

FEYNMAN LECTURES ON GRAVITATION

費曼於1962-63學年度在美國加州理工學院開授了一門以重力（也就是愛因斯坦的廣義相對論）為主題的課。費曼於此之前已經花了好幾年的功夫在思考重力物理的基本問題，但是卻一直沒有正式發表什麼心得。本書就是費曼那一門重力課的內容紀錄，所以這些講義紀錄了費曼當時對於重力、宇宙論、重力波等題材的特殊心得，是可貴的文獻。

本書的主要特色是費曼從「自旋 2」的重力子場論出發，在仔細地分析了理論的自恰性之後，最後推導出愛因斯坦方程式！這個進路並不採用傳統的幾何觀點，但是卻比較能夠讓重力和其他交互作用聯繫起來。

科學叢書QCCE041001

ISBN 986-80119-7-3



9 789868 011977

費曼重力學

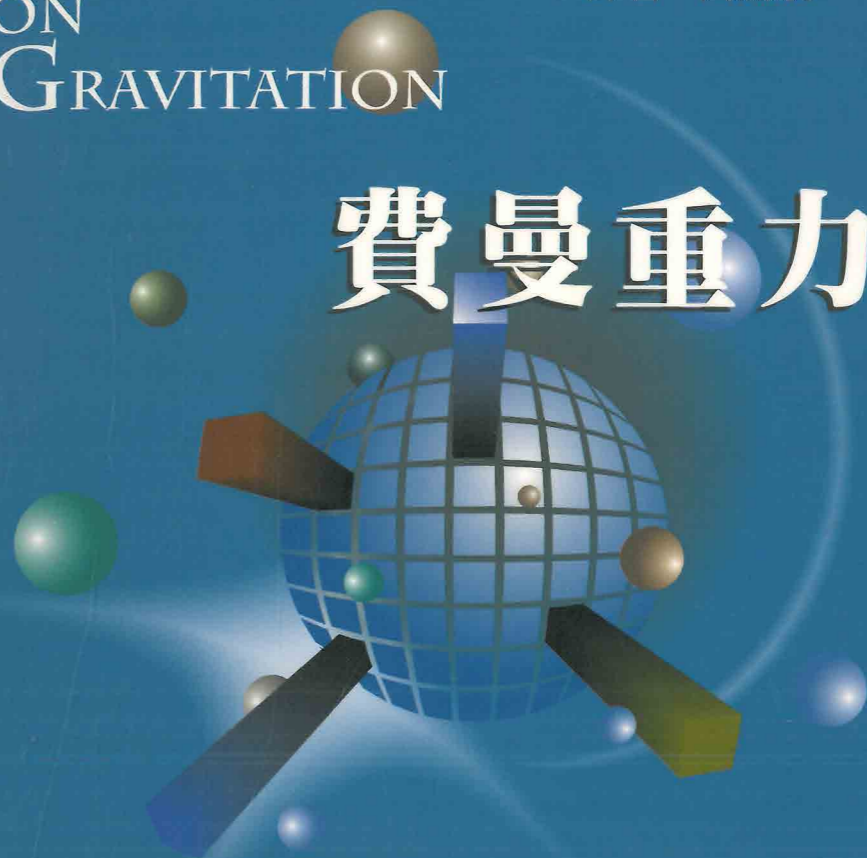
譯者 ◆ 高涌泉

科大

FEYNMAN LECTURES ON GRAVITATION

- RICHARD P. FEYNMAN
FERNANDO B. MORINIGO
WILLIAM G. WAGNER
- 譯者 高涌泉

費曼重力學



科大文化事業股份有限公司

費曼重力學

FEYNMAN LECTURES ON GRAVITATION

費曼重力學

FEYNMAN LECTURES ON GRAVITATION

Richard P. Feynman
Fernando B. Morinigo William G. Wagner

譯者：高涌泉



科大文化事業股份有限公司

譯者導言

理查·費曼(R. P. Feynman, 1918-1988)於 1962-63 學年度在加州理工學院開授了一門以重力(也就是愛因斯坦的廣義相對論)為主題的課——每周一次,共講了二十七次。聽眾不多,一般時候不會超過十五人,他們多為高年級研究生或博士後研究員。其中二位——F. B. Morinigo 與 W. G. Wagnerz ——依據課堂的錄音與筆記,將上課內容整理成文字稿,以便在費曼校讀之後分發給上課學生做為講義。到學年結束之時,費曼自己只校訂與補充了前十一回紀錄。以後他忙上了別的事,便沒有繼續校訂紀錄的工作,所以學生只拿到頭十一回的講義。以費曼的聲譽,這些講義當然會引起其他物理學家的興趣,所以後來這些重力論講義也在校園書店對外出售。到了一九七一年,費曼批准了將下五回講義放進新一版的講義之中,不過他特別聲明自己沒有校讀這五回的紀錄。至於最後十一回(十七回至二十七回)的紀錄,費曼則從未准許發表。

費曼未正式發表的這些重力論講義漸漸在物理界傳開來,很受到大家重視,經常為人所引用,因為裡頭有很多新鮮的觀點是別處找不到的。費曼過世後,物理學家 B. Hatfield 仔細地修正了講義裡頭某些錯誤並且更新了一些記號,這些著名的講義便以書的形式正式發行,內容就是二十七回講義中的前十六回。加州理工學院物理教授 J. Preskill 與 K. S. Thorne 特別為此書寫了一篇前言,說明此書的來龍去脈、特色以及無可避免的過時之處, B. Hatfield 也另寫了一篇短文介紹量子重力論的最新進展;他們也於書後補充了一些相關文獻以供想進一步探討廣義相對論的讀者參考。

我在此先介紹一下本書最重要的成就——也就是為什麼這些四十年前的講義仍然值得出版與翻譯的理由:

費曼過世後,人們發現他在辦公室黑板角落發現了一句話:「我不懂自己不能創造的東西(What I cannot create, I do not understand)。」如果所謂的「東西」指的是物理理論,費曼這句話的意思當然是他只有在自己

尋到一種從頭講起的說法之後，才會覺得真正懂了這個理論。費曼在上面那句話底下又寫了一句：「了解每個已經解決了的問題(Know how to solve every problem that has been solved)。」愛因斯坦的廣義相對論是至今最佳的重力理論，必然是費曼想了解的東西，但是他能找到什麼別出心裁的推導辦法嗎？

一般重力學教科書都遵循著愛因斯坦的思路——也就是說從等效原理出發，把四維時空看成是幾何學中的流形(manifold)，將重力現象視為一種時空幾何的展現——所以傳統上會先介紹微分幾何基本概念，例如度規、張量、協變微分、曲率、極端線等，然後再引出決定時空曲率的愛因斯坦方程式，最後示範一些愛因斯坦方程式的解與應用。這樣子鋪陳出來的重力理論架構非常完整，被很多人視為「最美麗的理论」。

但是費曼刻意要跟別人不一樣，所以不從漂亮的幾何觀點切入，而選擇了由量子場論的角度著手：他把重力與電磁力類比在一起，以一種在平坦閔考斯基(Minkowski)時空中的新場論來描述重力，就好像我們用馬克斯威爾電磁場理論來說明電磁交互作用。在馬克斯威爾理論中，帶電物體是電磁場源，電磁場可以在帶電物體之間傳遞電磁交互作用；在重力場論中，具有能量與動量的物質是重力場源，重力場在兩物質間傳遞重力。重力與電磁力不同之處在於傳遞電磁力的電磁場是一種向量場，而傳遞重力的重力場則是二階張量場；電磁場量子化以後可以描述光子，光子的自旋為 $1\hbar$ ($\hbar = \text{Planck 常數 } h \text{ 除以 } 2\pi$)，重力場量子化以後可以描述重力子，重力子的自旋為 $2\hbar$ 。約略的說，光子傳遞電磁力，重力子傳遞重力。光子本身不帶電不會成為電磁場源，所以馬克斯威爾電磁場方程式是較為簡單的線性方程式。但是重力子本身有能量動量也可以成為重力場源，所以重力場方程式是遠較複雜的非線性方程式。

費曼在本書前六章說明了如果我們從「自旋2」的重力子場論出發，在仔細地分析理論的自恰性之後，我們還是可以得到愛因斯坦方程式！所以愛因斯坦的彎曲時空觀點似乎並不是得到正確方程式的唯一進路。對於費曼來說，幾何觀點是在得到正確方程式之後才出現的漂亮詮釋，而不是建構理論的起點。費曼能夠走通有別於愛因斯坦的另一條路，就理論物理

譯者導言

的發展而言，是非常有意義的事：首先，我們如果能夠從越多的不同觀點去理解自然現象，我們就越可能尋出推廣知識的方式，而獲得新的結果。其次，在費曼的方法中，重力與其他基本交互作用原先看似不可跨越的差異——重力是時空的幾何而非一般的力——不見了，所以我們有了一個統一的觀點來看待包含重力的一切交互作用；當今熱門的弦論之所以被視為含括量子重力論在內的最終理論，正是因為「自旋 2」的粒子是弦所必有振盪態之一，所以在配合上弦的其他種自旋振盪態之後，弦論就具有統一重力與其他交互作用的潛力。

費曼其實不是唯一利用場論這一條路來導出愛因斯坦方程式的人，在他之前曾有 Kraichnan[見書後所列參考文獻 Krai47, Krai55, Krai56] 與 Gupta[見 Gupta 54]，在他之後也有 Deser、Boulware[見 Dese 70, BoDe75]、Weinberg[見 Wein64a, Wein64b]與 Wald[見 Wald86]等人，不過費曼的解說非常清楚精采，充分展現他那獨特的風格，所以這些講義才會如此受到歡迎。

費曼的講義所紀錄的是四十年前的知識，今天看來當然有不少過時的地方；我以下扼要說明 Preskill、Thorne 與 Hatfield 所指出的書中不足之處：

- (1) 宇宙學在過去數十年有驚人的進展，所以費曼關於宇宙學的討論以今天的標準而言，有很多欠缺之處。但是憑著他過人的直覺，費曼的見解與今天的認知還是有些契合的地方，例如宇宙的密度可能正是臨界密度，以及物質可能來自「無中生有」等看法[見 Guth81, LiBr90]。他也認知到量子力學在宇宙起源所扮演的角色還有待釐清，所以已預見了「量子宇宙學」的來臨。
- (2) 費曼在第十四章討論了所謂「超星」的穩定性，他是最早從廣義相對論的角度探討這個問題的人之一。但是他的結論不夠完整，其中的詮釋也有錯誤之處。更完整正確的結果已由他的學生 Bardeen[見 Bard65, BTM 66]與同事 Fowler[見 Fowl 64]、Iben[見 Iben 63]等人獲得。
- (3) 費曼在第十一章與第十五章討論了廣義相對論的 Schwarzschild

解，這數十年來我們對於這個解以及與其相關的概念如黑洞、事件視界等的了解已有長足進展，所以這兩章的內容也是相當不完整且過時。對於黑洞有興趣的讀者可以參考以下的文獻：[Thor 94, Penr 65, Krus60, OpSn39, GrBr60, MTW73]。

- (4) 費曼在本書最後一章討論了一些牽涉到重力子的物理過程，他只解說最低階微擾的情況，而沒有碰觸極為複雜的高階計算。其實量子重力論中高階費曼圖的計算法則相當微妙，如果只是不加思索地借用量子電動力學中的法則就會出錯(例如 unitarity 可能會出問題)；費曼是首先發現這個麻煩的人，他設想了一個辦法可以處理單圈圖的情形[見 Feyn63b, Feyn72]，不過卻無法解決多圈圖的問題，後來這個問題由 DeWitt[見 DeWi67a, DeWi67b]、Faddeev 與 Popov [見 FaPo67] 等人徹底解決。DeWitt 等人是從費曼的結果獲得啟發，方才得到高階費曼圖正確的計算法則。由於高能物理中非常重要的楊(振寧)-Mills 規範場論和愛因斯坦理論有類似的結構(其實費曼是聽從了 Gell-Mann 的建議[見 Gell89]，先解決了較簡單的楊-Mills 規範場裡的單圈問題，才回頭處理重力場的問題)，所以費曼、DeWitt 等人的結果也可以應用到楊-Mills 規範場論上頭。這項成就雖是費曼研究量子重力論的副產品，卻可算是費曼對於高能物理的重要貢獻之一。

前言

John Preskill 與 Kip S. Thorne

費曼在 1962-1963 學年度於加州理工學院開了一門重力的課程，想用別於傳統的方式探討廣義相對論。對象是熟悉相對論量子場論方法（尤其是量子電動力學中的費曼圖微擾理論）的高年級研究生和博士後研究員。其中兩位博士後研究員，Fernando B. Morinigo 和 William G. Wagner 把上課筆記整理出來，然後打字、影印，在加州理工學院書店賣了很多年。

這些筆記當初並未正式出版，但流傳很廣。由於這套筆記內容對物理學的基礎有獨特的見解，異於傳統，影響了很多人。Morinigo 和 Wagner 把費曼遺留下來的這份珍貴資料保存這麼完整，造福了許多人。現在，又多虧 Brian Hatfield 的努力，這系列演講的筆記終於要出版成書了，以饗更多讀者，甚至後代學子。Hatfield 訂正了筆記中的小錯，也改進了數學符號；除此之外，都維持 Morinigo 和 Wagner 打字版的原貌。（只有兩小段文字完全刪除。）

費曼當初在 1962-1963 學年度每週授課一次，共講了 27 次。上課的教室很小，只有兩排座椅，地點在加州理工學院 East Bridge 實驗室。每堂課出席的學生通常不超過 15 位。（其中至少有兩位學生，James Bardeen 和 James Hartle 後來對重力理論也有其重大貢獻。）這些課程當初也錄音下來，但是因為費曼授課風格很不拘形式，Morinigo 和 Wagner 覺得還是要把內容重新整理，作出來的筆記人家才看得懂。Wagner 的主要工作是整理數學公式，Morinigo 負責寫文字敘述，再經費曼校讀後，發給學生作講義。費曼的熱情躍然紙上，也不時有笑話點綴其間，不過他那極為特殊的語言終究還是沒能保存下來。

本書只包括了 16 講，大致上就是費曼 27 講中前面 16 講。其實 Morinigo 和 Wagner 把 27 堂課的筆記都整理出來了，但是到學年末，費曼只校讀了 11 講。顯然後來他去忙別的事，就把校讀的工作擱置下來。

因此，在 1962-1963 學年度發給學生的，以及後來多年在加州理工學院書店賣的，只有前面 11 講。

1971 年七月，費曼批准了將接下來的五講收入新的版本以讓書店重新製作發行。新版本有一段聲明：

應讀者需求，我們整理出第三版。在編輯過程中，承蒙費曼教授批准放入後續五講的講義，這些原先是要跟前面十一講一起閱讀的，但是因為一直沒有機會仔細校讀訂正，所以當初費曼教授覺得不應放進來。

這後續幾講保持了當年原貌，除了謄寫時更正的小瑕疵以外，仍然保持八年前的模樣，費曼教授始終沒有校讀過。希望讀者在閱讀這幾講時，要記得它們僅代表費曼教授當時的想法，並不是他研究工作的正式解說。

看起來費曼的確沒有詳細校讀後面這幾講。例如，第 14 講包括了幾個錯誤（以下會說明），這些錯誤他在 1971 年（或甚至講完課後幾星期候）應該很容易就可以認出來。因此，我們請讀者在閱讀 12-16 講的時候要記得以上的聲明。

雖然 Morinigo 和 Wagner 也整理出最後十一講的筆記，但費曼從未批准發行，因此本書沒有納入。後面這十一講主要在談量子重力和 Yang-Mills 理論的輻射修正項。我們猜費曼對這些內容不甚滿意，因此不要它們發行。

開這門課之時，費曼同時也在用令人耳目一新的方式教授大二物理課程。這課程內容後來成為永垂不朽的《費曼物理學》〔見書後所列文獻 Feyn63a〕第二冊和第三冊。每星期一上午，他教一堂大二物理，午餐後就再教重力課。除此之外，每星期稍後還有第二堂大二課要教，並且還要去位於 Malibu 的 Hughes 研究實驗室給那裡的科學家上課。除了教學負擔和他自己的研究，費曼還幫忙州政府教育局審查教科書。這份審查工作非常吃重，在《別鬧了，費曼先生！》中有生動的描述。當年有位年輕助理教授 Steven Frautschi 也去聽重力課，他記得費曼在 1962-1963 學年結束時說他「徹底累壞了」。

費曼這門課從來就沒打算要完整地介紹廣義相對論，其中某些內容

前言

也早過時了。第七講到第十二講的大半內容，在別的书本中說明的更仔細。那麼，為什麼現在還要把它們出版？起碼有三個理由：首先，對於費曼這樣另闢蹊徑去探討廣義相對論基礎的方式，目前還找不到可以相比擬的說明。第三講到第六講討論了這個新奇的方法，它發展出了無質量、自旋為2的場（重粒子）跟物質的能量動量張量耦合的理論，同時也證明了若要自圓其說就無可避免地會導致愛因斯坦的廣義相對論。（在物理界，這套講義就是因為證明這點而出名。）其次，這套講義有些題外話談到物理學的基礎及其他議題，讀來引人入勝，也發人深省。第三，這套講義有歷史價值。當年費曼開這門課時，他已經用心思索重力問題好多年了，他當時的心得或觀點都紀錄在這裡。三十二年後，我們回顧他的看法，其中一些的確是有先見之明，另一些則流於天真，甚至是錯的。有時候，他的觀點隨著教學進展也在快速的演變；對於第十四講裡面相對論性恆星的材料來說，尤其是這樣。以下會進一步說明。

這套講義的價值在於告訴我們費曼當初對於重力的觀點，但是它並不適合初學者用來學習廣義相對論的現代幾何形式，或是計算工具以及理論的應用。若講教學效果，Wald的書[Wald 84]，Schutz的書[Schutz 85]，或是Miser，Thorne和Wheeler合著的[MTS 73]這幾本書會更理想。即使是費曼所偏愛的非幾何觀點，在Weinberg [Wein 72]書中講得更有系統更完整。可是若想要看費曼獨一無二的心得，看他如何探討這個題目的本質，則非本套講義莫屬。

不同程度背景的讀者，可以從幾個不同層次來研讀這套講義：

- 要徹底了解這套講義，讀者需有高級的理論物理訓練。費曼假設他的學生熟悉量子場論方法，程度足以從作用量中取出費曼規則，並且會用這些規則去計算費曼圖。不過這些場論方法其實只有在第二講到第四講，以及第十六講中用得比較多；況且沒有這方面訓練的讀者也可以掌握這幾章的主要觀念。除此之外，其他各講多多少少自成一篇，可單獨欣賞。
- 多虧費曼的教學技巧，大學物理訓練紮實的讀者應該可以理解講義的大部分內容。不過，這一類讀者若碰到某些更為技術性的部分，恐怕只能了解整體概念而已。

- 景仰費曼但物理基礎不足的讀者，這套講義對他們還是有其價值。不過他們要略過相當多技術性內容，才能挖掘出其中較具體的心得和敘述。

以下的序言（還有接下來 Hatfield 撰寫的部分）對於這套講義的內容提出簡單的說明，同時也討論了它們跟先前的研究、以及後來的發展有什麼關係。這些說明文字跟講義內容一樣，也是可以讓讀者依據自己的程度來閱讀。我們在書頁側邊用灰線標示的段落，沒有紮實理論物理訓練的讀者可以跳過或簡略瀏覽即可。

推導愛因斯坦場方程式：

當初費曼開這門課時，他正努力地想把重力量子化，也就是結合廣義相對論和量子力學的基本原則。正由於他一心一意要得到量子重力論，越直接越好，因此覺得微妙的幾何會讓人分心。他覺得，若是用傳統的幾何推導去探討重力，反而會看不到重力和電動力學間明顯的相似之處。

今天我們已經了解，只要知道光子是沒有質量的自旋 1 粒子，就可以導出馬克斯威爾的電動力學。無質量的自旋 1 粒子在跟帶電物質耦合時，其量子理論在形式上深受物理基本原則的限制，例如勞倫茲不變性 (Lorentz invariance) 和機率守恆 (conservation of probability)。這種量子理論的自洽版本，也就是量子電動力學，其實在古典的極限範圍，是滿足馬克斯威爾的古典場方程式。

由於這個相似性，費曼大膽假設量子重力論只不過是跟量子電動力學類似的「另一個量子場論而已」。因此他在第一講到第六講的主軸是：在一般平坦的閔考斯基 (Minkowski) 時空中，我們是否可以找到合理的量子場論來描述跟物質耦合的無質量自旋 2 量子（重力子）？這樣的量子理論在古典極限下，應會滿足愛因斯坦的古典重力場的廣義相對論場方程式。因此，為了弄清楚古典理論的形式，費曼訴諸量子理論的特色，因為古典理論的底層一定是量子理論。在費曼的討論中，幾何觀點只是從「後門」引入，而且主要是當作技術工具來發展以協助推導出可用的理論。例如，費曼在第六講引入黎曼曲率張量（傳統廣義相對論數學的主角），只是為了建構重力作用量中有不變性質的項。一直到了 9.3 節，費曼才透露這個曲率可以用彎曲時空流形上切向量的平移來解釋。

前言

量子理論有個重要特性，就是無質量的自旋 2 重力子只有兩個螺旋態(helicity state)。因此，古典重力場也必然只有兩個動力學自由度。但是，對應到自旋 2 粒子的古典場 $h_{\mu\nu}$ 是有十個分量的對稱張量。事實上，其中四個分量 h_{00} , h_{0i} , ($i = 1, 2, 3$) 是非動力學的受限變數，所以我們剩下六個動力學分量 h_{ij} 來描述兩個物理螺旋態。就是因為粒子狀態的數目和場分量的數目不同，因此量子重力論受高度限制，其所相對的古典理論也是如此。

為了解決這變數數目不符的問題，理論中必須有冗餘度(reduncancy)，也就是用很多不同的古典場來描述同一個物理狀態。也就是說，它必須是規範場。對於無質量的自旋 2 場來說，其必要的規範原理可以證明是廣義協變性(general covariance)，這個要求就可導致愛因斯坦的理論。

在第三講中，費曼建構出無質量自旋 2 場的作用量平方項，這個場與守恆的能量動量張量有線性耦合。他在 3.7 節中談論了所得到的線性場方程式的規範不變性(gauge invariance)。然後在 4.5 節中他又表示，我們可以藉由要求散射振幅的規範不變性來推導出非線性的自我耦合。但是他並未完整交代這主題（他說明這點不易達成）。相反地，他用相當不尋常的方法來導出愛因斯坦的非線性古典場方程式，這方法所著重的是一致性(consistency)。因為自由且無質量的自旋 2 場的線性場方程式必須有規範不變性（以除去不想要的螺旋態），如果僅僅把場方程式作一般的修改（例如讓自旋 2 的場跟物質耦合時會作的修正）則不會有解。其實修改過的方程式中有若干新的項，它們必須滿足一個不簡單的一致性條件，基本上，這個要求就是這些新的項必需滿足規範對稱。如果嘗試去滿足這個條件，就足以導致愛因斯坦的特定非線性耦合，以及相對應的非線性場方程式。

詳細地說，在 6.2 節中所提出的問題是：尋找出自旋 2 場 $h_{\mu\nu}$ 的作用量泛函 $F[h]$ ，使得以下的重力場方程式

$$\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}} = T^{\mu\nu} \quad (\text{F.1})$$

費曼重力學

與物質所滿足的運動方程式相容。式子中的 $T_{\mu\nu}$ 是物質的能量動量張量。費曼在第三講中找到了 F 的平方項，只要物質的能量動量是守恆的（在特殊相對論情況下），亦即 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ，就可依據這一平方項算出沒有矛盾的場方程式。問題是，一但 $h_{\mu\nu}$ 場跟物質耦合起來（所以物質就是 $h_{\mu\nu}$ 場的場源），物質的運動方程式就會被重力所修正，使得 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ 變成不是零。因此， $h_{\mu\nu}$ 的場方程式和物質的運動方程式就不相容，就沒有解可以同時滿足這些方程式。這就是（線性理論的）內在矛盾的問題。

透過要求 $h_{\mu\nu}$ 所滿足的場方程式必需跟物質的運動方程式相容，費曼歸納出來一點，就是作用量 F 必須加入高階修正項。沒有內在矛盾的這一要求，可以轉化成不變性原理的形式，而作用量正必需滿足此不變性原理——也就是一般座標變換下的不變性。費曼接下來的分析就相當傳統，他的結論是，如果不包括兩次微分以上的項，最廣義而沒有內在矛盾的場方程式就是愛因斯坦方程式（含一個宇宙常數）。

最後得到的非線性修正項有棒的物理解釋。如果沒有這些修正項，重力子不會跟自己耦合。若把正確的非線性修正項包括進來，重力場（在平坦閔考斯基時空所看到）的源就是**全部**的能量動量，包括重力場自己所貢獻的。也就是說，（強）等效原理是被遵守的。物質的能量動量守恆律就變成了愛因斯坦的協變形式 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ，也就是說，物質和重力之間可以交換能量及動量。

我們從費曼在 1957 年 Chapel Hill 研討會 [DeWi57] 的發言得知，他那時已經把第二講至第六講的計算做完了，Murray Gell-Mann [Gell89] 也曾提起，費曼和他在 1954-55 年的聖誕假期間曾討論過量子重力問題，而且費曼當時已經「有相當的進展」。

直到今天，仍有人提到對於有交互作用、無質量、且自旋為 2 的場而言，唯一合理的理論就是廣義相對論（也就是說，在低能量極限，廣義相對論是很好的近似）。（比方說，因為超弦理論包含了有交互作用的無質量自旋 2 粒子，有人就認為它一定可以解釋重力。）事實上，有這種想法的人很多，費曼不是第一個。

前言

無交互作用、無質量、自旋為 2 的場方程式最早是 1939 年 Pierz 和 Pauli 寫下來的 [FiPa39]。在那之後，把愛因斯坦重力論當作平坦空間中自旋為 2 的場理論的想法就偶爾會出現在文獻中。不過，據我們所知，最早公開試圖要在這種架構下**推導出**愛因斯坦理論中非線性耦合的是 Suraj N. Gupta 一篇 1954 年的論文 [Gupt 54]。Gupta 指出，這理論的作用量必須遵循廣義相對論所滿足的嚴謹自治條件。不過，他並未提出任何詳細說明來證明愛因斯坦場方程式的**獨特性**。

簡而言之，Gupta 的論證是這樣的：我們想建構出一個理論，其中和無質量、自旋為 2 的場 $h_{\mu\nu}$ 相耦合的「場源」是能量動量張量——**包括**這自旋 2 場自己的能量動量。如果我們選的場源是自由場理論的能量動量張量 ${}^2T^{\mu\nu}$ （它是 h 的平方項），則把 ${}^2T^{\mu\nu}$ 和 $h_{\mu\nu}$ 相耦合會帶出拉格朗日函數 (Lagrangian) 中的三次方項。從這三次方項可以得出能量動量張量中的三次方項 ${}^3T^{\mu\nu}$ ，然後我們將它包括在場源之中。這又帶出四次方項 ${}^4T^{\mu\nu}$ ，其餘的以此類推。如此不斷反覆，就得到一個無窮級數，它的總和就是完整的非線性愛因斯坦方程式。Gupta 當初概略敘述了這個過程，但沒有真的算出完整結果。完整（而且非常漂亮）的論證最早出現於 Deser 在 1970 年所發表的論文 [Dese70]。Deser 也指出 Yang-Mills 理論也可以用類似的想法去推導出來。

在 Gupta 論文發表之前數年，麻省理工學院有位十八歲的學生 Robert Kraichnan 也已經研究過如何把廣義相對論當成是平坦時空中無質量、自旋為 2 的場的自治理論。這結論他寫入了 1946-47 學士論文內，但並未發表 [Krai 47]。他後來於 1949-50 年在普林斯頓高等研究院繼續研究這個問題。他回憶起當時雖有 Bryce DeWitt 的鼓勵，但很少同事支持他的想法，其中當然也包括愛因斯坦自己。這種探討重力的方法可是讓愛因斯坦相當驚駭，因為它放棄了愛因斯坦辛勤掙來的幾何觀點。Kraichnan 一直到 1955 年才發表他的結果 [Krai 55, Krai 56]，因為他終於找到了滿意的推導方法。Kraichnan 的做法跟 Gupta 不同，他並未**假設**重力跟全部的能量動量張量耦合。他的做法跟費曼類似，用場方程式的自治性來推導結果。目前看來，當初費曼大半對於 Gupta 和 Kraichnan 的工作完全不知情。

我們必須指出，費曼的分析並非最一般性的（甚至也沒有 Kraichnan 那麼廣義）。他假設物質的作用量有某種特定的形式（即相對論性粒子的作用量），而且還進一步假設這物質與自旋 2 場的耦合純然是線性的（這對於更廣義的物質作用量就不可能成立）。尤其要注意的是，我們發現即使自旋為 2 的場 h 予以非線性局部重新定義，這個理論所有的物理預測都不會變。因此，我們可以放心把 $h_{\mu\nu}(x)$ 用 $\tilde{h}_{\mu\nu}(h(x)) = h_{\mu\nu}(x) + O(h(x)^2)$ 來替換。因為費曼要求 h 與物質的耦合是線性的，所以他沒有明講地就除去了這份可以把場重新定義的自由度（如何重新定義場，Boulware 和 Deser [BoDe 75] 的文章有詳細說明）。

另外還有一種相當不同的做法可以推導出重力交互作用的形式，這是 Weinberg 發展出來的 [Wein 64a, Wein 64b]。從一些非常合理的假設出發（這些合理假設所牽涉的是重子與重子散射振幅的解析性 (analyticity)），他可以證明只有當自旋 2 粒子與物質（包括自己）以單一強度耦合的時候（也就是說假如強等效原理成立），有交互作用、無質量、自旋 2 粒子的理論才有勞倫茲不變性。從某個角度看，Weinberg 的論證在所有方法中最深刻、最有力，因為重力子和能量動量張量耦合的性質是由其他、相當一般性的原理推導而來。一旦等效原理成立，我們就可以開始去建構愛因斯坦理論（見 [Wein 72]）。

最後要談一下，如何排除拉格朗日函數中 $h_{\mu\nu}$ 兩次微分以上的項。費曼對此並未多加著墨，頂多只在 6.2 節中提到，若只保留兩次微分以下的項，可以得到「最簡單」的理論。（參見 10.3 節中，另一稍微不同的脈絡下相關的討論。）他似乎並沒有預期到現代的觀念 [Wein 79]，也就是更高微分項一定要保留，但是如果時空曲率很弱，對於理論的預測而言，這些項可以忽略。這觀點背後的哲學是愛因斯坦理論的拉格朗日函數只是一個「有效拉格朗日函數」，它可以描述某更基本理論的低能現象。這個更基本的理論說不定在 Planck 長度 $L_p = (G\hbar/c^3)^{1/2} \cong 10^{-33}$ cm 的尺度下會牽涉到新的自由度（是超弦？）。有效格朗日函數允許所有跟一般原則不相違背的項，包括無論多少次微分的項都可以。但是就因次來說，高次微分項的係數會跟 L_p 的高冪次成正比。這

前言

麼一來，如果一個過程牽涉到的曲率的特徵半徑約為 L ，拉格朗日函數中四次微分項的效應比起二次微分項就小很多——小了大約是 $(L_p/L)^2$ 倍，對於任何合理過程而言，這個值都極小。所以我們很容易就能夠理解，為什麼丟掉高次微分項的理論仍然跟實驗非常相符。

另一方面，同樣的論證也讓我們預期一個「宇宙」項（沒有微分），其係數大約跟 L_p 同一數量級。這個宇宙常數和我們幼稚的預期相比，實際上極為微小。為什麼如此？至今這仍是重力物理的重大謎題之一 [Wein 89]。

幾何：

在搜尋出合理的理論之後（此理論能夠描述平坦空間中無質量自旋 2 粒子的交互作用），費曼很高興（見 8-4 節）最後的結果有幾何詮釋：「……事實是自旋為 2 的場有幾何詮釋；這不是可以輕易解釋的事——它真的太精采了。」在第八講到第十講中，理論的發展所使用的是幾何語言，比起前面幾講來說，這是遠更為傳統的做法。

在 9.3 節中，費曼提到他不知道畢安其(Bianchi)恆等式有任何幾何詮釋，他大略說明了如何尋找一個可能的幾何詮釋。他心目中所預想的幾何詮釋其實在法國數學家 Elie Cartan 1928 年的論文 [Cart 28] 中已呼之欲出，但是 1962 年當時的物理學家——即使是時相對論專家——卻多半不知道；而且這個觀念埋在費曼並不懂的微分形式(differential form)的語言中。Cartan 的詮釋講到「邊界的邊界是零」，這個觀念終於在 1971 年讓 Misner 和 Wheeler 挖掘了出來，並廣為宣揚。如果想要在技術層次了解這個詮釋，請見 [MTW 73] 的第十五章；[Whce 90] 的第七章對於這個幾何詮釋則有普及性的說明。

宇宙學：

費曼某些宇宙學的觀念相當摩登，他對物質起源的態度就是好例子。他不反對「穩定態宇宙論中物質會持續創造出來」的想法（他在 12.2 節裡說大霹靂理論中的問題也一樣嚴重）。他在 1.2 節和 13.3 節都強調宇

宇宙的總能量可能真的是零，而且創造新物質也是可能的，因為物質的靜止能量其實被其重力位能抵銷了。「創造新粒子不需付出代價，想到這念頭就令人興奮……」這個說法跟當今風行的宇宙是「免費午餐」的想法——奇蹟式的暴脹讓空無一物或幾乎空無一物膨脹到宇宙這麼大[Guth 81]——相當接近。其實更讓費曼擔心的是，如果宇宙來自「空無一物」，則重子數無法守恆。

費曼在 13.1 節中對宇宙密度的「臨界」值有其偏好，這個偏見到今天仍然很普遍[LiBr 90]。他在 13.2 節中提出了有趣（大致上也正確）的論證以支持宇宙密度很接近臨界值：他指出星系團和超星系團的存在意味著「重力能量和膨脹的動能是同一個數量級。對我來說，這表示平均密度應該處處都很接近臨界密度。」這個講法在 1962 年算是相當新鮮的。

顯然在 1960 年代初期，費曼早就體認到需要新的物理基本原理，才能說明宇宙的起始條件。在頭幾個演講中，例如 2.1 節，他離題去討論統計力學的基礎，他表達了熱力學第二定律應該有宇宙起源的信念。他是這麼說的：「問題是，在量子力學中，如何描述宇宙以前的狀態比較特殊這麼一個想法。」（他在同時期的其它著作《費曼物理學》[Feyn 63a]和《物理定律的特性》[Feyn 67]中也表達了類似洞見）。這麼說來，費曼似乎預見了二十年之後物理學界某些人對於量子宇宙學的著迷。他也在 1.4 節和 2.1 節強調，量子力學的哥本哈根詮釋不適用於宇宙範疇。

超星：

在 1962-63 年，當費曼正在講授這門重力課程時，加州理工學院也正好遇上很多和「強無線電波源」有關的新發現。

在那之前，有三十年的時間，天文學者一直很困惑這種最強的無線電波源到底是什麼。在 1951 年 Walter Baade [Baad 52]使用加州理工學院在帕洛馬山頂嶄新的 200 英寸光學望遠鏡，發現最亮的無線電波源——天鵝座 A——並非位於我們自己的星系內，反而跟某個不尋常、有點遙遠的星雲有關。這真是出乎天文學者意料之外。過了兩年，R. C. Jennison 和 M. K. Das Gupta [HeDG 53]使用位於英國 Jodrell Bank 的全新無線電干涉儀研究天鵝座 A，發現大部分的電波並非從這遙遠星系內部發出，而是從這星系

前言

兩側的大葉瓣區域來的。每個葉瓣區域大小約 200,000 光年，彼此相距 200,000 光年。1950 年代末期，加州理工學院位於 Owens Valley 的無線電干涉儀啓用。一直到 1962-62 年費曼重力課時，這個干涉儀和帕洛馬 200 英吋天文望遠鏡不斷發現更多雙葉瓣無線電波源。其中有些是位於星系內的，例如天鵝座 A；有些則位於類似恆星的點光源〔後來加州理工學院的 Maarten Schmidt 在 1963 年二月五日發現很大的紅位移 [Schm 63]，過不久，丘宏義給它取名類星體 (quasar)〕。從 1962 到 1963 年初，加州理工學院的天文學者爭先恐後地想對於這些陌生天體有更新更好的觀測，也忙著解釋其光譜；天文物理學者則拼命建構新模型（對於這段歷史感興趣者，請參見 [Thor 94] 第九章）。

大家很看好其中一個模型，是劍橋的 Fred Hoyle 和加州理工學院的 William Fowler [HoFo 63] 在 1962 年想出來的。這個模型認為每一個強無線電波源的能量皆來自星系中央某一個超重的恆星。這些無線電波源所發出的巨大能量（Geoffrey Burdidge 估算約有 10^{58} 至 10^{60} 爾格，也就是大約 $10^4 \sim 10^6$ 個太陽的能量）要求提供這些能量的恆星的質量應該是在 $10^6 \sim 10^9$ 太陽質量的範圍。正常的恆星頂多是太陽重量的一百倍。Hoyle-Fowler 星體可說是「超級的重」，後來有些人就把它們叫做超星 (superstar)。

在 1963 年二月或三月，Hoyle 在加州理工學院 Kellogg 輻射實驗室的「星球內部與核合成」討論會報告強無線電波源的超星模型。在問答時間，費曼說他認為廣義相對論效應會造成超星不穩定——起碼在超星不旋轉的時候是如此。它們會崩陷成我們今天所稱的黑洞。

當時 Hoyle 和 Fowler 都心中存疑。不過，幾個月之內他們兩位和 Icko Iben [Iben 63]（他是 Fowler 的 Kellogg 實驗室中一位資深研究員）就各自獨立地證實費曼或許是對的。芝加哥大學的 S. Chandrasekhar [Chan 64] 也獨立發現廣義相對論不穩定性，並作出具體詳盡的分析。

對 Hoyle 和 Fowler 來說，費曼的論點簡直就是「神來之筆」，除了費曼驚人的物理直覺之外，根本就沒有什麼依據來這樣想。Fowler 真是太佩服了，所以他在世界各地講學時，一再地描述當初那個演講以及費曼的洞見，因此費曼的（真實）傳奇又添一筆佳話。

話說回來，費曼的直覺並非信手拈來，不費吹灰之力。這個例子，以及其它例子，都是費曼出於好奇而經詳細計算後所得的結果。但是這個例子和其它例子不同之處在於費曼留下了當初經過苦思才撥雲見日的心路歷程：這就是第十四講。

我們從幾個來源拼湊出第十四講的當年背景：主要是 Iben 在 1963 年一月的筆記和他個人記憶，還有費曼大約在 1971 年跟 Thorne 的談話，以及 Bardeen, Frautschi, Hartle 和 Fowler 提供的資料。

大約在 1962 年底或 1963 年一月，費曼一定是想到了 Hoyle-Fowler 超星可能會受到廣義相對論力很大的影響。根據 Iben 的筆記，在一月十八日之前某日，費曼來到他在 Kellogg 實驗室內的研究室，講起廣義相對論如何影響超星，把主宰超星結構的廣義相對論公式寫給 Iben 看。這是費曼自己從頭導出來的，他很想知道像 Iben 這樣的天文學者怎樣從類似的牛頓公式建立牛頓星球模型。過了幾天，費曼又回來了，應該是一月二十一到二十五日那個星期。Iben 說：「費曼讓我簡直是目瞪口呆，他說已經把公式解出來了。他在一家電腦公司擔任顧問，就用那公司的電腦，可能就是當時那一代的工作站，實時地把公式解出來。」

這之後到一月二十八日星期一前，他只有幾天時間可以思索他的數值解（而且說不定大部分時間在準備同一個星期一要教的另一門大二物理學），然後就上了本書第十四講那一堂課。〔請注意，這一天只比 Schmidt 發現類星體的紅位移早八天。〕

在第十四講前後那段時間，費曼正在思考超星的行為，但那時他還沒有理解到廣義相對論會造成超星不穩定。因此，第十四講中的詮釋部分（14.3 節和 14.4 節）多半是錯的，但是錯得很有意思，因為裡面透露費曼如何用直覺去解題目。

費曼從來沒有審閱過 Morinigo 和 Wagner 整理出來的第十四講筆記。後來在 1971 年，他允准第十二講到十六講發行時，可能已經忘記了第十四講中的詮釋部分只是當時的思索過程而已，這個思路後來並沒有得到什麼有用的結果。

費曼的第十四講先介紹超星模型，「這模型雖然很簡單，但是它具有真實物體的很多性質。一旦我們了解了如何解決這個簡單的問題，我們

前言

再來擔心怎麼改進這個模型。」（這些改進，像是針對正負電子對、微中子發射、核燃燒、旋轉和不穩定性的影響等等，後來在 1963-64 年期間由 Iben [Iben 65]，Curtis Michael [Mich 63]，Fowler [Fowl 64] 和 Bardeen [Bard 65] 等人完成。費曼是主要的顧問也提供重要貢獻。）

費曼當初的目標在於了解相對論的效應，因此他的超星模型完全針對廣義相對論在探討，這跟先前在牛頓力學範圍討論的 Fowler-Hoyle 模型大不相同。反過來說，Fowler 和 Hoyle 的模型包括了氣體與輻射對於超星壓力 p 和內能量密度 ϵ 的貢獻，而費曼為了簡化把 $p_{\text{氣體}}$ 和 $\epsilon_{\text{氣體}}$ 忽略掉。這似乎也算合理，因為費曼探討重點是重量達太陽十億倍的超星，而 Hoyle 和 Fowler 也證明在牛頓極限時，超星主要是輻射，

$$\beta \equiv \frac{p_{\text{氣體}}}{p_{\text{輻射}}} = \frac{2\epsilon_{\text{氣體}}}{\epsilon_{\text{輻射}}} = 8.6 \left(\frac{M_{\text{太陽}}}{M} \right)^{1/2} = 3 \times 10^{-4} \left(\frac{10^9 M_{\text{太陽}}}{M} \right)^{1/2} \quad (\text{F2})$$

（為簡化討論，假設氣體是純氫氣。）由於超星的對流極強，每個核子的熵與半徑無關，這表示說， $\beta = 8 \times (\text{波茲曼常數}) / (\text{每個核子的熵})$ 也跟半徑無關。費曼知道這一點在整個相對論範疇都成立，只是(F.2)式會差個數量級為 1 的因子。

把 $p_{\text{氣體}}$ 和 $\epsilon_{\text{氣體}}$ 都忽略後，費曼接下來就在 14.1 節和 14.2 節建構超星在廣義相對論下的結構方程式。他說他已經用數值方法把積分作出來，結果列於表 14.1。我們得參照(14.2.1)式以解釋表 14.1，費曼用的參數 τ 是

$$\tau = \frac{4/3}{\text{每個核子的熵}} = \left(\frac{\text{核子靜止質量}}{\text{波茲曼常數}} \right) \frac{\beta}{6} = 1800\beta \quad (\text{F.3})$$

因為費曼所用的單位讓核子靜止質量和 10^9 K 都等於一。

圖 F.1 有助於討論費曼的模型及他的（錯誤）詮釋。圖中展示了費曼所建構的一群超星模型的特色（粗線），以及它們延伸到超相對論範疇的情形（上半細線），然後再延伸到牛頓力學範疇（下半細線）。

這些延伸部分是後來 Iben [Iben 63], Fowler [Fowl 64], Bardeen [Bard 65], 和 Tooper [Toop 66]算出來的。圖中的縱軸是負的超星重力束縛能，橫軸是超星半徑。

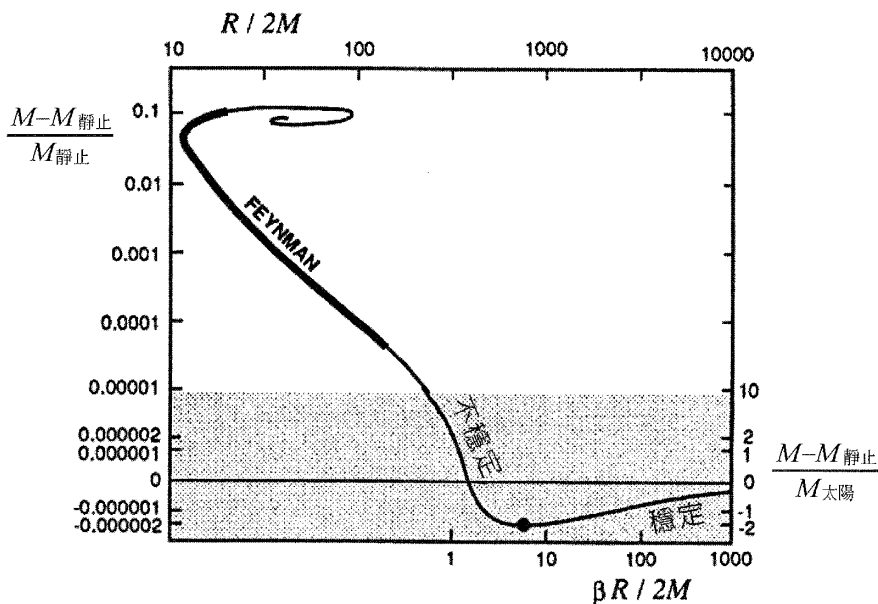


圖 F.1

由氫所構成的超星的束縛能。左邊縱軸是恆星的分數束縛能的負值，即 $(M - M_{\text{靜止}})/M_{\text{靜止}}$ ；其中的 M 是恆星總質量，而 $M_{\text{靜止}}$ 是所有其中核子的總靜止質量。上面橫軸顯示的是恆星的半徑 R ，所用的單位是具有相同質量的黑洞的許瓦茲喜爾德半徑 $2M$ 。左邊和上邊的標度對於白色區域中任意質量的超星都有效，但是在（近乎牛頓性的）陰影區中，只對 $M = 10^6 M_{\text{太陽}}$ 有效。右邊縱軸是恆星束縛能的負值，以太陽質量 $M_{\text{太陽}}$ 為單位。底邊是 $R/2M$ 乘上氣體壓力和總壓力比值 β 。右邊和底邊的標度對於近乎牛頓性的陰影區域中任意質量的超星都有效，但是它們在全相對論性白色區域中則失效。縱軸標度是反正切的，也就是在 $|(M - M_{\text{靜止}})/M_{\text{太陽}}| \leq 1$ 的情形下，它幾乎是線性的，但是如果 $|(M - M_{\text{靜止}})/M_{\text{太陽}}| \geq 1$ ，它是對數性的。曲線中粗的部分來自費曼第十四講的計算，細的部分則來自 Fowler [Fowl 64], Iben [Iben 63], Bardeen [Bard 65], 與 Tooper [Toop 66]。

前言

在幾乎是牛頓範疇時（束縛能圖的陰影區），費曼沒有多作探討，在此 $p_{\text{氣體}}$ 和 $\epsilon_{\text{氣體}}$ 不能忽略，而束縛能（當初 Fowler[Fowl 64] 對於費曼的「神來之筆」會這麼回應）就是氣體效應（第一項）和廣義相對論效應（第二項）間的巧妙平衡：

$$\frac{M - M_{\text{靜止}}}{M_{\text{靜止}}} \simeq -\frac{3\beta}{8} \left(\frac{2M}{R} \right) + 1.3 \left(\frac{2M}{R} \right)^2 \quad (\text{F.4})$$

式中的 $2M$ 是黑洞的 Schwarzschild 半徑，這黑洞的質量跟超星質量一樣。

費曼在解釋他的模型時（14.3 節），先問內含固定核子數（例如，有固定的核子靜止質量 $M_{\text{靜止}}$ ），同時逐漸把熱能輻射出去，因此總質量 M 漸減，本身也越來越緊密的這種超星如何演化？費曼找到一種獨特的演化方式：當超星發出輻射時，半徑反而增加（沿著圖 F4.1 中的粗線向下向右），而且核心溫度下降。這和多數恆星的行為相反，多數恆星發出輻射時，如果沒有在燒燃料，會收縮而且變熱。（如果費曼當初不是探討束縛能曲線最低點左側的相對論範圍，而是保留氣體效應，去計算右邊的牛頓力學範圍，他就會得到完全相反的結果：超星發出輻射時會收縮，而且變熱。）

費曼接著就問，他的超星模型是否穩定？他強調：「（從量化的觀點）這些星星的穩定性有待研究。」接著他就把心中的初步心得拿出來講：

「有相同核子數和相同 τ （相同熵）的模型可以拿來比較，看彼此的半徑及中心溫度如何。顯然半徑有極小值（在圖 F.1 最左邊的大彎）……這一點令人不禁猜測，說不定這種星有穩定的半徑。」費曼這時正在摸索一種分析穩定性的方法，大約一年後他的博士班學生 Bardeen 將這方法發展完成。Bardeen 的完整版本[Bard 65, BTM 66]指出，如果我們沿著束縛能的曲線移動，而且只限制於固定靜止能量的星星時，熵會隨模型不同而變化，除非剛好束縛能的極大或極小點附近，因為它在那裡是不變的。這意味著，在每一個極大或極小點，星星處於一種頻率為零的形變模態，這個模態可以讓它從一種平衡模

型轉變成另一種模型，同時讓熵、束縛能和靜止質量保持固定。這意味著一個徑向振盪型態在每個束縛能的極值處會改變穩定性。Bardeen 分析了各模態的本徵函數所需有的形式，推導出一個結論：通過極值時，束縛曲線如果呈順時針旋轉，模態就變得不穩定；相反的，如果是逆時針方向，就會變得穩定。（不管你沿曲線的哪個方向前進，都是如此。）將 Bardeen 的分析用於圖 F.1，可以知道在右下方近乎是牛頓力學式的模型（輻射時會縮小）是穩定的，而且當它們接近束縛能曲線的極小值時，就會失去穩定性，崩陷成黑洞。過了這極小值之後的各種模型（包括所有的費曼模型），有一個徑向脈動的不穩定模態；過了束縛能曲線的第一個高峰（圖 F.1 的左上方），則有兩個不穩定模態，等等。

費曼在 1963 年一月二十八日時自然是無從得知這一點，所以在第十四講用別的方法來探討他的超星模型的穩定性。他假設其中一個模型的重子(baryon)靜止質量是 $M_{\text{靜止}}$ ，然後它會分裂成兩個靜止質量為 $M_{\text{靜止}}/2$ 的超星，但每個核子的熵仍維持固定。「我們能從這個過程獲得功嗎？或是我們得做功才能將原來的超星分裂開來？」從表一以及 (14.2.1) 公式，他認為「這兩個星體……會較重，所以我們得做功才能分裂原來的系統。這意味著超星不會拋掉物質，而會聚成一團」，也就是說，星球可能是穩定的。

這個講法乍看之下很令人信服。但是，實際上似是而非（在第十四講之後，到出席 Hoyle 演講之前，費曼多半也想到了這一點）。費曼所設想從原超星分裂出來的兩個星體是在比圖 F.1 的粗束縛能曲線更高的位置，也就是說，它們比原超星更接近相對論區域。但是另外還有兩個星體模型，它們具有相同的靜止質量以及每核子熵，位於在這圖右下方束縛能曲線中穩定、近乎牛頓力學式的那一端。如果原星體分裂成這兩種恆星，能量會釋放出來，這表示原星體事實上不穩定，這是正確的。費曼當時沒想到這點，其實別人也一樣，因為沒有人在 1963 年一月二十八日知道束縛能曲線在陰影區的樣子。不過，我們可以合理假設，他在出席 Hoyle 演講之前已經看出自己的錯誤。

前言

費曼在誤判星體穩定性之後，繼續在 14.4 節中對將來超星研究的方向提出建議。他建議用變分原理來建構全然相對論性且等熵(isentropic)超星的平衡模型：「先固定核子數目（以及每個核子的熵），然後計算質量最低的型態。」兩年後，在巴黎的 John Cocke [Cock 65]發展出了非常詳細的變分原理。當時他應該不知道費曼的提議，但是得到的變分原理跟費曼所提的一樣（固定質量和核子數，讓熵盡量大）。後來 Cocke 用這方法建立相對論性星體模型。

費曼在 14.4 節講到「我們探討過靜態解之後，就來看看完整的動態問題。這些微分方程式實在很棘手」，其實費曼自己已求得若干方程式。後來舊蘇聯的 Mikhail Podurets [Podu 64]以及美國的 Michael May 和 Richard White [MaWh 66]也分別推導出這些方程式，並且用設計熱核武器的電腦程式的衍生版找到數值解。這些成績今天大家都耳熟能詳：星體經歷了 Feynman/Chandrasekhar 相對論性不穩性，就會內爆而形成黑洞。

費曼第十四講之後十年期間，快速旋轉的超星仍然是解釋類星體和強無線電波源能量來源的熱門模型。但是到了 1970 年代，快速旋轉且質量超重的黑洞模型逐漸佔上風。時至今日，物理界一般認為超星雖有意思，但它只是星雲核心演化到最後形成超重黑洞的短暫中間產物。參見 [Thor 94]。

黑洞：

在 1960 年代初期，黑洞的想法才剛剛出現，費曼當時的觀念可能稍微沒跟上。因此本書中最嚴重過時的部分大概就是第十一講及第十五講，這兩講所談的許瓦茲喜爾德(Schwarzschild)度規及其意義。

就某個角度來看，我們今天所講的黑洞，早在 1916 年許瓦茲喜爾德 [Schw16]解出愛因斯坦場方程式時，就知道了。但是接下來的數十年，多數物理學者一直不願意接受，因為許瓦茲喜爾德度規背後的意義太不可思議了。（連愛因斯坦自己也在 1939 年發表一篇論文[Eins 39]說黑洞不可能存在，他事後也表示遺憾。）即使是 Oppenheimer 和 Snyder [OpSn 39]在同一年對重力崩陷所作的精采分析也過了很多年才受到重視。Oppenheimer 和 Snyder 探討球形對稱、毫無壓力、密度均勻的「星體」如

何崩陷。他們發現，對外在、靜止的觀察者來說，當星體發生內爆，在星體表面逐漸接近臨界許瓦茲喜爾德圓周長(Schwarzschild circumference)時，內爆會逐漸減緩，最後停下來。他們又指出，隨著崩陷物質進入星體內的觀察者不會知道內爆停下來，因為觀察者會在有限的原時(proper time)之內就穿越過臨界圓周進入星體內，無法將訊號送出來給在外面的觀察者。這兩個參考座標對事件的描述可以如此不同，一開始的確讓人覺得很難想像。一直到 1958 年，David Finkelstein [Fink 58]找到一個座標系來分析許瓦茲喜爾德度規，才把調和了這兩種描述。Finkelstein 的座標系讓人比較容易同時想像穿越臨界圓周往內掉的微塵粒子的世界線，以及向外跑的光子世界線如何在臨界圓周停止前進。從這個分析可以看出，許瓦茲喜爾德時空的「因果結構」(causal structure)很不尋常，因為在「視界」(horizon)以內的東西都會被吸入表面積越來越小的球，無一倖免。(對某些人來說)這裡面的觀念表示，一旦星體崩陷入臨界圓周以內，它就無可避免的會壓縮成時空奇異點。這的確是事實，Roger Penrose 在 1964 年證明[Penr 65]，不需要用到理想化的假設例如球狀對稱或是零壓力，這一點也會成立。

因此，費曼講授這些重力課程的時機很不巧。因為黑洞研究的「黃金年代」正要開始，接下來十年內很多精采見解紛紛問世。在 1962-63 年間，誰也沒想到後來會有這些新見解，而且這些新想法讓廣義相對論脫胎換骨，開創了新的學問，叫做相對論天文物理。

費曼在 1962-63 年間對許瓦茲喜爾德度規的看法，其實深受他的老師 John Wheeler 的影響。Wheeler 多年來一直對 Oppenheimer 和 Snyder 的看法半信半疑，因為他認為物理上不合理。即使到了 1958 年，他仍在主張，如果用更合乎實際狀況的狀態方程式來分析重力崩陷，就會得出本質截然不同的結果[HWWh 58]。(後來黑洞幾何的因果結構逐漸為人所了解，這個看法就不太站得住腳了。)不過，Wheeler 也逐漸同意重力崩陷會形成黑洞是必然的結果，跟 Oppenheimer 與 Snyder 看法不謀而合。(Wheeler 會改變想法，是 Martin Kruskal[Krus 60]促成的。Kruska 澄清了黑洞的因果結構，他和 Finkelstein 的論點是各自獨立作出的。事實上，Kruskal 那

前言

篇影響深遠的論文是由 Wheeler 執筆，不過裡面的計算和見解是 Kruskal 自己的。) 在 Wheeler 仍然心存懷疑的那些年，他在發表論文時甚少提及 Oppenheimer 和 Snyder 的結果——這是他一向的風格。費曼在 11.6 節提到微塵的崩陷很值得研究。他竟然不曉得，Oppenheimer 和 Snyder 早在二十三年前就徹底研究過啦！在 15.1 節，費曼根據第十四講的（錯誤）結論推測，星體若由「真實物質」組成，就不會崩陷到臨界圓周之內。

費曼有幾次提到幾何動力學(geometrodynamics)，這是 Wheeler 從 1950 年代中期開始推動的研究方向。他到了 1962 年仍然在推（只是沒當初那麼積極）[Whee 62]。那時 Wheeler 和合作者希望能把基本粒子解釋成幾何物體，這些幾何物體來自於沒有物質在內的重力場方程式的古典解（的量子版本）。Wheeler 對「沒有電荷的電荷(charge without charge)」這觀念特別感興趣。他注意到電力線若被蟲孔(wormhole)不尋常的拓撲所圍住，要是觀察者的解析度不足以看清蟲孔的口，那麼每個蟲孔的口就好像是一個點狀帶電物體而已[MiWh 57]。Wheeler 強調，許瓦茲喜爾德解的空間切面之中，兩個在極遠處是平坦的區域中間有窄頸區域相連，這就是他設想的蟲孔幾何的模型。

很明顯，費曼醉心於蟲孔理論，他在 11.5 節介紹這個想法，到了 15.1 節和 15.3 節又再提起。請注意，費曼把困在其重力半徑內的星體叫做「蟲孔」，「黑洞」這名詞要到 1967 年才出現（是 Wheeler 先叫的）。當年費曼稱為「許瓦茲喜爾德奇異點」的東西，就是我們今天所稱黑洞的「視界」。這式很不幸的用法，因為它跟黑洞中央有無限時空曲率的區域——真正的奇異點——相混淆。費曼始終沒有清楚地討論這個真正的奇異點。

到了 1962 年，大家對許瓦茲喜爾德度規的因果結構已有充分了解。這一點在費曼提到的 Fuller 和 Wheeler [FuWh 62] 的論文有詳細說明，也是 15.1 節的素材。（費曼講課很少引用論文。這篇論文是其中之一。它使用 Kruskal 座標來建構完整解析延拓的許瓦茲喜爾德幾何，並且畫出「Kruskal 圖」清楚地解釋類時(timelike)極端線(geodesic)和零(null)極端線。）費曼在課堂引述這文章的主要結論：許瓦茲喜爾德度規並非 Wheeler 感興趣的那種蟲孔，因為蟲孔的頸子是動態的，粒子若要通過就會緊束起

來。但是，Fuller-Wheeler 論文並未提到任何此因果結構在重力崩陷的深遠意義，我們也看不出費曼領略了這些意義。

從費曼在 15.2 節和 15.3 節的敘述也可以看出他並未了解（「Reissner-Nordstrom」）帶電黑洞解的因果結構。這是在 1960 年由 Graves 和 Brill [GrBr 60] 算出來的。請注意，費曼說：「就算粒子在它落下之前就已經反射出來，也並非不可能！」事實上，在解析延拓的許瓦茲喜爾德幾何中，極端線會在有限原時內進入一「新的宇宙」，不會再從黑洞出來（可參閱[HaEl 73]）。但是大家知道這個解的內部受到一般性的擾動就會不穩定[ChHa 82]。對於在重力崩陷中產生的「實際」帶電黑洞來說，情況就不同了，但是大家所知還是有限——不過很可能黑洞的核心非常奇異，以致於任何東西都無法通過這裡到「新的宇宙」去，起碼在古典廣義相對論的範圍是如此[BBIP 91]。

重力波：

遲至 1957 年，在 Chapel Hill 的研討會中，大家還很認真地討論，愛因斯坦理論是否真正預測了重力輻射的存在[DeWi 57]。大家會有這樣疑惑的主要原因是，要嚴謹定義重力波傳遞的能量相當不容易——麻煩是重力能量不可以表示成在局域可測量的（能量）密度的積分。

在 Chapel Hill 研討會中，費曼用很務實的方式來面對這一個問題。他描述了我們如何，在原則上，設計重力波天線來吸收重力波「所攜帶」的能量[DeWi 57, Feyn 57]。他在第十六講中很明顯是打算介紹這種裝置的一種變化形式；講義最後提到「我們可以明確地證明這些重力波會讓一堵牆熱起來，所以重力波帶有能量是毫無疑問的」，但並沒有進一步說明。Chapel Hill 研討會後不久，Bondi 在論文[Bondi 57]中介紹了某一型的費曼天線（說來有意思，Bondi 先前對重力波是否存在曾深表懷疑），但費曼本人卻從未有發表這方面的文章。關於費曼這方面工作目前所知最詳細的說明，是費曼在 1961 年二月給 Victor Weisskopf 的信[Feyn 61]。這封信包括了第十六講的部分內容，而且更深入一些，同時推導了在四極近似下輻射功率公式（這結果在 Chapel Hill 研討會也曾引用。）然後他在信中介紹他的重力波偵測儀：基本上是兩個珠子在一根剛性桿上自由滑動（但是

前言

有一點點摩擦)。重力波通過時，原子力會讓桿子長度保持固定，但是兩個珠子間的原距(proper distance)會振盪。因此，珠子在桿上來回摩擦，散發出熱能。(費曼把他給 Weisskopf 的信也附在上課講義中，發給上課的學生。)

無論這些想法對於參與 Chapel Hill 會議的某些人來說有多爭議，費曼關於重力波的結論可一點都不新。其實早在 1939 年，Landau 和 Lifshitz 的俄文經典教科書中就有部份章節談到重力波理論，英文翻譯本後來在 1951 年出版[LaLi 51]。他們的敘述既清楚又正確，只是依舊講得很簡潔。費曼給 Weisskopf 的信中提到 1957 年的會議，他說：「我沒想到大家花一整天討論這個問題，一堆『專家』都越聽越糊塗。因為大家眼光集中在找守恆的能量張量，卻沒問『這種波能不能作功？』」

儘管費曼非常尊重 Wheeler，他在 1950 年代末期和 1960 年代初期頗看不起大部分作相對論的人。在 1962 年波蘭華沙重力會議後，費曼給太太 Gweneth 的信中有露骨的敘述[Feyn 62]：

這次會議我一無所獲，什麼也沒學到。因為沒有實驗，這個領域不是很活躍，最優秀的人才沒幾個。因此這裡面有很多人頭腦不清楚，對我的血壓實在不太好：每次有人在會場外(例如午餐時間)問我問題，或是告訴我他在作的「工作」，我都會跟他們爭辯半天，因為這麼蠢的話都有人說，而且談得煞有其事。他們作的「工作」不外以下幾種：(1)完全無法理解，(2)模糊曖昧，(3)很明顯是對的，也是也不辯自明的觀念，偏偏要作冗長艱深的分析，還把它說得像是重大新發現一樣，(4)很明顯是正確的事實，早就被接受也檢驗過了，作者卻因為自己愚蠢而聲稱這事實是錯的(這是最糟糕的，沒有人可以說服白癡)，(5)想要處理多半解不出來，又明顯無用處的問題，而最後也證明作不到，(6)根本就是錯的。這個領域目前有很多所謂的「研究活動」，但是這些「活動」主要在證明前人的「活動」是錯的，或沒有用，或是很有希望，如此而已。這就好像罐子裡面有很多蚯蚓想爬出外面，結果只是彼此糾纏不清。倒不是因為題目很難，只是聰明腦袋忙著在作別的題目。下次記得提醒我，不要再參加什麼重力會議了！

費曼重力學

這麼措辭犀利的批判，即使在 1962 年也不算完全公道，也不見得百分之百正確的反映出費曼的心情。在 Chapel Hill 和華沙的兩次會議，DeWitt 都有參與，他表示[DeWi 94]：

我很同情費曼在華沙會議的反應，因為我也有同樣的感覺。（我記得一清二楚，他把怒氣發在 *Ivanenko* 身上，毫不留情面。）但是有人把費曼私人信件截頭去尾公開，沒有提供全貌，這樣作法無助於史實的澄清。雖然他覺得 *Chapel Hill* 研討會裡有些討論很荒誕無稽（我也有同感），但我想他整體來說還是滿開心的。我證明給他看，在彎曲空間中，他的路徑積分會導致薛丁格方程式多加入一項 *Ricci* 純量項，我記得他顯得相當感興趣。出席那次會議的人並不笨（例如 *Bondi*, *Hoyle*, *Sciama*, *Moller*, *Rosenfeld*, *Wheeler*），也能很聰明地跟費曼談話。（參與者是我親自挑選的——這是不公開的研討會。）費曼後來欣然接受邀請去參加華沙會議（這是公開會議），應該和他先前在 *Chapel Hill* 的經驗有關。我跟他華沙也有私下的討論，因此希望他沒有真的把我們的討論歸入信中那六類其中一類。

不管費曼看法在 1962 年是否成立，情況很快就轉變了。黑洞研究的「黃金年代」開始降臨。

哲學：

這些講義的一個特殊之處，就是費曼經常談到哲學議題。（其實他經常奚落作科學哲學的人，和「哲學」這個字眼。他也喜歡開玩笑地把哲學唸成「*philo-ZAW-phical*」。不過，他在哲學上的見解倒是很受推崇，起碼物理學者是如此。）例如，他在 1.4 節討論量子力學是否必須適用於巨觀物體。（他在那裡略述了重力必需量子化的理由，這些理由他在 1957 年 *Chapel Hill* 會議中也發表過，當時在會中引發熱烈討論。）另外，他也一直在思索 *Mach* 原理。*Mach* 認為物體的慣性來自它跟遠方物體的交互作用。這跟費曼當年當研究生時，*Wheeler* 與費曼所提電動力學的詮釋有點類似[WhFe 45, WhFe 49]：他們認為作用在加速電荷上的輻射反作用力來自電荷跟遠方電荷的互動，而非來自附近局部電磁場。因此在 5.3 節

前言

和 5.4 節讀到費曼很認同 Mach 的看法，不該感到驚訝。他在 5.4 節尋找 Mach 原理的量子力學形式，又在 13.4 節從宇宙學角度探討這個原理。費曼在 9.4 節和 15.3 節裡面勉強接受「沒有物質仍可以有曲率」的想法，這點跟 Mach 的想法很接近。

哲學的醒思也出現在若干題外話中。費曼在 8.3 節中評估空間是「真的」彎曲或平坦這種敘述的意義。在 7.1 節他解釋為何牛頓第二定律不只是沒有意義的重複（「力」的一種定義）而已。他在 10.1 節（「重要的是事實如何，不是怎樣證明」），與 13.3 節（「要證明物理結論錯誤或不嚴謹，光靠數學是不可能的」）中抨擊嚴格性。他在 13.4 節中質疑追求自然的真理應以簡潔為指導原則的觀念：「要講最簡潔的解答，何不就說宇宙空無一物，這是最簡單的解釋。大自然比這有創意多了，所以我拒絕認定大自然就該簡單的想法。」

費曼在 2.3 節和 2.4 節裡嘗試證明重力來源是微中子的交換，如此死心塌地追尋不太有希望的想法，可看出他的信念。我們學到了費曼認為科學家應如何面對新實驗現象：應該先設法用已知的原理去解釋，如果不行，再去猜測新的定律。然而，費曼也一再強調對於普遍接受的想法要心存懷疑，對於看起來古怪的觀念也不要排斥。他在課堂不斷提示：量子力學可能出錯（1.4 節，2.1 節），宇宙從大尺度來看不見得全然均勻（12.2 節，13.2 節），靜態宇宙學說不定哪天證明是對的（13.3 節），Wheeler 的蟲孔想法可能會反敗為勝（15.3 節），等等。

單圈量子重力：

費曼研究量子重力為他帶來重大發現（但是本書中並未詳述，只在 16.2 節略微提到），那就是必須在協變量子化場中引入「鬼」(ghost) 場才能確保微擾理論中單圈計算的么正性(unitarity)。這個發現的日期可以相當精確的定下來：費曼在 1962 年七月於華沙研討會中提到[Feyn 63b]：「單圈計算的問題只在我來之前一個星期才完全解出來了」。也就是說，他在講授本書之前已經完全解出來了。

如果只用傳統的協變費曼法則計算單圈振幅，費曼發現重力的非物理偏振態的貢獻沒有完全抵銷，造成么正性的破壞。他曾苦思一段

時間不得其解。後來 Gell-Mann 建議費曼分析一下無質量的 Yang-Mills 理論中較簡單的情況。（Gell-Mann 記得他是在 1960 年建議的[Gell 89]。）費曼發現他可以解決 Yang-Mills 理論中單圈的問題，然後又發現可以用相同的方法解重力的問題。他在華沙演講時說他已解決單圈的么正性問題，但是後來又卡住了——他不知該如何把這方法推廣到雙圈或多圈的情況。不過他抱怨「各位，我才只有一個禮拜」，他一直沒能解決這個問題。

關於這個問題，當時還有一段軼事[Feyn 63b]。在華沙演講後的問答時間裡，DeWitt 一直要費曼仔細說明如何在單圈的情況保持么正性，費曼遲遲不給。DeWitt 一直堅持，費曼終於首肯，給了冗長的解釋，不過他在解說前先強調：「現在要向你證明，我也能夠寫那種沒人看得懂的公式」。說來有意思，後來把 Yang-Mills 和重力的協變量子化推廣到任意多圈情況的正是 DeWitt [DeWi 67a, DeWi 67b]（Faddeev 和 Popov [FaPo 67]也獨立地得到同樣的結果）。值得提起的是，費曼自己的路徑積分技巧對公式的推廣是關鍵，而且 DeWitt 以及 Feddeev 和 Popov 的完整結果很明顯地受到了費曼的單圈公式的啓發。

費曼在這重力課程後來（本書沒有納入的部分）講到量子重力和 Yang-Mills 理論的圈圖修正項。他先說明在華沙會議講過的單圈結果，然後介紹他要推廣到高階所作的努力。老實說，這幾講的內容很複雜，也不易了解，有時甚至還能感受一絲挫折感。我們猜，費曼對找不到滿意的高階項解覺得不好意思，因此沒有准許發行後來這幾講。

費曼過了很久才把他的結果詳細地寫成兩篇論文[Feyn 72]，放在慶祝 Wheeler 六十歲生日的論文集。要不是我們兩人之一(Thorne)當初一再催請，就不會有這兩篇文章。當初雙方講好，Thorne 可以每周一次，在事前講定的時間打電話到費曼的家，提醒他寫稿，以納入 Wheeler 的慶祝論文集。Thorne 電話一直打到文章交出來為止。看得出來，費曼那時在回顧量子重力學時，心中頗有掙扎。

費曼當時有個目的，就是要解決這理論的重整化問題。在華沙會議時，他表示不確定是否可以重整化。但是在 16.2 節他的語氣更強：「我猜這個理論無法重整化。」這個講法在今天看來，顯得極度保守。不過，

前言

費曼一向不願用是否可重整化來作為判斷理論的準則，他在 16.2 節承認他不知道「不可重整化」是不是可當作反對某個理論的重大理由。

結語：

任何三十年前整理的重力學教材，今天來看難免顯得過時，起碼某些方面是如此。本書自然不例外。此外，我們相信費曼自己對於這些演講並不滿意，甚至在講課當時就已這樣。他原先曾希望，透過教這門課能讓他把對於量子重力學的研究整理出個頭緒來。但是他沒有作到。學年快結束時，學生很明顯看出費曼感到沮喪挫折。因此，談量子重力的那幾堂課的筆記（從第十七到第二十七講）就遵照費曼自己的願望，沒有收入本書。

儘管如此，我們仍然覺得本書第一講到第十六講中有不少珍貴內容，可供物理學者，學生，歷史學者，和仰慕費曼的人欣賞。而且，這些演講都很有趣。書中有很多段落讓我們得以一窺一個偉大心靈如何從原創觀點去探討艱深的問題。費曼花了很多年在用心思索重力的問題，但是形諸文字的報告卻非常稀少。本書中的十六講展現費曼的清晰思維，能成為他作品集的一部分，應該會很受歡迎。

感謝以下人士對於本序言提供資料及建議，在此致謝：Jim Bardeen，Stanley Deser，Bryce DeWitt，Willy Fowler，Steve Frautschi，Judy Goodstein，Jim Hartle，Icko Iben，Bob Kraichnan，Charles Misner，Fernando Morinigo，Jim Peebles，Alan Sandage，Bill Wagner。

加州理工學院，1995 年五月

量子重力

Brian Hatfield

費曼在 1962-63 年間開這門重力課，接近他自己所稱「重力期」的尾聲。他那時研究重力的主要動機是他對量子重力極感興趣。費曼在 1980 年曾告訴我，當初在 1950 年代，他以為量子重力的問題應該很輕易就可以解決。畢竟，重力非常**微弱**。再加上當時微擾量子電動力學已經非常成功，他以為對於重力來說，只要算到第一階就綽綽有餘，不必再往下計算。當然，他原先也預期，要定義一致的量子理論可能會碰到困難（比方說，若要作重整化，重力常數的因次是個阻礙）。不過，他當初**並不是**要先完整又一致的將重力場量子化，然後再去算結果。他的想法剛好相反：他想要先計算各種特定過程的微擾振幅，例如重力子的康普頓散射，然後一個一個的處理可能出現的有趣難題。他所謂的「有趣」難題是指新的、大家不熟悉的重力問題，先前在量子場論中不曾出現過的。因此，剛開始的時候，費曼忽略紫外發散和重整化的問題，直到後來才去面對。最後，因為實在找不到可重整化的途徑，大家不得不放棄微擾量子重力學。儘管如此，費曼的「作戰計畫」給他帶來場論的重大發現：需要引入協變「鬼粒子」(ghost particle)才能在單圈情況保持么正性（見前言中的討論）。

本書是三十年前的授課講義。從裡面我們可以回顧費曼當時如何分析量子重力，也了解那時研究的走向。

幾何和量子場論的關係：

探討古典重力論的標準做法（當初歷史也是如此進展）是從等效原理下手，然後逐步發展幾何觀點。費曼很少遵循標準做法，他頗為自豪能這麼做。他辦公室的黑板一角寫著：「除非我親自創造，否則我不能理解」。這句話一直在他黑板上沒擦掉，達七年之久。我第一次看到是在 1980 年秋

天，到 1988 年二月還在（見[Feyn 89]）。所以費曼會從非幾何觀點去創造廣義相對論並不令人驚訝。從實務角度來說，起碼我們不必為了研究重力物理而需先學什麼「花俏」（費曼如此說）的微分幾何。（反而是**只要**先學一些量子場論即可）。不過，既然最終目的是要把重力量子化，費曼覺得幾何解釋反而是障礙。從場論觀點，我們可以避免一開始就真正去定義量子幾何、漲落拓樸、還有時空泡沫的物理意義；而是等到量子化後再去看幾何意義。（請看，例如，Sachs 方程式以及費曼在[Feyn 63b]的回答。）費曼當然覺得幾何詮釋是「太棒了」（8.4 節）。但是無質量、自旋 2 的場可以解釋成一種度規這事實僅是「巧合」而已，它「或許可以從某種規範不變性的角度來了解。」

現今我們可以幾何來理解古典規範理論，例如電動力學和 Yang-Mills 理論（見[Yang 77]）。向量位勢 A^a_μ 是主纖維束上的連絡係數。纖維束的結構群是規範群：在電磁學是 $U(1)$ ，在 Yang-Mills 是 $SU(2)$ ，在古典色動力學是 $SU(3)$ 。場強度 $F_{\mu\nu}$ （也就是電動力學中的電場和磁場）就是這些連絡（位勢）的曲率。與這些場耦合的帶電粒子就是隨附的向量束（見[DrMa 77]）。所以，看起來費曼認為幾何跟規範不變性有關的直覺是對的。從費曼路徑積分的觀點來看，量子電動力學和量子色動力學其實就是對於主纖維束上連絡的積分。即使規範場論的幾何詮釋不見得幫我們解決 QED 和 QCD 問題（幫我們作積分或找近似解），起碼幫我們了解這些理論的拓樸意義〔例如 Gribov 矛盾(ambiguity)，瞬子(instanton)，真空角度(vacuum angle)和拓樸上不等價的真空〕，以及如何用拓樸質量建構新型的 Yang-Mills 規範理論。

重力子自旋及反重力：

重力理論的場論發展帶來一個好處，就是不需從頭使用完全一致、廣義協變的理論，也就是說，不用動到廣義協變原理來說明真實的(on-shell)重力子沒有質量、自旋為 2。這就好像由下而上來建造重力理論，不是由上而下用全套幾何工具來建造。書中從 2.3 節開始介紹這些進展，一直到第三章的頭四節。摘要如下：

量子重力

在點粒子的量子場論中，粒子間的力是由虛粒子來傳遞的。每種力都隨附著一個荷(charge)。帶荷粒子因與傳遞某個力的粒子耦合而感受到力。最熟悉的例子是電動力學。感受到力的粒子帶有電荷。電磁力來自交換光子，其自旋為 1。光子不帶電荷，因此彼此不直接相耦合，所以場方程式是線性的。QCD 是建立在 Yang-Mills 規範理論之上的強作用力(這種力讓核子聚在一起，因此也讓原子核聚在一起)理論，理論中的荷叫作色荷(color charge)。感受這種強作用力的基本粒子是帶色荷的夸克(quark)，傳遞強作用力的粒子叫膠子(gluon)。膠子本身帶色荷，會造成彼此間直接交互作用，所以它們的場方程式是非線性的。跟重力有關的荷是質量，從狹義相對論中，我們期待它跟能量等價。我們知道所有東西都帶能量，因此似乎所有東西都會跟重力耦合。傳遞重力的粒子叫重力子。重力子有能量，因此它們彼此間會直接交互作用。

若要用場論解釋重力，就必須在適當的靜態非相對論極限中，也得到牛頓的重力定律。也就是說，如果粒子 1 和粒子 2 之間交換重力子，兩粒子間距離為 r ，則在恰當的極限條件下，我們一定要得到牛頓的重力

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (\text{Q.1})$$

我們都知道，重力是遠距力（力與距離平方成反比，位能則與距離成反比），因此真實的重力子，也叫作自由重力子，必須沒有質量，跟光子一樣。但是電磁力與重力兩者有一點不同——重力永遠是相吸的。

為了要產生靜力，而不只是散射，粒子放出或吸收一個重力子後，仍必需維持在原先的（內）狀態，因此重力子不可能帶有半整數自旋（比方說，自旋 1/2 的波函數需旋轉 720 度才能回到先前狀態），而必須帶整數自旋。接下來，為了要決定到底是那個整數，我們檢驗兩種情況：(1) 兩個粒子完全相同，帶一樣的荷，或是 (2) 其中一個粒子是另一個的反粒子，兩者所帶的荷相反。如果我們計算兩種情況的位能，並取適當的極限情況，我們發現如果所交換的粒子自旋是奇數，則異性相吸同性相斥，跟電動力學相似。但如果自旋是偶數，則不管什麼情況都相吸。因此，重力

子的自旋必須是偶數，0, 2, 4, ……等等。

從 Eostos 實驗，加上晚近更精密的實驗數據，我們看出重力的確跟物體的能量有耦合，因此光子會受重力影響，也就是說，光子會在重力場中「掉下來」。假設重力子自旋為 0，則它跟自旋為 1 的光子不會耦合。然而，我們知道光線行經重物體（例如：太陽）會彎曲，因此重力子的自旋不可能是 0。

用場論的描述語言來說，在動量空間中，粒子 1 跟粒子 2 之間交換的粒子其格林函數為：

$$\begin{aligned}\Delta_0 &\sim \frac{1}{k^2} && \text{純量場} \\ \Delta_1 &\sim \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} && \text{向量場} \\ \Delta_2 &\sim \frac{\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}}{k^2} && \text{張量場}\end{aligned}\tag{Q.2}$$

其中 k^2 是交互作用所交換的粒子的四動量平方， $\eta_{\mu\nu}$ 是閔考斯基平坦空間的度規。自旋為 0 是以純量場表示，自旋為 1 用向量場表示，自旋為 2 用適當投影的張量場表示。要計算作用力大小，我們把傳播子夾在分別代表兩個粒子的應力能量張量 $T^{\mu\nu}(1)$ 和 $T^{\alpha\beta}(2)$ 中間。如果所交換的是自旋 0 的粒子，則傳播子 Δ_0 不能在分子提供任何 $\eta_{\mu\nu}$ 以便讓 $T^{\mu\nu}(1)$ 和 $T^{\alpha\beta}(2)$ 的指數配對累加。因此我們必須分別讓兩個應力能量張量的指數自己配起來。所以，如果交換的粒子其自旋為 0，則振幅跟

$$T^\mu{}_\mu(1) \frac{1}{k^2} T^\alpha{}_\alpha(2)\tag{Q.3}$$

成正比。也就是說，自旋為 0 的重力子只跟應力能量張量元素的對角和相耦合。但是閔考斯基時空的電磁場其應力能量張量沒有對角和。因此，純量重力場不會讓重力跟光耦合，所以重力子自旋不可能是 0。

既然重力子自旋不可能是 0，下一個可能就是自旋 2。古典理論中找不到自旋不能是 2 的依據。所以，本著「沒故障就不要修理」的想法，就

量子重力

當它是 2，更高的自旋就暫且不管。因此，重力場就用二階張量場來表達。一般性的張量場裡面有些元素我們並不需要。比方說，反對稱的部分跟自旋 1 的場類似（先前說過，電磁場強度 $F_{\mu\nu}$ 是反對稱的），因此必需拋棄，剩下的就是對稱的張量場。

總而言之，重力子無質量，因為重力是遠距力；它的自旋為 2，才能跟物質的能量耦合，而且永遠是相吸。

在 1.2 節中費曼簡單介紹重力和反物質的行為，也稱作「反重力」。只有一個實驗嘗試去直接測量，當粒子跟反粒子不完全相同時，重力和反物質有何行為。這個實驗是由 W. Fairbank 和 F. Wittenborn [WiFa 67, FWML 74] 作的。Fairbank 也參加了 1957 年的 Chapel Hill 會議（見本書前言），所以很明顯的，他是聽到 DeWitt 的看法 [DeWi57] 後才去作這個實驗的（[NiGo 91] 中也探討這個主題）。這個例子也說明了重力物理實驗有何困難。費曼在 1.2 節中提到 K 介子 [Good 61] 和 QED 真空極化 [Schi 58, 59] 是當初反對反重力的兩個理由。要是費曼在這些講義中所談到的量子重力微擾理論有發展成一套理論，則事情早就解決了，反重力肯定不存在。由於量子重力微擾理論起自閔考斯基時空，我們可預期 CPT 定理在每一階都成立，因此粒子和反粒子有相同的質量。此外，上面所討論的重力子性質不會改變，所以會導出永遠相吸的重力，包括反物質在內。

很不幸的是，上述微擾理論還不是自洽的理論，很多物理學者的創意就耗費在尋找可自圓其說的量子重力。雖然我們預期量子重力在低能量、遠距、微弱的極限情況會是廣義相對論 [Wein 64a, 64b]，但是說不定在很短距離範圍內，大自然需要物質和反物質展示不同重力效應才行。這種效應多半比當今實驗可探測的極限更小，因而能暫時避開反對反重力的論證。但這不表示我們有朝一日會看到東西「往上掉」。

規範不變性和等效原理：

重力論的量子場論的發展還有一項好處，那就是等效原理（廣義相對論基礎的基本原理）是規範不變性帶出來的結果。當我們由下而上建立重力理論時，規範不變性似乎就自然而然出現了。

費曼重力學

自由的重力子不帶質量，以光速前進，因此找不到座標系可以讓它靜止下來。所以把它的自旋投影到它運動的方向（以及相反的方向）上是一種不變量。重力子沒有質量，它只應該有兩種偏振（或螺旋性），不多也不少。一般而言，對稱的張量場會有兩個以上的**動力學**自由度。因此，一個只有兩個自由度的二階場不是張量，所以勞侖茲不變性就可能不保。這跟電動力學的情況很類似。唯有引入規範對稱性才能跳出這個進退維谷的情況。因此，我們在閔考斯基時空中建構一個作用量來描述無質量、自旋2的重力子時，需引入規範對稱性才能把動力學自由度降到2。如果不這麼做，量子理論就沒有勞侖茲不變性。Fierz與Pauli的作用量[FiPa 39]具有所需的規範對稱性，而且所包含的項至多是場的二次微分項（即沒有更高階的微分項）。有了這個作用量就足以去追尋廣義相對論（請看前言中的介紹）。規範不變性最後把我們帶到等效原理。我們一開始就得有規範對稱性，否則無交互作用、無質量、自旋為2的重力子量子論就不具有勞侖茲不變性。

對付無窮大：

大家早就知道，要結合重力跟量子力學必是困難重重。一但將場量子化，場的每個模態就有零點能量。場是由無窮多個模態所組成，量子場的真空能量也會是無窮大。透過場算子的正規排序(normal ordering)，可以很快地把這無窮大去掉。我們可以這麼做的理由是我們其實不過是在重新定義能量標度的零點而已，而這個零點本來就是可以任意定的。可是重力會跟所有能量耦合，一旦把重力引進來，就不能隨便這麼作了。量子場的真空起伏的確會產生物理效應，因此即使我們減少模態數目，剩餘的模態的真空能量密度可能仍然很大。這個真空能量密度在重力理論中會以宇宙常數的型態出現。但是宇宙常數事實上很小，所以這是很大的問題[Wein 89]。

接下來，如果使用 $\hbar = c = 1$ 的單位，重力耦合常數的因次是能量的負二次方。如果一個理論的耦合常數有正的因次，則這是一個有限（不會有無窮大）的理論；如果理論的耦合常數是沒有因次的，則這種理論是大概

量子重力

是可以重整化的。如果理論的耦合常數有負的因次，則處處可見無窮大，因而需要無窮多個參數來吸收這些無窮大，所以是不可重整化的理論。量子廣義相對論屬於後面這一類。

在重整化過程中，我們要用一些抗衡項(counterterms)去抵銷在微擾級數個別項中碰到的高能或紫外發散項。如果重整化成功，這些抗衡項就構成有限的有效作用量，可以看作是一種包括了所有量子效應的古典場論（請參看[Hatf 92]）。這些可能的抗衡項和原來的裸作用量(bare action)的對稱性要一致。也就是說，內在對稱性會嚴格地限制抗衡項的種類，因此就限制相對應的發散項的數目。因此一般來說，理論的對稱性愈多，就愈收斂。

微擾量子重力有某些已知的對稱性，和這些對稱性沒有衝突的可能抗衡項很多，例如，跟 R^2 , $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, R^3 成比例的項等等。一但我們發現了協變鬼粒子的必要性，而且也知道了把微擾項計算到任意高階的協變規則[DeWi 67a, 67b] [FaPo 67]，則量子場論的莫非定律（如果沒有對稱性可以限制抗衡項，則發散就會出現）就充分展現，因此這個理論大概就無法重整化。但是仍有一線希望：人們發現單圈（第一階量子修正項）的純量子重力是有限的[tHVe 74]，[Kore 74]。拉格朗日函數中的抗衡項是

$$\mathcal{L}^{(1)} = \sqrt{g} \left[\frac{1}{120} R^2 + \frac{7}{20} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right] \quad (\text{Q.4})$$

在古典情況，對純重力理論來說，這些抗衡項為零，因為我們有 $R = 0$ 且 $R_{\mu\nu} = 0$ 。但是，這並非純單圈量子重力論是有限的的原因。單圈理論在運動方程式成立時是有限的，理由是：可以重新定義度規來（在單圈這一階）吸收 $\mathcal{L}^{(1)}$ ，因此物理上無法觀測到這個效應。先前說過，對於純重力而言，

$$\frac{\delta \mathcal{L}^{(0)}}{\delta g_{\mu\nu}} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \quad (\text{Q.5})$$

這式子，按最小作用量原理，可產生純重力的古典場方程式。如果我們用

以下式子重新定義度規

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon \delta g_{\mu\nu}, \quad \delta g_{\mu\nu} \propto \frac{7}{20} R_{\mu\nu} - \frac{11}{60} R g_{\mu\nu}, \quad (\text{Q.6})$$

則

$$\mathcal{L}^{(0)}(g) + \mathcal{L}^{(1)}(g) = \mathcal{L}^{(0)}(g') + O(\epsilon^2) \quad (\text{Q.7})$$

其中 $O(\epsilon^2)$ 是雙圈項的貢獻，因此單圈項是有限的。但是一但物質場跟重力耦合，即使在古典情況，單圈的結果也不會有限的。

大家原本寄望有某種隱藏的對稱性可以使得單圈結果有限，而這種對稱性說不定可讓理論中純重力的部分有限。但是，電腦算出雙圈修正項是發散的[GoSa 86]，破壞了這個希望。關於紫外發散，最近有些回顧性論文，請參閱[Wein 79]和[Alva 89]。

若要改善紫外行為，有一個方法是在理論中放進更多對稱性。也就是說，為了改善量子行為，因而推廣或修正廣義相對論的作法，通常是基於額外的對稱性。有個常見的方法叫做「超重力」(supergravity)，請參閱[vanN 81]。它是基於玻色場和費米場之間的對稱性，叫做「超對稱」(supersymmetry)。把規範對稱原理用於超對稱理論上，讓超對稱成為局部性對稱（我們允許時空的每個點有獨立的對稱性變換），則規範不變性就一定會包括廣義協變原理，因此就包括了重力。簡而言之，每個玻色場有一個費米場作為超對稱夥伴，反之亦然。量子場的紫外行為有所改善，是因為普通來自圈圖的發散的玻色場（費米場）的貢獻，和它的超對稱夥伴費米場（玻色場）的貢獻相抵銷了。也就是說，超對稱性嚴格限制了抗衡項的種類。很遺憾的，如果時空維度是四，則仍存在著可能的抗衡項（最佳的情況時是從第七圈才出現這些抗衡項）。雖然沒有人敢確定，我們似乎需要某種額外的或隱藏的對稱性，或是神奇的東西，以便得到有限的理論。

近年來，最受矚目的量子重力理論是弦論。它是一種量子理論，其中的基本組成元素是一維的物體（而不是普通量子場論中的點粒子—可參

量子重力

閱[GSW 87]或[Hatf 92])。如果弦論可以統一所有基本作用力(也就是說,是一個「萬有理論」),那就表示所有的物質是由非常小,只有 Planck 長度那麼小的弦狀物組成。在一般的能量下,我們無法看到這麼細的弦,因此它跟點粒子一樣,彼此無從區別。如果所有的粒子是由單一種弦組成——也就是各種粒子只是同一種弦的不同激發態——則粒子的統一就達成了。弦的振盪模式之一是不帶質量、自旋為 2 的狀態,可以看成是我們所知的重力子。因此,弦論必然可涵蓋量子重力。當初大家對於弦論都興奮不已的原因是人們發現了弦論有微擾解,這些解在數學上是自洽的——或者說沒有「異常」(anomaly)——而且似乎這些微擾級數的每一階都是有限的。

直覺上來說,弦論的紫外行為之所以大有改善,是因為弦論有特大的對稱性(模不變性 modular invariance)。弦論修正了近距離的點粒子重力——讓物體可以交換「重弦態」(massive string state),這個情況類似於電弱理論用交換重規範玻色子(W^\pm 與 Z^0)來取代四費米子頂點,而改善了傳統弱交互作用的四費米子理論的紫外行為。舊的費米理論的耦合常數有負的質量因次,因此無法重整化。弱電規範理論用(描述交換玻色子的)沒有因次的耦合常數取代舊的耦合常數,所以這個新理論就可重整化了。弦論有引進一個新的耦合常數,叫做弦張力 T ,它的因次若以正常單位表示,相當於長度的負二次方, $L = \sqrt{c\hbar/\pi T}$ 。先前說過,用重力常數 G 、 \hbar 和光速 c 可湊出的唯一長度是 Planck 長度, $L_p = \sqrt{G\hbar/c^3}$ 。對於弦而言,一個很自然的單位是讓光速以及弦張力變成沒有因次—— $c = 1$ 且 $T = 1/\pi$ ——的單位。在這樣的單位中(用上面 L 與 L_p 的式子來消去 \hbar),重力常數變成沒有因次, $G = (L_p/L)^2$ 。

比起點粒子的理論,弦論有一點非常特別:時空的維度不是這個理論的內在性質,而是某個特殊解的性質。我們可以找到沒有「異常」(anomaly free)、具有 $N = 1$ 世界面(world sheet)超對稱的解,其維度是 D ,它小於或等於所謂的臨界維度 $D_c = 10$ 。

遺憾的是,儘管弦論微擾級數的每一項均有限,總和還是發散[GrPe 88]。而且,雖然弦論自成一格,它的解卻不是唯一。沒有什麼微擾機制可以幫忙挑選出一個特定解或是選出真正的真空解。從這個角度看,弦論

費曼重力學

的微擾理論就失去預測能力。再者，這個世界在一般能量下，也沒有超對稱。沒有微擾機制可以用來挑選出解，這種解允許非超對稱的低能量能譜。

非微擾重力：

目前看來，量子重力學還找不到一致的、有限的微擾數學理論。一般在定義微擾展開項時，我們必須選擇時空的背景度規，才能探討如何微擾。在量子重力的非微擾數學形式中，時空的一切性質得由這理論的解來決定。例如，在弦論中，弦在時空中的傳遞可以決定時空度規是什麼。因此，我們寧可時空度規不出現在理論的數學形式中。基於這個理由，以及前面所述的困難，大家目前在積極尋找有用的弦論非微擾形式。

由於微擾量子重力學不甚樂觀，大家重新檢驗以廣義相對論為基礎的非微擾量子重力學是否有意義。說不定，講不通的地方就是因為引入微擾所造成的。用 Wheeler-DeWitt 公式和正則變數來探討量子廣義相對論的正規方法停滯不前，因為要解的公式太複雜了。不過，最近有人用新的變數來重新表述廣義相對論[Asht 86, 87]，因而導致量子廣義相對論新的迴圈表現形式[JaSm 90]，這些式子比較容易解，也因此略有進展。新的變數中也揭露了廣義相對論和 Yang-Mills 理論有密切關係，值得進一步探討。

最後一點：費曼與指數

費曼曾告訴我，正負號對不對，係數有沒有差個 i 或 2 或 π ，只有在出版論文時才值得細心檢查。顯然，他對指數該怎麼用，公式該怎麼寫，也是一樣的態度。在頭六個演講中，幾乎每個指數都是在「下」[也參見 Feyn 63b]，導致他的公式跟別人的習慣寫法不同，他用 $x_\mu = (t, z, y, x)$ 和 $x^\mu = (t, -z, -y, -x)$ 。當時空不再平坦時，使用指數就不能掉以輕心。我已把所有的指數都調整過來，改成跟大家約定俗成的用法一致。費曼愛用 $\delta_{\mu\nu}$ 表達閔考斯基度規，我也改成標準寫法 $\eta_{\mu\nu}$ 。

費曼在帕沙迪那有部廂型車，車子後面和側面畫有費曼圖。在[Syke 94]文章中有這部車的圖片。我 1981 年第一次在 Caltech 的 Beckman Auditorium 的停車場看到這部廂型車，一開始並不知道是費曼的。但是我

量子重力

一下子就猜出是他的，因為 (1) 牌照上的字 QUANTUM 拼錯，寫成了「QANTUM」，(2) 車後的圖，唯一有符號的圖，所有指數都在下方。費曼聲稱，QED 的牌照被別人捷足先登了，而 QUANTUM 有太多個字母（話說回來，我記得費曼老是把 gauge 拼成「guage」）。畫在車上的費曼圖，光子的傳播子子上沒有註明 $\eta_{\mu\nu}$ ，因此在頂點的 γ 矩陣按照規矩應該用一個在上的指數，與一個在下的指數來標定。原先我還不確定這是費曼的車，但是從車窗向內窺視，看到後方有一捆乾草之後，原先的疑惑一掃而空，確定是他的車，錯不了。

目錄

CONTENTS

譯者導言	1
前言	5
量子重力	31

第 1 講

1.1 從場論看重力	1
1.2 重力現象的特性	2
1.3 重力的量子效應	10
1.4 巨觀物體量子化的哲學問題	11
1.5 假如重力是其他力場的效應	15

第 2 講

2.1 統計力學的假設	17
2.2 臆測性理論的難題	22
2.3 交換一個微中子	24
2.4 交換兩個微中子	25

第 3 講

3.1 重力子的自旋	31
3.2 我們的典型理論電動力學中的機率振幅與偏振	33
3.3 交換一個重力子的機率振幅	37
3.4 機率振幅中各項的物理解釋	41
3.5 重力場的拉格朗日函數	45

- 3.6 重力場方程式 47
- 3.7 定義新符號 48

第 4 講

- 4.1 場的正負號與張量秩之間的關係 51
- 4.2 純量物質的應力——能量張量 53
- 4.3 散射的機率振幅（純量理論） 55
- 4.4 平面波的性質與康普頓效應 57
- 4.5 重力子的非線性費曼圖 60
- 4.6 參與重力作用的粒子的古典運動方程式 62
- 4.7 粒子環繞恆星的軌道運動 65

第 5 講

- 5.1 行星軌道與水星近日點的進動 69
- 5.2 重力場中的時間膨脹 72
- 5.3 時間膨脹的宇宙效應，馬赫原理 76
- 5.4 量子力學中的馬赫原理 78
- 5.5 重力場的内能 81

第 6 講

- 6.1 應力—能量張量的雙線性項 85
- 6.2 建構至任意高階項皆正確的理論 89
- 6.3 在無限小變換下依然不變的不變式 91
- 6.4 正確理論的拉格朗日函數（至任意階） 95
- 6.5 應力—能量張量的愛因斯坦方程式 97

第 7 講

- 7.1 等效原理 99
- 7.2 等效原理的一些後果 103
- 7.3 重力場中時鐘最快的速率 105
- 7.4 廣義座標中的原時 107
- 7.5 度規張量的幾何詮釋 110
- 7.6 二維與四維的曲率 112
- 7.7 一般座標變換之下不變量的數目 114

第 8 講

- 8.1 非正交座標系中張量分量的變換 117
- 8.2 決定 $g_{\mu\nu}$ 不變式的方程式 120
- 8.3 關於「空間真的是平的」這個假設 122
- 8.4 各種重力觀點的關係 124
- 8.5 從切空間看曲率 126
- 8.6 從任意座標看曲率 129
- 8.7 曲率張量的性質 132

第 9 講

- 9.1 電動力學因為等效原理而所必須做的修正 135
- 9.2 張量的協變微分 136
- 9.3 向量的平移 140
- 9.4 曲率與物質的關聯 145

第 10 講

- 10.1 重力的場方程式 149
- 10.2 重力場中古典粒子的作用量 155
- 10.3 物質場在重力場中的作用量 159

第 11 講

- 11.1 球形星附近的曲率 167
- 11.2 物質與曲率的關聯 169
- 11.3 許氏度規，球形星外面的場 170
- 11.4 許氏奇異性 173
- 11.5 關於蟲孔這個想法的臆測 176
- 11.6 蟲孔理論研究的問題 178

第 12 講

- 12.1 宇宙學問題 181
- 12.2 導致宇宙模型的假設 183
- 12.3 宇宙度規的詮釋 187
- 12.4 宇宙距離的測量 190
- 12.5 有界宇宙或開放宇宙的特徵 192

第 13 講

- 13.1 宇宙學中宇宙密度所扮演的角色 195
- 13.2 宇宙可能是不均勻也非球對稱的嗎？ 197
- 13.3 消失的星系與能量守恆 199
- 13.4 馬赫原理與邊界條件 202

13.5 天空中的謎	203
------------	-----

第 14 講

14.1 廣義相對論中的超星問題	207
14.2 方程式解與其參數的意義	211
14.3 一些數值結果	212
14.4 未來關於超星研究的計畫與猜測	214

第 15 講

15.1 許氏度規的物理拓樸性質	217
15.2 許氏場中的粒子軌道	219
15.3 幾何動力學的未來	221

第 16 講

16.1 物質場與重力的耦合	225
16.2 完整的理論：重力輻射的一個簡單例子	229
16.3 粒子衰變時的重力子輻射	230
16.4 粒子散射中的重力子輻射	234
16.5 古典重力波源	237

參考文獻	241
------	-----

索引	251
----	-----

1.1 從場論看重力

在這一系列演講中，我們將從各個角度來探討重力。重力的基本定律是牛頓發現的，這定律是說兩物體之間的重力與其質量乘積成正比，而與距離平方成反比。愛因斯坦後來修正了這個定律，使其滿足相對論的要求。愛因斯坦必須從根本上修正牛頓理論才能讓它與相對論相符。我們知道在狹義相對論裡粒子的質量不是固定值，所以一個基本問題是這種質量上的改變如何影響重力定律。

愛因斯坦在 1911 年就已寫下了他的定律，所以這並非一個新的課題。我們要解釋的物理現象早被愛因斯坦自己很漂亮地解釋了。因此一般的重力課程就追隨著愛因斯坦的腳步，從他的重力定律開始講起。但是我們其實不必然要跟著愛因斯坦走，在這裡由於教學上的理由，我們將走另一條路。今天的物理系學生知道許多愛因斯坦當時所不知道的東西如量子論、介子與基本粒子。當時的物理只包括重力與電動力學，而電動力學逼出了狹義相對論，所以對愛因斯坦來說，問題就是如何讓重力論和狹義相對論相容。

愛因斯坦的重力論據稱是理論物理最偉大的單項成就。在理論中，重力現象與空間的幾何有美妙的關聯；這是個非常刺激的想法。重力與電力皆遵循每個小孩子都懂的平方反比定律，所以兩者從表面上看非常相似。這使得每個「小孩」夢想著長大以後，她也能夠把電動力學幾何化。所以有一整代的物理學家嘗試著造出所謂的「統一場論」，將重力與電動力學結合為一體。這些統一場論，沒有一個成功，我們這門課不會討論它

們。它們多半只是數學遊戲，其發明者儘管喜歡數學，然而物理知識卻很不足，同時這些理論多數還是不可理解的。愛因斯坦自己就在研究統一場論，雖然他的工作起碼還不會太離譜，但是仍舊沒有任何一個統一場論能夠成功地結合重力與電動力學。

而且這一種統一場論還是不夠「統一」，因為我們現在已經知道物理不僅僅包含重力與電動現象而已；我們還需要擔心能否將介子、 K 介子、微中子以及所有其他三十多種已知粒子統一起來。所以只能統一重力與電動力學的統一場論還算不上是非常了不起的成就，因為除了重力與電動力學之外，世界還有很多別的東西。

我們所採取的途徑比較適合粒子理論學家，他們已經熟悉「場」這個概念，所以很容易接受構成宇宙的是二十九或三十一種粒子場，這些場都可包容在一巨大的方程式裡。重力現象僅不過是在這大熔鍋中再加上一個新的場而已。過去我們忽略了這個場。因為它只是大約三十個場中的一個，所以解釋重力就等於解釋所有已知場之中的百分之三而已。

可以用一虛擬的故事來描述我們的進路：想像宇宙中的某一角落，比方說一顆類似金星的行星，那裡的科學家知道宇宙中其他三十種場的一切，他們對於核子、介子等的知識與我們一樣多，但是他們完全不了解重力。忽然，他們做了一項有趣的新實驗，發現兩個中性的巨大質量物體會以一個很小很小的力相互吸引。現在金星上的科學家要如何解釋這樣奇妙的新現象呢？她們或許會嘗試用所熟悉的場論來解釋。

1.2 重力現象的特性

在更進一步之前，讓我們先回顧一下金星理論家在建構理論以解釋這奇妙新現象的時候，所必須知道的一些實驗結果。

首先就是這個吸引力遵循平方反比定律。我們從行星運動得知這個定律非常非常地精確。其次，這個力與物體質量成正比。加利略已經知道這一點，因為他發現所有的物體都以相同的加速度落下。不過我們要問這是很精確的規律嗎？原則上，該怎麼做很清楚：首先將一個物體的質量定義為其慣性，我們可以對物體施加一已知的力然後測量物體加速度而得到

第一講

慣性大小。接下來測量重量就可以知道重力大小，最後再比較結果。但是測量力與加速度的實驗很難提高其準確度，所以我們得用其他的辦法才能檢驗結果至 10^8 分之一的準確程度。Eötvös 是首先做到這一點的人。我們用的方法是比較地球的重力與地球旋轉的離心力。離心力純然是一種慣性作用。原則上，在某個既不是 0 度也不是 90 度的緯度上的鉛垂，並不會指向地球中心。當然在實際上，鉛垂不指向地球中心的另一原因是由於地球不是完美的球形。但是我們在做比較的時候，這一切都會被考慮進來。無論如何，在某個介於 0 度與 90 度之間的角度（見圖 1.1），鉛垂所指的方向是重力與離心力的綜合效應。現在用別種材料來取代鉛球，如果新材料的慣性質量與重力質量比值與鉛球不同，則新垂球所懸的角度就會與鉛球稍微不一樣。我們可以比較不同的物質。比如說，我們可以先用銅球，繼而再用氫球（話說回來，氫球很難做，用聚乙烯或許可以）就可以檢查慣性質量與重力質量的比值究竟是不是常數。

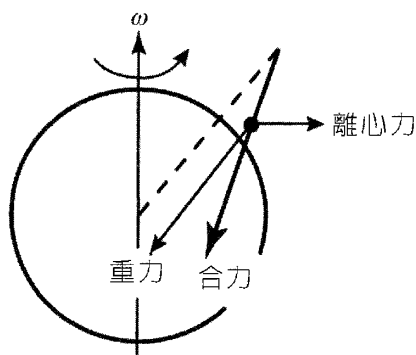


圖 1.1

實際上我們並不直接測量如此微小角度的差別，而是測量力矩。因為石英絲（quartz fiber）可以做得很細又可以吊住很重的東西，所以讓我們比較容易測量出很小的力矩。方法是將同樣重量的兩種材料掛在一根棒子的兩端，然後沿東西方向從棒子的中點懸住棒子。如果（物體所受）水平方向（垂直於重力方向）上的分力不相等，棒子就會受到力矩作用，我們可以測量這個力矩。最近 Dicke 做了這項實驗，沒有看到這個（力矩）

效應。結論是很多不同的物質（從氧到鉛）都有相同的慣性質量與重力質量比，準確度達 10^8 分之一。

我們也可以比較物體所受到的太陽重力與由於繞太陽運動而隨附的慣性力。畢竟，在地球上的我們是以很高的速度沿著地球軌道繞著太陽。我們之所以沒有感覺到這個運動，純然是因為我們週遭的物體也在同樣的軌道上。如果不同物體（由於太陽重力）落向太陽的加速度不一樣，它們就會傾向有不一樣的軌道，這種差異的效果就會顯現出來，其綜合效應就像是指向太陽的一個很小的力。人們可以用週期為二十四小時的變化，例如比較清晨與黃昏時扭秤（torsion balance）上所懸掛重物的行為，來尋找這個效應。當然我們會量到一些效應，有些起自於建築物的兩邊有不同的溫度——這類牽涉到非常細微效應的實驗其困難之處就在於確定我們所量到的效應是真的我們所要量的，而不是別的東西。總之，結論是所有的物體和地球一樣，有相似的慣性質量與重力質量比，準確度起碼是 10^8 分之一。這 10^8 分之一的準確度已經讓我們知道了很多重要的事。例如，我們知道原子核的束縛能一般約是每個核子 6 Mev（百萬電子伏特），而每個核子質量約是 940 Mev，也就是說束縛能約是總能量的百分之一。所以 10^8 分之一的精密度告訴我們束縛能的慣性質量與重力質量比是常數，其準確度約是 10^6 分之一。我們甚至可以檢驗位於較低能階上電子的電束縛能的慣性質量與重力質量比，因為一個核子質量的 10^8 分之一約是 9 電子伏特。如果實驗的準確度可以推進到 10^{10} 分之一（這在最近就應該可以達成），我們就能夠檢驗化學束縛能（約 2 電子伏特）的慣性質量與重力質量比到百分之五的準確度。

在這樣的準確度之下，我們也可以檢驗反物質的重力行為。因為電力與重力都遵循平方反比規律，這個驚人的相似之處使得一些人認為如果反物質能排斥物質就太好了。他們說電力是同性相斥、異性相吸，如果重力是反過來就好了，也就是同類相吸、異類相斥；對於重力來說，唯一可能的「異類」就是反物質。因為「真空極化（vacuum polarization）」對於鉛裡頭 K 電子的電束縛能有貢獻，而真空極化牽涉到虛（virtual）正子電子對（正子就是電子的反粒子），如果準

第一講

確度可以達到 10^8 分之一，我們就可以檢驗這類貢獻的重力行為，也就可以檢驗反粒子的重力行為。至今為止，我們沒有發現任何證據需要我們假設物質與反物質在重力場中的行為不一樣。所有的實驗與理論證據都似乎顯示重力只在乎能量大小，既然物質與反物質都具有正能量，因此兩者的重力行為就沒有什麼不同。

進一步的證據來自於光會在重力場中「掉下來」，而落下的幅度正好符合理論推算。例如，光通過太陽時會偏折，偏折的角度可以量得到（我們以後就會計算此角度的大小）。因為光子是自己的反粒子，所以我們得接受在這個情況下粒子與反粒子有同樣的重力行為。有一個練習或許對於某些人來說是很有意思的：建構一個理論讓從電子發出的光子不同於從正子發出的光子。但是既然沒有一絲證據需要這種東西來解釋任何現象，建構這種理論其實沒有什麼意義。這個理論必須能夠解釋一切已知的東西，程度上得和現有理論一樣好。但是非常可能這個理論會被其他效應推翻，因為它會預測出一些新的電磁現象，很快就會被實驗否定。

關於物質與反物質有同樣的重力效應，最直接的證據來自基本粒子 K_0 與 \bar{K}_0 衰變（decay）的實驗。這項實驗是在 MIT 做的，本身並非毫無缺點可言，但是或許我們可以用這個結果殺掉「物質與反物質有不同重力行為」的理論。提出這個論證的是 M. Good〔見 Good 61〕。

首先我們當然得假設 K_0 與 \bar{K}_0 都會受重力影響，否則論證就不成立了。 K_0 與 \bar{K}_0 彼此互為反粒子，所以我們可以看到如果一個受重力吸引，而另一個受重力排斥的後果是什麼。這些粒子有兩個衰變模式可以用 K_1 與 K_2 描述：

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_0 + \bar{K}_0), \quad K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_0 - \bar{K}_0)$$

這兩種衰變模式的振幅會相互干涉，實驗可以偵測到這個干涉效應，並且得到 K_1 與 K_2 的質量差 Δm ， $\Delta m < \hbar/10^{-10}$ 秒。因為實驗是在地球重力場中進行，所以這個 Δm 值與物質被重力所吸、反物質被重力所斥的假設不相容。如果重力位勢（potential）是 ϕ ，則正反兩粒子的質量其中之一會增加

$m\phi$ ，另一個會減少 $m\phi$ 。則預期的質量差就會大過 MIT 實驗所設定的上限值。如果我們考慮較大的太陽重力位勢而不是地球的重力位勢，甚至是考慮銀河的重力位勢，對於重力交互作用相等的程度，就可以得到更好的限制。當然執著於「反物質排斥理論」的人可以完全不理這整個論證，他們只需要說 K_0 與 \bar{K}_0 其實不會參與重力交互作用，然而這卻是一個新的特殊假設。很明顯的，任何單一的實驗結果可以拋棄一邊，只要我們願意想出一個特殊原因為什麼實驗結果正會是如此。

我們知道個別的自由中子如所預期會在重力場中往下掉。我們對此現象知道的相當精確，因為在設計中子干涉儀（neutron interferometer）的時候，需將此現象考慮在內。從反應堆（pile）出來的慢中子會被調整成細窄的射束，並在大約數百英尺之外才來偵測它。我們發現中子和其他測量得到的粒子一樣，會在地球重力場中往下掉。總之，關於重力現象令人驚訝的首要事實就是慣性質量與重力質量的比值是一個定值，無論我們在什麼地方檢驗這個值。

重力現象令人驚訝的第二件事就是它非常微弱。重力是如此之弱，以至於如果金星上的科學家已經把 β 衰變交互作用稱為「弱」交互作用，則重力現象的發現將是令人非常尷尬的事。重力顯然在我們日常生活中非常重要，重力比起我們腿部肌肉的力量並不算弱。所以當我們說重力非常微弱，我們的意思是與其他存在於粒子之間的力相比，重力非常小。這樣的比較應該會比與人的肌力相比來的更為客觀。譬如我們可以計算兩個電子之間的重力與電力的強度比值，答案是：

$$F_{\text{電力}} / F_{\text{重力}} = 4.17 \times 10^{42}$$

換句話說，重力真的是**極為**微弱。這樣直接比較力的大小會比用耦合常數來說明更有意義。通常我們說電磁力是「弱」的，因為 $e^2 / \hbar c$ 的值很小，約等於 1/137 而已。但是如果只說 1/137 並沒有太大意義，因為我們可以想像其實最有意義談論的數字應該是以有理化（rationalized）單位表示的電子電荷，亦即 $\sqrt{(4\pi e^2 / \hbar c)} = 0.31$ 這個值。它和 1/137 看起來很不一樣，但是其物理意義是一樣的。所以當我們說弱（ β 衰變）交互作用是微弱的

第一講

因為它的耦合常數是很「小」的 $GM_p^2 = 10^{-5}$ 這樣的值時，我們要問為什麼這裡出現質子質量 M_p ？如果弱交互作用是透過某種介子（今天我們將它稱為 B 介子）來傳遞的，或許用 B 介子質量的平方會更為自然。如果 B 介子質量比核子質量大很多，我們得到的耦合常數就會很不同於「小」的 10^{-5} 。

因為我們所知道的一切其他力場都比重力要強很多，所以我們有個感覺：大概永遠不可能把重力解釋成一個能夠統一所有已知其他力場的理論的某種修正——某種至今被忽略的剩餘項而已。 10^{42} 這個數實在太大了，令人禁不住想去找別的或許和它有關係的大數字。最早有這個想法的人是 Eddington。有一個數字這麼大已經夠奇怪了，如果有兩個大數字則更糟。所以我們難免要想兩者之間如果有些關聯就好了，也就是說兩者有某種因果關係，所以我們只需要解釋其中一個就夠了。Eddington 提出 $10^{42} = 2^{137}$ 這個關係，但是他的書其中一些部分太含糊了，可以說裡頭全然沒有個有用的理論，它真的是太含糊了。我們得找另外的辦法來解釋 10^{42} 。我們還知道別的大數字，例如，我們身上的原子或粒子數目。但是在做比較的時候，我們不想扯到人自己。重力牽涉到大型物體的運動，例如星系，所以我們或許應該尋找重力強度與宇宙大小的關聯。

雖然宇宙極大，它的邊界也不很清楚，不過仍可以定義出某種半徑。我們觀察到從遠處星球與星系所發出的光，頻率會變小，就好像這些星球與星系正飛離我們，而其速度與和我們的距離成正比。這現象可以用所謂宇宙爆炸的理論解釋。我們以後會了解，重力理論對於宇宙模型來說非常重要，我們以後會在課堂上討論這方面的問題。現在我們只需假設構成星系的物質是從大爆炸中的某一小區域發出來的，則很容易推論出離開中心的速度與距離有正比關係，因為比較遠的物質之所以會比較遠正是因為它們跑的較快。距離 R 與速度 V 的比例常數正是從假設的爆炸算起至今的時間 T ， $R/V = T$ 。這個時間〔其倒數就是所謂的哈伯常數（Hubble constant）〕大約是 13×10^{10} 年。這個值的誤差不小，幾年前，一般人還認為它是 2×10^{10} 年。誤差主要出在距離的測量；都卜勒效應（Doppler shift）比起和很遠星系的距離要更為容易測量。

這個常數代表宇宙的壽命，雖然我們不必然相信宇宙是在 T 年以前誕生的，但是 T 的確代表了宇宙的一個基本尺寸（fundamental dimension），就好比 e^2/mc^2 這個值代表了「電子半徑」。同樣的， T_c 這個長度代表了宇宙的「半徑」。我們是不是能夠設法從哈伯常數湊出與 10^{42} 同樣數量級的數呢？例如拿光通過電子康普頓波長（ \hbar/mc^2 ）的時間 10^{-21} 秒與 $T = 10^{17}$ 秒相比（拿「秒」這種人類時間尺度與 T 相比所得出的比值就會比較沒有意義），比值為 10^{38} ，與 10^{42} 有一段差距；如果以光通過質子康普頓波長 $\hbar/M_p c^2$ 的時間 10^{-24} 秒與 $T = 10^{17}$ 秒相比，比值為 10^{41} ，和兩質子間電力與重力比值 10^{36} 也有一段距離（雖然就數字遊戲而言，也許還不太離譜），但是不要忘記，我們所做的只不過是拋出一些大膽的猜測，看看能不能得到任何具體的點子。事實上，Dirac〔見 Dirac 37, 38〕就已經嘗試過某個重力理論，其中重力常數恰好就是這個值。這理論的困難之一是他必需讓重力強度能隨時間而變，因為宇宙年齡以康普頓波時間為計時單位正不停地在增加。但是當所有其他東西都「保持一樣」的時候，很難講清楚究竟重力會隨時間而變是什麼意思。既然有意義的量值是不帶單位的比值，Dirac 或許還不如就說電子所帶電荷會隨時間而變。所以他的理論並沒有很清楚的定義。不過我們目前就暫且略過這些困難，看看能不能憑直覺推導出任何重力常數隨時間變化的後果。有人說地震就是這樣來的：因為重力變弱，地球會慢慢地撐開，所以預期會有裂痕及其他現象。但是另一種理論說地球內部的磁性物質會流動，因此更能夠解釋為什麼地震集中在地殼上特定的區域。所以地震大概與重力常數隨時間變化無關。

我們或許可以嘗試利用星球演化理論來推翻重力常數 G 會變化的想法。我們不必了解星球演化的細節，只需知道當星球物質往中心落下時，會獲得重力能量而變熱，因而能引發核反應，也阻止了進一步的崩陷。如果假設重力常數隨時間變化，而且過去比較大，我們就得假設過去能量產生的速率較大，才能支撐較大的重力。詳細的計算顯示星球的光度（luminosity）大約與重力常數 G 的六次方成正比；大略地說，如果重力常數較大，星球中心的溫度就必須較高，以支撐較大的重量，所以核反應的速率就較快。我們要問這對於太陽的影響是什麼？而地球表面的溫度又

第一講

會因此而有什麼改變？我們對於地球表面的溫度略有所知，因為生命型態出現在地球上已有約十億年了。如果重力常數在過去比較大，太陽亮度會依 G^6 定律而比較大，而且地球的軌道會比現在更靠近太陽，落在地表的光強度會與 G^8 成正比。現在讓我們估計一下地球的溫度。精確的計算很難，因為地球是亮的，有雲以及其他各種複雜的狀況。不過我們還是假設地球是一個黑體（blackbody）來估計其溫度。黑體表面所輻射的總能量與其溫度四次方（ T^4 ）成正比，因為地球在旋轉，會與太陽發出的輻射能達成某個平衡溫度。如果我們把估計所得的溫度與行星表面的測量溫度相比，兩者出奇的相吻合（與任何已知的表面溫度相合）。所以我們可以用這樣的估計推敲出幾十億年前的地表溫度，假設重力常數比現在大上約百分之八。入射能量與 T^4 成正比， E 與 G^8 成正比，所以地球溫度與 G^2 成正比。所以十億年前的溫度比現在大上約百分之十六，也就是約 48°C 。

我們現在可以問地球科學家與生物學家地球表面在 75°C 時會是什麼模樣。這溫度還不足以讓海水沸騰，所以我們還不能放棄我們的理論。生命有可能發生在這樣的海水溫度。地球上有些地方，例如黃石公園裡的熱泉，某些細菌可以在類似的溫度存活。如果生命能存在於這種環境，應會是很奇怪的型態。在地球表面所能找到的最古老化石中，看不出有任何奇怪的事物可以當成如此高溫的合理證據。不過就我所知，我們還沒有堅實的證據駁斥地球以前曾經有過較高的溫度。

重力常數與宇宙大小之間還有另一個驚人的巧合，這和總能量有關。宇宙所有粒子的總重力能量大約是 GMM/R ，此處 $R = Tc$ ， T 是哈伯時間。事實上，宇宙如果是一個密度均勻的球體，應該還要乘上一項 $3/5$ 的因數，但是既然我們的宇宙模型不是那麼明確，我們暫且忽略這個因數。如果拿這個總重力能與宇宙總靜能量（rest energy） Mc^2 相比，我們會發現 $GM^2/R = Mc^2$ 這個有趣的結果，所以宇宙的總能量為零。事實上我們對密度與半徑並不十分清楚，所以不能確定 $GM^2/R = Mc^2$ ，但是這兩個數字居然會那麼相近已經是令人驚訝的巧合了。如果在宇宙中心創造一新粒子，它的重力能量是負值，大小是 Mc^2 ，所以創造這個新粒子並不需要能量，想到這一點實在是令人興奮。

在這些估計中，宇宙密度最難決定。我們當然看得到星球與星系，但是我們沒有概念究竟有多少黑暗星球，也就是已經燃燒完了的星球。我們也不知道星系際氣體的密度。測量來自遠處星球的 D 線吸收光譜，可以對於鈉在星系間的密度稍有些概念。但是鈉可能只佔星系際氣體的一小部分而已。我們需要知道氫的密度。研究星系與球狀星團的螺旋臂，可以知道星系中心似乎有一團黑暗質量存在。所有這些零星的證據還不足以讓我們得到任何關於宇宙平均密度的可靠估計。愛丁頓在他 1920 年代的估計中，星系的密度是每立方公分有一個氫原子。無線電天文學家最近研究星系的「氫光」，得到的值只稍微小一些，約每立方公分有 0.7 個氫原子。至於星系際物質的密度，則沒有任何證據。宇宙學家猜測星系際物質的密度要比星系密度小上十萬倍，也就是每立方公尺有十個氫原子。用這樣的估計，我們得出宇宙總能量為零這樣令人興奮的結果。為什麼會如此是一個重大的謎題，所以也是物理中的重要問題。畢竟如果研究的對象不是最重要的謎題，為何還要研習物理？

所有這些關於宇宙大小、粒子數目、以及重力三者之間有某種關聯的猜測都不是新鮮的事，過去已有很多其他人提出過。這些猜測大致上可分成兩類，或者是非常嚴肅地玩耍數學，建構數學宇宙模型，或是戲謔地指出數字間有趣的巧合，希望某一天一切都會弄清楚。

1.3 重力的量子效應

以下幾節課我們將開始建構一個重力的量子論。對於這樣一個理論究竟有無任何可以觀察到的結果，我們或許最好有些概念。首先讓我們考慮重力對於氫原子的影響。很顯然的，電子與質子間的吸引力如果大了一些，氫原子的束縛能就會有所改變。我們可以用微擾法計算這個能量變化 ε 。因為氫原子波函數 ψ 隨時間的變化情形是 $\psi = \exp(-iEt)$ ， E 的大小恰會使得震盪頻率大約是 10^{16} 赫茲。如果想看到能量變化 ε 的效應，我們得等一段時間，直到真正的波函數與不考慮重力的波函數兩者的相位差了約 2π 。但是 ε 的值太小了，以致於即便我們等上宇宙年齡 T 的 100 倍時間，相位也只不過差了 43 秒而已。所以原子中的重力效應是觀察不到的。

第一講

讓我們考慮另一種可能性：純然藉由重力而束縛在一起的原子，例如兩個處於束縛態的中子。如果計算這樣一個原子的波爾半徑（Bohr radius），我們會發現它是 10^8 光年，而原子束縛能是 10^{-70} Rydberg。所以找到一個足夠簡單的系統，既可從事量子計算，又可觀察到重力效應的機會不大。

量子重力論的另一項預測是重力的傳遞得靠交換某種虛粒子，這種粒子稱為重力子。或許有人期待在某種情況下我們可以看到一些重力子，就好像我們可以看到光子一樣。但是我們得記住，雖然人類很早就觀察到光（亞當就看過），只有到了 1898 年，在我們對於光的電磁場性質有了清楚的認知之後，才製造出了電磁波，而電磁波的量子面相則甚至還要更後來才觀測到。我們之所以觀察到重力，原因是地球把我們拉住，但是古典重力波至今還沒有觀測到。這與我們所知並沒有矛盾，因為重力太弱了，我們今天所能做的實驗其精密度遠不足以測量到重力輻射波——起碼是那些我們預期從最強波源（例如快速旋轉的雙星）所發出的重力波。重力波的量子性又更要比目前的偵測能力小上一百萬倍，所以我們毫無機會觀察到重力子。

1.4 巨觀物體量子化的哲學問題

重力的量子效應是如此之弱以致於一些哲學問題就出現了：或許自然是要告訴我們一些新的東西，或許我們不應該試圖量子化重力。有沒有可能我們不應該堅持自然是一致的因而所有的東西都應該量子化？有沒有可能重力不必量子化，而只有其餘的世界是量子化的？過去曾有很多論證說世界不可能是一半古典一半量子的。量子力學的假設是任何過程都隨伴著有一個振幅（amplitude）。既然我們得用振幅來描述一個粒子（例如電子），則它不可能有用機率而非振幅來描述的交互作用。考慮雙狹縫實驗（見圖 1.2），並且加上一個重力偵測器。假定這偵測器是古典的，原則上它能告訴我們電子會從哪一個狹縫通過。假設重力偵測器還沒有接收到能夠讓我們知道電子從哪一個狹縫通過的訊號；我們用振幅來描述電子的位置，此振幅的一半代表電子從上面的狹縫通過，另一半代表電子從下

費曼重力學

面的狹縫通過。如果重力的作用是透過一個（重力）場，則重力場也必然有個振幅，振幅的一半代表通過上面狹縫的電子的重力場，另一半代表通過下面狹縫的電子的重力場。但是這正是量子場的特徵！描述量子場的正是振幅，而非機率。所以看起來不可能消滅掉場的量子本質。

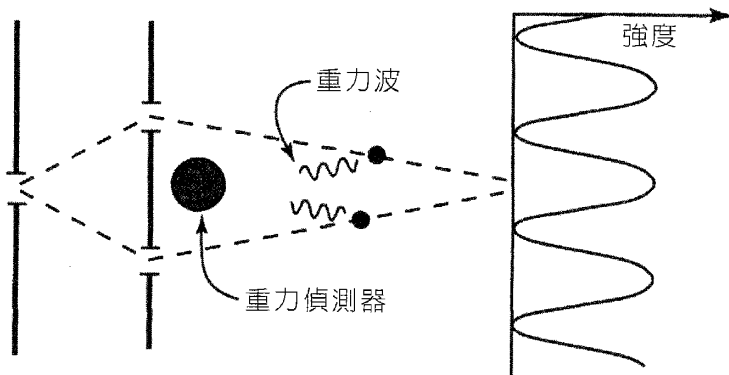


圖 1.2

儘管如此，我們還是不應該就這樣下定論。還是有可能量子理論不絕對保證重力**必然要**量子化。請不要誤解我的意思，當我說還不應該就這樣下定論時，我的意思並不是我們對於答案一點概念也沒有。我的意思是如果我們考慮另一種理論，雖然它最初看起來沒什麼道理，然而我們還是將它當做是對的理論去計算會有些什麼結果，或許我們會突然發現正確的答案就在這裡。如果我們的態度是「應該永遠心存懷疑」，卻只依據某一種偏見去計算與行動，就不可能找到答案。以這樣的精神，我想提出一種可能性：量子力學在大尺度與大物體上不適用。再一次提醒你，我不是說量子力學在大尺度上的**確**不適用，我只是說這與我們所知的一切並沒有矛盾。如果量子力學的失敗與重力有關，我們或許會猜這要發生在 $GM^2/hc=1$ 的時候，也就是質量 M 約是 10^{-5} 克，也就是約有 10^{18} 個粒子。對於這樣大小的物體，量子力學給的答案是可笑的。如果計算一粒沙跳過一座牆的機率，答案約是 $10^{-260000}$ ——太荒謬了。所以我們不能忽略在大尺度情況下量子力學可能是錯誤的，對於一般大小的物體而言，量子力學可能失敗。由此延伸，我們或許應討論一下關於觀察與測量的理論如何引

第一講

出了一些問題，譬如說薛丁格貓弔詭。如果說弔詭的意思是從邏輯可以推導出兩個不同的答案，則薛丁格貓（Schrödinger's cat）並不是真的弔詭，它只是點出量子力學中哲學難題的一種方式。每一個物理學家必需選擇她自己的立場。

假設有一個我們看不到內部的封閉箱子，裡頭有一隻活貓和一把上了膛的槍。貓被綁住了，所以如果槍發射則貓就會死掉。槍可以用一個蓋格計數器來引發，而這計數器所紀錄的是從一輻射源發射出來的粒子數。假設我們預期就機率而言這輻射源每小時放出一個粒子，現在的問題是在我們把箱子關起來一小時之後，貓還活著的機率是多大？

量子力學給的答案很簡單：最後有兩個可能的狀態，機率振幅是

$$\text{振幅} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\text{貓活著}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\text{貓死了})$$

但是如果我們思考一下這個答案，就會覺得貓看事情的觀點大概不會是這樣；它不會感到它是 $1/\sqrt{2}$ 活著與 $1/\sqrt{2}$ 死了，而是要不是活著就是死了。所以對於外在觀察者而言可以用機率振幅描述的事，一旦觀察者變成振幅的一部分就不必然可以用類似的振幅去描述。所以在量子力學中，外在觀察者的處境很奇特。如果想確定貓究竟是活著或是死了，她得在箱子打一個小洞然後往裡看。只有當她做了測量以後，這個系統才算是處於一個明確的最終態。但是很清楚地，從內在觀察者的觀點而言，外在觀察者的測量是由機率來決定，而非機率振幅。因此我們看到在量子力學的傳統描述中，包括外在觀察者的描述與不包括觀察的描述有基本的差異。

每次我們考慮原子事件的機率振幅時，這種弔詭就會出現，所以我們可以看得出它是如何地影響整個宇宙。傳統上，描述世界全部量子力學的是一個完備的「巨大波函數」（包括所有的觀察者），它滿足薛丁格方程式：

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi$$

這意味著無比複雜的無窮多機率振幅。如果我到拉斯維加斯賭博，而即將要把一些錢賭在輪盤裡 22 這個數字上。坐在我隔壁的女郎把她的牛奶翻倒了，原因是她看到了一位朋友，所以我就沒有下賭，然而 22 這個數字真的出現了。就我的宇宙而言，這一連串事件的關鍵就在於某個小小的光子打到女郎視網膜上的神經。所以每當有一個原子事件，整個宇宙就分岔開來。有一些人認為在任何情況下，都應該嚴格遵守量子力學，所以對於前面這樣的看法，完全可以接受。既然對於描述整個宇宙的波函數而言，沒有所謂外在觀察者可言，這些人認為如要恰當地描述世界，每個原子事件所引出機率振幅的分岔都得包括在內。可是即便如此，我們雖身為宇宙的一部分，卻知道世界分岔後走了哪條路，所以可以回溯我們的過去。現在我們面臨的哲學問題是，當我們在過去的路徑上做觀察時，我們觀察的結果是不是就變成真實的，就像如果有外在觀察者在做觀察時所得到的最終狀態一樣？這是非常令人迷惑的，尤其是當我們在觀看其餘部分的世界時，就算我們可以一貫地把自己永遠當成是外在觀察者，不要忘了世界的其他部分也同時正在看著我們，而且兩方通常對於彼此在對方身上所見所聞，都還相互同意。這是否意味著只有當我在觀察另一位在觀察某件正在發生的事情的觀察者時，我的觀察才成為真實。這是很糟糕的觀點。難道你真的會相信如果沒有觀察者時，真實就會不存在嗎？那一個觀察者？任何一位觀察者嗎？一隻蒼蠅算不算觀察者？星星是不是觀察者？當生命在公元前 10^9 年開始的時候，宇宙中沒有真實嗎？或者你就是觀察者？那麼在你過世之後，世界就沒有真實了嗎？我知道有一些可敬的物理學家竟然也買了壽險呢！我們該依據什麼哲學去怎麼理解一個沒有人的宇宙呢？

為了理出個頭緒來，我們必須考慮以下可能的情形，那就是對於足夠複雜的過程，（機率）振幅會變為機率。量子規則是要把振幅加起來，而只有在能夠偵測到相位差與干涉的過程中，這個事實（規則）才可以呈現出來。但是對於非常複雜的物體來說，相位的關係可能極端複雜。如果我們想看到干涉效應，複雜物體每一個部分的相位變化，彼此間的關係必須非常精確。如果有某種機制，在相位演變的時候，會加入一些不確定的

第一講

干擾因素，使得相位變得不是很精準，則機率振幅就會變為機率。當然，如果相位的確有這種內在的干擾機制，則或許這個機制還隨伴著有其他的後果。如果重力就是這種後果之一，那麼就沒有所謂量子重力論可言。對於這門課來說，這樣的想法是很很糟糕的。

這些想法都只是隨意的猜測而已，多談論無益。我們應該永遠記得，量子力學可能出錯，因為它和我們過去對於測量與觀察的哲學偏見有些不相容。

1.5 假如重力是其他力場的效應

讓我們回頭建構一個重力理論，就像金星上的朋友可能會做的那般。一般而言，我們預期對於如何處理重力這個新現象會有兩派的想法：

1. 重力是一種新的場——第 31 號場。
2. 重力可以從我們已經知道的物理推導出來，只是我們還沒能夠正確地將其算出來。

我們將先考慮第二種看法，看看它到底有沒有成立的可能。當我們知道宇宙間存在著一種普適（萬有）的吸引力的時候，或許會想起分子物理中的情形。我們知道所有的分子之間都有一個吸引力，這個力在分子間距離 r 較大的時候與 r^6 成反比（即 $1/r^6$ ）。這種行為可以用分子的偶極矩去理解，而偶極矩的來源是分子電荷分佈的起伏。大家都知道這個分子間的力是普適（萬有）的，因為我們知道所有的物質，只要溫度夠低，都會（因這個吸引力而）凝聚在一起。所以重力這個吸引力可能也是由某種東西的起伏所引起的，只是我們還不知道是什麼東西，或許是與電荷有關的東西。

因為我們在量子力學的計算中，得把所有量子態的效應加起來，因此常常會碰到無窮大。如果我們擔心量子力學因而會出錯，我們或許應該在重力、宇宙大小、以及量子力學中無窮大的這個問題尋找出一個關聯來。當我們想把級數 $\sum_n 1/(E - E_n)$ 加起來的時候，無窮大就會出現。但是有可能如果我們考慮整個宇宙，就不需要像一般情況那樣，把所有的虛態加起來，而只需要把某些能夠從宇宙其他部分借到足夠能量的虛態加進來

就可以。如果一個理論不允許虛態所帶的能量大過宇宙所有的能量，則這種理論就與一般的理論有所不同，因為通常我們假設宇宙總能量是無窮大的。這樣就與常見的理论不一樣，但是我認為像重力般的現象不會來自於這種新理論。

我們可能會想重力是否來自於交換一種已知的（虛）粒子，例如微中子。畢竟微中子有適當的性質，因為它是沒有質量的中性粒子，所以它所傳遞的效應會與距離成反比($1/r$)，而且交互作用會很微弱。

在下一講，我們會研究這個微中子重力理論，並且了解為何這個理論行不通。然後我們會開始建構一個理論，裡頭把重力看成是第 31 個場。

2.1 統計力學的假設

我們在建構重力理論的時候，得小心不要被現今科學的偏見矇蔽了。在上一講，我們看到在目前理解宇宙的方式中，機率出現的方式不是太令人滿意。如果我們真的認為可以用一個很大的波函數來描述宇宙，而不需要外在的觀測者，那麼就沒有東西可以變成機率，因為沒有觀察者在做測量！儘管就我們的需求而言，波函數（代表各種測量結果的機率振幅）可以很精確地描述局部的宇宙，很多物理學家還是懷有以上的看法。

同樣地，一般基礎課本對於統計力學的描述也有其缺失，雖然這和重力理論沒有太大的關係，卻和我們以後要討論的宇宙學有關。通常我們假設所有狀態出現的先驗（a priori）機率都相等。但是在我們的世界中這卻是錯的。依賴上述假設的物理並不適合用來描述這個世界。世界上有些人（物理學家除外）——例如地質學家、天文學家、歷史學家、生物學家等——他們認為如果我們去探索宇宙中從未觀察過的另一角落，多半會發現某些組織是無法用我們所相信的物理去預測的。以我們的經驗來說，如果翻開一本封面寫著「拿破崙」的書，應該就會發現書裡頭確有一些和拿破崙有關的東西。我們當然不會期待把書打開的時候，會發現一個處於熱力平衡的系統。但是物理學家還沒有找到方法來估量我們在面對未知宇宙的角落時，看到某種東西的機率是多少。地質學家比物理學家更能預測當我們打開某一類石頭時，發現化石的機率有多大。

同樣地，天文史家與天文學家發現我們在宇宙的每一角落都看到星星，這些星球內層較熱，外層較冷，是非常遠離熱平衡的系統。

從一般熱力學的觀點來看，這種情況是很不尋常的，我們只要考慮一下簡單的有序化（ordreing）就可以理解。將一個盒子想成是宇宙，裡面有黑白兩種粒子。假設在宇宙的某一個區域，也就是盒子中的一小角落，我們看到所有的白色粒子沿著對角線與黑色粒子區隔開來（見圖 2.1）。這種情況出現的先驗機率是非常非常小的，因為以我們現在的了解，這種情況是很不可能出現的統計起伏（statistical fluctuation）。對於宇宙的其他部分，我們會有什麼樣的預測呢？我們會猜在另外一個區域，白球與黑球的分佈應該不會那麼規律。但是事實上並非如此，而是我們所看到的每一個區域，白球與黑球都很有規律的區分開來。這就好像說如果我開車上到一座從沒去過的山裡面，發現那裡的樹木和以前我見過的樹木一樣。因為牽涉到的粒子數目極多，以統計力學的機率而言，我這樣的遭遇是非常不可能的事。

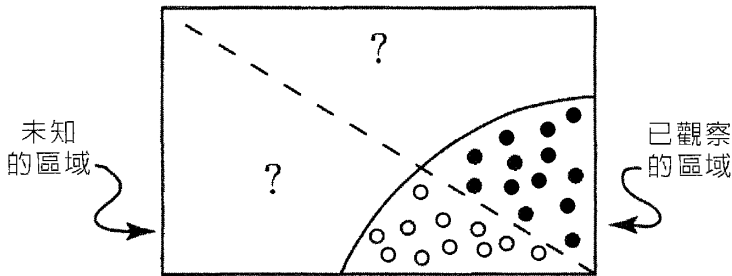


圖 2.1

我們如果看到一個統計起伏，最好的解釋就是起伏就只有那麼多，其餘的部分仍然是隨機的。如果每一個狀態出現的先驗機率都一樣，而且我們發現世界某一角落特別不同，那麼其餘的世界就應該均勻地混合在一起，因為大起伏再出現的機率應會小一點。有人或許不以為然，他們認為世界上的事件與結構彼此有關聯，因為它們都有相同的歷史！但是這樣的理論與用統計力學來描述宇宙的理論不同。在這一個完全不一樣的理論裡，以前的世界比現在更有秩序，同時最可能的狀態並不是熱力平衡態，而是某一個有動力學變化的特殊狀態。所有的歷史學家與古生物學家及其他人都會接受這樣一個非常合乎普通常識的假設。

第二講

我們一定得用機率的論證來檢驗理論，方法如下：考慮以下的假設——我們可以把宇宙當成是出現於（處於熱力平衡的）完全混沌中的一個精巧起伏；如果我們基於先驗的理由，希望這個假設成立的機率非常非常小。例如，以所有狀態出現的機率都一樣的想法來說，我們認為這個想法成立的機會很高，它的先驗機率譬如說是 $1 - 10^{-100}$ 。然後我們根據某種辦法來描述一些有規律的狀態，例如這些狀態的規律都能夠用少於一百萬字來描述，我們將這些態全部列出來。至於宇宙是從過去一個有特殊秩序的狀態演化而來的這個假設，我們現在就指定剩餘的先驗機率 10^{-100} 給這個假設。換句話說，我們的偏見就是所有的狀態出現的機率都一樣，但是知道這個平衡假設可能被觀測所推翻，所以允許一極微小的機率給這個可能性。

接下來我們開始觀察週遭的世界，看到許多狀態具有可以描述的秩序。我們每一個人今天早上都看到地在腳下，天在頭上；只要有一次這樣的觀察，對於各種起始狀況機率的後驗判斷而言，就足以大大地提高有序狀態的機率。當我們繼續做更多的觀測，宇宙有一個有秩序的開始的機率終究會超過 10^{-100} 。我們計算機率的方法是依據一個定理：假設事件 A 的先驗機率為 P_a ，事件 B 的先驗機率為 P_b ；如果有一個現象，當 A 成立，此現象較可能出現，而當 B 成立，這現象就較不可能成立，則事件 A 的後驗機率就會增加，所增加的比例與當 A 成立時則較可能觀測到此現象的比例相同。

假設有人觀察宇宙的某一角落，發現所有的巨觀物體都遠離平衡狀態，那麼這種狀況只不過是統計起伏的機率應該是極為微小的。只要觀察到一件巨觀秩序，即便是只牽涉到 5000 個有序的分分子，前述的機率就會變小到 10^{-2000} 。所以，很明顯地，只有很特殊的狀態才能夠導致今日所見有高度秩序的世界。

如果熱力學的假設有問題，它為什麼會那麼地有用呢？關鍵在於我們並不是就東西本來的狀態做實驗；有些狀況會導致不合我們意的秩序，所有的這類狀況都給剔除了。如果我們要測量氣體，這些氣體最初是放在金屬罐內。我們會小心地「等到熱力平衡成立後」（大家太常聽到這句話

了！），而且排除了會影響儀器的那些狀況，例如保險絲燒斷而斷電，或是某人用鐵鎚敲打罐子等。我們從來不會就我們所看到的宇宙來做實驗，而是會控制事情以仔細地準備所要從事實驗的系統。

一個比較令人滿意的統計力學假設也許是這樣子的：假設我們知道某（古典）系統的一切細節，例如無窮精確地知道一團氣體的狀況，也就是說，所有粒子在某一時刻 $t=0$ 的位置與速度；則如果我們已經完整地知道自然定律，我們就能夠（暫且不論實際上的困難）精準地計算出所有粒子在未來任意時刻的行為與狀態。但是如果我們的測量有一點點誤差，或是計算上所需的任何一項資料有不確定之處，例如任一粒子的位置、速度或是粒子間的交互作用，無論不確定的地方在哪裡（除了數學家設計出的反例），只要它們存在，我們在描述最終狀態的時候，必得要對不準量取平均值。如果經過了很長的時間（系統越大，不準量越大，所需的時間就越短），對於測量結果的預測就會與一般熱力平衡理論的預測非常接近。

比方說，第 6 號分子在時間 $t=30$ 分鐘時的速度是系統中任何其他起始變數（例如第 133 號分子的起始位置或速度）的函數；如果我們把這函數畫出來，將會是一條包容了很多很多細節的曲線，這條曲線極端複雜。因為起始變數有不準量，第 6 號分子在時間 $t=30$ 分鐘時的速度（函數值）也就不確定，如果我們把這些速度對特定變數的不準量取平均，這平均值應該會和「平衡」的結果一樣（見圖 2.2）。

物理上關於熱力學與統計力學的討論只有在認清一件事後才可能令人滿意，那就是問題正在於定義出系統的狀態。因為系統中有各種事情以各種速率發生，只有當不同速率間的差別足夠清楚，熱力學才派的上用場。所以熱力學理論必須區別出快的過程與慢的過程。當我們研究一團氣體的熱力學平衡時，我們並不需要等待無窮長的時間，而是和製造出平衡的交互作用（如分子碰撞）時間相比，所經過的時間只要比它長很多就可以了。在研究金屬罐中的氧氣之時，我們並沒有等到罐壁氧化，或是金屬蒸發掉，雖然金屬罐最終將會如此，因為它的蒸氣壓不為零；我們也不考慮那些在分子碰撞時（根據理論）很久才發生一次的所有原子核反應。

第二講

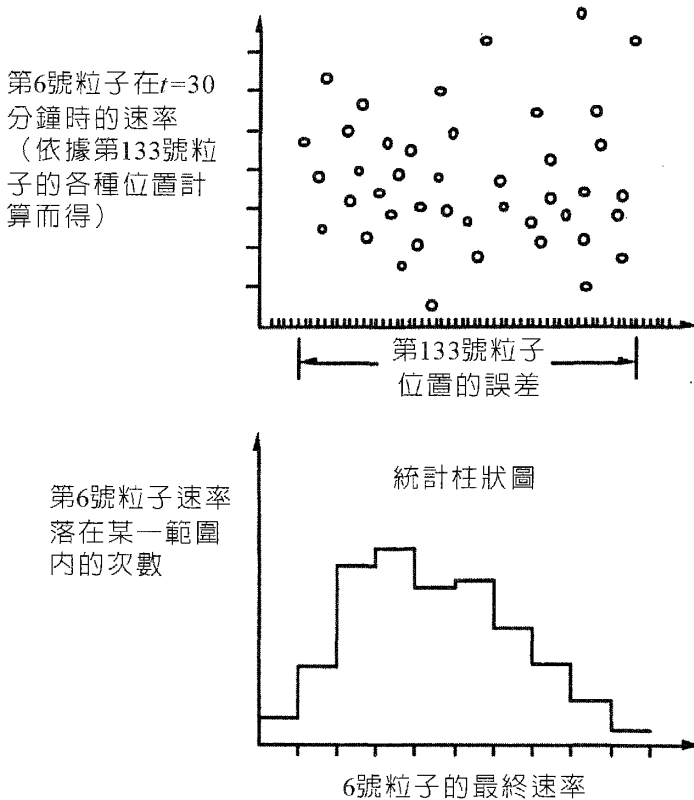


圖 2.2

如果有人從數學上很嚴謹地處理這類理論，一定要小心的詮釋所得到的結果。我們無法對所謂「物理上的嚴謹」下一個好定義，如果我們在定義理論的時候，出了些微的差錯，則嚴謹的數學反而可能將這一點差錯轉變成荒謬的結論。

問題是如何在量子力學中描述宇宙在過去是處於某個特殊的狀態。明顯的做法是說世界的波函數（如果存在）在時間 $t = -$ （宇宙年齡）之時，是某一個 ψ_0 。但是這也意味著現在的 ψ 不僅告訴了我們關於現在的世界，也同等地說明了所有其他（從同一出發點演化而來）的可能宇宙。這就是一種大尺度的「薛丁格貓弔詭」。「我們的世界」與所有其他的死貓都是可能宇宙其中的一員，貓的死亡取決於量子機率。「我們的世界」來自於「波包的崩陷」。這崩陷的機制為何？我們必須假設觀察者做了一些

在量子力學規則（如薛丁格方程式）描述範圍以外的事，或者是所有可能從過去演化而來的可能宇宙都是「真實」的。我並不是說兩種可能情形都是「不好」的，只是要指出目前的量子力學意味著我們只有這兩種可能。

2.2 臆測性理論的難題

在建構新理論的時候，理論一定要精準，所得到的結論必須要明確。我們不想要當每次碰到與實驗或起始假設不符的時候，還可以隨時改變理論的細節。任何不是完全荒誕的模糊理論在碰到與證據矛盾的時候，都可以用更為模糊的說法來彌補。一旦我們開始相信這些模糊的說法而不是證據，麻煩就大了。對於大統一理論就有這種狀況發生。例如，某個這類理論說有一個張量 $J_{\mu\nu}$ 「隨伴著」電磁張量。但是到底「隨伴著」的意思是什麼？如果說那就是「等於」的意思，則這個理論的預測就錯了。可是如果不講清楚「隨伴著」到底是什麼意思，那麼我們就什麼也沒說。如果「隨伴著」的意思為「提示」了某種新關係，仍談不上進步。因為每一有錯誤的預測，我們就會說其實是「提示」錯誤，而不是理論錯誤；人們就不斷地想要放入某個新的反對稱張量來修補錯誤。有些數字家能在一些物理量值之間找到某種巧合的關係，但當量值的測量越來越準，它們的關係也要隨著調整，因為量值所用的單位會越來越小以便跟上越來越小的不準量；與這類發現相比，之前那種臆測性說法未必就更值得相信。

說到這裡，我要講個故事，那是多年前在巴黎一場雞尾酒會中的一場對話。酒會中有一會兒所有的女士不知怎麼地都神秘的消失了，留下我面對著一位出名的教授。他嚴肅地坐在扶手椅上，周圍環繞著他的學生。

「告訴我，費曼教授，你多有把握光子的質量為零？」他問。我答說「那要看所說的質量是多大。因為如果質量是無窮小，以至於沒有任何效應，那麼顯然我是沒辦法排除這種可能；不過我很樂於討論光子質量在某個明確範圍之外的可能性。但是我有一個條件，那就是一但我告訴你光子不可能有這樣的質量之後，你就不能改變質量了。」那位教授就選了電子質量的 10^6 分之一這個值。

第二講

我的答案是這樣子的：如果我們同意光子的質量 m 與頻率 ω 的關係是 $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$ ，則波長不同的光子就會有不一樣的速度。那麼我們在觀察食雙星（eclipsing double star）的時候，只要雙星離我們夠遠，就會在不同的時間以藍色光與紅色光看到食雙星。因為我們沒看到這樣的現象，光子質量也就不會太大，以數字而言，質量的上限約是電子質量的 10^9 分之一。這位教授的學生把我的答案翻譯給他聽。可是他接著就想知道如果他選了電子質量的 10^{12} 分之一這數目，我會怎麼說？這問題讓翻譯的學生有些不好意思，我抱怨這與先前同意的規則不同，不過我同意再試一次。

如果光子的質量很小而且彼此相同，那麼當波長變大的時候，光子的行為就會離無質量的情形越遠。因為我們已知（波長大於可見光波長的）雷達脈衝在反射回來後的尖銳程度，從這結果所求得的光子質量上限比從前面食雙星所得到的還要更好（小）——光子質量必須小於電子質量的 10^{15} 分之一。

在這之後那位教授又想要修改質量，把它改為電子質量的 10^{18} 分之一。所有的學生對於這個問題都感到相當不安，我說如果不停地打破規則，把質量取的越來越小，很顯然我終究無法講出個理由來。但是儘管如此，我還是再試一次。我問他同不同意如果光子有一個小質量，那麼從場論我們可以推導出位勢與距離的關係為 $\exp(-mr)/r$ ？他同意了。再來，因為地球有一個靜磁場，它會延伸到太空中某個距離之外。從宇宙射線的行為，我們知道這距離起碼是地球半徑的數倍以上。這表示光子位勢的衰減長度起碼是 8000 英哩，也就是說光子的質量必得小於電子質量的 10^{20} 分之一。就這樣，他總算沒再追問下去，我鬆了一口氣。

當我們從已知力場出發來建構重力理論的時候，不要做出類似的事：一碰到困難就修改耦合常數的大小，或引入新的假設。我們應該由力場的已知行為提出明確的理論，萬一這些理論不適用就要拋棄它們。

2.3 交換一個微中子

現在讓我們來看類似重力的東西是否能來自交換一個微中子。我們要討論的這些嘗試理論還是相當含糊的理論，對它們了解也不完整，因為當我們從事一些初步研究時，發現它們算不上是太有希望的理論。這些讓我們排斥它們的理由也許有辦法彌補過來，但是我覺得最好還是守住大家已經同意的規則，也就是用粒子**已知**的性質去解釋重力，而不隨意加上假設。但是我們還沒成功地做到這一點。

因為微中子沒有質量，交換微中子可能會導致與距離成反比($1/r$)的位勢。但是因為微中子有半整數的自旋(spin angular momentum: $\hbar/2$)，單交換一個微中子不能得到靜力 (static force)，因為微中子源在放出一個微中子以後，不可能維持在原先的狀態。如果想要從交換微中子得到力，而不僅是散射，則交換微中子的費曼圖必須要能與散射振幅 (scattering amplitude) 的對角項 (diagonal terms) 有干涉，也就是說必須將交換微中子的費曼圖與什麼也沒發生的振幅加起來 (見圖 2.3)。那麼由交換一個微中子而得到重力的可能就被排除了，因為一個物體如果要維持在一開始的狀態，它就不能夠放射出半個單位的角動量。

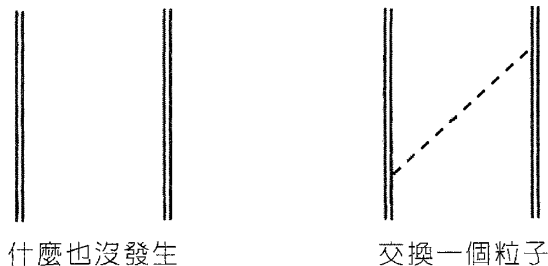


圖 2.3

一個無質量的純量介子 (spinless meson) 可以導致 $1/r$ 的位勢。在位置空間中計算來自交互作用的額外能量，比動量空間來得容易。無質量純量介子的動量傳播子 (momentum propagator) 是 $1/k^2$ ，而微中子的傳播子是 $1/k$ ，或者說是 k/k^2 ，所以分子多了 \vec{k} 的一次方項。很難從這樣的傳

第二講

播子得到重力。對於純量粒子而言，費曼圖的計算要把傳播子 $\delta_+ = 1/(t^2 - r^2 + i\epsilon)$ 對可能的（粒子）發射時間以及接收時間積分（見圖 2.4）。所以來自交互作用的額外能量（除了一比例因數）是

$$E \propto \int \frac{idt}{(t^2 - r^2 + i\epsilon)} \propto \frac{1}{r} \quad (2.3.1)$$

(2.3.1)式的積分只對發射時間（或只對接收時間）積分；另外還有一個積分會得到一項時間因數，代表相位正常的演變，所以與交互作用的能量無關。

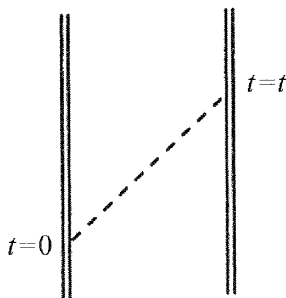


圖 2.4

我們還沒有明確地說明我們如何期待質量出現（在重力交互作用裡），但是其實沒有必要去擔心這件事，因為我們還不知道有無自旋的微中子存在。所以微中子所帶走的半單位角動量就殺掉了這個理論。

2.4 交換兩個微中子

也許我們能夠從一次交換兩個微中子——所以有對角期望值（diagonal expectation value）——而得到重力理論。為什麼兩個大的物體其交互作用能量會和它們的質量成正比，我們並沒有明顯的辦法去解釋這一點，除了很明顯地能量會大約正比於兩物體中的粒子數目。暫且撇開這一點不談（如果其他方面都很成功——可惜不是如此——，我們再回到這一點），我們說兩

物體的交互作用正比於 $m_1 \cdot m_2$ 乘上每一對組成粒子的交互作用。我們的做法基本上和以前一樣，但是要更仔細一點，因為結果更有趣。在每時間間隔 dt 中發射一對微中子的機率振幅是 $G' dt$ 。微中子從一點到另外一點的機率振幅是 $1/(t^2 - r^2 + i\epsilon)$ 。我們引入兩交互作用物體的質量 m_1 與 m_2 ，分別代表兩物體中的粒子總數目。所以兩物體間的能量是

$$E = m_1 m_2 G'^2 \int \frac{idt}{(t^2 - r^2 + i\epsilon)^2} \quad (2.4.1)$$

這積分很容易做，可以用複變方法，也可以對單一微中子積分(2.3.1)式微分。最後的結果是能量等於

$$E = m_1 m_2 \frac{G'^2 \pi}{2} \frac{1}{r^3} \quad (2.4.2)$$

式子中的 r 是物體間的距離。我們發現兩微中子交換所給的能量與距離的關係是錯誤的。所以這理論看來是沒希望了。但是如果繼續往下分析，還可能絕處逢生。原因是如果考慮三個質量間的交互作用，就可以得到 $1/r$ 的項。三個質量中的任意一對質量可以交換兩個微中子，或者以新的形式交換微中子（見圖 2.5）。假如第一次發射（微中子）的時間是 $t=0$ ，而另外兩個接觸的時間是 t 與 s ，則能量為

$$G'^3 m_1 m_2 m_3 i^2 \int \frac{ds dt}{(s^2 - r_{12})(t^2 - r_{23})[(s-t)^2 - r_{31}]} \quad (2.4.3)$$

這個重積分可以用複變方法一步一步地做，答案是

$$E = -G'^3 m_1 m_2 m_3 \pi^2 \frac{1}{(r_{12} + r_{23} + r_{13})r_{12}r_{23}r_{13}} \quad (2.4.4)$$

如果其中一個質量，例如質量 3，離開另外兩個質量很遠，則 r_{13} 比 r_{12} 大很多，那麼我們所得到質量 1 與質量 2 的交互作用能量就會與 r_{12} 成反比。

第二講

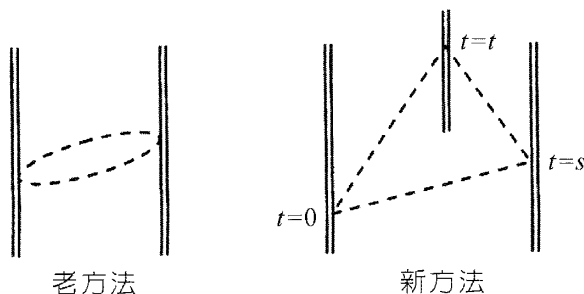


圖 2.5

這第三個質量 m_3 是什麼東西呢？很顯然它會是宇宙間所有其他質量的某種實質平均。如果遠處的物質以球狀分佈的型態環繞著質量 1 與質量 2，它們的效應可以用一個對於平均密度的積分來表示：

$$E = -\frac{G'^3 m_1 m_2 \pi^2}{r_{12}} \int \frac{4\pi\rho(R)R^2 dR}{2R^3} \quad (2.4.5)$$

式子中的 R 是很大的半徑約略等於 r_{13} 與 r_{23} ： $R \approx r_{13} \approx r_{23}$ 。為了得到一粗略的估計，假設密度在一個大圓球之內是固定值；我們就可以做出(2.4.5)式的積分，積分範圍是從某個比 r_{12} 大很多的內在半徑 R_i 到大圓球半徑 R_0 。積分的結果（所有位於 R_i 以外的質量之貢獻）是

$$E = -\frac{m_1 m_2}{r_{12}} 2\pi^3 G'^3 \ln \left(\frac{R_0}{R_i} \right) \rho \quad (2.4.6)$$

這個能量是半徑的對數函數，其值不會比 50 或 100 大太多，因為大圓球外半徑 R_0 可能約是 $Tc = 10^{10}$ 光年 = 10^{28} 公分。這樣的能量與重力作用很類似，我們可以推翻它嗎？可以的，有兩種方法：首先，牛頓定律只在某個距離範圍之內受過檢驗，當距離大過這個範圍的時候，(2.4.6)對數項的大小與(2.4.2)這項與 $1/r^3$ 成正比的「直接力」大約相等。此外，如果考慮太陽對地球與月亮之間引力所產生的效應，我們會發現它對月亮的軌道有影響，軌道會出現能夠觀測得到的偏差，原因是地球與太陽的距離並非一成不變的。我們可以估計這個偏差的大小，只要比較太陽對於地球與月亮間

引力的貢獻以及所有其他星球的貢獻。這些貢獻與質量成正比，與距離三次方成反比〔見(2.4.5)式〕。當對數比 1000 小的時候，只要星球密度是在合理範圍之內，太陽的貢獻是星球貢獻的 10^{12} 倍。所以我們可以忽略星球的貢獻。因為地球與太陽的距離有 $\pm 2\%$ 的變化，所以實質重力常數會因為太陽的貢獻而有變化，但是我們在地球-月亮系統中並未測到實質重力常數有如此的變化。

如果是這樣，這個理論還有可能救得回來嗎？我們可以想像較高階的過程能夠去除以上的困難。如果計算牽涉到四條或更多微中子線的過程，以圖 2.6 為例，它的貢獻大小約是 m_3^2 ，也就是週遭物質中粒子數目的平方。所以遠處星雲的影響要遠大過太陽的影響，較高階項的貢獻更會是如此。

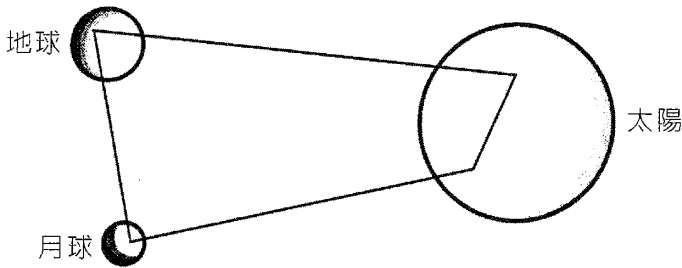


圖 2.6

因此我們得要把各階費曼圖，例如圖 2.7，加起來。因為費米統計 (Fermi Statistics) 的關係，各階費曼圖的貢獻是正負交叉的，所以所以我看不出可以得到令人滿意的答案。

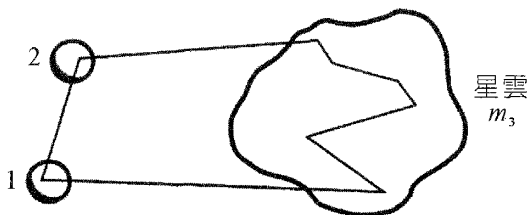


圖 2.7

第二講

把這個想法講得更正式一點：我們的猜測是說如果一個理論有，比方說，像 $\bar{\psi}\phi^2\psi$ （ ϕ 是純量場）這種平方項的交互作用，則對於一個有很多星雲的狀態來講， $\phi(1)\phi(2)$ （兩個場算符乘積）的期望值可能是

$$\langle\phi(1)\phi(2)\rangle = \delta_+(S_{12}^2) + C$$

第一項是一般的真空項， C 來自與遠方星雲的交互作用。如果時空點 1 和時空點 2 的距離遠小於宇宙的半徑，則 C 基本上與 1 和 2 無關。

但是對於自旋等於 1/2 的場來說，我認為 C 不可能出現。對於光子場而言，即便有 C 這一項，依我所知，它也不會有我們想要的效應，因為光子的耦合不是平方項形式的。

所以交換微中子對的重力理論並不成功。但是從這個研究我們學到了一些很有趣的東西，那就是如果重力理論是奠基在三體作用上，其中一個物體離開另兩個物體很遠，則我們就有 $1/r$ 定律，只要場量子（field quanta）有整數的自旋；同時交互作用強度會與遠距物體的質量成正比。雖然星雲到目前為止還沒有影響我們的物理定律，對於重力交互作用來說，它們或許非常重要。

然而為了建構這樣的理論，我們得假設存在著一種零質量的純量粒子，它們以平方項形式和宇宙中所有的物質有交互作用；最後我們還得回到「力為什麼恰好與質量成正比」這一個問題。可是我們其實似乎沒有必要走這樣一條崎嶇的路，因為若是我們可以假設一種新粒子，那麼只要假設存在著零質量、自旋為 2 的粒子，而且它們與物質交互作用的形式是線性的，就可以得到相當棒的理論了。

3.1 重力子的自旋

我們已經從（假想的）金星科學家的角度，討論了是不是可以用已知的量子場去詮釋重力現象。我們假設這些科學家知道場論的一般性質；他們現在要尋找一種有重力特性的新力場。為了了解各種可能性的區別，讓我們回顧以下的重力性質：大質量物體的吸引力與慣性成正比，而與距離平方成反比；質量與慣性代表能量的多寡，原因是原子與原子核的束縛能和靜止能量有相同的重力行為。

我們可以想像有一群場論學家試圖用已知粒子去解釋重力，可是我們在上一講已經發現這是行不通的。另一群場論學家則已開始推導如果有一種行為與重力類似的新量子場，它該具有什麼樣的性質。

首先，重力是長距交互作用，所以交互作用能量自動地就與距離成反比，這是場論中唯一允許的情況。這個作用是由所交換的粒子來傳遞，從現在起我們稱這個粒子為重力子（graviton）。重力子的質量一定得為零，所以交互作用力才會與距離平方成反比。在建構一個場論以前，我們還得先猜測重力子的自旋（spin）是什麼。如果自旋是 $1/2$ ，或是半奇整數（如 $3/2$ ， $5/2$ 等），我們會碰上前一講 2.3 節中所說的困難，原因是交換一個重力子與沒有交換重力子的機率振幅之間沒有干涉。所以重力子的自旋一定是整數， $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ；任何整數的自旋都會給出與距離成反比($1/r$)的交互作用，因為交互作用與距離的關係僅取決於質量。我們得要進一步了解不同自旋重力子有何微妙的不同效應，才能區分各種自旋。我們可以想像這一群場論學家決定分工合作，有些人研究自旋 0 的理

論，有些人研究自旋 1，其他人研究自旋 2、3 甚至 4。研究高自旋理論所要下的功夫遠高於較低自旋理論，所以我們就從低自旋往上研究。

自旋 1 的理論基本上和電磁理論一樣。雖然我們沒有理由禁止（除了光子外）另一個自旋 1 粒子存在，但是重力子的自旋不能是 1，因為自旋 1 的後果之一是同性相斥，異性相吸。事實上，這是所有奇整數自旋理論的性質。反過來，偶整數自旋會導致吸引力。所以我們只需要考慮自旋 0 與 2 的情況；萬一自旋 2 失敗的話，再考慮自旋 4。除非簡單的理論不成功，否則我們不需要研究更複雜的理論。

我們可以用束縛能的重力行為來排除自旋 0 的重力理論。我們不需要算出所有的細節，只用一個比喻來說明，然後就直接前進到自旋 2 理論。我們問以下的問題：運動物體間的吸引力和靜止物體間的吸引力相比，是比較大還是比較小？例如可以計算兩團氣體間的相吸力；從重力的實驗證據推論，如果氣體的溫度較高，相吸力就較大（見圖 3.1）。 v

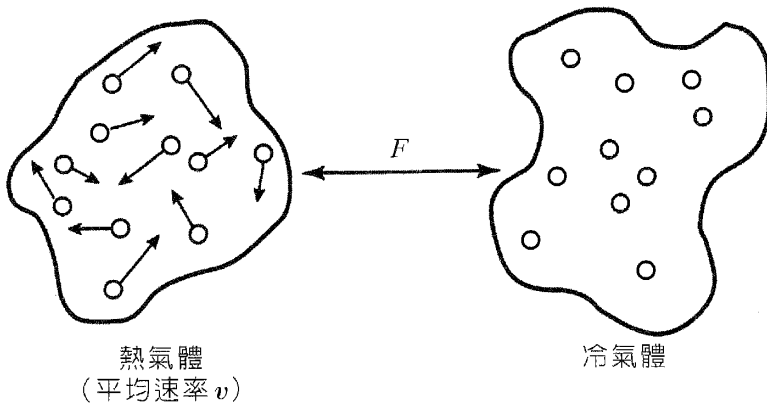


圖 3.1

電動力學裡的情形是這樣的：粒子的隨機運動不會改變電力的大小。交互作用能量與 γ_i 算符的期望值成正比， γ_i 就是 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 。既然這個算符所導致的位勢與速度無關，所以比例因子必須是 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 。這表示從算符 1 所得到的交互作用能量與 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 成正比，而算符 1 正對應到自旋 0 的場。換句話說，自旋 0 的重力理論預測兩團熱氣體間的吸力

第三講

要小於冷氣體。從類似的理由，我們知道自旋 2 理論所給的交互作用能量有一項因子 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 在分母，這與束縛能的重力效應的實驗結果相符。所以自旋 0 的理論出局了，我們需要自旋 2 粒子才能得到吸引力與能量大小成正比的理論。

3.2 我們的典型理論電動力學中的機率振幅與偏振

現在我們的目標就是用其他場論做為類推的基礎，建構一個自旋 2 理論。我們本來可以在這時候就轉到愛因斯坦的觀點，因為他已經得到正確的理論。但是如果我們暫且還是遵循金星科學家的觀點，或許比較有啟發性，也可能比較容易些。雖然這意味著今天很多科學家可以得到正確的重力論，但愛因斯坦的成就並未因此減損一分。我們今天有後見之明，還有一個相當完備的理論架構，這都是五十年前所沒有的，而且我們有愛因斯坦指點出方向。如果沒有後見之明，很難想像我們會怎麼做。無論如何，讓我們繼續往前走，以電動力學為榜樣，來猜測正確的理論。

在純量 (scalar) 場、向量 (vector) 場、張量 (tensor) 場 (也就是自旋 0、1、2 的另一種說法) 的理論裡面，力場是由純量、向量、張量位勢函數來描述：

自旋 0	X	純量位勢
自旋 1	A_μ	向量位勢
自旋 2	$h_{\mu\nu}$	對稱張量位勢

假如理論中的張量是反對稱 (anti-symmetric) 的張量，這個理論就會是另一種理論；它裡頭不會出現類似重力的東西，而是會有類似電磁現象的東西。反對稱張量的六個獨立分量就好像兩個空間向量 (各有三個獨立分量)。

電磁場的場源是 (四維) 向量流 j_μ ，它與向量位勢 A_μ 的關係是

$$A_\mu = -\frac{1}{k^2} j_\mu \quad (3.2.1)$$

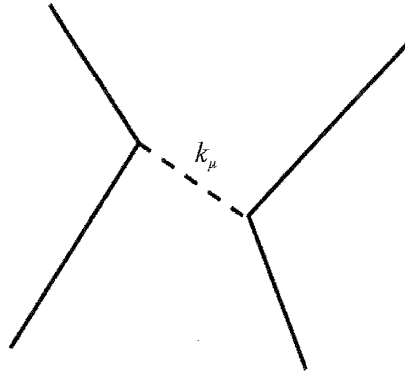


圖 3.2

這裡我們已經做了傅立葉轉換 (Fourier Transform)，並使用了動量空間表現 (momentum-space representation)。達朗白算符 (d'Alembertian operator) 在動量空間裡就只是 k^2 而已。要計算電磁學中的機率振幅需用上傳播子，這傳播子以圖 3.2 的形式連接兩個向量 (電) 流。這一類過程的機率振幅是相對論不變量 (relativistic invariant) 的函數，最後的答案也要受動量與能量守恆的限制。電磁學的核心在於電流與場的交互作用形式為 $j^\mu A_\mu$ ； A_μ 是場源的函數〔見(3.2.1)式〕，所以兩個電流間的交互作用是

$$-j'_\mu \frac{1}{k^2} j^\mu \quad (3.2.2)$$

我們可以選擇特定的座標，讓向量 k_μ 的分量成為

$$k^\mu = (\omega, \kappa, 0, 0) \quad (3.2.3)$$

請注意在這裡我們用的足標順序是 4, 3, 2, 1，所以

$$\begin{aligned} x^\mu &= (t, z, y, x) \\ A_\mu &= (A_4, A_3, A_2, A_1) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

第三講

所以如果交換粒子的四維動量（4 momentum）為 k^μ ，則（電）流—（電）流交互作用就是

$$-j'_\mu \left(\frac{1}{k^2} \right) j^\mu = -\frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} (j'_4 j_4 - j'_3 j_3 - j'_2 j_2 - j'_1 j_1) \quad (3.2.5)$$

電荷守恆，也就是說（四維）電流的（四維）發散為零，在動量空間的表現是

$$k_\mu j^\mu = 0 \quad (3.2.6)$$

這個限制。在我們所選的座標中，這個限制連接了電流的第三個與第四個分量：

$$\omega j^4 - \kappa j^3 = 0 \quad \text{或是} \quad j^3 = \frac{\omega}{\kappa} j^4 \quad (3.2.7)$$

如果把上式中的 j^3 代入振幅(3.2.5)，則得到

$$-j'_\mu \left(\frac{1}{k^2} \right) j^\mu = \frac{j'_4 j_4}{\kappa^2} + \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} (j'_1 j_1 + j'_2 j_2) \quad (3.2.8)$$

上式右手邊的兩項各有其物理意義。電流的第四個分量是電荷密度；如果電荷是靜止的，則它是唯一不為零的分量。第一項與頻率無關；當我們利用反傅立葉轉換把第一項轉換回空間表現，發現它其實是瞬時作用的庫倫位勢

$$(F.T.)^{-1} \left[\frac{j'_4 j_4}{\kappa^2} \right] = \frac{e^2}{4\pi r} \delta(t-t') \quad (3.2.9)$$

當速度很小時，(3.2.9)一定是最重要的項。這一項看起來代表瞬時作用，似乎違逆了相對論的原則，但這純然是因為我們把(3.2.8)拆成兩項，這兩

項各自並不遵循協變 (covariant) 的要求。總交互作用(3.2.2)的確是一個協變量；(3.2.8)的第二項代表了對於瞬時庫倫交互作用的修正。

兩個電流的交互作用永遠牽涉到虛光子。交互作用振幅的極點 (pole) 出現於 $\omega = \pm\kappa$ ，從極點可以看出實光子的性質。當然，任何有物理效應的光子都可以看成是虛光子，因為它在交互作用前是觀察不到的；所以能夠看得到的光子從不會真正滿足 $\omega = \pm\kappa$ 的條件。但是逼近那個條件並沒有困難；物理上，來自月亮或太陽的光子，它們的 ω 與 $+\kappa$ (或 $-\kappa$) 相差非常非常小。如果考慮來自遠處幾百萬光年外星系的光子，我們可以很合理的認為 ω 與 κ 離極點很近，所有的物理效應都隨附在極點項 (pole term) 上。極點項在 $\omega = \kappa$ 的留數 (residue) 是兩項的和，每一項又是兩個因子的乘積。最後的結果是好像存在著兩種光子，其中一類和 j_1 與 j'_1 有交互作用，另一類和 j_2 與 j'_2 有交互作用。以一般的語言講，我們說光子有兩種獨立的偏振態 (polarization)。

圓偏振光只是前面所說兩種偏振態的線性組合，它們對應到以下拆解 $j'_1 j_1 + j'_2 j_2$ 的方式 (也就是用另一種基底來表示 $j'_1 j_1 + j'_2 j_2$)：

$$(j'_1 j_1 + j'_2 j_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 + i j_2) \frac{1}{\sqrt{2}}(j'_1 + i j'_2)^* + \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 - i j_2) \frac{1}{\sqrt{2}}(j'_1 - i j'_2)^* \quad (3.2.10)$$

我們仍然只看到兩種光子。新基底 (拆解方式) 的好處是這樣子的：以光前進的方向 x_3 為旋轉軸，旋轉 $x_1 x_2$ 座標 (平面)，則圓偏振光子旋轉後，還仍然是自己，因為當座標旋轉 θ 角度後，兩種圓偏振光子只改變了相位，分別是 $\exp(i\theta)$ 與 $\exp(-i\theta)$ 。

量子力學告訴我們，一個系統如果在旋轉後，有這樣的行為—只改變了相位，那麼系統就具有明確的角動量：相位的改變為 $\exp(i\theta)$ 的光子，其角動量的投影 (projection) (亦即角動量在前進方向上的分量) 為 1 (以 \hbar 為單位)，而相位的改變為 $\exp(-i\theta)$ 的光子，角動量的投影為 -1。

既然光子是自旋 1 的粒子，我們可能會猜光子除了角動量投影為 +1 的狀態之外，還有第三種狀態，就是自旋角動量的投影為 0 的狀態。但是對於零質量的粒子來說，Wigner 已經從相對論證明了只可能有兩個投影狀

第三講

態，分別是角動量投影在前進方向上的最大值與最小值。這個結果也適用於其他自旋粒子。我們在這裡不證明這個結果，除了對於我們感興趣的例子，即光子與重力子，以明確拆解交互作用的形式來顯現這兩個態的存在。

有人可能會質疑，我們只是證明了電流（即場源算符）與這兩個態有交互作用，而沒有證明光子本身只有兩種態。但是這兩種結果是一樣的：因為以圓偏振為 -1 的光子為例，發射這類光子的振幅與 $(j_1 + ij_2)/\sqrt{2}$ 有關；如果我們旋轉座標系統，振幅並不會改變，所以可以求出光子本身相位的改變應該是多少。定義光子的偏振最好的方式或許是向量位勢 (A_μ) 在某特定方向，例如 e_μ （ e_μ 是一個單位向量）上的投影。這樣一個光子如果與電流 j^μ 有交互作用，吸收或放出光子的振幅是

$$-e_\mu j^\mu = (j^\mu \text{ 在 } e_\mu \text{ 方向上的投影}) \quad (3.2.11)$$

3.3 交換一個重力子的機率振幅

我們要用電動力學去類推交換一個重力子的振幅。我們必須特別注意非相對論性的瞬時項，因為目前對於重力的實驗觀測只能看出這一項的效應。完整的理論包括瞬時項（類似庫倫交互作用）與以推遲波（retarded wave）形式出現的修正項。我們在計算可觀察效應時，需要將這些推遲效應區別出來。

假設達朗白算符在動量空間的表示為 k^2 ；以(3.2.1)作為類比的對象，我們期待重力場張量與場源張量的關係是

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} T_{\mu\nu} \quad (3.3.1)$$

可是交互作用的形式是什麼呢？既然電磁現象牽涉到的是電流，我們猜重力場源張量出現於交互作用能量的形式為：

費曼重力學

$$T'_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} \right) T^{\mu\nu} \quad (3.3.2)$$

我們現在的任務是賦予張量 \mathbf{T} 一些特質，從而推論出重力場的特質。由先驗的角度論，張量 \mathbf{T} 可能牽涉到梯度（gradient），也就是向量 \vec{k} 。如果只牽涉到梯度，理論中就沒有單極（monopole），最簡單的物體會是偶極（dipole）。我們希望在非相對論極限裡，能量密度出現在張量 \mathbf{T} 中的方式與電荷密度 j_4 類似。大家都知道，在電磁學中，有一個應力張量（stress tensor），它的 T_{44} 分量就是電磁場的能量密度。所以很可能存在一個較一般性的張量，其 T_{44} 分量就是總能量密度。那麼在低速度的極限，可以得到牛頓萬有引力定律，其交互作用能量是

$$-\frac{T'_{44}T_{44}}{\kappa^2} \quad (3.3.3)$$

由此可知，如果要得到正確的相對性理論，完整的張量 \mathbf{T} 一定要出現在機率振幅中，就像我們在(3.3.2)式所猜的那樣。

關於這個張量，有一件事我們還沒提到一對稱矩陣的對角和（trace）是一個不變量，它不必然為零。如果從對角和不為零的對稱矩陣出發，我們可能得到一個理論，裡頭除了自旋 2 的粒子之外也有自旋 0 的粒子。在這樣的理論裡，如果把交互作用拆解成偏振態，我們會看到有三個偏振態，而不是自旋 2 零質量粒子所允許的兩個態。更明確地講，除了(3.3.2)式之外，我們可能還另有一項交互作用，與 $T'^{\mu}_{\mu}(1/k^2)T^{\nu}_{\nu}$ 成正比。我們必須調整這兩項交互作用的係數，以避免出現角動量為零的實重力子（real graviton）。

我們把(3.3.2)式寫開來：

$$T'_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} \right) T^{\mu\nu} = \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} \left[T'_{44}T_{44} - 2T'_{43}T_{43} - 2T'_{42}T_{42} - 2T'_{41}T_{41} \right. \\ \left. + 2T'_{23}T_{23} + 2T'_{31}T_{31} + 2T'_{21}T_{21} + T'_{33}T_{33} + T'_{22}T_{22} + T'_{11}T_{11} \right] \quad (3.3.4)$$

第三講

在電動力學裡，利用電荷守恆可以把(3.2.5)簡化成(3.2.8)。在這裡，我們也可以利用能量守恆定律來簡化(3.3.4)。能量守恆定律在動量空間的形式是：

$$k^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (3.3.5)$$

在先前的座標中， k^1 、 k^2 等於零，代入(3.3.5)式，可得

$$\omega T_{4\nu} = -\kappa T_{3\nu} \quad (3.3.6)$$

用(3.3.6)式將 $T_{3\nu}$ 表成 $-(\omega/\kappa)T_{4\nu}$ ，我們發現(3.3.4)可以分解成兩項，其中一項是瞬時交互作用項，其分母是 κ^2 ；另一項則是推遲交互作用項，分母是 $(\omega^2 - \kappa^2)$ 。瞬時項的形式是

$$-\frac{1}{\kappa^2} \left[T'_{44} T_{44} \left(1 - \frac{\omega^2}{\kappa^2} \right) - 2T'_{41} T_{41} - 2T'_{42} T_{42} \right] \quad (3.3.7)$$

而推遲項的形式是

$$\frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} [T'_{11} T_{11} + T'_{22} T_{22} + 2T'_{21} T_{21}] \quad (3.3.8)$$

張量 \mathbf{T} 的橫向分量，照理說，應該是彼此獨立的，所以(3.3.8)代表三個獨立乘積項之和，或者說是三個偏振態。我們看到這個理論既有自旋 2 的粒子也有自旋 0 的粒子。為了去除自旋 0 的部分，我們得在機率振幅裡多加上一項，其形式是

$$\alpha T'_\nu \left(\frac{1}{k^2} \right) T^\mu{}_\mu \quad (3.3.9)$$

這多出來的一項，對於推遲項的貢獻是

$$\alpha \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} (T'_{11} + T'_{22})(T_{11} + T_{22})$$

我們可以調整參數 α 的值，使得推遲項只包含兩獨立乘積項。要達成這個目的， α 應該取值 $-1/2$ ，而最後（總和）的推遲項是

$$\frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} \left[\frac{1}{2} (T'_{11} - T'_{22})(T_{11} - T_{22}) + 2T'_{12}T_{12} \right] \quad (3.3.10)$$

因此重力子的兩個偏振態是由以下兩個張量元素的組合所製造出來的：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{11} - T_{22}) \quad \text{與} \quad \sqrt{2}(T_{12}) \quad (3.3.11)$$

這兩個組合的歸一化因子 ($1/\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{2}$) 之所以不一樣，原因在於張量 \mathbf{T} 的對稱性。如果我們把 $\sqrt{2}T_{12}$ 寫成

$$\sqrt{2}T_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{12} + T_{21}) \quad (3.3.11a)$$

則(3.3.11)中兩個組合的對稱性就比較明顯了。因此代表重力子的平面波解可能是這樣子的：

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(ik_{\sigma}x^{\sigma}) \quad (3.3.12)$$

這裡的 $e_{\mu\nu}$ 有以下幾個不為零的分量：

$$e_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{和} \quad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.3.13)$$

我們所得到的一般性交相互作用是

第三講

$$T'_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T'^{\mu}_{\mu} \frac{1}{k^2} T^{\nu}_{\nu}$$

它可以寫成

$$T'^{\sigma\tau} P_{\sigma\tau, \mu\nu} T^{\mu\nu}$$

而 $P_{\sigma\tau, \mu\nu}$ 是重力子的傳播子，等於

$$\frac{1}{2} (\eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\tau} + \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\tau}) \frac{1}{k^2}$$

為了簡單起見，通常我們還是只用單純的一項 $1/k^2$ 來代表傳播子，但是虛重力子與場源的關係，也就是場源放出虛光子的機率振幅，就從(3.3.1)式改為

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^{\sigma}_{\sigma} \right)$$

而吸收重力子的交互作用是 $h_{\mu\nu} T'^{\mu\nu}$ 。

放射出一個實重力子（偏振為 $e_{\sigma\tau}$ ，若 $e^{\sigma}_{\sigma} = 0$ ，如(3.3.13)式）的機率振幅則是 $e_{\sigma\tau} T^{\sigma\tau}$ 。

3.4 機率振幅中各項的物理解釋

重力子的偏振是一種張量，我們可以用圖像去想像它，方式類似於描述應力（stress）的圖像：我們用箭頭來指示隨附在（和某軸垂直的）平面上的方向。圖 3.3 顯示的是兩種應力，它們都位於與傳播方向垂直的平面上。關於四極應力，共有兩種可能情形。有一類的應力可以用全部指向中心（或全部由中心向外）的箭頭代表，這類應力就像流體壓力，沒有自旋（自旋為 0）。另一類應力（事實上是旋轉）可以用順（或反）時鐘的箭頭代表，它們對應於自旋 1 狀態。

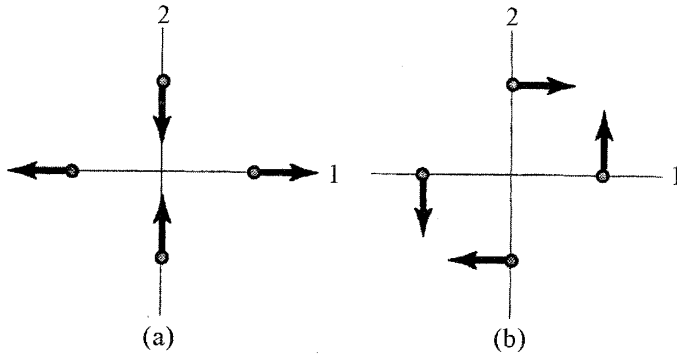


圖 3.3

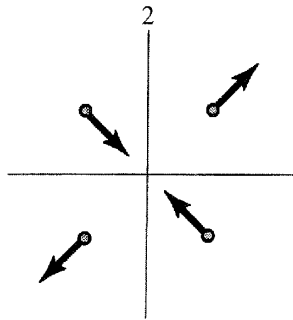


圖 3.4

圖 3.3(b)所代表的應力有另一種呈現方式，也就是向量是落在與原來軸 1 和軸 2 相差 45 度的軸上面，這時候的圖像就是圖 3.4。但是圖 3.4 相當於把圖 3.3(a)旋轉 45 度而已。所以我們如果將一種偏振旋轉 45 度就可以得到另一種偏振；如果旋轉 90 度，就轉回到自己，只是箭頭的方向全部顛倒，因為偏振其實是隨時間變動的振盪，所以箭頭的方向全部顛倒代表振盪的頂位差了 180 度。如果繼續轉下去，在旋轉 360 度以後，振盪的頂位就差了 720 度，相當於轉了兩整圈——這正是自旋 2 狀態的特色。從這兩個偏振可以做出兩個正交線性組合，它們在旋轉之下相位的改變分別是 $\exp(2i\theta)$ 與 $\exp(-2i\theta)$ 。這對應到推遲項的另一種分解辦法：只要稍微嘗試一下，就可以寫下這兩部分

第三講

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(T'_{11} - T'_{22} + i2T'_{12})(T_{11} - T_{22} - i2T_{12}) \\ & + \frac{1}{4}(T'_{11} - T'_{22} - i2T'_{12})(T_{11} - T_{22} + i2T_{12}) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

如果比較(3.4.1)式的乘積與調和多項式 (harmonic polynomial) 乘積，就很明顯地可以看出，這(3.4.1)式的兩部分有自旋 2，投影 ± 2 張量的特徵，因為我們知道 $(x \pm iy)(x \pm iy)$ 很明顯是自旋 2，投影 ± 2 ，它們的乘積是 $(xx - yy \pm 2ixy)$ ，和(3.4.1)式的結構一樣。所以我們的結論是 $\alpha = -1/2$ ，而重力子只有兩個偏振態。這可能是正確的理論，等價於自旋 2 場論，這個理論已經由場論學家 Pauli 與 Fierz 研究出來，並已得到場的拉格朗日函數 (Lagrangian)。

我們是以自旋 1 的理論為類比來建構自旋 2 的理論，所以我們不加解釋就先假設了重力子平面波的存在。因為光子平面波是由傳播子的極點來代表，所以重力子的傳播子在 $\omega = \pm \kappa$ 處也有極點。但是關於這一點目前我們還欠缺實驗證據；我們不僅還沒有找到重力子，甚至連古典重力波也還沒有看到。

有一些問題我們目前暫時放在一旁，以後再回來處理。電磁場源—電荷—是守恆的，重力場源—能量—也是守恆的。但是這兩種守恆的性質不同；因為光子不帶電，所以本身不是電磁場源；然而重力子具有能量，大小等於 $\hbar\omega$ ，所以本身就是重力子源。我們說這是重力場的非線性本質。

在電磁學裡，如果電荷不是守恆的，我們的場方程式（馬克斯威爾方程式）就會出現矛盾。到目前，我們一直避免探討重力的場方程式，只擔心機率振幅，而不是重力場本身。我們也還需要討論是否我們寫下的理論會和所選的規範 (gauge) 有關，以及是否真的能寫出一個重力場方程式，對應於光子的馬克斯威爾方程式 $\partial F^{\mu\nu} / \partial x^\nu = j^\mu$ 。

我們的理論有一些結果只需要考慮交互作用的形式而不需要場方程式就可以討論。我們把完整的交互作用（對應於 $\alpha = -1/2$ ）寫成：

$$\begin{aligned}
& 2 \left[T'_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\kappa^2} \right) T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T'^{\nu}_{\nu} \left(\frac{1}{\kappa^2} \right) T^{\mu}_{\mu} \right] \\
&= -\frac{1}{\kappa^2} \left[T'_{44} T_{44} \left(1 - \frac{\omega^2}{\kappa^2} \right) + T_{44} (T'_{11} + T'_{22}) \right. \\
&\quad \left. + T'_{44} (T_{11} + T_{22}) - 4T'_{41} T_{41} - 4T'_{42} T_{42} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\kappa^2 - \omega^2} \left[(T'_{11} - T'_{22})(T_{11} - T_{22}) + 4T'_{12} T_{12} \right] \quad (3.4.2)
\end{aligned}$$

(如果想要的話， $(\omega^2/\kappa^2)T'_{44}T_{44}$ 這一項可以用 $T'_{43}T_{43}$ 或是 $(T_{44}T'_{33} + T_{33}T'_{44})$ 取代。) 我們已經討論過推遲項和它的偏振。現在讓我們來看第一項。張量 \mathbf{T} 是應力密度；對於較慢的粒子來說，空間分量的大小約是 v/c 的數量級，所以代表牛頓定律的就只有 $T'_{44}T_{44}$ 這一乘積項。其他的乘積項的效應就和磁的現象有些類似。請注意，在(3.4.2)的分解中，這些項都是瞬時項。至於推遲項的效應，也就是前進波，只會是 v/c 的偶次方項。

我們或許會猜測那些類似磁性的瞬時項，會有可以觀察得到的效應。例如，如果兩個輪子轉的越來越快，它們之間的重力或許會有一點變化。我們的理論的確這麼預測，但是實際上，這些力不僅非常、非常小，而且會被一堆其他的效應蓋過去。我們可以很容易地觀測到磁力，例如兩條帶電流的導線之間的吸力，原因是直接庫倫靜電力為零，因為正負電荷的數目相同，所以庫倫力非常、非常精準的抵銷掉了。對於轉動的輪子來說，麻煩出在物質的彈性應力 (elastic stress) 會加入能量項，所以輪子會飛散開來。除此之外，我們可能會想，尋常的相吸重力已經夠難測量的了，而且那些類似磁性的效應可能要小上 $(v/c)^2$ 倍，就好像磁力與庫倫力的比值一樣。帶電流導線之間的力和一克重約略相當，但是導線裡粒子之間（沒有抵銷掉）的庫倫力，其數量級有萬兆噸那麼重。

我們或許可以觀察到這些類似磁性的瞬時項的效應，如果考慮以光速，或近乎光速，前進的粒子。假設 $T'_{\mu\nu}$ 來自於靜止的重力源，如太陽，所以只有 T'_{44} 不為零；接著考慮太陽與一快速粒子（速度 v 接近光速 c ）間的重力，粒子應力張量的分量如 T_{11} 就等於 $(v/c)^2 T_{44}$ ，那麼我們可以從

第三講

(3.4.2) 看出，交互作用能量與單純來自的 T_{44} 的貢獻相比，要大上約 $1+(v/c)^2$ 倍；對光子而言，就是 2 倍。所以當光子在強重力場裡前進時，它所彎曲的程度比牛頓力學只考慮能量，所做的預測要大。來自遠處星球的光，通過太陽表面時的偏轉（deflection）程度是牛頓力學（依據「衝激近似」計算）預測的兩倍。雖然實驗證據還不是很完美，也不全然相容，它們仍然強烈地支持理論所預測的效應是真實的效應。

我們現在其實可以開始仔細地計算出上面這個例子的效應，以及很多其他的問題，例如重力子的康普頓散射（Compton scattering），或對於水星繞太陽軌道的影響；目的是找出重力效應大小的數量級，以及有什麼可能的實驗。但是，我們或許最好先去尋找描述重力場本身的方式，也就是場的拉格朗日函數和場方程式，而不僅是機率振幅而已。

3.5 重力場的拉格朗日函數

我們現在研究理論的拉格朗日函數，研究重力場本身而不僅是振幅而已。首先讓我們複習電磁學的情形。在那裡，作用量是

$$S_E = -\int d\tau \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} \right) + j^\mu A_\mu \right] \quad (3.5.1)$$

我們就是從這樣的拉格朗日函數推導出場（馬克斯威爾）方程式；我們現在要找出在重力理論中類似 $A_\mu = -(1/k^2)j_\mu$ 的東西。

要猜出拉格朗日函數中第二項〔也就是耦合（coupling）項〕的形式並不難：我們猜它應該是 $-\lambda h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ ；但是牽涉到 $h_{\mu\nu}$ 的微分項就不那麼好猜了，因為有太多足標，它們可以有太多排列方式。我們必須寫下拉格朗日函數最一般性的形式，包括所有可能寫下的場微分項，在每一項前面暫且先乘上一個任意係數如下：

$$a \left(\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) + b \left(\frac{\partial h^{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) + c \left(\frac{\partial h^\mu{}_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial h^\sigma{}_\nu}{\partial x^\sigma} \right) + \dots \quad (3.5.2)$$

我們的理論並不完備，除非我們發明某些判別準則（criterion）來決定這些係數 a, b, c, d, e, \dots 。

也許我們能夠從電磁學獲得一些靈感。如果把電磁場的拉格朗日函數對 A_μ 取變分，就可以得到連接電磁場與電流的微分方程式：

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu = j_\mu \quad (3.5.3)$$

為了書寫方便起見，從現在起我們用以下的方式來表示對於某個座標的偏微分（梯度 gradient）：用一個逗號，後面緊跟著代表這個座標的足標。如此一來，(3.5.3)式就寫成

$$A_{\mu,\nu}{}^{,\nu} - A_{\nu,\mu}{}^{,\nu} = j_\mu \quad (3.5.4)$$

代表電流 (j_μ) 守恆的公式是 j_μ 的散度 (divergence) 等於零。但是我們注意到馬克斯威爾方程式(3.5.3)並不是自恰的理論除非電流守恆成立，原因是如果對(3.5.3)式取散度微分，則式子的左邊自動為零，因此右邊的散度也必須為零，也就是電流守恆必須成立。如果有正確的電磁場拉格朗日函數，則電荷守恆可以從場方程式推導出來。(3.5.3)式的左邊滿足一個恆等式，即它的散度為零：

$$A_{\mu,\nu}{}^{,\nu\mu} - A_{\nu,\mu}{}^{,\nu\mu} = 0 \quad (3.5.5)$$

我們可以用類似的要求去定義係數 a, b, c, d, e, \dots 的相對大小，步驟如下：我們會寫下一般性的拉格朗日函數，從它的變分求出場方程式，我們可以看到某些場的函數和張量 \mathbf{T} 相等；因為張量 \mathbf{T} 的散度為零，所以我們也要求相對應的場函數其散度為零。結果是我們會得到一些係數 a, b, c, d, e, \dots 必須滿足的條件，從這些條件可以求出明確的係數值。我們將會一步步地交代清楚代數運算—調整係數讓場方程式在只有當

第三講

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (3.5.6)$$

成立時，是自恰（沒有矛盾）的。

3.6 重力場方程式

我們先寫下所有可能的乘積項，每一項是場張量 $h_{\mu\nu}$ 的微分的乘積。每一步，我們利用 $h_{\mu\nu}$ 的對稱把各項整合起來，以簡化結果。如果張量的兩個足標與微分足標不一樣，兩種可能的乘積項是：

1. $h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\nu,\sigma}$
2. $h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\sigma,\nu}$

如果有兩個足標相等，就有三個可能的乘積：

3. $h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma}$
4. $h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}$
5. $h^{\nu}{}_{\nu,\mu} h^{\sigma,\mu}$

並非所有的五種乘積都是必要的；第二種可以省略，因為只要做部分積分就可以將它轉成第三種，最後只剩下四種獨立的微分乘積。所以我們假設作用量有以下的形式：

$$S = \int d\tau \left[ah^{\mu\nu,\sigma} h_{\mu\nu,\sigma} + bh^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma} + ch^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu} + dh^{\nu}{}_{\nu,\mu} h^{\sigma,\mu} - \lambda T^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \right] \quad (3.6.1)$$

現在我們將這四項乘積的和對 $h_{\alpha\beta}$ 變分，以便得到微分方程式告訴我們場導數與場源張量 $T_{\alpha\beta}$ 的關係。答案是（注意 $\delta h_{\alpha\beta}$ 對於 α 和 β 是對稱的，所以只有 $\delta h_{\alpha\beta}$ 的係數的對稱部分需要為零）

$$a2h_{\alpha\beta,\sigma}{}^{,\sigma} + b(h_{\alpha\sigma,\beta}{}^{,\sigma} + h_{\beta\sigma,\alpha}{}^{,\sigma}) + c(h^{\sigma}{}_{\sigma,\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} h^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu}) + d2\eta_{\alpha\beta} h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}{}^{,\mu} = -\lambda T_{\alpha\beta} \quad (3.6.2)$$

我們把每一項對於足標 β 取微分，然後要求等式左邊的散度為零，就得到

$$2ah^{\alpha\beta,\sigma}_{,\sigma\beta} + bh^{\alpha\sigma,\beta}_{,\sigma\beta} + bh^{\beta\sigma,\alpha}_{,\sigma\beta} + ch^{\sigma}_{\sigma}{}^{,\alpha\beta}_{,\beta} + ch^{\mu\nu}_{,\mu\nu}{}^{,\alpha} + 2dh^{\sigma}_{\sigma,\mu}{}^{,\mu\alpha} = 0 \quad (3.6.3)$$

我們現在把類似的項整理在一起，將它們的係數設為零（需要將足標搬上搬下，以及交換足標的標記），就得到以下的條件

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta,\sigma}_{,\sigma\beta}(2a+b) &= 0 \\ h^{\beta\sigma,\alpha}_{,\beta\sigma}(b+c) &= 0 \\ h^{\sigma}_{\sigma,\beta}{}^{,\alpha\beta}(c+2d) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

從(3.6.4)可以得到係數的比值，如果將 a 設定為 $1/2$ ，則最後的答案是

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -1 \quad c = 1 \quad d = -\frac{1}{2} \quad (3.6.5)$$

照理說，我們已經得到重力理論正確的拉格朗日函數。從這個拉格朗日函數，我們就可以得到場方程式。

3.7 定義新符號

這些張量的運算會變得越來越瑣碎。在以下的討論，為了不陷在過多的足標代數泥淖裡，我們設想了一些簡化的技巧。它們的好處現在或許還不是太明顯，以後大家就會了解。

我們定義「槓 (bar)」這個運算子，它可以作用在任意 rank 2 的張量上：

$$\bar{X}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}X^{\sigma}_{\sigma} \quad (3.7.1)$$

第三講

對於對稱張量如 \mathbf{h} 來說，這個規則更簡單，因為括弧中的兩項相等

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\sigma{}_\sigma \quad (3.7.2a)$$

$$\bar{h}^\sigma{}_\sigma = h_{\mu\nu} \quad (3.7.2b)$$

請注意「槓」這個運算對於對稱張量而言是自己的反運算。

我們同時也用以下的符號來代表對角和

$$h = \text{Tr}(\mathbf{h}) = h^\sigma{}_\sigma$$

$$\bar{h}^\sigma{}_\sigma = -h \quad (3.7.3)$$

有了這些記號，場方程式(3.6.2)與(3.6.5)可以寫成以下對稱的形式

$$h_{\mu\nu,\sigma}{}^{,\sigma} - 2\bar{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{,\sigma} = -\lambda\bar{T}_{\mu\nu} \quad (3.7.4)$$

如果要得到 $T_{\mu\nu}$ 的方程式，只要將上式兩邊「槓」一下就好。

再來我們要尋找與電磁學中規範不變性 (gauge invariance) 相類似的東西，以便簡化(3.7.4)的解。在電磁學理，場方程式

$$A^{\mu,\nu}{}_{,\nu} - A_{\nu}{}^{,\nu\mu} = j^\mu \quad (3.7.5)$$

允許我們用另一個四向量 A'_μ 來描述電磁場— A'_μ 與 A_μ 的關係是

$$A'_\mu = A_\mu + X_{,\mu} \quad (3.7.6)$$

其中 $X_{,\mu}$ 是一個純量函數 X 的梯度。對於張量場而言，與(3.7.6)類似的性質是什麼？我們猜應該是（得注意 $h'_{\mu\nu}$ 應該是對稱張量）

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} \quad (3.7.7)$$

原因是將 $h'_{\mu\nu}$ 帶入(3.7.4)的左邊並不會改變方程式的形式。請讀者自己檢驗這件事。

用這個規範不變性，我們可以選一個恰當的規範，讓場方程式簡單一些。一個例子是電磁學理的 Lorentz 規範：

$$A^{\nu}_{,\nu} = 0 \quad (3.7.8)$$

以此為類比，我們可以選擇（稱為 Lorentz 條件）

$$\bar{h}^{\mu\sigma}_{,\sigma} = 0 \quad (3.7.9)$$

如果 $h_{\mu\nu}$ 滿足(3.7.9)，則場方程式(3.7.4)就變成

$$h^{\mu\nu,\sigma}_{,\sigma} = -k^2 h^{\mu\nu} = -\lambda \bar{T}^{\mu\nu} \quad (3.7.10)$$

或是寫成 $h_{\mu\nu} = (\lambda/k^2) \bar{T}_{\mu\nu}$ 。我們馬上得到這樣一個 $h_{\mu\nu}$ 與另一個場源 $T'_{\mu\nu}$ （來自拉格朗日函數中的 $\lambda h_{\mu\nu} T'^{\mu\nu}$ 項）的交互作用振幅是

$$\lambda^2 T'_{\mu\nu} \left[\frac{1}{k^2} \right] \bar{T}^{\mu\nu}$$

這與我們先前直接討論機率振幅時的發現一模一樣。

4.1 場的正負號與張量秩 (tensor rank) 之間的關係

我們現在想要用拉格朗日密度 (Lagrangian density) 的性質，來推導一些有用的場的一般性質。我們現在先定義重力場的耦合常數與平面波的歸一化 (normalization)：讓前面第三講 (拉格朗日函數中的 $\lambda h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ 這一項裡) 的 λ 為

$$\lambda = \sqrt{8\pi G} \quad (4.1.1)$$

這裡的 G 是重力常數，所用的單位是自然單位 (natural unit, $\hbar = c = 1$)；我們這裡取 G 的平方根的目的是讓常數 λ 類似於電磁學中的電子電荷 e ，而不是 e 的平方；而加入 $\sqrt{8\pi}$ 這一因子則可以除掉多數有用公式中累贅的因子。我們用以下的場來代表平面波重力子：

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(ik \cdot x) \quad (4.1.2)$$

其中的 $e_{\mu\nu}$ 是偏振張量，滿足以下的歸一化條件：

$$e_{\mu\nu} \bar{e}^{\mu\nu} = 1 \quad (4.1.2)$$

描述整個系統（包含重力場、物質、以及物質與重力子之間的耦合）的作用量為：

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{2} \int dV (h^{\mu\nu,\lambda} \bar{h}_{\mu\nu,\lambda} - 2\bar{h}^{\mu\lambda}{}_{,\lambda} \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu}) && \text{(重力場)} \\
 & - \int dV (\lambda h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}) && \text{(耦合項)} \\
 & + S_M && \text{(物質)}
 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

我們可以從場的拉格朗日函數推導出一些重要性質，例如我們可以了解為何重力無論是對於相同或相異的物質來說，都是相吸的；而電力則是同性相斥，異性相吸。我們可以證明這個性質主要來自拉格朗日函數的符號，所以如果我們把 S 變成 $-S$ ，力就會變號。耦合常數 λ 或 e 或 g 的符號是無關緊要的，因為它們都是以平方的形式出現在任何（代表能量修正的）費曼圖中，因為牽涉到的頂點（vertex）都是兩兩成對的。我們如果要改變對應於像圖 4.1 這種費曼圖的能量，我們只能在每個頂點多引入一個虛數 i （就是 $\sqrt{-1}$ ）因子，例如用 $i\phi$ 場而不是 ϕ 場。

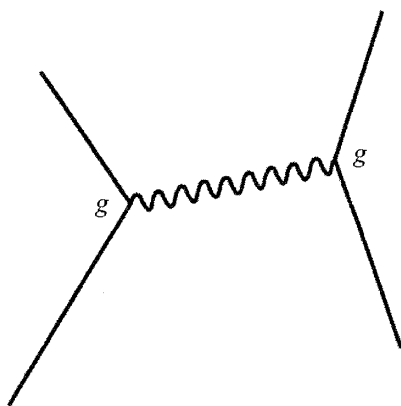


圖 4.1

但是 ϕ 場必須能代表適當的平面波，也就是說波的定義必須能使得位於大盒子裡的駐波（standing wave）帶有正能量，而且代表這些駐波的量子力學振盪子有適當的性質。純量場有平面波

第四講

$$\phi = a \exp(ik \cdot x) \quad (4.1.5)$$

量子場的振幅 a 成為量子力學振盪子的座標。如果這種振盪子的動能（與 a^2 成正比）可以代表正能量，我們寫下理論的時候就不能有矛盾，而以 $i\phi$ 取代 ϕ 就是錯誤的。

對於電磁波來講，它的橫向（垂直於傳播方向）分量得受到類似的限制。有一個負號出現在電磁波的能量項前，因為這個能量牽涉到兩個（四維）向量內積中的空間指數，向量內積中的定義是

$$A_\mu B^\mu = A_4 B_4 - (A_3 B_3 + A_2 B_2 + A_1 B_1) \quad (4.1.6)$$

庫倫力的符號來自拉格朗日函數中時間分量的符號。對重力波而言，和電磁波一樣，也是橫向分量受到限制，但是在收縮兩個指數（contracting over two indices）、或是任何偶數個指數時，負號彼此相銷掉了，時間分量 h_{44} 的符號與庫倫場的情況相反，所以是吸引力。

4.2 純量物質的應力——能量張量

在我們能夠計算可觀察的效應、或做任何預測（除了平方反比法則、「同性」相吸、力與能量成正比）之前，我們得指明物質如何決定應力—能量張量 $T_{\mu\nu}$ 。我們（相當詳細）的計算是基於最簡單的假設—物質可用純量函數 ϕ 代表；稍後，我們會考慮更高階的函數（所代表的物質）。在課程要結束的時後，我們或許會考慮自旋為 1/2 的物質，因為它們的性質與整數自旋大不相同。自旋 1 與自旋 2 需要更複雜的代數，但在觀念上並沒有不同。

究竟如何從 ϕ 場製造出應力密度呢？如果看 Wentzel 所寫的場論課本，可以找到以下的步驟：拉格朗日函數照理是取決於場與其微分，

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi^i, \psi^i_{,\nu}) \quad (4.2.1)$$

而應力—能量張量的 4-4 分量應該代表能量密度，也就是哈密頓函數（Hamiltonian）。所以，利用傳統上從拉格朗日函數出發求得哈密頓函數的方法——

$$H = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \quad (4.2.2)$$

我們會得到以下的規則

$$T^{\mu}_{\nu} = \psi^i_{,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i_{,\mu}} - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L} \quad (4.2.3)$$

但是一般而言這規則並不正確。例如， $T_{\mu\nu}$ 對於足標 μ 與 ν 而言，並不是對稱函數。如果 $T_{\mu\nu}$ 不是對稱函數，則理論就有毛病（例如無法定義場的角動量）。另外如何保持能量守恆，也有些疑問，因為不是很清楚如何定義 $T^{\mu\nu}$ 的散度，原因在於

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} \neq T^{\nu\mu}_{,\nu} \quad (4.2.4)$$

然而在純量場的情形，規則(4.2.3)剛好給出令人滿意的對稱形式。我們的拉格朗日函數及作用量是

$$S(\text{純量物質}) = \frac{1}{2} \int dV (\phi^{\sigma} \phi_{,\sigma} - m^2 \phi^2) \quad (4.2.5)$$

它由(4.2.3)式所給的應力—能量張量是

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\nu} \phi_{,\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \phi^{\sigma} \phi_{,\sigma} + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \eta_{\mu\nu} \quad (4.2.6)$$

有了這個純量物質的張量，拉格朗日函數裡的耦合項（coupling term）成為

第四講

$$-\lambda h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\lambda \left[h^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} (\phi^{,\sigma} \phi_{,\sigma} - m^2 \phi^2) \right] \quad (4.2.7)$$

用我們比較精簡（加「槓」）的符號，上式可以寫成

$$-\lambda \left[\bar{h}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{1}{2} h m^2 \phi^2 \right] \quad (4.2.8)$$

現在我們可以用這耦合項來產生（因透過交換重力子而發生的）散射的機率振幅。

4.3 散射的機率振幅（純量理論）

只要視察圖 4.2，就可以寫下因為交換一個重力子而引起的散射，其機率振幅為何，因為我們知道傳播子的形式，而且每一頂點所代表的耦合項，可以得自拉格朗日函數(4.2.7)。在動量表現裡，梯度是由四維動量的分量替代

$$i\phi_{,\nu} = p_{\nu} \quad (4.3.1)$$

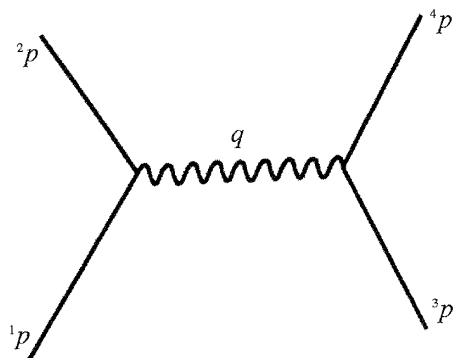


圖 4.2

所以其中一頂點代表的耦合就成為

$$2\lambda \left[\underbrace{{}^1 p_\mu {}^2 p_\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} ({}^1 p^\sigma {}^2 p_\sigma - m^2) \right] \quad (4.3.2)$$

我們在 $p_\mu p_\nu$ 乘積項下頭畫上底線，為的是提醒自己一定要用適當的對稱形式，因為 $h_{\mu\nu}$ 是對稱的。明白地寫出來，

$$\underbrace{A_\mu B_\nu} \equiv \frac{1}{2} [A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu] \quad (4.3.3)$$

對於另一頂點的耦合我們就要用在(4.3.2)式上加「槓」，其形式為：

$$2\lambda \left[\overline{\underbrace{{}^3 p_\mu {}^4 p_\nu} - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu}}} \right] \quad (4.3.4)$$

所以完整的機率振幅是

$$4\lambda^2 \left[\overline{\underbrace{{}^3 p_\mu {}^4 p_\nu} - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu}}} \right] \frac{1}{q^2} \left[\underbrace{{}^1 p_\mu {}^2 p_\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} ({}^1 p^\sigma {}^2 p_\sigma - m^2) \right] \quad (4.3.5)$$

上面所用的簡略記號（槓、底線等）可以簡化以後更為複雜代數運算，所以這些記號是很有用的。

我們的理論給出了兩個粒子間透過重力的散射振幅。如果要算出實際上觀察得到的量，我們一定要取很大的質量，同時如果要觀察到牛頓定律以外的東西，速度需要近於光速。例如，我們可以計算極高速 ($v \approx c$) 的小質量接近一星球（例如太陽）時的偏折。在這裡，我們需要證明可以用對應於（星球）質量 M 的單一振幅取代來自星球內所有粒子的振幅和。這麼做僅是近似而已，但答案至某種第一階近似是正確的。計算所得的偏折比牛頓理論的預測大了 $(1 + v^2/c^2)$ 倍。

第四講

這個結果不能適用於光因為太陽而偏折的現象上，因為光子不是純量粒子，所以不能用純量場 ϕ 描述。如果是兩個全同 (identical) 粒子的散射，振幅會多一項交換項 (exchange term)，但在目前的例子，兩個粒子顯然不是全同粒子。

我們其實不能決定「唯一的」應力—能量張量 $T_{\mu\nu}$ ，因為可以多加進其他項，只要其散度為零；這會給出質量與應力不同的空間分布。但是我們目前的理論還沒有考慮這種改變 $T_{\mu\nu}$ 的可能性，這個問題和相關問題以後會再仔細討論。即使對純量粒子而言，我們以後會看到，張量 $T_{\mu\nu}$ 真的不夠明確。在電磁學中，嘗試圖寫下光子與帶電向量介子時，也會碰到同樣的問題。

4.4 平面波的性質與康普頓 (Compton) 效應

我們現在可以研究在沒有物質時 (真空中) 重力波的性質；對拉格朗日函數變分，可以得到方程式

$$h_{\mu\nu,\lambda}{}^{\lambda} - 2\bar{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{\sigma} = 0 \quad (4.4.1)$$

它類似於真空中的馬克斯威爾方程式。如果用平面波

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(iq \cdot x) \quad (4.4.2)$$

方程式就變成

$$q^2 e_{\mu\nu} - q_\nu q^\sigma \bar{e}_{\sigma\mu} - q_\mu q^\sigma \bar{e}_{\sigma\nu} = 0 \quad (4.4.3)$$

我們對 $q^2 \neq 0$ 與 $q^2 = 0$ 兩種情況都感興趣。如果 $q^2 \neq 0$ ，我們可以除以 q^2 ，然後重新整理而得

$$e_{\mu\nu} = q_\nu \left(\frac{1}{q^2} q^\sigma \bar{e}_{\sigma\mu} \right) + q_\mu \left(\frac{1}{q^2} q^\sigma \bar{e}_{\sigma\nu} \right) \quad (4.4.4)$$

這麼做以後， $e_{\mu\nu}$ 就表示成一個向量的對稱化微分

$$e_{\mu\nu} = \chi_{\mu,\nu} + \chi_{\nu,\mu} \quad (4.4.5)$$

我們以前解釋過重力場的規範不變性 (gauge invariance) 意味著如果多加一項這種項 (向量的對稱化微分項)，物理並不會因此改變。所以永遠可以加一項到 $e_{\mu\nu}$ ，使得 $e_{\mu\nu} = 0$ 。我們將稱呼這種 $q^2 \neq 0$ 的波「規範波」；它們沒有物理效應，永遠可以用規範轉換將它們除掉。

如果 $q^2 = 0$ ，則(4.4.3)意味著

$$q^\sigma \bar{e}_{\sigma\mu} = 0 \quad (4.4.6)$$

也就是說自由波必須滿足勞侖茲規範條件 (Lorentz gauge condition)。對於不是自由波的情況，我們可以為了方便選擇

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (4.4.7)$$

但是自由波的情況與此不同，(4.4.6)類似於電磁學裡光子的 $q^\mu e_\mu$ 必須為零。

我們可以選用一座標系，讓動量向量成為

$$q^\mu = (\omega, \omega, 0, 0) \quad (4.4.8)$$

那麼就能推導出偏振向量 $e_{\mu\nu}$ 的明確形式。如果選擇

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + q_\mu \chi_\nu + q_\nu \chi_\mu \quad (4.4.9)$$

同時要求 $e'_{\mu\nu}$ 只能有橫向 (垂直於傳播方向) 分量，則可以得到一組方程式，它們的解是

$$e'_{11} = -e'_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e'_{12} = e'_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.4.10)$$

第四講

我們大致說明一下(4.4.9)是怎麼來的：(4.4.6)告訴我們 $\bar{e}_{\mu 4} = -\bar{e}_{\mu 3}$ ，所以只有分量 4, 1 和 2 是獨立的。如果願意的話，可以利用轉換(4.4.9)除掉分量 4。例如， $e'_{14} = e_{14} + \omega\chi_1$ ，所以選擇 $\chi_1 = -e_{14}/\omega$ ， $\chi_2 = -e_{24}/\omega$ ；而 $e'_{43} = e_{43} + \omega\chi_4 - \omega\chi_3$ ，那麼可以選擇 $\chi_3 - \chi_4 = -e_{34}/\omega$ ，則 $e'_{43} = \bar{e}'_{43} = \bar{e}'_{44} = \bar{e}'_{33} = 0$ 。我們選擇 $\chi_4 = -e_{44}/2\omega$ ，以便讓 $e'_{44} = e_{44} + 2\omega\chi_4 = 0$ 。既然 e'_{44} 也為零，則對角和 $e'_{\sigma\sigma}$ 為零，因此 e'_{33} 與 $e'_{11} + e'_{22}$ 也為零。所以 $e'_{\mu\nu}$ 只有 $\mu, \nu = 1$ 或 2 的分量不為零，同時 $e'_{11} = -e'_{22}$ 。所以只有兩種線性獨立的歸一（normalized）組合(4.4.10)。

圖 4.3 對應到重力子與質量 m 粒子的康普頓散射機率振幅。重力子偏振張量是 $e_{\mu\nu}$ ；對於純量質量而言，在每個頂點的動量分量是 ${}^1p_\mu$ ， $({}^1p_\nu + {}^1q_\nu) = ({}^2p_\nu + {}^2q_\nu)$ ，跟 ${}^2p_\mu$ 。以這些量來表示，第一個圖所對應的振幅為

$$4\lambda^2 {}^2\bar{e}^{\mu\nu} \left[{}^2p_\mu ({}^2p_\nu + {}^2q_\nu) - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu} \right] \frac{1}{({}^1p + {}^1q)^2 - m^2} \times {}^1\bar{e}^{\alpha\beta} \left[{}^1p_\alpha ({}^1p_\beta + {}^1q_\beta) - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\alpha\beta} \right] \quad (4.4.11)$$

式中的傳播子是純量粒子的傳播子。我們在寫下(4.4.11)式時，已經用了平面波的條件 $q^2 = 0$ 與 $q^\nu \bar{e}_{\nu\mu} = 0$ 。

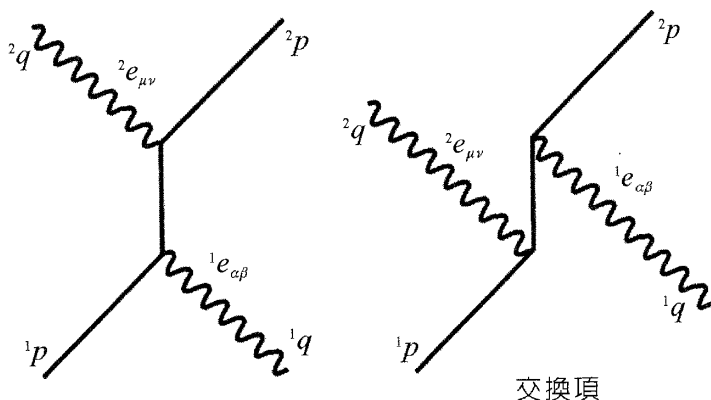


圖 4.3

4.5 重力子的非線性費曼圖

規範不變性告訴我們，把張量 ${}^1e_{\mu\nu}$ 改成 ${}^1e_{\mu\nu} + {}^1q_\mu a_\nu + {}^1q_\nu a_\mu$ 不會影響康普頓散射振幅。可是我們的式子卻違背了這個要求，所以我們的結果不能令人滿意，是不完備的。到底哪裡出錯？

在光子與電子的康普頓散射中，還有第三個費曼圖，即圖 4.4，和圖 4.3 中的其中任何一個圖都不一樣。圖 4.4 對應到拉格朗日函數裡的 A^2 項（ A 代表光子場），如果沒有這一平方項，理論就失去規範不變性。所以和電磁學裡的這個狀況做類比，我們會猜測如果只考慮圖 4.3，我們的（線性）結果只是近似而已，漏了重要的非線性項。在電磁學中，只要要求以下的規範替代

$$e'_i = e_i + qa \quad (4.5.1)$$

不能改變振幅（至某一階），就能夠推導出圖 4.4 所代表的平方耦合。做法是考慮同一階的兩種振幅，其中之一用 e_1 代表光偏振，另一個用 e'_1 ，然後讓它們相等以決定各個項前面的未定係數。我們或許能用同樣的方式來決定重力子的平方耦合項，但是還沒有人這麼做，因為重力子與自己的交互作用至第二階實在太複雜，所以我們將走另一條路。

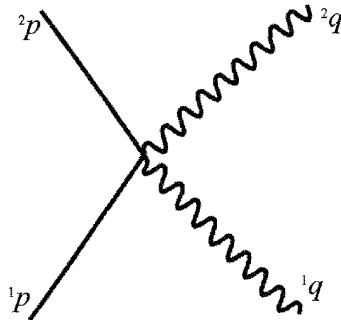


圖 4.4

將來如果能用這種直接的辦法來推導這些非線性項或許還是頗有意思的，所以我再稍加解釋。

第四講

如果我們除了將圖 4.4 所代表的振幅加進康普頓散射振幅，還加進圖 4.5 所代表的振幅，我們所用的條件可能不足以決定更完整理論所有的未知係數。反之，如果我們考慮虛重力子 (virtual graviton) 的康普頓散射，就可以增加可調的係數，這麼一來或許就可能得到正確理論。這麼做所牽涉到的圖或許就像圖 4.6 一類，我們要讓這些振幅的和滿足規範不變性。事實上，我們要用另一種方式解決問題，但是如果利用走另一條路而學到我們場論的細節，或許還是有收穫的事。

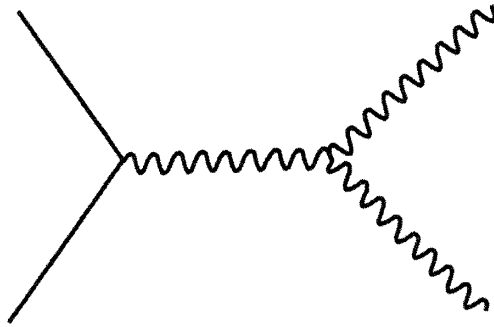


圖 4.5

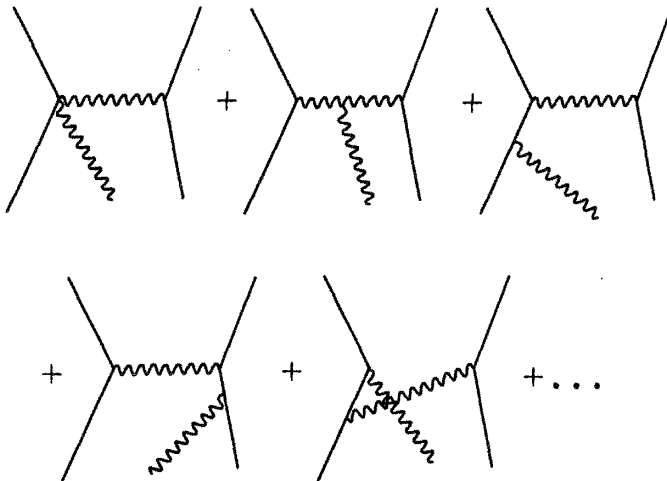


圖 4.6

4.6 參與重力作用的粒子的古典運動方程式

為了計算理論中的一些古典效應，譬如說行星環繞恆星的軌道，需要將我們的量子理論化約成古典形式。要達到這目的，可以將古典理論寫成是變分原理應用到路徑積分（拉格朗日函數對時間的積分，也就是作用量）上的結果。粒子的軌跡是路徑積分的最小值，例如自由粒子的軌跡是

$$-\int \sqrt{(ds)^2} = -\int \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = -\int \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\alpha} \frac{dx_\mu}{d\alpha}} d\alpha \quad (4.6.1)$$

的最小值。我們得多加入一些東西到積分裡，才能表現重力效應。能夠導致古典理論的變分原理不只一個，所以我們將選用最方便的路徑積分（事實上，就是用量子路徑積分方法可以得出 Klein-Gordon 方程式的那個積分）。帶電粒子的運動方程式可以得自以下積分的變分：

$$-\frac{m}{2} \int d\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right) \left(\frac{dx_\mu}{d\alpha} \right) - e \int d\alpha A_\mu(x) \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right) \quad (4.6.2)$$

當我們完成計算，得到的方程式是

$$m \frac{d^2 x_\mu}{d\alpha^2} = e F_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\nu}{d\alpha} \right) \quad (4.6.3)$$

式中的 $F_{\mu\nu}$ 是 A_μ 的旋度。因為 $F_{\mu\nu}$ 是反對稱的張量（即 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ），當我們把 $dx_\mu / d\alpha$ 乘上(4.6.3)式，就會發現

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \frac{dx_\mu}{d\alpha} \right)$$

為零，或是說

第四講

$$\frac{dx^\mu}{d\alpha} \frac{dx_\mu}{d\alpha} = \left(\frac{ds}{d\alpha} \right)^2$$

是一個固定值。因此 α 與原時 (proper time) 成正比 (如果 m_0 是粒子的靜止質量, 我們可以讓 α 與原時 s 相等)。下一步就是將張量 $T_{\mu\nu}$ 適當地放到被積函數裡, 以得到正確的重力方程式。在電動力學裡, 和場有關係的向量就僅是位移對於純量的微分, 亦即速度 ($dx^\mu/d\alpha$)。我們會猜張量 $T_{\mu\nu}$ 只不過是由兩個這樣的速度所製造出來的張量, 而我們只須乘上適當的常數以便讓 44 分量正確地代表能量密度。我們設定

$$T^{\mu\nu} = m_0 \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\alpha} \right) \quad (4.6.4)$$

其中的 $\alpha = s =$ 「原時」。這個張量的 44 分量的確就是能量密度。它有一個 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 這種因子, 可以用來解釋能量為何會隨著速度增加, 它還有另一個同樣的因子以解釋因為勞侖茲收縮而同時引起的體積減小。

所以 (我們要對其變分的) 拉格朗日函數的積分 (即作用量) 就是

$$m_0 \left[-\frac{1}{2} \int d\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right) \left(\frac{dx_\mu}{d\alpha} \right) - \lambda \int d\alpha h_{\mu\nu}(x) \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\alpha} \right) \right] \quad (4.6.5)$$

讓我們引入一個新張量,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu}(x) \quad (4.6.6)$$

以便將我們的拉格朗日函數積分(4.6.5)式寫成一個更簡潔的形式,

$$m_0 \left[-\frac{1}{2} \int d\alpha g_{\mu\nu}(x) x'^\mu x'^\nu \right] \quad (4.6.7)$$

從現在起，我們用「一撇」代表對於 α 的微分。當我們把作用量(4.6.7)對軌跡座標 x 取變分時，有兩項來自因子 x'^{μ} 與因子 x'^{ν} ，這兩項相等，另一項則來自張量 $g_{\mu\nu}$ 。最後得到的運動方程式為

$$-\frac{d}{d\alpha}(g_{\sigma\nu}x'^{\nu}) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0 \quad (4.6.8)$$

這個方程式還有其他種寫法，有時候在其他場合很有用。首先，把牽涉到兩個速度的項放到一邊

$$g_{\sigma\nu}x'^{\nu} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} \right] x'^{\mu} x'^{\nu} \quad (4.6.9)$$

然後把(4.6.9)式右邊的第二項拆成相等的兩項，再對調其中一項的虛標 $\mu \leftrightarrow \nu$ ，就得到一個常用的組合，所以我們用一個特殊的方括符號代表：

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right] \quad (4.6.10)$$

這個方括號也稱「協變聯絡係數 (covariant connection coefficients)」。用這個符號方程式可以寫成

$$g_{\sigma\nu}x'^{\nu} = -[\mu\nu, \sigma] x'^{\mu} x'^{\nu} \quad (4.6.11)$$

我們馬上可以從運動方程式得到一個結果：因為把 $g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}$ 對 α 微分就是

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}) = 2g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} x'^{\mu} x'^{\nu} x'^{\sigma} \quad (4.6.12)$$

第四講

用(4.6.9)來表示(4.6.12)右邊第一項中的 $g_{\mu\nu}x''^{\nu}$ ，然後重新標定（代表累加的）虛標，則我們發現這個微分項為零。所以乘積 $g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}$ 是一個純量常數。如果用下式來定義新參數 s

$$g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2$$

則 s 的意義就類似重力問題中的「原時」。既然 $ds/d\alpha$ 是一個常數，我們可以將它設定為 1，然後將所有的微分改成是對 s 的微分，這種微分以變數上的一個「點」來代表。如此一來，

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 1 \quad (4.6.13)$$

4.7 粒子環繞恆星的軌道運動

我們可以用場張量 $h_{\mu\nu}$ 來表達運動方程式（從(4.6.8)式）：

$$\frac{d}{ds}(\eta_{\sigma\nu}\dot{x}^{\sigma} + 2\lambda h_{\sigma\nu}\dot{x}^{\sigma}) = \lambda \frac{\partial h_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} \dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\sigma} \quad (4.7.1)$$

解這個方程式之前，我們需要重力場的適當表示形式。我們感興趣的區域是沒有質量源（即在恆星之外）的區域，所以場方程式

$$h_{\mu\nu,\lambda}{}^{\lambda} - 2\bar{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{\lambda} = -\lambda\bar{T}_{\mu\nu} \quad (4.7.2)$$

可以用類似解馬克斯威爾方程式的方式去解——如果我們用勞侖茲規範 $\bar{h}_{\mu\lambda}{}^{\lambda} = 0$ 。在這個規範之下，場方程式變成

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -\lambda\bar{T}_{\mu\nu} \quad (4.7.3)$$

其中的 \square^2 是達朗白算符($\square^2 = (\partial/\partial t)^2 - \nabla^2$)。在重力場的情況，如果 $h_{\mu\nu}$ 的頻率為零（即不隨時間而變），我們一定得有牛頓的引力定律； T_{44} 這分量是正比於質量，而應力—能量張量的其他分量為零。場張量為

$$\bar{h}_{44} = -\frac{\lambda M}{4\pi r}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (\nu, \mu \neq 4, 4) \quad (4.7.4)$$

符號上頭沒有加「槓」的張量也很容易得到：

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{h}^\sigma{}_\sigma \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -\frac{\lambda M}{8\pi r} & \text{假如 } \mu = \nu \\ 0 & \text{其它情況} \end{cases} \quad (4.7.5)$$

把(4.7.5)這個場張量代入運動方程式裡，並且使用以下的簡寫符號：

$$\begin{aligned} \phi &= 2\lambda h_{44} \\ \psi &= 2\lambda h_{33} = 2\lambda h_{22} = 2\lambda h_{11} \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

則在我們這個情況， $\phi = \psi = -2MG/r$ ，但是在以後我們會遇到的例子中， ϕ 與 ψ 並不是這樣。所以我們在代數上要將兩者分別清楚，不過還是假設 ϕ 與 ψ 只是 r 的函數。

解出軌道的步驟與一般解牛頓力場中運動方程式的方法類似：將方程式分解成與時間座標有關以及與空間座標區有關的兩部分，然後消去時間變數 t 和參數 α ，以便得到半徑與旋轉角度間的關係（微分方程）。我們從四維的方程式(4.7.1)開始。空間分量($\nu = 3, 2, 1$)滿足的方程式是以下的形式：

$$\frac{d}{ds}(-\dot{x} + \psi\dot{x}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} \dot{t}^2 + \frac{\partial\psi}{\partial x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right] \quad (4.7.7)$$

而時間方程式是

第四講

$$\frac{d}{ds}(t + \phi t) = 0 \quad (4.7.8)$$

我們可以從方程式(4.6.13)得到以下的運動積分量 (integral of motion) :

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + 2\lambda h_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1 \quad (4.7.9)$$

在這裡，(4.7.9)又會導致以下的關係：

$$t^2(1 + \phi) - (1 - \psi)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 1 \quad (4.7.10)$$

時間方程式(4.7.8)意味著

$$(1 + \phi) \frac{dt}{ds} = K \quad (4.7.11)$$

其中 K 是一常數 (正比於能量)。這可以用來消去空間方程式(4.7.7)中的微分(dt/ds)。因為 ϕ 與 ψ 只是 r 的函數，(4.7.7)的右手側是沿著 x 方向。從這結果我們可以得到

$$\frac{d}{ds}((1 - \psi)(\dot{x}y - y\dot{x})) = 0$$

所以如果假設軌道運動是完全位於 $z = 0$ 的平面上，而且我們使用 xy 平面上的極座標(r, θ)，我們會得到與角動量有關的另一個守恆量 L ：

$$(1 - \psi)r^2\dot{\theta} = L \quad (4.7.12)$$

徑向運動可以得自(4.7.10)式 (用極座標表示)

$$\frac{K^2}{1 + \phi} - (1 - \psi)(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) = 1 \quad (4.7.13)$$

我們可以將上式中 r 對 s 的微分(dr/ds)改成 r 對 θ 微分($dr/d\theta$)，方法是將 (dr/ds) 除以 ($d\theta/ds$)，如此就可得到軌道的微分方程式

$$\frac{K^2}{1+\phi} - \frac{L^2}{(1-\psi)r^4} \left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] = 1 \quad (4.7.14)$$

傳統上，我們使用變數 $u=1/r$ ，因為得到的方程式可以很方便地用（對於牛頓解的）微擾方法處理：

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \left(\frac{K^2}{1+\phi} - 1 \right) \frac{1-\psi}{L^2} \quad (4.7.15)$$

我們期待 $\phi = \psi = -2MG/r = -2MGu$ 。對於非相論性運動來說， K 約略為 1，而且我們假設 $K^2/(1+\phi) - 1 = K^2 - 1 + 2MGu$ 的值不大；所以當 ϕ 與 ψ 很小的時候，(4.7.15)式的右手側就只是 $L^{-2}(K^2 - 1 + 2MGu)$ 而已，這和牛頓理論一樣——對牛頓理論而言，右手側是 $(E + 2MGu)L^{-2}$ ， E 代表能量。有一些高階項在相對論的情況不能忽略，我們會在下一節討論。

5.1 行星軌道與水星近日點的進動

當我們逐步地在發展更複雜的理論之時，我們也必須檢視更細微的預測，以便建立評估理論的準則。我們的場論在靜態的極限下（這時所牽涉的是總能量）會化約到牛頓理論，同時也似乎正確地預測了光子在恆星重力場中的「墜落」。但是我們還是得放棄它，實驗證據來自水星軌道近日點的進動。我們現在就開始計算行星軌道。我們的出發點是方程式

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \left(\frac{K^2 - 1 - \phi}{1 + \phi}\right) \left(\frac{1 - \psi}{L^2}\right) \quad (5.1.1)$$

$$u = \frac{1}{r}; \quad K = (1 + \phi) \frac{dt}{ds}; \quad r \left(\frac{d\theta}{ds}\right) = L = (1 - \psi) r^2 \frac{d\theta}{ds}$$

其中的 ψ 與 ϕ 代表張量 $h_{\mu\nu}$ 的對角元素， $\phi = 2\lambda h_{44}$ ， $\psi = 2\lambda h_{ii}$ ， $i=1, 2, 3$ 。根據我們 f 前面發展出來的理論， $\phi = \psi = -2GM/r = -2GMu$ 。但是，我們很快就會看到這個理論是錯的。為了避免以後一切都得重新來過，我們用以下比較廣義的式子來表示 ψ 與 ϕ ：

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha(-2MGu) + a(-2MGu)^2 + \dots \\ \psi &= \beta(-2MGu) + b(-2MGu)^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

對於我們目前的理論而言，只要在計算完之後，將 $a = b = 0$ ，以及 $\alpha = \beta = 1$ 代入公式中。在我們的純量理論裡， $\alpha = \beta = 1$ ， $\phi = -2GM/r$ 。如果用 mc^2

為單位（即這個問題的自然單位），我們假設位能 ϕ 比 1 要小很多，所以 $1/(1+\phi)$ 這個因子可以展成 ϕ 的級數，則方程式(5.1.1)就變成

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{L^2}(K^2 - 1 - \phi)(1 - \phi + \phi^2 \cdots)(1 - \psi) \quad (5.1.3)$$

我們現在可以把方程式等號右邊以 u 為變數展開來。如果只保留 $2GMu$ 以及 $K^2 - 1$ 的一次方與二次方項，則

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = A + Bu + Cu^2 + \cdots \quad (5.1.4)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{L^2}(K^2 - 1); \\ B &= \frac{2GM}{L^2}[(K^2 - 1)(\alpha + \beta) + \alpha]; \\ C &= \frac{1}{L^2}(2MG)^2[K^2\alpha^2 + K^2\alpha\beta - K^2a - (K^2 - 1)b] \end{aligned}$$

現在我們對 θ 取微分，在消去一些相同的因子以後，方程式的形式就恰好可以有簡單的微擾解

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{2}B + Cu + \cdots \quad (5.1.5)$$

當 $C = 0$ ，方程式的解就是牛頓理論的簡單圓錐曲線。變數 u 是 θ 的簡諧函數，簡諧運動的中心點是 $1/2 B$ 。橢圓軌道的頻率為 1，所以當 θ 角增加 2π ，徑向座標 r 會回到原來的值，也就是行星的運動是精準的週期運動。當 $C \neq 0$ ，頻率 $\omega = \sqrt{1 - C}$ ，所以週期就會大一些，近日點出現的週期是 $T = 2\pi/\omega = 2\pi(1 + C/2 + \cdots)$ 。因為 $C \ll 1$ ，角度 πC 代表每行星年（per planetary year）近日點的進動。

第五講

對於非相對論性行星而言，我們很容易得到進動的大小。非相對論極限出現於當 K 值很接近於 1（以 mc^2 為單位）；在這個狀況，很容易看出方程式(5.1.5)就化約到牛頓理論的方程式，和預期的一樣。其實我們的理論有正確的非相對論性極限是非常重要的，恐怕比得到正確的進動還更重要！當 $K^2 - 1 \approx 0$ ，每行星年近日點的進動是

$$\pi C = (\alpha^2 - a + \alpha\beta)4\pi M^2 G^2 L^{-2} \quad (5.1.6)$$

在我們的理論中， $\alpha = \beta = 1$ ， $a = 0$ ，所以從(5.1.6)式得到水星近日點的進動是每世紀 57 弧秒。（至於其他行星，這個值要小很多，例如地球近日點的進動只有每世紀約 4 弧秒。）天文上的觀測值是每世紀 5270 弧秒，其中絕大部分可以用牛頓理論解釋（因為其他行星對於水星軌道的重力作用），但是在對比理論（微擾）計算與觀測結果以後，還是有 41 ± 2 弧秒的差距。我們的理論給出的值顯然太大，約是觀測值的 4/3 倍。

因為理論預測和觀測結果這麼接近，在放棄我們的理論之前，最好再仔細地檢視觀測證據和理論計算，以確定兩者的差異是確實無誤的。人們已經多次查驗一切的細節，還是無法推翻 41 ± 2 弧秒這個數字。在宣稱牛頓理論是錯的之前，我們或許應該考慮可能的物理解釋，例如有一顆行星比水星更靠近太陽，但是還未被發現，或是太陽有不可忽略的四極（quadrupole）質量分布，也就是說如果太陽更扁一些，就會出現進動。如果我們真的去估計太陽形變必須多大才能解釋觀察到的進動，我們發現這樣的形變是不可接受的——太陽旋轉得太慢，不可能形成足夠的質量四極矩（quadrupole moment）。類似的估計也排除了另一顆內圈行星的可能性。結論是現有的理論是錯的。

在開始討論我們的理論究竟哪裡出錯之前，我們可以用軌道理論去求得高速粒子在通過太陽時偏轉角度的大小。相對論極限是 $K^2 \gg 1$ ，總能量比靜止能量大很多。線性動量是 $p = \sqrt{K^2 - 1}$ ，當 $K^2 \gg 1$ ，可以看到方程式化約成與牛頓理論一樣的形式，除了位能多乘了一個 $(\beta + \alpha)$ 的因子。既然 $\beta = \alpha$ ，預測一般會是兩倍大。

我們預測極快速的粒子 ($v=c$) 切過太陽表面時，偏轉的角度是 1.75 弧秒。其他恆星發出的光通過太陽時偏折的角度，已經測量出來，與預測非常接近。雖然這項觀測在原則上很容易，但實際上當太陽出現時，很難看到任何其他恆星，更別說當太陽與恆星靠的很近的時候。人們精確地拍攝了天空的照片，然後和全日蝕時拍攝的照片相比較。當我們把遠離太陽的恆星在照片上的位置重疊在一起，就可以觀察到當恆星越接近太陽，位置就越偏離太陽。數據分析其實相當費時。當光線切過太陽時，兩個這類的實驗所得到的偏折角度分別是 2.01 弧秒與 1.70 弧秒。所以 1.75 弧秒算是與觀測相符。

5.2 重力場中的時間膨脹 (time dilation)

至目前，我們的理論明顯地與符合觀測結果，除了高估了行星近日點的進動約 4/3 倍。我們或許會和金星理論家一樣地想，就在持續探究餘下的微擾效應有多大，或還在進一步地改進測量的同時，我們應該也繼續追究目前的理論，看看還有什麼新的效應可以拿來檢驗，或者是發現隱藏在理論中的矛盾，這樣做是比較明智的。

如果比較粒子在電場與重力場中的運動微分方程式，我們會發現重力方程式有一個明顯的新特色，也就是除了位勢的梯度 (gradient) 之外，位勢本身也出現在運動方程式裡。

$$\begin{aligned} \text{電場: } \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} &= -\frac{e}{m_0} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) \frac{dx^\nu}{ds} \\ \text{重力場: } \frac{d}{ds} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

所以雖然兩種場的微分方程式非常類似，它們的詮釋卻大不相同。例如，假設有兩個區域，其中之一的位勢是零，另一的位勢是非零的固定值，雖然兩者的加速度都是零，對於這兩種狀況，兩個方程式所給的結果

第五講

並不一樣。在宇宙裡，由遠處星雲所造成的位勢對於很大的空間區域來說，幾乎是固定值，所以我們的考慮派得上用場。

我們回頭利用拉格朗日函數與變分法原理，因為這個理論形式最容易看出新結果，而且所得結果的適用範圍最廣。我們假設某一空間區域裡的重力張量 $g_{\mu\nu}$ 與座標無關，其分量的（固定）值是

$$g_{44} = 1 + \epsilon; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad (5.2.2)$$

因為位勢來自遠處的質量，所以應該是小於零，亦即 $\epsilon < 0$ 。把(5.2.2)代入拉格朗日函數，我們會得到

$$\begin{aligned} & -\frac{m_0}{2} \int d\alpha g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\alpha} \frac{dx^\nu}{d\alpha} \\ & = -\frac{m_0}{2} \int d\alpha \left[(1 + \epsilon) \left(\frac{dt}{d\alpha} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\alpha} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\alpha} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\alpha} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

很明顯，只要使用新的時間變數 $t' = t\sqrt{1+\epsilon}$ ，拉格朗日函數就會回復成原來的代數形式。這似乎意味著位勢如果是固定值，其效應就像是改變時間的尺度使得在重力位勢較低的區域，物理過程進行的速率較慢。

但是以上針對自由粒子的論證並沒有意義，因為我們不能夠確定可以改變「沒有事情發生」的速率（因為沒有任何交互作用）。我們必須研究有交互作用粒子的行為。為了這個目的，我們繼續利用純量物質理論。作用量是

$$\frac{1}{2} \int d^4x (\phi^{\sigma\sigma} \phi_{,\sigma} - m^2 \phi^2) - \lambda \int d^4x h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (5.2.4)$$

其中的 $T^{\mu\nu}$ 是

$$T^{\mu\nu} = \phi^{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (5.2.4')$$

我們可以把梯度中的時間微分與空間微分區分開來，也可以把體積元素 d^4x 中的時間分開來。假設 ϵ 比 1 小，可以把作用量展成 ϵ 的級數，這級數的頭幾項就是

$$\frac{1}{2} \int d^3x dt \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 (1 - \epsilon/2) - (\nabla \phi)^2 (1 + \epsilon/2) - m^2 \phi^2 (1 + \epsilon/2) \right] \quad (5.2.5)$$

同樣地，如果用新變數 $dt' = dt \sqrt{1 + \epsilon} \approx dt(1 + \epsilon/2)$ ，作用量就回復到先前的代數形式。顯然地，時間膨脹對於我們的純量粒子來說，是真實的。我們可以證明不管總拉格朗日函數的本質為何，對於所有的交互作用而言，時間膨脹都會發生。我們可以利用 Wenzel 的 $T^{\mu\nu}$ 公式(5.2.4')來幫助論證。重力交互作用可以明確地和拉格朗日函數中的其他項區分開來。

$$\mathcal{L}(\text{總}) = \mathcal{L}_0 - \lambda h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (5.2.6)$$

利用(5.2.4')式以及先前的 $g_{\mu\nu}$ (5.2.2)，可以得到 $\lambda h_{44} = \epsilon/2$ (見(4.6.6)式)。總拉格朗日函數就是 $\mathcal{L} - (\epsilon/2)T_{44}$ ，也就是

$$\mathcal{L}(\text{總}) = \mathcal{L}(1 + \epsilon/2) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,t}} \psi_{,t} (\epsilon/2) \quad (5.2.7)$$

假設總拉格朗日函數（包括常數值的重力位勢）只牽涉到 ψ 場和其微分，則作用量積分如果用變數 t' 來表示，就是（起碼至 ϵ 的一次方項）

$$\text{作用量} = \int d^3x dt' \mathcal{L}(\psi_{,t'}, \psi, \psi_{,x}) \quad (5.2.8)$$

原因是

$$\psi_{,t'} = (1 + \epsilon)^{-1/2} \psi_{,t}$$

第五講

以及

$$\text{作用量} = \int d^3x (1+\epsilon)^{1/2} dt \mathcal{L} \left[(1+\epsilon)^{-1/2} \psi_{,t}, \psi, \psi_{,x} \right]$$

總之結果就是拉格朗日函數裡的任何項只要牽涉到 ψ 場的時間微分 $\psi_{,t}$ ，就有 $\sqrt{1+\epsilon}$ 的因子，所以一個常數（各處大小一樣）重力場的效應就出現在變數 $t' = t\sqrt{1+\epsilon}$ 的替換當中。因此除了時間膨脹，其他所有的物理都沒改變。

因為重力位勢是負值，所以較靠近恆星（或其他重物）的鐘走得較慢。有人或許要問：既然 $\epsilon = -2GM/r$ ，有無可能 $(1+\epsilon)$ 是負值？實際上，因為 G 非常小，所以我們不必擔心這個問題。對於質量和太陽一樣的恆星而言，只有當所有的質量都集中在半徑約 1.5 公里的圓球內時， ϵ 才可能等於 -1 。然而從邏輯上講，在我們的理論中 ϵ 的確可能小於 -1 ；以後我們會說明即使我們改進過了理論，它如何還是會碰到這個問題。

所以我們就得到理論的一個預測：鐘在重力位勢較小的地方，走得較慢。人們已經做過實驗來查證這項預測，他們的方法是讓光子在地球表面墜落二十四公尺—光子從上面發射，在底下接收（我們利用很精密的 Mossbauer 效應—這是 Mossbauer 所發現在來自晶體中原子核躍遷的極細窄譜線）。光子落下而導致的微小頻率改變（只有 10 的 15 次方分之一）和人工都普勒頻移（artificial Doppler shift）相抵銷。因為晶體（與發射光源）的相對速度會影響光的吸收，所以從吸收率可以決定相對速度，也就決定了改變的頻率（頻移）。實驗結果與理論推算在實驗誤差內相符至約百分之十。在實驗中，扮演「跑得較慢的鐘」角色的是產生固定頻率光子的原子核機制。在上頭與下面兩個鐘之間的頻率差與頻率的比值是 $(\Delta\omega/\omega) = (\epsilon/2) = \text{重力位勢差除以 } c^2$ 。

其實如要預測頻率的這種改變，根本不必用上我們的重力理論，因為 Eötvös 的實驗—重力（或位勢）與能量成正比—已經意味了這個結果。所以頻移對應到光子能量中的重力能量。根據 Eötvös，處於激發態（ E_0 是激發態能量）的原子核要（比處於基態的原子核）更重上 $(E_0/c^2)g$ ，因為

從原子核實驗我們知道它的質量是 $M + E_0/c^2$ (M 是處於基態原子核的質量)。如果把處於激發態原子核提升至 h 高度，則它的能量就變成 $E_0 + (E_0/c^2)gh + Mgh$ ，要大過處於基態原子核在零高度的能量。如果我們想激發位於低處的原子核，只需要 E_0 能量就可以。當較高的原子核躍遷至基態後，它的總能量只比低處的原子核大上 Mgh 。因為光子的能量是 $E = \hbar\omega$ ，所以從較高原子核所發射的光其頻率是 $\omega = \omega_0(1 + gh/c^2)$ 。很明顯，頻率的改變來自能量守恆的要求。如果頻率沒有改變，我們就可以利用原子核躍遷來製作出永動機。我們用能量 E_0 的光子來激發位置較高的原子核，但是我們將原子核降下後，會得到 $(M + E_0/c^2)gh$ 的機械能。既然提升位於基態的原子核只需要 Mgh 能量，在這一圈的操作之後，我們就平白得到 $(E_0/c^2)gh$ 大小的能量。所以我們的理論並不是自我矛盾的理論，而且它意味著能量守恆所要求的頻移是所有物理過程的一般性質，而且這些過程在較低的重力位勢中進行得較慢。

這裡並沒有像狹義相對論裡的「孿生子弔詭」。住在山頂上的人老得比較快，我們看到他動得比較快。當他往下看我們，會看到我們的動作較慢。這和高（相對）速度時的時間膨脹不一樣—在那種狀況，雙方都會看到對方動得較慢。如果我們搬到死亡谷（Death Valley），我們的壽命並不會改變太多；我們老化的速度改變得很少。但是將來我們談到物體，例如地球的年齡時，就要小心一點，因為地球的中心應該比表面要更年輕個一兩天。

5.3 時間膨脹的宇宙效應，馬赫原理 (Mach's Principle)

稍早，我們注意到宇宙大致上可以看成是均勻、各向同性的質量分布，同時重力位勢的大小可能會使得位於宇宙中心的粒子的重力能量約略等於其靜止能量。如果真的如此，而且我們時間膨脹的公式沒錯，則宇宙中心的物理過程應該靜止下來，因為在那裡時間並不「流動」。但這還不是唯一在物理上不可接受的預測，因為我們可能會預期宇宙邊緣的物質會更快地交互作用，所以來自遠處星系的光的頻率會變大（即會紫移 (violet-shifted)）。但是我們已經知道頻率其實變得更小、更「紅」。

第五講

所以在碰上宇宙模型的時候，我們顯然需要進一步檢討時間膨脹的公式。以下的討論純然是定性的討論，用意只是在激盪出更好的想法。

我們可以想像對於我們簡單公式的修正可能來自張量 $h_{\mu\nu}$ 的空間分量。我們至目前只考慮了 h_{44} 分量；如果將 h_{33} 和 h_{22} 以及 h_{11} 考慮進來，我們或許會預測，除了時間膨脹之外，空間軸同時也有某種形式的收縮，而這麼一來問題或許就不知怎麼地解決了。另一種可能性是出現在時間膨脹公式裡的 1 我們對它的看法出錯了。我們寫下的公式只有在位勢差 ϕ 遠小於 1 的時候才適用，所以常數 1 或許不知如何地就代表了很遠處星雲（歸一後）的貢獻。換句話說，我們推導出重力對於一個粒子總能量的修正就是對於其慣性的修正。在觀念上，這種想法的一個簡單推廣就是假設粒子在本質上其實沒有慣性，所有的慣性代表粒子與宇宙其他部分重力交互作用的總合。但是我們馬上就碰到定量上的困難。假設我們想說在太陽附近，一顆行星的總位能是太陽位勢和來自其他物質（近乎定值）的貢獻：

$$\phi = \phi(\text{太陽}) + \phi(\text{物質}) \quad (5.3.1)$$

我們不可能將 $\phi(\text{星雲})$ 當成是 1，因為修正項 $\phi(\text{太陽})$ 就必須是不同的符號。

雖然這個簡單的嘗試似乎失敗了，如果更仔細地討論它可能還是有點好處。物理學家馬赫在十九世紀首先把慣性看成是與遠處物質交互作用的效應，這個想法是愛因斯坦在建構重力理論時所懷抱的想法之一。

馬赫覺得（相對於「空間」的）絕對加速度的觀念沒有意義；反之，一般古典物理中的絕對加速度必須看成為相對於遠處星雲的加速度。同樣的，旋轉的概念也必須是相對於其他某種東西；「絕對旋轉」是沒有意義的概念。當我們把這種說法看成是基本假設，人們就稱它為馬赫原理。這個原理有可能純憑自己就能導致有意義的物理結果，就好像相對論原理（聯繫有固定相對速度的參考座標系）是海更斯（Huygens）用來推導撞球碰撞定律的工具—假設我們觀察兩個撞球以同樣大小的動量迎面相撞，它們撞擊後就改變速度方向，海更斯就想像如果在船（相對於岸上等速前進）上從事相同的實驗，利用相對論原理，他推論出（任意起始速度）平滑撞球碰撞的正確定律。

馬赫原理必然會深刻地影響力學定律，因為一般力學假設對於不受力的物體而言，等速直線運動是「自然」的運動狀態。當我們把加速度定義成相對於其他物體的加速度，一個「不加速」粒子的軌跡取決於其他物體在空間中的分佈，而且當我們改變其他物體在空間中分佈，物體之間力的定義也會隨著改變。

5.4 量子力學中的馬赫原理

既然我們不能談論直線運動，對於量子理論而言，馬赫原理的敘述會牽涉到新效應。我們將會看到適當的敘述牽涉到時間上的演進。

馬赫的問題在於決定一個粒子如何「知道」它正在加速。他相信加速來自星雲的影響，這種影響的性質是有了力才會有相對於星雲的加速度。量子力學出現後，我們可以定義出一種新的「絕對」——長度或時間的絕對尺度：在一立方體中，零能量的 10^{24} 個氫原子剛好有某個絕對大小，或是 NH_3 氨分子有一個明確的震盪週期。在真空中，兩個相同的光子若迎頭相撞，什麼事也不會發生，除非光子波長小於 $2\pi \cdot 3.68 \times 10^{-11}$ 公分，這時光子碰撞後可以產生正負電子對。光子如何「知道」它們的波長以絕對單位表示究竟是多少（這樣才能決定是否製造正負電子對）？空間中每個體積必須包含大小（或時間）的自然尺度。

我們如果接受馬赫原理的哲學，就會說上面的講法一點道理也沒有，因為大小不是絕對的，除非拿其他東西來比；一定是星雲的影響決定了空間中每一點上頭的時間尺度。例如宇宙中星雲的數目決定了康普頓波長（Compton wavelength）與宇宙大的比值。如果星雲少了一些，尺度也就應該更著改變。

因此我們假設時間的自然尺度—例如說 \hbar/mc^2 的大小（或用其他基本粒子的任何其他組合—我們假設它們都正比於某個長度單位）—取決於遠處星雲。我們現在要證明慣性座標就由星雲自動決定，而且對於（相對於星雲的）加速度的慣性現象就可以理解，如果我們接受了「長度決定原理」。所以，馬赫原理就等價於對於某一空間點來說，長度與時間的基本單位來自於星雲的影響。

第五講

在量子力學中，一個假想中位於「靜止」狀態的粒子，其波函數和時間演進有關的因子是 $\exp(-imc^2t/\hbar)$ 。慣性原理說時間尺度和位置（座標 x ）無關；（因為粒子波函數是時空的函數，在某些時空點波函數具有相同的相位）我們將古典軌跡解釋成依循某些時空線，它們與有相同相位的時空點垂直。在二維的情況，我們畫出等相位的線，這些線垂直於時間軸，如圖 5.1。

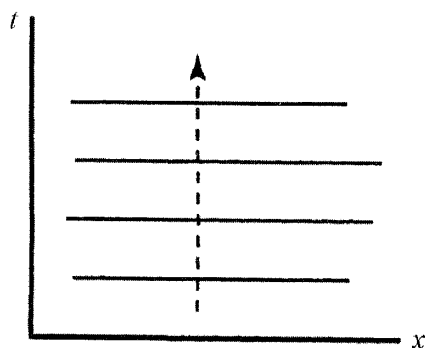


圖 5.1

如果不同的空間區域有不同的時間尺度，等相位的線在圖中就成為曲線，而對應的古典軌跡也就是彎曲的，所對應的加速運動是轉向時間尺度較小的區域，如圖 5.2 所示。因為恆星產生了比較密集的時間尺度，它們一定會產生加速度。在量子力學裡，如果等相位面是平行的，就存在著平面波解；如果不是這樣，波包就會跟循相位的梯度（gradient）前進。如果決定時間尺度的主要是遠處星雲，而且附近沒有恆星，那麼對於兩個相鄰的點，點 1 和點 2，來說，尺度 \hbar/mc^2 是幾乎相等的，因為點 1 和點 2 距離所有的星雲都幾乎一樣遠，所以在點 1 和點 2 的自然頻率（等相位線之間的距離）就會幾乎相等。因此，如果一個粒子最初在點 1 和點 2 有相同的相位，以後也就都會如此，而且它會靜止不動而不會加速（更精確一點講，一個很長的波包會靜止不動）。如果最初的相位不相等就會導致傾斜的線，但是斜率在時間上是一定值，也就是一固定速度。沒有加速度是因為空間中每個點的自然時間尺度全都相等。如果是星雲在決定自然尺

度的大小，我們就可以了解為何尺度是固定的，因為在非常小的區域裡（所謂小就是與造成影響的星雲其分布的大小（約是宇宙的大小）相比），自然尺度應該不會有變化。

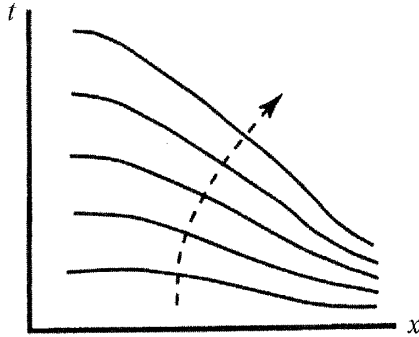


圖 5.2

在這裡我們得提一下某些數值上的巧合，目的是看看長度的「自然」大小能否以某種方式用宇宙學來解釋。這些巧合和「理論」無關——它們只是用來示範比較詳細的理論終究可能預測出的某類關聯。我們假設在某個時間單位系統——這系統對於宇宙來說是「自然」的一個靜止粒子的不變弧長（invariant arc length）是

$$(ds)^2 = g_{44}(dt)^2 \quad (5.4.1)$$

t 的座標時間單位可能是 (R/c) ， R 是宇宙的半徑。假設原子單位是由 ds 來定義（我們很在意 $g_{\mu\nu}$ 的絕對大小），也就是一單位的 ds 是基本長度。那一個基本長度？它們其實彼此都成正比，不過讓我們首先試著用質子的康普頓波長 \hbar/Mc 。所以 s 個 1 代表質子波函數的一週期，而 t 個 1 代表宇宙大小的尺度。

我們接下來假設每一個質子對於 g_{44} 的貢獻只是 $1/r$ （我們用座標單位，也就是宇宙的半徑，來表示 r ）。遠處的星雲（帶有 N_0 個質子，典型的距離約是 $R=1$ ）對於 g_{44} 的貢獻以數量級而言是 N_0 。在距離某恆星（帶有 n 個質子） r 的地方，弧長的平方是

第五講

$$(ds)^2 = \left(N_0 + \frac{n}{r} \right) (dt)^2 \quad (5.4.2)$$

前面所說的巧合是：如果 T 是宇宙的年齡，它和質子時間（proton time） \hbar/Mc^2 的數值關係是 $(\hbar/M_p c^2) \approx T/\sqrt{N_0}$ 。如果配合上前面提過的另一數值巧合， $2M_{\text{宇宙}}G/R \approx 1$ ，則結果是（如果我們改回公分與秒這類任意的單位系統）

$$(ds)^2 = \left(1 + \frac{2mG}{r} \right) (cdt)^2 \quad (5.4.3)$$

這裡的 m 是恆星的質量，大致上 $m = nM_p$ 。除了關鍵的符號出了大錯〔應該是負（-）號而不是正（+）號〕，結果與「正確」的弧長相同。藉由搬弄純粹的宇宙數字，我們居然成功地得到了正確的尺度大小。

這種數字上的巧合或許沒有什麼很深的意義。有一件事是錯的——我們假設來自每一個質子質量的貢獻是 $1/r$ ，但是 $1/r$ 是鄰近粒子對於總能量的正確（重力）修正，對於遠處星系中的粒子而言，這可能是錯的。另一個大問題是我們並沒嘗試將張量 $h_{\mu\nu}$ 中其他項，例如 h_{11} ，的效應包括進來。儘管如此，這項練習指出了重力理論無可避免地會牽涉到時間與慣性。我們看到與遠處粒子的交互作用可能導致所觀察到的物體，例如質子，慣性。無論如何，有個想法是我們應很認真地把 $g_{\mu\nu}$ 的絕對大小當一回事， $g_{\mu\nu}$ 的絕對大小可能是有意義的。平空間也許是 $g_{44} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = \xi$ ， ξ 是一個有意義的數字，不能輕易的設定為 1。

5.5 重力場的内能（self energy）

讓我們回到比較不那麼臆測而更精確的事情上。

在發展以及修正我們的場論之時，我們忘記檢查這個理論必須沒有內在矛盾。我們寫下了一個完整的拉格朗日函數，其中包括重力場項、物質項、與偶合項。我們讓應力—能量張量的散度（divergence）為零來得到場方程式。很明顯地，這個步驟是錯的，因為我們所用的應力—能量張

量並沒有包括重力場本身的能量；所以我們的理論在物理上是不可行的，因為守恆的能量不能只包含物質的能量，重力場的能量也要涵括在內。

我們要設法更正這項理論缺失；方法是尋找一個新張量，以加進我們的舊張量 $T^{\mu\nu}$ ，讓

$$(T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (5.5.1)$$

同時場的自能 (self energy) 也要適當地考慮進來，這樣或許就可以把問題補起來。那麼我們該如何去尋找這一項？我們或許會試圖 Wenzel 的公式以及完整的拉格朗日函數去建構正確的總張量。這樣的結果會是一個不對稱的張量 (unsymmetric tensor)；如果我們將它對稱化以後去做計算，會發現所得到的水星近日點移動是錯的。這是關於物理理論基本原則另一個例子：如果理論不是從某種變分原理，例如最小作用量原理，來推導出來的話，我們可以預期它遲早會有麻煩和矛盾。

我們將試圖走另一條之前走過的路，就是由簡入繁地嘗試各種理論。物理上，我們知道我們在試圖描述非線性效應：重力場來自能量，而場的能量又產生更多的場。我們可能開始感到興奮—這樣的非線性的確可能可以解釋水星近日點移動剩下的差距。我們將堅持場方程式一定得來自某個作用量的變分；我們要問自己，應該在拉格朗日函數中多加上什麼樣的項，才能讓運動方程式多一項 $\chi^{\mu\nu}$

$$h^{\mu\nu}{}_{,\sigma} - 2\bar{h}^{\mu}{}_{\sigma}{}^{,\nu\sigma} = -\lambda(\bar{T}^{\mu\nu} + \bar{\chi}^{\mu\nu}) \quad (5.5.2)$$

同時滿足方程式(5.5.1)？如果 $\chi^{\mu\nu}$ 代表某種重力場能量，它可能是什麼模樣？毫無疑問， $\chi^{\mu\nu}$ 起碼有一部分會和場強度的平方成正比，也就是與兩項重力位勢的微分乘積成正比。因此 $\chi^{\mu\nu}$ 或許就是一些類似 $h^{\mu\sigma}{}_{,\lambda} h^{\nu\lambda}{}_{,\sigma}$ 等等。這種項（每一項有兩個 h 及兩次微分）之和。

我們將堅持方程式得來自某變分原理，譬如最小作用量原理。當我們對 h 的乘積取變分時， h 的次方會降低，所以被變分的拉格朗日函數需

第五講

要是 h 的三次方項，我們稱它（這些三次方項）為 F^3 。我們要從 F^3 的變分得到 $\chi^{\mu\nu}$

$$\frac{\delta F^3}{\delta h_{\mu\nu}} = \lambda \chi^{\mu\nu} \quad (5.5.3)$$

F^3 中每一項的代數結構必須是三個 h 的乘積，同時有兩次微分。 F^3 中一個典型項可能是這樣子的：

$$F^3 = ah_{\mu\nu}h^{\mu\sigma,\lambda}h_{\sigma\lambda}{}^{,\nu} + \dots \quad (5.5.4)$$

當我們寫下所有這樣的乘積時，會發現共有二十四種可能性。這個數目可以減縮，因為其中某些項可以經由兩次部分積分，轉化為其他項的組合。所以最後我們可以寫下十八種不同且相互獨立的項； $\chi^{\mu\nu}$ 的形式因而牽涉到十八個獨立的常數。

下一步該怎麼走很清楚：利用

$$(T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (5.5.5)$$

這個條件來決定那十八個未知常數。我們會發現這十八個未知常數得滿足一組方程式，但是這組方程式的數目卻超過十八個。還好這組方程式彼此間沒有矛盾，能夠解出唯一的一組十八個常數。當工作完成，這個改良的理論就會正確地包括了重力場的能量，至 $h_{\mu\nu}$ 的二階項。

6.1 應力—能量張量的雙線性 (bilinear) 項

到目前為止，我們的理論還是線性的——因為把重力場 $h_{\mu\nu}$ 與應力—能量張量 $T_{\mu\nu}$ 連接起來的關係式是

$$\overline{h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} - 2\bar{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{,\lambda}} = -\lambda T_{\mu\nu} \quad (6.1.1)$$

而這個方程式的左側只有 $h_{\mu\nu}$ 的線性項。但是這裡的 $T_{\mu\nu}$ 只考慮了物質的貢獻，就好像重力不會影響到物質，而且重力場本身的能量也好像不會是重力場源。重力當然會影響物質——我們想包括在內的效應可以用以下的情況來說明：如果把質量 1 與質量 2 兩物體拉靠近，同時旁邊還有第三個物體，這時所做的功其中一部分可能會讓這第三個物體熱起來，所以如果我們僅僅考慮質量 1 與質量 2，以及它們所產生的場，則能量不是守恆的。所以我們如果只考慮子系統，能量就不守恆；圖 6.1 中虛線圈起來的兩個子系統重量不會一樣。場能量的非線性效應，在觀念上，其實是大家比較熟悉的；我們在第一階近似中已經計算了來自質量源的場；下一階近似得要考慮場本身可以作為場源，這樣才可能得到自恰（沒有矛盾）的答案。

我們將會建構一個新的應力—能量張量，方法是在舊的張量上再加上額外的一項。這新的一項可以從拉格朗日函數中記為 F^3 的一項，取變分而來； F^3 這一項，至目前止，都為我們所忽略。所以新的應力—能量張量為：

費曼重力學

$$\begin{aligned} \text{新 } T^{\mu\nu} &= \text{舊 } T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu} \\ \lambda \chi^{\mu\nu} &= \frac{\delta F^3[h]}{\delta h_{\mu\nu}} \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

我們希望這麼一來就可以去除困難，起碼在更高一階的 $h_{\mu\nu}$ 情形下是如此。

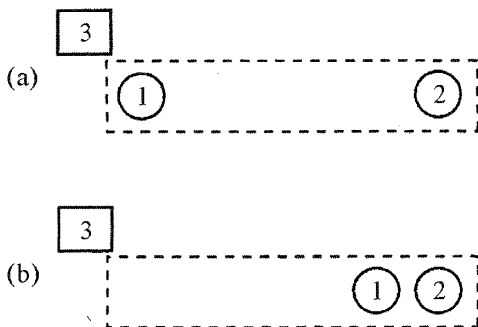


圖 6.1

既然我們想建構 $\chi^{\mu\nu}$ 去解決舊 $T^{\mu\nu} \equiv {}^oT^{\mu\nu}$ 不滿足能量守恆的問題，亦即 ${}^oT^{\mu\nu}_{, \nu} \neq 0$ ，我們當然得從 ${}^oT^{\mu\nu}$ 的散度（divergence，即 ${}^oT^{\mu\nu}_{, \nu}$ ）去得到關於 $\chi^{\mu\nu}$ 結構的靈感。 $\chi^{\mu\nu}$ 的散度（即 $\chi^{\mu\nu}_{, \nu}$ ）當然必須與 ${}^oT^{\mu\nu}_{, \nu}$ 相消，起碼兩者展式不等於零的最低階項（first non-vanishing order）得相消。為了計算 ${}^oT^{\mu\nu}_{, \nu}$ ，我們首先用新的形式來表示運動粒子的 ${}^oT^{\mu\nu}$ 。這個形式雖然第一眼看起來很陌生，但是比較容易運算。這個新形式是積分的形式，它是對於一純量參數的積分，以原時（proper time） s 做為這積分參數就很方便（點代表對於 s 的微分），

$${}^oT^{\mu\nu}(x) = m_0 \int ds \delta^4(x - z(s)) \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \quad (6.1.3)$$

這個 ${}^oT^{\mu\nu}$ 的形式等價於我們以前所用的形式（見(4.6.5)式），只要檢查以下的等式就能看出這一點：

$$\lambda \int d^4x {}^oT^{\mu\nu}(x) h_{\mu\nu}(x) = \lambda m_0 \int ds h_{\mu\nu}(z) \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \quad (6.1.4)$$

第六講

(6.1.3)式中的 δ 函數有一個簡單的物理意義——它只是在說交互作用能量只出現在粒子的真實位置。如果用類似的形式來表達我們熟悉的電動力學，就更容易理解這些形式是很恰當的：電動力學拉格朗日函數中的交互作用項是 $-j^\mu A^\mu$ 的體積分， j^μ 與粒子速度的關係是

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= e \int ds \delta^4(x - z(s)) \dot{z}^\mu \\ S(\text{int}) &= -e \int ds A_\mu(z) \dot{z}^\mu \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

很明顯地，它和重力場的情形(6.1.3)與(6.1.4)可以對應得起來。

我們可以用(6.1.3)式來計算 ${}^o T^{\mu\nu}$ 的散度—— ${}^o T^{\mu\nu}{}_{, \nu}$ 。我們首先看清 δ 函數對於 x 與 z 這兩個變數而言，是對稱的；所以計算散度時對於 x^ν 的微分可以用（負的）對於 z^ν 的微分取代。然後利用等式

$$\dot{z}^\nu \frac{\partial}{\partial z^\nu} f[z(s)] = \frac{d}{ds} f[z(s)] \quad (6.1.6)$$

來得到 ${}^o T^{\mu\nu}$ 的散度：

$${}^o T^{\mu\nu}{}_{, \nu} = \int ds \delta^4(x - z(s)) \dot{z}^\mu \quad (6.1.7)$$

我們看到這個散度是加速度的密度。在這裡我們要假設除了重力之外，所有的能量都已經正確地包含在拉格朗日函數裡，所以加速度 z 代表重力效應，它是由以下的運動方程式給出的

$$\begin{aligned} g_{\mu\lambda} \ddot{z}^\mu &= -\frac{1}{2} [g_{\mu\lambda, \nu} + g_{\nu\lambda, \mu} - g_{\mu\nu, \lambda}] \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \\ &= -[\mu\nu, \lambda]_z \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

方括弧旁的足標 z 是為了提醒我們指數所指的變數為何。現在讓散度，(6.1.6)，乘上 $g_{\mu\lambda}(x)$ ，接著以 $-\mu\nu, \lambda]_z \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu$ 取代 $g_{\mu\lambda} \ddot{z}^\mu$ 指數。注意因為 δ 函

數的關係， $[\mu\nu, \lambda]_z$ 的效果和 $[\mu\nu, \lambda]_x$ 一樣。也就是說，方括弧可以拉到積分符號外頭，所剩的只是牽涉到散度 ${}^o T^{\mu\nu}{}_{, \nu}$ 與原來張量 ${}^o T^{\mu\nu}$ 的式子：

$$g_{\sigma\lambda}(x) {}^o T^{\sigma\nu}{}_{, \nu}(x) = -[\mu\nu, \lambda] {}^o T^{\mu\nu}(x) \quad (6.1.9)$$

這是 ${}^o T^{\mu\nu}$ 必須滿足的完整方程式。目前，對於這方程式我們只用到 h 的一次方項而已。我們可以將 $g_{\sigma\lambda}$ 分解成兩項 $\eta_{\sigma\lambda} + 2\lambda h_{\sigma\lambda}$ ，所得到的方程式告訴我們 ${}^o T^{\mu\nu}{}_{, \nu}$ 為

$${}^o T^{\mu\nu}{}_{, \nu} = -[\mu\nu, \lambda] {}^o T^{\mu\nu} - 2\lambda h_{\sigma\lambda} {}^o T^{\sigma\nu}{}_{, \nu} \quad (6.1.10)$$

因為方括弧僅牽涉到微分項，所以 $g_{\mu\nu}$ 中的 $\eta_{\mu\nu}$ 有任何作用。

當我們拿這個方程式與新張量 (${}^n T^{\mu\nu} \equiv {}^n T^{\mu\nu}$) 的散度

$${}^n T^{\mu\nu}{}_{, \nu} = {}^o T^{\mu\nu}{}_{, \nu} + \chi^{\mu\nu}{}_{, \nu} \quad (6.1.11)$$

為零這條條件相比較時，如果我們假設 $\chi^{\mu\nu}$ 本身是場的雙線性 (bilinear) 項，則散度 $\chi^{\mu\nu}{}_{, \nu}$ 應該就是

$$\chi_{\mu\nu}{}^{, \nu} = [\sigma\nu, \mu] {}^o T^{\sigma\nu} + O(\lambda^2) \cdots \quad (6.1.12)$$

僅僅知道散度還不足以讓我們找出 $\chi^{\mu\nu}$ 。我們還得額外加上一條件，就是 $\chi^{\mu\nu}$ 。得自 F^3 對 $h_{\mu\nu}$ 的變分，(6.1.2) 式。如果我們建構 F^3 的方式是將它看成是所有可能的獨立乘積項之和，其中每一項都牽涉到三個場的分量乘積以及兩次微分，則從分(6.1.2)與(6.1.12)就可以決定出唯一的 F^3 。在這裡我們不會交代 (決定 18 項常數的) 計算的細節，只列出冗長計算後的結果：

第六講

$$\begin{aligned}
 F^3 = -\lambda \left[h^{\alpha\beta} \bar{h}^{\gamma\delta} \bar{h}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + h_\gamma{}^\beta h^{\gamma\alpha} \bar{h}_{\alpha\beta,\delta}{}^{,\delta} \right. \\
 \left. - 2h^{\alpha\beta} h_{\beta\delta} \bar{h}_{\alpha\gamma}{}^{,\gamma\delta} + 2\bar{h}_{\alpha\beta} \bar{h}^{\sigma\alpha}{}_{,\sigma} \bar{h}^{\tau\beta}{}_{,\tau} \right. \\
 \left. + \left(\frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} h^\alpha{}_\alpha h^\beta{}_\beta \right) \bar{h}^{\sigma\tau}{}_{,\sigma\tau} \right] \quad (6.1.13)
 \end{aligned}$$

有了(6.1.13)，以及微擾方法，我們現在就可以計算所有以前考慮過的效應了。以行星的運動來說，因為拉格朗日函數裡多了 F^3 ，計算軌道需要的 ϕ 與 ψ 值就成為：

$$\begin{aligned}
 \phi &= \Phi + \frac{1}{2} \Phi^2 \dots \\
 \psi &= \Phi - \frac{3}{8} \Phi^2 \dots \\
 \Phi &= -2MG/r
 \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

這些修正後的結果使得我們的理論與對於水星近日點進動的觀察非常吻合，所以去除了理論與觀測的最後一點差異。

6.2 建構至任意高階項皆正確的理论

我們已經達成一開始設定的任務，也就用其他熟悉的場論為榜樣，去建構一個重力場論。這個理論能夠適當地描述所有已知重力現象的特徵；所以，我們所假想的金星人觀點是相當有用的。但是我們的理論仍然有一些缺失，我們可以想像一位努力研究理論的金星人對於這樣（沒有處理三階以上效應）的理論不滿意，因此他們之中有些人也許會要去追尋 F^4 與 F^5 等項，它們加進拉格朗日函數裡後可以讓理論在更高階項時，還不會出毛病。但是這種辦法非常的繁瑣，而且想計算的修正效應又觀察不到，所以我們在此就不模仿假想的金星朋友了。

有時候我們會碰到這種狀況：雖然某一特定展式中的高階修正項極為難算，但仍可以建構出理論將所有高階展式加起來，得到答案。因此我

們可以設想一位既勇敢又有企圖心的金星人決定試圖把整個函數 $F = F^2 + F^3 + F^4 + F^5 \dots$ 的式子找出來。我們將會尋找泛函 (functional) F ，它是可以變分的作用量，我們是從經驗學到應這麼做的：至目前，所有成功的理論都可以從用變分原理從拉格朗日函數或是哈密頓函數（它們是等價的）推導出來。

我們還不清楚非拉格朗日 (non-Lagrangian) 理論之所以失敗是否反應了自然的某種真理。或許真理就是物理過程是由最小相位 (minimum phase) 原理所支配，而古典物理或量子物理的作用量正是代表相位的泛函，這作用量起碼在某種近似之下是正確的。Birkhoff [Birk 43] 曾企圖以非拉格朗日的形式來表達重力論，他保留了場的線性方程式，但是改變了粒子的運動方程式。他最後所得到的古典理論還令人滿意，但卻不容許無矛盾的量子化。人們已證明波包的運動並不遵循假設的古典方程式，而是愛因斯坦方程式！或許量子化的嘗試會揭露場方程式裡某些看不見的矛盾。

所以我們將尋找完整的泛函 F ，

$$F = F^2 + F^3 + F^4 + \dots \quad (6.2.1)$$

F 必須滿足的要求就是從變分所得到的運動方程式

$$\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}} = \lambda T^{\mu\nu} \quad (6.2.2)$$

得要自動含括 $T^{\mu\nu}$ 的散度性質，也就是(6.1.9)式。所以泛函 F 必須滿足以下的泛函微分方程：

$$g_{\sigma\lambda} \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}} \right)_{,\nu} + [\mu\nu, \lambda] \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}} \right) = 0 \quad (6.2.3)$$

我們得解這個方程式，但是這通常極為困難，沒有一般性的步驟可循。我們得要靠隨機應變，造出泛函同時滿足(6.2.2)與(6.2.3)。但是即便我們加

第六講

上條件——當 h 小的時候，解的主要項 F^2 與 F^3 必須與從其他方法得到的一樣，我們還是得不到唯一的解。然而，存在著一個明顯的「最簡單」解（僅牽涉到 $g_{\mu\nu}$ 最少次一兩次一的微分）。我們就選擇這個解。這一切完成之後，我們的理論竟然與愛因斯坦的一模一樣。既然如此，我們就可放棄金星人的觀點，而改用愛因斯坦的地球觀點來研究重力論。

6.3 在無限小變換 (infinitesimal transformation) 下依然不變的不變式 (invariant)

為了要建構出滿足方程式(6.2.3)的解，我們將把方程式轉化成關於 F 性質的（等價）敘述。首先，我們注意到方程式(6.2.3)是向量方程式。如果取方程式與一任意向量 $A^\lambda(X)$ 的純量內積，並且對（所有的）空間積分，就會得到一個看起來稍微不一樣的方程式：

$$\int d\tau \left[A^\lambda(x) g_{\sigma\lambda}(x) \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}} \right)_{,\nu} + A^\lambda(x) [\sigma\nu, \lambda] \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}} \right) \right] = 0 \quad (6.3.1)$$

如果無論向量 $A^\lambda(X)$ 為何， F 都滿足(6.3.1)式，則 F 也會滿足(6.2.3)式。我們現在對第一項做部分積分——目的是去除對於 ν 的偏微分，那麼就得到

$$\int d\tau \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}} \right) \left[- \left(A^\lambda(x) g_{\lambda\sigma}(x) \right)_{,\nu} + [\sigma\nu, \lambda] A^\lambda(x) \right] = 0 \quad (6.3.2)$$

我們在 $d\tau$ 底下劃一橫，為得是要提醒自己我們將利用這個積分以及將 σ 與 ν 對調後的積分：由於 $h_{\sigma\nu}$ 是對稱張量，上面的數學式如果要有意義，對於 σ 與 ν 這兩個指數而言，方括弧所代表的式子也必須是對稱的。我們可以用另一種方式來詮釋(6.2.3)式。首先我們注意到如果改變 h 至第一階，例如將 $h_{\sigma\nu}$ 改變成 $h_{\sigma\nu} + \xi_{\sigma\nu}$ ，則 F 的值就變成

$$F[h_{\sigma\nu} + \xi_{\sigma\nu}] = F[h_{\sigma\nu}] + \xi_{\sigma\nu} \frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}} + \dots \quad (6.3.3)$$

所以，(6.3.2)式告訴我們：對於無限小、而且形式就如同出現在(6.3.2)式中方括弧那般的 $\xi_{\sigma\nu}$ 而言， F 是不變的。

讓場張量 $h_{\mu\nu}$ ，透過無限小的變換 A^λ ，變成 $h'_{\mu\nu}$ 。根據(6.3.2)式所意涵的形式，將 $h'_{\mu\nu}$ 表示成（我們必須記得對稱化 σ 與 ν 這兩個指數，而且代入 $[\sigma\nu, \lambda]$ 的明確形式）：

$$h'_{\sigma\nu} = h_{\sigma\nu} - \frac{1}{2} g_{\sigma\nu, \lambda} A^\lambda - \underline{g_{\lambda\sigma} A^\lambda}_{, \nu} \quad (6.3.4)$$

為了方便起見，我們定義 $-\lambda A^\nu = \zeta^\nu$ ，並且用變數 $g_{\sigma\nu}$ 而非 $h_{\sigma\nu}$ 來寫下方程式：

$$g'_{\sigma\nu} = g_{\sigma\nu} + g_{\sigma\lambda} \zeta^\lambda_{, \nu} + g_{\nu\lambda} \zeta^\lambda_{, \sigma} + \zeta^\lambda g_{\sigma\nu, \lambda} \quad (6.3.5)$$

我們的問題就成為：尋找一個 $g_{\mu\nu}$ 的泛函 (functional) F ，當 $g_{\mu\nu}$ 在無限小變換 ((6.3.5)式) 之下變成 $g'_{\mu\nu}$ 時，這個泛函 F (至 ζ^λ 的第一階) 不會改變 (即 F 是一不變式)。研究微分幾何的數學家已經發展出解決類似方程式的方法*；事實上，我們這個問題在微分幾何中已經解決了，所以我們可以受了良好教育的金星物理學家一樣，假設能夠在書上找到解決問題的提示。

事實上，我們可以認出(6.3.5)這個變換正是張量場 $g_{\mu\nu}(x)$ 在無限小座標轉換 $x^\lambda = x'^\lambda + \zeta^\lambda$ 之下的變換。但是我們還是繼續玩我們遊戲，假裝和金星人一樣，在不知道這些幾何詮釋的情況下，推導出結果。當然，當我們討論愛因斯坦觀點的時候，我們會回來討論這些幾何觀點。

我們現在就開始尋找 F (前述的不變形式)。為了以後方便，我們先定義 $g_{\mu\nu}$ 的反矩陣 [利用上標 (superscript) 而不是下標 (subscript)]：

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu \quad (6.3.6)$$

* 例如，見參考文獻[Vebl 27]。

第六講

δ_{σ}^{μ} 這符號是克氏尋同符號 (Kronecker delta)，也就是，當 $\mu = \sigma$ ， $\delta_{\sigma}^{\mu} = 1$ ，而當 $\mu \neq \sigma$ ， $\delta_{\sigma}^{\mu} = 0$ 。

矩陣 $A' = A + B$ 的反矩陣，當 B 是無限小的時候，可以展成

$$\frac{1}{A'} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots \quad (6.3.7)$$

因為 ζ^{λ} 為無限小，我們可以根據(6.3.7)式來建構 $g'_{\sigma\nu}$ 的反矩陣：

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \zeta^{\alpha}{}_{,\nu} g^{\nu\beta} - \zeta^{\beta}{}_{,\nu} g^{\alpha\nu} - \zeta^{\lambda} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\nu} g_{\sigma\nu,\lambda} + \dots \quad (6.3.8)$$

我們現在很快地檢查下一個很容易找到的不變式，目的在於了解所用的方法。我們在下一節就會建構一個更複雜的不變式，它將導致完備的理論。

如果我們稍微地變動一下矩陣，它的行列式會怎麼改變呢？我們將利用以下常見的行列式等式：

$$\text{Det } A = e^{\text{Tr} \log A} \quad (6.3.9)$$

我們不會在這裡討論這個等式的證明；但是為了要知道這是個合理的等式，讓我們指出當矩陣是對角矩陣的情況時，可以馬上看出(6.3.9)式是正確的：

$$\text{Det } A = A_{11} A_{22} A_{33} \dots = e^{\log A_{11} + \log A_{22} + \dots} = e^{\text{Tr} \log A} \quad (6.3.10)$$

我們現在應用(6.3.9)式來計算 $(A + B)$ 的行列式，這裡 B 是無限小的矩陣。我們需要矩陣 $(A + B)$ 的對數；正確的展式是

$$\begin{aligned} \text{Det} \left[A \left(1 + \frac{1}{A} B \right) \right] &= \text{Det } A \cdot \text{Det} \left(1 + \frac{1}{A} B \right) = \text{Det } A e^{\text{Tr}(\log(1 + \frac{1}{A} B))} \\ &= \text{Det } A e^{\text{Tr} \frac{1}{A} B} \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

我們現在用以上的規則來計算 $g'_{\sigma\nu}$ 的行列式，並且取其對數：

$$\log(-\text{Det } g') = \log(-\text{Det } g) + 2\zeta^{\lambda}_{,\lambda} + \zeta^{\lambda} g_{\sigma\nu,\lambda} g^{\sigma\nu} \quad (6.3.12)$$

上式最後一項 g 矩陣的乘積與 g 的行列式有以下的關係：

$$g_{\sigma\nu,\lambda} g^{\sigma\nu} = [\log(-\text{Det } g)]_{,\lambda} \quad (6.3.13)$$

我們最後所得到的公式牽涉到 ζ^{λ} 和其梯度，再來就是數字而矩陣不見了。定義 $C = \log(-\text{Det } g)$ ，將(6.3.12)改寫為

$$C' = C + 2\zeta^{\lambda}_{,\lambda} + C_{,\lambda} \zeta^{\lambda} \quad (6.3.14)$$

如果這個式子只是一個全微分，只要對所有的空間積分就會得到我們要找的不變式。我們從最後兩項的形式得到暗示： $\exp(C/2)$ 可能是積分因子。因此我們尋找形式為 $\exp(\alpha C')$ 的不變式（選擇適當的 α ）。因為 ζ^{λ} 為無限小，僅保留至第一項的展式是

$$e^{\alpha C'} = e^{\alpha(C + 2\zeta^{\lambda}_{,\lambda} + C_{,\lambda} \zeta^{\lambda})} = e^{\alpha C} + e^{\alpha C} (\alpha 2\zeta^{\lambda}_{,\lambda} + \alpha C_{,\lambda} \zeta^{\lambda}) \quad (6.3.15)$$

上式第二項的形式可以轉化成一全微分項；我們知道

$$(e^{\alpha C} \zeta^{\lambda})_{,\lambda} = e^{\alpha C} \zeta^{\lambda}_{,\lambda} + \alpha C_{,\lambda} \zeta^{\lambda} e^{\alpha C} \quad (6.3.16)$$

只要我們取 $\alpha = 1/2$ ，(6.3.16)就等於(6.3.15)式的第二項。當我們將(6.3.15)式對所有的空間積分，如果 $\alpha = 1/2$ ，則第二項的積分為零。我們最後得到以下的等式：

$$\int d\tau \exp(C'/2) = \int d\tau \exp(C/2) \quad (6.3.17)$$

第六講

我們要找的不變式，以矩陣 $g_{\sigma\nu}$ 表達，就是

$${}^\circ F = \int d\tau \sqrt{-\text{Det } g} \quad (6.3.18)$$

6.4 正確理論的拉格朗日函數（至任意階）

前一節的不變式 ${}^\circ F$ 的確是泛函微分方程(6.2.3)式的解，但是它卻不合我們理論的需要，因為它不牽涉到微分。在這一節，我們將用類似的方法建構符合我們理論需要的解。成功的秘訣在於找出一個可以對所有空間積分的全微分。

我們的出發點依然是牽涉到 ζ_λ 與其微分的(6.3.5)式。原則是這樣的——找出 $g_{\mu\nu}$ 與其微分的組合，這個組合在(6.3.5)變換下不會牽涉到 ζ （或至多牽涉到 ζ 的全微分）。(6.3.5)式中有 ζ 一次微分；如果我們考慮 $g'_{\mu\nu,\sigma}$ ，就會出現二次微分項，例如 $\zeta^{\lambda}_{,\sigma\nu}$ 等，所以看起來變得更複雜。但是如果最高階微分項是 $\zeta^{\lambda}_{,\sigma\nu}$ ，而且它只單獨地出現在一項裡，那麼我們可以藉由減去 $\zeta^{\lambda}_{,\sigma\nu}$ （ σ 與 ν 對調）而除掉它。（事實上，在這個情況這樣做不行——因為 $\zeta^{\lambda}_{,\sigma\nu}$ 本來對於 σ 與 ν 就是對稱的，但是以後對於更高階微分項，我們也用上同樣的技巧。）總之我們就開始考慮 $g'_{\mu\nu,\sigma}$ ，它會包含形式如 $\zeta^{\lambda}_{,\sigma\nu}$ 的二次微分項，但是這樣的項有兩項—— $\zeta^{\lambda}_{,\sigma\nu}$ 與 $\zeta^{\lambda}_{,\mu\sigma}$ 。我們希望藉用結合其他微分項，如 $g'_{\mu\sigma,\nu}$ ，將它們除去。結果是我們的確可以去除這兩項，但是另外新的兩項又跑出來了，所以我們並沒有達成簡化的目標。但是當我們考慮第三種可能的排列 $g'_{\sigma\nu,\mu}$ ，則我們利用加減可以得到新的方程式，其中兩項可以加起來，因為它們是一樣的。一個困難是當我們對乘積取微分時，所得到的項，數目增加很多，例如

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu,\sigma} = & g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\lambda,\sigma} \zeta^{\lambda}_{,\nu} + g_{\nu\lambda,\sigma} \zeta^{\lambda}_{,\mu} + g_{\mu\lambda} \zeta^{\lambda}_{,\nu\sigma} + g_{\nu\lambda} \zeta^{\lambda}_{,\mu\sigma} \\ & + \zeta^{\lambda}_{,\sigma} g_{\mu\nu,\lambda} + \zeta^{\lambda}_{,\sigma} g_{\mu\nu,\lambda} \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

但是當我們把它們加減起來、指數搬來般去、而且對稱化後，我們發現

$$\begin{aligned}
 [\mu\nu, \sigma]' &= [\mu\nu, \sigma] + [\mu\lambda, \sigma]\zeta^{\lambda}_{, \nu} + [\nu\lambda, \sigma]\zeta^{\lambda}_{, \mu} \\
 &\quad + [\mu\nu, \lambda]\zeta^{\lambda}_{, \sigma} + \zeta^{\lambda}[\mu\nu, \sigma]_{, \lambda} - g_{\sigma\lambda}\zeta^{\lambda}_{, \mu\nu}
 \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

所以只出現一個 $\zeta^{\lambda}_{, \mu\nu}$ 。(6.4.2)式現在可以乘上 $g_{\sigma\lambda}$ 的反矩陣，這樣 $g_{\sigma\lambda}$ 的就不會出現。首先，我們引入一新的符號，以便簡化操作。定義

$$g^{\tau\sigma}[\mu\nu, \sigma] = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} \tag{6.4.3}$$

這符號稱為克氏符號 (Christoffel symbols) 或是環移聯絡係數 (holonomic connection coefficients)。如果將(6.4.2)乘以 $g^{\sigma\lambda}$ ，以便孤立出剩餘的二次微分項，這方程式就變成 (以新的符號表示)

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}' = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} + \Gamma^{\tau}_{\mu\lambda}\zeta^{\lambda}_{, \nu} + \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}\zeta^{\lambda}_{, \mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\zeta^{\tau}_{, \lambda} + \Gamma^{\tau}_{\mu\nu, \lambda}\zeta^{\lambda} - \zeta^{\tau}_{, \mu\nu} \tag{6.4.4}$$

這個式子對於 μ 與 ν 是對稱的。為了往前進，我們再次微分。我們如果把這個式子對新的指數 ρ 微分，然後減去類似的項，其中 ρ 與 ν 對調過來，剩下沒有消去的項是

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{\tau}_{\mu\nu, \rho}' - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho, \nu}' &= \Gamma^{\tau}_{\mu\nu, \rho} + \Gamma^{\tau}_{\mu\lambda, \rho}\zeta^{\lambda}_{, \nu} + \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda, \rho}\zeta^{\lambda}_{, \mu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu, \rho\lambda}\zeta^{\lambda} \\
 &\quad + \Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}\zeta^{\lambda}_{, \mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\zeta^{\tau}_{, \lambda\rho} \quad \text{減去 } \nu, \rho \text{ 互換的項}
 \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

我們的問題是如何去掉(6.4.5)中的兩個二次微分項。這些二次微分項都乘上了 Γ 。但是在(6.4.4)式中， $\zeta^{\lambda}_{, \mu\nu}$ 單獨出現。所以我們利用這一點來消去(6.4.5)裡的二次微分項：我們可以把兩項類似(6.4.4)式的項乘在一起。我們看到其中一項裡 Γ 的指數和另一項裡 ζ 的指數一樣；所以如果把兩項(6.4.4)式乘在一起，其中一項用了指數 $(\tau\rho\lambda)$ ，另一項的指數是 $(\lambda\mu\nu)$ ，而不用原來(6.4.4)式的指數 (τ, μ, ν) ，然後與(6.4.5)加在一起，則二次微分項就相消掉了。

我們定義新的量 $R^{\tau}_{\mu\nu\rho}$ 如下：

第六講

$$R^{\tau}_{\mu\nu\rho} = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \quad (6.4.6)$$

注意這個張量對於 ρ 與 ν 是反對稱的。我們最後的結果用 $R^{\tau}_{\mu\nu\rho}$ 來表示是：

$$R'^{\tau}_{\mu\nu\rho} = R^{\tau}_{\mu\nu\rho} + \zeta^{\lambda}_{,\nu}R^{\tau}_{\mu\lambda\rho} + \zeta^{\lambda}_{,\rho}R^{\tau}_{\mu\nu\lambda} + \zeta^{\lambda}_{,\mu}R^{\tau}_{\lambda\nu\rho} + \zeta^{\tau}_{,\lambda}R^{\lambda}_{\mu\rho\nu} + \zeta^{\lambda}_{,\lambda}R^{\tau}_{\mu\nu\rho,\lambda} \quad (6.4.7)$$

我們現在要做的就是將(6.4.7)式看待成(6.3.5)式，兩者的形式一樣，除了以 $R^{\tau}_{\mu\nu\rho}$ 取代 $g_{\sigma\nu}$ 。利用和上一節完全一樣的方法，我們得到不變式 F ：

$$F = -\frac{1}{2\lambda^2} \int d\tau g^{\mu\nu} R^{\tau}_{\mu\nu\rho} \sqrt{-\text{Det } g_{\alpha\beta}} \quad (6.4.8)$$

這就是我們追尋的答案，它是理論的作用量的一部分；這理論對於任意階而言，完全正確。

6.5 應力—能量張量的愛因斯坦方程式

我們以金星人觀點所推導出的泛函 F 和愛因斯坦的理論一模一樣。如果我們在重力場是微弱的情況下，將泛函 F 展開來，所得到的頭幾項就是先前理論的 F^2 與 F^3 泛函（見 6.1 節）。所以可以說我們的金星人觀點已經成功地完成任務——我們藉由一步步的邏輯得到了沒有矛盾的重力理論，我們只用上了類比而不必訴諸超人的敏銳直覺。

愛因斯坦自己當然是在沒有完備場論知識的情況下，得到了相同的拉格朗日函數。我必須承認完全不曉得他究竟是如何猜到最後的結果。我們在過程中，碰到的麻煩已經夠多的了，但是我覺得愛因斯坦的困難更大——他好像是在水底游泳，但是手被綁在背後、眼睛也矇了起來，卻還是游到了目的地！無論如何，既然我們已經得到相同的理論，我們從此就可以放棄金星人觀點，而從愛因斯坦的地球人觀點來討論事情。

我們將使用以下的標準記號，對象是從 $R^{\tau}_{\mu\nu\rho}$ 張量推導出〔藉由乘上 $g_{\alpha\beta}$ 或是降秩（contraction of tensor）〕的三個張量：

$$\begin{aligned}
 g_{\tau\sigma} R^{\tau}{}_{\mu\nu\rho} &= R_{\sigma\mu\nu\rho} && \text{在 } \sigma \text{ 與 } \mu \text{ (} \nu \text{ 與 } \rho \text{) 互換下是反對稱的} \\
 R^{\tau}{}_{\mu\nu\tau} &= R_{\mu\nu} \\
 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= R
 \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

$R_{\sigma\mu\nu\rho}$ 是張量 (黎曼張量 Riemann tensor)。如果交換 ν 與 ρ ，它會變號，也就是它對於 ν 與 ρ 是反對稱的；如果交換 σ 與 μ ，它也是反對稱的；但是如果交換 $\sigma\mu$ 這一對與 $\nu\rho$ 這一對，則它是對稱的。 $R_{\mu\nu}$ (瑞奇張量 Ricci tensor) 也是對稱張量。

泛函 F ((6.4.8)式) 對於 $g_{\mu\nu}$ 取變分後，結果是

$$2 \frac{\delta F}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \tag{6.5.2}$$

這裡 g 的定義是

$$g \equiv \text{Det } g_{\mu\nu}$$

(6.5.2)式中最右邊的量是我們理論中的應力—能量張量 (見(6.2.2)式)，而且它滿足以下的方程式：

$$g_{\sigma\lambda} T^{\lambda\nu}{}_{,\nu} = -[\mu\nu, \sigma] T^{\mu\nu} \quad (\text{or } T^{\lambda\nu}{}_{,\nu} = -\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} T^{\mu\nu}) \tag{6.5.3}$$

如果我們將最右邊的量代入 $T^{\mu\nu}$ 就知道(6.5.3)式成立。所以重力場的完整方程式是

$$\sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \lambda^2 T^{\mu\nu} \tag{6.5.4}$$

這裡的 $T^{\mu\nu}$ 是我們的物質能量張量。這就是愛因斯坦得到的方程式。

7.1 等效原理

我們的下一步就是要從一個比較接近於愛因斯坦的觀點來描述相對論與重力；希望藉由不同的欣賞角度，可以增進對於理論整體的理解。從愛因斯坦的架構來看，重力理論實在太美妙刺激了，會讓我們想要把其他所有的力場都弄得和重力場一樣，而不是繼續像金星上的科學家那樣想讓重力場看起來像熟悉的其他力場。我們將抵抗這種誘惑。

愛因斯坦所採取的進路其根源可以由當時已知的物理（即電動力學與牛頓力學）裡頭去尋找。我們可以感覺到愛因斯坦在發展理論時，腦子裡首要的念頭就是所有物理分支間必須沒有矛盾。他已經找到方法可以調和古典電動力學的羅倫茲不變性（Lorentz invariance）與牛頓力學的伽利略不變性（Galilean invariance），而且因此得到很多新結果。同樣地，導引出愛因斯坦重力理論的一事實，這事實在他將其轉化成原理的當時，只不過是關於重力令人費解的現象而已。

重力最核心的概念，亦即關於它如何作用最無可反駁的事實，就是重量與質量恰恰好成正比。因此所有的物體，無論其組成為何，在重力的影響之下，加速度完全一樣。Eötvös 的實驗顯示一個離心力如何與重力加在一起，使得最後的結果就像是一個單純的重力效應。這些事實讓愛因斯坦覺得，或許有一項物理原理能讓加速度在所有的狀況下模擬重力。很明顯的，在加速箱子裡做的力學實驗，與在靜止但位於重力場中的箱子裡做的力學實驗，兩者所得的結果都一樣，無法區別。在愛因斯坦的時代，這些想法並沒有直接的驗證，但是今天我們都很熟悉衛星裡的失重狀態，也

就說加速度與重力相抵消。這種相抵消的可能性正是等效原理 (Equivalence Principle) 的核心。

在我們能夠從這個想法得到有用的物理之前，必需先有一個較精確、用上明確可測量物理量的敘述。以牛頓力學而論，一個精確合理的敘述或許牽涉到靜止物體所受的力。如果我們以固定的加速度 g 去加速箱子，對於箱子中所有的靜止物體而言，都受到了一個力的作用，力的大小與重量成正比。例如，桌子上的應力或支撐砝碼的彈簧無論是在箱子內或在強度為 g 的均勻重力場內，都有一樣的結果。但是因為桌子上的應力不是可以直接測量的物理量，也許談論彈簧所掛的砝碼比較好。掛了固定砝碼的彈簧所增長的長度在以下兩個情況是相等的：(1) 箱子靜止於強度為 g 的重力場內(2) 箱子在零重力場內以固定的加速度 g 加速。見圖 7.1。

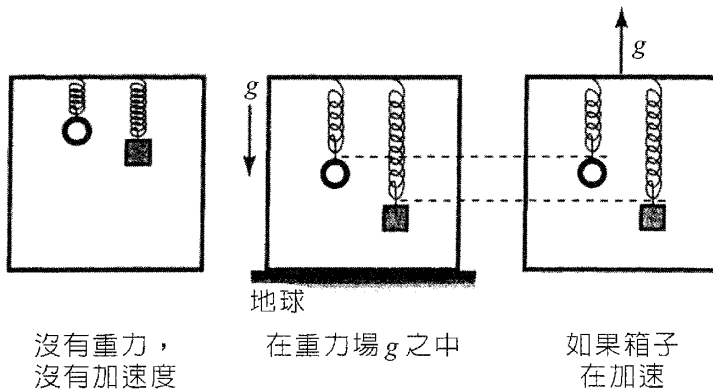


圖 7.1

等效原理的敘述就比較「物理」，但是我們談論的層次仍然很基本，沒有對力的本質下清楚的定義。有沒有可能不必清楚定義力的本質，就可以給出有義意的物理敘述？讓我們回顧一下牛頓力學裡的情況。常常有人說牛頓定律

$$F_x = m\ddot{x} \quad (7.1.1)$$

第七講

只是力的定義而已，所以它沒有實質的物理內容，只不過是循環論證。但是很明顯的整個牛頓理論不是循環論證，因為它正確的預測了月亮與行星的軌道。當牛頓說我們應該用方程式(7.1.1)來計算力的時候，他的意思是如果有加速度，我們應去尋找出到底有什麼樣具體的東西，能夠製造出如此的力。物理的未來就在於了解物體的環境如何與它所受的力發生關聯，這個力必須是當我們將它放在方程式(7.1.1)左邊時，與所觀察到的加速度相吻合。

當牛頓進一步寫下第三定律

$$F(\text{作用}) = -F(\text{反作用}) \quad (7.1.2)$$

的時候，他給的是一個物裡陳述，因為他對於力與物體的關聯下了一個規範。他的重力定律是關於物體的環境和其加速度之間關聯的規範。第二定律是以「尋找女人 (cherchez la femme)」的精神來陳述的：如果我們看到了力，就應該去尋找產生這個力的物體。

同樣的，以簡單形式表述的等效原理也是對於環境如何影響物體的一個物理陳述。它不與牛頓第二定律(7.1.1)是否正確無關。在這裡環境所指的是產生重力場的質量，或者是加速度。

想要用固定的加速度來抵消所有的重力效應其實是不可能的。想像一個環繞著地球的箱子，如一人造衛星。既然地球重力場並不是均勻的，只有在人造衛星質心附近的某一點，重力效應恰好與加速度相抵消。當我們離開質心，地球重力場的方向或大小就變了，所以就有一小部分的重力分量沒有被抵消。如果箱子不是很大，這些額外的（小）力就近乎與離開質心的距離成正比，所以就有四極的性質（如圖 7.2(a)所示）。地球上的潮汐就是由這樣的力所引起的，所以我們稱它為潮汐力。我們也可以考慮一個位於類似重力場內的箱子，但是並沒有加速度（如圖 7.2(b)所示）。等效原理說如果我們在遠處放置大的質量，我們可以創造出一個在物理上與衛星內部無法區別的情況，因為我們可以疊加上一個均勻場使得質心處的重力完全相銷。

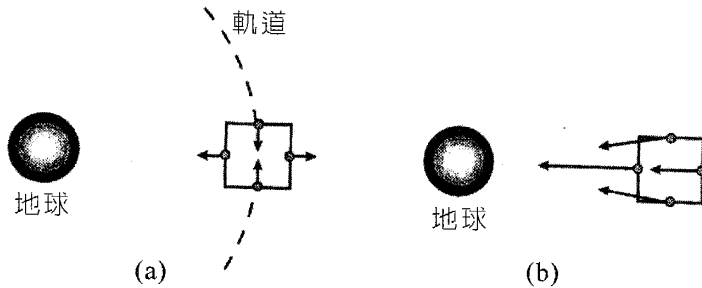


圖 7.2

現在我們可以看出來如何對等效原理下一個較好的定義：一個加速箱子內的重力場等價於另一個重力場與另一個有不同加速度的箱子。我們可以在任何一點與任何一刻擺脫掉重力；但是在這一點附近的一小區域內，剩餘的差別則與離開抵消點的距離成正比。很明顯的，在建構理論的時候，我們所考慮的座標轉換可以表示成

$$(\text{重力})' = (\text{重力}) + (\text{加速度}) \quad (7.1.3)$$

因為這個可能性，所以我們無法絕對的區別重力效應與慣性效應。我們不可能定義一個「真實的」重力，因為我們不能講清楚所觀察到的力到底多少是來自重力，多少是來自加速度。的確，我們不能處處都用加速度來模擬重力，也就是說如果箱子大一些的話。但是如果在很小的區域內考慮(7.1.3)這種變換，我們可以學到如何用微分的形式來描述這種情況。只有在這樣之後，我們才會擔心邊界條件，或如何在較大的空間區域中描述重力。

在狹義相對論裡，我們廣泛使用在直線上等速前進的座標系。可是一旦我們允許發出重力的質量存在（無論在宇宙哪一個角落），真正沒有加速度的運動就不可能成立，因為到處都會有重力場。

如果我們在一個箱子裡頭做實驗，而這箱子並不是自由落體，則我們可以用譬如說，彈簧實驗，來偵測到有與重力類似的力存在。然而，我們如果只待箱子裡頭，就不可能知道究竟是我們相對於星雲究竟有加速度呢，或者我們所偵測到的力是來自於附近的質量。就是重力的這個特色給了我們靈感，找到出發的假設，最後導致完備的理論。

第七講

我們假設：不論在箱子裡做什麼實驗，我們不可能偵測出相對於星雲的加速度與重力的區別。也就是說，我們無法區分究竟箱子是在某重力場內加速，或是靜止於另一重力場內。

這個假設聽起來多麼類似愛因斯坦的口氣，讓我們想起他狹義相對論的假設！首先我們知道等效原理適用於彈簧，（就像我們知道狹義相對論是用於電動力學），然後進一步要求此原理也適用於所有其他實驗。我們現在已經很熟悉這個步驟，但是在 1911 年，這可是太有創意太精采了一愛因斯坦真是太了不起了！

7.2 等效原理的一些後果

等效原理想告訴我們光在重力場裡會往下掉落。光在均勻重力場行走一段距離後應該掉落多少高度，只要設想一個加速的箱子，就可以很容易的計算出來。如果箱子在加速，而光在一沒有加速的系統中是以直線前進，用簡單的運動學計算就能得到光在箱子裡的軌跡。這個實驗只需要光源與偵測器，以及一系列的狹縫以決定光的路徑（見圖 7.3）。

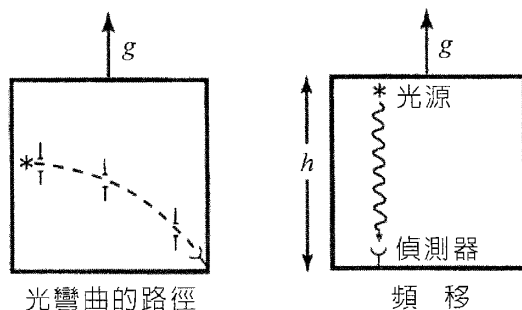


圖 7.3

我們不能用這麼簡單的辦法來計算光受到星球偏折的程度，因為星球的重力場並不是均勻的。如果我們以類似的簡單辦法用牛頓重力位勢去計算，答案會比正確結果小兩倍。正確的計算得用適當的相對論重力場。

等效原理也告訴我們重力會影響時鐘的快慢。如果我們在加速箱子的底部看從箱子頂端所發出的光，會看到光的頻率有紫移（violet shift），

也就是光的頻率會增加。讓我們計算一下，如果箱子速度還小，頻率的變化會有多大？光從頂端走到底部所花的時間，至第一階近似，約是 c/h ，這裡的 h 是箱子的高度（見圖 7.3）。在這段時間裡，箱子底部所增加的速度是 $v = gh/c$ （ g 是箱子加速度）。淨效應就是接收器朝發射器方向運動，因此頻率的改變是

$$\begin{aligned} f_{\text{接收}} &= f_{\text{放射}}(1 + v/c) \\ &= f_{\text{放射}}(1 + gh/c^2) \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

所以底部的鐘接受到的頻率會和發射的頻率不一樣。請注意，這個結論並不取決於 $E = mc^2$ 或是能階是否存在（先前我們的論證必須假設這兩個條件）。我們的結論所依據的是古典物體應該有的行為；計算只和幾何與運動學有關，而且從等效原理就可以直接預測出物理效應。和以前一樣，並沒有所謂的弔詭：頂端的鐘看起來比較藍，活在箱子頂端的人要比活在底部的人看起來更藍。同樣的，我們可以計算從底部發出的光之頻率變化。因為接收器這時會跑離發射器，從上面看，在底部的人看起來會比較紅。

描述這個情況的一種說法是頂部的時間走的較快；時間在不同重力場中的流速會不一樣，所以時間在世界不同角落的流速會不同。那麼到底在空間不同點的時間流速差別有多大？為了要得到結果，讓我們比較時間速率和絕對時間間隔，也就是原時（proper time）的差 ds 。假設在頂端有兩個事件，發生的時間相差 dt ，那麼

$$\phi = gh; \quad ds = dt(1 + \phi/c^2) \quad (7.2.2)$$

(7.2.2)式是在速度很小的時候成立。 ϕ 是事件所在位置的重力位勢與參考點重力位勢的差。如果我們更用心一點，就會得到對於任何速度都成立的公式：

$$ds = dt\sqrt{1 + 2\phi/c^2} \quad (7.2.3)$$

第七講

再次地，我們不能只是把牛頓理論的位勢代入(7.2.3)式，這裡的 ϕ 必須不能違背相對論的要求。

7.3 重力場中時鐘最快的速率

既然我們所得到的結論是重力效應讓鐘在位勢較高的地方走得較快，就出現了一有趣的問題。我們知道當提升時鐘的高度時，它會走得較快；可是另一方面它又應該走得較慢，因為它在前進，所以有狹義相對論的時間膨脹效應。問題是：在地表附近，我們應該如何上下移動時鐘，才能讓時鐘所走的時間最長？為了簡單起見，假設地表附近的重力場是均勻的，而且只考慮一維運動。這個問題顯然有個答案。如果鐘走的非常快，例如以近乎光速前進，鐘的指針就幾乎不動，鐘的時間就落後在地球時間之後。如果我們將鐘提高一點點，然後讓它靜止不動，它的指針會走的比地面的鐘快。很明顯地，在某給定的地球時間（即地面時鐘所經過的時間）內，有一種移動鐘的最佳方式，能使得運動中的鐘所經過的時間最長。規則是我們得把鐘帶回來跟靜止的鐘相比較。

我們馬上就會給你答案，不過如能仔細地把答案推導出來是很好的練習。在固定的地面時間內，例如一小時，如要讓運動中的鐘走了最長的時間，我們必須用適當的速度將鐘打上去，使得它剛好會在一小時之後回到出發點。見圖 7.4。如果空間維度較高，問題就較難，但是答案仍然一樣。如要讓鐘在一小時之後回到地表的另一地點，鐘的軌跡應該就是平常的拋物線。假如重力場不是均勻的，答案也還是一樣。如果我們把鐘從地球的一衛星打上另一顆衛星，真實的軌跡（滿足運動方程式的軌跡）就是給出最長原時（運動的鐘所紀錄的時間）的軌跡。

在解這些問題時，會出現一些麻煩，因為我們沒有給出精確的定義。例如，自由落體的解未必是唯一的解；投射「砲彈」問題通常有兩個解，也就是說有兩個角度和兩個起始速度會得到「最長原時」（衛星軌道可以走比較長的路繞過地球）。無論如何，任何一個解都對應到「最長原時」。至於它們是相對或絕對極大值對我們而言並不那麼重要——重要的是這些解提示我們如何從變分原理得到力學。

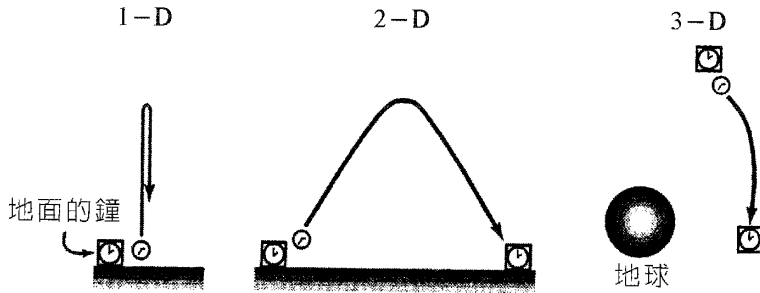


圖 7.4

為了了解「最長原時」的意義，我們可以考慮低速度的情況。鐘的原時是 ds 的積分，它代表鐘所走的速率。在非相對論的極限，我們要求的是以下積分的極值：

$$\int ds = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(1 + \frac{\phi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) \quad (7.3.1)$$

因為

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

第一項的積分是座標系的時間差， $(t_1 - t_0)$ 。另外兩項可以重新安排，讓它們看起來和熟悉的東西很像——只要乘上粒子的質量並且改變符號：

$$\int ds = (t_1 - t_0) - \frac{1}{mc^2} \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{1}{2} mv^2 - m\phi \right) \quad (7.3.2)$$

為了取這個積分的極大值，對於固定的時間間隔 $(t_1 - t_0)$ 而言，我們得取右邊積分的最小值。但是這個積分正是質量為 m 的粒子位於重力位勢 ϕ 中的古典作用量。所以「最長原時」的要求正等於古典極限中的「最小作用量原理」。

第七講

這些結果提示我們如何可以得到相對論力學原理（約略等於牛頓第二定律）。它就是「 $\int ds$ 的變分應該為零」。

$$\delta \int_1^2 ds = 0 \quad (7.3.3)$$

愛因斯坦首先猜到這個原理會給出粒子在重力場中的運動。這樣就解決了（在某個重力場之下）尋找運動方程式的問題。剩下的問題是如何連接方程式中的 ϕ 與環境。這就是愛因斯坦面對的偉大問題。我們如何猜出正確的 ϕ ？如果我們用了錯誤的重力，就好像我們位於有離心力的系統之中，我們怎麼知道呢？我們已經知道重力與慣性的關係非常密切，所以不能夠到處把它們分的清清楚楚。

愛因斯坦猜，在這種情形下，我們是否用了處處適用的 ϕ 並不那麼重要；如果我們正確的定義出了 ϕ ，物理的描述應該和我們用什麼特定的方式區別慣性與重力效應無關。所以，為了要建構會有這個性質的 ϕ 的公式，我們必須做的是非常仔細地研究「原時間隔」 ds 在不同的座標系中是如何呈現的，因為當先前談到 $(\text{重力})' = (\text{重力}) + (\text{加速度})$ ((7.1.3)式)時，我們已經用上了座標變換；我們從研究中可以建構出一個 ds 的式子——在所有可能的座標變換下，它是一個不變式。

7.4 廣義座標中的原時

為了要得到愛因斯坦的 $(ds)^2$ 公式，我們不僅必須考慮正在加速的參考系統，還得考慮正以各種任意方式變形的參考系統。我們需要座標變換的一般公式，類似以下旋轉座標的設定：

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega t + y \sin \omega t & z' &= z \\ y' &= y \cos \omega t - x \sin \omega t & t' &= t \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

我們描述一般加速（及伸長）座標的方式是指明一個系統中的四個座標如何取決於另一個系統中的座標：

$$\begin{aligned}x &= x(x', y', z', t') & z &= z(x', y', z', t') \\ y &= y(x', y', z', t') & t &= t(x', y', z', t')\end{aligned}\tag{7.4.2}$$

讓我們先考慮 $\phi = 0$ （無重力位勢）的情形。在這種情況下，我們知道在沒有扭曲的系統中，原時就只是（這裡我們設定光速 $c = 1$ ）

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2\tag{7.4.3}$$

為了描述在冠上撇號的座標（primed coordinates，即另一座標系）中的原時，我們只要把微分重新寫成

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha, \quad (ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu\tag{7.4.4}$$

這樣我們就可以定義一個度規張量（metric tensor） $g'_{\alpha\beta}$ ，它是用來描述在任意扭曲加速座標中的弧長 ds

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta\tag{7.4.5}$$

請注意 $g'_{\alpha\beta}$ 代表十個函數（每一個都是座標 (x', y', z', t') 的函數），因為(7.4.5)式有十個雙線性乘積（bilinear product） $dx^\alpha dy^\beta$ 。度規張量是對稱的張量（即 $g'_{\alpha\beta} = g'_{\beta\alpha}$ ）。一旦我們決定了這十個函數，利用純數學演算就應該可以找出有「最長原時」的路徑。

如果重力位勢不為零則又該如何呢？我們在上一節考慮過最簡單的情形，我們發現「原時」約略是以下的樣子：

$$(ds)^2 = (1 + 2\phi/c^2)(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2\tag{7.4.6}$$

(7.4.6)式和零重力場的情況相差並不大。愛因斯坦認為只要指定了度規張量 $g_{\alpha\beta}$ ，對於重力場的描述就永遠完整了。度規張量 $g_{\alpha\beta}$ 決定了 $(ds)^2$ ：

第七講

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (7.4.7)$$

如果沒有重力場，度規張量 $g_{\alpha\beta}$ 就特別簡單： $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ 。當我們改變座標系，新座標系的度規張量 $g_{\alpha\beta}$ 就是

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \quad (7.4.8)$$

和以前一樣，粒子的運動軌跡是由「最長原時」這條件來決定的。如果我們能夠藉由適當的座標變換，將 $g'_{\alpha\beta}$ 就化約成 $\eta_{\alpha\beta}$ （即 $g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ），那麼我們可以推論出重力場並不存在，所以沒有加速度。但是一般而言，我們做不到這一點（即無法讓 $g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ），因為廣義的度規張量 $g_{\alpha\beta}$ 原則上代表十個獨立的函數，而座標變換（(7.4.2)式）只能確定四個函數。只有在很特殊的狀況之下，才能利用加速度把各處的 $g_{\alpha\beta}$ 全部轉換成 $\eta_{\alpha\beta}$ 。如果空間中真的有物質存在，就不可能把 $g_{\alpha\beta}$ 化約成 $\eta_{\alpha\beta}$ 。在那個情形，所有由(7.4.8)式聯繫起來的張量 $g_{\alpha\beta}$ 就都是等價的，因為其中沒有任何一個能給出特別簡單的 $(ds)^2$ 。

我們現在已經有些了解描述重力的方式。在牛頓力學中，相對應的描述方式就是把重力說成是某個純量函數的梯度。

$$\text{牛頓重力： } m\ddot{x} = F_x, \quad F_x = -\nabla\phi \quad (7.4.9)$$

$$\text{愛因斯坦理論： } \delta \int ds = 0, \quad (ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

理論的第二部分是關於位勢（ ϕ 或 $g_{\mu\nu}$ ）與物質之間的關連。在牛頓力學裡，

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (7.4.10)$$

我們最後也會學到物質如何決定張量 $g_{\mu\nu}$ 。核心的想法是既然物質是真實的，而座標不是，描述物質的方式必須是運動方程式的解與座標的選擇無關。在任意座標變換之下，張量 $g_{\mu\nu}$ 有意義的性質應該是不變量。

7.5 度規張量的幾何詮釋

我們可以用幾何觀點來詮釋張量 $g_{\mu\nu}$ 。我們會扼要地研討二維情形時度規張量的意義，以便更深刻的體會這時有何種不變式（量）。如果重力場是均勻的，我們已經看到張量 $g_{\mu\nu}$ 所描述的是空間中不同位置的時間尺度是如何的不相同。一般而言，張量 $g_{\mu\nu}$ 代表了尺度如何隨不同位置而異，不僅是時間尺度會相異，空間座標的尺度也是如此。在正交的笛卡兒座標（Cartesian coordinates）中，二維的弧長 ds 是

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (7.5.1)$$

在平面極座標中，弧長 ds 則是

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 \quad (7.5.2)$$

很明顯的，我們用來代表座標的符號並沒有意義；無論我們用笛卡兒座標或是極座標，平面上的物理都是一樣的。這表示如果我們發現在某個座標中，正確描述弧長的方式是

$$(ds)^2 = y^2(dx)^2 + (dy)^2 \quad (7.5.3)$$

則我們看到 x 長度和座標 y 有關，但是這件事並沒有什麼深刻的意義。一個簡單的座標變換就可以把弧長變回笛卡兒座標中的形式（(7.5.1)式）。

現在我們探討一個更有趣的例子：想像我們是沿著地板爬行的蟲，並且假設地板都是正方形瓷磚拼成的，而我們一輩子都認為地板的幾何是歐氏幾何（Euclidean geometry），也就是我們只要數瓷磚的數目並使用歐氏規則（(7.5.1)式，間隔 dx 或 dy 就對應到一些瓷磚的長度）就可以得到正確的幾何；但是有一天，一些比較聰明的蟲開始用尺檢驗這到底對不對，結果在一系列的測量之後發現弧長與瓷磚數目的關係是

第七講

$$(ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{1 + ar^2} \quad (7.5.4)$$

其中的

$$r^2 = x^2 + y^2$$

讓我們假設這些聰明蟲很準確地測量了一個圓的圓周長與半徑的比值，方法是把尺放在離固定中心距離 r 的曲線上，以及離開中心的某個軸上。它們的結果會是

$$\text{圓周長} = \int ds = \int_0^{2\pi} \frac{r d\theta}{(1 + ar^2)} = \frac{2\pi r}{(1 + ar^2)} \quad (7.5.5)$$

$$\text{半徑} = \int_0^r ds|_{y=0} = \int_0^r \frac{dx}{(1 + ax^2)} = b \operatorname{Arctan}\left(\frac{r}{b}\right) = R$$

其中 $b^2 = 1/a$ 。

實驗的結果是圓周長與半徑比是

$$\frac{1}{R} \frac{2\pi b \tan(R/b)}{1 + \tan^2(R/b)} = 2\pi \frac{\sin(2R/b)}{(2R/b)} \quad (7.5.6)$$

這個結果只有當圓的半徑趨近零時，才會是 2π 。只有這個可測量的比值才有物理意義。

以上所討論的模型有個簡單的幾何詮釋，但是我們要再次強調：重要的是實驗結果，而且這全然取決於弧長的正確公式；即便我們無法給出一個容易想像的幾何詮釋也沒有關係。

我們可以說我們這些蟲一直就住在一圓球的球面上，但是卻不知道這件事。現在既然我們已經猜到了，就可以很容易的理解為什麼圓周長的測量的結果會得出(7.5.6)式。如果圓球的半徑是 $(b/2)$ ，(7.5.6)式代表圓周長與沿著球面子午線的長度比值，見圖 7.5。

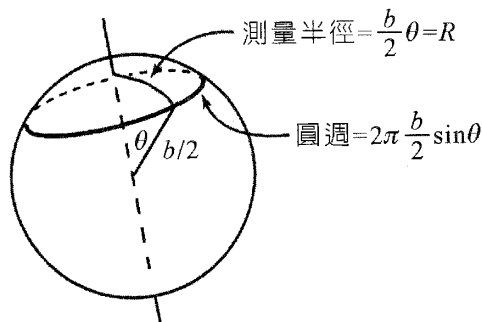


圖 7.5

我們先前關於重力的看法可以比擬成比較保守的蟲的觀點：瓷磚「真的」是正方形，但是尺的長度會隨著我們的移動而受到影響，因為某個場會造成這種效應。我們比較新的幾何觀點是我們不能「真的」把瓷磚定義為正方形；我們生活的世界一般而言並非歐式空間，只要做了適當的實驗就可以測量出我們世界的曲率（curvature）。沒有必要把我們的空間想成是真的歐氏空間，因為在這個假想的空間中，量不出什麼物理量來。瓷磚只是代表座標而已，任何其他的標籤也有同樣的功能。

7.6 二維與四維的曲率

界定不同幾何的不變式（和特定座標無關）是曲率。當我們考慮二維空間的時候，很容易想像曲率的意義：平的、沒彎曲的空間是平面，彎曲的空間是曲面。雖然以後我們需要以分析的方式處理曲率，目前我們可以先熟悉一下比較容易想像的二維幾何。高維的曲率就只是曲面曲率的推廣而已。

一般而言，二維曲面的弧長是

$$(ds)^2 = g_{11}(dx)^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}(dy)^2 \quad (7.6.1)$$

雖然這個式子中出現了三個函數 g_{ab} ，如要標定不隨座標而變的幾何卻只需要一個（座標的）函數。事實上，我們有選擇座標的自由，例如可以選

第七講

擇正交座標：我們有設定兩個條件在函數 g_{ab} 上頭的自由，因為我們的座標變換可以用上兩個函數。特別是我們永遠可以選擇讓

1. $g_{12} = 0$
2. $g_{22} = g_{11}$

它們的意義是為了研究二維曲面的幾何測量，最廣義的弧長形式是

$$(ds)^2 = f(x, y) \left((dx)^2 + (dy)^2 \right) \quad (7.6.2)$$

從某一個觀點，函數 $f(x, y)$ 代表了當我們在曲面上移動時，尺如何隨著改變。從另一個觀點，函數 $f(x, y)$ 顯然決定了曲面的曲率。

一個有趣的物理狀況剛好對應到這些幾何，這個例子是 Robertson 的一個學生發明的。想像一個人用尺在熱盤子上測量，盤子上某些地方的溫度要高過其他地方。尺在比較熱的地方就膨脹，在比較冷的地方就收縮。很明顯的，函數 $f(x, y)$ 取決於點 (x, y) 當地的溫度以及尺的熱膨脹係數。

曲面上一個點的局部曲率得由某個數學判準來定義。它所牽涉到的是對於越來越小物體所做測量的極限情形。例如，我們可以選擇取圓周長和半徑的比值，或是面積和半徑平方的比值。對於圓球面來說，這些比值和平面上的情形差了像 $(\sin \theta) / \theta$ 這樣的因子（ θ 是所測得的半徑與圓球半徑的比值，見圖 7.5）。當圓周長越來越小，以上的這些比值與 1 差了一項，這一項與圓面積成正比；對於球面而言，這比例常數（乘 3）是 $1/R^2$ 。這個數字（圓周長與 2π 之差與面積之比的係數）適合用來描述局部曲率（local curvature），它就稱為內在曲率（Intrinsic Curvature），或是圓球面的高斯均方曲率（Gaussian Mean Square Curvature），因為所有這些數學都是高斯做出來的。

如要了解其它曲面也很容易。例如我們很容易看得出圓柱面的曲率為零，因為圓柱面不需要扭拉就可以展開成平面，所以很明顯圓周長與半徑比剛好是 2π 。對於比較複雜的情形而言，如果曲面是平滑的，在極小的範圍內（用來定義內在曲率），它們要不是看起來像拋物面，就是像雙曲面。我們用兩個長度參數——在兩個相互垂直平面上的（兩個）曲率半徑——來描述這些曲面。在這個情況，內在曲率是 $1/(R_1 R_2)$ 。如果曲面像拋物

面，內在曲率就是正值，如果曲面像雙曲面，內在曲率就是負值。我們看到這個定義對於特殊的曲面來說，都給出了正確的曲率：對球面來說，兩個半徑（ R_1 、 R_2 ）相等；對於圓柱面來說，其中一個半徑是無窮大。

四維空間的曲率也是用類似的數學判準來定義的。但是在這個情況，要在腦中想像這些東西就不那麼容易。我們只得依賴分析方法，因為我們的直覺可能行不通。要對於狹義相對論裡的四維時空有很好的直觀已經夠困難了——因為（時間與空間相對的）負號的緣故，我發現很難想像到底什麼和什麼是比較靠近的。然而要想像這些有曲率的東西又更加困難。一個彎曲的二維空間可以方便地想成為嵌入（embedded）在三度空間中的曲面，但是如要用類似的辦法去想像三維空間曲率，則必須把三維空間嵌入六維空間；對於四維曲率而言，則需要將四維空間嵌入十維空間。所以時空的曲率要比曲面曲率複雜太多了。

7.7 一般座標變換之下不變量的數目

在四維幾何裡，如要以類似的方式（以 $1/(R_1 R_2)$ 描述二維曲面的內在曲率）描述曲率，則約需要二十個係數。這二十個量決定了張量 $g_{\mu\nu}$ 有物理意義的性質。我們應該做的就是選擇適當的座標以簡化張量 $g'_{\mu\nu}$ ，就如同先前我們用單一的函數 $f(x,y)$ （7.6.2式）來定義二維幾何。

我們已經知道，除了在單一個時空點上，一般而言無法利用疊加上一個加速度來消除重力場。因為定義曲率的方式是指明在一個點附近無限小範圍內的狀況，所以我們應該研究張量 $g'_{\mu\nu}$ 可以簡化到什麼地步。與二維的情形相比，我們認為有可能選擇一個座標（稱為黎曼正則座標，Riemann normal coordinates），使得在一個點附近的空間近乎是平空間，差別只是離開那一點距離的平方項而已。換句話說，曲面和切過某一點的平面的區別和離開切點距離的平方成正比；我們預期四維空間也有類似的事。

讓我們先數一下在座標變換中，可以指定多少個量，以及可以簡化 $g'_{\mu\nu}$ 到什麼地步，如果我們對於某個點展開 $g'_{\mu\nu}$ 。令空間中的任意點為 x ，然後對於點 x_0 取 $g'_{\mu\nu}$ 的泰勒展式：

第七講

$$g'_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x_0) + g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau) + \frac{1}{2}g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau)(x^\sigma - x_0^\sigma) + \dots \quad (7.7.1)$$

我們必須依據(7.4.8)式來計算度規張量 $g'_{\mu\nu}(x_0)$ 以及其微分：

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta}(x_0) &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdot g_{\mu\nu} \right]_{x_0} \\ g'_{\alpha\beta,\tau} &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdot g_{\mu\nu,\tau} \right]_{x_0} + 2 \left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdot g_{\mu\nu} \right]_{x_0} \quad (7.7.2) \\ g'_{\alpha\beta,\tau\sigma} &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdot g_{\mu\nu,\tau\sigma} \right]_{x_0} + 2 \left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau \partial x'^\sigma} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdot g_{\mu\nu} \right]_{x_0} + \text{其他項} \end{aligned}$$

我們看到如要簡化 $g'_{\mu\nu}$ (如果只考慮到展式的二階項)，就需要選擇適當的變換以使得(7.7.2)式中的偏微分項是某些值。在座標變換中我們可以指定以下的量：

1. 16 個量 $\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right]_{x_0}$
2. 40 個量 $\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right]_{x_0}$ (7.7.3)
3. 80 個量 $\left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta \partial x'^\gamma} \right]_{x_0}$

(請注意微分的次序沒有關係) 在等式的另一端，度規張量的值與微分共有以下這麼多個：

1. 有 10 個分量 $g'_{\mu\nu}(x_0)$
2. 有 40 個一次微分 $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$
3. 有 100 個二次微分 $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)$ (7.7.4)

我們首先試著讓 $g'_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu}$ ，這只牽涉到一階微分 $\left[\partial x^\mu / \partial x'^\alpha \right]_{x_0}$ 。我們有十個條件要滿足，但是我們有十六個自由參數，所以一定做得到，而且還剩下六個自由度。這六個參數就是狹義相對論的六個參數——勞侖茲變換和旋轉（速度向量以及旋轉軸與旋轉角度等六個參數），我們在不變動 $\eta_{\mu\nu}$ 下，仍可做這些變換。下一步我們可以利用四十個

$$\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right]_{x_0}$$

讓四十個 $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$ 消失。 $g_{\mu\nu}$ 的微分出現在讓 $\int ds$ 極小的運動方程式中。我們在某一點可以讓 $g_{\mu\nu}$ 消失的意義是可以藉用加速度讓重力在某一點完全消失，就像以前所講的那樣。

最後剩下二十個二階微分（像 $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}$ ）的線性組合，無法利用座標變換除去它們。我們正是用這些量來描述潮汐力的細節。在下一講，我們會開始用 $g_{\mu\nu}$ （無論我們想從什麼座標系統開始）的分量來建構這二十個量。



8.1 非正交座標系中張量分量的變換

在先前大半的討論中，我們可以利用簡化的記號來代表張量分量的累加，因為在於我們永遠使用正交座標系。尤其是我們經常用重複出現的指標來表示累加：

$$A_\mu B^\mu = A_4 B_4 - A_3 B_3 - A_2 B_2 - A_1 B_1 \quad (8.1.1)$$

在正交座標系，這些和是（在座標變換下）不變的純量（scalar quantities）。一個熟悉的特例是定義出狹義相對論中「原時」的和：

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (8.1.2)$$

對於我們現在正在考慮的廣義座標系（可以加速、扭曲、伸長）而言，「原時」得用座標位移與度規張量 $g_{\mu\nu}$ （(7.4.7)式）的乘積來定義。所以建構純量不變式得要遵循比(8.1.1)式更複雜的規則。

座標位移是我們稱為向量的反變分量（contravariant component）的典型例子。依慣例，我們會把反變分量的指標寫成上標，例如 dx^μ 。重要的是在座標變換之下，這些反變向量分量如何變換。對於一段座標間隔而言，變換的規則是

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad (8.1.3)$$

我們將一個向量函數定義成一組四個量，性質和座標位移一樣，當我們變換座標的時候，它們變換的方式也一樣：

$$A'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}(x) \quad (8.1.4)$$

我們把 A^{μ} 稱為向量的反變分量。我們可以很容易將定義推廣到高階的張量；譬如說，張量是一個函數，和兩個向量的外乘積有相同的變換規則，也就是

$$T'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} \quad (8.1.5)$$

如果比較度規張量 $g_{\mu\nu}$ 的變換公式(7.4.8)與(8.1.5)式的定義，我們會看到 $g_{\mu\nu}$ 並不是同類的量，因為微分項顛倒了。但是我們定義過 $g_{\mu\nu}$ 的反矩陣：

$$g^{v\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta^v_{\beta} \quad (8.1.6)$$

要證明這個反矩陣是反變張量並不會太困難，所以用兩個上標來標記反矩陣是合適的，我們原本就這麼預期。

同樣地，要證明以下的和

$$g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = (ds)^2 \quad (8.1.7)$$

以及

$$g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}$$

是純量不變式並不困難，原因是微分首先以正確形式出現，再來是上下顛倒，所以累加起來後就是克氏尋同符號 (Kronecker delta)。

第八講

這意味著我們可以用度規張量 $g_{\mu\nu}$ 的來定義一種新的向量分量，它們遵循不同的變換規則：

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A_\beta &= g_{\alpha\beta} A^\alpha \\ \text{(b)} \quad A'_\beta(x') &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} A_\mu(x) \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

我們將稱 A_α 為向量的協變分量。用累加可以製造出的純量不變式是

$$A_\beta B^\beta \quad (8.1.9)$$

在以下的討論，我們必須注意分量指標是上標或下標，這很重要。通常我們只可以對於一上標與一下標做累加。例如，在狹義相對論的正交座標中，原時應該寫成

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (8.1.10)$$

張量 $\eta_{\mu\nu}$ 是對角矩陣，對角分量是 $(1, -1, -1, -1)$ 。

每當物理問題中出現向量，例如電磁學中的向量位勢，它會是以協變向量或反變向量的形式出現。但是我們只要知道其一，就可以利用度規張量來建構另外一個。我們永遠可以利用乘上 $g_{\mu\nu}$ ($g^{\mu\nu}$) 隨意地把上(下)標變成下(上)標。我們也可以建構部分協變部分反變的張量，也就是說張量的指標有些是上標、有些是下標。我們寫下指標的時候，指標的順序要清楚，例如

$$g_{\mu\alpha} T^{\mu\nu} = T_\alpha^\nu \quad (8.1.11)$$

對於特殊的對稱張量 $g_{\mu\nu}$ 或 $g^{\mu\nu}$ ，就不必那麼嚴謹，因為提升或降下一個指標只會給出克氏尋同符號：

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad (8.1.12)$$

我們在這裡不會去證明上面這些關係式，因為它們已是老東西而且很多書裡都有這些證明。愛因斯坦將這些關係式都派上用場，他也發明了一些很容易用的記號，在這方面的學問他是靠得住的人。指標的位置，無論在上或在下，都只是用來幫助記憶，因為它只是在指明到底要用什麼變換公式（如(8.1.3)、(8.1.4)、(8.1.5)、(8.1.8)），也就是說指標與變換公式中微分項的指標相對應。

向量的協變分量與反變分量在物理上並沒有基本的差異；它們的物理意義是一樣的，只是表現的方式不同。在二維空間，我們可以很容易地用圖來說明這兩種描述向量的方法到底差異在那裡。既然座標變換是用無窮小位移來定義，因此我們無須擔心空間的曲率，只要注意座標是否正交座標。如果座標軸不是以直角相交，那麼就有兩種將位移投影到座標軸的方法，或是垂直於其中一軸，或是與另一軸平行，見圖 8.1。所以張量分量 $g_{\mu\nu}$ 所描述的是某一點上的座標不是正交座標。

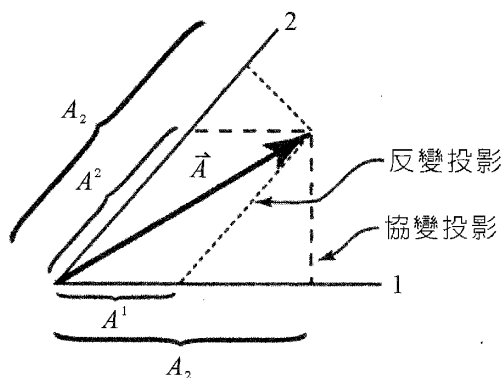


圖 8.1

8.2 決定 $g_{\mu\nu}$ 不變式的方程式

既然我們比較明白了度規張量的用處，就可以進一步研究可以建構出什麼樣的量在無窮小座標變換下仍維持不變。

第八講

我們現在要做的事和先前我們在建構拉格朗日函數時所做的完全一樣。假設我們稍微改變一下座標，

$$x^\mu = x'^\mu + \zeta^\mu(x') \quad (8.2.1)$$

這裡的 ζ^μ 很小，所以我們只需要保留至 ζ^μ 的一階項。出現在座標變換中的微分就是

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\alpha + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} \quad (8.2.2)$$

當我們計算新的 $g'_{\mu\nu}$ ，得將兩項這種微分項乘在一起：

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\alpha\beta}(x' + \zeta) \left(\delta_\mu^\alpha + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} \right) \left(\delta_\nu^\beta + \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu} \right) \quad (8.2.3)$$

如果我們只保留 ζ^μ 的零階項與一階項，則

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x') + g_{\alpha\nu} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} + g_{\mu\beta} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma} \zeta^\sigma \quad (8.2.4)$$

新的 $g'_{\mu\nu}$ 等於舊的 $g_{\mu\nu}$ 加上一些 ζ^μ 的一階項。當我們問有那些 $g_{\mu\nu}$ 的函數是允許的，如果我們堅持它們的形式維持不變，我們就面對了在第六講中已經解決的相同數學問題。這數學問題和我們想找出能導致守恆的「能量—動量張量」的拉格朗日函數一樣。

所以不同的物理觀點可以產生相同的方程式，也有相同的内容。我們在尋找重力拉格朗日函數時出現的座標變換，也出現在一個純幾何問題的解裡面。因此我們猜某些物理判準以及聽起來像是幾何的判準其實是等價的。我們在先前幾講中曾要求所用的方法不能有內在矛盾，結果是我們得要求某一個散度（divergence）一定得為零；所以這個沒有內在矛盾的要求，一定和我們現在所做的等價。 $g_{\mu\nu}$ 的不變式的物理意義到底是什麼？

運動方程式可以從變分原理中推導出來

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} = 0 \quad (8.2.5)$$

我們可以引入一個參數 u 來解這個問題，也就是把微分形式的平方根定義用以下的式子定義比較好：

$$\int du \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du}} \quad (8.2.6)$$

當我們把變分算出來，就得到以下的（測地）方程式：

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\sigma\tau}^\mu \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\tau}{ds} \quad (8.2.7)$$

這裡

$$\Gamma_{\sigma\tau}^\mu = g^{\mu\nu} [\sigma\tau, \nu]$$

既然當我們用任意的座標變換改變度規張量時，這個方程式的形式仍會維持不變，它一定是 $g_{\mu\nu}$ 的不變式，而物理就包含在 $g_{\mu\nu}$ 裡頭。

8.3 關於「空間真的是平的」這個假設

我們現在討論一下當我們發現不同的方法都導致相同的結果時，我們究竟學到了什麼？我們以前的觀點是可以把空間形容成狹義相對論的空間，為了方便我們稱它為加利略空間（Galilean space）。在這個加利略空間裡，存在著重力場 $h_{\mu\nu}$ ，它們會改變尺的長度，也會讓鐘走得更快或更慢。所以當我們談到實驗結果時，我們被逼必須區分真實測量的尺度、物理尺度、以及理論所用的尺度（即加利略尺度）。

第八講

現在重要的是，物理座標一定要永遠能重複得到相同的結果。對於開始建構理論而言，如果假設測量是在（原則上）加利略空間裡做的，也許是方便的事。但是當我們開始預測真實效應時，會發現加利略空間其實沒有什麼用處。

我們不必因為某人所選的座標看起來不是加利略式的，就說它是荒唐的。如果他堅持把這座標當成是加利略式的，並且把曲率歸因於重力場，他完全有理由這麼做。對他來說，反而是我們的空間看起來很荒唐。對於任何物理結果來說，無論一開始選用什麼座標，答案都是一樣的。所以就哲學觀點而言，我們的理論可以從一開始就不必用上（用來標定物理的）加利略空間，是一項進步。我們永遠直接處理物理空間中的真實測量。

我們回頭再看一下用直尺在熱盤子上做測量的人；當他從熱的區域跑到冷的區域時，尺很明顯的會改變長度。但是我們之所以能這麼解釋，原因在我們知道如何不受溫度影響而測量長度，亦即利用光。如果我們想利用光的測量在盤子上設立一個「真正的歐氏（truly Euclidean）」座標系統，那麼在盤子上的人就會告訴我們有一個「溫度場」，這個場能夠描述當他在盤子上移動時，尺的長度如何會改變。但是如果我們在盤子上設立了一個扭曲的座標系，但是卻仍騙他說是歐氏座標系，他就會得到另一個不同的「溫度場」。但是我們無法利用任意座標來欺騙他以便改變完全是由他自己所做的物理測量結果。只要尺的長度僅是用來標定距離，他將永遠得到一樣的答案——無論他會從我們給他的座標中得到多麼奇怪的「溫度場」。

在熱盤子這個例子上，關於到底何者是「歐氏」空間何者不是，情況相當明顯，因為我們假設溫度不會影響光所做的測量。然而在重力這個情況，我們不知道有什麼尺度是不受重力影響的——沒有不受重力影響的「光」可以用來定義「加利略座標系統」。因此所有的座標系統都相等，它們的區別僅在於用來描述尺的長度與鐘的速度的重力場是不一樣的。——但我們集中於描述物理測量，起初使用的座標系統就消失了，因為它只是一種方便的標籤，只是一種紀錄的方式。

有一種特殊的情況會讓加利略或歐氏系統有意義—零重力的極限，或熱盤子上均勻溫度的極限。在這情況，物理距離與歐氏距離遵循相同的幾何。如果一開始我們用了彎曲座標，我們會發現某個座標變換可以讓我們不必利用重力場來描述測量。這是很不得了的簡化—但是這簡化並非來自任何歐氏幾何的內在效力，而是因為歐氏幾何剛好對應到一種特定的物理狀況，這時的物理的確比較單純。

如果重力到處為零，則 Γ 也應該到處為零。如果重力不是到處為零，則我們不可能定義出一個「最好」的座標系統，但是我們可以局部的讓重力為零（等效原理）。

8.4 各種重力觀點的關係

重力理論奇特的地方是它既有場論的詮釋，也有幾何的詮釋。既然它們真的是同一個理論的兩個面相，我們或許會假設金星科學家在得到完整的重力場論之後，終究會發現幾何觀點。不過我們無法確定，因為我們無法解釋歸納推論—我們永遠無法解釋當僅知道一點點的時候，如何前進以便知道更多。

無論如何，事實是自旋為 2 的場有這個幾何詮釋，但為何會如此則不容易解釋—只能說這太棒了。對於物理來說，幾何詮釋並不是真的非有不可。也許整個巧合可以用某種規範不變性（gauge invariance）來了解。也許在我們討論了第三種觀點之後，前兩種關於重力的觀點的關係就清楚了。第三種觀點與場在變換下的一般性質有關。我們以後會更進一步發展這個觀點。這裡的討論只是要讓大家（如果想了解重力怎麼會既是幾何又是場）對未來的某些方向有點感覺。

讓我們考慮一下規範不變性是什麼。一般在電動力學中，它的意思是如果將向量位勢 A 以

$$A' = A + \nabla X \quad (8.4.1)$$

取代，則場方程式與物理效應仍維持不變。這和機率振幅的相位不變性有關。我們看一下量子力學振幅會發生什麼事；很明顯的，如果我們用

第八講

$$\psi' = e^{ia} \psi$$

來計算機率，則會預測出完全一樣的物理。一般而言，一個固定（常值）的 a 不會造成任何影響。但是如果我們（在上面的相位變換中）不用固定的 a ，而是用會隨著空間中的點而變的函數 X 呢？方程式永遠牽涉到 ψ' 的梯度：

$$\nabla \psi' = e^{iX} (\nabla \psi + i\psi \nabla X) \quad (8.4.2)$$

然而算符 $(\nabla - iA')$ 作用後卻只會多出一個相位，

$$(\nabla - iA')\psi' = e^{iX} (\nabla - iA)\psi \quad (8.4.3)$$

所以如果存在一個向量場 A ，它和 ψ 耦合的方式正如我們所假設的那樣，則在 ψ 做了相位變換（相位可以隨時空點不同而異）之後，方程式仍會維持不變。

楊（振寧）—密爾斯（Yang-Mills）向量介子理論嘗試著把上面關於規範（相位）不變性的想法推廣到核子交互作用中的同位旋變換。如果質子的振幅是 ψ ，則

$$\psi' = e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{a}} \psi \quad (8.4.4)$$

描述了一個部分為質子、部分為中子的東西。如果 a 是同位旋空間中的固定向量，當我們說核子交互作用在同位旋變換之下不變時，我們的意思是對於核子交互作用而言，新的物體 ψ' 與原先的 ψ 完全一樣。楊與密爾斯提議多加一個場到拉格朗日函數中，以便當我們做了隨著空間中的點而變的相位變換 ($\vec{a} \rightarrow \vec{X}$) 之後，方程式仍然不變。

這些想法怎麼會和重力有關？我們知道物理方程式在座標平移一個固定值之下仍然維持不變

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \quad (8.4.5)$$

為了讓它看起來更像是相位變換或是同位旋變換，我們可以用動量表現，也就是平移算符是

$$\exp(ip_\mu a^\mu)$$

另一方面，我們可以研究如何讓物理在平移量可以隨空間點而變 ($a^\mu \rightarrow \zeta^\mu$) 的情況下，仍維持不變。我們得尋找一個更完整的拉格朗日函數，所需增加的新項正好是重力場的項。所以重力場就是對應於平移變換的規範場。

8.5 從切空間看曲率

我們可以和愛因斯坦一樣採取幾何觀點，以半徑與圓周的極限情況來了解曲率以及類似的東西。為了顯示事情並不是太複雜，我們會把它做出來。既然已經知道目標，我們將做一般性（廣義）的座標轉換。我們已經談論過有多少微分項，也知道可以藉由調整 16 項一次微分 ($\partial x^\alpha / \partial x'^\nu$) 來讓

$$g_{\mu\nu}^o = \eta_{\mu\nu} \tag{8.5.1}$$

我們也假設可以調整 40 項二次微分 ($\partial^2 x^\alpha / \partial x'^\mu \partial x'^\nu$) 來讓所有 $g_{\mu\nu}^o$ 的一次微分為零。我們還剩下 80 項三次微分可以調整以及 100 項 $g_{\mu\nu}$ 的二次微分 (見 7.7 節)。所以最後餘下 20 項 $g_{\mu\nu}$ 的二次微分——它們的線性組合正是可能有幾何意義的東西。我們想尋找的是用一開始的 $g_{\mu\nu}$ 來表達的式子。我們分三步驟來做，其實可以說是倒著做。首先，假設我們已經調整了一次與二次微分 (在某個點轉換至黎曼正則座標)，使得 $g_{\mu\nu}^o = \eta_{\mu\nu}$ 以及 $g_{\mu\nu,\sigma}^o = 0$ ，並且已經找到那 20 個 $g_{\mu\nu}$ 二次微分的線性組合式子。然後我們再來擔心究竟我們是如何成功地達成目標——從任意的起始座標到以一開始的 $g_{\mu\nu}$ 來表達的 20 個式子。

首先，我們從幾何的觀點出發，討論用一個點的切空間 (tangent space) 中的座標所能定義的量。我們在四維時空所做的和以下二維空間的情況類

第八講

似。二維彎曲空間是一曲面，我們比較曲面某一點的幾何與切平面所見的幾何（見圖 8.2）。我們一開始在曲面上所取的座標一般而言不是正交座標，而且也不會取得恰到好處以至於可以最簡單地用不變量 $1/(R_1 R_2)$ 來描述幾何。所以第一步是決定起始幾何的這個內在曲率 (intrinsic curvature)。

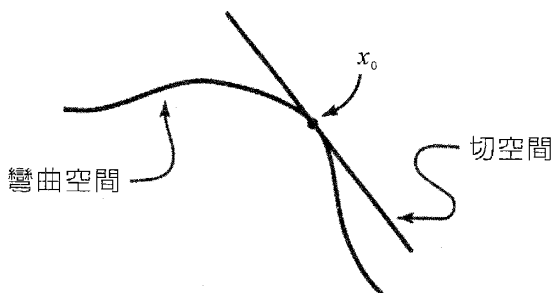


圖 8.2

只有二次微分才可以開始描述曲面在某一點偏離切平面的情況。曲率 (curvature) 正是曲面與切平面在某一點差別的程度。它們是曲面在某一點內在特性的描述。既然牽涉到座標的一次、二次與三次微分，我們得到足夠廣義的座標轉換

$$x^\alpha = x'^\alpha + \frac{1}{2} a^\alpha_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu + \frac{1}{6} b^\alpha_{\mu\nu\sigma} x'^\mu x'^\nu x'^\sigma \quad (8.5.2)$$

我們的任務就是挑出 20 個有意義的組合。一次微分是

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha_\mu + a^\alpha_{\mu\nu} x'^\nu + \frac{1}{2} b^\alpha_{\mu\nu\sigma} x'^\nu x'^\sigma \quad (8.5.3)$$

在這個特定的切平面，度規張量可以足夠廣義的寫成

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x'^\sigma x'^\tau g'^{\sigma}_{\alpha\beta,\sigma\tau} \quad (8.5.4)$$

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x^\sigma x^\tau g^{\sigma}_{\alpha\beta,\sigma\tau}$$

費曼重力學

上標 o 代表那個特定的量是在切點上計算的。我們可以藉由考慮切平面上的兩個任意座標系來得到適當的不變量組合，方法是要求同樣的公式在兩個座標都適用。既然我們考慮的是切空間，所以座標的差別只能從平方項開始，因而

$$a^{\alpha}_{\mu\nu} = 0 \quad (8.5.5)$$

再來就只需把一個變換放入另一個變換裡。用(8.5.3)與(8.5.5)式，將 $g_{\mu\nu}$ 的變換公式算出來

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (g^o_{\alpha\beta,\sigma\tau} + \eta_{\alpha\nu} b^{\nu}_{\beta\sigma\tau} + \eta_{\beta\nu} b^{\nu}_{\alpha\sigma\tau}) x'^{\sigma} x'^{\tau} \quad (8.5.6)$$

從(8.5.6)，可看出 $g_{\mu\nu}$ 的二次微分比較起來是

$$g'^o_{\alpha\beta,\sigma\tau} = g^o_{\alpha\beta,\sigma\tau} + b_{\alpha\beta\sigma\tau} + b_{\beta\alpha\sigma\tau} \quad (8.5.7)$$

這裡的 $b_{\alpha\beta\sigma\tau}$ 是

$$b_{\alpha\beta\sigma\tau} \equiv \eta_{\alpha\nu} b^{\nu}_{\beta\sigma\tau}$$

得到(8.5.7)之後，我們要找出 g 二次微分的線性組合，裡面沒有 b 。我們利用以下的事實： b 對於最後的三個指標而言完全對稱，然而 $g_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ 只對 $\sigma\tau$ 而言對稱。嘗試對調指標 ($\beta \leftrightarrow \sigma$) 並且減掉一些項

$$g'^o_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g'^o_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g^o_{\alpha\beta,\sigma\tau} + g^o_{\alpha\sigma,\beta\tau} = b_{\beta\alpha\sigma\tau} - b_{\sigma\alpha\beta\tau} \quad (8.5.8)$$

上式的右側對於指標($\sigma\tau$)而言絕對對稱，但是左側就不是這樣。所以若將上式對於指標($\sigma\tau$)做反對稱化 (anti-symmetrizing)，則右手側成為零。我們會得到以下與 b 無關的式子：

第八講

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\sigma\tau}^o - g_{\alpha\sigma,\beta\tau}^o - g_{\tau\beta,\sigma\alpha}^o + g_{\tau\sigma,\beta\alpha}^o) \quad (8.5.9)$$

也就是說 $R_{\alpha\tau\beta\sigma}$ 在 x 座標與 x' 座標兩座標中相等。這正是我們要找的 20 個線性組合。這個東西還不是張量，它的一般性還不夠：它只是定義於沒有重力場的某一點上。在某個意義上，它是重力場張量不可化約的那部份，也就是不能用座標轉換除去的东西。它們代表純潮汐力 (tidal force)。所以我們現在已有明確的辦法來找出曲率。首先，找出讓 $g_{\mu\nu}$ 變成 $\eta_{\mu\nu}$ 而且一次微分為零的座標變換 (黎曼正則座標)。那麼如果以變換後 $g_{\mu\nu}$ 來表示，曲率就是 (8.5.9) 式。它們在任意座標都相等。剩下的問題就是用原來的座標與原來的 $g_{\mu\nu}$ 來表示 $R_{\alpha\tau\beta\sigma}$ 。

8.6 從任意座標看曲率

推導廣義座標中曲率最平順的做法是按部就班來。下一步是去掉對於一次微分的限制 (它們現在可以不是零)，但是在局部上仍讓座標維持正交。 $g_{\mu\nu}$ 與 $g'_{\mu\nu}$ 的公式是

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta,\mu}^o x^\mu + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu\nu}^o x^\mu x^\nu \\ g'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\sigma\tau}^{\prime o} x'^\sigma x'^\tau \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

$g'_{\mu\nu}$ 和以前一樣，一次微分為零。既然我們已經調整了二次微分，我們現在只需考慮下面的座標變換

$$x^\alpha = x'^\alpha + \frac{1}{2} a_{\mu\nu}^\alpha x'^\mu x'^\nu \quad (8.6.2)$$

三次方項不會影響右手側。把一次微分的式子

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta_{\mu}^{\alpha} + a_{\mu\nu}^\alpha x'^\nu \quad (8.6.3)$$

代入 $g'_{\mu\nu}$ 的式子，然後以 $g_{\mu\nu}$ 表示出來

$$\eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g'^{\rho}_{\alpha\beta,\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau} = \eta_{\alpha\beta} + (g^{\circ}_{\alpha\beta,\sigma} + a_{\beta\alpha\sigma} + a_{\alpha\beta\sigma}) x'^{\sigma} \\ + x'^{\sigma} x'^{\tau} \left[a^{\rho}_{\alpha\sigma} a_{\rho\beta\tau} + a^{\rho}_{\alpha\tau} g^{\circ}_{\rho\beta,\sigma} + a^{\rho}_{\beta\tau} g^{\circ}_{\rho\alpha,\sigma} + \frac{1}{2} a^{\rho}_{\sigma\tau} g^{\circ}_{\alpha\beta,\rho} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\sigma\tau} \right] \quad (8.6.4)$$

式中的 $a_{\alpha\beta\sigma} = \eta_{\alpha\mu} a^{\mu}_{\beta\sigma}$ 。如果選擇滿足下式的 $a^{\alpha}_{\mu\nu}$

$$a_{\beta\alpha\sigma} + a_{\alpha\beta\sigma} = -g^{\circ}_{\alpha\beta,\sigma} \quad (8.6.5)$$

則一次微分項為零。我們需要解(8.6.5)這個方程式，以便將 $a^{\alpha}_{\mu\nu}$ 表示成原來座標中 $g^{\circ}_{\alpha\beta,\sigma}$ 的函數。用一般的技巧就可以做到這一點：將(8.6.5)式中的 (α, σ) 對調，然後讓(8.6.5)式減去對調後的式子，再整理一下，就可以得到解

$$a_{\alpha\sigma\beta} = -\frac{1}{2} [g^{\circ}_{\sigma\alpha,\beta} + g^{\circ}_{\sigma\beta,\alpha} - g^{\circ}_{\alpha\beta,\sigma}] = -[\alpha\beta, \sigma]^{\circ} \quad (8.6.6)$$

(8.6.4)式告訴我們 $g'^{\rho}_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ 是(8.6.4)式右側方括號 [] 裡面的式子(的兩倍)，其中的 $a_{\alpha\sigma\beta}$ 用(8.6.6)式代入。只要將這個 $g'^{\rho}_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ 取代(8.5.9)式中的 $g^{\circ}_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ 就可以得到以舊座標(唯一的限制是它們必須是局部正交座標)表示的曲率：

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g_{\tau\beta,\alpha\sigma} + g_{\tau\sigma,\alpha\beta}) \\ + [\rho\sigma, \alpha] \eta^{\rho\lambda} [\tau\beta, \lambda] - [\rho\beta, \alpha] \eta^{\rho\lambda} [\tau\sigma, \lambda] \quad (8.6.7)$$

剩下要做的就是將最初的座標正交化。只要利用線性變換就可做到這一點：

$$x^{\alpha} = L^{\alpha}_{\mu} x'^{\mu} \quad (8.6.8)$$

第八講

最後只需要選擇

$$g'^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (8.6.9)$$

然後重新寫出式子。一次微分只是 L ，所以

$$g'_{\mu\nu} = L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \quad (8.6.10)$$

我們可以推導出

$$\eta^{\alpha\beta} L_\alpha{}^\sigma L_\beta{}^\mu = g^{\sigma\mu} \quad (8.6.11)$$

以及

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\alpha}} = L^\mu{}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (8.6.12)$$

所以（這裡的拉丁指標所指的是 x' 座標的指標）

$$g'_{mn, st} = L^\sigma{}_s L^\tau{}_t L^\mu{}_m L^\nu{}_n g_{\mu\nu, \sigma\tau} \quad (8.6.13)$$

$$a'_{rmn} = L^p{}_r L^\mu{}_m L^\nu{}_n a_{\rho\mu\nu} \quad (8.6.14)$$

$$\eta^{rq} a'_{rmn} a'_{qst} = \eta^{rq} L^p{}_r L^\lambda{}_q L^\mu{}_m L^\nu{}_n L^\sigma{}_s L^\tau{}_t a_{\rho\mu\nu} a_{\lambda\sigma\tau} \quad (8.6.15)$$

當我們將這些式子代入 R 裡面，我們發現 R 不再是不變量。

R 最後的表現式是（利用(8.6.11)）

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta, \sigma\tau} - g_{\alpha\sigma, \beta\tau} - g_{\tau\beta, \alpha\sigma} + g_{\tau\sigma, \alpha\beta}) \\ + [\rho\sigma, \alpha] g^{\rho\lambda} [\tau\beta, \lambda] - [\rho\beta, \alpha] g^{\rho\lambda} [\tau\sigma, \lambda] \quad (8.6.16)$$

它們的變換公式是

$$R'_{mnst} = L^\mu{}_m L^\nu{}_n L^\sigma{}_s L^\tau{}_t R_{\mu\nu\sigma\tau} \quad (8.6.17)$$

8.7 曲率張量的性質

雖然 $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ 不是不變量，它們仍是張量，從它們的變換公式 ((8.6.17) 式) 就可以看出來。很容易證明 $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ 只包括 20 個量，就如先前所說的那樣。(8.5.9) 式來自對於指標 (α, τ) 做反對稱化，然後再對於指標 (β, σ) 做反對稱化。所以 $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ 就有以下的對稱性質：

$$\begin{aligned} R_{\alpha\tau\beta\sigma} &= -R_{\tau\alpha\beta\sigma} & (a) \\ &= -R_{\alpha\tau\sigma\beta} & (b) \\ &= +R_{\beta\sigma\alpha\tau} & (c) \end{aligned} \quad (8.7.1)$$

以下的代數關係也隱藏在(8.5.9)式中（因此也包含在(8.6.16)式中）：

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} + R_{\alpha\sigma\tau\beta} + R_{\alpha\beta\sigma\tau} = 0 \quad (8.7.2)$$

我們現在算一下 $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ 中獨立的分量有多少。第一個指標不能等於第二個指標，第三個指標不能等於第四個指標。只有反對稱的組合才不為零(8.7.1a、b)——我們知道二階反對稱張量有 6 個可能不為零的分量，所以如果還不把第一對指標與第二對指標交換的對稱(8.7.1c)考慮進來，則共有 $6 \times 6 = 36$ 種可能。若把(8.7.1c)考慮進來，獨立分量的數目就降為 $(6 \times 6) / 2 = 21$ 。代數關係(8.7.2)式只包涵一個有意義的限制——如果兩個指標相等，由於(8.7.1)式的對稱，(8.7.2)式只是一個恆等式。例如，

$$R_{1\tau 1\sigma} + R_{1\sigma 1\tau} + R_{11\sigma\tau} = R_{1\tau 1\sigma} - R_{1\tau 1\sigma} + 0 = 0 \quad (8.7.3)$$

第八講

所以如果代數關係(8.7.2)式要有意義，所有的指標皆不能相等。但是當所有指標都不一樣(1,2,3,4)的時候，(8.7.2)式只代表了一個方程式。所以一般而言，曲率張量（黎曼張量）只有 20 個獨立分量。

在建構理論的時候，我們需要的不是張量，而是一個完全不變量，好放進拉格朗日函數裡。（愛因斯坦反而不是這麼說的，他說應力—能量張量應該等於另外一個導自由率張量的張量。）最小作用量原理牽涉到一個對所有空間點積分的函數，這積分必須在座標變換下維持不變。被積函數必須是一個（世界）純量。

$$\int dx dy dz dt (\text{純量}) = (\text{純量不變量}) \quad (8.7.4)$$

我們利用提升曲率張量的指標然後縮約指標（contracting）來得到這麼一個純量。例如，我們可以提升第一個指標

$$g^{\alpha\lambda} R_{\alpha\tau\beta\sigma} = R^{\lambda}_{\tau\beta\sigma} \quad (8.7.5)$$

但是當我們縮約第一對指標時，我們不幸會得到零。

$$R^{\tau}_{\tau\beta\sigma} \equiv 0 \quad (8.7.6)$$

我們必須做的其實是降低張量的秩，然後縮約第一個指標與最後一個指標。

$$g^{\alpha\sigma} R_{\alpha\tau\beta\sigma} = R_{\tau\beta} \quad (8.7.7)$$

（請注意，習慣上，我們用同一個字母 R 來代表所有這些從曲率張量推導出來的張量。）這個二階張量（瑞奇張量）是對稱張量。然後我們降低張量的秩來得到做為被積函數的純量（「純量曲率」）

$$g^{\alpha\sigma} g^{\tau\beta} R_{\alpha\tau\beta\sigma} = g^{\tau\beta} R^{\sigma}_{\tau\beta\sigma} = R^{\sigma\beta}_{\beta\sigma} = R \quad (8.7.8)$$

但是純量的體積分並不是一個不變量，因為體積元素（volume element）並不是純量；當我們改變座標的時候 $dx dy dz dt$ 會多出 L_α^μ 的行列式來。所以積分不變量是

$$\int dx dy dz dt R \sqrt{-g} \quad (8.7.9)$$

(8.7.9)式正是真空的愛因斯坦—希爾伯特（Einstein-Hilbert）作用量。

9.1 電動力學因為等效原理而所必須做的修正

等效原理假設沒有任何實驗可以區別加速度和重力，尤其是觀測電磁輻射不能區別加速度和重力。不過很明顯，這裡有些問題，因為我們有個偏見是加速的電荷應該輻射，然而我們並不期待躺在重力場內的電荷會輻射。不過問題並不在於我們對於等效原理的敘述出了差錯，而是我們被加速電荷的輻射功率公式

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2 \quad (9.1.1)$$

誤導了。我們通常是用坡印廷定理（Poynting theorem）計算遠處的輻射流而得到(9.1.1)式，它只適用於循環運動（cyclic motion），或起碼不會隨著時間而不斷成長的運動上（例如等加速運動就是這樣）。(9.1.1)式無法告訴我們能量是「什麼時候」輻射的。這只能靠輻射阻力（radaition resistance）來決定，而輻射阻力是 $2/3 e^2/c^3 \dot{a}$ 。因為反抗這個力所做的功代表喪失的能量。對於等加速運動來說，這個力為零。通常來說，抵抗輻射阻力的功率可以寫成

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \vec{v} \cdot \dot{\vec{a}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{a}) \quad (9.1.2)$$

對於循環運動與有限運動來說，(9.1.2)式最後一項在很長時間內的平均貢獻很小或是為零（對於圓周運動來說， $\vec{v} \cdot \vec{a}$ 會在一周期後回到原值，所以它的貢獻為零）。

當然馬克斯威爾電動定律在重力場中需要修正，就好像一般力學需要修正以符合相對論原理。畢竟馬克斯威爾方程式預測光一定以直線前進，但是我們發現光會彎向星球。很明顯的，重力與電磁現象的某種交互作用必須包括在更好的電磁定律中，以便這些定律能和等效原理相容。

我們得要討論這些電動力學的修正，以及重力波放射、吸收的機制，否則我們的重力理論不算完備。

9.2 張量的協變微分

在先前的討論，我們已經看到空間曲率的概念如何在討論幾何測量的時候出現。但是一個更傳統的進路可以使我們更加了解四維曲率如何影響我們對物理的觀點。在傳統的進路中，曲率的定義取決於，當我們在空間中移動時，向量的變化。讓我們再次想像一個二維世界。如果我們使用平坦的歐氏座標，我們會利用固定（常值）的分量來描述一個遍佈空間的固定向量場。如果我們使用其他座標，通常是曲線座標，則這固定的向量場的分量會隨空間點的不同而變。一個熟悉的例子是平面的極座標：在這個座標中，一個固定向量 F 的分量是

$$\begin{aligned} (A \cos \theta + B \sin \theta) &= F_r \\ (B \cos \theta - A \sin \theta) &= F_\theta \end{aligned} \tag{9.2.1}$$

首先我們要找出一個方法，讓我們可以比較某一點的張量以及鄰近點的張量。這種比較必須要有物理意義，也就是說，我們要先消除由於不同點所用的座標不同而引起的張量座標差異，然後再來描述張量的變化。例如，我們想要比較位於 x^μ 的向量和位於 $x^\mu + dx^\mu$ （ dx^μ 是一無窮小的位移）的另一個向量，我們的方法是把位於 x^μ 的向量平行地（亦即保持向量的方向）移到 $x^\mu + dx^\mu$ 點。

第九講

對於純量函數（張量秩為零）而言，這沒有問題。純量函數的梯度的變換公式是

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\sigma}} \quad (9.2.2)$$

所以純量的梯度很明顯是一協變向量。但是向量或是更高階張量的一般微分並不會仍然是張量——它們的變換公式裡包含了多餘的（和座標有關）項。我們可以從切空間的觀點看事情，以得到恰當的微分方式。既然切空間是平空間（flat space），向量分量的微分不會包含由於座標的彎曲而出現的項，所以向量在平座標中的微分就是張量。我們只要將這些張量從平空間座標轉換到廣義座標就可以得到這些張量在任意座標的公式。和往常一樣，我們利用展式來求出公式（加一撇的座標是平空間）：

$$\begin{aligned} x^{\nu} &= x'^{\nu} + \frac{1}{2} a^{\nu}_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau} + \dots \\ \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} &= \delta^{\nu}_{\mu} + a^{\nu}_{\sigma\mu} x'^{\sigma} + \dots \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

在展式的原點我們有

$$A_{\mu}(x) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'_{\nu}(x')$$

利用(9.2.3)的微分，我們能夠將上式寫成

$$A_{\mu}(x) = A'_{\mu}(x') + a^{\nu}_{\mu\lambda} x'^{\lambda} A'_{\nu}(x') + \dots \quad (9.2.4)$$

現在將上式對廣義座標（在原點）取微分：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} \right)_o &= \frac{\partial}{\partial x'^{\tau}} \left(A'_\mu(x') + a_{\mu\lambda}^{\nu} x'^{\lambda} A'_\nu(x') \right)_o \left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^\sigma} \right)_o \\ &= \frac{\partial A'_\mu(x')}{\partial x'^{\sigma}} + a_{\mu\sigma}^{\nu} A'_\nu(x') \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

既然我們是在原點計算這些量，所有 x' 的線性項都為零。所以就得到以下「平空間」微分在廣義座標中的公式：

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} - a_{\mu\sigma}^{\nu} A_\nu \right] = \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^{\sigma}} \quad (9.2.6)$$

如果將 $a_{\mu\sigma}^{\nu}$ 表成度規張量 (metric tensor) 的函數，我們就得到了所追尋的微分公式。這個量是張量，平常稱為向量 A_τ 的協變微分。為了區別這個協變微分和一般微分，我們用分號 (semicolon) 來代表協變微分：

$$A_{\mu;\tau} \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\tau} - \Gamma_{\mu\tau}^{\sigma} A_\sigma \quad (9.2.7)$$

如要證明這個量是張量，只要將所有座標轉換成平空間座標，把微分計算出來，然後檢驗座標變換公式，但是整個計算過程很繁瑣。反變 (contravariant) 向量的正確微分公式也與此類似：

$$A^{\mu}{}_{;\sigma} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\tau}^{\mu} A^\tau \quad (9.2.8)$$

證明(9.2.8)式最簡單的辦法是從(9.2.7)式出發，利用度規張量來提升或降低指標 (raise and lower index)；在重新整理度規張量之後，會導致公式中的 Γ 變號 (從正到負)。如要計算高階 (有很多指標的) 張量的微分，我們利用以下的規則：

$$T^{\mu\nu}{}_{\rho;\lambda} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu} T^{\sigma\nu}{}_{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\nu} T^{\mu\sigma}{}_{\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} T^{\mu\nu}{}_{\sigma} \quad (9.2.9)$$

第九講

換句話說，每個指標代表要多隨附一項牽涉到 Γ 與張量本身的項。其實這項規則很容易記得住—指標只能是上標或下標，我們只要記住上標所隨附的項是 + 號，下標則是 - 號。

這種變換最熟悉的例子是球座標 (spherical coordinate) 中向量的旋度 (curl)；這些公式永遠牽涉到普通微分乘上向量的分量。

協變微分還有一個有用的關係。既然度規張量的協變微分為零—這很容易驗證的

$$g^{\mu\nu}{}_{;\sigma} = 0 \quad (9.2.10)$$

我們就有以下的規則適用於乘積的協變微分：

$$(A^\mu B^\nu)_{;\sigma} = A^\mu B^\nu{}_{;\sigma} + A^\mu{}_{;\sigma} B^\nu \quad (9.1.11)$$

如要證明牽涉到張量的這類恆等式，我們永遠可以選一個最容易證明此恆等式的座標，因為張量的數學性質就是一個張量等式只要在一個座標成立，它在其他任何座標都成立。

曲率的效應之一就是兩個協變微分的結果取決於微分的順序。我們可以直接地利用(9.2.9)式計算出結果。第一階段的計算結果是

$$\begin{aligned} A^\mu{}_{;\sigma;\tau} &= \left[A^\mu{}_{;\sigma} \right]_{;\tau} \\ &= \frac{\partial \left[A^\mu{}_{;\sigma} \right]}{\partial x^\tau} + \Gamma_{\tau\lambda}^\mu \left[A^\lambda{}_{;\sigma} \right] - \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda \left[A^\mu{}_{;\lambda} \right] \end{aligned} \quad (9.2.12)$$

第二階段的結果是

$$\begin{aligned} A^\mu{}_{;\sigma;\tau} &= \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^\tau} (\Gamma_{\sigma\lambda}^\mu A^\lambda) \\ &\quad + \Gamma_{\tau\lambda}^\mu \left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda A^\rho \right) - \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu A^\rho \right) \end{aligned} \quad (9.2.13)$$

如果改變協變微分的順序，結果就不一樣。兩種順序的差別是

$$A^\mu_{;\sigma\tau} - A^\mu_{;\tau\sigma} = \left[\Gamma^\mu_{\sigma\rho,\tau} - \Gamma^\mu_{\tau\rho,\sigma} + \Gamma^\mu_{\tau\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\tau} \right] A^\rho \quad (9.2.14)$$

既然(9.2.14)式的左側是張量，所以右側乘上 A^ρ 的因子（方括號裡的量）也是張量。它正好是曲率張量，所以

$$A^\mu_{;\sigma\tau} - A^\mu_{;\tau\sigma} = R^\mu{}_{\rho\sigma\tau} A^\rho \quad (9.2.15)$$

9.3 向量的平移

曲率張量和二次協變微分有關這件事實給了我們線索去了解曲率的幾何圖像。兩個協變微分的不可交換性代表了以下操作的極限情形：首先將向量沿 σ 軸平移然後沿 τ 軸平移，減去先沿 τ 軸平移再沿 σ 軸平移後的向量。如果座標是平的，對於固定向量來說，兩種平移的結果沒有區別。如果空間是彎曲的，兩種平移之後就會得到不一樣的向量。我們如要得到物理上有意義的敘述，這些考慮就非常重要，因為我們並沒有物理方法來定義「真正固定」的向量場，除了說這樣的向量場的分量在切空間的微分為零。

我們可以用球幾何示範當我們在考量向量如何保持與自己平行地在表面上移動時曲率究竟如何出現：想像攜帶一小向量從北極到赤道，然後沿赤道走 θ 角度，最後回到北極（見圖 9.1）。在過程中，向量要保持平行，也就是永遠指向南方。當我們回到北極時，會發現我們的向量轉了 θ 角度。球表面的曲率 K 可以用向量在繞了無窮小的一圈之後，所旋轉的角度來定義。例如，

$$\delta\theta = (\text{所圍的面積}) \cdot K \quad (9.3.1)$$

對於圓球面上的三角形而言，這個角度正是三個角的角度和減去 180 度。圓球面的趨率 K 正是 $1/R^2$ 。

第九講

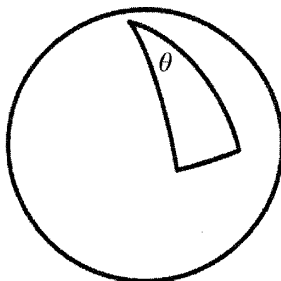


圖 9.1

多維表面的廣義曲率定義也可以用向量在保持平行地繞了一圈之後的變化來定義。假如路徑位於某特定平面，路徑的取向（orientation）取決於兩座標軸，所以曲率會有四階張量的性質。在三維空間裡，我們可以用以下的方式設定一個圓球面：從某一點沿最短距離路徑〔極端線，（geodesic）〕方向（徑向）往外走，距離是某一給定的距離。沿著不同方向的曲率分量會對應到這些圓球面的大圓長度與 2π 的差距。

我們利用將空間嵌入更高維的空間裡的這種做法來「看」曲率，但是對於度規張量的每一個獨立分量而言，這麼做需要額外的一個維度。對二維空間來說，度規張量有三個獨立分量，所以三個維度就夠了。三維空間的度規張量有六個獨立分量，四維空間的度規張量有十個獨立的分量。

用繞一圈的向量的變化來定義曲率比用圓周長來定義曲率有更廣的適用範圍。用圓周長來定義曲率顯現不出所有曲率的特性。

這個方法與二次協變微分的關係很容易算出來，只要我們考慮讓向量保持平行地連續位移。當我們依圖 9.2 的路徑繞一圈，向量的改變是

$$\delta^2 A^\mu = R^\mu{}_{\nu\sigma\tau} A^\nu \Delta_1 x^\sigma \Delta_2 x^\tau \quad (9.3.2)$$

既然曲率張量對於指標 (σ, τ) 而言是反對稱的張量，乘積 $\Delta_1 x^\sigma \Delta_2 x^\tau$ 可以用 $1/2(\Delta_1 x^\sigma \Delta_2 x^\tau - \Delta_1 x^\tau \Delta_2 x^\sigma)$ ，這是平行四邊形面積的一半。張量指標的意義並不難用語言描述：如果將向量在 $(\sigma\tau)$ 平面上繞一圈，向量的 μ 分量所改變的大小與 $R^\mu{}_{\nu\sigma\tau} A^\nu$ （對於指標 ν 要累加起來）以及那一圈所圍的面積成正比。

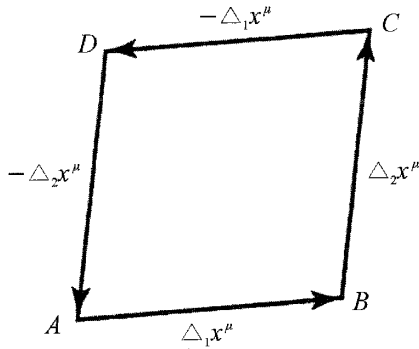


圖 9.2

我們談了很多關於「向量保持平行地移動」這回事，但是一直沒有將其數學定義講清楚。直觀地說，它的意思是儘可能地讓箭頭的尖端與底端沿著直線（即最短距離路徑，極端線）移動相同的距離。要了解這個數學定義，讓我們考慮極端線的方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \quad (9.3.3)$$

很清楚的，沿著極端線的向量 (dx^μ/ds) 代表極端線（也就是「物理上」直線）的切線速度 Δt^μ 。二次微分 $(d^2 x^\mu/ds^2)$ 代表這個速度在時間間隔 Δs 內的變化

$$\Delta s \left(\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right) = \Delta t^\mu = -\Gamma_{\nu\sigma}^\mu t^\nu \Delta x^\sigma \quad (9.3.4)$$

這個變化正比於向量 t^ν 自己以及位移 Δx^σ 。平行位移的定義是很類似的：我們說向量 A'^μ 是 A^μ 平行地移動自己之後的結果，只要以下條件成立

$$A'^\mu = A^\mu + \delta A^\mu$$

其中

第九講

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\sigma\nu}^\mu A^\sigma \Delta x^\nu \quad (9.3.5)$$

我們很容易證明如果沿封閉路徑平行位移一組向量一圈，這組向量之間的關係不會改變。所以這組向量所定義出來的全空間在繞了一圈之後，至多只會轉動；位移所產生的全部後果就是這樣而已。證明的方法是證明所有的不變純量

$$B^\mu A^\nu g_{\mu\nu} \quad (9.3.6)$$

繞了一圈之後仍維持不變。這意味著向量的長度、向量之間的夾角保持不變。唯一的改變是全空間的剛性轉動（rigid rotation）。

有些空間的拓撲性質可能是局部曲率（local curvature）所掌握不了的。例如我們已經推導出向量的長度、向量之間的夾角在空間平行位移之下保持不變。但是我們不能保證在繞一大圈之後，除了剛性轉動之外，不會有反轉（reflection）。一個這種反轉的二維例子（不可定向曲面，non-orientable surface）是莫畢爾斯帶（Möbius strip）（見圖 9.3）。如果取兩個向量，一個平行、另一個垂直莫畢爾斯帶的中心線，然後從圖 9.3 垂直點線的左邊出發。在繞了一圈之後，兩個向量並沒有回歸原先的情形，而是反轉過來（不是轉動某個角度），原因是二維曲面「扭了一下」。

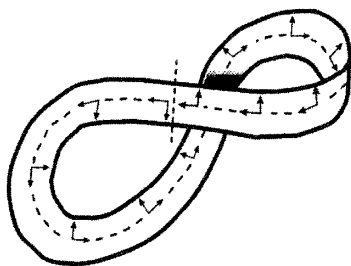


圖 9.3

既然定義了平行位移向量的概念，我們可以用圖 9.2 中 ABCD 路徑把曲率張量真正的公式算出來。向量在每一次無窮小位移後的變化取決於

克氏符號 (Christoffel symbol) Γ 。儘管位移 AB 與位移 CD 是彼此的相反，但是向量沿著 AB 與沿著 CD 的變化並不相同。所以向量在繞一圈後，不會回到原來的方向。我們可以了解克氏符號的梯度如何產生作用。在計算之後，我們得到(9.2.14)式。

我們可以證明曲率張量滿足畢安其恆等式 (Bianchi identity)：

$$R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta;\gamma} + R^{\mu}{}_{\sigma\beta\gamma;\alpha} + R^{\mu}{}_{\sigma\gamma\alpha;\beta} = 0 \quad (9.3.7)$$

我無法隨意地就知道畢安其恆等式的幾何意義。電動力學中有一個熟悉的方程式，我們可以將其寫成類似畢安其恆等式的樣子，除了方程式的數目不一樣。用向量位勢 A_{μ} 表示，電磁場張量的定義是

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad (9.3.8)$$

換句話說， $F_{\mu\nu}$ 是某個向量的旋度 (curl)。但是「 $F_{\mu\nu}$ 是旋度」這個 $F_{\mu\nu}$ 的特性也可以用以下的等式來說明

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0 \quad (9.3.9)$$

上式的形式和畢安其恆等式類似。旋度的特性可以透過斯托克斯定理 (Stokes' Theorem) 連到一個路徑積分

$$\oint_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int (\text{curl } \vec{G}) \cdot d\vec{S} \quad (9.3.10)$$

上式的第二個積分是一個面積分，所積分的區域是路徑 Γ 所圍的區域。

以上討論在重力情況的類比可能是這樣子的：路徑積分代表向量沿一封閉路徑平行位移後的變化。總變化可能和被路徑 Γ 所圍的任意二維 (超) 曲面上的積分有關。如要尋找這樣關係的證明，或許可以從斯托克斯定理的證明找到靈感。在斯托克斯定理的證明裡，我們將曲面分割成很

第九講

多格狀無窮小的區域（見圖 9.4）。可以證明每一個小格狀區域的貢獻加起來就等於路徑積分。如果把這個情況推廣到更高的維度，我們或許會更加了解畢安其恆等式在描述空間曲率性質所扮演的角色。

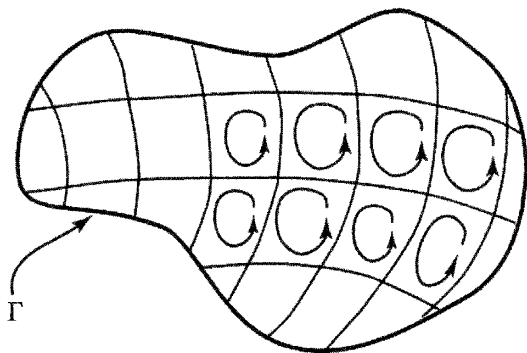


圖 9.4

9.4 曲率與物質的關聯

我們已經看到重力場的效應如何在幾何詮釋中以曲率張量 $R^\mu_{\nu\sigma\tau}$ 來描述。剩下的任務就是把曲率張量和重力源（即物質與能量），連繫起來。我們首先要做的是縮約（contract）曲率張量的第一個指標與第三個指標以便得到瑞奇張量（Ricci tensor）。

$$R_{\nu\sigma} = R^\mu_{\nu\sigma\mu} \quad (9.4.1)$$

如果要縮約曲率張量一次，這是唯一的方式。下一個暗示來自廣義的能量與動量守恆定律。這定律說縮約的協變微分一定為零，亦即應力—能量張量的協變散度（covariant divergence）為零。

我們得要找尋一種與瑞奇張量有關的量，它的特色是其協變散度必須恆等於零。答案來自畢安其恆等式（(9.3.7)式）縮約兩次。縮約指標 $(\mu\beta)$ 會導致一個牽涉到瑞奇張量的式子

$$R_{\sigma\alpha;\gamma} - R_{\sigma\gamma;\alpha} + R^{\mu}{}_{\sigma\gamma\alpha;\mu} = 0 \quad (9.4.2)$$

現在再縮約指標 (σ, α) 就會得到

$$R_{;\gamma} - R^{\sigma}{}_{\gamma;\sigma} - R^{\mu}{}_{\gamma;\mu} = 0 \quad (9.4.3)$$

所以協變散度等於零的張量是

$$\left(R^{\mu}{}_{\gamma} - \frac{1}{2} g^{\mu}{}_{\gamma} R \right)_{;\mu} = 0 \quad (9.4.4)$$

愛因斯坦猜測這個張量正好等於應力—能量張量。如果要以愛因斯坦的方式來寫方程式，我們只要升高一個指標以得到兩個協變指標：

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \lambda^2 T^{\mu\nu} \quad (9.4.5)$$

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

方程式(9.4.5)正是完整的愛因斯坦重力定律；是我們一切工作的起點。張量 $G^{\mu\nu}$ 常被稱為愛因斯坦張量。

在我們把應力—能量張量與曲率張量聯繫起來以後，一個有趣的問題出現了。我們的直覺是如果空間處處沒有物質也沒有應力，則幾何會是平坦的幾何，而時空的度規就是狹義相對論裡的閔考夫斯基度規 (Minkowski metric)。但是我們其實可以找到(9.4.5)式的解，使得

$$\text{處處 } T_{\mu\nu} = 0, \text{ 但是 } R^{\sigma}{}_{\rho\sigma\nu} \neq 0 \quad (9.4.6)$$

最有意思的結果是 A. Taub 的解—因為它是不隨時間而變 (time-independent) 的解。這個問題可能還有其他的解。所以我們要問：如果沒有重力源，還可能有重力嗎？

第九講

答案可能和電動力學裡類似問題的答案相似。如果我們不禁止會隨時間而變 (time-dependent) 的解，電動力學方程式就允許無場源的場 (行進波, travelling wave) 存在。但是我們還是可以假設所有觀測到的輻射的確來自帶電荷的場源，我們這麼做沒有碰上任何實際的困難。我們可以建構「靜場 (static field)」 (不隨時間而變的場)，例如以下的位勢：

$$\begin{aligned}\phi &= x \\ \phi &= x^2 + y^2 - 2z^2\end{aligned}\tag{9.4.7}$$

這個位勢的散度為零，所以沒有場源。然而通常的解釋是產生這樣的場的電荷源位於某個區域之外，而(9.4.7)式只是在區域之內成立。如果我們擴大這個讓(9.4.7)式成立的區域，我們就需要更多的區域外電荷。

我沒有仔細檢查過 A. Taub 的解，不過我懷疑他也會碰到類似的情形。如果要解釋沒有物質情況下的曲率，我們必須先考慮在——（沒有物質的）小區域內有明確物理詮釋的解，然後讓這區域趨近無窮大。我們要付的代價就是暫且不去解釋（區域）「外面」所需要的那些不斷增加的物質。

10.1 重力的場方程式

我們已經發現一個張量，稱為曲率張量，我們用向量在空間中移動時的變化情形來定義它。既然它是張量，我們可以用它來產生可用於協變方程式（covariant equation）的一些量。但是僅僅寫下協變方程式並不是物理，我們還要指出方程式與真實物質世界的關聯。愛因斯坦所做的只不過是猜出這個關聯是什麼。我們無法從更基本的原理來推導這個關聯。每個可能的猜測都有其特質，所以後來的研究者可能假設某些條件好讓我們只有一種選擇，但是那麼做只是欺騙而已。

我們知道重力會與能量密度耦合，這或許是可以幫助我們的具體暗示。因為能量密度在相對論裡是一個二階張量的（44）分量，所以方程式需要一個二階張量。曲率張量是四階張量，所以我們縮約一次得到瑞奇張量。愛因斯坦原先的第一次猜測是應力—能量張量就等於瑞奇張量： $\lambda^2 T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ 。但是還有另一種選擇—我們可以加入一項與純量曲率（縮約的瑞奇張量）成比例的張量。這正是愛因斯坦的選擇：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \lambda^2 T_{\mu\nu} \quad (10.1.1)$$

這個選擇比較好是有理由的：如果我們取(10.1.1)式的協變散度，得到的答案是零。這表示能量守恆定律僅是方程式(10.1.1)的形式的後果而已。如果我們讓應力—能量張量只等於瑞奇張量，則能量守恆定律就是額外的

假設，這個條件會帶來更多的資訊，我們就受到更多的限制。度規張量就本身而言並不是唯一的一它們會隨座標而變。我們有自由度可以選擇四個函數，也就是描述廣義座標變換的四個函數（這四個函數是以舊座標表示新座標的函數）。既然能量守恆是理論中的一個恆等式，這四個函數是真的不受限制的函數。

愛因斯坦的選擇有多符合自然呢？我們如何得到 $T^{\mu\nu}$ ？方程式以及曲率的意義為何？要回答這些問題，我們得先玩弄一下這些方程式。首先，我們要試著了解方程式與其他物理與變分原理的關係。

如要寫下滿足相對論要求的作用量原理，我們需要一個本身是純量不變量（scalar invariant）的積分。我們選擇重力場的作用量為

$$S_g = -\frac{1}{2\lambda^2} \int d^4x R \sqrt{-g} \quad (10.1.2)$$

在上式（以下也是如此）我們將把 $dx dy dz dt$ 記為 d^4x 。作用量 S_g 是一個純量因為 R 是純量而且 $\sqrt{-g} d^4x$ 也是一個純量。我們可以證明 $\sqrt{-g} d^4x$ 是一個純量：因為原時（proper time）是一純量

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (10.1.3)$$

既然 $g_{\mu\nu}$ 是對稱張量，我們永遠可以將它旋轉成對角張量，也就是

$$(ds)^2 = D(dt)^2 - C(dz)^2 - B(dy)^2 - A(dx)^2 \quad (10.1.4)$$

從上式，我們看出體積元素 d^4x 不是不變量；正確的體積元素不變量是

$$\sqrt{ABCD} dx' dy' dz' dt' = \sqrt{-g} d^4x' \quad (10.1.5)$$

其中的 $g' = \text{Det } g'_{\mu\nu}$ 。在正交旋轉之下， $d^4x = d^4x'$ ， $\text{Det } g_{\mu\nu}$ 也等於 $\text{Det } g'_{\mu\nu}$ 。所以體積元素不變量的一般表現式是

第十講

$$\sqrt{-g}d^4x \quad (10.1.6)$$

$\sqrt{-g}$ 是純量密度。這表示它在座標變換之下要乘上變換的亞可比行列式 (Jacobian)

$$\sqrt{-g'} = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\nu}} \right| \sqrt{-g} \quad (10.1.7)$$

當我們把 S_g 對 $g_{\mu\nu}$ 取變分時，曲率張量就出現了：

$$\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\lambda^2} \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \quad (10.1.8)$$

正因為如此，我們可以用 R 的積分做為完整理論中重力部分的作用量。

讓我指出一點：因為這個張量是從變分原理得來的，它的協變散度一定是零（我相信是 Eddington 首先指出這一點）。我們已經看到來自另一個方向的聯繫——假如我們從一個散度為零的張量出發，我們就能推導一個變分原理。我們的證明並不嚴謹；我們不在乎嚴謹，因為重要的是事實，而不是證明。沒有證明，物理還是可以發展，但是沒有事實我們走不下去。證明很有用因為它們是很好的練習；如果事實是正確的，則證明只不過是正確的玩弄代數而已。

我們要證明如果泛函

$$S_g = \int d^4x \Sigma [g_{\mu\nu}] \quad (10.1.8')$$

在座標變換之下是不變量，則 S_g 對 $g_{\mu\nu}$ 的變分的協變散度恆等於零。在無窮小的座標變換之下，新座標 (x'^{μ}) 與舊座標 (x^{μ}) 的關係是

$$x^{\mu} = x'^{\mu} + h^{\mu}(x') \quad (10.1.9)$$

而 $g_{\mu\nu}$ 的改變是

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x') + h^{\alpha}_{, \nu} g_{\mu\alpha}(x') + h^{\alpha}_{, \mu} g_{\nu\alpha}(x') + h^{\alpha} g_{\mu\nu, \alpha}(x') \quad (10.1.10)$$

以新座標來表示，（在座標變換之下）不變的作用量是（我們把新座標的那一撇去掉）

$$\begin{aligned} S_g &= \int d^4x \Sigma[g'_{\mu\nu}] \\ &= \int d^4x \Sigma[g_{\mu\nu}] + \int d^4x \frac{\delta \Sigma}{\delta g_{\mu\nu}} (h^{\alpha}_{, \nu} g_{\mu\alpha} + h^{\alpha}_{, \mu} g_{\nu\alpha} + h^{\alpha} g_{\mu\nu, \alpha}) \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

當我們對上式的第二項做部分積分（integration by parts），函數 Σ 的泛函微分就出現在式子中。我們將它設為零，因為對於任何的 h^{α} 來說作用量的變化為零（這是 Σ 的性質）。

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[\frac{\partial \Sigma}{\delta g_{\mu\nu}} g^{\nu\alpha} \right] - \frac{1}{2} \frac{\delta \Sigma}{\delta g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \quad (10.1.12)$$

把 $2\lambda^2 S_g$ 對於 $G^{\mu\nu}$ 的變分記做 $g_{\mu\nu}$ 的：

$$G^{\mu\nu} = 2\lambda^2 \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (10.1.13)$$

$G^{\mu\nu}$ 是二階的協變張量密度。方程式(10.1.12)以 $G^{\mu\nu}$ 來寫就成為

$$(g_{\alpha\mu} G^{\mu\nu})_{, \nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \alpha} G^{\mu\nu} = 0 \quad (10.1.14)$$

這個式子就等價於 $G^{\mu\nu}$ 的協變散度為零：

$$G^{\mu\nu}_{; \nu} = 0 \quad (10.1.15)$$

第十講

如想證明牽涉到協變散度的恆等式，我們整理出以下的一些公式，將來很有用。首先，我們計算縮約的克氏符號（Christoffel symbol） Γ 。從其定義可知

$$\Gamma_{\epsilon\mu}^{\mu} = g^{\mu\sigma} [\mu\epsilon, \sigma] = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} [g_{\sigma\mu, \epsilon} + g_{\sigma\epsilon, \mu} - g_{\mu\epsilon, \sigma}] \quad (10.1.16)$$

第二項與第三項彼此相抵銷，因為 $g_{\mu\nu}$ 是對稱張量。剩下的項是 $(g_{\mu\nu})$ 反矩陣 $g^{\mu\nu}$ 的乘上 $g_{\mu\nu}$ 的梯度（gradient）。從一個著名的行列式定理可知矩陣 $g_{\mu\nu}$ 的共軛子矩陣（conjugate minor） $M^{\mu\nu}$ 與反矩陣 $g^{\mu\nu}$ 的關係是

$$g^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} / g \quad (10.1.17)$$

所以

$$g_{, \lambda} = g_{\mu\nu, \lambda} M^{\mu\nu} = g_{\mu\nu, \lambda} g^{\mu\nu} g \quad (10.1.18)$$

因此

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu, \lambda} = [\log(-g)]_{, \lambda}, \quad (10.1.19)$$

而縮約的克氏符號是

$$\Gamma_{\epsilon\mu}^{\mu} = [\log \sqrt{-g}]_{, \epsilon} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g})_{, \epsilon} \quad (10.1.20)$$

其他與協變散度有關的有用公式如下：對於純量函數來說，協變梯度和普通梯度一樣

$$\phi_{; \nu} = \phi_{, \nu} \quad (10.1.21)$$

對於反變 (contravariant) 向量而言，協變散度是

$$A^{\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^{\nu})_{,\nu} \quad (10.1.22)$$

所以協變旋度和普通旋度一樣

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad (10.1.23)$$

對於二階張量，則答案取決於張量是對稱或反對稱張量；對於反對稱張量

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu}, \text{ 如果 } F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (10.1.24a)$$

對於對稱張量，

$$T^{\nu}{}_{\mu;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (T^{\nu}{}_{\mu} \sqrt{-g})_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} T^{\alpha\beta}, \text{ 如果 } T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \quad (10.1.24b)$$

我們可以用這些公式很簡單地推導出(10.1.14)和(10.1.15)兩式是等價的。所以我們看到從作用量的不變性可以建構出一個張量密度，這密度的協變散度自動為零。既然度規張量協變微分為零，協變微分 $(\sqrt{-g})_{;\lambda}$ 也為零。（請注意 $(\sqrt{-g})_{;\lambda}$ 不等於普通微分 $(\sqrt{-g})_{,\lambda}$ ，因為 $\sqrt{-g}$ 是純量密度而不是純量。）對應到張量密度 $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ 的張量 $G^{\mu\nu}$ ，其協變散度也為零

$$G^{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\mu\nu} / \sqrt{-g}, \quad G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (10.1.25)$$

談到這裡，我們想澄清一點有時會令人困惑的小事。在第六講，我們使用泛函方程式(6.2.3)，它和(10.1.12)有相同的形式。這些方程式的解其實是張量**密度**，而不是張量。應力—能量張量密度 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 滿足以下的方程式

第十講

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T^{\alpha\beta} \quad (10.1.26)$$

其中

$$T^{\mu\nu} = \sqrt{-g} T^{\mu\nu}$$

但是應力—能量張量 $T^{\mu\nu}$ 滿足以下的方程式：

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2g} g_{,\alpha} T^{\mu\alpha} \quad (10.1.27)$$

10.2 重力場中古典粒子的作用量

我們以下討論如何寫下一般性的物理定律，它不僅要描述重力場還要把物質包括在內。我們假設它可以從最小作用量原理推導出來；這原理的數學意義是作用量的變分為零。

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}[g_{\mu\nu}, A_{\mu}, \dots] = 0 \quad (10.2.1)$$

拉格朗日函數密度 (Lagrangian density) \mathcal{L} 包含了各式各樣的場，例如重力場 $g_{\mu\nu}$ 、電磁場 A_{μ} 、以及（如果物質是純量的話）純量物質場 ϕ 。當我們將作用量對於這些場取變分時，我們會得到這些場的傳播方程式。我們已經寫下作用量其中一部分（重力場部份），剩下的部分我們記為 S_m ，它取決於物質場 ϕ 與電磁場 A_{μ} ，以及其他我們已知所有的場。在我們將作用量

$$S = S_g + S_m = -\frac{1}{2\lambda^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m \quad (10.2.2)$$

對於 $g_{\mu\nu}$ 取變分之後，我們得到

$$\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\lambda^2} \sqrt{-g} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] = -\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (10.2.3)$$

如果應力—能量張量 $T^{\mu\nu}$ 是重力場源，則應力—能量張量密度 $T^{\mu\nu}$ 必須是 S_m 的變分微分

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (10.2.4)$$

現在我們需要一些 $T^{\mu\nu}$ 的例子。如果我們無法利用一些其他的物理原理來算出 $T^{\mu\nu}$ ，我們就沒有重力理論，因為我們不知道重力場和其他物體的關係。

我們發現有一些相容性 (consistency) 條件要遵循，它們和電磁學裡的相容條件類似。如果要解出馬克斯威爾方程式，我們需要有電流。它們不能是任意的電流，必須是守恆電流。有意義的守恆場源流來自其他物理問題的解。這些物理問題依循獨立的定律，例如歐姆定律 (Ohm's Law)、虎克定律 (Hooke's Law)、或某系統的薛丁格方程式。如果我們沒有這些其他的定律，電磁學理論就是無用、無意義的東西。

對於重力場來說，事情要更複雜。張量 $T^{\mu\nu}$ 牽涉到物質的運動，所以我們一定要有物質所遵循的定律，包括歐姆定律與虎克定律。但是 $T^{\mu\nu}$ 也牽涉到重力場 $g_{\mu\nu}$ ，這使得問題比電磁學更麻煩。一般而言，我們無法寫下任何自恰的 $T^{\mu\nu}$ (除了真空的 $T^{\mu\nu}$)，除非我們已經完整地解決了複雜的問題。麻煩是任何給定的 $T^{\mu\nu}$ 不會解決這個問題，只有一些度規張量 $g_{\mu\nu}$ 的特殊情況除外。完整的相對論解應該在不受限於特選的座標與曲率。即便是很簡單的問題，我們也不知道如何寫下適當的 $T^{\mu\nu}$ 。我們不知道如何寫下代表旋轉桿子的 $T^{\mu\nu}$ ，所以無法計算到底桿子輻射了多少重力波。我們無法計算地球與月球系統的 $T^{\mu\nu}$ ，因為潮汐力與地球的彈性對重力場有很大的影響。如果我們假設地球是剛體，則方程式就出現矛盾。如果我們假設地球是一個點，方程式就太過於奇異 (singular) 以致於沒有解。然

第十講

而很顯然地，無論方程式是不是可以處理，一球具有某種堅度 (stiffness) 的物質，例如地球，會繞著另一個不同堅度不同質量的物體旋轉。

重力理論在這點上面有些缺失，因為方程式的一端是很漂亮、有幾何意義的；而另一端則非如此——它有不漂亮、也沒幾何意義的虎克定律以及其他控制物質的定律。很多物理學家著迷於方程式美麗的一端而忽略了另一端，因此他們就沒有物理好研究。

我們必須學著猜測作用量 S_m 的形式。一開始，我們可以考慮古典極限。如果我們能寫下正確的古典作用量，通常就可以看出如何推廣這個式子使其在任意座標變換之下不變。一個產生這種廣義公式的方便方法是回到局部的自由落體切座標系統，然後設法放進 $g_{\mu\nu}$ 與 $R^{\mu\nu}$ 的以便讓式子在座標變換之不變。例如，一個不受力的自由粒子有以下的的作用量

$$S_m = -\frac{m_0}{2} \int ds \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz_\mu}{ds} \quad (10.2.5)$$

這個例子可以示範猜測的步驟；這步驟是很有用的。我們寫下作用量在平空間裡的形式，然後變換到曲線座標 (curvilinear coordinate)，並且查看 $g_{\mu\nu}$ 出現在何處。這麼做之後，什麼樣一般的形式會化約到平空間的結果通常就很明顯。如果 $z^\mu(s)$ 是自由落體粒子的軌道，則作用量 S_m 就是

$$S_m = -\frac{m_0}{2} \int d^4x ds \delta^4(x - z(s)) g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds} \quad (10.2.6)$$

應力—能量張量密度 $T^{\mu\nu}$ 是這個 S_m 對於 $g_{\mu\nu}$ 的變分，結果是

$$T^{\mu\nu} = m_0 \int ds \delta^4(x - z(s)) \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds} \quad (10.2.7)$$

這結果與電磁學中的結果非常相似，所以它一點也不奇怪。這個 $T^{\mu\nu}$ 沒有欠缺相容性的麻煩，因為它來自一個不變量。這個 $T^{\mu\nu}$ 滿足協變散度為零的條件。

我們如果從另一個的角度來看運動方程式與無散度應力—能量張量的關係會很有意思。寫下了作用量 S_m 之後，我們基本上宣稱粒子是沿著極端線運動，所導致的應力—能量張量因此沒有散度。我們現在要證明反過來的情形。假設 $T^{\mu\nu}$ 只在時空的某些區域中不為零，那麼我們可以證明那些區域的確就是極端線，條件是我們要假設在很近觀察粒子的時候有等價於球對稱的東西。我們的出發點是 $T^{\mu\nu}$ 的普通散度與 $T^{\mu\nu}$ 本身的關係，然後利用部分積分把體積分變成面積分

$$\int d^4x T_{\mu,\nu}^{\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x g_{\alpha\beta,\mu} T^{\alpha\beta} \quad (10.2.8)$$

如果 $T^{\mu\nu}$ 只在某些區域中有值，則面積分的貢獻為零—除了 $T^{\mu\nu}$ 不為零的那些區域與表面相交之處。如果這些積分表面的時間座標是固定的，這些貢獻對應到粒子「之前」與「之後」的動量。把這個結果轉換成微分形式，最後會得到運動的軌跡遵循極端線方程式：

$$\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dz^\alpha}{ds} \frac{dz^\beta}{ds} = 0 \quad (10.2.9)$$

這個推導有時會導致以下的敘述：愛因斯坦方程式同時決定了物質的運動與重力場。這是個誤導的敘述，而且沒有第一眼看起來那麼了不起。請回想如果我們有一個單獨的自由粒子，遠離其他任何東西，那麼能量與動量守恆定律就完全決定了它的運動。在重力場裡，一個自由落下的粒子就等於一個自由粒子，所以能量守恆就再度足以完全決定粒子的運動。但是一般的物理狀況並不這麼單純。當系統所包含的東西多過重力與一個粒子時，能量與動量守恆定律就不足以決定運動方程式。在電動力學中，電荷守恆在任何馬克斯威爾方程式的解裡都成立，所以我們可以說電荷守恆是方程式的後果。但是光這樣不足以建構電荷的運動方程式、它們所產生的場以及它們施加於彼此的力。同樣的，能量與動量守恆在重力理論中成立，但是這不足以決定行星與月球的運動，因為它們不是點粒子。

我們需要能量守恆之外的定律來闡明物體（如行星與月球）在重力場中的行為。

10.3 物質場在重力場中的作用量

現在我們預備和量子論的聯繫。如果描述純量粒子的是純量場 ϕ ，那麼在平空間座標中適合的作用量是

$$S_m = \frac{1}{2} \int d^4x (\phi_{,\nu} \phi^{,\nu} - m^2 \phi^2) \quad (10.3.1)$$

很容易將上式推廣至曲線座標；我們猜作用量會是

$$S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2) \quad (10.3.2)$$

這個形式很明顯在任意座標變換之下不變，這是必須滿足的條件之一，而且它在平空間化約到預期的結果。然而我們還可以寫下其他也同樣是不變的項，它們也是場 ϕ 的平方項，也牽涉到曲率張量。這些項在平空間的情況都趨於零。我們可以想像作用量還會包括，例如，以下正比於 α 與 β 的項

$$-\alpha \int d^4x \sqrt{-g} R \phi^2 + \beta \int d^4x \sqrt{-g} (R^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) \quad (10.3.3)$$

我們看到所寫下的作用量並非獨一無二的。我們所寫下的第一項(10.3.2)必須在那裡，因為它是唯一能化約到平空間結果的項。但是我們沒有潮汐力或其他的實驗證據可以用來做為判準以決定是否應該包括或排除類似(10.3.3)的項。物理學家唯一能做的是選擇「簡單」的項，拋棄「複雜」的項，然後看看這樣會得到什麼理論。從某種角度看，或許微分比起單純的場是更複雜的東西，所以 β 項比較複雜，因為它牽涉到四次微分—兩次在 ϕ 場，兩次在 $R^{\mu\nu}$ 上頭。而 α 項只有兩次微分，全都在 $g_{\mu\nu}$ 場上面。不

過我們很難對「複雜」下一個明確的定義；我們永遠可以做部分積分讓微分從一地方消失，而出現在另一地方。從某個出發點看起來簡單的東西，從別の出發點看就未必如此。如果我們從薛丁格方程式出發，則最簡單的作用量沒有 α 項 ($\alpha = 0$)。但是如果我們用路徑積分 (path integral) 來看量子力學，則最簡單的作用量似乎有 α 項，而且 $\alpha = 1/6$ 。每種 α 的選擇從各自的觀點都是最簡單的選擇。我不知道任何令人滿意的方法可以用來決定 α ，我覺得純量場的作用量是曖昧不明確的*。

(10.3.3)式中類似 β 項的意義牽涉到一個粒子是否能在一個夠大的區域中感受到重力場，以致於可以偵測出局部曲率。如果粒子有一個結構，剛好是無窮小，則它無法感受到曲率。但是如果它在運動時，會以所在位置為中心螺旋狀似的前進，則牽涉到局部曲率某一項就很可能存在。

我們舉個例子示範不同的出發點如何單純地導致不同的答案。我們考慮電動力學中的一個狀況。在電動力學中，最小電磁耦合原理導致以下拉格朗日函數中的替換

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right) \quad (10.3.4)$$

現在假設在做上面的替換之前，我們把拉格朗日函數積分寫成

$$S = \int dV \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi - \int dV \bar{\psi} m \psi + e \int dV \bar{\psi} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi \quad (10.3.5)$$

最後一項並不會出現在一般的形式中，因為它恆等於零。但是正因為它恆等於零，所以沒有什麼規矩不能把它留在作用量中。然而如果我們把(10.3.4)用到(10.3.5)上頭以便得到電磁現象，則最後的拉格朗日函數會不一樣，它多了一項

$$e \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} \quad (10.3.6)$$

* 見[Klei 89]裡面有關於這方面問題最新的討論。

第十講

其中

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

這一項是異常磁矩 (anomalous moment) 項，發現者是 Pauli (Wentzel 是第一個告訴我這件事的人)。

自旋 1 粒子的電動力學也因為異常四極矩而變得複雜，我們沒有明顯的簡單拉格朗日函數可用。因此理論性論文必須提出各式理論中不同的計算，這些理論具有不一樣的異常磁矩。

在我們的重力論裡，情形很類似，就好像粒子帶有異常的（也就是來自平常物質分布之外的）轉動慣量。

在電動力學裡，這種不明確的情形不會出現在純量（自旋 0）粒子的描述上；它們首先出現在自旋 1/2 粒子的討論中。但是在重力理論裡，困難已經出現在最簡單的（也就是純量粒子）情況中。這些問題沒有解決的辦法，我們必須承認存在著很多可能（不同 α 值）的理論。

粒子在重力場中的運動方程式來自作用量對於 ϕ 場的變分。取決於我們如何轉換至量子力學，不同的作用量都可導致最簡單的結果。所以我們不能論證某個理論比較簡單，除非它在很多不同的問題上都同時有簡單的答案。不同的問題需要不同的 α 值以簡化或消除無窮大。如果說將 α 設定為零會比較簡單，因為只在於某些計算中的代數比較單純；但物理上並沒有比較簡單，因為所有的 α 值都會在各式的問題中導致不同程度的麻煩。

現在我們開始尋找物質場 ϕ 的運動方程式。從(10.3.2)出發，我們可以用以下反矩陣與行列式的平方根的變分公式

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \quad \delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \quad (10.3.7)$$

來得到 $T^{\mu\nu}$ 的形式：

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \phi^{;\mu} \phi^{;\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\phi_{;\alpha} \phi^{;\alpha} - m^2 \phi^2) - \alpha \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \phi^2 - 4\alpha \phi \phi_{;\beta} \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g_{\mu\nu;\beta}} \quad (10.3.8)$$

下一步，我們對場 ϕ 做變分，並令變分的結果為零，以得到類似 Klein-Gordon 方程式的東西

$$(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{;\nu})_{;\mu} + \sqrt{-g} m^2 \phi + 2\alpha R \sqrt{-g} \phi = 0 \quad (10.3.9)$$

將上式除以純量密度 $\sqrt{-g}$ ，就可得到方程式

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{;\nu})_{;\mu} + m^2 \phi + 2\alpha R \phi = 0 \quad (10.3.10)$$

從(10.1.20)式與(10.1.21)式，我們看到(10.3.10)式其實就是

$$\phi_{;\mu}^{;\mu} + (m^2 + 2\alpha R)\phi = 0 \quad (10.3.11)$$

考慮 $\alpha = 0$ 的情形就可以看出和 Klein-Gordon 方程式的關係——普通的達朗白算符 (d'Alembertian) 被「協變達朗白算符」所取代。

既然我們已經精確地指明物質如何運動以及場源張量為何，前面的步驟就得到了明確的理論。很容易檢驗上面 $T^{\mu\nu}$ 的協變散度 $T^{\mu\nu}_{;\nu}$ 為零——技巧是盡量用運動方程式。所以一切都是相容的；所有適當的張量的散度為零，我們就可以從這個理論出發。如果要得到更完整的理論，我們就在作用量中添加代表所有其他已知場的項。首先寫下（就我們所知的）平空間的作用量，從某種不變性的判準選擇最簡單的形式。我們要求作用量應該是不變的，這會導致各種場的協變方程式。這對於我們可以加進什麼場並不構成限制，因為所有已知的物理定律都可以寫成協變的形式。微分定律有這個性質。任何寫成微分方程式的定律很容易轉換成協變形式；我們假

第十講

設切空間中的定律和已知的定律相同，然後旋轉及伸縮座標。最後的方程式牽涉到場的微分以及度規張量至多二次的微分。

一但我們寫下所有的過程，首先以微分形式，然後以協變形式，則可以用我們的理論計算，譬如說，星球裡物質的運動。這些所考慮的過程可以用不透明定律、散射定律等來描述。我們禁止違背能量守恆的定律。例如我們不可以對產生出來的微中子（neutrino）說再見；因為重力位勢，微中子在離開星球時會損失能量，如果我們忽略這些以及它們的能量密度對重力場的影響，就得不到沒有矛盾的理論。所以如果寫下具有「有限平均自由徑（finite mean free path）」的積分擴散（integral diffusion）方程式是不夠的，我們必須用完整的定律（以微分方程式的形式）來理解擴散粒子的運動。

為了讓以後的事情比較容易，我們直接以度規張量來寫下場作用量的被積函數（integrand）。先前的形式看起來比較簡單，因為它們是以某些度規張量的組合寫下的，但是這裡的形式常常更有用。

$$\begin{aligned}
 -R\sqrt{-g} = & \\
 -\frac{\sqrt{-g}}{4} g_{\nu\lambda,\sigma} g_{\mu\rho,\tau} & (g^{\nu\lambda} g^{\sigma\tau} g^{\mu\rho} - g^{\nu\mu} g^{\lambda\rho} g^{\sigma\tau} + 2g^{\nu\mu} g^{\lambda\tau} g^{\sigma\rho} - 2g^{\tau\mu} g^{\rho\sigma} g^{\nu\lambda}) \\
 & + \left[\sqrt{-g} g_{\nu\sigma,\mu} (g^{\sigma\nu} g^{\rho\mu} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) \right]_{,\rho} \quad (10.3.12)
 \end{aligned}$$

最後一項是散度，它的積分是零，所以我們通常忽略它。對於很多問題來說，寫下第一項的積分（記為 H ）做為作用量就足夠了。所以

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\lambda^2} \delta \int d^4x H$$

這裡

$$H = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \right] \quad (10.3.13)$$

我們從愛因斯坦的觀點求得重力論之後，已準備好去建造量子理論。這理論比當我們討論金星人觀點時更完備——我們有完整的拉格朗日函數，包括與物質的交互作用（正確至無窮階）。如果我們只注意僅含有重力與純量物質的宇宙，考慮耦合常數的展式

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu} \quad (10.3.14)$$

就可得到場論。拉格朗日函數中，平方項對應到傳播子（propagator）；牽涉到兩個 ϕ 與一個 h 以及三個 h 與兩個 ϕ 的乘積項對應到圖 10.1 裡的圖。如此我們就由幾何觀點出發，得到計算物質運動量子力學機率振幅的分法。

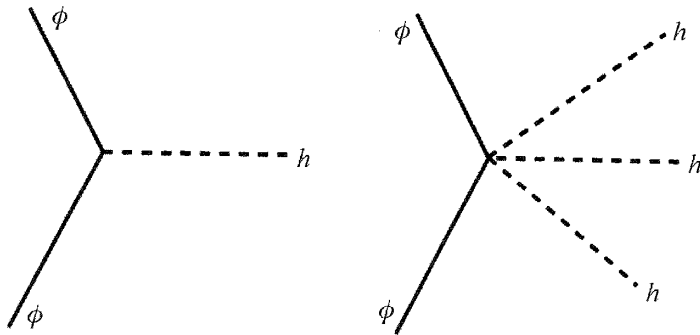


圖 10.1

未來我們將用古典理論討論古典物體的運動，並且考慮宇宙學問題。我們還會用量子論去計算重力波輻射。在我們發現量子力學於什麼情況會帶來麻煩後，我們會解釋關於重力的第三種觀點。

當我們在考慮作用量中可以放進什麼項的時後，我們可能會想為什麼不放進一項 $\int d^4x \sqrt{-g}$ 乘上常數 Λ ，即 $\Lambda \int d^4x \sqrt{-g}$ 。這會是與宇宙體積（假設這是常值）成正比的積分。這樣做所得到的方程式其性質有點像是重力子帶有質量。我們觀測到重力的影響範圍是極大的（極遠距作用力），所以引入這種項沒什麼道理，儘管它可能是沒有矛盾的理論。新的運動方程式為

第十講

$$G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + \lambda^2 T_{\mu\nu} \quad (10.3.15)$$

一般稱常數 Λ 為「宇宙常數」。愛因斯坦想要有個封閉宇宙，所以他為 Λ 設定了一個值，使得宇宙可以有個穩定態的解。他後來稱這是他的「大錯誤」；如果愛因斯坦將 Λ 設為零，他就會下結論宇宙在擴張（或是收縮）。後來哈伯才發現遠處的星系在遠離而宇宙在擴張。自從愛因斯坦的宇宙理論引入 Λ 之後，宇宙學就陷在決定 Λ 的困難中。我同意愛因斯坦的第二次猜測： Λ 最可能的值為零。

11.1 球形星附近的曲率

我們現在開始對一些有物理意義的情況尋找愛因斯坦方程式的真正解。我們發現牛頓重力論無法順利解釋的重力觀測很少，只找到兩個愛因斯坦方程式的解。其中一個是星球附近的重力場〔它應該正確地給出光的偏折與水星軌道的進動（precession）〕。另一個解牽涉到近乎均勻的質量分布，這個解在考慮宇宙模型時有用。

如果假設球對稱，我們期待度規張量所給出的原時間距平方會有以下的形式

$$(ds)^2 = A(dt)^2 + Bdrdt - C(dr)^2 - D((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2)r^2 \quad (11.1.1)$$

符號 A, B, C, D 代表座標 (r, t) 的函數（因為球對稱它們不是座標 (θ, ϕ) 的函數）。這個形式允許物質只有徑向運動的動態解。

我們可以用心地選擇新座標來減低未知函數的數目。例如，如果改變座標 r 的尺度

$$r' = \sqrt{D(r, t)} r \quad (11.1.2)$$

所得到以 r' 與 dr' 為變數來表示的 $(ds)^2$ 其形式和以 r 與 dr 表示的一樣，但是新的 D 函數等於 1 ($D=1$)。因為令 $D=1$ 並沒有降低問題的普遍性（generality），所以 D 是多餘的。

第二個簡化是靠改變時間的尺度。我們讓

$$t' = t'(t, r) \quad (11.1.3)$$

這樣做就引入了一個新函數使得 $dr dt'$ 項的係數為零。這表示我們可以把 B 設為零 ($B = 0$) 但沒有降低問題的普遍性。

從這裡開始，一般的做法是使用新函數 ν 和 λ 而不是函數 A 與 C ； ν 和 λ 的定義是

$$A = e^\nu, \quad C = e^\lambda \quad (11.1.4)$$

[這個慣例起自許瓦茲喜爾德 (Schwarzschild)] 現在度規張量是對角矩陣，指標 (1, 2, 3, 4) 對應到座標 (r, θ, ϕ, t) ，度規張量的分量是

$$g_{44} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (11.1.5)$$

因為度規張量是對角矩陣，反張量 (矩陣) $g^{\mu\nu}$ 的分量很容易知道是

$$g^{44} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -1/r^2, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (11.1.6)$$

我們現在可以開始計算曲率張量的分量。這是很直接但繁雜的計算，因為克氏符號 (Christoffel symbol) 有很多微分，也有很多項要加。

當完成計算後，曲率張量的分量可以用函數 ν 和 λ 以及其對於時間 t 與徑向距離 r 的微分來表示。為了簡化記號，我們用「撇」與「點」表示微分：

$$\nu' = \frac{\partial \nu}{\partial r}, \quad \dot{\nu} = \frac{\partial \nu}{\partial t}, \quad \text{etc} \quad (11.1.7)$$

完整的曲率張量分量如下：

第十一講

$$\begin{aligned}
 R^{42}_{41} &= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} v'' + \frac{1}{4} (v')^2 - \frac{1}{4} \lambda' v' \right) + e^{-\nu} \left(\frac{1}{2} \ddot{\lambda} + \frac{1}{4} (\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{4} \dot{\lambda} \dot{\nu} \right) \\
 R^{42}_{42} &= R^{43}_{43} = -\frac{1}{2r} v' e^{-\lambda} \\
 R^{21}_{21} &= R^{31}_{31} = \frac{1}{2r} \lambda' e^{-\lambda} \\
 R^{32}_{32} &= -\frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1) \\
 R^{42}_{12} &= R^{43}_{13} = -\frac{1}{2r} \dot{\lambda} e^{-\nu}
 \end{aligned} \tag{11.1.8}$$

有些分量透過簡單的指標對換就等於(11.1.8)的分量，而其他的分量為零。

11.2 物質與曲率的關聯

和應力—能量張量有關的張量來自曲率張量的縮約。這些張量組合是

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\nu} R \tag{11.2.1}$$

張量 G^{μ}_{ν} 的分量是 $R^{\mu\nu}_{\sigma\sigma}$ 分量的簡單和。例如，對角元素是

$$\begin{aligned}
 G^4_4 &= R^{12}_{12} + R^{13}_{13} + R^{23}_{23} \\
 G^1_1 &= R^{42}_{42} + R^{43}_{43} + R^{32}_{32}
 \end{aligned} \tag{11.2.2}$$

換句話說，每一項都牽涉到 $R^{\mu\nu}_{\sigma\sigma}$ 的非對角元素的和。對於 G^{μ}_{ν} 的非對角分量，我們也有很簡單的式子。例如，

$$\begin{aligned}
 G^4_1 &= R^{24}_{12} + R^{34}_{13} \\
 G^2_1 &= R^{32}_{13} + R^{42}_{14}
 \end{aligned} \tag{11.2.3}$$

其他項也很容易寫下來。

因為上面式子所牽涉到的和很簡單，這提供了一個以物質分布詮釋曲率的方法。先前我們討論了二維曲面的曲率，利用的方法是圓的面積或圓周長與平空間結果的差距：

$$\text{圓周長} = 2\pi r(1 - \text{係數} \times \text{面積}) \quad (11.2.4)$$

對於三維空間而言，圓周長的缺陷取決於圓究竟是位於那一個平面上，但是我們可以利用半徑 r 的圓球的面積與 $4\pi r^2$ 的差距來定義一個平均曲率。結果如下：

$$\text{面積} = 4\pi r^2 \left(1 + \frac{1}{9} r^2 R \right) \quad (11.2.5)$$

式中的 R 是曲率張量縮約兩次後所得的純量。

我們可以把這想法與重力論聯繫起來——只要我們賦予和 $R^1_2 + R^2_3 + R^3_1$ 一個意義，即這個和等於應力—能量張量的 44 分量。

這個和我們應稱為「垂直於時間軸的三維球的平均曲率 R 」。所以我們可以用語言解釋重力理論如下：考慮一個有給定面積的小三維球，它的實際半徑超過歐氏幾何的結果（ $\sqrt{\text{面積}/4\pi}$ ），所超過的部分和球內部物質的多少成正比（ $r - \sqrt{\text{面積}/4\pi} = G/3c^2 m_{\text{球裡面}}$ ）（大約是每四十億公噸物質造成一費米（fermi）長（等於 10^{-13} 公分）的改變）。

這個解釋直接可以用於 44 分量，因為那正是球裡物質的能量密度。如果要求同樣的結果在任何座標裡（不論其速度）都成立，我們就可以正確地導出曲率張量的其他分量。

11.3 許氏度規，球形星外面的場

張量 G^μ_ν 以函數 ν 和 λ 來表示是

$$G^4_4 = \frac{1}{r} \lambda' e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r(e^{-\lambda} - 1))$$

第十一講

$$G^1_1 = -\frac{1}{r}v'e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2}(e^{-\lambda} - 1)$$

$$G^4_1 = \frac{1}{r}\dot{\lambda}e^{-\lambda}$$

$$G^1_4 = -\frac{1}{r}\dot{\lambda}e^{-\lambda}$$

$$G^2_2 = \frac{e^{-\lambda}}{2r}(\lambda' - \nu') - \frac{e^{-\lambda}}{4}(2\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu') + \frac{e^{-\nu}}{4}(2\ddot{\lambda} + (\dot{\lambda})^2 - \dot{\lambda}\dot{\nu}) \quad (11.3.1)$$

其中只有 G^2_2 的式子比較複雜，但是我們很少用到它，因為重要的是張量 G^μ_ν 的散度為零，所以如果我們知道其他的分量，「零散度」的條件常常可以讓我們避免明白地用上 G^2_2 。現在讀者可以試試以下的練習：

1. 如果半徑為 b 的圓球內沒有物質，而且圓球外的物質分布是球形對稱的，請證明圓球內的空間是平的，也就是 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 。
2. 假設已知半徑為 b 的圓球內各處的應力—能量張量 $T^{\mu\nu}$ ，請證明無論球外的物質分布為何（假設它們是球形對稱的），球內的物理不會受到影響。

球形質量分布外面的解所滿足的方程式是 $T_{\mu\nu} = 0 = G_{\mu\nu}$ ，我們要做的就是將方程式解出來。

我們注意到 G^4_4 只取決於 λ ，既然 G^4_4 等於零，我們就有

$$r(e^{-\lambda} - 1) = \text{常數} = -2m \quad (11.3.2)$$

上式右邊的係數「2」是慣例，這樣的係數會讓常數 m 等於星球的總質量乘上牛頓的重力常數。如果所有質量都包括在半徑 a 之內，而且裡頭沒有奇異點，則常數一定是

$$\int_0^a dr r^2 G^4_4 = 2m \quad (11.3.3)$$

我們知道 λ 不隨時間而變，因為

費曼重力學

$$G^1_4 = 0 = -\frac{1}{r} \dot{\lambda} e^{-\lambda}$$

所以 λ 和時間無關。最後的任務是求出 ν 。我們讓 $G^1_1 = G^4_4$ ，因為兩者都為零。結論是

$$\nu' = -\lambda' \quad (11.3.4)$$

所以 ν 只可能是以下的形式：

$$\nu = -\lambda + f(t) \quad (11.3.5)$$

其中的 f 是時間的任意函數。然而既然函數 ν 出現在度規中 $(dt)^2$ 的係數裡：

$$e^\nu (dt)^2 = e^{-\lambda} e^{f(t)} (dt)^2$$

我們可以利用改變時間座標的尺度來消除 $\exp(f(t))$ 這個因子。度規張量的其他分量不會受到這個改變的影響，因為這只有牽涉到函數 $\lambda(r)$ 。最後的結果是許氏度規（Schwarzschild metric）：

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - 2m/r} - r^2 (\sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2) \quad (11.3.6)$$

雖然我們並沒有刻意設定要尋找靜態解，但很有意思的，這個度規剛好和時間無關。許氏度規的這個（不隨時間而變的）性質來自於球形對稱的假設以及我們考慮的區域中沒有應力密度。

真實的星球如太陽並沒有精準的球形對稱，原因在於旋轉以及赤道隆起，但是不對稱的情況很輕微。如果光從星球發射出來，星球外的能量密度就不是零，這也會造成修正。不過許氏度規和太陽的真實情況相當接近，所以我們能求出水星近日點（perihelion）的進動，答案與觀測值在誤差範圍內相符。

11.4 許氏奇異性

度規張量(11.3.6)在 $r = 2m$ 處是奇異（無窮大）的。如果想知道這是否會導致實值上的麻煩，我們必須了解這是否對應到一個測量到的物理半徑（和我們的座標 r 不同）

$$R = f(r) \quad (11.4.1)$$

我們用另一種方法來考慮度規張量。我們或許會假設具有球形對稱的度規張量的正確描述方式是

$$(ds)^2 = H(R)(dt)^2 - F(R)((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2) \quad (11.4.2)$$

其中的

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

只要利用下面的變換

$$r = R + \frac{m^2}{4R} + m \quad (11.4.3)$$

許氏度規就可以轉換成(11.4.2)的形式

$$(ds)^2 = \frac{(1 - m/2R)^2}{(1 + m/2R)^2} (dt)^2 - (1 + m/2R)^4 ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2) \quad (11.4.4)$$

原時間隔中的奇異性消失了。所以許氏度規中的奇異性起於所選擇的徑向座標 r 。但是(11.4.4)式中 $(dt)^2$ 項的係數在 $R = m/2$ 處為零，我們還是得要探討物理過程在這一地方有何特殊之處。

這些結果並不會導致什麼立即可觀測到的結果。對於太陽的質量而言，發生奇異性的半徑是 1.5 公里，也就是說只有當太陽的質量完全集中

在半徑 1.5 公里的圓球內時，才要擔心可能的奇異性。不過雖然這個狀況不會發生於我們的太陽系，我們還是最好研究這個特殊半徑的意義。

這個半徑的解釋牽涉到發生在太陽附近的物理過程，其速率從遠處的觀測者來看會是怎麼樣。我們先前已經計算出來自較低重力位勢的光，其頻率會變小，也就是說東西看起來會比較紅。半徑 $R = m/2$ 對應到的位勢非常低，以致於光沒有足夠的能量跑離星球，所以沒有任何光會抵達很遠處的觀測者。

我們可以把曲率算出來，這樣可了解在這個半徑的幾何是否會出什麼大毛病。計算的結果是

$$\begin{aligned} R^{12}_{12} &= R^{13}_{13} = -m/r^3 \\ R^{23}_{23} &= 2m/r^3 \\ R^{41}_{41} &= 2m/r^3 \\ R^{42}_{42} &= R^{43}_{43} = -m/r^3 \end{aligned} \tag{11.4.5}$$

我們看到半徑 $R = m/2$ 處空間是平緩的。所以「奇異性」可能只是源自我們所選擇的特定座標。我們曾用蟲子在球表面爬行為例；在那例子中，描述空間的方式在跨越赤道的時候會碰到奇異點。但是實際上那裡的空間和球上任何其他地方一樣平緩。因為曲率正比於 $1/r^3$ ，這個結果太簡單，我們或許可以找到更簡單的方法來推導它。我一直覺得簡單的結果應該用簡單的方法去推導出來。所以我們將用幾何論證來推導 $1/r^3$ 的結果。我們再次需要三維空間（某固定時間的四維時空）中平均曲率的概念。在這個三維子空間中，曲率就類似於應力。對於應力（或角動量）而言，曲率是定義在平面上的東西，我們可以用標定平面的一對指標，或用垂直平面的軸的指標，來標定曲率張量。所以我們就有以下的對應

$$R^{12}_{12} \rightarrow P^3_3, \quad R^{13}_{13} \rightarrow P^2_2, \quad \text{等等} \tag{11.4.6}$$

接下來我們要示範這些「應力」的散度必須為零的條件等價於畢安其恆等式（Bianchi identity）：

第十一講

$$P_{3,3}^3 + P_{1,1}^3 + P_{2,2}^3 = 0 \quad (11.4.7)$$

它的意義是這些「應力」不會導致淨力（net force）。(11.4.7)式裡上指標所指示的平面是我們所考慮曲率的平面。

應力張量的對角和是壓力強度（pressure）。這裡應力張量的對角和是平均曲率，也就是物質密度。我們要求在極座標中零壓力強度的地方在物理上必須是平衡的，這樣就可以得到 $1/r^3$ 的結果。我們必須小心定義應力所作用的面積，因為它們必須是沿著極端線的實際測量面積。我們定義固定半徑 r 的圓弧上的距離為 $\theta_0 r$ ， θ_0 是一很小的角度。 θ_0 如何測量是很明確的，因為我們繞一圈的總角度是 2π 。如果徑向的應力稱為 T ，橫向的應力稱為 S （見圖 11.1），則對體積元素 $r^2 dr \theta (\sin(\theta) d\phi)$ （角度 θ_0 是 $\sin(\theta) d\phi$ ）而言，力不會平衡除非

$$d(Tr^2\theta_0^2) = 2Sr\theta_0^2 dr$$

如果 T 僅取決於 r ，我們就得到以下連接 T 與 R 的方程式

$$\frac{dT}{dr} = \frac{2S}{r} - \frac{2T}{r} \quad (11.4.8)$$

(11.4.8)在一般情況下也成立。我們現在考慮空無一物的情形，那時張量的對角和為零

$$\text{對角和} = T + 2S = 0, \quad T = -2S \quad (11.4.9)$$

微分方程式就成為

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3T}{r} \quad (11.4.10)$$

方程式有一個解是 $T = 1/r^3$ 。

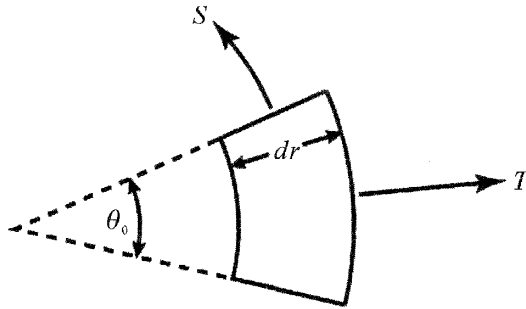


圖 11.1

我們用這方法可以看出畢安其恆等式如何意味著曲率處處正比於 $1/r^3$ 。函數 $e^{-\lambda}$ 與 T 的關係也可以用簡單的類似辦法來得到，結論是 $e^{-\lambda}$ 與 1 的差距和 r 成反比（見(11.4.5)）。

11.5 關於蟲孔這個想法的臆測

我們在前幾節學到了（在足夠小範圍內的）球形質量分布如何製造出幾乎處處正比於 m/r^3 的曲率。對於爬行於曲面的蟲子來說，一個類似的情況就是「漩渦」形狀曲面。想像一個曲面，它是如圖 11.2 所示 xy 平面上的曲線，繞著 z 軸旋轉後所產生的形狀。這樣一個曲面代表在某個時間 ($dt=0$)，某個方位角（如 $\phi=0$ ）的空間。如果曲面方程式是 $z(r)$ ，在某固定角 θ 的弧長來自以下的式子

$$(ds)^2 = (dr)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 (dr)^2 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right] (dr)^2 \quad (11.5.1)$$

我們可以讓 $(dr)^2$ 前的因子等於許氏值

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{1 - 2m/r} \quad (11.5.2)$$

然後解出 $z(r)$ 。我們很容易得到結果：

第十一講

$$z^2(r) = 8m(r - 2m) \quad (11.5.3)$$

換句話說，空間是拋物面形的，而拋物面的「喉嚨」離開原點的距離是 $r = 2m$ 。

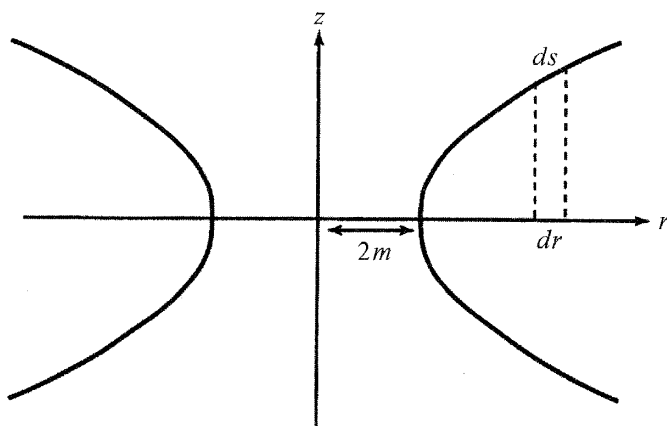


圖 11.2

這個結果給了我們許多很有啟發性的想法。在 $r > 2m$ 的區域，空間的性質正好像是有質量 m 位於原點。但是當我們逼近原點，卻永遠不能到達 $r < 2m$ 的距離，而是進入另一個和我們出發時一樣的空間。所以這就導致以下的想法（主要是 Wheeler 的貢獻）：我們稱為「質量」的東西，其效應僅不過是特殊的空間拓樸而已，並沒有真正的重力源在什麼地方。

我們可以臆測所有帶有質量的粒子一定隨伴著有這樣一個「喉嚨」在半徑等於 $2m$ 之處；而且基本粒子只不過是空間中我們（藉由爬過洞穴）可以穿入另一個空間的區域。惠樂將這些洞穴稱為「蟲孔」。如果粒子帶電，延著表面的電場可能是連續的，從蟲孔的一邊穿進，從另一邊穿出來。所以「雙重」空間可能和「粒子—反粒子對」的存在有關。

目前我們還沒有辦法獲得一個沒矛盾而又定量的基本粒子圖像，例如蟲孔。實驗上也不太可能觀察到任何源自蟲孔的效應。我們還沒找到任何星球其真實半徑約等於其許氏半徑 ($r = 2m$)。如果真的有星球其半徑小於其許氏半徑，我們也不會看得到它，因為光脫離不了星球，所以這樣的

星球還是可能存在。所有已知的基本粒子都有個遠大於其蟲孔直徑的結構。例如中子的許氏半徑 $r = 2m \approx 10^{-33}$ 公分，比已知的中子大小還小了 10^{20} 倍。一個粒子的質量必須是 10^{-5} 公克，其蟲孔直徑才會約等於其康普頓波長 (Compton wavelength) \hbar/mc 。

11.6 蟲孔理論研究的問題

我們可以問各式的問題，這些問題就構成理論探討的基礎，這種理論研究還應該是很有用的。首先，我們可以問，以我們目前關於物質的知識而言，足夠大量的物質可能集中在一個小於許氏半徑的區域內嗎？假設我們一開始有幾乎均勻地分布於很大區域的塵埃，那麼重力崩陷 (gravitational collapse) 就會開始，物質就熱了起來，然後就會有化學反應，接著就有核子反應。當質量凝聚，電子終究會提供一巨大的壓力來抵抗重力崩陷，因為我們不能把它們擠得非常靠近，不相容原理不允許這樣。但是對於質量夠大的星球來說，重力大到足以壓縮電子，而讓核子繼續凝聚。

這個凝聚過程的細節還沒有好好研究。我認為在我們了解蟲孔之前，我們需要先完整理解古典重力論中非常巨大質量的問題。如果質量崩陷進比許氏半徑小的區域是可能的，我們就永遠無法從外面看見它，因為光會越來越紅然後變成紅外光，然後是無線電波，最後成為 D.C.。但是在物理上，我們可以問如果我們是崩陷質量的一部分，那會是什麼狀況？

如果我們從跟隨著崩陷物質的座標來看，我們會如何描述發生的物理過程。物質的狀態方程式牽涉到壓力 p 與物質密度 ρ 。以靜止物質來說，我們有

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p, \quad T^4_4 = \rho \quad (11.6.1)$$

對於一塊移動的物質，這張量看起來會是什麼樣子？用以下所定義的量

$$u = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad w = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \rho_0 = \rho + p \quad (11.6.2)$$

第十一講

我們發現

$$\begin{aligned}
 T^4_4 &= \rho_0 w^2 + p \\
 T^1_1 &= -\rho_0 u^2 - p \\
 T^2_2 &= T^3_3 = -p \\
 T^4_1 &= -\rho_0 uw
 \end{aligned}
 \tag{11.6.3}$$

為了解出塵埃凝聚的動力學問題，我們可以這麼做：首先，假設可以用（半徑與時間的）函數 λ 和 ν 來描述狀況。再來假設物質的狀態可以用密度 ρ 與壓力 p 來描述；我們需要一個狀態方程式來聯繫 ρ 與 p ：

$$p = f(\rho) \tag{11.6.4}$$

我們先假設 ρ 與 p 的關聯是絕熱 (adiabatic) 的，看看結果會是如何。稍後，我們再允許透過光輻射來冷卻以及因為核反應而發熱等等，然後看結果如何。我們所追求的答案是一塊物質的徑向速度 $u(r, t)$ 。

將熱流與不透明性 (opacity) 或其他種種考慮進來之後，我們的問題可能變得非常複雜。但是答案應該出於一組聯立偏微分方程式。我們的希望是這組方程式沒有矛盾，而且彼此的糾結可以解開；然後根據某些步驟把方程式一一解出來。想要有完整的解可能不太容易。但是如果方程式的糾結可以解開，我們希望計算機可以提供這組方程式的數值解。

12.1 宇宙學問題

在上一講中，我們大略的解釋了古典重力論中的一個問題，亦即球形對稱質量分布（這是理想的星球模型）的重力效應問題。第二個我們想要利用古典重力論對付的問題是宇宙論問題（宇宙論就是「宇宙的科學」）。至於重力論的所有其他問題，我們將先用量子的觀點來處理。我們會從量子答案求得古典極限以便得到巨觀物體的古典重力效應。

我們很難對宇宙學下個清楚的定義。一般而言，它在處理一切所能知道關於大尺度的事情，所謂大尺度指的是尺度大到連星系都可以看成是無窮小的東西。宇宙論也可以面對可見物質從何而來的問題，出發點是某個給定的起始條件，例如「一開始，一切都是氫」這樣的狀況。

宇宙學的一個面相是處理物質的所在位置；重要的問題是物質在那裡以及它在那裡做什麼。相關的觀測是在東邊的星系有多少、西邊有多少、它們往什麼方向前進。我們相信星系的運動只受到重力的約束，所以一但我們看到或測量到物質的分佈與速度，預測未來就僅是簡單的物理問題而已。另一類的宇宙學問題出現在大尺度的情況，這時我們看不見細緻的結構。原則上，我們只要知道起始條件，就可預測未來。但是當我們對運動的細節取平均值之後，我們要問宇宙是靜態的或是演化的？是穩定的或是不穩定的？是有限的或是無限的？一個有意思的看法是宇宙有一個類似球面的結構。如果我們在球面上往任何方向前進，則永遠碰不到邊或盡頭，但是曲面還是有範圍或有限的。我們的三維空間可能也是這樣的東

西——一個四維球的三維表面，那麼所見宇宙中星系的分布就會類似於圓球上班點的分布。

事實上，重力論本身提不出答案足以限制球上可能的平均分布，它也不能確認或否認宇宙是有範圍的或是無限的如雙曲拋物面。所以宇宙學的問題永遠和某些基本假設連在一起。檢驗這些假設是否成立的最可靠辦法是從這些假設推論出一些結果，然後與觀測結果比較。

要觀察很遠物質的位置非常困難，即使用最新的技術所得到的結果也是不確定的。我們要記得天空的一大部分是觀察不到的，因為被我們的銀河系所遮蔽——銀河系中塵埃很多以至於我們無法沿著銀河平面方向做觀測。儘管有這些困難與可能的限制，目前的證據顯示宇宙是處處均勻的，星系無規律地分布各處，有些地方多一點，有些地方少一點，但是任何兩個比較大的區域都相當類似。一個二維的類比是一輛車跑過一水坑，把泥巴無規律地飛濺到牆上，我們就坐在一泥巴斑點上往外看所有的其他斑點。

如果比較星系的速度與它們離開我們的距離，我們發現速度分布是很有趣的。讓我們暫且跳開距離測量這個相當困難的問題。天文學家用了各式各樣的方法量出了一些距離，例如假設亮度的統計分布。他們在講述這些結果的時候也願意把測量不準度講清楚；這些不準度會越來越小。同時我們可以藉由頻率的都卜勒頻移測量星系速度。所得到的結果是遠處星系發出的光，其頻率往較低（紅）的頻率移動，而且頻移與星系離我們的距離成正比。

在第一講中，我們討論了一個簡單的模型可以詮釋這些事實。如果宇宙中所有質量是在某時間 T 以前一個爆炸遺留下的後果，我們還假設重力是很弱的，則我們預期以速度 V 遠離中心的碎塊（星系）其離開中心的距離是 $R = VT$ 。無論速度 V 的大小，這個等式都成立。所以對所有星系來說，我們預期 $(R/V) = T$ ，這是一個普適常數。觀察結果意味著 T 是固定（常值）的，其值約是 $(10 - 13) \times 10^9$ 年。誤差並非來自速度的測量，而是來自距離的測量。最遠的物體開我們的速度是 $(v/c) = 0.48$ 。這個「紅移（red shift）」是讓我們對宇宙有些認識的關鍵觀測之一。

第十二講

其他的觀測牽涉到星系的分布。雖然所有天空可見的部分都十分相似，星系並不是無規律地散佈著，而是一團團地存在。我們會說星系是無規律地散佈著，如果我們發現星系在宇宙中不同區域裡的數目都是 $N \pm \sqrt{N}$ ，只要這些區域的大小相等。星系間的平均距離約是星系直徑的十倍。我們這星雲的直徑是 10^5 光年，所以星系間的平均距離是 10^6 光年。在一個邊長大過 10^6 光年的立方體中，星系的分布不是 $N \pm \sqrt{N}$ 。星系喜歡存在於一個個包含約 50 個（這是典型的數目）星系的星系團裡。此外，我們還發現星系團的星系團。但是我們沒有發現星系團的星系團的星系團，這表示我們如果進入比 10^8 光年更大的尺度，宇宙中星系的分布就好像是「沒有規律的」。

既然我們假設重力是星系團（或星系團的星系團）存在的原因，有人就提議重力作用範圍約是 10^8 光年，證據正是集團的半徑都小於約 10^8 光年。我們不採取這個立場，因為我們不願修改已有的理論，除非有現象與其抵觸。在我看來，星系團的星系團的星系團不存在並不代表我們的理論出錯。我們認為它的意義是在這個尺度以上我們必須取物質密度的平均值，如果我們想要在某個觀點上把宇宙看成是均勻的。

在離開我們所在的其他區域裡，均勻的物質密度是否就不會有變化？我們的觀測所試圖估計的是內徑為 R 外徑為 $R + \Delta R$ 的殼層裡的星系數目。所得結果是密度或許會依半徑而有所不同，使得較遠的區域密度較大。但是觀測的誤差比密度的變化要更大，所以我們的宇宙理論如果預測或假設密度是固定值，這和目前的觀測結果並沒有衝突。

12.2 導致宇宙模型的假設

既然觀測還沒有精準到可以確定宇宙的特徵，我們必須依賴自己的巧思來設定關於宇宙結構的基本假設。幾乎每個宇宙學家所做的基本假設是宇宙（在比 10^8 光年更大的尺度下）處處看起來完全一樣——不過未必要同時看起來一樣。也就是說對於宇宙中的任何地方而言，未來總有個時候（或者過去總有個時候）宇宙看起來和現在一樣。這表示如果我們移動時

間標度讓相應的時間適當地配在一起，則宇宙的演化就會依循同樣的過程，無論我們身在何處。

以上的假設意味著宇宙非常均勻。依我所知，這完全是一個隨意的假設，並沒有任何的觀測可以佐證。原因是我們在過去、現在、未來都受限在銀河系的一個小角落裡，而且宇宙的演化時間尺度比我們的壽命長了十億倍。我認為「宇宙是均勻的」這個假設反應了一種偏見，這偏見源自一連串推翻「地球中心說」的想法。當人類承認地球不是宇宙的中心以後，他們還懷抱了一陣子「太陽中心說」，卻又發現太陽只不過是一顆很普通的星球，和其他星球沒兩樣，在銀河系中的位置也很普通（不是中心！）。而我們的銀河系也並不特別，和其他星系沒有什麼不同。所以我們就假設自己在宇宙中的位置和其他位置沒有不同，這是前面所提一連串認知的推廣。如果我們已經說了自己是住在一個普通星系中的一個普通星球中的一個普通行星上，那麼如果接下來我們說自己在宇宙中的位置很特別，例如說我們是在宇宙的中心、或是在密度最小的地方、或是在密度最大的地方等等，都會是令人尷尬的事。為了避免這種尷尬，我們就堅持「宇宙是均勻的」這假設。

但是我們不能不認清這假設就接受了它。我用一個比喻來說明我的意思。如果我們背著降落傘從飛越地球表面任意一處的飛機跳出去，然後降落在一叢樺樹中。我們可能會主張所降落的地點應該沒有特殊性。正因為降落的地點沒有特殊性，我們下結論說地球處處覆蓋了樺樹！這個結論是錯誤的，儘管降落的地點的確是任意的。也許我們在建構宇宙學基本假設時也做了同樣的事。

我們只提三個宇宙的理論。Milne 有一個理論，其中重力完全被忽略。這是個好理論，如果宇宙平均密度足夠小。另有一個理論源自愛因斯坦，但其他人也參與研究。這理論假設宇宙是靜態而非動態的。愛因斯坦提出這個假設之時，哈伯還未發現與距離成正比的頻率紅移。這種靜態宇宙是不可能的，除非我們改變愛因斯坦方程式——在應力能量張量中多加一項如下：

第十二講

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu}_{\nu}R = KT^{\mu}_{\nu} + \Lambda g^{\mu}_{\nu} \quad (12.2.1)$$

常數 Λ 稱為「宇宙常數」。我們以前談過這一項，它是來自以下的作用量項

$$\Lambda \int d\tau \sqrt{-g} \quad (12.2.2)$$

如果愛因斯坦早就認定這種項不可能出現在他的方程式裡，他就會預測出宇宙在演化，就如同後來哈伯發現的那樣。在哈伯發現了紅移之後，愛因斯坦對於靜態宇宙就失去了興趣。儘管這個模型的名聲已一落千丈，還是有些人試著用種種宇宙常數的值來研究這理論。我們在這裡只考慮 $\Lambda = 0$ 的理論。

Hoyle 有個聰明的理論。他不僅假設宇宙各處都依循著相同的演化模式，還假設宇宙的確是靜態的——它在任何時間，任何地點看起來都一樣。如要維持這樣的宇宙，也就是說星球與行星不斷地從某些宇宙塵埃中誕生，則宇宙中各處一定要不斷地有物質創造出來。只有這樣才能在凝聚了的星系彼此遠離對方之時，平均密度仍然維持不變。Hoyle 沒有指明這種創造物質的機制為何，而且理論忽略了能量守恆；例如，Hoyle 沒有提出機制以供我們了解物質誕生時的狀態與速度。雖然在一般情況下，物理學家根本不會去理會這種忽視物質與能量守恆的理論，但我們必須記得我們所面對的是宇宙學問題而不是尋常的問題。其他的宇宙學模型把物質誕生的問題掃到地毯下了，因為它們只假設物質在某個時刻已經存在，接著只談論爾後發生的事。同樣地，它們也沒有討論物質創造的機制，所以不應該在這件事上指責 Hoyle 的靜態宇宙理論不合理。我們應該記得宇宙非常遼闊以致物質的誕生率可能很低，無法直接觀察。如果每年每立方哩僅有一個氫原子誕生，這就足夠維持一個靜態的宇宙。

我們將首先討論 $\Lambda = 0$ 的理論，這理論不假設宇宙永遠看起來不變，而是假設宇宙各處都依循同樣的演化。如果我們調整時間座標的標度讓相

對應的階段由同一個座標值 t 來代表，則描述宇宙幾何的羅伯遜-沃克 (Robertson-Walker) 度規就假設為

$$(ds)^2 = (dt)^2 - \frac{R^2(t)}{(1 + kr^2/4)^2} \left[(dr)^2 + r^2(\sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2) \right] \quad (12.2.3)$$

我們先說明這個度規的一些簡單性質。如果我們停留在同一個地方，無論我們在何處，則 $ds = dt$ 。如果我們在任何時間， $dt = 0$ ，觀看宇宙，則某一時刻的三維空間是球形對稱的，不過曲率可能不為零。空間如是均勻的則就是球形對稱的，因為球形面是不管你位於面上的那一點，看起來都一樣的面。所以我們寫下一個三維的度規，對應到有固定曲率並且每一點都各向同性 (isotropic) 的三維曲面。(12.2.3)式中的 k 如大於零， $k > 0$ ，度規就對應到三維球，若 $k = 0$ 則對應到平空間，若 $k < 0$ 則曲率是負的，宇宙就不是封閉宇宙。

我們如何描述球形的三維曲面？我們利用類似描述二維球面的方式，也就是用兩個角度 θ 與 ϕ 。二維球面有固定半徑 b ，角度的定義是

$$\begin{aligned} z &= b \cos \theta \\ x &= b \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ y &= b \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

在四維空間的情況，我們只需要引入第三個角度 ξ 使得

$$\begin{aligned} w &= a \cos \xi \\ z &= a \sin \xi \cos \theta \\ x &= a \sin \xi \sin \theta \cos \phi \\ y &= a \sin \xi \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (12.2.5)$$

利用角度 ξ ， $dt = 0$ 時三維面上的度規會正比於半徑的平方以及

第十二講

$$(d\xi)^2 + \sin^2 \xi ((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2) \quad (12.2.6)$$

如要變換成(12.2.3)的形式(用徑向座標),我們只要引入變換($r^2 \neq x^2 + y^2 + z^2$)

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\xi}{\sin \xi} \quad (12.2.7)$$

就可得到 $\cos \xi$ 等於

$$\cos \xi = \left[\frac{1 - \frac{kr^2}{4}}{1 + \frac{kr^2}{4}} \right] \quad (12.2.8)$$

當我們比較這些式子後就會發現度規(12.2.3)的確代表球形的三維曲面。 $R(t)$ 是座標微分式與弧長的轉換因子,它可能隨時間而變。一般而言,度規不是靜態的。

12.3 宇宙度規的詮釋

我們要檢查的第一個問題是位於這種度規中的物體的動力學問題。這樣的物體是靜止不動的嗎?對於這樣的物體而言,只有 u^t 不為零,因此運動方程式化約成

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma_{ii}^\alpha u^i u^i$$

既然 $\Gamma_{ii}^\alpha = 0$,我們可以用一群有質量的粒子來建構這個座標系。

有了度規(12.2.3),我們就能夠(對於可以觀測的量)做一些以 $R(t)$ 來表示的預測。我們可以建構有明確 $R(t)$ 的宇宙模型。例如, Hoyle 的靜態宇宙所對應的 $R(t)$ 是時間的指數函數; Milne 的宇宙所對應的 $R(t)$ 與時間成正比。

我們很扼要的說明一下 Milne 宇宙的性質,以便了解宇宙如何在同一時間不同的角落看起來一樣。我們說過這個模型對應到零重力。譬如說我

們可以選擇恰當的座標讓度規是平的。但是當我們寫下結果後，發現三維面似乎是有曲率的。如何理解這一點呢？我們可以想像一組相同的鐘，它們以不同的速度在時間 $t=0$ 時離開原點。如果我們畫出閔考夫斯基圖 (Minkowski diagram)，各個鐘的世界線代表各個座標系的時間軸。所以同一個時間的面是彎曲的 (圖 12.1)。在「某個特定時間」的三維面對應於這樣一種雙曲面，所以就是有曲率的面。但是四維時空仍然是平的。

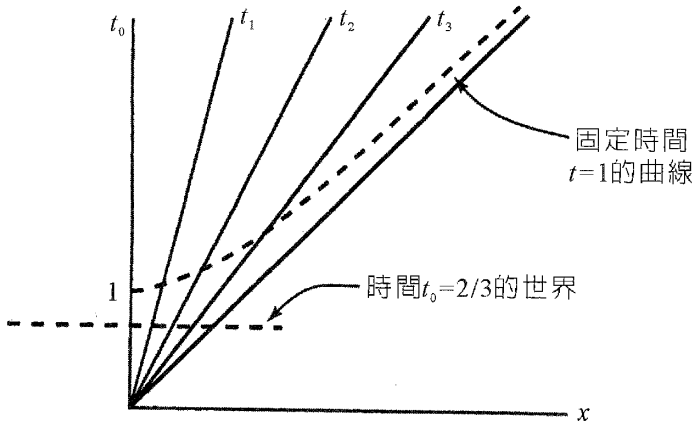


圖 12.1

我們可以用（幾乎是）操作型觀點來看這種曲率，它牽涉到半徑與圓周長的測量。如果我們在「現在」的子空間上做測量，我們發現圓周長是 $2\pi R$ 。而在固定時間 t 所做的測量就對應到（向外跑的速度與離開原點的距離 r 成正比）星雲好像是靜止的座標系中所做的測量。所以半徑是用沿著尺長的方向的尺所量出來的，而圓周長是用與尺長的方向相垂直的尺所量出來的，所以我們就觀察到一個有效曲率。

既然我們已經澄清了在固定時間 t 的三維面的意義，我們現在來看看可以推論出什麼天文觀測的結果。例如，讓我們推導出發射自別處的訊號的（表觀）頻率有什麼變化，這個變化以 $R(t)$ 來表示是什麼？我們要問如果指明訊號發射的時間與座標 r ，接收到的訊號其間隔為何？訊號光束的路徑滿足 $(ds)^2 = 0$ 方程式。如果光線沿著半徑前進，我們就有

第十二講

$$(ds)^2 = 0 = (dt)^2 - \frac{R^2(t)}{(1 + kr^2/4)^2} (dr)^2$$

這意味著

$$\frac{dt}{R(t)} = \frac{dr}{(1 + kr^2/4)} \quad (12.3.1)$$

如果我們所考慮的鐘位於固定座標 r ，則 dt 是固有時距 (proper time interval)，鐘所敲的次數就是 $\int dt$ 。如果要比較頻率，我們得計算發射時間長度與接收時間長度之比。如果我們在時間 t 開始發射一訊號，然後在時間 $t + \Delta t$ 終止發射這一訊號；它就會在時間 t_0 開始被接收，然後在時間 $t_0 + \Delta t_0$ 終止被接收。如果沿著(12.3.1)的「光路徑」積分，從訊號發射至接收，我們發現

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^r \frac{dr}{1 + kr^2/4} = \int_{t+\Delta t}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt'}{R(t')} \quad (12.3.2)$$

因為對於某特定星雲來說，座標 r 是固定值。無論間隔 $t_0 - t$ 有多長，如果 Δt 與 Δt_0 都比 $R(t)$ 的變化要短，則(12.3.2)式意味著

$$\frac{\Delta t}{R(t)} = \frac{\Delta t_0}{R(t_0)} \quad (12.3.3)$$

所以頻率之比取決於函數 $R(t)$ ；結果是

$$w_{\text{接收}} = \frac{R(t)}{R(t_0)} \cdot w, \quad w = \text{自然頻率} \quad (12.3.4)$$

函數 $R(t)$ 很明顯是關於宇宙的一個尺度。如果 $R(t)$ 隨時間 t 而增加，也就是宇宙在膨脹，則所有接收到的頻率都有紅移。如果間隔都比 $R(t)$ 的變化要小，紅移的程度大約與 $(t_0 - t)$ 成正比。

在把這個頻率紅移與哈伯紅移連接起來之前，我們必須設計一個方法來認定對應到不同座標值 r 的距離究竟為何。

12.4 宇宙距離的測量

如果我們試圖測量和遠處星雲的距離，方式是利用星雲的表觀角直徑。假設星雲的直徑為 L ，如果我們觀察到張開的角度是 $\Delta\theta$ ，那麼我們離開星雲的距離應該就是

$$\Delta\theta \cdot D_0 = L, \text{ 也就是 } D_0 = \frac{L}{\Delta\theta} \quad (12.4.1)$$

長度 L 應該是在相同時間 $dt=0$ 的長度。我們假設角度 ϕ 是固定的，而且 $\Delta\theta$ 可以看成是無窮小。固有時距是類空 (spacelike) 的：

$$-(ds)^2 = \frac{R^2(t_0)}{(1+kr^2/4)^2} r^2 (\Delta\theta)^2 = L^2 \quad (12.4.2)$$

所以

$$D_0 = \frac{R(t_0)r}{(1+kr^2/4)} \quad (12.4.3)$$

從上式可知，如果距離的範圍遠小於 $1/\sqrt{k}$ ， r 就對應到以這方式所測量的距離，只是差了一個因子 $R(t)$ 。如果我們使用的距離來自這個測量方式，則在第一階近似之下，遠處星系的紅移應該就會正比於它們離開我們的距離（哈伯定律）。

另外一種也常用來估計距離的方法是利用星系的視亮度 (apparent brightness)。假設星系有一固定的平均「標準」亮度，每秒鐘發射出某個數目的光子。這個方法類似於估計一標準燭光 (standard candle) 距離我們多遠：因為強度和距離 D 的平方成反比，也就是 $D^2 = (\text{標準強度}/\text{視強度})$ 。對於我們目前的情況，視立體角等於 (L^2/D^2) ，其中 L 是星系的直

第十二講

徑。我們必須多加進一項時間膨脹的因子，因為在時間間隔 Δt 中向我們發射的 N 個光子會在 Δt_0 間隔中被觀測到。 Δt 與 Δt_0 的關係是(12.3.3)式。如果我們比較強度，我們必須考慮光子的能量會因為頻移 ((12.3.4)式) 而減低。最後的結果是底下距離 D 與 r 的關係式：

$$D = \frac{R^2(t_0)r}{R(t)(1+kr^2/4)} \quad (12.4.4)$$

這個式子和(12.4.3)式差了 $R(t_0)/R(t)$ 這個因子，所以 D_0 與 D 並不相同。不過我們可以把一切都連起來，然後在理想情況解出 $R(t)$ 。這些考慮正是我們為什麼要在帕洛馬山用 200 英吋望遠鏡作觀測的原因。這望遠鏡花了很多時間觀看星系、測量距離、強度、紅移，來尋找更好的證據以證實函數 $R(t)$ 的性質——如果目前的模型是正確的。如果我們問和我們的距離為 ρ ，厚度為 $d\rho$ 的殼層中應該有多少星雲，答案的形式當然取決於 ρ 所指的究竟是 D_0 類型的距離，或是 D 類型的距離。無論如何，答案是

$$(\rho) \text{ 與 } (\rho + d\rho) \text{ 間的數目} = \frac{dr r^2 R^3(t)}{(1+kr^2/4)^3} \cdot (\text{常數}) \quad (12.4.5)$$

假設在任何半徑星雲的平均質量都一樣。

我們必須強調所有研究宇宙結構的方法都有其內在的假設，這些假設很有可能是錯誤的。利用亮度來決定距離的方法假設星雲的亮度與年齡的關係不大。有些天文學家試圖針對所假設的星球演化學理論計算出更精密的修正，但是事實上我們並不知道老的星雲其強度的演化究竟為何。那麼我們就應該測量直徑嗎？然而不僅遠處星雲的質量很難測量，而且我們也不知道視直徑究竟是會隨年齡增加或減少。此外當星系很黯淡的時候，我們幾乎不能夠肯定究竟我們因此而少算了多少星系。只要我們假設 Hoyle 的宇宙，這些困難就不會影響結果。Hoyle 的宇宙論是唯一細節都完全清楚的宇宙論，它意味著平均而言星雲應該是一樣的，因為宇宙是靜態的。

12.5 有界宇宙或開放宇宙的特徵

比較精密的宇宙動力學（當 $\Lambda = 0$ 時，稱為傅里德曼 Friedmann 模型，否則稱為勒麥特 Lemaitre 宇宙）可以用應力—能量張量的分量來研究。如果我們從度規(12.2.3)式所導出的曲率張量來計算這些分量，我們發現 44 分量是

$$T^4_4 = 3 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) = 8\pi G \rho + \Lambda \quad (12.5.1)$$

其中的 ρ 是平均物質密度。其他的對角元素是

$$T^1_1 = \frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{k + \dot{R}^2}{R^2} = -8\pi G p + \Lambda \quad (12.5.2)$$

在這式中， p 代表平均壓力強度。它包括所有的壓力——一般氣體的壓力加上光壓與任何其他過程導致的壓力。針對我們的情況，我們假設氣體壓力比其他壓力都大很多，所以我們忽略其他的壓力。但是這個壓力很小，因為它的數量級是 $(1/2\rho v^2)$ ，而 (v/c) 很小的平均速度，所以我們假設這一項對於宇宙動力學沒有影響。我們直接從密度 ρ 求得動力學，方法是要求 T 必須滿足一散度條件。所得到的結果是以下 p 與 ρ 的關係：

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -3pR^2 \frac{dR}{dt} \quad (12.5.3)$$

這個方程式其實只是散度為零而已：

$$T^\mu_{4;\mu} = 0$$

另外與此方程式相獨立的協變散度是

$$T^\mu_{1;\mu} = 0$$

第十二講

我們可以從上式求得 $p_{,r} = 0$ ，這正是我們所期待的，因為宇宙是各向同性的 (isotropic)。最後的結果(12.5.3)式很簡單，而且只要我們把 R 稱為宇宙的半徑，它就有個很明顯的古典意義。因為 ρR^3 正比於宇宙總質量，也就是均勻密度是 ρ ，大小是 R 的區域所含的能量。方程式右邊這一項是功率，因為它是壓力強度乘上體積。如果我們不以整個宇宙而論，而是只考慮一小個區域，方程式的結構仍然一樣。如果這個區域的大小是與 R 成正比的 a ，則

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -3pa^2 \frac{da}{dt} \quad (12.5.4)$$

如果 $p = 0$ ，那麼一個球內部所包含的質量不會改變。也就是

$$\frac{4\pi}{3} \rho R^3 = M \quad (12.5.5)$$

是一個常值。我們可以解出這個方程式而得到

$$(k + \dot{R}^2) = 2G \frac{M}{R} \quad (12.5.6)$$

從上式可以求得 $R(t)$ 。用牛頓力學架構就可以很容易明瞭可能的解會有什麼樣的行為。我們可以考慮位於球形質量分布 (總質量為 m) 之外，厚度是 da 的一殼層 (圖 12.2)；我們可以將此殼層想成是位於 (固定) 質量外重力場中的自由落體，因此它就依循自由落體方程式。牛頓力學中的能量守恆會告訴我們

$$-\frac{Gm}{a} + \frac{\dot{a}^2}{2} = \text{常值} = \text{能量/質量} \quad (12.5.7)$$

依據能量的大小，有三種可能的解。

1. 如果能量是正的，這殼層會永遠不停地膨脹，無窮久之後也是如此。
2. 如果能量是零，它會漸近地膨脹至一靜態宇宙，物質全被稀釋掉了。
3. 如果能量是負的，運動是有界的、循環的。

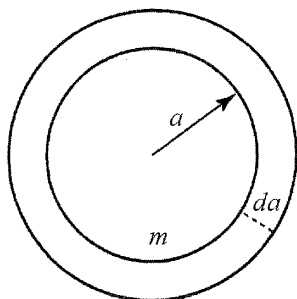


圖 12.2

這些牛頓力學問題的解對應到可能的宇宙類型：第一類解對應到負曲率的開放宇宙，第三類解對應到正曲率的封閉有限宇宙。

為什麼這些牛頓力學問題的解足以用來描述我們的答案？這是因為在球形對稱的情況下，有限質量殼層的運動完全取決於球內部的質量。因此只要檢查有限殼層的運動，我們就得到全宇宙的行為。我們在此再一次看到「均勻宇宙」這一假設的威力。

13.1 宇宙學中宇宙密度所扮演的角色

我們已經知道「均勻」這一假設如何導致宇宙的各種可能性：開放的或者是封閉的，所以我們了解宇宙學最有意思的問題之一就是宇宙究竟是無界的（不停的膨脹）？或者是有界的？我們相信可以從觀測找到答案。那些是相關的因素？核心問題是星雲的速度是否大到足以讓它們脫離？或是小到它們的運動是有界的？讓我們依據牛頓力學來估計一下，在此牛頓力學和相對論力學相差不遠。如果位於半徑 r 處的殼層的徑向速度與 r 成正比，那麼動能是不是足夠脫離？因為球形對稱，我們在寫下能量守恆的時候只需考慮殼層內的質量。如果假設宇宙的密度 ρ 是均勻一致的，一個幾乎是有界的，或者說幾乎是無界的宇宙的臨界條件是

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r}, \text{ 這裏的 } M = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 \quad (13.1.1)$$

我們可以對於任何 r 做計算。現在讓 $v = r/T$ ， T 是哈伯時間，這是我們必得觀測的量之一。若以密度來表示，則臨界條件就是

$$\rho = \frac{3}{8\pi} \frac{1}{GT^2} \quad (13.1.2)$$

如果我們接受目前所知哈伯時間的值， $T = 13 \times 10^9$ 年，則臨界平均密度就是 $\rho = 1 \times 10^{-29}$ 克/cm³。一旦我們能夠足夠精準地量出平均密度，就可知道宇宙是有界還是無界的。

但是不幸的，宇宙密度的測量極為困難，誤差很大，比哈伯常數難量多了，而哈伯常數本身的誤差可能也不小。我們已經提過，就在前幾年，我們還認為 T 比現在的值小了 2.4 倍。為了得到修正值，我們下的功夫比原先的多太多了，所以可能比較可靠，不過現在的值也有可能還是差了約略同樣的倍數。和過去一樣，最困難測量的值對於最後的結果有很大的影響，這些測量牽涉到位於望遠鏡所見範圍邊緣的星系。我們是依據星系團的亮度，而不是星系的亮度，來估計這些星系和我們的距離；然而我們不確定這些看得見的星系團具有代表性，也不確定它們的發光強度和距離我們較近的星系團類似。所以對於 T 的最後估計取決於一連串的假設是否正確，而每項假設對於最後結果的誤差都有不小的影響。目前關於平均密度的估計情況如何？如果計數星系的數目，並且假設這些星系和我們的銀河類似，則這類可見物質的總密度約是 10^{-31} 克/立方公分。這個值代表物質密度的某種下限，因為可見物質只佔總物質的一部分而已。星系間物質密度可以用以下的方法來估計：測量各種銳譜線（sharp spectral lines）的強度和光源離我們距離，求出它們的關係。依常理，譜線被吸收的情況可以用來測量星系際某類原子的數目。我們得依賴很多假設與修正才能把實驗數據轉成數值估計，所以我們並不期待有可靠的最後結果，至多精準至數量級而已。對於鈉的數目的測量還算成功，但是最關鍵的量是氫的數目，這或許可以得自氫原子 21 公分譜線的吸收。電波天文學家正在研究這個問題，目前的結果似乎是可見物質的確僅是總物質的一小部分而已。臨界物質密度是 $\rho = 1 \times 10^{-29}$ 克/立方公分，它一直都落在任何密度估計的範圍內；但是數據不夠精確，所以如果有個理論要求高達 10^{-29} 克/立方公分的密度，觀察數據也還是無法排除它。我們目前還不能因為某個理論預測了太高的密度而否決它。

在這裡我要對目前宇宙學中的觀測情況說幾句話。當一個物理學家閱讀一篇典型的天文論文時，她會不熟悉文章裡頭關於誤差的處理方式。雖然提出計算與測量的論文通常都會很仔細地列出與討論誤差的來源，甚至於估計出對於某些關鍵假設的信心程度，但是當來到訂出一個數字（例如哈伯時間 T ）的時候，我們卻找不到總誤差的估計，例如以物理學家熟

第十三講

悉的形式 $\pm\Delta T$ 來表達的誤差。論文的作者顯然不願意講清楚數字正確的機會有多大，儘管他們已經很細心地指出很多誤差的來源，而且很明顯地這些誤差不能算小。這麼做的不好後果是其它宇宙學者或天文學家會拿這些數字來用，而沒有考慮其可能誤差，將這些結果看待成和行星週期一樣精確。一個這樣的例子牽涉到宇宙模型；這些模型都預測了一個與距離幾乎成正比的紅移，它們的區別只在於遠處星系的加速度。如果這個加速度可以用一個參數 q 來表示，而觀測與計算顯示這個參數是，譬如說，

$$\frac{\ddot{R}R}{R^2} = q = 1.2 \quad (13.1.3)$$

則這個數字無法用來和理論比較。即使 Hoyle 的模型預測了 $q = -0.5$ ，他還可能是對的，因為加速度可能有很大的誤差，例如 1.2 ± 5.0 。這正是某些人可能出錯的地方，因為他們把這些數字當成是沒有誤差的數字。當然這些誤差在未來可能變小很多，因為很多天文學家正用心地取得更好的數字。

在考慮了所有事情之後，臨界密度大約是宇宙學問題中最可用的密度。它有很多好的性質—例如，宇宙中心（依據宇宙均勻性原則，處處是中心）在這個密度不用花代價就可以創造物質。如果物質密度是 ρ ，那麼我們就知道直接源自物質密度的空間曲率是正的。另一方面，在星雲演化中有相等原時（proper time）的三維空間的曲率是負的，因為有臨界密度來平衡，空間才成為平坦的三維空間。一個有無限個星雲的宇宙和一個有限宇宙的區別也在於臨界密度。因為這個數字的奇妙性質，我們可以考慮一個有趣的猜測，那就是臨界密度正是「真實的」密度。我們當然一定不能欺騙自己去認為一個美麗的結果僅因為它是「美麗的」（這是人為假設之一）就會更為可靠。

13.2 宇宙可能是不均勻也非球對稱的嗎？

既然我們所有的結論都非常依賴均勻宇宙這一假設，我們應該回顧一下證據的性質。如果檢查離我們 1.3×10^8 光年內的宇宙某一角落，我們

只發現到一星系團——室女座星系團，換言之，物質的分佈非常不對稱。這個區域中不對稱的情況太大了以至於找不到辦法解釋。例如這個不對稱情況不可能起自銀河星塵的遮蔽，因為這種因素只會影響銀河赤道附近幾度內的天空。如果檢查的區域大於 10^8 光年，均勻性應該現身，因為一般星團中星系的數目太大了，不能輕易的以密度的起伏來解釋。還好在很遠的區域，天空似乎遍佈著非常規則與緊緻的星團的星團，牽涉到或許數千個星雲，像蜜蜂一樣聚在一起，環繞著超星團的重心。從紅移的分佈我們可以得知相對於質心的速度起碼是 1000 公里/秒的數量級。這個紅移的分佈可以做為測量星團質量的好方法。很明顯星團是因為重力而組成的，而且它們是壽命很長的東西——它們是穩定的束縛系統。我們可以從這些資訊推導出質量，因為我們知道脫離速度得大於 1000 公里/秒。這個結果令人有些擔心；例如，如果我們用同樣的方式計算室女座星系團的質量，所得到的質量比用別的方法所得的要小三十倍。不過遠處的超星團要更大，所以計算也許會更可靠。

星團的存在告訴我們星雲相互吸引的力量夠強，所以整個系統聚在一起的時間和宇宙的年齡相當。很有意思的是幾乎所有的星系都聚成星系團，只有一小部分似乎不被包括在星系團內。結論是幾乎所有宇宙中可見物質都沒有足夠的動能逃離附近的物質。從這個角度而言，我覺得宇宙的平均密度很不可能比臨界密度小太多。如果密度小太多，星系團的形成就得歸因於密度的起伏，使得物質密度在某些區域會來得高些。但是從統計的原則來說，我們很難有足夠且適當的局部起伏使得幾乎所有的物質都發生在星系團裡。或許在更早的時候，密度比較高，起伏可能比較容易，但是我從未看過這種看法的定量說明。所以一個無可避免的結論是多數物質之所以被拉入星系團裡，原因在於重力能量和膨脹的動能是同一個數量級。對我來說，這意味著平均密度必然處處幾乎等於臨界密度。

前面對於平均密度的猜測完全無助於均勻假設的建立。像「某個區域中的物質會不會聚在一起」的問題仍可能純然是個局部的問題，並且不同的區域會各有不一樣的情況。要研究宇宙學原理只能夠透過仔細地比較密度與紅移的非線性（這代表了宇宙加速）。這些量原則上可以分別獨立

第十三講

測量，但是在遵循宇宙學原理的理論中，這些量會滿足某明確關係。如果密度隨徑向距離的變化可以量得很準，我們可能會發現物質或許在內層的區域密度太高，以致宇宙學原理不成立。

即使宇宙學原理是錯的，宇宙仍可能有球形對稱——如果我們位於看起來是宇宙的中心，我們會很驚訝；傾向於宇宙學原理的偏見只是反應了這種驚訝。假設宇宙中可見區域仍幾乎是對稱的，但是外層有較多的物質，分佈的情況不均勻。如此一來會有什麼區別？我們會期待遠處星雲的運動會因為潮汐力（見圖 13.1）而有一階的修正。（如果可見區域整個在加速，我們就感覺不到這個加速！）結果是紅移會有修正，這修正有四極的特質——紅移在兩極區域會更紅，在赤道區域較藍。

從前面的討論可以知道，關於宇宙論，相對性重力論能告訴我們的不多。只有當我們確實知道宇宙「真正」看起來是什麼樣子，當我們可以精確地畫出紅移的情形以及密度隨距離跟天空中位置的變化情形，我們才可能解決宇宙學的核心問題。

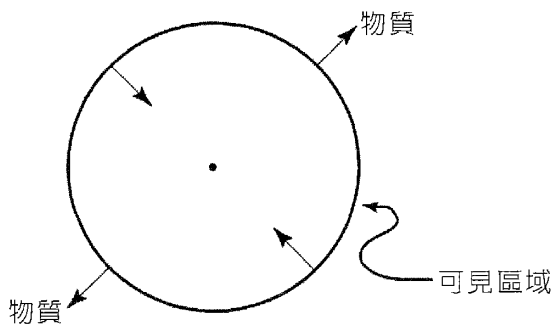


圖 13.1

13.3 消失的星系與能量守恆

我們扼要地提一下另一些宇宙學和宇宙模型的謎。有無可能某些星雲會永遠消失到視野之外？在目前的理論中，無論密度比臨界密度大或小，答案是「不會」。目前看得到的星系不會永遠消失，隨然它可能會越

來越紅。我們不必擔心星系離開我們的速度會大過光速——無論這是什麼意思，因為根據假設它們永遠看不到。

在 Hoyle 的理論中，遠處的星雲會消失。他的遠離速度公式是「由八個給定星系所定義出來的立方體積每隔某個時間間隔就會加倍」。在這種假設下的速度就會增加，有一些會加速到超過光速。不過 Hoyle 的理論並沒有假裝要用力來解釋星系的運動。它只是在敘述一個運動學規則，可以用來計算某給定位置的時間函數。在這個規則之下，星系會永遠從視野消失。尋找某種可以導致 Hoyle 膨脹的力是沒有意義的事——這種力一定是我們不熟悉的形式，因為在目前力學架構中，有限的力不會導致這種運動。

我從我的老師 Wheeler 那裡繼承了一種偏見，也就是當目前的理論還沒有徹底研究之前，不要為了解釋結果而輕易地改變理論。我這麼說是因為有人猜測如果宇宙中正電荷不等於負電荷，則就有一種膨脹力可以讓星系以 Hoyle 所要的方式加速。既然我們已經有個非常好的電動力學，其中 e^+ 剛好就等於 e^- ，這種猜測看起來是沒有用的。我們不會就只為了提供一個運動學模型的機制而拋棄一個美麗的電動力學，況且——但有了更精確的觀測，就可能輕易發現這個模型是錯的。Hoyle 可能還是對的，但是我們首先還是要從宇宙的觀測來確認這一點。

讓我也對擔心數學證明與矛盾的人說幾句話。我們不能從數學證明某個物理結論是錯的或是矛盾的。我們能做的就是顯示數學假設是錯的。如果我們發現某些數學假設所導致對於自然的描述在邏輯上是矛盾的，我們所要改變的是數學假設，而不是自然。

我這麼說是因為我不知道 Hoyle 的宇宙理論和我們物理學家平常所做的其他假設會如何的不完全相容。例如，傳遞訊號的可能性或許會有些麻煩，而這正是相對論思想的核心部分。如果一個星系從視野消失了，對於我們而言，它真的不在宇宙中了嗎？我們能不能問位於宇宙外層的朋友，當她還在我們視野之內，而那個星系也還在她的視野之內的時候，那個消失的星系怎麼樣了？或者運動學的細節裡存在著一個巧妙的安排，使得相對論法則依然成立——有一座標系其相對於我們的速度接近光速 c ，這座標系中接近 c 的速度在我們的座標看起來仍然小於 c 。

第十三講

讓我們談一下能量守恆。在 Hoyle 的理論中，物質靜止地誕生於宇宙的「中心」；我們也說整體而言沒有能量創造出來因為重力能量是負的剛好抵銷掉靜止質量的能量。這種能量守恆的意思是如果在任何地方取一個（有限大小的）盒子，盒子裡頭不會多出物質來除非能量從外邊流入。換句話說，只有局部守恆定律才有意義。如果能量能從某一地方消失，同時有能量出現在另一地方，而沒有任何東西流通其間，這種整體的守恆不能讓我們推導出什麼物理後果。所以讓我們用以下的方式詮釋 Hoyle 的物質創造。我們想像一個有限宇宙，其中有大量物質分佈於球形殼層中（見圖 13.2）。想像一對對零能量的粒子從殼層外面往裡面落下。我們可以把這些粒子想成是光子或重力子或微中子，或某種不受重子守恆（baryon conservation）定律限制的新粒子。當落下的粒子碰到從另一端落下帶有相反動量的另一粒子時，它們有足夠的能量來創造一個氫原子。如此一來，我們就有 Hoyle 的物質創造以及局部能量守恆，因為物質是從落下粒子所帶來的能量所創造出來的。如果落下的粒子通量很高，而且產生物質的反應的橫截面在底限能量以上不是零，那麼我們就可以理解為什麼物質應該誕生在靜止（相對於平均星雲）的情況。我們的想法是如果粒子通量夠大，一但粒子有足夠的能量，它就會找到另一個從另一端過來的粒子，然後產生物質。如果粒子在落下過程中所獲得的最高能量剛好和創造物質的底限能量一樣，則創造出來的物質就是「靜止」的。以這樣的方式，我們可以同時擁有局部能量守恆與 Hoyle 的宇宙理論。當然還有很多其他問題存在，例如我們仍得考慮重子數（baryon number）為什麼或許不是守恆的。

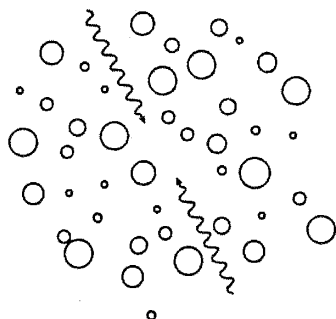


圖 13.2

13.4 馬赫原理與邊界條件

關於馬赫原理是否正確，古典重力論並沒有給我們一個答案。例如我們可以問如果整個宇宙繞著我們轉，重力論是否能預測出科氏力（Coriolis force）？過去曾有人如此討論這個問題：想像在遠處旋轉的一層物質（見圖 13.3），我們問在中心是否有一力可以讓搖擺跟著那一層物質轉？如果無窮遠處的邊界條件是 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ，則這個問題已經解出來了。結果是（這是 Thirring 所得到的結果，見[Thir 18]）

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{GM}{Rc^2} \right) \quad (13.4.1)$$

(GM/Rc^2) 的值永遠小於 1，所以搖擺（或任何其他東西）不會完全跟著轉。有可能這個結果是受到我們所選擇的特殊邊界條件的影響。我們所知道的是在有固定重力位勢的區域中 $g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}$ ；沒有人可以保證如果重力位勢為零，則 $g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}$ 。所以雖然表面上看起來馬赫原理失效，其原因可能在於我們選了錯誤的邊界條件。我們可以把這個狀況和靜電學中的一個情形相比較；我們可以令無窮遠處的 $E_z = 1$ ，這個邊界條件讓我們得以解出靜電學方程式。我們把這個解推廣至更大的區域，但是這麼做等於要求在考慮的區域之外有大量的電荷均勻地分佈在垂直於 z 軸的平面上。類似地，在無窮遠處讓 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 可能意味著大量物質均勻地分佈在「無窮遠之外」。所以我認為透過研究邊界條件的意義，我們可以學到馬赫原理是否和我們目前的理論一致。

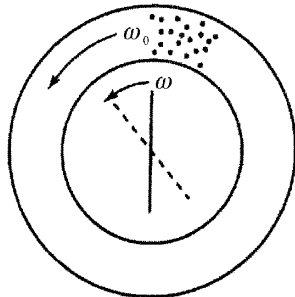


圖 13.3

第十三講

在先前關於馬赫原理的討論之中，我們臆測或許下式

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (13.4.2)$$

中度規 $g_{\mu\nu}$ 的量值是有物理意義的量，只要我們用例如哈伯的 cT 這種自然單位來測量原時，或用康普頓波長來測量長度；對於質子波長而言， $g_{\mu\nu}$ 的數量級是 10^{-84} 。狹義相對論是 $g_{\mu\nu} = \text{固定值}$ 的特例，這時原時和長度可以換標至實驗室尺度。附近的質量（例如太陽）對於 $g_{\mu\nu}$ 有一些小貢獻，這些小貢獻可以用另外的方式觀察因為，局部而言，它們的變化要比星雲對 $g_{\mu\nu}$ 的貢獻的變化大很多。我們也看到如果假設每個重子（baryon）的貢獻都相同，這 10^{-84} 的數量級是如何出來的。這個重子數有沒有什麼玩意兒在裡頭？例如，它是守恆的嗎？它是無窮大的嗎？可見宇宙中某一區域的重子數對於物理過程有些影響嗎？

這些問題的答案可能都不簡單。我知道有些科學家到處宣揚大自然永遠選擇最簡單的答案。但是顯然地最簡單的答案就是什麼都沒有——宇宙中應該什麼都沒有。大自然遠比我們有想像力，所以我拒絕跟著想說答案永遠必然是簡單的。

13.5 天空中的謎

宇宙學裡的一個老問題（稱為 Olbers 弔詭）是：如果宇宙是無窮大的，而且其中處處是發光的物體，那麼天空為什麼不是無窮亮的？當然星星的數目其實可能是有限的。如果不是這樣，天空仍不必然是無窮亮的一光可能被吸收掉了，或者有紅移以及重力紅移。這些都可能讓無窮宇宙有個黑天空。不過無論如何天空中的確有一些非常亮的物體。電波天文學家的儀器所能探索的地方比別人更遠，她們發現了一些結構奇特的電波源。圖 13.4 是天空中有相同電波強度的區域的約略輪廓。目前已發現與紀錄了 20 至 25 個這種東西。當天文學家將她們的望遠鏡對準這種區域的時候，她們發現從側面看這些結構的中心有個星系。偶而我們會發現一種電波源，其等強度曲線只有一個中心，在這個中心有個從正面看的星系。這

應該是代表了同一類的物體，我們只是從另一個角度在看它。這些物體真正驚人的地方在於它們所輻射出來的能量。當電波天文學家將她們觀測所得的光譜強度積分起來（觀察不到的不計算在內），發現每秒約有 10^{44} 耳格（erg）的能量輻射掉了。假設我們測量這些物體的大小並除上光速來估計它們壽命的下限，會發現所輻射能量的數量級大約是 10^{60} 耳格，或者說約是 10^6 到 10^8 個大小和太陽相當的恆星的靜止質量。這些物體還輻射了能量大小約略相同的可見光。這就好比說約有 10^6 到 10^8 個恆星完全消滅掉了。這些能量是那裡來的？

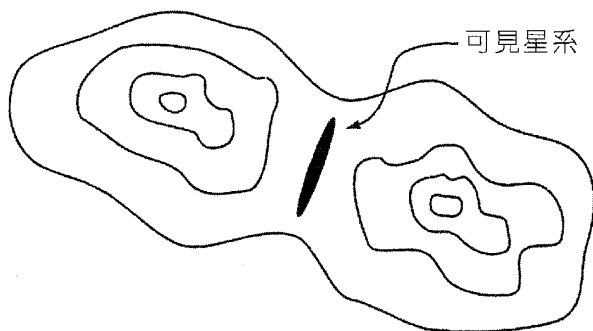


圖 13.4

一般把質子轉化成鐵的核子反應過程只能消滅質量非常小的一部分。一般星系中恆星的數目平均約是 10^9 個，所以不能用恆星中的核子反應來消滅 10^8 個恆星。我們可以如此比較因為有這種強烈光環的星系和其他星系在可見光部分看起來很像。即使將一般星系中的恆星完全炸開也產生不了那麼多能量。從發光物體輻射出這麼多能量的唯一方法似乎是讓一百萬個恆星和另一百萬個反物質恆星相互毀滅。另一種解釋是這些星系中心有某種結構，某種怪物超級恆星，其中產生能量的方式和普通恆星很不一樣。圖 13.4 裡兩個中心的結構可以解釋為因為星系平面上的黑星塵吸收了射電頻率。

普通恆星有個有趣的地方——它們的大小差異不大。它們的質量永遠和我們的太陽類似，頂多大上十倍。要證明恆星大小可能有個自然上限並

第十三講

不太困難，我們只要同時考慮 Pauli 不相容原理 (exclusion principle) 以及脫離速度 (escape velocity) 的要求：我們需要開始將電子填入 (例如在 0° Kelvin) 費米海，並且在某體積中加入質子質量。當質量約是太陽質量的 1.5 倍時，費米海已經很高了，但是普通恆星的質量還不足以讓相對論的解很不同於與非相對論的解。

如果我們試圖處理超級恆星 (質量約等於 10^9 個太陽質量) 的聚合，牽涉到的重力過程可能是非常相對論性的。一般天文物理學家用來描述普通恆星的模式—用輻射來冷卻以及內部崩陷至更高溫度—可能並不適用。當壓力夠高，核子反應的方向可能偏向質子的逆貝他 (β) 衰變



恆星的質量如果這麼大而且具有大量來自逆貝他 (β) 衰變的中子，其演化可能和我們的太陽很不一樣。我相信在提出更新的理論以解釋這些東西之前，我們必須認真地試著用目前所有的物理知識去理解在這些非常奇特的情況之下，究竟會發生什麼事。

14.1 廣義相對論中的超星問題

在這一講中，我要討論超星（superstars）問題的一個解，這些超星就是最近 Fowler 和 Hoyle 所討論的超大質量的聚集——它們的質量有太陽的 10^9 倍。我們用的模型雖然很簡單，但是它具有真實物體的很多性質。一旦我們了解了如何解決這個簡單的問題，我們再來擔心如何改進這個模型。出發點是廣義相對論的微分方程式，也就是愛因斯坦方程式：

$$8\pi GT_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (14.1.1)$$

方程式的右邊是「幾何」，我們放入以度規張量表示的曲率。如果我們假設靜態的、球形對稱的解，那麼度規張量可以用函數 $\nu(r)$ 與 $\lambda(r)$ 來表示：

$$(ds)^2 = e^\nu (dt)^2 - e^\lambda (dr)^2 - r^2 (\sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2) \quad (14.1.2)$$

(14.1.1)式的左邊是「物理」，和應力—能量張量有關。假設物質是氣態的，這個張量只會牽涉到每一點的壓力 p 與密度 ρ 。我們以指數(1,2,3,4)的順序來代表座標 (r, θ, ϕ, t) ，函數符號右上方的「一撇」則代表函數對於 r 的微分。愛因斯坦方程式就化約成以下（用函數 $\nu(r)$ 與 $\lambda(r)$ 以及壓力 p 與密度 ρ 所表示）的形式：

$$G^1_1 = -e^{-\lambda} \nu' / r - (e^{-\lambda} - 1) / r^2 = -8\pi G p \quad (14.1.3a)$$

$$G^2_2 = -e^{-\lambda} (\nu'' / 2 - \nu' \lambda' / 4 + (\nu')^2 / 4 + (\nu' - \lambda') / 2r) = -8\pi G p \quad (14.1.3b)$$

$$G^4_4 = -e^{-\lambda} \lambda' / r - (e^{-\lambda} - 1) / r^2 = 8\pi G p \quad (14.1.3c)$$

我們所用的模型取決於我們所放入的 p 與 ρ 。這些量代表了每一地點的靜止觀察者所測量到的壓力與密度。我們必須確認物理張量 $T_{\mu\nu}$ 滿足守恆律，否則不會得到正確的答案。在球形對稱的情形下，只有張量散度的徑向分量是有意義的；我們必須要有

$$\frac{\partial T^1_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \nu' (T^1_1 - T^4_4) + \frac{1}{r} (T^1_1 - T^2_2) = 0 = -\frac{1}{2} \nu' (p + \rho) - p' \quad (14.1.4)$$

這方程式的意思是徑向的壓力是平衡的，正合乎我們靜態解的要求。我們可以用這方程式除去 ν' 。下一步，我們要除去 $\exp(-\lambda)$ 。首先我們用一個新函數 $M(r)$ 來寫下 G^4_4 所滿足的方程式(14.1.3c)，方法如下：

$$G^4_4 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})] \quad (14.1.5a)$$

如果令

$$M(r) = \frac{1}{2} [r(1 - e^{-\lambda})], \quad e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M(r)}{r} \quad (14.1.5b)$$

則

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 G \rho \quad (14.1.5c)$$

表面上看來，函數 $M(r)$ 似乎和星體的質量成正比，因為質量正是密度 ρ 的積分。但是正確的詮釋不是這麼直接，因為用來測量 ρ 的座標有些特別。我們等一下再來討論這個問題。將(14.1.4)中的 ν' 與(14.1.5b)中的 $\exp(-\lambda)$ 代入(14.1.3a)可以得到

第十四講

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} = -(p + \rho) \left(4\pi Gp + \frac{M}{r^3}\right) \quad (14.1.6)$$

連同 $M(r)$ 的微分方程式以及連接 p 與 ρ 的方程式，我們就有了一組聯立方程式。只要加上適當的邊界條件，原則上就可以解出 $M(r)$ ， p 以及 ρ ，它們就代表超星的靜態解。

我們應該用什麼樣的狀態方程式？物質的質量雖然約有 10^9 個太陽質量那麼大，如果分布在銀河大小的區域中，仍然是很稀疏的：即使氣體的溫度高到約克氏溫標的 10^9 度，它的壓力還是相當低。不過和溫度四次方 (T^4) 成正比的輻射密度在這個高溫下就和核子密度的靜止質量能 (rest-mass energy) 是同一數量級。所以我們可以忽略氣體壓力只保留輻射壓力，這個近似是有意義的。以同樣的精神，我們忽略掉因為速度而增加的一點點核子質量。以核子的靜止質量能為單位，我們就得到，如果 s 是核子密度，

$$\rho = s + \epsilon \quad (14.1.7a)$$

$$p = \frac{1}{3} \epsilon \quad (14.1.7b)$$

這些方程式連接了 p 和 ρ ，但是我們仍得說明 ϵ 是什麼以便得到狀態方程式。我們使用絕熱 (adiabatic) 近似—每個研究這個問題的人都這麼做—也就是假設溫度的分布是從某個起始均勻分布 (uniform distribution) 整體地降下來，不同的區域間並沒有任何混合或能量轉換。當我們壓縮盒子裏的物質，所有的頻率都會提高相同的倍數因子——這因子與盒子長度成反比。既然對於絕熱過程而言，熵的值是固定的，溫度必然也以同樣的形式升高。所以核子密度就和溫度的三次方成正比，而輻射能量密度與溫度四次方成正比。假設溫度的單位是 10^9 度克氏溫標，能量的單位是核子的靜止質量能，則

$$\epsilon = aT^4, \quad s = a\tau T^3 \quad (14.1.8)$$

令 m_n 為核子質量，則 am_n 的值是固定的 8.4 克(g)/立方公分(cm^3)。 τ 是一個參數，與星體中（和半徑無關的）每個重子（baryon）的熵有關，其關係是(每個重子的熵) = $4/(3\tau)$ 。這些結果也可以從絕熱壓縮的一般條件推導出來，這個條件可以表成

$$s^2 \frac{d(\epsilon/s)}{ds} = p = \frac{\epsilon}{3} \quad (14.1.9)$$

這些壓力、密度與絕熱過程的關係是在古典的星體問題框架下推導出來的。星體中處處的壓力與密度都和溫度成冪次律（power law）關係的恆星稱為多方球體（polytrope）。

利用一個新溫度 t ， $t = T/\tau$ ，以及某新單位，我們可以讓 $8\pi Gm_n a\tau^4 = 1$ ；而方程式就成為

$$\rho = a\tau^4 [t^4 + t^3] \quad (14.1.10a)$$

$$p = a\tau^4 \left[\frac{1}{3}t^4\right] \quad (14.1.10b)$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2} [t^4 + t^3] r^2 \quad (14.1.10c)$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{r}{2} \left(\frac{3}{4} + t\right) \left(\frac{1}{3}t^4 + \frac{2m}{r^3}\right) / \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (14.1.10d)$$

我們應該選擇什麼樣的邊界條件？我們假設中心有某個溫度並且表面很冷，相比之下表面溫度基本上是零。所以我們放入以下的數字以求得解 $t(r)$ 與 $m(r)$ ：

$$\text{在 } r=0 \text{ 處, } m=0, t=t_c \quad (14.1.11)$$

一旦我們將問題整理到這個樣子，數值解就很容易求得。我們從中心點開始，那裡的 $m(r)=0$ ，而且 $t(r)=t_c$ ；我們用(14.1.10c)式計算 (dm/dr) ，並用(14.1.10d)式計算 (dt/dr) ，然後在這些方程式間來回，就能製造出 $m(r)$ 與 $t(r)$ 。因為當 t 大於零時，微分 (dt/dr) 永遠是負的；所以

第十四講

在某個點 r_0 ， t 會變成零。我們碰到了這一點就不再算下去，並假設一個更有物理意義的解只會改變星體的最外層，這個解會使最外層平滑地趨向零密度而不會大幅地改變內部的解。所以我們就假設半徑 r_0 代表了星體的半徑，而且 $m_0 = m(r_0)$ 這個值代表星體的種質量。

14.2 方程式解與其參數的意義

我們剛才描述的解對於很多種類的星體——也就是說由所有參數 τ 來描述的星體——來說都成立。為了要了解我們感興趣情況下的 m_0 與 r_0 值的大小，我們列出轉換至更熟悉單位的轉換因子：

$$M \equiv \text{星球質量} = (27 \times 10^6 \text{ 太陽質量}) 2m_0 / \tau^2 \quad (14.2.1a)$$

$$R \equiv \text{星球半徑} = (8 \times 10^{12} \text{ 公分}) r_0 / \tau^2 \quad (14.2.1b)$$

$$T_c \equiv \text{中心溫度} = t_c \tau (10^9 \text{ 度}) \quad (14.2.1c)$$

$$M_{rest} \equiv \text{星球中核子的靜止質量} = (27 \times 10^6 \text{ 太陽質量}) 2N / \tau^2 \quad (14.2.1d)$$

有各種方法可以看出我們方程式所描述的東西是我們的直覺所認可的。例如，在質量 $m(r)$ 不會變的太大的情況下，壓力是依據牛頓的法則而隨著半徑變化：

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2} \rho \quad (14.2.2)$$

一個有趣的情況牽涉到核子的總數：雖然我們可能傾向於只寫下 $4\pi \int dr sr^2$ ，但我們應記得要寫下適當的不變式。真正的值是

$$N = \int_0^{r_0} s^4 \sqrt{-g} dr d\theta d\phi, \quad \sqrt{-g} = e^{v/2} e^{\lambda/2} r^2 \sin\theta \quad (14.2.3)$$

式中的 s^4 是一個四向量 s^μ 的時間分量。我們可以計算 N 的值，在核子的靜止座標中來做這個積分。在這個座標系統中，只有時間的分量不為零，所以我們的結論是

$$s^\mu s_\mu = (s)^2 = g_{44} s^4 s^4, \quad s^4 = s e^{-\nu/2} \quad (14.2.4)$$

因此核子的總數是

$$N = 4\pi \int_0^{r_0} dr \, sr^2 [1 - 2m/r]^{-1/2} \quad (14.2.5)$$

我們現在再看一下星體質量的式子，以便更深入的理解它。密度 ρ 是兩項的和，一項是靜止質量能，另一項是輻射能量。當我們用對於「不變體積元素」的積分來表示質量時，我們看到密度 ρ 得乘上一平方根的因子。

$$m \leq m_0 = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - 2m/r}} \rho \sqrt{1 - 2m/r} \quad (14.2.6)$$

依據相對性理論，我們正應該預期這樣——平方根修正了能量密度（多考慮了重力能量）。

當溫度高過克氏 10^9 度，如果試圖使用這些解我們必須很小心，免得在高溫出現的新物理過程讓我們的狀態方程式完全失效。舉個例說，如果電子—電子碰撞可以產生微中子對，它們可能帶走大量的能量，使我們的近似完全失效。這種過程可能在克氏 10^9 度才變得重要。這個溫度高到足以讓不算少的一部分粒子有足夠的動能來產生電子。產生這些粒子對的可能性會改變 s 與 ε 的關係，以及 ε 與 p 的關係。但是在絕熱近似中，這些關係完全是由一個量 γ 來指定的（壓力 p 正比於 s^γ ），而且我們也知道當溫度改變時， γ 不會有太大的變化。 γ 的值在兩個極限情況下一樣：當 $T \rightarrow 0$ 與 $T \rightarrow \infty$ 時， γ 的值都是 1.333。在這兩個極限之間， γ 有個極小值 1.270。這意味著來自電子對（electron pairs）的修正不會改變我們答案的大致性質。

14.3 一些數值結果

如果選定某個 τ 值，只改變中心溫度，我們初步計算的結果列於表

第十四講

14.1。這個表列了溫度 t_c 、半徑 r_0 、星體的質量 m_0 、以及「核子總數 N 」。這些數字有趣的地方在那裡？為了了解某個超星會發生什麼事，我們問如果核子總數固定，半徑與中心溫度會如何隨著每個核子的總能量下降而改變？我們預期這會模擬一個慢慢輻射掉能量的超星。表中的數字還不足以讓我們有十足的把握，但是我們已經看到當中心溫度下降時，每個核子的能量也下降；也就是說，當超星輻射掉能量時它真的冷了下來。

t_c	r_0	$2m_0$	$2N$
0.01	1100	8.45	8.45
0.10	114	6.23	6.19
0.20	59	4.71	4.62
0.40	36	3.13	2.97
0.60	28	2.39	2.19
1.00	32	1.87	1.66

表 14.1

這些星體是否會自動的散開來？我們還沒有研究它們的穩定性。我們可以用同一個解為架構，考慮導致相同核子數與 τ 值的計算，比較半徑與中心溫度。我們從表 14.1 看到當 t_c 落於 0.4 跟 1.0 之間，半徑顯然有個極小值，這意味著超星或許有個穩定的半徑。另一種研究穩定性的辦法是考慮「爆炸」。假設 τ 是固定的（也就是每個核子的熵是固定的），我們計算 N 個核子的總能量；然後將所有的核子分成兩個有相同 τ 的星體，總數 N 不變。我們能從這個過程獲得功嗎？或是我們得做功才能將原來的超星分裂開來？我們假設 τ 是一樣的，因為我們假設所有的物質來自相同的起始分布。我們能從數字了解出什麼嗎？當 N 減少，我們發現超額質量（excess mass）在增加，也就是說兩個 N 較小的星體會較重（兩者的能量和較大），所以我們得做功才能分裂原來的系統。這意味著超星不會拋掉物質，而會聚成一團。

前面的考慮也顯示了在我們的模型中，怎麼樣不能形成超星：它們的能量大過核子的靜止質量，所以需要能量才能將它們造出來。

無論如何，我們發現廣義相對論的修正是可觀的，也非常重要。電子對會把解答推向那個方向？它們傾向於讓超星的行為更像是當從外面冷卻它時，中心卻會更熱。

重力半徑會帶給我們麻煩嗎？我們的方程式用上了 $m(r)$ 在中心點等於零的條件，當半徑變大 $m(r)$ 會增加。如果質量大到 $2m(r)$ 近乎等於 r ，我們的微分方程式(14.1.10d)顯示 r 和 t 會以對數形式逼近 $-\infty$ 。所以溫度在那之前會降到零，我們的計算在溫度為零時也得中止下來。不過我們關於質量與半徑的數值結果離開那臨界點 ($2m(r) = r$) 還很遠，所以我們目前或許不必擔心這個問題。

14.4 未來關於超星研究的計畫與猜測

超星問題有另一個或許比較容易處理的數學定義方式。我們知道星體中核子的總數是

$$N = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{sr^2 dr}{\sqrt{1-2m/r}} \quad (14.4.1)$$

其中的 $m(r)$ 是

$$m(r) = 4\pi \int_0^r dr' \rho r'^2$$

上式中的 $\rho = \rho(s)$ 是以一假設的狀態方程式來定義的，例如我們的「絕熱」方程式

$$s \frac{d\rho}{ds} = p + \rho \quad (14.4.2)$$

平衡的問題就在於從固定的核子總數開始，而求出最小質量的型態。我們也可以反過來讓質量固定，去求核子數的最大值；這樣做所得的資訊是一樣的。數學方程式就成為變分微分方程式

第十四講

$$\frac{\delta N}{\delta s(r)} = 0 \quad (14.4.3)$$

如果能解出(14.4.3)式，就可以得到極值（extremal）函數解 $s(r)$ 。我很高興知道只要用上適當的原理，即使是非常困難的問題看起來也會很簡單。如果極值 $N[s(r)]$ 真的是極大值，我們就找到了「最小質量解」。

在研究了靜態解之後，我們可以將注意力轉向完整的動力學問題。在那個情況，微分方程式非常難纏。當我們看到它那極端複雜的結構，並與古典極限相比較後，很多項的意義就變得明顯多了。在氣體動力學最簡單的情況中，這些方程式描述在不均勻介質中聲音的傳遞。這是非線性的聲音，所以可以形成震波（shock wave）等現象。難怪事情會這麼複雜。比較單純的做法是只研究靜態解附近的小振動；頻率如果是實數，則我們先前的解就是穩定的，反之頻率如果是虛數，則我們先前的解就不是穩定的。

更細膩的計算則需要對於方程式的「物理」邊（即應力—能量張量）有更進一步的理解。如果我們把微中子從恆星的中心拿掉，會發生什麼事？它會繼續掉下去嗎？或怎麼樣？如果恆星是高度相對論性的，則這些微中子會帶走相當部份的能量，使得相吸的重力減低不少。恆星理論的古典狀況（即粒子的靜止質量就幾乎等於所有的質量）是相當可靠的。在這個情況下，從恆星的中心除去能量會導致進一步的崩陷，這又會讓中心更熱。當中心變得更熱，核反應會提供更多的能量；恆星如果要保持穩定，這些能量一定要被帶走。如果中心非常熱，以致於所能帶走的能量少於燃燒的核燃料所能提供的，則恆星就會爆炸。但是在高度相對論性的情況下，當輻射能量佔總能量的一大部分時，新的特性就會出現。在這裡，當中心失去能量而「冷卻」時，它的吸引力也會減低，因為少掉了一大部分的質量。所以或許當質量夠大的時候，沒有物理過程會導致爆炸。

我預期這個問題如果解決了，會發現當凝聚質量大過約 10^8 個太陽質量時，球形對稱的解並不會導致崩陷，而是在某個最恰當的半徑附近上下晃動。如果質量分布變成不是球形對稱的情況，則星體的一般演化就得以進行。從這個方向去思考，那麼我們或許可以解釋以下的事實：所有看得

到的恆星大小似乎都差不多。完整動力學問題的解或許可以讓我們了解均勻分布的物質如何能夠開始對稱地凝聚起來。結果可能會和凝聚質量最初的角動量息息相關。例如，在我們的太陽系中，行星帶有的角動量近乎佔總角動量的 95%。或許凝聚的質量會形成一些可以接收大部分角動量的小團塊。

15.1 許氏度規的物理拓樸性質

在上一講中，我們已經看到一些跡象指出真實的物質分布不能凝聚至比重力半徑 $2m$ 還更小的半徑內。就算我們暫時下結論說真正的物質不能形成「蟲孔」(wormhole)，我們還是留下了個問題：許氏解 (Schwarzschild solution) 是否真能代表張量 G^{μ}_{ν} 處處為零的情況？在這種狀況下，從遠處看，沒有物質能看起來像物質。所以我們現在要試著將許氏解延伸至臨界半徑 $2m$ 之內。我們猜測這麼做是有意義的，因為雖然許氏度規

$$(ds)^2 = (1 - 2m/r)(dt)^2 - \frac{(dr)^2}{(1 - 2m/r)} - r^2((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2) \quad (15.1.1)$$

在 $r = 2m$ 處看起來有個奇異點 (面)，但是曲率在那個地方仍是平滑的。而曲率在原點 ($r = 0$) 是奇異的，所以原點處一定出現了某種糟糕的事情。落入原點的太空船或許會劇烈地扭曲因為潮汐力變得無窮大——這正是奇異性 (無窮大) 曲率所暗示的那種恐怖現象。越過 $r = 2m$ 處時，(15.1.1) 式中 $(dt)^2$ 的係數與 $(dr)^2$ 的係數會改變符號，但是空間仍是 3+1 維的，所以一切感覺起來可能還算正常。

讓我們考慮在奇異點附近做空間展開。假設我們在 $r = 2m$ 附近變換座標並考慮 $d\phi = 0$ 、 $d\theta = 0$ 的平面。在奇異點附近定義一個新的變數 x

$$x = (1 - 2m/r)$$

$$\text{如果 } x \text{ 很小, } r = 2m(1+x) \quad (15.1.2)$$

$$(ds)^2 = x(dt)^2 - (2m)^2 \frac{(dx)^2}{x}$$

雖然當 x 變號時，空間也跟著變號，在 $x > 0$ 的情形我們可以變換度規使得它成為平坦度規。一個簡單的座標變換可以將度規化約成極座標的形式

$$x = R^2 \rightarrow (ds)^2 = R^2 (dt)^2 - (4m)^2 (dR)^2 \quad (15.1.3)$$

再來用以下的替換就可以將度規轉換為閔考夫斯基度規 (Minkowski metric)

$$\begin{aligned} v &= 4mR \cosh(t/4m) \\ u &= 4mR \sinh(t/4m) \\ \rightarrow (ds)^2 &= (du)^2 - (dv)^2 \end{aligned} \quad (15.1.4)$$

這些結果證明了奇異點附近的空間沒有什麼怪異之處，所以許氏奇異點 (Schwarzschild singularity) 只是我們所採用座標的問題而已。為了讓極端線 (geodesic) 平滑地跨過 $r = 2m$ 點，我們可以做以下的變換 (靈感來自(15.1.4)式)：

$$x = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = -\frac{(u^2 - v^2)}{(4m)^2}, \quad \frac{u}{v} = \tanh\left(\frac{t}{4m}\right) \quad (15.1.5)$$

以 u 和 v 為座標來看，空間與度規在 $r = 2m$ 的兩端都是平滑的。Fuller 和 Wheeler (見[FuWh62]) 已經用過類似的變換來跨過 $r = 2m$ 。從跨過 $r = 2m$ 的極端線的性質可知當粒子落入臨界半徑 $2m$ 以內的區域時 (假設造成許氏度規的質量全部都位於半徑 $2m$ 以內)，粒子會一直落下到中心，而不可能反射到任何「喉嚨」(見第十一講)另一邊的「新」空間去。這和先前關於蟲孔的猜測沒有衝突。與「喉嚨」類似的拓撲得自空間某個特定的

第十五講

切面，令 $dt=0$ 。但是真實粒子的運動並不是發生於 $dt=0$ 的子空間。我們沒有理由說 $dt=0$ 的子空間的拓樸應該對應到某種四維時空的一般性質。我們可以從一整塊固體切割出一個環形的甜甜圈來，但是一整塊固體並沒有任何「環形」可言。從物理觀點而言，重要的拓樸牽涉到極端線，而我們找不到可以穿越蟲孔的類時（time-like）極端線。

15.2 許氏場中的粒子軌道

我們想解出粒子的徑向運動，將徑向運動表為原時 s 的函數，這是有用的計算。就和一般的連心力問題一樣，徑向運動發生在單一平面上（我們假設這個平面為 $\theta = \pi/2$ 的面），而且取決於兩個參數 K 與 L 。這兩個參數和能量與角動量有關，它們是時間方程式與角方程式的初積分（first integral）如下：極端線方程式

$$\frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \quad (15.2.1)$$

在 $\nu=3,4$ （座標 ϕ, t ）時，可以很容易地積分—因為度規張量與 ϕ 或 t 無關，所以方程式的右手邊為零。我們因此定義以下的積分：

$$K = (1 - 2m/r) \frac{dt}{ds}, \quad L = r^2 \frac{d\phi}{ds} \quad (15.2.2)$$

令(15.2.1)式中的 $\nu=1$ 就得到徑向方程式，但是其實不必要這麼做。比較容易得到徑向方程式的辦法是從以下的條件出發

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1 \quad (15.2.3)$$

可以利用 L 與 K 這兩個量將(15.2.3)式明白地寫成

$$\frac{K^2}{(1 - 2m/r)} - \frac{1}{(1 - 2m/r)} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} = 1 \quad (15.2.4)$$

一個粒子從半徑 r_0 落下到半徑 r_1 所需的原時是

$$\int ds = \int_{r_0}^{r_1} dr (K^2 - (1 - 2m/r)(1 + L^2/r^2))^{-1/2} \quad (15.2.5)$$

必須注意的是在 $r = 2m$ 處並沒有糟糕的事情發生；被積分函數的行為是正常的，在 $r = 2m$ 處並沒有所謂跨接的問題。我們如果一開始就研究軌道運動，而不是度規，我們可能就不會注意到許氏奇異點，我們只要用(15.2.5)式就會得到正確的答案。

(15.2.5)式中平方根和一般軌道運動中的平方根有相同的意義。當平方根變成虛數時，積分就要中斷，所以粒子永遠跑不進（比當平方根開始變成虛數時的半徑還）更小的半徑內。如果角動量 L 夠大，平方根在半徑大於 $2m$ 的地方就會變成虛數，所以軌道的行為就和傳統牛頓萬有引力下的情形類似。反過來說，如果粒子的能量和角動量能使其跨過半徑 $2m$ ，則平方根不會變為虛數，這代表粒子會繼續落下到中心的原點。事實上，一但落進 $r = 2m$ 之內，角動量 L 較大的粒子會落下的更快，也就是「離心力」似乎是吸引力而不是排斥力。

在這裡我要提一下一些奇怪的結果：考慮一個位於原點的帶電（與質量）物體所造成的新度規（重力場）；我們可以很容易地證明，只要對許氏度規做以下的替代就可以得到（離原點很遠的）新度規

$$(1 - 2m/r) \rightarrow (1 - 2m/r + q^2/r^2) \quad (15.2.6)$$

上式中的 q 是所見到的電荷。當我們把上式代入(15.2.5)式（原時公式），可以看到如果半徑足夠小，則平方根必然是虛數，所以粒子絕不會落至原點，而永遠會反彈出來。這個反彈並不是源自粒子間的電力—它是度規的內在性質（只要這度規在半徑 r 很大之時就和位於原點的帶電粒子所造成的度規相同）。所以即便是不帶電的中性粒子在掉落到帶電荷的中心時，也會感受到排斥力。

第十五講

帶電與質量的粒子所造成的度規 ((15.2.6)式) 很明顯有兩個奇異點。研究落下粒子的軌道如何連續地通過這兩個奇異點是有用的事。如果我們發現以下奇怪的事也不是不可能的：粒子在它落下之前就已經反射出來！我之所以這麼猜的原因是落下的粒子會花上無窮大的時間（對於位於外面的觀測者而言）才能到達第一個奇異點，然而整個軌道的進與出對於粒子本身而言只需用上有限的時間。

15.3 幾何動力學 (geometrodynamics) 的未來

我們討論了很多關於許氏解的問題，這其實是我們還沒有徹底了解這個理論的跡象。我們現在應該轉到其他問題了，但是我還是要告訴你——但我們研究了整個理論之後，我猜最後的答案到底是什麼。原先 Wheeler 教授關於「蟲洞」的猜測是基於以下的點子：我們或許可以建構出愛因斯坦方程式 $G^{\mu}_{\nu} = 0$ (G^{μ}_{ν} 處處為零) 的解，而這個解的行為看起來就像是帶有真的質量。蟲洞的拓樸性質在直覺上是很清楚的，那就是如果電場從某處進入蟲洞然後在從另一個地方出來，這個情況正好對應到存在著大小相等的正負電荷。雖然我們已經證明極端線空間的拓樸和蟲洞不一樣，但是將物質與電荷看成是空間拓樸的顯現這一想法是很漂亮且令人振奮的。這個想法絕對沒有僅因還沒個恰當的數學架構而變得毫無意義。 G^{μ}_{ν} 處處為零這個想法的確很漂亮，因此以近來描述幾何動力學的話來說，就是「物質來自無物質，電荷來自無電荷」。

我們的下一步就是研究許氏解在原點 $r = 0$ 的性質。我猜我們無法證明 G^{μ}_{ν} 處處為零，而是 $G^{\mu}_{\nu} = \delta(x)$ 或是類似的東西。我們得進一步研究才能解釋電荷的行為；我相信最後會發現原點的「排斥力」是個錯誤的結論，大致上是因為點電荷這個假設是個矛盾的假設。點電荷的能量密度和 E^2 也就是 $1/r^4$ 成正比，所以在任何有限半徑內的質量都是無窮大的。如果裡面的質量不是無窮大，我們一定會有類似以下的式子

$$\text{裡面的質量} = (\text{常數}) - \frac{q^2}{2r} \quad (15.3.1)$$

如果我們不希望在任何半徑內發現有負質量，則我們就不准進入半徑為 a 的區域內， a 的大小取決於公式(常數) $= q^2/2a$ 。如果質量不僅僅是源自電磁場，這個常數的大小就沒有受到限制。在半徑 a 之外，重力場與重力位勢

$$\text{場} = -\frac{q^2}{2r^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right), \quad \text{位勢} = \frac{q^2}{2r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2r} \right) \quad (15.3.2)$$

只要選定一個不是無窮大的常數，我們就不會得到排斥力。如果選用 (15.1.4) 式中的 u 和 v 座標，整個真實的世界就只包含在座標的一個子區域裡，而且落下的粒子的軌道會在 $r=0$ 撞上障礙 (barrier)。原先位於 $r = m + \sqrt{m^2 - q^2}$ 的間隙 (gap) 有些令人擔心，這間隙對應到空間中行為完全正常的區域；落下粒子的軌道 (極端線) 在這裡甚至沒有任何扭曲 (見圖 15.1)。如果讓電荷質量越來越小，這種情形的幾何會是什麼樣子是很值得研究的。

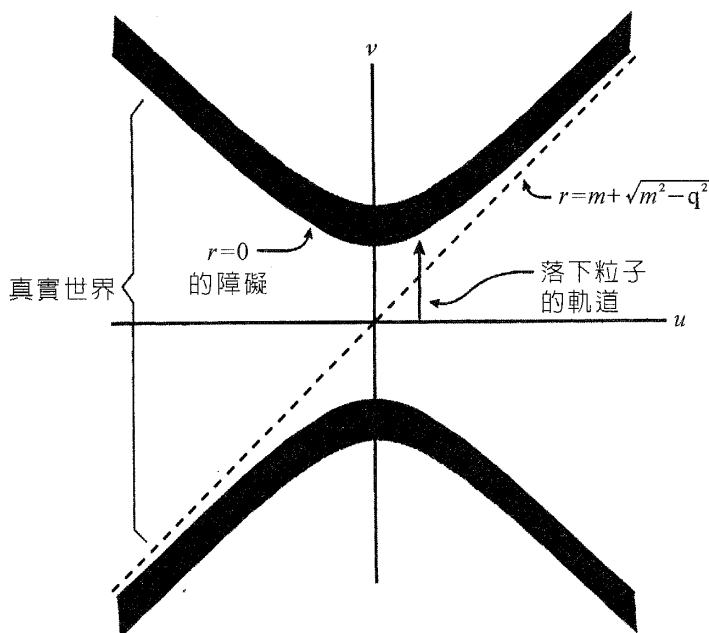


圖 15.1

第十五講

Wheeler 和其合作者所發展的幾何動力學雖然還沒有獲得任何定量的結果，但仍可能發展出很有創意的想法，最後導致非常成功的物理。我們必須讚揚 Wheeler 的功勞，因為他真正了解我們目前的理論有那些特色是還沒有經過探索而且也是有發展前途的。我當過他的助理，那時候我多次獲益於讓他知道答案在什麼方向的那種天才直覺。有一次我想要建構一種古典電動力學，其中的電荷只會和其他電荷有交互作用，而不是和場有交互作用—我覺得場應該消失掉，它的角色只在於幫我們掌握延遲效應（retardation）。一切都進行的很順利，直到我得解釋輻射反作用力（radiation reaction）的由來—加速粒子在電磁場行進到其他電荷然後返回來之前就以感受到這個輻射反作用力。當我告訴 Wheeler 教授這個問題時，他說「你為什麼不利用超前位勢（advanced potential）？」超前位勢？那是每個人都丟掉的無用東西。它顯然沒有物理意義—提議超前位勢有物理意義是很了不起的大膽想法。但是過了一些時候，我們建構出了用到超前位勢的數學理論—在我們的電動力學中電荷只會和其他電荷有交互作用，我們所用的位勢是一半超前位勢與一半延遲位勢的組合。

有一次我在半夜接到他的電話，他說：「我知道為什麼所有的電子與正子的電荷大小都一樣了！」然後他繼續解釋：「它們都是同一個電子！」他的想法是如果同一個物體有一條非常複雜的世界線，那麼當我們從「現在」這個子空間來看它的時候，我們會看到它出現在很多地方（見圖 15.2）。後來，我把這個想法的數學弄得更清楚一些，把正子解釋成逆著時間走電子，並發展出簡單的方法可以用於計算牽涉到消滅與創造電子正子對的矩陣元素。如果蟲洞以及幾何動力學的想法可以發展的更為完美，以增進我們對於自然的理解，那就太美妙了。因為我認得 Wheeler 教授，所以如果有一天他的直覺被證實了，在我看來並非不可能的事。

談了當前這些很有意思的問題，我們就結束關於古典重力論的討論。

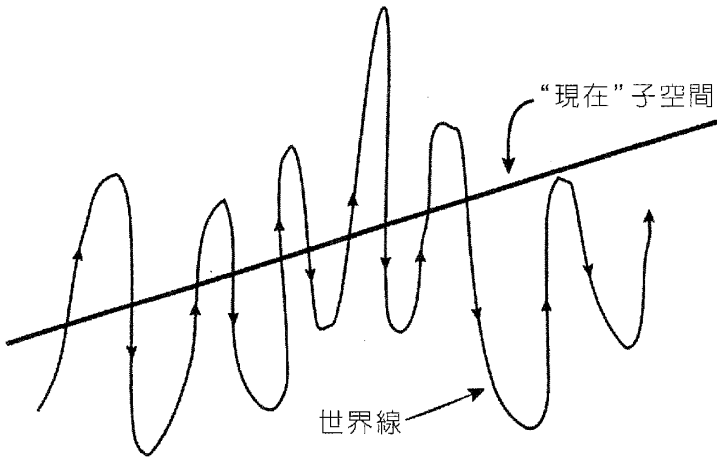


圖 15.2

16.1 物質場與重力的耦合 (coupling)

在第十講中，我們已經寫下了描述自由粒子與場的作用量，完整的作用量還欠的就是各種場之間的耦合。有了完整的作用量，我們就可以開始用微擾法計算各種物理過程。我們不需要為了使用微擾法而抱歉，因為重力比其他場還要弱，而微擾法對於其他場的預測是非常精確的。我們已經知道的作用量是：

$$-\frac{1}{2\lambda^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2) - \alpha \int d^4x \sqrt{-g} R \phi^2 \quad (16.1.1)$$

為了簡化理論，我們首先將係數 α 設為零。如果這一項留在作用量裡，在一般情況下（我們以後會碰到的）發散的問題會更嚴重，而且增加計算所需的功夫。以目前實驗的情況而言，任何的係數都是可能的；我們選擇最能簡化計算的係數。第二步是找出代表場傳播子的項，方法是利用以下的展式：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu} \quad (16.1.2)$$

如果用上式中的場 $h_{\mu\nu}$ 以及純量場 ϕ 來表示作用量，我們會得到

$$\text{作用量} = \int d^4x F^2[h_{\mu\nu}] + \int d^4x I[h_{\mu\nu}, \phi] + \int d^4x M[\phi] \quad (16.1.3)$$

其中

$$F^2[h_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} [h^{\mu\nu, \lambda} \bar{h}^{\mu\nu}{}_{, \lambda} - 2\bar{h}^{\mu\nu}{}_{, \lambda} \bar{h}^{\mu\nu}{}_{, \nu}]$$

$$M = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \phi_{, \mu} \phi_{, \nu} - m^2 \phi)$$

函數 I 對於場 $h_{\mu\nu}$ 或 ϕ 的變分代表場微分方程式中的場源項 (source term)。這些項可以 (用空間與動量表示法 (space representation, momentum representation)) 寫成以下的形式：

$$\square^2 \phi - m^2 \phi = -\left(\frac{\delta I}{\delta \phi}\right) \rightarrow \phi = -\frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} I\left(\frac{\delta I}{\delta \phi}\right)$$

$$-h_{\mu\nu, \lambda}{}^{, \lambda} + \bar{h}_{\mu\lambda, \nu}{}^{, \lambda} + \bar{h}_{\nu\lambda, \mu}{}^{, \lambda} = \lambda \bar{S}_{\mu\nu} \quad \text{其中} \quad S^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\delta I}{\delta h_{\mu\nu}}\right) \quad (16.1.4)$$

請注意 $S_{\mu\nu}$ 就是我們在第六講 ((6.1.2)式) 中稱為^新 $T_{\mu\nu}$ 的東西。下一步該怎麼走？因為原先已透過仔細的設計，所以作用量是一個不變積分量；我們可以證明場源張量 $S_{\mu\nu}$ 的一般散度為零。在動量表示法裡，

$$k^\nu S_{\mu\nu} = 0 \quad (16.1.5)$$

場源張量包含了物質源與重力源。因為我們可以隨意選擇一個規範 (gauge)，所以我們可以讓 (上面加槓的) 張量 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 的散度為零。因此我們得到一個解

$$k^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \rightarrow k^2 h_{\mu\nu} = \lambda \bar{S}_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = \frac{\lambda}{k^2 + i\epsilon} \bar{S}_{\mu\nu} \quad (16.1.6)$$

第十六講

我們對於右手邊的場源張量並非一無所知，它現在可明確地從作用量(16.1.1)以及展式(16.1.2)定義出來，所以方程式是沒有矛盾的而且能量是守恆的。一但我們有了一個對於耦合常數 λ 的幕次展式，就可以開始用熟悉的微擾規則去計算至某一階的所有（費曼）圖。最關鍵的是 $g^{\mu\nu}$ 與 $\sqrt{-g}$ 的展式。前一種情形的展式和 $(1+x)^{-1}$ 這個函數於 x 很小之時的展式類似，所以很容易得到以下的式子：

$$g^{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu})^{-1} = \eta^{\mu\nu} - 2\lambda h^{\mu\nu} + 4\lambda^2 h^\mu{}_\beta h^{\beta\nu} - 8\lambda^3 h^{\mu\beta} h_{\beta\tau} h^{\tau\nu} + \dots \quad (16.1.7)$$

此處我們必需記得平坦空間中的累加約定（summation convention）—參見(4.1.6)式。 $\sqrt{-g}$ 的公式可以用第六講中的技巧來計算。利用(6.3.11)式以及

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\beta} (\delta^\beta{}_\nu + 2\lambda h^\beta{}_\nu)$$

我們就得到

$$\begin{aligned} & \sqrt{-\text{Det } g_{\mu\nu}} \\ &= \sqrt{-\text{Det } \eta_{\mu\beta}} \exp\left[\frac{1}{2} \text{Tr} \log(\delta^\beta{}_\nu + 2\lambda h^\beta{}_\nu)\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{2} \text{Tr}(2\lambda h^\beta{}_\nu - \frac{1}{2}(2\lambda)^2 h^\beta{}_\tau h^\tau{}_\nu + \frac{1}{3}(2\lambda)^3 h^\beta{}_\tau h^\tau{}_\sigma h^\sigma{}_\nu + \dots)\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}(2\lambda h^\beta{}_\beta - \frac{1}{2}(2\lambda)^2 h^\beta{}_\tau h^\tau{}_\beta + \frac{1}{3}(2\lambda)^3 h^\beta{}_\tau h^\tau{}_\sigma h^\sigma{}_\beta + \dots)\right] \\ &= 1 + \lambda h^\beta{}_\beta - \lambda^2 (h^\beta{}_\rho \bar{h}^\rho{}_\beta) + \dots \end{aligned} \quad (16.1.8)$$

把以上 $\sqrt{-g}$ 與 $g^{\mu\nu}$ 的展式代入作用量裡就得到物質與重力耦合的明確形式；例如(16.1.1)式中的第二項就成為

$$\begin{aligned}
 S_m &= \frac{1}{2} \int [(\eta^{\mu\nu} - 2\lambda h^{\mu\nu} + (2\lambda)^2 h^{\mu\beta} h_{\beta}^{\nu} + \dots)(\phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) - m^2 \phi^2] \\
 &\quad (1 + \lambda h^{\rho}_{\rho} - \lambda^2 (h^{\sigma}_{\rho} \bar{h}^{\rho}_{\sigma}) + \dots) d^4 x \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4 x (\phi^{,\mu} \phi_{,\mu} - m^2 \phi^2) - \lambda \int d^4 x h^{\mu\nu} [\overline{\phi_{,\mu} \phi_{,\nu}} + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \eta_{\mu\nu}] \\
 &\quad - \lambda^2 \int d^4 x [\frac{1}{2} h^{\lambda}_{\rho} \bar{h}^{\rho}_{\lambda} (\phi^{,\mu} \phi_{,\mu} - m^2 \phi^2) - 2 h^{\mu\rho} \bar{h}_{\rho}^{\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}] \quad (16.1.9)
 \end{aligned}$$

最低階項牽涉到兩個 ϕ 與一個 h ，這一項對應到圖 16.1(a) 所示的頂點 (vertex)。我們要求線性動量在每一個頂點都得是守恆的。這個規則來自作用量中的體積積分—除非被積分函數的總相位等於零，否則積分值就為零。我們將平面波寫成：

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{iq \cdot x}, \quad \phi = e^{ip \cdot x} \quad (16.1.10)$$

其中的 $e_{\mu\nu}$ 是極化張量 (polarization tensor)，則第一階頂點的 (機率) 振幅就是

$$-2\lambda [e^{\mu\nu} p_{\mu}^2 p_{\nu} - \frac{1}{2} e^{\rho}_{\rho} (p_{\tau}^2 p^{\tau} - m^2)] \quad (16.1.11)$$

現在我們可以計算任何僅牽涉到這類頂點的 (費曼) 圖—只要將適當的振幅代入每個頂點，以及將粒子與重力子的傳播子放入頂點之間，就如量子電動力學那般。

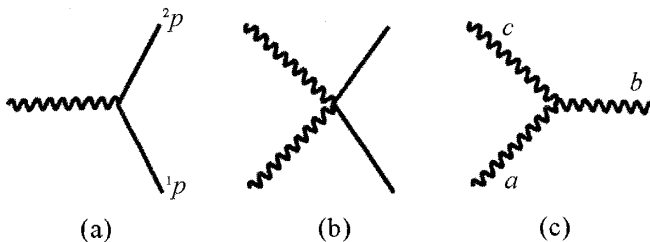


圖 16.1

第十六講

我們現在考慮下一階。(16.1.9)式中有兩個 h 與兩個 ϕ 的乘積項，所以有一種頂點是兩條直線與兩條曲線的交會，見圖 16.1(b)。(16.1.1)式中第一項的展式也包括了三個 h 的乘積項，這種項對應到三條曲線交會在一起的圖，見圖 16.1(c)。如果我們想寫下圖 16.1(c)所對應的代數式，會發現這個式子很長，因為牽涉到三個重力子的指標的各種和。譬如說，其中一項是 $h_{\mu\nu,\beta} h^{\mu\beta} h^{\nu\alpha}$ ，當我們用動量與極化張量分量將其表示出來，會得到對應於三個重力子各種排列的項，例如

$${}^a q_\beta {}^a e_{\mu\nu} {}^b e^{\mu\beta c} q_\alpha {}^c e^{\nu\alpha} + {}^b q_\beta {}^b e_{\mu\nu} {}^a e^{\mu\beta c} q_\alpha {}^c e^{\nu\alpha} + {}^c q_\beta {}^c e_{\mu\nu} {}^b e^{\mu\beta a} q_\alpha {}^a e^{\nu\alpha} + \dots \quad (16.1.12)$$

單一個頂點只是機率振幅的一半而已，就已經這麼複雜。當我們把這些頂點合併起來，例如計算圖 16.2(a)所示的（費曼）圖，我們的式子會有多達 108 項。

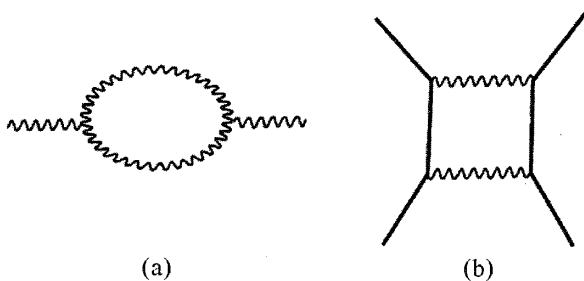


圖 16.2

16.2 完整的理論：重力輻射的一個簡單例子

在前幾節中，我們已經大致描述了一個完整的理論，剩下的就是利用和量子電動力學中一樣的規則，開始計算任何物理過程所對應的（費曼）圖。在第四講中，我們已經算過一些最簡單的圖，例如(4.3.5)式是交換一個重力子的散射振幅。實際上，我們必需小心地將所得的式子對稱化，不過只要一點練習就很容易這麼做，同時「上面加槓」的縮寫符號對於避免複雜代數很有用。

有了這些說明，最低階的理論算是完備了。所有由「樹」圖所代表的過程都沒有困難——所謂「樹」圖就是沒有包括泡（bubble）與封閉環圈（closed loop）的圖，如圖 16.2。「樹」圖這名字顯然來自樹枝不會分岔又結合起來這一事實。

在更高階，當我們允許圖中有泡與封閉環圈時，這個理論就不對勁了，因為我們會得到可笑的答案。目前能夠解決這個問題的方法還只能處理一個圈的麻煩。為了討論這個方法，我們最好先研究楊（振寧）—密爾斯（Yang-Mills）向量介子理論，因為它比較簡單而又有同樣的困難。有些困難與某些圖的和缺乏么正性（unitarity）有關。我們將討論不同圖之間的一些關係。我們不能從重力實驗直接檢驗這些結果，不過有些結果可以在其他場論的研究中看得到。

我不知道是否可以找到對付多圈圖的辦法。我懷疑找不到——換言之，我猜測這個理論不是可重整（renormalizable）理論。不可重整化這一性質是否足以構成反對這理論的重要理由？我不知道。

我們所要研究的最有趣問題或許是重力波輻射問題。第一個例子是某個適合的粒子衰變後輻射出一個重力子。既然我們使用純量物質理論，或許最好設想某個純量粒子的衰變，例如 $K \rightarrow 2\pi$ 。發射一個低頻率的重力子是必要的，以使用重力的方式告訴外在世界衰變已經發生，就好像在類似的衰變中會輻射出低能量光子，因為電荷在加速。我們可以畫下很多圖，包括重力子直接來自衰變頂點的圖，但是這種貢獻通常比較小，所以我們一開始不必考慮它。我們可以計算圖 16.3 中的最後三個圖，這是有用的練習。

16.3 粒子衰變時的重力子輻射

重力子與物質的耦合非常微弱，想觀察到粒子反應中的量子重力效應是沒有希望的，所以我們即將要做的計算絕對沒有實際用處。雖然如此，我們已經提出了一個明確的理論，而這些觀察不到的過程是理論所預測的最簡單效應；如果耦合強一點的話，這些效應就不但觀察的到而且是重要的。

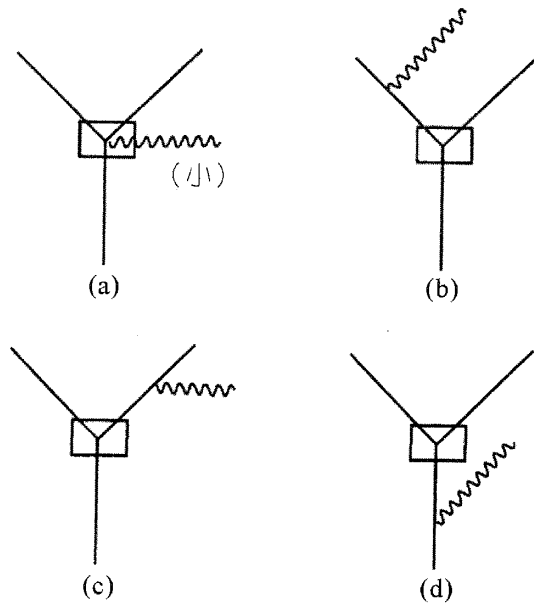


圖 16.3

粒子衰變時有很多只牽涉到一個重力子的圖。為了示範起見，我們拿圖 16.4， $a \rightarrow b+c$ ，為例。 a 粒子與重力子頂點的振幅是

$$-2\lambda e^{\mu\nu} \left[{}^1 p_\mu {}^2 p_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} ({}^1 p_\alpha {}^2 p^\alpha - m^2) \right] \quad (16.3.1)$$

上式中的上標 1 和 2 所指的是頂點之前與之後的物質粒子。在發射後，粒子 a 以動量 $({}^a p - k)$ 傳播到衰變頂點，所以 ${}^2 p^\alpha = ({}^a p - k)^\alpha$ 。如果我們用 A 這個量代表衰變振幅， A 取決於進入「黑盒」（即圖 16.4 中的方黑盒）的三個粒子 (a, b, c) 的動量，則振幅的式子是

$$-2\lambda e^{\mu\nu} \left[{}^a p_\mu ({}^a p - k)_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} ({}^a p \cdot ({}^a p - k) - m_a^2) \right] \\ \frac{1}{({}^a p - k)^2 - m_a^2} [A({}^a p - k, {}^b p, {}^c p)] \quad (16.3.2)$$

對我們的目標而言，振幅 A 的精確性質並不重要，它所代表的是沒有重力子時的一切情形。

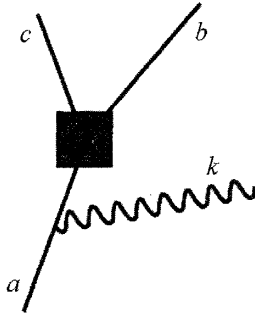


圖 16.4

只有當傳播子的值很小時，也就是如果 k 比 ${}^a p$ 小很多使得傳播子對應到近乎自由的粒子時，(16.3.2)式所代表的振幅才會大。如果重力子很弱，這個極限狀況就類似於制動輻射（braking radiation 亦稱 bremsstrahlung）出弱光子；它也和古典極限息息相關，因為它取決於電荷（質量）如何運動。(16.3.2)式的分母是 $-2 {}^a p \cdot k$ ，當 k 的頻率 ω 非常小時，我們可以將分子的 k 設為零。如果將因子 λ/ω 提出來，除了 A 之外，振幅還包括一項，這一項在 ω 非常小的情況下，有個只取決於重力子方向與偏振的極限值，所以總振幅就是

$$\frac{\lambda}{\omega} \cdot \frac{e^{\mu\nu} {}^a p_\nu {}^a p_\mu}{{}^a p \cdot k / \omega} \cdot A({}^a p, {}^b p, {}^c p) \quad (16.3.3)$$

總共有三個類似的圖，分別代表三個粒子(a, b, c)其中任何一個發射出重力子。還有一個圖對應到重力子直接離開「黑盒」，這個圖的值與前三個圖相比要小很多，原因是沒有幾乎自由的粒子在傳播，所以沒有「小」分母可以「增強」振幅。如果我們忽略這一個圖以及其他高階圖，則發射重力子的振幅就是

第十六講

$$\frac{\lambda}{\omega} \cdot a \cdot A(a p, b p, c p) \quad (16.3.4)$$

$$a = \sum_i^i p_\mu^i p_\nu^i (-)_i \frac{e^{\mu\nu}}{i p \cdot (k/\omega)}$$

上式中的 i 代表連接到重力子頂點 (graviton vertex) 的粒子，而 $(-)_i$ 是一個因子，對於入射粒子而言等於 +1，對於射出粒子而言等於 -1。 a 這個量是一個運動學與幾何的因子。如要計算單位時間內此過程發生的機率，我們只要取振幅的平方，再加上狀態密度 (density of state) $k^2 dk d\Omega / 2(\pi)^3$ 這個因子，以及一個歸一化因子 (normalization factor) $\pi / (2E_i)$ ，這裡的 E_i 代表每個粒子的能量。總結果是

$$P = a^2 \frac{d\Omega d\omega}{4\pi \omega} \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \quad (16.3.5)$$

上式代表每次衰變會放出重力子的機率。 λ^2 這個非常小的因子使得機率極小，以致於在任何雲霧室 (cloud chamber) 或氫室 (hydrogen chamber) 或電花室 (spark chamber) 所紀錄到的衰變事例中幾乎不可能看到重力子釋放出來。如果重力子能量極低， $1/\omega$ 這個因子會讓機率增大；但是實際上這個因素沒有什麼效應，因為只有當重力子的波長超過宇宙半徑約 10^{39} 倍時， λ^2/ω 才會接近 1。

雖然我們的理論假設了純量 (自旋為零) 粒子，在低能量極限下，無論粒子的自旋為何答案都是相同的。這是因為在低能極限下，只有質量流 (mass current) (也就是質量的運動) 才重要。我們的答案當然有紅外發散，所以放射一個重力子的機率似乎是無窮大的 (如果不考慮能量)。但是這個問題並不比放射一個低能量光子的紅外發散來得嚴重，而且我們可以用和處理低能制動輻射同樣的技巧來解決這個 (低能量重力子) 問題。

16.4 粒子散射中的重力子輻射

當兩個粒子以任何交互作用（包括交換重力子）散射時，低能量的重力子可能發射出來。第一階的費曼圖有三種，見圖 16.5。在低能量極限，只有(a)類圖，也就是重力子頂點連接到自由粒子，才重要。如果重力子動量 k 比動量轉移（momentum transfer） q 要小很多，則另兩種過程的機率就很小。例如在(b)中，沒有近乎自由的粒子在傳播，所以就沒有小的分母；在(c)中，第二個傳播子是 $1/(q-k)^2 \approx 1/q^2$ 。對於重力子輻射來說，整個散射過程的交互作用形式並不重要。我之所以強調最後這一點是因為總有些物理學家喜歡到處扯一些奇怪的理由宣稱如果造成散射的交互作用是重力作用則輻射不會發生—這種看法沒有絲毫根據；對我們來說，重力波的輻射是非常真實的；「太陽—地球」的旋轉一定是重力波源。事實上，我們這一節裡或許應該只注意粒子散射，因為對於大物體（例如行星或恆星）的運動而言，用古典極限（理論）來研究更為適合。我們不能永遠忽略重力—只有在原子碰撞過程中才可以。

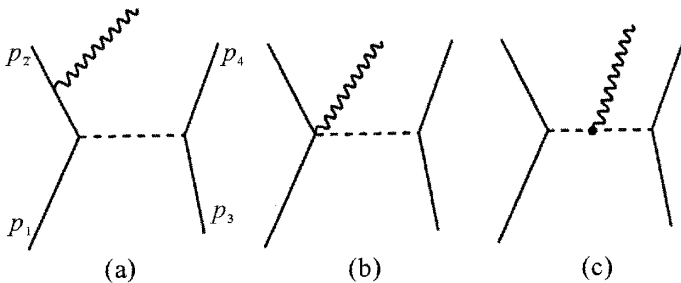


圖 16.5

類似圖 16.5(a)的費曼圖有四個，這四個振幅的結構和粒子衰變中的情形一樣。如果用張量 e 來描述重力子偏振，則總振幅就正比於沒有重力子的散射振幅乘上某些能量因子，再乘上以下的量

$$a = \sum_i (-) i \frac{p \cdot e \cdot i v}{1 - i v \cos \theta} \quad (16.4.1)$$

第十六講

(16.4.1)式中的分母來自乘積 $i p \cdot k = E\omega - \vec{p} \cdot \vec{k}$ ；括弧裡的因子就是分母，因為 $\vec{p} = E\vec{v}$ ；上標 i 所指的是碰撞圖中四個粒子中的任何一個。(16.4.1)式的分子則包括偏振張量 $e_{\mu\nu}$ 和（與重力子耦合的粒子的）兩個動量（碰撞之前與之後動量）的收縮（contraction）乘積—這兩個動量是唯一能從純量粒子建構出來的物理二階張量。

我們所得到的答案和輻射光子的情況很類似：最基本的區別在於電磁交互作用是一種向量耦合，而重力是一種張量耦合。如果粒子的速度很快， $v \approx c$ ，(16.4.1)式的分母就可能很小，振幅在 $\theta_i \approx 0$ 時會變的很大。反過來說，偏振張量就一定垂直於重力子動量，在電磁交互作用中，偏振向量也是垂直於光子動量；(16.4.1)式的分子只有一個內積（dot product），所以如果 θ 很小，同時 $v \approx c$ ，

$$a_{e.m.} \rightarrow \frac{p \cdot e}{1 - v \cos \theta} \propto \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \approx \frac{2}{\theta} \quad (16.4.2)$$

所以如果角度很小，光子輻射的機率會很大。這個機率不會變成無窮大，因為 v 不會真的等於 c 。對應到單一個粒子的輻射強度的圖形是兩瓣葉的形狀，見圖 16.6。重力交互作用是張量耦合，所以它有加倍的橫向分量；在 $\theta \rightarrow 0$ ， $v=1$ 的極限下

$$a_g \rightarrow \frac{p \cdot e \cdot p}{1 - v \cos \theta} \propto \frac{\sin^2 \theta}{1 - v \cos \theta} \approx 2 \quad (16.4.3)$$

所以輻射強度的圖形並非很強烈的向前傾，而是大致而言比較均勻，見圖 16.6(b)。兩者的區別可以用以下的直覺去理解：自旋 2 的粒子一旦產生出來，比自旋 1 的粒子需要更多的「橫向性（transversality）」。

散射問題中的粒子牽涉到四個方向，每個方向都有個振幅，這振幅的角度結構和圖 16.6(b)所呈現的相同。重力發射強度是四個振幅之和的平方，所以一般而言，這強度是相當對稱的。

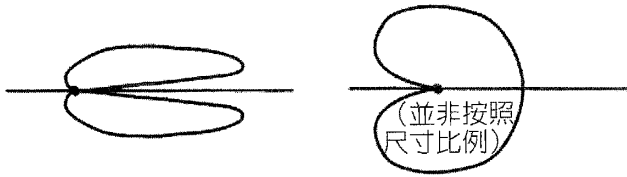


圖 16.6

對於速度較低 ($v \ll c$) 的粒子來說，基本上分母的角色並不重要，輻射的圖形主要決定於分子。分子可以表示成兩個張量的收縮乘積。

$$\sum_i (-)^i p \cdot e \cdot {}^i v = e^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = x, y, z \quad (16.4.4)$$

$$S_{\alpha\beta} = \sum_i (-)^i p_\alpha v_\beta$$

輻射的特徵完全取決於張量 $S_{\alpha\beta}$ ，這張量代表碰撞所產生的應力。我們看到 $S_{\alpha\beta}$ 的形式正好和運動中流體的應力類似。

$$\text{應力} = \rho v_\alpha v_\beta \quad (\rho = \text{質量密度}) \quad (16.4.5)$$

如果兩個粒子相碰撞，應力張量 $S_{\alpha\beta}$ 有一個可以用碰撞粒子平均速度（碰撞之前與之後）來表示的簡單形式。令動量轉移為 $Q = p_2 - p_1 = p_4 + p_3$ （見圖 16.5）。寫下平均速度。

$$v = (p_2 + p_1)/2m, \quad v' = (p_3 + p_4)/2m' \quad (16.4.6)$$

我們很容易證明，在適當的對稱化之後，可以用這些組合將張量 $S_{\alpha\beta}$ 表示成

$$S_{\alpha\beta} = 2(v' - v)_\alpha Q_\beta \quad (16.4.7)$$

有了這些公式，我們現在可以回答一個有趣的問題：如果輕重兩個粒子相撞，那一個的輻射較多。公式告訴我們如果 $v' \ll v$ ，輻射只取決於

第十六講

v 。考慮來自一個輕粒子與一個重粒子間掠射碰撞 (glancing collision) 的輻射，我們現在知道可以將重粒子看成是永遠靜止的。只要加速度幾乎與速度垂直，我們就可以用這個規則，所以 $\vec{Q} \cdot \vec{v} \approx 0$ 。

這些公式適用於彈性與非彈性碰撞，碰撞後的兩個（或一個）粒子會處於激發態。

16.5 古典重力波源

我們現在考慮古典重力輻射。就和量子力學的情況類似，我們會發現重力輻射的發射源也是應力張量。我們的出發點是微分方程式

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = \lambda S_{\mu\nu} \quad (16.5.1)$$

這個方程式求解的步驟和電動力學裡解出（任意電流所造成的）向量位勢的方法完全相同。假設所有的量的時間變化是諧和振盪，亦即 $\exp(-i\omega t)$ ，則向量位勢是

$$A_\mu(1) = \int dV_2 \frac{j_\mu(2) \cdot \exp(i\omega r_{12})}{4\pi r_{12}} \quad (16.5.2)$$

其中的指標 1、2 所指的是不同的空間位置。(1)是我們計算位勢 A_μ 的地方，(2)是電流所在的地方， r_{12} 是兩者間的距離。最簡單的輻射之一是振盪偶極(dipole)，在這個情況下電流受局限在一小區域中。我們可以直接地計算空間分量 A_x 、 A_y 、 A_z ；至於時間分量，或者說純量位勢，最方便的計算辦法是利用 A_μ 的發散條件

$$A^\mu{}_{,\mu} = 0 \rightarrow i\omega A_t = \nabla \cdot \vec{A} \quad (16.5.3)$$

重力的情形也是完全一樣。場 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 的時間部分最容易得自發散條件，不過我們得先用以下的規則計算空間部分

$$\bar{h}_{\mu\nu}(1) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int dV_2 S_{\mu\nu}(2) \frac{\exp(i\omega r_{12})}{r_{12}} \quad (16.5.4)$$

如果要計算所輻射出的功率等物理量，我們讓點(1)位於很遠的地方，所謂很遠的意思就是點(1)遠離 $S_{\mu\nu}(2)$ 還算大的區域，見圖 16.7。我們可以将 r_{12} 展成 r_1 與 r_2 的冪級數 (r_1 與 r_2 是點(1)與點(2)和原點的距離，原點位於點(2)附近)：

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta} = r_1 \sqrt{1 - (2r_2/r_1) \cos\theta + \dots} \\ &\approx r_1 - r_2 \cos\theta + \dots \end{aligned} \quad (16.5.5)$$

上式在 $r_2 \ll r_1$ 時成立。角 θ 是 r_1 與 r_2 間的夾角。既然在點(1)所觀測到的任何波其動量都是沿著 r_1 方向，我們就得到以下 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 的公式

$$\bar{h}_{\mu\nu}(1) = -\frac{\lambda}{4\pi r_1} e^{i\omega r_1} \int d^3 r_2 S_{\mu\nu}(2) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_2} \quad (16.5.6)$$

上式中的積分現在就和點(1)無關；由此可見應力張量 $S_{\mu\nu}(2)$ 是球面波的波源。

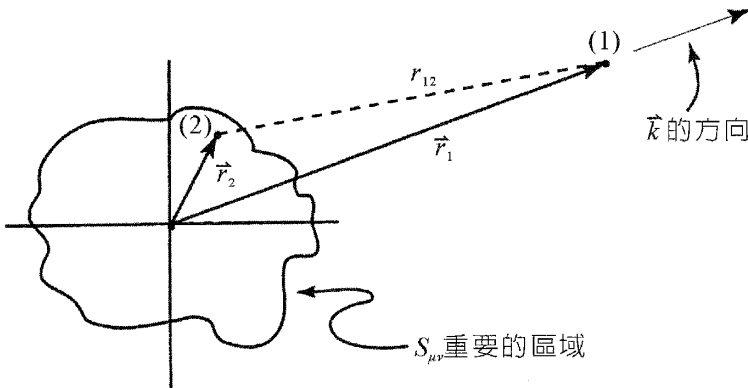


圖 16.7

第十六講

在電動力學裡，最簡單的輻射經常對應到偶極近似（dipole approximation），這一項是將(16.5.6)式中的指數展開後，所得到一串積分中第一項不為零的項。因為重力場源是一個張量而非向量，在重力的情形，第一項不為零的項有四極（quadrupole）的特性。如果頻率使得在 $S_{\mu\nu}$ 不可忽略的區域中， $\vec{k} \cdot \vec{r}_2$ 小於 1，那麼上面所提的展開就是合理的。對於所有的旋轉質量（例如雙星（double star）或恆星—行星系統）來說，運動的週期（對於地球—太陽系統約是 1 年）比重力傳播過系統大小的時間（對於地球—太陽系統約是 16 分鐘）長很多，所以展開式的各個項變小的很快。所以幾乎所有在天文上有意思的情況中，波長比物體的大小要長很多。結果是場 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 和橫向應力的積分（總橫向應力）成正比：

$$\bar{h}_{ab} = -\lambda \frac{e^{i\omega r}}{4\pi R} S_{ab} \quad \text{其中} \quad S_{ab} = \int d^3r S_{ab}(\vec{r}) \quad (16.5.7)$$

沿著波向量（wave vector）方向的應力是不重要的。電動力學中有用的定性規則可以挪用到重力的情形。

這種波所輻射的功率是什麼？有很多人不必要的在擔心這個問題，因為有個永遠的偏見認為重力不知怎麼地是神秘的、不同的——他們感覺或許重力波並不帶有任何能量。我們可以明確地證明這些重力波會讓一堵牆熱起來，所以重力波帶有能量是毫無疑問的。這個情況和電動力學一樣，而且在量子的詮釋中，每個輻射的重力子攜帶能量 $\hbar\omega$ 。

參考文獻

LECTURES ON GRAVITATION

- [Alva 89] Alvarez, Enrique (1989). "Quantum gravity: an introduction to some recent results," *Reviews of Modern Physics*, **61**, 561-604.
- [Asht 86] Ashtekar, A. (1986). "New variables for classical and quantum gravity," *Physical Review Letters*, **57**, 2244-2247.
- [Asht 87] Ashtekar, A. (1987). "A new Hamiltonian formulation of general relativity," *Physical Review D*, **36**, 1587-1603.
- [Baad 52] Baade, Walter (1952). "Report of the Commission on Extragalactic Nebulae," *Transactions of the International Astronomical Union*, **8**, 397-399.
- [Bard 65] Bardeen, James M. (1965). "Stability and dynamics of spherically symmetric masses in general relativity," unpublished Ph.D. thesis, California Institute of Technology.
- [BBIP 91] Balbinot, Roberto, Brady, Patric R., Israel, Werner, and Poisson, Eric (1991). "How singular are black-hole interiors?" *Physics Letters A*, **161**, 223-226.
- [Birk 43] Birkhoff, G. (1943). "Matter, electricity, and gravitation in flat space-time," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, **29**, 231-239.
- [BTM 66] Bardeen, James M., Thorne, Kip S., and Meltzer, David W. (1966). "A catalog of methods for studying the normal modes of radial pulsation of general relativistic stellar models," *Astrophysical Journal*, **145**, 505-513.
- [Bond 57] Bondi, Hermann, "Plane gravitational waves in general relativity," *Nature*, **179**, 1072-1073.

- [BoDe 75] Boulware, David G. and Deser, Stanley (1975). "Classical general relativity derived from quantum gravity," *Annals of Physics*, **89**, 193-240.
- [Cart 28] Cartan, Elie (1928), *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, Memorial des Sciences Mathématiques, Fascicule IX (Gauthier-Villars, Paris, France).
- [Chan 64] Chandrasekhar, S. (1964). "Dynamical instability of gaseous masses approaching the Schwarzschild limit in general relativity," *Physical Review Letters*, **12**, 114-116.
- [ChHa 82] Chandrasekhar, S. and Hartle, James B. (1982). "On crossing the Cauchy horizon of a Reissner-Nordström black hole," *Proceedings of the Royal Society of London A*, **384**, 301-315.
- [Cock 65] Cocke, W. John (1965). "A maximum entropy principle in general relativity and the stability of fluid spheres," *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **A 2**, 283-306.
- [Dese 70] Deser, Stanley (1970). "Self-interaction and gauge invariance," *General Relativity and Gravitation*, **1**, 9-18.
- [Dese 87] Deser, Stanley (1987). "Gravity from self-interaction in a curved background," *Classical and Quantum Gravity*, **4**, L99-L105.
- [DeWi 57] DeWitt, Ceclie M. (1957). *Conference on the Role of Gravitation in Physics* at the University of North Carolina, Chapel Hill, March 1957; WADC Technical Report 57-216 (Wright Air Development Center, Air Research and Development Command, United State Air Force, Wright Patterson Air Force Base, Ohio).
- [DeWi 67a] DeWitt, Bryce S. (1967). "Quantum theory of gravity, II," *Physical Review*, **162**, 1195-1239.
- [DeWi 67b] DeWitt, Bryce S. (1967). "Quantum theory of gravity, III," *Physical Review*, **162**, 1239-1256.
- [DeWi 94] DeWitt, Bryce S. (1994). Private communication.
- [Dira 37] Dirac, P. A. M. (1937). "The cosmologica constants," *Nature*, **139**, 323.

參考文獻

- [Dira 38] Dirac, P. A. M. (1938). "New basis for cosmology," *Proc. R. Soc. London A*, **165**, 199-208.
- [DrMa 77] Drechsler, W. and Mayer, M. E. (1977). *Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories* (Lecture Notes in Physics, Volume 67, Springer-Verlag, New York).
- [Eddi 31] Eddington, A. (1993). "Preliminary note on the masses of the electron, the proton, and the universe," *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **27**, 15-19.
- [Eddi 36] Eddington, A. (1936). *Relativity Theory of Protons and Electrons* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [Eddi 46] Eddington, A. (1946). *Fundamental Theory* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [Eins 39] Einstein, Albert (1939). "On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses," *Annals of Mathematics*, **40**, 922-936.
- [FaPo 67] Faddeev, L. D. and Popov, V. N. (1967). "Feynman diagrams for the Yang-Mills field," *Physics Letters B*, **25**, 29-30.
- [Feyn 57] Feynman, Richard P. (1957). "Conference on the Role of Gravitation in Physics, an expanded version of the remarks by R. P. Feynman on the reality of gravitational waves, mentioned briefly on page 143 of the Report [DeWi 57]," typescript in Box 91, File 2 of The Papers of Richard P. Feynman, the Archives, California Institute of Technology.
- [Feyn 61] Feynman, Richard P. (1961). Unpublished letter to Victor F. Weisskopf, January 4-February 11, 1961; in Box 3, File 8 of The Papers of Richard P. Feynman, the Archives, California Institute of Technology.
- [Feyn 63a] Feynman, Richard P., Leighton, Robert B., and Sands, Matthew (1963). *The Feynman Lecture of Physics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts).
- [Feyn 63b] Feynman, Richard P. (1963). "Quantum theory of gravitation," *Acta Physica Polonica*, **24**, 697-722.

- [Feyn 67] Feynman, Richard P. (1967). *The Character of Physical Law* (M.I.T., Cambridge).
- [Feyn 72] Feynman, Richard P. (1972). "Closed loop and tree diagrams" and "Problems in quantizing the gravitational field, and the massless Yang-Mills field," in *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*, edited by John R. Klauder (W. H. Freeman, San Francisco), pp.355-408.
- [Feyn 85] Feynman, Richard P., as told to Leighton, Ralph (1985). *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* (W. W. Norton, New York).
- [Feyn 88] Feynman, Richard P., as told to Leighton, Ralph (1988). *What Do You Care What Other People Think?* (W. W. Norton, New York).
- [Feyn 89] "Feynman's office: The last blackboards," *Physics Today*, **42**(2), 88 (1989).
- [FiPa 39] Fierz, M. and Pauli, W. (1939). "Relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field," *Proceedings of the Royal Society of London A*, **173**, 211-232.
- [Fink 58] Finkelstein, David (1958). "Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle," *Physical Review*, **110**, 965-967.
- [Fowl 64] Fowler, William A. (1964). "Massive stars, relativistic polytropes, and gravitational radiation," *Reviews of Modern Physics*, **36**, 545-555.
- [FuWh 62] Fuller, Robert W. and Wheeler, John A. (1962). "Causality and multiply connected space-time," *Physical Review*, **128**, 919-929.
- [FWML 71] Fairbank, W., Witteborn, F., Madey, J., and Lockhart, J. (1974). "Experiments to determine the force of gravity on single electrons and positrons," *Experimental Gravitation: Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi," Course LVI*, B. Bertotti, ed. (Academic Press, New York) 310-330.
- [Gell 89] Gell-Mann, Murray (1989). "Dick Feynman—The guy in the office down the hall," *Physics Today*, **42**(2), 50-54.

參考文獻

- [Good 61] Good, M. L. (1961) “ K_2^0 and the equivalence principle,” *Physical Review*, **121**, 311-313.
- [GoSa 86] Goroff, M. and Sagnotti, A. (1986). *Nuclear Physics B*, **266**, 709.
- [GrBr 60] Graves, John C. and Brill, Dieter R. (1960). “Oscillatory character of Reissner–Nordström metric for an ideal charged wormhole,” *Physical Review*, **120**, 1507-1513.
- [GSW 87] Green, M., Schwarz, J., and Witten, E. (1987). *Superstring theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England).
- [GrPe 88] Gross, D. and Periwal, V. (1988). “String perturbation theory diverges,” *Physical Review Letters*, **60**, 2105-2108.
- [Gupt 54] Gupta, Suraj N. (1954). “Gravitation and electromagnetism,” *Physical Review*, **96**, 1683-1685.
- [Guth 81] Guth, Alan H. (1981). “Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems,” *Physical Review D*, **23**, 347-356.
- [HaEl 73] Hawking, Stephen W. and Ellis, George F. W. (1973). *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, England).
- [Hatf 92] Hatfield, B. (1992). *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings* (Addison-Wesley, Reading, MA).
- [Hilb 15] Hilbert, D. (1915). “Die Grundlagen der Physik,” *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachhr. Math-Phys. Kl.*, 395-407.
- [HoFo 63] Hoyle, Fred, and Fowler, William A. (1963). “On the nature of strong radio sources,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **125**, 169-176.
- [Hoyl 48] Hoyle, Fred (1948). “A new model for the expanding universe,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **108**, 372-382.
- [HWWH 58] Harrison, B. Kent, Wakano, Masami, and Wheeler, John A. (1958). “Matter-energy at high density; endpoint of thermonuclear evolution,” in *Onzième Conseil de Physique Solvay, La Structure et l'Evolution de l'Univers* (Editions R. Stoops, Brussels), pp.124-148.

- [Iben 63] Iben, Icko, Jr. (1963). "Massive stars in quasistatic equilibrium," *Astrophysical Journal*, **138**, 1090-1096.
- [JaSm 88] Jacobson, T. and Smolin, L. (1988). "Nonperturbative quantum geometries," *Nuclear Physics B*, **299**, 295-345.
- [JeDG 53] Jennison, R. C. and Das Gupta, M. K. (1953). "Fine structure of the extra-terrestrial radio source Cygnus 1," *Nature*, **172**, 996-997.
- [Klei 89] Kleinert, H. (1989). "Quantum mechanics and path integrals in spaces with curvature and torsion," *Modern Physics Letters A*, **4**, 2329-2337.
- [Kore 74] Korepin, Vladimir (1974). Unpublished Diplom thesis, Leningrad State University.
- [Krai 47] Kraichnan, Robert H. (1974). "Quantum theory of the linear gravitational field," unpublished B.S. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [Krai 55] Kraichnan, Robert H. (1955). "Special relativistic derivation of generally covariant gravitation theory," *Physical Review*, **98**, 1118-1122.
- [Krai 56] Kraichnan, Robert H. (1956). "Possibility of unequal gravitational and inertial masses," *Physical Review*, **101**, 482-488.
- [Krus 60] Kruskal, Martin (1960). "Maximal extension of the Schwarzschild metric," *Physical Review*, **119**, 1743-1745.
- [LaLi 51] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1951). *The Classical Theory of Fields*, translated by M. Hamermesh (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts).
- [LiBr 90] Lightman, Alan and Brawer, Roberta (1990). *Origins: The Lives and Worlds of Modern Cosmologists* (Harvard University Press, Cambridge).
- [Ma Wh 66] May, Michael M. and White, Richard H. (1966). "Hydrodynamic calculations of general relativistic collapse," *Physical Review*, **141**, 1232-1241.
- [Mich 63] Michael, F. Curtis (1963). "Collapse of massive stars," *Astrophysical Journal*, **138**, 1097-1103.

- [Miln 34] Milne, E. (1934). *Quart. J. Math (Oxford)*, **5**, 64; McCrea, W. and Milne, E. (1934). *Quart. J. Math (Oxford)*, **5**, 73.
- [MiWh 57] Misner, Charles W. and Wheeler, John A. (1957). "Classical physics as geometry: gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space," *Annals of Physics*, **2**, 525-603, reprinted in [Whee 62].
- [MTW 73] Misner, Charles W., Thorne, Kip S., and Wheeler, John A. (1973). *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco).
- [NiGo 91] Nieto, M. and Goldman, T. (1991). "The arguments against "antigravity" and the gravitational acceleration of antimatter," *Physics Reports*, **205**, 221-281.
- [OpSn 39] Oppenheimer, J. Robert and Snyder, Hartland (1939). *Physical Review*, **56**, 455-459.
- [Penr 65] Penrose, Roger (1965). "Gravitational collapse and spacetime singularities," *Physical Review Letter*, **14**, 57-59.
- [Podu 64] Podurets, Mikhail A. (1964). "The collapse of a star with back pressure taken into account," *Doklady Akademi Nauk*, **154**, 300-301; English translation, *Soviet Physics-Doklady*, **9**, 1-2.
- [RoSm 88] Rovelli, C. and Smolin, L. (1988). "Loop representation for quantum general relativity," *Nuclear Physics B*, **331**, 80-152.
- [Schi 58] Schiff, L. (1958). "Sign of the gravitational mass of the positron," *Physical Review Letters*, **1**, 254-255.
- [Schi 59] Schiff, L. (1959). "Gravitational properties of antimatter," *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **45**, 69-80.
- [Schm 63] Schmidt, Maarten A. (1963). "3C 273: A star-like object with large red-shift," *Nature*, **197**, 1040.
- [Schu 85] Schutz, Bernard F. (1985). *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [Schw 16] Schwarzschild, Karl (1916). "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie," *Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik, und Technik*, **1916**, 189-196.

- [Syke 94] Sykes, Christopher (1994). *No ordinary genius: the illustrated Richard Feynman* (W. W. Norton, New York).
- [Thir 18] Thirring, H. (1918). "Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. Z.*, **19**, 33-39; Thirring, H. and Lense, J. (1918). "Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. Z.*, **19**, 156-163; Thirring, H. (1921). "Berichtigung zu meiner Arbeit: 'Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie'," *Phys. A.*, **22**, 29-30.
- [tHVe 74] 't Hooft, G. and Veltman, M. (1974). *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **20**, 69.
- [Thor 94] Thorne, Kip S. (1994). *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy* (W. W. Norton, New York).
- [Toop 66] Tooper, Robert F. (1966). "The 'standard model' for massive stars in general relativity," *Astrophysical Journal*, **143**, 465-482.
- [vanN 81] van Nieuwenhuizen, Peter (1981). "Supergravity," *Physics Reports*, **68**, 189-398.
- [Vebl 27] Veblen, O. (1927). *Invariants of Quadratic Differential Forms* (Cambridge Tracts in Math and Math Phys., Cambridge University Press, London).
- [Wald 84] Wald, Robert M. (1984). *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago).
- [Wald 86] Wald, Robert M. (1986). "Spin-two field and general covariance," *Physical Review*, **D33**, 3613-3625.
- [Wein 64a] Weinberg, Steven (1964). "Derivation of gauge invariance and the equivalence principle from Lorentz invariance of the S-matrix," *Physics Letters*, **9**, 357-359.
- [Wein 64b] Weinberg, Steven (1964). "Photons and gravitons in S-matrix theory: derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass," *Physical Review*, **135**, B1049-B1056.

参考文献

- [Wein 72] Weinberg, Steven (1972). *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York).
- [Wein 79] Weinberg, Steven (1979). "Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation," in *General Relativity: An Einstein Centenary Volume*, edited by S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, England), pp.790-831
- [Wein 89] Weinberg, Steven (1989). "The cosmological constant problem," *Reviews of Modern Physics*, **61**, 1-22.
- [Went 49] Wentzel, G. (1949). *Quantum Theory of Fields* (Interscience, New York).
- [Whee 62] Wheeler, John A. (1962). *Geometrodynamics* (Academic Press, New York).
- [Whee 90] Wheeler, John A. (1990). *A Journey into Gravity and Spacetime* (Scientific American Library, W. H. Freeman, New York).
- [WhFe 45] Wheeler, John A. and Feynman, Richard P. (1945). "Interaction with the absorber as the mechanism of radiation," *Reviews of Modern Physics*, **17**, 157-181.
- [WhFe 49] Wheeler, John A. and Feynman, Richard P. (1945). "Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action," *Reviews of Modern Physics*, **21**, 425-433.
- [WiFa 67] Witteborn, F. and Fairbank, W. (1967). "Experimental comparison of the gravitational force on freely falling electrons and metallic electrons," *Physical Review Letters*, **19**, 1049-1052.
- [Yang 77] Yang, C. N. (1977). *Ann. New York Acad. Sci.*, **294**, 86.

索引

三劃

么正性 (unitarity) 230

四劃

不相容原理 (exclusion principle) 178, 205

介子 (meson) 1, 2, 7, 24, 57, 125, 230
內在曲率 (Intrinsic Curvature) 113, 114, 127

反物質 4, 5, 204

反轉 (reflection) 143

反變分量 (contravariant component) 117, 118, 120

反變向量 (contravariant vector) 117, 119, 138

五劃

加利略不變性 (Galilean invariance) 99

可重整 (renormalizable) 230

平移 (flat) 125, 126, 137, 140

六劃

光度 (luminosity) 8

先驗機率 (priori probability) 18, 19

全同 (identical) 57

各向同性 (isotropic) 76, 186, 193

向量 (vector) 33, 34, 37, 38, 42, 49, 53, 57, 58, 63, 91, 116, 117, 118, 119, 120, 124, 125, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 149, 154, 211, 230, 235, 237, 239

宇宙常數 (cosmological constant) 165, 185

曲率 (curvature) 112, 113, 114, 120, 123, 126, 127, 129, 130, 132, 133, 136, 139, 140, 141, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 151, 156, 159, 160, 167, 168, 169, 170, 174, 175, 176, 186, 188, 192, 194, 197, 207, 217

曲線座標 (curvilinear coordinate) 136, 157, 159

自能 (self energy) 76, 81, 82

自旋 (spin) 24, 25, 29, 31, 32, 33, 36, 38, 39, 41, 42, 43, 53, 124, 161, 233, 235

自然單位 (natural unit, $\hbar = c = 1$) 51, 70, 203

七劃

作用量 (action) 45, 47, 52, 54, 62, 63, 64, 73, 74, 82, 90, 97, 106, 133, 134, 150, 151, 152, 154, 155, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 185, 225, 226, 227, 228

克氏符號 (Christoffel symbols) 96, 144, 153, 168

局部曲率 (local curvature) 113, 143, 160

束縛能 (binding energies) 4, 10, 11, 31, 32, 33

八劃

- 制動輻射 (braking radiation 亦稱 bremsstrahlung) 232, 233
 協變方程式 (covariant equation) 149, 162
 協變散度 (covariant divergence) 145, 146, 149, 151, 152, 153, 154, 157, 162, 192
 協變微分 (covariant differentiation) 136, 138, 139, 140, 141, 145, 154
 協變聯絡係數 (covariant connection coefficients) 64
 奇異性 (singularity) 173, 174, 217, 218
 拉格朗日函數 (Lagrangian) 43, 45, 46, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 60, 62, 63, 73, 74, 75, 81, 82, 85, 87, 89, 90, 95, 97, 121, 125, 126, 133, 155, 160, 161, 164
 波爾半徑 (Bohr radius) 11
 泛函 (functional) 90, 92, 95, 97, 98, 151, 152, 154
 近日點 (perihelion) 69, 70, 71, 72, 82, 89, 172

九劃

- 哈伯常數 (Hubble constant) 7, 8, 196
 哈密頓函數 (Hamiltonian) 54, 90
 度規張量 (metric tensor) 108, 109, 110, 115, 117, 118, 119, 120, 122, 127, 138, 139, 141, 150, 154, 156, 163, 167, 168, 172, 173, 207, 219
 度規張量 (metric tensor) 115
 相位 (phase) 10, 14, 25, 36, 37, 42, 79, 90, 124, 125, 126, 228
 相位 125

- 相對論不變量 (relativistic invariant) 34
 紅移 (red shift) 182, 184, 185, 189, 190, 191, 197, 198, 199, 203
 重力子 (graviton) 11, 31, 32, 37, 38, 40, 41, 43, 45, 51, 52, 55, 59, 60, 61, 164, 201, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 239
 重力崩陷 (gravitational collapse) 178
 重子守恆 (baryon conservation) 201

十劃

- 降秩 (contraction of tensor) 97
 原時 (proper time) 63, 65, 86, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 117, 119, 150, 167, 173, 189, 197, 203, 219, 220
 振幅 (amplitude) 5, 11, 13, 14, 17, 24, 26, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 43, 45, 50, 53, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 124, 125, 164, 228, 229, 231, 232, 233, 234, 235
 時間膨脹 (time dilation) 72, 74, 75, 76, 77, 105, 191

十一劃

- 純量 (scalar) 24, 29, 33, 49, 52, 53, 54, 55, 57, 59, 63, 65, 69, 73, 74, 86, 91, 109, 117, 118, 119, 133, 134, 137, 143, 150, 153, 154, 155, 159, 160, 161, 164, 170, 225, 230, 233, 235, 237
 純量不變量 (scalar invariant) 150
 純量曲率 (scalar curvature) 133, 149
 純量密度 (scalar density) 151, 154, 162
 馬赫原理 (Mach's Principle) 76, 77, 78, 202, 203

索引

- 高斯均方曲率 (Gaussian Mean Square Curvature) 113
- 偶極 (dipole) 15, 38, 237, 239
- 偏振 (polarization) 4, 33, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 51, 58, 59, 60, 228, 232, 234, 235
- 康普頓波長 (Compton wavelength) 8, 78, 80, 178, 203
- 康普頓散射 (Compton scattering) 45, 59, 60, 61
- 張量 (tensor) 22, 33, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 57, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 69, 73, 77, 81, 82, 85, 88, 91, 92, 97, 98, 108, 109, 110, 114, 117, 118, 119, 120, 121, 129, 132, 133, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 143, 144, 145, 146, 149, 150, 151, 153, 154, 155, 156, 158, 159, 162, 163, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 175, 178, 184, 192, 207, 208, 215, 217, 226, 227, 228, 229, 234, 235, 236, 237, 238, 239
- 張量密度 (tensor density) 152, 154, 156, 157
- 推遲波 (retarded wave) 37
- 旋度 (curl) 62, 139, 144, 154
- 梯度 (gradient) 38, 46, 49, 55, 72, 74, 79, 94, 109, 125, 137, 144, 153
- 畢安其恆等式 (Bianchi identity) 144, 145, 174, 176
- 異常磁矩 (anomalous moment) 161
- 統計力學 (statistical mechanics) 17, 18, 20
- 統計起伏 (statistical fluctuation) 18, 19
- 規範 (gauge) 43, 49, 50, 58, 60, 65, 101, 124, 125, 126, 226
- 規範不變性 (gauge invariance) 49, 50, 58, 60, 61, 124
- 許氏度規 (Schwarzschild metric) 170, 172, 173, 217, 218, 220
- 都卜勒效應 (Doppler shift) 7, 75
- 頂點 (vertex) 52, 55, 56, 59, 228, 229, 230, 231, 233, 234
- ## 十二劃
- 傅立葉轉換 (Fourier Transform) 34, 35
- 單極 (monopole) 38
- 場量子 (field quanta) 29
- 幾何動力學 (geometrodynamics) 221, 223
- 散度 (divergence) 46, 48, 54, 57, 81, 86, 87, 88, 90, 121, 147, 151, 154, 158, 162, 163, 171, 174, 192, 208, 226
- 等效原理 (Equivalence Principle) 99, 100, 101, 102, 103, 104, 124, 135, 136
- 絕熱 (adiabatic) 179, 209, 210, 212, 214
- 紫移 (violet shift) 76, 103
- 視亮度 (apparent brightness) 190
- 費米統計 (Fermi Statistics) 28
- 超前位勢 (advanced potential) 223
- 進動 (precession) 69, 70, 71, 72, 89, 167, 172
- 量子場 (quantum field) 12, 31, 53
- 閔考夫斯基度規 (Minkowski metric) 146, 218

十三劃

傳播子 (propagator) 24, 34, 41, 43, 55,
59, 164, 225, 228, 232, 234

微中子 (neutrino) 2, 16, 24, 25, 26, 28,
29, 163, 201, 212, 215

愛因斯坦—希爾伯特作用量
(Einstein-Hilbert action) 134

愛因斯坦方程式 (Einstein equation) 90,
97, 158, 167, 184, 207, 221

愛因斯坦張量 (Einstein tensor) 146

極端線 (geodesic) 141, 142, 158, 175,
218, 219, 221, 222

楊 (振寧)—密爾斯向量介子理論
(Yang-Mills vector meson theory)
125, 230

瑞奇張量 (Ricci tensor) 98, 133, 145,
149

路徑積分 (path integral) 62, 144, 160

達朗白算符 (d'Alembertian operator)
34, 37, 66, 162

電動力學 (electrodynamics) 1, 2, 32,
33, 37, 39, 63, 87, 99, 103, 124,
135, 136, 144, 147, 158, 160, 161,
200, 223, 228, 229, 237, 239

電荷守恆 (conservation of charge) 35,
39, 46, 158

十四劃

對角和 (trace) 38, 49, 59, 175

十五劃

慣性 (inertia) 2, 4, 6, 31, 77, 78, 79, 81,
102, 107

槓 (bar) 48, 49, 55, 56, 66, 91, 226,
229

歐氏幾何 (Euclidean geometry) 110,
124, 170

潮汐力 (tidal force) 101, 116, 129, 156,
159, 199, 217

熱力學 (thermodynamics) 18, 19, 20

耦合 (coupling) 6, 23, 29, 45, 51, 52,
54, 55, 56, 60, 125, 149, 160, 164,
225, 227, 230, 235

駐波 (standing wave) 52

黎曼正則座標 (Riemann normal
coordinates) 114, 126, 129

黎曼正則座標 (Riemann normal
coordinates) 129

黎曼張量 (Riemann tensor) 98, 133

十六劃

橫向性 (transversality) 235

輻射阻力 (radiation resistance) 135

十七

應力 (stress) 38, 41, 42, 44, 53, 54, 57,
66, 81, 85, 97, 98, 100, 133, 145,
146, 149, 154, 155, 156, 157, 158,
169, 170, 171, 172, 174, 175, 184,
192, 207, 215, 236, 237, 238, 239

環移聯絡係數 (holonomic connection
coefficients) 96

薛丁格貓 (Schrödinger's cat) 13, 21

十八劃

歸一化 (normalization) 40, 51, 233

蟲孔 (wormholes) 176, 177, 178, 217,
218

十九劃

羅伯遜-沃克度規 (Robertson-Walker
metric) 186

羅倫茲不變性 (Lorentz invariance) 99

類時 (time-like) 8, 219

二十三

孿生子悖論 (twin paradox) 76

其它

Eötvös 3, 75, 99

Klein-Gordon 方程式 2, 13, 22, 43,
45~50, 57, 58, 62~72, 81, 82, 83,
85, 87, 88, 90, 91, 92, 95, 96, 98,
101, 105, 107, 109, 116, 120, 121,
122, 124, 125, 130, 133, 136, 142,
144, 146, 147, 149, 150, 152, 154,
155, 156, 157, 158, 160~164, 167,
171, 175, 176, 178, 179, 185, 187,
188, 192, 193, 202, 207~212, 214,
215, 219, 226, 227, 237

Lorentz 規範 50, 58, 99

Mossbauer 效應 3, 4, 5, 10, 11, 14, 15,
16, 22, 27, 29, 31, 33, 36, 37, 44,
45, 53, 57, 58, 62, 72, 73, 75, 76,
77, 78, 81, 82, 85, 87, 89, 99, 101,
102, 104, 105, 107, 112, 123, 124,
139, 145, 177, 181, 223, 230, 233

Olbers 悖論 13, 21, 104, 203

費曼重力學 / Richard P. Feynman 作；高涌泉譯。-- 初版。--

臺北市：科大文化，2004 [民 93]

面：公分。-- (科技叢書；QCCE040701)

參考書目：面

含索引

譯自：Feynman lectures on gravitation

ISBN 986-80119-7-3 (平裝)

1. 引力 2. 量子力學

321.1

93013683

FEYNMAN LECTURES ON GRAVITATION By Richard P. Feynman
Copyright © 1995 by California Institute of Technology,
Fernando B. Morinigo, and William G. Wagner
Foreword copyright © 1995 by Perseus Publishing
Chinese translation copyright © 2004 by Sci-Tech Publishing Co, Ltd.
Published by arrangement with Perseus Publishing, a member of Perseus Books L.L.C.
Through Bardon-Chinese Media Agency
博達著作權代理有限公司
ALL RIGHTS RESERVED

◎科學叢書 QCCE041001

費曼重力學

Feynman Lectures On Gravitation

作 者：Richard P. Feynman
Fernando. B. Morinigo.
William G. Wagner

譯 者：高涌泉

發行人：徐錦文

出版發行：科大文化事業股份有限公司

106 台北市信義路三段 162-45 號 11 樓 (玫瑰大樓)

郵撥帳號：19589490 號

電話：(02) 2701-7353

傳真：(02) 2701-1631

E - M a i l : scitech@giga.net.tw

科大網址：sci-tech.com.tw

科大 e 書店：st-ebook.com.tw

初版一刷日期◎2004 年 10 月

ISBN 986-80119-7-3

書碼◎QCCE00001

版權所有·翻印必究

❖如有內頁破損及裝訂錯誤，請寄回本公司更換❖