

大學叢書

變分法

何魯著



商務印書館發行





大學叢書

變分法

# 大學叢書委員會

## 委員

丁燮林君	王世杰君	王雲五君
任鴻雋君	朱經農君	朱家驊君
李四光君	李建勛君	李書華君
李書田君	李聖五君	李權時君
余青松君	何炳松君	辛樹幟君
吳澤霖君	吳經熊君	周仁君
周昌壽君	秉志君	竺可楨君
胡適君	胡庶華君	姜立夫君
翁之龍君	翁文灝君	馬君武君
馬寅初君	孫貴定君	徐誦明君
唐鉞君	郭任遠君	陶孟和君
陳裕光君	曹惠羣君	張伯苓君
梅貽琦君	程天放君	程演生君
馮友蘭君	傅斯年君	傅運森君
鄒魯君	鄭貞文君	鄭振鐸君
劉秉麟君	劉湛恩君	黎照寰君
蔡元培君	蔣夢麟君	歐元懷君
顏任光君	顏福慶君	羅家倫君
	顧頡剛君	

大學叢書

變分法

何魯著



商務印書館發行





此書爲余民國十八年在中央大學授變分法時所編。適合大學半年學程。最重要之參考書爲 Goursat 之高等分析及 Hadamard 與 Bolza 之兩種變分法。其他參考書已不復記憶。此書較他種同類之書爲易讀，且舉例較詳，讀者閱覽以後對於習題，即知所措手，由此以進讀詳盡專著，可以事半功倍。至於變分法之重要，凡研習高等算學者類能知之。無俟贅辭矣。

民國二十三年 何魯識於重慶大學





# 變分法

## 目次

變分法舉例 .....	1—5
例一 .....	1
例二 .....	2
例三 .....	3
例四 .....	4
例五 .....	5
一次變分 .....	6—37
小引一 .....	6
小引二 .....	7
界說,初步問題之目的 .....	7
一次變分,尤拉氏方程式 .....	11
黎孟氏之意見 .....	12
例之有多個未知函數者 .....	20
一次變分之普通式 .....	26
斜截線 .....	30
等周問題 .....	33
雙重積分之一次變分 .....	35

二次變分 .....	37—68
引言 .....	37
勒讓脫氏之條件 .....	39
加可俾氏之條件 .....	42
幾何說明 錯焦點 .....	46
加可俾氏判定法 .....	49
判定極端值之步驟 .....	50
前項條件之缺點 .....	52
魏氏之條件 函數 $E$ .....	54
極端線場 充足條件 .....	58
魏氏定理 .....	60
小引 .....	61
充足條件 .....	62
強性極小與弱性極小 .....	63

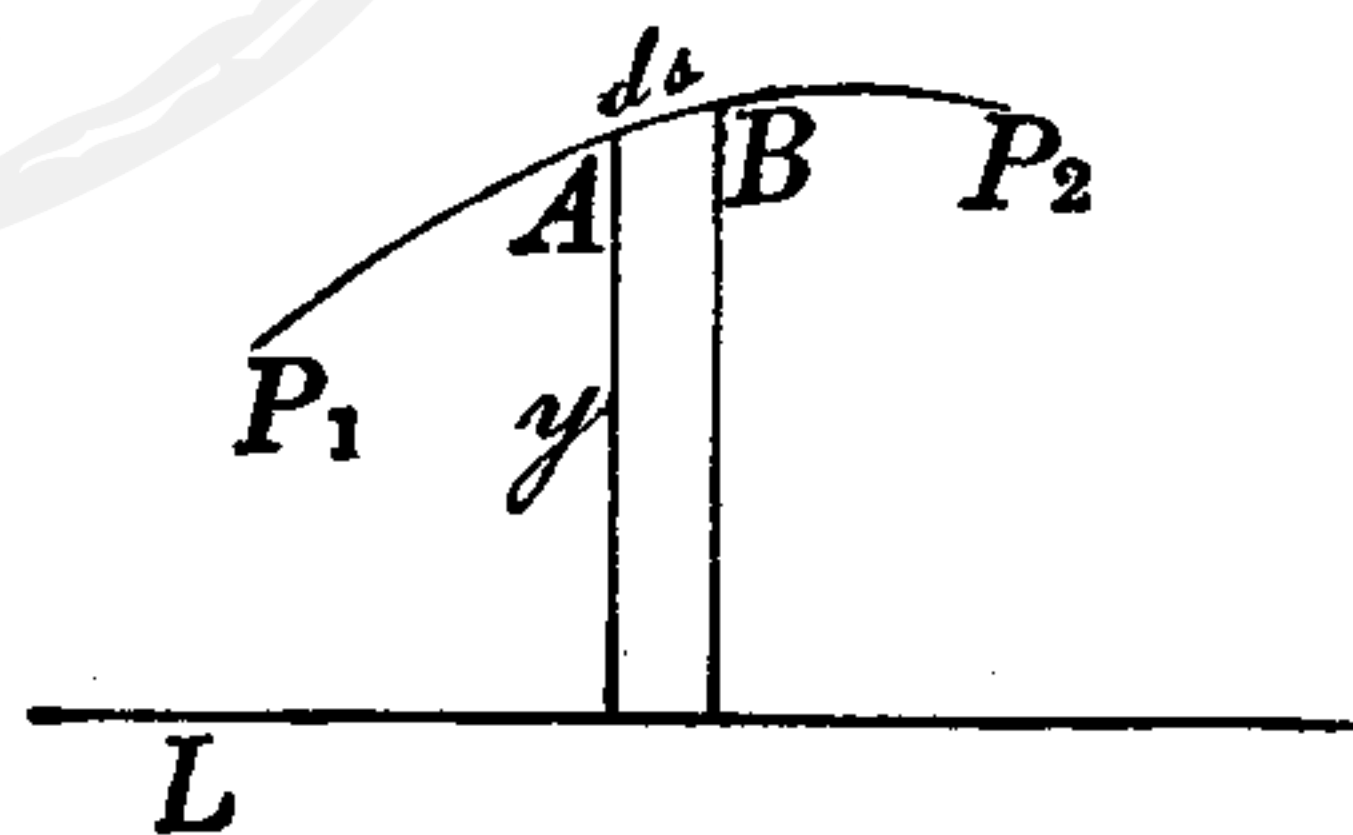
# 變分法

## Calcul de Variation

變分法所研究者為極大極小問題；但其性質則較普通微分學中所遇者，複雜特甚。微分學中極大極小問題係定一已知函數在某間隔內之極大或極小值，而變分法則須定一個未知函數，或多個未知函數之形，俾一定積分之值成為極大或極小。今茲所研究者，僅限於實變數範圍，及簡單而富於致用之問題而已。

變分法舉例。欲明此法，試先舉數例於後：

例一。在任一平面中已與一直線  $L$  及  $P_1, P_2$  兩點，就聯  $P_1, P_2$  兩點所有之曲線中，試求其一俾繞  $L$  線所成之曲面面積為極小者。



吾取  $L$  線為正經緯之  $x$  軸，并令  $x_1, y_1; x_2, y_2$  為  $P_1, P_2$  之位標。令

$$C: y = f(x)$$

為經過此兩點之任一曲線之方程式， $AB$  小弧所繞成之面積

為  $2\pi y ds$

或  $2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx$

於是  $C$  線所繞成之面積為

$$J = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+y'^2} dx$$

此面積之值視曲線  $C$  而變，吾人問題，即在定此曲線，亦即在定函數  $f(x)$  俾  $J$  之值為極小。

此問題為變分法中最易問題之一種，更普通者為已與

定積分  $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad \left( y' = \frac{dy}{dx} \right)$

求定函數  $y$  俾此定積分為極大或極小。

如以助變量  $t$  表  $x$  及  $y$ ，則前舉兩積分之形變為

$$J = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

及  $J = \int_{t_1}^{t_2} f(x, y, x', y') dt.$

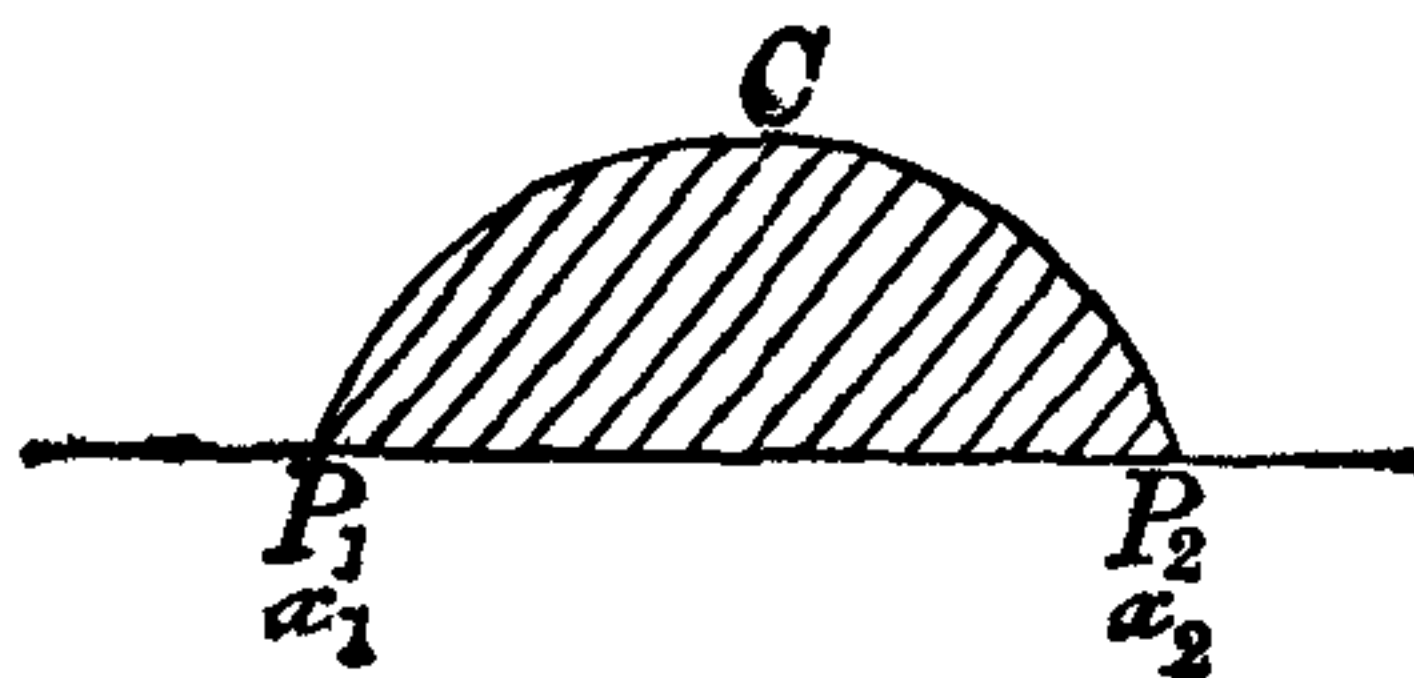
例二. 就聯  $P_1, P_2$  兩點之所有曲線中且有定長  $l$  者，試求其一俾其與  $P_1P_2$  弦所成之面積為極大。

吾取  $P_1, P_2$  線為正經緯制之  $x$  軸， $x_1, x_2$  為  $P_1, P_2$  之緯量。設  $C$  為聯  $P_1P_2$  之曲線，其長為  $l$ ，

其方程式為

$$y = f(x)$$

$$f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = 0$$



因此線有定長  $l$ ，則下之條件

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2} dx = l$$

爲已合,此時在定

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y dx$$

之極大值.

此例乃下問題之特例:即欲求定積分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

之極端值 (Extremum), 須定一曲線, 俾第二定積分

$$K = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx$$

有一定值  $l$  也. 此種問題稱爲「等周問題」. 後再詳.

變分法中問題之更普通者; 爲所研究之定積分, 不僅含一次引數, 而且含有二次三次乃至高次引數. 其形如

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$$

此類問題在變分法歷史中頗佔重要地位. 近則其價值漸減; 半因更有推廣之式將此容爲特例, 半因幾何學及機械學之應用上罕遇之也.

更重要之推廣, 乃是定多個未知函數之形, 以求一定積分之極端值. 下舉之例即屬此類.

例三. 已與一曲面

$$\phi(x, y, z) = 0$$

$P_1, P_2$  爲此曲面上之兩點, 求曲面上聯此二點之最短線.

假定所求曲線之方程式爲

$$y = f(x), \quad z = g(x)$$

$f$  與  $g$  須合下條件

$$\phi[x, f(x), g(x)] = 0$$

即所求曲線須在曲面上也.

由  $P_1$  至  $P_2$  曲線之長爲

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

此時當定兩個未知函數  $y, z$  俾  $J$  爲極小.

例四. 有阻力介質中之捷線 (Brachistochroue).

設有一重點沿任一空間曲線由  $P_1$  點行至  $P_2$  點經過有阻力介質其最初速度爲  $v_1$ , 求定此曲線俾由  $P_1$  至  $P_2$  之時間爲最短. 所定曲線即此介質中之捷線也.

吾取垂線爲正位標之  $z$  正軸, 重點之質設爲 1, 令  $v$  爲其速率,  $g$  爲動常數, 并設阻力爲速度  $v$  之函數  $R(v)$ .

由生力定理 (Théoreme de Force Vive)

$$d\frac{v^2}{2} = g dz - R(v)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

爲簡單起見, 令  $x$  爲自變數, 就所有函數組

$$y = f(x), \quad z = g(x), \quad v = w(x)$$

之, 其最初條件爲

$$f(x_1) = y_1 \quad g(x_1) = z_1 \quad w(x_1) = v_1$$

$$f(x_2) = y_2 \quad g(x_2) = z_2$$

者,而又合微分方程式

$$vv' = gz' - R(v)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

求定一組俾積分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2} dx}{v}$$

之值爲極小.

更推廣之,就所有函數組  $y_1, y_2, \dots, y_n$  中,其自變數同爲  $x$ , 其最初與附加條件之形爲

$$\phi_k(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m (m < n)$$

者,求一定組俾定積分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

之值成爲極端值.

此類問題極重要,機械學上之哈密頓(Hamilton)原理及微動原理(moindre action)等問題皆屬於此類者也.

變分法亦可應用於多重積分,如極小面積問題即其一也.

**例五:** 就所有曲面中以一空間曲線  $L$  爲界者,以何者之面積爲最小.

設

$$z = f(x, y)$$

爲曲面之方程式,  $S$  爲  $xy$  平面上  $L$  之射影  $L'$  所界之區域,此時在定  $z$  使雙重積分

$$J = \int \int_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

爲極小。

### 一次變分 (Première variation).

小引. 觀上所舉例吾人即知變分法之性質. 如欲明其計算方法, 須先證明二小引如下:

小引一. 設  $F(x)$  爲一連續函數在  $(x_0, x_1)$  間隔內爲有定值的; 如積分  $\int_{x_0}^{x_1} n(x)F(x)dx$  無論  $n(x)$  之形式如何恆爲零.  $n(x)$  及其引數在同一間隔內爲連續函數, 且有  $n(x_0) = n(x_1) = 0$ , 則  $F(x)$  在  $(x_0, x_1)$  全間隔內亦爲零.

證: 假設  $F(x)$  當  $x = x_2$  時爲正,  $x_2$  介於  $x_0$  及  $x_1$  之間; 吾人即可尋一間隔  $(\xi_0, \xi_1)$  包含  $x_2$  ( $x_0 < \xi_0 < x_2 < \xi_1 < x_1$ ). 如是使  $F(x)$  常在此間隔  $(\xi_0, \xi_1)$  內爲正, 現在試以下各條件定  $n(x)$ .

$$1^\circ \quad n(x) = 0 \quad \text{當 } x_0 \leq x \leq \xi_0.$$

$$2^\circ \quad n(x) = (x - \xi_0)^m (\xi_1 - x)^m, \quad \text{當 } \xi_0 \leq x \leq \xi_1$$

$m$  爲一正整數至少等於 2.

$$3^\circ \quad n(x) = 0, \quad \text{當 } \xi_1 \leq x \leq x_1$$

此函數  $n(x)$  爲連續的, 且在  $(x_0, x_1)$  間隔內有一連續引數, 於是相當積分  $\int_{x_0}^{x_1} n(x)F(x)dx$  之值爲正甚明, 是與原設積分恆爲零者不合; 同理, 假設  $F(x)$  爲負亦有矛盾, 故必也  $F(x)$  爲零.



更推廣之,如積分

$$\int_{x_0}^{x_1} [n_1(x) F_1(x) + n_2 F_2 + n_3 F_3] dx$$

恆爲零,而  $n_1, n_2, n_3$  與  $n$  所合條件相同,則  $F_1, F_2, F_3$  均將全等於零矣.

小引二. 設  $F(x), n(x)$  在  $(x_0, x_1)$  間隔中爲連續函數,其中  $F(x)$  爲有定值的. 若定積分  $\int_{x_0}^{x_1} n(x) F(x) dx$  恆爲零,無論  $n(x)$  之形式如何,如是  $\int_{x_0}^{x_1} n(x) dx$  亦爲零,則函數  $F(x)$  將成爲一常數.

證: 設所與條件爲已合,吾人亦有

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x) - c] n(x) dx = 0$$

$c$  爲一任意常數,吾人再選擇  $c$  使有

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x) - c]^2 dx = 0$$

即可令  $n(x) = F(x) - c$ . 於是亦有

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x) - c]^2 dx = 0$$

由此即得  $F(x) = c$ .

界說. 初步問題之目的. 設  $F(x, y, y')$  爲三變數  $x, y, y'$  之連續函數并其引數至三次者亦爲連續,只須以  $x, y$  爲位標之點,在  $R$  平面之單式區域內,又當  $y'$  恆爲有限值. 在吾人所研究之例中  $F(x)$  總爲分析函數;區域  $R$  待題之情形而定者,可包含平面之全部或有曲線以界之.

設  $f(x)$  在  $(x_0, x_1)$  間隔內為連續且有一引數；吾人謂此函數在此間隔內屬於(I)類。方程式  $y=f(x)$  當  $x$  由  $x_0$  變至  $x_1$  時代表一  $\Gamma$  曲線之弧，其每點皆有一切線，且其角係數常連續易；吾人謂此曲線  $\Gamma$  亦屬於(I)類。如此曲線在  $R$  區域內，則函數  $F[x, f(x), f'(x)]$  以  $f(x)$  易  $y$ ,  $f'(x)$  易  $y'$  而得者在  $(x_0, x_1)$  間隔內為連續，而積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)] dx$$

有一有限之值，此積分亦可書為

$$J = \int_{\Gamma} F(x, y, y') dx$$

此積分須沿  $\Gamma$  曲線計算。設  $A, B$  為  $R$  區域內之任兩點，其位標各為  $(x_0, y_0)$  及  $(x_1, y_1)$ ；且有  $x_0 < x_1$

聯此兩點吾人可得無數(I)類曲線  $\Gamma$  全位於  $R$  區域內。

就中一曲線之代方程式必為  $y=f(x)$ ，函數  $f(x)$  為(I)類函數在  $(x_0, x_1)$  間隔內為確定，又合於條件

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1)$$

並且  $[x, f(x)]$  點當  $x$  由  $x_0$  變至  $x_1$  恆在  $R$  區域內。每有一函數  $f(x)$  合乎如是條件則有一相當積分  $J$ 。吾人所研究之問題即為：就  $R$  區內所有聯  $A, B$  兩點之(I)類曲線  $\Gamma$  有無其一使相當積分  $J$  之值較之其他曲線合乎相同條件者之相當積分之值為大或為小。

吾人事前不能斷定有一  $\Gamma$  曲線能答此題。今試假設

$F(x, y, y')$  於  $y'$  爲有限時及  $x, y$  在  $R$  區時恆爲正, 積分  $J$  對於任何曲線  $\Gamma$  聯  $A, B$  兩點者亦爲正; 故  $J$  之值有一低界 (borne inférieure)  $m \geq 0$  但吾人頗難斷定即有一曲線  $\Gamma$  其相當積分  $J$  之值適爲  $m$ ; 此實有例證其不必如此, 是故變分法所研究極大極小問題與普通微分學所遇者不同; 蓋在微分學中如有一函數其自變數爲  $x$  者在  $(a, b)$  閉間隔內爲連續的, 則此函數必有一極大或極小也。

吾人先僅從事於求相對之極大極小, 是即僅比較  $\Gamma$  曲線相當之積分及  $\Gamma$  鄰近曲線之相當積分, 并只專求極小, 其極大值之求法, 但將  $F$  變爲  $-F$  即得。

此問題可以分析方法確定之。設  $y=f(x)$  爲  $(x_0, x_1)$  間隔內之 (I) 類函數當  $x=x_0, f(x_0)=y_0; x=x_1, f(x_1)=y_1$ , 并且  $y=f(x)$  所代表之曲線  $\Gamma$  全在  $R$  區內, 命  $R_\epsilon$  爲  $x=x_0, x=x_1$  及二曲線

$$Y_1 = f(x) + \epsilon, \quad Y_2 = f(x) - \epsilon$$

所界之區域  $\epsilon$  設爲甚小, 俾  $R_\epsilon$  區可以全含於  $R$  區。

凡 (I) 類曲線聯  $A, B$  兩點, 又全位於  $R_\epsilon$  區者, 可以方程式  $y=f(x) + \omega(x)$  表之, 函數  $\omega(x)$  在  $(x_0, x_1)$  間隔內爲連續, 且有一引數并合乎下列各條件:

$$(1) \quad \omega(x_0) = 0, \quad \omega(x_1) = 0, \quad |\omega(x)| < \epsilon \quad \text{當 } x_0 < x < x_1$$

吾人謂函數  $f(x)$  給予積分  $J$  一極端值, 如其可能求得一正整數  $\epsilon$  使積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)] dx$$

之值小於或大於下積分

$$J' = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)] dx$$

$\omega(x)$  爲  $(x_0, x_1)$  之 (I) 類函數合於 1 之各條件又不全等於零者也。

以上之諸條件定  $\omega(x)$ , 吾甚易明可得無窮如是之函數, 且可含任若干助變量者. 吾人試先定一簡單形式且只含一助變量者. 今設  $n(x)$  爲  $(x_0, x_1)$  間隔內之連續函數且有引數者, 又於間隔極限值  $x_0, x_1$  爲零, 則函數  $an(x)$  可小於  $\epsilon$ , 只須取  $a$  助量之值至甚小即可. 將  $f(x)$  易爲  $f(x) + an(x)$ , 則積分  $J$  變爲

$$(2) \quad J(a) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + an(x), f'(x) + an'(x)] dx$$

此函數  $J(a)$  當  $a=0$  時應爲極小,  $n(x)$  可爲任何形式

如吾人依 戴氏 (Taylor) 公式將  $J(a)$  展之, 則有

$$J(a) = J(0) + \frac{a}{1} J_1 + \frac{a^2}{1 \cdot 2} J_2 + \dots + \frac{a^n}{n!} J_n + a^n h(a)$$

$h(a)$  與  $a$  同時趨近於零.  $aJ_1, a^2J_2, \dots$  稱爲  $J$  之一次, 二次... 變分; 拉格蘭氏 (Lagrange) 以符號  $\delta J, \delta^2 J, \dots, \delta^n J$  表之, 於是

$\delta^n J = a^n \left( \frac{d^n J}{d a^n} \right)_{a=0}$ . 由是觀之, 欲函數  $f(x)$  使  $J$  爲極小必也  $\delta J = 0$ ,

$\delta^2 J \geq 0$ .

無論  $n(x)$  之形式如何此二條件皆須適合, 但  $n(x)$  及其引數在  $(x_0, x_1)$  間隔內僅爲連續函數, 并於極限值時爲零即足. 對於極大之條件, 但易二次變分爲負可已.

一次變分 尤拉氏(Euler)方程式. 將第(2)式依積號內求引數法引之得一次變分

$$(3) \quad \delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} n(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} n'(x) \right] dx$$

$y$  及  $y'$  在  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  中應代為  $f(x)$ ,  $f'(x)$ , 若函數  $f(x)$  之二次引數

為連續的, 則吾人對於  $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} n'(x) dx$  可施以積分分求法而得

$$(3)' \quad \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} n'(x) dx = \left[ n(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} n(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx$$

右端之第一項為零. 因  $n(x)$  於  $x$  為上下界時為零也. 於是一次變分  $\delta J$  成一新式

$$(4) \quad \delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} n(x) \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx$$

欲  $\delta J$  於  $n(x)$  任為何形式時恆為零必也, 依小引一,  $n(x)$  在積分內之係數在  $(x_0, x_1)$  間隔內為零. 由此得  $f(x)$  應適合之第一條件.

欲函數  $f(x)$  給予定積分  $J$  一個相對極端值, 必也此函數適合下之微分方程式.

$$(5) \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

此方程式稱為 尤拉氏方程式; 亦可將  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$  展開書如

$$(6) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

當函數  $F$  含有  $y'$  此爲通例. 方程式 (6) 爲二級式, 而積分  $f(x, a, b)$  含有兩個任意常數  $a$  及  $b$ . 如吾人欲積分曲線經過  $R$  區之  $A, B$  二點, 應選擇兩常數使下之二條件  $y_0 = f(x_0, a, b)$ ,  $y_1 = f(x_1, a, b)$  適合即可. 此問題恆有定解, 因受吾人支配之任意常數與方程式之數目相等也. 凡一 (I) 類函數  $f(x)$  曾供給與  $J$  一極端值者爲 (5) 式之積分曲線, 且線過  $A, B$  二點. 吾人復將研究凡積分曲線之適合上述條件者, 是否必給予一極端值. 吾人依 Kneser (克勒氏) 意稱適合 尤拉氏 之函數  $y(x)$  爲極端函數 (Fonction extrémale) 而稱其相當曲線  $\Gamma$  爲極端曲線 (Courbe extrémale). 由  $R$  區之任意一點  $(x_0, y_0)$  可作無數極端曲線而僅有一曲線, 其切線之角係數爲  $y'_0$  須有  $F''_{y'}$  不爲零. 當  $F''_{y'}$  對於  $R$  區任一點之位標及對於  $y'$  之所有有限值, 不爲零時, 此種變分法問題稱爲規則的.

黎孟氏 之意見 (Du Bois-Reymond) 由 (3) 式變爲 (4) 式時, 吾人曾設  $f(x)$  有一連續二級引數; 現在尚須證明, 凡 尤拉 方程式之積分爲獨一 (I) 類函數  $f(x)$  可使一次變分  $\delta J$ , 於  $n(x)$  任爲何形式時, 爲零者. 黎孟氏 應用第二小引而不用第一小引, 施分求法於 (3) 之第一項而不施於第二項, 曾將此理證明.

當吾人在  $\frac{\partial F}{\partial y}$  式中以 (I) 類函數  $f(x)$  易  $y$ ,  $f'(x)$  易  $y'$  時所得代換結果爲  $x$  之連續函數命之爲  $\Phi(x)$ ,  $\Phi(x)$  在  $(x_0, x_1)$  間隔內亦爲連續函數. 設畢, 如吾人於積分  $\int_{x_0}^{x_1} n(x) \frac{\partial F}{\partial y} dx$  施以分求法, 則得

$$\int_{x_0}^{x_1} n(x) \frac{\partial F}{\partial y} dx = \int_{x_0}^{x_1} \Phi'(x) n(x) dx = \left[ \Phi(x) n(x) \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) n'(x) dx,$$

於是得  $\delta J$  之新形爲

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} n'(x) \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \Phi(x) \right] dx$$

此積分於  $\int_{x_0}^{x_1} n'(x) dx = 0$

爲零,因設  $n(x_0) = 0$  時亦有  $n(x_1) = 0$  也.

依小引二,  $n'(x)$  之係數在積號內者應爲常數,而函數  $f(x)$  適合於方程式,其形爲

$$F_1[x, f(x), f'(x)] = \Phi(x) + c$$

函數  $F_1(x, y, y')$  之一級偏引數爲連續的,此方程式,如依  $f(x)$  解之,則得  $f'(x) = \psi[x, f(x)]$ , 函數  $\psi(x, y)$  本身之一級偏微分爲連續的於是  $f'(x)$  有一引數  $f''(x)$  亦爲連續的. 故  $f(x)$  爲尤拉方程式之積分也.

注意. 1° 尤拉方程式之通解只含二個任意常數,一極端線通常於與兩點時即可確定,但吾於已與一極端線兩點之外尙可與一點之切線,此足證明變分法之問題有時可以無解. 譬如,就聯  $A, B$  兩點之各曲線中吾人不能求得其一,其長爲最小,而在  $A$  點之切線又與  $AB$  線異者. 蓋此時極端線爲直線未有聯  $A, B$  兩點之直線能合乎上述之條件者也. 吾人所命之題爲無解甚明. 一則所有曲線能合乎上述條件者,其長必大於  $AB$ , 一則可求一線俾其長與  $AB$  長相差可少至

吾人所欲小故也。

注意. 2° 當函數  $f(x, y, y')$  不依賴  $y'$  時 (6) 式變簡為  $y'' = 0$  所有極端線盡為直線。

當函數  $f(x, y, y')$  不含  $y$  時, 則吾人可立得尤拉方程式之一初解, 蓋用 (5) 式  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$  即得  $\frac{\partial F}{\partial y'} = c$ , 由此得  $y' = \phi(x, c)$  為一可積式。

吾人於  $f(x, y, y')$  不含  $x$  時, 亦可得同類化簡之式. 蓋吾人可將 (6) 式作為  $y$  及  $y' = p$  之一級微分方程式, 書為

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p^2} p + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} p \frac{dp}{dy} = \frac{d}{dy} \left( p \frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}$$

或

$$d \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} \right) = 0$$

由此得初解為

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

仍為可積式。

當函數不含  $y$  時, 方程式 (5) 變為  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$  所有函數  $f(x)$ ,  $\delta J$  對之為零者盡為此式之根. 於是各極端線不含任意常數。

注意. 3° 今試探求應如何取函數  $f(x, y, y')$  俾積分  $J$  之值不因曲線  $\Gamma$  而變. 欲其如是, 必也  $\delta J$  於  $\Gamma$  任為曲線時為零, 而尤拉氏方程式變為恆等式矣. 應有

$$F''_{y'^2} = 0 \text{ 而 } F \text{ 對於 } y' \text{ 為線式即}$$

$$F = P(x, y) + y' Q(x, y)$$

如  $F$  函數之式為如此, 積分  $J$  成為曲線積分



$$J = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

而方程式(6)變為  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ , 此實為曲線積分不因路而變值之充要條件也。

注意. 4° 如以  $F + \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} y'$  易  $F$ , 方程式(6)之不變而兩積分同時為極端, 無論函數  $\theta(x, y)$  為何, 因兩積分所差者, 僅一常數  $\theta(x, y) - \theta(x_0, y_0)$  故也。

例. 設  $F = y^a \sqrt{1+y^2}$ ,  $a$  為任何指數,  $R$  區為  $ox$  上平面全部. 依注意 2,  $F$  不含  $x$  節, 尤拉 方程式之初積分為

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c$$

即  $y^a \sqrt{1+y'^2} - y^a y'^2 (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} = c$

(A)  $y^a (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} = c$

故此時之 尤拉 方程式為

$$yy'' - a(1+y'^2) = 0$$

令  $y' = p$ , (A) 式亦可書為 (見 Goursat § 382 1.2)

$$y = c_1 (1+p^2)^{-\frac{\mu}{2}}, \quad \left( \text{中 } \mu = -\frac{1}{a} \right)$$

由  $dy = p dx$  得

$$-\mu c_1 p (1+p^2)^{-\frac{\mu}{2}-1} dp = p dx$$

或  $x = x_0 - \mu c_1 \int (1+p^2)^{-\frac{\mu}{2}-1} dp$

令  $p = \tan t$ , 所有積分曲線均為下曲線  $\gamma$

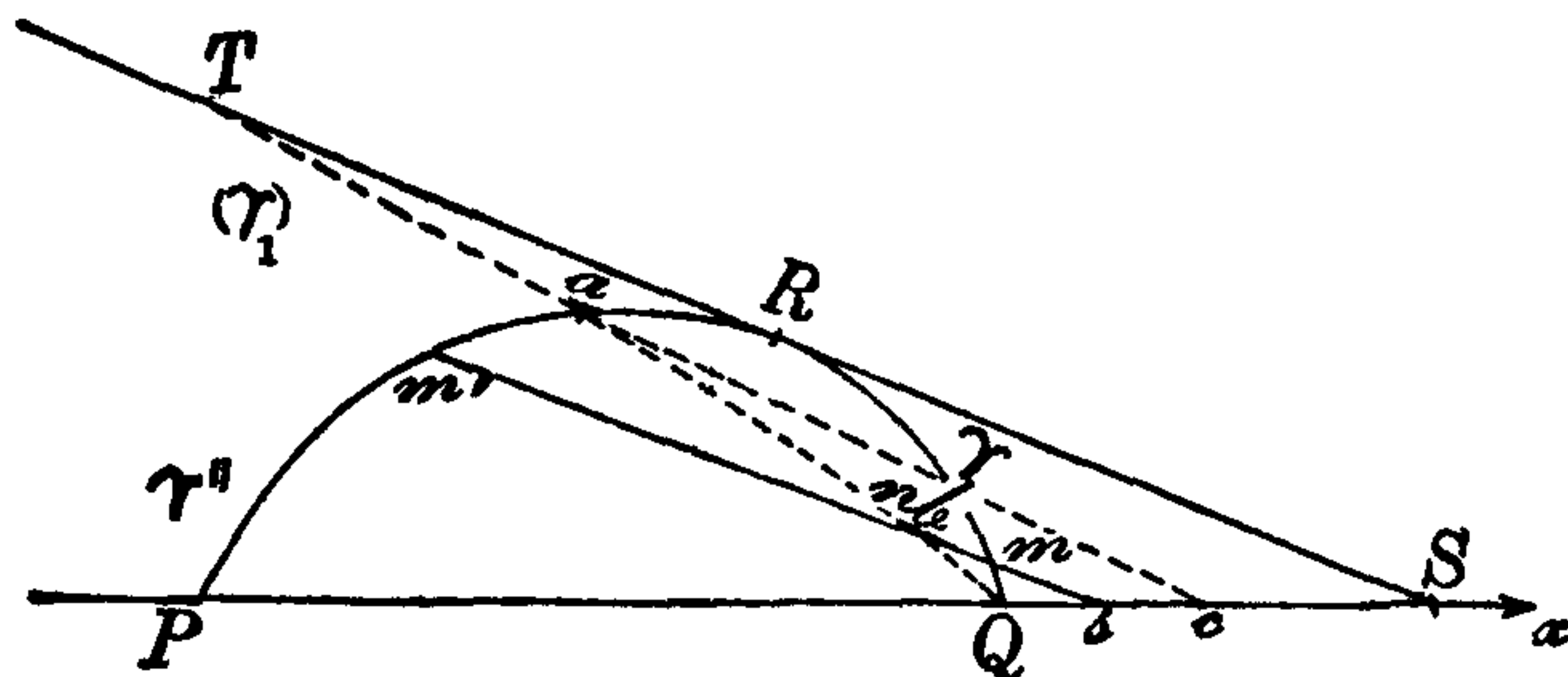
( $\gamma$ )  $x = \mu \int_0^t \cos^\mu t dt, \quad y = \cos^\mu t$

之位似變圖。

由此二式可得曲線之概形。如  $\mu$  爲一整數  $x$  爲可積式，當  $\mu$  爲正整數，此曲線無無窮遠枝，但其形視  $\mu$  爲奇偶而異，如  $\mu$  爲奇，則  $x$  爲  $t$  之週期函數，故曲線爲代數的且爲凸形閉曲線。如  $\mu$  爲偶，則當  $t$  每增  $2\pi$  時， $x$  增一常量，而  $y$  恆爲正，此時得一週期曲線形與直線擺線 (Cycloide) 相似。 $\mu=2$  時則適爲一直線擺線，當  $\mu$  爲負時，則有無窮遠枝，因  $R$  區之限制，無論  $\mu$  爲何數，吾人只須令  $t$  由  $-\frac{\pi}{2}$  變至  $+\frac{\pi}{2}$  即可。如  $a$  爲正，則  $\mu$  爲負， $\gamma$  曲線對於  $oy$  成對稱，其形如一拋物線，當  $\mu$  之絕對值等於或大於 1，如  $\mu$  介於  $-1$  及  $0$  之間，則  $\gamma$  有二幾近線與  $oy$  平行；反之，設  $a$  爲負，則  $\mu$  爲正，此時  $\gamma$  之形如一枝直線擺線。

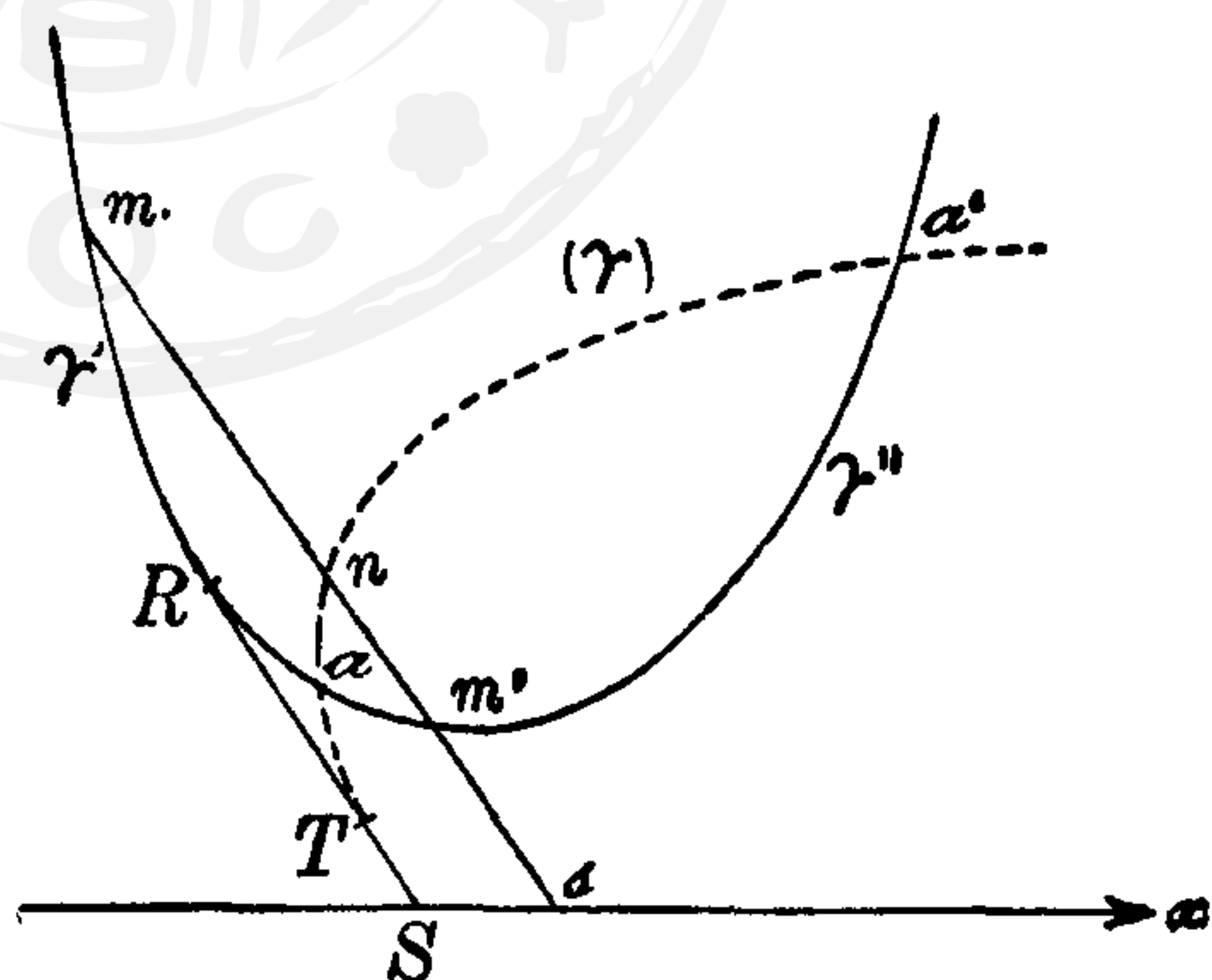
所有極端線均與  $\gamma$  爲相似形，故欲求一極端線經過  $A, B$  兩點在  $ox$  軸以上者，吾人只須在  $\gamma$  曲線上求  $a, b$  兩點，使  $ab$  弦與  $AB$  相平行，且有  $\frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bc}$ ， $C$  爲  $ox$  與  $AB$  交點， $c$  爲  $ox$  與  $ab$  交點。既與  $AB$  兩點則知  $ab$  之向及位似圖之比  $k = \frac{ac}{bc}$ ， $ab$  既求得用位似變圖法即可求得經過  $AB$  兩點之極端線也。今試用幾何方法討論之。

其一。  $a < 0$ ，此時  $\gamma$  之形爲一枝直線擺線，作  $RS$  切線與



$AB$  平行者,其切點  $R$  將  $(\gamma)$  分爲  $RP$  與  $RQ$  兩弧,任由  $QS$  中之一點  $s$  作一線與  $AB$ , 即與  $RS$  平行,此線必交  $RQ$  弧於一點  $m$  而交  $RP$  弧於一點  $m'$ . 在此線上  $n$  點使有  $sn = k \cdot sm$ , 則  $n$  之軌跡爲曲線  $(\gamma_1)$ , 且切  $SR$  於  $T$  有  $ST = k \cdot SR$ .  $(\gamma_1)$  與  $RP$  弧之交點即吾人所求之  $a$  點也. 於是即易得  $b, c$  點矣. 此兩弧恆有且僅有一交點. 蓋令  $Ss = t$ ,  $sm' = u$ ,  $sn = v$ ,  $u, v$  爲  $t$  之函數,其二級引數  $u'', v''$  當  $t$  由一極小正數變至  $SQ$  時之號恆相反,  $u', v'$  之號恆不變,  $u' - v'$  之號至多只能變二次,因  $u - v$  於極限值時其號相反,故只能一次爲零. 於是在  $R$  區內只有一極端曲線經過  $A, B$  兩點.

其二. 設  $a > 0$ ,  $SR$  切線平行於  $AB$  者,仍將  $\gamma$  線分爲兩無窮枝  $\gamma', \gamma''$ , 在  $ox$  軸以上之一平行  $SR$  之線必交  $\gamma''$  於  $m'$  而交  $\gamma'$  於  $m$  點,如此  $sm$  上取  $sn$  與  $sm$  成比例(其比小於一),則  $n$  之軌跡爲一曲線  $\gamma_1$ ,  $\gamma_1$  與  $\gamma''$  之凸向不同,相交不能過於兩點,此時有公點或 0 個公點,故經過  $AB$  可以得二極端線或無有極端線.



當  $AB$  線與  $ox$  軸平行時,作法略簡.吾人可設  $A, B$  兩點對  $oy$  成對稱所求之極端線應爲  $\gamma$  對於  $O$  點之位似圖.欲定其比,只

求  $OA$  與  $\gamma$  交點即可。如  $a < 0$ , 則只有一交點, 故亦只有一解。如  $a > 0$ , 當  $OA$  在由  $O$  點所作至  $\gamma$  之兩切線角內, 則有兩交點, 故有兩解, 否則無解。

現試予  $a$  以數個特值

(1°) 設  $a = 1$ , 則  $\gamma$  代表一圓, 其心在原點而極端線亦均為半圓, 其心在  $ox$  軸上者, 此時經過任兩點  $A, B$  亦在  $ox$  軸以上者只有一極端線。

(2°) 設  $a = -\frac{1}{2}$ , 則  $\mu = 2$ , 此時  $\gamma$  代表一直線擺線, 其底為  $ox$  軸。故極端線亦為直擺線其歧點在  $ox$  軸上, 已與兩點  $A, B$  同在  $ox$  之一邊, 吾人可作一直線擺線, 其歧點不在  $AB$  點內。此特例實解決 1696 年 柏魯衣氏 (Jean Bernoulli) 所命之捷線問題 (Brachistochrone) 其中問題有一實為變分法之嚆矢者有如下述:

就聯  $A, B$  兩點之曲線中, 試求其一, 俾一重點沿之而行不受阻力, 其最初速度為  $v_0$ , 問沿何線者, 由  $A$  達於  $B$  之時間為最短?

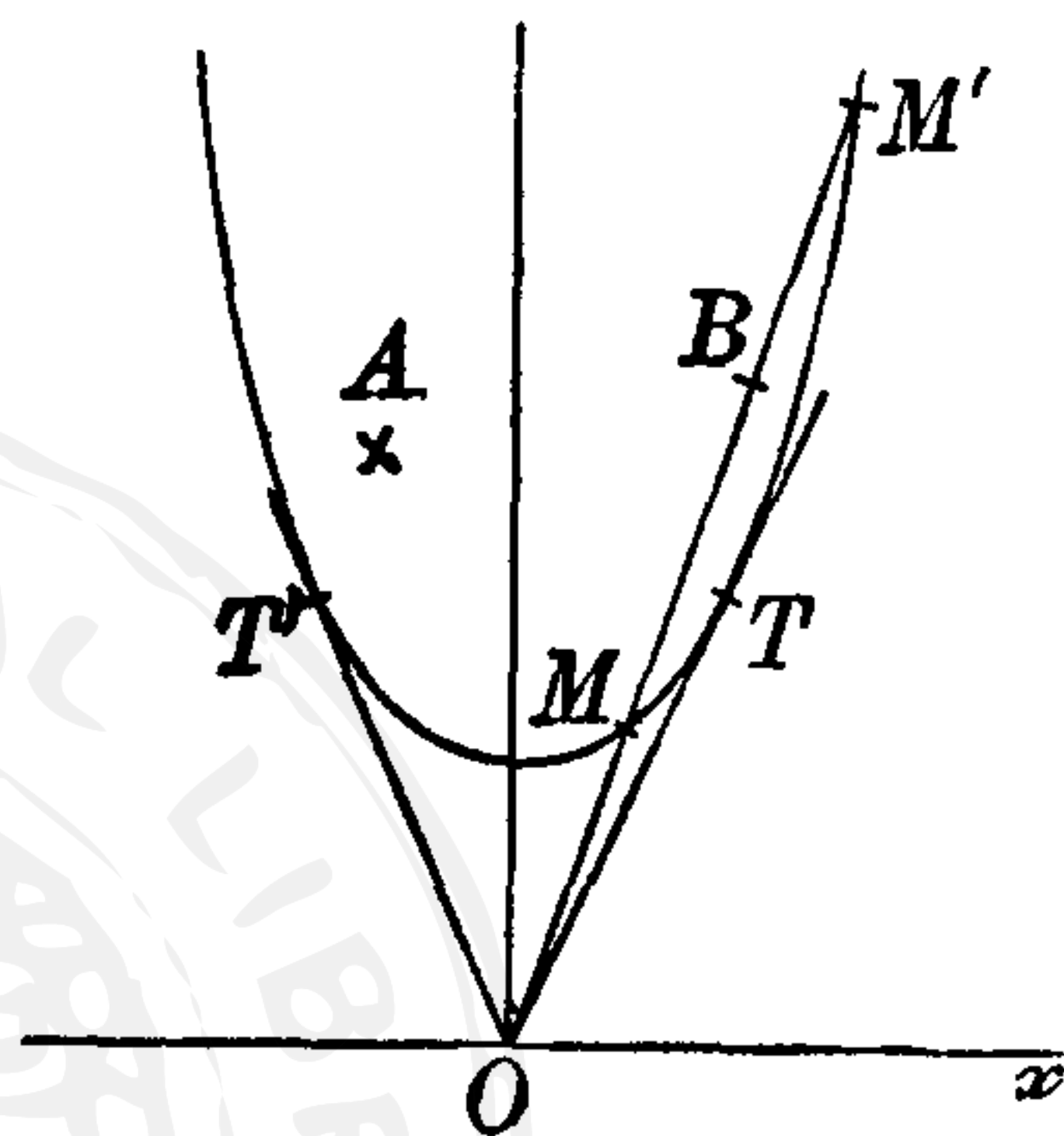
假定所求得曲線在含  $A, B$  兩點之垂面內, 即取此平面為  $xy$  平面, 任選一水平線高於  $A$  點之距為  $h$  者, 以為  $ox$  軸  $oy$  軸之正向向下, 則  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , 當  $A$  沿曲線行時, 其速度恆為  $v = \sqrt{2gy}$ , 欲此問題為可能, 必也  $B$  亦在  $ox$  之下乃可。由  $A$  至  $B$

之時間為曲線積分  $\int_{AB} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$ , 故此時積號內之函數與

$$F = \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1+y'^2}$$

只差一常數因子,於是所求得曲線爲直擺線.

(3°) 設  $\alpha=1$ , 此時初解爲  $y=c\sqrt{1+y'^2}$  而積分曲線爲懸鏈曲線,以  $ox$  爲底者.吾人已知可作  $o$  或二曲線如  $AB$  與  $ox$  平行,只須求  $\gamma$  對原點之位似圖即可.試作  $OT$ ,  $OT'$  切於  $\gamma$ , 所有之位似懸鏈線均在  $TOT'$  角內



如  $OB$  線之角係數大於  $OT$  之角係數 1.5088, 則  $OB$  割  $\gamma$  於兩點  $M, M'$ , 吾人有兩極端線經過  $A, B$  其比各爲  $\frac{OB}{OM}, \frac{OB}{OM'}$ , 如  $OB$  之角係數小於 1.5088 則  $OB$  與  $\gamma$  不能相交, 此時經過  $A, B$  兩點不能作極端線.

此例與下述之幾何問題相同:

已與  $A, B$  兩點在  $ox$  上半平面內. 試求曲線聯此二點者俾繞  $ox$  而得之面積爲最小.

假設此時有一(1)類曲線能給予此極小面積, 則應取

$$F = y\sqrt{1+y'^2}$$

$R$  區爲  $ox$  以上之半平面當經過  $A, B$  點不能作極端線, 吾人後當知此極小非(1)類曲線所能給予也.

(4°) 設  $\alpha = \frac{1}{2}$ , 此時尤拉方程式之初解爲

$$y = c(1+y'^2)$$

所有之極端線均為拋物線  $(x-c)^2 + (y-c')^2 = y^2$  以  $x$  軸為導線者。此問題為微動原理致用之一。

例之有多個未知函數者。前法極易推廣於函數  $F$  中含有多個未知函數及其一次引數者 ( $x$  為自變數)。譬如  $F$  之形為  $F(x, y, z, y', z')$ , 當  $(x, y, z)$  點在空間  $R$  區內及  $y', z'$  為任何有限值時,  $F$  恆為連續, 并賦有引數至於三級且均為連續者。設  $A(x_0, y_0, z_0)$  與  $B(x_1, y_1, z_1)$  為  $R$  區內之任意二點而  $\Gamma$  為聯此兩點之一曲線在  $R$  區內者, 其方程式為

$$y = f(x), \quad z = f_1(x)$$

$f$  及  $f_1$  在  $(x_0, x_1)$  間隔內為 (1) 類函數, 每與一曲線  $\Gamma$  則得一相當積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f_1(x), f'(x), f_1'(x)] dx = \int_{\Gamma} F(x, y, z, y', z') dx$$

此時問題在如何選擇  $\Gamma$  方使  $J$  之值比較鄰近  $\Gamma$  各曲線之相當積分為大或為小。

今試用分析方法表之, 設  $y = f(x), z = f_1(x)$  為一組 (1) 類函數可給予  $J$  一極端值者, 再設  $\eta(x), \eta_1(x)$  為任何二 (1) 類函數且於  $x = x_0$  及  $x = x_1$  時為零。此時如在積分  $J$  中將  $f$  及  $f_1$  易為  $f(x) + a\eta(x)$  及  $f_1(x) + a\eta_1(x)$ , 則  $J$  變為  $a$  助變量之函數, 即

$$J(a) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + a\eta(x), \dots, f_1'(x) + a\eta_1'(x)] dx$$

此積分應於  $a = 0$  時為極端值, 無論  $\eta(x)$  及  $\eta_1(x)$  之形式若何, 只須能適合上述條件即可。引之得

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial z} \eta_1(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) + \frac{\partial F}{\partial z'} \eta_1'(x) \right] dx$$

如前用積分分求法并注意  $\eta$  及  $\eta_1$  之極限值值得

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \eta(x) \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] + \eta_1(x) \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \right] \right\} dx$$

依小引一欲  $\delta J$  爲零,必也  $y, z$  爲下組聯立微分方程式之解.

$$(9) \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0$$

此方程組之任一組解定一極端線,展之則爲

$$(10) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y'} z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z'} z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

如行列式

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \times \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} \right)^2$$

不全等於零.此二式可依  $y'', z''$  解之,由此可得一組二級微分方程式之模範式

$$(12) \quad y'' = \phi(x, y, y', z'), \quad z'' = \phi_1(x, y, y', z')$$

由  $R$  區之任一點可通過無數之極端線,但只有一在此點有一定切線并須設  $\Delta$  不爲零.如在  $R$  區內  $\Delta$  總不爲零時,此問題稱爲規則的 (régulier)

(12) 式之通解含有四個任意常數,吾人可如是選擇之俾一極端線通過任意兩點  $A, B$  至少此二點相距較近時必,爲可

能,但吾人於通過  $A, B$  兩點之曲線不能使其再於  $A$  點切於一定直線.

吾人對於(9)式之微分方程組,仍可予以對尤拉氏同樣之注意:即使函數  $F$  不含  $x, y, z$  之一變數時,則此組以下列各式之一為其初解.

$$(13) \quad F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} - z' \frac{\partial F}{\partial z'} = c, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = c, \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = c.$$

欲(10)與(11)式變為全等式,則  $F$  之形必為  $P + Qy' + Rz'$  中  $P, Q, R$  為  $x, y, z$  之函數,且合於可積條件者.

例. 設  $F = \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{z}}$ ; 如取  $z$  軸為垂線之下向者則此題適為空間捷線 (Brachis to Chrono) 問題.因函數  $F$  不含  $x$  及  $y$ , 故有二初解為

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c_1, \quad F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} - z' \frac{\partial F}{\partial z'} = c_2$$

但 
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\frac{1}{2}(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{z}} \times 2y' = \frac{y'}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

故有 
$$y' = c_1 \sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

及 
$$\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{z}} - \frac{y'^2}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{z'^2}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = c_2$$

或 
$$1 = c_2 \sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

由此得 
$$y' = \frac{c_1}{c_2}, \quad y = \frac{c_1}{c_2}x + c_3$$



故極端曲線實含於垂面之內，吾人由前例知此曲線為直線擺線。例中函數  $F$  含有高級引數者，吾人可以同一方法施於函數  $F$  之含有高級引數者，而求其一次變分。設函數之形為  $F[x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}]$  且為連續，又當  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  等為有限值，而  $x, y$  點在  $R$  區域內  $F$  之偏微分，至於  $n+2$  級亦均為連續，吾人稱函數  $f(x)$  在間隔  $(x_0, x_1)$  內連續至於  $n$  級引數者為  $(1)^n$  類函數。如  $\Gamma$  為其相當曲線在  $R$  區內者則定積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f', \dots, f^{(n)}] dx = \int_{\Gamma} F[x, y, y', \dots, y^{(n)}] dx$$

有一有限之值，吾人仍可就所有  $\Gamma$  曲線中求其一俾其相當積分較任何鄰近同類曲線且在  $R$  區內者之相當積分為大或為小。

設  $y = f(x)$  為一  $(1)^n$  類函數合此條件者，則定積分

$$J(a) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + a\eta(x), f'(x) + a\eta'(x), \dots, f^{(n)}(x) + a\eta^{(n)}(x)] dx$$

應於  $a=0$  為極大或極小， $\eta(x)$  之形式可以任意為何種  $(1)^n$  類函數，只須有  $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$

$$\text{但 } J'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \eta^{(n)}(x) \right] dx$$

中以  $y, y', \dots$  代  $f(x), f'(x), \dots$

設所求之函數  $f(x)$  賦有引數至於  $2n$  次皆為連續，則可以積分分求法推廣式施於  $\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}} \eta^{(p)}(x)$  項而得（見 Goursat I,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial x^{(p)}} \eta^{(p)}(x) dx = \left\{ \frac{\partial F}{\partial y^{(p)}} \eta^{(p-1)}(x) - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y^{(p)}} \right] \eta^{(p-2)}(x), \dots \right. \\ \left. \pm \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \left[ \frac{\partial F}{\partial y^{(p)}} \right] \eta(x) \right\}_{x_0}^{x_1} \mp \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^p}{dx^p} \left[ \frac{\partial F}{\partial y^{(p)}} \right] \eta(x) dx$$

以此法施於各項後相加得

$$(14) \quad J'(0) = \left[ F_0(x)\eta(x) + F_1(x)\eta'(x) + \dots + F_{n-1}(x)\eta^{(n-1)}(x) \right]_{x_0}^{x_1} \\ + \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right] \right\} dx$$

中  $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$  等函數為  $x, y$  之函數, 其所含  $y$  之引數至高至  $2n-1$  級而止.

吾人以前法定  $\eta(x)$  之形式, 則右端已積之項為 0, 而  $f(x)$  應為下方程式之解

$$(15) \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right] = 0$$

凡此方程式之解吾人仍稱為極端函數, 其相當曲線則稱為極端線. (15) 式之最高級為  $2n$  級, 故極端函數含  $2n$  個任意常數. 故一極端不能以  $A, B$  兩點定之. 但  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$  之值當  $x=x_0$  及  $x=x_1$  時未受何種限制, 且  $\eta'(x), \eta''(x), \dots, \eta^{(n-1)}(x)$  於間隔極限亦可任意選擇其值於是欲使  $J'(0)$  為零, 無論  $f', \eta', \dots$  之值為何, 必也  $f(x)$  及其  $2n-1$  個引數合乎下式乃可.

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots \quad F_{n-1} = 0$$

以此  $2n-2$  個條件與經過  $A, B$  點兩條件相加, 則得  $2n$  式以定極端函數之  $2n$  個任意常數.

有時選擇條件之法亦可略為變易。譬如吾人欲求(1)<sup>n</sup>類函數可給予  $J$  一極端值者，吾人可如是選擇是類函數使其當  $x=x_0, x=x_1$  有一定之值，其  $n-1$  前個引數亦然。此時函數  $\eta(x)$  及其  $n-1$  前個引數於間隔兩界值均應為零，於是欲  $J'(0)$  為零只須  $f(x)$  為一極端函數即足，所有  $2n$  個之任意常數為  $f(x)$  所應適合於界值之  $2n$  個條件所定。

此外尚有其他方法，今試舉例以明之。

例. 試求積分  $J = \int_0^1 y''^2 dx$  之極端值

中  $y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

此時  $J(a) = \int_0^1 [f''(x) + a\eta''(x)]^2 dx = \int_0^1 [y''(x) + a\eta''(x)]^2 dx$

故  $J(a) = 2 \int_0^1 y''(x)\eta''(x) dx$

但  $2 \int_0^1 y''(x)\eta''(x) dx = 2 \int_0^1 y''(x) d\eta'(x) = 2 [y''(x)\eta'(x)]_0^1$   
 $- 2 \int_0^1 y'''(x) d\eta(x) = 2 [y''(x)\eta'(x)]_0^1 - 2 [y'''(x)\eta(x)]_0^1$

$+ 2 \int_0^1 y^{IV}(x)\eta(x) dx$

即  $J'(0) = 2 [y''(x)\eta'(x)]_0^1 + 2 \int_0^1 y^{IV}(x)\eta(x) dx$

此時極端線為三次代數曲線

$$y = p_3(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$$

設  $y(x)$  未受其他條件所限制，則  $y''(0)$  及  $y''(1)$  均應為零。於是  $(0, 0)$  及  $(0, 1)$  兩點均為極端線之反曲點 (Inflection) 而極

端線即為  $y=0$ . 今設與  $y'(0)$  及  $y'(1)$  之值, 則極端線之方程式為

$$y = x(x-1)[(y'_0 + y'_1)x - y'_0]$$

因極端線方程式可書為

$$y = x(x-1)(ax + \beta)$$

欲定  $a$  與  $\beta$ , 則求其引數

$$y' = (x-1)(ax + \beta) + x(ax + \beta) + ax(x-1)$$

$$y'_0 = -\beta$$

$$y'_1 = a + \beta$$

由此得

$$\beta = -y'_0, \quad a = y'_0 + y'_1$$

再設與  $y'(1)$  之值且原點為反曲點, 則極端線方程式應為

$$y = \frac{y'_1}{2}(x^3 - x)$$

蓋  $y$  可書為

$$y = k(x^3 - x)$$

$$y' = 3kx^2 - k$$

令  $x=1$ , 則

$$y'_1 = 2k$$

故

$$k = \frac{y'_1}{2}$$

無論前所設如何, 吾人恆得  $J$  之絕對極小值, 因當吾人以  $P_0 + a\eta(x)$  代  $y$  時可得

$$J(a) - J(0) = a^2 \int_0^1 \eta''^2(x) dx$$

恆為正故也。

一次變分之普通式. 吾人更進一步以較普遍的假設求一定積分之一次變分. 假設在積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

中,將  $y$  易為  $x$  之函數含有多個助變量  $\alpha_i$  者.此函數為連續的,且對於  $x$  及  $\alpha_i$  之引數亦為連續的,并設積分之上下界  $x_0$  及  $x_1$  均為  $\alpha_i$  之函數.於是積分  $J$  之值亦為  $\alpha_i$  之函數,其一級全微分為吾人所欲得者,即此積分之一次變分也,以符號  $\delta J$  表之.求  $\delta J$  之法只須應用積號內求引數法即可.今為簡單起見,先設  $y(x)$  僅合一助變量  $\alpha$ , 設  $x_0 = \phi_0(\alpha)$ ,  $x_1 = \phi_1(\alpha)$ ,  $\phi_0$  及  $\phi_1$  皆為連續函數且在  $(0, h)$  間隔內之引數亦為連續的.此二函數中之一可為常數或二者均可為常數.吾人前所研究者,皆限於復例.

再設  $y = f(x, \alpha)$  為連續函數,其所有偏微分在區域

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq h \\ \phi_0(\alpha) \leq x \leq \phi_1(\alpha) \end{cases}$$

內亦均為連續的,并有

$$f(x, 0) = f(x)$$

如在積分  $J$  內將  $y$  易為  $f(x, \alpha)$ , 則得一函數  $J(\alpha)$ , 其引數為

$$J'(\alpha) = \left[ F(x, y, y') \frac{dx}{d\alpha} \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x} \right) dx$$

如函數  $f(x, \alpha)$  對於  $x$  有一二級連續引數,則吾人可以積分分求法施於右端第二項而得

$$(16) \quad J'(\alpha) = \left[ F(x, y, y') \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx$$

右端已積之項可變之如下:

設  $(x_0, y_0)$  及  $(x_1, y_1)$  為積線兩端之位標, 且均為  $a$  之函數

$$x_0 = \phi_0(a), \quad y_0 = f(x_0, a), \quad x_1 = \phi_1(a), \quad y_1 = f_1(x_1, a)$$

於是 
$$\frac{dy_0}{da} = \frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{dx_0}{da} + \frac{\partial f(x_0, a)}{\partial a} = y'_0 \frac{dx_0}{da} + \frac{\partial f(x_0, a)}{\partial a}$$

$y'_0$  為積線  $A$  點切線之角係數, 同理

$$\frac{dy_1}{da} = y'_1 \frac{dx_1}{da} + \frac{\partial f(x_1, a)}{\partial a}$$

由此得

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_0, a)}{\partial a} = \frac{dy_0}{da} - y'_0 \frac{dx_0}{da} \\ \frac{\partial f(x_1, a)}{\partial a} = \frac{dy_1}{da} - y'_1 \frac{dx_1}{da} \end{cases}$$

(16) 已積之項即變為

$$\begin{aligned} & F(x_1, y_1, y'_1) \frac{dx_1}{da} + \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_1 \left( \frac{dy_1}{da} - y'_1 \frac{dx_1}{da} \right) \\ & - F(x_0, y_0, y'_0) \frac{dx_0}{da} - \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_0 \left( \frac{dy_0}{da} - y'_0 \frac{dx_0}{da} \right) \end{aligned}$$

用  $\delta a$  乘 (16) 式之兩端, 則得

$$\begin{aligned} (17) \quad \delta J = & \left[ F(x_1, y_1, y'_1) - y'_1 \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_1 \right] \delta x_1 - \left[ F(x_0, y_0, y'_0) - y'_0 \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_0 \right] \delta x_0 \\ & + \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_1 \delta y_1 - \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_0 \delta y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \delta y \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx \end{aligned}$$

在此式中

$$\delta y = \frac{\partial f}{\partial a} \delta a,$$

(17) 式亦可縮寫

$$(18) \quad \delta J = \left[ \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \delta y \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx$$

欲求  $J'(0)$ , 須以  $\alpha$  除兩端而令  $\alpha$  趨進於 0; 若  $f(x, \alpha)$  只為  $\alpha$  正值所定, 則  $J'(0)$  為  $\frac{J(\alpha) - J(0)}{\alpha}$ , 當  $\alpha$  為正值趨進於零之極限.

(18) 式之右端對於  $\delta y, \delta x_0, \delta y_0, \delta x_1$  及  $\delta y_1$  為線式, 故  $x_0, x_1$ , 及  $y$  為多個助變量  $\alpha_i$  之函數時亦易於推用.

此時宜注意者即積號外之各項僅倚於積線兩端之微移動, 及此兩點切線之角係數

以同樣計算施於  $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx,$

則得更普遍之公式

$$(19) \quad \delta J = \left[ \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} - z' \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta z \right]_{x_0}^{x_1} \\ + \int_{x_0}^{x_1} \delta y \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx + \int_{x_0}^{x_1} \delta z \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \right] dx$$

中  $(x_0, y_0, z_0)$  及  $(x_1, y_1, z_1)$  為積線兩端之位標. 如函數  $F$  含有高級偏引數施以累次積分分求法亦可將一次變分  $\delta J$  化為兩項之和, 其一項為已積者, 其他一項為一個定積分, 茲不具論.

$\delta J$  式中總含一項為定積分, 欲將此定積化為無有, 其充要條件為給予助變量, 即積線所含者, 一組特值時使所得之曲線為一極端線. 如吾人沿極端線弧而研究  $\delta J$ , 并使此極端線逐漸變易, 則上述條件必可盡合. 於是定積分之一次變分  $\delta J$  沿極端線而計算者, 可以其兩端之微動移表示之.

此變分法之基本定理可統御甚多之已知結果為其特例. 譬如設  $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ , 則極端線為直線, 此時之 (19) 式與

線段微分公式無異,即其一也。(可參考 Goursat 一卷 84 節.)

注意. 如  $F$  之形式為  $P(x, y) + y'Q(x, y)$ , 則 (18) 式之形化簡為

$$(20) \quad \delta J = (P \delta x + Q \delta y) \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \delta y \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx$$

其中已積之項遂與積線兩端之切線角係數無關. 於是而公式 (20) 可適用於積線之呈有歧點者 (Points Anguleux).

如  $P, Q$  二式能合乎可積條件  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ , 則 (20) 式更化簡為

$$\delta J = (P \delta x + Q \delta y) \Big|_{x_0}^{x_1}$$

此時  $\int F dx$  沿一閉曲線計算之值為零. (可參看 Goursat 一卷 152 節.)

推之於  $F = P + Qy' + Rz'$  亦然.

斜截線 (Transversales). 吾人如重行研究

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

之變分而視  $x_0, x_1$  為變數, 即積線之兩端可以變易.

設  $C_0$  與  $C_1$  為  $R$  區之任意兩曲線, 而  $\Gamma$  為一個 (I) 類曲線在  $R$  區內者, 其一端  $A$  點在  $C_0$  線上, 而他一端  $B$  點在  $C_1$  線上. 再求定  $\Gamma$  俾其相當積分之值, 較任何隣近同類曲線其端各在  $C_0$  及  $C_1$  上者之相當積分為大或為小, 此  $\Gamma$  線自然應為一極端線, 因設其兩端暫不變易時沿弧所得之  $\delta J$  應為零故也.

次設此條件為已合, 吾人懸想將積線弧由其最初位置



逐漸變易,  $A$  點暫不令動而使  $B$  點畫  $C_1$  線, 設由  $B$  移至  $B_1$ , 此微動移  $\delta I$  爲 (18) 式中之已積項, 其式爲

$$\delta I = [F(x_1, y_1, y'_1) - y'_1 F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1)] \delta x_1 + F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1) \delta y_1$$

$x_1, y_1$  爲  $B$  點之位標, 而  $y'_1$  爲極端線在  $B$  點之切線之角係數  $\delta x_1, \delta y_1$  代表  $B$  點在  $C_1$  線上之微動移. 欲  $AB$  弧給予一極端值與其相當積分, 必也過  $\delta I$  爲零. 由此得另一必要條件爲

$$(21) \quad [F(x_1, y_1, y'_1) - y'_1 F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1)] \delta x_1 + F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1) \delta y_1 = 0$$

同理, 如暫不令  $B$  動而使  $A$  點畫  $C_0$  線, 又可得一必要之新條件爲

$$(22) \quad [F(x_0, y_0, y'_0) - y'_0 F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)] \delta x_0 + F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \delta y_0 = 0$$

綜上所述得結果如下:

欲  $AB$  線給予一極端值與  $J$ , 必也 1° 此曲線爲一極端線  
2° 在  $A, B$  兩點, (21) 與 (22) 兩須適合.

此問題爲有定解者, 因吾人有兩式以定極端線所含之兩個任意常數故也.

如  $A, B$  之中有一爲定點, 則 (21) (22) 兩式中必有其一係表示極端線經過此定點者, 與  $C_0$  變爲與  $oy$  軸平行之直線, 則  $\delta x_0$  爲零, 而 (22) 式化簡爲

$$F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0$$

設  $M$  爲極端線  $\Gamma$  上之任一點, 其位標爲  $x, y$ , 而  $y'$  爲此點切線之角係數; 通過  $M$  作一曲線  $C$  其經過  $M$  點之切線方位係數爲  $\delta x, \delta y$ , 吾人依克氏 (Kneser) 之意, 謂極端線斜截  $C$  線於

$M$  時即  $x, y, y'$  與  $\delta x, \delta y$  能合乎下之條件:

$$(23) \quad [F(x, y, y') - y' F'_{y'}(x, y, y')] \delta x + F'_{y'}(x, y, y') \delta y = 0$$

準此,則 (21) 與 (22) 兩條件所表示者,即  $AB$  極端線能給予一極端值時應分別斜截  $C_0$  與  $C_1$  線於  $A, B$  兩點也.

在  $F = g(x, y) \sqrt{1 + y'^2}$  之特例中, (23) 式變為

$$g(\delta x + y' \delta y) = 0.$$

此即表示凡在一點  $g$  異於零時,  $C$  與  $\Gamma$  恆成正交也. 如  $g = 1$ , 所有極端線均為直線, 吾人遂重得此甚著之結果, 即兩曲線中之極端線必為此兩線之公有法線 (normale commune); 但有時一公有法線亦不能解決極大極小問題, 用是知此等條件為必要條件而非充足之條件也.

(23) 式對於  $\delta x, \delta y$  為線式, 故凡  $C$  線之為極端線斜截於一點者, 在此點之切線均相同.

已與一族之極端線含一個助變量  $\alpha$  者, 并設經過  $R$  任一點, 只通過此線族之一, 則有一族曲線  $C$  盡為一極端線所斜截. 蓋經過一點  $(x, y)$  之極端線其在此點切線角係數  $y'$  為  $x, y$  之函數, 而 (23) 式變為一個一級微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x, y)$$

以定  $C$  線. 吾人謂所有  $C$  線成爲一族之斜截線.

反言之, 凡一曲線  $C$  不為極端線者必屬於斜截線族, 蓋由  $C$  之任一點可作一極端線與之斜截於是點也. 用此法所得之各極端線只含一助變量, 并與  $C$  斜截. 其他由  $C$  發出之

同族斜線可以下法得之。

在  $M$  點所發出之極端線,且斜截於  $C$  者之上,取一點  $M'$  使積分  $J = \int_{MM'} F(x, y, y') dx$  有一定值  $K$ . 當  $M$  畫  $C$  線時,  $M'$  畫一曲線  $C'$ ,  $C$  與  $C'$  有時可以變為一點. 照此作法,沿  $MM'$  弧之一次變分  $\delta J$  應為零,而  $MM'$  弧且與  $C$  斜截於  $M$  點. 依 (18) 式  $MM'$  亦應斜截於  $C'$ . 再將常數  $k$  漸次變易,則吾人得一族之斜截線,  $C$  為其一枝.

設  $\Gamma$  為一空間曲線其兩端  $A, B$  各畫一曲線  $\Sigma_0$  及  $\Sigma_1$ , 欲其相當積分  $J = \int_{\Gamma} F(x, y, z, y', z') dx$  有極端值, 必也  $\Gamma$  為一極端線. 次設  $x, y, z$  為一點  $M$  之位標  $y', z'$  為此點之偏引數.  $\Sigma$  為一曲面經過  $M$  點者. 而

$$P(X-x) + Q(Y-y) + R(Z-z) = 0$$

為  $\Sigma$  面  $M$  點之切面, 吾人謂  $\Gamma$  斜截  $\Sigma$  於  $M$  點, 即須有

$$(24) \quad \frac{F(x, y, z, y', z') - y' F'_{y'} - z' F'_{z'}}{P} = \frac{F'_{y'}}{Q} = \frac{F'_{z'}}{R}$$

如吾人書  $\delta J \equiv 0$ , 當  $A$  暫不動而  $B$  在  $\Sigma_1$  面上移動時, 則正得  $AB$  線斜截  $\Sigma_1$  於  $B$  點之各條件. 於  $A$  點亦可得同樣之條件, 故  $A, B$  應斜截  $\Sigma_0, \Sigma_1$  兩曲面於  $A$  及  $B$  點.

此時仍有四式以定極端線所含之四個任意常數.

設  $F$  之形式為  $g(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$

則 (24) 式表明極端線  $\Gamma$  與曲面  $\Sigma$  相正交.

等周問題. 等周問題所用之方法微有不同, 試論列如下:

設欲於聯  $A(x_0, y_0)B(x_1, y_1)$  兩點之 (I) 類曲線  $\Gamma$  中求其一  
(在  $R$  區內) 俾定積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

為極端值且合乎下條件, 即另一定積分

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx$$

恆有一定值  $c$ .

假定函數  $y=f(x)$  合乎上述之各條件. 又設  $\eta_1(x), \eta_2(x)$  為兩個 (I) 類函數定於  $(x_0, x_1)$  間隔內者, 且於界值為零. 如在  $F$  函數中以  $f(x) + a_1\eta_1(x) + a_2\eta_2(x)$  易  $y$ ,  $a_1$  與  $a_2$  為兩個助變量, 則  $J$  亦為此二助變量之函數, 即

$$(25) \quad J(a_1, a_2) = \int_{x_0}^{x_1} F \left[ x, f(x) + a_1\eta_1(x) + a_2\eta_2(x), f'(x) + a_1\eta_1'(x) + a_2\eta_2'(x) \right] dx$$

同理,  $J_1$  亦可變為

$$(26) \quad J_1(a_1, a_2) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, f(x) + a_1\eta_1(x) + a_2\eta_2(x), f'(x) + \dots) dx = c$$

欲  $J(a_1, a_2)$  當  $a_1 = a_2 = 0$  為極大或極小, 其附帶條件為 (26), 必也  
(I, n°52 Goursat)

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a_1} \right)_0 \left( \frac{\partial J_1}{\partial a_2} \right)_0 - \left( \frac{\partial J}{\partial a_2} \right)_0 \left( \frac{\partial J_1}{\partial a_1} \right)_0 = 0$$

此式亦可變為

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1} \eta_1(x) \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx}{\int_{x_0}^{x_1} \eta_1(x) \left[ \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] dx} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \eta_2(x) \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx}{\int_{x_0}^{x_1} \eta_2(x) \left[ \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] dx}$$

因  $\eta_1(x), \eta_2(x)$  各不相關, 故上式之比應爲一常數  $k$ , 於是  $\eta(x)$  任爲何形式時應有

$$(27) \quad \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left\{ \frac{\partial(F-kG)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial(F-kG)}{\partial y'} \right] \right\} dx = 0$$

故  $f(x)$  應爲下微分方程式

$$(28) \quad \frac{\partial(F-kG)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial(F-kG)}{\partial y'} \right] = 0$$

之解, 中含一常數  $k$ . 於是所求積分含有三任意常數, 可以經過兩點, 及使  $J_1$  爲常數之三條件定之, 故此問題常有定解.

例. 就聯  $A, B$  兩點之所有曲線中且有定長者, 試求其一, 俾其與  $AB$  弦所成之面積爲極大.

此時  $F=y, G=\sqrt{1+y'^2}, F-kG=y-k\sqrt{1+y'^2}$

因  $F$  與  $G$  爲不含  $x$ , 故 (28) 式之初解爲

$$y - k\sqrt{1+y'^2} + \frac{ky'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

亦即

$$\frac{y\sqrt{1+y'^2} - k}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

積之得

$$(x-c')^2 + (y-c)^2 = k^2$$

雙重積分之一次變分. 設  $F(x, y, z, p, q)$  爲五個變數  $x, y, z, p, q$  之函數, 當  $x, y, z$  點在空間  $R$  區域內  $p$  與  $q$  爲有限時,  $F$  函數及其偏引數至於三級者均爲連續的. 設  $\Gamma$  爲  $R$  區之一閉曲線, 其射影在  $xy$  平面者爲一閉曲線之無雙點者, 命之爲  $C$ , 假定  $z=f(x, y)$  爲  $R$  區內一曲面  $S$  之方程式并通過曲線  $\Gamma$ .

當  $(x, y)$  點畫  $C$  曲線所界之平面  $A$  及其周時, 如  $f$  及其一級偏微分均為連續的, 則吾人稱  $f(x, y)$  為  $A$  域之 (I) 類函數, 而  $S$  為 (I) 類曲面. 如在  $F$  內以  $f, f'_x, f'_y$  分別易  $z$  及  $p, q$ , 則所得者為  $A$  域內之連續函數, 而雙重積分

$$(29) \quad J = \int \int_A F(x, y, z, p, q) dx dy$$

對於  $S$  有一有限之值, 吾人仍可求一 (I) 類曲面  $S$  通過  $\Gamma$  且在  $R$  區內者, 俾  $J$  為極小.

命  $\eta(x, y)$  為  $A$  域內之 (I) 類函數, 且沿  $C$  線為零者. 方程式

$$z = f(x, y) + a\eta(x, y)$$

代表一族曲面經過  $\Gamma$  者, 因原設  $z = f(x, y)$  經過  $\Gamma$  也. 此時函數

$$J(a) = \int \int_A F[x, y, f(x, y) + a\eta(x, y), f'_x + a\eta'_x, f'_y + a\eta'_y] dx dy$$

應於助變量  $a=0$  為極小. 求其一次變分, 得

$$(30) \quad \delta J = a \int \int_A \left[ \frac{\partial F}{\partial z} \eta(x, y) + \frac{\partial F}{\partial p} \eta'_x + \frac{\partial F}{\partial q} \eta'_y \right] dx dy$$

其中  $z, p, q$  應於計算後以  $f, f'_x, f'_y$  易之, 設  $f(x, y)$  之二級偏微分在  $A$  域為連續的; 由格林氏 (Green) 公式得 (Goursat I. § 123)

$$\int_0^1 \eta(x, y) \frac{\partial F}{\partial p} dy = \int \int_A \left[ \eta'_x \frac{\partial F}{\partial p} + \eta(x, y) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) \right] dx dy$$

因  $\eta(x, y)$  沿  $C$  線為零, 故有

$$\int \int_A \eta'_x \frac{\partial F}{\partial p} dx dy = - \int \int_A \eta(x, y) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) dx dy$$

同理  $\int \int_A \eta'_y \frac{\partial F}{\partial q} dx dy = - \int \int_A \eta(x, y) \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) dx dy$

以之代入 (30) 式得

$$\delta J = \alpha \int \int_A \eta(x, y) \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] dx dy$$

欲  $\delta J$  於  $\eta(x, y)$  任爲何形式時爲零, 必也

$$(31) \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) = 0$$

即  $f$  須爲此偏微分方程式之解也。

例. 設  $J = \int \int \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$

此時所得之方程式爲

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) + \frac{d}{dy} \left( \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) = 0$$

或

$$r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs = 0$$

即極小曲面之偏微分方程式也。

## 二次變分 (Variation Seconde)

吾人曾經聲明凡一極端線不必即給予積分  $J$  一個極端值, 因除尤拉方程式而外, 尚須合乎其他之條件故也. 得此條件之最簡方法在書二次變分  $\delta^2 J$  之號爲不變的. 現爲便利討論起見, 先證明一引言如下:

引言. 設  $y = \phi(x)$  爲  $(x_0, x_1)$  間隔內之連續函數, 其引數在此間隔內有數個 (I) 類斷值, 代表  $y = \phi(x)$  之曲線  $\Gamma'$  即當呈數個歧點. 但此種點之各切線無與  $oy$  平行者. 吾人簡稱函數  $\phi(x)$  與曲線  $\Gamma$  爲 ( $\Gamma$ ) 類的. 設  $\Gamma'$  在  $R$  區域內, 則積分

$$J' = \int_{x_0}^{x_1} F[x, \phi(x), \phi'(x)] dx = \int_{\Gamma'} F(x, y, y') dx$$

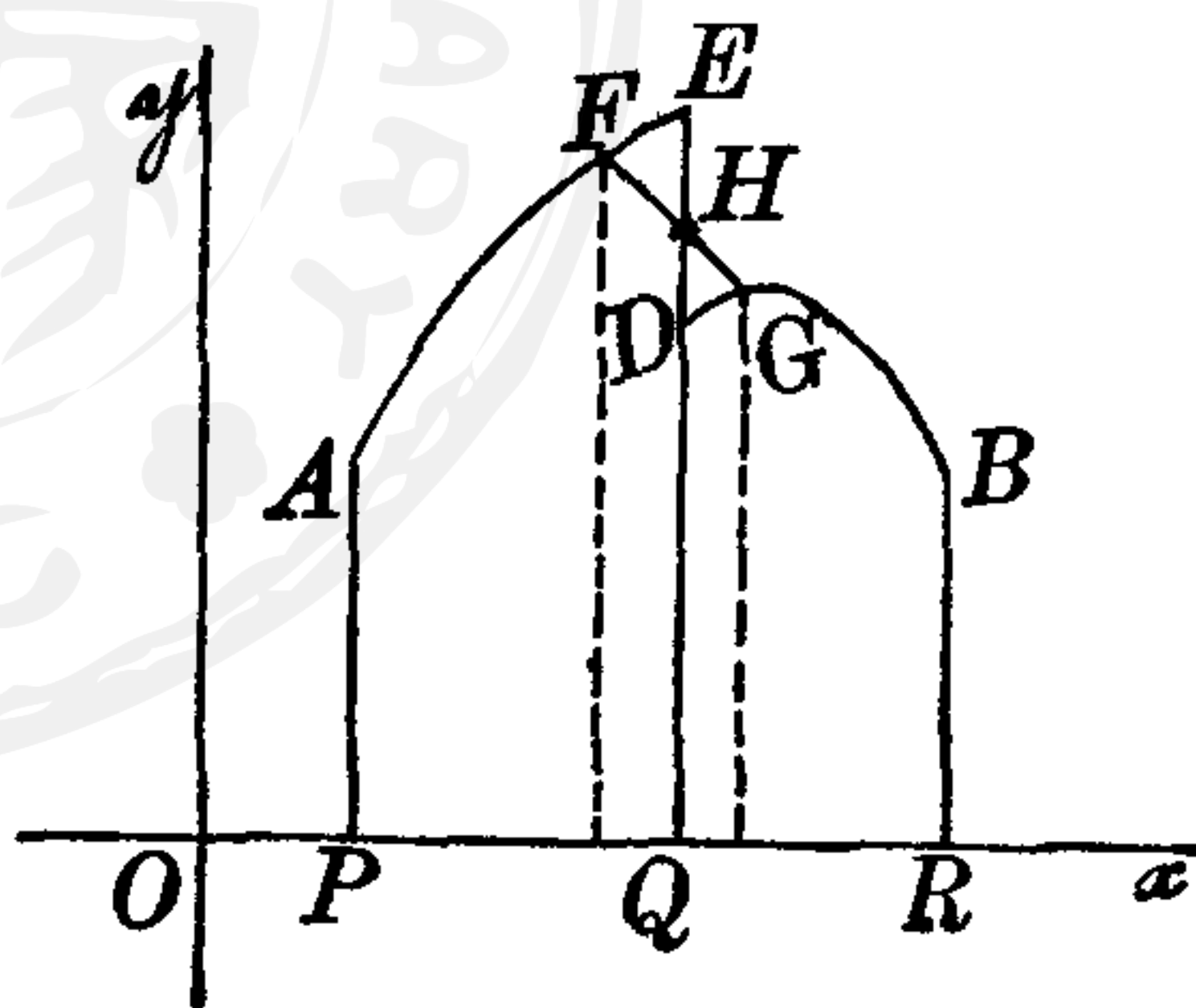
即各分間隔內中  $\phi'(x)$  爲連續時各積分之之和之值爲有定值的。

設畢, 吾人將證明求得一 (I) 類函數  $f(x)$  之可能, 此函數當  $x=x_0$  及  $x=x_1$  與  $\phi(x)$  之值同, 且使積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)] dx$$

與  $J'$  相差可小至吾人所欲小。

換言之, 吾人能求得一曲線  $\Gamma$  無有歧點, 其端與  $\Gamma'$  同, 亦在  $R$  區內, 且使沿  $\Gamma$  及  $\Gamma'$  而計算之兩積分所差之絕對值不能超過任與之正數  $\epsilon$ . 假設  $\phi'(x)$  在  $(x_0, x_1)$  間隔內只有一個斷點  $C$ , 則代表  $\phi'(x)$  之曲線爲不相銜接之兩弧如  $AE$  與  $DB$ , 設  $h$  爲一正數, 如是使  $C-h$ , 及  $C+h$  仍介於  $x_0$  及  $x_1$  之間者,  $F$  與  $G$  爲此二值之縱量點, 試以斷線  $FH, HG$  聯此二點,  $H$  在  $ED$  線上, 如令  $QH = \pi(x)$ , 吾人當如是定之, 俾合乎下之條件



$$\int_{C-h}^{C+h} \pi(x) dx = \int_{C-h}^C \phi'(x) dx + \int_C^{C+h} \phi'(x) dx$$

如令  $\xi = QH$ , 但取

$$(32) \quad \xi = \frac{1}{h} \left[ \int_{C-h}^C \phi'(x) dx + \int_C^{C+h} \phi'(x) dx \right] - \frac{\phi'(C-h) + \phi'(C+h)}{2}$$



則上之條件即可合。

此點  $H$  既定 設  $\psi(x)$  爲一助函數在  $(x_0, C-h)$  及  $(C+h, x_1)$  兩間隔內與  $\phi'(x)$  相合, 而在  $(C-h, C+h)$  間隔內與  $\pi(x)$  相合, 此函數又爲連續的函數

$$f(x) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^x \psi(x) dx$$

在  $(x_0, x_1)$  間隔內爲連續的, 其引數亦然, 此函數在  $(x_0, C-h)$  及  $(C+h, x_1)$  兩間隔內與  $\phi(x)$  相合。

$y=f(x)$  所代表之曲線  $\Gamma$ , 可由  $\Gamma'$  介於  $(C-h, C+h)$  之一段易以兩拋物線弧與  $\Gamma'$  脗合, 又彼此吻合者而得之。如  $h$  甚微, 則  $\Gamma$  與  $\Gamma'$  在  $(C-h, C+h)$  間隔內縱量之差亦甚微。於是吾人可假定  $\Gamma$  亦在  $R$  區內,  $J$  與  $J'$  亦可相差甚微也明矣。

設  $\Gamma'$  有多個歧點, 上之理論亦適用, 由此得二結論焉:

(1) 設  $J$  對於一 (II) 類函數  $\phi'(x)$  不爲零, 吾人可求一 (I) 類函數  $f(x)$  其在間隔界之值與  $\phi(x)$  同, 且其相當積分  $J$  與  $J'$  之號相同。

(2) 設  $\Gamma$  與  $\Gamma'$  兩曲線其端相同者, 設  $\Gamma$  爲 (I) 類而  $\Gamma'$  爲 (II) 類并同在  $R$  區內, 如沿  $\Gamma'$  之積分  $J'$  恆小於沿  $\Gamma$  之積分  $J$ , 則  $\Gamma$  不能給予積分  $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  一個絕對極小值。如在  $\Gamma$  鄰近恆能得  $\Gamma'$ , 使  $J'$  常小於  $J$ , 則  $\Gamma$  不能給予一相對極小值。

勒讓脫氏 (Legendre) 之條件 設  $y=f(x)$  在  $(x_0, x_1)$  間隔內爲 (I) 類函數, 且爲 尤拉氏 方程式之解 如在定積分  $J=$

$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  中, 以  $f(x) + a\eta(x)$  易  $y$ , 吾人已知其一次變分  $\delta J$  應於  $\eta(x)$  爲任何種形式時爲零,  $\eta(x)$  係一個 (I) 類函數, 且在間隔  $(x_0, x_1)$  之界值時爲零者. 欲此極端函數給予積分一極端值, 必再也其二次變分  $\delta^2 J$  於  $\eta(x)$  爲任何形式時有一不變之號. 吾人將先求  $\delta^2 J$  恆爲正時之充要條件, 此時所得極端值爲極小, 將 (3) 式

$$(3) \quad \delta J = a \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx$$

再引之, 則得一式, 其形爲

$$(33) \quad \delta^2 J = a^2 \int_{x_0}^{x_1} [P\eta^2(x) + 2Q\eta(x)\eta'(x) + R\eta'^2(x)] dx$$

$P, Q, R$  爲  $x$  之函數, 係在  $F''_{y^2}, F''_{yy'}, F''_{y'^2}$  中將  $y$  易爲  $f(x), y'$  易爲  $f'(x)$  而得者, 依原有假設,  $P, Q, R$  在  $(x_0, x_1)$  間隔內爲連續. 今試用勒讓脫氏 (Legendre) 方法以變  $\delta^2 J$  之形, 設  $\omega(x)$  爲  $(x_0, x_1)$  之 (I) 類函數; 無論  $\omega(x)$  之形式如何, 吾人恆有

$$\int_{x_0}^{x_1} (2\eta\eta'\omega + \eta^2\omega') dx = \left[ \eta^2\omega \right]_{x_0}^{x_1} = 0$$

因  $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$  故也, 乃將  $\delta^2 J$  式書爲

$$(34) \quad \delta^2 J = a^2 \int_{x_0}^{x_1} [(P + \omega')\eta^2 + 2(Q + \omega)\eta\eta' + R\eta'^2] dx$$

再選擇  $\omega$  俾  $dx$  之係數爲一整方, 則有

$$(35) \quad (Q + \omega)^2 - R(P + \omega') = 0$$

於是 (34) 式變爲

$$(36) \quad \delta^2 J = a^2 \int_{x_0}^{x_1} R \left( \eta' + \frac{Q + \omega}{R} \eta \right)^2 dx$$

由此式觀之,可知  $R$  之號在討論中極為重要. 因得勒氏之必要條件, 即

欲  $\delta^2 J$  於  $\eta(x)$  任爲何形式時爲正或爲零, 必也函數  $R(x)$  不能在  $(x_0, x_1)$  間隔內爲負.

證. 假設  $R(C) < 0, x_0 < C < x_1$ .

吾人可取一正數  $h$  甚小, 俾  $R(x)$  在  $(C-h, C+h)$  間隔內仍爲負, (6) 式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

表明  $f''(x)$  在  $(C-h, C+h)$  間隔內爲連續的, 於是  $P, Q, R$  三函數在同一間隔內亦有連續引數. 如應用歌西氏 (Cauchy) 定理於 (35) 式, 此式有無窮解在  $x=C$  之鄰近爲連續的. 設  $\omega(x)$  爲此種解之一, 設  $(\xi_0, \xi_1)$  爲含  $C$  之間隔且甚小者, 俾  $R(x)$  爲負而  $\omega(x)$  則在全間隔  $(x_0 < \xi_0 < C < \xi_1 < x_1)$  內爲連續的. 設  $\eta(x)$  之形式有如下定:

- |   |                             |
|---|-----------------------------|
| 1° $\eta(x) = 0,$   | 當 $x_0 \leq x \leq \xi_0$   |
| 2° $\eta(x) = (x - \xi_0)^2 (x - \xi_1)^2 e^{-\int_c^x \frac{Q+\omega}{R} dx},$ | 當 $\xi_0 \leq x \leq \xi_1$ |
| 3° $\eta(x) = 0,$   | 當 $\xi_1 \leq x \leq x_1$   |

吾人易見  $\delta^2 J_0$  之相當值在  $(\xi_0, \xi_1)$  間隔內與  $R$  同號即爲負, 故勒氏之條件爲必要而  $R(x)$  應在全間隔內爲正或爲零.  $R(x)$  在間隔內有根時暫不討論, 吾人當設

$$(37) \quad R(x) > 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

就(36)式觀之,似乎勒氏之條件既合,則 $\delta^2 J$ 自於 $\eta(x)$ 爲任何形式時爲正或爲零.但須注意者,當吾人求 $\delta^2 J$ 之變形時,只適用於 $\omega(x)$ 在間隔內爲連續者,故必確定(35)式有一連續解時,而後結論乃能成立.

注意. 如 $R(x)$ 在全間隔 $(x_0, x_1)$ 恆爲零,由(35)式得 $\omega = -Q$

而

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} (P - Q') \eta^2 dx$$

欲 $\delta^2 J$ 之號不變,必也 $P - Q'$ 在間隔內保持其同一之號.

加可俾氏 (Jacobi) 之條件. 方程式(35)

$$(Q + \omega)^2 - R(P + \omega') = 0$$

爲里加狄 (Riccati) 方程式,故可變爲一二級線式 (Goursat II § 402)

令 $Q + \omega = -Rz$ , 則(35)式變爲

$$(38) \quad z' + z^2 + \frac{R'}{R} z + \frac{Q' - P}{R} = 0$$

此式可視爲由二次線式

$$(39) \quad \Psi(u) = u'' + \frac{R'}{R} u' + \frac{Q' - P}{R} u = 0$$

中,令 $u = e^{\int z dx}$ 而得,故 $z = \frac{u'}{u}$ 爲(38)式之通解,而 $u$ 又爲(39)式之通解.(39)式亦可視作 $F = Pu^2 + 2Quu' + Ru'^2$ 之相當尤拉方程式.於是(35)式之通解爲

$$(40) \quad \omega = -Q - R \frac{u'}{u}$$

凡(39)式亦稱加可俾氏式之解,在 $(x_0, x_1)$ 間隔內均爲連續的,

并且欲(35)能有一解在此間隔內連續,其充要條件爲加可俾式能有一解 $u(x)$ 不在同一間隔內爲零.

此條件爲 $\delta^2 J$ 於 $\eta(x)$ 任爲何形式時恆爲正之充足條件,且亦爲必要(可參考 Goursat III. 587 頁).

蓋設 $u(x)$ 爲加可俾式之一特解對於 $x_0 \leq x \leq x_1$ 時不爲零者,取 $\omega = -Q - R \frac{u'}{u}$ 以之代入(36)式,則得

$$(41) \quad \delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{R(\eta' u - \eta u')^2}{u^2} dx$$

既設 $R$ 爲正,則此式亦明示 $\delta^2 J$ 不能爲負,欲 $\delta^2 J$ 爲零,必在間隔內任何點恆有 $\eta' u - \eta u' = 0$ 或 $\eta = cu$ ,此爲不可能,因 $\eta(x)$ 在界值時爲零,而 $u$ 則否.由此得:

如加可俾式之解 $u(x)$ 在 $(x_0, x_1)$ 間隔內及其界值不爲零時,則二次變分 $\delta^2 J$ 於 $\eta(x)$ 任爲何形式時均爲正.

故欲確定二次變分 $\delta^2 J$ 在 $(x_0, x_1)$ 間隔內之號,勒(Legendre)加(Jacobi)二氏之條件須同時爲充要條件.

幾何說明. 錯焦點 (Foyers conjugués). 如吾求尤拉方程式(6)距一極端線極鄰近之解,則可得(39)式.設勒氏極小條件已合,即 $R = F''_{y^2} > 0$ (在 $x_0, x_1$ 間隔內),以 $F''_{y^2}$ 遍除(6)式各項得一方程式,其形爲

$$(42) \quad y'' = \Phi(x, y, y')$$

此式有無窮積分線族且含有一助變量 $\lambda$ 者(可參考 Goursat III. § 461),

即  $y = \phi(x, \lambda),$

且有  $\phi(x, 0) = f(x)$

引數  $\phi'_\lambda(x, 0)$  合一二級微分方程式, 其求法如次. 將 (6) 式書為

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

再以  $\phi(x, \lambda)$  易  $y$  而以  $\phi'(x, \lambda)$  易  $y'$ , 并求兩端對於  $\lambda$  之引數, 即得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial \lambda} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{\partial \phi'}{\partial \lambda} \right\}$$

在此式中令  $\lambda = 0$  而令  $u = \phi'_\lambda(x, 0)$ , 則得

$$(43) \quad P(x)u(x) + Q(x)u'(x) = \frac{d}{dx} \{ Q(x)u(x) + R(x)u'(x) \}$$

此即與 (39) 式無異, 由 (6) 式與 (39) 式之關係, 吾人可得 加可俾氏 條件之幾何說明.

試取由  $A$  所發出之極端線族, 且與原極端線相鄰近者而研究之. 此線族之方程式為  $y = \phi(x, \lambda)$ , 且有

$$\phi(x_0, \lambda) = f(x_0), \quad \phi'_\lambda(x_0, \lambda) = \lambda + f'(x_0)$$

第一式表示  $x = x_0$  為方程式

$$\phi'_\lambda(x, 0) = 0$$

之根. 但此方程式之根為極端線  $y = f(x)$  (當  $\lambda = 0$ ) 與  $A$  點所發出之他一無窮鄰近極端線兩線交點之橫量. 即  $\Gamma$  與此族線圍之切點. 此線圍以  $A$  點為其一部分, 因所有的線族均通  $A$  點故也. 其他切點稱為  $A$  之錯焦點 (Points Conjugués). 因  $\phi'_\lambda(x, 0)$  恰為 加可俾 式之一解  $u_1(x)$  於  $x = x_0$  時為零者, 故其次大之根

即代表  $A$  點之第一個錯焦點  $A'$  在  $A$  點之右. 故加可俾氏條件表示極端線  $AB$  弧之  $B$  端應介於  $A$  點與其右端第一錯焦點  $A'$  之間.

茲更有一直接之法, 可求出 (6) 式與 (39) 式之關係, 令

$$J(a) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + a\eta(x), f'(x) + a\eta'(x)] dx$$

$$J(0) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)] dx$$

依第 10 頁

$$J(a) - J(0) = \frac{a}{1} J_1 + \frac{a^2}{1 \cdot 2} J_2 + \dots$$

$J_1$  有兩個形式, 其一為

$$J_1 = \int \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx$$

其一為

$$J_1 = \int \eta \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx$$

如在  $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}$  中將  $y$  與  $y'$  易為  $y + a\eta, y' + a\eta'$ , 并令  $\frac{\partial F}{\partial y} = F_0, \frac{\partial F}{\partial y'} = F_1,$

則 
$$J_1(a) = \int \{ \eta F_0[x, f(x) + a\eta(x) \dots] + \eta' F_1 \} dx$$

或 
$$J_1(a) = \int \eta \left\{ F_0[x, f(x) + a\eta(x) \dots] - \frac{d}{dx} F_1 \right\} dx$$

於是用第一形式得

$$J_1(a) - J_1 = aJ_2 + a^2h + \dots$$

而 
$$\begin{aligned} J_2 &= \int \left[ \eta \left( \frac{\partial F_0}{\partial y} \eta + \frac{\partial F_0}{\partial y'} \eta' \right) + \eta' \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} \eta + \frac{\partial F_1}{\partial y'} \eta' \right) \right] dx \\ &= \int [P\eta^2(x) + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2] dx \end{aligned}$$

又令 
$$y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

而以  $y_1$  代同一之式, 當  $y_1$  易為  $f(x) + \alpha\eta(x)$  者, 則有

$$J_1(\alpha) - J_1 = \int \eta(y_1 - y) dx$$

$$y_1 - y = \alpha \left( \frac{\partial F_0}{\partial y} \eta + \frac{\partial F_0}{\partial y'} \eta' \right) - \alpha \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} \eta + \frac{\partial F_1}{\partial y'} \eta' \right) \right] = 0$$

亦即 
$$P\eta + Q\eta' - \frac{d}{dx} (Q\eta + R\eta') = 0$$

或 
$$(P - Q')\eta - \frac{d}{dx} (R\eta') = 0$$

又可書為 
$$\eta'' + \frac{R'}{R}\eta' + \frac{Q' - P}{R}\eta = 0$$

此式完全與 (39) 相同.

設  $y$  為  $y=0$  之解, 而  $y + \lambda u$  為  $y_1=0$  之解, 如使  $u = \eta$ , 則  $y$  與  $y_1$  同時為零, 而方程式

$$(39) \quad (P - Q')u - \frac{d}{dx} (Ru') = 0$$

亦可合, 故  $y + \lambda u$  為極端線  $y = f(x)$  鄰近之解, 當  $y$  之解已得亦可求  $u$ , 否則須由加可俾氏方程直接求  $u$  也.

加可俾 方程式解之研究. (Forsyth 22 頁)

先取 尤拉 方程式

$$\begin{aligned} y &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \end{aligned}$$



如勒氏 (Legendre) 條件已合, 則  $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = R$  在間隔內不爲零, 由哥西氏 存在定理 (Théorème d'existence) 可得一通解, 當  $x = a$  時有

$$y = c_1$$

$$y' = c_2$$

$c_1$  及  $c_2$  爲任意二常數, 故此通解之形爲

$$(44) \quad y = c_1 + c_2(x - a) - (x - a)^2 \phi(x - a, c_1, c_2)$$

$\phi$  對於  $x - a$  爲規則的 (Régulier). 此式又可簡書爲

$$y = g(x, c_1, c_2)$$

無論  $c_1, c_2$  爲何值時,  $y = g(x, c_1, c_2)$  恆可合乎尤拉 方程式  $y = 0$ , 故與  $c_1$  及  $c_2$  以增量  $\lambda\gamma_1$  及  $\lambda\gamma_2$  中  $\lambda$  爲甚小而  $\gamma_1$  與  $\gamma_2$  爲兩個任意常數, 仍可得一解, 其形爲  $y + \lambda u$ , 於是

$$u = \gamma_1 \frac{\partial g}{\partial c_1} + \gamma_2 \frac{\partial g}{\partial c_2}$$

如令

$$\frac{\partial g}{\partial c_1} = u_1, \quad \frac{\partial g}{\partial c_2} = u_2$$

則

$$(45) \quad u = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2$$

因  $y + \lambda u$ , 合乎方程式  $y_1 = 0$ , 故  $u$  能合乎  $y_1 - y = 0$ , 即

$$(P - Q')u - \frac{d}{dx}(Ru') = 0$$

即加可俾 (Jacobi) 方程式也, 故  $u$  爲其通解. 今試進而研究  $u$  之性質. 由 (44) 式得

$$u_1 = 1 + (x-a)^2 \frac{\partial \phi}{\partial c_1}$$

$$u_2 = (x-a) + (x-a)^2 \frac{\partial \phi}{\partial c_2}$$

$\phi$  對於  $(x-a)$  爲規則的, 故  $u_1$  與  $u_2$  無線式關係

但 
$$Ru_1'' + R'u_1' - (P-Q')u_1 = 0$$

$$Ru_2'' + R'u_2' - (P-Q')u_2 = 0$$

由此得

$$R(u_1u_2'' - u_2u_1'') + R'(u_1u_2' - u_2u_1') = 0$$

亦即 (46) 
$$R(u_1u_2' - u_2u_1') = A$$

其中  $A$  爲一常數, 因  $u_1$  與  $u_2$  無線式關係, 故  $u_1u_2' - u_2u_1'$  不爲零, 又勒氏 (Legendre) 條件設爲已合, 故  $R$  亦不爲零, 於是  $A$  亦不能

爲零, 由 (46) 式得 
$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u_2}{u_1} \right) = \frac{A}{u_1^2} / R$$

因  $A$  與  $u_1^2$  之號不變,  $R$  亦有常號, 故  $\frac{u_2}{u_1}$  之引數之號亦不變.

如此引數之號爲正, 則  $\frac{u_2}{u_1}$  在間隔內爲增變函數; 如其號爲

負, 則  $\frac{u_2}{u_1}$  爲減變函數, 此結果可視爲勒氏條件之結果.

$\frac{u_2}{u_1}$  既爲間隔內之增函數或減函數, 則在間隔內任何點時,  $\frac{u_2}{u_1}$  不能重得在低界既經之值, 但須設  $u_1 \neq 0$ .

又由 (46) 式觀之,  $A$  既異於零, 則  $u_1$  與  $u_2$  不能同時爲零. 同理, 在同一間隔內  $u_1'$  與  $u_2'$  亦不能同時爲零.

上述求  $u$  之法係根據尤拉氏方程式之通解而得; 換言之, 如既得尤拉氏方程式之通解, 則加可俾氏方程式之通解,

可以不積而得 如未得尤拉式之解,或僅得其特解.則 $u$ 須由加可俾式積之而得也.

加可俾氏判定法. 吾人已知欲積分 $J$ 有一極端值,吾人必須如是選擇 $\eta(x)$ 函數使之不合下二種條件:

1°  $\eta(x)$ 在間隔內為 $u$ 之常數.

2°  $\eta(x)$ 在兩界值為零時, $u$ 亦為零

假設吾人定 $\gamma_1$ 與 $\gamma_2$ 俾 $u$ 在低界為零,則當 $x=x_0$ 時應有 $\frac{u_2}{u_1} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ ,但 $\frac{u_2}{u_1}$ 在間隔內非增即減,於是 $\frac{u_2}{u_1}$ 不能重經過 $-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ 之值,即 $u$ 不能再為零,吾人即不能選擇 $\eta$ 函數使其1°為 $u$ 之常數倍數,2°可合兩界值之條件.

如 $\frac{u_2}{u_1}$ 於間隔擴大時能重經低界所得之值一次以至多次,則此種點, $u=0$ ,又可得一函數 $\eta$ 俾 $\eta=cu$ ,於是在此點 $\delta^2 J=0$ ,即 $J$ 不能有極端值.此種可能,吾人當阻止其發生.故間隔不能超過 $\frac{u_2}{u_1}$ 還為原值時之第一點,此點謂之 $A$ 點之錯焦點.

故積分極端值之間隔應不得越過低界之第一錯焦點,此即加可俾氏之判定法與勒氏條件不同而相因為用者也.

例. 如聯平面兩點之直線為此兩點之最短距離,故極端線為一直線,其他經過 $A$ 點之極端線仍為直線,微斜傾於第一線,此兩線不相交,故積分間隔不受何種限制.

又如圓球面上之短距線為通過此兩點之大圓弧,而極端線為大圓,經過 $A$ 點之他一大圓與原極端線交於第二點

$B$ , 故最短線之間隔不能超過  $B$  點.

判定極端值之步驟. 總上所論, 欲確定一積分之極端值, 必須

1° 求極端函數, 即尤拉方程式

$$y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

之解也, 及求加可俾方程式

$$(P - Q')u - \frac{d}{dx} (Ru') = 0$$

之解

$$u = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2$$

$\gamma_1$  及  $\gamma_2$  為兩個任意常數.

2° 令  $R = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$  在間隔內保持其號.

3° 令積分間隔不得超過  $\frac{u_2}{u_1}$  重經低界值之點, 即極端線不得逾  $A$  點之錯焦點也.

例. 今試先舉一特例, 即  $F = y\sqrt{1+y'^2}$  依 18 頁  $a=1$  之例,

此時之初解為  $y = c(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$

由此得

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}} = dx$$

$$c \log \left( \frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} \right) = x - b$$

$$\frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} = e^{\frac{x-b}{c}}$$

又 
$$\frac{y}{c} - \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} = e^{-\frac{x-b}{c}}$$

於是得 
$$y = c \operatorname{ch} \frac{x-b}{c}$$

爲一懸鍊曲線之方程式其中  $c$  與  $b$  爲兩個任意常數。

此時勒氏條件爲

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

恆爲正，故此條件爲已合，即積分有極小值之可能。

再用加氏判定法，吾人有

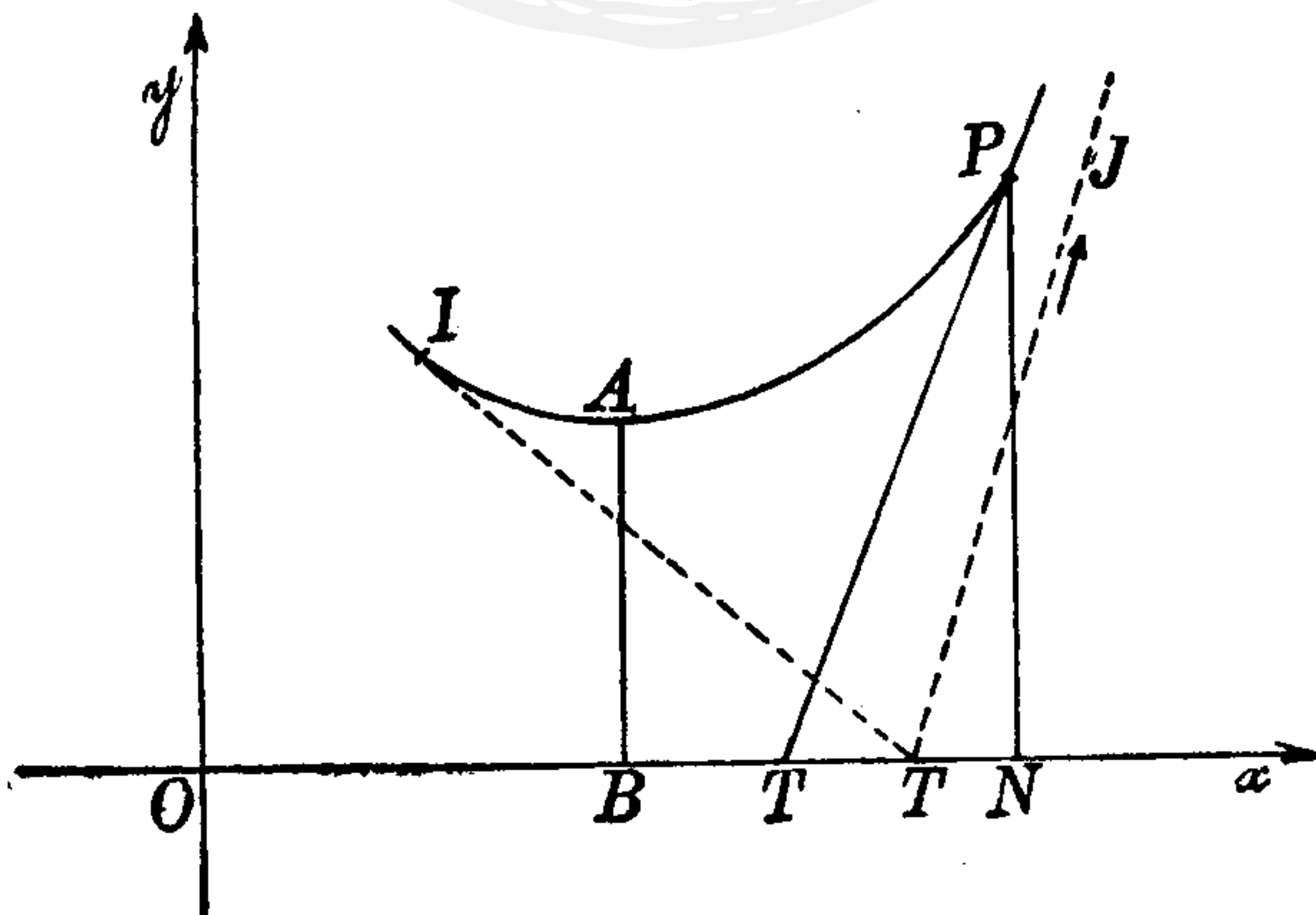
$$u_1 = \frac{\partial y}{\partial b} = -\operatorname{sh} \frac{x-b}{c}$$

$$u_2 = \frac{\partial y}{\partial c} = \operatorname{ch} \frac{x-b}{c} - \frac{x-b}{c} \operatorname{sh} \frac{x-b}{c}$$

而

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{x-b}{c} - \operatorname{coth} \frac{x-b}{c}$$

設  $A$  爲曲線之頂點， $P$  爲此曲線上任意之點，其橫量爲  $x$ ，則



$$AB = c$$

$$OB = b$$

而 
$$PN = c \operatorname{ch} \frac{x-b}{c}, \quad \tan \hat{PTN} = sb \frac{x-b}{c}$$

於是 
$$TN = c \operatorname{coth} \frac{x-b}{c}$$

而 
$$c \frac{u_2}{u_1} = (x-b) - c \operatorname{coth} \frac{x-b}{c} = BN - TN = BT$$

故  $\frac{u_2}{u_1}$  之值可由  $T$  點在  $ox$  上之地位而定。因  $\frac{d}{dx} \left( \frac{u_2}{u_1} \right)$  爲正，故  $P$  點向右畫曲線時， $\frac{u_2}{u_1}$  恆增。

設  $I$  爲始點， $IT_0$  爲其切線交  $ox$  於  $T_0$ ，當動點經過  $A$  時， $T_0$  由極右端變至極左端，由  $A$  而右行，則  $T$  點亦右行至  $T_0$ ， $A$  至  $J$  點因在  $T_0$  點， $\frac{u_2}{u_1}$  還原爲其初值，故  $J$  爲  $I$  之錯焦點故  $IP$  弧不越過  $IJ$ ，則加氏條件可合，而積分有一極小值。

前項條件之缺點。合勒 (Legendre) 加 (Jacobi) 二氏之條件尙不足以確定  $J$  之極小。蓋吾人僅將  $y = f(x)$  之相當積分與含一助變量函數  $y = f(x) + a\eta(x)$  之相當積分相比較，而實際上吾人所命之問題須比較  $y = f(x)$  及  $y = f(x) + \omega(x)$  之相當積分  $\omega(x)$  當合乎 (1) 之各條件 (見 9 頁)。

根據以上所研究者，僅能得下之結論：

設  $\omega(x)$  爲一 (I) 類函數而合乎 (1) 之條件，方程式

$$y = f(x) + a\omega(x)$$

代表一族之曲線  $\Gamma$  (Faisceau) 當  $a$  由 0 變至 1 時恆在  $R_2$  區域

內者；當  $a=0$ ，吾人得一曲線為  $\Gamma_0$ ，其方程式為  $y=f(x)$ ；當  $a=1$ ，則有  $\Gamma_1$ ，其式為  $y=f(x)+\omega(x)$ 。

函數  $y=f(x)+a\omega(x)$  之相當積分  $J(a)$  於  $a$  由 0 變時應開始增變，但吾人不能確定其在  $R_2$  區內於  $a$  由 0 變至 1 時  $J(a)$  常隨之增變也。

下例即表明  $\delta J=0$ ， $\delta^2 J>0$  不能確定  $J$  之極小值。

設  $F=y'^2+y^3$ ，并令  $x_0=y_0=0$ ， $x_1=1$ ， $y_1=0$ ，

此時極端線為直線，而合乎兩條件之極端函數為  $f(x)=0$ ，而二次變分

$$\delta^2 J = a^2 \int_0^1 2\eta'^2(x) dx$$

恆為正。欲  $\delta^2 J=0$ ，必也  $\eta'(x)=0$ ，於是  $\eta(x)=0$ ， $f(x)=0$  之相當積分  $J$  亦為零。今試往證明吾人能求出一個 (I) 類函數合乎條件

$$\omega(0) = \omega(1) = 0 \quad |\omega(x)| < \epsilon$$

者，當  $x$  介乎 0 與 1 之間時俾有

$$J_1 = \int_0^1 (\omega'^2 + \omega^3) dx$$

為負。蓋設  $a$  為正常數小於 1 者，又如是定函數  $\omega(x, a)$ ：

$$1^\circ \quad \omega(x, a) = ax \quad \text{當 } 0 \leq x < 1 - \frac{2a}{a+2}$$

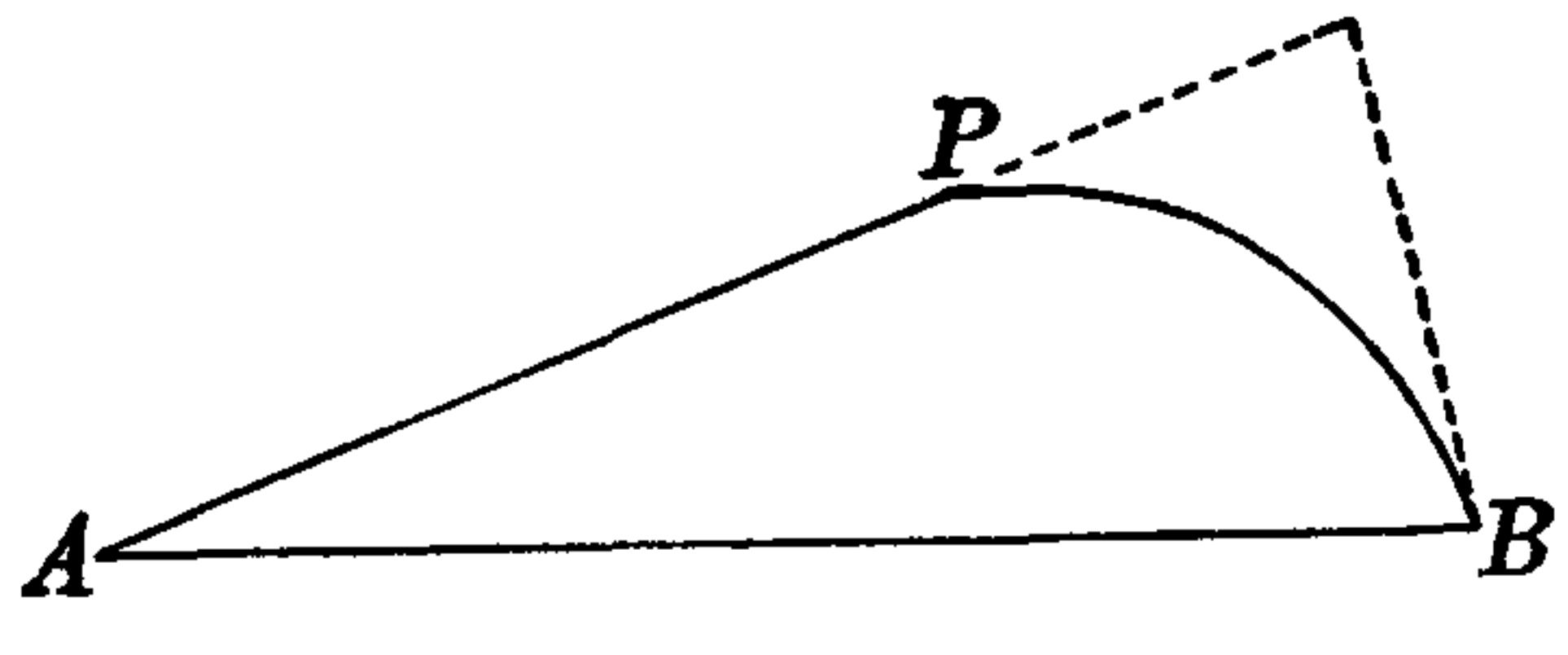
$$2^\circ \quad \omega(x, a) = 2(1-x) - \frac{(a+2)^2}{4a} (1-x)^2, \quad \text{當 } 1 - \frac{2a}{a+2} \leq x \leq 1$$

$\omega(x, a)$  在間隔  $(0, 1)$  內為 (I) 類函數。方程式

$$y = \omega(x, a)$$

代表一曲線  $APB$ ，其  $AP$  部為一直線，而  $PB$  弧部為一拋物線弧

與  $AP$  線相切,其  $B$  點切線  
 之角係數為  $-2$ , 此函數  
 $\omega(x, \alpha)$  為連續,且與  $\alpha$  同時  
 趨近於零,但其引數  $\omega'(x, \alpha)$



則於  $x=1$  及  $\alpha=0$  為斷函數積分  $J(\alpha) = \int_0^1 (\omega'^2 + \omega'^3) dx$  與  $\alpha$  同時  
 為無窮小. 惟因  $\omega'$  之斷性, 積號內求微分法遂不適用, 於是  
 吾人匪特不能確定  $J'(0)$  為零, 抑且吾人可證實其值為負. 將

$J_1$  分爲兩部, 一爲  $\int_{AP}$ , 一爲  $\int_{PB}$ , 則

$$\int_{AP} \text{之值} = (a^2 + a^3) \left(1 - \frac{2a}{a+2}\right)$$

欲求  $\int_{PB}$  之值, 先令  $x = 1 - \frac{2a}{a+2}z$ , 則得

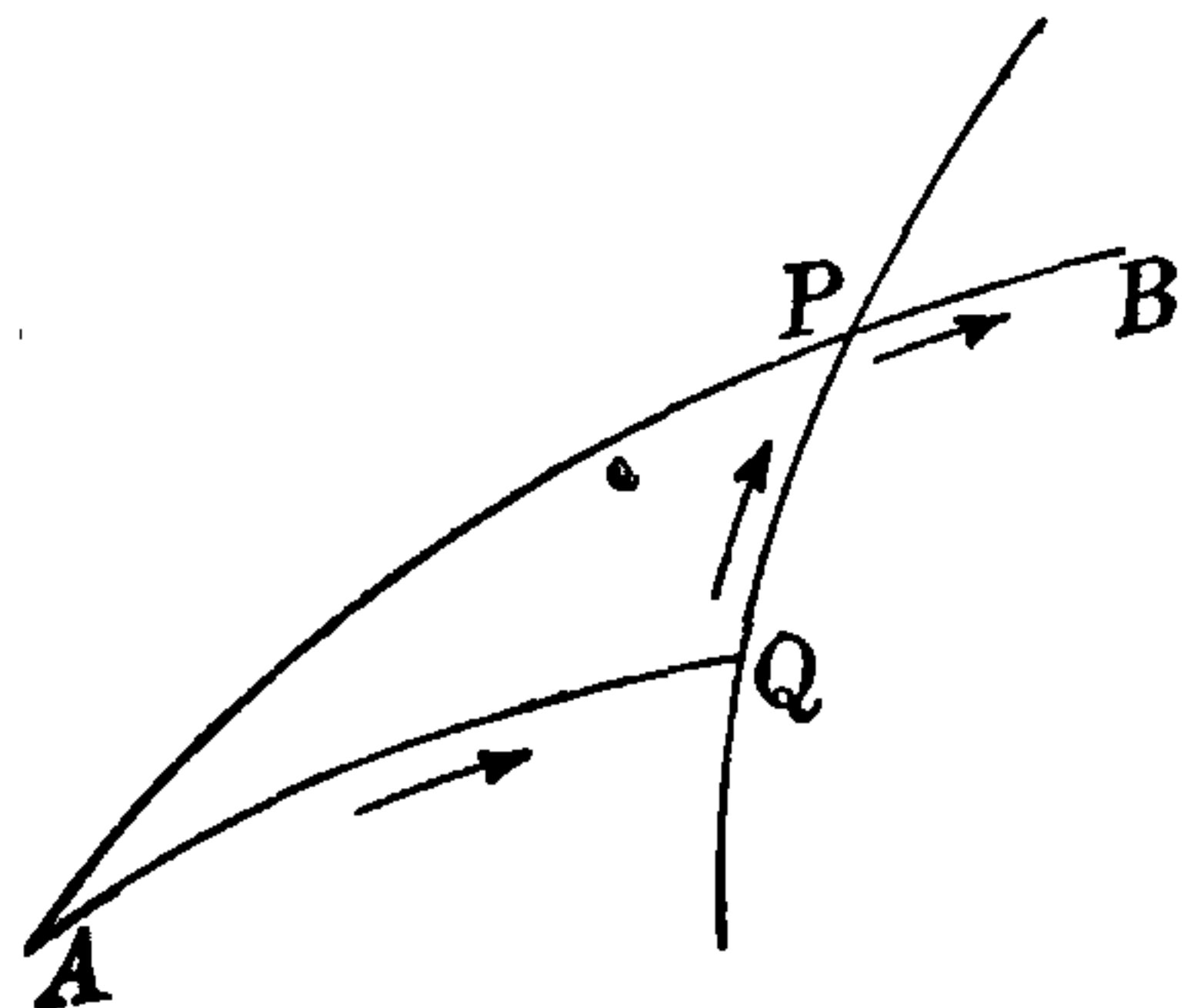
$$\int_{PB} = \frac{2a}{a+2} \int_0^1 \left\{ [(a+2)z - 2]^2 + [(a+2)z - 2]^3 \right\} dz$$

其主量爲  $-\frac{2a}{3}$ , 故  $J'(0) = -\frac{2}{3}$

而  $J(\alpha)$  於  $\alpha$  接近於零時亦爲負. 此例足表明更有求一普遍  
 判定式之必要也.

### 魏氏 (Weierstrass) 之條件.

函數  $E$ . 在  $AB$  由線上取點  $P$   
 其位標爲  $x_2, y_2$ , 設  $y = f_1(x)$  爲  $C_1$   
 之方程式通過  $P$  點者, 并在  $(x_2 - k,$   
 $x_2 + k)$  間隔內賦有一二次引數,  
 設  $Q$  爲  $C_1$  曲線上之一點, 其橫量  
 爲  $x_2 - h$ ,  $h$  爲一正數比  $k$  小者





$$(x_0 < x_2 - h < x_2 < x_1)$$

$$\text{令 } \omega(x_1, h) = (x - x_0) \frac{f_1(x_2 - h) - f(x_2 - h)}{x_2 - h - x_0}$$

而  $AQ$  之方程式爲

$$y = f(x) + \omega(x, h) \quad x_0 \leq x \leq x_2 - h$$

當  $h$  趨近於零時  $AQ$  之限爲  $AP$ , 而積分

$$\int_{AQ} F(x, y, y') dx$$

爲  $h$  之函數  $I(h)$ , 其引數當  $h=0$  爲

$$I'(0) = [y'_2 - f'_1(x_2)] F'_y(x_2, y_2, y'_2) - F(x_2, y_2, y'_2)$$

因  $AP$  爲極端線之弧, 而  $Q$  點之位標爲

$$x = x_2 - h, \quad y = f_1(x_2 - h)$$

由此得

$$\delta x = -\delta h, \quad \delta y = -f'_1(x_2) \delta h$$

$y'_2$  代表  $AP$  上  $P$  點切線之角係數.

設  $I_1(h)$  爲沿  $QP$  弧之積分, 即

$$I_1 = \int_{x_2-h}^{x_2} F[x, f_1(x), f'_1(x)] dx$$

其引數  $I'_1(0)$  爲  $F[x_2, y_2, f'_1(x_2)]$ , 於是令

$$J(h) = \int_{AQP} F(x, y, y') dx,$$

吾人可書

$$\left(\frac{dJ}{dh}\right)_0 = F(x_2, y_2, p_2) - F(x_2, y_2, y'_2) - (p_2 - y'_2) F'_y(x_2, y_2, y'_2)$$

$p_2$  爲  $C_1$  曲線之切線角係數, 右端爲  $x, y, y', p$  四變數之函數爲

魏氏定理之主要條件,吾人以  $E$  代此函數,即

$$E(x, y, y', p) = F(x, y, p) - F(x, y, y') - (p - y')F'_{y'}(x, y, y')$$

前原式可書爲

$$\left(\frac{dJ}{dh}\right)_0 = E(x_2, y_2; y'_2, p_2)$$

由此得一新必要條件,吾人謂之爲魏氏條件(Weierstrass).欲  $AB$  線使  $J$  爲極小,必也函數

$$E[x, f(x); f'(x), p]$$

於  $p$  爲任何有限值時恆不爲負,  $x$  則由  $x_0$  變至  $x_1$ ; 簡言之,即  $E$  在  $AB$  線上任何點不能爲負也.

蓋設在  $AB$  上之  $P(x_2, y_2)$  點,又於  $p = m$  時  $E$  爲負,即

$$E(x_2, y_2; y'_2 m) < 0$$

取  $C_1$  之方程式爲

$$y = f(x) + (m - y'_2)(x - x_2) = f_1(x)$$

此線在  $P$  點與直線其角係數爲  $m$  者相切  $f_1(x)$  之相當積分  $J(h)$  之引數於  $h = 0$  爲負.於是吾人可尋出一數  $l$  接近於零者,俾有

$$J(l) < J(0)$$

於是吾人可得一路線  $AQPB$ , 使下各積分

$$\int_{AQ} F(x, y, y') dx + \int_{QP} + \int_{PB}$$

之和小於積分之沿  $AB$  弧計算者,即此足證明  $AB$  不能給予積分以極小值也.(依二次變分引言.)

故吾人應於勒加二氏條件之外加以新條件,即

$$F(x, y; y', p) \geq 0$$

沿  $AB$  弧且當  $P$  為任何有限值時皆然

對於極大則須變不等號為(小於).

注意: 依戴氏公式得

$$E(x, y; y', p) = \frac{(p - y')^2}{1.2} F''_{y'^2}[x, y, y' + \theta(p - y')] \quad 0 < \theta < 1$$

由此式觀之, 如  $F''_{y'^2}(x, y, u)$  於  $u$  為有限值時在  $AB$  弧上任何點不為負, 則魏氏之條件亦可合, 但此非使魏氏條件能合之必要條件也.

例. 設  $F = y'^2 + y'^3$  對於特殊極端線  $y = 0$ , 其魏氏條件為

$$E = p^2 + p'^3 = p^2(p + 1)$$

此時如令  $p = -2$ , 則  $E$  為負, 故  $J$  不能有極小值與前所得結果符合.

據布爾沙 (Bolza) 氏意, 魏氏條件亦不能確定積分之極小

譬設  $F = ay'^2 - 4byy'^3 + 2bxy'^4$

$a, b$  為兩個正數常數, 此時尤拉方程式為

$$y''(2a - 24byy' + 24bxy'^2) = 0$$

故極端線為直線. 取  $A(0,0)$   $B(1,0)$  兩點,  $y = 0$  聯此兩點者亦為一極端線, 且吾人易證明對於此線, 勒加二氏之條件為已合, 而魏氏條件為

$$E(x, y, y', p) = p^2(u + 2bxp^2) \text{ 當 } y=0$$

於  $x$  由 0 變至 1 時亦為已合, 但  $y=0$  不能給予  $J$  一極小值, 蓋吾人能取一斷線  $APB$ ,  $P$  點之位標為  $h, k$  均為正數且甚小, 俾沿此斷線所得  $J$  之值為負故也. ( $k$  可小至吾人所欲小.)

### 極端線場 充足條件

**定義.** 以上所論者皆非充足條件, 而欲求極小值之充足條件必先明極端線場 (Champs d' Extrémales) 之意義.

命  $G$  為一極端線, 凡一組之極端線含有一助變量者成為一族 (Faisceau). 在  $R$  區域內如有一部分單式 (Connexe) 及有限平面  $P$ , 吾人稱  $P$  為極端線場, 即有一族極端線在此場內任於一點只能通過一線. 設  $u(x, y)$  為此  $G$  線上  $(x, y)$  點之切線角係數與其偏引數  $u'_x, u'_y$ , 并在  $P$  場為連續函數. 於是所有族之各線均為微分方程式  $y' = u(x, y)$  之積分曲線. 由此得

$$y'' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot u(x, y)$$

將  $y'$  及  $y''$  代入 尤拉 方程式, 則得

$$(48) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} u \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial u} u + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

此條件應為  $P$  場內任一點所含. 故函數  $u(x, y)$  應為此式之積分在  $P$  場內與其偏引數均為連續的. 反而言之, 設 (48) 式有一解, 并其偏引數在  $P$  域內均為連續的, 則此域為一線場, 因微分方程式

$$y' = u(x, y)$$

定一族曲線，且於  $P$  之任一點只能通過一線故也。

設  $G_0$  爲一極端線弧聯  $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$  兩點者，其方程式  $y = f(x)$  在  $(x_0, x_1)$  內屬於 (I) 類函數，再以前法俾直線  $x = x_0, x = x_1$  曲線  $y_1 = f(x) + \epsilon, y_2 = f(x) - \epsilon$  定一區域  $R_\epsilon$ ，吾人謂  $R_\epsilon$  爲線場，即可取  $\epsilon$  甚小，俾  $R_\epsilon$  完全含於全線場  $P$  之內，此種可能之充足條件爲 (48) 式須有一解在  $R_\epsilon$  區域內，并其偏引數均爲連續的，且此解應於  $y = f(x)$  化爲  $f'(x)$ 。凡在  $(x_0, x_1)$  間隔內之極端線弧能合乎勒加二氏條件者，必屬於一線場。蓋吾人於研究加氏條件之幾何意義時，已知尤拉方程式有無窮解含一助變量  $\lambda$ ，即  $\phi(x, \lambda)$  且有  $\phi(x, 0) = f(x)$ ，又合乎下之二條件：

1° 當  $x$  由  $x_0$  變至  $x_1$ ， $\lambda$  由  $\lambda - k$  變至  $\lambda + k$  時  $\psi(x, \lambda)$  及其一二次偏引數均爲連續的。

2° 引數  $\phi'_\lambda(x, 0)$  在  $(x_0, x_1)$  間隔內異於零

吾人今往證明函數  $\phi(x, \lambda)$  定一線場極端線  $AB$  屬焉。

蓋  $\phi'_\lambda(x, 0)$  既在間隔  $(x_0, x_1)$  內不爲零，又因  $\phi'_\lambda(x, \lambda)$  爲  $x$  及  $\lambda$  之連續函數，故吾人可求得一正數  $\rho$  俾  $\phi'_\lambda(x, \lambda)$  在  $\Delta$  區域內亦不爲零。  $\Delta$  區有如下定

$$x_0 \leq x \leq x_1, \quad -\rho \leq \lambda \leq \rho$$

當  $x$  由  $x_0$  變至  $x_1$ ， $\lambda$  由  $-\rho$  變至  $+\rho$  時， $m$  點以  $[x, y = \phi(x, \lambda)]$  爲位標者畫一區域  $R'$  圍繞  $G_0$  線， $R'$  之界爲

$$\begin{aligned} x = x_0, & \quad x = x_1 \\ y = \phi(x, -\rho), & \quad y = \phi(x, \rho) \end{aligned}$$

今將證明於此區域之任一點只能通此種線族之一。

蓋後在  $R'$  內  $\phi'_\lambda(x, \lambda) > 0$ , 而與  $x$  以一定值  $x_2$  介乎  $x_0$  及  $x_1$  之間者如將  $\lambda$  由  $-\rho$  變至  $+\rho$ , 則函數  $\phi(x, \lambda)$  由  $\phi(x, -\rho)$  增至  $\phi(x, +\rho)$  而以  $x_2, y_2 = \phi(x_2, \lambda)$  爲位標之點畫一直線  $P_1P_2$  與  $oy$  平行. 每與  $x$  一值  $x_2$  即有一段直線  $P_1P_2$  與之相當, 如  $x_2$  由  $x_0$  變至  $x_1$  時, 則  $P_1P_2$  線段所畫之一部分平面適爲  $R'$  區, 依此每在  $R'$  取一點  $(x, y)$  必有  $\lambda$  一值與之相當介乎  $-\rho$  及  $+\rho$  者. 設  $\lambda = \psi(x, y)$  爲此根, 引數  $\phi'_\lambda(x, \lambda)$  於  $\lambda = \psi(x, y)$  時既不爲零, 則準渾函性質及對於  $\phi(x, \lambda)$  之假設, 函數  $\psi$  應爲連續的, 且其偏引數在同一區域  $R'$  內亦然, 而經過  $R'$  內  $(x, y)$  點曲線之切線角係數  $u(x, y)$  等於  $\phi'_x(x, \lambda) = \phi'_x[x, \psi(x, y)]$ , 又因  $\phi$  之二級引數與  $\psi$  之一級引數均爲連續的, 於是  $u'(x, y)$  在  $R'$  區域內之一級偏引數  $u'_x, u'_y$  亦爲連續無疑, 故  $R'$  爲極端線場

現設  $\epsilon$  爲下二函數

$$\phi(x, \rho) - \phi(x, 0) \quad \phi(x, 0) - \phi(x, -\rho)$$

之低界 (borne intérieure)  $x$  由  $x_0$  變至  $x_1$ , 此低界  $\epsilon$  爲正, 因前函數在  $(x_0, x_1)$  間隔內爲連續的且不爲零故也.

以下之不等式

$$x_0 \leq x \leq x_1; \quad f(x) - \epsilon \leq y \leq f(x) + \epsilon$$

所定之區域  $R_\epsilon$  全含於  $R'$  場內, 故  $R_\epsilon$  亦爲一場圍繞  $G_0$ .

**魏氏定理 (Théorème de Weierstrass).** 設  $G_0$  爲一極端線弧, 對於此弧 勒加二氏 之條件均設爲已合. 如吾取  $\epsilon$  甚小, 則

可使  $R_\epsilon$  區域爲圍繞  $G_0$  弧之線場, 凡在  $R_\epsilon$  之 (I) 類曲線  $\Gamma$  聯  $A, B$  兩點者, 其方程式之形爲

$$y = f(x) + \omega(x)$$

$\omega(x)$  在間隔  $(x_0, x_1)$  內爲 (I) 類函數, 且合乎下之各條件:

$$\omega(x_0) = 0, \omega(x_1) = 0, |\omega(x)| < \epsilon, \text{ 當 } x_0 < x < x_1.$$

欲極端線  $G_0$  給予一極小值, 積分  $J_{G_0}$  應較  $J_\Gamma$  爲小,  $\Gamma$  形式可以任意, 但須合乎上述各條件, 此問題困難之點在比較兩積分之值沿不同之路線而計算者. 魏氏 將此問題解決, 卽以一個積分沿  $\Gamma$  路線計算者, 以表示  $J_\Gamma$  與  $J_{G_0}$  之差. 欲得 魏氏 公式先證明 希諾倍 (Hilbert) 之小引如下:

小引. 設  $P$  爲一極端線場; 如  $u(x, y)$  爲此場之相當函數, 則曲線積分

$$(49) \quad I = \int [F(x, y, u) - uF'_u(x, y, u)] dx + F'_u(x, y, u) dy$$

沿場內任一閉曲線而計算者爲零.

蓋此積分爲零之條件爲

$$\frac{\partial F}{\partial y} - u \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} - u \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

與 (48) 式無異,  $u(x, y)$  既爲  $P$  場之相當函數, 故能合此式.

今將 希氏 小引應用於  $G_0$  與  $\Gamma$  所成之路線, 沿  $G_0$  者  $u[x, f(x)] = f'(x)$ , 於是吾人得

$$\int_{G_0} F(x, y, y') dx = \int_\Gamma [F(x, y, u) + (y' - u)F'_u(x, y, u)] dx$$

於是

$$J_{\Gamma} - J_{G_0} = \int_{\Gamma} [F(x, y, y') - F(x, y, u) - (y' - u)F'_u(x, y, u)] dx$$

即

$$(50) \quad J_{\Gamma} - J_{G_0} = \int_{\Gamma} E(x, y; y', u) dx$$

$E$  即前所得之魏氏函數也。此式稱爲魏氏公式在此式中  $y'$  代表  $\Gamma$  線上切線之角係數，而  $u(x, y)$  爲場內經過  $(x, y)$  點曲線  $G_0$  之切線角係數。

**充足條件** 如以  $x, y, p$  爲自變數之函數  $E(x, y; u, p)$  在  $R_e$  區內任一點及於  $p$  爲任何有限值時保持其常號，則  $J_{\Gamma} - J_{G_0}$  之號亦可決定； $u$  在  $E$  函數中代爲線場之相當函數  $u(x, y)$ 。如  $E$  恆爲正，則有  $J_{\Gamma} > J_{G_0}$  吾人可得定理如次：

如函數  $E(x, y; u, p)$  在  $R_e$  區內任一點  $(x, y)$ ，又於  $p$  爲任何有限值時爲正，則極端線  $G_0$  可給予  $J$  一極小值。

欲知此條件適合與否，必須將求出包圍  $G_0$  線場之相當函數  $u(x, y)$ ，但亦可另用一條條件以代之，較原有條件意義稍狹而於應用則甚便，因可不必求函數  $u(x, y)$  故也。吾人由戴氏 (Taylor) 公式得

$$(51) \quad E(x, y; u, p) = \frac{(p-u)^2}{1 \cdot 2} F''_{y',2}[x, y, u + \theta(p-u)]$$

$$= (p-u)^2 G(x, y; p)$$

如二次偏引數  $F''_{y',2}$  在  $R_e$  區任一點，又於  $p$  爲任何有限值時爲正，則  $E(x, y; u, p)$  必爲正，吾人可由此求出  $G_0$  能給予  $J$  一極小值之充足條件。



設  $C$  爲一閉曲線將  $G_0$  包含於內,且與  $G_0$  無交點.  $C$  所界之一部平面成爲  $G_0$  弧之區域,吾人可選擇  $\epsilon$  甚小,俾  $R_0$  亦可全含於此區域內. 如是則  $C$  所界區域可合乎某條件時,  $R_0$  亦可合乎此種同一條件無疑. 設畢,吾人可得定理如次:

如  $F''_{y,2}$  在  $G_0$  之某區域,且於  $p$  爲任何有限值時爲正,則  $G_0$  可令  $J$  爲極小.

蓋  $F''_{y,2}[x, f(x), f'(x)] = R(x)$  當  $x$  由  $x_0$  變至  $x_1$  時爲正,是勒氏 (Legendre) 條件爲已合. 原設加氏 (Jacobi) 條件亦爲已合. 於是吾人可求出一圍繞  $G_0$  之線場,俾在此場中於  $p$  爲任何有限值時  $E$  恆爲正 (依 51 式) 吾人恆有  $J_{G_0} < J_{\Gamma}$

但須注意此種條件非必要條件,蓋  $G(x, y, p)$  可在  $R_0$  區內於  $p$  爲任何有限值時爲正,不必亦有  $F''_{y,2}(x, y, p)$  爲正故也.

強性極小與弱性極小 (Minimum Fort et Minimum Faible).

如在  $\Gamma$  上以  $x$  爲橫量之點,  $y'$  之值與  $f'(x)$  之值極相近,又因  $u(x, y)$  與  $f'(x)$  亦相近,故  $u + \theta(y' - u) - f'(x)$  之值可以甚小,由 (51) 式觀之,則  $E(x, y; u, y')$  與  $F''_{y,2}[x, f(x), f'(x)]$  之號相同,於是吾人對於極端值可區別爲強性與弱性兩種.

設  $\omega(x, a)$  及其引數  $\omega'(x, a)$  在  $(x_0, x_1)$  間隔內爲連續的,而  $\omega$  在界值時,無論  $a$  何如恆爲零,而當  $a=0$  時爲全等式.

吾人謂  $\omega(x, a)$  爲弱性變分,如其每與一正數  $\epsilon$ , 吾人能尋出一數  $\delta$  與之相當,俾於  $x_0 \leq x \leq x_1$  時有

$$(52) \quad |\omega(x, \alpha)| < \epsilon, \quad |\omega'_x(x, \alpha)| < \epsilon$$

$\alpha$  之絕對值, 則小於  $\delta$ . 如  $\omega$  只能合乎第一條件, 則  $\omega(x, \alpha)$  稱爲強性變分, 亦即當  $\alpha$  趨近於零時,  $\omega'_x(x, \alpha)$  不受任何限制也.

吾人以前所用之變分, 其形爲  $\alpha \eta(x)$  者均爲弱性變分  $\eta(x)$  之形式可以任意. 蓋設  $M$  爲  $\eta(x)$  及  $\eta'(x)$  在  $(x_0, x_1)$  間隔內之極大, 只須有  $M|\alpha| < \epsilon$ , 則 (52) 之兩個條件均可合.

反之, 變分

$$\omega(x, \alpha) = \alpha \sin \left[ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{a^n} \right]$$

中  $n > 1$  爲強性變分, 因其引數

$$\omega'_x(x, \alpha) = \frac{1}{a^{n-1}} \cos \left[ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{a^n} \right] (2x - x_0 - x_1)$$

之絕對值於  $\alpha$  小於任何正數  $\rho$  時, 可比任何數爲大故也.

此種區別加以幾何說明, 設  $G$  與  $\Gamma$  爲方程式

$$y = f(x)$$

$$y = f(x) + \omega(x, \alpha)$$

所代表之曲線, 如取此兩線上同橫量  $x$ , 兩相當點之距離, 此距離於  $\alpha < \delta$  時小於  $\epsilon$ , 即 (52) 式之第一條件也. 無論變分之性爲強爲弱, 此條件皆合. 但當  $\omega(x, \alpha)$  爲弱性變分時, 不獨兩相當點之距離爲無窮隣近, 而且此兩點切線所成之角亦爲無窮小, 在強性變分則不然, 此時兩曲線相當點切線所成之角可不趨近於零.

因變分有強弱性之分,吾人對於極小亦可加以此種區別.

吾人謂極端線  $G_0$  給予積分  $J$  一個弱性極小,如其有一正數  $\epsilon$  使積分

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)] dx$$

小於  $\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)] dx$

$\omega(x)$  爲  $(x_0, x_1)$  間隔內之 (I) 類函數可任爲何種形式,且合下之各條件者,

$$\omega(x_0) = 0, \omega(x_1) = 0, |\omega(x)| < \epsilon, |\omega'(x)| < \epsilon$$

$x$  應介乎  $x_0$  及  $x_1$  之間.

如最後之一條件未合,吾人謂  $G_0$  給予積分一個強性極小,審此即易知勒加二氏之條件不足以確定強性極小.因吾人得此二條件時皆根據弱性變分之論也.反之,魏氏條件係根據於強性變分而得.

**定理.** 凡一極端線弧其合乎勒加二氏條件者,至少可給予積分  $J$  一個弱性極小

蓋依假設,函數  $R(x) = F''_{y',2}[x, f(x), f'(x)]$  當  $x$  由  $x_0$  變至  $x_1$  時爲正,  $F''_{y',2}$  又爲連續的,故吾人可求得一正數  $\delta$ , 俾

$$F''_{y',2}[x, f(x) + h, f'(x) + k] > 0 \quad \text{當 } x_0 \leq x \leq x_1$$

而  $h, k$  之絕對值則小於  $\delta$ , 設  $\Gamma$  爲  $G_0$  之隣近曲線,其方程式爲  $y = f(x) + \omega(x)$ , 在 (51) 式中  $p$  應易爲  $y'$ , 而取

$$u + \theta(y' - u) = u[x, f(x) + \omega(x)] + \theta\{f'(x) + \omega'(x) - u[x, f(x) + \omega(x)]\}$$

因  $u[x, f(x)] = f'(x)$ , 此式右端亦可書為

$$\begin{aligned} & f'(x) + \theta\omega'(x) + (1 - \theta)\{u[x, f(x) + \omega(x)] - u[x, f(x)]\} \\ & = f'(x) + \theta\omega'(x) + (1 - \theta)\omega(x)u'_y[x, f(x) + \theta, \omega(x)] \end{aligned}$$

設  $\mu$  為  $|u'_y|$  在區內之高界, 又取一正數  $\epsilon$ , 俾

$$\epsilon(1 + \mu) < \delta$$

如  $|\omega(x)|$  及  $|\omega'(x)|$  在  $(x_0, x_1)$  界內均小於  $\epsilon$ , 則有

$$|y - f(x)| < \delta, \quad |u + \theta(y' - u) - f'(x)| < \delta$$

沿  $\Gamma$  曲線皆然, 於是函數  $E(x, y; y', u)$  沿此曲線為正, 故  $J_\Gamma - J_{G_0}$  亦為正, 即  $J$  有一弱性極小.

對於強性極小定理可如是述之.

**定理.** 凡一極端線弧  $G_0$  其合乎勒加二氏條件者, 能給予積分  $J$  一個強性極小, 如其引數  $F''_{y^2}$  在  $G_0$  之某區域內, 又於  $p$  任為何有限值時恆為正.

**例.** 設  $F = y'^2(y' - 1)^2$ , 則

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 4y'^3 - 6y'^2 + 2y' = 2y'(y' - 1)(2y' - 1)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 12y'^2 - 12y' + 2 = 12(y' - m')(y' - m'')$$

$m'$  介於 0 與  $\frac{1}{2}$  之間, 而  $m''$  介於  $\frac{1}{2}$  與 1 之間者, 此時極端線為直線, 凡一線之角係數為  $m$  者屬於一線場為此線之平行線所組成, 相當函數  $u(x, y)$  之值為  $u(x, y) = m$ . 已與  $xy$  面上之兩點  $A, B$ , 則  $AB$  直線為聯此兩點之唯一極端線, 此線恆合乎

加氏(Jacobi)條件,而勒氏條件必須  $m'$  或大於大根  $m''$  時乃可適合.

設  $R_0$  爲  $AB$  線之區域,亦即爲相當函數  $u(x, y) = m$  所定之線場.

魏氏函數爲

$$\begin{aligned}
 E(x, y; m, p) &= F(x, y, p) - F(x, y, m) - (p - m)F'_y(x, y, m) \\
 &= (p^4 - 2p^3 + p^2) - (m^4 - 2m^3 + m^2) \\
 &\quad - (p - m)(4m^3 - 6m^2 + 2m) \\
 &= p^4 - m^4 - 2(p^3 - m^3) + (p^2 - m^2) \\
 &\quad - (p - m)(4m^3 - 6m^2 + 2m) \\
 &= (p - m)[(p + m)(p^2 + m^2) - 2(p^2 + pm + m^2) \\
 &\quad + p + m - 4m^3 + 6m^2 - 2m] \\
 &= (p - m)[p^3 + p^2(m - 2) + p(1 - 2m + m^2) \\
 &\quad - 3m^3 + 4m^2 - m] \\
 &= (p - m)^2[p^2 + 2p(m - 1) + 3m^2 - 4m + 1] \\
 &= (p - m)^2[p^2 + 2p(m - 1) + (m - 1)(3m - 1)] \\
 &= (p - m)^2[(p + m - 1)^2 + 2m(m - 1)]
 \end{aligned}$$

如  $m$  爲負或大於 1, 則  $E$  於  $p$  任爲有限值時均爲正, 故得下之結果:

1° 如  $m < 0$  或  $m > 1$ , 則極端線  $AB$  給予積分  $J = \int_{x_0}^{x_1} y'^2(y' - 1)^2 dx$  一個強性極小,  $m = 0$  或  $m = 1$  亦然. 因此時  $J$  爲零, 而沿任何曲線經過  $A, B$  兩點者所計算  $J$  之值均爲正故也.



2° 如  $0 < m < m'$  或  $m'' < m < 1$ , 則  $AB$  線給予積分  $J$  一個弱性極小.

3° 如  $m' \leq m \leq m''$ , 此時無極端值, 因勒氏之條件未滿足故也.

此例為布爾沙 (Bolza) 氏所舉吾人由此可得一極有興趣之注意, 即  $F''_{y^2} = 12(y' - m')(y' - m'')$  雖不能於  $y'$  為任何有限值時為正而魏氏函數  $E(x, y, m, y')$  當  $m$  為負或大於零時, 能於  $y'$  任為何有限值時為正也. 故知勒氏條件非強性極小之必要條件也.

中華民國二十四年六月初版

二八八七上

周

\*\*\*\*\*  
\* 版 權 所 有 \*  
\* 翻 印 必 究 \*  
\*\*\*\*\*

大學叢書  
(教本) 變分法 一冊  
(52832平)

平裝 每冊定價大洋柒角  
外埠酌加運費匯費

著 者 何 魯

發 行 人 王 雲 五  
上海河南路

印 刷 所 商 務 印 書 館  
上海河南路

發 行 所 商 務 印 書 館  
上海及各埠

(本書校對者胡達聰)

