计算尺的使用与原理

JISUANCHI DE SHIYONG YU YUANLI

上海人民出版社

统一书号：13171·165
定　价：0.28 元

计算尺的使用与原理

钱 立 豪

上 海 人 民 出 版 社

计算尺的使用与原理
钱立豪
上海人民出版社出版
（上海绍兴路5号）
新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 4.625　字数 99,000
1976年3月第1版　1976年3月第1次印刷
统一书号：13171·165　定价：0.28 元

毛主席语录

我们能够学会我们原来不懂的东西。我们不但善于破坏一个旧世界，我们还将善于建设一个新世界。

读书是学习，使用也是学习，而且是更重要的学习。

鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义。

前　　言

在毛主席无产阶级革命路线的指引下，我国社会主义革命和社会主义建设迅速发展．特别是无产阶级文化大革命和批林批孔运动以来，工农业生产更是突飞猛进．因此各条战线的计算工作也越来越繁重．我们上海计算尺厂在毛主席关于“独立自主、自力更生”方针的指引下，近几年来在计算尺的品种、数量、质量等方面都有了很大的发展，以适应工农业生产日益增长的需要．

本书深入浅出地介绍了计算尺常用尺度的各种用途、计算方法和原理，对计算尺的读数、定位方法、尺度函数以及计算尺的运算技巧等阐述得较为详细．本书力图使初学计算尺的读者能够较快地学会使用计算尺；同时使初步掌握了计算尺的读者能够熟练各种运算方法，提高运算技巧，并进一步了解计算尺的原理，从而可以根据自己工作的需要，设计各种专用计算尺。

本书在编写过程中曾得到有关单位领导和同志们的热情支持和帮助，并提出了不少宝贵意见，在此表示感谢．

本书中如有错误或不足之处，请读者批评指正。

目　录

第一章　基本知识

计算尺携带方便，使用简捷，对于包含乘方、开方以及三角函数等等的乘除多步运算，计算尤其显得简便．因此，它在工程技术、军事、数学等各方面应用很广．下面我们先介绍一下有关计算尺的基本知识．

一、计算尺的构造

计算尺由尺身、滑尺和滑标等三部分组成(图 1-1)．

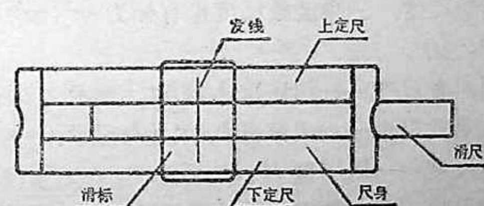


图　1-1

(1) 尺身：计算尺的固定部分，包括上定尺和下定尺．

(2) 滑尺：在上定尺和下定尺之间可以滑动的部分．

(3) 滑标：由透明材料制成，套在尺身外面，可以左右移动．滑标中间有一条垂直于尺身的细长红线，叫做发线．它是用来读数或对齐数字的．

计算尺尺面上有许多刻度，这些刻度有规则地排列成长条形，每一长条刻度叫做一条尺度，尺度的名称都在左端用字

母标示。由于所选用的尺度和尺度的排列不同，计算尺就有各种型号。各种型号的计算尺上，常用的尺度如下：

基本尺度——用字母 C, D 标示，通常也称 C 尺，D 尺。

倒尺度——用字母 I 标示。如 CI 尺是 C 尺的倒尺度，DI 尺是 D 尺的倒尺度。

折尺度——用字母 F 标示。如 CF、DF、CIF 分别为 C 尺、D 尺、CI 尺的折尺度。

平方根尺度——用字母 A、B 标示。

平方尺度——用字母 sq 标示。

立方根尺度——用字母 K 标示。

立方尺度——用字母 cu 标示。

三角函数尺度——用字母 S、T、SRT 标示。S 为正弦尺度(余弦尺度)，T 为正切尺度(余切尺度)，SRT 为小角度的正弦、正切尺度。三角函数尺度也有标为 sin(cos)、tg(ctg) srt(cos ctg) 的。

常用对数尺度——用字母 L 或 $\lg^{-1}$ 标示。

自然对数尺度——用字母 ln 或 LL 标示。

矢量尺度——用字母 H、H' 标示。

这些尺度一般分散安排在计算尺的两面。尺度的长通常为 12.5 厘米或 25 厘米。

二、读数方法

要掌握计算尺，必须先学会读数，就是读出尺上的刻度数。计算尺上的读数方法与一般厘米尺的读数方法基本上是相同的。但必须注意，计算尺除 L 尺外其余尺度的刻度都是不均匀的。在计算尺上 C、D 尺是基本尺度，只要学会了 C、D 尺的读数方法，其它尺度的刻度数就容易读出了。C、D 尺的

刻度是相同的，所以只要研究 D 尺上的刻度就可以了。

在 25 厘米长的计算尺上，从 D 尺一般能读得 3~4 个有效数字*(D 尺的左边一段可读得 4 个有效数字，右边一段可读得 3 个有效数字)，最后一个有效数字一般是凭目力估计的。在 12.5 厘米长的计算尺上，从 D 尺能读得 2~3 个有效数字，最后一个有效数字一般也是凭目力估计的。

我们先来看 25 厘米长的计算尺。移动滑标，使发线盖着 D 尺最左边的一条刻度线，这时就读1 (D 尺上的 1，称为左指标)。将滑标顺次向右移，当发线盖着标有数字 2, 3, 4, ……, 10 的各条刻度线时，就读 2, 3, 4, ……, 10(D 尺上的 10，称为右指标)，见图 1-2。

图 1-2

在每两个数字之间，即 1 和 2，2 和 3，……，8 和 9 之间都有九条较长的刻度线，相邻两条刻度线所表示的数相差 0.1，它们依次表示 1.1, 1.2, 1.3, ……, 1.9; ……; 9.1, 9.2, ……, 9.9 (图 1-3)。

图 1-3

* 近似数里从第一个不是零的数字起到用近似方法获得的那个数字止，所有的数字都叫做有效数字。本书所说的有效数字一般不包括数尾的零。例如，1405000, 1405, 14.05, 0.001405, 它们都具有相同的四个有效数字 1405。

在1与1.1, 1.1与1.2, ……, 1.9与2之间各有九条刻度线，相邻两条刻度线所表示的数相差0.01，它们依次表示1.01, 1.02, ……, 1.09; 1.11, 1.12, ……, 1.19; ……; 1.91, 1.92, ……, 1.99(图1-4)。

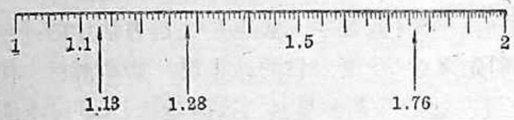


图 1-4

在2与2.1, 2.1与2.2, ……, 3.9与4之间各有四条刻度线，相邻两条刻度线所表示的数相差0.02，依次表示2.02, 2.04, 2.06, 2.08; ……; 3.92, 3.94, 3.96, 3.98 (图1-5)。

图 1-5

在4与4.1, 4.1与4.2, ……, 9.9与10之间各有一条刻度线，依次表示4.05, 4.15, ……, 9.95 (图1-6)。

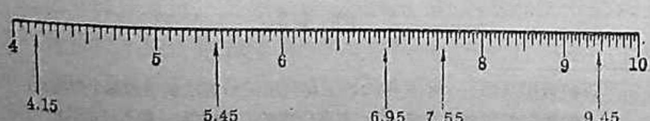


图 1-6

当发线在两条刻度线之间时，读数需凭目力估计。

例如，当发线在1与1.01之间，约向右五分之四小格时，就读1.008，当发线在1.81与1.82的中间时，就读1.815 (图1-7)；

图 1-7

当发线在2与2.02之间，约向右四分之一小格时，就读2.005，当发线在4与4.05中间时，就读4.025 (图1-8)；

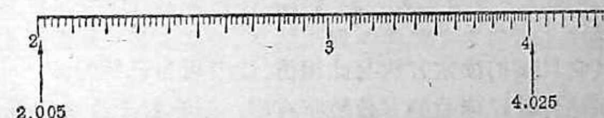


图 1-8

当发线在9与9.05之间，约向右五分之三小格时，就读9.03 (图1-9)。

图 1-9

在12.5厘米长的计算尺上，C、D尺1与1.1之间，1.1与1.2之间，……，1.9与2之间各有四条刻度线，相邻两条刻度线所表示的数相差0.02; 2与2.1之间，2.1与2.2之间，……，4.9与5之间各有一条刻度线，依次表示2.05,

2.15, ……, 4.95; 5 与 6 之间, 6 与 7 之间, ……, 9 与 10 之间各有九条刻度线, 依次表示 5.1, 5.2, ……, 5.9; 6.1, 6.2, ……, 6.9; ……; 9.1, 9.2, ……, 9.9.

当发线在两条刻度线之间时, 读数也要凭目力估计.

例如, 发线盖着 1.4, 然后向右移动 1 小格, 即读 1.42; 如果再将发线向右移动大约二分之一小格, 即读 1.43; 当发线在 2.05 约向右五分之三小格时, 即读 2.08; 当发线在 5.3 约向右五分之二小格时, 即读 5.34 (图 1-10).

图 1-10

其它尺度的读数方法与此相仿, 读者可自己练习.

虽然计算尺读数的有效数字有限, 但是对于许多实际问题的计算, 3~4 个有效数字已经够用了. 下面我们举个例子来说明.

某化肥厂新建一个圆柱形氨水池, 量得底面直径是 3.52 米, 高是 5.62 米, 求氨水池的容积是多少立方米?

解: 设该圆柱形氨水池的容积为 V, 取 $\pi=3.14$, 则

$$V=\pi r^2 h=3.14\times\left(\frac{3.52}{2}\right)^2\times 5.62.$$

用笔算, 得 $V=54.663$ 立方米(取五个有效数字), 用计算尺计算, 得 $V=54.7$ 立方米. 相对误差

$$\Delta=\frac{54.7-54.663}{54.7}=0.000675<\frac{1}{1000}.$$

这样的精确度已经完全能够满足实际的需要.

三、计算尺的操作和保养

使用计算尺时, 一般用左(右)手手指轻持计算尺的上下两侧面, 用右(左)手来回推送滑尺或滑标. 移动滑标时, 滑标无弹簧的一侧应紧靠尺身, 以免发线倾斜.

基本操作方法如下:

(1) 使滑尺尺度甲上的数 c 对准尺身尺度乙上的数 d. 进行这种操作时, 先把滑标发线对准乙尺上的 d, 再移动滑尺, 使甲尺上的 c 也在发线下. 以后在图上, 这类操作我们用箭头表记为↙;

(2) 已知尺度甲上的数 c, 求在尺度乙上对应的数 d. 进行这种操作时, 只需移动滑标, 使发线盖着甲尺上的 c, 在乙尺上读得 d. 这类操作, 在图上我们用箭头表记为↓, 答数用记号▲标出.

例如, 抽动滑尺, 使 C 尺 1 (左指标)对准 D 尺上 d; 移动滑标使发线盖着 C 尺上 c, 在滑标发线下读 D 尺得 y, 这样的运算过程可用图表示如下:

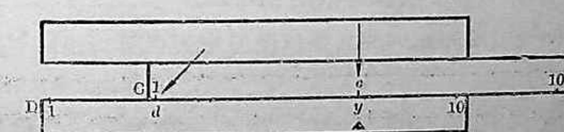


图 1-11

计算尺是一种比较精密的工具, 必须注意维护和保养.

(1) 计算尺不用时, 要放在匣子或套子里, 不使受潮、受热, 以防变形.

(2) 尺面如有污垢, 可用软绒布蘸光蜡少许, 轻轻揩拭,

即可抹去. 也可用少许牙膏揩拭. 但切不可用酒精、香蕉水或其它有机溶剂揩擦, 以免漆色被溶解脱落.

(3) 计算尺使用前应用软布把尺面灰尘揩清, 以免在移动滑标时, 灰尘嵌进滑标玻璃下面而与尺面摩擦. 如滑标玻璃下积有尘垢, 可插进一张薄纸片, 把纸或滑标来回移动数次, 即可揩清.

(4) 使用时, 手指尽量少和尺面接触, 以免酸、碱、油等腐蚀.

在双面计算尺上, 当正面 C 尺与 D 尺对齐时, 反面的 C 尺与 D 尺也应对齐. 滑标发线如盖着正面 C、D 尺的 1 或 10 时, 那么在反面, 滑标发线也应正好盖着 C、D 尺的 1 或 10, 并且正反两面的发线都应与尺身垂直.

计算尺在出厂前都经过校正, 如无必要切勿自行拆卸, 以免损坏.

第二章 基本原理

一、对 数

计算尺上的大多数尺度都是根据对数原理刻制而成的. 为此, 我们先简单地谈一谈对数.

恩格斯指出:"一个数的几个幂的乘或除, 可以变做它们的各个指数的相加或相减。任何一个数都可以理解为和表示为其他任何一个数的幂(对数, $y=a^x$)。而这种从一个形式到另一个相反的形式的转变, 并不是一种无聊的游戏, 它是数学科学的最有力的杠杆之一, 如果没有它, 今天就几乎无法去进行一个比较困难的计算。"(《自然辩证法》)这段话深刻地揭示了对数和利用对数进行计算的本质.

设 $$y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1),$$

我们把 x 叫做以 a 为底的 y 的对数, a 叫做底数, y 叫做真数, 记作 $x=\log_a y$.

例如: $2^4=16$, 则 $\log_2 16=4$;

$10^2=100$, 则 $\log_{10} 100=2$;

$10^{-1}=0.1$, 则 $\log_{10} 0.1=-1$.

这里, 4 是以 2 为底的 16 的对数; 2 是以 10 为底的 100 的对数; -1 是以 10 为底的 0.1 的对数.

以 10 为底的对数, 即 $\log_{10} N$, 通常叫做常用对数, 简写作 $\lg N$.

对数具有如下一些性质：

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1,$$

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N,$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N,$$

$$\log_a M^\alpha=\alpha \log_a M,$$

$$\log_a \sqrt[\alpha]{M}=\frac{1}{\alpha}\log_a M.$$

常用对数除了具有上述对数的一般性质外，还具有下面一些特殊的性质：

(1) 10的整数次幂的常用对数是一个整数，它等于这个幂的指数. 设 $y=10^n$，其中 n 为正整数、零或负整数(本书中的 n 都作如此规定)，则

$$\lg y=\lg 10^n=n.$$

(2) 在1和10之间的数的常用对数是一个正的纯小数. 设 $1<y<10$，则 $0<\lg y<1$.

(3) 任何一个正数 Y 都可以写成如下的形式：

$$Y=y\cdot 10^n\,(1\leqslant y<10).$$

根据对数的性质可得

$$\lg Y=\lg(y\cdot 10^n)=\lg 10^n+\lg y=n+\lg y.$$

这就是说，任何一个正数的常用对数都可以用一个整数(正整数、零或负整数)和一个正的纯小数(或者零)的和来表示. 它的整数部分叫做这个对数的首数，正的纯小数部分(或者零)叫做这个对数的尾数. 例如：

$$\lg 358=\lg(3.58\times 10^2)=\lg 10^2+\lg 3.58=2+\lg 3.58;$$

$$\lg(0.0358)=\lg(3.58\times 10^{-2})=-2+\lg 3.58.$$

从这里可看出，凡是有效数字相同的数，它们常用对数的尾数都相同，而仅仅首数不同.

常用对数的首数和真数的位数有关. 一个数的位数是这样规定的：大于或等于1的数，它的位数就是整数部分数字的个数. 例如1000的位数是4，25.678的位数是2，1.674的位数是1. 小于1的正数，它的位数是零或负整数，位数的绝对值等于小数点后、有效数字之前所有零的个数. 例如0.12的位数是0，0.045的位数是 -1，0.000134的位数是 -3.

由上面的例子可以看出，常用对数的首数等于真数的位数减1. 常用对数的尾数可从《常用对数表》中查得.

二、基本尺度的刻制原理

对数型计算尺就是根据上面对数的这些性质设计制造的.

我们先做两条具有相同均匀刻度的直尺 M 和 N，用这两条尺可以进行与它们刻度范围相应的数的加减.

例如求 $2+3$，使 N 尺0对准 M 尺2，在 N 尺3下读得 M 尺5，这5便是答数(图2-1).

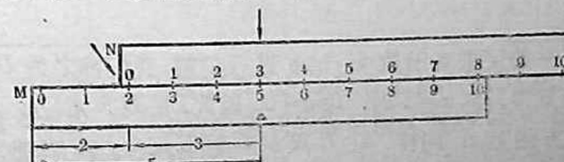


图 2-1

又例如求 $7-4$，使 N 尺4对准 M 尺7，在 N 尺0处读得 M 尺3，这3便是答数(图2-2).

从上一节对数的性质知道，两数积或商的对数，等于这两个数对数的和或差. 因此，我们如用对数来刻制尺度，那么就可以通过尺上对数的加减来进行相应真数的乘除运算了.

图 2-2

考察常用对数函数

$$x=\lg y \qquad (\text{即 } y=10^x),$$

分别以 1, 2, 3, ……, 10 代入 y，查《常用对数表》得相应的各个 x 的值，列成下表：

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x=\lg y$	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1

取两条全长都是一个单位的尺，把其中一条等分成十大格，依次刻上 0, 0.1, 0.2, 0.3, ……, 1，每一大格中可以再等分成若干小格，这样就得到 L 尺。上表中 x 的值可在 L 尺上读出。

另一条尺根据函数 $x=\lg y$ 进行刻制，我们称之为 D 尺。由上表知道，当 $y=1$ 时，$\lg y=0$，因此，在 D 尺对应于 L 尺 0 的地方刻上 1；同样，在 D 尺对应于 L 尺 0.301 的地方刻上 2；……；在 D 尺对应于 L 尺 1 的地方刻上 10（图 2-3）。

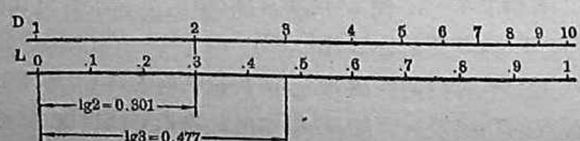


图 2-3

如果我们确定 25 厘米为一个单位长，则 L 尺的每一大格为 2.5 厘米，D 尺上的 1, 2, ……, 10 的刻度线离左端的距离依次为

$$25\times\lg 1=0;$$
$$25\times\lg 2=25\times 0.301=7.525(\text{厘米});$$
$$25\times\lg 3=25\times 0.477=11.925(\text{厘米});$$
$$25\times\lg 4=25\times 0.602=15.050(\text{厘米});$$
$$\cdots\cdots$$
$$25\times\lg 10=25\times 1=25(\text{厘米}).$$

用同样的方法可得到 D 尺上的其它各级刻度。

从上一节我们知道，凡是有效数字相同的数，它们常用对数的尾数都相同，只是它们的首数不同。根据常用对数的这一性质，若将上表中的 y 换为 10, 20, 30, ……, 100，则可很方便地得到相应的 x 值。

y	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$x=\lg y$	1	1.301	1.477	1.602	1.699	1.778	1.845	1.903	1.954	2

现在我们把上面的 L 尺、D 尺各接长一个单位，即总长为 2 个单位，再根据表中所列的数值继续刻尺（图 2-4），那么 D 尺 20 离 D 尺 1 的距离是 1.301 个单位长，D 尺 30 离 D 尺 1 的距离是 1.477 个单位长，……。

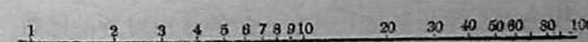


图 2-4

可以看出，D 尺 1 至 2 的距离与 D 尺 10 至 20 距离相等，都是 (0.301×25) 厘米；D 尺 1 至 3 的距离与 D 尺 10 至 30 的距离相等，都是 (0.477×25) 厘米；……．这就是说 D 尺 1 至 10，2 至 20，3 至 30……的距离相等，都是一个单位（25 厘米）长．

由此可见，D 尺接长部分 10～100 的刻度和原来 D 尺 1～10 的刻度是完全一样的．因此 D 尺上的刻度 1～10 也可读作 10～100．类似地，D 尺上的刻度还可读作 100～1000，1000～10000，……；0.01～0.1，0.001～0.01……．例如，D 尺上的 1.4 可按实际运算需要读作 1.4，14，1400，0.0014 等等．换句话说，在 D 尺上有效数字相同的数的刻度都在同一地方．（这个特点也适用于 C，CI，DI，CF，DF，CIF 等尺．）

C 尺与 D 尺是完全相同的，有了 C、D 这两条对数型尺度，就可以进行乘除运算，具体算法我们将在第三章中介绍．

计算尺上其它尺度的刻制原理与 C、D 尺基本相仿，我们将在以后各章分别说明．

三、常用对数尺度的用法

从 D 尺的刻法我们知道，L 尺上的读数，就是 D 尺上对应读数的常用对数值；而 D 尺上的读数，就是 L 尺上对应读数的真数（或称反常用对数）．这样，有了 D 尺与 L 尺，就等于有了一份三位常用对数表．我们可以从 D 尺与 L 尺直接读得 1～10 各数的常用对数和其它正数的常用对数的尾数；反过来，已知常用对数，也可从 D 尺与 L 尺求得真数．

［例 1］ 求 $\lg 1.88$．

解：移动滑标，使发线对准 D 尺上 1.88，在 L 尺上读得

$$\lg 1.88=0.274.$$

［例 2］ 求 $\lg 5.72$，$\lg 57.2$，$\lg 572$，$\lg 0.572$，$\lg 0.0572$．

解：它们常用对数的首数等于它们的位数减 1，即分别是 0，1，2，-1，-2．

用 D 尺、L 尺配合求得

$$\lg 5.72=0.757.$$

所以 $\lg 5.72=0.757$；　　$\lg 57.2=1.757$；

$\lg 572=2.757$；　　$\lg 0.572=\bar{1}.757$；

$\lg 0.0572=\bar{2}.757$．

当对数的首数是负整数时，为了运算方便，通常不把负整数和正尾数相加，而把“－”号写在整数上面．

下面我们来看，已知常用对数怎样求真数．

［例 3］ 已知 $\lg N=1.734$，求 N．

解：使发线对准 L 尺 0.734，在 D 尺上读得 5.42．因为对数的首数是 1，所以 N 的位数是 2，即

$$N=54.2.$$

［例 4］ 已知 $\lg N=\bar{3}.944$，求 N．

解：使发线对准 L 尺 0.944，读 D 尺得 8.79．因为对数的首数是 -3，所以 N 的位数是 -2，即

$$N=0.00879.$$

以不等于 1 的任意正数为底的对数，我们可以利用对数换底公式

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a},$$

把它换算成常用对数，然后再由 D 尺、L 尺配合求出它的值．

[例 5] 求 $\log_5 125$.

解:
$$\log_5 125=\frac{\lg 125}{\lg 5}=\frac{2.097}{0.699}=3.$$

这里 2.097 与 0.699 可由 D 尺, L 尺求得.

在生产实践中, 自然对数的应用也很广泛. 自然对数就是以 $e=2.71828$ 为底的对数, 通常记作 $\ln N$. 自然对数与常用对数的关系是:

$$\ln N=\log_e N=\frac{\lg N}{\lg e},$$

令 $\mu=\dfrac{1}{\lg e}=2.3026$, 则

$$\ln N=\mu \lg N=2.3026 \lg N.$$

因此, 用 L 尺, D 尺来求自然对数也很方便. 例如

$$\begin{aligned}\ln 0.0673&=2.303\times\bar{2}.828\\&=2.303\times(-1.172)=-2.722.\end{aligned}$$

如果计算尺上刻有自然对数尺度, 那么求自然对数就更为方便, 我们将在第七章中专门介绍.

练 习

1. 求下列对数:

$\lg 3.35$	(0.525);	$\lg 33.5$	(1.525);
$\lg 177$	(2.248);	$\lg 0.0721$	($\bar{2}.858$);
$\lg 0.547$	($\bar{1}.738$);	$\lg 4.55$	(0.658).

2. 求下列真数:

$\lg N=0.602$	($N=4$);	$\lg N=2.492$	($N=310.5$);
$\lg N=3.935$	($N=8610$);	$\lg N=\bar{3}.420$	($N=0.00263$);
$\lg N=\bar{1}.097$	($N=0.125$).		

第三章 乘 除

一、乘 法

1. *原理和算法* 上面我们已经提到, 用 C 尺与 D 尺配合可进行乘除运算, 现在先介绍乘法的运算方法.

计算

$$y=d\times c.$$

将滑尺向右伸, 使 C 尺 1 对准 D 尺 d; 移动滑标, 使发线对准 C 尺上的 c, 这时在 D 尺上发线所对的读数就是所求的积 dc.

原理如图 3-1 所示. 从图上可知: D 尺上 1 至 d 的距离等于 $\lg d$; C 尺上 1 至 c 的距离等于 $\lg c$; D 尺上 1 至 y 的距离等于 $\lg y$. 因为

$$\lg y=\lg d+\lg c,$$

即
$$\lg y=\lg(d\times c),$$

所以
$$y=d\times c.$$

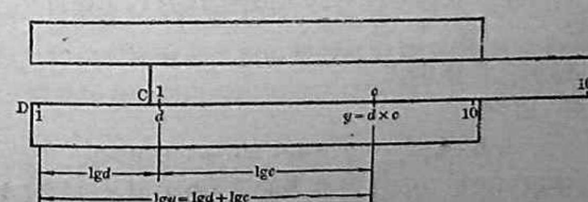


图 3-1

这一运算过程也可列表如下(C 尺右伸):

C	1	c
D	d	$(d\times c)$

[例 1] 计算 2×3.

解: 滑尺右伸, 使 C 尺 1 对准 D 尺 2; 移动滑标, 使发线盖着 C 尺 3, 这时发线所对的 D 尺上 6 即为答数(图 3-2).

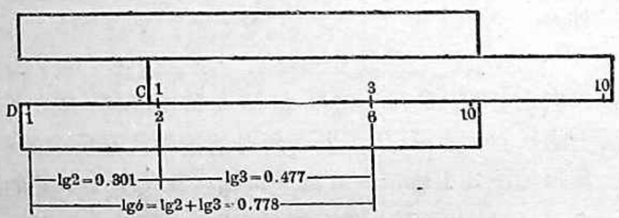


图 3-2

[例 2] 计算 4×1.5.

解: 此例如使 C 尺 1 对准 D 尺 4, 就要把滑尺拉出一半以上, 不大方便. 根据乘法交换律可使 C 尺 1 对准 D 尺 1.5; 再移动滑标, 使发线对准 C 尺上的 4, 在 D 尺上读得 6, 6 便是答数.

[例 3] 计算 6×2.

解: 因为

$$\lg 6+\lg 2=0.778+0.301=1.079>1,$$

所以, 本题如果把 C 尺 1 对准 D 尺 6 (或 2) 时, C 尺 2 (或 6) 已越出了 D 尺的范围, 无法求得答数.

毛主席教导我们: "必须提倡思索". 我们如果把 D 尺延长一个单位(如图 3-3 所示), 就可以在对应于 C 尺 2 的 D 尺延长部分上读得答数 12. 从第二章第二节我们知道, D 尺延长部分 10~20, 10~30, ……, 10~100 的距离同原来 D 尺上 1~2, 1~3, ……, 1~10 的距离是完全一样的. 所以当 C 尺 1 对准 D 尺 6 时, C 尺 10 正好对准 D 尺延长部分的刻度 60. 因此, 设想把 D 尺的延长部分与原来的 D 尺重迭, 那么就只要把 C 尺向左伸, 使 C 尺 10 对准 D 尺 6, 移动滑标发线到 C 尺 2, 就可以在 D 尺上读得答数 12 (尺上为 1.2).

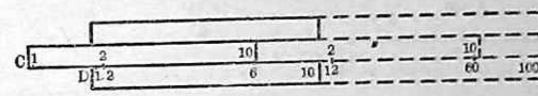


图 3-3

这一运算过程也可用下面的表格来表示:

C	10	2
D	6	(12)

由上可知, C 尺上的指标 1 和 10 可以通用. 两个整数部分是一位的数 d、c 相乘, 如果 $\lg d+\lg c<1$, 即 $dc<10$, 则用左指标, 将 C 尺向右伸, 积的整数部分是一位; 如果 $\lg d+\lg c>1$, 即 $dc>10$, 则用右指标, 将 C 尺向左伸, 积的整数部分是二位.

乘法运算过程可概括为两句话:

指标(C 尺 1 或 10)对准被乘数(在 D 尺上),

乘数(在 C 尺上)之处可得积(在 D 尺上).

C	1 或 10	c
D	d	$(d\times c)$

[例 4]　计算 1.445×3.98.

解：运算过程如图 3-4（滑尺右伸）。

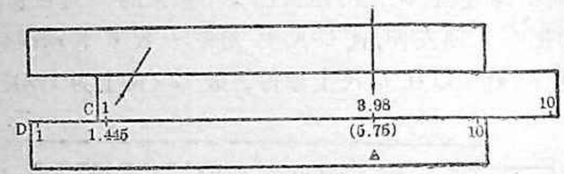


图　3-4

所以

$$1.445\times3.98=5.75$$

[例 5]　计算 8.27×5.55.

解：运算过程如图 3-5（滑尺左伸）。

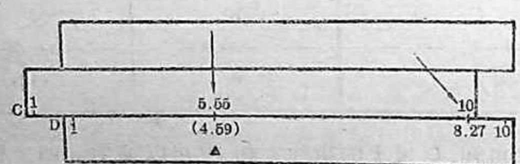


图　3-5

所以

$$8.27\times5.55=45.9$$

2. 定位方法　我们知道，C、D 尺上的刻度可代表有效数字相同的一切正数．因此，任意两个数相乘或相除，都可根据它们的有效数字在计算尺上进行计算，问题是怎样确定答数的位数．

在一般情况下，我们采取估算的方法来确定答数的位数．

[例 6]　计算 144.5×39.8.

解：本题可看成是 1.445×3.98，用 C 尺、D 尺按例 4 的方法进行计算，得到 5.75 后，再根据题目来估算定位．

$$\because\quad 144.5\times39.8\approx150\times40=6000,$$

$$\therefore\quad 144.5\times39.8=5750.$$

这种方法虽然稍繁，但道理简单，并可粗略地校核计算有无错误，适用于连续乘除及其他各种运算．在今后的例题中，我们将略去估算定位的步骤．

另外，根据对数的性质，我们再介绍一种公式定位法．

设

$$Y=D\times C^{*},$$

从对数的性质得

$$\begin{aligned}\lg Y&=\lg D+\lg C\\&=(\lg D\text{ 的首数}+\lg D\text{ 的尾数})\\&\quad+(\lg C\text{ 的首数}+\lg C\text{ 的尾数}),\end{aligned}$$

$$Y\text{ 的位数}=\lg Y\text{ 的首数}+1.$$

当滑尺右伸时，由于 $\lg D$ 的尾数与 $\lg C$ 的尾数之和小于 1，所以

$$\lg Y\text{ 的首数}=\lg D\text{ 的首数}+\lg C\text{ 的首数},$$

$$\begin{aligned}Y\text{ 的位数}&=(\lg D\text{ 的首数}+\lg C\text{ 的首数})+1\\&=[(D\text{ 的位数}-1)+(C\text{ 的位数}-1)]+1\\&=[D\text{ 的位数}+C\text{ 的位数}]-1.\end{aligned}$$

即

$$\text{积的位数}=(\text{被乘数位数}+\text{乘数位数})-1.$$

---

* 本书一般以尺名第一个字母的小写表示该尺上的实际刻度数，而以它的大写表示任意正数．

当滑尺左伸时，由于这时 $\lg D$ 的尾数与 $\lg C$ 的尾数之和大于 1，所以

$$\lg Y \text{ 的首数} = \lg D \text{ 的首数} + \lg C \text{ 的首数} + 1.$$

得到

$$\text{积的位数} = \text{被乘数位数} + \text{乘数位数}.$$

[例 7] 计算 178×2500.

解：运算过程见下表(滑尺右伸)：

C	1	2.5
D	1.78	(4.45)

$$\text{积的位数} = (\text{被乘数位数} + \text{乘数位数}) - 1$$
$$= 3 + 4 - 1 = 6.$$

所以

$$178 \times 2500 = 445000.$$

[例 8] 计算 0.00625×2.48.

解：运算过程见下表(滑尺左伸)：

C	10	2.48
D	6.25	(1.55)

$$\text{积的位数} = \text{被乘数位数} + \text{乘数位数}$$
$$= -2 + 1 = -1.$$

所以

$$0.00625 \times 2.48 = 0.0155$$

[例 9] 计算：(1) 7.54×9.76；(2) 7.54×7.44；(3) 7.54×4.39；(4) 7.54×1.374.

数…
据…
数…

解：运算过程见下表(滑尺左伸)：

C	10	9.76	7.44	4.39	1.374
D	7.54	(7.36)	(5.61)	(3.31)	(1.036)

上述四题答数的位数都是 $1+1=2$.

所以它们的积分别是 (1) 73.6；(2) 56.1；(3) 33.1；(4) 10.36.

例 9 说明，用 C 尺与 D 尺做乘法，当被乘数不变而对不同的乘数求积时，特别方便.（如在 D 尺上读不到答数，则需换放指标.）

练　　习

用 C 尺、D 尺计算：

3×5	(15)；	8×2.12	(16.96)；
4.5×8.2	(36.9)；	3.05×5.15	(15.71)；
0.036×0.25	(0.009)；	4.95×26	(128.7)；
1.087×1.425	(1.549)；	72×12.9	(929)；
1.087×4.71	(5.12)；	0.00202×255	(0.515)；
1.087×241	(262)；	5.68×1.75	(9.94)；
1.087×0.735	(0.799)；	5.68×9.19	(52.2).

二、除　　法

1. 原理和算法　除法是乘法的逆运算，所以计算尺上除法的运算过程也正好和乘法相反.

计算

$$y = d \div c.$$

抽动滑尺，使 C 尺 c 对准 D 尺 d；移动滑标，使发线对准 C 尺上的指标（右伸时对准左指标 1，左伸时对准右指标 10），此时 D 尺上发线所对的读数就是所求的商。

其原理如图 3-6 所示。

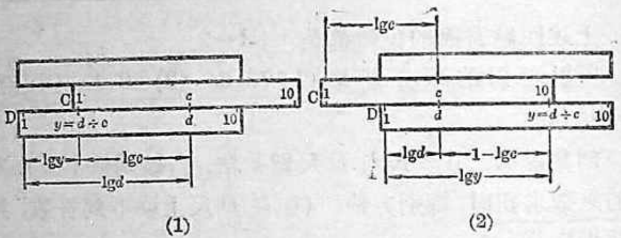


图 3-6

图(1)说明，滑尺右伸时，D 尺 1 至 d 的距离等于 $\lg d$；C 尺 1 至 c 的距离等于 $\lg c$；D 尺 1 至 y 的距离等于 $\lg y$。

$$\because \quad \lg y=\lg d-\lg c =\lg(d\div c),$$

$$\therefore \quad y=d\div c.$$

图(2)说明，滑尺左伸时，D 尺 1 至 d 的距离等于 $\lg d$，C 尺 10 至 c 的距离等于 $1-\lg c$，D 尺 1 至 y 的距离等于 $\lg y$。

$$\because \quad \lg y=\lg d+(1-\lg c)=1+\lg d-\lg c =\lg 10d-\lg c =\lg(10d\div c)$$

$$\therefore \quad y=10\,d\div c.$$

$d\div c$ 与 $10d\div c$，它们商的有效数字是相同的。

［例 1］ 计算 $8\div 4$。

解：运算过程见图 3-7（滑尺右伸）。

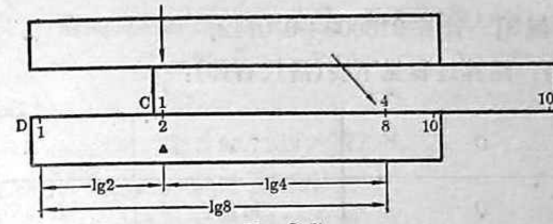


图 3-7

所以

$$8\div 4=2.$$

［例 2］ 计算 $42\div 7$。

解：运算过程见图 3-8（滑尺左伸）。

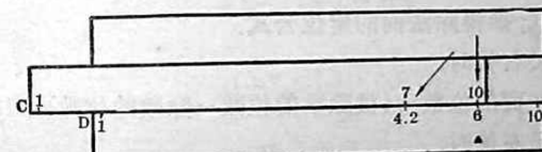


图 3-8

所以

$$42\div 7=6.$$

除法运算过程可概括为两句话：

除数（在 C 尺上）对准被除数（在 D 尺上），

指标（C 尺 1 或 10）之处可得商（在 D 尺上）。

C	c	1 或 10
D	d	$(d\div c)$

2. **定位方法** 用计算尺作除法，商一般也采用估算定位。

[例 3] 计算 $915000 \div 0.0712$.

解：运算过程见下表(滑尺右伸)：

C	7.12	1
D	9.15	(1.285)

所以

$$915000 \div 0.0712 = (9.15 \times 10^5) \div (7.12 \times 10^{-2})$$
$$= (9.15 \div 7.12) \times 10^7$$
$$= 1.285 \times 10^7 = 12850000.$$

因为除法是乘法的逆运算，所以我们很容易从乘法积的定位公式，推得除法商的定位公式.

滑尺右伸时，

商的位数＝(被除数的位数－除数的位数)＋1；

滑尺左伸时，

商的位数＝被除数的位数－除数的位数.

为了便于记忆，用 C、D 尺做乘除时，积和商的公式定位法可归纳如下：

算尺做乘除， 定位要定准；
乘法位数和， 右伸减去 1；
除法位数差， 右伸加上 1.

[例 4] 计算 $37.5 \div 0.217$.

解：运算过程见下表(滑尺右伸)：

C	2.17	1
D	3.75	(1.728)

商的位数＝(被除数位数－除数位数)＋1
＝2－0＋1＝3.

所以

$$37.5 \div 0.217 = 172.8.$$

[例 5] 计算 $0.0564 \div 7.25$.

解：运算过程见下表(滑尺左伸)：

C	7.25	10
D	5.64	(7.78)

商的位数＝被除数位数－除数位数
＝(－1)－1＝－2.

所以

$$0.0564 \div 7.25 = 0.00778.$$

练 习

用 C、D 尺计算：

$35 \div 5$ (7)；
$25 \div 2$ (12.5)；
$84 \div 8$ (10.5)；
$51 \div 6.5$ (7.85)；
$48 \div 6$ (8)；
$685 \div 8.93$ (76.7)；
$216 \div 32$ (6.75)；
$37.5 \div 0.00227$ (16510)；
$1 \div 352$ (0.00284)；
$0.132 \div 32.4$ (0.00407)；
$0.0385 \div 0.001516$ (25.4)；
$60 \div \pi$ (19.11)；
$10.99 \div 50.5$ (0.2175)；
$17.74 \div 1.981$ (8.95).

三、倒 数

一般计算尺上，常刻有倒尺度 CI 尺、DI 尺. 它们的刻制原理和 C 尺(或 D 尺)完全一样，但刻尺的方向相反，即它的

起点1在右端，终点10在左端，从右向左递增．倒尺度常作上特别标志，以利辨认．例如，有些国产计算尺上将倒尺度的数字刻成向左倾斜，表示数值由右向左递增；大多数计算尺则将倒尺度数字漆成红色，所以倒尺度也常称为红 CI 尺、红 DI 尺．

1．求倒数　倒尺度和基本尺度配合使用，可直接读出任何一个数的倒数．

在图3-9中，C 尺上任一读数 c 对应着 CI 尺上的读数 r．

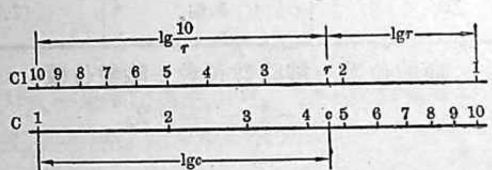


图　3-9

很明显，C 尺上1至 c 的距离 $\lg c$ 与 CI 尺上1至 r 的距离 $\lg r$ 之和，恰好等于 C 尺的长度，即

$$\lg c+\lg r=1.$$

所以

$$\lg(c\cdot r)=1=\lg 10,$$

即

$$c\cdot r=10,$$

$$c=\frac{10}{r}\quad 或 \quad r=\frac{10}{c}.$$

如果只计有效数字，则

$$c=\frac{1}{r}\quad 或 \quad r=\frac{1}{c}.$$

这就是说，C 尺与 CI 尺的对应读数互为倒数．

CI	$(1/c)$
C	c

CI	r
C	$(1/r)$

下面我们介绍倒数的公式定位法．

设

$$C=\frac{1}{R},$$

两边各取常用对数，得

$$\lg C=-\lg R.$$

用 $\lg c$ 和 $\lg r$ 分别表示 $\lg C$ 和 $\lg R$ 的尾数部分，那么

$$\lg C\text{ 的首数}+\lg c=-(\lg R\text{ 的首数}+\lg r).\qquad(1)$$

由图3-9可知，当 $\lg c\neq 0$，即 C 的有效数字不是1时，

$$\lg c+\lg r=1,$$

即

$$\lg c=1-\lg r.$$

将上式代入(1)式，得

$$\lg C\text{ 的首数}+(1-\lg r)=-(\lg R\text{ 的首数}+\lg r),$$

就是

$$\lg C\text{ 的首数}+1=-(\lg R\text{ 的首数}).$$

$$\because\quad \lg C\text{ 的首数}=C\text{ 的位数}-1,$$

$$\lg R\text{ 的首数}=R\text{ 的位数}-1,$$

$$\therefore\quad (C\text{ 的位数}-1)+1=-(R\text{ 的位数}-1),$$

$$C\text{ 的位数}=1-R\text{ 的位数},$$

或

$$R\text{ 的位数}=1-C\text{ 的位数}.$$

因此，在 C 的有效数字不是1的情况下，它的位数与它倒数的位数之和等于1．

[例 1] 求 12.5 的倒数.

解: 移动滑标, 使发线对准 CI 尺 1.25, 在 C 尺上读得 8.

12.5 的位数是 2, 它的倒数的位数应是

$$1-2=-1.$$

所以 12.5 的倒数是 0.08.

当 C 的有效数字是 1 时, 它的倒数可直接用口算得出. 例如

$$\frac{1}{10000}=0.0001.$$

练　　习

用 C 尺(或 D 尺)、CI 尺(或 DI 尺)求下列各数的倒数:

2	(0.5);	4000	(0.00025);
2π	(0.1592);	0.1	(10);
75.2	(0.0133);	0.00001	(100000);
$e=2.718$	(0.368);	0.065	(15.38);
0.00541	(184.8);	0.424	(2.36).

2. CI 尺在乘除运算中的应用　我们知道

$$y=d\times c=d\div\frac{1}{c},$$

又

$$y=d\div c=d\times\frac{1}{c}.$$

因此, 计算 $d\times c$, 也可使 CI 尺 c(C 尺的对应读数是 $\frac{1}{c}$) 对准 D 尺 d, 对应于 CI 尺 1 或 10 (即 C 尺 10 或 1) 读 D 尺得 $d\div\frac{1}{c}=d\times c$; 计算 $d\div c$, 也可使 CI 尺 1 或 10 (即 C 尺 10 或 1) 对准 D 尺 d, 对应于 CI 尺 c(C 尺的对应读数是 $\frac{1}{c}$), 读 D 尺得 $d\times\frac{1}{c}=d\div c$.

[例 2] 计算 5.77×1.65.

解: 运算过程如图 3-10 (滑尺左伸).

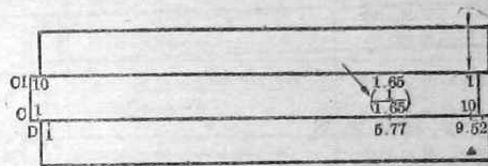


图 3-10

估算定位, 得积 9.52.

[例 3] 计算 3.91×2.77.

解: 运算过程如图 3-11 (滑尺右伸).

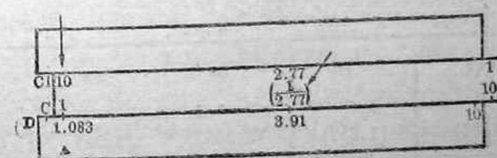


图 3-11

估算定位, 得积 10.83.

[例 4] 计算 $6.25\div1.177$.

解: 运算过程如图 3-12 (滑尺左伸).

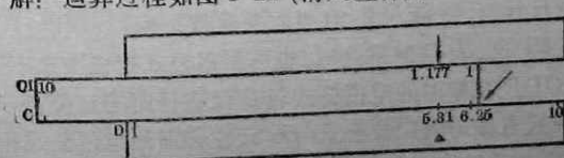


图 3-12

估算定位，得商 5.31.

[例 5] 计算 $2.04\div0.895$.

解：运算过程如图 3-13（滑尺右伸）。

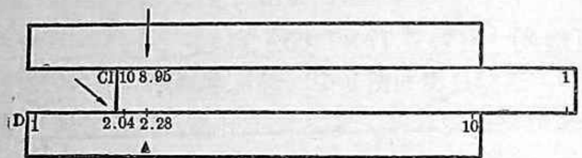


图 3-13

估算定位，得商 2.28.

上面四例，读者试用 *C* 尺、*D* 尺运算一次．比较一下，看哪一种方法简便．

[例 6] 计算：(1) $16.24\div8.75$; (2) $16.24\div7.04$; (3) $16.24\div38.3$; (4) $16.24\div218$.

解：运算过程如下表（滑尺右伸）：

CI	10	8.75	7.04	3.83	2.18
D	1.624	(1.856)	(2.308)	(4.24)	(7.45)

经估算定位，知道它们的商分别是 (1)1.856; (2) 2.308; (3) 0.424; (4) 0.0745.

本例说明，当被除数不变而对不同的除数求商时，用 *CI* 尺与 *D* 尺计算，特别方便（有时需要换放指标）。

用 *CI* 尺、*D* 尺做乘除时，也可采用公式定位法．不过要注意，*CI* 尺左伸时的定位公式与 *C* 尺右伸时的定位公式相同；*CI* 尺右伸时的定位公式与 *C* 尺左伸时的定位公式相同．这是因为 *CI* 尺是 *C* 尺的倒尺度，它们的刻尺方向相反．

现把公式定位法归纳成下表：

乘除法定位公式表

		滑尺左伸	滑尺右伸
应用 *C* 尺、*D* 尺	乘	积的位数＝被乘数位数＋乘数位数	积的位数＝被乘数位数＋乘数位数－1
	除	商的位数＝被除数位数－除数位数	商的位数＝被除数位数－除数位数＋1
应用 *CI* 尺、*D* 尺	乘	积的位数＝被乘数位数＋乘数位数－1	积的位数＝被乘数位数＋乘数位数
	除	商的位数＝被除数位数－除数位数＋1	商的位数＝被除数位数－除数位数

练　习

用 *CI* 尺、*D* 尺计算：

1.75×5.08	(8.89);	$0.948\div245$	(0.00387);
3.39×4.54	(15.39);	$94800\div87.1$	(1088);
5.34×1.44	(7.67);	$1.217\div253$	(0.00481);
6.32×2.03	(12.83);	$1064\div2.07$	(514);
$948\div4.02$	(236);	586×0.01355	(7.94).

四、乘除连续运算

对于三个数以上的连乘、连除或乘除混合运算，若用计算尺计算，则更能显示其优越性．

1. 使用 *C* 尺、*D* 尺计算

[例 1] 计算 $2.21\times3.09\times8.83$.

解：使 *C* 尺 1 对准 *D* 尺 2.21，移动滑标，使发线盖着 *C* 尺 3.09（这时在 *D* 尺上即可读得 2.21×3.09 的积 6.83，但

不必读出)；再抽动滑尺，使 C 尺 10 在发线下，这时对应于 C 尺 8.83，在 D 尺上读得 6.03．运算过程见下表：

C	1	3.09	10	8.83
D	2.21	(6.83)	6.83	(6.03)

滑尺右伸⟶　　　　⟵滑尺左伸

用公式定位，

$$答数位数=(1+1-1)+1=2。$$

所以答数是 60.3．

[例 2]　计算 $62.8\div7.36\div4.89$．

解：使 C 尺 7.36 对准 D 尺 6.28，移动滑标，使发线盖着 C 尺 10（这时在 D 尺上即可读得 $62.8\div7.36$ 的商，但不必读出）；然后再抽动滑尺，使 C 尺 4.89 在发线下，对应于 C 尺 1 读得 D 尺 1.745．运算过程见下表：

C	7.36	10	4.89	1
D	6.28	(8.53)	8.53	(1.745)

⟵左伸　　　　右伸⟶

$$答数位数=(2-1)-1+1=1。$$

所以答数是 1.745．

用 C、D 尺作乘除混合运算，例如 $\dfrac{a\times b\times c}{e\times f}$，可先做除法，再做乘法，除与乘交叉进行：

$$a \searrow e \nearrow b \searrow f \nearrow c$$

一般选择两个有效数字相近的数先计算，中间的商和积不必读出．

[例 3]　计算 $\dfrac{452\times1124}{33.6}$．

解：运算过程见下表：

C	3.36	1.124
D	4.52	(1.512)

滑尺右伸⟶

此类计算用公式定位比较简单．因为滑尺右伸时，正好做了乘、除各一次，定位时加 1 与减 1 相互抵销；而如果滑尺左伸，那本来就无加 1 减 1 的问题，所以在这种情况下，无论是滑尺右伸还是左伸，都是

$$答数的位数=两个乘数的位数和-除数的位数。$$

$$本例答数的位数=3+4-2=5。$$

所以答数是 15120．

[例 4]　计算 $\dfrac{452\times0.0583}{782}$．

解：可先算 $0.0583\div782$，再乘以 452．运算过程见下表：

C	7.82	4.52
D	5.83	(3.37)

$$答数位数=3+(-1)-3=-1。$$

所以答数是 0.0337．

此类题目，如果先算乘法再算除法，那就比较麻烦．读者可试一下．

［例 5］ 计算 $\frac{18000\times450\times0.037}{230\times2.9}$。

解：运算过程见图 3-14．

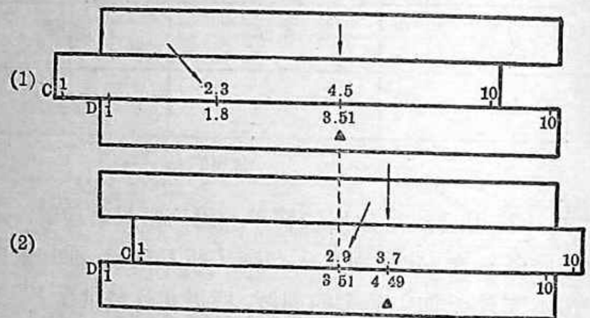


图 3-14

此例用公式定位，可分两步进行．当按图 3-14(1) 计算时，

$$答数位数=5+3-3=5,$$

即中间答数为 35100．

当按图 3-14(2) 计算时，答数位数 $=5+(-1)-1=3$，即最后答数为 449．

用 C、D 尺作乘除多步混合运算时，仍可按“乘法位数和，右伸要减 1；除法位数差，右伸要加 1”的原则来逐步确定答数的位数．所以，如果滑尺右伸时把做除法一次记为 $+1$，做乘法一次记为 -1，那么

答数的位数 = 分子(乘数)的位数和
　　　　　－分母(除数)的位数和
　　　　　＋右伸时乘除次数的代数和．

［例 6］ 计算 $\frac{38300\times6.91\times0.685\times52.7}{68.4\times0.0426\times8.62}$。

解：将分子和分母中有效数字相近的数排在一起，原式可写成

$$\frac{0.685\times38300\times6.91\times52.7}{68.4\times0.0426\times8.62}。$$

运算时先除后乘，交叉进行，过程见下表：

C	68.4	38300	0.0426	6.91	8.62	52.7
D	0.685	(384)	384	(62200)	62200	(381000)

$$答数的位数=(5+1+0+2)-(2-1+1)+[(+1)+(-1)]=6.$$

注意：左伸或右伸是指 C 尺 1 (左指标) 或 10 (右指标) 伸出在 D 尺的 1 或 10 以外．如果在运算时，滑尺原是左伸的，后在连续运算中，把滑尺向右移了，但 C 尺 1 (左指标) 仍伸出在 D 尺 1 以外，那么这时滑尺仍算作是左伸．

本例也可采用估算定位：

$$\frac{38300\times6.91\times0.685\times52.7}{68.4\times0.0426\times8.62}$$

$$\approx\frac{40000\times7\times0.7\times50}{70\times0.04\times9}\approx389000,$$

所以本例答数为 381000．

练　　习

用 C 尺、D 尺计算：

$472\times0.805\times65.5$　(24900)；　$\frac{48.7\times3.14}{52.6\times2.11}$　(1.378)；

$657 \div 267 \div 408$	(0.00604);	$\dfrac{1768 \times 3850 \times 896}{822 \times 0.1156}$	(64100000);
$\dfrac{6.47 \times 2.72}{5.22}$	(3.37);	$\dfrac{8.91 \times 1.74 \times 6300}{0.125 \times 32.2}$	(24300);
$\dfrac{354 \times 0.607}{23.5}$	(9.15);	$\dfrac{22.4 \times 73.6 \times 1.123}{5.5 \times 156 \times 1.7}$	(1.270);
$\dfrac{108000 \times 482}{393}$	(132500);	$\dfrac{24.1}{261 \times 318}$	(0.000290);
$\dfrac{65.7 \times 0.832}{358}$	(0.1527);		
$\dfrac{91.2 \times 48.7}{2.47 \times 8.35}$	(215).		

2. 使用 C 尺、CI 尺、D 尺计算　用计算尺作连续乘除，一般用 C 尺、CI 尺、D 尺联合运算为好．因为利用 CI 尺与 C 尺的倒数关系，能使计算除乘交叉进行．

［例 7］ 计算 $6.17 \times 2.72 \times 4.97$．

解：本题可按 $6.17 \div \dfrac{1}{2.72} \times 4.97$ 进行计算，运算过程如下表：

CI	2.72	
C		4.97
D	6.17	(8.34)

→

估算定位，得答数 83.4．

［例 8］ 计算 $20.4 \div 1.65 \div 2.31$．

解：本题可按 $20.4 \div 1.65 \times \dfrac{1}{2.31}$ 进行计算，运算过程见下表：

CI		2.31
C	1.65	
D	2.04	(5.35)

→

估算定位，得答数 5.35．

［例 9］ 计算 $5830 \times 1.057 \div 3.75$．

解：本题可按 $5830 \div \dfrac{1}{1.057} \times \dfrac{1}{3.75}$ 进行计算，运算过程见下表：

CI	1.057	3.75
D	5.830	(1.643)

←

估算定位，得答数 1643．

练　　习

用 C 尺、CI 尺、D 尺计算下列各题：

$336 \times 1.865 \times 0.0769$	(48.2);	$44.9 \times 7.04 \div 9.25$	(34.2);
$0.604 \times 1.545 \times 0.615$	(0.574);	$5.32 \times 2.17 \div 8.13$	(1.420);
$136.8 \div 14.68 \div 1.842$	(5.06);	$1355 \times 88.2 \div 5.15$	(23200);

$4.06 \times 2.69 \times 0.00832 \times 1.018$　(0.0925);

$0.745 \times 1.105 \times 8.38 \times 1.648$　(11.37)．

五、折尺度的应用

为了使运算简捷，答数精确，就要进一步考虑如何使滑尺抽动的幅度小，次数少．为此，在一般通用计算尺上，还刻有折尺度 CF 尺、DF 尺、CIF 尺．

把 C 尺和 D 尺在 π 或它们的中点 $\sqrt{10}$ 处折断，然后交换左右两段的位置，使 1 和 10 迭合起来成为 1，π 或 $\sqrt{10}$ 在左右两端，这样就得到 C 尺和 D 尺的折尺度 CF 尺和 DF 尺。把 CI 尺在 $\frac{10}{\pi}$(即 3.1831) 或 $\sqrt{10}$ 处折断，交换两段的左右位置，就组成 CI 尺的折尺度 CIF 尺。用 CF 尺和 CIF 尺同样可以求得倒数。

1. 用折尺度作乘除运算　由于 CF 尺、DF 尺是 C 尺、D 尺折断以后，交换左右两段位置而成的，它们的刻制原理和 C 尺、D 尺完全一样，所以 CF 尺和 DF 尺象 C 尺和 D 尺一样，可用来作乘除运算。

在计算尺上我们可以看到，在滑尺右伸的情况下，当 C 尺 1 对准 D 尺左半段的任一数 d_1 时，CF 尺的 1 一定也对准 DF 尺上的同一数 d_1；在滑尺左伸的情况下，当 C 尺 10 对准 D 尺右半段的任一数 d_2 时，CF 尺的 1 一定也对准 DF 尺的同一数 d_2。这说明 CF 尺、DF 尺和 C 尺、D 尺可以互相替代。

例如，当用 C 尺、D 尺作乘除运算时，如果所求读数落在尺身外面，那就无需重新抽动滑尺，更换指标，而可以直接用 CF 尺、DF 求得读数。(C 尺、D 尺靠近两端的刻度，对于 CF 尺、DF 尺来说，却是在当中。)反之亦然。这就提高了计算的效率。这两对尺度的可换性用表表示如下：

乘法时：

DF			d	(dc)
CF			1	c
C	1 或 10	c		
D	d	(dc)		

除法时：

DF			d	(d/c)
CF			c	1
C	c	1 或 10		
D	d	(d/c)		

[例 1]　计算 1.162×8.46。

解：本题可用 C 尺、D 尺计算，但用 CF 尺、DF 尺较方便。运算过程如下表：

DF	1.162	(9.83)
CF	1	8.46

估算定位，得积 9.83。

[例 2]　计算 $11.25\div 8.39$。

解：本题用 CF 尺、DF 尺计算较方便。运算过程如下表：

DF	1.125	(1.341)
CF	8.39	1

估算定位，得商 1.341。

[例 3]　计算 $0.644\div 6.77\times 1.35$。

解：运算过程如图 3-15。

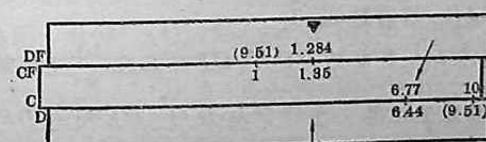


图　3-15

估算定位，得答数 0.1284。

在连续乘除中，如用 CIF 尺、DF 尺和 C 尺(或 CI 尺)、D 尺配合计算，也很方便。

[例 4] 计算 $33.6\div8200\div0.078$.

解：运算过程如下表：

DF		(5.25)
CIF		7.8
C	8.2	
D	3.36	

估算定位，得答数 0.0525.

[例 5] 计算 $4.75\times127.8\div6.89$.

解：运算过程如下表：

DF		(8.81)
CIF		6.89
CI	1.278	
D	4.75	

估算定位，得答数 88.1.

2. 用在 π 处折断的 DF 尺、CF 尺和在 $\frac{10}{\pi}$ 处折断的 CIF 尺作含 π 的乘除运算 在 C 尺与 D 尺、CF 尺与 DF 尺对齐的情况下：

(1) 如果滑标发线对着 D 尺(或 C 尺)的某一数 d_1，则可在发线下读 DF 尺(或 CF 尺)得 πd_1 的有效数字，读 CIF 尺得 $\frac{1}{\pi d_1}$ 的有效数字。

(2) 如果滑标发线对着 DF 尺(或 CF 尺)的某一数 d_2，则可在发线下读 D 尺(或 C 尺)得 d_2/π 的有效数字，读 CI 尺得 π/d_2 的有效数字.

(3) 如果滑标发线对着 CI 尺的某一数 c_1，则可在发线下读 CF 尺(或 DF 尺)得 π/c_1 的有效数字，读 CIF 尺得 c_1/π 的有效数字.

(4) 如果滑标发线对着 CIF 尺的某一数 c_2，则可在发线下读 C 尺(或 D 尺)得 $\frac{1}{\pi c_2}$ 的有效数字，读 CI 尺得 πc_2 的有效数字(图 3-16)。

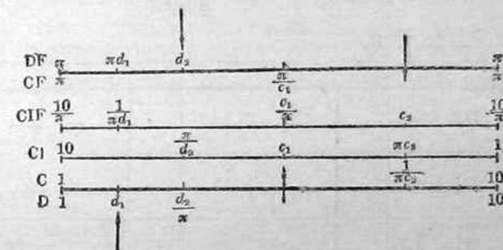


图 3-16

上述几点，实质上是将 CF 尺(DF 尺)或 CIF 尺和 C 尺(D 尺)或 CI 尺配合，进行乘除运算.

[例 6] 计算：(1) $1267\times\pi$; (2) $5.5\div\pi$;

(3) $\pi\div0.132$; (4) $\frac{1}{7.45\times\pi}$.

解：运算过程如图 3-17.

经估算定位，知道它们的答数分别是：(1) 3980; (2) 1.75; (3) 23.8; (4) 0.0427.

[例 7] 计算 $\frac{5.4\times4.45}{\pi}$。

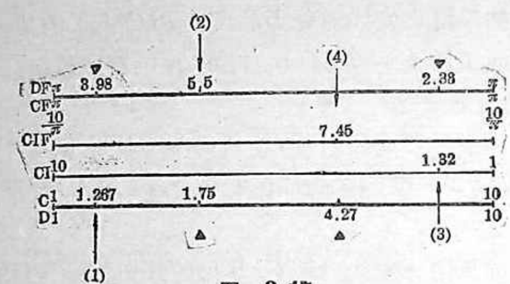


图 3-17

解：本题用 *DF* 尺、*CI* 尺、*D* 尺计算较方便.

$$原式=5.4\div\frac{\pi}{4.45}.$$

运算过程如下表：

DF	5.4	
CI	4.45	1
D		(7.65)

估算定位，得答数 7.65.

3. 用在 $\sqrt{10}$ 处折断的 *DF* 尺、*CF* 尺、*CIF* 尺作连续乘除 我们知道，$\sqrt{10}$ 的常用对数等于 $\frac{1}{2}$. 这就是说，刻度 $\sqrt{10}$ 是 *C* 尺、*D* 尺、*CI* 尺的中点，而在 $\sqrt{10}$ 处折断的 *CF* 尺、*DF* 尺和 *CIF* 尺的中点应该是刻度 1. 所以，若移动滑尺，使 *CF* 尺 1 对着 *D* 尺 1 时，那么 *C* 尺 10 正好对着 *DF* 尺 1. 同样，若 *C* 尺 1(或 10)对着 *DF* 尺任一数 *d* 时，*CF* 尺的 1 也一定对着 *D* 尺上的同一数 *d*，反之亦然(图 3-18). 因而作乘除时，根据运算需要，也可将 *C* 尺、*DF* 尺同 *CF* 尺、*D* 尺互

相替换. 这个特点只有在 $\sqrt{10}$ 处折断的尺度上才有，在 π 处折断的尺度上是没有的.

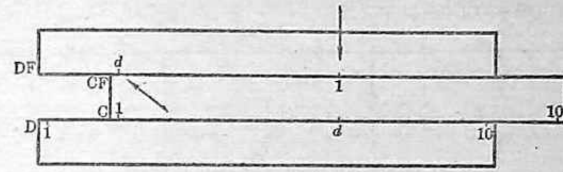


图 3-18

[例 8] 计算 2.72×9.08.

解：运算过程如下表：

DF	2.72	
CF		9.08
C	10	
D		(2.47)

估算定位，得积 24.7.

[例 9] 计算 0.1785÷42.

解：运算过程如下表：

DF		(4.25)
CF	4.2	
C		1
D	1.785	

估算定位，得商 0.00425.

[例 10] 计算 $13580\div8.62\times5.55$.

解：运算过程如下表：

DF		(8.74)
CF	8.62	
C		5.55
D	1.358	

估算定位，得答数 87400.

[例 11] 计算 $19.2\div0.468\div1.752$.

解：运算过程如下表：

DF	1.92	
CIF		1.752
C	4.68	
D		(2.34)

估算定位，得答数 23.4.

在$\sqrt{10}$处折断的 *DF* 尺上，起点和终点的左边都刻有记号 π. 所以作含 π 的乘除运算时，只要将滑尺向左移动，使 *CF* 尺的$\sqrt{10}$ (*C* 尺 1)对准 *DF* 尺上的 π，就可如图 3-16 那样进行计算.

[例 12] 计算：(1) $1.76\times\pi$; (2) $1376\div\pi$.

解：运算过程如下表：

(1)

DF	π	(5.53)
C	1	1.76

(2)

DF	π	1.376
C	1	(4.38)

估算定位，得答数 (1) 5.53; (2) 438.

[例 13] 计算 $\pi\times8.34\times42.9$.

解：运算过程如下表：

DF		(1.124)
CIF	8.34	
C		4.29
D	π	

估算定位，得答数 1124.

练　　习

使用折尺度计算下列各题：

0.455×0.209	(0.0951);	$2460\div\pi$	(783);
258×9.04	(2330);	$1.207\div61.8$	(0.01953);
$1.76\times\pi$	(5.53);	$14.8\div7.96\div0.791$	(2.35);
$8.53\times\pi$	(26.8);	$2140\div8.95\div4.16$	(57.5);
$452\div9.07\times1.533$	(76.4);	$9.21\times0.1797\times0.0716$	(0.1185);
$9.46\div2.75$	(3.44);	$\pi\div7.76\times2060$	(834).

六、比　　例

在日常生活和生产实践中，有关比例的计算是很多的．解比例，实质上是一个乘除混合运算．因此，用计算尺解比例也并不是一个新问题．但是，计算尺上某些相应尺度的读数之间存在着比例关系，若根据这一关系来解比例，则更为方便．所以，我们将比例另列一节，专门介绍．

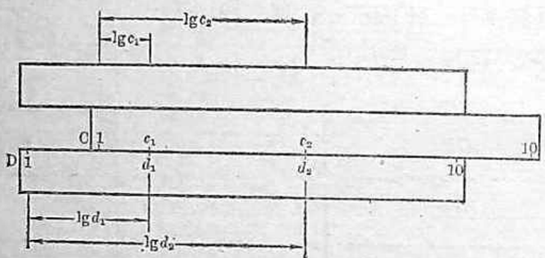


图　3-19

把滑尺拉到任意位置，如图 3-19，D 尺与 C 尺（或任意两条相对应的对数型尺度，如 DF 尺与 CF 尺，A 尺与 B 尺等等）上的任意两对互相对应的数 c_1，d_1；c_2，d_2 有关系式

$$\lg d_2-\lg d_1=\lg c_2-\lg c_1,$$

即

$$\lg\frac{d_2}{d_1}=\lg\frac{c_2}{c_1},$$

所以

$$\frac{d_2}{d_1}=\frac{c_2}{c_1},$$

或

$$\frac{c_1}{d_1}=\frac{c_2}{d_2};\quad \frac{d_1}{c_1}=\frac{d_2}{c_2}.$$

由此可知，滑尺无论放在什么位置上，C 尺与 D 尺上所有互相对应的数成比例．滑尺的位置决定了这一比例关系的比值．例如把 C 尺 1 对着 D 尺 2，则 C 尺与 D 尺上其它相对应的数的比值都是 $\frac{1}{2}$，

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}\cdots\cdots.$$

因此，用计算尺解比例只要在 C 尺上取分子（或分母）上的数，即比的前项（或后项），而在 D 尺上取分母（或分子）上的数，即比的后项（或前项），就可求出未知数．答数的位数，可根据比值或各对分子分母的位数差应相等的原理来确定．但需注意：当滑尺向左移动时，右指标处的一对数其比值虽仍相等，但位数差不一样．例如 $5:4=10:8$．所以，这时不能用位数差相等的原理来定位．

［例 1］　412 斤稻谷碾得白米 300 斤，如有稻谷 70000 斤，可碾得白米多少斤？

解：设 70000 斤稻谷可碾得白米 x 斤，按题意得

$$412:300=70000:x$$

或

$$\frac{412}{300}=\frac{70000}{x}.$$

运算过程如下表：

C	4.12	7
D	3	(5.1)

因为 412 与 300 的位数差是 $3-3=0$，所以 70000 与 x 的位数差也应是 0，即 x 是 5 位数，$x=51000$ 斤．

[例 2] 一个齿轮传动装置，它的主动轮的齿数 $T_1=60$，转数 $N_1=320$，被动轮的齿数 $T_2=20$。问被动轮的转数 N_2 是多少？

解：按题意得

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{N_2}{N_1},$$

即

$$\frac{60}{20}=\frac{N_2}{320}.$$

运算过程如下表：

C	6	(9.6)
D	2	3.2

估算定位，得 $N_2=960$。

[例 3] 先锋生产队全年收入 85460 元，其中农业收入 73500 元，副业收入 9050 元，畜牧业收入 2910 元，问各占百分之多少？

解：设农业、副业、畜牧业的收入各占百分之 x、y、z，按题意得

$$\frac{85460}{100}=\frac{73500}{x}=\frac{9050}{y}=\frac{2910}{z}$$

运算过程如下表：

DF			(1.059)	
CF			9.05	
C	8.546	7.35		2.91
D	10	(8.60)		(3.41)

如没有 CF 尺、DF 尺，求 y 时，可移动滑标，使发线盖着 C 尺 1，再将滑尺左伸，使 C 尺 10 移到发线下以替换左指标，然后对应于 C 尺的 9.05，在 D 尺读得 1.059。

估算定位，得 $x=86$，$y=10.59$，$z=3.41$。即

总　　收　　入	85460	100%
农　业　收　入	73500	86%
副　业　收　入	9050	10.59%
畜　牧　业　收　入	2910	3.41%

[例 4] 已知 1 吋=25.4 毫米，问 2.5 吋，3 吋各相当于多少毫米？

解：设 2.5 吋，3 吋分别相当于 x 毫米，y 毫米，按题意得

$$\frac{25.4}{1}=\frac{x}{2.5}=\frac{y}{3}.$$

运算过程如下表：

C	1	2.5	3
D	2.54	(6.35)	(7.62)

估算定位，得

$$x=63.5,\ y=76.2.$$

即

2.5 吋=63.5 毫米，3 吋=76.2 毫米。

例 3 和例 4 告诉我们，用计算尺计算百分比，换算单位都十分方便。

第四章 开方和乘方

一、平方根和平方

A 尺(B 尺)和 D 尺(C 尺)配合使用，能求出一个数的平方根和平方，相当于一份三位平方根表或三位平方表.

1. 平方根尺的刻制原理 对函数

$$Y=\sqrt{A}=A^{\frac{1}{2}}$$

两边取常用对数，得

$$\lg Y=\lg A^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\lg A.$$

如果 $A=4$，则

$$\lg Y=\frac{1}{2}\lg 4=\frac{1}{2}\times 0.602=0.301=\lg 2$$

即

$$Y=2.$$

因此，在 A 尺对应于 D 尺 2 处(亦即对应于 L 尺 0.301 处)刻上 4.

又如 $A=25$，则

$$\lg Y=\frac{1}{2}\lg 25=\frac{1}{2}\times 1.398=0.699=\lg 5,$$

即

$$Y=5.$$

因此，在 A 尺上对应于 D 尺 5 处(亦即对应于 L 尺 0.699 处)刻上 25.

同理，可以刻出 A 尺上的其它刻度(图 4-1).

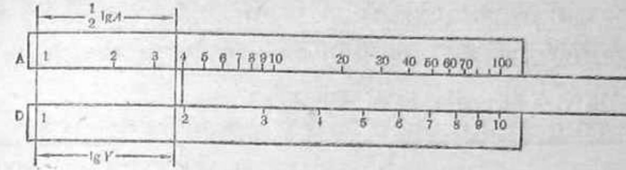


图 4-1

A 尺的全长与 D 尺相同，左半段是 1～10，右半段是 10～100. 这些刻度也可读作 0.01～1，100～10000，……

实际上把两条 D 尺连接起来，再将其缩短到原来的二分之一，就得到了 A 尺.

2. 求平方根 $Y=\sqrt{A}$ 当 $1\leqslant A\leqslant 100$ 时，可移发线到 A 尺上的 a，在 D 尺的对应处直接读得 A 的平方根.

A	1	2	4	6.25	9	16	25	36	49	64	81	100
D	1	1.414	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10

注意：A 尺上左半段的读数是 1～10，右半段的读数是 10～100. 因此求 $\sqrt{2}$ 时，应将发线移到 A 尺左半段 2 上；求 $\sqrt{20}$ 时，应将发线移到 A 尺右半段 20 上，不可混淆.

为了避免差错，国产计算尺的 A 尺一般直接刻上数字 1～100.

当 $A>100$ 或 $A<1$ 时，我们可将 A 写成 $a\times 10^{2n}$ $(1\leqslant a\leqslant 100)$，然后移发线到 A 尺 a，在 D 尺上读得答数的有效数字，再确定位数.

例如：

$$\sqrt{326000}=\sqrt{32.6\times 10^4}=5.71\times 10^2=571;$$

$$\sqrt{326}=\sqrt{3.26\times10^2}=1.806\times10=18.06;$$
$$\sqrt{0.326}=\sqrt{32.6\times10^{-2}}=5.71\times10^{-1}=0.571;$$
$$\sqrt{0.000326}=\sqrt{3.26\times10^{-4}}=1.806\times10^{-2}=0.01806.$$

求平方根的运算过程见下表：

A	3.26	32.6
D	1.806	(5.71)

根据上面的例题，当 $A>100$ 时，我们可以小数点为界，向左每2位一撇，分成小节。如果第一节是1个数字，则用 A 尺的左半段；如果第一节是2个数字，则用 A 尺右半段，在 D 尺上读得 Y 的有效数字．它的位数，根据 A 有几个小节而定．如果只有1节，那么位数就是1；如果有2节，那么位数就是2；……．

［例1］ 求下列各数的平方根：257000，25700，2570，257．

解：$25'70'\overleftarrow{00}$ 用 A 尺右半段，答数的位数是3；
$2'57'\overleftarrow{00}$ 用 A 尺左半段，答数的位数是3；
$25'\overleftarrow{70}$ 用 A 尺右半段，答数的位数是2；
$2'\overleftarrow{57}$ 用 A 尺左半段，答数的位数是2．

求得

$$\sqrt{257000}=507;\qquad \sqrt{25700}=160.3;$$
$$\sqrt{2570}=50.7;\qquad \sqrt{257}=16.03.$$

当 $A<1$，即 A 是纯小数时，我们可以小数点为界，向右每两位一撇，分成小节．含有有效数字的第一节，如是1个数字，则用 A 尺左半段；如是2个数字，则用 A 尺右半段，

在 D 尺上读得 Y 的有效数字．它的位数，根据小数点后有效数字之前全为零的小节数而定．没有全为零的小节，则答数的位数是0；有一个全为零的小节，则位数是 -1，其余类推．

［例2］ 求下列各数的平方根：0.257，0.0257，0.00257，0.000257，0.0000257．

解：$0.\overrightarrow{25}'7$ 用 A 尺右半段，答数的位数是0；
$0.\overrightarrow{02}'57$ 用 A 尺左半段，答数的位数是0；
$0.\overrightarrow{00}'25'7$ 用 A 尺右半段，答数的位数是 -1；
$0.\overrightarrow{00}'02'57$ 用 A 尺左半段，答数的位数是 -1；
$0.\overrightarrow{00}'00'25'7$ 用 A 尺右半段，答数的位数是 -2．

求得

$$\sqrt{0.257}=0.507;\ \sqrt{0.0257}=0.1603;\ \sqrt{0.00257}=0.0507;$$
$$\sqrt{0.000257}=0.01603;\ \sqrt{0.0000257}=0.00507.$$

3．求平方 $A=Y^2$ 当 $1\leqslant Y\leqslant10$ 时，可移发线到 D 尺上的 y，直接在 A 尺上读得答数．

当 $Y>10$ 或 $Y<1$ 时，可把 Y 写成 $Y=y\times10^n(1\leqslant y\leqslant10)$，然后用计算尺求得 A 的有效数字，再确定位数．

［例3］ 求405^2．

解：$405^2=(4.05\times10^2)^2=4.05^2\times10^4$，
移发线到 D 尺 4.05，在 A 尺上读得 16.4．所以
$$405^2=16.4\times10^4=164000.$$

［例4］ 求 0.0638^2．

解：$0.0638^2=(6.38\times10^{-2})^2=6.38^2\times10^{-4}$，
移发线到 D 尺 6.38，在 A 尺上读得 40.7．所以
$$0.0638^2=40.7\times10^{-4}=0.00407.$$

从上面的运算过程中我们可以看到：

答数在 A 尺的左半段读得，

它的位数 $=Y$ 的位数 $\times 2-1$；

答数在 A 尺的右半段读得，

它的位数 $=Y$ 的位数 $\times 2$.

[例 5] 求 29.9^2, 0.0299^2, 614^2, 0.614^2。

解：运算过程见下表：

A	(8.94)	(37.7)
D	2.99	6.14

8.94 在 A 尺的左半段，所以

29.9^2 的位数 $=2\times 2-1=3$，

$29.9^2=894$；

0.0299^2 的位数 $=(-1)\times 2-1=-3$，

$0.0299^2=0.000894$。

37.7 在 A 尺的右半段，所以

614^2 的位数 $=3\times 2=6$，

$614^2=377000$；

0.614^2 的位数 $=0\times 2=0$，

$0.614^2=0.377$。

练　习

用 A 尺、D 尺计算下列各题：

$\sqrt{1.3}$	(1.14)；	$\sqrt{5700}$	(75.5)；
$\sqrt{13}$	(3.61)；	$\sqrt{0.0645}$	(0.254)；
$\sqrt{130}$	(11.4)；	$\sqrt{0.497}$	(0.705)；

2.5^2	(6.25)；	1980	(3920000)；
0.25^2	(0.0625)；	0.555^2	(0.308)；
4.37^2	(19.1)；	0.00286^2	(0.00000818)。

二、含有平方或平方根的乘除

A 尺、B 尺也可用来作乘除运算，若将 A、B 尺和 C、D 尺配合使用，则可简化含有平方或平方根的乘除计算。

[例 1] 计算 63.2×0.1814^2。

解：运算过程见图 4-2。

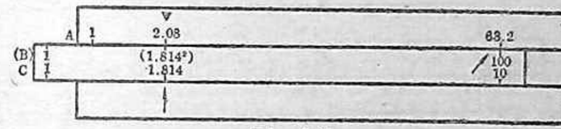


图 4-2

估算定位，得答数 2.08。

[例 2] 计算 $905\div 0.364^2$。

解：运算过程见图 4-3。

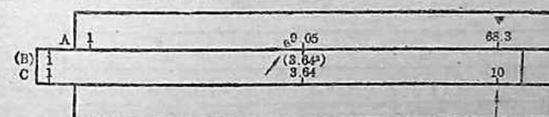


图 4-3

估算定位，得答数 6830。

[例 3] 计算 $1.97^2\div 2.12$。

解：运算过程见图 4-4。

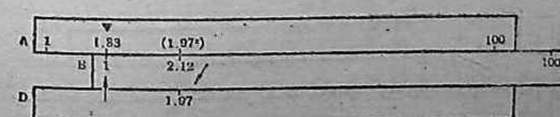


图 4-4

估算定位，得答数 1.83.

用计算尺作含平方的乘除时，A、B 尺是进行乘除运算的尺度，C 尺、D 尺在求平方时配合使用，答数的有效数字在 A 尺上读得. 作乘除计算时，用 A 尺(B 尺)的左半段或右半段都可以，但一般当乘数或被除数的位数是奇数时用 A 尺的左半段，位数是偶数时用 A 尺的右半段，这样定位较为方便.

[例 4] 计算 $\sqrt{498}\div 30.2$。

解：运算过程见图 4-5.

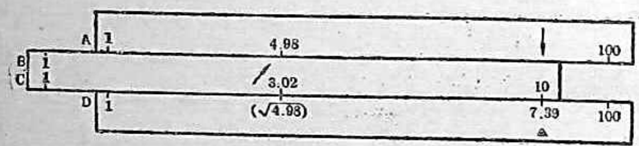


图 4-5

估算定位，得答数 0.739.

[例 5] 计算 $\sqrt{2.86}\times 4.17$.

解：运算过程见图 4-6.

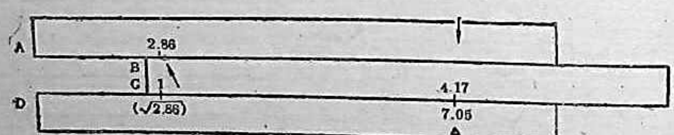


图 4-6

估算定位，得答数 7.05.

[例 6] 计算 $6.32\div\sqrt{19.2}$.

解：运算过程见图 4-7.

图 4-7

估算定位，得答数 1.442.

例 6 若无 B 尺，可改用 A 尺、C 尺来计算. 这时，将被除数放在 C 尺上，除数放在 D 尺上，在 C 尺上读得答数的有效数字，如图 4-8 所示.

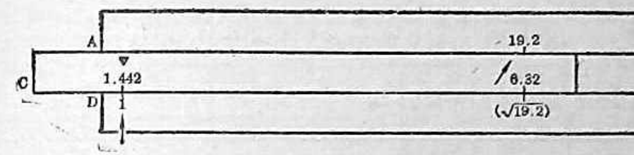


图 4-8

用计算尺作含平方根的乘除时，C、D 尺是进行乘除运算的尺度，A 尺、B 尺则在求平方根时配合使用. 注意，要根据被开方数的位数，决定用 A 尺的左半段还是右半段. 答数的有效数字在 D 尺上读得.

练 习

计算：

$0.691\times\pi^2$	(6.82);	$\sqrt{0.292}\div 953$	(0.000567);
3730×0.0506^2	(9.55);	$\sqrt{57.6}\div 9.31$	(0.815);
$83.8\div 6.61^2$	(1.918);	$\sqrt{742}\times 1.325$	(36.1);
$551\div 28.7^2$	(0.669);	$\sqrt{0.563}\times 0.777$	(0.583);
$3.66^2\div 6.35$	(2.11);	$254\div\sqrt{149}$	(20.8);
$7340^2\div 681$	(79100);	$91.3\div\sqrt{91.8}$	(9.53).

三、立方根和立方

1. 立方根尺的刻制原理　立方根尺 K 尺的刻制原理与 A 尺基本相仿. 对函数

$$Y=\sqrt[3]{K}=K^{\frac{1}{3}}$$

两边取常用对数，得

$$\lg Y=\lg K^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\lg K。$$

如果 $K=8$，则

$$\lg Y=\frac{1}{3}\lg 8=\frac{1}{3}\times 0.903=0.301,$$

即

$$Y=2.$$

因此，在K尺上对应于 D 尺 2 处（亦即对应于 L 尺 0.301 处）刻上 8.

如果 $K=125$，则

$$\lg Y=\frac{1}{3}\lg 125=\frac{1}{3}\times 2.097=0.699,$$

即

$$Y=5.$$

因此，在K尺上对应于 D 尺 5 处（亦即对应于 L 尺 0.699 处）刻上 125.

运用同样的方法（图 4-9），可在K尺上刻上其它的刻度.

图 4-9

K尺的全长与 D 尺相同，左段的刻度是 1～10，中段的刻度是 10～100，右段的刻度是 100～1000，K尺上的刻度也可读作 0.001～1，1000～1000000，……

实际上，把三根 D 尺连接起来，再缩短到原来的三分之一，就得到了K尺.

K尺和 D 尺配合使用，能求出一个数的立方根或立方，相当于一份三位立方根表或三位立方表.

2. 求立方根 $Y=\sqrt[3]{K}$　当 $1\leqslant K\leqslant 1000$ 时，可移发线到K尺上的 k，直接由 D 尺读得$\sqrt[3]{K}$，如下表所示.

K	1	5	8	27	64	125	216	274.6	343	512	729	1000
D	1	1.71	2	3	4	5	6	6.5	7	8	9	10

注意：求一个数的立方根时，左段 1～10，中段 10～100，右段 100～1000 不可互相混淆. 例如求$\sqrt[3]{227}$时，应将发线移到 K 尺右段的 227 上，而不能错放到左段 2.27 或中段 22.7 上. 国产计算尺K尺直接刻上数字 1～1000，以免差错.

当 $K>1000$ 或 $K<1$ 时，可将 K 写成 $k\times 10^{3n}$ $(1\leqslant k\leqslant 1000)$，移发线到$K$尺上的 k，在 D 尺上读得 Y 的有效数字，再确定位数.

例如：

$$\sqrt[3]{7940000}=\sqrt[3]{7.94\times 10^{6}}=1.995\times 10^{2}=199.5;$$
$$\sqrt[3]{794000}=\sqrt[3]{794\times 10^{3}}=9.26\times 10=92.6;$$
$$\sqrt[3]{79400}=\sqrt[3]{79.4\times 10^{3}}=4.3\times 10=43;$$
$$\sqrt[3]{0.0794}=\sqrt[3]{79.4\times 10^{-3}}=4.3\times 10^{-1}=0.43;$$
$$\sqrt[3]{0.00794}=\sqrt[3]{7.94\times 10^{-3}}=1.995\times 10^{-1}=0.1995;$$
$$\sqrt[3]{0.000794}=\sqrt[3]{794\times 10^{-6}}=9.26\times 10^{-2}=0.0926.$$

求立方根的运算过程如下表：

K	7.94	79.4	794
D	(1.995)	(4.3)	(9.26)

根据上面的道理，当 $K>1000$ 时，可将 K 以小数点为界，向左每三位一撇，分成小节．若第一节是 1 个数字，则用 K 尺的左段；若是 2 个数字，则用 K 尺的中段；若是 3 个数字则用 K 尺的右段．答数的有效数字在 D 尺上读得．答数的位数根据 K 被分成几个小节而定，有几个小节，它的位数就是几．

[例 1]　求下列各数的立方根：2810000, 281000, 28100, 2810.

解：2′810′000 用 K 尺左段，答数的位数是 3；

281′000 用 K 尺右段，答数的位数是 2；

28′100 用 K 尺中段，答数的位数是 2；

2′810 用 K 尺左段，答数的位数是 2.

求得

$\sqrt[3]{2810000}=141.1$;　　$\sqrt[3]{281000}=65.5$;

$\sqrt[3]{28100}=30.4$;　　$\sqrt[3]{2810}=14.11$.

当 $K<1$，即 K 是纯小数时，可将 K 以小数点为界，向右每三位一撇，分成小节．含有有效数字的第一节，若是 1 个数字，则用 K 尺左段；是 2 个数字，则用中段；是 3 个数字，则用右段．答数的有效数字在 D 尺上读得．它的位数等于小数点后有效数字之前的全为零的节数．

[例 2]　求下列各数的立方根：0.281, 0.0281, 0.00281, 0.000281, 0.0000281.

解：0.281′ 用 K 尺右段，答数的位数是 0；

0.028′1 用 K 尺中段，答数的位数是 0；

0.002′81 用 K 尺左段，答数的位数是 0；

0.000′281′ 用 K 尺右段，答数的位数是 −1；

0.000′028′1 用 K 尺中段，答数的位数是 −1.

求得

$\sqrt[3]{0.281}=0.655$;　　$\sqrt[3]{0.0281}=0.304$;

$\sqrt[3]{0.00281}=0.1411$;　　$\sqrt[3]{0.000281}=0.0655$;

$\sqrt[3]{0.0000281}=0.0304$.

3. *求立方* $K=Y^3$　当 $1\leqslant Y\leqslant 10$ 时，可移发线到 D 尺上的 y，直接由 K 尺读得答数．

当 $Y>10$ 或 $Y<1$ 时，可把 Y 写成 $Y=y\times 10^n (1\leqslant y\leqslant 10)$，然后进行计算．

[例 3]　求 178^3.

解：$178^3=(1.78\times 10^2)^3=1.78^3\times 10^6$,

移发线到 D 尺 1.78，在 K 尺上读得 5.64，所以

$$178^3=5.64\times 10^6=5640000.$$

[例 4]　求 0.714^3.

解：$0.714^3=(7.14\times 10^{-1})^3=7.14^3\times 10^{-3}$,

移发线到 D 尺 7.14，在 K 尺上读得 364，所以

$$0.714^3=364\times 10^{-3}=0.364.$$

用 D 尺、K 尺求立方时，我们也可采用下面的公式定位：

y^3 在 K 尺左段读得，

$$Y^3 \text{ 的位数}=Y \text{ 的位数}\times 3-2;$$

y^3 在 K 尺中段读得，

$$Y^3 \text{ 的位数}=Y \text{ 的位数}\times 3-1;$$

y^3 在 K 尺右段读得，

$$Y^3 \text{ 的位数}=Y \text{ 的位数}\times 3.$$

[例 5] 求 428^3, 0.0428^3.

解：将发线盖着 D 尺上的 4.28，在 K 尺的中段读得答数的有效数字 784.

$\because$ 428^3 的位数 $=3\times3-1=8$,

$\therefore$ $428^3=78400000$;

$\because$ 0.0428^3 的位数 $=(-1)\times3-1=-4$,

$\therefore$ $0.0428^3=0.0000784$.

练　习

用 K 尺、D 尺计算下列各题：

$\sqrt[3]{6.97}$	(1.91);	136.8^3	(2560000);
$\sqrt[3]{0.751}$	(0.909);	0.01368^3	(0.00000256);
$\sqrt[3]{88.1}$	(4.45);	33.5^3	(37600);
$\sqrt[3]{0.597}$	(0.842);	51.8^3	(139000);
$\sqrt[3]{5140}$	(17.26);	0.00207	(0.00000000887);
$\sqrt[3]{9940}$	(21.5);	0.1116^3	(0.00139);
$\sqrt[3]{0.00708}$	(0.192);	219^3	(10500000).

四、含有立方根或立方的乘除

与 A 尺相仿，K 尺同 C 尺、D 尺配合，可简化某些含有立方根或立方的乘除计算. 对于含有立方根的乘除计算，必须注意用 K 尺的左段，中段还是右段，答数的有效数字在 D 尺上读得，对于含有立方的乘除计算，答数的有效数字在 K 尺上读得.

[例 1] 计算 $\sqrt[3]{24.7}\div1.815$.

解：运算过程如下表：

K	24.7	
C	1.815	1
D		(1.605)

估算定位，得答数 1.605.

[例 2] 计算 $6.55\times\sqrt[3]{367}$.

解：运算过程如下表：

K	367	
C	10	6.55
D		(4.69)

估算定位，得答数 46.9.

[例 3] 计算 $2.38^3\times5.26$.

解：运算过程如图 4-10.

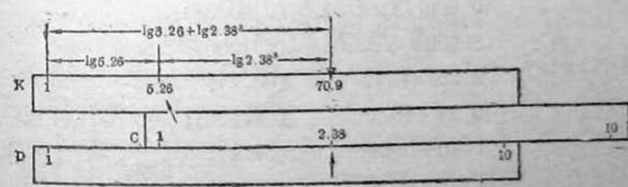


图 4-10

估算定位，得答数 70.9.

用 K 尺作含立方的乘除计算时，用 K 尺的左、中、右哪一段都可以，只要考虑如何使滑尺移动较少，但定位需估算. 读者可将例 3 再用 K 尺右段做一次.

[例 4] 计算 $43.8\div0.251^3$.

解：运算过程如图 4-11.

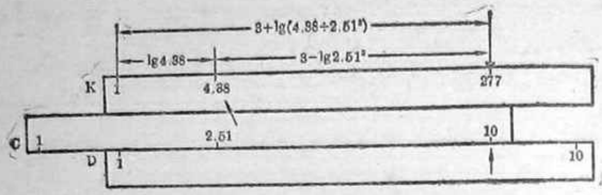


图 4-11

估算定位，得答数 2770.

练　　习

计算：

$\sqrt[3]{819}\div 6.98$　　(1.340)；

$\sqrt[3]{7.62}\div 33.2$　　(0.0593)；

$\sqrt[3]{2.83}\times 1.215$　　(1.718)；

$\sqrt[3]{0.177}\times 8460$　　(4750)；

$0.000713\times\sqrt[3]{34.5}$　　(0.00232)；

$39600\times\sqrt[3]{6290}$　　(731000)；

$2.26^3\times 8.12$　　(93.7)；

5.39×46.1^3　　(528000)；

$6010\div 5.59^3$　　(34.4)；

$0.473^3\div 202$　　(0.000524)。

五、指数是 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$ 的幂

用 K 尺、A 尺求指数是 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$ 的幂时相当方便.

1. 求 $A^{\frac{3}{2}}$　当 $1\leqslant A\leqslant 100$ 时，移滑标发线到 A 尺 a，在发线下读 K 尺即可得答数. 这是因为对应于 A 尺 a 读 D 尺得 $a^{\frac{1}{2}}$，而对应于 D 尺 $a^{\frac{1}{2}}$，在 K 尺上应读得 $a^{\frac{3}{2}}$，如下表所示.

K	$(a^{\frac{3}{2}})$
A	a
D	$a^{\frac{1}{2}}$

[例 1]　求 $4.46^{\frac{3}{2}}$, $73.5^{\frac{3}{2}}$。

解：运算过程如下表：

K	(9.42)	(630)
A	4.46	73.5

所以

$$4.46^{\frac{3}{2}}=9.42;\quad 73.5^{\frac{3}{2}}=630.$$

当 $A<1$ 或 $A>100$ 时，将 A 写成 $a\times 10^{2n}$ $(1\leqslant a\leqslant 100)$，然后进行计算.

[例 2]　求 $34800^{\frac{3}{2}}$.

解：$34800^{\frac{3}{2}}=(3.48\times 10^4)^{\frac{3}{2}}=3.48^{\frac{3}{2}}\times 10^6$。

移发线到 A 尺 3.48，读 K 尺得 6.49. 所以

$$34800^{\frac{3}{2}}=6.49\times 10^6=6490000。$$

[例 3]　求 $0.00843^{\frac{3}{2}}$.

解：$0.00843^{\frac{3}{2}}=84.3^{\frac{3}{2}}\times 10^{-6}$.

移发线到 A 尺 84.3，读 K 尺得 774. 所以

$$0.00843^{\frac{3}{2}}=774\times 10^{-6}=0.000774.$$

2. 求$K^{\frac{2}{3}}$ 当$1\leqslant K\leqslant 1000$时，移滑标发线到$K$尺$k$，在发线下读$A$尺即可得答数. 道理与求$A^{\frac{3}{2}}$基本相同，如下表所示.

K	k
A	$(k^{\frac{2}{3}})$
D	$k^{\frac{1}{3}}$

［例 4］ 求$2.98^{\frac{2}{3}}, 53.5^{\frac{2}{3}}, 767^{\frac{2}{3}}$.

解：运算过程如下表：

K	2.98	53.5	767
A	(2.07)	(14.2)	(83.8)

所以

$$2.98^{\frac{2}{3}}=2.07;\quad 53.5^{\frac{2}{3}}=14.2;\quad 767^{\frac{2}{3}}=83.8.$$

当$K<1$或$K>1000$时，将K写成$k\times10^{3n}(1\leqslant k\leqslant1000)$，然后进行计算.

［例 5］ 求$0.0234^{\frac{2}{3}}$.

解：$0.0234^{\frac{2}{3}}=(23.4\times10^{-3})^{\frac{2}{3}}$

$$=23.4^{\frac{2}{3}}\times10^{-2}.$$

移发线到K尺 23.4，读A尺得 8.18. 所以

$$0.0234^{\frac{2}{3}}=8.18\times10^{-2}=0.0818.$$

［例 6］ 求$4120^{\frac{2}{3}}$.

解：$4120^{\frac{2}{3}}=4.12^{\frac{2}{3}}\times10^{2}$.

移发线到K尺 4.12，读A尺得 2.57. 所以

$$4120^{\frac{2}{3}}=2.57\times10^{2}=257.$$

［例 7］ 求$0.988^{\frac{2}{3}}$.

解：$0.988^{\frac{2}{3}}=988^{\frac{2}{3}}\times10^{-2}$.

移发线到K尺 988，读A尺得 99.2. 所以

$$0.988^{\frac{2}{3}}=99.2\times10^{-2}=0.992.$$

练　　习

用A尺、K尺，求下列各值：

$1.65^{\frac{3}{2}}$ (2.12)； $1.93^{\frac{2}{3}}$ (1.55)；

$35.1^{\frac{3}{2}}$ (208)； $25.7^{\frac{2}{3}}$ (8.71)；

$0.0447^{\frac{3}{2}}$ (0.00945)； $7140^{\frac{2}{3}}$ (371)；

$424^{\frac{3}{2}}$ (8730)； $803000^{\frac{2}{3}}$ (8640)；

$6630^{\frac{3}{2}}$ (540000)； $0.0244^{\frac{2}{3}}$ (0.0841).

六、连续运算

在这一节中，我们将举例说明，怎样将平方根尺（A尺、B尺）、立方根尺（K尺）与基本尺（C尺、D尺）配合，作含有平方根、平方和立方根的乘除连续运算.

［例 1］ 计算$\dfrac{355\times\sqrt{25.8}}{24.2}$.

解：运算过程如下表：

B		25.8
C	2.42	
D	3.55	(7.45)

估算定位，得答数 74.5.

[例 2]　计算 $\dfrac{23.7^2\times0.785}{9.65}$。

解：运算过程如下表：

A		(45.7)
B	9.65	78.5
D	2.37	

估算定位，得答数 45.7.

[例 3]　计算 $\sqrt{439}\times\sqrt{0.118}\times87.4$.

解：运算过程如图 4-12.

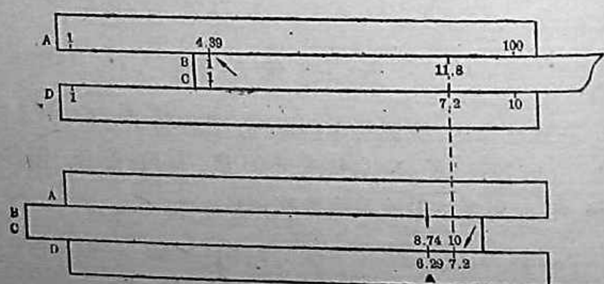


图　4-12

估算定位，得答数 629.

[例 4]　计算 $\dfrac{\sqrt{44.1}\times0.222}{\sqrt{7.62}}$。

解：运算过程如下表：

A	44.1	
B	7.62	
C		2.22
D		(5.34)

估算定位，得答数 0.534.

[例 5]　计算 $3.25\times\pi\times39.1^2$.

解：运算过程如图 4-13.

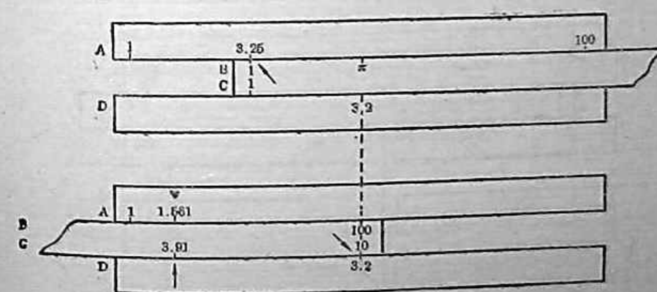


图　4-13

估算定位，得答数 15610.

[例 6] 计算 $\frac{\pi^2\times917\times2450}{71.6^2\times3.02^2}$。

解：运算过程如图 4-14。

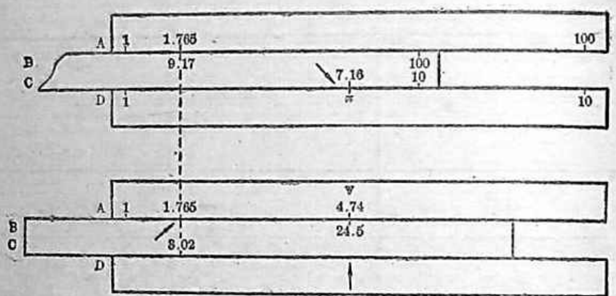


图 4-14

估算定位，得答数 474。

[例 7] 计算 $\sqrt{627}\times\sqrt[3]{1.72}\times2.92$。

解：运算过程如图 4-15。

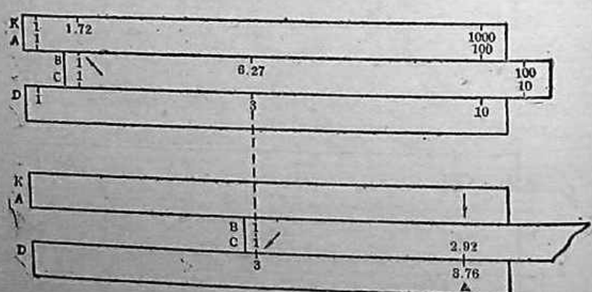


图 4-15

估算定位，得答数 87.6。

[例 8] 计算 $\frac{29.2^{\frac{2}{3}}\times27.2}{9.48^2}$。

解：运算过程如下表：

K	29.2	
A		(2.87)
B		27.2
C	9.48	

估算定位，得答数 2.87。

[例 9] 计算 $\frac{\sqrt[3]{27}\times\sqrt{45.8}}{2.22\times6.11}$。

解：运算过程如图 4-16。

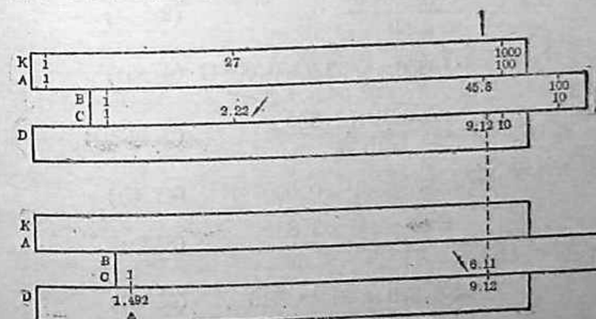


图 4-16

估算定位，得答数 1.492。

[例 10] 计算 $\frac{\sqrt[3]{0.0828}\times6.35}{\sqrt{54.5}}$。

解：运算过程如下表：

K	82.8	
B	54.5	
C		6.35
D		(3.75)

估算定位，得答数0.375。

练　习

计算：

$\dfrac{74.6\times\sqrt{1250}}{9.66}$ (273)；

$\dfrac{6.81^2\times148}{301}$ (22.8)；

$\sqrt{8850}\times\sqrt{32.7}\times0.00847$ (4.55)；

$\dfrac{\sqrt{0.0912}\times1.872}{\sqrt{15.5}}$ (0.1436)；

$9.28\times83.1^2\times0.000747$ (47.8)；

$\dfrac{4.22^2\times447\times3.88}{\pi^2\times1.928^2}$ (842)；

$\sqrt[3]{0.878}\times924\times\sqrt{116}$ (9530)；

$\dfrac{557^{\frac{3}{2}}\times0.785}{6.77}$ (7.85)；

$\dfrac{\sqrt[3]{0.523}\times10.78}{\sqrt{6.5}}$ (3.41)；

$\dfrac{\sqrt[3]{5580}\times\sqrt{0.0628}}{161\times5.18}$ (0.00533)。

七、平方尺的用法

有些计算尺上刻有两条平方尺 sq_1、sq_2。它和 D 尺配合使用能求出一个数的平方或平方根，与用 D 尺和 A 尺相比，它可多读到一个有效数字。

1. **平方尺的刻制原理**　平方尺是根据函数

$$Y=Q^2$$

刻制的。对这个函数式两边取常用对数，得

$$\lg Y=\lg Q^2=2\lg Q.$$

如果 $Q=1.414$，则

$$\lg Y=2\lg Q=2\lg1.414=2\times0.1505=0.301=\lg2,$$

即

$$Y=2.$$

如果 $Q=4.472$，则

$$\lg Y=2\lg Q=2\lg4.472=2\times0.6505=1.301=\lg20,$$

即

$$Y=20.$$

因此，对应于 D 尺上的有效数字 2，在平方尺上有两个有效数字不相同的数，我们把 1.414 刻在 sq_1 尺上，sq 的右脚码 1 叫做位标，表示这个尺度上的数，平方后的位数是 1；把 4.472 刻在 sq_2 尺上，右脚码 2 也是位标，表示此尺上的数，平方后的位数是 2。

用同样方法可刻出 sq_1、sq_2 尺的其它刻度(图 4-17)。

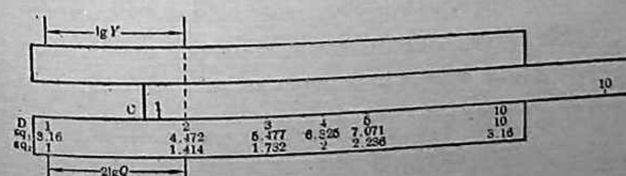


图 4-17

sq_1 尺的刻度是 1~3.1623, sq_2 尺的刻度是 3.1623~10. 它们分别和 D 尺一样长, 可看作是将 D 尺在 3.1623(即 $\sqrt{10}$) 处折断, 再各伸长到原来的两倍而成的. 为读数方便起见, 一般 sq_1 尺刻至 3.2, sq_2 尺刻度从 3.1 开始.

2. 求平方 $Y=Q^2$　当 $1\leqslant Q\leqslant 3.1623$ 时, 可将发线移到 sq_1 尺上的 q, 直接在 D 尺读得答数 Y, 如下表所示.

D	1	1.44	1.96	2.56	3.24	4	6.25	7.84	9	10
sq_1	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	2.8	3	3.1623

当 $3.1623\leqslant Q\leqslant 10$ 时, 可移发线到 sq_2 尺上的 q, 在 D 尺上读得 Y. 这时 D 尺上的 1, 2, 3, ……, 10, 须读为 10, 20, 30, ……, 100, 如下表所示.

D	10	12.25	16	19.8	25	30.8	49	64	81	100
sq_2	3.1623	3.5	4	4.45	5	5.55	7	8	9	10

当 $Q<1$ 或 $Q>10$ 时, 可把 Q 化成 $q\times 10^n(1\leqslant q\leqslant 10)$, 然后进行计算.

[例 1]　求(1) 1355^2, (2) 0.001355^2.

解: 移发线到 sq_1 尺 1.355, 读 D 尺得 1.836. 所以

(1) $1355^2=(1.355\times 10^3)^2=1.355^2\times 10^6$
$=1.836\times 10^6=1836000$;

(2) $0.001355^2=(1.355\times 10^{-3})^2=1.355^2\times 10^{-6}$
$=1.836\times 10^{-6}$
$=0.000001836$.

3. 求平方根 $Q=\sqrt{Y}$　当 $1\leqslant Y\leqslant 10$ 时, 可移发线到 D 尺 y, 在 sq_1 尺上读得答数 Q; 当 $10\leqslant Y\leqslant 100$ 时, 可移发线到 D 尺 y, 在 sq_2 尺上读得答数 Q.

当 $Y>100$ 时, 可将 Y 从小数点开始, 向左每两位一撇, 分成小节. 若第一节是 1 个数字, 则在 sq_1 尺读得答数的有效数字; 若是 2 个数字, 则在 sq_2 尺上读得答数的有效数字, 答数的位数根据 Y 有几个小节而定.

例如:

$\sqrt{15'35'00}$ 用 sq_2 尺, 答数的位数是 3(391.8);

$\sqrt{1'53'50}$ 用 sq_1 尺, 答数的位数是 3(123.9);

$\sqrt{15'35}$ 用 sq_2 尺, 答数的位数是 2(39.18);

$\sqrt{1'53.5}$ 用 sq_1 尺, 答数的位数是 2(12.39).

当 $Y<1$, 即 Y 是纯小数时, 将 Y 从小数点开始, 向右每两位一撇, 分成小节. 若含有有效数字的第一节是一个数字, 则在 sq_1 尺上读得答数的有效数字; 若是 2 个数字, 则在 sq_2 尺上读得答数的有效数字. 答数的位数根据小数点后有效数字之前全为零的节数而定.

例如:

$\sqrt{0.62'1}$ 用 sq_2 尺, 答数的位数是 0(0.788);

$\sqrt{0.06'21}$ 用 sq_1 尺, 答数的位数是 0(0.2492);

$\sqrt{0.00'62'1}$ 用 sq_2 尺, 答数的位数是 −1(0.0788);

$\sqrt{0.00'06'21}$ 用 sq_1 尺, 答数的位数是 −1(0.02492);

$\sqrt{0.00'00'62'1}$ 用 sq_2 尺, 答数的位数是 −2(0.00788).

将 sq 尺和 C、D 尺配合作含有平方的乘除, 运算也很方便. 含有平方根的乘除运算, 如用 sq 尺, 则需先求出 $\sqrt{Y}$, 然后代入有关算式, 利用 C 尺、D 尺等进行计算.

[例 2] 计算 $1.156^2 \times 3.57$。

解：运算过程如下表：

C	1	3.57
D		(4.77)
sq_1	1.156	

估算定位，得答数 4.77。

[例 3] 计算 $69.5 \div 7.57^2$。

解：运算过程见下表：

C	6.95	(1.213)
D		1
sq_2	7.57	

估算定位，得答数 1.213。

[例 4] 计算 $7.57^2 \div 69.5$。

解：运算过程如下表：

C	6.95	10
D		(8.24)
sq_2	7.57	

估算定位，得答数 0.824。

八、立方尺的用法

立方尺 cu_1, cu_2, cu_3 是将 D 尺在 2.154(即 $\sqrt[3]{10}$) 与 4.642 (即 $\sqrt[3]{100}$) 处折断，并伸长到原来的三倍而成。它和 D 尺配合使用能求出一个数的立方或立方根，比用 D 尺和 K 尺可多读得一位有效数字。

1. *立方尺的刻制原理* 立方尺是根据函数

$$Y = U^3,$$

刻制的。对上式两边取常用对数，得

$$\lg Y = \lg U^3 = 3\lg U.$$

如果 $U = 1.260$，则

$$\lg Y = 3\lg U = 3\lg 1.260 = 3 \times 0.1004 = 0.301 = \lg 2,$$

即

$$Y = 2.$$

如果 $U = 2.714$，则

$$\lg Y = 3\lg U = 3\lg 2.714 = 3 \times 0.4336 = 1.301 = \lg 20,$$

即

$$Y = 20.$$

如果 $U = 5.848$，则

$$\lg Y = 3\lg U = 3\lg 5.848 = 3 \times (0.7670) = 2.301 = \lg 200,$$

即

$$Y = 200.$$

因此，与平方尺相仿，对应于 D 尺 2(20, 200)，亦即对应于 L 尺 0.301，我们分别在 cu_1 尺上刻上 1.260，cu_2 尺上刻上 2.714，cu_3 尺上刻上 5.848，cu 尺的右脚码也是位标。

用同样方法，可刻出 cu_1 尺，cu_2 尺，cu_3 尺的其它刻度(图 4-18)。

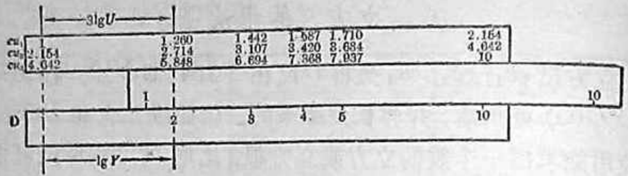


图 4-18

cu_1 尺的刻度是 1~2.154，cu_2 尺的刻度是 2.154~4.642，cu_3 尺的刻度是 4.642~10．它们的全长都和 D 尺相同．为读数方便起见，一般 cu_1 尺的刻度刻到 2.2；cu_2 尺的刻度从 2.1 开始，刻到 4.7；cu_3 尺的刻度从 4.6 开始．

2．求立方 $Y=U^3$　当 $1\leqslant U\leqslant 2.154$ 时，可移发线到 cu_1 尺上的 u，在 D 尺上直接读得答数 Y，如下表所示．

cu_1	1	1.1	1.2	1.35	1.431	1.514	1.657	1.841	2.048	2.154
D	1	1.331	1.728	2.46	2.93	3.47	4.55	6.24	8.59	10

当 $2.154\leqslant U\leqslant 4.642$ 时，可移发线到 cu_2 尺上的 u，在 D 尺上读得 Y．这时 D 尺上的 1, 2, 3……, 10，须读为 10, 20, 30, ……, 100，如下表所示．

cu_2	2.154	2.3	2.4	2.6	2.71	3.57	3.73	3.96	4.39	4.642
D	10	12.17	13.82	17.58	19.9	45.5	51.9	62.1	84.6	100

当 $4.642\leqslant U\leqslant 10$ 时，可移发线到 cu_3 尺上的 u，在 D 尺上读得 Y．这时 D 尺上的 1, 2, 3, ……, 10，须读为 100, 200, 300, ……, 1000，如下表所示．

cu_3	4.642	4.92	5	5.46	5.55	6.35	6.79	7.3	8.64	10
D	100	119.1	125	162.8	171	256	313	389	645	1000

当 U 不在上述范围内时，可将 U 化成 $u\times 10^n\,(1\leqslant u\leqslant 10)$，然后进行计算．

[例 1]　求 124.4^3．

解：移发线到 cu_1 尺 1.244，在 D 尺上读得 1.925．所以

$$124.4^3=1.244^3\times 10^6=1.925\times 10^6=1925000.$$

[例 2]　求 0.3353^3．

解：移发线到 cu_2 尺 3.353，在 D 尺上读得 37.7．所以

$$0.3353^3=3.353^3\times 10^{-3}=37.7\times 10^{-3}=0.0377.$$

[例 3]　求 849^3．

解：移发线到 cu_3 尺 8.49，在 D 尺上读得 612．所以

$$849^3=8.49^3\times 10^6=612\times 10^6=612000000.$$

3．求立方根 $U=\sqrt[3]{Y}$　当 $1\leqslant Y\leqslant 10$ 时，可移发线到 D 尺 y，在 cu_1 尺上直接读得答数；当 $10\leqslant Y\leqslant 100$ 时，可移发线到 D 尺 y，在 cu_2 尺上直接读得答数；当 $100\leqslant Y\leqslant 1000$ 时，可移发线到 D 尺 y，在 cu_3 尺上直接读得答数．

当 $Y>1000$ 时，将 Y 从小数点开始，向左每三位一撇，分成小节．若第一节是 1 个数字，则在 cu_1 尺上读得答数的有效数字；若是 2 个数字，则在 cu_2 尺上读得答数的有效数字；若是 3 个数字，则在 cu_3 尺上读得答数的有效数字．答数的位数根据 Y 有几个小节而定．

例如：

$\sqrt[3]{1'916'000}$ 用 cu_1 尺，答数是 124.2；

$\sqrt[3]{191'600}$ 用 cu_3 尺，答数是 57.65；

$\sqrt[3]{19'160}$ 用 cu_2 尺，答数是 26.76；

$\sqrt[3]{1'916}$ 用 cu_1 尺，答数是 12.42；

$\sqrt[3]{'191.6}$ 用 cu_3 尺，答数是 5.765.

当 $Y<1$ 时，从小数点开始向右每三位一撇，分成小节。若含有效数字的第一节是一个数字，则在 cu_1 尺上读得答数的有效数字；若是 2 个数字，则在 cu_2 尺上读得答数的有效数字；若是 3 个数字，则在 cu_3 尺上读得答数的有效数字。答数的位数，根据 Y 小数点后有效数之前全为零的节数而定。

例如：

$\sqrt[3]{0.544'}$ 用 cu_3 尺，答数是 0.8163；

$\sqrt[3]{0.054'4}$ 用 cu_2 尺，答数是 0.3789；

$\sqrt[3]{0.005'44}$ 用 cu_1 尺，答数是 0.1759；

$\sqrt[3]{0.000'544'}$ 用 cu_3 尺，答数是 0.08163；

$\sqrt[3]{0.000'054'4}$ 用 cu_2 尺，答数是 0.03789.

4. 用平方尺和立方尺求 $Q^{\frac{2}{3}}$ 和 $U^{\frac{3}{2}}$

(1) 求 $Q^{\frac{2}{3}}$. 因为

$$Q^{\frac{2}{3}}=(Q^2)^{\frac{1}{3}},$$

所以，先用 sq 尺、D 尺求出 Q^2，再用 D 尺、cu 尺求出 $(Q^2)^{\frac{1}{3}}$；

(2) 求 $U^{\frac{3}{2}}$. 因为

$$U^{\frac{3}{2}}=(U^3)^{\frac{1}{2}},$$

所以，先用 cu 尺、D 尺求出 U^3，再用 D 尺、sq 尺求出 $(U^3)^{\frac{1}{2}}$（图 4-19）。

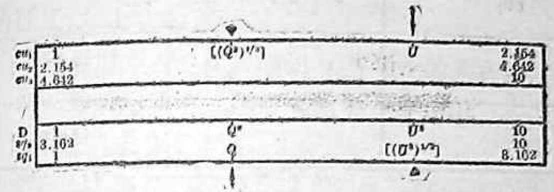


图 4-19

[例 4] 求 $627.7^{\frac{2}{3}}$.

解：$627.7^{\frac{2}{3}}=[(6.277\times10^2)^2]^{\frac{1}{3}}=[6.277^2\times10^4]^{\frac{1}{3}}$，用 sq_2 尺、D 尺求得 6.277^2 为 39.4，得到

$$627.7^{\frac{2}{3}}=[39.4\times10^4]^{\frac{1}{3}}=[394\times10^3]^{\frac{1}{3}}=394^{\frac{1}{3}}\times10.$$

再用 D 尺、cu_3 尺求得 $394^{\frac{1}{3}}$ 为 7.33，所以

$$627.7^{\frac{2}{3}}=7.33\times10=73.3.$$

[例 5] 求 $627.7^{\frac{3}{2}}$.

解：$627.7^{\frac{3}{2}}=[(6.277\times10^2)^3]^{\frac{1}{2}}=[6.277^3\times10^6]^{\frac{1}{2}}$，用 cu_3 尺、D 尺求得 6.277^3 为 247，得到

$$627.7^{\frac{3}{2}}=[247\times10^6]^{\frac{1}{2}}=247^{\frac{1}{2}}\times10^3.$$

再用 D 尺、sq_1 尺求得 $247^{\frac{1}{2}}$ 为 15.73，所以

$$627.7^{\frac{3}{2}}=15.73\times10^3=15730.$$

含有立方的乘除，用 cu 尺和 C 尺、D 尺配合计算，也很简便。

[例 6] 计算 $9.77^3\times1.914$.

解：运算过程如下表：

cu_3	9.77	
C	10	1.914
D		(1.785)

估算定位，得答数 1785.

[例 7]　计算：(1) $1.157^3 \div 1.411$; (2) $1.411 \div 1.157^3$.

解：运算过程如图 4-20.

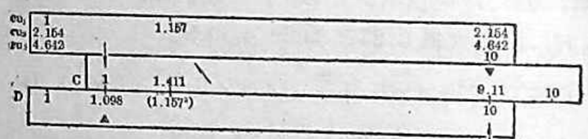


图　4-20

估算定位，得

$$(1)\ 1.157^3 \div 1.411 = 1.098;$$

$$(2)\ 1.411 \div 1.157^3 = 0.911.$$

九、用 C 尺、D 尺、L 尺求任意次幂

我们已经学会了求一个正数的平方、立方和平方根、立方根．在本节中，我们将进一步讨论如何使用 C 尺、D 尺和 L 尺求一个正数的任意次幂．

由对数知识我们知道

$$a^\alpha = \lg^{-1}(\lg a^\alpha) = \lg^{-1}(\alpha \lg a).$$

根据上式，用 C 尺、D 尺和 L 尺求 a^α 时，可分以下三步进行：

(1) 先用 D 尺、L 尺求出 $\lg a$ 的尾数部分，并根据常用对数的性质，加上它的首数；

(2) 再用 C 尺、D 尺算出 α 与 $\lg a$ 的乘积；

(3) 最后用 L 尺、D 尺求出 $\lg^{-1}(\alpha \lg a)$.

[例 1]　求 $3.35^{3.38}$.

解：(1) 移发线到 D 尺 3.35，读 L 尺得 0.525．因为 3.35 的位数是 1，所以首数是零，即

$$\lg 3.35 = 0.525;$$

(2) 用 C 尺、D 尺计算，得

$$3.38 \times 0.525 = 1.775;$$

(3) 移发线到 L 尺 0.775，读 D 尺得 5.95．因首数是 1，所以真数的位数是 2，即

$$3.35^{3.38} = 59.5.$$

[例 2]　求 $0.723^{2.69}$.

解：(1) 移发线到 D 尺 7.23，读 L 尺得 0.859，对数的首数是 -1，即

$$\lg 0.723 = \bar{1}.859 = -1 + 0.859 = -0.141;$$

(2) 用 C 尺、D 尺计算，得

$$2.69 \times (-0.141) = -0.379$$
$$= -1 + 0.621 = \bar{1}.621;$$

(3) 移发线到 L 尺 0.621，读 D 尺得 4.18，因为首数是 -1，所以真数的位数是零，即

$$0.723^{2.69} = 0.418.$$

[例 3]　求 $8910^{\frac{3}{5}}$.

解：(1) 移发线到 D 尺 8.91，读 L 尺得 0.950，所以

$$\lg 8910 = 3.950;$$

(2) 用 C 尺、D 尺计算得

$$\frac{3}{5}\times 3.950=2.370;$$

(3) 移发线到 L 尺 0.370，读 D 尺得 2.34，因首数是 2，所以真数的位数是 3，即

$$8910^{\frac{3}{5}}=234。$$

[例 4] 已知 $1.96^{\alpha}=3.38$，求 α。

解：$1.96^{\alpha}=3.38$。

两边取常用对数，得

$$\alpha\lg 1.96=\lg 3.38,$$

所以

$$\alpha=\frac{\lg 3.38}{\lg 1.96}=\frac{0.529}{0.292}=1.81。$$

如有自然对数尺度 ln，上述计算则方便得多。我们将在第七章第三节里再行介绍。

练　　习

用 C 尺、D 尺、L 尺求下列各值：

$1.44^{3.76}$	(3.94)；	$11^{1.1}$	(14)；
$0.212^{0.835}$	(0.274)；	$2.57^{0.344}$	(1.383)；
$165^{1.152}$	(360)；	$0.064^{0.0531}$	(0.864)；
$0.48^{-5.7}$	(66)；	$625^{\frac{1}{4}}$	(5)。

十、有关圆和球的计算

我们常会遇到有关圆和球的计算。这里介绍几种使用计算尺解决有关圆和球计算的方法。

1. 圆面积计算

(1) 应用标记 785 法。我们知道，圆面积

$$S=\frac{\pi}{4}d^2=0.7854d^2。$$

所以，一般在 A 尺 78.5 处刻有 s，如使 C 尺 10（即 B 尺 100）对准 A 尺 s(78.5)，那么移发线到 C 尺 d，就可在 A 尺上读得圆面积 S 的有效数字（图 4-21）。

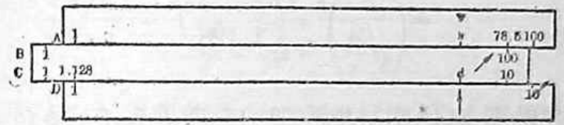


图 4-21

当 $d<1.128$ 时，在 A 尺上读不到 S，此时可将 B 尺 78.5 对准 A 尺 100（即 D 尺 10），移发线到 D 尺 d，在 B 尺上读得圆面积 S 的有效数字（图 4-22）。

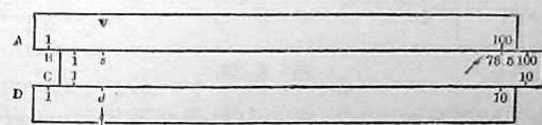


图 4-22

[例 1] 求直径 d 分别为 1.128 厘米，2.83 厘米，3.86 厘米，4.57 厘米，5.96 厘米的圆面积 S。

解：运算过程见下表：

A	78.5	(1)	(6.29)	(11.70)	(16.4)	(27.9)
C	10	1.128	2.83	3.86	4.57	5.96

经估算定位，知道它们的面积分别是 1 平方厘米，6.29 平方厘米，11.70 平方厘米，16.4 平方厘米，27.9 平方厘米。

(2) 应用标记 1128 法．有的计算尺不在 A 尺上刻标记 s，为了便于计算圆面积，而在 C 尺的 1.128 处刻上标记 c。这是因为

$$S=\frac{\pi}{4}d^2=\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}d\right)^2$$

$$=\left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}\right)^2=\left(\frac{d}{1.128}\right)^2=\left(\frac{d}{c}\right)^2。$$

运算过程是：使 C 尺 1.128（即 c）对准 D 尺上的直径 d，对应于 C 尺 1（或 10），在 A 尺上即可读得圆面积 S 的有效数字（图 4-23）．若已知 S 要求 d，则方法与上相反．

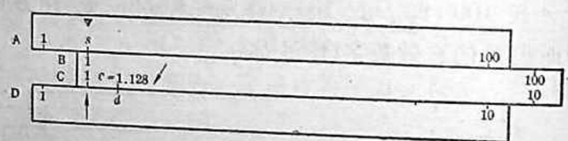


图 4-23

为了使滑尺移动幅度小，在 C 尺的 3.57 处还刻有标记 c_1．因为，如果只考虑有效数字，那么圆面积公式又可写为

$$S=\frac{\pi}{40}d^2=\frac{d^2}{\frac{40}{\pi}}=\left(\frac{d}{\sqrt{\frac{40}{\pi}}}\right)^2=\left(\frac{d}{3.57}\right)^2=\left(\frac{d}{c_1}\right)^2。$$

计算方法如下表：

A		S
C	c_1	1（或 10）
D	d	

读者可用标记 1128 法将例 1 再演算一次．

(3) 应用标记 π 法．圆面积公式

$$S=\frac{\pi}{4}d^2$$

写成比例式是

$$\frac{\pi}{2^2}=\frac{S}{d^2}.$$

因此，在 A、B 尺的 3.14 处刻上标记 π，根据 A 尺与 B 尺的比例关系，就能很方便地求得圆面积．运算过程是：使 C 尺 2 对准 A 尺 π（或 B 尺 π 对准 D 尺 2），移发线到 C 尺（或 D 尺）d，在 A 尺（或 B 尺）上便读得圆面积 S 的有效数字（图 4-24）．

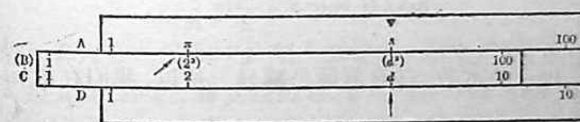


图 4-24

(4) 应用平方尺法．如果计算尺上没有 A 尺而有 sq 尺，那么求圆面积可按下述方法进行．

因为

$$S=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{d^2}{\frac{4}{\pi}}=\frac{d^2}{1.273},$$

所以在 C 尺 1.273 处刻有标记 s．若使 C 尺 1.273（即 s）对准 sq 尺 d，则对应于 C 尺 1（或 10），在 D 尺上即可读得圆面积 S 的有效数字，如下表所示．

C	s	1
D		(S)
sq	d	

(5) 应用滑标法. 对圆面积公式

$$S=\frac{\pi}{4}d^2$$

两边取常用对数, 得

$$\lg S=\lg\frac{\pi}{4}+2\lg d,$$

$$\frac{1}{2}\lg S=\lg d-\frac{1}{2}\lg\frac{4}{\pi},$$

即

$$\lg\sqrt{S}=\lg d-\frac{1}{2}\lg\frac{4}{\pi}.$$

$\frac{1}{2}\lg\frac{4}{\pi}$是常数, 它的前面是减号. 所以, 我们在滑标上发线的左边刻上一条短线 s, 使 s 至发线的距离等于$\frac{1}{2}\lg\frac{4}{\pi}$. 求圆面积时, 使中间发线对准 D 尺 d, 则在滑标左边的短线 s 下读 A 尺, 就可以得到圆面积 S 的有效数字(此时, D 尺的对应读数就是$\sqrt{S}$的有效数字).

发线右边刻有另一条短线 PS (马力), 它和中间发线(kW)配合, 可以用来作瓩与马力的换算. 它的原理是:

$$1\,\text{PS}=0.736\,\text{kW},$$

两边取常用对数, 得

$$\lg \text{PS}=\lg 0.736+\lg \text{kW},$$

$\lg 0.736$是常数, 它的前面是加号, 所以我们把它刻在滑标上发线的右边. 如果把滑标发线(kW)移到 A 尺上不同的位置, 那么对应于滑标右边的短线, 在 A 尺上就得到相应的 PS 值.

2. 球面积和球体积计算

(1) 球面积计算. 根据球面积公式

$$F=\pi d^2,$$

我们用 C 尺、A 尺可直接算得球面积.

运算过程是: 使 C 尺 1 (或 10)对 A 尺 π, 移发线到 C 尺 d, 在 A 尺上读得球面积 F 的有效数字, 如下表所示.

A	π	(F)
C	1 (或 10)	d

(2) 球体积计算. 根据球体积公式, 得

$$V=\frac{\pi}{6}d^3=0.5236\,d^3,$$

设 $v=0.5236$, 则

$$V=vd^3.$$

一般计算尺在 K 尺 524 处刻上标记 v. 若使 C 尺 10 (或 1)对准 K 尺 524 (即 v), 移发线到 C 尺 d, 即可在 K 尺上读得球体积 V 的有效数字, 如下表所示.

K	v	(V)
C	10 (或 1)	d

如计算尺上没有 K 尺而刻有 cu 尺, 那么求球体积可按下述方法进行.

因为

$$V=\frac{\pi}{6}d^3=\frac{d^3}{\frac{6}{\pi}}=\frac{d^3}{1.910},$$

所以在 C 尺 1.910 处刻有标记 v. 若使 C 尺 v 对准 cu 尺 d, 则对应于 C 尺 1 (或 10), 在 D 尺上可读得球体积 V 的有效数字, 如下表所示.

cu	d	
C	v	1 (或 10)
D		(V)

第五章　三角函数

这一章我们将讨论怎样利用计算尺进行有关三角函数的计算.

一、正弦、余弦

正弦尺 S 和 D 尺(或 C 尺)配合使用, 可读得 5.74°~90° 角的正弦函数值.

正弦尺 S 是根据函数

$$Y=\sin x$$

刻制的, 它左端的刻度是 5.74°, 右端的刻度是 90°(图 5-1).

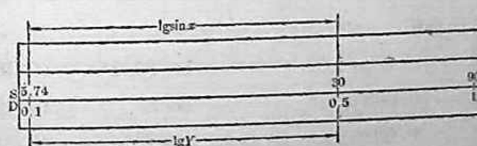


图　5-1

因此, 求 $Y=\sin x$, 当 $5.74°\leqslant x\leqslant 90°$ 时, 可移发线到 S 尺上的黑 x, 读 D 尺得 Y, Y 值范围是 0.1~1, 如下表所示.

S	5.74°	7.14°	9.55°	10°	14.3°	21.1°	30°	45°	60°	90°
D	0.1	0.1242	0.1659	0.1735	0.247	0.36	0.5	0.707	0.866	1

有些国产计算尺为了读数方便起见，把正弦尺的函数式写为 $Y=\sin_0 x$，位标 0 表示函数值 Y 的位数是零.

S 尺的各级刻度之间一般是十进制，单位是度. 读数时需注意，不要误读成几度几分. 有些计算尺的 S 尺也采用六十分制.

我们知道

$$\sin x=\cos(90^\circ-x),$$

即一个角度的正弦等于它余角的余弦. 因此，一般计算尺在 S 尺上除用黑字表示正弦的角度外，还用红字表示它的余角，也就是求余弦的角度. 这样求 $\cos x(0^\circ\leqslant x\leqslant 84.26^\circ)$ 时，可直接移发线到 S 尺红 x，在 D 尺(或 C 尺)上读得它的值. 但要注意，余弦角度在 S 尺上是从右向左递增.

例如求 $\cos 60^\circ$，可将发线移到 S 尺红 60° (即黑 30°)，读 D 尺得 $\cos 60^\circ=0.5$.

练　习

1. 求下列各函数值:

$\sin 7.1^\circ$ (0.1236);
$\sin 74.8^\circ$ (0.965);
$\sin 5.1^\circ$ (0.0889);
$\sin 2^\circ$ (0.0349);
$\cos 84.1^\circ$ (0.1028);
$\cos 5^\circ$ (0.996);
$\cos 71.4^\circ$ (0.319);
$\cos 45^\circ$ (0.707).

2. 求下列各角的度数:

$\sin x=0.5$ (30°);
$\sin x=0.883$ (62°);
$\sin x=0.996$ (85°);
$\cos x=0.5$ (60°);
$\cos x=0.1$ (84.26°);
$\cos x=0.985$ (10°);
$\sin x=0.373$ (21.9°);
$\sin x=0.0628$ (3.6°);
$\sin x=0.01$ (0.573°);
$\cos x=0.917$ (23.5°);
$\cos x=0.0349$ (88°);
$\cos x=0.068$ (86.1°).

二、正切、余切

正切尺 T 的刻制方法和 S 尺相似，见图 5-2. D 尺和它的函数关系是

$$Y=\operatorname{tg} x.$$

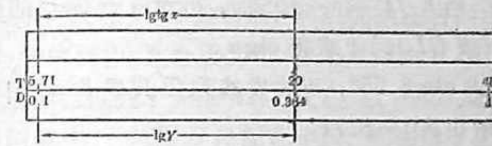


图　5-2

利用 D 尺(C 尺)和 T 尺，可读得 $5.71^\circ\sim45^\circ$ 角的正切值.

求 $Y=\operatorname{tg} x$，当 $5.71^\circ\leqslant x\leqslant45^\circ$ 时，可移发线到 T 尺上的黑 x，读 D 尺得 Y，函数值的范围是 0.1~1，如下表所示.

T	5.71°	6.4°	8.7°	11.25°	20°	23.7°	25.5°	30°	40°	45°
D	0.1	0.1122	0.153	0.199	0.364	0.439	0.477	0.577	0.839	1

我们知道

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg}(90^\circ-x).$$

所以，一般计算尺的 T 尺也和 S 尺一样，用黑字表示正切角度，用红字表示它的余角，也就是求余切的角度. 因此，当 $45^\circ\leqslant x\leqslant 84.29^\circ$ 时，可直接由 T 尺、D 尺(或 C 尺)求得 $\operatorname{ctg} x$.

又因为

$$\operatorname{tg} x=\frac{1}{\operatorname{ctg} x},$$

所以，当 $45^\circ<x\leqslant 84.29^\circ$ 时，可对应于 T 尺的红 x，直接在 DI(或 CI)尺上求得 $\operatorname{tg} x$，如下表所示.

T(红 x)	50°	55°	56.5°	60.2°	64°	69.4°	71.9°	76°	78.6°	82.75°
DI(或CI) tg x	1.192	1.428	1.511	1.746	2.05	2.66	3.06	4.01	4.96	7.86

同样，当 $5.71° \leqslant x < 45°$ 时，可对应于 T 尺的黑 x，直接在 DI 尺(或 CI 尺)上求得 ctg x.

例如求 ctg 6.55°，可移发线到 T 尺黑 6.55°，在 DI 尺上求得 ctg 6.55° = 8.71.

练　　习

1. 求下列各函数值：

tg 30°	(0.577);	ctg 84.29°	(0.1);
tg 5.71°	(0.1);	ctg 20.6°	(2.66);
tg 9.45°	(0.1644);	ctg 85°	(0.0875);
tg 2°	(0.0349);	ctg 2.3°	(24.9);
tg 80.1°	(5.73);	ctg 72.1°	(0.323).

2. 求下列各 x 的角度：

tg x=0.1281	(7.3°);	ctg x=0.18	(79.8°);
tg x=0.1539	(8.75°);	ctg x=0.1361	(82.25°);
tg x=6.5	(81.25°);	ctg x=0.839	(50°);
tg x=0.268	(15°);	ctg x=1.192	(40°);
tg x=3.73	(75°);	ctg x=0.479	(64.4°).

三、小角度的正弦和正切

在本节中我们将继续讨论，当角度小于 5.74° 或 5.71° 时，怎样用计算尺求得正弦或正切的值。

现在先介绍一下 SRT 尺。

SRT 尺实际上是一条弧度尺度．我们知道，弧长等于半径的圆弧所对的圆心角是 1 弧度．所以弧度与角度的关系是

$$360° = 2\pi \text{ 弧度},$$

$$1 \text{ 弧度} = \frac{180°}{\pi} \approx 57.3°, \qquad 0.1 \text{ 弧度} = 5.73°,$$

$$0.01 \text{ 弧度} = 0.573°$$

如果将 C 尺在 5.73 处折断，然后交换左右两段位置，并使 C 尺 1 与 C 尺 10 迭合成为 1，在起点刻上 0.573，终点刻上 5.73，这样就得到了一条 SRT 尺(一般 SRT 尺从 0.55 起刻，右边刻至 6)．它和 D 尺配合使用，可将角度化为弧度或弧度化为角度．

将角度 x 化为弧度数，可移发线到 SRT 尺的黑 x，读 D 尺得到弧度数的有效数字(读者可考虑一下为什么)．当 $0.573° \leqslant x \leqslant 5.73°$ 时，它的值的范围是 0.01～0.1，如下表所示．

SRT	0.573°	2°	2.2°	2.9°	3.1°	3.26°	4.6°	5.1°	5.73°
D	0.01	0.0349	0.0384	0.0506	0.0541	0.0569	0.0802	0.0889	0.1

当 $5.73° \leqslant x \leqslant 57.3°$ 时，它的值的范围是 0.1～1，例如，5.73° = 0.1 弧度，10° = 0.1745 弧度，20° = 0.349 弧度等．当 $57.3° \leqslant x \leqslant 573°$ 时，它的值的范围是 1～10，例如，57.3° = 1 弧度，100° = 1.745 弧度，200° = 3.49 弧度等．

同样，若把 SRT 尺上的刻度读小十倍，则 D 尺的读数也要相应地读小十倍．

有的计算尺在 C 尺 5.73 和 1.745 处刻有符号 R 和 1°，也是为了便利角度与弧度的互化．

例如，把 200° 化为弧度，可使 C 尺 R(即 5.73) 对准 D 尺 2，在 C 尺 10 下读 D 尺得 3.49，即 200° = 3.49 弧度.

在单位圆中(图 5-3)，$\angle AOT=\theta$ 弧度，$MP=\sin\theta$，$\widehat{AP}=\theta$ 弧度，$AT=\operatorname{tg}\theta$. 我们可以看出，当 θ 越来越小时，MP，$\widehat{AP}$，AT 的长度也就越来越接近. 因此当 θ 很小时 ($0<\theta\leqslant 0.1$ 弧度)，

$$\sin\theta\approx\operatorname{tg}\theta\approx\theta(\text{弧度}).$$

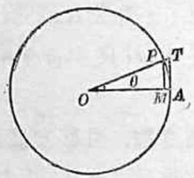


图 5-3

例如：

$$\sin 5.73°=0.099833\approx 0.1,$$
$$\operatorname{tg} 5.73°=0.10033\approx 0.1,$$
$$5.73°\approx 0.1 \text{ 弧度}.$$

所以，求小角度的正弦和正切，我们只要利用 SRT 尺和 C 尺，把角度化为弧度值就可以了，角度越小时，求得的正弦、正切值的误差也就越小. 这就是说，SRT 尺也是小角度的正弦尺和正切尺. 和 S 尺、T 尺相仿，为了便于求出 84.26° ~ 90° 角的余弦值与 84.29° ~ 90° 角的余切值，在 SRT 尺上也用套红的数字来表示求余弦(余切)的角度.

[例 1] 求 tg 38′.

解：38′ = 0.633°，移发线到 SRT 尺 0.633，读 C 尺得

$$\operatorname{tg} 38'\approx 0.01105.$$

[例 2] 求 sin 5′.

解：5′ ≈ 0.0833°，移发线到 SRT 尺 0.833，读 C 尺得

$$0.833°=0.01454,$$
$$\therefore\ 0.0833°=0.001454,$$
$$\sin 0.0833°=0.001454.$$

[例 3] 求 tg 52″.

解：52″ = 0.01445°，移发线到 SRT 尺 1.445°，读 C 尺得

$$\operatorname{tg} 0.01445°=0.000252.$$

小角度常用分、秒为单位来表示. 分、秒与弧度的关系为：

$$1 \text{ 弧度}\approx 3440';$$
$$1 \text{ 弧度}\approx 206000''.$$

因此，有的计算尺在 C 尺上的 3.44 及 2.06 处刻有标记“′”及“″”或 ρ' 及 ρ''，以便利分、秒与弧度的互化.

把度、分、秒化为弧度，我们只要记住

$$\sin 0.1°\approx 0.002 \quad (2\text{ 零}, 2),$$
$$\sin 1'\approx 0.0003 \quad (3\text{ 零}, 3),$$
$$\sin 1''\approx 0.000005 \quad (5\text{ 零}, 5),$$

其余定位就十分方便.

练　　习

1. 把下列角度化为弧度：
90°(1.571)；21.2°(0.37)；23′(0.00669)；43″(0.0002085).

2. 把下列弧度化为角度：
2 弧度 (114.6°)； 3.9 弧度(223.4°)； π 弧度 (180°)； 0.0288 弧度 (1.65°)。

3. 求下列各函数的值:

$\sin 0.5°$	(0.00873);	$\sin 5''$	(0.0000242);
$\cos 89.75°$	(0.00436);	$\mathrm{tg}\, 0.3°$	(0.00524);
$\mathrm{tg}\, 48'$	(0.01396);	$\mathrm{ctg}\, 15'$	(229).

四、小角度的余弦与大角度的正弦

三角函数是计算尺的重要内容之一。但是,一般 25 厘米长的计算尺,在 S 尺的右端 $\sin 80°\sim\sin 90°$ 间(亦即 $\cos 0°\sim\cos 10°$ 间)只有一条刻度线 $\sin 85°$ (即 $\cos 5°$),在这种情况下要在 S 尺上准确地读出 $80°\sim 90°$ 角的正弦值或 $0°\sim 10°$ 角的余弦值是不可能的. 因此,本节将再介绍一些求小角度的余弦(或大角度的正弦)的方法.

根据余弦函数的幂级数,我们有近似公式

$$\cos\theta\approx 1-\frac{\theta^2}{2}\ (0<\theta\leqslant 0.1\text{ 弧度}).$$

如果已知的小角度是 $x°$,根据上面的近似公式,我们可按下述方法求它的余弦值.

使 SRT 尺黑 x 对准 A 尺 2, 对应于 A 尺 1, 读 B 尺得 b. 然后由公式

$$\cos x°=1-\frac{b}{10000}=\frac{10000-b}{10000}$$

求得 $\cos x°$.

这是因为对应于 SRT 尺 x, 在 D 尺上的刻度值是 d, 在 B 尺上的刻度值则应是 d^2, 所以

$$b=\frac{d^2}{2}.$$

但是 SRT 尺上的 $x°$ 等于 D 尺上的对应值 d 乘上 10^{-2} 弧度,即

$$x°=d\times 10^{-2}\text{ 弧度}=\theta,$$
$$d=\theta\times 10^2,$$

于是

$$b=\frac{\theta^2}{2}\times 10^4,$$

$$\frac{\theta^2}{2}=\frac{b}{10^4}=\frac{b}{10000},$$

最后得到

$$\cos x°=1-\frac{\theta^2}{2}=\frac{10000-b}{10000}.$$

[例 1] 求 $\cos 1°$.

解: 使 SRT 尺 1° 对准 A 尺 2, 对应于 A 尺 1, 读 B 尺得 b 为 1.52. 所以

$$\cos 1°=\frac{10000-1.52}{10000}=0.999848.$$

[例 2] 求 $\cos 3.88°$.

解: 使 SRT 尺 3.88° 对准 A 尺 2, 对应于 A 尺 1, 在 B 尺上读得 b 为 22.9. 所以

$$\cos 3.88°=\frac{10000-22.9}{10000}=0.99771.$$

当 $0.0573°\leqslant x\leqslant 0.573°$ 时, 用上述方法求 $\cos x$ 要注意一点,此时

$$\cos x°=\frac{1000000-b}{1000000}.$$

上式请读者自己推导.

[例 3] 求 $\cos 15'$.

解: $15'=0.25°$, 使 SRT 尺 2.5° 对准 A 尺 2, 移发线到 A 尺 1, 在 B 尺上读得 9.5. 所以

$$\cos 15'=\cos 0.25°=\frac{1000000-9.5}{1000000}=0.9999905.$$

[例 4] 求 $\sin 89°54'$。

解：
$$\sin 89°54' = \cos 6' = \cos 0.1°,$$
使 SRT 尺 1° 对准 A 尺 2，移发线到 A 尺 1，在 B 尺上读得 1.52. 所以
$$\sin 89°54' = \cos 0.1° = \frac{1000000 - 1.52}{1000000} = 0.99999848.$$

用 H' 尺也可求得小角度余弦与大角度正弦，方法见第六章第二节。

五、含有三角函数的乘除

下面我们举例说明，怎样利用三角函数尺度，作含有三角函数的乘除运算。

[例 1] 计算 $16 \times \sin 20°$。

解：使 C 尺 1 对准 D 尺 1.6，移发线到 S 尺黑 20°，读 D 尺得 5.47，如图 5-4 所示。（此时发线盖着 C 尺 3.42，即 $\sin 20° = 0.342$，$16 \times 0.342 = 5.47$。）

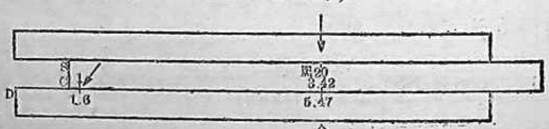


图 5-4

估算定位，得答数 5.47。

[例 2] 计算 $31 \div \sin 51°$。

解：运算过程如下表：

S	黑 51°	
C		10
D	3.1	(3.99)

估算定位，得答数 39.9。

[例 3] 计算：$169 \times \mathrm{tg}\,15°$；$169 \times \mathrm{ctg}\,65°$。

解：运算过程如下表：

T		黑 15°	红 65°
C	1		
D	1.69	(4.53)	(7.88)

估算定位，得
$$169 \times \mathrm{tg}\,15° = 45.3; \quad 169 \times \mathrm{ctg}\,65° = 78.8.$$

[例 4] 计算 $\dfrac{6.1 \times \sqrt{17} \times \sin 72° \times \mathrm{tg}\,20°}{2.22}$。

解：使 CI 尺 6.1 对准 A 尺 17（此时 C 尺 1 对准 D 尺 2.51，即 $\sqrt{17} \times 6.1 = 25.1$，可不必读出），移发线到 T 尺黑 20°；抽动滑尺，使 C 尺 10 在发线下，再移发线到 S 尺黑 72°；最后使 C 尺 2.22 也在发线下，在 C 尺 1 下读 D 尺得 3.92。

估算定位，得答数 3.92。

[例 5] 计算 $\dfrac{3.1 \times \sin 61.6° \times \csc 15.3°}{\cos 27.7° \times \mathrm{ctg}\,20°}$。

解：上式可改写为
$$\frac{3.1 \times \sin 61.6° \times \mathrm{tg}\,20°}{\cos 27.7° \times \sin 15.3°}.$$

使 S 尺红 27.7° 对准 D 尺 3.1，移发线到 S 尺黑 61.6°；再抽动滑尺，使 S 尺黑 15.3° 在发线下，移发线到 T 尺黑 20°，读 D 尺得 4.24。

估算定位，得答数 4.24。

[例 6] 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=28^\circ$，$\angle B=48^\circ$，$a=48.4$，求 $\angle C$，b，c。

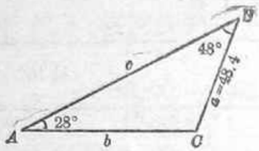


图 5-5

解：$\angle C=180^\circ-(28^\circ+48^\circ)=180^\circ-76^\circ=104^\circ$。

根据正弦定理，得

$$\frac{\sin 28^\circ}{48.4}=\frac{\sin 48^\circ}{b}=\frac{\sin 104^\circ}{c},$$

即

$$\frac{\sin 28^\circ}{48.4}=\frac{\sin 48^\circ}{b}=\frac{\sin 76^\circ}{c}。$$

与 C 尺和 D 尺相仿，把滑尺移到任意位置，每一条三角函数尺度的函数值都和 D 尺的对应读数存在着比例关系，见图 5-6（以 S 尺为例）。

图 5-6

$$\because\ \lg\sin x_2-\lg\sin x_1=\lg d_2-\lg d_1,$$

$$\therefore\ \frac{\sin x_2}{\sin x_1}=\frac{d_2}{d_1},$$

$$\frac{\sin x_1}{d_1}=\frac{\sin x_2}{d_2}。$$

因此，我们使 S 尺黑 28° 对准 D 尺 4.84，移发线到 S 尺黑 48°，读 D 尺得 b 的有效数字 7.65；再移发线到 S 尺黑 76°，读 D 尺得 c 的有效数字 10。

估算定位，得

$$b=76.5,\quad c=100.$$

[例 7] 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=8$，$b=6$，$\angle C=120^\circ$，求 $\angle A$，$\angle B$，c。

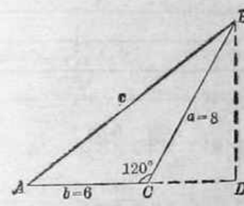


图 5-7

解：过 B 作 AC 的垂线 BD，使与 AC 的延长线交于 D，则

$$\angle BCD=180^\circ-120^\circ=60^\circ,$$

$$\angle D=90^\circ,\ \angle CBD=90^\circ-60^\circ=30^\circ.$$

由正弦定理，得

$$\frac{\sin 90^\circ}{8}=\frac{\sin 60^\circ}{BD}=\frac{\sin 30^\circ}{CD}.$$

使 S 尺黑 90° 对准 D 尺 8，移发线到 S 尺黑 60°，读 D 尺得 6.93（即 $BD=6.93$），再把发线移到 S 尺黑 30°，读 D 尺得 4（即 $CD=4$），

$$AD=AC+CD=6+4=10.$$

$$\angle A=\mathrm{tg}^{-1}\frac{BD}{AD}=\mathrm{tg}^{-1}0.693。$$

移发线到 D 尺 6.93，在 T 尺上读得

$$\angle A=34.7^\circ.$$

$$\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$$

$$=180^\circ-(34.7^\circ+120^\circ)=25.3^\circ.$$

$$c=\frac{6.93}{\sin 34.7^\circ},\quad \frac{1}{c}=\frac{\sin 34.7^\circ}{6.93}.$$

使 C 尺 1 对准 DI 尺 6.93，移发线到 S 尺黑 34.7°，在 DI 尺上读得 1.217（图 5-8）。

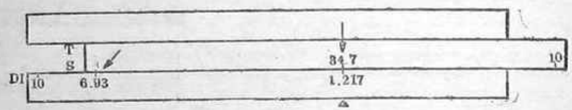


图 5-8

估算定位，得

$$c=12.17.$$

[例 8] 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=15$，$b=18$，$c=20$，求 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$。

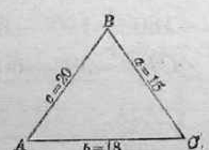


图 5-9

解：先应用余弦定理，得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{18^2+20^2-15^2}{2\times18\times20}=\frac{499}{720}.$$

使 C 尺 10 对准 D 尺 7.2，移发线到 D 尺 4.99，读 S 尺红数字得 46.1°，即

$$\angle A=46.1^\circ.$$

再由正弦定理，得

$$\frac{\sin 46.1^\circ}{15}=\frac{\sin B}{18}=\frac{\sin C}{20}.$$

使 S 尺黑 46.1° 对准 D 尺 1.5，移发线到 D 尺 1.8，读 S 尺黑数字得 59.9°；移发线到 D 尺 2，读 S 尺黑数字得 74°。所以

$$\angle B=59.9^\circ,\ \angle C=74^\circ.$$

练　习

1. 计算：

$7.95\times\cos 31.5^\circ$　(6.78)；

$\dfrac{6.15}{\operatorname{tg} 20^\circ}$　(16.9)；

$129.6\times\operatorname{ctg} 81^\circ24'$　(19.6)；

$\dfrac{18.65\times\sin 36^\circ}{\sin 26^\circ36'}$　(24.5)；

$\dfrac{4.2\times\operatorname{tg} 38^\circ}{0.616}$　(5.33)；

$\dfrac{\sin 62.4^\circ}{8.1\times\operatorname{tg} 23.3^\circ}$　(0.254)；

$7.15\times\pi\times\sin 48^\circ$　(16.7)；

$\dfrac{63.1\times\sec 80^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ}$　(305)；

$0.0121\times\sin 80^\circ\times\operatorname{ctg} 41^\circ$　(0.01370)；

$\dfrac{1.01\times\cos 71.2^\circ\times\sin 15^\circ}{\sqrt{4.81^\circ}\times\cos 27.2^\circ}$　(0.0432)。

2. 解下列三角形：

(1) $a=120$，$b=80$，$\angle A=60^\circ$（$\angle B=35.3^\circ$，$\angle C=84.7^\circ$，$c=138$）；

(2) $b=27$，$c=42$，$\angle A=20^\circ$（$\angle B=29.1^\circ$，$\angle C=130.9^\circ$，$a=19$）；

(3) $a=6.75$，$c=1.04$，$\angle B=127.2^\circ$（$\angle A=46.4^\circ$，$\angle C=6.4^\circ$，$b=7.43$）。

第六章　矢量与复数

一、矢量与复数的运算

在力学、电工学以及其他学科中，经常要碰到有关矢量与复数的计算．平面内的矢量都可以用一个复数来表示，矢量的加减运算也可转化成复数的运算．

复数的加减法，用它的代数式进行运算比较方便．

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i.$$

复数的乘除法以及乘方、开方，用它的三角式或指数式进行运算比较方便．例如：

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

或
$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

在有关矢量和复数的运算中，经常要进行代数式与三角式的互化．互化的公式是

$$\begin{cases}a=r\cos\theta,\\ b=r\sin\theta;\end{cases}$$

$$\begin{cases}r^2=a^2+b^2,\\ \operatorname{tg}\theta=\dfrac{b}{a}.\end{cases}$$

［例 1］　已知复数 $5(\cos 36.9^\circ+i\sin 36.9^\circ)$，求它的代数式．

解：$a=5\cos 36.9^\circ$，$b=5\sin 36.9^\circ$．

运算过程见下表：

S		黑 36.9°	红 36.9°
C	10		
D	5	(3)	(4)

所以

$$5(\cos 36.9^\circ+i\sin 36.9^\circ)=4+3i.$$

注意：当 $\theta<5.73^\circ$，即 $\sin\theta<0.1$ 时，可用 SRT 尺求小边；大边约等于 r，或取大边

$$a=r-\frac{b^2}{2r}\left(\frac{b}{a}<0.1\right).$$

因为

$$a=r\cos\theta\approx r\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)=r-\frac{(r\theta)^2}{2r}=r-\frac{b^2}{2r}\ (\theta \text{ 为弧度数}).$$

［例 2］　已知复数 $240+165i$，求它的三角式．

用计算尺将复数的代数式化成它的三角式时，需注意：当 $a>b$，即 $\theta<45^\circ$ 时，取 $\theta=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{b}{a}$；当 $a<b$，即 $\theta>45^\circ$ 时，取

$$\theta=\operatorname{ctg}^{-1}\frac{a}{b}.$$

解：$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{165}{240}$，

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{165}=\frac{1}{240}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ}{240}.$$

解上式，运算过程如下表：

T	黑 45°	(黑 34.5°)
D	2.4	1.65

即

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{165}{240}=34.5°.$$

再抽动滑尺，使 S 尺黑 34.5° 在发线下，对应于 S 尺黑 90°，读 D 尺得 2.91，即

$$r=\frac{165}{\sin 34.5°}=291.$$

所以

$$240+165i=291(\cos 34.5°+i\sin 34.5°).$$

T 尺上的最小读数为 5.71°，因为 $\mathrm{tg}\,5.71°=0.1$，所以上述方法只适用于 b 与 a 的比大于$\frac{1}{10}$小于10的情形. 当 $a>10b$ 或 $b<10a$ 时，应用 SRT 尺或取小角度的近似关系来计算.

当 $a>10b$ 时，

$$\theta\approx\mathrm{tg}\,\theta=\frac{b}{a}\text{(弧度)},$$

$$r\approx a,$$

或

$$r\approx a+\frac{b^2}{2a};$$

当 $b>10a$ 时，

$$\theta\approx\frac{\pi}{2}-\frac{a}{b}\text{(弧度)},$$

$$r\approx b,$$

或

$$r\approx b+\frac{a^2}{2b}.$$

如果复数对应的矢量不在第一象限，求 θ 时，最好能绘一草图，确定 θ 所在的象限和角度的范围，以免错误.

[例 3]　在图 6-1 中，已知 $A_1=400(\cos 30°+i\sin 30°)$，$A_2=600\times[\cos(-30°)+i\sin(-30°)]$，求 A_1+A_2.

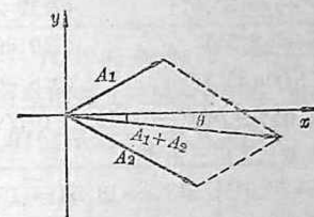


图　6-1

解：$A_1=400(\cos 30°+i\sin 30°)$

$$=400\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$=200\sqrt{3}+200i,$$

$$A_2=600[\cos(-30°)+i\sin(-30°)]$$

$$=600\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=300\sqrt{3}-300i.$$

$$A_1+A_2=200\sqrt{3}+200i+300\sqrt{3}-300i$$

$$=500\sqrt{3}-100i.$$

$$r=\sqrt{(500\sqrt{3})^2+(-100)^2}=\sqrt{760000}\approx 871.8,$$

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{-100}{500\sqrt{3}}\approx-\frac{1}{8.66},$$

从图 6-1 中，我们看到 θ 在第四象限，所以

$$\theta=-6.6°.$$

即

$$A_1+A_2=871.8[\cos(-6.6°)+i\sin(-6.6°)].$$

在电工学中经常遇到这类计算.

练　　习

1. 把下列复数的三角式化成代数式:

$7.95(\cos 25.5°+i\sin 25.5°)$　　　$(7.17+3.42i)$;

$120(\cos 2.5°+i\sin 2.5°)$　　　$(119.89+5.23i)$;

$11.95(\cos 35°+i\sin 35°)$　　　$(9.8+6.85i)$;

$1.48[\cos(-57.54°)+i\sin(-57.54°)]$　$(0.795-1.25i)$.

2. 把下列复数的代数式化成三角式:

$4+3i(r=5,\ \theta=36.9°)$;　$13.2+13.2i(r=18.67,\ \theta=45°)$;

$3+4i(r=5,\ \theta=53.1°)$;　$0.31+4.8i(r=4.8,\ \theta=86.3°)$.

3. 求 A_1+A_2，并把结果化成三角式:

(1) $A_1=10(\cos 30°+i\sin 30°)$，　$A_2=20(\cos 45°+i\sin 45°)$

$(r=29.8,\ \theta=40°)$;

(2) $A_1=20(\cos 100°+i\sin 100°)$，　$A_2=10(\cos 200°+i\sin 200°)$

$(r=20.8,\ \theta=128.33°)$.

二、用矢量尺度的矢量计算

有些计算尺上刻有矢量尺度 H_0、H_1 和 H_0'（或称红 P）尺. 矢量尺度应用很广，本节中将着重介绍用 H_0、H_1 和 H_0' 尺与其它有关尺度配合，作矢量计算和求三角函数值的方法.

1. *H 尺的刻制原理和矢量计算*　H_0、H_1 尺是根据函数

$$Y=\sqrt{h^2-1}=(h^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

刻制的.

当发线对准 H_0 尺上的 h_0 值时，就可在 C 尺上得到 $\sqrt{h_0^2-1}$，h_0 的取值范围是 1.00499～1.414，函数值的范围是 0.1～1（所以 H_0 尺的位标是零），如下表所示.

H_0	1.00499	1.0055	1.0094	1.024	1.044	1.092	1.182	1.25	1.3	1.414
C	0.1	0.105	0.1374	0.2203	0.3	0.439	0.63	0.75	0.831	1

当发线对着 H_1 尺上的 h_1 值时，就可在 C 尺上得到 $\sqrt{h_1^2-1}$，h_1 的取值范围是 1.414～10.05，函数值的范围是 1～10（所以 H_1 尺的位标是 1），如下表所示.

H_1	1.414	1.57	1.7	2.42	3.162	4.5	7.57	8	8.45	10.05
C	1	1.21	1.374	2.203	3	4.39	7.5	7.94	8.39	10

矢量尺度可以帮助我们进行有关复数和矢量的计算.

例如，已知复数 $a+bi$（设 $b<a<10b$）求它的三角式，在计算尺上可以这样运算：使 C 尺 1 或 10 对准 D 尺 a（大边），移发线到 D 尺 b，读 T 尺黑数字得 θ（即 $\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a}=\theta$）；求 r 时，可不必再移动滑尺，只要在计算尺反面的发线下读 H 尺得 h，然后移发线到 C 尺（或 CF 尺）h，读 D 尺（或 DF 尺）就得到 r 的有效数字，如图 6-2 所示.

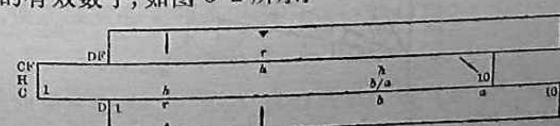


图 6-2

我们简单地说明一下这样运算的道理．当滑尺在图6-2所示位置时，D尺b所对应的C尺的读数显然是$\frac{b}{a}$，而在H尺上对应于C尺$\frac{b}{a}$的读数$h=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$．(因为$Y=\sqrt{h^2-1}$，所以$h=\sqrt{1+Y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$.) 因此，当$C$尺10对应着$D$尺$a$时，在$D$尺(或$DF$尺)上与$C$尺(或$CF$尺)$h$相对应的读数

$$r=ah=a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

[例 1]　已知复数$9.68+6.90i$，求它的三角式．

解：使C尺10对准D尺9.68（大边），移发线到D尺6.90，读T尺黑数字得35.5°；在计算尺反面H_0尺上读得1.228，然后移发线到C尺1.228，读D尺得1.188．估算定位，得$r=11.88$，所以

$$9.68+6.90i=11.88(\cos 35.5^\circ+i\sin 35.5^\circ).$$

[例 2]　已知两力

$$F_1=5(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ),\ F_2=9(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)$$

同时作用于一点，求合力F的大小和方向(图 6-3)．

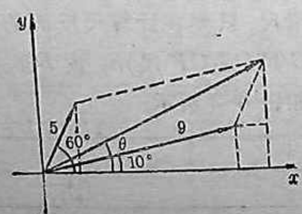


图　6-3

解：设a、b表示合力F在坐标轴上的投影，则

$$a=5\cos 60^\circ+9\cos 10^\circ=2.5+8.86=11.36,$$
$$b=5\sin 60^\circ+9\sin 10^\circ=4.33+1.562\approx 5.89.$$

使C尺1对准D尺1.136 (大边)，移发线到D尺5.89，读T尺黑数字得27.4°，即方向

$$\theta=27.4^\circ;$$

在计算尺反面H_0尺上读得1.127，然后移发线到CF尺1.127，读DF尺得1.279．

估算定位，得合力的大小是12.79．

一般计算尺上都不刻正割sec和余割csc尺度．由于：

$$1+\mathrm{tg}^2\theta=\sec^2\theta,\qquad \sec\theta=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta};$$
$$1+\mathrm{ctg}^2\theta=\csc^2\theta,\qquad \csc\theta=\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\theta}.$$

所以，可用T尺和H尺配合读得$\sec\theta$和$\csc\theta$的值．

[例 3]　求$\sec 11.4^\circ$，$\sec 82.4^\circ$，$\csc 62.65^\circ$，$\csc 9.55^\circ$．

解：使发线对准T尺黑11.4°，读H_0尺得

$$\sec 11.4^\circ=1.0202;$$

使发线对准T尺黑82.4°，读H_1尺得

$$\sec 82.4^\circ=7.56;$$

使发线对准T尺红62.65°，读H_0尺得

$$\csc 62.65^\circ=1.126;$$

使发线对准T尺红9.55°，读H_1尺得

$$\csc 9.55^\circ=6.04.$$

如果没有H尺，或T尺的黑刻度只刻至45°，则可应用SRT尺、S尺和CI尺来求得$\sec\theta$和$\csc\theta$的值．例如：

$$\csc 5^\circ = \frac{1}{\sin 5^\circ} = \frac{1}{0.0873} = 11.47.$$

在计算尺上，使发线对准 SRT 尺黑 5°，读 CI 尺得 1.147；

$$\sec 5^\circ = \frac{1}{\cos 5^\circ} = \frac{1}{0.996} = 1.004,$$

在计算尺上，使发线对准 S 尺红 5°，读 CI 尺得 1.004.

2. **H'_0 尺的刻制原理和矢量计算** H'_0 尺是根据函数

$$Y = \sqrt{1-h'^2} = (1-h'^2)^{\frac{1}{2}}$$

刻制的．它的位标是零．

当发线对准红 H'_0 尺的 h'_0 值时，就可在 C 尺上读得 $\sqrt{1-h_0'^2}$，h'_0 的取值范围是 0.99499～0，函数值的范围是 0.1～1，如下表所示．

H'_0	0.99499	0.9902	0.9754	0.954	0.944	0.888	0.8	0.6	0.5	0
C	0.1	0.1397	0.2203	0.3	0.33	0.46	0.6	0.8	0.866	1

如果已知直角三角形 ABC 的斜边 c 和一条直角边 a（或 b），求另一条直角边 b（或 a）和 b 边所对的角 θ（图 6-4），那么用红 H'_0 尺和 C 尺配合进行计算，比用其它尺度更加精确方便．

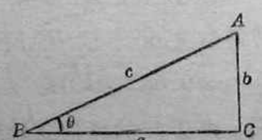


图 6-4

运算过程是：使 C 尺 1（或 10）对准 D 尺 c（斜边），移发线到 D 尺 a，读 S 尺红数字得 $\theta=\cos^{-1}\dfrac{a}{c}$（如果已知 b，则移发线到 D 尺 b，读 S 尺黑数字得 $\theta=\sin^{-1}\dfrac{b}{c}$）；此时在反面的红 H'_0 尺可读得 $h'_0=\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}$（因为 $Y=\sqrt{1-h_0'^2}$，所以 $h'_0=\sqrt{1-Y^2}$），然后移发线到 C 尺（或 CF 尺）h'_0 值，在 D 尺（或 DF 尺）上读得 b 的有效数字（$b=c\cdot h'_0=c\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}=\sqrt{c^2-a^2}$），如图 6-5 所示．

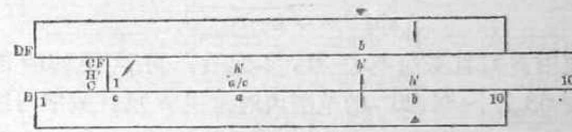


图 6-5

［例 4］ 在直角三角形 ABC 中，已知斜边 $c=15$，直角边 $b=6$，求角 θ 和 a 边．

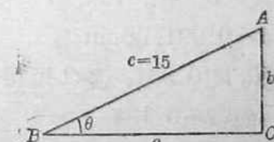


图 6-6

解：使 C 尺 1 对准 D 尺 1.5，移发线到 D 尺 6，读 S 尺黑数字得 23.6°，即

$$\theta=\sin^{-1}\frac{6}{15}=23.6^\circ;$$

在红 H'_0 尺读得 0.9165（即 $\cos\theta=0.9165$），然后移发线到 CF 尺 9.165，读 DF 尺得 1.375．估算定位，得

$$a=13.75.$$

由于

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta},$$

所以使用 S 尺黑数字与红 H_0' 尺配合，可读得 $\cos\theta$ 的值. 当 θ 在 5.74°～36.9° 的范围内时，用 S 尺黑数字与红 H_0' 尺配合求余弦值，可多读得一个有效数字.

[例 5] 求 $\cos 18.6°$.

解：移发线到 S 尺黑 18.6°，读红 H_0' 尺得

$$\cos 18.6° = 0.9478.$$

同样，由于

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta},$$

所以使用 S 尺红数字与红 H_0' 尺配合，可读得 $\sin\theta$ 的值. 当 θ 在 53.1°～84.26° 的范围内时，用 S 尺红数字与红 H_0' 尺配合求正弦值，也可多读得一个有效数字.

[例 6] 求 $\sin 76.5°$.

解：移发线到 S 尺红 76.5°，读红 H_0' 尺得

$$\sin 76.5° = 0.9724.$$

[例 7] 已知 $\cos\theta=0.991$，求 $\sin\theta$.

解：移发线到红 H_0' 尺 0.991，读 C 尺得 1.34，即

$$\sin\theta=0.134.$$

练　　习

1. 用 H 尺、T 尺计算下列各题：

(1) 用三角式表示下列复数：

$7.46+3.36i$　　$(r=8.18,\ \theta=24.25°)$;

$9.05+1.385i$　　$(r=9.15,\ \theta=8.7°)$

$26.8+18.1i$　　$(r=32.4,\ \theta=34°)$;

$15.04+5.47i$　　$(r=16,\ \theta=20°)$.

(2) 求下列各函数值：

$\sec 8.15°$	(1.0102);	$\sec 27.35°$	(1.126);
$\sec 33.9°$	(1.205);	$\sec 40.5°$	(1.315);
$\csc 49.8°$	(1.31);	$\csc 56.6°$	(1.198);
$\csc 62.15°$	(1.131);	$\csc 80.55°$	(1.0138).

2. 用红 H_0' 尺、S 尺计算下列各题：

(1) 在直角三角形 ABC 中，已知斜边 $c=1.655$，直角边 $b=0.802$，求 a 边及 b 边所对的角 θ. $(a=1.445,\ \theta=29°.)$

(2) 在直角三角形中已知斜边 $c=91.5$，直角边 $a=62.4$，求 b 边及 b 边所对的角 θ. $(b=66.9,\ \theta=47°.)$

(3) 求下列各函数值：

$\sin 69.8°$	(0.9385);	$\sin 76.95°$	(0.9742);
$\sin 80.65°$	(0.9867);	$\sin 11.5°$	(0.2);
$\cos 5.96°$	(0.99460);	$\cos 11°$	(0.9816);
$\cos 30.2°$	(0.864);	$\cos 75.5°$	(0.25).

第七章　自然对数

自然对数(或称重对数)尺度 ln (或 LL)与 C 尺、D 尺等配合使用，可以求出一个正数的任何次幂和一个正数的常用对数、自然对数及其它以不等于 1 的正数为底的对数。

一、自然对数尺度

自然对数尺度分成黑自然对数尺度与红自然对数尺度两种.

黑自然对数尺度是根据函数

$$Y=\ln z$$

刻制的. 对上式两边取常用对数，得

$$\lg Y=\lg\ln z,$$

然后如图 7-1 进行刻制.

ln 尺上的读数 z 是实际大小，函数值 Y 的有效数字在 D 尺上读得. 当 $2.71828\leqslant z\leqslant 22026$ 时，函数值 Y 的范围是 1~10，所以此时 ln 尺的位标是 1，即 $\ln_1(LL_3)$.

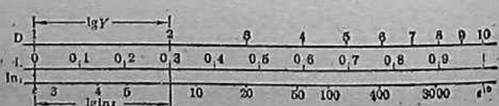


图　7-1

同样，可以刻出

$\ln_0$ 尺(即 LL_2)，$1.1052\leqslant z\leqslant 2.71828$ $(0.1\leqslant Y\leqslant 1)$；

$\ln_{-1}$ 尺(即 LL_1)，$1.01005\leqslant z\leqslant 1.1052$ $(0.01\leqslant Y\leqslant 0.1)$；

$\ln_{-2}$ 尺(即 LL_0)，$1.001\leqslant z\leqslant 1.01005$ $(0.001\leqslant Y\leqslant 0.01)$.

$\ln_1$, $\ln_0$, $\ln_{-1}$, $\ln_{-2}$ 实质上是一条连续尺度，使用时需注意各段尺度的函数值范围.

当 $z<1$ 时，可根据函数

$$-Y=\ln z(Y>0)$$

刻得红自然对数尺度. 在上式两边同乘上 -1，然后取常用对数，得

$$\lg Y=\lg(-\ln z)。$$

根据上式，刻得

红 $\ln_1$ 尺(即 LL_3I)，

$0.0000454\leqslant z\leqslant 0.3679(-1\leqslant Y\leqslant -10)$；

红 $\ln_0$ 尺(即 LL_2I)，

$0.3679\leqslant z\leqslant 0.9048(-0.1\leqslant Y\leqslant -1)$；

红 $\ln_{-1}$ 尺(即 LL_1I)，

$0.9048\leqslant z\leqslant 0.99005(-0.01\leqslant Y\leqslant -0.1)$；

红 $\ln_{-2}$ 尺(即 LL_0I)，

$0.99005\leqslant z\leqslant 0.999(-0.001\leqslant Y\leqslant -0.01)$.

红 ln 尺上的读数红 z 也是实际大小，函数值 $-Y$ 的有效数字在 D 尺上读得，位数根据位标而定.

黑自然对数尺度与红自然对数尺度位标相同的一段互称为对偶尺度. 例如，红 $\ln_{-2}$ 与黑 $\ln_{-2}$，红 $\ln_{-1}$ 与黑 $\ln_{-1}$，红 $\ln_0$ 与黑 $\ln_0$，红 $\ln_1$ 与黑 $\ln_1$，它们都是对偶尺度.

对偶尺度的对应读数互为倒数. 用对偶尺度求倒数比用 C 尺与 CI 尺或 D 尺与 DI 尺更为方便. 因为用这种方法读

得的倒数值是实际大小，不必再行定位。

[例 1]　求 $\frac{1}{20}$.

解：移发线到 $\ln_1$ 尺 20，读红 $\ln_1$ 尺得

$$\frac{1}{20}=0.05.$$

[例 2]　求 $\frac{1}{1.021}$.

解：移发线到 $\ln_{-1}$ 尺 1.021，读红 $\ln_{-1}$ 尺得

$$\frac{1}{1.021}=0.9794.$$

[例 3]　求 $\frac{1}{0.575}$.

解：移发线到红 $\ln_0$ 尺 0.575，读 $\ln_0$ 尺得

$$\frac{1}{0.575}=1.74.$$

二、求以 e 为底的对数和幂

从上节知道，D 尺上的读数 Y 是自然对数尺度上对应读数的自然对数；反过来，自然对数尺度上的读数 z 是 e 的 Y 次幂。因此，用 D 尺与 ln 尺或红 ln 尺配合，可以很方便地求出一个正数的自然对数和以 e 为底的任意次幂。

[例 1]　求 ln 7.39，ln 1.221，ln 1.0202，ln 1.002，ln 0.135，ln 0.8187，ln 0.9802，ln 0.998.

解：使发线对准 $\ln_1$ 尺 7.39，在 D 尺上读得

$$\ln 7.39=2;$$

使发线对准 $\ln_0$ 尺 1.221，在 D 尺上读得

$$\ln 1.221=0.2;$$

使发线对准 $\ln_{-1}$ 尺 1.0202，在 D 尺上读得

$$\ln 1.0202=0.02;$$

使发线对准 $\ln_{-2}$ 尺 1.002，在 D 尺上读得

$$\ln 1.002=0.002;$$

使发线对准红 $\ln_1$ 尺 0.135，在 D 尺上读得

$$\ln 0.135=-2;$$

使发线对准红 $\ln_0$ 尺 0.8187，在 D 尺上读得

$$\ln 0.8187=-0.2;$$

使发线对准红 $\ln_{-1}$ 尺 0.9802，在 D 尺上读得

$$\ln 0.9802=-0.02;$$

使发线对准红 $\ln_{-2}$ 尺 0.998，在 D 尺上读得

$$\ln 0.998=-0.002.$$

[例 2]　求 ln 20000，ln 2000，ln 200，ln 20，ln 2，ln 0.2，ln 0.02，ln 0.002，ln 0.0002.

解：使发线对准 $\ln_1$ 尺 20000，在 D 尺上读得

$$\ln 20000=9.903;$$

使发线对准 $\ln_1$ 尺 2000，在 D 尺上读得

$$\ln 2000=7.60;$$

使发线对准 $\ln_1$ 尺 200，在 D 尺上读得

$$\ln 200=5.3;$$

使发线对准 $\ln_1$ 尺 20，在 D 尺上读得

$$\ln 20=2.995;$$

使发线对准 $\ln_0$ 尺 2，在 D 尺上读得

$$\ln 2=0.693;$$

使发线对准红 $\ln_1$ 尺 0.2，在 D 尺上读得

$$\ln 0.2=-1.61;$$

使发线对准红 $\ln_1$ 尺 0.02，在 D 尺上读得

$$\ln 0.02=-3.91;$$

使发线对准红 $\ln_1$ 尺 0.002，在 D 尺上读得

$$\ln 0.002=-6.21;$$

使发线对准红 $\ln_1$ 尺 0.0002，在 D 尺上读得

$$\ln 0.0002=-8.52.$$

求 $z=e^Y(Y>0)$，可将发线对准 D 尺 y，在黑自然对数尺度上读得答数．至于在 ln 尺上的哪一段读得，要看 Y 的位数．如 Y 的位数是 1(或 0，-1，-2)，就在 $\ln_1$(或 $\ln_0$，$\ln_{-1}$，$\ln_{-2}$)尺上读得．求 $z=e^{-Y}(Y>0)$，可将发线对准 D 尺 y，在红自然对数尺度上读得答数．同样，在红 ln 尺上哪一段读得，也要看 Y 的位数．如果 Y 的位数是 1 (或 0，-1，-2)，就在红 $\ln_1$ (或红 $\ln_0$，红 $\ln_{-1}$，红$\ln_{-2}$)尺上读得。

［例 3］ 求 e^2，e^{-2}；$e^{0.2}$，$e^{-0.2}$；

$$e^{0.02},\ e^{-0.02};\ e^{0.002},\ e^{-0.002}.$$

解：使发线对准 D 尺 2，在 $\ln_1$ 尺上读得

$$e^2=7.39,$$

在红 $\ln_1$ 尺上读得

$$e^{-2}=0.135;$$

在 $\ln_0$ 尺上读得

$$e^{0.2}=1.221,$$

在红 $\ln_0$ 尺上读得

$$e^{-0.2}=0.8187;$$

在 $\ln_{-1}$ 尺上读得

$$e^{0.02}=1.0202,$$

在红 $\ln_{-1}$ 尺上读得

$$e^{-0.02}=0.9802;$$

在 $\ln_{-2}$ 尺上读得

$$e^{0.002}=1.002,$$

在红 $\ln_{-2}$ 尺上读得

$$e^{-0.002}=0.998。$$

练　　习

求下列各值：

$\ln 4$	(1.386)；	$\ln 0.12$	(-2.12)；
$\ln 400$	(5.99)；	$\ln 0.714$	(-0.337)；
$\ln 2.065$	(0.725)；	$\ln 0.9724$	(-0.028)；
$\ln 1.0015$	(0.0015)；	$\ln 0.99801$	(-0.001995)；
e^{π}	(23.1)；	e^{-3}	(0.0498)；
$e^{\frac{1}{4.7}}$	(1.237)；	$\sqrt[3]{e}$	(1.396)；
$e^{0.0351}$	(1.0357)；	$e^{-0.0351}$	(0.9655)．

三、用自然对数尺度求任意正数的任意次幂

上节中我们讲了用自然对数尺度求 e^Y 和 e^{-Y} 的方法，本节将进一步介绍如何用自然对数尺度来求不等于 1 的任意正数的任意次幂。

设

$$z=x^Y,$$

两边取自然对数，得

$$\ln z=Y\ln x,$$

再取常用对数，得

$$\lg\ln z=\lg Y+\lg\ln x.$$

上式说明，如果把 C 尺表示 $\lg Y$ 的一段长度加到自然对数尺度表示 $\lg\ln x$ 的一段长度上，那么总长度就是 $\lg\ln z$．因此，可在自然对数尺度上读得 $z=x^Y$(图 7-2)．

至于答数在自然对数尺度的哪一段上，可根据下面两条来决定。

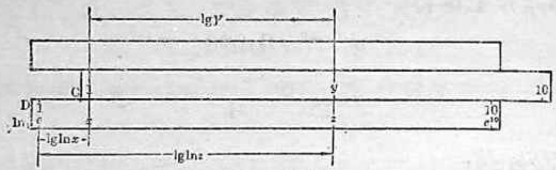


图 7-2

(1) 当 C 尺 1 对着自然对数尺度上某数 x 时，则在同一自然对数尺上，在 x 的右边对应于 C 尺 2, 3, 4, ……的读数就是 x 的 2, 3, 4, ……次幂；当 C 尺 10 对着自然对数尺上某数 x 时，则在同一自然对数尺上，在 x 的左边对应于 C 尺 9, 8, 7, ……的读数就是 x 的 0.9, 0.8, 0.7, ……次幂．当 CF 尺 1 对着自然对数尺度上某数 x 时，则在同一自然对数尺上，在 x 的右边对应于 CF 尺 1.1, 1.2, 1.3, ……的读数就是 x 的 1.1, 1.2, 1.3, ……次幂；在 x 的左边对应于 CF 尺 9, 8, 7, ……的读数，就是 x 的 0.9, 0.8, 0.7, ……次幂．

(2) $\ln_1$ 尺上的任一读数是 $\ln_0$ 尺上对应读数的 10 次方，是 $\ln_{-1}$ 尺上对应读数的 100 次方；反之，$\ln_{-1}$ 尺上的读数是 $\ln_0$ 尺上对应读数的 10 次方根，是 $\ln_1$ 尺上对应读数的 100 次方根．

[例 1] 求 $3.8^{1.36}$, $3.8^{2.28}$, $3.8^{3.16}$, $3.8^{5.05}$.

解：运算过程如下表：

C	1	1.36	2.28	3.16	5.05
$\ln_1$	3.8	(6.15)	(21)	(68)	(850)

所以

$3.8^{1.36}=6.15$; $3.8^{2.28}=21$; $3.8^{3.16}=68$; $3.8^{5.05}=850$.

[例 2] 求 $1.0865^{0.454}$, $1.0865^{4.54}$, $1.0865^{45.4}$.

解：使 C 尺 10 对准 $\ln_{-1}$ 尺 1.0865，移发线到 C 尺 4.54，读 $\ln_{-1}$ 尺得 1.0384，读 $\ln_0$ 尺得 1.457，读 $\ln_1$ 尺得 43.2，即

$1.0865^{0.454}=1.0384$; $\qquad 1.0865^{4.54}=1.457$;

$1.0865^{45.4}=43.2$.

[例 3] 求 $1.445^{0.7}$, $1.445^{0.9}$, $1.445^{1.1}$, $1.445^{1.3}$.

解：此例用 C 尺配合来求不太方便，可改用 CF 尺．运算过程如下表：

CF	1	7	9	1.1	1.3
$\ln_0$	1.445	(1.294)	(1.393)	(1.499)	(1.614)

所以

$1.445^{0.7}=1.294$; $\qquad 1.445^{0.9}=1.393$;

$1.445^{1.1}=1.499$; $\qquad 1.445^{1.3}=1.614$.

当底数大于零小于 1 时，可以应用红自然对数尺度来配合求得它的任意次幂．

[例 4] 求 0.8^2, 0.8^{20}, $0.8^{0.2}$, $0.8^{0.02}$.

解：使 C 尺 1 对准红 $\ln_0$ 尺 0.8，移发线到 C 尺 2，在红 $\ln_0$ 尺上读得 $0.8^2=0.64$，在红 $\ln_1$ 尺上读得 $0.8^{20}=0.0115$，在红 $\ln_{-1}$ 尺上读得 $0.8^{0.2}=0.9564$，在红 $\ln_{-2}$ 尺上读得 $0.8^{0.02}=0.99555$.

若指数 Y 为分数 $\frac{s}{r}$，则可根据自然对数尺度与 C 尺的比例关系求得 x^Y.

由图 7-3 可得

图 7-3

$$\lg s-\lg r=\lg\ln z-\lg\ln x,$$

$$\ln z=\frac{s}{r}\ln x=\ln x^{\frac{s}{r}},$$

$$\therefore\quad z=x^{\frac{s}{r}}.$$

[例 5] 求 $1.636^{\frac{5}{3}}$.

解：使 C 尺 3 对准 $\ln_0$ 尺 1.636，移发线到 C 尺 5，读 $\ln_0$ 尺得 2.271. 即

$$1.636^{\frac{5}{3}}=2.271.$$

[例 6] 求 $8.32^{\frac{69}{28}}$.

解：使 C 尺 2.8 对准 $\ln_1$ 尺 8.32，移发线到 C 尺 6.9，读 $\ln_1$ 尺得 185. 即

$$8.32^{\frac{69}{28}}=8.32^{\frac{6.9}{2.8}}=185.$$

[例 7] 求 $0.8^{\frac{6.36}{51.5}}$.

解：使 C 尺 5.15 对准红 $\ln_0$ 尺 0.8，移发线到 C 尺 6.36，读红 $\ln_{-1}$ 尺得 0.9728（因为 $0.8^{\frac{6.36}{51.5}}$ 是 $0.8^{\frac{6.36}{5.15}}$ 的 10 次方根，所以答数应在红 $\ln_{-1}$ 尺上读得）. 即

$$0.8^{\frac{6.36}{51.5}}=0.9728.$$

本例若用 CF 尺与红自然尺度配合来求，滑尺移动较少.

[例 8] 求 $\sqrt[3]{64}$.

解：$\sqrt[3]{64}=64^{\frac{1}{3}}$.

使 C 尺 3 对准 $\ln_1$ 尺 64，移发线到 C 尺 1，读 $\ln_1$ 尺得 4. 即

$$\sqrt[3]{64}=4.$$

当指数为 $-Y\,(Y>0)$ 时，因为

$$z=x^{-Y}=\frac{1}{x^{Y}},$$

所以，若 $x>1$，可使 C 尺 1 对准黑自然对数尺度 x，对应于 C 尺 y，读红自然对数尺度得 x^{-Y}；若 $x<1$，可使 C 尺 1 对准红自然对数尺度 x，对应于 C 尺 y，读黑自然对数尺度得 x^{-Y}.

[例 9] 求 5^{-2}, $5^{-0.2}$, $5^{-0.02}$, $5^{-0.002}$.

解：使 C 尺 1 对准 $\ln_1$ 尺 5，移发线到 C 尺 2，读红 $\ln_1$ 尺得

$$5^{-2}=0.04;$$

读红 $\ln_0$ 尺得

$$5^{-0.2}=0.725;$$

读红 $\ln_{-1}$ 尺得

$$5^{-0.02}=0.9683;$$

读红 $\ln_{-2}$ 尺得

$$5^{-0.002}=0.99678.$$

[例 10] 求 0.5^{-2}, $0.5^{-0.2}$, $0.5^{-0.02}$, $0.5^{-0.002}$.

解：使 C 尺 10 对准红 $\ln_0$ 尺 0.5，移发线到 C 尺 2，读 $\ln_1$ 尺得

$$0.5^{-2}=4;$$

读 $\ln_0$ 尺得

$$0.5^{-0.2}=1.1488;$$

读 $\ln_{-1}$ 尺得

$$0.5^{-0.02}=1.01397;$$

读 $\ln_{-2}$ 尺得

$$0.5^{-0.002}=1.001388.$$

[例 11]　求 $6.42^{-\frac{4.9}{2.7}}$.

解：使 C 尺 2.7 对准 $\ln_1$ 尺 6.42，移发线到 C 尺 4.9，读红 $\ln_1$ 尺得 0.0342，即

$$6.42^{-\frac{4.9}{2.7}}=0.0342.$$

在四段黑自然对数尺度上，读数的范围是 1.001 至 22026；在四段红自然对数尺度上，读数的范围是 0.0000454 至 0.999. 当底 X 或幂 Z 在这读数范围之外时，根据幂的运算法则，可将

$$Z=X^Y$$

化成

$$Z=X_1^Y\cdot X_2^Y \text{ 或 } Z=X^{Y_1}\cdot X^{Y_2},$$

其中 $X_1\cdot X_2=X$, $Y_1+Y_2=Y$. 如果我们能在自然对数尺度上直接算得 X_1^Y 和 X_2^Y 或 X^{Y_1} 和 X^{Y_2}，那么只要把这两个幂相乘，就得到了答数 Z.

[例 12]　求 $24^{5.32}$.

解：$24^{5.32}=24^3\times24^{2.32}=13800\times1600\approx22050000.$

也可以这样算：

$$24^{5.32}=(6\times4)^{5.32}=6^{5.32}\times4^{5.32}$$
$$=13800\times1600\approx22050000;$$

或

$$24^{5.32}=(2.4\times10)^{5.32}$$
$$=2.4^{5.32}\times10^{5.32}$$
$$=2.4^{5.32}\times10^{0.32}\times10^5$$
$$=105.4\times2.09\times10^5\approx22050000.$$

[例 13]　求 $0.0000042^{2.31}$.

解：$0.0000042^{2.31}=(4.2\times10^{-6})^{2.31}=4.2^{2.31}\times10^{-13.86}$

$$=4.2^{2.31}\times10^{0.14}\times10^{-14}$$
$$=27.6\times1.38\times10^{-14}$$
$$\approx3.81\times10^{-13}.$$

练　　习

求下列各值：

$3^{0.02}(1.0222)$;　　$1.115^{9.19}(2.718)$;

$1.0328^{1.2}(1.0395)$;　　$0.75^{5.05}(0.234)$;

$20.5^{0.845}(12.8)$;　　$2^8(256)$;

$47^{2.08}(3000)$;　　$22.5^{2.22}(1000)$;

$0.522^{10}(0.0015)$;　　$0.522^{0.1}(0.937)$;

$1.4^{0.4}(1.144)$;　　$1.262^{20}(105)$;

$1.19^{\frac{4.75}{22.4}}(1.0376)$;　　$53.6^{\frac{2.763}{3.07}}(36)$;

$0.476^{\frac{3}{7}}(0.7275)$;　　$1.01755^{\frac{17.5}{2.24}}(1.446)$;

$0.865^{\frac{43.4}{2.17}}\quad(0.055)$;　　$148^{\frac{72}{342}}(2.864)$;

$0.865^{\frac{4.34}{2.17}}(0.748)$;　　$1.29^{\frac{1}{3.02}}(1.088)$;

$0.775^{\frac{1}{3.02}}(0.919)$;　　$\sqrt[2]{0.64}(0.8)$;

$\sqrt[38]{0.11}(0.9435)$;　　$\sqrt[5.2]{1500}(4.09)$;

$7.2^{-2.19}(0.0133)$;　　$7.2^{-0.00219}(0.99569)$;

$0.98^{-17.83}(1.434)$;　　$0.98^{-0.1783}(1.00361)$;

$742^{-\frac{2}{5}}(0.0711)$;　　$0.481^{-\frac{1}{5}}(1.158)$;

$0.622^{-\frac{7}{3}}(3.03)$;　　$125.6^4(2.49\times10^8)$;

$0.0455^{-0.00052}(1.00161)$;　　$0.5^{\frac{14}{460}}(0.9787)$.

附　　录

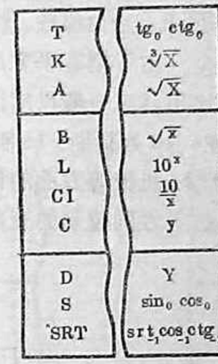
一、几种常用计算尺的介绍

1. 五·七型计算尺（114 毫米）和 1205 型学生计算尺（114 毫米）

这两种计算尺可用来进行乘、除、比例、乘方、开方等运算，以及求对数和三角函数的值．在五·七型计算尺的反面还刻有一些数学公式和一把 12 厘米长的厘米尺。

五·七型计算尺的尺度排列如下：

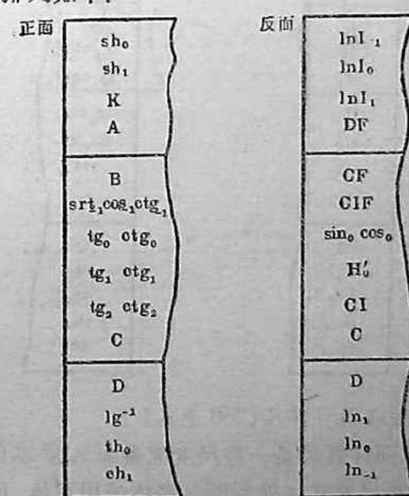
1205 型学生计算尺的尺度排列如下：



2. 1200 型双面计算尺（125 毫米）

1200 型双面计算尺的特点是尺度齐全．它对于通常的力学、机械、土木等方面的计算都很方便．

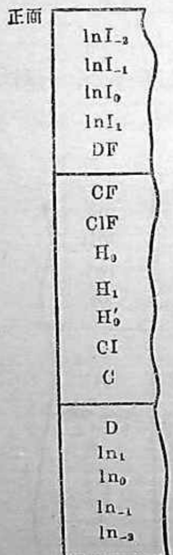
尺度排列如下：

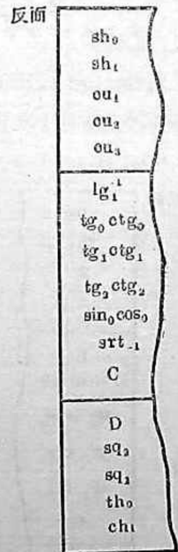


3. 1003 型双面计算尺(250 毫米)

1003 型双面计算尺上，三角函数、双曲函数、自然对数、矢量计算等尺度都齐全．由于刻有平方尺和立方尺，所以用它来求平方和立方，比用其它一般尺度能多读到一个有效数字．*CF*尺和*DF*尺在$\sqrt{10}$处折断．尺名和数字都采用斜体．1003 型计算尺对于力学、机械等方面的计算都很方便；对于化学反应的变化率，放射性同位素的衰减等方面的计算也都能完成．

尺度排列如下：



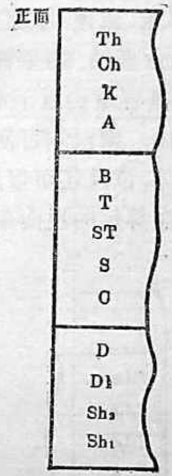


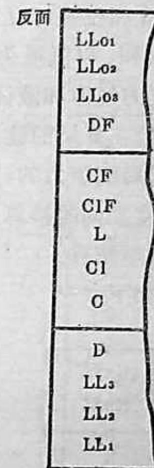
4. 1004 型双面计算尺(250 毫米)

1004 型双面计算尺是一种尺度完备而又紧凑的通用计算尺．*CF*、*DF* 尺是在π处折断．字体采用正体，尺面清晰．

它可以进行电工、力学、机械等方面的计算．由于尺度配置适宜，所以使用很方便．

尺度排列如下：





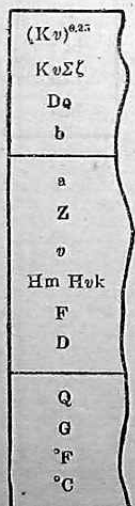
二、几种专业计算尺的介绍

1. 1016 型通风管道计算尺（250 毫米）

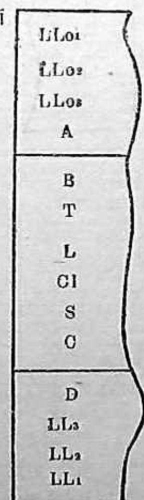
1016 型通风管道计算尺正面刻有专用尺度，主要用来进行风管设计计算和校核计算（包括风量、流速、摩擦阻力、局部阻力、管道截面积、以流量为准的当量直径、矩型管道的边长等内容）. 其它的气体和液体，只要其容重接近于常数，并且它的管径和流量在算尺的读数范围内，则也均可使用该尺进行截面、流速和局部阻力的计算. 此外，该尺还可以进行华氏、摄氏和绝对温度之间的换算. 1016 型算尺的反面刻有常用尺度，用于一般数学演算.

尺度排列如下：

正面



反面

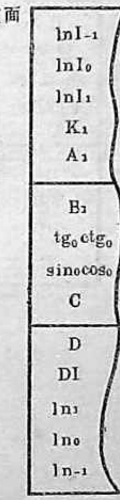


2. 1018 型电工计算尺（250 毫米）

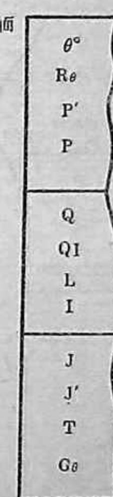
1018 型电工计算尺正面刻的是常用尺度，可用来作一般的数学运算. 它的反面是非对数型的电工专用尺度，可用来进行有关交流电路、长距离输电、并联电阻和并联电抗等方面的计算.

尺度排列如下：

正面



反面



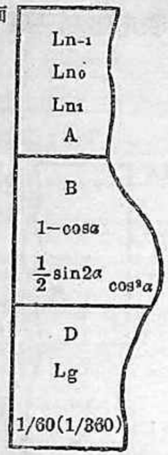
3. 1005 型测绘计算尺（250 毫米）

1005 型测绘计算尺适用于工农业和交通运输等方面的一般测量计算. 利用其中的 $1-\cos\alpha$ 尺度求丈量距离时的倾斜改正数，及利用 $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ 尺度和 $\cos^2\alpha$ 尺度求视距测量中的高差和水平距离，则特别方便. 它还可以用来进行分、秒与度的互化. 1005 型测绘计算尺上也刻有一些常用尺度，可进行

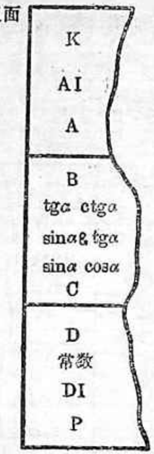
一般的数学运算.

尺度排列如下:

正面



反面



三、计算尺上的常用符号

符号	所表示的数值	所在尺度	用途和公式
π	3.14159	A,B C,D	圆面积 $S=\pi R^2$ 球面积 $F=\pi D^2$ 圆周长 $c=\pi D=2\pi R$
红π	3.14159	红 CI	球面积 $F=\pi D^2$ 圆面积 $S=\pi R^2$
c	$1.128\left(=\sqrt{\frac{4}{\pi}}\right)$	C	圆面积 $S=\left(\frac{D}{c}\right)^2$
c_1	$3.568\left(=\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right)$	C	圆面积 $S=\left(\frac{D}{c_1}\right)^2$
s	$0.785\left(=\frac{\pi}{4}\right)$	A,B	圆面积 $S=sD^2$
	$1.273\left(=\frac{4}{\pi}\right)$	C	圆面积 $S=\frac{D^2}{s}$
	$0.564\left(=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)$	C	球面积 $F=\left(\frac{D}{s}\right)^2$
v	$1.241\left(=\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\right)$	C	球体积 $V=\left(\frac{D}{v}\right)^3$

(续表)

符号	所表示的数值	所在尺度	用途和公式
v	$0.524\left(=\frac{\pi}{6}\right)$	K	球体积 $V=vD^3$
	$1.910\left(=\frac{6}{\pi}\right)$	C	球体积 $V=\frac{D^3}{v}$
$R(\rho^\circ)$	$57.296\left(=\frac{180}{\pi}\right)$	C	弧度 $Y=\frac{X^\circ}{R}$
1°	$0.01745\left(=\frac{\pi}{180}\right)$	C	弧度 $Y=(1^\circ)X^\circ$
ρ'	$3437.75\left(=\frac{180\times 60}{\pi}\right)$	C	弧度 $Y=\frac{X'}{\rho'}$
ρ''	$206265\left(=\frac{180\times 360}{\pi}\right)$	C	弧度 $Y=\frac{X''}{\rho''}$
e	2.71828	$\ln_1(LL_3)$ $\ln_0(LL_2)$	有关 e 的计算
红 e^{-1}	$0.36787\left(=\frac{1}{e}\right)$	红 $\ln_1(LL_3I)$ 红 $\ln_0(LL_2I)$	有关 e 的计算
kW PS; HP	千瓦 马力	滑标上	千瓦与马力的换算