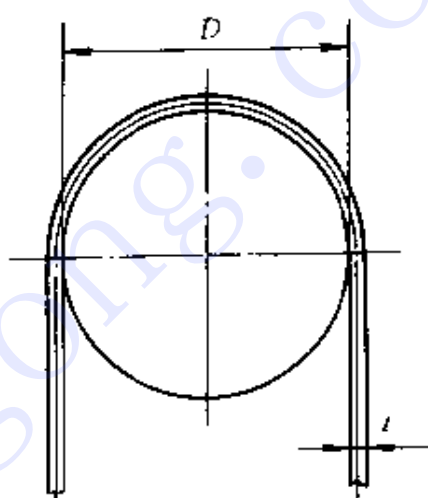


图 5-14

**解** 将钢带环绕在带轮上时,钢带轴线的曲率半径为

$$\rho = \frac{D}{2} + \frac{t}{2} = \frac{1400}{2} + \frac{2}{2} = 701\text{mm}$$

钢带横截面上离中性轴最远点的距离为

$$y_{\max} = \frac{t}{2} = \frac{2}{2} = 1.0\text{mm}$$

所以,钢带内的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{E y_{\max}}{\rho} = \frac{200 \times 10^3 \times 1.0}{701} = 285.3\text{MPa}$$

## 2. 内力分析

由式(5-2)可知,钢带承受的弯矩为

$$M = \frac{EI_z}{\rho} = \frac{Ebt^3}{12\rho} = \frac{200 \times 10^3 \times 6 \times 2^3}{12 \times 701} = 1141\text{N} \cdot \text{mm}$$



钢带承受的弯矩,也可利用式(5-5)确定,由该式得

$$M = W_z \sigma_{\max} = \frac{bt^2 \sigma_{\max}}{6} = \frac{6 \times 2^2 \times 285.3}{6} = 1141 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

所得解答相同。

**例 3** 图 5-15(a) 所示悬臂梁,自由端承受集中载荷  $P = 15 \text{ kN}$  作用,试计算截面  $B$  的最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力。

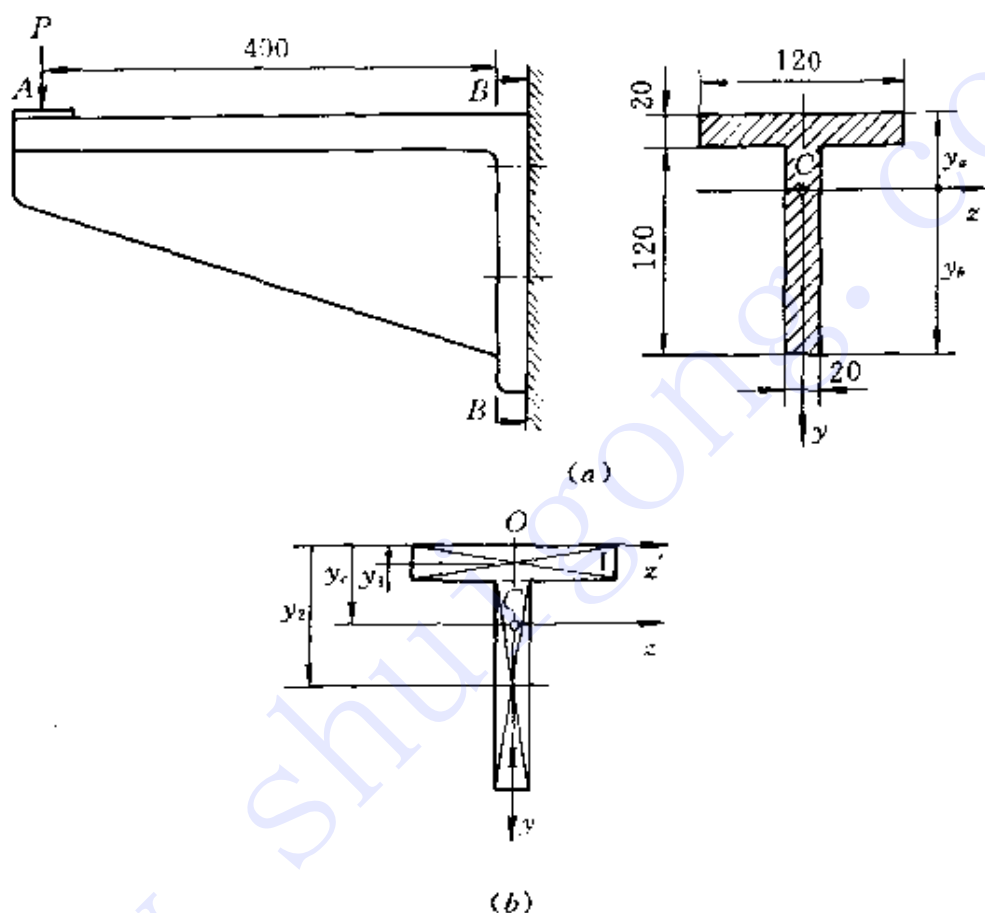


图 5-15

**解** 1. 确定截面形心位置

选参考坐标系  $yOz'$  如图 5-15(b) 所示,并将截面划分为 I、II 两个矩形。由图可知,矩形 I 的面积与形心的纵坐标分别为

$$A_1 = 120 \times 20 = 2400 \text{ mm}^2$$

$$y_1 = \frac{20}{2} = 10 \text{ mm}$$

矩形 II 的面积与形心的纵坐标则分别为

$$A_2 = 20 \times 120 = 2400 \text{ mm}^2$$

$$y_2 = 20 + \frac{120}{2} = 80\text{mm}$$

所以, 截面  $B$  形心  $C$  的纵坐标为

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{2400 \times 10 + 2400 \times 80}{2400 + 2400} = 45.0\text{mm}$$

### 2. 计算截面惯性矩

根据式(5-13)与式(5-6)可知, 矩形 I、II 对形心轴  $z$  的惯性矩分别为

$$\begin{aligned} I_{1,z} &= \frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 (y_c - y_1)^2 \\ &= \frac{120 \times 20^3}{12} + 120 \times 20 \times (45 - 10)^2 \\ &= 3.02 \times 10^5 \text{mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2,z} &= \frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 h_2 (y_2 - y_c)^2 \\ &= \frac{20 \times 120^3}{12} + 20 \times 120 \times (80 - 45)^2 \\ &= 5.82 \times 10^5 \text{mm}^4 \end{aligned}$$

因此, 截面  $B$  对形心轴  $z$  的惯性矩为

$$\begin{aligned} I_z &= I_{1,z} + I_{2,z} = 3.02 \times 10^5 + 5.82 \times 10^5 \\ &= 8.84 \times 10^5 \text{mm}^4 \end{aligned}$$

### 3. 计算最大弯曲正应力

截面  $B$  的弯矩为

$$M_B = P \times 400 = 15 \times 10^3 \times 400 = 6.0 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{mm}$$

由式(5-3)可知, 在截面  $B$  的上、下边缘, 即  $y = y_a$  与  $y = y_b$  处 (图 5-15, a), 分别作用有最大拉应力与最大压应力, 其值分别为

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M_B y_a}{I_z} = \frac{6.0 \times 10^6 \times 45}{8.84 \times 10^5} = 30.5 \text{MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{M_B y_b}{I_z} = \frac{6.0 \times 10^6 \times (120 + 20 - 45)}{8.84 \times 10^5} = 64.5 \text{MPa}$$

## § 5-4 对称弯曲剪应力

前面研究了梁的弯曲正应力, 现在研究弯曲剪应力, 并从矩形

截面梁入手讨论这个问题。

### 一、矩形截面梁的弯曲剪应力

图 5-16 所示矩形截面梁, 高为  $h$ , 宽为  $b$ 。根据剪应力互等定理可知, 如果梁表面无轴向剪应力作用 ( $\tau_n = 0$ ), 则横截面边缘也不可能存在垂直于周边的剪应力分量 ( $\tau_t = 0$ ), 即截面边缘的剪应力一定平行于截面周边。其次, 如果截面是窄而高的, 则又可认为, 在沿截面的宽度方向, 剪应力的大小与方向均不可能有显著变化。

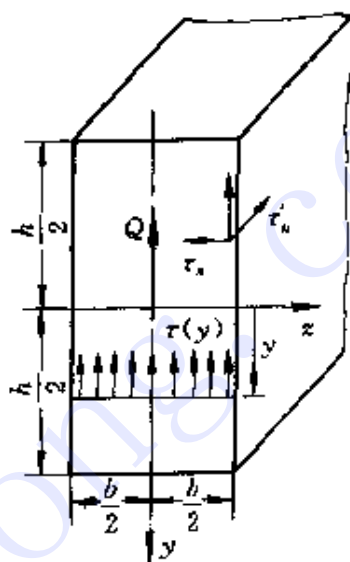


图 5-16

根据以上分析, 对截面上的弯曲剪应力分布作如下假设: 横截面上各点处的剪应力, 均平行于剪力或截面侧边, 并沿截面宽度均匀分布(图 5-16)。精确分析表明, 当截面高度大于其宽度时, 由上述假设所建立的弯曲剪应力公式是足够精确的。

现在研究弯曲剪应力沿截面高度的变化规律。首先, 用相距  $dx$  的横截面 1-1 与 2-2, 从梁中切取一微段(图 5-17, a)。然后, 在横截面上纵坐标为  $y$  处, 再用一个纵向截面  $m-n$ , 将该微段的下部切出(图 5-17, b)。设横截面上  $y$  处的剪应力为  $\tau(y)$ , 则由剪应力互等定理可知, 纵截面  $m-n$  上的剪应力  $\tau'$  数值上也等于  $\tau(y)$ 。因此, 当剪应力  $\tau'$  确定后,  $\tau(y)$  亦随之确定。

如图 5-17(a) 所示, 由于存在剪力  $Q$ , 截面 1-1 与 2-2 的弯矩将不相同, 分别为  $M$  与  $M + dM$  或  $M + Qdx$ , 因此, 上述二截面的弯曲正应力也不相同。设微段下部横截面  $m1$  与  $n2$  的面积为  $\omega$ , 在该二截面上由弯曲正应力所构成的轴向合力分别为  $F_1$  与  $F_2$ , 则由微段下部的轴向平衡方程  $\sum x = 0$  可知,

$$\tau' b dx = \tau(y) b dx = F_2 - F_1$$

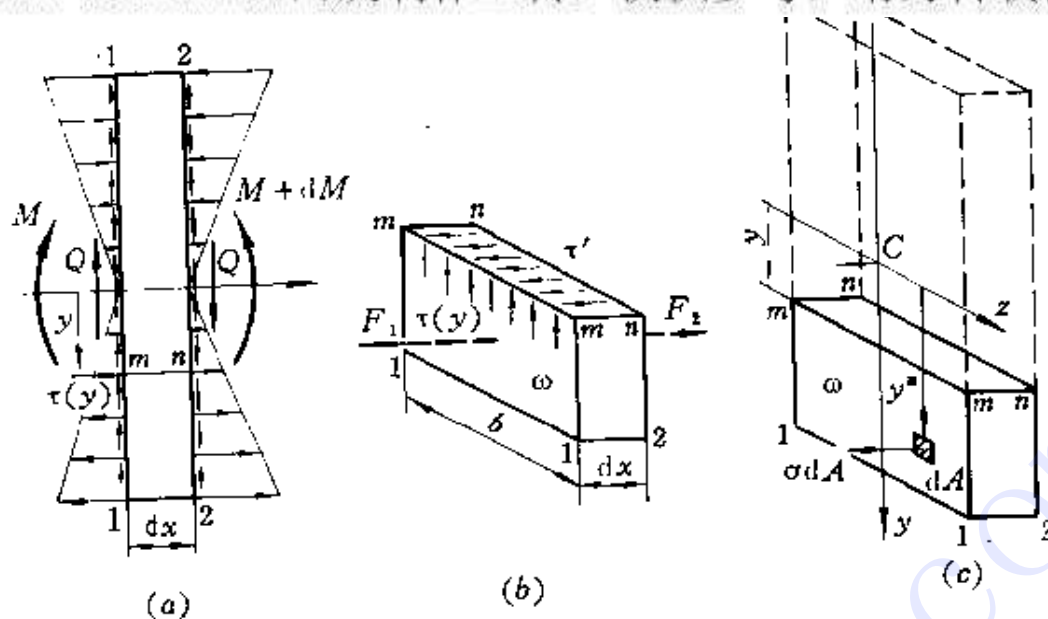


图 5 17

或

$$\tau(y) = \frac{F_2 - F_1}{bdx} \quad (a)$$

由图 5-17(c) 可知

$$F_1 = \int_{\omega} \sigma dA = \int_{\omega} \frac{My^*}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} \int_{\omega} y^* dA$$

式中, 积分  $\int_{\omega} y^* dA$  称为截面  $\omega$  对  $z$  轴的静矩, 并用  $S_z(\omega)$  表示, 因此

$$F_1 = \frac{MS_z(\omega)}{I_z} \quad (b)$$

同理可得

$$F_2 = \frac{(M + Qdx)S_z(\omega)}{I_z} \quad (c)$$

将式(b)、(c)代入式(a), 于是得

$$\tau(y) = \frac{QS_z(\omega)}{I_z b} \quad (5-14)$$

式中:  $I_z$  代表整个横截面对中性轴  $z$  的惯性矩; 而  $S_z(\omega)$  则代表  $y$  处横线一侧的部分截面  $\omega$  对  $z$  轴的静矩(图 5-18, a), 其值为

$$\begin{aligned} S_z(\omega) &= b \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) \\ &= \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned}$$

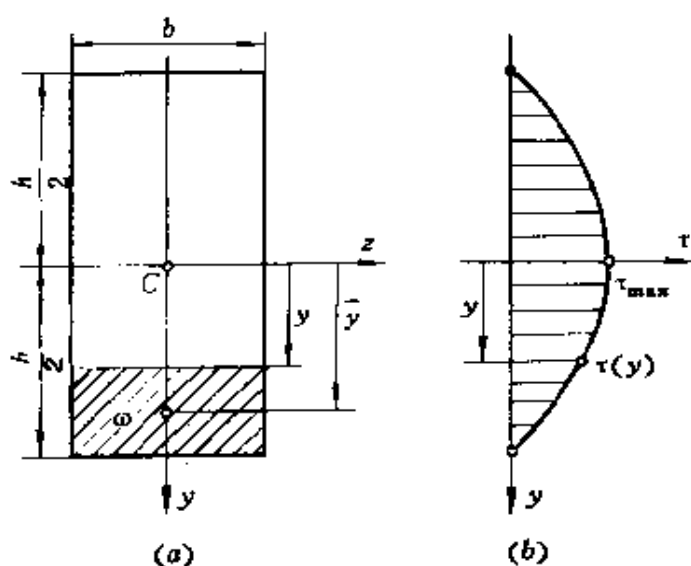


图 5-18

将上式及  $I_z = bh^3/12$  代入式(5-14), 于是得

$$\tau(y) = \frac{3Q}{2bh} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) \quad (5-15)$$

由此可见: 矩形截面梁的弯曲剪应力沿截面高度呈抛物线分布(图 5-18, b); 在截面的上、下边缘( $y = \pm h/2$ ), 剪应力  $\tau = 0$ ; 在中性轴处( $y = 0$ ), 剪应力最大, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} \quad (5-16)$$

即最大弯曲剪应力为平均剪应力( $Q/A$ )的 1.5 倍。与精确解相比, 当  $h/b \geq 2$  时, 此解答的误差极小; 当  $h/b = 1$  时, 误差约为 10%。

以上分析表明, 弯曲剪应力沿截面高度的分布是非均匀的。根据剪切虎克定律可知, 剪应变  $\gamma$  沿截面高度的分布也是非均匀的。在中性轴处,  $\gamma$  最大; 离中性轴愈远,  $\gamma$  愈小; 在截面的上、下边缘,  $\gamma = 0$ (图 5-19)。因此, 当存在剪力时, 横截面将发生翘曲。但是, 如果相邻横截面的剪力相同, 则其翘曲变形也相同, 由弯矩所引起的“纤维”的纵向应变将不受剪力的影响, 例如图中的弧线  $\widehat{a'b'} = \widehat{ab}$ 。因此, 根据平面假设所建立的弯曲正应力公式仍然成立。至于分布载荷作用下的梁, 相邻横截面的剪力不同, 因而翘曲变形不

同, 而且, 纵向“纤维”同时受到侧向挤压。但分析表明, 如果梁的长度  $l$  远大于其截面高度  $h$ , 例如  $l > 5h$ , 则应用公式(5-3) 计算弯曲正应力仍然是相当精确的。

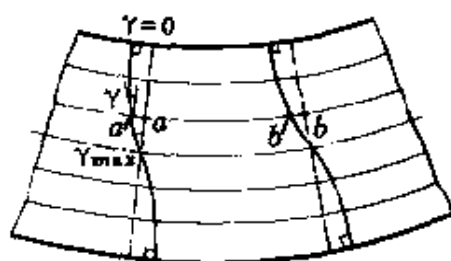


图 5-19

## 二、工字形薄壁截面梁的弯曲剪应力

工字形截面由上、下翼缘与腹板所组成(图 5-20, a)。由于腹板为狭长矩形, 故可假设: 腹板上各点处的弯曲剪应力平行于腹板侧边, 并沿腹板厚度均匀分布。根据上述假设, 并采用前述推导方法, 得腹板上  $y$  处的弯曲剪应力为

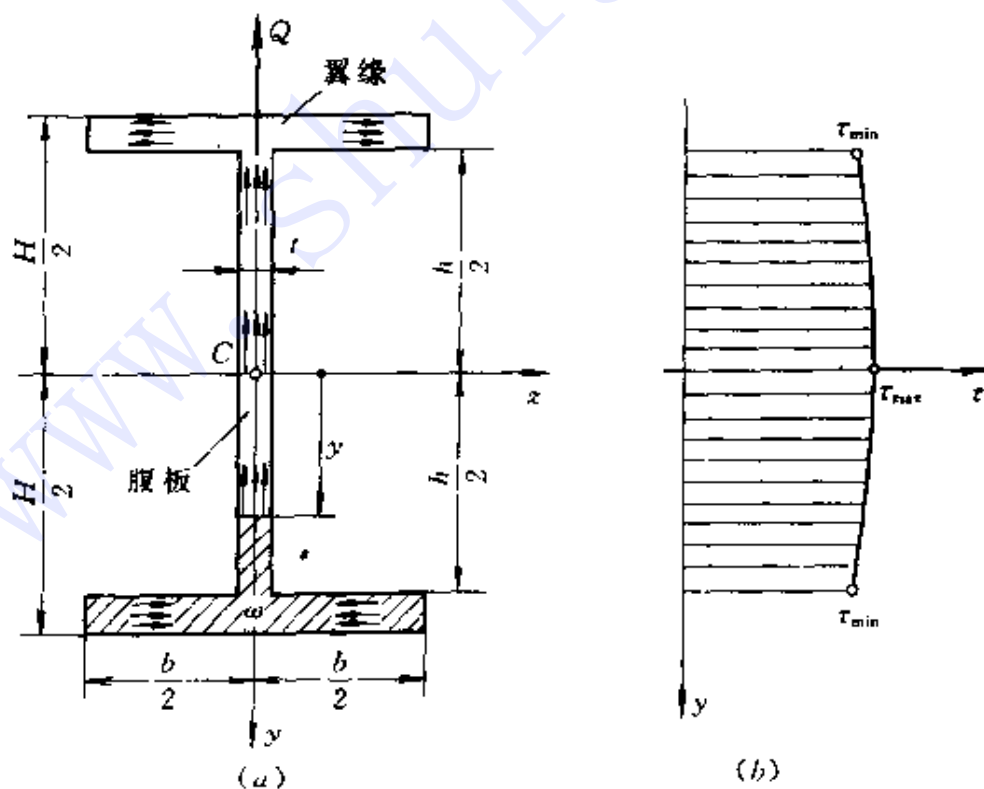


图 5-20



$$\tau(y) = \frac{QS_z(\omega)}{I_z t}$$

式中:  $I_z$  为整个工字形截面对中性轴  $z$  的惯性矩;  $S_z(\omega)$  为  $y$  处横线一侧的部分截面  $\omega$  对该轴的静矩;  $t$  为腹板厚度。

由图 5-20(a) 可以看出,  $y$  处横线以下的截面是由下翼缘与部分腹板所组成, 该截面对中性轴  $z$  的静矩为

$$S_z(\omega) = \frac{b}{2} \left( \frac{H^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

因此, 腹板上  $y$  处的弯曲剪应力为

$$\tau(y) = \frac{Q}{8I_z t} [b(H^2 - h^2) + t(h^2 - 4y^2)] \quad (5-17)$$

由此可见: 腹板上的弯曲剪应力沿腹板高度呈抛物线分布(图 5-20, b); 在中性轴处 ( $y = 0$ ), 剪应力最大, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{z,\max}}{I_z t} = \frac{Q}{8I_z t} [bH^2 - (b-t)h^2] \quad (5-18)$$

在腹板与翼缘的交接处 ( $y = \pm h/2$ ), 剪应力最小, 其值为

$$\tau_{\min} = \frac{Q}{8I_z t} [bH^2 - bh^2] \quad (5-19)$$

比较式(5-18)与(5-19)还可看出, 当腹板厚度  $t$  远小于翼缘宽度  $b$  时, 最大与最小剪应力的差值甚小, 腹板上的剪应力可近似看成是均匀分布的。

至于翼缘上的剪应力, 基本上沿翼缘侧边(图 5-20, a), 但其值则较腹板剪应力小, 强度计算时一般可以不予考虑。

### 三、圆形截面与圆形薄壁截面梁的弯曲剪应力

至于圆形截面与圆形薄壁截面梁(图 5-21), 分析表明, 它们的最大弯曲剪应力仍发生在中性轴上, 并可认为沿中性轴均匀分布, 其值则分别为

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A} \quad (5-20)$$

与

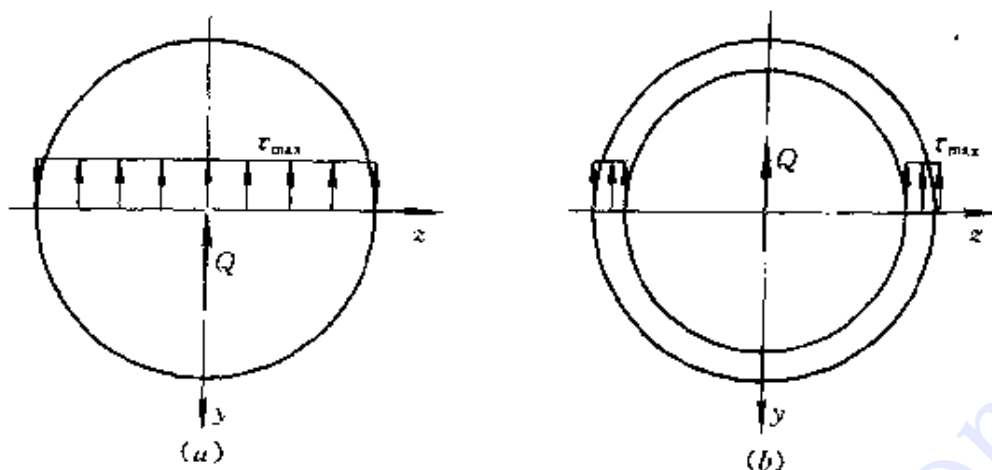


图 5-21

$$\tau_{max} = \frac{2Q}{A} \quad (5-21)$$

式中,  $A$  为横截面面积。

#### 四、弯曲正应力与弯曲剪应力比较

梁弯曲时同时存在弯曲正应力与弯曲剪应力, 现将二者的大小作一比较。

例如图 5-22 所示矩形截面梁, 承受均布载荷  $q$  作用, 梁的最大剪力与最大弯矩分别为(参阅第四章的例 3)

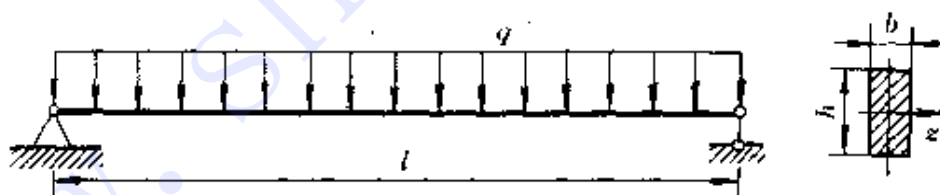


图 5-22

$$Q_{max} = \frac{ql}{2}$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$$

由式(5-5)与式(5-16)可知, 梁的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{max} = \frac{ql^2}{8} \frac{6}{bh^2} = \frac{3ql^2}{4bh^2}$$

而最大弯曲剪应力则为

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_{\max}}{2A} = \frac{3 \times ql}{2bh \times 2} = \frac{3ql}{4bh}$$

所以, 二者的比值为

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{3ql^2}{4bh^2} \frac{4bh}{3ql} = \frac{l}{h}$$

即最大弯曲正应力与最大弯曲剪应力的比值, 等于梁的跨度  $l$  与截面高度  $h$  之比。

更多的计算表明, 在一般细长的非薄壁截面梁中(包括实心与厚壁截面梁), 最大弯曲正应力与最大弯曲剪应力之比值的数量级, 约等于梁的跨高比。由此可见, 在一般细长的非薄壁截面梁中, 主要应力是弯曲正应力。

**例 4** 梁截面如图 5-23(a) 所示, 剪力  $Q = 15\text{kN}$ , 并位于梁的  $x-y$  平面内, 试计算该截面的最大弯曲剪应力, 以及腹板与翼缘交接处的弯曲剪应力。已知截面形心的纵坐标  $y_c = 45\text{mm}$ , 惯性矩  $I_x = 8.84 \times 10^8 \text{mm}^4$ 。

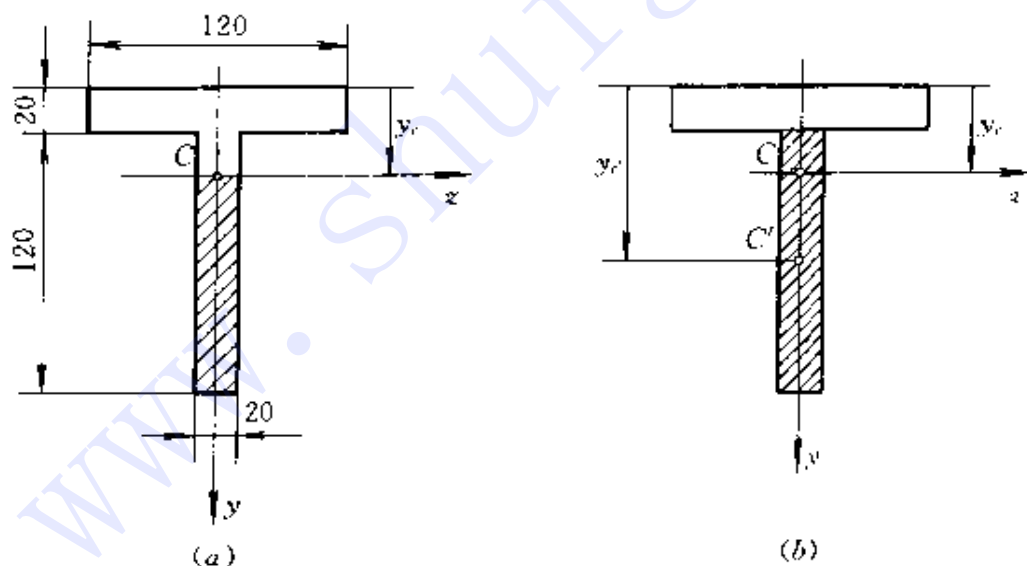


图 5-23

解 1. 最大弯曲剪应力

最大弯曲剪应力发生在中性轴上, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{z, \max}}{I_z t} \quad (\text{a})$$

式中,  $S_{z, \max}$  代表中性轴一侧的部分截面对中性轴的静矩(图 5-23, a), 其值则为

$$S_{z, \max} = \frac{(20 + 120 - 45)^2 \times 20}{2} = 9.03 \times 10^4 \text{mm}^3$$

代入式(a), 得

$$\tau_{\max} = \frac{15 \times 10^3 \times 9.03 \times 10^4}{8.84 \times 10^6 \times 20} = 7.66 \text{MPa}$$

## 2. 腹板、翼缘交接处的弯曲剪应力

由图 5-23(b) 可知, 腹板、翼缘交接线一侧的截面对中性轴  $z$  的静矩为

$$\begin{aligned} S_z &= 20 \times 120 \times (y_c - y_c) \\ &= 2400 \times \left( 20 + \frac{120}{2} - 45 \right) = 8.40 \times 10^4 \text{mm}^3 \end{aligned}$$

所以, 该交接处的弯曲剪应力为

$$\tau = \frac{QS_z}{I_z t} = \frac{15 \times 10^3 \times 8.40 \times 10^4}{8.84 \times 10^6 \times 20} = 7.13 \text{MPa}$$

## § 5-5 梁的强度条件

前述分析表明, 在一般情况下, 梁内同时存在弯曲正应力与弯曲剪应力, 并沿截面高度非均匀分布。

最大弯曲正应力发生在横截面上离中性轴最远各点处, 而该处的剪应力一般为零或很小, 因而最大弯曲正应力作用点可看成是处于单向应力状态, 所以, 弯曲正应力强度条件为

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{M}{W_z} \right)_{\max} \leq [\sigma] \quad (5-22)$$

即要求梁内的最大弯曲正应力  $\sigma_{\max}$  不得超过材料在单向受力时的许用应力  $[\sigma]$ 。对于等截面直梁, 最大弯曲正应力发生在弯矩最大的截面上, 这时, 上式变为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (5-23)$$

应该指出,式(5-22)与式(5-23)仅适用于许用拉应力 $[\sigma_+]$ 与许用压应力 $[\sigma_-]$ 相同的梁,如果二者不同,例如铸铁等脆性材料的许用压应力超过许用拉应力,则应按拉伸与压缩分别进行强度计算,即要求

$$\sigma_{\max}^+ \leq [\sigma_+] \quad (5-24a)$$

$$\sigma_{\max}^- \leq [\sigma_-] \quad (5-24b)$$

式中, $\sigma_{\max}^+$ 与 $\sigma_{\max}^-$ 分别代表梁内的最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力。

最大弯曲剪应力通常发生在中性轴上各点处,而该处的弯曲正应力为零,因此,最大弯曲剪应力作用点处于纯剪切状态,相应的强度条件则为

$$\tau_{\max} = \left( \frac{QS_{z,\max}}{I_z t} \right)_{\max} \leq [\tau] \quad (5-25)$$

即要求梁内的最大弯曲剪应力 $\tau_{\max}$ 不超过材料在纯剪切时的许用剪应力 $[\tau]$ 。对于等截面直梁,最大弯曲剪应力发生在剪力最大的横截面上,这时,上式变为

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{z,\max}}{I_z t} \leq [\tau] \quad (5-26)$$

前面曾经指出,在一般细长的非薄壁截面梁中,最大弯曲正应力远大于最大弯曲剪应力。因此,对于一般细长的非薄壁截面梁,通常只需按弯曲正应力强度条件进行分析即可。但是,对于薄壁截面梁与弯矩较小而剪力却较大的梁,后者如短而粗的梁、集中载荷作用在支座附近的梁等,则不仅应考虑弯曲正应力强度条件,而且还应考虑弯曲剪应力强度条件。

还应指出,在某些薄壁梁的某些点处,例如在工字形截面的腹板与翼缘的交界处,弯曲正应力与弯曲剪应力均具有相当大的数值,这种正应力与剪应力联合作用下的强度问题,则将在第七章中详细讨论。

**例 5** 图 5-24(a) 所示圆截面轴 AD, 中段 BC 承受均布载荷作用。已知载荷集度  $q = 1\text{kN/mm}$ , 许用应力  $[\sigma] = 140\text{MPa}$ , 试确定轴径。

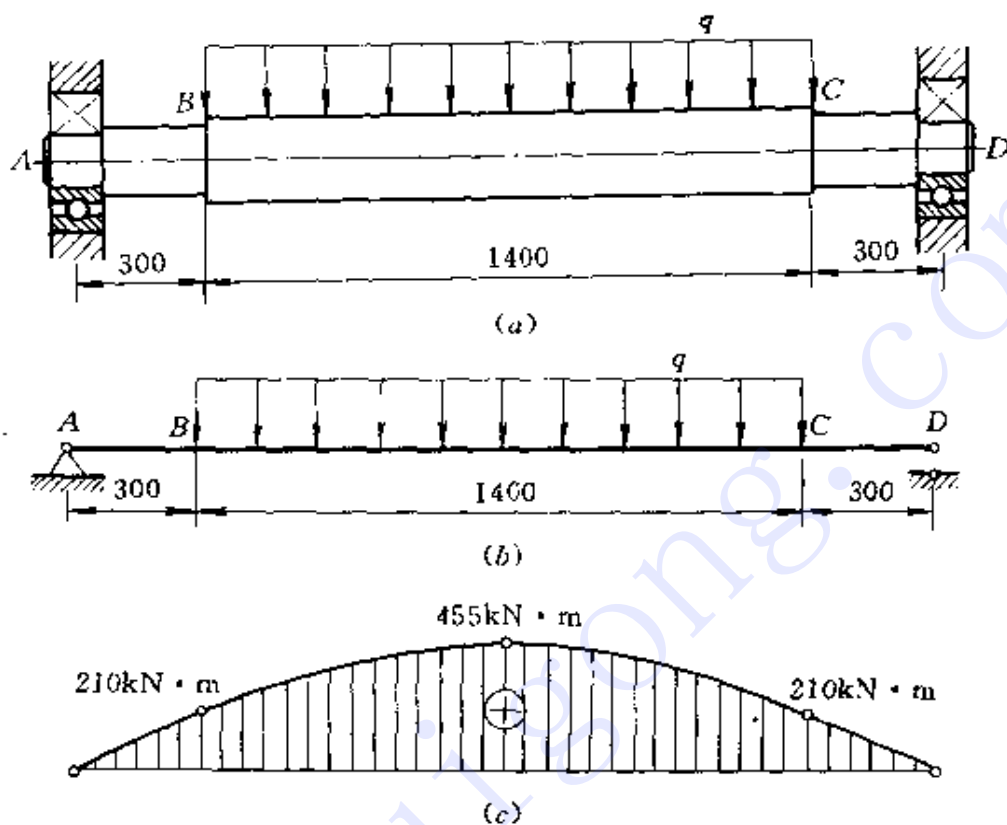


图 5-24

解 轴的计算简图与弯矩图分别如图 5-24(b)、(c) 所示,

$$M_{\max} = 455\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B = M_C = 210\text{kN}\cdot\text{m}$$

根据式(5-23)与式(5-9)可知, 圆轴的弯曲正应力强度条件为

$$\frac{32M}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

由此得

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M}{\pi[\sigma]}}$$

将有关数据代入上式, 得轴中段与 AB 段(或 CD 段)的截面直径分别为



$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times 455 \times 10^3 \times 10^3}{\pi \times 140}} = 321 \text{mm}$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times 210 \times 10^3 \times 10^3}{\pi \times 140}} = 248 \text{mm}$$

取

$$d_1 = 320 \text{mm}$$

$$d_2 = 250 \text{mm}$$

**例 6** 图 5-25(a) 所示外伸梁, 用铸铁制成, 横截面为槽形, 承受均布载荷  $q$  与集中载荷  $P$  作用, 试校核梁的强度。已知:  $q = 10 \text{N/mm}$ ,  $P = 20 \text{kN}$ ,  $y_1 = 140 \text{mm}$ ,  $y_2 = 60 \text{mm}$ ,  $I_z = 4.0 \times 10^7 \text{mm}^4$ ,  $[\sigma_t] = 35 \text{MPa}$ ,  $[\sigma_c] = 140 \text{MPa}$ 。

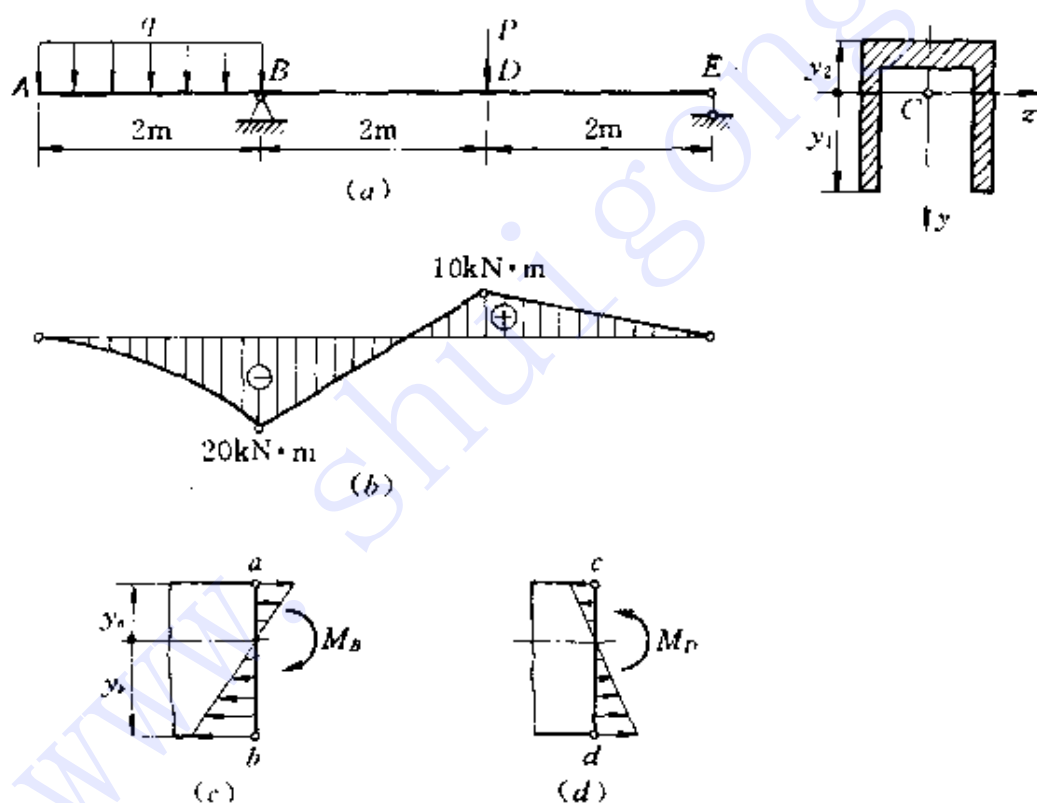


图 5-25

**解** 1. 内力分析与危险截面判断

梁的弯矩图如图 5-25(b) 所示, 在横截面  $D$ 、 $B$  上分别作用有最大正弯矩与最大负弯矩, 因此, 该二截面为可能最先发生破坏的

截面, 简称为**危险截面**。

### 2. 危险点判断

截面  $B$ 、 $D$  的弯曲正应力分别如图 5-25(c)、(d) 所示。截面  $B$  的  $a$  点处与截面  $D$  的  $d$  点处均受拉; 而截面  $B$  的  $b$  点处与截面  $D$  的  $c$  点处则均受压。

由于

$$|M_B| > |M_D|$$

$$|y_b| > |y_c|$$

因此

$$|\sigma_b| > |\sigma_c|$$

即梁内的最大弯曲压应力发生在截面  $B$  的  $b$  点处。至于最大弯曲拉应力, 究竟是发生在  $a$  点处, 还是  $d$  点处, 则须经计算后才能确定。概言之,  $a$ 、 $b$ 、 $d$  三点处为可能最先发生破坏的部位, 简称为**危险点**。

### 3. 强度校核

由式(5-3)得上述三点处的弯曲正应力分别为

$$\sigma_a = \frac{M_B y_a}{I_z} = \frac{20 \times 10^3 \times 10^3 \times 60}{4.0 \times 10^7} = 30.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \frac{M_B y_b}{I_z} = \frac{20 \times 10^3 \times 10^3 \times 140}{4.0 \times 10^7} = 70.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_d = \frac{M_D y_d}{I_z} = \frac{10 \times 10^3 \times 10^3 \times 140}{4.0 \times 10^7} = 35.0 \text{ MPa}$$

可见

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = 70.0 \text{ MPa} < [\sigma_-]$$

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_d = 35.0 \text{ MPa} = [\sigma_+]$$

即梁的弯曲强度符合要求。

**例 7** 图 5-26(a) 所示简支梁, 承受集中载荷  $P_1$  与  $P_2$  作用。已知载荷  $P_1 = 50 \text{ kN}$ ,  $P_2 = 100 \text{ kN}$ , 许用应力  $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 100 \text{ MPa}$ 。试从型钢规格表中选择一合适的工字钢。

**解** 1. 内力分析

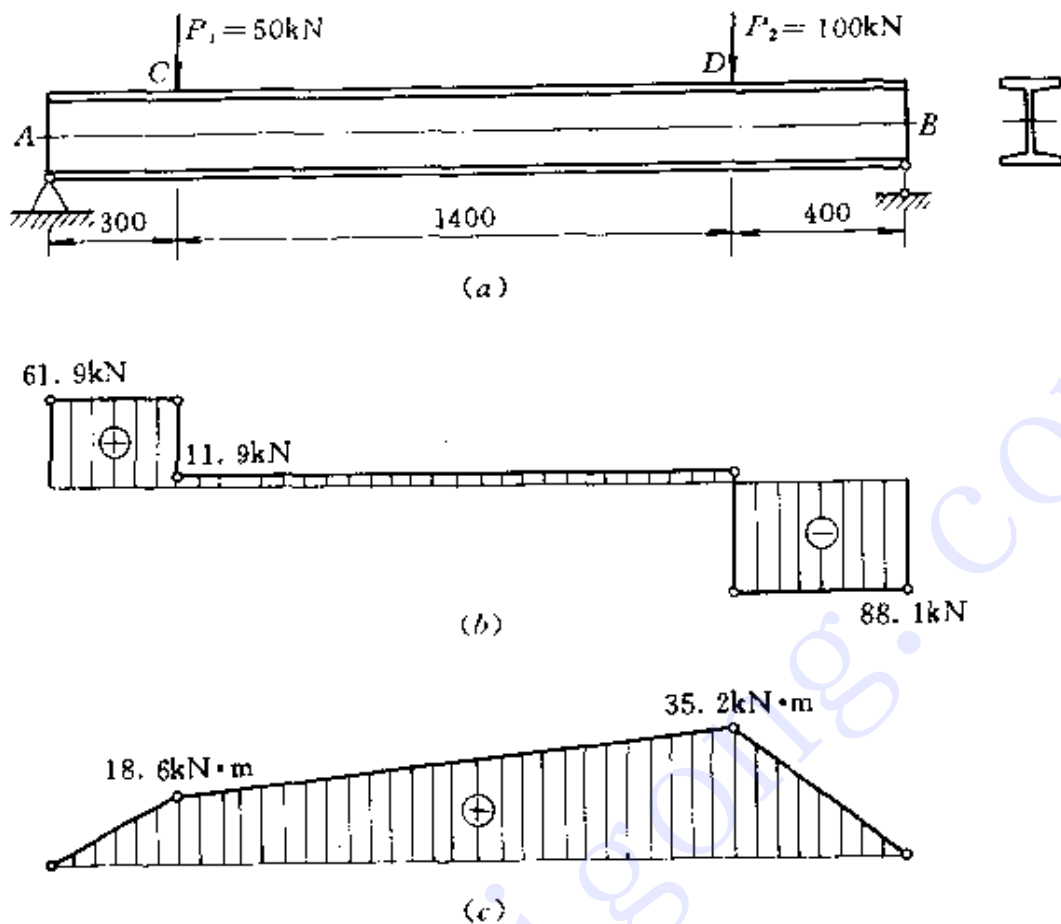


图 5-26

梁的剪力图与弯矩图分别如图 5-26(b)、(c) 所示, 由图可知

$$|Q|_{\max} = 88.1 \text{ kN}$$

$$M_{\max} = 35.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

### 2. 按弯曲正应力强度条件选择截面

按照弯曲正应力强度条件(5-23), 得梁的抗弯截面模量为

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{35.2 \times 10^3 \times 10^3}{160} = 220 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

由型钢规格表中查得, N<sup>o</sup>20a 工字钢的抗弯截面模量为  $W_z = 237 \times 10^3 \text{ mm}^3$ , 所以, 选择 N<sup>o</sup>20a 工字钢作梁符合弯曲强度要求。

### 3. 按弯曲剪应力强度条件校核

由于载荷作用在支座附近, 梁的最大弯曲剪应力可能不小, 因此, 还应校核梁的剪切强度。

从型钢规格表中查得:  $I_z/S_{z, \max} = 172 \text{ mm}$ , 腹板厚度  $t =$

7.0mm。

将有关数据代入式(5-18),得梁的最大弯曲剪应力为

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{Q_{\max} S_{z, \max}}{I_z t} = \frac{Q_{\max}}{t} \frac{S_{z, \max}}{I_z} \\ &= \frac{88.1 \times 10^3}{7} \frac{1}{172} = 73.0 \text{MPa} < [\tau]\end{aligned}$$

可见,选择该工字钢作梁,将同时满足弯曲与剪切强度要求。

## § 5-6 提高梁强度的主要措施

由前述分析可知,在一般情况下,设计梁的主要依据是弯曲正应力强度条件。从该条件可以看出,梁的弯曲强度与其所用材料、横截面的形状与尺寸、以及由外力引起的弯矩有关。因此,为了提高梁的强度,可从以下几方面考虑。

### 一、选用合理的截面形状

从弯曲强度考虑,比较合理的截面形状,是使用较小的截面面积  $A$ , 却能获得较大抗弯截面模量  $W_z$  的截面,即比值  $W_z/A$  愈大,截面形状愈合理。在一般截面中,抗弯截面模量与截面高度的平方成正比。因此,当截面面积一定时,宜将较多材料放置在远离中性轴的部位。实际上,由于弯曲正应力沿截面高度线性变化,当离中性轴最远各点处的正应力到达许用应力时,中性轴附近各点处的正应力仍很小,而且,由于它们离中性轴近,力臂小,承担的弯矩也很小。因此,在离中性轴愈远的位置,放置愈多的材料,必将提高材料的利用率。

在研究截面的合理形状时,除应注意上述要求外,还应考虑材料的特性,最好使截面上的最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力同时达到各自的许用值。

根据上述原则,对于抗拉与抗压强度相同的塑性材料梁,宜采用对中性轴对称的截面,例如工字形与盒形等截面(图 5-27)。而对于抗拉强度低于抗压强度的脆性材料梁,则最好采用中性轴偏

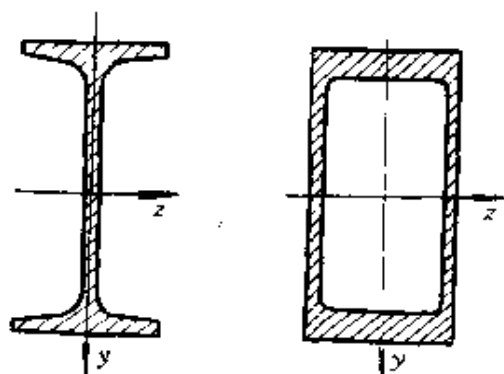


图 5-27

于受拉一侧的截面, 例如 T 字形与槽形等截面(图 5-28)。在后述情况下, 最理想的设计是使

$$\frac{\sigma_{\max}^+}{\sigma_{\max}^-} = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}$$

即使

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \quad (5-27)$$

式中:  $y_1$  与  $y_2$  分别代表最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力所在点至中性轴的距离。

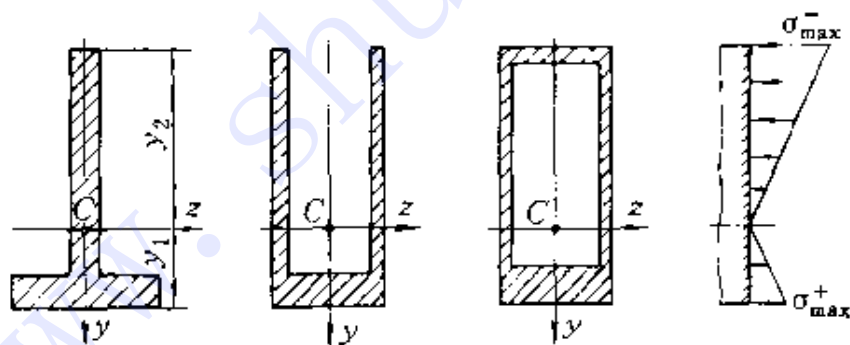


图 5-28

还应指出, 在确定梁的截面形状与尺寸时, 除应考虑弯曲正应力强度条件外, 还应考虑弯曲剪应力强度条件。因此, 在设计工字形、盒形、T 形与槽形等薄壁截面梁时, 也应注意使腹板具有一定厚度。

## 二、采用变截面梁与等强度梁

在一般情况下, 梁内不同横截面的弯矩不同。因此, 在按最大弯矩所设计的等截面梁中, 除最大弯矩所在截面外, 其余截面的材料强度均未得到充分利用。鉴于上述情况, 为了减轻构件重量和节省材料, 在工程实际中, 常根据弯矩沿梁轴的变化情况, 将梁也相应设计成变截面的。在弯矩较大处, 采用较大的截面; 在弯矩较小处, 采用较小的截面。横截面沿梁轴变化的梁称为**变截面梁**。例如图 5-15 所示梁即为变截面梁。

从弯曲强度方面考虑, 理想的变截面梁是使所有横截面上的最大弯曲正应力均相同, 并等于许用应力, 即要求

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma]$$

由此得

$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]} \quad (5-28)$$

例如对于图 5-29(a) 所示悬臂梁, 在集中载荷  $P$  作用时, 弯矩

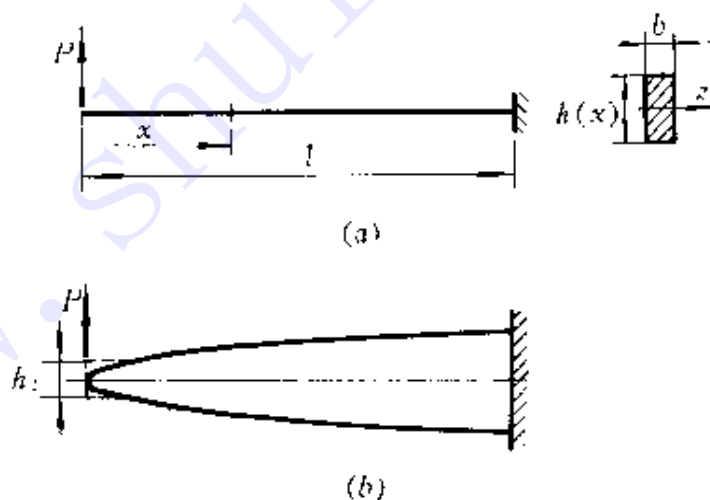


图 5-29

方程为

$$M(x) = Px$$

根据上述设计观点, 如果梁截面的宽度  $b$  保持一定, 则由式(5-28)可知, 截面高度  $h(x)$  应按下述规律变化



$$h(x) = \sqrt{\frac{6Px}{b[\sigma]}} \quad (\text{a})$$

即截面高度沿梁轴按抛物线规律变化(图 5-29, b), 在固定端处  $h$  最大, 其值为

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{6Pl}{b[\sigma]}}$$

由式(a)还可看出, 当  $x=0$  时,  $h=0$ , 即自由端的截面高度为零。但是, 这显然不符合剪切强度要求, 因而需要修改设计。设按剪切强度要求所需之最小截面高度为  $h_1$ , 则由弯曲剪应力强度条件和式(5-16)可知

$$\frac{3P}{2bh_1} = [\tau]$$

由此得

$$h_1 = \frac{3P}{2b[\tau]}$$

所以, 梁端应设计成图 5-29(b) 所示虚线形状。

各个横截面具有同样强度的梁称为**等强度梁**, 等强度梁是一种理想的变截面梁。但是, 考虑到加工制造以及构造上的需要等, 实际构件往往设计成近似等强的。例如图 5-15 所示梁即为近似等强度梁。

### 三、设法改善梁的受力情况

提高梁强度的另一重要措施是合理安排梁的约束和加载方式。

例如, 图 5-30(a) 所示简支梁, 承受均布载荷  $q$  作用, 梁的最大弯矩为

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

然而, 如果将梁两端的铰支座各向内移动少许, 例如移动  $0.2l$  (图 5-30, b), 则最大弯矩变为

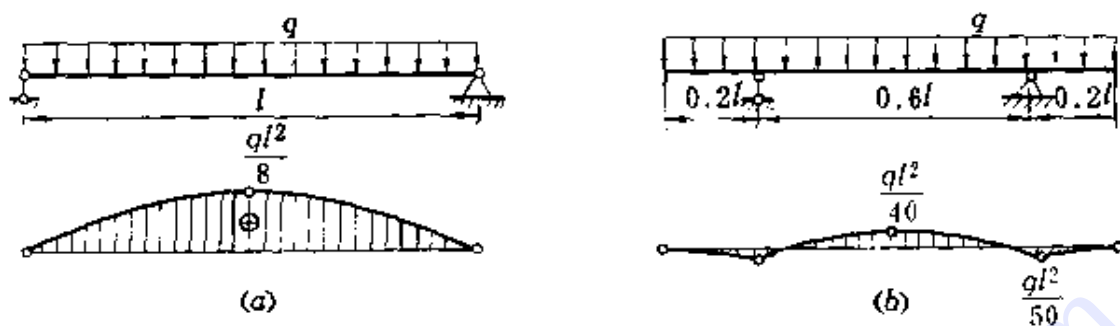


图 5-30

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{40}$$

即仅为前者的 1/5。

又如, 图 5-31(a) 所示简支梁 AB, 在跨度中点承受集中载荷 P 作用, 梁的最大弯矩为

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}$$

然而, 如果将该载荷分解成为几个大小相等、方向相同的力加在梁上, 梁内弯矩将显著减小。例如, 在梁的中部安置一长为  $l/2$  的辅助梁 CD(图 5-31, b), 这时, 梁 AB 内的最大弯矩将减小为

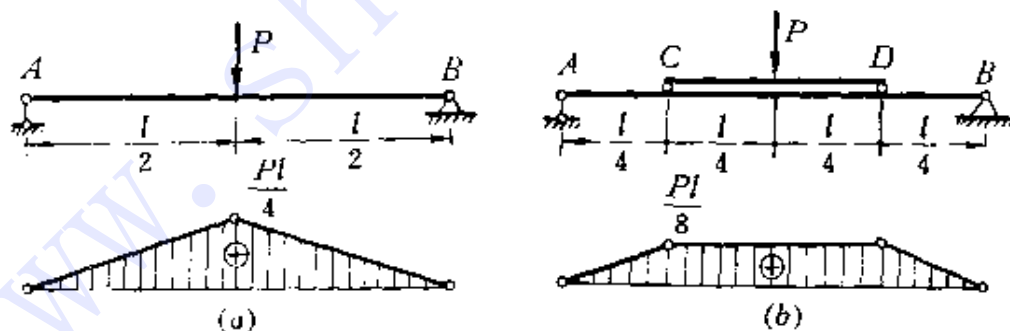


图 5-31

$$M_{\max} = \frac{Pl}{8}$$

即仅为前者的一半。

这些实例说明, 在条件允许的情况下, 合理安排约束和加载方式, 将显著减小梁内的最大弯矩。

此外,给静定梁增加约束,即制成静不定梁,对于提高梁的强度亦将起到显著作用。关于静不定梁的分析,将在第六章详细讨论。

**例8** 图5-32所示梯形截面梁,承受弯矩 $M$ 。已知许用拉应力 $[\sigma_+] = 45\text{MPa}$ ,许用压应力 $[\sigma_-] = 80\text{MPa}$ ,为使梁的重量最轻,试问截面的顶边宽度 $a$ 与底边宽度 $b$ 的最佳比值。

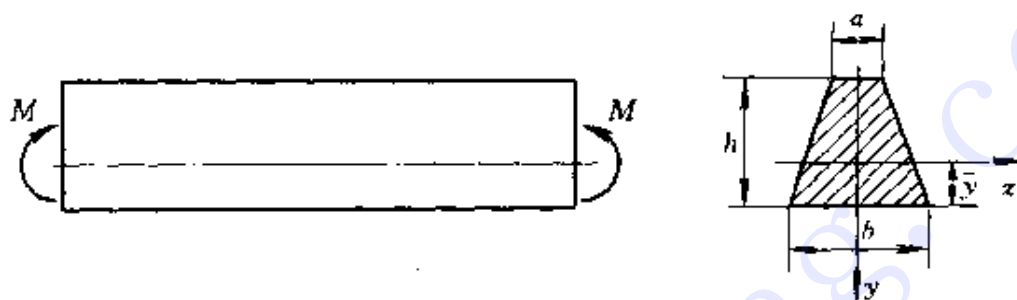


图 5-32

**解** 截面上部受压,下部受拉,故合理的截面形状,应使中性轴至上、下边缘的距离之比,恰等于相应许用应力之比,即要求

$$\frac{h - \bar{y}}{\bar{y}} = \frac{[\sigma_-]}{[\sigma_+]} = \frac{80}{45}$$

由此得

$$\bar{y} = \frac{9h}{25} \quad (\text{a})$$

由附录一可知,梯形截面形心至底边的距离为

$$\bar{y} = \frac{h}{3} \left( \frac{2a + b}{a + b} \right)$$

将式(a)代入上式,于是得

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{23}$$

此即合理截面的最佳比值。

## \* § 5-7 非对称弯曲正应力

前面所研究的问题均属于对称弯曲。在工程实际中,有时也会

碰到一些非对称弯曲问题。例如图 5-33 所示梁, 虽然具有两个互相垂直的纵向对称面。但当作用在梁上的载荷偏离纵向对称面(图 5-33, a), 或在两个纵向对称面内同时作用有载荷时(图 5-33, b), 即属于非对称弯曲问题。本节研究上述双对称截面梁非对称弯曲时的应力。

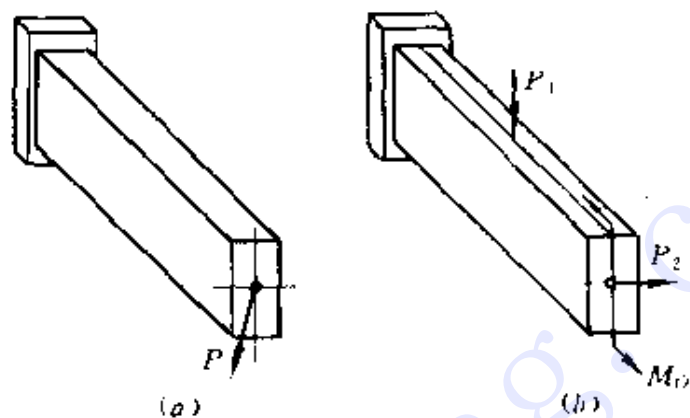


图 5-33

考虑图 5-34 所示梁,  $y$ 、 $z$  轴分别沿截面的对称轴。设载荷  $P$  通过截面形心  $C$ , 并与  $z$  轴成  $\theta$  角, 则其沿  $y$ 、 $z$  轴的分力分别为

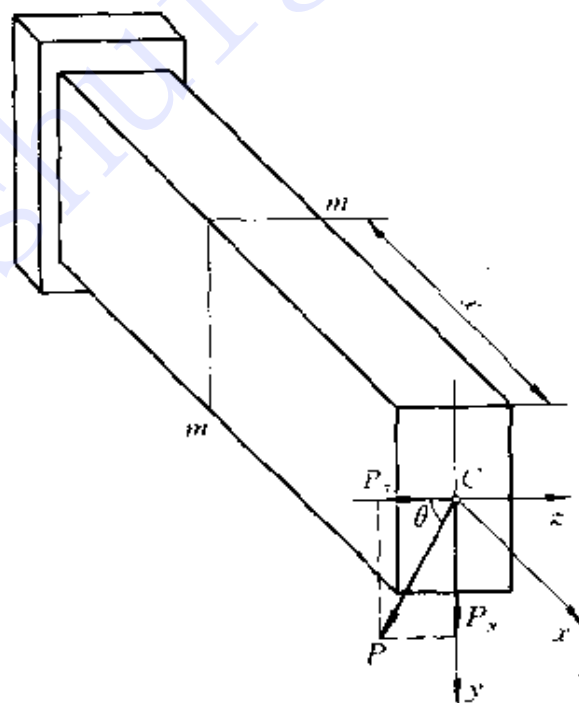


图 5-34

$$P_y = P \sin \theta$$

$$P_z = P \cos \theta$$

显然,  $P_y$  使梁在  $x-y$  平面内发生对称弯曲;  $P_z$  使梁在  $x-z$  平面内发生对称弯曲。于是, 问题即转化为两个对称弯曲的组合。

在  $P_y$  和  $P_z$  作用下,  $x$  截面的弯矩(图 5-35, a) 为

$$M_y = P_z x = P_x \cos \theta = M \cos \theta \quad (a)$$

$$M_z = P_y x = P_x \sin \theta = M \sin \theta \quad (b)$$

式中,  $M = P_x$ , 代表  $x$  截面的总弯矩。

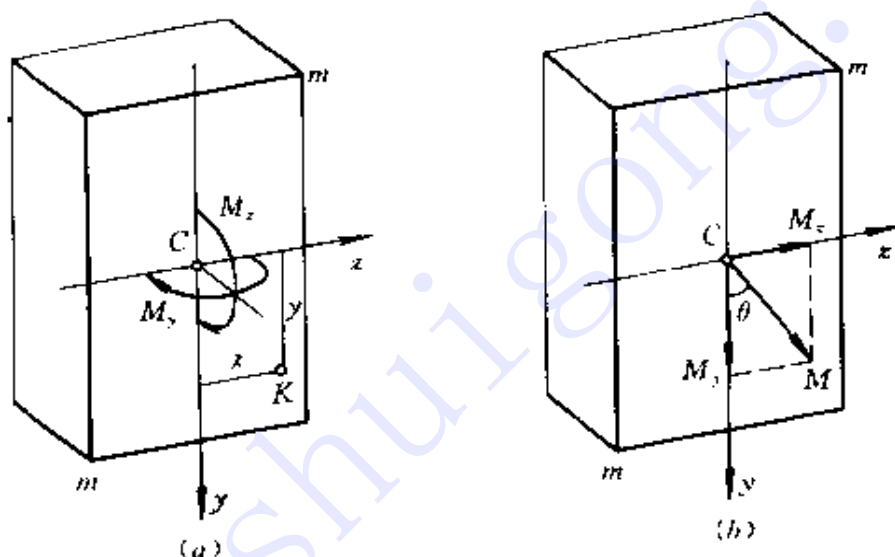


图 5-35

如图 5-35(b) 所示, 若将弯矩  $M_y$  与  $M_z$  按右手螺旋法则分别用矢量表示, 并规定矢量沿坐标轴正向的弯矩为正, 则图 5-35(a) 所示弯矩  $M_y$  与  $M_z$  均为正。在图 5-35(b) 中, 同时还画出了总弯矩  $M$  的矢量, 显然, 该矢量与  $y$  轴的夹角也等于  $\theta$ 。

内力确定后, 现在分析横截面上的弯曲正应力。

设截面对  $y, z$  轴的惯性矩分别为  $I_y$  与  $I_z$ , 截面上任一点  $K$  的坐标为  $(y, z)$ , 则由图 5-35(a) 可以看出, 在  $K$  点处, 与弯矩  $M_y$  相应的正应力为拉应力, 其值为

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y}$$

与弯矩  $M_z$  相应的正应力为压应力, 其值为

$$\sigma' = -\frac{M_z y}{I_z}$$

而该点处的总应力则为

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma' + \sigma'' \\ &= \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \end{aligned} \quad (5-29)$$

此即双对称截面梁非对称弯曲正应力的一般公式。

式(5-29)表明,  $\sigma$  是  $y, z$  的一次函数, 即正应力沿横截面按平面规律分布(图 5-36, a), 而最大正应力则发生在横截面上离中性轴最远的各点处, 所以, 为了计算最大弯曲正应力, 首先应确定中性轴的位置。

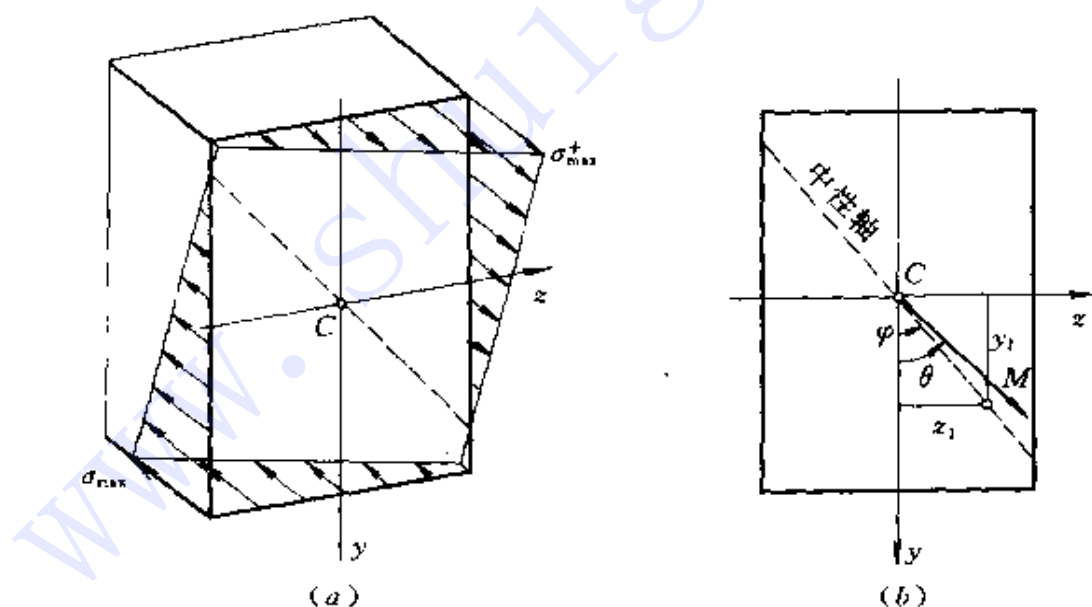


图 5-36

设中性轴上任一点的坐标为  $(y_1, z_1)$  (图 5-36, b), 根据中性轴上各点处正应力为零的条件, 由式(5-29) 得中性的方程为



$$\frac{M_y z_1}{I_y} - \frac{M_z y_1}{I_z} = 0$$

可见, 中性轴通过截面形心, 其斜率则为

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{z_1}{y_1} = \frac{I_y}{I_z} \frac{M_z}{M_y}$$

将式(a)、(b)代入上式, 得

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \theta \quad (5-30)$$

上式表明, 在  $I_y \neq I_z$  的一般情况下,  $\phi \neq \theta$ , 即中性轴不垂直于弯矩  $M$  的作用面(图 5-36, b)。与对称弯曲相比, 这是非对称弯曲的一个重要特征。

中性轴确定后, 在其两侧各作一条与中性轴平行并与截面周边相切的直线(图 5-37, a), 所得切点  $a$ 、 $b$  即为离中性轴最远的点, 而将它们的坐标  $(y_a, z_a)$  与  $(y_b, z_b)$  分别代入式(5-29), 即可求出横截面上的最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力。

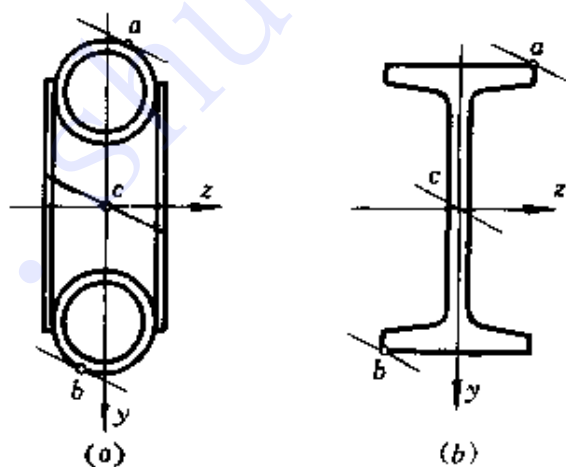


图 5-37

显然, 对于矩形、工字形与盒形等具有棱角的截面(图 5-37, b), 最大弯曲正应力一定发生在棱角处, 其值则为

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_{\max}^- = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \quad (5-31)$$

最大弯曲正应力确定后, 即可根据弯曲强度条件进行强度计算。

**例 9** 图 5-38 所示吊车梁, 跨度  $l = 4\text{m}$ , 用 No20a 工字钢制成。当起吊时, 由于重物位置偏斜, 致使载荷偏离梁截面的垂直对称轴。若载荷  $P = 20\text{kN}$ , 偏斜角  $\alpha = 5^\circ$ , 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 试校核梁的强度。

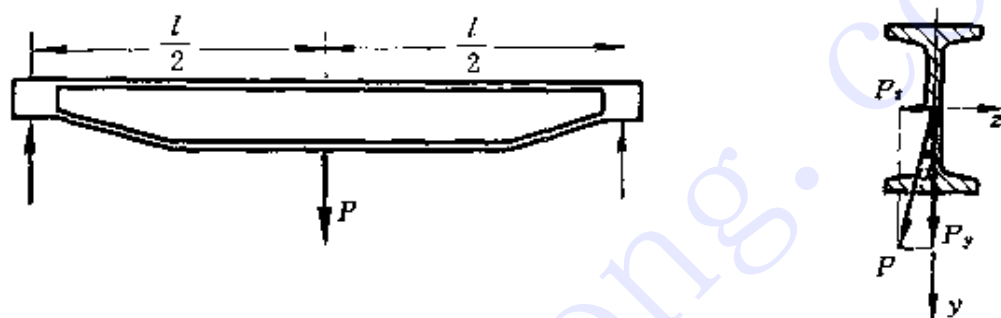


图 5-38

解 1. 外力分析

将载荷  $P$  沿截面对称轴  $y, z$  分解, 得

$$P_y = P \cos \alpha = 20 \times \cos 5^\circ = 19.92\text{kN}$$

$$P_z = P \sin \alpha = 20 \times \sin 5^\circ = 1.743\text{kN}$$

2. 内力分析

$P_y, P_z$  在梁内引起的弯矩  $M_z, M_y$  分别如图 5-39(a)、(b) 所示, 其最大值分别为

$$M_{z, \max} = \frac{P_y l}{4} = \frac{19.92 \times 4}{4} = 19.92\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{y, \max} = \frac{P_z l}{4} = \frac{1.743 \times 4}{4} = 1.743\text{kN} \cdot \text{m}$$

3. 强度校核

由型钢规格表中查得, No20a 工字钢对  $y, z$  轴的抗弯截面模量分别为

$$W_y = 31.5 \times 10^3 \text{mm}^3$$

$$W_z = 237 \times 10^3 \text{mm}^3$$

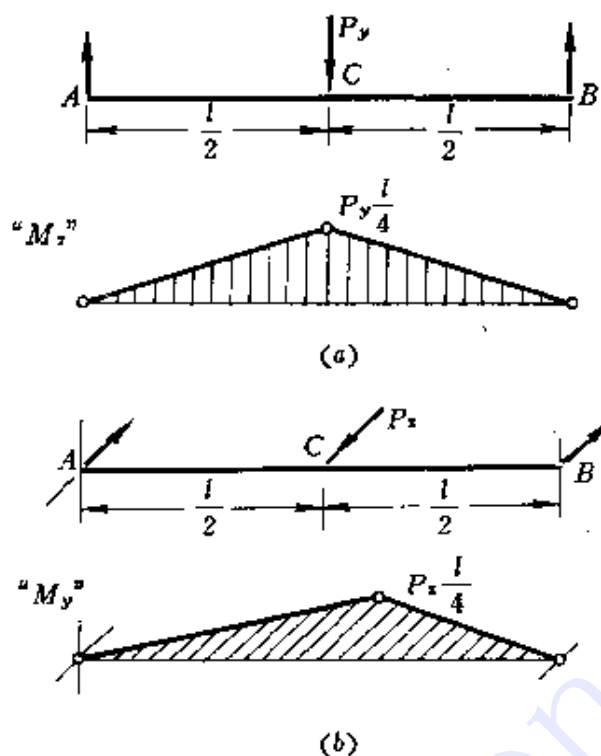


图 5-39

将有关数据代入式(5-31), 得梁的最大弯曲正应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{1.743 \times 10^3 \times 10^3}{31.5 \times 10^3} + \frac{19.92 \times 10^3 \times 10^3}{237 \times 10^3} \\ &= 139.4 \text{MPa} < [\sigma] \end{aligned}$$

可见, 梁的弯曲强度符合要求。

### 复 习 题

1. 何谓平面假设? 何谓单向受力假设?
2. 何谓中性层? 何谓中性轴? 二者间有何关系?
3. 对称弯曲正应力公式是如何建立的? 应用条件是什么?
4. 弯曲正应力在横截面上是如何分布的? 中性轴位于何处?  
如何计算最大弯曲正应力?
5. 弯曲变形的基本公式是什么? 何谓抗弯刚度?
6. 如何计算简单截面的惯性矩与抗弯截面模量, 它们的量纲

是什么?圆截面的惯性矩与极惯性矩之间有何关系?

7. 何谓组合公式?何谓移轴公式?这两个公式是如何建立的?  
试述计算组合截面惯性矩的步骤?

8. 矩形截面梁弯曲时,横截面上弯曲剪应力是如何分布的?  
其计算公式是如何建立的?如何计算最大弯曲剪应力?

9. 如何计算圆形截面与圆形薄壁截面梁的最大弯曲剪应力?

10. 在工字型截面梁的腹板上,弯曲剪应力是如何分布的?如何  
计算最大与最小弯曲剪应力?

11. 弯曲正应力强度条件与弯曲剪应力强度条件是如何建立的?  
各如何应用?

12. 梁截面合理设计的原则是什么?何谓变截面梁?何谓等强度  
梁?如何改善梁的受力情况?

13. 当双对称截面梁处于非对称弯曲时,横截面上的弯曲正  
应力是如何分布的?中性轴位于何处,如何计算最大弯曲正应力?  
与对称弯曲相比,双对称截面梁非对称弯曲有何特点?

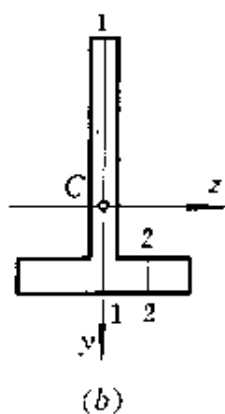
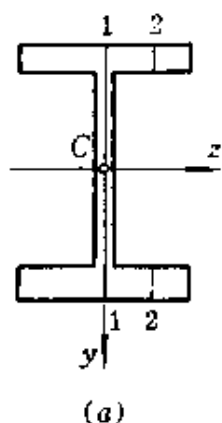
14. 试指出下列概念的区别:纯弯曲与对称弯曲;中性轴与形  
心轴;惯性矩与极惯性矩;抗弯刚度与抗弯截面模量?

## 习 题

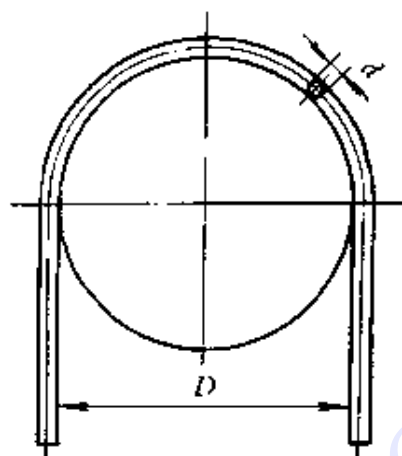
题 5.1 图示截面梁,弯矩位于纵向对称面(即  $x-y$  平面)内,试画沿直线 1-1 与 2-2 的弯曲正应力分布图。 $C$  为截面形心,以下各题亦同。

题 5.2 直径为  $d$  的金属丝,环绕在直径为  $D$  的轮缘上,已知材料的弹性模量为  $E$ ,试求金属丝内的最大正应变与最大弯曲正应力。

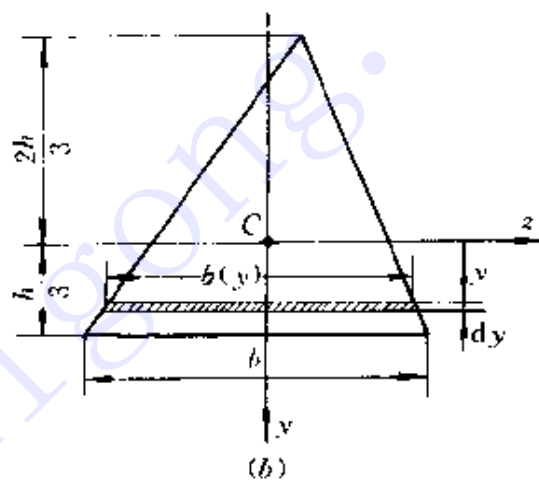
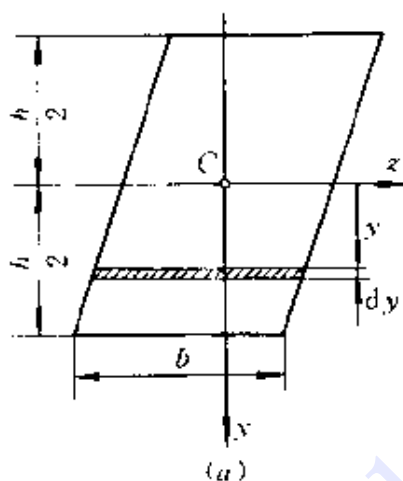
题 5.3 图示平行四边形与三角形截面,形心轴  $z$  平行于截面底边,试证明它们对形心轴  $z$  的惯性矩分别为  $I_z = bh^3/12$  与  $I_z = bh^3/36$ 。



题 5.1 图

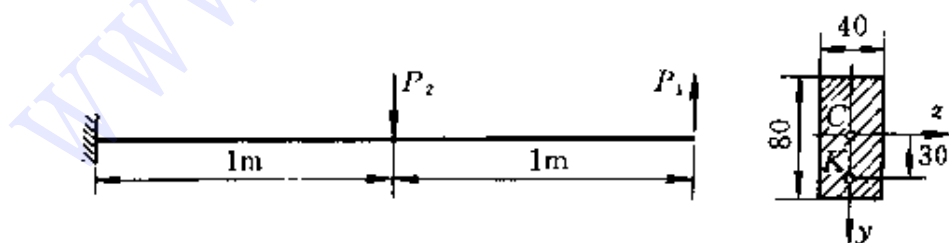


题 5.2 图



题 5.3 图

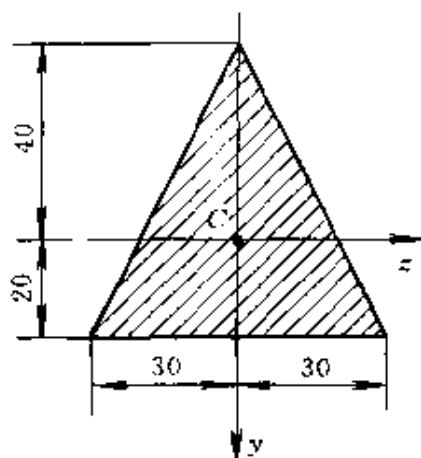
题 5.4 图示悬臂梁, 横截面为矩形, 承受载荷  $P_1$  与  $P_2$ , 试计算梁内的最大弯曲正应力, 及该应力所在截面上  $K$  点处的弯曲正应力。已知  $P_1 = 2P_2 = 5\text{kN}$ 。



题 5.4 图

题 5.5 图示三角形截面梁, 弯矩  $M = 1.0\text{kN} \cdot \text{m}$ , 并位于纵向对称面(即  $x-y$  平面)内, 试求最大弯曲拉应力与最大弯曲压应

力。

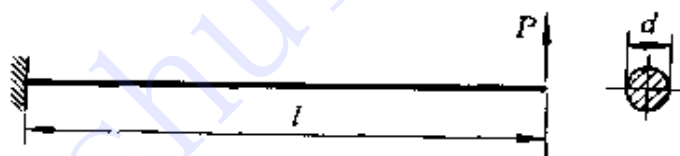


题 5.5 图

提示: 三角形截面的几何性质可从附录一中查得。

题 5.6 图示圆截面悬臂梁, 自由端承受集中力  $P$  作用, 截面的直径为  $d$ , 材料的弹性模量为  $E$ 。

- (1) 试计算梁内的最大弯曲正应力;
- (2) 梁变形后, 何截面处轴线的曲率半径最小, 其值为何。



题 5.6 图

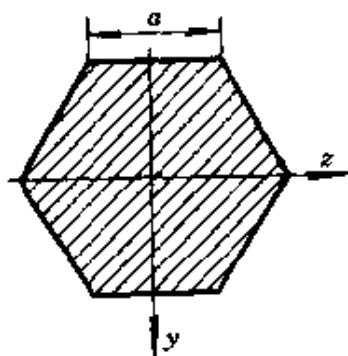
题 5.7 图示简支梁, 由 №18 工字钢制成, 在均布载荷  $q$  作用下, 测得横截面 C 底边的纵向正应变  $\epsilon = 3.0 \times 10^{-4}$ , 试计算梁内的最大弯曲正应力, 已知钢的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ ,  $a = 1\text{m}$ 。

题 5.8 图示正六边形截面, 边宽为  $a$ ,  $z$  轴为水平形心轴, 试

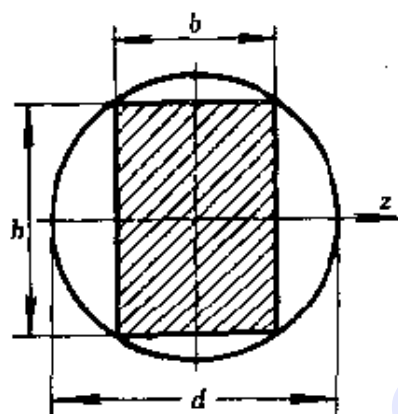


题 5.7 图





题 5.8 图



题 5.9 图

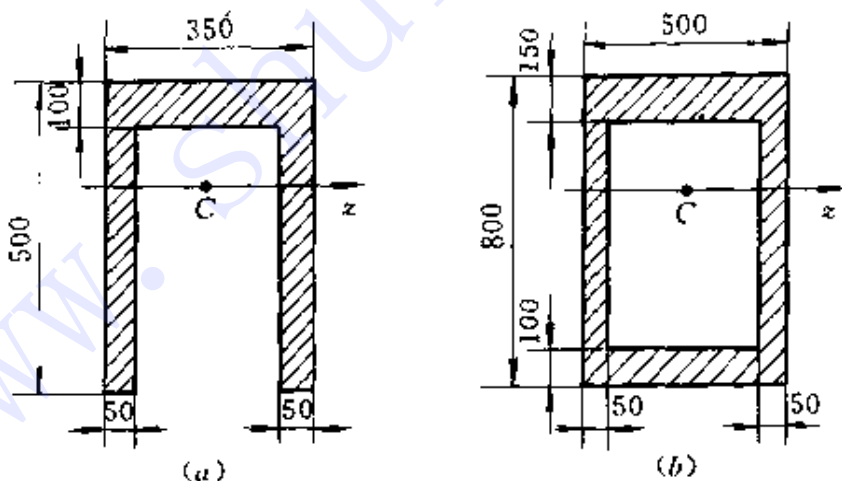
计算截面的惯性矩  $I_z$  与抗弯截面模量  $W_z$ 。

\* 题 5.9 图示直径为  $d$  的圆木, 现需从中切取一矩形截面梁。  
试问:

- (1) 如欲使所切矩形梁的弯曲强度最高,  $h, b$  应分别为何值;
- (2) 如欲使所切矩形梁的弯曲刚度最高,  $h, b$  又应分别为何值。

值。

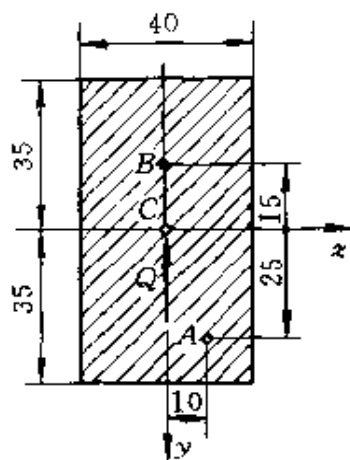
题 5.10 试计算图示截面对水平形心轴  $z$  的惯性矩。



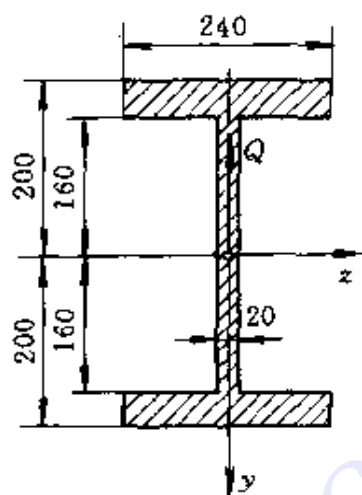
题 5.10 图

题 5.11 梁截面如图所示, 剪力  $Q = 50\text{kN}$ , 试计算该截面上的最大弯曲剪应力与  $A, B$  两点处的弯曲剪应力。

题 5.12 梁截面如图所示, 剪力  $Q = 300\text{kN}$ , 试计算腹板上的最大、最小弯曲剪应力与平均剪应力。

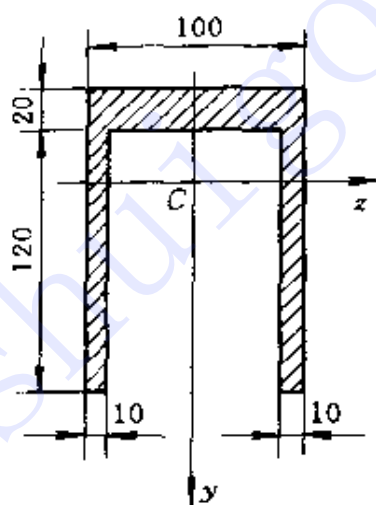


题 5.11 图



题 5.12 图

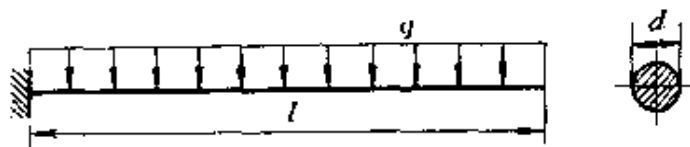
题 5.13 图示截面梁, 若剪力  $Q = 200\text{kN}$  ( $Q$  沿  $y$  轴并向上), 试计算最大弯曲剪应力, 及腹板与翼缘交界处的弯曲剪应力。



题 5.13 图

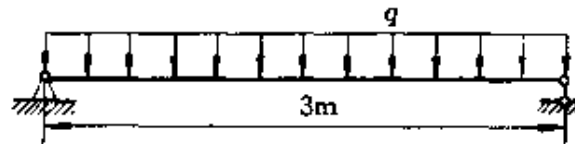
题 5.14 图示圆形截面悬臂梁, 承受均布载荷  $q$  作用, 试计算梁内的最大弯曲剪应力、最大弯曲正应力及二者的比值。

题 5.15 图示简支梁, 用 No28a 工字钢制成。在均布载荷  $q$  作



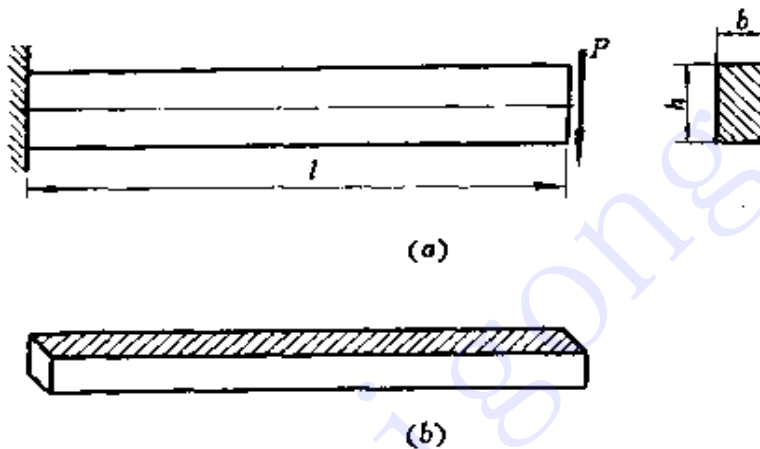
题 5.14 图

用下, 已知梁内最大弯曲正应力  $\sigma_{\max} = 100\text{MPa}$ , 试计算梁内的最大弯曲剪应力。



题 5.15 图

题 5.16 图(a)所示悬臂梁, 中性层以下部分如图(b)所示, 试绘其受力图, 并说明该部分是如何平衡的。



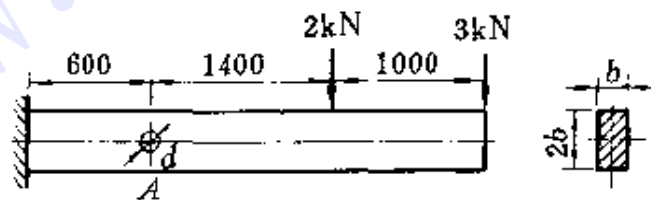
题 5.16 图

题 5.17 图示矩形截面木梁, 许用应力  $[\sigma] = 10\text{MPa}$ 。

(1) 试根据强度要求确定截面尺寸  $b$ ;

(2) 若在截面 A 处钻一直径为  $d = 60\text{mm}$  的圆孔, 试问是否安

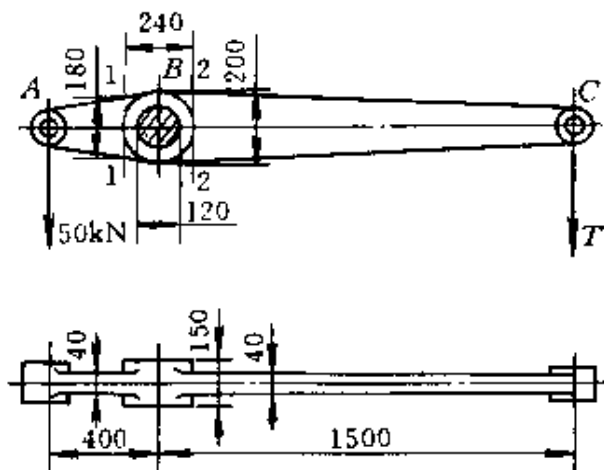
全。



题 5.17 图

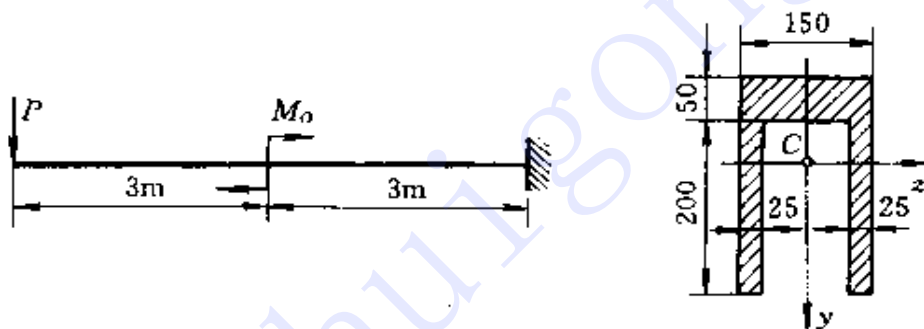
题 5.18 图示杠杆, 轴销 B 为转轴, 试校核横截面 1-1、2-2 与突缘 B 的弯曲强度。已知材料的许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。

题 5.19 图示槽形截面悬臂梁,  $P = 10\text{kN}$ ,  $M_0 = 70\text{kN} \cdot \text{m}$ 。



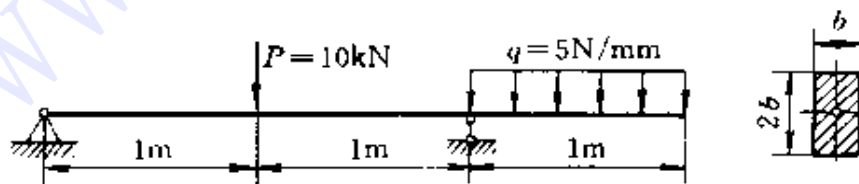
题 5.18 图

许用拉应力 $[\sigma_t] = 35\text{MPa}$ , 许用压应力 $[\sigma_c] = 120\text{MPa}$ , 试校核其强度。



题 5.19 图

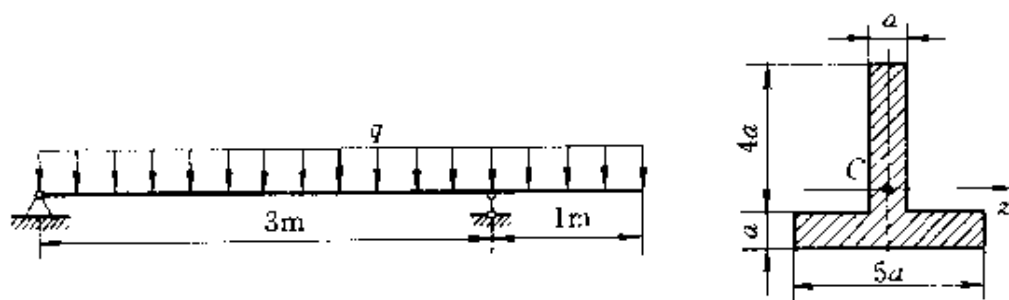
题 5.20 图示矩形截面钢梁, 承受载荷  $P, q$  作用, 试确定截面尺寸  $b$ 。材料的许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。



题 5.20 图

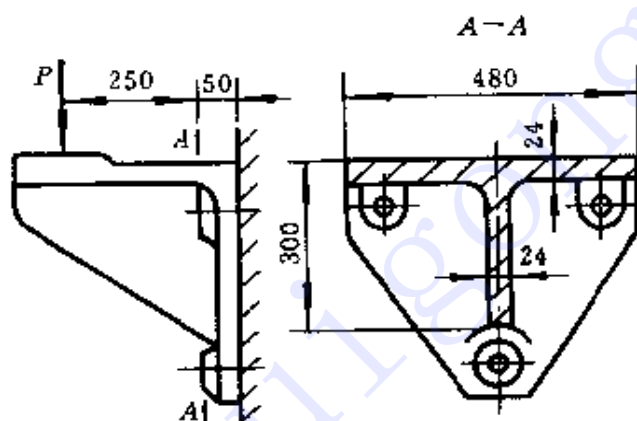
题 5.21 图示 T 字形截面外伸梁, 承受均布载荷  $q$  作用, 试确定截面尺寸  $a$ 。已知载荷集度  $q = 10\text{N/mm}$ , 许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。

题 5.22 图示托架, 由铸铁制成, 载荷  $P = 150\text{kN}$ 。若许用拉



题 5.21 图

应力 $[\sigma_t] = 35\text{MPa}$ , 许用压应力 $[\sigma_c] = 140\text{MPa}$ , 许用剪应力 $[\tau] = 30\text{MPa}$ , 试校核截面 A-A 的强度。



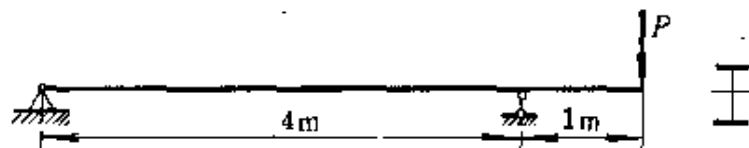
题 5.22 图

题 5.23 图示简支梁, 由四块尺寸相同的木板胶接而成, 试校核其强度。已知载荷  $P = 4\text{kN}$ , 梁跨度  $l = 400\text{mm}$ , 截面宽度  $b = 50\text{mm}$ , 高度  $h = 80\text{mm}$ , 木板的许用应力 $[\sigma] = 7\text{MPa}$ , 胶缝的许用剪应力 $[\tau] = 5\text{MPa}$ 。



题 5.23 图

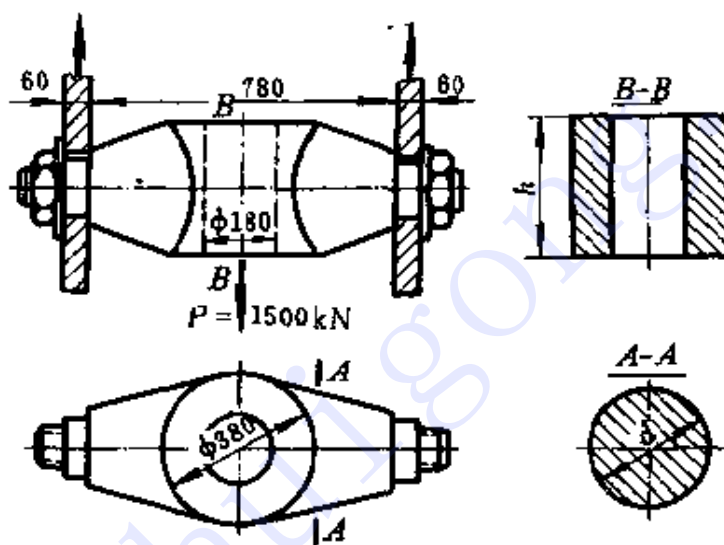
题 5.24 图示外伸梁, 承受载荷  $P$  作用。已知载荷  $P = 20\text{kN}$ , 许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 许用剪应力 $[\tau] = 90\text{MPa}$ 。试选择



题 5.24 图

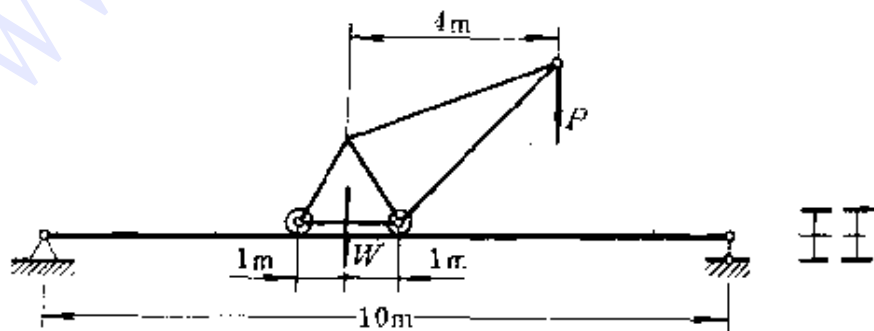
工字钢型号。

题 5.25 图示吊钩横梁, 最大吊重  $P = 1500\text{kN}$ , 试根据强度要求确定截面尺寸  $h$  与  $d$ 。材料的许用应力  $[\sigma] = 100\text{MPa}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 60\text{MPa}$ 。



题 5.25 图

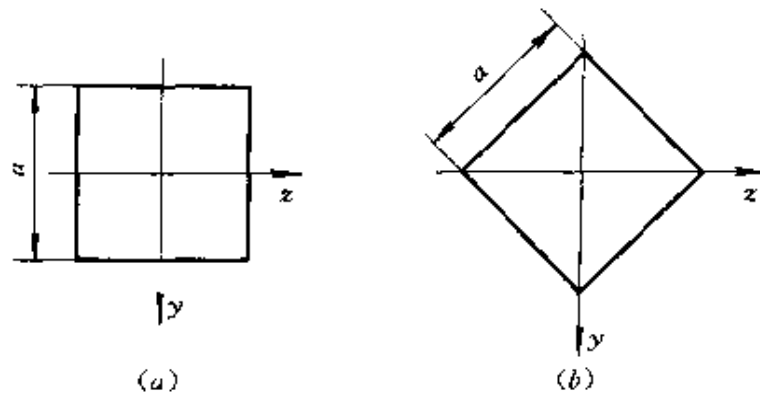
题 5.26 图示四轮吊车起重机的道轨为两根工字形截面梁, 设吊车自重  $W = 50\text{kN}$ , 最大起重量  $P = 10\text{kN}$ , 材料的许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 80\text{MPa}$ , 试选择工字钢型号。



题 5.26 图



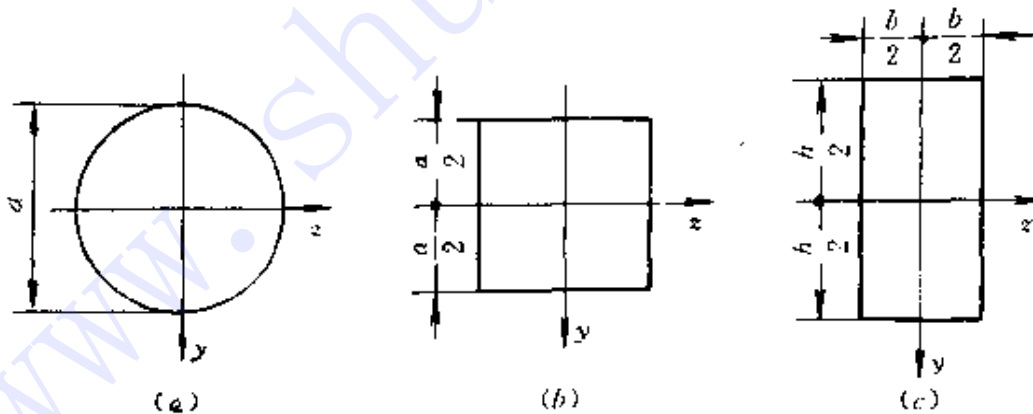
题 5.27 边宽为  $a$  的正方形截面梁, 可按图 (a)、(b) 所示两种方式放置。若相应的抗弯截面模量分别为  $W_a$  与  $W_b$ , 试求其比值  $W_a/W_b$ 。



题 5.27 图

题 5.28 若以  $d/D = 0.9$  的空心圆截面梁代替直径为  $D_0$  的实心圆截面梁, 而其它弯曲工作条件不变, 试求所节省材料的百分比。

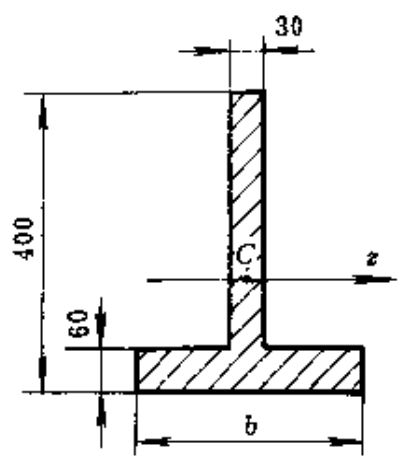
题 5.29 图示圆形、正方形与矩形梁截面, 三者的面积相同, 试比较其抗弯截面模量  $W_z$ , 设矩形截面的高度  $h$  为其宽度  $b$  的两倍。



题 5.29 图

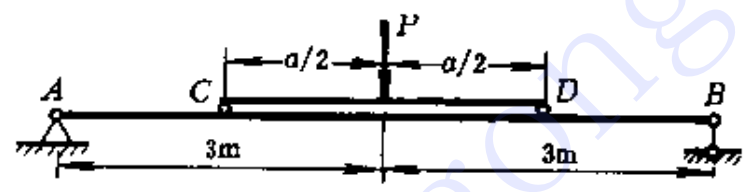
题 5.30 图示截面铸铁梁, 已知许用压应力为许用拉应力的四倍, 即  $[\sigma_-] = 4[\sigma_+]$ , 试从强度方面考虑, 宽度  $b$  为何值最佳。

题 5.31 当载荷  $P$  直接作用在简支梁  $AB$  的跨度中点时, 梁内最大弯曲正应力超过许用应力 30%。为了消除此种过载, 配置



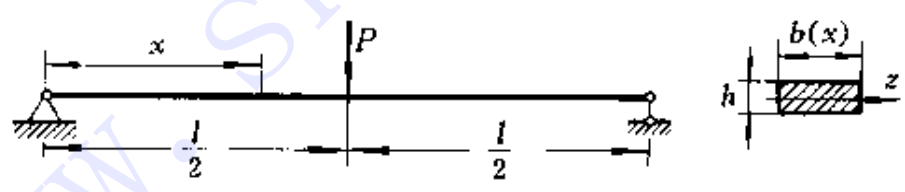
题 5.30 图

一辅助梁  $CD$ , 试求辅助梁的最小长度  $a$ 。



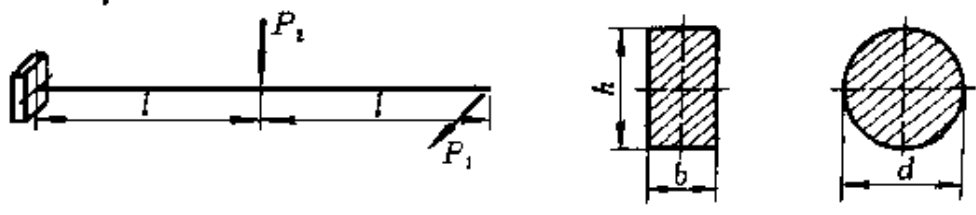
题 5.31 图

题 5.32 图示简支梁, 跨度中点承受集中载荷  $P$  作用, 若横截面的高度  $h$  保持不变, 试根据等强度观点确定截面宽度  $b(x)$  的变化规律。材料的许用应力  $[\sigma]$  与许用剪应力  $[\tau]$  均为已知。



题 5.32 图

题 5.33 图示悬臂梁, 承受载荷  $P_1$  与  $P_2$  作用, 已知  $P_1 = 800\text{N}$ ,  $P_2 = 1.6\text{kN}$ ,  $l = 1\text{m}$ , 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 试分别在下



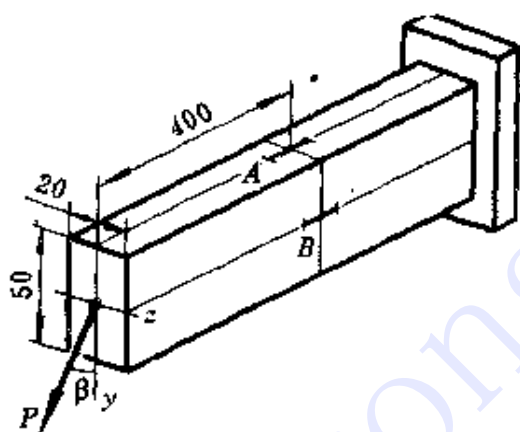
题 5.33 图

列两种情况下确定截面尺寸。

(1) 截面为矩形,  $h = 2b$ ;

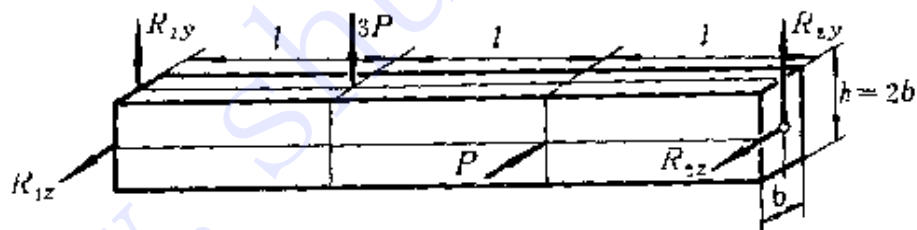
(2) 截面为圆形。

题 5.34 图示悬臂梁, 承受载荷  $P$  作用, 由实验测得梁表面  $A$ 、 $B$  点的纵向正应变分别为  $\epsilon_A = 2.1 \times 10^{-4}$ 、 $\epsilon_B = 3.2 \times 10^{-4}$ , 试求载荷  $P$  及其方位角  $\beta$  之值。材料的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ 。



题 5.34 图

\* 题 5.35 图示简支梁, 在两个纵向对称面内分别承受集中载荷作用, 试求梁内的最大弯曲正应力。



题 5.35 图

## 第六章 梁的变形

### § 6-1 引言

在外力作用下,梁的轴线由直线变为曲线(图 6-1)。变弯后的梁轴称为**挠曲轴**,它是一条连续而光滑的曲线。由 § 5-2 可知,如果作用在梁上的外力均位于梁的同一纵向对称面内,则挠曲轴为一平面曲线,并位于该对称面内。

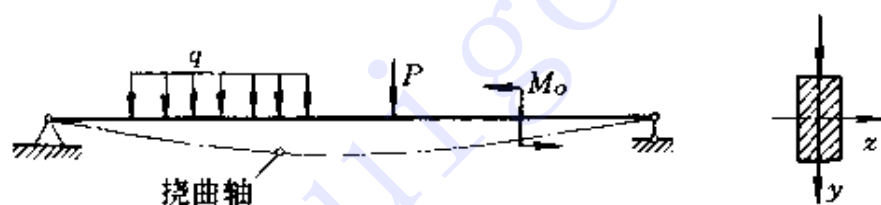


图 6-1

如图 6-2 所示,若沿变形前的梁轴建立  $x$  轴,沿梁端截面的纵向对称轴建立  $y$  轴,并忽略剪力引起的截面翘曲,则当梁发生弯曲变形时,各横截面仍保持平面,并在  $x-y$  平面内发生移动与转动。

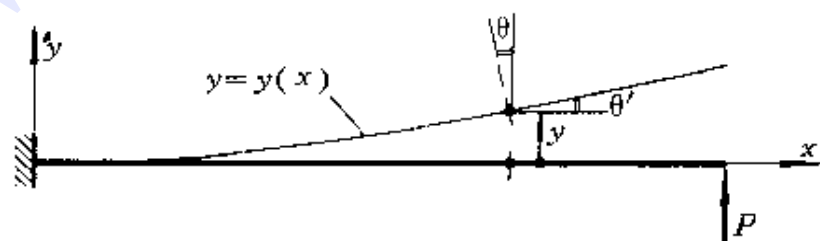


图 6-2

横截面的形心在垂直于梁轴( $x$ 轴)方向的位移,称为**挠度**,并用  $y$  表示。一般情况下,不同截面的挠度不同,所以

$$y = y(x)$$

实际上,这也就是挠曲轴的解析表达式或**挠曲轴方程**。还应指出,由于梁轴弯曲时长度不变,截面形心沿梁轴方向也存在位移,但在小变形的条件下,截面形心的轴向位移远小于其横向位移(即挠度)(参阅题 6.5),因而可以忽略不计。

横截面的角位移称为**转角**,并用  $\theta$  表示。如上所述,由于忽略剪力对变形的影响,所以,当梁变形时,横截面仍保持平面并与挠曲轴正交,因此,任一横截面的转角  $\theta$  也等于挠曲轴在该截面处的切线与  $x$  轴的夹角  $\theta'$ (图 6-2),即

$$\theta = \theta'$$

在工程实际中,转角  $\theta$  或  $\theta'$  一般均很小,于是由上式得

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta' = \frac{dy}{dx} \quad (6-1)$$

即横截面的转角等于挠曲轴在该截面处的斜率。可见,转角与挠度相互关联。

本章主要研究梁在对称弯曲时由弯矩引起的变形。介绍积分法、麦考利法与迭加法等分析弯曲变形的的方法。积分法是分析梁变形的的基本方法,利用麦考利法建立挠曲轴方程简捷而规范,叠加法提供了综合应用已有计算结果,求解复杂问题的有效途径。

## § 6-2 挠曲轴近似微分方程

在建立纯弯正应力公式时(§ 5-2),曾得到用中性层曲率表示的弯曲变形公式

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

如果忽略剪力对变形的影响,则上式也可用于一般非纯弯曲。在这种情况下,由于弯矩  $M$  与相应曲率半径  $\rho$  均为  $x$  的函数,上式变为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \quad (a)$$

即挠曲轴上任一点的曲率 $1/\rho(x)$ 与该点处横截面上的弯矩 $M(x)$ 成正比, 而与该截面的抗弯刚度 $EI$ 成反比。

由高等数学可知, 平面曲线 $y = y(x)$ 上任一点的曲率为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}} \quad (b)$$

上述公式同样适用于挠曲轴。

将式(b)代入式(a), 得

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}} = \pm \frac{M(x)}{EI} \quad (6-2)$$

上式称为**挠曲轴微分方程**, 是一个二阶非线性常微分方程。

前面曾经指出, 在工程实际中, 梁的转角一般均很小, 因此,  $(dy/dx)^2$  之值远小于 1, 所以, 式(6-2) 可简化为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{EI} \quad (6-3)$$

式(6-3) 称为**挠曲轴近似微分方程**。实践表明, 由此方程求得的挠度与转角, 对于工程应用已足够精确。

$d^2y/dx^2$  与弯矩符号的关系如图 6-3 所示。由该图可知, 如果  $y$  轴以向上为正, 则当梁段承受正弯矩时, 挠曲轴为凹曲线(图 6-3, a),  $d^2y/dx^2$  为正; 反之, 当梁段承受负弯矩时, 挠曲轴为凸曲线(图 6-3, b),  $d^2y/dx^2$  亦为负。可见, 如果弯矩的正负符号仍按以前规定, 并选用  $y$  轴向上的坐标系, 则弯矩  $M$  与  $d^2y/dx^2$  恒为同号, 因此, 方程(6-3) 的右端应取正号, 即挠曲轴近似微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (6-4)$$

应该指出, 由于  $x$  轴的方向既不影响弯矩的正负, 也不影响  $d^2y/dx^2$  的正负, 因此, 式(6-4) 同样适用于  $x$  轴向左的坐标系。

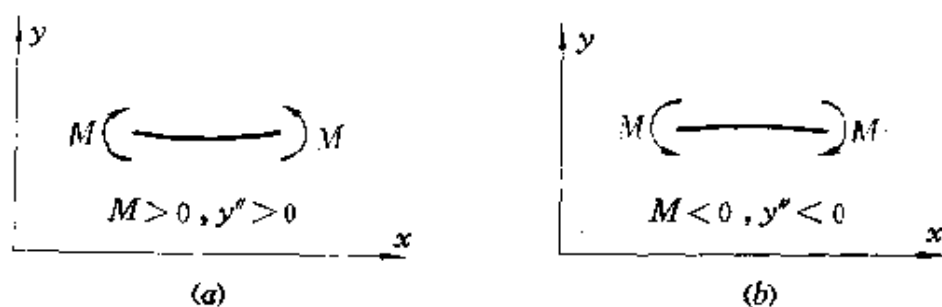


图 6-3

### § 6-3 计算梁位移的积分法

由以上分析得挠曲轴近似微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

将上述方程相继积分两次,得

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C \quad (a)$$

$$y = \iint \frac{M(x)}{EI} dx dx + Cx + D \quad (b)$$

式中,  $C$ 、 $D$  为积分常数。

以上各积分常数可利用某些截面的已知位移来确定。例如,在固定端处,横截面的挠度与转角均为零,即

$$y = 0, \quad \theta = 0$$

在铰支座处,横截面的挠度为零,即

$$y = 0$$

梁截面的已知位移条件,称为梁位移的**边界条件**。

积分常数确定后,将其代入式(b)、(a),即得梁的挠度或挠曲轴方程

$$y = f(x)$$

与转角方程

$$\theta = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$



并由此可求出任一横截面的挠度与转角。

应该指出, 当梁的弯矩方程需分段建立时, 挠曲轴近似微分方程也应分段建立, 而在各段的积分中, 将分别包含两个积分常数。为了确定这些常数, 除应利用位移边界条件外, 还应利用分段处挠曲轴的连续、光滑条件。因为在相邻梁段的交接处, 相连两截面应具有相同的挠度与转角。分段处挠曲轴所应满足的连续、光滑条件, 称为梁位移的**连续条件**。

下面举例说明挠曲轴近似微分方程的建立、积分常数的确定以及挠度与转角的计算。

**例 1** 图 6-4(a) 所示悬臂梁, 自由端承受集中力  $P$  作用, 试建立梁的挠度与转角方程, 并计算最大挠度与转角。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

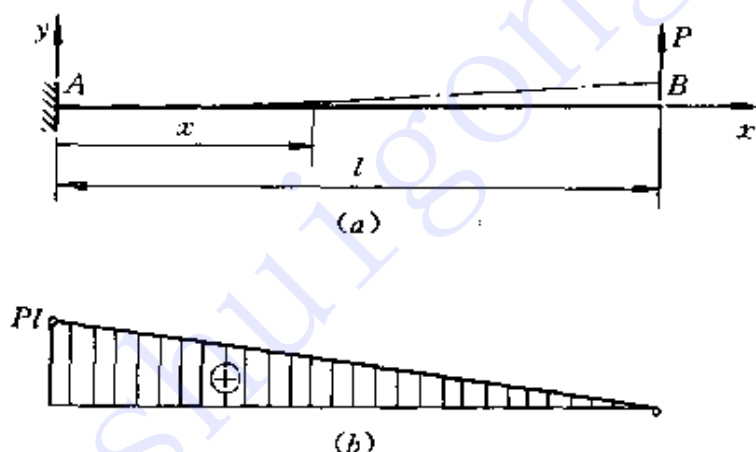


图 6-4

**解** 1. 建立挠曲轴近似微分方程并积分  
梁的弯矩方程为

$$M(x) = P(l - x)$$

将其代入式(6-4), 得挠曲轴近似微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EI}(l - x)$$

将上述微分方程相继积分两次, 得

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C \quad (a)$$

$$y = \frac{P}{EI} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + Cx + D \quad (b)$$

## 2. 确定积分常数

在固定端处, 横截面的转角与挠度均为零, 即:

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处,} \quad \theta = 0$$

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处,} \quad y = 0$$

将上述边界条件分别代入式(a)、(b), 得

$$C = 0$$

$$D = 0$$

## 3. 建立转角与挠度方程

将所得  $C$ 、 $D$  值代入式(a)、(b), 于是得梁的转角与挠度方程分别为

$$\theta = \frac{P}{EI} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \quad (c)$$

$$y = \frac{P}{EI} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (d)$$

## 4. 绘制挠曲轴略图并计算最大转角与挠度

如图 6-4(b) 所示, 梁内各截面的弯矩均为正, 所以, 整个挠曲轴应为凹曲线; 由梁的支持条件还可知, 截面  $A$  的挠度与转角为零。综合考虑上述两方面, 可以看出, 挠曲轴是一条以  $A$  为极值点的凹曲线(图 6-4, a), 而最大转角与最大挠度则均发生在横截面  $B$  即  $x = l$  处。

将  $x = l$  代入式(c)、(d), 即得梁的最大转角与最大挠度分别为

$$\theta_{\max} = \theta|_{x=l} = \frac{Pl^2}{2EI} \quad (e)$$

$$y_{\max} = y|_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (f)$$

所得  $\theta_{\max}$  为正, 说明挠曲轴在  $B$  点处的斜率为正, 即截面  $B$  沿逆时针方向转动; 所得  $y_{\max}$  为正, 说明截面  $B$  的位移方向与  $y$  轴的正向相同, 即截面  $B$  的形心垂直向上移动。

**例 2** 图 6-5 所示简支梁 AB, 承受均布载荷  $q$  与力矩为  $M_0$  的集中力偶作用, 试计算截面 A 的转角。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

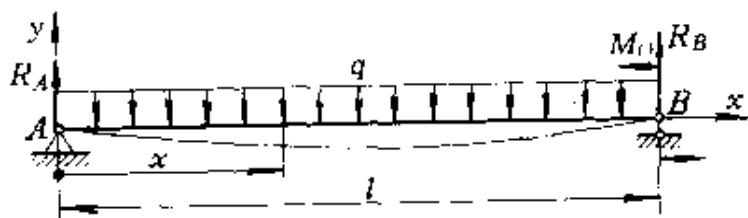


图 6-5

解 1. 计算支反力

由平衡方程  $\sum M_B = 0$  与  $\sum M_A = 0$ , 得 A、B 端的支反力分别为

$$R_A = \frac{ql}{2} + \frac{M_0}{l}$$

$$R_B = \frac{ql}{2} - \frac{M_0}{l}$$

2. 建立挠曲轴微分方程并积分

梁的弯矩方程为

$$M(x) = \left(\frac{ql}{2} + \frac{M_0}{l}\right)x - \frac{q}{2}x^2$$

所以, 挠曲轴的近似微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EI}(lx - x^2) + \frac{M_0}{EI}x$$

将上述方程相继积分两次, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{12EI}(3lx^2 - 2x^3) + \frac{M_0}{2EI}x^2 + C \quad (a)$$

$$y = \frac{q}{24EI}(2lx^3 - x^4) + \frac{M_0}{6EI}x^3 + Cx + D \quad (b)$$

3. 建立转角与挠度方程

梁两端铰支座处的挠度均为零, 即:

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处, } \quad y = 0$$

$$\text{在 } x = l \text{ 处, } \quad y = 0$$

将上述边界条件分别代入式(b), 得

$$D = 0$$

$$C = -\frac{ql^3}{24EI} - \frac{M_0l}{6EI}$$

将所得  $C$ 、 $D$  值代入式(a)、(b), 于是得梁的转角与挠度方程分别为

$$\theta = \frac{q}{24EI}(6lx^2 - 4x^3 - l^3) + \frac{M_0}{6EI}(3x^2 - l^2) \quad (c)$$

$$y = \frac{qx}{24EI}(2lx^2 - x^3 - l^3) + \frac{M_0x}{6EI}(x^2 - l^2) \quad (d)$$

#### 4. 计算截面 $A$ 的转角

将  $x = 0$  代入式(c), 即得截面  $A$  的转角为

$$\theta_A = -\frac{ql^3}{24EI} - \frac{M_0l}{6EI} \quad (e)$$

所得  $\theta_A$  为负, 说明截面  $A$  沿顺时针方向转动。

#### 5. 讨论

式(c)、(d)与式(e)表明, 截面的位移(挠度、转角)与载荷  $q$ 、 $M_0$  成线性齐次关系。实际上, 式(e)右端的第一与第二项, 分别代表载荷  $q$  与  $M_0$  单独作用时截面  $A$  的转角(见附录二), 因此, 式(c)可看成是该二载荷单独作用时梁的转角方程之组合, 而式(d)则为相应挠度方程之组合。

**例 3** 图 6-6 所示简支梁, 承受集中载荷  $P$  作用, 试计算梁的最大挠度。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

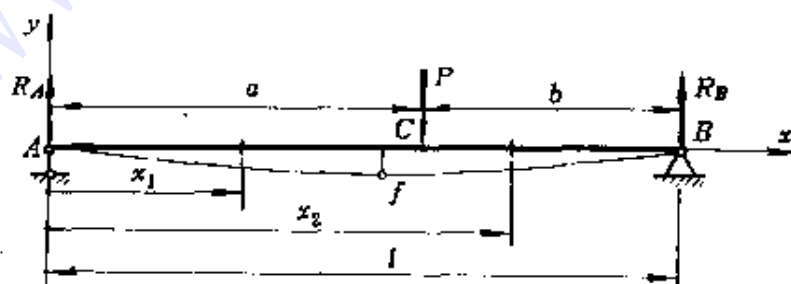


图 6-6

解 1. 建立挠曲轴微分方程并积分

由平衡方程得 A、B 端的支反力分别为

$$R_A = \frac{Pb}{l}, \quad R_B = \frac{Pa}{l}$$

由于 AC 与 CB 段的弯矩方程不同, 因此, 挠曲轴近似微分方程应分段建立, 并分别进行积分。

AC 段 ( $0 \leq x_1 \leq a$ ):

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{Pb}{EI} x_1$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{Pb}{2EI} x_1^2 + C_1 \quad (a)$$

$$y_1 = \frac{Pb}{6EI} x_1^3 + C_1 x_1 + D_1 \quad (b)$$

CB 段 ( $a \leq x_2 \leq l$ ):

$$\frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = \frac{Pb}{EI} x_2 - \frac{P}{EI} (x_2 - a)$$

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{Pb}{2EI} x_2^2 - \frac{P}{2EI} (x_2 - a)^2 + C_2 \quad (c)$$

$$y_2 = \frac{Pb}{6EI} x_2^3 - \frac{P}{6EI} (x_2 - a)^3 + C_2 x_2 + D_2 \quad (d)$$

3. 确定积分常数

在梁两端的铰支座处, 挠度均为零, 即位移边界条件为:

$$\text{在 } x_1 = 0 \text{ 处,} \quad y_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{在 } x_2 = l \text{ 处,} \quad y_2 = 0 \quad (2)$$

此外, 梁段 AC 与 CB 在截面 C 处具有相同的转角与相同的挠度, 即位移连续条件为:

$$\text{在 } x_1 = x_2 = a \text{ 处,} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2} \quad (3)$$

$$\text{在 } x_1 = x_2 = a \text{ 处,} \quad y_1 = y_2 \quad (4)$$

由以上四条件, 即可确定积分常数  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $D_1$  与  $D_2$ 。

由条件(3)与式(a)、(c), 得

$$C_1 = C_2$$

由条件(4)与式(b)、(d), 得

$$D_1 = D_2$$

将条件(1)、(2)分别代入式(b)、(d), 得

$$D_1 = D_2 = 0$$

$$C_1 = C_2 = \frac{Pb}{6EI}(b^2 - l^2)$$

#### 4. 建立挠度方程并求最大挠度

将所得积分常数值代入式(b)、(d), 即得 AC 与 CB 段的挠度方程分别为

$$y_1 = \frac{Pbx_1}{6EI}(x_1^2 - l^2 + b^2) \quad (e)$$

$$y_2 = \frac{Pbx_2}{6EI}(x_2^2 - l^2 + b^2) - \frac{P}{6EI}(x_2 - a)^3 \quad (f)$$

根据梁的弯矩与支持条件, 得梁的挠曲轴如图 6-6 所示。显然, 最大挠度发生在较长梁段中。如果  $a > b$ , 则最大挠度发生在 AC 段内。在本例中, 最大挠度处的转角应为零。根据此条件, 令

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{Pb}{6EI}(3x_1^2 - l^2 + b^2) = 0$$

得最大挠度所在截面的横坐标为

$$x_0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \quad (g)$$

将上述  $x_0$  值代入式(e), 于是得梁的最大挠度为

$$f = -\frac{Pb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI} \quad (\downarrow) \quad (h)$$

在特殊情况下, 如果载荷  $P$  作用在梁跨度中点, 即  $a = b = l/2$  时, 则由式(g)、(h)可知, 梁的最大挠度也发生在跨度中点, 其值则为

$$f = -\frac{Pl^3}{48EI} \quad (\downarrow)$$

**例 4** 试为图 6-4(a) 所示悬臂梁选择一适当型号的工字钢。已知载荷  $P = 25\text{kN}$ , 跨度  $l = 2\text{m}$ , 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 挠度的最大允许值即许用挠度  $[f] = l/500$ , 弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ 。

解 1. 按强度要求设计



根据梁的正应力强度条件, 要求

$$W_x \geq \frac{Pl}{[\sigma]} = \frac{25 \times 10^3 \times 2 \times 10^3}{160} = 313 \times 10^3 \text{mm}^3$$

由型钢表中查得, №22b 工字钢的抗弯截面模量  $W_x = 325 \times 10^3 \text{mm}^3$ , 所以, 从强度方面考虑, 可选 №22b 工字钢作梁。

2. 按刚度要求设计

由例 1 中的式(f), 得梁的最大挠度为

$$f = \frac{Pl^3}{3EI_x}$$

所以, 梁的刚度条件为

$$\frac{Pl^3}{3EI_x} \leq [f]$$

或

$$\frac{Pl^3}{3EI_x} \leq \frac{l}{500}$$

由此得

$$\begin{aligned} I_x &\geq \frac{500Pl^2}{3E} = \frac{500 \times 25 \times 10^3 \times 2000^2}{3 \times 200 \times 10^3} \\ &= 8.33 \times 10^7 \text{mm}^4 \end{aligned}$$

由型钢表中查得, №32a 工字钢的抗弯截面模量  $W_x = 692 \times 10^3 \text{mm}^3$ , 惯性矩  $I_x = 11.075 \times 10^7 \text{mm}^4$ , 可见, 选择 №32a 工字钢作梁将同时满足强度和刚度要求。

## \* § 6-4 计算梁位移的麦考利法

以上所述积分法, 是分析梁变形的的基本方法。但从计算中可以看出, 当弯矩方程需要分段建立时, 由于需要确定许多积分常数, 致使计算过程冗长, 实际应用颇不方便。本节所述麦考利法, 为解决这类问题, 提供了简捷而规范的途径, 特别是适合于电子计算机的应用。



### 一、弯矩的通用方程

考虑图 6-7 所示梁  $AE$ , 同时承受集中载荷  $M_0$ 、 $P$  与均布载荷  $q$  作用。设将  $x$  轴的原点置于梁的左端  $A$ , 则  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  与  $DE$  段的弯矩方程分别为

$$M_1 = R_A x \quad (0 \leq x < l_1)$$

$$M_2 = R_A x + M_0 \quad (l_1 < x \leq l_2)$$

$$M_3 = R_A x + M_0 - P(x - l_2) \quad (l_2 \leq x \leq l_3)$$

$$M_4 = R_A x + M_0 - P(x - l_2) - \frac{q}{2}(x - l_3)^2 \quad (l_3 \leq x \leq l)$$

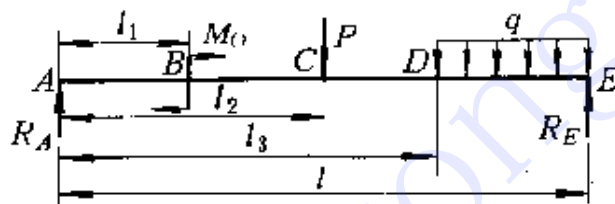


图 6-7

分析上述方程后可以看出, 如果引入下述表达式:

$$\text{当 } x > l_i \text{ 时, } \langle x - l_i \rangle = (x - l_i) \quad (6-5a)$$

$$\text{当 } x < l_i \text{ 时, } \langle x - l_i \rangle = 0 \quad (6-5b)$$

并将  $DE$  段的弯矩方程改写成为

$$M = R_A x + M_0 \langle x - l_1 \rangle^0 - P \langle x - l_2 \rangle - \frac{q}{2} \langle x - l_3 \rangle^2 \quad (a)$$

则上述方程同时适用于任一梁段。例如对于  $BC$  段,  $x$  的取值范围为  $(l_1, l_2)$ , 因而

$$\langle x - l_1 \rangle^0 = 1$$

$$\langle x - l_2 \rangle = 0$$

$$\langle x - l_3 \rangle = 0$$

于是, 式(a)即变为

$$M = R_A x + M_0 = M_2$$

由此可见, 如果采用式(6-5)所述表达式, 并建立最右梁段的弯矩方程, 则该方程将同时适用于各梁段, 而成为梁弯矩的通用方

程。

应该指出, 如果分布载荷仅作用在梁内某一区间, 例如图 6-8(a) 所示均布载荷  $q$  仅作用在  $(l_1, l_2)$  区间, 在这种情况下, 则应将该分布载荷延展至梁的右端, 并在延伸部分同时施加反向均布载荷  $q$  (图 6-8, b), 由此所建立的弯矩方程

$$M = R_A x - \frac{q}{2} \langle x - l_1 \rangle^2 + \frac{q}{2} \langle x - l_2 \rangle^2$$

同样适用于全梁。

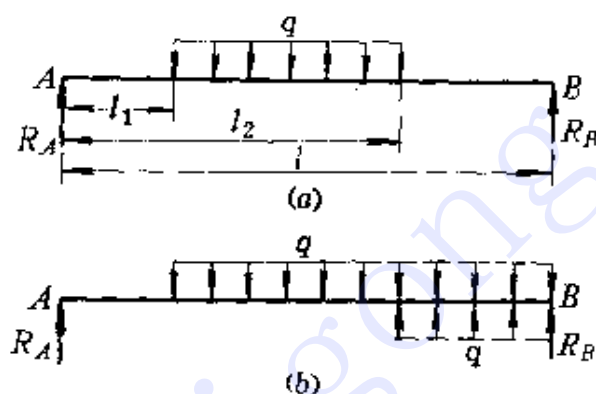


图 6-8

在以上分析中, 采用了下述形式的函数

$$F_n(x) = \langle x - a \rangle^n \quad (n \geq 0) \quad (6-6)$$

称为麦考利函数 (Macaulay function)。按照上述定义, 不难证明

$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \frac{1}{n+1} \langle x - a \rangle^{n+1} + C \quad (6-7)$$

## 二、梁位移的通用方程

现在研究图 6-7 所示梁的位移。

由该梁的弯矩通用方程得挠曲轴近似微分方程为

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = R_A x + M_0 \langle x - l_1 \rangle^0 -$$

$$P \langle x - l_2 \rangle - \frac{q}{2} \langle x - l_3 \rangle^2$$

将上述方程相继积分两次, 得

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{R_A}{2}x^2 + M_0 \langle x - l_1 \rangle - \frac{P}{2} \langle x - l_2 \rangle^2 - \frac{q}{6} \langle x - l_3 \rangle^3 + C \quad (b)$$

$$EIy = \frac{R_A}{6}x^3 + \frac{M_0}{2} \langle x - l_1 \rangle^2 - \frac{P}{6} \langle x - l_2 \rangle^3 - \frac{q}{24} \langle x - l_3 \rangle^4 + Cx + D \quad (c)$$

应该看到, 在梁的全长范围内,  $\langle x - l_i \rangle$  的一次、二次与高次幂均为  $x$  的连续函数。因此, 根据函数  $y$  与  $y'$  的连续性可知, 式(b)、(c) 中的  $C$ 、 $D$  应为与梁段无关的常数, 否则, 在相邻梁段的交接处, 函数  $y$  与  $y'$  将出现不连续。

由此可见, 式(b)、(c) 不仅适用于任一梁段, 而且仅包含两个积分常数( $C$ 、 $D$ ), 其值则只需根据位移边界条件即可确定。

下面举例说明上述方法的应用。

**例 5** 图 6-9 所示简支梁, 承受力矩为  $M_0$  的集中力偶作用, 试利用麦考利法计算横截面  $A$  的转角。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

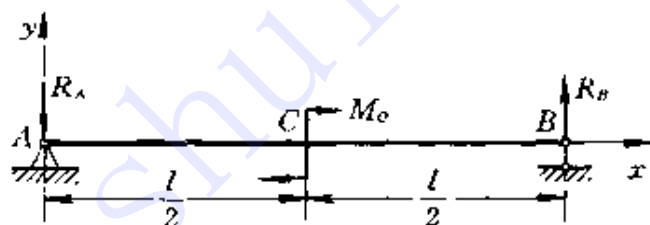


图 6-9

**解** 1. 建立挠曲轴通用微分方程并积分  
支座  $A$ 、 $B$  的支反力为

$$R_A = R_B = \frac{M_0}{l}$$

弯矩的通用方程为

$$M = -\frac{M_0}{l}x + M_0 \langle x - \frac{l}{2} \rangle^0$$

挠曲轴的通用微分方程则为

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_0}{l}x + M_0 \langle x - \frac{l}{2} \rangle^0$$

将上述方程相继积分两次, 得

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{M_0}{2l}x^2 + M_0 \langle x - \frac{l}{2} \rangle + C \quad (a)$$

$$EI y = -\frac{M_0}{6l}x^3 + \frac{M_0}{2} \langle x - \frac{l}{2} \rangle^2 + Cx + D \quad (b)$$

### 2. 确定积分常数

梁的位移边界条件为:

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处, } \quad y = 0 \quad (1)$$

$$\text{在 } x = l \text{ 处, } \quad y = 0 \quad (2)$$

将条件(1)代入式(b), 得

$$D = 0$$

将条件(2)与上式代入式(b)得

$$C = \frac{M_0 l}{24}$$

### 3. 计算截面 C 的转角

将所得 C、D 值及  $x = 0$  代入式(a), 即得截面 A 的转角为

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{M_0}{2l}(0)^2 - M_0 \langle 0 - \frac{l}{2} \rangle + \frac{M_0 l}{24} \right] \\ &= \frac{M_0 l}{24EI} \quad (\circlearrowleft) \end{aligned}$$

**例 6** 图 6-10 所示悬臂梁, 其左半部承受均布载荷  $q$  作用, 试利用麦考利法建立梁的挠曲轴方程。设抗弯刚度  $EI$  为常值。

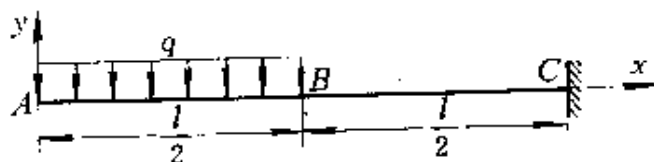


图 6-10

**解** 1. 建立挠曲轴微分方程并积分  
弯矩的通用方程为

$$M = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2$$

所以, 挠曲轴通用微分方程为

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2$$

由此得

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{q}{6}x^3 + \frac{q}{6}\left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + C \quad (a)$$

$$EIy = -\frac{q}{24}x^4 + \frac{q}{24}\left(x - \frac{l}{2}\right)^4 + Cx + D \quad (b)$$

## 2. 确定积分常数

梁的位移边界条件为:

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1)$$

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } \quad y = 0 \quad (2)$$

将条件(1)、(2)分别代入式(a)、(b), 得

$$C = \frac{7ql^3}{48}, \quad D = -\frac{41ql^4}{384}$$

## 3. 建立挠曲轴方程

将所得  $C$ 、 $D$  值代入式(b), 得挠曲轴的通用方程为

$$y = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{q}{24}x^4 + \frac{q}{24}\left(x - \frac{l}{2}\right)^4 + \frac{7ql^3}{48}x - \frac{41ql^4}{384} \right]$$

并由此得  $AB$  与  $BC$  段的挠曲轴方程分别为

$$y_1 = \frac{1}{EI} \left( -\frac{q}{24}x^4 + \frac{7ql^3}{48}x - \frac{41ql^4}{384} \right)$$

$$y_2 = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{q}{24}x^4 + \frac{q}{24}\left(x - \frac{l}{2}\right)^4 + \frac{7ql^3}{48}x - \frac{41ql^4}{384} \right]$$

**例7** 图6-11所示简支梁, 承受载荷  $P$ 、 $M_0$  作用, 试利用麦考利法计算梁跨度中点横截面  $C$  的挠度。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

**解** 1. 建立挠曲轴通用微分方程并积分

$A$ 、 $B$  端的反力分别为

$$R_A = \frac{3P}{4} - \frac{M_0}{l}$$

$$R_B = \frac{P}{4} + \frac{M_0}{l}$$

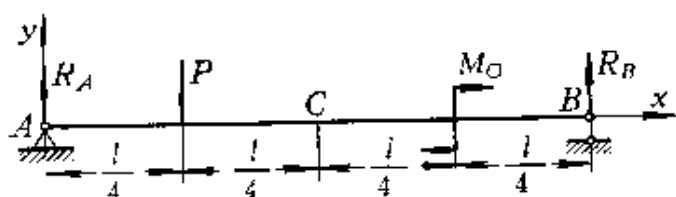


图 6-11

弯矩的通用方程为

$$M = \left(\frac{3P}{4} - \frac{M_0}{l}\right)x - P\left\langle x - \frac{l}{4} \right\rangle + M_0\left\langle x - \frac{3l}{4} \right\rangle^0$$

挠曲轴的通用微分方程则为

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{3P}{4} - \frac{M_0}{l}\right)x - P\left\langle x - \frac{l}{4} \right\rangle + M_0\left\langle x - \frac{3l}{4} \right\rangle^0$$

将上述方程相继积分两次, 得

$$EI \frac{dy}{dx} = \left(\frac{3P}{8} - \frac{M_0}{2l}\right)x^2 - \frac{P}{2}\left\langle x - \frac{l}{4} \right\rangle^2 + M_0\left\langle x - \frac{3l}{4} \right\rangle + C$$

$$EIy = \left(\frac{P}{8} - \frac{M_0}{6l}\right)x^3 - \frac{P}{6}\left\langle x - \frac{l}{4} \right\rangle^3 + \frac{M_0}{2}\left\langle x - \frac{3l}{4} \right\rangle^2 + Cx + D \quad (a)$$

## 2. 确定积分常数

梁的位移边界条件为:

$$\text{在 } x=0 \text{ 处,} \quad y=0 \quad (b)$$

$$\text{在 } x=l \text{ 处,} \quad y=0 \quad (c)$$

将条件(b)、(c) 分别代入式(a), 得

$$D = 0$$

$$C = \frac{13M_0l}{96} - \frac{7Pl^2}{128}$$

## 3. 计算截面 C 的挠度

将所得 C、D 值及  $x=l/2$  代入式(a), 即得截面 C 的挠度为

$$y = \frac{1}{EI} \left[ \left(\frac{P}{8} - \frac{M_0}{6l}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{P}{6}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right)^3 + 0 + \left(\frac{13M_0l}{96} - \frac{7Pl^2}{128}\right)\left(\frac{l}{2}\right) \right] = \frac{9M_0l^2}{192EI} - \frac{11Pl^3}{768EI}$$

## § 6-5 计算梁位移的叠加法

由前述分析可知, 在小变形的条件下, 而且当梁内应力不超过比例极限时, 挠曲轴近似微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

它是一个线性微分方程。由前述分析还可知, 在小变形的条件下, 由于横截面形心的轴向位移可以忽略不计, 因而梁内任一横截面的弯矩与载荷成线性齐次关系。例如图 6-5 所示梁, 任一横截面的弯矩为

$$M = q\left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) + M_0 \frac{x}{l}$$

即与载荷  $q$ 、 $M_0$  成线性齐次关系。

既然挠曲轴近似微分方程为线性微分方程, 而弯矩又与载荷成线性齐次关系, 因此, 当梁上同时作用几个载荷时, 挠曲轴近似微分方程的解, 必等于各载荷单独作用时挠曲轴近似微分方程的解的线性组合, 而由此求得的挠度与转角也一定与载荷成线性齐次关系(参阅例 2 与例 7)。

由此可见, 当梁上同时作用几个载荷时, 如果梁的变形很小, 而且应力不超比例极限, 则任一横截面的总位移, 即等于各载荷单独作用时在该截面引起的位移的代数和。

上述方法称为计算梁位移的**叠加法**, 实际上, 叠加法是一个普遍实用的方法。不仅可用于计算位移, 也可用于计算支反力、内力与应力; 不仅可用于梁, 也可用于拉压杆、轴与其它构件或结构。

一般说来, 当构件或结构上同时作用几个载荷时, 如果各载荷所产生的效果(支反力、内力、应力与位移等)互不影响, 或影响甚小可以忽略不计, 则它们同时作用所产生的总效果, 即等于各载荷单独作用所产生的效果之总和(或为代数和, 或为矢量和, 由所求物理量的性质而定)。上述原理称为**叠加原理**或**力作用的独立性原**



理。

**例 8** 图 6-12 所示简支梁, 同时承受均布载荷  $q$  与集中载荷  $P$  作用, 试用叠加法计算梁的最大挠度。设抗弯刚度  $EI$  为常值。

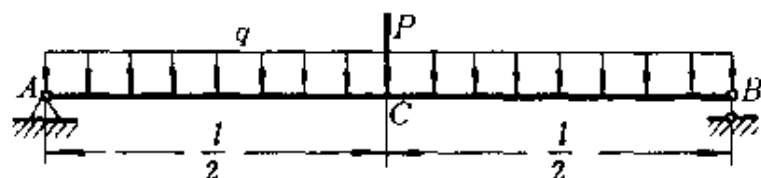


图 6-12

**解** 由梁变形表(附录二)查得: 当均布载荷  $q$  单独作用时, 简支梁跨度中点截面  $C$  的挠度为

$$f_q = \frac{5ql^4}{384EI} \quad (\downarrow)$$

当集中载荷  $P$  单独作用时, 该截面的挠度则为

$$f_P = \frac{Pl^3}{48EI} \quad (\downarrow)$$

根据叠加法, 当载荷  $q$  与  $P$  同时作用时, 截面  $C$  的挠度即梁的最大挠度为

$$f = f_q + f_P = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{Pl^3}{48EI} \quad (\downarrow)$$

**例 9** 图 6-13(a) 所示外伸梁, 外伸段承受均布载荷  $q$  作用, 试用叠加法计算梁端的挠度。设抗弯刚度  $EI$  为常值。

**解** 该梁可看作是由简支梁  $AB$  与固定在横截面  $B$  的悬臂梁  $BC$  所组成。当悬臂梁  $BC$  变形时, 截面  $C$  垂直下移(图 6-13, b); 当简支梁  $AB$  变形时, 截面  $B$  转动, 从而使截面  $C$  也垂直下移(图 6-13, c)。设前一位移为  $y_1$ , 后一位移为  $y_2$ , 则截面  $C$  的挠度为

$$y_C = y_1 + y_2 \quad (\text{a})$$

在均布载荷  $q$  作用下(图 6-13, b), 悬臂梁  $BC$  的端点挠度为

$$y_1 = \frac{qa^4}{8EI} \quad (\downarrow) \quad (\text{b})$$

为了计算  $y_2$ , 将载荷  $q$  对简支梁  $AB$  的影响以作用在截面  $B$  的集中力  $qa$  与矩为  $qa^2/2$  的力偶代替(图 6-13, c), 得截面  $B$  的转角为

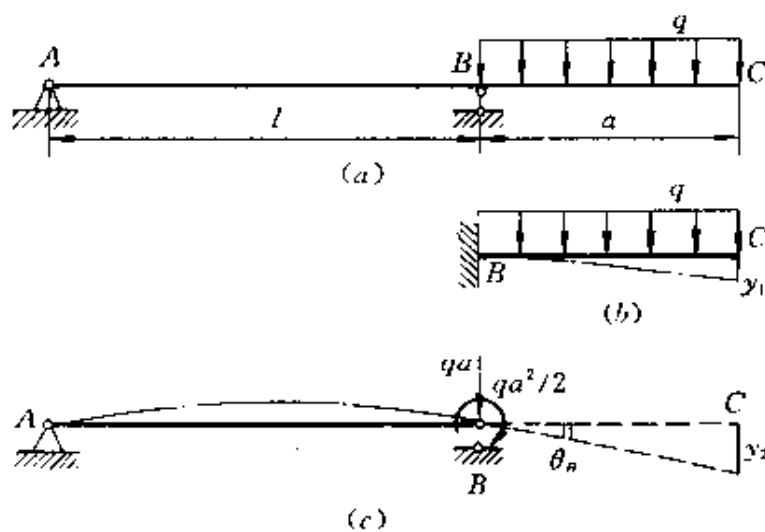


图 6-13

$$\theta_B = \frac{\frac{qa^2}{2} \cdot l}{3EI} = \frac{qa^2l}{6EI} \quad (\circlearrowleft)$$

由此得

$$y_2 = \theta_B a = \frac{qa^3l}{6EI} \quad (\downarrow) \quad (c)$$

将式(b)、(c)代入式(a), 于是得截面 C 的挠度为

$$y_C = \frac{qa^4}{8EI} + \frac{qa^3l}{6EI} = \frac{qa^3}{24EI}(3a + 4l) \quad (\downarrow)$$

**例 10** 图 6-14(a) 所示组合梁 AC, 由梁 AB 与 BC 并经铰链 B 连接而成。在梁 AB 上作用均布载荷 q, 梁 BC 上作用集中载荷 P, 且  $P = qa$ , 试求截面 B 的挠度与截面 A 的转角。梁 AB 与 BC 的抗弯刚度均为 EI。

**解** 梁 AB 与 BC 的受力分别如图 6-14(b)、(c) 所示, 显然

$$R_A = R_B = \frac{qa}{2}$$

由图 6-14(c) 可知, 悬臂梁截面 B 的挠度为

$$\begin{aligned} y_B &= y_{B,R_B} + y_{B,P} = \frac{qa}{2} \frac{a^3}{3EI} + \frac{P(\frac{a}{2})^2}{6EI} \left( 3a - \frac{a}{2} \right) \\ &= \frac{13qa^4}{48EI} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

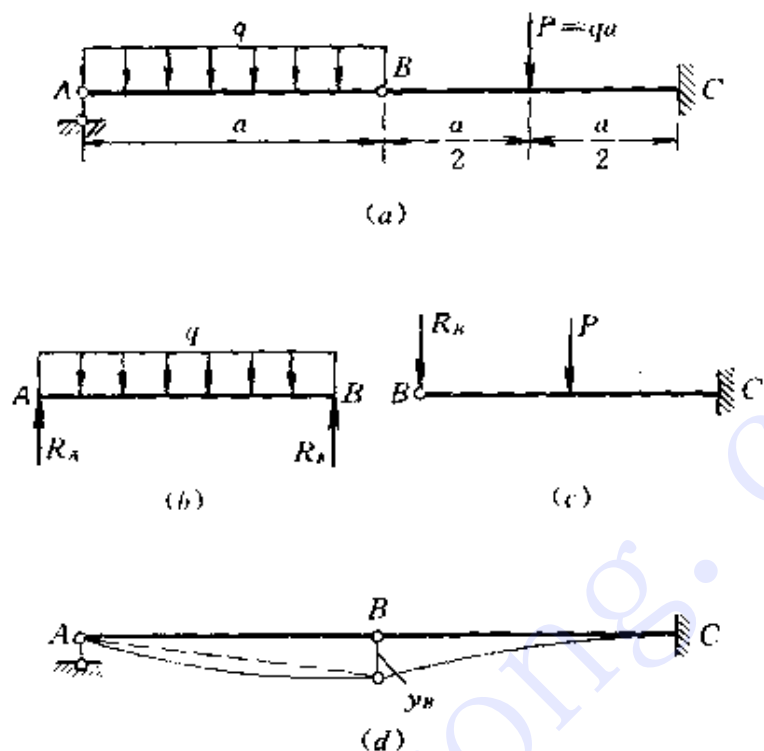


图 6-14

于是由图 6-14(d) 得截面 A 的转角为

$$\theta_A = \frac{y_B}{a} + \theta_{A,q} = \frac{13qa^3}{48EI} + \frac{qa^3}{24EI} = \frac{5qa^3}{16EI} \quad (\circ)$$

**例 II** 图 6-15(a) 所示矩形截面梁, 自由端承受集中载荷  $P$  作用,  $P$  与对称轴  $y$  的夹角为  $\theta = 30^\circ$ , 试计算自由端形心  $C$  的位移。

**解** 首先将载荷  $P$  沿  $y, z$  轴分解, 得相应分力分别为

$$P_y = P \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}P}{2}$$

$$P_z = P \sin 30^\circ = \frac{P}{2}$$

当  $P_y$  与  $P_z$  单独作用时, 形心  $C$  沿  $y, z$  轴方向的挠度分别为

$$f_y = \frac{P_y l^3}{3EI_z} = \frac{\sqrt{3}Pl^3}{2} \frac{12}{3E \times b \times (2b)^3} = \frac{\sqrt{3}Pl^3}{4Eb^4}$$

$$f_z = \frac{P_z l^3}{3EI_y} = \frac{Pl^3}{2} \frac{12}{3E \times 2b \times b^3} = \frac{Pl^3}{Eb^4}$$

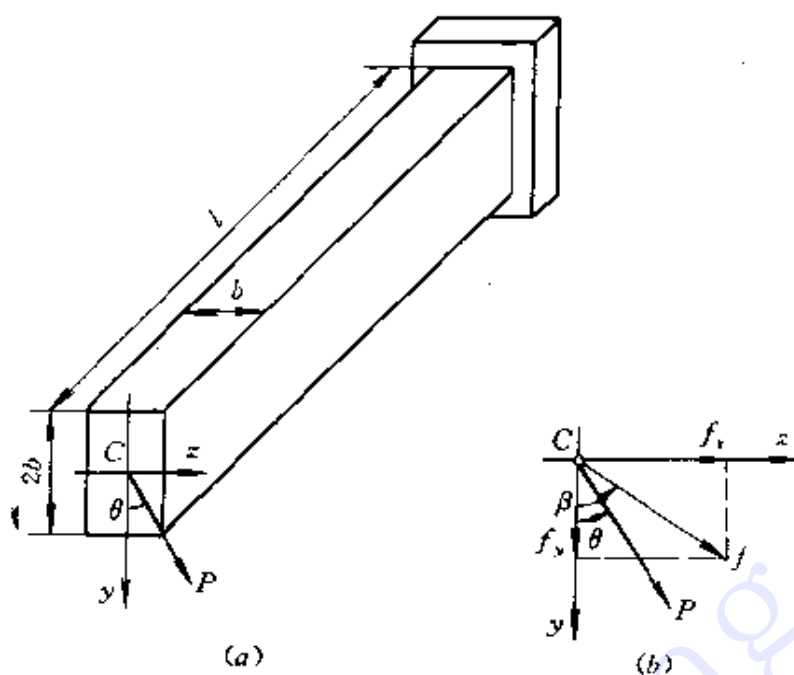


图 6-15

利用叠加法, 得 C 点的总位移(图 6-15, b) 为

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \frac{Pl^3}{Eb^4} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{19}Pl^3}{4Eb^4}$$

而其方位角则为

$$\begin{aligned} \beta &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{f_z}{f_y} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{Pl^3}{Eb^4} \frac{4Eb^4}{\sqrt{3}Pl^3} \right) \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{4}{\sqrt{3}} = 66^\circ 35' \end{aligned}$$

可见,  $\beta \neq \theta$ , 即弯曲变形不发生在外力 P 的作用面内。

## § 6-6 简单静不定梁

前面所研究的梁均为静定梁。在工程实际中, 有时为了提高梁的强度与刚度, 或由于构造上的需要, 往往给静定梁再增加约束, 于是, 梁的支反力的数目超过有效平衡方程的数目, 即成为静不定梁。

在静不定梁中, 凡是多于维持平衡所必须的约束称为**多余约**

束, 与其相应的支反力或支反力矩统称为**多余支反力**。显然, 静不定梁的静不定度即等于多余约束或多余支反力的数目。例如, 图 6-16(a)、(b) 所示梁即分别为一度与两度静不定。

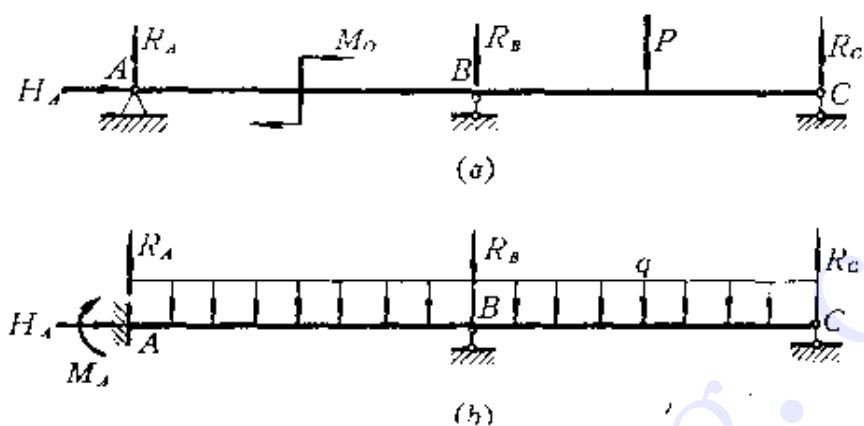


图 6-16

为了求解静不定梁, 除应建立平衡方程外, 还应利用变形协调条件和力与位移间的物理关系, 以建立变形补充方程。现在即以图 6-17(a) 所示梁为例, 说明分析静不定梁的基本方法。

该梁具有一个多余约束, 即具有一个多余支反力。如果选择支

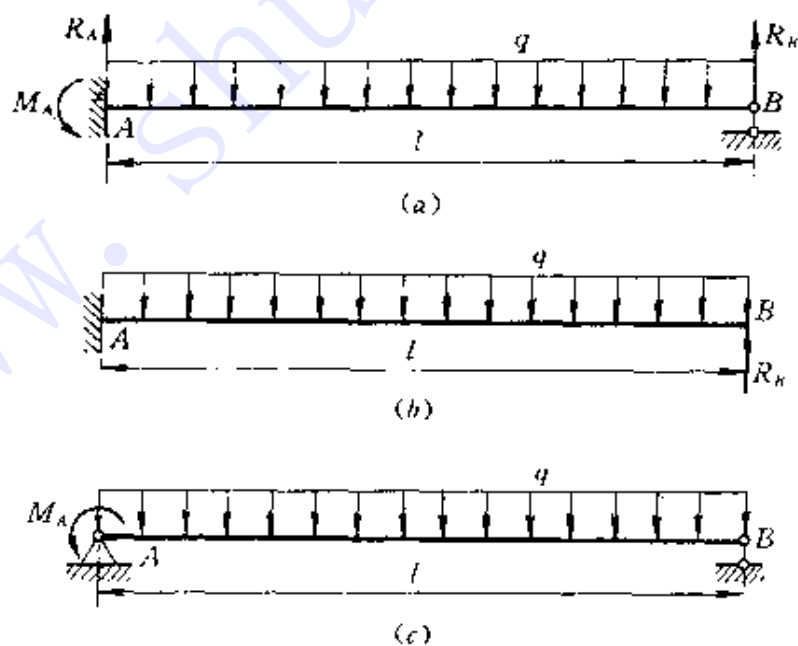


图 6-17

座  $B$  为多余约束, 则相应的多余支反力为  $R_B$ 。

为了揭示多余支反力  $R_B$  的作用, 可假想地将支座  $B$  解除, 而以支反力  $R_B$  代替, 于是得一承受均布载荷  $q$  与未知支反力  $R_B$  的静定悬臂梁(图 6-17,  $b$ )。解除多余约束后, 受力与原静不定梁相同的静定梁, 称为原静不定梁的**相当系统**。

相当系统在载荷  $q$  与多余支反力  $R_B$  作用下发生变形, 为了使其变形与原静不定梁相同, 在多余约束处的位移, 必须符合原静不定梁在该处的约束条件, 即应满足变形协调条件, 在本例中, 即要求

$$y_B = 0 \quad (a)$$

由叠加法或积分法可知, 相当系统截面  $B$  的挠度为

$$y_B = \frac{R_B l^3}{3EI} - \frac{ql^4}{8EI}$$

将上述物理关系代入式(a), 得变形补充方程为

$$\frac{R_B l^3}{3EI} - \frac{ql^4}{8EI} = 0$$

由此得

$$R_B = \frac{3ql}{8}$$

所得结果为正, 说明所设支反力  $R_B$  的方向是正确的。

多余支反力确定后, 由平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad M_A + R_B l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - ql = 0$$

得固定端的支反力与支反力矩分别为

$$R_A = \frac{5ql}{8}$$

$$M_A = \frac{ql^2}{8}$$

应该指出, 只要不是维持梁平衡所必须的约束均可作为多余约束。因此, 对于图 6-17(a) 所示静不定梁, 也可将固定端处限制

截面  $A$  转动的约束作为多余约束。于是, 如果将该约束解除, 并以支反力矩  $M_A$  代替其作用, 则原静不定梁的相当系统如图 6-17(c) 所示, 而相应的变形协调条件为

$$\theta_A = 0$$

由此求得的支反力与支反力矩与上述解答完全相同。

以上分析表明, 求解静不定梁的关键在于确定多余支反力, 其方法和步骤可概述如下:

- (1) 根据支反力与有效平衡方程的数目, 判断梁的静不定度;
- (2) 解除多余约束, 并以相应多余支反力代替其作用, 得原静不定梁的相当系统;
- (3) 计算相当系统在多余约束处的位移, 并根据相应的变形协调条件建立补充方程, 由此即可求出多余支反力。

多余支反力确定后, 作用在相当系统上的所有外力均为已知, 由此即可通过相当系统计算原静不定梁的内力、应力与位移等。

**例 12** 图 6-18(a) 所示圆形截面梁, 承受集中载荷  $P$  作用, 试校核梁的强度。已知:  $P = 20\text{kN}$ ;  $a = 500\text{mm}$ ;  $d = 60\text{mm}$ ;  $[\sigma] = 100\text{MPa}$ 。

**解** 该梁为一度静不定, 如果以支座  $B$  为多余约束,  $R_B$  为多余支反力, 则相当系统如图 6-18(b) 所示, 而变形协调条件为

$$y_B = 0$$

或

$$y_{B,P} + y_{B,R_B} = 0 \quad (\text{a})$$

式中,  $y_{B,P}$  与  $y_{B,R_B}$  分别代表载荷  $P$  与多余支反力  $R_B$  单独作用时截面  $B$  的挠度。

从梁变形表中查得:

$$\begin{aligned} y_{B,P} &= \frac{P \cdot \frac{a}{2} \cdot a}{6 \cdot 2a \cdot EI} [a^2 - (2a)^2 + (\frac{a}{2})^2] \\ &= -\frac{11Pa^3}{96EI} \quad (\downarrow) \end{aligned} \quad (\text{b})$$



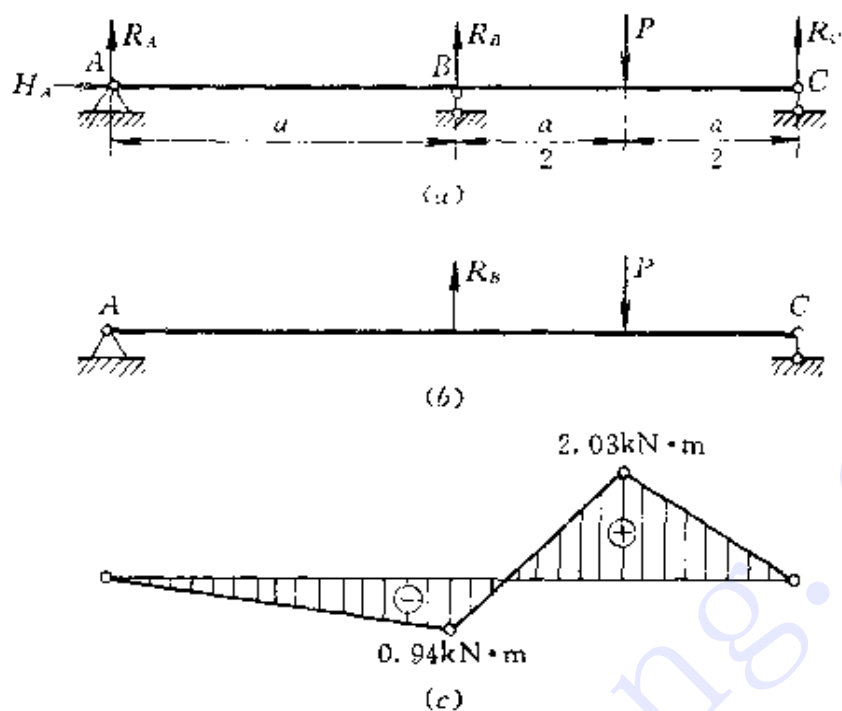


图 6-18

$$y_{B, R_B} = \frac{R_B(2a)^3}{48EI} = \frac{R_B a^3}{6EI} \quad (\uparrow) \quad (c)$$

将式(b)、(c)代入式(a),得变形补充方程为

$$-\frac{11Pa^3}{96EI} + \frac{R_B a^3}{6EI} = 0$$

由此得

$$R_B = \frac{11P}{16} = \frac{11 \times 20}{16} = 13.75 \text{ kN}$$

多余支反力 \$R\_B\$ 确定后,根据平衡方程求出铰支座 A、B 的支反力,并作弯矩图如图 6-18(c) 所示,可见,梁的最大弯矩为

$$M_{\max} = 2.03 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

由此得梁的最大弯曲正应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{32M_{\max}}{\pi d^3} = \frac{32 \times 2.03 \times 10^3 \times 10^3}{3.14 \times 60^3} \\ &= 95.7 \text{ MPa} < [\sigma] \end{aligned}$$

上述计算表明,梁的强度符合要求。

**例 13** 图 6-19(a) 所示两端固定梁,承受集中载荷 \$P\$ 作用,试

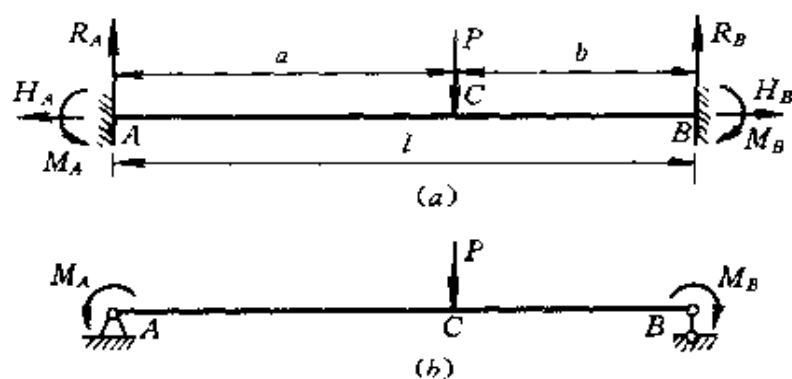


图 6-19

计算梁的支反力。设抗弯刚度  $EI$  为常值。

解 该梁共有六个支反力, 而有效平衡方程仅三个, 故为三度静不定。但是, 在小变形的条件下, 横截面形心沿梁轴方向的位移极小, 因而梁两端的水平反力  $H_A$  与  $H_B$  也极小, 一般均可忽略不计。于是, 剩下四个支反力、两个平衡方程, 建立两个补充方程即可求解。

如果以固定端  $A$ 、 $B$  处限制梁截面转动的约束为多余约束, 并以多余支反力矩  $M_A$ 、 $M_B$  代替其作用, 则相当系统如图 6-19(b) 所示, 而相应的变形协调条件为

$$\theta_A = 0 \quad (a)$$

$$\theta_B = 0 \quad (b)$$

根据叠加法可知:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \theta_{A,P} + \theta_{A,M_A} + \theta_{A,M_B} \\ &= -\frac{Pab(l+b)}{6EI} + \frac{M_A l}{3EI} + \frac{M_B l}{6EI} \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \theta_B &= \theta_{B,P} + \theta_{B,M_A} + \theta_{B,M_B} \\ &= \frac{Pab(l+a)}{6EI} - \frac{M_A l}{6EI} - \frac{M_B l}{3EI} \end{aligned} \quad (d)$$

将式(c)、(d) 分别代入式(a)、(b), 得变形补充方程为

$$\begin{aligned} -\frac{Pab(l+b)}{6EI} + \frac{M_A l}{3EI} + \frac{M_B l}{6EI} &= 0 \\ \frac{Pab(l+a)}{6EI} - \frac{M_A l}{6EI} - \frac{M_B l}{3EI} &= 0 \end{aligned}$$

联立求解上述方程组, 得

$$M_A = \frac{Pab^2}{l^2}$$

$$M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}$$

多余反力矩确定后, 由平衡方程求得  $A$ 、 $B$  端的垂直支反力分别为

$$R_A = \frac{Pb^2(l+2a)}{l^2}$$

$$R_B = \frac{Pa^2(l+2b)}{l^2}$$

**例 14** 一悬臂梁  $AB$ , 承受集中载荷  $P$  作用, 因其刚度不够, 用杆  $CB$  加固如图 6-20(a) 所示, 试计算梁  $AB$  的最大挠度的减少量。设梁与杆的长度均为  $l$ , 梁的抗弯刚度为  $EI$ , 杆的抗拉刚度为  $EA$ , 且  $A = 3I/l^2$ 。

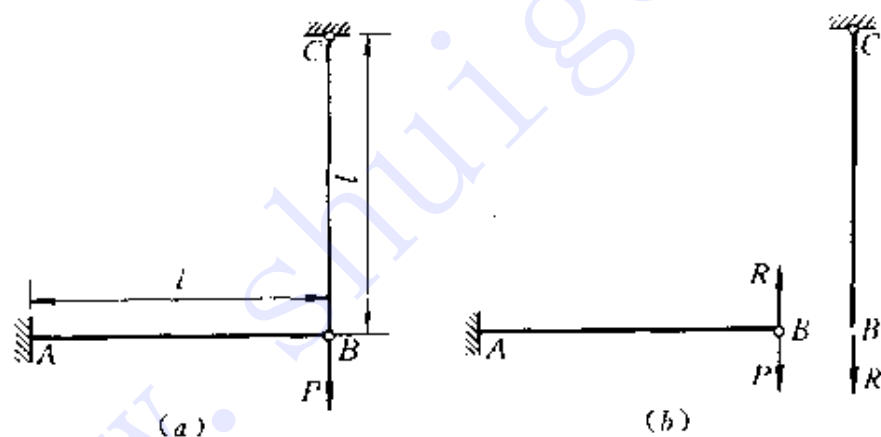


图 6-20

**解** 1. 求解多余支反力

该结构属于一度静不定, 需要建立一个补充方程才能求解。

如果选择铰链  $B$  为多余约束予以解除, 并以相应多余力  $R$  代替其作用, 则原结构的相当系统如图 6-20(b) 所示。

在多余力  $R$  作用下, 杆  $CB$  的横截面  $B$  垂直下移; 在载荷  $P$  与多余力  $R$  作用下, 梁  $AB$  的横截面  $B$  也应垂直下移。设前一位移为  $y_1$ , 后一位移为  $y_2$ , 则变形协调条件为

$$y_1 = y_2 \quad (a)$$

显然

$$y_1 = \Delta_{CB} = \frac{Rl}{EA} = \frac{Rl^3}{3EI} \quad (b)$$

$$y_2 = \frac{(P-R)l^3}{3EI} \quad (c)$$

将式(b)、(c)代入式(a),得补充方程为

$$\frac{Rl^3}{3EI} = \frac{(P-R)l^3}{3EI}$$

由此得多余力为

$$R = \frac{P}{2}$$

## 2. 刚度比较

在未加固时,梁 AB 的端点挠度即最大挠度为

$$f = \frac{Pl^3}{3EI}$$

加固后,该截面的挠度变为

$$f' = \frac{(P-R)l^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{6EI} = \frac{f}{2}$$

即仅为前者的 50%。由此可见,经加固后,梁 AB 的最大挠度显著减小。

## § 6-7 提高弯曲刚度的主要措施

如前所述,对于许多梁来说,为了正常工作,不仅应具备足够的强度,而且应具备必要的刚度。现在研究提高弯曲刚度的措施。

由挠曲轴近似微分方程及其积分中可以看出,梁的弯曲变形与梁的受力、支持条件及截面的抗弯刚度  $EI$  有关。所以,以前所述提高弯曲强度的某些措施,例如合理安排梁的约束、改善梁的受力情况等,对于提高梁的刚度仍然是有效的。但是也应看到,提高梁的刚度与提高梁的强度,是属于两种不同性质的问题,因此,解决的办法也不尽相同。

### 1. 截面形状的选择

影响梁强度的截面几何性质是抗弯截面模量  $W$ , 而影响梁刚度的截面几何性质则是惯性矩  $I$ , 所以, 从提高梁的刚度方面考虑, 合理的截面形状, 是用较小的截面面积获得较大惯性矩的截面。

### 2. 材料的选择

影响梁强度的材料性能是极限应力  $\sigma$ , 而影响梁刚度的材料性能则是弹性模量  $E$ , 所以, 从提高梁的刚度方面考虑, 应从弹性模量的高低来确定材料的选择。

### 3. 截面加强问题

梁的最大弯曲正应力取决于危险截面的  $M/W$ , 而梁的位移则与梁内所有微段的变形均有关。所以, 对梁的危险区采用局部加强的措施, 虽可提高梁的强度, 但为了提高梁的刚度, 则必须在更大范围内增加梁的抗弯刚度  $EI$ 。

### 4. 梁跨度的选取

为了提高梁的刚度, 一个值得特别注意的情况是关于梁跨度的选取问题。

由例 1 与例 3 可以看出, 在集中力作用下, 梁的最大挠度与梁跨度  $l$  的三次方成正比。但是, 最大弯曲正应力则只与跨度  $l$  成正比。这表明, 梁跨度的微小改变, 将引起弯曲变形的显著改变。例如, 将跨度缩短 20%, 最大挠度将相应减少 48.8%。所以, 如果条件允许, 尽量减小梁的跨度将显著提高其刚度。

### 5. 静不定梁的采用

除上述措施外, 增加梁的约束即作成静不定梁, 对于提高梁的刚度也是非常有效的(见例 14)。

## 复 习 题

1. 何谓挠曲轴?何谓挠度?何谓转角?挠度与转角之间有何关

系?该关系成立的条件是什么?

2. 挠曲轴近似微分方程是如何建立的?该方程的应用条件是什么?关于坐标轴  $x, y$  有何规定?

3. 如何利用积分法计算梁位移?如何利用梁位移边界条件与连续条件确定积分常数?如何根据挠度与转角的正负判断位移的方向?如何求最大挠度?

4. 如何根据弯矩沿梁轴的变化以及梁的支持条件画出挠曲轴的大致形状?如何判断挠曲轴的凹、凸与拐点的位置?

5. 何谓麦考利函数?如何利用麦考利函数建立梁弯矩的通用方程与挠曲轴的通用微分方程?如何利用麦考利法计算梁位移?

6. 何谓叠加法?叠加法成立的条件是什么?如何利用叠加法分析梁的位移?

7. 何谓多余约束与多余支反力?何谓相当系统?如何求解静不定梁?

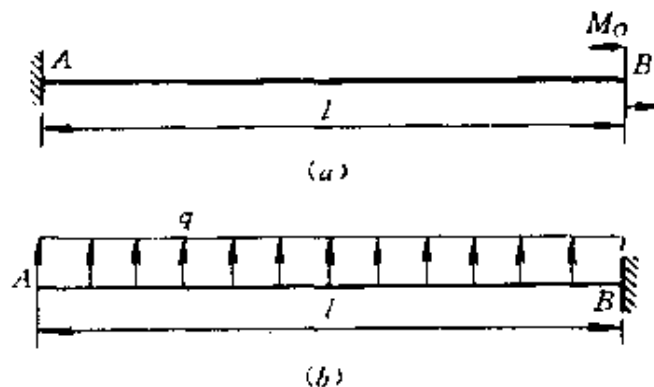
8. 试述提高弯曲刚度的主要措施。

## 习 题

题 6.1 图示各梁, 抗弯刚度  $EI$  均为常数。

(1) 试根据梁的弯矩图与支持条件画出挠曲轴的大致形状;

(2) 利用积分法计算梁的最大挠度与最大转角。



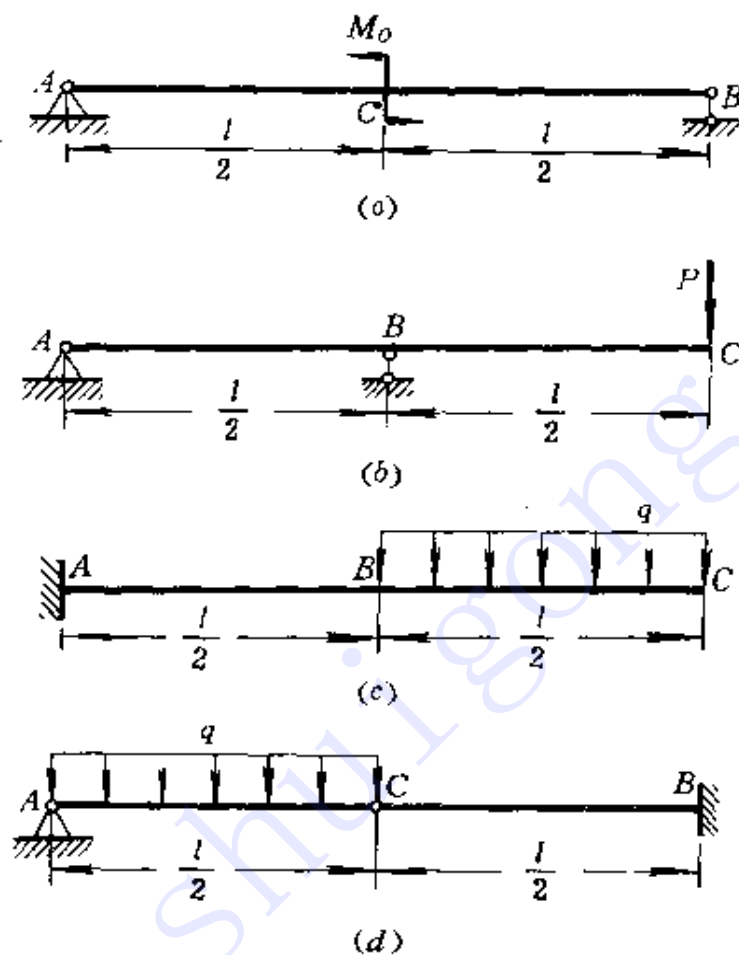
题 6.1 图



题 6.2 图示各梁, 抗弯刚度  $EI$  均为常数。

(1) 试写出计算梁位移的边界条件与连续条件;

(2) 根据梁的弯矩图与支持条件画出挠曲轴的大致形状。



题 6.2 图

题 6.3 试用积分法计算题 6.2 各梁截面  $A$  的转角与截面  $C$  的挠度。

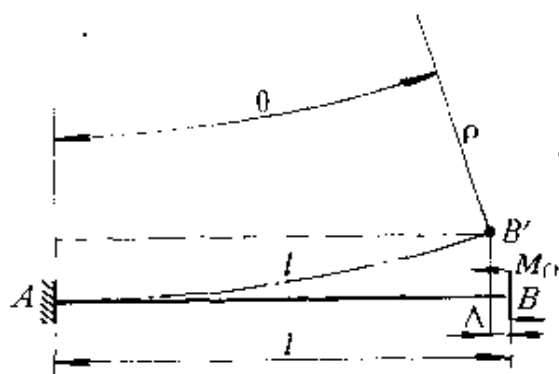
题 6.4 试用积分法计算题 6.2(a)、(b) 所示梁的最大挠度。

题 6.5 图示悬臂梁, 承受弯矩为  $M_0$  的集中力偶作用, 试计算梁端截面形心  $B$  的轴向位移  $\Delta$ , 并与其横向位移比较。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

解 1. 轴向位移分析

梁内各横截面的弯矩均等于  $M_0$ , 故挠曲轴上各点的曲率半





题 6.5 图

径均相同, 轴线  $AB$  变为圆弧  $AB'$ 。设挠曲轴的半径为  $\rho$ , 则弧线  $\widehat{AB'}$  所对应的圆心角为

$$\theta = \frac{l}{\rho} = \frac{M_0 l}{EI} \quad (\text{a})$$

可以看出, 形心  $B$  的水平位移为

$$\Delta = l - \rho \sin \theta = l - \frac{l}{\theta} \sin \theta$$

又由于

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}$$

因此,

$$\Delta = \frac{l\theta^2}{6} \quad (\text{b})$$

将式(a)代入式(b), 于是得

$$\Delta = \frac{M_0^2 l^3}{6E^2 I^2} \quad (\text{c})$$

## 2. 轴向位移与横向位移比较

由梁变形表(见附录二)可知, 截面  $B$  的挠度为

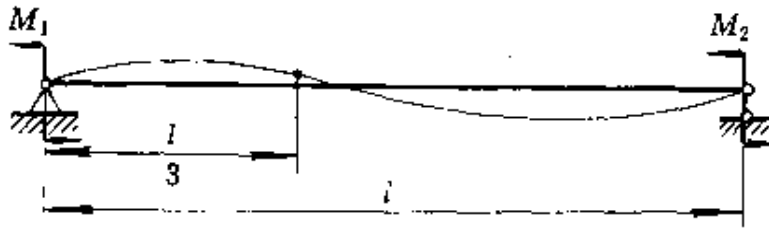
$$f = \frac{M_0 l^2}{2EI} \quad (\text{d})$$

于是由式(c)、(d)得

$$\Delta = \frac{2f^2}{3l}$$

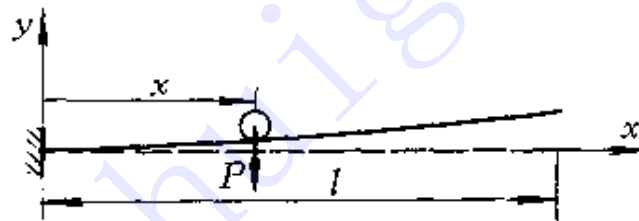
可见,与挠度  $f$  相比,轴向位移  $\Delta$  为一高阶小量。因此,在小变形的条件下,截面形心的轴向位移通常均可忽略不计。

题 6.6 图示简支梁,左、右端各作用一个力偶矩分别为  $M_1$  与  $M_2$  的力偶,如欲使挠曲轴的拐点位于离左端  $l/3$  处,则  $M_1$  与  $M_2$  应保持何种关系。



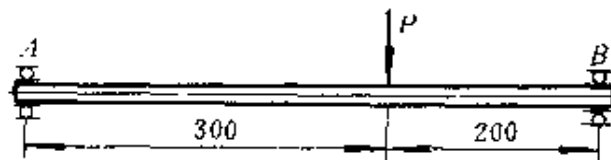
题 6.6 图

题 6.7 在图示悬臂梁上,载荷  $P$  可沿梁轴移动。如欲使载荷在移动时始终保持相同的高度,则此梁应预弯成何种形状?设抗弯刚度  $EI$  为常数。



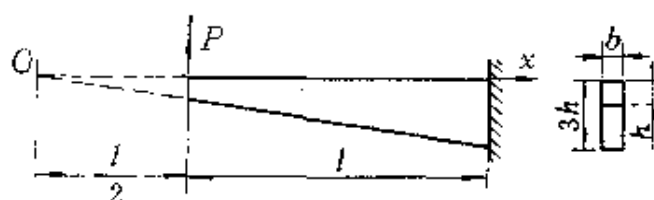
题 6.7 图

题 6.8 图示圆截面轴,两端用轴承支持,承受载荷  $P = 10\text{kN}$  作用。若轴承处的许用转角  $[\theta] = 0.05\text{rad}$ ,材料的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ ,试根据刚度要求确定轴径  $d$ 。



题 6.8 图

题 6.9 图示变截面梁,自由端承受集中载荷  $P$  作用,梁的尺



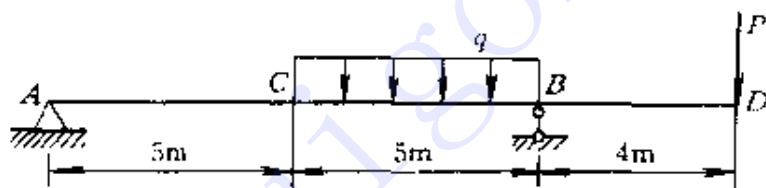
题 6.9 图

寸  $l$ 、 $b$ 、 $h$  与弹性模量  $E$  均为已知, 试计算横截面  $A$  的挠度。

题 6.10 试用麦考利法建立题 4-4(a)、(c) 所示梁的弯矩通用方程。

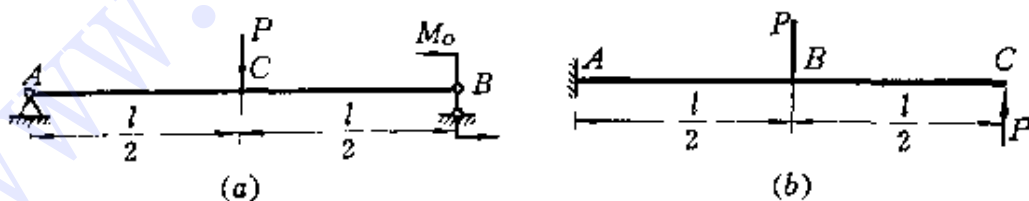
题 6.11 题 6.2(a)、(b)、(c) 所述梁, 试用麦考利法求截面  $A$  的转角与截面  $C$  的挠度。

题 6.12 图示外伸梁, 承受均布载荷  $q = 12\text{N/mm}$  与集中载荷  $P = 15\text{kN}$  作用, 试用麦考利法计算截面  $C$ 、 $D$  的挠度。材料的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 截面的惯性矩  $I_c = 118 \times 10^6\text{mm}^4$ 。



题 6.12 图

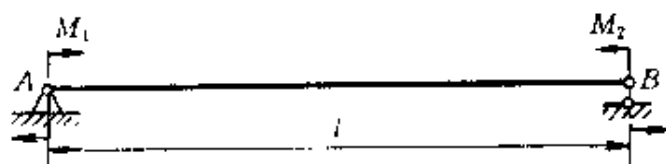
题 6.13 图示各梁, 抗弯刚度  $EI$  均为常数, 试用叠加法计算截面  $B$  转角  $\theta_B$  与截面  $C$  的挠度  $y_C$ 。



题 6.13 图

题 6.14 图示简支梁, 左、右端各作用一个力矩分别为  $M_1$  与  $M_2$  的力偶, 试用叠加法建立梁的挠曲轴方程。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

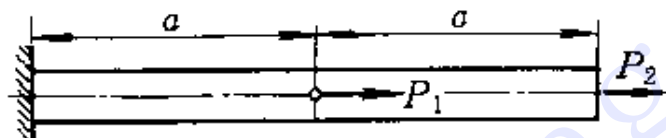
题 6.15 题 6.14 所示梁, 若跨度  $l = 5\text{m}$ , 力偶矩  $M_1 =$



题 6.14 图

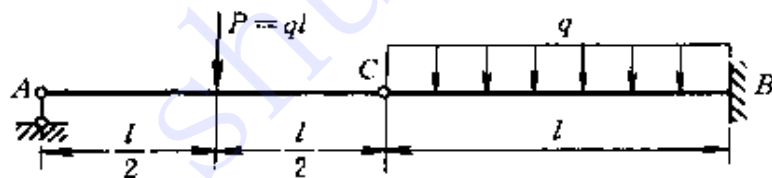
$5\text{kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_2 = 10\text{kN}\cdot\text{m}$ , 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 许用挠度  $[f] = l/500$ , 试选择工字钢型号。

题 6.16 图示等截面杆, 承受轴向载荷  $P_1$ 、 $P_2$  作用, 且  $P_1 = P_2 = P$ , 试用叠加法计算杆的总伸长, 抗拉(压)刚度  $EA$  为常数。



题 6.16 图

题 6.17 图示组合梁, 由梁  $AC$  与  $CB$  并经铰链  $C$  连接而成。在梁  $CB$  上作用有均布载荷  $q$ , 在梁  $AC$  上作用集中载荷  $P$ , 且  $P = ql$ , 试求截面  $C$  的挠度与截面  $A$  的转角。梁  $AB$  与  $BC$  的抗弯刚度均为  $EI$ 。



题 6.17 图

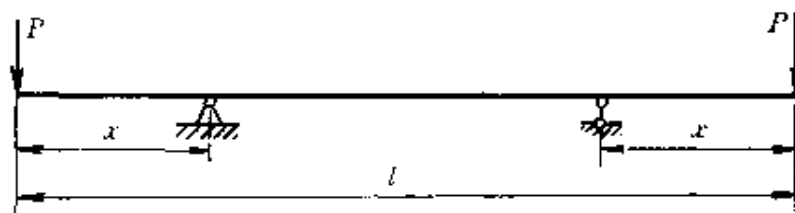
题 6.18 图示外伸梁, 两端承受载荷  $P$  作用, 抗弯刚度  $EI$  为常数。试问:

(1) 当  $x/l$  为何值时, 梁跨度中点的挠度与自由端的挠度数值相等;

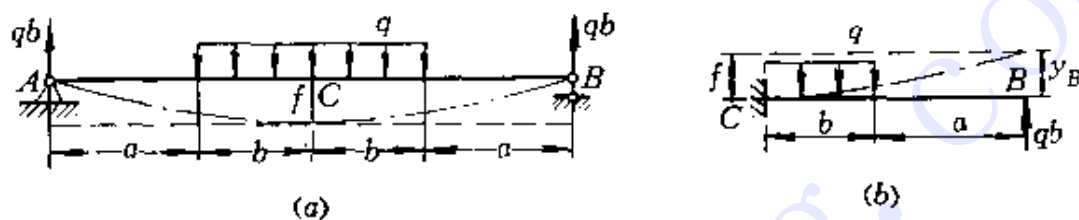
(2) 当  $x/l$  为何值时, 梁跨度中点的挠度最大。

\* 题 6.19 图(a)所示简支梁, 中段受均布载荷  $q$  作用, 试用叠加法计算梁跨度中点横截面  $C$  的挠度  $f_c$ 。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

提示: 由于梁的受力与支持条件均对称于截面  $C$ , 梁的挠曲轴



题 6.18 图



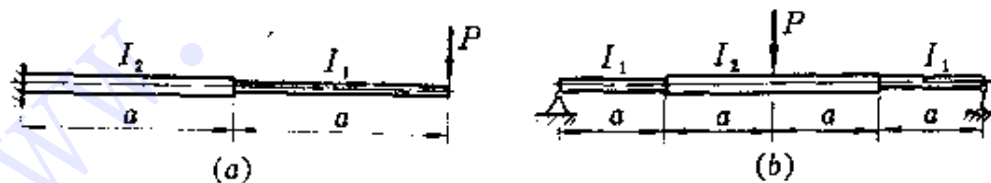
题 6.19 图

也对称于该截面, 其右半段的变形与图 (b) 所示悬臂梁的变形相同。所以, 当求得该悬臂梁截面  $B$  的挠度  $y_B$  后, 图 (a) 所示梁截面  $C$  的挠度  $f$  亦随之确定, 因二者数值相同, 即

$$f = y_B$$

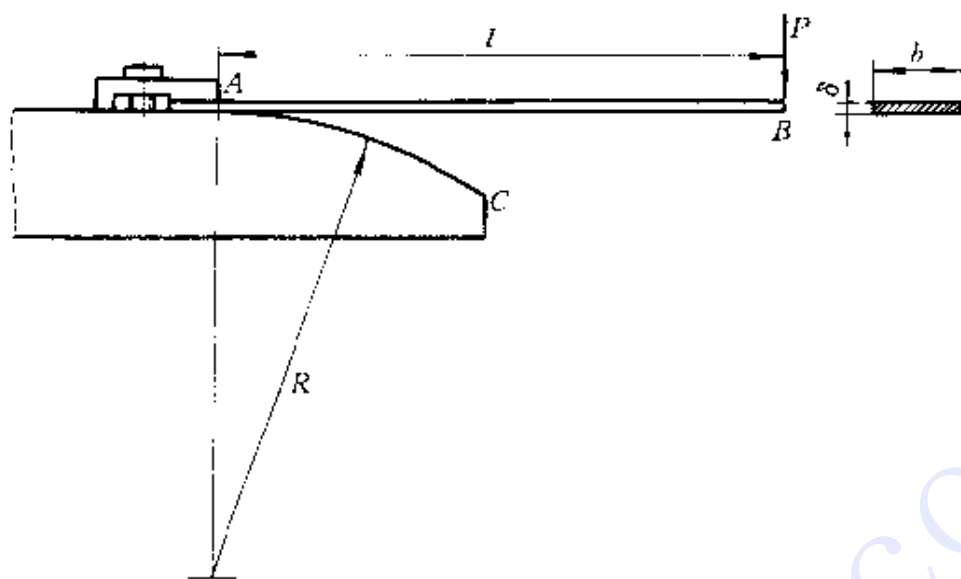
显然,  $y_B$  可利用叠加法进行计算。

题 6.20 试用叠加法计算图示各阶梯形梁的最大挠度。设  $I_2 = 2I_1$ 。



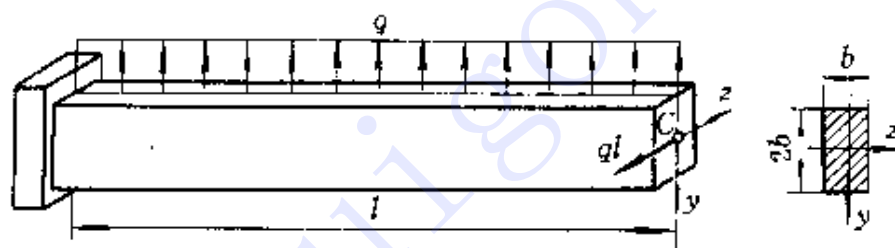
题 6.20 图

题 6.21 如图所示, 梁左端  $A$  固定在具有圆弧形表面的刚性平台上, 自由端  $B$  承受载荷  $P$  作用, 试计算截面  $B$  的挠度及梁内的最大弯曲正应力。平台圆弧表面的曲率半径  $R$ 、梁的尺寸  $l$ 、 $b$ 、 $\delta$  以及材料的弹性模量  $E$  均为已知。



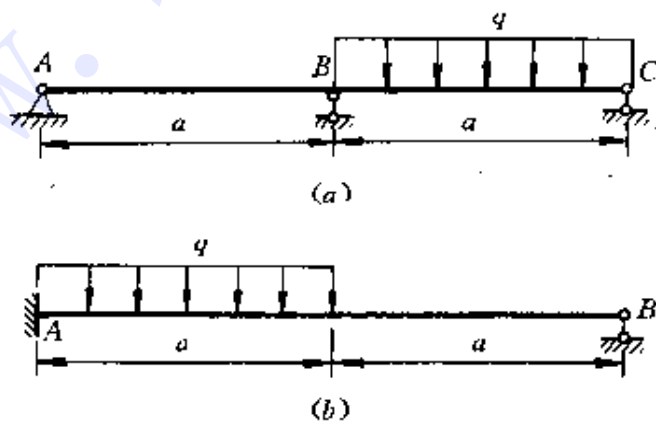
题 6.21 图

题 6.22 图示悬臂梁, 承受均布载荷  $q$  与集中载荷  $ql$  作用, 试计算梁端的挠度及其方向, 材料的弹性模量  $E$  为已知。



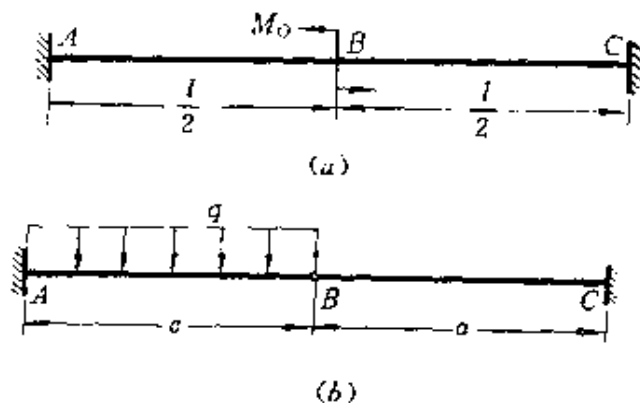
题 6.22 图

题 6.23 试求图示各梁的支反力, 并画剪力与弯矩图。设抗弯刚度  $EI$  为常数。



题 6.23 图

题 6.24 试求图示各梁的支反力。设抗弯刚度  $EI$  为常数。



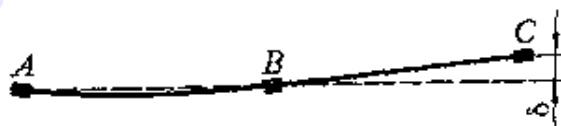
题 6.24 图

题 6.25 图示传动轴, 已知  $P_1 = 3\text{kN}$ ,  $P_2 = 10\text{kN}$ ,  $d = 50\text{mm}$ 。试计算轴内的最大弯曲正应力。若横截面  $B$  处无轴承, 则最大弯曲正应力又为何值。



题 6.25 图

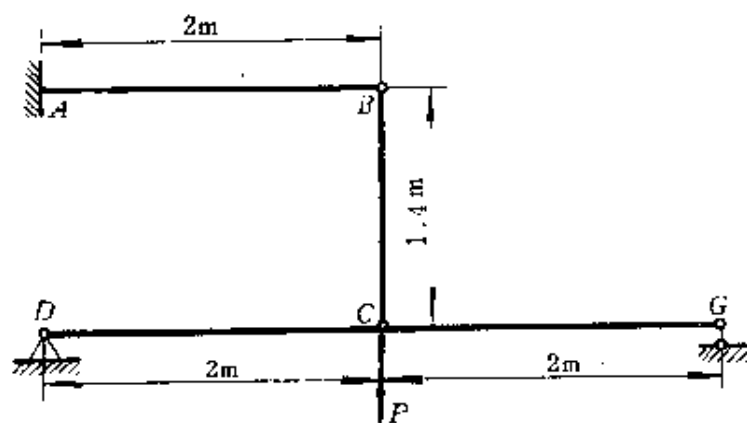
题 6.26 题 6.25 所示传动轴, 由于加工误差, 轴承  $C$  的位置偏离轴线  $\delta = 0.25\text{mm}$ , 试计算安装后轴内的最大弯曲正应力。已知轴的弹性模数  $E = 200\text{GPa}$ 。



题 6.26 图

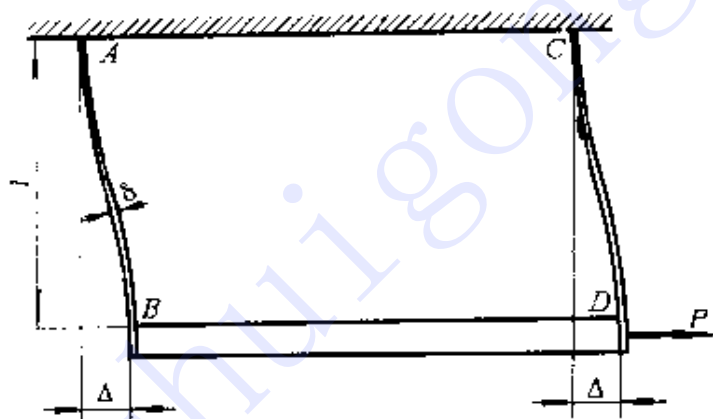
题 6.27 图示结构, 悬臂梁  $AB$  与简支梁  $DG$  均用  $\text{No}18$  工字钢制成,  $BC$  为圆截面钢杆, 直径  $d = 20\text{mm}$ , 梁与杆的弹性模量均为  $E = 200\text{GPa}$ 。若载荷  $P = 30\text{kN}$ , 试计算梁与杆内的最大正应力, 以及横截面  $C$  的垂直位移。





题 6.27 图

\* 题 6.28 图示结构,  $AB$  与  $DC$  为铜片, 其厚度  $\delta$ 、宽度  $b$ 、长度  $l$  及弹性模数  $E$  均为已知,  $BD$  杆的刚度很大, 可视为刚体。试建立水平位移  $\Delta$  与载荷  $P$  间的关系。轴力对铜片变形的影响忽略不计。



题 6.28 图

## 第七章 应力状态分析与强度理论

### § 7-1 引言

前面研究了杆件在轴向拉伸(压缩)、扭转与弯曲时的强度问题。这些杆件的危险点或处于单向受力状态(图 7-1, *a*), 或处于纯剪切状态(图 7-1, *b*), 相应的强度条件分别为

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}$$
$$\tau_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\tau^0}{n}$$

式中,  $\sigma^0$  与  $\tau^0$  分别代表材料在单向受力与纯剪切时的极限应力, 并由实验确定。

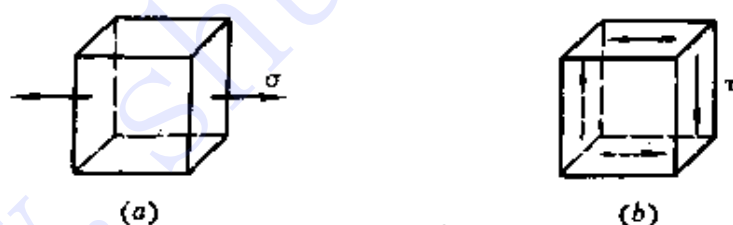


图 7-1

然而, 在工程实际中, 许多构件处于更复杂的受力状态。例如, 螺旋桨轴既受拉、又受扭(图 7-2, *a*), 如在轴表层用纵、横截面切取微体, 其应力情况如图 7-2(*b*) 所示。又如, 充压气瓶与气缸, 均为受内压的圆筒(图 7-3, *a*)。在内压作用下, 筒壁纵、横截面同时受拉, 微体 *abcd* 的应力情况如图 7-3(*b*) 所示。再如, 在导轨与滚轮的接触处(图 7-4, *a*), 导轨表层的微体 *A* 除在垂直方向直接受压外(图 7-4, *b*), 由于该微体的横向膨胀受到周围材料的约束, 其四侧

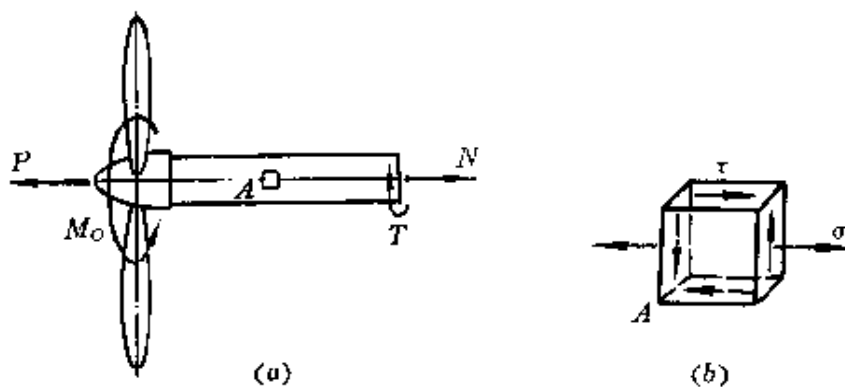


图 7-2

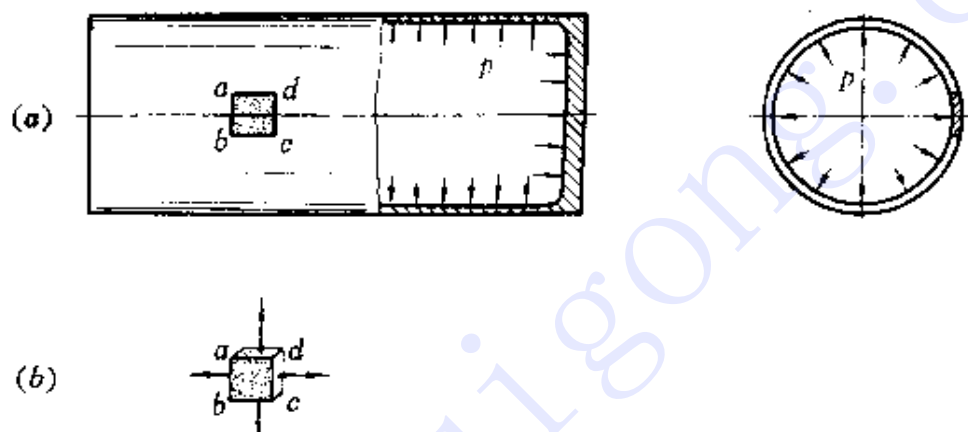


图 7-3

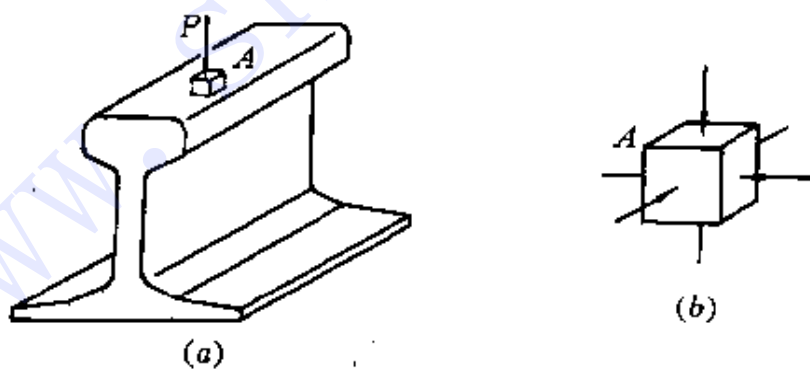


图 7-4

亦受压,即微体  $A$  处于三向受压状态,等等。

显然,要解决上述构件的强度问题,除应全面研究危险点处各截面的应力外(例如求出最大正应力与最大剪应力),还应研究材料在复杂应力作用下的破坏规律。

在构件内部,通过一点所作各微截面的应力状况,称为该点处的**应力状态**。本章研究有关应力状态的理论,以及材料在复杂应力作用下的破坏规律即所谓**强度理论**。

## § 7-2 平面应力状态应力分析

图 7-1(b)、7-2(b) 与图 7-3(b) 所示应力状态,有一共同特点,即在微体的六个侧面中,仅在四个侧面上作用有应力,且其作用线均平行于同一平面。这种应力状态称为**平面应力状态**,它是一种常见的应力状态。

平面应力状态的一般形式如图 7-5 所示。在垂直于  $x$  轴的截面

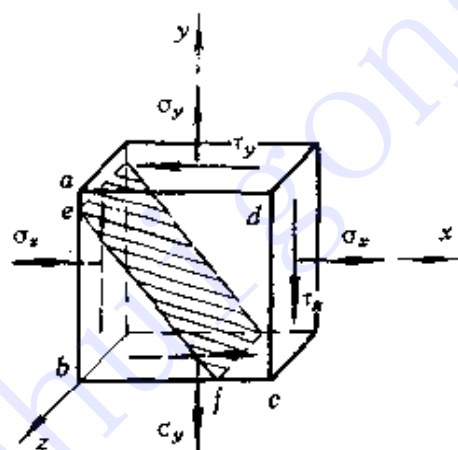


图 7-5

即所谓  $x$  面上,作用有应力  $\sigma_x, \tau_x$ , 在垂直于  $y$  轴的截面即所谓  $y$  面上,作用有应力  $\sigma_y, \tau_y$ 。若  $\sigma_x, \tau_x, \sigma_y$  与  $\tau_y$  均为已知,现在研究与  $z$  轴平行的任一斜截面  $ef$  上的应力。如图 7-6(a) 所示,斜截面的方位以其外法线  $n$  与  $x$  轴的夹角  $\alpha$  表示,该截面上的应力用  $\sigma_n, \tau_n$  表示。

首先,利用截面法,沿截面  $ef$  将微体切开,并选左边部分  $ebf$  为研究对象。设截面  $ef$  的面积为  $dA$ , 则截面  $eb$  与  $bf$  的面积分别为  $dA \cos \alpha$  与  $dA \sin \alpha$ , 微体  $ebf$  的受力如图 7-6(b) 所示,该部分沿斜截面法向与切向的平衡方程分别为

$$\sum N = 0, \sigma_n dA + (\tau_x dA \cos \alpha) \sin \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha$$

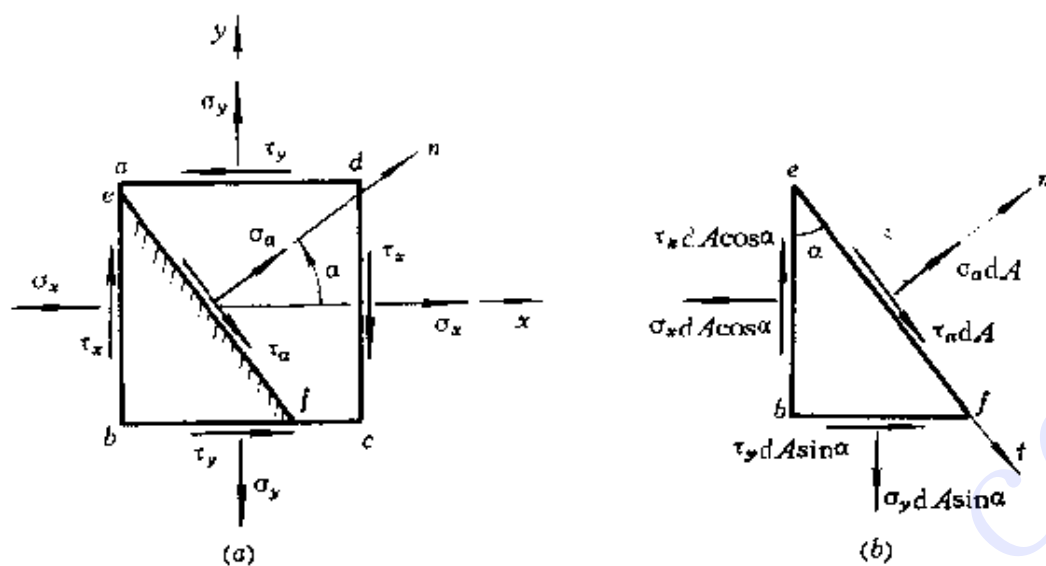


图 7-6

$$+ (\tau_y dA \sin \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0$$

$$\sum T = 0, \tau_n dA - (\tau_x dA \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha$$

$$+ (\tau_y dA \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

由此得

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - (\tau_x + \tau_y) \sin \alpha \cos \alpha \quad (a)$$

$$\tau_n = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_x \cos^2 \alpha - \tau_y \sin^2 \alpha \quad (b)$$

根据剪应力互等定理可知,  $\tau_x$  与  $\tau_y$  的数值相等; 由三角学还可  
知

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

将上述关系式代入式(a)、(b), 于是得

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \quad (7-1)$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \quad (7-2)$$

此即平面应力状态下斜截面应力的一般公式。

在应用上述公式时, 正应力以拉伸为正; 剪应力以企图使微体

沿顺时针方向旋转者为正(即与剪力  $Q$  的符号规定相同);方位角  $\alpha$  则规定为以  $x$  轴为起点、指向沿逆时针方向者为正。

例 1 已知应力状态如图 7-7 所示, 试计算截面  $m-m$  上的正应力  $\sigma_m$  与剪应力  $\tau_m$ 。

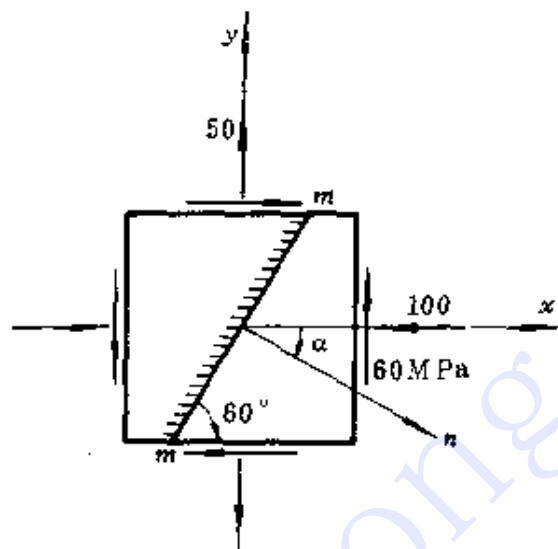


图 7-7

解 由图可知,  $x, y$  截面的应力分别为

$$\sigma_x = -100 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 50 \text{ MPa}, \quad \tau_x = -60 \text{ MPa}$$

而截面  $m-m$  的方位角则为

$$\alpha = -30^\circ$$

将上述数据代入式(7-1)与式(7-2), 得

$$\sigma_m = \frac{-100 + 50}{2} + \frac{-100 - 50}{2} \cos(-60^\circ) + 60 \sin(-60^\circ)$$

$$= -114.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = \frac{-100 - 50}{2} \sin(-60^\circ) - 60 \cos(-60^\circ)$$

$$= 35.0 \text{ MPa}$$

### § 7-3 应力圆

以上所述平面应力状态的应力分析, 也可利用图解法进行。

### 一、应力圆

由式(7-1)与式(7-2)可知,正应力 $\sigma_\alpha$ 与剪应力 $\tau_\alpha$ 均为 $\alpha$ 的函数,说明在 $\sigma_\alpha$ 与 $\tau_\alpha$ 之间存在一定函数关系,而上述二式则为其参数方程。为了建立 $\sigma_\alpha$ 与 $\tau_\alpha$ 之间的直接关系式,首先,将式(7-1)与式(7-2)分别改写成如下形式:

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha - 0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

然后,将以上二式各自平方后相加,于是得

$$\left( \sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_\alpha - 0)^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2 \quad (a)$$

可以看出,在以 $\sigma$ 为横坐标轴、 $\tau$ 为纵坐标轴的平面内,式(a)的轨迹为圆(图7-8),其圆心 $C$ 的坐标为 $\left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$ ,半径为

$$R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2}$$

而圆上任一点的纵、横坐标,则分别代表微体相应截面的剪应力与正应力,此圆称为**应力圆**或**莫尔圆**。

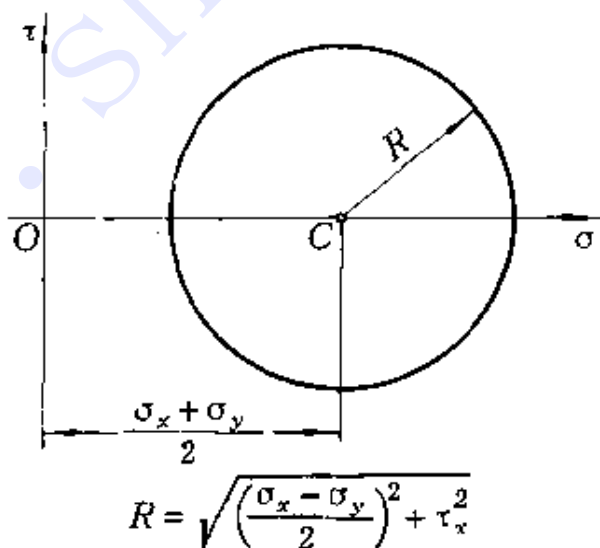


图 7-8



## 二、应力圆的绘制及应用

如图 7-9 所示, 在  $\sigma$ - $\tau$  平面内, 与  $x$  面对应的点位于  $D(\sigma_x, \tau_x)$ , 与  $y$  面对应的点位于  $E(\sigma_y, \tau_y)$ , 由于  $\tau_x$  与  $\tau_y$  的数值相等, 即  $\overline{DF} = \overline{EG}$ , 因此, 直线  $DE$  与  $\sigma$  轴的交点  $C$  的横坐标为  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ , 即  $C$  为应力圆的圆心。于是, 以  $C$  为圆心,  $CD$  或  $CE$  为半径作圆, 即得所求之应力圆。

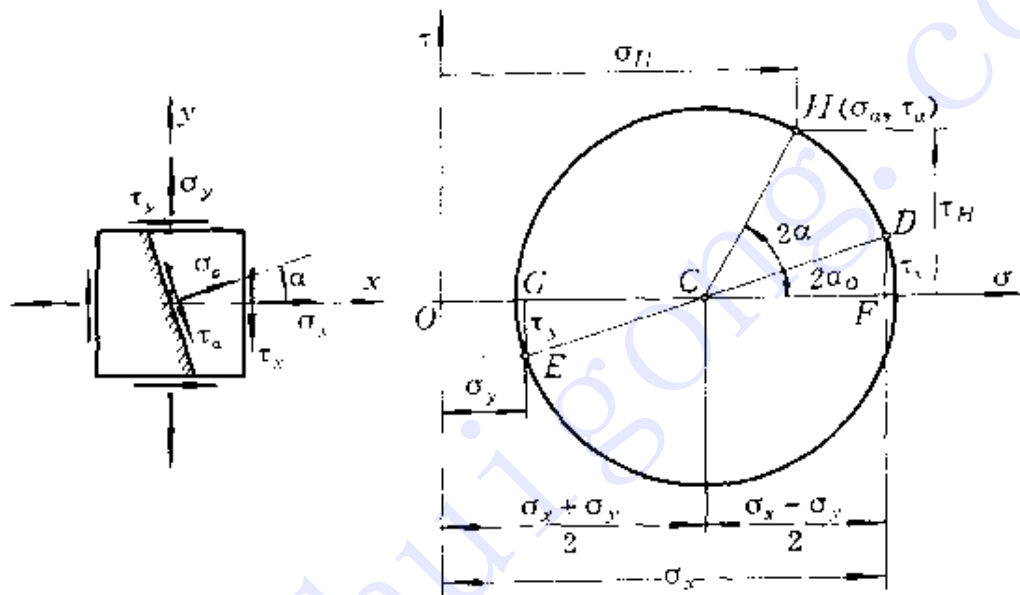


图 7-9

应力圆确定后, 如欲求  $\alpha$  截面的应力, 则只需将半径  $CD$  沿方位角  $\alpha$  的转向旋转  $2\alpha$ , 即转至  $CH$  处, 所得  $H$  点的纵、横坐标  $\tau_H, \sigma_H$  即分别代表该截面的剪应力  $\tau_\alpha$  与正应力  $\sigma_\alpha$ , 兹证明如下。

$$\begin{aligned} \sigma_H &= \overline{OC} + \overline{CH}\cos(2\alpha_0 + 2\alpha) = \overline{OC} + \overline{CD}\cos(2\alpha_0 + 2\alpha) \\ &= \overline{OC} + \overline{CD}\cos 2\alpha_0 \cos 2\alpha - \overline{CD}\sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \tau_H &= \overline{CH}\sin(2\alpha_0 + 2\alpha) = \overline{CD}\sin(2\alpha_0 + 2\alpha) \\ &= \overline{CD}\sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha + \overline{CD}\cos 2\alpha_0 \sin 2\alpha \\ &= \tau_x \cos 2\alpha + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (c)$$

将式(b)、(c) 分别与式(7-1)、式(7-2) 比较, 可见

$$\sigma_H = \sigma_a, \quad \tau_H = \tau_a$$

在利用应力圆分析应力时, 应注意应力圆上的点与微体内的截面的对应关系。如图 7-10 所示, 当微体内截面  $A$ 、 $B$  的夹角为  $\theta$  时, 应力圆上相应点  $a$ 、 $b$  所对应的圆心角则为  $2\theta$ , 且二角之转向相同。因此, 与两互垂截面相对应的点, 必位于应力圆上同一直径的两端。例如图 7-9 中的  $D$ 、 $E$  点即位于同一直径的两端。

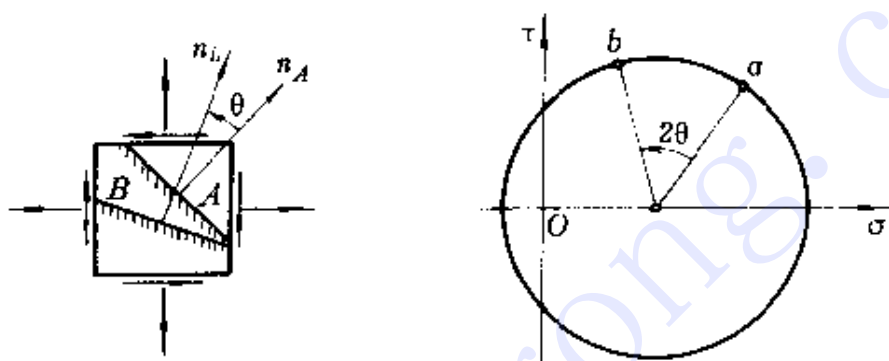


图 7-10

**例 2** 图 7-11(a) 所示微体,  $\sigma_x = 100\text{MPa}$ ,  $\tau_x = -20\text{MPa}$ ,  $\sigma_y = 30\text{MPa}$ ,  $\tau_y = 20\text{MPa}$ , 试用图解法求  $\alpha = 40^\circ$  斜截面上的正应力与剪应力。

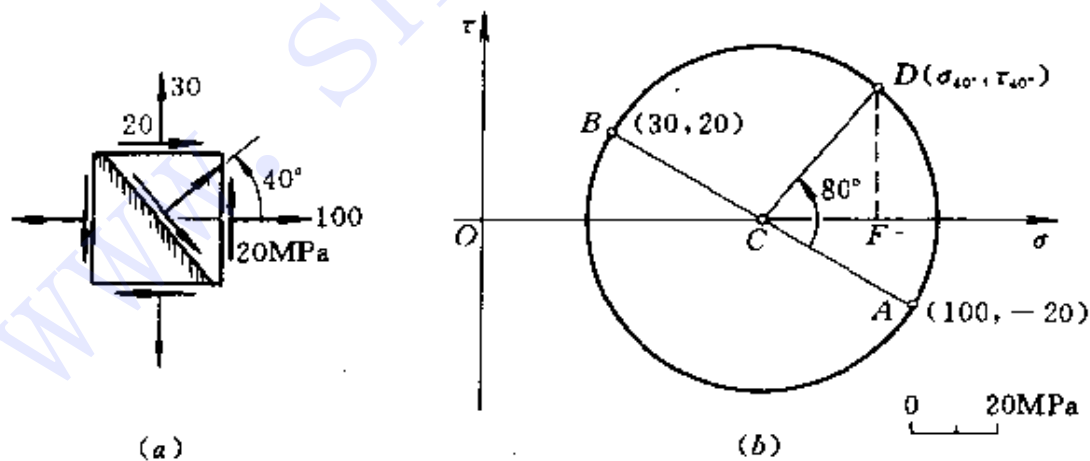


图 7-11

解 首先, 在  $\sigma-\tau$  平面内, 按选定的比例尺, 由坐标  $(100, -20)$  与  $(30, 20)$  分别确定  $A, B$  点(图 7-11,  $b$ )。然后, 以  $AB$  为直径画圆, 即得相应的应力圆。

为了确定  $\alpha$  截面上的应力, 将半径  $CA$  沿逆时针方向旋转  $2\alpha = 80^\circ$  至  $CD$  处, 所得  $D$  点即为  $\alpha$  截面的对应点。

按选定的比例尺, 量得  $\overline{OF} = 91\text{MPa}$ ,  $\overline{FD} = 31\text{MPa}$ , 由此得  $\alpha$  截面的正应力与剪应力分别为

$$\sigma_{10^\circ} = 91\text{MPa}$$

$$\tau_{10^\circ} = 31\text{MPa}$$

## § 7-4 极值应力与主应力

### 一、极值应力

平面应力状态的应力圆如图 7-12(a) 所示, 该圆与坐标轴  $\sigma$  相交于  $A, B$  点。这表明, 在平行于  $z$  轴的各截面中(图 7-5), 最大与最小正应力分别为

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \overline{OC} + \overline{CA} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (7-3a)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = \overline{OC} - \overline{CA} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (7-3b)$$

而最大正应力所在截面的方位角  $\alpha_0$  则可由下式确定

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} = -\frac{\tau_x}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (7-4)$$

式中, 负号表示由  $x$  截面至最大正应力作用面为顺时针方向。

确定方位角  $\alpha_0$  的另一更简便的方法是过  $B, D'$  连直线, 由于直线  $BD'$  所示方位即最大正应力  $\sigma_{\max}$  的方位, 因此, 方位角  $\alpha_0$  亦可由

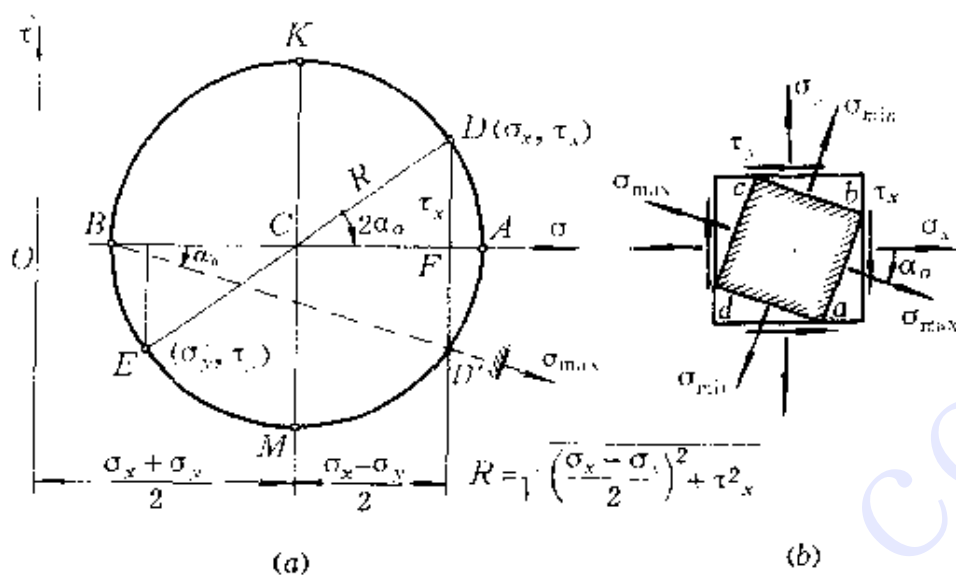


图 7-12

下式确定

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{\overline{FD'}}{\overline{BF}} = -\frac{\tau_x}{\sigma_x - \sigma_{min}} = -\frac{\tau_x}{\sigma_{max} - \sigma_y} \quad (7-5)$$

根据式(7-5),并考虑到  $A$ 、 $B$  点位于应力圆上同一直径的两端,即最大与最小正应力所在截面相互垂直,其方位如图 7-12(b)所示。

由图 7-12(a) 还可以看出,应力圆上存在  $K$ 、 $M$  两个极值点。这表明,在平行于  $z$  轴的各截面中,最大与最小剪应力分别为

$$\tau_{max} = \tau_K = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (7-6a)$$

$$\tau_{min} = \tau_M = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (7-6b)$$

其所在截面也相互垂直,并与正应力极值截面成  $45^\circ$  夹角。

## 二、主应力

如上所述,应力圆与  $\sigma$  轴相交于  $A$ 、 $B$  点(图 7-12, a),而该二点的纵坐标为零,即正应力极值所在截面的剪应力为零。

剪应力为零的截面称为主平面。因此,图 7-12(b) 所示截面  $ab$ 、 $bc$ 、 $cd$  与  $da$  均为主平面。此外,该微体的前、后两面的剪应力亦

为零,故也是主平面。由此三对互垂主平面所构成的微体,称为主平面微体。主平面上的正应力称为主应力,通常按其代数值,依次用 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 与 $\sigma_3$ 表示,即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

上述分析表明,在处于平面应力状态的微体内,一定存在主平面微体。还可以证明,在处于任意应力状态的微体内,同样也存在主平面微体。因此,用主应力 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 与 $\sigma_3$ 描写应力状态,具有普遍意义。

根据主应力的数值,可将应力状态分为三类。三个主应力中,仅一个不为零的应力状态,即前述单向应力状态;三个主应力中,两个或三个主应力不为零的应力状态,分别称为二向与三向应力状态。二向与三向应力状态统称为复杂应力状态。

**例3** 已知应力状态如图7-13(a)所示,试用解析法与图解法确定主应力的数值及方位。

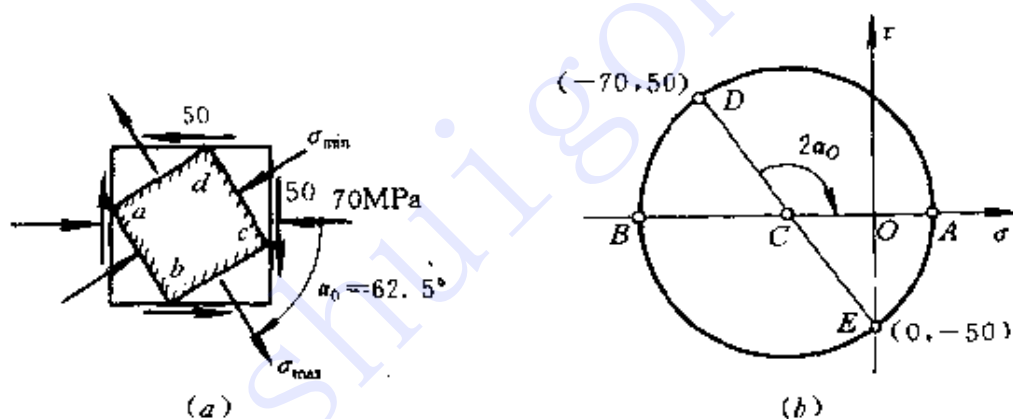


图 7-13

**解** 1. 解析法

$x$ 、 $y$  截面的应力分别为

$$\sigma_x = -70\text{MPa}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_x = 50\text{MPa}$$

将其代入式(7-3)与式(7-5),得

$$\sigma_{\max} = \frac{-70 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-70 - 0}{2}\right)^2 + 50^2} = 26\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -96\text{MPa}$$

$$\alpha_0 = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\tau_x}{\sigma_{\max} - \sigma_y} \right) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{50}{26 - 0} \right) = 62.5^\circ$$

由此可见,

$$\sigma_1 = 26\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -96\text{MPa}$$

而主应力  $\sigma_1$  的方位角  $\alpha_0$  则为  $-62.5^\circ$  (图 7-13, a)。

## 2. 图解法

在  $\sigma$ - $\tau$  平面内, 按选定的比例尺, 由坐标  $(-70, 50)$  与  $(0, -50)$  分别确定  $D$ 、 $E$  点 (图 7-13, b), 以  $DE$  为直径即可画出相应的应力圆。

该圆与  $\sigma$  轴相交于  $A$ 、 $B$  点, 按选定的比例尺, 量得  $\overline{OA} = 26\text{MPa}$ ,  $\overline{OB} = 96\text{MPa}$  (压应力), 即

$$\sigma_1 = \sigma_A = 26\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_B = -96\text{MPa}$$

从应力圆中量得  $\angle DCA = 125^\circ$ , 而且, 由于自半径  $CD$  至  $CA$  的转向为顺时针方向, 因此, 主应力  $\sigma_1$  的方位角为

$$\alpha_0 = -\frac{\angle DCA}{2} = -\frac{125^\circ}{2} = -62.5^\circ$$

## § 7-5 三向应力状态的最大应力

应力状态的一般形式为三向应力状态, 本节研究三向应力状态的最大应力。

考虑图 7-14(a) 所示主平面微体, 主应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  与  $\sigma_3$  均为已知, 现在分析微体内各截面的应力。

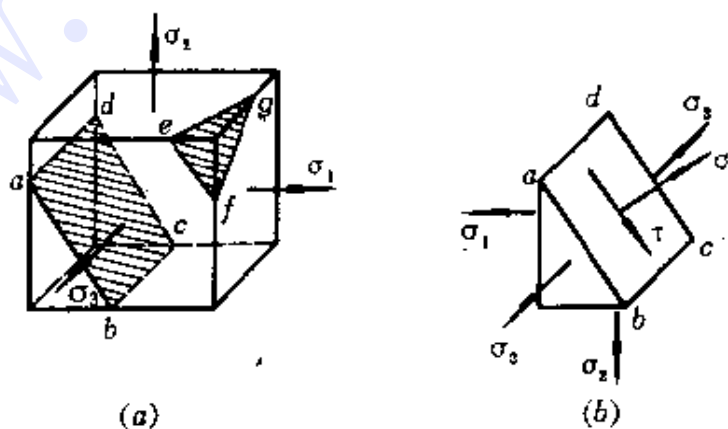


图 7-14



首先研究与主应力  $\sigma_3$  平行的斜截面  $abcd$  上的应力。不难看出(图 7-14,  $b$ ), 该截面的应力  $\sigma, \tau$  仅与  $\sigma_1, \sigma_2$  有关。所以, 在  $\sigma-\tau$  平面内, 与该类斜截面对应的点, 必位于由  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  所确定的应力圆上(图 7-15)。同理, 与主应力  $\sigma_2$  或  $\sigma_1$  平行的各截面的应力, 则可分别由  $\sigma_1, \sigma_3$  与  $\sigma_2, \sigma_3$  所画应力圆确定(图 7-15)。

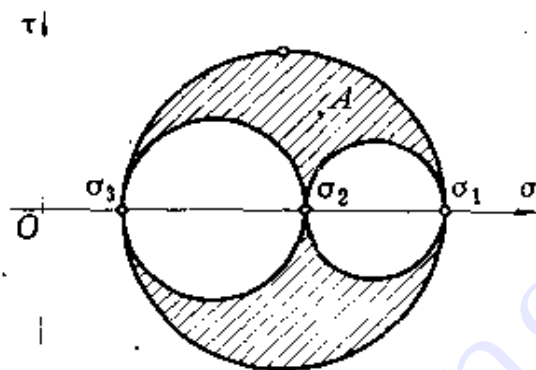


图 7-15

还可以证明, 对于与三个主应力均不平行的任意斜截面  $efg$ (图 7-14,  $a$ ), 它们在  $\sigma-\tau$  平面的对应点  $A(\sigma_a, \tau_a)$ , 必位于由上述三圆所构成的阴影区域内(证明从略)。

综上所述, 在  $\sigma-\tau$  平面内, 代表任一截面的应力的点, 或位于应力圆上, 或位于由上述三圆所构成的阴影区域内。由此可见, 在三向应力状态下, 最大与最小正应力分别为最大与最小主应力, 即

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \quad (7-7)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 \quad (7-8)$$

而最大剪应力则为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (7-9)$$

并位于与  $\sigma_1, \sigma_3$  均成  $45^\circ$  的截面内。

上述结论同样适用于单向与二向应力状态。

**例 4** 图 7-16(a) 所示应力状态, 应力  $\sigma_x = 80\text{MPa}, \tau_x = 35\text{MPa}, \sigma_y = 20\text{MPa}$  与  $\sigma_z = -40\text{MPa}$ , 试绘三向应力圆, 并求主应力、最大正应力与最大剪应力。



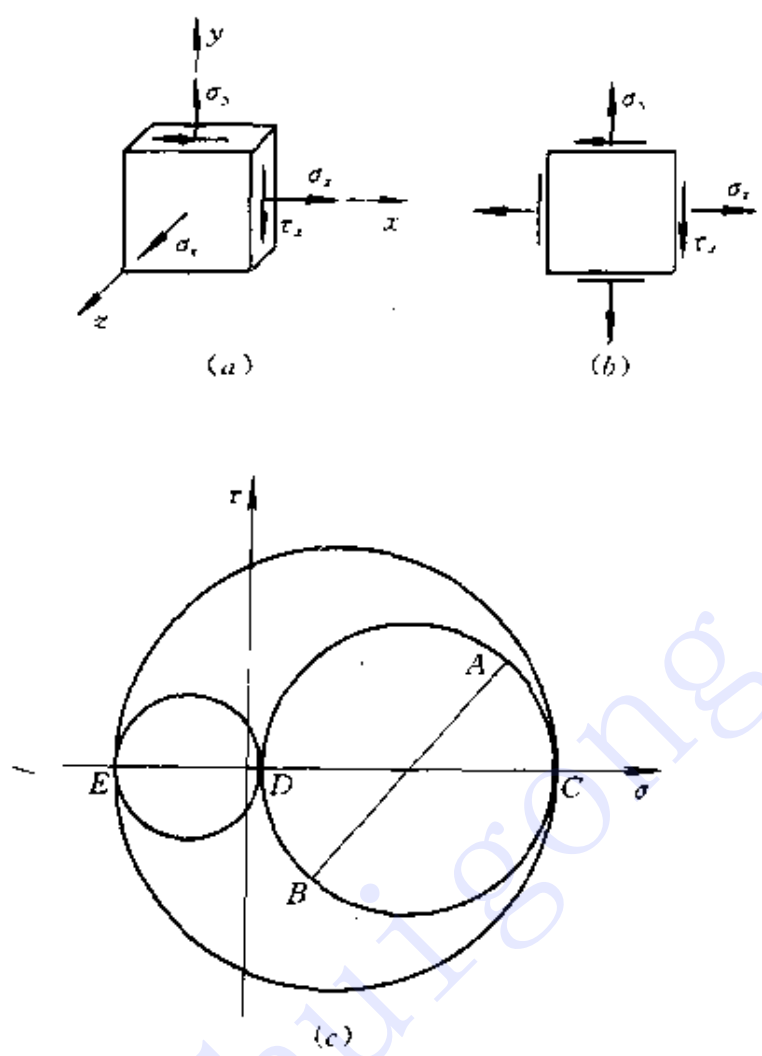


图 7-16

解 1. 绘三向应力圆

对于图示应力状态, 已知  $\sigma_z$  为主应力, 其它两个主应力则可由  $\sigma_x, \sigma_y$  与  $\tau_x$  (图 7-16, b) 确定。

在  $\sigma$ - $\tau$  平面内 (图 7-16, c), 由坐标  $(80, 35)$  与  $(20, -35)$  分别确定  $A, B$  点, 然后, 以  $AB$  为直径画圆并与  $\sigma$  轴相交于  $C, D$ , 其横坐标为

$$\sigma_C = 96.1 \text{MPa}$$

$$\sigma_D = 3.90 \text{MPa}$$

取  $E(-40, 0)$  对应于主平面  $z$ , 于是, 分别以  $ED$  及  $EC$  为直径画圆, 即得三向应力圆。

## 2. 主应力与最大应力

由上述分析可知, 主应力为

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_1 = 96.1 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= \sigma_2 = 3.90 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= \sigma_3 = -40.0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

而最大正应力与最大剪应力则分别为

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \sigma_1 = 96.1 \text{ MPa} \\ \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{96.1 - (-40.0)}{2} = 68.1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

## § 7-6 广义虎克定律

本节研究复杂应力状态下各向同性材料的应力、应变关系。

图 7-17(a) 所示平面应力状态, 可看成是纯剪切与二向应力状态的组合(图 7-17, b, c)。对于各向同性材料, 正应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  不会引起剪应变  $\gamma_{xy}$ (图 7-17, c); 同时, 在小变形的条件下, 剪应力  $\tau_x$ 、 $\tau_y$  对正应变  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$  的影响亦可忽略不计(图 7-17, b)。因此, 处于平面应力状态的微体, 其正应变  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$  与剪应变  $\gamma_{xy}$ , 可分别进行分析。

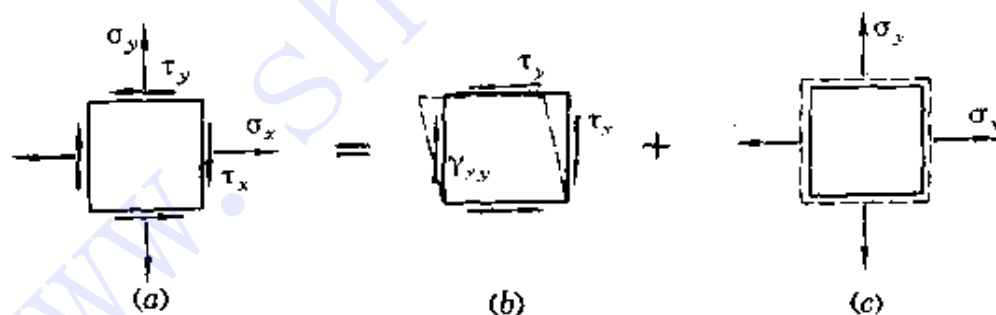


图 7-17

由式(2-19)与式(2-24)可知, 当正应力  $\sigma_x$  单独作用时, 微体沿  $x$ 、 $y$  方向的正应变分别为

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \epsilon_y = -\frac{\mu\sigma_x}{E}$$

当  $\sigma_y$  单独作用时, 上述二方向的正应变分别为

$$\epsilon_x = \frac{\mu\sigma_y}{E}, \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

根据叠加原理, 当  $\sigma_x, \sigma_y$  同时作用时(图 8-17, c), 微体沿  $x, y$  方向的正应变则分别为

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \quad (7-10a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \quad (7-10b)$$

在以上各式中,  $E$  为弹性模量,  $\mu$  为泊松比。对于各向同性材料,  $E, \mu$  值均与方向无关。

根据剪切虎克定律, 微体的剪应变为

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_x}{G} \quad (7-11)$$

由式(7-10) 与式(7-11), 还可得

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2}(\epsilon_x + \mu\epsilon_y) \quad (7-12a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2}(\epsilon_y + \mu\epsilon_x) \quad (7-12b)$$

$$\tau_x = G\gamma_{xy} \quad (7-12c)$$

对于一般三向主应力状态, 同理可得三个主应力方向的正应变分别为

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (7-13a)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \quad (7-13b)$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (7-13c)$$

式(7-10) 至式(7-13), 统称为**广义虎克定律**。应该强调指出, 只有当材料为各向同性, 且处于线弹性范围之内时, 上述定律才成立。

**例 5** 已知应力状态如图 7-18(a) 所示(应力单位为 MPa), 试求  $45^\circ$  方位的正应变。已知材料的弹性模量  $E = 70\text{GPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.33$ 。

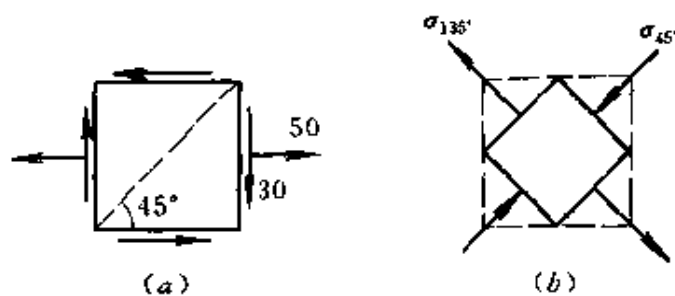


图 7-18

解 由图可知,  $x, y$  截面的应力为

$$\sigma_x = 50 \text{MPa}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 30 \text{MPa}$$

利用式(7-1), 得  $45^\circ$  与  $135^\circ$  斜截面的正应力(图 7-18,  $b$ ) 分别为

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{50 + 0}{2} + \frac{50 - 0}{2} \cos 90^\circ - 30 \sin 90^\circ = -5 \text{MPa}$$

$$\sigma_{135^\circ} = \frac{50 + 0}{2} + \frac{50 - 0}{2} \cos 270^\circ - 30 \sin 270^\circ = 55 \text{MPa}$$

于是, 由式(7-10), 得  $45^\circ$  方位的正应变为

$$\begin{aligned} \epsilon_{45^\circ} &= \frac{1}{E} (\sigma_{45^\circ} - \mu \sigma_{135^\circ}) \\ &= \frac{1}{70 \times 10^3} (-5 - 0.33 \times 55) = -3.31 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

负号表明, 该方位的正应变为压应变。

## § 7-7 关于断裂的强度理论

### 一、强度理论的概念

当材料处于单向应力状态时, 其极限应力  $\sigma'$  可利用拉伸与压缩实验测定。如前所述, 工程中许多构件的危险点, 处于二向或三向应力状态。二向或三向实验比较复杂, 而且, 由于主应力  $\sigma_1, \sigma_2$  与  $\sigma_3$  之间存在无数种数值组合或比例, 要测出每种情况下的极限应力  $\sigma_1, \sigma_2$  与  $\sigma_3$ , 实难实现。因此, 研究材料在复杂应力状态下的破坏规律极为必要。

试验表明,材料破坏主要有两种形式:一为断裂,另一为屈服。断裂破坏时,材料无明显塑性变形。许多试验表明,断裂常常是由拉应力或拉应变过大所致。例如,铸铁试件拉伸时沿横截面断裂,扭转时沿与轴线约成 $45^\circ$ 倾角的螺旋面断裂,砖、石受压时沿纵截面断裂,即均与最大拉应力或最大拉应变有关。材料屈服时,出现显著塑性变形。许多试验表明,屈服或出现显著塑性变形常常是剪应力过大所致。例如,低碳钢试件拉伸时在与轴线约成 $45^\circ$ 的方向出现滑移线,扭转时沿纵、横方向出现滑移线,即均与剪应力有关。

上述情况表明,材料破坏是存在规律的。人们根据对破坏现象的分析与研究,提出了种种假说或学说。关于材料破坏规律的假说或学说,称为**强度理论**。显然,强度理论的正确性必须经受试验的检验。实际上,也正是在反复试验与实践的基础上,强度理论才逐步得到发展并日趋完善。

综上所述,材料破坏主要有两种形式,并相应存在两类强度理论。一类以断裂为破坏标志,主要包括最大拉应力理论与最大拉应变理论。另一类以屈服或显著塑性变形为破坏标志,主要包括最大剪应力理论与形状改变比能理论。实际上,这也是当前工程中最常用的四个强度理论。

## 二、最大拉应力理论 —— 第一强度理论

最大拉应力理论认为:引起材料断裂的主要因素是最大拉应力,而且,不论材料处于何种应力状态,只要最大拉应力 $\sigma_1$ 达到材料单向拉伸断裂时的最大拉应力 $\sigma_b$ ,材料即发生断裂。按此理论,材料的断裂条件为

$$\sigma_1 = \sigma_b \quad (a)$$

试验表明:脆性材料在二向或三向受拉断裂时,最大拉应力理论与试验结果相当接近;而当存在压应力的情况下,则只要最大压应力值不超过最大拉应力值或超过不多,最大拉应力理论也是正确的。

将上述理论用于构件的强度分析,得相应的强度条件为

$$\sigma_1 \leq \frac{\sigma_b}{n}$$

或

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \quad (7-14)$$

式中:  $\sigma_1$  为构件危险点处的最大拉应力;  $[\sigma]$  为材料单向拉伸时的许用应力。

### 三、最大拉应变理论 —— 第二强度理论

最大拉应变理论认为: 引起材料断裂的主要因素是最大拉应变, 而且, 不论材料处于何种应力状态, 只要最大拉应变  $\epsilon_1$  达到材料单向拉伸断裂时的最大拉应变  $\epsilon_1^0$ , 材料即发生断裂。按此理论, 材料的断裂条件为

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^0 \quad (b)$$

对于铸铁等脆性材料, 从受力直到断裂, 其应力、应变关系基本符合虎克定律, 因此, 复杂应力状态下的最大拉应变为

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (c)$$

而材料在单向拉伸断裂时的最大拉应变则为

$$\epsilon_1^0 = \frac{\sigma_b}{E} \quad (d)$$

将式(c)、(d)代入式(b), 得

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b \quad (e)$$

此即用主应力表示的断裂破坏条件。

试验表明, 某些脆性材料在双向拉伸 - 压缩应力状态下, 且压应力值超过拉应力值时, 最大拉应变理论与试验结果大致符合。此外, 砖、石等脆性材料, 压缩时之所以沿纵向截面断裂, 亦可由此理论得到说明。

由式(e) 并考虑安全系数后, 得相应的强度条件为

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (f)$$

式中:  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  与  $\sigma_3$  代表构件危险点处的主应力;  $[\sigma]$  为材料单向拉伸时的许用应力。



式(f)表明, 当根据强度理论建立构件的强度条件时, 形式上是将主应力的某一综合值与材料单向拉伸许用应力相比较。主应力的上述综合值称为**相当应力**。第二强度理论的相当应力用  $\sigma_{eq, 2}$  表示, 因此, 式(f)又可改写成为

$$\sigma_{eq, 2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (7-15)$$

**例 6** 某铸铁构件危险点处的应力如图 7-19 所示。已知材料的泊松比  $\mu = 0.25$ , 许用拉应力  $[\sigma] = 30\text{MPa}$ , 试校核其强度。

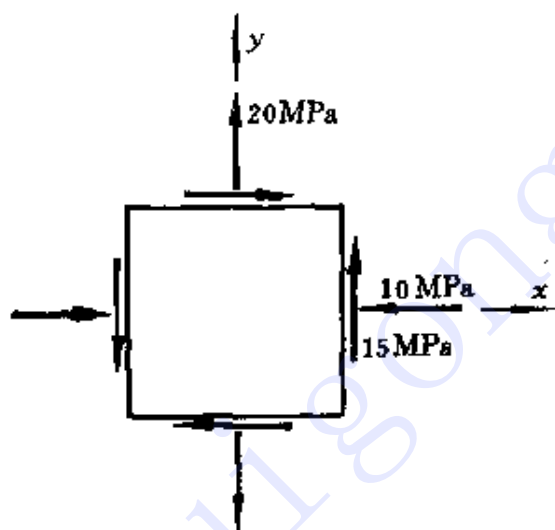


图 7-19

**解** 由图可知,  $x, y$  截面的应力为

$$\sigma_x = -10\text{MPa}, \quad \tau_x = -15\text{MPa}, \quad \sigma_y = 20\text{MPa}$$

代入式(7-3), 得

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{-10 + 20}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-10 - 20)^2 + 4 \times (-15)^2} \\ \sigma_{\min} &= \frac{26.2}{-16.2} \text{MPa} \end{aligned}$$

即主应力为

$$\sigma_1 = 26.2\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -16.2\text{MPa}$$

上式表明,

$$|\sigma_3| < \sigma_1$$

故宜采用最大拉应力理论即利用式(7-14)校核强度, 显然



$$\sigma_1 < [\sigma]$$

说明构件强度无问题。

## § 7-8 关于屈服的强度理论

### 一、最大剪应力理论 —— 第三强度理论

最大剪应力理论认为:引起材料屈服的主要因素是最大剪应力,而且,不论材料处于何种应力状态,只要最大剪应力 $\tau_{\max}$ 达到材料单向拉伸屈服时的最大剪应力 $\tau_s$ ,材料即发生屈服。按此理论,材料的屈服条件为

$$\tau_{\max} = \tau_s \quad (a)$$

由式(7-9)可知,复杂应力状态下的最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (b)$$

而材料单向拉伸屈服时的最大剪应力则为

$$\tau_s = \frac{\sigma_s - 0}{2} = \frac{\sigma_s}{2} \quad (c)$$

将式(b)、(c)代入式(a),得材料的屈服条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

而相应的强度条件则为

$$\sigma_{eq,3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (7-16)$$

对于塑性材料,最大剪应力理论与试验结果很接近,因此在工程中得到广泛应用。该理论的缺点是未考虑主应力 $\sigma_2$ 的作用,而试验却表明, $\sigma_2$ 对材料屈服的确存在一定影响。因此,在最大剪应力理论提出后不久,又有所谓形状改变比能理论产生。

### 二、形状改变比能理论 —— 第四强度理论

弹性体在外力作用下发生变形,载荷作用点随之产生位移。因此,在变形过程中,载荷在相应位移上作功。根据能量守恒定理可

知,如果所加外力是静载荷,则载荷所作之功全部转化为储存在弹性体内的势能,即所谓**应变能或变形能**。

外力作用下的微体,其形状与体积一般均发生改变,因此,应变能又可分解为形状改变能与体积改变能。单位体积内的形状改变能称为**形状改变比能**。在复杂应力状态下,形状改变比能的一般表达式为(推导从略)

$$u_d = \frac{(1 + \mu)}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (d)$$

形状改变比能理论认为:引起材料屈服的主要因素是形状改变比能,而且,不论材料处于何种应力状态,只要形状改变比能  $u_d$  达到材料单向拉伸屈服时的形状改变比能  $u_{d,s}$ ,材料即发生屈服。按此理论,材料的屈服条件为

$$u_d = u_{d,s} \quad (e)$$

材料单向拉伸屈服时的应力为  $\sigma = \sigma_s$ ,由式(d)得相应之形状改变比能为

$$u_{d,s} = \frac{(1 + \mu)\sigma_s^2}{3E}$$

将式(d)与上式代入式(e),得材料的屈服条件为

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_s \quad (f)$$

由此得相应的强度条件为

$$\sigma_{\text{eq},4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma] \quad (7-17)$$

试验表明,对于塑性材料,形状改变比能理论比最大剪应力理论更符合试验结果。这两个理论在工程中均得到广泛应用。

由三向应力圆可以看出(图 7-20),在平行于  $\sigma_3$  的各截面中,其最大剪应力为

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

而在平行于  $\sigma_1$  或  $\sigma_2$  的各截面中, 其最大剪应力则分别为

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{31} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

因此, 形状改变比能理论本质上属于剪切型强度理论。此外, 从统计平均剪应力或所谓八面体剪应力的观点出发, 同样可导出式 (f) 所示屈服条件, 从而更进一步证实形状改变比能理论属于剪切型强度理论的论述。所以, 形状改变比能理论也称为统计平均剪应力理论或八面体剪应力理论。

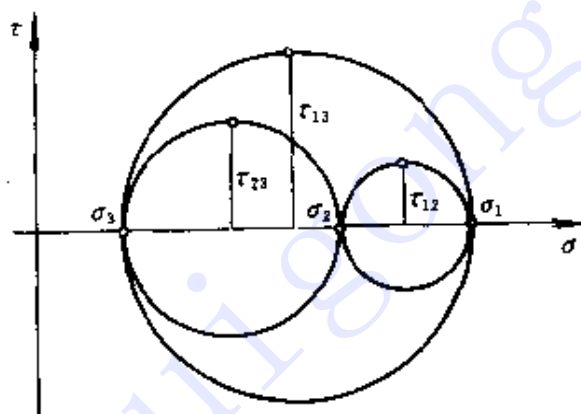


图 7-20

**例 7** 图 7-21 所示单向与纯剪切组合应力状态, 是一种常见的应力状态, 试分别根据第三与第四强度理论建立相应强度条件。

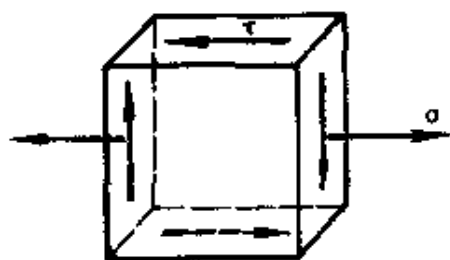


图 7-21

**解** 由式 (7-3) 可知, 该微体的最大与最小正应力分别为

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$$

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2} (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$$

可见,相应的主应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{1,3} &= \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \\ \sigma_2 &= 0\end{aligned}$$

根据第三强度理论,由式(7-16)得

$$\sigma_{\text{eq},3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (7-18)$$

根据第四强度理论,由式(7-17)得

$$\sigma_{\text{eq},4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (7-19)$$

**例 8** 试分别根据第三与第四强度理论,确定塑性材料在纯剪切时的许用剪应力。

**解** 纯剪切应力状态为图 7-21 所示应力状态的一个特殊情况,即相应于  $\sigma = 0$  的情况,于是,由式(7-18)与式(7-19),得剪应力  $\tau$  的最大允许值即许用剪应力分别为

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \quad (7-20)$$

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (7-21)$$

因此,塑性材料的许用剪应力  $[\tau]$  通常取为  $(0.5 \sim 0.577)[\sigma]$ 。

**例 9** 图 7-22(a) 所示钢梁,承受载荷  $P = 210\text{kN}$ ,许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ,截面高度  $h = 250\text{mm}$ ,宽度  $b = 113\text{mm}$ ,腹板与翼缘的厚度分别为  $t = 10\text{mm}$  与  $\delta = 13\text{mm}$ ,截面的惯性矩  $I_x = 5.25 \times 10^7\text{mm}^4$ ,试按第三强度理论校核梁的强度。

**解** 1. 内力分析

梁的剪力与弯矩图分别如图 7-22(b)、(c) 所示。可见,横截面  $C_+$  为危险截面,该截面的剪力与弯矩分别为

$$|Q|_{\text{max}} = 140.0\text{kN}$$

$$M_{\text{max}} = 5.60 \times 10^7\text{N} \cdot \text{m}$$

2. 最大弯曲正应力与最大弯曲剪应力

最大弯曲正应力发生在截面  $C_+$  的上、下边缘,其值为

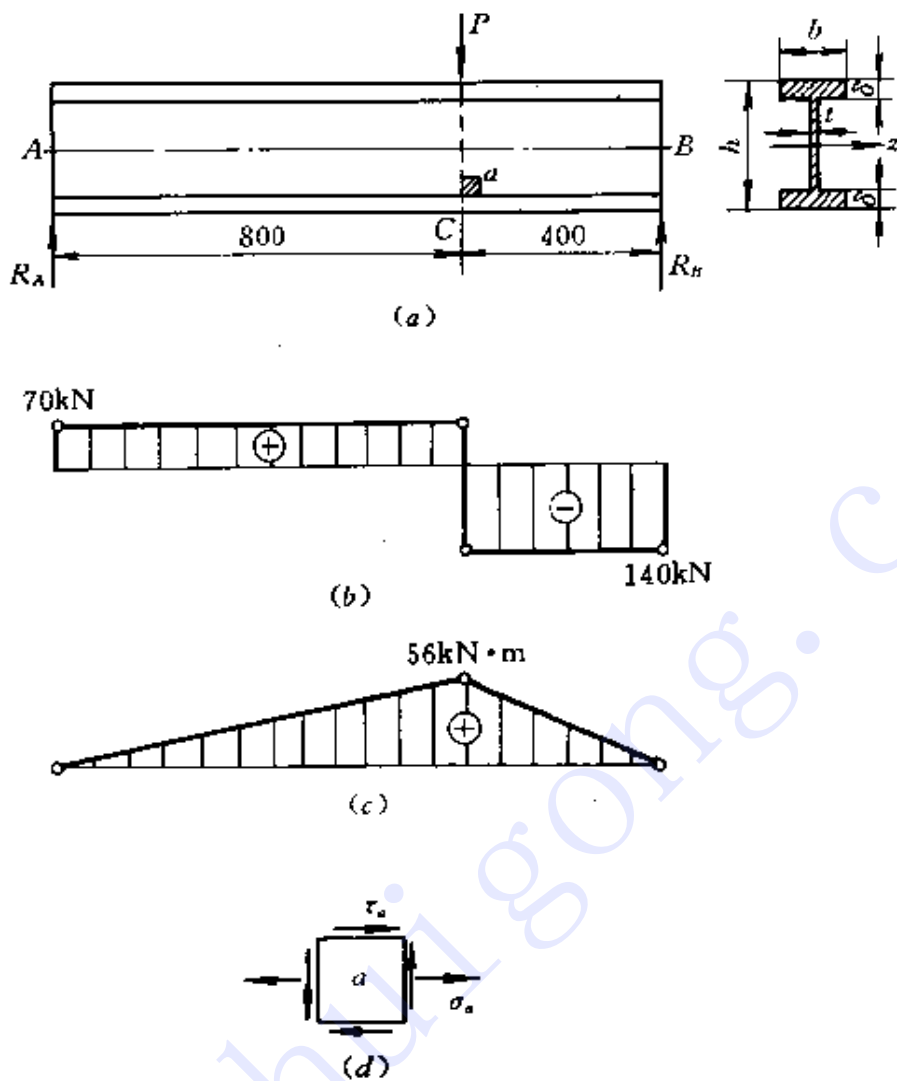


图 7-22

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{M_{\max} h}{2I_z} = \frac{5.60 \times 10^7 \times 250}{2 \times 5.25 \times 10^7} \\ &= 133.3 \text{ MPa} < [\sigma]\end{aligned}$$

最大弯曲剪应力发生在腹板的中性轴处, 由式(5-18)得

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{|Q|_{\max} S_{z, \max}}{I_z t} = \frac{|Q|_{\max}}{8I_z t} [bh^2 - (b-t)(h-2\delta)^2] \\ &= \frac{140.0 \times 10^3}{8 \times 5.25 \times 10^7 \times 10} [113 \times 250^2 - (113-10) \\ &\quad \times (250-2 \times 13)^2] \\ &= 63.1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

由式(7-20)可知, 许用剪应力为

$$[\tau] = 0.5[\sigma] = 0.5 \times 160 = 80\text{MPa}$$

所以

$$\tau_{\max} < [\tau]$$

### 3. 腹板与翼缘交接处的应力

在截面C. 的腹板与翼缘的交接处a(图7-22,a), 弯曲正应力 $\sigma_a$ 与弯曲剪应力 $\tau_a$ 均相当大, 其值分别为

$$\sigma_a = \frac{M_{\max}}{I_z} \left( \frac{h}{2} - \delta \right) = \frac{5.60 \times 10^7}{5.25 \times 10^7} \left( \frac{250}{2} - 13 \right) = 119.5\text{MPa}$$

$$\begin{aligned} \tau_a &= \frac{|Q|_{\max} S_{a,z}}{I_z t} = \frac{|Q|_{\max}}{I_z t} \cdot \frac{b\delta(h-\delta)}{2} \\ &= \frac{140.0 \times 10^3 \times 113 \times 43 \times (250 - 13)}{5.25 \times 10^7 \times 10 \times 2} = 46.4\text{MPa} \end{aligned}$$

a点处的应力状态如图7-22(d)所示, 即处于单向与纯剪切组合应力状态, 由式(7-18)得

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{eq},3} &= \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2} = \sqrt{119.5^2 + 4 \times 46.4^2} \\ &= 151.3\text{MPa} < [\sigma] \end{aligned}$$

### 4. 讨论

上述计算表明, 在短而粗的薄壁截面梁内(例如本例 $l/h = 4.8$ ), 与弯曲正应力相比, 弯曲剪应力也可能相当大。在这种情况下, 除应对最大弯曲正应力的作用处进行强度校核外, 对于最大弯曲剪应力的作用处以及腹板与翼缘交接处, 也应进行强度校核。

## § 7-9 薄壁圆筒的强度计算

工程中有许多承受内压的薄壁圆筒(图7-23), 例如充气气瓶与作动筒缸体等。设圆筒的内径为 $D$ , 壁厚为 $\delta$ , 且远小于 $D$ (例如 $\delta \leq D/20$ ), 内压的压强为 $p$ , 现在研究薄壁圆筒的强度计算。

首先计算圆筒横截面上的正应力即轴向正应力 $\sigma_x$ 。由图7-23可以看出, 作用在两端筒底的总压力 $R$ 均为 $p \cdot \pi D^2/4$ , 并沿圆筒轴线, 因此, 轴向正应力为



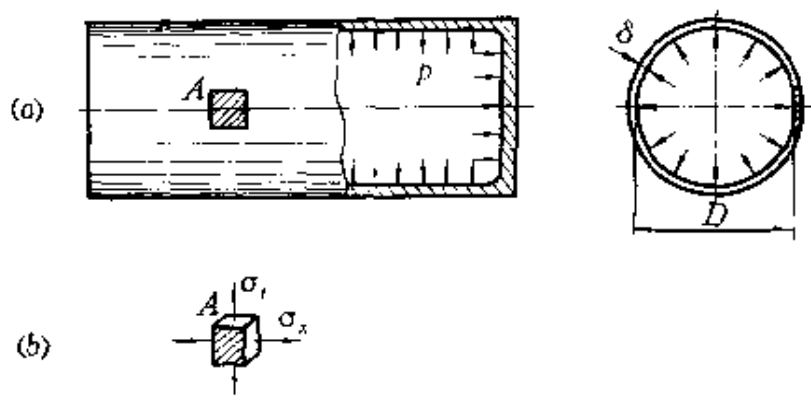


图 7-23

$$\sigma_x = \frac{R}{A} = \frac{p\pi D^2}{4} \frac{1}{\pi D\delta}$$

由此得

$$\sigma_x = \frac{pD}{4\delta} \tag{7-22}$$

为了计算圆筒径向纵截面上的正应力即周向正应力  $\sigma_r$  (图 7-23), 利用截面法, 用相距单位长度的两个横截面与一个通过圆筒轴线的径向纵截面, 从圆筒中切取一部分为研究对象 (高压气体或液体亦保留在内) (图 7-24, a)。由图可见, 作用在保留部分上的总压力为  $p(1 \cdot D)$ , 它由径向纵截面上的法向内力  $2N$  所平衡, 即

$$2N - pD = 0 \tag{a}$$

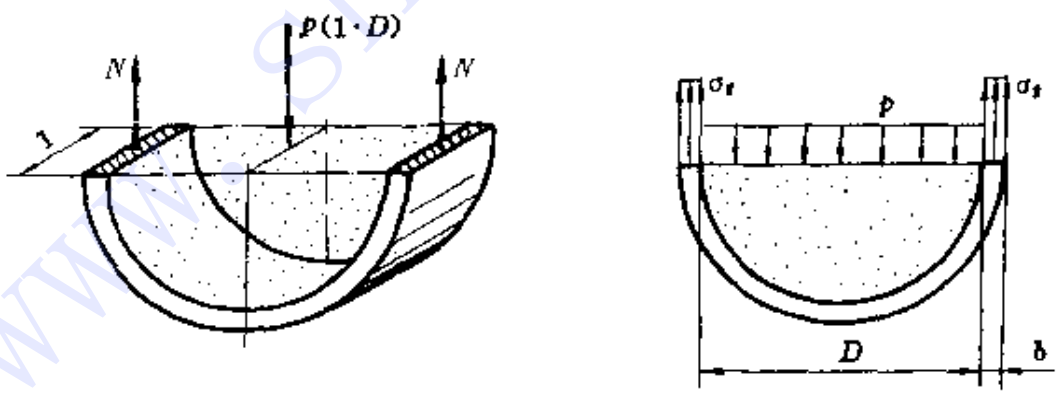


图 7-24

对于薄壁圆筒, 可近似认为正应力  $\sigma_r$  沿壁厚均匀分布 (图 7-24, b), 因此,

$$N = \sigma_r(1 \cdot \delta) \tag{b}$$

将式(b)代入式(a), 于是得周向正应力为



$$\sigma_r = \frac{pD}{2\delta} \quad (7-23)$$

此外, 压力  $p$  垂直于筒壁, 在筒壁内引起径向压应力  $\sigma_r$  (图 7-25)。在内壁处, 径向应力的数值最大, 其值为

$$|\sigma_r|_{\max} = p$$

然而, 对于薄壁圆筒而言,  $|\sigma_r|_{\max}$  与  $\sigma_t$  之比值

$$\frac{|\sigma_r|_{\max}}{\sigma_t} = \frac{p}{\frac{pD}{2\delta}} = \frac{2\delta}{D}$$

乃一很小之量, 因此, 径向应力  $\sigma_r$  可忽略不计。

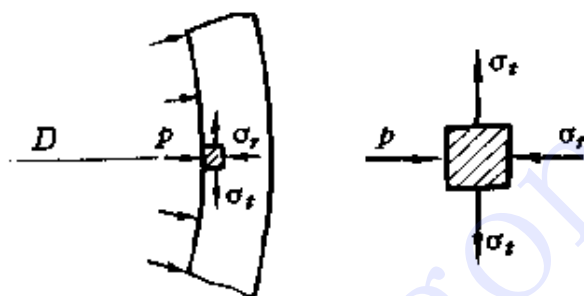


图 7-25

综上所述, 筒壁材料处于双向应力状态(图 7-23), 其主要应力则为

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pD}{2\delta}, \quad \sigma_2 = \sigma_r = \frac{pD}{4\delta}, \quad \sigma_3 = 0$$

于是, 如果圆筒是用塑性材料制成, 则按第三与第四强度理论所建立的强度条件分别为

$$\frac{pD}{2\delta} \leq [\sigma] \quad (7-24)$$

$$\frac{\sqrt{3} pD}{4\delta} \leq [\sigma] \quad (7-25)$$

**例 10** 内径  $D = 100\text{mm}$ 、壁厚  $\delta = 4\text{mm}$  的气瓶, 若内压  $p = 8\text{MPa}$ , 试计算气瓶壁的轴向正应力  $\sigma_x$  与周向正应力  $\sigma_t$ 。

解 气瓶壁厚与内径的比值为

$$\frac{\delta}{D} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} < \frac{1}{20}$$

故可按薄壁筒公式计算。

由式(7-22)与式(7-23),得气瓶的轴向与周向正应力分别为

$$\sigma_x = \frac{pD}{4\delta} = \frac{8 \times 100}{4 \times 4} = 50\text{MPa}$$

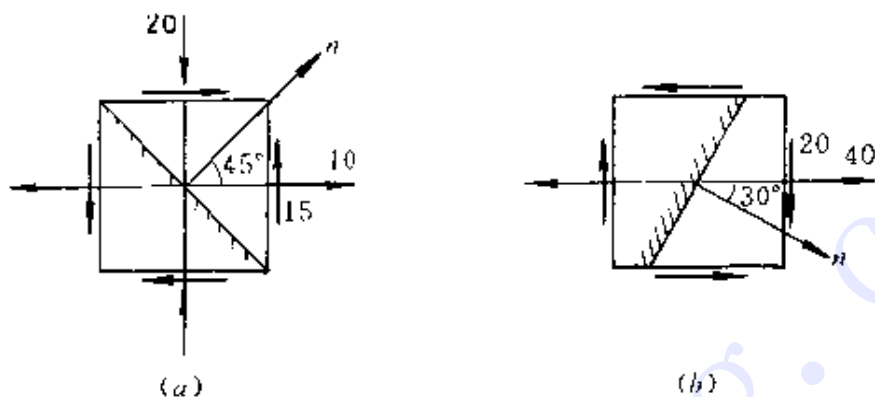
$$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta} = \frac{8 \times 100}{2 \times 4} = 100\text{MPa}$$

## 复 习 题

1. 何谓一点处的应力状态?何谓平面应力状态?试列举平面应力状态的实例。
2. 如何用解析法确定平面应力状态任一斜截面的应力?关于应力与方位角的正负符号有何规定?
3. 如何画应力圆?如何利用该圆确定任一斜截面的应力?如何确定最大正应力与最大剪应力?
4. 何谓主平面?何谓主应力?如何确定主应力的大小与方位?
5. 何谓单向、二向与三向应力状态?何谓复杂应力状态?
6. 如何画三向应力状态的应力圆?如何确定最大正应力与最大剪应力?
7. 何谓广义虎克定律?该定律是如何建立的?应用条件是什么?
8. 何谓强度理论?金属材料破坏主要有几种形式?相应有几类强度理论?
9. 目前四种常用强度理论的基本观点是什么?如何建立相应的强度条件?各适用于何范围?
10. 当材料处于单向与纯剪切的组合应力状态时,如何建立相应的强度条件?
11. 如何确定塑性材料在纯剪切时的许用应力?
12. 如何建立薄壁圆筒的周向与轴向正应力公式?应用条件是什么?如何建立薄壁圆筒的强度条件?

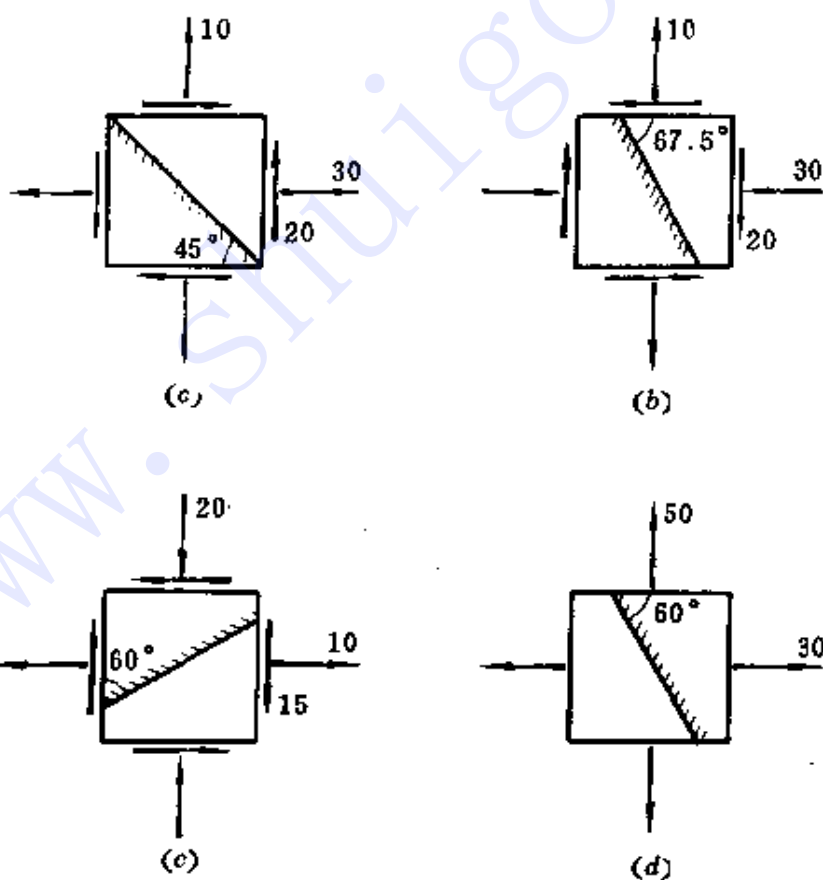
## 习 题

题 7.1 已知应力状态如图所示(应力单位为 MPa), 试用解析法计算图中指定截面的正应力与剪应力。



题 7.1 图

题 7.2 已知应力状态如图所示(应力单位为 MPa), 试用解析法



题 7.2 图

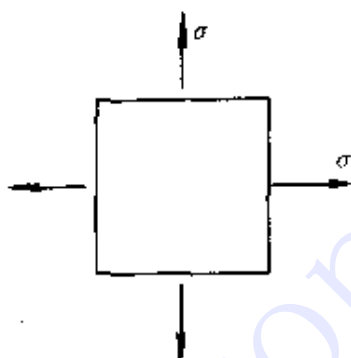
析法计算图中指定截面的正应力与剪应力。

题 7.3 试利用叠加法由式(2-7)、(2-8)、(3-17) 与(3-18) 建立式(7-1) 与(7-2)。

题 7.4 试用图解法解题 7.1。

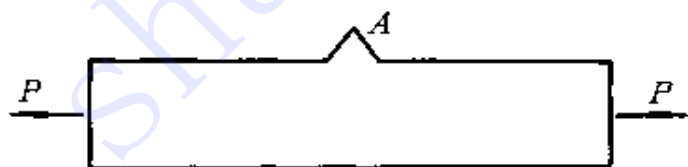
题 7.5 试用图解法解题 7.2。

题 7.6 图示双向拉伸应力状态, 应力  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ , 试证明任意斜截面上的正应力均等于  $\sigma$ , 而剪应力则为零。



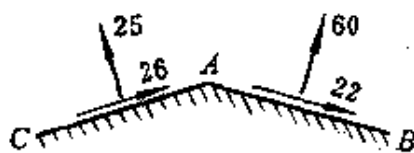
题 7.6 图

\* 题 7.7 图示受力板件, 试证明 A 点处各截面的正应力与剪应力均为零。



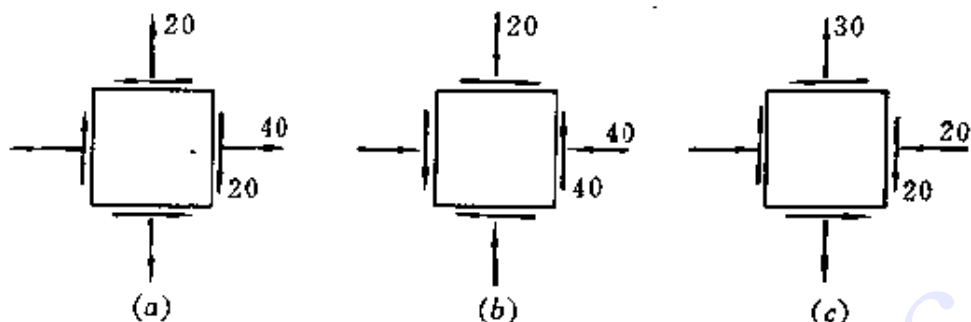
题 7.7 图

\* 题 7.8 已知某点 A 处截面 AB 与 AC 的应力如图所示(应力单位为 MPa), 试用图解法求该点处的应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ , 以及截面 AB 与 AC 间的夹角  $\theta$ 。



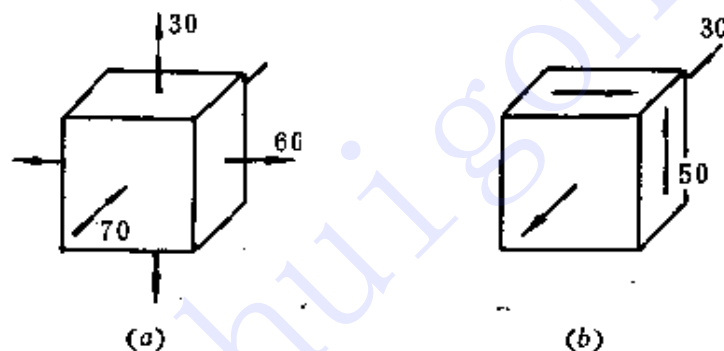
题 7.8 图

题 7.9 微体各面的应力如图所示(应力单位为 MPa), 试利用解析法与图解法计算主应力的的大小及所在截面的方位, 并在微体中画出。



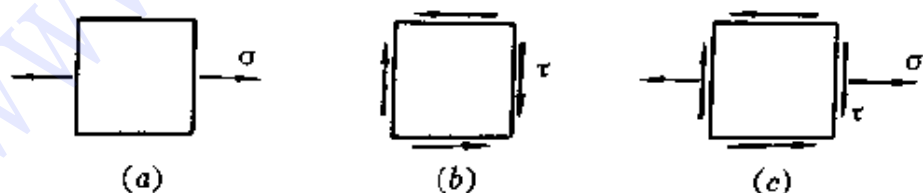
题 7.9 图

题 7.10 已知应力状态如图所示(应力单位为 MPa), 试画三向应力圆, 并求主应力、最大正应力与最大剪应力。



题 7.10 图

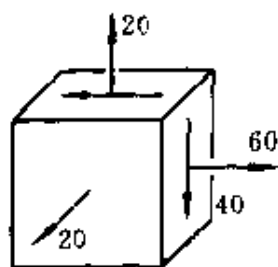
题 7.11 已知应力状态如图所示, 试画三向应力圆, 并求主应力、最大正应力与最大剪应力。



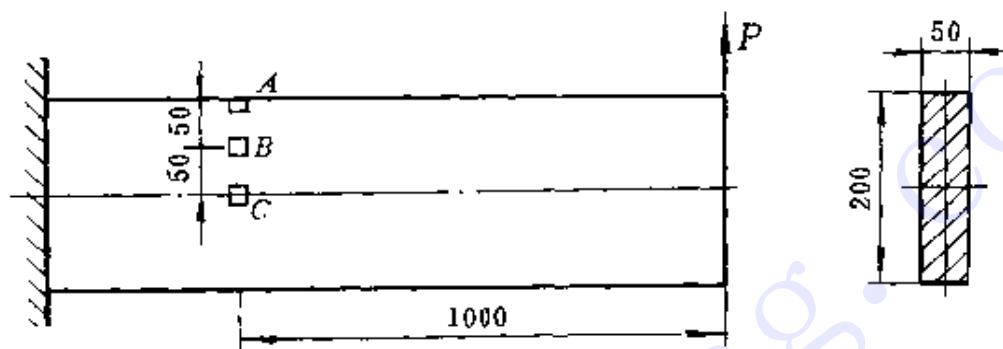
题 7.11 图

题 7.12 已知应力状态如图所示, 试求主应力的的大小。

题 7.13 图示悬臂梁, 承受载荷  $P = 20\text{kN}$  作用, 试绘微体 A、B、C 的应力图, 并确定主应力的的大小及方位。

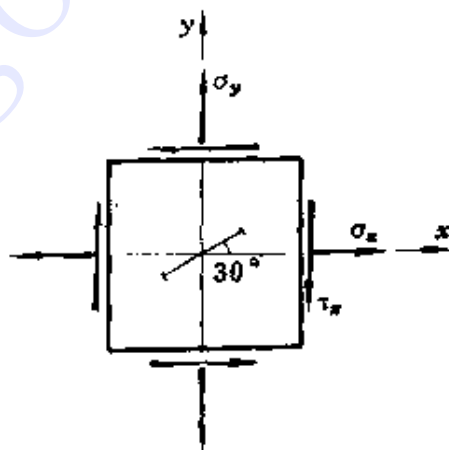


题 7.12 图



题 7.13 图

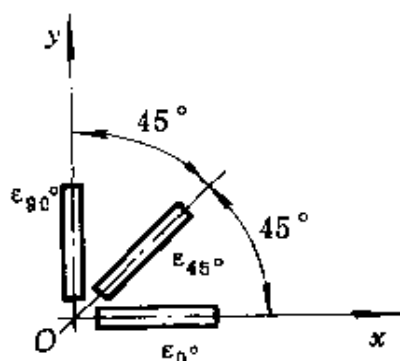
题 7.14 图示微体处于平面应力状态, 已知应力  $\sigma_x = 100\text{MPa}$ ,  $\sigma_y = 80\text{MPa}$ ,  $\tau_x = 50\text{MPa}$ , 弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.3$ , 试求正应变  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ , 剪应变  $\gamma_{xy}$  以及  $\alpha = 30^\circ$  方位的正应变  $\epsilon_{30^\circ}$ 。



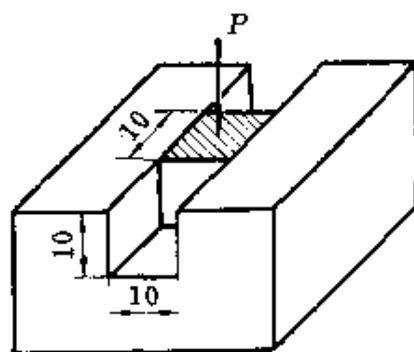
题 7.14 图

题 7.15 在构件表面某点  $O$  处, 沿  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  与  $90^\circ$  方位, 粘贴三个测量正应变的应变片, 测得该三方位的正应变分别为  $\epsilon_{0^\circ} = 450 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon_{45^\circ} = 350 \times 10^{-6}$  与  $\epsilon_{90^\circ} = 100 \times 10^{-6}$ , 该表面处于平面应力状态, 试求该点处的应力  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  与  $\tau_x$ 。已知材料的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.3$ 。

题 7.16 图示槽形刚体, 其内放置一边长为  $a = 10\text{mm}$  的正方形钢块, 钢块顶面承受合力为  $P = 8\text{kN}$  的均布压力作用, 试求钢块的三个主应力。已知钢的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.3$ 。

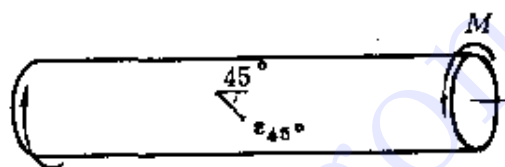


题 7.15 图



题 7.16 图

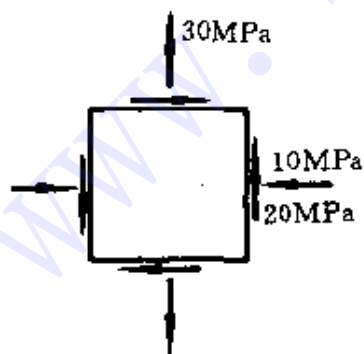
题 7.17 图示直径为  $d$  的圆截面轴, 其两端承受扭力矩  $M$  作用。设由实验测得轴表面与轴线成  $45^\circ$  方向的正应变  $\epsilon_{45^\circ}$ , 试求扭力矩  $M$  之值。材料的弹性常数  $E$ 、 $\mu$  均为已知。



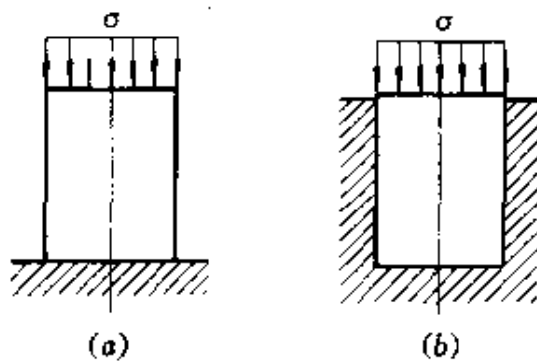
题 7.17 图

题 7.18 在建立圆轴扭转剪应力公式时, 曾提出若干假设, 试根据该假设说明圆轴横截面与径向纵截面上均无正应力。

题 7.19 某铸铁构件危险点处的应力情况如图所示, 试校核其强度, 已知铸铁的许用拉应力  $[\sigma] = 40\text{MPa}$ 。



题 7.19 图



题 7.20 图

题 7.20 试比较图示正方形棱柱体在下列两种情况下的相当应力  $\sigma_{eq,3}$ , 弹性常数  $E$ 、 $\mu$  均为已知。

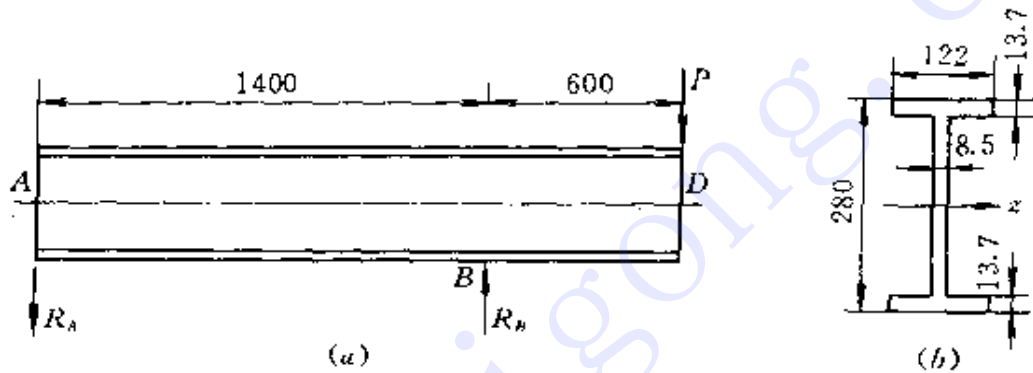


- (a) 棱柱体自由受压;
- (b) 棱柱体在刚性方模中受压。

题 7.21 导轨与车轮接触处的主应力为  $-450\text{MPa}$ 、 $-300\text{MPa}$  与  $-500\text{MPa}$ 。若导轨的许用应力为  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 试按第四强度理论校核其强度。

题 7.22 已知脆性材料的许用拉应力  $[\sigma]$  与泊松比  $\mu$ , 试根据第一与第二强度理论确定该材料纯剪切时的许用剪应力  $[\tau]$ 。

题 7.23 图示简支梁, 承受载荷  $P = 130\text{kN}$  作用, 许用应力  $[\sigma] = 170\text{MPa}$ , 试按第三强度理论校核梁的强度。

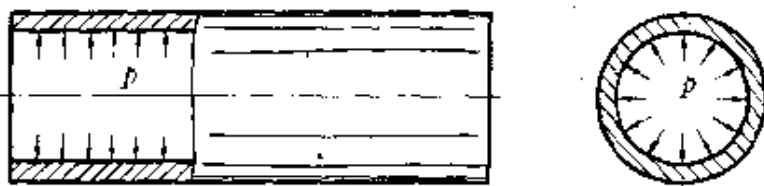


题 7.23 图

题 7.24 一薄壁圆筒, 内径  $D = 70\text{mm}$ , 壁厚  $\delta = 3\text{mm}$ , 内压  $p = 10\text{MPa}$ , 试计算筒壁的轴向正应力、周向正应力、最大拉应力与最大剪应力。

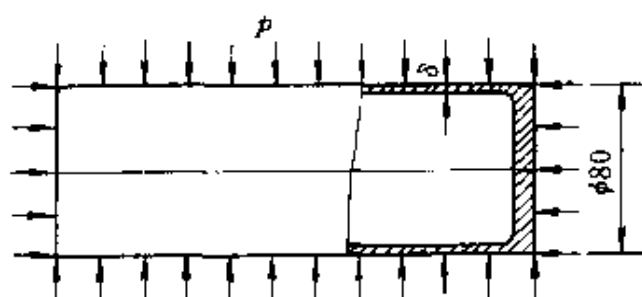
题 7.25 一圆柱形气瓶, 内径  $D = 80\text{mm}$ , 壁厚  $\delta = 3\text{mm}$ , 内压  $p = 10\text{MPa}$ 。若材料为 45 号钢, 许用应力  $[\sigma] = 120\text{MPa}$ , 试按第四强度理论校核其强度。

题 7.26 图示圆管, 内径  $D = 40\text{mm}$ , 内压  $p = 10\text{MPa}$ , 材料的许用应力为  $[\sigma] = 120\text{MPa}$ , 试确定管的壁厚。



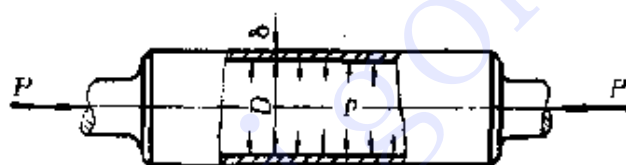
题 7.26 图

题 7.27 图示圆柱形容器, 受外压  $p = 15\text{MPa}$  作用, 试按第四强度理论确定其壁厚。材料的许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。



题 7.27 图

题 7.28 图示铸铁构件, 中段为一内径  $D = 20\text{mm}$ 、壁厚  $\delta = 10\text{mm}$  的圆筒, 圆筒内的压力  $p = 1\text{MPa}$ , 两端的轴向压力  $P = 300\text{kN}$ , 材料的泊松比  $\mu = 0.25$ , 许用拉应力  $[\sigma_+] = 30\text{MPa}$ , 试校核圆筒部分的强度。



题 7.28 图

## 第八章 组合变形

### § 8-1 引言

前面研究了杆件在轴向拉伸(压缩)、扭转与弯曲等基本变形时的强度和刚度问题。在工程实际中,许多杆件处于组合变形状态,即其变形是由两种或三种基本变形所组成。例如,图 7-2 所示螺旋桨轴,在外力  $P$ 、 $M_0$  作用下将同时产生拉伸和扭转变形;图 8-1 所示支臂,在外力  $P_x$ 、 $P_y$  作用下同时产生弯曲与拉伸变形;等等。本章研究杆件组合变形时的强度计算。

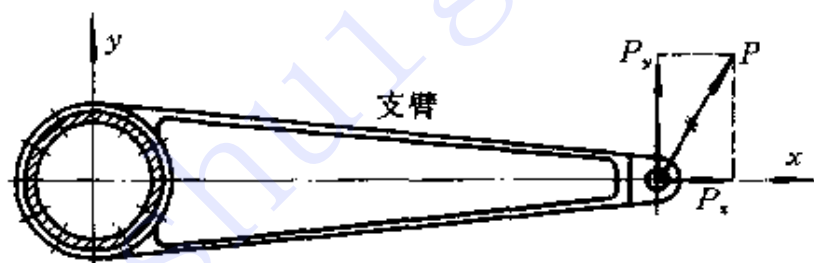


图 8-1

如 § 6-5 所述,如果杆件处在线弹性范围内,而且变形很小以致可按原有几何关系分析其内力,则任一载荷在杆内引起的应力不受其它载荷的影响。所以,当杆件处于组合变形时,可首先将其分解为若干基本变形的组合,并计算出相应于每种基本变形的应力,然后将所得结果迭加,即得杆件在组合变形时的应力。

组合变形包括弯拉(压)组合、弯扭组合、拉(压)扭组合与弯拉(压)扭组合等多种形式,本章主要研究杆件在弯拉(压)组合与弯扭组合变形时的强度计算,其分析方法同样适用于其它组合变形形式。

## § 8-2 弯拉(压)组合强度计算

前面研究弯曲问题时,曾限制所有外力均垂直于杆轴。然而,如果在杆上除作用有横向力外,同时还作用有轴向力,则杆发生弯曲与拉伸(压缩)的组合变形。现以图 8-2(a) 所示同时承受横向力  $q$  与轴向力  $P$  的杆件为例,说明弯拉组合变形时杆件的强度计算方法。

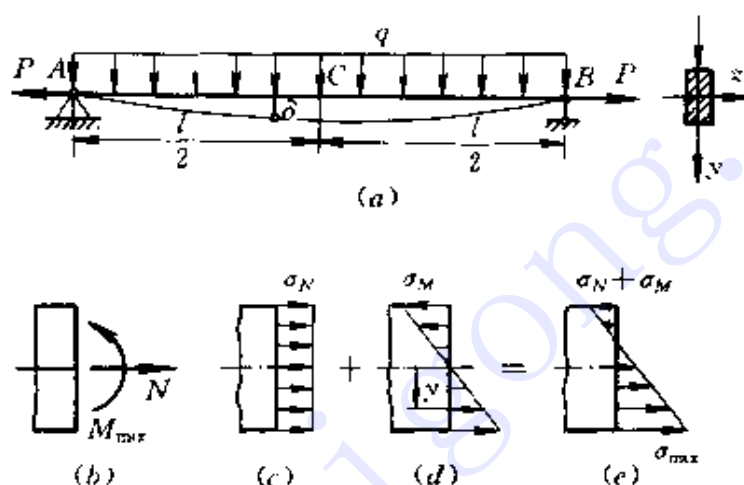


图 8-2

由图中可以看出:轴向力  $P$  使杆轴向伸长,各横截面的轴力均为  $N = P$ ;横向力  $q$  使杆弯曲,杆件 midpoint 横截面  $C$  的弯矩最大,其值为  $M_{\max} = ql^2/8$ 。所以,横截面  $C$  为危险截面,在该截面上同时作用有轴力与最大弯矩(图 8-2,  $b$ )。

在危险截面上,与轴力相应的正应力均匀分布(图 8-2,  $c$ ),其值为

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

与弯矩相应的正应力沿截面高度线性分布(图 8-2,  $d$ ),纵坐标为  $y$  处的弯曲正应力为

$$\sigma_M = \frac{M_{\max} y}{I_z}$$

所以, 危险截面上任一点  $y$  处的正应力为

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}y}{I_z} \quad (8-1)$$

即正应力沿截面高度线性变化(图 8-2,  $e$ ), 中性轴不通过截面形心, 而最大正应力则发生在横截面的顶部或底部边缘, 其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} \quad (8-2)$$

最大正应力确定后, 将其与许用应力比较, 即可建立相应的强度条件为

$$\frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (8-3)$$

应该指出, 如果材料的许用拉应力与许用压应力不同, 而且横截面上部分区域受拉、部分区域受压, 则应按式(8-1) 计算最大拉应力与最大压应力, 并分别按拉伸与压缩进行强度计算。

还应指出, 如果杆件的横向位移(即挠度) $\delta$  与横截面高度相比不能忽略, 则轴向力在横截面上引起的附加弯矩  $\Delta M = P\delta$  也不能忽略(图 8-2,  $a$ ) 在这种情况下, 叠加原理即不能应用, 而应考虑横向与轴向力间的相互影响。

**例 1** 图 8-3(a) 所示梁, 承受载荷  $P$  作用, 试计算梁内横截面上的最大正应力。已知载荷  $P = 10\text{kN}$ , 梁用 No14 工字钢制成, 梁长  $l = 2\text{m}$ , 载荷作用点与梁轴的距离  $e = l/10$ 。

解 1. 梁的内力分析

首先, 将载荷  $P$  分解为  $P_x$  与  $P_y$  两个分力, 显然

$$P_x = P\cos 30^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8.66\text{kN}$$

$$P_y = P\sin 30^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5.00\text{kN}$$

然后, 将  $P_x$  平移到梁的轴线上, 得轴向力  $F = P_x$  与作用在截面  $B$  的力偶(图 8-3,  $b$ ), 其矩为

$$M_O = P_x e = 8.66 \times \frac{2}{10} = 1.732\text{kN} \cdot \text{m}$$

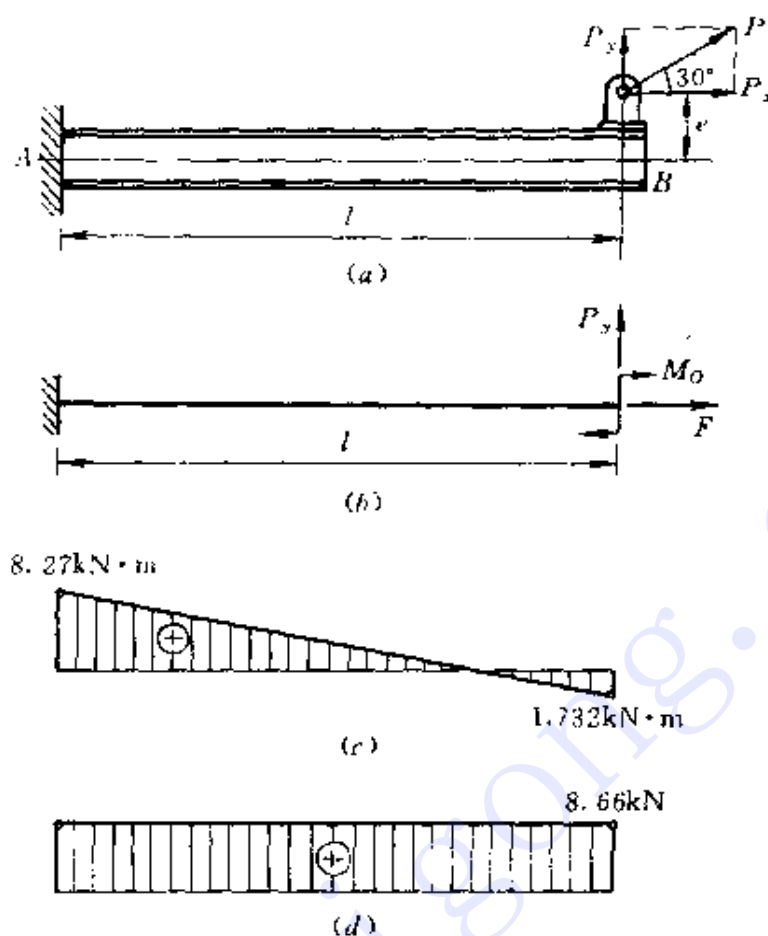


图 8-3

在横向力  $P_y$  与力矩  $M_o$  作用下, 梁产生弯曲变形, 其弯矩图如图 8-3(c) 所示; 在轴向力  $F$  作用下, 梁轴向受拉, 其轴力图如图 8-3(d) 所示。

## 2. 梁的应力分析

由内力图可以看出, 梁处于弯拉组合变形状态, 横截面 A 为危险截面, 最大正应力发生在该截面的底部边缘, 其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{P_y}{A} + \frac{M_A}{W_z}$$

由型钢规格表中查得, No14 工字钢的截面面积  $A = 2.15 \times 10^3 \text{mm}^2$ , 抗弯截面模量  $W_z = 1.02 \times 10^5 \text{mm}^3$ 。将有关数据代入上式, 得

$$\sigma_{\max} = \frac{8.66 \times 10^3}{2.15 \times 10^3} + \frac{8.27 \times 10^3 \times 10^3}{1.02 \times 10^5} = 85.1 \text{MPa}$$



### § 8-3 偏心压缩(拉伸)强度计算

当作用在直杆上的外力沿杆轴时,产生轴向拉伸或轴向压缩。然而,如果外力的作用线平行于杆轴,但不通过截面形心,则将引起偏心拉伸或偏心压缩。例如,图 8-4 所示螺栓与立柱即分别为偏心拉伸与偏心压缩的实例。

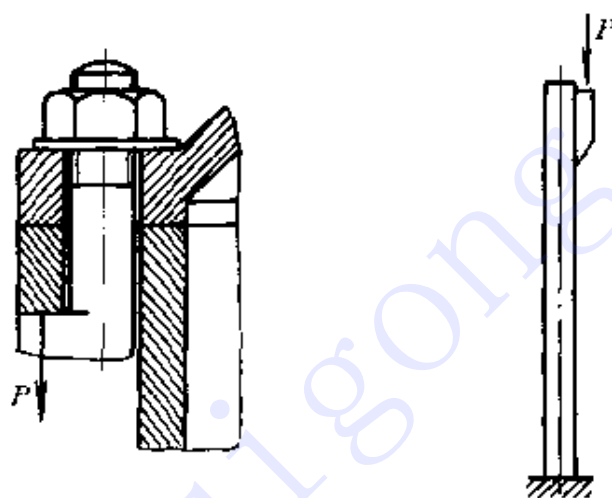


图 8-4

首先研究偏心压缩问题。考虑图 8-5(a) 所示对称截面杆,在其纵向对称面内作用一偏心载荷  $P$ ,该力作用点至截面形心  $C$  的距离称为**偏心距**,并用  $e$  所示。

为了分析杆的受力情况,将载荷  $P$  平移到截面形心  $C$  处,得轴向压力  $P$  与力矩为  $M_0 = Pe$  的力偶。在轴向压力作用下,各横截面的轴力均为  $N = -P$ ;在力偶作用下,各截面的弯矩均为  $M = -Pe$ (图 8-5, b)。可见,在偏心压力作用时,杆件处于弯压组合变形状态,横截面任一点  $y$  处的正应力为

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = -\frac{P}{A} - \frac{Pe y}{I_z} \quad (8-4)$$

由上式可知,当偏心距  $e$  足够小,以致最大弯曲正应力  $\sigma_{M, \max} < |\sigma_N|$  时,横截面上各点均受压(图 8-5, c),在这种情况下,杆的



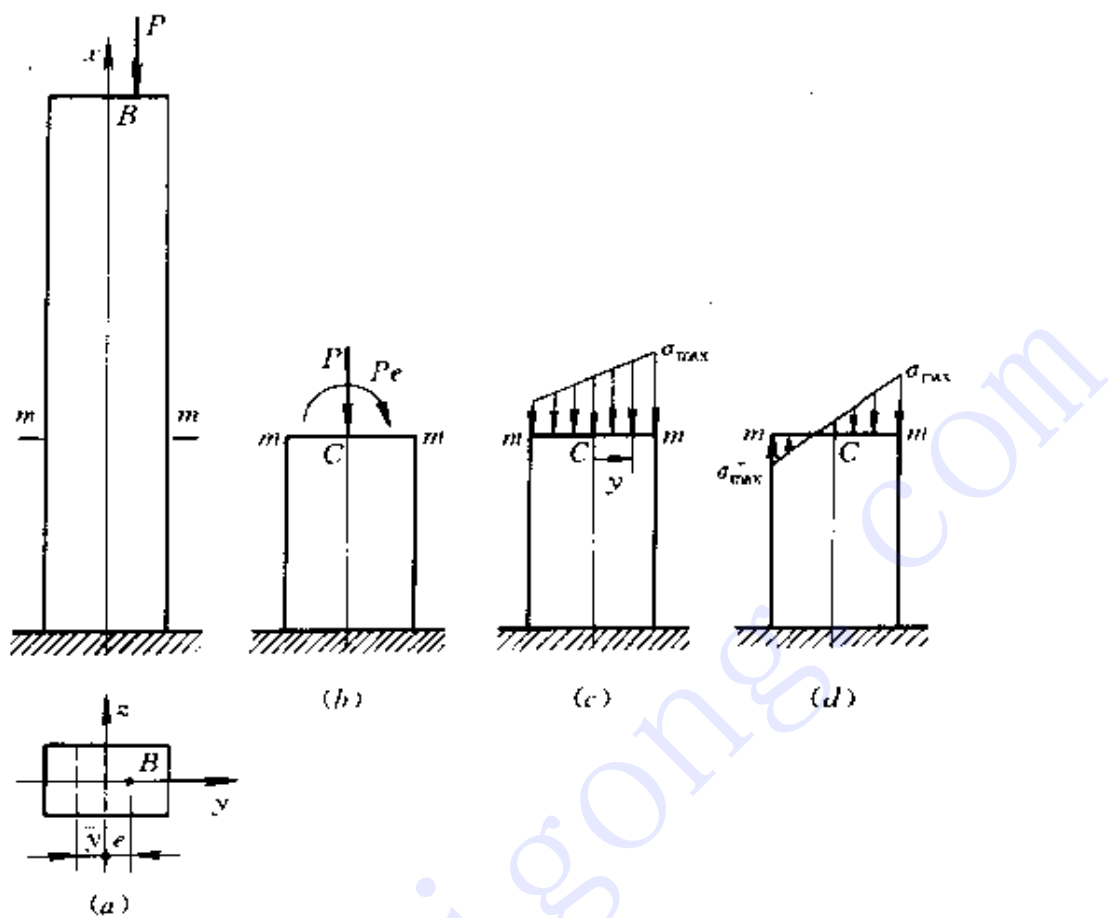


图 8-5

强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W_z} \leq [\sigma_-] \quad (8-5)$$

当偏心距  $e$  足够大, 以致  $\sigma_{M, \max} > |\sigma_N|$  时, 则横截面上部分区域受拉, 部分区域受压(图 8-5, d)。对于许用拉应力小于许用压应力的材料, 除应按式(8-5)考虑杆的压缩强度外, 还应考虑其拉伸强度, 杆的拉伸强度条件为

$$\sigma_{\max}^+ = -\frac{P}{A} + \frac{Pe}{W_z} \leq [\sigma_+] \quad (8-6)$$

当横截面上部分区域受拉、部分区域受压时, 横截面上存在中性轴。如图 8-5(a) 所示, 设中性轴上各点的纵坐标为  $\bar{y}$ , 则根据正应力为零的条件, 由式(8-4) 得

$$\frac{P}{A} + \frac{Pe\bar{y}}{I_z} = 0$$

由此得

$$\bar{y} = -\frac{I_z}{Ae} \quad (8-7)$$

上式表明,  $\bar{y}$  与  $e$  异号, 且成反比。可见, 中性轴与载荷作用点位于形心轴  $z$  的两侧, 且偏心距  $e$  愈大, 中性轴离截面形心愈近, 反之则愈远。

以上分析方法同样适用于偏心拉伸问题。

**例 2** 图 8-6(a) 所示压力机, 最大压力  $P = 1400\text{kN}$ , 机架用铸铁制成, 许用拉应力  $[\sigma_+] = 35\text{MPa}$ , 许用压应力  $[\sigma_-] = 140\text{MPa}$ , 试校核压力机立柱部分的强度。立柱横截面的几何性质如下:  $y_1 = 200\text{mm}$ ,  $h = 700\text{mm}$ ,  $A = 1.8 \times 10^5\text{mm}^2$ ,  $I_z = 8.0 \times 10^9\text{mm}^4$ 。

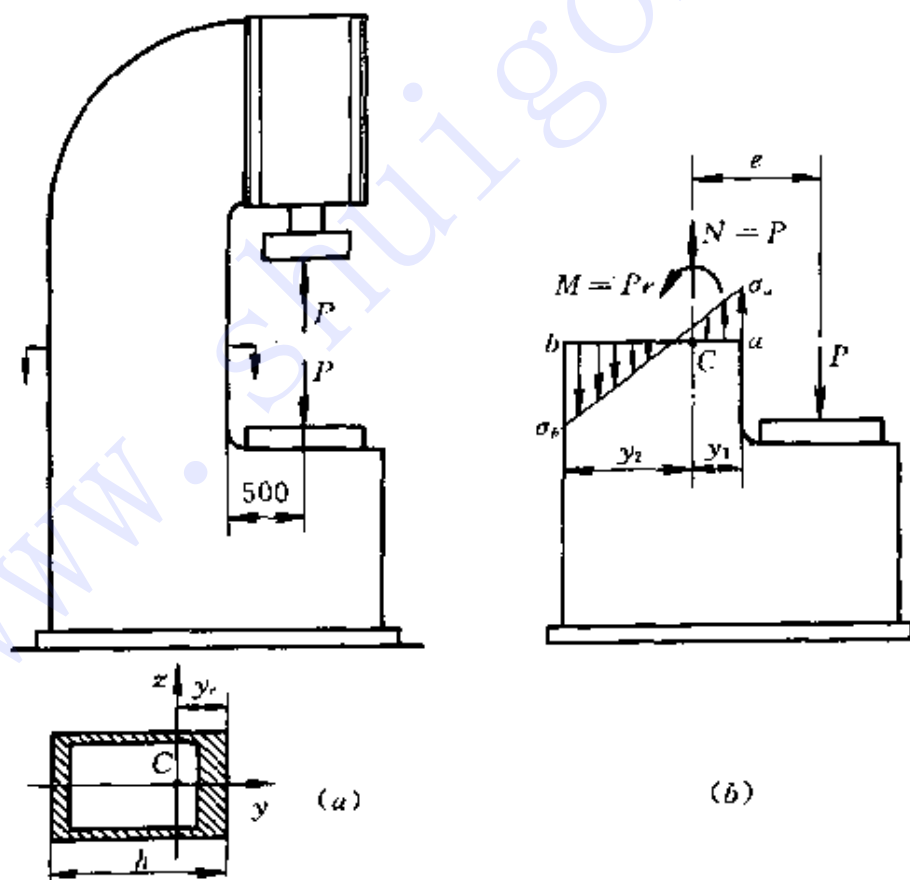


图 8-6

解 由图可知, 载荷  $P$  偏离立柱轴线, 其偏心距为

$$e = y_c + 500 = 200 + 500 = 700\text{mm}$$

在偏心载荷  $P$  作用下, 立柱横截面上的内力如图 8-6(b) 所示, 最大正应力发生在截面内、外侧边缘  $a$ 、 $b$  处, 其值分别为

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{P}{A} + \frac{Pe y_c}{I_c} = \frac{1400 \times 10^3}{1.80 \times 10^5} + \frac{1400 \times 10^3 \times 700 \times 200}{8.00 \times 10^9} \\ &= 32.3\text{MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_b &= \frac{P}{A} - \frac{Pe(h - y_c)}{I_c} \\ &= \frac{1400 \times 10^3}{1.80 \times 10^5} - \frac{1400 \times 10^3 \times 700 \times (700 - 200)}{8.00 \times 10^9} \\ &= -53.5\text{MPa}\end{aligned}$$

可见

$$\sigma_{\max}^+ = 32.3\text{MPa} < [\sigma_+]$$

$$\sigma_{\max}^- = 53.5\text{MPa} < [\sigma^-]$$

即立柱符合强度要求。

## § 8-4 弯扭组合与弯拉(压)扭组合的强度计算

机械设备中的传动轴与曲柄轴等, 大多处于弯扭组合变形状态。现以图 8-7 所示电动机轴的外伸段为例, 介绍圆轴弯扭组合变形时的强度计算。

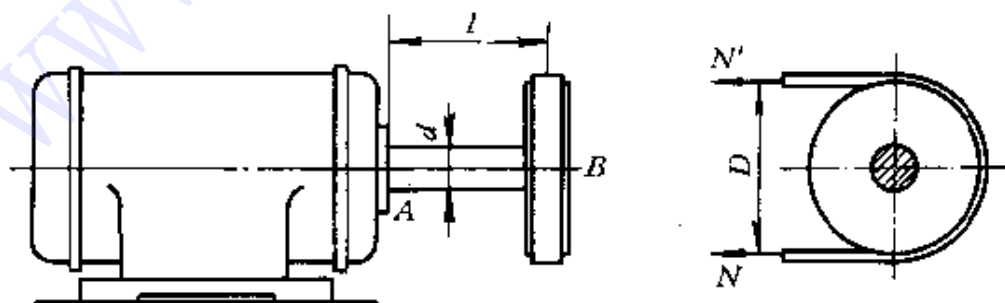


图 8-7

如图所示,轴  $AB$  的端部装有直径为  $D$  的皮带轮,皮带紧边与松边的张力分别为  $N$  与  $N'$ ,且  $N > N'$ 。为了研究轴  $AB$  的受力,首先将皮带张力  $N$  与  $N'$  向轴  $AB$  的轴线简化,得作用在截面  $B$  的横向力  $P$  与扭力矩  $M_o$ (图 8-8,  $a$ ),其值分别为

$$P = N + N'$$

$$M_o = \frac{(N - N')D}{2}$$

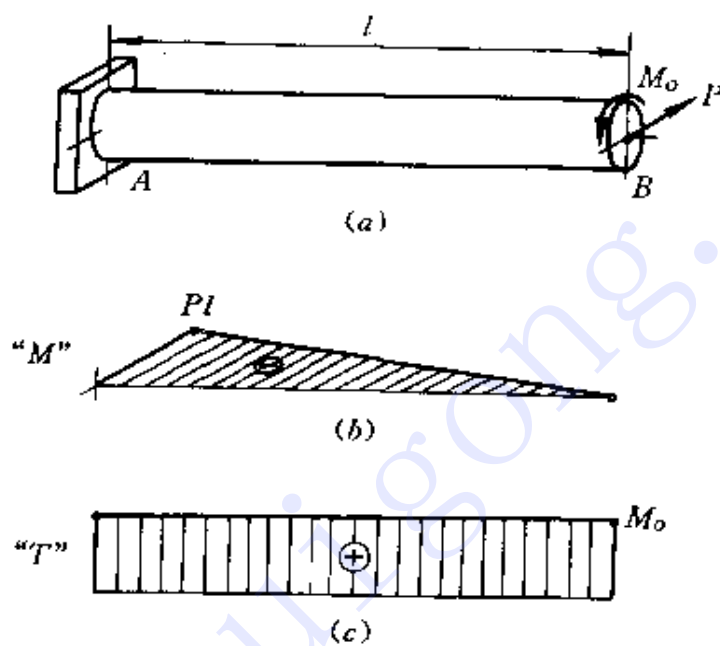


图 8-8

可以看出,横向力  $P$  使轴弯曲,扭力矩  $M_o$  使轴扭转,轴的弯矩与扭矩图分别如图 8-8( $b$ )、( $c$ ) 所示。显然,横截面  $A$  为危险截面,该截面的弯矩与扭矩分别为

$$M = Pl$$

$$T = M_o$$

在横截面  $A$  上,同时存在弯曲正应力与扭转剪应力,其分布情况如图 8-9( $a$ ) 所示。由图可见,该截面的  $a$ 、 $b$  点(即水平直径的端点)为危险点,在此二点处,同时作用有最大弯曲正应力与最大扭转剪应力,其值分别为

$$\sigma_M = \frac{M}{W} \quad (a)$$

$$\tau_T = \frac{T}{W_p} = \frac{M}{2W} \quad (b)$$

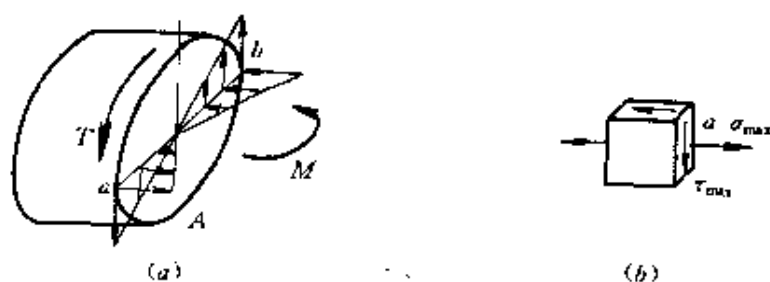


图 8-9

如果在  $a$  点处用横截面、径向纵截面以及平行轴表面的圆柱面切取微体, 则微体各截面的应力如图 8-9(b) 所示, 即处于单向与纯剪切的组合应力状态。所以, 如果轴用塑性材料制成, 则其强度条件可按式(7-18) 或式(7-19) 建立, 分别得

$$\sigma_{eq,3} = \sqrt{\sigma_M^2 + 4\tau_T^2} \leq [\sigma] \quad (8-8)$$

$$\sigma_{eq,4} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3\tau_T^2} \leq [\sigma] \quad (8-9)$$

将式(a)、(b) 代入式(8-8) 与式(8-9), 于是得塑性材料圆截面轴弯扭组合变形时的强度条件为

$$\sigma_{eq,3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (8-10)$$

或

$$\sigma_{eq,4} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (8-11)$$

上述二式既适用于实心圆截面轴, 也适用于空心圆截面轴。

有些杆件, 除发生弯扭组合变形外, 同时还承受轴向拉伸或轴向压缩作用, 即处于弯拉(压) 扭组合变形状态。对于这类杆件, 如果它们是用塑性材料制成, 则仍可利用式(8-8) 或式(8-9) 进行强度计算, 但需将式中的弯曲正应力, 改用弯曲正应力与轴向正应力之和代替, 即用  $\sigma_M + \sigma_N$  替换式中的  $\sigma_M$ 。

**例 3** 图 8-10 所示传动轴  $AB$ , 由电机带动。已知电机通过联轴器作用在截面  $A$  上的扭矩为  $M_1 = 1\text{kN} \cdot \text{m}$ , 皮带紧边与松边

的张力分别为  $N$  与  $N'$ , 且  $N = 2N'$ , 轴承  $C$ 、 $B$  间的距离  $l = 200\text{mm}$ , 皮带轮的直径  $D = 300\text{mm}$ , 轴用 A3 钢制成, 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 试按第四强度理论确定轴  $AB$  的直径。

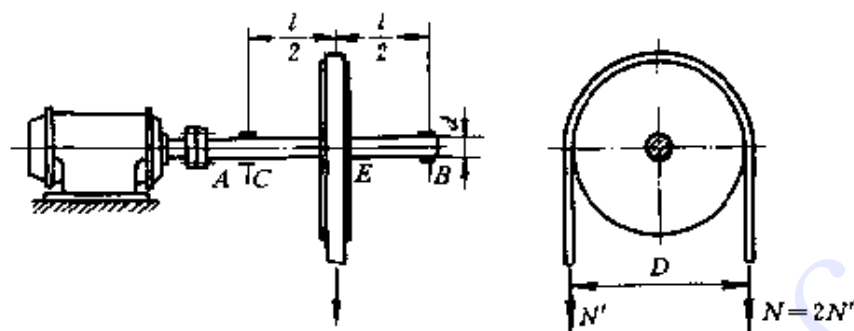


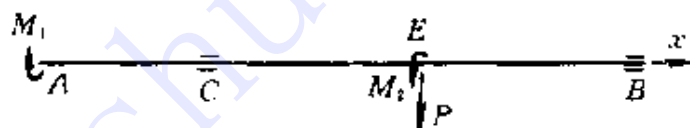
图 8-10

解 1. 外力分析

将皮带张力  $N$  与  $N'$  向轴  $AB$  的轴线简化, 得作用在截面  $E$  的横向力  $P$  与力矩  $M_2$  (图 8-11, a), 其值分别为

$$P = N + N' = 2N' + N' = 3N'$$

$$M_2 = \frac{ND}{2} - \frac{N'D}{2} = \frac{N'D}{2}$$



(a)



(b)



(c)

图 8-11

如上所述,作用在截面  $A$  上的扭力矩为  $M_1$ ,所以,由平衡方程

$$\sum M_x = 0, \quad M_1 - \frac{N'D}{2} = 0$$

得

$$N' = \frac{2M_1}{D} = \frac{2 \times 1 \times 10^3}{300} = 6.67 \text{ kN}$$

## 2. 内力分析

横向力  $P$  使轴弯曲,扭力矩  $M_1$  与  $M_2$  使轴扭转,轴的弯矩与扭矩图分别如图 8-11(b)、(c) 所示,横截面  $E_1$  为危险截面,该截面的弯矩与扭矩分别为

$$M = \frac{Pl}{4} = \frac{3N'l}{4} = \frac{3 \times 6.67 \times 10^3 \times 200}{4} \\ = 1 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$T = M_1 = 1 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

## 3. 设计轴径

根据式(8-11),要求

$$\frac{32 \sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

由此得轴  $AB$  的直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{1 \times 10^{12} + 0.75 \times 10^{12}}}{\pi \times 160}} \\ = 43.8 \text{ mm}$$

取

$$d = 44 \text{ mm}$$

**例 4** 图 8-12 所示齿轮轴,齿轮 1、2 的节圆直径分别为  $D_1 = 50 \text{ mm}$ 、 $D_2 = 130 \text{ mm}$ 。在齿轮 1 上,作用有切向力  $P_y = 3.83 \text{ kN}$ 、径向力  $P_z = 1.393 \text{ kN}$ ;在齿轮 2 上,作用有切向力  $P'_y = 1.473 \text{ kN}$ 、径向力  $P'_z = 0.536 \text{ kN}$ 。轴用 45 号钢制成,直径  $d = 22 \text{ mm}$ ,许用应力  $[\sigma] = 180 \text{ MPa}$ ,试按第三强度理论校核轴的强度。

**解** 1. 轴的计算简图

将作用有力  $P_y$ 、 $P_z$ 、 $P'_y$  与  $P'_z$  向轴  $AB$  的轴线简化,得轴的计算简图如图 8-13(a) 所示。图中,



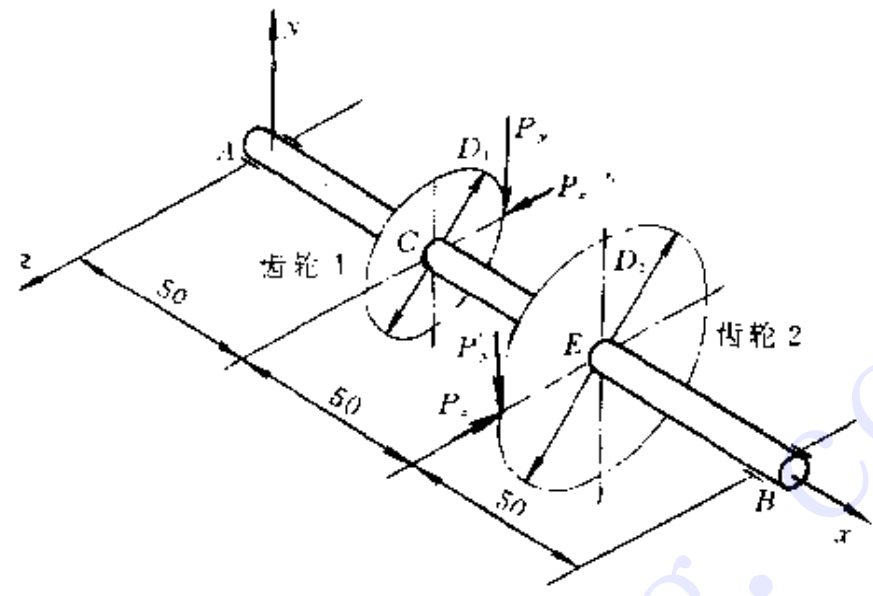


图 8-12

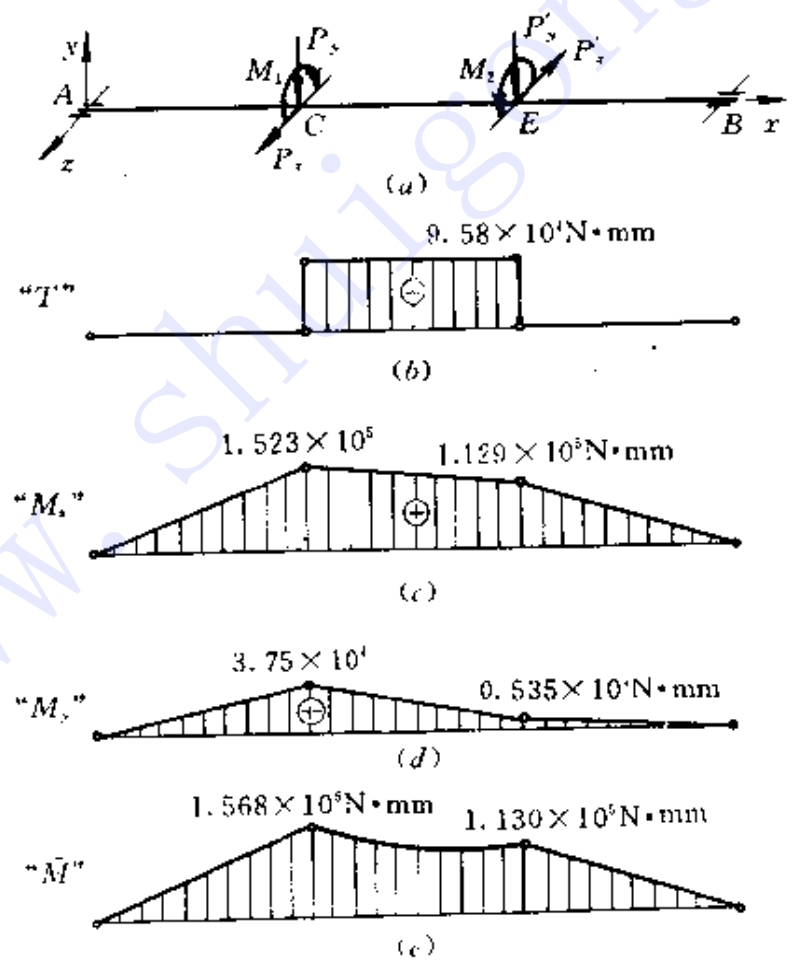


图 8-13

$$M_1 = \frac{P_y D_1}{2} = \frac{3.83 \times 10^3 \times 50}{2} = 9.58 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{mm}$$

$$M_2 = \frac{P'_y D_2}{2} = \frac{1.473 \times 10^3 \times 130}{2} = 9.58 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{mm}$$

## 2. 轴的内力分析

扭力矩  $M_1$ 、 $M_2$  使轴扭转；横向力  $P_y$ 、 $P'_y$  使轴在垂直面内弯曲； $P_z$  与  $P'_z$  使轴在水平面内弯曲。轴的扭矩与弯矩  $M_x$ 、 $M_y$  图分别如图 8-13(b)、(c) 与 (d) 所示。

对于圆形截面，任一直径均为截面的对称轴。因此，如果横截面上的总弯矩为

$$\bar{M} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

则横截面上的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{\bar{M}}{W}$$

由图 8-13(c)、(d) 可知，截面 A、B、C、E 的总弯矩分别为

$$\bar{M}_A = \bar{M}_B = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_C &= \sqrt{(3.75 \times 10^4)^2 + (1.523 \times 10^5)^2} \\ &= 1.568 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_E &= \sqrt{(0.535 \times 10^4)^2 + (1.129 \times 10^5)^2} \\ &= 1.130 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

根据上述  $\bar{M}$  值，画总弯矩图如图 8-13(e) 所示。可以证明，CE 段的总弯矩图必为凹曲线。

## 3. 强度校核

由图 8-13(b)、(e) 可知，横截面  $C_+$  为危险截面，该截面的总弯矩与扭矩分别为

$$\bar{M} = 1.568 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{mm}$$

$$T = 9.58 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{mm}$$

于是，根据式 (8-10)，得轴 AB 危险点处的相当应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{eq}, 3} &= \frac{32 \sqrt{\bar{M}^2 + T^2}}{\pi d^3} = \frac{32 \sqrt{(1.568 \times 10^5)^2 + (9.58 \times 10^4)^2}}{\pi \times 22^3} \\ &= 176 \text{MPa} < [\sigma] \end{aligned}$$

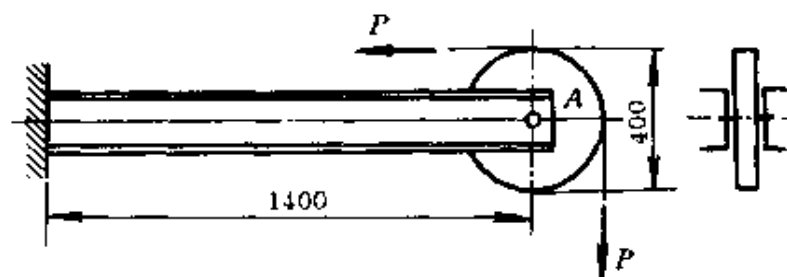
其值小于许用应力,说明轴  $AB$  符合强度要求。

## 复 习 题

1. 何谓组合变形?如何利用叠加法分析其应力?
2. 当杆件处于弯拉组合变形时,横截面上存在哪些内力?正应力如何分布?如何计算最大正应力?相应的强度条件是什么?
3. 何谓偏心拉伸(或压缩)?在偏心拉伸(或压缩)的条件下,杆件横截面上存在哪些内力?正应力如何分布?如何计算最大正应力?相应的强度条件是什么?如何确定中性轴的位置?中性轴的位置与偏心距之间有何关系?
4. 当圆轴处于弯扭组合变形时,横截面上存在哪些内力?应力如何分布?危险点处于何种应力状态?如何根据强度理论建立相应的强度条件?
5. 当圆轴处于弯拉(压)扭组合变形时,横截面上存在哪些内力?应力如何分布?危险点处于何种应力状态?如何根据强度理论建立相应的强度条件?

## 习 题

题 8.1 图示起重装置,滑轮  $A$  安装在槽钢组合梁的端部。已知载荷  $P = 40\text{kN}$ ,许用应力  $[\sigma] = 140\text{MPa}$ ,试选择槽钢型号。



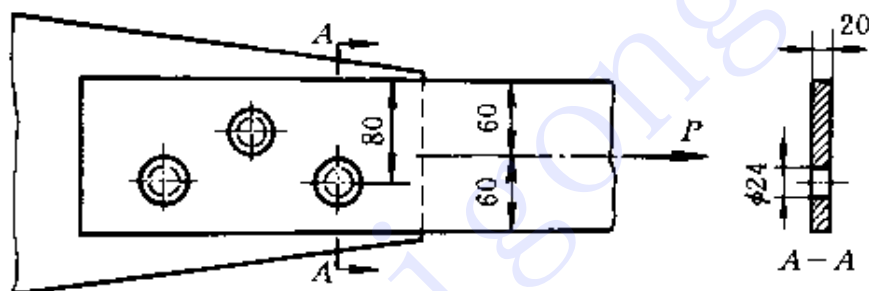
题 8.1 图

题 8.2 图示矩形截面钢杆, 用应变片测得其上、下表面的轴向正应变分别为  $\epsilon_a = 1.0 \times 10^{-3}$ 、 $\epsilon_b = 0.4 \times 10^{-3}$ , 材料的弹性模量  $E = 210\text{GPa}$ 。试绘横截面上的正应力分布图, 并求拉力  $P$  及其偏心距  $\delta$  的数值。



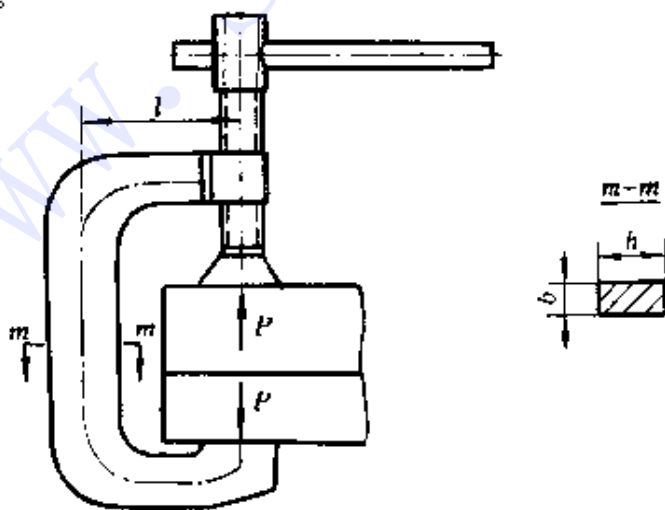
题 8.2 图

题 8.3 图示板件, 受拉力  $P = 150\text{kN}$  作用, 试绘横截面 A-A 上的正应力分布图, 并计算最大与最小正应力。



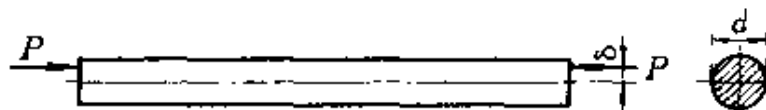
题 8.3 图

题 8.4 试确定图示夹具横截面  $m-m$  的高度  $h$ 。已知载荷  $P = 2\text{kN}$ , 偏心距  $l = 60\text{mm}$ , 截面宽度  $b = 10\text{mm}$ , 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。



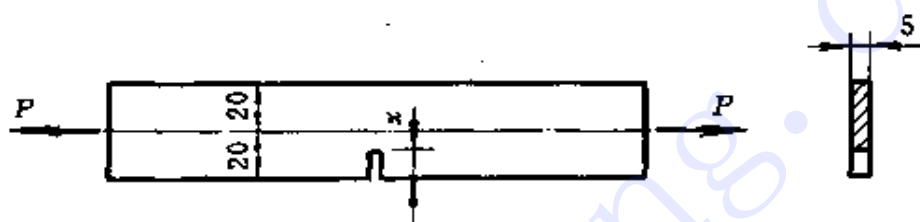
题 8.4 图

题 8.5 图示直径为  $d$  的圆截面铸铁杆, 承受偏心距为  $\delta$  的载荷  $P$  作用。试证明: 当  $\delta \leq d/8$  时, 横截面上不存在拉应力。



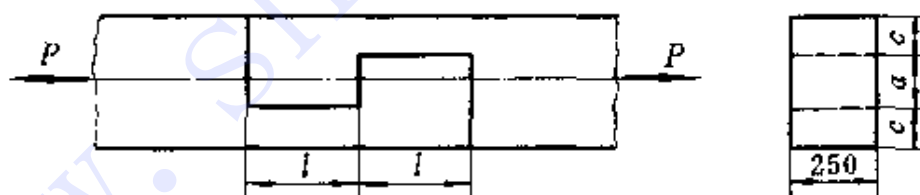
题 8.5 图

题 8.6 图示板件, 载荷  $P = 12\text{kN}$ , 许用应力  $[\sigma] = 100\text{MPa}$ , 试求板边切口的允许深度  $x$ 。



题 8.6 图

题 8.7 图示矩形截面木榫头, 承受拉力  $P = 50\text{kN}$  作用。在顺纹方向, 木材的许用挤压应力  $[\sigma_m] = 10\text{MPa}$ , 许用剪应力  $[\tau] = 1\text{MPa}$ , 许用拉应力  $[\sigma_+] = 6\text{MPa}$ , 许用压应力  $[\sigma_-] = 10\text{MPa}$ 。试确定接头尺寸  $a, l$  与  $c$ 。

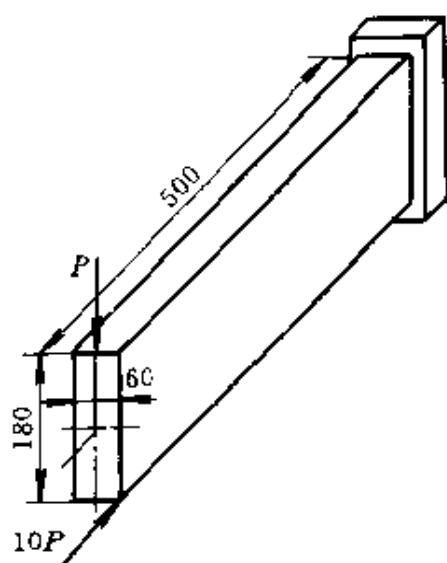


题 8.7 图

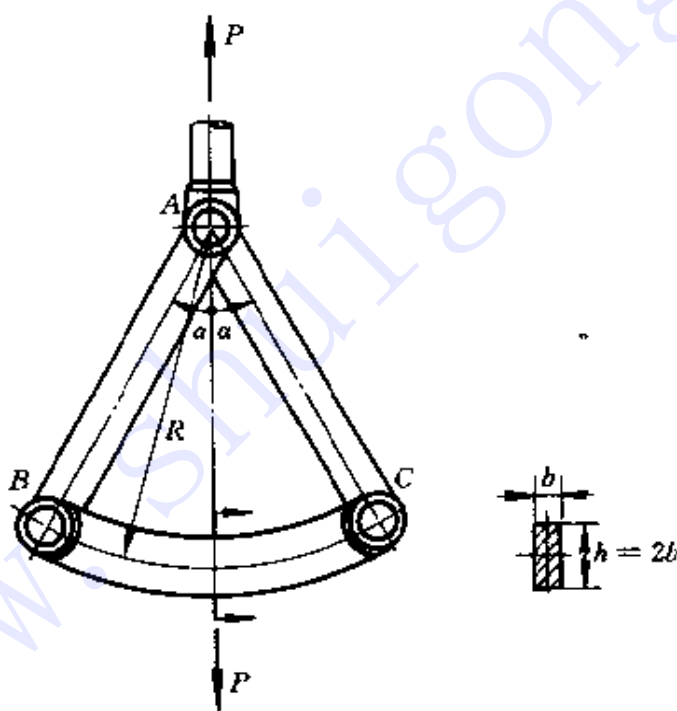
题 8.8 图示杆件, 同时承受横向力与偏心压力作用, 试确定  $P$  的许用值。材料的许用拉应力  $[\sigma_+] = 30\text{MPa}$ , 许用压应力  $[\sigma_-] = 90\text{MPa}$ 。

题 8.9 图示起重吊环, 横梁  $BC$  用锻钢制成, 试确定其横截面尺寸  $h$  与  $b$ 。已知:  $P = 1500\text{kN}$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $R = 500\text{mm}$ ,  $[\sigma] = 120\text{MPa}$ 。

题 8.10 图示结构, 承受载荷  $P$  作用, 试检查横梁的强度。已



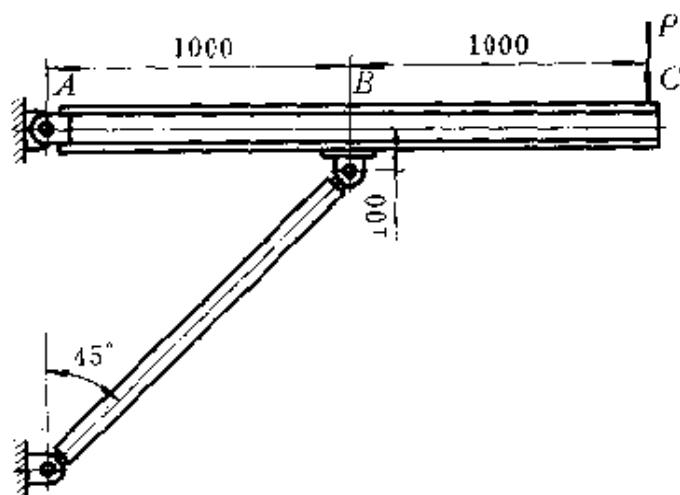
题 8.8 图



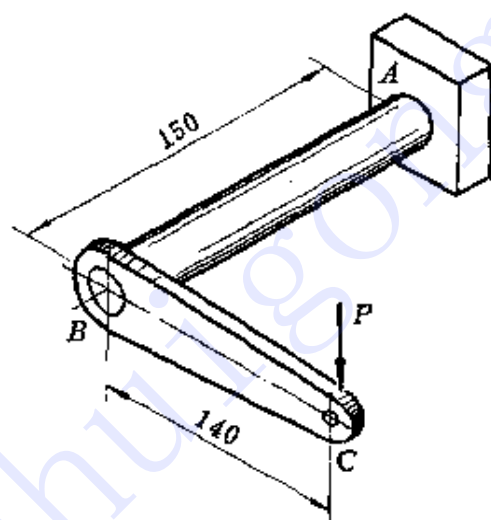
题 8.9 图

知载荷  $P = 12\text{kN}$ , 横梁用 No14 工字钢制成, 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。

题 8.11 图示钢质拐轴, 承受铅垂载荷  $P$  作用, 试按第三强度理论确定轴  $AB$  的直径。已知载荷  $P = 1\text{kN}$ , 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。



题 8.10 图



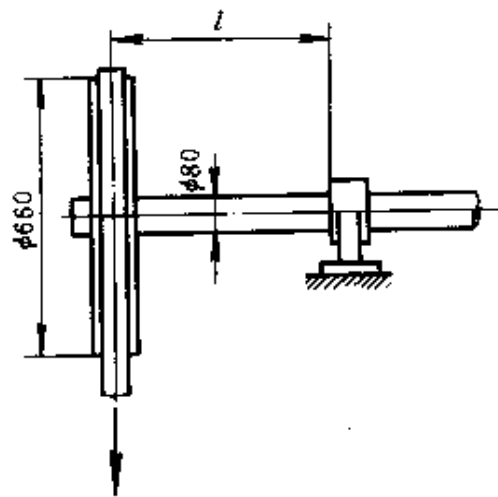
题 8.11 图

题 8.12 图示传动轴, 转速  $n = 110\text{r}/\text{min}$ , 传递功率  $N_p = 11\text{kW}$ , 皮带的紧边张力为其松边张力的三倍。若许用应力  $[\sigma] = 70\text{MPa}$ , 试按第三强度理论确定该传动轴外伸段的许可长度  $l$ 。

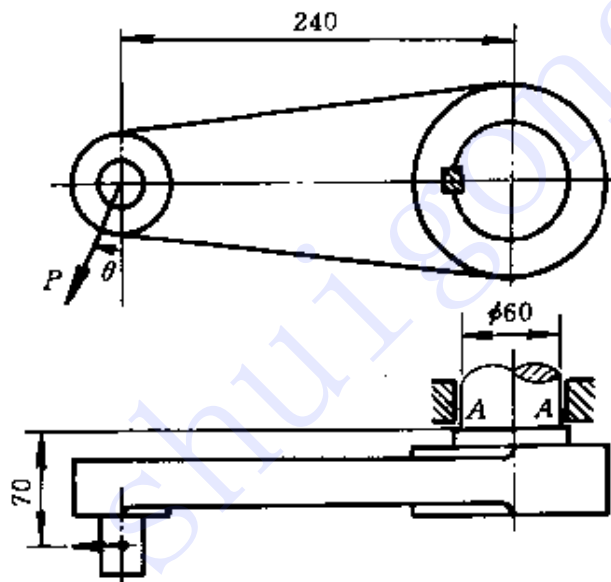
题 8.13 图示曲柄轴, 承受载荷  $P = 10\text{kN}$  作用, 试问  $\theta$  为何值时, 对截面 A-A 的强度最为不利, 相应的相当应力  $\sigma_{eq}$  为何值。

题 8.14 图示齿轮传动轴, 用钢制成。在齿轮 I 上, 作用有径向力  $P_r = 3.64\text{kN}$ 、切向力  $P_t = 10\text{kN}$ ; 在齿轮 II 上, 作用有切向力  $P_r = 5\text{kN}$ 、径向力  $P_t = 1.82\text{kN}$ 。若许用应力  $[\sigma] = 100\text{MPa}$ , 试按第四强度理论确定轴径。

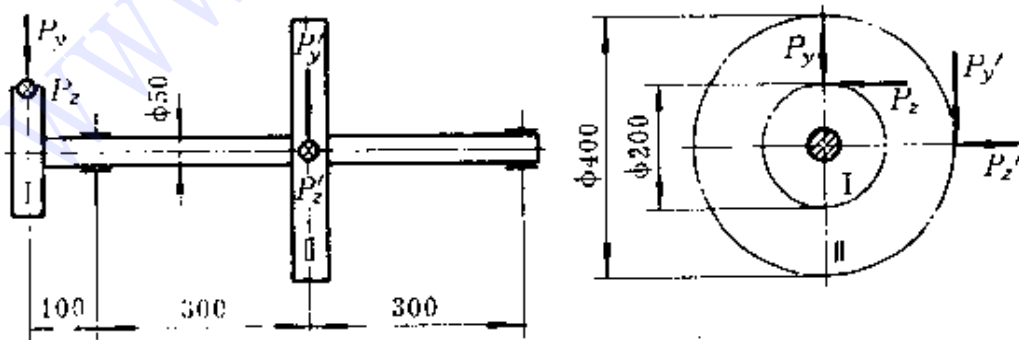




题 8.12 图

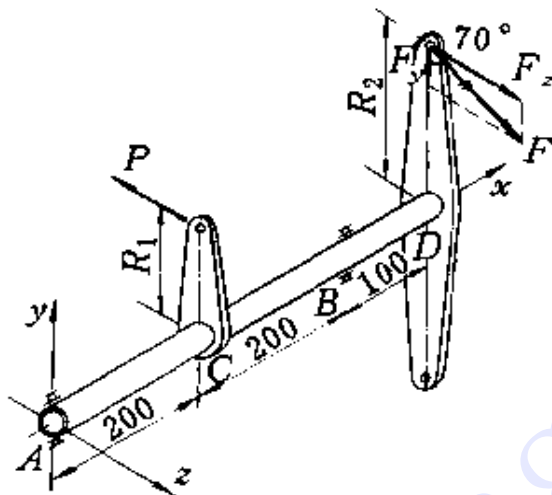


题 8.13 图



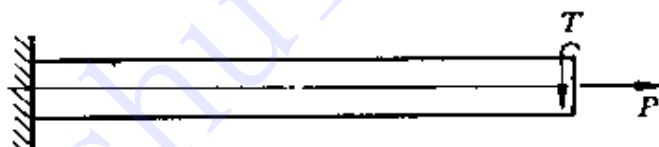
题 8.14 图

题 8.15 图示空心圆轴, 外径  $D = 30\text{mm}$ , 内径  $d = 27\text{mm}$ , 在载荷  $P, F$  作用下处于平衡状态, 试按第三强度理论计算轴危险点处的相当应力。已知:  $P = 1.6\text{kN}$ ,  $R = 100\text{mm}$ ,  $R_2 = 150\text{mm}$ 。



题 8.15 图

题 8.16 图示圆截面杆, 直径为  $d$ , 承受轴向力  $P$  与扭力矩  $T$  作用, 杆用塑性材料制成, 许用应力为  $[\sigma]$ , 试画出危险点处微体的应力状态图, 并按第四强度理论建立杆的强度条件。



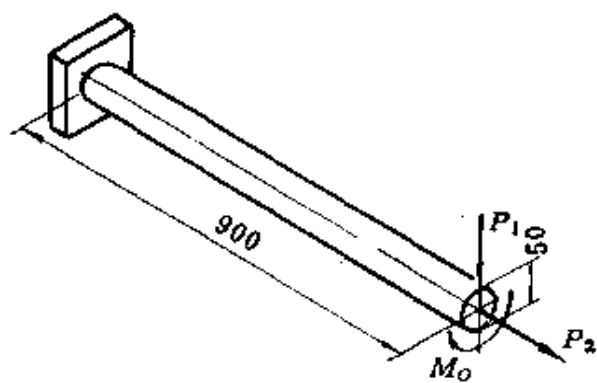
题 8.16 图

题 8.17 若题 8.16 所述杆用脆性材料制成, 许用拉应力为  $[\sigma]$ , 试解该题。

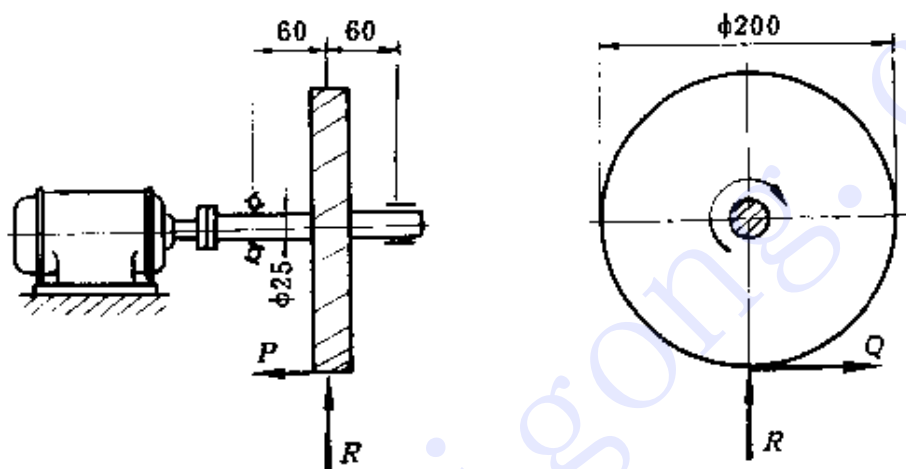
题 8.18 图示圆截面钢杆, 承受载荷  $P_1, P_2$  与扭力矩  $M_0$  作用, 试按第三强度理论校核杆的强度。已知载荷  $P_1 = 500\text{N}$ ,  $P_2 = 15\text{kN}$ , 扭力矩  $M_0 = 1.2\text{kN} \cdot \text{m}$ , 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。

题 8.19 图示圆截面钢轴, 由电机带动。在斜齿轮的齿面上, 作用有切向力  $Q = 1.9\text{kN}$ 、径向力  $R = 740\text{N}$  以及平行于轴线的外力  $P = 660\text{N}$ 。若许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 试按第四强度理论校核轴的强度。

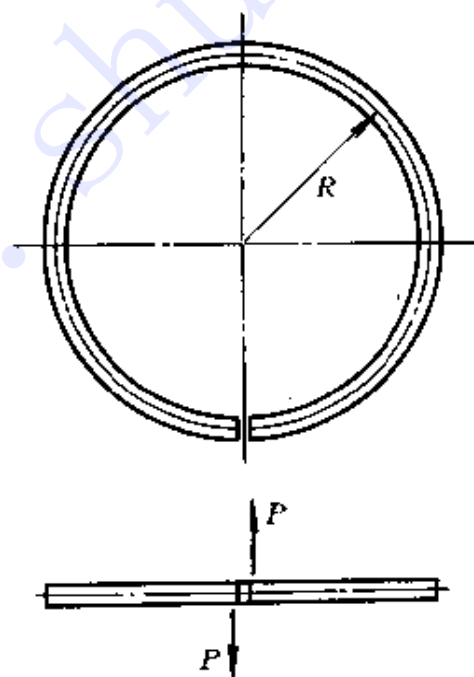
题 8.20 图示圆截面圆环, 缺口处承受一对相距极近的载荷



题 8.18 图



题 8.19 图

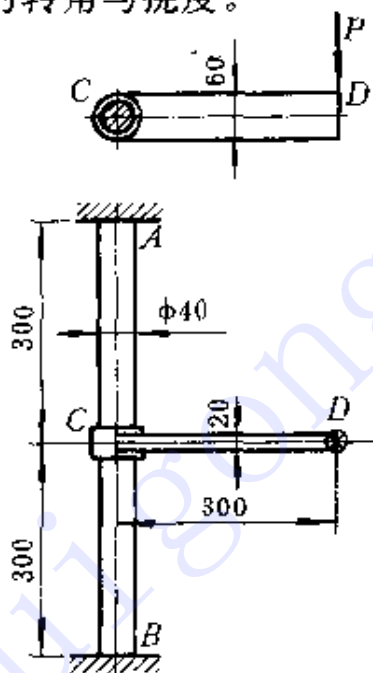


题 8.20 图

$P$ 。已知圆环轴线的半径为  $R$ , 截面的直径为  $d$ , 材料的许用应力为  $[\sigma]$ , 试按第三强度理论确定载荷  $P$  的许用值。

\* 题 8.21 图示结构, 由轴  $AB$  与梁  $CD$  组成。在梁端截面  $D$  处, 作用一铅垂方向的集中力  $P$ 。已知:  $P = 1\text{kN}$ ,  $E = 210\text{GPa}$ ,  $G = 0.4E$ 。

- (1) 试按第三强度理论计算轴内危险点处的相当应力;
- (2) 试计算截面  $D$  的转角与挠度。



题 8.21 图

## 第九章 压杆稳定问题

### § 9-1 稳定性概念

在绪论中曾经指出,当作用在细长杆上的轴向压力达到或超过一定限度时,杆件可能突然变弯,即产生失稳现象。因此,对于轴向受压杆件,除应考虑其强度与刚度问题外,还应考虑其稳定性问题。

首先介绍关于平衡稳定性的一些概念。

图 9-1(a) 所示刚性直杆  $AB$ , 该杆  $A$  端为铰支,  $B$  端用弹簧常数为  $c$  的弹簧支持。在载荷  $P$  作用下, 该杆在竖直位置保持平衡。现在, 给杆以微小侧向干扰, 使杆端产生微小侧向位移  $\delta$  (图 9-1,

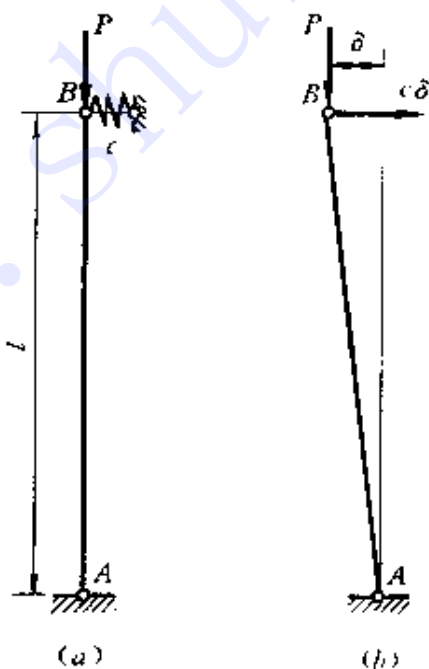


图 9-1

b)。这时, 外力  $P$  对  $A$  点的力矩  $P\delta$  使杆更加偏斜, 而弹簧反力  $c\delta$  对  $A$  点的力矩  $c\delta l$ , 则力图使杆恢复其初始位置。如果  $P\delta < c\delta l$ , 即  $P < cl$ , 则在上述干扰解除后, 杆将自动恢复至初始位置, 说明在该载荷作用下, 杆在竖直位置的平衡是稳定的; 如果  $P\delta > c\delta l$ , 即  $P > cl$ , 则在干扰解除后, 杆不仅不能自动返回其初始位置, 而且继续偏转, 说明在该载荷作用下, 杆在竖直位置的平衡是不稳定的; 如果  $P\delta = c\delta l$ , 即  $P = cl$ , 则杆既可在竖直位置保持平衡, 也可在微小偏斜状态保持平衡, 说明在该载荷作用下, 杆处于随遇平衡状态。由此可见, 当杆长  $l$  与弹簧常数  $c$  一定时, 杆  $AB$  在竖直位置的平衡性质, 由载荷  $P$  的大小而定。

对于轴向受压的细长直杆也存在类似情况。如图 9-2(a) 所示, 若杆件为理想直杆, 且压力  $P$  沿杆件轴线, 则杆受力后将保持直线形状。然而, 如果给杆以微小侧向干扰使其弯曲(图 9-2, b), 则在去掉干扰后将出现两种不同现象: 当轴向压力  $P$  较小时, 压杆最终将恢复其原有的直线形状(图 9-2, c); 当轴向压力  $P$  较大时, 则压杆不仅不能恢复直线形状, 而且继续弯曲, 产生显著的弯曲变形(图 9-2, d)。

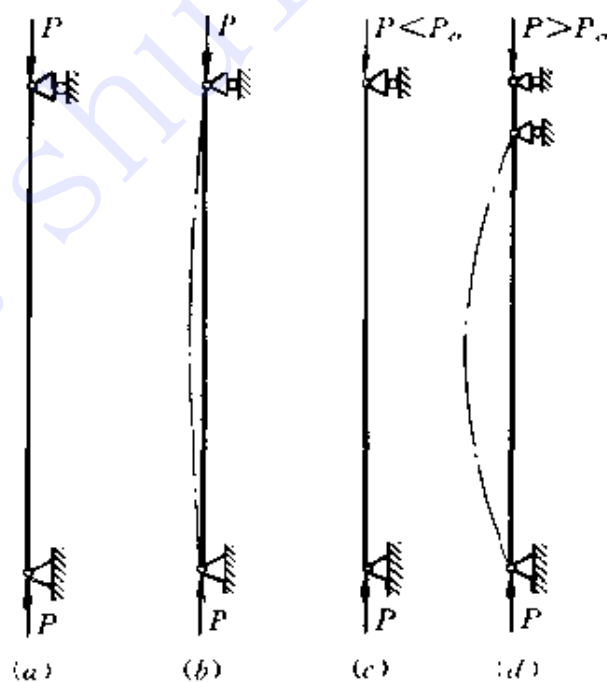


图 9-2

上述现象表明,在轴向压力逐渐增大的过程中,压杆经历了两种不同性质的平衡。当轴向压力较小时,压杆直线形式的平衡是稳定的;而当轴向压力较大时,压杆直线形式的平衡则是不稳定的。使压杆直线形式的平衡开始由稳定转变为不稳定的轴向压力值,称为压杆的**临界载荷**,并用 $P_c$ 表示。在临界载荷作用下,压杆既可在直线状态保持平衡,也可在微弯状态保持平衡,即处于随遇平衡状态。所以,当轴向压力达到或超过压杆的临界载荷时,压杆即产生失稳现象。

由此可见,研究压杆稳定性问题的关键是确定其临界载荷。若将压杆的工作压力控制在由临界载荷所确定的容许范围内,则压杆不致失稳。

## § 9-2 临界载荷的欧拉公式

### 一、两端铰支细长压杆的临界载荷

由上述分析可知,只有当轴向压力 $P$ 等于临界载荷 $P_c$ 时,压杆才可能在微弯状态保持平衡。因此,使压杆在微弯状态保持平衡的最小轴向压力即压杆的临界载荷。现以两端铰支细长压杆为例,说明确定临界载荷的方法。

如图9-3所示,设压杆在轴向压力 $P$ 作用下处于微弯平衡状态,则当杆内应力不超过材料的比例极限时,压杆挠曲轴方程 $y = y(x)$ 应满足下述关系式:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

由图9-2可知,压杆 $x$ 截面的弯矩为

$$M(x) = -Py$$

所以,压杆挠曲轴的近似微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0$$

其通解则为



$$y = a \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + b \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x \quad (a)$$

式中, 常数  $a, b$  与  $P$  均为未知数, 其值由压杆的位移边界条件与变形状态确定。

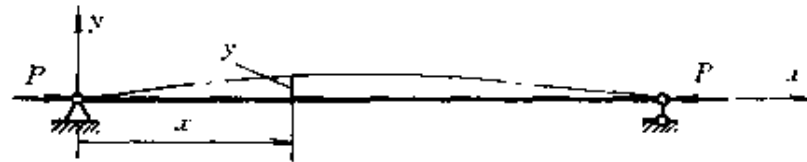


图 9-3

两端铰支压杆的位移边界条件为:

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处, } y = 0 \quad (1)$$

$$\text{在 } x = l \text{ 处, } y = 0 \quad (2)$$

由式(a)与条件(1)可知

$$b = 0$$

因此, 式(a)变为

$$y = a \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \quad (b)$$

即 两端铰支压杆临界状态时的挠曲轴为一正弦曲线, 其最大挠度  $a$  则取决于压杆微弯的程度。

由式(b)与条件(2)可知

$$a \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} l = 0$$

上述方程有两组可能的解, 或者  $a = 0$ , 或者  $\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} l = 0$ 。然而, 如果  $a = 0$ , 则由式(b)可知, 各截面的挠度均为零, 即压杆的轴线仍为直线, 而这与微弯状态的前提不符。因此, 其解应为

$$\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} l = 0$$

而能满足此条件, 则要求

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}l = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

由此得

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

如上所述,使压杆在微弯状态下保持平衡的最小轴向压力即压杆的临界载荷。因此,由上式并取  $n = 1$ ,即得两端铰支压杆的临界载荷为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (9-1)$$

上式通常称为**欧拉公式**。由该式可以看出,两端铰支细长压杆的临界载荷与杆的截面抗弯刚度成正比,与杆长的平方成反比。

要注意的是,如果压杆两端为球形铰支,则式(9-1)中的惯性矩  $I$  应为压杆横截面的最小惯性矩。

## 二、其它细长压杆的临界载荷

压杆的支持方式多种多样,除上述两端铰支压杆外,还存在其它方式支持的压杆,例如一端自由、另一端固定的压杆,一端铰支、另一端固定的压杆,以及两端均固定的压杆,等等。这些压杆的临界载荷,同样可按上述方法确定,现将计算结果列于表 9-1。





从表中可以看出,上述几种压杆的临界载荷公式基本相似,只是分母中  $l$  前的系数不同。为应用方便,将上述各公式统一写成如下形式:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (9-2)$$

式中,  $\mu$  称为**长度系数**,代表支持方式对临界载荷的影响,其值见表 9-1;  $\mu l$  称为**相当长度**。式(9-2)仍称为欧拉公式。

上述几种支持情况的相当长度之值是不难理解的。两端铰支时,压杆的相当长度为  $l$ ,可视为基本情况。对于一端自由、另一端固定长为  $l$  的压杆,该杆临界状态时的挠曲轴,与长为  $2l$  的两端铰

表 9-1

支持方式	两端铰支	一端自由 一端固定	两端固定	一端铰支 一端固定
挠曲轴形状				
$P_{cr}$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$
$\mu$	1.0	2.0	0.5	0.7

支压杆挠曲轴的一半相同(图 9-4), 因此, 如果两压杆的抗弯刚度相同, 则它们的临界载荷也相同。余类推。可见, 所谓相当长度即相当的两端铰支压杆的长度。

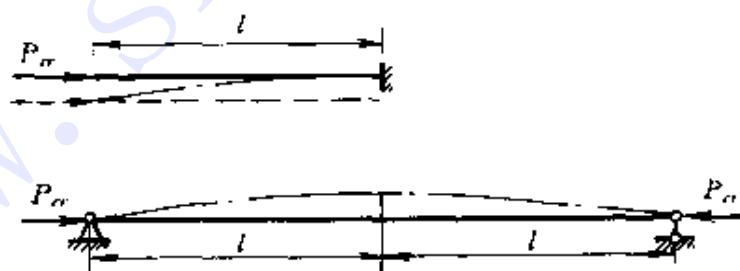


图 9-4

**例 1** 图 9-5 所示细长圆截面连杆, 长度  $l = 800\text{mm}$ , 直径  $d = 20\text{mm}$ , 材料为 A3 钢, 其弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 试计算连杆的临界载荷。

**解** 1. 临界载荷计算

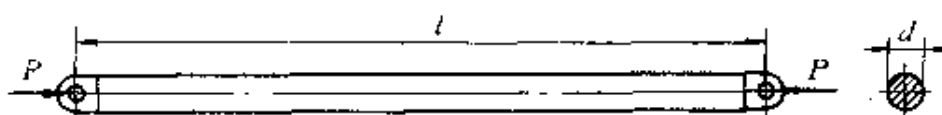


图 9-5

该连杆为两端铰支细长压杆, 由式(9-1)可知, 其临界载荷为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E}{l^2} \cdot \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi^3 E d^4}{64 l^2}$$

$$= \frac{\pi^3 \times 200 \times 10^3 \times 20^4}{64 \times 800^2} = 24.2 \text{ kN}$$

## 2. 讨论

A3 钢的屈服应力  $\sigma_s = 235 \text{ MPa}$ , 因此, 使连杆压缩屈服所需之轴向压力为

$$P_s = \frac{\pi d^3 \sigma_s}{4} = \frac{\pi \times 20^3 \times 235}{4} = 73.8 \text{ kN} > P_{cr}$$

上述计算说明, 细长压杆的承压能力是由稳定性要求确定的。

## § 9-3 中柔度杆的临界应力

欧拉公式是在线弹性条件下建立的, 本节研究该公式的适用范围以及杆的非弹性稳定问题。

### 一、临界应力与柔度

压杆处于临界状态时横截面上的平均应力, 称为压杆的**临界应力**, 并用  $\sigma_{cr}$  表示。由式(9-2)可知, 细长压杆的临界应力为

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2} \frac{I}{A} \quad (2)$$

在上式中, 比值  $I/A$  仅与截面的形状及尺寸有关, 将其用  $i^2$  表示, 即

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (9-3)$$

上述几何量  $i$  称为截面的**惯性半径**, 其量纲为  $[L]$ 。将上式代入式 (a), 并令

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad (9-4)$$

则细长压杆的临界应力为

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (9-5)$$

式 (9-5) 称为**欧拉临界应力公式**。式中的  $\lambda$  为一无量纲量, 称为**柔度**或**长细比**, 它综合地反映了压杆的长度 ( $l$ )、支持方式 ( $\mu$ ) 与截面几何性质 ( $i$ ) 对临界应力的影响。公式 (9-5) 表明, 细长压杆的临界应力, 与柔度的平方成反比, 柔度愈大, 临界应力愈低。

## 二、欧拉公式的适用范围

欧拉公式是根据挠曲轴微分方程建立的, 而该方程仅适用于杆内应力不超过比例极限  $\sigma_p$  的情况, 因此, 欧拉公式的适用范围为

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$$

或

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

若令

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (9-6)$$

即仅当  $\lambda \geq \lambda_p$  时, 欧拉公式才是正确的。

由式 (9-6) 可知,  $\lambda_p$  之值仅与材料的弹性模量  $E$  及比例极限  $\sigma_p$  有关, 故  $\lambda_p$  之值仅随材料而异。以低碳钢 A3 为例, 其弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 比例极限  $\sigma_p = 196\text{MPa}$ , 代入式 (9-6), 得

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{200 \times 10^3}{196}} \approx 100$$

柔度  $\lambda \geq \lambda_p$  的压杆, 称为**大柔度杆**或**长柱**。因此, 欧拉公式仅适用于大柔度杆。由此不难看出, 前面经常提到的所谓细长杆, 实际上即大柔度杆。

### 三、中柔度杆的临界应力

压杆的柔度愈小, 其稳定性愈好, 愈不容易失稳。试验表明, 当压杆的柔度小于一定数值  $\lambda_c$  时, 强度问题又成为主要问题。这时, 压杆的承压能力  $P^0$  由其抗压强度决定。例如对于由塑性材料制成的压杆, 其承压能力即为

$$P^0 = A\sigma_s$$

柔度  $\lambda < \lambda_c$  的压杆, 称为**小柔度杆**或**短柱**。

柔度介乎  $\lambda_c$  与  $\lambda_p$  之间的压杆, 称为**中柔度杆**或**中柱**, 其临界应力高于材料的比例极限, 通常按经验公式进行计算。常见的经验公式有直线公式与抛物线公式等。计算临界应力的直线公式为

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \quad (9-7)$$

式中, 常数  $a, b$  与材料的力学性能有关, 其量纲为  $[F]/[L]^2$ 。几种常用材料的  $a, b, \lambda_p$  与  $\lambda_c$  之值如表 9-2 所示。

表 9-2

材 料	$a$	$b$	$\lambda_p$	$\lambda_c$
A3 钢 $\sigma_s = 235\text{MPa}$ $\sigma_b \geq 372\text{MPa}$	304	1.12	100	61.4
优质碳钢 $\sigma_s = 306\text{MPa}$ $\sigma_b \geq 470\text{MPa}$	460	2.57	100	60
硅钢 $\sigma_s = 353\text{MPa}$ $\sigma_b \geq 510\text{MPa}$	577	3.74	100	60
铬钼钢	980	5.29	55	
硬 铝	392	3.26	50	
铸 铁	331.9	1.453		
松 木	39.2	0.199	59	

综上所述, 根据压杆的柔度可将其分为三类, 并分别按不同方式确定其极限应力。 $\lambda \geq \lambda_p$  的压杆属于细长杆或大柔度杆, 按欧拉公式计算其临界应力;  $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_p$  的压杆, 属于中柔度杆, 可按经验公式计算其临界应力;  $\lambda < \lambda_0$  的压杆属于小柔度杆, 应按强度问题处理。在上述三种情况下, 临界应力(或极限应力)随柔度变化的曲线如图 9-6 所示, 称为**临界应力总图**。

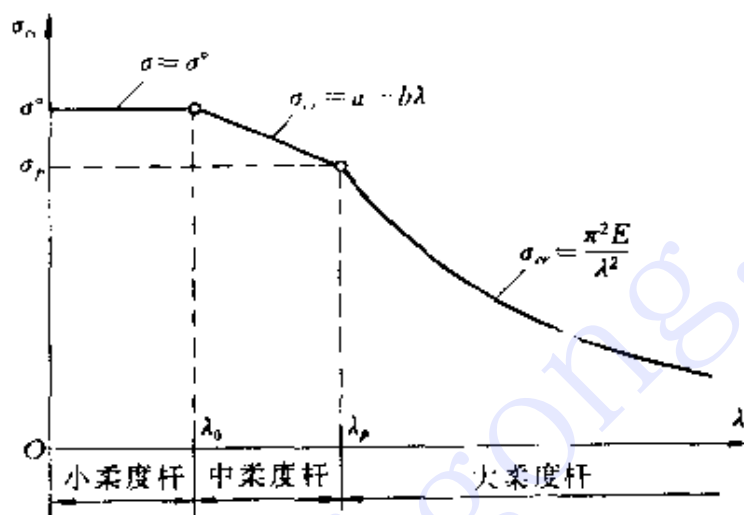


图 9-6

**例 2** 图 9-7 所示活塞杆, 用硅钢制成, 其直径  $d = 40\text{mm}$ , 外伸部分的最大长度  $l = 1\text{m}$ , 弹性模量  $E = 210\text{GPa}$ ,  $\lambda_p = 100$ , 试确定活塞杆的临界载荷。

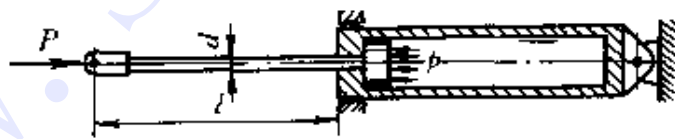


图 9-7

解 1. 活塞杆的计算简图

由图可知, 当活塞靠近缸体顶盖时, 活塞杆的外伸部分最长, 稳定性最差。此外, 根据缸体的固定方式及其对活塞杆的约束情况, 活塞杆可近似看作是一端自由、另一端固定的压杆, 其长度系数为

$$\mu = 2$$



## 2. 柔度计算

由式(9-3)可知, 活塞杆横截面的惯性半径为

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{40}{4} = 10\text{mm}$$

根据式(9-4), 得活塞杆的柔度为

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \times 1000}{10} = 200$$

## 3. 临界载荷计算

由以上分析可知

$$\lambda > \lambda_p$$

即活塞杆属于大柔度杆, 其临界应力应按欧拉公式进行计算。

根据式(9-5), 得活塞杆的临界应力为

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^3}{200^2} = 51.8\text{MPa}$$

而相应的临界载荷则为

$$P_{cr} = \sigma_{cr} \frac{\pi d^2}{4} = \frac{51.8 \times \pi \times 40^2}{4} = 65.1\text{kN}$$

**例3** 图9-8(a)所示连杆, 用硅钢制成, 连杆横截面的面积  $A = 720\text{mm}^2$ , 惯性矩  $I_z = 6.5 \times 10^4\text{mm}^4$ ,  $I_y = 3.8 \times 10^4\text{mm}^4$ , 试确定连杆的临界载荷, 并判断横截面的形状设计是否合理。

解 1. 失稳形式判断

在轴向压力作用下, 连杆究竟是在  $x-y$  平面内失稳(图9-8, b), 还是在  $x-z$  平面内失稳(图9-8, c), 必须进行判断。

如果连杆在  $x-y$  平面内失稳(即横截面绕  $z$  轴转动), 则连杆两端可视为铰支, 长度系数  $\mu = 1$ , 连杆的柔度为

$$\lambda_z = \frac{(\mu l)_z}{\sqrt{\frac{I_z}{A}}} = \frac{1 \times 700}{\sqrt{\frac{6.5 \times 10^4}{720}}} = 73.7$$

如果连杆在  $x-z$  平面内失稳(即横截面绕  $y$  轴转动), 则连杆两端接近于固定端, 可取长度系数  $\mu = 0.7$ , 连杆的柔度为

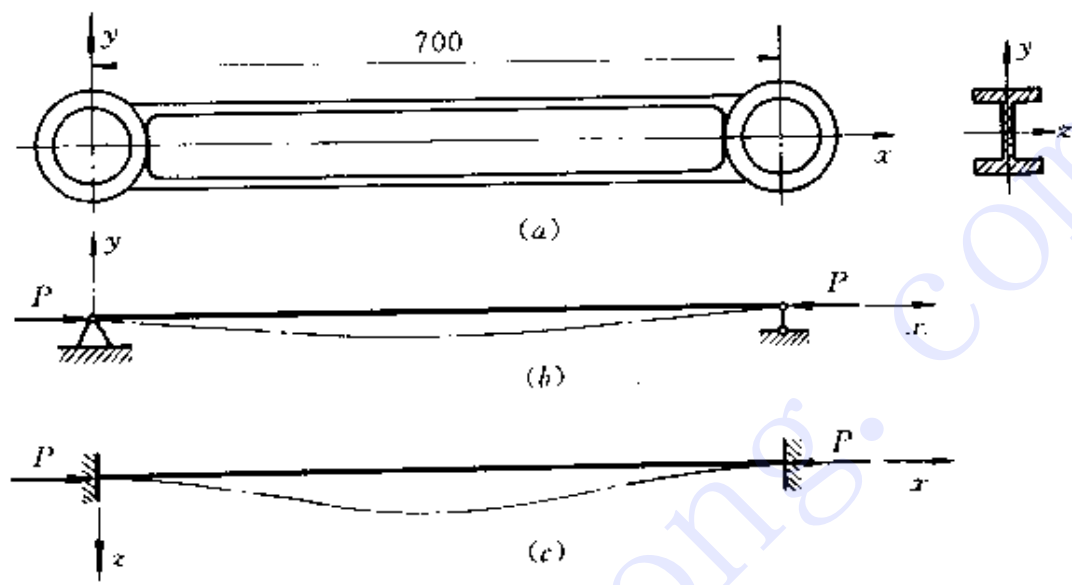


图 9-8

$$\lambda_y = \frac{(\mu l)_y}{\sqrt{\frac{I_y}{A}}} = \frac{0.7 \times 700}{\sqrt{\frac{3.8 \times 10^4}{720}}} = 67.4 < \lambda_z$$

可见, 连杆将首先在  $x-y$  平面内失稳。

### 2. 临界载荷计算

由表 9-2 查得, 硅钢的  $\lambda_0 = 60, \lambda_p = 100, a = 577\text{MPa}, b = 3.74\text{MPa}$ , 可见, 连杆属于中柔度杆, 其临界载荷为

$$P_{cr} = A(a - b\lambda) = 720 \times (577 - 3.74 \times 73.7) = 216\text{kN}$$

### 3. 讨论

如上所述, 连杆的柔度为

$$\lambda_z = 73.7$$

$$\lambda_y = 67.4$$

二者相当接近, 说明该连杆的设计是合理的。当然, 最理想的设计是使

$$\lambda_y = \lambda_z$$

## § 9-4 压杆的稳定条件

### 一、压杆的稳定条件

由以上分析可知, 为了保证压杆在轴向压力  $P$  作用下不致失稳, 必须满足下述条件:

$$P \leq \frac{P_{cr}}{n_{st}} = [P_{st}] \quad (9-8)$$

式中:  $n_{st}$  为稳定安全系数;  $[P_{st}]$  为稳定许用压力。式(9-8)称为压杆的**稳定条件**。

将式(9-8)中的  $P$  与  $P_{cr}$  同除以压杆的横截面面积  $A$ , 得

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{cr}}{n_{st}} = [\sigma_{st}] \quad (9-9)$$

式中:  $[\sigma_{st}]$  为稳定许用应力。式(9-9)为用应力表示的压杆稳定条件。

在选择稳定安全系数时, 除应遵循 § 2-6 所述确定强度安全系数的一般原则外, 还应考虑加载偏心与杆的初曲等不利因素。因此, 稳定安全系数一般应大于强度安全系数。其值可从有关设计规范和手册中查得。几种常见压杆的稳定安全系数如表 9-3 所示。

表 9-3

实际压杆	金属结构中的压杆	矿山、冶金设备中压杆	机床丝杠	精密丝杠	水平长丝杠	磨床油缸活塞杆	低速发动机挺杆	高速发动机挺杆
$n_{st}$	1.8 ~ 3.0	4 ~ 8	2.5 ~ 4	> 4	> 4	2 ~ 5	4 ~ 6	2 ~ 5

还应指出, 由于压杆的稳定性取决于整个杆件的抗弯刚度, 因此, 在确定压杆的临界载荷或临界应力时, 可不必考虑杆件局部削弱(例如铆钉孔或油孔等)的影响, 而按未削弱截面计算横截面的惯性矩与截面面积。但是, 对于受削弱的横截面, 则还应进行强度校核。

## 二、折减系数法

在工程实际中,也常采用所谓折减系数法进行稳定性计算。在这种情况下,稳定许用应力被写成为

$$[\sigma_{st}] = \phi[\sigma] \quad (9-10)$$

而稳定条件则为

$$\sigma \leq \phi[\sigma] \quad (9-11)$$

式中, $[\sigma]$ 为许用压应力, $\phi$ 是一个小于1的数,称为折减系数或稳定系数,其值与压杆的柔度及所用材料有关,几种常用材料的 $\phi-\lambda$ 曲线如图9-9所示,这些曲线是根据计算、实验与经验制成的。

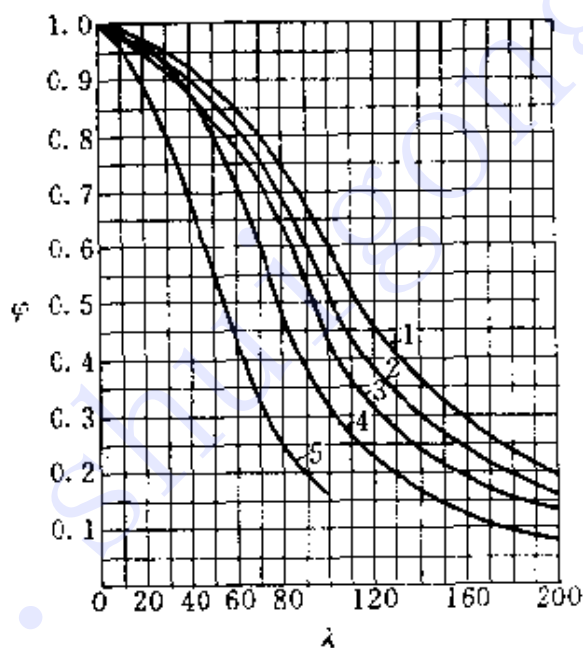


图 9 9

1—钢:A1、A2、A3、A4; 2—钢:A5; 3—低合金钢 $\sigma_s > 314\text{MPa}$ ;  
4—木材; 5—铸铁。

关于各种轧制与焊接钢构件的 $\phi-\lambda$ 曲线,可查阅《钢结构设计规范(GBJ17—88)》,而木制受压构件的 $\phi-\lambda$ 曲线,则可查阅《木结构设计规范(GBJ 5—88)》。

**例 4** 图9-10所示钢结构,承受载荷 $P$ 作用,试校核斜撑杆的稳定性。已知载荷 $P = 12\text{kN}$ ,斜撑杆用低碳钢A3制成,其外径 $D$

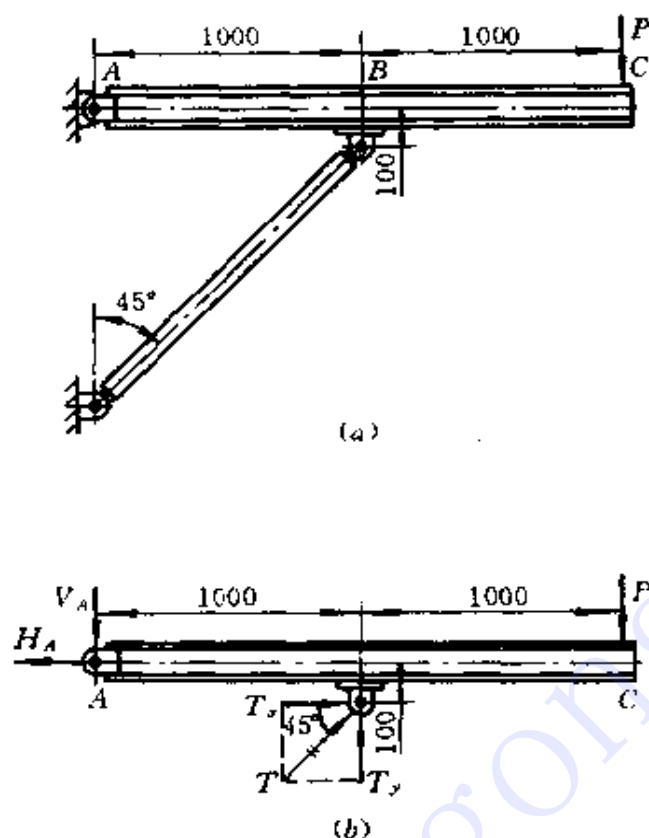


图 9-10

$= 45\text{mm}$ , 内径  $d = 36\text{mm}$ , 稳定安全系数  $n_{st} = 2.5$ 。

解 1. 斜撑杆的受力分析

横梁的受力如图 9-10(b) 所示, 由平衡方程

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, & T \sin 45^\circ \times 1000 + T \cos 45^\circ \times 100 - P \times 2000 \\ & = 0 \end{aligned}$$

得斜撑杆承受的轴向压力为

$$T = 30.9\text{kN}$$

2. 斜撑杆的稳定性校核

由式(9-3)可知, 斜撑杆横截面的惯性半径为

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}} \frac{4}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{45^2 + 36^2}}{4} = 14.4\text{mm} \end{aligned}$$

故斜撑杆的柔度为

$$\lambda = \frac{\mu_{DF}}{i} = \frac{1 \times \sqrt{2} \times 1000}{14.4} = 98.1$$

由表9-2查得, 低碳钢A3的 $\lambda = 61.4$ ,  $\lambda_p = 100$ ,  $a = 304\text{MPa}$ ,  
 $b = 1.12\text{MPa}$ , 可见, 斜撑杆为中柔度杆, 其临界载荷为

$$\begin{aligned} P_{cr} &= \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}(a - b\lambda) \\ &= \frac{\pi(45^2 - 36^2)}{4}(304 - 1.12 \times 98.1) \\ &= 111.1\text{kN} \end{aligned}$$

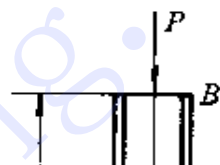
而许用压力则为

$$[P_{st}] = \frac{P_{cr}}{n_{st}} = \frac{111.1}{2.5} = 44.4\text{kN}$$

可见,

$$T < [P_{st}]$$

说明斜撑杆的稳定性符合要求



从型钢规格表中查得, N<sup>o</sup>16 工字钢的横截面面积  $A = 2610\text{mm}^2$ , 最小惯性半径  $i_{\min} = 18.9\text{mm}$ , 所以, 如果选用该型钢作立柱, 则其柔度和横截面上的工作应力分别为

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \times 2000}{18.9} = 211$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{200 \times 10^3}{2610} = 76.6\text{MPa}$$

由  $\phi$ - $\lambda$  图中查得, 相应于  $\lambda = 211$  的折减系数为  $\phi'_1 = 0.17$ , 所以, 立柱的稳定许用应力为

$$[\sigma_{st}] = \phi'_1 [\sigma] = 0.17 \times 160 = 27.2\text{MPa} < \sigma$$

工作应力超过稳定许用应力甚多, 需作进一步试算。

### 3. 第二次试算

作为第二次试算, 设取

$$\phi_2 = \frac{\phi_1 + \phi'_1}{2} = \frac{0.50 + 0.17}{2} = 0.335$$

得

$$A \geq \frac{200 \times 10^3}{0.335 \times 160} = 3731\text{mm}^2$$

从型钢规格表中查得 N<sup>o</sup>22a 工字钢的横截面面积  $A = 4200\text{mm}^2$ , 最小惯性半径  $i_{\min} = 23.1\text{mm}$ , 所以

$$\lambda = \frac{2 \times 2000}{23.1} = 173$$

由  $\phi$ - $\lambda$  图中查得相应的折减系数为  $\phi'_2 = 0.26$ , 因此, 如果选用 N<sup>o</sup>22a 工字钢作立柱, 则

$$[\sigma_{st}] = 0.26 \times 160 = 41.6\text{MPa}$$

$$\sigma = \frac{200 \times 10^3}{4200} = 47.6\text{MPa} > [\sigma_{st}]$$

工作应力仍超过稳定许用应力, 仍需作进一步试算。

### 4. 第三次试算

设取

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \frac{\phi_2 + \phi'_2}{2} = \frac{0.335 + 0.26}{2} \\ &= 0.298 \end{aligned}$$



得

$$A \geq \frac{200 \times 10^3}{0.298 \times 160} = 4194 \text{mm}^2$$

从型钢规格表中查得№25a 工字钢的横截面面积  $A = 4850 \text{mm}^2$ , 最小惯性半径  $i_{\min} = 24.03 \text{mm}$ , 因此, 如果选用№25a 工字钢作立柱, 则有

$$\lambda = \frac{2 \times 2000}{24.03} = 166$$

$$\phi'_3 = 0.27$$

$$[\sigma_x] = 0.27 \times 160 = 43.2 \text{MPa}$$

$$\sigma = \frac{200 \times 10^3}{4850} = 41.2 \text{MPa} < [\sigma_x]$$

可见, 选用№25a 工字钢作立柱符合稳定性要求。

#### 4. 强度校核

从型钢规格表中查出, №25a 工字钢的腹板厚度  $\delta = 8 \text{mm}$ , 所以, 横截面  $C$  的净面积为

$$A_c = A - \delta d = 4850 - 8 \times 70 = 4290 \text{mm}^2$$

而该截面的工作应力则为

$$\sigma = \frac{P}{A_c} = \frac{200 \times 10^3}{4290} = 46.6 \text{MPa} < [\sigma]$$

其值小于许用应力  $[\sigma]$ 。可见, 选用№25a 工字钢作立柱, 其强度也符合要求。

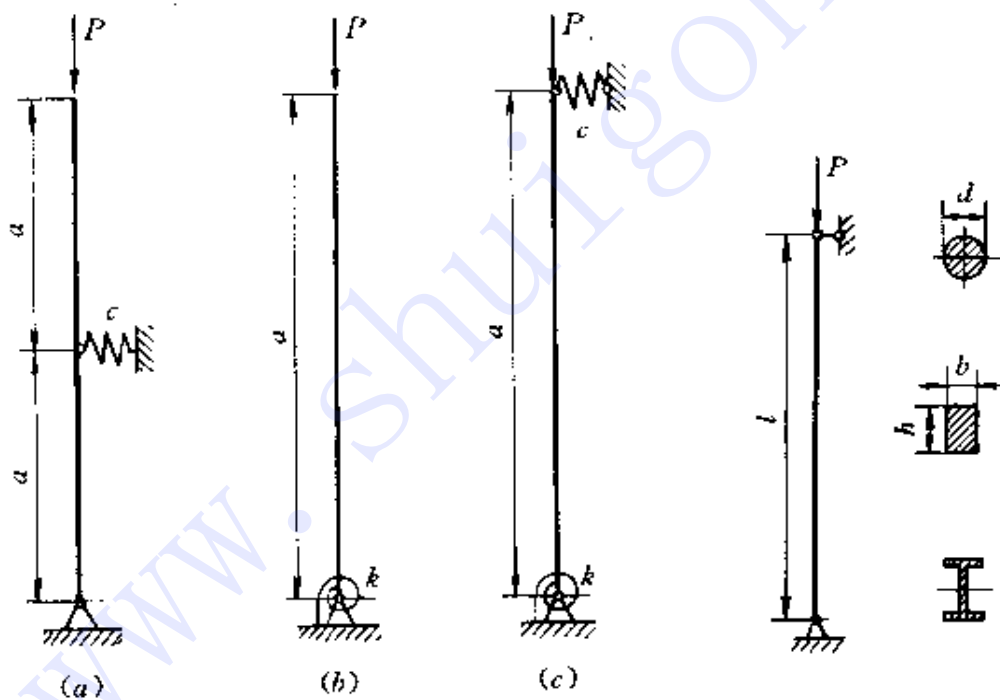
## 复 习 题

1. 何谓失稳? 何谓稳定平衡与不稳定平衡? 何谓临界载荷?
2. 欧拉公式是如何建立的? 应用该公式的条件是什么?
3. 何谓相当长度与长度系数? 如何确定两端非铰支压杆的临界载荷?
4. 何谓惯性半径? 何谓柔度? 它们的量纲是什么? 各如何确定?

5. 何谓临界应力?如何确定欧拉公式的适用范围?
6. 如何区分大柔度杆、中柔度杆与小柔度杆?它们的临界应力(或极限应力)各如何确定?如何绘制临界应力总图?
7. 压杆的稳定条件是如何建立的?有几种形式?如何用试算法或逐次逼近法设计压杆的横截面尺寸?

### 习 题

题 9.1 图示刚杆-弹簧系统,试求其临界载荷。图中: $c$  代表使螺旋弹簧产生单位长度轴向变形所需之力; $k$  代表使蝶形弹簧产生单位转角所需之力矩。



题 9.1 图

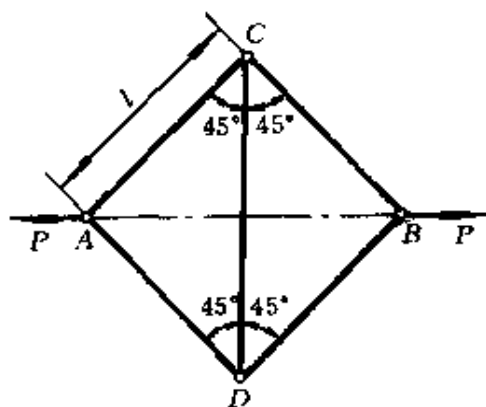
题 9.2 图

题 9.2 图示两端球形铰支细长压杆,弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ ,试用欧拉公式计算其临界载荷。

- (1) 圆形截面,  $d = 25\text{mm}$ ,  $l = 1.0\text{m}$ ;
- (2) 矩形截面,  $h = 2b = 40\text{mm}$ ,  $l = 1.0\text{m}$ ;

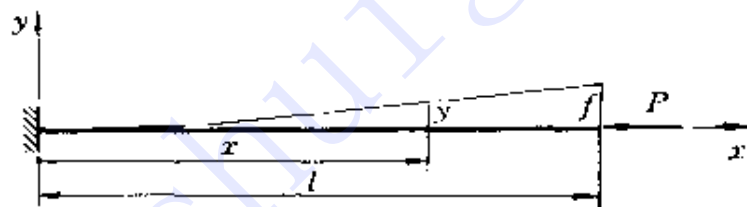
(3) №16 工字钢,  $l = 2.0\text{m}$ 。

题 9.3 图示正方形桁架, 各杆的抗弯刚度  $EI$  相同, 且均为细长杆, 试问当载荷  $P$  为何值时结构中的个别杆件将失稳? 如果将载荷  $P$  的方向改为向内, 则使杆件失稳的载荷  $P$  又为何值?



题 9.3 图

题 9.4 试按 § 9-2 所述方法求图示细长压杆的临界载荷。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

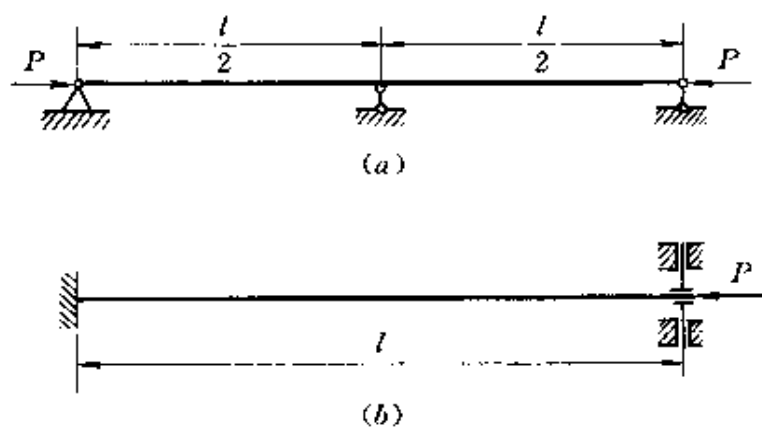


题 9.4 图

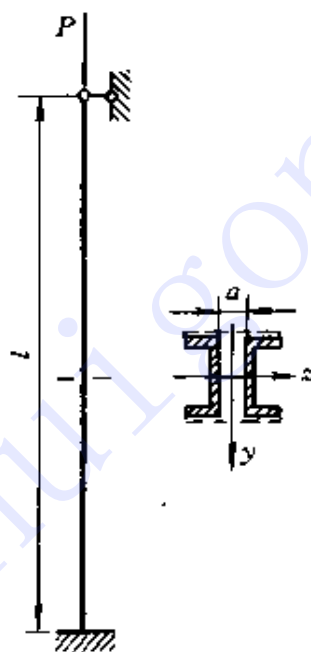
题 9.5 试确定图示细长压杆的相当长度与临界载荷。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

题 9.6 图示立柱, 由两根 №10 槽钢组成, 其间距为  $a$ 。立柱的顶部为球形铰支, 根部为固定端。试问当间距  $a$  为何值时, 立柱的临界载荷  $P_{cr}$  最大, 其值为何。已知柱长  $l = 6\text{m}$ , 材料的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 比例极限  $\sigma_p = 200\text{MPa}$ 。

题 9.7 一根  $30 \times 50\text{mm}^2$  的矩形截面压杆, 两端为球形铰支。试问杆长为何值时即可应用欧拉公式计算临界载荷。已知材料的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 比例极限  $\sigma_p = 200\text{MPa}$ 。



题 9.5 图



题 9.6 图

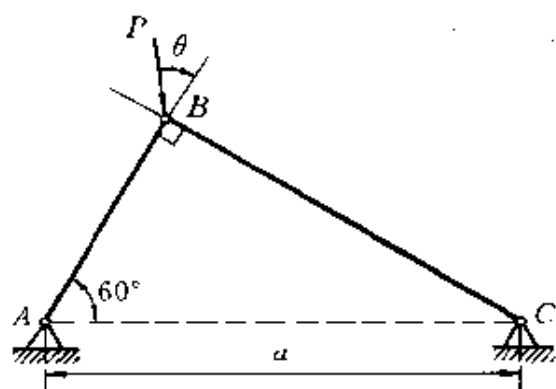
· 题 9.8 图示桁架, 由两根抗弯刚度  $EI$  相同的等截面细长杆组成。设载荷  $P$  与杆  $AB$  的轴线的夹角为  $\theta$ , 且  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , 试求载荷  $P$  的极限值。

题 9.9 某钢材的比例极限  $\sigma_p = 230\text{MPa}$ , 屈服应力  $\sigma_s = 274\text{MPa}$ , 弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 中柔度杆的临界应力公式为

$$\sigma_{cr} = 338 - 1.22\lambda$$

试计算  $\lambda_p$  与  $\lambda_s$  值, 并绘临界应力总图 ( $0 \leq \lambda \leq 150$ )。

题 9.10 图示矩形截面压杆, 有三种支持方式。杆长  $l =$

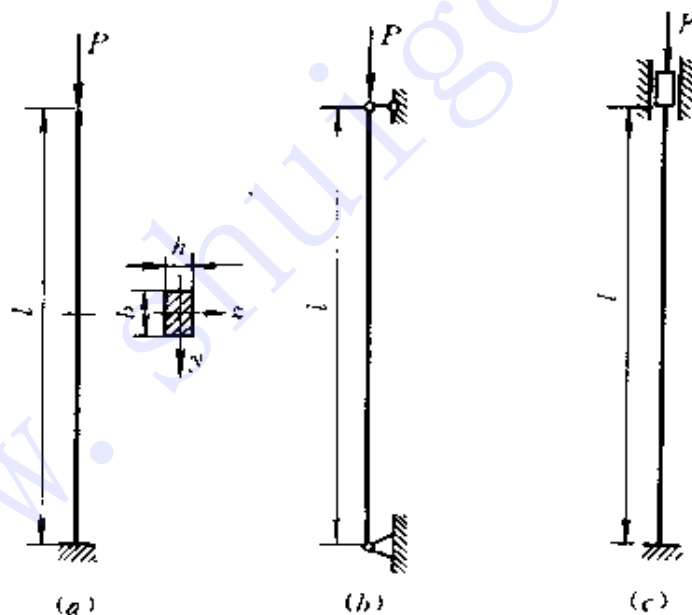


题 9.8 图

300mm, 截面宽度  $b = 20\text{mm}$ , 高度  $h = 12\text{mm}$ , 弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 屈服应力  $\sigma_s = 235\text{MPa}$ ,  $\lambda_p = 100$ ,  $\lambda_0 = 61.4$ , 中柔度杆的临界应力公式为

$$\sigma_{cr} = 304 - 1.12\lambda$$

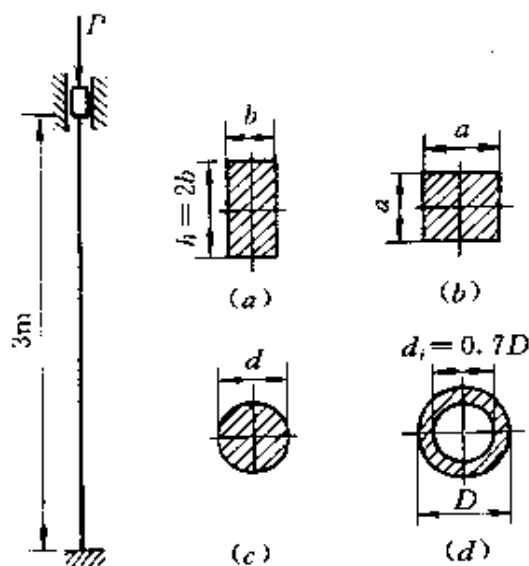
试计算它们的临界载荷, 并进行比较。



题 9.10 图

题 9.11 图示压杆, 横截面有四种形式, 但其面积均为  $A = 3.2 \times 10^3\text{mm}^2$ , 试计算它们的临界载荷, 并进行比较。材料的力学性能见题 9.10。

题 9.12 图示连杆, 用硅钢制成, 试确定其临界载荷。中柔度

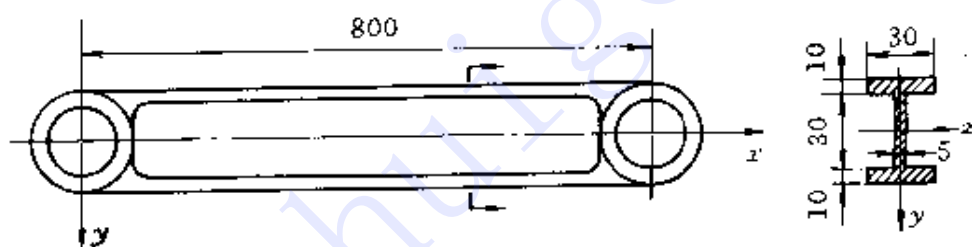


题 9.11 图

杆的临界应力公式为

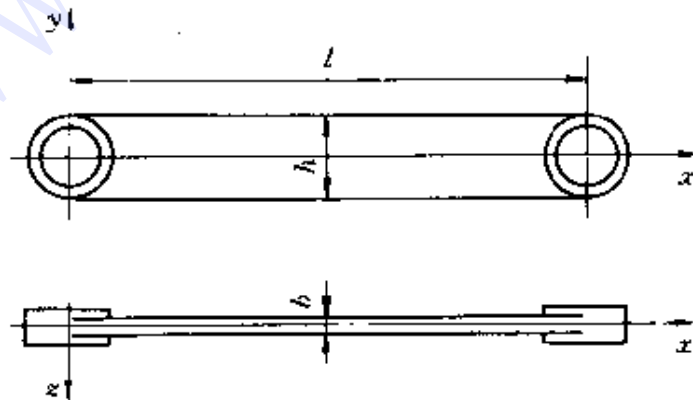
$$\sigma_{cr} = 577 - 3.74\lambda \quad (60 \leq \lambda \leq 100)$$

在  $x-z$  平面内,  $\mu_y = 0.7$ ; 在  $x-y$  平面内,  $\mu_z = 1$ 。



题 9.12 图

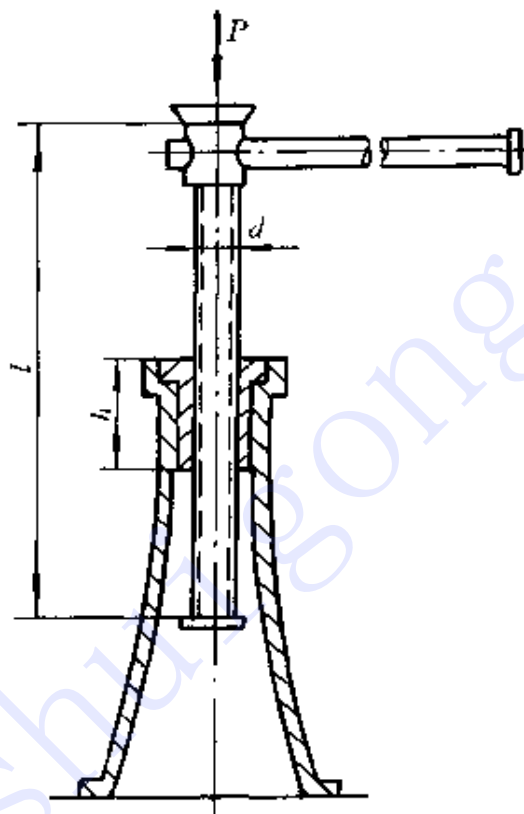
题 9.13 图示压杆, 横截面为  $b \times h$  的矩形, 试从稳定性方面考虑,  $h/b$  为何值最佳。当压杆在  $x-z$  平面内失稳时, 可取  $\mu_y = 0.7$ 。



题 9.13 图

· 题 9.14 试证明:所有几何相似、且材料与支持方式均相同的压杆,其临界应力也相同。

题 9.15 试检查图示千斤顶丝杠的稳定性。若千斤顶的最大起重量  $P = 120\text{kN}$ ,丝杠内径  $d = 52\text{mm}$ ,丝杠总长  $l = 600\text{mm}$ ,衬套高度  $h = 100\text{mm}$ ,丝杠用 A3 钢制成,稳定安全系数  $n_s = 4$ 。



题 9.15 图

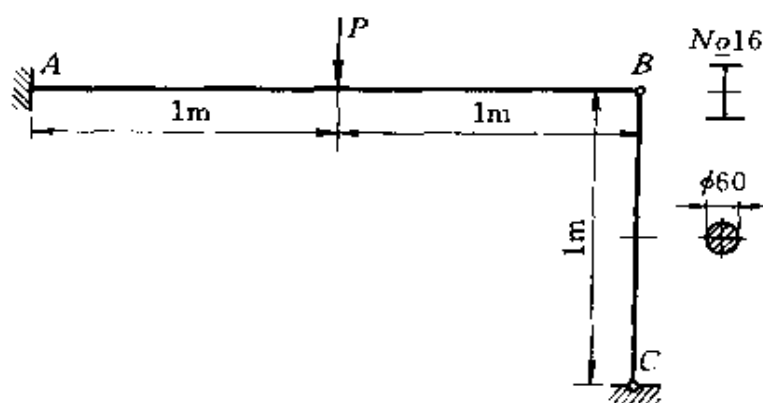
题 9.16 图示结构,用低碳钢 A5 制成,材料的弹性模量  $E = 205\text{GPa}$ ,屈服应力  $\sigma_s = 275\text{MPa}$ ,强度安全系数  $n = 2$ ,稳定安全系数  $n_s = 3$ ,中柔度杆的临界公式应力为

$$\sigma_{cr} = 338 - 1.21\lambda \quad (50 \leq \lambda \leq 90)$$

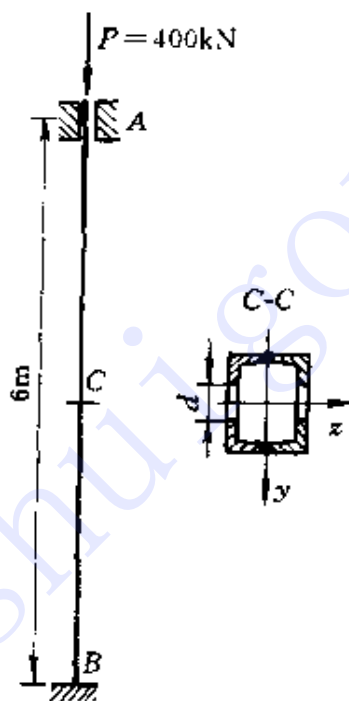
试求载荷  $P$  的许用值。

题 9.17 图示立柱,由两根 No14a 槽钢焊接而成,在其中点横截面 C 处,并有一直径为  $d = 60\text{mm}$  的圆孔,立柱用 A5 钢制成,许用压应力  $[\sigma] = 180\text{MPa}$ ,试校核立柱的稳定性与强度。





题 9.16 图

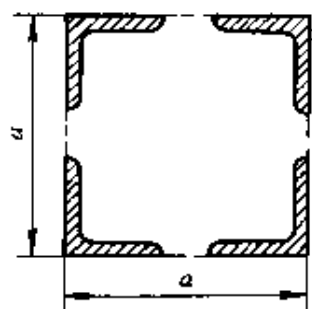


题 9.17 图

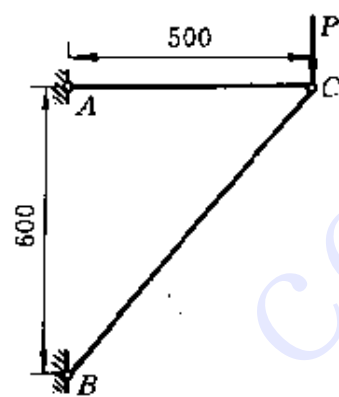
题 9.18 一立柱, 两端均为固定端, 柱长  $l = 5\text{m}$ , 承受轴向压力  $P = 320\text{kN}$  作用, 立柱用 A3 钢制成, 许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 试为立柱选择工字钢。

题 9.19 横截面如图所示之立柱, 由四根  $80\text{mm} \times 80\text{mm} \times 6\text{mm}$  的角钢所组成, 柱长  $l = 6\text{m}$ 。立柱两端为铰支, 承受轴向压力  $P = 450\text{kN}$  作用。立柱用 A3 钢制成, 许用压应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ , 试确定横截面的边宽  $a$ 。

题 9.20 图示桁架, 在接点  $C$  承受铅垂方向的载荷  $P = 100\text{kN}$  作用。二杆均为圆截面杆, 材料为 A5 钢, 许用应力  $[\sigma] = 180\text{MPa}$ , 试确定杆径。



题 9.19 图



题 9.20 图

## 第十章 疲劳强度问题

### § 10-1 引 言

在机械和工程结构中,许多构件常常受到随时间作周期性变化的应力。例如图 4-1(a) 所示火车轮轴,当车轴以角速度  $\omega$  旋转时,横截面边缘任一点  $A$  处(图 10-1, a) 的弯曲正应力为

$$\sigma_A = \frac{M y_A}{I_z} = \frac{MR}{I_z} \sin \omega t$$

上式表明,车轴每旋转一圈,  $A$  点处的材料即经历一次由拉伸到压缩的应力循环(图 10-1, b),车轴不停地旋转,该处即不断地反复受力。随时间作周期性变化的应力,称为**交变应力**或**循环应力**。

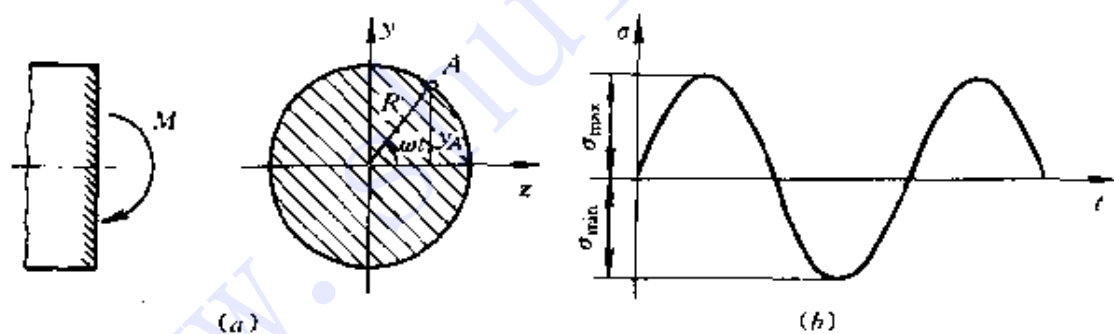


图 10-1

实践表明,在交变应力作用下的构件,虽然所受应力小于材料的静强度极限,但经过应力的多次重复后,构件将产生可见裂纹或完全断裂,而且,即使是塑性很好的材料,断裂时也往往无显著的塑性变形。在交变应力作用下,构件产生可见裂纹或完全断裂的现象,称为**疲劳破坏**。

从试验中还看到,在疲劳破坏的断口上,通常呈现两个区域,

一个是光滑区域,另一个是粗粒状区域。例如,车轴疲劳破坏的断口即如图 10-2 所示。

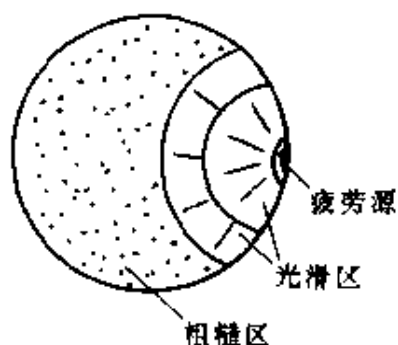


图 10-2

以上现象可通过疲劳破坏的形成过程加以说明。原来,当交变应力的大小超过一定限度并经历了足够多次的交替重复后,在构件内的应力最大处或材质薄弱处,将产生细微裂纹(即所谓**疲劳源**),这种裂纹随着应力交变次数增加而不断扩展,并逐渐形成为宏观裂纹。在扩展过程中,由于应力交替变化,裂纹两表面的材料时而互相挤压,时而分离,或时而正向错动,时而反向错动,这样就形成了断口表面的光滑区。另一方面,由于裂纹不断扩展,构件截面不断被削弱并愈加严重,以致在某一载荷作用下突然断裂,断口表面的粗粒状区,就是由于这种突然断裂造成的。所以,疲劳破坏的过程可以理解为裂纹的萌生、逐渐扩展和最后断裂的过程。

本章介绍构件在交变应力作用下的强度及强度计算。

## § 10-2 交变应力及其类型

交变应力最基本、最常见的形式如图 10-3 所示,应力在两个极值之间周期性地变化。应力的极大值称为**最大应力**,应力的极小值称为**最小应力**。最大应力  $\sigma_{\max}$  与最小应力  $\sigma_{\min}$  的代数平均值,称为**平均应力**,并用  $\sigma_m$  表示,即

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (10-1)$$

最大应力与最小应力的代数差之半,称为**应力幅**,并用  $\sigma_a$  表示,即

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (10-2)$$

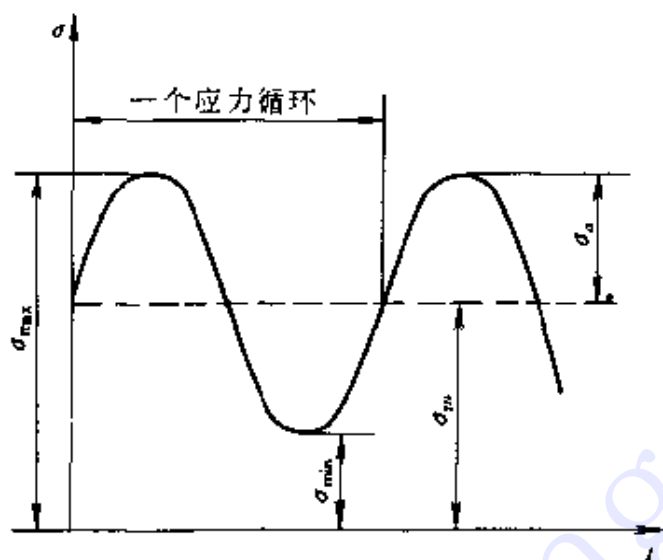


图 10-3

交变应力的变化特点,对材料的疲劳强度有直接影响。应力变化的特点,可用最小应力和最大应力的比值表示。在一个应力循环中,最小应力与最大应力的比值,称为**应力比**或**循环特征**,并用  $R$  表示,即

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (10-3)$$

在交变应力中,如果其最大应力与最小应力的数值相等、符号相反,即  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$  (图 10-1, b), 则称此种应力循环为**对称循环**,对称循环交变应力的应力比为

$$R = \frac{-\sigma_{\max}}{\sigma_{\max}} = -1$$

在交变应力中,如果其最小应力  $\sigma_{\min}$  为零(图 10-4), 则称此种应力循环为**脉动循环**,脉动循环交变应力的应力比为

$$R = \frac{0}{\sigma_{\max}} = 0$$

除对称循环外,所有应力比  $R \neq -1$  的应力循环,统称为**非对称循环**。所以,脉动循环也是一种非对称循环。

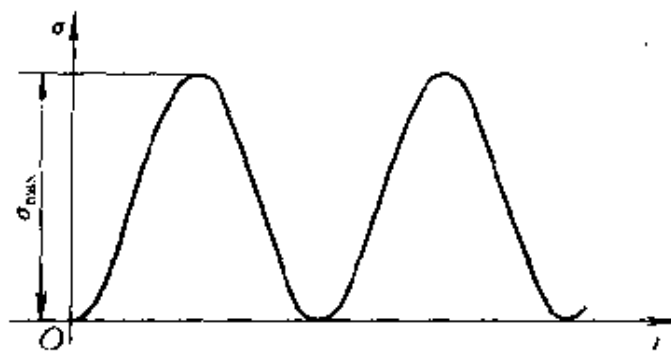


图 10-4

以上关于交变应力的概念, 都是采用正应力  $\sigma$  表示。当构件承受交变剪应力时, 上述概念仍然适用, 只需将正应力  $\sigma$  改为剪应力  $\tau$  即可。

### § 10-3 S-N 曲线和材料的疲劳极限

材料在交变应力作用下的强度由试验测定, 最常用的试验是旋转弯曲疲劳试验。

首先准备一组材料和尺寸相同的光滑试件(直径为 6mm ~ 10mm)。试验时, 将试件的一端安装在疲劳试验机的夹头内(图 10-5), 并由电机带动而旋转, 在试件的另一端, 则通过轴承悬挂砝码, 使试件处于弯曲受力状态。于是, 试件每旋转一圈, 其内任一点处的材料即经历一次对称循环的交变应力。试验一直进行到试件断裂为止。

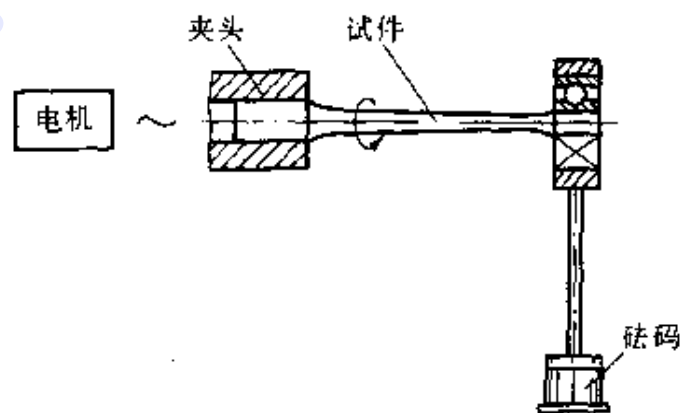


图 10-5

试验中,由计数器记下试件在断裂前所旋转的总圈数或所经历的应力循环数  $N$ ,即试件的**疲劳寿命**。同时,根据试件的尺寸和砝码的重量,按弯曲正应力公式  $\sigma = M/W$ ,计算试件横截面上的最大正应力。对同组试件挂上不同重量的砝码进行疲劳试验,将得到一组关于最大应力  $\sigma$  和相应寿命  $N$  的数据。

如果以最大应力  $\sigma$  为纵坐标,以疲劳寿命的对数值  $\lg N$  为横坐标,由上述数据即可绘出最大应力和疲劳寿命间的关系曲线,称为**应力-寿命曲线**或**S-N 曲线**。例如,碳钢的 S-N 曲线即如图 10-6 所示。

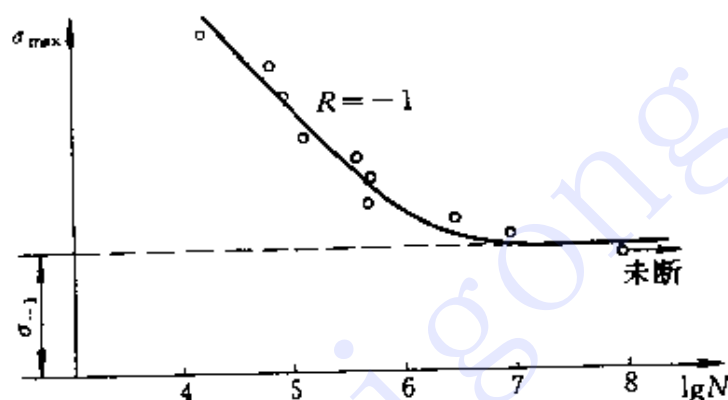


图 10-6

从图中可以看出,应力愈小,疲劳寿命愈长,而当应力减小至某一数值后,S-N 曲线趋向于水平直线。

试验表明,钢和铸铁等的 S-N 曲线均具有上述特点。这说明,对于钢和铸铁等材料,只要最大应力不超过一定限度(其值随材料而异),它们即可经历“无限”次应力循环而不发生疲劳破坏。材料能经受“无限”次循环而不发生疲劳破坏的最大应力值,称为材料的**疲劳极限**,并用  $\sigma_R$  或  $\tau_R$  表示,下标  $R$  代表应力比。例如图 10-6 中的  $\sigma_1$  即代表材料在对称循环弯曲交变应力下的疲劳极限。

然而,有色金属及其合金的 S-N 曲线不存在水平直线段(图 10-7)。对于这类材料,通常则根据构件的使用要求,以某一指定寿命  $N_0$  所对应的最大应力作为疲劳极限,并称为**条件疲劳极限**,指定寿命  $N_0$  称为**循环基数**,其值一般取为  $10^7 \sim 10^8$ 。



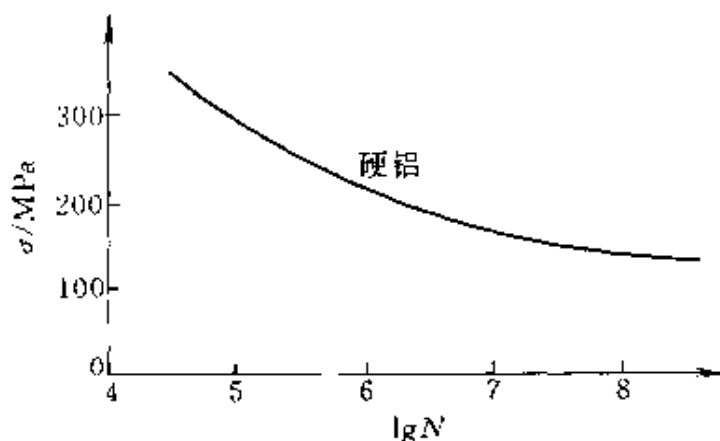


图 10-7

同样,也可通过试验测量材料在拉-压或扭转等交变应力下的疲劳极限。

试验发现,钢材的疲劳极限与其静强度极限  $\sigma_b$  之间存在下述关系:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{-1}^s &\approx (0.4 \sim 0.5)\sigma_b \\ \sigma_{-1}^{t-k} &\approx (0.33 \sim 0.59)\sigma_b \\ \tau_{-1}^m &\approx (0.23 \sim 0.29)\sigma_b \end{aligned} \right\} \quad (10-4)$$

由上述关系可以看出,在交变应力作用下,材料抵抗破坏的能力显著降低。

## § 10-4 影响构件疲劳极限的主要因素

以上所述疲劳极限,是利用表面磨光、横截面尺寸无突然变化以及直径为 6mm ~ 10mm 的小尺寸试件测得的。这种由光滑小尺寸试件测得的疲劳极限,称为**材料的疲劳极限**。

试验表明,构件的疲劳极限与材料的疲劳极限不同,它不仅与材料的性能有关,而且与构件的外形、横截面尺寸以及表面状况等因素密切相关。现分述如下。

### 一、构件外形的影响(应力集中问题)

由于构造与使用等方面的需要,许多构件常常带有沟槽(如螺

纹)、孔和圆角(如截面由粗到细的过渡圆角)等。在外力作用下, 构件中邻近沟槽、孔或圆角的局部范围内, 应力急剧增大。例如, 图 10-8(a) 所示含圆孔的受拉薄板, 圆孔处截面 A-A 上的应力分布如图 10-8(b) 所示, 最大应力  $\sigma_{\max}$  大大超过该截面的平均应力。由于截面突然改变所引起的应力局部增大现象, 称为**应力集中**。

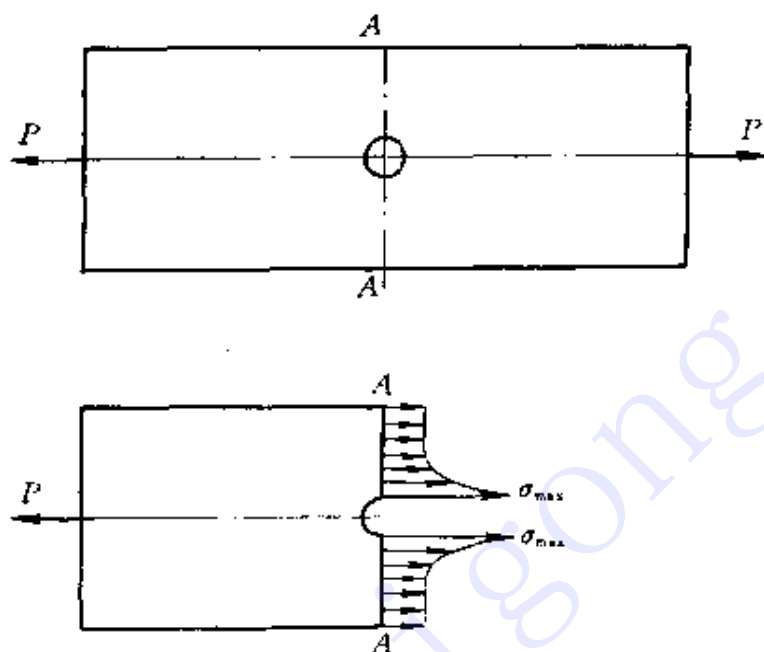


图 10-8

应力集中的程度用**应力集中系数**  $K_t$  表示, 其值为

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \quad (10-5)$$

式中:  $\sigma_{\max}$  为最大局部应力;  $\sigma_n$  为名义应力, 即不考虑应力集中时计算所得应力。

对于由塑性材料制成的构件, 应力集中对其在静载荷作用下的强度几乎无影响。因为当最大应力  $\sigma_{\max}$  达到屈服应力  $\sigma_s$  后, 如果继续增大载荷, 则所增加的载荷将由同一截面的未屈服部分承担, 以致屈服区域不断扩大(图 10-9, a), 应力分布逐渐趋于均匀化(图 10-9, b)。所以, 在研究塑性材料构件的静强度问题时, 通常可以不考虑应力集中的影响。

然而, 应力集中对构件的疲劳强度却影响极大。试验表明, 应

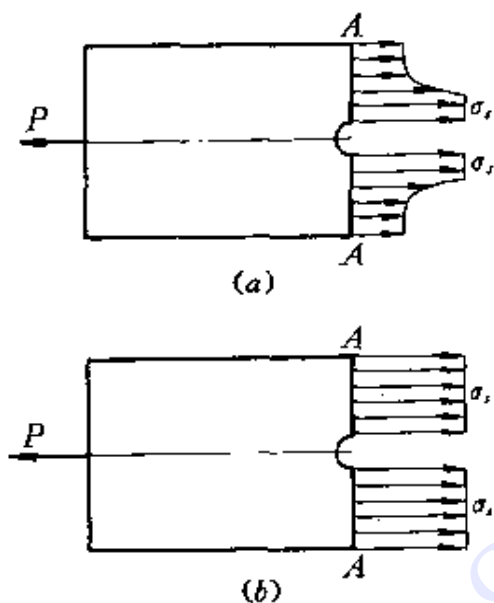


图 10-9

力集中促使疲劳裂纹的形成。因此,当构件存在应力集中时,其疲劳极限显著降低。

在对称循环交变应力作用下,应力集中对疲劳极限的影响,用有效应力集中系数  $K_{\sigma}$  或  $K_t$  表示,它代表光滑试件的疲劳极限与同样尺寸但存在应力集中的试件的疲劳极限之比值。

图 10-10、10-11 和图 10-12 分别给出了阶梯形圆截面钢轴在对称循环弯曲、拉-压和对称循环扭转时的有效应力集中系数。

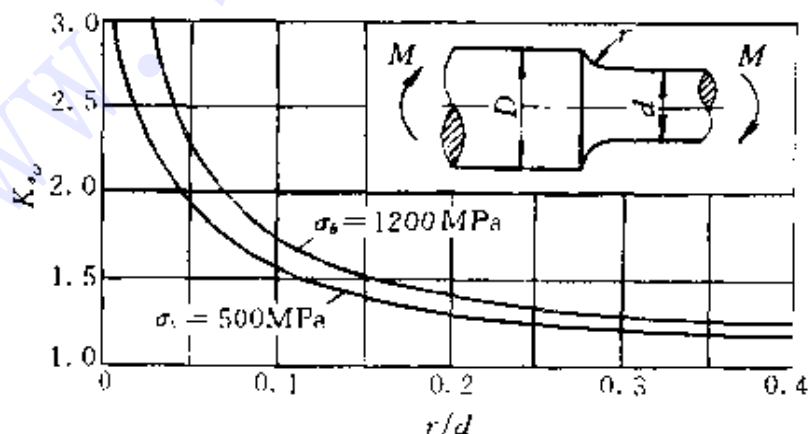


图 10-10

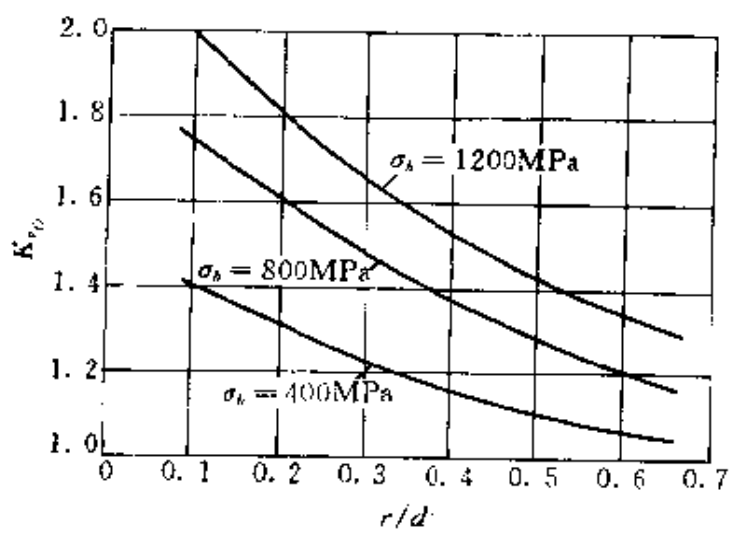


图 10-11

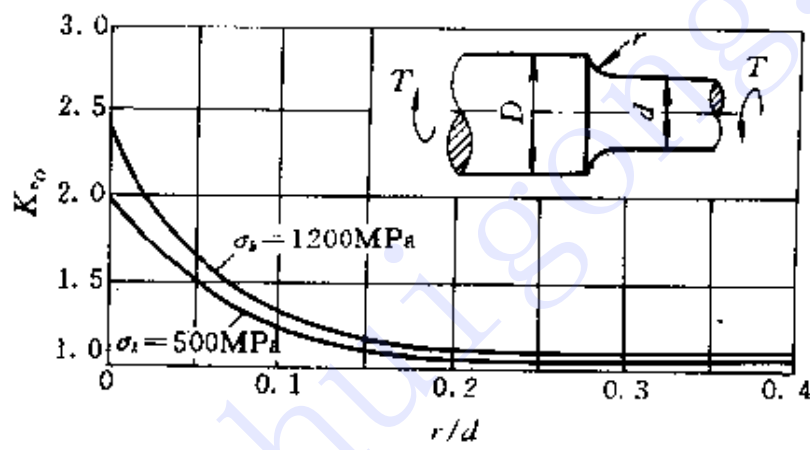


图 10-12

应该指出,上述曲线都是在  $D/d = 2$  且  $d = 30\text{mm} \sim 50\text{mm}$  的条件下测得的。如果  $D/d < 2$ , 则有效应力集中系数为

$$K_{\sigma} = 1 + \xi(K_{\sigma_0} - 1) \quad (10-6)$$

$$K_{\tau} = 1 + \xi(K_{\tau_0} - 1) \quad (10-7)$$

式中:  $K_{\sigma_0}$  和  $K_{\tau_0}$  为  $D/d = 2$  的有效应力集中系数值;  $\xi$  为修正系数, 其值与  $D/d$  有关, 可由图 10-13 查得。至于其它情况下的有效应力集中系数, 可查阅本章后的表 10-1、10-2 和有关手册<sup>①</sup>。

由图 10-10 ~ 图 10-12 可以看出: 圆角半径  $r$  愈小, 有效应力

① 例如杜庆华主编, 工程力学手册, 第四篇第十二章, 高等教育出版社, 1994 年。

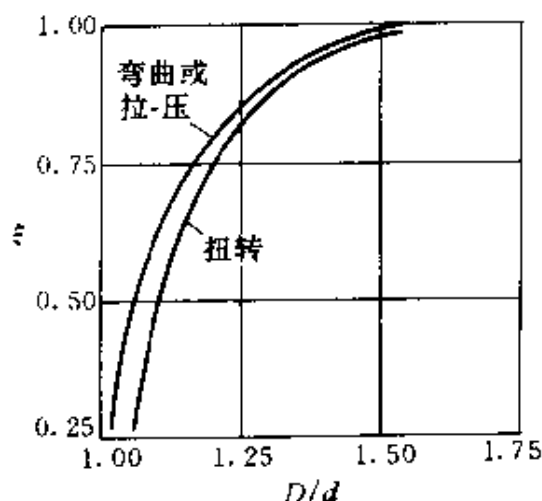


图 10-13

集中系数  $K_a$  和  $K_t$  愈大; 材料的静强度极限  $\sigma_s$  愈高, 应力集中对疲劳极限的影响愈显著。

所以, 对于在交变应力下工作的零构件, 尤其是用高强度材料制成的零构件, 设计时应尽量减小应力集中。例如: 增大圆角半径; 减小相邻横截面的粗细差别; 采用凹槽结构(图 10-14, a); 设置卸荷槽(图 10-14, b); 将必要的孔或沟槽配置在构件的低应力区; 等等。这些措施均能显著提高构件的疲劳强度。

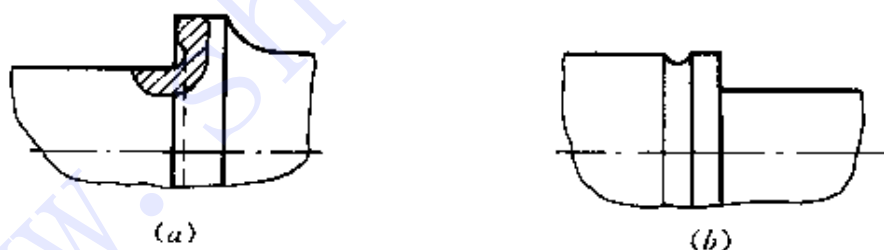


图 10-14

## 二、构件截面尺寸的影响

弯曲和扭转疲劳试验均表明, 疲劳极限随构件横截面尺寸的增大而降低。

截面尺寸对疲劳极限的影响, 用尺寸系数  $\epsilon_s$  或  $\epsilon_t$  表示。它代表光滑大尺寸试件的疲劳极限与光滑小尺寸试件的疲劳极限之比

值。图 10-15 给出了圆截面钢轴对称循环弯曲与扭转时的尺寸系数。

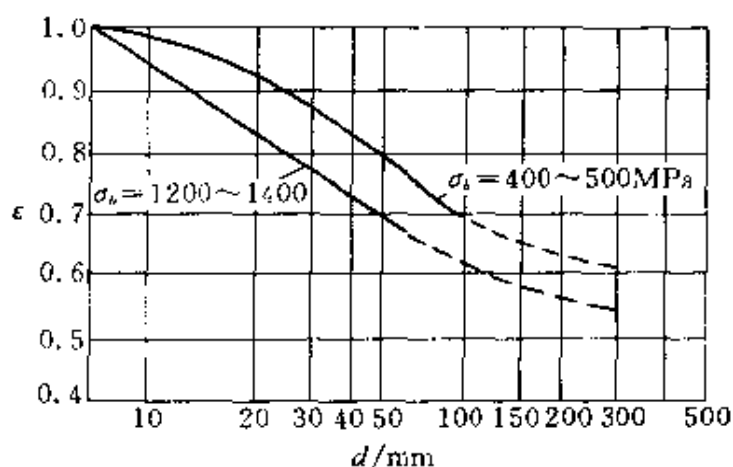


图 10-15

可以看出：试件直径  $d$  愈大，疲劳极限降低愈多；材料的静强度愈高，截面尺寸的大小对构件疲劳极限的影响愈显著。

弯曲和扭转疲劳极限随截面尺寸增大而降低的原因，可利用图 10-16 加以说明。图中所示为承受弯曲作用的两根直径不同的试件，在最大弯曲正应力相同的条件下，大试件的高应力区比小试件的高应力区厚，因而处于高应力状态的晶粒多。所以，在大试件中，疲劳裂纹更易于形成并扩展，疲劳极限因而降低。另一方面，高强度钢的晶粒较小，在尺寸相同的情况下，晶粒愈小，则高应力区所包含的晶粒愈多，愈易产生疲劳裂纹。

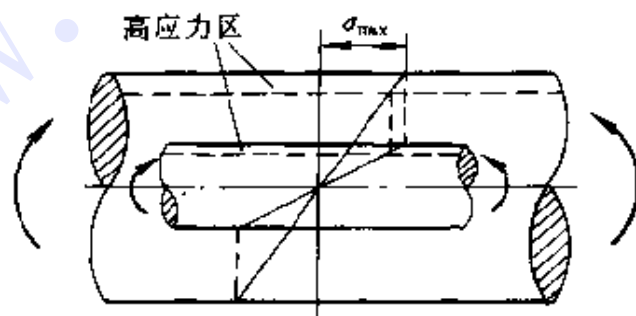


图 10-16

轴向加载时，光滑试件横截面上的应力均匀分布，截面尺寸的影响不大，可取尺寸系数  $\epsilon_s \approx 1$ 。



### 三、表面加工质量的影响

最大应力一般发生在构件表层,同时,构件表层又常常存在各种缺陷(刀痕与擦伤等),因此,构件表面的加工质量和表面状况,对构件的疲劳强度也存在影响。

表面加工质量对构件疲劳极限的影响,可用表面质量系数 $\beta$ 表示。它代表用某种方法加工的构件的疲劳极限与光滑试件(经磨削加工)的疲劳极限之比值,表面质量系数 $\beta$ 与加工方法的关系如图10-17所示。

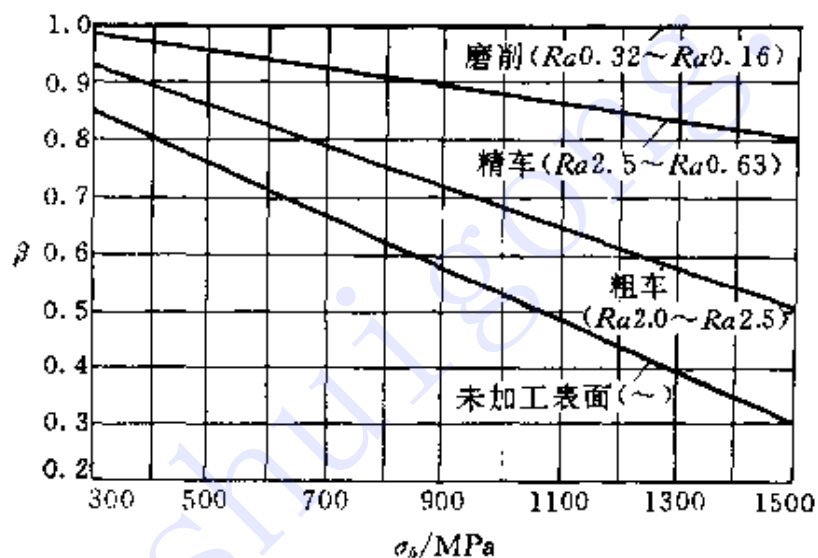


图 10-17

可以看出:表面加工质量愈低,疲劳极限降低愈多;材料的静强度愈高,加工质量对构件疲劳极限的影响愈显著。

所以,对于在交变应力下工作的重要构件,特别是在存在应力集中的部位,应当力求采用高质量的表面加工,而且,愈是采用高强度材料,愈应讲究加工方法。

还应指出,由于疲劳裂纹大多起源于构件表面,因此,提高构件表层材料的强度、改善表层的应力状况,例如渗碳、渗氮、高频淬火、表层滚压和喷丸等,都是提高构件疲劳强度的重要措施。



## \* § 10-5 构件的疲劳强度计算

### 一、对称循环交变应力下构件的强度条件

由以上分析可知, 当考虑应力集中、截面尺寸、表面加工质量等因素的影响以及必要的安全系数后, 拉(压)杆或梁在对称循环交变应力下的许用应力为

$$[\sigma_{-1}] = \frac{(\sigma_{-1})}{n_f} = \frac{\epsilon_s \beta}{n_f K_a} \sigma_{-1} \quad (\text{a})$$

式中:  $(\sigma_{-1})$  代表拉(压)杆或梁在对称循环交变应力下的疲劳极限;  $\sigma_{-1}$  代表材料在拉-压或弯曲对称循环交变应力下的疲劳极限;  $n_f$  为疲劳安全系数, 其值为 1.5 ~ 2.5。所以, 拉(压)杆或梁在对称循环交变应力下的强度条件为

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_{-1}] = \frac{\epsilon_s \beta}{n_f K_a} \sigma_{-1} \quad (10-8)$$

式中,  $\sigma_{\max}$  代表拉(压)杆或梁横截面上的最大工作应力。

在机械设计中, 通常将构件的疲劳强度条件写成比较安全系数的形式, 要求构件对于疲劳破坏的实际安全系数或工作安全系数不小于规定的安全系数。由式(a)和式(10-8)可知, 拉(压)杆或梁在对称循环交变应力下的工作安全系数为

$$n_s = \frac{(\sigma_{-1})}{\sigma_{\max}} = \frac{\epsilon_s \beta \sigma_{-1}}{K_a \sigma_{\max}} \quad (10-9)$$

而相应的疲劳强度条件则为

$$n_s = \frac{\epsilon_s \beta \sigma_{-1}}{K_a \sigma_{\max}} \geq n_f \quad (10-10)$$

同理, 受扭轴在对称循环交变应力下的疲劳强度条件为

$$\tau_{\max} \leq [\tau_{-1}] = \frac{\epsilon_t \beta}{n_f K_r} \tau_{-1} \quad (10-11)$$

或

$$n_r = \frac{\epsilon_t \beta \tau_{-1}}{K_r \tau_{\max}} \geq n_f \quad (10-12)$$

式中,  $\tau_{\max}$  代表受扭轴横截面上的最大扭转剪应力。

## 二、非对称循环交变应力下构件的强度条件

材料在非对称循环交变应力下的疲劳极限  $\sigma_R$  或  $\tau_R$  也由试验测定, 对于实际构件, 同样也应考虑应力集中、截面尺寸和表面加工质量等的影响。根据分析结果(推导从略), 在应力比保持一定的条件下, 拉(压)杆和梁的疲劳强度条件为

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u \frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} + \sigma_m \psi_\sigma} \geq n_f \quad (10-13)$$

受扭轴的疲劳强度条件则为

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_u \frac{K_\tau}{\epsilon_\tau \beta} + \tau_m \psi_\tau} \geq n_f \quad (10-14)$$

在以上二式中,  $\sigma_m$ 、 $\sigma_u$ (或  $\tau_m$ 、 $\tau_u$ ) 分别为构件危险点处所承受的平均应力和应力幅;  $K_\sigma$ 、 $\epsilon_\sigma$ (或  $K_\tau$ 、 $\epsilon_\tau$ ) 和  $\beta$  分别为对称循环时的有效应力集中系数、尺寸系数和表面质量系数;  $\psi_\sigma$  和  $\psi_\tau$  代表材料对于应力循环非对称性的敏感系数, 其值为

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_u}{\sigma_u} \quad (10-15)$$

$$\psi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_u}{\tau_u} \quad (10-16)$$

$\psi_\sigma$  和  $\psi_\tau$  值也可从有关手册中查到。

## 三、弯扭组合交变应力下构件的强度条件

在工程实际中, 许多构件处于弯扭组合变形状态。按照第三强度理论, 构件在弯扭组合变形时的静强度条件为

$$\sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} \leq \frac{\sigma_s}{n}$$

将上式两边平方后同除以  $\sigma_s^2$ , 并将  $\tau_s = \sigma_s/2$  代入, 则上式变为

$$\frac{1}{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\tau_s}{\tau_{\max}}\right)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

式中, 比值  $\sigma_s/\sigma_{\max}$  和  $\tau_s/\tau_{\max}$  可分别理解为仅考虑弯曲正应力和扭转剪应力的工作安全系数, 并分别用  $n_\sigma$  和  $n_\tau$  表示, 于是, 上式又可写作

$$\frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

或

$$\frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq n$$

试验表明, 上述形式的静强度条件也可推广应用于弯扭组合交变应力下的构件。在这种情况下,  $n_\sigma$  和  $n_\tau$  应分别按式(10-9)、(10-12) 或式(10-13)、(10-14) 进行计算, 而静强度安全系数则相应改用疲劳安全系数  $n_f$  代替。因此, 构件在弯扭组合交变应力下的疲劳强度条件为

$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq n_f \quad (10-17)$$

式中,  $n_{\sigma\tau}$  代表构件在弯扭组合交变应力下的工作安全系数。

下面举例说明上述强度条件的应用。

**例 1** 图 10-18 所示阶梯形圆截面轴, 由铬镍合金钢制成, 危险截面 A-A 上的内力为对称循环的交变弯矩, 其最大值  $M_{\max} = 700\text{N} \cdot \text{m}$ , 试校核轴的疲劳强度。已知轴径  $D = 50\text{mm}$ 、 $d = 40\text{mm}$ , 圆角半径  $r = 5\text{mm}$ , 强度极限  $\sigma_b = 1200\text{MPa}$ , 材料在弯曲对称循环交变应力下的疲劳极限  $\sigma_{-1} = 480\text{MPa}$ , 疲劳安全系数  $n_f = 1.6$ , 轴表面经精车加工。

**解** 1. 计算工作应力

在交变弯矩作用下, 危险截面 A-A 上的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 700 \times 10^3}{\pi \times 40^3} = 111\text{MPa}$$

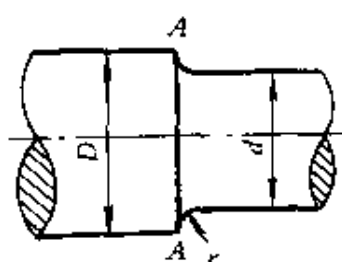


图 10-18

## 2. 确定影响系数

此轴具有下述几何特征:

$$\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1.25$$

$$\frac{r}{d} = \frac{5}{40} = 0.125$$

由图 10-13 和图 10-10, 分别查得

$$\xi = 0.85$$

$$K_{\sigma} = 1.7$$

将其代入式(10-6), 得有效应力集中系数为

$$K_{\sigma} = 1 + 0.85(1.7 - 1) = 1.60$$

由图 10-15 和图 10-17, 得尺寸系数和表面质量系数分别为

$$\epsilon_{\sigma} = 0.73$$

$$\beta = 0.84$$

## 3. 校核疲劳强度

将以上数据代入式(10-9), 于是得截面 A-A 的工作安全系数为

$$n_{\sigma} = \frac{\epsilon_{\sigma} \beta \sigma_{-1}}{K_{\sigma} \sigma_{\max}} = \frac{0.73 \times 0.84 \times 480}{1.6 \times 111} = 1.65 > n_f$$

可见, 该阶梯形轴符合疲劳强度要求。

**例 2** 图 10-19 所示阶梯形圆截面钢杆, 承受非对称循环的轴向外力  $P$  作用, 其最大和最小值分别为  $P_{\max} = 100\text{kN}$  和  $P_{\min} = 10\text{kN}$ , 试校核杆的疲劳强度。已知杆径  $D = 50\text{mm}$ ,  $d = 40\text{mm}$ , 圆角半径  $r = 5\text{mm}$ , 强度极限  $\sigma_b = 600\text{MPa}$ , 材料在拉压对称循环交变应力下的疲劳极限  $\sigma_{-1}^{\text{拉}} = 170\text{MPa}$ , 敏感系数  $\psi_{\sigma} = 0.05$ , 疲劳安

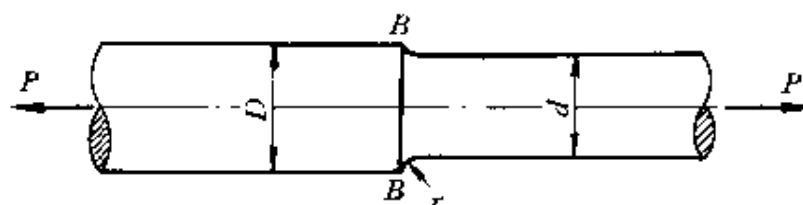


图 10-19

全系数  $n_f = 2$ , 杆表面经精车加工。

解 1. 计算工作应力

在非对称循环的交变轴向力作用下, 危险截面  $B-B$  承受非对称循环的交变正应力, 其最大和最小值分别为

$$\sigma_{\max} = \frac{4P_{\max}}{\pi d^2} = \frac{4 \times 100 \times 10^3}{\pi \times 40^2} = 79.6 \text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{4P_{\min}}{\pi d^2} = \frac{4 \times 10 \times 10^3}{\pi \times 40^2} = 7.96 \text{MPa}$$

由此得相应的平均应力和应力幅分别为

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = 43.8 \text{MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 35.8 \text{MPa}$$

2. 确定影响系数

此杆具有下述几何特征

$$\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1.25$$

$$\frac{r}{d} = \frac{5}{40} = 0.125$$

由图 10-11, 查得  $D/d = 2, r/d = 0.125$  时钢材的  $K_{\sigma}$  值如下:

当  $\sigma_b = 400 \text{MPa}$  时,  $K_{\sigma} = 1.38$

当  $\sigma_b = 800 \text{MPa}$  时,  $K_{\sigma} = 1.72$

于是, 利用线性插入法, 得  $\sigma_b = 600 \text{MPa}$  之钢材的有效应力集中系数为

$$K_{\sigma} = 1.38 + \frac{600 - 400}{800 - 400} (1.72 - 1.38) = 1.55$$

由图 10-13, 查得  $D/d = 1.25$  时的修正系数为

$$\xi = 0.85$$

将所得  $K_\sigma$  与  $\xi$  值代入式(10-6), 得杆的有效应力集中系数为

$$K_\sigma = 1 + 0.85(1.55 - 1) = 1.47$$

由图 10-17, 查得表面质量系数为

$$\beta = 0.94$$

此外, 在轴向受力的情况下, 尺寸系数为

$$\epsilon_\sigma \approx 1$$

### 3. 校核疲劳强度

将以上数据代入式(10-13), 于是得杆件截面  $B-B$  的工作安全系数为

$$\begin{aligned} n_\sigma &= \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta} + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{170}{35.8 \times \frac{1.47}{1 \times 0.94} + 0.05 \times 43.8} \\ &= 2.92 > n_f \end{aligned}$$

可见, 在上述非对称循环的交变轴向力作用下, 该杆的疲劳强度符合要求。

**例 3** 图 10-18 所示阶梯形钢轴, 在危险截面  $A-A$  上, 内力为同相位的对称循环交变弯矩和交变扭矩, 其最大值分别为  $M_{\max} = 1.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$  和  $T_{\max} = 2.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 设规定的疲劳安全系数  $n_f = 1.5$ , 试校核轴的疲劳强度。已知轴径  $D = 60 \text{ mm}$ 、 $d = 50 \text{ mm}$ , 圆角半径  $r = 5 \text{ mm}$ , 强度极限  $\sigma_b = 1100 \text{ MPa}$ , 材料的弯曲疲劳极限  $\sigma_{-1} = 540 \text{ MPa}$ , 扭转疲劳极限  $\tau_{-1} = 310 \text{ MPa}$ , 轴表面经磨削加工。

**解** 1. 计算工作应力

在对称循环的交变弯矩和交变扭矩作用下, 截面  $A-A$  上的最大弯曲正应力和最大扭转剪应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 1.5 \times 10^3 \times 10^3}{\pi \times 50^3} = 122 \text{ MPa} \\ \tau_{\max} &= \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 2.0 \times 10^3 \times 10^3}{\pi \times 50^3} = 81.5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

### 2. 计算影响系数

根据  $D/d = 1.2$ 、 $r/d = 0.1$  和  $\sigma_b = 1100 \text{ MPa}$ , 由图 10-13、



10-10 及图 10-12, 得有效应力集中系数为

$$K_\sigma = 1 + 0.80(1.70 - 1) = 1.56$$

$$K_\tau = 1 + 0.74(1.35 - 1) = 1.26$$

由图 10-15 和图 10-17, 得尺寸系数和表面质量系数分别为

$$\epsilon \approx 0.70$$

$$\beta = 1.00$$

### 3. 校核疲劳强度

将以上数据分别代入式(10-10)和(10-12), 得

$$n_\sigma = \frac{\epsilon_s \beta \sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_{\max}} = \frac{0.70 \times 1.00 \times 540}{1.56 \times 122} = 1.99$$

$$n_\tau = \frac{\epsilon_s \beta \tau_{-1}}{K_\tau \tau_{\max}} = \frac{0.70 \times 1.00 \times 310}{1.26 \times 81.5} = 2.11$$

代入式(10-17), 于是得截面 A-A 在弯扭组合交变应力下的工作安全系数为

$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{1.99 \times 2.11}{\sqrt{1.99^2 + 2.11^2}} = 1.45$$

$n_{\sigma\tau}$  略小于  $n_f$ , 但其差值仍小于  $n_f$  值的 5%, 所以, 轴的疲劳强度符合要求。

表 10-1 螺纹、键和花键的有效应力集中系数



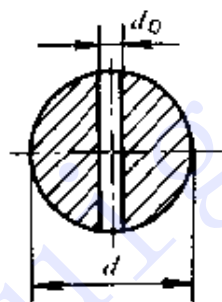
$\sigma_b / \text{MPa}$	螺纹 ( $K_\tau = 1$ ) $K_\sigma$	键 槽			花 键		
		$K_\sigma$		$K_\tau$	$K_s$	$K_f$	
		A 型	B 型			A、B 型	矩形
400	1.45	1.51	1.30	1.20	1.35	2.10	1.40
500	1.78	1.64	1.38	1.37	1.45	2.25	1.43



(续)

$\sigma_b/\text{MPa}$	螺纹 ( $K_r = 1$ ) $K_s$	键 槽			花 键		
		$K_s$		$K_r$	$K_s$	$K_r$	
		A 型	B 型	A、B 型		矩形	渐开线型
600	1.96	1.76	1.46	1.54	1.55	2.35	1.46
700	2.20	1.89	1.54	1.71	1.60	2.45	1.49
800	2.32	2.01	1.62	1.88	1.65	2.55	1.52
900	2.47	2.14	1.69	2.05	1.70	2.65	1.55
1000	2.61	2.26	1.77	2.22	1.72	2.70	1.58
1200	2.90	2.50	1.92	2.39	1.75	2.80	1.60

表 10-2 横孔处的有效应力集中系数



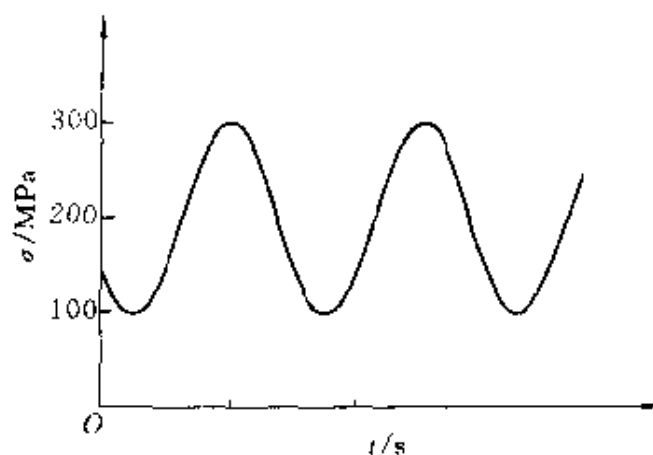
$\sigma_b/\text{MPa}$	$K_s$		$K_r$
	$\frac{d_0}{d} = 0.05 \sim 0.15$	$\frac{d_0}{d} = 0.15 \sim 0.25$	$\frac{d_0}{d} = 0.05 \sim 0.25$
400	1.90	1.70	1.70
500	1.95	1.75	1.75
600	2.00	1.80	1.80
700	2.05	1.85	1.80
800	2.10	1.90	1.85
900	2.15	1.95	1.90
1000	2.20	2.00	1.90
1200	2.30	2.10	2.00

## 复 习 题

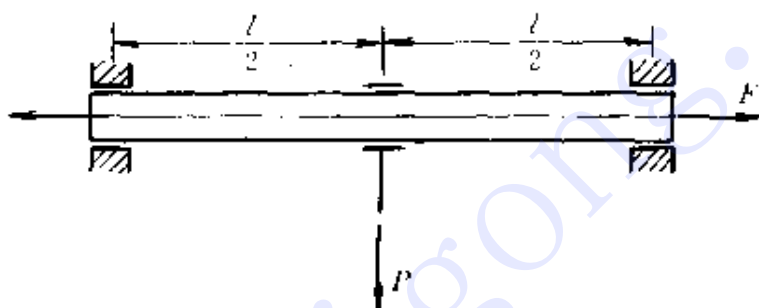
1. 何谓交变应力?试举例说明。
2. 何谓疲劳破坏?有何特点?疲劳破坏是如何形成的?
3. 何谓最大应力与最小应力?何谓平均应力与应力幅?它们间有何关系?何谓应力比?
4. 何谓对称循环与脉动循环?其应力比各为何值?何谓非对称循环?
5. 何谓  $S-N$  曲线?何谓材料的疲劳极限?如何由试验测得  $S-N$  曲线与材料疲劳极限?何谓条件疲劳极限?
6. 何谓应力集中?它对塑性材料构件的静强度的影响为何可以不予考虑?
7. 影响疲劳极限的主要因素是什么?为什么?如何确定有效应力集中系数、尺寸系数和表面质量系数?试述提高构件疲劳强度的措施。
8. 材料的疲劳极限与构件的疲劳极限有何区别?材料的疲劳极限与强度极限有何区别?
9. 在对称、非对称循环及弯扭组合交变应力作用下,如何进行构件的疲劳强度计算?

## 习 题

- 题 10.1 图示应力循环,试求平均应力、应力幅与应力比。
- 题 10.2 图示旋转轴,同时承受铅垂载荷  $P$  与轴向拉力  $F$  作用,试求危险截面边缘任一点处的最大应力、最小应力、平均应力、应力幅与应力比。已知轴径  $d = 10\text{mm}$ ,轴长  $l = 100\text{mm}$ ,载荷  $P = 0.5\text{kN}$ ,  $F = 2\text{kN}$ 。
- 题 10.3 图示疲劳试件,由钢制成,强度极限  $\sigma_b = 600\text{MPa}$ ,

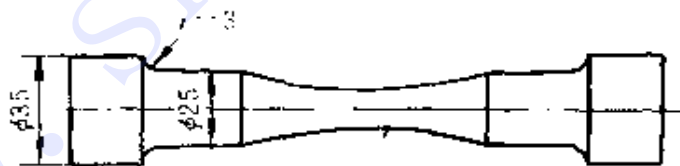


题 10.1 图



题 10.2 图

试验时承受对称循环的轴向外力作用, 试确定试件夹持部位圆角处的有效应力集中系数。试件表面经磨削加工。

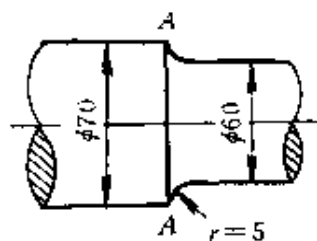


题 10.3 图

题 10.4 题 10.3 所述试件, 承受对称循环的扭矩作用, 试确定试件夹持部位圆角处的有效应力集中系数。

题 10.5 例 1 所述轴, 若将圆角半径改为  $r = 2\text{mm}$ , 表面改为粗车加工, 则工作安全系数降低为原设计的百分之几?

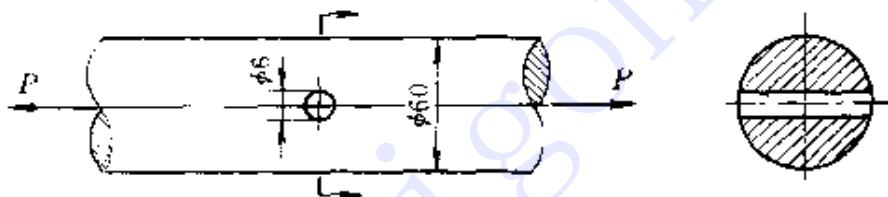
题 10.6 图示阶梯形圆截面轴, 危险截面 A-A 上的内力为对称循环的交变扭矩, 其最大值  $T_{\max} = 1.0\text{kN} \cdot \text{m}$ , 轴表面经精车加工, 材料的强度极限  $\sigma_s = 600\text{MPa}$ , 扭转疲劳极限  $\tau_{-1} = 130\text{MPa}$ ,



题 10.6 图

疲劳安全系数  $n_f = 2$ , 试校核轴的疲劳强度。

题 10.7 图示带横孔的圆截面钢杆, 承受非对称循环的轴向外力作用, 设该力的最大值为  $P$ , 最小值为  $0.2P$ , 材料的强度极限  $\sigma_b = 500\text{MPa}$ , 对称循环下拉压疲劳极限  $\sigma_{-1}^{lg-HK} = 150\text{MPa}$ , 敏感系数  $\psi_\sigma = 0.05$ , 疲劳安全系数  $n_f = 1.7$ , 试计算外力  $P$  的许用值。杆表面经磨削加工。

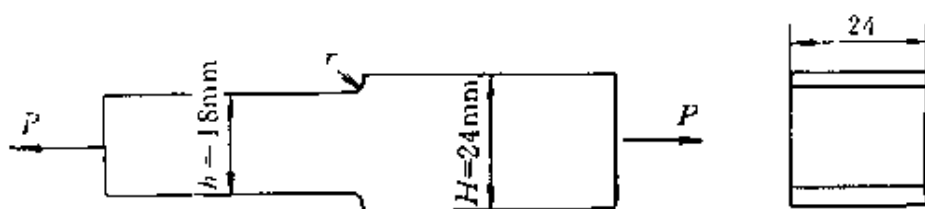


题 10.7 图

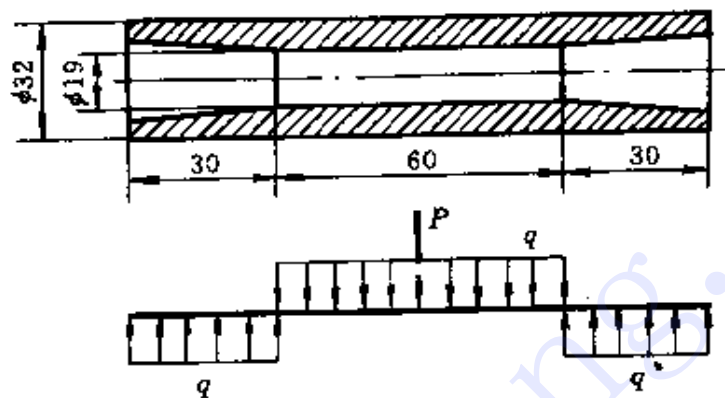
题 10.8 图示矩形截面阶梯形钢杆, 承受对称循环的轴向外力作用, 该力的最大值  $P_{\max} = 17\text{kN}$ , 试确定钢杆过渡处圆角半径  $r$  的最小值。已知:  $\sigma_b = 500\text{MPa}$ ,  $\sigma_{-1}^{lg-HK} = 150\text{MPa}$ ,  $\epsilon_\sigma = 1.25$ ,  $\beta = 1.1$ ,  $n_f = 3.0$ 。在  $H/h = 1.33$  和  $\sigma_b = 500\text{MPa}$  的情况下, 有效应力集中系数  $K_\sigma$  与比值  $r/h$  间的关系如下表。

$r/h$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70
$K_\sigma$	1.77	1.59	1.46	1.38	1.30	1.27	1.25

题 10.9 图示活塞销, 承受交变外力  $P$  作用, 该力在最大值  $P_{\max} = 52\text{kN}$  和最小值  $P_{\min} = -11.5\text{kN}$  之间变化, 试计算活塞销的工作安全系数。活塞销用铬镍合金钢制成, 强度极限  $\sigma_b = 960\text{MPa}$ , 疲劳极限  $\sigma_{-1} = 430\text{MPa}$ , 敏感系数  $\psi_\sigma = 0.1$ , 活塞销表面经磨削加工, 尺寸系数可由图 10-15 中查阅。



题 10.8 图



题 10.9 图

题 10.10 一圆截面阶梯形轴,粗段与细段的直径分别为  $D = 60\text{mm}$  和  $d = 50\text{mm}$ ,过渡处的圆角半径  $r = 5\text{mm}$ ,危险截面上的内力为同相位的对称循环交变弯矩和交变扭矩,其最大值分别为  $M_{\max} = 1.0\text{kN} \cdot \text{m}$  和  $T_{\max} = 1.5\text{kN} \cdot \text{m}$ ,试计算该截面的工作安全系数。材料的强度极限  $\sigma_b = 800\text{MPa}$ ,疲劳极限  $\sigma_{-1} = 350\text{MPa}$ ,  $\tau_{-1} = 200\text{MPa}$ ,轴表面经精车加工。

## \*第十一章 能量法

### § 11-1 引言

在外力作用下,弹性体发生变形,载荷作用点沿载荷作用方向将产生一定位移,即所谓**相应位移**。因此,在变形过程中,载荷在相应位移上作功。与此同时,弹性体因变形而具有作功的能力,即具有能量,例如被拉弯的弓能将箭射出。弹性体因变形而贮存的能量,称为**应变能或变形能**。

根据能量守恒定理可知,如果载荷是由零逐渐地、缓慢地增加,以致弹性体的动能与热能等的变化均可忽略不计,则贮存在弹性体内的应变能  $U$ ,数值上应等于外力所作之功  $W$ ,即

$$U = W \quad (11-1)$$

此原理称为弹性体的**功能原理**。

利用功、能概念,建立了分析弹性体变形与应力的一般方法,即所谓**能量法**。本章研究外力功的计算,应变能的表达式,计算位移的单位载荷法,以及分析冲击应力的能量方法,研究对象包括直杆、桁架与刚架,涉及静定与静不定问题。

### § 11-2 外力功与应变能计算

外力功与应变能的计算是能量法的基础,首先研究在弹性变形过程中,外力所作之功。

#### 一、外力功计算

图 11-1(a) 所示杆,承受载荷  $p$  作用。载荷  $p$  由零逐渐地增加,

最后达到最大值  $P$ ; 载荷  $p$  的相应位移  $\delta$  也随之增长, 最后达到最大值  $\Delta$ 。在线弹性范围内, 载荷  $p$  与位移  $\delta$  成正比, 其关系如图 11-1(b) 所示。

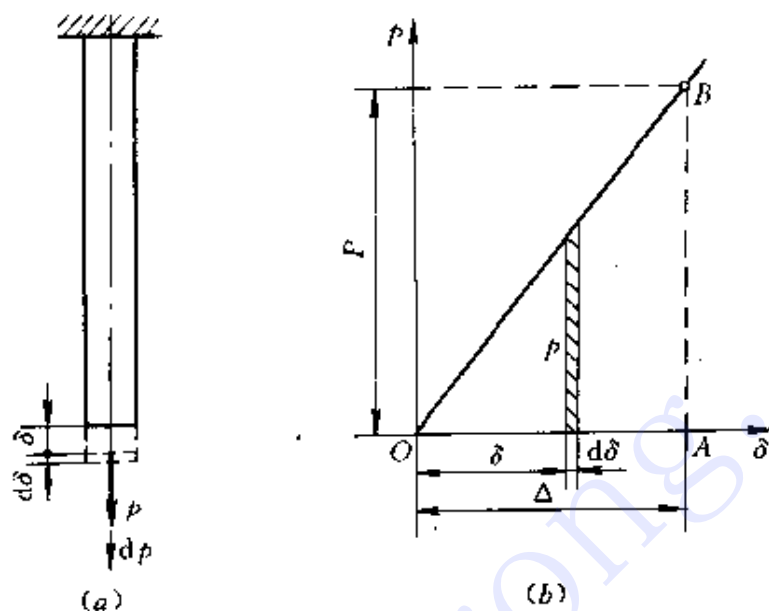


图 11-1

在加载过程中, 当载荷  $p$  增加微量  $dp$  时, 位移相应增长  $d\delta$  (图 11-1, a), 这时, 载荷  $p$  所作之功为  $p d\delta$ , 即等于图 11-1(b) 所示阴影区域的面积。因此, 在整个加载过程中, 载荷所作之总功为

$$W = \int_0^{\Delta} p d\delta$$

即等于图 11-1(b) 所示三角形  $OAB$  的面积, 于是得

$$W = \frac{P\Delta}{2} \quad (11-2)$$

上式为计算外力功的一般公式, 适用于载荷与相应位移保持正比关系的任一弹性体, 即所谓**线性弹性体**。

还应指出, 式(11-2)中的载荷  $P$  应理解为**广义力**, 它可以是集中力或集中力偶; 与此相应, 式中的位移  $\Delta$  应理解为**广义位移**, 例如, 与集中力相应的位移为线位移, 与集中力偶相应的位移为角位移, 等等。总之, 广义力在相应广义位移上做功。



## 二、应变能计算

现在利用功能原理计算线性弹性杆的应变能, 并分几种情况进行讨论。

### 1. 拉(压)杆的应变能

当杆件处于轴向拉伸(或压缩)时, 其轴向变形为

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

即

$$\Delta l \propto N$$

所以, 外力所作之功为

$$W = \frac{N\Delta l}{2} = \frac{N^2 l}{2EA}$$

根据功能原理, 得拉(压)杆的应变能为

$$U = W = \frac{N^2 l}{2EA} \quad (11-3)$$



图 11-2

### 2. 轴的应变能

当圆截面轴受扭时(图 11-3), 轴的扭转角为

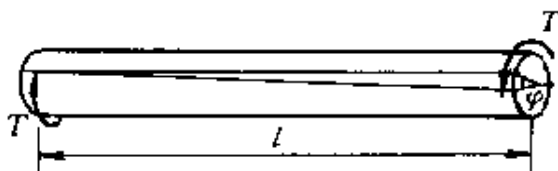


图 11-3

$$\phi = \frac{Tl}{GI_p}$$

即

$$\phi \propto T$$

所以, 圆轴的扭转应变能为

$$U = \frac{T\phi}{2} = \frac{T^2 l}{2GI_p} \quad (11-4)$$

至于矩形截面轴, 其应变能亦可按上式进行计算, 只需将式中的  $I_p$  改为  $I_x$  即可[见式(3-36)]。

### 三、梁的应变能

一般情况下, 梁的剪力与弯矩均沿梁轴变化(图 11-4, a), 因此, 梁的应变能应从微段  $dx$  入手进行计算(图 11-4, b)。

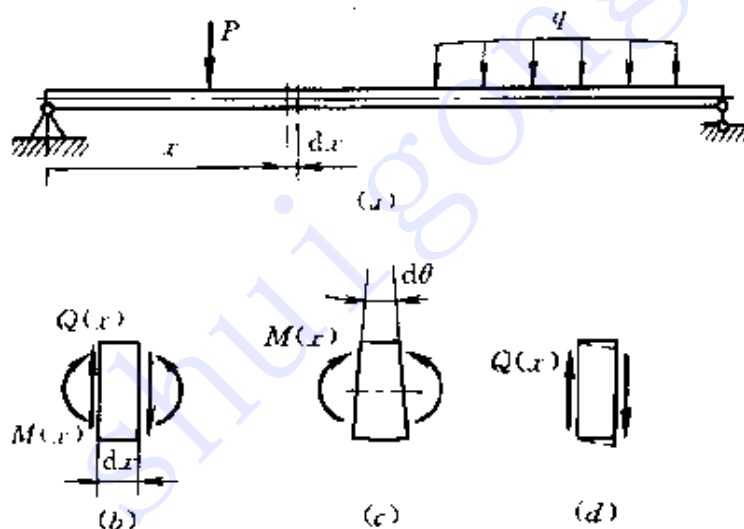


图 11-4

在弯矩  $M(x)$  作用下, 微段两端横截面间作相对转动(图 11-4, c), 相对转角为

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} dx$$

在剪力  $Q(x)$  作用下, 微段两端横截面间相对错动(图 11-4, d)。所以, 弯矩在弯曲变形  $d\theta$  上做功; 而剪力则在相应剪切变形上做功。但是, 在一般细长梁中, 剪力所作之功远小于弯矩所作之功, 因而可以忽略不计。因此, 梁微段  $dx$  的应变能为

$$dU = dW = \frac{M(x)d\theta}{2} = \frac{M^2(x)dx}{2EI}$$

而整个梁的应变能则为

$$U = \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \quad (11-5)$$

#### 四、组合变形杆的应变能

当杆处于组合变形时, 微段受力的一般形式如图 11-5(a) 所示, 显然, 轴力  $N(x)$  仅在轴力引起的轴向变形  $d\delta$  上做功, 而扭矩  $T(x)$  与弯矩  $M(x)$  则仅分别在各自引起的扭转变形  $d\phi$  与弯曲变形  $d\theta$  上做功(图 10-5, b)。因此, 在忽略剪力影响的情况下, 微段  $dx$  的应变能为

$$\begin{aligned} dU = dW &= \frac{N(x)d\delta}{2} + \frac{T(x)d\phi}{2} + \frac{M(x)d\theta}{2} \\ &= \frac{N^2(x)dx}{2EA} + \frac{T^2(x)dx}{2GJ_k} + \frac{M^2(x)dx}{2EI} \end{aligned}$$

而整个杆或杆系的应变能则为

$$U = \int_l \frac{N^2(x)}{2EA} dx + \int_l \frac{T^2(x)}{2GJ_k} dx + \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \quad (11-6)$$

式中,  $GJ_k$  代表抗扭刚度, 对于圆截面轴,  $J_k = I_p$ 。

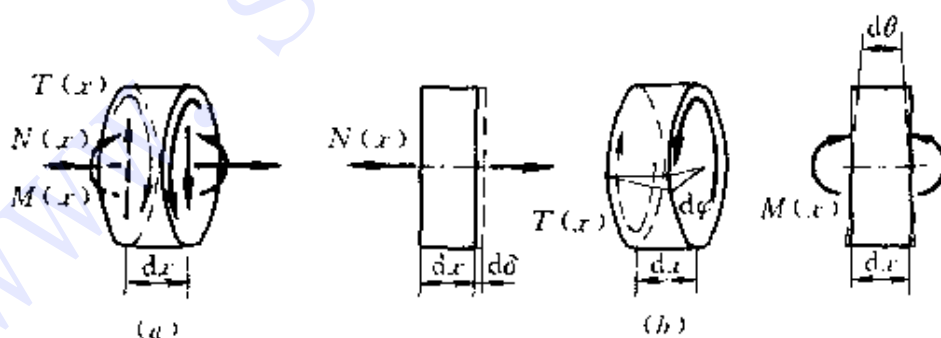


图 11-5

由式(11-3) ~ (11-6) 可以看出, 应变能恒为正值。

**例 1** 图 11-6 所示简支梁  $AB$ , 在横截面  $A$  处作用一个矩为  $M_0$  的集中力偶, 试计算梁的应变能与横截面  $A$  的转角。设抗弯刚

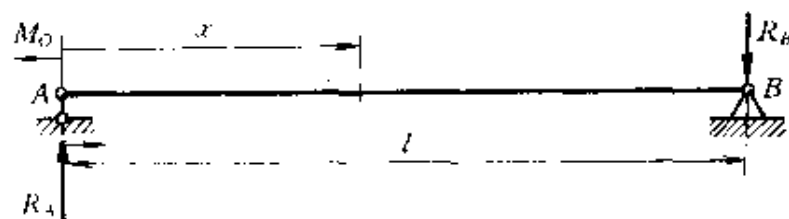


图 11-6

度  $EI$  为常值。

解 1. 应变能计算

梁的支反力为  $R_A = R_B = \frac{M_0}{l}$

所以, 梁的弯矩方程为

$$M(x) = R_A x - M_0 = M_0 \left( \frac{x}{l} - 1 \right)$$

将上述表达式代入式(11-5), 得梁的应变能为

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l M_0^2 \left( \frac{x}{l} - 1 \right)^2 dx = \frac{M_0^2 l}{6EI}$$

2. 转角计算

设截面  $A$  的转角为  $\theta_A$ , 且与力偶矩  $M_0$  同向, 则由弹性体的功能原理可知

$$\frac{M_0 \theta_A}{2} = \frac{M_0^2 l}{6EI}$$

由此得

$$\theta_A = \frac{M_0 l}{3EI} \quad (\circ)$$

所得  $\theta_A$  为正, 说明关于转角  $\theta_A$  与力偶矩  $M_0$  同向的假设是正确的。实际上, 由于应变能恒为正, 因此, 当梁上仅作用一个集中载荷时, 该载荷所作之功也恒为正, 即载荷与相应位移同向。

**例 2** 图 11-7 所示板件, 承受轴向载荷  $P$  作用, 试计算板件的总伸长。板件的厚度为  $\delta$ , 长度为  $l$ , 左、右端的截面宽度分别为  $b_1$  与  $b_2$ , 材料的弹性模量为  $E$ 。

解 1. 应变能计算

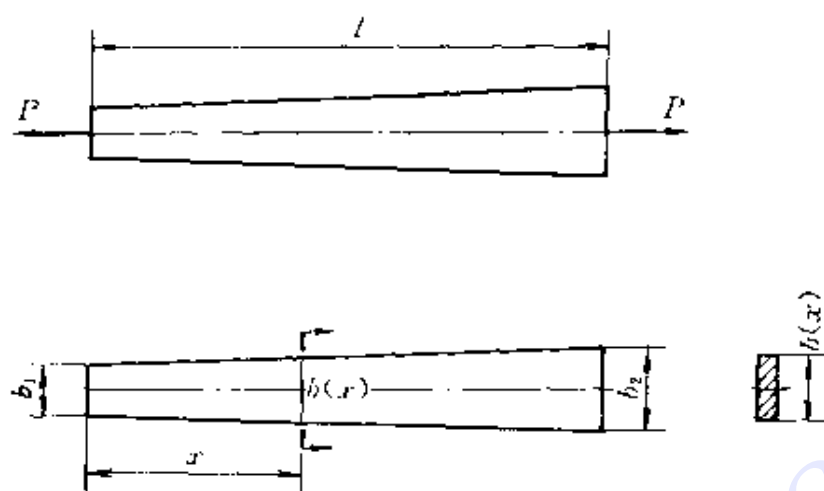


图 11-7

由于杆为变截面, 因此, 应从微段  $dx$  入手计算其应变能。在微段  $dx$  内, 横截面面积可视为常数, 由式(11-6) 得杆的应变能为

$$U = \int_0^l \frac{N^2}{2EA(x)} dx \quad (a)$$

设  $x$  截面的宽度为  $b(x)$ , 由图可知

$$b(x) = b_1 + (b_2 - b_1) \frac{x}{l}$$

由此得  $x$  截面的面积为

$$A(x) = \delta \left[ b_1 + (b_2 - b_1) \frac{x}{l} \right]$$

代入式(a), 得整个杆的应变能为

$$\begin{aligned} U &= \frac{P^2}{2E\delta} \int_0^l \frac{1}{b_1 + \frac{b_2 - b_1}{l}x} dx \\ &= \frac{P^2 l (\ln b_2 - \ln b_1)}{2E\delta(b_2 - b_1)} \end{aligned}$$

## 2. 变形计算

设杆的轴向变形为  $\Delta l$ , 则由弹性体的功能原理可知

$$\frac{P\Delta l}{2} = \frac{P^2 l (\ln b_2 - \ln b_1)}{2E\delta(b_2 - b_1)}$$

由此得

$$\Delta l = \frac{Pl(\ln b_2 - \ln b_1)}{E\delta(b_2 - b_1)}$$

### § 11-3 单位载荷法

由以上分析可以看出, 只有当弹性体上仅作用一个广义力, 而且所求位移为其相应位移时, 才可能直接利用功能原理计算弹性体的位移。本节介绍计算弹性体位移的一个一般方法——单位载荷法。为叙述方便, 以梁为例进行推证。

图 11-8(a) 所示梁, 承受载荷(广义力) $P_1, P_2, \dots, P_n$  作用, 现在拟求梁上任一点  $A$  的挠度  $f$ 。为此, 首先在图 11-8(b) 所示同一梁的  $A$  点, 并沿所求位移的方向施加一个数值等于 1 的力, 即所谓单位力, 然后, 再施加载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$ 。从图中可以看出, 当施加实际载荷时, 已加之单位力在相应位移  $f$  上作功。这样, 利用加载过程中的功、能关系即可确定位移  $f$ 。具体分析如下。

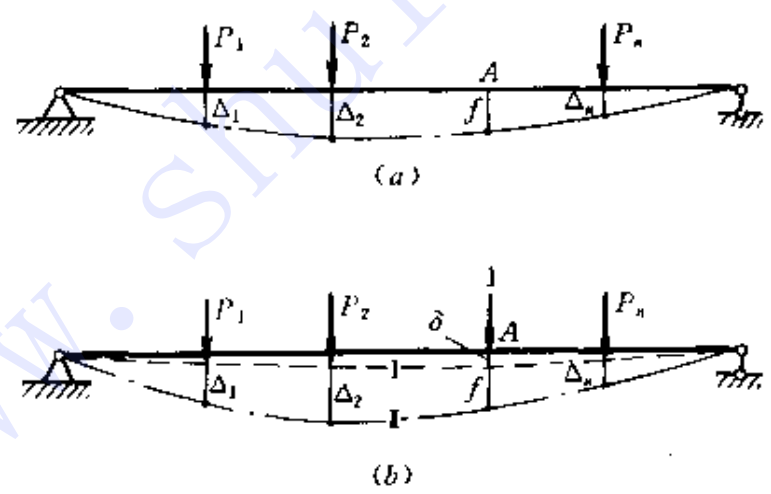


图 11-8

首先分析在上述加载过程中外力所作之功。

设单位力作用在梁上时, 挠曲轴位于图 11-8(b) 中的位置 I,  $A$  点的挠度为  $\delta$ ; 当实际载荷作用后, 挠曲轴由位置 I 变到位置 II, 载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$  作用处的相应位移(广义位移)分别为  $\Delta_1,$

$\Delta_2, \dots, \Delta_n$ 。由于先加单位力, 后加实际载荷, 因此, 外力所作之功为

$$W = \frac{1}{2} \times \delta + \sum_{i=1}^n \frac{P_i \Delta_i}{2} + 1 \times f$$

式中, 右边第三项  $1 \times f$  代表已加之单位力在位移  $f$  上所作之功, 因属常力做功, 故不必除 2。

现在研究单位力与实际载荷作用于梁上时梁的应变能。

设单位力作用时梁内  $x$  截面的弯矩为  $\bar{M}(x)$  (图 11-9, a), 实际载荷作用时梁内同一截面的弯矩为  $M(x)$  (图 11-9, b), 因此, 当单位力与实际载荷同时作用时,  $x$  截面的弯矩为

$$M_{\text{总}}(x) = \bar{M}(x) + M(x)$$

将上述表达式代入式(11-5), 得梁在位置 I 时的应变能为

$$\begin{aligned} U &= \int_l \frac{M_{\text{总}}^2(x)}{2EI} dx = \int_l \frac{[\bar{M}(x) + M(x)]^2}{2EI} dx \\ &= \int_l \frac{\bar{M}^2(x)}{2EI} dx + \int_l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx + \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \end{aligned}$$

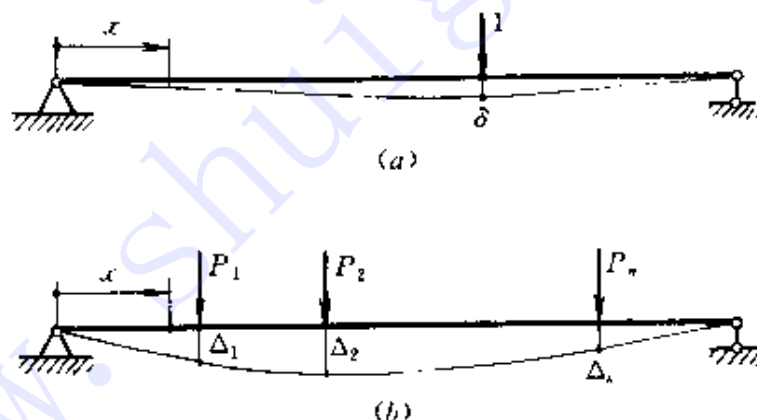


图 11-9

根据功能原理可知, 在上述加载过程中, 外力所作之功  $W$ , 数值上应等于应变能  $U$ , 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \delta + \sum_{i=1}^n \frac{P_i \Delta_i}{2} + 1 \times f \\ = \int_l \frac{\bar{M}^2(x)}{2EI} dx + \int_l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx + \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \end{aligned} \quad (a)$$

由图 11-9(a)、(b) 还可看出



$$\frac{1 \times \delta}{2} = \int_l \frac{\bar{M}^2(x)}{2EI} dx$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{P_i \Delta_i}{2} = \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

将以上关系代入式(a), 于是有

$$1 \times f = \int_l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx \quad (\text{b})$$

并由此得 A 点的挠度为

$$f = \int_l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx \quad (\text{c})$$

由式(b)、(c)可知, 如果由上式求得的位移  $f$  为正, 则说明单位力在位移  $f$  上作正功, 即位移  $f$  与所加单位力同向。反之, 则所求位移与所加单位力反向。

同理, 如果要计算梁上某截面的转角  $\theta$ , 则只需在该截面施加一个矩为 1 的力偶, 即所谓单位力偶, 然后按上述推导方法, 即可求得转角为

$$\theta = \int_l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx$$

式中,  $\bar{M}(x)$  代表单位力偶在梁内引起的弯矩。

综上所述, 梁的挠度与转角的计算公式可统一写成为

$$\Delta = \int_l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx \quad (11-7)$$

式中,  $\Delta$  或为挠度或为转角, 而  $\bar{M}(x)$  则相应地为单位力或单位力偶引起的弯矩。

同样可以证明, 杆件组合变形时的位移为

$$\Delta = \int_l \frac{\bar{N}(x)N(x)}{EA} dx + \int_l \frac{\bar{T}(x)T(x)}{GJ_k} dx + \int_l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx \quad (11-8)$$

式中,  $\bar{N}(x)$  与  $N(x)$  分别为单位载荷与实际载荷引起的轴力;  $\bar{T}(x)$  与  $T(x)$  分别为单位载荷与实际载荷引起的扭矩。

对于桁架与轴, 上式分别简化为

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_i N_i l_i}{E_i A_i} \quad (11-9)$$

$$\phi = \int_l \frac{\bar{T}(x) T(x)}{G J_k} dx \quad (11-10)$$

以上所述方法称为**单位载荷法**, 它是一个计算位移的一般方法, 在工程中得到广泛应用。

**例3** 图 11-10(a) 所示悬臂梁 AB, 承受均布载荷  $q$  作用, 试用单位载荷法计算横截面 A 的挠度。设抗弯刚度  $EI$  为常值。

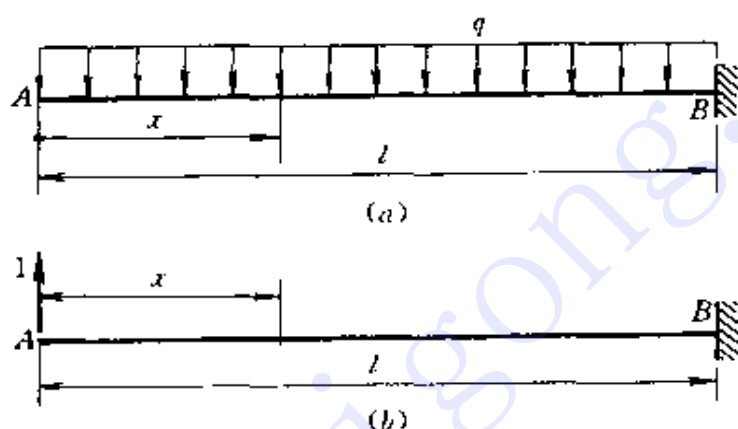


图 11-10

**解** 为了计算截面 A 的挠度  $f_A$ , 在该截面处加一铅垂方向的单位力(图 11-10, b)。

在均布载荷作用下, 梁的弯矩方程为

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

在单位力作用下, 梁的弯矩方程则为

$$\bar{M}(x) = 1 \cdot x = x$$

将上述表达式代入式(11-7), 即得截面 A 的挠度为

$$\begin{aligned} f_A &= \int_l \frac{\bar{M}(x) M(x)}{EI} dx \\ &= \int_0^l \frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right) \cdot x}{EI} dx = -\frac{ql^4}{8EI} \end{aligned}$$

所得  $f_A$  为负, 说明位移  $f_A$  的实际方向与所加单位力的方向

相反, 即截面  $A$  的形心铅垂向下移动。

**例 4** 图 11-11(a) 所示简支梁, 承受集中载荷  $P$  作用, 试用单位载荷法计算横截面  $A$  的转角。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

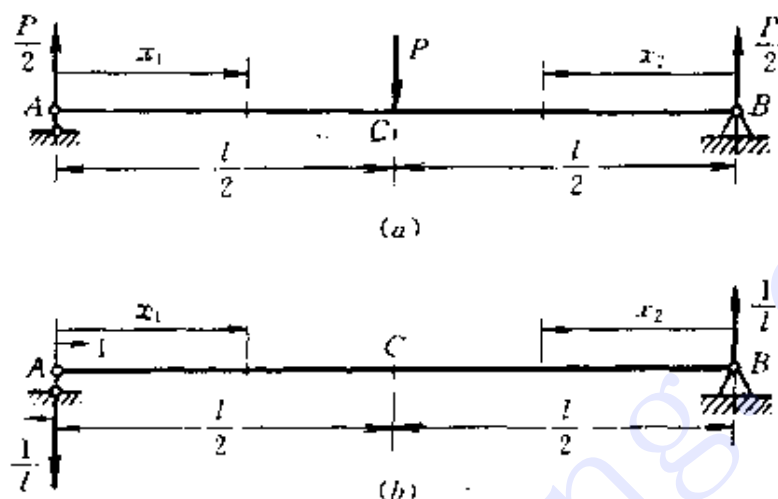


图 11-11

**解** 为了计算截面  $A$  的转角, 在该截面处加一单位力偶(图 11-11, b)。应注意的是, 由于式 (11-7) 中的被积函数为  $\bar{M}(x)$  与  $M(x)$  的乘积, 因此, 在建立  $\bar{M}(x)$  与  $M(x)$  的表达式时, 梁段的划分与坐标  $x$  的选取应完全一致。按此原则, 将梁划分为  $AC$  与  $CB$  两段, 并选坐标  $x_1$  与  $x_2$  如图所示, 由此得各梁段的弯矩方程如下。

$$AC \text{ 段 } \left( 0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2} \right):$$

$$M(x_1) = \frac{Px_1}{2}$$

$$\bar{M}(x_1) = 1 - \frac{x_1}{l}$$

$$BC \text{ 段 } \left( 0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2} \right):$$

$$M(x_2) = \frac{Px_2}{2}$$

$$\bar{M}(x_2) = \frac{x_2}{l}$$

将上述方程代入式 (11-7), 即得截面  $A$  的转角为

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{Px_1}{2} \left( 1 - \frac{x_1}{l} \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{Px_2}{2} \frac{x_2}{l} dx_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$$

所得  $\theta_A$  为正, 说明其方向与所加单位力偶的方向相同, 即截面  $A$  沿顺时针方向转动。

**例 5** 图 11-12(a) 所示桁架, 在接点  $C$  处承受铅垂集中力  $P$  作用, 试用单位载荷法计算接点  $C$  的水平位移  $\Delta_C$ 。设杆 1、2 均为等截面直杆, 且抗拉(压)刚度  $EA$  相同。

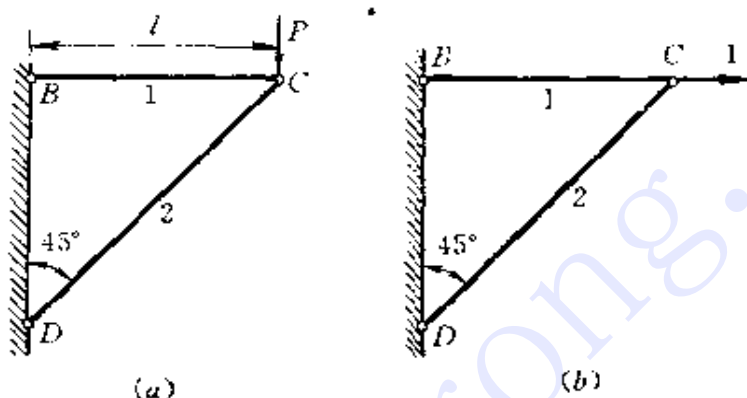


图 11-12

**解** 为了计算接点  $C$  的水平位移, 在该接点沿水平方向加一单位力(图 11-12, b)。

在载荷  $P$  作用下, 杆 1、2 的轴力分别为

$$N_1 = P$$

$$N_2 = -\sqrt{2}P$$

在单位力作用下, 杆 1、2 的轴力则分别为

$$\bar{N}_1 = 1$$

$$\bar{N}_2 = 0$$

根据式(11-9), 得接点  $C$  的水平位移为

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{N_1 \bar{N}_1 l_1}{E_1 A_1} + \frac{N_2 \bar{N}_2 l_2}{E_2 A_2} \\ &= \frac{P \cdot 1 \cdot l}{EA} + \frac{(-\sqrt{2}P) \cdot 0 \cdot \sqrt{2}l}{EA} = \frac{Pl}{EA} \end{aligned}$$

所得  $\Delta_C$  为正, 说明其方向为水平向右。

**例 6** 图 11-13(a) 所示刚架(即用刚性接头连接的杆系结构), 自由端承受铅垂集中力  $P$  作用, 试用单位载荷法计算横截面  $A$  的垂直位移。杆  $AB$  与杆  $BC$  均为等截面直杆, 且抗弯刚度  $EI$  相同。

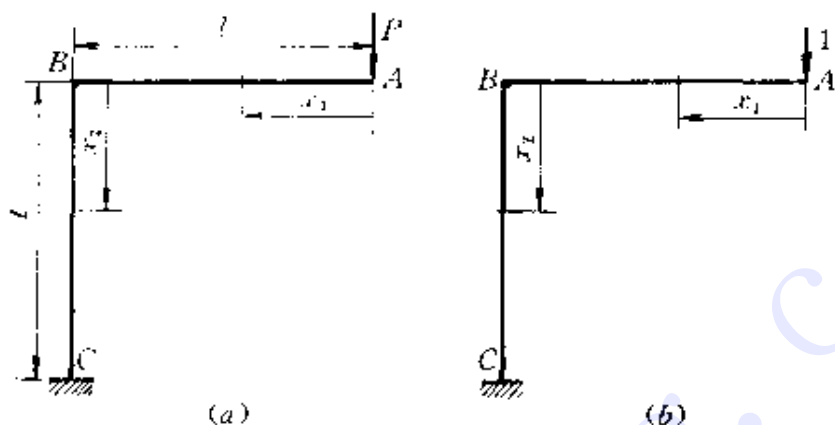


图 11-13

解 可以看出,  $AB$  段受弯, 而  $BC$  段则处于弯压组合受力状态。但分析表明, 与弯矩相比, 轴力对刚架变形的影响很小, 通常均可忽略不计。因此, 式(11-7) 亦可推广应用于刚架。

在载荷  $P$  作用下, 杆  $AB$  与  $BC$  的弯矩方程分别为

$$M(x_1) = -Px_1 \quad (0 \leq x_1 \leq l)$$

$$M(x_2) = -Pl \quad (0 \leq x_2 \leq l)$$

在单位力作用下(图 11-13, b), 杆  $AB$  与  $BC$  的弯矩方程则分别为

$$\bar{M}(x_1) = -1 \cdot x_1 = -x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq l)$$

$$\bar{M}(x_2) = -1 \cdot l = -l \quad (0 \leq x_2 \leq l)$$

于是, 由式(11-7), 得截面  $A$  的垂直位移为

$$\begin{aligned} f_A &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^l M(x_1) \bar{M}(x_1) dx_1 + \int_0^l M(x_2) \bar{M}(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^l (-Px_1)(-x_1) dx_1 + \int_0^l (-Pl)(-l) dx_2 \right] \\ &= \frac{4Pl^3}{3EI} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

**例 7** 图 11-14(a) 所示等截面刚架, 承受集中载荷  $P$  作用, 试

用单位载荷法计算截面  $A$  的垂直位移  $f_A$ 。设抗弯刚度  $EI$  与抗扭刚度  $GJ_t$  均为已知常数。

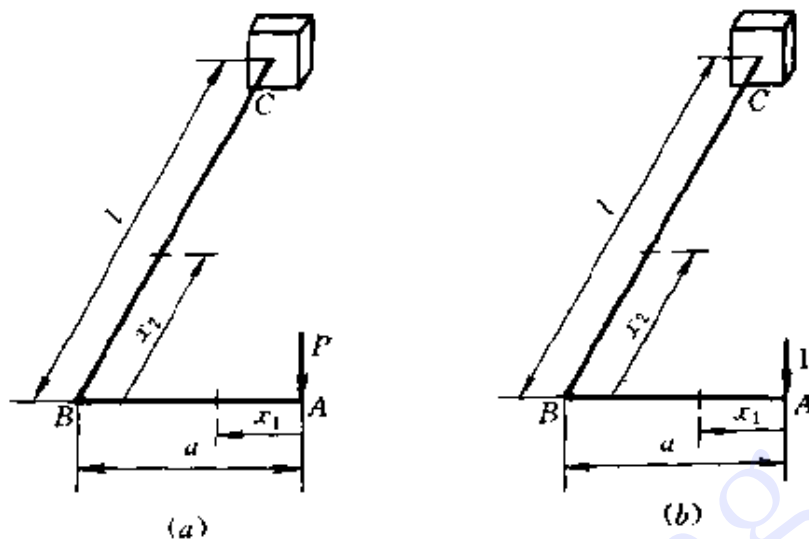


图 11-14

解 在载荷  $P$  作用下, 刚架的  $AB$  段受弯,  $BC$  段处于弯扭组合受力状态, 因此, 由图 11-14(b) 与式(11-8) 可知, 截面  $A$  的垂直位移为

$$f_A = \int_0^a \frac{\bar{M}(x_1)M(x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^l \frac{\bar{M}(x_2)M(x_2)}{EI} dx_2 + \int_0^l \frac{\bar{T}(x_2)T(x_2)}{GJ_t} dx_2$$

可以看出, 载荷  $P$  引起的内力为

$$M(x_1) = -Px_1$$

$$M(x_2) = -Px_2$$

$$T(x_2) = -Pa$$

而单位力引起的内力则为

$$\bar{M}(x_1) = -x_1$$

$$\bar{M}(x_2) = -x_2$$

$$\bar{T}(x_2) = -a$$

于是得

$$\begin{aligned}
 f_A &= \int_0^a \frac{Px_1 \cdot x_1}{EI} dx_1 + \int_0^l \frac{Px_2 \cdot x_2}{EI} dx_2 + \int_0^l \frac{Pa \cdot a}{GJ_k} dx_2 \\
 &= \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pa^2l}{GJ_k} \quad (\downarrow)
 \end{aligned}$$

## § 11-4 静不定问题分析

前面讨论了利用单位载荷法分析杆件位移的问题, 现在进一步研究单位载荷法在求解静不定问题中的应用。

如 § 6-6 所述, 求解静不定梁的基本要点是: 首先, 将静不定梁的多余约束解除, 而以相应的多余未知力代替其作用, 得静不定梁的相当系统; 然后, 利用相当系统在多余约束处所应满足的变形条件, 建立用载荷与多余未知力表示的变形补充方程; 最后, 由补充方程确定多余未知力, 并通过相当系统计算原静不定梁的内力、应力与位移等。

以上所述原则具有普遍意义, 它不仅适用于梁, 同样也适用于其它杆件与结构, 而单位载荷法的应用则为建立补充方程提供了更一般、更有效的手段。

下面举例说明上述方法的应用。

**例 8** 图 11-15(a) 所示静不定梁, 在横截面  $B$  处承受矩为  $M_0$  的力偶作用, 试计算截面  $B$  处的支反力  $R_B$ 。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

**解** 显然, 该梁为一次静不定。如果将支座  $B$  当作多余约束予以解除, 并以相应支反力  $R_B$  代替其作用, 则原静不定梁的相当系统如图 11-15(b) 所示, 而相应的变形协调条件为截面  $B$  的挠度为零, 即

$$f_B = 0 \quad (a)$$

在载荷  $M_0$  与多余支反力  $R_B$  作用下(图 11-15, b), 梁的弯矩方程为

$$M(x) = M_0 + R_B x$$



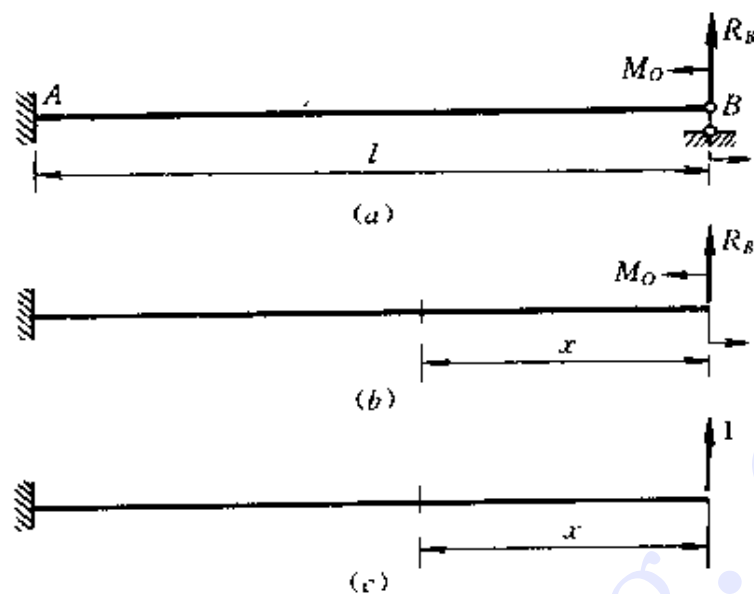


图 11-15

在单位力作用下(图 11-15,c),梁的弯矩方程则为

$$\bar{M}(x) = 1 \cdot x = x$$

因此,当载荷  $M_o$  与多余支反力  $R_B$  同时作用时,相当系统截面 B 的挠度为

$$f_B = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_o + R_B x) x dx = \frac{M_o l^2}{2EI} + \frac{R_B l^3}{3EI} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a),得补充方程为

$$\frac{M_o l^2}{2EI} + \frac{R_B l^3}{3EI} = 0$$

由此得

$$R_B = -\frac{3M_o}{2l}$$

所得  $R_B$  为负,说明其实际方向与图 11-15(a) 中所设方向相反,即应为垂直向下。

**例9** 图 11-16(a) 所示等截面刚架, A 端铰支, C 端固定, 在杆 AB 上承受均布载荷  $q$  作用, 试计算支反力。

**解** 该刚架存在四个支反力 ( $R_A$ 、 $R_C$ 、 $H_C$  与  $M_C$ ), 而有效平衡方程仅三个 ( $\sum X = 0$ 、 $\sum Y = 0$  与  $\sum M = 0$ ), 故为一度静不定。

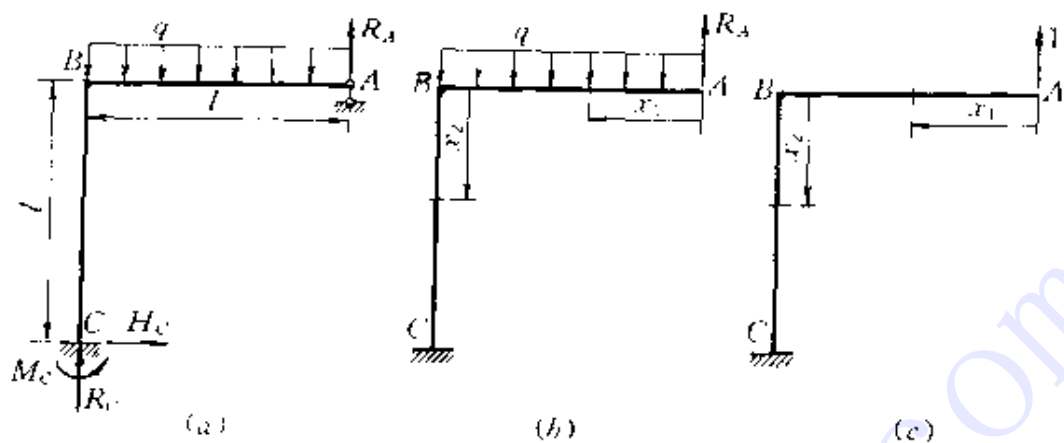


图 11-16

如果将铰支座  $A$  当作多余约束予以解除, 并以垂直支反力  $R_A$  代替其作用, 则原静不定刚架的相当系统如图 11-16(b) 所示, 而相应的变形协调条件为截面  $A$  的垂直位移为零, 即

$$f_A = 0 \quad (a)$$

在载荷  $q$  与多余支反力  $R_A$  作用下(图 11-16, b), 刚架  $AB$  与  $BC$  段的弯矩方程分别为

$$M(x_1) = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2} \quad (0 \leq x_1 \leq l)$$

$$M(x_2) = R_A l - \frac{q l^2}{2} \quad (0 \leq x_2 \leq l)$$

在单位力作用下(图 11-16, c), 刚架的弯矩方程则为

$$\bar{M}(x_1) = 1 \cdot x_1 = x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq l)$$

$$\bar{M}(x_2) = 1 \cdot l = l \quad (0 \leq x_2 \leq l)$$

所以, 当载荷  $q$  与多余支反力  $R_A$  同时作用时, 相当系统截面  $A$  的垂直位移为

$$\begin{aligned} f_A &= \int_0^l \frac{(R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2}) x_1}{EI} dx_1 + \int_0^l \frac{(R_A l - \frac{q l^2}{2}) l}{EI} dx_2 \\ &= \frac{4R_A l^3}{3EI} - \frac{5q l^4}{8EI} \end{aligned} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a), 得补充方程为

$$\frac{4R_A l^3}{3EI} - \frac{5ql^4}{8EI} = 0$$

由此得

$$R_A = \frac{15ql}{32}$$

多余支反力确定后, 由平衡方程得其它支反力为

$$H_C = 0, \quad R_C = \frac{17ql}{32}, \quad M_C = \frac{ql^2}{32}$$

**例 10** 图 11-17(a) 所示桁架, 在接点  $B$  承受铅垂载荷  $P$  作用, 试求各杆的轴力, 已知各杆的抗拉(压)刚度均为  $EA$ 。

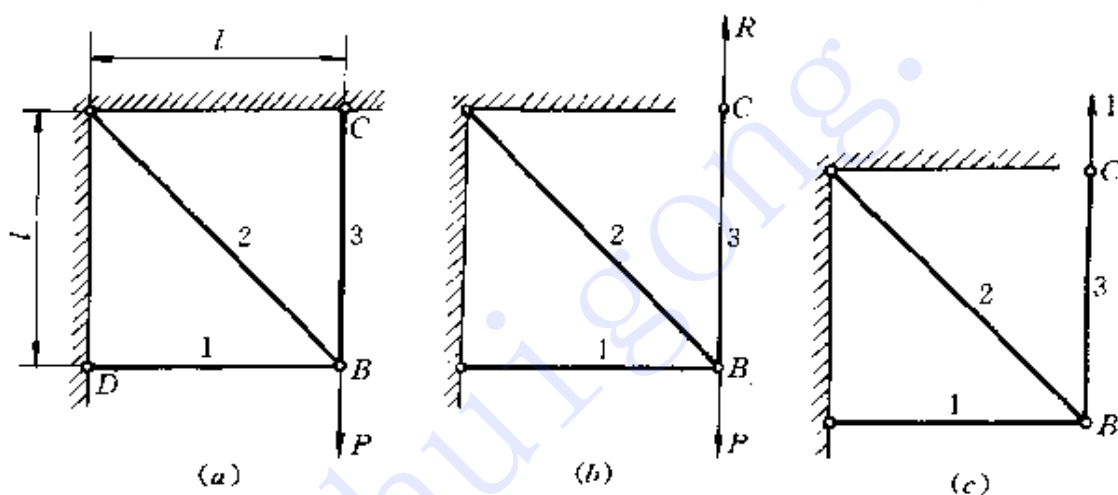


图 11-17

**解** 该桁架为一度静不定。设将杆 3 上端  $C$  处的轴向约束视为多余约束予以解除, 并以多余力  $R$  代替其作用, 则原静不定桁架的相当系统如图 11-17(b) 所示, 而相应的变形协调条件为接点  $C$  的垂直位移为零, 即要求

$$f_C = 0 \tag{a}$$

在载荷  $P$  与多余力  $R$  作用下(图 11-17, b), 各杆的轴力分别为

$$N_1 = R - P$$

$$N_2 = \sqrt{2} (P - R)$$

$$N_3 = R$$

在单位力作用下(图 11-17, c), 各杆的轴力则分别为

$$\bar{N}_1 = 1$$

$$\bar{N}_2 = -\sqrt{2}$$

$$\bar{N}_3 = 1$$

所以, 当载荷  $P$  与多余力  $R$  同时作用时, 相当系统接点  $C$  的垂直位移为

$$\begin{aligned} f_c &= \frac{1}{EA} [(R - P)l \cdot 1 + \\ &\quad \sqrt{2}(P - R) \cdot \sqrt{2}l(-\sqrt{2}) + Rl \cdot 1] \\ &= \frac{1}{EA} [R(2 + 2\sqrt{2}) - (1 + 2\sqrt{2})P] \end{aligned} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a), 得

$$R(2 + 2\sqrt{2}) - (1 + 2\sqrt{2})P = 0$$

由此得

$$R = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{2})}P$$

多余力确定后, 各杆的轴力亦随之确定, 分别为

$$N_1 = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{2})}P - P = -\frac{P}{2(1 + \sqrt{2})}$$

$$N_2 = \sqrt{2} \left[ P - \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{2})}P \right] = \frac{P}{2 + \sqrt{2}}$$

$$N_3 = R = \frac{(1 + 2\sqrt{2})P}{2(1 + \sqrt{2})}$$

## § 11-5 冲击载荷与冲击应力

当物体以一定速度作用在构件上时, 构件在极短时间内使物体速度变为零。这时, 在物体与构件之间产生很大的相互作用力, 称为**冲击载荷**。冲击问题是一个很复杂的问题, 现以自由落体对线性弹性体的冲击为例, 介绍冲击载荷与冲击应力的工程计算方法。

如图 11-18 所示, 一重量为  $P$  的物体自高度  $H$  处自由下落, 冲

击某线性弹性体。由于该弹性体阻碍冲击物的运动, 后者的速度迅速变为零。这时, 弹性体所受冲击载荷及相应位移均达到最大值, 并分别用  $P_d$  与  $\Delta_d$  表示。

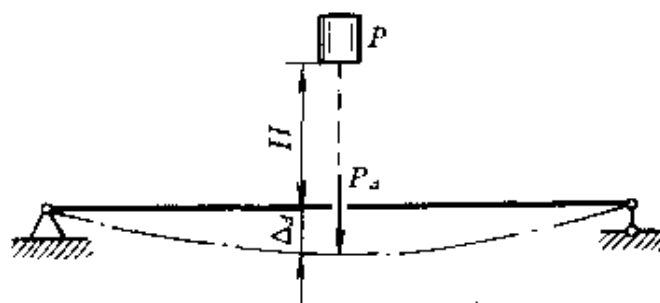


图 11-18

为简化分析, 设冲击物为刚体, 并忽略被冲击弹性体的质量以及冲击过程中的能量损失, 则由能量守恒定律可知, 当冲击物的速度变为零时, 冲击物减小的势能  $E_p$  全部转化为被冲击弹性体的应变能  $U$ , 即

$$E_p = U \quad (a)$$

由图 11-18 可以看出, 当冲击物的速度变为零时, 物体减少的势能为

$$E_p = P(H + \Delta_d)$$

而弹性体的应变能则为

$$U = \frac{P_d \Delta_d}{2}$$

将以上二式代入式(a), 得

$$P(H + \Delta_d) = \frac{P_d \Delta_d}{2} \quad (b)$$

如前所述, 作用在线性弹性体上的载荷与其相应位移成正比, 即

$$P_d = k\Delta_d$$

式中, 比例常数  $k$  称为**刚度系数**, 代表使弹性体在冲击点、沿冲击载荷方向产生单位位移所需之力。将上述关系式代入式(b), 于是

得

$$\Delta_d^2 - \frac{2P}{k}\Delta_d - \frac{2PH}{k} = 0$$

或写作

$$\Delta_d^2 - 2\Delta_s\Delta_d - 2\Delta_s H = 0 \quad (c)$$

式中,  $\Delta_s = P/k$ , 代表将  $P$  视为静载荷作用在被冲击弹性体上时的相应静位移。

于是, 由式(c) 得最大冲击位移为

$$\Delta_d = \Delta_s \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_s}} \right] \quad (11-11)$$

而最大冲击力则为

$$P_d = k\Delta_d = P \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_s}} \right] \quad (11-12)$$

最大冲击载荷确定后, 弹性体内的应力亦随之确定。

由式(11-12) 可以看出, 最大冲击载荷之值不仅与冲击物的重量  $P$  有关, 而且与静位移  $\Delta_s$  有关。被冲击弹性体的刚度愈小, 静位移  $\Delta_s$  愈大, 冲击载荷  $P_d$  则愈小。所以, 在设计承受冲击载荷的构件时, 如果条件允许, 应尽量降低其刚度。例如附加缓冲弹簧, 利用弹性模量较小的材料(例如橡皮)作垫片, 增加构件的柔度, 等等。

**例 11** 图 11-19 所示正方形截面梁, 在其跨度中点横截面  $C$  处, 一重量为  $P$  的物体自高度  $H$  处自由落下。已知:  $P = 150\text{N}$ ,  $H = 75\text{mm}$ ,  $l = 1000\text{mm}$ ,  $b = 50\text{mm}$ ,  $E = 200\text{GPa}$ 。试在下列两种情况下计算截面  $C$  的挠度  $\Delta_d$  与梁内的最大弯曲正应力  $\sigma_d$ 。

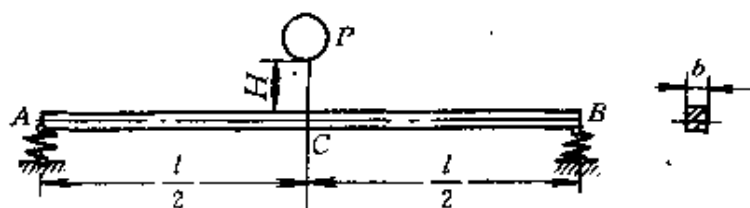


图 11-19

- (1) 梁两端用铰支座支持;
- (2) 梁两端用弹簧常数为  $k = 100\text{N/mm}$  的弹簧支持。

解 1. 梁两端铰支时的变形与应力

在静载荷作用下, 两端铰支梁截面  $C$  的挠度为

$$\begin{aligned}\Delta_s &= \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{Pl^3}{4Eb^4} = \frac{150 \times 1000^3}{4 \times 200 \times 10^3 \times 50^4} \\ &= 0.030\text{mm}\end{aligned}$$

由式(11-11) 与(11-12) 可知, 冲击位移与冲击载荷的最大值分别为

$$\Delta_d = 0.030 \times \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 75}{0.030}} \right] = 2.15\text{mm}$$

$$P_d = 150 \times \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 75}{0.030}} \right] = 10.76\text{kN}$$

在冲击载荷  $P_d$  作用下, 梁内的最大弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{P_d l c}{2EI} = \frac{2 \times 10.76 \times 10^3 \times 10^3}{2 \times 200 \times 10^3 \times 50^4}$$



上述数据表明, 当由铰支改为弹簧支持后, 梁内的最大弯曲正应力显著降低, 其值由 129.1MPa 降低为 26.9MPa, 几乎仅为前者的五分之一。

**例 12** 如图 11-20 所示, 一重量为  $W$  的物体, 以速度  $v$  沿水平方向运动, 冲击杆端截面  $B$ 。已知杆长为  $l$ , 横截面面积为  $A$ , 弹性模量为  $E$ , 试计算杆端承受的最大冲击力与最大水平位移, 杆的质量与冲击物的变形均忽略不计。

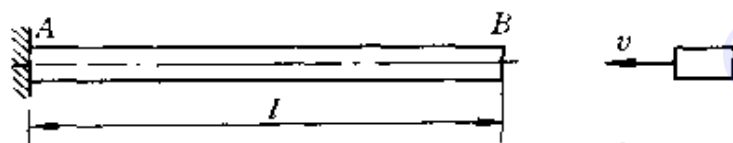


图 11-20

**解** 当物体冲击杆件时, 物体的速度迅速降为零, 这时, 杆端承受的冲击力最大, 并用  $P_d$  表示。

当冲击力最大时, 物体减少的动能为

$$E_k = \frac{Wv^2}{2g}$$

杆件获得的应变能为

$$U = \frac{P_d^2 l}{2EA}$$

根据能量守恒定律可知

$$\frac{P_d^2 l}{2EA} = \frac{Wv^2}{2g}$$

由此得最大冲击力为

$$P_d = v \sqrt{\frac{EAW}{gl}}$$

而杆端的最大水平位移则为

$$\Delta_d = \frac{P_d l}{EA} = v \sqrt{\frac{Wl}{gEA}}$$

**例 13** 图 11-21 所示圆截面轴  $AB$ ,  $B$  端装有飞轮  $C$ , 轴与飞轮

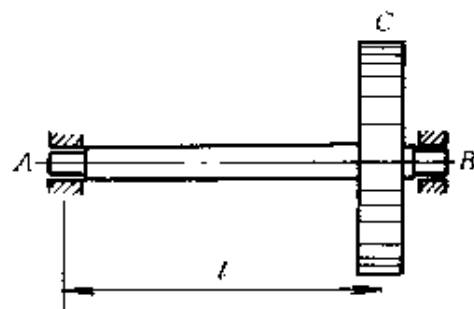


图 11 21

以角速度  $\omega$  等速转动, 飞轮对旋转轴的转动惯量为  $J$ , 轴的直径为  $d$ , 试计算当  $A$  端突然被刹住时轴内的最大扭转剪应力。轴的质量忽略不计。

解 当  $A$  端突然被刹住时, 飞轮  $C$  因惯性继续转动一角度  $\phi_a$  后, 转速变为零, 所以, 飞轮减少的动能为

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$$

而轴的扭转应变能则为

$$U = \frac{M_d \phi_a}{2} = \frac{M_d^2 l}{2GI_p} = \frac{16M_d^2 l}{G\pi d^4}$$

式中,  $M_d$  为当转速变为零时飞轮作用在轴上的扭力矩。

根据能量守恒定律可知

$$\frac{16M_d^2 l}{G\pi d^4} = \frac{J\omega^2}{2}$$

由此得

$$M_d = \omega d^2 \sqrt{\frac{G\pi J}{32l}}$$

所以, 轴内的最大扭转剪应力为

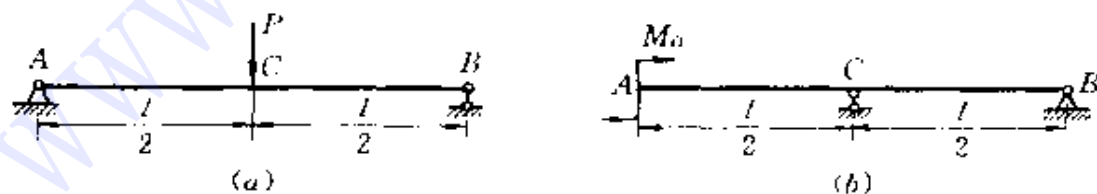
$$\tau_{\max} = \frac{16M_d}{\pi d^3} = \frac{4\omega}{d} \sqrt{\frac{GJ}{2\pi l}}$$

## 复 习 题

1. 何谓相应位移?何谓应变能?
2. 何谓弹线性体的功能原理?
3. 何谓线弹性体?如何计算线弹性体的外力功?何谓广义位移与广义力?其间有何关系?
4. 如何计算杆在基本变形与组合变形时的应变能?
5. 利用单位载荷法计算梁位移的公式是如何建立的?如何确定位移的方向?根据是什么?
6. 如何利用单位载荷法计算梁、轴、桁架与刚架的位移?
7. 如何利用单位载荷法求解静不定问题?
8. 如何计算冲击变形、冲击载荷与冲击应力?如何提高构件的抗冲击性能?

## 习 题

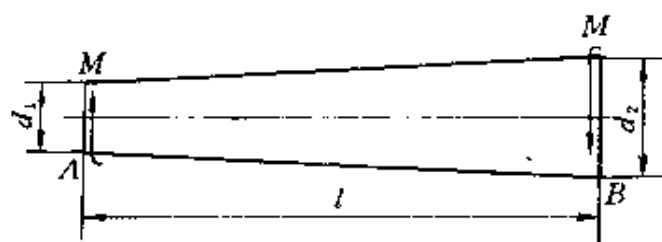
题 11.1 试计算图示各梁的应变能及所加载荷的相应位移。设抗弯刚度  $EI$  为常数。



题 11.1 图

题 11.2 图示圆锥形轴  $AB$ , 承受扭力矩  $M$  作用。设轴长为  $l$ ,  $A$ 、 $B$  端的直径分别为  $d_1$  与  $d_2$ , 材料的剪切弹性模量为  $G$ , 试计算

轴的应变能与扭转角  $\phi$ 。

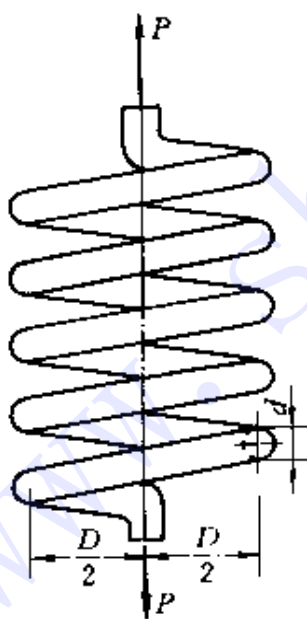


题 11.2 图

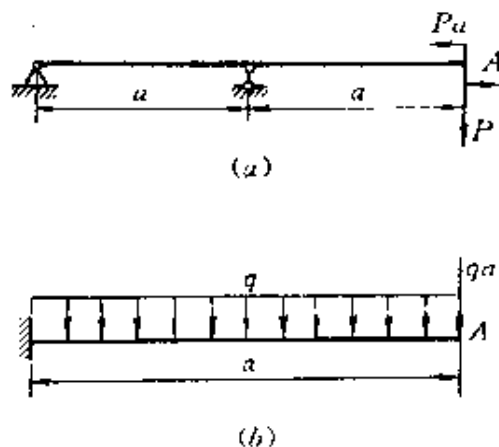
\*题 11.3 图示密圈螺旋弹簧, 承受轴向拉力  $P$  作用, 试用能量法证明弹簧的轴向变形为

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4}$$

式中:  $D$  为弹簧的平均直径,  $d$  为弹簧丝的直径,  $n$  为弹簧的圈数,  $G$  为剪切弹性模量。



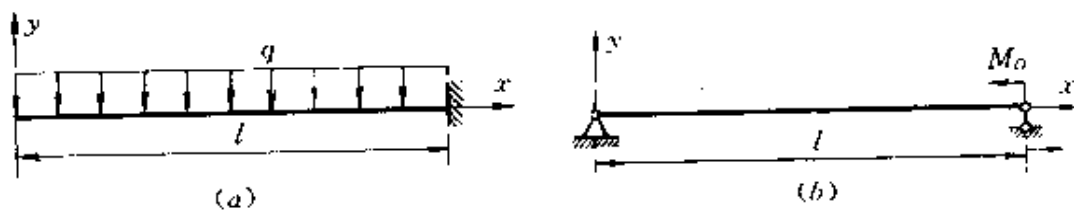
题 11.3 图



题 11.4 图

题 11.4 试用单位载荷法计算图示各梁横截面  $A$  的挠度与转角。设抗弯刚度  $EI$  为常数。

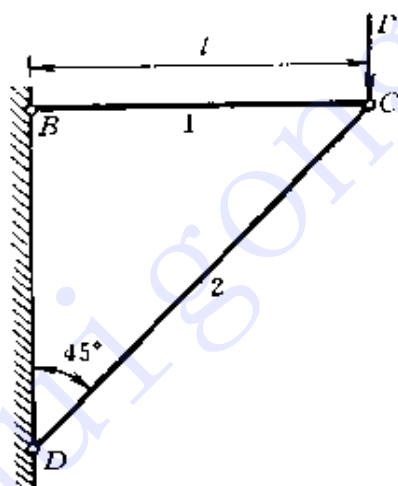
题 11.5 试用单位载荷法建立图示梁的挠曲轴方程。设抗弯



题 11.5 图

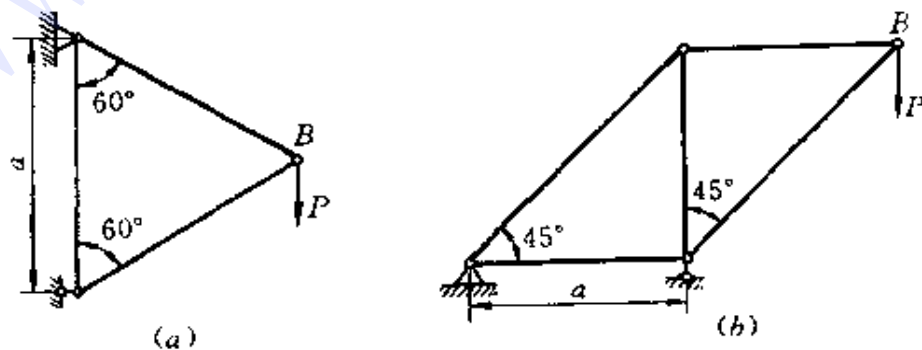
刚度  $EI$  为常数。

题 11.6 图示桁架, 在接点  $C$  处承受垂直载荷  $P$ , 试用单位载荷法计算接点  $B$  的垂直位移  $f_c$ 。各杆的抗拉(压)刚度  $EA$  相同, 且均为常数。



题 11.6 图

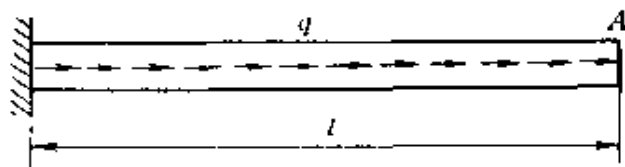
题 11.7 图示桁架, 在接点  $B$  处承受垂直载荷  $P$ , 试用单位



题 11.7 图

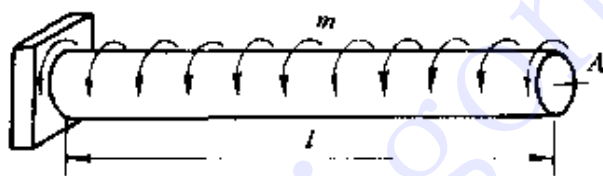
载荷法计算接点  $B$  的水平位移  $\Delta_B$ 。各杆的抗拉(压)刚度  $EA$  相同, 且均为常数。

题 11.8 图示等截面杆, 承受均布载荷  $q$  作用, 试用单位载荷法计算截面  $A$  的水平位移。设抗拉(压)刚度  $EA$  为常值。



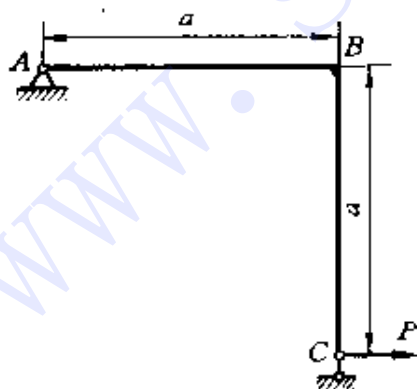
题 11.8 图

题 11.9 图示圆截面轴, 承受集度为  $m$  的均布扭力矩作用, 试用单位载荷法计算截面  $A$  的扭转角, 设抗扭刚度  $GI_p$  为常数。

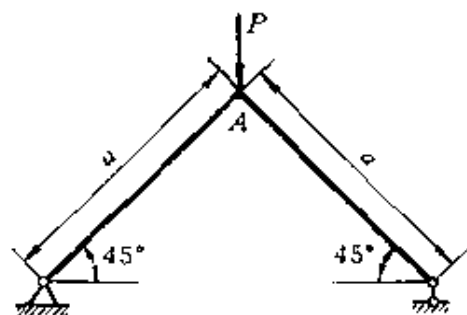


题 11.9 图

题 11.10 图示刚架, 在截面  $C$  处承受水平载荷  $P$  作用, 试用单位载荷法计算该截面的转角。设抗弯刚度  $EI$  为常数。



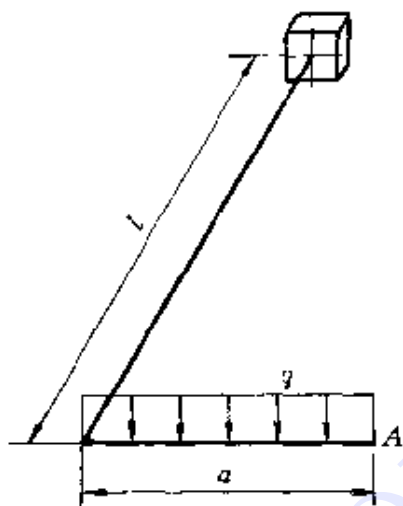
题 11.10 图



题 11.11 图

题 11.11 图示刚架, 在接点  $A$  处承受垂直载荷  $P$  作用, 试用单位载荷法计算该接点的水平位移。设抗弯刚度  $EI$  为常值。

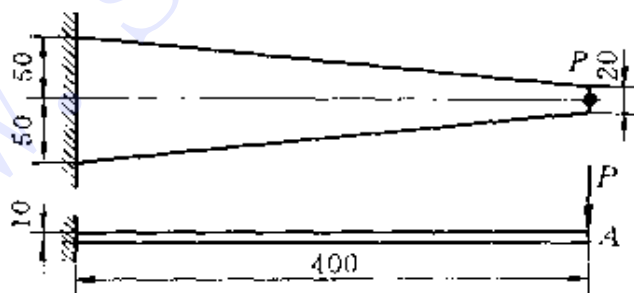
题 11.12 图示等截面刚架, 承受均布载荷  $q$  作用, 试用单位载荷法计算截面  $A$  的垂直位移  $f_A$ 。设抗弯刚度  $EI$  与抗扭刚度  $GJ_t$  均为已知常数。



题 11.12 图

题 11.13 试用单位载荷法解题 6.20。

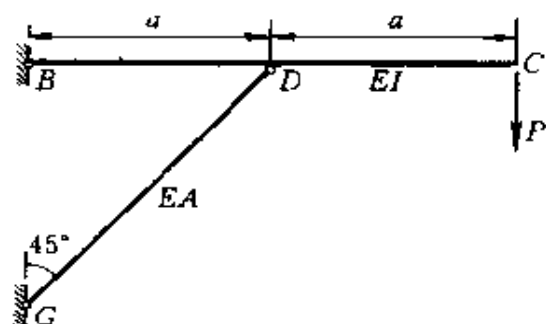
题 11.14 图示变截面梁, 自由端承受集中载荷  $P$  作用, 试用单位载荷法计算截面  $A$  的挠度。已知载荷  $P = 1\text{kN}$ , 弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ 。



题 11.14 图

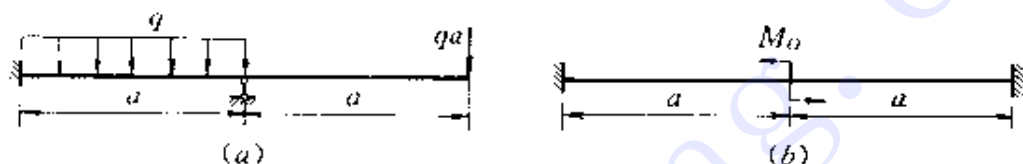
题 11.15 图示结构, 在截面  $C$  处承受集中载荷  $P$  作用, 试用单位载荷法计算截面  $C$  的垂直位移。梁  $BC$  的抗弯刚度  $EI$  与杆  $DG$  的抗拉(压)刚度  $EA$  分别为已知常数。





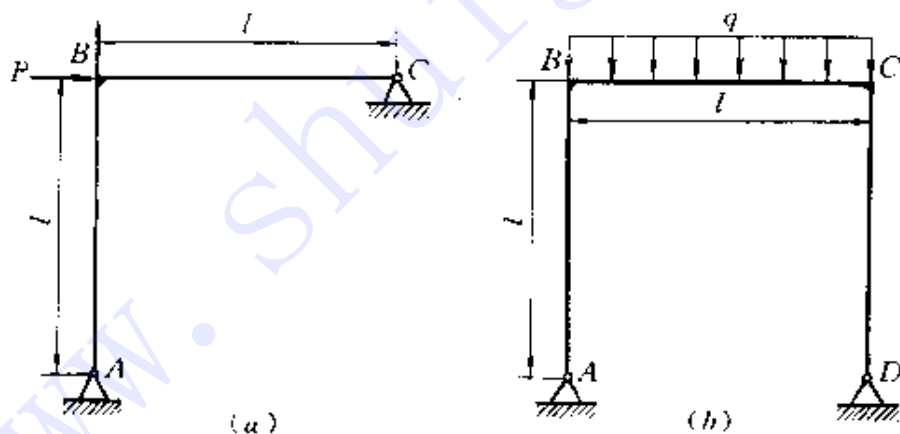
题 11.15 图

题 11.16 试绘图示各梁的弯矩图, 设抗弯刚度  $EI$  为常值。



题 11.16 图

题 11.17 图示各刚架, 抗弯刚度  $EI$  均为常数, 试计算支反力。

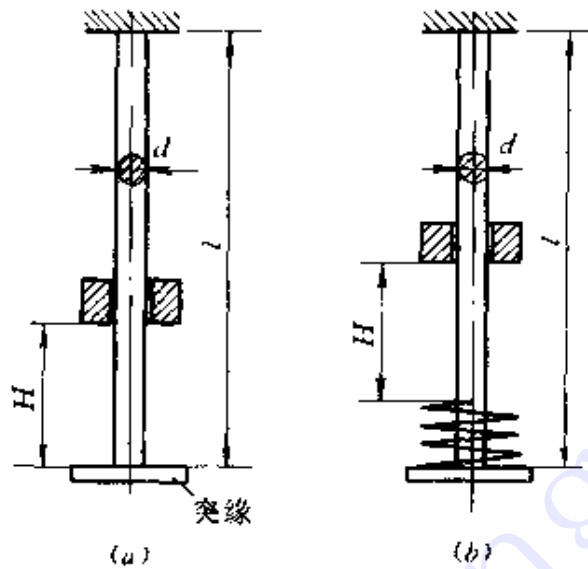


题 11.17 图

题 11.18 试用单位载荷法解题 2.35。

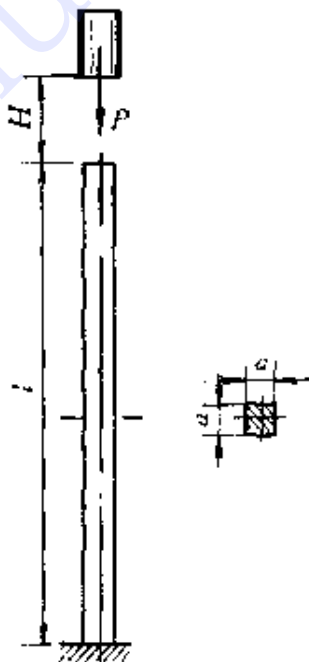
题 11.19 图示圆截面钢杆, 直径  $d = 20\text{mm}$ , 杆长  $l = 2\text{m}$ , 冲击物的重量  $P = 500\text{N}$ , 沿杆轴自高度  $H = 100\text{mm}$  处自由落下, 材料的弹性模量  $E = 210\text{GPa}$ , 试在下列两种情况下计算杆内横截面上的最大正应力。解题时不考虑杆与突缘的质量及突缘的变形。

- (1) 冲击物直接落在杆的突缘上(图 a);
- (2) 突缘上放有弹簧, 其弹簧常数  $k = 200\text{N/mm}$ (图 b)。



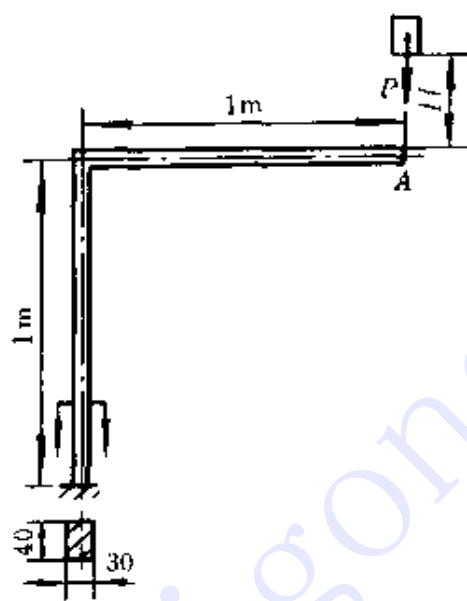
题 11.19 图

题 11.20 图示正方形截面钢杆, 边宽  $a = 50\text{mm}$ , 杆长  $l = 1\text{m}$ , 材料的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 比例极限  $\sigma_p = 200\text{MPa}$ , 冲击物的重量  $P = 1\text{kN}$ , 试计算最大允许冲击高度。杆本身的质量忽略不计。



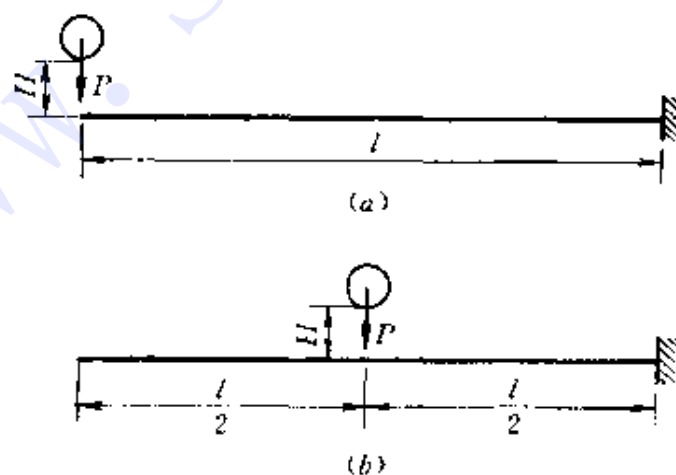
题 11.20 图

题 11.21 图示等截面刚架, 一重量为  $P = 300\text{N}$  的物体, 自高度  $H = 50\text{mm}$  处自由落下, 试计算截面  $A$  的最大垂直位移与刚架内的最大正应力。材料的弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ , 刚架的质量忽略不计。



题 11.21 图

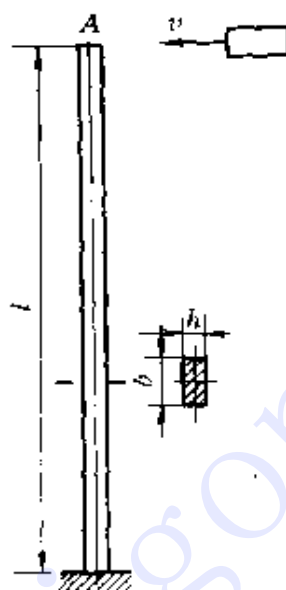
题 11.22 图示梁, 受冲击载荷作用, 试计算下列两种情况下梁内的最大弯曲正应力之比值。梁本身质量忽略不计。



题 11.22 图

- (1) 冲击点在梁的自由端(图  $a$ );
- (2) 冲击点在梁的中点(图  $b$ )。

题 11.23 图示悬臂梁, 一重量为  $P$  的物体, 以速度  $v$  沿水平方向冲击其端部截面  $A$ , 试求该截面的最大水平位移与梁内的最大弯曲正应力, 材料的弹性模量为  $E$ , 梁本身的质量忽略不计。



题 11.23 图

## 第十二章 材料力学性能的进一步研究

### § 12-1 引 言

第二章曾介绍材料在常温、静载荷作用下的力学性能, 这些性能对于分析构件在常温、静荷下的强度和刚度, 提供了重要依据。但是, 在工程实际中, 有些构件处在更复杂的条件下。例如, 燃气轮机处在高温的条件下; 风动机械和汽锤等则受到冲击载荷的作用。此外, 有些构件, 例如有些焊接件和铸造件, 还常常难免含有裂纹甚至宏观裂纹。为了分析这些构件的强度和刚度, 仅仅根据材料在常温、静荷下的力学性能显然就不够了。

本章介绍温度与加载速率对材料力学性能的影响, 以及含裂纹材料的抗裂性能等。

### § 12-2 温度对材料力学性能的影响

实验表明, 温度对材料的力学性能存在很大的影响。

图 12-1 所示为中碳钢的屈服应力  $\sigma_s$ 、强度极限  $\sigma_b$ 、延伸率  $\delta$  和断面收缩率  $\psi$  随温度  $T$  变化的曲线。总的趋势是: 材料的强度随温度升高而降低, 而材料的塑性则在一定温度之后反而有所提高。

对于一般金属材料, 当温度升高到一定大小时, 金属原子的热振动增大, 变形阻力减小, 所以, 表征抗力的强度指标降低, 而表征延性的塑性指标则反而有所提高。

温度对材料的弹性常数也有影响。例如, 铝合金的弹性模量  $E$  和剪切弹性模量  $G$  随温度  $T$  变化的曲线如图 12-2 所示。可以看

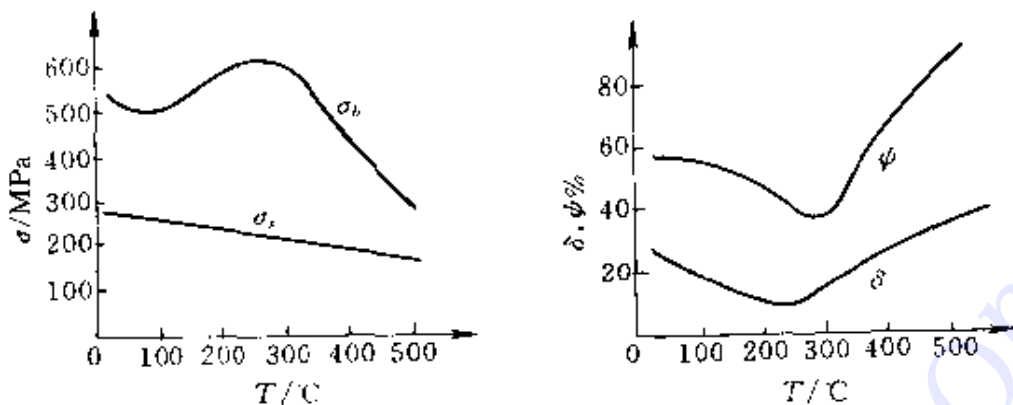


图 12-1

出,随着温度的升高,材料的弹性常数  $E$ 、 $G$  均降低。对于一般金属材料,弹性模量与原子间的距离成反比,当温度升高时,原子间的距离增大,所以,弹性模量随之降低。

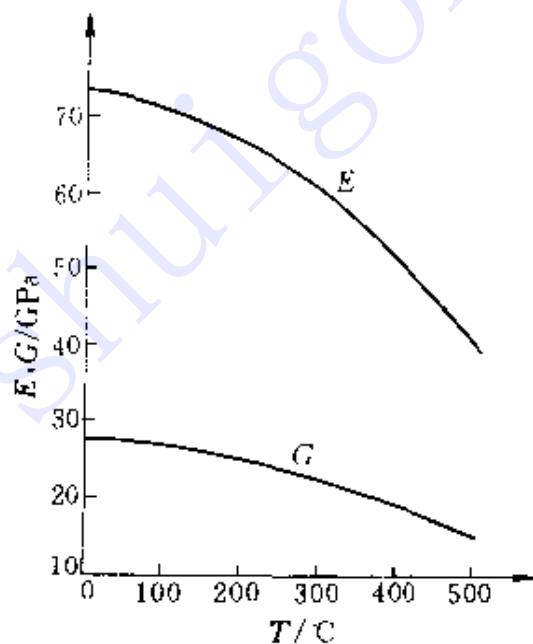


图 12-2

### § 12-3 应变速率对材料力学性能的影响

材料的力学性能,不仅与环境温度有关,而且与加载时应变的

增长速率也有关。

应变的变化率  $d\varepsilon/dt$  称为**应变速率**, 其单位为  $\%/s$ 。在工程实际中, 应变速率一般约在  $10^{-6}/s \sim 10^6/s$  的范围内。在室温条件下, 当应变速率较低时(例如  $d\varepsilon/dt \leq 10^{-4}/s$  时), 低碳钢的力学性能无明显变化(图 12-3), 但当应变速率较高时, 则其屈服应力  $\sigma_s$  与强度极限  $\sigma_b$  均随应变速率的增大而增大, 而且屈服应力比强度极限提高更快。

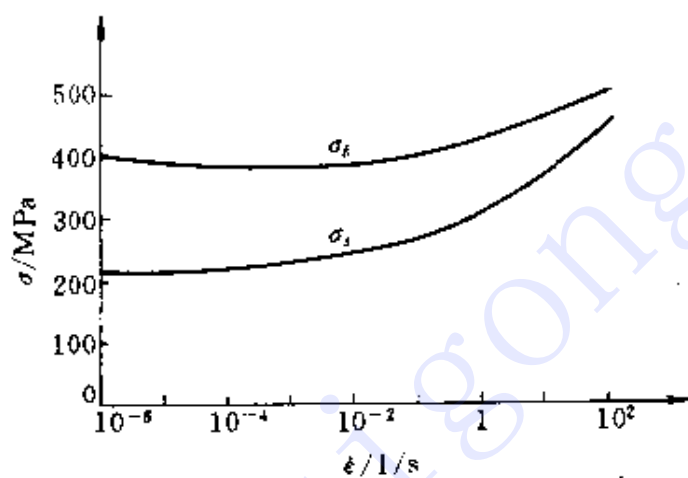


图 12-3

应变速率对材料力学性能的影响, 也与温度有关, 图 12-4 所示为低碳钢在高温 ( $450^{\circ}C$ ) 环境下不同应变速率时的应力 - 应变曲线。可以看出, 屈服应力  $\sigma_s$  与强度极限  $\sigma_b$  亦随应变速率增大而增大, 只是强度极限比屈服应力提高更快。

实验还表明, 应变速率对材料的弹性常数几乎无影响(图 12-5)。因为弹性变形是以声速在金属内部传播, 弹性变形在金属内的传播速度约为  $(1 \sim 6) \times 10^3 m/s$ , 所以, 只要实际变形速度低于弹性变形的传播速度, 材料的弹性常数就不会发生明显变化。以冲击加载为例, 其最大速度约为  $200 m/s$ , 一般冲击试验机的摆锤的冲击速度约为  $(4 \sim 7) m/s$ , 故一般试验加载速度不会影响金属的弹性变形。因此, 可以采用振动法, 测量材料的弹性模量  $E$  和泊松比  $\mu$ ; 在线弹性范围内, 也可以用静荷下测得的弹性常数, 分析



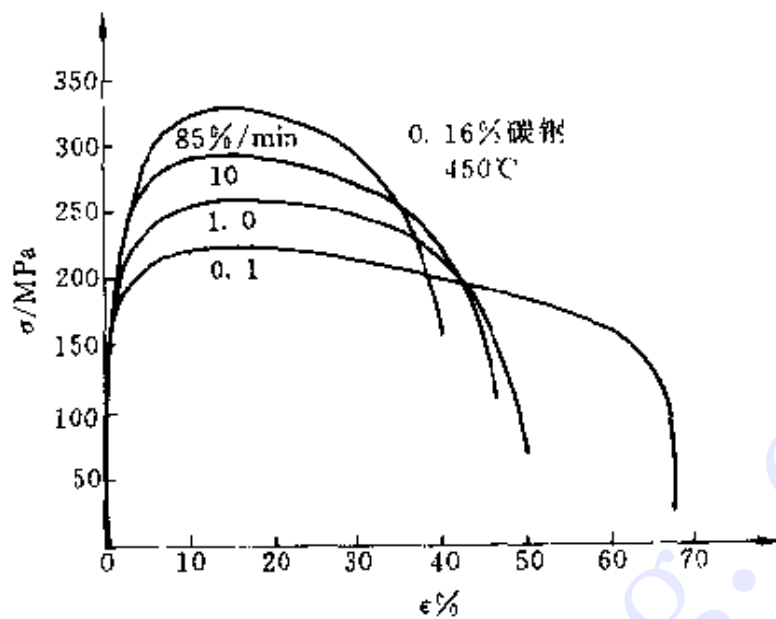


图 12-4

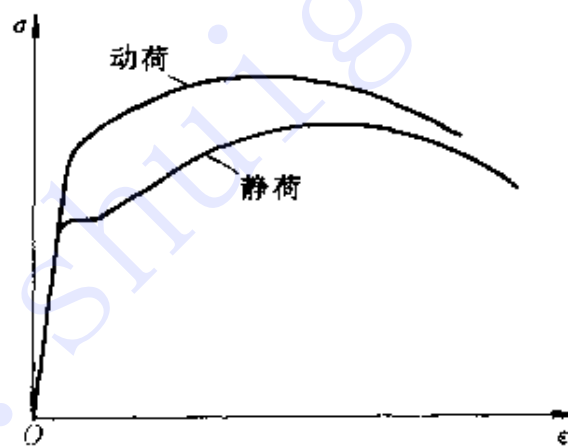


图 12-5

构件在动荷下的应力和变形。

## § 12-4 含裂纹体的断裂与材料的断裂韧度

在传统的强度计算中, 构件被看成是不包含裂纹的连续体, 并以工作应力和许用应力相比较判断其强度。实践表明, 在一般情况下, 这种传统的强度计算方法是可靠的。

然而,随着高强度材料的使用以及构件的大型化(大型焊接件和大型铸造件等),发现某些构件虽然满足了传统的强度条件,但在工作应力小于许用应力的情况下却发生了脆性断裂,即所谓**低应力脆断**。例如,在50年代初,美国北极星导弹的发动机壳体,在试验发射时发生破裂而爆炸,而其工作应力仅为屈服应力的一半。又如,在第二次世界大战期间,有近千艘的全焊接自由轮,先后发生了严重的脆断事故。此外,在飞机结构、高压容器、机车和桥梁等工程中,发生低应力脆断的事故也是屡见不鲜的。这些事故引起了人们的极大重视。经分析研究后发现:由于冶炼加工或使用等原因,构件中往往存在裂纹甚至宏观裂纹,而低应力脆断就是由于裂纹在一定应力作用下发生迅速扩展所造成的。所以,研究裂纹尖端的应力、位移以及材料的抗裂性能,对于分析含裂纹构件的强度是十分必要的。

### 一、应力强度因子

构件中的裂纹,按其受力和变形形式,可分为三种基本类型:张开型或 I 型(图 12-6, a); 滑移型或 II 型(图 12-6, b); 撕裂型或 III 型(图 12-6, c)。在上述三种裂纹中,张开型最常见而且最危险,所以,现以张开型裂纹为例介绍有关概念。

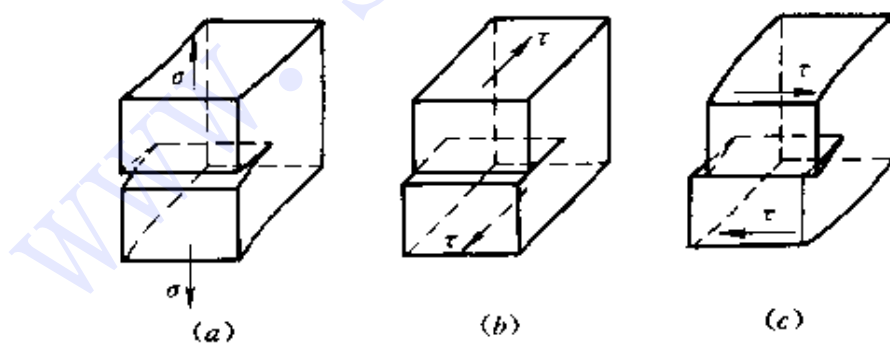


图 12 6

考虑图 12-7 所示无限大平板,中心有一长为  $2a$  的穿透板厚的裂纹,在垂直于裂纹平面的方向,受到均匀拉应力  $\sigma$  作用。

根据线弹性理论的研究结果,在裂纹尖端邻域( $r \ll a$ )任一点

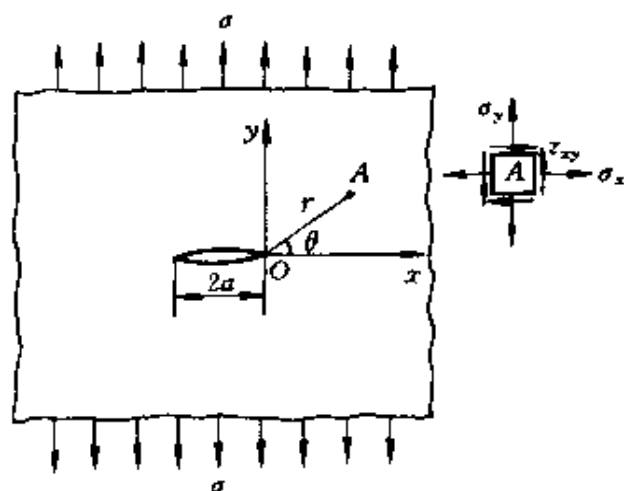


图 12 7

A 处的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (12-1)$$

式中, \$r, \theta\$ 代表 \$A\$ 点的极坐标。

由上式可以看出, 当 \$r, \theta\$ 一定时, 即对于板内某一定点来说, 各应力分量之值均随 \$\sigma \sqrt{\pi a}\$ 而定。这说明, 参量 \$\sigma \sqrt{\pi a}\$ 的大小集中反映了裂纹尖端应力场的强弱程度, 通常称其为**应力强度因子**, 对于 I 型裂纹, 并用 \$K\_I\$ 表示, 即

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (12-2)$$

应力强度因子的量纲为 \$[F][L]^{-3/2}\$。

试验表明, 对于一定厚度的平板, 不论外加应力和裂纹长度各为何值, 只要应力强度因子 \$K\_I\$, 达到某一数值时, 裂纹迅速扩展即产生所谓**失稳扩展**, 并从而引起板件断裂。这就更进一步说明, 用应力强度因子描写裂纹尖端的受力程度, 客观地反映了脆性断裂的本质。

使裂纹发生失稳扩展的应力强度因子值, 称为材料的**断裂韧度**, 并用  $K_{Ic}$  表示。所以, 断裂韧度即代表含裂纹材料抵抗断裂破坏的能力。

试验还表明, 断裂韧度  $K_{Ic}$  的大小与试件的厚度  $B$  有关, 它们间的关系如图 12-8 所示。由图中可以看出, 当试件较薄时, 断裂韧

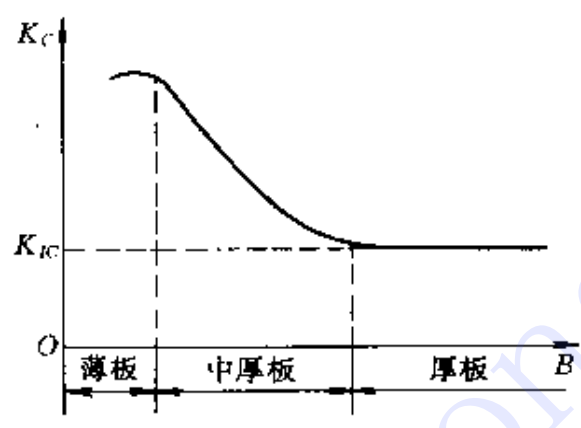


图 12-8

度较高, 而当试件的厚度大于某一数值后, 断裂韧度趋于某一稳定的最小值。断裂韧度的该最小值称为**平面应变断裂韧度**, 对于 I 型裂纹, 并用  $K_{I,c}$  表示。 $K_{I,c}$  代表材料抵抗脆性断裂破坏的能力。几种典型材料的  $K_{I,c}$  值如表 12-1 所示。表中还同时给出了可以使用  $K_{I,c}$  值的最小板厚  $B_{min}$  值。在一般情况下

$$B_{min} = 2.5 \left( \frac{K_{I,c}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (12-3)$$

表 12-1

材 料	$\sigma_s$ /MPa	$\sigma_b$ /MPa	$K_{Ic}$ /MN · m <sup>-3/2</sup>	$B_{min}$ /mm
30CrMrSiNiA	1470	1780	84	8.2
300# 马氏体钢	1730	1850	90	6.8
7075-T6 铝合金	500	560	32	10.2

由此可见, 当 I 型裂纹尖端的实际应力强度因子值, 达到材料的断裂韧度时, 裂纹即产生失稳扩展, 即 I 型裂纹失稳扩展的条件为

$$K_I = K_{Ic} \quad (12-4)$$

而对于  $B \geq B_{min}$  的厚板, 失稳扩展的条件则为

$$K_I = K_{Isc} \quad (12-5)$$

式(12-4)与(12-5)也称为 I 型裂纹的脆性断裂判据。

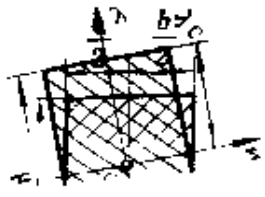
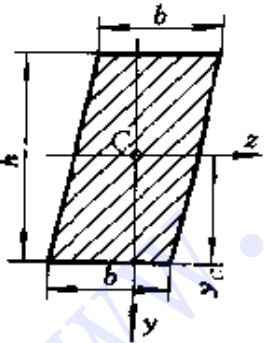
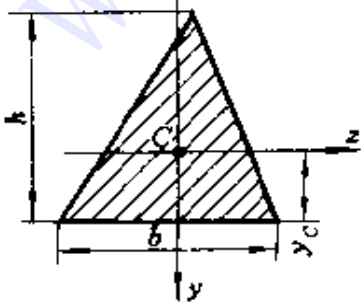
根据上述判据, 即可检验含 I 型裂纹构件在给定载荷作用下是否发生脆性断裂, 也可确定含 I 型裂纹构件的承载能力或裂纹的许可长度。

### 复 习 题

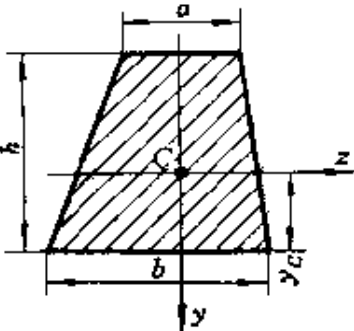
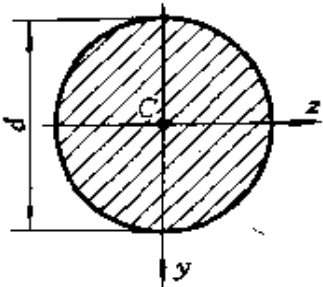
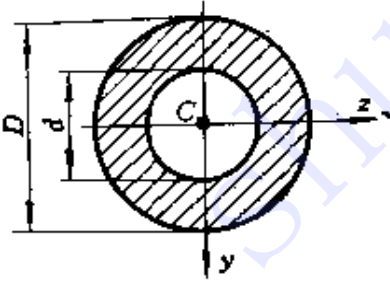
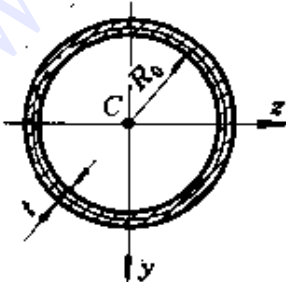
1. 温度对材料的力学性能有何影响?
2. 应变速率对材料的力学性能有何影响?
3. 何谓低应力脆断? 它是如何发生的?
4. 裂纹尖端的应力场有何特点? 何谓应力强度因子?
5. 何谓断裂韧度? 利用脆性断裂判据可以解决哪些类型的问题?

## 附 录

### 附录 1- 截面的几何性质

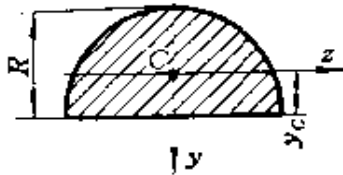
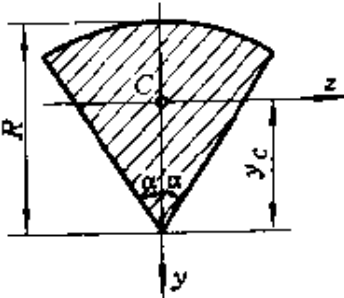
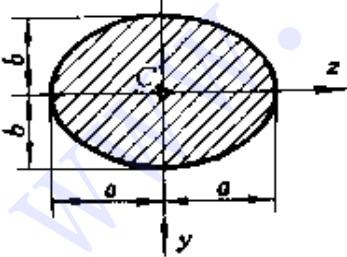
截面形状	形心位置	惯 性 矩
	$y_C = \frac{h}{2}$	$I_z = \frac{bh^3}{12}$
	$y_C = \frac{h}{2}$	$I_z = \frac{bh^3}{12}$
	$y_C = \frac{h}{3}$	$I_z = \frac{bh^3}{36}$

(续)


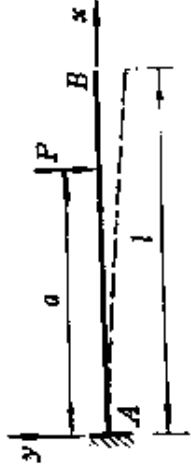

截面形状	形心位置	惯性矩
	$y_c = \frac{h(2a + b)}{3(a + b)}$	$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a + b)}$
	<p>圆心处</p>	$I_x = \frac{\pi d^4}{64}$
	<p>圆心处</p>	$I_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$ $= \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4)$ $\alpha = d/D$
	<p>圆心处</p>	$I_x = \pi R_0^3 t$



(续)

截面形状	形心位置	惯性矩
	$y_c = \frac{2R}{3\pi}$	$I_z = \frac{(9\pi^2 - 64)R^4}{72\pi}$ $= 0.1098R^4$
	$y_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}$	$I_z = \frac{R^4}{4} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \frac{16 \sin^2 \alpha}{9\alpha})$
	<p>椭圆中心</p>	$I_z = \frac{\pi ab^3}{4}$

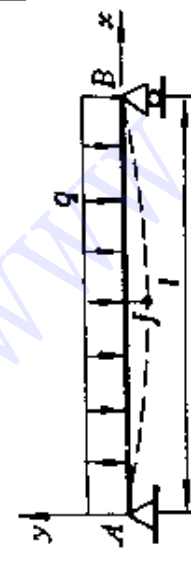
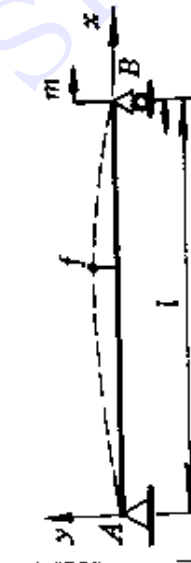
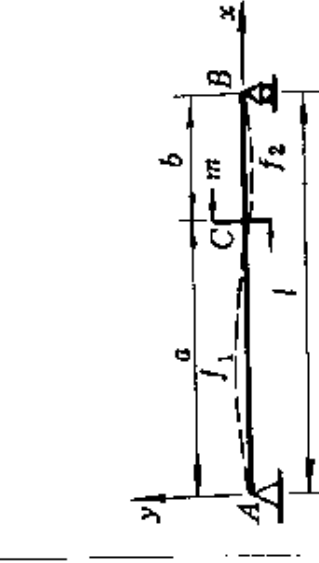
## 附录二 梁的挠度与转角

序号	梁的简图	挠曲轴方程	挠度和转角
1		$y = \frac{Px^2}{6EI}(x - 3l)$	$y_B = -\frac{Pl^3}{3EI}$ $\theta_B = -\frac{Pl^2}{2EI}$
2		$y = \frac{Px^2}{6EI}(x - 3a), (0 \leq x \leq a)$ $y = \frac{Pa^2}{6EI}(a - 3x), (a \leq x \leq l)$	$y_B = -\frac{Pa^2}{6EI}(3l - a)$ $\theta_B = -\frac{Pa^2}{2EI}$
3		$y = \frac{qx^2}{24EI}(4lx - 6l^2 - x^2)$	$y_B = -\frac{ql^4}{8EI}$ $\theta_B = -\frac{ql^3}{6EI}$

(续)

序号	梁的简图	挠曲轴方程	挠度 和 转角
4		$y = -\frac{mx^2}{2EI}$	$y_B = -\frac{ml^2}{2EI}$ $\theta_B = -\frac{ml}{EI}$
5		$y = -\frac{mx^2}{2EI}, (0 \leq x \leq a)$ $y = \frac{ma}{EI} \left( \frac{a}{2} - x \right), (a \leq x \leq l)$	$y_B = -\frac{ma}{EI} \left( l - \frac{a}{2} \right)$ $\theta_B = -\frac{ma}{EI}$
6		$y = \frac{Px}{12EI} \left( x^2 - \frac{3l^2}{4} \right), \left( 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right)$	$y_C = -\frac{Pl^3}{48EI}$ $\theta_A = -\theta_B = -\frac{Pl^2}{16EI}$
7		$y = \frac{Pbx}{6EI} (x^2 - l^2 + b^2), (0 \leq x \leq a)$ $y = \frac{Pa(l-x)}{6EI} (x^2 + a^2 - 2lx), (a \leq x \leq l)$	$f = -\frac{Pb(l^2 - a^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$ (位于 $x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$ 处) $\theta_A = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EI}$ $\theta_B = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6EI}$

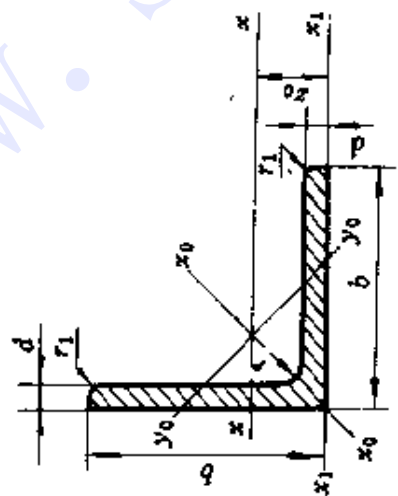
(续)

8		$y = \frac{qx}{24EI}(2lx^2 - x^3) \quad (l)$	$f = \frac{5ql^4}{384EI}$ $\theta_A = -\theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$
9		$y = \frac{mx}{6EI}(l^2 - x^2)$	$f = \frac{ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ <p>(位于 <math>x = l/\sqrt{3}</math> 处)</p> $\theta_A = \frac{ml}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ml}{3EI}$
10		$y = \frac{mx}{6EI}(l^2 - 3b^2 - x^2), (0 \leq x \leq a)$ $y = \frac{m(l-x)}{6EI}(3a^2 - 2lx + x^2), (a \leq x \leq l)$	$f_1 = \frac{m(l^2 - 3b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$ <p>(位于 <math>x = \sqrt{l^2 - 3b^2}/\sqrt{3}</math> 处)</p> $f_2 = -\frac{m(l^2 - 3a^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$ <p>(位于距 B 端 <math>\sqrt{l^2 - 3a^2}/\sqrt{3}</math> 处)</p> $\theta_A = \frac{m(l^2 - 3b^2)}{6EI}$ $\theta_B = \frac{m(l^2 - 3a^2)}{6EI}$ $\theta_C = \frac{m(l^2 - 3a^2 - 3b^2)}{6EI}$

### 附录三 型钢规格表

表1 热轧等边角钢(YB166—65)

角钢 号数	尺寸/mm		截面面积 /cm <sup>2</sup>	理论重量 /kg·m	外表面积 /m <sup>2</sup> ·m <sup>-1</sup>	参 考 数 值									
	b	d				x-x			x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>			y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>			z <sub>0</sub> /cm
						I <sub>x</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> /cm	W <sub>x</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>x0</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>x0</sub> /cm	W <sub>x0</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>y0</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>y0</sub> /cm	W <sub>y0</sub> /cm <sup>3</sup>	
2	20	3	1.132	0.889	0.078	0.40	0.59	0.29	0.63	0.75	0.45	0.17	0.39	0.20	0.81
		4	1.459	1.145	0.077	0.50	0.58	0.36	0.78	0.73	0.55	0.22	0.38	0.24	1.09
2.5	25	3	1.432	1.124	0.098	0.82	0.76	0.46	1.29	0.95	0.73	0.34	0.49	0.33	1.57
		4	1.859	1.459	0.097	1.03	0.74	0.59	1.62	0.93	0.92	0.43	0.48	0.40	2.11



符号意义:  
 b—边宽; z<sub>0</sub>—形心距离;  
 d—边厚; I—惯性矩;  
 r—内圆弧半径; i—惯性半径;  
 r<sub>1</sub>—一端内弧半径; W—截面模量。

3.0	30		1.749	1.373	0.117	1.46	0.91	0.68	2.31	1.15	1.09	0.61	0.59	0.51	2.71	0.85
		4	2.276	1.786	0.117	1.84	0.90	0.87	2.92	1.13	1.37	0.77	0.58	0.62	3.63	0.89
		3	2.109	1.656	0.141	2.58	1.11	0.99	4.09	1.39	1.61	1.07	0.71	0.76	4.68	1.00
3.6	36	4	2.756	2.163	0.141	3.29	1.09	1.28	5.22	1.38	2.05	1.37	0.70	0.93	6.25	1.04
		5	3.382	2.654	0.141	3.95	1.08	1.56	6.24	1.36	2.45	1.65	0.70	1.09	7.84	1.07
		3	2.359	1.852	0.157	3.59	1.23	1.23	5.69	1.55	2.01	1.49	0.79	0.96	6.41	1.09
4.0	40	4	3.086	2.422	0.157	4.60	1.22	1.60	7.29	1.54	2.58	1.91	0.79	1.19	8.56	1.13
		5	3.791	2.976	0.156	5.53	1.21	1.96	8.76	1.52	3.01	2.30	0.78	1.39	10.74	1.17
		3	2.659	2.088	0.177	5.17	1.40	1.58	8.20	1.76	2.58	2.14	0.90	1.24	9.12	1.22
4.5	45	4	3.486	2.736	0.177	6.65	1.38	2.05	10.56	1.74	3.32	2.75	0.89	1.54	12.18	1.26
		5	4.292	3.369	0.176	8.04	1.37	2.51	12.74	1.72	4.00	3.33	0.88	1.81	15.25	1.30
		6	5.076	3.985	0.176	9.33	1.36	2.95	14.76	1.70	4.64	3.89	0.88	2.06	18.36	1.33
		3	2.971	2.332	0.197	7.18	1.55	1.96	11.37	1.96	3.22	2.98	1.00	1.57	12.50	1.34
5	50	4	3.897	3.059	0.197	9.26	1.54	2.56	14.70	1.94	4.16	3.82	0.99	1.96	16.69	1.38
		5	4.803	3.770	0.196	11.21	1.53	3.13	17.79	1.92	5.03	4.64	0.98	2.31	20.90	1.42
		6	5.688	4.465	0.196	13.05	1.52	3.68	20.68	1.91	5.85	5.42	0.98	2.68	25.14	1.46
		3	3.343	2.624	0.221	10.19	1.75	2.48	16.14	2.20	4.08	4.24	1.13	2.02	17.56	1.48
5.6	56	4	4.390	3.446	0.220	13.18	1.73	3.24	20.92	2.18	5.28	5.46	1.11	2.52	23.43	1.53
		5	5.415	4.251	0.220	16.02	1.72	3.97	25.42	2.17	6.42	6.61	1.10	2.98	29.33	1.57
		6	8.367	6.568	0.219	23.63	1.68	6.03	37.37	2.11	9.44	9.89	1.09	4.15	47.24	1.68

(续)

角钢 号数	尺寸/mm		截面面积 $/\text{cm}^2$	理论重量 $/\text{kg} \cdot \text{m}$	外表面积 $/\text{m}^2 \cdot \text{m}^{-1}$	参 考 数 值												
						$L-I$				$L_0-I_0$				$W_0-N_0$				$Z_0/\text{cm}$
						$I_x/\text{cm}^4$	$i_x/\text{cm}$	$W_x/\text{cm}^3$	$I_{x0}/\text{cm}^4$	$i_{x0}/\text{cm}$	$W_{x0}/\text{cm}^3$	$I_y/\text{cm}^4$	$i_y/\text{cm}$	$W_y/\text{cm}^3$	$I_{y0}/\text{cm}^4$	$i_{y0}/\text{cm}$	$W_{y0}/\text{cm}^3$	
6.3	4		4.978	3.907	0.248	19.03	1.96	4.13	30.17	2.46	6.78	7.89	1.26	3.29	33.35	1.70		
	5		6.143	4.822	0.248	23.17	1.94	5.08	36.77	2.45	8.23	9.57	1.25	3.90	41.73	1.74		
	6	7	7.288	5.721	0.247	27.12	1.93	6.00	43.03	2.43	9.66	11.20	1.24	4.46	50.14	1.78		
	8		9.515	7.469	0.247	34.46	1.90	7.75	54.56	2.40	12.25	14.33	1.23	5.47	67.11	1.85		
	10		11.657	9.151	0.246	41.09	1.88	9.39	64.85	2.36	14.56	17.33	1.22	6.36	84.31	1.93		
7	4		5.570	4.372	0.275	26.39	2.18	5.14	41.80	2.74	8.44	10.99	1.40	4.17	45.74	1.86		
	5		6.875	5.397	0.275	32.21	2.16	6.32	51.08	2.73	10.32	13.34	1.39	4.95	57.21	1.91		
	6	8	8.160	6.406	0.275	37.77	2.15	7.48	59.93	2.71	12.11	15.61	1.38	5.67	68.73	1.95		
	7		9.424	7.398	0.275	43.09	2.14	8.59	68.35	2.69	13.81	17.82	1.38	6.34	80.29	1.99		
	8		10.667	8.373	0.274	48.17	2.12	9.68	76.37	2.68	15.43	19.98	1.37	6.98	91.92	2.03		
(7.5)	5		7.367	5.818	0.295	39.97	2.33	7.32	63.30	2.92	11.94	16.63	1.50	5.77	70.56	2.04		
	6		8.797	6.905	0.294	46.95	2.31	8.64	74.38	2.90	14.02	19.51	1.49	6.67	84.55	2.07		
	7	9	10.160	7.976	0.294	53.57	2.30	9.93	84.96	2.89	16.02	22.18	1.48	7.44	98.71	2.11		
	8		11.503	9.030	0.294	59.96	2.28	11.20	95.07	2.88	17.93	24.86	1.47	8.19	112.97	2.15		
	10		14.126	11.089	0.293	71.98	2.26	13.64	113.92	2.84	21.48	30.05	1.46	9.56	141.71	2.22		
8	5		7.912	6.211	0.315	48.79	2.48	8.34	77.33	3.13	13.67	20.25	1.60	6.66	85.36	2.15		
	6		9.397	7.376	0.314	57.35	2.47	9.87	90.98	3.11	16.08	23.72	1.59	7.65	102.50	2.19		
	7	9	10.860	8.525	0.314	65.58	2.46	11.37	104.07	3.10	18.40	27.09	1.58	8.58	119.70	2.23		
	8		12.303	9.658	0.314	78.49	2.44	12.83	116.60	3.08	20.61	30.39	1.57	9.46	136.97	2.27		
	10		15.126	11.874	0.313	88.43	2.42	15.64	140.09	3.04	24.76	36.77	1.56	11.08	171.74	2.35		



9	90	6	10.637	8.350	0.354	82.77	2.79	12.61	131.26	3.51	20.63	34.28	1.80	9.95	145.87	2.34
		7	12.301	9.656	0.354	94.83	2.78	14.54	150.47	3.50	23.64	39.18	1.78	11.19	170.30	2.48
		8	13.944	10.946	0.353	106.47	2.76	16.42	168.97	3.48	26.55	43.97	1.78	12.35	194.80	2.52
		10	17.167	13.476	0.353	128.58	2.74	20.07	203.90	3.45	32.04	53.26	1.76	14.52	244.07	2.59
10	100	12	20.306	15.940	0.352	149.22	2.71	23.57	236.21	3.41	37.12	62.22	1.75	16.49	293.76	2.57
		6	11.932	9.366	0.393	114.95	3.01	15.68	181.98	3.90	25.74	47.92	2.00	12.69	200.07	2.67
		7	13.796	10.830	0.393	131.86	3.09	18.10	208.97	3.89	29.55	54.74	1.99	14.25	233.54	2.71
		8	15.638	12.276	0.393	148.24	3.08	20.47	235.07	3.88	33.24	61.41	1.98	15.75	267.09	2.76
11	110	10	19.261	15.120	0.392	179.51	3.05	25.06	284.68	3.84	40.26	74.35	1.96	18.54	334.48	2.84
		12	22.800	17.898	0.391	208.90	3.03	29.48	330.95	3.81	46.80	86.84	1.95	21.08	402.34	2.91
		14	26.256	20.611	0.391	236.53	3.00	33.73	374.06	3.77	52.90	99.00	1.94	23.44	470.75	2.99
		16	29.627	23.257	0.390	262.53	2.98	37.82	414.16	3.74	58.57	110.89	1.94	25.63	539.80	3.06
12	120	7	15.196	11.928	0.433	177.16	3.41	22.05	280.94	4.30	36.12	73.38	2.20	17.51	310.64	2.96
		8	17.238	13.532	0.433	199.46	3.40	24.95	316.49	4.28	40.69	82.42	2.19	19.39	355.20	3.01
		10	21.261	16.690	0.432	242.19	3.38	30.60	384.39	4.25	49.42	99.98	2.17	22.91	444.65	3.09
		12	25.200	19.782	0.431	282.55	3.35	36.05	448.17	4.22	57.62	116.93	2.15	26.18	534.60	3.16
13	130	14	29.056	22.809	0.431	320.71	3.32	41.31	508.01	4.18	65.31	133.40	2.14	29.15	625.16	3.24
		8	19.750	15.504	0.492	297.03	3.88	32.52	470.89	4.88	53.28	123.16	2.50	25.86	521.01	3.37
		10	24.373	19.133	0.491	361.67	3.85	39.97	573.89	4.85	64.93	149.46	2.48	30.62	651.93	3.45
		12	28.912	22.696	0.491	423.16	3.83	41.17	671.44	4.82	75.96	174.88	2.46	35.03	783.42	3.53
14	140	14	33.367	26.193	0.490	481.65	3.80	54.16	763.73	4.78	86.41	199.57	2.45	39.13	915.61	3.61

(续)

角钢 号数	尺寸/mm		截面面积 /cm <sup>2</sup>	理论重量 /kg·m <sup>-1</sup>	外表面积 /m <sup>2</sup> ·m <sup>-1</sup>	参 考 数 值										
	x-x					y-y			y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>			x <sub>1</sub> ·x <sub>1</sub>				
	I <sub>x</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> /cm				W <sub>x</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>y<sub>0</sub></sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub></sub> /cm	W <sub>y<sub>0</sub></sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>y<sub>0</sub></sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub></sub> /cm		W <sub>y<sub>0</sub></sub> /cm <sup>3</sup>			
14	10	14	27.373	21.488	0.551	514.65	4.34	50.58	817.27	5.46	82.56	212.04	2.78	39.20	915.11	3.82
	12		32.512	25.522	0.551	603.68	4.31	59.80	958.79	5.43	96.85	248.57	2.76	45.02	1099.28	3.90
	14		37.567	29.490	0.550	688.81	4.28	68.75	1093.56	5.40	110.47	284.06	2.75	50.45	1284.22	3.98
	16		42.539	33.393	0.549	770.24	4.26	77.46	1221.81	5.36	123.42	318.67	2.74	55.55	1470.07	4.06
16	10	16	31.502	24.729	0.630	779.53	4.98	66.70	1237.30	6.27	109.36	321.76	3.20	52.76	1365.33	4.31
	12		37.441	29.391	0.630	916.58	4.95	78.98	1455.68	6.24	128.67	377.49	3.18	60.74	1639.57	4.39
	14		43.296	33.937	0.629	1048.36	4.92	90.95	1665.02	6.20	147.17	431.70	3.16	68.244	1914.68	4.47
	16		49.067	38.518	0.629	1175.08	4.89	102.63	1865.57	6.17	164.89	484.59	3.14	75.31	2190.82	4.55
18	12	18	42.241	33.159	0.710	1321.35	5.59	100.82	2100.10	7.05	165.00	542.61	3.58	78.41	2332.87	4.89
	14		48.896	38.388	0.709	1514.48	5.56	116.25	2407.42	7.02	189.14	625.53	3.56	88.38	2723.48	4.97
	16		55.467	43.542	0.709	1700.99	5.54	131.13	2703.37	6.98	212.40	698.60	3.55	97.83	3115.29	5.05
	18		61.955	48.634	0.708	1875.12	5.50	145.64	2988.24	6.94	234.78	762.01	3.51	105.14	3502.43	5.13
20	14	20	54.642	42.894	0.788	2103.55	6.20	144.70	3343.26	7.82	236.40	863.83	3.98	111.82	3734.10	5.46
	16		62.013	48.680	0.788	2366.15	6.18	163.65	3760.89	7.79	265.93	971.41	3.96	123.96	4270.39	5.54
	18		69.301	54.401	0.787	2620.64	6.15	182.22	4164.54	7.75	294.48	1076.74	3.94	135.52	4808.13	5.62
	20		76.505	60.056	0.787	2867.30	6.12	200.42	4554.55	7.72	322.06	1180.04	3.93	146.55	5347.51	5.69
	24		90.661	71.168	0.785	2338.25	6.07	236.17	5294.97	7.64	374.41	1381.53	3.90	166.55	6457.16	5.37

注: 1.  $r_1 = \frac{1}{3}d$ ;

2. 角钢长度: 钢号 2~4号 4.5~8号 9~14号 16~20号

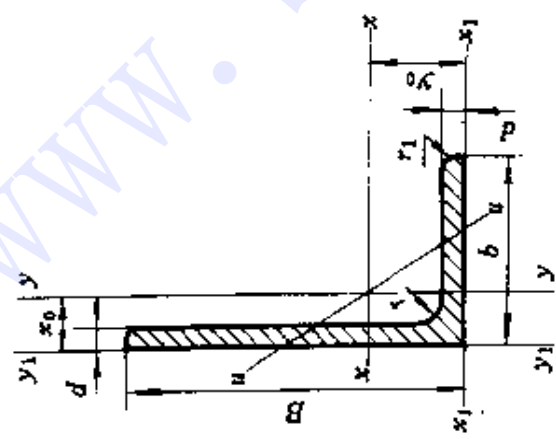
长度 3~9m 4~12m 4~19m 6~19m

3. 一般采用材料: A2, A3, A5, A3F.

表 2 热轧不等边角钢(YB167 65)

角钢号数	尺寸/mm		截面面积/cm <sup>2</sup>	理论重量/kg·m <sup>-1</sup>	外表面积/m <sup>2</sup> ·m <sup>-1</sup>	参 考 数 值													
						x-x			y-y			x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>			y <sub>1</sub> -y <sub>1</sub>			u-u	
	B	b				d	I <sub>x</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> /cm	W <sub>x</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> /cm	W <sub>y</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>x1</sub> /cm <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> /cm	I <sub>y1</sub> /cm <sup>4</sup>	z <sub>1</sub> /cm	I <sub>u</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>u</sub> /cm	W <sub>u</sub> /cm <sup>3</sup>
2.5/1.6	3	25	1.162	0.912	0.080	0.70	0.78	0.43	0.22	0.44	0.19	1.56	0.86	0.43	0.42	0.14	0.34	0.16	0.392
	4	16	1.499	1.176	0.079	0.88	0.77	0.55	0.27	0.43	0.24	2.09	0.90	0.59	0.46	0.17	0.34	0.20	0.381
3.2/2	3	32	1.492	1.171	0.102	1.53	1.01	0.72	0.46	0.55	0.30	3.27	1.08	0.82	0.49	0.28	0.43	0.25	0.382
	4	20	1.939	1.522	0.101	1.93	1.00	0.93	0.57	0.54	0.39	4.37	1.12	1.12	0.53	0.35	0.42	0.32	0.374

符号意义:  
 B—长边宽度;  
 d—边厚;  
 r<sub>1</sub>—一端内弧半径;  
 y<sub>0</sub>—形心坐标;  
 i—惯性半径;  
 b—短边宽度;  
 r—内圆弧半径;  
 x<sub>0</sub>—形心坐标;  
 I—惯性矩;  
 W—截面模量。



(续)

角钢 号数	尺寸 /mm			截面 面积 /cm <sup>2</sup>	理论 重量 kg·m <sup>-1</sup>	外表 面积 m <sup>2</sup> ·m <sup>-1</sup>	参 考 数 值														
							x-x			y-y			x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>			y <sub>1</sub> -y <sub>1</sub>			u-u		
							I <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>	I <sub>xy</sub>	I <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>	I <sub>xy</sub>	I <sub>x1</sub>	I <sub>y1</sub>	I <sub>xy1</sub>	I <sub>x1</sub>	I <sub>y1</sub>	I <sub>xy1</sub>	I <sub>u</sub>	I <sub>v</sub>	I <sub>uv</sub>
							/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>	/cm <sup>4</sup>
4/2.5	B	40	25	1.890	1.484	0.127	3.08	1.28	1.15	0.93	0.70	0.49	6.39	1.32	1.59	0.59	0.56	0.54	0.40	0.386	
	d	4		2.467	1.936	0.127	3.93	1.26	1.49	1.18	0.69	0.63	8.53	1.37	2.14	0.63	0.71	0.54	0.52	0.381	
4.5/2.8	B	45	28	2.149	1.687	0.143	4.45	1.44	1.47	1.34	0.79	0.62	9.10	1.47	2.23	0.64	0.80	0.61	0.51	0.383	
	d	4		2.806	2.203	0.143	5.69	1.42	1.91	1.70	0.78	0.80	12.13	1.51	3.00	0.68	1.02	0.60	0.66	0.380	
5/3.2	B	50	32	2.431	1.908	0.161	6.24	1.60	1.84	2.02	0.91	0.82	12.49	1.60	3.31	0.73	1.20	0.70	0.68	0.404	
	d	4		3.177	2.494	0.160	8.02	1.59	2.39	2.58	0.90	1.06	16.65	1.65	4.45	0.77	1.53	0.69	0.87	0.402	
5.6/3.6	B	56	36	2.743	2.153	0.181	8.88	1.80	2.32	2.92	1.03	1.05	17.54	1.78	4.70	0.80	1.73	0.79	0.87	0.408	
	d	5		4.415	3.466	0.180	13.86	1.77	3.71	4.49	1.01	1.65	29.25	1.87	7.94	0.88	2.67	0.79	1.36	0.404	
6.3/4	B	63	40	4.058	3.185	0.202	16.49	2.02	3.87	5.23	1.14	1.70	33.30	2.04	8.63	0.92	3.12	0.88	1.40	0.398	
	d	7		5.908	4.638	0.201	23.36	1.96	5.59	7.29	1.11	2.43	49.98	2.12	13.12	0.99	4.34	0.86	1.99	0.393	
7/4.5	B	70	45	4.547	3.570	0.226	23.17	2.26	4.86	7.55	1.29	2.17	45.92	2.24	12.26	1.02	4.40	0.98	1.77	0.410	
	d	7		6.647	5.218	0.225	32.54	2.21	6.95	10.62	1.26	3.12	68.35	2.32	18.58	1.09	6.35	0.93	2.59	0.404	
				7.657	6.011	0.225	37.22	2.20	8.03	12.01	1.25	3.57	79.99	2.36	21.84	1.13	7.16	0.97	2.94	0.402	





(续)

角钢 号数	尺寸 /mm		截面 面积 /cm <sup>2</sup>	理论 重量 kg·m <sup>-1</sup>	外表 面积 m <sup>2</sup> ·m <sup>-1</sup>	参 考 数 值														
						x-x			y-y			x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>			y <sub>1</sub> -y <sub>1</sub>			u-u		
						I <sub>x</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> /cm	W <sub>x</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> /cm	W <sub>y</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>x1</sub> /cm <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> /cm	I <sub>y1</sub> /cm <sup>4</sup>	x <sub>1</sub> /cm	I <sub>u</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>u</sub> /cm	W <sub>u</sub> /cm <sup>3</sup>	tga	
			10.637	8.350	0.354	133.37	3.54	17.85	42.92	2.01	7.90	265.78	3.53	69.08	1.57	25.36	1.54	6.53	0.403	
		6																		
		7	12.301	9.656	0.354	153.00	3.53	20.60	49.01	2.00	9.09	310.07	3.57	80.82	1.61	28.95	1.53	7.50	0.402	
11/7		8	13.944	10.946	0.353	172.04	3.51	23.30	54.87	1.98	10.25	354.39	3.62	92.70	1.65	32.45	1.53	8.45	0.401	
		10	17.167	13.467	0.353	208.39	3.48	28.54	65.88	1.96	12.48	443.13	3.70	116.83	1.72	39.20	1.51	10.29	0.397	
		7	14.096	11.066	0.403	227.98	4.02	26.86	74.42	2.30	12.01	454.99	4.01	120.32	1.80	43.81	1.76	9.92	0.408	
		8	15.989	12.551	0.403	256.77	4.01	30.41	83.49	2.28	13.56	519.99	4.06	137.85	1.84	49.15	1.75	11.18	0.407	
12.5/8		10	19.712	15.474	0.402	312.04	3.98	37.33	100.67	2.26	16.56	650.09	4.14	173.40	1.92	59.45	1.74	13.64	0.404	
		12	23.351	18.330	0.402	364.41	3.95	44.01	116.67	2.24	19.43	780.39	4.22	209.67	2.00	69.35	1.72	16.01	0.400	
		8	18.038	14.160	0.453	365.64	4.50	38.48	120.69	2.59	17.34	730.53	4.50	195.79	2.04	70.83	1.98	14.31	0.411	
		10	22.261	17.475	0.452	445.50	4.47	47.31	146.03	2.56	21.22	913.20	4.58	245.92	2.12	85.82	1.96	17.48	0.409	
14/9		12	26.400	20.724	0.451	521.59	4.44	55.87	169.79	2.54	24.95	1096.09	4.66	296.89	2.19	100.21	1.95	20.54	0.406	
		14	30.456	23.908	0.451	594.10	4.42	64.18	192.10	2.51	28.54	1279.26	4.74	348.82	2.27	114.13	1.94	23.52	0.403	

10	25.315	19.872	0.512	668.69	5.14	62.13	205.03	2.85	26.56	1362.89	5.24	336.59	2.28	121.74	2.19	21.92	0.390
12	30.054	23.592	0.511	784.91	5.11	73.49	239.09	2.82	31.28	1635.36	5.32	405.94	2.36	142.33	2.17	25.79	0.388
14	34.709	27.247	0.510	896.50	5.08	84.56	271.20	2.80	35.83	1908.50	5.40	476.42	2.43	162.23	2.16	29.56	0.385
16	39.281	30.835	0.510	1003.04	5.05	95.33	301.60	2.77	40.24	2181.79	5.48	548.22	2.51	182.57	2.16	33.44	0.382
10	28.373	22.273	0.571	956.25	5.89	78.96	278.11	3.13	32.49	1940.40	5.89	447.22	2.44	166.50	2.42	26.88	0.376
12	33.712	26.464	0.571	1124.72	5.78	93.53	325.03	3.10	38.32	2328.35	5.98	538.94	2.52	194.87	2.40	31.66	0.374
14	38.967	30.589	0.570	1286.91	5.75	107.76	369.55	3.08	43.97	2716.60	6.06	631.95	2.59	222.30	2.39	36.32	0.372
16	44.139	34.649	0.569	1443.06	5.72	121.64	411.85	3.06	49.44	3105.15	6.14	726.46	2.67	248.94	2.38	40.87	0.369
			14														
12	37.912	29.761	0.641	1570.90	6.44	116.73	483.16	3.57	49.99	3193.85	6.54	787.74	2.83	285.79	2.74	41.23	0.392
14	43.867	34.436	0.640	1800.97	6.41	134.65	530.83	3.54	57.44	3726.17	6.62	922.47	2.91	326.58	2.73	47.34	0.390
16	49.739	39.045	0.639	2023.35	6.38	152.18	615.44	3.52	64.69	4258.86	6.70	1058.86	2.99	366.21	2.71	53.32	0.388
18	55.526	43.588	0.639	2238.30	6.35	169.33	677.19	3.49	71.74	4792.00	6.78	1197.13	3.06	404.83	2.70	59.18	0.385

注: 1.  $r_1 = \frac{1}{3}d_1$

2. 角钢长度:

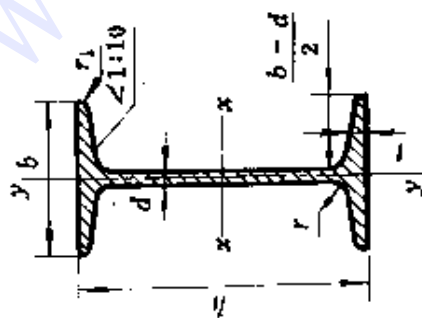
钢号 2.5/1.6 ~ 5.6/3.6号 6.3/4 ~ 9/5.6号 10/6.3 ~ 14/9号 6/10 ~ 20/12.5号

长度 3 ~ 9m 4 ~ 12m 4 ~ 19m 6 ~ 19m

3. 一般采用材料: A2, A3, A5, A3F.



表 3 热轧普通工字钢(GB706—65)



符号意义:  
 $h$ —高度;  
 $b$ —腿宽;  
 $d$ —腰厚;  
 $t$ —平均腿厚;  
 $r$ —内圆弧半径;  
 $r_1$ —腿端圆弧半径;  
 $I$ —惯性矩;  
 $W$ —截面模量;  
 $i$ —惯性半径;  
 $S$ —半截面对  $x$  轴的静矩。

型号	尺寸/mm						理论重量 /kg·m <sup>-1</sup>	参 考 数 值						
	截面面积 /cm <sup>2</sup>							$x-x$			$y-y$			
	$h$	$b$	$d$	$t$	$r$	$r_1$		$I_x$ /cm <sup>4</sup>	$W_x$ /cm <sup>3</sup>	$i_x$ /cm	$I_x : S_x$ /cm	$I_y$ /cm <sup>4</sup>	$W_y$ /cm <sup>3</sup>	$i_y$ /cm
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.3	11.2	49	4.14	8.59	33	9.72	1.52
12.6	126	74	5	8.4	7	3.5	18.1	14.2	77.529	5.195	10.85	46.906	12.677	1.609
14	140	80	5.5	9.1	7.5	3.8	21.5	16.9	102	5.76	12	64.4	16.1	1.73
16	160	88	6	9.9	8	4	26.1	20.5	141	6.58	13.8	93.1	21.2	1.89
18	180	94	6.5	10.7	8.5	4.3	30.6	24.1	185	7.36	15.4	122	26	2

20a	200	100	7	11.4	9	4.3	35.5	27.9	2370	237	8.15	17.2	158	31.5	2.12
20b	200	102	9	11.4	9	4.5	39.5	31.1	2500	250	7.96	16.9	169	33.1	2.06
22a	220	110	7.5	12.3	9.5	4.8	42	33	3400	309	8.99	18.9	225	40.9	2.31
22b	220	112	9.5	12.3	9.5	4.8	46.4	36.4	3570	325	8.78	18.7	239	42.7	2.27
25a	250	116	8	13	10	5	48.5	38.1	5023.54	401.88	10.18	21.58	280.046	48.238	2.403
25b	250	118	10	13	10	5	53.5	42	5283.96	422.72	9.938	21.27	309.297	52.423	2.404
28a	280	122	8.5	13.7	10.5	5.3	55.45	43.4	7114.14	508.15	11.32	24.62	345.051	56.565	2.495
28b	280	124	10.5	13.7	10.5	5.3	61.05	47.9	7480	534.29	11.08	24.24	379.496	61.209	2.493
32a	320	130	9.5	15	11.5	5.8	67.05	52.7	11075.5	692.2	12.84	27.46	459.93	70.758	2.619
32b	320	132	11.5	15	11.5	5.8	73.45	57.7	11621.4	726.33	12.58	27.09	501.53	75.989	2.614
32c	320	134	13.5	15	11.5	5.8	79.95	62.8	12167.5	760.47	12.34	26.77	543.81	81.166	2.508
36a	360	136	10	15.8	12	6	76.3	59.9	15760	875	14.4	30.7	552	81.2	2.69
36b	360	138	12	15.8	12	6	83.5	65.6	16530	919	14.1	30.3	582	84.3	2.64
36c	360	140	14	15.8	12	6	90.7	71.2	17310	952	13.8	29.9	612	87.4	2.6
40a	400	142	10.5	16.5	12.5	6.3	86.1	67.6	21720	1090	15.9	34.1	660	93.2	2.77
40b	400	144	12.5	16.5	12.5	6.3	94.1	73.8	22780	1140	15.6	33.6	692	96.2	2.71
40c	400	146	14.5	16.5	12.5	6.3	102	80.1	23850	1190	15.2	33.2	727	99.6	2.65
45a	450	150	11.5	18	13.5	6.8	102	80.4	32240	1430	17.7	38.6	855	114	2.89
45b	450	152	13.5	18	13.5	6.8	111	87.4	33760	1500	17.4	38	894	118	2.84
45c	450	154	15.5	18	13.5	6.8	120	94.5	35280	1570	17.1	37.6	938	122	2.79

(续)

型号	尺寸/mm						理论重量 /kg·m <sup>-1</sup>	参考数值					
	I-I							Y-Y					
	h	b	d	t	r	r <sub>1</sub>		I <sub>x</sub> /cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> /cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> /cm	I <sub>y</sub> + S <sub>y</sub> /cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> /cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> /cm <sup>3</sup>
50a	500	158	12	20	14	7	119	1860	19.7	42.8	1120	142	3.07
50b	500	160	14	20	14	7	129	1940	19.4	42.4	1170	146	3.01
50c	500	162	16	20	14	7	139	2080	19	41.8	1220	151	2.96
56a	560	166	12.5	21	14.5	7.3	135.25	2342.31	22.02	47.73	1370.16	165.08	3.182
56b	560	168	14.5	21	14.5	7.3	146.45	2446.69	21.63	47.17	1486.75	174.25	3.162
56c	560	170	16.5	21	14.5	7.3	157.85	2551.41	21.27	46.66	1558.39	183.34	3.158
63a	630	176	13	22	15	7.5	154.9	2981.47	24.62	54.17	1700.55	193.24	3.314
63b	630	178	15	22	15	7.5	167.5	3163.98	24.2	53.51	1812.07	203.6	3.289
63c	630	180	17	22	15	7.5	180.1	3298.42	23.82	52.92	1924.91	213.88	3.268

注:1. 工字钢长度:

钢号 10~18号 20~63号

长度 5~19m 6~19m

2. 一般采用材料:A2,A3,A5,A3F。

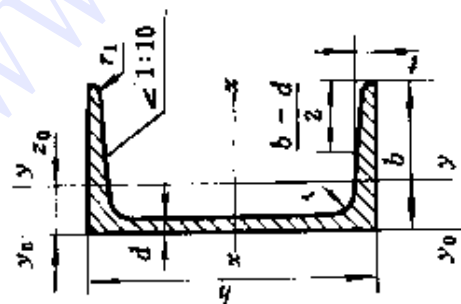
表 4 热轧普通槽钢 (GB707—65)

型号	尺寸/mm						理论重量 /cm <sup>2</sup> kg·m <sup>-1</sup>	参 考 数 值						z <sub>0</sub> /cm		
	参 考 数 值							x-x			y-y				y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>	
	h	b	d	t	r	r <sub>i</sub>		W <sub>x</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>x</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> /cm	W <sub>y</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> /cm		I <sub>yo</sub> /cm <sup>4</sup>	I <sub>yo</sub> /cm <sup>4</sup>
5	50	37	4.5	7	7	3.5	10.4	26	1.94	3.55	8.3	1.1	20.9	1.35		
6.3	63	40	4.8	7.5	7.5	3.75	16.123	50.186	2.453		11.872	1.185	28.38	1.36		
8	80	43	5	8	8	4	25.3	101.3	3.15	5.79	16.6	1.27	37.4	1.43		
10	100	48	5.3	8.5	8.5	4.25	39.7	198.3	3.95	7.8	25.6	1.41	54.9	1.52		
12.6	126	53	5.5	9	9	4.5	62.127	391.466	4.953	10.242	37.99	1.567	77.09	1.59		

符号意义:

- h—高度;
- b—腿宽;
- d—腰厚;
- t—平均腿厚;
- r—内圆弧半径;

- r<sub>i</sub>—腿端圆弧半径;
- I—惯性矩;
- W—截面模量;
- i—惯性半径;
- z<sub>0</sub>—y-y 与 y<sub>0</sub>-y<sub>0</sub> 轴线间距离。



(续)

型号	尺寸/mm						截面面积 /cm <sup>2</sup>	理论重量 kg·m <sup>-1</sup>	参 考 数 值							
	x-y								y-y			y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>				
	h	b	d	t	r	r <sub>1</sub>			W <sub>x</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>x</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> /cm	W <sub>y</sub> /cm <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> /cm <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> /cm	I <sub>x0</sub> /cm <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> /cm
14 a	140	58	6	9.5	9.5	4.75	18.51	14.53	563.7	5.52	13.01	53.2	1.7	107.1	1.71	
14 b	140	60	8	9.5	9.5	4.75	21.31	16.73	609.4	5.35	14.12	61.1	1.69	120.6	1.67	
16 a	160	63	6.5	10	10	5	21.95	17.23	866.2	6.28	16.3	73.3	1.83	144.1	1.8	
16	160	65	8.5	10	10	5	25.15	19.74	934.5	6.1	17.55	83.4	1.82	160.8	1.75	
18 a	180	68	7	10.5	10.5	5.25	25.69	20.17	141.4	1272.7	7.04	20.03	98.6	1.96	189.7	1.88
18	180	70	9	10.5	10.5	5.25	29.29	22.99	152.2	1369.9	6.84	21.52	111	1.93	210.1	1.84
20 a	200	73	7	11	11	5.5	28.83	22.63	178	1780.4	7.86	24.2	128	2.11	244	2.01
20	200	75	9	11	11	5.5	32.83	25.77	191.4	1913.7	7.64	25.88	143.6	2.09	268.4	1.95
22 a	220	77	7	11.5	11.5	5.75	31.84	24.99	217.6	2393.9	8.67	28.17	157.8	2.23	298.2	2.1
22	220	79	9	11.5	11.5	5.75	36.24	28.45	233.8	2571.4	8.42	30.05	176.4	2.21	326.3	2.03
25 a	250	78	7	12	12	6	34.91	27.47	269.597	3369.62	9.823	30.607	175.529	2.243	322.256	2.065
25 b	250	80	9	12	12	6	39.91	31.39	282.402	3530.04	9.405	32.657	196.421	2.218	353.187	1.982
25 c	250	82	11	12	12	6	44.91	35.32	295.236	3690.45	9.065	35.926	218.415	2.206	384.133	1.921
28 a	280	82	7.5	12.5	12.5	6.25	40.02	31.42	340.328	4764.59	10.91	35.718	217.989	2.333	387.565	2.097
28 b	280	84	9.5	12.5	12.5	6.25	45.62	35.81	366.46	5130.45	10.6	37.929	242.144	2.304	427.589	2.016
28 c	280	80	11.5	12.5	12.5	6.25	51.22	40.21	392.591	5496.32	10.35	40.301	267.602	2.285	426.597	1.951

32a	320	88	8	14	14	7	48.7	38.22	474.879	7598.06	12.49	46.473	304.787	2.502	552.31	2.242
32b	320	90	10	14	14	7	55.1	43.25	509.012	8144.2	12.15	49.157	336.332	2.471	592.933	2.158
32c	320	92	12	14	14	7	61.5	48.28	543.145	8690.33	11.88	52.642	374.175	2.467	643.299	2.092
36a	360	96	9	16	16	8	60.89	47.8	659.7	11874.2	13.97	63.54	455	2.73	818.4	2.44
36b	360	98	11	16	16	8	68.09	53.45	702.9	12651.8	13.63	66.85	496.7	2.7	880.4	2.37
36c	360	100	13	16	16	8	75.29	50.1	746.1	13429.4	13.36	70.02	536.4	2.67	947.9	2.34
40a	400	100	10.5	18	18	9	75.05	58.91	878.9	17577.9	15.30	78.83	592	2.81	1067.7	2.49
40b	400	102	12.5	18	18	9	83.05	65.19	932.2	18644.5	14.98	82.52	640	2.78	1135.6	2.44
40c	400	104	14.5	18	18	9	91.05	71.47	985.6	19711.2	14.71	86.19	687.8	2.75	1220.7	2.42

注:1. 槽钢长度:

钢号 5~8号 10~18号 20~40号

长度 5~12m 5~19m 6~19m

2. 一般采用材料:A2,A3,A5,A3F.

## 附录四 中英名词对照

### A

allowable load	许用载荷
allowable stress	许用应力
alternative stress	交变应力
anisotropy	各向异性
angle of rotation	转角
angle of twist	扭转角
average normal strain	平均正应变
average stress	平均应力
axial compression	轴向压缩
axial force	轴力
axial force diagrams	轴力图
axial loads	轴向载荷
axial rigidity	抗拉(压)刚度, 轴向刚度
axial tension	轴向拉伸
axis	轴线

### B

bar	杆件
beams	梁
beams of constant strength	等强度梁
beams of variable cross-section	变截面梁
bending moment	弯矩
bending moment diagrams	弯矩图
bearing stress	挤压应力
bearing surface	挤压面



biaxial stress	二向应力
boundary condition	边界条件
brittle material	脆性材料
buckling	屈曲

### C

cantilever beams	悬臂梁
centroid of areas	形心
centroidal axis	形心轴
circumferential stress	环向应力, 周向应力
close-coiled helical spring	密圈螺旋弹簧
columns	柱, 压杆
combined loading	组合受力
combined stresses	组合应力
composite materials	复合材料
compressive stress	压应力
compressive test	压缩试验
concentrated loads	集中载荷
connections	连接
continuity	连续性
continuity condition	连续条件
correction factor	修正系数
critical load	临界载荷
critical stress	临界应力
cross-section	横截面

### D

deflection	挠度
deflection curve	挠曲轴
deformation	变形

degree of statical indeterminacy	静不定度
differential equation of the deflection curve	挠曲轴微分方程
displacement	位移
distortion energy theory	形状改变理论
distributed loads	分布载荷
ductility	塑性, 延性
ductile materials	塑性材料, 延性材料
dummy-load method	单位载荷法
dynamic loads	动载荷

## E

eccentric loading	偏心载荷
elastic deformation	弹性变形
elastic limit	弹性极限
elastic modulus	弹性模量
elastic strain energy	弹性应变能
element	元素, 单元体
equation of compatibility	协调方程
equivalent length factor	等效长度因子
equivalent length of column	柱的等效长度
Euler's formula	欧拉公式

## F

factor of safety	安全系数
fatigue	疲劳
fatigue limite	疲劳极限
fixed support	固定端
flexural rigidity	抗弯刚度, 弯曲刚度
fracture toughness	断裂韧度

G

gage length	标距
generalized Hooke's law	广义虎克定律

H

homogeneity	均匀性
Hooke's law	虎克定律
Hooke's law in shear	剪切虎克定律
hypothesis of plane	平面假设

I

impact stress	冲击应力
impact loads	冲击载荷
infinitesimal element	微体, 无限小元素
intermediate columns	中柱
internal forces	内力
internal torque	扭矩
international system of units	国际单位制
isotropy	各向同性

J

joint	接头
-------	----

L

lateral strain	横向应变
load intensity	载荷集度
long columns	长柱
longitudinal stress	纵向应力
longitudinal strain	纵向应变

## M

Macaulay function	麦考利函数
marginal distance	边距
maximum shearing stress theory	最大剪应力理论
maximum tensile strain theory	最大拉应变理论
maximum tensile stress theory	最大拉应力理论
mean stress	平均应力
mechanics of materials	材料力学
mechanical property	力学性能
member	构件
method of section	截面法
modulus of elasticity	弹性模量
Mohr's circle	莫尔圆, 应力圆
moment of inertia	惯性矩

## N

necking	颈缩
neutral axis	中性轴
neutral equilibrium	随遇平衡
neutral surface	中性层, 中性面
nominal stress	名义应力
normal strain	正应变
normal stress	正应力

## O

overhanging beam	外伸梁
------------------	-----

## P

parallel-axis theorem	平行轴定理, 移轴定理
-----------------------	-------------

Pascal	帕斯卡
percent elongation	延伸率
percent reduction in area	断面收缩率
pin support	铰支座
plane stress	平面应力
plastic deformation	塑性变形
plastic strain	塑性应变
Poisson's ratio	泊松比
polar moment of inertia	极惯性矩
principal plane	主平面
principal stress	主应力
principle of superposition	叠加原理
prismatic member	等截面杆
propotional limit	比例极限
pure bending	纯弯曲
pure shear	纯剪切

## R

radius of curvature	曲率半径
radius of gyration	回转半径
reactions	反作用力
redundant reactions	多余反力
residual strain	残余应变
rigid body	刚体
riveted joint	铆接节头
roller support	滚子支座

## S

section modulus	截面模量
shaft	轴

shear force	剪力
shear-force diagrams	剪力图
shearing plane	剪切面
shearing modulus of elasticity	剪切弹性模量
shear strain	剪应变
shear stress	剪应力
short columns	短柱
SI units	国际单位制
simply supported beams	简支梁
slenderness ratio	长细比, 柔度
slip	滑移
S-N curves	S-N 曲线
spring constant	弹簧常数
spring index	弹簧指数
St. Venant's principle	圣维南原理
stability	稳定性
stable	稳定
state of stress	应力状态
static load	静载荷
statical moment of a area	静矩
statically determinate beams	静定梁
statically determinate problem	静定问题
statically indeterminate beams	静不定梁
statically indeterminate problem	静不定问题
stiffness	刚度
strain energy	应变能
strain hardening	应变硬化
strain gauge	应变片
strain rosettes	应变花
strength	强度

strength criteria	强度准则
stress amplitude	应力幅
stress concentration	应力集中
stress concentration factor	应力集中系数
stress cycle	应力循环
stress intensity factor	应力强度因子
stress ratio	应力比
stress-strain diagram	应力-应变图
structure	结构
superposition method	叠加法
support	支座
symmetric bending	对称弯曲

#### T

tensile stress	拉应力
tensile test	拉伸试验
tensile-test specimen	拉伸试件
theory of strength	强度理论
thin-walled	薄壁
thin-walled cylinders	薄壁筒
torque	扭矩
torsion	扭转
torsional rigidity	抗扭刚度, 扭转刚度
triaxial stress	三向应力
twisting couple	扭力偶
twisting moment	扭力矩

#### U

ultimate load	极限载荷
ultimate strength	强度极限
uniaxial stress	单向应力



unstable	不稳定
unsymmetrical bending	非对称弯曲
	W
warp	翘曲
	Y
yielding	屈服
yielding stress	屈服应力
yield criterion	屈服准则
Young's modulus	杨氏模量

## 附录五 习题答案

### 第二章 轴向拉伸与压缩

- 2.1 (a)  $N_{\max} = P$   
(b)  $N_{\max} = P$   
(c)  $N_{\max} = 3 \text{ kN}$   
(d)  $N_{\max} = 1 \text{ kN}$
- 2.2 同题 2.1
- 2.3  $\sigma = 72.7 \text{ MPa}$
- 2.4  $\sigma_1 = 175 \text{ MPa}, \sigma_2 = 350 \text{ MPa}$
- 2.5  $\sigma_{\max}^- = 60 \text{ MPa}, \sigma_{\max}^+ = 40 \text{ MPa}$
- 2.6  $\sigma_{\max} = 389 \text{ MPa}$
- 2.7  $P_2 = 62.5 \text{ kN}$
- 2.8  $d_2 = 49.0 \text{ mm}$
- 2.9  $\sigma_{45} = 5 \text{ MPa}, \tau_{45} = 5 \text{ MPa}$
- 2.10  $\alpha = 26.6^\circ$
- 2.11  $\sigma_{AB} = 41.3 \text{ MPa}, \tau_{AB} = 49.2 \text{ MPa}$

$$\sigma_{BC} = 58.7\text{MPa}, \tau_{BC} = -49.2\text{MPa}$$

$$\sigma_{\max} = 100\text{MPa}, \tau_{\max} = 41.3\text{MPa}$$

$$2.12 \quad \sigma_p = 230\text{MPa}, \sigma_{\sigma_2} = 325\text{MPa}$$

$$2.13 \quad \epsilon_p = 0.0030, \epsilon_s = 0.0047$$

$$2.14 \quad \delta = 26.4\%, \psi = 65.2\%, \text{塑性材料}$$

$$2.15 \quad D = 19.87\text{mm}$$

$$2.16 \quad \sigma_1 = 82.9\text{MPa}, \sigma_2 = 131.8\text{MPa}$$

$$2.17 \quad d \geq 20\text{mm}, b \geq 84.1\text{mm}$$

$$2.18 \quad D_0 \geq 89\text{mm}$$

$$2.19 \quad [P] = 97.1\text{kN}$$

$$2.20 \quad \theta = 45^\circ$$

$$2.21 \quad \alpha = 54^\circ 44'$$

$$2.22 \quad \Delta l = -0.20\text{mm}$$

$$2.23 \quad P = 18.7\text{kN}$$

$$2.24 \quad E = 70\text{GPa}, \mu = 0.33$$

$$2.25 \quad \Delta D = -0.0179\text{mm}$$

$$2.26 \quad P = 21.2\text{kN}, \theta = 10.9^\circ$$

$$2.27 \quad \Delta_A = 0.938\text{mm}(\rightarrow), f_A = 3.58\text{mm}(\downarrow)$$

$$2.28 \quad \Delta_C = 0.50\text{mm}(\rightarrow), f_C = 0.50\text{mm}(\downarrow)$$

$$2.29 \quad \Delta_{B/C} = \frac{(2 + \sqrt{2})Pl}{EA}$$

$$2.30 \quad (a) \sigma_{\max}^+ = \frac{2P}{3A}, \sigma_{\max}^- = \frac{P}{3A}$$

$$(b) \sigma_{\max}^+ = \frac{2P}{3A}, \sigma_{\max}^- = \frac{P}{3A}$$

$$2.31 \quad f_A = \frac{Pl}{2EA}(\downarrow)$$

$$2.32 \quad \sigma_1 = 66.6\text{MPa}, \sigma_2 = 133.2\text{MPa}$$

$$2.33 \quad A_1 = A_2 \geq 182\text{mm}^2$$

$$2.34 \quad N_W = 72.9\text{kN}, \sigma_W = 1.823\text{MPa}$$

$$N_S = 6.78\text{kN}, \sigma_S = 36.5\text{MPa}$$

$$2.35 \quad N_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}P(\text{拉}), N_{AB} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}P(\text{压})$$

$$N_{AD} = N_{AC} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}P(\text{拉})$$

$$2.36 \quad A_1 = A_2 = 2A_3 \geq 2450\text{mm}^2$$

$$2.37 \quad N_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{8}P(\text{压}), N_2 = N_3 = \frac{P}{4}(\text{压})$$

$$N_2 = N_{AG} = \frac{2 - \sqrt{2}}{8}P(\text{压})$$

$$2.38 \quad N_{1\max} = \frac{5P}{6}, N_{2\max} = \frac{P}{6}, N_{3\max} = \frac{5P}{6}$$

$$2.39 \quad [P] = 37.7\text{kN}$$

$$2.40 \quad \tau = 5\text{MPa}, \sigma_{bs} = 12.5\text{MPa}$$

$$2.41 \quad \delta \geq 9\text{mm}, l \geq 90\text{mm}, h \geq 48\text{mm}$$

$$2.42 \quad d \geq 15\text{mm}$$

$$2.43 \quad \sigma = 153\text{MPa}, \tau = 146.4\text{MPa}, \sigma_{bs} = 230\text{MPa}$$

$$2.44 \quad [P] = 151\text{kN}$$

$$2.45 \quad \sigma = 125\text{MPa}, \tau = 99.5\text{MPa}, \sigma_{bs} = 125\text{MPa}$$

### 第三章 扭 转

$$3.1 \quad (a) T_{\max} = M_G$$

$$(b) T_{\max} = M_G$$

$$(c) T_{\max} = 2\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$(d) |T|_{\max} = 3\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$3.2 \quad \text{同题 3.1}$$

$$3.3 \quad M = 191.0\text{N} \cdot \text{m}$$

$$3.4 \quad (a) T_{\max} = 1.273\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$(b) T'_{\max} = 0.955\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$3.5 \quad \tau = 135.3\text{MPa}$$

$$3.6 \quad G = 46.6\text{GPa}$$

$$3.7 \quad \tau = 189.4\text{MPa}, \gamma = 2.53 \times 10^{-3}\text{rad}$$

3.8  $\tau = 49.5\text{MPa}$

3.9  $T = 15\text{J} \cdot \text{m}$

3.10  $\tau_A = 32.6\text{MPa}, \tau_{\max} = 40.7\text{MPa}$

3.11  $\tau_A = 63.7\text{MPa}, \tau_{\max} = 84.9\text{MPa}, \tau_{\min} = 42.4\text{MPa}$

3.12  $N_P = 33.7\text{kW}$

3.15  $\sigma_{\max}^+ = 40.7\text{MPa}, \sigma_{\max}^- = 40.7\text{MPa}$

3.16  $d \geq 58.8\text{mm}$

3.17  $d \geq 39.3\text{mm}, d_1 \leq 24.7\text{mm}, d_2 \geq 41.2\text{mm}$

3.18  $G = 84.2\text{GPa}$

3.19  $N_P = 197\text{kW}$

3.20  $\phi = 0.051\text{rad}$

3.21  $\tau_{\max} = \sigma_{\max} = \frac{16M}{\pi d_2^3}, \phi_c = \frac{10.19Mt}{G} \left( \frac{1}{d_2^4} + \frac{2}{d_1^4} \right)$

3.22  $d \geq 68\text{mm}$

3.23 49.1%

3.24  $d_1 \geq 82.4\text{mm}, d_2 \geq 61.8\text{mm}$

3.25  $M = \frac{3\pi d^4 G \phi_B}{64a}$

3.26  $d \geq 36.4\text{mm}$

3.27  $d \geq 57.7\text{mm}$

3.28  $[M] = 5.24\text{kN} \cdot \text{m}$

3.29  $T_1 = 1.32\text{kN} \cdot \text{m}, T_2 = 0.68\text{kN} \cdot \text{m}$

$\tau_{1\max} = 41.0\text{MPa}, \tau_{2\max} = 54.1\text{MPa}$

3.30  $\tau = \frac{0.424M}{d^2 D}, \sigma_{bs} = \frac{0.333M}{dtD}$

3.31  $d \geq 14.56\text{mm}$

3.32  $\frac{J_{kH}}{J_{kH_i}} = 1.231$

3.33  $[M_2] = 1.727\text{kN} \cdot \text{m}, \phi_A = 6.12 \times 10^{-3}\text{rad}$

3.34 降低 62.5%

3.35  $\tau_{\max} = 33.2\text{MPa}, n = 9$

3.36  $C = 53.7\text{N/mm}$

- 3.37  $d = 6.4\text{mm}, n = 8$   
 3.38  $[P] = 3.74\text{kN}$   
 3.39  $[P] = 2.36\text{kN}, \lambda = 313\text{mm}$   
 3.40  $\tau_{\max} = 60.1\text{MPa}, \lambda = 69.6\text{mm}$

#### 第四章 梁的内力

- 4.1 (a)  $Q_{A+} = P, M_{A+} = 0, Q_C = P, M_C = \frac{Pl}{2},$   
 $Q_{B-} = P, M_{B-} = Pl$   
 (b)  $Q_{A+} = -\frac{M_O}{l}, M_{A+} = M_O, Q_C = -\frac{M_O}{l}, M_C = \frac{M_O}{2},$   
 $Q_{B-} = -\frac{M_O}{l}, M_{B-} = 0$   
 (c)  $Q_{A+} = \frac{bP}{a+b}, M_{A+} = 0, Q_{C-} = \frac{bP}{a+b}, M_{C-} = \frac{abP}{a+b},$   
 $Q_{C+} = -\frac{aP}{a+b}, M_{C+} = \frac{abP}{a+b}, Q_{B-} = -\frac{aP}{a+b},$   
 $M_{B-} = 0$   
 (d)  $Q_{A+} = \frac{ql}{2}, M_{A+} = -\frac{3ql^2}{8}, Q_{C-} = \frac{ql}{2}, M_{C-} = -\frac{ql^2}{8},$   
 $Q_{C+} = \frac{ql}{2}, M_{C+} = -\frac{ql^2}{8}, Q_{B-} = 0, M_{B-} = 0$
- 4.2 (a)  $Q_{\max} = ql, M_{\max} = \frac{ql^2}{2}$   
 (b)  $Q_{\max} = \frac{M_O}{l}, M_{\max} = M_O$   
 (c)  $Q_{\max} = P, |M|_{\max} = \frac{Pl}{2}$   
 (d)  $|Q|_{\max} = \frac{3ql}{4}, |M|_{\max} = \frac{ql^2}{4}$   
 (e)  $Q_{\max} = \frac{3qa}{2}, M_{\max} = \frac{9qa^2}{8}$   
 (f)  $Q_{\max} = \frac{9ql}{8}, M_{\max} = ql^2$
- 4.3 (a)  $M_{\max} = \frac{Pl}{4}$

$$(b) M_{\max} = \frac{Pl}{6}$$

$$(c) M_{\max} = \frac{Pl}{6}$$

$$(d) M_{\max} = \frac{3Pl}{20}$$

$$4.4 (a) |Q|_{\max} = \frac{3ql}{8}, |M|_{\max} = \frac{9ql^2}{128}$$

$$(b) |Q|_{\max} = \frac{5ql}{4}, |M|_{\max} = \frac{ql^2}{2}$$

$$4.6 (a) Q_{\max} = P, M_{\max} = 2Pl$$

$$(b) Q_{\max} = \frac{ql}{2}, M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

$$(c) Q_{\max} = \frac{qa}{4}, M_{\max} = \frac{qa^2}{32}$$

$$(d) Q_{\max} = \frac{9ql}{8}, M_{\max} = ql^2$$

$$(e) Q_{\max} = \frac{ql}{4}, |M|_{\max} = \frac{3ql^2}{32}$$

$$(f) |Q|_{\max} = \frac{10ql}{9}, M_{\max} = \frac{17ql^2}{54}$$

$$4.7 \alpha = 0.207l$$

$$4.8 (a) \eta = \frac{2l-d}{4} \text{ 或 } \eta = \frac{2l-3d}{4}, M_{\max} = \frac{P(2l-d)^2}{8l}$$

$$(b) \eta = 0 \text{ 或 } \eta = l-d, |Q|_{\max} = \frac{P(2l-d)}{l}$$

$$4.9 Q_{\max} = \frac{q_0l}{2}, M_{\max} = \frac{q_0l^2}{6}$$

$$4.10 Q_{\max} = \frac{q_0l}{4}, M_{\max} = \frac{q_0l^2}{12}$$

## 第五章 梁的应力

$$5.2 \sigma_{\max} = \frac{Ed}{d+D}, \varepsilon_{\max} = \frac{d}{d+D}$$

$$5.4 \sigma_{\max} = 176\text{MPa}, \sigma_k = 132\text{MPa}$$

$$5.5 \sigma_{\max}^+ = 55.6\text{MPa}, \sigma_{\max}^- = 111.1\text{MPa}$$

$$5.6 \quad \sigma_{\max} = \frac{32Pl}{\pi d^3}, \rho_{\min} = \frac{\pi E d^4}{64Pl}$$

$$5.7 \quad \sigma_{\max} = 67.5 \text{MPa}$$

$$5.8 \quad I_z = \frac{5\sqrt{3}a^4}{16}, W_z = \frac{5a^3}{8}$$

$$5.9 \quad (a) b = \frac{\sqrt{3}d}{3}, h = \frac{\sqrt{6}d}{3}$$

$$(b) b = \frac{d}{2}, h = \frac{\sqrt{3}d}{2}$$

$$5.10 \quad (a) I_z = 1.792 \times 10^9 \text{mm}^4$$

$$(b) I_z = 1.547 \times 10^{10} \text{mm}^4$$

$$5.11 \quad \tau_{\max} = 26.8 \text{MPa}, \tau_A = 13.15 \text{MPa}, \tau_B = 21.9 \text{MPa}$$

$$5.12 \quad \tau_{\max} = 43.8 \text{MPa}, \tau_{\min} = 38.2 \text{MPa}$$

$$5.13 \quad \tau_{\max} = 101.6 \text{MPa}, \tau_A = 92.2 \text{MPa}$$

$$5.14 \quad \tau_{\max} = \frac{16ql}{3\pi d^2}, \sigma_{\max} = \frac{16ql^2}{\pi d^3}, \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{3l}{d}$$

$$5.15 \quad \tau_{\max} = 32.3 \text{MPa}$$

$$5.17 \quad b \geq 125 \text{mm}, \sigma_{\max}^A = 7.78 \text{MPa}$$

$$5.18 \quad \sigma_{1\max} = 64.8 \text{MPa}, \sigma_{2\max} = 68.7 \text{MPa}, \\ \sigma_{\beta\max} = 15.87 \text{MPa}$$

$$5.19 \quad \sigma_{\max}^+ = 60.4 \text{MPa}, \sigma_{\max}^- = 45.3 \text{MPa}$$

$$5.20 \quad b \geq 32.7 \text{mm}$$

$$5.21 \quad a \geq 21.2 \text{mm}$$

$$5.22 \quad \sigma_{\max}^A = 18.24 \text{MPa}, \sigma_{\max} = 63.8 \text{MPa}, \\ \tau_{\max} = 29.7 \text{MPa}$$

$$5.23 \quad \tau_{\max} = 1 \text{MPa}, \sigma_{\max} = 6.67 \text{MPa}$$

5.24 N<sup>o</sup>16 工字钢

$$5.25 \quad h \geq 307 \text{mm}, d \geq 260 \text{mm}$$

5.26 N<sup>o</sup>25b 或 N<sup>o</sup>28a 工字钢

$$5.27 \quad \frac{W_z}{W_y} = 1.414$$

5.28 节省材料 61%



$$5.29 \quad W_{\text{西}} : W_{\text{中}} : W_{\text{东}} = 1 : 1.182 : 1.671$$

$$5.30 \quad b = 510\text{mm}$$

$$5.31 \quad a = 1.385\text{m}$$

$$5.32 \quad b(x) = \frac{3Px}{h^2[\sigma]}, b_{\min} = \frac{3P}{4h[\tau]}$$

$$5.33 \quad (\text{a}) h = 2b \geq 71.2\text{mm}$$

$$(\text{b}) d \geq 52.3\text{mm}$$

$$5.34 \quad P = 1.03\text{kN}, \beta = 31^\circ 21'$$

$$5.35 \quad \sigma_{\max} = \frac{4Pl}{b^3}$$

## 第六章 梁的变形

$$6.1 \quad (\text{a}) \theta_{\max} = \frac{M_0 l}{EI} (\curvearrowright), f_{\max} = \frac{M_0 l^2}{2EI} (\uparrow)$$

$$(\text{b}) |\theta|_{\max} = \frac{ql^3}{6EI} (\curvearrowright), f_{\max} = \frac{ql^3}{8EI} (\uparrow)$$

$$6.3 \quad (\text{a}) \theta_A = \frac{M_0 l}{24EI} (\curvearrowright), y_C = 0$$

$$(\text{b}) \theta_A = \frac{Pl^2}{24EI} (\curvearrowright), y_C = \frac{Pl^3}{12EI} (\downarrow)$$

$$(\text{c}) \theta_A = 0, y_C = \frac{41ql^4}{384EI}$$

$$(\text{d}) \theta_A = \frac{5ql^3}{192EI} (\curvearrowright)$$

$$6.4 \quad (\text{a}) f_{\max} = \frac{M_0 l^2}{72 \sqrt{3} EI} (\uparrow)$$

$$(\text{b}) f_{\max} = \frac{Pl^3}{12EI} (\downarrow)$$

$$6.5 \quad \Delta_A = \frac{M_0^2 l^3}{6E^2 I^2}$$

$$6.6 \quad M_2 = 2M_1$$

$$6.7 \quad y = \frac{Px^3}{3EI}$$

$$6.8 \quad d \geq 24\text{mm}$$

$$6.9 \quad y_A = \frac{0.315Pl^3}{Ebh^3} (\downarrow)$$

$$6.10 \quad (a) M = Px + Pl < x - \frac{l}{2} >^0$$

$$(c) M = -\frac{qa}{4}x + \frac{q}{2}x^2 - q < x - \frac{a}{2} >^2$$

6.11 同题 6.3

$$6.12 \quad y_C = 17.2\text{mm}, y_D = -0.21\text{mm}$$

$$6.13 \quad \theta_B = \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{M_0l}{3EI} (\curvearrowright)$$

$$6.14 \quad y = -\frac{x(l-x)}{6EI} [M_1(2l-x) + M_2(l+x)]$$

6.15 No18 工字钢

$$6.16 \quad \Delta = \frac{3Pa}{EI}$$

$$6.17 \quad f_C = \frac{7ql^4}{24EI} (\downarrow), \theta_A = \frac{17ql^3}{48EI} (\curvearrowright)$$

$$6.18 \quad (a) x = 0.152l$$

$$(b) x = l/6$$

$$6.19 \quad f = \frac{qb}{24EI} (5b^3 + 20ab^2 + 24a^2b + 8a^3) (\downarrow)$$

$$6.20 \quad (a) y_C = \frac{3Pa^3}{2EI_1} (\downarrow)$$

$$(b) \delta = \frac{3Pa^3}{4EI_1} (\downarrow)$$

$$6.21 \quad y_B = -\frac{l^2}{2R} + \frac{(EI)^2}{6P^2R^3} (\downarrow), \sigma_{\max} = \frac{E\delta}{2R}$$

$$6.22 \quad f = \frac{2.05ql^4}{Eb^4}, \theta = 5.36^\circ$$

$$6.23 \quad (a) R_A = \frac{qa}{16} (\downarrow), R_B = \frac{5qa}{8} (\uparrow), R_C = \frac{7qa}{16} (\uparrow)$$

$$(b) R_A = \frac{57qa}{64} (\uparrow), M_A = \frac{9qa^2}{32} (\curvearrowright), R_B = \frac{7qa}{64} (\uparrow)$$

$$6.24 \quad (a) R_A = R_C = \frac{3M_0}{2l}, M_A = M_C = \frac{M_0}{4}$$

$$(b) R_A = \frac{13qa}{16}, M_A = \frac{5qa^2}{16}$$

6.25 有轴承 B:  $\sigma_{\max} = 30.8\text{MPa}$

无轴承 B:  $\sigma_{\max} = 67.2\text{MPa}$

6.26  $\sigma_{\max} = 46.9\text{MPa}$

6.27  $\sigma_{\max} = 108\text{MPa}, \sigma_{BC} = 31.8\text{MPa}, y_C = 8.03\text{mm}$

6.28  $\Delta = \frac{Pl^3}{24EI}$

### 第七章 应力状态分析与强度理论

7.1 (a)  $\sigma_x = 10.0\text{MPa}, \tau_x = 15.0\text{MPa}$

(b)  $\sigma_x = 47.3\text{MPa}, \tau_x = -7.3\text{MPa}$

7.2 (a)  $\sigma_x = 40.0\text{MPa}, \tau_x = 10.0\text{MPa}$

(b)  $\sigma_x = -38.2\text{MPa}, \tau_x = 0$

(c)  $\sigma_x = 0.49\text{MPa}, \tau_x = -20.5\text{MPa}$

(d)  $\sigma_x = 35\text{MPa}, \tau_x = -8.66\text{MPa}$

7.4 问题 7.1

7.5 问题 7.2

7.8  $\sigma_1 = 70\text{MPa}, \sigma_2 = 10\text{MPa}, \alpha_x = 23.5^\circ$

7.9 (a)  $\sigma_1 = 52.4\text{MPa}, \sigma_2 = 7.64\text{MPa}, \sigma_3 = 0,$   
 $\alpha_x = -31.75^\circ$

(b)  $\sigma_1 = 11.23\text{MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -71.2\text{MPa},$   
 $\alpha_x = 50.2^\circ$

(c)  $\sigma_1 = 37\text{MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -27\text{MPa},$   
 $\alpha_x = 70.5^\circ$

7.10 (a)  $\sigma_1 = 60\text{MPa}, \sigma_2 = 30\text{MPa}, \sigma_3 = -70\text{MPa},$   
 $\sigma_{\max} = 60\text{MPa}, \tau_{\max} = 65\text{MPa}$

(b)  $\sigma_1 = 50\text{MPa}, \sigma_2 = 30\text{MPa}, \sigma_3 = -50\text{MPa},$   
 $\sigma_{\max} = 50\text{MPa}, \tau_{\max} = 50\text{MPa}$

7.11 (a)  $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_{\max} = \sigma, \tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$

(b)  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau, \sigma_{\max} = \tau_{\max} = \tau$

(c)  $\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \sigma_2 = 0,$

$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \sigma_{\max} = \sigma_1$

7.12  $\sigma_1 = 84.7\text{MPa}, \sigma_2 = 20.0\text{MPa}, \sigma_3 = -4.7\text{MPa}$

7.13 A点:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -60\text{MPa}, \alpha_0 = 90^\circ$

B点:  $\sigma_1 = 0.1678\text{MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -30.2\text{MPa},$   
 $\alpha_c = 85.7^\circ$

C点:  $\sigma_1 = 3\text{MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -3\text{MPa}, \alpha_c = 45^\circ$

7.14  $\epsilon_x = 380 \times 10^{-6}, \epsilon_y = 250 \times 10^{-6},$

$\gamma_{xy} = 650 \times 10^{-6}, \epsilon_{30^\circ} = 66 \times 10^{-6}$

7.15  $\sigma_x = 105.5\text{MPa}, \sigma_y = 51.7\text{MPa}, \tau_x = -11.5\text{MPa}$

7.16  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -24\text{MPa}, \sigma_3 = -80\text{MPa}, \tau_{\max} = 40\text{MPa}$

7.17  $M = \frac{\pi d^3 E \epsilon_{45^\circ}}{16(1 + \mu)}$

7.19  $\sigma_{\max} = 38.2\text{MPa}$

7.20 (a)  $\sigma_{eq,3} = \sigma$

(b)  $\sigma_{eq,3} = \frac{1 - 2\mu}{1 + \mu} \sigma$

7.21  $\sigma_{eq,3} = 180.3\text{MPa}$

7.22  $[\tau_1] = [\sigma], [\tau_2] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}$

7.23  $\sigma_{\max} = 153.5\text{MPa}, \tau_{\max} = 62.1\text{MPa}, \sigma_{eq,3} = 168.2\text{MPa}$

7.24  $\sigma_x = 58.3\text{MPa}, \sigma_y = 116.7\text{MPa}, \sigma_{\max} = 116.7\text{MPa},$   
 $\tau_{\max} = 58.3\text{MPa}$

7.25  $\sigma_{eq,4} = 115.5\text{MPa}$

7.26  $\delta \geq 1.7\text{mm}$

7.27  $\delta \geq 3.25\text{mm}$

7.28  $\sigma_{eq,2} = 20.1\text{MPa}$

## 第八章 组合变形

8.1 N<sup>o</sup>22a 槽钢

8.2  $P = 18.38\text{kN}, \delta = 1.785\text{mm}$

8.3  $\sigma_{\max} = 96.8\text{MPa}, \sigma_{\min} = 62.4\text{MPa}$

8.4  $h \geq 21.8\text{mm}$

8.6  $x = 5.2\text{mm}$

8.7  $a \geq 20\text{mm}, l \geq 200\text{mm}, c \geq 147\text{mm}$

8.8  $[P] = 4.85\text{kN}$

8.9  $h = 2b \geq 111\text{mm}$

8.10 截面  $B_+$ :  $\sigma_{\max} = 117.6\text{MPa}$

截面  $B_-$ :  $\sigma_{\max} = 106.4\text{MPa}$

8.11  $d \geq 23.6\text{mm}$

8.12  $l = 510\text{mm}$

8.13  $\sigma_{\text{eq.3}} = 118\text{MPa}$

8.14  $d \geq 51.9\text{mm}$

8.15  $\sigma_{\text{eq.3}} = 292\text{MPa}$

8.16  $\sqrt{\left(\frac{4P}{\pi d^2}\right)^2 + 3\left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2} \leq [\sigma]$

8.17  $\frac{2P}{\pi d^2} + \sqrt{\left(\frac{2P}{\pi d^2}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2} \leq [\sigma]$

8.18  $\sigma_{\text{eq.3}} = 107.4\text{MPa}$

8.19  $\sigma_{\text{eq.4}} = 119.6\text{MPa}$

8.20  $[P] = \frac{d^3[\sigma]}{20R}$

8.21  $\sigma_{\text{eq.3}} = 26.7\text{MPa}, \theta_D = 2.73 \times 10^{-3}\text{rad}, f_D = 0.80\text{mm}$

## 第九章 压杆稳定问题

9.1 (a)  $P_{cr} = \frac{ca}{2}$

(b)  $P_{cr} = \frac{k}{a}$

(c)  $P_{cr} = ca + \frac{k}{a}$

9.2 (a)  $P_{cr} = 37.8\text{kN}$

(b)  $P_{cr} = 52.6\text{kN}$

(c)  $P_{cr} = 459\text{kN}$

$$9.3 \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{2a^2}, P'_{cr} = \frac{\sqrt{2} \pi^2 EI}{a^2}$$

$$9.4 \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

$$9.5 \quad (a) \mu = \frac{1}{2}, P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

$$(b) \mu = 1, P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$9.6 \quad a = 44\text{mm}, P_{cr} = 444\text{kN}$$

$$9.7 \quad l = 860\text{mm}$$

$$9.8 \quad [P] = \frac{4\pi^2 EI}{3a^2}$$

$$9.10 \quad (a) P_{cr} = 15.79\text{kN}$$

$$(b) P_{cr} = 49.7\text{kN}$$

$$(c) P_{cr} = 56.4\text{kN}$$

$$9.11 \quad (a) P_{cr} = 375\text{kN}$$

$$(b) P_{cr} = 644\text{kN}$$

$$(c) P_{cr} = 635\text{kN}$$

$$(d) P_{cr} = 752\text{kN}$$

$$9.12 \quad P_{cr} = 231\text{kN}$$

$$9.13 \quad \frac{h}{b} = 1.429$$

$$9.15 \quad [P_u] = 115.6\text{kN}$$

$$9.16 \quad [P_u] = 51.5\text{kN}$$

$$9.17 \quad [P_u] = 513\text{kN}, \sigma_{\max} = 134.1\text{MPa}$$

$$9.18 \quad \text{No.22a 工字钢}$$

$$9.19 \quad a \geq 181\text{mm}$$

$$9.20 \quad d_{AC} \geq 24.2\text{mm}, d_{BC} \geq 37.2\text{mm}$$

## 第十章 疲劳强度问题

$$10.1 \quad \sigma_m = 200\text{MPa}, \sigma_a = 100\text{MPa}, R = 0.333$$

$$10.2 \quad \sigma_{\max} = 152.8\text{MPa}, \sigma_{\min} = -101.8\text{MPa}, \sigma_m = 25.5\text{MPa},$$

$$\sigma_a = 127.3 \text{MPa}, R = -0.666$$

$$10.3 \quad K_s = 1.53$$

$$10.4 \quad K_r = 1.19$$

$$10.5 \quad \text{降低 } 45\%$$

$$10.6 \quad n_r = 3.25$$

$$10.7 \quad [P] = 212 \text{kN}$$

$$10.8 \quad r = 2.0 \text{mm}$$

$$10.9 \quad n_s = 2$$

$$10.10 \quad n_{ca} = 1.4$$

## 第十一章 能量法

$$11.1 \quad (a) U = \frac{P^2 l^3}{96EI}, f_c = \frac{Pl^3}{48EI} (\downarrow)$$

$$(b) U = \frac{M_0^2 l}{3EI}, \theta_A = \frac{2M_0 l}{3EI} (\curvearrowright)$$

$$11.2 \quad U = \frac{16M^2 l (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)}{3\pi G d_1^3 d_2^3}$$

$$\phi = \frac{32Ml (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)}{3\pi G d_1^3 d_2^3}$$

$$11.4 \quad (a) f_A = \frac{Pa^3}{6EI} (\uparrow), \theta_A = \frac{Pa^2}{2EI} (\curvearrowright)$$

$$(b) f_A = \frac{11qa^4}{24EI} (\downarrow), \theta_A = \frac{2qa^3}{3EI} (\curvearrowright)$$

$$11.6 \quad f_c = \frac{(1 + 2\sqrt{2})P^2 l}{EA} (\downarrow)$$

$$11.7 \quad (a) \Delta_B = \frac{\sqrt{3}Pa}{12EA} (\leftarrow)$$

$$(b) \Delta_B = \frac{2(1 + \sqrt{2})Pa}{EA} (\rightarrow)$$

$$11.8 \quad \Delta_A = \frac{ql^2}{2EA} (\rightarrow)$$

$$11.9 \quad \phi_A = \frac{ml^2}{2GI_p}$$



$$11.10 \quad \theta_c = \frac{5Pa^2}{6EI} (\uparrow)$$

$$11.11 \quad \Delta_A = \frac{Pa^3}{12EI} (\rightarrow)$$

$$11.12 \quad f_A = \frac{qa^4}{8EI} + \frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^3l}{2GI_*} (\downarrow)$$

11.13 同题 6.20

$$11.14 \quad f_A = 16.8\text{mm}$$

$$11.15 \quad f_C = \frac{2Pa^3}{3EI} + \frac{8\sqrt{2}Pa}{EA} (\downarrow)$$

$$11.16 \quad (a) |M|_{\max} = qa^2$$

$$(b) M_{\max} = \frac{M_c}{2}$$

$$11.17 \quad (a) H_A = R_A = R_C = 0, H_C = P$$

$$(b) H_A = H_D = \frac{ql}{20}, R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

11.18 同题 2.35

$$11.19 \quad (a) \sigma_{\max} = 184.3\text{MPa}$$

$$(b) \sigma_{\max} = 15.85\text{MPa}$$

$$11.20 \quad H_{\max} = 249\text{mm}$$

$$11.21 \quad f_d = 74.5\text{mm}, \sigma_{\max} = 166.8\text{MPa}$$

$$11.22 \quad \frac{\sigma'_{\max}}{\sigma''_{\max}} = \frac{2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{6EIH}{Pl^3}}\right)}{1 + \sqrt{1 + \frac{48EIH}{Pl^3}}} \approx \frac{1}{2} \quad (\text{若 } \frac{6EIH}{Pl^3} \gg 1)$$

$$11.23 \quad \Delta_d = \frac{2vl}{h} \sqrt{\frac{pl}{gEbh}}, \sigma_{\max} = \frac{3v}{bh} \sqrt{\frac{PEbh}{gl}}$$