百科小叢書

從代數到微積

鄭太朴編譯

王雲五主編

商務印書館發行

識　　語

這本"從代數到微積",原係德人休士德 (August Schuster) 所著,爲通信的體裁. 後面那樣的分章及節,并每節開首先標以題目,是譯纂者所改成:蓋德文與中文語氣多有不同,原書通信體裁若照譯成中文,未必能使讀者感興味,而系統之不明白,則卻易感覺到;故不如改爲章節之較爲醒目. 又因爲求其適合中國社會上一般讀者故,於取材,敍述法及措詞等方面,極加斟酌,各處均有删節及增改,通俗書不比名著及高深的科學書,不得擅自纂改;故苟求清楚易懂,卽無妨斟酌增删. 因之,此書不曰"譯"而曰"譯纂"者,用意在是,并非敢大膽妄爲,自作聰明.

如書題所標,這是一本盡人可解的數學書;祇要有高等小學卒業的數學程度,便可由此直窺高等數學之門徑. 緣此,這書雖不足以語大雅,然亦有他的價值在!

譯纂者誌於德國荷庭根城西之冷蘭村

目　　次

從代數到微積

1. 本書之內容 "算學"二字,乃是一總名,其中所包殊爲宏富. 尋常將算學列爲二部分, 卽所謂"高等算學"與"初等算學"是. 但在某種意義上說來,"高等"與"初等"之間殊難定其界限, 故此種分别頗有可以疑問處. 不過爲便利計, 則亦不妨照尋常的習慣如是别之而已. 本書中所欲述者, 大多限於初等的方面; 但在後面, 則亦稍微提及些高等範圍以內者.

爲省事計, 假定讀者已習過些算術, 故於此方面不再提及.

2. 方程 在算術裏面, 我們所用以計算的數目, 都用數目字表出之, 如 3, 25, 156 等等. 但光用數目字爲計算之具, 有時每覺得有不便, 且極有限制, 算學之爲用不能廣了, 於是我們兼用字以代數目 (以下我們均用羅馬字 $a, b, c \cdots x, y, z$ 等等爲代), 如前面說過的幾個, 我們可隨便用 a 以代 3, 用 b 以代 25, 用 c 以代 156 等等. 本來用字母代數目, 是可以完全隨便的, 不過向來沿用慣將字母

開首的數個如 a, b, c 等代已知的數目．而其末後的數個如 x, y, z 等則代未知的，我們所欲求的數目；今仍之．代數學所從事者，是在用字母代替數目，然後將已知數與未知數的關係開出；列成所謂"方程"，以求其"解"，卽從已知數與未知數的關係上，推得未知數．簡單說來，代數學是"方程"學．

用一個"等號"（=），將相等之數目連起來，此卽是所謂方程；例如三加四等於七，我們把他寫出來作 $3+4=7$，此式卽謂之"方程"．又如 $x+y=a$, $x-3y=a-b$ 等等都是方程(按"方程"二字是中國向來所用慣的，故仍採用，其實在西文均作"等，"本無待解釋而自明者)．現在我們卽舉一二個例於下，以明方程是什麼一回事，怎麼樣得到，有何用處．

例一．今有兄弟二人於此，兄年三十五歲，弟年二十五；問當幾年前，兄的年齡適等於弟的二倍？又問當幾年前兄的年齡等於弟的三倍？

這題目之第一問，比較的還容易算，我們只要如此一想，便不難得解了：卽，兄的年齡較弟的既長十歲，其差數爲十，如是當弟十歲時，又加上十年的差，則此時兄的年

齡適等於弟的二倍了;所以我們很容易回答說:在十五年前,兄的年齡,適等於弟的二倍.

但是第二問幾年前等於弟的三倍,可就不若是之易答,至少非細細思量一下不可. 現在請看我們若何求助於代數學上最簡單之方程. 這裏,弟的年齡 25 與兄的 35 均是已知數,而我們所欲求的幾年前之年數則為未知數. 我們現在用字母 x 代此未知數,將他與已知數的關係列為方程,然後由此推得此未知數 x 應該是什麼數目,而看他能否解答我們的問題. 但我們如何寫出其關係,而得一方程呢? 請看下面便知道了.

弟的年齡現在既是 25,則當 x 年以前,其年齡自然要小於現在 x 年,寫出來,此時的年齡是 $25-x$; 而兄的年齡此時則為 $35-x$ (用話說,弟的年齡此時為 25 減 x; 兄的則 35 減 x). 這裏,$25-x$ 與 $35-x$ 都是一個數目,因之我們亦可用括號把他括上,寫作 $(25-x)$ 與 $(35-x)$. 我們所欲求者是幾年前兄的年齡適等於弟之三倍,換句話說,在這 x 年以前,兄之年齡是等於弟之三倍. 但適才我們已得到二個數目,兄之年齡當 x 年以前是 $(35-x)$,弟之年齡則為 $(25-x)$,如是我們自然得此方程:

$$35-x=3\times(25-x),$$

於此，等號之左爲兄 x 年以前之年齡，等號之右則爲弟，此時之年齡用 3 乘，卽表明三倍．方程旣得，現在只有若何解此方程以求得 x 當爲何數目的問題了． 但這裏卻先有一些計算上的理，不能不先弄明白，卽方程右面之 $3\times(25-x)$（用三乘括號內之數），應如何算法呢？照所寫的樣式看去，自然不難明白，其意義是 25 減去 x 後之餘數，用 3 去乘． 不過這裏 x 乃是一個未知數，我們尙未知其值是多少，怎樣能從 25 減去，而以 3 乘其餘呢？

要明白這用 3 乘括號內數的道理，我們可暫時假定，x 是個已知數，譬如是 10．於此，計算的方法自然是先將 10 從 25 減去，得餘數 15，然後再用 3 去乘，得 45；用算式寫出來是：$3\times(25-10)=45$． 但是事實上我們還有一個其他的辦法，所得的結果與此完全相同：卽我們不必先減後乘，先自 25 上減去 10 然後以 3 乘其餘數；我們亦可先乘後減，卽我們可先用 3 遍乘括號內之兩數，然後將此二個得數相減以得其餘數，其結果與先減而後乘其餘數者無異． 如前例我們先自 25 上減去 10，然後以 3 乘，所得結果爲 45；我們若先用 3 乘 25，得 75，又用 3 乘 10，得 30，

25
×3
75−34
35
$2x = 20$

然後以75與30相減，結果亦是45，與前者無異. 這樣，我們便知用一數去乘括號內之數時，其法可用此數遍乘括號內之諸數，然後仍照其號將此諸得數相加或相減之；此法對於括號內有未知數時，亦能無困難使用了.

我們旣明白此種道理，則前面所得的方程之右面 $3\times(25-x)$，卽不難計算了，我們於是可把他寫作 $3\times25-(3\times x)$. 但這裏尙有一些須一說，卽一個乘號 × 在數目字與數目字之間，如 3×25，是不可少的，要沒有他，則3乘25(3×25) 變成 325，爲三百二十五了. 若在數目字與字母之間，如 $3\times x$，或在字母與字母之間，如 $a\times x$ 或 $a\times b$，則便可不必要，直寫作 $3x$，或 ax，ab 卽可了，蓋這裏不會有錯誤發生，幷且3乘 x，其意義原卽是3倍 x，故中間的乘號成爲多事無用，省去爲便. 如是，這右面的可寫作 $3\times25-3x$，而我們前面所得的方程作下式了：

$$35-x=3\times25-3x.$$

現在我們試求解此方程，以得 x 之値. 我們第一步自然先須將未知數與已知數各分在一面，如是將未知數一齊歸在左面，已知數一齊歸在右面，方可得解. 這又什麼辦呢？ 在此我們可設想我們的方程猶如一天秤，兩面等重

的；若單獨於一面加了些東西，其他一面不照此亦加，則其均重即失，一面較重，一面較輕，不能相等了；但若兩面加了同重的物，則均重仍保持着，全不受影響. 與此同樣的道理，我們的方程兩面是等的，只要我們於等號之兩面同樣的加上或減去某數，則其相等自然不致受影響：二個相等的數，各加上或減去某數，仍是相等，這是自明之理. 根據這道理，我們可先於方程之兩面各加上$3x$，則此方程即成爲

$$35-x+3x=3\times25-3x+3x.$$

又因加減先後之次序，與結果之得數無關；而方程右面之3×25，亦可把他乘出作75寫上；於是此方程又可如是寫：$35+3x-x=75+3x-3x$. 這裏，等號之右面是於 75 上加 $3x$ 又減 $3x$，加的和減的恰相消，只存 75 在那裏了；其左面是於 35 上加 $3x$ 又減去一個 x，如是尚存 $2x$ 加於 35 上，因之左面爲 $35+2x$. 這樣，此方程經歸併後，即變爲下式了：

$$35+2x=75.$$

我們仍如前法，於此方程之兩面再各減去 35，即得此式：

$$2x=40.$$

既得了此式,我們的問題解決了;蓋我們所求的未知數 x,即幾年前之年數,現在已得其數目:此式明明的說 $2x$ 等於 40,則 x 等於 40 之半,即是 20 這就是說,我們所求的年數是 20 年.

現在且看這所求得的數目是否已解答了我們的問題呢? 細細一想,實在一些也不差,因爲二十年前兄的年齡十五,而弟的則爲五歲,算來此時兄的年齡恰長於弟的三倍.

我們爲了要使讀者能更清楚些更明白些起見,再舉一個例於下.

$\therefore a = 21 \times \frac{3}{7} = 9$ $(21-a) = \frac{4}{3}a$ $21 = \frac{7}{3}a$ $(21-a) = 3a$ $21 = 4a$ $= a = 5.02$

例二. 有線一條,長 21 寸. 現在我們要將此線分成兩段,使此段等於彼段四分之三,問這兩段各長若干?

這裏,我們所欲分成的兩段,是一較長,一較短;但照題目上說,是欲使短者等於長者的四分之三,因此我們可如是算法:我們設長者一段爲 $4x$ 寸,則短者等於其四分之三,自然是 $3x$ 寸了. 因爲原線長21寸,所以這所分成的兩段合起來,仍是 21 寸,於是我們得此方程:

$$4x + 3x = 21.$$

這裏,等號之右面是原線之寸數,其左面爲所分成的兩段,

$21 - a = \frac{}{4}$

長者 $4x$ 寸,短者 $3x$ 寸,用加號表示其合起來之意. 這方程一面是未知數,一面是已知數,所以極容易求其解:我們照此式將其左面之兩個未知數相加,即得$7x$,如是此方程爲 $7x=21$,卽是說七個 x 等於21. $7x$ 既等於 21,x 自然等於3. 我們前面原設長者等於$4x$寸,短者等於$3x$寸;今既求得 x 之值爲 3,則卽是長者等於 12 寸,短者等於 9寸. 如是短者恰等於長者四分之三,而此二段合起來亦仍是原線 21 寸,實在一些不差.

上面所舉這二個例,自然是最簡單的,卽不求助於代數單憑頭腦亦能想得出來,但是讀者看了此,則所謂方程之意義,已可得個概念了.

3. 方程內之項 凡方程內用加號或減號連起來之各個數目,不論爲已知者或未知者,均謂之"項". 如前節內 $35+2x=75$ 一方程,其中 35, $2x$, 75 三個數目均稱爲項,因而此方程之左面爲二項,其右面則祗有一項,項有相似的與不相似的之分,如 $2x$ 與 $4x$ 這兩個項是相似的,$2x$ 與 35 或 $2y$ 這三個項是不相似的. 方程內相似的諸項,可照他們的號或加或減的歸併起來成爲一項,如前節第二例內 $4x+3x=21$ 一方程,其左面 $4x$ 與$3x$兩個項是相似的,

因之我們可照其間之加號併為一項作 $7x$. 其不相似的項自然不能歸併. 項前之加號或減號, 表明此項須加於其號或減去之者, 我們卽視為此項之號, 如在開首, 前面無號者, 亦視作有加號; 如是前所舉之式 $35+2x=75$, 其中 $2x$ 一項有加號在前, 35 與 75 兩項均在開首, 其前無號, 但我們亦視之作有加號在前. 又如 $a-b=c$, 此方程內之左面第一項 a 為有加號在前者, 第二項 b 則有減號在前; 其右面一項 c 亦為有加號在前者. 加號我們亦稱為正號, 減號亦稱為負號; 因之每個項均可別為正的或負的 (按數目有正負之分, 這是很易明白的; 舉個例以說, 為寒暑表零度之上有一, 二, 三, 四……等度數, 零度之下亦有一, 二, 三, 四……等度數, 如是零度以上者謂之正數, 零度以下者謂之負數. 譬如零度以上十度, 我們可稱之為正十度, 零度以下十度, 則可稱為負十度. 我們亦可拿 0 為出發點, 向前增加得 1, 2, 3…… 為正數, 向後再減少, 則所得為負的數 -1, -2, -3,…… 了).

前節內曾說過, 方程猶如一天秤, 等號之兩面是等重的. 我們若欲於一面加上或減去某數, 則其他一面亦必同樣的加上或減去此數, 方能仍保持其均勢; 例如

$$35=75-3x \qquad (1)$$

一方程，我們若欲於此方程之右面加上$3x$，則左面自必亦同樣的加上此數而後可．於是左面成爲$35+3x$，而右面則因75上加$3x$又減$3x$恰相消故，祇存75；方程(1)遂成此式：

$$35+3x=75 \qquad (2)$$

我們若再欲於左面減去35，則右面自然亦須同樣的減此數．左面原爲$3x$加35，今減去了35，則祇存$3x$了，右面則成爲$75-35$；因而方程(2)成爲：

$$3x=75-35 \qquad (3)$$

從這種極淺顯的道理上，我們得到一個代數上極重要的辦法，即所謂"項之遷移"是．代數裏面凡方程內等號兩面之諸項，均可隨便遷移，自右面遷至左面，或自左面遷至右面，祇要改變此所遷的項前之號便得．如前面之方程(1)，其等號右面之第二項$-3x$若把他遷至等號左面，只須改其前之負號爲正號，於是我們便得方程(2)．此方程(2)等號左面之第一項35，若將他改變正號作負號而遷至右面，即得方程(3)．觀此，可知我們將一個項改了號，自等號之一面遷至他面時，其結果與我們用了思想設法

兩面同加或同減某數再計算後所得者相同；但此種方法，何等的直捷，何等的便利，我們欲將未知數盡遷於一面，已知數盡遷於他面，使各各分開時，只要將所欲遷的項改了號便可自由遷過去了． 譬如前節內第一例所得方程：

$$35-x=75-3x$$

我們祇要將其等號右面之 $-3x$ 改號遷至左面，將左面之 35 改號遷至右面，便得

$$3x-x=75-35, \text{或 } 2x=40.$$

我們旣得了此種遷項的辦法，以後解方程時便即用此，自然又可省便多了．

4 <u>二項式之乘法</u> 在第二節內，我們已經知道 $3\times(25-x)$，可寫作 $3\times25-3x$． 此種道理，自然不論所乘者是何數目均可通用的． 我們現在用 a 代 3，用 b 代 25，并用 c 代 x，則 $a(b-c)$ 亦可寫作 $ab-ac$ 即

$$a(b-c)=ab-ac \qquad (1)$$

廣之，自然

$$a(b+c)=ab+ac \qquad (2)$$

我們若再廣此理，於方程(2)中將 a 易成為二項，如 $b-c$，則方程(2)即變為

$$(b-c)(b+c)=b(b-c)+c(b-c).$$

此方程內項數較多了，但讀者看了不必生畏難心，項數雖多，其道理還是如此．我們可仍用方程(1)的理，將此方程之右面化出來；如是 $b(b-c)$ 可寫作 $bb-bc$，而 $c(b-c)$ 則可寫爲 $bc-cc$．照其原來的加號將此二式加起來，即得 $bb-bc+bc-cc$，此即方程之右面所化成者．但這裏 $-bc$ 與 $+bc$ 兩項，一正一負，恰可互相消除，蓋減去 bc 又加上 bc 適相抵；因之此式經歸併後祇存 $bb-cc$ 兩項了．於是前面的方程可如是寫：

$$(b-c)(b+c)=bb-cc.$$

此方程之右面兩項爲 bb 與 $-cc$．bb的意義是用 b 去乘 b，即是 b 之自乘；cc 亦然．普通我們遇到此種數目之自乘，如 b 自乘爲 bb，我們不寫出兩個 b 同列作 bb，而於 b 之右面上角加小數目字 2 作 b^2 寫出；要是 b^2 再與 b 乘時，我們亦不寫 bbb 三個 b 同列，而寫作 b^3；仿此自乘次數加多，角上數目字亦加大．如是 $b^2=bb$, $b^3=bbb$, $b^4=bbbb$, ……乃至於 b^n 即等於 n 個 b 相乘．我們呼 b^2, b^3, b^4 等照其角上數目字爲"b 之二次方"，"b 之三次方"，"b 之四次方"等等 (b^2 亦可簡單呼爲"b 之方"，b^3 爲"b 之立方")，其他無論那個數目自然都可如此辦法，如 $c^2=cc$, $c^3=ccc$

……等等；因之前面所得的方程，可如此寫出了：

$$(b-c)(b+c)=b^2-c^2 \tag{3}$$

現在我們再於前面方程(2)中將 a 易爲二項 $b+c$，則方程(2)卽成爲：

$$(b+c)(b+c)=b(b+c)+c(b+c).$$

與前同樣，此方程之右面可化成作：$(bb+bc+bc+cc)$. 於此 bb 改寫爲 b^2，cc 改爲 c^2，而 bc 加 bc 爲 $2bc$，因之右面此式化出來是：$b^2+2bc+c^2$. 但此方程之左面爲 $(b+c)(b+c)$，此卽是 $(b+c)$ 一個數目之自乘，照前面所說寫法，可改爲 $(b+c)^2$；於是以前所得方程卽作此式：

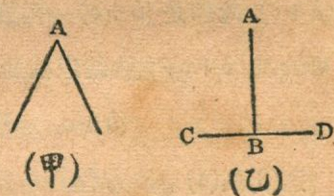
$$(b+c)^2=b^2+2bc+c^2 \tag{4}$$

這(3)與(4)兩個方程乃是公式，因爲無論 b 與 c 是什麼數目，均可通用，一些沒有差的. 讀者凡對於類此的公式，可稍加注意，因頗有用處，以後遇到要計算此項數目時，直塡公式便行，可省了許多手續.

5. 平面幾何學上之重要概念　幾何學亦稱形學，其對象是在於論各種由直線，曲線面所成的形之理，並量其大小. 我們知道形有三度，卽長，寬及厚是. 其祇具兩度的形，卽祇有長與寬，而無厚者謂之面；其三度均具者則

謂之體. 事實上我們不能找到祇具二度的物, 因之單獨的面是不能存在的;但是幾何學上爲研究便利起見,將面自體抽象的分離出而單獨研究之, 故幾何學分成爲研究面與研究體的兩部分. 平面幾何學是專研究形之平面者的一部. 我們以下將平面幾何學上幾個重要的概念先略略的一說.

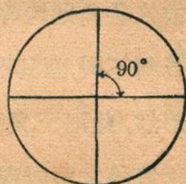
線有直線與曲線之分,這是容易知道的. 相距之兩點,我們可作線將此兩點連起來,隨便直線曲線均可,但直線是其最短者:這亦是極易知道的. 兩直線相交,則可作成一尖形,而以此兩直線爲界, 此尖形卽謂之角; 如第一圖中(甲)形卽是一角. 此



第 一 圖

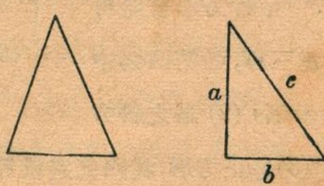
相交之兩直線爲此角之界者, 謂之邊; 其交點 A, 則謂之角之尖. 一直線垂於他直線上,所作兩旁之角等. 如第一圖中(乙)那樣, ABD 角與 ABC 角相等,則此所垂之線如 AB, 名爲他線 CD 之垂線. 而反之,CD 亦可稱爲 AB 之垂線. 凡垂線於他線上所作之角,必是方的如圖中(乙)之 ABD 角及 ABC 角那樣;此種角謂之直角. 角亦有大

小之度,我們祇要把第一圖中(甲)這角,與(乙)之ABD及ABC直角相較,便知(甲)要尖的多,即是要小些. 我們通常稱此種小於直角的角謂之銳角,其大於直角者,則謂之鈍角. 量角之大小,我們用"度","分","秒",爲單位;每六十秒爲一分,每六十分爲一度,與時計的分法相似. 度的記號是一小圈寫於數目字之右角上,分則爲一小劈,秒則爲二小劈;例如三十度二十分十五秒可寫作:$30°20'15''$. 普通我們將一圓周均分爲360度,以量角之大小;如是圓周四分之一爲一直角,而360°之四分之一則爲90°,故直角等於90°. (參觀第二圖).



第二圖

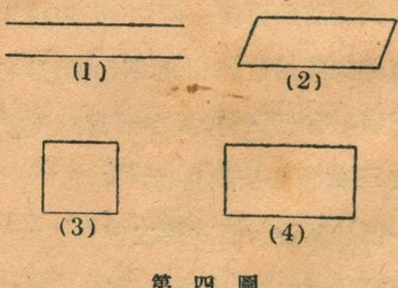
我們若將前面第一圖之(甲)形再用一直線與此兩直線相交,則即構成一三邊形,如第三圖之(1). 三邊形有三個角,故亦稱爲三角形. 三角形有許多種類:有三個角全是銳角者;有一個角爲鈍角而其餘二個爲銳角者,但就中有一種三角形最爲重要,以後用處最大者,即是三角之中



第三圖

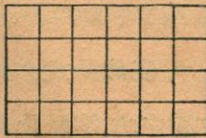
一角爲直角，其餘二角爲銳角，如第三圖之(2)那樣．此種三角形謂之直角三角形，亦稱勾股形：其底邊如圖中之 b 邊，謂之勾，a 邊謂之股，其對直角最長之邊則謂之弦，如圖中 c 邊是．凡兩個三角形，其相當之各邊均相等，因而其所含三個角亦均相等，如是我們可將此兩形相重疊恰能吻合者，此兩三角形謂之相合的；如兩三角形，其相當之各邊均有一定之比例，因之兩形大小雖不等，而其所含相當之各角則均等(按角之大小與邊之長短無關，故邊儘可長短不同，而其所作角仍可相等)，小者一形恰如大者之縮形然，此兩三角形謂之相似形．

兩條線之距離處處相等，如是相並行者，謂之兩平行線，如第四圖中(1)是．由兩對平行線所構成的四邊形，謂之平行方形．平行方形普通可分爲三種，如第四圖中所示者：(2)謂之斜方形；(3)是正方形，其四條邊俱等；(4)則謂之長方形．長方形與正方形之面積，讀者或已知道；但我們這裏仍不妨一



第四圖

說及之. 譬之有一長方形,其長六寸,寬四寸,則我們將六與四相乘,得二十四$(6\times4=24)$,卽是此長方形之面積爲二十四方寸(按計面積用方寸方分等爲單位);我們看第五圖便不難明白了. 由此可知長方形之面積是等於長乘寬;我們倘用字母 F 代面積,用 l 代長,用 h 代寬,則可得公式如下:



第五圖

$$F=hl.$$

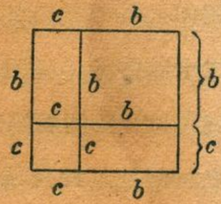
正方形之面積計算,自然亦同此理;不過正方形四條邊相等,卽是長與寬相等者,故前面的公式若用於此,則可改成此式:

$$F=hh=h^2,$$

用話說,卽是正方形之面積,等於其邊長之自乘(我們以前於第四節中說過 b 之二次方 b^2 亦可簡單呼爲 b 之方,亦卽此理). 此外如斜方形之面積,三角形之面積,以及其他幾何學上之重要關係等,本節內且不說,待後再論.

6. 公式 $(b+c)^2=b^2+2bc+c^2$ 之幾何上的圖解. 我們旣將幾何學上幾個重要的槪念略略說過,并知道了長方形與正方形之面積計算法,現在我們可試用所得於此

者來證明我們於第四節中所得的公式(4) $(b+c)^2=b^2+2bc+c^2$,使此公式有個圖解. 照此公式,我們知道兩個數目之和之方,等於此數目之方加彼數目之方又加此兩數目相乘之二倍. 我們現在可將此兩數目各視爲一正方形之邊,如一長 b,一長 c,則照公式,以 b 爲邊之正方形加以 c 爲邊之正方形又加以 b 爲長以 c 爲寬之長方形兩個,卽等於以 $(b+c)$ 爲邊之正方形. 我們看第六圖,可知恰是如此,一些沒有差;如是我們第四節內的公式(4),幷得了個幾何上的圖解爲之證明了.



第六圖

其餘如第四節內的公式(3)亦可仿前法作個幾何的圖解爲之證明, 這裏爲避煩重不能說及了. 從此我們可知理無二致,幾何與代數的對象雖若不同,可分開研究,但自然其間還有相通的; 我們看以後較高等的數學,很多由幾何與代數二者共同合作而成,則更可知其關係之切,以及其相互參用之可以使數學造詣精深了.

7. <u>指數</u> 在第四節內我們已說過一些: 一個數目自乘幾次,謂之此數目之若干次方;例如 b 自乘得 bb,我們把

他寫作 b^2, 而呼之爲 b 之二次方,我們并曾稍廣其理,給讀者知道過, $bbb=b^3$, $bbbb=b^4$, 乃至 bbb……至 n 個,即等於 b^n. 這裏 b 謂之底數,其右角上之小數目字,明此數爲若干次方者,則爲之指數:如 b^2 之底數爲 b, 而其指數則爲 2; 又如 a^3 之底數爲 a, 其指數則爲 3; 仿此, b^n 之底數是 b, 其指數則爲 n. 本節內想將幾條關於指數的重要定理使讀者明白,這是非常重要的,以後用處極多.

設如有兩個數目,其底數同而其指數則不同(或同)者,例如 a^2 與 a^3 (或與 a^2 亦可, 但下例照與 a^3 相乘計算) 要相乘,則如何呢? 讀者如已明白了數目自乘的規例,自然不難得解決: 蓋 a^2 原即是 aa,a^3 則爲 aaa, 因之 a^2 乘 a^3 等於 aa 乘 aaa, 照乘法的規例即得 $aaaaa$, 依前例可寫作 a^5, 故得此式:

$$a^2 \times a^3 = a^5.$$

由此可知兩個底數同而指數或同或不同的數目相乘, 即是指數相加; 推廣前式, 我們若將 a^m 與 a^n 相乘, 自然得 a^{m+n}, 因此得公式如下:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

乘與除適相反, 故若 a^2 乘 a^3 得 a^5, 此得數之指數爲前

兩數之指數相加而成，則相除時必得其反，當以此兩數目之指數相減，譬如以 a^3 除 a^5，其得數當為 a^2. 我們現在可證明之如下：

$$\frac{a^5}{a^3}=\frac{aaaaa}{aaa}=a^2$$

（按讀者習過算術，想已知道凡任何一除式，均可寫作分數式，如以 3 除 15，可寫成分數式作 $\frac{15}{3}$，以 5 除 20，可寫成 $\frac{20}{5}$；因之前式中以 a^3 除 a^5，可寫作 $\frac{a^5}{a^3}$，或寫為 $\frac{aaaaa}{aaa}$ 亦可．而照分數原理，分子分母同用公約數約去某數時，其值不變，因之我們於前式 $\frac{aaaaa}{aaa}$ 內用 aaa 為公約數，將分子分母同約去 aaa，則此式成為 $\frac{aa}{1}$，即是 aa 了，故得 $\frac{aaaaa}{aaa}=a^2$）推廣之．凡任何兩個底數同指數或同或不同的數目相除，均是以此兩數目之指數相減，如以 a^n 除 a^m，即得 a^{m-n}，因之我們得以下之公式：

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

以上所論者是底數同指數或同或不同之數目；我們現在更須一論及底數異而指數同的數目之乘除，例如 a^3 乘 b^3 或 a^3 除 b^3. 我們知道 $a^3b^3=aaabbb$，但相乘次序之先

後,與得數無關,故 $aaabbb$ 亦可寫作 $ababab$, 這裏,倘視 ab 爲一個數目,則 $ababab$ 亦卽可寫爲 $(ab)^3$, 其意是 a 乘 b 之得數再三方之,於是我們得: $a^3b^3=(ab)^3$. 同此理 $\frac{a^3}{a^3}=\frac{bbb}{aaa}$,

按分數乘法,此 $\frac{bbb}{aaa}$ 可視爲由 $\frac{b}{a}$ 一個數目自乘而得之三次方,因此可寫爲 $\left(\frac{b}{a}\right)^3$. 其意是 a 除 b 之得數自乘爲三次方,故得此式: $\frac{b^3}{a^3}=\left(\frac{b}{a}\right)^3$. 推廣起來,卽得二公式如下:

$$a^mb^m=(ab)^m;\ \frac{b^m}{a^m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

此外還有幾條理須討論. 設如有一個數目已有若干次方了,我們現在欲將所得者再方至若干次;例如 a 一個數目已方至二次爲 a^2 了,我們現在欲將此 a^2 再方爲三次,作 $(a^2)^3$, 其指數當若何寫法方合理? 這裏我們所欲方之的數目是 a^2, 旣欲將他再方三次,寫出來是 $a^2a^2a^2$, 但照適才所得公式,則 $a^2a^2a^2=a^{2+2+2}=a^6$; 因之我們得此式: $(a^2)^3=a^6$. 由此可知一數目已爲若干次方時,我們若再欲將他方起來至若干次,則可將其指數與所欲方的次數相乘便得.廣前式,我們得公式如下:

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

前面我們論底數同其指數或同或不同的數目相乘除時，我們所舉的例證祇限於指數不同的一方面，故得公式 $a^m a^n = a^{m+n}$ 及 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. 若此兩個數目之指數同時，自然仍可照此理計算；如是，相乘的公式變成：$a^m a^m = a^{m+m}$；但 $m+m$ 是 $2m$，故底數同指數亦同之兩數目相乘，其公式爲：

$$a^m a^m = a^{2m}; \text{或可如此寫} (a^m)^2 = a^{2m}.$$

至其相除，卽 $\frac{a^m}{a^m}$，照命分（照除法），自然是等於1：

$$\frac{a^m}{a^m} = 1.$$

但一方面我們仍可照適才所得公式的理計算，卽：$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m}$. 不過 $m-m$ 所得者是零 0，於是又得次式：

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$$

將 $\frac{a^m}{a^m} = 1$ 與 $\frac{a^m}{a^m} = a^0$ 兩式合起來，我們得一公式：

$$a^0 = 1.$$

由此我們幷可知以 0 爲指數的 a，是等於 1：但此不問其底數是什麼均然，蓋 $\frac{b^m}{b^m} = 1$，一方面 $\frac{b^m}{b^m}$ 又等於 $b^{m-m} = b^0$；乃至以任何數爲底均是如此；故凡以 0 爲指數的數目，不

問其底數是什麼,都是等於1.

末後,我們從公式$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$裏,還可得個極重要,有用的道理.我們試設m爲0;則因$a^0=1$,此公式遂成下式:

$$\frac{1}{a^n}=a^{0-n}.$$

這裏,等號右面之a,其指數爲$0-n$. 但$0-n$,其意義不啻說0以下之n數目,照前面第三節括弧內註中所說道理,即可寫爲$-n$;因之,適才所得式,可改作:

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$$

從此可知凡帶有負號指數者之數目,等於其帶有此正號指數者之倒數.

關於指數的道理,這裏大略已說明了,此外即再有其他的公式,亦不難從此類推,因此我們即止於此.

8. 二元一次方程 我們於前章第二第三兩節內所論過的方程,都是祗含有一個未知數x者,此種方程謂之一元方程.又,方程還有"次"之別,凡方程內所有未知數都沒有自乘過,如是方程內沒有至二次方的未知數,如x^2等者,謂之一次方程;其有二次方的未知數者,謂之二次方程;如是,有三次方的未知數者,謂之三次方程;其餘可照此

類推. 方程內有二個不同的未知數者,即謂之二元方程;其有多個不同的未知數者,即謂之多元方程. 我們現在所欲論者,是二元一次方程,即是方程內有二個不同的未知數,但均是一次者. 我們仍先設個題目爲例.

今有兩個數目,一較大一較小,其相加之和爲 64,其相減之較則爲 8,問此兩個係何數目?

我們現在可各用字母代此兩個所求之未知數;如是我們用 x 代此較大的一個,用 y 代較小的一個,按題目所說,其和爲 64,其較爲 8,故即得兩個二元一次方程如下:

$$x+y=64;\quad x-y=8.$$

這兩個二元一次方程,是由一個題目上所得,因此不是互相獨立,沒有關係的. 我們欲解此兩個方程時,須將此兩方程相爲關係的解之,如是所得的兩個 x 與 y 之數目,方能使此二個方程均滿足. 幷且我們還很容易的可看出,凡二元的方程,必須要同時有二個方程方能求確定的解,使其中之兩個未知數 x 與 y 有一定的值;若祇有一個方程,則不能得確定的解,因爲 x 與 y 有無數的值可取,均能滿足此方程,如是 x 與 y 之值成爲無定了. 譬如前面若祇有 $x+y=64$ 一個方程,則我們可隨便使 x 等於 1, y 等

於 63, 或使 x 等於 2, y 等於 62, x 等於 3, y 等於 61, 乃至使 x 等於 63, y 等於 1 等等均可, 均能滿足此方程, 如是 x 與 y 之值有無數可取, 任意指定均可, 無所謂解了. 但若同時有兩個方程, 便不可隨便使 x 等於某數, 而以相當之數給 y. 譬如前面我們有了兩個方程 $x+y=64$ 及 $x-y=8$, 則我們隨便使 x 等於 1, y 等於 63 時, 或使 x 等於 2, y 等於 62 時, 雖能滿足第一個方程, 卻不能滿足第二個. 因之,我們不能不於無數 x 及 y 所可取的數目中,擇其一對數目, 同時旣可滿足第一個方程, 又可滿足第二個方程者; 於是 x 與 y 之值便有一定, 不能隨便爲之指定了.蓋同時幷能滿足此兩方程之數目,我們極易證明,是不能找到兩對的. 所以凡是二元的方程, 必須同時要有兩個方程才能得確定的解, 才能使 x 與 y 有一定的值; 若祇有一個, 則 x 與 y 之值便爲無定,無所謂解之可言了. 此種兩個不是互相獨立而是有關的, 故謂之聯立方程; 如我們前面所得兩個方程 $x+y=64$ 及 $x-y=8$, 卽是一對聯立方程.

現在我們試求將此所得的兩個聯立方程的解法,找出 x 與 y 之一定的值, 同時能滿足此二個方程. 我們可如此

辦法,將此兩方程併成爲一,同時卽剔去其一個未知數,如是我們得一個祇含一個未知數的方程,卽能得解了. 欲將此兩方程合併爲一,可將此二者相加(或相減)而得之;如是我們試將此二者加起來. 因爲方程等號之兩面之數是等的,所以我們可將此二方程照其原來之式,上下並列,恰如普通加法那樣的加之(如係減,亦可如是並列的減之)如下:

$$\begin{array}{c} x+y=64 \\ x-y=8 \\ \hline x+x+y-y=64+8 \end{array}$$

將此由兩方程相加而得的方程之兩面歸併起來,得;

$2x=72$: 此卽是 $x=36$.

我們旣得了 x 之值爲 36, y 之值卽極易得了,因爲題目上明明說此兩數之和爲 64,試問何數與 36 相加得 64 呢?只要用算術一算,便知是 28,所以 y 之值是 28. 普通我們是如此辦法,我們求得 x 之值爲 36 後,卽將此值代入原兩來方程之任何一方程中,第一個或第二個均可,以求得其餘一個未知數 y 之值. 如我們將 36 代入原來之第二方程中,則卽得.

$$36-y=8,$$

將此式遷項(遷項理見前章第三節)則得:

$$-y=8-36;$$

但此方程之右面 $8-36$ 等於 -28, 亦爲一負的數目,故此方程兩面均爲負數: $-y=-28$. 照方程兩面相等之理,我們若將其一面之數目改變其號,則其他一面只要亦同樣的改變其號,此方程仍不失爲相等;因之我們將 $-y=-28$ 此方程兩面之負號均改爲正,自然可以;於是我們得:

$$y=28,$$

此卽是 y 之値爲 28, 與前面所推論得者無異. 36 與 28, 其相加之和爲 64, 其相減之較則爲 8, 如是此兩數正是我們所求的了;除此兩數以外,亦不能再有其他兩數能解答我們的題目,此是容易證明的,讀者稍一想便能見到.

我們現在已知道,凡二元的方程,必須同時有兩個方程才能求其確定的解;而解之之法,亦大率可照前例,將二方程相加或相減使合併成一,同時卽剔去其一個未知數使僅存一個未知數在此方程內. 但事實上普通我們所遇見的兩個聯立方程,未必都若前例那樣的簡單,只須相加便可將其一未知數剔去了;譬如以下兩個聯立方程:

$$x+2y=3,\ 4x+y=5,$$

我們將其相加或相減時，所得的結果一方程仍還有兩個未知數，未能將其一剔去，蓋此兩方程相加的結果爲 $5x+3y=8$，其相減之結果(自第二方程減去第一方程)則爲 $3x-y=2$，均仍含有兩未知數在內，且現在祇有一方程，照適才所說道理，反而弄成不能解了，如是用加減將兩方程合併之法豈非極有限，無多用處呢？這裏，我們不能不想個相當的方法來救濟．我們已屢屢說過，方程之兩面是等的，所以一面加上或減去某數時，只要其他一面同樣的加上或減去此數，則仍不失其均等．本此道理，我們如用某數將方程之一面乘時，如同樣的用此數其他一面亦乘，則其相等亦自可以保留．於是我們有法可免前面的困難了，我們遇到兩方程相加或相減不能將其一個未知數剔去時，可先用一相當的數將其中一方程乘過後然後再相加或相減，使其恰能剔去一未知數．如適才所舉兩方程，我們可先用 4 乘第一方程，則將第一方程成爲 $4x+8y=12$，於是從此方程減去第二方程如下：

$$\begin{array}{r}4x+8y=12\\ 4x+\ \ y=\ \ 5\\ \hline 7y=\ \ 7\end{array}$$

這由兩方程相減後所得的方程 $7y=7$, 已能使我們得 y 之值爲1; 既得此值,即以之代入原來的兩方程之任何一方程中. x 之值於是亦即能得了. 總之,我們凡遇兩個方程直接相加或相減時若不能將其一個未知數剔去. 則可先找一個相當的數目將其一方程乘之(或除之亦可), 務使其相加或相減時能剔去其一個未知數(按必要時亦可將兩方程各用一相當的數目乘或除之, 使其相加或相減時能剔去一未知數:例如 $3x+2y=15$ 及 $2x+3y=9$ 兩方程,我們可先用2乘第一方程,再用3乘第二方程,然後相減,則未知數 x 即剔去,而僅存 y, 即能得其值了).

二元一次聯立方程的解法, 除了前面所說將兩方程相加或相減以剔去其一未知數外, 尙有其他一種相代的方法,亦極便利,今述之如下.

如前面我們所得兩方程 $x+y=64$ 與 $x-y=8$, 我們可將其第二方程遷項, 使其等號左面之 $-y$ 這項遷至右面, 則此方程卽成爲:

$$x=8+y,$$

此卽是說,我們由第二方程,得 x 之值爲 $8+y$. 我們現在卽將此所得 x 之值 $8+y$ 代入第一方程 x 處, 則第一方程

卽作此式:

$$8+y+y=64,\text{ 或 }8+2y=64,$$

由此式遷項,得 $2y=64-8$, 或 $2y=56$,

故 $y=28$. y 之值旣得,仍以此代入原方程中,卽得 x 之值. 可知用此法與用前法所得結果完全無差.

又如前面舉過的$x+2y=3$ 及 $4x+y=5$ 兩方程,我們自第一方程遷項,得:

$$x=3-2y,$$

卽將此 x 之值 $3-2y$ 代入第二方程,則得:

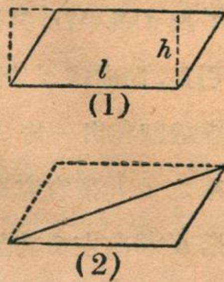
$$4(3-2y)+y=5,\text{ 或 }12-8y+y=5,$$

經遷項幷歸併後爲 : $-7y=-7$, 將此式兩面之號均改變爲正(其理前面說過),則得 $7y=7$, 故 $y=1$. 用此 $y=1$ 代入原方程,則 x 之值亦卽得到.

由此兩例,可知聯立方程亦可用相代之法解之,卽先由兩方程之任何一方程求得其一未知數之值 (此值內含有其他一個未知數),卽將此值代入其他一方程,如是此方程祗有一未知數,因而卽得解了.

9. 斜方形及三角形之面積　我們於前章第五節內已說過,長方形之面積是等於長乘寬,正方形之面積則爲其

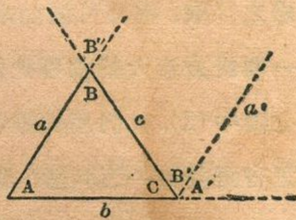
邊之自乘；現在可進而求斜方形與三角形之面積. 凡是一個斜方形大約都可把他截改爲長方形(或正方形),如第七圖中(1),我們用虛線將一斜方形之右面割去一三角形，卽將所割下的裝置於其左旁，如是此斜方形卽成爲方形了:其面積現在是底 l 乘高 h. 但從圖上我們極易看出,此所截改成的長方形,其底(卽長)還是原來斜方形之底，而其高則爲一條垂線在底與其對面之邊之間者;所以讀者須分淸楚,我們說斜方形之面積等於底乘高時,其底可任取斜方形之一邊,但高則爲底與其對面之邊之間之垂線,而非原來斜方形之其他一旁的邊.



第七圖

又觀於第七圖之(2),可知凡三角形均可視爲斜方形或長方形或正方形之半,故三角形之面積,是底乘高之半;這裏,其底是可任取三角形之那一邊爲之的,不過高則須爲自底(或其引長)至其對面之角尖之垂線.

10. 三角形三個角間之互相關係 三角形所有三個角其大小相互間有若何之關係,我們這裏也須研究一下.如第八圖,我們用 a, b, c 三條邊構成一三角形,其三個角



第八圖

亦各用字母表之爲 A, B, C. 我們先於 C 角尖處作出一條虛線 a' 與 a 邊平行, 幷將 b 邊向右引長, 則虛線 a' 與 b 之引長的虛線卽作出一角 A', 此角與原來之 A 角很容容易看出是相等的,因 a' 旣與 a 平行,我們將 a' 移向左使其落入 a 位置時必能相合, 而 b 之引長虛線則未變動方向,故其所作角 A' 與原來a邊及 b 邊所作者 A 必相等. 算學上角之符號爲 $\sphericalangle$, 我們以後爲取便利起見,或卽用此符號以表角; 如是適才所說 A' 角等於 A 角, 可用此符號作: $\sphericalangle A'=\sphericalangle A$. 我們現在再將 a 邊與 c 邊各引長,則作出一$\sphericalangle B''$, 此 $\sphericalangle B''$ 如圖中所示很易明白是與由虛線 a' 及 c 邊所構成的 $\sphericalangle B'$ 相等的; 如是 $\sphericalangle B''=\sphericalangle B'$. 但照幾何學上極簡單的理, 我們知道凡兩直線相交,其交角(如第八圖中 B 與 B'' 兩相對之角, 由兩直線相交而生者, 謂之交角) 必等 (按此理極簡單易見到, 故前面未特別提出,讀者可自驗之), 卽 $\sphericalangle B''=\sphericalangle B$, 故 B 角亦必等於 B' 角: $\sphericalangle B=\sphericalangle B'$, 如是, 圖中原來三角形所有三個角 A, B, C 之和, 必卽等於 A', B', C 三個角之和: $A+$

$B+C=A'+B'+C$. 但此 A', B', C 三個角之和，如圖中所示，恰與兩個直角之和相等；我們倘用字母 R 代直角，則可如是寫：$A'+B'+C=2R$. 由此，我們并知原來三角形所有三個角 A, B, C 之和，亦等於兩直角，因得：

$$A+B+C=2R.$$

我們這裏所舉爲例之三角形，自然不過是三角形之一種，此外尙有含有鈍角的三角形及直角三角形(勾股形)等許多樣式；但均可如此證明其三個角之和是等於兩直角，因此我們得一關於三角形三個角之定理如下：

"凡三角形，其三個角之和必等於兩直角".

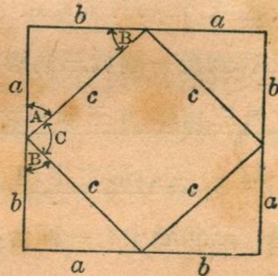
11. 勾股形之定理　我們於前章第五節中曾經提及過，三角形中有一種含有一直角的三角形名爲勾股形者〔參觀該節中第三圖之(2)〕最爲重要，以後用處極大. 我們并曾說過，此種直角三角形之三條邊各有特別的名稱：其底邊名勾，其與此勾垂直者爲股，其最長之邊對直角者則名弦〔仍參觀第三圖之(2)〕. 本節內將使讀者明白，此種勾股形之三條邊，卽勾，股與弦之間，無論此形之大小如何，總有一定的關係存在，卽："勾之方加股之方等於弦之方". 我們倘仍照第五節內所說過的那樣，用字母 b 代

勾, a 代股, c 代弦,則可得公式以表所說的關係如下:

$$a^2+b^2=c^2.$$

此種勾股形之三條邊間之一定關係, 卽謂之勾股形之定理,以後用處極廣,讀者應加注意. 現在試將此定理證明之.

我們可將四個同以 b 爲勾, a 爲股, c 爲弦的勾股形如是排列, 使其成爲第九圖那樣, 看來恰爲兩個一大一小的方形, 小者斜嵌於大者之中. 但是究竟這兩個方形是否均是正方,卻不能不先加以證明才是. 大的包於外的一個, 可不用多思量卽證明其實是正方; 因爲各邊旣均相等, 其四角亦都是直角.



第九圖

至於小的一個,則其邊之均爲相等的雖已知道,其四角亦都是直角與否還須一證. 由前節,我們得知凡三角形三個角之和必等於兩直角,但勾股形之一角旣已爲直角,故其餘兩角之和必爲一直角;因此,圖中 A 角與 B 角之和必等於一直角. 我們又知圖中 A, B, C 三角之和是等於兩直角,今 A, B 兩角之和旣爲一直角,則 C 角自然是一

直角了. 於是我們可證明這斜嵌於大方之內的小方,亦是一正方形;因其四邊既相等同爲 c,而四角亦均是直角.

既已知此大小兩個方形均是正方形, 現在可各求其面積. 從圖上,我們可見這大方之邊是 $a+b$;由第五節所說過的理,正方形之面積是等於其邊長之自乘,知此大方之面積卽爲 $a+b$ 之自乘. 照面第四節公式(4)我們得:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

爲此包於外的大方之面積. 至此斜嵌於大方之內的小方,其面積自然爲 c^2.

但我們一方面又可視此大方之面積:

$a^2+2ab+b^2$ 爲由小方之面積 c^2 加四個勾股形之面積而成者(觀圖). 而照第九節,凡三角形之面積等於其底乘高之半;勾股形之股與勾既互相垂直,故任取勾或股爲底,其餘的股或勾卽是其高,因而勾股形之面積,簡單的是勾股相乘之半. 我們前面所用的四個勾股形,既同以 b 爲勾,a 爲股,故每個勾股形之面積爲 ab 之半,四個總起來卽是 $2ab$. 於是此大方之面積,卽可視爲由小方之面積加四個勾股形之面積而成者. 又可寫成: c^2+2ab. 此 c^2+2ab 自然與前所得 $a^2+2ab+b^2$ 是等的,因得:

$$a^2+2ab+b^2=c^2+2ab;$$

將此式等號之兩面各減去 $2ab$, 即得:

$$a^2+b^2=c^2,$$

此即是說 "勾之方加股之方等於弦之方"; 我們剛才所說定理,因此,已將他證明了.

12. 括弧前之號　譬如我們於 15 上再加 "5 與 3 之和", $15+(5+3)$, 則得 23:

$$15+(5+3)=23.$$

我們倘若將此式等號左面 $(5+3)$ 一項之括號脫去, 直寫作 $15+5+3$, 其結果無改, 仍是 23:

$$15+5+3=23.$$

從此可知凡括弧之前號若為正, 則可隨便將此括弧脫去, 於值無關.

又如我們自 15 上減去 "5 與 3 之和", $15-(5+3)$,則因 5 與 3 之和為 8, 故自 15 上減去即得餘數 7:

$$15-(5+3)=7.$$

這裏,等號左面$(5+3)$一項之括弧,便不能隨便脫去了;蓋若將括弧脫去直寫作 $15-5+3$, 則結果所得的為 13 而非 7 了,所差極大. 但這裏的錯誤,卻不難找出其所在:

因我們所欲減去的是 5 與 3 之和，卽是 8，故自然其餘數是 7；若將括弧隨便脫去，寫作 $15-5+3$，則變爲自 15 減 5 後復加 3，簡直與原意不同了，無怪所差極大．欲免此錯誤，我們可如此想，我們所欲減去的是 5 與 3 之和爲 8，今祇先減了 5，則必再減去 3 才行；換言之，前面所寫出的 $15-5+3$，若將末項 $+3$ 改作 -3，使成爲 $15-5-3$，則所得是 7，卽不錯誤了：

$$15-5-3=7.$$

從可知凡括弧之前若有負號，則將此括弧脫去時，必須將括弧內之各項一一改變其號.

推廣此理，得公式如下：

$$a+(b+c)=a+b+c$$

$$a-(b+c)=a-b-c$$

13. 正負數之相乘除　第一章第四節內，我們曾得二公式：

$$(b-c)(b+c)=b^2-c^2$$

$$(b+c)^2=b^2+2bc+c^2$$

仿此理，我們還可得$(b-c)^2$之式如下：

$$(b-c)^2=(b-c)(b-c)=b(b-c)-c(b-c)$$

$$=b^2-bc-c(b-c)$$

此所得 $b^2-bc-c(b-c)$ 一式之末項 $-c(b-c)$ 可寫作 $-(bc-c^2)$，爲有負號在括弧之前者，故照前節所說的理，若欲將此括弧脫去時，括弧內各項必均須改變其號，卽：$-(bc-c^2)=-bc+c^2$. 於是 $b^2-bc-c(b-c)$ 卽變爲 $b^2-bc-bc+c^2$，經歸併後作 $b^2-2bc+c^2$；因得：

$$(b-c)^2=b^2-2bc+c^2$$

將此式與第一章第四節內所得兩公式同列，我們共有三個二項式相乘之公式如下：

$$(b+c)(b+c)=b^2+2bc+c^2 \qquad (1);$$

$$(b+c)(b-c)=b^2-c^2 \qquad (2);$$

$$(b-c)(b-c)=b^2-2bc+c^2 \qquad (3);$$

這三個旣是公式，自然無論 b 與 c 是什麼數目均可通用．我們現在并將給讀者知道，此二數 b 與 c 中卽有一個是 0，以上三公式亦還可用，并且從這裏還可得個重要的道理．我們現在設 b 爲 0，則公式(1)等號之左面成爲 $(0+c)(0+c)$，其右面則爲 $0^2+2c0+c^2$；但因爲以 0 加於某數等於未加，且 0 自乘以及與任何數相乘總是爲 0，卽沒有，故公式(1)當 b 爲 0 時卽變作：

$$(+c)(+c)=+c^2.$$

仿此理,可知設 b 爲 0, 則公式(2)與(3)卽變成:

$$(+c)(-c)=-c^2;$$

與
$$(-c)(-c)=+c^2.$$

由此,我們可得知一極重要的理,卽凡二個數目之號若同,俱爲正或俱爲負,則相乘後所得的數目其號亦爲正;若兩個數目之號不同,一爲正一爲負,則相乘後所得者爲負號之數目. 今再設一例如下以明此:

$$(+a)(+b)=+ab;$$

$$(+a)(-b)=-ab;$$

$$(-a)(+b)=-ab;$$

$$(-a)(-b)=+ab.$$

除法與乘法雖相反, 而其理之關於此者則不難由乘法推出. 簡單一想, 卽可知兩數目相除,其得數之應有何號與乘法實同, 卽凡相除兩數之號若同,則所得者爲正,若不同,則所得者爲負. 可以式明之如下:

$$\frac{+ab}{+b}=+a; \qquad \frac{-ab}{+b}=-a;$$

$$\frac{-ab}{-b}=+a; \qquad \frac{+ab}{-b}=-a.$$

14. 多項式之乘除 一單個的項與一其他單個的項相乘除，其理前節已說明了，卽凡此相乘或相除之兩個項若其號同，則所得者爲正，若號不同則所得者爲負. 今將進而論多項式相乘除之法.

多項式相乘之法，其實不難由第一章第四節中所說之理推出. 我們知 $a(b+c)=ab+ac$，又知倘若將 a 易爲二項如 $(b-c)$，則 $(b-c)(b+c)=b(b-c)+c(b-c)=b^2-c^2$，這裏 $(b-c)$ 與 $cb+c$ 相乘，已不是單項的相乘，而是二項與二項相乘了. 爲淸楚起見，我們可將 $(b-c)$ 與 $(b+c)$ 之相乘，照算術上的例，如此寫法：

$$\begin{array}{r} b+c \\ \times b-c \\ \hline \end{array}$$

我們幷可完全照算術上兩數相乘方法將此式乘出：先將乘數 $b-c$ 之首項 b 遍乘被乘數 $b+c$ 之各項，則得 b^2+bc；再將此乘數之第二項 $-c$ 仍遍乘被乘數，則得 $-bc-c^2$；然後將此所得的二個數目卽 b^2+bc 與 $-bc-c^2$ 相加，則得：$b^2+bc-bc-c^2$，此卽是 b^2-c^2，與前所得者同.

今將此法完全寫出如下：

$$
\begin{array}{r}
b+c \\
b-c \\
\hline
b^2+bc \qquad \\
-bc-c^2 \\
\hline
b^2 \qquad -c^2
\end{array}
$$

用此法我們幷可得三項式之相乘,如 $a+b-c$ 與 $a-b+c$ 之相乘如下:

$$
\begin{array}{lllll}
a+b-c & & & & \\
a-b+c & & & & \\
\hline
a^2+ab-ac & & & & \\
\quad -ab & & -b^2+bc & & \\
\qquad\quad +ac & & +bc-c^2 & & \\
\hline
a^2 & & -b^2+2bc-c^2 & &
\end{array}
$$

此即是 $a+b-c$ 與 $a-b+c$ 相乘,所得者爲: $a^2-b^2+2bc-c^2$. 其餘如四項式之相乘,四項與三項式之相乘,乃至任何項數之相乘,可總名之爲多項式之相乘,均可照此類推;因此,多項式相乘之法,可如是說: 用乘數之各項乘被乘數之各項,然後將所得諸式相加即得.

單項與單項之除,前面已舉過例了:如 ab 被 a 除,則得 b; 蓋二數相除之意義,原是在於求得一個數,將此與除數乘,仍得被除數者;如前例 ab 被 a 除,即是在於求得一個

數,將此數與 a 相乘仍得 ab 者,所以此數是 b. 遵此,ab 若被 b 除,所得自然是 a; 因此,我們得:

$$\frac{ab}{a}=b; \qquad \frac{ab}{b}=a.$$

(按除式亦可寫作分數式,其除數爲分母,被除數爲分子).

又讀者習過算術,當已知算術上分數之規例;此項規例於代數上亦仍通用;舉例明之如下:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}=\frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

至多項式之除法,其式較煩,不易自單項之除法推得;但我們可仍照算術上數目相除之法除之. 今述其法如下:以除數之首項除被除數之首項,所得者爲商之首項,即以此商之首項遍乘除數之各項,以與被除數相減,所餘者爲餘式,再仍以除數之首項除此餘式之首項,所得爲商之次項,復以此次項乘除數之各項以與餘式相減,仍爲餘式,仿

此直除至無餘式，卽爲除盡，或至餘式首項小於法之首項不能除爲止.

舉例以明此；設如我們欲以 $4c+5d$ 去除 $8ac+10ad+12bc+15bd$，則可仿算術除法將此兩式列出，依上述之法除之如下：

$$
\begin{array}{rl}
4c+5d) & 8ac+10ad+12bc+15bd\,(2a+3b \\
 & 8ac+10ad \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 12bc+15bd \\
 & \qquad\qquad\quad 12bc+15bd \\
\hline
\end{array}
$$

這裏，除數之首項爲 $4c$，被除數之首項爲 $8ac$，相除得 $2a$（因除數 $4c$ 內之 4 除被除數 $8ac$ 內之 8 得 2，其 c 除 ac 得 a 故得 $2a$），爲商式之首項，卽以此首項乘除數 $4c+5d$，則得 $8ac+10ad$，自被數除上減去此式，所得餘下的 $12bc+15bd$ 爲餘式；於是仍用除數之首項 $4c$ 除此餘式之首式 $12bc$，則得 $3b$，以此 $3b$ 乘除數得 $12bc+15bd$，與餘式相減恰盡，故爲除絕.

再舉個例，如以 $x+12$ 除 $x^2+10x-24$，則得 $x-2$，其式如下：

$$
\begin{array}{r}
x+12\overline{)\,x^2+10x-24\,}(x-2 \\
\underline{x^2+12x} \\
-\ 2x-24 \\
\underline{-\ 2x-24}
\end{array}
$$

15. 根數 以前曾說過,由一個數目自乘所得的數目,謂之此數目之方數,例如 a 自乘得 a^2,此 a^2 即謂之 a 之二次方,如自乘至 a^3,即謂之 a 之三次方 仿此,b^2 爲 b 之二次方,c^2 爲 c 之二次方,等等. 從可知"方"者,即是一個數目自乘之謂.

與"方"相對者有所謂,"根". "根"者,即是一個數目,由此自乘以得某數目者;例如前面說過的 a^2,是由 a 自乘而得,故 a 即爲 a^2 之根. 因爲"方"有次數之別,如二次方,三次方等;故根亦同樣的有次數之別:如 a^2 爲 a 之二次方,故反之,我們卽呼 a 爲 a^2 之二次根;仿此,a^3 爲 a 之三次方,故 a 卽爲 a^3 之三次根;b^2 爲 b 之二次方,故 b 卽爲 b^2 之二次根. 又如我們用數目字爲例,則 5 之二次方是 25:$5^2=25$, 6 之二次方是 36:$6^2=36$;故反之,25 之二次根爲 5,而 36 之二次根則爲 6. 根之意義是如此,其餘可以此類推.

數學上根有一個特別符號, 寫在所欲求其根的數目之

旁，作 $\sqrt{}$；我們并於其左角上寫小數目字，以明根之次數，如二次根，爲 $\sqrt[2]{}$，三次根則寫作 $\sqrt[3]{}$，其餘四次根等仿此類推，祇改其小數目字便得. 但普通習慣，我們於二次根之號，可不寫出其小數目字作 $\sqrt[2]{}$，祇須簡單寫作 $\sqrt{}$ 便得；其餘三次四次等則非寫出作 $\sqrt[3]{}$ 及 $\sqrt[4]{}$ 不可. 如是，前面所說 a^2 之二次根爲 a，用符號寫出卽作：$\sqrt{a^2}=a$；又，a^3 之三次根爲 a，用符號卽爲：$\sqrt[3]{a^3}=a$. 仿此，我們可得 $\sqrt{b^2}=b$，$\sqrt{c^2}=c$，$\sqrt{25}=5$，以及 $\sqrt{36}=6$ 等等.

求某數目之根，卽謂之開方；求其幾次根，卽謂之開幾次方. 如求 a^2 之二次根得 a，亦可說開 a^2 之二次方得 a，又如開 25 之方則得 5，故根號 $\sqrt{}$ 亦卽可視爲開方號.

凡帶有根號之數目，不論其根號是何次者，總謂之根數，如 $\sqrt{a}$，$\sqrt[3]{b}$ 乃至 $\sqrt{25}$ 等等，均是根數. 根數之算法，其理與尋常同. 兩個根數，其根號之次數若同，如 $\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$，則相乘時可將其根號下之數相乘，而併爲一根數，如 $\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$ 乘，則可將其根號下之 a 與 b 相乘，得 $\sqrt{ab}$. 倘根號不同，如一爲三次者 $\sqrt[3]{a}$，一爲二次者 $\sqrt{b}$，則自然不能併而爲一. 兩根數之除法亦然，如根號同，則可將根號下數相除，而併爲一根數，否則亦不能併.

根數之算法，既大略明白，我們可再一論根數與指數之關係. 按照第二章第七節所說理，我們知道底數同指數同或不同的兩方數相乘，是將其指數相加：如 a^2 乘 a^3 得 a^5, $a^m a^n = a^{m+n}$, 等等. 仿此我們得

$$a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1.$$

但以 1 指數的方數，仍是此數自身，蓋 $a^3 = aaa$, $a^2 = aa$, 故 $a^1 = a$. 因此，

$$a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = a.$$

又按前面所說根數乘法的道理，我們知

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2},$$

因爲 a^2 爲二次根是 a, 自然

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = a.$$

從這兩式裏，即 $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = a$ 以及 $\sqrt{a}\sqrt{a} = a$, 我們自然得

$$a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\sqrt{a},$$

或 $$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

推廣此理： $$a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a,$$

而 $$\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} = a,$$

故 $$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}.$$

又如 $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}$, 則自然

$$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}.$$

由此，我們知道凡以分數式為指數的方數，亦可寫作為根數，其根之次數，即以原來指數之分母為之，而此原來指數之分子，則為根數號下數目之方數　再以式明之如下：

$$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}.$$

16. 一元二次方程　從前已說過，方程有次之別，凡方程內未知數之最高的為某次者，此方程即謂之某次方程．我們這裏所欲論的是二次方程，即其中所有未知數最高的為二次者；又因其祇有一個未知數，故謂之一元二次方程．

一元二次方程最普通的形式，大約如下：

$$x^2+ax=b,$$

這裏，方程左面之第一項 x^2 是二次方的未知數，其第二項 $+ax$，則為此未知數之一次者（a 為此未知數 x 之係數．按代數上凡字母前之數目字，不問在代已知數之字母前，或未知數之字母前，均謂之係數：如 $2a, 3b, 4x$ 以及 $5y$ 等，這裏 a 前之 2，b 前之 3，x 前之 4，y 前之 5 等均是係數，不過在代未知數的字母以前，如 x, y 等之前，係數亦多有仍為字母或數目字與字母兼用者）．至右面之 b，則為一個

已知數. 此種方程內,旣有了二次方的未知數,解法自不若前此之易,但亦不甚大困難,我們現在舉一二例明其法如下.

例一. 方程 $x^2+4x=12$, 試求其解, 卽求得 x 之值能滿足此方程者.

照第一章第四節內(二項式之乘法)所說道理,我們知道兩數目之和之方,等於此數目之方加此數目乘彼數目之二倍又加彼數目之方. 在這裏,方程之左面爲 x^2+4x, 其第一項 x^2 我們可視此爲兩個數目中此數目之方,其第二項 $+4x$, 則可視爲此數目與他數目相乘之二倍,但此數目已知其爲 x, 則其他一個數目由此可推得是 2, 蓋 2 乘 x 爲 $2x$, 其二倍卽爲 $4x$. 2 之方爲 4; 故我們若於此 x^2+4x 上再加 4, 則與前面說過的道理合,已成爲此數目 x 之方加彼數目 2 與此數目 x 相乘之二倍又加彼數目 2 之方了;如是,方程之左面變爲 x^2+4x+4, 卽是 $x+2$ 之方. 但方程之兩面是等的,故我們旣於其左面加上了 4, 則右面亦必同加此數而後可,右面原來是 12, 加上 4 卽成爲 16; 因此,原方程卽成爲:

$$x^2+4x+4=16.$$

將此方程兩面均開其方,則左面得 $x+2$, 右面得 4, 即是: $x+2=4$. 不過於此,我們又須提出第十三節內所說過的道理使讀者注意,即凡兩數相乘,號同爲則正,號異則爲負. 照此道理, 自然可知 $4\times4=16$, $(-4)\times(-4)=16$, 無論 4 爲正爲負,其自乘終是等於 16. 故我們方程右面開方後所得的 4, 不能武斷的給他一個正號或負號, 而應正負號兼用寫作 ±4. 如是我們得:

$$x+2=\pm4.$$

此式右面之 ±4 既兼有正負兩個號, 均須顧及, 因此不能不分論之. 我們可先論其正號,即照其正號計算,則 $x+2=4$, 遷項得 $x=4-2$, 即是:

$$x=2.$$

其次再照其負號計算, 則 $x+2=-4$, 遷項後得 $x=-4-2$, 即是:

$$x=-6.$$

這樣, x 有二個值了,一爲 2, 其一則爲 -6. 我們現在倘將此二值, 更迭代入原方程內, 則知此二值均能滿足原方程; 蓋 x 如爲 2, 則原方程作 $4+8=12$; x 如爲 -6, 則原方程作 $36-24=12$, 此二者均無誤. 從可知這裏 x 可有

二個值,均能滿足原方程者. 但我們願使讀者記着,凡二次方程,無論其形式若何,未知數之值總有二個,不獨剛才所舉的例爲然(按代數上定理,凡某次的方程,必有某個值可代入未知數滿足此方程,如是三次者有三個,四次者有四個等等,其證這裏不能引). 今再舉個第二例.

例二. 方程 $2x^2-12x=-16$,求其未知數 x 之二個值,能滿足此方程者.

此方程內 x^2 旣有 2 爲係數,則欲其左面成爲正方,卽成爲二數目之和之方,須用相當的數目乘或除之才可;因之我們先用 2 除此方程,使其成爲:

$$x^2-6x=-8,$$

然後再仿前法於左右兩面各加 9,則得

$$x^2-6x+9=1,$$

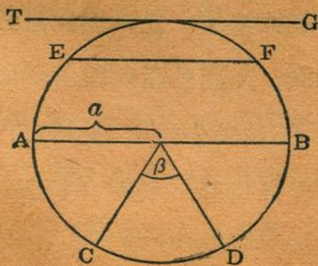
兩面均開方得 $x-3=\pm 1$ (因 1 自乘仍爲 1,故 1 之根亦爲 1,不過正負的 1 自乘都得正 1,所以仍須正負號幷用).遷項卽得

$$x=3\pm 1,$$

若用 1 前之正號則 $x=4$,若用負號則 $x=2$. 試以此二值更迭代入原方程,均能滿足,故知 x 之二值爲 4 與 2.

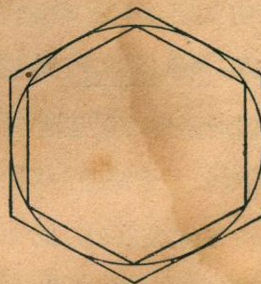
一元二次方程的解法,大率是如此,看了上舉二例,已可明其道理了,至應用時宜如何先乘或除,以及使其成爲正方,這是須讀者臨時計量的了.

17. 圓之量法　我們現在再回到幾何學方面去,論一論關於圓形的幾個道理.但首先有幾個名詞必須先說明一下:如第十圖是一圓周,其內外有直線數條,此中在其內最長的一條過圓之中心者,如圖中之 AB 直線謂之徑,徑之一半,如圖中 a 一段,謂之半徑.圓之中心既在圓周之中,故離圓周處處均相等的,而半徑又爲自圓之中心至圓周之直線,因此圓周內所有半徑均相等.圓周之一段謂之弧,如圖中由 C 至 D 之一段圓周卽是.圓內聯弧兩端之直線,如圖中 EF 直線,謂之弦;凡弦必短於徑,故徑亦可說是圓內最長之弦.在圓周之外,不與圓周相交,而緊緊的與之相觸於一點的直線,謂之切線,如圖中 TG 直線是,若此直線與圓周相交,則卽謂之割線,如我們試將圖中 EF 弦向兩端引長,使其出圓周,此則直線有兩



第十圖

點與圓周相交,這即是一割線了. 由兩半徑所作成之角,謂之圓心角,如圖中 B 角是. 又如第十一圖所示,圓內由諸弦所構成之六邊形,謂之內切六邊形,其由諸切線所構成包於圓周之外的,則謂之外切六邊形;此種圓內諸弦所構成,及圓外諸切線所構成之形,不問多少邊數,總謂之內切

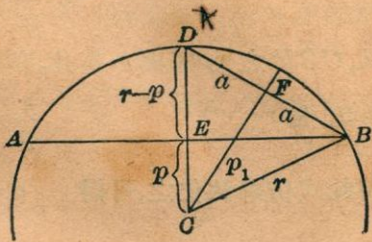


第十一圖

形與外切形. 從圖上極易明白,此內切形之周,其長不及圓周,而此外切形之周,則較圓周爲長;如是,圓周之長必介於外切形之周與內切形之周之間了. 我們從圖上又極易明白,即或自己設想亦不難見到,一個正六邊形,較之一個正四邊形要近於圓,一個正十二邊形較之一個正六邊形更近於圓,如是邊數愈多的多邊形愈與圓相近,倘邊數多至無窮,則事實上此正多邊形即可視爲圓了,故圓亦可視爲邊數無窮多的正多邊形. 試觀第十一圖,可知我們若將其內切與外切形之邊數增加至無窮多,則此兩切形即漸漸與圓相近,終至與介於其間之圓周相合了. 本此兩個道理,我們乃有方法可求圓周之長,如果圓徑是單位

1, 此圓周之長,卽謂之圓周率.

今設 AB 弦爲圓內內切正多邊形之一邊, C 爲此圓之中心點, CD 及 CB 均爲半徑,其長同爲 r, 又, CD 半徑與 AB 爲垂直, 我們命自 C 至 E 之一段爲 p, 則其餘一段自 E 至 D 自然爲 $r-p$. 今若自 D 至 B 作一直線爲弦, 幷視此弦爲一內切正多邊形之一邊, 則此以 DB 弦爲邊之內切正多邊形,其邊數必倍多於以 AB 弦爲邊的內切正多邊形. 爲計算便利計,我們命此 DB 弦之長爲 $2a$, 幷自中心點 C 再作一半徑與 DB 垂直而平分之. 此半徑自 C 至 F 之一段, 則命之爲 p_1, 但 CBF 與 DBE 兩三角形是相似的, 其邊可爲比例, 卽 CBF 之 a 邊與 r 邊比, 猶如 DBE 之 $r-p$ 邊與 $2a$ 邊比, 故我們得其關係如下:



第十二圖

$$\frac{r}{a}=\frac{2a}{r-p},$$

將此方程兩面均用 a 乘,則得 $r=\dfrac{2a^2}{r-p}$, 又用 $r-p$ 將此方程之兩面均乘,則卽得 $r(r-p)=2a^2$, 再用 2 除其兩

面,則得:

$$\frac{r(r-p)}{2}=a^2,$$

又,CBF 之 p_1 邊與 r 邊比,亦等於 DBE 之 EB 邊與 $2a$ 邊比,即:
$$\frac{r}{p_1}=\frac{2a}{EB},$$

將此式仿前法化之,可得 $a=\dfrac{rEB}{2p_1}$,再將此式自乘即得:
$$a^2=\frac{r^2\overline{EB}^2}{4{p_1}^2}.$$

但前面曾得 $a^2=\dfrac{r(r-p)}{2}$,故可將此二式合併,

則得:
$$\frac{r(r-p)}{2}=\frac{r^2\overline{EB}^2}{4{p_1}^2}.$$

又觀圖,知 EB 爲 CBE 勾股形之股,照勾股形定理可算得其方等於 r 之方減 p 之方,即:

$$\overline{EB}^2=r^2-p^2.$$

將此數代入前式,則此式卽作:

$$\frac{r(r-p)}{2}=\frac{r^2(r^2-p^2)}{4{p_1}^2}.$$

此式之右面,其分子 $r^2(r^2-p^2)$ 可化作 $rr(r+p)(r-p)$,或亦可寫作; $r(r+p)r(r-p)$; 因此,右面可改寫成:
$\dfrac{r(r+p)r(r-p)}{4{p_1}^2}$. 按照分數算法,一個分數式又可劈作相

加相減或相乘的數式，因之我們將 $\frac{r(r+p)r(r-p)}{4p_1^2}$ 劈成相乘的兩式作：$\frac{r(r-p)}{2p_1^2}\ \frac{r(r-p)}{2}$；於是前面所得式可改作下式：$\frac{r(r-p)}{2}=\frac{r(r+p)}{2p_1^2}\cdot\frac{r(r-p)}{2}$ 將此式兩面各用 $\frac{r(r-p)}{2}$ 除，得：

$$1=\frac{r(r+p)}{2p_1^2},$$

因此，知 $$2p_1^2=r(r+p);$$

兩面用 2 除後 $$p_1^2=\frac{r(r+p)}{2},$$

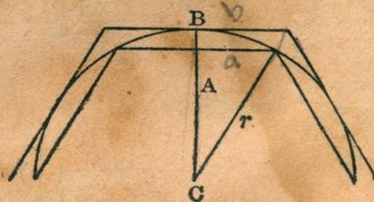
再將兩面均開方，卽得：

$$p_1=\sqrt{\frac{r(r+p)}{2}}.$$

這裏，r 是半徑，p 是原來內切形之邊與圓心之距離，p_1 則為邊數倍多於原來內切形之新作的內切形之邊與圓心之距離；從此式，可知此新作的邊數加倍多的內切形之邊與圓心之距離，與原來內切形邊與圓心之距離間，是有一定的關係的，我們倘已知一 n 邊數之內切形，其邊與圓心之距離為多少，則卽不難從此推得 $2n$ 邊數之內切形之邊與

圓心之距離了.

我們現在仍以前面用過的第十一圖爲例，卽一個圓周，其內有一正六邊形爲內切形，其外亦切一相似的正六邊形. 爲淸楚起見，再將此形之一部作爲第十三圖於此重畫出. 我們這裏并命此內切形一邊之長爲 a，其外切形一邊之長則爲 b；



第十三圖

圖中 C 是圓之中心點，CA 爲內切形邊至圓心之距離，CB 爲外切形邊至圓心之距離，同時亦卽是圓之半徑，我們命其長爲 r. 因爲此內外兩切形是相似的，故其邊之比等於其自心至邊之垂線相比，卽 b 比 a，等於 CB 比 CA，因此，我們得此關係：

$$\frac{b}{a}=\frac{CB}{CA}, \text{由此式，得：} b=\frac{aCB}{CA}.$$

又按幾何上關係，凡圓形內之內切正六邊形，其一邊之長等於此圓形之半徑（這裏不及證明此理，讀者試自證之），故這裏 $a=r$，至 CA 之長，則用勾股形定理可自圖上推出：CA 之方等於 r 之方減 $\frac{a}{2}$ 之方，卽 $CA^2=r^2-\frac{a^2}{4}$；

將兩面均開方，即得：

$$CA=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}};$$

又因 $a=r$，故此式又可如次化出；

$$CA=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}=\sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

$$=\frac{r}{2}\sqrt{3}=0.866025\,r.$$

(此最後所得 0.866025，是開 3 之方後所得小數用 2 除之後得的數) 將此所得 CA 之值，代入前面所得 b 之值內，則得 $b=\frac{a\,CB}{0.866025\,r}$. 又因 $a=r$, $CB=r$，故

$$b=\frac{r^2}{0.866025r}=\frac{r}{0.866025},$$

此即是外切形一邊之長．但此兩個內外切形均是正六邊形，故其周長之半衹須用 3 乘所得的數便得：如是我們知其內切形周長之半爲 $3r$，而外切形周長之半，則爲

$$3\ \frac{r}{0.866025}=3.46410\,r.$$

前面我們已知道：如已知一內切形邊與圓心之距離爲多少，即可從此算得邊數加倍多之內切形邊與圓心之距

離. 其公式為 $p_1=\sqrt{\dfrac{r(r+p)}{2}}$. 這裏,此內切六邊形邊與圓心之距離 CA 為 $0.866025r$, 我們將此值代入公式內之 p 處則得:

$$p_1=\sqrt{\frac{r(r+0.866025r)}{2}}=r\sqrt{\frac{1.866025}{2}}$$

$$=0.965926r,$$

為一內切十二邊形邊與圓心之距離.

我們現在再回到前面第十二圖去. 此圖內以 AB 弦為邊的內切形,我們不知其邊數,現在隨便命其邊數為 n, 而以 u 代其周之長, 則從圖上可得: $u=n2EB$. 又,以 DB 弦為邊的加倍多邊之內切形, 其周長倘以 u_1 為代, 則由圖,可得: $u_1=2n2a$. 因此, 我們知:

$$\frac{u}{u_1}=\frac{n2EB}{2n2a}=\frac{EB}{2a}.$$

但由圖上又曾知 $\dfrac{EB}{2a}=\dfrac{p_1}{r}$, 故

$$\frac{u}{u_1}=\frac{p_1}{r} \text{ 而 } u_1=u\frac{r}{p_1}.$$

由此式, 可知倘我們已知一內切形之周其長為多少時, 即可由此推得加倍多邊內切形周之長.

既得此式，現在可即應用之以求得一個十二邊內切形之周之長了．我們前面所用內切六邊形之邊，其長爲 r，故此形之周爲 $6r$；又前已求得此十二邊形邊與圓心之距離爲 $0.965926r$，將此二值代入公式內之 u 與 p_1 處，即得：

$$u_1=\frac{6rr}{0.965926r}=\frac{6r}{0.965926},$$

爲此內切十二邊形周之長．其半爲

$$\frac{u_1}{2}=\frac{3r}{0.965926}=3.10583r.$$

同時我們將此外切形之邊數亦變爲十二，使其仍與內切形相似，每邊與內切形之邊爲平行．但此外切形邊數雖增加，其邊至圓心之距離則仍不變；蓋外切形既由切於圓周之諸切線所成，無論切線加多或減少，其切點離圓心自然仍舊如此，終是半徑；故此外切十二邊形，其離心仍爲 r．又因此二內外切形爲相似．故其周相比如其邊至圓心之距離相比；因此，我們倘以 U 代此外切十二邊形之周，則可得：

$$\frac{U}{u_1}=\frac{r}{p_1}\text{或 }U=\frac{u_1r}{p_1}.$$

但我們已知 u_1 及 p_1 之值，故即可代入，則得：

$$U=\frac{6r}{0.965926}\times\frac{r}{0.965926\,r},$$

爲此外切十二邊形周之長. 如前取其半, 爲

$$\frac{U}{2}=3.21539\,r.$$

仍仿前法, 我們可求得內切二十四邊形周長之半爲 3.13263 r,其外切二十四邊形者則爲 3.15966 r, 如此一直下去,可得內切三百八十四邊形者爲 3.14156 r. 其外切三百八十四邊形者爲 3.14166 r, 但圓周之長,是介乎此內切形與外切形周長之間, 卽小於外切形之周, 而大於內切形之周;而一方面我們將內外切形之邊數再增加時, 則與圓周之相差亦愈少; 如是我們於末後可取定一個數目爲圓周之滿意的近似値,卽謂之圓周率.

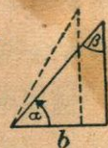
此圓周率可儘求下去, 取得小數終不盡;但實用上亦不必過求精微, 故普通我們用五位小數的一個近似値計算: 3.14159 r, 或更略爲: 3.1416 r. 這裏, r 爲半徑之長, 故倘使此圓周之半徑爲 1, 則此圓周長之半卽爲 3.1416; 倘使此半徑爲 2, 則可用 2 乘 3.1416, 所得卽爲其圓周長之半: 其餘均以此類推. 此圓周率 3.1416, 普通均用一希臘字母 π 爲代;我們以後亦卽用此. 如是, 設有一圓

周，其半徑之長爲 r，則其圓周長之半爲 πr，其全圓周之長即爲 $2\pi r$ 了.

既已知圓周率，我們可再求圓周之面積. 如前面所說，圓可視爲一個邊數無窮多之正多邊形. 但我們不難想到，凡正多邊形，均可分割成爲許多等的三角形：如正六邊形，我們倘自其中心點作直線至各角，則可得六個三角形，又因正多邊形不獨其各邊均等，即其各角亦均等，故所得三角形亦均相等；我們幷可知所得三角形之數，又必與邊數等. 因此，我們現在設想此圓爲 n 個邊的正多邊形，其各邊均長 s，則其周爲 ns 了. 但我們倘以 r 代此圓之半徑，亦即是此 n 邊正多邊形自心至邊之距離，則 $2\pi r$ 爲此全圓周之長，而與 ns 是相等的；即 $ns=2\pi r$. 一方面，我們又可設想將此 n 邊之正多邊形分割成爲 n 個相等的三角形，同以 s 爲底，r 爲高（因 r 爲此多邊形自心至邊之垂線，故分成三角形時，即以此爲高）. 照前面第二章第九節所說的理，三角形面積等於底乘高之半，故這裏 n 個三角形，每個面積均是 $\frac{sr}{2}$；將此 n 個三角形之面積合起來，得 $\frac{nsr}{2}$，即是此 n 邊正多邊形之面積，亦即所求的圓之面積.

但 $ns=2\pi r$, 故$\frac{nsr}{2}=\frac{2\pi r^2}{2}=\pi r^2$; 用說話, 即是: 圓之面積,等於 π 乘半徑之方.

18. 平面三角學之要略　從前已知道, 凡三角形,其三個角之和, 總是等於兩直角. 勾股形(直角三角形)之一角既爲直角,故其餘兩角之和必等於一直角; 因此,此兩角之間有一定的關係存在, 即當此角增大時, 彼角必減小,彼角增大時,此角亦必減小, 如第十四圖中倘 α 角增大,則 β 角必減小,反之亦然. 但我們從圖上又極易看出, 此種勾股形不獨其 α 與 β 兩角之間有互相的關係存在,并且



第十四圖

α 角或 β 角與 a 邊及 b 邊之間, 即 α, β 兩角與其勾 a 及股 b 之間,亦有一定的關係存在. 我們試將 C 邊,即此形之弦,向左旋動(觀第十四圖), 則 α 角增大, β 角減小, 作出一新的勾股形如圖中虛線所示者; 這裏, 我們可見同時 a 邊亦增長,而 b 邊則減短了. 由此, 我們又知勾股形勾與股兩邊, 與其對面之兩銳角間是有一定關係的, 即當其一角增大時,對此角之邊即增大,而因其餘一角同時減小, 對此之邊亦減小(按此種道理,不獨於勾股形爲然,所有一

切三角形都是如此:卽凡三角形,其大角對大邊,小角對小邊,故若角增大時,其對面之邊亦必增大,其間有一定關係存在. 此理讀者試一想卽不難明白).

專論此種三角形角與邊間關係之學,謂之三角學;我們現在將其要略一述之. 但三角學上有許多定義,須先明白. 如第十四圖中勾股形,其勾爲 b,股爲 a,弦爲 c,對 a 股之角爲 α,對 b 勾之角爲 β,其餘一角對 C 弦者自然卽是直角. 三角學上弦與股之關係(卽以弦除股),對於在股對面之角而言,謂之此角之正弦 sine(簡單寫作sin),如十四圖中弦與股之關係爲 $\frac{a}{c}$,其在 a 對面之角爲 α,故對於 α 角而言,$\frac{a}{c}$ 爲 α 角之正弦 sin,寫出來,作:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

其弦與勾之關係(卽以弦除勾),仍對於在股對面之角而言,謂之此角之餘弦 cosine(簡寫作 cos),如十四圖弦與勾之關係爲 $\frac{b}{c}$,角仍爲 α,故對 α 角而言,$\frac{b}{c}$ 卽爲 α 角之餘弦 cos:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

又,勾與股之關係(以勾除股),如$\frac{a}{b}$,對此角而言,則謂之正切 tangent (簡寫作 tan):

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}.$$

此外,對於此角,尙有與此相反的關係,即以股除弦,以勾除弦及以股除勾的三種,亦各有專名. 以股除弦,如$\frac{c}{a}$,對於 α 角而言,謂之此角之餘割 cosecant (簡寫作 csc). 以勾除弦,仍對此角,則謂之正割 secant (簡寫作 sec); 其以股除勾,對此角則謂之餘切 cotangent (簡作 cot). 寫出來即有:

$$\csc\alpha=\frac{c}{a};$$

$$\sec\alpha=\frac{c}{b};$$

$$\cot\alpha=\frac{b}{a}.$$

總此六個關係,按照普通的算法推算,可得許多三角學上的道理,供我們以後之用,幾何上的量法,藉此亦完成了. 今撮其最要者於下.

如上,$\sin\alpha=\frac{a}{c}$,其方爲$(\sin\alpha)^2=\frac{a^2}{c^2}$; $\cos\alpha=\frac{b}{c}$,其方

爲$(\cos\alpha)^2=\frac{b^2}{c^2}$（按普通 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 等之方寫作：$\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ 等等）．將此二者相加，則得：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}.$$

但照勾股形定理：$a^2+b^2=c^2$，故

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{c^2}{c^2}=1 \qquad (1);$$

由此知 $\sin\alpha$ 之方加 $\cos\alpha$ 之方等於 1.

又，如第十四圖，對於 α 角而言，則$\frac{a}{c}$爲 sin，$\frac{b}{c}$爲 cos，倘不對 α 角而對於 β 角而言，則$\frac{a}{c}$是 cos，而$\frac{b}{c}$是 sin 了；因此

$$\sin\alpha=\cos\beta;$$

$$\cos\alpha=\sin\beta.$$

但因 $\alpha+\beta=R$（R 爲直角），故 $\beta=R-\alpha$，於是前式又可如是寫：

$$\sin\alpha=\cos(R-\alpha) \qquad (2);$$

$$\cos\alpha=\sin(R-\alpha) \qquad (3).$$

仿此，幷得：

$$\tan\alpha=\cot\beta=\cot(R-\alpha) \qquad (4).$$

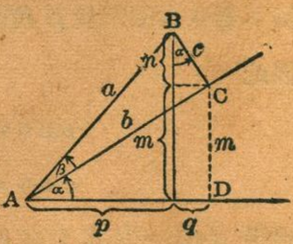
又，$\sin\alpha=\frac{a}{c}$，$\cos\alpha=\frac{b}{c}$，將 $\cos\alpha$ 除 $\sin\alpha$，

則得：
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}},=\frac{a}{b}=\tan\alpha \qquad (5);$$

由此可知以 $\cos\alpha$ 除 $\sin\alpha$ 則得 $\tan\alpha$. 仿此幷知：
$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha \qquad (6);$$

以上所述的，都是最簡單的理；我們現在再進一步來討論雙角及角與角相減所得的關係. 如第十五圖，BC 垂直於 AC 上，CD 則垂直於 AD 上；AB 之長爲 a，AC 之長則爲 b. 我們得：

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{m+n}{a}=\frac{m}{a}+\frac{n}{a}=\frac{m}{a}\frac{b}{b}+\frac{n}{a}\frac{s}{s}=\frac{m}{b}\frac{b}{a}+\frac{n}{s}\frac{s}{a}.$$



第十五圖

但觀圖可知 $\frac{m}{b}=\sin\alpha$，$\frac{b}{a}=\cos\beta$，$\frac{n}{s}=\cos\alpha$，而 $\frac{s}{a}=\sin\beta$，

故得
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (7),$$

爲兩角相加所得 sin 之公式. 仿此，幷可得兩角相加 cos

之公式如下:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{p}{a}=\frac{p+q-q}{a}=\frac{p+q}{a}-\frac{q}{a}$$

$$=\frac{p+q}{b}\frac{b}{a}-\frac{q}{s}\frac{s}{a},$$

此即是:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (8).$$

又,倘若將前面公式(2) $\sin\alpha=\cos(R-\alpha)$ 中之 α 易以 $\alpha-\beta$, 則:

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos[R-(\alpha-\beta)]=\cos[(R-\alpha)+\beta]$$

$$=\cos(R-\alpha)\cos\beta-\sin(R-\alpha)\sin\beta$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (9).$$

仿此,如將公式(3)中 α 易以 $\alpha-\beta$, 則得:

$$\cos(\alpha-\beta)=\sin(R-[\alpha-\beta])$$

$$=\sin([R-\alpha]+\beta);$$

從此,可算出:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (10).$$

此外,倘前面所得公式(7)內 $\beta=\alpha$, 則我們可得雙角之 sin:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (11).$$

同樣,倘公式(8)中 $\alpha=\beta$, 則幷可得雙角之 cos:

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \qquad (12)$$

又,設使公式 (9) 中 $\beta=\alpha$, 則

$$\sin(\alpha-\alpha)=\sin 0$$

$$=\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha=0 \qquad (13).$$

反之,設公式(10) 中 $\beta=\alpha$, 則

$$\cos(\alpha-\alpha)=\cos 0=\cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha$$

$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha;$$

照公式(1), $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, 故

$$\cos 0=1 \qquad (14).$$

從可知角度等於零時, sin 亦等於零, 而 cos 則等於 1.

但照公式(2), $\cos(R-\alpha)=\sin\alpha$, 故這裏倘使 $\alpha=0$, 則

$$\cos R=0 \qquad (15);$$

而一方面,照公式(3), $\sin(R-\alpha)=\cos\alpha$, 故倘使 $\alpha=0$, 則

$$\sin R=1 \qquad (16).$$

由此,又可知直角(即 90°角)之 cos 等於 0, 而其 sin 則等於 1. 這種道理, 其實觀前面第十四圖已不難明白, 蓋若我們將 c 弦儘向左旋動, 則 α 角儘加大, a 股亦儘加長, 終

至 a 角至直角時，a 股即落在 c 弦上與之相合，故此時 $a=c$，其 sin 爲 c 除 a 自然是等於 1 了；反之，a 角加大時，b 勾即減小，終至 a 角爲直角，則 b 勾即等於 0，但 cos 爲 c 除 b. 故 $b=0$ 則其價亦等於 0. 其餘角等於 0 時 sin 亦爲於零而 cos 則等於 1 之理，亦可仿此推得.

我們既知 $\sin R=1$，而一方面又知

$$\sin R=\sin\left(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\right)=\sin 2\left(\frac{R}{2}\right)=2\sin\frac{R}{2}\cos\frac{R}{2}$$

（觀前面公式 11），故得：

$$\left.\begin{aligned} &2\sin\frac{R}{2}\cos\frac{R}{2}=1, \\ \text{或}\qquad &\sin\frac{R}{2}\cos\frac{R}{2}=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (17).$$

仿此，由公式 (12) 可推得：

$$\cos R=\cos 2\left(\frac{R}{2}\right)=\cos^2\frac{R}{2}-\sin^2\frac{R}{2},$$

而 $\cos R=0$，故

$$\cos^2\frac{R}{2}-\sin^2\frac{R}{2}=0,$$

遷項，即得：

$$\cos^2\frac{R}{2}=\sin^2\frac{R}{2}.$$

但由前面公式(1), 知 $\cos^2\frac{R}{2}+\sin^2\frac{R}{2}=1$; 今 $\cos^2\frac{R}{2}=\sin^2\frac{R}{2}$, 故知 $\cos^2\frac{R}{2}$ 及 $\sin^2\frac{R}{2}$ 各等於 $\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned}&\cos^2\frac{R}{2}=\sin^2\frac{R}{2}=\frac{1}{2}\\ &\cos\frac{R}{2}=\sin\frac{R}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}\qquad(18.)$$

開方後得:

按公式 (5):

$$\frac{\sin\frac{R}{2}}{\cos\frac{R}{2}}=\tan\frac{R}{2}$$

故

$$\tan\frac{R}{2}=1\qquad(19.)$$

再, 仍按公式 (5), 可得 $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha$.

今若於此式之兩面各加 1. 則得:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\tan^2\alpha+1$$

或作

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha.$$

但因 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, 故 $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$;

由此便得:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \tag{20.}$$

用同法.幷可得:

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \tag{21.}$$

最後,tan 之兩角相加或相減,亦可得公式如下:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta};$$

將此式右面之分母與分子同用 $\cos\alpha\cos\beta$ 除,則得:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

此即是說:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{22.}$$

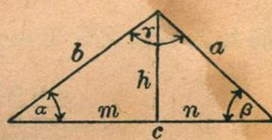
如相減,則得:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \tag{23.}$$

以上差不多已將平面三角學上幾個重要關係均給讀者知道了,此外卽再有其他,亦不難直接或簡接由此推得.此種三角學上的理,不獨於實用方面,如量地等術,全須用他,卽普通數學上的應用亦極廣,以後差不多處處要

用到的；因此，讀者須稍注意之．現在我們再舉個例於下，以明其應用

如前面我們所知道，三角形中之勾股形(即直角三角形)，其弦之方等於勾之方加股之方，此即所謂勾股形之定理．但如我們應用三角學上所得理，則此種勾股形定理即可使其推廣至於任何三角形，我們可得一普通的三角形定理．如十六圖是一隨便作出的三角形，其三條邊爲 a, b，及 c，其對 a 邊之角爲 α，對 b 邊之角爲 β，對 c，b 邊之角則爲 γ.



第十六圖

今試自 γ 角尖作一垂線至 c，將 c 分成兩段，一長 m，一長 n；此垂線之長，幷命之爲 h，觀圖，可知照勾股形定理，即得：

$$b^2 = m^2 + h^2.$$

但這裏 $m = c - n$，而 n 則等於 $a\cos\beta$ (因 $\cos\beta = \frac{n}{a}$，以 a 乘之即仍爲 n)，故 $m = c - a\cos\beta$．又，$h = a\sin\beta$ (因 $\sin\beta = \frac{h}{a}$，以 a 乘之則 $\frac{ah}{a} = h$)；因之前式可寫作：

$$b^2 = (c - a\cos\beta)^2 + a^2\sin^2\beta.$$

將此式右面展開得：$c^2-2ac\cos\beta+a^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta$

$=c^2-2ac\cos\beta+a^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=c^2-2ac\cos\beta+a^2.$

故：

$$b^2=c^2-2ac\cos\beta+a^2.$$

仿此并可證明：

$$a^2=b^2-2bc\cos\alpha+c^2.$$

以及
$$c^2=a^2-2ab\cos\gamma+b^2,$$

此即是說：凡三角形，其一邊之方等於其餘兩邊之方之和減去此兩邊相乘，又乘其所函角之 cos 之兩倍. 如第十六圖，c 之方等於 a 之方加 b 之方減去 a, b 相乘又乘其所函角 γ 之 cos 之兩倍；這裏要是 γ 角是直角，則因 $\cos R=0$，故 c 之方即等於 a 之方加 b 之方，此即仍是勾股形定理；但如此只用些三角學上的理，則祇限於勾股形的定理，便可推廣應用於任何三角形了. 至其他的應用，這裏姑從略，不再備載.

19. 對數　因爲 $10^2=100$，故知 100 這一個數目，倘要將其化成爲一方數時，而以 10 爲底數，則其指數必是 2；同樣，1000 這數目，如欲將其化爲方數而以 10 爲底數，則其指數必爲 3，因 $10^3=1000$. 推廣此理，對於任何一

個數目，我們均可隨便選定一底數而求其指數，使此數目成爲一方數：如 25，我們可選定 5 爲底數而求其指數則得 2；又如 8，倘以 2 爲底，則必得 3 爲指數．這所求的指數，卽謂之對數 Logarihmus（簡寫作 log），其底數稱爲對數底．以小字附於 log 這號之旁．如是，前面所說 100 這數目，倘以 10 爲底，則其指數爲 2，亦可說倘以 10 爲底，則 100 之對數爲 2；而其寫法則如下：

$$\log_{10} 100 = 2.$$

仿此，$10^3 = 1000$，可寫作：

$$\log_{10} 1000 = 3,$$

以及 $5^2 = 25$，$2^3 = 8$，可寫作：

$$\log_5 25 = 2, \log_2 8 = 3.$$

廣此理，倘使 $a^n = b$，則

$$\log_a b = n;$$

其餘均可以此類推．

我們現在進一步論，一論 log 於數目相乘除上之應用．今設

$$a^n = b, a^m = c,$$

相 $$\log_a b = n, \log_a c = m.$$

如 b 與 c 相乘，則

$$a^{m+n}=bc$$

因而 $$\log_a bc=m+n.$$

但 $m=\log_a c,\ n=\log_a b$，故

$$\log_a bc=\log_a b+\log_a c,$$

此即是說：兩數目之 log 相加，等於此兩數目相乘後之 log。 仿此，并可證明：

$$\log_a \frac{c}{b}=\log_a c-\log_a b;$$

即是：兩數目之 log 相減，等於此兩數目相除後之 log（注意：這裏所說，自然均指底數相同者而言）.

今并舉個數目字上的例以明此理：如 $2^2=4$，故 $\log_2 4=2$！$2^4=16$，故 $\log_2 16=4$. 照前式，則當 $\log_2 4+\log_2 16=\log_2 64$；但 $\log_2 64=6$，即是 $2+4$，故知其與所得式合. 又，$\frac{16}{4}=4$，其 $\log_2 4=2$；而自 $\log_2 16=4$ 減去 $\log_2 4=2$ 後亦得 2，故知亦合式.

又，$a^n=b$，則 $a^{mn}=b^m$，由 $a^n=b$，可得 $\log_a b=n$；而由 $a^{mn}=b^m$ 式可得 $\log_a b^m=mn$. 但 $n=\log_a b$，故

$$\log_a b^m=m\log_a b;$$

此即是：一數目之 log 被一其他數目乘時，等於此數目自乘至他數目次數之方後之 log. 同樣，并可證明：一數目之 log 被一其他數目除時，等於開此數目數方至其他數目次數後之 log，即

$$\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{\log_a b}{m}.$$

20. 級數 設如有一列數目，其各個均是由一數目與一其他數目之各次方（由 0 次，1 次…… 以至於任何次數）相乘而得者，這列數目卽謂之一幾何級數. 例如一數目 a 與一其他數目 q 之各次方相乘而得的幾何級數是：

$$a, aq, aq^2, aq^3$$

這裏，a 名爲首項，q 爲公比，因此級數內無論那一項與其前項相除，其得數總是 q. 要是這級數有 n 項，則其末項必是 aq^{n-1}，卽此末項之 q 其指數必爲 $n-1$；此其理由前面所寫級數上卽可看出，蓋第一項 q 之指數爲 0 故 q 等於 1，其第二項 q 之指數爲 1，第三項則爲 2，如是下去，其末項，卽第 n 項其 q 之指數必爲 $n-1$. 今設此級數有 n 項，其 n 項之總和等於 S，則得：

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1}.$$

再用 q 將此式乘，則可得一式，其右面爲一新級數，首項

是 aq, 末則項爲 aq^n:

$$Sq=aq+aq^2+aq^3+aq^4+\cdots+aq^{n-1}+aq^n.$$

今若將此兩式相減, 即自 Sq 減去 S, 則得:

$$Sq-S=-a+aq^n$$

或:

$$S(q-1)=a(q^n-a.)$$

由此得:

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

要是 $a=1$, $q=2$, $n=5$, 即首項 1, 公比 2, 項數 5 之一級數: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$, 則照前式, 其總和爲

$$S=\frac{2^5-1}{2-1}=31.$$

試證之:

$$=1+2+2^2+2^3+2^4=31,$$

故知我們所得幾何級數總和之公式無誤.

倘使一級數, 其首項爲某數, 其以後各項均與其一項差某數, 則此級數謂之算術級數, 而其所差者謂之公差. 例如首項爲 a, 其以後各項均較其前項大 d, 則 d 卽謂之公差, 而倘使此級數有 n 項數, 則卽作此形式:

$$a, a+d, a+2d, a+3d\cdots a+(n-1)d.$$

從這裏, 可見此級數之末項爲 $a+(n-1)d$, 蓋因其第一項

爲 a, 其第二項爲 $a+d$, 第三項爲 $a+2d$,故其末項即爲 n 項必爲 $a+(n-1)d$. 今以 l 代此 n 項數級數之末項 (公差爲 d). 則:

$$l=a+(n-1)d.$$

又, l 既爲末項, 則末項之前一項必爲 $l-d$, 其前二項必爲 $l-2d$, 等等. 我們倘仍以 S 代此級數各項之總和, 則:

$$S=a+a+d+a+2d+a+3d+\cdots\cdots+l-3d+l-2d$$
$$+l-d+l.$$

或我們將級數倒寫之, 以 l 爲開始, a 爲末, 則得:

$$S=l+l-d+l-2d+l-3d+\cdots\cdots+a+3d+a+2d$$
$$+a+d+a.$$

將此二式相加, 得:

$$2S=a+l+a+l+a+l+\cdots\cdots+a+l.$$

這裏, 其右面全爲 $a+l$ 所成, 而此 $a+l$ 之多, 適與原來級數之項數等; 但我們原有 n 項, 故其右面即有 n 個 $a+l$ 即 $n(a+l)$, 因之, 我們得:

$$2S=n(a+l),$$

或 $$S=\frac{n(a+l)}{2}.$$

但 $l=a+(n-1)d$,以此代入前式,

即得:
$$S=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}$$

試再設一例證之:倘有一算術級數,首項為 1,公差為 2,項數為 6,則遵前式,其總和為

$$S=\frac{6\times(2+10)}{2}=36.$$

但 $1+3+5+7+9+11=36$,故知無誤.

設如我們於此所得總和式 $S=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}$ 之右面之 n 處,依次以 1, 2, 3,…n 各數目代入,則又可得一算術級數:

$$a,\ 2a+\frac{2\times1}{2}d,\ 3a+\frac{3\times2}{2}d,\ 4a+\frac{4\times3}{2}d$$

$$na+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

此種級數以別於前者,謂之第二次算術級數(按前者謂之第一次算術級數). 此種第二次算術級數之各項,均係由二個項相加而成者(第一項 a 可視為 $a+0$,亦係二項所成),其一項為 a,一項則為 d 及其係數. 倘使此級數有 n 項,則其 a 項之總和為: $a+2a+3a+4a+\cdots\cdots na$ 照前

式$=\frac{an(n+1)}{2}$ 而其 d 項之總和則為:

$$\frac{2\times 1}{2}d+\frac{3\times 2}{2}d+\frac{4\times 3}{2}d+\cdots+\frac{n(n-1)}{2}d$$

$$=d\left(\frac{2\times 1}{2}+\frac{3\times 2}{2}+\frac{4\times 3}{2}+\cdots+\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

將此 a 項之總和與 d 項之總和相加,必得此第二次算術級數之總和;我們倘以 S_2 代此,則得:

$$S_2=\frac{an(n+1)}{2}+d\left(\frac{2\times 1}{2}+\frac{3\times 2}{2}+\frac{4\times 3}{2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

此式右面第二項與 d 相乘括弧中之諸數,謂之擬形數.我們現在須設法將這些擬形數算清,不則此第二次算術級數之總和仍難得簡單公式. 我們知道:

$$b(b+1)(b+2)-(b-1)b(b+1)=3b(b+1),$$

這裏,無論 b 是何數,均可用. 由此,我們得:

$$b(b+1)=\frac{b(b+1)(b+2)}{3}-\frac{(b-1)b(b+1)}{3},$$

或: $$\frac{b(b+1)}{2}=\frac{b(b+1)(b+2)}{6}-\frac{(b-1)b(b+1)}{6}$$

今試於此式之 b 處依次代入 $1,2,3,4\cdots n$ 等數目,則右面

卽得以前總和式內之各擬形數，而其左面則爲與此擬形數相等而形式不同的一數目．如是：

$$\frac{1\times2}{2}=\frac{1\times2\times3}{6}-0,$$

$$\frac{2\times3}{2}=\frac{2\times3\times4}{6}-\frac{1\times2\times3}{6},$$

$$\frac{3\times4}{2}=\frac{3\times4\times5}{6}-\frac{2\times3\times4}{6},$$

*　　*　　*

*　　*　　*

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}-\frac{(n-2)(n-1)n}{6}.$$

將此所有的各式之左面及右面各加起來，左面則之總卽是前式內之擬形數，而其右面則因加號的項與減的號項適相消，故祇存一項，卽 $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$. 於是我們得：

$$\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\cdots+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

將此擬形數之值代入前所得第二次算術級數之總和式內，則得：

$$S_2=\frac{an(n+1)}{2}+d\frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

仍仿前，我們倘於此第二次算術級數之總和式內之 n 處，依次以 1,2,3,4……n 等數目代入，則又復得一算術級數：

$$a\frac{1\times2}{2}+0,\ a\frac{2\times3}{2}+d\frac{1\times2\times3}{6}$$

$$a\frac{3\times4}{2}+d\frac{2\times3\times4}{6},\ a\frac{4\times5}{2}+$$

$$d\frac{3\times4\times5}{6},\ \cdots\cdots\cdots\ a\frac{n(n+1)}{2}+$$

$$d\frac{(n-1)n(n+1)}{6};$$

此卽謂之第三次算術級數 我們倘以 S_3 代此第三次算術級數之總和，則不難明白

$$S_3=a\left(\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\frac{4\times5}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$+d\left(\frac{1\times2\times3}{6}+\frac{2\times3\times4}{6}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}\right).$$

這裏，a 下括弧內之數目，及 d 下括弧內之數目，均是擬形數. 由前，我們知：

$$\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\cdots+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6};$$

但 a 下括弧內之擬形數尚多 $\frac{n(n+1)}{2}$ 一項，自須并計入，因此，我們將其加於兩面：

$$\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\cdots+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$+\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)\left(\frac{n-1}{6}+\frac{1}{2}\right)=n(n+1)\times$$

$$\frac{2n-2+6}{12}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

此卽是 a 下括弧內擬形數之值.

至 d 下括弧內之擬形數，可仍仿前法計算之. 我們於此先得此式：

$$b(b+1)(b+2)(b+3)-(b-1)b(b+1)$$

$$(b+2)=b(b+1)(b+2)4,$$

由此便得：

$$\frac{b(b+1)(b+2)}{6}=\frac{b(b+1)(b+2)(b+3)}{24}$$

$$-\frac{(b-1)b(b+1)(b+2)}{24},$$

再於此內之 b 處仍依次代入 $1,2,3,4\cdots n$ 等各數目，并仍按前法加此所得各式而相消其右面，則得：

$$\frac{1\times2\times3}{6}+\frac{2\times3\times4}{6}+\frac{3\times4-5}{6}+\cdots+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}$$

爲 d 下括弧內擬形數之值. 將此二值代入前式,則卽得第三次算術級數之總和式如下:

$$S_3=\frac{an(n+1)(n+2)}{6}+\frac{d(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}$$

我們試將此第一次, 第二次及第三次各算術級數之總和式比較一觀, 則知其形恰遵一定規律而成的; 爲明晰起見, 再稍爲改化之, 而列於下:

$$S_1=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}=\frac{an}{1}+\frac{d(n-1)n}{1\times2};$$

$$S_2=\frac{an(n+1)}{2}+\frac{d(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{an(n+1)}{1\times2}+\frac{d(n-1)n(n+1)}{1\times2\times3};$$

$$S_3=\frac{an(n+1)(n+2)}{6}+\frac{d(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}$$

$$=\frac{an(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}+\frac{d(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3\times4}.$$

從這裏, 已不難推得第四次算術級數之總和式當如下:

$$S_4=\frac{an(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}+$$

$$d\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4\times5}.$$

我們現在再一論此項次數較高的算術級數中之有幾種特殊的算術級數. 如我們前面已知道過, 第二次算術級數之各項, 是將第一次算術級數之總和式中之 n 依次代以 1,2,3 ……等數目而得的. 今設此第一次算術級數之總和式中之 $a=1$, $d=2$, 則此總和式即作: $S_1=n^2$. 於此, 我們仍於 n 處依此代入 $1,2,3\cdots\cdots n$ 等各數目, 則得一極可注意的第二次算術級數, 其各項如下:

$$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\cdots\cdots n^2.$$

此級數之總和按照前所得公式 (其 a 處代以 1, d 處代以 2) 自然是:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)}{2}+2\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

又, 倘我們設第二次級數總和式內之 $a=0$, $d=6$, 則此總和式即作: $S_2=n^3-n$. 試仍於 n 處代入 $1,2,3\cdots n$ 等各數目, 則又復得一可注意的第三次算術級數:

$$1^3-1,\ 2^3-2,\ 3^3-3,\ 4^3-4\cdots\cdots n^3-n,$$

其總和爲：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3-(1+2+3+\cdots+n)$.

但減號下括弧中之數目，其總爲 $\frac{n(n+1)}{2}$，故此級數之總和爲：$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3-\frac{n(n+1)}{2}$.

一方面我們又自前面公式（將其中 $a=0,\ d=6$）知道此級數之總當爲：$\frac{6(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}$，因知此二者必相等的，即：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3-\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$\frac{6(n-1)n(n+1)(n+2)}{24};$$

由此，可得：

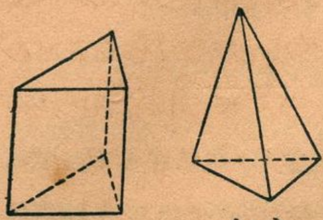
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n(n+1)}{2}+$$

$$\frac{6(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

仿此，倘使第三次級數總和式內之 $a=6,\ d=24$，仍可得一由 1,2,3… 等各數目之四次方所成的級數，而其總和爲則：

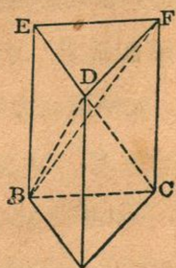
$$1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

21. 立體幾何學上之重要概念　從前已會將平面幾何學上幾個重要概念略略說過，現在不能不亦將立體幾何學上幾個重要的概念提出來略說一下．所謂立體者自然是對乎平面而言，即是於長及寬二度外，兼有厚這一度者；故立體形是三度的．立體形之最簡單者，爲正立方體，即長，寬及厚均等，其諸面亦均爲正方形的立方體．此種正立方體之體積（按計體形之體積用立方尺，立方寸等等）等於其一邊之三次方；例如其一邊之長爲 l，則其體積即爲 l^3；因我們知道凡立方體之體積等於長乘寬乘厚，此種正立方體既長寬厚均等，故即爲其一邊之自乘至三次方．立方體之長寬厚不等，或其面不均爲正方形者，可統稱之爲平行方體．由五個面所合成，其中二個面爲平行的三角形，三個面爲方形的立體，如下圖中之（甲），謂之三稜柱體．將一個多邊形爲底面，於其各邊上斜倚諸三角形，其頂尖均聚於一點，則得一個稜錐體；圖中之（乙）乃是一最簡單的稜錐體，其底面亦是一三角形，有



第十七圖

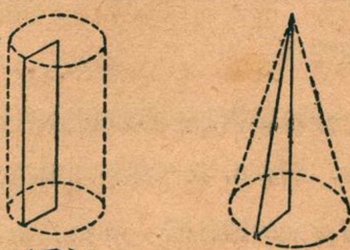
三個三角形斜倚於其各邊上,頂尖則聚於一點:此種稜錐體謂之三角稜錐體.三稜柱體之體積,極易知道是等於底面乘高. 至此種三角稜錐體之體積,與三稜體之體積間有何一定關係,我們可用下法求得:試將一三稜柱體,如第十八圖先照 CD, DB 虛線截切,則得一三角稜錐體 $CABD$,又將所餘者照 BF 虛線自 D 點切為二,則又得兩三角稜錐體,為 $DFEB$ 及 $CFDB$. 如是,原來的三稜柱體切成為三個三角稜錐體了. 照圖上,已可見 $CABD$ 與 $DFEB$ 兩稜錐體其底面是等的,其高亦相等(因 CAB 底等於 DFE 底,而 AD 高亦等於 EB 高),因之,此兩稜錐體之體積必相等;而他方面亦可見 $DFEB$ 之 FEB 底面與 $CFDB$ 之 CFB 底面相等,且同以自 D 至 FB 虛線之垂線為高,因之,此



第十八圖

二稜錐體之體積亦必相等. 由此可知我們已將原來的三稜體切成爲三個體積相等的三角稜錐體了. 但此原來的三稜柱體之體積等於底面乘高, 故所切成的三角稜錐體之體積, 必等於其三分之一; 換言之, 三角稜錐體之積, 等於其其底乘高三分之一. 其實再細一想, 即可知不獨三角稜錐體之體積如此, 凡一切稜錐體不論其底面爲多少邊形, 其體積均是底面乘高三分之一; 蓋凡多邊形均可割爲幾個三角形, 故一切由多邊形爲底所成的稜錐體, 亦均可切成爲幾個三角稜錐形而計算之. 又, 知此, 則知前面所說三稜柱體之體積等於底面乘高, 亦可推廣至於一切稜柱體, 即凡稜柱體之體積均等於底面乘其高,

我們試將一長方形, 執其邊爲軸而旋轉一周, 則得一立體, 謂之圓柱體, 如第十九圖之(甲)是. 設使將一勾股形, 執其股爲軸旋轉一周, 則所得者如圖中之(乙). 爲一圓錐體. 圓柱體我們可視之爲一稜數無窮多的稜柱體, 其體積等於底面乘其高. 圓錐體

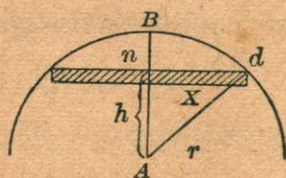


(甲) (乙)

第十九圖

則可視爲一稜數無窮多的稜錐體，因之，其體積等於底面乘高三分之一. 又，設使我們將一半圓，執其徑而旋轉一周，則所得者卽是一球體. 球體之居中一點爲球心，其離球面上各點均等：此自球心至球面之直線，卽球之半徑. 我們現在設想將此球面還劃成爲 n 個極小的多邊形，而以半徑將各多邊形之角與球心連，則此球卽不啻分成爲 n 個底面極小的稜錐體，均以球之半徑爲高. 今設此項所劃成的小多邊形其面積各爲 f，此球之半徑爲 r，則此種底面極小的稜錐體其體積每個均是 $\frac{fr}{3}$. 此球體既可視爲 n 個小稜錐體所合成，故其體積卽等於 $\frac{nfr}{3}$，但 n 個 f 卽是球面之面積，故我們可知球體之體積是等於其面乘半徑三分之一. 倘用 S 代球之面，則可得球之體積爲 $\frac{r}{3}S$.

一方面我們又可設想將半個球平行的切成爲 n 個圓片，各厚 d，我們幷視此項圓片爲極短的圓柱體. 如第二十圖所示，爲此項極短的圓柱體之一，其底面之半徑爲 X. 由圖



第二十圖

可見 $X^2=r^2-h^2$. 但我們又極易看出，此項圓柱體底面之大不一致，卽底面之半徑其長不一，其距 A 點愈遠者愈小，愈近者愈大. 如圖距 A 爲 h 者，半徑等於 r^2-h^2，則可知其最下一圓柱體，其底面之半徑卽等於 r^2-d^2，在最下的上面一圓柱體，其半徑爲 $r^2-(2d)^2$，再上面一個爲 $r^2-(3d)^2$，其餘均可以照此類推. 分別寫出如:

$$X_1{}^2=r^2-d^2,\ X_2{}^2=r^2-(2d)^2,$$

$$X_3{}^2=r^2-(3d)^2,\ X_4{}^2=r^2-(4d)^2,\cdots\cdots$$

有了半徑，我們可以得到各圓柱體之體積如下:

$$\pi X_1{}^2d=\pi r^2d-\pi d^3,$$

$$\pi X_2{}^2d=\pi r^2d-\pi 2^2d^2,$$

$$\pi X_3{}^2d=\pi r^2d-\pi 3^2d^3,$$

等等; 乃至於上面第 n 個者爲:

$$\pi X_n{}^2d=\pi r^2d-\pi n^2d^3.$$

這 n 個圓柱體積之總，自然卽等於此半球之體積; 我們倘以 $\frac{V}{2}$ 代此半~~徑~~球之體積，則得:

$$\frac{V}{2}=n\pi r^2d-\pi d^3(1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2)$$

$$=n\pi r^2d-\pi d^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=n\pi r^2d-\pi d^3\frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

但因 $r=nd$, 故得:

$$\frac{V}{2}=\pi r^3-\frac{\pi r^3}{3}-\frac{\pi r^2}{2}d-\frac{\pi r}{6}d^2.$$

這裏, 倘使 d 爲無限小, 卽圓柱體之厚爲無限小, 則我們可將此式右面之末二項帶有 d 的分數簡單棄去不算入, 因 d 旣爲無限小, 卽幾於零, 故卽棄去所差亦極微. 於是我們簡單得半球之體積爲:

$$\frac{V}{2}=\pi r^3-\frac{\pi r^3}{3}=\frac{2}{3}\pi r^3;$$

或全球之體積爲:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

卽是半徑之三次方乘 π 三分之四.

但我們以前已曾得球之體積爲 $\frac{r}{3}S$, 今又得此值, 於是我們可將此二者相等起來:

$$\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{r}{3}S,$$

由此, 便得:

$$S=\frac{3}{r}\,\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi r^2;$$

此即是說，球之面積等於 π 乘半徑之方之四倍.

22. 組合及二項式定理　設如有 n 個字母 $a, b, c, d, \cdots$ 我們欲將其每兩個相拼成為一項，不許有重複出現，則共可得幾多項呢? 這裏，我們先將 a 與其他諸字母相拼合，則得 $n-1$ 項；次將 b 除去 a 外 (因 a 與 b 已拼合過) 與其他諸字母相拼合，則得 $n-2$ 項，因旣除去 a，則比較 a 與其他諸字母之拼合自不能不少一項；將 c 與其他諸字母拼合時必得 $n-3$ 項；如是下去到最後必祇有一項.

我們倘將此各字母與其他字母相拼合所得項數總起來，即得:

$$n-1+n-2+n-3+\cdots+1,$$

為所欲求之項數. 但這所得者，若將其倒列之，為一算術級數，首項是 1，末項是 $n-1$，項數有 $n-1$；因此，照前面第 20 節內總和公式

$$S=\frac{n(a+l)}{2},$$

其總和為 $S=\dfrac{(n-1)(n-1+1)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2},$

即我們所求 n 個字每兩個相拚合不許有複現所可得之項數. 欲證其是否無誤, 可設 $n=4$, 則按式得 $S=6$. 今試將 a, b, c, d 四字母相拚合不許有重複, 則可得 ab, ac, ad, bc, bd, cd 六項, 因知此式無誤.

倘將此 n 個字母每三個相拚合, 不許有重複, 則所得項數仍按前法計算之爲:

$$S=\frac{(n-2)(n-1)n}{2\times 3},$$

欲證其是否, 可隨便設 $n=6$, 則照式可得 20 項; 今試將 a, b, c, d, e, f 六字母每三個相拚合, 不許有重複, 則恰得 20 項, 是知此式可用.

仿此, 倘將 n 個字母每四個相拚合, 則所得項數爲:

$$S=\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{2\times 3\times 4};$$

其餘均可照此公式類推. 通常, 我們名兩個字母的相拚合, 謂之第二類的組合; 三個字母的, 謂之第三類的組合, 等等. 以下我們卽應用這裏所得原理, 以得一極重要的定理.

今設將 $(x+a), (x+b), (x+c), (x+d)$ 四個二項式相乘, 則得:

$$x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$
$$+(abc+abd+bcd+acd)x-abcd.$$

這裏，可見其第二項 x^3 之係數，卽爲原來四個二項式內所有之 a, b, c, d 四字母相加而成；其第三項 x^2 之係數，則卽此四字母之第二類組合相加而成；第四項 x 之係數；乃是其第三類組合之相加；至第五項則 x 之指數已爲 0，故卽等於一，而其係數則爲此四字母之第四類組合． 我們於此已不難找出諸二項式相乘所得乘積構造之規則；因此，可卽推得，倘有 n 個二項式 $(x+a)$,$(x+b)$, $(x+c)$ ……，……相乘，則必得：

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots=x^n+(a+b+c+\cdots\cdots)x^{n-1}$$
$$+(ab+ac+\cdots\cdots)x^{n-2}+\cdots\cdots+abc\cdots\cdots(1)$$

此式 (1) 內第二項 x^{n-1} 之係數必恰有 n 項；第三項 x^{n-2} 之係數，照以前 n 個字母第二類組合之公式，必有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 項；第四項 x^{n-3} 之係數，則按前第三類組合之公式，必有 $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}$ 項；餘者可照此類推． 今設(1)內之 b, c，等等諸數目均等於 a：$b=a, c=a,\cdots$ 等等；則此式卽成爲 $(x+a)$ 之自乘至 n 次方；因得：

$$(x+a)^n = x^n + (a+a+a+\cdots\cdots)x^{n-1} + (a^{2-1}+a^2+a^2+\cdots$$

$$\cdots)x^{n-2} + (a^3+a^3+a^3+\cdots\cdots)x^{n-3} + \cdots\cdots + a^n.$$

於此，係數之項數自與前 (1) 內者同，不過前之第二類組合，今則代以 a^2，前之第三類組合，今則代以 a^3，等等. 因之，我們知這裏 x^{n-1} 之係數爲 n 個 a 所成，即 na; x^{n-2} 之係數，則爲 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個 a^2，即 $\frac{n(n-1)}{2}a^2$; 餘以此類推. 於是我們可將前式改寫作:

$$(x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}a^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3}x^{n-3}a^3 + \cdots\cdots + a^n \qquad (2)$$

但此式內無論 x 及 a 之數是什麼均合理，故此式乃是二項式自乘之公式. 關於此公式內 x 及 a 之指數與各項之係數等之一定的規律，即是所謂二項式定理，用話說來如下：凡二項式自乘至若干次方，則所得者:(一)第一項獨有此數，末項獨有彼數，中間各項均二數兼而有之;(二)第一項此數之指數及末項彼數之指數與所乘至之方次等，自第二項起此數之指數遞減，彼數之指數遞增，每項減一

及加一;（三）係數則第一項爲 1, 第二項與所乘至之次數等, 以後則爲照次數多少所有不同字母之各類組合之項數;（四）所自乘之二項式若作 $x+a$ 式, 則所得之各項均爲正, 若作 $x-a$ 式, 則所得各項正負相間;（五）所得項數較所方至之項數多 1, 如方至 n 次, 則有 $n+1$ 項.

23. 納氏對數底 e 之算法　照前節二項式之公式 (2), 我們可得:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+n\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{x^2}{n^2}+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}\frac{x^3}{n^3}+\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2n}+\frac{n^3-3n^2+2n}{2\times3}$$

$$\frac{x^3}{n^3}+\cdots\cdots=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2n}$$

$$+\frac{x^3}{2\times3}-\frac{3x^3}{2\times3n}+\frac{2x^3}{2\times3n^2}+\cdots,$$

倘使 n 爲極大的數目, 則所得式內凡帶有 n 爲分母之各分數式, 其值必極小, 簡直可略去不計, 於是我們得:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\times3}+\frac{x^4}{2\times3\times4}+\cdots\cdots \qquad (1).$$

又，仍用前節公式 (2) 幷可得下式：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{1\times 2}\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{n^2x^2}{2n^2}-\frac{nx}{2n^2}$$

$$+\frac{n^3x^3}{2\times 3n^3}-\frac{3n^2x^2}{2\times 3n^3}+\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2n}+\frac{x^3}{2\times 3}$$

$$-\frac{3x^2}{2\times 3n}+\cdots\cdots$$

仍如前，倘 n 爲極大之數目，我們可將式內凡帶有 n 爲分母之各分數式均略去不計，則得：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\times 3}\cdots+\cdots \qquad (2)$$

將這裏所得與上面所得者相比較，可知其完全相同；因此，知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \qquad (3);$$

倘 $x=1$，則 (3) 即成爲

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

了，而(1)及(2)兩級數，則同成爲

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots\cdots$$

我們現在卽取此級數之前十項計算，照其分數式算成爲小數相加起來，則得一數目爲 2,71828 ⋯⋯此數目，通常我們用字母 e 代之，卽:

$$e=2,71828\cdots\cdots$$

今設將 e 自乘至 x 次，則得 e^x; 又將 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 亦自乘至 x 次，則得 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$; 但照前式(3)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

故

$$e^x=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

這裏所可注意的在此: x 於 e 爲指數，於其他一面則爲分數式之分子: 因此，倘用此數目 e 爲前面所說過的對數之底，則當大爲便利. 此種道理，爲十六七世紀時數學家納伯(*Neper*)氏首先發見，故卽名 e 爲納氏對數底. 又以別於其他對數，凡用此數目 e 爲底的對數，名爲自然對數，而其簡寫則不作 log 而作 ln (用自然對數拉丁文名

Logarithmus Naturalis 二字之開首字母而成). 事實上，高等數學中所用的對數大都是此；我們以後亦時常要用到他.

24. 對數級數及對數率 今設

$$e^x=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=a,$$

則
$$x=n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right);$$

但一方面我們可使 a 寫作 $(a-1)+1$, 倘我們卽用此寫法, 則 $a^{\frac{1}{n}}$ 卽可改寫作 $[(a-1)+1]^{\frac{1}{n}}$, 而可照二項式公式將其展開之:

$$a^{\frac{1}{n}}=[(a-1)+1]^{\frac{1}{n}}=[1+(a-1)]^{\frac{1}{n}}$$

$$=1+\frac{1}{n}(a-1)+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}(a-1)^2$$

$$+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2\times 3}(a-1)^3+\cdots\cdots$$

我們現在卽將此所得者代入原方程內之 $a^{\frac{1}{n}}$ 處, 則可得 x 之值:

$$x=n\left[1+\frac{1}{n}(a-1)+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}(a-1)^2+\cdots\cdots-1\right]$$

這裏,可見其右面之首項是 1,而其末項爲 -1,此二項自然適相消,故得:

$$x=a-1+\frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}(a-1)^2+\frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2\times 3}(a-1)^3+\cdots\cdots$$

倘我們於此仍將$\frac{1}{n}$這分數式一齊均略去,則

$$x=a-1-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{2}{2\times 3}(a-1)^3-\frac{2\times 3}{2\times 3\times 4}(a-1)^4+\cdots$$

$$=a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots\cdots$$

以前我們所設是 $e^x=a$,故 a 之自然對數,卽爲 $x \cdot x=\ln a$;於是我們得:

$$\ln a=a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots\cdots$$

此卽是說:a 之自然對數,乃是一級數;此級數卽謂之對數級數.

仿此,倘使 $a=1+b$,則自然得:

$$\ln(1+b)=b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\cdots\cdots$$

要是求 $1-b$ 之自然對數，則有：

$$\ln(1-b)=-b-\frac{b^2}{2}-\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}-\cdots\cdots$$

或 $$-\ln(1-b)=b+\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}+\frac{b^4}{4}+\cdots\cdots$$

我們現在可將 $\ln(1+b)$ 與 $-\ln(1-b)$ 相加：

$$\ln(1+b)-\ln(1-b)=\ln\frac{1+b}{1-b}$$

$$=2\left(b+\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}+\cdots\cdots\right)$$

卽得此式，卽能極便利的用之以計算任何數目之自然對數：例如我們要求 3 之自然對數，則祗須設法給 b 以相當之數目，使 $\frac{1+b}{1-b}$ 等於 3，一方面卽以此 b 之值代入級數內，化成小數相加起來卽得．今使 $\frac{1+b}{1-b}=3$，則按代數規律，b 之值可算得是 $\frac{1}{2}$；卽以此代入級數內，則得：

$$\ln 3=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{5\times 32}+\cdots\cdots\right)$$

$$=2(0.5+0.04166+0.00625+\cdots\cdots)$$

$$=1.09\cdots\cdots$$

於前面第 19 節內，已曾略略說過些用任何數目爲底

的對數的道理；這裏並將使讀者知道，無論以任何數目爲底的對數，均可化之爲自然對數. 通常所用的對數，以 10 爲底，我們現在卽以此爲例，將以 10 爲底的對數化之爲以 e 爲底的自然對數. 設如

$$a=10^y,\quad a=e^x,$$

卽，a 爲一方數，以 10 爲底時，其指數是 y，以 e 爲底，則指數爲 x. 我們倘以 log 表以 10 爲底之對數，而仍以 ln 表以 e 爲底之自然對數，則由前二式，得：

$$\log a=y,\quad \ln a=x.$$

但

$$10^y=e^x,$$

試將此式之左右兩面均化之爲自然對數時，按 19 節內說過的理，可得：

$$y\ln 10=x,$$

或將前面 y 及 x 之值代入：

$$\log a\ln 10=\ln a:$$

由此，故知

$$\log a=\frac{\ln a}{\ln 10}.$$

此卽是：將 $\log a$ 化爲自然對數時，所得者乃是以 10 之自然對數除 a 之自然對數之得數.

10之自然對數,倘用前述之法求之,可得其值爲 2.30285……;因此

$$\log a = \frac{\ln a}{2.302585\cdots\cdots}$$

這裏,自然無論 a 是什麼數目均可用,故我們倘要將以10爲底之某數目之對數,化爲此數目之自然對數時,祇要用 2.302585……除此數目之自然對數,或用 $\frac{1}{2.302585\cdots}$ 乘此數目之自然對數亦可. 更便利的方法,是將此 2.302585…之倒數 $\frac{1}{2.302585\cdots\cdots}$,算成爲小數 0.43429…,以後用時祇須將此小數與某數之自然對數乘便得;此小數卽謂之對數率.

又,設使 $a^y=e^x$, 則可得 $y\ln a=x$;今將此 x 之值代入 e 之指數處,卽得 $a^y=e^{y\ln a}$. 但因

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\times 3}+\cdots\cdots$$

故

$$a^y=e^{y\ln a}=1+y\ln a+\frac{(y\ln a)^2}{2}+\frac{(y\ln a)^3}{2\times 3}+\cdots$$

由此可知任何一方數,均可用對數級數之法化之成爲一級數.

25. sinus 及 cosinus 之級數 按前面第十三節內

所說理, 知兩數相乘, 號同則爲正, 號異則爲負; 又, 一數之自乘亦然, 如 $(-c)(-c)=c^2$, 與 $cc=c^2$ 完全相同. 因此, 我們求 c^2 之方根時,所得者必有二根, 即$\sqrt{c^2}=\pm c$, 因 $+c$ 及 $-c$ 自乘均得 c^2. 緣此道理, 可知我們倘要求 $(-c^2)$ 之方根時, 必要遇困難, 蓋無論 $+c$ 或 $(-c)$ 自乘時所得者均是 $+c^2$, 沒有這數目, 自乘後得一負的方數者; 此種數謂之幻數. 但數學上此種幻數遇到極多, 因此, 不能不想個方法計算之. 我們以前已知道 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, 一方面又知 $(-1)(c^2)=-c^2$; 故通常計算此種幻數時, 是如此辦: 例如我們要求 $(-c^2)$ 之根, 即 $\sqrt{-c^2}$, 則將 $(-c^2)$ 化成 $(-1)c^2$ 而求之, 如是: $\sqrt{-c^2}=\sqrt{c^2}\sqrt{-1}=c\sqrt{-1}$ 這裏所得與 c 相乘的一數 $\sqrt{-1}$, 自然仍是一幻數; 普通我們用一字母 i 代之, 即 $\sqrt{-1}=i$. 以後我們凡遇一數目被此 i 乘時, 即知此是一幻數.

今將 i 乘 $\sin\alpha$, 則得 $i\sin\alpha$; 即以此與 $\cos\alpha$ 相加而方之:

$$
\begin{aligned}
(i\sin\alpha+\cos\alpha)^2 &= i^2\sin^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha \\
&= -\sin^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha \\
&= i\sin 2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\
&= i\sin 2\alpha+\cos 2\alpha.
\end{aligned}
$$

$\cos 3\alpha = 4\cos\ldots$
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(按 $i=\sqrt{-1}$, 故 $i^2=-1$; 因此 $i^2\sin^2\alpha=-\sin^2\alpha$) 同樣, 幷可得:

$$
\begin{aligned}
(i\sin\alpha+\cos\alpha)^3 &= i^3\sin^3\alpha+3i^2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&\quad +3i\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^3\alpha \\
&= -i\sin^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&\quad +3i\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^3\alpha.
\end{aligned}
$$

$3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) = 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha$

但按三角學原理計算, $3i\sin\alpha\cos^2\alpha-i\sin^3\alpha=i\sin 3\alpha$;

而 $$\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos 3\alpha,$$

故 $$(i\sin\alpha+\cos\alpha)^3=i\sin 3\alpha+\cos 3\alpha.$$

仿此, 可證明任何方數, 均合此理, 故得公式如下:

$$(i\sin\alpha+\cos\alpha)^n=i\sin n\alpha+\cos n\alpha$$

此式由數學家 Moivre 氏發見故, 卽名莫氏二項公式.

這莫氏二項式之左面, 乃是 $i\sin\alpha+\cos\alpha$ 之方數; 倘照二項式定理將他計算出來, 則得:

$$
\begin{aligned}
(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n &= i\sin n\alpha+\cos n\alpha \\
&= \cos^n\alpha+n\cos^{n-1}\alpha i\sin\alpha \\
&\quad +\frac{(n-)1}{2}\cos^{n-2}\alpha i^2\sin^2\alpha+\cdots
\end{aligned}
$$

$n(n-1)$

$\cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$
$-3\cos\alpha+3\cos^3\alpha$

到這裏, 我們不能不有幾句話先要說明一下. 原來角度的量法, 普通有兩個標準: 一是用度數計算, 如第一章第五節中所說過的; 其一則直接用圓周之弧爲標準. 例如

一直角，以度數爲標準準而言，我們可說是一90度的角；倘以弧爲標準而言，則可說是一有圓周四分一之的弧的角(參觀第一章第五節中之第二圖). 這裏所用的標準，乃是後者；因此，α 須把他看作是一段弧.我們現在可設想此 α 爲一段極小幾於零的弧，則以此弧爲度的角自亦必極小幾於零，而其 sin 亦極小幾於零了；所以在這裏，α 爲極小時，我們簡直可視 α 弧與以 α 弧爲度的角之 sin 爲相等者，卽：$\sin\alpha=\alpha$. 他方面，自然倘 α 極小時，$\cos\alpha=1$. 本此假定，我們可將適纔所得式中之 $\sin\alpha$ 悉改爲 α，而 $\cos\alpha$ 則改爲 1；於是可得：

$$i\sin n\alpha+\cos n\alpha=1+in\alpha+i^2\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\cdots\cdots$$

$$=1+in\alpha-\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2-i\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}\alpha^3+\cdots\cdots$$

這裏，凡有 i 的各項，均是幻數. 但我們稍一想卽不難明白，凡幻數祇能與幻數相等，決不能與不幻的實數等，故此式可照其幻數及實數之項分成爲兩式；其一是幻數所成：

$$i\sin n\alpha=in\alpha-i\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}\alpha^3+\cdots\cdots$$

而其實數所成的，則作：

$$\cos n\alpha = 1 - \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3\times4}\alpha^4 - \cdots\cdots$$

今可設 $n\alpha=\beta$, 則第一式卽成爲:

$$i\sin\beta = i\beta - i\frac{(n^3-3n^2+2n)\alpha^3}{2\times3} + \cdots\cdots$$

$$= i\beta - i\frac{\beta^3-3\beta^2\alpha+2\beta\alpha^2}{2\times3} + \cdots\cdots$$

但 α 本來設定爲極小的數, 因此, 式內凡帶有 α 的項均可略去不得,於是卽得:

$$i\sin\beta = i\beta - \frac{i\beta^3}{2\times3} + \cdots\cdots$$

試用 i 將此式左右兩面均除之, 則得:

$$\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{2\times3} + \frac{\beta^5}{2\times3\times4\times5} - \cdots\cdots$$

由此可知 $\sin\beta$ 可化成爲一級數; 此級數卽謂之 sinus 級數.

仿此, 幷可得 cosinus 之級數如下:

$$\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{2\times3\times4} - \cdots\cdots$$

通常, 將 1 爲開始與以後其他諸數相乘, 如 1×2, $1\times2\times3$, $1\times2\times3\times4\times5$ 等等, 我們有個特別的符號給他, 作!, 例如 $1\times2\times3\times4$ 可寫作 $4!$, $1\times2\times3\times4\times5\times6$ 則可寫作

6! 如是：

$$\sin\beta=\beta-\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\beta^5}{5!}-\cdots\cdots,$$

$$\cos\beta=1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\cdots\cdots.$$

今試將 $\cos\beta$ 與 $i\sin\beta$ 相加，并將其級數亦加起來，則得：

$$\cos\beta+i\sin\beta=1+i\beta-\frac{\beta^2}{2!}-\frac{i\beta^3}{3!}+\frac{\beta^4}{4!}+\cdots\cdots$$

一方面，我們已知

$$\epsilon^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

這裏，倘設 $x=i\beta$，自然得

$$e^{i\beta}=1+i\beta+\frac{i^2\beta^2}{2!}+\frac{i^3\beta^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$=1+i\beta-\frac{\beta^2}{2!}-\frac{i\beta^3}{3!}+\cdots\cdots$$

由此，我們知道：

$$e^{i\beta}=\cos\beta+i\sin\beta.$$

此式首爲數學家歐拉 (Euler) 所得，故名歐氏公式.

倘將此歐氏公式之兩面均改爲倒數，則得：

$$\frac{1}{e^{i\beta}}=e^{-i\beta}=\frac{1}{\cos\beta+i\sin\beta}.$$

一分數式之分子分母同被某數乘時，其值不變，故我們可用 $\cos\beta-i\sin\beta$ 將此式右面分數式之母子均乘之：

$$e^{-i\beta}=\frac{\cos\beta-i\sin\beta}{\cos^2\beta-i^2\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\cos\beta-i\sin\beta}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}$$

$$=\cos\beta-i\sin\beta.$$

即將 $e^{i\beta}$ 與 $e^{-i\beta}$ 之值相加，則有：

$$e^{i\beta}+e^{-i\beta}=2\cos\beta;\ 或\ \cos\beta=\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}$$

若自 $e^{i\beta}$減去$e^{-i\beta}$，可得：

$$e^{i\beta}-e^{-i\beta}=2i\sin\beta:\ 或\ \sin\beta=\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i},$$

又如用 $e^{-i\beta}$ 除 $e^{i\beta}$，則：

$$\frac{e^{i\beta}}{e^{-i\beta}}=e^{i\beta-(-i\beta)}=e^{2i\beta}=\frac{\cos\beta+i\sin\beta}{\cos\beta-i\sin\beta}$$

試用 $\cos\beta$ 將此分數式之母子均除之：

$$e^{2i\beta}=\frac{1+i\operatorname{tg}\beta}{1-i\operatorname{tg}\beta}$$

若將此式之左右面均化為自然對數，即得：

$$2i\beta=\ln\frac{1+i\operatorname{tg}\beta}{1-i\operatorname{tg}\beta}.$$

由此,故

$$\underbrace{\beta=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+i\operatorname{tg}\beta}{1-i\operatorname{tg}\beta}}.$$

但以前我們曾得:

$$\underbrace{\ln\frac{1+b}{1-b}=2\left(b+\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^7}{7}+\cdots\right)},$$

這裏倘設 $b=i\operatorname{tg}\beta$, 則前式即可化作:

$$\beta=\frac{1}{2i}2\left(i\operatorname{tg}\beta+\frac{i^3\operatorname{tg}^3\beta}{3}+\frac{i^5\operatorname{tg}^5\beta}{5}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{i}\left(i\operatorname{tg}\beta-\frac{i\operatorname{tg}^3\beta}{3}+\frac{i\operatorname{tg}^5\beta}{5}-\cdots\cdots\right)$$

$$=\operatorname{tg}\beta-\frac{\operatorname{tg}^3\beta}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5\beta}{5}-\frac{\operatorname{tg}^7\beta}{7}+\cdots\cdots$$

若 $\beta=\frac{\pi}{4}$, 則此式卽作:

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{4}}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{4}}{5}-\cdots$$

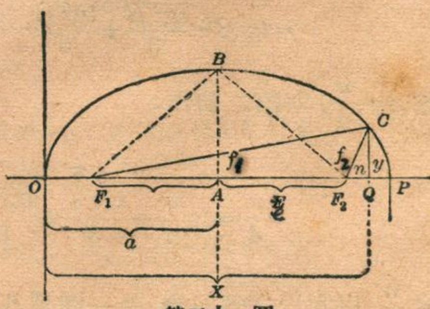
但 $\frac{\pi}{4}$ 以圓周之弧而論,是一圓周八分之一;若以角度而論,一圓周等於四直角,其八分之一卽是半個直角 $\frac{R}{2}$;故 $\frac{\pi}{2}=\frac{R}{2}$. 由第十八節公式 (19), 知 $\operatorname{tg}\frac{R}{2}=1$, 故 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$.

卽將此值代入級數內,得:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

此級數爲數學家幷哲學家萊伯尼茲 (Leibniz) 所得,故名萊氏級數. 用此級數,可算得 π 之值,卽圓周率,與我們第十七節中所得者無異;不過須用極多的項數纔行,若所用項數愈少,則愈不準確.

26. 解析幾何學之端倪 試將一條線先放寬些將其兩端均黏牢,然後用一筆尖挑緊之,自右至左或自左至右移動,則所畫成者乃是一橢圓;如第二十一圖所示,F_1 及 F_2 爲線之黏牢的兩端,此線於 C 點挑緊後卽折爲兩段,一段較長爲 f_1,一段較短爲 f_2;若依 C 點向左移動,



第二十一圖

則 f_2 漸長,f_1 漸短;至 B 點時 f_1 及 f_2 等長,過此以往,則 f_1 較 f_2 爲短了. 同時可見由 C 點移動所畫成的曲線乃是一橢圓之半. 橢圓旣是如此作成,故可知在橢圓這曲線上之無論那一點,作兩直線一至 F_1 點一至 F_2 點,此兩

線之和，其值終不變；這是橢圓所有的一種特色．F_1 及 F_2 兩點，名爲焦點；O 及 P 兩點則謂之頂點，其離 F_1 及 F_2 兩焦點，自然是等遠的；即 $F_2P=F_1O$．自 O 至 P 之距離名爲此橢圓之大軸，其長爲 $OP=F_1F_2+2OF_1$，與原線之長等．自橢圓之中點 B 至大軸作垂線 BA，即名爲此橢圓之小軸；A 點亦適在大軸之中．一方面我們又於橢圓之左面頂點 O 處作一垂線，與大軸相交於頂點 O．我們現在可隨便於橢圓曲線上取一點，如圖中之 C 點，自此作一垂線至大軸，與之相遇於 Q 點．并名 CQ 之長爲 y，而自 Q 至 O 之長則爲 x．這裏，我們又須引入一新觀念了．適纔我們於頂點 O 所作的垂線并與大軸合併的橫線，這一縱一橫的兩直線，我們名之爲此橢圓曲線之坐標，縱者名縱坐標，橫者則名橫坐標（按這裏橫坐標與大軸相合，在他處不必如此，可分開爲二；又我們亦可使縱坐標與小軸相合併）．坐標的意義，是說我們論此曲線上各點時，其距離之遠近及相互間之距離，均以其與此縱橫兩直線之距離之遠近爲標準．此兩坐標相交之處，如 O 點，謂之坐標之起點；凡計曲線上某點距離之遠近，均以此起點爲開始．如是，我們前面所舉的橢圓曲線上之 C 點，

就其在橫坐標上而言，其距離起點 O 爲 x，因此 C 點至橫坐標上之垂線與橫坐標相遇於 Q，而我們已命 QO 之距離爲 x，卽是 C 點在橫坐標上其距離爲 x. 照此，我們以後凡說某點之橫坐標爲多少時，所指卽是此點至橫坐標之垂線與橫坐標相遇於某處，卽由此至坐標之起點之距離. 說某點之縱坐標爲多少時，亦卽是此點至縱坐標之垂線與縱坐標相遇處至起點之距離；如是，C 點之縱坐標爲 y. 這坐標的觀念最爲重要. 以後高等數學中時常用他的，讀者須時時將他放在心目中纔是.

C 點之坐標旣定，我們現在可研究此點之坐標與原來之線長，以及此橢圓大軸中點 A 與 F_1 或 F_2 之距離間有何一定的關係存在. 此橢圓大軸之中心點 A 至 F_1 或 F_2 之距離，謂之此橢圓之離心率，我們以 e 代之. 今設此原來之線長 $2a$，則 $f_1+f_2=2a$. 又設使 Q 至 F_2 之距離 n，則按圖上，照勾股形定理，可得：

$$f_1^2=y^2+(n+2e)^2=y^2+n^2+4ne+4e^2;$$

而一面又可得： $f_2^2=y^2+n^2.$

試自第一方程減去第二方程，則得：

$$f_1^2-f_2^2=4ne+4e^2.$$

但 $f_1{}^2-f_2{}^2$ 照第十三節內公式 (2) 可化作

$$(f_1+f_2), (f_1-f_2),$$

而如圖上所示 $n=x-a-e$; 故此式可改作:

$$(f_1+f_2)(f_1-f_2)=4ex-4ae-4e^2+4e^2$$
$$=4ex-4ae=4e(x-a).$$

由此便得:
$$f_1-f_2=\frac{4e(x-a)}{f_1+f_2}.$$

又因 $f_1+f_2=2a$, 故此式即改爲:

$$f_1-f_2=\frac{4e(x-a)}{2a}=\frac{2e(x-a)}{a} \qquad (1)$$

將此式與 $f_1+f_2=2a$ 相加, 則得:

$$2f_1=\frac{2e(x-a)}{a}+2a$$

或
$$f_1=\frac{e(x-a)+a^2}{a} \qquad (2)$$

又試將 (1) 與 $f_1+f_2=2a$ 相減, 則得:

$$2f_2=2a-\frac{2e(x-a)}{a}$$

或
$$f_2=\frac{a^2-(x-a)}{a} \qquad (3)$$

他方面我們於 $f_2{}^2=y^2+n^2$ 一式中之 n 處亦以其值 $n=x-a-e$ 代入, 則可得:

$$f_2^2 = y^2 + (x-a-e)^2;$$

據式 (3), f_2^2 之值又可得為:

$$f_2^2 = \frac{[a^2 - e(x-a)]^2}{a^2},$$

於是即將此兩個 f_2^2 之值相等起來得下式:

$$y^2 + (x-a-e)^2 = \frac{[a^2 - e(x-a)]^2}{a^2}$$

或作:
$$y^2 + (x-a)^2 - 2e(x-a) + e^2 =$$

$$\frac{a^4 - 2a^2e(x-a) + e^2(x-a)^2}{a^2}.$$

若將此式再稍加改化, 可得:

$$a^2y^2 + (a^2 - e^2)(x-a)^2 = a^4 - e^2a^2 = a^2(a^2 - e^2),$$

又用 $a^2(a^2 - e^2)$ 將此式兩面均除後, 得:

$$\frac{y^2}{a^2 - e^2} + \frac{(x-a)^2}{a^2} = 1.$$

但如圖上所示, B 點在此橢圓曲線之中, 故 $BF_1 = BF_2 = a$ (因原設原線之長為 $2a$, 故其半為 a). 一方面照勾股形定理, 又可知 $a^2 = e^2 + AB^2$. 今倘命 B 至 A 之距離 AB, 即此橢圓之小軸為 b, 則前式即作:

$$a^2 = e^2 + b^2, \text{ 或 } a^2 - e^2 = b^2.$$

今即以此 $a^2 - e^2$ 之值代入前式內, 則得:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

此式卽是所謂橢圓曲線之方程；蓋橢圓曲線乃是一幾何的形，我們除了照前法將他畫出外，又可任意作兩坐標以此爲標準求得一算式以表此曲線．此種方法，謂之解析的方法；蓋這裏我們已入於解析幾何學的範圍了；不過解析幾何學的內容極豐富，這裏自然祇能略示其端倪，使讀者對之有個概念，識其從事者大約是何物而已．

又如第二十一圖之橢圓，倘我們將其縱坐標亦移至中央與其小軸相合，而命 A 至 Q 之距離爲 x，則前所得之方程卽可簡單作：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1,$$

或仍使 $a^2-e^2=b^2$，卽得：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

此爲坐標起點在橢圓中心點之算式．

我們前面已說過，橢圓中心點至焦點之距離謂之此橢圓之離心率；而如圖上已可見，倘此橢圓之離心率愈小，則此橢圓愈近於圓，若離心率等於 0，則兩焦點卽與其中

心點合併，而此橢圓即成爲圓了．本此道理，我們既得橢圓之方程，即不難由此以得圓之方程．如前面所得橢圓之方程爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1,$$

這裏左面第二項，分母之 e 即爲離心率；倘使其等於零，即 $e=0$，則即作：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

此即是圓之方程．事實上，橢圓之大軸與小軸不等，故圓方程內左面第一項之分母爲 a^2；其第二項之分母則爲 a^2-e^2，或 b^2；a^2 即是大軸半之方，b^2 則爲小軸半之方．但圓之大軸與小軸則相等，因圓內所有一切過中心點之徑均相等，故圓之方程內，其左面第一及第二項之分母均爲 a^2，即半徑之方．由此，倘我們已知一圓之半徑時，即可直寫出其方程；例如其半徑爲 r，則此圓之方程即作：

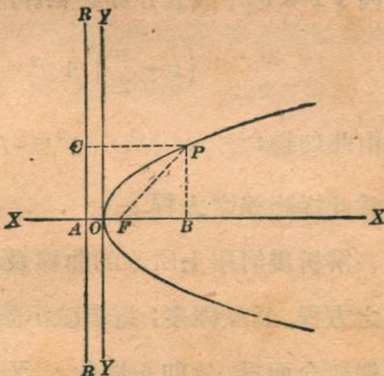
$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1,$$

或兩面同用 r^2 乘之，即得：

$$x^2+y^2=r^2,$$

普通所用圓之方程,大率是如此寫法(其坐標起點在圓之中心點).

除了橢圓及圓之方程外,我們可再一論及其他一曲線之方程,即所謂抛物線之方程.如第二十二圖所示,乃是一抛物線;YY 直線爲此抛物線之縱坐標,XX 則爲其橫坐標,O 爲坐標起點.曲線內 F 點,名爲抛物線之焦點,而與縱坐標平行在其左面之 RR 直線,則名抛物線之準線.抛物線有一種特色,我們試任於此線上取一點,如圖中之 P 點,由此作垂線至準線,與之相遇於 C.并由 P 點作直線至焦點 F,則此兩直線無論曲線上 P 點在何處,終是相等的,即 $PC=PF$.本此特色,我們可求得抛物線之方程如下:我們可設 P 點之橫坐標即 B 至 O 之距離爲 x,其縱坐標 PB 爲 y,而 F 至 A 即焦點至準線之距離爲 p,O 則在 FA 之中,故 FO 及 OA 同爲 $\frac{p}{2}$.照勾股形定理,



第二十二圖

PF 之方爲:

$$PF^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2;$$

而 PC 之方則爲:

$$PC^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

因 $PF=PC$, 故其方亦必相等, 如是:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

由此卽得:
$$y^2=2px$$

爲此拋物線之方程.

解析幾何學上所論的曲線及直線以及所求的各種線之方程, 爲數極多; 這裏祇示讀者以端倪, 大略使讀者得個概念而已, 故卽止於此. 又, 解析幾何學亦有平面與立體之分, 這裏所說, 自是僅關於平面方面的一些.

27. 微分算法之基本規則 我們到這裏已漸漸的入了所謂"高等數學"之範圍了. 高等數學上所論的道理, 自然有許多是前面所說過的種種; 不過有幾個概念, 則是新引入, 爲以前所未曾用過的. 除了前節內所說的坐標之概念外, 還有一些也須先提出來說明.

今設有一個方程:

$$y=3x+4$$

這裏,我們可隨便給 x 一個值,則 y 之值即隨之決定:例如我們使 $x=2$,則方程即作 $y=6+4$;此即是說:x 之值爲2時,則y之值卽隨之決定而爲10. 又設使 $x=3$,則 $y=13$; $x=4$, 則 $y=16$, 等等. 於此可見 x 與 y 之關係,是經此方程決定了的;x 苟取某個數目爲值,則爲滿足此方程,y 卽不能不取一相當的值,在值則由 x 之值決定. 我們對於此種兩個有關的數目,有一特別的名稱給他:如這裏所舉例,<u>y 之值由 x 之值所決定時,我們名 y 爲 x 之函數;</u>而其符號的寫法,則作:

(f 爲函數 (Funktion) 之冠首字,$f(x)$ 卽表"x 之函數"之意). 又,這裏的 x 與 y 亦不名未知數而名爲"變數",言其值無定,可隨便變更者;我們并照其地位而別爲兩類變數:其一;是可獨立變動者,如前例中之 x,我們名之爲"自變數";其他則依附於自變數之變動而變更者,如前例中之 y,其值須由 x 爲之決定,x 變動大,則 y 變動亦大,x 變動小,則 y 亦卽小,此類變數,我們名之爲"依變數". 而方程中之數目字或已知數,如前例中右面之第二項,+4,則對乎變數而言,名之爲常數.

此外雖還有許多重要的概念，但這裏爲求簡單且從略．今即將所謂"微分"學上之幾個基本規則提出一說，使讀者略知微分算法之大要；至其理論的方面，則亦概略去不及．

於開首時，我們須先使讀者注意：無論那一個方程，凡是由 x 及 y 兩變數所成，不問其有多少項數，及有無常數在內，倘我們以 x 爲自變數時，則此方程可用函數的符號表出之，視之爲一函數，作：

$$y=f(x) \tag{1}$$

因此，式 (1) 乃是一共通的寫法，我們視之即知其代表一個由 x 及 y 兩變數所成的方程，至其形式究竟若何，可暫不問．今設式 (1) 內之自變數 x 變動了一些，其值增加了；其所增加者我們以符號 Δx 表之．因 y 爲 x 之函數，故亦隨 x 之增加而增加其值；這 y 所增加者，則以 Δy 表之．如是，式 (1) 即變作：

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x) \tag{2}$$

若將式 (1) 自式 (2) 減去即得：

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \tag{3}$$

我們以前曾說明式 (1) 乃是一共通的寫法，可表任何形式

由 x 及 y 兩變數所成之方程，故所得式 (3)，自然仍是一共通的寫法． 今設 (1) 乃是一方程，其形式作：

$$y=x^2,$$

則式 (3) 卽成爲：

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2,$$

計算出，可得：

$$\Delta y=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2.$$

倘使 Δx 是無窮小幾於 0 的數，則凡 Δx 之方數，如 Δx^2 及 Δx^3 等均可略去不計．因之，我們簡單得

$$\Delta y=2x\Delta x$$

或用 Δx 兩面均除過，得：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x.$$

但普通當 Δx 爲無窮小幾於 0 時，我們不再把他寫作 Δx，而改寫之爲 dx，Δy 亦改寫爲 dy；因之，我們可將前式寫作：

$$\frac{dy}{dx}=2x,$$

或

$$dy=d(x^2)=2xdx;$$

此卽是方程 $y=x^2$ 之微分式，或說我們將方程 $y=x^2$ 求

微分時，得其微分式爲 $\frac{dy}{dx}=2x$.

方程 $y=x^3$ 之微分式，可仿此求之：

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2$$

$$+\Delta x^3-x^3=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3;$$

將帶項 Δx 之二次及三次方的項略去後，并用 Δx 兩面，除即得：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2.$$

由此，故 Δx 函於零時，其微分式卽爲：

$$\frac{dy}{dx}=3x^2.$$

廣此理，倘方程內之自變數 x 爲 n 次方，卽 $y=x^n$，則亦可求其微分式如下：

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+$$

$$\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots\cdots-x^n$$

故 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

而 $$\frac{dy}{dx}=\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1} \qquad (4)$$

這裏，無論 n 是何數均可用，故式(4)是個公式.

倘方程內之自變數 x 有係數，如 $y=px^2$，則按法求其微分：

$$\Delta y=p(x+\Delta x)^2-px^2=px^2+2px\Delta x+p\Delta x^2-px^2$$
$$=2px\Delta x+p\Delta x^2.$$

$y=f(x)$

$y+\Delta y=f(x+\Delta x)\cancel{+\Delta x}$

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

將帶有 Δx^2 之項略去後得 $2px\Delta x$，故

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2px,$$

此即是：
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(px^2)}{dx}=2px \qquad (5)$$

由此可知 x^2 之係數，於其微分式上仍存在無變動.

倘方程內帶有自變數者不止一項，并有常數之項，例如：

$$y=ax^2+bx+c,$$

則按法得其微分式時，得：

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c.$$

(此式內之 c 爲常數，自然不變動，故仍爲 c) 將所得式計算出與原式相減，得：

$$\Delta y=2ax\Delta x+b\Delta x+a\Delta x^2,$$

將右面末項 $a\Delta x^2$ 略去後，并用 Δx 兩面除：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2ax+b,$$

故 $$\frac{dy}{dx}=\frac{d(ax^2+bx+c)}{dx}=2ax+b. \tag{6}$$

由此可知諸項之和之微分式，等於其諸項之微分式之和；而如有常數項在內，則此項之微分式爲 0. 原來常數之微分式爲 0. 由式 (4) 已不難推得；蓋從前我們已知道，凡以 0 爲指數之數均是等於 1，如是 $x^0=1$；而一方面我們又可視 c 爲 $c\times 1$，即 $c=c\times 1=cx^0$. 照公式 (4) 及 (5)，cx^0 之微分式爲：

$$\frac{d(cx^0)}{dx}=0cx^{-1}=0,$$

即是 $$\frac{d(c)}{dx}=0 \tag{7}$$

設如 $y=uv$，而 u 及 v 均爲變數，則：

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$$

而 $$\Delta y=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v.$$

用 Δx 兩面均除：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$$

右面第三項 $\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$ 與其前二項比，乃是極小的數，故簡單即略去作：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

由此,故得:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx} \tag{8}$$

此卽是說:兩變數相乘之積之微分式,等於此變數乘他變數之微分式,加他變數乘此變數之微分式.

若 $y=\frac{u}{v}$, 卽兩變數相除,則其微分式之求法如下:

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v};$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}$$

$$=\frac{uv+v\Delta u-uv-u\Delta \cancel{x}\,v}{(v+\Delta v)v}$$

$$=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v^2+v\Delta v}.$$

此式內分母之第二項 $v\Delta v$ 與其前項 v^2 比爲極小數,故卽略去,并用 Δx 兩面均除,則得:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2}$$

因此 $$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{\cancel{x^2}\,v^2} \tag{9}$$

以上諸式,總謂之代數函數之微分式: 因爲所用以求微分式之方程,均是代數式. 此外倘有三角函數,指數函數及對數函數之微分式,今亦將一略及之. 倘方程作此式: $y=\sin x$, 則卽謂之三角函數,其微分式之求法如下:

$$y=\sin x;\qquad y+dy=\sin(x+dx);$$

$$dy=\sin(x+dx)-\sin x.$$

照第25節所說, $\sin x$ 及 $\sin(x+dx)$ 均可化爲級數作:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots;$$

以及:

$$\sin(x+dx)=x+dx-\frac{(x+dx)^3}{3!}+\frac{(x+dx)^5}{5!}-\cdots$$

倘我們將 dx 之方數略去不計,則得:

$$\sin(x+dx)=x+dx-\frac{x^3}{3!}-\frac{3x^2dx}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{5x^4dx}{5!}+\cdots\cdots$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\right)dx.$$

這裏,已分成了兩個級數,前者仍是 $\sin x$ 之級數,括弧中者則照第25節,乃是 $\cos x$ 之級數.因此,

$$\sin(x+dx)=\sin x+\cos x\,dx,$$

而 $$dy=d(\sin x)=\sin(x+dx)-\sin x=\cos x\,dx.$$

或
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x \tag{10}$$

仿此，可求得 $\cos x$ 之微分爲：

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x \tag{11}$$

又按三角學上理 $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$（見第 18 節公式 5），故可用

前面公式 (6) 求得：

$$\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x \tag{12}$$

以及
$$\frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x \tag{13}$$

至指數函數之微分，可求之如下：

$$y=e^x;\quad y+dy=e^{x+dx};$$

$$dy=e^{x+dx}-e^x=e^x(e^{dx}-1).$$

但
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

而
$$e^{dx}=1+dx+\frac{dx^2}{2!}+\frac{dx^3}{3!}+\cdots\cdots$$

若將 dx 之方數盡略去，則：

$$e^{dx}=1+dx,$$

因之，

$$dy = e^x(e^{dx}-1) = e^x(1+dx-1) = e^x dx,$$

或
$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x \tag{14}$$

由此可知 e^x 之微分仍爲 e^x.

設如 $y=\ln x$, 則 $y+dy=\ln(x+dx)$, 而

$$dy = \ln(x+dx) - \ln x = \ln\frac{x+dx}{x}$$
$$= \ln\left(1+\frac{dx}{x}\right).$$

照第24節:

$$\ln\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \cdots\cdots$$

仍將 dx 之方數均略去後:

$$\ln\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x},$$

故
$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \tag{15}$$

此外尙有所謂"弧度函數"者, 其意義如次: 例如 y 爲一段弧, 以此弧爲度的角其 sin 等於 x; 則我們用符號表此意時, 寫作:

$$y = \operatorname{arc}\sin x$$

(按角度亦可以弧爲量, 此從前已說過者; 這裏 arc 三字

係拉丁語"弧,, arcus 之略寫).

但一方面,此意亦可如此表法:

$$\sin y = x;$$

由此,故我們凡遇有 arc 符號之 sin, cos, 或 tg 等,倘要將 arc 符號脫去時,祇要反轉其原來變數之位置便行. 廣此,我們可加:

$$因\ y = \operatorname{arc}\cos x,\ 故\ \cos y = x;$$

$$因\ y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x,\ 故\ \operatorname{tg} y = x;$$

$$因\ y = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x,\ 故\ \operatorname{ctg} y = x;$$

其餘以此類推.

既知此,便不難求此種弧度函數之微分:

$$y = \operatorname{arc}\sin x; \quad \sin y = x.$$

將此式兩面均求其微分,得:

$$\cos y\, dy = dx.$$

按三角學上理 $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ (見第 18 節公式 1),而前面已知 $\sin y = x$, 故 $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$;於是得:

$$\sqrt{1 - x^2}\, dy = dx,$$

或 $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{arc}\sin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (16)$$

倣此，可得：

$$\frac{d(\text{arc}\cos x)}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (17)$$

$$\frac{d(\text{arc tg}\, x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \qquad (18)$$

$$\frac{d(\text{arc ctg}\, x)}{dx}=-\frac{1}{1+x^2} \qquad (19)$$

微分之基本公式，大約不外這上舉的數式；一切簡單及複雜的函數，其微分式已不難由這數式推出．至關於微分之理論，以及較複雜的方面，這裏姑不提及了．

28 積分算法示例　與微分相反的算法，有所謂"積分"算法者，其所從事在於由一個微分求其原來的函數式．例如 x^2 之微分 $d(x^2)$ 爲 $2xdx$，則我們求 $2xdx$ 之積分時自然是 x^2；x^3 之微分 $d(x^3)$ 爲 $3x^2dx$，則 $3x^2dx$ 之積分卽爲 x^3．積分有個特別的符號，作 $\int$；如前所說求 $2xdx$ 之積分，寫出來爲：

$$\int 2x\,dx$$

我們旣明白了積分之意義及其所用符號，則積分算法上有幾個基本公式，已不難直接由微分算法上推出了；例如 $d(x^2)=2xdx$，故

$$\int 2x dx = x^2, \qquad 而\int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

倣此，因 $\quad d(x^3)=3x^2dx$，故

$$\int 3x^2 dx = x^3 \qquad 而\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

推廣此理，可得一公式：

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{1}$$

但如我們前面說過，常數之微分總是 0，故 x^2+a 之微分與 x^2 之微分無別，同爲 $2xdx$. 緣此，我們求 $2xdx$ 之積分時，爲較妥起見，寧可於式後再加一項常數：

$$\int 2x dx = x^2 + c$$

此 $+c$ 謂之積分常數，任何式均可加此；但爲便利起見時，可把他略去，我們這裏亦可將他略去不計.

此外，如：

$$\int \sin x\, dx = -\cos x \tag{2}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x \tag{3}$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x \tag{4}$$

$$\int e^x\,dx = e^x \tag{5}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x}{a} \tag{6}$$

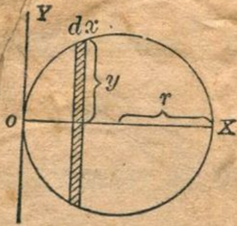
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\text{arc tg}\,\frac{x}{a} \tag{7}$$

等等諸式，大率均不難直接由前節內之微分式推出，或如(6)及(7)兩式，祇於1處代以 a 及稍加變動而已．不過積分算法之簡單的雖可如此由微分推得，但若較複雜，則便不易了；普通於較複雜者，算之之法，大約不外輾轉相代以及將算式劈成爲數式然後求其積分等數種方法，頗要費些心力；故積分算法實非易事，不若微分算法之有一定方法可循的，上面所舉諸式，姑爲讀者一示積分之例而已．

29. 積分之又一意義． 前節內我們將積分看作微分之倒；但積分的原義，乃是將無窮多極小的數積起來之意．今舉簡單的例於下，看此卽可明白．同時幷可知微積分應用之一斑．

前面於第21節內，我們已求得球之體積等於其半徑之三次方乘 π 三分之四；今試用積分法證明之．如第二十

三圖，我們卽以球徑爲 X 坐標，幷如圖作 Y 坐標，而設係旋轉球之半徑爲 r，則因此球係旋轉一半圓所成而由第二十六節幷知此半圓之方程爲：



第二十三圖

$$(x-r)^2+y^2=r^2$$

(按這裏坐標起點不在中心，故所得方程與前第二十六節內者不同) 或計算出來，作：

$$y^2=2rx-x^2.$$

一方面，我們仍設想將此球縱切爲無數的圓片，各厚 dx. 今設此項圓片之貫串於 X 坐標上，半徑就 Y 坐標而言爲 y，則可見 y 乃是 x 之函數，蓋 y 之值在 X 坐標上各處不同. 照第 21 節，此項圓片之體積各爲 πy^2dx，或因 $y^2=2rx-x^2$，可改寫作： $\pi(2rx-x^2)dx$.

這各圓片之體積旣爲微分式，故若用積分算法將其積起來時，所得必係球之體積，如是：

$$\int\pi(2rx-x^2)dx=\int\pi 2rxdx-\int\pi x^2dx$$

$$=\pi\left(rx^2-\frac{x^3}{3}\right).$$

但如圖，球徑之長爲 $2r$，故倘使所得式內 $x=2r$（即是說：就 X 坐標而言，積圓片自 0 至 $2r$ 爲止），則

$$\pi\left(rx^2-\frac{x^3}{3}\right)=\pi\frac{12r^3-8r^3}{3}=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

即爲球之體積與第二十一節內所得者無異.

即此一例，微積分於普通方面若何應用已可窺見；這裏爲求簡單，故不再廣舉，而本書亦即止於此了.