



高等教材



# 核反应堆物理分析

上册



谢仲生 主编 罗经宇 审校



原子能出版社

## 前 言

本书是根据1978年6月在北京召开的反应堆工程专业教材会议审定的《核反应堆物理分析》编写大纲编写的。

本书着重介绍核反应堆物理的基础理论和分析方法，以及核设计中一些基本的计算方法。在编写中，努力贯彻理论联系实际的原则并尽量反映反应堆物理近代计算方面的内容。在内容的选择和安排上，力求做到由浅入深，浅显易懂，尽量避免艰深的理论和复杂的公式推导。对于各种计算方法和程序，则着重于阐述它们之间具有共性的理论基础和算法思想，尽量避免过多的具体数学过程。

全书共分十三章。第一章介绍与堆物理有关的中子物理知识；第二至九章讨论中子在反应堆系统内运动的基本规律（扩散、慢化和热化等）以及临界问题的计算；第十至十二章则属于动态方面的问题；第十三章介绍微扰理论基础。带\*号部分是属于参考性的章节，可根据具体情况选用，也可作为课外阅读的参考材料。由于各校反应堆工程专业的培养目标和教学时数不同，使用本书时，可根据具体情况对部分章节内容作适当的删减或补充。

阅读本书的读者应具有高等数学、原子核物理、数理方程和数值分析等方面的知识。

本书由谢仲生主编。参加编写的有：西安交通大学尹邦华（第一、六、八章，附录和第五章第2节）、于文砚（第二、三章）、傅龙舟（第十二章）、谢仲生（第四、五、七、九、十三章和第一章第7节）和上海交通大学潘国品（第十、十一章）。

本书由清华大学罗经宇审校。他对本书各章内容和主要公式都进行了详细、认真的审校并提出许多宝贵的意见和建议。在此编者表示衷心的感谢。

在本书编写过程中得到了有关科研和设计单位的大力支持和帮助。许汉铭、马大园、蒲富痒、扬顺海、章宗耀、徐及明、刘正纶、李植华、侯凤旺、杨修周、邬国伟和吴清泉等同志参加了本书初稿的讨论并提出许多宝贵意见；许汉铭、马大园同志参加了本书的定稿工作，并提出了许多宝贵的修改意见，对提高书稿质量有很大帮助。在此，我们表示深切的谢意。

由于我们水平有限，工程实践和教学经验不足，加之编写时间匆促，书中缺点和错误一定不少，恳切地希望同志们批评指正。

编 者

1980年3月





附录3	元素和一些分子的截面和核参数	361
附录4	非 $1/v$ 因子	363
附录5	$\psi(\xi, x)$ 和 $\chi(\xi, x)$ 的表	364
附录6	$I(\xi, \beta)$ 的表	364
附录7	$\delta$ 函数	365
附录8	指数积分函数	366
附录9	$E_n(x)$ 函数	366
附录10	误差函数 $\text{erf}(x)$	367
附录11	贝塞尔函数	367
附录12	勒让特多项式和球谐函数	370
附录13	积分变换	372

# 第一章 中子与原子核的相互作用

核反应堆内的主要核过程是中子与核反应堆内各种元素的相互作用的过程。因此，在讨论反应堆的物理过程之前，首先必须对中子与原子核的相互作用有一定的了解。本章将概略地介绍一下反应堆物理分析中常碰到的有关中子与原子核相互作用的一些核物理知识。

## 1. 中子与原子核的相互作用

### 1.1 中 子

中子是组成原子核的核子之一。它的静止质量稍大于质子的静止质量。

$$\begin{aligned} \text{中子的静止质量 } m &= 1.6749543 \times 10^{-24} \text{克} \\ &= 1.0086650 \text{ 原子质量单位} \end{aligned}$$

工程计算中通常取  $m$  等于 1 原子质量单位。

中子不带电荷，因此它在靠近原子核时不受核内正电的斥力，它亦不能产生初级电离。中子在原子核外自由存在时是不稳定的，它通过  $\beta$  衰变转变成质子，其半衰期约为 12 分钟。在热中子反应堆内，中子的平均寿期约为  $10^{-3}$  至  $10^{-4}$  秒，它比自由中子的半衰期短得多，因此在反应堆物理分析中可以不考虑自由中子的不稳定问题。

中子具有粒子性和波动性。它与原子核的相互作用过程有时表现为两个粒子的碰撞，有时表现为中子波与核的相互作用。中子的波长  $\lambda$  为

$$\lambda = \frac{2.86 \times 10^{-9}}{\sqrt{E}} \text{ 厘米}, \quad (1-1)$$

式中  $E$  —— 中子能量，电子伏。（这里取中子静止质量  $m$  等于 1。）

在实际计算中，一般用中子折算波长  $\lambda$ ：

$$\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{4.55 \times 10^{-10}}{\sqrt{E}} \text{ 厘米}. \quad (1-2)$$

从 (1-1) 式可知，中子波长随能量增加而变短。例如， $E = 1$  兆电子伏， $\lambda$  约等于  $10^{-12}$  厘米； $E = 0.03$  电子伏， $\lambda$  约等于  $1.7 \times 10^{-8}$  厘米。可见能量为 1 兆电子伏的中子的波长和原子核的直径相当，而能量为 0.03 电子伏的中子的波长就变得和原子的直径相当了。理论计算时，可以把中子波看成无限个分波的叠加，而能够与核发生相互作用的分波数目随入射中子波长的变短而增加。设靶核的半径为  $R$ ，入射中子的能量为  $E$ ，根据 (1-2) 式算得中子的折算波长为  $\lambda$ 。如果  $\lambda \gg R$ ，则只需考虑 s 波中子与核的相互作用<sup>1)</sup>；若中子能量继续增大，以至于使得  $R/\lambda$  等于 1—2，则除考虑 s 波中子外，还必须考虑 p 波中子与核的相互

1) 关于 s 波中子、p 波中子、d 波中子等的严格定义，请参考文献 [1]。

作用等等。以后我们会看到，中子的能量不同，它与原子核相互作用的几率、方式也就不同。

在反应堆物理分析中研究中子与原子核的相互作用时，通常按中子能量把它们分为：

(i) 快中子 (0.1兆电子伏以上)；(ii) 超热中子 (1电子伏到0.1兆电子伏)；(iii) 热中子 (1电子伏以下)。

## 1.2 中子与原子核的相互作用过程

### 1.2.1 中子与原子核相互作用的机理

中子与原子核相互作用的机理有三种：复合核的形成、势散射和直接相互作用。

势散射是最简单的核反应。它是中子波和核表面势相互作用的结果，中子并未进入靶核。任何能量的中子都有可能引起这种反应。这种作用的特点是：散射前后靶核的内能没有变化。入射中子把它的一部分或全部动能传给靶核，成为靶核的动能，势散射后，中子改变了运动方向和能量。势散射前后中子与靶核系统的动能和动量守恒，所以势散射为一种弹性散射。

所谓直接相互作用是指：入射中子直接与靶核内的某个核子碰撞，使某个核子从核里发射出来，而中子却留在核内。如果从靶核里发射出来的核子是质子，这就是直接相互作用的 $(n, p)$ 反应。如果从核里发射出来的核子是中子，而靶核发射 $\gamma$ 射线，同时由激发态返回基态，这就是直接非弹性散射过程。入射中子要具有较高的能量才能与原子核发生直接相互作用。不过，在核反应堆内具有那样高的能量的中子，其数量是很少的。所以在反应堆物理分析中，这种直接相互作用方式是不重要的。

复合核的形成是最重要的中子与原子核的相互作用形式。在这个过程中，入射中子被靶核 ${}_Z^AX$ 吸收，形成一个新的核——复合核 ${}_{Z+1}^{A+1}X$ 。中子和靶核两者在质心坐标系的总动能 $E_c$ 就转化为复合核的内能。同时中子的结合能 $B$ 也给了复合核，于是使复合核处于基态以上的激发态（或能级） $E_c + B$ 上（见图1-1）。

复合核的激发态衰变有多种方式。由于激发态的能量是统计地分配在许多核子上的，因此复合核可以在激发态上停留一段时间。当核内无规则碰撞使某一个核子得到足够的能量时，复合核便通过放出一个核子或一组核子而衰变。若放出一个质子而衰变，就称为 $(n, p)$ 反应；放出 $\alpha$ 粒子的衰变称之为 $(n, \alpha)$ 反应（如图1-1所示）。若放出的核子是一个中子，而余核 ${}_Z^AX$ 又重新直接回到基态，就称这个过程为共振弹性散射或称为复合弹性散射，简称 $(n, n)$ 反应。如果放出中子后，余核 ${}_Z^AX$ 仍处于激发态，然后通过发射 $\gamma$ 射线返回基态，就称这个过程为共振非弹性散射或称为复合非弹性散射，简称 $(n, n')$ 反应。复合核也可以通过发射俘获 $\gamma$ 射线而衰变，称这个过程为辐射俘获，简称 $(n, \gamma)$ 反应。复合核一旦发射 $\gamma$ 射线而衰变到束缚态时，它就不能再通过放出核子而衰变了。复合核还可以通过分裂成两个较轻的核的方式而衰变，称这一过程为核裂变，简称 $(n, f)$ 反应。

当具有某些特定的能量值的入射中子恰好使形成复合核激发态接近于一个量子能级时，那么，形成复合核的几率就显著地增大。这种现象就叫做共振现象（包括共振吸收，共振散射和共振裂变等）。共振吸收对反应堆的物理过程有着很大的影响。

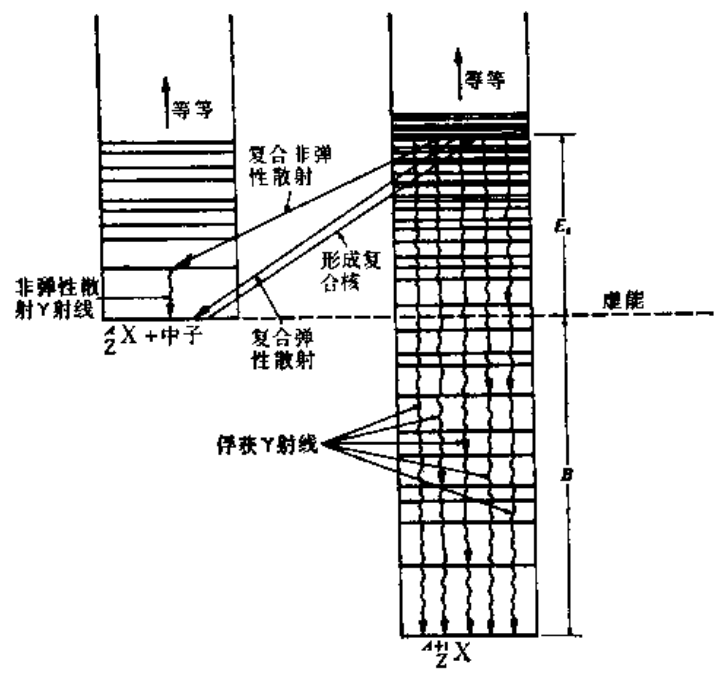


图1-1 复合核的形成和衰变

可以发现，天然放射性的基本定律，即某个系统在单位时间内的衰变几率为一常数，也适用于核在激发态的自发衰变。但是，在讨论激发态的衰变时，通常用能级宽度  $\Gamma$  来描述处于激发态的核的衰变，即用  $\Gamma$  来表示衰变常数  $\lambda$ ：

$$\Gamma = \hbar \lambda \text{ 电子伏,} \tag{1-3}$$

式中  $\hbar$ ——普朗克常数  $h$  除以  $2\pi$ ，即  $\hbar = h/2\pi$ 。这样，能级宽度为  $\Gamma$  的激发态，其平均寿命  $\bar{t}$  便等于：

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\hbar}{\Gamma}. \tag{1-4}$$

由此可见，复合核的激发态的寿命与能级宽度成反比。辐射俘获反应要求复合核有较长的寿命，因而能级宽度  $\Gamma$  小。例如，铀-239在第一个虚能级处的俘获共振宽度  $\Gamma$  为 0.027 电子伏， $\bar{t}$  为  $2.4 \times 10^{-14}$  秒。而氧-16 在第一个虚能级的散射共振宽度  $\Gamma$  为 41 千电子伏，此时复合核的平均寿命  $\bar{t}$  为  $1.5 \times 10^{-24}$  秒。

单位时间内处于激发态的复合核的某种衰变方式的几率，可以用该过程的能级分宽度来表示。例如，发射  $\gamma$  射线的分宽度  $\Gamma_\gamma$  通常叫做辐射宽度，它表示单位时间内复合核发射  $\gamma$  射线而衰变的几率； $\Gamma_n$  叫做中子宽度，它表示单位时间内复合核放出中子而衰变的几率，等等。因为总衰变几率是所有可能衰变方式的几率的总和，所以与之相对应的有

$$\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_n + \dots, \tag{1-5}$$

复合核以某种方式衰变的相对几率，显然等于该衰变方式的分宽度与总宽度之比。例如，以放出中子的方式衰变的相对几率便等于  $\Gamma_n/\Gamma$ ，等等。

综合以上所述，在反应堆内，中子与原子核的相互作用可分为两大类：

- (1) 散射：有弹性散射和非弹性散射；
- (2) 吸收：包括辐射俘获、核裂变、(n,  $\alpha$ )、(n, p)反应等。

下面分别介绍这些过程。

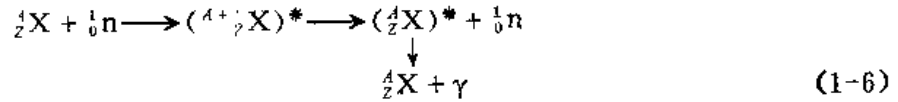


### 1.2.2 中子的散射

散射是使中子慢化的主要核反应过程。它有非弹性散射和弹性散射两种。

#### (1) 非弹性散射

它的一般反应式为



在这个过程中，入射中子把它的一部分动能（通常为绝大部分）转变成靶核的内能，使靶核处于激发态，然后靶核通过发射 $\gamma$ 射线又返回基态。因此，散射前后中子与靶核系统的动量守恒，但动能不守恒。从图1-1中可以看出，只有入射中子的动能高于靶核的第一激发态的能量时才能使靶核激发，也就是说，只有入射中子的能量高于某一数值时才能发生非弹性散射。由此可知，非弹性散射有阈能的特点。

表1-1 几种核的前两个激发态的能量

核	第一个激发态 兆电子伏	第二个激发态 兆电子伏
$^{12}\text{C}$	4.43	7.65
$^{16}\text{O}$	6.06	6.14
$^{23}\text{Na}$	0.45	2.0
$^{27}\text{Al}$	0.84	1.01
$^{56}\text{Fe}$	0.84	2.1
$^{238}\text{U}$	0.045	0.145

表1-1列出几种堆内常用元素核的前两个激发能级的能量。从表中可以看出，轻核激发态的能量高，重核的低。但即使对于

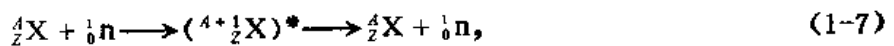
铀-238核，中子至少必须具有45千电子伏以上的能量才能发生非弹性散射。因此，只有在快中子反应堆中，非弹性散射过程才是重要的。

由于裂变中子的能量在兆电子伏范围内，因此在热中子反应堆内仍会发生一些非弹性散射现象。但是，在中子能量很快降低到非弹性散射阈能以下后，便需藉助弹性散射来使中子慢化。

#### (2) 弹性散射

弹性散射还可分为共振弹性散射和势散射两种。前者经过复合核的形成过程，后者不经过复合核的形成过程，因此共振弹性散射只对特定能量的中子才能发生。

弹性散射的一般反应式为：



(1-7) 式为共振弹性散射，(1-8) 式为势散射。

在弹性散射过程中，由于散射后靶核的内能没有变化，它仍保持在基态，散射前后中子-靶核系统的动能和动量是守恒的，所以可以把这一过程看作“弹性球”式的碰撞，根据动能和动量守恒，用经典力学的方法来处理。

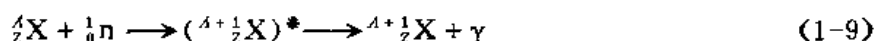
在热中子反应堆内，中子从高能慢化到低能起主要作用的是弹性散射。

### 1.2.3 中子的吸收

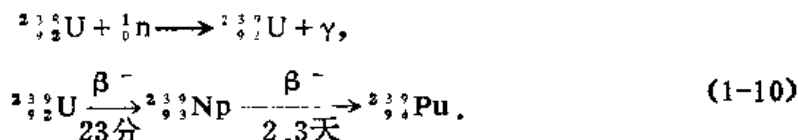
中子吸收反应有 $(n, \gamma)$ ， $(n, f)$ ， $(n, \alpha)$ 和 $(n, p)$ 反应等。

#### (1) 辐射俘获 $(n, \gamma)$

辐射俘获是最常见的吸收反应。它的一般反应式为

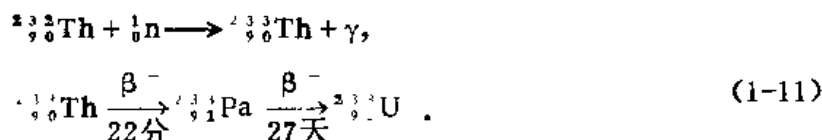


生成的核 ${}^{A+1}_ZX$ 是靶核的同位素，往往具有放射性。低能中子与中等质量核、重核作用时易于发生这种反应。例如，在堆内重要的俘获反应有：



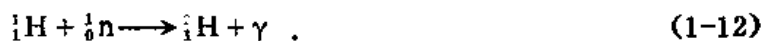
铀-238核吸收中子后生成铀-239，铀-239经过两次 $\beta^-$ 衰变转变成钚-239。钚-239在自然界里是不存在的，它是一种人工裂变材料。这一过程对核燃料的增殖和原子能的利用有重大的意义。

类似的反应还有：



铀-233在自然界中也不存在，它也是一种人工裂变材料。钍-232在自然界的蕴藏量是很丰富的，因此这一过程对于利用钍的资源是非常重要的。

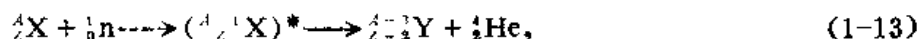
应该指出，由于辐射俘获会产生放射性，这就给反应堆设备维护、三废处理、人员防护等等带来不少问题。例如，在用轻水作慢化剂、冷却剂、反射层或屏蔽材料时，就要考虑中子与氢核的辐射俘获反应：



此反应放出高能 $\gamma$ 射线（能量超过2.2兆电子伏）。此外，还有空气中的氩-40在辐射俘获反应后，生成半衰期为18.2小时的氩-41，等等。

## (2) (n, $\alpha$ )、(n, p) 等反应

(n,  $\alpha$ ) 反应的一般式为



例如，热中子与硼-10引起的(n,  $\alpha$ )反应为



在低能区，这个反应的截面很大，所以硼-10被广泛地用作热中子反应堆的控制材料。同时这个反应在很宽的能区内很好地满足 $1/v$ 变化规律，硼-10也经常用来制作热中子探测器。

对(n, p)反应，例如有



氮-16的半衰期为7.3秒，它放出 $\beta$ 和 $\gamma$ 射线，这一反应是水中放射性的主要来源。

往往用(n, p)反应来生产示踪元素，如 ${}^{32}_{16}\text{S}(n, p){}^{32}_{15}\text{P}$ 反应，磷-32为示踪元素。

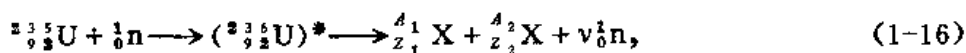
若入射中子的能量很高，则形成复合核的能级也就变高，这时还能够引起(n, n, p)，(n, 2n)等反应。但是，在核反应堆内产生这种反应的几率很小。因为对于大多数元素，(n, 2n)反应阈大约在7到10兆电子伏范围内，(n, 3n)反应阈大约在10到30兆

电子伏范围内。而在核反应堆内，具有这样高的能量的中子的数量是很少的。因而，这些核反应在反应堆分析中并不具有重要的意义。

### (3) 核裂变

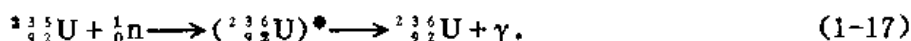
核裂变是反应堆内最重要的核反应。同位素铀-233、铀-235、钚-239和钚-241在各种能量的中子作用下均能发生裂变，并且在低能中子作用下发生裂变的可能性较大，通常把它们称为易裂变同位素或裂变同位素。而同位素钍-232、铀-238和钚-240等只有在中子能量高于某一阈值时才能发生裂变，通常把它们称为可裂变同位素。目前，热中子堆内最常用的核燃料是裂变同位素铀-235。

铀-235的裂变反应一般为



式中  ${}_{Z_1}^{A_1}\text{X}$ ,  ${}_{Z_2}^{A_2}\text{X}$ ——中等质量数的核，叫做裂变碎片； $\nu$ ——每次裂变平均放出的中子数。在这过程中，还释放出约 200 兆电子伏的能量。

然而铀-235核吸收中子后并不都产生核裂变，除产生上述裂变反应外还可能产生辐射俘获反应，如：



## 2. 中子截面和反应率

现在我们来定量地讨论中子与原子核的相互作用情况。

### 2.1 微观截面

假定有一单向均匀平行中子束，其强度为  $I$ （即：在单位时间内，通过垂直于中子飞行方向的单位面积上有  $I$  个中子），该中子束垂直地打在一个薄靶上，靶的面积是 1 平方厘米，厚度为  $\Delta x$ ，靶片内单位体积中的原子核数是  $N$ 。在靶后某一距离处放一中子探测器（见图1-2）。如果未放靶时测得的中子束强度是  $I$ ，放靶后测得的中子束强度为  $I'$ ，那么， $I' - I = \Delta I$  就是由靶造成的中子束强度的降低量。因为中子一旦与靶核发生作用（不论是散射还是吸收）就会使中子离开它原来的飞行方向，中子探测器就不能探测到这些中子了。所以，通过靶以后的中子束的强度的降低量  $\Delta I$  便等于与靶核发生作用的中子数。实验表明：在靶面积不变的情况下， $\Delta I$  正比于中子束强度  $I$ 、靶厚度  $\Delta x$  和靶的核密度  $N$ 。即：

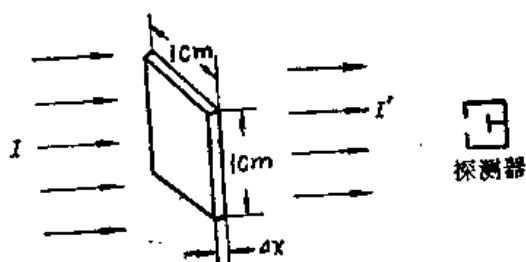


图1-2 穿过薄靶后平行中子束的衰减

$$\Delta I \propto -IN\Delta x \quad (1-18)$$

引入比例常数  $\sigma$ ，则

$$\Delta I = -\sigma IN\Delta x, \quad (1-19)$$

$$\sigma = \frac{-\Delta I}{IN\Delta x} = \frac{-\Delta I/I}{N\Delta x}, \quad (1-20)$$

式中,  $-\Delta I/I$ ——平行中子束中与靶核发生作用的中子所占的份额;

$N\Delta x$ ——单位面积上的靶核数。

从(1-20)式可以看出,  $\sigma$  是表示平均一个入射中子与一个靶核发生相互作用的几率大小的一种度量。 $\sigma$  就叫做微观截面。由(1-20)式可知, 它的量纲是平方厘米。常用的单位是靶, 1靶等于 $10^{-24}$ 厘米<sup>2</sup>。并且我们以各种不同的角标表示各种不同的相互作用过程的截面(见表1-2)。其中无弹性散射截面 $\sigma_{ne}$ 定义为

$$\sigma_{ne} = \sigma_t - \sigma_e, \quad (1-21)$$

根据截面的定义得

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_f + \sigma_{ne} + \dots, \quad (1-22)$$

式中 $\sigma_{n,\alpha}$ 表示 $(n, \alpha)$ 反应的微观截面。

微观截面可由实验测得或理论算出。在文献[7]中给出各种元素对不同能量中子的各种核反应的截面值。许多手册通常只给出当中子能量为0.0253电子伏时, 各种元素的有关截面值(见附录3)。

表1-2 截面角标符号

符 号	表示中子的作用过程
s	弹性散射
in	非弹性散射
$\gamma$	辐射俘获
f	裂 变
a	吸 收
ne	无弹性散射
t	总截面

## 2.2 宏观截面、平均自由程

### 2.1.1 宏观截面

将(1-18)式改写成 $dI = -\sigma INdx$ , 设靶厚度为 $x$ , 对上式积分, 得

$$I(x) = I_0 e^{-\sigma N x}, \quad (1-23)$$

式中 $I_0$ ——入射平行中子束的强度, 即靶表面上的中子束强度;  $I(x)$ ——靶厚度 $x$ 处未经碰撞的平行中子束强度。

由此可见, 平行中子束强度随靶厚度增加按指数规律衰减(见图1-3)。通常令

$$\Sigma = N\sigma, \quad (1-24)$$

把 $\Sigma$ 叫做宏观截面, 它是一个中子与一立方厘米内原子核发生核反应的平均几率大小的一种度量。根据(1-19)式得

$$\Sigma = N\sigma = \frac{-dI/I}{dx}. \quad (1-25)$$

可以看出, 它也是一个中子穿行单位距离与核发生相互作用的几率大小的一种度量。宏

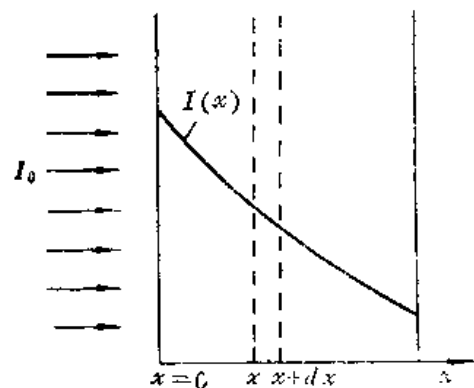


图1-3 在厚靶内平行中子束的衰减

观截面的单位是厘米<sup>-1</sup>。对应于不同的核反应过程有不同的宏观截面，所用的角标符号与微观截面的相同。

为计算宏观截面必须知道单位体积内的原子核数  $N$ ，对于单元素材料

$$N = \frac{N_0 \rho}{A}, \quad (1-26)$$

式中， $N_0$ ——阿伏加德罗常数；

$\rho$ ——材料的密度，克/厘米<sup>3</sup>；

$A$ ——该元素的原子量。

对于由几种元素组成的均匀混合物质，宏观截面可以写成

$$\Sigma = \sum_i N_i \sigma_i, \quad (1-27)$$

式中， $\sigma_i$  为第  $i$  种元素的某种核反应的微观截面； $N_i$  表示每立方厘米混合物中第  $i$  种元素核的数目。

对于化合物，在 (1-26) 式中用分子量  $M$  代替  $A$  便可求得单位体积内的分子数  $N$ 。若用  $\nu_i$  表示化合物的一个分子里含有第  $i$  种元素的原子数目，那么，化合物的宏观截面可以写成

$$\Sigma = \sum_i \nu_i N \sigma_i, \quad (1-28)$$

### 2.2.2 平均自由程

根据 (1-23) 式

$$\frac{I(x)}{I_0} = e^{-\Sigma x}, \quad (1-29)$$

因为  $I(x)/I_0$  是入射平行中子束穿过厚度为  $x$  的物质后而未发生核反应的中子份额。所以  $e^{-\Sigma x}$  就是一个中子穿行  $x$  长的路程仍未发生核反应的几率。由 (1-25) 式知道，中子在  $x$  及  $x+dx$  之间发生核反应的几率为  $\Sigma dx$ 。如果令  $p(x)dx$  表示一个中子在穿行  $x$  距离后未发生核反应，而在  $x$  和  $x+dx$  之间发生首次核反应的几率，则

$$p(x)dx = e^{-\Sigma x} \Sigma dx, \quad (1-30)$$

$p(x)$  叫做首次反应几率分布函数，显然应有

$$\int_0^{\infty} p(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-\Sigma x} \Sigma dx = 1. \quad (1-31)$$

如把中子在连续两次相互作用之间穿行的平均距离叫做平均自由程，并用  $\lambda$  表示，那么有

$$\begin{aligned} \lambda = \bar{x} &= \int_0^{\infty} x p(x) dx = \Sigma \int_0^{\infty} x e^{-\Sigma x} dx \\ &= \frac{1}{\Sigma} \text{厘米}. \end{aligned} \quad (1-32)$$

同样，其它各种核反应过程也可按类似的方法处理，如定义散射平均自由程  $\lambda_s = 1/\Sigma_s$ 、吸收平均自由程  $\lambda_a = 1/\Sigma_a$  等等。可以证明  $\lambda_t = 1/\Sigma_t$ ，且有

$$\frac{1}{\lambda_t} = \frac{1}{\lambda_s} + \frac{1}{\lambda_a} \quad (1-33)$$

## 2.3 核反应率、中子通量和平均截面

### 2.3.1 核反应率

单位体积内的中子数叫做中子密度，用  $n$  表示。在核反应堆内，中子密度一般在  $10^8$  到  $10^{11}$  中子/厘米<sup>3</sup> 范围内；单位体积内的原子核数在  $10^{17}$  到  $10^{22}$  范围内。因此，在核反应堆内发生的中子与原子核的相互作用过程，大量的是中子与大量的原子核的相互作用过程。在核反应堆物理分析中，常用核反应率来定量地描述这种相互作用过程的统计行为。

在核反应堆内，中子的运动方向是杂乱无章的。设中子以同一速率  $v$ （或者说具有相同的动能）在介质内杂乱无章地运动，介质的宏观截面为  $\Sigma$ ，平均自由程为  $\lambda$ ， $\lambda = 1/\Sigma$ 。此时，一个中子与介质原子核在单位时间内发生作用的统计平均次数为  $v/\lambda = v\Sigma$ 。因而每秒每单位体积内的中子与介质原子核发生作用的总次数（统计平均值），用  $R$  表示，便等于

$$R = nv\Sigma \quad \text{中子/厘米}^2 \cdot \text{秒}, \quad (1-34)$$

式中， $n$ ——中子密度，中子/厘米<sup>3</sup>。 $R$  就叫做核反应率，它是反应堆物理分析中常用的一个重要的物理量。对应于不同的核反应过程有不同的核反应率，如吸收反应率  $R_a = nv\Sigma_a$ ，裂变反应率  $R_f = nv\Sigma_f$ ，等等。

对于由多种元素组成的均匀混合的物质，反应率应为中子与各种元素核相互作用的反应率之和，即

$$\begin{aligned} R &= nv\Sigma_1 + nv\Sigma_2 + \dots \\ &= nv \sum_{i=1}^m \Sigma_i \end{aligned} \quad (1-35)$$

式中， $\Sigma_i = N_i\sigma_i$ ，为第  $i$  种元素核在混合物中的宏观截面， $N_i$  由 (1-26) 式求出；求和是对混合物内所有的  $m$  种元素而言的。

### 2.3.2 中子通量

在核反应堆物理分析中（例如在计算核反应率时），经常地出现乘积  $nv$  这个量，因此给它一个专门的名称，叫做标量中子通量，习惯上简称中子通量（或通量）。一般用  $\phi$  表示：

$$\phi = nv \quad \text{中子/厘米}^2 \cdot \text{秒}, \quad (1-36)$$

这样，(1-34) 式便可写成

$$R = \Sigma\phi, \quad (1-37)$$

即中子与介质原子核相互作用的反应率等于宏观截面与中子通量的乘积。

由 (1-36) 式可以看出，中子通量等于该点的中子密度与该点中子速度的乘积。它表示

一立方厘米内所有的中子在一秒钟内穿行距离的总和。中子通量是核反应堆的重要参数，它的大小反映出堆的功率水平。在目前的热中子动力堆内，热中子通量的数量级一般约为 $10^{13}$ 至 $10^{14}$ 中子/厘米<sup>2</sup>·秒。

应该指出，尽管中子通量与前述的平行中子束的强度具有相同的单位，但它们的物理意义是不相同的。在一般情况下，中子通量并不具有“通量”（每秒通过单位面积的中子数）的意义，只有对所有中子都具有同一运动方向的平行中子束来讲才是如此。实际上，由于任一点处中子的运动方向是杂乱无章的，因而(1-38)式所定义的中子通量是该点沿空间各个方向的所有微分中子束的强度之总和。它是一个标量。在第四章中将它对作进一步的讨论。

### 2.3.3 平均截面

实际上，在核反应堆内，中子并不具有同一速度 $v$ ，而是以不同的速度在运动着。若令 $n(v)$ 为中子速度在 $v$ 附近单位速度间隔内的中子密度，那么，总的中子密度 $n$ 便等于

$$n = \int n(v) dv. \quad (1-38)$$

根据中子通量的定义，总的中子通量 $\phi$ 应为

$$\phi = \int n(v) v dv = \int \phi(v) dv, \quad (1-39)$$

式中， $\phi(v) = n(v)v$ ，它为中子速度在 $v$ 附近单位速度间隔内的中子通量。若定义中子平均速度 $\bar{v}$ ：

$$\bar{v} = \frac{\int n(v) v dv}{\int n(v) dv} = \frac{\phi}{n}, \quad (1-40)$$

则

$$\phi = n \bar{v} \quad (1-41)$$

即，总的中子通量等于总的中子密度乘以中子平均速度。

考虑到截面是中子速度的函数，此时核反应率 $R$ 应为

$$\begin{aligned} R &= \int \Sigma(v) n(v) v dv \\ &= \int \Sigma(v) \phi(v) dv. \end{aligned} \quad (1-42)$$

为了以后计算方便，引入平均截面的概念。若用 $\bar{\Sigma}$ 表示平均宏观截面，并令平均宏观截面与总的中子通量的乘积等于反应率 $R$ ：

$$R = \int \Sigma(v) \phi(v) dv = \bar{\Sigma} \phi. \quad (1-43)$$

这样，便可求得平均宏观截面

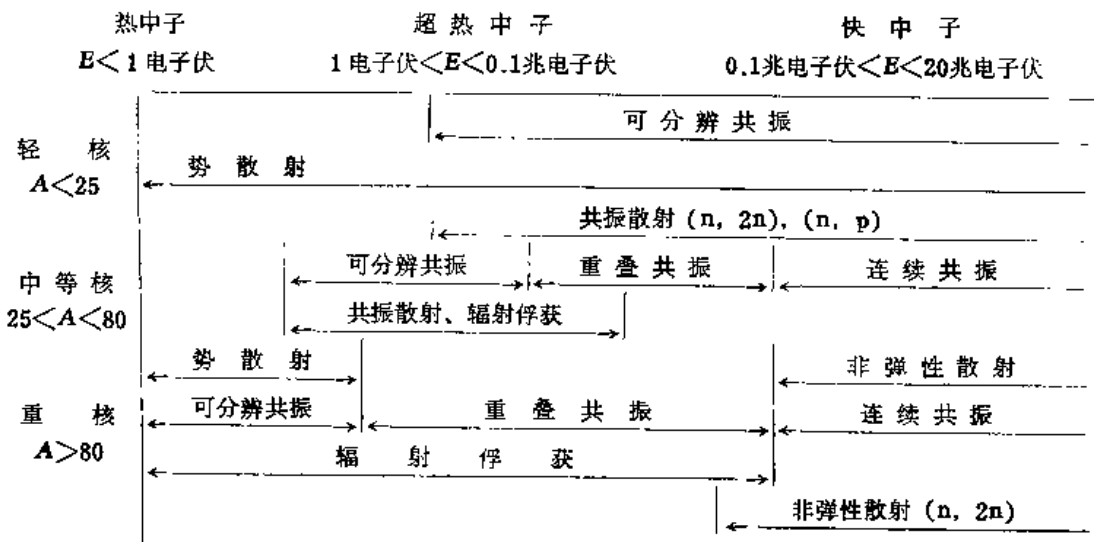
$$\bar{\Sigma} = \frac{\int \Sigma(v) \phi(v) dv}{\int \phi(v) dv} = \frac{R}{\phi}. \quad (1-44)$$

可以看出，(1-43)式意味着，在保持核反应率相等这一点上， $\bar{\Sigma}\phi$ 与(1-42)式的 $R$ 是等效的。因此有时把平均截面称做等效截面。这种使核反应率保持不变来求平均截面的概念，在反应堆计算中是经常用到的。

### 2.4 截面随中子能量的变化

截面的数值决定于入射中子的能量和靶核的性质。在反应堆内，中子的能量在0到17兆电子伏范围内，实际上具有10兆电子伏以上能量的中子数极少。另一方面，堆内所采用的材料及裂变产物的原子核的质量数从 $A = 1$ 直到 $A = 242$ 以上。所以，在进行反应堆物理计算时，必须具有各种能量(0—17兆电子伏)的中子和各种不同质量数 $A$ (1—242原子量单位)的原子核作用的各种核反应截面资料。通常按中子能量大小把中子分成热中子、超热中子和快中子，把元素核按质量数 $A$ 的大小分成轻核( $A < 25$ )、中等核( $25 < A < 80$ )、重核( $A > 80$ )。不同能量范围内的中子分别与轻核、中等核、重核可能发生的核反应列于表1-3内。现在按吸收、散射、裂变反应分别介绍典型的截面特性。

表1-3 各种质量数的核的截面特性



#### 2.4.1 微观吸收截面

在低能区( $E < 2$ 电子伏)，许多元素核的微观吸收截面 $\sigma_a$ 按 $1/\sqrt{E}$ 规律变化，即服从“ $1/v$ ”律。也就是， $\sigma_a \sqrt{E} = \text{常数}$ 。所以，如果已知 $j$ 元素对能量为 $E = 0.0253$ 电子伏(相应的中子速度为2200米/秒)的中子微观吸收截面 $\sigma_a^j(0.0253)$ ，那么对能量为 $E$ 电子伏的中子的微观吸收截面 $\sigma_a^j(E)$ 由下式给出：

$$\begin{aligned} \sigma_a^j(E) &= \sigma_a^j(0.0253) \sqrt{\frac{0.0253}{E}} \\ &= \sigma_a^j(2200) \frac{2200}{v(E)}, \end{aligned} \tag{1-45}$$

式中 $v(E)$ ——中子能量为 $E$ 电子伏时的速度，米/秒； $\sigma_a^j(0.0253)$ 可由表(见附录3)查得。



有些核的吸收截面并不符合  $1/v$  律，例如，堆内常用的材料铀-235、铀-238、钚-239、钷、镉等。

对于多数轻核、中子能量从热能一直到几兆电子伏，其吸收截面都符合  $1/v$  律。然而对于重核，如铀-238核，中子在稍高于热能的能量范围内（即在电子伏能区）就出现强烈的共振吸收。也就是中子在某一能量附近的小间隔内， $\sigma_a(E)$  将变得特别大。图 1-4 给出 1 至  $10^6$  电子伏范围内铀-238 的微观总截面（主要为吸收截面），这里可以看到许多共振峰。共振峰的形成是由于中子的能量恰好能使复合核激发至某一能级的缘故。但由于轻核的第一个激发态的能量比重核的高（见表 1-1），所以轻核对于能量比较高的中子（一般要在兆电子伏范围内）才出现这种共振吸收。重核的共振峰窄而高，轻核的共振峰宽而低，如铀-238 的第一个共振峰对应的中子能量为 6.67 电子伏，其共振峰宽度  $\Gamma = 0.027$  电子伏，而碳对应中子能量为 2 兆电子伏处，共振宽度  $\Gamma = 7$  千电子伏。

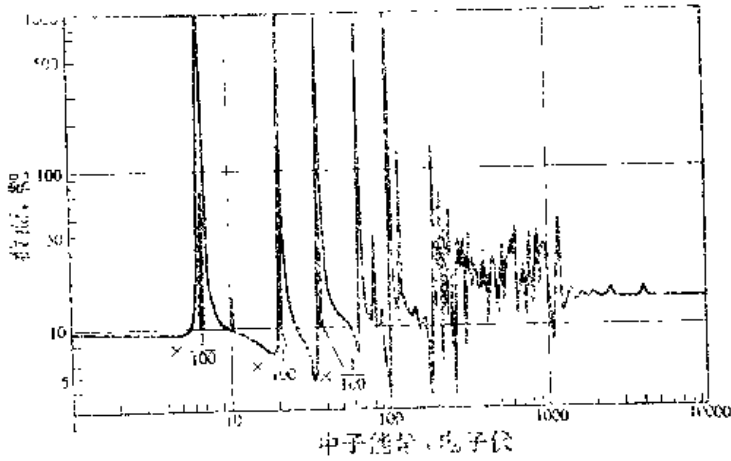


图1-4 铀-238 的总截面

在低能处，核的能级间距大，而能量越高，能级之间的间距就越小。因此在低能区的共振峰是一个个的孤立峰。随着中子能量的增加，共振峰间距变小，共振峰开始重叠，最后  $\sigma_a(E)$  曲线变成平缓的曲线了。当从实验上测量中子截面变化时，受到实验仪器能量分辨率的限制，只能测量到共振能区低能段的一些共振峰的共振参数。通常我们把这个能区的共振称为可分辨共振。在此能量以上的部分，称为不可分辨共振区。目前对可转换核的可分辨共振区已扩展到几千电子伏，对重要的易裂变核，扩展到50电子伏左右。

### 2.4.2 微观散射截面

#### (1) 非弹性散射截面 $\sigma_{in}$

非弹性散射有阈能特点，所以当中子能量小于阈能时， $\sigma_{in}$  为零；而当中子能量大

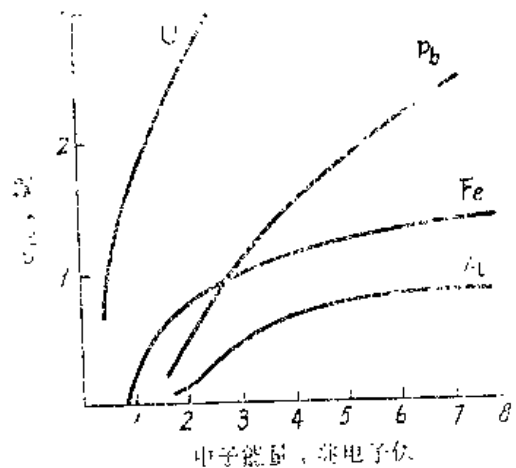


图1-5 若干反应堆材料的非弹性散射截面

于阈能时,  $\sigma_{in}$  随着中子能量的增加而增大。图 1-5 给出几种反应堆常用材料的非弹性散射截面, 可以看出, 在中子能量低于 10 兆电子伏的范围内,  $\sigma_{in}$  一般约为几靶。

### (2) 弹性散射截面 $\sigma_e$

多数元素与较低能量中子的散射都是弹性的。 $\sigma_e$  基本上为常数, 截面值一般为几靶。对于轻核、中等核, 中子能量从低能一直到兆电子伏左右范围,  $\sigma_e$  近似为常数。在共振能区将出现共振弹性散射。

关于低能 ( $E < 2$  电子伏) 中子的散射问题, 将留待第九章讨论。

### 2.4.3 微观裂变截面 $\sigma_f$

裂变材料铀-235、钚-239 等在热能区的裂变截面  $\sigma_f$  随中子能量减小而增加, 且其截面值很大。例如当中子能量  $E = 0.0253$  电子伏时, 铀-235 的  $\sigma_f = 582$  靶, 钚-239 的  $\sigma_f = 1009$  靶。

对高于热能区 ( $E > 1$  电子伏) 的中子, 铀-235 核的裂变截面出现共振峰, 共振能区延伸至千电子伏。在千电子伏至兆电子伏能量范围内, 裂变截面随中子能量的增加而下降到几靶。铀-235 核在上述三个能区的裂变截面曲线示于图 1-6。

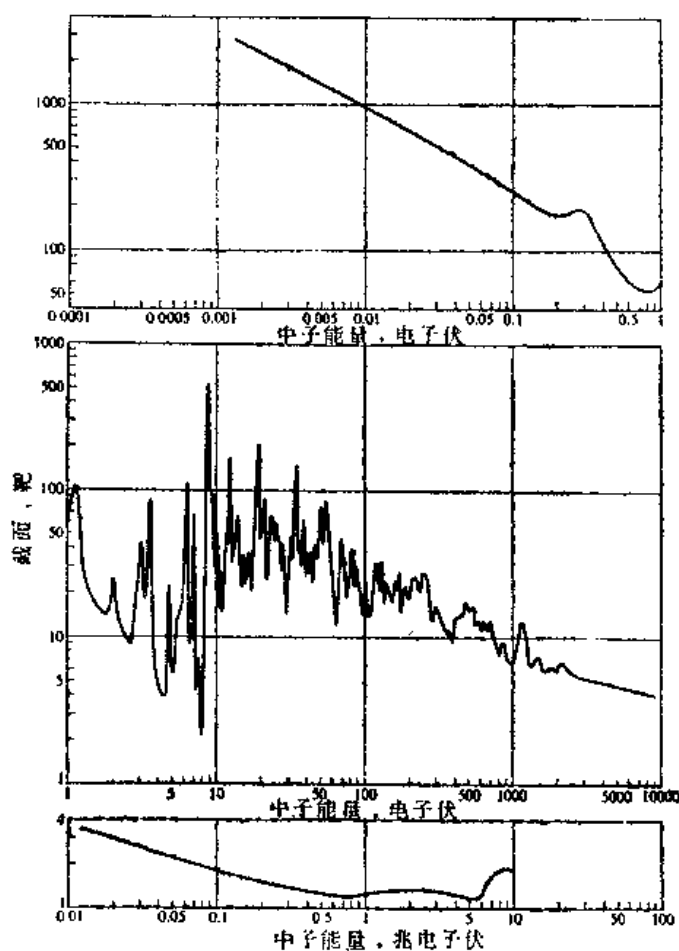


图 1-6 铀-235 的裂变截面

铀-238、钚-240 和钍-232 等元素的裂变具有阈能特点, 见图 1-7。

前面曾经提到过铀-235 核吸收中子后并不是都发生裂变的, 有的发生辐射俘获反应

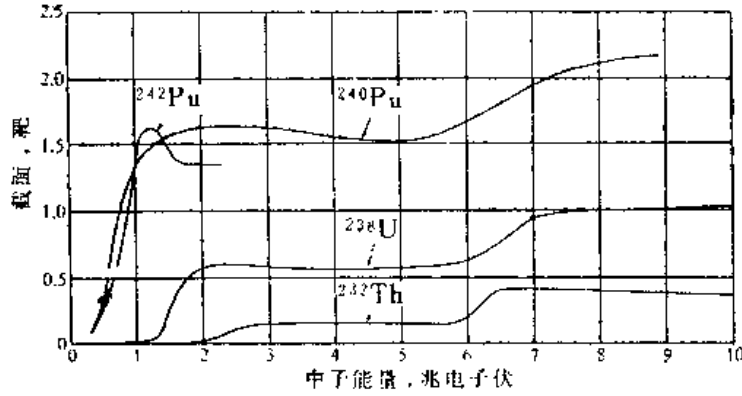


图1-7 钷-232、铀-238、钷-240和钷-242的裂变截面

而变成铀-236。辐射俘获截面与裂变截面之比通常用  $\alpha$  表示：

$$\alpha = \frac{\sigma_r}{\sigma_f} \tag{1-46}$$

$\alpha$  与裂变同位素的种类和中子能量有关<sup>1)</sup>。表1-4给出铀-235和钷-239的  $\alpha$  与入射中子能量的关系。

表1-4  $\alpha$  与入射中子能量的关系

同位素	能量	$\alpha$	同位素	能量	$\alpha$
铀-235	热中子	0.18	钷-239	热中子	0.42
	30eV	0.65		100eV	0.81
	100eV	0.52		1200eV	0.60
	1200eV	0.47		15keV	0.45
	15keV	0.41			

在反应堆分析中常用到另一个量，就是燃料核每吸收一个中子后平均放出的中子数，用  $\eta$  表示。对于纯裂变同位素，如铀-235，

$$\eta = \frac{\nu\sigma_f}{\sigma_a} = \frac{\nu\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_r} = \frac{\nu}{1 + \alpha} \tag{1-47}$$

铀-235等元素的热中子吸收截面和裂变截面等数据列于表 1-5 中。 $\eta$  值和中子能量的依赖关系示于图1-8。

表1-5 铀-235 等元素热中子 (0.0253 电子伏) 裂变反应的有关数据

	$\sigma_a$	$\sigma_f$	$\alpha$	$\eta$	$\nu$
铀-233	579	531	0.919	2.287	2.492
铀-235	681	582	0.856	2.068	2.418
天然铀	7.59	4.19	0.552	1.335	2.418
钷-239	1011	743	0.735	2.108	2.871
钷-241	1377	1009	0.733	2.145	2.927

1) 各国测得的数值不完全一致。

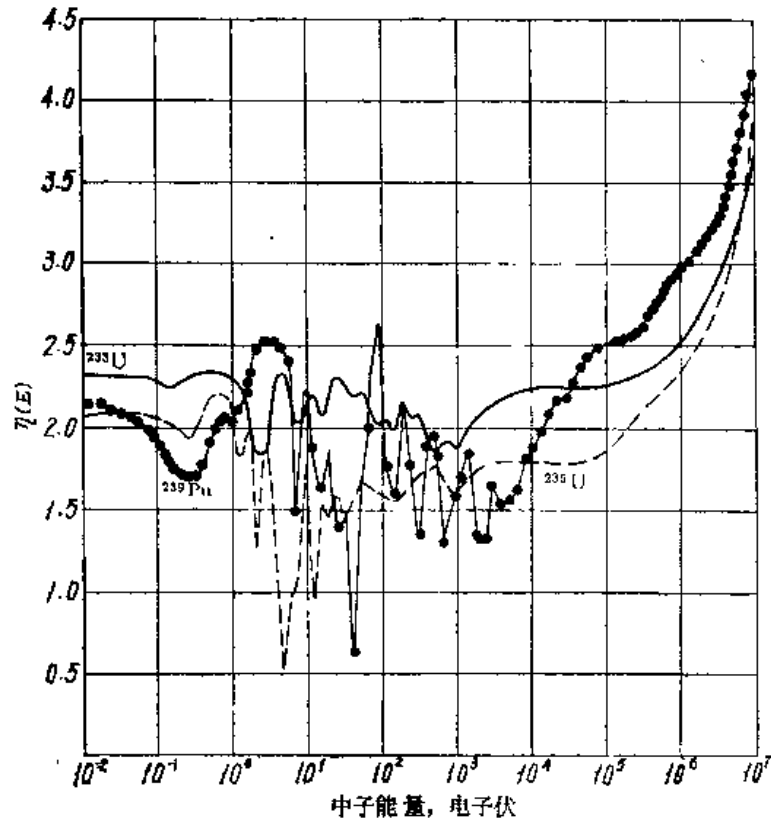


图1-8 η 和中子能量的关系

### 3. 中子的散射过程

#### 3.1 弹性散射过程动力学

在热中子反应堆内，中子的慢化主要靠中子与慢化剂核的弹性散射。当中子的能量比靶核（如慢化剂核）的热运动能量大得多时，可以不考虑靶核的热运动及化学键的影响，即此时可以认为中子是与静止的、自由的靶核发生散射碰撞。关于考虑到核的热运动和化学键影响的低能中子的散射问题，将在第九章讨论。

##### 3.1.1 弹性散射时能量的变化

中子与核的弹性散射可以看作是两个弹性刚球的相互碰撞。在这样的系统中，碰撞前后其动量和动能守恒，并可用经典力学的方法来处理。讨论弹性碰撞时通常采用两种坐标系，实验室坐标系（L系）和质心坐标系（C系）。L系是固定在地面上的坐标系，实际测量就是在这种坐标系内进行的。C系是固定在中子-靶核质量中心上的坐标系。处理时采用C系可以使问题简化。在这两个坐标系内，中子与核散射碰撞前、后的情况示于图1-9。

为了求出C系内中子和靶核的速度，首先必须求出质心的速度  $V_{CM}$ 。根据质心的动量应等于该系统内中子和靶核总动量之和，可以求得质心的速度  $V_{CM}$  为

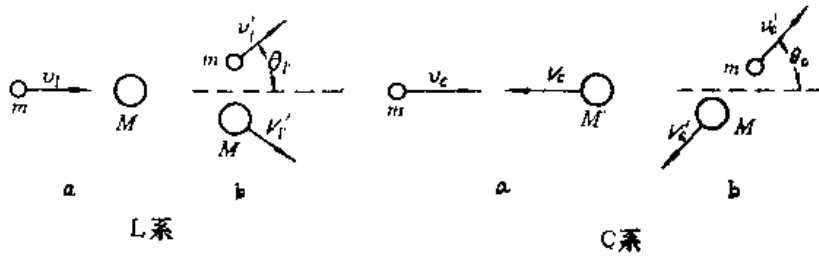


图1-9 在实验室系(L系)和质心系(C系)内中子与核的弹性散射  
a——散射前；b——散射后。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{CM} &= \frac{1}{(m+M)}(mv_i + M\mathbf{V}_i) \\ &= \frac{1}{1+A}\mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (1-48)$$

式中， $m$ 、 $M$ ——分别为中子和靶核的质量； $\mathbf{v}_i$ 、 $\mathbf{V}_i$ ——分别为碰撞前中子和靶核在实验室系内的速度； $A = M/m$ ，它可以近似地看作为靶核的质量数，并认为在L系内碰撞前靶核是静止的，即  $\mathbf{V}_i = 0$ 。

碰撞前，在C系内，中子和靶核的速度分别用  $\mathbf{v}_c$  和  $\mathbf{V}_c$  表示，为

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{CM} = \frac{A}{A+1}\mathbf{v}_i \quad (1-49)$$

$$\mathbf{V}_c = -\mathbf{V}_{CM} = -\frac{1}{1+A}\mathbf{v}_i \quad (1-50)$$

而中子与靶核的总动量  $\mathbf{p}_c$  为

$$\mathbf{p}_c = m\mathbf{v}_c + M\mathbf{V}_c = \frac{mM}{m+M}\mathbf{v}_i - \frac{mM}{m+M}\mathbf{v}_i = 0 \quad (1-51)$$

总动能为

$$E_c = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 = \frac{1}{2}\mu v_i^2 \quad (1-52)$$

式中， $\mu$ ——折算质量

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \quad (1-53)$$

碰撞前在L系内中子与靶核的总动能  $E_i$  为

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (1-54)$$

由 (1-52) 式得

$$E_c = \frac{M}{m+M} E_i = \frac{A}{A+1} E_i \quad (1-55)$$

由此可见，中子与靶核两者在质心系内的总动能小于两者在实验室系内的总动能。

碰撞后，在C系内，散射中子沿着与它原来运动方向成 $\theta_c$ 角度的方向飞去，角 $\theta_c$ 叫做C系内的散射角。由于质心总是位于两个粒子的连线上，故靶核也必定沿着与它原来运动方向成 $\theta_c$ 角度的方向反冲。根据动量守恒和动能守恒，碰撞后，在C系内有

$$\mathbf{p}_c' = m\mathbf{v}_c' + M\mathbf{V}_c' = \mathbf{p}_c = 0, \quad (1-56)$$

$$\frac{1}{2} m v_c'^2 + \frac{1}{2} M V_c'^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} M V_c^2, \quad (1-57)$$

联立求解得

$$V_c' = V_c = \frac{1}{A+1} v_i, \quad (1-58)$$

$$v_c' = v_c = -\frac{A}{1+A} v_i. \quad (1-59)$$

把它们和(1-49)、(1-50)式相比较，可看出，在C系内，碰撞前后，中子和靶核的速度在数值上不变，仅改变了运动方向。

我们感兴趣的是在L系内碰撞前后中子能量的变化。在L系内，碰撞后，中子沿着与原来运动方向成 $\theta_l$ 角的方向飞去，速度为 $v_l'$ 。而 $\mathbf{v}_l = \mathbf{v}_c' + \mathbf{V}_{CM}$  (见图1-10)。

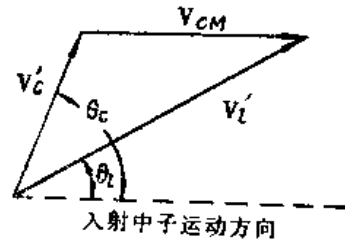


图1-10 实验室系和质心系内散射角的关系

根据余弦定律有

$$v_l'^2 = V_{CM}^2 + v_c'^2 + 2v_c' V_{CM} \cos\theta_c. \quad (1-60)$$

把(1-48)和(1-59)式代入，便得到L系内碰撞后与碰撞前中子能量之比 $E'/E$ 为

$$\frac{E'}{E} = \frac{v_l'^2}{v_i^2} = \frac{A^2 + 2A \cos\theta_c + 1}{(A+1)^2}. \quad (1-61)$$

按照图1-10，

$$v_l' \cos\theta_l = V_{CM} + v_c' \cos\theta_c,$$

或

$$\begin{aligned} \cos\theta_l &= \frac{V_{CM} + v_c' \cos\theta_c}{v_l'} = \frac{1 + A \cos\theta_c}{A+1} \frac{v_i}{v_l'} \\ &= \frac{A \cos\theta_c + 1}{\sqrt{A^2 + 2A \cos\theta_c + 1}} \end{aligned} \quad (1-62)$$

令

$$\alpha = \left( \frac{A-1}{A+1} \right)^2, \quad (1-63)$$

将(1-63)式代入(1-61)式，得

$$E' = \frac{1}{2} [(1+\alpha) + (1-\alpha) \cos\theta_c] E. \quad (1-64)$$

利用(1-61)式消去(1-62)式中的 $\cos\theta_c$ ，便得到

$$\cos\theta_c = \frac{1}{2} \left[ (A+1) \sqrt{\frac{E'}{E}} - (A-1) \sqrt{\frac{E}{E'}} \right]. \quad (1-65)$$

从 (1-64) 式可以看出:

- (i)  $\theta_c = 0$  时,  $E' \rightarrow E_{m, z} = E$ , 此时中子没有能量损失;
- (ii)  $\theta_c = 180^\circ$  时,  $E' \rightarrow E'_{m, n}$ .

$$E'_{m, n} = \alpha E. \quad (1-66)$$

因而一次碰撞中可能的最大能量损失为

$$\Delta E_{m, z} = (1 - \alpha) E. \quad (1-67)$$

换句话说, 中子与靶核碰撞后不可能出现  $E' < \alpha E$  的中子, 即碰撞后中子能量  $E'$  只能在  $E$  至  $\alpha E$  的区间内;

(iii) 中子在一次碰撞中可能损失的最大能量与靶核的质量数有关。如  $A=1, \alpha=0, E'_{m, n}=0$ , 即中子与氢核碰撞时, 中子有可能在一次碰撞中损失全部能量。而中子与铀-238 核发生一次碰撞时, 可损失的最大能量约为碰撞前中子能量的2%。可见, 从中子慢化的角度来看, 只宜采用轻元素作慢化剂。

### 3.1.2 散射后中子能量的分布

从 (1-64) 和 (1-65) 式可以看出, 中子的能量变化与其散射角之间有对应的关系。因此, 根据中子散射角分布的几率可以求得碰撞后中子能量  $E'$  分布的几率。设  $f(\theta_c) d\theta_c$  表示: 在 C 系内碰撞后中子散射角在  $\theta_c$  附近  $d\theta_c$  内的几率;  $f(E \rightarrow E') dE'$  表示碰撞前中子能量为  $E$ , 碰撞后中子能量在  $E'$  附近  $dE'$  内的几率。由于碰撞后中子能量  $E'$  与中子散射角之间有对应的关系 (见 1-64 式), 因而碰撞后, 中子的能量在  $E'$  附近  $dE'$  内的几率必定等于中子的散射角在  $\theta_c$  附近  $d\theta_c$  内的几率, 即有下列关系式:

$$f(E \rightarrow E') dE' = f(\theta_c) d\theta_c, \quad (1-68)$$

因此, 如果能够知道在质心系内散射角的分布几率, 由上式就可以求出散射后中子的能量分布函数  $f(E \rightarrow E')$ 。在热中子堆内, s 波中子的散射是主要的。实验表明, 对于 s 波中子散射, 也就是当  $E < 10/A^{2/3}$  兆电子伏 (对一般轻元素相当于  $E$  小于几兆电子伏) 时, 在 C 系内, 中子的势散射是各向同性的。即按立体角的分布是球对称的, 也就是, 在 C 系内, 碰撞后中子在任一立体角内出现的几率是均等的。在这种情况下, 一个中子被散射到立体角  $d\Omega_c$  (相当于 C 系内散射到  $\theta_c$  和  $\theta_c + d\theta_c$  之间的角锥元, 见图1-11) 内的几率为

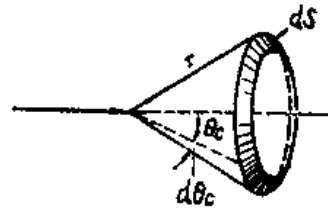


图1-11 C系内散射角分布

$$f(\theta_c) d\theta_c = \frac{d\Omega_c}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin\theta_c d\theta_c. \quad (1-69)$$

由 (1-64) 式得

$$\frac{d\theta_c}{dE'} = - \frac{2}{E(1-\alpha)\sin\theta_c}. \quad (1-70)$$

将 (1-70) 式代入 (1-68) 式便得到下式:

$$f(E \rightarrow E') dE' = -\frac{dE'}{(1-\alpha)E}, \quad \alpha E \leq E' \leq E \quad (1-71)$$

这样, 碰撞前中子能量为  $E$ , 碰撞后中子能量  $E'$  落在  $E$  和  $\alpha E$  之间的几率与碰撞后能量  $E'$  大小无关, 并等于常数。或者说, 散射后的能量分布是均匀分布的。由于散射后中子能量  $E'$  在  $E$  和  $\alpha E$  之间, 由 (1-71) 式不难证明:

$$\int_E^{\alpha E} f(E \rightarrow E') dE' = 1 \quad (1-72)$$

### 3.2 平均勒增量和平均散射角余弦

#### 3.2.1 勒

为了计算方便, 在反应堆分析中常用一种无量纲的量, 叫做“勒”, 作为能量变量, 用  $u$  表示, 它定义为

$$u = \ln \frac{E_0}{E}, \quad (1-73)$$

或

$$E = E_0 e^{-u}, \quad (1-74)$$

式中  $E_0$  为选定的参考能量, 一般取  $E_0 = 2$  兆电子伏 (裂变中子的平均能量), 或取  $E_0 = 10$  兆电子伏 (假定裂变中子能量的上限为 10 兆电子伏)。这样当  $E = E_0$  时,  $u = 0$ 。由  $u$  的定义可知, 随着中子能量的减少, 中子的勒增加。

中子在弹性碰撞后能量减少, 勒增加。一次碰撞后勒的增加量  $\Delta u$  为

$$\Delta u = u' - u = \ln \frac{E_0}{E'} - \ln \frac{E_0}{E} = \ln \frac{E}{E'},$$

因而有

$$\frac{E'}{E} = e^{u-u'} = e^{-\Delta u}, \quad (1-75)$$

式中  $u$  和  $u'$  分别为碰撞前和碰撞后的勒。根据 (1-66) 式可知, 一次碰撞后最大的勒增量, 用  $\gamma$  表示, 为

$$\gamma = \Delta u_{\max} = \ln \frac{1}{\alpha}, \quad (1-76)$$

根据 (1-65) 式, 散射角和勒增量的关系为

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{2} [(A+1)e^{-\Delta u/A} - (A-1)e^{\Delta u/A}]. \quad (1-77)$$

若令  $f(u \rightarrow u') du'$  表示碰撞前中子的勒为  $u$ , 碰撞后中子的勒出现在  $u'$  附近  $du'$  范围内的几率, 由于勒与能量之间有对应关系, 因而  $f(u \rightarrow u')$  和  $f(E \rightarrow E')$  之间应当满足下列关系式:



$$f(u \rightarrow u') du' = f(E \rightarrow E') dE'.$$

根据 (1-71) 和 (1-74) 式得

$$f(u \rightarrow u') du' = \frac{1}{1-\alpha} e^{-\Delta u} du', \quad u \leq u' \leq u + \gamma. \quad (1-78)$$

从式中我们可以看出, 散射后中子的勒落在某一特定勒间隔内的几率与散射前后中子的勒增量  $\Delta u$  有关。和 (1-72) 式类似, (1-78) 式满足下列归一条件:

$$\int_u^{u+\gamma} f(u \rightarrow u') du' = 1. \quad (1-79)$$

### 3.2.2 平均勒增量

在研究中子慢化过程时, 有一个常用的量, 就是每次碰撞中子能量的自然对数的平均变化值, 或平均勒增量, 用  $\xi$  来表示,  $\xi$  为

$$\xi = \overline{\ln E} - \overline{\ln E'} = \overline{\ln \frac{E}{E'}} = \overline{\Delta u}. \quad (1-80)$$

在质心系内散射为各向同性的情况下, 根据 (1-78) 式可算出  $\xi$  为

$$\begin{aligned} \xi &= \int_u^{u+\gamma} (u' - u) f(u \rightarrow u') du' \\ &= 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha \\ &= 1 + \frac{A-1}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1}. \end{aligned} \quad (1-81)$$

$A > 10$  时可采用下列近似式:

$$\xi = \frac{2}{A + \frac{2}{3}}. \quad (1-82)$$

由此可知, 在 C 系内散射为各向同性时,  $\xi$  只和靶核的质量数  $A$  有关而与中子的能量无关。各元素核的  $\xi$  值可查附录表 3。

若用  $N_c$  表示中子从初始能量  $E_1$  慢化到能量  $E_2$  所需要的平均碰撞次数, 利用平均勒增量可以容易地求出  $N_c$  为

$$N_c = \frac{\ln E_1 - \ln E_2}{\xi} = \frac{\ln \frac{E_1}{E_2}}{\xi}. \quad (1-83)$$

这样, 当中子能量由  $2 \times 10^9$  电子伏慢化到 0.0253 电子伏时, 所需要的中子和轻、重核的碰撞次数显然是不同的。对于氢核、石墨核以及铀-238核, 其碰撞次数分别是 18 次、114 次和 2172 次。

现在我们简单地讨论一下对慢化剂的要求和选择。从 (1-83) 式可以看出, 从中子慢化的角度来看, 慢化剂应为轻元素, 它应具有大的平均勒增量  $\xi$  值。此外, 它还应该有较大的

散射截面，否则， $\xi$  虽大也没有用处。因为，只有当中子与核发生散射碰撞时，才有可能使中子的能量降低。因此要求慢化剂具有较大的宏观散射截面  $\Sigma_s$  和  $\xi$ 。通常把乘积  $\xi\Sigma_s$  叫做慢化剂的慢化能力。表 1-6 给出常用的四种慢化剂的慢化能力。

除了上述要求外，显然还要求慢化剂具有小的吸收截面。否则，在堆内也是不宜采用的。为此，我们定义一个新的量  $\xi\Sigma_s/\Sigma_a$ ，把它叫做慢化比。从反应堆物理观点来看，它是表示慢化剂优劣的一个重要参数，好的慢化剂不仅应具有较大的  $\xi\Sigma_s$  值，还应该具有大的慢化比。

表 1-6 四种慢化剂的性质

慢化剂	慢化能力 $\xi\Sigma_s$ , 厘米 <sup>-1</sup>	慢化比 $\xi\Sigma_s/\Sigma_a$
水	1.53	70
重水	0.177	2100
铍	0.16	150
石墨	0.063	170

从表 1-6 可以看出，重水具有良好的慢化性能，但是其价格高。水的慢化能力  $\xi\Sigma_s$  值最大，因而以水作慢化剂的反应堆具有较小的堆芯体积。但水的吸收截面较大，因而水堆必须用浓缩铀作燃料。石墨的慢化性能也是较好的，但它的慢化能力小，因而石墨堆一般具有比较庞大的堆芯体积。目前动力堆中最常用的慢化剂是水，它是价廉而又最易得到的慢化剂。

### 3.2.3 平均散射角余弦 $\bar{\mu}_0$

中子与核发生弹性散射后，若散射角为  $\theta$ ，那么， $\cos\theta$  就叫做散射角的余弦。由 (1-69) 式可以求出在 C 系内的平均散射余弦  $\bar{\mu}_c$  为

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_c &= \overline{\cos\theta_c} = \int_0^\pi \cos\theta_c f(\theta_c) d\theta_c \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos\theta_c \sin\theta_c d\theta_c = 0.\end{aligned}\quad (1-84)$$

这是预料中的，因为在 C 系内散射是各向同性的。

若用  $\bar{\mu}_0$  表示 L 系内的平均散射角余弦，则  $\bar{\mu}_0$  为

$$\bar{\mu}_0 = \overline{\cos\theta_l} = \int_0^\pi \cos\theta_l f(\theta_l) d\theta_l, \quad (1-85)$$

式中  $f(\theta_l) d\theta_l$  表示碰撞后中子的散射角在  $\theta_l$  附近  $d\theta_l$  内的几率。由于中子在 L 系内的散射角  $\theta_l$  与它在 C 系内的散射角  $\theta_c$  之间有对应的关系（见 1-62 式），因此有下列关系式：

$$f(\theta_l) d\theta_l = f(\theta_c) d\theta_c. \quad (1-86)$$

利用 (1-62) 和 (1-69) 式，可得

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_0 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{A\cos\theta_c + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\theta_c + 1}} \sin\theta_c d\theta_c \\ &= \frac{2}{3A}.\end{aligned}\quad (1-87)$$

因而，尽管在 C 系内散射是各向同性的，但在 L 系内散射却是各向异性的，并且  $\bar{\mu}_0 > 0$ 。这

表明中子散射后沿着它原来运动方向运动的几率较大。 $\bar{\mu}_0$ 随着靶核质量数减小而增大,故靶核的质量数越小,中子散射后各向异性(或向前运动)的几率就越大。当 $A \rightarrow \infty$ 时, $\bar{\mu}_0 \rightarrow 0$ 。这是可以理解的,因为此时质心移到靶核上,C系与L系一致了。

### 3.3 弹性散射函数

严格讨论中子在介质内的运动时,不仅要知道原来能量为 $E$ 的中子碰撞后能量在 $E'$ 附近 $dE'$ 内的几率,同时还要知道在L系内原来运动方向为 $\Omega$ ,碰撞后运动方向在 $\Omega'$ 附近立体角元 $d\Omega'$ 内的几率,见图1-12。

这里 $\Omega$ (和 $\Omega'$ )是表示运动方向的单位方向矢量,它的模等于1,它的方向由方位角 $\varphi$ 和 $\theta$ 来决定,

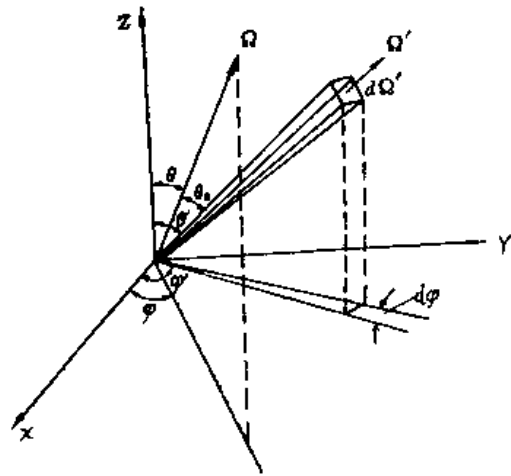


图1-12 速度方向矢量  $\Omega$

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2} = \frac{rd\theta r\sin\theta d\varphi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (1-88)$$

若碰撞前中子的能量为 $E$ 、运动方向为 $\Omega$ ,碰撞后中子能量在 $E'$ 附近 $dE'$ 内、运动方向在 $\Omega'$ 附近 $d\Omega'$ 立体角元内的几率用 $f(E, \Omega \rightarrow E', \Omega')dE'd\Omega'$ 表示,则 $f(E, \Omega \rightarrow E', \Omega')$ 就叫做弹性散射函数。和(1-72)、(1-79)式类似,它满足下列归一化条件:

$$\int_{\Omega'} \int_{E'} f(E, \Omega \rightarrow E', \Omega') dE' d\Omega' = 1. \quad (1-89)$$

由上一节的讨论知道,散射后中子的能量 $E'$ 与散射角 $\theta$ 有对应关系。设碰撞后中子散射角余弦为 $\mu_0 = \cos(\Omega, \Omega') = \cos\theta_0$ ,则 $\mu_0$ 必须满足(1-65)式,即

$$\mu_0 = \mu_0(E \rightarrow E') = \frac{1}{2} \left[ (A+1) \sqrt{\frac{E'}{E}} - (A-1) \sqrt{\frac{E}{E'}} \right]. \quad (1-90)$$

只要碰撞前中子能量为 $E$ ,碰撞后中子能量在 $E'$ 和 $E' + dE'$ 范围内,那末,在L系内碰撞后中子运动方向和碰撞前运动方向的夹角一定在 $\theta_0$ 和 $\theta_0 + d\theta_0$ 的角锥元内,而散射角 $\theta_0$ 由(1-90)式唯一地确定了,反之亦然。因此,在这种情况下, $f(E, \Omega \rightarrow E', \Omega')$ 就可以写成:

$$f(E, \Omega \rightarrow E', \Omega') = f(E \rightarrow E', \mu_0) = Cf(E \rightarrow E') \delta[\mu_0 - \mu_0(E \rightarrow E')], \quad (1-91)$$

式中, $C$ ——归一化常数,由(1-89)式决定, $C = 1/(4\pi)$ ;  $f(E \rightarrow E')$ 与(1-71)式同; $\delta[\mu_0 - \mu_0(E \rightarrow E')]$ 为狄拉克函数(见附录7)。 $\delta(x-a)$ 的意义是:除 $x=a$ 处以外,函数的值都是零,而在 $x=a$ 处,它满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1.$$

所以在C系内弹性散射为各向同性的条件下, 弹性散射函数  $f(E \rightarrow E', \mu_0)$  便等于

$$f(E \rightarrow E', \mu_0) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi(1-\alpha)E} \delta[\mu_0 - \mu_0(E \rightarrow E')], & \alpha E \leq E' \leq E, \\ 0, & E' > E, E' < \alpha E. \end{cases} \quad (1-92)$$

若用勒来表示, 散射函数  $f(u \rightarrow u', \mu_0)$  为

$$f(u \rightarrow u', \mu_0) = \begin{cases} \frac{e^{-(u'-u)}}{4\pi(1-\alpha)} \delta[\mu_0 - \mu_0(u \rightarrow u')], & u \leq u' \leq u + 1 \ln \frac{1}{\alpha}, \\ 0, & u' < u, u' > u + 1 \ln \frac{1}{\alpha}, \end{cases} \quad (1-93)$$

式中

$$\mu_0(u \rightarrow u') = \frac{1}{2} [(A+1)e^{-(u'-u)} - (A-1)e^{u'-u}]. \quad (1-94)$$

通常把  $\sigma_s f(E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega')$  称为微分散射截面, 记作  $\sigma_s(E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega')$ 。它表示发生  $(E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega')$  散射的几率。

### 3.4 非弹性散射函数

在非弹性散射过程中, 动能是不守恒的, 不能像弹性散射过程那样处理, 一般要采用较复杂的理论模型。迄今还没有非弹性散射函数的普遍解析表达式。

当中子能量  $E$  小于10兆电子伏时, 在C系内非弹性散射中子的角分布是各向同性的。若用  $f_{i,n}(E \rightarrow E') dE'$  表示入射中子能量为  $E$ , 非弹性散射后中子能量在  $E'$  和  $E' + dE'$  之间的几率, 那末, 在  $E$  远远大于靶核第一激发能级的能量的条件下,  $f_{i,n}(E \rightarrow E')$  为

$$f_{i,n}(E \rightarrow E') = \frac{E'}{\gamma^2} e^{-E'/\gamma}, \quad (1-95)$$

式中  $\gamma$  ——核有效温度,  $\gamma \approx 3.2 \sqrt{E/A}$  兆电子伏。应该指出, 这个公式是相当粗糙的, 它只适用于估算。

## 4. 核裂变过程

它是堆内最重要的中子与核相互作用的过程。它的重要性在于, 核裂变过程有大量的能量释放出来, 同时释放出中子。这就有可能在适当的条件下使这一反应过程自动持续下去, 而人们就能够不断地利用核反应过程中释放出来的能量。

### 4.1 裂变能量的释放, 反应堆功率和通量的关系

#### 4.1.1 裂变能量的释放

根据结合能公式可以算出, 实验上也已测出, 铀-235核一次裂变大约释放 200 兆电子伏的能量, 其中裂变碎片的动能约占总释放能量的80%, 裂变能量的分配方式见表1-7。表中给

出了裂变产物在介质内的射程。从“射程”栏中可以看出，裂变能量的绝大部分都在堆内转变为热能。由于中微子不带电，其质量几乎为零，因而它几乎不与堆内任何物质作用。因此，中微子所具有的12兆电子伏的能量，是不能利用的。另一方面，裂变中子将被堆内各种材料的核吸收，而发生 $(n, \gamma)$ 反应，这要释放出3至12兆电子伏的能量。虽然这部分能量并不是核裂变时直接放出来的，但它也是裂变带来的后果。并且这部分能量的绝大部分也在堆内转变为热能，故通常把 $(n, \gamma)$ 反应的 $\gamma$ 射线能量也归入裂变能量。可利用的裂变能量中大约97%分配在燃料内，不到1%（为 $\gamma$ 射线能量）在堆屏蔽层内，其余能量则分配在冷却剂和结构材料内，确切地讲，每次裂变可利用的能量因堆型而不同，一般计算时，可以近似地认为铀-235核每次裂变可利用的能量约为200兆电子伏。

表1-7 铀-235核裂变释放的能量

能量形式	能量, 兆电子伏	射程, 厘米	时间延迟
裂变碎片的动能	168	<0.1	瞬时
裂变中子的动能	5	10—100	瞬时
瞬发 $\gamma$ 能量	7	100	瞬时
裂变产物 $\gamma$ 衰变-缓发 $\gamma$ 能量	7	100	缓发
裂变产物 $\beta$ 衰变-缓发 $\beta$ 能量	8	短	缓发
中微子能量	12	不能利用	
总 共	207		

应该指出，衰变 $\beta$ 和 $\gamma$ 射线的能量约占总裂变能量的4—5%，它们是裂变碎片在衰变过程中发射出来，即这部份能量的释放是有一段时间延迟的。这段时间延迟对各个裂变产物是不相同的。平均每次裂变的衰变功率 $P_d$ （每秒释放的能量）与延迟时间的关系为

$$P_d(t) = 2.66t^{-1.2} \text{ 兆电子伏/秒, } t > 1 \text{ 秒,} \quad (1-96)$$

式中 $t$ ——裂变发生后的时间，秒。如果已知反应堆在某一功率水平 $P$ 运行了 $T$ 秒，则停堆后 $t$ 秒时刻裂变产物以 $\beta$ 射线和 $\gamma$ 射线释放的总功率为

$$P_d(t, T) = 4.1 \times 10^{11} P [t^{-0.2} - (t+T)^{-0.2}] \text{ 兆电子伏/秒,} \quad (1-97)$$

式中 $P$ ——反应堆功率水平，瓦。

停堆后，由于裂变产物的 $\beta$ 和 $\gamma$ 衰变仍会产生衰变热，所以反应堆停堆后仍需进行冷却和屏蔽。这种衰变热的导出是反应堆安全研究中重要的问题之一。

#### 4.1.2 反应堆的功率和通量的关系

假如取铀-235核每次裂变释放出的可利用的能量为200兆电子伏，而

$$1 \text{ 兆电子伏} = 1.6 \times 10^8 \text{ 尔格} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ 瓦} \cdot \text{秒}.$$

那么，铀-235核每次裂变释放出的能量为 $3.2 \times 10^{-11}$ 瓦·秒，因而有

$$1 \text{ 瓦} \cdot \text{秒的能量} = 3.1 \times 10^{10} \text{ 次铀-235核裂变所放出的能量} \quad (1-98)$$

若用 $R_f$ 表示堆内裂变反应率， $R_f$ 为

$$R_f = \Sigma_f \phi, \quad (1-99)$$

式中， $\Sigma_f$ ——堆芯的宏观裂变截面； $\phi$ ——堆芯内平均中子通量。由(1-99)式便于求出反应堆功率与中子通量间的关系。

如果只考虑热中子引起的铀-235核的裂变，反应堆功率  $P$  便等于

$$P = \frac{\Sigma_f \phi V}{3.1 \times 10^{16}} \text{兆瓦}, \quad (1-100)$$

式中  $V$  ——堆芯的体积，厘米<sup>3</sup>，  
或者热中子通量

$$\phi = \frac{3.1 \times 10^{16} P}{V \Sigma_f} \text{中子/厘米}^2 \cdot \text{秒}, \quad (1-101)$$

即反应堆的功率水平与裂变反应率成正比。在宏观裂变截面为常数时，堆内平均热中子通量正比于反应堆的功率水平。

## 4.2 裂变产物与裂变中子的发射

### 4.2.1 裂变产物

核裂变反应的另一个重要结果是生成裂变碎片和放出中子。核裂变的方式有很多种，其绝大多数裂变成两个碎片。裂变碎片的质量-产额曲线如图 1-13 所示，从图中可以看出，引起裂变的中子能量不同，曲线的形状也是不同的。图中给出 14 兆电子伏的中子和热中子引起铀-235 核裂变时的裂变碎片质量-产额曲线。对热中子裂变来说，目前已发现有 60 种以上的裂变碎片，这说明铀-235 核差不多要以 30 种以上的不同途径分裂。裂变碎片质量数的范围大约分布在 72 到 158 之间。从曲线显然可以看出，裂变方式一般不是对称的。对称裂变（两个碎片的质量相等，如  $A = 118$ ，）的产额只有 0.01%，非对称裂变（如两个碎片的质量分别为 95 和 139）的最大产额为 6%。

几乎在所有的情况下，这些裂变碎片都具有过大的中子-质子比。它通常要经过一系列  $\beta$  衰变，将过剩中子转变为质子才成为稳定核。裂变碎片和它们的衰变产物都叫裂变产物。裂变产物中有些元素核，如氙和钐，具有相当大的热中子吸收截面，它们将消耗堆内的中子，通常把这些中子吸收截面大的裂变产物叫毒素。关于它们对链式裂变反应的影响将在第十章内讨论。

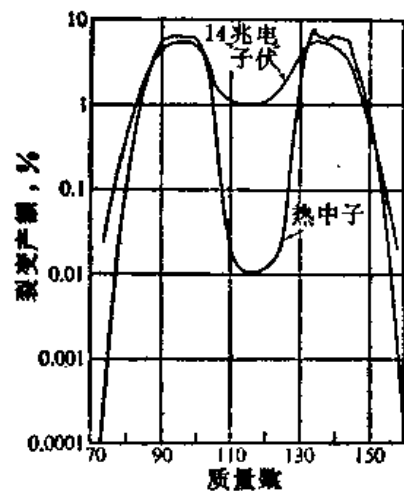


图1-13 铀-235 核裂变碎片的质量-产额曲线

### 4.2.2 裂变中子

裂变时放出的中子数和裂变方式有关。但是，在实际计算中我们需要的是每次裂变放出的平均中子数，用  $\nu(E)$  表示。它依赖于裂变核和引起裂变的中子能量， $\nu(E)$  值由下式给出：

$$\nu_{235}(E) = \begin{cases} 2.432 + 0.066E, & 0 \leq E \leq 1, \\ 2.349 + 0.15E, & E > 1, \end{cases} \quad (1-102)$$

$$\nu_{238}(E) = 2.847 + 0.138E, \quad (1-103)$$

式中  $E$  ——引起核裂变的中子的能量，兆电子伏。

99%以上的中子是在裂变的瞬间（约 $10^{-14}$ 秒）发射出来的，把这些中子叫瞬发中子。它们的能量分布在从低于0.05兆电子伏到10兆电子伏相当大的范围内。用 $\chi(E) dE$ 表示能量在 $E$ 和 $E + dE$ 范围内裂变中子的份额， $\chi(E)$ 通常叫裂变中子能谱，铀-235裂变时瞬发中子的能谱（见图1-14中实线）为

$$\chi(E) = 0.453e^{-1.036E} \text{sh} \sqrt{2.29E}, \quad (1-104)$$

或用下列近似的式子表示（见图1-14中虚线）

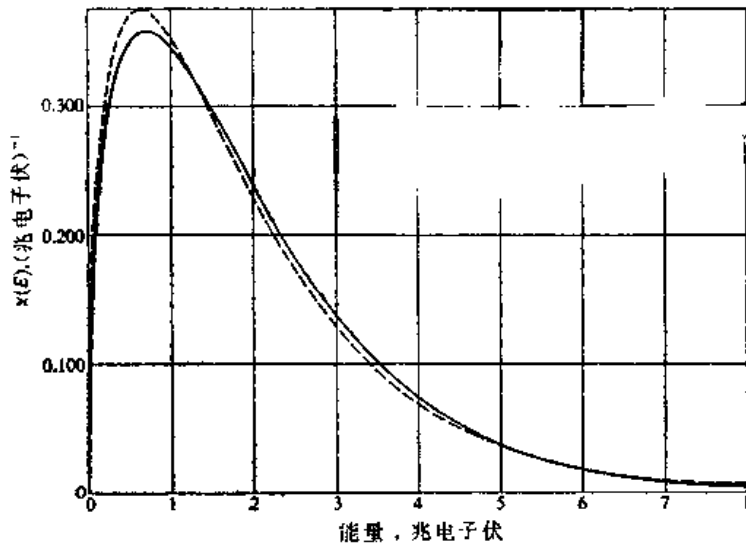


图1-14 铀-235核热中子裂变时的裂变中子能谱

$$\chi(E) = 0.770E^{1/2} e^{-0.778E},$$

式中  $E$  为裂变中子的能量，兆电子伏。且

$$\int_0^{\infty} \chi(E) dE = 1 \quad (1-105)$$

实际上不同裂变同位素的裂变谱  $\chi(E)$  是不同的，但差别不大。因此，在近似计算时可以认为(1-104)式适用于所有的可裂变同位素。 $\chi(E)$ 的曲线示于图1-14。裂变中子的最可几能量稍低于1兆电子伏。在10兆电子伏以上，裂变中子的份额已很小。裂变中子的平均能量  $\bar{E}$  为

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} E \chi(E) dE = 1.98 \text{ 兆电子伏} \approx 2 \text{ 兆电子伏}. \quad (1-106)$$

通常认为裂变中子是各向同性地发射出来的。

裂变中子中，还有小于1%的中子（对铀-235裂变，约有0.65%）是在裂变碎片衰变过

程中发射出来的，把这些中子叫缓发中子。例如(见图1-15)，裂变碎片钡-87经过 $\beta^-$ 衰变成处于激发态的氪-87，它通过放出一个中子衰变成氪-86。这种衰变的半衰期为54.5秒，就是说，这个中子的发射与裂变瞬间相比有一段时间延迟。像钡-87这种裂变碎片，在 $\beta$ 衰变时产生发射中子的子核氪-87，通常叫做缓发中子先驱核。现已测得各裂变同位素的缓发中子先驱核大致归成六组。表1-8给出了热中子引起铀-235核裂变时的缓发中子的有关数据。

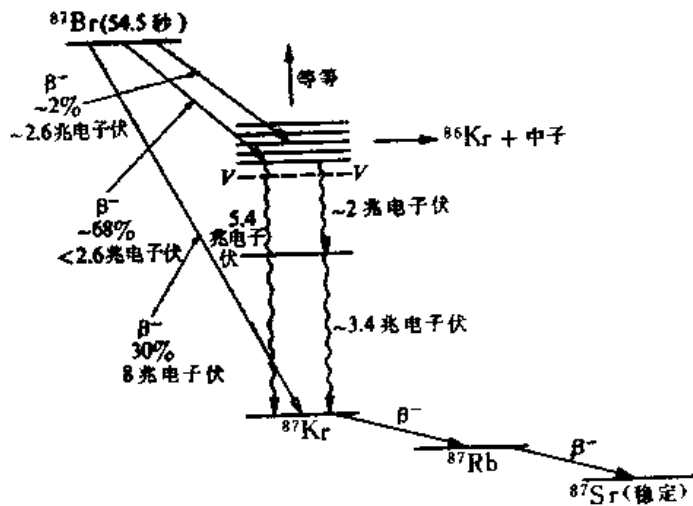


图1-15 缓发中子先驱核钡-87的衰变

表1-8 铀-235的热中子裂变的缓发中子数据

组	半衰期 $T$ , 秒	能量 千电子伏	产额 <sup>1)</sup> $\beta_i$	平均寿命 <sup>2)</sup> $\bar{l}_i$ , 秒
1	54.51	250	0.000247	78.64
2	21.84	560	0.001385	31.51
3	6.00	430	0.001222	8.66
4	2.23	620	0.002645	3.22
5	0.496	420	0.000832	0.716
6	0.179	430	0.000169	0.258

1) 缓发中子在全部分裂变中子中所占的份额用 $\beta$ 表示，对铀-235的热裂变，有

$$\beta = \sum_i \beta_i = 0.006500$$

2) 缓发中子的平均寿命用 $\bar{l}$ 表示，同样对铀-235的热裂变，有

$$\bar{l} = \frac{\sum_i \beta_i \bar{l}_i}{\sum_i \beta_i} = 12.74 \text{秒}$$

表中 $\beta_i$ ——第*i*组缓发中子在全部分裂变中子(瞬发的和缓发的)中所占的份额； $T_i$ ——第*i*组缓发中子先驱核的半衰期。

缓发中子的能谱不同于瞬发中子的能谱，缓发中子的平均能量要比瞬发中子的低(见表1-8)。

虽然缓发中子在裂变中子中所占的份额很小(小于1%)，但它对反应堆的动力学过程却有非常重要的影响，这一点将在第十二章内讨论。



## 5. 热中子能谱和热中子的平均截面

### 5.1 热中子能谱和中子温度

确切地讲, 所谓热中子是指与它们所在介质的原子(或分子)处于热平衡状态中的中子。我们知道气体分子的热运动速度服从于麦克斯韦-玻尔兹曼分布, 若介质是无限大、无源的, 且不吸收中子, 那末, 与介质原子处于热平衡状态的热中子, 它们的速度分布也服从于麦克斯韦-玻尔兹曼分布, 即

$$N(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\pi v^2 / 2kT}, \quad (1-107)$$

式中  $N(v)$  —— 单位体积、单位速度间隔内的热中子数;

$v$  —— 中子速度, 厘米/秒;

$m$  —— 中子的质量;

$k$  —— 玻尔兹曼常数,  $k = 0.861735 \times 10^{-4}$  电子伏/K

$T$  —— 介质温度, K。

与 (1-107) 式相应的热中子的能量分布  $N(E)$  为

$$N(E) = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} e^{-E/kT} E^{1/2}, \quad (1-108)$$

式中  $N(E)$  —— 单位体积、单位能量间隔内的中子数。这里  $N(v)$  及  $N(E)$  均归一化, 即

$$\int_0^{\infty} N(v) dv = 1, \quad (1-109)$$

$$\int_0^{\infty} N(E) dE = 1. \quad (1-110)$$

在反应堆物理分析中, 习惯上把 (1-108) 式的分布函数  $N(E)$  也叫做中子密度的麦克斯韦-玻尔兹曼分布。 $N(v)$  及  $N(E)$  的分布曲线如图 1-16 所示。

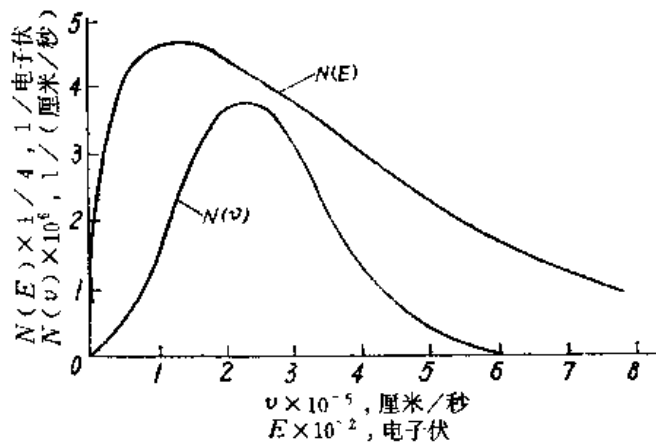


图1-16  $T = 300\text{K}$ 时的麦克斯韦-玻尔兹曼分布

根据  $\partial N(v)/\partial v = 0$ , 可求得热中子速度分布  $N(v)$  的最可几速度  $v_0$  为

$$v_0 = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2} = 1.28 \times 10^4 T^{1/2} \text{ 厘米/秒}, \quad (1-111)$$

相应的中子能量  $E$  为

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 = kT = 8.61 \times 10^{-5} T \text{ 电子伏}. \quad (1-112)$$

根据  $\partial N(E)/\partial E = 0$  可求得热中子能量分布的最可几能量  $E_0$  为

$$E_0 = \frac{1}{2}kT = 4.3 \times 10^{-5}T \text{ 电子伏}, \quad (1-113)$$

相应的中子速度 $v$ 为

$$v = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} = \sqrt{\frac{kT}{m}} = 0.9 \times 10^4 T^{1/2} \text{ 厘米/秒}. \quad (1-114)$$

在 $T = 293.4 \text{ K}$ 时，热中子的最可几速度 $v_0$ 是2200米/秒，相应的能量 $E$ 为0.0253电子伏；而能量分布 $N(E)$ 的最可几能量 $E_0$ 是0.0125电子伏。

实际上，热中子能谱的分布形式和介质原子核的麦克斯韦谱的分布形式并不相同。这是因为：（1）在反应堆中，所有的热中子都是从较高的能量慢化而来，尔后逐步与介质达到热平衡状态的，这样，在能量较高区域内的中子数目相对地就要多些；（2）由于介质或多或少地要吸收中子，因此，必然有一部份中子尚未来得及同介质的原子（或分子）达到热平衡就已被吸收了，其结果又造成了能量较低部份的中子份额减少，能量较高部份的中子份额相对地增大。由于这两个原因共同作用的结果，在能量较高处的中子数相对地增大，而在能量较低处的中子数相对地有所减少，使得实际的热中子能谱与介质的麦克斯韦谱并不相同（见图1-17中曲线2）。实际的热中子能谱朝能量高的方向有所偏移，即热中子的平均能量和最可几能量都要比介质原子核的平均能量和最可几能量高，通常把这一现象称之为热中子能谱的“硬化”。

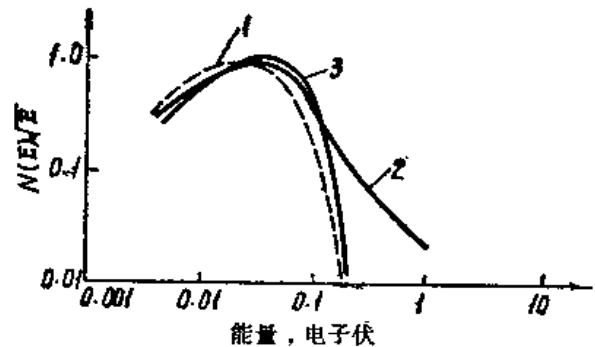


图1-17 热中子的能谱分布

1——温度为 $T_m$ 时介质原子核的能谱（麦克斯韦谱）；2——实际的热中子能谱；3——中子温度为 $T_n$ 时热中子的麦克斯韦谱。

精确地计算热中子能谱是比较复杂的问题，留待第九章内进行专门讨论。

在进行近似计算时，可以近似地认为，实际的热中子能谱仍具有麦克斯韦谱的分布形式〔见（1-108）式〕，不过热中子的最可几能量 $E_0 = kT_n/2$ 、平均能量 $\bar{E} = 3kT_n/2$ ，它们都比介质原子核的最可几能量 $E_m$ （等于 $kT_m/2$ ）、平均能量 $\bar{E}_m$ （等于 $3kT_m/2$ ）要高。因而，可以近似认为用 $T_n$ 代替（1-108）式中的 $T$ ，便可得到近似的热中子能谱为

$$N(E) = \frac{2\pi}{(\pi k T_n)^{3/2}} e^{-E/kT_n} E^{1/2}. \quad (1-115)$$

它的分布形式如图1-17中曲线3所示。当近似计算时，就用曲线3来近似地代替曲线2。这里引进了一个量 $T_n$ ，参照气体动力论中关于介质温度的概念，把 $T_n$ 称之为中子温度。中子温度 $T_n$ 的数值一般要比介质温度 $T_m$ 高。从上面的定性讨论可以知道，中子温度高于介质温度的温差将随着慢化能力的减小和吸收截面的增加而增大。因而 $T_n$ 与 $T_m$ 的关系可以近似地用下式表示：

$$\frac{T_n - T_m}{T_m} = C \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s},$$

或

$$T_n = T_m \left( 1 + C \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s} \right), \quad (1-116)$$

其中  $C$  为比例常数。例如，对于铀-水栅由实验得到

$$T_n = T_m \left[ 1 + 1.4 \frac{\Sigma_a(kT_m)}{\xi \Sigma_s} \right], \quad (1-117)$$

或

$$T_n = T_m \left[ 1 + 0.75 \frac{\Sigma_a(kT_m)}{\xi \Sigma_s} \right]^2. \quad (1-118)$$

对于一些弱吸收纯慢化剂，

$$T_n = T_m (1 + 0.46\Delta), \quad \text{当 } A \leq 25 \text{ 时, } 0 < \Delta < 1, \quad (1-119)$$

$$T_n = T_m (1 + 0.3\Delta), \quad \text{当 } A > 25 \text{ 时,} \quad (1-120)$$

式中，

$$\Delta = \frac{2A \Sigma_a(kT_m)}{\Sigma_s}.$$

上述各式中， $\Sigma_a(kT_m)$  为中子能量等于  $kT_m$  的栅格或介质的宏观吸收平均截面； $\xi \Sigma_s$  为栅格或介质的慢化能力； $T_m$  为介质温度，K。

## 5.2 热中子的平均截面

在反应堆物理分析中，通常把某个分界能量  $E_c$  以下的中子称之为热中子，一般把  $E_c$  叫做分界能或缝合能。通常  $E_c$  等于  $(4-8)kT_m$ 。所以热中子的能量分布在零到  $E_c$  之间。因为核反应截面是中子能量的函数，所以在反应堆的实际计算中，往往要求出热中子的平均截面。如果认为热中子的能谱按硬化后的麦克斯韦谱分布，则按热中子能谱平均的热中子截面为

$$\bar{\sigma} = \frac{\int_0^{E_c} \sigma(E) N(E) v dE}{\int_0^{E_c} N(E) v dE} = \frac{\int_0^{E_c} \sigma(E) N(E) \sqrt{E} dE}{\int_0^{E_c} N(E) \sqrt{E} dE}, \quad (1-121)$$

式中， $N(E)$  为按硬化后的热中子麦克斯韦谱分布函数，它由(1-115)式决定。

若吸收截面  $\sigma_a$  服从于“ $1/v$ 律”，由(1-45)式得：

$$\sigma_a(E) \sqrt{E} = \sigma_a(0.0253) \sqrt{0.0253}.$$

$\sigma_a(0.0253)$  可查表得到(见附录3)。这里顺便指出，在文献及核工程手册中，热中子截面数据，除特别加以说明的以外，一般都是指中子能量为 0.0253 电子伏(或中子速度为 2200 米/秒)时的数值。将(1-45)式代入(1-121)式则得热中子的平均吸收截面  $\bar{\sigma}_a$  为

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\sigma_a(0.0253) \sqrt{0.0253}}{\sqrt{E}}, \quad (1-122)$$

式中

$$\sqrt{\bar{E}} = \frac{\int_0^{E_c} N(E) \sqrt{E} dE}{\int_0^{E_c} N(E) dE} \quad (1-123)$$

当  $E_c$  足够大时, 例如当  $E_c > 5kT_c$  时, 对  $E > E_c$  的麦克斯韦谱部份在整个麦克斯韦谱中所占比例已经很小, 因此把 (1-123) 式的积分上限  $E_c$  扩展到  $+\infty$  并不会带来很大的误差, 将 (1-115) 式代入 (1-123) 式, 积分后得

$$\sqrt{\bar{E}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{kT_c}, \quad (1-124)$$

将 (1-124) 式代入 (1-122) 式便可求得

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{0.0253}{kT_c}} \sigma_a(0.0253). \quad (1-125)$$

由于 0.0253 是  $T$  为 293K 时  $kT$  的值, 代入 (1-125) 式, 最后得热中子的平均吸收截面  $\bar{\sigma}_a$  为

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\sigma_a(0.0253)}{1.128} \sqrt{\frac{293}{T_c}}. \quad (1-126)$$

对吸收截面  $\sigma_a(E)$  随能量的变化不服从“ $1/v$ 律”的元素核, 此时在形式上也可用 (1-125) 或 (1-126) 式的结果, 但必须引入一个修正因子  $g_a$ , 即

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\sigma_a(0.0253)}{1.128} \sqrt{\frac{293}{T_c}} g_a, \quad (1-127)$$

式中,  $g_a$  为吸收截面不服从“ $1/v$ 律”的修正因子, 可从附录 4 中查得。或者按下式计算:

$$g_a = \frac{\int_0^{E_c} \sigma_a(E) E e^{-E/kT_c} dE}{\sigma_a(0.0253) \sqrt{0.0253} \int_0^{E_c} \sqrt{E} e^{-E/kT_c} dE}. \quad (1-128)$$

## 6. 共振吸收

图 1-4 给出铀-238 的截面随中子能量变化的曲线, 其中有若干个峰, 这些峰叫共振峰。对  $A > 100$  的很多核, 通常在低能区的截面曲线上均可见到这种共振峰。与峰值相对应的中子能量叫共振能, 而这种在某一特定能量处截面值特别大的现象称为共振现象。根据核反应的性质, 有俘获共振、散射共振、裂变共振等。

### 6.1 共振截面 —— 单能级布勒特-魏格纳公式

对于静止的靶核及可分辨的共振峰，在共振能  $E_0$  附近发生  $x$  共振反应的截面  $\sigma_x(E)$  可以用单能级布勒特-魏格纳公式表示：

$$\sigma_x(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_x}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{\Gamma^2}{4(E - E_0)^2 + \Gamma^2}, \quad (1-129)$$

式中，

$$\Gamma = \Gamma_n + \sum_x \Gamma_x, \quad (1-130)$$

$$\sigma_0 = \sigma_x(E_0) = 4\pi\lambda_0 g \frac{\Gamma_x}{\Gamma}, \quad (1-131)$$

其中  $\Gamma$ 、 $\Gamma_n$ 、 $\Gamma_x$  —— 分别为总宽度、中子宽度、 $x$  分宽度，实际上最重要的是辐射俘获共振和裂变共振，此时  $\Gamma_x$  分别为  $\Gamma_\gamma$  和  $\Gamma_f$ ；

$\lambda_0$  —— 共振能  $E_0$  处中子的折算波长；

$g$  —— 统计因子，对于  $s$  波中子， $g = 1$ 。

对于辐射俘获共振，见图1-18， $\sigma_\gamma(E)$  为

$$\sigma_\gamma(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{\Gamma^2}{4(E - E_0)^2 + \Gamma^2}. \quad (1-132)$$

在吸收共振为主的情况下，此时  $\Gamma_n \ll \sum_x \Gamma_x$ ，于是  $\sigma_x(E)$  近似为

$$\sigma_x(E) \approx \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{\Gamma^2}{4(E - E_0)^2 + \Gamma^2}. \quad (1-133)$$

通常  $E \gg \Gamma$ ，当中子能量远低于共振能量时，即  $E \ll E_0$  时，则

$$\sigma_x(E) \approx \sigma_0 \left( \frac{\Gamma}{2E_0} \right)^2 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \propto \frac{1}{\sqrt{E}} \propto \frac{1}{v}. \quad (1-134)$$

这样就得到前面曾提到过的结果：一些核对低能中子的  $\sigma_0$  服从于“ $1/v$ 律”。

应该指出，共振散射截面与能量的关系不同于辐射俘获共振或裂变共振与能量的关系。因为此时必须考虑到弹性共振散射与势散射的干涉效应，因而散射截面  $\sigma_s(E)$  为

$$\sigma_s(E) = \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{\Gamma^2}{4(E - E_0)^2 + \Gamma^2} \left[ \frac{\Gamma_n}{\Gamma} + \frac{4(E - E_0)}{\Gamma} \times \frac{R}{\lambda} \right] + \sigma_p, \quad (1-135)$$

式中， $\sigma_p$  为势散射截面， $\sigma_p = 4\pi R^2$ ，这里  $R$  为靶核半径， $R$  约等于  $1.25 \times 10^{-13} A^{1/3}$  厘米。上式中右边第一项为共振散射项，第三项为势散射项，第二项为干涉散射项，即为共振散射和势散射过程产生的中子波之间的干涉，散射截面曲线如图 1-19 所示。可以看出，在共振能附近  $\sigma_s(E)$  曲线不对称，在低于共振能处曲线下降，出现凹谷。这是干涉引起的结

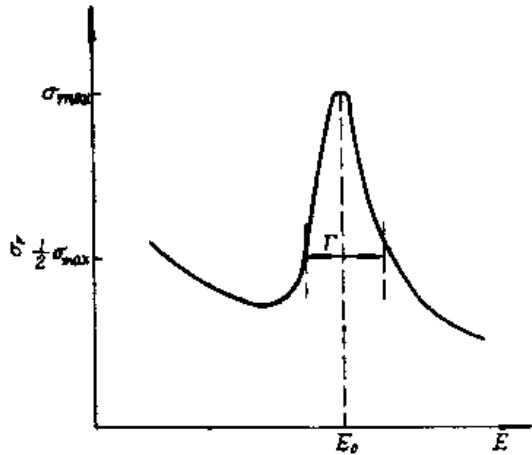


图1-18 单能级俘获共振

果。因为  $E < E_0$  时,  $4(E - E_0)R/\Gamma\lambda < 0$ , 而  $E > E_0$  时,  $4(E - E_0)R/\Gamma\lambda > 0$ , 即  $E < E_0$  时干涉使  $\sigma(E)$  减小, 而  $E > E_0$  时干涉使  $\sigma_s(E)$  增加。

在热中子堆内最重要的中子共振吸收一般发生在低能区, 此时 s 波中子的共振是重要的。但对于快中子堆, p 波中子的共振常常是重要的。这时共振截面的表达式还要显得更复杂些。

应该注意, 布勒特-魏格纳公式是以质心系为参照系推导出来的。用于很轻的核时, (1-129) 式中的  $E$  应改为质心系内中子与靶核的总动能  $E_c$  [见 (1-55) 式], 即

$$\sigma_s(E_c) = \sigma_0 \frac{\Gamma_s}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_0}{E_c}} \frac{\Gamma^2}{4(E_c - E_0)^2 + \Gamma^2}, \quad (1-136)$$

式中  $E_c = AE/(A+1)$ 。对于较重的核,  $E_c \approx E$ , 就导致 (1-129) 式。

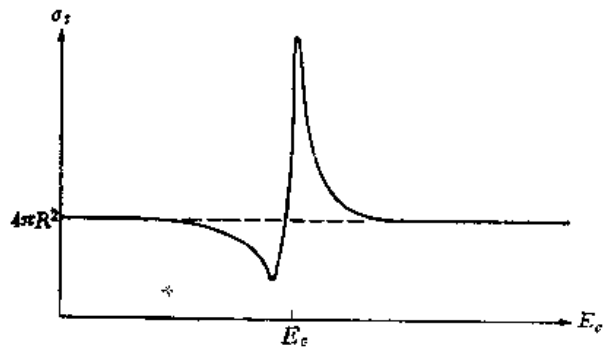


图1-19 共振能量附近的散射截面

## 6.2 多普勒效应

实际计算时, 往往不能直接应用 (1-129) 式。这是因为, 在讨论中子与核发生共振作用时不能认为靶核是静止的, 必须考虑靶核的热运动。当核处于热运动状态时, 共振峰会由于核的热运动而展宽(见图1-20), 这个效应称之为多普勒效应。

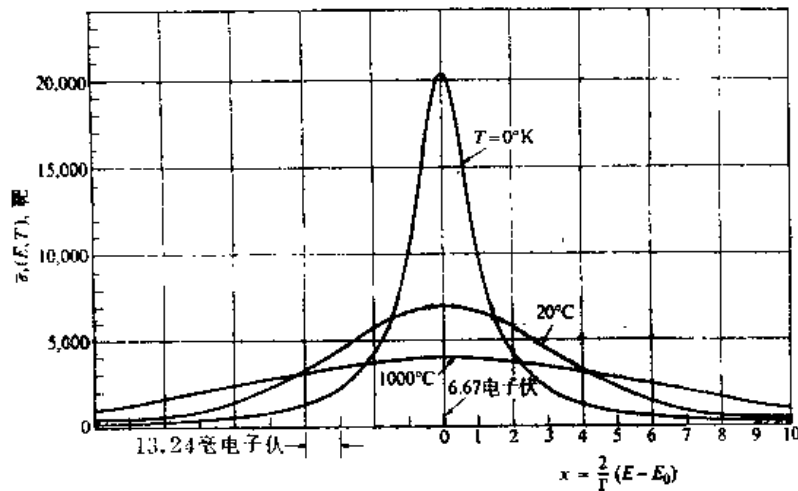


图1-20 铀-238核在6.67电子伏处共振俘获截面的多普勒展宽

对于液体和固体, 原子核的热运动是极其复杂的。在反应堆计算中, 通常假设靶核的动能(或速度)服从麦克斯韦-玻尔兹曼分布。以下基于这个假设来推导在共振能  $E_0$  附近平均多普勒展宽截面  $\sigma_s(E, T)$  的表达式。

设在 L 系内中子具有速度  $\mathbf{v}$ ,  $v = \sqrt{2E/m}$ ; 靶核的热运动速度为  $\mathbf{V}$ , 则中子对靶核的相对速度  $\mathbf{v}_r$  为

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{V}_0$$

而中子对靶核的相对动能  $E_r$  为

$$E_r = \frac{1}{2} m v^2.$$

在考虑到靶核热运动的情况下，中子与靶核发生相互作用的截面为  $\sigma(E_r)$ 。如果  $N(\mathbf{V})d\mathbf{V}$  是单位体积内靶核具有速度在  $\mathbf{V}$  附近  $d\mathbf{V}$  间隔内的几率，那末，每秒、每立方厘米体积内中子与速度处于  $\mathbf{V}$  到  $\mathbf{V} + d\mathbf{V}$  速度间隔内的靶核发生  $x$  反应的反应率是  $nv, N_0 \sigma_x(E_r) N(\mathbf{V}) d\mathbf{V}$ 。因此通过对所有靶核运动速度进行积分就能求得每秒每立方厘米体积内发生  $x$  反应的总反应率，把这个总反应率除以通量  $nv$  和  $N_0$  就得到平均的微观截面  $\sigma_x(E, T)$ ：

$$\sigma_x(E, T) = \frac{1}{v} \int v \sigma_x(E_r) N(\mathbf{V}) d\mathbf{V}, \quad (1-137)$$

式中  $T$  为介质的绝对温度，K。  $T$  越大靶核热运动的平均能量就越大。

假设靶核运动的速度分布为麦克斯韦-玻尔兹曼分布，即

$$N(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-M\mathbf{V}^2/2kT} dV_x dV_y dV_z, \quad (1-138)$$

式中  $M$  为靶核的质量；  $V_x, V_y, V_z$  为  $\mathbf{V}$  的分量；其余符号的意义同前。与 (1-107) 式相比，这里考虑了原子或分子的热运动方向。

如果我们选择的坐标使得  $z$  轴与中子速度  $v$  的方向一致，则

$$E_r = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2} m [(v - V_z)^2 + V_x^2 + V_y^2]. \quad (1-139)$$

在共振能量处，中子速度一般要比靶核的最可几速度大得多，因此我们可以忽略 (1-139) 式中的  $V_x^2, V_y^2$  和  $V_z^2$  项，于是得

$$E_r = \frac{1}{2} m (v^2 - 2vV_z), \quad (1-140)$$

$$v_z = \sqrt{\frac{2E_r}{m}}. \quad (1-141)$$

应用 (1-138) 式进行下列积分，可以求得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N(\mathbf{V}) dV_x dV_y = \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-Mv_z^2/2kT}, \quad (1-142)$$

将 (1-140) 至 (1-142) 式和 (1-129) 式代入 (1-137) 式得

$$\sigma_x(E, T) = \sigma_0 \frac{\Gamma_x}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Mv_z^2/2kT} \frac{\Gamma^2}{4(E_r - E_0)^2 + \Gamma^2} dv_z. \quad (1-143)$$

为了使 (1-143) 式简化，定义下列一些量：

$$\chi = \frac{2}{\Gamma} (E - E_0), \quad (1-144)$$

$$y = \frac{2}{\Gamma} (E_r - E_0), \quad (1-145)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{4kTE}{A}} \approx \sqrt{\frac{4kTE_0}{A}}, \quad (1-146)$$

$$\zeta = \frac{\Gamma}{\Delta}, \quad (1-147)$$

式中,  $A$  为靶核质量与中子质量之比;  $\Delta$  叫多普勒宽度。将这些量代入 (1-143) 式就得到

$$\sigma_r(E, T) = \sigma_0 \frac{\Gamma_r}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \Psi(\zeta, x). \quad (1-148)$$

其中  $\Psi(\zeta, x)$  定义如下:

$$\Psi(\zeta, x) = \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\frac{1}{4}\zeta^2(y-x)^2]}{1+y^2} dy, \quad (1-149)$$

$\Psi(\zeta, x)$  叫多普勒函数,  $\sigma_r(E, T)$  与温度的关系就包含在  $\Psi(\zeta, x)$  函数内。多普勒函数已制成表(见附录 5)。

如以铀-238 核在 6.67 电子伏处的共振俘获为例 [ $\sigma_{r, 238}(E, T)$  曲线示于图 1-20], 在 0K 时, 即在靶核静止时,  $\sigma_r$  的峰值约为 20000 靶, 在 300K 时, 峰值为 7000 靶。由此可见, 在反应堆计算时必须考虑多普勒效应, 应采用 (1-148) 式, 而不能采用 (1-132) 式。

从图中曲线可以看出, 考虑靶核热运动后, 共振峰值降低, 共振宽度变宽, 这种现象叫多普勒展宽。对 (1-148) 式进行积分便可求出截面曲线下的面积。由于在共振峰附近截面急剧下降, 对积分起主要贡献的只是相当于共振宽度的很小能量区间, 因而可以近似地认为在积分区间  $E_0/E \approx 1$ , 这样便有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sigma_r(E, T) dE &= \sigma_0 \frac{\Gamma_r}{\Gamma} \int_0^{\infty} \Psi(\zeta, x) dE \\ &= \frac{1}{2} \sigma_0 \Gamma_r \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\zeta, x) dx \\ &= \frac{1}{2} \pi \sigma_0 \Gamma_r. \end{aligned} \quad (1-150)$$

可见共振截面曲线下的面积与介质的温度无关, 基本上保持不变。以后我们会看到, 这并不意味着共振吸收的中子数与介质的温度无关。

在散射共振的情况下, 可得到类似的表达式:

$$\sigma_s(E, T) = \frac{\sigma_0 \Gamma_s}{\Gamma} \Psi(\zeta, x) + \sigma_0 \frac{R}{\lambda} \chi(\zeta, x) + \sigma, \quad (1-151)$$

式中  $\chi(\zeta, x)$  定义如下:

$$\chi(\zeta, x) = \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \exp[-\frac{1}{4}\zeta^2(x-y)^2]}{1+y^2} dy. \quad (1-152)$$

式中已令  $\sqrt{E_0/E} = 1$ 。  $\chi(\zeta, x)$  亦叫多普勒函数, 可查附录表 5 或数值求解。



## 7. 核数据库

核数据，特别是截面数据的选择和处理，是反应堆核计算的出发点和重要依据。为了提高反应堆核计算的精确度，一方面是要努力对计算的模型和方法进行改进，另一方面则是要设法提高原始核数据和参数的精确性。对核工程人员来说，能正确地理解和使用这些数据是非常重要的，它是取得正确计算结果的重要关键之一。

由于核计算中要涉及到大量的同位素，以及在各个能量区域内中子截面和能量的复杂关系，因而核反应堆计算需要用到的核截面数据的数量是很庞大的。第二次世界大战后，随着反应堆、加速器和测量仪器的迅速发展，已逐渐积累了大量的中子截面资料，对核数据的收集和编纂评价工作也迅速开展起来。在“中子截面汇编 BNL-325”<sup>[7]</sup>中，收集了相当丰富的实验和理论计算的数据。然而，由于不同的实验对于同一截面可能给出不同的数值，同时对一些能域或元素还存在着许多空白，因而在进行反应堆核计算时需要注意正确地选取和评价这些截面和其它核数据。随着反应堆的发展，对数据的精度及能区范围都提出了更高的要求。近二十年来，许多国家都努力建立一套标准的、评价过的核截面数据库。现在都采用计算机作为数据的贮存、评价、检索和显示工具，这样，就提高了编评工作的速度和质量，而且更有利于数据的使用。为了汇编这些数据，做了大量的工作，不仅要收集、处理那些不同来源的大量数据，而且还要对它们进行评价，通过理论计算或内插方法填补它们的空白，审查它们的自洽性和精确性，同时还必须通过一些实验对这些数据进行检验，最后把它们汇编成便于核工程人员使用的形式。

美国的评价数据库 ENDF 是比较完整和先进的数据库。ENDF/B<sup>[8]</sup>库是用于核反应堆物理分析的标准的核数据的来源之一，它拥有堆物理计算所需的一整套截面数据。除 ENDF 以外，还有其他一些国家的核数据库。一般在这些数据库中包含有核反应堆分析所用到的各种同位素在广阔能域的核数据，它包括：

- 所有可能发生的中子反应的微观截面；
- 弹性和非弹性散射时中子的角分布；
- 裂变中子的能量分布；每次裂变的二次中子平均数；
- 共振参数；
- 裂变产物的产额及截面；
- 反应中放出的中子、质子、 $\gamma$ 射线和 $\alpha$ 粒子等的能量和角分布等等。

例如，在 ENDF/B 库中有 80 余种同位素、能量在  $10^{-6}$  电子伏到 20 兆电子伏范围内的所有重要的中子反应的整套数据，诸如  $(n, \gamma)$ 、 $(n, f)$ 、 $(n, p)$ 、 $(n, \alpha)$ 、 $(n, n')$ 、 $(n, n)$ 、 $(n, 2p)$  和  $(n, 2n)$  等反应的截面及微分散射截面；还有热中子散射律的有关数据和光子的产生与相互作用的截面数据。在 ENDF/B 库中，实际数据一般不是以表值形式保存，而是以大量的拟合参数形式保存。通过处理程序由这些参数可以很容易地计算出所需能点的截面数据。例如在库中保存有许多共振参数，像能级宽度、共振能量和峰值等，而随能量变化的共振截面值就用这些参数按布勒特-魏格纳公式算出。随着新的核截面测量数据的出现，核数据库也将不断地进行修改和补充。

### 参 考 文 献

- [1] J.R.拉马什著, 洪流译, 核反应堆理论导论, 第一、二、三章, 原子能出版社, 1977年。
- [2] J.J.Duderstadt & L.J.Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, Chap. 2, 3. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [3] P.F.Zweifel, Reactor Physics, Chap.1, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [4] G.I.贝尔, S.格拉斯登著, 千里译, 核反应堆理论, 第八章, 原子能出版社, 1979年。
- [5] A.F.Henry, Nuclear-Reactor Analysis, Chap.2, MIT Press, 1975.
- [6] 石森富太郎编, 原子炉物理, 培风馆, pp 3—13, p 107, 1973.
- [7] D.I.Garber and R.R.Kinsey, Neutron Cross Sections, Vol. I, Curves, 3d ed., BNL-325, New York, 1976.
- [8] H.C.Honeck, BNL-50066, 1966.

## 第二章 链式裂变反应与核反应堆简介

本章着重讨论实现自续链式裂变反应的条件、热中子反应堆内中子循环过程以及核燃料的转换与循环，并对反应堆的分类及核动力反应堆作一些简单的介绍。

### 1. 链式裂变反应

#### 1.1 自续链式裂变反应和临界条件

在第一章的讨论中我们已经知道，当中子与裂变物质作用而发生核裂变反应时，裂变物质的原子核通常分裂为两个中等质量数的核(称为裂变碎片)。与此同时，还将平均地产生两个以上的新的裂变中子，并释放出蕴藏在原子核内部的核能。在适当的条件下，这些裂变中子又会引起周围其它裂变同位素的裂变，如此不断继续下去。这种反应过程称为链式裂变反应，其反应过程如图2-1所示。

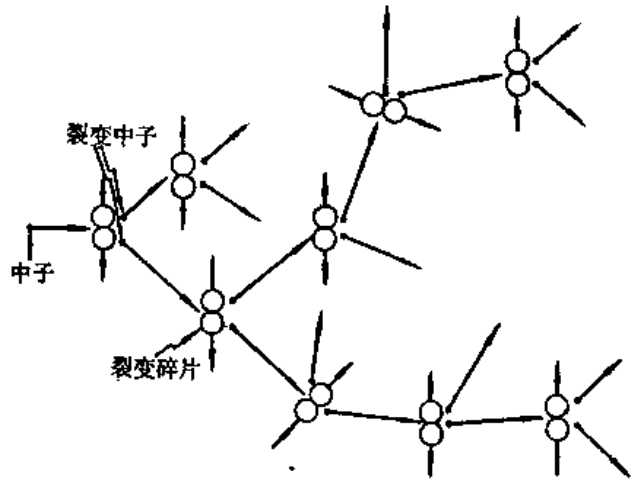


图2-1 链式裂变反应示意图

如果每次裂变反应产生的中子数目大于引起核裂变所消耗的中子数目，那么一旦在少数的原子核中引起了裂变反应之后，就有可能不再依靠外界的作用而使裂变反应不断地进行下去。这样的裂变反应称作自续的链式裂变反应。核反应堆就是一种能以可控方式产生自续的链式裂变反应的装置。它能够以一定的速率将蕴藏在原子核内部的核能释放出来。

从上面的讨论可以看出，实现自续链式裂变反应的条件是：当一个裂变核俘获一个中子产生裂变以后，新产生的中子中，平均至少应该再有一个中子去引起另外一个核的裂变。由于裂变物质每次裂变时平均地放出两个以上裂变中子，因而实现自续的链式裂变反应是有可能的。但是，因为核反应堆是由核燃料、慢化剂、冷却剂以及结构材料等所组成的装置，所以在反应堆内，不可避免地有一部分中子要被非裂变材料吸收。同时，还有一部分中子要从反应堆中泄漏出去。因此，在实际的反应堆中，并不是全部的裂变中子都能引起新的核裂变反应。也就是说，实际上中子的“增殖”或“倍增”的速率要比图2-1所示的小得多。一个反应堆能否实现自续的链式裂变反应，就取决于上述裂变、非裂变吸收和泄漏等过程中中子的产生率与消失率之间的平衡关系。如果在上述的反应过程中，产生的中子数等于或多于消耗掉的中子数，则链式裂变反应将会自续地进行下去。

反应堆内自续链式裂变反应的条件可以很方便地用有效增殖因数 $k$ 来表示。它的定义是<sup>1</sup>

对给定系统，新生一代的中子数和产生它的直属上一代中子数之比，即

$$k = \frac{\text{新生一代中子数}}{\text{直属上一代中子数}} \quad (2-1)$$

上式的定义是直观地从“寿命-循环”观点出发的。然而，该式在实用上是不太方便的，因为在实际问题中很难确定中子的每“代”的起始和终了时间。例如，在芯部中有的中子从裂变产生后立即就引起新的裂变，有的中子则需要经过慢化过程成为热中子之后才引起裂变，有的中子在慢化过程中便泄漏出系统或者被辐射俘获。所以，实用上从中子的平衡关系上来定义系统的有效增殖因数更为方便，即

$$k = \frac{\text{系统内中子的产生率}}{\text{系统内中子的总消失（吸收+泄漏）率}} \quad (2-2)$$

若芯部的有效增殖因数  $k$  恰好等于 1，则系统内中子的产生率便恰好等于中子的消失率。这样，在系统内已经进行的链式裂变反应，将以恒定的速率不断地进行下去，也就是说，链式裂变反应过程处于稳态状况。这种系统称为临界系统。若有效增殖因数  $k$  小于 1，这时系统内的中子数目将随时间而不断地衰减，链式裂变反应是非自续的。这种系统便称为次临界系统。若有效增殖因数  $k$  大于 1，则系统内的中子数目将随时间而不断地增加，我们称这种系统为超临界系统。

显然，有效增殖因数  $k$  与系统的材料成分和结构（例如裂变同位素的浓度，燃料-慢化剂的比例等）有关。同时，它还与中子的泄漏程度，或反应堆的大小有关。当反应堆的尺寸为无限大时，中子的泄漏损失便等于零，这时增殖因数将只与系统的材料成分和结构有关。通常，我们把无限大介质的增殖因数称为无限介质增殖因数，以  $k_{\infty}$  表示。由于这时中子的泄漏率等于零，因而  $k_{\infty}$  可以表示成

$$k_{\infty} = \frac{\text{系统内中子的产生率}}{\text{系统内中子的吸收率}} \quad (2-3)$$

对于实际的有限大小的反应堆，中子的泄漏损失总是不可避免的。假定中子的不泄漏几率为  $P_L$ ，它的定义是

$$P_L = \frac{\text{系统内中子的吸收率}}{\text{系统内中子的吸收率} + \text{系统内中子的泄漏率}} \quad (2-4)$$

不泄漏几率  $P_L$  主要是取决于反应堆芯部的大小和几何形状，当然它也和芯部成分有关。一般说来，芯部愈大，不泄漏几率也愈大。于是，根据 (2-2) 式可知，有限尺寸芯部的有效增殖因数便等于

$$k = k_{\infty} P_L \quad (2-5)$$

式中  $P_L$  为中子的不泄漏几率，它显然是小于 1 的。只有当系统为无限大时， $P_L$  才等于 1，这时有效增殖因数  $k$  便等于无限介质增殖因数  $k_{\infty}$ 。

根据以上的讨论，立即可以得出反应堆维持自续链式裂变反应的条件是

$$k = k_{\infty} P_L = 1 \quad (2-6)$$

(2-6) 式通常称为反应堆的临界条件。可以看出，要使反应堆维持临界状态，首先必须要求  $k_{\infty}$  大于 1。如果对于由特定的材料组成和布置的系统，它的无限介质增殖因数  $k_{\infty}$  大于 1，那么，对于这种系统必定可以通过改变反应堆芯部的大小，找到一个合适的芯部尺寸，

恰好使 $k_e P_L$ 等于1，亦即使反应堆处于临界状态。这时反应堆芯部的大小称为临界大小。在临界情况下反应堆内所装载的燃料数量叫做临界质量。

反应堆的临界大小取决于反应堆的材料组成与几何形状。例如，对于采用浓缩铀的反应堆，它的 $k_e$ 比较大，所以其不泄漏几率就可以小一点，仍然可以满足 $k_e P_L$ 等于1的条件。这样，用浓缩铀做燃料的反应堆，其临界大小必定小于用天然铀做燃料的反应堆。决定临界大小的另一个因素是反应堆的几何形状。由于中子总是通过反应堆的表面泄漏出去，而中子的产生则发生在反应堆的整个体积中，因而，要减少中子的泄漏损失，也就是要增加不泄漏几率，就需要减少反应堆的表面积与体积之比。在体积相同的所有的几何形状中，球形的表面积最小，亦即球形反应堆的中子泄漏损失最小。然而，实际上由于工程上的考虑，动力反应堆多是做成圆柱形的。

### 1.2 反应堆的分类

在讨论反应堆的分类之前，首先对核反应堆的主要组成部分作些简单的介绍。

一般，核反应堆主要由芯部、反射层、屏蔽层等几部分组成。芯部又称作活性区，它是核反应堆的核心部分，链式裂变反应就在此区域内进行。例如，热中子反应堆的芯部一般包含核燃料、慢化剂、冷却剂及控制棒等，最常用的核燃料是铀。通常将核燃料加工成一定几何形状（例如棒状、板状、管状等）的燃料元件，按一定的方式（有时把燃料元件组成燃料组件）有规则地排列在芯部中。由于在热中子反应堆内，裂变反应主要是由热中子所引起的，所以在芯部中要有慢化剂，以便把裂变时放出来的高能中子慢化成热中子。一般采用质量数较低的物质（如：水、重水、石墨、铍等）做慢化剂。冷却剂的作用是把芯部中燃料核裂变时产生的大量的热量带出反应堆。常用的冷却剂有水、重水、二氧化碳和氦气等。控制棒是用来控制链式裂变反应率的。一般由一种或几种吸收截面较大的材料（如硼、镉、铅等）构成。当将它们插入芯部或者由芯部抽出时，它们所吸收的中子数目就会变化。这样，就可以达到控制裂变反应率的目的。

在芯部的外面围有一层反射层。其作用是减少中子向堆芯外部的泄漏，从而减少核燃料的装载量。一般堆的反射层是由水、重水、石墨或铍等材料构成的。

另外，为了防止反应堆芯部内的中子和 $\gamma$ 射线泄漏到反应堆外部，在反射层外面设置有屏蔽层。

图2-2是一个热中子反应堆的示意图。

反应堆的分类方法很多，可以从不同的角度进行分类。

#### (1) 按引起大部分裂变的中子平均能量可分成：

(i) 快中子反应堆 在这种类型的反应堆内，核裂变反应主要是由大约为100千电子伏或者更高能量的

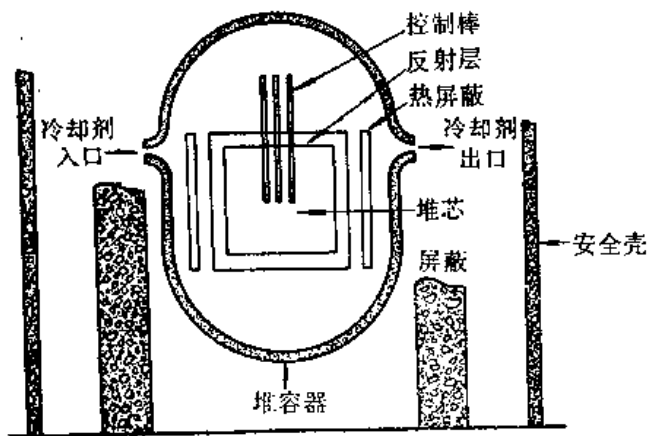


图2-2 热中子反应堆示意图

中子所引起的。由于快中子的裂变截面比低能中子的裂变截面小得多，因此这种反应堆要采用高浓缩的铀-235或钚-239做核燃料。

(ii) 中能中子反应堆 在这种类型的反应堆内，核裂变反应主要是由能量为几个电子伏到大约10千电子伏的中能中子所引起的。

(iii) 热中子反应堆 这种反应堆内的核裂变反应主要是由热中子所引起的。

热中子、中能中子及快中子反应堆在结构上的一个重要差别在于它们的芯部内的核燃料和慢化剂的核数比不同。在快中子反应堆内，根本就没有慢化剂，而且在选择冷却剂材料时，也要避免选用慢化性能良好的材料。中能中子反应堆内慢化剂的数量较少，它不足以使堆内大部分中子慢化为热中子。而在热中子反应堆内，则具有足够数量的慢化剂，使快中子能够慢化到热能。

### (2) 按反应堆用途，可分成：

研究用反应堆；生产用反应堆；动力反应堆以及生产、动力两用反应堆。

### (3) 按所使用的慢化剂、冷却剂种类，可分成：

(i) 轻水反应堆 轻水既作慢化剂又兼作冷却剂。对于动力堆，则根据水在反应堆内的工作条件又可以分为压水堆及沸水堆两类。

(ii) 石墨-气冷堆 石墨作慢化剂，用气体（如二氧化碳、氦气等）作冷却剂的反应堆。

(iii) 重水反应堆 用重水作慢化剂同时又作冷却剂的反应堆。

### (4) 按所用的核燃料，可分为：

天然铀反应堆；低浓缩铀（约2—3%铀-235）反应堆；高浓缩铀（可达90%铀-235）反应堆和钚反应堆等。

## 2. 热中子反应堆内的中子循环

下面，我们将进一步地讨论热中子反应堆内链式裂变反应的物理过程和中子数目的平衡。

在热中子反应堆中，由裂变反应而产生的中子是快中子，它们具有的能量平均大约为2兆电子伏。这些初始裂变中子在堆内运动过程中将与慢化剂的原子核发生碰撞，而降低能量，一直到它的能量与介质原子核热运动的动能平衡为止（亦即慢化成热中子）。这一过程通常称之为“慢化过程”或“减速过程”。这些热中子在介质内仍要继续运动，通常称之为热中子的“扩散过程”，最后被介质吸收，并引起新的裂变反应。如此代代循环，重复不已。

在慢化过程中，还会发生另外一些物理现象。首先，当中子的能量高于铀-238的裂变阈能（约1.1兆电子伏）时，它可能引起铀-238核的裂变。因为铀-238核每次裂变时，平均放出2.5个中子，所以使得快中子数目增加了，这一现象称为铀-238的快中子倍增效应。其次，在慢化过程中，当中子的能量降低到铀-238共振能区附近时，有一部分中子将被铀-238核所共振吸收，这一效应将使中子数目减少。

由于核反应堆是一个由包含有裂变物质的核燃料、慢化剂、冷却剂和结构材料等组成的系统，因此热中子在反应堆内被吸收的情况可分为二种：（1）被慢化剂以及结构材料等物质所辐射俘获，它将使中子的数目减少；（2）被燃料（铀）吸收，其中一部分将引起裂变而产生新的快中子。

最后，由于反应堆的体积实际上总是有限的，因此总有一部分中子在运动的过程中要泄

漏出去。

热中子反应堆内每代中子循环，可以近似地用图 2-3 表示。下面我们将进一步讨论一下这个循环过程。从以上的讨论可以知道，反应堆内中子数目的增减与平衡，主要取决于下列几种过程：

- (1) 铀-238的快中子倍增；
- (2) 燃料吸收热中子引起的裂变；
- (3) 慢化剂以及结构材料等物质的辐射俘获；
- (4) 慢化过程中的共振吸收；
- (5) 中子的泄漏。包括：
  - (i) 慢化过程中的泄漏；
  - (ii) 热中子扩散过程中的泄漏。

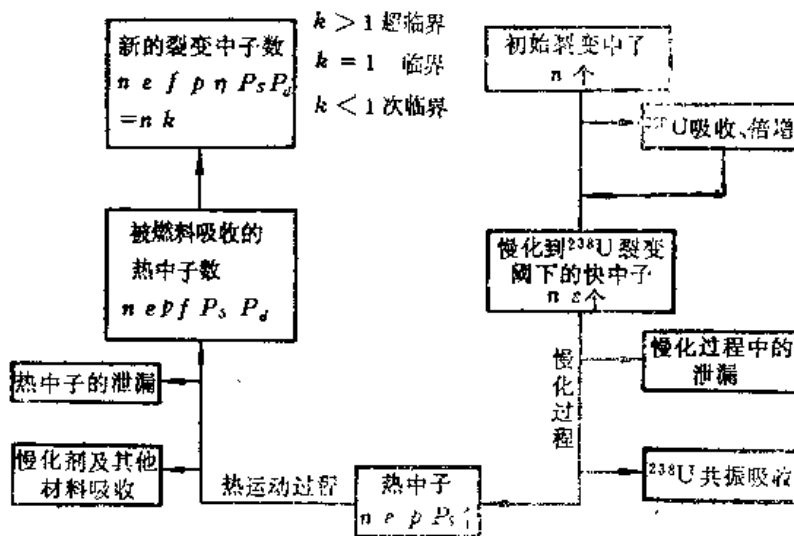
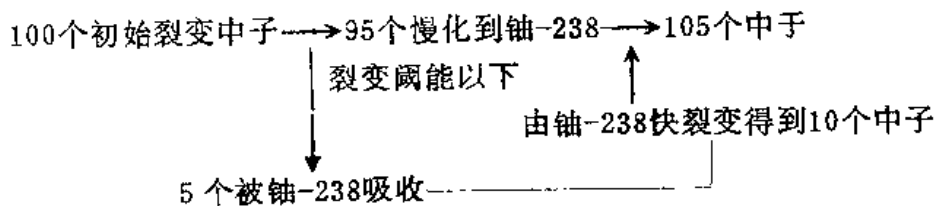


图2-3 热中子反应堆内的中子平衡

反应堆内中子数目的变化取决于上述五种过程竞争的结果。其中前两个过程将使反应堆内的中子数目增加，后三个过程将使中子减少。为了定量计算，我们就以上五个过程，定义五个参量：

(1) **快中子倍增系数ε** 它的定义是：由一个初始裂变中子所得到的、慢化到铀-238裂变阈能以下的平均中子数。例如下图所示过程：开始时有100个初始裂变中子，由于有铀-238核的倍增效应，最后得到105个铀-238裂变阈能以下的中子，因而ε就等于1.05。



(2) **有效裂变中子数η** 它的定义是：燃料每吸收一个热中子所产生的平均裂变中子数。由于燃料每吸收一个热中子引起裂变的几率为  $\Sigma_f/\Sigma_a$ ，若设每次裂变所产生的平均裂变中子数为ν，则显然有

$$\eta = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \nu \quad (2-7)$$

式中,  $\Sigma_a$ ,  $\Sigma_f$  分别为燃料的热中子宏观吸收截面和宏观裂变截面,  $\nu$  为铀-235每次裂变所产生的平均裂变中子数。

(3) **热中子利用系数**  $f$  它表示被燃料吸收的热中子数占被芯部中所有物质(包括燃料在内)吸收的热中子总数的份额。 $f$  定义为

$$f = \frac{\text{燃料吸收的热中子数}}{\text{被吸收的热中子总数}} \quad (2-8)$$

这里分母中包括被燃料、慢化剂、冷却剂和结构材料等所有物质吸收的热中子总数。

(4) **逃脱共振几率**  $p$  它表示在慢化过程中中子逃脱共振吸收的几率。

(5) **不泄漏几率**  $P_L$  它是中子在慢化过程和热中子在扩散过程中不泄漏几率的乘积。

$$P_L = P_S P_d \quad (2-9)$$

式中,  $P_S$  为慢化过程中的不泄漏几率,  $P_d$  为热中子扩散过程中的不泄漏几率。

定义了以上这些量以后, 我们便可以进一步定量地来研究热中子反应堆内中子的平衡过程。假设在某一代开始时有  $n$  个裂变中子, 在  $n$  个中子被有效地慢化以前, 由于铀-238快中子倍增的结果, 中子数目将增加到  $n\epsilon$  个。这些中子继续慢化, 但是由于共振吸收将损失一部分中子, 所以只有  $n\epsilon p$  个中子能够逃脱共振吸收而慢化成热中子。如果考虑到中子的泄漏损失, 那么, 实际上被吸收的热中子数目将只有  $n\epsilon p P_S P_d$  个。显然, 其中被燃料所吸收的热中子数目等于  $n\epsilon p f P_S P_d$  个, 其余部分的热中子被其它材料所吸收。被燃料吸收的热中子将使燃料的核发生裂变反应, 而又重新放出新的裂变中子。由于燃料每吸收一个热中子将产生  $\eta$  个裂变中子, 因而新的裂变中子数目等于  $n\epsilon p f \eta P_S P_d$ 。

根据有效增殖因数的定义, 便可得出

$$k = \frac{n\epsilon p f \eta P_S P_d}{n} = k_{\infty} P_L, \quad (2-10)$$

其中,  $P_L = P_S P_d$ 。

由 (2-10) 式可以看出

$$k_{\infty} = \epsilon p f \eta \quad (2-11)$$

(2-11) 式称为四因子公式。上面对热中子反应堆内中子平衡的分析方法称为“四因子模型”。在早期反应堆物理分析和计算中, 它被广泛地应用。同时, 它对热中子反应堆内中子的循环过程可以给出清晰的物理概念和形象的图形。但是, 它仅仅是对充分热化的热中子反应堆内的物理过程的一种近似的、简单的描述, 它并不能严格地描述一些更为复杂的反应堆的物理过程。目前, 随着电子计算机的发展, 它的应用逐渐地减少了, 而更多的是直接地解少群或多群的扩散方程。

### 3. 核燃料的转换与循环

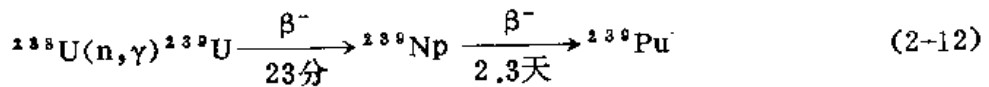
#### 3.1 转换与增殖

随着电力需要量的迅速增长和由此而引起的能源不足, 目前, 核能已经发展成为一种重



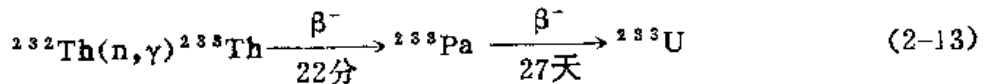
要的新能源。从第一章中知道，可以作为反应堆核燃料的裂变同位素有铀-235，钚-239和铀-233三种。其中只有铀-235是在自然界中天然存在的。然而遗憾的是，在天然铀中只含大约0.72%左右的铀-235，而占99.2%以上的是铀-238。因而，单纯以铀-235作为燃料的核动力，很快就会使天然铀的资源枯竭，它并不能显著地扩大现有的能源。同时，再考虑受到铀矿开采经济价值的限制，它很快就可能无法满足核动力发展的需要。幸而，正如前面一章所提到的，我们可以把天然铀中99%以上的铀-238以及钍-232〔通过(1-10)和(1-11)式的反应〕转换成人工裂变同位素钚-239和铀-233。假如我们能够通过转换把铀-238和钍-232充分地利用起来，那么，核能的能源将扩大几十倍至近百倍，从而可以在较长的时间内满足人类对能源的需要。

在反应堆中，主要的核燃料转换过程有两类。一是把铀-238转换成钚-239，其反应过程如下：



通常我们把可用以生产裂变同位素的核素，如上式中的铀-238，称为可转换同位素，而把这种通过可转换物质产生裂变同位素的过程叫做转换。为完成上述的反应，必须将铀-238放入反应堆中经受中子的辐照。在现代动力反应堆中，一般是采用低浓缩铀为核燃料，在燃料中存在着大量的铀-238，因而在反应堆的正常运行中必然会发生铀-238转换为钚-239的过程。例如在一个轻水反应堆中，新装的燃料一般是铀-238占97%左右的低浓缩铀，经过一年左右的中子辐照后，卸下的燃料中大约含0.8%左右的钚-239。如果把产生的钚-239从卸下的燃料中提取出来，加工成新燃料再装入堆芯或新的反应堆中加以利用，这样的燃料循环过程便称为铀-钚循环。

另一类转换过程是在反应堆中装入可转换同位素钍-232，经过中子辐照后转换为铀-233，其转换过程是



如果把新产生的铀-233提取出来再用于反应堆中作为燃料，这种循环便称为钍-铀循环。钍在自然界中的蕴藏量相当丰富。目前，关于钍-铀循环的利用问题，已在一些国家中引起了重视。

通常用**转换比CR**来描述转换过程。它的定义是：反应堆中每消耗一个裂变材料原子所产生新的裂变材料的原子数。即

$$\begin{aligned} CR &= \frac{\text{堆内可转换物质的吸收率}}{\text{堆内所有裂变物质的吸收率}} \\ &= \frac{\text{裂变物质的生成率}}{\text{裂变物质的消耗率}} \end{aligned} \quad (2-14)$$

这样，假设有 $N$ 个裂变同位素原子核消耗掉，则会产生 $N(CR)$ 个新的裂变核。如果新产生的裂变同位素与原来的裂变同位素相同，这些新的裂变核又将参与转换而生成 $N(CR) \times (CR) = N(CR)^2$ 个新的裂变核。如此继续下去，可以得出在 $CR < 1$ 的情况下，最后被利用的裂变同位素的总数量为

$$N + N(CR) + N(CR)^2 + N(CR)^3 + \dots = N/(1 - CR) \quad (2-15)$$

例如，对于轻水反应堆 $CR \approx 0.6$ ，于是，最终被利用的裂变核约为原来的2.5倍。若 $CR = 1$ ，则每消耗一个裂变元素的原子，便可以产生一个新的裂变核。在这种情况下，可转换物质可以在反应堆内不断地转换而无须给系统添加新的裂变物质。然而，最吸引人的是 $CR > 1$ 的情况。这时，反应堆内产生的裂变元素比消耗的多，除了维持反应堆本身的需要外，还可以增殖出一些裂变材料供给其他新反应堆使用，这种反应堆称为增殖堆。把这时的转换比( $CR > 1$ )称为**增殖比**，并以 $BR$ 表示加以区别。通常把 $CR < 1$ 的生产堆称为**转换堆**。增殖堆的出现为实现铀和钍的资源充分利用开辟了现实的途径。

现在让我们进一步考察一下转换（或增殖）过程的物理特征。裂变核每吸收一个中子所产生的有效裂变中子数为 $\eta$ ，显然，除了为维持链式反应所必须的一个中子以及为其它材料（不包括可转换材料）所吸收和泄漏损失以外，剩余的中子便被可转换材料吸收而用于转换过程。因此，根据中子平衡和 $CR$ 的定义有

$$CR = \eta - 1 - A - L + F(v' - 1) \quad (2-16)$$

其中

$$\eta = \nu \sigma_f / (\sigma_f + \sigma_a) = \nu / (1 + \alpha) \quad (2-17)$$

这里 $A$ ， $L$ 和 $F$ 分别是相对于裂变核每吸收一个中子时其它材料吸收的中子数、泄漏的中子数和可转换材料的裂变数。 $\nu'$ 为可转换同位素的每次裂变放出的平均中子数。

从(2-16)式可以看出，转换比或增殖比与 $\eta$ 、 $A$ 、 $L$ 和 $F$ 等有关。其中最重要的数值是 $\eta$ 。显然，若 $\eta > 1$ ，反应堆就有可能发生转换。而要实现增殖过程，则必须要求 $\eta$ 大于2，这是因为还要考虑有吸收损失 $A$ 和泄漏损失 $L$ 的缘故。在图1-8中给出了铀-235，钚-239和铀-233的 $\eta$ 值随中子能量的变化曲线。从曲线上可以看到，在热能区，铀-235和钚-239的 $\eta$ 值只比2略高一点。例如 $E \approx 0.025$ 电子伏时，铀-235的 $\eta$ 值等于2.07，钚-239的 $\eta$ 值等于2.108（见表1-5），这样的 $\eta$ 值还不足以补偿其它材料的吸收和泄漏损失，因而不能实现增殖。由于能量在 $1-10^6$ 电子伏的范围内铀-235的 $\eta$ 值和能量在 $10-2 \times 10^4$ 电子伏的范围内钚-239的 $\eta$ 值都小于2，因而对于铀-235或钚-239作燃料的热中子或中能中子反应堆是不可能实现增殖的。但是，当中子能量继续增高时， $\eta$ 值显著地增大并且大于2。特别是对于钚-239更是如此。由图1-8可以看出，只要反应堆内的裂变是由 $E > 100$ 千电子伏以上的快中子引起的，用钚-239作燃料的反应堆就可以实现增殖；而对于铀-235，则中子的能量还必须要高得多。这种反应堆通常称为快中子增殖堆。

对于铀-233，情况则有些不同。在快中子区域，它和钚-239及铀-235一样可以实现增殖。对于热中子，例如 $E \approx 0.025$ 电子伏，它的 $\eta \approx 2.29$ ，因而有可能设计出一个以铀-233为燃料的热中子增殖堆。

燃料和可转换材料以外的其它物质（冷却剂、结构材料和裂变产物等）的吸收( $A$ )将使转换比（或增殖比）降低。由于在热能区域内这些材料的中子的吸收截面（尤其是裂变产物氙）比较大，因而它们对热中子反应堆的影响最为严重，并使转换比显著地降

表 2-1

	铀-235, 快堆(费米堆)	铀-235, 热堆(杨基堆)
$\eta$	2.12	2.07
$A$	0.133	0.58
$L$	0.0167(0.4)*	0.0505
$F$	0.137	0.0505
$\nu'-1$	1.7	1.7
$BR$ 或 $CR$	1.2	0.53

\* 系芯部向再生区的泄漏

低。这从表 2-1 中的数值也可以看出。泄漏损失同样使转换比（或增殖比）降低。对于热中子反应堆来说，这个数值并不太大。但是对于快中子反应堆，由于芯部体积较小， $L$  的数值也就可观，因此为了减少中子的泄漏损失，通常在快中子反应堆的芯部外面围上一层由可转换材料构成的“再生区”，用来吸收泄漏出堆芯的中子，以提高增殖比。铀-238 和钍-232 的快裂变份额  $F$  对于热中子反应堆来说是很小的（0.02—0.06），而对于快中子堆则可以达到 0.15—0.20。表 2-1 中列出了典型的热中子堆和快中子堆的一些数据。

**倍增时间** 反应堆内核燃料的增殖特性可以用增殖增益  $G$  来度量，它等于系统中每消耗一个裂变同位素的原子所得到的净增加的裂变同位素核数。它可以表示成

$$G = BR - 1 \quad (2-18)$$

另外，裂变物质增殖的速率可以用倍增时间来描述。它的定义是：由于增殖，反应堆内裂变同位素的数量增加一倍所需的时间，通常以年为单位。它比增殖比能更好地反映出增殖堆的增殖效率。现在考虑两种极端情况：

**(1) 线性倍增时间** 假定把增殖过程中所生产的裂变同位素贮存起来不加以利用，那么，当反应堆内由增殖而产生的裂变同位素的数量等于其初始裂变材料的装载量时，所需的时间便称为线性倍增时间，以  $t_{Dl}$  表示。

为了计算倍增时间，不妨假定反应堆是在恒定热功率  $P_0$ （兆瓦）下运行，因而反应堆每天消耗的裂变同位素数量便等于  $\omega P_0$ 。这里， $\omega$  是每单位功率每天消耗的裂变同位素数量（例如对于铀-235， $\omega \approx 1.23$  克/兆瓦·日）。如果近似地假设产生的裂变元素和消耗的裂变元素具有相同的原子量，那么，在反应堆内每天净增加的裂变同位素数量便等于  $G\omega P_0$ ，于是根据倍增时间的定义有

$$G\omega P_0 \Psi t_{Dl} = M_0 \quad (2-19)$$

或

$$t_{Dl} = M_0 / G\omega P_0 \Psi \quad (2-20)$$

这里， $M_0$  为反应堆内裂变材料的初始装载量； $\Psi$  为反应堆的负荷系数。可以看到，这时裂变同位素数量的增长和时间成线性关系。

**(2) 指数倍增时间** 不难看出，在上述的推导过程中，假定增殖过程产生出来的裂变材料是一直贮存着，并没有加以利用，这样显然是不经济的。现在考虑另一种极端情况，假定有许多相同类型的反应堆同时在运行，它们所生产出来的裂变材料可以连续不断地从反应堆中取出，及时地装入新的反应堆中加以利用，并使其继续增殖。这样，无疑会增加裂变材料发出的功率。也就是说，这时实际发出的功率将与该时刻裂变材料的质量  $M(t)$  成正比，即

$$P(t) = \beta M(t) \quad (2-21)$$

式中  $\beta$  为比例常数，不妨假设  $\beta = P_0 / M_0$ ，这样裂变同位素的增加率为

$$\frac{dM}{dt} G\omega P \Psi = G\omega \beta \Psi M(t)$$

解之得到

$$M(t) = M_0 e^{G\omega \beta \Psi t} = M_0 e^{(GP_0 \Psi t) / M_0} \quad (2-22)$$

从上式可以看出，裂变材料的数量是按指数规律增长的。令  $M = 2M_0$ ，便得出指数倍增时间  $t_{Dc}$  为

$$t_{D,1} = M_0 \ln 2 / G \omega P_0 \Psi = 0.693 t_{D,0} \quad (2-23)$$

它是理想情况下所可能达到的倍增时间的下限。当考虑到可转换材料的快裂变影响时，则

$$t_{D,1} = \frac{M_0}{G \omega P_0 \Psi (1 - F')} \quad (2-24)$$

上式中的 $F'$ 为可转换材料的裂变数占总裂变数的份额。例如对于快中子反应堆，设 $BR=1.3$ ，比功率 $M_0/P_0=0.84$ 公斤/兆瓦（热）， $\Psi=0.8$ ， $F'=0.16$ ， $\omega=1.23 \times 10^{-3}$ 公斤/兆瓦·日，则理论上 $t_{D,1} \approx 10$ 年左右。最后应该指出，上述的倍增时间，并没有考虑到增殖的裂变材料在反应堆内的停留时间、燃料元件后处理和元件制造所需的时间以及燃料运输所需的时间。实际的倍增时间显然要比（2-24）式算出的要大得多。

倍增时间是增殖堆增殖特性的一个重要指标。从（2-24）式可以看出，如果要缩短倍增时间，则必须同时提高增殖比和反应堆的单位质量裂变材料的功率输出。对于动力快堆，倍增时间必须结合反应堆的经济分析，综合地加以考虑。

### 3.2 几种动力反应堆的燃料循环

在普通火力发电厂中，化石燃料经过燃烧后，其灰渣便作为废物排出。在核电站中，辐照过的燃料元件从反应堆中卸下后，通常经过后处理可以重新制成新的燃料元件装入反应堆内再使用。

另外，在反应堆内进行着把可转换材料转换成为新的裂变同位素的转换过程，这些裂变材料经过提取和加工又可以作为新的燃料在反应堆内使用。这样便形成了核燃料的循环过程。这是核电站的一个重要特点。下面介绍几种动力反应堆的燃料循环。

#### （1）天然铀反应堆

应用天然铀作燃料的动力反应堆有石墨气冷反应堆和重水反应堆两种类型。为了降低发电成本，总是不断地设法提高燃料的燃耗深度。目前对于普通的石墨气冷反应堆，燃耗深度可以达到约5000兆瓦·日/吨铀以上，重水反应堆的燃耗深度则可更高些。虽然，在卸下的元件中，所生成的铀-239可以提取出来，以供快中子反应堆等使用，但是在这样的燃耗深度下，从石墨气冷堆卸下的每吨燃料中仅含铀-239约1.8—2公斤。因而，一般对在天然铀动力反应堆中辐照后的燃料往往并不加以处理，而是把它们贮存起来。这样，并不形成燃料的循环，通常称之为“一次性使用方式”，见图2-4。普通的石墨气冷堆和诸如加拿大的CANDU重水堆便属于此种类型。

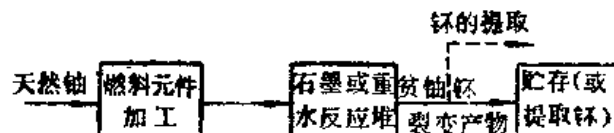


图2-4 一次性使用方式

#### （2）轻水反应堆（LWR）

在轻水反应堆中，一般是采用低浓缩铀（含2—3%的铀-235）作为燃料。其燃耗深度比天然铀反应堆要深得多，一般在 $3 \times 10^4$ 兆瓦·日/吨铀左右。从芯部卸下来的燃料元件中大

约含有0.8%的铀-235，钚-239的含量也大致与之相同。辐照过的燃料可以送后处理厂进行处理，以从中提取钚-239。同时把回收的浓缩度约为0.8%的铀重新加以浓缩并制成新的燃料元件，送回到反应堆中使用。其循环过程的示意图见图 2-5。

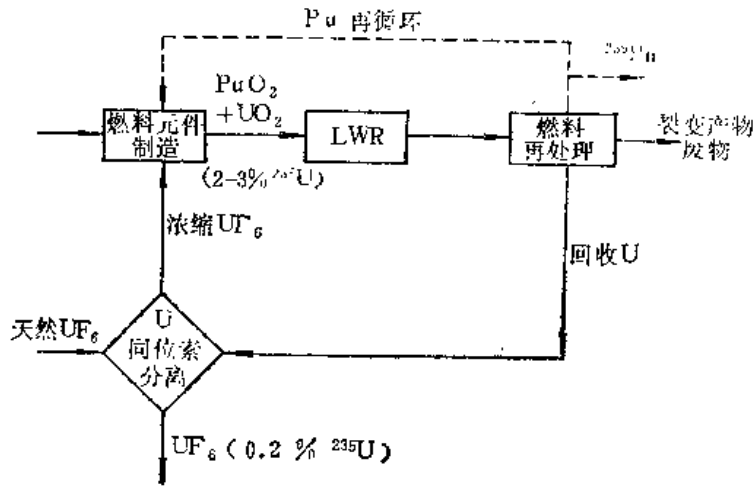


图2-5 轻水反应堆的燃料循环

由于快中子堆发展的迟缓以及钚的积存量的增大，因此也可以把自轻水堆用过的燃料中提取出来的钚-239和浓缩铀（或天然铀）混合制成钚富化燃料元件，再装入轻水堆中燃烧。这样就可以减少对铀-235的需要量。据估计可以节约铀-235约为33%。这便是钚的再循环，在图 2-5 中用虚线表示。

**(3) 高温气冷反应堆 (HTGR)**

高温气冷堆的燃料循环与轻水堆的燃料循环有很大的不同。现以钍-铀循环高温气冷堆为例加以说明。它是建立在钍-232-铀-233循环基础上的。由于铀-233是人工裂变同位素，因此，第一次装入反应堆内的燃料是高浓缩度的碳化铀（约含93%的铀-235）以及可转换材料（如氧化钍或碳化钍）。钍经受中子的辐照以后，转换为铀-233。高温气冷堆的转换比较高，CR约为0.8，燃耗深度达80,000兆瓦·日/吨铀。这种类型的高温气冷堆的燃料循环见图 2-6。

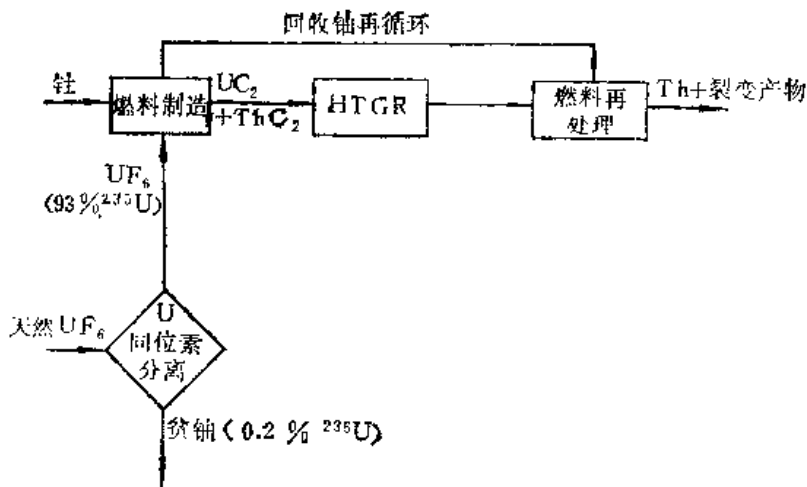


图2-6 钍-铀循环的高温气冷堆的燃料循环

### (4) 液态金属冷却的快中子增殖反应堆

快中子增殖堆的燃料循环与轻水堆和高温气冷堆的一个重要差别是：这种类型的反应堆具有比较大的增殖比（其BR约为1.2—1.3）。在反应堆运行的过程中，回收的燃料除供给反应堆本身的需要外，还会有剩余的裂变同位素。这是快中子增殖堆的主要优点。液态金属冷却的快中子增殖堆的燃料循环见图2-7。

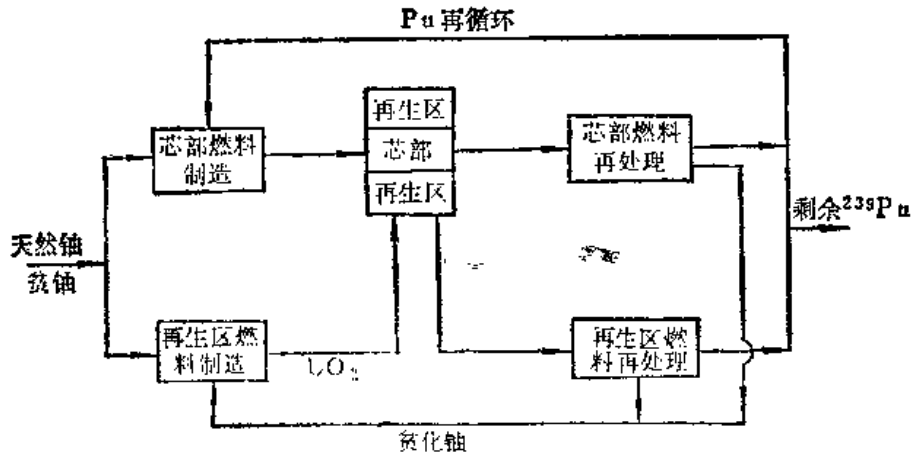


图2-7 液态金属冷却的快堆燃料(钚-239)循环

## 4. 动力反应堆的一般介绍

随着工业的迅速发展，对电力的需要量不断地上升。目前，核电站的发展受到各国的普遍重视。自从本世纪五十年代世界上第一座核电站投入运行以来，现在世界上已经建成和正在建造的各种类型的核电站有三百多座。下面对核动力反应堆中最常用的压水堆作简单的介绍。

压水堆是用轻水作慢化剂兼冷却剂的反应堆。因为水的吸收截面比较大，所以不能用天然铀作燃料。压水堆的燃料一般采用低浓缩铀（2—3%的铀-235）。芯部装有燃料组件及控制组件。压水堆的工作原理见图2-8。水从底部向上流过堆芯，流出来的高温高压水进入蒸汽发生器。为了使堆内的水在高温下不致发生沸腾，堆内压力要加到150—160个大气压。

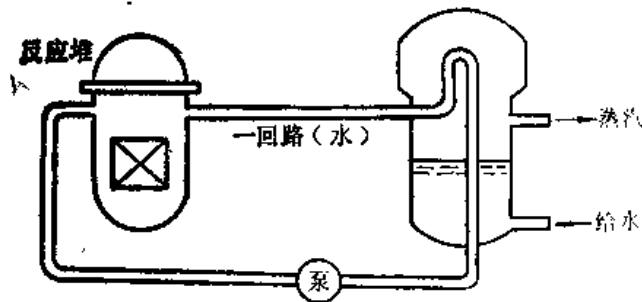


图2-8 压水堆工作原理

压水堆的优点是它的尺寸小，结构比较紧凑，运行安全、可靠，技术上比较成熟。但是，压水堆必须用浓缩铀作燃料，转换比不高（约为0.5左右），核燃料不能充分利用（其利用率

约为1—2%)。并且由于水在高温高压下工作，故对反应堆容器及回路设备要求较高，加工制造比较困难。压水堆电站的效率一般在35%左右。燃耗深度约为 $3 \times 10^4$ 兆瓦·日/吨铀。质量比功率约为35兆瓦(热)/吨。

典型的压水堆的堆芯结构见图2-9。芯部内装有燃料组件(见图2-10)及控制棒束。芯部由121个燃料组件排列成高约3米，直径约为2.5米的近似圆柱形。整个堆芯置于压力容器内。燃料组件为正方形排列。燃料棒的外径为10.7毫米，是用低浓缩的二氧化铀芯块装在锆合金(Zr-4)包壳管中。芯块是高度与直径大致相等的圆柱体。为了展平芯部的功率分布，堆芯往往采用不同浓缩度的燃料组件的分区布置。

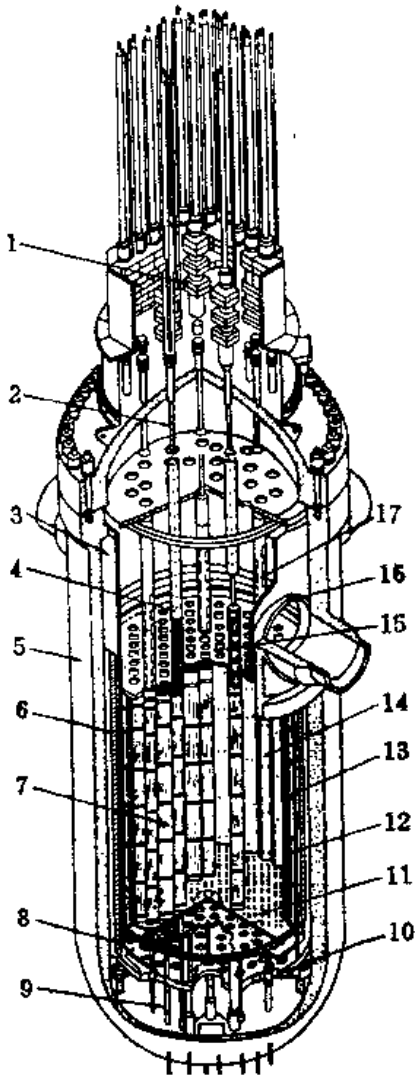


图2-9 压水堆芯部结构

1.控制棒驱动机构; 2.传动杆3, 12.吊兰; 4.控制棒导向管; 5.压力壳; 6.热屏蔽; 7.燃料组件; 8.挠性连接杆; 9, 17.支承柱; 10.吊兰底板; 11.活性区下板; 13.辐板; 14.围板; 15.活性区上板; 16.吊兰接管。

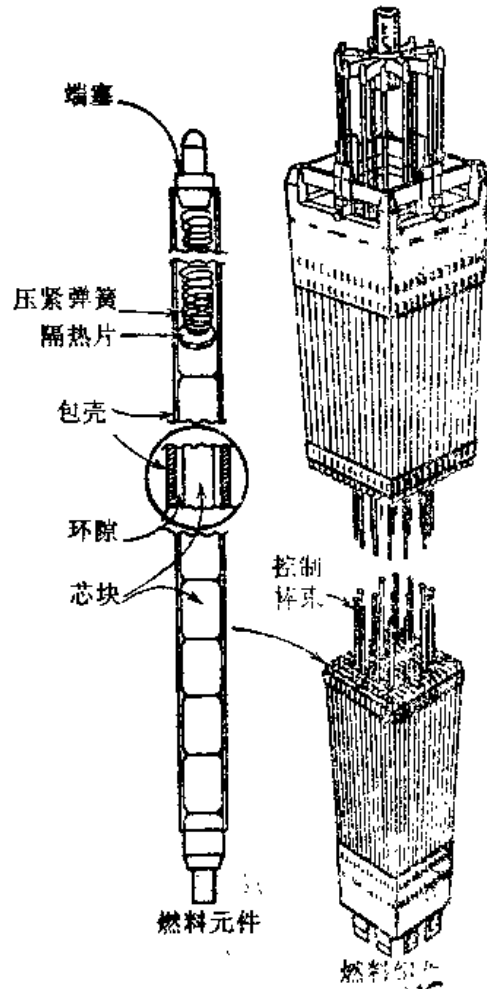


图2-10 压水堆的燃料组件

控制棒组件是由控制棒组成的。控制棒是用Ag-In-Cd合金做成的，外面包有不锈钢的

包壳。

通常还采用化学补偿液来调节压水堆内的反应性，即在冷却剂中溶解一定数量的硼，通过调整硼的浓度来达到增加或减少反应性的目的。这样可以减少控制棒的数目。硼溶液主要用来补偿由于燃料的燃耗而引起的反应性的慢变化，而控制棒则用来控制如反应堆的启动、停堆及功率调节等反应性的快速变化。

与其他堆型比较，压水堆具有体积比较小，经济性好，技术比较成熟和安全可靠等优点。目前压水堆已进入商用阶段并成为核电站采用的主要堆型之一。

### 参 考 文 献

- [1] J.R.拉马什著，洪流译，核反应堆理论导论，第四章，原子能出版社，1977年。
- [2] J.J.Duderstadt, & L.J.Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, Chap. 3, 15, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.



### 第三章 单速中子扩散理论

从第二章的讨论知道，反应堆内的链式裂变反应过程实质上就是中子在介质内的不断产生、运动和消亡的过程。反应堆理论的基本问题之一，是确定堆内中子密度（或中子通量）的分布。由于中子与原子核间的无规则碰撞，中子在介质内的运动是一种杂乱无章的具有统计性质的运动，即原来在堆内某一位置具有某种能量和某一运动方向的中子，在稍晚些时候，将在堆内的另一位置以另一能量和另一运动方向出现。因而中子密度分布不仅与空间坐标  $r$  有关，而且是中子速度  $v$ （或能量）和运动方向  $\Omega$  的函数，即中子密度的分布可以用函数  $n(r, v, \Omega)$  来表示。它的定义是：在  $r$  处单位体积内和速度为  $v$  的单位速度间隔内，运动方向为  $\Omega$  的单位立体角内的中子数目。

我们的任务是要求出反应堆内中子密度的分布。自然可以想到，首先必须求得描述中子在介质内输运过程的基本方程式，然后，根据具体问题求出该方程的解。描述中子输运过程的精确方程叫做玻尔兹曼输运方程，因为它与玻尔兹曼用来研究气体扩散的方程相似（见第四章）。遗憾的是，求解输运方程是一件非常困难的事情。然而，在某些条件下可以大大地简化这个方程，并可以用一些简单的方法处理。

如果中子通量的分布是接近于各向同性的（例如在大型反应堆堆芯的中心部分），那么，可以近似地认为中子通量的分布与运动方向  $\Omega$  无关，从而使问题大大简化。通过这种近似简化得到的方程称为扩散方程。同时，如果所有中子（包括源中子）都具有相同的能量[也就是单能（速）中子]，那么问题又可获得进一步的简化，这时中子通量便仅仅是空间坐标  $r$  的函数。本章将先讨论单速扩散模型。关于多能中子的扩散问题将在第六章中讨论。

#### 1. 单速中子扩散方程

在物理学中，我们已经熟悉分子的扩散现象，即分子间的无规则碰撞，分子从浓度大的地方向浓度小的地方扩散，并且分子扩散的速率与分子密度的梯度成正比，也就是服从“斐克扩散定律”。同样地，若把一个中子源（例如镅-铍源）放到某一介质内，我们可以通过测量仪器观察到，中子不断地从源点扩散开来，经过一段时间后，介质内到处都有中子了。中子的扩散主要是中子与介质原子核散射碰撞的结果。在中子密度大的地方，中子与原子核碰撞的次数就多，而每次碰撞以后，中子通常要改变运动方向离开碰撞中心（见图3-1）。因此与分子的扩散相似，中子总是从密度高的地方向密度低的地方扩散。下面即将证明中子扩散也服从斐克扩散定律，它是中子扩散近似模型的基础。

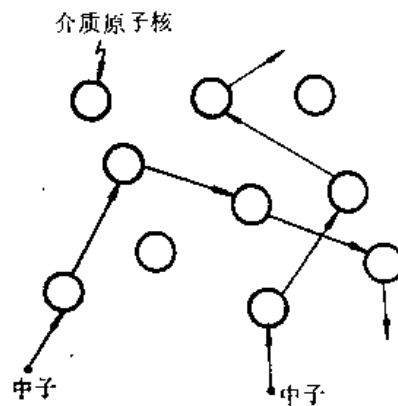


图3-1 中子与介质原子核的散射碰撞

下面即将证明中子扩散也服从斐克扩散定律，它是中子扩散近似模型的基础。

## 1.1 斐克定律

考虑稳态情况，也就是说中子通量不随时间变化，同时假设：

- (1) 介质是无限的、均匀的；
- (2) 在实验室坐标系中散射是各向同性的；
- (3) 介质的吸收截面很小，即  $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ ；
- (4) 中子通量是随空间位置缓慢变化的函数。

考虑如图 3-2 所示的坐标系， $xy$  平面上有一小面积  $dA_z$ ，并设在  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \theta, \varphi)$  处有一体积元  $dV$ 。在  $dV$  内每秒发生散射的中子数目为  $\Sigma_s \phi(\mathbf{r}) dV$ ，这里  $\Sigma_s$  是介质的宏观散射截面， $\phi(\mathbf{r})$  是  $\mathbf{r}$  处的中子通量。因为假设在实验室系中散射是各向同性的，因而在  $dV$  内散射的中子朝各个方向的立体角散射的几率是相等的。被散射到  $dA_z$  方向上的中子份额就等于  $dA_z$  对散射点所张的立体角占总立体角的部份数，即  $\frac{\cos\theta \cdot dA_z}{4\pi r^2}$ 。因而，每秒自  $dV$  内向着  $dA_z$

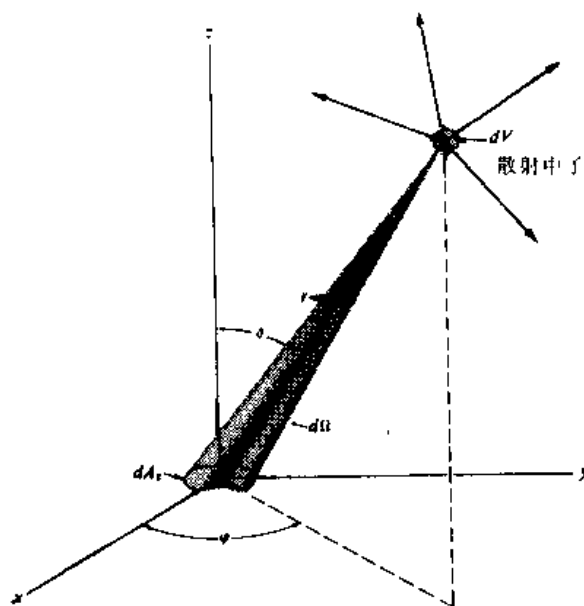


图8-2 推导斐克定律的示意图

散射的中子数是  $\Sigma_s \phi(\mathbf{r}) \frac{\cos\theta dA_z dV}{4\pi r^2}$ 。

但是，这些中子不是全部均能到达  $dA_z$ ，有些中子在未到达  $dA_z$  之前就被介质吸收或从这个方向上散射出去。而沿着这个方向散射的中子，实际能到达  $dA_z$  的几率为  $e^{-\Sigma_t r}$ ，其中， $\Sigma_t$  是介质的宏观总截面， $\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s$ 。由于假设介质为弱吸收介质，即  $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ ，因而  $\Sigma_t$  可以用  $\Sigma_s$  来代替。这样，每秒自  $dV$  内散射出来未经碰撞而能到达  $dA_z$  上的中子数是

$$\Sigma_s \phi(\mathbf{r}) e^{-\Sigma_s r} \frac{\cos\theta dA_z}{4\pi r^2} dV$$

若以  $J_z$  表示沿负  $z$  方向的分中子流密度，即每秒自上方（沿负  $z$  方向）向下穿过  $dA_z$  的单位面积的中子数，那么，每秒自上方向下穿过  $dA_z$  的中子数为  $J_z dA_z$ ，它等于  $xy$  平面上方的整个半空间区域内散射到  $dA_z$  面积上的中子数。由于在球坐标系中， $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ ，因此

$$J_z dA_z = \frac{\Sigma_s dA_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \phi(\mathbf{r}) e^{-\Sigma_s r} \cos\theta \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (3-1)$$

上式中积分号内的  $\phi(\mathbf{r})$  是一个未知函数，因而上述积分是无法计算的。但是，由于已经假设中子通量是随空间位置缓慢变化的，因而可以把  $\phi(\mathbf{r})$  在原点处按泰勒级数展开。设对应于  $\mathbf{r}$  处的直角坐标为  $(x, y, z)$ ，则有

$$\phi(x, y, z) = \phi_0 + x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0 + y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_0 + z \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 + \dots, \quad (3-2)$$

式中各项角标“0”表示取它们在原点处的数值。把 $x, y, z$ 用球坐标表示

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

将(3-2)式及(3-3)式代入(3-1)式中去。由于对 $\varphi$ 的积分是从0到 $2\pi$ ，所以含 $x, y$ 项的积分将等于零。消去等式两边的 $dA_z$ ，可以得到

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-\Sigma_s r} \left[ \phi_0 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 r \cos \theta \right] \sin \theta \cos \theta dr d\theta d\varphi,$$

经过计算可以得出

$$J_z^- = \frac{\phi_0}{4} + \frac{1}{6\Sigma_s} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0. \quad (3-4)$$

用同样的方法，可以算出单位时间内沿正 $z$ 方向穿过 $xy$ 平面上的单位面积的中子数 $J_z^+$ 。这时，对 $\theta$ 的积分是从 $\pi/2$ 到 $\pi$ ，经过计算可以得到

$$J_z^+ = \frac{\phi_0}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0. \quad (3-5)$$

这样，单位时间沿着 $z$ 方向穿过 $xy$ 平面上单位面积的净中子数，以 $J_z$ 表示，便等于

$$J_z = J_z^+ - J_z^- = -\frac{\lambda_s}{3} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0. \quad (3-6)$$

把 $J_z$ 叫做 $z$ 方向的中子流密度或净中子流密度，它表示沿正 $z$ 方向的中子净流动速率。

同样，可以求出 $x$ 方向和 $y$ 方向上的中子流密度分别为

$$J_x = -\frac{\lambda_s}{3} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0, \quad (3-7)$$

和

$$J_y = -\frac{\lambda_s}{3} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_0. \quad (3-8)$$

如果所讨论的面积元并不垂直于任一坐标轴的方向，它的法线 $\mathbf{n}$ 与 $x, y,$ 和 $z$ 轴分别成 $\alpha, \beta$ 和 $\gamma$ 角度，那么单位时间穿过这一单位面积的净中子数 $J$ 便等于

$$J = -\frac{\lambda_s}{3} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cos \gamma \right] \quad (3-9)$$

在(3-9)式中取消了坐标原点的角标，这是因为在上面的推导中，坐标原点的位置是任意的。所以，在满足前面假设的条件下，这个方程在介质内任意点都是成立的。

可以把(3-9)式写成所讨论面积元的单位法线矢量 $\mathbf{n}$ 与矢量 $\mathbf{J}$ 的乘积，即

$$J = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}, \quad (3-10)$$

式中

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k},$$

$$\mathbf{j} = J_x\mathbf{i} + J_y\mathbf{j} + J_z\mathbf{k} = -\frac{\lambda_s}{3}\text{grad}\phi. \quad (3-11)$$

矢量 $\mathbf{j}$ 称为**中子流密度**， $J_x$ 、 $J_y$ 和 $J_z$ 便是它在 $x$ 、 $y$ 和 $z$ 轴上的投影。可见，穿过单位面积的中子流与面积的取向有关，当法线 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{J}$ 一致时它将具有最大值。

(3-11)式称为**斐克定律**。它表示：中子流密度 $\mathbf{J}$ 正比于负的通量梯度，其比例常数叫做**扩散系数**，并用 $D$ 表示。于是，斐克定律便可以写成

$$\mathbf{J} = -D\text{grad}\phi, \quad (3-12)$$

式中

$$D = \frac{\lambda_s}{3}. \quad (3-13)$$

应该指出，在上面的推导过程中，曾经假设在实验室系中，中子散射是各向同性的。实际上，这一假设只有对于重核才是近似地成立的。在一般情况下，这种假设是不正确的。由中子输运理论可以证明，在实验室系中，当中子的散射各向异性不太严重时，为了对散射的各向异性作适当的修正。在(3-12)式中，必须用输运平均自由程 $\lambda_{s,r}$ 来代替式中的散射平均自由程 $\lambda_s$ 。这样，斐克定律可以写成以下形式

$$\mathbf{J} = -\frac{\lambda_{s,r}}{3}\text{grad}\phi = -D\text{grad}\phi \quad (3-14)$$

式中

$$D = \frac{\lambda_{s,r}}{3} \quad (3-15)$$

其中 $\lambda_{s,r}$ 为输运平均自由程，它等于（见第四章）

$$\lambda_{s,r} = \frac{\lambda_s}{1 - \bar{\mu}_0}. \quad (3-16)$$

对于重核， $\bar{\mu}_0 \ll 1$ ，则 $\lambda_{s,r}$ 便近似地等于 $\lambda_s$ 。

下面简单地讨论一下(3-14)式的物理解释。为了简化问题，假设中子通量 $\phi(x)$ 只是一个空间变量的函数（见图3-3）。我们考虑中子穿过 $x=0$ 的平面的运动。由于 $x=0$ 平面左边的中子通量高于平面右边的中子通量，因而，平面左边每秒每立方厘米内发生散射的中子数比右边发生散射的中子数多。所以从左边散射穿过 $x=0$ 平面到达右边的中子数要比从右边散射到左边的多。这样，在 $x=0$ 平面上就产生了一个沿正 $x$ 方向的净中子流。显然，平面两侧的通量梯度愈大，中子流也愈大，这与斐克定律所表示的完全一致。当中子通量梯度为负值时，中子流为正值。

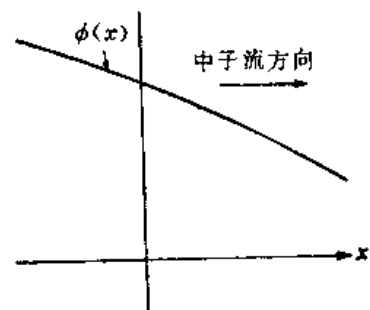


图3-3 由于非均匀通量分布产生的中子流

最后必须指出，为了能对整个空间积分，推导时假定了扩散介质是无限的。但是，由于

在 (3-1) 式被积函数中因子  $e^{-\Sigma r}$  是随距离按指数迅速衰减的, 所以在离开要计算  $J$  的那一点几个平均自由程以外的中子, 对积分的贡献是很小的。因此, 在有限介质内, 除了离介质外表面几个平均自由程的区域外, 其余的区域仍然适用斐克定律。

## 1.2 单速扩散方程的建立

建立中子运动方程时用到的一个基本原则, 就是中子数守恒或且中子数平衡, 即在一定的体积内, 中子密度对时间的变化率等于中子的产生率减去中子的吸收率和泄漏率, 即

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{产生率}(S) - \text{泄漏率}(L) - \text{吸收率}(A) \quad (3-17)$$

中子扩散方程就是根据这一平衡原则建立的。下面我们应用前面已经求得的斐克定律来求出扩散方程的具体形式。

首先计算中子的泄漏率。如图 3-4 所示, 设在某一点  $(x, y, z)$  处有一个小的体积元  $dV$ , 其体积  $dV = dxdydz$ , 上下两表面面积为  $dxdy$ 。单位时间内由下表面进入  $dV$  内的中子数是  $J_z dxdy$ 。此处  $J_z$  是  $z$  方向的中子流密度。同样, 由上表面流出  $dV$  的中子数是  $J_{z+dz} dxdy$ 。于是, 通过平行于  $xy$  平面的上下两个平面, 单位时间从  $dV$  中泄漏出去的中子数为

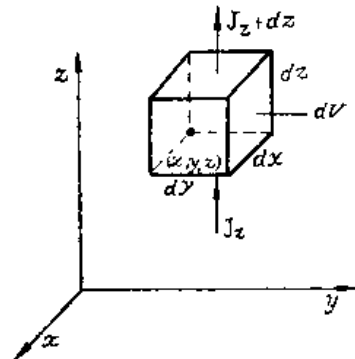


图3-4 计算中子泄漏示意图

$$\begin{aligned} (J_{z+dz} - J_z) dxdy &= \left( -D \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z+dz} + D \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_z \right) dxdy \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV \end{aligned}$$

用同样方法可以求出, 通过平行于  $yz$  平面和  $xz$  平面的两个表面, 从  $dV$  中泄漏出去的中子数分别是

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV,$$

和

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dV.$$

因此, 中子从  $dV$  内泄漏的总数等于以上三项之和。这样, 单位时间、单位体积泄漏出去的中子数

$$\begin{aligned} L &= - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \\ &= - \operatorname{div} D \operatorname{grad} \phi = \operatorname{div} J \end{aligned} \quad (3-18)$$

若扩散系数 $D$ 与空间位置无关, 那么便得到

$$L = -D\nabla^2\phi \quad (3-19)$$

上式中的 $\nabla^2$ 是拉普拉斯算符。在反应堆计算常用的几种坐标系中,  $\nabla^2$ 的表达式如下:

直角坐标系 
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

柱坐标系 
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

球坐标系 
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

每秒每单位体积内被吸收的中子数为

$$A = \Sigma_a \phi \text{ 中子/秒} \cdot \text{厘米}^3$$

设每秒每单位体积内产生的中子数为 $S(\mathbf{r}, t)$ (中子/秒·厘米<sup>3</sup>), 因此(3-17)式便可写成

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = S(\mathbf{r}, t) + D\nabla^2\phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t) \quad (3-20)$$

(3-20)式就是单速中子扩散方程, 可以用它来近似地确定在许多情况下中子通量的分布。

若通量不随时间变化, 则方程(3-20)就可以化为

$$D\nabla^2\phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a \phi(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}) = 0 \quad (3-21)$$

上式称为稳态单速中子扩散方程。

这个方程仅适用于单能中子的情况。同时, 由于它是基于斐克定律为基础推导出来的, 因此在通量随空间变化剧烈、通量的各向异性强烈的情况下, 它不能应用。所以扩散近似不适用于靠近介质边界、强吸收体和强中子源附近的区域。

### 1.3 扩散方程的边界条件

扩散方程(3-21)式是一个微分方程, 在它的普遍解中包含有任意的积分常数。为了确定这些积分常数的数值, 就要在普遍解上加一些限制条件, 这就是根据问题本身的物理特性所规定的边界条件。边界条件的数目应恰好足以确定方程有唯一解。

下面讨论求解扩散方程时经常用到的几种边界条件:

(1) 在扩散方程适用的范围内, 中子通量的数值必须是正的、有限的实数。

(2) 在两种不同扩散性质的介质交界面上, 垂直于分界面的中子流密度相等, 中子通量相等。

设想有两种不同介质的分界面(见图3-5), 在分界面上所有沿正 $x$ (或负 $x$ )方向穿过A的中子数必定等于在同一方向上穿过B的中子数, (因为在分界面上不能有中子的积累或消耗), 即

$$J_x^+|_A = J_x^+|_B, \quad (3-22)$$

和

$$J_x^-|_A = J_x^-|_B, \quad (3-23)$$

将 $J^+$ 及 $J^-$ 的表示式代入(3-22)及(3-23)式, 然后两式相减便可得到

$$D \frac{d\phi}{dx} \Big|_A = D \frac{d\phi}{dx} \Big|_B. \quad (3-24)$$

若两式相加则有

$$\phi_A = \phi_B. \quad (3-25)$$

(3-24)式及(3-25)式便是扩散方程在分界面上的边界条件。

(3) 介质与真空交界的外表面上, 自真空返回介质的中子流等于零(见图3-6),

即

$$J_x^-|_{x=0} = 0, \quad (3-26)$$

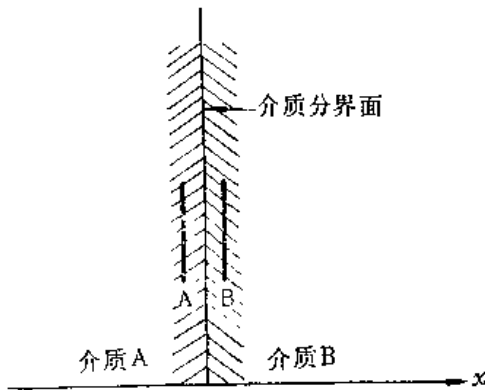


图3-5 在两种介质的分界面上的中子扩散

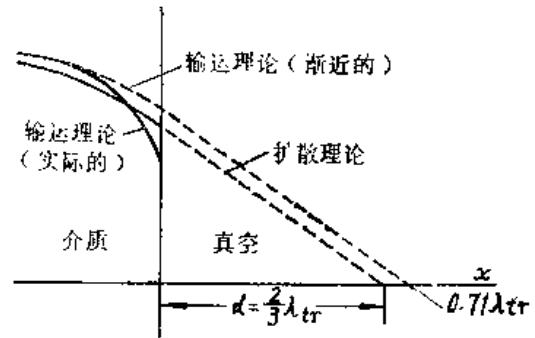


图3-6 输运理论和扩散理论的外推距离

反应堆的外表面就是属于这种情况。空气虽然不是真空, 但是中子在空气中的平均自由程比它在非气体介质中的平均自由程要大得多, 因而可以把空气近似地当作真空来处理。由于中子不可能自真空中散射回到介质中来, 所以在 $x = 0$ 处沿负 $x$ 方向上的中子流等于零。

利用(3-4)式, 有

$$J_x^- = \frac{\phi_0}{4} + \frac{\lambda_{tr}}{6} \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=0} = 0.$$

或者写成

$$\frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=0} = -\frac{3\phi_0}{2\lambda_{tr}},$$

这个条件可以写成更方便的形式。如果我们从交界面处将中子通量曲线按它在交界面处的斜率向真空作直线外推(见图3-6中虚线), 则在离开界面 $d$ 处的位置上中子通量将等于零, 于是有

$$\frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=d} = -\frac{\phi_0}{d}.$$

因而

$$\frac{\phi_0}{d} = \frac{3}{2} \frac{\phi_0}{\lambda_{tr}},$$

即

$$d = \frac{2}{3} \lambda_{tr} \quad (3-27)$$

这里， $d$  称为直线外推距离。

应当指出，上述的直线外推距离  $d$  是从扩散理论求出的，但是扩散理论在真空交界处附近不适用，因而由此求出的  $d$  也是不精确的。按照更精确的中子输运理论，对于平面边界的情况，可以求得  $d = 0.7104 \lambda_{tr}$ 。以后在计算中，我们将采用这一数值。严格地讲，外推距离  $d$  与表面的曲率半径有关。但对于曲率较小的表面，近似地应用  $0.7104 \lambda_{tr}$  这一数值不会产生很大的误差。

这样，自由外表面（真空边界）的边界条件可以用更简单的形式表示：在自由表面的外推距离处，中子通量等于零。

最后必须强调指出，这个边界条件仅仅是为了简化扩散方程的求解而采取的一种数学处理方法，并不是说在自由表面外，中子通量的变化是真正地按照线性外推的那样，在外推边界上等于零。实际上，这种外推边界仅仅是一种假想的边界概念。利用上述输运理论求出的外推距离作为扩散方程的边界条件就可以在许多情况下得出比较满意的近似结果，见图3-6。

## 2. 非增殖介质内的中子扩散

### 2.1 稳态扩散方程的解

稳态情况下的扩散方程为

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = 0 \quad (3-28)$$

如果  $S = 0$ ，即对于除中子源所在位置以外的无源区域，扩散方程具有如下的齐次形式

$$\nabla^2 \phi - k^2 \phi = 0 \quad (3-29)$$

或者写成

$$\nabla^2 \phi - \frac{\phi}{L^2} = 0 \quad (3-30)$$

其中

$$L^2 = \frac{1}{k^2} = \frac{D}{\Sigma_a} \quad (3-31)$$

$L^2$  具有长度平方的量纲，通常我们称  $L$  为中子的扩散长度，它是表征中子在介质中扩散特性的一个重要的量。

方程(3-29)或(3-30)称为波动方程或亥姆霍兹方程，可以用数理方程中一些标准方法求得它的普遍解，然后再加进适当的边界条件，便可以求得所求问题的解。在表3-1中列出了在一些经常遇到的简单几何情况下波动方程的普遍解。下面我们讨论几种特殊情况下扩散方程的解。



表3-1 波动方程  $\nabla^2\phi \pm B^2\phi = 0$  在一些几何情况下的解

	$\nabla^2$	解 的 形 式	
		$+B^2$	$-B^2$
一维平板	$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2}$	$A \sin Bx + C \cos Bx$	$A e^{-Bx} + C e^{Bx}$ 或 $A \operatorname{sh} Bx + C \operatorname{ch} Bx$
球	$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$	$A \frac{\sin Br}{r} + C \frac{\cos Br}{r}$	$A \frac{e^{-Br}}{r} + C \frac{e^{Br}}{r}$ 或 $A \frac{\operatorname{sh} Br}{r} + C \frac{\operatorname{ch} Br}{r}$
一维圆柱	$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$	$A J_0(Br) + C Y_0(Br)$	$A I_0(Br) + C K_0(Br)$

注:  $J_0(x)$ ,  $Y_0(x)$  分别是第一类和第二类零阶贝塞尔函数;  $I_0(x)$ ,  $K_0(x)$  分别是第一类和第二类零阶修正贝塞尔函数。

(1) 无限介质内点源的情况

考虑在无限介质内有一每秒各向同性地放出  $S$  个中子的点源情况。介质内的中子通量分布可以通过扩散方程的求解而得到。在这种情况下, 采用球坐标系最为方便。如果把坐标原点取在点源的位置上, 这时中子通量仅仅与离开源点的距离  $r$  有关。在这种球对称的情况下的扩散方程为

$$\frac{d^2\phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{\phi(r)}{L^2} = 0, \quad (r > 0) \quad (3-32)$$

我们可以看出, 因为在原点处有中子源存在, 所以这个方程在  $r = 0$  处是不成立的。现在只讨论  $r > 0$  的区域。中子源对解的影响可通过源条件来加以考虑。围绕原点画一个半径为  $r$  的小球, 小球的表面积为  $4\pi r^2$ , 于是通过小球表面的净中子数是  $4\pi r^2 J(r)$ , 显然, 当  $r \rightarrow 0$  时, 通过小球表面的净中子数就应当等于源强  $S$ 。这样, (3-32) 式的边界条件可以表示为

- (i) 除  $r = 0$  处以外, 中子通量在各处均为有限值。
- (ii) 中子源条件:  $\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 J(r) = S$ ,

为了求解方便, 引入一个新的变量  $u = r\phi$ , 则 (3-32) 式可以化为

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{u}{L^2} = 0.$$

方程的普遍解见表(3-1)为

$$u = A e^{-r/L} + C e^{r/L}.$$

因此,

$$\phi(r) = A \frac{e^{-r/L}}{r} + C \frac{e^{r/L}}{r}.$$

式中  $A, C$  为两个待定常数, 可以由边界条件确定。根据边界条件 (i),  $C$  必须为零, 否则当  $r$  趋近于无限大时,  $\phi$  便变为无限大。常数  $A$  由中子源条件求出。由于

$$J(r) = -D \frac{d\phi}{dr} = DA \left( \frac{1}{rL} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-r/L},$$

因而根据中子源条件有

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 J(r) = \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi D A \left( \frac{r}{L} + 1 \right) e^{-r/L} = S$$

由此求出

$$A = \frac{S}{4\pi D}$$

最后解出中子通量为

$$\phi(r) = \frac{S e^{-r/L}}{4\pi D r} \quad (3-33)$$

从上式可以看出，中子通量  $\phi$  与源强  $S$  成正比。

### (2) 无限介质内无限平面源的情况

设在无限介质内，有一个每秒每平方米面积上放出  $S$  个中子的平面源。选取坐标系，使得源平面与  $x=0$  的平面重合（图3-7）。因为介质与平面源都是无限宽而且是均匀的，所以介质内任一点的通量仅仅是此点到源平面距离的函数。这时扩散方程为

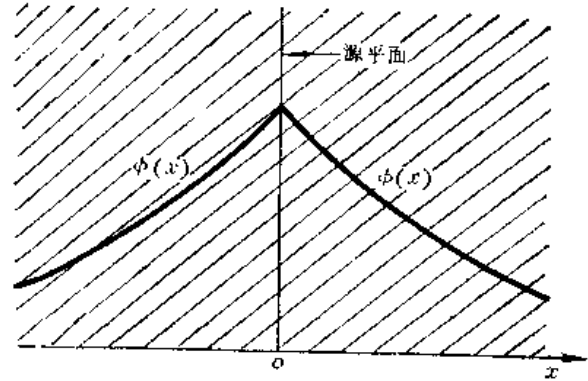


图3-7 无限介质内平面源的情况

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{\phi(x)}{L^2} = 0, \quad x \neq 0 \quad (3-34)$$

边界条件为

- (i) 除  $x=0$  处以外，其它各处的中子通量为有限值。
- (ii) 中子源条件

$$\lim_{x \rightarrow 0} J(x) = S/2 \quad (3-35)$$

这是因为中子源是均匀的，因而向正  $x$  和负  $x$  方向发出中子的几率是相等的。

对于正  $x$  值，(3-34) 式的解是

$$\phi(x) = A e^{-x/L} + C e^{x/L},$$

由边界条件 (i)， $C$  必须为零。然后，利用中子源条件来求出  $A$ ，由于

$$J(x) = -D \frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{DA}{L} e^{-x/L},$$

把上式代入中子源条件 (3-35) 式便可求得

$$A = \frac{SL}{2D},$$

最后解出中子通量的空间分布为

$$\phi(x) = \frac{SL}{2D} e^{-|x|/L} \quad (3-36)$$

(3-36) 式对于正  $x$  适用，然而根据问题的对称性，可以求出对所有  $x$  均适用的解，这只要将

(3-36) 式中的  $x$  用  $|x|$  代替即可。于是

$$\phi(x) = \frac{SL}{2D} e^{-|x|/L} \quad (3-37)$$

我们由上式可以看到，中子通量与源强  $S$  成正比。另外，可以把扩散长度  $L$  看作是通量的衰减长度，即在一维平板的情况下，中子通量自源平面开始每隔  $L$  长的距离就降低  $e$  分之一。

### (3) 无限平面源位于有限厚度介质内的情况

设在厚度为  $a$  (包括外推距离) 的无限平板的中心面上有一源强为  $S$  的平面源(见图3-8)，这时的扩散方程为

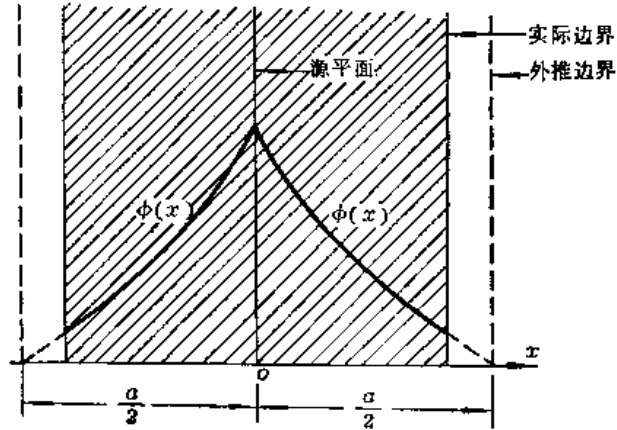


图3-8 平面源位于有限厚介质内的情况

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{\phi(x)}{L^2} = 0 \quad (3-38)$$

边界条件

- (i) 当  $x = \pm(a/2)$  时,  $\phi(\pm a/2) = 0$ ;
- (ii) 中子源条件

$$\lim_{x \rightarrow 0} J(x) = S/2$$

当  $x$  值为正时, (3-38) 式的普遍解为

$$\phi(x) = Ae^{-x/L} + Ce^{x/L}$$

由边界条件(i)得

$$C = -Ae^{-a/L}$$

于是

$$\phi(x) = A[e^{-x/L} - e^{-(a-x)/L}]$$

根据中子源条件可以求出  $A$

$$A = \frac{SL}{2D} (1 + e^{-a/L})^{-1}$$

最后解出中子通量为

$$\phi(x) = \frac{SL}{2D} \frac{e^{-x/L} - e^{-(a-x)/L}}{1 + e^{-a/L}} \quad (3-39)$$

考虑到系统的对称性, 用  $|x|$  代替上式中的  $x$ , 就可以得出对于所有  $x$  值均适用的中子通量表达式

$$\phi(x) = \frac{SL}{2D} \frac{e^{-|x|/L} - e^{-(a-|x|)/L}}{1 + e^{-a/L}} \quad (3-40)$$

上式也可以用双曲函数表示为

$$\phi(x) = \frac{SL}{2D} \frac{\text{sh}[(a-2|x|)/2L]}{\text{ch}(a/2L)} \quad (3-41)$$

(4) 包含两种不同介质的情况

在包含两种不同介质的系统中，在不同介质的交界面上，扩散方程必须满足该处的边界条件。如，有一厚为  $a$ ，长、宽无限的平板介质，其中心面处有一个平面中子源，源强为  $S$  (中子/厘米<sup>2</sup>·秒)，在平板两侧是无限厚的另一种介质 (见图3-9)。下面公式中的角标 1 和 2 分别表示介质“1”和介质“2”，它们的扩散方程可以分别表示如下

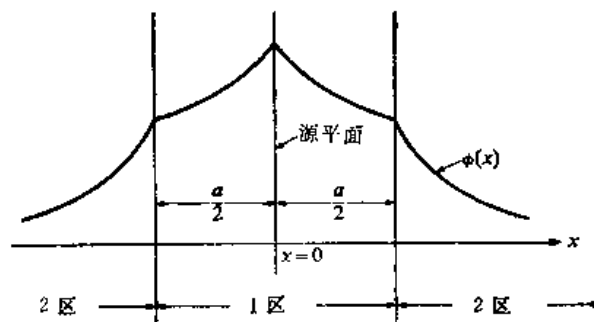


图3-9 双区介质内的中子通量分布

$$\frac{d^2\phi_1}{dx^2} - \frac{1}{L_1^2}\phi_1 = 0, \quad |x| < \frac{a}{2}, \quad x \neq 0 \quad (3-42)$$

$$\frac{d^2\phi_2}{dx^2} - \frac{1}{L_2^2}\phi_2 = 0, \quad |x| > \frac{a}{2} \quad (3-43)$$

边界条件:

- (i) 当  $|x| \rightarrow \infty$  时,  $\phi_2$  趋近于零;
- (ii) 中子源条件

$$\lim_{x \rightarrow 0} J(x) = S/2,$$

交界面上的边界条件为

(iii)  $\phi_1(\pm a/2) = \phi_2(\pm a/2)$  ;

(iv)  $D_1 \left. \frac{d\phi_1}{dx} \right|_{x=\pm a/2} = D_2 \left. \frac{d\phi_2}{dx} \right|_{x=\pm a/2}$  .

当  $x$  值为正时, 方程(3-42) 和 (3-43) 的普遍解是

$$\phi_1 = A_1 \text{ch}(x/L_1) + C_1 \text{sh}(x/L_1) \quad , \quad (3-44)$$

和

$$\phi_2 = A_2 e^{-x/L} + C_2 e^{x/L} \quad . \quad (3-45)$$

在方程 (3-44) 及 (3-45) 中, 有四个常数  $A_1, A_2, C_1$  和  $C_2$ 。

现在研究  $x$  为正值的情况, 当  $x \rightarrow \infty$  时, (3-45) 式中的第二项趋于无限大, 由边界条件

- (i) 知  $C_2$  必须为零, 利用边界条件 (ii) 得出

$$C_1 = -\frac{SL_1}{2D_1} \quad . \quad (3-46)$$

常数  $A_1$  和  $A_2$  可以分别利用边界条件 (iii) 和 (iv) 求出, 经过计算得到

$$A_1 = \frac{SL_1}{2D_1} \frac{D_1 L_2 \operatorname{ch}(a/2L_1) + D_2 L_1 \operatorname{sh}(a/2L_1)}{D_2 L_1 \operatorname{ch}(a/2L_1) + D_1 L_2 \operatorname{sh}(a/2L_1)} \quad (3-47)$$

和

$$A_2 = \frac{SL_1 L_2}{2} \exp\left(\frac{a}{2L_2}\right) \left[ D_2 L_1 \operatorname{ch}\left(\frac{a}{2L_1}\right) + D_1 L_2 \operatorname{sh}\left(\frac{a}{2L_1}\right) \right]^{-1} \quad (3-48)$$

确定出所有的常数以后，就可以求出中子通量分布（见图3-9）。

## 2.2 扩散长度

从上面的讨论中可以知道，在扩散理论中有两个重要的物理参数：扩散系数 $D$ 和扩散长度 $L$ 。它们是确定中子在介质内扩散过程的重要参数。根据(3-31)式的定义，扩散长度为

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \frac{\lambda_a \lambda_s}{3} \quad (3-49)$$

或

$$L^2 = \frac{\lambda_a \lambda_s}{3(1 - \bar{\mu}_0)} = \frac{1}{3\Sigma_a \Sigma_s (1 - \bar{\mu}_0)} \quad (3-50)$$

这便是扩散长度的计算公式。对于混合物，则(3-50)式中的 $\Sigma_a$ 、 $\Sigma_s$ 和 $\bar{\mu}_0$ 等都是指对混合物的平均值。大多数元素的散射截面与能量无关，而吸收截面服从 $1/v$ 律，当热中子能谱按麦克斯韦分布时，热中子的吸收截面等于

$$\Sigma_a = \Sigma_{a_0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{293}{T_s}} \quad ,$$

其中 $\Sigma_{a_0}$ 是能量为 $E_0 = 0.0253$ 电子伏的中子的宏观吸收截面。将上式代入(3-50)式，便得到

$$L^2 = L_0^2 \sqrt{\frac{293}{T_s}} \quad , \quad (3-51)$$

式中

$$L_0^2 = \frac{1}{3\Sigma_{s_0} \Sigma_{a_0}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (3-52)$$

它是中子温度 $T_s = 293\text{K}$ 时的热中子扩散长度。表3-2给出一些反应堆中常用材料的 $L_0$ 数值。

为了进一步地阐明扩散长度的物理意义，我们讨论热中子从产生地点到被吸收地点穿行距离的均方值 $\bar{r}^2$ 。考虑无限介质内点源情况，设 $\phi(r)$ 为距离点源 $r$ 处的中子通量，于是在 $r$ 处对中子的吸收率是 $\Sigma_a \phi(r)$ 。如图3-10所示，取一个半径为 $r$ 、厚度为 $dr$ 的薄球壳层，球壳的体积是 $4\pi r^2 dr$ 。在球壳内每秒被吸收的中子数是 $4\pi r^2 \Sigma_a \phi dr$ ，所以，其均方值 $\bar{r}^2$ （空间二次矩）可以表示成

表 3-2 几种常用慢化剂在 20℃ 时的热中子扩散参数<sup>1)</sup>

慢化剂	密度 (克/厘米 <sup>3</sup> )	扩散系数 $\bar{D}$ (厘米)	吸收截面 $\bar{\Sigma}_a$ (厘米 <sup>-1</sup> )	$L_0^2$ (厘米 <sup>2</sup> )	$L_0$ (厘米)
H <sub>2</sub> O	1.00	0.16	0.0197	8.1	2.85
D <sub>2</sub> O <sup>2)</sup>	1.10	0.87	$2.9 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^4$	170
Be	1.85	0.50	$1.04 \times 10^{-3}$	480	21
BeO	2.96	0.47	$6.0 \times 10^{-4}$	790	28
石墨	1.60	0.84	$2.4 \times 10^{-4}$	3500	59

1) 取自 Reactor physics constants, U.S.AEC Report ANL-5800, 2nd ed., 1963.

2) D<sub>2</sub>O 的扩散性质对 H<sub>2</sub>O 的含量是灵敏的。

$$\bar{r}^2 = \frac{\int_0^{\infty} r^2 (4\pi r^2 \Sigma_a \phi) dr}{\int_0^{\infty} 4\pi r^2 \Sigma_a \phi dr}$$

将点源的通量分布 (3-33) 式代入上式, 便得到

$$\bar{r}^2 = \frac{\int_0^{\infty} r^3 e^{-r/L} dr}{\int_0^{\infty} r e^{-r/L} dr} = \frac{6L^4}{L^2} = 6L^2 \quad (3-53)$$

或

$$L^2 = \frac{1}{6} \bar{r}^2 \quad (3-54)$$

上式说明, 在无限介质内点源的情况下, 扩散长度的平方等于热中子从产生地点到被吸收地点穿行的直线距离均方值的六分之一。

用类似的方法可以推导出在平面源的情况下有

$$L^2 = \frac{1}{2} \bar{x}^2 \quad (3-55)$$

从上面的讨论可以看到, 扩散长度  $L$  的大小将影响反应堆内热中子的泄漏。 $L$  愈大, 则热中子自产生地点到被吸收地点所移动的平均距离也愈大, 因而热中子泄漏到反应堆外的几率也就愈大。

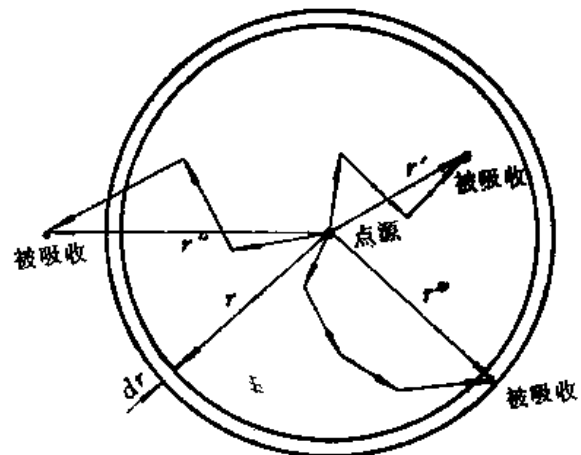


图3-10 点源空间二次矩的计算

从上面的讨论可以看到, 扩散长度  $L$  的大小将影响反应堆内热中子的泄漏。 $L$  愈大, 则热中子自产生地点到被吸收地点所移动的平均距离也愈大, 因而热中子泄漏到反应堆外的几率也就愈大。

### 2.3 扩散方程的积分形式

前面，我们对无限介质内点源、平面源等情况下扩散方程的求解进行了讨论，并且得出了在上述各种情况下的通量分布形式。利用这些结果，采用所谓扩散核的方法，可以求出在无限介质内具有任意分布的各向同性源所形成的稳态中子通量分布。

考虑一个包含有任意分布的各向同性中子源的无限介质。函数 $S(\mathbf{r})$ 表示任意分布的各向同性的中子源。于是，每秒从位于 $\mathbf{r}'$ 处的体积元 $dV'$ 中放出 $S(\mathbf{r}')dV'$ 个中子(见图3-11)，由于 $dV'$ 很小，这些中子可以看作是从点源放出的。

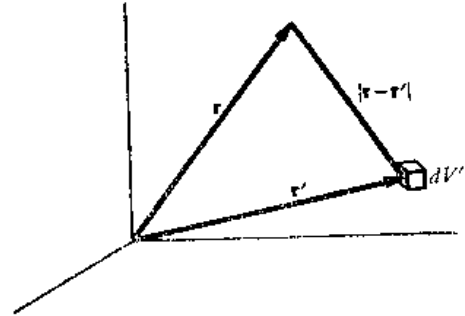


图3-11 用于计算无限介质中分布源形成的中子通量的几何图形

由前面讨论知道，这些点源中子对 $\mathbf{r}$ 处中子通量的贡献为

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{S(\mathbf{r}')e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/L}dV'}{4\pi D|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3-56)$$

这里 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 是矢量 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{r}'$ 所表示的两点间的距离。

如果认为任何一个点源的存在不影响周围介质的扩散特性，则任何一个点源所形成的通量都不受其它点源存在的影响。若介质内存在若干个点源，则它们对 $\mathbf{r}$ 处的中子通量贡献将等于它们各自单独对 $\mathbf{r}$ 处的中子通量的贡献的叠加。因此， $\mathbf{r}$ 处的中子通量为

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\text{全部空间}} \frac{S(\mathbf{r}')e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/L}}{4\pi D|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (3-57)$$

计算上述积分，就可以求出由任意分布源在无限介质内任一点所产生的通量分布。在上式积分号中出现的量 $\frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/L}}{4\pi D|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ ，称为无限介质的点扩散核，并记为

$$G_{p,1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/L}}{4\pi D|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3-58)$$

实际上， $G_{p,1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 就等于在 $\mathbf{r}'$ 处的单位点源在 $\mathbf{r}$ 处产生的通量。利用扩散核(3-57)式可以把(3-57)式写成如下形式

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\text{全部空间}} S(\mathbf{r}')G_{p,1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')dV' \quad (3-59)$$

以上所用的方法称为核方法，或格林函数法。(3-58)式就是扩散方程的格林函数。事实上， $G_{p,1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 是下面方程的解

$$(-D\nabla^2 + \Sigma_a)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (3-60)$$

扩散核的形式取决于中子源的几何形状。对于平面源则用平面扩散核(见(3-36)式)

$$G_{p,1}(x, x') = \frac{Le^{-|x-x'|/L}}{2D} \quad (3-61)$$

这时的通量分布形式为

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x') G_{p,1}(x, x') dx' \quad (3-62)$$

方程(3-59)及方程(3-62)均称为扩散方程的积分形式。在某些情况下,应用积分形式的扩散方程更为方便。现举例说明扩散方程的积分形式的应用,即利用扩散方程计算具有无限平面源的介质内的中子通量分布。如图3-12所示,取 $x$ 轴与源平面互相垂直。设 $x$ 轴上有一点 $P$ ,其坐标为 $x$ ,这时可以将平面源视为由无数点源组成的。平面源对 $P$ 点的中子通量贡献可以被认为是该平面上的一个个点源单独对 $P$ 点的中子通量贡献的叠加。在源平面上取一个半径为 $\rho$ ,厚度为 $d\rho$ 的小圆环,圆环面积为 $2\pi\rho d\rho$ ,由方程(3-59)得出

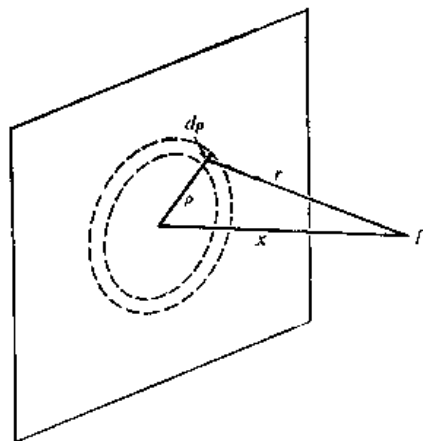


图3-12 由点源叠加而形成的平面源

$$\phi(x) = \int_0^{\infty} G_{p,1}(r) 2\pi\rho d\rho$$

将点扩散核 $G_{p,1}$ 的表达式代入上式则有

$$\phi(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-r/L}}{4\pi D r} 2\pi\rho d\rho \quad (3-63)$$

由图3-12可以看出,  $r^2 = \rho^2 + x^2$ , 所以  $r dr = \rho d\rho$ , 将此关系式代入(3-63)式中, 可以得出

$$\phi(x) = \frac{1}{2D} \int_x^{\infty} e^{-r/L} dr = \frac{L}{2D} e^{-x/L} \quad (3-64)$$

上式与无限介质内平面源的解(3-36)式完全符合。

### 3. 均匀增殖介质内中子的扩散

前面我们讨论了单速中子扩散方程及其在非增殖介质中的应用, 下面将研究均匀增殖介质内中子扩散问题。中子在均匀增殖介质内一方面不断地被吸收, 同时又将由于核裂变反应面不断地有新的中子产生, 例如, 均匀反应堆便属于这种情况。在讨论增殖介质内的中子扩散时最感兴趣的问题是: 这种链式裂变反应过程的状态如何? 是不断地衰减, 还是保持自续地进行下去? 在什么条件下这种链式反应过程能够保持稳态地自续地进行下去? 这也就是在第二章中所提到的反应堆临界理论问题。

在反应堆临界理论中, 主要是研究下面两个问题:

(1) 研究各种形状的反应堆达到临界状态的条件(临界条件), 并求出临界时系统的体积大小和燃料成份及其装载量。



## (2) 研究临界状态下系统内中子通量的分布。

研究反应堆临界的方法有许多种，本章将应用单速（单群）扩散理论来研究均匀裸堆的临界问题。所谓单群，是指认为反应堆中所有的中子都具有相同的能量，列为一群。例如对于热中子反应堆，由子引起核裂变的主要是热中子，因此自然可以近似地认为所有中子的能量都等于热能。尽管由单群理论所得到的结果在精度上是不够理想的，仅仅是一个近似的结果，但它却是最简单的方法，并且由它所得到的的一些结果具有普遍性的意义。

本节将首先讨论均匀裸堆（均匀介质）的临界问题，对于有反射层的反应堆将在下一节中讨论。

### 3.1 均匀裸堆的单群扩散方程及其解

在(3-20)式中，已经给出了单群中子扩散方程为

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t).$$

现在要把这个方程应用于由燃料-慢化剂构成的有限大小的均匀裸堆系统。在单群近似情况下，热中子反应堆内单位时间、单位体积内产生的中子数为

$$S(\mathbf{r}, t) = k_{\infty} \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t).$$

将其代入上式便得到

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t) + k_{\infty} \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t),$$

其中 $\Sigma_a$ 为芯部的宏观吸收截面； $D$ 为芯部的扩散系数； $k_{\infty}$ 为芯部的无限介质增殖因数。

用 $D$ 除上式各项，并注意 $L^2 = D/\Sigma_a$ ，最后得到

$$\frac{1}{Dv} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{k_{\infty} - 1}{L^2} \phi(\mathbf{r}, t). \quad (3-65)$$

上式称为芯部单群中子扩散方程。它的边界条件为：

- (1) 在反应堆外推边界处，中子通量为零；
- (2) 在不同介质的交界面上，中子通量相等，中子流密度相等。

单群扩散方程(3-65)式为一偏微分方程，通常这种方程可以应用分离变量法求解，即可以把中子通量 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 写成空间坐标 $\mathbf{r}$ 的函数 $\varphi(\mathbf{r})$ 及时间 $t$ 的函数 $T(t)$ 的乘积，即

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})T(t), \quad (3-66)$$

将(3-66)式代入(3-65)式中，并用 $\varphi(\mathbf{r})T(t)$ 除公式中的各项，便得到

$$\frac{\nabla^2 \varphi(\mathbf{r})}{\varphi(\mathbf{r})} = \frac{1}{Dv} \frac{dT(t)}{dt} - \frac{k_{\infty} - 1}{L^2}, \quad (3-67)$$

上式左端是仅含 $\mathbf{r}$ 的函数，而右端是仅含 $t$ 的函数，因此等式两端必须均等于某一常数（例如， $-B^2$ ）。这样有

$$\frac{\nabla^2 \varphi(\mathbf{r})}{\varphi(\mathbf{r})} = -B^2, \quad (3-68)$$

或

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + B^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3-69)$$

这里  $B^2$  为一常数。(3-69) 式为典型的波动方程。 $B^2$  称为方程的“特征值”。一般地讲, 在满足给定的边界条件下, 可以得到一系列的特征值  $B_1^2, B_2^2, \dots$ ; 对应于这些特征值, 方程 (3-69) 之解叫做特征函数。如,  $\varphi_n(\mathbf{r})$  是对应于第  $n$  个特征值  $B_n^2$  的解, 叫做第  $n$  个特征函数。对应于  $n=1$  的特征函数通常叫做基波特征函数, 其余的特征函数称为高次谐波。一般把最小特征值  $B_1^2$  记作  $B_g^2$ , 并把它称为反应堆的几何曲率。

由于特征函数的正交性, 因而可以把任何具有良好性质的函数展开成特征函数的级数。这样 (3-69) 式的完全解可以用特征函数的级数形式来表示, 即

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_n A_n \varphi_n(\mathbf{r}) \quad ,$$

故有

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n \varphi_n(\mathbf{r}) T_n(t) \quad . \quad (3-70)$$

这种利用特征函数来展开任意函数的方法, 在反应堆物理分析中是常常应用的。

下面举例加以说明, 为了简化问题, 只讨论一个长、宽为无限大, 厚度 (包括外推距离在内) 等于  $a$  的平板形裸堆 (图3-13), 由于对称性, 这时通量分布仅仅是  $x$  的函数。将坐标原点取在平板的中心面上, 波动方程 (3-69) 式可以写成

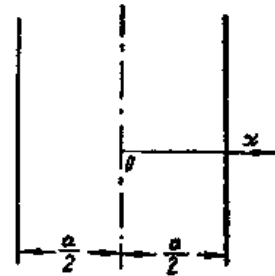


图3-13 无限平板形反应堆

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + B^2\varphi(x) = 0 \quad . \quad (3-71)$$

上述方程能满足对称性条件的解为

$$\varphi(x) = A \cos Bx \quad ,$$

为满足  $x = \pm \frac{a}{2}$  处,  $\varphi\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0$  的边界条件, 即

$$\varphi\left(\frac{a}{2}\right) = A \cos \frac{Ba}{2} = 0 \quad ,$$

因而就要求  $B$  应等于

$$B_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

或

$$B_n = \frac{(2n-1)\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3-72)$$

所以有

$$\varphi_n(x) = A_n \cos B_n x = A_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{a} x \quad (3-73)$$

方程 (3-72) 所确定之  $B_n^2$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 即为波动方程的特征值, 其对应之特征函数  $\varphi_n(x)$  由 (3-73) 式确定。方程 (3-69) 之完全解, 就是 (3-73) 式从  $n=1$  到  $n=\infty$  的所有整数的

总和, 即

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{a} x, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3-74)$$

由于特征函数 $\varphi_n(x)$ 的正交性, 对于每一个 $n$ 值的项都是线性独立的。因而, 对应于每一个 $B_n^2$ 值有一个 $T_n(t)$ 与之对应, 由方程(3-67)及(3-68)得

$$\frac{1}{DvT_n(t)} \frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{k_n - 1}{L^2} - B_n^2$$

用 $L^2/(1+L^2B_n^2)$ 乘上式的每一项, 便可以简化为下列形式

$$\frac{1}{T_n(t)} \frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{k_n - 1}{l_n} \quad (3-75)$$

式中

$$l_n = \frac{L^2}{Dv(1+L^2B_n^2)} \quad (3-76)$$

$$k_n = \frac{k_{\infty}}{1+L^2B_n^2} \quad (3-77)$$

方程(3-75)之解为

$$T_n = \text{常数} \times e^{(k_n-1)t/l_n} \quad (3-78)$$

将(3-78)式代入(3-70)式中, 便得到中子通量 $\phi(r, t)$ 之解为

$$\begin{aligned} \phi(r, t) &= \sum_n A'_n \varphi_n(r) T_n(t) \\ &= \sum_n A'_n \varphi_n(r) e^{(k_n-1)t/l_n} \end{aligned} \quad (3-79)$$

式中 $A'_n$ 为待定常数,  $\varphi_n(r)$ 系对应于特征值 $B_n^2$ 的波动方程(3-69)的特征函数。例如, 对于无限平板反应堆, (3-79)式具有如下形式

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \sum_n A'_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{a} x e^{(k_n-1)t/l_n} \\ & \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3-80)$$

### 3.2 热中子反应堆的临界条件

通过前一节的讨论可以知道, 特征值 $B_n^2$ 随 $n$ 的增加而单调增加, 最小特征值是 $n=1$ 时的 $B_1^2$ 值, 而同时又从(3-77)式可以看出, 当 $n$ 增加时,  $k_n$ 单调递减, 也就是说对应于最小特征值 $B_1^2$ 之 $k_1$ 是 $k_1, \dots, k_n$ 中的最大值。另外, 考虑到 $B_n^2$ 与系统尺寸有关, 当系统尺寸加大时,  $B_n^2$ 便减小, 因而改变系统的尺寸就可以改变 $B_n^2$ 值, 从而也就改变了 $k_n$ 值。

现在分以下几种情况对(3-79)式进行讨论:

第一种情况: 对于一定几何形状和体积大小的反应堆芯部, 若 $B_1^2$ 对应于的 $k_1$ 小于1, 那么, 其余的 $k_2, \dots, k_n$ 都将小于1, 这时的 $(k_n-1)$ 都是负值。从(3-79)式可以看出, 这时 $\phi(r, t)$ 将随时间 $t$ 按指数规律衰减, 因而系统处于次临界状态。

第二种情况：若 $k_1 > 1$ ，则 $(k_1 - 1) > 0$ ，这时中子通量将随时间不断地增长，反应堆将处于超临界状态。

第三种情况：若通过调整反应堆尺寸，使 $k_1$ 恰好等于1，而其余 $k_2, \dots, k_n$  ( $n > 1$ )的值都将小于1；那么(3-79)式中 $n=1$ 的项将与时间 $t$ 无关，而 $n > 1$ 的各项将随时间而衰减。因而当时间足够长时， $n > 1$ 各项都已衰减到零，系统达到稳态，这时中子通量按基波形式分布，反应堆处于临界状态。因而反应堆维持临界的条件是 $k_1 = 1$ 。

从上面的讨论，我们得到两个重要结果：

(1) 裸堆单群近似的“临界条件”为

$$k_1 = \frac{k_\infty}{1 + L^2 B_g^2} = 1 \quad (3-81)$$

这里 $B_g^2$ 系波动方程(3-69)的最小特征值 $B_g^2$ (几何曲率)，(3-81)式称为单群理论的临界方程。

(2) 当反应堆处于临界状态时，中子通量系按最小特征值 $B_g^2$ 所对应的基波特征函数分布，也就是说稳态反应堆的中子通量空间分布系满足波动方程

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + B_g^2 \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3-82)$$

这里 $B_g^2$ 是最小特征值，即几何曲率。

这两点结论是非常重要的，也就是本节所要研究的主要问题。

现在我们来讨论一下(3-81)式中各项的物理意义。首先我们证明(3-81)式中 $1/(1 + L^2 B_g^2)$ 项的物理意义是热中子在扩散过程中的不泄漏几率。在反应堆中单位时间单位体积内的热中子泄漏率等于 $-D\nabla^2 \phi$ ，根据(3-82)式有 $-D\nabla^2 \phi = DB_g^2 \phi$ ；而单位时间单位体积内中子的吸收率为 $\Sigma_a \phi$ 。显然，以单群理论观点来看，反应堆内的中子不是从堆内泄漏出去，就是在堆内被吸收，因而有

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{\text{中子吸收率}}{\text{中子吸收率} + \text{中子泄漏率}} \\ &= \frac{\Sigma_a \int_V \phi dv}{\Sigma_a \int_V \phi dv + DB_g^2 \int_V \phi dv} \\ &= \frac{1}{1 + L^2 B_g^2} \quad (3-83) \end{aligned}$$

这样，(3-81)式可以写成

$$k_1 = k_\infty P_L = 1 \quad (3-84)$$

它与第二章中的临界条件(2-5)式完全一样。由此可见，这里的 $k_1$ 也就是前面所定义的反应堆有效增殖因数 $k$ 。

最后，从(3-83)式可以看到，反应堆的中子泄漏不仅与扩散长度有关，而且与几何曲率有关。从前面平板状反应堆的例子中可以看到，当反应堆体积增大时， $B_g^2$ 就减小，因而正如所预期的那样，不泄漏几率也就增大。同样，扩散长度 $L$ 愈大，意味着中子自产生到被吸收前所穿行的距离也愈大，因而从反应堆中泄漏出去的几率也就增大，不泄漏几率 $P_L$ 就要变小，这和(3-83)式的结果是一致的。

### 3.3 各种几何形状的裸堆的几何曲率和通量分布

下面推导几种最常见的几何形状反应堆的几何曲率及中子通量分布函数。

#### (1) 球形反应堆

考虑一个半径为 $R$ （包括外推距离在内）的球形裸堆。应用球坐标系，并把原点取在球心上。根据对称性条件，这时的波动方程是

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} + B_g^2 \phi = 0 \quad , \quad (3-85)$$

上式的普遍解（见表2-1）为

$$\phi(r) = A \frac{\sin B_g r}{r} + C \frac{\cos B_g r}{r} \quad , \quad (3-86)$$

为了满足当 $r$ 趋近于零时，通量为有限值的条件， $C$ 必须为零。所以（3-85）式的解是

$$\phi(r) = A \frac{\sin B_g r}{r} \quad (3-87)$$

根据满足当 $r = R$ 时， $\phi(R) = 0$ 的边界条件的要求，必须使 $B_g R = n\pi$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ 。因此对应于 $n = 1$ 时的最小特征值，或几何曲率 $B_g^2$ 便等于

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2 \quad , \quad (3-88)$$

于是中子通量分布为

$$\phi(r) = A \frac{\sin\left(\frac{\pi}{R}\right)r}{r} \quad , \quad (3-89)$$

式中 $A$ 为常数，它由通量的归一条件或反应堆的输出功率决定。

#### (2) 长方体形反应堆

考虑一个长方体形反应堆，其边长分别为 $a$ ， $b$ ， $c$ （均包括外推距离在内）。这时采用直角坐标系，原点取在反应堆的中心点上（图3-14）。波动方程可以写成如下形式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + B_g^2 \phi = 0 \quad . \quad (3-90)$$

边界条件为：当 $x = \pm \frac{a}{2}$ ，或 $y = \pm \frac{b}{2}$ ，或 $z = \pm \frac{c}{2}$ 时， $\phi(x, y, z) = 0$ 。采用分离变量法，令

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad , \quad (3-91)$$

将（3-91）式代入（3-90）式中，并用 $X(x)Y(y)Z(z)$ 除式中各项，得

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + B_g^2 = 0 \quad , \quad (3-92)$$

上式左端头三项分别是 $x$ ， $y$ 及 $z$ 的函数，而且其和等于常数，这只有当每一项本身是常数时才是可能的，于是有

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -B_x^2 \quad , \quad (3-93)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -B_y^2, \quad (3-94)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -B_z^2. \quad (3-95)$$

将以上三式代入 (3-92) 式中, 便得到

$$B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = B_g^2. \quad (3-96)$$

考虑到中子通量对于  $x$  轴是对称的, 所以 (3-93) 式之解为

$$X(x) = A \cos B_x x. \quad (3-97)$$

根据在  $x = \pm \frac{a}{2}$  处中子通量为零的边界条件得出  $x$  方向的几何曲率为

$$B_x^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2. \quad (3-98)$$

同样可以求得

$$Y(y) = E \cos B_y y, \quad B_y^2 = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \quad (3-99)$$

以及

$$Z(z) = F \cos B_z z, \quad B_z^2 = \left(\frac{\pi}{c}\right)^2 \quad (3-100)$$

从 (3-96) 式可以得出反应堆的几何曲率为

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2. \quad (3-101)$$

稳态时的中子通量分布形式如下

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= G \cos B_x x \cos B_y y \cos B_z z \\ &= G \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \cos \frac{\pi}{c} z. \end{aligned} \quad (3-102)$$

式中  $G$  是由通量归一条件或由反应堆输出功率决定的常数。

根据条件极值原理可以证明, 对于各种不同的长方体形的裸堆, 在给定了  $B_g$  值的条件下, 以正立方体形的裸堆的体积最小。而由 (3-101) 式可以得出

$$B_g^2 = 3 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2. \quad (3-103)$$

### (3) 有限高圆柱形反应堆

圆柱形反应堆为最常见的反应堆形状。设圆柱体反应堆的半径为  $R$ , 高度为  $H$  ( $R, H$  均包括外推距离在内), 见图 3-15。采用柱坐标系, 原点取在圆柱体轴线的中点上, 这时中子通量只取决于  $r$  和  $z$  两个变量, 波动方程便写成

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + B_g^2 \phi = 0 \quad (3-104)$$

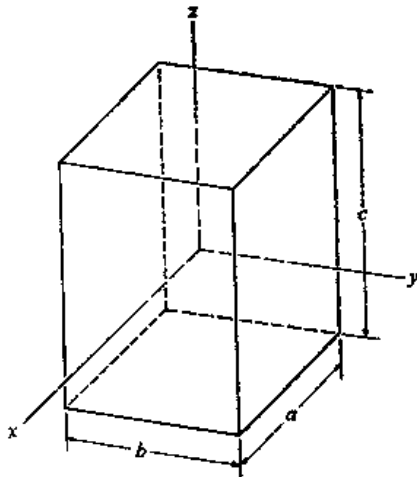


图3-14 长方体形反应堆

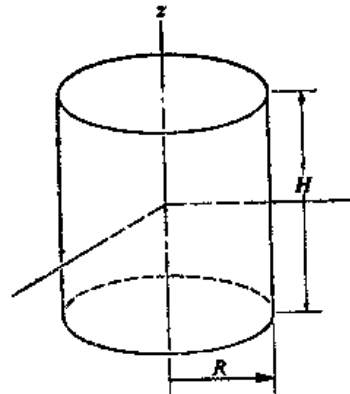


图3-15 圆柱体反应堆

边界条件是

- (i) 中子通量在堆内各处均为有限值；
- (ii) 当  $r=R$  或  $z = \pm \frac{H}{2}$  时,  $\phi(r, z) = 0$ 。

采用分离变量法求解, 把  $\phi(r, z)$  分离变量写成

$$\phi(r, z) = \varphi(r)Z(z) \quad (3-105)$$

把它代入 (3-104) 式, 并用  $\varphi(r)Z(z)$  除式中各项得出

$$\frac{1}{\varphi(r)} \left[ \frac{d^2\varphi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr} \right] + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -B_z^2 \quad (3-106)$$

因而可以令左端每一项均等于常数, 有

$$\frac{1}{\varphi(r)} \left[ \frac{d^2\varphi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr} \right] = -B_r^2 \quad (3-107)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -B_z^2 \quad (3-108)$$

以及

$$B_z^2 = B_r^2 + B_z^2 \quad (3-109)$$

现在求解 (3-107) 式。令  $x = B_r r$ , 将其代入 (3-107) 式中去, 便得到我们所熟悉的零阶贝塞尔方程

$$x^2 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + x \frac{d\varphi(x)}{dx} + x^2\varphi(x) = 0 \quad ,$$

其普遍解为

$$\varphi(r) = AJ_0(B_r r) + CY_0(B_r r) \quad ,$$

此处  $J_0$ ,  $Y_0$  分别为第一类及第二类零阶贝塞尔函数。

如果假设 (3-107) 式右端等于正数, 则它将化成一个零阶修正贝塞尔方程

$$x^2 \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + x \frac{d\varphi(x)}{dx} - x^2 \varphi(x) = 0$$

它的普遍解是

$$\varphi(r) = A' I_0(B, r) + C' K_0(B, r)$$

这里  $I_0$ 、 $K_0$  分别为第一类和第二类零阶修正贝塞尔函数。图 3-16 中画出了  $J_0$ 、 $Y_0$ 、 $I_0$  和  $K_0$  的曲线。根据边界条件 (i) 和 (ii)，从这些曲线上可以看出， $Y_0$ 、 $I_0$  和  $K_0$  均应从上述解中消去。因而在 (3-107) 式右端必须取  $-B^2$  值，故 (3-107) 式的允许解为

$$\varphi(r) = A J_0(B, r)$$

为了计算  $B^2$ ，可以利用在  $r=R$  处， $\varphi(r, z) = 0$  的边界条件，即

$$\varphi(R) = A J_0(B, R) = 0 \quad (3-110)$$

其中常数  $A$  不能为零，故只能是  $J_0(B, R) = 0$ ，由图 3-16 知  $J_0$  的第一个零点是 2.405，因而

$$B^2 = \left( \frac{2.405}{R} \right)^2 \quad (3-111)$$

同时有

$$\varphi(r) = A J_0(B, r) = A J_0 \left( \frac{2.405}{R} r \right) \quad (3-112)$$

接着求解方程 (3-108)，由长方体反应堆的讨论已经知道它的解为

$$Z(z) = C \cos B_z z, \quad (3-113)$$

其中

$$B_z^2 = \left( \frac{\pi}{H} \right)^2 \quad (3-114)$$

这样，圆柱形裸堆的几何曲率为

$$B^2 = B_r^2 + B_z^2 = \left( \frac{2.405}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{H} \right)^2 \quad (3-115)$$

式中  $B_r^2$  称为径向几何曲率， $B_z^2$  称为轴向几何曲率。

中子通量的分布形式为

$$\begin{aligned} \varphi(r, z) &= F J_0(B, r) \cos(B_z \cdot z) \\ &= F J_0 \left( \frac{2.405}{R} r \right) \cos \left( \frac{\pi}{H} z \right), \end{aligned} \quad (3-116)$$

式中  $F$  是由反应堆的输出功率决定的常数。

利用求条件极值的方法可以求出，在给定的  $B^2$  值下，当直径  $D = 1.083H$  时，圆柱形反应堆具有最小临界体积。

最后将上述各种几何形状反应堆的几何曲率与中子通量分布总结列于表 3-3 中。

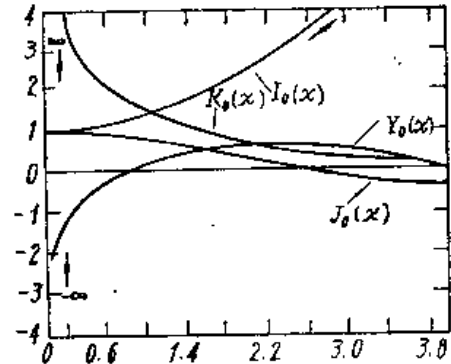


图 3-16 零阶贝塞尔函数曲线



表3-3 几种几何形状的裸堆的几何曲率和热中子通量分布

几何形状	尺寸	几何曲率	热中子通量分布	
一维无限平板	厚度 $a$	$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$	$\cos \frac{\pi}{a} x$	
球形	半径 $R$	$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2$	$\frac{\sin \frac{\pi}{R} r}{r}$	
直角长方体	边长为 $a, b, c$	$x$	$B_x^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$	$\cos \frac{\pi}{a} x$
		$y$	$B_y^2 = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$	$\cos \frac{\pi}{b} y$
		$z$	$B_z^2 = \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$	$\cos \frac{\pi}{c} z$
		$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$		$\cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \cos \frac{\pi}{c} z$
圆柱体	半径 $R$ 高度 $H$	$r$	$B_r^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2$	$J_0\left(\frac{2.405}{R} r\right)$
		$z$	$B_z^2 = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi}{H} z\right)$
		$B_g^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$		$J_0\left(\frac{2.405}{R} r\right) \cos\left(\frac{\pi}{H} z\right)$

### 3.4 反应堆曲率和临界计算任务

从前面的讨论知道，中子通量的空间分布满足波动方程 (3-82)，即

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + B_g^2 \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3-117)$$

这里  $B_g^2$  为方程的最小特征值，即几何曲率。对于裸堆来讲，几何曲率只与反应堆的几何形状和尺寸大小有关（见表3-3），例如对于球形裸堆  $B_g^2 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2$ 。它与反应堆的材料成份和性质没有关系。对于临界状态的反应堆，它的几何曲率应能满足临界方程 (3-81)。

由于几何曲率  $B_g^2$  只取决于反应堆的几何形状与大小，因而对于任意给定材料成份和几何大小的反应堆，它的几何曲率  $B_g^2$  并不一定都能满足临界方程 (3-81)。事实上，由于  $k_\infty, L^2$  等都仅仅取决于反应堆芯部材料特性，显然，对于一定材料成份（即给定  $k_\infty, L$  等值）的反应堆，只能有一个确定的  $B^2$  值能满足临界方程 (3-81)。为了计算和讨论方便，我们引入材料曲率的概念。它是满足临界方程 (3-81) 式的  $B^2$  值，并记作  $B_m^2$ 。因而，对于单群扩散理论，材料曲率  $B_m^2$  等于

$$B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2} \quad (3-118)$$

显然，材料曲率  $B_m^2$  是增殖介质本身的特性，它的数值只取决于反应堆的材料成份和特性（如  $L^2, \tau, k_\infty$  等），而与反应堆的几何形状及大小无关。

引进了材料曲率的概念之后，反应堆的临界条件可以描写如下：反应堆达到临界的条件是材料曲率等于几何曲率，即

$$B_m^2 = B_c^2 \quad (3-119)$$

例如，对于裸堆情况，利用单群理论，可以将临界条件 (3-120) 式的具体形式写成

$$\frac{k_\infty - 1}{L^2} = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2 \quad (\text{对球形反应堆}) \quad (3-120)$$

$$\frac{k_\infty - 1}{L^2} = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 \quad (\text{对圆柱状裸堆}) \quad (3-121)$$

在一般情况下，对于给定了的反应堆，其几何曲率不一定等于材料曲率  $B_m^2$ 。若  $B_c^2 < B_m^2$ ，这时  $k$  将大于 1，反应堆处于超临界状态；反之，若  $B_c^2 > B_m^2$ ，则反应堆处于次临界状态。

最后，由上面的讨论可以清楚地看到，反应堆临界问题的计算可以归纳为下面两类问题：

第一类问题：给定反应堆材料成分，确定它的临界尺寸。当反应堆的材料成分给定以后， $k_\infty$ 、 $L^2$  等物理参数便可以很容易地计算出来。因而，材料曲率就成为已知的量，问题便变成了求临界尺寸问题。当临界时， $B_m^2 = B_c^2$ ，那末，就可以根据表 3-3 所给出的公式计算出临界尺寸来。

第二类问题：给定反应堆的形状和尺寸，确定临界时反应堆的材料成分。这时，事先给定反应堆的几何形状和尺寸（例如，由热工计算给出），而要求临界时所需的材料成份（一般是燃料的浓缩度）。事实上这是第一种情况的逆问题，因为这时几何曲率  $B_c^2$  是已知的，所需要的是改变反应堆的燃料-慢化剂成分和比例，以使得临界方程 (3-81) 得到满足。

在具体计算中，有时还会遇到这样情况，即不仅反应堆的材料成份（如燃料-慢化剂）已经给定，而且反应堆的几何尺寸亦已由工程或热工的需要所确定。这时要求的是反应堆的有效增殖因数  $k$  或

$$\rho = \frac{k-1}{k} \quad (3-122)$$

式中  $\rho$  通常称为反应性。

## 4. 有反射层反应堆的单群扩散理论

### 4.1 反射层的作用

上一节讨论了裸堆的临界计算。但是，在实际情况下，几乎所有的反应堆均有不同厚度的反射层。因而，研究有反射层的反应堆是更为必要的。

在裸堆的情况下，堆内的中子一旦逸出芯部外，就不可能再返回到芯部内来，这一部份中子就损失掉了。如果在芯部的外围包上一层散射性能好，吸收截面小的非增植物质（如石墨等），这时由芯部逸出的中子中会有一部分将被这一层介质散射而返回到芯部中。从经济地利用中子的观点来看，这是十分有利的。这种包围在芯部外面用以反射从芯部泄漏出来的中子的物质称作反射层。

反射层的作用，首先是可以减少芯部中子的泄漏，从而使得芯部的临界尺寸要比无反射层时的小，这样便可以节省一部分燃料。另外，反射层还可以提高反应堆的平均输出功率。这是由于包有反射层的反应堆，其芯部的中子通量分布比裸堆的中子通量分布更加平坦的缘

故。关于这点，将在下边讨论。对反射层材料，首先要求它的散射截面 $\Sigma_s$ 大，因为当 $\Sigma_s$ 大时中子逸出芯部后在反射层中发生散射的几率就大，因而返回到芯部的机会也就增多。其次，反射层材料的吸截面 $\Sigma_a$ 要小，以减少中子的吸收。最后，当然还希望反射层具有良好的慢化能力，以便使能量较高的中子在从反射层返回到芯部时，已经被慢化为能量较低的中子了，从而减少了共振吸收的几率。综合以上所述，可以看出，良好的慢化剂材料，通常也是良好的反射层材料。常用的反射层材料有：水、重水、石墨和铍等。

## 4.2 一侧带有反射层的反应堆

现在用单群理论求解一侧带有反射层的反应堆的临界问题。

首先列出芯部及反射层中的单群扩散方程，设以角标“c”及“r”分别表示芯部及反射层的参数。

芯部稳态单群扩散方程 根据上一节的讨论，已知稳态时芯部的中子扩散方程为

$$\nabla^2 \phi_c + B_c^2 \phi_c = 0 \quad , \quad (3-123)$$

其中

$$B_c^2 = \frac{k_{\infty} - 1}{L_c^2} \quad (3-124)$$

这里 $L_c$ 为芯部的扩散长度。

反射层的稳态单群扩散方程 由于反射层是非增殖介质，所以在方程中不出现中子源项。这样，根据(3-29)式，反射层内中子扩散方程为

$$\nabla^2 \phi_r - k_r^2 \phi_r = 0 \quad , \quad (3-125)$$

式中

$$k_r^2 = \frac{1}{L_r^2} \quad .$$

$L_r$ 为反射层的扩散长度。方程(3-123)及(3-125)便是芯部及反射层的稳态单群扩散方程，其边界条件为：

(i) 在芯部与反射层的交界面上

$$\phi_c = \phi_r \quad , \quad (3-126)$$

$$D_c \phi_c' = D_r \phi_r' \quad (3-127)$$

式中 $\phi_c'$ 、 $\phi_r'$ 分别是 $\phi_c$ 、 $\phi_r$ 在交界面的法线方向上的导数。

(ii) 在芯部及反射层的外推边界上

$$\phi_c = 0; \quad \phi_r = 0 \quad . \quad (3-128)$$

下面我们把单群扩散方程(3-123)及(3-125)应用到几种不同几何形状的反应堆上，求出其临界方程及中子通量的分布。

### (1) 带有反射层的球形堆

考虑一个芯部半径为 $R$ ，带有厚度为 $T$ （包括外推距离在内）的反射层的球形堆。采用球坐标系，并把坐标原点取在球心上。根据中子通量在堆内处处为有限值的条件，得到芯部方程(3-123)式之解为

$$\phi_c(r) = A \frac{\sin(B_c r)}{r} \quad (3-129)$$

反射层方程 (3-125) 之解为

$$\phi_r(r) = C' \frac{\text{sh}(k_r r)}{r} + A' \frac{\text{ch}(k_r r)}{r} \quad (3-130)$$

这个解要满足在反射层的外推边界  $r = R + T$  处中子通量为零的条件, 由此有

$$A' = -C' \text{th}[k_r(R+T)] \quad ,$$

将  $A'$  代入 (3-130) 式中可以求出

$$\phi_r(r) = \frac{C \text{sh}[k_r(R+T-r)]}{r} \quad , \quad (3-131)$$

式中  $C$  为一新的待定常数。

方程 (3-129) 及 (3-131) 中有两个常数  $A$  和  $C$ , 它们由芯部与反射层界面  $r = R$  处的边界条件确定, 由 (3-126) 及 (3-127) 式有

$$A \frac{\sin(B_c R)}{R} = C \frac{\text{sh}(k_r T)}{R} \quad , \quad (3-132)$$

$$D_c A \left[ \frac{B_c \cos(B_c R)}{R} - \frac{\sin(B_c R)}{R^2} \right] = D_r C \left[ -\frac{k_r \text{ch}(k_r T)}{R} - \frac{1}{R^2} \text{sh}(k_r T) \right] \quad (3-133)$$

将以上两式相除得到

$$D_c [1 - B_c R \text{ctg}(B_c R)] = D_r \left[ 1 + \frac{R}{L_r} \text{cth} \left( \frac{T}{L_r} \right) \right] \quad (3-134)$$

方程 (3-134) 就是带有反射层的球形反应堆的单群临界方程。它给出了反应堆的外形尺寸 ( $R, T$ ) 与材料特性 ( $L_r, D_r, D_c$ , 等) 之间在临界时所应满足的关系。它和裸堆的临界条件 (3-120) 式的意义是一样的, 只是它不像 (3-120) 式那样, 各参数 (如  $k_\infty, L^2$  和几何尺寸  $R$ ) 之间有显式的函数关系。根据它便可以对球形反应堆进行临界计算。例如, 在给出了燃料与慢化剂成份及比例后,  $B_c, D_c, D_r, L$ , 等参数均可算出, 若反射层厚度  $T$  已经给定, 则从 (3-134) 式就可以算出带反射层的球形堆的临界半径  $R$ ; 不过这时需要解一个超越方程式。反之, 若球形堆的半径  $R$  及反射层厚度  $T$  等尺寸已经给定, 那么, 就可以求出临界时的燃料-慢化剂的成分比例, 以使材料参数  $B_c^2$  等满足方程 (3-134)。

在图3-17中画出了用单群扩散理论计算得到的裸堆及带反射层的反应堆的中子通量图形。从图中可以清楚地看到, 在靠近堆芯的中心部分, 裸堆的中子通量分布与带反射层的反应堆的中子通量分布基本上一致。但在靠近反射层处, 由于一部分中子自反射层返回到芯部内, 因而有反射层时芯部的中子通量分布要比裸堆的平坦一些, 从而便提高了反应堆的输出功率。

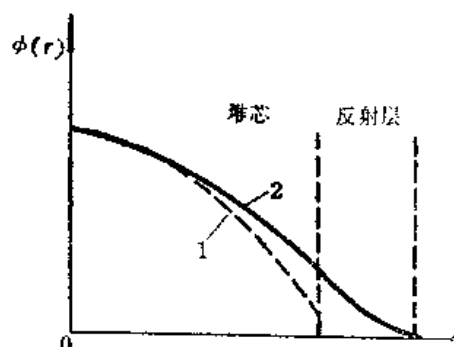


图3-17 裸堆与带反射层反应堆的中子通量分布

1——裸堆; 2——有反射层的反应堆。

(2) 侧面带有反射层的圆柱形反应堆

考虑一个圆柱形反应堆，半径为 $R$ ，高度为 $H$ ，在侧面带有厚度为 $T$ 的反射层。采用柱坐标系，原点取在圆柱体轴线的中点上（图3-18）。这时芯部及反射层的扩散方程分别为：

芯部 
$$\nabla^2 \phi_c(r, z) + B_c^2 \phi_c(r, z) = 0 \quad ; \quad (3-135)$$

反射层

$$\nabla^2 \phi_r(r, z) - k_r^2 \phi_r(r, z) = 0 \quad . \quad (3-136)$$

边界条件为：

(i) 在 $z = \pm \frac{H}{2}$ 处

$$\phi_c \left( r, \pm \frac{H}{2} \right) = \phi_r \left( r, \pm \frac{H}{2} \right) = 0 ; \quad (3-137)$$

(ii) 在 $r = R + T$ 处

$$\phi_r(R + T, z) = 0 \quad ; \quad (3-138)$$

(iii) 在 $r = R$ 处

$$\phi_c = \phi_r ; \quad D_c \phi_c' = D_r \phi_r' \quad , \quad (3-139)$$

现用分离变量法解芯部扩散方程 (3-135)，令 $\phi_c(r, z) = \phi_c(r)Z_c(z)$ ，代入 (3-135) 式中，并加以整理后得出：

$$\frac{1}{Z_c(z)} \frac{d^2 Z_c(z)}{dz^2} + \frac{1}{\phi_c(r)r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \phi_c(r) + B_c^2 = 0 \quad , \quad (3-140)$$

因此有

$$\frac{d^2 Z_c(z)}{dz^2} + B_z^2 Z_c(z) = 0 \quad , \quad (3-141)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\phi_c(r)}{dr} + B_r^2 \phi_c(r) = 0 \quad . \quad (3-142)$$

并且

$$B_c^2 = B_z^2 + B_r^2 \quad .$$

方程 (3-141) 满足边界条件 $z = \pm \frac{H}{2}$ 处  $Z_c \left( \pm \frac{H}{2} \right) = 0$ 时的解为

$$Z_c(z) = A' \cos B_z z \quad , \quad (3-143)$$

$$B_z^2 = \left( \frac{\pi}{H} \right)^2 \quad . \quad (3-144)$$

方程 (3-142) 满足中子通量在 $r = 0$ 处为有限值的解为

$$\phi_c(r) = A J_0(B_r r) \quad . \quad (3-145)$$

其中

$$B_r^2 = B_c^2 - B_z^2$$

现在来求解反射层的扩散方程 (3-136)，同样地令  $\phi_r(r, z) = \phi_r(r)Z_r(z)$ ，并将其代入 (3-136) 式可以得到

$$\frac{1}{\phi_r(r)} \nabla_r^2 \phi_r(r) + \frac{1}{Z_r(z)} \frac{d^2 Z_r(z)}{dz^2} - k_r^2 = 0 \quad , \quad (3-146)$$

式中

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \quad .$$

最后解之得

$$Z_r(z) = A' \cos B_z z \quad , \quad (3-147)$$

$$B_z^2 = \left( \frac{\pi}{H} \right)^2 \quad ;$$

而  $\phi_r(r)$  满足下列方程

$$\nabla_r^2 \phi_r(r) - \bar{k}_r^2 \phi_r(r) = 0 \quad , \quad (3-148)$$

其中,  $\bar{k}_r^2 = k_r^2 + B_z^2$  .

由此得出 (3-148) 式之解为

$$\phi_r(r) = G J_0(\bar{k}_r r) + C K_0(\bar{k}_r r) \quad , \quad (3-149)$$

利用  $r = R + T = R_1$  处中子通量为零的边界条件可得

$$\frac{G}{C} = \frac{-K_0(\bar{k}_r R_1)}{J_0(\bar{k}_r R_1)} = -\Psi \quad .$$

把它代入方程 (3-149) 中便得

$$\phi_r(r) = C [K_0(\bar{k}_r r) - \Psi J_0(\bar{k}_r r)] \quad ,$$

再利用  $r = R$  处  $\phi_c(r) = \phi_r(r)$  和  $D_c \phi_c'(r) = D_r \phi_r'(r)$  的边界条件, 便得到下列侧面带反射层的圆柱形反应堆的单群临界方程:

$$\frac{B_r J_1(B_r R)}{J_0(B_r R)} = \frac{\frac{-D_r}{k_r} [K_1(\bar{k}_r R) + \Psi I_1(\bar{k}_r R)]}{K_0(\bar{k}_r R) - \Psi I_0(\bar{k}_r R)} \quad . \quad (3-150)$$

它和裸堆的临界方程 (3-122) 式的意义是一样的, 可以用图解法或试凑法求解。

### (3) 上、下端部带有反射层的圆柱形反应堆

设圆柱形反应堆的高度为  $H$ , 半径为  $R$ , 在轴向的上、下端带有厚度均为  $T$  的反射层 ( $R, T$  均包括外推距离在内)。这时边界条件为

$$(i) \text{ 在 } r = R \text{ 处, } \phi_c = \phi_r = 0; \quad (3-151)$$

$$(ii) \text{ 在 } z = \pm \left( \frac{H}{2} + T \right) \text{ 处, } \phi_c = 0 \quad ; \quad (3-152)$$

$$(iii) \text{ 在 } z = \pm \frac{H}{2} \text{ 处, } \phi_c = \phi_r, \quad D_c \phi_c' = D_r \phi_r' \quad . \quad (3-153)$$

现用分离变量法求解芯部及反射层的扩散方程。令  $\phi_c(r, z) = \phi_c(r)Z_c(z)$  以及  $\phi_r(r, z) = \phi_r(r)Z_r(z)$ , 将其代入 (3-123) 及 (3-125) 式中去, 应用边界条件 (3-151) 及 (3-152)

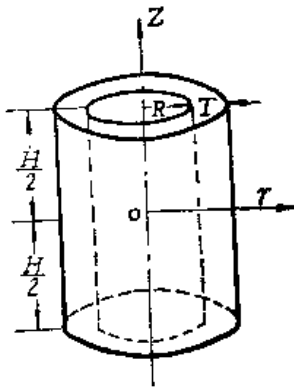


图3-18 侧面带反射层的圆柱形反应堆

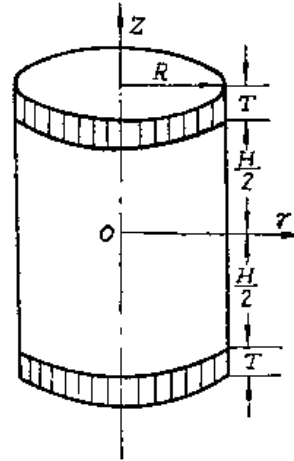


图3-19 端部带反射层的圆柱形反应堆

式，可以得出

$$\phi_c(r, z) = AJ_0(B, r)\cos(B_z z) \quad , \quad (3-154)$$

其中

$$B_z^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 \quad , \quad B_z^2 = B_c^2 - B_r^2 \quad . \quad (3-155)$$

以及

$$\phi_c(r, z) = BJ_0(B, r)\text{sh}\left[\bar{k}_z\left(\frac{H}{2} + T - z\right)\right] \quad , \quad (3-156)$$

其中

$$\bar{k}_z^2 = k_z^2 + B_z^2 \quad . \quad (3-157)$$

再利用边界条件 (3-153) 式最后得到

$$A\cos B_z \frac{H}{2} = G\text{sh}(\bar{k}_z T) \quad , \quad (3-158)$$

以及

$$D_c AB_z \sin B_z \frac{H}{2} = D_r G \bar{k}_z \text{ch}(\bar{k}_z T) \quad , \quad (3-159)$$

将以上二式相除，并整理得出

$$B_z \text{tg}\left(B_z \frac{H}{2}\right) = \frac{D_r}{D_c} \bar{k}_z \text{cth}(\bar{k}_z T) \quad . \quad (3-160)$$

这便是上、下端带反射层的圆柱形反应堆的单群临界方程。

**(4) 在一个方向上带有反射层的长方体形反应堆**

设长方体的三个边长分别为  $a$ 、 $b$  及  $c$ ，在  $Z$  方向的上、下底带有厚度为  $T$  的反射层 ( $a$ 、 $b$  及  $T$  均包括外推距离在内)。采用直角坐标系，原点取在长方体的中心上 (见图 3-20)。这时的边界条件为

(i) 在  $x = \pm \frac{a}{2}$  及  $y = \pm \frac{b}{2}$  以及  $z = \pm \frac{c}{2} + T$  处, 中子通量为零; (3-161)

(ii) 在  $z = \pm \frac{c}{2}$  处,

$$\phi_c = \phi, \text{ 以及 } D_c \phi_c' = D_r \phi_r' \quad (3-162)$$

将  $\phi_c(x, y, z)$  和  $\phi_r(x, y, z)$  分离变量写成

$$\phi_c(x, y, z) = X_c(x)Y_c(y)Z_c(z) \quad (3-162)$$

$$\phi_r(x, y, z) = X_r(x)Y_r(y)Z_r(z),$$

将以上两式代入芯部及反射层的扩散方程 (3-123) 及 (3-125) 式中, 并应用边界条件 (3-161) 最后解出芯部的中子通量分布为

$$\phi_c(x, y, z) = A' \cos B_x x \cos B_y y \cos B_z z, \quad (3-163)$$

式中

$$B_x^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \quad B_y^2 = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2, \quad B_z^2 = B_c^2 - (B_x^2 + B_y^2). \quad (3-164)$$

$B_x^2$ 、 $B_y^2$ 、 $B_z^2$  分别称作  $x, y, z$  方向的曲率。同样可以求解反射层的扩散方程而得到

$$\phi_r(x, y, z) = B' \cos B_x x \cos B_y y \operatorname{sh}[\bar{k}_z(R+T-z)], \quad (3-165)$$

其中

$$B_c^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \quad B_b^2 = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2, \quad \bar{k}_z^2 = k_c^2 + B_x^2 + B_y^2. \quad (3-166)$$

根据边界条件 (3-162) 式, 从 (3-163) 及 (3-165) 式可以得出

$$D_c B_z \operatorname{tg}\left(B_z \frac{c}{2}\right) = D_r \bar{k}_z \operatorname{cth}(\bar{k}_z T). \quad (3-167)$$

上式就是在  $z$  方向, 上、下端带反射层的长方体反应堆的临界方程。

以上的讨论, 仅限于在一个方向上带反射层的反应堆, 这时, 可以采用分离变量法把二维  $(r, z)$  或三维  $(x, y, z)$  的问题化成一维问题来求解。但实际上, 反应堆的四周均围有反射层, 这样的反应堆就不能用分离变量法求出其解析解, 而只能用其它近似方法或数值法求解。

### 4.3 反射层节省

从前面的讨论知道, 当芯部周围有了反射层以后, 由于一部分泄漏出芯部的中子被反射层反射而返回芯部, 这样就减少了中子的泄漏损失, 提高了中子的不泄漏几率。因而有了反射层以后, 在芯部性质相同的情况下, 它的临界体积要比裸堆的临界体积小。这样, 在芯部包有反射层以后, 芯部临界大小的减少量通常可以用反射层节省  $\delta$  来表示。例如, 对于给定芯部成分的球形反应堆, 当它是裸堆时, 其临界半径为  $R_0$ , 而在围以反射层以后的临界半径为  $R$ , 则反射层节省  $\delta$  为

$$\delta = R_0 - R. \quad (3-168)$$

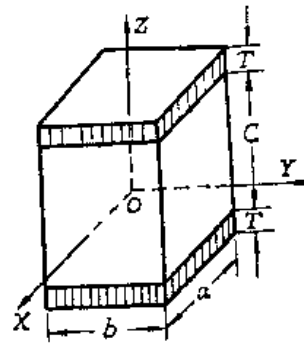


图3-20 一个方向带反射层的长方体形反应堆



对于圆柱形反应堆，反射层节省通常分别用径向和轴向的反射层节省来表示，即

$$\delta_r = R_0 - R, \quad \delta_z = \left( \frac{H_0}{2} - \frac{H}{2} \right)$$

其中 $R_0$ 、 $H_0$ 和 $R$ 、 $H$ 分别为圆柱形裸堆和带有侧、端面反射层的圆柱形堆的临界尺寸， $\delta_r$ 称为径向反射层节省， $\delta_z$ 称为轴向反射层节省。

这样，反射层对临界的影响可以用反射层节省这个量来表示。它表示反应堆由于加上反射层所引起的临界尺寸的减少。于是我们可以把有反射层反应堆的几何曲率用芯部外形尺寸增大 $2\delta$ 后的等效裸堆的几何曲率来表示。例如，对于给定的曲率 $B_c^2$ ，芯部半径为 $R_0$ 的球形裸堆有 $B_c^2 = (\pi/R_0)^2$ ，或

$$R_0^2 = \left( \frac{\pi}{B_c} \right)^2 \quad (3-169)$$

将其代入(3-168)式，设具有反射层时芯部的临界半径为 $R$ ，则

$$\delta = \frac{\pi}{B_c} - R.$$

因此有

$$B_c^2 = \left( \frac{\pi}{R + \delta} \right)^2. \quad (3-170)$$

这样，我们就可以把有反射层的球形堆的几何曲率用一个尺寸等于 $R + \delta$ 的等效裸堆的几何曲率来表示。同样，对于圆柱形反应堆有

$$\begin{aligned} B_c^2 &= B_r^2 + B_z^2 = \left( \frac{2.405}{R + \delta_r} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{H + 2\delta_z} \right)^2 \\ &= \left( \frac{2.405}{R_{eff}} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{H_{eff}} \right)^2, \end{aligned} \quad (3-171)$$

通常称式中 $R_{eff} = R + \delta_r$ 及 $H_{eff} = H + 2\delta_z$ 为等效半径和等效高度(图3-21)。

最后，讨论一下反射层节省 $\delta$ 与哪些因素有关。为了简化问题，以球形反应堆为例(它的结果对于其它形状的反应堆也是适用的)。

为了讨论方便，设 $D_c = D_r$ 。这时带反射层的球形堆的临界方程(3-134)可以写成

$$-B_c L_r \operatorname{ctg}(B_c R) = \operatorname{cth} \left( -\frac{L}{L_r} \right). \quad (3-172)$$

用 $R = R_0 - \delta = \frac{\pi}{B_c} - \delta$ 代入上式则得

$$\operatorname{tg}(B_c \delta) = B_c L_r \operatorname{th} \left( \frac{T}{L_r} \right). \quad (3-173)$$

解出 $\delta$ 为

$$\delta = \frac{1}{B_c} \operatorname{arctg} \left[ B_c L_r \operatorname{th} \left( \frac{T}{L_r} \right) \right] \quad (3-174)$$

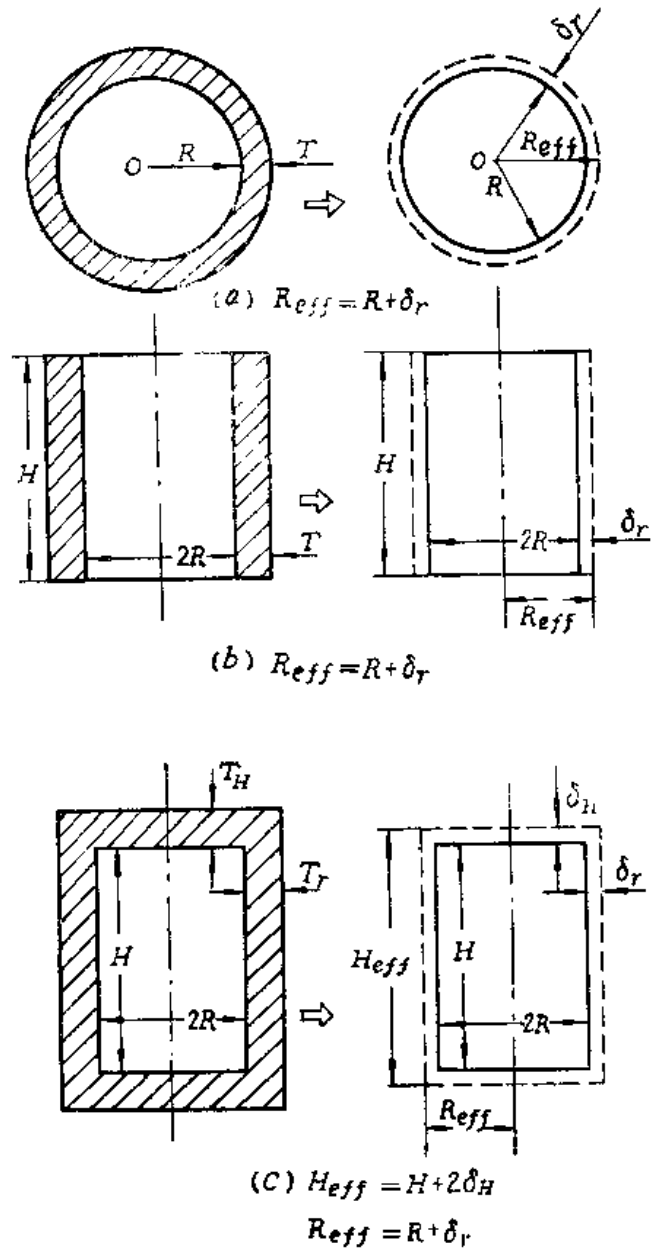


图3-21 等效裸堆示意图

由上式看出，反射层节省 $\delta$ 与材料性质 ( $L_r, B_c$ ) 以及反射层厚度 $T$ 有关系。

在一般情况下，反应堆外形尺寸是比较大的，因而 $B_c$ 很小，而 $\delta$ 本身也是一个很小的量，所以 $B_c\delta$ 亦是一个很小的量。这时 (3-173) 式中的 $\text{tg} B_c\delta \approx B_c\delta$ ，故方程 (3-174) 可以写成

$$\delta \approx L_r \text{th} \left( \frac{T}{L_r} \right) \quad (3-175)$$

下面讨论两种情况：

(1) 反射层厚度很小，即 $T \ll L_r$ ，则 (3-175) 式中之 $\text{th} \left( \frac{T}{L_r} \right) \approx T/L_r$ ，于是反射层节省可以写成

$$\delta \approx T \quad (3-176)$$

上式说明，对于反射层很薄 ( $T \ll L_r$ ) 的大型反应堆，其反射层节省 $\delta$ 近似地等于反射层的厚

度。

(2) 反射层很厚时, 即  $T \gg L_r$ , 这时  $\text{th} \left( \frac{T}{L_r} \right) \approx 1$ , 于是

$$\delta \approx L_r \quad (3-177)$$

上式说明当反射层厚度增加到一定值后, 反射层节省  $\delta$  就达到一个常数值(大约等于中子在反射层中的扩散长度), 而与反射层厚度无关。这时即使再增加反射层的厚度, 也不会使反射层节省增加。

#### 4.4 中子通量分布不均匀系数和中子通量分布展平的概念

##### (1) 热中子通量不均匀系数

堆内某点发出的功率是和该点的核裂变率  $\Sigma_f \phi_{th}$  成正比的。当各点的热中子宏观裂变截面是常数时, 功率分布和中子通量分布是一致的。在反应堆的设计中经常用到“热中子通量分布不均匀系数”这个概念, 其定义是: 芯部内热中子通量的最大值与热中子通量的平均值之比, 并以  $K_H$  表示,

$$K_H = \frac{\phi_{max} V}{\int_V \phi(r) dV} \quad (3-178)$$

式中  $V$  是堆芯的体积。  $K_H$  愈大, 则芯部的热中子通量分布愈不均匀, 所以,  $K_H$  是表征堆芯内热中子通量分布不均匀程度的一个系数。对于不同形状的裸堆 只要将通量分布函数代入 (3-178) 式的积分中去 (令  $\phi_{max} = 1$ ), 就可得出  $K_H$  的表达式。例如对于圆柱形裸堆有

$$K_H = \frac{\pi R^2 H}{\int_{-H/2}^{H/2} \cos\left(\frac{\pi}{H} z\right) dz \int_0^R J_0\left(\frac{2.405}{R} r\right) 2\pi r dr} = K_r K_z \quad (3-179)$$

式中  $K_r$  称为径向通量不均匀系数,  $K_z$  称为轴向通量不均匀系数, 而

$$K_r = \frac{\pi R^2}{\int_0^R J_0\left(\frac{2.405}{R} r\right) 2\pi r dr} = 2.31,$$

$$K_z = \frac{H}{\int_{-H/2}^{H/2} \cos\left(\frac{\pi}{H} z\right) dz} = \frac{\pi}{2} = 1.57,$$

因而  $K_H = K_r K_z = 2.31 \times 1.57 = 3.62$ 。

用同样的方法, 可以求出球形裸堆和长方体裸堆的热中子通量不均匀系数为

对于球形裸堆:  $K_H = \frac{\pi^2}{3} \approx 3.27$ 。

对于长方体裸堆:  $K_H = \frac{\pi^3}{8} \approx 3.88$ 。

## (2) 通量展平的概念及展平措施

从(3-178)式可以看到,对于给定体积的反应堆,堆芯总的功率输出是和量 $\phi_{m,s}V/K_{eff}$ 成比例的。然而 $\phi_{m,s}$ 又受到热工的限制,因此整个反应堆内的中子通量分布愈不均匀,则从给定体积的堆内取出的总功率也就愈少。为了提高总的功率输出,就要采取一些措施使得堆内中子通量变得平坦一些,通常称为通量展平。以压水堆为例,展平通量的主要措施有:

(i) 芯部分区布置:将堆芯按径向分为几个区,每一区用不同浓缩度的燃料,这样可以达到展平径向中子通量与功率的目的。

(ii) 采用化学补偿溶液及部分长度控制棒以展平轴向通量分布:使用化学溶液控制以后,可以减少控制棒的数目与提升或下插的次数,从而也减少了由于提升或下插控制棒而引起的对轴向功率的扰动。另外,采用部分长度控制棒,可以事先安排好合理的提棒程序,在轴向出现功率峰的位置上,可用部分长度控制棒加以抑制。

(iii) 采用束棒控制以减少水隙及每根控制棒的价值,使径向及轴向的中子通量分布受控制棒的扰动减小,因而通量分布更为均匀。

此外,反射层的应用,合理地安排提棒程序,控制棒的合理布置等均对展平中子通量分布有益。

## 4.5 曲率迭代法

前面讨论了一个方向有反射层的反应堆的临界和中子通量分布的计算问题。但实际上的反应堆四周都是围有反射层的,这时不能采用前面介绍的分离变量法求解。因为这时不能找到满足芯部-反射层交界面处的边界条件的扩散方程的解析解。在这种情况下,一般是借助于数值方法或其他近似的方法求解。下面介绍一种简便的近似方法——曲率迭代法(或条件分离变量法)。

曲率迭代法的实质在于把四周有反射层反应堆的二维或三维问题的计算,化为逐次交替地迭代计算几个只有在一个方向上带有反射层的反应堆。例如对于圆柱形反应堆,则简化为交替解一个径向带反射层轴向为裸的反应堆和另一个只有轴向带反射层的反应堆(图3-22)。一个方向有反射层的反应堆则可以应用前面所介绍的分离变量方法进行计算。

例如,我们考虑求解四周都有反射层的圆柱形反应堆的临界成份问题。已知堆芯高度为 $H$ ,半径为 $R$ ,四周反射层厚度为 $b$ 。由于反应堆的尺寸已经给定,问题就成为求反应堆的曲率 $B_c^2$ ,而后根据方程(3-119)确定系统的临界成份。用曲率迭代法计算时步骤如下:

首先计算一个径向带有反射层的反应堆[图3-22(b)],为了考虑去掉端部反射层对曲率的影响,将轴向高度 $H$ 加上一个估计的反射层节省值,即等效高度 $H^{(0)} = H + 2\delta_H$ 。换句话说,

我们假定  $B_c^{(0)2} = \left( \frac{\pi}{H + 2\delta_H} \right)^2$  然后用侧面带反射层的圆柱形堆的单群临界方程(3-150)

式对(b)堆进行临界计算。在目前的情况下,在(3-150)式中,除 $B_c^2$ 以外,其余的参数均为已知的。计算的结果可以得出一个径向曲率 $B_r^{(0)2}$ ,和径向中子通量分布。这样就求出了反应堆曲率的第一次近似值

$$B_c^{(1)2} = B_r^{(0)2} + \left( \frac{\pi}{H^{(0)}} \right)^2$$

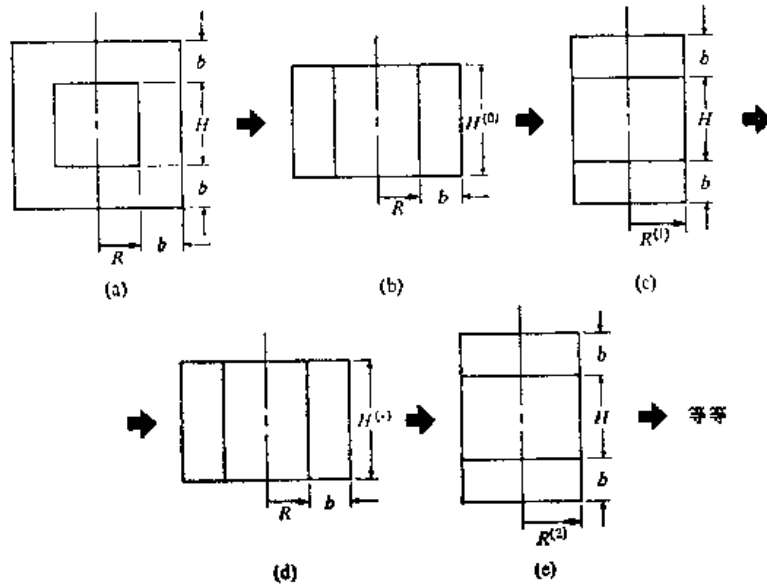


图3-22 外围都有反射层的反应堆计算方案示意图

接着计算只在端部带有反射层的反应堆[图3-22(c)], 这个堆的侧面为裸的, 其半径  $R^{(1)}$  由求得的径向曲率  $B_r^{(0)}$  来确定,  $R^{(1)} = 2.405/B_r^{(0)}$ 。然后通过求解端部带反射层的反应堆的单群临界方程 (3-160), 可以求出一个新的轴向曲率  $B_z^{(1)}$  及轴向通量分布。这时曲率的第二次近似值为

$$B_c^{(2)^2} = B_z^{(1)^2} + B_r^{(0)^2}$$

然后求得一个新的等效高度  $H^{(1)} = \pi/B_z^{(1)}$ , 再用  $H^{(1)}$  代替原来的  $H^{(0)}$  [图3-22(d)], 重复进行计算。

这样的计算过程将一直进行下去, 直到前后两次计算所得到的曲率  $B_c^2$  值之差满足要求的精确度为止。实际计算表明, 这样的计算很快就收敛。这时所得到的  $B_c^2$  便是我们所要求的曲率。一旦知道了曲率  $B_c^2$ , 就可以确定达到临界时的反应堆的堆芯材料成份。

最后必须指出, 用曲率迭代法所计算的曲率数值和精确的数值很好地符合, 但是, 对于中子通量分布则符合得比较差些, 特别是在反射层与活性区交界面的“顶角”区域附近误差更大, 精确的结果则必须通过数值计算方法求得。

### 参 考 文 献

- [1] S. 格拉斯登, M. C. 爱德仑著, 和平译, 原子核反应堆理论纲要, 第五、七、八章, 科学出版社, 1958年。
- [2] J.R. 拉马什著, 洪流译, 核反应堆理论导论, 第五、九、十章, 原子能出版社, 1977年。

## 第四章 中子输运方程

反应堆内的物理过程以及它的许多核的和工程方面的基本特性，都和中子群体在系统内的运动以及芯部内中子密度的空间-能量分布有关。反应堆物理分析就是研究中子群体在反应堆内的运动过程的，它的主要课题之一就是研究求得中子密度分布函数所用的各种分析方法和模型。在第三章中我们介绍了单速扩散理论及其应用，那是最简单的计算模型。在这种模型中，假设中子通量是介质内空间坐标的缓慢变化函数，或中子速度的方向是各向同性或近于各向同性的[见图4-1中(1)]。在上述条件下，所得到的仅仅是近似的结果。这时在中子密度（或中子通量）的自变量中并不包括中子的运动方向这一变量，同时它只讨论单能中子。

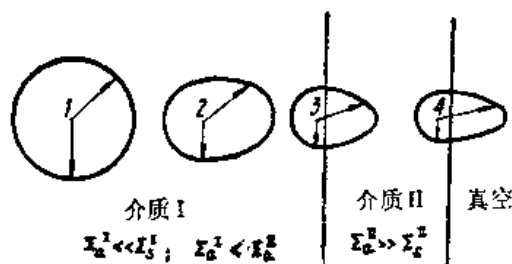


图4-1 中子密度运动方向分布的向径图

但是，实际上中子运动的方向往往是各向异性的。例如图4-1所示，在反应堆边界上既有入射中子源，同时，由于子泄漏的缘故，因而在靠近边界的点上，中子运动方向的角分布如图中所示：多数中子的运动方向是朝向反应堆边界的方向，图中用矢径的长度表示中子沿该方向运动的概率大小。因而在一些情况下（见第三章第1.2节）扩散理论不能适用（或者它的误差比较大）。在这些情况下，为了研究中子在介质内的运动就必须借助于更精确的中子输运理论。它是研究中子在散射、吸收和增殖介质中运动的最精确的方法。下面就会看到，前面所述的单速扩散理论仅仅是它的一种近似模型。

本章将首先讨论中子输运方程的建立，然后介绍它的一些常用近似解法。

### 1. 中子角通量和中子流密度

在输运理论中，为了完整地描述中子群体在介质内的运动，除应用空间坐标  $\mathbf{r}$  和中子能量  $E$ （或速度大小）作自变量外，还必须应用中子的运动方向  $\Omega$  作为自变量。下面就引进自变量  $\Omega$  以后对中子密度、中子通量等定义作一些相应的扩充。

#### 1.1 中子角密度和角通量

中子在空间的位置可以通过矢径  $\mathbf{r}$  来表示（图4-2）

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} ,$$

而体积元  $d\mathbf{r} = dx dy dz$ ，中子运动的速度可以用矢量  $\mathbf{v}$  来表示

$$\mathbf{v} = v \Omega ,$$

其中  $v = |\mathbf{v}|$  是速率，即速度的大小，它与中子动能  $E$  的关系为  $E = mv^2/2$ ，其中  $m$  为中子的

质量； $\Omega$ 是运动方向的单位矢量，它的模等于1，它的方向在极坐标中可通过极角 $\theta$ 和辐角 $\psi$ 来表示（见图4-2）。在直角坐标系中 $\Omega$ 可以表为

$$\Omega = \Omega_x i + \Omega_y j + \Omega_z k \quad (4-1)$$

而

$$\Omega_x = \sin\theta\cos\psi, \quad \Omega_y = \sin\theta\sin\psi, \quad \Omega_z = \cos\theta, \quad (4-2)$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\psi. \quad (4-3)$$

因而，要对中子群体作最完整、最普遍的描述，就必须给出中子群体按空间 $r$ （三个坐标参数）、能量 $E$ （速度大小）、运动方向 $\Omega$ 和时间 $t$ 的分布。为此，我们引进中子密度分布函数的最普遍的描述——中子角密度 $n(r, E, \Omega, t)$ 。它的定义是：在 $t$ 时刻，在 $r$ 处的单位体积内能量等于 $E$ 的单位能量间隔内具有运动方向为 $\Omega$ 的单位立体角内的中子数目。因而，

$$\begin{aligned} n(r, E, \Omega, t) dr dE d\Omega \\ = [t \text{ 时刻在 } r \text{ 处 } dr \text{ 体积元内，能量在 } E \text{ 与 } E + dE \text{ 之间，而运动方向在 } \Omega \\ \text{方向上的 } d\Omega \text{ 立体角元内的中子数目}] \end{aligned} \quad (4-4)$$

把中子角密度对所有立体角方向积分，便得到以前所定义的与能量相关的中子密度 $n(r, E, t)$

$$n(r, E, t) = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega, t) d\Omega, \quad (4-5)$$

$n(r, E, t) dr dE$ 便是 $t$ 时刻在 $r$ 处 $dr$ 体积元内，能量在 $E$ 与 $E + dE$ 之间的中子总数目（包括所有运动方向在内）。

根据(1-36)式定义，对应于中子角密度可以定义中子角通量 $\phi(r, E, \Omega, t)$ 为<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \phi(r, E, \Omega, t) = \\ v n(r, E, \Omega, t). \end{aligned} \quad (4-6)$$

这样， $\phi(r, E, \Omega, t) dr dE d\Omega$ 便等于(4-4)式所描述的中子在单位时间内所走过的径迹总长度。 $\phi(r, E, \Omega, t)$ 也可以理解为在单位时间内，穿过 $r$ 处垂直于 $\Omega$ 的单位面积、能量等于 $E$ 的单位能量间隔内且运动方向为 $\Omega$ 的单位立体角内的中子数目（图4-3）。

同样地对应于(4-5)式可以定义与能量相关的中子通量 $\Phi(r, E, t)$ 为

$$\begin{aligned} \Phi(r, E, t) = v n(r, E, t) = \\ \int_{4\pi} \phi(r, E, \Omega, t) d\Omega. \end{aligned} \quad (4-7)$$

因而中子通量 $\Phi(r, E, t)$ 可以看作是 $r$ 处所

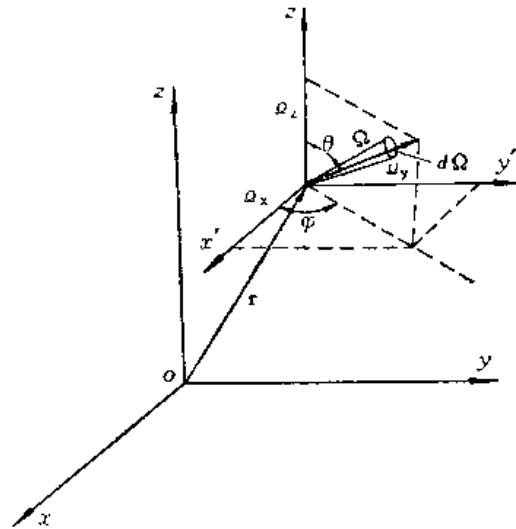


图4-2 向量 $r$ 和 $\Omega$ 的表示

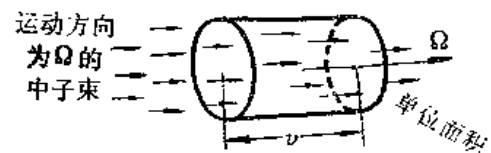


图4-3 中子角通量示意图

1) 这样定义的中子角通量是一标量，因而有的书中称 $\phi(r, E, \Omega, t)$ 为标量角通量，而定义 $\vec{\phi}(r, E, \Omega, t) = v \cdot n(r, E, \Omega, t)$ 为矢量角通量。

有不同的  $\Omega$  方向的无限多个微分中子束  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$  的强度的总和。有时我们把与  $\Omega$  无关的  $n(\mathbf{r}, E, t)$  和  $\phi(\mathbf{r}, E, t)$  分别叫做中子总密度和中子总通量，它们就是第一章中所定义的中子密度和中子通量[(1-36)式]。

## 1.2 中子流密度

在第三章中我们已经引进了中子流密度的定义。这里则设法把它和中子角密度和角通量联系起来。考虑在  $\mathbf{r}$  点处的小面积元  $dS$ ，设其单位法线矢量为  $\mathbf{n}$ ，如图4-4所示。运动着的中子从各个方向连续不断地穿过  $dS$ 。

现在暂时只考虑稳态情况下能量等于  $E$  的那一部分中子；显然，单位时间内穿过  $dS$  的，运动方向为  $\Omega$  的中子数目等于  $n(\mathbf{r}, E, \Omega) v |\Omega \cdot \mathbf{n}| dS$ 。我们规定  $\mathbf{n}$  的正方向一边为“+”侧，另一边为“-”侧，同时假定每秒自“-”侧沿各个方向穿过  $dS$  流向“+”侧的中子总数为  $J_+^* dS$ ，反之为  $J_-^* dS$ ，那么有

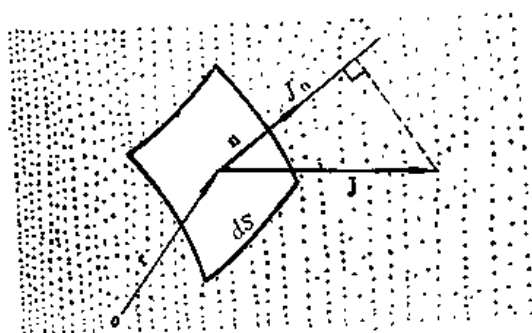


图4-4 中子流密度  $J$

$$\begin{aligned} J_+^* dS &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| n(\mathbf{r}, E, \Omega) v d\Omega = \\ &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega, \end{aligned} \quad (4-8)$$

$$\begin{aligned} J_-^* dS &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| n(\mathbf{r}, E, \Omega) v d\Omega = \\ &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega, \end{aligned} \quad (4-9)$$

式中积分域  $(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0$  (或  $< 0$ ) 表示只对  $(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0$  (或  $< 0$ ) 的那些  $\Omega$  (即半球) 进行积分。 $J_+^*$  和  $J_-^*$  分别叫做  $\mathbf{r}$  处沿  $\mathbf{n}$  的正和负的方向的分中子流密度。如果中子角通量是各向同性的，那么  $J_+^* = J_-^*$ ，也就是说每秒穿过  $dS$  的净中子数或净中子流等于零。在一般情况下， $J_+^* \neq J_-^*$ ，则每秒穿过  $dS$  的净中子数或净中子流  $J_n(\mathbf{r}, E) dS$  便等于

$$J_n(\mathbf{r}, E) dS = (J_+^* - J_-^*) dS = dS \int_{4\pi} \Omega \cdot \mathbf{n} \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega .$$

上式可以改写成

$$J_n(\mathbf{r}, E) dS = dS \mathbf{n} \cdot \int_{4\pi} \Omega \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) dS ,$$

其中

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = \int_{4\pi} \Omega \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega . \quad (4-11)$$

因而

$$J_n(\mathbf{r}, E) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) \cdot \mathbf{n} . \quad (4-12)$$

把 (4-12) 式和 (3-10) 式进行比较便知，矢量  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$  就是前面定义的中子流密度。它在  $\mathbf{n}$  方向的投影 (或分量)  $J_n(\mathbf{r}, E)$  就等于单位时间内穿过垂直于  $\mathbf{n}$  的单位面积、单位能量间隔内的净中子数 (净流量)。若  $J_n > 0$ ，则说明  $J_+^* > J_-^*$ ，说明净中子流的方向与法线  $\mathbf{n}$  的方向一致。反之若  $J_n < 0$ ，则说明净中子流的方向与  $\mathbf{n}$  的方向相反。

由 (4-10) 式可以看到，每秒穿过  $dS$  的净中子流大小不仅和  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$  的分布有关，



而且还和面积元  $dS$  的法线  $\mathbf{n}$  的方向有关。显然, 当  $\mathbf{n}$  的方向刚巧与  $\mathbf{J}$  的方向一致时, 净中子流的数值最大。这样, 净中子流密度的物理意义可以理解为:  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$  是一个矢量, 它的大小等于每秒穿过  $\mathbf{r}$  处的所有垂直于不同方向的单位面积元的净中子流数目中的最大值, 它的方向也就是该单位面积元的法线方向。

下面我们讨论中子输运方程的建立及其一般解法。

## 2. 中子输运方程

### 2.1 中子输运方程的建立

通常在反应堆内, 中子密度比介质的原子核密度要小得多。例如, 即使在  $\phi \sim 10^{16}$  中子/(厘米<sup>2</sup>·秒) 的热中子反应堆内, 中子密度也不超过约  $10^{11}$  (中子/厘米<sup>3</sup>) 的数量级, 而原子核的密度, 例如对于固体, 则约为  $10^{22}$  (核/厘米<sup>3</sup>) 的数量级。因而, 中子在介质内的运动主要是中子和介质原子核的碰撞结果, 而中子间的相互碰撞可以略去不计<sup>1)</sup>。由于中子运动及其与原子核的散射碰撞, 原来在某一位置具有某一能量和运动方向的中子, 经过一些时间将在另一位置以另一能量和运动方向出现。我们说中子从一个位置、能量和方向输运(或迁移)到另一个位置、能量和方向上, 这种过程叫做输运过程。研究中子输运过程的理论便叫做中子输运理论。

对单个中子来讲, 它是以杂乱无章的折线轨迹在介质内进行随机的运动, 直到它被吸收或从反应堆表面逸出为止; 这是一个随机的过程。但是, 在实际上, 我们感兴趣的并不是个别中子的行径或所处的地点问题, 而是在空间不同点处中子密度的宏观分布问题。因而它可以象气体分子动力学一样, 用一种处理大量中子行径的宏观理论来推导出和气体分子输运方程相类似的中子输运方程, 或称作玻尔兹曼输运方程。

下面就来推导这个方程。

研究中子输运过程所应用的一条基本原则, 就是所谓中子数目守恒或中子平衡。在一定体积内, 中子密度随时间的变化率应等于它的产生率减去泄漏率和移出率, 亦即

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{产生率} - \text{泄漏率} - \text{移出率}, \quad (4-13)$$

这里  $\partial n / \partial t$  是中子密度随时间的变化率。当系统处于平衡状态(稳态)时, 它便等于零。

现在讨论在  $t$  时刻, 在相空间  $(\mathbf{r}, E, \Omega)$  上的中子平衡。我们讨论在  $\mathbf{r}$  处  $d\mathbf{r}$  体积

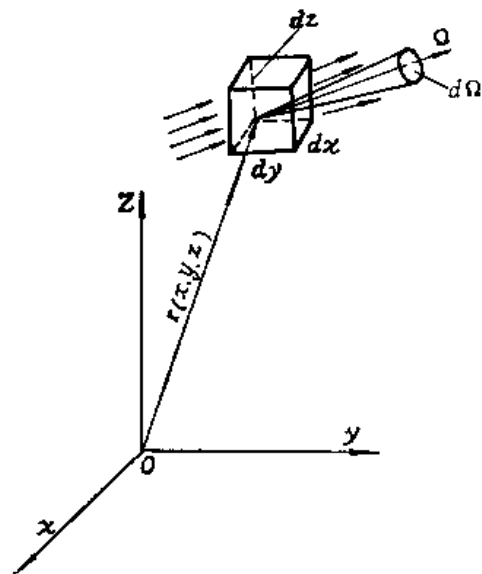


图4-5 中子泄漏的计算

1) 这样所得到的中子输运方程是线性的, 而在气体分子输运理论中, 气体分子之间的碰撞是主要的, 因而在气体输运方程中含有非线性的碰撞项。

元内，中子能量在  $E$  和  $E + dE$  之间且运动方向为  $\Omega$  附近的立体角元  $d\Omega$  内的中子数目的平衡问题（参阅图4-5），同时求出（4-13）式中各项的具体表达式。

（1）**泄漏率** 在图4-5中，设在  $r(x, y, z)$  点，有一体积元  $dV$ ，它的边长为  $dx$ 、 $dy$  和  $dz$ 。先考虑平行于  $yz$  平面，而面积等于  $dydz$  的两个面。根据前面(4-6)式中  $\phi(r, E, \Omega, t)$  的含义可知，每秒在  $(x, y, z)$  处穿过  $dydz$  面而进入体积元  $dV$  的，能量在  $E$  到  $E + dE$  内而运动方向在  $\Omega$  附近  $d\Omega$  内的中子数便等于  $\phi(r, E, \Omega, t) dEd\Omega$  乘上  $dydz$  面在  $\Omega$  方向上的投影  $\Omega_x dydz$ ，即

$$\phi(x, y, z, E, \Omega, t) \Omega_x dydz dEd\Omega,$$

其中  $\Omega_x = \Omega \cdot i$  为  $\Omega$  在  $x$  轴方向上的分量。同样，每秒在  $(x + dx, y, z)$  处穿出  $dydz$  平面而离开体积元的中子数目是

$$\phi(x + dx, y, z, E, \Omega, t) \Omega_x dydz dEd\Omega.$$

假使  $dx$  取得足够小，则近似有

$$\begin{aligned} \phi(x + dx, y, z, E, \Omega, t) &= \phi(x, y, z, E, \Omega, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, z, E, \Omega, t) dx. \end{aligned}$$

因此，单位时间内沿  $x$  轴方向的  $dydz$  两个面泄漏出体积元之净中子数为

$$\Omega_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy dz dEd\Omega.$$

这里为简明起见，记  $\phi(r, E, \Omega, t)$  为  $\phi$ 。应用同样方法可以求出沿  $y$ 、 $z$  二个方向泄漏出体积元的中子数分别为

$$\Omega_y \frac{\partial \phi}{\partial y} dV dEd\Omega \quad \text{和} \quad \Omega_z \frac{\partial \phi}{\partial z} dV dEd\Omega.$$

于是在单位时间内，上述中子穿过所有表面泄漏出体积元的净中子数为

$$\begin{aligned} L &= \left( \Omega_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV dEd\Omega \\ &= \Omega \cdot \text{grad} \phi dV dEd\Omega, \end{aligned} \quad (4-14)$$

其中

$$\text{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (4-15)$$

为标性函数  $\phi$  的梯度。在工程计算中经常用算符  $\nabla$  来表示，

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4-16)$$

$\nabla \phi = \text{grad} \phi$ ，算符  $\nabla$  在形式上可以理解为一个矢量。这样有

$$L = \Omega \cdot \nabla \phi dV dEd\Omega \quad (4-17)$$

（2）**移出率** 每单位时间移出相空间基元  $dV dEd\Omega$  而损失掉的中子数目是由两个方面的原因造成的：（i）中子在  $dV$  内被吸收，（ii）中子在  $dV$  内与原子核发生散射，因为无论

是弹性或非弹性散射都将使中子的能量  $E$  或运动方向  $\Omega$  发生变化而从相空间基元中损失掉。因而单位时间移出基元  $dV dE d\Omega$  的中子数为

$$\begin{aligned} R &= (\Sigma_s + \Sigma_{s_n} + \Sigma_a) \phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t) dV dE d\Omega \\ &= \Sigma_r \phi dV dE d\Omega \end{aligned} \quad (4-18)$$

这里  $\Sigma_s$ 、 $\Sigma_{s_n}$ 、 $\Sigma_a$  和  $\Sigma_r$  在一般情况下是  $(\mathbf{r}, E)$  的函数，为简单起见，在一些场合常把宗标  $(\mathbf{r}, E)$  略去。

(3) 产生率 在基元  $dV dE d\Omega$  内中子的产生有二个来源：第一来源是，在  $dV$  体积内原来能量为  $E'$ ，运动方向为  $\Omega'$  的中子经过散射而能量变成  $E$  且运动方向变为  $\Omega$  的中子。根据第一章第3节中关于散射函数的定义可知，单位时间内在  $dV$  体积元原来能量为  $E'$  至  $E' + dE'$ 、运动方向为  $\Omega'$  在  $d\Omega'$  立体角元内的中子经过弹性和非弹性散射能量变为  $E$  运动方向为  $\Omega$  的中子数为

$$\begin{aligned} &[\Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_s(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) + \Sigma_{s_n}(\mathbf{r}, E') f_{s_n}(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)] \\ &\times \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) dV dE' d\Omega' \end{aligned}$$

这里  $f_s$  和  $f_{s_n}$  分别是弹性和非弹性散射函数；将上式对所有  $E'$  和  $\Omega'$  积分之，并简记

$$\Sigma_{s_r} = \Sigma_s + \Sigma_{s_n} \quad , \quad (4-19)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{s_r}(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) &= \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_s(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) + \\ &+ \Sigma_{s_n}(\mathbf{r}, E') f_{s_n}(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \quad , \end{aligned} \quad (4-20)$$

则便可求得在  $dV$  内单位时间由各种不同能量和运动方向散射到  $dE d\Omega$  基元内的中子总数为

$$I = dV dE d\Omega \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \Sigma_{s_r}(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) d\Omega' \quad (4-21)$$

产生率的第二来源则是由于  $dV$  内的中子源所产生的贡献。对反应堆来讲，由于核裂变反应所产生的中子是最主要的中子源。设  $\nu(E')$  为能量等于  $E'$  的中子每次裂变后所产生的平均中子数，于是在  $dV$  内单位时间所产生的裂变中子总数为

$$\int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) d\Omega' dV \quad .$$

若假定裂变中子为各向同性的， $\chi(E)$  为其能谱分布，同时假设除裂变中子之外的独立中子源<sup>1)</sup>的源强为  $s(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ ，那末，单位时间在空间  $\mathbf{r}$  处由于中子源所产生的能量为  $E$ ，运动方向为  $\Omega$  的中子数为

$$\begin{aligned} &S(\mathbf{r}, E, \Omega, t) dV dE d\Omega \\ &= dV dE d\Omega \left[ \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) d\Omega' \right. \\ &\quad \left. + s(\mathbf{r}, E, \Omega, t) \right] \quad . \end{aligned} \quad (4-22)$$

这样，中子的产生率便等于

1) 此处独立中子源一词指不依赖于系统内中子密度而独立存在且强度也与系统无关的源，例如自发裂变源、天然放射性源以及其他中子源。

$$Q = Q(\mathbf{r}, E, \Omega, t) dV dE d\Omega = \left[ \int_0^{\infty} dE' \int_{\Omega'} \Sigma_{s,1}(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \right. \\ \left. \times \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) d\Omega' + S(\mathbf{r}, E, \Omega, t) \right] dV dE d\Omega, \quad (4-23)$$

最后，中子密度随时间的变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, E, \Omega, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t). \quad (4-24)$$

将(4-17)到(4-24)式的各种结果代入文字表达式(4-13)内并消去 $dV dE d\Omega$ 便得到任一时刻 $t$ 在相空间 $(\mathbf{r}, E, \Omega)$ 上的中子平衡方程

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \phi + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi = \int_0^{\infty} \int_{\Omega'} \Sigma_{s,1}(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) \\ \times dE' d\Omega' + S(\mathbf{r}, E, \Omega, t), \quad (4-25)$$

式中 $\phi = \phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ 。这便是非稳态情况下的中子输运方程或玻尔兹曼方程，它构成了反应堆物理分析及中子输运理论的基础。

稳态时， $\partial n / \partial t = 0$ ，便得到稳态中子输运方程。在反应堆计算中还经常应用无量纲的勒( $u$ )作为能量变量。中子通量 $\phi(\mathbf{r}, u, \Omega)$ 和 $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$ 的关系是

$$\phi(\mathbf{r}, u, \Omega) du = -\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) dE,$$

右端取负号的原因是因为勒的增加相当于 $E$ 的减少。根据(1-74)式有 $du = -dE/E$ ，因而

$$\phi(\mathbf{r}, u, \Omega) = E\phi(\mathbf{r}, E, \Omega). \quad (4-26)$$

这样，在(4-25)式中把自变量 $E$ 置换为 $u$ ，则稳态时输运方程便写成

$$\Omega \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, u, \Omega) + \Sigma_t(\mathbf{r}, u) \phi(\mathbf{r}, u, \Omega) \\ = \int_0^{\infty} du' \int_{\Omega'} \Sigma_{s,1}(\mathbf{r}, u') f(\mathbf{r}, u' \rightarrow u, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, u', \Omega') d\Omega' + S(\mathbf{r}, u, \Omega). \quad (4-27)$$

若考虑简单情况，即中子具有相同的能量，则上述方程中的自变量 $E$ 或 $u$ 可以消去。子是单速(能)中子输运方程便写成：

$$\Omega \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma_t(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, \Omega) = \int_{\Omega'} \Sigma_{s,1}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + \\ + S(\mathbf{r}, \Omega). \quad (4-28)$$

由此可见，中子输运方程是一个线性的微分-积分方程，在一般情况下稳态时它包含有 $\mathbf{r}(x, y, z)$ ， $E$ 和 $\Omega(\theta, \varphi)$ 六个自变量。这样方程的求解在数学上是很困难的。即使应用电子计算机数值求解也仍然是非常复杂和困难的事情，并且并不是对所有复杂问题都能求出其解的。因而，反应堆物理分析的主要任务也就在于建立一些简单的近似模型和分析方法，并把它应用于反应堆的一些具体问题求解。

## 2.2 边界条件

中子输运方程是一个微分-积分方程。从方程的导出过程可以看出，它只是表示中子数目守恒规律的数学形式，即中子密度分布函数所应该满足的方程。它并不给出某一特定物理问题状态的完整的描述。因为具有相同参数 $\Sigma_f$ 、 $\Sigma_s$ 和散射函数（亦即材料成分相同）的反应堆，不管它的起始状态如何，不管它的形状以及所处的外界条件如何，它们的中子输运方程的形式都是相同的，也就是说都满足相同的方程。对于不同问题的描述，主要区别在于初始或边界条件的不同。从数学上来说，由于在方程的普遍解中包含有任意的积分常数，为了确定这些与具体物理问题相应的常数的值，就要对普遍解加上某些限制条件，这就是根据问题的物理性质所规定的边界条件和初始条件。这些定解条件的数目要给定恰好能保证给出问题的唯一解。

解中子输运方程时常遇到的边界条件为：

(1) 在方程所适用的区域内，中子通量必须为有限值，并且不能为负值。

(2) 两种不同介质的分界面 假如两种介质直接接触，其间没有其他物质插入，那末根据连续性条件，在分界面上应该满足

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) \text{ 在交界面上沿所有 } \Omega \text{ 方向} \\ \text{是 } \mathbf{r} \text{ 的连续函数} \quad (4-29)$$

然而，如果在分界面上插入第三种介质，那末，就必须考虑中子穿过这层介质的效应，这时边界条件(4-29)式就要加以修正(图4-6)。

(3) 自由表面 在中子输运理论中，自由表面一词用来指没有外界中子进入物体内部的那种表面或那一部分表面。假定中子输运过程所发生的区域是由凸的(非自交表面)且分块光滑的曲面 $\Gamma$ 所围成。凸的表面的意思是：从表面向外引出的任一根直线都不会再与这一表面相交(参看图4-7)，因而这种表面就是自由表面，因为中子自表面逸出后就不可能再返回到域内来。反之，对于非凸表面，则可以接收到由另一部分表面所放出的中子，就不再认为是自由表面。这样，对自由表面的边界条件可以写成

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma \text{ 若 } \mathbf{n} \cdot \Omega < 0 \quad (4-30)$$

式中 $\mathbf{n}$ 为边界 $\Gamma$ 上 $\mathbf{r}$ 点的单位外法线矢量。

在研究非稳态情况时，除了给出边界条件外，还必须给出问题的初始条件，例如 $t = 0$ 时刻的中子角通量分布 $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, 0)$ 。

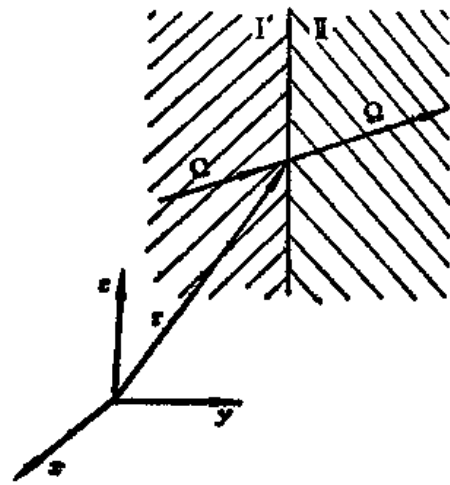


图4-6 两种介质分界面

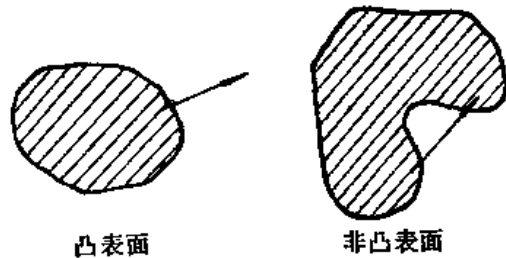


图4-7 凸表面和非凸表面示意图

## 2.3 不同坐标系内中子输运方程的形式

在具体求解中子输运方程(4-25)式时,为了计算上的方便,对于不同的问题往往采用不同的坐标系。对不同的坐标系 $\Omega \cdot \text{grad}\phi$ 项具有不同的形式。根据场论的知识知道, $\Omega \cdot \text{grad}\phi$ 就是函数 $\phi$ 在 $\Omega$ 方向上的方向导数。因而设射线 $l$ ,其方向与 $\Omega$ 重合, $dl$ 即为 $\Omega$ 方向的增量(见图4-8),则

$$\Omega \cdot \nabla\phi = \Omega \cdot \text{grad}\phi = \frac{d\phi}{dl} \quad (4-31)$$

下面我们根据(4-31)式来导出在反应堆计算中常用的几种坐标系内 $\Omega \cdot \nabla\phi$ 及中子输运方程的表达式。

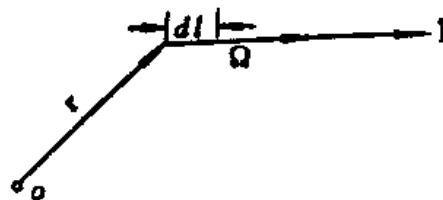


图4-8 方向导数的计算

### 2.3.1 直角坐标系

前面在导出中子输运方程的时候,已经求得在直角坐标系内 $\Omega \cdot \nabla\phi$ 的表达式为[参阅(4-14)和(4-2)式]

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla\phi &= \Omega_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ &= \sqrt{1-\mu^2} \left( \cos\varphi \frac{\partial\phi}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial\phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (4-32)$$

式中 $\mu = \cos\theta$ 。因而在直角坐标系内稳态中子输运方程为

$$\begin{aligned} &\sqrt{1-\mu^2} \left( \cos\varphi \frac{\partial\phi}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial\phi}{\partial z} + \Sigma_s \phi \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\mu' d\varphi' dE' \\ &+ S(\mathbf{r}, E, \Omega) \end{aligned} \quad (4-33)$$

### 2.3.2 一维平面问题

一维平面问题是直角坐标系的最简单情况。这时中子通量等仅是一维坐标轴 $Z$ 及 $\Omega$ 与 $Z$ 轴夹角 $\theta$ (或 $\mu = \cos\theta$ )的函数(参看图4-9),因而(4-32)式便简化为

$$\Omega \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi(z, E, \mu)}{\partial l} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} = \mu \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (4-34)$$

式中  $\phi(z, E, \mu) d\mu d\varphi = \phi(z, E, \Omega) d\Omega$ 。由于中子通量对辐角  $\varphi$  的对称性，对一维平面问题我们通常这样定义  $\phi(z, E, \mu)$ ，即

$$\phi(z, E, \mu) d\mu = d\mu \int_0^{2\pi} \phi(z, E, \Omega) d\varphi$$

或 
$$\phi(z, E, \mu) = 2\pi\phi(z, E, \Omega) \quad (4-35)$$

同样方法规定  $S(z, E, \mu)$  为

$$S(z, E, \mu) = 2\pi S(z, E, \Omega) \quad (4-36)$$

如果假定散射函数  $f(E' \rightarrow E; \Omega' \rightarrow \Omega)$  仅仅是散射前后运动方向  $\Omega$  和  $\Omega'$  间夹角（即散射角  $\theta_0$ ）的函数，若令  $\mu_0 = \cos(\Omega', \Omega) = \cos\theta_0$ （参看图4-10），那末同样可以规定：

$$f(E' \rightarrow E; \mu_0) = 2\pi f(E' \rightarrow E; \Omega' \rightarrow \Omega) \quad (4-37)$$

把 (4-34) — (4-37) 式代入方程 (4-25) 式便得到一维情况的稳态中子输运方程为

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \phi(z, E, \mu)}{\partial z} + \Sigma_t \phi(z, E, \mu) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_{s,i}(z, E') f(z, E' \rightarrow E, \mu_0) \phi(z, E', \mu') d\mu' d\varphi' dE' + S(z, E, \mu) \end{aligned} \quad (4-38)$$

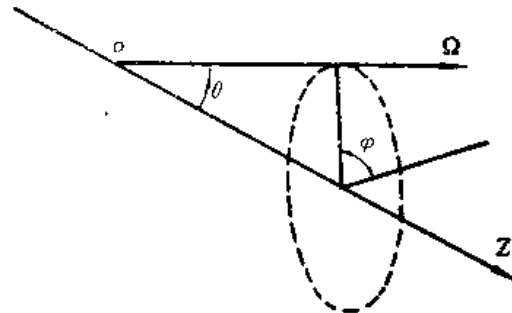


图4-9 一维平面坐标系

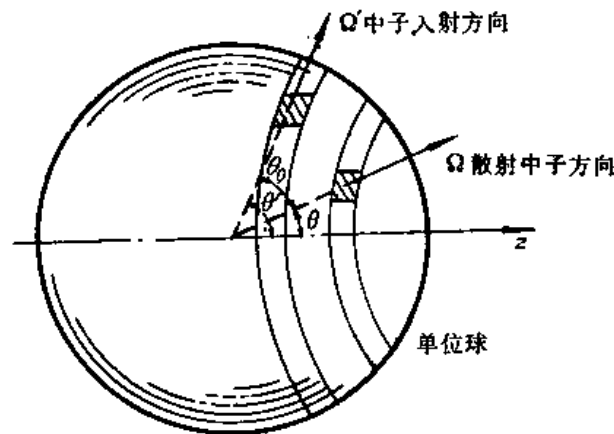


图4-10.  $\mu = \cos\theta, \mu' = \cos\theta', \mu_0 = \cos\theta_0$

### \*2.3.3 球对称情况

这时中子通量仅是位置坐标  $r$  (所讨论点  $r$  到球对称中心的距离) 和方向角  $\theta$  (中子运动方向  $\Omega$  和  $r$  的夹角) 的函数 (见图4-11)。

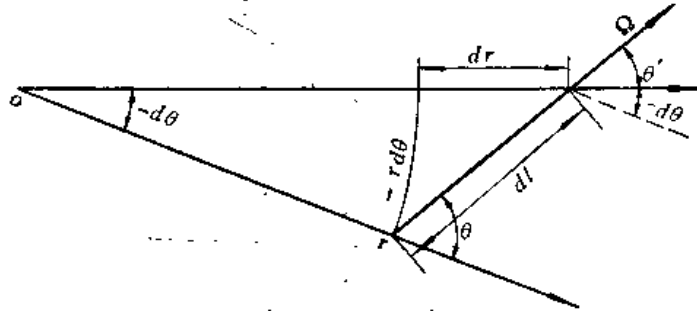


图4-11 球对称情况中子运动的表示

令  $\mu = \cos\theta$  有

$$\Omega \cdot \nabla \phi(r, E, \mu) = \frac{\partial \phi}{\partial l} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{dl} + \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dl}$$

从图4-11的几何关系中有

$$\frac{dr}{dl} = \cos\theta = \mu, \quad \frac{d\mu}{dl} = \frac{d\mu}{d\theta} \frac{d\theta}{dl} = -\sin\theta \left( -\frac{\sin\theta}{r} \right) = \frac{1 - \mu^2}{r}$$

因而

$$\Omega \cdot \nabla \phi(r, E, \mu) = \mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \quad (4-39)$$

将 (4-39) 式代入 (4-25) 式便求得球对称情况下的稳态输运方程形式为:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \Sigma_s \phi \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_{s,0}(r, E') f(r, E' \rightarrow E, \mu_0) \phi(r, E', \mu') d\mu' d\varphi' dE' \\ & + S(r, E, \mu) \quad , \end{aligned} \quad (4-40)$$

式中  $\phi = \phi(r, E, \mu) = 2\pi\phi(r, E, \Omega)$  .

### \*2.3.4 轴对称无限圆柱情况

在反应堆计算中经常遇到圆柱状域的情况, 例如反应堆芯部、燃料棒等等, 这时采用圆柱坐标系是比较方便的。同时许多问题中, 中子通量是对轴线  $Z$  对称 (与  $\varphi$  角无关) 而且



与  $Z$  的高度无关 ( $Z$  方向无限长) 的, 这便是轴对称无限圆柱问题。这时中子通量仅仅是  $r$  [向径  $r$  在  $(x, y)$  平面的投影]、 $\theta$  (运动方向  $\Omega$  与  $Z$  方向的夹角) 和  $\varphi$  [ $\Omega$  和  $r$  在  $(x, y)$  平面上投影间的夹角] (参看图4-12) 的函数并有

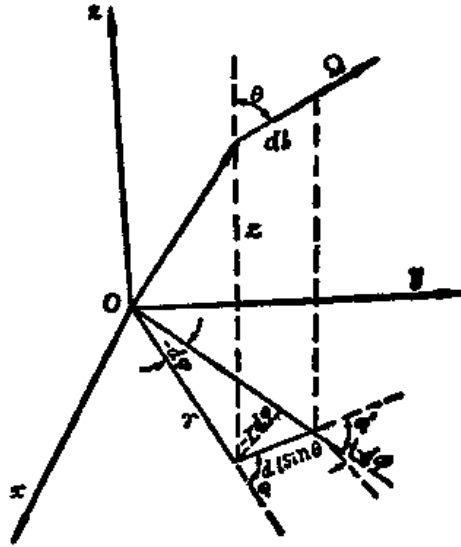


图4-12 轴对称圆柱坐标内中子运动的表示

$$\Omega \cdot \nabla \phi(r, \mu, \theta, \varphi) = \frac{\partial \phi}{\partial l} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{dl} + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dl} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dl} .$$

从几何关系有

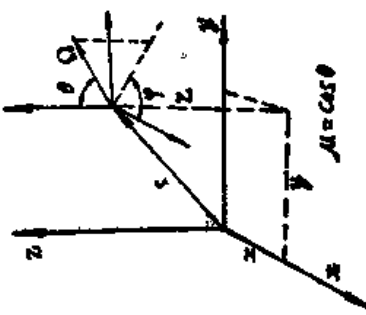
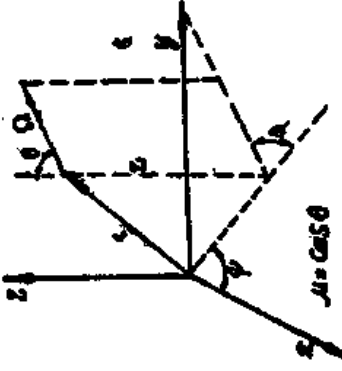
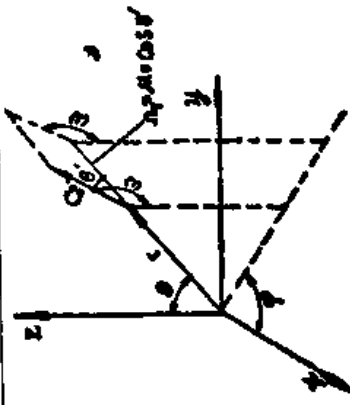
$$\frac{dr}{dl} = \sin\theta \cos\varphi \quad ; \quad \frac{d\varphi}{dl} = -\frac{\sin\theta \sin\varphi}{r} \quad ; \quad \frac{d\theta}{dl} = 0 .$$

最后便得到在轴对称无限圆柱问题中的输运方程为

$$\begin{aligned} & \sin\theta \left( \cos\varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \Sigma_t \phi \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_{s,1}(r, E') f(r, E' \rightarrow E, \mu_0) \phi(r, E', \theta', \varphi') d\mu' d\varphi' dE' \\ & + S(r, E, \theta, \varphi) \end{aligned} \tag{4-41}$$

对于更一般情况下圆柱坐标以及球坐标内  $\Omega \cdot \nabla$  的表达式在表4-1中给出。

表4-1 不同坐标系中  $\Omega \cdot \nabla \phi$  的表达式

		空间变量	方向变量	$\Omega \cdot \nabla \phi$	$dV$	$\int d\Omega$
直角坐标系		$z$	$\theta$	$\mu \frac{\partial \phi}{\partial z}$	$dz$	$2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu$
		$x, y, z$	$\theta, \varphi$	$\sqrt{1-\mu^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial \phi}{\partial z}$	$dx dy dz$	$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi$
圆柱坐标系		$r$	$\theta, \varphi$	$\sqrt{1-\mu^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right)$	$2\pi r dr$	
		$r, z$	$\theta, \varphi$	$\sqrt{1-\mu^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \mu \frac{\partial \phi}{\partial z}$	$2\pi r dr dz$	$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi$
		$r, z, \psi$	$\theta, \varphi$	$\sqrt{1-\mu^2} \left[ \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \right] + \mu \frac{\partial \phi}{\partial z}$	$r dr d\psi dz$	
球面坐标系		$r$	$\theta'$	$\mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \mu}$	$4\pi r^2 dr$	$2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu$
		球对称	$r, \theta, \varphi$	$\theta', \omega^{(1)}$	$\mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \sqrt{1-\mu^2} \left( \frac{\sin \omega}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \cos \omega \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) - \sin \omega \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \omega} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \mu}$	$r^2 \sin \theta dr \cdot d\theta d\varphi$

1):  $\omega$  是矢量  $r$  和  $\Omega$  形成的平面与矢量  $r$  和  $z$  形成的平面间的夹角。

### · 3. 特征值 (临界) 问题和源迭代法

中子输运方程 (4-25) 式在稳态 (临界) 无外中子源情况下用算子形式可以写成:

$$\mathbf{L}\phi = \mathbf{M}\phi, \quad (4-42)$$

式中  $\phi = \phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$  算子  $\mathbf{L}$  和  $\mathbf{M}$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\phi = & (\Omega \cdot \nabla + \Sigma_t) \phi - \int_0^\infty \int_{\Omega'} \Sigma_{s, l}(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \\ & \times \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\Omega' dE', \end{aligned} \quad (4-43)$$

$$\mathbf{M}\phi = \frac{X(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} v(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\Omega' \quad (4-44)$$

(4-42) 式是一个关于  $\phi$  的线性齐次方程。从数学上知道, 它只有在一定的条件下才存在有非零解。这在物理上反映了这样的事实: 对于给定的方程参数  $\Sigma_s, v\Sigma_f, \dots$  (也就是给定材料成分和特性), 只有在一定的几何尺寸下, 系统才能达到临界状态; 反之对于给定的几何条件就要求一定的材料的特性。因而对于任意给定系统, 一般情况下方程 (4-42) 并不一定都有解。但是这在物理上可以借助引进一个特征参数值来调节使它达到临界, 即把每次裂变放出的中子数  $v$  除以一个参数  $k$ 。改变  $k$  值大小, 就可以使系统达到临界。因为若原来给定的问题是次临界的, 则我们将  $v$  除以一个小于 1 的正数  $k$ , 亦即人为地提高每次裂变产生的中子数。改变  $k$  值大小必然可找到使系统恰好达到临界的  $k$  值。反之, 若系统是超临界的, 则应除以大于 1 的  $k$  值, 也可使其达到临界。

因而方程 (4-42) 的定解问题可以归结为下列方程的特征值问题, 即

$$\mathbf{L}\phi = \frac{1}{k} \mathbf{M}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi, \quad (4-45)$$

式中  $\lambda = 1/k$  称为方程的特征值, 对应的解  $\phi$  称为特征函数。

显然, 从前面  $k$  引入的物理概念可以看出, 它就是系统的有效增殖因数。为了说明这一点, 把方程 (4-45) 两边对  $\Omega, E$  和反应堆体积积分。这样方程左端  $\mathbf{L}\phi$  的第一项便等于

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dE \int_{\Omega} d\Omega \int_V \Omega \cdot \nabla \phi dV &= \int_0^\infty dE \int_{\Omega} d\Omega \int_V \text{div} \phi \Omega dV \\ &= \int_0^\infty dE \int_{\Omega} d\Omega \int_S (\Omega \cdot \mathbf{n}) \phi_s dS, \end{aligned}$$

这里我们应用了关系式  $\Omega \cdot \nabla \phi = \text{div} \phi \Omega$  和高斯-奥斯特洛格拉斯基定理, 式中  $S$  系反应堆的外表面。由于当  $\Omega \cdot \mathbf{n} < 0$  时,  $\phi_s = 0$ , 所以上面的积分便等于从反应堆外表面上向外的泄漏中子总数。

$\mathbf{L}\phi$  的第二项积分便等于单位时间内总的被吸收中子数和发生的散射中子总数。而第三项通过积分次序的交换等于

$$\begin{aligned}
 & - \int_V dV \int_0^\infty dE \int_{\Omega'} d\Omega' \int_0^\infty dE' \int_{\Omega} \Sigma_{s,1}(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\Omega \\
 & = - \int_V dV \int_0^\infty dE \int_{\Omega'} d\Omega' \int_0^\infty dE' \int_{\Omega} \Sigma_{s,1}(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') dE' \\
 & = - \int_V dV \int_{\Omega'} d\Omega' \int_0^\infty dE' \int_{\Omega} \Sigma_{s,1}(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') dE \\
 & = - \int_V dV \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \Sigma_{s,1}(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\Omega'
 \end{aligned}$$

它显然就等于单位时间内发生散射的总数取负号。它和第二项中的散射中子总数恰好抵消。

另外对右端  $M\phi$  的积分就等于单位时间内产生的新一代中子总数。这样由 (4-45) 使得

$$k = \frac{\iiint M\phi dE d\Omega dV}{\iiint L\phi dE d\Omega dV} = \frac{\text{新一代中子的产生率}}{\text{中子总消失率 (被吸收率 + 泄漏率)}}$$

这正是前面所定义的有效增殖因数。

上面我们从物理上的要求说明了方程 (4-45) 式的正的实特征值和特征函数的存在性。但是，要从数学上证明则比较困难的，并超出了课程的要求范围。可以证明，一般存在有无限多个特征值，但是对稳态反应堆有意义的只是其最小的特征值  $\lambda_1 = 1/k$ 。

要从 (4-45) 式直接求出特征值是非常困难的。一般情况下比较有效的方法是应用源迭代法来求得，它特别适用于数值计算。其计算步骤大致如下：先任意给定一个分布源

$$Q(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dE' \int_{\Omega} v(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\Omega' \quad (4-46)$$

比如说令  $Q(\mathbf{r}) = Q^{(0)}(\mathbf{r})$ ，将  $Q^{(0)}(\mathbf{r})$  代入方程 (4-42) 式右端并可解出中子通量  $\phi^{(1)}(\mathbf{r}, E, \Omega)$ ，将其代入 (4-46) 式便可求出新的分布源  $Q^{(1)}(\mathbf{r})$ 。然后再利用  $Q^{(1)}(\mathbf{r})$  重新解方程 (4-42)，再求出新的解  $\phi^{(2)}(\mathbf{r}, E, \Omega)$ ，依次类推。例如，对于第  $n$  次迭代有

$$L\phi^{(n)} = M\phi^{(n-1)} = \frac{\chi(E)}{4\pi} Q^{(n-1)}(\mathbf{r})$$

这个迭代过程一直进行下去，可以预期对于超临界系统， $\phi^{(n)}$  或  $Q^{(n)}(\mathbf{r})$  在逐次迭代中将增大，对于次临界系统将减小而对于临界系统将趋于常数。但无论是那一种情况，在迭代足够多的次数以后相继二次迭代的  $\phi$  或  $Q(\mathbf{r})$  的比值将趋近于一个与  $\mathbf{r}, \Omega, E$  无关的常数。从  $k$  的物理意义出发可知，它应该就是  $k$ ，即

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q^{(n)}(\mathbf{r})}{Q^{(n-1)}(\mathbf{r})} \quad (4-47)$$

在实际计算中只要当前后二次求得各点的  $k$  值之差在允许误差范围之内时，迭代过程便告终止。上面我们是从物理上论述迭代过程的收敛性，而关于收敛性的数学证明同样超出了本书的范围。源迭代法的进一步具体应用在第七章多群扩散方程的数值解法中将还要详细地讨论。

## 4. 中子输运方程的积分形式

前面我们求出的中子输运方程是一个一阶偏微分-积分方程。根据中子数目守恒原理从另一个角度可以求得输运方程的另一种形式——积分形式输运方程。可以证明这二种形式的输运方程在数学上是等价的。在一般情况下，积分形式的输运方程应用得比较少，这是因为微分方程的近似或数值求解要比积分方程容易得多。然而，对于某些特定的反应堆物理问题，积分方程方法却更为方便，而且只需作一般的努力就可以得出比较精确的结果。例如，在研究中子在非均匀介质中的吸收，以及反应堆计算中常用的碰撞几率方法（有时称积分输运理论）中，都广泛地应用积分形式的中子输运方程。

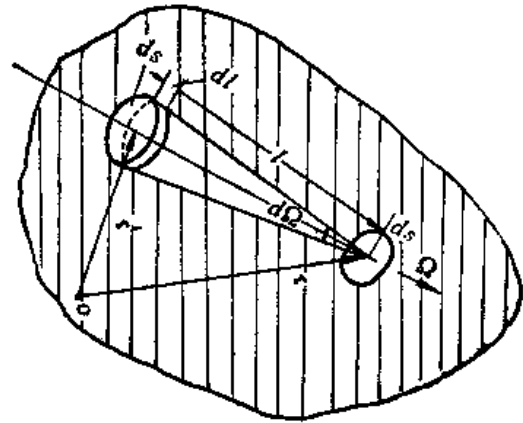


图4-13 积分输运方程的推导

### 4.1. 积分形式的中子输运方程

我们首先由中子数目守恒的基本原理推导出中子输运的积分方程，然后再证明它与玻尔兹曼方程的等价性。为简单起见，我们讨论稳态情况。设如图4-13所示。在  $r$  处有一垂直于  $\Omega$  的小面积元  $dS$ ，那末，单位时间沿  $\Omega$  方向穿过  $dS$  的能量为  $E$  的单位能量间隔内的中子数将等于

$$n(r, E, \Omega) v dS = \phi(r, E, \Omega) dS \quad (4-48)$$

另一方面，我们知道在  $r' = r - l\Omega$  处体积元  $dl dS$  内，每秒由于散射和中子源所产生的能量为  $E$  而运动方向为  $\Omega$  的单位立体角内的中子数目，根据 (4-23) 式等于

$$\begin{aligned} \phi(r - l\Omega, E, \Omega) dl dS = & \left[ \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \Sigma_{s,1}(r - l\Omega, E') f(r - l\Omega; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \right. \\ & \left. \times \phi(r - l\Omega, E', \Omega') d\Omega' + S(r - l\Omega, E, \Omega) \right] dl dS, \end{aligned} \quad (4-49)$$

而在  $r' = r - l\Omega$  处一个中子沿  $\Omega$  方向不受碰撞（一旦碰撞便改变了运动方向）而到达  $dS$  的几率为

$$\exp \left[ - \int_0^l \Sigma_t(r - l'\Omega, E) dl' \right]. \quad (4-50)$$

这样，单位时间在  $r'$  处的体积元内所产生的中子沿  $\Omega$  方向穿过  $dS$  的中子数便等于 (4-49) 式和 (4-50) 式的乘积。若对此乘积沿整个  $l$  积分，自然就应该等于 (4-48) 式的数值，于是便得到

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = \int_0^{\infty} \exp\left[-\int_0^l \Sigma_t(\mathbf{r}-l'\Omega, E) dl'\right] Q(\mathbf{r}-l\Omega, E, \Omega) dl \quad (4-51)$$

这就是所要求的关于中子角通量的积分输运方程。

在各向同性散射和各向同性源的情况下，(4-49)式可以简化。这时有

$$f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) = \frac{1}{4\pi} f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \quad ,$$

因而，

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r}', E, \Omega) &= \frac{1}{4\pi} Q(\mathbf{r}', E) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \Sigma_s(\mathbf{r}', E') f(\mathbf{r}', E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E') dE' \\ &+ \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}', E) \quad . \end{aligned} \quad (4-52)$$

这里式中右边积分号内原来的角通量，已经通过对 $\Omega'$ 的积分用总通量 $\phi(\mathbf{r}', E')$ 替代了。

将(4-52)式代入(4-51)式并将方程两边对所有 $\Omega$ 积分，同时把 $\mathbf{r}-l\Omega$ 换成 $\mathbf{r}'$ ，注意到 $d\Omega = dS/l^2$ ，因而 $dl d\Omega = dl dS/l^2 = dV/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2$ ，这样便得到

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, E) &= \int_{\text{全部空间}} \frac{\exp\left[-\tau(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})\right]}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \left[ \int \Sigma_s(\mathbf{r}', E') f(\mathbf{r}', E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E') dE' \right. \\ &\left. + S(\mathbf{r}', E) \right] dV' \end{aligned} \quad (4-53)$$

$$\text{其中} \quad \tau(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) = \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Sigma_t(E', l') dl' \quad (4-54)$$

(4-54)式中对 $l'$ 的积分是沿 $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ 的路径上进行的， $\tau(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$ 称之为连接 $\mathbf{r}'$ 与 $\mathbf{r}$ 点的直线路径的“光学距离”，也就是以平均自由程 $\lambda$ 作为单位量度的距离。当 $\Sigma_t = \text{常数}$ 时， $\tau$ 便等于 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\lambda$ 。

方程(4-53)便是我们所要求的关于中子通量 $\phi(\mathbf{r}, E)$ 的积分输运方程。它和玻尔兹曼方程一样具有中子平衡的物理意义。事实上方程中 $Q(\mathbf{r}', E)$ 便是 $\mathbf{r}'$ 处单位时间内产生的能量为 $E$ 的中子数，而其中有份额 $(4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2)^{-1}$ 是朝向 $\mathbf{r}$ 处的单位面积上运动的， $\exp[-\tau(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})]$ 则是减弱因子；因而(4-53)式中被积函数就是 $\mathbf{r}'$ 处所产生的中子对 $\mathbf{r}$ 处的中子通量的贡献，而(4-53)式则表示 $\mathbf{r}$ 处的中子总通量是由全部空间所有点 $\mathbf{r}'$ 所产生的中子对 $\mathbf{r}$ 点所形成的中子通量的贡献的总和。

从前面讨论可以看到，输运方程(4-25)和(4-51)都是从中子守恒原理出发推导而来的。所不同的是，玻尔兹曼方程(4-25)是建立在相空间元内中子守恒原理上，而积分输运方程是建立在整个系统空间内的中子守恒原理上的。

对于单能、均匀介质情况，若各向同性中子源分布为 $Q(\mathbf{r})$ ，则(4-53)式便进一步简化为

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\text{全部空间}} \frac{e^{-\Sigma_t |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} Q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \int K(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|) Q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad , \quad (4-55)$$

$$K(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|) = e^{-\Sigma_t |\mathbf{r}'-\mathbf{r}'|} / 4\pi |\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2 \quad . \quad (4-56)$$

积分方程 (4-55) 亦称为派耳司方程。另外, 还应指出, 积分核  $K(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|)$  就是吸收性介质中的单位各向同性源的格林函数。从物理上说它等于由  $\mathbf{r}'$  处的各向同性单位点源  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  对  $\mathbf{r}$  处的中子通量的贡献。其他形状的积分输运方程中类似的积分核也同样都是格林函数。

### \* 4.2 玻尔兹曼方程和积分输运方程的等价性

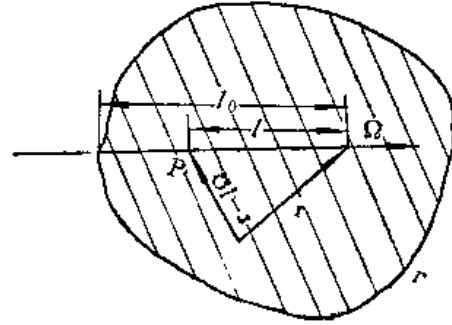


图4-14

我们现在来证明玻尔兹曼输运方程和积分输运方程的等价性。这只需证明从稳态的微分积分方程 (4-25) 可以直接导出积分方程 (4-51) 式就可以了。

首先注意到, 方程 (4-25) 中  $\Omega \cdot \nabla \phi$  是函数  $\phi$  沿  $\Omega$  的方向导数。现考虑在  $\Omega$  方向上某一点  $P(\mathbf{r} - l\Omega)$  (参看图 4-14)。对于  $P$  点, 把 (4-25) 中的  $\mathbf{r}$  换成  $(\mathbf{r} - l\Omega)$ , 稳态玻尔兹曼方程可重写为:

$$-\frac{d}{dl} \phi(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega) + \Sigma_t \phi(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega) = Q(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega), \quad (4-57)$$

式  $Q(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega)$  即 (4-49) 或 (4-23) 式。

如果假定源项  $Q(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega)$  为已知, (4-57) 式便是一个关于  $\phi(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega)$  的一阶线性常微分方程。应用边界条件 (4-30) [即  $\phi(\mathbf{r} - l_0\Omega, E, \Omega) = 0$ ], 很容易可以求得它的解为<sup>1)</sup>

$$\phi(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega) = \int_{l_0}^l Q(\mathbf{r} - l'\Omega, E, \Omega) \exp\left[-\int_{l'}^l \Sigma_t(\mathbf{r} - l''\Omega, E) dl''\right] dl',$$

其中  $l_0$  为自由边界  $\Gamma$  上之  $l$  值。现令  $l = 0$  便得到

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = \int_0^{l_0} Q(\mathbf{r} - l'\Omega) \exp\left[-\int_0^{l'} \Sigma_t(\mathbf{r} - l''\Omega, E) dl''\right] dl'. \quad (4-58)$$

如果介质为无限大, 上限  $l_0$  使用  $\infty$  来代替。这样便得到了 (4-51) 式, 并即证明了等价性。

## 5. 球谐函数方法

中子输运方程是一个含有  $\mathbf{r}(x, y, z)$ 、 $E$  和  $\Omega(\theta, \varphi)$  等六个自变量的微分-积分方程。因此, 要精确地求解这一方程是很困难的, 一般只有在极个别的简单情况下才是可能的。所以在实际的计算问题中通常是采用一些近似的方法求解。函数展开方法是其中常用的一种近似方法。它是把未知函数  $f(x)$  用一组已知的正交函数列  $P_n(x)$  (通常为多项式) 展开成级数, 而  $P_n(x)$  通常称为展开函数, 即

1) 参看B.И. 斯米诺夫著, 高等数学教程, 第二卷第一分册, 第一章, 高等教育出版社, 1960年。

$$f(x) \approx \sum_n f_n P_n(x) \quad , \quad (4-59)$$

其中 $f_n$ 为一组未知的待定系数。这样，就把问题转化为求解一组待定系数的问题。一旦求出系数 $f_n$ ，用(4-59)式便可确定出 $f(x)$ 了。例如，当以正交三角函数列作为展开函数时，就是我们所熟知的傅里叶级数方法。

若用一完备正交的球谐函数列（或称球函数，参阅附录12）作为展开函数便是所谓球谐函数方法。它在理论物理中是常用的一种方法。

在输运理论中，球谐函数方法是针对输运方程中自变量 $\Omega$ 所作的近似。它的实质是把方程中含有变量 $\Omega$ 的一些函数，例如中子通量 $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$ 等，用球谐函数作为展开函数，按照(4-59)式展成级数，然后把它代入到中子输运方程中去，这样就可把原来方程化成为一个微分方程组，然后由它可以确定出级数中的每个系数来。它的方法和用级数方法解微分方程颇有类似的地方。球谐函数方法在许多情况下是求解输运方程的一种比较简单、有效和常用方法，特别是由它所得到的扩散近似模型在反应堆计算中有着非常广泛的应用，是反应堆物理分析的常用的模型。

## 5.1 P<sub>N</sub>近似方程

为简单起见，我们先从研究单能一维平面问题开始。这样可以减少许多数学上的麻烦而更便于了解方法的步骤和实质。

根据(4-38)式，稳态单能一维平面问题的中子输运方程为

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \phi(z, \mu)}{\partial z} + \Sigma_s \phi(z, \mu) \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_s f(\mu_0) \phi(z, \mu) d\mu' d\varphi' + \frac{S(z)}{2} \quad , \end{aligned} \quad (4-60)$$

式中 $\mu = \cos\theta$ ， $\mu_0 = \cos(\Omega, \Omega') = \cos\theta_0$ （见图4-9和4-10）。这里为简单起见假定中子源为各向同性，同时略去非弹性散射的角标<sup>1)</sup>。而式中的中子通量和散射函数和(4-35)及(4-37)式一样，是已经对方位角积分后的数值。即

$$\begin{aligned} \phi(z, \mu) &= \int_0^{2\pi} \phi(z, \Omega) d\varphi = 2\pi\phi(z, \Omega), \\ f(\mu_0) &= 2\pi f(\Omega' \rightarrow \Omega) \quad . \end{aligned}$$

现在我们用球谐函数方法对(4-60)式近似求解。对于一维问题，我们把 $\phi(z, \mu)$ 及 $f(\mu_0)$ 用勒让特多项式展开成级数：

$$\phi(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(z) P_n(\mu) \quad , \quad (4-61)$$

1) 考虑非弹性散射时，其处理方法完全一样，只要把 $\Sigma_s$ 换成 $\Sigma_{s,1}$ 。



$$f(\mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n P_n(\mu_0) \quad (4-62)$$

其中  $P_n(\mu)$  为  $n$  阶勒让特多项式<sup>1)</sup> (见附录12)。系数  $\phi_n(z)$  及  $f_n$  可以利用勒让特多项式的正交性来求得。勒让特多项式的正交性可以表述如下:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{当 } n = m \end{cases} \quad (4-63)$$

因此, 在 (4-61)、(4-62) 式两边分别乘以  $P_n(\mu)$  及  $P_n(\mu_0)$ , 利用上述正交性质便可求得

$$\phi_n(z) = \int_{-1}^{+1} \phi(z, \mu) P_n(\mu) d\mu \quad (4-64)$$

$$f_n = \int_{-1}^{+1} f(\mu_0) P_n(\mu_0) d\mu_0 \quad (4-65)$$

可以看到,  $\phi_0(z)$ 、 $\phi_1(z)$  及  $f_1$  等项都有明确的物理意义, 例如,

$$\phi_0(z) = \int_{-1}^{+1} \phi(z, \mu) d\mu$$

这也就是我们前面所讲的中子总通量  $\phi(z)$ , 而

$$\phi_1(z) = \int_{-1}^{+1} \mu \phi(z, \mu) d\mu$$

就是我们前面所定义的中子流密度  $J_z(z)$ 。同样可以知道

$$f_0 = \int_{-1}^{+1} f(\mu_0) d\mu_0 = 1$$

$$f_1 = \int_{-1}^{+1} f(\mu_0) \mu_0 d\mu_0 = \overline{\mu_0}$$

根据散射函数的定义可以知道,  $f_1$  就等于平均散射角余弦  $\overline{\mu_0}$ 。

由于  $f(\mu_0)$  是已知函数, 因而  $f_n$  可以由 (4-65) 式求得。现在的问题就在于求出展式 (4-61) 中的  $\phi_n(z)$  各项了。为此我们把 (4-61) 及 (4-62) 式代入输运方程 (4-60) 中, 利用勒让特多项式的递推公式

$$\mu P_n(\mu) = \frac{(n+1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu)}{2n+1} \quad (4-66)$$

则得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\phi_n(z)}{dz} \left[ \frac{(n+1)}{2} P_{n+1}(\mu) + \frac{n}{2} P_{n-1}(\mu) \right]$$

1) 前面几阶的  $P_n(\mu)$  值是:  $P_0(\mu) = 1$ ;  $P_1(\mu) = \mu$ ;  $P_2(\mu) = 1/2(3\mu^2 - 1)$ ;  $P_3(\mu) = 1/2(5\mu^3 - 3\mu)$ ; ...

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Sigma_n \phi_n(z) P_n(\mu) \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_n \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(z) P_n(\mu') \right] \\
 & \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n P_n(\mu_0) d\mu' d\varphi' + \frac{S(z)}{2} \quad . \quad (4-67)
 \end{aligned}$$

注意到上式中  $\mu_0$  系  $\Omega$  与  $\Omega'$  之间的夹角余弦, 根据勒让特多项式的加法定理 (见附录12) 有

$$P_n(\mu_0) = P_n(\mu) P_n(\mu') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu) P_n^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \quad , \quad (4-68)$$

式中  $P_n^m(\mu)$  为伴随勒让特多项式<sup>1)</sup>。

现在我们来计算 (4-67) 式右边第一项的积分。把 (4-68) 式代入到积分号内并积分之。注意到由于含有  $\cos m(\varphi - \varphi')$  的各项在对  $d\varphi'$  作由 0 到  $2\pi$  积分后都等于零, 因而 (4-68) 式中只有第一项仍然保留并消去了  $1/2\pi$ , 这样 (4-67) 式右边第一项的积分便等于

$$\begin{aligned}
 I & = \int_{-1}^{+1} \Sigma_n \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(z) P_n(\mu') \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n P_n(\mu) P_n(\mu') \right] d\mu' \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Sigma_n \phi_n f_n P_n(\mu) \quad . \quad (4-69)
 \end{aligned}$$

这里我们已经用了勒让特多项式的正交性质 (4-63) 式。因此 (4-67) 式便可写成

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\phi_n(z)}{dz} [(n+1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu)] + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Sigma_n \phi_n(z) P_n(\mu) \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Sigma_n f_n \phi_n(z) P_n(\mu) + S(z) \quad .
 \end{aligned}$$

把上式两边依次乘以  $P_n(\mu)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , 并对  $-1 \leq \mu \leq 1$  积分之。注意到勒让特多项式的正交性, 我们便得到下面包含  $\phi_n(z)$  的一组无限多个微分方程:

$$\frac{n+1}{2n+1} \frac{d\phi_{n+1}(z)}{dz} + \frac{n}{2n+1} \frac{d\phi_{n-1}(z)}{dz} + \Sigma_n \phi_n(z) = S(z) \delta_{0,n} \quad , \quad (4-70)$$

$n = 0, 1, \dots$

式中  $\Sigma_n = \Sigma_i - \Sigma_j f_n \quad . \quad (4-71)$

这里  $\delta_{i,k}$  为克罗尼克尔 (Kronecker)  $\delta$  符号, 它的意义是: 当  $i \neq k$  时,  $\delta_{i,k} = 0$ , 当  $i = k$  时,  $\delta_{i,i} = 1$ 。

在实际计算中, 我们通常只取 (4-61) 展式中的有限项来近似地表示  $\phi(z, \mu)$  就可以了。例如取

$$\phi(z, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n(z) P_n(\mu) \quad , \quad (4-72)$$

1) 前面几阶的  $P_n^m(\mu)$  为:  $P_0^0(\mu) = 1$ ;  $P_1^0(\mu) = P_1(\mu) = \mu$ ;  $P_1^1(\mu) = -2P_1^{-1}(\mu) = (1-\mu^2)^{1/2} = \sin\theta$ ; ...

也就是说，当  $n > N$  时， $\phi_n(z) = 0$ 。这样我们从 (4-70) 式便得到  $N + 1$  个微分方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dz} + (\Sigma_1 - \Sigma_s)\phi_0 &= S, \\ \frac{2}{3} \frac{d\phi_2}{dz} + \frac{1}{3} \frac{d\phi_0}{dz} + (\Sigma_1 - \Sigma_s \overline{\mu_0})\phi_1 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\phi_{n+1}}{dz} + \frac{n}{2n+1} \frac{d\phi_{n-1}}{dz} + (\Sigma_1 - \Sigma_s f_n)\phi_n &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{N}{2N+1} \frac{d\phi_{N-1}}{dz} + (\Sigma_1 - \Sigma_s f_N)\phi_N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-73)$$

这是一个常微分方程组，加上适当的边界条件便可解出  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N$  来，代入 (4-72) 即求得  $\phi(z, \mu)$  了。

这样我们就把原来的输运方程 (4-60) 化成为一个含有  $\phi_n(z)$  的微分方程组 (4-73) 的求解问题。当  $N$  不大时这个方程组是比较易于近似 (或数值) 地求解的。这样的解法，我们称之为  $P_N$  近似。(4-73) 式便叫做  $P_N$  近似方程。例如，若取  $N = 3$ ，则称之为  $P_3$  近似。对于大型反应堆或中子通量角分布接近于各向同性问题，一般认为采用  $P_1$  近似就可以了。对于小型反应堆或者吸收性大、中子密度变化剧烈的一些问题，则需用  $P_3$  或更高阶的近似。应该指出， $P_3$  近似的计算已经很繁杂，往往需要利用数字计算机来求解。因此对  $N > 3$  的更高阶近似在实际问题中很少应用。

上面我们讨论了最简单的一维平面问题的球谐近似方法。对于更一般的几何情况 (例如圆柱问题) 的球谐近似方法，其步骤和方法也是一样，不过这时中子通量  $\phi(r, \Omega)$  则应按球函数展开。它比一维情况复杂得多，对于它的讨论已超出本书范围，读者可以参考有关文献，例如 [2]—[4]。

### 5.2 边界条件

为了确定在求解 (4-73) 微分方程组时所出现的积分常数，还应该给出必需的边界条件。给出的边界条件的数目应恰好等于待定的积分常数的数目以保证解的唯一性。

边界条件的提法应该根据问题的物理性质来规定 (见 2.2 节)。但是应该指出，在  $P_N$  近似下，由于  $n > N$  的  $\phi_n(z)$  各项都被略掉了，所求的是  $\phi(z, \mu)$  的近似解。因而边界条件 (4-29) 及 (4-30) 亦不可能严格地被满足，而相应地需以适当的近似的边界条件来代替。这时，近似边界条件应该这样地来选择：它在保证解的唯一性条件下，应使所讨论问题的解具有最大的精确度。因此， $P_N$  近似方法中应该怎样来选取边界条件是一个需要认真考虑的问题。下面介绍在实际中常用的一些边界条件：

**自由表面** 在一维情况下，在自由表面  $x = a$  处的边界条件为 [见 (4-30) 式]

$$\phi(a, \mu) = 0, \text{ 当 } \mu < 0 \text{ 时}$$

上式表明没有中子由  $-1 \leq \mu \leq 0$  方向返回，亦即没有中子自真空返回介质。这里变量  $\mu$  应取上述区间内的一切可能值。在  $P_N$  近似中这一条件不可能严格地满足。在实际计算中通常用一组近似的边界条件来代替，它要求通量的下列积分为零<sup>[5]</sup>：

$$\int_{-1}^0 \phi(a, \mu) P_{2n+1}(\mu) d\mu = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}, \text{ 当 } N \text{ 为奇数} \quad (4-74)$$

$$n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \text{ 当 } N \text{ 为偶数}$$

它最早由马绍克 (R. E. Marshak) 提出，并称之为马绍克边界条件。值得注意的是，对于  $n = 0$ ，上式的积分得出下列关系式

$$\int_{-1}^0 \mu \phi(a, \mu) d\mu = 0$$

稍加注意就可以看出，此积分事实上就是负方向的分中子流  $J_z^- = 0$ ，因而表示自真空返回介质的中子总数等于零。由此可见，马绍克边界条件已经将上述这一重要事实包括在内了。

**两种介质间的分界面** 在两种介质分界面上，严格的边界条件由 (4-29) 式给出。在  $P_N$  近似下，这个条件用下面一组条件<sup>[5]</sup>

$$\int \mu \phi(z, \mu) P_n(\mu) d\mu, \quad n = 0, 1, \dots, N \text{ 在分界面上连续} \quad (4-75)$$

来代替。将展式 (4-72) 代入，则由上式便可推得平面情况下的边界条件为：在分界面上，当  $N$  为奇数时， $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N$  连续

当  $N$  为偶数时， $\phi_1, \phi_0 + 2\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{N-1}, (N-1)\phi_{N-2} + N\phi_N$  连续

$$(4-76)$$

上面的边界条件 (4-74)、(4-76) 也可以应用变分原理求得<sup>[3]</sup>。从 (4-76) 式可以看到，当采用偶次近似时，中子总通量  $\phi_0(z)$  在分界面上将不连续。因此，再加上其他一些原因，我们在实际问题中往往采用奇次近似，例如  $P_1, P_3, \dots$  近似，而不采用偶次近似。

## 6. 扩散近似

在球谐函数方程中，最简单而又得到最广泛应用的是  $P_1$  近似。在本节中我们将对它进行详细的讨论和研究，同时将指出，第三章中的扩散理论就是  $P_1$  近似的一种结果；对于单速问题和源是各向同性的情况， $P_1$  近似和扩散理论是等价的。因而在许多场合下，我们习惯上常常称  $P_1$  近似为扩散近似。它在反应堆理论的发展中曾占有重要的地位；它是反应堆物理分析，特别是大型反应堆计算的基础。

### 6.1 一维情况

首先讨论最简单的一维平面问题。在  $P_1$  近似情况下，中子通量的展开式 [即 (4-61) 式] 中只保留前面二项，同时注意到  $\phi_0(z)$  就是中子总通量  $\phi(z)$ ，而  $\phi_1(z)$  就是中子流密度  $J(z)$ ，因而有

$$\phi(z, \mu) = \frac{1}{2} [\phi(z) + 3J(z)\mu] \quad (4-77)$$

而方程 (4-73) 则简写成

$$\frac{dJ}{dz} + \Sigma_a \phi = S, \quad (4-78)$$

$$\frac{d\phi}{dz} + 3\Sigma_r J = 0, \quad (4-79)$$

式中  $\Sigma_r = \Sigma_t - \Sigma_a, \bar{\mu}_0 = \Sigma_a + \Sigma_r (1 - \bar{\mu}_0)$  由 (4-79) 式可以得到 (4-80)

$$J = -D \frac{d\phi}{dz}, \quad (4-81)$$

$$D = \frac{1}{3\Sigma_r}. \quad (4-82)$$

这就是我们以前所熟悉的扩散理论中的斐克定律。(4-82) 式便是第三章中提到的由输运理论  $P_1$  近似求得扩散系数的表达式 [参阅 (3-15) 式]。把 (4-81) 式代入 (4-78) 式中, 便得到稳态一维情况的中子扩散方程 (3-28) 式:

$$\frac{d}{dx} D \frac{d\phi}{dx} + \Sigma_a \phi = S, \quad (4-83)$$

## 6.2 普遍几何情况

前面我们讨论了在一维情况下球谐函数方法中的一阶近似与扩散理论之间的关系。可以证明, 它在普遍几何情况下也仍然成立。对于普遍情况, 单速中子输运方程为

$$\Omega \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma_t \phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega'} \Sigma_s f(\mu_0) \phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + \frac{S(\mathbf{r})}{4\pi}. \quad (4-84)$$

这时, 单位方向矢量  $\Omega$  可通过  $\theta, \varphi$  二个变量表示。因而当用球谐函数方法求解时, 中子通量  $\phi(\mathbf{r}, \Omega)$  需按一组完备正交的球谐函数<sup>1)</sup> (见附录12)

$$Y_{n,m}(\Omega) = Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_n^{|m|}(\cos\theta) \sin|m|\varphi, & m = -1, \dots, -n \\ P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi, & m = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (4-85)$$

$n = 0, 1, \dots$

来展成级数, 即

$$\phi(\mathbf{r}, \Omega) = \phi(\mathbf{r}, \theta, \varphi) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^N (2n+1) \sum_{m=-n}^n (a_{n,m} \phi_{n,m}(\mathbf{r})) Y_{n,m}(\theta, \varphi) \quad (4-86)$$

1) 我们也可用指数函数代替三角函数, 而得到下列一组  $n$  阶球函数以代替 (4-85) 式

$$Y_{n,m}(\Omega) = P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad -n < m < n, \quad n = 0, 1, \dots$$

式中 $a_{n,m}$ 为已知系数, 而 $\phi_{n,m}(\mathbf{r})$ 则可由 $Y_{n,m}(\Omega)$ 的正交性质(见附录12)求得:

$$a_{n,m} = \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{2}{1+\delta_{0,m}}, \quad (4-87)$$

$$\phi_{n,m}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{r}, \Omega) Y_{n,m}(\Omega) d\Omega \quad (4-88)$$

如果在(4-86)式中取 $N=1$ , 也就是一阶近似。同时把(4-85)式和 $P_n^m(\mu)$ 的具体表达式(见附录或112页上注解)代入(4-86)式便有

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, \theta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} [\phi_{0,0} + 3(Y_{1,1}(\Omega)\phi_{1,1} + Y_{1,-1}(\Omega)\phi_{1,-1} + Y_{1,0}(\Omega)\phi_{1,0})] \\ &= \frac{1}{4\pi} [\phi_{0,0} + 3(\sin\theta\cos\varphi\phi_{1,1} + \sin\theta\sin\varphi\phi_{1,-1} + \cos\theta\phi_{1,0})] \end{aligned} \quad (4-89)$$

注意到(4-2)及(4-85)式有

$$\begin{aligned} \Omega &= \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k} \\ &= Y_{1,1}(\Omega)\mathbf{i} + Y_{1,-1}(\Omega)\mathbf{j} + Y_{1,0}(\Omega)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4-90)$$

若令  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \phi_{1,1}\mathbf{i} + \phi_{1,-1}\mathbf{j} + \phi_{1,0}\mathbf{k} = J_x\mathbf{i} + J_y\mathbf{j} + J_z\mathbf{k}$ , (4-91)

则(4-89)式可以写成

$$\phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [\phi(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})] \quad (4-92)$$

这里我们把 $\phi_{0,0}$ 简记为 $\phi$ 。

为了看出 $\phi(\mathbf{r})$ 及 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 的物理意义, 将(4-92)式两边对 $\Omega$ 积分, 并应用表4-2中的公式便得到

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \phi(\mathbf{r}) \int_{\Omega} d\Omega + \frac{3}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Omega} \Omega d\Omega = \phi(\mathbf{r}) \quad (4-93)$$

可见, (4-89)式中的 $\phi_{0,0}(\mathbf{r})$ 就等于中子总通量 $\phi(\mathbf{r})$ 。若将 $\Omega$ 数乘(4-92)式两边, 然后积分之并注意表4-2中公式便得

表4-2 一些含有 $\Omega$ 的积分公式

---

$\int d\Omega = 4\pi; \int \Omega d\Omega = 0$
$\int \Omega_i \Omega_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{i,j}, i, j = x, y, z$
$\int \Omega_x^l \Omega_y^m \Omega_z^n d\Omega = 0$ 若 $l, m$ 或 $n$ 为奇数
$\int \Omega(\Omega \cdot \mathbf{A}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} \mathbf{A}$
$\int (\Omega \cdot \mathbf{A})(\Omega \cdot \mathbf{B}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

---

A和B为二个与 $\Omega$ 无关的任意向量

---

$$\int_{\Omega} \Omega \phi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \frac{\phi(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{\Omega} \Omega d\Omega + \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Omega \cdot (\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})) d\Omega = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (4-94)$$

回顾 (4-11) 式便知道, (4-92) 式中  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  就是以前所定义的中子流密度。这样, (4-92) 式可以看做一维情况 (4-77) 式的自然推广。

下面我们来求  $P_1$  近似方程式。为此, 把 (4-92) 式和散射函数  $f(\mu_0)$  的展开式 [(4-62) 式] 代入方程 (4-84) 中, 同时应用勒让特多项式的加法定理和正交性质以及表 4-2 中的积分公式, 便可得到 (推导过程从简)

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla [\phi(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})] + \Sigma_s [\phi(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})] \\ = \Sigma_s \phi(\mathbf{r}) + 3\Sigma_s f_1 \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4-95)$$

把上式对  $\Omega$  积分并利用表 4-2 中公式, 便得到方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \Sigma_s \phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}) \quad (4-96)$$

其次, 将 (4-95) 式两边先数乘以  $\Omega$ , 然后再作对  $\Omega$  的积分, 藉助表 4-2 公式便得到第二个方程:

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) + 3\Sigma_s \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4-97)$$

$$\Sigma_s \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \Sigma_s \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \Sigma_s f_1 \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \Sigma_s \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \bar{\mu}_0 \Sigma_s \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

(4-96) 和 (4-97) 式便是普遍几何情况的  $P_1$  近似方程。(4-97) 式也可以写成熟悉的斐克定律形式

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -D \text{grad} \phi(\mathbf{r}) \quad (4-98)$$

式中

$$D = 1/(3\Sigma_s \mathbf{J}(\mathbf{r})) \quad (4-99)$$

把 (4-98) 式代入 (4-96) 式便得到普遍几何情况下的中子扩散方程。

$$-\text{div} D \text{grad} \phi(\mathbf{r}) + \Sigma_s \phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}) \quad (4-100)$$

### 6.3 与能量有关的扩散方程

下面讨论中子通量与能量有关的更普遍情况。根据 (4-25) 式稳态中子输运方程为

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) + \Sigma_s \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega'} \int_{E'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \mu_0) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') dE' d\Omega' + \frac{S(\mathbf{r}, E)}{4\pi} \end{aligned} \quad (4-101)$$

这时我们假定中子源项为各向同性的, 且式中

$$f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \mu_0) = 2\pi f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)$$

现在我们用球谐函数方法的一阶近似 (即  $P_1$  近似) 对方程 (4-101) 求解。根据前面讨论, 中子通量  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$  及散射函数  $f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \mu_0)$  可以用下列展式来表示:

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [\phi(\mathbf{r}, E) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E)] \quad (4-102)$$

$$f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) P_n(\mu_0) \quad (4-103)$$

式中

$$f_n(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) = \int_{-1}^{+1} f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E; \mu_0) P_n(\mu_0) d\mu_0. \quad (4-104)$$

将 (4-102)、(4-103) 式代入 (4-101) 式, 重复前面一节的推导过程。这里我们仅仅写出最后结果, 必要时, 读者可仿照前节步骤自行推证之, 这时只需对变量  $E$  加以留意就可以了。这样便得到和 (4-96) 及 (4-97) 式相类似的二个方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E) = \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_0(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)\phi(\mathbf{r}, E') dE' + S(\mathbf{r}, E), \quad (4-105)$$

$$-\frac{1}{3} \nabla \phi(\mathbf{r}, E) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_1(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)\mathbf{J}(\mathbf{r}, E') dE'. \quad (4-106)$$

这便是与能量有关的普遍几何情况下  $P_1$  近似方程。如果我们按下式定义扩散系数  $D(\mathbf{r}, E)$

$$D(\mathbf{r}, E) = \frac{1}{3\Sigma_{t,r}(\mathbf{r}, E)}, \quad (4-107)$$

$$\Sigma_{t,r}(\mathbf{r}, E) = \Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \frac{\int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_1(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)\mathbf{J}(\mathbf{r}, E') dE'}{\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)}, \quad (4-108)$$

则 (4-106) 式可以写成我们所熟悉的斐克定律形式

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = -D(\mathbf{r}, E)\nabla\phi(\mathbf{r}, E). \quad (4-109)$$

当然, 这样写法是有点勉强的, 因为在 (4-107) 式中  $D(\mathbf{r}, E)$  本身与  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$  有关。因此在实际中我们往往采用一些近似的假设, 例如我们近似地认为:

$$\Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_1(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \approx \Sigma_s(\mathbf{r}, E') \bar{\mu}_0 \delta(E' - E), \quad (4-110)$$

式中  $\bar{\mu}_0 = 2/3A$ , 就是散射角平均余弦。这样,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_1(\mathbf{r}, E' \rightarrow E)\mathbf{J}(\mathbf{r}, E') dE' &= \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E') \bar{\mu}_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, E') \delta(E' - E) dE' \\ &= \Sigma_s(\mathbf{r}, E) \bar{\mu}_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, E). \end{aligned} \quad (4-111)$$

(4-110) 式我们通常称为**输运近似**。把 (4-111) 式代入 (4-108) 式便得输运截面如下:

$$\Sigma_{t,r}(\mathbf{r}, E) = \Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \bar{\mu}_0 \Sigma_s(\mathbf{r}, E). \quad (4-112)$$

这样所求得的扩散系数在形式上和单能情况的 (4-99) 式完全相似。当然, 更精确的考虑最好是先估算出中子流密度或中子通量的能谱, 然后用 (4-108) 确定出扩散系数来。关于这一点以及近似能谱的计算, 我们将在多群常数中详细讨论。

把 (4-109) 式代入到 (4-105) 式中, 我们便得到**与能量有关扩散方程**:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D(\mathbf{r}, E)\nabla\phi(\mathbf{r}, E) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E) \\ = \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_0(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)\phi(\mathbf{r}, E') dE' + S(\mathbf{r}, E). \end{aligned} \quad (4-113)$$



这个方程在反应堆分析和计算中有着非常重要的意义，它通常是推导近代反应堆分析的基本方程——多群扩散方程的出发点。

## 6.4 边界条件

在第三章中我们曾经讨论过单速扩散理论的边界条件问题，这里再给予简要介绍和推广。

**两种不同介质的分界面** 根据在分界面上 $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$ 对沿所有 $\Omega$ 方向都是 $\mathbf{r}$ 的连续函数的要求，自然，在分界面上应该满足：

$$\begin{aligned} \int \phi^I(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega &= \int \phi^{II}(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega \Rightarrow \phi^I(\mathbf{r}, E) \\ &= \phi^{II}(\mathbf{r}, E) \quad , \end{aligned} \quad (4-114)$$

及

$$\begin{aligned} \int \Omega \phi^I(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega &= \int \Omega \phi^{II}(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega \Rightarrow \mathbf{J}^I(\mathbf{r}, E) \\ &= \mathbf{J}^{II}(\mathbf{r}, E) \quad , \end{aligned} \quad (4-115)$$

亦即要求在分界面上中子总通量及中子流密度必须连续，式中上角标 I 和 II 表示分界面两侧的不同介质。 $\mathbf{r}$  表示分界面上的点。

在扩散理论中，中子流密度 $\mathbf{J}$ 可用斐克定律来表示，因而便得到在分界面 $\mathbf{r}$ 上的边界条件为：

$$\phi^I(\mathbf{r}, E) = \phi^{II}(\mathbf{r}, E) \quad (4-116)$$

$$D^I \nabla \phi^I(\mathbf{r}, E) = D^{II} \nabla \phi^{II}(\mathbf{r}, E) \quad (4-117)$$

应该指出，上述的边界条件和一维情况 $P_1$ 近似时的(4-76)式是完全等价的。

**自由表面** 在自由表面 $\Gamma$ 上边界条件的严格表达式应该是(4-30)式。但是在 $P_1$ 近似中它是不可能严格地满足的，我们应用下列近似边界条件来代替

$$J^- = \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega = 0, \mathbf{r} \in \Gamma \quad (4-118)$$

式中积分限 $(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0$ 表示只对 $(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0$ 的那些 $\Omega$ (即半球)进行积分，因此 $J^- = 0$ 表示自真空返回域内的中子流密度等于零，这是符合物理上要求的。(4-118)式和一维情况的马绍克边界条件(4-74)式也是一致的。

对于扩散近似，若把中子通量的近似表达式(4-102)代入(4-118)式便得：

$$J^- = \frac{-1}{4\pi} \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0} (\Omega \cdot \mathbf{n}) \phi(\mathbf{r}, E) d\Omega - \frac{3}{4\pi} \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0} (\Omega \cdot \mathbf{n}) \cdot [\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E)] d\Omega = 0 \quad ,$$

为了便于计算上面的积分，取坐标轴 $\mathbf{Z}$ 与法线 $\mathbf{n}$ 的方向重合，这样 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 便等于 $\cos\theta$ ，同时将 $\Omega$ 的表示式(4-2)代入便得：

$$J^- = \frac{-\phi(\mathbf{r}, E)}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta - \frac{3}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta [\sin\theta \cos\varphi J_x$$

$$+\sin\theta \sin\varphi J_x + \cos\theta J_z] \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\phi(\mathbf{r}_s, E)}{4} - \frac{1}{2} J_z(\mathbf{r}_s, E) = 0 \quad .$$

注意到上述积分中Z轴的取向，有  $J_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$ ，再应用斐克定律便得扩散近似的边界条件(4-118)的具体形式为

$$\frac{1}{4} \phi(\mathbf{r}_s, E) + \frac{D(\mathbf{r}_s, E)}{2} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0 \quad . \quad (4-119)$$

这个边界条件用起来是不太方便的。在实际中通常用下面更为方便的形式来表示：即认为中子通量沿实际边界法线方向外推一个距离  $d$  处等于零（参看第三章1.3节）。根据(4-119)式，外推距离  $d$  由下式求得：

$$\frac{1}{d} = - \left. \frac{\nabla_s \phi}{\phi} \right|_{\mathbf{r}_s} = \frac{1}{2D(\mathbf{r}_s, E)} \quad , \quad (4-120)$$

式中  $\nabla_s \phi = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi$ ，因而自由表面的边界条件可以写成

$$(i) \text{ 在外推边界 } \mathbf{r}'_s \text{ 上 } \phi(\mathbf{r}'_s, E) = 0 \quad , \quad (4-121)$$

$$\text{或} \quad (ii) \text{ 在边界 } \mathbf{r}_s \text{ 上 } - \frac{\nabla_s \phi}{\phi} = \frac{1}{d} \quad . \quad (4-122)$$

(4-121) 和 (4-122) 式严格讲并不完全等价，但是对实际效果的差异是很小的，因而在实际应用中往往很少加以区别。

由(4-120)式知，外推距离  $d = 2D(\mathbf{r}_s, E) = 0.67\lambda_{tr}(\mathbf{r}_s, E)$ 。对输运方程更精确的研究表明，对于平面边界  $d \approx 0.7104\lambda_{tr}(E)$ ，因而一般地讲， $d$  和能量  $E$  有关，同时还和表面的曲率有关。[6]中给出外推距离的一些更精确的计算公式。但是，由于  $d$  的数值一般不超过1~2厘米，它和堆芯的尺寸比较起来是很小的，因此，在实际计算时通常可以认为  $d$  与能量无关并等于常数；而对于大型反应堆，甚至直接可以认为中子通量在实际边界上等于零，也不会导致很大的计算误差。

## 6.5 扩散理论的适用条件

前面我们对中子输运方程应用一阶近似的球谐函数方法导出了斐克定律和扩散方程。回顾前面讨论可知，对于单速问题，如果源是各向同性的，扩散理论模型便和  $P_1$  近似等价，因而对于  $P_1$  近似所作的一些假定和限制自然也就成为扩散理论成立所必须满足的条件。这些限制条件是：

1. 中子源  $S(\mathbf{r})$  必须是各向同性的 这个条件是很自然的，否则在(4-97)式中将还包含源的各向异性分量  $S_1(\mathbf{r})$  项，而不可能得到如(4-98)式那样斐克定律的简单形式。

2. 中子通量的角分布必须接近于各向同性 在  $P_1$  近似中，我们认为在中子角通量的球谐函数或勒让特多项式的级数展式中只需保留前二项就可以了[见(4-77)和(4-92)式]。这意味着要求中子角通量与  $\Omega$  的依赖关系较弱（或各向异性程度比较小）。

另一方面，中子通量角分布的各向异性程度和中子通量的空间变化率或梯度是互相联系着的。从前面图4-1中可以看出，在介质 I 中  $\Sigma_1^I \ll \Sigma_2^I$ ，远离边界的中心部分，中子通量的空间变化率是比较缓慢的，通量的角分布接近于各向同性。在靠近边界附近几个自由程的区

域内由于  $\Sigma^{II} \gg \Sigma^I$ , 因而存在着自域 I 向域 II 的净中子流, 所以中子通量的梯度就比较大, 而通量角分布的各向异性程度也就显著增大, 主要是指向域 II 的方向上的分布概率增大了。在区域 II 中由于  $\Sigma^{II} \gg \Sigma^I$  及泄漏的影响, 中子通量沿空间急剧地变化, 同时通量分布的各向异性也就更加显著。因此,  $P_1$  近似就要求中子通量的空间变化率或梯度 [即  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  或  $\phi_1(z)$ ] 相对地不能太大, 即

$$|\mathbf{J}(\mathbf{r})| \ll \phi(\mathbf{r}) \quad (4-123)$$

或

$$|\lambda_{1,1} \nabla \phi| \ll \phi \quad (4-124)$$

这样, 从 (4-92) 式可以看出, (4-123) 或 (4-124) 式条件意味着  $\phi(\mathbf{r}, \Omega)$  将主要由第一项起主导作用, 亦即  $\phi(\mathbf{r}, \Omega) \approx \phi(\mathbf{r})/4\pi$ , 也就是说角通量的角分布接近于各向同性。

那末究竟在什么情况下才能保证中子通量接近于各向同性或随空间的变化率比较小呢? 对输运方程的进一步研究表明, 在下面情况下, 上述条件遭到破坏: (i) 靠近真空边界附近, 或者在一个自由程的区域内材料性质有急剧的变化, (ii) 在中子源的邻近区域, (iii) 强吸收介质 ( $\Sigma_a \gg \Sigma$ ), 例如在铀棒或控制棒内部等。因而在上述情况下扩散理论的适用性就变得很差或者不能成立, 需要借助更高阶的近似或其他更精确的理论, 例如积分输运理论 (碰撞几率法) 来解决。

## \*7. 离散坐标 ( $S_N$ ) 方法

正如前述, 中子输运方程只是在极简单的情况下才能够得到精确的解析解。对于一般实际问题, 通常必须采用一些近似方法求解。前面介绍的球谐函数方法便是常用的近似方法之一, 其中扩散 ( $P_1$ ) 近似是一种最简单并且在反应堆分析中获得最广泛应用的方法。但是扩散近似有它的局限性。在边界或强吸收体附近, 或者在散射或通量分布各向异性比较严重的系统中, 它的误差比较大。在这种情况下, 就得应用更高阶 ( $N > 1$ ) 的球谐近似。但是, 当阶数增多时, 尤其是对于多维复杂几何情况, 球谐函数方法将变得非常复杂和困难。例如以  $P_3$  近似为例, 即使对于最简单的一维情况, 也需解联立的四个微分方程 [参阅 (4-73) 式], 每个方程都耦合有三个未知函数; 而对于普遍的几何情况, 中子通量需用 (4-86) 式球函数展开,  $P_3$  近似则需解含有  $\phi_{n,m}(\mathbf{r})$  ( $n=0,1,2,3; m=-n, \dots, n$ ) 的联立的 16 个方程, 而每个方程中将耦合有 7 个未知函数。这些方程组的数值求解将是非常麻烦的。因此, 对于实际问题, 尤其是多维情况, 很少使用高阶的球谐近似, 而往往采用一些更简便的方法, 例如积分输运 (碰撞几率) 方法和离散坐标方法等。

离散坐标 ( $S_N$ ) 方法最早是由卡尔逊 (b. G. Carlson) 应用于输运方程的求解。近年来随着大型电子计算机的发展和对  $S_N$  方法研究的深入,  $S_N$  方法已经成为研究粒子输运问题的有效的数值方法之一, 在反应堆物理和屏蔽计算中获得了广泛的应用。

离散坐标方法的实质在于: 对于函数  $f(x)$ , 首先把自变量  $x$  离散化, 得到离散的坐标点列  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , 然后求出这些离散坐标点上的函数值  $f(x_i)$ , 并用它们近似地表示函数  $f(x)$ 。显然, 当离散点取得足够密时, 便可得到所需要的精确度。

在中子输运方程中, 中子通量是  $\mathbf{r}, E, \Omega$  的函数。对于变量  $E$ , 通常用“分群方法”对它离散化处理, 这将在第六章中详细讨论。这里主要介绍对  $\Omega$  和  $\mathbf{r}$  的离散化处理, 尤其是对

表示中子运动方向的自变量 $\Omega$ 的离散化处理的一些特点和方法。应该指出，习惯上在运输问题中所谓“离散坐标方法”一词，也主要是指对自变量 $\Omega$ 所作的离散化处理而言的。下面简要地介绍这个方法的主要思想和特点，关于它更详细的讨论，读者可以参考文献[4]。

## 7.1 离散差分方程的推导

为简单起见，讨论单能一维球对称情况（参阅2.3.3节）。它基本上包含了方法的主要思想与特点，加以适当的补充便可推广到更普遍的情况。

### 7.1.1 运输方程的守恒形式

中子运输方程是根据在 $(r, E, \Omega)$ 相空间基元内中子守恒的关系建立起来的。如果把它对所有方向和有限体积积分，那么，其结果就应该给出该体积内给定能量中子的守恒关系，即对于稳态情况应有[见(4-13)式]

$$\text{泄漏率} + \text{移出率} = \text{产生率}$$

我们发现，当对运输方程数值求解时，在曲线坐标中， $\Omega \cdot \Delta \phi$ 项用特定的形式来表示将带来很大的方便和好处。我们希望：当把运输方程对所有方向和有限的体积积分时，所得到方程中的每一项都能够清楚地表示出中子守恒关系（(4-13)式）中某一项的物理意义。

以一维球对称单速情况为例。这时中子运输方程的形式为(4-40)式。但可以把其中的 $\Omega \cdot \nabla \phi$ 项用另一种方式表示，即把它改写成下列形式：

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \phi(r, \mu)] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \phi(r, \mu)] + \Sigma_t \phi(r, \mu) \\ = q(r, \mu) \end{aligned} \quad (4-125)$$

其中记 $q(r, \mu)$ 为源项

$$q(r, \mu) = \frac{\Sigma_s}{2\pi} \int_{\Omega'} f(\mu_0) \phi(r, \mu') d\Omega' + \frac{\nu \Sigma_f}{2} \int_{-1}^{+1} \phi(r, \mu') d\mu' \quad (4-126)$$

用体积元 $4\pi r^2 dr$ 乘(4-125)式并对 $r$ 自 $r_i$ 到 $r_{i+1}$ 积分，同时对所有方向（即对 $\mu$ 从 $-1$ 到 $+1$ ）积分之，那么第一项便给出

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_{i+1}} 4\pi r^2 \int_{-1}^{+1} \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial (r^2 \phi)}{\partial r} d\mu dr = 4\pi r^2 \int_{-1}^{+1} \mu \phi(r, \mu) d\mu \Big|_{r_i}^{r_{i+1}} \\ = A_{i+1} J_{i+1} - A_i J_i \end{aligned} \quad (4-127)$$

其中 $A_i = 4\pi r_i^2$ 是半径为 $r_i$ 处的球面积，而 $J_i$ 为 $r = r_i$ 处的径向中子流密度

$$J_i = \int_{-1}^{+1} \mu \phi(r_i, \mu) d\mu$$

这样第一项就是表示体积元 $(r_i, r_{i+1})$ 内中子的净流出（泄漏）率。

方程的第二项表示中子在曲线坐标中虽然其运动方向没有改变，但是其方向坐标却随空间位置连续地变化（见图4-11）而带来的影响。当对它作所有方向积分后，其结果等于零，

即

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} 4\pi r^2 \int_{-1}^{+1} \frac{1}{r} \frac{\partial[(1-\mu^2)\phi]}{\partial\mu} d\mu dr = \int_{r_i}^{r_{i+1}} 4\pi^2 r dr [(1-\mu^2)\phi] \Big|_{\mu=-1}^{\mu=1} = 0$$

第三项积分是中子由于各种碰撞的损失率，第四项则给出中子的产生率。由此可见，对(4-125)式作上述积分后，每一项都有与中子守恒关系相对应的明确的物理意义。当然，也可以直接对(4-40)式进行类似的积分，这时由 $\Omega \cdot \nabla\phi$ 项将得到两项，从数学上讲可以把这两项合并而得到(4-127)式，但是对每一单项来讲并没有物理意义。

我们把(4-125)式称为输运方程的守恒形式。对于柱坐标以及一般坐标情况下输运方程的守恒形式可参阅文献[1]、[4]。输运方程的守恒形式在输运方程的数值求解中是很有用的。由守恒形式导出的差分方程中每一项都有明确的物理解释，并且要比从非守恒形式输运方程中直接导出的，具有更高的精确度。在离散坐标( $S_N$ )方法中我们也是从中子输运方程的守恒形式来导出离散的差分方程。

### 7.1.2 差分方程的推导

我们从方程(4-125)出发来导出离散的差分方程。为此，我们把 $0 \leq r \leq R$  ( $R$ ——外推半径)区域以 $r_0 = 0, r_1, \dots, r_k, \dots, r_m$ 分成为 $M$ 个小区间(见图4-15)，同时使所有不同介质的分界面均落在离散点 $\{r_k\}$ 上，因而在每个区间 $(r_{k-1}, r_k)$ 内中子截面值均等于常数。把自变量 $\mu$ 以 $\mu_0 = -1, \mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_n = 1$ 分割成 $N$ 个离散区间，第 $J$ 区间的宽度为 $\Delta\mu_j = \mu_j - \mu_{j-1}$ (注意：这里以大写字母 $K, J$ 或罗马数 I、II...等表示区间及基点的序号，用小写字母 $k, j$ 及阿拉伯数字表示分点的序号)，这样，根据数值积分公式有

$$\int_{-1}^{+1} \phi(r, \mu) d\mu = \sum_{j=1}^N w_j \phi(r, \mu_j) \quad (4-128)$$

其中 $w_j$ 为求积系数， $\mu_j$ 为第 $J$ 个区间的基点 $\mu_{j-1} \leq \mu_j \leq \mu_j$ 。

计算实践表明，选取角度变量 $\mu$ 的离散分点的方法、数目以及基点 $\{\mu_j\}$ 和相应的 $\{w_j\}$ ，对计算的精确度有很大的影响。一般常取 $N$ 为偶数，而每个区间的宽度可以是等距或者不等距，但是通常要求分点 $\mu_j$ 和基点 $\mu_j$ 的方向对 $\mu = 0$ 为对称，即

$$\mu_j = -\mu_{N-j+1} \quad \mu_j = -\mu_{N+1-j} \quad w_j = w_{N+1-j} \quad (4-129)$$

因而

$$\sum_{j=1}^N \mu_j w_j = 0 \quad (4-130)$$

在早期的离散方法中，区间宽度通常取成等距 $\Delta\mu_j = 2/N$ ， $\mu_j = -1 + 2j/N$ ，同时在每个区间内的中子通量认为是直线变化，且 $\mu_j = -1 + (2j-1)/N$ ，也就是认为在 $[-1, 1]$ 区间内 $\phi(r, \mu)$ 被近似用 $N$ 个相等的弦段来表示(图4-16)，所以称之为 $S_N$ 方法。这里字母 $S$ 便是线段(Segment)的缩写，足标 $N$ 表示所分弦段的数目。目前都已不用直线弦近似，而应用一些更精确的求积公式，例如高斯求积组(见表4-3)等来进行计算。但是习惯上仍然称离散坐标法为“ $S_N$ ”方法，不过这时 $N$ 并不表示弦段的数目，而仅仅是表示离散方向的数目。

下面我们便来推导 $(r_{k-1}, r_k) \times (\mu_{j-1}, \mu_j)$ 相空间单元 $(K, J)$ 上的差分方程。为此将(4-

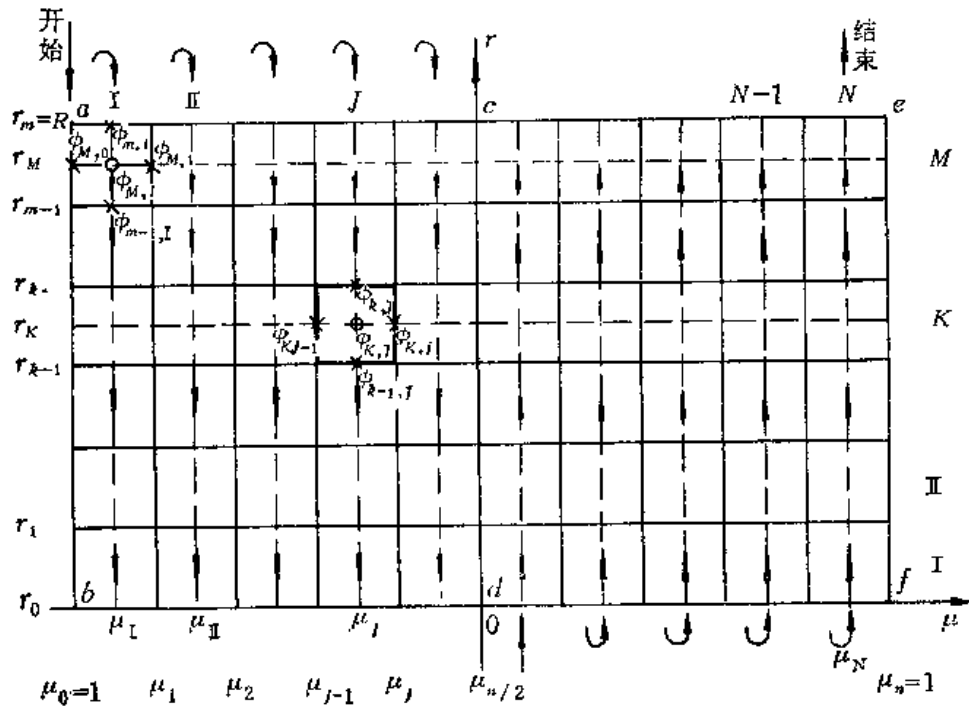


图4-15 (r, μ)坐标的离散网格

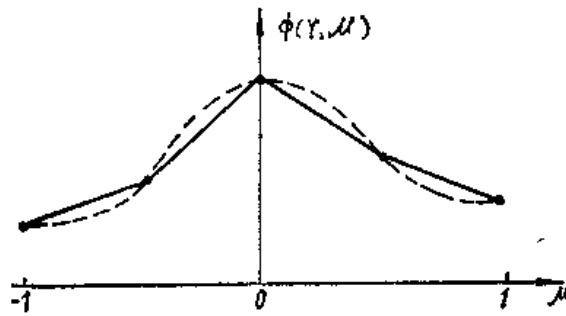


图4-16 角通量的离散线段表示

表4-3 高斯求积系数与基点 (N=2, 4)

N=2:	$W_I=W_{IV}=1.000$	$\mu_I=-\mu_{IV}=0.57735$
N=4:	$W_I=W_{IV}=0.65215$	$\mu_I=-\mu_{IV}=0.33998$
	$W_{II}=W_{III}=0.34785$	$\mu_{II}=-\mu_{III}=0.86114$

125) 式各项乘以相单元体积  $dv d\mu = 4\pi r^2 dr d\mu$  并对相单元区域积分之。这样，左端第一项便等于

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \int_{r_{k-1}}^r 4\pi\mu \frac{\partial}{\partial r} (r^2\phi) dr d\mu \\
 &= 4\pi \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} [r_k^2\mu\phi(r_k, \mu) - r_{k-1}^2\mu\phi(r_{k-1}, \mu)] d\mu .
 \end{aligned}$$

在计算 $\mu$ 积分时应用求积公式中的一项, 即

$$\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} f(\mu) d\mu \approx w_j f(\mu_j),$$

因而得到

$$T_1 = w_j \mu_j [A_k \phi_{k,j} - A_{k-1} \phi_{k-1,j}], \quad (4-131)$$

式中 $A_k = 4\pi r_k^2$ 为 $r_k$ 处的球面积,  $\phi_{k,j} \equiv \phi(\bar{r}_k, \mu_j)$ 。对于方程(4-125)的第二项则等于

$$\begin{aligned} T_2 &= 4\pi \int_{r_{k-1}}^{r_k} \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)\phi(r, \mu)] d\mu dr \\ &= 4\pi \int_{r_{k-1}}^{r_k} [(1-\mu_j^2)\phi(r, \mu_j) - (1-\mu_{j-1}^2)\phi(r, \mu_{j-1})] r dr \\ &\approx 4\pi r_k \Delta r_k [(1-\mu_j^2)\phi_{k,j} - (1-\mu_{j-1}^2)\phi_{k,j-1}], \end{aligned} \quad (4-132)$$

式中  $r_k = (r_k + r_{k-1})/2$ ;  $\Delta r_k = r_k - r_{k-1}$ ,  $\phi_{k,j} \equiv \phi(r_k, \mu_j)$ 。余类推之。(4-132)式可以写成关于 $j$ 的二点差分形式

$$T_2 = B_{k,j} \phi_{k,j} - B_{k,j-1} \phi_{k,j-1}, \quad (4-133)$$

其中曲率系数 $B_{k,j}$ 等于

$$B_{k,j} = 4\pi r_k \Delta r_k (1-\mu_j^2). \quad (4-134)$$

由于 $\mu_0 = -1$ 和 $\mu_n = 1$ , 因而 $B_{k,0} = B_{k,n} = 0$ , 同时, 注意到 $r_k \Delta r_k = (r_k^2 - r_{k-1}^2)/2$ , 且

$$\mu_j^2 - \mu_{j-1}^2 = 2 \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \mu d\mu = 2\mu_j w_j,$$

由(4-134)式便可得到关于 $B_{k,j}$ 的递推公式:

$$B_{k,j} - B_{k,j-1} = -4\pi(r_k^2 - r_{k-1}^2)\mu_j w_j = -\mu_j w_j (A_k - A_{k-1}). \quad (4-135)$$

由于 $B_{k,0} = 0$ , 由(4-135)式便可很方便地递推求得所有 $B_{k,j}$ 来, 同时根据 $\mu_j$ 的对称性(4-130)式, 同样可得

$$B_{k,n} = \sum_{j=1}^N \mu_j w_j = 0 \quad (4-136)$$

对于第三项, 积分后有

$$\begin{aligned} T_3 &= \int_{r_{k-1}}^{r_k} 4\pi r^2 dr \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \Sigma_{i,k} \phi(r, \mu) d\mu \approx 4\pi w_j \int_{r_{k-1}}^{r_k} r^2 \Sigma_{i,k} \phi(r, \mu_j) dr \\ &\approx w_j V_K \Sigma_{i,k} \phi_{k,j}, \end{aligned} \quad (4-137)$$

式中 $V_K = 4\pi(r_k^3 - r_{k-1}^3)/3$ 为体积元的体积。同样第四项可以写成

$$T_4 \approx w_j V_K q_{k,j}. \quad (4-138)$$

当散射为各向同性的情况下, 根据(4-126)式源 $q_{k,j}$ 简化为

$$q_{k,j} = \frac{1}{2} (\Sigma_{i,k} + (\nu \Sigma_{i,k})_{\Lambda}) \sum_{j'=1}^N w_{j'} \phi_{k,j'}. \quad (4-139)$$

利用 $T_1 \rightarrow T_4$ 各项的结果,对每一 $(K, J)$ 基元由(4-125)式便得到:

$$\begin{aligned} & \mu_J(A_k \phi_{k, J} - A_{k-1} \phi_{k-1, J}) + (B_{K, J} \phi_{K, J} - B_{K, J-1} \phi_{K, J-1})/w_J \\ & + V_K \Sigma_{t, K} \phi_{K, J} = V_K q_{K, J} \quad , \end{aligned} \quad (4-140)$$

这便是球对称情况下输运方程的差分格式。但是在每一 $(K, J)$ 基元的方程中它包含有 $\phi_{k, J}$ ,  $\phi_{k-1, J} \cdots \phi_{K, J}$ 等五个未知数。因此还必须建立一些辅助关系式,以减少未知数量,其中以“菱形”差分格式为最简单和常用的一种,它认为中子通量 $\phi$ 在一个网格基元中是线性变化的(见图4-15),即

$$\phi_{K, J} \approx \frac{1}{2}(\phi_{k, J} + \phi_{k-1, J}) \quad , \quad (4-141)$$

$$\phi_{K, J} \approx \frac{1}{2}(\phi_{K, J} + \phi_{K, J-1}) \quad . \quad (4-142)$$

利用菱形差分格式(4-141)及(4-142)式消去(4-140)式中的 $\phi_{k-1, J}$ 及 $\phi_{K, J}$ 便得到递推形式的差分方程:

$$\phi_{K, J} = \frac{-A_{K, J} \phi_{K, J} + \alpha_{K, J} \phi_{K, J-1} + V_K q_{K, J}}{\Sigma_{t, K} V_K - A_{K, J} + \alpha_{K, J}} \quad (4-143)$$

或消去 $\phi_{k, J}$ 和 $\phi_{K, J}$ ,则得到:

$$\phi_{K, J} = \frac{A_{K, J} \phi_{K-1, J} + \alpha_{K, J} \phi_{K, J-1} + V_K q_{K, J}}{\Sigma_{t, K} V_K + A_{K, J} + \alpha_{K, J}} \quad (4-144)$$

式中

$$A_{K, J} = \mu_J(A_k + A_{k-1}); \quad \alpha_{K, J} = (B_{K, J} + B_{K, J-1})/w_J \quad . \quad (4-145)$$

这时外推边界( $k=m$ 处)条件可以表成:

$$\phi_{m, J} = \phi_{m, J} = 0, \quad \text{当 } \mu_J \leq 0 \text{ 或 } \mu_J \leq 0 \quad (4-146)$$

## 7.2 差分方程的解法

我们应用迭代法对差分方程(4-143)或(4-144)式求解。在每次迭代过程中的源项 $q_{K, J}$ 是已知的。然而对于给定的 $(K, J)$ 相单元,这时方程的右端仍含有二个未知数,因而在着手数值过程之前还必须建立一些补充的关系式。为此我们考虑 $\mu_0 = -1$ 的特定方向,即图4-15中a-b直线上的各个分点,这时,中子输运方程(4-40)便简化( $\mu = -1$ )为

$$-\frac{d\phi(r, -1)}{dr} + \Sigma_t \phi(r, -1) = q(r, -1) \quad .$$

对上式在 $r_{k-1} \leq r \leq r_k$ 区间内积分之便得到

$$-\phi_{k, 0} + \phi_{k-1, 0} + \Sigma_{t, K} \Delta r_K \phi_{K, 0} = q_{K, 0} \Delta r_K \quad , \quad (4-147)$$

式中

$$\phi_{K, 0} \approx \frac{1}{2}(\phi_{k, 0} + \phi_{k-1, 0}) \quad . \quad (4-148)$$

将(4-148)代入(4-147)式便可求得对于 $\mu_0 = -1$ 方向上各节点有

$$\phi_{K, 0} = \frac{2\phi_{k, 0} + \Delta r_K q_{K, 0}}{2 + \Sigma_{t, K} \Delta r_K} \quad . \quad (4-149)$$



这样, 根据  $\phi_{m,0} = 0$  的边界条件, 利用 (4-149) 及 (4-148) 便可以很方便地自外向里逐点地求出图4-15ab线各分点及基点上通量的数值。利用这些数值及边界条件 (4-146) 我们就可以很方便地对差分方程 (4-143) 或 (4-144) 求解。具体求解步骤如下:

1. 对于  $\mu \leq 0$  区域 首先利用 (4-148) 和 (4-149) 求出 ab 线上各分点及基点上的  $\phi_{k,0}$  及  $\phi_{k,0}$  的数值, 然后自  $J = I, k = m$  点开始自外向里应用 (4-143) 式逐点求解, 首先根据  $\phi_{m,1} = 0$ , 及已求得的  $\phi_{m,0}$  值, 应用 (4-143) 式便可算得  $\phi_{m,1}$  值, 然后再利用 (4-141) 和 (4-142) 菱形差分格式算出  $\phi_{-1,1}$  及  $\phi_{m,1}$  来。重复利用上述公式便可自外向里逐点地求出通量  $\phi$  的数值来。然后再对  $J = II, III, \dots$  重复上述步骤便可求得  $\mu \leq 0$  区域所有  $\phi_{k,j}$  和  $\phi_{k,j}, \phi_{k,j}$  值来。

2. 对于  $\mu > 0$  区域 首先根据在  $r = 0$  处的对称条件

$$\phi(0, \mu_j) = \phi(0, -\mu_j)$$

便可求出图4-15中df线上各节点上的通量值。然后仿照  $\mu \leq 0$  区域步骤用 (4-144) 式自里向外解得右半面所有点的  $\phi$  值。

图4-15中的箭头表示求解的数值过程的次序。实践表明, 这样的计算方向是稳定的, 这就是说, 任何一点所产生的计算中的误差在随后各点的计算中不会继续扩大、积累而超出所许可的范围。在求出所有的  $\phi_{k,j}$  值后便可算出新的源项  $q$ , 并进行新的迭代过程。这样的过程一直继续到收敛为止。

从上面讨论可以看到, 离散坐标  $S_N$  方法的数值运算是很简便的, 而且每个离散方向上中子通量的求解彼此不互相耦合。因此当需要提高阶数 ( $N$ ) 时, 并不象球谐近似那样将增加很大的困难。同时它对于各向异性散射的考虑也比较方便。尤其是对于吸收性比较强和体积比较小的系统, 它比球谐近似具有更大的优越性。实践证明, 离散  $S_N$  方法可以取得很好的精度。一般地讲, 离散  $S_2$  近似的精度和球谐  $P_1$  近似相当, 适当地增大阶数  $N$ , 离散  $S_N$  方法可以取得满意的结果。

### 参 考 文 献

- [1] G.I. 贝尔, S. 格拉斯登著, 千里译, 核反应堆理论, 第一、三、四、五章, 原子能出版社, 1979年。
- [2] A.F. Henry, Nuclear Reactor Analysis, pp.333-386, The MIT Press, 1975.
- [3] Г.И. Марчук, Методы Расчета Ядерных Реакторов, Гл.1, 3, 5, АТОМИЗДАТ, 1961.
- [4] H. Greenspan et al., Computing Methods in Reactor Physics, Chap.3, 4, Gordon and Breach Science Publishers, 1968.
- [5] Г.И. Марчук, Ш.С. Николаевичи, Теория и Методы Расчета Ядерных Реакторов, Стр.5, Госатомиздат, 1962.
- [6] Reactor Physics Constants, ANL-5800, 2nd ed., 1963.

## 第五章 中子慢化能谱

回顾第一章所述，裂变中子具有相当高的能量，其平均值约为 2 兆电子伏。这些中子在系统中与原子核发生连续的弹性和非弹性碰撞，使其能量逐渐地降低到引起下一次裂变的平均能量左右。对于快中子反应堆这一平均能量一般在 100 千电子伏左右或者更高，而对于热中子反应堆，绝大多数裂变中子被慢化到热能区域。中子在这一能区由于散射碰撞而减低速度的过程叫做慢化过程。显然，对于热中子反应堆来讲，慢化过程是一个重要的物理过程。

当反应堆处于稳态时，中子密度（或通量）在慢化过程中按能量具有一个稳定的能量分布，称之为中子慢化能谱。在反应堆物理设计的许多实际问题中，往往需要知道中子的慢化能谱。例如，在下一章的群理论的群常数计算中，或在需要计算不同能量区间的反应率时都要用到中子慢化能谱。

自然，反应堆内中子的能量分布与空间分布是紧密地联系着的，在稳态时中子通量具有一个稳定的空间-能量分布  $\phi(\mathbf{r}, E)$ 。要精确地确定中子通量的空间-能量分布必须对前面一章所导出的中子输运方程 (4-25) 式进行求解。这对大多数问题来讲，需要非常复杂艰难的计算，甚至于无法实现。幸亏，在许多实际问题中往往只需要知道近似的能量分布就可以了。例如，在前面提到的群常数计算时，当能量区间分得足够小时，在每个能量小区间内，中子能量分布用一个近似的能谱来表示是完全允许的。例如，对于高能范围 ( $E > 1$  兆电子伏)， $\phi(E)$  可以近似地用裂变谱  $\chi(E)$  来表示，而当  $E$  在小于 1 电子伏的热能区时，则可以认为  $\phi(E)$  服从麦克斯韦分布等等。

在粗略估计中子慢化能谱的许多近似方法中，最简单的模型是把反应堆内中子的慢化能谱用一个无限大均匀介质的慢化能谱来近似地表示。这就是说完全略去了中子通量的空间依赖关系和泄漏的影响，必要时再加以适当地修正。自然，这种处理方法是相当粗糙的。作为进一步的修正，另一个常用的近似模型是认为中子通量分布的空间和能量关系可以分离变量，而分别独立地予以考虑。这时在能谱计算中空间的依赖（泄漏的影响）关系将通过一些简单的参数（例如几何曲率）来表征和考虑。在反应堆的快群群常数的计算中，我们常常应用这一方法来近似估计反应堆芯部内中子的慢化能谱。

中子慢化能谱不仅取决于介质的材料成分和几何大小，同时还决定于可能发生的核反应情况。在不同能量范围内，可能发生的核反应是不同的，因而中子能谱及其计算方法也不一样。通常我们根据可能发生的核反应的种类和特点把中子能量分成为三个区域。每个区域的能量范围和核反应的特征都在图 5-1 中表示出来。之所以选择这些能量数值作为分界能，主要是从核反应特征考虑的。例如，对于中子能量在高于 10 兆电子伏和低于 0.1 兆电子伏的区域，裂变中子份额已经趋近于零而可以略去不计；同时回顾第一章所述，非弹性散射是具有阈能特点的（见表 1-1），而且对于用作慢化剂的轻核这个阈能是很高的，大约在几个兆电子伏数量级（例如，对于  $^{12}\text{C}$ ，为 4.4 兆电子伏）；对于中等或高质量的核，其数值要低一些，大约在 0.1 兆电子伏左右。即使对于最重的核也在 50 千电子伏的数量级（例如对铀-235，为 45 千电子伏）。因而可以认为非弹性散射只有在  $E > 0.1$  兆电子伏的裂变中子区才起主要

作用，而在慢化区中则可以略去不计；取 1 电子伏作为慢化区和热化区的分界能，是由于考虑到当  $E > 1$  电子伏时，中子的向上散射和热化效应已经小得可以略去不计了。

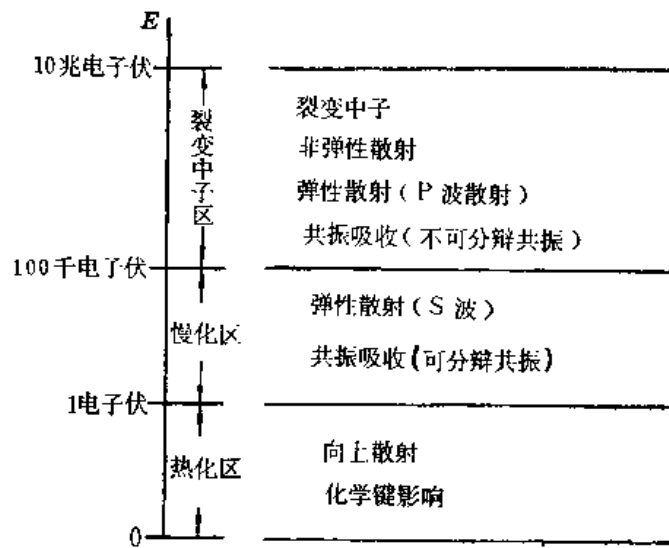


图5-1 各个能区的核反应特征

对快中子反应堆来讲，主要感兴趣的是 0.1 兆电子伏以上的裂变中子区域。因而，在这区域内中子的慢化主要是靠中子与燃料和堆芯结构材料的非弹性散射结果，很少一部分贡献则是由于冷却剂（例如液态金属钠等）的弹性或非弹性散射。对于热中子反应堆，慢化区则是主要的，因为裂变中子经过与慢化剂和其他材料几次碰撞之后，中子能量便很快降低到慢化区域了。在慢化区内，中子主要是靠与慢化剂的 s 波（在质心系内散射为各向同性）弹性散射而慢化。在这区域中影响能量分布的另一个重要效应是在低能部分由可分辨的一系列强共振峰所引起的共振吸收，在能谱计算时必须认真地加以考虑。

在本章中，我们首先讨论无限大均匀介质内的中子慢化能谱和共振吸收的计算，然后再介绍有限大小反应堆内中子慢化能谱的近似计算方法和扩散年龄理论。

## 1. 无限均匀介质内中子的慢化能谱

### 1.1 无限均匀介质内中子的慢化方程

在讨论之前，有必要先介绍在研究中子慢化过程时经常要用到的两个物理量。

**碰撞密度** 它的定义是：每秒在  $r$  处的单位体积、单位能量间隔内所发生的中子与核相互作用的总次数，记作  $F(r, E)$

$$\begin{aligned}
 F(r, E) &= (\Sigma_a + \Sigma_s) \phi(r, E) \\
 &= \Sigma_t(r, E) \phi(r, E).
 \end{aligned}
 \tag{5-1}$$

对于无吸收介质， $\Sigma_a = 0$ ，则  $F(r, E) = \Sigma_s \phi(r, E)$ 。显然可以看到，这里所定义的碰撞密度和第一章中所定义的总反应率是同一个量。

**慢化密度** 它是描述慢化过程的另一个极为重要的量，我们用符号  $q(r, E)$  来表示。它的定义是：在  $r$  处每秒每立方厘米内慢化到能量  $E$  以下的中子数。我们知道，在  $r$  处能量为

$E'$  的中子每秒发生散射的次数为  $\Sigma_s(\mathbf{r}, E')\phi(\mathbf{r}, E')$ ，而散射函数  $f(E' \rightarrow E)$  表示能量为  $E'$  的中子散射后能量变为  $E$  的几率，因而

在  $\mathbf{r}$  处每秒每厘米<sup>3</sup>内

$$\text{能量为 } E' \text{ 的中子慢化} = \int_0^{E'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE,$$

到  $E$  以下的中子数

而根据定义慢化密度  $q(\mathbf{r}, E)$  应等于  $E' > E$  的所有能量中子慢化到  $E$  以下的中子数目的总和，也就是说等于将上式对  $E'$  的积分，即

$$q(\mathbf{r}, E) = \int_E^\infty dE' \int_0^{E'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE. \quad (5-2)$$

这样，慢化密度  $q(\mathbf{r}, E)$  给出了  $\mathbf{r}$  处中子被慢化并通过某给定能量  $E$  的慢化率。

下面我们根据中子平衡的原则来列出无限介质内中子的慢化方程。

对于无限均匀介质，中子通量分布将与空间坐标  $\mathbf{r}$  无关而仅仅是能量  $E$  的函数，用  $\phi(E)$  来表示。我们观察能量  $E$  处  $dE$  能量间隔内的中子平衡。由于中子与介质原子核散射的结果，每时每刻都有中子自  $E' > E$  的区域散射到  $(E, E - dE)$  的能量区间里来（见图 5-2）。我们知道在  $dE'$  能量间隔内中子每秒被散射到  $dE$  间隔的数目等于  $\Sigma_s(E')\phi(E')dE'f(E' \rightarrow E)dE$ 。因而

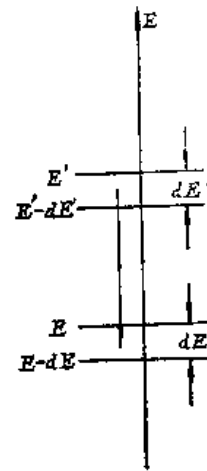


图5-2 中子的慢化

$$\text{每秒散射落到 } dE \text{ 内的中子数} = dE \int_E^\infty \Sigma_s(E')\phi(E')f(E' \rightarrow E)dE'.$$

而由中子源在  $dE$  间隔直接产生的中子数为  $S(E)dE$ ，其中  $S(E)$  为中子源强分布函数。那么根据中子平衡的稳态条件，每秒、每立方厘米内，散射到能量元  $dE$  内的中子数和源中子数之和应该等于自这个能量元散射出去和被吸收的中子总数，这样可以写出稳态无限介质内的中子慢化方程为

$$\Sigma_a(E)\phi(E) = \int_E^\infty \Sigma_s(E')\phi(E')f(E' \rightarrow E)dE' + S(E). \quad (5-3)$$

如果我们着重讨论慢化区（1 电子伏 ~ 0.1 兆电子伏）内的慢化问题，这时只需考虑在质心系内各向同性的 s 波弹性散射，散射函数可以用 (1-71) 式的简单形式来表示：

$$f(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)E'} & , E < E' < E/\alpha \\ 0 & , E' > E/\alpha \text{ 或 } E' < E, \end{cases} \quad (5-4)$$

这里  $\alpha = [(A-1)/(A+1)]^2$ 。若能量变量用勒  $u$  来表示则由 (1-78) 式有

$$f(u-u') = \begin{cases} \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha}, & u - \ln \frac{1}{\alpha} < u' < u; \\ 0, & u < u' \text{ 或 } u' < u - \ln \frac{1}{\alpha}. \end{cases} \quad (5-5)$$

这样，中子慢化方程 (5-3) 式便可写成：

$$\Sigma_s(E)\phi(E) = \int_E^{E/\alpha} \frac{\Sigma_s(E')\phi(E')}{(1-\alpha)E'} dE' + S(E). \quad (5-6)$$

同样，对于慢化密度  $q(E)$  (5-2) 式便可表示成

$$\begin{aligned} q(E) &= \int_E^{E/\alpha} dE' \int_{\alpha E'}^E \frac{\Sigma_s(E')\phi(E')}{(1-\alpha)E'} dE'' \\ &= \int_E^{E/\alpha} \Sigma_s(E')\phi(E') \frac{E - \alpha E'}{(1-\alpha)E'} dE', \end{aligned} \quad (5-7)$$

或

$$\begin{aligned} q(u) &= \int_{u - \ln \frac{1}{\alpha}}^u du' \int_u^{u' + \ln \frac{1}{\alpha}} \frac{\Sigma_s(u')e^{u'-u'}}{1-\alpha} \phi(u') du'' \\ &= \int_{u - \ln \frac{1}{\alpha}}^u \Sigma_s(u')\phi(u') \left( \frac{e^{u'-u} - \alpha}{1-\alpha} \right) du' \end{aligned} \quad (5-8)$$

应该指出，在多数情况下，慢化方程 (5-3) 是无法求得其精确解的。只有在很有限的几种情况下，例如对纯氢慢化的介质和  $A > 1$  的无吸收性介质等，才有可能求得其解析解。下面我们讨论几种特定情况下慢化方程的解。尽管这些情况和反应堆系统的实际问题还是有很大的差别，但是它对于帮助我们了解慢化能谱的大致性质和慢化的物理过程却有普遍性的意义。

## 1.2 在含氢介质内的慢化

首先讨论在氢慢化剂内中子的慢化能谱，因为这时慢化方程最便于求解，同时这种介质内的中子能量分布和水堆内的中子能量分布是很相似的。我们假定，在含氢介质内，中子的慢化仅仅是由于氢原子核的散射引起的，中子与其它元素的散射不使中子能量发生变化。换句话说，把所有非氢元素核的质量看作是无量级，它们只吸收中子并不慢化中子，因而对于这些元素的散射函数  $f_i(E' \rightarrow E)$  可以用函数  $\delta(E' - E)$  来表示。同时，为简单起见，我们讨论初始能量为  $E_0$ ，源强为  $S_0$  的单能均匀分布中子源情况。这时，中子慢化方程 (5-3) 中的源项为

$$S(E) = S_0 \delta(E - E_0). \quad (5-9)$$

从数学上知道，对应的通量解  $\phi(E)$  必然也将包含有正比于  $\delta(E - E_0)$  的一项。我们可以用如下的方法避免处理这一类带奇性的问题。单能中子源经过第一次与氢核的散射后，在  $E \leq E_0$  范围内形成一个均匀的分布源

$$S'(E) = S_0/E_0, \quad (0 \leq E \leq E_0) \quad (5-10)$$

介质内的通量  $\phi(E)$  也可以看成是由于这一分布源所形成的, 因此它所满足的慢化方程为:

$$\begin{aligned} \Sigma_t(E)\phi(E) &= \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_s^H(E')\phi(E')}{E'} dE' \\ &+ \sum_{i \rightarrow H} \int_E^{E/a_i} \Sigma_s^i(E')\phi(E')\delta(E' - E) dE' + S_0/E_0, \end{aligned} \quad (5-11)$$

式中

$$\Sigma_t(E) = \Sigma_a(E) + \Sigma_s^H(E) + \sum_{i \rightarrow \Phi} \Sigma_s^i(E), \quad (5-12)$$

$\Sigma_s^H(E)$  是氢的宏观散射截面, 上角标  $j$  则表示第  $j$  种元素。如果在能量  $E_0$  处首次碰撞的吸收几率不能忽略, 那么 (5-11) 式中的源项前尚需乘以系数  $\Sigma_s^H(E_0)/[\Sigma_a(E_0) + \Sigma_s^H(E_0)]$ 。一般来说, 只要源中子的能量在共振能区以上, 这个系数总是十分接近于 1 的。(5-11) 式经过简单整理后便可简化成

$$[\Sigma_a(E) + \Sigma_s^H(E)]\phi(E) = S_0/E_0 + \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_s^H(E')\phi(E')}{E'} dE'. \quad (5-13)$$

为了解出  $\phi(E)$ , 首先将该式两边微分, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} \left\{ [\Sigma_a(E) + \Sigma_s^H(E)]\phi(E) \right\} &= -\frac{\Sigma_s^H(E)\phi(E)}{E} \\ &= -\frac{1}{E} \frac{\Sigma_s^H E}{\Sigma_a(E) + \Sigma_s^H(E)} [\Sigma_a(E) + \Sigma_s^H(E)]\phi(E) \end{aligned}$$

将它重新排列写成下面形式

$$\frac{d\{[\Sigma_a(E) + \Sigma_s^H(E)]\phi(E)\}}{[\Sigma_a(E) + \Sigma_s^H(E)]\phi(E)} = -\frac{dE}{E} + \frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E) + \Sigma_s^H(E)} \frac{dE}{E},$$

再将等式两边从  $E$  到  $E_0$  积分, 便有

$$\ln \frac{[\Sigma_a(E_0) + \Sigma_s^H(E_0)]\phi(E_0)}{[\Sigma_a(E) + \Sigma_s^H(E)]\phi(E)} = -\ln \frac{E_0}{E} + \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_a(E') + \Sigma_s^H(E')} \frac{dE'}{E'},$$

或者写成等价的形式:

$$\begin{aligned} [\Sigma_a(E) + \Sigma_s^H(E)]\phi(E) &= \frac{1}{E} [\Sigma_a(E_0) + \Sigma_s^H(E_0)]\phi(E_0) E_0 \\ &\times \exp \left[ - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_a(E') + \Sigma_s^H(E')} \frac{dE'}{E'} \right]. \end{aligned}$$

为了确定上式指数项的系数, 只需要利用 (5-13) 建立初始条件。为此, 令  $E = E_0$ , (5-13) 式化为

$$[\Sigma_a(E_0) + \Sigma_s^H(E_0)]\phi(E_0)E_0 = S_0,$$

因此  $E < E_0$  的中子通量的能量分布为:

$$\phi(E) = \frac{1}{E} \frac{S_0}{\Sigma_a(E) + \Sigma^H(E)} \exp\left[-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma(E')}{\Sigma_a(E') + \Sigma^H(E')} \frac{dE'}{E'}\right]. \quad (5-14)$$

下面计算含氢介质内的慢化密度。它由两部份构成：一部份是由源中子经过第一次与氢核发生散射后能量慢化到  $E$  以下的中子数，它在数值上显然等于 (5-10) 式从  $E' = 0$  到  $E$  的积分

$$\int_0^E \frac{S_0}{E_0} dE' = S_0 E/E_0,$$

另一部份慢化密度则是由稳态通量分布 (5-14) 所形成的，它可通过 (5-7) 式 (令  $\sigma_{H1} = 0$ ) 求得。因此总的慢化密度为：

$$q(E) = \frac{ES_0}{E_0} + E \int_E^{E_0} \frac{\Sigma^H(E')\phi(E')}{E'} dE'. \quad (5-15)$$

利用 (5-13) 式消去积分项，便得到有吸收氢介质内慢化密度的表达式

$$q(E) = E[\Sigma_a(E) + \Sigma^H(E)]\phi(E), \quad E < E_0. \quad (5-16)$$

如果介质没有吸收， $\Sigma_a(E) = 0$ ，则由 (5-14)

$$\phi(E) = \frac{S_0}{E\Sigma^H(E)}, \quad (5-17)$$

而  $q(E) = E\Sigma^H(E)\phi(E) = S_0. \quad (5-18)$

这样，我们便求得，在单纯由氢慢化的氢和重吸收剂混合物系统内，中子通量的能量分布系按照  $1/E$  规律变化。这一分布律有时称之为  $1/E$  谱或费米谱，因为它首先是由费米 (E. Fermi) 所给出的。

(5-14) 式右端含有积分的指数项系表征慢化过程中由于自  $E$  至  $E_0$  区域内的吸收而导致通量的衰减，它就是第二章第 3 节中所提到的逃脱共振几率  $p(E)$ 。这可以用以下方式加以证明。

由 (5-14) 和 (5-16) 式可以得到稳态下能量  $E$  处的慢化密度等于：

$$q(E) = S_0 \exp\left(-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma^H} \frac{dE}{E}\right), \quad (5-19)$$

而由  $E_0$  慢化到  $E$  时中子的逃脱共振几率  $p(E)$ ，应该等于  $q(E)$  和  $E_0$  处的慢化密度  $q(E_0)$  之比，因此便得到

$$\begin{aligned} p(E) &= \frac{q(E)}{q(E_0)} = \frac{q(E)}{S_0} \\ &= \exp\left(-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma^H} \cdot \frac{dE}{E}\right). \end{aligned} \quad (5-20)$$

最后，我们注意到，在 (5-14) 式的分母中含有  $\Sigma_a(E)$  项，因而当中子吸收截面具有共振峰的性质 (见图 5-3) 时，在共振能附近中子通量将产生很大的畸变。这是因为在共振能  $E_r$

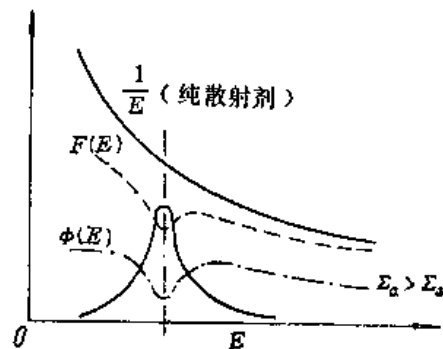


图5-3 共振峰附近中子通量的畸变

附近, 由于  $\Sigma_s(E)$  的急剧增大, 而且  $\Sigma_s(E) \gg \Sigma_f(E)$ , 因而分母  $[\Sigma_s(E) + \Sigma_f(E)]$  随之急剧增大, 并导致  $\phi(E)$  在  $E_r$  附近出现相当大的下陷, 这种效应称之为“能量自屏现象”。在讨论共振吸收时必须考虑到这种效应。

### 1.3 在 $A > 1$ 的无限介质内的慢化

在一般情况下, 中子都在含有质量数大于 1 的介质里慢化。这时中子与原子核的一次碰撞不可能损失其全部能量 ( $\alpha \neq 0$ )。因而在慢化方程 (5-6) 中积分的上、下限两者都是  $E$  的函数。这样, 就不可能象前面含氢介质那样, 用求导法把慢化方程化成为简单的微分方程来求解。一般讲, 只有在几种特殊情况下才有可能求出其精确解或渐近解。

#### 无吸收情况

我们先讨论最简单情况, 只含单种核素的无吸收性介质。中子源为均匀分布的单能体积源, 其初始能量为  $E_0$ 。为了讨论方便, 把慢化方程 (5-3) 式中的能量  $E$  换成为无因次的对数能量变量  $u$  (对应于  $E_0$ ,  $u = 0$ ) 来表示; 同时令碰撞密度  $F(u) = \Sigma_s(u)\phi(u)$ 。这样, 在单位源强 ( $S_0 = 1$ ) 情况下, 慢化方程便可以写成如下形式:

$$F(u) = \int_0^u F(u')f(u-u')du' + \delta(u). \quad (5-21)$$

我们应用拉普拉斯变换方法对方程 (5-21) 求解。定义

$$\Psi(p) = L[F(u)] = \int_0^{\infty} F(u)e^{-pu} du \quad (5-22)$$

为函数  $F(u)$  的拉普拉斯变换, 而逆变换为:

$$F(u) = L^{-1}[\Psi(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Psi(p)e^{pu} dp, \quad \alpha > 0 \quad (5-23)$$

对方程 (5-21) 两边作拉普拉斯变换, 得到:

$$\Psi(p) = \Psi(p)W(p) + 1 \quad (5-24)$$

这里我们在方程的右边应用了拉普拉斯变换的摺积性质:

$$L\left[\int_0^u F(u')f(u-u')du'\right] = L[F(u)]L[f(u)] = \Psi(p)W(p)$$

式中  $\Psi(p)$  就是碰撞密度  $F(u)$  的拉普拉斯变换, 而  $W(p)$  则是  $f(u)$  的拉普拉斯变换

$$W(p) = \int_0^{\infty} f(u)e^{-pu} du$$

将散射函数  $f(u)$  的表示式 (5-5) 代入, 便得:

$$\begin{aligned} W(p) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{1-\alpha} e^{-pu} du = \frac{1 - e^{-(1+p)\infty}}{(1-\alpha)(1+p)} \\ &= \frac{1 - \alpha^{1+p}}{(1-\alpha)(1+p)} \end{aligned} \quad (5-25)$$



式中  $\gamma = \ln(1/\alpha) = \ln[(A+1)/(A-1)]^2$  为每次碰撞的最大勒增量。因而由(5-24)和(5-25)式可以解得:

$$\begin{aligned} \Psi(p) &= 1 + \frac{W(p)}{1-W(p)} = 1 + \frac{1-\alpha^{p+1}}{(1-\alpha)(p+1) - (1-\alpha^{p+1})} \\ &= 1 + \frac{F_1(p)}{F_2(p)}. \end{aligned}$$

根据反演公式(5-23)可以算得:

$$\begin{aligned} F(u) &= \delta(u) + \sum_{p_i} \frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)} e^{p_i u} \\ &= \delta(u) + \sum_{p_i} \frac{(1-\alpha^{p_i+1})e^{p_i u}}{(1-\alpha) + \alpha^{p_i+1} \ln \alpha} \end{aligned} \quad (5-26)$$

其中  $p_i$  为被积函数  $F_1(p)/F_2(p)$  的极点。即  $p_i$  为下面方程

$$(1-\alpha)(p+1) - (1-\alpha^{p+1}) = 0 \quad (5-27)$$

的根。 $\sum_{p_i}$  系对方程(5-27)的所有根  $p_i$  求和。容易看出,  $p_0 = 0$  是它的一个根。同时根据

代数的知识可以知道, 对于  $0 < \alpha < 1$ , 方程的其它根  $p_i$  的实部都是负数<sup>1)</sup>。因而(5-26)式右端求和级数中除  $p_0 = 0$  项外, 其它各项将随着  $u$  的增大而衰减。因而当能量  $E$  远比源能量  $E_0$  小, 或当  $u \rightarrow \infty$  时, (5-26) 的解便趋近于渐近解 ( $p_0 = 0$  项):

$$\begin{aligned} F(u) = \sum_{p_i} \phi_{p_i}(u) &\approx \frac{1-\alpha}{1-\alpha + \alpha \ln \alpha} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha \ln \alpha / (\alpha - 1)} = \frac{1}{\xi} \end{aligned} \quad (5-28)$$

把勒  $u$  换成能量  $E$ , 根据(4-26)式则得到, 当  $E \ll E_0$  时, 中子通量的渐近解形式为:

$$\phi(E) = \frac{\phi(u)}{E} = \frac{1}{\xi \Sigma_s E} \quad (5-29)$$

把(5-29)式代入(5-7)式, 很容易证明慢化密度  $q(E) = \text{常数}$ 。图5-4给出对于不同慢化剂的  $(1-\alpha)F(u)$  曲线。横坐标选择  $u/\ln(1/\alpha)$  为自变量, 以使其沿横坐标的单位距离恰好与不同的碰撞区间相对应。可以看出, 碰撞密度  $F(u)$  在  $E = \alpha E_0$  处出现剧烈的不连续性。这一不连续性的原因和数值很容易从物理上分析得出。为此, 我们考察比  $\alpha E_0$  稍高一点的能量区间  $dE$ 。每秒散射到  $dE$  内的中子数将由两部分组成: 一是由于能量为  $E_0$  的源中子首次碰撞即落到  $dE$  的中子数, 它等于  $S_0 dE/E_0(1-\alpha)$ , 另一部分则是由于  $\alpha E_0 < E' < E_0$  能量区间内中子的散射而落到  $dE$  区间内的中子数(见图5-5)。这二部份之和显然应等于每秒自  $dE$  间隔碰撞出去的中子数  $F_1(\alpha E_0) dE$ 。由于在  $dE'$  间隔内中子散射而落到  $dE$  区间内之中子数等于  $F(E') dE' dE/E'(1-\alpha)$ , 因而有

1) 例如, 马绍克求得前面另外两个根为(见 *ReV. of Mod. Phys.*, 19, 185—238 (1947) ):

$A = 2 \quad p_{1,2} = 1.56 \pm 3.37 i;$

$A \gg 1 \quad p_{1,2} = -0.52A \pm 1.87 i.$

$$F_1(\alpha E_0) = \frac{S_0}{E_0(1-\alpha)} + \int_{\alpha E_0}^{E_0} \frac{F(E')}{E'(1-\alpha)} dE' \quad (5-30)$$

由于能量为  $E_0$  的源中子首次碰撞后最小的能量值为  $\alpha E_0$ ，不可能达到  $\alpha E_0$  以下，因而对  $E$  稍小于  $\alpha E_0$  的  $dE$  区间内，源中子对碰撞密度的贡献将等于零，而这时碰撞密度为

$$F_2(\alpha E_0) = \int_{\alpha E_0}^{E_0} \frac{F(E')}{E'(1-\alpha)} dE' \quad (5-31)$$

把 (5-30) 和 (5-31) 式相减就得到  $E = \alpha E_0$  处  $F(E)$  的不连续值

$$F_1(\alpha E_0) - F_2(\alpha E_0) = \frac{S_0}{E_0(1-\alpha)}$$

从图 5-4 还可以看到，在  $E$  从小于  $\alpha E_0$  到大约  $E = \alpha^3 E_0$  左右， $F(u)$  在渐近值上下起伏变化，当  $E < \alpha^3 E_0$  以下起伏就很快消失而趋近于渐近值了。另外，对于氢， $\alpha = 0$ ，方程 (5-27) 只有一个  $p_0 = 0$  的根。它的严格解便和 (5-29) 式完全一致，所以就没有不连续和起伏的现象。这和前面一节所得的结果也是一致的。

最后应该指出，尽管上面的求解过程似乎比较烦琐，但是，好在我们对它的演算过程并不感到兴趣，因为在实际计算问题中并不用到它，所以在前面也没有予以详细介绍。我们感兴趣而且有用的只是它的结论：首先，它告诉我们，在慢化区对于不同慢化剂的慢化能谱都是近似服从  $1/E$  分布或费米谱；因而我们常常把它作为反应堆内慢化区中子能谱分布的初步近似。而在热化区和裂变中子区则可以分别用麦克斯韦谱和裂变中子谱来近似地描述。这样，我们便得到了关于热中子反应堆内中子能谱的最粗浅的概念（见图 5-6）。在一些近似计算中可以用它来近似地描述反应堆的中子能谱。其次，它指出在源能附近 2—3 个碰撞区间内碰撞密度有较大的起伏振荡。在后面就可以看到，这一结果对于研究通过一系列共振峰的慢化情况时有着特殊的意义。因为每一个共振峰的作用犹如一个负的中子源，因而由共振能量  $E$ ，直到  $\alpha^3 E$  的间隔内将引起碰撞密度的起

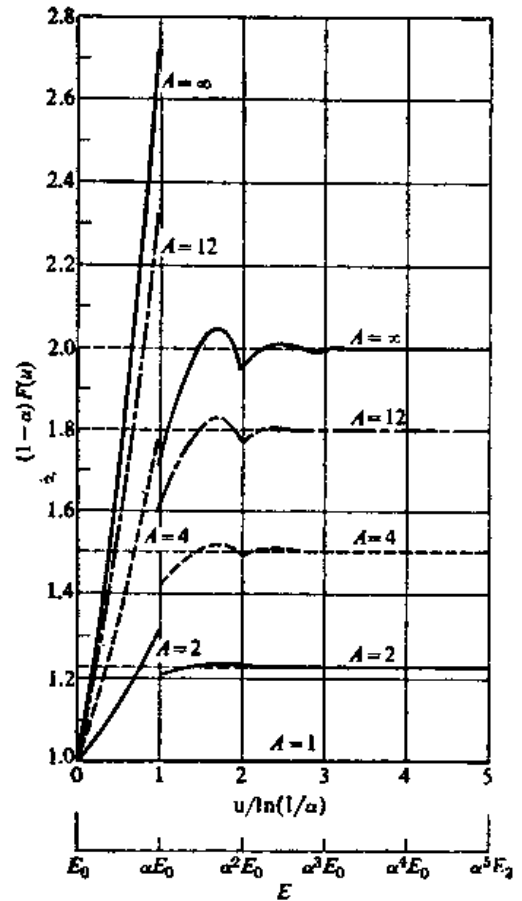


图5-4 不同慢化剂内的碰撞密度

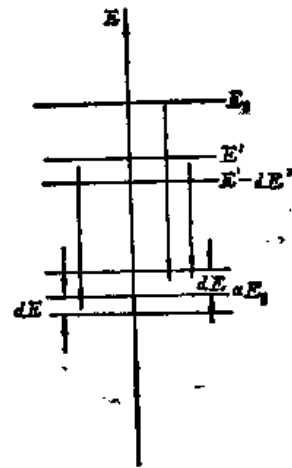


图5-5  $F(\alpha E_0)$  的计算

伏振荡。所以，只有当共振峰的间隔大于或至少等于  $\alpha^3 E$  时，才能把这些共振峰当作相互独立的情况来处理。

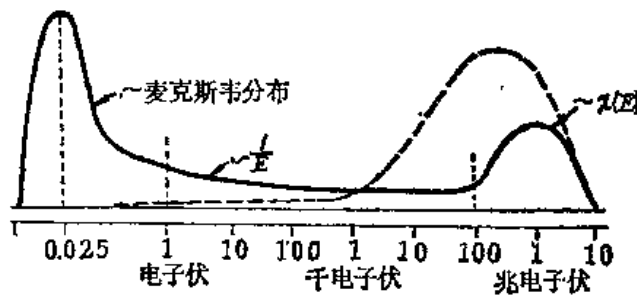


图5-6 反应堆中子能谱示意图  
 ——热中子堆中子能谱；---快中子堆中子能谱。

### 在混合物介质中的慢化

前面的计算结果可以推广到含有多种核素的混合物系统中去，对于混合物介质，碰撞密度  $F(u) = \Sigma(u)\phi(u) = \sum_j \Sigma_j'(u)\phi(u)$ ，其中  $\Sigma_j'$  为混合物中  $j$  元素的宏观散射截面。这时，慢化方程 (5-21) 对于混合物介质应写成

$$F(u) = \sum_j \int_0^u \frac{\Sigma_j'}{\Sigma_s} F(u') f_j(u-u') du' + \delta(u) \quad (5-32)$$

式中  $f_j(u-u')$  为第  $j$  种元素的散射函数； $\Sigma_s = \sum_j \Sigma_j'$ 。

如果所有元素的散射截面都等于常数，或者都随能量作同样变化以使得  $\Sigma_j'/\Sigma_s$  与能量无关。在这种条件下我们可以用和前面同样的方法求得当  $E \ll E_0$  或  $u \rightarrow \infty$  时方程 (5-32) 的渐近解为

$$F(u) = \Sigma_s \phi(u) = \frac{1}{1 + \sum_j \frac{\Sigma_j'}{\Sigma_s} \frac{\alpha_j \ln \alpha_j}{1 - \alpha_j}} = \frac{1}{\sum_j \frac{\Sigma_j'}{\Sigma_s} \xi_j} \quad (5-33)$$

式中  $\xi_j$  为  $j$  种元素每次碰撞的平均勒增量。如果我们定义混合物的平均勒增量  $\bar{\xi}$  为

$$\bar{\xi} = \sum_j \frac{\Sigma_j' \xi_j}{\Sigma_s} = \frac{\sum_j \Sigma_j' \xi_j}{\sum_j \Sigma_j'} \quad (5-34)$$

那么，中子通量的渐近分布便可表成：

$$\phi(u) = \frac{1}{\bar{\xi} \Sigma_s} \quad (5-35)$$

或 
$$\phi(E) = \frac{\phi(u)}{E} = \frac{1}{\bar{\xi} \Sigma_s E} \quad (5-36)$$

由此可以看到，它与单一核慢化剂内渐近分布 (5-29) 式的形式完全一样，只是其中  $\xi$  用混合物的平均  $\bar{\xi}$  值来代替。在今后计算中，我们经常用 (5-34) 式来计算混合物的平均勒增量  $\bar{\xi}$ 。它表明，对于  $\xi$  的平均，不是按照核子数来平均而是必需按照发生散射的概率  $\Sigma_j'/\Sigma_s$ 。

来平均的，这同样也适用于平均散射角余弦  $\mu_0$  的平均。其理由在物理上是很容易理解的。

最后指出，上面讨论的是无吸收的情况；但是，对于有吸收情况，如果是弱吸收并且吸收截面随能量缓慢变化时，可以证明和纯氢慢化介质一样，中子通量的分布需乘上一个因子——逃脱共振几率  $p(E)$ ，即

$$\phi(E) = \frac{1}{E \xi \Sigma_s} p(E) \quad (5-37)$$

$$p(E) = \exp \left[ - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_s(E')} \frac{dE'}{E'} \right] \quad (5-38)$$

至于具有强共振峰的吸收情况将在下一节中讨论。

## 2. 均匀介质中的共振吸收

在第一章内我们曾提到过，在重核的共振能区，即在大约 1 电子伏到 1000 电子伏的范围内，中子的辐射俘获截面往往呈现出一系列共振峰的特征，并具有很大的数值。因此在慢化过程中必然有一部分中子在这一共振能区内被吸收掉，我们把这种吸收叫做共振吸收。在热中子反应堆内，共振吸收对链式裂变反应过程有很重要的影响。

设有一由慢化剂和吸收剂组成的均匀无限介质，在整个介质内存在着均匀分布的中子源，每秒每立方厘米放出  $S_0$  个能量为  $E_0$  的快中子。现在我们就来讨论在这种介质内中子慢化过程中的共振吸收问题。一般说来，除了由氢和无限重吸收剂组成的无限均匀介质以外，在这种有共振吸收的介质内的慢化问题是不能用严格的解析方法来处理的。但是我们可以用一些近似的方法来求得慢化过程中逃脱共振吸收的几率，以及表征共振吸收的一些参数，如有效共振积分等，这些参数对于反应堆分析、计算来说是极为重要的。

### 2.1 共振峰间距很大时的逃脱共振几率

根据第二章内给出的定义， $S_0$  个初始能量为  $E_0$  的中子慢化到能量  $E$  以下的几率，即逃脱共振几率等于

$$p(E) = \frac{S_0 - \text{从 } E \text{ 到 } E_0 \text{ 被共振吸收的中子总数}}{S_0}$$

因此

$$p(E) = 1 - \frac{1}{S_0} \int_E^{E_0} \Sigma_a(E') \phi(E') dE' \quad (5-39)$$

从 (5-39) 式可以看出，由于介质各种元素的截面随中子能量的变化是已知的，因而如果知道共振区内的中子能谱  $\phi(E)$ ，则根据 (5-39) 式我们就不难求得  $p(E)$ 。但是实际上，要象上一节所述的那样用解析方法给出共振区内中子能谱  $\phi(E)$  的数学表达式是不可能的。这是由于共振吸收表现得象一个负源，由上一节讨论知道，它将引起碰撞密度和中子通量的起伏，而这些起伏是很难用解析方法处理的。同时，在有着很多共振峰的能区内，这种前一个共振峰吸收所引起的中子通量的起伏，就给它后面的能量较低的共振峰的中子通量的处理带

来很大的困难。但是，如果共振峰不但是可分辨的而且峰与峰之间的间距足够大，以致于前一个共振峰引起的通量起伏在下一个共振峰前已经消失，就是说已趋近于它的渐近值，那么，在这种情况下，我们可以应用上二节的知识来求得逃脱共振几率。

设吸收剂的中子辐射俘获截面  $\sigma_r(E)$  如图 5-7 所示，它有若干个宽间距共振峰。所谓“宽间距”就是指相邻两共振峰之间的间距满足下列条件： $(E_{i+1} - E_i) \gg (1 - \alpha^4) E_{i+1}$ 。根据上一节的讨论我们知道，在满足上述条件下，就可以认为前面共振峰引起的中子通量起伏在第  $i$  个共振峰前已经消失并达到它的渐近值，用  $\phi_{a,i}(E)$  表示，根据 (5-36) 式可以写成：

$$\phi_{a,i}(E) = \frac{S_{eff}^{(i)}}{\bar{\xi} \Sigma_s E}, \quad (5-40)$$

式中， $\bar{\xi} \Sigma_s$  —— 均匀介质的慢化能力； $S_{eff}^{(i)}$  —— 第  $i$  个共振峰前的“有效”中子源强或慢化密度（见图 5-7）。通常共振区开始处的能量远远小于源中子能量  $E_0$ ，因此源中子不可能在首次碰撞过程中就慢化到共振区。如果在  $E > E_i$  区域没有吸收，那末  $S_{eff}^{(i)}$  将等于  $S_0$  并等于常数。考虑到由于能量比  $E_i$  高的各共振峰对中子的吸收，则显然  $S_{eff}^{(i)} < S_0$  并由下式给出：

$$S_{eff}^{(i)} = S_0 \prod_{j < i} p_j, \quad (5-41)$$

式中， $p_j$  —— 第  $j$  个共振峰的逃脱共振几率； $\prod_{j < i}$  —— 表示对所有  $E_j > E_i$  共振峰的  $p_j$  求连乘积。

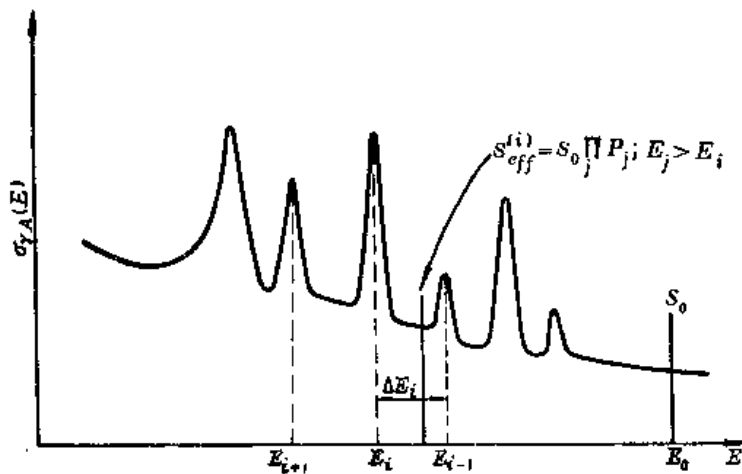


图 5-7 宽间距共振峰及有效中子源  $S_{eff}^{(i)}$

根据逃脱共振几率的定义， $p_j$  由下式表示：

$$p_j = 1 - \frac{1}{S_{eff}^{(j)} \phi} \int_{E_j} \Sigma_a(E) \phi(E) dE, \quad (5-42)$$

式中的积分是对第  $j$  个共振峰进行的。因此，关键问题在于求各共振峰内的中子通量  $\phi(E)$ 。

现在我们把 (5-42) 式改写一下。为了讨论方便，不妨令积分号内的通量这样地归一化，使得在恰好高于共振能处的未扰动的中子通量服从下面渐近分布：

$$\phi_{\sigma_s}(E) = \frac{1}{E}. \quad (5-43)$$

或者说令  $S_{\sigma_s} = \bar{\xi} \Sigma_s$ 。这样，略去其它元素的吸收 (5-42) 式便可写成：

$$p_i = 1 - \frac{N_A}{\bar{\xi} \Sigma_s} \int_{E_j} \sigma_{\gamma, A}(E) \phi(E) dE, \quad (5-44)$$

式中： $N_A$ ——单位体积内吸收剂  $A$  的核子数；

$\sigma_{\gamma, A}(E)$ ——吸收剂  $A$  的辐射俘获截面。

通常一个共振峰吸收的中子数很小，由于当  $|x| \ll 1$  时，有  $1 - x \approx e^{-x}$ ，因而 (5-44) 式可写成：

$$p_i = \exp \left[ - \frac{N_A}{\bar{\xi} \Sigma_s} \int_{E_j} \sigma_{\gamma, A}(E) \phi(E) dE \right]. \quad (5-45)$$

在有  $N$  个宽间距的共振峰情况下，逃脱共振几率  $p$  显然便等于：

$$p = \prod_{j=1}^N p_j = \exp \left[ - \frac{N_A}{\bar{\xi} \Sigma_s} \sum_{j=1}^N \int_{E_j} \sigma_{\gamma, A}(E) \phi(E) dE \right]. \quad (5-46)$$

若定义

$$I_j = \int_{E_j} \sigma_{\gamma, A}(E) \phi(E) dE \quad (5-47)$$

$I_j$  叫做第  $j$  个共振峰的有效共振积分。显然，整个共振区的有效共振积分等于所有共振峰的有效共振积分之和，即

$$\begin{aligned} I &= \int_{\text{共振区}} \sigma_{\gamma, A}(E) \phi(E) dE \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{E_j} \sigma_{\gamma, A}(E) \phi(E) dE = \sum_{j=1}^N I_j. \end{aligned} \quad (5-48)$$

将 (5-47) 和 (5-48) 式代入 (5-46) 得：

$$p = \exp \left[ - \frac{N_A}{\bar{\xi} \Sigma_s} \sum_{j=1}^N I_j \right] = \exp \left[ - \frac{N_A I}{\bar{\xi} \Sigma_s} \right]. \quad (5-49)$$

有效共振积分是个很重要的量，它表征共振峰的吸收，不但计算逃脱共振几率要用到它，以后计算群常数时也要用到它。下面就来介绍有效共振积分的计算。

## 2.2 有效共振积分的近似计算

### 2.2.1 NR近似和NRIM近似

上面提到过，求  $I_j$  的关键在于求共振峰内的中子通量  $\phi(E)$ 。为此，首先必须象上一节一样建立和求解共振能区内的中子慢化方程。现在考虑由一种慢化剂  $M$  和一种吸收剂  $A$  组成

的无限均匀介质。这是最简单的情况，但下述分析的方法可以容易地推广到多种慢化剂和多种吸收剂组成的无限均匀介质。这时根据 (5-6) 式，中子慢化方程为

$$\Sigma_t(E)\phi(E) = \int_E^{E/\alpha_M} dE' \frac{\Sigma_{s,M}(E')\phi(E')}{(1-\alpha_M)E'} + \int_E^{E/\alpha_A} dE' \frac{\Sigma_{s,A}(E')\phi(E')}{(1-\alpha_A)E'}, \quad (5-50)$$

式中， $\Sigma_t(E) = \Sigma_{s,M} + \Sigma_{r,A}(E) + \Sigma_{s,A}(E)$ ，这里认为慢化剂的散射截面  $\Sigma_{s,M}$  与能量无关； $\Sigma_{s,M}$  忽略不计；吸收剂 A 的散射截面  $\Sigma_{s,A}(E)$  中，除势散射截面  $\sigma_{s,A}$  外，还包括共振散射截面，所以它是能量的函数。

我们已经知道，积分方程 (5-50) 是无法求出精确分析解的。自然，它可以用数值方法进行求解。这里我们介绍在两种近似情况下求解上述慢化方程的方法。

在讨论这些方法之前，必须引进关于共振峰的实际宽度的概念。它定义为在共振峰内共振截面（共振吸收截面和共振散射截面之和）大于势散射截面 ( $\Sigma_{s,M} + \Sigma_{s,A}$ ) 的能量间隔，并用  $\Gamma_p$  表示。我们知道在远离共振能（共振峰外）处，总截面将只由势散射截面决定。因此，实际宽度  $\Gamma_p$  可以看成是共振影响范围的一种度量，在这个能量范围 ( $\Gamma_p$ ) 以内，在总截面中共振截面将占主要部分。

利用布勒特-魏格纳公式可以求得  $\Gamma_p$  的简单表示式。为此根据 (1-133) 式令

$$\frac{N_A\sigma_0}{1 + 4(E - E_i)^2/\Gamma^2} = \Sigma_p = N_A\sigma_{p,A} + N_M\sigma_{s,M}, \quad (5-51)$$

根据实际宽度的定义可知，满足上面方程的  $(E - E_i)$  便等于  $\Gamma_p/2$ ，令  $E = E_i \pm \Gamma_p/2$  代入上式，且一般  $\Gamma_p/\Gamma \gg 1$ ，这样便可求得：

$$\Gamma_p = \Gamma \sqrt{\frac{N_A\sigma_0}{\Sigma_p}}. \quad (5-52)$$

通常  $N_A\sigma_0 \gg \Sigma_p$ ，因而实际宽度  $\Gamma_p$  显著大于  $\Gamma$ ，同时它还与吸收剂的浓度有关。对纯铀-238， $\sigma_0/\sigma_p \approx 10^3$ ，在一般情况下  $\Gamma_p \approx (10 \sim 30)\Gamma$ 。表 5-1 给出铀-238 的若干低能共振的参数和纯铀-238 的  $\Gamma_p$  值。

表5-1 铀-238 的低能共振数据

$E_0(\text{eV})$	$\Gamma_n(\text{eV})$	$\Gamma_r(\text{eV})$	$\sigma_0(\text{b})$	$\Gamma_p(\text{eV})$	$\frac{1}{2}(1-\alpha_A)E_0(\text{eV})$
6.67	0.00152	0.026	$2.16 \times 10^5$	1.26	0.055
20.90	0.0087	0.025	$3.19 \times 10^4$	1.95	0.174
36.80	0.032	0.025	$3.98 \times 10^4$	3.65	0.306
66.54	0.026	0.022	$2.14 \times 10^4$	2.26	0.554
102.47	0.070	0.026	$1.86 \times 10^4$	3.98	0.850
116.85	0.030	0.022	$1.30 \times 10^4$	1.32	0.966
165.27	0.0032	0.018	$2.41 \times 10^3$	0.98	1.37
208.46	0.053	0.022	$8.86 \times 10^3$	2.63	1.73

我们知道，中子与原子核一次弹性碰撞的平均能量损失为  $\bar{\Delta E} = (1 - \alpha)E/2$ ，可以看到，对于所有常用的慢化剂情况，几乎都满足下列条件：

$$(1 - \alpha_M)E_i/2 \gg \Gamma_p,$$

式中  $E_i$  为共振能。因而可以认为，相对于慢化剂的碰撞区间来讲共振峰是足够“狭窄”的。也就是说在 (5-50) 式右端的第一项积分中，共振峰宽度比起积分区间来说是很窄的，积分的主要贡献是由共振峰以外的能量区间所决定。因而可以略去共振对通量扰动的影响，积分号内的通量可用渐近通量 (5-43) 式，即  $\phi_{\infty}(E) = 1/E$  代入，因而

$$\int_E^{E/\alpha_M} dE' \frac{\Sigma_{s,M}\phi(E')}{(1-\alpha_M)E'} = \frac{\Sigma_{s,M}}{1-\alpha_M} \int_E^{E/\alpha_M} \frac{1}{E'^2} dE' = \frac{\Sigma_{s,M}}{E}. \quad (5-53)$$

将 (5-53) 式代入 (5-50) 式就得到：

$$\Sigma_t(E)\phi(E) = \frac{\Sigma_{s,M}}{E} + \int_E^{E/\alpha_A} dE' \frac{\Sigma_{s,A}(E')\phi(E')}{(1-\alpha_A)E'}. \quad (5-54)$$

对于上式右端关于吸收核的积分，我们分两种情况分别加以近似处理：

$$(1) \quad \overline{\Delta E_A} = \frac{1}{2}(1-\alpha_A)E_i \gg \Gamma_p, \quad (5-55)$$

$$(2) \quad \overline{\Delta E_A} \ll \Gamma_p. \quad (5-56)$$

一般，例如铀-238，多数能量较高的共振峰均满足条件 (5-55)，只有在低能处的若干个共振峰比较好的满足条件 (5-56) (见表 5-1)。通常把符合 (5-55) 条件的共振称为“窄共振”。下面分别介绍这两种情况的计算。

#### 窄共振 (NR) 近似

如果除对慢化剂核满足  $\Delta E_M \gg \Gamma_p$  以外，对吸收核也满足窄共振条件 (5-55) 式，即  $\Delta E_A \gg \Gamma_p$ ，则根据和上述相同的理由，方程 (5-54) 积分项内的中子通量亦可采用渐近通量，即  $\phi(E) = 1/E$ ，同时认为  $\Sigma_{s,A}(E) \approx \Sigma_{p,A}$ ，则

$$\int_E^{E/\alpha_A} dE' \frac{\Sigma_{s,A}(E')\phi(E')}{(1-\alpha_A)E'} \approx \frac{\Sigma_{p,A}}{E} \quad (5-57)$$

将 (5-57) 式代入 (5-54) 式就得到窄共振近似下的中子通量  $\phi_{NR}(E)$ ：

$$\phi_{NR}(E) = \frac{\Sigma_{s,M} + \Sigma_{p,A}}{\Sigma_t(E)E} \quad (5-58)$$

将 (5-58) 式代入 (5-47) 式就得到窄共振近似下有效共振积分  $I_{NR,i}$ ：

$$I_{NR,i} = \int_E \frac{dE}{E} \sigma_{\gamma,A}(E) \frac{(\Sigma_{s,M} + \Sigma_{p,A})}{\Sigma_t(E)} \quad (5-59)$$

因为  $\Delta E_A = \frac{1}{2}(1-\alpha_A)E_i$  随  $E_i$  增加而增加，可以预料，NR 近似对于较高能量处的共振符合得更好。

#### 窄共振无限质量 (NRIM) 近似

从表 5-1 我们看到，对于  $^{238}\text{U}$  的低能共振峰，有若干个共振满足条件： $\overline{\Delta E_A} \ll \Gamma_p$ 。在



这种情况下，中子在共振峰内将经受不止一次的碰撞，因此我们可以忽略吸收剂的散射作用，而假定吸收剂的质量为无限大，即  $\alpha_A \rightarrow 1$ 。当然对于慢化剂， $\Delta E_M \gg \Gamma$ ，的窄共振条件仍是满足的。这时 (5-54) 式中的积分项为

$$\lim_{\alpha_A \rightarrow 1} \int_E^{E/\alpha_A} dE' \frac{\Sigma_{s,A}(E')\phi(E')}{(1-\alpha_A)E'} \rightarrow \Sigma_{s,A}(E)\phi(E) \lim_{\alpha_A \rightarrow 1} \frac{1}{E} \int_E^{E/\alpha_A} \frac{dE'}{(1-\alpha_A)} = \Sigma_{s,A}(E)\phi(E) \quad (5-60)$$

将 (5-60) 式代入 (5-54) 式就得到 NRIM 近似下的中子通量  $\phi_{NRIM}(E)$

$$\phi_{NRIM}(E) = \frac{\Sigma_{s,M}}{[\Sigma_t(E) - \Sigma_{s,A}(E)]E} \quad (5-61)$$

而 NRIM 近似的有效共振积分  $I_{NRIM, i}$  为

$$I_{NRIM, i} = \int_{E_j} \frac{dE}{E} \sigma_{\gamma, A}(E) \frac{\Sigma_{s,M}}{\Sigma_t(E) - \Sigma_{s,A}(E)} \quad (5-62)$$

上述结果可以归纳如下：

$$I_i = \int_{E_j} \sigma_{\gamma, A}(E) \phi_R(E) \frac{dE}{E} \quad (5-63)$$

式中

$$\phi_R(E) = \frac{\Sigma_{s,M} + \lambda \Sigma_{p,A}}{(\Sigma_{\gamma, A} + \lambda \Sigma_{s,A} + \Sigma_{s,M})E} \quad (5-64)$$

$\lambda = 1$ ，对 NR 近似； $\lambda = 0$ ，对 NRIM 近似。

### 2.2.2 有效共振积分的计算

我们如果采用布勒特-魏格纳单能级公式，就能根据 (5-59) 和 (5-62) 式对每一个共振峰进行积分，算出有效共振积分。

#### $I_{NR}$ 的计算

根据 (1-133) 和 (1-135) 式，在共振峰附近

$$\sigma_{\gamma, A}(E) = \frac{\sigma_{0, j} \Gamma_{\gamma, j}}{\Gamma_j} \frac{1}{1+x^2} \quad (5-65)$$

$$x = \frac{2}{\Gamma_j} (E - E_j)$$

$$\sigma_{s, A}(E) = \frac{\sigma_{0, j} \Gamma_{s, j}}{\Gamma_j} \frac{1}{1+x^2} + \frac{2\sigma_{0, j} R}{\lambda_{0, j}} \frac{x}{1+x^2} + \sigma_{p, A} \quad (5-66)$$

考虑到共振峰的宽度一般比较窄，比共振能量  $E_j$  小得多，因此如果将积分中  $1/E$  项取成  $1/E_j$  提出积分号外，不会引起多少误差，同时由于共振峰的特性，积分值的绝大部分来自共

振峰附近的一个很小能区的贡献，所以将积分限扩展为从 $-\infty$ 到 $\infty$ 也不会引起多少误差。基于这些考虑，将(5-65)和(5-66)代入(5-59)式就得到

$$I_{NR, j} = \frac{(N_M \sigma_{s, M} + N_A \sigma_{p, A}) \sigma_{0, j} \Gamma_{\gamma, j}}{2 N_M \sigma_{s, M} E_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

$$= \frac{(N_M \sigma_{s, M} + N_A \sigma_{p, A}) \sigma_{0, j} \Gamma_{\gamma, j} \pi}{2 N_M \sigma_{s, M} E_j} \frac{1}{\sqrt{ac - b^2/4}}, \quad (5-67)$$

式中：

$$a = 1 + \frac{N_A \sigma_{p, A}}{N_M \sigma_{s, M}},$$

$$b = \frac{N_A \sigma_{0, j}}{N_M \sigma_{s, M} \lambda_{0, j}} \sqrt{\sigma_{p, A} / \pi},$$

$$c = a + \frac{N_A \sigma_{0, j}}{N_M \sigma_{s, M}},$$

式中角标  $j$  表示属于第  $j$  个共振峰。

如果  $N_M \sigma_{s, M} \gg N_A \sigma_{p, A}$ ，则  $a \approx 1$ ；同时在(5-59)式中可以略去势散射项  $\Sigma_{s, A}$ ，则(5-67)式进一步简化成：

$$I_{NR, j} = \frac{\sigma_{0, j} \Gamma_{\gamma, j}}{2 E_j} \frac{\pi}{\sqrt{c}},$$

此外，如果  $N_A \sigma_{0, j} / N_M \sigma_{s, M} \gg 1$ ，则近似有

$$I_{NR, j} = \frac{\sigma_{0, j} \Gamma_{\gamma, j} \pi}{2 E_j \left( \frac{N_A \sigma_{0, j}}{N_M \sigma_{s, M}} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left( \frac{N_M \sigma_{s, M}}{N_A} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi \sqrt{\sigma_{0, j} \Gamma_{\gamma, j}}}{2 E_j} \quad (5-68)$$

将所有满足NR近似的各共振峰的  $I_{NR, j}$  加起来，就得到：

$$I_{NR} = \sum_j I_{NR, j} \quad (5-69)$$

上面计算并没有考虑到吸收剂核的热运动影响，实际计算时，我们必须考虑多普勒效应，这时必须采用下列公式：

$$\sigma_{\gamma, A}(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_{\gamma}}{\Gamma} \psi(\xi, \chi), \quad (5-70)$$

$$\sigma_{s, A}(E) \approx \sigma_0 \frac{\Gamma_s}{\Gamma} \psi(\xi, \chi) + \sigma_{s, A} \quad (5-71)$$

此处略去了干涉散射，将(5-70)和(5-71)式代入(5-59)式就得到考虑多普勒效应的有效共振积分  $I_{NR, j}$

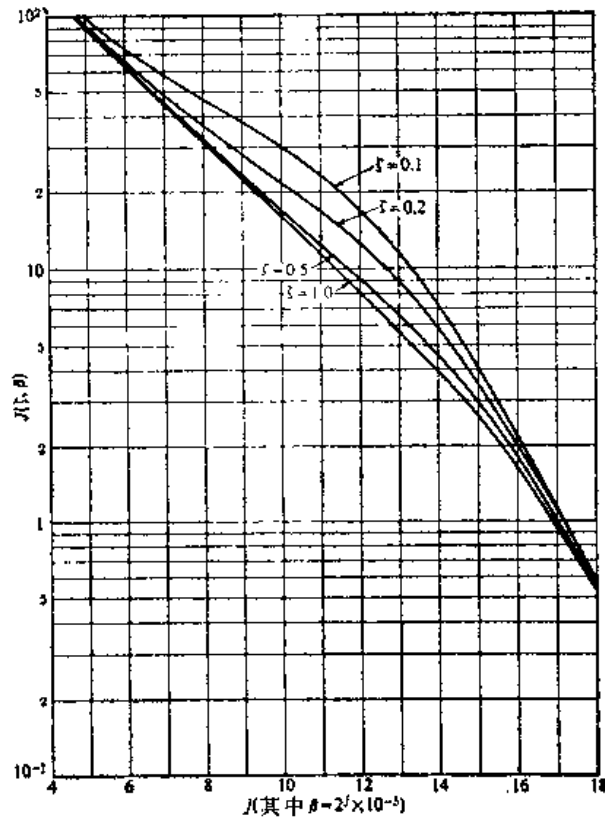


图5-8 函数  $J(\xi, \beta)$

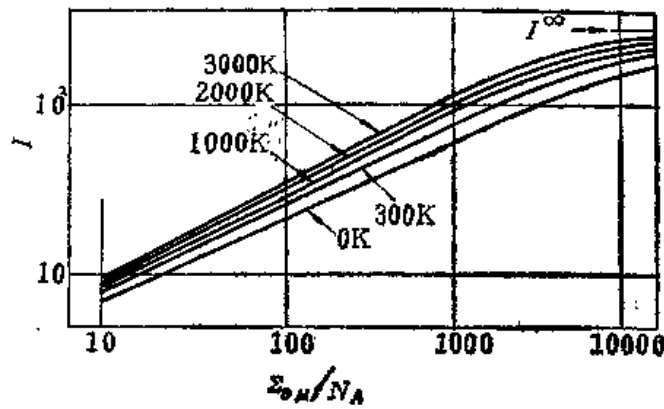


图5-9 根据 NR 近似计算的  $^{238}\text{U}$  的有效共振积分

$$\begin{aligned}
 I_{NR, i} &= \frac{(\Sigma_{f, M} + \Sigma_{p, A})\Gamma_{\gamma, i}}{2E_i N_A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\xi, \chi)}{\psi(\xi, \chi) + \beta} d\chi \\
 &= \frac{(\Sigma_{f, M} + \Sigma_{p, A})\Gamma_{\gamma, i}}{N_A E_i} J(\xi, \beta),
 \end{aligned} \tag{5-72}$$

式中,  $J(\xi, \beta)$  是下列积分所定义的函数:

$$J(\xi, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\psi(\xi, \chi)}{\psi(\xi, \chi) + \beta} d\chi, \tag{5-73}$$

$$\beta = \frac{\Sigma_{s, M} + \Sigma_{p, A}}{N_A \sigma_{0, j}} \quad (5-74)$$

$J(\xi, \beta)$ 的性质如图 5-8 所示, 温度对共振吸收的影响就包含在这个量内, 我们留待 2.2.3 节中讨论。

对于  $^{235}\text{U}$  吸收剂, NR 近似有效共振积分的计算结果示于图 5-9 中。

### $I_{\text{NRIM}}$ 的计算

和求  $I_{\text{NR}}$  完全同样的处理, 我们可以求得:

$$I_{\text{NRIM}, j} = \frac{\sigma_{0, j} \Gamma_{n, j}}{2E_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi \sigma_{0, j} \Gamma_{\gamma, j}}{2E_j a} \quad (5-75)$$

式中, 
$$a^2 = 1 + \frac{N_A \sigma_{0, j} \Gamma_{\gamma, j}}{N_M \sigma_{i, M} \Gamma_j}$$

若  $N_A \sigma_{0, j} / N_M \sigma_{i, M} \gg 1$ , 则得到:

$$I_{\text{NRIM}, j} = \left( \frac{N_M \sigma_{i, M}}{N_A} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi \sqrt{\sigma_{0, j} \Gamma_{\gamma, j} \Gamma_j}}{2E_j} \quad (5-76)$$

考虑到多普勒效应后, 有效共振积分为:

$$I_{\text{NRIM}, j} = \frac{\Sigma_{s, M}}{N_A} \frac{\Gamma_j}{E_j} J(\xi, \beta'), \quad (5-77)$$

式中 
$$\beta' = \frac{N_M \sigma_{i, M} \Gamma_j}{N_A \sigma_{0, j} \Gamma_{\gamma, j}} \quad (5-78)$$

(5-77) 和 (5-72) 式可以写成统一的形式:

$$I_j = \frac{\Sigma_{s, M} + \lambda \Sigma_{p, A}}{N_A E_j} \frac{\Gamma_{\gamma, j} \Gamma_j}{(\Gamma_{\gamma, j} + \lambda \Gamma_{n, j})} J(\xi, \beta), \quad (5-79)$$

$$\beta = \frac{\Sigma_{s, M} + \lambda \Sigma_{p, A}}{N_A \sigma_{0, j}} \frac{\Gamma_j}{\Gamma_{\gamma, j} + \lambda \Gamma_{n, j}}, \quad (5-80)$$

$\lambda = 1$ , 对 NR 近似;  $\lambda = 0$ , 对 NRIM 近似。

对于给定的吸收剂, 共振参数  $E_j$ ,  $\Gamma_{\gamma, j}$ ,  $\Gamma_j$  等都是已知的, 因而应用上面公式便可求得各个共振峰的有效共振积分  $I_j$ 。从而, 我们就可求得有效共振积分和逃脱共振几率  $p$ 。它们分别为:

$$I = \sum_j I_j = \sum_j I_{\text{NR}, j} + \sum_j I_{\text{NRIM}, j}, \quad (5-81)$$

$$p = \exp \left[ - \frac{N_A I}{\xi \Sigma_s} \right]. \quad (5-82)$$

对于某些共振峰, 例如铀-238 的 116.8、165.27 和 208.48 电子伏处的共振峰 (见表 5-1), (5-55) 和 (5-56) 式的条件都不能很好地满足, 即  $\Gamma_p \approx (1 - \alpha_A) E_j / 2$ 。在这种情况下, 严格讲, NR 和 NRIM 近似都不适用, 精确计算时, 则应采用所谓“中间近似”, 即在 (5-64) 式中取  $1 > \lambda > 0$  的中间数值。

从 (5-68) 和 (5-76) 式中我们发现, 每一共振峰的有效共振积分, 不论是根据 NR 近似还是根据 NRIM 近似, 它都与  $(\Sigma_{s,m}/N_A)^{-1/2}$  成正比, 因此根据 (5-81) 式, 总的有效共振积分也与  $(\Sigma_{s,m}/N_A)^{-1/2}$  成正比。有效共振积分这种简单的关系已为实验所证实。按 NRIM 近似计算的有效共振积分与一些测量结果的比较示于图 5-10。

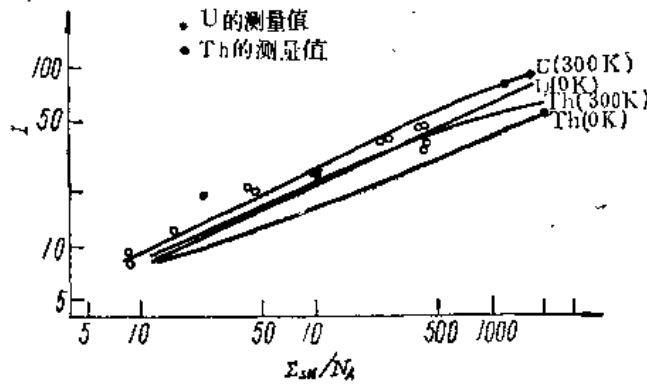


图5-10 有效共振积分的理论值 (根据 NRIM 近似) 与实验值的比较

根据实验结果得到了在不同的稀释情况下, 铀-238 及钍-232 的有效共振积分的经验公式。对于铀-238 吸收剂, 在室温 (300K) 时:

$$I_{238} = 2.69 \left( \frac{\Sigma_s}{N_A} \right)^{0.471}, \quad 0 \leq \frac{\Sigma_s}{N_A} \leq 4 \times 10^8 \quad (5-83)$$

对于钍-232 吸收剂:

$$I_{232} = 8.33 \left( \frac{\Sigma_s}{N_A} \right)^{0.283}, \quad 0 \leq \frac{\Sigma_s}{N_A} \leq 4500 \quad (5-84)$$

如果介质内吸收剂的浓度很小, 以致于使得  $N_A/(N_M \sigma_{s,m}) \rightarrow 0$ , 我们称这种介质为无限稀释介质, 这时的有效共振积分, 用  $I_i^{\circ}$  表示, 根据 (5-59) 和 (5-62) 式:

$$\begin{aligned} I_i^{\circ} &= I_{NR,i}^{\circ} = I_{NRIM,i}^{\circ} = \frac{1}{E_i} \int_{E_j} \sigma_{v,A}(E) dE \\ &= \frac{\pi \sigma_{0,i} \Gamma_{v,i}}{2E_j} \end{aligned} \quad (5-85)$$

由此可见在吸收剂无限稀释的情况下, 有效共振积分  $I_i^{\circ}$  只与吸收剂的共振参数有关, 而与介质的温度无关。这是因为此时  $I_i^{\circ}$  只决定于共振曲线下的面积, 正如第一章内早就指出过的, 这个面积是与介质温度无关的, 根据 (5-72) 式, 令  $\beta \rightarrow \infty$ , 亦得到 (5-85) 的结果。对铀-238,  $I^{\circ} = \Sigma I_i^{\circ} = 280$  靶, 对钍-232,  $I^{\circ} = 70$  靶。

比较一下无限稀释与有限稀释两种情况下的有效共振积分, 根据 (5-59)、(5-62) 和 (5-85) 式, 我们发现, 无限稀释情况下的有效共振积分大于有限稀释情况下的有效共振积分, 这是由于在无限稀释情况下, 上节中所提到过的能量自屏效应将减少, 因而使共振峰内中子通量增大的结果。

最后应强调指出, 从上述有效共振积分的计算公式中可以看出, 有效共振积分与共振能  $E_i$  成反比, 因此在其它条件相同的情况下, 低能共振峰将吸收更多的中子, 这是因为中子

通量随着能量降低而迅速上升，因此会有更多的中子被低能共振所吸收。例如，<sup>238</sup>U、在 6.67 电子伏、21 电子伏处的稀释有效共振积分分别为 128 靶、61 靶，而 <sup>235</sup>U 总的稀释有效共振积分为 280 靶，由此可见低能共振峰的吸收是主要的。

### 2.2.3 温度对共振吸收的影响

根据 (5-72) 和 (5-77) 式知道，温度对共振吸收的影响包含在  $f(\zeta, \beta)$  这个因子内，从  $f(\zeta, \beta)$  的性质知道 (见图 5-8)，介质温度  $T$  增加时，由于共振峰展宽，多普勒宽度增加， $\zeta$  减少，使  $f(\zeta, \beta)$  增大，从而使有效共振积分增加。这个现象通常称为多普勒效应。为了说明这个问题，我们采用一个简化的共振峰模型，见图 5-11。我们把它简化成一个矩形共振峰，使矩形面积和共振峰曲线下面积相等。当介质温度由  $T_1$  升高到  $T_2$  时，由于多普勒效应，共振宽度由  $\Delta E_1$  展宽至  $\Delta E_2$ ，共振峰值由  $\sigma_{01}$  降至  $\sigma_{02}$ ，但由 (1-115) 式可知，共振曲线下的面积保持不变，即  $\sigma_{01} \Delta E_1 = \sigma_{02} \Delta E_2$ 。现以 NR 近似为例来看共振峰展宽对有效共振积分的影响。

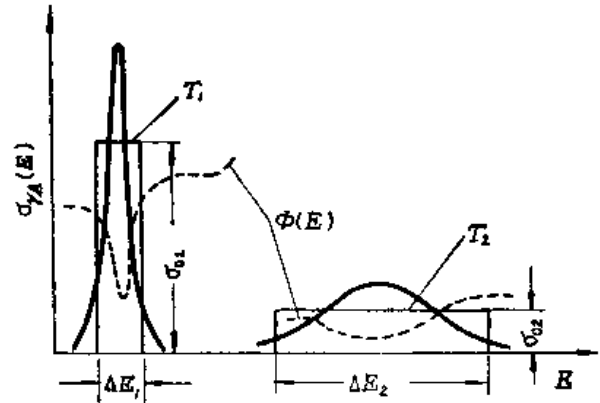


图 5-11 温度对共振吸收的影响

根据 (5-59) 式，设  $\Sigma_{s, M} \gg \Sigma_{p, A}$ ，并略去  $\Sigma_{r, A}(E)$ ，用  $1/E_i$  代替  $1/E$  并取到积分号外，并注意到矩形共振峰  $\sigma_{r, A}(E) = \sigma_0$ ，则

$$\begin{aligned}
 I_{NR} &= \int_{E_i} \sigma_{r, A}(E) \frac{\Sigma_{s, M}}{\Sigma_{s, M} + N_A \sigma_{r, A}(E)} \frac{dE}{E} \\
 &= \frac{1}{E_i} \int_{E_i} \frac{\sigma_{r, A}(E) dE}{1 + \frac{N_A \sigma_{r, A}(E)}{N_M \sigma_{s, M}}} \\
 &= \frac{\sigma_{01} \Delta E_1}{E_i \left( 1 + \frac{N_A}{N_M \sigma_{s, M}} \sigma_{01} \right)}, \tag{5-86}
 \end{aligned}$$

而由于多普勒效应共振展宽后的有效共振积分为：

$$I_{NR, D} = \frac{\sigma_{02} \Delta E_2}{E_i \left( 1 + \frac{N_A}{N_M \sigma_{s, M}} \sigma_{02} \right)}. \tag{5-87}$$

比较这两式可以看出，两式的分子相等；但温度升高后，由于多普勒展宽，峰值下降， $\sigma_{02} < \sigma_{01}$ ，使分母减小，从而使有效共振积分增加，即  $I_{NR, D} > I_{NR}$ 。这现象从物理上可以解释如下：根据 (5-58) 式知道，当温度升高时，由于多普勒展宽结果，分母将减小，这表示共振峰内中子通量将增大；这样，虽然多普勒效应使截面降低了，但却因此使能量自屏蔽效应减弱了，从而使共振峰内中子通量增加，总的结果却使共振吸收增加了。从这里也可以看出，

随着稀释程度的增加,亦即使  $N_A/(N_M\sigma_{r,n})$  减小,有效共振积分亦增加,这也是由于能量自屏效应减弱使共振峰内中子通量增加的缘故。

由此可见当燃料温度升高时,多普勒效应将使有效共振积分增加,从而使共振吸收增大。这一现象对反应堆的动态过程和安全运行来说是很重要的。在第十二章中我们还将进一步讨论这一问题。

### 3. 反应堆慢化能谱的近似计算

在第一节中我们讨论了无限介质内中子的慢化能谱,它没有考虑到中子的泄漏影响,因而直接用它来表示反应堆的慢化能谱则是非常近似的。下面介绍一种在实际计算中经常应用的、并考虑到中子的泄漏影响的、计算反应堆慢化能谱的近似方法。

回顾在第三章中的讨论,我们知道,对于裸堆,中子通量的空间变量和能量变量是可以分离变量的,而且空间分布函数  $\psi(\mathbf{r})$  满足波动方程

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + B^2\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (5-88)$$

的解。这里  $B^2$  是方程的特征值,在稳态时它就是反应堆的几何曲率(或等于材料曲率)。例如:

$$\begin{aligned} &\text{对厚度为 } a \text{ 的平板} && B^2 = (\pi/a)^2, \\ &\text{对圆柱(高 } H, \text{ 半径 } R) \text{ 形裸堆} && \left. \begin{aligned} &B^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (5-89) \end{aligned}$$

因此,在求解中子输运方程时对于裸堆或大型反应堆的中心部分,我们可以近似地认为,中子通量的空间变量和其它变量是可以分离变量的,即  $\phi(\mathbf{r}, u, \Omega) = \phi(u, \Omega)\psi(\mathbf{r})$ 。这里  $\psi(\mathbf{r})$  是满足波动方程 (5-88) 的解。例如对于一维平板问题,稳态中子通量分布可以写成:

$$\phi(x, u, \mu) = \phi(u, \mu)e^{-iBx}, \quad (5-90)$$

这实质上相当于中子通量的空间分布用单项傅里叶基波来表示。把 (5-90) 式代入一维中子输运方程 (4-38) 式,然后消去  $e^{-iBx}$  项便得到

$$\begin{aligned} &(1 - iB\mu/\Sigma_s)\Sigma_s\phi(u, \mu) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^u \int_{\Omega'} \Sigma_s(u')f(u-u'; \mu, \mu')\phi(u', \mu') du' d\Omega' + \frac{S(u)}{2}, \quad (5-91) \end{aligned}$$

这里我们把非弹性散射和裂变反应都看成为中子源项,同时认为所产生的中子 是各向同性的,即:

$$\begin{aligned} S(u) = &\int_0^u \int_{-1}^{+1} \Sigma_{s,n}(u')f_{s,n}(u-u')\phi(u', \mu') du' d\mu' \\ &+ \chi(u) \int_0^u \int_{-1}^{+1} \nu\Sigma_f(u')\phi(u', \mu') du' d\mu'. \quad (5-92) \end{aligned}$$

(5-91) 式左端含有几何曲率  $B^2$  的项是表征反应堆芯部中子泄漏的影响。对于不同的反应堆,则用与其相应的  $B^2$  值代入;由于我们所要求的是总的中子能谱,因而只要对 (5-

91) 式中的中子泄漏项能够作出正确的估计, 就能求出比较正确的能谱。所以, (5-91) 式虽然是从一维情况出发推导出来的, 但是由于对于不同形状反应堆, 我们可采用相应的曲率  $B^2$  代入, 因而可以期望它也将适用于其它形状反应堆慢化能谱的近似计算。

因而, 计算的关键在于正确地估计出  $B^2$  值。但是, 在开始计算时我们并不知道  $B^2$  的正确数值。这时可以先估计[例如, 可按照 (5-89) 式]一个  $B^2$  的近似值, 按 (5-91) 计算出中子能谱, 并用这个能谱进行分群临界计算求出中子通量分布, 然后用这个通量分布便可以算出新的  $B^2 \sim (-\nabla^2 \phi / \phi)$  的改进值。如果前后两次结果的差别比较大, 则可以进行反复迭代计算, 直到满意为止。但是, 实践证明, 群常数对于  $B^2$  的依赖性并不十分敏感, 因而在一般情况下很少需要这种迭代的过程。

尽管这方法在理论上并不十分严格, 但是它已为计算实践证明是成功的, 并广泛地应用于水堆和其他类型反应堆的快谱计算。下面讨论方程 (5-91) 的求解方法。

### 3.1 $P_N$ 和 $B_N$ 近似

我们通常应用第四章中所介绍的球谐函数方法来对 (5-91) 式求解。把  $\phi(u, \mu)$  和  $f(u-u', \mu_0)$  按勒让特多项式展成级数:

$$\phi(u, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(u) P_n(\mu), \quad (5-93)$$

$$f(u-u'; \mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n(u-u') P_n(\mu_0). \quad (5-94)$$

显然,  $\phi_0(u)$  就是我们所要求的中子通量的能量分布或慢化能谱, 按照和第四章中球谐函数方法完全同样的步骤, 将上述展式代入 (5-91) 式, 利用勒让特多项式的和数公式和正交性便可得到和 (4-70) 式相类似的方程式:

$$\begin{aligned} & (1 - iB\mu/\Sigma_t) \Sigma_t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(u) P_n(\mu) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \int_0^u \Sigma_s(u') f_n(u-u') \phi_n(u') du' + \frac{1}{2} S(u). \end{aligned} \quad (5-95)$$

#### $P_N$ 近似

如果在 (5-93) 展式中, 我们只取前  $N+1$  项, 即认为  $n > N$  时  $\phi_n(u) = 0$ , 那末将  $P_n(\mu)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  依次乘 (5-95) 式, 并对  $\mu$  从  $-1$  到  $+1$  积分之, 这样和第四章一样便得到  $P_N$  近似的方程组如下:

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{n+1}{2n+1} iB\phi_{n+1}(u) - \frac{n}{2n+1} iB\phi_{n-1}(u) + \Sigma_t \phi_n(u) \\ &= \int_0^u \Sigma_s(u') f_n(u-u') \phi_n(u') du' + S(u) \delta_{0,n} \\ & n = 0, 1, \dots, N \\ & \phi_{N+1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-96)$$



在慢化能谱的计算中，通常应用的是  $P_1$  近似，这时 (5-96) 式便简化为：

$$\left. \begin{aligned} & -iB\phi_1(u) + \Sigma_1(u)\phi_0(u) \\ & = \int_0^u \Sigma_1(u')f_0(u-u')\phi_0(u')du' + S(u) - \frac{iB}{3}\phi_0(u) + \Sigma_1(u)\phi_1(u) \\ & = \int_0^u \Sigma_1(u')f_1(u-u')\phi_1(u')du' . \end{aligned} \right\} (5-97)$$

**$B_N$  近似**

如果将 (5-95) 式两边先除以  $(1 - iE\mu/\Sigma_1)$ ，然后再依次乘以  $P_n(\mu)$  并对  $\mu$  进行积分之，这样便得到关于  $\phi_n(u)$ ， $n = 0, 1, \dots$ ，的方程：

$$\Sigma_1(u)\phi_n(u) = \sum_{l=0}^n (2l+1)A_{l,n} \int_0^u \Sigma_1(u')f_l(u-u')\phi_l(u')du' + A_{0,n}S(u),$$

$$n = 0, 1, \dots \quad (5-98)$$

式中系数  $A_{l,n}$  等于：

$$A_{l,n}(B,u) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(\mu)P_n(\mu)}{1-\eta\mu} d\mu,$$

$$\eta = iB/\Sigma_{1,0} \quad (5-99)$$

把勒让特多项式的递推关系式 (4-66) 乘以  $P_l(\mu)/(1-\eta\mu)$  并对  $\mu$  由  $-1$  到  $+1$  积分之，可以求得关于  $A_{l,n}$  的递推关系

$$\frac{2n+1}{\eta} A_{l,n}(\eta) - (n+1)A_{l,n+1}(\eta) - nA_{l,n-1}(\eta) = \frac{\delta_{l,n}}{\eta},$$

$$(5-100)$$

式中  $\delta_{l,n}$  为克罗尼克尔符号。同时可以求得：

$$A_{0,0} = \frac{\text{tg}^{-1}[B/\Sigma_{1,0}]}{B/\Sigma_{1,0}}, \quad A_{0,1} = \frac{A_{0,0} - 1}{\eta},$$

$$A_{1,1} = \frac{A_{0,0} - 1}{\eta^2}; \quad \dots \dots A_{l,n} = A_{n,l}.$$

$$(5-101)$$

在方程 (5-98) 右端求和项内令

$$I_l(u) = \int_0^u \Sigma_1(u')f_l(u-u')\phi_l(u')du', \quad (5-102)$$

若当  $l > N$  时，令  $I_l(u) = 0$ ，这样便得到  $B_N$  近似的方程如下：

$$\Sigma_1(u)\phi_n(u) = \sum_{l=0}^N (2l+1)A_{l,n}I_l(u) + A_{0,n}S(u).$$

$$n = 0, 1, \dots \quad (5-103)$$

这是一个含有  $\phi_n(u)$  的无限个方程的方程组。但是可以先从前面  $N+1$  个方程中联立解出

$n \leq N$  的  $\phi_n(u)$  来, 然后再代回 (5-103) 式右端, 依次求出  $n > N$  的所有  $\phi_n(u)$  来。

在慢化能谱计算中, 通常应用  $B_1$  近似。这时方程组 (5-103) 便简化为:

$$\Sigma_t \phi_0(u) = A_{0,0} I_0(u) + 3 \frac{A_{0,0} - 1}{\eta} I_1(u) + A_{0,0}(u) S(u), \quad (5-104a)$$

$$\Sigma_t \phi_1(u) = \frac{A_{0,0} - 1}{\eta} I_0(u) + 3 \frac{A_{0,0} - 1}{\eta^2} I_1(u) + \frac{A_{0,0} - 1}{\eta} S(u). \quad (5-104b)$$

这里对于  $n > 1$  的  $\phi_n(u)$  的方程, 由于在能谱计算时并不需要用到它们, 因而就可略去。如果依次用  $\eta$  及  $\eta A_{0,0}/(1 - A_{0,0})$  乘 (5-104b) 式并减去 (5-104a) 式, 则便可以得到和  $P_1$  近似的 (5-97) 式相类似的方程组:

$$\left. \begin{aligned} & -iB\phi_1(u) + \Sigma_t(u)\phi_0(u) \\ & = \int_0^u \Sigma_t(u') f_0(u-u') \phi_0(u') du' + S(u), \\ & -\frac{iB}{3}\phi_0(u) + \gamma(u)\Sigma_t(u)\phi_1(u) \\ & = \int_0^u \Sigma_t(u') f_1(u-u') \phi_1(u') du', \end{aligned} \right\} \quad (5-105)$$

式中

$$\gamma(u) = \frac{(B/\Sigma_t)^2 \operatorname{tg}^{-1}(B/\Sigma_t)}{3[B/\Sigma_t - \operatorname{tg}^{-1}(B/\Sigma_t)]} \approx 1 + \frac{4}{15} \left( \frac{B}{\Sigma_t} \right)^2. \quad (5-106)$$

这就是慢化能谱计算中常用的  $B_1$  近似方程。当取  $\gamma(u) = 1$  时, 就得到  $P_1$  近似。国内外常用的一些快谱程序, 例如 GAM 等, 就是根据 (5-105) 方程组而编制的。

计算经验表明,  $B_1$  近似的精度要高于  $P_1$  近似。但是, 对于大型反应堆, 由于泄漏项相对来讲比较小, 因而两者的结果则比较接近。在快谱的计算中, 目前的趋势是更多地应用  $B_1$  近似。

在  $N$  相等的条件下,  $B_N$  近似比  $P_N$  近似精确的原因可以这样来分析:  $P_N$  近似略去了中子通量的  $n > N$  的所有分量, 即认为  $n > N$  时  $\phi_n(u) = 0$ , 而  $B_N$  近似则只是在 (5-98) 式右端的级数求和中略去了  $l > N$  的散射源项  $I_l(u)$ 。这样, 例如对于散射为各向同性的特殊情况 [ $f_n(u-u') = 0$ , 当  $n > 0$ ], 那末,  $B_N$  近似所得到的解就等于精确的解, 而  $P_N$  近似却仍然只是近似的结果。可以证明, 当  $|\eta| < 1$  时,  $P_N$  近似的收敛速度正比于  $\|\phi_{N+1}\|$ , 而  $B_N$  近似则正比于  $\|I_{N+1}\|$ , 它通常比  $\|\phi_{N+1}\|$  要小, 因而  $B_N$  近似的收敛速度要比  $P_N$  近似高。

为了更进一步看清问题, 我们把  $A_{l,n}$  的递推关系式 (5-100) 代入 (5-103) 式, 经整理后便得到:

$$\begin{aligned} \Sigma_t \phi_n(u) = & \frac{iB}{\Sigma_t} \left\{ \frac{n+1}{2n+1} \left[ \sum_{l=0}^N (2l+1) A_{l,n+1} I_l(u) \right. \right. \\ & \left. \left. + A_{0,n+1} S(u) \right] + \frac{n}{2n+1} \left[ \sum_{l=0}^N (2l+1) A_{l,n-1} I_l(u) \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ A_{0, n-1} S(u) \Big] + \sum_{i=0}^N \delta_{i, n} I_i(u) + \delta_{0, n} S(u)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

再注意到 (5-103) 式, 上式的  $B_N$  近似方程就可写成和  $P_1$  近似 (5-96) 式相类似的形式:

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{n+1}{2n+1} iB \phi_{n+1}(u) - \frac{n}{2n+1} iB \phi_{n-1}(u) + \Sigma_i \phi_n(u) \\ & = I_n(u) + \delta_{0, n} S(u) \\ & n = 0, 1, \dots, N \\ & -\frac{n+1}{2n+1} iB \phi_{n+1}(u) - \frac{n}{2n+1} iB \phi_{n-1}(u) + \Sigma_i \phi_n(u) = 0 \\ & n = N+1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5-107)$$

这样, 经过上述变换后, 比较方程组 (5-96) 和 (5-107) 就可以清楚地看到, 对于前  $N$  个分量,  $B_N$  近似和  $P_N$  近似的方程形式是完全一样的。所不同之处仅仅在于:  $P_N$  近似在  $n=N$  的方程中简单地令  $\phi_{n+1} = 0$ , 并截去了  $n > N$  的所有方程; 而在  $B_N$  近似中, 它保留全部方程, 只是在  $n > N$  的方程右端令  $I_n(u) = 0$  而已, 同时在  $n=N$  方程中,  $\phi_{n+1}(u)$  则用第  $N+1$  个方程的近似解来表示。这样, 从数学上看  $B_N$  近似的处理显然要比  $P_N$  近似优越, 它可以看作是对  $P_N$  近似的一种改进, 在相同的  $N$  下具有比  $P_N$  近似更高的精度。

### 3.2 散射源项的近似处理

方程 (5-97) 及 (5-105) 是一个积分方程, 它固然可以用分群和离散方法很容易地数值求解。但是, 由于方程右端的散射源项是一个积分算子, 数值求解时, 当能群或能量分点数目比较大时, 所形成的散射矩阵的元素数目就很大, 因而所需存贮单元和计算时间也都比较大。下面我们对散射源  $I_0(u)$  和  $I_1(u)$  项作一些近似处理, 使它转换为微分运算, 这样就更便于数值求解。虽然目前计算机的容量和速度已不再成为主要考虑的问题, 但是下面这些处理方法在许多程序中仍然被继续采用, 因为它是比较方便并且具有良好的精确度。

当介质含有多种核素时, 方程 (5-105) 可以写成:

$$\left. \begin{aligned} & -iB\phi_1(u) + \Sigma_i \phi_0 \\ & = \sum_j \int_0^x \Sigma_j^i(u') f_0^i(u-u') \phi_0(u') du + S(u), \\ & -\frac{iB}{3} \phi_0(u) + \gamma(u) \Sigma_i(u) \phi_1(u) \\ & = \sum_j \int_0^x \Sigma_j^i(u) f_1^i(u-u') \phi_1(u') du', \end{aligned} \right\} \quad (5-108)$$

其中上标  $j$  系表示第  $j$  种元素的参量。

下面讨论对方程 (5-108) 右端散射源项所作的近似处理。首先设法把它们用慢化密度来表示。我们讨论在质心系内散射是各向同性的 ( $s$  波散射) 情况。根据 (5-2) 式慢化密

度的定义, 可同理引入

$$q_0^j(u) = \int_0^u du' \int_u^\infty \Sigma^j(u') f_0^j(u'' - u') \phi_0(u') du'', \quad (5-109)$$

$$q_1^j(u) = \int_0^u du' \int_u^\infty \Sigma^j(u') f_1^j(u'' - u') \phi_1(u') du'', \quad (5-110)$$

注意到这里的  $\phi_0(u)$  就是中子总通量  $\phi(u)$ , 所以  $q_0^j$  也就是第  $j$  种元素所产生的慢化密度, 且

$$q_0(u) = \sum_j q_0^j(u),$$

而  $q_1^j$  则是慢化密度的各向异性分量。  $f_0^j(u - u')$  就是(5-5)式所定义的散射函数,  $f_1^j(u - u')$  可以根据(4-104)式求得:

$$f_1^j(u - u') = \int_{-1}^{+1} f(u - u'; \mu_0) P_1(\mu_0) d\mu_0$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{u' - u}}{1 - u} \left[ \left( \frac{A_j + 1}{2} \right) e^{-\frac{u' - u}{2}} - \left( \frac{A_j - 1}{2} \right) e^{\frac{u' - u}{2}} \right], & u - \ln \frac{1}{\alpha_j} < u' < u, \\ 0 & \text{其它 } u' \text{ 值.} \end{cases} \quad (5-111)$$

对(5-109)及(5-110)进行微分, 便得到:

$$\frac{\partial q_0^j}{\partial u} = \Sigma^j(u) \phi_0(u) - \int_0^u \Sigma^j(u') f_0^j(u - u') \phi_0(u') du', \quad (5-112)$$

$$\frac{\partial q_1^j}{\partial u} = \bar{\mu}_0^j \Sigma^j(u) \phi_1(u) - \int_0^u \Sigma^j(u') f_1^j(u - u') \phi_1(u') du', \quad (5-113)$$

这里  $\bar{\mu}_0^j$  就是以前定义的  $j$  种核素的平均散射角余弦:

$$\bar{\mu}_0^j = \int_u^{u+1} \int_{-1}^{+1} f^j(u - u'; \mu_0) \mu_0 d\mu_0 du = \frac{2}{3A^j}. \quad (5-114)$$

把(5-112)和(5-113)代入(5-108)式便得到

$$\left. \begin{aligned} -iB\phi_1(u) + (\Sigma_a + \Sigma_{i,s}) \phi_0(u) &= -\sum_j \frac{\partial q_0^j}{\partial u} + S(u), \\ -\frac{iB}{3}\phi_0(u) + (\gamma(u)\Sigma_t - \bar{\mu}_0 \Sigma_s) \phi_1(u) &= -\sum_j \frac{\partial q_1^j}{\partial u}, \end{aligned} \right\} \quad (5-115)$$

式中  $\bar{\mu}_0$  为混合介质的平均散射角余弦:

$$\bar{\mu}_0 = \sum_j \bar{\mu}_0^j \Sigma_s^j / \sum_j \Sigma_s^j = \sum_j \Sigma_s \bar{\mu}_0^j \Sigma_s^j / \Sigma_s. \quad (5-116)$$

可以看到, 引进了  $q_0^j$  及  $q_1^j$  后便把原来方程中的散射源的积分用一个对  $q_0^j$  及  $q_1^j$  的微分算子来代替。这样, 方程(5-115)比原来方程更便于用数值方法求解。但是, 这时, 出现了新的变量  $q_0^j$  和  $q_1^j$ 。下面就来导出对于不同元素它们所满足的近似方程。

### 3.2.1 氢 ( $A = 1$ )

对于氢,  $A = 1$ , 因而  $\alpha_H = 0$ ,  $\mu_0^H = \frac{2}{3}$ 。对于这个特殊情况, 把散射函数代入(5-109)、(5-110)式可以发现:

$$q_0^H = \int_0^u \Sigma_0^H(u') e^{u'-u} \phi(u') du',$$

$$q_1^H = \frac{2}{3} \int_0^u \Sigma_1^H(u') e^{\frac{3}{2}(u'-u)} \phi_1(u') du'. \quad (5-117)$$

将它们进行微分便可求得  $q_0^H$  和  $q_1^H$  所满足的微分方程

$$\frac{dq_0^H}{du} + q_0^H(u) = \Sigma_0^H(u) \phi_0(u),$$

$$\frac{dq_1^H}{du} + \frac{3}{2} q_1^H(u) = \frac{2}{3} \Sigma_1^H(u) \phi_1(u). \quad (5-118)$$

应该指出, 对于氢, (5-118) 方程是严格的。

### 3.2.2 非氢元素

#### (1) 戈泽耳-格里林格 (Goertzel-Gruebling) 近似 (G-G近似)

我们讨论弱吸收和吸收截面随能量缓慢变化的情况 (关于强的共振峰吸收将另外单独处理)。从本章第一节的讨论中知道, 在无吸收介质内 ( $\Sigma_a = 0$ ), 碰撞密度  $\Sigma_s(u)\phi(u)$  在渐近区里等于常数  $1/\bar{\xi}$ 。在吸收性介质中,  $\Sigma_s(u)\phi(u)$  的变化将取决于吸收截面。在弱吸收及吸收截面随能量缓慢变化的条件下, 可以预计在一个碰撞区间 ( $\Delta u = \ln(1/\alpha_j)$ ) 内  $\Sigma_s(u)\phi(u)$  变化不会太大, 因而 (5-109) 和 (5-110) 式中  $\Sigma_s^j(u')\phi_0(u')$  和  $\Sigma_s^j(u')\phi_1(u')$  可以在  $u' = u$  处展成泰勒级数, 取头两项来表示, 即

$$\Sigma_s^j(u')\phi_0(u') \approx \Sigma_s^j(u)\phi_0(u) + (u' - u) \frac{d\Sigma_s^j(u)\phi_0(u)}{du}, \quad (5-119)$$

$$\Sigma_s^j(u')\phi_1(u') \approx \Sigma_s^j(u)\phi_1(u) + (u' - u) \frac{d\Sigma_s^j(u)\phi_1(u)}{du}. \quad (5-120)$$

把 (5-119) 和 (5-120) 式分别代入 (5-109) 和 (5-110) 式, 然后完成对  $u'$  积分, 结果便得

$$q_0^j(u) \approx \xi_j \Sigma_s^j(u)\phi_0(u) + a_j \frac{d\Sigma_s^j(u)\phi_0(u)}{du}, \quad (5-121)$$

$$q_1^j(u) \approx \zeta_j \Sigma_s^j(u)\phi_1(u) + b_j \frac{d\Sigma_s^j(u)\phi_1(u)}{du}. \quad (5-122)$$

式中  $\xi_j$  就是前面所定义的  $j$  种元素的平均勒增量, 而

$$a_j = \frac{\alpha_j - 1 + \alpha_j \ln(1/\alpha_j) + \alpha_j (\ln(1/\alpha_j))^2 / 2}{1 - \alpha_j}, \quad (5-123)$$

$$b_j = \frac{-1}{1 - \alpha_j} \left\{ \frac{A+1}{3} \left[ \frac{4}{9} - \alpha_j^{1/2} \left( \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{\alpha_j} + \frac{2}{3} \ln \frac{1}{\alpha_j} + \frac{4}{9} \right) \right] \right. \\ \left. - (A-1) \left[ 4 - \alpha_j^{1/2} \left( \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{\alpha_j} + 2 \ln \frac{1}{\alpha_j} + 4 \right) \right] \right\}, \quad (5-124)$$

$$\xi_j = \frac{2}{1 - \alpha_j} \left\{ \frac{A+1}{9} \left[ 1 - \alpha_j^{3/2} \left( \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\alpha_j} + 1 \right) \right] \right. \\ \left. - (A-1) \left[ 1 - \alpha_j^{1/2} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha_j} + 1 \right) \right] \right\}. \quad (5-125)$$

另一方面，如果把泰勒展式 (5-119) 和 (5-120) 式分别代入 (5-112) 和 (5-113) 式，积分后便得：

$$\frac{dq_0^j}{du} = \xi_j \frac{d}{du} \left[ \Sigma_j^i(u) \phi_0(u) \right], \quad (5-126)$$

$$\frac{dq_1^j}{du} = \xi_j \frac{d}{du} \left[ \Sigma_j^i(u) \phi_1(u) \right].$$

最后，把 (5-126) 式代入 (5-121) 和 (5-122) 式便得  $q_0^j(u)$  及  $q_1^j(u)$  所满足的微分方程

$$\lambda_{0,j} \frac{dq_0^j}{du} + q_0^j = \xi_j \Sigma_j^i \phi_0(u), \quad (5-127)$$

$$\lambda_{1,j} \frac{dq_1^j}{du} + q_1^j = \xi_j \Sigma_j^i \phi_1(u),$$

式中：

$$\lambda_{0,j} = -a_j / \xi_j, \quad (5-128)$$

$$\lambda_{1,j} = -b_j / \xi_j. \quad (5-129)$$

这便是所谓 **G-G 近似方程**。可以看到它和氢的慢化方程 (5-118) 在形式是相似的。

## (2) 年龄近似

对于重的元素，每次碰撞的最大勒增量  $\ln(1/\alpha_j)$  (即碰撞区间)，是一个很小的数值。在假定弱吸收和吸收截面缓慢变化的条件下， $\Sigma_j^i(u') \phi_0(u')$  在一个碰撞区间内的变化是非常小的，因而甚至可以认为在 (5-119) 展式中只需取一项就可以了。也就是说在 (5-121) 式中  $q_0^j(u)$  只取一项来表示，即

$$q_0^j(u) = \xi_j \Sigma_j^i(u) \phi_0(u), \quad (5-130)$$

这便称为年龄近似或连续慢化模型。因为它假设中子每次碰撞区间必须是很小的数值，也就是说每次碰撞能量的变化是很小的。这就相当于近似地认为在慢化过程中中子的能量损失是连续地减小，所以称它为连续慢化。

由于  $q_1^j(u)$  通常比  $q_0^j(u)$  小，因而有时为简单起见直接令

$$q_1^j = 0, \quad (5-131)$$

这样就得到所谓扩散-年龄近似，有时也叫做年龄-非一致 $P_1$ 近似，因为它令 $q_1^i = 0$ ，略去慢化密度的各向异性分量。

如果和(5-130)式的 $q_0^i$ 相一致， $q_1^i$ 也用(5-122)式中取一项来表示，即

$$q_1^i(u) = \xi \Sigma_s^i \phi_1(u), \quad (5-132)$$

则称之为年龄-一致 $P_1$ 近似。

必须指出，年龄近似只有对质量数相当大的重慢化剂才是正确的，它不适用于轻核介质，特别是含氢介质。因为中子为轻核慢化时，每次碰撞的能量损失是很大的，例如中子在与氢核一次碰撞时完全有可能损失其全部能量，因而能量的分散度很大，前面的一些假设便不成立。所以我们对于含氢介质，例如对于轻水堆(LWR)系统，往往把氢和其它重元素分开处理，对于氢则用(5-118)式的严格方程，而对于非氢元素则使用扩散-年龄近似，这便是所谓的塞列贡特-戈泽耳(Selengut-Goertzel)或S-G近似。一般在慢化能谱的实际计算程序中，除氢元素用(5-118)式计算外，对质量数比较大的重核都采用年龄近似，而对于中等质量的一些核，例如Al等则可用G-G近似。

最后，根据(5-115)式，我们可以把反应堆慢化能谱近似计算的方程总结如下：

$$\left. \begin{aligned} -iB\phi_1(u) + [\Sigma_a(u) + \Sigma_{r,a}(u)]\phi_0(u) &= -\sum_i \frac{dq_0^i}{du} + S(u), \\ -\frac{iB}{3}\phi_0(u) + [\gamma(u)\Sigma_s(u) - \mu_0\Sigma_s(u)]\phi_1(u) & \\ = -\sum_i \frac{dq_1^i}{du}. & \end{aligned} \right\} (5-133)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{0,j} \frac{dq_0^j}{du} + q_0^j(u) &= \beta_{0,j} \phi_0(u), \\ \lambda_{1,j} \frac{dq_1^j}{du} + q_1^j(u) &= \beta_{1,j} \phi_1(u). \end{aligned} \right\} (5-134)$$

$$\gamma(u) = \begin{cases} 1, & P_1 \text{ 近似} \\ (5-106) \text{ 式}, & B_1 \text{ 近似} \end{cases}$$

式中标号 $j$ 表示氢以及介质中其它各种元素。对于氢及各种近似下 $\lambda_{0,j}$ ， $\lambda_{1,j}$ ， $\beta_{0,j}$ ， $\beta_{1,j}$ 的数值列于表5-2中。

表5-2 各种近似模型的参数值

		$\lambda_{0,j}$	$\lambda_{1,j}$	$\beta_{0,j}$	$\beta_{1,j}$
氢(H)		1	$\frac{2}{3}$	$\Sigma_s^H$	$\frac{4}{9} \Sigma_s^H$
G-G 近似		(5-128) 式	(5-129) 式	$\xi_j \Sigma_s^j$	$\zeta_j \Sigma_s^j$
年 龄 近 似	非一致 $P_1$ (扩散)近似	0	0	$\xi_j \Sigma_s^j$	0
	一致 $P_1$ 近似	0	0	$\xi_j \Sigma_s^j$	$\zeta_j \Sigma_s^j$

## 4. 有限介质内的慢化——扩散-年龄近似

### 4.1 扩散-年龄理论

前面我们讨论了中子源在空间是均匀分布的无限介质，或当空间分布与能量分布可以分离变量的简单情况下，中子慢化能谱的计算。但是在具体问题中系统的大小总是有限的，裂变中子也很少是均匀地产生的。在一般情况下，中子通量的能量分布和空间分布是密切相关的，它的分布必须用函数  $\phi(\mathbf{r}, E)$  来描述，并且不能简单地用分离变量形式表示。因此，为求得  $\phi(\mathbf{r}, E)$  的分布就必须求解中子输运方程。遗憾的是，除了极个别的特殊情况外，一般情况下它是无法用解析方法严格地求解的，而只能用一些近似的方法来处理。例如，前面介绍的扩散近似便是反应堆物理分析最常用的一种近似方法。

扩散近似方程的普遍形式为 (4-113) 式所示。如果把方程右端的积分项按照 (5-112) 式用慢化密度来表示，那么 (4-113) 式的扩散方程便可写成下列形式：

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D(\mathbf{r}, u) \nabla \phi(\mathbf{r}, u) + \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, u) \\ = \frac{-\partial q(\mathbf{r}, u)}{\partial u} + S(\mathbf{r}, u), \end{aligned} \quad (5-135)$$

式中  $q(\mathbf{r}, u)$  为慢化密度，如它用前面所提到的年龄近似来处理，即令：

$$q(\mathbf{r}, u) = \xi \Sigma_s \phi(\mathbf{r}, u), \quad (5-136)$$

这样所得到的 (5-135) 和 (5-136) 方程便叫做扩散-年龄近似。应用它可以求出中子通量的空间-能量分布及反应堆的临界问题，它是最简单并最早被采用的模型之一，在早期曾广泛地应用于反应堆计算，并被很好地研究过。年龄理论的重大缺陷便是它对于含氢慢化剂以及轻核介质（例如目前应用最广泛的轻水堆）不能适用。

下面我们讨论无源、无吸收均匀介质的简单情况。把 (5-136) 代入 (5-135) 式便得到：

$$\nabla^2 q(\mathbf{r}, u) = \frac{\partial q(\mathbf{r}, u)}{\partial u} \frac{\xi \Sigma_s(u)}{D(u)}. \quad (5-137)$$

引进一个新的变量  $\tau(u)$ ，方程 (5-137) 式就可以变换成更简明的形式，令

$$d\tau = -\frac{D}{\xi \Sigma_s} du, \quad (5-138)$$

则  $\tau$  与  $u$  的关系为：

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{D(u)}{\xi \Sigma_s(u)} du. \quad (5-139)$$

参数  $\xi$  写在积分号里面，为的是引起注意，它可能是能量  $u$  的函数。根据 (5-138) 式，方程 (5-137) 式便写成：

$$\nabla^2 q(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\partial q(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau}. \quad (5-140)$$

通常把方程 (5-140) 称为费米年龄方程，它是描述无吸收介质内慢化过程中中子扩散的方



程。由 (5-139) 式所定义的量  $\tau(u)$  称为费米年龄或中子年龄。可以看到，它是表征中子能量的另一种变量。显然，当中子能量等于源能量 ( $u = 0$ ) 时， $\tau = 0$ ，随着能量的降低， $\tau$  将逐渐增大。因而， $\tau$  是随着中子能量的降低或中子慢化时间的增大而增大的单调函数。从这个含义上它具有“年龄”的意义。但是，必须强调，它并不具有时间量纲，而具有长度平方的因次。

年龄方程 (5-140) 是一个标准的热传导型偏微分方程，在一些特定情况下可以求出其解析解；其求解方法、过程在一般数理方程书中都有详细的介绍，这里就不再叙述，仅把其结果简单介绍如下：

**无限介质内的点源** 假设在  $r = 0$  处有一单位点源，则方程 (5-140) 的解为：

$$q(r, \tau) = \frac{e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}} \quad (5-141)$$

在普遍情况下，单位点源位于  $r_0$  处，则  $r$  处的慢化密度的解为

$$q(r, \tau) = \frac{e^{-|r-r_0|^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}} \quad (5-142)$$

**无限介质内的平面源** 对在  $x = 0$  处有一单位源强的无限平面源的无限介质，有

$$q(x, \tau) = \frac{e^{-x^2/4\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}} \quad (5-143)$$

## 4.2 年龄理论的临界条件

在第三章中我们应用单群理论讨论了均匀裸堆的临界问题，下面应用年龄理论求出热中子均匀裸堆的临界条件。稳态时反应堆内热中子的扩散方程显然可以写成

$$D\nabla^2\phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\phi(\mathbf{r}) + pq(\mathbf{r}, \tau_{th}) = 0, \quad (5-144)$$

这里  $p$  为逃脱共振几率， $q(\mathbf{r}, \tau_{th})$  为假定在慢化过程中没有共振吸收时慢化为热中子的慢化密度， $\tau_{th}$  为热中子年龄。作为初步近似， $pq(\mathbf{r}, \tau_{th})$  便等于考虑了共振吸收后每秒每立方米内慢化到热能以下的热中子数目。 $q(\mathbf{r}, \tau_{th})$  满足年龄方程 (5-140) 式

$$\nabla^2 q(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\partial q(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau}, \quad (5-145)$$

这时初始条件为

$$q(\mathbf{r}, 0) = \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \phi(\mathbf{r}). \quad (5-146)$$

应用分离变量法对 (5-145) 式求解，即令

$$q(\mathbf{r}, \tau) = R(\mathbf{r})W(\tau). \quad (5-147)$$

将其代入 (5-145) 式便可得到  $R(\mathbf{r})$  和  $W(\tau)$  所满足的方程：

$$\frac{1}{W(\tau)} \frac{dW(\tau)}{d\tau} = -B^2, \quad (5-148)$$

和

$$\nabla^2 R(\mathbf{r}) + B^2 R(\mathbf{r}) = 0 \quad (5-149)$$

(5-148) 式的解是

$$W(\tau) = Ae^{-B^2\tau}, \quad (5-150)$$

可见, 这里  $B^2$  必须等于正实数才能满足  $q(\mathbf{r}, \tau)$  不随中子年龄而增大的物理条件。根据初始条件 (5-146) 式及 (5-147) 式有

$$q(\mathbf{r}, 0) = AR(\mathbf{r}) = \frac{k_{\infty}\Sigma_a\phi(\mathbf{r})}{\rho}, \quad (5-151)$$

因而  $q(\mathbf{r}, \tau)$  的解便等于

$$q(\mathbf{r}, \tau) = \frac{k_{\infty}\Sigma_a\phi(\mathbf{r})}{\rho} e^{-B^2\tau}. \quad (5-152)$$

从 (5-151) 式可以看到热中子通量  $\phi(\mathbf{r})$  系与  $R(\mathbf{r})$  成比例, 因而它亦必须满足波动方程 (5-149) 式, 即

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0. \quad (5-153)$$

将 (5-153) 及按 (5-152) 求得的  $q(\mathbf{r}, \tau, t)$  值代入方程 (5-144) 便得到

$$-DB^2\phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\phi(\mathbf{r}) + k_{\infty}\Sigma_a\phi(\mathbf{r})e^{-B^2\tau, t} = 0.$$

消去  $\phi(\mathbf{r})$  并注意  $D/\Sigma_a = L^2$ , 经过整理后便得到 (稳态时):

$$\frac{k_{\infty}e^{-B^2\tau, t}}{1 + L^2B^2} = 1, \quad (5-154)$$

这便是稳态时热中子裸堆所应满足的关系式——临界条件。这里  $B^2$  是波动方程 (5-153) 的特征值, 它由  $\phi(\mathbf{r})$  所应满足的边界条件来确定。根据第三章讨论知道, 当反应堆处于稳态时只有最小本征值才有意义, 因而  $B^2$  也就等于反应堆的几何曲率  $B_g^2$ 。

(5-154) 式各项的物理意义是很清楚的。如果反应堆是无限大的, 那末慢化过程中没有中子泄漏, 慢化密度就应该保持常数并等于  $q(\mathbf{r}, 0) = k_{\infty}\Sigma_a\phi(\mathbf{r})/\rho$ , 而现在热中子慢化密度却为  $q(\mathbf{r}, \tau, t) = q(\mathbf{r}, 0)e^{-B^2\tau, t}$ 。因此, 因子  $e^{-B^2\tau, t}$  便表示中子从裂变能慢化到热能的慢化过程中, 中子不泄漏几率  $p_s$ 。而在第三章已经证明  $(1 + L^2B^2)^{-1}$  是热中子在扩散过程中的不泄漏几率  $p_D$ 。因而临界条件 (5-154) 式可以写成:

$$k = k_{\infty}p_s p_D = \frac{k_{\infty}e^{-B^2\tau, t}}{1 + L^2B^2} = 1, \quad (5-155)$$

这便是年龄理论的临界方程, 其中,  $k$  是有效增殖因数。在早期的反应堆物理设计中, 主要是以石墨为慢化剂的反应堆, 它曾广泛地被用来作为反应堆的临界条件。

对于大型反应堆,  $B^2$  很小, 因此  $e^{-B^2\tau, t}$  可以展成级数, 同时把第二项以后各项略去, 于是,

$$e^{-B^2\tau, t} \approx 1 - B^2\tau, t \approx (1 + B^2\tau, t)^{-1},$$

这样, 临界方程 (5-155) 就可近似写成:

$$k = \frac{k_{\infty}}{(1 + L^2B^2)(1 + \tau, t B^2)} = 1, \quad (5-156)$$

或略去  $B^4$  项有

$$k = \frac{k_{\infty}}{1 + M^2B^2} = 1, \quad (5-157)$$

式中

$$M^2 = L^2 + \tau_{th}, \quad (5-158)$$

我们称  $M^2$  为徙动面积。关于它的物理意义将在下面讨论。

### 4.3 中子年龄

中子年龄  $\tau(u)$  是表征中子慢化过程特性的一个重要参数。在一些计算问题中经常要用到它，因此有必要在这里再加以讨论。

**年龄的物理意义** 从前面知道，年龄  $\tau$  具有长度平方的因次。因此我们可以象讨论扩散长度的物理意义那样来计算慢化密度的二次空间矩[用  $\overline{r^2}(\tau)$  表示]，即计算中子自源点产生（这时  $\tau = 0$ ）到被慢化到年龄（能量）相应于  $\tau$  时所穿行的直线距离  $r$  的均方值。这样就可以给出中子年龄的更明确的物理意义。

根据  $\overline{r^2}(\tau)$  的定义，对于无限介质点源（图5-12）有

$$\begin{aligned} \overline{r^2}(\tau) &= \frac{\int_0^\infty r^2 (\text{穿行 } r \text{ 且年龄慢化到 } \tau \text{ 的中子数}) dV}{\text{总的慢化中子数}} \\ &= \frac{\int_0^\infty r^2 [4\pi r^2 q(r, \tau)] dr}{\int_0^\infty 4\pi r^2 q(r, \tau) dr} \end{aligned}$$

将 (5-141) 式代入便得到

$$\overline{r^2}(\tau) = \frac{\int_0^\infty r^4 e^{-r^2/4\tau} dr}{\int_0^\infty r^2 e^{-r^2/4\tau} dr} = 6\tau. \quad (5-159)$$

由此，中子年龄  $\tau(u)$  就等于无限介质点源发出的中子从源点至慢化到年龄等于  $\tau(u)$  时所穿行的直线距离均方值的六分之一。如果我们讨论的不是点源，而是一维无限平面源则可以求得

$$\overline{x^2} = 2\tau. \quad (5-160)$$

以上的结论是以年龄理论为基础的。正如前面指出，年龄理论对于某些介质是不适用的。然而，在实际应用中，不管对什么介质，年龄理论是否适用，我们都将直接按照 (5-159) 式的二次空间矩来定义中子年龄。这样便将中子年龄的概念加以推广使其适用于所有情况。同时，中子年龄的实验测定也是根

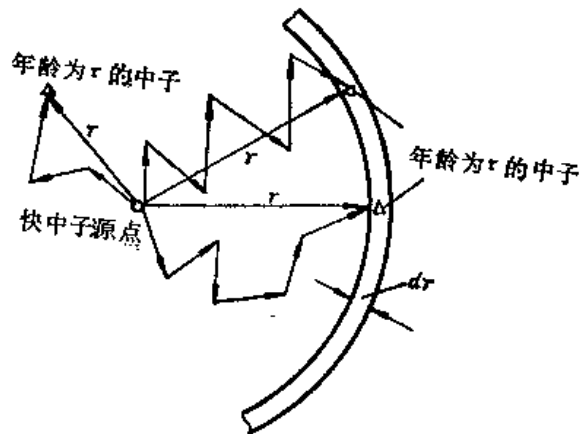


图5-12 慢化密度空间二次矩的计算

据 (5-159) 式的定义进行测量的。

**中子年龄的计算**

根据 (5-139) 式

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{D}{\xi \Sigma_s} du = \int_0^u \frac{1}{3\xi \Sigma_s \Sigma_{t,r}} du.$$

由于  $du = -dE/E$ , 因而

$$\tau(E) = \int_E^{E_0} \frac{1}{3\xi \Sigma_s \Sigma_{t,r}} \frac{dE}{E}. \tag{5-161}$$

如果  $\xi$ ,  $\Sigma_s$  和  $\Sigma_{t,r}$  与能量无关 (对多数重原子核是正确的), 对于单元素介质则有

$$\tau(E) = \frac{1}{3\xi \Sigma_s \Sigma_{t,r}} \ln \frac{E_0}{E} = \frac{\lambda_s \lambda_{t,r}}{3\xi} \ln \frac{E_0}{E}. \tag{5-162}$$

若慢化剂包含有不同的原子核, 则式中之  $\xi$ ,  $\Sigma_s$  和  $\Sigma_{t,r}$  等量均用对介质的平均值来代替。

但是对于某些元素, 例如氢, 在低能区域散射截面与中子能量有关, 同时正如前面提到、年龄理论对于某些介质不适用, 这时就不能应用上面公式计算年龄。精确的年龄数值可由实验方法测定或由 (5-159) 或 (5-160) 式定义直接来计算。例如对于无限介质平面源

$$\begin{aligned} \tau(u) &= \frac{1}{2} \overline{x^2} = \frac{\phi_{0,2}(u)}{2\phi_{0,0}(u)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \phi_0(x, u) dx}{2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x, u) dx}, \end{aligned} \tag{5-163}$$

式中  $\phi_0(x, u)$  为中子总通量,  $\phi_{0,2}$  为通量的二次空间矩。 $\phi_0(x, u)$  (或  $\phi_{0,2}$ ) 可以通过解中子输运方程 (或矩方程) 来求得。

在热中子反应堆计算中我们特别感兴趣的是热中子年龄  $\tau_{t,h}$ , 也就是从裂变中子慢化到热能时的中子年龄。另一方面, 在实验测量中经常测定慢化到铟(In)共振能 ( $E_{I,n} = 1.45$  电子伏) 时的中子年龄  $\tau_{I,n}$ 。显然

$$\tau_{t,h} = \tau_{I,n} + \tau(E_{I,n} \rightarrow E_{t,h}) \tag{5-164}$$

表 5-3 中给出几种常用慢化剂和堆型的  $\tau_{t,h}$  值。

表5-3 常见慢化剂的热中子年龄

元 素	H <sub>2</sub> O	D <sub>2</sub> O	C	Be	轻水堆	沸水堆	高温气冷堆
$\tau_{t,h}$ (厘米 <sup>2</sup> )	26	131	368	102	~40	~50	~300

### 徙动长度

根据 (5-158) 式徙动面积  $M^2$  等于

$$M^2 = L^2 + \tau_{th},$$

式中  $L$  是热中子扩散长度,  $\tau_{th}$  是热中子年龄。通常我们称  $\sqrt{\tau_{th}}$  为慢化长度,  $M$  为徙动长度。下面我们讨论徙动长度  $M$  的物理意义。从年龄和扩散长度的意义, 由 (5-158) 式有

$$M^2 = \frac{1}{6} (\overline{r_s^2} + \overline{r_d^2}), \quad (5-165)$$

式中  $r_s$  —— 快中子自源点到慢化为热中子时所穿行的直线距离,  $r_d$  —— 从成为热中子点起 到被吸收点为止所扩散穿行的直线距离 (图5-13)。若设  $r_M$  是快中子从源点产生到变为热中子被吸收时所穿行的直线距离, 则由图5-13知道,

$$r_M = r_s + r_d,$$

对上式两边取均方值

$$\overline{r_M^2} = \overline{r_s^2} + \overline{r_d^2} + 2\overline{r_s r_d} \cos\theta,$$

由于  $r_s$  和  $r_d$  的方向彼此不相关, 因而两者的夹角余弦  $\cos\theta$  的平均值 等于零, 于是有

$$M^2 = \frac{1}{6} (\overline{r_s^2} + \overline{r_d^2}) = \frac{1}{6} \overline{r_M^2}. \quad (5-166)$$

这样, 徙动面积  $M^2$  是中子由作为快 (裂变) 中子产生出来, 直到它成为热中子 并被吸收所穿行直线距离均方值的六分之一。由此可以看到, 徙动长度  $M$  是影响芯部中子泄漏程度的重要参数,  $M$  愈大, 则中子不泄漏几率  $P_L$  便愈小。

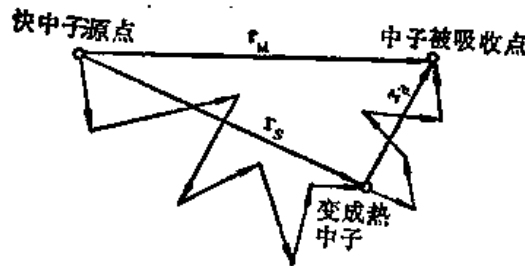


图5-13 徙动长度的计算

## 4.4 修正单群理论

比较 (5-157) 和 (3-81) 式可以看到, 如果把 (3-81) 式中的  $L^2$  用徙动面积  $M^2$  代替, 那么单群临界方程就和大型裸堆的年龄理论临界方程一样了。这样, 只要简单地把  $L^2$  换成  $M^2$ , 就可以把第三章单群模型的所有结果用于大型反应堆的计算。正因为如此, 往往把 (5-157) 式称为“修正单群理论”的临界方程。这时稳态单群方程 [参阅 (3-65) 式] 便应改写成

$$\nabla^2 \phi(r) + B_m^2 \phi(r) = 0, \quad (5-167)$$

$$B_m^2 = (k_\infty - 1) / M^2. \quad (5-168)$$

(5-167) 式通常称为热中子反应堆的“修正单群方程”。实践证明它比第三章中的简单单群方程可以获得更满意的结果。其主要理由从物理上可以解释如下：在单群理论中把所有中子都看成为热中子，因而没有考虑慢化过程对泄漏的影响；我们知道， $L^2$  与中子自变成热中子地点到它被吸收为止所移动过的距离有关；但是，在反应堆内中子由核裂变产生到慢化成为热中子之前在堆内已经移动过了一个距离 ( $\sqrt{\tau}$ )；现在用徙动面积  $M^2 = L^2 + \tau$  来代替  $L^2$ ，这样便初步地考虑了慢化过程对泄漏的影响，因而使精确度得到了改善。

### 参 考 文 献

- [1] J.J.Duderstadt & L.J.Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, Chap. 8, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [2] A.F.Henry, Nuclear Reactor Analysis, Chap.3, 5, 8, The MIT Press, 1975.
- [3] J.R. 拉马什著, 洪流译, 核反应堆理论导论, 第六、七章, 原子能出版社, 1977年.
- [4] H.Ferziger and P.F.Zweifel, The Theory of Slowing Down in Nuclear Reactors, MIT Press, 1966.
- [5] D.Jakeman, Physics of Nuclear Reactor, Chap.3, pp.100--120, The English Universities Press LTD, 1966.

## 第六章 分群扩散理论

在第三章内我们介绍了单速扩散理论，以单速扩散方程为基础，讨论了裸堆和带反射层反应堆的临界方程或临界条件。当时我们假设反应堆内的中子都具有同一速度（或能量），显然这个假设是不符合堆内实际情况的。换句话说，单速理论提供的结果是相当粗糙的。这是因为反应堆内中子的能量是在 0.001 电子伏至 10 兆电子伏相当宽的范围内变化的，而中子与堆内各种材料原子核的作用截面又是与中子能量密切有关的。因此可以预料，要较真实地反映堆内的物理过程，不能认为中子都具有同一速度（或能量），而必须考虑中子通量与能量的相关性。

在第四章内，我们导出了中子通量与能量相关的基本方程。然而，要解析地求解这些方程来得到中子通量对能量的连续依赖关系却是非常困难的。通常应用“分群方法”来近似地求解。这时把中子能量的分布范围划分成若干个离散的能量间隔  $\Delta E_g$ ：(E<sub>0</sub>, E<sub>1</sub>)、(E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>)、……、(E<sub>g-1</sub>, E<sub>g</sub>)……，每一个能量间隔称为一个能群（见图 6-1）。

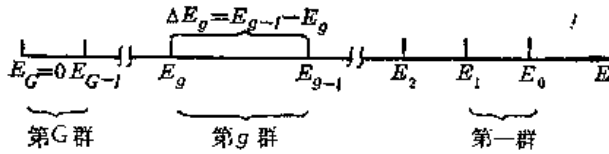


图6-1 分群示意图

对每一个  $g$  能群，定义群中子通量  $\phi_g$  为

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{r}, E) dE. \quad (6-1)$$

它是该能群内各种能量中子的总通量。同时采用适当平均的参数来表示该能群内的一些参数，这些平均参数叫做群常数。

在本章内，我们主要介绍如何应用分群方法来近似求解能量相关的扩散方程，这种处理一般称为分群扩散理论。它是反应堆设计计算中最广泛采用的方法之一。

实践证明，对于热中子反应堆，一般采用少群扩散理论就能得到满意的结果。例如，在轻水堆的分析中，通常采用四群（这是因为在热中子堆内，重要的中子作用过程主要发生在 1 电子伏以下的能区）。然而，对于快中子堆常采用 20 群或 30 群左右。

分群扩散理论的精度不仅取决于群数的多少，而且在相当大的程度上还取决于选取恰当的群常数，尤其在少群计算时更是如此。

本章着重介绍多群扩散方程的建立、群常数及有关群常数计算的一些概念，简单地介绍常用于计算热中子堆快群常数的 MUFT 程序。热群常数的计算将在第九章内介绍，关于多群扩散方程的数值解法将在下一章专门讨论。

早期的热堆设计计算常采用双群扩散理论，尤其是以石墨或重水作慢化剂的反应堆，这时只要群常数选取得当，往往能给出比较好的结果。近年来随着电子计算机和计算技术的发

展，随着新的堆型的出现以及对反应堆计算提出的要求不断地提高，更多地是采用少群或多群理论。但是，鉴于双群理论简单明瞭，可以解析求解，有利于初学者理解和掌握分群扩散理论的一些基本概念，因此本章对双群扩散理论仍作单独的介绍。

## 1. 双群扩散理论

### 1.1 双群常数与双群方程

所谓双群就是把堆内中子按能量划分成两群：热中子归为一群，简称热群；能量高于热能的中子归为一群，简称快群。这两群的分界能一般约为  $5kT_m$ ，例如，对于水堆约为 0.6 至 1 电子伏，而对于高温气冷堆约为 2.5 电子伏。我们首先讨论一下怎样得到双群常数，这些群常数包括平均扩散系数、吸收和散射截面等。以下用角标 1 和 2 分别表示快群和热群的参数。

#### 1.1.1 双群常数

快群和热群的中子通量分别定义为

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \int_{E_c}^{E_0} \phi(\mathbf{r}, E) dE, \quad (6-2)$$

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \int_0^{E_c} \phi(\mathbf{r}, E) dE, \quad (6-3)$$

式中  $E_0$ 、 $E_c$  分别为裂变中子的最高能量和分界能（或叫裂变能）；通常取  $E_0 = 10$  兆电子伏。

根据第一章中平均截面的定义，快群的平均散射截面  $\Sigma_{s,1}$  为

$$\Sigma_{s,1} = \frac{\int_{E_c}^{E_0} \Sigma_s(E) \phi(\mathbf{r}, E) dE}{\int_{E_c}^{E_0} \phi(\mathbf{r}, E) dE} = \frac{\int_{E_c}^{E_0} \Sigma_s(E) \phi(\mathbf{r}, E) dE}{\phi_1(\mathbf{r})} \quad (6-4)$$

将上式中角标  $s$  改为  $a$ 、 $f$  就可以求得快群平均吸收截面和平均裂变截面。

快群内每秒每立方厘米内发生的碰撞数为

$$R = \int_{E_c}^{E_0} \Sigma_s(E) \phi(\mathbf{r}, E) dE = \Sigma_{s,1} \phi_1(\mathbf{r}), \quad (6-5)$$

而每次碰撞的平均能量增量是  $\xi$ ，因此由源中子平均能量  $E_0$  降到能量  $E_c$  所需的平均碰撞数为  $\ln(E_0/E_c)/\xi$ 。所以每秒每立方厘米内由于慢化从快群转移到热群的中子数目便等于



$$\Sigma_{s,1}\phi_1(\mathbf{r}) / \frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E_c}.$$

这样，我们可以定义一个快群转移截面  $\Sigma_1$ ，使得  $\Sigma_1\phi_1(\mathbf{r})$  表示每秒每立方厘米由于慢化从快群转移到热群的中子数，因而转移截面  $\Sigma_1$  为

$$\Sigma_1 = \frac{\Sigma_{s,1}}{\frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E_c}}.$$

根据 (5-162) 式，注意到  $\Sigma_{s,1}$  等于 (5-162) 式中的  $1/\lambda_s$ ，以及  $\lambda_{s,1}/3 = D_1$ ，最后得到

$$\Sigma_1 = \frac{D_1}{\tau}, \tag{6-6}$$

式中， $D_1$ ——快群扩散系数； $\tau$ ——热中子年龄。应该指出，(6-6) 式是一种近似的计算公式，这里没有考虑非弹性散射的影响。如果考虑到输运平均自由程  $\lambda_{s,1}$  随能量的变化，那么 (6-6) 式中的  $D_1$  应按下列式确定[见 (6-47) 式]

$$D_1 = \frac{\int_{E_c}^{E_0} D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) dE}{\int_{E_c}^{E_0} \nabla \phi(\mathbf{r}, E) dE}. \tag{6-7}$$

一般说来， $\Sigma_{s,1}$ 、 $\Sigma_1$ 、 $D_1$  等都是空间变量  $r$  的函数，因为它们都和  $\phi(\mathbf{r}, E)$  有关。作为初步近似，假定对  $\phi(\mathbf{r}, E)$  可以进行分离变量，即可以写成  $\phi(\mathbf{r}, E) = \phi(\mathbf{r})\varphi(E)$ 。在这种情况下 (6-4) 和 (6-7) 式便成为

$$\Sigma_{s,1} = \frac{\int_{E_c}^{E_0} \Sigma_s(E) \varphi(E) dE}{\int_{E_c}^{E_0} \varphi(E) dE},$$

$$D_1 = \frac{\int_{E_c}^{E_0} D(E) \varphi(E) dE}{\int_{E_c}^{E_0} \varphi(E) dE}. \tag{6-8}$$

式中  $\varphi(E)$  是快群内中子通量的能量分布（即慢化能谱）。在初步计算中，中子年龄由实验测定， $D(E)$  随能量变化不大，因此可在 (6-8) 式中取  $\varphi(E)$  为  $1/E$  谱求得  $D_1$ 。 $\Sigma_1$  之值则利用 (6-6) 式确定。对几种不同慢化剂的有关参数列于表 6-1 内。

最后应强调指出，这里介绍的计算快群群常数的方法是较粗糙的，精确计算时，要按本章 3.2 节内介绍的方法进行。

表6-1 几种慢化剂的快群常数

慢 化 剂	$D_1$ (厘米)	$\Sigma_1$ (厘米 <sup>-1</sup> )	$\tau$ (厘米 <sup>2</sup> )
H <sub>2</sub> O	1.13	0.0419	~27
D <sub>2</sub> O	1.29	0.00985	131
Be	0.562	0.00551	102
C	1.016	0.00276	368

关于热群常数，可按第一章第5节所介绍的方法计算。精确的计算方法将在第九章内介绍。

### 1.1.2 双群方程及其求解

#### 芯部双群方程

考虑一个由堆芯和反射层组成的双区均匀反应堆。以角标  $c$  和  $r$  分别表示堆芯和反射层的参数。

在热中子堆内，快群中子主要是由热中子裂变产生的，它又由于慢化和泄漏而消失；而热中子则来源于快群中子的慢化，并主要由于吸收和泄漏而消失。根据中子守恒原理，在稳态时，芯部的快群及热群的扩散方程为

$$D_{1,c} \nabla^2 \phi_{1,c} - \Sigma_{1,c} \phi_{1,c} + \varepsilon \eta f \Sigma_{2,c} \phi_{2,c} = 0, \quad (6-9)$$

$$D_{2,c} \nabla^2 \phi_{2,c} - \Sigma_{2,c} \phi_{2,c} + p \Sigma_{1,c} \phi_{1,c} = 0, \quad (6-10)$$

式中， $\varepsilon$ 、 $\eta$ 、 $f$ 、 $p$  为四因子； $\Sigma_{2,c}$  为芯部热群宏观吸收截面。这里我们略去了快群内的弱吸收，仅考虑了慢化过程中的共振吸收。

方程 (6-9) 和 (6-10) 是联立二阶微分方程。可以先从方程 (6-9) 解出  $\phi_{2,c}$ ，即

$$\phi_{2,c} = -\frac{p}{k_\infty \Sigma_{2,c}} (-D_{1,c} \nabla^2 \phi_{1,c} + \Sigma_{1,c} \phi_{1,c}).$$

其中  $k_\infty = \varepsilon \eta f p$ ，把上式代入 (6-10) 式便得到一个只含有  $\phi_{1,c}$  的四阶常系数微分方程：

$$\nabla^4 \phi_{1,c} - \left( \frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{L_c^2} \right) \nabla^2 \phi_{1,c} - \frac{k_\infty - 1}{\tau_c L_c^2} \phi_{1,c} = 0,$$

其中

$$\tau_c = \frac{D_{1,c}}{\Sigma_{1,c}},$$

$$L_c^2 = \frac{D_{2,c}}{\Sigma_{2,c}}.$$

它可以用因式分解的方法来求解，即上式可写成

$$(\nabla^2 + \mu^2)(\nabla^2 - \nu^2)\phi_{1,c} = 0. \quad (6-11)$$

同样，若消去  $\phi_{1,c}$ ，可得

$$(\nabla^2 + \mu^2)(\nabla^2 - \nu^2)\phi_{2,c} = 0. \quad (6-12)$$

式中

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \left[ -\left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{L_c^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{L_c^2}\right)^2 + \frac{4(k_\infty - 1)}{\tau_c L_c^2}} \right] \quad (6-13)$$

$$\nu^2 = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{L_c^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{L_c^2}\right)^2 + \frac{4(k_\infty - 1)}{\tau_c L_c^2}} \right] \quad (6-14)$$

由于临界反应堆的  $k_\infty$  必定大于 1, 所以  $\mu^2$  和  $\nu^2$  均为正的实数值。由 (6-11) 和 (6-12) 式可以看出,  $\phi_{1,c}$  和  $\phi_{2,c}$  均满足下列波动方程:

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0, \quad (6-15)$$

其中  $B^2$  等于  $\mu^2$  及  $-\nu^2$ 。事实上  $\mu^2$  就是在第三章内所提到过的曲率。用  $-B^2 \phi_{1,c}$ 、 $-B^2 \phi_{2,c}$  分别代替  $\nabla^2 \phi_{1,c}$ 、 $\nabla^2 \phi_{2,c}$ , 联立解 (6-9) 和 (6-10) 式便得到

$$\frac{k_\infty}{(1 + \tau_c B^2)(1 + L_c^2 B^2)} = 1. \quad (6-16)$$

可以看到, 对于大型反应堆, (6-16) 式和第五章中的临界方程在形式上是相似的。(6-16) 式便是双群理论的临界方程。

现在我们来讨论方程 (6-11) 和 (6-12) 的解, 可以看到, 它是下列两个波动方程解的线性组合:

$$\nabla^2 X(\mathbf{r}) + \mu^2 X(\mathbf{r}) = 0 \quad (6-17)$$

$$\nabla^2 Y(\mathbf{r}) - \nu^2 Y(\mathbf{r}) = 0 \quad (6-18)$$

由于 (6-17) 和 (6-18) 式都是二阶微分方程, 所以, 其解  $X$  和  $Y$  一般都是由两个独立的函数组成。但是, 利用中心处中子通量对称性和有限性等条件,  $X$  和  $Y$  中的两个独立函数通常只有一个可以采用, 因而  $\phi_{1,c}$  和  $\phi_{2,c}$  的一般解可以写成

$$\phi_{1,c}(\mathbf{r}) = AX(\mathbf{r}) + CY(\mathbf{r}) \quad (6-19)$$

$$\phi_{2,c}(\mathbf{r}) = A'X(\mathbf{r}) + C'Y(\mathbf{r}) \quad (6-20)$$

这里,  $A$ 、 $C$ 、 $A'$  和  $C'$  为四个待定的常数。关于波动方程 (6-17) 和 (6-18) 在一个座标方向上有反射层的不同几何形状下的求解方法和结果, 在第三章内已较详细地讨论过了, 这里不再重复, 而直接引用其结果, 见表 6-2。

其次, 可以证明上述四个待定常数中只有两个是独立的。由于  $\phi_{1,c}(\mathbf{r}) = AX(\mathbf{r})$  和  $\phi_{2,c}(\mathbf{r}) = A'X(\mathbf{r})$  都是方程的允许解, 因而  $\nabla^2 \phi_{2,c}(\mathbf{r}) = A'\nabla^2 X(\mathbf{r}) = -\mu^2 A'X(\mathbf{r})$ , 则根据方程 (6-10) 可得

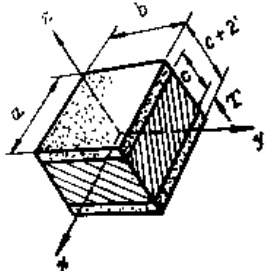
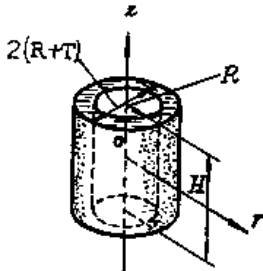
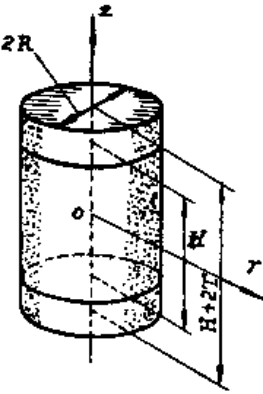
$$-\mu^2 A'X(\mathbf{r}) - \frac{1}{L_c^2} A'X(\mathbf{r}) + \frac{\rho \Sigma_{1,c}}{D_{2,c}} AX(\mathbf{r}) = 0$$

令  $s_1 = A'/A$ , 则由上式可得

$$s_1 = \frac{A'}{A} = \frac{\rho D_{1,c}}{\tau_c D_{2,c}} \frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{L_c^2}} \quad (6-21)$$

同样可以求得

表6-2 芯部和反射层内中子通量波动方程的解

	芯 部		反 射 层		
	X (r)	Y (r)	Z (r) <sup>1)</sup>		
球状(芯部半径R; 反射层厚度T)	$\frac{\sin \mu r}{r}$	$\frac{\text{sh} \nu r}{r}$	A <sup>2)</sup>	$\frac{\text{sh}(k_r(R+T-r))}{r}$	
			B	$e^{-k_r r}/r$	
长方体形 (z方向有反射层)		$\cos \alpha_x x \cos \alpha_y y$	$\cos \alpha_x x \cos \alpha_y y$	A	$\text{sh}(\bar{k}_r(\frac{c}{2}+T-z))$
		$\cos \bar{\mu} z$	$\text{ch} \bar{\nu} z$	B	$e^{-\bar{k}_r z} \cos \alpha_x x \cos \alpha_y y$
	$\bar{\mu}^2 = \mu^2 - \alpha_x^2 - \alpha_y^2$ $\alpha_x^2 = (\frac{\pi}{a})^2$ ; $\alpha_y^2 = (\frac{\pi}{b})^2$	$\bar{\nu}^2 = \nu^2 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2$		$\bar{k}_r^2 = k_r^2 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2$	
圆柱形 (侧面带反射层)		$J_0(\bar{\mu} r) \cos \alpha_z z$	$I_0(\bar{\nu} r) \cos \alpha_z z$	A	$\{I_0(\bar{k}_r r) - \frac{I_0}{K_0}(\bar{k}_r(R+T))K_0(\bar{k}_r r)\} \cos \alpha_z z$
				B	$K_0(\bar{k}_r r) \cos \alpha_z z$
	$\bar{\mu}^2 = \mu^2 - \alpha_z^2$ ; $\alpha_z^2 = (\frac{\pi}{H})^2$	$\bar{\nu}^2 = \nu^2 + \alpha_z^2$		$\bar{k}_r^2 = k_r^2 + \alpha_z^2$	
圆柱形 (端部带反射层)		$J_0(\alpha_r r) \cos \bar{\mu} z$	$J_0(\alpha_r r) \text{ch} \bar{\nu} z$	A	$J_0(\alpha_r r) \text{sh}(\bar{k}_r(\frac{H}{2}+T-z))$
				B	$J_0(\alpha_r r) e^{-\bar{k}_r z}$
	$\bar{\mu}^2 = \mu^2 - \alpha_r^2$ ; $\alpha_r^2 = (\frac{2.405}{R})^2$	$\bar{\nu}^2 = \nu^2 + \alpha_r^2$		$\bar{k}_r^2 = k_r^2 + \alpha_r^2$	

- 1)  $Z_1(r)$ 和 $Z_2(r)$ 的解的形式相同, 只须将 $k_r$ 、 $(\bar{k}_r)$ 分别用 $\bar{k}_{1,r}$ 、 $(\bar{k}_{1,r})$ 和 $k_{2,r}$ 、 $(\bar{k}_{2,r})$ 代换。  
 2) A——当T有限时的解; B——当 $T \rightarrow \infty$ 时的解。

$$s_2 = \frac{C'}{C} = \frac{\rho D_{1,c}}{\tau_c D_{2,c}} \frac{1}{L_c^2 - \nu^2} \quad (6-22)$$

$s_1$  和  $s_2$  叫做耦合系数。由 (6-21) 和 (6-22) 式可以看出, 它们取决于  $D_{1,c}$ 、 $D_{2,c}$ 、 $\tau_c$ 、 $L_c^2$ 、 $\mu^2$  和  $\nu^2$ , 而这些量都是芯部材料性质的参数, 不是任意规定的, 因此 A、A'、C 和 C' 四个常数实际上只相当于两个任意常数。这样, 芯部中子通量的普遍解为

$$\phi_{1, r}(\mathbf{r}) = AX(\mathbf{r}) + CY(\mathbf{r}) \quad (6-23)$$

$$\phi_{2, r}(\mathbf{r}) = s_1 AX(\mathbf{r}) + s_2 CY(\mathbf{r}) \quad (6-24)$$

其中  $A$ 、 $C$  为待定常数，将由边界条件来确定。

### 反射层的双群方程

假定反射层内没有增殖效应，因此在快群的扩散方程中没有中子源项，并假定反射层内无共振吸收剂，于是反射层内的双群方程为：

$$\nabla^2 \phi_{1, r}(\mathbf{r}) - k_{1, r}^2 \phi_{1, r}(\mathbf{r}) = 0, \quad (6-25)$$

$$\nabla^2 \phi_{2, r}(\mathbf{r}) - k_{2, r}^2 \phi_{2, r}(\mathbf{r}) + \frac{\Sigma_{1, r}}{D_{2, r}} \phi_{1, r}(\mathbf{r}) = 0, \quad (6-26)$$

其中

$$k_{1, r}^2 = \frac{\Sigma_{1, r}}{D_{1, r}} = \frac{1}{\tau_r} \quad (6-27)$$

$$k_{2, r}^2 = \frac{\Sigma_{2, r}}{D_{2, r}} = \frac{1}{L_r^2} \quad (6-28)$$

方程 (6-25) 为一齐次方程，其解为

$$\phi_{1, r}(\mathbf{r}) = FZ_1(\mathbf{r}) \quad (6-29)$$

$Z_1(\mathbf{r})$  应该满足在外推边界处  $\phi_{1, r} = 0$  的边界条件，且由此只剩下一个未知常数。对于不同几何形状的仅在一个坐标方向有反射层的反应堆的  $Z_1(\mathbf{r})$  列于表 6-2 中。

方程 (6-26) 为非齐次方程，其解可以写成齐次部分的通解与方程的特解的线性组合，因而  $\phi_{2, r}(\mathbf{r})$  的解可以写成

$$\phi_{2, r}(\mathbf{r}) = GZ_2(\mathbf{r}) + s_3 \phi_{1, r}(\mathbf{r}) = GZ_2(\mathbf{r}) + s_3 FZ_1(\mathbf{r}) \quad (6-30)$$

其中  $Z_2(\mathbf{r})$  为方程  $\nabla^2 \phi_{2, r}(\mathbf{r}) - k_{2, r}^2 \phi_{2, r}(\mathbf{r}) = 0$  的通解，显然  $Z_2(\mathbf{r})$  的形式应与  $Z_1(\mathbf{r})$  完全一样，只是用  $k_{2, r}$  去代替  $k_{1, r}$ ，而已。对于不同形状仅在一个座标方向上具有反射层的反应堆的  $Z_2(\mathbf{r})$  列于表 6-2 中。

(6-30) 式中的  $s_3$  为反射层的耦合系数。把 (6-30) 式代入方程 (6-26)，注意到  $GZ_2(\mathbf{r})$  是齐次部分的解，即  $\nabla^2 Z_2(\mathbf{r}) - k_{2, r}^2 Z_2(\mathbf{r}) = 0$ ，便可得到

$$s_3 \nabla^2 \phi_{1, r} - s_3 k_{2, r}^2 \phi_{1, r} + \frac{\Sigma_{1, r}}{D_{2, r}} \phi_{1, r} = 0$$

由于  $\nabla^2 \phi_{1, r} = k_{1, r}^2 \phi_{1, r}$ ，将它代入上式，整理后便得到  $s_3$  为

$$s_3 = \frac{\Sigma_{1, r}}{D_{2, r}} \frac{1}{k_{2, r}^2 - k_{1, r}^2} \quad (6-31)$$

## 1.2 双群临界方程及中子通量分布

### 1.2.1 双群临界方程

前面我们求出了  $\phi_{1, c}$ 、 $\phi_{2, c}$ 、 $\phi_{1, r}$  和  $\phi_{2, r}$  的解，其中共有四个待定常数  $A$ 、 $C$ 、 $F$  和  $G$ ，它们由芯部与反射层交界面上的四个边界条件来确定，这些边界条件为

$$\begin{aligned}
 [\phi_{1,c}] &= [\phi_{1,r}], \\
 [\phi_{2,c}] &= [\phi_{2,r}], \\
 D_{1,c}[\phi_{1,c}] &= D_{1,r}[\phi_{1,r}], \\
 D_{2,c}[\phi_{2,c}] &= D_{2,r}[\phi_{2,r}].
 \end{aligned} \tag{6-32}$$

这里带撇的角标是表示对  $x$  或  $r$  或  $z$  (视情况而定) 的一阶导数, 所有  $[\ ]$  各项表示函数取芯部和反射层的交界面上的值。

利用方程 (6-23)、(6-24)、(6-29) 和 (6-30), 根据上述边界条件便得出下列方程:

$$\begin{aligned}
 A[X] + C[Y] - F[Z_1] &= 0, \\
 s_1 A[X] + s_2 C[Y] - s_3 F[Z_1] - G[Z_2] &= 0, \\
 A[X'] + C[Y'] - \rho_1 F[Z'_1] &= 0, \\
 s_1 A[X'] + s_2 C[Y'] - s_3 \rho_2 F[Z'_1] - G \rho_2 [Z'_2] &= 0,
 \end{aligned} \tag{6-33}$$

其中

$$\rho_1 = \frac{D_{1,r}}{D_{1,c}}, \tag{6-34}$$

$$\rho_2 = \frac{D_{2,r}}{D_{2,c}}. \tag{6-35}$$

方程(6-33)是关于  $A$ 、 $C$ 、 $F$  和  $G$  的齐次方程组。根据克拉姆法则, 为使其有非零解, 亦即  $A$ 、 $C$ 、 $F$ 、 $G$  不同时为零, 则其系数判别式必须等于零, 亦即

$$\Delta = \begin{vmatrix} [X] & [Y] & -[Z_1] & 0 \\ s_1[X] & s_2[Y] & -s_3[Z_1] & -[Z_2] \\ [X'] & [Y'] & -\rho_1[Z'_1] & 0 \\ s_1[X'] & s_2[Y'] & -\rho_1 s_3[Z'_1] & -\rho_2[Z'_2] \end{vmatrix} = 0. \tag{6-36}$$

这可以看作是带有反射层的反应堆的双群理论的临界方程, 它给出了一个临界状态的反应堆 (亦即在稳态时) 所必须满足的条件。

若令

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{[X']}{[X]}, & \beta &= \frac{[Y']}{[Y]}, \\
 \gamma &= \frac{[Z'_1]}{[Z_1]}, & \delta &= \frac{[Z'_2]}{[Z_2]},
 \end{aligned} \tag{6-37}$$

则双群临界方程 (6-36) 可简化成如下便于计算的形式:

$$\alpha = \frac{\rho_2 \delta c_1 + \rho_1 \gamma c_2 + \beta c_3}{c_1 + c_2 + c_3}, \tag{6-38}$$

其中

$$c_1 = s_1 (\rho_1 \gamma - \beta), \tag{6-39}$$

$$c_2 = s_2 (\beta - \rho_2 \delta), \tag{6-40}$$

$$c_3 = s_3 \rho_2 (\delta - \gamma). \tag{6-41}$$

表 6-3 中给出几种简单几何形状堆的  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  和  $\delta$  的函数形式。

表6-3  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  函数

	平 板	球	圆柱 (侧面带有反射层)
$\alpha$	$-\mu \operatorname{tg}\left(\mu \frac{H}{2}\right)$	$\mu \operatorname{ctg}(\mu R) - \frac{1}{R}$	$-\mu \frac{J_1(\mu R)}{J_0(\mu R)}$
$\beta$	$\bar{v} \operatorname{th}\left(\bar{v} \frac{H}{2}\right)$	$\bar{v} \operatorname{cth}(\bar{v} R) - \frac{1}{R}$	$\frac{\bar{v} I_1(\bar{v} R)}{I_0(\bar{v} R)}$
$\gamma$ 和	A	$-\bar{k}, \operatorname{cth}(\bar{k}, T)$	$-\bar{k}, K_1(\bar{k}, R) - \frac{K_0(\bar{k}, (R+T))}{I_0(\bar{k}, (R+T))} \bar{k}, I_1(\bar{k}, R)$
			$K_0(\bar{k}, R) - \frac{K_0(\bar{k}, (R+T))}{I_0(\bar{k}, (R+T))} \cdot I_0(\bar{k}, R)$
$\delta$	B	$-\bar{k},$	$-\bar{k}, K_1(\bar{k}, R) - \frac{K_0(\bar{k}, R)}{I_0(\bar{k}, R)}$

注:  $\gamma$ 及 $\delta$ 函数在形式上完全相同, 只须将表中 $\bar{k}$ , 分别以 $\bar{k}_1, \bar{v}$ 和 $\bar{k}_2, \bar{v}$ 来替换即可。A——反射层厚度 $T$ 有限时的值, B—— $T \rightarrow \infty$ 时之值  
当 $\bar{v} R$ 或 $\bar{k} R$ 较大时有下列近似公式:

$$\frac{\bar{v} I_1(\bar{v} R)}{I_0(\bar{v} R)} \approx \bar{v} - \frac{1}{2R} - \frac{1}{8\bar{v} R^2}$$

$$\frac{\bar{k}, K_1(\bar{k}, R)}{K_0(\bar{k}, R)} \approx \bar{k}, + \frac{1}{2R} - \frac{1}{8\bar{k}, R^2}$$

方程(6-38)便是用双群方法解一个坐标方向上有反射层反应堆临界问题的计算公式。对于给定了燃料-慢化剂成分以及反射层的材料与尺寸的情况下, 方程(6-38)或(6-36)式中 $\mu^2, -\nu^2, s_1, s_2, s_3, \rho_1, \rho_2, k_1^2, \dots, k_2^2, \dots$ 等量都是已知的, 方程中只有芯部的大小 $R$ 或 $H$ 是未定的量。所以在给定芯部成分及反射层厚度的条件下, 欲使临界方程(6-38)式成立, 只有一个唯一确定的芯部尺寸值。这个数值也就是所要求的反应堆临界大小。然而, 困难的是, 方程(6-38)中芯部尺寸是包含在一些超越函数之中, 它并不给出临界尺寸的显式形式的解, 因而它必须用试凑法、图解法或数值计算方法求解。至于四周都有反射层的反应堆, 则可以用第三章中所介绍的曲率迭代方法来近似地求解。

### 1.2.2 中子通量的分布

芯部及反射层内快中子及热中子通量分布已在前面求出, 它们由方程(6-23)、(6-24)、(6-29)和(6-30)确定, 而系数 $A, C, F$ 和 $G$ 则由方程组(6-33)解出。(6-33)为一齐次方程组, 因而 $A, C, F$ 和 $G$ 具有无限多组互成比例的解, 也就是说它们只能给出中子通量的分布形式。若要求得通量的具体数值, 尚须借助于其它条件, 比如, 可以根据归一条件或利用反应堆的运行功率水平来确定其中一个常数(如 $A$ ), 然后由这个常数确定其余三个。

例如, 可以确定系数 $A, C, F, G$ 的解为

$$A = \frac{\Delta_A}{[X]}, \quad F = \frac{\Delta_F}{[Z_1]}, \quad (6-42)$$

$$C = \frac{\Delta_C}{[Y]}, \quad G = \frac{\Delta_G}{[Z_2]},$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \beta - \rho_1 \gamma, & \Delta_C &= \rho_1 \gamma - \alpha, \\ \Delta_F &= \beta - \alpha, & \Delta_G &= s_1 \Delta_A + s_2 \Delta_C - s_3 \Delta_F. \end{aligned} \quad (6-43)$$

可以看出, (6-43) 式中所有的量都是临界计算时在临界方程 (6-38) 中所出现过的数值, 因而 (6-42) 式的计算是非常方便的。

根据方程 (6-23)、(6-24)、(6-29) 和 (6-30) 计算的双群通量的典型分布曲线示于图 6-2 中, 可以看到, 热中子通量在芯部-反射层交界面附近有一突起 (其大小因反射层材料性质而不同), 这主要是由于反射层内的热中子吸收要比芯部的小, 而且反射层内的慢化能力要比芯部的慢化能力强的缘故。在外推边界上快中子通量和热中子通量均等于零。

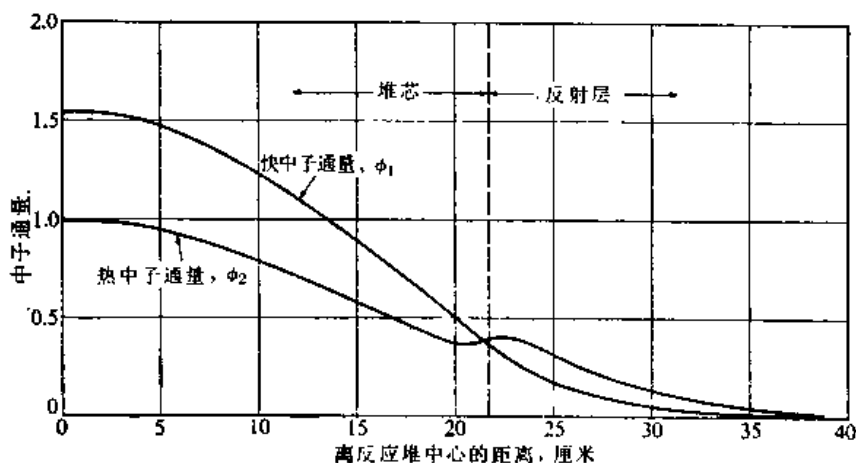


图6-2 热中子堆内的双群通量分布

## 2. 多群扩散理论

### 2.1 多群扩散方程的建立

在第四章内我们曾推导出能量相关的扩散方程 (4-113), 现在我们就从这个方程出发来推导多群扩散方程, 并得出群常数的表达式。这里从较普遍的情况出发, 中子通量  $\phi(\mathbf{r}, E)$  的能量相关的扩散方程可以写成:

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot D \nabla \phi(\mathbf{r}, E) + \Sigma_t \phi(\mathbf{r}, E) \\ & = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' + \chi(E) \int_0^{\infty} \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E') dE'. \end{aligned} \quad (6-44)$$

这里我们把 (4-113) 式的源项具体化了, 同时  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$  中包含弹性散射和非弹性散射两部份。

我们把中子能量的分布范围按图 6-1 划分成若干个能群, 例如, 划分成  $G$  群。在每一能群区间  $\Delta E_i$  内对方程 (6-44) 进行积分, 这样就消去方程中的变量  $E$ , 于是就得到  $G$  个不



含能量变量的扩散方程，其中第  $g$  群的扩散方程为

$$\begin{aligned}
 & -\nabla \cdot \int_{\Delta E_g} D \nabla \phi dE + \int_{\Delta E_g} \Sigma_t \phi dE \\
 & = \int_{\Delta E_g} dE \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' + \int_{\Delta E_g} S(\mathbf{r}, E) dE. \quad (6-45)
 \end{aligned}$$

式中， $\Delta E_g = E_{g-1} - E_g$ ； $S(\mathbf{r}, E)$  为裂变源项。

通过定义一些量可以使方程 (6-45) 简化。第  $g$  群的中子通量  $\phi_g(\mathbf{r})$  已由 (6-1) 式定义。定义  $g$  群的总截面为

$$\Sigma_{t, g} = \frac{1}{\phi_g} \int_{\Delta E_g} \Sigma_t(E) \phi(\mathbf{r}, E) dE, \quad (6-46)$$

$g$  群的扩散系数为

$$D_g = \frac{\int_{\Delta E_g} D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) dE}{\int_{\Delta E_g} \nabla \phi(\mathbf{r}, E) dE}. \quad (6-47)$$

将能量范围划分成  $G$  个能群后，方程 (6-45) 中的散射项可以写成

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Delta E_g} dE \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' \\
 & = \sum_{g'=-1}^G \int_{\Delta E_g} dE \int_{\Delta E_{g'}} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE'. \quad (6-48)
 \end{aligned}$$

定义群转移截面  $\Sigma_{g' \rightarrow g}$  为

$$\Sigma_{g' \rightarrow g} = \frac{1}{\phi_{g'}} \int_{\Delta E_g} dE \int_{\Delta E_{g'}} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE', \quad (6-49)$$

因而， $\Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}$  便表示每秒、每立方厘米内  $g'$  群中子经受散射碰撞后能量落到  $g$  群内的中子数。因为散射包括弹性散射和非弹性散射，所以  $\Sigma_{g' \rightarrow g}$  也应包括弹性（散射）转移截面和非弹性（散射）转移截面。将 (6-49) 式代入 (6-48) 式得

$$\int_{\Delta E_g} dE \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' = \sum_{g'=-1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}. \quad (6-50)$$

裂变源项可以写成

$$\int_{\Delta E_g} \chi(E) dE \int_0^{\infty} v(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E') dE'$$

$$= \int_{\Delta E_g} \chi(E) dE \left[ \sum_{g'=1}^G \int_{\Delta E_{g'}} v(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E') dE' \right], \quad (6-51)$$

定义  $g'$  群的裂变截面为

$$(\nu \Sigma_f)_{g'} = \frac{1}{\phi_{g'}} \int_{\Delta E_{g'}} v(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E') dE' \quad (6-52)$$

及

$$\chi_g = \int_{\Delta E_g} \chi(E) dE \quad (6-53)$$

它表示裂变中子出现在  $g$  群内的几率。将 (6-52) 和 (6-53) 式代入 (6-51) 式得

$$\int_{\Delta E_g} \chi(E) dE \int_0^{\infty} v(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E') dE' = \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'} \quad (6-54)$$

采用上述定义以后, 方程 (6-45) 就简化成

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{r, g} \phi_g(\mathbf{r}) \\ & = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}(\mathbf{r}) + \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'}(\mathbf{r}), \quad g=1, 2, \dots, G. \end{aligned} \quad (6-55)$$

这就是多群扩散方程。方程中的  $D_g$ 、 $\Sigma_{r, g}$ 、 $\Sigma_{g' \rightarrow g}$ 、 $(\nu \Sigma_f)_g$  等称之为群常数。

(6-55) 为稳态扩散方程, 因而它只是对于临界系统才是成立的。从数学上讲, 因为它是一个关于  $\phi_g$  的齐次方程组, 只有在特定条件下 (为临界系统时) 才有非零解。所以对于一般 (任意给定的系统大小和群常数) 情况下并不一定都有解。但是从第四章输运方程的特征值问题的讨论中知道, 对于一般情况, 这可以通过引入有效增殖因数, 并把它归结为特征值问题的方法来解决。这样, 对于一般情况多群扩散方程可写成

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{r, g} \phi_g(\mathbf{r}) \\ & = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}(\mathbf{r}) + \frac{1}{k} \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'}(\mathbf{r}), \quad g=1, 2, \dots, G. \end{aligned} \quad (6-56)$$

其中  $k$  为有效增殖因数, 亦叫方程的特征值。

现在我们来稍为详细地讨论一下多群扩散方程。首先来观察一下方程中的散射项。在第一章讨论中子散射动力学时我们曾指出, 如果入射中子能量  $E$  显著地大于靶核的热运动能量, 在散射碰撞后, 中子就不可能获得能量, 而只会损失能量, 也就是快中子只能因散射碰撞而被慢化, 因此在快群内有

$$\Sigma_{g' \rightarrow g} = 0, \quad \text{当 } g' > g \quad (6-57)$$

这意味着在散射碰撞过程中没有中子从能量较低的能群 (群号大的能群) 向上散射到能量较高 (群号小) 的能群。

通常少群扩散计算只采用一个热群来描述热中子 (假设中子不可能向上散射而离开热

群),这时散射项就可写成

$$\sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} + \Sigma_{g \rightarrow g} \phi_g, \quad (6-58)$$

$\Sigma_{g \rightarrow g} \phi_g$  为群内散射项,它表示遭受散射碰撞后,因能量损失相当小以致于仍留在群内的中子数。往往把  $\Sigma_{g \rightarrow g} \phi_g$  移到 (6-56) 式的左边,并定义  $g$  群移出截面  $\Sigma_{R, g}$  为

$$\Sigma_{R, g} = \Sigma_{t, g} - \Sigma_{g \rightarrow g} \quad (6-59)$$

它表示中子在单位路程上由于碰撞(包括吸收和散射),而从  $g$  群移出的几率(应注意,有的文献中,移出截面中不包括吸收截面  $\Sigma_{a, g}$ ,即不包括因吸收引起的从  $g$  群的移出)。

如果能群宽度比较宽,以致于中子散射碰撞后只能出现在相邻的下一个能群,这时散射项就可进一步简化:

$$\sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} = \Sigma_{(g-1) \rightarrow g} \phi_{g-1} + \Sigma_{g \rightarrow g} \phi_g. \quad (6-60)$$

通常称这样的多群方程是直接耦合的。

因此,在没有向上散射的情况下多群扩散方程为

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{R, g} \phi_g = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} + \frac{1}{k} \chi_g \sum_{g'=1}^G (v \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'}. \quad (6-61)$$

$g = 1, 2, \dots, G$

若用矩阵表示就能更清楚地看出这一方程的结构,方程 (6-61) 用矩阵表示时为

$$\begin{pmatrix} -\nabla \cdot D_1 \nabla + \Sigma_{R, 1} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ -\Sigma_{1 \rightarrow 2} & -\nabla \cdot D_2 \nabla + \Sigma_{R, 2} & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Sigma_{1 \rightarrow G} & -\Sigma_{2 \rightarrow G} & -\Sigma_{3 \rightarrow G} & \dots & -\nabla \cdot D_G \nabla + \Sigma_{R, G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_G \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \chi_1 (v \Sigma_f)_1 & \chi_1 (v \Sigma_f)_2 & \dots & \dots \\ \chi_2 (v \Sigma_f)_1 & \chi_2 (v \Sigma_f)_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_G (v \Sigma_f)_1 & \chi_G (v \Sigma_f)_2 & \dots & \chi_G (v \Sigma_f)_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_G \end{pmatrix} \quad (6-62)$$

**M** **F**

即

$$\mathbf{M}\Phi = \frac{1}{k} \mathbf{F}\Phi. \quad (6-63)$$

可以看出,由于没有向上散射,矩阵 **M** 为下三角形的,而矩阵 **F** 是满的。在直接耦合的情况下, **M** 简化成为双对角形式[(16-64)]。

但是,如果我们在热能范围也分成若干个能群,例如对于高温气冷堆有时把热群分成四



少群扩散方程的空间计算。例如，对于水堆，通常采用 3 至 4 个能群。这样，就需要正确地求得反应堆的中子慢化能谱和少群群常数，但麻烦的是中子能谱往往是和反应堆的具体成分和大小相关的。

通常我们把热能范围的能群称为热群，而把高于分界能以上的能群统称为快群，关于热群常数的计算将在第九章中专门讨论。这里将着重介绍快群常数的计算。

关于热堆少群快群群常数的产生通常分为两步。第一步是按照前面所述把所讨论的能量范围分成非常细的多群（或细群）结构，然后根据已有截面数据按照近似能谱，如根据碰撞密度为  $1/E$  谱或者根据解慢化方程求出近似的能谱，对它进行平均求出各种元素的多群（约 30 至 100 群）群常数，以供计算时直接使用。第二步则把所求出的多群群常数作为输入数据，对所讨论的某个反应堆求解慢化方程（如 5-105 式），并求出多群能谱分布  $\varphi_n$ ，然后根据求得的多群能谱和多群常数归并产生所需要的少群群常数。例如对少群中第  $g$  群常数有

$$\Sigma_{x, g} = \frac{\sum_{n \in g} \Sigma_{x, n} \varphi_n}{\sum_{n \in g} \varphi_n}, \quad x = a, f, \dots, \quad (6-70)$$

$$\Sigma_{g' \rightarrow g} = \frac{\sum_{n \in g} \sum_{n' \in g'} \Sigma_{n' \rightarrow n} \varphi_{n'}}{\sum_{n \in g} \varphi_n} \quad (6-71)$$

式中符号  $\sum_{n \in g}$  表示对位于  $g$  群内的所有多群的群号  $n$  求和。最后，利用这些少群群常数进行少群扩散方程的空间计算，求得中子通量的空间分布。并可算出新的  $B_0^2$  值。若它和原先的估计值差别比较大，则必要时可以进行迭代求解，见图 6-3。但实践证明群常数对  $B^2$  值并不十分敏感，一般情况下很少需要这种迭代过程。

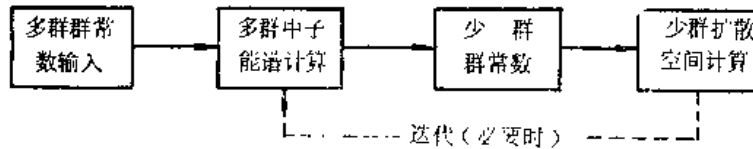


图6-3 少群群常数的计算

由此可以看出，第一步中的多群群常数与系统的具体成分和几何没有密切的关系，它对于某些类似结构的反应堆是通用的。在一些国家已制成多群群常数表供直接使用，例如对水堆可以使用 MUFT-54 群常数表<sup>[6]</sup>等等。然而，第二步中的多群能谱与少群群常数则和所研究的特定堆的成份、几何以及运行条件密切相关，因而在设计中必须对芯部各区作进一步的计算，而且在燃耗计算的各阶段时间中，当芯部成份有较大变化时往往需重复地进行上述计算。目前许多单位都编制有快谱和少群快群常数的计算程序，在国外最常见的有 MUFT<sup>[4]</sup>、GAM<sup>[6]</sup>等程序。

快中子反应堆群常数的计算与热中子反应堆的有些差别。在计算快堆中子通量空间分布时采用的少群的群数要比热堆的多，约 20 群左右。同时由于设计经验有限以及核反应，特别是共振吸收和非弹性散射反应过程的复杂性及其对能谱的影响，快堆能谱和群常数更多地应用直接计算来获得，MC<sup>2</sup> 程序<sup>[9]</sup>便是这方面具有代表性的程序。它把能量分成许多超细群或细群，用评价过的截面数据（如 ENDF/B）直接产生出超细群常数并进行慢化能谱的

$P_i$  或  $B_i$  近似计算, 最后再由所求得超群或细群能谱归并产生出所需要的多(宽)群常数来。

但像  $MC^2$  那样直接产生多(宽)群常数对于常规的计算来说是过于精细并且耗费太大。由于芯部成分变化时快堆的多群常数不像热堆那样敏感, 目前已经提出了一些适用于任何快堆的通用的微观群常数系列, 例如 ANL-16 群、LASL-16 群<sup>[9]</sup> 和苏联的 25 群<sup>[8]</sup> 群常数等等。芯部成分对群常数的影响可以通过“ $f$ -因子”来加以考虑, 即特定堆的有效微观截面  $\sigma_{eff}$  可以应用下式来计算:

$$\sigma_{eff} = f\sigma_0 \quad (6-72)$$

其中  $\sigma_0$  为通用群常数的表值(它相当于无限稀释情况的数值)。 $f$  为“自屏因子”, 它考虑了诸如共振吸收所引起的能谱的变化等影响。 $f$  因子为介质成分及温度的函数, 以表值形式在一些群常数表中同时给出。

上面介绍的把能量、空间分开处理的方法显著地减少了计算工作量, 处理得当能得到满意的结果。但应该强调指出, 栅元的非均匀效应是不可忽略的, 因此在群常数的计算中, 必须考虑栅元内中子通量空间分布的非均匀性, 关于这个问题将在第八章中专门讨论。

反应堆临界计算时究竟须采用几群为宜, 这个问题主要决定于堆型和所研究问题的要求。例如, 对于热中子反应堆的非常粗略的计算, 采用双群理论就可以了。一般对于水堆的设计大多数采用四群(一个热群, 三个快群)扩散模型, 对于高温气冷堆则采用 7 至 9 群, 而对快堆则需 20 群左右或更多的群。

至于少群的能群结构应该如何确定, 这也要根据堆型并考虑堆物理的一些特性而加以选择。例如, 研究水堆的能谱发现, 若将中子能量范围划分成四个能区, 就能较细致地反映出水堆的物理特性(见图 6-4)。这四个能区为:

(1) 高能区 (0.821 至 10 兆电子伏)

约有 75% 的裂变中子出现在这个能区。在这个能区内, 必须考虑铀-238 的裂变; 同时氢的散射截面比较小, 相对地讲, 中子与氧、铀或其他结构材料发生碰撞的几率较大, 因此, 在这个能区内, 中子与这些物质的非弹性碰撞是中子损失能量的重要因素。

(2) 中能区 (5.5 千电子伏至 0.821 兆电子伏)

约有 25% 左右的其余裂变中子出现在这个能区内。在此能区中, 氢的散射截面因能量下降而显著增加, 中子与氢的弹性散射是使中子损失能量的主要因素。

(3) 共振能区 (0.625 电子伏至 5.5 千电子伏)

在这个能区内, 氢的散射截面为常数。除了因共振吸收造成的畸变以外, 中子能谱近似地服从于  $1/E$  律; 由于中子的共振吸

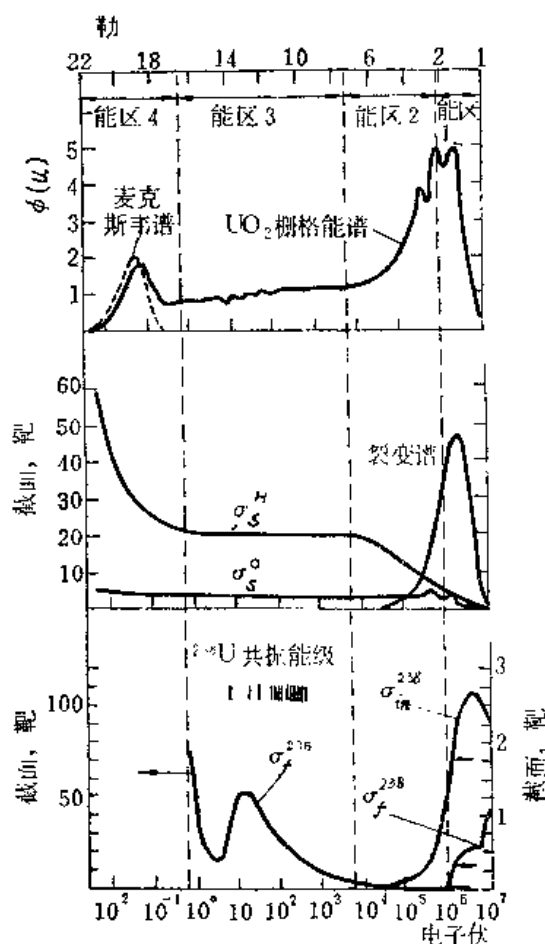


图6-4 水堆的中子能谱与截面

收对链式裂变反应过程有很重要的影响，因此，在这个能区内，铀-238、钚-240 等的共振吸收处理是个重要问题。

(4) 热能区 (0.625 电子伏以下) 由于水堆的宏观吸收截面比较大，以致使轻水堆的热中子能谱变硬并偏离麦克斯韦谱分布，因而必须采用一些更精确的模型来计算 (详见第九章)。

经验证明，水堆用四群进行扩散计算能给出比较满意的结果。

### 3. 少群群常数的计算 (MUFT 简介)

在第五章中我们已经求得反应堆慢化能谱的计算方程 (5-133)、(5-134) 或 (5-105)。本节将讨论这些方程的解法，求出多群慢化能谱，然后根据求出的多群能谱来产生出所需要的少群群常数。下面以 MUFT 快谱计算程序为例加以说明。

MUFT 程序广泛地用于产生水堆的快群群常数。它把 0.625 电子伏到 10 兆电子伏的能量范围的中子划分成 54 群，用分群的方法解  $P_1$  近似或  $B_1$  近似慢化能谱方程 (5-133)、(5-134)。它考虑了由非弹性散射引起的中子慢化以及慢化过程中的共振吸收和裂变。弹性散射引起的中子慢化的处理，可以采用 S-G 近似或 G-G 近似。然后以所求得的多群慢化能谱作为权重，求出一群、二群或三群的快群的少群群常数。作为输入的多群截面数据是由评价过的 MUFT-54 群常数提供的<sup>[6]</sup>。

#### 多群慢化能谱的计算

为简单明瞭起见，现在我们以方程 (5-133) 的  $P_1$  近似的慢化能谱方程为基础来建立多群慢化能谱方程，同时暂且假定系统只是由氢和质量数为  $A$  的重元素均匀组成，并采用 S-G 近似，但所得的结果不难推广到含有多种元素的系统。非均匀系统的非均匀效应留待第八章讨论。这样，方程 (5-133)、(5-134) 可以写成：

$$\begin{aligned}
 & -iB_m \phi_1(u) + [\Sigma_0^s(u) + \Sigma_0^p(u) + \Sigma_{1,0}(u)] \phi_0(u) \\
 & = -\frac{dq_0^H}{du} - \frac{dq_0^A}{du} + \int_0^u du' \Sigma_{1,0}^A(u' \rightarrow u) \phi_0(u') + \chi(u), \tag{6-73}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{iB_m}{3} \phi_0(u) + \Sigma_{1,1}(u) \phi_1(u) = -\frac{dq_1^H}{du},$$

$$\frac{dq_0^H}{du} + q_0^H = \Sigma_0^H(u) \phi_0(u),$$

$$\frac{2}{3} \frac{dq_1^H}{du} + q_1^H = \frac{4}{9} \Sigma_1^H(u) \phi_1(u), \tag{6-74}$$

$$q_0^A = \xi_A \Sigma_0^A(u) \phi_0(u),$$

式中各符号的意义与第五章内的相同。这里源项已用 (5-92) 式代入，并设裂变中子总数为 1。同时为了以后便于处理，把吸收截面分成两部份：

$\Sigma_0^s(u)$  —— “平滑” 吸收截面；

$\Sigma_0^p(u)$  —— “共振” 吸收截面。

应用分群方法解方程 (6-73) 和 (6-74)。为此将所要讨论的能范围 (0 至 16.5884, 相应的能量范围为 10 兆电子伏至 0.625 电子伏) 划分成 54 群, 群号用  $n$  表示, 第  $n$  群的能宽用  $\Delta_n$  表示。就每一群对方程 (6-73) 和 (6-74) 进行积分, 定义下列一些量:

$$\phi_{l, n} \Delta_n = \int_{\Delta_n} \phi_l(u) du \quad (6-75)$$

$$\int_{\Delta_n} q_l^i(u) du = \frac{1}{2}(q_{l, n}^i + q_{l, n-1}^i) \Delta_n, \quad (6-76)$$

$$\int_{\Delta_n} \frac{dq_l^i}{du} du = q_{l, n}^i - q_{l, n-1}^i, \quad (6-77)$$

$l = 0, 1; i$  表示  $H, A$ .

同时定义

$$\Sigma_{0, n}^S \Delta_n = \int_{\Delta_n} \Sigma_0^S(u) du, \quad (6-78)$$

$$\Sigma_{n, n-1}^A \Delta_n = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \int_{\Delta_n} du \int_{\Delta_{n-1}} \Sigma_{n-1}^A(u' \rightarrow u) du', \quad (6-79)$$

特别值得注意的是共振吸收截面的平均, 定义

$$\Sigma_{0, n}^R \Delta_n = \int_{\Delta_n} \Sigma_0^R(u) du = N_A \sum_{j \in n} I_j, \quad (6-80)$$

式中,  $N_A$ ——单位体积内  $A$  元素的核子数;

$I_j$ —— $n$  群内  $A$  元素第  $j$  共振峰的有效共振积分

$\sum_{j \in n}$ ——表示对属于  $n$  群内的所有共振峰求和。

另一方面, 根据中子平衡有下列关系式:

$$\int_{\Delta_n} \Sigma_0^R(u) \phi_0(u) du = (1 - p_n)(q_{0, n-1}^H + q_{0, n-1}^A), \quad (6-81)$$

式中,  $p_n$ —— $n$  群的逃脱共振吸收几率。

对于均匀系统,  $I_j$  和  $p_n$  可以采用在第五章内介绍的方法求得。对于非均匀系统, 除了应考虑第五章内所提到过的能量自屏效应以外, 还必须考虑共振中子在空间上的自屏效应和互屏效应。关于非均匀系统的  $I_j$  和  $p_n$  的计算在第八章内介绍。在 MUFT 程序中已直接给出  $\Sigma_{0, n}^R$  的计算公式。这里顺便提一下, 有的快谱计算程序,  $I_j$  和  $p_n$  值须由另一专门程序提供。

引入上述定义量以后, 就得到多群慢化能谱方程为

$$-iB_n \phi_{1, n} \Delta_n + \Sigma_{0, n}^S \phi_{0, n} \Delta_n + \Sigma_{1, n-1} \phi_{0, n} \Delta_n + (1 - p_n)(q_{0, n-1}^H + q_{0, n-1}^A)$$



$$= \chi_n \Delta_n + \Delta_n \sum_{n'=1}^{n-1} \Sigma_{n', \rightarrow n}^A \phi_{0, n'} \Delta_{n'} - (q_{0, n}^H - q_{0, n-1}^H) - (q_{0, n}^A - q_{0, n-1}^A) \quad (6-82)$$

$$- \frac{iB_n}{3} \phi_{0, n} \Delta_n + \Sigma_{1, \rightarrow n} \phi_{1, n} \Delta_n = - (q_{1, n}^H - q_{1, n-1}^H)$$

$$\frac{1}{2} (q_{0, n}^H + q_{0, n-1}^H) \Delta_n + (q_{0, n}^A - q_{0, n-1}^A) = \Sigma_{S, n}^H \phi_{0, n} \Delta_n,$$

$$\frac{1}{2} (q_{1, n}^H + q_{1, n-1}^H) \Delta_n + \frac{2}{3} (q_{1, n}^H - q_{1, n-1}^H) = \frac{4}{9} \Sigma_{S, n}^H \phi_{1, n} \Delta_n, \quad (6-83)$$

$$\frac{1}{2} (q_{0, n}^A + q_{0, n-1}^A) \Delta_n = (\xi^A \Sigma_S^A)_{n, n} \phi_{0, n} \Delta_n,$$

$$n = 1, 2, \dots, N \quad (54)$$

这是一组共有  $5N$  个未知量  $\phi_{0, n}$ 、 $\phi_{1, n}$ 、 $q_{0, n}^H$ 、 $q_{0, n}^A$  和  $q_{1, n}^A$  的代数方程。应该指出，在计算快谱时， $B_n$  为输入量。可以根据等效裸堆的概念估算一个  $B_n$  值，经验证明，能谱及群常数对  $B_n$  是不敏感的，若采用迭代求解（见图 6-3），很少几次迭代就收敛了。

研究一下上述代数方程，不难发现它们是比较易于求解的。因为没有慢化中子进入第一群，所以初始条件为  $q_{0, 0}^H = q_{0, 0}^A = q_{1, 0}^H = 0$ ，利用这个初始条件，解  $n = 1$  时的方程 (6-82) 可求得  $\phi_{0, 1}$ 、 $\phi_{1, 1}$ ，然后，利用已求得的  $\phi_{0, 1}$  和  $\phi_{1, 1}$ ，解  $n = 1$  时的方程 (6-83)，得  $q_{0, 1}^H$ 、 $q_{1, 1}^H$ 、 $q_{0, 1}^A$ 。利用这三个已求得的量，解  $n = 2$  时的方程 (6-82)，得  $\phi_{0, 2}$  和  $\phi_{1, 2}$ 。依此进行下去，直到解出第  $N$  群的量。

### 少群常数的计算

一旦求出  $\phi_{0, n}$ 、 $\phi_{1, n}$ 、 $q_{0, n}^A$  及  $q_{1, n}^A$ ，就可利用它们来求少群（一群、二群或三群）群常数。设少群群号用  $g$  表示，少群的总群数用  $G$  表示，用  $n^{g, G}$  表示  $G$  群近似中第  $g$  群所包括的最后一个多群的能群（见图 6-5）， $n^{0, G} = 0$ ， $n^{G, G} = 54$ 。

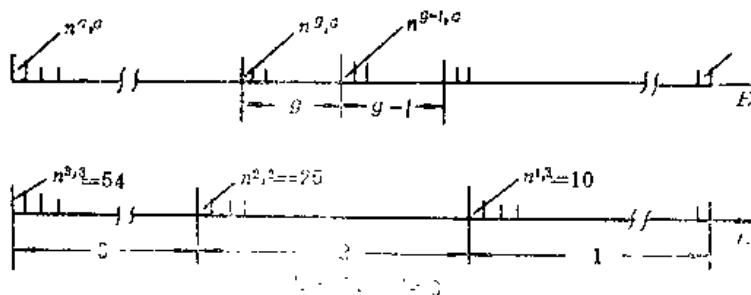


图6-5 多群并少群示意图

下面以归并成三群 ( $G = 3$ ) 为例（1至10群、11至25群、26至54群分别归并成少群的第一、第二和第三群，见图 6-5），介绍少群常数的计算。例如第二群的宏观吸收截面  $\Sigma_{a, 2}$  为

$$\Sigma_{a, 2} = \frac{\sum_{n^{1,3} < n \leq n^{2,3}} [\Sigma_{a, n} \phi_{0, n} \Delta_n + (1 - p_n) \Sigma q_{0, n-1}^A]}{\sum_{n^{1,3} < n \leq n^{2,3}} \phi_{0, n} \Delta_n} \quad (6-84)$$

式中,  $\sum_i q_{0, n-1}^i$  表示对所有元素的慢化密度求和。

第二群的扩散系数  $D_2$  为

$$D_2 = \frac{\sum_{n^1, s < n \leq n^2, s} \phi_{1, n} \Delta_n}{i B_m \sum_{n^1, s < n \leq n^2, s} \phi_{0, n} \Delta_n} \quad (6-85)$$

第一群至第二群的转移截面  $\Sigma_{1 \rightarrow 2}$  为

$$\Sigma_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sum_i q_{0, n^1, 2} + \sum_{0 < n' \leq n^1, s} \phi_{0, n'} \Delta_{n'} \sum_{n^1, s < n \leq n^2, s} \Sigma_{1, n, n' \rightarrow n} \Delta_n}{\sum_{0 < n \leq n^1, s} \phi_{0, n} \Delta_n} \quad (6-86)$$

在 MUFT 程序中, 只是少群中的第一群 ( $E = 0.821$  兆电子伏至 10 兆电子伏) 考虑了非弹性散射碰撞引起的中子慢化。所以第二群至第三群的转移截面  $\Sigma_{2 \rightarrow 3}$  为

$$\Sigma_{2 \rightarrow 3} = \frac{\sum_i q_{0, n^2, 3}^i}{\sum_{n^1, s < n \leq n^2, s} \phi_{0, n} \Delta_n} \quad (6-87)$$

用类似的方法, 可以求得  $(\nu \Sigma_f)_g$ 、 $\chi_g$  等其它群常数, 这里就不一一列举了。

在实际计算时, 为了避免出现复数, 只要令  $i\phi_{1, n} = \phi_{1, n}'$ ,  $iq_{1, n}^i = (q_{1, n}^i)'$ , 则所有的计算都在实数范围内完成。

最后应该指出, 除 MUFT 以外, 还有一些比较常用的热堆快谱计算程序, 如 GAM 等。常用于快中子堆能谱计算的程序有 MC<sup>2</sup> 等, 对于快中子堆来说, 尽可能精确地处理共振吸收和非弹性散射过程是极为重要的。关于 GAM、MC<sup>2</sup>, 请参阅有关文献<sup>[6]、[7]</sup>。

### 参 考 文 献

- [1] J.J.Duderstadt & L.J.Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, Chap. 7, 8, John wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [2] A.F.Henry, Nuclear-Reactor Analysis, pp.205—252, MIT Press, 1975.
- [3] J.R.拉马什著, 洪流译, 核反应堆理论导论, 第十章, 原子能出版社, 1977.
- [4] H.Bohl, Jr, et al., WAPD-TM-218 (1961).
- [5] A.F.Herny, WAPD-TM-224 (1960).
- [6] G.D.Joanou et al., GA-1850 (1961).
- [7] B.J.Toppel et al., ANL-7318 (1967).

## 第七章 多群扩散方程的数值解法

在早期的反应堆（主要是石墨和重水反应堆）设计中，通常是应用年龄或双群理论的解析方法来完成临界问题的计算的。但是当能群和分区的数目增加时（例如对于轻水堆和快中子反应堆），多群扩散方程的求解则是一个相当复杂和困难的问题，解析方法是无法解决的，而必须借助于数值方法来求解。随着电子计算机和计算技术的发展，目前，数值方法几乎已成为临界问题计算中普遍采用的主要方法。在许多设计和研究单位都编制有标准或专用的临界计算程序，它是反应堆设计中最基本的计算程序。

应用电子计算机解决工程实际问题的一般步骤为：

- (1) 根据实际问题提出数学模型并归纳成明确的数学问题（或数理方程）；
- (2) 根据数学问题选择适当的数值计算方法，确定计算步骤；
- (3) 编制计算机程序。

本书前面几章的内容实质上就是围绕着解决第一方面的问题，最后我们把反应堆链式反应的临界问题归纳为(6-56)式（见第六章）的多群扩散方程（二阶偏微分方程组）的特征值和特征函数的求解问题。本章将讨论第二方面问题——多群扩散方程的数值解法：源迭代法、差分方程及其解法。应该指出，这里仅仅是从物理设计的需要角度出发介绍方法的主要思想和步骤，至于更详细的内容和数学上进一步的研究则超出了本书的范围，读者可以参考数值分析或有关专门文献<sup>[1]-[3]</sup>。

### 1. 源迭代法

反应堆多群扩散方程根据(6-38)式可以写成

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{r,g} \phi_g(\mathbf{r}) - \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{X}_g}{k} Q(\mathbf{r}), \quad (7-1)$$
$$g = 1, 2, \dots, G$$

$$Q(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_{f,g'}) \phi_{g'}(\mathbf{r}), \quad (7-2)$$

或写成矩阵形式

$$\mathbf{M}\Phi = \frac{1}{k}\mathbf{F}\Phi. \quad (7-3)$$

式(7-1)是关于 $\phi_g(\mathbf{r})$ 的齐次方程组。在稳态情况下，对于给定系统只有当特征值 $\lambda(1/k)$ 等于确定数值时方程才有解。但是要精确地求出 $k$ 的数值及对应的特征函数 $\phi_g(\mathbf{r})$ 是一件非常困难的事情。在反应堆计算中，广泛地应用第四章所介绍过的源迭代或外迭代方法来近似地求解。

开始，我们任意假定一个初始的裂变源分布 $Q^0(\mathbf{r})$ ，例如可以认为在整个芯部都等于1

或某给定常数，并猜测一个初始的  $k^{(0)}$  数值，同时把  $Q^{(0)}(\mathbf{r})/k^{(0)}$  作为初始迭代源项 并把它们代入到方程 (7-1) 的右端中。这样，由它便可求出中子通量分布  $\phi_g^{(1)}(\mathbf{r})$  来，将求得的  $\phi_g^{(1)}(\mathbf{r})$  代入 (7-2) 式便求得第二次迭代裂变中子分布  $Q^{(1)}(\mathbf{r})$ ，并由它可以求得有效增殖因数的新的估计值  $k^{(1)}$  和第二代迭代源项  $Q^{(1)}/k^{(1)}$  来，……。依此类推，逐次地迭代下去，例如，对于第  $n$  次迭代计算有：

$$\begin{aligned} -D_g \nabla^2 \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) + \sum_{l=1}^G \Sigma_{l,g} \phi_l^{(n)}(\mathbf{r}) - \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}^{(n)}(\mathbf{r}) \\ = \frac{\chi_{g'}}{k^{(n-1)}} Q^{(n-1)}(\mathbf{r}), \quad g=1, 2, \dots, G, \end{aligned} \quad (7-4)$$

式中

$$Q^{(n-1)}(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_{f,g'}) \phi_{g'}^{(n-1)}(\mathbf{r}) \quad (7-5)$$

这里  $k^{(n-1)}$  的估计值根据  $k$  的物理意义（它等于新生一代的裂变总中子数与上一代源中子总数之比）可以由下式算出：

$$k^{(n)} = \frac{\int_V Q^{(n)}(\mathbf{r}) dV}{\frac{1}{k^{(n-1)}} \int_V Q^{(n-1)}(\mathbf{r}) dV} \quad (7-6)$$

方程 (7-4) — (7-6) 便是源迭代法的计算公式。

从物理上看，上面所确定的迭代过程相当于将反应堆内的中子人为地区分为不同的“代”，每一“代”中子由裂变成形之时作为起始。每一次源迭代则相当于老一代源中子通过扩散、慢化、俘获、裂变最后又形成了新一代源中子的过程。(7-6) 式中的  $k^{(n)}$  显然反映了中子每经过一代的倍增。因而可以预期，经过了足够的循环代数后，任意的初始中子源  $Q^{(0)}(\mathbf{r})$  必将在堆内形成一个稳定的最终中子源分布  $Q(\mathbf{r})$ 。多群扩散方程的特征值问题在数学上也已被详细研究过，并证明了上述迭代过程的收敛性；但这些内容远远超出了本书的范围。因而从理论上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^{(n)} = k; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) = \phi_g(\mathbf{r}). \quad (7-7)$$

但在实际计算中，当满足下列收敛准则或其中之一（根据问题的需要）时，便认为迭代过程收敛，它们是：

$$(1) \text{ 特征值收敛准则 } \left| \frac{k^{(n)} - k^{(n-1)}}{k^{(n)}} \right| < \epsilon_1 \quad (7-8)$$

$$(2) \text{ 通量分布收敛准则 } \left| \frac{\lambda_{\max}^{(n)} - \lambda_{\max}^{(n-1)}}{\lambda_{\max}^{(n)}} \right| < \epsilon_2 \quad (7-9)$$

其中

$$\lambda_{\max}^{(n)} = \max_{\mathbf{r} \in V} Q^{(n)}(\mathbf{r}) / Q^{(n-1)}(\mathbf{r}), \quad (7-10)$$

$$\lambda_{\text{min}}^{(n)} = \min_{\mathbf{r} \in V} Q^{(n)}(\mathbf{r}) / Q^{(n-1)}(\mathbf{r}), \quad (7-11)$$

$\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  为预先给定的参数。可以看到 (7-8) 式具有平均收敛而 (7-9) 式则具有逐点收敛的意义。实践表明, 特征值收敛要比通量分布收敛得快。一般在程序中可取  $\varepsilon_1 \approx 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_2 \approx 10^{-2}$ 。

上述的迭代过程称为**源迭代**或**外迭代**过程。它和第四章第 3 节所介绍的基本一样, 所不同之处仅仅在于这里对方程右端的源项在逐次迭代中均除以  $k^{(n)}$ , 这样处理有很大的方便。由 (7-6) 式可以看到, 这时每次迭代中源强将保持相等; 同时, 可以避免当  $k$  值与 1 偏离比较大时中子通量随着迭代次数  $n$  的增加变得过大或衰减得过小的麻烦。

**收敛的加速** 上面迭代过程可以通过一些适当的方法来加速其收敛过程。例如, 我们可以假定对于  $n+1$  次迭代的源项  $S^{(n)}(\mathbf{r}) = Q^{(n)}(\mathbf{r})/k^{(n)}$  可以用它和上一次迭代的源项  $S^{(n-1)}(\mathbf{r})$  的线性组合来代替, 即

$$S^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{Q^{(n)}(\mathbf{r})}{k^{(n)}} + \alpha \left( \frac{Q^{(n)}(\mathbf{r})}{k^{(n)}} - S^{(n-1)}(\mathbf{r}) \right), \quad (7-12)$$

式中  $\alpha$  为介于 0 与 1 之间的经验常数。这就是所谓**源外推法**。它是比较简便和常用的一种方法。然而  $\alpha$  的最佳数值的选择是一件复杂的事情。(7-12) 式的外推方法可以推广到  $S^{(n)}(\mathbf{r})$  由前面任意次源项的线性组合, 例如对于  $S^{(n)}(\mathbf{r})$  可以写成

$$S^{(n)}(\mathbf{r}) = a_{n,n} \frac{Q^{(n)}(\mathbf{r})}{k^{(n)}} + \sum_{m=0}^{n-1} a_{m,n} S^{(m)}(\mathbf{r}), \quad (7-13)$$

其中系数  $a_{m,n}$  为待确定的常数。

## 2. 一维扩散方程的数值解法

从前面讨论知道, 应用源迭代法的一个很大优点和方便之处在于: 它把原来  $G$  个联立的多群扩散方程 (7-1) 的求解问题在每次迭代中, 变换为按顺序解下面  $G$  个单群扩散方程问题:

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) + \Sigma_{R,g} \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) = S_g^{(n)}(\mathbf{r}), \quad g=1, \dots, G \quad (7-14)$$

式中  $\Sigma_{R,g}$  为  $g$  群移出截面, 若不考虑中子自低能能群的向上散射, 则方程右端的源项便等于

$$S_g^{(n)}(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}^{(n)}(\mathbf{r}) + \frac{\lambda_g}{k^{(n-1)}} Q^{(n-1)}(\mathbf{r}), \quad (7-15)$$

当按  $g=1, \dots, G$  的次序对方程 (7-14) 求解时, 方程右端源项  $S_g^{(n)}(\mathbf{r})$  便是已知的。

(7-14) 式便是一个含有已知源项的单群扩散方程。略去上下角标, 它可以写成下面标准形式:

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi(\mathbf{r}) + \Sigma_R \phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}), \quad (7-16)$$

式中  $S(\mathbf{r})$  为已知源项。

现在我们讨论它的数值解法。这主要包括二个方面的问题: 首先是设法把 (7-16) 式的微

分方程化为便于在计算机上求解的差分方程（代数方程组），其次便是寻找求解差分方程组的简捷的计算方法。

本节先讨论最简单的一维情形。

### 2.1 差分方程组的推导

一维扩散方程（7-16）式对于各种坐标系统可以写成下列普遍的形式：

$$-\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha D \frac{d\phi}{dr} + \Sigma_R \phi(r) = S(r), \quad (7-17)$$

其中

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{平面情况} \\ 1, & \text{圆柱情况} \\ 2, & \text{球对称情况。} \end{cases}$$

$D$ ,  $\Sigma_R$  和  $S(r)$  为分段连续函数，并且  $D$ ,  $\Sigma_R$  在每一区内均等于常数。

首先把坐标  $r$  分割成许多离散网点：球形堆自然被分成许多同心球壳层，圆柱形堆则分成许多圆环壳层，而平板堆则被分成若干平板层。假定在反应堆体积（包括反射层）内， $0 \leq r \leq R$ （ $R$  为外推边界半径）的区域内被分割成宽度为  $\Delta_i = r_i - r_{i-1}$  的  $N$  个区间。其中  $r_0, r_1, \dots, r_i, \dots, r_N$  称为节点（或网点）， $\Delta_i$  称为第  $i$  区间的网距（见图 7-1）。节点  $r_i$  位置的选择自然应该考虑问题的实际情况。例如，可以使所有分界面和边界均与节点重合。 $\Delta_i$  在各部分可以是等距的也可以是不等距的，但是  $\Delta_i$  应该充分地小，使得在区间内中子通量的变化很小。因而在通量变化比较剧烈的地方分点应密一点，例如在堆芯材料性质变化较大的区域或燃料、吸收体附近， $\Delta_i$  自然将用比反射层更密的网距。一般网距应小于中子的平均自由程或扩散长度。在典型的一维问题程序中节点数目大约在 100 左右。

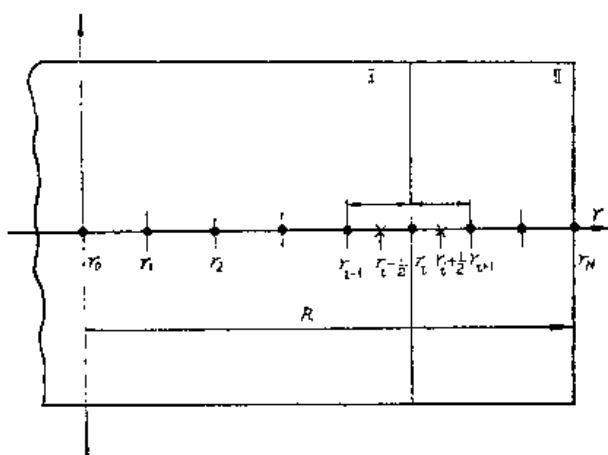


图7-1 一维差分方程网格

对方程（7-17）可以有方法来求得其差分方程。这里介绍比较简单、常用的一种。为了不失普遍性不妨讨论节点  $r_i$  与分界面重合的情况。将（7-17）式各项乘以  $r^\alpha dr$ （体积元）并自  $r_{i-1/2} = r_{i-1} + \Delta_{i-1}/2$  到  $r_{i+1/2} = r_i + \Delta_i/2$  积分之。对于第一项有

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{d}{dr} r^a D \frac{d\phi}{dr} dr = r^a D \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{i+\frac{1}{2}}} - r^a D \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{i-\frac{1}{2}}} \\ = r_{i+\frac{1}{2}}^a D_{i+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta_i} - r_{i-\frac{1}{2}}^a D_{i-\frac{1}{2}} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta_{i-1}}, \quad (7-18)$$

式中  $f_i = f(r_i)$ ，并应用了导数的两点差分公式

$$\frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{i+\frac{1}{2}}} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta_i}, \quad \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{i-\frac{1}{2}}} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta_{i-1}}.$$

对于第二、三项考虑到  $\Sigma_R$ 、 $S$  在  $r_i$  处可能不连续，因而有

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \Sigma_R(r) \phi(r) r^a dr = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} + \int_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \\ \approx \frac{1}{2} (\Sigma_{R, i-\frac{1}{2}} \Delta_{i-1} + \Sigma_{R, i+\frac{1}{2}} \Delta_i) \phi_i r_i^a, \quad (7-19)$$

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} S(r) r^a dr \approx \frac{r_i^a}{2} (\Delta_{i-1} S_{i-\frac{1}{2}} + \Delta_i S_{i+\frac{1}{2}}). \quad (7-20)$$

这里  $S_{i-\frac{1}{2}}$  和  $S_{i+\frac{1}{2}}$  是  $r=r_i$  两侧的数值。

综合上述结果，根据 (7-17) 式便求得第  $i$  节点的差分方程为

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i, \quad (7-21)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} c_i &= -r_{i+\frac{1}{2}}^a D_{i+\frac{1}{2}} / \Delta_i; \quad a_i = c_{i-1}; \\ b_i &= \frac{r_i^a}{2} (\Sigma_{R, i-\frac{1}{2}} \Delta_{i-1} + \Sigma_{R, i+\frac{1}{2}} \Delta_i) - a_i - c_i; \\ d_i &= \frac{1}{2} r_i^a (\Delta_{i-1} S_{i-\frac{1}{2}} + \Delta_i S_{i+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \right\} \quad (7-22)$$

**边界点的处理** 在  $i=0$  和  $i=N$  的边界点上，考虑到边界条件，差分方程将具有不同的形式。例如，对于  $i=N$  ( $r_N=R$ ) 的外推边界上有  $\phi_N=0$ 。因而  $i=N$  点的差分方程可以消去。而对于  $N-1$  点差分方程将只有两项形式：

$$a_{N-1} \phi_{N-2} + b_{N-1} \phi_{N-1} = d_{N-1}. \quad (7-23)$$

对于原点，即  $i=0$  点，我们应用中子通量对称的条件

$$\frac{d\phi}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \Rightarrow \phi_0 = \phi_1. \quad (7-24)$$

同样可以略去  $i=0$  点的差分方程，而对于  $i=1$  点可以把  $\phi_0$  项和  $\phi_1$  项合并，差分方程可重新改写成两点形式







### 3. 二维扩散方程的数值解法

在反应堆的实际计算中，考虑到控制棒的布置、燃料的非均匀装载以及燃耗等问题，对于大型反应堆往往需要计算二维或三维的中子通量或功率的分布。二维多群扩散方程数值解法在总的步骤上和一维情况是相似的。所不同之处在于下面二个方面。首先，它的扩散差分方程组比一维情况要复杂，不再是三对角形的简单形式，不能用直接方法来求解而必须应用迭代方法；其次，网点的数目比一维要大得多，比如若一维情况每群是100个节点，那么二维情况则将是每群100×100点。因而二维扩散方程的数值解法将比一维情况要复杂困难得多，它需要更大的计算机容量、更长的计算时间和更复杂的计算技巧。

#### 3.1 二维差分方程组

根据反应堆的几何形状，可以有  $(x, y)$ 、 $(r, z)$  和  $(r, \theta)$  三种二维图形。下面我们讨论比较简单的  $(x, y)$  二维差分方程。为了减少网点的数目，根据对称性条件，计算时往往可以只取 1/2 或 1/4 对称平面。对所取计算平面首先用

$$\begin{aligned} x &= x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N \\ y &= y_0, y_1, \dots, y_j, \dots, y_M \end{aligned}$$

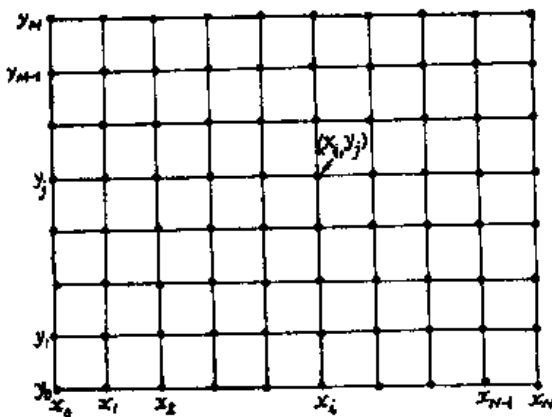


图7-3 二维网格

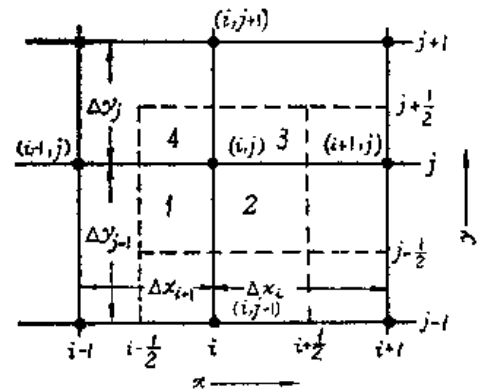


图7-4  $(i, j)$  网格示意图

直线族把平面分成许多矩形网格 (图 7-3)。交点  $(x_i, y_j)$  称为节点或网点，如图共有  $(N+1)(M+1)$  个节点， $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ， $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$  称为网距。

二维  $(x, y)$  几何情况下扩散方程 (7-16) 式可写成

$$-\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Sigma_R(x, y) \phi(x, y) = S(x, y). \quad (7-33)$$

不妨假设所有分界面均与节点重合。讨论如图 7-4 所示  $(i, j)$  节点。将方程 (7-33) 在  $(i, j)$  节点附近虚线所围的矩形区域上积分之。这样，方程中第一项便等于

$$\bar{T}_1 = - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} D(x, y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} dx$$

$$= - \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \left[ D(x_{i+\frac{1}{2}}, y) \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} - D(x_{i-\frac{1}{2}}, y) \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}} \right] dy \quad (7-34)$$

若上式中导数应用下面近似公式

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} \approx \frac{\phi_{i+1, j} - \phi_{i, j}}{\Delta x_i}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}} \approx \frac{\phi_{i, j} - \phi_{i-1, j}}{\Delta x_{i-1}},$$

式中  $\phi_{i, j} = \phi(x_i, y_j)$ , 将上式代入 (7-34) 式, 考虑到  $D$  可能不连续, 便得到

$$\begin{aligned} T_1 = & -\frac{1}{2} [D_2 \Delta y_{i-1} + D_3 \Delta y_i] \frac{\phi_{i+1, j} - \phi_{i, j}}{\Delta x_i} \\ & + \frac{1}{2} [D_1 \Delta y_{i-1} + D_4 \Delta y_i] \frac{\phi_{i, j} - \phi_{i-1, j}}{\Delta x_{i-1}}, \end{aligned} \quad (7-35)$$

式中  $D_k$  表示图 7-4 中第  $k$  个小矩形上的  $D$  值。同理可求得第二项积分等于

$$\begin{aligned} T_2 = & -\frac{1}{2} [D_4 \Delta x_{i-1} + D_3 \Delta x_i] \frac{\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j}}{\Delta y_j} \\ & + \frac{1}{2} [D_1 \Delta x_{i-1} + D_2 \Delta x_i] \frac{\phi_{i, j} - \phi_{i, j-1}}{\Delta y_{j-1}}. \end{aligned} \quad (7-36)$$

对于第三、四项的积分则等于

$$\begin{aligned} T_3 = & \frac{1}{4} [\Sigma_{R, 1} \Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1} + \Sigma_{R, 2} \Delta x_i \Delta y_{j-1} \\ & + \Sigma_{R, 3} \Delta x_i \Delta y_j + \Sigma_{R, 4} \Delta x_{i-1} \Delta y_j] \phi_{i, j}, \end{aligned} \quad (7-37)$$

$$T_4 = \frac{1}{4} [S_1 \Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1} + S_2 \Delta x_i \Delta y_{j-1} + S_3 \Delta x_i \Delta y_j + S_4 \Delta x_{i-1} \Delta y_j]. \quad (7-38)$$

综合 (7-35) — (7-38) 式的结果, 由 (7-33) 式便导出  $(i, j)$  节点的差分方程:

$$a_{i, j} \phi_{i, j-1} + b_{i, j} \phi_{i-1, j} + c_{i, j} \phi_{i+1, j} + d_{i, j} \phi_{i, j+1} + e_{i, j} \phi_{i, j} = s_{i, j} \quad (7-39)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_{i, j} = d_{i, j-1} &= -\frac{1}{2} [D_1 \Delta x_{i-1} + D_2 \Delta x_i] / \Delta y_{j-1} \\ b_{i, j} = c_{i-1, j} &= -\frac{1}{2} [D_1 \Delta y_{j-1} + D_4 \Delta y_j] / \Delta x_{i-1} \\ e_{i, j} &= \frac{1}{4} [\Sigma_{R, 1} \Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1} + \Sigma_{R, 2} \Delta x_i \Delta y_{j-1} \\ &+ \Sigma_{R, 3} \Delta x_i \Delta y_j + \Sigma_{R, 4} \Delta x_{i-1} \Delta y_j] - a_{i, j} \\ &- b_{i, j} - c_{i, j} - d_{i, j} \end{aligned} \right\} \quad (7-40)$$

$$s_{i, j} = (7-38) \text{ 式}$$



$$\phi = B\phi + f \quad (7-44)$$

式中  $B$  为相应的系数矩阵。这样，如果任意给定一组  $\phi_{i,j}$  值代入 (7-43) 或 (7-44) 式右端便可求出一组新的  $\phi_{i,j}$ ，这就是所谓简单迭代法，其计算格式为

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{(n)} = & h_{i,j} [a_{i,j} \phi_{i,j-1}^{(n-1)} + b_{i,j} \phi_{i-1,j}^{(n-1)} + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^{(n-1)} \\ & + d_{i,j} \phi_{i,j+1}^{(n-1)} - s_{i,j}], \end{aligned} \quad (7-45)$$

即 
$$\Phi^{(n)} = B\Phi^{(n-1)} + f, \quad (7-46)$$

现在讨论它的收敛性。设方程的精确解为  $\Phi^*$ ，第  $m$  次迭代的误差为  $E^{(m)} = \Phi^* - \Phi^{(m)}$ ，则由 (7-44) 和 (7-46) 式便得到

$$E^{(m)} = B(\Phi^* - \Phi^{(m-1)}) = BE^{(m-1)} = B^m E^{(0)}$$

这里  $E^{(0)} = \Phi^* - \Phi^{(0)}$  为初始通量分布的误差。把  $E^{(0)}$  用  $B$  的特征函数  $\psi_i$  展开，则  $E^{(m)}$  可以写成

$$E^{(m)} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i B^m \Psi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^m A_i \Psi_i \rightarrow 0, \text{ 当 } m \rightarrow \infty$$

因为可以证明  $B$  的最大特征值  $\lambda_0$  是小于 1 的实数，因而误差将按  $\lambda_0^m$  衰减。

从数值分析知道，简单迭代法的收敛速度是很慢的，而且这种方法需要存贮两套通量点值  $\{\phi_{i,j}\}$ ，所以一般都不采用它。

### (2) 赛德尔迭代法

在上面迭代计算中  $(i, j)$  的求解次序是按 (7-41) 式规定的由小到大进行的。因而在 (7-45) 式中当求解  $\phi_{i,j}$  时，右端前二项  $\phi_{i,j-1}$  和  $\phi_{i-1,j}$  实际上已经算出新值来了。自然想到，在 (7-45) 式中可以用已经算出的新值  $\phi_{i,j-1}^{(n)}$  和  $\phi_{i-1,j}^{(n)}$  来代替旧值以改进精确度，简单迭代法没有利用这一事实。这样，迭代格式可改写为

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{(n)} = & h_{i,j} [a_{i,j} \phi_{i,j-1}^{(n)} + b_{i,j} \phi_{i-1,j}^{(n)} + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^{(n-1)} \\ & + d_{i,j} \phi_{i,j+1}^{(n-1)} - s_{i,j}]. \end{aligned} \quad (7-47)$$

这便是赛德尔迭代。它的收敛速度比简单迭代法高，并且只需一套  $\{\phi_{i,j}\}$  存贮单元。

### (3) 点逐次超松弛 (SOR) 方法

赛德尔迭代法还可以通过引进参数  $\omega$  用外推办法来加速收敛。设  $\phi_{i,j}^{(m-1)}$  为第  $m-1$  次迭代结果， $\hat{\phi}_{i,j}^{(n)}$  为按 (7-47) 式赛德尔迭代所得的结果，即

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{i,j}^{(n)} = & h_{i,j} [a_{i,j} \phi_{i,j-1}^{(n)} + b_{i,j} \phi_{i-1,j}^{(n)} + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^{(n-1)} \\ & + d_{i,j} \phi_{i,j+1}^{(n-1)} - s_{i,j}]. \end{aligned} \quad (7-48)$$

最后我们用  $\phi_{i,j}^{(m-1)}$  和  $\hat{\phi}_{i,j}^{(n)}$  的线性组合来外推得到第  $m$  次的迭代结果  $\phi_{i,j}^{(m)}$ ：

$$\phi_{i,j}^{(m)} = \phi_{i,j}^{(m-1)} + \omega(\hat{\phi}_{i,j}^{(n)} - \phi_{i,j}^{(m-1)}), \quad (7-49)$$

式中  $\omega$  称为超松弛因子，若  $\omega = 1$  便是赛德尔迭代法。将 (7-48) 代入 (7-49) 便得

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{(m)} = & \frac{\omega}{h_{i,j}} [a_{i,j} \phi_{i,j-1}^{(m)} + b_{i,j} \phi_{i-1,j}^{(m)} + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^{(m-1)} \\ & + d_{i,j} \phi_{i,j+1}^{(m-1)} - s_{i,j}] + (1-\omega)\phi_{i,j}^{(m-1)}. \end{aligned} \quad (7-50)$$



**收敛准则** 内迭代常用的收敛判别条件为

$$(1) \quad \frac{\sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{(m)} - \phi_{i,j}^{(m-1)}|}{\sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{(m)}|} < \varepsilon_3, \quad (7-54a)$$

或

$$(2) \quad \sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{(m)} - \phi_{i,j}^{(m-1)}| < \varepsilon_4 \sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{(1)} - \phi_{i,j}^{(0)}| \quad (7-54b)$$

$\varepsilon_3$ 、 $\varepsilon_4$  为给定参数。一般讲当外（源）迭代远未收敛时，不必使内迭代有太高的精度，内迭代的要求精度可随着外迭代的收敛精度的提高而相应地提高。

### 4. 三维问题的数值解法

随着大型核电站的迅速发展，燃料循环等的经济性成为反应堆物理设计中一个很重要的指标，这就要求精确地确定全堆的中子通量或功率的分布，因而需要作三维问题的计算。三维问题的差分解法和二维情况没有很大的差别。这时芯部自然被分割成许多空间的网点。例如，对于  $xyz$  几何情况，则用  $x_i = x_{i-1} + h$ ， $y_j = y_{j-1} + l$ ， $z_k = z_{k-1} + R$  三族直线把芯部分成空间网格[见图7-5(a)]。可以用和二维类似方法来建立节点  $(i, j, k)$  上的差分方程，不过这时中子通量  $\phi_{i,j,k}$  将与周围六个节点发生关系，即三维差分方程可写成下列形式

$$a_{i,j,k} \phi_{i-1,j,k} + b_{i,j,k} \phi_{i,j-1,k} + c_{i,j,k} \phi_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} \phi_{i,j,k} + e_{i,j,k} \phi_{i+1,j,k} + f_{i,j,k} \phi_{i,j,k+1} + g_{i,j,k} \phi_{i,j,k+1} = s_{i,j,k} \quad (7-55)$$

它的系数矩阵是七条对角线型的[图7-5(c)]，同样可以用迭代法求解。

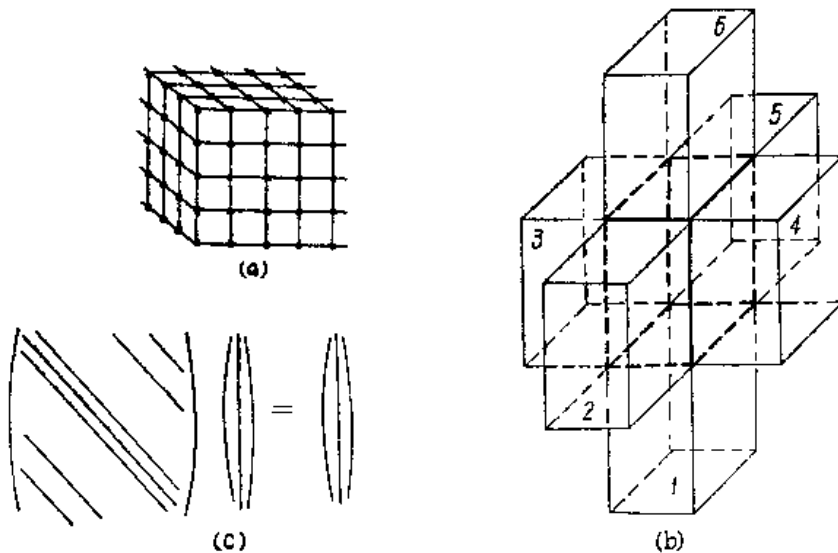


图7-5 三维空间网格

三维问题差分解法的主要矛盾是所需要解的差分方程（节点）的数目太大，比一维问题约高二个数量级。为了保证计算结果的精确性，空间网距不能太大，经验表明网距应等于0.5—1个中子的扩散长度。表7-1给出3000兆瓦热功率的各种类型反应堆所需要的网点数

目和计算时间。从表中数字可以看出，若用传统的有限差分法求解三维问题，所需计算机存储容量之大，计算时间之长都是惊人的，是很不经济的，而且通常的计算机是难以胜任的。尤其是当考虑到燃料、温度的反馈（燃料寿期计算往往需作数十次以上静态计算）时，则矛盾将更加尖锐。特别是水堆更加突出，从表中可以看出它所需要的时间比其他堆型高出一个数量级以上。因此，近十多年来，迅速发展了各种有效的其他近似计算方法，以求解决上述矛盾。最常用的有下面几种。

表7-1 各种类型反应堆（3000兆瓦(热)）数值分析所需网格<sup>[4]</sup>

堆型	芯部 体积 米 <sup>3</sup>	功率 密度 瓦/ 厘米 <sup>3</sup>	扩散 长度 (厘米)	芯部 直径 以L为 单位	需要网点数目 (网距等于L)		群数 (热群)	群·网 点 数		计算时间(CDC-6600) (估计)		
					二 维	三 维		二 维	三 维	一维(秒)	二维(分)	三维(小时)
PWR	40	75	1.8	190	36,100	6,859,000	4(1)	144,400	27,436,000	2.2	26	85
BWR	60	50	2.2	178	31,666	5,635,000	4(1)	126,664	22,540,000	1.8	22	66
HTGR	428	7.0	12	63	3,947	247,000	7(4)	27,630	1,735,780	0.7	2	1.8
LMFER	5.7	530	5.0	36	1,270	45,270	10(0)	12,700	452,700	0.2	0.4	
GCFR	10.7	280	6.6	33	1,115	37,253	10(0)	11,150	372,530	0.16	0.4	0.2

### (1) 粗网格方法

它的主要思想是在保证一定精度条件下，借助一些有效的近似方法加大网格的距离，减少节点的数目，从而减少计算的时间。例如，一般粗网格方法的网距可以比有限差分方法增大几倍以上，对于二维问题它的计算时间可以减至约为后者的1/10，对于三维问题约为后者的1/30。

(1) 节块法 这是最早提出的粗网格方法，例如，早期的FLARE程序<sup>[7]</sup>，它已成功地应用于沸水堆的功率分布计算。为了简单地了解节块方法的实质，我们讨论单群情形，这时扩散方程可以写成

$$-\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \Sigma_a \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{k} \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (7-56)$$

假设我们讨论xyz三维几何情况，首先用粗的网格把芯部分成许多长方块[如图7-5(a)]，或“节块”。现在讨论其中第i节块的中子平衡方程，为此将(7-56)式对节块i的体积V<sub>i</sub>积分之，有

$$-\int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS - \Sigma_{a,i} V_i \phi_i + \frac{1}{k} \nu \Sigma_{f,i} V_i \phi_i = 0, \quad (7-57)$$

式中 $\phi_i$ 为节块i内的平均中子通量

$$\phi_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \phi(\mathbf{r}) dV, \quad (7-58)$$

而



$$\Sigma_{a,i} = \int_{V_i} \Sigma_a \phi(\mathbf{r}) dV / \phi_i V_i, \quad \nu \Sigma_{f,i} = \int_{V_i} \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) dV / \phi_i V_i.$$

(7-57) 式的第一项是节块  $i$  的泄漏中子数,  $\mathbf{n}$  为节块表面的外法线矢量, 它可以写成

$$\int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{j=1}^6 J_j S_j, \quad (7-59)$$

式中足标  $j$  依序表示节块  $i$  的 6 个表面 (参阅图 7-5(b)).  $J_j$  是  $S_j$  表面的外法线方向上的净中子流密度, 求和系对节块的 6 个表面进行。由于在粗网格方法中节块的尺寸是比较大的 (否则便失去了方法的优越性), 因而可以认为通过某表面  $S_j$  的中子泄漏数或中子流只与相邻两个节块的通量有关。若以  $J_j^o, J_j^i$  分别表示自  $j$  表面流出和流入节块的中子流, 可以写出下列等式

$$J_j^o \approx \alpha'_{i,j} \phi_i; \quad J_j^i \approx \alpha'_{j,i} \phi_j. \quad (7-60)$$

因而

$$J_j = J_j^o - J_j^i = \alpha'_{i,j} \phi_i - \alpha'_{j,i} \phi_j, \quad (7-61)$$

这样, 方程 (7-57) 便可写成

$$-\left[ \Sigma_{a,i} + \sum_{j=1}^6 \alpha_{i,j} \right] \phi_i + \sum_{j=1}^6 \alpha_{j,i} \phi_j + \frac{1}{k} \nu \Sigma_{f,i} \phi_i = 0, \quad (7-62)$$

这里  $\alpha_{i,j}$  和  $\alpha_{j,i}$  称为耦合系数。

因此, 节块法的关键在于正确地求得这些耦合系数, 有了它们便可由 (7-62) 方程很方便地求出所有的  $\phi_i$ 。计算实践表明, 选取合适的耦合系数, 节块方法可以获得很好的结果。可以有许多方法计算耦合系数: 例如解扩散方程或格林函数法, 碰撞几率法等等。在实际中往往需要根据理论计算与更精确的差分标准计算的结果相比较, 而半经验地加以调整确定。可以看到, 若网距  $h_i$  取得足够小, 并取  $\alpha'_{i,j} = \alpha'_{j,i} = D/h_i$ , 这样便有

$$J_j = D(\phi_i - \phi_j)/h_i$$

这时节块法便和有限差分法完全等价了。

节块法的主要优点是简单并且便于求解, 其主要缺点在于它只给出节块的平均通量, 不能给出块内局部的精细通量分布或功率分布。同时对于一些问题它的精度还不够理想。

(II) 有限元素法 这是基于变分原理进行离散化处理的一种数值方法。它最早用于力学分析的问题中。目前已经成功地应用于多维的中子扩散问题的计算, 是一种很有前途的方法。它的主要优点在于有较好的理论基础, 对于复杂的几何结构有高度的灵活性, 并且能够提供局部的通量分布或功率分布。其主要缺点是它的耦合矩阵比差分方法的稀疏性差, 从而求解比较麻烦, 所需要的时间较长。

应该指出, 近十年来粗网格方法已取得了很大的进展, 并产生出许多新的方法, 例如, 粗网格展开法以及结合节块法和有限元素法的节块展开法等等。看来, 粗网格方法将是解决反应堆多维静态和燃耗计算的一种很有前途的有效的和经济的方法。

## (2) 通量综合法

这是六十年代提出来的一种近似方法。它的主要思想是想从一系列一维和二维的计算结

果中“综合”出三维空间的通量分布。第三章中所介绍的曲率迭代法实质上就是通量综合法的最早模型。下面简单地介绍这种方法的主要思想。

假设讨论一圆柱形反应堆，我们把堆芯沿  $z$  方向分成  $N$  个段，如图 7-6(a) 所示。在

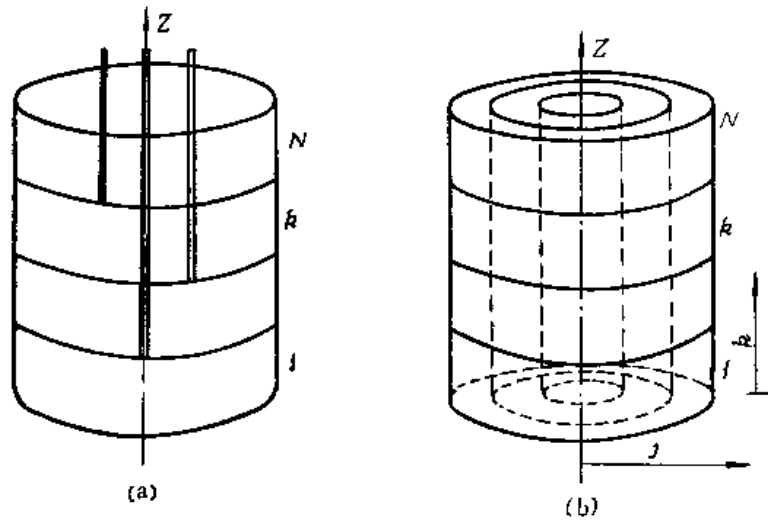


图7-6 堆芯分段示意图

水平方向用  $x, y$  网格表示。假定第  $g$  群中子通量的空间分布可以写成下列分离变量的一些项的和，即

$$\phi_g(x, y, z) \approx \sum_{k=1}^N Z_k^g(z) \varphi_k^g(x, y), \quad (7-63)$$

式中  $\varphi_k^g(x, y)$ ,  $k=1, \dots, N$ , 称为尝试函数。它的选择一般需凭经验并具有一定的任意性。例如  $\varphi_k^g$  可以选取对每一  $k$  薄片(段)进行  $(x, y)$  二维计算所得到的通量分布作为尝试函数。尝试函数选择的好坏, 将直接影响结果的精确度。  $Z_k^g(z)$  称为综合函数, 它可以通过(I)权重余数法, 或(II)变分方法来确定。这里我们将简单介绍用权重余数法求综合函数的主要思想。

为简单起见, 不妨讨论单群情况, 但其结果可以很容易推广到多群情况。这时可以略去群的标号  $g$ , 单群扩散方程可以写成:

$$\widehat{\nabla} \cdot D \widehat{\nabla} \phi(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) - \Sigma_a \phi + \frac{\nu \Sigma_f}{k} \phi(x, y, z) = 0, \quad (7-64)$$

式中

$$\widehat{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}.$$

为简单起见, 不妨就选取  $\varphi_k(x, y)$  作为权重函数。将 (7-63) 式代入 (7-64) 方程并乘以  $\varphi_i(x, y)$ , 然后对第  $i$  段  $(x, y)$  平面  $R_i$  积分之。由于假设  $\phi$  为方程的解, 所以其积分结果应该等于零, 即

$$\iint_{R_i} \varphi_i(x, y) \sum_{k=1}^N \left[ \widehat{\nabla} \cdot D \widehat{\nabla} \varphi_k(x, y) Z_k(z) + \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial Z_k(z)}{\partial z} \varphi_k(x, y) - \right.$$

$$-\Sigma_a Z_k(z) \varphi_k(x, y) + \frac{\nu \Sigma_f}{k} Z_k(z) \varphi_k(x, y) \Big] dx dy = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (7-65)$$

式中第一项积分利用散度的一些性质，可以求出等于

$$\begin{aligned} \iint_{R_i} \varphi_i \widehat{\nabla} \cdot D \widehat{\nabla} \varphi_k dx dy &= \iint_{R_i} [\text{div}(\varphi_i D \widehat{\nabla} \varphi_k) - \widehat{\nabla} \varphi_i \cdot D \widehat{\nabla} \varphi_k] dx dy \\ &= \int_S \varphi_i D \widehat{\nabla} \varphi_k \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{R_i} \widehat{\nabla} \varphi_i \cdot D \widehat{\nabla} \varphi_k dx dy = - \iint_{R_i} \widehat{\nabla} \varphi_i \cdot D \widehat{\nabla} \varphi_k dx dy, \end{aligned} \quad (7-66)$$

式中  $\varphi_i = \varphi_i(x, y)$ ,  $\mathbf{n}$  为外表面  $S$  上的外法线。由于在  $S$  上  $\varphi_i = 0$ ，所以上式中的面积分项便等于零。

若定义下列各量

$$D_{i, \dots, k}(z) = \iint_{R_i} \varphi_i(x, y) D(x, y, z) \varphi_k(x, y) dx dy; \quad (7-67a)$$

$$\Sigma_{a, \dots, k}(z) = \iint_{R_i} \varphi_i(x, y) \Sigma_a(x, y, z) \varphi_k(x, y) dx dy; \quad (7-67b)$$

$$\Sigma_{f, \dots, k}(z) = \iint_{R_i} \varphi_i(x, y) \Sigma_f(x, y, z) \varphi_k(x, y) dx dy; \quad (7-67c)$$

$$(DB^2)_{i, \dots, k}(z) = \iint_{R_i} \widehat{\nabla} \varphi_i(x, y) \cdot D(x, y, z) \widehat{\nabla} \varphi_k(x, y) dx dy. \quad (7-67d)$$

那末由 (7-65) 式便得到含有  $Z_k(z)$  的一维方程组：

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{d}{dz} D_{i, \dots, k} \frac{d}{dz} Z_k(z) - [\Sigma_{a, \dots, k} + (DB^2)_{i, \dots, k}] Z_k(z) \right. \\ \left. + \frac{\nu}{k} \Sigma_{f, \dots, k} Z_k(z) \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (7-68)$$

解上述一维方程组便可求得特征值  $1/k$  和综合函数  $Z_k(z)$ 。这样，综合通量法的步骤可以总结如下：首先对芯部各轴向段进行二维的扩散计算以求得尝试函数  $\varphi_i(x, y)$ ，然后完成 (7-67) 式积分求得各个系数，并代入 (7-68) 式。最后解一维方程组 (7-68) 求得  $Z_k(z)$  并由 (7-63) 式建立所需的三维的通量分布。

如果我们采用  $\varphi_i(x, y)$  的共轭通量作为权重函数，那末便得到相当于变分方法的结果。在前面计算中我们假定轴向的综合函数  $Z_k(z)$  对整个芯部横断面都是一样的，也就是说 (7-63) 式适用于整个芯部，这种方式我们称之为“单道空间综合”。如果我们把芯部沿径向和轴向两个方向都分成许多区段[分别以  $j, k$  标号表示，如图7-6(b)]，在不同的径向区用不同的展开函数，即

$$\phi'(x, y, z) = \sum_{k=1}^N Z_k(z) \varphi_k(x, y). \quad (7-69)$$

这便是所谓“多道空间综合”法。虽然在选择尝试函数上多道综合有更大的灵活性，但是由

于计算经验的限制，目前仍常常使用单道综合方法。

通量综合法的最大缺点在于尝试函数的选择有一定的任意性，在很大程度上依赖于人们的经验，因而在个别情况下因尝试函数选择不当，会产生反常的结果。这也正是妨碍它获得广泛应用的主要原因。然而，综合法的思想不仅用于空间通量的综合，也可用于空间-能谱综合等等。

## 5. 多群临界问题的数值解法

### 5.1 多群扩散方程数值解法的步序

从前面讨论知道，多群扩散方程 (7-1) 的数值求解的步序可以总结为两大步：

(1) **源迭代或外迭代** 这是用迭代方法解 (7-1) 方程的特征值与特征函数问题。它是通过源迭代法 (每次迭代中源项为已知) 把原来的多群联立方程组的求解问题变换成解  $G$  个如 (7-14) 式的单群扩散方程。而这单群方程则可应用差分方法通过下面内迭代方法来求解。

(2) **通量迭代或内迭代** 这是用迭代方法解单群扩散方程的差分代数方程组问题。由于群数为  $G$ ，因而每一次外迭代中需对  $G$  个方程作内迭代过程。

当没有向上散射时，求解的次序可以从高能群顺序往下向低能群进行，即

$$\begin{aligned}
& -\nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1 + \Sigma_{r,1} \phi_1 = \frac{1}{k} \chi_1 Q \\
& \downarrow \\
& -\nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2 + \Sigma_{r,2} \phi_2 = \Sigma_{1 \rightarrow 2} \phi_1 + \frac{1}{k} \chi_2 Q \dots \\
& \downarrow \\
& \dots\dots\dots \\
& \downarrow \\
& -\nabla \cdot D_G \nabla \phi_G + \Sigma_{r,G} \phi_G = \sum_{g'=1}^{G-1} \Sigma_{g' \rightarrow G} \phi_{g'} + \frac{1}{k} \chi_G Q
\end{aligned} \tag{7-70}$$

这样，在解任一群方程时右端都是已知函数，可记作  $S(r)$  [参阅 (7-16) 式]，于是便可根据上述二大步骤很容易求解。具体计算流程在图 7-7 中示意表示出。

当热中子被分成若干能群时将出现向上散射情况。这时，在解第  $g$  群方程时，方程右端中将包含有尚未解出的  $g' > g$  的通量 [见 (7-14) 式]。因而如前面 (7-70) 式那样逐群求解就不可能实现。但是一般向上散射的群数是比较少的 (通常  $\leq 4$  群)。因而如果向上散射开始发生在  $g_1$  群，那么可以按前面办法先依序解出  $g < g_1$  群的方程，而对于  $g_1 \rightarrow G$  方程则可用联立直接 (矩阵求逆) 的方法求解。如果向上散射的群数目比较大时则必须用迭代方法来求解。向上散射的存在，使收敛速度降低，因而增加了计算的时间。曾研究出一些技巧以减少具有向上散射时的迭代次数。

### 5.2 临界计算问题的种类

最简单的临界计算问题就是给定了反应堆的材料成分以及几何形状和大小而要求芯部的有效增殖因数 $k$ 。具体计算步骤见图 7-7 中的 1—6 框。

在实际问题中，临界计算还可以有其他形式问题。例如，给定了有效增殖因数 $k^*$ 值（一般等于 1）而要求：

(1) 给定芯部材料成分要求反应堆的芯部尺寸——临界尺寸探索；

(2) 给定反应堆尺寸，要求燃料成分的浓度或水中硼浓度、控制棒或吸收体(例如可燃毒物)的数量位置等——称为临界成分探索。

这时就必须根据问题要求不断地调整芯部尺寸或成分以达到满足下列收敛判别准则

$$|k^{(n)} - k^*| < \epsilon_5 \quad (7-71)$$

具体步骤见图 7-7。

目前已有不少临界计算的程序，在国外比较有代表性和常用的如美国的 PDQ 序列<sup>[6]</sup>，其中 PDQ-7 程序可以解一维、二维和三维的少群扩散方程，并规定有可变的网格间距。

### 5.3 热工-水力计算与临界计算的耦合

核计算中一些特性，例如功率分布、宏观截面等等和热工-水力计算中的特性，例如慢化剂密度和温度沿空间的变化等等，存在着密切的耦合关系。尤其是对于液体慢化的反应堆（例如 LWR）这种耦合更是强烈。设计时通常

是先假定一个通量分布和热管因子作初步的热工-水力计算，求出温度和慢化剂密度等参数沿芯部的分布。然后以这些热工参数为基础算出芯部各区的能谱和宏观截面，并进行临界计算，求出通量空间分布和热管因子。这些结果就作为下一步热工-水力计算的输入数据，求出新的温度和慢化剂密度的分布。如果前后结果的差别比较大，则可根据需要作进一步的迭代直到满足所需的要求为止（见图 7-8）。一些物理-热工耦合程序可以自动完成这样反复

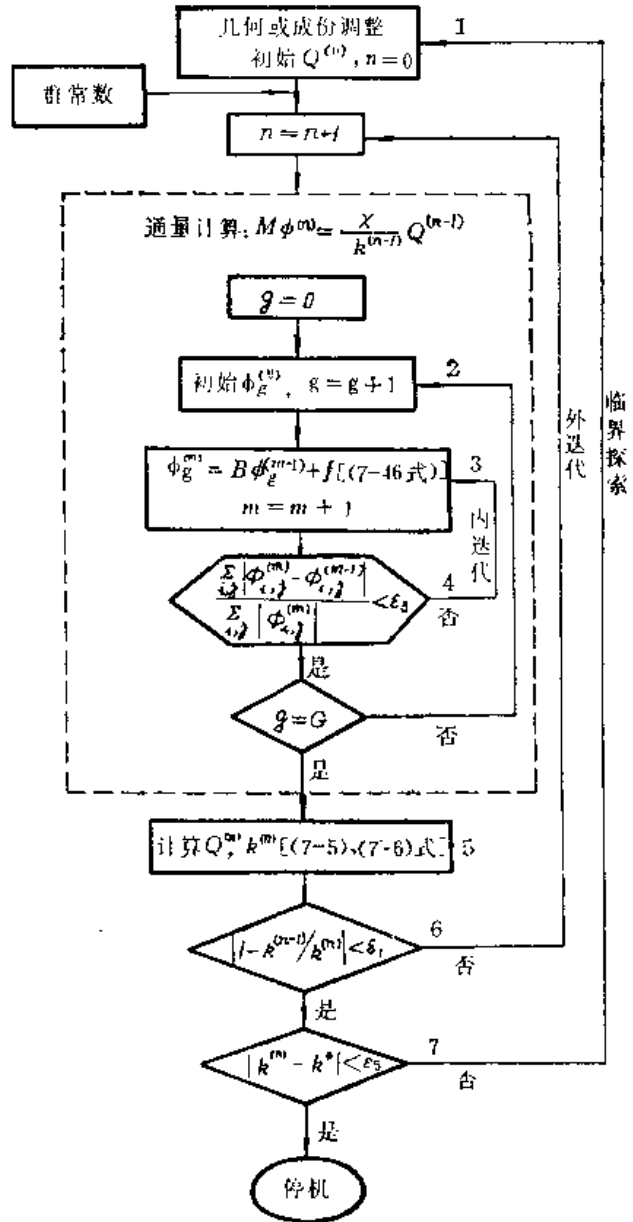


图7-7 临界计算流程示意图

的迭代过程直到所求出的功率分布或慢化剂密度分布收敛为止。这种迭代过程对于沸水堆 (BWR) 的计算更是非常重要的。图 7-9 表示一个 BWR 的慢化剂密度和功率分布迭代的收敛过程。

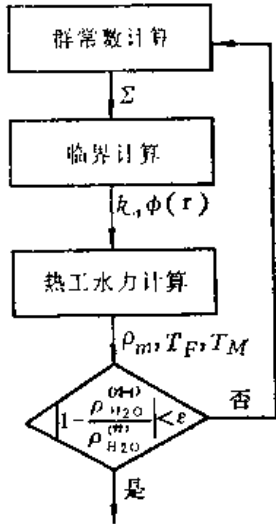


图7-8 核-热工水力的迭代

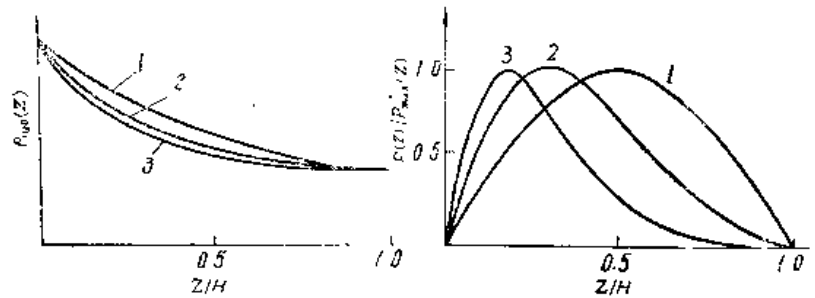


图7-9 核-热工水力迭代的收敛

1——初始阶段; 2——中间迭代; 3——收敛的  $P(z)$ ,  $\rho_{H_2O}(z)$ 。

### 参 考 文 献

- [1] E.L.Wachspress, Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics, Prentice-Hall, Inc., 1966.
- [2] H.Greenspan, C.N.Kelber and D.Okrent, Computing Methods in Reactor Physics, Chap. 1, 2, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [3] Г.И. 马尔丘克著, 飞跃译, 核反应堆数值计算方法, 原子能出版社, 1960年。
- [4] J.J.Duderstadt & L.J.Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, Chap. 5, 7, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [5] P.F.Zweifel, Reactor Physics, Chap. 6, McGraw-Hill, 1973.
- [6] W.R.Cadwell, WAPD-TM-179 (1960), WAPD-TM-230 (1961), WAPD-TM-477 (1965), WAPD-TM-678 (1967).
- [7] D.L.Delp et al., GEAP-4598, (1964).

## 第八章 栅格的非均匀效应

本章讨论反应堆堆芯内栅格的非均匀效应问题。

### 1. 栅格的非均匀效应

在第二章中提到过，按照反应堆堆芯内燃料和慢化剂的分布形式，反应堆基本上可以分为均匀的和非均匀的两大类。在均匀堆中，燃料和慢化剂均匀混合在一起，例如把铀和慢化剂制成铀盐溶液。在非均匀堆中，把燃料制成块状，如圆柱状（棒状）、环状、球状、片状（平板状）等，按一定的几何形式放置在慢化剂中，构成所谓栅格结构的堆芯。常见的栅格结构有：由棒状燃料构成的正方形栅格和六角形栅格（见图8-1）。通常，把组成栅格结构的基本单元叫栅元。由于热工-水力、机械工程、堆物理、经济性等方面的原因，目前的动力反应堆几乎都是非均匀的。世界上建成的第一个反应堆也是非均匀的。

在非均匀堆内，由于燃料和慢化剂的吸收截面以及其它核性质显著地不同，因此，燃料和慢化剂内的中子通量分布也就显著地不同，即使是一个无限大的非均匀堆，栅格内中子通量的空间分布也是不均匀的。图8-2给出了不同能量的中子在燃料和慢化剂内的分布。先看热中子的分布（见图8-2中曲线1）。

由于燃料的慢化能力比慢化剂的小得多，裂变中子主要在慢化剂内慢化，因而，热中子主要在慢化剂内产生。另一方面由于燃料对热中子的吸收截面比慢化剂的大得多，热中子主要被燃料核吸收，因此，形成从慢化剂流向燃料块的热中子流。热中子进入燃料块后，首先为块外层的燃料核所吸收，造成燃料块里层的热中子通量比外层的要低，结果使燃料块里层的燃料核未能充分有效地吸收热中子，就是说，块外层燃料核对里层燃料核起了屏蔽作用，通常把这种现象叫做空间自屏效应。正是这种空间自屏效应，在燃料和慢化剂核子数比值相同的条件下，非均匀结构使燃料吸收热中子的能力下降，亦即使热中子利用系数减小。这是非均匀堆的一个缺点。

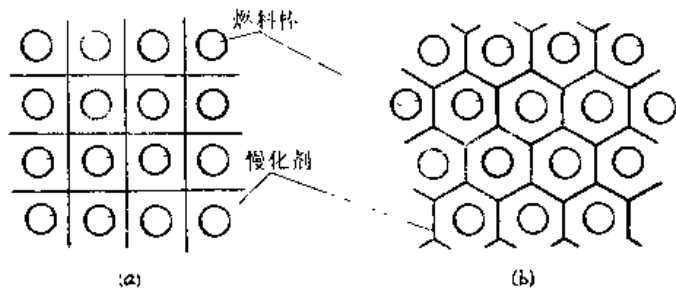


图8-1 正方形栅格(a)和六角形栅格(b)

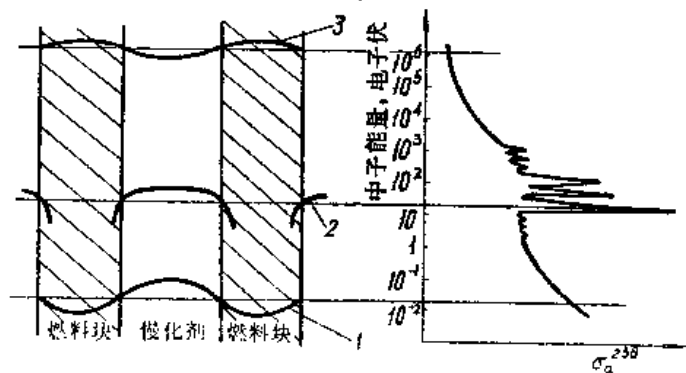


图8-2 栅格内裂变中子、共振中子和热中子的空间分布

另一方面，同样由于空间自屏效应，燃料核吸收共振中子的能力也下降了。这是因为共振中子主要在慢化剂内产生，而后入射到燃料块上，故首先为块表层的燃料核所吸收，而燃料核的共振吸收截面很大，所以在燃料块内共振中子通量（图8-2中曲线2）降得更为急剧。例如，铀-238核对能量  $E$  为6.7电子伏的中子的吸收截面 $\sigma$ ，是7000靶，这种能量的中子在铀块内的平均自由程约为0.003厘米，也就是说，这种能量的中子穿入铀块后，基本上在铀块表层就全部被吸收了。而热中子在铀块内的平均自由程约为2.5厘米，由此看出，对共振中子来讲，空间自屏效应是非常强烈的。此外，裂变中子主要是在慢化剂内慢化的，对于非均匀堆，尤其是当燃料块之间的间距足够大时，慢化到共振能量的中子与燃料核碰撞的几率就要比均匀系统的小，相对地讲，就是与慢化剂核碰撞的几率加大了。与慢化剂核碰撞后，中子能量往往就直接降低到共振能量以下了，这就使得中子在慢化过程中有比较大的几率逃脱共振吸收。由于存在着这两个方面的原因（其中空间自屏效应是主要的），就减少了燃料块对共振中子的吸收，而使逃脱共振几率增加，这是非均匀堆的一个主要优点。

最后考虑快中子在栅格内的分布。在裂变中子中大约有60%具有1.1兆电子伏以上的能量，具有这样的能量的中子与铀-238核相碰时，就有可能引起铀-238核裂变。燃料制成块状后，裂变中子在燃料块内产生，它在飞出块以前就可能与铀-238核碰撞，亦即增加了铀-238核快中子裂变的几率，而每次铀-238核裂变平均要释放出两个以上的快中子，结果使快中子倍增效应增加，亦即使快中子倍增系数增加。由于飞出燃料块的裂变中子在慢化剂内被慢化，因此，一般地讲，1.1兆电子伏以上的快中子通量分布如图8-2中曲线3所示，燃料块内的平均通量比慢化剂内的要高。

综合上述可知，栅格内的中子通量分布是不均匀的。空间自屏效应对热中子的利用是不利的，但却对逃脱共振吸收有利。通过合理地选择燃料块的厚度或直径、燃料块之间的间距（常叫做栅距），在燃料与慢化剂核子数比值相同的情况下，可使热中子利用系数与逃脱共振几率的乘积增加，亦即使无限介质增殖因数增加。例如，在1942年前后，当时知道的可用作核燃料的只有天然铀，可用作慢化剂的有轻水和石墨。分析表明，由天然铀和轻水所组成的装置是不可能达到临界的，由于轻水的吸收截面比石墨的大；同样，由天然铀和石墨所组成的均匀系统，无论怎样选择它们相互间的核子数之比，都无法使无限介质增殖因数大于1，可达到的最大值约为0.85。因而天然铀-石墨均匀系统也是不可能达到临界的。但是，进一步分析表明，若将天然铀制成棒状，插入石墨块形成非均匀栅格结构，此时虽然热中子利用系数减少了，但却使逃脱共振几率增加了，如果设计得当，可以使无限介质增殖因数大于1，就是说，天然铀-石墨非均匀系统可以达到临界。实践证明对天然铀-石墨非均匀系统所作的分析是正确的。这就是为什么世界上第一个建成的反应堆是非均匀的原因。因此，在有足够的浓缩铀（或重水）之前，建成的所有反应堆都是天然铀-石墨非均匀堆。

上述因栅格的块结构所引起的效应，以及由其所产生的各种参数的变化，通常叫做非均匀效应，亦叫做块效应。在计算非均匀堆的参数时必须加以考虑。

## 2. 栅格的均匀化处理

### 2.1 栅格的均匀化处理

在非均匀堆内，中子通量的分布（如图8-3所示）可以看成是由两部分通量叠加而成的，



一部分是沿整个堆变化的宏观的中子通量分布，另一部分为栅元内精细的中子通量分布。在堆为有限大小时，栅元交界面上的净中子流一般并不等于零。若考虑到每一个栅元的精细结构，大型非均匀堆的临界计算是极其复杂的。但是，如果堆内燃料块的数目足够大，例如在一般的压水堆内有近50,000根燃料棒，亦即有50,000个栅元，那末，如略去栅元内通量的起伏，宏观上看，非均匀堆内的中子通量分布和均匀堆内的相同（见图8-3）。因此，在实际计

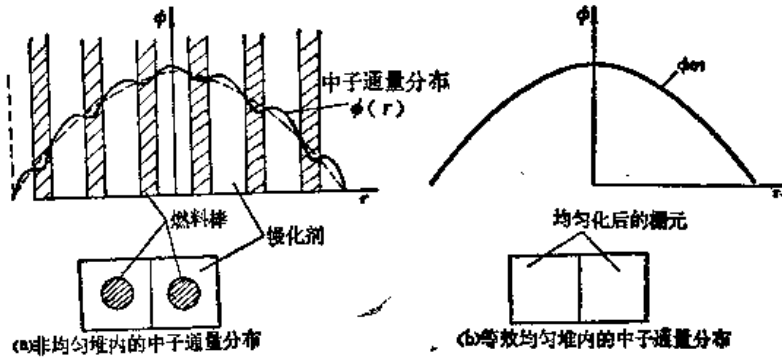


图8-3 非均匀堆的均匀化处理

算时，把非均匀堆等效成均匀堆，然后进行等效均匀堆的能谱和临界计算。这样，前面几章讨论的均匀堆的能谱计算、临界计算等理论和方法都适用于非均匀堆。但在计算非均匀堆的参数时，这个等效均匀堆的有效截面或有效群常数，必须是考虑了栅元的非均匀效应后所得到的。即在计算各个能群的群常数时，都必须考虑到非均匀效应的影响。因此，非均匀堆的计算要分成两步进行：

(1) 计算非均匀栅格的物理参数，在计算这些参数时必须考虑到非均匀效应——这是本章要着重讨论的问题。

(2) 把非均匀系统等效成均匀系统，但是这个均匀系统具有上述考虑了非均匀效应的物理参数，然后采用前几章所述的理论来计算能谱、临界大小、中子通量或功率分布等等。这样的处理方法叫做非均匀堆的均匀化处理。进行均匀化处理时必须注意：均匀化后单位栅元的总慢化密度和总的核反应率等与原来的保持相等。

## 2.2 有效截面的计算

根据上述条件，均匀化系统的吸收、裂变和散射等有效截面由下式定义。设所考虑的核反应为 $x$ ，则 $\langle \Sigma_x \rangle$ 为

$$\langle \Sigma_x \rangle = \frac{\text{单位时间、单位栅元内发生 } x \text{ 反应的次数}}{\text{单位时间、单位栅元内总的中子通量}}, \quad (8-1)$$

式中  $x = a, f, s$ ，分别表示吸收、裂变、散射； $\langle \rangle$  表示等效均匀系统的参数。在某一能群内，如在第  $g$  群内， $\Delta E_g = E_{g-1} - E_g$ ， $x$  反应的有效截面  $\langle \Sigma_{x,g} \rangle$  为

$$\langle \Sigma_{x,g} \rangle = \frac{\int_{\Delta E_g} \int_V \nu \Sigma_x(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E) dE dV}{\int_{\Delta E_g} \int_V \nu \phi(\mathbf{r}, E) dE dV}, \quad (8-2)$$

式中  $V$  为栅元体积。

为了便于说明问题的实质，考虑最简单的情况。设栅元只由燃料和慢化剂构成，分别用角标  $F$  及  $M$  表示。因为在栅元的各个区域内截面值与空间位置无关，所以上式可以写成：

$$\langle \Sigma_{x, g} \rangle = \frac{V_F \int_{\Delta E_g} \Sigma_x(E) \bar{\phi}_F(E) dE + V_M \int_{\Delta E_g} \Sigma_x(E) \bar{\phi}_M(E) dE}{V_F \int_{\Delta E_g} \bar{\phi}_F(E) dE + V_M \int_{\Delta E_g} \bar{\phi}_M(E) dE} \quad (8-3)$$

式中  $\bar{\phi}_F(E)$ 、 $\bar{\phi}_M(E)$  分别为燃料块和慢化剂内的平均通量。它定义为

$$\bar{\phi}_i(E) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \phi(\mathbf{r}, E) dV \quad , \quad i \text{ 表示 } F, M \text{ 等} \quad (8-4)$$

若栅元内的中子通量  $\phi(\mathbf{r}, E)$  可以表示成  $\phi(\mathbf{r}, E) = \phi(\mathbf{r})\varphi(E)$ ，且认为栅元内各个区的中子能谱是相同的，即  $\varphi_F(E) = \varphi_M(E) = \varphi(E)$ ，则(8-3)式简化成：

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_{x, g} \rangle &= \frac{V_M \Sigma_{x, g, M} \bar{\phi}_M + V_F \Sigma_{x, g, F} \bar{\phi}_F}{V_M \bar{\phi}_M + V_F \bar{\phi}_F} \\ &= \frac{\Sigma_{x, g, F} + \Sigma_{x, g, M} (V_M/V_F) \xi}{1 + (V_M/V_F) \xi} \quad , \end{aligned} \quad (8-5)$$

式中

$$\Sigma_{x, g, i} = \frac{\int_{\Delta E_g} \Sigma_x(E) \varphi(E) dE}{\int_{\Delta E_g} \varphi(E) dE} \quad , \quad i \text{ 表示 } F, M \quad (8-6)$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \phi(\mathbf{r}) dV \quad , \quad i \text{ 表示 } F, M \quad (8-7)$$

$$\xi = \frac{\bar{\phi}_M}{\bar{\phi}_F} \quad (8-8)$$

从(8-5)式可以看出，只要知道  $\xi$  及按能谱平均的截面值后就可以算出栅元的有效截面，或均匀化后的有效群常数。对于共振中子，因为

$$\begin{aligned} \int_{\Delta E_g} \Sigma_{r, c, s}(E) \varphi(E) dE &= N_0 \int_{\Delta E_g} \sigma_{r, c, s}(E) \varphi(E) dE \\ &= N_0 \sum_{i \in g} I_i \quad , \end{aligned}$$

故共振吸收部份的有效截面按下式计算：

$$\langle \Sigma_{r, c, s, g} \rangle = \frac{N_0 \sum_{i \in g} I_i}{\int_{\Delta E_g} \varphi(E) dE} \quad (8-9)$$

式中  $N_0$  为栅元单位体积内共振吸收核的核子数； $I_j$  为第  $j$  个共振峰的有效共振积分，按本章第四节所介绍的公式计算； $\sum_{i \in g}$  表示对所有属于  $g$  能群的共振峰求和。

具体计算步骤大致为：将栅元内燃料、慢化剂、冷却剂、包壳等均匀化，把它看成均匀介质，求出能谱  $\varphi(E)$ （快谱和热谱），用（8-6）式求每一物质的宏观截面，用下面几节将要介绍的方法求出  $\xi$ ，最后用（8-5）式算  $\langle \Sigma_{x, g} \rangle$ 。也可以就某一中子能量求  $\xi(E)$ ，用（8-5）式求  $\langle \Sigma_x(E) \rangle$ ，然后再按能谱平均求出  $\langle \Sigma_{x, g} \rangle$ ：

$$\langle \Sigma_{x, g} \rangle = \frac{\int_{\Delta E_g} \langle \Sigma_x(E) \rangle \varphi(E) dE}{\int_{\Delta E_g} \varphi(E) dE} \quad (8-10)$$

但要注意到，实际上由于栅元内各区的吸收截面及其核性质的不同，各区内的中子能谱是不相同的，因此中子通量的能量、空间变量不能分开，即不能表示成  $\phi(\mathbf{r}, E) = \phi(\mathbf{r})\varphi(E)$  的形式。所以上面介绍的方法是一种近似。因而，要得到更精确的结果，必须直接求出  $\phi(\mathbf{r}, E)$  分布。目前往往应用碰撞几率法求栅元内  $\phi(\mathbf{r}, E)$  的分布，这将在下一章内介绍。

在反应堆堆芯由燃料组件组成时，往往还不能直接把栅元的有效截面用于临界计算，因为此时燃料组件内一般还包括其它一些材料，如控制棒、测量导管等。这时在对栅元作均匀化处理后，尚须进行以燃料组件为单位的均匀化计算，以求得燃料组件的有效截面，然后才能用这个有效截面进行临界计算，求出堆内中子通量或功率分布等。燃料组件均匀化一般要进行二维扩散或输运计算，求  $\phi(x, y)$ ，然后以此通量作权重函数求有效截面。

应该指出，在非均匀堆内，特别是石墨气冷反应堆，中子沿平行于燃料块方向和沿垂直于燃料块方向的扩散或输运是不一样的。因此，在非均匀堆内，扩散系数是和方向有关的量，精确计算扩散系数时应考虑这个问题。

非均匀堆还可以用“非均匀方法”进行计算。在这个方法中，燃料块被看成线状的中子源或穴，而列出中子平衡方程，求得临界条件。这个方法对于计算只含有少数燃料块的非均匀系统才是有效的。

从（8-5）和（8-9）式可以看出，要得到非均匀堆的有效群常数，除了要知道按能谱平均的截面以外，还必须要知道  $\xi$  及  $I_j$ 。本章将着重介绍  $\xi$  及  $I_j$  的计算方法。

在栅格非均匀效应的计算中，通常取出一个典型栅元来进行研究，由这个栅元计算所得的物理参数就被看作栅格的物理参数。由上述分析知道，中子能量不同，所产生的非均匀效应也是不同的。以下把中子按能量范围分成热中子能区、共振中子能区和快中子能区，分别讨论这些能区内中子的非均匀效应，目的在于求得这些能量中子的有效截面或有效群常数。

### 3. 热中子不利因子和热中子利用系数

前面分析过，在非均匀堆内，栅元内热中子通量的分布是不均匀的，如图 8-4 所示，且  $\overline{\phi_P} < \overline{\phi_M}$ ，即  $\overline{\phi_M} / \overline{\phi_P} > 1$ 。通常把  $\overline{\phi_M} / \overline{\phi_P}$  叫做热中子不利因子，用  $\xi$  表示，见（8-8）式，它

表示栅元内热中子空间分布的不均匀性，它是一个很重要的量，一旦知道热中子不利因子，就可算得栅元的热中子有效截面或热群常数以及热中子利用系数。

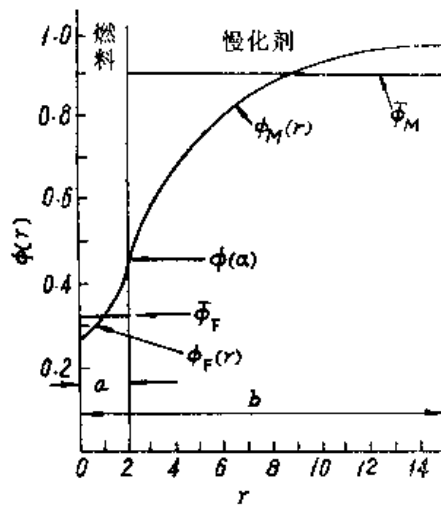


图8-4 栅元内的热中子通量分布

### 3.1 热中子不利因子和热中子利用系数

我们把热中子利用系数  $f$  定义为栅元内燃料吸收的热中子数与栅元内被吸收的热中子总数之比，即

$$f = \frac{\text{燃料吸收的热中子数}}{\text{燃料、慢化剂、包壳、……吸收的热中子总数}}$$

$$= \frac{\int_{V_F} \Sigma_{a,F} \phi(\mathbf{r}) dV}{\int_{V_F} \Sigma_{a,F} \phi(\mathbf{r}) dV + \sum_i \int_{V_i} \Sigma_{a,i} \phi(\mathbf{r}) dV}, \quad (8-11)$$

式中  $\Sigma_{a,F}$  和  $\Sigma_{a,i}$  分别为燃料和第  $i$  种物质的热中子宏观吸收截面， $V_F$  和  $V_i$  分别为燃料和第  $i$  种物质所占的体积，分母中的求和是对除燃料以外的所有物质进行的。这里假设了热中子具有同一能量。若用  $\bar{\phi}_i$  表示第  $i$  种物质内热中子通量的平均值， $\bar{\phi}_i$  由 (8-4) 式定义，则 (8-11) 式便写成：

$$f = \frac{V_F \Sigma_{a,F} \bar{\phi}_F}{V_F \Sigma_{a,F} \bar{\phi}_F + \sum_i V_i \Sigma_{a,i} \bar{\phi}_i} \quad (8-12)$$

或

$$\frac{1}{f} - 1 = \sum_i \frac{V_i \Sigma_{a,i}}{V_F \Sigma_{a,F}} \frac{\bar{\phi}_i}{\bar{\phi}_F} \quad (8-13)$$

在栅元只由燃料和慢化剂构成的简单情况下，就简化成：

$$f = \frac{V_F \Sigma_{s, F} \bar{\phi}_F}{V_F \Sigma_{a, F} \bar{\phi}_F + V_M \Sigma_{a, M} \bar{\phi}_M} = \frac{\Sigma_{a, F}}{\Sigma_{a, F} + \Sigma_{a, M} \frac{V_M}{V_F} \frac{\bar{\phi}_M}{\bar{\phi}_F}} \quad (8-14)$$

或

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{V_M \Sigma_{a, M}}{V_F \Sigma_{a, F}} \xi \quad (8-15)$$

由此可见，热中子利用系数和热中子不利因子  $\xi$  有关。在均匀堆内，燃料和慢化剂均匀混合在一起，所以  $\bar{\phi}_M = \bar{\phi}_F$ ，即  $\xi = 1$ 。因而在燃料与慢化剂体积比相同的情况下，从(8-14)式可以看出，非均匀堆的热中子利用系数要比均匀堆的小。这是由非均匀效应引起的。

有许多计算热中子不利因子的方法，如球谐函数法、 $S_N$ 方法、碰撞几率法、蒙特卡罗法等，而最简单的是采用扩散理论方法。由于燃料块是强吸收中子的物质，严格讲，在燃料块内以及燃料块周围2—3个平均自由程内，扩散理论是不适用的，或者说，在这些地方它不能给出正确的中子通量分布。但是用扩散理论的计算比较简单，可用于估算。下面简单介绍用扩散理论计算  $\xi$  和  $f$  的方法。

### 3.2 用扩散理论计算 $\xi$ 及 $f$

在讨论中我们首先假设热中子的慢化密度在慢化剂内等于常数，而在燃料块内为零，即假设热中子只在慢化剂内均匀产生。在用扩散理论计算时，还要假设在燃料块和慢化剂内扩散理论都适用。为了简化计算，用无限长圆柱形的等效栅元来代替实际栅元，见图8-5，并使栅元横截面积保持不变来确定等效栅元的半径。当然，栅元若为板状燃料块构成，等效栅元就是无限长的平板栅元。此外，还假设堆是无限大的，从相邻栅元通过边界流入的中子数等于从栅元边界流向相邻栅元的中子数，即栅元边界上的净中子流等于零。这种处理栅元的方法叫等效栅元法或魏格纳-赛兹法。此外，在燃料块与慢化剂的交界面上必须满足中子通量和中子流的连续性条件。在上述边界条件下，求解燃料和慢化剂内的扩散方程，就可求得栅元内的中子通量分布和  $\xi$ 。燃料内的扩散方程为

$$D_F \nabla^2 \phi_F(r) - \Sigma_{a, F} \phi_F(r) = 0 \quad (8-16)$$

慢化剂内的扩散方程为

$$D_M \nabla^2 \phi_M(r) - \Sigma_{a, M} \phi_M(r) + S_{t, k} = 0 \quad (8-17)$$

式中， $S_{t, k}$  为热中子源强。其余符号的意义同前。在燃料块为圆柱形的情况下，方程(8-16)的普遍解为

$$\phi_F(r) = A_F I_0(k_F r) + B_F K_0(k_F r) \quad (8-18)$$

式中

$$k_F^2 = \Sigma_{a, F} / D_F \quad (8-19)$$

对于实心圆柱形燃料块，为使  $r = 0$  处中子通量为有限值， $B_F$  必须为零。于是得

$$\phi_F(r) = A_F I_0(k_F r) \quad (8-20)$$

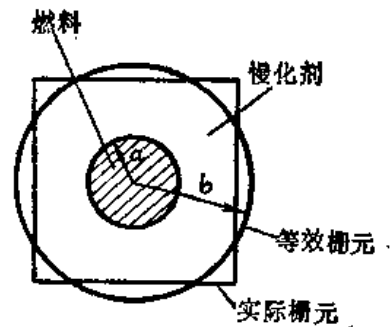


图8-5 栅元组成和等效栅元

方程 (8-17) 的普遍解为

$$\phi_M(r) = A_M I_0(k_M r) + B_M K_0(k_M r) + \frac{S_{t,h}}{\Sigma_{a,M}}, \quad (8-21)$$

式中 
$$k_M^2 = \frac{\Sigma_{a,M}}{D_M}, \quad (8-22)$$

考虑到栅元边界上的净中子流等于零, 设等效栅元半径为  $b$ , 在  $r=b$  处, 令  $d\phi_M(r)/dr=0$ , 得

$$\phi_M(r) = A_M M_0(k_M r) + \frac{S_{t,h}}{\Sigma_{a,M}}, \quad (8-23)$$

式中 
$$M_0(k_M r) = I_0(k_M r) + \frac{I_1(k_M b)}{K_1(k_M b)} K_0(k_M r). \quad (8-24)$$

$A_F$  及  $A_M$  为任意常数, 由下列边界条件决定:

$$\begin{aligned} \phi_F(r)|_{r=a} &= \phi_M(r)|_{r=a}, \\ D_F \frac{d\phi_F(r)}{dr} \Big|_{r=a} &= D_M \frac{d\phi_M(r)}{dr} \Big|_{r=a}, \end{aligned} \quad (8-25)$$

式中  $a$  为轴棒半径。

将 (8-20) 和 (8-23) 式代入 (8-25) 式, 解后得

$$\frac{1}{A_F} = \frac{\Sigma_{a,M}}{S_{t,h}} \left[ I_0(k_F a) - \frac{D_F k_F I_1(k_F a) M_0(k_M a)}{D_M k_M M_1(k_M a)} \right], \quad (8-26)$$

$$\frac{1}{A_M} = \frac{\Sigma_{a,M}}{S_{t,h}} \left[ \frac{I_0(k_F a) D_M k_M}{D_F k_F I_1(k_F a)} M_1(k_M a) - M_0(k_M a) \right], \quad (8-27)$$

式中, 
$$M_1(k_M a) = I_1(k_M a) - \frac{I_1(k_M b)}{K_1(k_M b)} K_1(k_M a), \quad (8-28)$$

而

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_F &= \frac{1}{V_F} \int_{V_F} \phi(r) dV = \frac{A_F \int_0^a 2\pi r I_0(k_F r) dr}{\pi a^2} \\ &= \frac{2A_F I_1(k_F a)}{k_F a}, \end{aligned} \quad (8-29)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_M &= \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \phi(r) dV = \frac{\int_a^b 2\pi r \phi_M(r) dr}{\pi(b^2 - a^2)} \\ &= \frac{2a A_M M_1(k_M a)}{k_M(a^2 - b^2)} + \frac{S_{t,h}}{\Sigma_{a,M}}, \end{aligned} \quad (8-30)$$

所以，热中子不利因子  $\xi$  为

$$\xi = \frac{\bar{\phi}_M}{\phi_F} = F(k_F a) + \frac{V_F \Sigma_{a,F} [E(k_M a, k_M b) - 1]}{V_M \Sigma_{a,M}} \quad (8-31)$$

式中  $F(k_F a) = \frac{k_F a I_0(k_F a)}{2 I_1(k_F a)} \quad (8-32)$

$$E(k_M a, k_M b) = \frac{k_M(a^2 - b^2)}{2a} \frac{M_0(k_M a)}{M_1(k_M a)} \quad (8-33)$$

根据 (8-15) 式得热中子利用系数  $f$  为

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{\Sigma_{a,M} V_M}{\Sigma_{a,F} V_F} F(k_F a) + E(k_M a, k_M b) - 1 \quad (8-34)$$

现在来分析一下  $\xi$  和  $f$  计算式中的  $F$  和  $(E-1)$  的意义。根据图 8-4，可以把 (8-15) 式改写成：

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{V_M \Sigma_{a,M}}{V_F \Sigma_{a,F}} \frac{\phi(a)}{\bar{\phi}_F} + \frac{V_M \Sigma_{a,M}}{V_F \Sigma_{a,F}} \frac{[\bar{\phi}_M - \phi(a)]}{\bar{\phi}_F} \quad (8-35)$$

式中  $\phi(a) = \phi_M(a) = \phi_F(a)$ ，为燃料块表面上的热中子通量。由于空间自屏效应，燃料块内中子通量的分布是不均匀的，且  $\phi_F(a) > \bar{\phi}_F$ 。根据 (8-20) 和 (8-29) 式很容易证明  $\phi_F(a) / \bar{\phi}_F$  就是  $F$ ，所以  $F$  是燃料块表面上的中子通量与燃料块内的平均中子通量之比，它是反映燃料块自屏效应大小的一个量，通常把  $F$  叫屏蔽系数。由此可见，(8-35) 式右端的第一项是表示由于自屏效应——有时也称为块内效应所产生的相对吸收。再看 (8-34) 式右端的第 2 项，由于慢化剂的扩散系数总是有限值，因此慢化剂内的平均热中子通量总是大于慢化剂表面上的通量，即  $\bar{\phi}_M > \phi_M(a)$ ，由此可见，(8-35) 式的第二项是由于慢化剂内中子通量分布不均匀所引起的附加吸收（有人称它为块外效应所产生的附加吸收）。与 (8-34) 比较可以看出，这个附加吸收就等于  $[E(k_M a, k_M b) - 1]$ ，并且是一个很小的值。

用类似的方法可以求得板状和球状燃料块的  $F$  和  $(E-1)$  值，见表 8-1。

表8-1 平板和球状燃料块的  $F$  和  $(E-1)$

几何形状	$F$	$E-1$
平板	$k_F a \operatorname{cthk}_F a$	$k_M(b-a) \operatorname{cthk}_M(b-a) - 1$
球	$\frac{k^2_F a^2}{3} \frac{\operatorname{thk}_F a}{k_F a - \operatorname{thk}_F a}$	$\frac{k^2_M(b^3 - a^3)}{3k_M a} \left[ \frac{1 - k_M b \operatorname{cthk}_M(b-a)}{1 - k_M^2 ab - k_M(b-a) \operatorname{cthk}_M(b-a)} \right] - 1$

表中： $a$  为燃料块的半厚度或半径； $b$  为栅元的半厚度或半径。

实际上，栅元内除燃料、慢化剂外还有包壳等。在这种多区的情况下，分析方法与上述的相似。

严格地讲，用扩散理论计算燃料块内中子通量分布是不合适的，与输运理论算得的  $f$  值相比，用扩散理论算得的  $f$  值偏高（通常高1—2%）。但采用输运理论（如采用  $P_3$  近似进行计算），虽然精度提高，但工作量增大，且太繁杂。以下介绍一种便于计算且精度较高的计算  $\xi$  和  $f$  的方法，这种方法叫输运-扩散近似方法，简称 A. B. H. 方法<sup>1)</sup>。它把输运理论和扩散理论结合起来。在处理慢化剂内的中子行径时仍采用扩散理论，但此时采用了应用输运理论修正的边界条件；而在处理燃料块内中子行径时，则采用积分输运理论。

### 3.3 A. B. H. 方法

仍讨论最简单的情况，设栅元仅仅由燃料和慢化剂组成。并假设：所有中子具有同一能量，热中子只在慢化剂内均匀地各向同性地产生，源强为  $S_{t, s}$ 。设慢化剂的体积为  $V_M$ ，那么单位时间栅元内产生的热中子数为  $S_{t, s} V_M$ 。在稳态情况下，单位时间栅元内吸收的热中子总数也应为  $S_{t, s} V_M$ 。根据热中子利用系数的定义， $f$  为燃料块吸收的热中子与栅元内吸收的热中子总数之比。在 A. B. H. 方法中，利用碰撞几率法求燃料块内吸收的热中子数。

设  $P_M$  表示慢化剂内均匀地、各向同性地产生的中子逃出慢化剂的几率，在栅元仅由燃料和慢化剂组成的简单情况下，它也就是从慢化剂逸出首次入射到燃料块上的几率。那末，单位时间从慢化剂逸出，首次入射到燃料块上的中子数就是  $P_M S_{t, s} V_M$ 。这些中子进入燃料块后大部份为燃料块所吸收。但燃料块对热中子来说并不是绝对黑体，也就是说，必然还有一小部份中子从燃料块逸出又返回到慢化剂内。这些从燃料块返回慢化剂的中子，一部份在慢化剂内被吸收，而另一部份又逸出慢化剂再次进入燃料块内。这样，首次进入燃料块内的中子有可能多次穿过燃料块和慢化剂的交界面，而最终为燃料块或慢化剂所吸收。因此，燃料块只是吸收逸出慢化剂首次进入燃料块的那些中子中的大部份，而不是全部。设  $\Gamma_0$  表示入射到燃料块上的中子被燃料块吸收的几率； $\Gamma_1$  表示从燃料块飞出进入慢化剂的中子在慢化剂内被吸收的几率。若用  $N$  表示在慢化剂内产生的中子逃出慢化剂而首次进入燃料块内的中子数（ $N$  就等于  $P_M S_{t, s} V_M$ ），则这  $N$  个中子的经历表示如下：

$N\Gamma_0$	首次进入燃料块内并被吸收
$N(1-\Gamma_0)$	逃出燃料块第一次返回慢化剂内
$N(1-\Gamma_0)\Gamma_1$	在慢化剂内被吸收
$N(1-\Gamma_0)(1-\Gamma_1)$	逸出慢化剂第二次进入燃料块
$N(1-\Gamma_0)(1-\Gamma_1)\Gamma_0$	第二次进入燃料块并被吸收
.....	
.....	

燃料块吸收的中子数应为各次进入燃料块为燃料块所吸收的中子数之和，即

$$\begin{aligned} \text{燃料块吸收的中子数} &= N\Gamma_0 + N(1-\Gamma_0)(1-\Gamma_1)\Gamma_0 \\ &\quad + N(1-\Gamma_0)^2(1-\Gamma_1)^2\Gamma_0 + \dots \\ &= \frac{N\Gamma_0}{1-(1-\Gamma_0)(1-\Gamma_1)} = \end{aligned}$$

1) 该方法是由 A. Amouyal, P. Benoist, 和 J. Horowitz 提出的<sup>[5]</sup>，因此简称 A. B. H. 方法。



$$= P_M S_{th} V_M \frac{\Gamma_0}{\Gamma_0 + (1 - \Gamma_0) \Gamma_1} \quad (8-36)$$

根据热中子利用系数的定义，得

$$f = P_M S_{th} V_M \frac{\Gamma_0}{\Gamma_0 + (1 - \Gamma_0) \Gamma_1} \cdot \frac{1}{S_{th} V_M}$$

$$= \frac{P_M \Gamma_0}{\Gamma_0 + (1 - \Gamma_0) \Gamma_1} \quad (8-37)$$

或

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{1 - \Gamma_0}{\Gamma_0} \cdot \frac{\Gamma_1}{P_M} + \frac{1 - P_M}{P_M} \quad (8-38)$$

根据 (8-15) 式得热中子不利因子  $\xi$  为

$$\xi = \frac{\bar{\phi}_M}{\phi_F} = \frac{V_F \Sigma_{a,F}}{V_M \Sigma_{a,M}} \left( \frac{1 - \Gamma_0}{\Gamma_0} \cdot \frac{\Gamma_1}{P_M} + \frac{1 - P_M}{P_M} \right) \quad (8-39)$$

可以看出，求  $\xi$  和  $f$  的问题归结为求  $\Gamma_0$ 、 $\Gamma_1$  和  $P_M$  的问题了。

### Γ和P的计算

在用碰撞几率方法计算非均匀效应时，经常要用到各种几率，包括  $\Gamma_0$ 、 $\Gamma_1$  等，现简介如下：

#### (1) 首次飞行逃脱几率 $P_0$

它表示某区域（体积为  $V$ ，表面积为  $S$ ）内均匀、各向同性产生的中子未经任何碰撞而逃出该区域的几率。

考虑体积  $V$  内位置  $r$  处、沿  $\Omega$  方向运动的中子。设  $l(r, \Omega)$  为从  $r$  处沿  $\Omega$  方向到达该区域边界（或表面）的距离（见图8-6）。在  $r$  处、沿  $\Omega$  方向运动的 1 个中子，未经任何碰撞逃出该区域的几率为

$$e^{-\Sigma_t l(r, \Omega)}$$

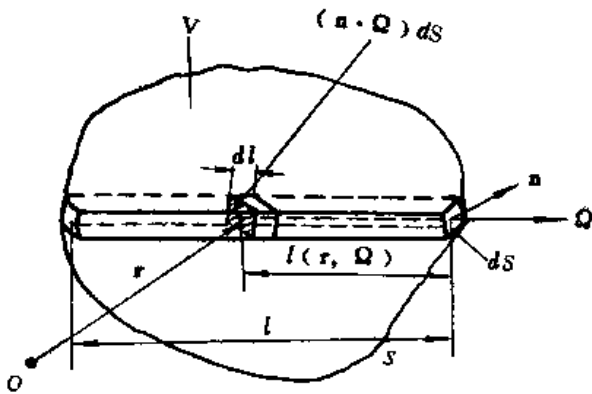


图8-6 首次飞行逃脱几率的计算

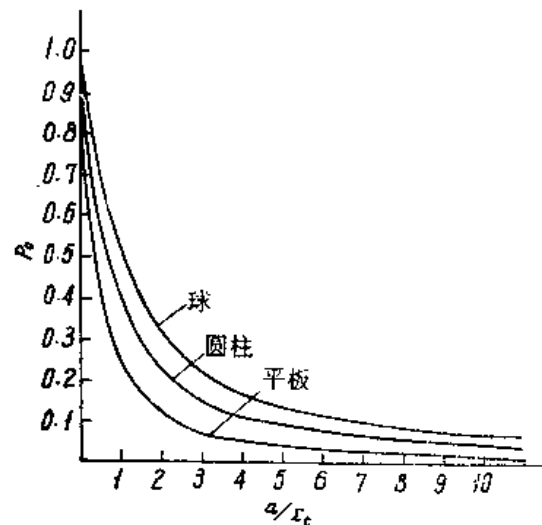


图8-7 首次飞行逃脱几率

其中,  $\Sigma_t$  为总截面。设中子在  $V$  内均匀各向同性地产生, 源强为  $Q$ , 那末, 在  $r$  处体积元  $dV$  内、 $\Omega$  附近  $d\Omega$  立体角内产生的中子数为  $d\Omega dV Q / 4\pi$ , 在整个体积  $V$  内产生的中子未经任何碰撞逸出该体积的平均几率, 用  $P_0$  表示, 则有

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{VQ} \iiint_V e^{-\Sigma_t l(r, \Omega)} Q \frac{d\Omega dV}{4\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi V} \iiint_V e^{-\Sigma_t l(r, \Omega)} d\Omega dV \end{aligned} \quad (8-40)$$

$P_0$  就叫做首次飞行逃脱几率。如果把  $V$  分成许多与  $\Omega$  方向平行的长条体, 它的长度为  $l$ ,  $j$  亦叫弦长, 它的横截面为  $(\mathbf{n} \cdot \Omega) dS$ ,  $\mathbf{n}$  为外表面上的单位外法线矢量, 则  $dV = |\mathbf{n} \cdot \Omega| dS dl$ 。将它代入 (8-40) 式, 对  $dl$  进行积分后得

$$P_0 = \frac{1}{4\pi \Sigma_t V} \iiint_{\mathbf{n} \cdot \Omega > 0} |\mathbf{n} \cdot \Omega| (1 - e^{-\Sigma_t l}) d\Omega dS \quad (8-41)$$

(8-41) 式的具体计算是相当繁杂的。对于圆柱、平板、球形系统,  $P_0$  的计算结果已制成图、表 (见图 8-7、表 8-2), 以便于使用。

现在讨论两个极限情况: 当体积  $V$  很小时, 即  $\Sigma_t l \ll 1$  时, 则  $P_0 \approx 1$ ; 当  $\Sigma_t l \gg 1$  时, 则

$$\begin{aligned} P_0 &\approx \frac{1}{4\pi \Sigma_t V} \iiint_{\mathbf{n} \cdot \Omega > 0} |\mathbf{n} \cdot \Omega| d\Omega dS \\ &= \frac{\pi S}{4\pi \Sigma_t V} = \frac{1}{\bar{l} \Sigma_t} \end{aligned} \quad (8-42)$$

式中

$$\bar{l} = \frac{4V}{S} \quad (8-43)$$

$\bar{l}$  叫平均弦长, 对于圆柱体,  $\bar{l} = 2a$ ,  $a$  为圆柱体的半径。当介质体积  $V$  很大时, 可以用 (8-42) 式计算  $P_0$ 。此外, 当介质为黑体时, 吸收截面很大, 记为  $\Sigma_{a\infty}$ , 而  $\Sigma_t = \Sigma_{a\infty}$ , 所以  $\Sigma_t l \gg 1$ , 此时  $P_0$  便等于

$$P_0 = \frac{S}{4V \Sigma_{a\infty}} = \frac{1}{\bar{l} \Sigma_{a\infty}} \quad (\text{黑体}) \quad (8-44)$$

根据上述两个极限情况, 提出了下列计算  $P_0$  的近似内插公式,

$$P_0 = \frac{1}{1 + \bar{l} \Sigma_t} \quad (8-45)$$

(8-45) 式亦叫魏格纳有理近似。用此式计算的结果亦列于表 8-2 内。

表8-2 首次飞行逃脱几率 $P_0$

$\Sigma \bar{l}$	球	圆 柱	平 板	有理近似
0.04	0.978	0.974	0.952	0.962
0.1	0.946	0.939	0.902	0.909
0.2	0.896	0.885	0.837	0.823
0.3	0.850	0.819	0.785	0.769
0.5	0.767	0.753	0.701	0.667
1	0.607	0.596	0.557	0.500
2	0.411	0.407	0.390	0.333
3	0.302	0.302	0.295	0.250
5	0.193	0.193	0.193	0.167
10	0.099	0.099	0.100	0.091

(2) 逃脱几率 $P$

它表示某区域(体积为 $V$ , 表面积为 $S$ )内均匀、各向同性产生的中子最终逃出该区域的几率, 它除包括上述未经碰撞而逸出的几率之外, 还包括在体积内经受碰撞(包括多次碰撞)后最终逃出该区域的几率。也就是说, 它应为首次飞行逃脱几率与在该体积内各次碰撞后逃出该区域的几率之和。若用 $P_0$ 表示首次飞行逃脱几率,  $P_n$ 表示中子在该体积内经第 $n$ 次碰撞后逃出该区域的几率, 则

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \quad (8-46)$$

设中子在该区域内均匀地、各向同性地产生, 且每次碰撞所产生的中子仍为均匀、各向同性地分布; 把经第 $n$ 次碰撞后的中子看作第 $n$ 代中子, 中子在该区域内散射碰撞的几率为 $\Sigma_s/\Sigma_t$ , 令 $C = \Sigma_s/\Sigma_t$ , 则

$$\begin{aligned} P_1 &= (1 - P_0)CP_0 \\ P_2 &= (1 - P_0) C(1 - P_0) CP_0 = (1 - P_0)^2 C^2 P_0 \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

代入(8-46)式, 得

$$\begin{aligned} P &= P_0[1 + (1 - P_0)C + (1 - P_0)^2 C^2 + \dots] \\ &= \frac{P_0}{1 - C(1 - P_0)} \end{aligned} \quad (8-47)$$

(3) 互易关系式

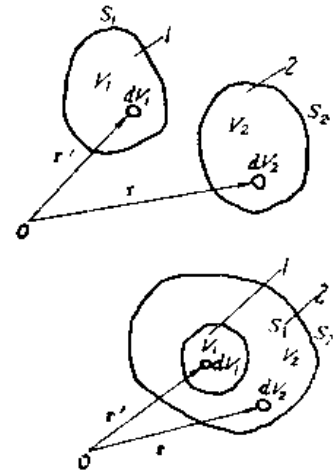
设一个系统由若干个区组成, 考虑其中两个区1和2(见图8-8)。它们的体积分别为 $V_1$ 和 $V_2$ , 表面积分别为 $S_1$ 和 $S_2$ , 宏观吸收截面分别为 $\Sigma_{a,1}$ 和 $\Sigma_{a,2}$ 。设在1区内有均匀、各向同性分布的中子源, 源强为 $Q_1$ , 那末, 在1区内 $r'$ 处体积元 $dV_1$ 内的中子, 对2区 $r$ 处的中子通量的贡献为

$$\phi_2(r) = Q_1 \int_{V_1} G(r' - r) dV_1, \quad (8-48)$$

式中 $G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ 为格林函数(参考第三章2.3节)。若用 $P_{1 \rightarrow 2}$ 表示均匀地各向同性地分布在区域1内的中子在区域2内被吸收的平均几率,则

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{\Sigma_{a,2} \int_{V_2} \phi_2(\mathbf{r}) dV_2}{Q_1 V_1}$$

$$= \frac{\Sigma_{a,2}}{V_1} \int_{V_2} dV_2 \int_{V_1} G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV_1 \quad (8-49)$$



若用 $P_{2 \rightarrow 1}$ 表示均匀各向同性分布在区域2内的中子在区域1内被吸收的平均几率,同理可证明:

$$P_{2 \rightarrow 1} = \frac{\Sigma_{a,1}}{V_2} \int_{V_1} dV_1 \int_{V_2} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV_2 \quad (8-50)$$

由于格林函数是它宗量的对称函数,即

$$G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8-51)$$

图8-8 证明互易关系用的简图

这一关系式也叫互易定理<sup>1)</sup>利用互易定理,比较(8-49)与(8-50)式,得

$$\Sigma_{a,1} V_1 P_{1 \rightarrow 2} = \Sigma_{a,2} V_2 P_{2 \rightarrow 1} \quad (8-52)$$

这个关系式叫互易关系式。用同样的方法可证明下列互易关系式:

$$\Sigma_{t,1} V_1 P_{1 \rightarrow 2} = \Sigma_{t,2} V_2 P_{2 \rightarrow 1} \quad (8-53)$$

式中 $\Sigma_{t,1}$ 、 $\Sigma_{t,2}$ 分别为介质1和2的总截面,此时 $P$ 为总的或首次碰撞几率,而不再是吸收的几率。利用互易关系式可以推导出其它一些几率的表达式。在计算非均匀栅格的共振吸收时也要用到这个关系式。

#### (4) 吸收几率 $\Gamma$

考虑介质1,其体积为 $V_1$ ,表面积为 $S_1$ ,其周围的介质叫介质2,它的体积为 $V_2$ ,内表面积为 $S_1$ 。介质1(或2)的吸收几率 $\Gamma_1$ (或 $\Gamma_2$ )定义为各向同性地入射到 $V_1$ (或 $V_2$ )表面上的中子在 $V_1$ (或 $V_2$ )内被吸收的几率。若用 $P_1$ 、 $P_2$ 分别表示均匀各向同性分布在 $V_1$ 和 $V_2$ 内的中子逃出 $V_1$ 和 $V_2$ 的几率,用 $\Sigma_{a,1}$ 和 $\Sigma_{a,2}$ 分别表示介质1和介质2的宏观吸收截面,且假设栅元的交界面是全反射的,即从 $V_2$ 逃出的中子全部都打到 $S_1$ 面上,则中子从 $V_1$ 逃出而在 $V_2$ 内被吸收的几率为 $P_1 \Gamma_2$ ,中子从 $V_2$ 逃出而在 $V_1$ 内被吸收的几率为 $P_2 \Gamma_1$ 。根据互易关系式(8-52)有

$$\Sigma_{a,1} V_1 P_1 \Gamma_2 = \Sigma_{a,2} V_2 P_2 \Gamma_1 \quad (8-54)$$

我们可以预料, $\Gamma_1$ (或 $\Gamma_2$ )与介质1(或介质2)的几何形状、尺寸、宏观吸收截面以及入射到介质1(或介质2)表面上的中子流的角分布有关。在 $V_1$ 表面上入射中子流为各向同性地分布的条件下, $\Gamma_1$ 只和介质1的几何形状、尺寸、宏观吸收截面有关,而与它周围介质的性质无关。因此,这里不妨假设介质2为黑体,即假设 $\Sigma_{a,2} = \Sigma_{t,2}$ , $\Gamma_2 = 1$ 。这样,根据(8-44)式,介质2的逃脱几率 $P_2$ 为

$$P_2 = \frac{S_1}{4V_2 \Sigma_{t,2}} \quad (8-55)$$

1) 互易定理的普遍式及其证明可参阅文献[2]。

将 (8-55) 式代入 (8-54) 式得

$$\Gamma_1 = \frac{4V_1 \Sigma_{a,1} P_1}{S_1} = l_1 \Sigma_{a,1} P_1 \quad (8-56)$$

同理,不妨假设介质 1 对 中子吸收来讲为黑体,而  $V_2$  为一般的吸收中子的介质,采用同样的方法可证明:

$$\Gamma_2 = \frac{4V_2 \Sigma_{a,2} P_2}{S_1} = l_2 \Sigma_{a,2} P_2 \quad (8-57)$$

式中,  $l_1$  和  $l_2$  分别为介质 1 和介质 2 的平均弦长,它只和介质的几何形状、尺寸有关。从 (8-56) 和 (8-57) 式可以看出,吸收几率  $\Gamma$  和该介质的平均弦长、宏观吸收截面及逃脱几率有关,而与其周围介质的性质无关。

### ξ 和 f 的计算

根据 (8-56) 和 (8-57) 式,结合所讨论的栅元组成 (见图 8-5),便得到燃料块的吸收几率  $\Gamma_0$  为

$$\Gamma_0 = \frac{4V_F \Sigma_{a,F} P_F}{S_F} \quad (8-58)$$

和慢化剂的吸收几率  $\Gamma_1$  为

$$\Gamma_1 = \frac{4V_M \Sigma_{a,M} P_M}{S_F} \quad (8-59)$$

式中  $P_F$  和  $P_M$  分别为燃料块和慢化剂的逃脱几率。将 (8-58) 和 (8-59) 式代入 (8-39) 式,便得到热中子不利因子  $\xi$  为

$$\xi = \frac{1}{P_F} - \frac{4V_F \Sigma_{a,F}}{S_F} + \frac{V_F \Sigma_{a,F}}{V_M \Sigma_{a,M}} \frac{1 - P_M}{P_M} \quad (8-60)$$

热中子利用系数  $f$  为

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{\Sigma_{a,M} V_M}{\Sigma_{a,F} V_F} \frac{1}{P_F} + \frac{1 - P_M}{P_M} - \frac{4 \Sigma_{a,M} V_M}{S_F} \quad (8-61)$$

可以证明,燃料块的逃脱几率  $P_F$  与屏蔽系数  $F$  之间存在着下列关系<sup>[6]</sup>:

$$F = \frac{1}{P_F} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4V_F \Sigma_{a,F}}{S_F} \quad (8-62)$$

把 (8-61) 式和前面求得的 (8-34) 式作一比较。从前面讨论知道,在一般情况下,  $E$  接近于 1,附加吸收项  $(E-1)$  是个很小的量。因此函数  $E$  对  $f$  值影响很小,另一方面,  $f$  对函数  $F$  的值却是灵敏的。这些结论同样地适用于目前情况,  $f$  对  $P_M$  值并不灵敏,而对  $P_F$  值却是灵敏的。因此,对  $P_M$  计算精度的要求可以比  $P_F$  的低,即可以采用近似的方法来计算

$P_M$ ，亦即采用近似的方法来计算(8-61)式中的附加吸收项，而不会带来大的误差。

因为燃料块的吸收截面较大，中子在燃料块内经过不多的几次碰撞就被燃料块所吸收，因此适合于采用多次碰撞理论来计算 $P_F$ 。在假设每次碰撞后中子在块内均匀分布时， $P_F$ 可按(8-47)式计算。在A.B.H.方法中，考虑到首次碰撞后中子在块内并非为均匀分布，对于半径为 $a$ 的圆柱形燃料棒，求得 $P_F$ 为

$$P_F = \left\{ 1 + \frac{\Sigma_{a, F}}{\Sigma_{t, F}} \left[ \frac{(1 - P_{F0})}{P_{F0}} - a \Sigma_{t, F} \right] \left[ 1 + \alpha \frac{\Sigma_{t, F}}{\Sigma_{t, F}} + \beta \left( \frac{\Sigma_{t, F}}{\Sigma_{t, F}} \right)^2 \right] + a \Sigma_{a, F} \right\}^{-1} \quad (8-63)$$

式中， $P_{F0}$ 表示燃料块的首次飞行逃脱几率； $\alpha$ 、 $\beta$ 为系数，已制成表<sup>[5]</sup>，它是 $a \Sigma_{t, F}$ 的函数，见图8-9。

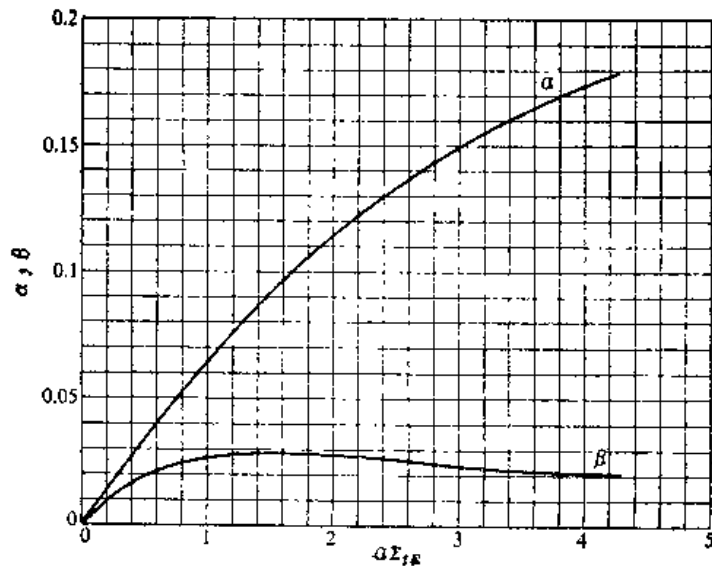


图8-9 参数 $\alpha$ 和 $\beta$

### $P_M$ 的计算

为了按(8-60)和(8-61)式计算热中子不利因子 $\xi$ 和热中子利用系数 $f$ ，剩下要解决的问题是如何求得 $P_M$ 了。上面分析过，对 $P_M$ 计算精度的要求可以比对 $P_F$ 的要求低。在A.B.H.方法中采用近似的方法计算 $P_M$ 。

设燃料块为绝对黑体，则 $\Gamma_0 = 1$ ，根据(8-37)式，此时 $f = P_M$ 。假设扩散理论在慢化剂内适用，而在燃料块与慢化剂的交界面上采用输运理论修正的边界条件，这时在慢化剂内的扩散方程为(8-17)式，而边界条件为

$$\left. \frac{d\phi_M(r)}{dr} \right|_{r=b} = 0$$

$$\frac{1}{\phi_M(r)} \cdot \left. \frac{d\phi_M(r)}{dr} \right|_{r=a} = \frac{1}{d} \quad (8-64)$$

式中  $d$  由输运理论计算得到，可查表， $d/\lambda_{tr}$  和  $a/\lambda_{tr}$  的关系如图8-10所示。根据热中子利用系数  $f$  的定义，设燃料块为黑体，则  $f$  为

$$f = \frac{2\pi a D_M \left. \frac{d\phi_M}{dr} \right|_{r=a}}{S_{i,M} V_M} = P_M \quad (8-65)$$

式中分子为从慢化剂流入燃料块的中子数，设燃料块为黑体时，它就等于燃料块吸收的中子数；分母为栅元内产生的中子总数。将方程(8-17)在满足(8-64)式边界条件下求解的结果代入(8-65)式，便得到

$$\frac{1}{P_M} = \frac{ad\Sigma_{a,M}V_M}{2V_F D_M} + E(k_M a, k_M b), \quad (8-66)$$

式中  $E(k_M a, k_M b)$  由(8-33)式或表8-1给出。

算出  $P_F$  和  $P_M$  以后，根据(8-60)和

(8-61)式，可以很容易算得  $\zeta$  和  $f$ 。实践已证明，这个方法所得的结果是比较精确的。

实际上，燃料与慢化剂之间通常还有包壳，若把包壳看作一个区，在这种三区情况下，用A.B.H.方法计算不利因子和热中子利用系数的问题。可参阅有关文献。

最后应该指出，在用扩散理论或A.B.H.方法计算不利因子和热中子利用系数时，都曾假设热中子具有同一能量。因此，用于上述计算的宏观截面、扩散系数等参数，都应该是按热中子能谱平均后的参数。

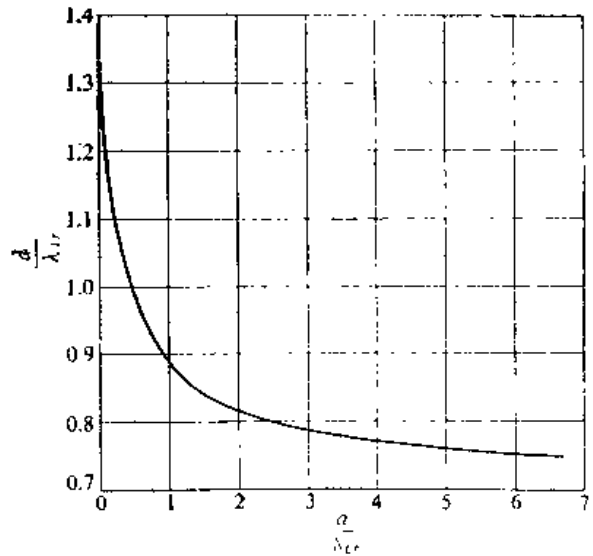


图8-10 参数  $d$

## 4. 栅元有效共振积分

### 4.1 栅元有效共振积分的计算

共振中子的空间非均匀效应主要表现在对有效共振积分的影响方面。在非均匀栅格内，因中子的空间-能量分布的不均匀性，有效共振积分的计算要比均匀系统的复杂得多。

首先假设燃料间的距离大于共振中子在慢化剂内的平均自由程。实际上，以重水、石墨作慢化剂的非均匀堆可以看成这种情况。在这种情况下，从一个燃料块飞出的共振中子，不可能在穿过慢化剂时未经任何碰撞而仍以同一能量进入相邻的另一个燃料块内。因此可以取出一个栅元来研究，而不考虑其它栅元的影响。这样，计算非均匀栅格有效共振积分的问题，就变成计算慢化剂内孤立燃料块的有效共振积分的问题了。最后再讨论栅元间相互影响的稠密栅格的有效共振积分的计算。此外，这里仍假设栅元只是由燃料与慢化剂组成，并认为燃料由一种元素组成，但所得的结果很容易扩展到栅元由多种元素组成的情况。

#### 4.1.1 中子慢化方程

用  $\phi_f(E)$  和  $\phi_M(E)$  分别表示燃料块和慢化剂内共振中子的空间平均通量。它们由(8-4)

式定义。设  $P_{FO}(E)$  为燃料块内均匀和各向同性分布、能量为  $E$  的中子在慢化剂内发生下一次碰撞的几率； $P_{MO}(E)$  为慢化剂内均匀和各向同性分布、能量为  $E$  的中子在燃料块内发生下一次碰撞的几率。在孤立燃料块的情况下， $P_{FO}(E)$  就等于燃料块的首次飞行逃脱几率。

考虑某一能量  $E$  附近  $dE$  能量间隔内的中子平衡，见图8-11。在质心系散射为各向同性的条件下，在燃料块内能量高于  $E$  的中子与燃料核弹性碰撞后进入  $E$  和  $E + dE$  能量范围内的中子数为

$$V_F \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_{s,F}(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' dE.$$

这些中子在燃料块内发生下一次碰撞的数目为

$$V_F [1 - P_{FO}(E)] \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_{s,F}(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' dE.$$

在慢化剂内恰好慢化到  $E$  至  $E + dE$  能量范围内的中子数为

$$V_M \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_{s,M}(E')\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' dE.$$

这些中子在燃料块内发生下一次碰撞的数目为

$$V_M P_{MO}(E) \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_{s,M}(E')\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' dE.$$

另一方面在燃料块内，在  $dE$  能量间隔内发生碰撞的总中子数为

$$\Sigma_{t,F}(E)\phi_F(E)V_F dE,$$

根据中子平衡原理，得到燃料块内中子慢化方程为

$$\begin{aligned} V_F \Sigma_{t,F}(E)\phi_F(E) = & V_F [1 - P_{FO}(E)] \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_{s,F}(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \\ & + V_M P_{MO}(E) \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_{s,M}(E')\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE'. \end{aligned} \quad (8-67)$$

同理可得慢化剂内的中子慢化方程为

$$\begin{aligned} V_M \Sigma_M(E)\phi_M(E) = & V_M [1 - P_{MO}(E)] \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_{s,M}(E')\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' \\ & + V_F P_{FO}(E) \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_{s,F}(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \end{aligned} \quad (8-68)$$

(8-67) 和 (8-68) 式为积分方程，并且是一组耦合方程，若  $P_{FO}(E)$ 、 $P_{MO}(E)$  已知，可以用数值方法求解<sup>[7]</sup>。

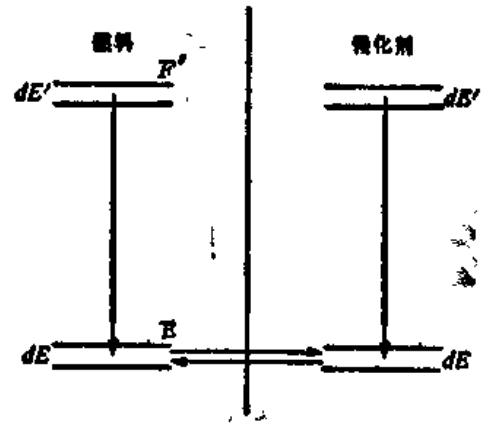


图8-11 建立中子平衡方程用的示意图



利用互易关系式以及作一些近似处理之后, 会使这组方程简化。像 (5-43) 式一样, 对  $\phi(E)$  归一化, 令高于共振能的峰外未扰动的中子通量为

$$\phi_{s,s}(E) = \frac{1}{E}$$

但是, 这时的归一化因子  $\xi\Sigma_s$  应该是栅元的平均值, 即

$$\xi\Sigma_s = \frac{1}{V}(\xi_F\Sigma_{t,F}V_F + \xi_M\Sigma_{s,M}V_M) \quad (8-69)$$

式中  $\Sigma_{t,F}$  是燃料的势散射截面,  $V$  为栅元的体积。和均匀系统时一样, 对于慢化剂核满足下列条件:

$$\Delta E_M \gg \Gamma_F$$

因而采用NR近似, 类似于 (5-53) 式, 有

$$\begin{aligned} \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_{s,M}(E)\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' &= \frac{\Sigma_{s,M}}{1-\alpha_M} \int_E^{E/\alpha_M} \frac{1}{E'} \left(\frac{1}{E'}\right) dE' \\ &= \frac{\Sigma_{s,M}}{E} \end{aligned} \quad (8-70)$$

根据互易关系式,  $P_{FO}(E)$  和  $P_{MO}(E)$  满足下列关系:

$$\Sigma_{t,F}(E)V_F P_{FO}(E) = \Sigma_{t,M}(E)V_M P_{MO}(E). \quad (8-71)$$

若认为  $\Sigma_{t,M} \approx \Sigma_{s,M}$ , 那么有

$$V_M P_{MO}(E) \int_E^{E/\alpha_M} \frac{\Sigma_{s,M}(E')\phi_M(E')}{(1-\alpha_M)E'} dE' = V_F P_{FO}(E) \frac{\Sigma_{t,F}(E)}{E} \quad (8-72)$$

故而燃料块内的中子慢化方程 (8-67) 便写成:

$$\begin{aligned} \Sigma_{t,F}(E)\phi_F(E) &= [1 - P_{FO}(E)] \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_{s,F}(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \\ &\quad + \frac{P_{FO}(E)\Sigma_{t,F}(E)}{E} \end{aligned} \quad (8-73)$$

这个方程已不包括  $\phi_M(E)$  了。若  $P_{FO}(E)$  已知, 解此积分方程求得  $\phi_F(E)$ , 按下式算得有效共振积分  $I$  及非均匀栅格的逃脱共振几率  $p$ :

$$I = \int_{\text{共振区}} \sigma_{t,F}(E)\phi_F(E) dE \quad (8-74)$$

$$p = e^{-\frac{N_0}{\xi\Sigma_s} I} \quad (8-75)$$

式中  $N_0$  —— 栅元单位体积内共振吸收核的核子数。已有用数值方法解 (8-73) 方程的程序<sup>[17]</sup>。以下介绍近似的解析方法。

## 4.1.2 NR 和 NRIM 近似

和均匀堆一样，对吸收核可以采用NR和NRIM两种近似来处理方程(8-73)中的积分项。

## NR 近似

根据(5-57)式，对NR近似有

$$\int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_{s,F}(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' \approx \frac{\Sigma_{p,F}}{E} \quad (8-76)$$

代入(8-73)式得

$$\phi_F(E) = \frac{[1 - P_{FO}(E)]\Sigma_{p,F} + P_{FO}(E)\Sigma_{t,F}}{\Sigma_{t,F}E} \quad (8-77)$$

将(8-77)式代入(8-74)式得

$$I_{NR} = \int [\sigma_{p,F} + P_{FO}(E)(\sigma_{t,F} - \sigma_{p,F})] \frac{\sigma_{r,F}}{\sigma_{t,F}} \frac{1}{E} dE \quad (8-78)$$

## NRIM 近似

根据(5-60)式，对NRIM近似有

$$\int_E^{E/\alpha_F} \frac{\Sigma_{s,F}(E')\phi_F(E')}{(1-\alpha_F)E'} dE' = \Sigma_{s,F}(E)\phi_F(E) \quad (8-79)$$

代入(8-73)式得

$$\phi_F(E) = \frac{P_{FO}(E)}{\left\{1 - [1 - P_{FO}(E)] \frac{\Sigma_{s,F}(E)}{\Sigma_{t,F}(E)}\right\}E} \quad (8-80)$$

将(8-80)式代入(8-74)式得

$$I_{NRIM} = \int \frac{P_{FO} \sigma_{r,F}}{1 - (1 - P_{FO})\sigma_{s,F}/\sigma_{t,F}} \frac{1}{E} dE \quad (8-81)$$

应该指出，在NRIM近似中，认为中子与燃料核散射碰撞时没有能量损失；这样，中子在逃出燃料块之前，有可能在单个共振峰内发生多次散射碰撞。考虑到这种多次碰撞，更严格的计算应该用 $P_F$ 代替上面式中的 $P_{FO}$ 。

如果燃料块内含有慢化材料，如二氧化铀中的氧，则在燃料块的中子慢化方程中还应包括这种慢化材料的慢化作用。若认为对这种慢化材料可采用窄共振近似，且令 $\Sigma_{F,M}$ 表示燃料块内慢化材料的宏观散射截面，则可以求得

$$\begin{aligned} I_{NR} &= \int \frac{\Sigma_{p,F} + \Sigma_{F,M} + [\Sigma_{t,F} - (\Sigma_{p,F} + \Sigma_{F,M})]P_{FO}}{\Sigma_{t,F}} \frac{\sigma_{r,F}}{E} dE \\ &= I_{NR}^V + I_{NR}^S \end{aligned} \quad (8-82)$$

式中

$$I_{NR}^V = \int \frac{\Sigma_{p,F} + \Sigma_{F,M}}{\Sigma_{i,F}} \sigma_{r,F} \frac{dE}{E}, \quad (8-83)$$

$$I_{NR}^S = \int \frac{\Sigma_{i,F} - \Sigma_{p,F} - \Sigma_{F,M}}{\Sigma_{i,F}} \sigma_{r,F} P_{FO} \frac{dE}{E}, \quad (8-84)$$

上角标V、S分别表示体吸收项和面吸收项。

而

$$\begin{aligned} I_{NRIM} &= \int \frac{\Sigma_{F,M} + (\Sigma_{i,F} - \Sigma_{F,M})}{\Sigma_{i,F} - (1 - P_{FO})\Sigma_{F,M}} \sigma_{r,F} P_{FO} \frac{dE}{E} \\ &= I_{NRIM}^V + I_{NRIM}^S, \end{aligned} \quad (8-85)$$

式中

$$\begin{aligned} I_{NRIM}^V &= \int \frac{\Sigma_{F,M}}{\Sigma_{i,F} - (1 - P_{FO})\Sigma_{F,M}} \sigma_{r,F} \frac{dE}{E} \\ &\approx \int \frac{\Sigma_{F,M}}{\Sigma_{r,F} + \Sigma_{F,M}} \sigma_{r,F} \frac{dE}{E}, \end{aligned} \quad (8-86)$$

$$\begin{aligned} I_{NRIM}^S &= \int \frac{\Sigma_{i,F} - \Sigma_{F,M}}{\Sigma_{i,F} - (1 - P_{FO})\Sigma_{F,M}} \sigma_{r,F} P_{FO} \frac{dE}{E} \\ &\approx \int \frac{\Sigma_{r,F}}{\Sigma_{r,F} + \Sigma_{F,M}} \sigma_{r,F} P_{FO} \frac{dE}{E}. \end{aligned} \quad (8-87)$$

从(8-82)和(8-85)式看出,有效共振积分 $I$ 可以表示成两个积分项之和,其中一个积分项与 $P_{FO}$ 无关。这是因为燃料块吸收的共振中子来源于两个方面:(1)从慢化剂入射到燃料块上的共振中子;(2)在燃料块内慢化到共振能的中子。在本章的第一节内讲到过,入射到燃料块上的共振中子基本上为块表层的燃料核所吸收,通常把这部分共振吸收叫表面吸收,而把慢化到共振能的中子在块内的吸收叫体吸收。这两者中,表面吸收是主要的,而体吸收项是相当小的。可以证明,表面吸收项与燃料块的表面积对块体积之比有关,因为 $P_{FO}$ 与燃料块的表面积对块体积之比有关,所以表面吸收项与 $P_{FO}$ 有关。

#### 4.1.3 $I_{NR}$ 及 $I_{NRIM}$ 的计算式

利用考虑多普勒展宽后的共振峰公式,在忽略干涉散射的情况下,可求得窄共振近似时的有效共振积分表达式为

$$I_{NR}^V = \frac{\sigma_0' \Gamma_r}{E_0} J(\xi, \beta) \quad (8-88)$$

$$I_{NR}^S = \frac{\sigma_0 \Gamma_r}{E_0} L(t, \xi, \beta) \quad (8-89)$$

式中  $J(\zeta, \beta)$  由(5-73)式定义, 而

$$L(t, \zeta, \beta) = \int_0^{\infty} P_{FO} \frac{\Psi^2(\zeta, x)}{\Psi(\zeta, x) + \beta} dx \quad (8-90)$$

$$\text{其中} \quad \zeta = \frac{\Gamma}{\Gamma_D}, \quad \beta = \frac{\sigma'_{p, F}}{\sigma_0}$$

$$\sigma'_{p, F} = \frac{\Sigma_{p, F} + \Sigma_{F, M}}{N_F}, \quad (8-91)$$

$$t = \frac{4V_F \Sigma_{p, F}}{S_F} = \bar{l} \Sigma_{p, F}$$

式中  $N_F$  为燃料块单位体积内共振吸收核的核子数。同理可得

$$I_{NRIM}^V = \frac{\sigma''_{p, F} \Gamma_r}{E_0} J(\zeta, \beta') \quad (8-92)$$

$$I_{NRIM}^S = \frac{\sigma''_{p, F} \Gamma}{\beta' E_0} L(t', \zeta, \beta') \quad (8-93)$$

$$\text{其中} \quad \sigma_{p, F} = \frac{\Sigma_{F, M}}{N_F}, \quad (8-94)$$

$$\beta' = \frac{\sigma''_{p, F} \Gamma}{\sigma_0 \Gamma_r},$$

$$t' = \bar{l} \Sigma_{F, M}.$$

在燃料块不含有慢化材料时,  $\sigma''_{p, F} = 0$ , 按照(8-92)式,  $I_{NRIM}^V = 0$ , 显然这是不符合实际情况的。此时,  $I_{NRIM}^V$  可按下列近似公式进行计算<sup>[81]</sup>:

$$I_{NRIM}^V = \frac{2\Sigma_{p, F}}{AN_F} \quad (8-95)$$

式中  $A$  为共振吸收核的质量数。

应当指出, 上述介绍的计算共振积分的方法仅适用于可分辨共振, 对于不可分辨共振, 其有效共振积分的计算须要采用另外的公式, 请参阅有关文献<sup>[2][8]</sup>。通常, 不可分辨共振的有效共振积分值小于总的有效共振积分值的10%<sup>[7]</sup>。此外, 除了上述讨论的s波共振以外, 还有p波共振。但对热中子堆来讲, p波共振的作用不大, 对于铀-238核, 30千电子伏以下的p波共振的有效共振积分值约为1靶左右<sup>[7]</sup>, 精确计算时, 应附上这个值。

#### 4.1.4 非均匀堆和均匀堆有效共振积分之间的等效关系

在4.1.2节内提到过非均匀栅格的有效共振积分和  $P_{FO}$  有关, 而  $P_{FO}$  是与燃料块的几何尺寸、形状有关系的量, 就是说, 非均匀栅格有效共振积分与燃料块几何尺寸、形状的关系表现在  $P_{FO}$  这个量上。  $P_{FO}$  与燃料块几何尺寸的关系是比较复杂的。但是, 如果采用维格纳有

理近似式,同时引进一个假想的宏观逃脱截面 $\Sigma_c$ 以后,可以发现非均匀堆的有效共振积分与均匀堆的两者之间存在着等效关系。

根据 $P_{FO}$ 的有理近似式有

$$P_{FO} = \frac{1}{1 + \overline{l} \Sigma_{t, F}}$$

可以把它写成

$$P_{FO} = \frac{\Sigma_c}{\Sigma_c + \Sigma_{t, F}} = \frac{\sigma_c}{\sigma_c + \sigma_{t, F}} \quad (8-96)$$

从 $P_{FO}$ 的定义不难看出(8-96)式中 $\Sigma_c$ 或 $\sigma_c$ 的意义。从上面式中可以看出逃脱截面 $\Sigma_c$ 的定义为

$$\Sigma_c = \frac{1}{\overline{l}}, \quad (8-97)$$

而微观逃脱截面定义为

$$\sigma_c = \frac{\Sigma_c}{N_F} = \frac{1}{N_F \overline{l}}, \quad (8-98)$$

同时有

$$\sigma_s = \frac{P_{FO}}{1 - P_{FO}} \sigma_{t, F} \quad (8-99)$$

把(8-99)式代入(8-78)和(8-81)式,分别得到

$$I_{NR} = \int \frac{dE}{E} \frac{(\sigma_{t, F} + \sigma_c) \sigma_{r, F}}{\sigma_{t, F} + \sigma_c} \quad (8-100)$$

$$I_{NRIM} = \int \frac{dE}{E} \frac{\sigma_c \sigma_{r, F}}{\sigma_{r, F} + \sigma_c} \quad (8-101)$$

比较(5-59)和(8-100)式、(5-62)和(8-101)式发现,若用 $\sigma_c$ 代替 $\Sigma_{s, M}/N_F$ ,非均匀堆的有效共振积分的表达式和均匀堆的在形式上完全一样。就是说,若非均匀堆的 $\sigma_c$ 值等于均匀堆的 $\Sigma_{s, M}/N_F$ ,那末它们两者的有效共振积分便相等。这表明非均匀堆的有效共振积分与均匀堆的两者之间存在着等效关系。此外,还可以看到,尽管燃料块的几何形状、大小不同,以及燃料的性质不同,但是如果他们的 $\sigma_c$ 值相等,则它们的有效共振积分就相等。利用非均匀堆与均匀堆有效共振积分之间的等效关系,就能使用均匀堆的有效共振积分公式来计算非均匀堆的有效共振积分。同时还能把非均匀堆有效共振积分的计算值和测量值与均匀堆的进行比较。应当指出,这种等效关系是在采用 $P_{FO}$ 有理近似的情况下得到的,因而它们并不是精确的。

如果燃料块含有慢化材料,应该用 $\sigma_c^*$ 去代替 $\sigma_c$ ,而 $\sigma_c^* = \sigma_c + \sigma_{F, M}$ 。

## 4.2 互屏效应及丹可夫修正因子

上述结果是研究一个孤立的栅元时得到的，它没有考虑相邻栅元的影响。实际上，有些反应堆栅格（如铀-水栅格），其燃料块之间的间距与中子在慢化剂内的平均自由程相比比较小，形成所谓稠密栅格。在这种栅格内，从燃料块飞出的某一能量的中子，有可能在穿过慢化剂时未经任何碰撞，而以同一能量在邻近另一个燃料块内发生下一次碰撞。就是说，一个栅元内从燃料块飞出的中子会在另一个栅元的燃料块内发生下一次碰撞，即栅元之间互相有影响。计算这种稠密栅格的有效共振积分时应该考虑这种影响。在这种情况下，从某燃料块逃出的中子在慢化剂内发生下一次碰撞的几率就不等于该燃料块的首次飞行逃脱几率  $P_{FO}(E)$ 。这是因为从燃料块逃出的中子，除了在慢化剂内发生下一次碰撞以外，还存在着在其它燃料块内发生下一次碰撞的可能性。设  $P_F^*(E)$  表示稠密栅格的燃料块内均匀、各向同性分布、能量为  $E$  的中子逃出燃料块在慢化剂内发生下一次碰撞的几率。显然  $P_F^*(E) < P_{FO}(E)$ 。用  $P_F^*(E)$  代替 (8-67) 式中的  $P_{FO}(E)$ ，采用和上一节完全一样的分析方法，便可得到完全一样的结果，(8-78) 和 (8-81) 式，只是式中用  $P_F^*(E)$  代替了  $P_{FO}(E)$ 。因此稠密栅格有效共振积分计算的问题便归结为求  $P_F^*(E)$  的问题了。

计算  $P_F^*$  的方法有蒙特卡罗法和解析计算法。前者可得到精确的  $P_F^*$  值，但与解析计算法相比，计算量较大。通常用于精确计算和为其它方法提供校核。这里介绍反应堆工程设计中比较常用的解析计算法。

由 (8-41) 式可知，燃料块的首次飞行逃脱几率  $P_{FO}$  为

$$P_{FO} = \frac{1}{4\pi \Sigma_{t,F} V_F} \iint_{\Omega > \Omega_0} |\mathbf{n} \cdot \Omega| (1 - e^{-\Sigma_{t,F} l}) d\Omega \cdot dS \quad (8-102)$$

式中， $l$  为弦长，若  $\bar{l}$  表示平均弦长，它的定义为

$$\bar{l} = \frac{\iint l |\mathbf{n} \cdot \Omega| d\Omega \cdot dS}{\iint |\mathbf{n} \cdot \Omega| d\Omega \cdot dS} \quad (8-103)$$

因为

$$\begin{aligned} \int l |\mathbf{n} \cdot \Omega| dS &= V_F, & \int d\Omega &= 4\pi \\ \iint |\mathbf{n} \cdot \Omega| d\Omega dS &= \pi S \end{aligned} \quad (8-104)$$

所以

$$\bar{l} = \frac{4V_F}{S_F} \quad (8-105)$$

根据 (8-103) 和 (8-104) 式，(8-102) 式就可以表示成：

$$P_{FO} = \frac{\iint |\mathbf{n} \cdot \Omega| (1 - e^{-\Sigma_{t,F} l}) d\Omega dS}{\Sigma_{t,F} \bar{l} \iint |\mathbf{n} \cdot \Omega| d\Omega dS}, \quad (8-106)$$

若定义

$$G_0 = e^{-\Sigma_{t, F} l}, \quad (8-107)$$

注意  $l$  与中子运动方向  $\Omega$  有关 (见图8-6), 所以  $G_0$  表示以  $\Omega$  方向入射到燃料块上的中子穿过燃料块而未经任何碰撞的几率, 假设入射中子为各向同性时则(8-106)式便写成

$$P_{F_0} = \frac{1}{\Sigma_{t, F} \bar{l}} (1 - \langle G_0 \rangle) \quad (8-108)$$

其中

$$\langle G_0 \rangle = \frac{\iint |\mathbf{n} \cdot \Omega| G_0 d\Omega dS}{\iint |\mathbf{n} \cdot \Omega| d\Omega dS} \quad (8-109)$$

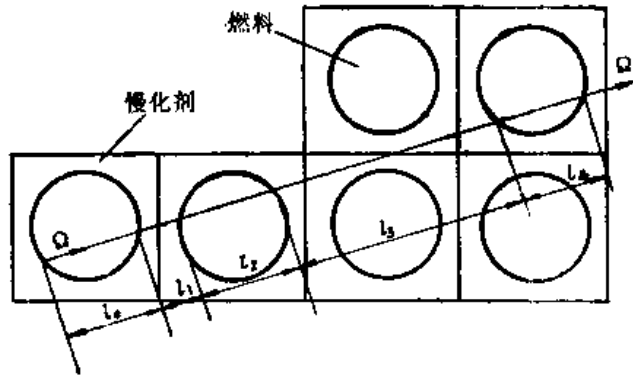


图8-12  $P_F^*$  的计算

表示对各个方向入射到燃料块的平均值。在稠密栅格情况下, 沿  $\Omega$  方向从一个燃料块飞出的中子可能不止一次地穿

过其它燃料块, 见图8-12, 所以, 在计算  $P_F^*$  时应扣除从某一个燃料块飞出的中子在其它燃料块内发生下一次碰撞的几率, 而只考虑它在慢化剂内发生下一次碰撞的几率。从图8-12可看出, 在稠密栅格中, 从一个燃料块中飞出的中子可以多次穿过慢化剂。设  $G_i = \exp(-\Sigma_i l_i)$ , 它表示以  $\Omega$  方向运动的中子穿过  $i$  介质未发生任何碰撞的几率, 则  $1 - G_i$  就表示穿过  $i$  介质发生碰撞的几率, 这里  $i$  为零及偶数值时, 表示燃料块,  $i$  为奇数值时, 表示慢化剂。注意  $G_i$  与中子运动方向  $\Omega$  有关。根据  $P_F^*(E)$  的定义, 类似于 (8-106) 式得

$$P_F^* = \frac{\iint |\mathbf{n} \cdot \Omega| d\Omega dS [(1 - G_0)(1 - G_1) + (1 - G_0)G_1 G_2 (1 - G_3) + \dots]}{\bar{l} \Sigma_{t, F} \iint |\mathbf{n} \cdot \Omega| d\Omega dS} \quad (8-110)$$

所以

$$P_F^* = \frac{1}{\bar{l} \Sigma_{t, F}} \langle (1 - G_0)(1 - G_1) + (1 - G_0)G_1 G_2 (1 - G_3) + \dots \rangle \quad (8-111)$$

如果燃料块之间的间隔较大, 即慢化剂的尺寸与平均自由程相比比较大, 以致使  $G_1 \approx 0$ , 则  $P_F^*$  就等于  $P_{F_0}$  了。

(8-111) 式的计算是很复杂的。在一般情况下, 只有前几项是主要的, 若用平均值的乘积来代替乘积的平均值, 并且近似地认为  $\langle G_{2n} \rangle = \langle G_0 \rangle$ ,  $\langle G_{2n+1} \rangle = \langle G_1 \rangle$ ,  $n$  为正整数, 且

$$\langle G_1 \rangle = \frac{\iint |\mathbf{n} \cdot \Omega| e^{-\Sigma_{t, 1} l_1} d\Omega dS}{\iint |\mathbf{n} \cdot \Omega| d\Omega dS} \quad (8-112)$$

对 (8-111) 式求级数和, 得

$$P_F^* \approx \frac{1}{\bar{l}\Sigma_{t,F}} \frac{1}{\langle(1-\langle G_0 \rangle)(1-\langle G_1 \rangle)[1+\langle G_0 \rangle\langle G_1 \rangle + (\langle G_0 \rangle\langle G_1 \rangle)^2 + \dots]\rangle}$$

$$= \frac{1}{\bar{l}\Sigma_{t,F}} \frac{(1-\langle G_0 \rangle)(1-\langle G_1 \rangle)}{1-\langle G_0 \rangle\langle G_1 \rangle}, \quad (8-113)$$

利用 $P_{FO}$ 的关系式(8-108), 得

$$P_F^* = P_{FO} \frac{1-\langle G_1 \rangle}{1-\langle G_0 \rangle\langle G_1 \rangle} \quad (8-114)$$

或

$$P_F^* = P_{FO} \frac{1-\langle G_1 \rangle}{1-(1-\bar{l}\Sigma_{t,F}P_{FO})\langle G_1 \rangle} \quad (8-115)$$

习惯上用 $C$ 表示 $\langle G_1 \rangle$ ,  $C$ 就叫做丹可夫(Dancoff)因子, 所以最后得到

$$P_F^* = P_{FO} \frac{1-C}{1-C(1-\bar{l}\Sigma_{t,F}P_{FO})} \quad (8-116)$$

丹可夫因子 $C$ 由(8-112)式定义。因为穿过慢化剂的弦长 $l_1$ 是中子运动方向 $\Omega$ 的函数, 所以用(8-112)式计算 $C$ 是很复杂的。具体计算时, 把(8-112)式的积分分成对各个相邻燃料棒的积分之和, 即逐根计算各个相邻燃料棒对所讨论燃料棒的影响, 这样,  $C$ 就可以用下式进行计算:

$$C = \sum_j C_j, \quad (8-117)$$

$C_j$ 为第 $j$ 个燃料棒对所讨论燃料棒引起的丹可夫修正因子,  $\Sigma$ 表示对所有相邻燃料棒的丹可夫修正求和。一个相邻燃料棒之间的丹可夫修正因子, 即 $C_j$ 已制成表, 见表8-3。

表8-3 丹可夫因子( $C_j$ )

$d_j/a$ \ $a\Sigma_M$	0	0.25	0.50	1.0	1.5	2.0
2.0	0.182	0.170	0.160	0.144	0.132	0.123
2.5	0.136	0.107	0.0849	0.0550	0.0364	0.0245
4.0	0.081	0.040	0.0205	0.0057	0.0016	0.0005
7.0	0.046	0.0094	0.0021	0.0001	—	—
10.0	0.032	0.0028	0.0003	—	—	—

表中:  $a$  为燃料棒的半径

$d_j$  为所考虑的燃料棒与第 $j$ 个燃料棒中心之间的距离

$\Sigma_M$  为慢化剂的宏观总截面

丹可夫因子亦可用下式进行计算<sup>[10]</sup>:

$$C = 1 - \frac{e^{-\tau\Sigma_{t,1}\bar{l}_1}}{1 + (1-\tau)\Sigma_{t,1}\bar{l}_1} \quad (8-118)$$



对于正方形栅格，

$$\tau = \left\{ \left[ \frac{\pi}{4} \left( 1 + \frac{V_M}{V_F} \right) \right]^{1/2} - 1 \right\} \frac{V_M}{V_F} - 0.08 \quad (8-119)$$

对于六角形栅格，

$$\tau = \left\{ \left[ \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{V_M}{V_F} \right) \right]^{1/2} - 1 \right\} \frac{V_M}{V_F} - 0.12 \quad (8-120)$$

(8-118) 式中的  $\Sigma_{t,1}$  为慢化剂的宏观总截面， $\bar{l}_1$  为慢化剂的平均弦长， $(\bar{l}_1 = \bar{l} V_M / V_F)$ ， $\bar{l}$  为燃料块的平均弦长)。

进行初步计算时，可以采用  $P_{F0}$  的有理近似式，将 (8-45) 式代入 (8-116) 式得

$$P_F^* = \frac{1}{1 + \Sigma_{t,1} \bar{l} \frac{1}{1-C}} \quad (8-121)$$

比较 (8-121) 和 (8-45) 式可以看出，在采用有理近似的条件下，稠密栅格内栅元之间的相互影响相当于改变了燃料块的平均弦长，即它变为原来的  $1/(1-C)$  倍。因为平均弦长与燃料块面积成反比，所以这也相当于燃料块表面积减了  $(1-C)$  倍，因此在计算稠密栅格的有效共振积分时只须在上节所介绍的公式中用  $\bar{l}/(1-C)$  代替  $\bar{l}$ ，或者用  $S(1-C)$  去代替  $S$  就行了。

考虑了栅元间相互影响后，它的效应相当于燃料块的有效表面积减少，这说明稠密栅格的有效共振积分比孤立燃料块的小。这是因为 (如图 8-13 所示)，在慢化剂内慢化到共振能的中子，在孤立燃料块的情况下，例如以  $\Omega_1$ 、 $\Omega_2$ 、 $\Omega_3$  方向运动的中子本来是可以直接入射到燃料块 A 上的，但是在稠密栅格的情况下，它们却为邻近的燃料块 B、C、D 所吸收。对燃料块 A 来讲，其邻近的燃料块 B、C、D 等对它起一种屏蔽作用，这个屏蔽作用和燃料块外层对内层的屏蔽作用类似。同样，燃料块 A 对其它相邻燃料块来讲，也有屏蔽作用，例如，以  $\Omega_3$  方向运动的共振中子就可能到不了燃料块 C。而可能首先被燃料块 A 所吸收了。因此，从整个堆芯来看，每个燃料块都为相邻的燃料块所屏蔽，这种燃料块之间相互屏蔽的效应，通常叫做互屏效应，而丹可夫修正因子就是考虑到这种互屏效应的修正因子。

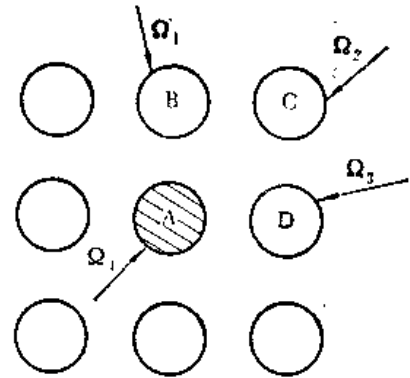


图8-13 互屏效应示意图

### 4.3 有效共振积分的半经验公式

有效共振积分可用实验的方法确定，并已进行了大量的实验测定，对于孤立棒，得到室温条件下的有效共振积分的半经验公式如下：

$$I = a + b \left( \frac{S_F}{M_F} \right)^{1/2}, \quad (3-122)$$

式中  $a$  和  $b$  由表3-4给出。有效共振积分的计算值与测定值如图8-14所示。

对于稠密栅格，近似计算时仍可采用(8-122)式，只须用  $S_F(1-C)$  去代替式中的  $S_F$ 。

表8-4 实验测出的共振积分常数

燃 料	$a$	$b$
金属铀 ( $^{235}\text{U}$ )	2.8	27.1
二氧化铀 ( $^{238}\text{UO}_2$ )	3.0	28.0
金属钍 ( $^{232}\text{Th}$ )	3.9	14.8
二氧化钍 ( $^{232}\text{ThO}_2$ )	3.4	17.3

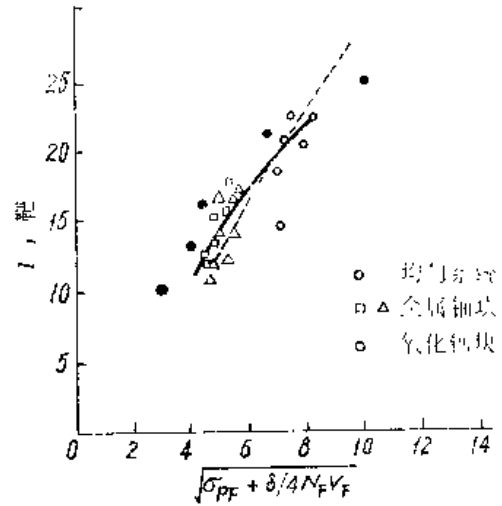


图8-14 有效共振积分的计算值和测定值

表8-5  $\beta$ 的计算值和实验值 ( $\beta \times 10^2$ )

	金 属 铀		二 氧 化 铀		
	0.4	1.4	0.4	0.85	1.4
铀棒半径, cm	0.4	1.4	0.4	0.85	1.4
计算值	0.64	0.55	0.84	0.69	0.63
实验值	$0.64 \pm 0.05$	$0.55 \pm 0.05$	$0.82 \pm 0.06$	$0.69 \pm 0.05$	$0.65 \pm 0.05$

考虑到温度效应时，按下式计算<sup>[9]</sup>：

$$I = I(293\text{K}) [1 + \beta (\sqrt{T_{eff}} - \sqrt{293\text{K}})], \quad (8-123)$$

式中  $I(293\text{K})$  为室温时 ( $20^\circ\text{C}$ ) 的有效共振积分，由 (8-82)、(8-85) 或 (8-122) 式算出。

$\beta$  值由表8-5给出。 $T_{eff}$  为燃料块的平均温度 [K]。

或者按下式计算<sup>[10]</sup>：

$$I = 2.16X + 2.56 + (0.0279X - 0.0537) \sqrt{T_{eff}} \quad (8-124)$$

$$X = \left[ P_{FO} \frac{\Sigma_{s,F,M}}{N_F} + \frac{C_{eff}}{I N_F} \right]^{1/2} \quad (8-125)$$

$$C_{eff} = \frac{C}{1 + 0.1(1-C)}, \quad (8-126)$$

式中  $N_F$  —— 燃料块单位体积内铀-238的核子数，其它符号的意义同前。应该指出，燃料块内温度是不均匀的， $T_{eff}$  应为燃料的有效温度。设  $T_c$ 、 $T_s$  分别表示燃料块的中心温度和表面温度，则  $T_{eff}$  可按式进行计算<sup>[8]</sup>：

$$T_{eff} = \frac{I^S T_S + I^V T_V}{I^S + I^V} \quad (8-127)$$

式中， $I^V$ 和 $I^S$ 分别为有效共振积分的体吸收项和表面吸收项。

## 5. 快中子倍增效应

### 5.1 快中子倍增的空间效应

在非均匀栅格内，裂变中子是在燃料块内产生，这便增加了它与铀-238核碰撞的几率。因此，与均匀系统相比，快中子倍增效应有所增加。这个效应的大小与栅元内快中子的空间分布有关。因为裂变中子一旦进入慢化剂内，很快就慢化到铀-238核的快中子裂变阈以下，所以在较高的能量范围内（如在0.8—10兆电子伏内），一般地讲，燃料块内的快中子通量高于慢化剂内的通量。在快谱计算中，例如在MUFT中，在前10群（0.821至10兆电子伏）内应考虑铀-238核的快中子倍增效应。但是快谱计算时假设系统是均匀的，即认为燃料和慢化剂内的通量是相同的，显然，这就低估了快中子的倍增效应。为了考虑非均匀效应对快中子倍增效应的影响，在对非均匀栅格进行均匀化处理时，应该考虑到快中子通量分布的不均匀性。实际上，计算时须知道燃料块内快中子平均通量与慢化剂内快中子平均通量之比。为此，和考虑热中子空间分布的不均匀性一样，定义

$$\zeta_F(E) = \frac{\overline{\phi}_F(E)}{\overline{\phi}_M(E)} \quad (8-128)$$

$\overline{\phi}_F(E)$ 由(8-4)式定义（这里仍以—个栅元为研究对象，并认为栅元仅由燃料块和慢化剂组成）。 $\zeta_F(E)$ 叫做快中子有利因子，因为对快中子倍增来讲，非均匀效应是有利的。类似于热中子利用系数，可以定义一个快中子利用系数（对某一能群），其定义为燃料内快中子从该能群的逸出率与栅元内快中子从该能群总的逸出率之比，若 $f_F$ 表示某一能群的快中子利用系数， $\Sigma_{R,F}$ 表示某一能群的快中子逸出截面，则

$$f_F = \frac{\Sigma_{R,F} V_F \overline{\phi}_F}{\Sigma_{R,F} V_F \overline{\phi}_F + \Sigma_{R,M} V_M \overline{\phi}_M} \quad (8-129)$$

所谓逸出，包括因吸收、散射（弹性、非弹性）引起的中子从该能群的消失。非弹性散射后，中子的能量一般下降较大，往往使中子从一个能群下降到另一个能群，而弹性散射的结果仅仅是使某一部分能量的中子离开该能群。由(8-129)式得

$$\zeta_F = \frac{\Sigma_{R,M} V_M}{\Sigma_{R,F} V_F} \left( \frac{f_F}{1 - f_F} \right) \quad (8-130)$$

关于 $f_F$ 及 $\zeta_F$ 的计算，可以采用完全类似于前面介绍过的A. B. H.方法来进行。

### 5.2 快中子倍增系数

快中子倍增效应在四因子模型中通常用快中子倍增系数来表示。对于非均匀堆，它定义

为：一个初级裂变中子最后在慢化剂中慢化到铀-238裂变阈能以下的平均中子数。

在燃料块之间的间隔大于快中子在慢化剂中的散射平均自由程时，裂变中子穿出燃料块进入慢化剂后，在慢化剂内发生散射碰撞的几率就相当大，并且和慢化剂核几次碰撞后裂变中子的能量就降到铀-238裂变阈能以下。这些中子即使再进入燃料块内，也已不能再使铀-238核发生裂变。此外，在燃料块之间间距较大的情况下，从某一燃料块逃出的裂变中子在邻近燃料块内引起铀-238核裂变的几率是很小的。因此，在这种情况下，只须考虑孤立燃料块的快中子倍增过程，而快中子倍增系数  $\epsilon$  可按式计算<sup>[1]</sup>：

$$\epsilon = \frac{\chi_1 P_1}{1 - (1 - P_1)\beta_1} + \left[ \chi_2 + \frac{\chi_2 \nu \chi_1 (1 - P_1) \sigma_{1, f} / \sigma_{1, t}}{1 - (1 - P_1)\beta_1} \right] \times \left[ \frac{P_2}{1 - (1 - P_2)\beta_2} \right] + \left[ \frac{\chi_1 (1 - P_1) \sigma_{1, s} / \sigma_{1, t}}{1 - (1 - P_1)\beta_1} \right] \left[ \frac{P_3}{1 - (1 - P_3)\beta_3} \right], \quad (8-131)$$

式中

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\chi_1 \nu \sigma_{1, f} + \sigma_{1, t}}{\sigma_{1, t}}, \\ \beta_2 &= \frac{\sigma_{2, s}}{\sigma_{2, t}}, \\ \beta_3 &= \frac{\sigma_{3, s}}{\sigma_{3, t}}, \end{aligned} \quad (8-132)$$

截面值由表8-6给出。

在推导这个公式时，把燃料块内的中子分成三组：高于铀-238裂变阈能  $E_f$  的中子为第一组；低于  $E_f$  的中子为第二组；第一组内的中子散射后能量低于铀-238裂变阈能  $E_f$  的中子为第三组。这三组中子的能谱都不相同；第一组和第二组的中子能谱，分别由裂变中子谱中能

表8-6 用于计算  $\epsilon$  的三组截面

材 料	$\sigma_{1, t}$	$\sigma_{1, f}$	$\nu_1 \sigma_{1, f}$	$\sigma_{1, s}$	$\sigma_{1, s}$	$\sigma_{1, \gamma}$	$\sigma_{2, t}$	$\sigma_{2, s}$	$\sigma_{2, \gamma}$	$\sigma_{3, t}$	$\sigma_{3, s}$	$\sigma_{3, \gamma}$
$^{238}\text{U}$	4.52	0.549	1.56	1.89	2.07	0.054	6.05	5.91	0.138	5.66	5.53	0.135
$^{238}\text{UO}_2$	7.77	0.549	1.56	5.10	2.07	0.099	14.54	14.40	0.138	14.15	14.01	0.135

量高于和低于  $E_f$  的部分来表示，而第三组中子能谱由非弹性散射中子的分布函数近似给出。以相应能谱平均的各组截面列于8-6中。式中  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  分别为这三组中子的首次飞行逃脱燃料块的几率， $\chi_1$  和  $\chi_2$  分别为裂变谱中高于和低于铀-238裂变阈能的中子所占份额。若取铀-238的裂变阈  $E_f = 1.4$  兆电子伏，则

$$\chi_1 = \int_{E_f}^{\infty} \chi(E) dE = 0.561; \quad \chi_2 = \int_0^{E_f} \chi(E) dE = 0.439$$

在稠密栅格内，如在铀-水栅格内，从一个燃料块穿出的快中子有可能在相邻的燃料块

内引起铀-238裂变，这就要考虑相邻燃料块间的相互影响，而不能看作孤立燃料块来处理。显然，由于这种相互影响，快中子倍增系数有所提高。一般地讲，以石墨为慢化剂的栅格的 $\epsilon$ 在1.02至1.04范围内，而铀-水栅格的 $\epsilon$ 可达1.10以上。计算稠密栅格快中子倍增系数的方法有蒙特卡罗法、碰撞几率法等，也可以使栅格均匀化来进行估算，或者采用半经验公式。铀-水栅格的快中子倍增系数和水-铀比的关系如图8-15所示。

### 6. 栅格几何参数的选择

栅格几何参数主要指燃料块的厚度或半径和栅距。以压水堆为例来讨论无限介质增殖因数和它们的关系。设燃料块的尺寸固定，改变栅距，即改变燃料和慢化剂的体积比 $V_{H_2O}/V_{UO_2}$ ，此时热中子利用系数、逃脱共振几率、快中子倍增系数和 $V_{H_2O}/V_{UO_2}$ （或 $V_{H_2O}/V_U$ ）的关系如图8-16、图8-15所示。一般讲，有效裂变中子数 $\eta$ 主要由燃料浓缩度决定，栅格几何参数对它的影响很小。根据以前的讨论知道， $V_{H_2O}/V_{UO_2}$ 的变化对热中子和共振中子的影响是不同的。例如， $V_{H_2O}/V_{UO_2}$ 增大时对热中子利用不利，而对逃脱共振吸收就有利，从

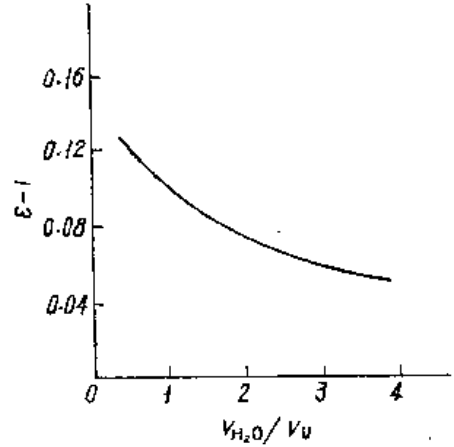


图8-15 铀-水栅格中 $\epsilon$ 和 $V_{H_2O}/V_U$ 的关系

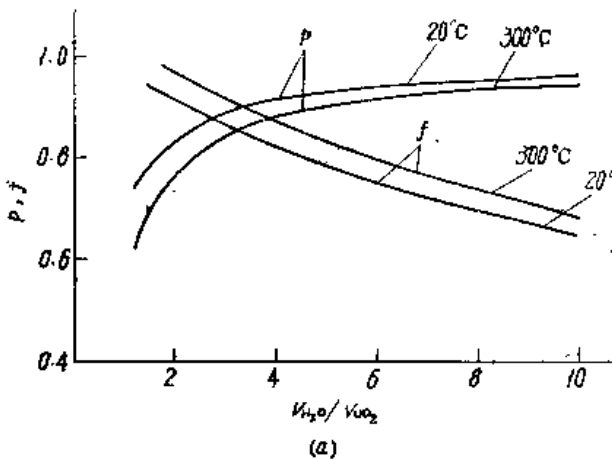


图8-16 压水堆的 $p$ 、 $f$ 、 $k_{\infty}$ 和 $V_{H_2O}/V_{UO_2}$ 的关系  
(a) 某压水堆的 $p$ 、 $f$ 和 $V_{H_2O}/V_{UO_2}$ 的关系  
(b) 某压水堆的 $k_{\infty}$ 和 $V_{H_2O}/V_{UO_2}$ 的关系  
(图中所标温度系指水的温度)

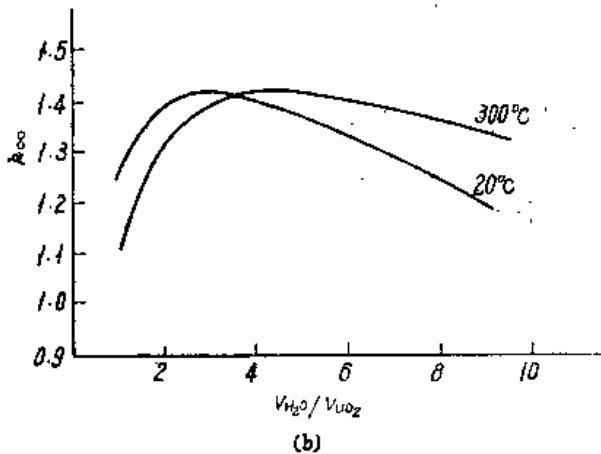


图 8-16(a)也可以看出这一点。由此可见,存在着一个合理的栅距或  $V_{H_2O}/V_{UO_2}$  比值,它使得  $(fp)$  或  $k_{\infty}$  达到极大值,不同  $V_{H_2O}/V_{UO_2}$  比值下,  $k_{\infty}$  的变化曲线如图 8-16(b) 所示。

如果假设材料曲率  $B^2$  和  $k_{\infty} - 1$  成比例,且假设徒动面积  $M^2$  与  $V_{H_2O}/V_{UO_2}$  的关系不大,那末,  $k_{\infty}$  达到极大值,  $B^2$  就达到极大值,此时临界体积极小。这就是说,在给定燃料浓度和慢化剂材料的情况下,存在着使堆芯临界体积为极小的栅格几何参数。有时把这样的栅格叫最佳栅格。但是,应该指出,这是从反应堆物理方面来看,而且仅仅是从临界体积极小的角度来看是最佳的。从安全角度来看,实际反应堆的栅格几何参数必须选在图 8-16(b) 中  $k_{\infty}$  的最大值的左边。只有这样,当温度升高,水的密度下降时,  $k_{\infty}$  值下降(这就保证第十一章所讨论的温度系数是负值),反应堆才是安全的。至于选在  $k_{\infty}$  的最大值左边的那一点上,则需根据热工-水力、结构设计、和经济性等因素综合考虑来确定。

### 参 考 文 献

- [1] J.R.拉马什著,洪流译,核反应堆理论导论,第十一章,原子能出版社,1977年。
- [2] G.I.贝尔、S.格拉斯登著,于里译,核反应堆理论,第二、八章,原子能出版社,1979年。
- [3] P.F.Zweifel, Reactor Physics, Chap.9, McGraw-Hill, 1973.
- [4] J.J.Duderstadt & L.J.Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, Chap. 10, John Wiley & Sons Inc., New York, 1976.
- [5] A.Amcyal, P.Eenoist and J.Herowitz, J.Nucl. Energy, 6, p.79—93. (1957).
- [6] А.Д.Галанни, О Вычислении Коэффициента Теплового Исполъзования, Иейтронная Физика, стр.125—142. Гссатомнедат, 1961.
- [7] L.W.Nordheim and G.F.Kuncir, GA-2527. (1961).
- [8] F.T.Adler, G.W.Hinman and L.W. Nordheim, The Quantitative Evaluation of Resonance Integrals, Proceedings of 2nd United National International Conference on the Peaceful Use of Atomic Energy, Vol.16, p/1988, 1958.
- [9] L.W.Nordheim, Nucl. Sci. Eng., 12, p.457—463(1962).
- [10] L.W.Strawbridge and R.F.Barry, Nucl.Sci.Eng., 23, p.53—73. (1965).

## 第九章 中子的热化

本章讨论中子的热化问题和热群参数的计算。

### 1. 热化过程的一般特征

第五章中曾经提到，在研究中子慢化问题时，通常，选定的某个分界能  $E^*$ （有时称为缝合能）把能区分为两区。 $E > E^*$  以上的能量区域为慢化区。在这个区内，当中子与原子核发生散射时，原子核可以视为自由的和静止的。中子散射是一种比较简单的过程，散射函数（或散射核）可以应用第一章第三节中所求得的关于自由静止核的散射函数。因而，对于具有这些能量的中子可以用第五章中所讨论过的比较简单的解析方法来确定其慢化能谱分布。

$E \leq E^*$  的能量区域称为热化区，或热能区。中子在这个区域内的运动和慢化过程通常称为热化。在这个能区内，由于中子的动能和介质原子核热运动的动能相当，所以介质原子核的热运动不可忽略。同时还必须考虑到分子间的化学键以及不同原子核散射波之间的干涉效应等等。这些因素使得热化区内的散射截面和散射函数变得异常复杂，从而使中子输运或热化方程的求解变得十分困难。当然，分界能  $E^*$  的定义是带有一定勉强性的，因为实际上热化过程与慢化过程不可能有明显的分界点，而是逐步过渡的。分界能必须选得足够高，使得在  $E > E^*$  区域内上述的热化效应影响可以略而不计。一般分界能可根据介质的性质选取，如取  $E^*$  等于 4 至 5 倍  $kT_n$ ，也可选取某个常量，例如习惯上取  $E^* = 0.625$  电子伏作为分界能。一般对于水堆取  $E^*$  大约为 0.6—1 电子伏，对于高温气冷堆  $E^* \approx 2.5$  电子伏。

由于在热中子反应堆内裂变反应和中子能谱分布主要是集中出现在热能区内，因而热化问题的研究对于热堆来讲具有非常重要的意义。精确地求得热群常数便是热堆计算的重要问题之一。在第一章中我们曾经介绍了按麦克斯韦谱平均计算热群截面的近似方法。它是建立在半经验的中子温度模型基础之上的；对于充分热化了的热堆系统它可以给出比较良好的近似结果。但是，在实际问题中，正如第一章中所已经提到过，由于慢化中子源的存在、中子的吸收以及泄漏等一些因素的影响，热中子的能谱偏离麦克斯韦分布。在燃料含量较多、吸收性比较强和未充分慢化的反应堆中，这种差别（中子温度模型的误差）可能达到显著的程度。因而在热中子反应堆设计中往往必须对每一具体系统计算出热中子的能谱。

在着手讨论热谱计算之前，有必要先简要地讨论一下热化过程的一般特征，以有助于对热化问题的理解。

#### （1）原子核热运动的影响

我们知道，在介质温度等于  $T$  时，原子核热运动的平均动能等于  $3kT/2$ ，其中  $k$  为玻尔兹曼常数。因此，当中子能量  $E$  小于 4 至 5 倍  $kT$  时，中子的能量便与原子核热运动的动能相当，原子核热运动对散射过程的影响就不可以被忽略。这时，中子与原子核碰撞时既可能损失能量（称为“向下”，或降能散射），也可能获得能量（称为“向上”，或增能散射）。向上散射的存

在给热化方程的求解增加了新的困难。

其次，在  $E$  远小于  $E^*$  的低能区，由于原子核热运动的影响，使得在实验室系内热中子的散射截面不再等于常数而将按  $1/v$  律变化。这个现象从物理上可以解释如下。设我们先在质心系内观察，这时中子与靶核的碰撞率便将等于散射截面与中子束强度的乘积（在质心系内度量），同时中子束的强度正比于中子与靶核的相对速度。然而，当中子能量足够低时，中子速度与原子核的速度相比起来很小，因而可以把碰撞看成是运动着的原子核与中子的相碰，这相当于中子束强度与中子的速度无关，只与原子核的速度有关。此外，我们知道，低能中子的散射截面在质心系内等于常数。因此得到，相互碰撞率将和中子的能量（速度）无关并等于常数，但是它是介质温度的函数。另一方面，相对于实验室系来看，这个常数碰撞率可以写成在实验室系内测量的散射截面  $\sigma_s$  和中子束强度的乘积。然而，现在中子束强度系正比于实验室系的中子速度  $v$ ，结果有

$$\sigma_s v = \text{常数},$$

因此，对足够低的能量的中子，散射截面将按  $1/v$  律变化并与介质的温度有关。这个现象可以在图9-1中石墨在低能区（0.002电子伏以下）的中子截面曲线上看到。

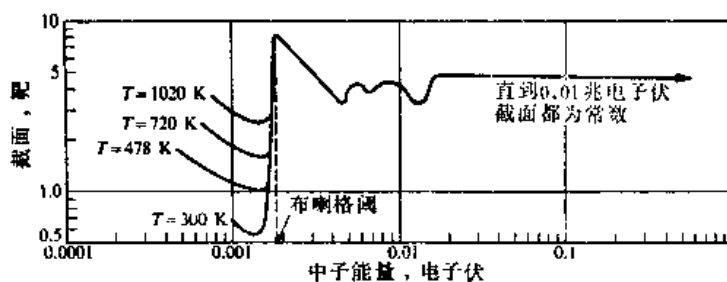


图9-1  $^{12}\text{C}$ 的低能部分的总截面

## (2) 化学结合键

当入射中子的能量比原子在分子中(或固体的结晶栅格中)的化学结合能  $B_m$  (大约为零点几电子伏数量级)大得多时,一般说来,可以忽略原子核被束缚在分子或固体栅格中这一事实。这时,可以看成中子系与自由的原子核相互碰撞,因而分子的散射截面便简单地等于它的组成核(自由核)的截面之和[(1-28)式]。然而,当中子能量与  $B_m$  相当或者更小时,就不能再把原子核看成为自由的了。分子(或固体)的散射截面也就不能简单地用它的组成核的自由截面的和来表示。

化学结合键效应的基本特征之一表现在:束缚在分子中的原子核的低能散射截面将大于自由核的散射截面。因为根据量子力学可以证明,中子与单个核散射的截面正比于两个粒子的折合质量  $\mu$  的平方。因而,当  $E \gg B_m$  时对于自由核的截面可写成

$$\sigma_f \propto \mu^2 \approx \left( \frac{mM}{m+M} \right)^2 = \left( \frac{A}{1+A} \right)^2$$

这里  $A$  是散射核对中子的相对质量。但是,当中子能量小于  $B_m$  或相当时,就不能再把核看作是自由的,而必须考虑化学键的束缚效应。这时在散射过程中,分子是作为一个整体对中子反冲的,其结果相当于增加了核的有效质量。随着  $E/B_m$  比值减小,核的有效质量增大;在



$E/B_n \rightarrow 0$ 的极限情况下，核的有效质量将等于整个分子的质量。因此，除轻分子外，中子和核的折合质量便趋近于1，即 $\mu_n^* \approx 1$ 。于是在0K时，完全束缚核的截面 $\sigma_b$ 与 $\sigma_{fr}$ 之比有

$$\sigma_b = \left(\frac{A+1}{A}\right)^2 \sigma_{fr} \quad (9-1)$$

核的质量愈小， $\sigma_b/\sigma_{fr}$ 比值愈大。例如，对于氢  $A=1$ ， $\sigma_b^H \approx 4\sigma_{fr}$ ，这和实验值很接近。在低能时， $\sigma_b^H \approx 80$ 靶，而 $\sigma_{fr}^H \approx 20$ 靶。当中子能量增大时 $\sigma_b$ 逐渐减少并趋近于 $\sigma_{fr}$ （见图9-2）。

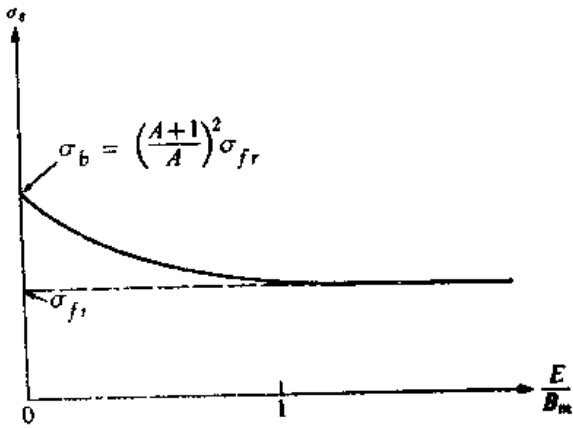


图9-2 0K 时分子中束缚原子核的低能散射截面与 $E/B_n$ 的函数关系 ( $B$ 是入射中子的能量)

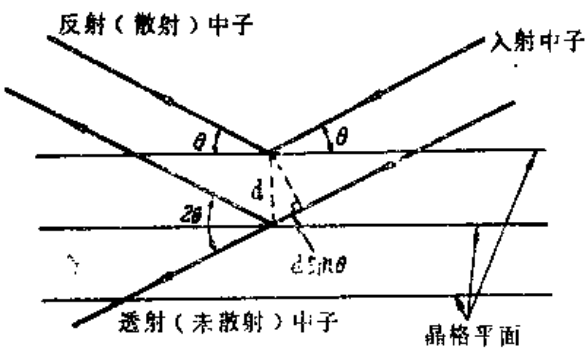


图9-3 布喇格散射

在考虑束缚原子核的散射时，必须区分弹性散射和非弹性散射两种类型。根据第一章的定义其主要区别在于：非弹性散射将使分子（或晶体）靶核的能态发生改变。自然，分子是一个复杂的动力学系统。作为一个很好的近似，可以把分子看成是一组好象由弹簧连结起来的原子。当低能中子（1电子伏以下）和这样一个系统碰撞时，固然不可能引起整个靶核本身的激发态，但是，它可能引起分子中原子的一个或几个振动量子态（或者分子的旋转或扭转的量子态）的改变。这样的散射便属于非弹性散射（注意，它与高能区的非弹性散射不同，那里是原子核本身被激发到更高的能态）。当中子与晶体中原子散射时，晶体的振动激发态可能发生变化。这种振动态的量子称为声子。因而非弹性过程伴随着声子的发射或吸收。在弹性散射时，由于把分子或晶体视为整体反冲，它的质量将比中子大得多，因而中子的能量变化可以忽略不计。这样，对于反应堆内低能区中子的热化或能量的变化而言，非弹性散射起着重要的作用。然而，对于热中子的输运过程，则两种散射都起着重要的作用。

**(3) 干涉效应**

第一章中曾经提到，中子与原子核的作用有时可以看作中子波与核的相互作用。中子的波长 $\lambda$ 与能量（电子伏）的关系由(1-1)式决定。根据公式可以计算出，对于波长 $\lambda$ 等于1 Å（相当于原子核间的距离）的中子，其能量约为0.079电子伏。因而当中子能量小于1电子伏时，中子波长与原子核间的距离便相当，中子与晶体散射时必须考虑不同散射核的散射波之间的干涉效应。这和X射线中的干涉现象是一样的。假定一个单能中子束以一定角度 $\theta$ 入射到晶体平面上，如图9-3所示。不难证明中子将从这些平面上转过 $2\theta$ 角被散射回去。当中子波长满足下列布喇格条件时：

$$n\lambda = 2d\sin\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9-2)$$

式中  $d$  为相邻晶格平面之间的距离, 由于散射波叠加的结果, 散射截面将变得很大, 称为布喇格散射峰。这个效应称为布喇格散射。另外, 根据 (9-2) 式可知, 存在一个最大的波长 (对应地存在一个最低能量), 大于这个波长就不可能发生布喇格散射。令  $\theta = \pi/2$  及  $n = 1$ , 可以得到最大波长  $\lambda_{m, \max} = 2d$ 。由于中子波长随中子能量的减小而增大, 因此, 存在一个最小的能量, 低于这个能量就不能发生布喇格散射, 这个能量称之为布喇格阈。在图 9-1 所示的碳的低能截面曲线上可以很明显地看到这个阈能和布喇格峰。

必须强调指出, 以上讨论只涉及散射问题。而吸收、裂变等其他截面则和自由核的截面相同, 因为, 化学键或相干效应对吸收和裂变截面的影响可以忽略不计。

综上所述, 可以看到, 反应堆热化问题的研究可以归纳成下面两个方面的问题:

- (1) 如何求得热化区内各种元素 (主要是慢化剂) 的散射核函数;
- (2) 输运方程或慢化方程的近似求解。

关于第一方面问题, 主要牵涉到固体物理和分子物理方面的一些理论。目前已经对各种慢化剂提出了一些实用和有效的散射核模型, 并用散射律从理论上统一地来加以描述。关于散射核的计算远远超出了本书的范围。有关这方面的资料, 读者可以参阅文献 [1]—[4]。关于第二方面问题, 以前所讨论过的关于输运方程的一些解法原则上都可以应用。然而, 由于热化区散射函数的复杂性 (例如向上散射等), 它给求解增加了困难。本章将先简要地介绍核反应堆计算中常用的一些散射核的近似模型, 然后讨论反应堆内热中子能谱的计算。

## 2. 散射核的近似模型

### 2.1 自由气体模型

这是描述热化区散射动力学过程的最简单的模型。它只考虑了原子核的热运动, 而未考虑原子核间的化学键影响, 认为所有原子核处于自由的、热平衡运动的状态中, 热运动的速度具有麦克斯韦分布。令  $N(\mathbf{V})d\mathbf{V}$  为原子核具有速度  $\mathbf{V}$  到  $\mathbf{V} + d\mathbf{V}$  之间的几率, 有

$$N(\mathbf{V})d\mathbf{V} = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-M\mathbf{V}^2/2kT} d\mathbf{V}, \quad (9-3)$$

这相当于把慢化剂模拟成一种单原子的自由气体。因而可以像第一章 3.1 节一样用简单的经典力学的方法来研究散射过程的动力学, 并求出散射函数的表达式。所不同的仅仅是, 这时原子核的速度  $\mathbf{V}$  不等于零而是按 (9-3) 式分布。

首先考虑一个速度为  $\mathbf{v}'$  的中子与速度为  $\mathbf{V}$  的原子核的碰撞, 这时系统质心的运动速度  $\mathbf{V}_m$  为 (图 9-4)

$$\mathbf{V}_m = \frac{\mathbf{v}' + A\mathbf{V}}{A+1}. \quad (9-4)$$

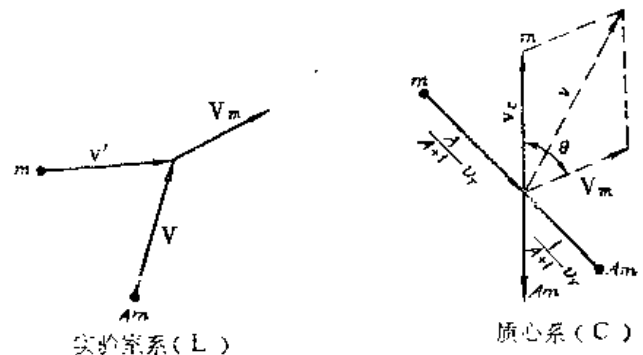


图 9-4 中子与原子核的散射

这里速度  $V_m$ 、 $v'$ 、 $v$  均系指实验室坐标系而言， $A$  为原子核对中子的相对质量。中子和原子核的相对运动速度  $v_r$  为

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}' - \mathbf{V}, \quad (9-5)$$

$$v_r^2 = v'^2 + V^2 - 2v'V\mu, \quad (9-6)$$

式中  $\mu$  是速度向量  $\mathbf{v}'$  与  $\mathbf{V}$  的夹角余弦，即  $\mu = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} / v'V$ 。

下面我们来推导散射核的表达式。

第一步先计算速度为  $v'$  的中子和速度为  $V$  且与中子速度的夹角的余弦为  $\mu$  的原子核碰撞后，中子速度变成为  $v$  和  $v + dv$  之间的几率  $g(v' \rightarrow v) dv$ 。让我们先在 C 系内讨论。在 C 系内散射是各向同性的，可以证明，碰撞前和碰撞后中子在 C 系内的速度大小不变，仅仅是改变了运动的方向（参考第一章 3.1 节）。设以角标 C 表示在 C 系内的参数值，有

$$v'_c = v_c = |\mathbf{v}' - \mathbf{V}_m| = \frac{A}{A+1} v, \quad (9-7)$$

设以  $\theta$  表示 C 系中散射后中子速度  $v_c$  与  $\mathbf{V}_m$  间的夹角（图 9-4），则在 L 系内碰撞后中子的速度  $v$  便等于

$$v = \sqrt{V_m^2 + v_c^2 + 2V_m v_c \cos\theta} \quad (9-8)$$

由于在质心系中散射是各向同性的，即散射角的分布是球对称的，因而中子散射到  $\theta$  和  $\theta + d\theta$  之间角锥元内的概率便等于 [见 (1-69) 式]，

$$f(\theta) d\theta = \frac{d\Omega_c}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin\theta d\theta.$$

注意到散射后中子速度  $v$  与散射角  $\theta$  之间存在着确定的对应函数关系 (9-8) 式，因而碰撞后速度为  $v$  的概率分布便等于：

$$g(v' \rightarrow v) = f(\theta) \left| \frac{d\theta}{dv} \right|, \quad (9-9)$$

并且当  $\cos\theta = 1$  时， $v$  达到最大值  $v_{max} = V_m + v_c$ ；当  $\cos\theta = -1$  时， $v = v_{min} = |V_m - v_c|$ 。另一方面根据 (9-8) 式有

$$\left| \frac{d\theta}{dv} \right| = \frac{v}{V_m v_c \sin\theta}.$$

把它代入 (9-9) 式便得到：

$$g(v' \rightarrow v) = \begin{cases} \frac{v}{2V_m v_c}, & v_{max} \geq v \geq v_{min}; \\ 0, & v \text{ 为其他值.} \end{cases} \quad (9-10)$$

另一方面，由于反应率系与相对速度  $v_r$  成比例，因而速度为  $v'$  的中子和速度为  $V$  的原子核的碰撞几率为

$$\sigma_{s_0} v_r N(\mathbf{V}) d\mathbf{V}, \quad (9-11)$$

这里  $\sigma_{s_0}$  为静止的自由原子核的微观散射截面。

第二步把求得的  $g(v' \rightarrow v)$  乘以 (9-11) 式并对所有  $\mathbf{V}$  积分之。这样便可求得速度为  $v'$  的中子散射后速度变为  $v$  的概率分布或散射函数  $\sigma_s(v')f(v' \rightarrow v)$  了。因而有

$$\sigma_s(v')f(v' \rightarrow v) = \frac{\sigma_{s_0}}{v'} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} v_r g(v' \rightarrow v) 2\pi N(\mathbf{V}) d\mu V^2 dV. \quad (9-12)$$

这里在 (9-3) 式中取  $dV = V^2 dV d\mu d\varphi$ ，其中  $\mu$ 、 $\varphi$  为球坐标系中（以中子速度方向为球坐标系的极轴）表示运动方向的坐标。

将 (9-10)、(9-3) 及 (9-6) 等式代入积分之，再将自变量  $v$  置换为  $E$  最后便可求得自由气体散射的能量分布函数

$$\begin{aligned} \sigma_s(E')f(E' \rightarrow E) = \frac{\sigma_{s_0}}{E'} \frac{\eta^2}{2} \left\{ \exp(x'^2 - x^2) [\operatorname{erf}(\eta x' - \rho x) \right. \\ \left. \pm \operatorname{erf}(\eta x' + \rho x)] + \operatorname{erf}(\eta x - \rho x') \mp \operatorname{erf}(\eta x + \rho x') \right\}, \\ E' \leq E, \end{aligned} \quad (9-13)$$

式中:  $\eta = \frac{A+1}{2\sqrt{A}}; \quad \rho = \frac{A-1}{2\sqrt{A}};$

$$x^2 = \frac{E}{KT}; \quad x'^2 = \frac{E'}{KT}; \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

$\operatorname{erf}(x)$  系误差函数（见附录10）；当  $E' < E$  时，式中取上面符号，而当  $E' > E$  时则取下面符号。

图9-5中画出单原子氢气体 ( $A=1$ ) 散射的能量分布函数的图形。从图中可以看出向上散射是存在的。我们看到，当中子能量  $E' \approx KT$  时，向上散射的概率是很大的，当  $E' \approx 25KT$  时，向上散射的概率便已经很小了。最后，当  $E' \approx 100KT$  或  $E' \gg E_m$  时，向上散射便趋近于零了，而且  $f(E' \rightarrow E)$  的形状便同我们所熟悉的静止核的散射函数一样，具有“矩形”的分布曲线了[见(1-71)式]。

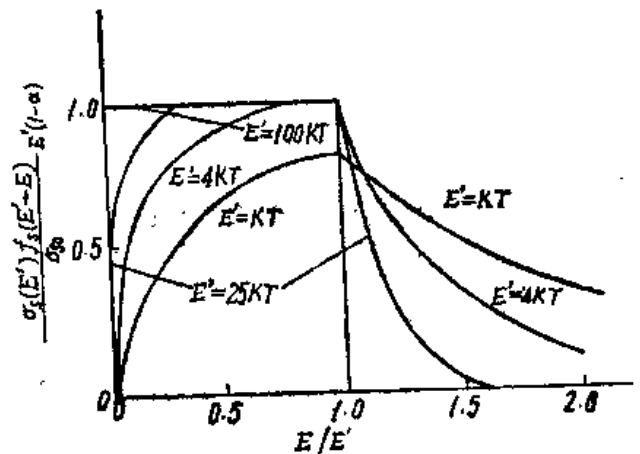


图9-5 单原子气体 ( $A=1$ ) 散射的能量分布函数曲线

将 (9-12) 式对所有  $v$  积分之，注意到  $\int_0^{\infty} g(v' \rightarrow v) dv = 1$  的归一化条件，便求得散射的总截面  $\sigma_s(v')$  等于

$$\sigma_s(v') = \frac{\sigma_{s0}}{v'} \int_{-1}^{+1} \int_0^{\infty} v \left( \frac{M}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-Mv'^2/2kT} \cdot 2\pi V^2 dV d\mu .$$

经过积分并将自变量  $v'$  替换为  $E'$ ，最后便得到：

$$\sigma_s(E') = \frac{\sigma_{s0}}{\beta_s} \left[ \left( \beta^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{erf} \beta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta e^{-\beta^2} \right], \quad (9-14)$$

式中  $E' = mv'^2/2$  是中子的动能， $\beta^2 = AE'/kT$ 。

从 (9-14) 式可以看到，在低能区散射截面是能量的函数。当中子能量  $E'$  或  $\beta$  很小的时候，由于  $\operatorname{erf} \beta$  将与  $\beta$  成比例，由上式便有：

$$\sigma_s(E) \rightarrow \frac{\sigma_{s0}}{\beta} \propto \frac{\sigma_{s0}}{v'}, \quad \text{当 } E' \text{ 很小时}$$

因而，当中子能量  $E'$  很小时，散射截面将按  $1/v$  律变化。而当  $E'$  很大时， $\operatorname{erf} \beta \rightarrow 1$ ，且  $\beta^2$  很大，由 (9-14) 式便导致  $\sigma_s(E') \approx \sigma_{s0}$ ，即散射截面将与能量无关。这些结果和上一节所得到的是一致的。

对于自由气体模型，在实际计算中常常用到下面两种近似：

(1) **自由质子气体模型** 主要用于轻水堆的热谱计算。它把反应堆芯部看成为温度为  $T$  的处于热平衡状态的自由质子气体。对于质子， $A=1$  ( $\eta=1, \rho=0$ )，因而散射核的形式将大大地简化。这样，(9-13) 式便简化为：

$$\sigma_s(E') f(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{\sigma_{s0}}{E'} \exp(x'^2 - x^2) \operatorname{erf} x', & \text{当 } E' < E \\ \frac{\sigma_{s0}}{E'} \operatorname{erf} x, & \text{当 } E' > E \end{cases} \quad (9-15)$$

它通常称为魏格纳-威尔金斯 (Wigner-Wilkins) 近似 (W-W 模型)，它的具体应用将在下一节中讨论。

(2) **重气体模型 (威尔金斯模型)** 对于  $A$  远远大于 1 的元素，例如石墨等，则在推导散射函数过程中，可以作进一步的简化。假如保留到  $1/A$  阶的精度，散射函数 (9-13) 式便得到下列简化形式<sup>[2]</sup>：

$$\sigma_s(E') f(E' \rightarrow E) = \sigma_{s0} \left\{ \delta(E' - E) + \frac{(E + E')}{A} \left( \frac{E}{E'} \right)^{1/2} \left[ -\delta'(E' - E) + KT \delta''(E' - E) \right] \right\}, \quad (9-16)$$

式中  $\sigma_{s0}$  为束缚原子的截面 [(9-1) 式]， $\delta'$  及  $\delta''$  是狄拉克  $\delta$ -函数的一阶和二阶导数 (见附录 7)。关于这个模型的应用将在下一节中详细讨论。

从上面的讨论可以看出，自由气体模型仅仅考虑了原子核热运动的影响，而没有考虑到

原子核间的化学键及散射波的相互干涉等效应，因而对于许多具体慢化剂来说是比较粗糙的。但是，它毕竟是比较简单的，并且通过对它的讨论有助于了解热化过程散射函数的一些特性。同时对于一些问题（例如轻水堆）它也给出了比较好的近似结果。另外，对于一些对芯部的热化过程影响较小的元素，例如氧、结构材料以及燃料等元素，利用这种简单模型计算精度也已经足够。

**自由气体模型的改进** 自由气体模型的主要缺陷在于没有考虑化学键效应，下面介绍两种通过半经验的方法对自由气体模型进行的修正。

(1) **BSJ(Brown-St. John) 模型**<sup>[4]</sup> 它主要对自由气体模型作了两个方面的修正。首先是考虑到分子内原子核间的束缚效应，对 $H_2O$ 或 $D_2O$ 中的束缚质子的质量用一更大的“有效质量”来代替。例如对 $H_2O$ 中的H以及 $D_2O$ 中的D分别取有效质量 $m_H = 1.884$ 和 $m_D = 3.595$ 。第二方面的改进则完全带有半经验性的，认为在质心系内散射截面不再等于常数，而是相对速度 $v_r$ 的函数并按下面指数规律变化，

$$\sigma_s(v_r) = \sigma_{s_0} + B e^{-K v_r}$$

式中 $v_r$ 是以相对能量为单位。常数 $B$ 和 $K$ 是通过试凑方法来确定的（选取合适的 $B$ 和 $K$ 值，使计算的散射截面值与实验值相符）。例如对于水中的氢取 $B = 26.2$ 靶， $K = 0.225$ ，而对于 $D_2O$ 中的氘有 $B = 1.8$ 靶， $K = 0.18$ 。

这样，散射核将具有如下形式：

$$\begin{aligned} \sigma_s(E') f(E' \rightarrow E) = & \sigma_s^{FG}(E' \rightarrow E) \\ & + B \frac{\eta^2}{2E'} \frac{\tau^3}{\lambda} \left\{ \exp(-K\tau^2 x'^2 / \beta^2) \left[ \operatorname{erf}(\eta' x - \rho' x') \right. \right. \\ & \left. \left. \pm \operatorname{erf}(\eta' x + \rho' x') \right] + \exp(x'^2 - \lambda x^2) \left[ \operatorname{erf}(\eta' x' - \rho' x) \right. \right. \\ & \left. \left. \mp \operatorname{erf}(\eta' x' + \rho' x) \right] \right\}, \quad E' \geq E \end{aligned} \quad (9-17)$$

式中：

$$\begin{aligned} \beta^2 &= T_0/T; & \eta' &= \eta/\tau; & \rho' &= \tau\sqrt{m} - \eta' \\ \tau^2 &= m\beta^2/(m\beta^2 + K); & \lambda &= 1 + m(1 - \tau^2) \end{aligned}$$

$\sigma_s^{FG}(E' \rightarrow E)$ 为自由散射核由(9-13)式决定，其他符号都和(9-13)式所表示的一样。计算表明BSJ模型具有良好的效果，对于重水和水，它和后面即将介绍的精确的尼尔金(Nelkin M.S.)模型很接近，但计算量却小得多。

(2) **广义重气体模型** 它是对重气体模型的改进，将在下一节中具体讨论。

## 2.2 分子和晶体（束缚原子）模型

实际的慢化剂（例如水和石墨等）的原子核都是以分子或晶体结构形式束缚联系着。当分子与中子发生散射时，通常是整个的分子移动，或者是分子的原子核在平衡位置附近作转动和振动。并且，这些运动具有固有的频谱分布。同时由于在介质分子之间有各种分子内力的作用，分子往往不能自由地而是作阻尼的振动、旋转和位移。这就是说，分子与中子的相互作用的正常反应可能受到其它分子存在的阻碍。这样就使得分子散射问题进一步复杂化——

散射截面既与分子本身的结构有关，也与分子同周围介质的结合情况有关。另一方面，中子与固态晶体散射，有可能激发晶体的振动态。这种振动态的量子称为声子。入射中子所损失的能量使用来增加了晶体的内能。从声子激发的性质来看，显然低能中子与固体分子的散射是和晶体结构以及晶体内原子间的作用力有着密切的关系。即使是同一种材料的样品，如果它的微观晶体结构不同，那么它们的散射截面就可能有些不同。因此，由于化学键所引起的种种效应使得散射截面变得异常复杂。

近年来，已经能够从分子和晶体的理论以及关于分子振动频率的合理假设出发，推导出分子或晶体的散射截面。但是这些计算是很复杂的，并超出了本书的范围。更确切地说，这方面的研究是属于分子和固体物理工作者的事。下面我们只引用其最后结果和计算公式。通常微分散射截面 $\sigma_s(E' \rightarrow E; \mu_0)$ 可以通过散射律 $S(\alpha, \beta)$ 表示如下<sup>[21]、[31]</sup>：

$$\sigma_s(E' \rightarrow E; \mu_0) = \frac{\sigma_b}{4\pi kT} \left( \frac{E}{E'} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(-\beta/2) S(\alpha, \beta), \quad (9-18)$$

式中 $\sigma_b$ 为束缚原子的截面[(9-1)式]， $\alpha$ 、 $\beta$ 分别是表示散射时中子动量和动能变化的两个无量纲量：

$$\begin{aligned} \alpha &= (E' + E - 2\sqrt{E'E}\mu_0) / AkT, \\ \beta &= (E - E') / kT, \end{aligned} \quad (9-19)$$

$S(\alpha, \beta)$ 称为材料的散射律，它与具体散射材料种类和结构有关。在高斯近似<sup>[21][31]</sup>下可以表成：

$$\begin{aligned} S(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta t} \exp \left\{ -\alpha \int_0^{\infty} \frac{\rho(\beta)}{\beta \text{sh}(\beta/2)} \right. \\ &\quad \left. [\text{ch}(\beta/2) - \cos\beta t] d\beta \right\} dt, \end{aligned} \quad (9-20)$$

这里 $\rho(\beta)$ 为所讨论材料的频谱分布。它是根据液体分子运动或晶体栅格振动理论研究确定的。不同材料具有不同的频谱。因而，现在关键问题在于确定不同慢化剂的频谱分布 $\rho(\beta)$ ，或等价的 $\rho(\omega)$ 分布， $\omega = kT\beta/\hbar$ 。一旦求得合适的 $\rho(\omega)$ 分布，将它代入上面公式便可计算出微分散射截面值来。下面介绍两种常用的近似散射核模型。

### (1) 尼尔金模型<sup>[5]</sup>

这是适用于轻水的散射核近似模型。它考虑了整个分子（有效质量 $m_T = 18$ ）的自由移动、能量 $\omega_1 = 0.065$ 电子伏处氢原子的受阻（受到邻近分子妨碍）转动和能量 $\omega_2 = 0.205$ 电子伏及 $\omega_3 = 0.481$ 电子伏的弯曲振动和拉伸振动。尼尔金建议用一组 $\delta$ 函数的组合来表示氢的频谱分布，即

$$\rho(\omega) = \sum_i \frac{1}{m_i} \delta(\omega - \omega_i) \quad (9-21)$$

表9-1中给出各种运动的有效质量 $m_i$ 和 $\omega_i$ 值。对于中子与氧原子核的散射在上述模型中没有加以考虑，但在轻水中，氧的散射贡献很小（不到百分之几），因而对于氧原子核的处理应用自由气体模型就可以了。尼尔金模型对于 $D_2O$ 也同样给出良好的结果。

表9-1 H<sub>2</sub>O 和 D<sub>2</sub>O 的分子振动参数

振动型式	H <sub>2</sub> O		D <sub>2</sub> O	
	$m_i$	$\omega_i$ , eV	$m_i$	$\omega_i$ , eV
平动	18	0	20	0
转动	2.32	0.065	6.0	0.048
弯曲振动	5.85	0.205	10.8	0.146
伸长振动	2.93	0.481	5.3	0.339

表9-2 常用慢化剂的散射核模型

材料	散射核模型
H <sub>2</sub> O	尼尔金、W-W或BSJ模型
C	GHFG <sup>1)</sup> 、帕克斯模型
D <sub>2</sub> O	尼尔金、GHFG、BSJ模型
O、结构材料等	自由气体模型

1) 广义重气体模型。

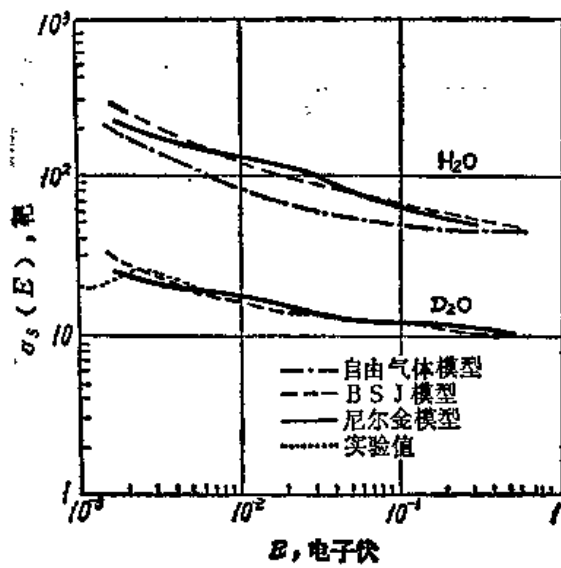


图9-6 由不同模型计算的散射截面

\* H<sub>2</sub>O 的散射截面的实验值与尼尔金模型曲线重合。

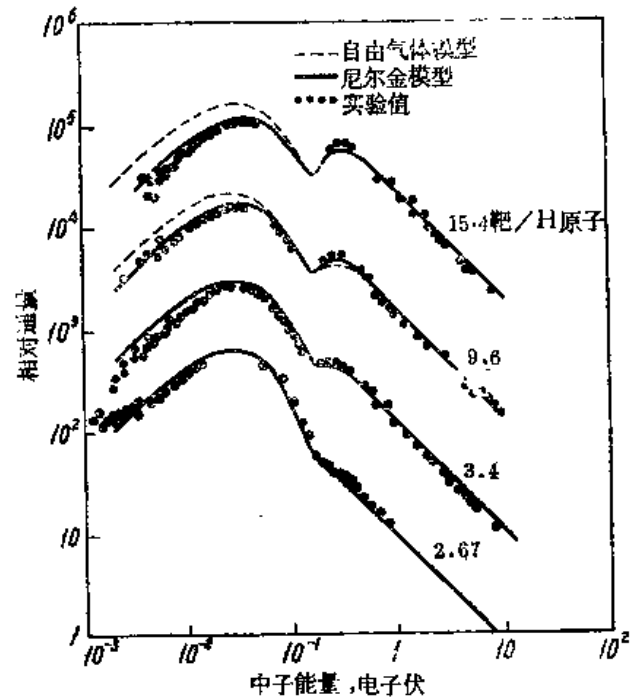


图9-7 不同硼浓度的水溶液中的中子能谱

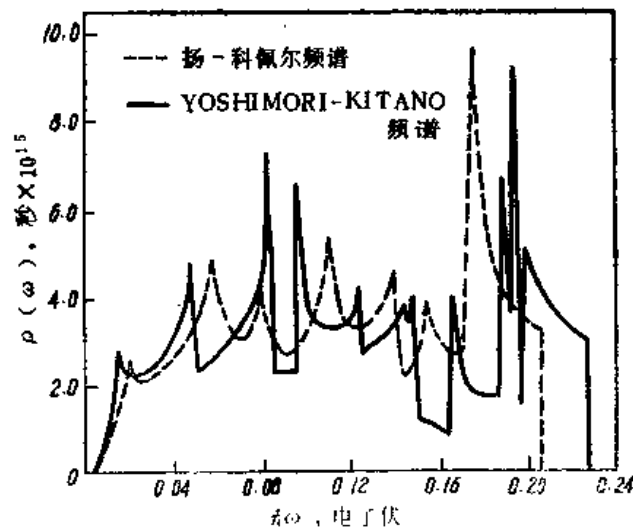


图9-8 石墨的两个频谱



图9-6和图9-7给出应用各种模型所得到的散射截面及水中的热中子谱的计算结果和实验结果。从这些图中可以看到，尼尔金模型比自由气体模型给出更精确的结果，尤其是在低能（例如 $E < 0.02$ 电子伏）部分，这是因为在低能区化学键和干涉效应将显得更加主要，而自由气体模型则没有考虑到它们的影响的缘故。

(2) 帕克斯 (Parks D.E.)模型

它常用于石墨的散射核的计算<sup>[6]</sup>。它给出散射律的有效计算方法。其频谱分布 $\rho(\omega)$ 通常应用YOSHIMORI-KITANO<sup>[7]</sup>或杨-科佩尔<sup>[8]</sup>(Young-Koppel)提出的频谱(图9-8)或由实验求得的频谱来计算。由于石墨晶体结构的各向异性；在同一平面上石墨原子排列成六角形，相邻原子之间有着很强的束缚联系，而不同平面之间的原子的相互作用则很弱，近期曾提出了对振动各向异性的考虑，但是这时散射律的计算太复杂，因而只有当需要更精确的散射律时才应用到它。

表9-2给出反应堆常用慢化剂的散射核模型。散射核的计算一般都编制成专门的计算程序，例如国外早期的GAKER<sup>[9]</sup>等都可以很方便地用于散射核的计算。目前国外已经编有直接利用散射律计算散射截面的程序，例如GASKET<sup>[10]</sup>-FLANGE<sup>[11]</sup>程序，计算的原始数据取自ENDF/B截面数据库，根据这些截面数据和给定的频谱 $\rho(\omega)$ 由GASKET程序产生出散射律 $S(\alpha, \beta)$ 数据，而再由FLANGE程序计算出所需的散射截面 $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$ 数据来。

### 3. 无限均匀介质内中子的热化

芯部中子热化问题研究的主要目的在于求得芯部的热群常数。这就必须知道热中子的空间-能量分布。然而，由于芯部栅格结构的复杂性，精确地求解栅格的热中子空间-能量分布是非常困难的。在工程设计中，通常作一些简化或近似的处理。按照计算精度要求的不同，目前实用的热谱计算大致可以分为两大类：

1. 应用等效栅元方法把问题简化为一个一维问题来求出栅元内的 $\phi(r, E)$ 分布<sup>[1]</sup>。
2. 近似地认为栅元内热中子的空间和能量分布可以分离变量写成 $\phi(r, E) = \phi(E)\varphi(r)$ ，而其中能量分布 $\phi(E)$ 则用一个等效无限均匀介质的能谱分布来近似地表示。

关于第一类问题的计算，将在下一节中介绍。本节讨论后一种近似方法。这种方法可以说是实用热谱计算程序中最简单、计算时间最短的程序。因而在仅需一般的精度要求并且需要大量重复计算的情况下（如初步设计或一般燃耗计算），它是常常被采用的。

#### 3.1 无限介质内中子热化方程和麦克斯韦分布

考虑一含有均匀分布源的无限的均匀介质。在这种情况下，能量相关通量 $\phi(E)$ 对于所有能量都与空间位置无关。根据中子平衡原理，按照建立(5-3)式中子慢化方程同样的方法，可以很容易地写出无限均匀介质内的热化方程：

$$[\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)]\phi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E')f(E' \rightarrow E)\phi(E')dE' + S(E), \quad (9-22)$$

1) 对于非均匀的燃料组件有时也用二维程序，但需更长的计算时间，因而其使用范围仍然有限。

式中 $S(E)$ 为 neutron 源项。这里积分的下限为 $E' = 0$ ，这是因为在热化区存在着向上散射的缘故。如图9-9所示，进入 $dE$ 内的中子不仅来自 $E' > E$ 的能区中的中子的向下散射，也可能来自 $E' < E$ 的能区中的中子的向上散射。另一方面，式中 $\Sigma_s(E')f(E' \rightarrow E)$ 在热化区( $E < E_m$ )内必须用上一节所讨论的热中子散射核来表示。

在热化区，通常用一个单一函数 $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$ 来代替方程(9-22)中的 $\Sigma_s(E')f(E' \rightarrow E)$ ，即

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E')f(E' \rightarrow E), \quad (9-23)$$

函数 $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$ 也称为散射核。根据散射截面定义有

$$\Sigma_s(E') = \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE, \quad (9-24)$$

如果介质内没有中子源存在，则方程(9-22)便写成：

$$[\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)]\phi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi(E')dE'. \quad (9-25)$$

这便是无限介质内中子热化的基本方程。当没有吸收时便进一步简化为：

$$\Sigma_s(E)\phi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi(E')dE'. \quad (9-26)$$

在这种情况下，中子就好象气体中分子一样在介质内作无规则的运动。由于与原子核多次碰撞，这些中子不断获得能量和损失能量，但在稳定状态下，任何能量间隔 $dE$ 内的中子数必然保持一个稳定的分布。应用统计力学可以证明，中子密度满足麦克斯韦分布[(1-107)或(1-108)式]；也就是说，满足(9-26)式的中子通量 $\phi_M(E)$ 为：

$$\begin{aligned} \phi_M(E) &= n_0 v N(E) = \phi_{t,s} \frac{E}{(kT)^2} \exp(-E/kT), \\ \phi_{t,s} &= n_0 \left( \frac{8kT}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (9-27)$$

式中 $n_0$ 为单位体积内中子总数。(9-27)式便是平衡状态情况的热中子通量的分布——麦克斯韦分布。对(9-27)式求导并令其等于零，便可以求出对应于 $\phi_M(E)$ 的最大值的最可几能量为 $E_0 = kT$ 。

另一方面，由统计力学中的定律知道，在一个热平衡的系统中所发生的任一能量交换（或转换）过程必然伴随有一个相类似的逆过程，并且这两种过程以相等概率发生。这个定律通常称为细致平衡原理。把这个原理应用到目前情况便得到：当中子与介质原子核达到热平衡时，每秒由能量间隔 $dE'$ 散射到任何其他能量间隔 $dE$ 的中子数应恰好等于由间隔 $dE$ 散射回到 $dE'$ 的中子数。由于热平衡时中子通量服从麦克斯韦分布((9-27)式)，因而细致平衡条件可以写成：

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi_M(E') = \Sigma_s(E \rightarrow E')\phi_M(E) \quad (9-28)$$

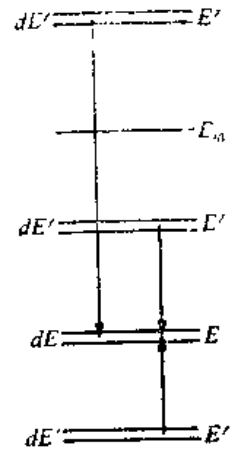


图9-9 中子热化方程的建立 ( $E_m = E^*$ )

可以证明, 关系式 (9-28) 式的成立将导致中子平衡方程 (9-26) 的成立。为此, 将 (9-28) 式对  $E'$  积分便有

$$\int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi_M(E') dE' = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E \rightarrow E') \phi_M(E) dE' = \Sigma_s(E) \phi_M(E),$$

这就得到 (9-26) 式。由此我们还可以看出, 细致平衡条件 (9-28) 保证了麦克斯韦分布为无源、无吸收的无限介质内热平衡状态下中子通量的解。这是可以预料的事。因为细致平衡是表示每一对能量间隔  $dE$  和  $dE'$  之间的平衡。而方程 (9-26) 则给出  $dE$  和所有  $dE'$  之间的总平衡关系。因而, 满足细致平衡条件必然导致总平衡关系的成立。

细致平衡条件在研究热化问题时是很有用的。因为正如前一节所讨论那样, 多数的散射核函数都是在从理论上作一些近似处理的条件下求得的。细致平衡条件给所求得的近似散射核的基本性质加上一个限制条件, 即应满足 (9-28) 式。这就保证了所求的近似散射核至少在极限 (无源、无吸收) 情况下能给出麦克斯韦分布。

## 3.2 无限介质热谱的近似计算

### 3.2.1 自由质子气体模型

这是轻水反应堆热谱计算中最简单的一种近似模型。它把芯部模拟成温度等于  $T$  的热平衡状态的质子 ( $A=1$ ) 气体, 并假定吸收截面满足  $1/v$  律。因而它主要是适用于以氢为慢化剂的轻水反应堆的热谱计算, 并取得了满意的结果。

在这个模型中, 在求解热化方程 (9-25) 时, 右端积分号内的散射核用自由质子模型 (9-15) 式代入。这是一个积分方程, 魏格纳和威尔金斯研究了它的求解问题<sup>[12]</sup>, 建议通过适当的运算把它变换成为更易于求解的二阶微分方程。

为了方便, 设以  $x = v/\sqrt{2kT} = (E/kT)^{1/2}$  为自变量, 用它置换  $E$ , 则热化方程 (9-25) 便写成:

$$[\Sigma_s(x) + \Sigma_a(x)]\phi(x) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(x' \rightarrow x)\phi(x') dx' \quad (9-29)$$

令  $N(x) = \phi(x)/[x^2 M(x)]^{1/2}$ , 其中  $M(x)$  为麦克斯韦分布,

$$M(x) = x^2 e^{-x^2}, \quad (9-30)$$

这样积分方程 (9-29) 便写成:

$$[V(x) + \Gamma(x)]N(x) = \int_0^{\infty} S(x' \rightarrow x)N(x') dx' \quad (9-31)$$

根据 (9-14) 和 (9-15) 式, 可求得式中:

$$S(x' \rightarrow x) = \Sigma_s(x' \rightarrow x)x' \sqrt{M(x')} / \Sigma_{s0} \sqrt{M(x)}$$

$$= \begin{cases} 2 \exp \left[ -\frac{x^2 - x'^2}{2} \right] \operatorname{erf}(x'), & x' < x \\ 2 \exp \left[ \frac{x^2 - x'^2}{2} \right] \operatorname{erf}(x), & x' > x \end{cases} \quad (9-32)$$

$$V(x) = \Sigma_s(x) \frac{x}{\Sigma_{s0}} = \left( x + \frac{1}{2x} \right) \operatorname{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad (9-33)$$

$$\Gamma(x) = -\frac{\Sigma_a(x)x}{\Sigma_{s0}} = -\frac{\Sigma_a(v_T)x_T}{\Sigma_{s0}}, \quad (9-34)$$

将 (9-31) 式中的  $S(x' \rightarrow x)$  用 (9-32) 式表示便得到:

$$\begin{aligned} & 2e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{x'^2}{2}} \operatorname{erf}(x') N(x') dx' + 2e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{erf}(x) \int_x^\infty e^{-\frac{x'^2}{2}} N(x') dx' \\ & = [V(x) + \Gamma(x)] N(x). \end{aligned} \quad (9-35)$$

现在我们设法把上述积分方程变换为一个二阶微分方程。设有线性二阶微分算子

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dx} \frac{1}{P(x)} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (9-36)$$

其中  $P(x)$  和  $W(x)$  为待定的函数。为了确定它们, 将  $\mathbf{L}$  作用于方程 (9-35), 并在所得到的结果中令所有积分号前的系数等于零。根据这个条件便可求出:

$$\begin{aligned} P(x) &= e^{-x^2} + \sqrt{\pi} x \operatorname{erf}(x), \\ W(x) &= \frac{e^{-x^2}}{P^2(x)} - \frac{x^2}{P(x)}. \end{aligned} \quad (9-37)$$

然后, 把所求得的算子  $\mathbf{L}$  作用于 (9-35) 式。在所得结果中, 积分项前的系数显然均等于零, 也就是说不再包含有积分项, 这样便把原来的积分方程变换成为如下的二阶微分方程

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \frac{1}{P(x)} \frac{d}{dx} [V(x) + \Gamma(x)] N(x) + \left[ W(x) [V(x) + \Gamma(x)] \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \right] N(x) = 0, \end{aligned} \quad (9-38)$$

边界条件为: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $N(0) = 0$ 。这样, 任何满足微分方程 (9-38) 及边界条件的解必为积分方程 (9-31) 的解。方程 (9-38) 称之为魏格纳-威尔金斯方程。

微分方程 (9-38) 的优越性在于它比积分方程的数值求解要方便得多, 因为当把积分方程直接离散, 所得到的是一个满矩阵的方程, 而对微分方程离散得到的是带状矩阵, 并可以从前面一个或几个能量节点直接依序算出另一个能量节点上的数值来, 这样只需比较小的计算机存储量就可以了, 并且可以不用迭代方法。

考虑到有限介质的泄漏影响, 可以在吸收截面中加上  $D(E)B^2$  项来加以修正。对于含氢介质的混合物, 则可用一个等效截面来代替自由氢原子的截面, 即

$$\Sigma_s^H \rightarrow \sum_j \xi_j N_j \sigma_{s,j} = \bar{\xi} \Sigma_s$$

文献[13]中介绍了方程(9-38)的具体求解方法。由于其计算简单且给出良好的精度，因而魏格纳-威尔金斯近似在轻水堆的热谱计算中曾获得了广泛的应用。通常我们把以解(9-38)方程为基础的计算程序称之为SOFOCATE型程序。

图9-10给出用自由质子模型所求得具有慢化中子源的 $1/v$ 吸收剂内的热中子能谱。曲线右端所出现的通量下陷，是由于在靠近热能处的共振峰(例如铀-239、铀-235或氙-135)所引起的。

最后应该指出，由于热中子的平均自由程和栅元之间的距离相比往往是很小的，因而在求解热群常数时必须考虑到栅元之内空间的非均匀影响(第八章)，这样，热谱的具体计算步骤大致如下：

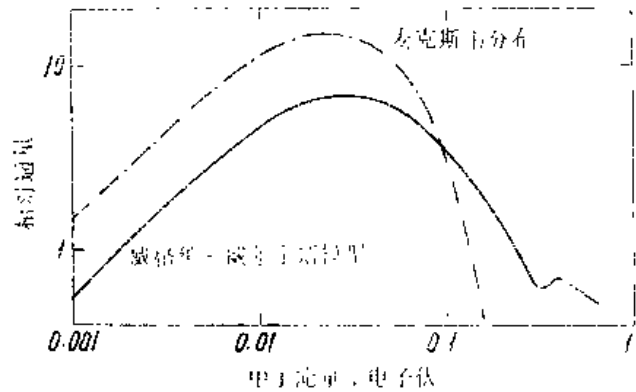


图9-10 用魏格纳-威尔金斯近似求得的热中子能谱

(1) **空间通量分布计算** 把正方形或六角形栅元等效成一维同心圆，保持各材料的体积不变。根据按能谱计算求得的平均截面，计算出燃料、包壳和慢化剂各区的通量分布或平均通量。一般可采用第八章所介绍的A.B.H方法，或其他更精确的方法。

(2) **能谱计算** 将栅元变换成等效均匀介质，这时把实际区域的原子核密度按体积和从上面求得的通量空间分布进行权重修正。然后根据所选择的模型[例如SOFOCATE方程(9-38)]求出中子的能谱分布 $\phi(E)$ 。

一般地说，上述两个计算过程要反复交替地迭代进行，即用前面SOFOCATE能谱计算程序输出的按能谱平均的截面来作空间通量分布计算。求出新的通量空间分布之后，用它来权重计算出新的均匀化介质的原子核密度，再输入到SOFOCATE能谱程序中去以作为下一次能谱计算之用，……。这个过程一般是迅速收敛的，特别是低浓缩铀系统。

### 3.2.2 重气体模型

对于质量数较大( $A \gg 1$ )的慢化剂，例如石墨等，自由质子模型不能适用。这时，应用重气体模型是比较适宜的。

引进函数 $\psi(E) = \phi(E) / M(E)$ 。其中 $M(E)$ 为中子通量的麦克斯韦分布 $\phi_M(E)$ (9-27)式。用 $\psi(E)$ 替换 $\phi(E)$ ，同时根据细致平衡条件

$$M(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) = M(E) \Sigma_s(E \rightarrow E'),$$

热化方程(9-25)便可写成

$$[\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)] \psi(E) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E \rightarrow E') \psi(E') dE' \quad (9-39)$$

一般在吸收不是太强烈的情况下，中子通量 $\phi(E)$ 接近于平衡分布 $M(E)$ ，因此 $\psi(E)$ 是较 $\phi(E)$ 随能量 $E$ 变化更为缓慢的函数，而且对于重元素，散射时能量变化的分散度是比较小

的，因而，可以把积分号内的 $\psi(E')$ 在 $E$ 处展成泰勒级数，即

$$\psi(E') = \psi(E) + (E' - E) \frac{d\psi(E)}{dE} + \frac{1}{2!} (E' - E)^2 \frac{d^2\psi(E)}{dE^2} + \dots \quad (9-40)$$

可以预期它很快地收敛。将(9-40)式代入(9-39)式便得

$$\Sigma_s(E)\psi(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} L_n(E) \frac{d^n\psi}{dE^n}, \quad (9-41)$$

其中 $L_n(E)$ 为散射核的 $n$ 次能量矩，

$$L_n(E) = \int_0^{\infty} (E' - E)^n \Sigma_s(E \rightarrow E') dE' \quad (9-42)$$

应用单原子(自由)气体模型的散射函数，当 $A$ 很大时(即重气体模型)保留到 $1/A$ 项，可以证明：

$$L_1(E) = \xi \Sigma_{s_0} (2kT - E) + O\left(\frac{1}{A^2}\right),$$

$$L_2(E) = 2\xi \Sigma_{s_0} EkT + O\left(\frac{1}{A^2}\right),$$

$$L_3(E), \dots, L_n(E) = O\left(\frac{1}{A^2}\right).$$

其中 $\xi = 2/A$ ，对于重气体可以略去 $1/A^2$ 项，将这些结果代入(9-41)式便得到：

$$\Sigma_s \psi(E) = \xi \Sigma_{s_0} \left[ (2kT - E) \frac{d\psi(E)}{dE} + kTE \frac{d^2\psi(E)}{dE^2} \right]. \quad (9-43)$$

用 $\phi(E)$ 表示，则有

$$\Sigma_s \phi(E) = \xi \Sigma_{s_0} \left[ EkT \frac{d^2\phi(E)}{dE^2} + E \frac{d\phi(E)}{dE} + \phi(E) \right], \quad (9-44)$$

或

$$\Sigma_s \phi(E) = \frac{d}{dE} \left\{ \xi \Sigma_{s_0} \left[ EkT \frac{d\phi}{dE} + (E - kT)\phi(E) \right] \right\}. \quad (9-45)$$

式(9-44)或(9-45)式称之为重气体方程或威尔金斯方程。它也可以从把重气体模型的散射核(9-16)式代入(9-25)式积分直接求得。这样，可以看到重气体模型实际上是把散射算子 $L$

$$L\phi(E) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi(E') dE', \quad (9-46)$$

用一个二阶微分算子 $L_H$ 来近似代替，

$$L_H = \frac{d}{dE} \left\{ \xi \Sigma_{s_0} \left[ EkT \frac{d}{dE} + (E - kT) \right] \right\} + \Sigma_s(E) \quad (9-47)$$

这样，我们便把积分方程形式的热化方程 (9-39) 化成为一个二阶微分方程 (9-45) 式。

可以看到，当  $T \rightarrow 0$  (原子核静止) 的极限情况下，重气体模型方程 (9-45) 便成为年龄近似方程了，这是可以预料到的事，因为年龄近似本身就是对重元素的  $1/A$  阶近似。图9-11中示出不同参数值  $\Gamma = \Sigma_s(kT) / \xi \Sigma_{s_0}$  下，重气体方程 (假设  $1/v$  吸收) 的数值解的曲线。遗憾的是，由于重气体模型没有考虑化学键的影响，因而计算结果不够理想，实际中很少应用。常用的是对它改进后的模型——广义重气体模型。

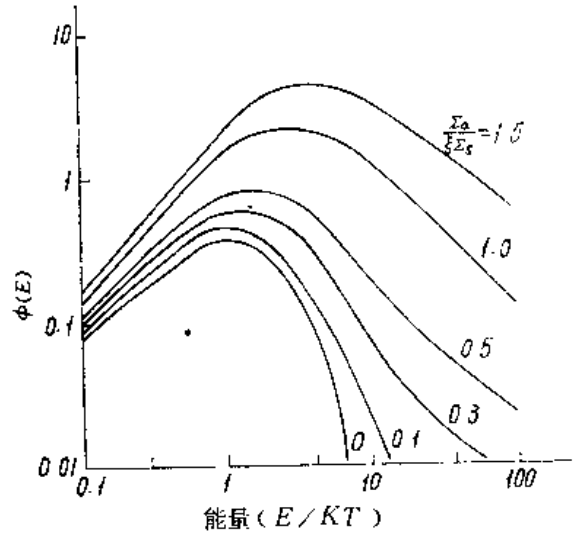


图9-11 用重气体模型算得的热中子能谱

### 3.2.3 广义重气体模型

重气体模型系以自由气体模型出发所作的近似，并没有考虑化学键的影响。这时认为  $\xi \Sigma_s = \xi \Sigma_{s_0} = \text{常数}$ 。实际上，考虑到化学键影响， $\xi$  并不等于常数，而是能量函数。因而我们可以这样地对 (9-45) 式进行改进，即认为  $\xi \Sigma_s$  是随能量变化的函数，即  $\xi \Sigma_s = \xi \Sigma_{s_0} f(E)$ ，其中  $\xi \Sigma_{s_0}$  即为  $E \rightarrow \infty$  时 (即自由气体) 之  $\xi \Sigma_s$  值，而  $f(E)$  为待定的任意函数。这样把算子  $L$  用下面算子来代替<sup>[14]</sup>，即

$$L \rightarrow L_{GHFG} = \xi \Sigma_{s_0} \frac{d}{dE} \left\{ f(E) \left[ EkT \frac{d}{dE} + (E - kT) \right] \right\} + \Sigma_s(E) \quad (9-48)$$

$L_{GHFG}$  便称为广义重气体或霍罗威茨 (Horowitz) 算子。显然，令  $f(E) \equiv 1$  时便是前面的重气体模型。

现在问题的关键在于如何正确地决定和计算  $f(E)$  函数，使它与化学键以及系统特性等联系起来并能得到正确的热谱。一般讲  $f(E)$  可以通过把谱的实验测量结果和计算值相比较而求得，或者应用解析方法借助散射核函数  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$  的有关积分来解析求出<sup>[2]</sup>。图9-12给出

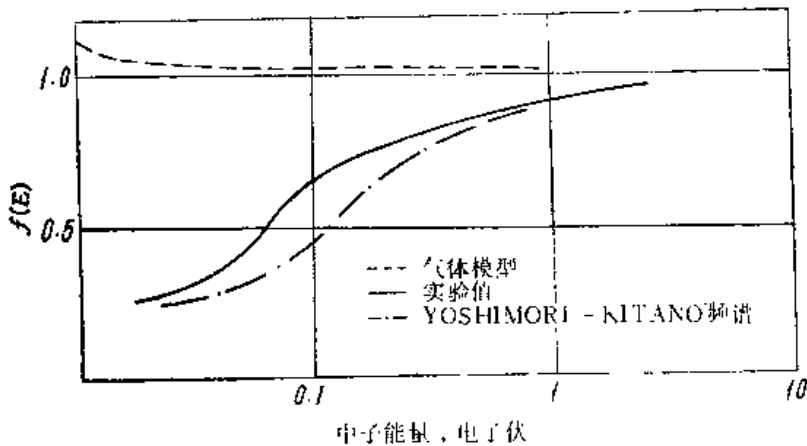


图9-12 室温下石墨的  $f(E)$  值

卡德霍尔型栅格的实验值与计算值曲线。实际表明广义自由重气体模型对于石墨及  $D_2O$  慢化反应堆具有良好的效果。

#### 4. 栅元内热中子空间-能量分布的计算

前面通过分离变量把空间和能量效应分开处理，所求得的群常数应该说是近似的结果。因为在非均匀栅元内各区的的中子能谱严格说是不相同的。因此为了更精确地求得热群的常数，就必须直接求出栅元内热中子的空间-能量分布  $\phi(\mathbf{r}, E)$ ，然后用它权重求得热群的参数。这显然要比前面介绍的把空间和能量效应分开处理的办法具有更高的精确度。有许多不同的方法（其中包括以精确的蒙特卡罗方法）可用来求得栅元内热中子的空间-能谱分布。然而在这些方法中，碰撞几率方法（或称积分输运理论）在实际应用中获得了广泛的发展和应用。它的主要优点在于既具有较高的精确度而又较同样精度的其他计算方法来得简单。因而在工程设计中，许多热谱的程序都是应用碰撞几率方法来计算的。

##### 4.1 积分输运理论的基本方程

首先，我们列出积分方程形式的中子输运方程。假定在实验室坐标系内中子与原子核的散射以及中子源项是各向同性的，则根据(4-53)式可以写出：

$$\Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E) = \int_{r'} P(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) \left[ \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}', E' \rightarrow E)\phi(\mathbf{r}', E')dE' + S(\mathbf{r}', E) \right] d\mathbf{r}' , \quad (9-49)$$

式中

$$P(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) = \frac{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} \exp \left[ - \int_0^{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \Sigma_t(E, l) dl \right] . \quad (9-50)$$

它的物理意义是在  $\mathbf{r}'$  处单位体积内具有能量为  $E$  的中子将在  $\mathbf{r}$  处发生第一次碰撞的几率。 $S(\mathbf{r}', E)$  为中子源项。其他符号都是前面所习惯使用的。方程 (9-49) 便是积分输运理论的基本方程。它可以简写成

$$\Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E) = \int_{r'} P(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) [\mathbf{L}\phi(\mathbf{r}', E) + S(\mathbf{r}', E)] d\mathbf{r}' , \quad (9-51)$$

式中  $\mathbf{L}$  就是(9-46)式所定义的散射算子。 $\mathbf{L}\phi(\mathbf{r}', E)$  便是由散射引起的中子源项。

在对反应堆栅格求解时，通常应用前一章所介绍的等效栅元法把它简化为一个一维问题来求解。这时把正方或六角形栅元用一等效圆柱栅元来代替而保持栅元的体积不变，在栅元的边界上再作一些假设，例如净中子流等于零或各向同性地反射等边界条件。

把等效圆柱栅元沿半径  $r$  分成  $I$  个同心圆心区 ( $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_i < \dots < r_I = R$ )。如果区间分得足够小，可以认为在每个小区内的物理参数（如宏观截面等）均等于常数或用该区内的平均值来表征。设以  $\phi_i(E)$  和  $S_i(E)$  表示第  $i$  区的平均中子通量和源强。为了简化，



我们引进一个所谓“平通量”的假设，即认为在每一个小区内中子通量和源强都等于常数。当区域分得足够小时，这种假设显然是合理的。在这种假设的情况下，将方程(9-51)对第*i*区积分之便得

$$\Sigma_{i,i}(E)\phi_i(E)V_i = \sum_{j=1}^I P_{i,j}(E)[L\phi_j(E) + S_j(E)]V_j, \quad (9-52)$$

其中角标*i*或*j*表示*i*或*j*区的参数， $V_i = \pi(r_i^2 - r_{i-1}^2)$ ，而

$$P_{i,j}(E) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \int_{V_j} \frac{\Sigma_i(\mathbf{r}, E) \exp\left[-\int_0^{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \Sigma_i(E, l) dl\right]}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}. \quad (9-53)$$

多区碰撞几率 $P_{i,j}(E)$  (或 $P_{i,-j}(E)$ )为*j*区内产生的一个能量为*E*的各向同性中子不经任何碰撞到达*i*区并在*i*区发生首次碰撞的几率。

根据互易关系式(8-53)式有：

$$\Sigma_{i,i}(E)V_i P_{i,j}(E) = \Sigma_{j,j}(E)V_j P_{j,i}(E). \quad (9-54)$$

同时，根据物理意义，对于全反射栅元边界，显然有下列归一化条件：

$$\sum_{i=1}^I P_{i,i} = 1 \quad (9-55)$$

这样，(9-52)式的物理意义是非常清楚的：式中右端方括号项表示 $V_j$ 内单位体积内中子源数(包括中子源和由不同能量散射到能量*E*处的贡献)，因而，整个右端便表示*j*=1…*I*所有区间内能量为*E*的中子在 $V_i$ 内发生的首次碰撞率，它自然应等于 $V_i$ 内的碰撞数 $\Sigma_{i,i}\phi_i(E)dV_i$ (左端)。把(9-52)式两端各除以 $\Sigma_{i,i}(E)V_i$ 便得到另一种常用的表达式：

$$\phi_i(E) = \sum_{j=1}^I T_{i,j}(E)[S_j(E) + L\phi_j(E)], \quad (9-56)$$

式中

$$T_{i,j}(E) = \frac{P_{i,j}(E)V_j}{\Sigma_{i,i}(E)V_i} \quad (9-57)$$

通常称为迁移核。它的物理意义是：*j*区一个各向同性源中子对*i*区中子通量的贡献。

方程(9-52)和(9-56)便是用碰撞几率方法(积分输运理论)求解中子通量分布的基本方程式。在讨论它的求解时，首先注意到 $L$ 是一个积分算子，它给求解带来一定困难，因而必须对它作一些近似或简化，例如可以采用通常的分群近似方法或应用上节所讨论的二阶微分近似算子来代替它等等。另一个比较麻烦的问题便是多区碰撞几率 $P_{i,j}$ 的计算，这也是比较复杂和耗时的事，可以参考有关文献的介绍<sup>[9][15]</sup>。

## 4.2 多群近似

在研究热化问题时，我们所要求热中子的空间-能量分布通常是指 $0 < E \leq E^*$ 的热化区域而言。因而，如果没有外源存在，则方程(9-52)可改写成：

$$\Sigma_i \phi_i(E) V_i = \sum_{j=1}^I P_{i,j}(E) V_j [S_j(E)$$

$$+ \int_0^{E^*} \Sigma_i(E' \rightarrow E) \phi_i(E') dE'] \quad , \quad (9-58)$$

式中,

$$S_i(E) = \int_0^{E^*} \Sigma_i(E' \rightarrow E) \phi_i(E') dE' \quad , \quad (9-59)$$

也就是说, 这时已经把能量  $E > E^*$  以上中子的慢化视为热中子源项了。(9-59) 式中  $\Sigma_i(E' \rightarrow E)$  可用自由核的散射函数来表示[见 (1-71) 式], 而中子通量作为初步近似可以用  $\phi(E) \approx \text{常数} \times 1/E$  的慢化谱来近似表示。

分群近似则是把能量自 0 到  $E^*$  以  $0 \leq E_1 < E_2 < \dots < E_g < \dots \leq E_G = E^*$  分成  $G$  个区间, 称之为  $G$  群近似。这样, 在每一能群区间  $\Delta E_g = E_g - E_{g-1}$  内对方程(9-58) 两边对  $E$  进行积分, 并且按第六章中所介绍的分群近似方法处理, 即在每一能群内所有参数用群常数或平均值表示, 便可得到多群热化方程如下:

$$\phi_{i,j,g} = \sum_{j'=1}^J T_{i,j,j',g} \left[ \sum_{g'=1}^G \Sigma_{i,j,g' \rightarrow g} \phi_{i,j',g'} + S_{i,j,g} \right] \quad (9-60)$$

式中足标  $i, j$  为空间区标号,  $g$  为能群的标号。  $T_{i,j,j',g}$  为  $g$  群的迁移核

$$T_{i,j,j',g} = \frac{P_{i,j,j',g} V_{j'}}{\Sigma_{i,j,j',g} V_j} \approx \frac{1}{V_j} \int_{V_{j'}} \int_{V_j} \frac{\exp \left[ - \int_0^{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \Sigma_{i,j,g}(s) ds \right]}{4\pi |\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2} d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (9-61)$$

而  $\Sigma_{i,j,g' \rightarrow g}$  为  $j$  区间 (点) 处自  $g'$  群到  $g$  群的“散射”截面

$$\Sigma_{i,j,g' \rightarrow g} = \frac{1}{\Delta E_{g'}} \int_{E_{g'-1}}^{E_{g'}} \int_{E_{g-1}}^{E_g} \Sigma_i(E' \rightarrow E) dE' dE \quad (9-62)$$

这里对于不同元素  $\Sigma_i(E' \rightarrow E)$  可以采用不同的散射核模型, 例如对于氢原子通常可以用尼尔金核或BSJ模型, 对于氧或其他元素可以应用自由气体模型等等。其他符号和第八章多群方法中所表示的意义相同。如果能群分得很细(例如  $G \approx 30$ ), 所有能群参数应用能群中点能量处的数值来代替也是允许的。这样可使  $\Sigma_{g' \rightarrow g}$  的计算大为简化。

可以看到, 方程 (9-60) 是一个含  $\phi_{i,j,g}$  的线性代数方程组。它很容易用迭代方法 (超松弛迭代) 求解, 由此便求得栅元内热中子的空间-能量分布。轻水堆设计中常用的 THERMOS<sup>[9]</sup> 程序便是应用这种方法计算的。它具有很好的精确度, 但是需要较长的计算机时间, 约为前面介绍的 A, B, H 方法和无限介质谱近似的 1~2 个数量级以上, 因此, 它一般只用于需要较高精度的设计中。

### 4.3 近似散射核

在方程(9-52)中, 散射算子  $L$  若用前面介绍的一些近似散射算子, 例如广义重气体算子 (9-48) 式来代替便得到栅元内热化方程,

$$\Sigma_i(E)\phi_i(E) V_i = \sum_{j=1}^I V_j P_{j,i}(E) \left\{ (\xi \Sigma_{s0})_j \left[ f(E) E k T \frac{d\phi_j(E)}{dE} + f(E)(E - kT)\phi_j(E) \right] + \Sigma_{s,j}\phi_j(E) \right\},$$

$$i = 1, 2, \dots, I \quad (9-63)$$

其初始条件为:

$$\phi_i(0) = 0, \quad \phi_i(E^*) = C_i/E^*$$

这是一个二阶微分方程组, 它可以很容易用数值方法求解。THERMOPYL 热谱程序<sup>[14]</sup>便是根据它而编制的。

### 参 考 文 献

- [1] G.I. 贝尔, S. 格拉斯登著, 千里译, 核反应堆理论, 第七章, 原子能出版社, 1979年。
- [2] M.M.R. Williams, *The Slowing Down and Thermalization of Neutrons*, North-Holland, 1966.
- [3] Я.В.Шевелева, *Методы Расчета Полей Тепловых Нейтронов в Решетках Реакторов*, Атомиздат, 1974.
- [4] R.J.J. Stamm'ler et al., *Neutron Thermalization in Reactor Lattice Cells*, IAEA Tech. Reports Series No.68, Vienna, 1966.
- [5] M.S.Nelkin, *Phys. Rev.*, 119, 741 (1960).
- [6] D.E.Parks, GA-2438 (1962).
- [7] A.Yoshimori, Y.Kitano, *J.Phys.Soc. Japan*, 11, 352. (1956).
- [8] J.A.Young, J.U.Koppel, *J.Chem. Phys.*, 42, 1, 357. (1965).
- [9] H.C.Honeck, BNL-5826 (1961).
- [10] J.U.Koppel et al., GA-7417 (1966).
- [11] H.C.Honeck et al., DP-1278 (1971).
- [12] E.P.Wigner, J.E.Wilkins, AECD-2275 (1944).
- [13] H.Amster, R.Suarez, WAPD-TM-39 (1957).
- [14] H.H.W.Pitcher, AEEW-M-350 (1963).
- [15] I.Carlvik, Proc.3rd Intern. Conf.PUAЕ, Vol.2, p/681, 1964.
- [16] H.Märkl et al., *Nukleonik*, Band 7, 247. (1965); H.Märkl, Proc.3rd Intern. Conf. PUAЕ, Vol 2, p/640, 1964.



钍-232) 俘获中子后又转换成裂变同位素(如铀-239或铀-233)。因此,核燃料中各种重同位素的核密度将随反应堆运行时间不断地变化。这种变化与所采用的燃料循环的类型有关。图10-1和图10-2分别表示在铀-钍和钍-铀燃料循环过程中,燃料受到中子辐照后所产生的同位素链。图中忽略了铀-238、钍-232、钍-240……重核的快中子裂变以及它们的 $\alpha$ 衰变。这些重核的 $\alpha$ 衰变半衰期很长,最短的也有13.2年(钍-241),最长的可达几百万年,因此它们对反应堆的反应性影响很小,但给钍的处理带来严重的问题。

假设同位素A的产生和消失都有两个途径如图10-3所示

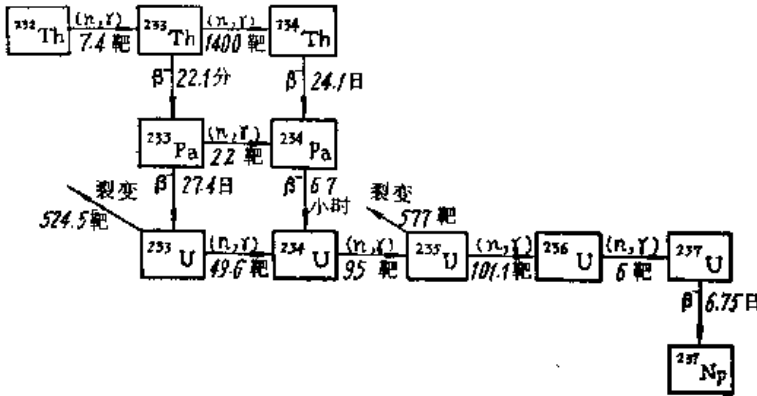


图10-2 在钍-铀燃料循环中的重同位素链

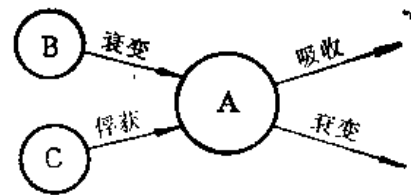


图10-3 同位素A的产生和消失的示意图

根据图10-3可直接写出同位素A的核密度随时间变化的方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} N_A(\mathbf{r}, t) = N_C(\mathbf{r}, t) \int_0^{\infty} \sigma_{\gamma}^C(E) \phi(\mathbf{r}, E, t) dE + N_B(\mathbf{r}, t) \lambda_B - N_A(\mathbf{r}, t) \left[ \int_0^{\infty} \sigma_a^A(E) \phi(\mathbf{r}, E, t) dE + \lambda_A \right] \quad (10-1)$$

式中,右边第一项为同位素C吸收中子而形成同位素A的产生率,第二项为同位素B衰变而形成同位素A的产生率,第三项为同位素A由于吸收中子和衰变而造成的总消失率。

中子通量和核密度都是空间和时间的函数,因而方程式(10-1)是一个变系数的偏微分方程,计算比较困难。在实际计算中,由于反应堆物理计算是采用分群数值法计算的,故在解(10-1)式时亦可采用下列一些近似假设:首先把堆芯划分成许多区,称为燃耗区。在每个燃耗区内,认为中子通量和核密度与空间位置无关,可以用它们在该区的平均值近似地代替它们。这样就消去了函数 $N(\mathbf{r}, t)$ 和 $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ 中的自变量 $\mathbf{r}$ ;其次,把时间也分成许多时间间隔,每一时间间隔称为时间步长。在每个时间步长中,可以认为中子通量不随时间变化,这样又可消去函数 $\phi(E, t)$ 中的自变量 $t$ ;最后利用分群理论,把(10-1)式中有关对能量的积分项变成对能群的累加项,即

$$\int_0^{\infty} \sigma_a^A(E) \phi(E) dE = \sum_{g=1}^G \sigma_{a, g}^A \phi_g, \quad (10-2)$$

$$\int_0^{\infty} \sigma_{\gamma}^C(E) \phi(E) dE = \sum_{g=1}^G \sigma_{\gamma, g}^C \phi_g. \quad (10-3)$$



以上只列出10种重同位素的燃耗方程，图10-1中出现的其它重同位素（如铀-240、镎-240、钚-243、镅-241和镎-243）的作用被忽略不计。这是因为：铀-239的吸收截面很小而半衰期又很短，绝大部分的铀-239都通过 $\beta^-$ 衰变成镎-239，而生成铀-240的是极少数。同理，从镎-239变成镎-240也是极少数；镎-240核密度很小，它对钚-240的贡献更小，因而可忽略不计；钚-241的吸收截面比较大，而半衰期又很长，从钚-241衰变成镅-241的量也是很少的；钚-242本身的核密度已经比较低，而它的吸收截面又很小，所以在反应堆燃耗计算中，对质量数大于242的重同位素一般都不予考虑，但在超钚元素的生产中应仔细地考虑。

### 1.2 核燃料中重同位素燃耗方程的解

如前所述，为了计算方便，我们假设在每个燃耗区和每个时间步长内中子通量为常数。这样，在每一时间步长内燃耗方程组（10-5）—（10-14）便是一个线性微分方程组，可以用解析方法或数值方法对它求解。

#### （1）解析方法

为了简化符号，把上述方程中出现的各同位素用下列次序编号：

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
同位素	铀-234	铀-235	铀-236	铀-238	铀-239	镎-239	钚-239	钚-240	钚-241	钚-242

相应的中子截面和衰变常数等也用这个序号来表示。这样，燃耗方程组（10-5）—（10-14）可以简写成下列形式：

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_1}{dt} &= A_{1,1}N_1 \\
 \frac{dN_2}{dt} &= A_{2,1}N_1 + A_{2,2}N_2 \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \\
 \frac{dN_{10}}{dt} &= A_{10,1}N_1 + A_{10,2}N_2 + \dots + A_{10,10}N_{10}
 \end{aligned} \tag{10-16}$$

其中 $A_{i,j}$ 为方程组的系数。将它与方程组（10-5）—（10-14）相比较，就可以得出 $A_{i,j}$ 的表示式：

$$A_{i,i} = \begin{cases} -\sum_{s=1}^G \sigma_{a,s}^i \phi_s, & i = 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10 \\ -\left( \sum_{s=1}^G \sigma_{a,s}^i \phi_s + \lambda_i \right), & i = 5, 6, 9 \end{cases}$$

$$A_{i,i-1} = \begin{cases} \sum_{s=1}^G \sigma_{\gamma,s}^{i-1} \phi_s, & i = 2, 3, 5, 8, 9, 10 \\ \lambda_{i-1}, & i = 6, 7 \\ 0, & i = 1, 4 \end{cases} \tag{10-17}$$

$$A_{i,j} = 0, \quad i, j = 1 \cdots 10 \quad \text{但 } j \neq i, j \neq i-1$$

于是, 可将方程组 (10-16) 用下列通式来表示

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_{j=1}^i A_{i,j} N_j, \quad i = 1, 2, \cdots, 10. \quad (10-18)$$

把 (10-18) 写成矩阵形式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{m,m-1} & A_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix}. \quad (10-19)$$

式中  $m=10$ , 令方程式 (10-19) 的解为

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{2,1} & C_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m,1} & C_{m,2} & \cdots & C_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{A_{1,1}\tau} \\ e^{A_{2,2}\tau} \\ \vdots \\ e^{A_{m,m}\tau} \end{pmatrix}. \quad (10-20)$$

其中  $\tau = t - t_1$ ,  $t_1$  为时间步长的起始时刻。这样, 燃耗方程 (10-19) 的求解就归结为求待定系数—— $C$  矩阵的问题。

将 (10-20) 式代入 (10-19) 式得

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{2,1} & C_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m,1} & C_{m,2} & \cdots & C_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{m,m-1} & A_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{A_{1,1}\tau} \\ e^{A_{2,2}\tau} \\ \vdots \\ e^{A_{m,m}\tau} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{m,m-1} & A_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{2,1} & C_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m,1} & C_{m,2} & \cdots & C_{m,m} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} e^{A_{1,1}\tau} \\ e^{A_{2,2}\tau} \\ \vdots \\ e^{A_{m,m}\tau} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10-21)$$

方程式 (10-21) 两边的系数矩阵必须相等, 因此,

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{2,1} & A_{1,1} & C_{2,2} & A_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m,1} & A_{1,1} & C_{m,2} & A_{2,2} & \cdots & C_{m,m} & A_{m,m} \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} A_{1,1}C_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{2,1}C_{1,1} + A_{2,2}C_{2,1} & A_{2,2}C_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{m, m-1}C_{m-1,1} + A_{m,m}C_{m,1} & \dots & A_{m, m-1}C_{m-1, m-1} + A_{m,m}C_{m, m-1} & A_{m,m}C_{m,m} \end{pmatrix} . \quad (10-22)$$

根据 (10-22) 式, 两矩阵相等, 其对应元必须相等。对于非对角元有

$$C_{i,j}A_{j,i} = \sum_{l=i-1}^i A_{i,l}C_{l,i} ,$$

因而,  $C_{i,j}(A_{j,i} - A_{i,i}) = A_{i,i-1}C_{i-1,i} ,$

所以  $C_{i,j} = \frac{1}{A_{j,i} - A_{i,i}} A_{i,i-1} C_{i-1,i} \quad j < i . \quad (10-23)$

从 (10-22) 式可知, 矩阵对角元是恒等式, 因此必须用初始条件来确定它。令在  $t = t_1$  (即  $\tau = 0$ ) 时刻, 同位素  $i$  的核密度为  $N_i(0)$ 。从 (10-20) 式可求得

$$N_i(0) = \sum_{j=1}^i C_{j,i} , \quad (10-24)$$

因而,

$$C_{1,1} = N_1(0) , \quad (10-25)$$

$$C_{i,i} = N_i(0) - \sum_{j=1}^{i-1} C_{j,i} , \quad i > 1 \quad (10-26)$$

这样, 燃耗方程 (10-18) 的解析解为

$$N_i = \sum_{j=1}^i C_{j,i} \exp(A_{j,i}\tau) . \quad (10-27)$$

其中系数  $C_{j,i}$  由 (10-23)、(10-25) 和 (10-26) 式求得。

### (2) 数值方法

在应用解析方法求解燃耗方程时, 虽然它的表达式很简单, 但是在其表达式中都是一些指数项的和与差, 而这些数本身又较接近, 如果有效位数取得不够的话, 就会造成较大的误差。因此在设计中也有采用数值法求解的。

从图10-1中可知, 从铀-234到铀-236为第一个链; 从铀-238到钚-242为第二个链。相应地, (10-5) — (10-7) 式为第一组联立方程式, 而 (10-8) — (10-14) 式为第二组联立方程式。

首先对第一组联立方程式采用差分方法求解。根据 (10-16) 式, 第一组联立方程式可写成:

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{1,1}N_1$$

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{2,1}N_2 + A_{2,2}N_2 \quad (10-28)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = A_{3,2}N_2 + A_{3,3}N_3$$

我们对方程组 (10-28) 中的第一式在时间步长区间  $[\Delta t_n = (t_{n+1} - t_n)]$  内进行积分

$$N_1(t_{n+1}) - N_1(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} A_{1,1}N_1(t) dt \quad (10-29)$$

(10-29) 式右边的积分可用差分近似来表示

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} A_{1,1}N_1(t) dt \approx \frac{1}{2} [A_{1,1}(t_n)N_1(t_n) + A_{1,1}(t_{n+1})N_1(t_{n+1})] \Delta t_n$$

将上式代入 (10-29) 式得

$$N_1(t_{n+1}) = \frac{1 + \frac{1}{2} A_{1,1}(t_n) \Delta t_n}{1 - \frac{1}{2} A_{1,1}(t_{n+1}) \Delta t_n} N_1(t_n) \quad (10-30)$$

同理, 由方程组 (10-28) 中的第二式和第三式可分别得:

$$N_2(t_{n+1}) = \frac{[1 + \frac{1}{2} A_{2,2}(t_n) \Delta t_n] N_2(t_n) + \frac{1}{2} [A_{2,1}(t_{n+1}) N_1(t_{n+1}) + A_{2,1}(t_n) N_1(t_n)] \Delta t_n}{1 - \frac{1}{2} A_{2,2}(t_{n+1}) \Delta t_n} \quad (10-31)$$

$$N_3(t_{n+1}) = \frac{[1 + \frac{1}{2} A_{3,3}(t_n) \Delta t_n] N_3(t_n) + \frac{1}{2} [A_{3,2}(t_{n+1}) N_2(t_{n+1}) + A_{3,2}(t_n) N_2(t_n)] \Delta t_n}{1 - \frac{1}{2} A_{3,3}(t_{n+1}) \Delta t_n} \quad (10-32)$$

在采用差分方法对方程组求解时, 为了保证解的一定精度, 要求在每个时间步长中  $dN/N$  的值不能太大。但在第二组联立方程组中包含有衰变常数 ( $\lambda_{20}$ 、 $\lambda_{30}$  和  $\lambda_{41}$ )。而其中  $\lambda_{20}$  和  $\lambda_{30}$  的值都比较大, 所以时间步长必须取得很小。例如, 对于铀-239, 其  $\lambda_{20} = 5 \times 10^{-4}$  秒<sup>-1</sup>, 如果要求  $dN_{20}/N_{20} < 0.05$  (亦即  $\lambda_{20} \Delta t < 0.05$ ), 则时间步长必须小于 100 秒。如果按这个时间步长来计算, 那是很不经济的。为了解决这个问题, 需要对方程组作进一步的简化。

因为

$$\begin{aligned} \lambda_{20} &= 5.0 \times 10^{-4} \text{秒}^{-1}, \\ \lambda_{30} &= 3.4 \times 10^{-6} \text{秒}^{-1}, \end{aligned}$$

而铀-239 和钷-239 的吸收截面都比较小, 动力反应堆在额定功率运动时,  $\sum_{g=1}^G \sigma_{a,2}^{g,2} \phi_g$  和  $\sum_{g=1}^G \sigma_{a,3}^{g,3} \phi_g$  的数量级一般都在  $10^{-6}$  左右,

因此,

$$\lambda_{20} \gg \sum_{g=1}^G \sigma_{a,20}^{2,0} \phi_g,$$

$$\lambda_{30} \gg \sum_{g=1}^G \sigma_{a,30}^{3,0} \phi_g. \tag{10-33}$$

所以, 在 (10-9) 和 (10-10) 式的括号内的  $\sum_{g=1}^G \sigma_{a,20}^{2,0} \phi_g$  和  $\sum_{g=1}^G \sigma_{a,30}^{3,0} \phi_g$  项可以略去不计。同时

还可以证明<sup>[1]</sup>, (10-8) — (10-11) 式的四个方程式在满足 (10-33) 式的条件下可以简化成下列二个方程式:

$$\frac{dN_{238}}{dt} = - \sum_{g=1}^G \sigma_{a,238}^{2,8} \phi_g N_{238} \tag{10-34}$$

$$\frac{dN_{239}}{dt} = \sum_{g=1}^G \sigma_{a,238}^{2,8} \phi_g N_{238} - \sum_{g=1}^G \sigma_{a,239}^{4,9} \phi_g N_{239}. \tag{10-35}$$

这表明铀-238吸收中子后全部瞬时地变成了钚-239。同理可对 (10-13) 式进行简化, 因为钚-241的半衰期很长(12.2年), 并且它的

吸收截面较大, 所以  $\lambda_{41}$  与  $\sum_{g=1}^G \sigma_{a,41}^{4,1} \phi_g$  相比可以略去不计。

经过以上简化后, 在第二组联立方程组中不再含有衰变常数了, 这样, 它的解法与第一个联立方程组完全一样。

图10-4中给出了燃料中主要的一些重同位素成分随燃耗深度的变化曲线。

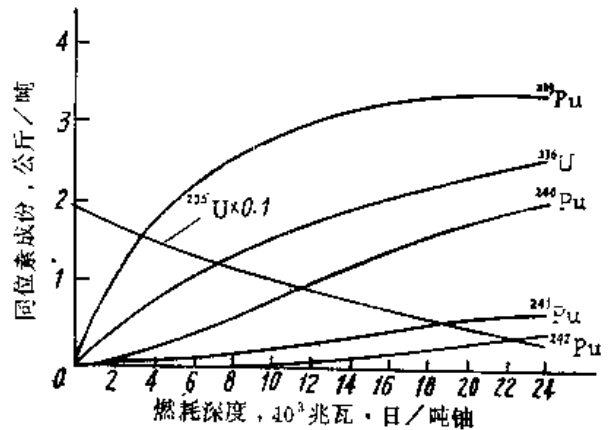


图10-4 燃料中重同位素成分随燃耗深度变化曲线

## 2. 裂变产物的中毒<sup>[2]</sup>

当反应堆中燃料核裂变时, 产生很多种裂变产物, 这些裂变产物中的绝大部分都具有放射性, 它们经过一系列衰变后, 又形成许多种同位素。某些同位素具有很大的热中子吸收截面, 其中特别重要的是氙-135和钐-149两种同位素。它们不仅具有很大的热中子吸收截面, 而且它们的先驱核还具有较大的裂变产额。它们的产生和消失对反应堆的有效增殖因数及运行有很大的影响, 因此必须详细地加以讨论。其余裂变产物, 由于它们的吸收截面和裂变产额数值远不如氙-135和钐-149的大, 因此对它们只作简单地讨论。

下面我们用简单的四因子模型粗略地讨论一下裂变产物对反应性的影响。为此, 把反应堆的有效增殖因数重新写出:

$$k = \eta p f \epsilon P_L \tag{10-36}$$

假设上式中只有  $f$  显著地受到裂变产物吸收热中子的影响。令  $f'$  为有裂变产物存在时的热中子利用系数

$$f' = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a^F + \Sigma_a^M + \Sigma_a^P} \quad (10-37)$$

式中， $\Sigma_a^F$ 、 $\Sigma_a^M$ 和 $\Sigma_a^P$ 分别为燃料、慢化剂和裂变产物的热中子宏观吸收截面，假设它们都是均匀地分布于整个堆芯中。

根据反应性的定义，可以导出裂变产物所引起的反应性变化为

$$\Delta\rho \approx \frac{f' - f}{f'} = - \frac{\Sigma_a^P}{\Sigma_a^F + \Sigma_a^M} = - \frac{\Sigma_a^P}{\Sigma_a} \quad (10-38)$$

由(10-38)式可知，裂变产物吸收热中子所引起的反应性变化近似地等于它们的热中子宏观吸收截面在堆芯总的热中子宏观吸收截面<sup>1)</sup>中所占的分数。这种由于裂变产物吸收中子所引起的反应性变化值称为裂变产物中毒。

应该指出，由于裂变产物的分布是非均匀的，并且采用均匀裸堆的四因子模型也是很粗略的，因此采用(10-38)式来计算裂变产物中毒的误差是比较大的。在反应堆的实际设计中，一般都是采用本章第三节的方法进行计算的。

## 2.1 氙-135中毒

氙-135是所有裂变产物中最重要的一种同位素，这是因为它的热中子吸收截面非常大，如图10-5所示。从图上可知，在中子能量为0.025电子伏时，氙-135的微观吸收截面为 $2.7 \times 10^6$ 靶左右，而且在中子能量为0.08电子伏处有一个大的共振峰。在热能范围内它的平均吸收截面大约为 $3 \times 10^6$ 靶。但在高能区，氙-135的吸收截面随中子能量的增加而显著地下降，因而在快中子反应堆中，氙中毒的影响是比较小的。

在铀-235核裂变时，氙-135的直接产额仅为0.00228，但是它的先驱核的直接裂变产额却很高，它们经过 $\beta^-$ 衰变后就形成了氙-135。图10-6给出了质量数为135的裂变产物的衰变链。

由图10-6可知，铯-135和碲-135的半衰期都非常短，可以忽略它们在中间过程中的作用，因此可以把铯-135和碲-135的裂变产额与碘-135的直接裂变产额之和作为碘-135的裂变产额，即 $\gamma_I = \gamma_{sb} + \gamma_{Te} + \gamma_{0.1}$

(其中 $\gamma_{0.1}$ 为碘-135的直接裂变产额)。另外，忽略短寿命的氙-135的同质异能素( $^{135m}\text{Xe}$ )的存在。由于碘-135的热中子吸收截面仅为8靶，它的半衰期也只有6.7小时，在热中子通量为 $10^{14}$ 中子/厘米<sup>2</sup>·秒的时候， $\sigma_I \phi / \lambda_I \approx 10^{-4}$ ，即由吸收中子引起的损失项远小于衰变引起的损失项。因此可以忽略

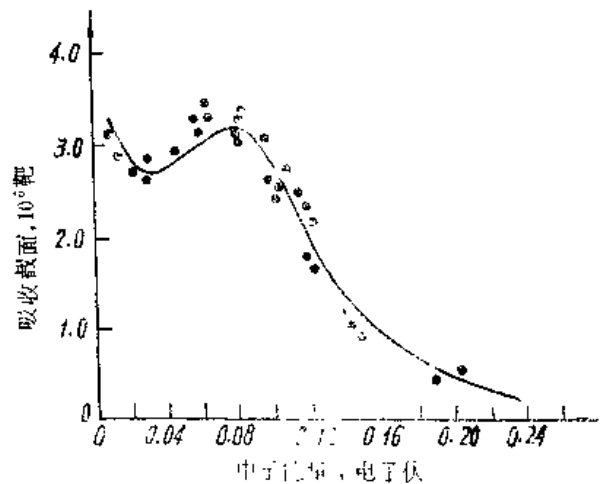


图10-5 氙-135的吸收截面与中子能量的关系

1) 不包括裂变产物本身的吸收。

碘-135 对热中子的吸收, 认为碘-135 全部都衰变成氙-135。这样就可以得到简化后的氙-135 衰变图, 如图10-7所示。

以单群为例, 根据图10-7可以写出碘-135和氙-135的浓度<sup>1)</sup>随时间变化的方程式

$$\frac{dN_I(t)}{dt} = \gamma_I \Sigma_f \phi - \lambda_I N_I(t), \quad (10-39)$$

$$\frac{dN_{Xe}(t)}{dt} = \gamma_{Xe} \Sigma_f \phi + \lambda_I N_I(t) - (\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi) N_{Xe}(t), \quad (10-40)$$

式中 $\gamma_I$ 、 $\gamma_{Xe}$ 、 $\lambda_I$ 和 $\lambda_{Xe}$ 的数值在表10-1中给出。

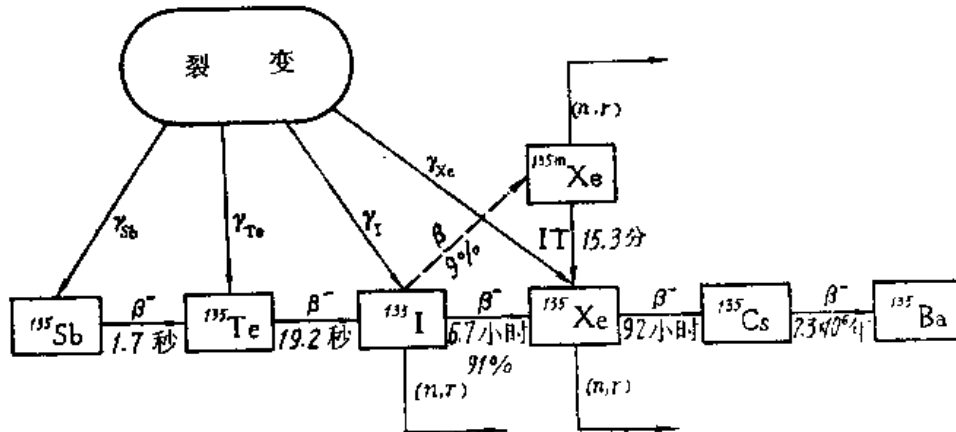


图10-6 质量数为135的裂变产物的衰变链

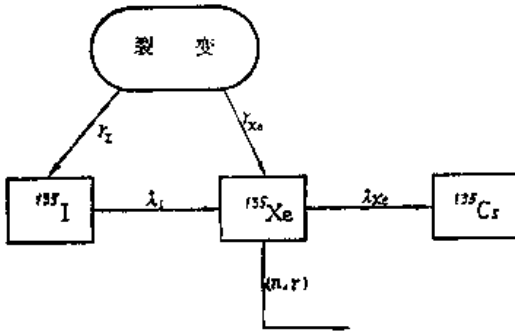


图10-7 简化后的氙-135 衰变图

表10-1 碘-135、氙-135 和钷-149 的  
裂变产额和衰变常数

裂 变 产 物	裂 变 产 额 $\gamma, \%$				衰变常数 $\lambda,$ 秒 <sup>-1</sup>
	铀-233	铀-235	钷-239	钷-241	
碘-135	4.884	6.386	6.100	7.694	$2.87 \times 10^{-5}$
氙-135	1.363	0.228	1.087	0.255	$2.09 \times 10^{-5}$
钷-149	0.66	1.13	1.9		$3.58 \times 10^{-6}$

下面我们将分别讨论反应堆在启动、停堆以及功率变化时的氙中毒。

### 2.1.1 反应堆启动时氙-135中毒

对一个新的堆芯, 碘-135和氙-135的初始浓度都等于零。若反应堆在 $t=0$ 时刻开始启动, 并且很快就达到了满功率, 那么, 就可以近似地认为在 $t=0$ 时刻中子通量瞬时地达到了额定值, 并且一直保持不变。利用(10-39)和(10-40)式, 并采用下列的初始条件:

$$N_I(0) = N_{Xe}(0) = 0$$

1) 这里所指的浓度就是核密度。

就可以求得在反应堆启动后，碘-135和氙-135的浓度随时间的变化为：

$$N_I(t) = \frac{\gamma_I \Sigma_f \phi}{\lambda_I} [1 - \exp(-\lambda_I t)], \quad (10-41)$$

$$N_{Xe}(t) = \frac{(\gamma_I + \gamma_{Xe}) \Sigma_f \phi}{\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi} \left\{ 1 - \exp[-(\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi)t] \right\} + \frac{\gamma_I \Sigma_f \phi}{\sigma_a^{Xe} \phi + \lambda_{Xe} - \lambda_I} \left\{ \exp[-(\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi)t] - \exp(-\lambda_I t) \right\} \quad (10-42)$$

由此可知，反应堆启动后，碘-135和氙-135的浓度都随着运行时间的增加而增加。当t足够大后，上述两式中的指数项都趋近于零，这时，碘-135和氙-135都达到了平衡(或饱和)浓度。即碘-135或氙-135核的产生率正好等于其消失率，因而它们的浓度将保持不变。若以 $N_I(\infty)$ 和 $N_{Xe}(\infty)$ 分别表示碘-135和氙-135的平衡浓度，则

$$N_I(\infty) = \frac{\gamma_I \Sigma_f \phi}{\lambda_I} \quad (10-43)$$

$$N_{Xe}(\infty) = \frac{\gamma \Sigma_f \phi}{\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi} \quad (10-44)$$

其中， $\gamma = \gamma_I + \gamma_{Xe}$  (10-45)

另外，也可以在方程式(10-39)和(10-40)中令 $dN_I(t)/dt = dN_{Xe}(t)/dt = 0$ 而直接地求出它们的平衡浓度。

在图10-8中给出了当热中子通量为 $10^{14}$ 中子/厘米<sup>2</sup>·秒和宏观裂变截面为 $0.10$ 厘米<sup>-1</sup>时，碘-135和氙-135的浓度随时间的变化曲线。从图上可知，反应堆在稳定功率状态下，运行约40小时之后，碘-135和氙-135的浓度已经很接近它们平衡浓度了。

下面我们将计算由平衡氙浓度所引起的反应性变化值(即平衡氙中毒)。将(10-44)式代入(10-38)式就可以近似地求得平衡氙中毒，以 $\Delta\rho_{Xe}(\infty)$ 表示。

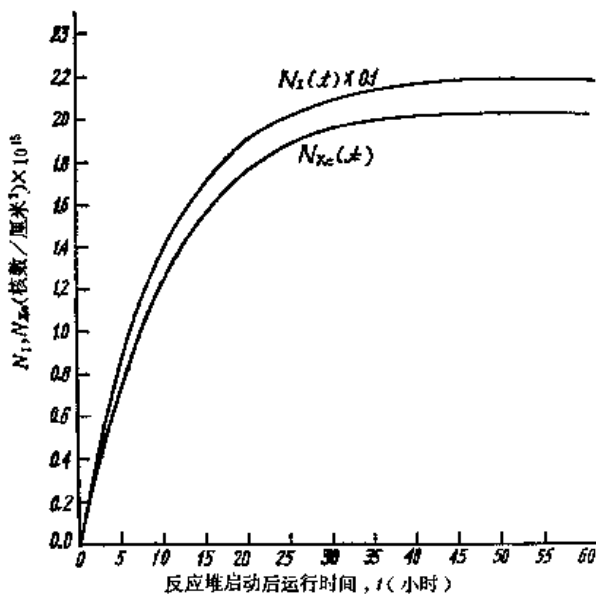


图10-8 反应堆启动后，碘-135和氙-135的浓度随时间变化曲线

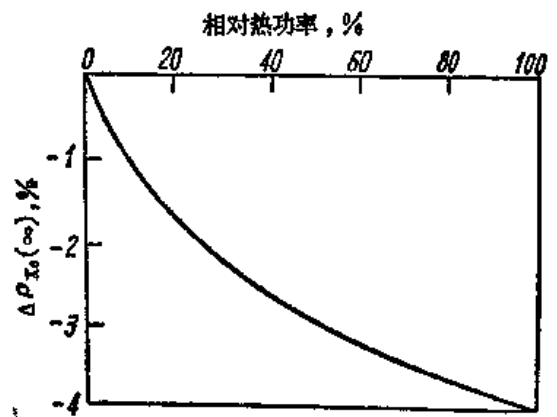


图10-9 在某反应堆中，平衡氙中毒与功率的关系

$$\Delta\rho_{Xe}(\infty) = -\frac{\Sigma_f^{\lambda_{Xe}}}{\Sigma_a} = -\frac{\gamma\Sigma_f}{\Sigma_a} \frac{\phi}{\frac{\lambda_{Xe}}{\sigma_a^{\lambda_{Xe}}} + \phi}, \quad (10-46)$$

由此可知,  $\Delta\rho_{Xe}(\infty)$ 与热中子通量值有关, 当反应堆内热中子通量值很小时, 平衡氙中毒也很小。例如当 $\phi$ 的数量级为 $10^{10}$ 时, 则 $\Delta\rho_{Xe}(\infty)$ 的数量级约为 $10^{-6}$ 。这说明在低的热中子通量时, 平衡氙中毒可以忽略不计。但当

$$\phi \gg \frac{\lambda_{Xe}}{\sigma_a^{\lambda_{Xe}}} = 0.756 \times 10^{13} \text{ 中子/厘米}^2 \cdot \text{秒}, \quad (10-47)$$

时,  $\lambda_{Xe}/\sigma_a^{\lambda_{Xe}}$ 与 $\phi$ 相比可忽略不计, 则

$$\Delta\rho_{Xe}(\infty) \approx -\frac{\gamma\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad (10-48)$$

因此, 在高的热中子通量下运行的反应堆中, 可近似地认为平衡氙中毒与热中子通量的大小无关, 而只与堆芯中宏观裂变截面对宏观吸收截面的比值有关。例如当 $\Sigma_f/\Sigma_a$ 为0.6—0.8时, 则 $\Delta\rho_{Xe}(\infty)$ 为0.04—0.05。

动力反应堆在额定功率运行时的热中子通量一般都满足(10-47)式, 因此可采用(10-48)式来近似地计算平衡氙中毒。但若反应堆在低于额定功率下运行, 则平衡氙中毒就与运行的功率大小有关。图10-9表示在某个反应堆中, 平衡氙中毒与反应堆运行功率的关系。

### 2.1.2 停堆后氙-135中毒

从图(10-7)可知, 在反应堆运行时, 氙-135的产生有两条途径, 即由燃料核裂变直接产生氙-135和由碘-135的 $\beta^-$ 衰变而生成氙-135。前者与反应堆的中子通量值有关。由于氙-135的裂变产额比较小, 而且只要反应堆运行2日以后, 碘-135已达饱和浓度, 这时氙-135主要是由碘-135 $\beta^-$ 衰变生成的。氙-135的消失也有两条途径, 即由于氙-135吸收中子和氙-135的 $\beta^-$ 衰变而消失。前者也与反应堆的中子通量有关。当反应堆中平均热中子通量值为 $0.756 \times 10^{13}$ 中子/厘米<sup>2</sup>·秒的时候, 由氙-135吸收中子与由氙-135的 $\beta^-$ 衰变所引起的消失率两者刚好相等。但在动力热中子反应堆中, 平均热中子通量一般都大于这个值, 因此在正常功率运行时, 氙-135的消失主要是靠吸收中子而消失。

在反应堆停堆后, 中子通量近似地降为零, 裂变对氙-135的直接产生率也近似等于零。但堆内存在的碘-135继续衰变成氙-135, 而氙-135却不能由吸收中子而消失, 它只能通过 $\beta^-$ 衰变而消失。另一方面由于氙-135的半衰期大于碘-135的半衰期, 因而在停堆后的一段时间内, 氙-135的浓度将要增加。但是, 由于在停堆后没有新的碘-135产生, 碘-135的浓度将由于衰变而逐渐地减小, 因此, 氙-135的浓度不会无限地增加, 当它达到某一极值后, 氙-135的浓度将逐渐地减小。

假设反应堆在恒定中子通量 $\phi$ 。情况下已经运行了两天以上, 堆内已经建立了平衡氙浓度, 然后突然停堆。因为停堆后中子通量近似地降为零, 所以, 根据(10-39)和(10-40)式可写出停堆后碘-135和氙-135的浓度随时间变化的微分方程:

$$\frac{dN_I}{dt} = -\lambda_I N_I,$$

$$\frac{dN_{Xe}}{dt} = \lambda_I N_I - \lambda_{Xe} N_{Xe} \quad (10-49)$$

令停堆时刻的  $t$  为零, 则方程组 (10-49) 的初始条件为:

$$N_I(0) = N_I(\infty) \quad ; \quad N_{Xe}(0) = N_{Xe}(\infty).$$

其中  $N_I(\infty)$  和  $N_{Xe}(\infty)$  分别为停堆前堆内的碘-135和氙-135的平衡浓度。

方程组 (10-49) 的解为:

$$N_I(t) = N_I(\infty) \exp(-\lambda_I t), \quad (10-50)$$

$$N_{Xe}(t) = N_{Xe}(\infty) \exp(-\lambda_{Xe} t) + \frac{\lambda_I N_I(\infty)}{\lambda_I - \lambda_{Xe}} [\exp(-\lambda_{Xe} t) - \exp(-\lambda_I t)], \quad (10-51)$$

将  $N_I(\infty)$  及  $N_{Xe}(\infty)$  代入 (10-51) 式, 有

$$N_{Xe}(t) = \frac{\gamma \Sigma_f \phi_0}{\sigma_a^{Xe} \phi_0 + \lambda_{Xe}} \exp(-\lambda_{Xe} t) + \frac{\gamma_I \Sigma_f \phi_0}{\lambda_I - \lambda_{Xe}} [\exp(-\lambda_{Xe} t) - \exp(-\lambda_I t)], \quad (10-52)$$

为了分析停堆后氙-135中毒的变化规律, 首先将 (10-52) 式对  $t$  求导, 然后令  $t = 0$ , 得

$$\left. \frac{dN_{Xe}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left[ \frac{\sigma_a^{Xe} \gamma_I \phi_0 - \gamma_{Xe} \lambda_{Xe}}{\sigma_a^{Xe} \phi_0 + \lambda_{Xe}} \right] \Sigma_f \phi_0. \quad (10-53)$$

因为

$$\frac{\Sigma_f \phi_0}{\sigma_a^{Xe} \phi_0 + \lambda_{Xe}} > 0,$$

所以只要

$$\phi_0 < \frac{\gamma_{Xe} \lambda_{Xe}}{\gamma_I \sigma_a^{Xe}} = 2.76 \times 10^{11} \text{ 中子/厘米}^2 \cdot \text{秒},$$

则

$$\left. \frac{dN_{Xe}(t)}{dt} \right|_{t=0} < 0.$$

在这种情况下, 停堆后氙-135的浓度是下降的, 所以不可能出现最大氙中毒的现象。

反之, 当  $\phi_0 > 2.76 \times 10^{11}$  中子/厘米<sup>2</sup>·秒时, 则停堆后氙-135的浓度是上升的。一般动力反应堆在额定功率下运行时,  $\phi_0$  总是满足这个条件的, 所以在刚停堆后的一段时间内, 氙-135的中毒总是上升的。



停堆后，氙-135 浓度从平衡值上升到最大值所需的时间称为最大氙浓度发生的时间，用  $t_{max}$  来表示。 $t_{max}$  可由 (10-51) 式中令  $dN_{Xe}(t)/dt$  等于零求得：

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_I - \lambda_{Xe}} - \ln \left[ \frac{\lambda_I / \lambda_{Xe}}{1 + \frac{\lambda_{Xe}}{\lambda_I} \left( \frac{\lambda_I}{\lambda_{Xe}} - 1 \right) \frac{N_{Xe}(\infty)}{N_I(\infty)}} \right]$$

$$\approx \frac{1}{\lambda_I - \lambda_{Xe}} - \ln \left[ \frac{1 + \phi_0 \sigma_a^{Xe} / \lambda_{Xe}}{1 + \phi_0 \sigma_a^{Xe} / \lambda_I} \right] \quad (10-54)$$

由此可知， $t_{max}$  与停堆前的  $\phi_0$  有关，也就是说与停堆前运行的功率有关。但若  $\phi_0 \gg \lambda_{Xe} / \sigma_a^{Xe} \approx 10^{13}$  中子/厘米<sup>2</sup>·秒，则停堆后到达最大氙的时间就与中子通量无关。这时

$$t_{max} \approx \frac{1}{\lambda_I - \lambda_{Xe}} - \ln \left[ \frac{\lambda_I}{\lambda_{Xe}} \right] \approx 11.3 \text{ 小时} \quad (10-55)$$

这表明：在高的热中子通量下运行的反应堆内，停堆后大约11小时左右出现最大氙浓度。

把  $t_{max}$  的值代入 (10-52) 式可以求得停堆后最大氙浓度，以  $N_{Xe, max}$  表示。再将  $N_{Xe, max}$  的值代入 (10-38) 式，可近似地求出停堆后最大氙中毒。

图10-10是停堆前后氙-135浓度和过剩反应性<sup>1)</sup>随时间变化的示意图。从图中可知，停堆后氙-135的浓度先是增加到最大值，然后逐渐地减小；过剩反应性随时间变化则与氙-135浓度的变化刚好相反，先是减小到最小值，然后又逐渐地增大，通常把这一现象称为“碘坑”。这主要是由于停堆后碘-135继续衰变成氙-135所引起的。从停堆时刻开始直到过剩反应性又回升到停堆时刻的值时所经历的时间称为碘坑时间，以  $t_I$  表示。在碘坑期内，若过剩反应性还大于零，则反应堆还能靠移动控制棒来启动，这段时间称为允许停堆时间，以  $t_p$  表示。若过剩反应性小于或等于零，则反应堆无法启动，这段时间称为强迫停堆时间，以  $t_f$  表示。

停堆后反应堆过剩反应性下降到最小值的程度称为碘坑深度。碘坑深度与反应堆停堆前运行的热中子通量值密切相关，热中子通量愈大，碘坑深度愈深。图10-11表示了在不同热中

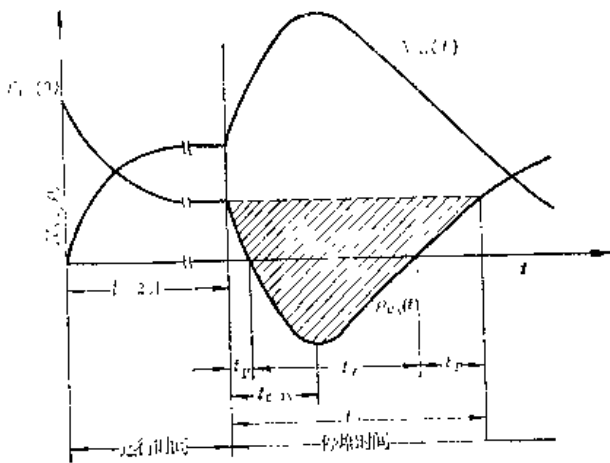


图10-10 停堆前后，氙-135浓度和过剩反应性随时间变化的示意图 [13]

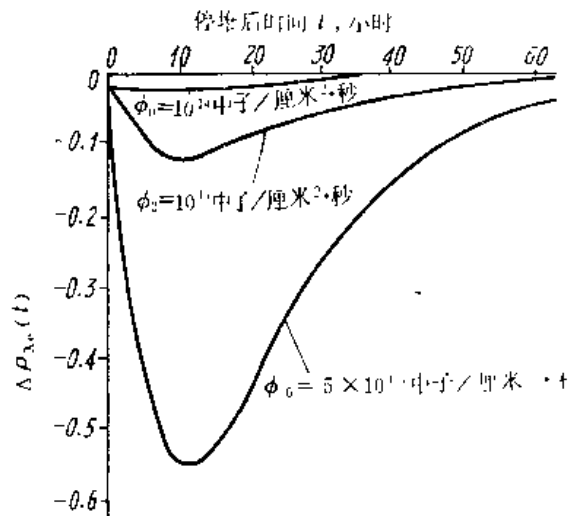


图10-11 在不同的热中子通量水平的状态下，停堆后氙中毒随时间变化曲线

1) 反应堆在无控制毒物情况下超临界的反应性称过剩反应性。(见第11章)。

子通量水平状况下运行的反应堆，在停堆后氙中毒随时间的变化曲线。从图中可知，若热中子通量水平小于 $10^{13}$ 中子/厘米<sup>2</sup>·秒，则停堆后氙中毒变化很微小。若热中子通量大于 $10^{14}$ 中子/厘米<sup>2</sup>·秒，则停堆后氙中毒变化很显著（也即碘坑深度很深）。假使停堆前反应堆的过剩反应性不足以补偿其氙中毒，那就要出现强迫停堆现象。

停堆后氙中毒变化还与停堆方式有关。如果不是采取突然停堆的方式而是采用逐渐地降低功率的方式来停堆，那末，因为有一部分氙-135和碘-135在停堆过程中吸收中子和衰变而消耗掉了，所以停堆后的碘坑深度要比突然停堆方式所引起的碘坑深度浅得多。

如果在停堆后还存在大量氙-135的情况下又重新启动反应堆，那末，由于中子通量突然增加，氙-135将大量地消耗，它的浓度很快地下降，因而氙中毒迅速地减小，如图10-12所示。这时堆内的过剩反应性很快地增加，原来作为启动用而提起的控制棒又要插到足够的深度，以补偿由于氙-135浓度减小而引起的反应性的增加。

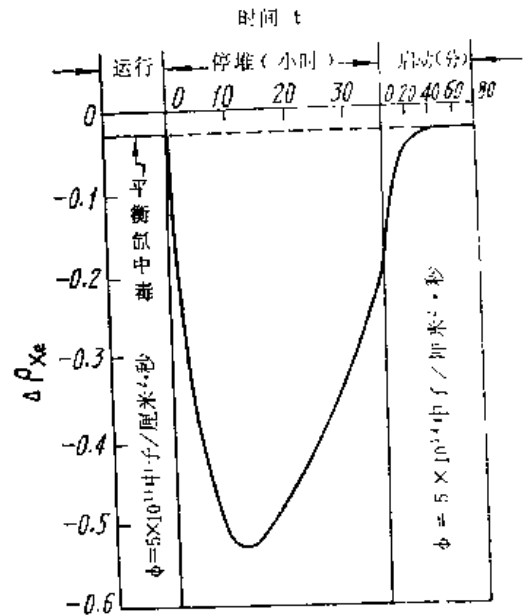


图10-12 停堆后，在碘坑期内启动时氙中毒随时间变化曲线

### 2.1.3 功率过渡时的氙中毒

假设反应堆在稳定功率下运行了一段时间，而在 $t = 0$ 时刻突然改变它的功率，相应的热中子通量也从 $\phi_1$ 变成 $\phi_2$ 。堆芯内的碘-135和氙-135的浓度也要发生改变。这时，在解方程组(10-39)和(10-40)时，所采用的初始条件为：

$$N_I(0) = N_I(\infty) ; \quad N_{Xe}(0) = N_{Xe}(\infty) .$$

其中 $N_I(\infty)$ 和 $N_{Xe}(\infty)$ 分别为碘-135和氙-135在热中子通量为 $\phi_1$ 时的平衡浓度。在满足以上初始条件的情况下，方程式(10-39)和(10-40)的解分别为：

$$N_I(t) = \frac{\gamma_I \Sigma_f \phi_2}{\lambda_I} \left[ 1 - \left( \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_2} \right) \exp(-\lambda_I t) \right] , \quad (10-56)$$

$$N_{Xe}(t) = \frac{\gamma_{Xe} \Sigma_f \phi_2}{\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi_2} \left\{ 1 - \left( \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_2} \right) \left[ \frac{\lambda_{Xe}}{\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi_1} \exp(-(\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi_2)t) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_I}{\gamma} \left( \frac{\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi_2}{\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi_2 - \lambda_I} \right) [\exp(-\lambda_I t) - \exp(-(\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe} \phi_2)t)] \right] \right\} . \quad (10-57)$$

由此可知，当反应堆功率改变后，碘-135和氙-135的浓度与功率变化前后的中子通量值

有关。图 10-13 表示反应堆功率变化前后，碘-135 浓度、氙-135 浓度和过剩反应性随时间的变化。从图中可知，当功率突然降低时，氙-135 浓度和过剩反应性随时间的变化的曲线形状与突然停堆的情况很相似，只是在变化程度上有差别。但当功率突然升高，碘-135 浓度、氙-135 浓度和过剩反应性随时间变化与功率突然下降的情况刚好相反。

### 2.1.4 氙振荡

在大型热中子反应堆中，局部区域内中子通量的变化会引起局部区域氙-135 浓度和局部区域的增殖因数的变化。反过来，后者的变化也要引起前者的变化。这两者之间的相互作用就有可能使堆芯中氙-135 浓度和中子通量分布产生空间振荡现象。

为了定性地解释这个现象，考虑一个初始功率密度分布比较平坦的大型热中子反应堆，堆内已建立了平衡氙浓度。在反应堆总功率不变的情况下，在堆芯某一区域中由于某种扰动使功率密度降低，那么要保持反应堆的总功率不变，堆芯的另一区域的功率密度必然要提高。这就使堆内中子通量分布或功率密度分布发生变化，如图 10-14 (a) 所示。

在功率密度降低的区域中，中子通量也相应地降低，因而氙-135 的消耗也随之减小，但是原来在高中子通量情况下生成的碘-135 仍在继续地衰变成氙-135，所以氙-135 的浓度便逐渐地增加，这就使该区的增殖因数减小，从而使中子通量和功率密度又进一步地降低……。与此同时，在功率密度升高的区域中，中子通量也相应地升高，氙-135 的消耗变大，因此氙的浓度开始减小，这就导致该区的增殖因数增加，从而使

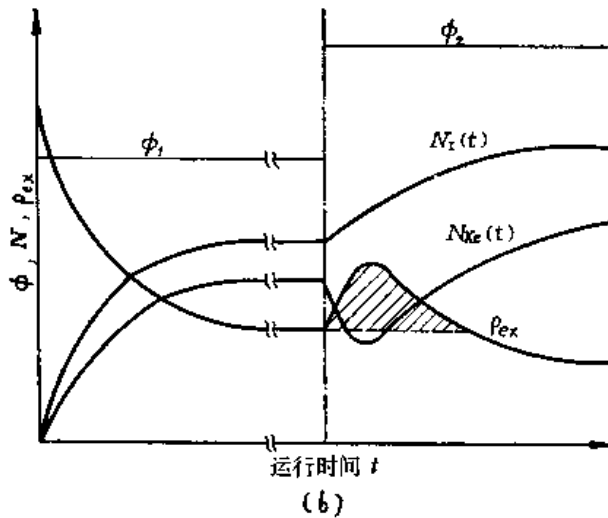
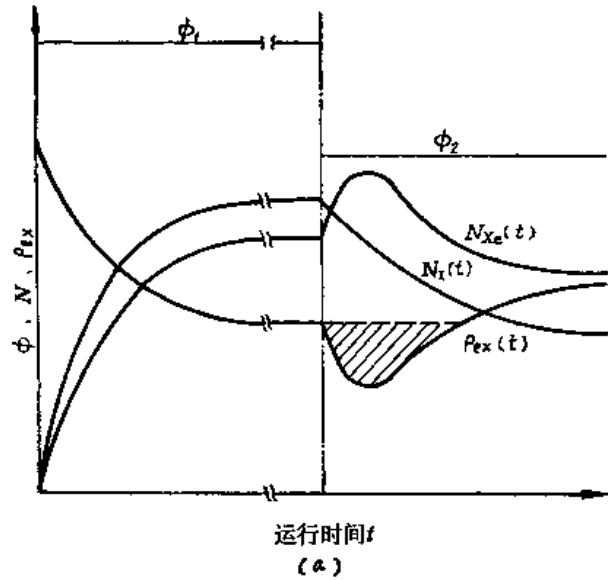


图 10-13 功率变化前后，碘-135、氙-135 浓度和过剩反应性随时间变化示意图<sup>[3]</sup>  
(a) 突然降低功率；(b) 突然升高功率

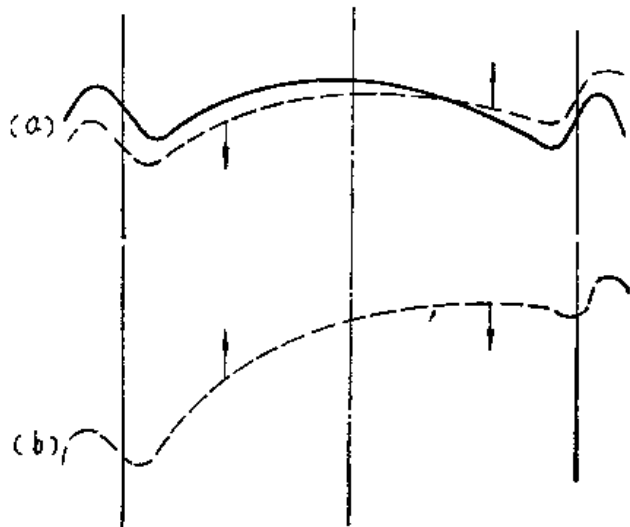


图 10-14 氙振荡示意图

功率密度和中子通量进一步地升高……。

但是必须注意到，这些过程并不会单向地无限制地发展下去。有两个因素限制着它的变化：一是，在中子通量进一步倾斜后，形成了中子通量的梯度，中子通量高的区域向中子通量低的区域有一个净的中子流，这使中子通量趋向平坦一些；二是，在中子通量下降的区域内，碘-135的产生量也相应地减少，因而由它衰变成氙-135的量也减少。这就使氙-135的浓度由原来增加逐渐转为减小，相应地，该区的增殖因数由原来减小逐渐转为增大，从而使该区的中子通量和功率密度由原来下降转为上升。而在中子通量上升的区域内的情况与上述的刚好相反，该区氙-135的浓度由原来减小转为增加，中子通量由原来上升转为下降，见图10-14(b)。这样，中子通量（或功率密度）的变化将沿着原来相反方向进行，并重复地循环下去。这就形成了功率密度、中子通量和氙-135浓度的空间振荡，简称氙振荡。这种振荡可能是稳定的，也可能是不稳定的，这将取决于反应堆的中子通量水平和它的物理特性。氙振荡的周期大约是15—30小时。

只有在大型的和高中子通量的热中子反应堆中才可能发生氙振荡。一般当堆芯的尺寸超过30倍徙动长度和热中子通量大于 $10^{13}$ 中子/厘米<sup>2</sup>·秒时，氙振荡才成为一个值得认真考虑的问题。对于天然铀或低浓缩铀气冷堆和大多数大型压水反应堆，它们堆芯的尺寸都超过30倍徙动长度，都必须认真地考虑氙振荡问题。在沸水反应堆中，当局部区域功率密度（或中子通量）升高时，该区的水立刻产生更多的沸腾，这使该区的增殖因数很快地减小，因而使功率密度和中子通量很快地恢复到初始值。所以，在沸水反应堆中，产生氙振荡的可能性很小。在快中子反应堆中，由于氙中毒效应本来就不重要，因此也不会产生氙振荡。

氙振荡时，有的区域中氙浓度减小，有的区域中氙浓度增加，但是在整个堆芯中，氙的总量变化是不大的，因此它对反应堆有效增殖因数的影响也是不显著的。所以要想从总的反应性测量中来发现氙振荡是很困难的，只有从测量局部的功率密度或局部中子通量的变化中才能发现氙振荡。例如用分布在堆芯各处测功率（或中子通量）的探测器可以及时地测出氙振荡。

氙振荡使反应堆热管位置转移和功率密度峰因子改变，并使局部区域的温度升高，若不控制甚至会使燃料元件熔化；氙振荡还使堆芯中温度场发生交替地变化，加剧堆芯材料温度应力的变化，使材料过早地损坏。因此在设计中必须认真地考虑氙振荡的问题。

由于氙振荡的周期比较长，因而它是可以被控制的。例如采用部分长度控制棒可以抑制压水反应堆中轴向的氙振荡。

## 2.2 钷-149 中 毒

在所有的裂变产物中，钷-149对堆的影响仅次于氙-135。对能量为0.025电子伏的中子，钷-149的吸收截面为40800靶。钷-149的无限稀释共振积分为3400靶。图10-15表示了钷-149<sup>9</sup>裂变产物链。由图可知，钷-149是从钷-149经过二次 $\beta^-$ 衰变而来的。钷-149的裂变产额为0.0113，半衰期为2小时。钷-149的半衰期与钷-149的半衰期（54小时）相比可忽略不计。所以可以认为钷-149是在裂变时直接产生的，因而略去了钷-149的中间作用。令 $\gamma_{pm} = \gamma_{Nd} = 0.0113$ ,

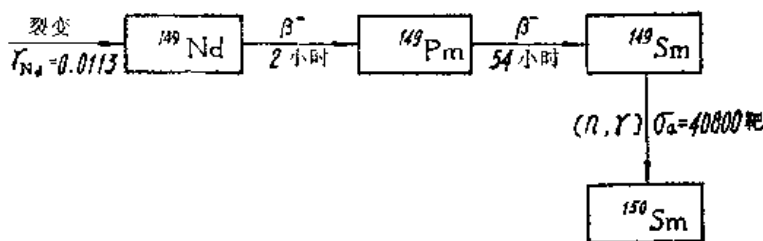


图10-15 钷-149裂变产物链

根据图10-15可以写出钷-149和钷-149的浓度随时间变化方程：

$$\begin{aligned} \frac{dN_{Pm}(t)}{dt} &= \gamma_{Pm} \Sigma_f \phi - \lambda_{Pm} N_{Pm}(t) \\ \frac{dN_{Sm}(t)}{dt} &= \lambda_{Pm} N_{Pm}(t) - \sigma_a^{Sm} \phi N_{Sm}(t) \end{aligned} \quad (10-58)$$

下面将分别分析反应堆启动和停堆后钷-149浓度及中毒随时间变化的情况。

**(1) 反应堆启动时钷-149的中毒**

反应堆在刚启动时， $N_{Pm}(0) = N_{Sm}(0) = 0$ 。以这为初始条件解方程式 (10-58)，可以得到钷-149和钷-149随时间变化关系式：

$$N_{Pm}(t) = \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f \phi}{\lambda_{Pm}} [1 - \exp(-\lambda_{Pm} t)] , \quad (10-59)$$

$$\begin{aligned} N_{Sm}(t) &= \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f}{\sigma_a^{Sm}} [1 - \exp(-\sigma_a^{Sm} \phi t)] \\ &\quad - \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f \phi}{\lambda_{Pm} - \sigma_a^{Sm} \phi} [\exp(-\sigma_a^{Sm} \phi t) - \exp(-\lambda_{Pm} t)] . \end{aligned} \quad (10-60)$$

当  $t$  足够大时，上述两式中的指数项都趋近于零，这样就可得钷-149和钷-149的平衡浓度，分别以  $N_{Pm}(\infty)$  和  $N_{Sm}(\infty)$  来表示。

$$\begin{aligned} N_{Pm}(\infty) &= \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f \phi}{\lambda_{Pm}} , \\ N_{Sm}(\infty) &= \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f}{\sigma_a^{Sm}} . \end{aligned} \quad (10-61)$$

由此可知，钷-149的平衡浓度与反应堆的热中子通量有关，而钷-149的平衡浓度与热中子通量无关（即与功率无关）。把 (10-61) 式代入 (10-38) 式，可近似地求得平衡钷-149浓度所引起反应性变化值，称为平衡钷中毒  $[\Delta\rho_{Sm}(\infty)]$ 。

$$\Delta\rho_{Sm}(\infty) \approx \frac{N_{Sm}(\infty) \sigma_a^{Sm}}{\Sigma_a} = \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f}{\Sigma_a} . \quad (10-62)$$

虽然平衡钷浓度与热中子通量无关，但是达到平衡钷浓度所需要的时间却与中子通量有密切的关系。当 (10-60) 式中所有指数项全为零或接近于零时，就达到了平衡钷浓度。为此要求  $t$  至少应满足下列两个条件：

$$t \gg \frac{1}{\sigma_a^{S_m} \phi}, \quad (10-63)$$

$$t \gg \frac{1}{\lambda_{Pm}}. \quad (10-64)$$

其中 $\lambda_{Pm}$ 和 $\sigma_a^{S_m}$ 的值分别列在表10-1和图10-15中。从(10-64)式可以得到 $t$ 应远远大于 $0.28 \times 10^6 \text{秒}^{-1}$ ；从(10-63)式可知， $t$ 与热中子通量有关，对于一般动力堆的热中子通量，（例如 $\phi = 5 \times 10^{13}$ 中子/厘米<sup>2</sup>·秒），从(10-63)式求得 $t$ 要远大于 $0.5 \times 10^6$ 秒。由此可知，即使对于运行在高中子通量情况下的反应堆，到达平衡钷的时间至少要几百小时以上。这与到达平衡氙的时间相比要大得多。其主要原因是由于氙-135的吸收截面远远地大于钷-149的吸收截面，而且氙-135还由于放射性衰变而消失，所以它很快就达到了饱和值。

### (2) 反应堆停堆后钷-149浓度随时间变化

假设反应堆在停堆前已经运行了相当长的时间，堆内的钷-149和钷-149的浓度都已经达到了平衡值。然后在 $t = 0$ 时突然停堆。停堆后钷-149和钷-149的浓度随时间变化为：

$$N_{Pm}(t) = \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f \phi}{\lambda_{Pm}} \exp(-\lambda_{Pm} t), \quad (10-65)$$

$$N_{Sm}(t) = \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f \phi}{\sigma_a^{S_m}} + \frac{\gamma_{Pm} \Sigma_f \phi}{\lambda_{Pm}} [1 - \exp(-\lambda_{Pm} t)]. \quad (10-66)$$

其中 $\phi$ 为停堆前稳态运行时的热中子通量， $t$ 为由停堆时刻开始起算的时间。

由(10-66)式可以看出，停堆后钷-149的浓度将随时间而增加。式中第一项为钷-149的平衡浓度，第二项为停堆后钷-149衰变成钷-149的浓度。若 $\phi = \lambda_{Pm} / \sigma_a^{S_m} \approx 0.9 \times 10^{14}$ 中子/厘米<sup>2</sup>·秒，则停堆后钷-149的最大浓度可达停堆前平衡浓度的二倍左右。当反应堆再次启动后，这些多余的钷-149很快就被消耗，平衡钷状况又将恢复。若停堆前中子通量比较低，则第二项值也比较小，这时停堆后的钷-149浓度基本上保持不变。

## 2.3 其它裂变产物的中毒

在所有的裂变产物中，除了氙-135和钷-149的吸收截面特别大外，而其余裂变产物的吸收截面相对来说都比较小。在整个反应堆的运行期内，它们由于吸收中子而消失的速率也比较小，所以其浓度将随运行时间的增长而不断地增加，我们称它们为非饱和性（或永久性）的裂变产物。

非饱和性裂变产物的核素种类很多，在计算时一般只需选其吸收截面较大的一些同位素，如镭-113、钷-151、钷-155和钷-157等（它们的吸收截面都大于 $10^4$ 靶）单独进行计算。把除了这些同位素以外的其它非饱和性同位素归并成一组，用一个假想的裂变产物同位素来代替。令其裂变产额为1，而吸收截面数值可由经验数据给出或是用这些非饱和性裂变产物同位素的吸收截面对其裂变产额进行权重而近似地求得。例如，

$$\sigma_a^f = \frac{\sum_i \gamma_i \sigma_a^i}{\sum_i \gamma_i}. \quad (10-67)$$

式中 $\sigma_a^f$ 为假想裂变产物同位素的热中子吸收截面； $\sigma_a^i$ 和 $\gamma_i$ 分别为第*i*种非饱和性裂变产物同位素的热中子吸收截面和裂变产额。

裂变产物同位素的燃耗方程为

$$\frac{dN_{F, P}(t)}{dt} = \gamma_{F, P} \Sigma_f \phi - \sigma_a^{F, P} \phi N_{F, P}(t) \quad (10-68)$$

式中 $N_{F, P}$ 、 $\gamma_{F, P}$ 和 $\sigma_a^{F, P}$ 分别为非饱和性裂变产物的浓度、裂变产额和吸收截面。假设中子通量为常数和裂变产物初始浓度为零，则(10-68)式的解为

$$N_{F, P}(t) = \frac{\gamma_{F, P} \Sigma_f}{\sigma_a^{F, P}} [1 - \exp(-\sigma_a^{F, P} \Phi)] \quad (10-69)$$

$$\text{令 } \Phi = \phi t \quad (10-70)$$

$\Phi$ 为中子通量为常数情况下的积分通量。若中子通量与时间有关，则可用第十一章中(11-65)式来表示 $\Phi$ 。积分通量随着燃耗深度增加而增加，可以用它来度量反应堆中各种材料受到中子辐照的程度。

由(10-69)式可知，非饱和性裂变产物同位素的浓度随着积分通量的增加而增加，当反应堆运行时间较长时，燃料内非饱和性裂变产物同位素的浓度和由于它所引起的负反应性都较大，因而使反应堆的过剩反应性显著地下降。

### 3. 燃耗计算

#### 3.1 燃耗计算的步骤与方法

##### 3.1.1 燃耗计算的步骤

燃耗计算的主要内容是：计算在每个时间步长末、每个燃耗区内燃料中重同位素的核密度和裂变产物的浓度、中子通量、功率密度以及相应的反应性等。为了保证计算的可靠性，需将反应堆的核特性计算与热工-水力计算结合起来。

图10-16表示了典型燃耗计算的主要步骤。

燃耗计算主要可分为二个部分：

##### (1) 空间部分计算

在给定堆芯材料成分和各种同位素核密度的空间分布（由初始条件给出或由上一时间步长内燃耗方程解得）的条件下，进行中子能谱、少群常数、临界和热工-水力方面的计算（见图10-16中第1—5框）。从这些计算中可以求得反应堆的有效增殖因数(或过剩反应性)、中子通量和功率密度分布等。然后，通过调节控制棒或控制毒物，求得在临界条件下所需的硼浓度、控制棒的位置以及中子通量和功率密度分布等。

##### (2) 时间部分的计算

在空间部分计算结束后，把时间加上一个步长。假设在上一个时间步长末空间部分计算求得的中子通量在本个时间步长内保持不变。然后解每个燃耗区的燃耗方程，求出在本时间步长末燃料中各种重同位素核密度和裂变产物浓度（包括最大氙和平衡氙浓度）。这些又作为下一次空间部分计算的依据。

上述空间部分和时间部分计算需要反复交替地进行，直到反应堆的过剩反应性近似等于零时才结束。严格地讲，上述两部分的计算是不能分离的。因为任何核密度（浓度）的变化都要立刻引起中子通量和功率密度的变化，反之亦然。因而需要解决的问题是一个非线性问题。为了计算方便，采用前面介绍的空间分区和时间分段的方法来近似地计算。但当空间分区足够小和时间步长取得不太长时，这样的计算是可以满足工程设计上的要求的。

### 3.1.2 燃耗计算中的某些具体方法

正如前述，严格的燃耗计算是一个复杂、计算量又很大的工作。但是，可以采用一些把问题简化的方法，以便节省计算时间、减少计算费用。下面讨论计算中的某些具体方法。

#### (1) 燃耗区的选择

在燃耗计算程序中，必须计算和贮存每个燃耗时间步长末、堆内各区的同位素核密度和群常数。但在临界计算中，堆芯被分成很多网格区。在燃耗计算中如果仍然按这些网格区来解燃耗方程，则要求计算机的贮存量很大，并且计算工作量也很大。为此，在燃耗计算中通常把整个堆芯划分成某些燃耗区，每一个燃耗区内包含一定数量的临界计算的网格点。燃耗区划分原则是：在堆芯寿期初，该区内的群常数与空间无关，区内中子通量的分布比较平坦。燃耗区内的中子通量值可取区内各网格点中子通量的平均值。用这个平均的中子通量值作为该燃耗区内均匀化燃耗计算，求出每一燃耗区内各同位素的核密度（或浓度）和群常数。这样，在每个时间步长末，只需贮存这些值就可以了。它的数量要比按网格区来计算少得多。这就大大地减少了在计算机中所需的贮存量并节省了计算时间。

#### (2) 参数化截面

即使把堆芯分成某些燃耗区来计算，但是燃耗区仍然相当多，若要对所有的燃耗区在每个时间步长末都进行中子能谱和少群常数的计算，其工作量仍然是非常大的。为了克服这个困难，可以采用参数化截面表。

在正式对燃耗进行计算之前，先对堆芯的不同材料成分区（其数目远小于燃耗区的数目）进行“点”燃耗计算，其计算步骤如下：先用  $D_n, B_n^0 \phi_n$  来代替少群扩散方程中的  $-D_n \nabla^2 \phi_n$  项，这样便把少群扩散方程变成代数方程组，并很容易对它进行求解；然后利用求出的少群中子通量  $\phi_n$  进行燃耗计算，求出时间步长末各种同位素的核密度；最后，利用这些核密度（或浓度）进行中子能谱计算，求得多群渐近中子能谱  $\phi_n (n = 1, 2, \dots)$ 。根据  $\phi_n$  可求得各种同位素的少群微观截面，即

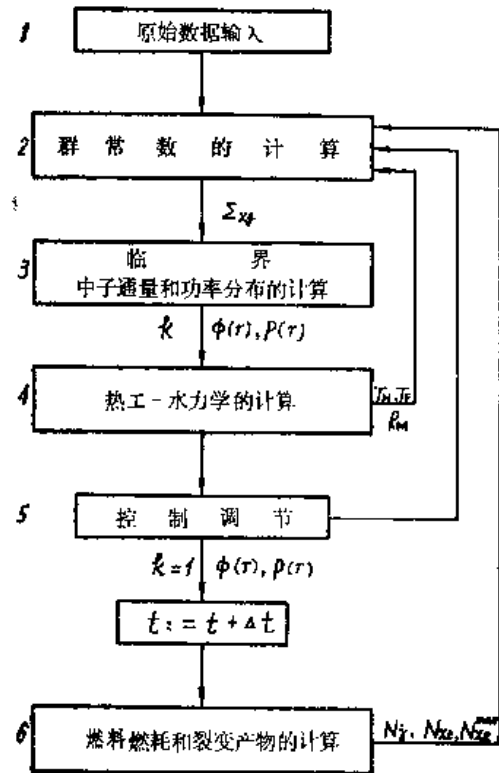


图10-16 燃耗计算主要步骤示意图



$$\sigma_{x, g}^i = \frac{\sum_{n \in g} \sigma_{x, n}^i \phi_n}{\sum_{n \in g} \phi_n} \quad (10-71)$$

其中的角标含义： $x$ 是指吸收、散射、裂变和输运等核反应； $i$ 是指同位素； $g$ 和 $n$ 分别指少群和多群； $\sum_{n \in g}$ 是指对于 $g$ 群所属 $n$ 群累加。

根据求得的少群微观截面再作下一时间步长的“点”燃耗计算。这个过程一直继续下去，最后我们可求得：对于不同材料成分区，各种同位素的微观截面与燃耗深度的函数关系。把它制成数表（称参数化截面表）形式存到计算机中，供正式燃耗计算时使用。

在正式燃耗计算中，可求得每个时间步长末各燃耗区的燃耗深度，根据这个燃耗深度就可以从相应的材料成分区的参数化截面表中近似地求得少群微观截面 $\sigma_{x, n}^i$ ，然后用下式计算少群宏观截面。

$$\Sigma_{x, g} = \sum N_i \sigma_{x, n}^i \quad (10-72)$$

其中 $N_i$ 为正式燃耗计算中求得的各种同位素的核密度（或浓度）。一般地说，燃耗过程中能谱变化对计算结果的影响并不太严重，因此这种近似的计算方法对一般燃耗分析是允许的。

### （3）时间步长的选择

为了进一步降低计算成本，我们希望采取较长的时间步长。但正如前述，在整个时间步长内假设中子通量为常数，如果时间步长取得太长，就会引起较大的误差。为了解决这个矛盾，可以把一个比较大的时间步长再分成几个子步长（小步长）。首先我们对子步长解燃耗方程，求出每个子步长末的重同位素的核密度和裂变产物的浓度，并计算出燃耗深度。然后用它从参数化截面表中求出少群截面。根据这些截面值和反应堆的总功率，重新计算中子通量数值，称为重新归一化中子通量。

这样，在燃耗计算过程中，只需要进行对较长的时间步长内的临界、热工-水力、控制棒调节和燃耗方面的计算。由于在每一子步长上进行了重新归一化中子通量的计算，这就适当地考虑到了由于核燃料的燃耗和裂变产物的积累所引起的中子能谱和中子通量改变对燃耗计算的影响，因此，时间步长可以取得比较大，例如可以取到一千小时左右。

## 3.2 反应堆堆芯寿期与燃耗深度

### 3.2.1 反应堆堆芯寿期

一个新的堆芯（或换料后的堆芯），它的燃料装载量比临界时燃料装载量多，初始有效增殖因数（或过剩反应性）比较大，因此必须用控制毒物来补偿这些过剩反应性。随着反应堆运行时间的加长，有效增殖因数逐渐地减小。当反应堆的有效增殖因数降到1时候，反应堆满功率运行的时间就称为堆芯寿期。

为了确定堆芯寿期，需要进行燃耗计算，即计算在无控制毒物的情况下堆芯的有效增殖因数（其中包括在平衡氙浓度条件下和最大氙浓度条件下的有效增殖因数）随时间的变化关系，见图10-17所示。但在实际计算时，考虑到在堆芯寿期末，反应堆运行时控制棒调节所需要的一定反应性，因此堆芯寿期末的有效增殖因数应稍大于1（例如取 $k = 1.005$ ）。

从图10-17中可知，在最大氙浓度的情况下的堆芯寿期 ( $T_{L1}$ ) 要比在平衡氙浓度情况下的堆芯寿期 ( $T_{L2}$ ) 短。当  $t \leq T_{L1}$  时，反应堆在停堆后随时都可以启动。但在  $T_{L1} \leq t \leq T_{L2}$  期间，反应堆在停堆后某一段时间（强迫停堆期间）内不能启动。船用反应堆为了保证随时都可以启动，必须按照最大氙浓度条件来确定堆芯寿期。有时，在反应堆设计中预先给出堆芯寿期而要求用倒推法求出堆芯所需要的初始过剩反应性或燃料浓缩度。

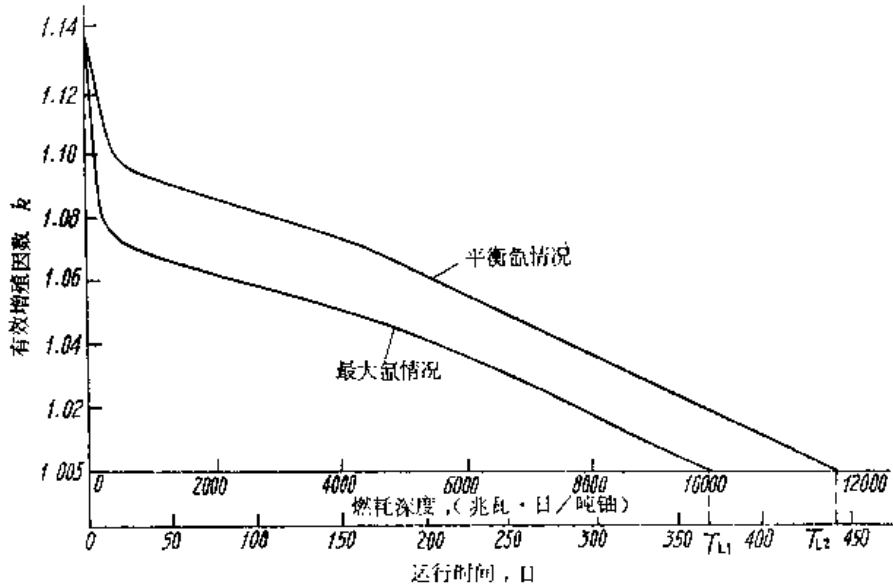


图10-17 有效增殖因数随燃耗深度变化曲线

### 3.2.2 燃耗深度

(1) 通常我们把单位质量燃料所发出的能量作为燃耗深度的度量。

$$\alpha_1 = \frac{N_f \cdot t}{W_U} \quad [\text{兆瓦} \cdot \text{日} / \text{吨铀}] \quad (10-73)$$

式中的  $W_U$  和  $N_f \cdot t$  分别为核燃料的质量 (吨) 和它所发出的能量 (兆瓦·日)。若以铀为燃料，则它的单位为 (兆瓦·日/吨铀)。在计算核燃料质量时应该注意：它是指燃料中含有重元素 (铀、钚和钍) 的质量，例如以二氧化铀为燃料时，在计算  $W_U$  时，必须把燃料中的氧所占分数扣除。

(2) 燃耗深度的第二种表示形式为：燃耗掉的裂变同位素质量 ( $W_B$ ) 和装载的裂变同位素质量 ( $W_f$ ) 的比值。

$$\alpha_2 = \frac{W_B}{W_f} \times 100\% \quad (10-74)$$

显然  $\alpha_2$  表示在装载的裂变同位素中燃耗掉的百分数。

(3) 燃耗深度的第三种表示形式为：燃耗掉的裂变同位素的质量  $W_B$  (公斤) 对装载的燃料质量  $W_U$  (吨) 的比值，以  $\alpha_3$  表示。

$$\alpha_3 = \frac{W_B}{W_U} \quad (\text{公斤} / \text{吨铀}) \quad (10-75)$$

$\alpha_3$ 表示在每吨燃料（铀）中，裂变同位素的消耗量（公斤）。

在反应堆设计和运行中，有时需要知道某一批燃料或某一燃料组件的燃耗深度，那么上述式中的数值就要用该批燃料或该燃料组件中实际的数值。

在动力反应堆中，通常都是采用第一种方式表示，但在生产堆或试验堆中，有时采用第二种和第三种方式来表示比较方便。这三种表示方式之间存在下列关系：

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{C_5 \times 10^3}{B} \alpha_2, \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{B} \alpha_3, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{C_5 \times 10^3} \alpha_3. \end{aligned} \tag{10-76}$$

其中  $B$  为每发出 1（兆瓦·日）的能量所需消耗裂变同位素的质量（公斤）； $C_5$  为核燃料中裂变同位素的初始浓缩度。对于热中子反应堆， $B \approx 1.23 \times 10^{-3}$ （公斤/兆瓦·日）。

从堆芯中卸出的燃料所达到的燃耗深度称为卸料燃耗深度。它受到反应堆核特性和燃料元件本身的机械性能的影响。反应堆核特性主要是指反应堆中初始的过剩反应性。从物理上讲，反应堆初始过剩反应性越大，燃料元件在堆内燃耗的时间可越长。但实际上，卸料燃耗深度主要是受燃料元件的机械性能的限制。燃料元件的机械性能主要是指燃料元件在各种工况下的稳定性。例如在用金属铀为核燃料时，由于它在高温下要发生相变，在高中子通量和  $\gamma$  射线的辐照下要发生肿胀，它的稳定性远不如二氧化铀，因此金属铀不能达到较高的燃耗深度。

平均卸料燃耗深度直接关系到动力反应堆的经济性，它是动力反应堆设计的重要指标之一。提高平均卸料燃耗深度可有各种措施，例如：采用不同浓缩度的核燃料进行分区装料；采用化学补偿液来控制反应性和展平功率；选用在高温、高辐照条件下稳定性较好的二氧化铀和碳化铀来做燃料元件芯块；选取适当的芯块密度，以利于裂变气体的释放和防止密集化效应；选用稳定性较好，吸收截面较小的材料（如锆合金）做燃料元件的包壳材料；改进燃料元件的加工工艺，提高加工精度……等。由于采用以上这些措施，目前压水堆的平均卸料燃耗深度可达到 30000（兆瓦·日/吨铀）。

### 3.3 转 换 比

在反应堆运行过程中，一方面铀-235不断地燃耗，但另一方面却有新的裂变同位素（铀-239、铀-241或铀-233）生成。转换比的定义就是产生的裂变同位素的核数与消耗的裂变同位素核数之比，用  $CR(r, t)$  来表示。对于铀-钚循环的反应堆有

$$CR(r, t) = \frac{\sum_g \sigma_{28}^{2, 25} \phi_g N_{28}(r, t) + \sum_g \sigma_{40}^{4, 25} \phi_g N_{40}(r, t)}{\sum_g \sigma_{25}^{2, 25} \phi_g N_{25}(r, t) + \sum_g \sigma_{49}^{4, 25} \phi_g N_{49}(r, t) + \sum_g \sigma_{41}^{4, 25} \phi_g N_{41}(r, t)} \tag{10-77}$$

其中，角标 25、28、49、40 和 41 分别代表铀-235、铀-238、铀-239、铀-240 和铀-241，其它

符号的意义同前。式中已经假设铀-238俘获中子后全部都变成了铀-239；铀-240俘获中子后全部都变成铀-241。这两种假设在实际上还是比较合理的。

从(10-77)式中可知，转换比是空间和时间的函数。但是我们感兴趣的 主要是堆芯平均转换比，因此，必须将(10-77)式中每项对整个堆芯作体积积分。

$$\overline{CR}(t) = \frac{\int_V \sum_s \sigma_{\gamma, s}^{2,8} \phi_s N_{2,8}(r, t) dV + \int_V \sum_s \sigma_{\gamma, s}^{4,0} \phi_s N_{4,0}(r, t) dV}{\int_V \sum_s \sigma_{a, s}^{2,5} \phi_s N_{2,5}(r, t) dV + \int_V \sum_s \sigma_{a, s}^{4,9} \phi_s N_{4,9}(r, t) dV + \int_V \sum_s \sigma_{a, s}^{4,1} \phi_s N_{4,1}(r, t) dV} \quad (10-78)$$

平均转换比只与时间有关，在  $t = 0$  时的转换比称为初始转换比，以  $\overline{CR}(0)$  表示。因为这时燃料中只有铀-235和铀-238两种同位素，因此

$$\overline{CR}(0) = \frac{\int_V \sum_s \sigma_{\gamma, s}^{2,8} \phi_s N_{2,8}(r, t) dV}{\int_V \sum_s \sigma_{a, s}^{2,5} \phi_s N_{2,5}(r, t) dV} \quad (10-79)$$

## 4. 核燃料管理

核燃料管理一般可分三个方面：

### (1) 进堆前核燃料管理

进堆前核燃料管理包括铀矿的勘探、开采、冶炼、同位素分离和燃料元件的制造。

### (2) 堆内核燃料管理

堆内核燃料管理的目的是：确定反应堆的初始核燃料的装载方式以及选择较佳的换料周期、换料方案等，以使核燃料循环成本达到最小。

### (3) 出堆后燃料管理

出堆后燃料管理主要考虑废燃料的储存、运输、后处理以及放射性废物的处理等问题。

核燃料管理最重要的准则是在保证反应堆有足够的安全性和可靠性的前提下使发电成本最低。核燃料管理是核工程的一个重要方面，它涉及面很广。在本节中我们仅仅讨论直接与核反应堆物理分析有关的堆内核燃料管理问题。

堆内核燃料管理主要包括下列内容：选择燃料换料方案；燃料装载图；计算和测量燃料的燃耗和同位素的积累等。下面对它们作简单地介绍。

#### (I) 堆内核燃料管理的任务与要求

一般说来，在堆内核燃料管理方案被确定之前，堆芯的尺寸、燃料组件的设计、控制系统及冷却剂等方面往往都已确定了。因此，在堆内核燃料管理中允许改变的只是新的燃料组件的浓缩度、燃料的换料周期、换料方案和有关的控制管理程序。

在堆内核燃料管理中，应该满足热工方面的要求。例如：燃料的中心温度要低于熔点；燃料元件表面热流量不能超过烧毁热流量。在这两个要求中，前者限制了反应堆中局部功率密度峰因子；后者限制了燃料元件的线功率密度。为此，必须要计算每个时间步长内堆芯中

功率密度的分布，使它能满足热工上的要求。

### (II) 换料周期

反应堆换料时，很少把整个堆芯的燃料一起都换掉，一般只换一部分燃料。两次换料之间的时间间隔称为反应堆的换料周期。

换料周期的选取直接关系到反应堆的经济性。若换料周期取得比较短，则反应堆的初始过剩反应性可以比较小，因而控制棒的数目或控制毒物的数量可以减少，核燃料的比装量（即发出一定功率所需的核燃料装载量）也可以减少，这在经济上带来很多好处。但若换料周期取得太短，这将导致频繁的停堆，这在经济上又会带来损失。因此必须全面考虑，选取适当的换料周期。大部分压水反应堆采用每年换一次料。例如在轻水反应堆中，如果采用年度换料周期，那末每次只换堆芯燃料的1/4到1/3。但是，某些反应堆设计可允许连续换料或很迅速地换料。

### (III) 换料方案

在局部换料时，新的燃料应如何布置？烧过的燃料应如何换掉？这个问题是换料方案应解决的课题。假设在堆芯中采用均匀的装料方式，即在整个堆芯中采用相同浓缩度的燃料元件。在这种装料方式下，寿期初堆芯的功率峰因子很大，堆芯中心区域的中子通量很高，功率密度很大，因而这区域中的燃料消耗很快；而在堆芯边缘区域的功率密度很小，因而这区域中的燃料消耗很慢。这样，在堆芯寿期末，虽然功率密度分布已趋向平坦（如图10-18所示），但是已经要换料了。在卸出的核燃料中，许多燃料元件的燃耗深度很低，因此反应堆的平均燃耗深度也很低，这是均匀装料方式的缺点。

为了克服均匀装料方式的缺点，通常采用非均匀的装料方式，其中有下列几种：

#### (i) 分区装料

在这种装料方式中，把堆芯按径向分成若干个区域，在不同区域中，燃料浓缩度是不同的，见图10-19 (a)。通常是从堆芯的边缘向中心逐渐地降低燃料的浓缩度。例如在某一压水堆中，从边缘到中心分为三区，在三区的燃料中，铀-235的浓缩度分别为：3.1%，2.6%和2.1%。换料时，先把中心区域的燃料组件卸去，然后把边缘区域和中间区域的燃料组件依次地向中心区域移动，新的燃料组件放在边缘区。

这样的装料方式可以使燃料的燃耗比较均匀，因而可以取得较高的平均卸料燃耗深度。它的缺点是：在大型的堆芯中，在燃料浓缩度不同的区域的交界处，中子通量的分布有显著的突变，这将引起较大的局部功率峰因子。

#### (ii) 分散交替装料

在分散交替装料中，不同浓缩度的燃料组件，交叉地分散在整个堆芯中，它的局部功率密度分布像精细的波浪形，因而它的局部功率因子较小。但整个堆芯中的功率展平情况不及

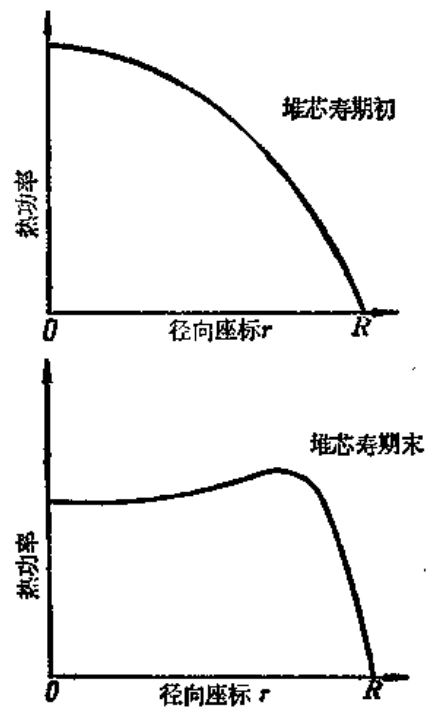


图10-18 在均匀装料方式情况下，堆芯中径向功率的分布

分区装料好。

### (iii) 混合式装料

实际上，大部分反应堆的装料方式是采用上述两种装料方式的结合，称混合式装料，如图10-19 (b) 所示。在这种装料方式中，堆芯最外一区是采用相同浓缩度的燃料，中间区域或中心区域则采用不同浓缩度的燃料组件分散交替地排列。在换料时，新的燃料组件（浓缩度较高）装在最外区，而原来在外区的已经辐照过的那些燃料组件分散交替地装到内部各区。也有的压力水反应堆，在堆芯边缘区和中心区是采用分区装料，而在中间区是采用分散交替装料。

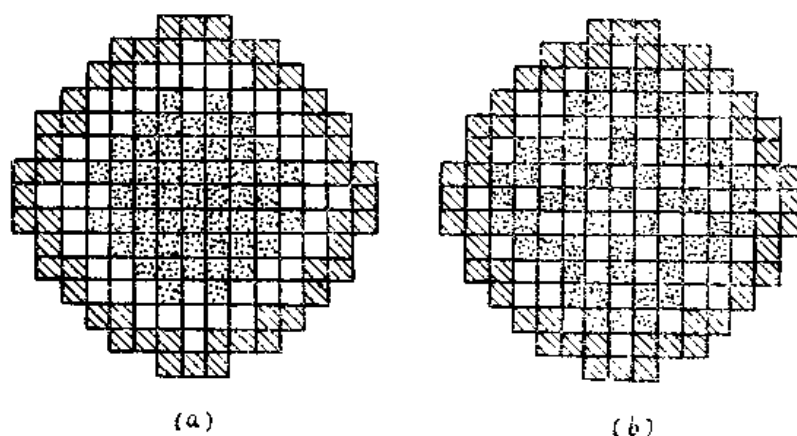


图10-19 堆芯燃料装载图

(a) 分区装料                      (b) 混合式装料

这种混合式装料吸取了以上两种装料方式的优点，避免了它们的缺点。同时，它的装卸料也很方便，每次换料时，不必移动堆芯中全部燃料组件，因而缩短了换料时间。

另外，堆内核燃料管理的多变性常常给工作带来很多的麻烦。一些预测不到的因素常常需要改变换料的计划，从而需要对堆内核燃料管理重新作分析。例如，在反应堆的运行中，突然发现某些燃料元件包壳破裂，需要把它们从堆芯中取出，这就改变了原来的换料计划，因而必须对换料后的堆芯迅速地作出计算，并要求反应堆能安全可靠地运行。

堆内核燃料管理的最佳分析是一件很复杂的工作，它不仅考虑到堆芯几何形状、控制管理方案以及堆芯中核性能和热工-水力性能之间配合等因素，而且还要受到外界条件的限制。目前大部分都是采用试凑法进行分析，但是，也已经开始把最佳化方法直接应用于堆内核燃料管理中。

## 主要参考文献

- [1] Allan F. Henry, Nuclear-Reactor Analysis, Chap. 6., The MIT press, 1975.
- [2] James J. Duderstadt & Louis J. Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, pp 567—577. John Wiley & Sons Inc. New York, 1976.
- [3] В.И.弗拉基米罗夫著，任戈、杨水泉、徐及明译，核反应堆运行中的实际问题，第52页，原子能出版社，1976年。

# 第十一章 反应性温度系数和反应性控制

反应性温度系数和反应性控制与反应堆的安全性有着密切的关系。在反应堆物理设计中，要求反应堆的温度系数最好不要出现正值；在任何工况下，反应堆都应该有足够的停堆深度。本章首先定性地分析反应堆温度系数，然后简单地介绍反应性控制的任务和方式，最后分析目前常采用的三种控制方式——控制棒控制，可燃毒物控制和化学补偿控制。

## 1. 温度系数

### 1.1 温度系数及其对反应堆稳定性的影响

与反应性有关的许多参数，如热中子利用系数、逃脱共振几率等，都是温度的函数。因而，当反应堆中各种材料的温度发生变化时，会引起反应性的变化，这种现象称为反应性温度效应。温度变化一度(K)时所引起的反应性变化称为反应性温度系数，以 $\alpha_T$ 表示。

$$\alpha_i = \frac{\partial \rho}{\partial T_i}, \quad (11-1)$$

式中， $\rho$  是反应性， $T$  是堆芯内的温度。堆芯中各种成分（燃料、慢化剂和冷却剂等）的温度及其温度系数都是不同的。反应堆总的温度系数等于各成分的温度系数的总和，即

$$\alpha_T = \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial T_i} = \sum_i \alpha_i^i, \quad (11-2)$$

式中 $T_i$ 和 $\alpha_i^i$ 分别为堆芯中各种成分的温度和温度系数。其中起主要作用的是燃料温度系数和慢化剂温度系数。

根据反应性定义，由(11-1)式可以求得：

$$\alpha_T = \frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial T} - \frac{k-1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial T}.$$

式中 $k$ 为反应堆有效增殖因数。因为 $k$ 接近于1，上式右边第二项近似地等于零，所以，

$$\alpha_T \approx \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial T}. \quad (11-3)$$

将 $k = \eta f p \epsilon P_L$ 代入(11-3)式便得

$$\alpha_i = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} + \frac{1}{P_L} \frac{\partial P_L}{\partial T}. \quad (11-4)$$

(11-4) 式是在四因子模型基础上推导出来的结论，虽然在计算中已很少采用它了，但是它对定性理解造成温度系数的内在原因及其影响因素还是有用的。

从 (11-3) 式可知，若温度系数是正的，那末，当由于微扰使温度升高时，有效增殖因数增大，反应堆的功率也随之增加。而功率的增加又将导致温度的升高和有效增殖因数进一步增大。这样，反应堆的功率将继续不断地增加。若不采取措施，就要造成堆芯的损坏。反之，当反应堆的温度下降时，有效增殖因数将减小，反应堆的功率随之降低，这又将导致温度下降和有效增殖因数更进一步的减小。这样，反应堆的功率将继续下降，直至反应堆自行关闭。显然，这种反应性温度效应的正反馈将使反应堆具有内在的不稳定性。因此在反应堆设计时不希望出现正的温度系数。

具有负温度系数的反应堆，与上述情况刚好相反。这时温度的升高将导致有效增殖因数的减小，反应堆的功率也随之减小，反应堆的温度也就逐渐回到它的初始值。同理，当反应堆的温度下降时，将导致有效增殖因数的增大，反应堆的功率也随之增加，反应堆的温度也逐渐地回到它的初始值。这种由于温度变化引起反应性变化的负反馈效应，将使反应堆具有内在的稳定性。

为了进一步说明温度系数对反应堆稳定性的影响，图11-1表示了不同温度系数的情况下，当反应堆内引入一个阶跃正反应性之后，反应堆的功率随时间变化情况。从图上可以看出，在温度系数大于零的情况下，反应堆的功率将很快地升高。当温度系数小于零且它的绝对值很小时，同时热量导出又足够快的情况下，反应堆的功率在开始时也较快地上升。但功率上升使反应堆的温度逐渐地升高，反应堆的反应性逐渐地减小。当反应堆的功率上升到某一水平、温度效应所引起的负反应性刚好等于引入的正反应性时，反应堆就在这一功率水平下稳定运行。在温度系数小于零且它的绝对值又很大，同时热量的导出又不够快的情况下，反应堆的功率开始时也较快地上升。由于导热不快，所以反应堆的温度增加很快，反应堆的正反应性很快地就下降到零以下。这时，反应堆就处于次临界状态，反应堆的功率开始逐渐下降，温度也随之下降。下降的温度所引起的正反应性使反应堆的反应性开始上升。当功率下降到某一值时，反应堆的反应性刚好为零，这时，反应堆就在这一功率下稳定地运行。

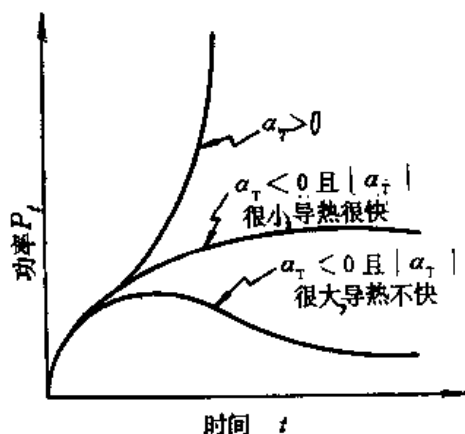


图11-1 在不同温度系数的情况下，  
反应堆功率随时间的变化

## 1.2 燃料温度系数

燃料温度变化一度 (K) 时所引起的反应性变化称为燃料温度系数。

反应堆的热量主要是在燃料中产生的。当功率升高时，燃料的温度立即升高，燃料的温度效应就立刻表现出来。所以燃料温度系数是属于瞬发温度系数。瞬发温度系数对功率的变化响应很快，它对反应堆的安全起着十分重要的作用。



燃料温度系数主要是由燃料核共振吸收的多普勒效应所引起的。燃料温度升高将使共振峰展宽，有效共振积分增加。在低浓缩铀的燃料中，铀-238吸收共振峰的展宽是主要的，而铀-235裂变共振峰展宽的影响与前者相比是次要的。因而，多普勒效应的结果使有效共振吸收增加，逃脱共振几率减小，这就产生了负温度效应。这样，燃料温度系数 $\alpha_T^f$ 可以表示成：

$$\alpha_T^f = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial T_f} = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial T_f} \quad (11-5)$$

其中 $T_f$ 为燃料温度。由(8-75)式可知，非均匀堆中逃脱共振几率 $p$ 为：

$$p \approx \exp\left[-\frac{N_0}{\xi \Sigma_s} I\right] \quad (11-6)$$

式中 $I$ 为有效共振积分。当反应堆的功率发生变化时，燃料温度立即发生变化，而慢化剂温度还来不及发生变化。这时在(11-6)式中只有 $I$ 随燃料温度而变化。把(11-6)式代入(11-5)式便得到：

$$\alpha_T^f = -\frac{N_0}{\xi \Sigma_s} \frac{dI}{dT_f} \quad (11-7)$$

当燃料温度升高时，有效共振积分增加，即 $dI/dT_f > 0$ 。所以在低浓缩铀为燃料的反应堆中，燃料温度系数总是负的。将有效共振积分 $I$ 与燃料温度 $T_f$ 的关系式(8-123)代入(11-7)式得到：

$$\alpha_T^f = -\frac{\beta}{2\sqrt{T_f}} \ln\left[\frac{1}{p(293\text{K})}\right] \quad (11-8)$$

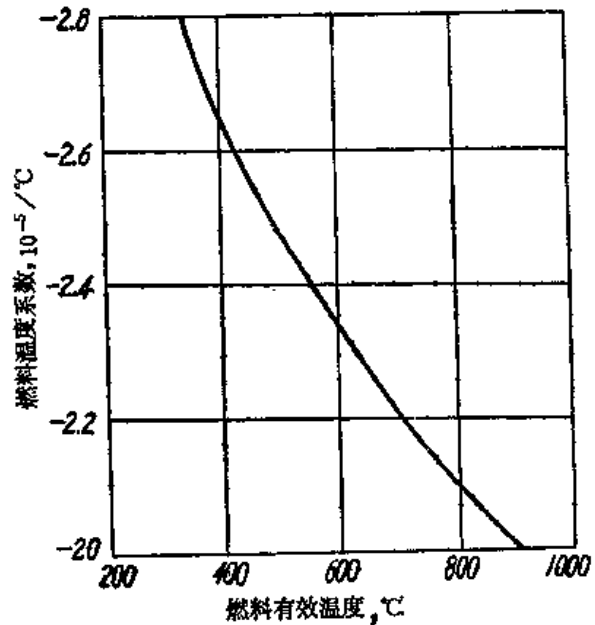


图11-2 燃料温度系数与燃料温度的关系

图11-2给出某压水堆燃料温度系数与燃料温度的关系。此外，燃料温度系数与燃料的燃耗也有关系。在低浓缩铀为燃料的反应堆中，随着反应堆的运行，钚-239和钚-240不断地积累。钚-240对于能量靠近热能的中子有很大的共振吸收峰，它的多普勒效应使燃料负温度系数的绝对值增大。

### 1.3 慢化剂温度系数

慢化剂温度变化一度(K)时所引起的反应性变化称为慢化剂温度系数。由于慢化剂的温度变化要比燃料的温度变化滞后一段时间，因此慢化剂温度系数滞后于功率的变化。

当反应堆采用固体慢化剂时，由于固体的膨胀系数很小，可以近似地认为它的密度不随温度变化。因此，慢化剂温度的变化只引起中子能谱的改变，这样，固体慢化剂的温度系数是很小的，所以我们对它不作详细讨论。下面主要讨论液体慢化剂的情况。

对于液体慢化剂的反应堆，例如轻水反应堆，当温度升高时，水的密度有显著的改变，这就使反应堆的慢化能力和中子能谱都发生变化，因而引起反应性的显著变化。在  $k$  的表示式中，除了因子  $\epsilon$  外，其余各参数都和慢化剂密度及慢化剂温度有关。按 (11-4) 式可把慢化剂温度系数  $\alpha_T^M$  表示为：

$$\begin{aligned}\alpha_T^M &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T_M} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial T_M} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial T_M} + \frac{1}{P_L} \frac{\partial P_L}{\partial T_M} \\ &= \alpha_T^M(\eta) + \alpha_T^M(f) + \alpha_T^M(p) + \alpha_T^M(P_L),\end{aligned}\quad (11-9)$$

式中  $T_M$  为慢化剂温度。

(1)  $\alpha_T^M(\eta)$  慢化剂温度增加，使中子能谱硬化，引起了铀-238、钚-240 低能部分共振吸收增加，同时也引起了铀-235 和钚-239 的  $\alpha(=\sigma_a/\sigma_f)$  值的增加，使  $\eta$  值下降。因此  $\alpha_T(\eta)$  是负的。

(2)  $\alpha_T^M(f)$  当慢化剂温度增加时，慢化剂密度减小，慢化剂相对于燃料的吸收也减小。这使热中子利用系数增加。所以  $\alpha_T^M(f)$  是正的。特别是当慢化剂中含有化学补偿毒物时，这个正效应更为显著（见本章第五节）。

(3)  $\alpha_T^M(p)$  当慢化剂温度升高时，慢化能力减小，从 (11-6) 式可知，逃脱共振几率减小，所以  $\alpha_T^M(p)$  是负的，它在慢化剂温度系数中起着显著的作用。

(4)  $\alpha_T^M(P_L)$  按双群理论，热中子裸堆不泄漏几率可表示为：

$$P_L = \frac{1}{(1+B^2L^2)(1+B^2\tau)}, \quad (11-10)$$

其中  $L^2$  和  $\tau$  分别为热中子扩散长度平方和中子年龄，它们都与介质的密度的平方近似地成反比。因此，对于均匀裸堆，(11-10) 式可近似写成：

$$P_L \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{C_1}{\rho_M^2}\right) \left(1 + \frac{C_2}{\rho_M^2}\right)}, \quad (11-11)$$

式中  $C_1$  和  $C_2$  为常数， $\rho_M$  是慢化剂密度。当慢化剂温度增加时， $\rho_M$  减小， $P_L$  也随之减小，所以  $\alpha_T^M(P_L)$  是负的。

总之，当慢化剂温度增加、密度减小时，引起了两个相反的效果：一是  $\alpha_T^M(f)$  的正效应；二是  $\alpha_T^M(\eta)$ 、 $\alpha_T^M(p)$  和  $\alpha_T^M(P_L)$  的负效应。慢化剂温度系数的正或负值主要是由这两个方面的效应来决定。在轻水反应堆中，当水中没有（或只含有少量的）化学补偿毒物（硼）时， $\alpha_T^M$  值是负的。在硼浓度较大时， $\alpha_T^M$  将要出现正值（见图 11-18）。

慢化剂温度系数还与单位体积内慢化剂与燃料的核密度比值 ( $N_{H_2O}/N_U$ ) 有关。图 11-3 表示在轻水反应堆中，有效增殖因数与 ( $N_{H_2O}/N_U$ ) 的关系曲线。以  $(N_{H_2O}/N_U)_{k_{max}}$  表示与最大有效增殖因数相对应的水铀比。在栅格尺寸已固定的情况下，当水的温度增加时，水的密度减小，这就相当于 ( $N_{H_2O}/N_U$ ) 值减小。在设计时，如果取  $(N_{H_2O}/N_U) > (N_{H_2O}/N_U)_{k_{max}}$ ，那末当水的温度升高时，有效增殖因数就增加，这就产生了正的温度系数，这是不希望的。因此在设计时，应选取  $(N_{H_2O}/N_U) < (N_{H_2O}/N_U)_{k_{max}}$ ，以保证出现负的温度系数，这是我们所希望的。

慢化剂负温度系数有利于反应堆功率的自动调节。例如在压水动力反应堆中，当外界负荷减小时，透平的控制阀就自动关小一些，这就使进入堆芯的水温度升高。当慢化剂温度系数为负值时，反应堆的反应性减小，功率也随之降低，反应堆在较低功率的情况下又达到平衡。同理，当外界负荷增加时，透平的控制阀自动开大一些，这就使进入堆芯的水温下降，反应堆的反应性增大，功率也随之升高，反应堆在较高的功率下又达到平衡。

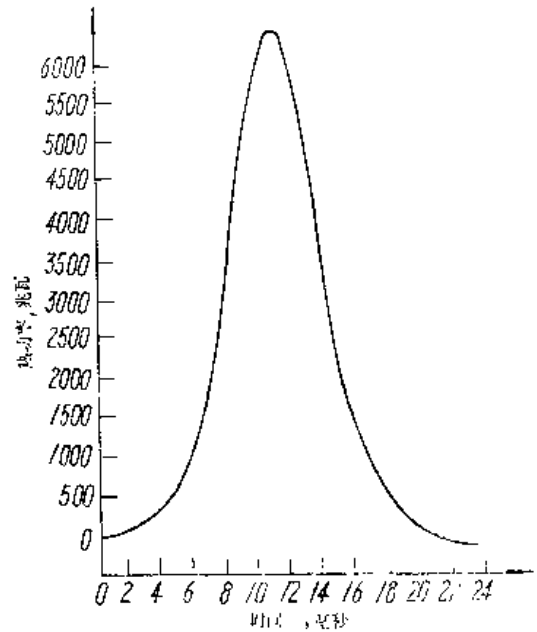
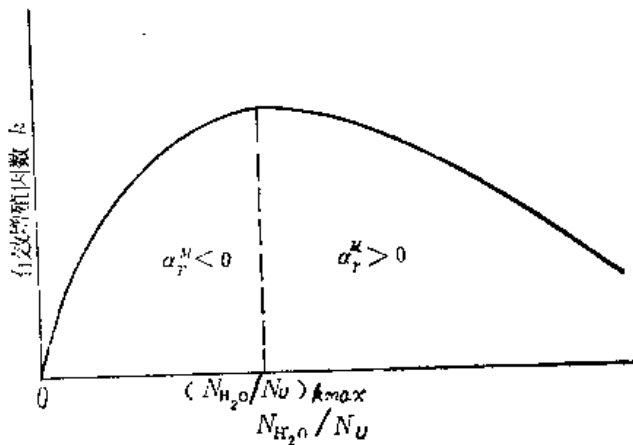


图11-3 轻水反应堆中， $k$ 与 $(N_{H_2O}/N_U)$ 关系示意图      图11-4 TRIGA型反应堆功率随时间变化曲线

温度系数及其时间常数对反应堆的安全性和稳定性起着十分重要的作用。具有强的瞬发负温度系数的反应堆能承受外界快速的大反应性输入。TRIGA<sup>1)</sup>型反应堆就是其中的一个特例。它是铀-氢-锆(U-ZrH<sub>1.7</sub>)为燃料的固体准均匀堆。把铀弥散在氢化锆中，做成棒状元件，用铝或不锈钢作包壳。元件按正方形排列，放入水池中。由于中子与元件中氢化锆的氢原子之间存在着量子化的能量交换，产生大的负温度系数。又因为燃料与慢化剂(ZrH<sub>1.7</sub>)均匀混合，氢化锆的温度基本上与燃料的温度同时变化，所以这个温度系数又是瞬发的。图11-4给出了引入大的正反应性(4—5元)<sup>2)</sup>之后，其功率随时间的变化曲线。

### 1.4 温度系数的计算

上面定性地分析了影响反应堆温度系数的各种因素，但温度系数的具体计算是比较复杂的。实际上需要作不同温度下的临界计算。在计算时，首先计算在不同的燃料和慢化剂温度条件下的群常数，然后把它们输入到少群扩散程序中，直接计算出 $\Delta k$ 与燃料或慢化剂温度的函数关系，从而求得温度系数。

以这种方法所计算的结果是指在这个温差范围内的平均温度系数。计算的准确度与所取的温差大小有关。但是，当温差很小时，有可能在这个温差下计算的 $\Delta k$ 与 $k$ 本身的计算误

1) TRIGA是Training Research and Isotope production Reactor of General Atomic的缩写。  
 2) 元是反应性单位，当反应性数值等于缓发中子有效份额时，称为一元(见第十二章)。

差相当, 反而影响计算的准确度。虽然采用提高有效增殖因数的精度的方法能改善  $\Delta k$  计算的准确度, 但由于在有效增殖因数计算中存在着固有的误差, 这就限制了温度系数计算的准确度。在这种情况下, 采用微扰理论来计算温度系数比较合适。

## 1.5 其它反应性系数

### 1.5.1 空泡系数

在液体冷却剂的反应堆中, 冷却剂的沸腾 (包括局部沸腾) 将产生蒸汽泡, 它的密度远小于液体的密度。在冷却剂中所包含的蒸汽泡的体积分数 (百分数) 称为空泡分数, 以  $x$  表示。空泡系数是指在反应堆中, 冷却剂的空泡分数变化百分之一所引起的反应性变化, 以  $\alpha_V^M$  来表示。即

$$\alpha_V^M = \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

当出现空泡或空泡分数增大情况时, 有如下三种效应: (1) 冷却剂的有害中子吸收减小, 这是正效应。(2) 中子泄漏增加, 这是负效应。(3) 慢化能力变小, 能谱变硬。这可以是正效应, 也可以是负效应, 这与反应堆的类型和核特性有关。总的净效应是上述各因素的迭加。显然各个效应及相应的净效应与空泡出现的位置有关。一般说来, 对压水堆是负效应。而对大型快中子堆, 可能出现正效应, 特别是当空泡出现在芯部中心区域时。

几种典型反应堆的反应性系数如表11-1所示。

表11-1 几种堆型的反应性系数

	沸水堆	压水堆	高温气冷堆	钠冷快堆
燃料温度系数 ( $10^{-5}/K$ )	-4—-1	-4—-1	-7	-0.1—-0.25
慢化剂温度系数 ( $10^{-5}/K$ )	-50—-8	-50—-8	+1.0	
空泡系数 ( $10^{-5}/K$ )	-200—-100	0	0	-12—+20

### 1.5.2 功率系数

单位功率变化所引起的反应性变化称为功率反应性系数, 简称为功率系数。原则上讲, 用反应堆功率系数来表示反应性系数比用温度系数、空泡系数等来表示更为直接。因为当反应堆功率发生变化时, 堆内核燃料温度、慢化剂温度和空泡分数就发生变化, 这些变化又引起反应性的变化。根据功率系数的定义有

$$\begin{aligned} \alpha_P &= \frac{d\rho}{dP} = \sum_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial T_i} \right) \left( \frac{\partial T_i}{\partial P} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial P} \\ &\approx \alpha_T^F \frac{\partial T_F}{\partial P} + \alpha_T^M \frac{\partial T_M}{\partial P} + \alpha_V^M \frac{\partial x}{\partial P} \end{aligned} \quad (11-12)$$

从(11-12)式可知,功率系数不仅与反应堆的核特性有关,而且还与它的热工-水力特性有关。它是所有反应性系数的综合,它比温度系数的含义更广泛,计算也更复杂。图11-5表示了某一压水堆在第一燃料循环中,堆芯寿期初和寿期末时的功率系数。为了使反应堆安全、稳定地运行,功率系数必须是负值。

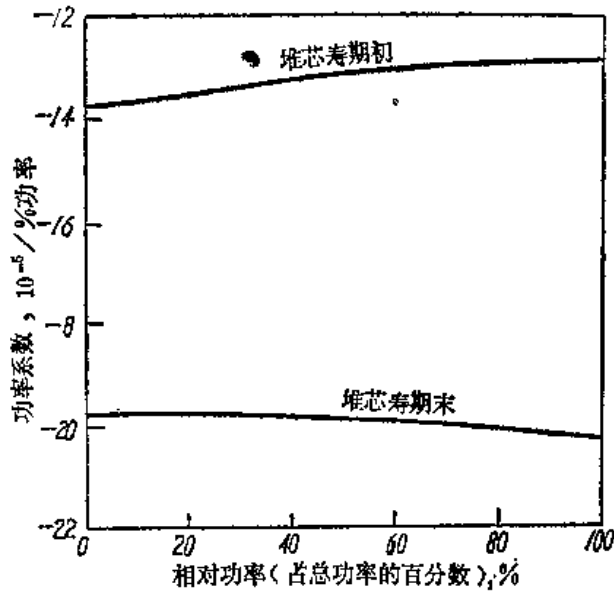


图11-5 压水反应堆功率系数与相对功率关系

## 2. 反应性控制的任务和方式

### 2.1 反应性控制中所用的几个物理量

在讨论反应性控制之前,先引入几个与反应性控制有关的物理量。

#### (1) 过剩反应性

设想当堆芯中没有控制毒物时,超临界的反应性称为过剩反应性,以 $\rho_{ex}$ 来表示。控制毒物是指反应堆中作为控制用的所有物质,例如控制棒、可燃毒物和化学补偿毒物等。过剩反应性的大小与反应堆的运行时间和工况有关,一般说来,一个新的堆芯,在冷态无中毒情况下,它的初始过剩反应性为最大。

#### (2) 控制毒物价值

当某一控制毒物投入堆芯时所引起的反应性变化,称为该控制毒物的价值,以 $\Delta\rho_i$ 表示。

#### (3) 停堆深度

当全部控制毒物都投入堆芯时,反应堆所达到的负反应性称为停堆深度,以 $\rho_s$ 来表示。很显然,停堆深度也是与反应堆运行时间和工况有关。为了保证反应堆的安全,要求在热态、平衡氙中毒的工况下,应有足够大的停堆深度。否则,当堆芯逐渐地冷却和氙-135逐渐地衰变后,反应堆的反应性就逐渐地增加,而停堆深度就逐渐地减小,这样堆芯有可能又重新恢复到临界或超临界的危险情况。所以在反应堆物理设计准则中就必须要对停堆深度作

出规定。例如在压水反应堆中，一般规定：在一束最大价值的控制棒被卡在堆外的情况下，冷态和无中毒时的停堆深度必须大于（2—3）元。

#### （4）总的被控价值

总的被控价值是等于过剩反应性与停堆深度之和，以 $\Delta\rho$ 表示。即

$$\Delta\rho = \rho_{ex} + \rho_s \quad (11-13)$$

表11-2列举了几种主要堆型中的各种反应性值。

表11-2 几种主要堆型中各种反应性值<sup>[4]</sup>

反 应 性	沸 水 堆	压 水 堆	高温气冷堆	钠冷快堆
清除堆芯的过剩反应性 $\rho_{ex}$				
在20℃时	0.25	0.293	0.128	0.050
在运行温度时		0.248		0.037
在平衡氙和钐时		0.181	0.073	
总的被控价值 $\Delta\rho$	0.29	0.32	0.210	0.074
控制棒的价值	0.17	0.07	0.16	0.074
可燃毒物价值	0.12	0.08	0.10	
化学补偿价值		0.17		
停堆深度 $\rho_s$				
冷态和清洁堆芯	0.04	0.03	0.082	0.024
热态和平衡氙、钐时		0.14	0.137	0.037

从表11-2上可知，热中子反应堆的过剩反应性和总的被控价值都远大于快中子反应堆中对应的价值，这是因为快中子反应堆的增殖比大，增殖的燃料将补偿燃料的损耗；同时温度系数和裂变产物对快中子反应堆的影响也比它们对热中子反应堆的影响小。从上表还可知，轻水反应堆的过剩反应性和总的被控价值相对比较大。这是因为轻水反应堆的慢化剂负温度系数比较大和它的转换比较小。

## 2.2 反应性控制的任務

反应性控制设计的主要任务是：采取各种切实有效的控制方式，在确保安全的前提下，控制反应堆的过剩反应性，以满足反应堆长期运行的需要；通过控制毒物适当的空间布置和最佳的提棒程序，使反应堆在整个堆芯寿期内保持较平坦的功率分布，使功率峰因子尽可能地小；在外界负荷变化时，能调节反应堆，使它能适应外界负荷变化；在反应堆出现事故时，能迅速安全地停堆，并保持适当的停堆深度。

按控制毒物在调节过程中的作用和要求，可以把反应堆的控制分成三类：

### （1）紧急控制

当反应堆需要紧急停堆时，反应堆的控制系统能迅速地引入一个大的负反应性，以快速停堆，并达到一定的停堆深度。要求紧急停堆系统有极高的可靠性。

### （2）功率调节

当外界负荷或堆芯温度发生变化时，反应堆的控制系统必须引入一个适当的反应性，以满足反应堆功率调节的需要。在操作上它要求既简单又灵活。

### (3) 补偿控制

正如前述，反应堆的初始过剩反应性比较大，因而在堆芯寿期初，在堆芯中必须引入较多的控制毒物。但随着反应堆的运行，过剩反应性的不断地减小。为了保持反应堆临界，必须逐渐地从堆芯中移出控制毒物。由于这些反应性的变化是很缓慢的，所以相应的控制毒物的移动也是很缓慢的。

## 2.3 反应性控制的方式

凡是能够有效地影响反应性的任何装置、机构和过程都可以用作反应性的控制。归纳起来有下列几种方式：

### (1) 改变堆内中子吸收

在堆芯中加入或提出控制毒物以改变堆内中子的吸收。目前广泛采用的控制毒物有：可移动式控制棒，固体可燃毒物和和液体冷却剂中加入可溶性毒物（如硼酸等）。

### (2) 改变中子慢化性能

在谱移反应堆中（重水-轻水混合慢化反应堆），通过改变重水与轻水的比例，以改变中子能谱，从而改变反应性。

### (3) 改变燃料的含量

在用燃料来作控制棒或作控制棒的跟随体的情况下，当控制棒移动时，除了改变堆内中子吸收之外，还改变堆内燃料含量，从而改变反应性。

### (4) 改变中子泄漏

小型快中子反应堆中，可用移动反射层的方法，改变中子的泄漏，从而改变反应性。

选择哪种控制方式是与堆型有关的。在石墨慢化的反应堆和重水慢化的反应堆中，由于初始过剩反应性比较小，控制棒的效率又比较高，所以大部分都采用控制棒控制方式。但在轻水反应堆中，初始过剩反应性很大，控制棒的效率又比较低。如全部都采用控制棒来控制，则需要控制棒的数目就很多。而轻水反应堆的栅格较稠密，反应堆体积较小，安排这么多的控制棒是很困难的，同时也使压力壳顶盖开孔增加，这将大大影响压力壳的强度。所以，目前在压力水反应堆中，都是采用控制棒、固体可燃毒物和冷却剂中加硼酸溶液三种控制方式联合控制，以减少控制棒的数目。

## 3. 控制棒控制

### 3.1 控制棒的作用和一般考虑

控制棒是强吸收体，它的移动速度快、操作可靠、使用灵活、控制反应性的准确度高，它是各种类型反应堆中紧急控制和功率调节所不可缺少的控制部件。它主要是用来控制反应性的快变化。具体地讲，主要是用它来控制下列一些因素所引起的反应性变化：

- (1) 燃料的多普勒效应；
- (2) 慢化剂的温度效应和空泡效应；
- (3) 变工况时，瞬态氙效应；

- (4) 硼冲稀效应；
- (5) 热态停堆深度。

根据反应堆的反应性分析，就可以确定出控制棒和其它控制方式之间的反应性分配（见表11-3）。例如，压水反应堆中的控制棒所必须控制的反应性一般在7—10%左右。

不同类型的反应堆，其控制棒形状与尺寸也不同。在石墨反应堆和重水反应堆中，一般都采用粗棒或套管形式的控制棒。在轻水反应堆中，早期大都采用十字形控制棒，目前除了在沸水反应堆仍有采用十字形控制棒的之外，一般都采用束棒式的控制棒。例如在压水反应堆中，在一个燃料组件中插入20根很细的控制棒。由于控制棒的直径很细、分布又较均匀，因此它引起的功率畸变也比较小。

对控制棒材料的要求：首先要求它具有很大的中子吸收截面（不但要求它具有很大的热中子吸收截面，而且还要具有较大的超热中子吸收截面，特别是对于中子能谱比较硬的反应堆更应如此）。例如在压水反应堆中，一般采用银-镉-镅合金作为控制棒材料。这是因为镅的热中子吸收截面很大，银和镉对于能量在超热能区的中子又具有较大的共振吸收峰。另外还要求控制棒材料有较长的寿命，这就要求它在单位体积中含吸收体的核数要多，而且要求它吸收中子后形成的子核也具有较大的吸收截面。最后要求控制棒材料具有抗辐照、抗腐蚀性能和良好的机械性能，同时，价格要便宜等。

### 3.2 单根中心控制棒价值计算<sup>(1)</sup>

控制棒价值的计算实质上是进行反应堆的临界计算，即分别计算有控制棒存在时和没有控制棒存在时的反应性，两种情况下的反应性之差就是控制棒的反应性价值，简称控制棒价值。它的计算是比较复杂的，通常很难用解析法计算，解析法一般只能计算在简单几何配置下的控制棒价值。目前大部分都用计算机进行数值计算。

本节中介绍一个很简单情况下的控制棒价值计算。假设一个半径为 $R$ ，高度为 $H$ （均包括外推距离）的圆柱形均匀裸堆，在反应堆的中心插有一根半径为 $a$ 的圆柱形控制棒，如图11-6所示。同时还假设当控制棒完全插入堆芯时，从堆芯中排出与控制棒体积完全相等的堆芯物质；当控制棒从堆芯中完全移出时，原来控制棒所占的位置又被堆芯材料所填充。这种假设显然是过高地估计了控制棒的作用。

由于控制棒是强的中子吸收体，扩散理论不适用，因此对插有中心控制棒的堆芯，把它分成堆芯区和控制棒区，而控制棒只作为堆芯的一个边界。在这种情况下，堆芯被认为是  $a \leq r \leq R$  的环形区域，而在控制棒与堆芯交界面处用下列边界条件；

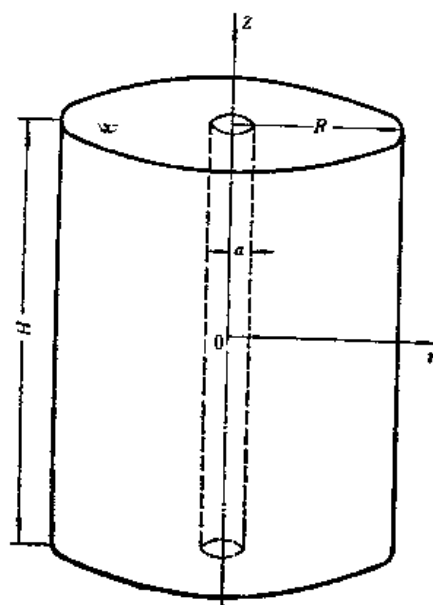


图11-6 具有中心控制棒的圆柱形均匀裸堆



$$\frac{1}{\phi} \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=a} = \frac{1}{d}, \quad (11-14)$$

式中,  $a$  为控制棒的半径,  $d$  是外推距离。

假设控制棒插入前的反应堆处于临界状态。这时它的有效增殖因数为  $k_0$ 。根据修正的单群理论有

$$k_0 = \frac{k_\infty}{1 + B_0^2 M^2} = 1, \quad (11-15)$$

式中  $B_0^2$  是未插入控制棒时反应堆的几何曲率。令插入控制棒后反应堆的有效增殖因数为  $k$ 。

$$k = \frac{k_\infty}{1 + B^2 M^2}, \quad (11-16)$$

式中  $B^2$  是有控制棒时反应堆的几何曲率。由于插入控制棒后堆芯中材料的物理性质仍保持不变, 因此上式中参数  $k_\infty$  和  $M^2$  是常数, 控制棒的插入仅仅改变了  $B^2$ 。

这样通过 (11-15) 式和 (11-16) 式就可以求得控制棒的反应性价值  $\rho_r$ 。

$$\rho_r = \frac{k_0 - k}{k} = \frac{(B^2 - B_0^2) M^2}{1 + B_0^2 M^2}. \quad (11-17)$$

如果控制棒的价值比较小, 控制棒插入后对几何曲率的改变不大, 则 (11-17) 式近似为:

$$\rho_r = \frac{(B + B_0)(B - B_0) M^2}{1 + B_0^2 M^2} \approx \frac{2B_0 M^2 \Delta B}{1 + B_0^2 M^2} \quad (11-18)$$

由此可知, 要计算  $\rho_r$  就需要计算控制棒插入后所引起的  $B$  的变化, 为此, 需要分别求解在无控制棒时和有控制棒时的扩散方程:

$$\nabla^2 \phi_0 + B_0^2 \phi_0 = 0 \quad \text{和} \quad \nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0 \quad (11-19)$$

在无控制棒时, 扩散方程的解为:

$$\phi_0 = A J_0(B_{r,0} r) \cos(B_{z,0} z) \quad (11-20)$$

其中,  $B_{r,0}^2 = \left( \frac{2.405}{R} \right)^2$ ,  $B_{z,0}^2 = \left( \frac{\pi}{H} \right)^2$

$$B_0^2 = B_{r,0}^2 + B_{z,0}^2 \quad (11-21)$$

在有控制棒时, 扩散方程的解为:

$$\phi(r, z) = A \left[ J_0(B_r r) - \frac{J_0(B_r R)}{Y_0(B_r R)} Y_0(B_r r) \right] \cos(B_z z) \quad (11-22)$$

其中,  $B^2 = B_r^2 + B_z^2$ ,  $(11-23)$

而  $B_z^2 = B_{z,0}^2$ 。再利用在控制棒表面处的边界条件 (11-14) 式, 就可求得临界方程;

$$\frac{B_r [J'_0(B, a) - J_0(B, R) Y'_0(B, a) / Y_0(B, R)]}{J_0(B, a) - J_0(B, R) Y_0(B, a) / Y_0(B, R)} = \frac{1}{d} \quad (11-24)$$

应用贝塞尔函数的关系式

$$J'_0(B, a) = -J_1(B, a) \quad \text{和} \quad Y'_0(B, a) = -Y_1(B, a),$$

则 (11-24) 式就变成

$$-\frac{B_r [J_1(B, a) - J_0(B, R) Y_1(B, a) / Y_0(B, R)]}{J_0(B, a) - J_0(B, R) Y_0(B, a) / Y_0(B, R)} = \frac{1}{d}, \quad (11-25)$$

(11-25) 式就是有控制棒插入时的反应堆临界方程。在一般情况下，可以从 (11-25) 式中用数值法或图解法求得  $B_r$ ，把  $B_r$  代入 (11-23) 式可求得  $B^2$ 。最后由 (11-17) 式可以求得控制棒价值  $\rho_r$ 。

如果控制棒的尺寸及其价值都比较小，就可以求得方程式 (11-25) 的近似解。即当  $B_r a \ll 1$  时，有

$$\begin{aligned} J_0(B, a) &\approx 1, \quad J_1(B, a) \approx 0, \\ Y_0(B, a) &\approx -\frac{2}{\pi} \left[ 0.116 + \ln\left(\frac{1}{B_r a}\right) \right] \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[ 0.116 + \ln\left(\frac{R}{2.405 a}\right) \right], \\ Y_1(B, a) &\approx -\frac{2}{\pi B_r a}. \end{aligned}$$

而且，令  $B_r = B_{r,0} + \Delta B_r$ ，

将贝塞尔函数在  $B_{r,0} R$  处展开：

$$\begin{aligned} J_0(B, R) &\approx J_0(B_{r,0} R) - J_1(B_{r,0} R) R \Delta B_r = -0.519 R \Delta B_r, \\ Y_0(B, R) &\approx Y_0(B_{r,0} R) = 0.51, \end{aligned}$$

把这些值代入 (11-25) 式就可以解得：

$$\Delta B_r = \frac{1.54}{R} \left[ 0.116 + \ln\left(\frac{R}{2.405 a}\right) + \frac{d}{a} \right]^{-1}. \quad (11-26)$$

根据 (11-21) 式可以求得

$$B_{r,0} \Delta B_r \approx B_0 \Delta B, \quad (11-27)$$

把 (11-26) 式和 (11-27) 式代入 (11-18) 式可以解得

$$\rho_r = \frac{7.43 M^2}{(1 + B_0^2 M^2) R^2} \left[ 0.116 + \ln\left(\frac{R}{2.405 a}\right) + \frac{d}{a} \right]^{-1}. \quad (11-28)$$

(11-28) 式是按修正单群理论计算一根中心圆柱形控制棒价值的公式。从式中可知，控制棒的价值与  $M^2$  近似成正比，同时还与控制棒的半径  $a$ 、外推距离  $d$  和反应堆半径  $R$  有关。

### 3.3 控制棒等效扩散参数的计算

实际上反应堆堆芯中布置很多根控制棒，当控制棒非规则布置和棒的几何形状不规则时，控制棒价值的计算很复杂。在早期计算中，曾采用解析法求偏心控制棒的价值；也曾采用过吸收面积法求轻水反应堆中十字形控制棒的价值。随着电子计算机的广泛应用，目前大都采用数值计算方法。对于规则排列控制棒的区域，首先计算控制棒区的等效扩散参数——有效吸收截面和扩散系数，然后把它们输入到堆芯的少群扩散计算程序中进行计算，以求得控制棒价值。下面简单地介绍两种计算等效扩散参数的方法。

#### 3.3.1 控制棒的等效扩散参数<sup>[2]</sup>

重水反应堆和石墨反应堆的控制棒直径一般都比较大而数目比较少，用有限差分方法求解堆芯扩散方程时，往往可以把控制棒单独划为一个区域。由于控制棒是强吸收体，扩散方程不能适用。为了使扩散方程也能适用于控制棒区，在控制棒区内必须采用等效的扩散参数。在计算等效扩散参数时，首先是用黑体理论求得控制棒表面的边界条件，然后在控制棒内应用扩散方程求解中子通量，使其在控制棒表面的边界条件与黑体理论求得的边界条件相等，从而求得控制棒的等效扩散参数。

##### (1) 边界条件

圆柱形控制棒的黑度 $\beta$ 定义为：

$$\beta = \frac{J_-(r_0) - J_+(r_0)}{J_-(r_0)} = -\frac{J(r_0)}{J_-(r_0)}, \quad (11-29)$$

式中， $r_0$ 为控制棒的半径， $J_-(r_0)$ 、 $J_+(r_0)$ 和 $J(r_0)$ 分别为控制棒表面处入射方向的分中子流密度、出射方向的分中子流密度和沿 $r$ 方向的净中子流密度。

$$J(r_0) = J_+(r_0) - J_-(r_0),$$

其中 $J_-(r_0)$ 可以从输运修正的扩散理论求出，对圆柱形控制棒有

$$J_-(r_0) = \frac{\phi(r_0)}{4} - \frac{\alpha}{2} J(r_0), \quad (11-30)$$

式中 $\phi(r_0)$ 是控制棒表面的中子通量， $\alpha$ 是输运修正系数，它与控制棒的半径及黑度有关。它的值在0—1之间。当 $\alpha = 1$ 时，(11-30)式便与扩散理论中的公式相同。把(11-30)式代入(11-29)式，得：

$$-\frac{J(r_0)}{\phi(r_0)} = \frac{\beta}{2(2 - \alpha\beta)} = G. \quad (11-31)$$

(11-31)式就是控制棒表面边界条件。其中 $\beta$ 值可由文献[3]的表格中查得。 $G$ 为在控制棒表面处，流入控制棒的净中子流密度与中子通量的比值。

修正因子 $\alpha$ 对 $\beta$ 的影响比较弱，因此可以从相同半径的黑体控制棒<sup>1)</sup>中近似地求得。在(11-31)式中令 $\beta = 1$ ，同时利用下列两个关系式：

1) 黑体控制棒是指吸收中子截面很大的控制棒，射到控制棒上的中子全被吸收。

$$j(r_0) = -D\phi'(r_0) = -\frac{1}{3\Sigma_{t,r}}\phi'(r_0), \quad (11-32)$$

$$d = \frac{\phi(r_0)}{\phi'(r_0)}, \quad (11-33)$$

式中,  $d$  是半径为  $r_0$  的黑体控制棒表面的外推距离,  $\Sigma_{t,r}$  是控制棒周围介质的宏观运输截面,  $\phi'(r_0)$  为在  $r_0$  处的中子通量导数。这样, 从 (11-31) 式就可以求得:

$$\alpha = 2 - \frac{3}{2}d\Sigma_{t,r} = 2 - \frac{3}{2}\frac{d}{\lambda_{t,r}}. \quad (11-34)$$

对于黑体圆柱形控制棒, 假设它的周围介质为无限大、无源和无俘获的情况, 则  $d/\lambda_{t,r}$  的半经验公式为

$$\frac{d}{\lambda_{t,r}} = \frac{0.710446(2r_0\Sigma_{t,r}) + 1.080417}{2r_0\Sigma_{t,r} + 0.8103127}. \quad (11-35)$$

## (2) 等效扩散参数

圆柱形控制棒内的扩散方程为

$$-D\nabla^2\phi(r) + \Sigma_a\phi(r) = 0, \quad (11-36)$$

式中的  $D$  或  $\Sigma_a$  要用等效参数值, 它们要满足 (11-31) 式的边界边条件。

当坐标原点取在控制棒中心时, (11-36) 式的解为:

$$\phi(r) = AI_0\left[\left(\frac{\Sigma_a}{D}\right)^{1/2}r\right] \quad (11-37)$$

式中,  $A$  为任意常数,  $I_0$  为第一类修正贝塞尔函数。若令

$$\gamma \equiv r_0(\Sigma_a/D)^{1/2} \quad (11-38)$$

可以求得

$$-\frac{j(r_0)}{\phi(r_0)} = \frac{r_0\Sigma_a}{\gamma} \frac{I_1(\gamma)}{I_0(\gamma)} \quad (11-39)$$

或

$$-\frac{j(r_0)}{\phi(r_0)} = \frac{\gamma D}{r_0} \frac{I_1(\gamma)}{I_0(\gamma)} \quad (11-40)$$

利用边界条件 (11-31) 式就可以求得:

$$\frac{G}{r_0\Sigma_a} = \frac{I_1(\gamma)}{\gamma I_0(\gamma)} \quad (11-41)$$

$$\text{或} \quad G\frac{r_0}{D} = \gamma \frac{I_1(\gamma)}{I_0(\gamma)} \quad (11-42)$$

从 (11-41) 式或 (11-42) 式就可以求得等效扩散系数 ( $D_{eff}$ ) 或等效吸收截面 ( $\Sigma_{eff}$ )。由于它们都满足 (11-31) 式所给出的边界条件, 因而能得到控制棒内的正确吸收

率。等效扩散系数和等效吸收截面不能同时出现。在实际计算时，当 $\Sigma_a$ 采用物理值时，从(11-41)式和(11-38)式可以求得 $D_{eff}$ ；当 $D$ 采用物理值时，从(11-42)式和(11-38)式可以求得 $\Sigma_{a,eff}$ 。

方程式(11-41)和(11-42)都是超越方程，因而采用图解法或数值计算法来求解是比较方便的。在特殊情况下，对较小的 $\gamma$ 值，从(11-41)、(11-42)和(11-38)式中可求得：

$$D_{eff} \approx \frac{3}{16} \Sigma_a r_0^2 \frac{G/(\Sigma_a r_0)}{\frac{1}{2} - G/(\Sigma_a r_0)}, \quad (11-43)$$

或

$$\Sigma_{a,eff} \approx \frac{2G}{r_0} \left( 1 + \frac{Gr_0}{4D} \right). \quad (11-44)$$

在(11-43)式和(11-44)式的右边中的 $\Sigma_a$ 和 $D$ 值应采用物理值。

### 3.3.2 控制栅元中控制棒的等效截面<sup>(4)</sup>

轻水反应堆的控制棒一般为束棒形或十字形，这样就很难把控制棒单独划为一个区。如果控制棒排列得很规则，那末，可采用控制棒栅元的方法来计算控制棒栅元中的等效截面。

我们可以设想控制棒与它周围的介质组成一个控制棒栅元，每个栅元中包含一根控制棒。例如，沸水反应堆中每四个燃料组件之间插入一根十字形控制棒，这就形成了一个控制棒栅元，如图11-7所示。

控制棒栅元的分析方法与燃料栅元的分析方法相似。从对控制棒栅元的分析中可以得到栅元中控制棒的等效吸收截面。由于控制棒内正确吸收率等于控制棒的等效吸收截面与栅元

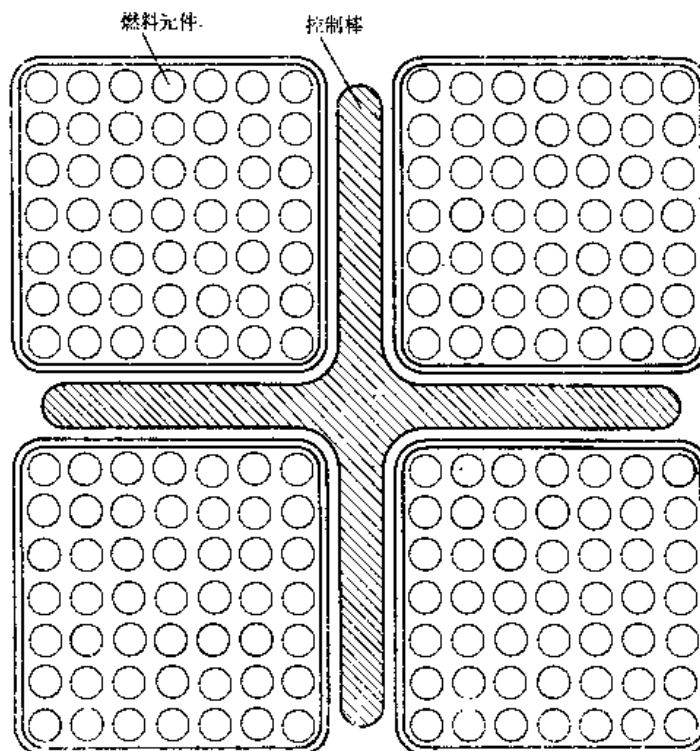


图11-7 沸水反应堆中的控制棒栅元

中平均中子通量的乘积，因而可求出控制棒的等效吸收截面，然后把它输入到少群扩散计算程序中，就可以求得控制棒的价值。

在对控制棒栅元的分析中，对于控制棒周围介质（慢化剂-燃料等）采用扩散理论来处理，而对于控制棒表面则采用输运理论修正的边界条件。先计算出慢化剂-燃料区域的中子通量分布，然后再求控制棒的等效截面。

根据中子平衡关系，单位时间内净流入控制棒内的中子数应等于栅元中控制棒的吸收率。即

$$V_c \bar{\phi}_c \Sigma_{a,eff} = S_r J_r, \quad (11-45)$$

式中， $\bar{\phi}_c$ 为控制棒栅元中的平均中子通量； $V_c$ 为控制棒栅元的体积； $S_r$ 为控制棒的表面积； $J_r$ 是在控制棒表面处流入棒内的平均净中子流密度； $\Sigma_{a,eff}$ 为控制棒的等效吸收截面。

从(11-45)式可以求得 $\Sigma_{a,eff}$

$$\Sigma_{a,eff} = \frac{S_r}{V_c} \frac{J_r}{\bar{\phi}_c} \quad (11-46)$$

下面将以十字形控制棒为例来说明 $\Sigma_{a,eff}$ 的具体计算方法。要计算图11-8(a)上所示的控制棒栅元，实际上是一个二维问题，但为了计算方便把它等效成一维问题，如图11-8(b)所示。在等效时，要保持控制棒表面对慢化剂-燃料的体积比不变。如果控制棒的跨度 $l$ 显著地大于周围介质的扩散长度 $L$ ，那末这样处理的结果是相当好的。

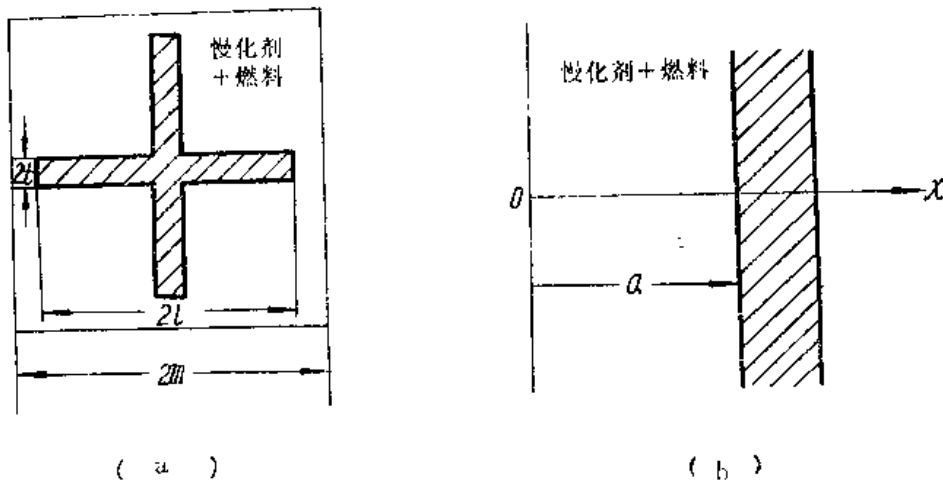


图11-8 控制棒栅元及等效一维模型

(a) 控制棒栅元 (b) 等效一维模型

从图11-8(a)上可知，控制棒表面对慢化剂-燃料体积比为

$$\frac{S_r}{V_c} = \frac{8l}{4m^2 - 8tl + 4t^2}$$

从图11-8(b)上可知，控制棒表面积对慢化剂-燃料的体积比为 $1/a$ ，因此

$$a = (m^2 - 2tl + t^2) / 2l \quad (11-47)$$

在慢化剂-燃料区内采用单群扩散理论。

$$-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = \hat{S}_0, \quad (11-48)$$

式中  $S_0$  是慢化剂-燃料区内的慢化中子源, 假设它在整个区域内是均匀分布的, 栅元的边界条件为

$$J_x(0) = 0 \quad (11-49)$$

$$J_x(a)/\phi(a) = G, \quad (11-50)$$

式中  $G$  的意义与前面相同, 它可用黑度理论求得。在一维情况下, 微分方程 (11-48) 式在满足边界条件 (11-50) 式时的解为:

$$\phi(x) = \frac{S_0}{\Sigma_a} \left[ 1 - \frac{G \operatorname{ch}(x/L)}{G \operatorname{ch}(a/L) + \Sigma_a L \operatorname{sh}(a/L)} \right]. \quad (11-51)$$

控制棒表面中子通量与栅元平均中子通量之比为:

$$\frac{\phi(a)}{\bar{\phi}_c} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \frac{G}{L} \operatorname{cth}(a/L) - G/a}. \quad (11-52)$$

注意到, 在一维情况下,  $S_0/V_c = 1/a$ 。把 (11-52) 式代入 (11-46) 式并利用 (11-50) 式可求得:

$$\Sigma_{a, eff} = \frac{\Sigma_a}{a \left[ \frac{\Sigma_a}{G} + \frac{1}{L} \operatorname{cth}(a/L) \right] - 1}. \quad (11-53)$$

$\Sigma_{a, eff}$  为控制棒栅元中十字形控制棒的等效吸收截面。由于  $S_0/V_c = 1/a$ , 因此从 (11-53) 式中可知,  $\Sigma_{a, eff}$  与  $S_0/V_c$  近似成正比。这表明在控制棒栅元中, 控制棒的外表面积与周围介质的体积的比值越大, 它的等效吸收截面也越大。为了提高控制棒的价值, 在设计控制棒时, 应该采用具有较大表面积的几何形状。

边界条件  $G$  的计算很复杂, 并且与控制棒的几何形状有关。对于无限长圆柱形控制棒, 可采用 (11-31) 式来计算  $G$ ; 对于板形 (包括十字形) 控制棒, 当它是完全黑体时,  $G = 0.4692$ ; 当它是灰体时, 则可用下式来计算  $G$ :

$$G = \frac{1 - 2E_3(\Sigma_a t)}{2[1 + 3E_4(\Sigma_a t)]}. \quad (11-54)$$

式中  $E_3(\Sigma_a t)$ ,  $E_4(\Sigma_a t)$  是指数积分 [见附录 9]。

对于其它几何形状比较复杂控制棒和控制棒栅元, 也可用类似的方法求  $G$  和  $\phi(r_0)/\bar{\phi}_c$ 。

### 3.4 控制棒插入深度对控制棒价值和反应堆功率分布的影响

#### 3.4.1 控制棒插入深度对控制棒价值的影响

在反应堆设计和运行时, 不仅需要知道控制棒完全插入时的价值, 而且还需要知道控制棒在插入不同深度时的价值。通常把控制棒插入单位深度所引起的反应性变化称为控制棒的

微分价值。微分价值的计算是一个二维或三维的问题，一般需要用数值方法求解。为了定性地了解控制棒插入不同深度时的价值，本节中举一个很简单的例子。在裸圆柱形均匀反应堆的中心轴处插入一根黑体控制棒，如图11-9所示。

根据第十三章中的微扰理论，控制棒的价值正比于控制棒所在处中子通量的平方，从而可以求得控制棒的相对价值与插入深度的函数关系：

$$\frac{\rho_r(Z)}{\rho_r(H)} = \left[ \frac{Z}{H} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi Z}{H}\right)}{2\pi} \right] \quad (11-55)$$

式中， $\rho_r(z)$ 为控制棒插入深度 $Z$ 时的价值， $\rho_r(H)$ 为控制棒完全插入时的价值，它可由(11-28)式求得。

图11-10表示控制棒插入不同深度的相对价值。从图上可知，当控制棒位于靠近堆芯顶部和底部时，控制棒的微分价值很小并且与控制棒的移动距离呈非线性关系；当控制棒插入到中间一段区间时，控制棒的微分价值比较大并且与控制棒的移动距离基本上呈线性关系。根据这一原理，反应堆中调节棒的调节带一般都选择在堆芯的轴向中间区段。这样，调节棒移动时所引起的价值与它的插入深度呈线性关系。

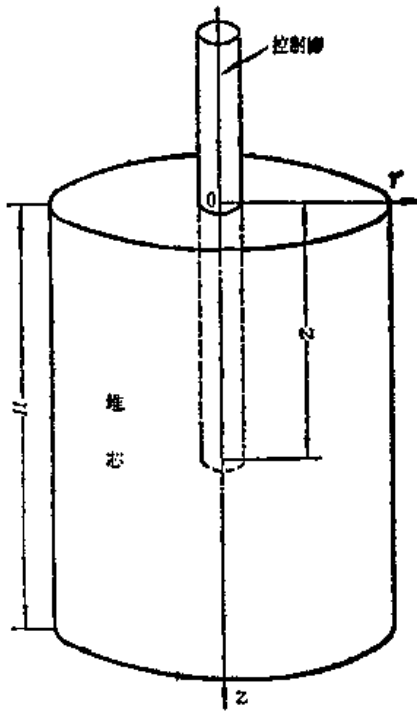


图11-9 在反应堆中心处，部分插入的控制棒

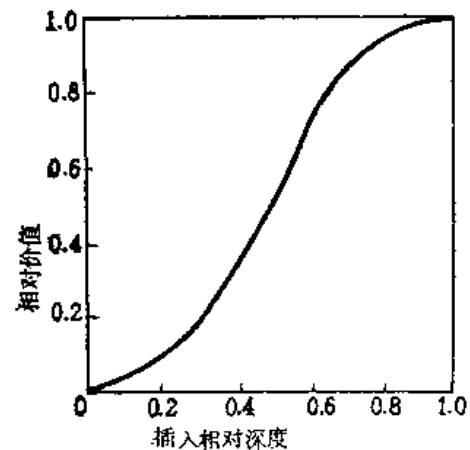


图11-10 控制棒的相对价值与插入深度的关系

### 3.4.2 控制棒插入不同深度对堆芯功率分布的影响

控制棒插入不同深度不仅影响控制棒的价值，而且也影响堆芯中的功率分布。控制棒是强吸收体，它的插入将使中子通量分布和功率分布都产生畸变。在反应堆设计中，要求功率峰因子不超过设计准则所规定的数值，这就需要认真地考虑控制棒插入不同深度时所引起功



率分布的变化，使它能符合设计准则的要求。另一方面我们又可以利用这个性质，采用部分长度的控制棒和控制棒的合理布置使堆芯中功率分布得到展平。

在主要靠控制棒来控制的反应堆中，在堆芯寿期的初期，有较大的过剩反应性，控制棒插入比较深。在有控制棒的区域中，中子通量和功率都比较低，但由于要保持整个堆芯的总功率输出为常数，因此在没有控制棒的底部，将形成一个中子通量的峰值如图11-11所示。在中子通量高的区域，燃料的燃耗很快。随着反应堆运行时间的加长，控制棒不断地向外移动，到堆芯寿期末时，控制棒都已提到堆芯的顶部，中子通量的峰值和功率的峰值也逐渐地向顶部方向偏移，如图11-11所示。

为了具体地了解控制棒插入深度对中子通量分布和功率分布的影响，下面举一个简单的例子。如果把均匀裸堆分成有棒区和无棒区，那末，控制棒的移出或插入分别可以等效为这两个区的交界面的上下移动。

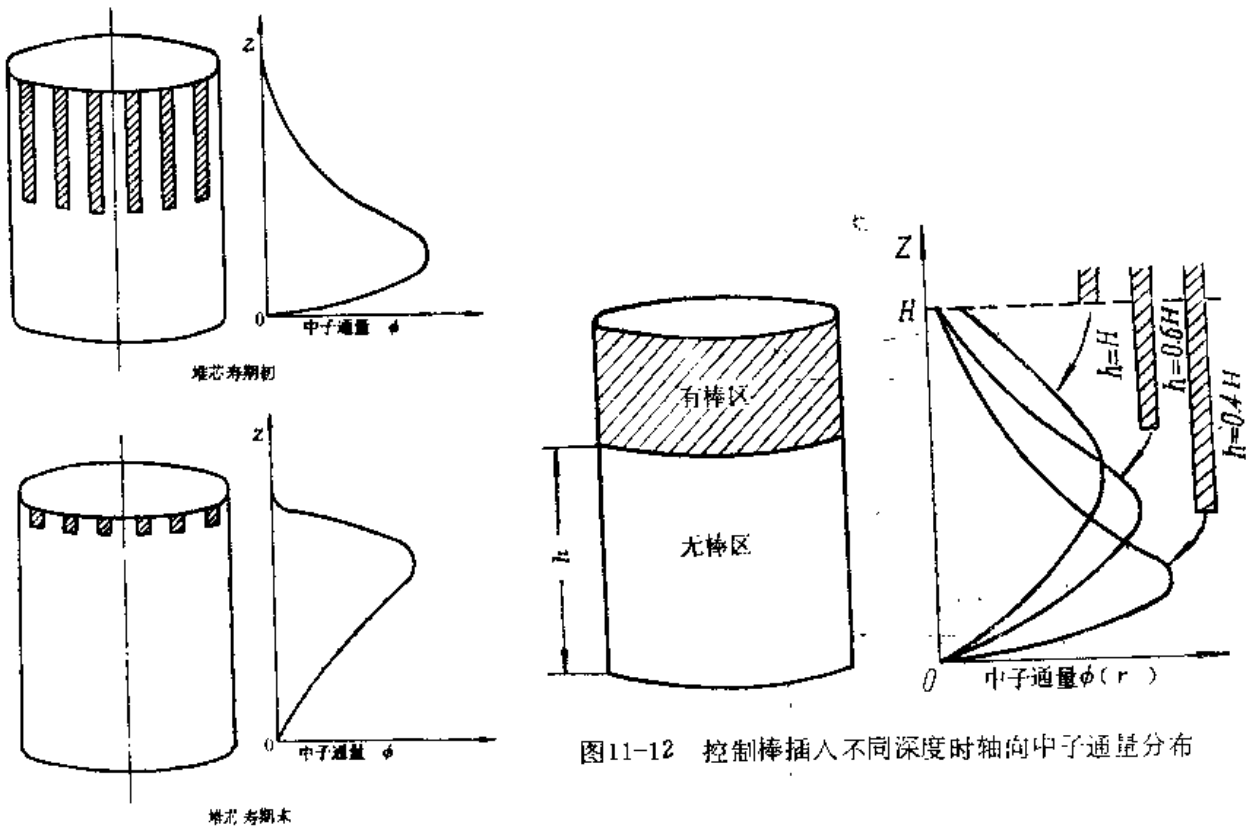


图11-12 控制棒插入不同深度时轴向中子通量分布

图11-11 控制棒的插入深度对轴向中子通量分布的影响

为了简化分析，采用分离变量法来解扩散方程，令

$$\phi(r, z) = Z(z) J_0\left(\frac{2.405 r}{R}\right), \quad (11-56)$$

其中轴向中子通量满足下列微分方程：

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + B_{z,z}^2 Z(z) = 0, \quad (11-57)$$

式中  $B_{z,i}^2$  为有效轴向曲率, 可用下式表示:

$$B_{z,i}^2 = \frac{k_{\infty,i} - 1}{L^2} - \left( \frac{2.405}{R} \right)^2, \quad (11-58)$$

式中的角标  $i$  表示堆芯的不同区域。如  $i = 1$ , 表示无控制棒区;  $i = 2$ , 表示有控制棒区。在有控制棒区内, 控制棒的吸收截面很大,  $k_{\infty,2}$  很小,  $B_{z,2}^2$  是负值。在无控制棒区内,  $k_{\infty,1}$  较大,  $B_{z,1}^2$  是正值。

边界条件为: 在堆芯的顶部和底部的外推边界上的中子通量为零。在满足上述边界条件下, 方程式 (11-57) 的解为:

$$\begin{aligned} Z_1(z) &= A_1 \sin(B_{z,1} z), & 0 \leq z \leq h \\ Z_2(z) &= A_2 \text{sh}[B_{z,2}(H-z)], & h \leq z \leq H \end{aligned} \quad (11-59)$$

两区的交界条件为 ( $h$  为交界处):

$$Z_1(h) = Z_2(h)$$

$$D_1 \frac{dZ_1(z)}{dz} \Big|_{z=h} = D_2 \frac{dZ_2(z)}{dz} \Big|_{z=h} \quad (11-60)$$

假设  $D_1 = D_2$ 。利用 (11-60) 式就可以求得控制棒插入深度为  $h$  时的临界条件:

$$\frac{1}{B_{z,1}} \text{tg}(B_{z,1} h) = -\frac{1}{B_{z,2}} \text{th}[B_{z,2}(H-h)], \quad (11-61)$$

从 (11-60) 式中也可求得 (11-59) 式中的系数比值

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\sin(B_{z,1} h)}{\text{sh}[B_{z,2}(H-h)]} \quad (11-62)$$

如果已知  $B_{z,1}$ , 从 (11-61) 式中可解得  $B_{z,2}$ 。把它代入 (11-62) 式可以求得常数  $A_2$  与  $A_1$  的比值。如果反应堆的热功率又已知, 那末就可以求得  $A_1$  和  $A_2$  值。把上述计算的结果代入 (11-59) 式, 可以求得反应堆的轴向中子通量分布。

图11-12给出了控制棒束插入不同深度时的轴向中子通量分布。从图中可知, 当控制棒未插入时, 堆内轴向中子通量呈正弦对称分布; 随着控制棒逐渐插入, 中子通量的峰值逐渐向底部偏移, 且峰值也变大。

### 3.5 控制棒间的干涉效应

一般情况下, 反应堆有较多的控制棒, 这些控制棒同时插入堆芯时, 总的价值并不等于各根控制棒单独插入堆芯时的价值的总和。这是因为一根控制棒插入堆芯后将引起堆芯中中子通量的畸变, 这势必影响到其它控制棒的价值。这种现象称之为控制棒间的相互干涉效应。

为了定性地说明相互干涉效应, 我们考虑堆芯中只有两根控制棒的情况, 见图11-13所示。

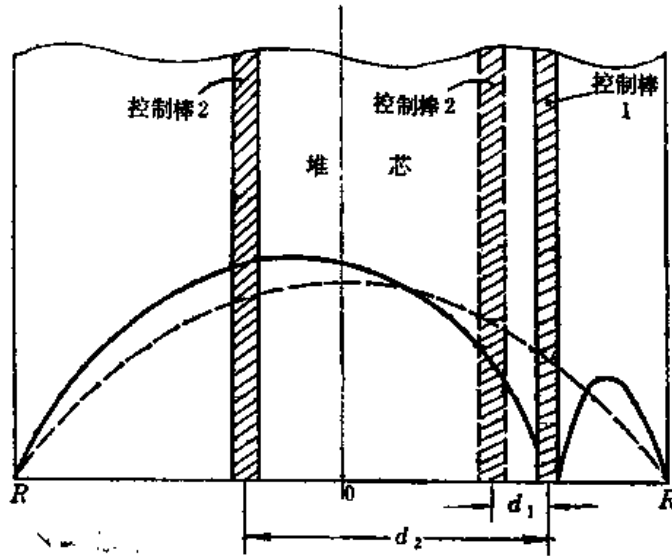


图11-13 控制棒插入堆芯后对径向中子通量分布的影响  
 ---无控制棒时中子通量的分布； ——控制棒插入堆芯后中子通量的分布。

堆芯中没有控制棒插入时，径向中子通量分布如图11-13中虚线所示。当第一根控制棒完全插入堆芯时，径向中子通量分布如图中实线所示。控制棒的价值是与其所在处中子通量值平方成正比。假如把第二根控制棒插在第一根控制棒附近的 $d_1$ 处，由于该处的中子通量比原来无控制棒时的中子通量下降了，因此第二根控制棒的价值比它单独插入堆芯时的价值低。

如果把第二根控制棒插在离第一根控制棒较远的 $d_2$ 处，这时该处的中子通量比原来（没有第一根控制棒）时高，因此，第二根控制棒的价值比它单独插入堆芯时的价值高。同理，当第二根控制棒插入堆芯时，它也要使中子通量分布发生畸变，因而影响到周围控制棒的价值。事实上，影响是相互的，每一根控制棒的插入都将引起其它控制棒价值的变化。从图11-14上可以清晰地看出这种相互干涉效应的结果。图中虚线表示单根偏心控制棒的价值值的二倍，实线表示两根偏心控制棒同时插入堆芯时的价值。

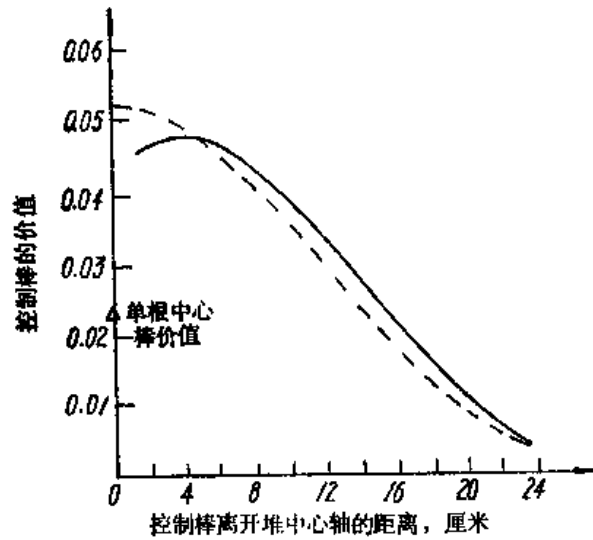


图11-14 两根对称偏心控制棒的干涉效应

——两根偏心控制棒同时插入时的价值；  
 ---单根偏心控制棒插入时价值的二倍。

从图中可知，在两根控制棒相距较近时，两根同时插入堆芯时的总价值比它们单独插入时价值的总和要小；在两根控制棒相距较远时，两根棒同时插入所得的价值比单独插入所得到的价值的总和要大。考虑到控制棒的相互干涉效应，通常在设计堆芯时，应使控制棒的间距大于热中子扩散长度。

#### 4. 可燃毒物控制

在动力反应堆中，通常，新堆芯的初始过剩反应性都比较大。特别是在第一个换料周期的初期，堆芯中全部核燃料都是新的，这时的过剩反应性最大。如果全部靠控制棒来补偿这些过剩反应性，那末就需要很多控制棒，而每一控制棒（或棒束）都需要一套复杂的驱动机构。这非但不经济，而且在实际工程上也很难实现。尤其是在轻水反应堆中，这个问题更为突出。为了解决这个问题，可以采用控制棒、可燃毒物与化学补偿毒物的联合控制，以减少控制棒的数目。

要求可燃毒物材料具有比较大的吸收截面，同时也要求由于消耗了可燃毒物而释放出来的反应性基本上要与堆芯中由于燃料燃耗所减少的过剩反应性相等。另外，还要求可燃毒物在吸收中子后，它的产物的吸收截面要尽可能地小；要求可燃毒物及其结构材料应具有良好的机械性能。

根据以上的要求，目前作为可燃毒物使用的主要元素有硼和钆。它们既可以和燃料混合在一起，也可以做成管状、棒状或板状，插入到燃料组件中。在压水反应堆中应用最广泛的是硼玻璃和硼不锈钢两种。从核性能来看，前者要比后者好，因为假设到堆芯寿期末，硼都消耗完了，它们残留下来的分别是玻璃与不锈钢。玻璃的吸收截面小于不锈钢的吸收截面。因此，若两个堆芯的初始过剩反应性相同，那末采用硼玻璃的堆芯寿期比采用不锈钢的堆芯寿期长。在压水反应堆中，可燃毒物一般只用于第一个堆芯寿期中，因为从第二个堆芯寿期开始，堆芯中大部分的燃料是已燃耗过的燃料，这时，堆芯的初始过剩反应性已显著地减小，没有必要再用可燃毒物了。

为了了解可燃毒物在堆芯中的分布对反应性的影响，首先分析可燃毒物与慢化剂-燃料均匀混和的情况。为了简化起见，假设堆芯中没有中子泄漏，这时燃料和可燃毒物的核密度随时间变化的方程分别为：

$$\frac{dN_F(t)}{dt} = -\sigma_{a, F}\phi(t)N_F(t), \quad (11-63)$$

$$\frac{dN_P(t)}{dt} = -\sigma_{a, P}\phi(t)N_P(t),$$

式中 $N_F$ 和 $N_P$ 分别为燃料和可燃毒物的核密度。把(11-63)式对 $t$ 积分得：

$$\begin{aligned} N_F(t) &= N_F(0)\exp[-\sigma_{a, F}\Phi(t)], \\ N_P(t) &= N_P(0)\exp[-\sigma_{a, P}\Phi(t)], \end{aligned} \quad (11-64)$$

式中 $\Phi(t)$ 是积分通量，它的定义为：

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(t') dt'. \quad (11-65)$$

假设堆芯中没有中子泄漏，而且慢化剂、冷却剂和结构材料等吸收截面可忽略不计，这样，堆芯中的有效增殖因数可用下式近似表示。

$$k(t) = \nu \sigma_f^F \frac{N_F(t)}{N_F(t) \sigma_{a,F} + N_P(t) \sigma_{a,P}}$$

$$= \eta \left\{ 1 + \frac{N_P(0) \sigma_{a,P}}{N_F(0) \sigma_{a,P}} \exp[-(\sigma_{a,P} - \sigma_{a,F}) \Phi(t)] \right\}^{-1} \quad (11-66)$$

在图11-15中给出了在不同的可燃毒物吸收截面情况下有效增殖因数随时间变化曲线（假设初始时刻的有效增殖因数都相等）。

从图中可知，在反应堆运行刚开始的一段时间内，随着时间的增加，可燃毒物消耗所引起反应性的释放率比燃料燃耗所引起反应性的下降率要快得多，因此有效增殖因数上升很快。但是，当可燃毒物大量消耗后，每单位体积中含毒物的核数较少，这时可燃毒物消耗所引起反应性的释放率小于燃料燃耗所引起反应性的下降率，因此，有效增殖因数上升到某一最大值后又开始下降。从图中还可

知，有效增殖因数偏离初始值的程度与可燃毒物的吸收截面  $\sigma_{a,P}$  有关， $\sigma_{a,P}$  值越大，有效增殖因数偏离初始值也越大。这说明可燃毒物的消耗与堆芯中过剩反应性的减小不匹配。我们希望随着可燃毒物的消耗，在整个堆芯寿期内，有效增殖因数的变化尽可能地小，这样对反应堆的控制有利。从这个角度看，希望采用吸收截面比较小的可燃毒物。但是  $\sigma_{a,P}$  值

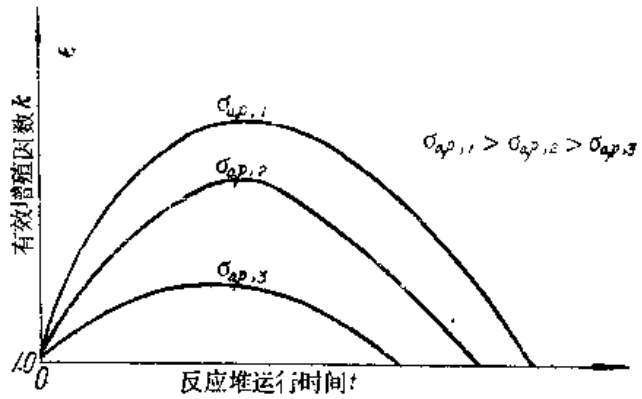


图11-15 在不同  $\sigma_{a,P}$  的情况下， $k(t)$  与  $t$  的关系

小，可燃毒物消耗慢，则在堆芯寿期末将仍有较多的毒物残留在堆内，它们对中子的有害吸收将使堆芯寿期缩短。这样就产生了矛盾。最理想的情况是：在堆芯寿期初，可燃毒物的吸收截面不要太大，以减小有效增殖因数偏离初始值的程度，但随着可燃毒物的消耗，要求它的吸收截面逐渐增大，以减小在堆芯寿期末堆内可燃毒物的残留量。采用可燃毒物的非均匀布置可以基本上符合这种要求。

把可燃毒物做成棒状、管状或板状，插入堆芯中，这就形成了可燃毒物的非均匀布置。它的主要特点是在可燃毒物中形成了强的自屏效应。为了说明自屏效应对有效增殖因数的影响，考虑在非均匀布置下，可燃毒物的燃耗方程：

$$\frac{dN_P(t)}{dt} = -f_s(t) \sigma_{a,P} \phi(t) N_P(t), \quad (11-67)$$

式中  $f_s(t)$  为可燃毒物的自屏因子，它的定义为：

$$f_s(t) = \frac{\text{在可燃毒物中平均中子通量}}{\text{在慢化剂-燃料中平均中子通量}}$$

由此可知，可燃毒物有效吸收截面为：

$$\sigma_{a,eff}^P = f_s(t) \sigma_{a,P}. \quad (11-68)$$

图11-16表示可燃毒物的自屏效应随反应堆运行时间而变化。其中左图表示在几个不同的运行时刻，慢化剂-燃料和可燃毒物中的中子通量分布；右图表示可燃毒物的有效微观吸收截面、宏观吸收截面和可燃毒物的核密度随反应堆运行时间的变化。

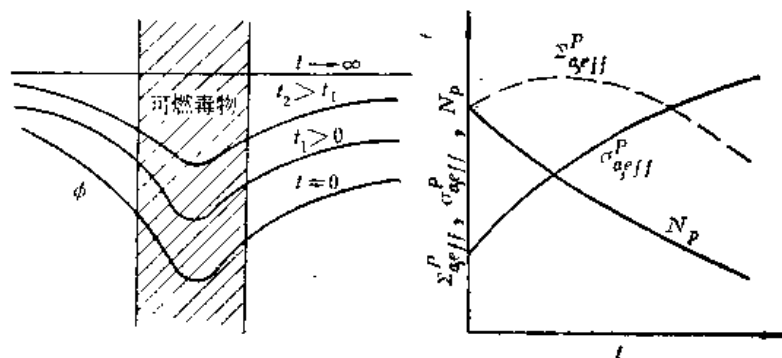


图11-16 可燃毒物的自屏效应随时间变化

从图中可知，在堆芯寿期初，可燃毒物中的中子通量大大低于慢化剂-燃料中的中子通量，这时可燃毒物的自屏效应很强， $f$  值很小，可燃毒物的有效微观吸收截面也很小，因此有效增殖因数偏离初始值的程度也较小。但是随着反应堆的运行时间的增长，可燃毒物不断地燃耗，自屏效应逐渐地减弱， $f$  值逐渐地增大，可燃毒物的有效微观吸收截面也逐渐地增大，可燃毒物的燃耗也就更快。在堆芯寿期末时，堆芯内可燃毒物核的残留量很小，因而对堆芯寿期并没有显著的影响。

图 11-17 表示可燃毒物不同布置对有效增殖因数  $k$  的影响。从图中可以清楚地看出：在相同的堆芯寿期的条件下，有可燃毒物时的初始  $k$  值比无可燃毒物时的初始  $k$  值要小，所以控制棒所需控制的反应性值也相应地小。其中当可燃毒物非均匀布置时，在整个堆芯寿期内， $k$  的最大值不超过初始值；而当可燃毒物均匀布置时， $k$  的最大值要大大超过其初始值。因此，在这三种情况中，可燃毒物非均匀布置时，反应堆所需的控制棒数目为最少。

另外，可燃毒物非均匀布置也可以用来展平堆芯中的功率分布。

从以上分析可知，可燃毒物非均匀布置是很有利的，它是目前反应堆中常采用的一种方式。

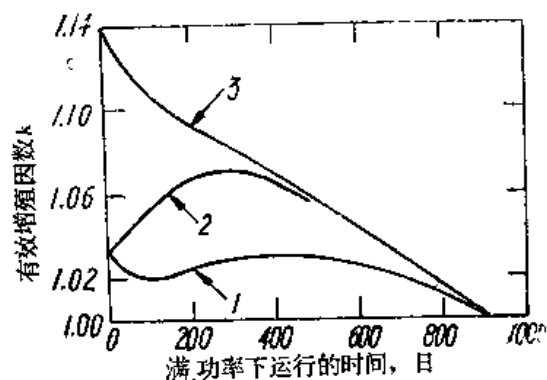


图11-17 可燃毒物对有效增殖因数的影响 [6]

1——可燃毒物非均匀布置；2——可燃毒物均匀布置；  
3——无可燃毒物。

## 5. 化学补偿控制

在目前的压水反应堆中，一般都采用了化学补偿控制，即在一回路冷却剂中加入可溶性化学毒物，以代替补偿棒的作用，因此称为化学补偿控制、简称化控。对化学毒物的要求

是：能溶解于冷却剂中，化学性质和物理性质稳定；具有较大的吸收截面，对堆芯结构部件无腐蚀性且不吸附在部件上。实践证明，在压水反应堆中采用硼酸作为化学毒物能符合这些要求。化控主要是用来补偿下列一些慢变化的反应性：

- (1) 反应堆从冷态到热态（零功率）时，慢化剂温度效应所引起的反应性变化；
- (2) 裂变同位素燃耗和长寿命裂变产物积累所引起的反应性变化；
- (3) 平衡氙和平衡钐所引起的反应性变化。

从表11-3上可知，在三种控制方式所控制的反应性分配中，以化控的反应性为最大。这是因为化控与其它两种控制方式相比有很多优点：化学补偿毒物在堆芯中分布比较均匀；化控不但不引起堆芯功率分布的畸变，而且与燃料分区相配合，能降低功率峰因子，提高平均功率密度；化控中的硼浓度可以根据运行需要来调节，而固体可燃毒物是不可调节的；化控不占栅格位置，不需要驱动机构等，从而可以简化反应堆的结构，提高反应堆的经济性等。

但是，化控也有一些缺点：例如它只能控制慢变化的反应性；它需要加硼和释硼的一套附加设备等等。化控最主要缺点是水中硼浓度的大小对慢化剂温度系数有显著的影响。随着硼浓度的增加，慢化剂负温度系数的绝对值越来越小，这是因为当水的温度升高时，水的密度减小，单位体积水中含硼的核数也相应地减小，因而反应性增加。当水中的硼浓度超过某一值时，有可能使慢化剂温度系数出现正值，如图11-18所示。

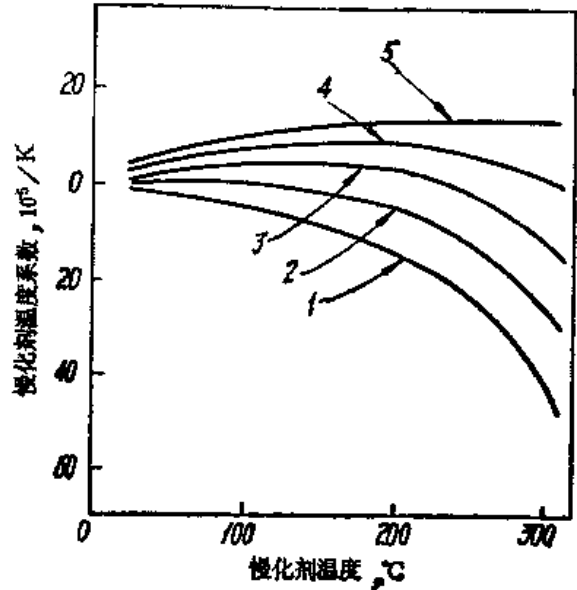


图11-18 在不同硼浓度下，慢化剂温度系数与慢化剂温度的关系

- 1 — 0 ppm; 2 — 500ppm; 3 — 1000ppm;
- 4 — 1500ppm; 5 — 2000ppm.

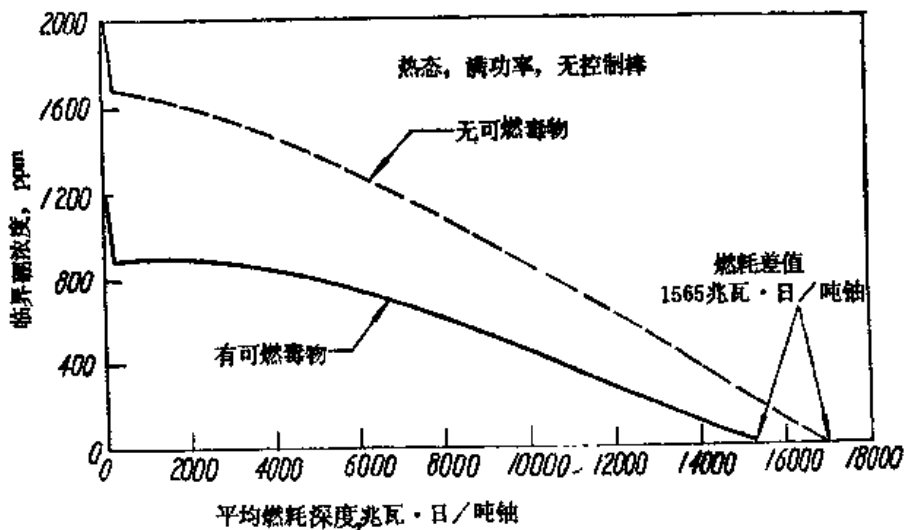


图11-19 临界硼浓度随燃耗深度变化曲线

从图上可知，慢化剂温度系数还与慢化剂的温度有关。在慢化剂的温度较低时，当硼浓度超过500ppm时就出现了正的慢化剂温度系数。但在反应堆的工作温度(大约280℃—300℃)下，当硼的浓度大于1300ppm时才出现正的慢化剂温度系数。在堆芯设计时，要求反应堆温度在热态时，慢化剂温度系数不出现正值，这就限制了堆芯中允许的硼浓度。目前在压水反应堆设计中，一般把硼浓度取在1300ppm以下。

随着反应堆运行时间的增长，堆芯中反应性逐渐地减小，所以必须不断地降低硼浓度，使堆芯保持在临界状态。图11-19表示了临界硼浓度随燃耗深度变化曲线。

临界硼浓度随燃耗深度增加而逐渐减小，它对慢化剂温度系数的影响也逐渐减小，慢化剂的负温度系数的绝对值随燃耗深度增加而逐渐地增大。图11-20表示某压水反应堆慢化剂温度系数随燃耗深度变化曲线。从图上可知，慢化剂温度系数随燃耗深度变化规律与临界硼浓度随燃耗深度变化规律很相似。

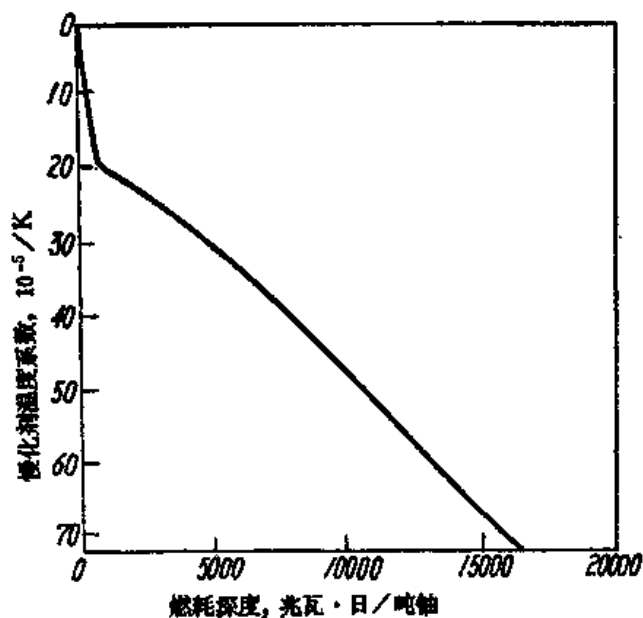


图11-20 压水堆慢化剂温度系数随燃耗深度变化

### ● 考 文 献

- [1] J.R. 拉马什著, 洪流译, 核反应堆导论, 第十四章, 原子能出版社, 1977年。
- [2] M.R. Mendel Son and M.L. Storm, *Nucl. Sci. Eng.*, 45, 182—188 (1971).
- [3] N. Spinks, *Nucl. Sci. Eng.*, 22 87—93 (1965).
- [4] James J. Duderstadt & Louis J. Hamilton, *Nuclear Reactor Analysis* pp.537—563, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [5] G.I. 贝尔, S. 格拉斯登著, 千里译, 核反应堆理论, 第十章, 原子能出版社, 1979年。



## 第十二章 反应堆动力学

当反应堆处于稳定状态时，其中子的产生率必须等于中子吸收率与泄漏率之和。如果不能保持这种平衡，反应堆内的中子数将随时发生变化，因而反应堆功率也就发生变化。反应堆运行过程中，这种变化是无法避免的。例如反应堆启动、停堆、提升或者降低功率等，都属于正常的必不可少的操作。控制棒的移动、燃料燃耗、毒物和裂变核的生成、温度、压力等参数的变化和偶然事故等都可以使增殖因数发生变化，因而引起反应堆功率变化。但反过来，功率变化又使得反应堆参数变化。例如功率升高时，燃料和慢化剂的温度也随着升高，功率降低时，上述温度也相应地降低。参数变化后，又使得反应性和功率进一步变化。实际运行的反应堆，总是处于经常变化的动态过程之中，因而对反应堆的动态过程必须认真地进行研究。

反应堆动力学是研究反应堆动态过程中的物理问题的。其主要内容是按照物理规律建立动态系统的数学模型，研究系统的稳定性和过渡过程。在反应堆动力学的研究工作中，广泛地采用控制理论中常用的方法，例如传递函数法、频率特性法、根轨迹法……。近年来，现代控制理论中的很多成果，也不断地在反应堆动力学的研究工作中得到应用。虽然在反应堆动力学研究工作中，广泛地采用了控制理论中的许多方法，但不要把反应堆动力学与反应堆控制等同起来，前者是属于反应堆物理范畴，它研究对象的动态特性。

对任一个工业对象的控制系统要设计得令人满意，就必须把对象的动态特性搞清楚。为了提高核系统的安全性和经济性，对于影响动态特性的因素，必须给以周到的考虑，否则，可能出现严重事故，或者达不到额定出力。

缓发中子对于反应堆的动态特性有着重要影响。瞬发中子的平均寿命，在热堆内约为 $10^{-8}$ 秒，而在快堆中为 $10^{-7}$ 秒。如果反应堆中只有瞬发中子，则其功率响应可能变化特快，采用目前的堆控方法根本行不通。考虑缓发中子以后，所有裂变中子的平均寿命可长达0.1秒左右，这样，反应堆就成为可控的了。缓发中子对稳定性的影响，应给以特别注意。过去有种看法认为，缓发中子必定改善反应堆的稳定性。目前这种观点已被否定了，因为在有的情况下，当考虑缓发中子时，稳定性还可能变坏。

为了简化计算，在反应堆动力学中，经常采用具有一定局限性的“点堆模型”。由于对计算精度要求的提高和计算机科学技术的发展，考虑空间效应的物理模型也愈来愈多地被采用了，并且直接求得数值解。当考虑空间效应时，反应堆动态参数的计算是比较麻烦的，因而模型的简化就显得极为重要。

不同类型反应堆的动态特性有其共同点也有其不同点。对于动力堆（不论压水堆、沸水堆或气冷堆）温度反馈效应，必须认真考虑。当反应堆堆芯尺寸很大时，必须考虑氙振荡问题。对于沸水堆，压力效应对动态特性影响很大，处理蒸汽空泡效应，水力不稳定振荡等问题都要特别慎重。用铀-239作燃料的快堆，其缓发中子份额比热堆的要小得多，容易导致瞬发临界，因此，对快堆控制系统的设计更要谨慎。

应该指出，反应堆动力学与反应堆物理、热工和控制均有密切关系。为了进一步提高核

反应堆的安全性和完善控制系统的设计，重视对核反应堆动力学的研究是非常重要的。

反应堆动力学一般包括：（1）反应堆动态方程的推导及其在典型扰动情况下的求解；（2）反应堆反馈问题；（3）反应堆线性稳定性；（4）反应堆非线性稳定性；（5）反应堆随机过程（噪声分析理论）；（6）反应堆时-空动力学；（7）现代控制论在反应堆动力学中的应用等。本章中我们只讨论前三部分中的某些问题。

## 1. 反应堆动态方程

我们由单群中子扩散方程出发来推导反应堆动态方程。根据（3-20）式中子扩散方程可写成

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = Dv\nabla^2 N(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a v N(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t), \quad (12-1)$$

其中  $N(\mathbf{r}, t)$  为中子密度， $S(\mathbf{r}, t)$  为中子源。 $D$ 、 $v$  和  $\Sigma_a$  分别为扩散系数、中子速度和宏观吸收截面。并且认为它们与空间位置无关，它们的数值是它们对中子能谱进行平均的值。

在稳态条件下，中子的产生率为  $k_\infty \Sigma_a v N$ 。在非稳态过程中，必须对瞬发中子和缓发中子分别进行计算。若  $\beta$  为缓发中子份额，则源项中的瞬发中子数为  $(1-\beta)k_\infty \Sigma_a v N$ 。缓发中子是由某些裂变碎片（缓发中子先驱核）衰变而产生的。令  $\lambda_i$  为第  $i$  种先驱核的衰变常数，而  $C_i(\mathbf{r}, t)$  为其密度，则源项中单位体积内缓发中子数为  $\Sigma \lambda_i C_i$ 。若核反应堆内的外中子源为  $S_0(\mathbf{r}, t)$ ，则扩散方程中的源项为

$$S = (1-\beta)k_\infty \Sigma_a v N + \Sigma \lambda_i C_i + S_0. \quad (12-2)$$

于是扩散方程变为

$$\frac{\partial N}{\partial t} = Dv\nabla^2 N - \Sigma_a v N + (1-\beta)k_\infty \Sigma_a v N + \Sigma \lambda_i C_i + S_0. \quad (12-3)$$

令  $\beta_i$  为第  $i$  组缓发中子的份额，则  $\beta = \Sigma \beta_i$ 。这里我们假定裂变碎片没有明显的徙动。（对于循环燃料堆这种假定是不适用的。）则

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \beta_i k_\infty \Sigma_a v N - \lambda_i C_i. \quad (12-4)$$

为简单起见，还假定对  $N$  和  $C_i$  可以进行分离变量（这种处理方法只有当反应堆接近临界状态和没有大的局部扰动时，才可能是有意义的）。因此，令

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}, t) &= f(\mathbf{r}) n(t), \\ C_i(\mathbf{r}, t) &= g_i(\mathbf{r}) c_i(t), \end{aligned} \quad (12-5)$$

（12-4）式可写成

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \beta_i k_\infty \Sigma_a v \frac{f(\mathbf{r})}{g_i(\mathbf{r})} n(t) - \lambda_i c_i(t). \quad (12-6)$$

如果希望 (12-6) 式与空间位置无关, 必须假定  $f(\mathbf{r})$  与  $g_i(\mathbf{r})$  具有同样的空间分布函数, 也就是  $f(\mathbf{r})/g_i(\mathbf{r}) = 1$ , (12-6) 式变为

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \beta_i k_\infty \Sigma_a v n(t) - \lambda_i c_i(t) \quad (12-7)$$

将 (12-5) 式代入 (12-3) 式得

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} = & Dv \frac{\nabla^2 f(\mathbf{r})}{f(\mathbf{r})} n(t) - \Sigma_a v n(t) + (1-\beta) k_\infty \Sigma_a v n(t) \\ & + \sum_i \lambda_i \frac{g_i(\mathbf{r})}{f(\mathbf{r})} c_i(t) + \frac{S_0}{f(\mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (12-8)$$

如果希望 (12-8) 式与空间位置无关, 必须使  $\nabla^2 f(\mathbf{r})/f(\mathbf{r})$ 、 $S_0/f(\mathbf{r})$  与  $g_i(\mathbf{r})/f(\mathbf{r})$  一样与空间位置无关。假定  $f(\mathbf{r})$  满足波动方程

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) + B^2 f(\mathbf{r}) = 0,$$

其中  $B^2$  称为曲率。假定  $S_0$  与  $f(\mathbf{r})$  也具有同样的空间分布, 并令  $q(t) = S_0(\mathbf{r}, t)/f(\mathbf{r})$ 。考虑到

$$l_\infty = \frac{1}{v \Sigma_a}, \quad L^2 = D/\Sigma_a,$$

其中  $l_\infty$  称为无限介质中子寿命。(12-8) 式可以写成

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(1-\beta)k_\infty - (1+L^2B^2)}{l_\infty} n + \sum_i \lambda_i c_i(t) + q(t), \quad (12-9)$$

定义有效增殖因数  $k$  和中子寿命  $l$  分别为

$$k = \frac{k_\infty}{1+L^2B^2}, \quad l = \frac{l_\infty}{1+L^2B^2}.$$

(12-9) 和 (12-7) 式可简化为

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k-1-\beta k}{l} n + \sum_i \lambda_i c_i + q \quad (12-10)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i k}{l} n - \lambda_i c_i \quad (12-11)$$

定义中子每代时间和反应性分别为

$$\Lambda = \frac{l}{k}, \quad \rho = \frac{k-1}{k}, \quad (12-12)$$

则 (12-10) 式和 (12-11) 式最后变为

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \sum_i \lambda_i c_i + q, \quad (12-13)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i. \quad (12-14)$$

(12-13) 式与 (12-14) 式是与空间位置无关的反应堆动态方程，也就是当采用点堆模型时简化后得到的反应堆动态方程。上述方程组是近似的，因为忽略了一些有待考虑的因素。首先，方程组是在均匀裸堆的情况下推导出来的。另外，对于非均匀堆，燃料和慢化剂是分开的，整个反应堆的参数不会均匀变化。再者，关于单群近似的假设也是十分粗糙的，因而有必要对高于热能范围的中子的吸收和泄漏进行适当的修正。另外，缓发中子能量比瞬发中子的要低，因此缓发中子的超热泄漏和俘获相对地要小一些，这样，对缓发中子的有效份额也有必要进行修正。此外，不同组的缓发中子先驱核具有不同的发射能谱，当堆内有多种燃料时，它们还具有各自不同的缓发中子发射特性，再加上过渡过程中，如果由于参数变化引起中子能谱变化等因素都要予以考虑的话，动态方程就变得不堪其繁了。对于点堆模型还有一个重要限制，就是它根本不能描述与空间相关的动态效应。当反应堆偏离临界状态太远时，这个模型也不能适用。有关点堆模型局限性的讨论，读者可参阅文献[1]，[3]。但是，点堆模型在许多情况下还是有其适用价值并且被广泛应用的，尤其当局部扰动不大而且反应堆接近临界状态时，由它导出的结果还是比较令人满意的。

从中子循环的物理过程也可以直观地得出方程 (12-13) 和 (12-14)。假定  $n(t)$  为时间  $t$  时系统内的中子数， $l$  为中子寿命，则中子的总损失率为  $n/l$ ，相应的中子总产生率为  $kn/l$ ，其中第  $i$  组缓发中子的产生率为  $\beta_i kn/l$ 。于是瞬发中子的产生率为  $(1-\beta)kn/l$ 。若  $c_i$  为第  $i$  组缓发中子先驱核数，则缓发中子的产生率为  $\sum \lambda_i c_i$ 。若  $q$  表示外中子源每秒产生的中子数，则可以写出中子动态方程为

$$\frac{dn}{dt} = (1-\beta)k \frac{n}{l} + \sum_i \lambda_i c_i + q - \frac{n}{l},$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i k}{l} n - \lambda_i c_i.$$

这就是 (10-10) 和 (12-11) 式，利用 (12-12) 式中  $\Lambda$  和  $\rho$  的定义容易求得 (12-13) 式和 (12-14) 式。

## 2. 倒时方程

当不考虑外中子源时，(12-13) 和 (12-14) 式可重写如下

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \sum_i \lambda_i c_i, \quad (12-15)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i. \quad (12-16)$$

如果  $t < 0$  时，系统处于稳态， $\rho = 0$ ，而  $t > 0$  时， $\rho = \rho_0$  ( $\rho_0$  为常数)，我们讨论上述方程的解。将 (12-15) 和 (12-16) 式进行拉氏变换得

$$sn(s) - n(0) = \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} n(s) + \sum_i \lambda_i c_i(s), \quad (12-17)$$

$$sc_i(s) - c_i(0) = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(s) - \lambda_i c_i(s). \quad (12-18)$$

由 (12-18) 式得

$$c_i(s) = \frac{\frac{\beta_i}{\Lambda} n(s) + c_i(0)}{s + \lambda_i}. \quad (12-19)$$

将 (12-19) 式代入 (12-17) 式求得

$$n(s) = \frac{\Lambda \left[ n(0) + \sum_i \frac{\lambda_i c_i(0)}{s + \lambda_i} \right]}{\Lambda s + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i}}, \quad (12-20)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m$  为缓发中子组数。(12-20) 式可以写成  $s$  的两个多项式的比值。可以看出: 分子的阶数为  $m$ , 分母的阶数为  $m+1$ 。不难求得  $n(s)$  的反变换为

$$n(t) = \sum_{i=1}^{m+1} A_i e^{\omega_i t}, \quad (12-21)$$

其中  $\omega_i$  为 (12-20) 式分母的  $m+1$  个根, 也就是说  $\omega$  满足下列方程式 (系数  $A_i$  将在 12-4 节中讨论)

$$\rho_0 = \beta + \Lambda \omega - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}. \quad (12-22)$$

因为  $\beta = \sum_i \beta_i$ , 所以

$$\rho_0 = \Lambda \omega + \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\omega + \lambda_i}. \quad (12-23)$$

由于  $\Lambda = l/k$ ,  $k = 1/(1 - \rho_0)$ , 则 (12-23) 式可写成

$$\rho_0 = \frac{l\omega}{1 + l\omega} + \frac{1}{1 + l\omega} \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\omega + \lambda_i}. \quad (12-24)$$

(12-22)、(12-23) 和 (12-24) 式均为倒时方程的表示形式, 它是  $\omega$  的  $m+1$  阶代数方程。如果具有六组缓发中子时, 倒时方程为一个七阶代数方程, 可以证明, 其中六个根为负实根, 而另一个根的符号与  $\rho_0$  的符号相同。当时间  $t$  变得愈来愈大时, 方程 (12-21) 中有一项将逐渐变为主要的, 即  $n \rightarrow A_1 e^{\omega_1 t}$ , 其中  $\omega_1$  为代数上最大的一个根。当  $\rho_0$  为正时, 主要项将指数地增长, 此时  $T = 1/\omega_1$  称为反应堆周期, 也叫渐近周期或稳定周期。显而易见, 当  $t = T = 1/\omega_1$  时,  $n/n_0 = e$ , 也就是说, 反应堆周期是堆中子密度变化  $e$  倍所需要的时间。

倒时公式是反应堆周期和反应性之间的关系式, 是堆物理实验中, 由测量周期来确定反

应性的方法的理论根据。“倒时”是反应堆工程中早期采用的一个名词。“一倒时”相当于堆功率增长的稳定周期为一小时时，所加入的正反应性的量。如将稳定周期  $T = 1/\omega$  代入 (12-23) 式中，则得

$$\rho_0 = \frac{\Lambda}{T} + \sum_i \frac{\beta_i}{1 + \lambda_i T} \quad (12-25)$$

当  $T = 1 \text{ 小时} = 3600 \text{ 秒}$  时，即得 1 倒时的反应性为

$$\rho_0 = \frac{\Lambda}{3600} + \sum_i \frac{\beta_i}{1 + 3600\lambda_i}$$

这是一个很小的单位，对于用  $^{235}\text{U}$  作燃料的热堆，一倒时约等于  $2.3 \times 10^{-6}$  的反应性。目前反应性通常用  $\Delta k/k$  表示，或用缓发中子份额  $\beta$  为单位表示。当反应性的值等于  $\beta$  时，定义为一“元”的反应性，当等于  $0.01\beta$  时，定义为一“分”的反应性。

用图解法研究 (12-24) 式的根非常方便。图 12-1 是用 (12-24) 式的右端作为  $\omega$  的函数而绘出的图形。可以看出，当  $\omega = 0$  时，右端等于 0，随着  $\omega$  的正值的逐渐增加，右端单调地增大并趋近于 1。但是，当  $\omega$  为负值时，对于六个  $\omega = -\lambda_i$  的值以及  $\omega = -1/l$  处，右端有奇点。此外，当  $\omega \rightarrow -\infty$  的情况下，右端趋近于 1。

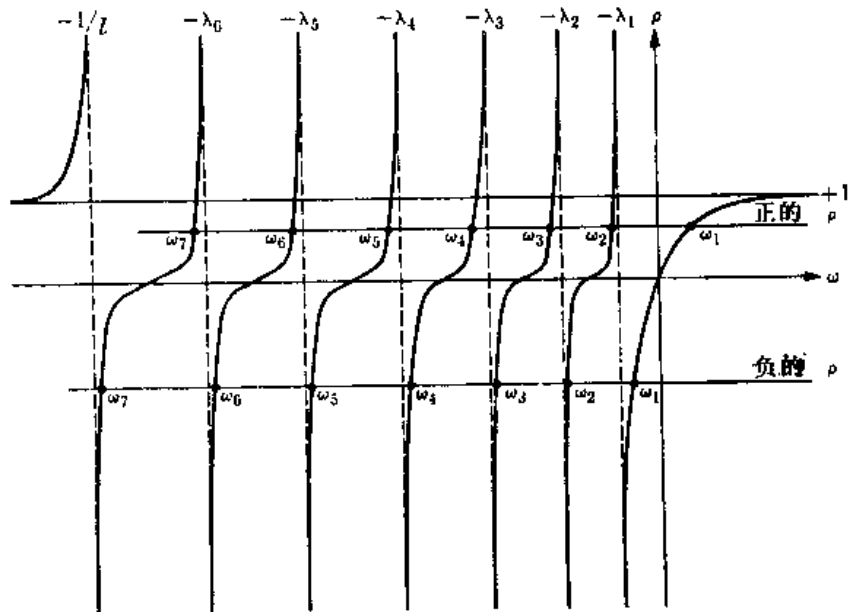


图12-1 用图解法确定倒时方程的根

(12-24) 式的根由  $\rho = \rho_0$  的水平线与右端的曲线的交点给出。如图所示，当  $\rho_0$  为正时，有六个负根和一个正根；当  $\rho_0$  为负时，七个都是负根。 $\rho_0$  的最大值为 1，即

$$-\infty < \rho_0 = \frac{k-1}{k} < 1 \quad (12-26)$$

我们研究几种近似情况：

(1) 当引入的反应性很小时 ( $\rho_0 \ll \beta$ )，可以认为  $\omega_1$  很小

$$|\omega_1| \ll \lambda_1 < \lambda_2 \cdots < l^{-1}$$

由 (12-23) 式可得

$$\rho_0 \approx \omega_1 \Lambda + \omega_1 \sum_{i=1}^6 \beta_i / \lambda_i \quad (12-27)$$

于是

$$T = \frac{1}{\omega_1} \approx \frac{1}{\rho_0} \left[ \Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right] \quad (12-28)$$

一般  $\Lambda$  为  $10^{-8}$  秒 (快堆) 至  $10^{-3}$  秒 (大型热堆), 而  $\sum \beta_i / \lambda_i$  之值在 0.03 以上, 缓发中子使反应堆周期大大增加。如果只有瞬发中子的话, 则周期就会变得非常小, 对反应堆的控制将变得十分困难。

(2) 当引入的反应性很大时 ( $\rho_0 \gg \beta$ ), 可以认为  $\omega_1 \gg \lambda_i$ 。由 (12-23) 式得

$$\rho_0 \approx \Lambda \omega_1 + \beta \quad (12-29)$$

或

$$T = \frac{1}{\omega_1} \approx \frac{\Lambda}{\rho_0 - \beta} \approx \frac{\Lambda}{\rho_0} \quad (12-30)$$

如果引入的反应性很大, 则反应堆的响应主要决定于瞬发中子的每代时间, 这个情况与 (12-28) 式中全部忽略缓发中子的结果是一样的。

(3) 当  $\rho_0 = \beta$  时, 称为瞬发临界。这时仅依靠瞬发中子即可使反应堆保持临界。当  $\rho_0 < \beta$  时, 反应堆要达到临界尚需缓发中子作出贡献, 因而反应堆的时间特性在很大程度上, 将由先驱核  $\beta$  衰变的时间决定。当  $0 < \rho < \beta$  时称为缓发临界。当  $\rho > \beta$  时称为瞬发超临界。反应堆运行中必须避免发生瞬发临界和瞬发超临界现象, 否则将造成反应堆失控。

(4) 当  $\rho_0$  为很大的负反应性时, 由图 12-1 可以看出: 稳定周期  $T$  将接近于  $1/\lambda_1$ , 即约等于 80 秒。如果由于引入大的负反应性而突然停堆, 则通量迅速下降, 而在短时间内瞬变项衰减之后, 通量将按指数规律下降, 其周期约为 80 秒。

有些反应堆中, 停堆以后很长的时间, 还会由积累的裂变产物衰变放出  $\gamma$  射线, 通过 ( $\gamma, n$ ) 反应继续产生中子, 这样延长了停堆所需要的时间。在含有大量的氚、钷或其他具有低光中子阈物质的反应堆中, 这个效应特别重要。

上面我们在导出倒时公式时, 没有考虑 (12-13) 式中的外中子源项。应该指出, 考虑外中子源项时, 对倒时方程的形式并无影响。

### 3. 阶跃扰动时的反应堆动态方程的解

现在我们来求当稳态反应堆的反应性作阶跃变化时, (12-15) 和 (12-16) 式的解。由 (12-16) 式得  $c(0) = \beta, n_0/\lambda, \Lambda$ , 将其代入 (12-20) 式便求得

$$n(s) = n_0 \frac{\Lambda + \sum \frac{\beta_i}{s + \lambda_i}}{\Lambda s + \beta - \rho_0 - \sum \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i}} \quad (12-31)$$

将方程 (12-31) 写成两个多项式的比值:

$$\frac{n(s)}{n_0} = \frac{P(s)}{D(s)}, \quad (12-32)$$

其中

$$P(s) = \left( \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) \prod_i (s + \lambda_i), \quad (12-33)$$

$$D(s) = \left( \Lambda s + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i} \right) \prod_i (s + \lambda_i). \quad (12-34)$$

上述两式中  $\Pi$  表示连乘符号,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m$  为缓发中子组数。  $D(s)$  的阶数比  $P(s)$  的阶数大 1。(12-32) 式的拉氏逆变换为

$$n(t) = n_0 \sum_{j=1}^{m+1} \frac{P(\omega_j)}{D'(\omega_j)} e^{\omega_j t}. \quad (12-35)$$

(12-32) 式右端的分母  $D(s)$  称为特征多项式。  $D(s) = 0$  称为特征方程。显而易见, 特征方程就是前节中的倒时方程。(12-35) 式中的  $\omega_j$  为特征方程  $D(s) = 0$  的根。由(12-34) 式可求出

$$D'(s) = \left[ \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{(s + \lambda_i)^2} \right] \prod_i (s + \lambda_i) + \dots$$

从倒时方程可以看出, 上述等式右边用“点”表示的其余项, 当  $s = \omega_j$  时, 全部为零。于是

$$D'(s) = \left[ \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{(\omega_j + \lambda_i)^2} \right] \prod_i (\omega_j + \lambda_i).$$

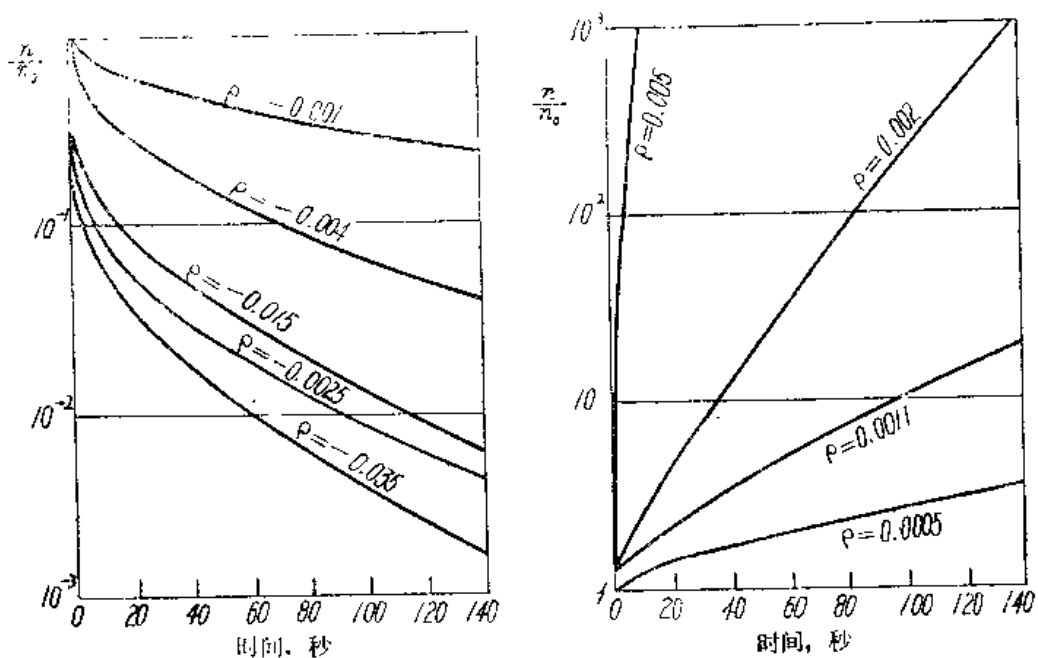


图12-2 阶跃扰动下相对中子水平随时间的变化曲线



将上式代入 (12-35) 式求得

$$n(t) = n_0 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\Lambda + \sum_j \frac{\beta_j}{\omega_j + \lambda_j}}{\Lambda + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{(\omega_i + \lambda_i)^2}} e^{\omega_i t} \quad (12-36)$$

将 (12-23) 式代入上式有

$$n(t) = n_0 \rho_0 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{\omega_i} \left[ \Lambda + \sum_j \frac{\beta_j \lambda_j}{(\omega_j + \lambda_j)^2} \right] e^{\omega_i t} = n_0 \sum_{i=1}^{m+1} A_i e^{\omega_i t} \quad (12-37)$$

(12-37) 式为阶跃扰动下，反应堆动态方程的解。当  $\rho_0$  为正时，每个系数  $A_i$  与其相应的  $\omega_i$  同号；当  $\rho_0$  为负时，全部  $\omega_i$  为负而  $A_i$  为正。

图 12-2 为阶跃扰动下，相对中子水平随时间的变化曲线。

### 3.1 单组缓发中子情况

当将多组缓发中子近似为有效单组缓发中子时，可采用

$$\beta = \sum_i \beta_i, \quad (12-38)$$

$$\lambda = \left[ \frac{1}{\beta} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right]^{-1} \quad (12-39)$$

由 (12-23) 式可以写出相应于单组缓发中子的倒时方程为

$$\rho_0 = \Lambda \omega + \frac{\beta \omega}{\omega + \lambda}, \quad (12-40)$$

或  $\Lambda \omega^2 + (\beta - \rho_0 + \lambda \Lambda) \omega - \lambda \rho_0 = 0, \quad (12-41)$

解方程 (12-41)，可以求得  $\omega$  的两个根，其中一个为负，另一个符号与  $\rho_0$  相同。

对于单组缓发中子的情况，阶跃扰动时，动态方程的解大大简化。此时方程 (12-37) 变为

$$n(t) = n_0 \rho_0 \left\{ \frac{e^{\omega_1 t}}{\omega_1 \left[ \Lambda + \frac{\beta \lambda}{(\omega_1 + \lambda)^2} \right]} + \frac{e^{\omega_2 t}}{\omega_2 \left[ \Lambda + \frac{\beta \lambda}{(\omega_2 + \lambda)^2} \right]} \right\} \quad (12-42)$$

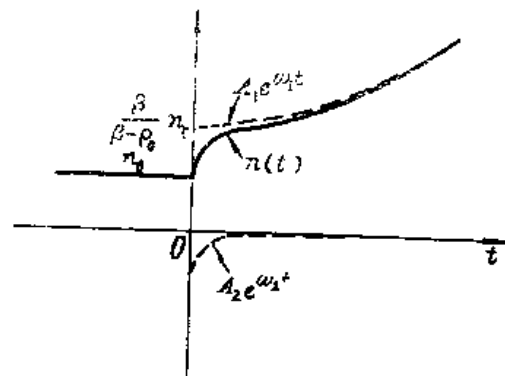


图12-3 阶跃扰动情况下单组缓发中子的动态方程响应曲线

从 (12-41) 式中的根与系数之间的关系可得

$$\omega_1 + \omega_2 = -\frac{\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda}{\Lambda} \quad (12-43)$$

$$\omega_1 \omega_2 = -\frac{\lambda\rho_0}{\Lambda} \quad (12-44)$$

当  $|\rho_0|$  足够小,  $\lambda\Lambda \ll \beta - \rho_0$  时,  $|\omega_1| \ll |\omega_2|$ 。由 (12-43) 和 (12-44) 式可得:

$$\omega_2 \approx -\frac{\beta - \rho_0}{\Lambda}, \quad \omega_1 \approx \frac{\lambda\rho_0}{\beta - \rho_0}.$$

于是不难将 (12-42) 式化简为

$$n(t) \approx \frac{n_0}{\beta - \rho_0} \left[ \beta \exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{\beta - \rho_0} t\right) - \rho_0 \exp\left(-\frac{\beta - \rho_0}{\Lambda} t\right) \right]. \quad (12-45)$$

上式是  $\rho_0$  较小时的一个较好的近似式。图 12-3 为阶跃扰动情况下, 单组缓发中子的动态方程的响应曲线。

对于反应性很大的阶跃扰动, 按推导 (12-45) 式的同样步骤可以求得

$$n(t) \approx \frac{n_0}{\rho_0 - \beta} \left[ \rho_0 \exp\left(\frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} t\right) - \beta \exp\left(-\frac{\lambda\rho_0}{\rho_0 - \beta} t\right) \right]. \quad (12-46)$$

显然, (12-46) 式只不过是 (12-45) 式的重新排列而已。

### 3.2 常源近似

当阶跃反应性较大时, 若受到扰动后时间还足够小, 即  $\lambda t \ll 1$ , 则由 (12-46) 式得

$$n(t) \approx \frac{n_0}{\rho_0 - \beta} \left[ \rho_0 \exp\left(\frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} t\right) - \beta \right]. \quad (12-47)$$

由 (12-15) 和 (12-16) 式可以写出单组缓发中子动态方程

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \lambda c, \quad (12-48)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n - \lambda c. \quad (12-49)$$

不难证明, (12-47) 式的  $n(t)$  可以满足 (12-48) 式, 只要  $\lambda c$  等于其初始稳态值  $\beta n_0 / \Lambda$  即可, 后者可由 (12-49) 式的左边为零求得。(当  $t \ll 1/\lambda$  时, 这样作是可以的。)

当阶跃反应性较小时, 在  $\lambda t \ll 1$  的条件下, 由 (12-45) 式也同样得到和 (12-47) 式同样的结果。

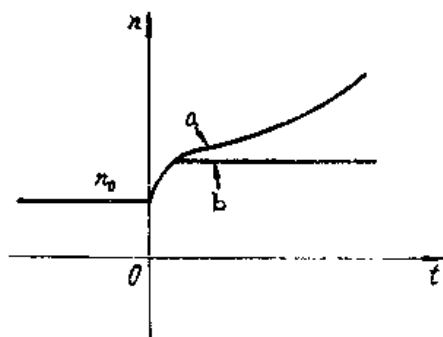


图12-4 阶跃反应性扰动后的响应曲线  
曲线 a —— (12-45) 式; 曲线 b —— (12-50) 式。  
( $0 < \rho_0 < \beta$ )

由此可见, 只要  $0 < t \ll 1/\lambda$ , 不论阶跃扰动时  $\rho_0$  之值大小如何, (12-47) 式是有效的。

上述的解是在假定缓发中子源等于常数的情况下推导出来的, 通常称为常源近似。这个近似只是在反应堆受到扰动以后很短的一段时间范围内才是正确的 (见图12-4)。

### 3.3 瞬跳近似

前面, 我们在研究反应性阶跃扰动情况下的中子密度变化时, 可以看出: 起初由瞬发中子寿命决定的很短的一段时间内, 中子密度迅速改变, 然后, 它的变化逐渐缓慢而主要为缓发中子特性所决定。因为初始瞬态过程很短, 一种非常有用的近似认为, 系统处于瞬发临界以下时, 瞬发中子寿命可当作零, 而中子密度在起始一瞬间突然发生改变, 即所谓瞬跳近似或零寿命近似。重写方程式 (12-13) — (12-14) 如下:

$$\Lambda \frac{dn}{dt} = (\rho - \beta)n + \Lambda \left( \sum \lambda_i c_i + q \right) \quad (12-50)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i \quad (12-51)$$

瞬跳近似认为, 当使  $\Lambda$  越来越变小时, (12-50) 式右边的第二项不能为零, 因为这是问题的源项, 乘以  $\Lambda$  之后只是变成每中子寿命时间内的源。除了很快的瞬变过程之外, 对于很小的  $\Lambda$ , (12-50) 式的左边将更快地趋近于零。瞬发中子寿命为零的假设就是令 (12-50) 式的左边为零。事实上, 当  $\rho < \beta$  而  $\Lambda$  变得很小时, (12-13) 式右边第一项为很大的负数, 而  $\sum \lambda_i c_i + q$  为很大的正数, 通常  $dn/dt$  为两者之间的一个很小的差, 因而可以忽略。根据以上讨论得

$$0 = (\rho - \beta)n + \Lambda \left( \sum \lambda_i c_i + q \right) \quad (12-52)$$

当反应性由  $\rho_1$  阶跃突变到  $\rho_2$  时, (12-52) 式右边第二项不会突变, 这样必然使中子密度由  $n_1$  突变到  $n_2$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\beta - \rho_1}{\beta - \rho_2} \quad (12-53)$$

研究 (12-45) 式, 在瞬跳近似情况下,  $\Lambda \rightarrow 0$ , 当  $[(\beta - \rho)/\Lambda]t \gg 1$  时, 可得

$$n(t) \approx \hat{n}_0 \frac{\beta}{\beta - \rho_0} \exp \left( \frac{\lambda \rho_0}{\beta - \rho_0} t \right) \quad (12-54)$$

如图 12-5 所示, 当  $t = 0$  时,  $n(t)$  发生跃变,  $t$  很大时, 由 (12-54) 与 (12-45) 式求得的两条曲线相互重合。

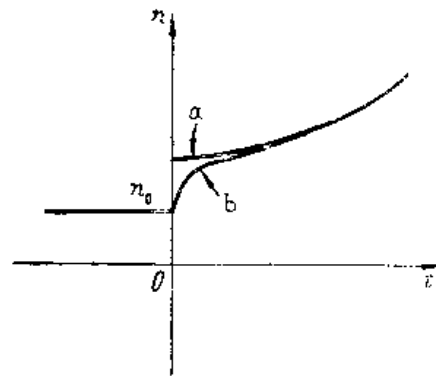


图12-5 阶跃反应性扰动后的响应曲线  
曲线 a —— (12-54) 式; 曲线 b —— (12-45) 式。  
( $0 < \rho_0 < \beta$ )

#### 4. 斜坡输入扰动时的反应堆动态方程的解

当反应性呈斜坡输入时, 求解反应堆动态方程十分复杂, 有兴趣的读者可参考[1,5]。下面我们只讨论两种近似情况。

##### 4.1 瞬跳近似情况

不考虑外中子源的单组缓发中子的情况下, 由(12-48)与(12-49)式省去 $c(t)$ , 并令 $\Lambda \rightarrow 0$ , 即得瞬跳近似方程为

$$[\rho(t) - \beta] \frac{dn(t)}{dt} + \left[ \frac{d\rho(t)}{dt} + \lambda\rho(t) \right] n(t) = 0 \quad (12-55)$$

这种简单形式, 有时可用于反应堆动态特性的解析研究。当 $\rho(t)$ 给定时, (12-55)式的解为

$$n(t) = n_0 e^{A(t)} \quad (12-56)$$

其中

$$A(t) = \int_0^t \left[ \frac{\rho(\tau) + \lambda\rho(\tau)}{\beta - \rho(\tau)} \right] d\tau$$

例如, 当 $\rho(t) = \gamma\beta t$  (斜坡输入) 时, 可以求得

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t} [1 - \gamma t]^{-(1+\frac{1}{\gamma})} \quad (12-57)$$

##### 4.2 常源近似情况

当反应性超过瞬发临界值时, 中子水平迅速地变化。相对地说, 反应堆内先驱核衰变产生缓发中子的变化率则比较小。在一定的瞬变过程范围中, 可以假定缓发中子源为常数。

由(12-49)式, 当 $\frac{dc}{dt} = 0$ 时,  $\lambda c = \beta n_0 / \Lambda$ , 代入(12-48)式得

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \frac{\beta}{\Lambda} n_0$$

反应性 $\rho(t)$ 任意变化时, 上述方程的解为

$$n(t) = n_0 \left\{ \left[ 1 + \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^t \exp \left( - \int_0^{t'} \frac{\rho - \beta}{\Lambda} dt'' \right) dt' \right] \exp \left( \int_0^t \frac{\rho - \beta}{\Lambda} dt' \right) \right\} \quad (12-58)$$

当反应性成快速斜坡变化, 而 $\rho(t) = \beta + \mu t$ ,  $\mu > 0$ 时, 也就是说, 反应性突变为瞬发临界值, 然后不断增长时, 可得

$$n(t) = n_0 \exp(\mu t^2 / 2\Lambda) \left[ 1 + \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^t \exp(-\mu t'^2 / 2\Lambda) dt' \right]$$

$$\approx n_0 \left[ 1 + \beta \sqrt{\frac{\pi}{\mu\Lambda}} \right] \exp(\mu t^2 / 2\Lambda) \quad (12-59)$$

(12-59) 式的最后形式是由误差函数的渐近展开式得来。

图 12-6 表示快速斜坡输入造成的某种严重事故情况下，相对中子水平随时间变化的近似曲线。

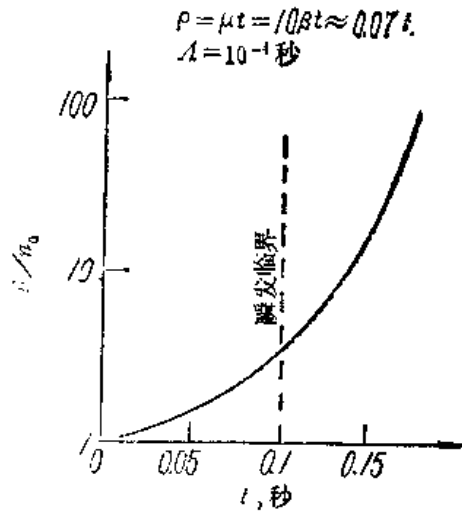


图12-6 快速斜坡输入扰动下的近似响应曲线

### 5. 零功率反应堆的传递函数

一个系统的动态特性可用多种形式表示，如用微分方程或状态方程表示。传递函数也是其中一种形式，在控制理论中应用很广。一个线性动力学系统传递函数的定义是：零值初始条件下，系统输出的拉氏变换和输入的拉氏变换之比。下面我们由点堆动态方程 (12-13) 和 (12-14) 式来推导出零功率反应堆的传递函数。这里所说的零功率堆，是指反馈效应可以忽略的堆，实际功率很小，但并不真正为零。

从方程 (12-13) 可见，由于  $\rho$  是随时间变化的，这是一个变系数微分方程。如果进一步考虑反馈效应时，则变成为非线性微分方程。通常是在小扰动情况下，对上述方程求解，习惯上进行所谓线性化处理。

假定反应堆在运行时反应性发生微小变化后，中子密度和缓发中子先驱核密度也相应发生微小变化。即令：

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad n = n_0 + \delta n,$$

$$c_i = c_{i,0} + \delta c_i, \quad q = q_0,$$

又

$$c_{i,0} = \frac{\beta_i n_0}{\lambda_i}, \quad q_0 = - \frac{\rho_0 n_0}{\Lambda},$$

将上述各值代入式 (12-13) · (12-14) 后得

$$\frac{d}{dt} \delta n = \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} \delta n + \sum_i \lambda_i \delta c_i + \frac{n_0}{\Lambda} \delta \rho + \frac{1}{\Lambda} \delta \rho \delta n, \quad (12-60)$$

$$-\frac{d}{dt} \delta c_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} \delta n - \lambda_i \delta c_i. \quad (12-61)$$

(12-60) 式的最后一项为高次微分项, 如将此项忽略, 方程组 (12-60) — (12-61) 即变为线性方程组, 这就是所谓线性化处理。将 (12-60) — (12-61) 式进行拉氏变换, 并忽略高次微分项得

$$s \delta n(s) = \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} \delta n(s) + \sum_i \lambda_i \delta c_i(s) + \frac{n_0}{\Lambda} \delta \rho(s), \quad (12-62)$$

$$s \delta c_i(s) = \frac{\beta_i}{\Lambda} \delta n(s) - \lambda_i \delta c_i(s). \quad (12-63)$$

由 (12-63) 式得

$$\delta c_i(s) = \frac{\beta_i}{\Lambda(s + \lambda_i)} \delta n(s). \quad (12-64)$$

将 (12-64) 式代入 (12-62) 式则

$$s \delta n(s) = \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} \delta n(s) + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\Lambda(s + \lambda_i)} \delta n(s) + \frac{n_0}{\Lambda} \delta \rho(s). \quad (12-65)$$

于是

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0}{\Lambda s + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i}}. \quad (12-66)$$

因为  $\beta = \sum_i \beta_i$ , (12-66) 式也可写为

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0}{\left( \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) s - \rho_0}. \quad (12-67)$$

当反应堆处于临界状态时,  $\rho_0 = 0$ , (12-67) 式变为

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0}{\left( \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) s}. \quad (12-68)$$

当反应堆具有六组缓发中子时, 有

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i / \Lambda}{s + \lambda_i} &= 1 + \frac{\beta_1 / \Lambda}{s + \lambda_1} + \dots + \frac{\beta_6 / \Lambda}{s + \lambda_6} \\ &= \frac{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_6) + \frac{\beta_1}{\Lambda}(s + \lambda_2)(s + \lambda_3) \dots (s + \lambda_6) + \dots}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_3)(s + \lambda_4)(s + \lambda_5)(s + \lambda_6)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^a (s + \gamma_i)}{\prod_{i=1}^b (s + \lambda_i)} \quad (12-69)$$

则

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0}{\Lambda s} \frac{\prod_{i=1}^b (s + \lambda_i)}{\prod_{i=1}^a (s + \gamma_i)} \quad (12-70)$$

(12-70) 式为具有六组缓发中子的零功率反应堆传递函数，只要  $\Lambda$ 、 $\lambda_i$ 、 $\beta_i$  等参数给定后，它就可以容易确定。

具有六组缓发中子的传递函数，应用时计算工作量较大，采用适当的参数权重，可以减少缓发中子的组数（也就是减少了微分方程的阶数），其中最简单的是单组缓发中子的情况。

按照上述推导步骤，同样可以求得具有单组缓发中子反应堆的传递函数为：

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0}{\Lambda s + \frac{\beta s}{s + \lambda} - \rho_0} \quad (12-71)$$

反应堆处于临界状态时， $\rho_0 = 0$ ，因而

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0 (s + \lambda)}{\Lambda s (s + \lambda + \beta/\Lambda)} \quad (12-72)$$

对于瞬跳近似情况，令  $\Lambda = 0$ ，(12-72) 式变为

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0 (s + \lambda)}{\beta s} \quad (12-73)$$

应该指出，上述反应堆各种形式的传递函数，都与稳态中子密度  $n_0$  有关。

## 6. 小正弦输入扰动时的反应堆动态方程的解

令 
$$G_R(s) = \frac{\delta n(s)/n_0}{\delta \rho(s)}$$

则由 (12-66) 式可得

$$G_R(s) = \frac{1}{\Lambda s + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i}}$$

反应堆处于临界时， $\rho_0 = 0$ ，由 (12-68) 式得

$$G_R(s) = \frac{1}{s \left[ \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i} \right]} \quad (12-74)$$

特殊情况下,如果在反应堆稳态附近反应性作小的正弦振荡,即  $\delta\rho(t) = \delta k \sin\omega t$ , 其拉氏变换为

$$\delta\rho(s) = \delta k \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (12-75)$$

而

$$\frac{\delta n(s)}{n_0} = G_R(s)\delta\rho(s) = G_R(s)\delta k \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (12-76)$$

由(12-35)式容易求出  $\delta n(s)/n_0$  的反变换(应用留数求和原理)

$$\begin{aligned} \frac{\delta n(t)}{n_0} &= \delta k \left[ \frac{G_R(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} - \frac{G_R(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} \right] \\ &+ \delta k \omega \sum_{i=1}^7 \frac{e^{\omega_i t}}{(\omega^2 + \omega_i^2) Y'(\omega_i)}, \end{aligned} \quad (12-77)$$

其中  $\omega_i$  为倒时方程的根, 而

$$Y(s) = 1/G_R(s). \quad (12-78)$$

因为当反应堆具有六组缓发中子时, 倒时方程的七个根中有六个为负, 反应堆处于临界时, 还有一个根为零根, 所以当  $t \rightarrow \infty$  时, (12-77) 式中的求和项内有六项为零, 而包括  $\omega_1 = 0$  的那一项则变为常数。

由于

$$Y(s) = \frac{1}{G_R(s)} = \Lambda s + \beta - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i},$$

故

$$Y'(0) = \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} = \Lambda'.$$

又  $G_R(j\omega)$  为复数, 可以写为

$$G_R(j\omega) = |G_R(j\omega)| e^{j\theta}, \quad (12-79)$$

其中  $|G_R(j\omega)|$  称为复数  $G_R(j\omega)$  的振幅,  $\theta$  称为  $G_R(j\omega)$  的相角。

$G(j\omega)$  和  $G(-j\omega)$  为共轭复数, 由(12-77)式容易求得  $t \rightarrow \infty$  时, 中子密度振荡的渐近特性为

$$\frac{\delta n(t)}{n_0} = \delta k |G_R(j\omega)| \sin(\omega t + \theta) + \frac{\delta k}{\omega \Lambda'}. \quad (12-80)$$

(12-80) 式中的常数项, 表示振荡时, 中子水平值产生了一个偏移  $n_0 \delta k / \omega \Lambda'$ 。注意,  $\delta n/n_0$  振荡时, 其振幅为输入正弦振幅的  $|G_R(j\omega)|$  倍, 而相角则相差  $\theta$ 。

## \*7. 零功率反应堆的频率特性

系统对正弦输入的稳态响应特性称为频率特性。频率特性法在研究系统动特性中有广泛的应用。用这种方法研究系统的稳定性和过渡过程时, 不必直接求解系统的微分方程。而且, 系统的频率特性可以用实验方法确定。零功率反应堆的传递函数, 在四十年代末期已从理



论上导出, 而其频率特性在五十年代初期由实验求出。频率特性方法对反应堆稳定性分析, 过渡过程品质分析以及在参数整定中都很有用。例如用振荡法测定  $\beta/\Lambda$  之值, 就是一个较好的方法。

首先, 我们将证明, 系统的频率特性可以直接由系统的传递函数求得。也就是说, 将传递函数中的  $s$  用  $j\omega$  来代替即可, 其中  $\omega$  为角频率,  $j = \sqrt{-1}$ 。

假定线性系统的微分方程为

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m x, \quad (12-81)$$

其中,  $x$  为系统的输入,  $y$  为系统输出,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  和  $b_0, b_1, \dots, b_m$  均为常数,  $m, n$  为正整数,  $m < n$ 。

在零值起始条件下, 容易求得系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{P(s)}{D(s)} \quad (12-82)$$

若  $x(t)$  为一个随时间而正弦变化的输入信号,

$$x(t) = A \sin \omega t,$$

则

$$X(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

由式 (12-82) 得

$$Y(s) = \frac{P(s)}{D(s)} \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} \quad (12-83)$$

令  $Y(s)$  的分母为 0, 求得特征方程为

$$D(s)(s^2 + \omega^2) = 0,$$

或写为

$$(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)(s + j\omega)(s - j\omega) = 0$$

将 (12-83) 式展开为部分分式

$$Y(s) = \frac{K_j}{s - j\omega} + \frac{K_{-j}}{s + j\omega} + \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - s_n}$$

式中  $K_j, K_{-j}, K_i (i=1, 2, \dots, n)$  为待定常数,  $Y(s)$  的拉氏逆变换为

$$y(t) = K_j e^{-j\omega t} + K_{-j} e^{j\omega t} + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t} \quad (12-83a)$$

我们现在仅讨论稳定系统, 这种系统要求所有的  $s_i (i=1, 2, \dots, n)$  的实部应为负值。这样, 当加上输入信号以后, 经过了足够长的时间, 则  $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \dots$  和  $e^{s_n t}$  都将趋近于零, 余下的就只有第一和第二两项

$$y(t) = K_j e^{j\omega t} + K_{-j} e^{-j\omega t} \quad (12-83b)$$

其中  $K_j$  可由 (12-83) 式确定

$$K_j = G(s) \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j} \quad (12-84)$$

同样可求得  $K_{-j}$  为

$$K_{-j} = G(s) \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = \frac{AG(-j\omega)}{-2j} \quad (12-84a)$$

将式 (12-84) 和 (12-84a) 式代入 (12-83b) 式得

$$y(t) = A \frac{G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t}}{2j} \quad (12-85)$$

$G(j\omega)$  和  $G(-j\omega)$  为共轭复数可以写为

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= u(\omega) + jv(\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi} , \\ G(-j\omega) &= u(\omega) - jv(\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\phi} , \end{aligned}$$

其中

$$|G(j\omega)| = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} = \text{振幅} ,$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = \angle G(j\omega) = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{G(j\omega) \text{的虚部}}{G(j\omega) \text{的实部}} \right] = \text{相角} ,$$

于是 (12-85) 式变为

$$\begin{aligned} y(t) &= A |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \\ &= B \sin(\omega t + \phi) , \end{aligned} \quad (12-85a)$$

其中

$$B = A |G(j\omega)| .$$

由此可见, 任何一个稳定系统, 如果它的传递函数为  $G(s)$ , 加上一个随时间正弦变化的输入信号时, 待系统稳定之后, 则其输出也是一个随时间正弦变化的信号, 其振幅为  $A |G(j\omega)|$ , 而相位滞后于输入信号一个角度  $\phi$ .  $|G(j\omega)|$  称为系统的振幅频率特性 (幅频特性);  $\phi = \angle G(j\omega)$  也是  $\omega$  的函数, 称为系统的相位频率特性 (相频特性);  $G(j\omega)$  称为系统的频率特性。如已知系统的传递函数为  $G(s)$ , 将  $s$  换为  $j\omega$  后, 即得系统的频率特性。

又

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= u(\omega) + jv(\omega) , \\ u(\omega) &= \text{Re}G(j\omega) \quad \text{称为实频特性,} \\ v(\omega) &= \text{Im}G(j\omega) \quad \text{称为虚频特性.} \end{aligned}$$

从上面的讨论, 对于频率特性可得出如下结论:

- (1) 当系统的输入信号成正弦波形时, 其稳态输出也按同频率的正弦规律变化;
- (2) 稳态输出的正弦信号的振幅是输入信号的振幅乘以频率特性的振幅;
- (3) 稳态输出的正弦信号的相位与输入正弦信号的相位之差为  $\phi$ 。

上述结论是相当重要的, 它是用实验方法求取系统 (包括反应堆系统) 频率特性的理论基础。用实验方法求频率特性时, 只要在所需研究的系统的输入端加一个频率为  $\omega_1$  的正弦

信号，待稳定后，测量输出信号的振幅和相位，并与输入信号的振幅和相位作比较，便可得出对应于频率 $\omega_1$ 的幅频特性 $|G(j\omega_1)|$ 和相频特性 $\phi(j\omega_1)$ 。如果不断改变输入信号的频率 $\omega$ ，重复上述实验步骤，便可得出不同频率时的频率特性。

当用频率特性描述系统时，除采用频率特性的表示式外，通常还采用频率特性曲线。用实验方法求频率特性时，也总是先求得频率特性曲线。

现在，我们利用上述原理，研究零功率堆的频率特性。当反应堆处于临界时， $\rho_0 = 0$ 。使(12-74)式中的 $s = j\omega$ ，即可求得零功率堆的频率特性 $G_R(j\omega)$ 。

前面已经提到过，对于一定的 $\omega$ ， $G_R(j\omega)$ 是一个复数，而复数是由实部和虚部组成的。即

$$G_R(j\omega) = \text{Re}[G_R(j\omega)] + j\text{Im}[G_R(j\omega)] = |G_R(j\omega)| e^{j\theta} \quad (12-86)$$

其中  $|G_R(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2[G_R(j\omega)] + \text{Im}^2[G_R(j\omega)]}$  (12-87)

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{\text{Im}[G_R(j\omega)]}{\text{Re}[G_R(j\omega)]} \quad (12-88)$$

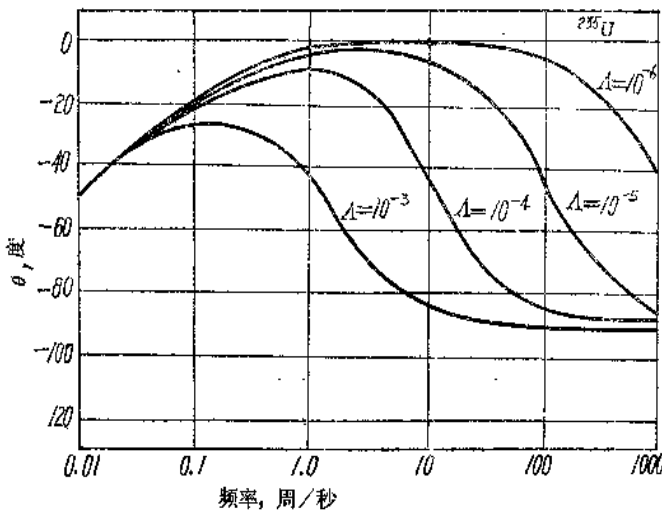
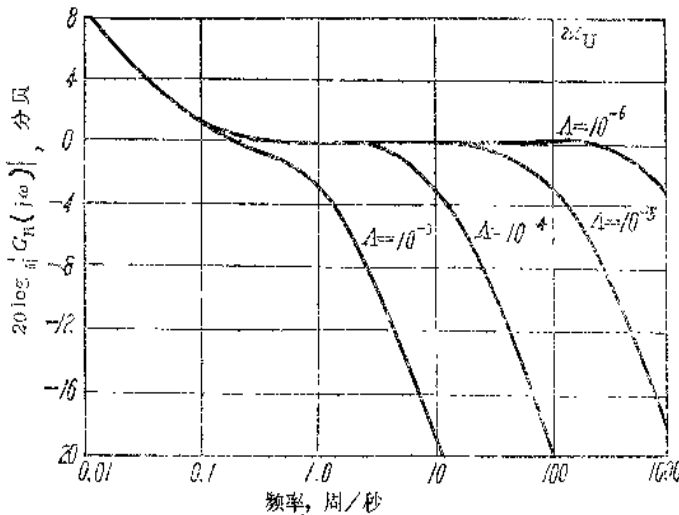


图12-7 反应堆的频率特性曲线

$|G_R(j\omega)|$  称为零功率堆频率特性的振幅,  $\theta$  称为零功率堆频率特性的相位。

一般在作图时, 振幅用分贝数表示, 它等于  $20 \log |G_R(j\omega)|$ 。图12-7为用  $^{235}\text{U}$  作燃料的反应堆, 在不同中子寿命情况下的振幅频率曲线和相位频率曲线图。

下面我们研究临界情况下零功率堆频率特性的近似曲线。

(1) 低频段 即  $s = j\omega$  很小时, 由 (12-68) 式得

$$G(s) = \frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} \approx \frac{n_0}{s \left( \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)} \approx \frac{n_0}{\Lambda' s},$$

式中  $\Lambda' = \Lambda + \sum_i \beta_i / \lambda_i$ , 而

$$G(j\omega) \approx \frac{n_0}{\Lambda' (j\omega)} = -j \frac{n_0}{\Lambda' \omega}. \quad (12-89)$$

当  $\omega$  值很小时, 因为  $\sum \beta_i / \lambda_i \gg \Lambda$ , 故振幅曲线实际上在低频时与  $\Lambda$  无关, 主要由缓发中子所决定。当  $\omega \rightarrow 0$  时, 相位频率曲线趋近于  $-90^\circ$ 。(12-89) 式称为有效寿期模型。

(2) 高频段 即  $s = j\omega$  很大时, 由式 (12-68) 得

$$G(s) \approx \frac{n_0}{\Lambda s}, \quad (12-90)$$

$$\text{则 } G(j\omega) \approx \frac{n_0}{\Lambda (j\omega)} = -j \frac{n_0}{\Lambda \omega}. \quad (12-91)$$

高频段频率特性曲线主要由  $\Lambda$  决定, 缓发中子影响甚微。相位频率曲线趋近于  $-90^\circ$ 。

(3) 中频段 由于  $\Lambda$  比较小, 存在一个中间频段。当  $|s| = |j\omega| \gg (\lambda_i)_{\text{max}}$  时, 由 (12-68) 式得

$$G(j\omega) \approx \frac{n_0}{\beta} \quad (12-92)$$

此时在振幅频率曲线中出现“坪”, 且  $\Lambda$  愈小, 坪扩展得愈宽。

## \* 8. 具有反馈的反应堆

前面我们在研究零功率反应堆的动态特性时, 认为反应堆功率很小, 因此, 功率变化所引起的反应性变化可以忽略。然而, 对于在稳定功率情况下运行的反应堆, 当反应性改变以后, 堆功率就会改变; 而功率改变后, 又引起系统内部的某些物理和热工参数 (例如温度、压力、毒物浓度、汽泡体积等)、某些构件的几何形状 (如燃料棒弯曲度等) 的改变, 这种改变反过来又引起反应性的变化, 从而使功率进一步变化, 这就是反应堆的反馈效应问题。以温度反馈效应为例, 当功率变化时, 堆内燃料棒、慢化剂、载热剂等, 它们的温度亦即相应地发生变化。由于热膨胀, 各种材料的密度发生变化 (甚至有的发生相变, 如水变为蒸汽, 这样, 密度的改变就更大了)。温度变化也将影响热中子的散射和多普勒效应, 而使微观截面发生变化。各种材料的密度和它们的微观截面的变化, 又引起宏观截面发生变化, 这

些都使反应性发生改变。实际上反应堆各点的温度不仅是随时间，而且是随空间位置而变化的。确定堆内温度的空间分布情况，必须进行详细的热工水力计算，这是一个十分复杂的任务。为了使问题简化，经常以集中参数模型代替分布参数模型。典型的作法是：堆芯内采用几种平均温度（如燃料温度、慢化剂温度、冷却剂温度等）及其相应的反应性系数，以使问题得到简化。

一个反应堆建成以后，反应堆内部的反馈作用，就自然客观地存在，它不象一般的控制系统一样，是从外部加上去的。这种反馈作用可称之为“内在反馈”或者“固有反馈”。反应堆的反馈作用，对研究反应堆的动态特性极为重要。

由于温度、压力、毒物、汽泡等效应所引起的反应性变化，是用相应的反应性系数来表示的。这些反应性系数有的为正，有的为负。一般来说，正反应性系数会促使系统成为不稳定，而负反应性系数为系统稳定的必要条件。对于不同的反应堆，各种反馈作用的影响差别很大，例如，沸水堆压力变化产生的汽泡效应影响很大，而对于压水堆这种影响就较小，着重于考虑燃料和慢化剂的温度效应。即使对同一个堆，同一个因素在不同期间的影响也不一样，例如，含硼压水堆慢化剂温度系数，在堆寿期初和寿期末数值上变化就很大。反应性反馈作用的时间特性差别也相当显著。有的在功率改变后，反应性立即变化（例如燃料的温度反馈）；有的迟延时间长一些（例如慢化剂温度反馈）；有的则在若干小时后才起作用（例如中毒反馈）。

由此可见，反应堆的反馈作用是极为复杂的，它与反应堆的物理、热工、水动力学问题紧密地联系在一起。搞清楚反应堆的反馈机理，对于设计一个具有良好动态特性的反应堆是非常重要的。

### 8.1 具有反馈的反应堆的传递函数

图 12-8 为具有反馈的反应堆的传递函数方块图。其中  $P_0 G_R(s)$  为零功率反应堆的传递函数， $F(s)$  为反馈部分的传递函数。 $\delta\rho_{ext}$  为外加反应性的变化，例如控制棒移动所引起的反应性变化。反应性变化  $\delta\rho_{ext}$  之后，反应堆的功率变化  $\delta P$ ，功率改变以后，又引起燃料温度、慢化剂温度等物理参数相应变化，从而产生一个反馈反应性  $\delta\rho_F$ ，这种反应性进一步作用到反应堆上，使反应堆功率进一步变化，如此循环不已。

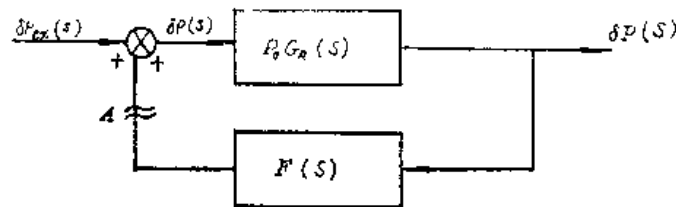


图12-8 具有反馈的传递函数方块图

如将系统在 A 处断开，反馈信号  $\delta\rho_F(s)$  与误差信号  $\delta\rho(s)$  之比，称为系统的开环传递函数。即

$$\text{开环传递函数} = \frac{\delta\rho_F(s)}{\delta\rho(s)} = P_0 G_R(s) F(s) \quad (12-93)$$

$\delta P(s)$ 与 $\delta \rho_{ex}(s)$ 之比称为闭环系统传递函数。因为

$$\begin{aligned}\delta \rho(s) &= \delta \rho_{ex}(s) + \delta \rho_r(s) = \delta \rho_{ex}(s) + F(s)\delta P(s) , \\ \delta P(s) &= P_0 G_R(s)\delta \rho(s) .\end{aligned}$$

从上述两式中消去 $\delta \rho(s)$ 可得闭环系统传递函数为

$$\frac{\delta P(s)}{\delta \rho_{ex}(s)} = \frac{P_0 G_R(s)}{1 - P_0 G_R(s)F(s)} = H(s) \quad (12-94)$$

(12-94)式是在相交点处采用正反馈符号求得的,如相交点处采用负反馈符号(习惯上多是这样),可以求得闭环系统传递函数为

$$\frac{\delta P(s)}{\delta \rho_{ex}(s)} = \frac{P_0 G_R(s)}{1 + P_0 G_R(s)F(s)} \quad (12-95)$$

(12-94)或(12-95)式中的零功率反应堆的传递函数已在本章第6节中进行了讨论。下面我们以反应堆温度反馈作为一个例子,研究反馈部分的传递函数 $F(s)$ 。

从物理观点看来,最简单的处理方法,是用平均温度表征堆芯内不同区域的温度,如用燃料平均温度 $T_F$ ,慢化剂平均温度 $T_M$ 等。当燃料温度改变时,产生的反应性效应相对来说是瞬发的。反应堆功率变化时,燃料温度响应延迟很小。而且在燃料温度变化与影响反应性的燃料截面变化之间也没有明显的延迟。另一方面,由于慢化剂温度变化产生的反应性效应却是有较大延迟的,因为在后者温度发生变化前,热量必须从燃料传过来。而且慢化剂的热容量一般也较大些。

假定在稳态条件下,堆功率(或中子密度)为 $P_0$ ,燃料和慢化剂温度分别为 $T_{F,0}$ 和 $T_{M,0}$ ,反应堆内发生小扰动以后,可以写出下列关系式:

$$\frac{d\delta T_F}{dt} = a\delta P - \omega_F \delta T_F , \quad (12-96)$$

$$\frac{d\delta T_M}{dt} = b\delta T_F - \omega_M \delta T_M , \quad (12-97)$$

其中 $\delta T_F$ ,  $\delta T_M$ 和 $\delta P$ 是实际的温度和功率与其相应的稳态值的偏差, $\omega_F$ 与 $\omega_M$ 分别为燃料和慢化剂温度的衰减常数。 $a$ ,  $b$ 假定为常系数。(12-96)式表明燃料的温度直接随功率改变而改变,而(12-97)式则说明慢化剂温度是随燃料温度改变而改变的。

将(12-96)式进行拉氏变换可得

$$\delta T_F(s) = \frac{a}{s + \omega_F} \delta P(s) , \quad (12-98)$$

或

$$\frac{\delta T_F(s)}{\delta P(s)} = \frac{a}{s + \omega_F} \quad (12-99)$$

同样,将(12-97)式进行拉氏变换可得

$$\delta T_M(s) = \frac{b}{s + \omega_M} \delta T_F(s) , \quad (12-100)$$

$$\text{或} \quad \frac{\delta T_M(s)}{\delta T_F(s)} = \frac{b}{s + \omega_M} \quad (12-101)$$

由 (12-99) 式和 (12-101) 式可得

$$\frac{\delta T_M(s)}{\delta P(s)} = \frac{ab}{(s + \omega_F)(s + \omega_M)} \quad (12-102)$$

如果燃料的温度系数和慢化剂温度系数分别为  $\alpha_F$  和  $\alpha_M$ , 则总的反馈反应性为

$$\delta \rho_F(s) = \alpha_F \delta T_F(s) + \alpha_M \delta T_M(s)$$

从图 (12-8) 可见, 反馈部分的传递函数为

$$F(s) = \frac{\delta \rho_F(s)}{\delta P(s)} = \alpha_F \frac{\delta T_F(s)}{\delta P(s)} + \alpha_M \frac{\delta T_M(s)}{\delta P(s)}$$

将 (12-99) 式和 (12-102) 式代入上式得

$$F(s) = \frac{\delta \rho_F(s)}{\delta P(s)} = \alpha_F \frac{a}{s + \omega_F} + \alpha_M \frac{ab}{(s + \omega_F)(s + \omega_M)} \quad (12-103)$$

又因为

$$\delta \rho(s) = \delta \rho_{ex}(s) + F(s) \delta P(s)$$

则

$$\delta \rho(t) = \delta \rho_{ex}(t) + \int_0^t f(t-\tau) \delta P(\tau) d\tau \quad (12-104)$$

这里假定当  $t < 0$  时,  $\delta P(t) = 0$ 。式中  $f(t)$  为  $F(s)$  的拉氏反变换, 称为反馈核。(12-104) 式右边第二项为表示反馈效应的最一般的形式, 它描写了时间为  $t$  时的反应性是如何受到这个时间以前的功率变化的影响的。

采用不同的传热模型, 得到不同的反馈传递函数, 因而有不同的反馈核。本节讨论的传热模型的反馈核, 可以容易地由 (12-103) 式求拉氏反变换得到。

$$f(t) = a \left[ \alpha_F e^{-\omega_F t} + \frac{\alpha_M b (e^{-\omega_F t} - e^{-\omega_M t})}{\omega_M - \omega_F} \right] \quad (12-105)$$

又由 (12-94) 式可得

$$\delta P(s) = \delta \rho_{ex}(s) H(s)$$

于是  $\delta P(s)$  的逆变换为

$$\delta P(t) = \int_0^t \delta \rho_{ex}(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (12-106)$$

其中  $h(t)$  为  $H(s)$  的拉氏逆变换, 也叫做系统的脉冲响应函数。

## 8.2 反应堆传递函数的噪声分析方法

前面我们一直是将反应堆作为一个确定的系统进行分析的。实际上反应堆内发生的物理过程是一种随机过程。描述反应堆的动态参数 (功率水平、通量、温度、压力等) 经常在某

些平均值附近按统计方式上下起伏。我们无法预测这些参数将来的肯定数值，而只能期望它们具有某些数值的几率是多少。中子扩散过程的统计性质曾被反复地强调，而且截面的概念，以及中子与核的相互作用等必须在或然性的意义上予以阐述。在反应堆中还有许多这种统计起伏或噪声源，例如液体流动，冷却剂沸腾和机械振动等。实际上由于探测器噪声影响，反应堆状态的测定也带有统计性。

在低功率时，发生在堆芯中基本的核过程的统计起伏将是主要的，但是在高功率时，由于非核性质的扰动（如冷却剂流动）而产生的反应堆噪声将处于支配地位。在反应堆动力学中，噪声之所以重要至少有两点理由，第一，它妨碍反应堆中精确测定某些希望要测的量，也就是说，必须把有用信号从噪声本底中分出来。第二，因为噪声是反应堆中发生的各种过程中产生出来的，它实际上可以作为系统的一种信息来源。后一种性质，目前引起广泛重视，例如下面将噪声分析用于测量反应堆传递函数就是一个很好的例子。

### 8.2.1 互相关法

先引入两个定义：函数  $x(t)$  的自相关函数为

$$\phi_{x, x}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (12-107)$$

函数  $x(t)$  与  $y(t)$  之间的互相关函数为

$$\phi_{x, y}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt \quad (12-108)$$

如果  $x(t)$  和  $y(t)$  为周期函数，则极限符号可以省略，而选取  $T$  为周期。利用上述定义，显然可得

$$\phi_{x, x}(\tau) = \phi_{x, x}(-\tau) \quad (12-109a)$$

$$\phi_{x, y}(\tau) = \phi_{y, x}(-\tau) \quad (12-109b)$$

由 (12-106) 式有

$$\delta P(t) = \int_{-\infty}^t \delta \rho_{ex}(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta \rho_{ex}(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (12-110)$$

与前节一样，这里仍然假定  $t < 0$  时， $\delta P(t) = 0$ ，故上式中的积分下限由零扩充到  $-\infty$ 。

反应性与堆功率之间的互相关函数（令极限过程的  $T \rightarrow \infty$ ）为

$$\begin{aligned} \phi_{\rho, P}(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta \rho_{ex}(t) \delta P(t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta \rho_{ex}(t-\tau) \delta P(t) dt \end{aligned} \quad (12-111)$$

将 (12-110) 式代入上式，并重新排列后得



$$\begin{aligned}
\phi_{p,p}(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta\rho_{e,x}(t-\tau) \left[ \int_0^{\infty} \delta\rho_{e,x}(t-u)h(u)du \right] dt \\
&= \int_0^{\infty} h(u) \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta\rho_{e,x}(t-\tau)\delta\rho_{e,x}(t-u)dt \right] du \\
&= \int_0^{\infty} \phi_{p,p}(\tau-u)h(u)du \quad . \quad (12-112)
\end{aligned}$$

比较式 (12-112) 与式 (12-110) 可以看出, 反应性与功率的互相关函数与反应性自相关函数之间的关系, 相当于功率响应与反应性变化之间的关系。

对 (12-112) 式取傅里叶变换

$$\frac{F\{\phi_{p,p}(\tau)\}}{F\{\phi_{p,p}(\tau)\}} = H(-j\omega) \quad , \quad (12-113)$$

其中 
$$F\{\phi_{p,p}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{p,p}(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau \quad . \quad (12-114)$$

$F\{\phi_{p,p}(\tau)\}$  称为相关谱密度。相应于  $\phi_{p,p}(\tau)$  的傅里叶变换  $F\{\phi_{p,p}(\tau)\}$  称为反应性(或输入)谱密度。

可以用上述结果测量运行反应堆的传递函数。放入或取出一个很小的中子吸收体, 使反应性在一个不大的范围内随机地变化, 然后记录相应的功率(或中子通量)的变化。为了确定相关函数, 在时间  $t, t+\Delta\tau, t+2\Delta\tau\cdots$  测定  $\delta\rho_{e,x}(t)$  和  $\delta P(t)$  之值。这样, 反应性自相关函数  $\phi_{p,p}(\tau)$  可以从一系列离散点上的  $\delta\rho_{e,x}(t)$  和  $\delta\rho_{e,x}(t+\tau)\cdots$  的测量值求得, 而互相关函数  $\phi_{p,p}(\tau)$  可以同样由  $\delta\rho_{e,x}(t)$  和  $\delta P(t+\tau)\cdots$  的量测值求得。其中离散时间步长一般为 0.01 秒。通常在约 5 分钟的观测周期内, 对 (12-107) 式和 (12-108) 式进行数值积分(或等效求和)。

(12-113) 式中出现的  $\phi_{p,p}(\tau)$  和  $\phi_{p,p}(\tau)$  的傅里叶变换也同样用数值方法确定。于是 (12-114) 式中的相关谱密度为

$$F\{\phi_{p,p}(\tau)\} \approx \sum_n \phi_{p,p}(n\Delta\tau) [\cos n\omega\Delta\tau + j\sin n\omega\Delta\tau] \Delta\tau \quad . \quad (12-115)$$

其中  $n$  为整数序列。

对  $F\{\phi_{p,p}(\tau)\}$  也可以写出类似的表达式。进一步求出傅里叶变换的实部和虚部, 由 (12-113) 式得到一系列  $\omega$  值下反应堆传递函数的振幅和相位。目前采用伪随机信号对线性动态系统进行识别的方法已广泛应用, 如果输入反应性为白噪声时, 则实验相对地要简单一些。白噪声的谱密度为常数,  $F\{\phi_{p,p}(\tau)\} = \text{常数} = A$ , 则由 (12-113) 式得

$$F\{\phi_{p,p}(\tau)\} = AH(-j\omega) \quad .$$

由此可见, 只要测量出反应性和功率的互相关函数, 即可求得反应堆的传递函数。

## 8.2.2 自相关法

反应堆功率的自相关函数为

$$\phi_{P, P}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta P(t) \delta P(t+\tau) dt \quad (12-116)$$

利用 (12-110) 式将上式化为

$$\begin{aligned} \phi_{P, P}(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_0^{\infty} h(u) \delta \rho_{r, r}(t-u) du \int_0^{\infty} h(v) \delta \rho_{r, r}(t+\tau-v) dv \\ &= \int_0^{\infty} h(u) du \int_0^{\infty} h(v) dv [\phi_{\rho, \rho}(\tau+u-v)]. \end{aligned} \quad (12-117)$$

进行傅里叶变换后得

$$F\{\phi_{P, P}(\tau)\} = H(-j\omega)H(j\omega)F\{\phi_{\rho, \rho}(\tau)\}, \quad (12-118)$$

或

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{F\{\phi_{P, P}(\tau)\}}{F\{\phi_{\rho, \rho}(\tau)\}} \quad (12-119)$$

于是，传递函数振幅的平方等于功率谱密度和反应性谱密度之比。

虽然功率谱密度原则上可以容易求得，但由于反应堆内部原因而产生的反应性起伏却不便于测量。如果有理由确信这种起伏在性质上是随机的，而当  $F\{\phi_{\rho, \rho}(\tau)\}$  等于常数时，则测量功率的自相关函数就可以求得传递函数的振幅。

用噪声法测定反应堆的传递函数，相对来说还是比较方便的，它的重要优点是可以不干扰反应堆的正常运行。实际上有可能对反应堆的传递函数进行瞬时测定。这种方法的缺点是精确度不高。

## \* 9. 反应堆稳定性问题

一个动态系统受到扰动作用以后，其平衡状态被破坏，系统对其平衡状态具有一定的偏差。如果除去扰动以后，系统能自行恢复其原来状态，或以一定的精度恢复其原来状态，则称该系统是稳定的，否则就是不稳定的。一个不稳定的系统受到扰动以后，会产生自持振荡，甚至振幅会越来越大，一经激发，即使把扰动再除去，也不会衰减。

一般线性系统（或线性化系统）的动态微分方程如 (12-82) 式所示，而系统的传递函数为 (12-82a) 式。为了研究系统受到瞬时扰动后的稳定性问题，我们假定输入（即扰动）为单位脉冲函数，即  $x(t) = \delta(t)$ ，其象函数为

$$X(s) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1,$$

则由式 (12-82a) 得

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{P(s)}{D(s)} \quad (12-120)$$

将 (12-120) 式的分母进行因式分解, 得

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}, \quad (12-121a)$$

其中  $p_1, p_2 \dots p_n$  为 (12-120) 式分母  $D(s) = 0$  的  $n$  个根。应用部分分式法, 当无重根时有

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n} \\ &= \sum_{i=1}^n K_i \frac{1}{s-p_i} \end{aligned} \quad (12-121b)$$

其中

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i)Y(s) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

由 (12-121b) 式, 求拉氏逆变换得

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12-122)$$

若  $p_i$  为一实根, 当  $p_i > 0$  时, 则  $K_i e^{p_i t}$  将随时间不断增加而趋于无穷大, 也就是  $y(t)$  将趋于无穷大, 因而系统是不稳定的。若  $p_i < 0$ , 则  $K_i e^{p_i t}$  将随着时间增大而趋近于零, 从而系统是稳定的。若  $p_i$  为复根 (复根是成对出现的), 当其实部大于零时, 系统将是不稳定的; 当其实部小于零时, 系统是稳定的; 当实部等于零时, 系统产生持续振荡, 对于设计一个实际系统, 这种情况也要避免。总之, 保证一个线性系统稳定的条件是: 系统特征方程  $D(s) = 0$  的各个根必须具有负的实部, 也就是说, 系统特征方程的根要分布在复平面上虚轴的左边。如果特征方程有一个根分布在虚轴右边, 系统就变成为不稳的。

必须着重指出, 系统的稳定性完全决定于特征方程  $D(s) = 0$  的根在复平面上的分布。也就是决定于 (12-120) 式中传递函数的分母  $D(s) = 0$  的各个根也称为传递函数的极点。显而易见, 传递函数极点的位置, 完全决定于系统本身, 而与外界扰动形式等条件无关。上述结论对于特征方程具有重根的情况也是适用的。

目前有许多方法可以判断动态系统特征方程根在复平面上的分布情况, 其中最直观的是所谓“根轨迹法”。根轨迹法是研究系统放大系数 (对反应堆来说, 可以是稳态功率  $P_0$ ) 改变时, 特征方程的根的位置在复平面上如何变化。当放大系数变化时, 每一个根都在复平面上画出自己的轨迹 (根轨迹)。当在某个放大系数时, 只要有一个根的轨迹曲线进入到右半复平面, 系统就成为不稳定的。常用的判断系统稳定性的准则有劳斯-胡维茨准则和乃魁斯特准则等。下面我们只对乃魁斯特准则作一简单介绍。

## 9.1 乃魁斯特稳定性准则

乃魁斯特稳定性准则是 1932 年 H. 乃魁斯特提出的。它可以由开环系统的频率特性, 判断闭环系统的稳定性。这个准则的内容如下:

(1) 如果开环系统是稳定的, 当  $\omega$  从  $-\infty$  变到  $+\infty$  时, 如开环频率特性曲线  $W(j\omega)$  不包围点  $(-1, j0)$ , 则闭环系统是稳定的;

(2) 如果开环系统不稳定, 而有  $m$  个根在右半复平面内, 当  $\omega$  从  $-\infty$  变到  $+\infty$  时, 如开环频率特性  $W(j\omega)$  包围点  $(-1, j0)$  正  $m$  次, 则闭环系统是稳定的。

下面我们对乃魁斯特准则予以说明。

假定开环系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{K(s)}{D(s)},$$

其中  $K(s)$  和  $D(s)$  均为  $s$  的多项式。  $D(s) = 0$  称为开环系统的特征方程, 如其所有根都在虚轴左边, 则称开环系统是稳定的。由 (12-95) 式可知, 闭环系统的特征方程为

$$1 + W(s) = 0.$$

要求闭环系统稳定, 则闭环特征方程的根必须分布在虚轴左边。现在我们研究下式

$$1 + W(s) = \frac{K(s) + D(s)}{D(s)}.$$

实际物理系统  $K(s)$  的方次不高于  $D(s)$ , 故多项式  $K(s) + D(s)$  与  $D(s)$  具有同样数目的根。

由图 12-9 可见, 如  $\lambda_1$  为特征方程的根,  $\lambda$  为虚轴上任意一点, 则矢量  $\overrightarrow{AB}$  为复数  $\lambda - \lambda_1$ 。当  $\omega$  自  $-\infty$  变到  $+\infty$ , 这时矢量  $\overrightarrow{AB}$  的终点将沿虚轴自下向上滑动。如根  $\lambda_1$  在虚轴左侧, 则矢量向反时针方向转过  $\pi$  角 (180 度), 如根  $\lambda_1$  在虚轴右侧, 则矢量按顺时针方向转过  $\pi$  角。

将  $1 + W(s)$  展开成为分数形式

$$1 + W(s) = A \frac{(s - s_{1,1})(s - s_{1,2}) \cdots (s - s_{1,n})}{(s - s_{2,1})(s - s_{2,2}) \cdots (s - s_{2,n})},$$

其中  $A$  为常数;  $s_{1,i}$  为多项式  $K(s) + D(s)$  的根;  $s_{2,i}$  为多项式  $D(s)$  的根。

当  $\omega$  自  $-\infty$  变到  $+\infty$  时, 矢量  $1 + W(j\omega)$  所转的角度等于矢量  $(j\omega - s_{1,1})$ ,  $(j\omega - s_{1,2})$ ,  $\cdots$   $(j\omega - s_{1,n})$  等转过的角度之和减去矢量  $(j\omega - s_{2,1})$ ,  $(j\omega - s_{2,2})$ ,  $\cdots$   $(j\omega - s_{2,n})$  转过的角度之和。

为了保证闭环系统稳定, 要求  $1 + W(s)$  的分子的根都必须分布在虚轴左边, 也就是  $K(j\omega) + D(j\omega)$  所转过的角度为  $n\pi$ 。在这种情况下,

(i) 如开环系统是稳定的, 即其特征方程的所有根都在虚轴的左侧, 则矢量  $D(j\omega)$  所转过的角度也等于  $n\pi$ , 于是矢量  $1 + W(j\omega)$  转过的总角度为  $n\pi - n\pi = 0$ 。

(ii) 如开环系统不稳定,  $D(s)$  有  $m$  个根在虚轴的右侧和  $(n-m)$  个根在虚轴的左侧, 则矢量  $1 + W(j\omega)$  所转过的角度为  $n\pi - (n-m)\pi + m\pi = 2m\pi$ 。

考察矢量  $1 + W(j\omega)$  与  $W(j\omega)$  之间的关系。这也是两个复数, 在复平面上表示时, 前者

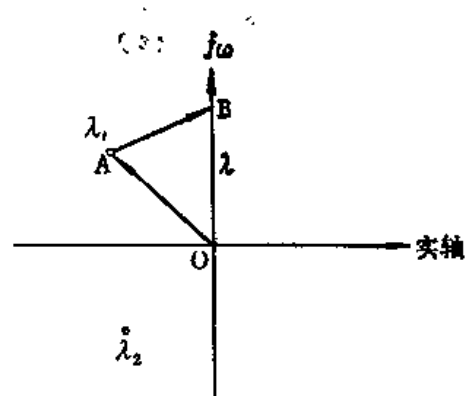


图12-9 根在复平面中的表示

的起点在  $(-1, j0)$  点, 后者的起点在零点。它们的终点是共同的, 都在  $W(j\omega)$  特性曲线上。矢量  $1+W(j\omega)$  转过正  $2\pi$  的角度, 就是指它围绕其起点  $(-1, j0)$  点逆时针方向转一圈, 而对于  $W(j\omega)$  来说, 就相当于特性曲线  $W(j\omega)$  包围  $(-1, j0)$  点正转一次。显而易见, 如果  $1+W(j\omega)$  围绕  $(-1, j0)$  点转过的角度为零, 则特性曲线  $W(j\omega)$  也就不包围  $(-1, j0)$  点。

综上所述, 改写上述 (i), (ii) 两点的内容, 即得乃魁斯特准则。

当开环系统的特征方程具有零根时,  $\omega \rightarrow 0$  时, 则  $W(j\omega)$  将趋近于  $\infty$ , 这样开环频率特性曲线变得不连续, 于是难于判断它是否包围  $(-1, j0)$  点。为了克服这个困难, 在图 12-10(a) 原点附近作半径  $r$  为无限小的半圆。  $\omega$  由  $-\infty$  沿虚轴增至  $+\infty$  时, 在原点附近  $\theta$  由  $-\frac{\pi}{2}$  变为  $+\frac{\pi}{2}$ , 总角度变化为正  $\pi$ 。这样, 特征方程的一个零根, 与分布在虚轴左边的一个负根对  $1+W(j\omega)$  产生相等的角度贡献。  $\theta$  由  $-\frac{\pi}{2}$  变到  $+\frac{\pi}{2}$  时,  $W(j\omega)$  则沿无穷大半径顺时针方向转  $180^\circ$ , 如图 12-10(b) 所示。开环频率特性曲线  $W(j\omega)$  也就闭合起来, 闭环系统的稳定性仍然可用乃魁斯特准则予以判别。

当开环系统特征方程出现成对虚根时, 可以按对待零根的方法处理。

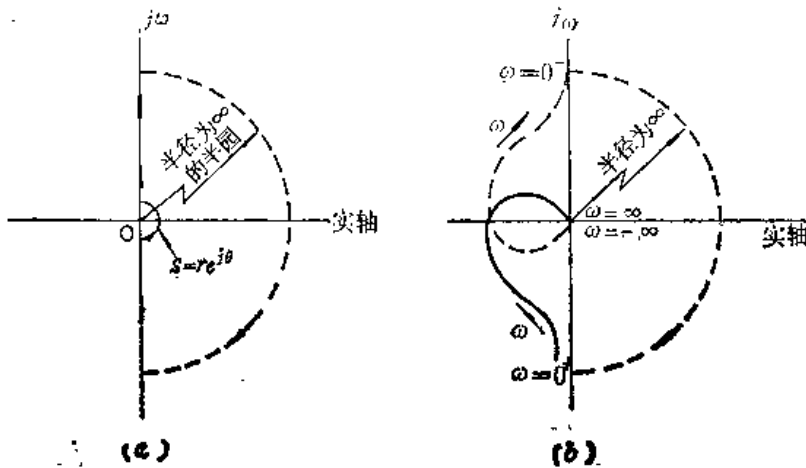


图12-10 开环系统特征方程具有零根时的频率特性曲线

### 9.2 具有两个温度系数反馈回路反应堆的稳定性

当反应堆存在温度、压力、中毒等反馈效应时, 其稳定性的研究方法, 原则上都是相同的。下面我们重点地介绍具有温度反馈的压水堆稳定性问题的研究方法。沸水堆由于汽泡效应、水力不稳定性等因素的影响, 反馈机理比较复杂一些, 但研究方法原则上还是相同的。

在压水堆中, 功率变化后, 首先是燃料棒的温度发生变化, 然后慢化剂(水)的温度相应地发生变化。系统方块图如图 12-11 所示。

假定传热方程为

$$P = \mu_F \frac{dT_F}{dt} + P_M \quad (12-123)$$

$$P_U = \mu_M \frac{dT_M}{dt} + P_c, \quad (12-124)$$

$$P_M = \xi (T_F - T_M), \quad (12-125)$$

- 其中：  
 $T_F$ ——燃料温度；  
 $T_M$ ——慢化剂温度；  
 $\mu_F = W_F c_F$ ——燃料重量 × 燃料比热；  
 $\mu_M = W_M c_M$ ——慢化剂重量 × 慢化剂比热；  
 $\xi$ ——燃料与慢化剂之间的传热系数和传热面积的乘积，通常为功率水平的函数，目前小扰动下假定为常数；  
 $P_c$ ——冷却剂带走的功率（为简化分析，也假定为常数）；  
 $P_M$ ——单位时间内，从燃料传到慢化剂中的热量；  
 $P$ ——反应堆功率。

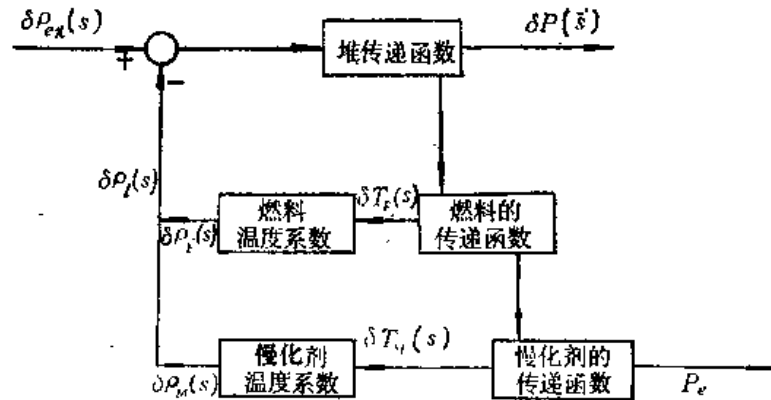


图12-11 具有温度反馈的反应堆方块图

采用单组缓发中子模型，由 (12-72) 式可得反应堆传递函数为

$$\begin{aligned} K_R G_R(s) &= \frac{P_0(s + \lambda)}{\Lambda s(s + \gamma)} \\ &= \frac{P_0 \lambda \left( \frac{s}{\lambda} + 1 \right)}{\Lambda \gamma s \left( \frac{s}{\gamma} + 1 \right)} \end{aligned} \quad (12-126)$$

其中  $P_0$  为反应堆稳态功率， $\gamma = \lambda + \beta/\Lambda$ ；其余符号同前。将 (12-123) — (12-125) 式进行线性化和拉氏变换得

$$\delta T_M(s) = \frac{\delta P(s) \xi}{s[\xi(\mu_F + \mu_M) + \mu_F \mu_M s]}, \quad (12-127)$$

$$\delta T_F(s) = \frac{\delta P(s) (\xi + \mu_M s)}{s[\xi(\mu_F + \mu_M) + \mu_F \mu_M s]} \quad (12-128)$$

反馈部分总的反应性变化为

$$\begin{aligned} \delta p_i(s) &= \delta p_F(s) + \delta p_M(s) = \alpha_f \delta T_F(s) + \alpha_M \delta T_M(s) \\ &= \frac{\delta p(s) [\xi(\alpha_M + \alpha_F) + \alpha_f \mu_M s]}{s [\xi(\mu_M + \mu_F) + \mu_F \mu_M s]} \end{aligned} \quad (12-129)$$

由 (12-129) 式求得反馈部分的总的传递函数为

$$K_F G_F(s) = \frac{\delta p_i(s)}{\delta P(s)} = \frac{\xi(\alpha_M + \alpha_F) + \alpha_f \mu_M s}{s [\xi(\mu_M + \mu_F) + \mu_F \mu_M s]} \quad (12-130)$$

将 (12-130) 式简化为

$$K_F G_F(s) = B \frac{(1 + \tau_1 s)}{s(1 + \tau_2 s)} \quad (12-131)$$

其中

$$\begin{aligned} B &= \frac{\alpha_M + \alpha_F}{\mu_M + \mu_F}, \quad \tau_1 = \frac{\alpha_f \mu_M}{\xi(\alpha_F + \alpha_M)}, \\ \tau_2 &= \frac{\mu_F \mu_M}{\xi(\mu_F + \mu_M)}. \end{aligned}$$

这里  $\tau_2$  总是正值， $B$  与  $\tau_1$  可以为正，也可以为负。图 12-11 可以简化为图 12-12。

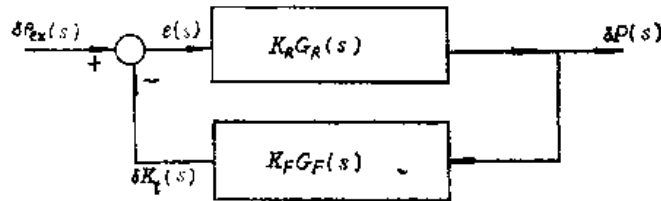


图12-12 具有温度反馈的反应堆传递函数方块图

开环系统的传递函数为

$$K_R G_R(s) K_F G_F(s) = C \frac{\left(1 + \frac{s}{\lambda}\right) (1 + \tau_1 s)}{s^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} s\right) (1 + \tau_2 s)} \quad (12-132)$$

其中  $C = B \lambda P_0 / \gamma \Lambda$ 。

下面我们将画出各种反应性温度系数的情况下，开环系统的频率特性曲线，然后应用乃魁斯特稳定性准则来判别闭环系统的稳定性。

采用图 12-12 中的符号，立即可以写出闭环系统的传递函数为

$$\frac{\delta P(s)}{\delta p(s)} = \frac{K_R G_R(s)}{1 + K_R G_R(s) K_F G_F(s)} \quad (12-133)$$

图 12-12 中，在相加点处我们采用负反馈符号，这样，在 (12-132) 式中应用的温度系

数的符号，与实际值则刚好相反。即实际温度系数为负时，以一个正值代入 (12-132) 式中，反之亦然。

当  $s = j\omega$  时，在不同的燃料和慢化剂温度系数的情况下，作出 (12-132) 式的开环频率特性曲线 (见表 12-1)。

总起来说，有以下几种情况 (图 12-13)：

- (1) 当  $\alpha_M$  为正， $\alpha_F$  为正时，系统不稳定；
- (2) 当  $\alpha_M$  为正， $\alpha_F$  为负， $|\alpha_M| > |\alpha_F|$  时，系统不稳定。

表 12-1 各种不同温度系数范围内的反应堆的稳定性

反应性温度系数范围	稳定性	开环频率特性曲线
$\alpha_M$ 为正 $\alpha_F$ 为负 $ \alpha_F  >  \alpha_M $	完全稳定 (过渡过程特性可能不佳)	
$\alpha_M$ 为负 $\alpha_F$ 为负 $\frac{\alpha_M}{\alpha_F} < \left  \frac{\mu_M}{\xi} (\gamma - \lambda) + \frac{\mu_M}{\mu_F} \right $	完全稳定	
$\alpha_M$ 为负 $\alpha_F$ 为负 $\left  \frac{\alpha_M}{\alpha_F} \right  > \left  \frac{\mu_M}{\xi} (\gamma - \lambda) + \frac{\mu_M}{\mu_F} \right $	稳定性与放大系数有关	
$\alpha_M$ 为负 $\alpha_F$ 为正 $ \alpha_F  <  \alpha_M $	稳定性与放大系数有关	
$\alpha_M$ 为正， $\alpha_F$ 为正 或 $\alpha_M$ 为正， $\alpha_F$ 为负， $ \alpha_M  >  \alpha_F $ 或 $\alpha_M$ 为负， $\alpha_F$ 为正， $ \alpha_F  >  \alpha_M $	不稳定	



(3) 当  $\alpha_M$  为负,  $\alpha_F$  为正,  $|\alpha_F| > |\alpha_M|$  时, 系统不稳定。

(以上三种情况构成 A—B 直线右边部分的不稳定区。)

(4) 当  $\alpha_M$  为正,  $\alpha_F$  为负,  $|\alpha_F| > |\alpha_M|$  时, 系统完全稳定。

(5) 当  $\alpha_M$  为负,  $\alpha_F$  为正,  $|\alpha_F| < |\alpha_M|$  时, 系统稳定性决定于放大系数的大小 (与  $P_0$  有关)。

(6)  $\alpha_M$  为负,  $\alpha_F$  为负,

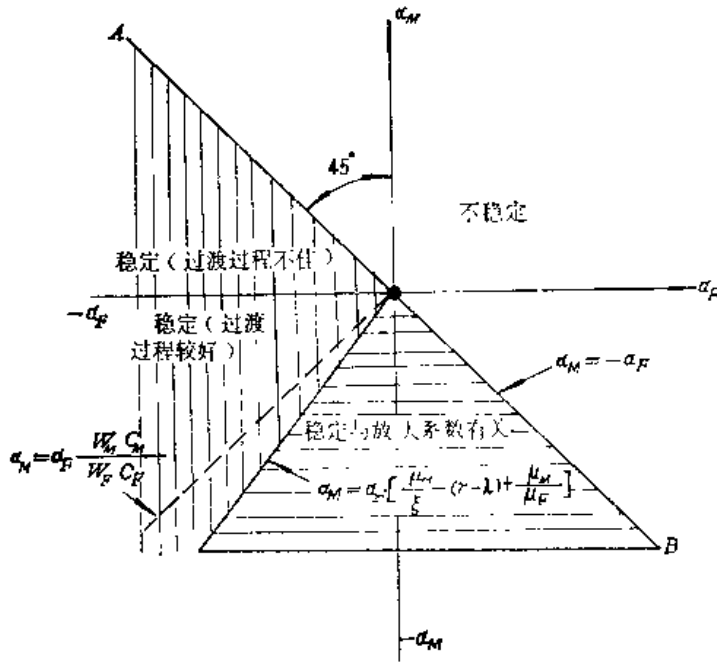


图12-13 反应性温度系数稳定区域划分图

$$\text{当 } \left| \frac{\alpha_M}{\alpha_F} \right| < \left| \frac{\mu_M}{\epsilon} (\gamma - \lambda) + \frac{\mu_M}{\mu_F} \right| \text{ 时, 则系统完全稳定;}$$

$$\text{当 } \left| \frac{\alpha_M}{\alpha_F} \right| > \left| \frac{\mu_M}{\epsilon} (\gamma - \lambda) + \frac{\mu_M}{\mu_F} \right| \text{ 时, 则系统稳定性与放大系数有关。}$$

这个条件的证明, 可参考文献[11]。对于某些反应堆的设计,  $(\mu_M/\epsilon)(\gamma - \lambda)$  比  $\mu_M/\mu_F$  要小得多, 更为安全的稳定条件是:

$$\frac{\alpha_M}{\alpha_F} < \frac{\mu_M}{\mu_F}, \tag{12-134}$$

或

$$\frac{\alpha_M}{\alpha_F} < \frac{W_{MC M}}{W_{FC F}}. \tag{12-135}$$

这就是说, 水铀重量比对堆的稳定性有显著影响。

动态特性的好坏, 不能只从稳定性的角度来看问题, 从得到好的过渡过程特性 (例如超调值小、调节时间短、振荡次数少等等) 来看, 可能宁愿使反应堆运行在条件稳定区内。

由以上分析可以看出,

- (1) 当  $\alpha_M, \alpha_F$  两者之代数和为正时, 系统不稳定。
- (2) 若  $\alpha_F$  的反馈效应比  $\alpha_M$  作用迅速, 则其影响较强。
- (3) 当  $\alpha_F$  与  $\alpha_M$  同时为负值时, 并不能保证系统在任何情况下都能稳定。

### 9.3 缓发中子对反应堆稳定性的影响

现在我们从另一个不同角度来研究反应堆的稳定性问题, 并探讨缓发中子对稳定性的影响。因为系统的特征方程在复平面上虚轴右边出现正根时, 系统是不稳定的, 当特征方程具有纯虚根时, 即  $s = j\omega$ , 系统处于稳定边缘, 对于一个实际系统来说, 此时开始变为不稳定。

由 (12-94) 式得闭环系统的特征方程为

$$1 - P_0 G_R(s) F(s) = 0 \quad (12-136)$$

令  $s = j\omega$ , 由上式可得

$$\phi(j\omega) = \frac{1}{G_R(j\omega)} - P_0 F(j\omega) = 0 \quad (12-137)$$

将 (12-74) 式代入上式得

$$\phi(j\omega) = j\omega\Lambda + \sum_i \frac{\beta_i j\omega}{j\omega + \lambda_i} - P_0 F(j\omega) = 0 \quad (12-138)$$

其中  $1/G_R(j\omega)$  和  $F(j\omega)$  均为反应性扰动频率的复变函数。

如果在某个频率  $\omega = \omega_0$ ,  $1/G_R(j\omega)$  和  $F(j\omega)$  具有相同的相位, 也就是实部和虚部具有同样的比值, 则在某一  $P_0$  值下,  $\phi(j\omega) = 0$ , 这就是实际系统开始成为不稳定的条件。

图 12-14 表示  $1/G_R(j\omega)$  和假想的反馈函数  $F(j\omega)$  两者的相角  $\theta$  随频率而变化的曲线。当功率相当大时, 两条曲线相交于  $\omega = \omega_0$  处, 系统开始变为不稳定。因为此时  $\phi(j\omega)$  为零, 从 (12-94) 式可见, 闭环系统传递函数  $H(j\omega)$  变得很大, 也就是说, 频率为  $\omega_0$  的反应性扰动, 对于给定的功率将产生一个很大的响应。 $\omega_0$  称为系统的共振频率。如功率更高一些, 振荡将会是发散的。

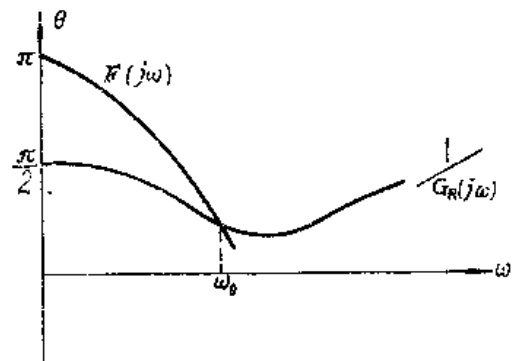


图 12-14 不稳定性发生时的频率的确定

因为  $1/G_R(j\omega)$  不论对何种类型的固定燃料反应堆, 都可以由 (12-74) 式求出。它仅与中子每代时间  $\Lambda$  和缓发中子常数  $\beta_i, \lambda_i$  有关, 它的频率特性可以直接求出。由 (12-74) 式可以看出

$$Re \left[ \frac{1}{G_R(j\omega)} \right] = \sum_i \frac{\omega^2 \beta_i}{\omega^2 + \lambda_i^2} \quad (12-139)$$

$$Im \left[ \frac{1}{G_R(j\omega)} \right] = \omega\Lambda + \sum_i \frac{\omega \beta_i \lambda_i}{\omega^2 + \lambda_i^2} \quad (12-140)$$

图 12-15 画出了  $\Lambda = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  秒时, 以  $\omega$  作可变参数的上述函数的曲线。其中  $\beta_1, \lambda_1$  是采用铀-235 作燃料时的数据, 采用其他可裂变燃料的定性结果也基本上与之相同。可以看出, 这些曲线分为两部分:  $\omega$  比较小的左边部分由缓发中子的特性所决定而与瞬发中子无关;  $\omega$  值较大的右边部分主要与  $\Lambda$  有关, 也就是决定于瞬发中子。

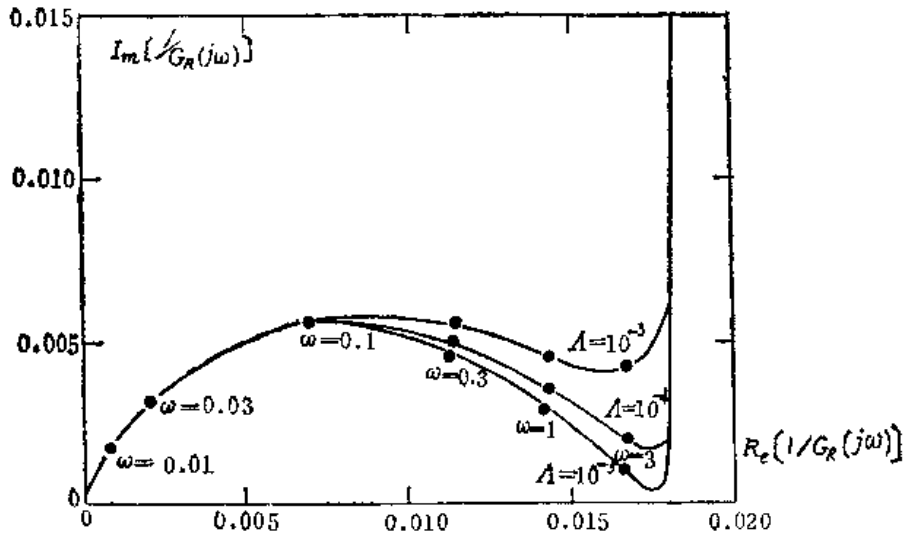


图12-15  $^{235}\text{U}$ 反应堆  $1/G_R(j\omega)$ 的实部和虚部

从图 12-15 可以看出,  $1/G_R(j\omega)$  位于复平面的右上象限, 即当  $\omega > 0$  时, 其实部和虚部都为正。从 (12-137) 式可知: 如果系统要变得不稳定, 则反馈函数  $F(j\omega)$  也必须位于同一象限。因此系统成为不稳定的必要条件是

$$\text{Re}[F(j\omega)] > 0 \text{ 和 } \text{Im}[F(j\omega)] > 0$$

应该指出, 这个结论是从线性化理论导出的, 而且假定闭环系统特征方程的根开始在左半复平面, 当  $P_0$  足够大时, 根移向右半复平面。对于许多简单反馈模型这种假定是成立的, 但不能要求对所有的反馈模型都是如此。由此可见, 按照线性化理论, 系统稳定的充分条件是: 没有一个  $\omega$  值同时使  $\text{Re}[F(j\omega)] > 0$  和  $\text{Im}[F(j\omega)] > 0$ 。

根据上述条件, 我们讨论缓发中子对反应堆稳定性的影响。从五十年代到六十年代初期, 有种看法笼统地认为: 如果不考虑缓发中子, 系统是稳定的, 若考虑缓发中子, 系统的稳定性会进一步改善。这种看法后来被否定了, 因为缓发中子有些情况下使稳定性增加, 而有些情况下反而使稳定性变坏。

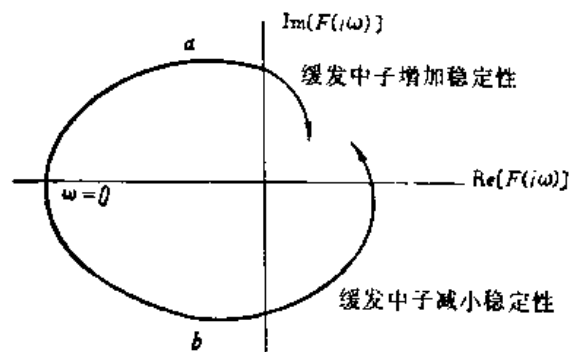


图12-16 缓发中子对稳定性的影响

当忽略缓发中子时, 则  $1/G_R(j\omega) = j\omega\Lambda$ , 也就是说, 对于所有的  $\omega$  值, 变为纯虚数。

下面研究  $F(j\omega)$  的特性曲线随  $\omega$  增加而变化的情况。假定反应堆在定态下是稳定的, 则  $F(0) < 0$ , 这个稳定的必要条件可以从下面导出。

如果反应堆受到一个小的反应性  $\delta\rho_{ex}$  扰动以后是稳定的, 则可以期望, 反应性增加以

后一些时间，功率响应  $\delta P(t)$  将趋近于某一个固定的正值，而此时总反应性  $\delta\rho = 0$ 。也就是说在一些时间后，由 (12-104) 式可得

$$\delta\rho_{ex} + \delta P \int_0^{\infty} f(t) dt = \delta\rho_{ex} + F(0)\delta P = 0 \quad (12-141)$$

其中  $f(x)$  为反馈函数。 $F(0)$  为  $s=0$  时拉氏变换  $F(s)$  的值，称为定态功率系数。稳定性的必要条件是

$$F(0) = \int_0^{\infty} f(t) dt < 0 \quad (12-142)$$

图 12-16 表示缓发中子对稳定性影响的两种情况。当  $\omega = 0$  时， $F(0)$  等于一负实数， $\omega$  由零不断增大时， $F(j\omega)$  必须进入右上象限，系统才会发生不稳定。前面已经说过， $F(j\omega)$  的实部和虚部必须同时为正，系统才可能不稳定。具体地说， $\omega$  增大时，函数  $F(j\omega)$  的曲线必须通过虚轴进入右上象限，系统才有发生不稳定的可能。

图 12-16 表明当  $\omega$  增大时， $F(j\omega)$  有两种途径通过虚轴进入第一象限。其中曲线 a 表示的情况为  $F(j\omega)$  通过正半虚轴进入第一象限。因为忽略缓发中子后， $1/G_K(j\omega)$  就等于  $j\omega\Lambda$ ，所以在某个较低的功率的情况下会立即发生不稳定。这就可以合理地认为，不考虑缓发中子时产生不稳定的功率，会比考虑缓发中子时产生的不稳定的功率来得低一些。因此，在这种情况下，考虑缓发中子以后，将会改善稳定性。

当  $\omega$  增大时，曲线 b 表示的情况为  $F(j\omega)$  通过负半虚轴进入第一象限。情况与上面刚好相反，当不考虑缓发中子时，系统如果稳定，而考虑缓发中子以后反而会不稳定。

### 参 考 文 献

- [1] D.L.Hetrick, Dynamics of Nuclear Reactors, University of Chicago Press, 1971.
- [2] G.I. 贝尔, S. 格拉斯登著, 千里译, 核反应堆理论, 第九章, 原子能出版社, 1979.
- [3] J.J.Duderstadt, & L.J.Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [4] J.Lewins, Nuclear Reactor Kinetics and Control, Pergamon Press, 1978.
- [5] Z. Akcasu, G.S.Lellouche, L.M.Shotkin, Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics, Academic Press, New York, 1971.
- [6] 须田信英, 原子炉の動特性と制御, 同文書院, 1969.
- [7] G.R.Keepin, Physics of Nuclear Kinetics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
- [8] M.A.Schultz, Control of Nuclear Reactor and Power Plants, McGraw-Hill Book Comp., Inc, 1961.
- [9] J.P.Franz, АЕСД-3260 (1949).
- [10] В.Д.Горяченко, Методы Исследования Устойчивости Ядерных Реакторов, Атомиздат, 1977.
- [11] D.Little, M.A.Schultz, IRE Trans. on Nucl. Sci., Vol.NS-4, No.1. (1957).
- [12] H.B.Smets, Nucl. Sci. Eng., 25, p.236 (1966).
- [13] W.Baran, K.Meyer, Nucl. Sci. Eng., 24, p.356 (1966).
- [14] T.W.Kerlin, Frequency Response Testing in Nuclear Reactors, Academic Press, New York, 1974.
- [15] W.M.Stacey, Jr., Space-Time Nuclear Reactor Kinetics, Academic Press, New York, 1969.

## 第十三章 微 扰 理 论

反应堆性质或参数的微小变化称之为微扰。微扰可以是反应堆性质或参数发生微小的变化，例如毒物（如水慢化剂中的硼浓度）的微量变化或温度变化等等，也可能是这些变化仅仅发生在反应堆内很小的局部体积内，例如在局部地方放入吸收体或芯部冷却剂的局部沸腾等等。在反应堆运行的实际问题中，往往需要确定由于这些微小的扰动所引起的反应性效应。例如第十一章中所提到的反应性温度系数的计算等等。

为了确定扰动前后有效增殖因数或反应性的变化，最直接的办法是对“扰动前”及“扰动后”的两个系统进行临界计算以求出  $\delta k$  来。这样计算的工作量自然是很大的。另一方面，当扰动很小时，则  $\delta k$  的实际变化量有可能很小并和计算本身所具有的误差属于同一数量级。这样，对扰动前后系统直接计算出  $\delta k$  的办法可能得不到精确的结果。然而，对于这类问题，利用微扰理论则可以比较方便地予以解决。下面即将看到，在扰动比较小，没有使通量发生显著畸变的情况下，利用微扰理论只需根据扰动前系统的通量分布和参数的扰动数值便可求出  $\delta k$  来，而无需对扰动后的系统重新进行临界计算。这对于非均匀的局部扰动问题尤其方便，因为这时扰动后系统的计算往往是一个多维（二维乃至三维）问题的计算，而这种计算是很费时的。

在反应堆物理分析中，微扰理论还常常用于研究某些参数（如截面数据）对临界或反应性的影响。这时我们可以把这些参数的波动，例如截面输入数据的误差、多普勒效应等等，看作为微扰来处理。再如，在设计计算中，有时为了简便，常常把几何形状予以简化，为了确定这些简化或堆芯几何形状微小变化所引起的效应，通常也可应用微扰方法来估计。

### 1. 共轭算子和反应堆共轭方程

#### 1.1 共轭算子

在讨论微扰理论之前，我们先简要地介绍一下共轭算子的定义和一些有关的数学知识。设函数  $\varphi(\mathbf{r})$  及  $\varphi^*(\mathbf{r})$  定义于域  $G(\mathbf{r})$  内，定义函数  $\varphi(\mathbf{r})$  和  $\varphi^*(\mathbf{r})$  的内积为

$$(\varphi, \varphi^*) = \int_G \varphi \varphi^* d\mathbf{r} \quad (13-1)$$

(13-1) 式的定义同样可以推广适用于矢量函数。设有矢量函数  $\phi = (\phi_1(\mathbf{r}), \phi_2(\mathbf{r}), \dots, \phi_n(\mathbf{r}))$  及  $\phi^* = [\phi_1^*(\mathbf{r}), \phi_2^*(\mathbf{r}), \dots, \phi_n^*(\mathbf{r})]$  定义于域  $G(\mathbf{r})$  上，其中  $\phi_1, \dots, \phi_n$  称为  $\phi$  的分量， $\phi_1^*, \dots, \phi_n^*$  则为  $\phi^*$  的分量。矢量函数  $\phi$  和  $\phi^*$  的内积的定义为

$$(\phi, \phi^*) = \int_G (\phi_1 \phi_1^* + \phi_2 \phi_2^* + \dots + \phi_n \phi_n^*) d\mathbf{r} \quad (13-2)$$

这实际上相当于通常三维空间中两个矢量点积定义的推广。

设有算子  $M$  作用于函数  $\phi$  上,  $\phi$  为矢量函数集合  $\{\phi\}$  上的任一矢量函数, 同时设另一算子  $M^*$  作用于矢量函数  $\phi^*$  上,  $\phi^*$  则系属于集合  $\{\phi^*\}$  中的任一矢量函数, 若  $M\phi$  及  $M^*\phi^*$  满足下列条件:

$$(\phi^*, M\phi) = (\phi, M^*\phi^*) \quad , \quad (13-3)$$

则我们称  $M^*$  为  $M$  的共轭算子。若有  $M = M^*$ , 则称  $M$  为‘自轭’算子。

设有方程

$$M\phi = 0 \quad , \quad (13-4)$$

若  $M$  的共轭算子为  $M^*$ , 则方程

$$M^*\phi^* = 0 \quad (13-5)$$

的解  $\phi^*$  和方程 (13-4) 的解  $\phi$  显然满足关系式 (13-3)。我们称方程 (13-5) 为方程 (13-4) 的共轭方程, 而它的解  $\phi^*$  则称为  $\phi$  的共轭函数。

下面我们具体地对反应堆方程进行讨论并导出单群, 双群和多群的反应堆共轭方程。

## 1.2 反应堆共轭方程

### 1.2.1 单群共轭方程

单群特征值问题的扩散方程可以写成

$$\nabla \cdot D(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{k}\nu\Sigma_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad (13-6)$$

式中  $k$  为有效增殖因数。(13-6) 式也可以写成  $M\phi = 0$  的算子方程形式, 这时单群算子  $M$  为

$$M = \nabla \cdot D\nabla - \Sigma_a + \frac{1}{k}\nu\Sigma_f \quad (13-7)$$

根据 (13-3) 式定义我们可以证明 (13-7) 式的算子  $M$  是自轭的, 即它的共轭算子即系  $M$  本身, 有

$$M^* = M = \nabla \cdot D\nabla - \Sigma_a + \frac{1}{k}\nu\Sigma_f \quad . \quad (13-8)$$

这可以证明如下。根据内积定义由 (13-7) 和 (13-8) 式有

$$\begin{aligned} (\phi^*, M\phi) &= \int_V \phi^* \nabla \cdot D\nabla\phi dV - \int_V \phi^* \left( \Sigma_a - \frac{1}{k}\nu\Sigma_f \right) \phi dV \quad , \\ (\phi, M^*\phi^*) &= \int_V \phi \nabla \cdot D\nabla\phi^* dV - \int_V \phi \left( \Sigma_a - \frac{1}{k}\nu\Sigma_f \right) \phi^* dV \quad , \end{aligned}$$

因而它们的差为

$$\Delta = (\phi^*, M\phi) - (\phi, M^*\phi^*) = \int_V \phi^* \nabla \cdot D\nabla\phi dV - \int_V \phi \nabla \cdot D\nabla\phi^* dV \quad (13-9)$$

根据矢量恒等式

$$\nabla \cdot \mathbf{ab} = \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \nabla \mathbf{a} \quad , \quad (13-10)$$

则 (13-9) 式便等于

$$\Delta = \int_V \nabla \cdot \phi^* D\nabla\phi dV - \int_V \nabla \cdot \phi D\nabla\phi^* dV \quad (13-11)$$

利用高斯公式

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{b} dV = \int_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dS \quad ,$$

其中  $\mathbf{n}$  是单位外法线矢量, 这样 (13-11) 式便等于

$$\Delta = \int_S (\phi^* D\nabla\phi - \phi \cdot D\nabla\phi^*) \cdot \mathbf{n} dS \quad .$$

若在反应堆外表面上满足

$$\phi_S = 0; \quad \phi_S^* = 0, \quad (13-12)$$

或

$$\nabla_n \phi / \phi = \nabla_n \phi^* / \phi^*, \quad (13-13)$$

其中角标  $S$  表示取外表面上数值,  $\nabla_n$  表示沿表面外法线方向求导, 那末便得到

$$\Delta = (\phi^*, M\phi) - (\phi, M^*\phi^*) = 0 \quad .$$

这就证明了单群算子的自轭性:  $M = M^*$ 。因而 (13-6) 式本身也就是单群共轭方程, 中子通量  $\phi(\mathbf{r})$  也就等于  $\phi^*(\mathbf{r})$ 。同时也就证明了扩散算子  $\nabla \cdot D\nabla$  在满足边界条件 (13-12) 或 (13-13) 情况下是自轭的, 即

$$\int_V \phi^* \nabla \cdot D\nabla\phi dV = \int_V \phi \nabla \cdot D\nabla\phi^* dV \quad . \quad (13-14)$$

### 1.2.2 双群共轭方程

反应堆双群方程可以写成

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1 - \Sigma_1 \phi_1 + \frac{\nu}{k} \Sigma_f \phi_2 &= 0 \quad , \\ \nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2 - \Sigma_2 \phi_2 + \Sigma_1 \phi_1 &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (13-15)$$

式中角标 1, 2 分别表示快群和热群, 其它符号和第六章中所采用的一样。(13-15) 式也可写成算子方程形式

$$\mathbf{M}\phi = 0, \quad (13-16)$$

式中

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \cdot D_1 \nabla - \Sigma_1 & \frac{\nu \Sigma_{f1}}{k} \\ \Sigma_1 & \nabla \cdot D_2 \nabla - \Sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (13-17)$$

现在我们来求出双群算子  $\mathbf{M}$  的共轭算子  $\mathbf{M}^*$ 。假设它可以写为

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} M_{1,1}^* & M_{1,2}^* \\ M_{2,1}^* & M_{2,2}^* \end{pmatrix},$$

那么, 根据内积定义

$$\begin{aligned} (\phi^*, \mathbf{M}\phi) &= \int_V (\phi_1^* M_{1,1} \phi_1 + \phi_1^* M_{1,2} \phi_2 + \phi_2^* M_{2,1} \phi_1 + \phi_2^* M_{2,2} \phi_2) dV, \\ (\phi, \mathbf{M}^* \phi^*) &= \int_V (\phi_1 M_{1,1}^* \phi_1^* + \phi_1 M_{1,2}^* \phi_2^* + \phi_2 M_{2,1}^* \phi_1^* + \phi_2 M_{2,2}^* \phi_2^*) dV. \end{aligned} \quad (13-18)$$

显然, 若令

$$M_{1,1}^* = M_{1,1}; \quad M_{2,2}^* = M_{2,2}; \quad M_{1,2}^* = M_{2,1}; \quad M_{2,1}^* = M_{1,2}.$$

将这些符号的具体表示式 (13-17) 式代入 (13-18) 式, 同时注意到 (13-14) 式 则便有

$$(\phi^*, \mathbf{M}\phi) = (\phi, \mathbf{M}^* \phi^*).$$

因而双群共轭算子便等于

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} M_{1,1}^* & M_{1,2}^* \\ M_{2,1}^* & M_{2,2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \cdot D_1 \nabla - \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \frac{\nu \Sigma_{f1}}{k} & \nabla \cdot D_2 \nabla - \Sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (13-19)$$

即  $M_{i,j}^* = M_{j,i}$ 。这样双群共轭方程便可写成:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1^* - \Sigma_1 \phi_1^* + \Sigma_1 \phi_2^* &= 0, \\ \nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2^* - \Sigma_2 \phi_2^* + \frac{\nu \Sigma_{f1}}{k} \phi_1^* &= 0. \end{aligned} \quad (13-20)$$

同时共轭通量在外推边界上满足:  $\phi_{1,s}^*(\mathbf{r}) = \phi_{2,s}^*(\mathbf{r}) = 0$ 。

这里, 我们注意到, 对于双群方程,  $\mathbf{M} \neq \mathbf{M}^*$ ,  $\phi \neq \phi^*$ 。在图 13-1 中示出双群的中子通量和共轭通量的曲线。关于共轭通量和共轭方程的具体物理意义将在下一节中详细讨论。

我们可以看到, 上面对双群共轭算子  $\mathbf{M}^*$  的推证, 完全可以推广到多群的情况。例如, 多群扩散方程 ( $G$  群) 和它的共轭方程可以写成



$$\mathbf{M}\phi = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,G} \\ M_{2,1} & \dots & M_{2,G} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{G,1} & \dots & M_{G,G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_G \end{pmatrix} = 0, \quad (13-21)$$

$$\mathbf{M}^*\phi^* = \begin{pmatrix} M_{1,1}^* & \dots & M_{1,G}^* \\ M_{2,1}^* & \dots & M_{2,G}^* \\ \vdots & & \vdots \\ M_{G,1}^* & \dots & M_{G,G}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \vdots \\ \phi_G^* \end{pmatrix} = 0, \quad (13-22)$$

而其中  $\mathbf{M}^*$  为  $\mathbf{M}$  的转置矩阵, 即

$$M_{i,j}^* = M_{j,i} \quad (13-23)$$

边界条件为在反应堆外推边界上,

$$\phi_{i,i} = \phi_{i,i}^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, G \quad (13-24)$$

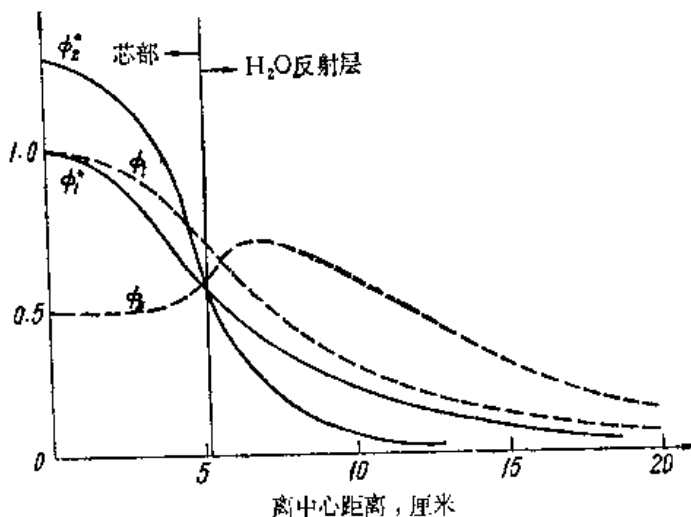


图13-1 一维平板反应堆的双群中子通量和共轭通量示意图

这样, 对于反应堆多群算子  $\mathbf{M}$ , 若需求其共轭算子, 则只要把  $\mathbf{M}$  的每一矩阵元  $M_{i,j}$  进行行列对换, 也就是按 (13-23) 式把每一个  $M_{i,j}$  用  $M_{j,i}$  替换求出  $\mathbf{M}$  的转置矩阵即可。这时, 假定边界条件 (13-24) 得到满足。

根据共轭方程的定义及关系式 (13-3), 同样方法可以证明稳态输运方程 (4-27) 式的共轭方程 (略去源项及非弹性散射) 具有下列形式:

$$\begin{aligned} & -\Omega \cdot \nabla \phi^*(\mathbf{r}, u, \Omega) + \Sigma_a \phi^*(\mathbf{r}, u, \Omega) \\ & = \Sigma_s \int_{\Omega'} du' \int_{\Omega} \phi^*(\mathbf{r}, u', \Omega') f(\mathbf{r}; u-u', \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' \\ & + \frac{\nu \Sigma_f}{4\pi k} \int_{\Omega'} du' \int_{\Omega} \chi(u') \phi^*(\mathbf{r}, u', \Omega') d\Omega', \end{aligned} \quad (13-25)$$

这时  $\phi^*(\mathbf{r}, u, \Omega)$  的边界条件为

$$\phi^*(\mathbf{r}, u, \Omega) = 0, \quad \text{当 } \Omega \cdot \mathbf{n} > 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma. \quad (13-26)$$

在证明上式时应该注意到， $\phi^*$ 及 $\phi$ 均系定义在相空间 $r \times u \times \Omega$ 上；因此内积的定义(13-1)应该用下面积分来代替

$$(\phi, \psi) = \int_{r \times u \times \Omega} \phi(r, u, \Omega) \psi(r, u, \Omega) dr du d\Omega . \tag{13-27}$$

## 2. 中子价值

这一节将着重讨论反应堆共轭方程和共轭通量的物理解释。

### 2.1 中子价值

对于反应堆内中子群体的状况除了用中子通量 $\phi$ 这个量来描述外，现在再引入一个“中子价值”的概念。为了对中子价值能有更具体的了解，让我们先观察这样一个例子。假设在反应堆中的不同位置上分别放入一个同样（具有同样吸收截面 $\Sigma_a$ 和形状大小）的小吸收体（图13-2），我们发现，在中心位置上的吸收体所引起的反应性变化比边缘位置上的大。自然很容易联想到，这是因为在中心处的中子通量高，因而吸收中子的数目也多的缘故。如果仅仅是如此，那么它们对反应性的影响就应该正比于中子通量值 $\phi(r)$ 。但是实验表明，它们对反应性的影响并非正比于 $\phi(r)$ ，而是近似地正比于中子通量的平方 $\phi^2(r)$ 。对于这个现象，很自然可以认为，反应性的不同不仅是由于不同点处吸收中子的数目（或中子通量）不同所引起，而且还由于不同点处被吸收中子的“价值”不相等的缘故。这也就是说，同样一个中子在不同的地点则它对链式反应或反应堆功率的贡献或“重要程度”是不同的。显然，在靠近边界处的中子由于泄漏出芯部的几率较大，因而它对链式反应或功率的贡献（也就是它的中子价值）要比中心处来得小。下面即将证明，单群近似时，中子价值是和中子通量的分布 $\phi(r)$ 一样的。

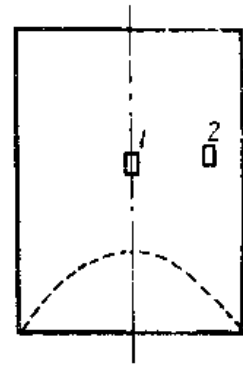


图13-2 不同位置上的吸收体

假设有一处于临界状态的反应堆，在初始时刻功率等于零或处于某一稳定功率。现设在 $r$ 点处突然投入几个能量为 $E$ 、运动方向为 $\Omega$ 的中子，这将给反应堆的通量一个扰动。这几个中子将一面运动一面增殖。由于反应堆处于临界状态，因此经过足够长时间后，中子通量（或功率）将达到一个稳定的基波分布（见图13-3），并使堆的功率达到一个新的水平，它将比原来的功率高一些。显然，功率的增加值与投入中子的地点 $r$ 、中子能量 $E$ 和运动方向 $\Omega$ 有关并正比于投入的中子数 $n$ 。中子价值 $\phi^+(r, E, \Omega)$ 的定义为：在临界反应堆中，在 $r$ 处投入一个能量为 $E$ 、运动方向为 $\Omega$ 的中子所引起的对稳定功率的贡献。

由定义知道，中子价值是 $r$ 、 $E$ 和 $\Omega$ 的函数，将 $\phi^+(r, E, \Omega)$ 对所有方向取平均值便得到中子价值 $\phi^+(r, E)$ 。如果认为引入中子的角分布是各向同性的，那么，便可求得：

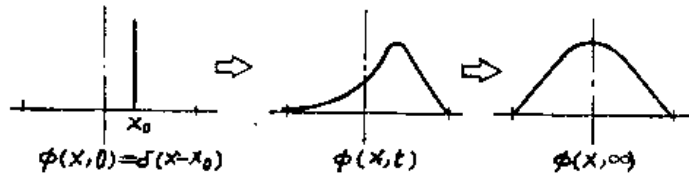


图13-3  $x_0$ 处引入中子后通量变化过程示意图

$$\phi^+(r, E) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \phi^+(r, E, \Omega) d\Omega \quad (13-28)$$

应该注意到，中子价值和中子总通量  $\phi(r, E)$  不同，后者是对中子角通量  $\phi(r, E, \Omega)$  的积分，而前者  $\phi^+(r, E)$  [(13-28)式] 则应该理解为平均值的概念。

下面我们应用双群理论来求出中子价值函数的具体形式。双群方程可以写成

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1 - \Sigma_1 \phi_1 + \nu \Sigma_2 \phi_2 &= \frac{1}{v_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad , \\ \nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2 - \Sigma_2 \phi_2 + \Sigma_1 \phi_1 &= \frac{1}{v_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \quad . \end{aligned} \quad (13-29)$$

或写成算子形式

$$M\phi = v^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad , \quad (13-30)$$

式中  $M$  是前面定义过的双群算子 (13-17) 式， $\phi = (\phi_1, \phi_2)$  是二维中子通量， $v^{-1}$  为如下对角矩阵：

$$v^{-1} = \begin{pmatrix} 1/v_1 & 0 \\ 0 & 1/v_2 \end{pmatrix} . \quad (13-31)$$

考虑 (13-30) 式的可分离变量解

$$\phi(r, t) = \phi(r) \cdot e^{\omega t} \quad , \quad (13-32)$$

因而 (13-30) 式便可以写成

$$M\phi(r) = \omega v^{-1} \phi(r) \quad . \quad (13-33)$$

应该指出，由于通量的耦合关系，这里  $\omega$  对每一群都相同。(13-33) 式的普遍解给出一组特征值  $\omega_n$  和特征函数  $\phi_n(r)$ 。于是 (13-30) 的解可以通过特征函数  $\phi_n$  表示，即

$$\phi(r, t) = \sum_n A_n \phi_n(r) e^{\omega_n t} \quad ,$$

或写成标量形式

$$\begin{aligned} \phi_1(r, t) &= \sum_n A_n \phi_{1,n}(r) e^{\omega_n t} \quad , \\ \phi_2(r, t) &= \sum_n A_n \phi_{2,n}(r) e^{\omega_n t} \quad . \end{aligned} \quad (13-34)$$

但是，与单群情况不同，这里  $M$  不是自轭的，特征函数  $\phi_n$  并不构成一个正交函数列，因而

无法通过 $\phi_n$ 的正交性来求得展开系数 $A_n$ 。我们考虑 $M$ 的共轭算子 $M^*$  (13-19) 式。(13-33) 式的共轭方程为

$$M^*\phi_n^*(r) = \omega_n v^{-1}\phi_n^*(r) \quad (13-35)$$

设 $\phi_n(r)$ ,  $\phi_m^*(r)$ 分别为(13-33)和(13-35)式的特征函数, $\omega_n$ ,  $\omega_m$ 为对应的特征值, 则根据内积定义, 由(13-33)和(13-35)有

$$(\phi_m^*, M\phi_n) - (\phi_n, M^*\phi_m^*) = (\omega_n - \omega_m)(v^{-1}\phi_m^*, \phi_n)$$

由于 $M^*$ 为 $M$ 的共轭算子, 根据共轭算子定义上式应该等于零, 这说明对应于不同特征值的特征函数 $\phi_n(r)$ 和 $\phi_m^*(r)$ 是正交的。只有当 $n = m$ 时, 它们的内积才不为零, 此时可选取适当比例因子将其归一。即

$$(v^{-1}\phi_m^*, \phi_n) = \int (v_1^{-1}\phi_{1, n}^*\phi_{1, n} + v_2^{-1}\phi_{2, n}^*\phi_{2, n}) dr = \delta_{m, n} \quad (13-36)$$

因此, 双群方程特征函数 $\phi_n(r)$ 与双群共轭方程特征函数 $\phi_m^*(r)$ 是正交的。这个结论可以推广到多群情况。在这种情况下, 我们说, 通量特征函数和共轭通量的特征函数构成了双正交函数族。利用双正交性质便可以确定出(13-34)式中的展开系数 $A_n$ 。

假定一刚好临界反应堆, 其初始通量分布为 $\phi_0(r) [\phi_{1, 0}(r), \phi_{2, 0}(r)]$ (它就是对应于 $\omega_0 = 0$ 的特征函数), 现在 $t = 0$ 时刻, 在 $r_0$ 点突然投入一个各向同性的热群中子, 这时初始条件可以写成

$$\begin{aligned} \phi_{1, 0}(r, 0) &= \phi_{1, 0}(r) + \phi_{1, 0}^*(r_0) \\ \phi_{2, 0}(r, 0) &= \phi_{2, 0}(r) + v_2 \delta(r - r_0) = \phi_{2, 0}(r) + \phi_{2, 0}^*(r_0) \end{aligned} \quad (13-37)$$

用 $\phi_{1, n}^*(r)/v_1$ 和 $\phi_{2, n}^*(r)/v_2$ 分别乘上面二个等式两边并对整个体积积分之, 然后相加并根据双正交条件(13-36)便得到

$$A_n = \delta_{n, 0} + \phi_{2, n}^*(r_0) \quad (13-38)$$

对于临界系统,  $\omega_0 = 0$ , 而 $n > 0$ 之 $\omega_n$ 均是负数; 于是随着 $t$ 的增大, (13-34)式中高阶谐波项将迅速衰减, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 中子通量的稳态分布便等于 $n = 0$ 的基波项;

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \infty) &\rightarrow [1 + \phi_{2, 0}^*(r_0)] \phi_{1, 0}(r) \\ \phi_2(r, \infty) &\rightarrow [1 + \phi_{2, 0}^*(r_0)] \phi_{2, 0}(r) \end{aligned} \quad (13-39)$$

其中 $\phi_{2, 0}^*$ 即为前面一节所讨论的双群中热群共轭通量, 它是满足双群共轭方程 $M^*\phi^*(r) = 0$ 的解的分量。

这样, 我们便得到, 在 $r_0$ 处投入一个各向同性热群中子, 最后得到的中子通量或功率便增加了 $\phi_{2, 0}^*(r_0)$ 倍; 这就是中子价值的定义。同样方法可以证明若在 $r_0$ 处投入一个快群中子, 则中子通量或功率便增加 $\phi_{1, 0}^*(r_0)$ 倍。由此可见共轭通量的物理解释就是中子价值。以后我们就用 $\phi^*(r)$ 表示中子价值。

上述结果可以推广到多群情况, 可以概括如下:  $g$ 群共轭通量 $\phi_g^*(r)$ 正比于在 $r$ 点引进或消除一个本( $g$ )群中子所引起的反应堆功率(或通量)的增益或损失, 并称为该群的中子价值。可以看到, 共轭通量本身并不具有“通量”的含义。

现在可以对图13-1上的双群共轭通量的曲线形状从物理上给以解释。首先注意到, 与热群通量不同, 热群共轭通量在芯部和反射层交界附近, 并没有出现凸峰, 而是光滑地沿着反射层减少至零。这是因为离开芯部交界面愈远, 则中子泄漏到堆外的几率愈大, 中子的价

值便愈小。其次，芯部的快群共轭通量比热群共轭通量低，而在同一区域内快群通量却比热群通量高。这是因为在芯部热群的吸收截面大于快群的移出截面，其结果使 $\phi_{2,c}$ 降低到 $\phi_{1,c}$ 以下；而从另一方面看，热群中子被芯部材料吸收并引起裂变的几率大于快中子，因而热群中子的价值便高于快群中子的价值。在单群近似中，由于单群扩散方程是自轭的，因而单群中子通量分布和共轭通量是一致的。

## 2.2 反应堆共轭方程的物理解释

根据中子价值的定义可以看到，价值具有迭加性质。如果在 $r$ 处某种中子的价值为 $\phi^*$ ，设有 $N$ 个同样中子，那么其价值则等于各个中子价值之和，即 $N\phi^*$ 。另一方面，因为初始中子对稳定功率的贡献，也正是初始中子在后来任一时刻所形成的所有中子对功率的贡献，所以中子价值是守恒的。

下面根据中子价值守恒的物理概念来建立中子价值的平衡方程——反应堆共轭方程。

为方便起见，讨论单能情况。由于中子价值是空间坐标 $r$ 的函数，因而中子在介质内运动时其价值也将随之发生变化，中子自价值低的区域向价值高的区域移动时价值增加，反之则价值减少。现在我们讨论在 $r$ 处中子在输运过程中价值的守恒问题。首先考察沿 $\Omega$ 方向运动的中子的价值的变化（图13-4）。设沿该方向单位立体角内的中子数为 $n$ ，它们的中子价值为 $\phi^*(r, \Omega)$ ，而 $r$ 点的平均价值为 $\phi^*(r)$  [见(13-28)式]。假设这些中子沿 $\Omega$ 方向移动了一个微小距离 $ds$ （图13-4），不受碰撞到达 $r' = r + ds\Omega$ 点的中子数等于 $n(1 - ds/\lambda_t)$ ，其中 $\lambda_t = 1/\Sigma_t$ 是总平均自由程。因而到达 $r'$ 点时中子价值的变化便等于

$$n[(1 - \Sigma_t ds)\phi^*(r + ds\Omega, \Omega) - \phi^*(r, \Omega)]$$

令

$$L = n[\phi^*(r + ds\Omega, \Omega) - \phi^*(r, \Omega)]$$

它是中子自 $r$ 点输运到 $r'$ 点时，价值的增加，而

$$R = n\Sigma_t ds\phi^*(r + ds\Omega, \Omega)$$

是在 $ds$ 路程上由于碰撞所造成的中子价值损失。这些碰撞中子中有 $n\Sigma_t ds$ 个中子是发生散射碰撞（改变了运动方向）。如果散射是各向同性的，即散射函数 $f(\Omega \rightarrow \Omega') = 1/4\pi$ ，那么这部分被散射中子的价值便等于

$$I = n\Sigma_t ds \int \frac{1}{4\pi} \phi^*(r, \Omega') d\Omega' = n\Sigma_t ds\phi^*(r)$$

假设裂变中子的角分布是各向同性的，那么，由于裂变而产生的中子价值为

$$Q = n\Sigma_f ds \int \frac{\nu}{4\pi} \phi^*(r, \Omega') d\Omega' = n\nu\Sigma_f ds\phi^*(r)$$

在稳态时，根据中子价值守恒原理有

$$L - R + I + Q = 0 \quad (13-40)$$

用 $nds$ 除上式各项并令 $ds \rightarrow 0$ ，同时注意到第一项等于：

$$L = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\phi^*(r + ds\Omega, \Omega) - \phi^*(r, \Omega)}{ds} = \Omega \cdot \nabla\phi^*(r, \Omega)$$

它表示在  $\Omega$  方向单位路程上由于运输所引起的中子价值的变化。可以看到,它和  $\phi^*(\mathbf{r}, \Omega)$  的梯度的符号相同。因而 (13-40) 式便具有下列形式

$$\Omega \cdot \nabla \phi^*(\mathbf{r}, \Omega) - (\Sigma_s + \Sigma_a) \phi^*(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma_s \phi^*(\mathbf{r}) + \nu \Sigma_f \phi^*(\mathbf{r}) = 0, \quad (13-41)$$

它表示  $\mathbf{r}$  点沿  $\Omega$  方向运动的中子价值的守恒。

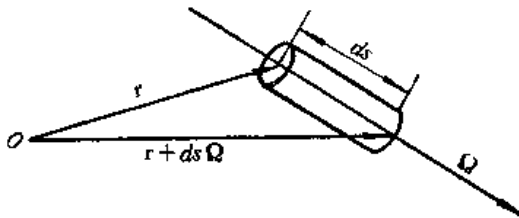


图13-4 中子价值的守恒

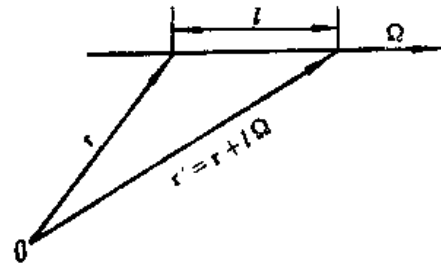


图13-5  $\phi^*(\mathbf{r}, \Omega)$  的计算

下面我们来求出  $\phi^*(\mathbf{r}, \Omega)$  的近似表达式。为此,考察无限大的弱吸收介质 ( $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ ), 设在  $\mathbf{r}$  处有一个沿  $\Omega$  方向运动的中子 (图13-5), 则未经碰撞到达  $\mathbf{r}'$  的中子数约为  $e^{-\Sigma_s l}$  ( $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ ), 而在  $dl$  内发生碰撞的几率为  $\Sigma_s dl$ , 如果散射是各向同性的, 则根据中子价值守恒原则, 可以求出  $\mathbf{r}$  处沿  $\Omega$  方向运动的中子的价值应等于

$$\phi^*(\mathbf{r}, \Omega) = \int_0^\infty e^{-\Sigma_s l} \Sigma_s dl \int_{\Omega'} \frac{\phi^*(\mathbf{r}', \Omega')}{4\pi} d\Omega' = \int_0^\infty \phi^*(\mathbf{r}') e^{-\Sigma_s l} \Sigma_s dl. \quad (13-42)$$

如果  $\phi^*(\mathbf{r}')$  是空间坐标的缓慢变化函数, 把  $\phi^*(\mathbf{r}')$  在  $\mathbf{r}$  处展成泰勒级数并取二项, 则有

$$\phi^*(\mathbf{r}') = \phi^*(\mathbf{r}) + l \frac{d\phi^*}{dl} = \phi^*(\mathbf{r}) + l \Omega \cdot \nabla \phi^*(\mathbf{r}).$$

将它代入 (13-42) 式积分之即得

$$\phi^*(\mathbf{r}, \Omega) = \phi^*(\mathbf{r}) + \frac{1}{\Sigma_s} \Omega \cdot \nabla \phi^*(\mathbf{r}) = \phi^*(\mathbf{r}) + 3D \Omega \cdot \nabla \phi^*(\mathbf{r}), \quad (13-43)$$

这里  $D = 1/3\Sigma_s$  是扩散系数。可以看到, (13-43) 式和第四章中中子通量  $\phi(\mathbf{r}, \Omega)$  的近似展开式[(4-92)式]一样。将 (13-43) 式代入方程 (13-41) 中, 并对所有  $\Omega$  积分之, 再应用第四章表 4-2 中公式便得到

$$\nabla \cdot D \nabla \phi^*(\mathbf{r}) - \Sigma_a \phi^*(\mathbf{r}) + \nu \Sigma_f \phi^*(\mathbf{r}) = 0, \quad (13-44)$$

它表示在  $\mathbf{r}$  处各向同性的中子在运输过程中价值的守恒。其中第一项 (相当于  $L$  项) 是表示由于运输过程所引起的中子价值的变化; 第二项则是前面  $R$  和  $I$  项之差, 它等于被吸收中子的价值; 第三项是裂变产生的中子的价值。可以看到, (13-44) 式正是前面所述的单群共轭方程。

上面的推导过程很容易可以推广到多群的情况。例如在  $\mathbf{r}$  处对于  $g$  群中子的价值守恒方程可以写成:

$$\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g^* - \Sigma_{R, g} \phi_g^* + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s, g \leftarrow g'} \phi_{g'}^* + \nu_g \Sigma_{f, g} \sum_{g' = 1}^G \chi_{g'} \phi_{g'}^* = 0, \quad (13-45)$$

这里  $\Sigma_{R, g}$ ,  $\Sigma_{g \rightarrow g'}$  分别是  $g$  群移出截面和群转移截面。式中第一项表示由于输运过程所引起的中子价值的变化；第二项表示移出（包括吸收和减速） $g$  群的中子价值损失；第三项是由  $g$  群慢化到各群的中子价值，而第四项则是裂变产生的中子价值。事实上 (13-45) 就是反应堆的多群共轭方程。对于双群情况，自然便得到 (13-20) 方程。同样根据  $\phi^*(r, E, \Omega)$  的物理意义，按中子价值守恒原则可以推得共轭输运方程 (13-25) 及边界条件 (13-26) 式。

这样，从物理意义上看，反应堆共轭方程是表征中子价值守恒的方程。共轭通量分布也就是中子价值的函数分布。应用中子价值的概念可以很方便地对下面由微扰理论所得到的许多结果从物理意义上予以解释。例如，应用中子价值便很容易说明本节开头所提到的不同位置上吸收体对反应性的贡献系正比中子通量平方的事实。因为在单群近似条件下，中子价值或共轭通量的分布和通量的分布是一样的。

### 3. 微扰理论及其应用

现在把上面所讨论的分群共轭方程应用到反应堆的微扰理论上去，推导出微扰的一般公式并讨论几个具体应用的例子。

#### 3.1 扰动方程

设未扰动前反应堆方程为

$$M\phi = 0. \quad (13-46)$$

例如，对于多群近似， $\phi$  为矢量函数， $M$  即为多群方程的系数矩阵。(13-46) 式的共轭方程为

$$M^*\phi^* = 0, \quad (13-47)$$

$M^*$  为  $M$  的共轭算子。对于分群近似情况， $M^*$  即为  $M$  的转置矩阵。

现在假设在临界的反应堆中由于某种原因引入某些微扰。例如由于温度升高引起核密度的减少，使  $\Sigma_i \rightarrow \Sigma'_i = \Sigma_i + \delta\Sigma_i$ ,  $i$  表示  $a, f, s$ ;  $D \rightarrow D' = D + \delta D$ ; ...。这些扰动的结果，使得反应堆不再是临界的了。但是，正如第六章所述，如果令有效增殖因数  $k$  (或  $\nu$ ) 也改变成一个适当的新值  $k'$  (或  $\nu'$ )，系统便可以恢复临界的。这样，引入扰动后使  $k$  作相应变化，使系统仍保持临界，此时算子  $M$  变成为  $M' = M + \delta M$ ，或记作

$$M' = M + P, \quad (13-48)$$

$P = \delta M$  称之为扰动算符，其中包括物理扰动及由其引起的  $k$  的相应变化。因而受扰动后反应堆的通量  $\phi'$  满足

$$M'\phi' = 0, \quad (13-49)$$

或

$$M\phi' + P\phi' = 0. \quad (13-50)$$

把受扰动前的共轭方程 (13-47) 的解  $\phi^*$  与受扰动后的反应堆方程 (13-50) 作内积得到

$$(\phi^*, M\phi') + (\phi^*, P\phi') = 0$$

由于  $M$  与  $M^*$  共轭，并假定边界条件没有受到扰动，则有

$$(\phi', M^* \phi^*) + (\phi^*, P \phi') = 0,$$

但  $M^* \phi^* = 0$ , 这样我们便得到

$$(\phi^*, P \phi') = 0. \quad (13-51)$$

假设扰动很小, 则它对通量没有带来显著的畸变, 故  $\phi'$  可写成  $\phi' = \phi + \delta\phi$ , 而  $|\delta\phi| \ll |\phi|$ , 所以若略掉二阶微量则有

$$P \phi' = P \phi + P \delta\phi \approx P \phi. \quad (13-52)$$

这样, 近似地把 (13-52) 式代入 (13-51) 式便得到微扰理论的基本方程

$$(\phi^*, P \phi) = 0. \quad (13-53)$$

(13-53) 式称之为**扰动方程**。扰动算符  $P$  中包括活性区各种参数, 例  $\Sigma_a, \Sigma_f, D, \dots$  的微小扰动, 其中也包括  $k$  的相应变化。这样, 应用扰动方程我们便可以从受扰动前系统的通量分布  $\phi$  和共轭通量  $\phi^*$  求出由于各种参数的扰动所引起的有效增殖因数  $k$  或反应性的变化。为了应用上的方便, 下面写出单群及双群情况下扰动方程的具体形式。

### 单群微扰公式

根据 (13-7) 式, 单群近似情况下算子  $M$  为

$$M = \nabla \cdot D \nabla - \Sigma_a + \frac{1}{k} \nu \Sigma_f. \quad (13-54)$$

现在假定, 由于某种原因各个参数发生了变化, 即

$$\begin{aligned} \Sigma_f \rightarrow \Sigma'_f = \Sigma_f + \delta\Sigma_f, \quad \Sigma_a \rightarrow \Sigma'_a = \Sigma_a + \delta\Sigma_a, \\ D \rightarrow D' = D + \delta D. \end{aligned}$$

同时假定, 为了使系统恢复临界, 有效增殖因数  $k \rightarrow k' = k + \delta k$  (或者假定  $\nu \rightarrow \nu'$ ), 同时注意到

$$\frac{1}{k + \delta k} = \frac{1}{k \left( 1 + \frac{\delta k}{k} \right)} \approx \frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{\delta k}{k} \right] = \frac{1}{k} + \delta \left( \frac{1}{k} \right),$$

因而扰动后算子  $M'$  为

$$M' = \nabla \cdot (D + \delta D) \nabla - (\Sigma_a + \delta\Sigma_a) + \left[ \frac{1}{k} + \delta \left( \frac{1}{k} \right) \right] \nu (\Sigma_f + \delta\Sigma_f).$$

由 (13-48) 式, 同时略掉二阶微量  $\delta \left( \frac{1}{k} \right) \delta\Sigma_f$ , 则有

$$P = \nabla \cdot \delta D \nabla - \delta\Sigma_a + \delta \left( \frac{1}{k} \right) \nu \Sigma_f + \frac{1}{k} \nu \delta\Sigma_f. \quad (13-55)$$

注意到单群算子是共轭的, 因而  $\phi^* = \phi$ , 这样扰动方程 (13-53) 便可写成

$$\begin{aligned} \int_V \phi^* P \phi dV = \int_V \left[ \phi \nabla \cdot \delta D \nabla \phi + \left( \frac{\nu \delta\Sigma_f}{k} - \delta\Sigma_a \right) \phi^2 \right. \\ \left. + \delta \left( \frac{1}{k} \right) \nu \Sigma_f \phi^2 \right] dV. \end{aligned} \quad (13-56)$$



应用 (13-10) 式, 上式右边第一项积分可以写成

$$\int_V \phi \nabla \cdot \delta D \nabla \phi dV = \int_V \nabla \cdot \phi \delta D \nabla \phi dV - \int_V \delta D (\nabla \phi)^2 dV,$$

应用高斯公式并根据中子通量在外表面等于零, 有

$$\int_V \nabla \cdot \phi \delta D \nabla \phi dV = \int_V \phi \delta D \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

同时根据反应性  $\rho = (k-1)/k$  的定义有

$$\Delta \rho = -\delta \left( \frac{1}{k} \right), \quad (13-57)$$

因而由 (13-56) 式便可求得单群微扰公式,  $\Delta \rho$  为

$$\Delta \rho = \frac{\int_V \left[ \left( \frac{\nu \delta \Sigma_f}{k} - \delta \Sigma_a \right) \phi^2 - \delta D (\nabla \phi)^2 \right] dV}{\int_V \nu \Sigma_f \phi^2 dV} \quad (13-58)$$

从上式可知, 吸收或裂变截面变化对反应性的贡献是用  $\phi^2$  来权重的, 而扩散系数  $D$  的变化是由  $(\nabla \phi)^2$  来权重, 而且  $D$  的增大将导致负的  $\Delta \rho$  值。从物理上看, 这是因为由于扩散系数的增大导致中子流的增加, 从而也就增加了中子泄漏的缘故。

单群理论微扰公式的应用有很大的局限性, 因为它受到单群方法固有的缺陷的限制。例如, 单群公式不能用于涉及系统慢化性质变化或快中子生成的问题; 单群理论给不出反射层中的热中子通量峰, 因而它无法精确得到放在反射层中的吸收剂的效应。它仅可用于单群理论给出精确通量值的那些地方所发生的扰动。

### 双群微扰公式

假定在双群方程 (13-15) 式或 (13-16) 式中的所有参数都发生了微小的扰动:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\rightarrow \Sigma_1 + \delta \Sigma_1, \quad \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 + \delta \Sigma_2, \quad \Sigma_{f,2} \rightarrow \Sigma_{f,2} + \delta \Sigma_{f,2}; \\ D_1 &\rightarrow D_1 + \delta D_1, \quad D_2 \rightarrow D_2 + \delta D_2; \end{aligned}$$

同时为了保持临界,  $k \rightarrow k + \delta k$ 。将上述参量代入 (13-17) 式, 根据  $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{P}$  [(13-48) 式], 并略去二阶微量, 很容易证明

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \nabla \cdot \delta D_1 \nabla - \delta \Sigma_1 & \frac{\nu \delta \Sigma_{f,2}}{k} + \delta \left( \frac{1}{k} \right) \nu \Sigma_{f,2} \\ \delta \Sigma_1 & \nabla \cdot \delta D_2 \nabla - \delta \Sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (13-59)$$

根据微扰方程 (13-53) 有

$$\int_V \phi^* \mathbf{P} \phi dV = 0. \quad (13-60)$$

应该注意, 这里  $\phi^*$  和  $\phi$  都是二维矢量, 把  $\mathbf{P}$  用 (13-59) 式代替, 并根据 (13-2) 式定义,

通过类似上节所讨论的单群理论那样的运算，不难证明，双群微扰反应性由下式给出：

$$\Delta\rho = \frac{1}{Q} \int_V \left[ -\delta D_1 \nabla\phi_1^* \cdot \nabla\phi_1 - \delta\Sigma_1 \phi_1^* \phi_1 + \frac{\nu}{k} \delta\Sigma_{f,2} \phi_1^* \phi_2 + \delta\Sigma_1 \phi_2^* \phi_1 - \delta D_2 \nabla\phi_2^* \cdot \nabla\phi_2 - \delta\Sigma_2 \phi_2^* \phi_2 \right] dV, \quad (13-61)$$

$$Q = \int_V \nu\Sigma_{f,2} \phi_1^* \phi_2 dV. \quad (13-62)$$

上述结果很容易可以推广到多群的普遍情况并导出多群的微扰公式。这样，根据扰动前  $\phi(\mathbf{r})$  和  $\phi^*(\mathbf{r})$  的分布，应用扰动方程 (13-53) 或 (13-58) 及 (13-61) 式便可以很方便地求出由于各种参数的改变所引起的反应性变化。但是应该指出，所有这些公式都只能在微小的扰动下才是精确的，因为在它们的推导过程中我们都略去了所有二阶以上的项。

### 3.2 微扰理论的一些应用

在反应堆物理分析中有许多问题用微扰理论来处理是很方便的。现举几个最简单的例子加以讨论。

#### (1) 在芯部中引入小的吸收体情况 (毒性计算)

这种情况相当于在芯部的局部地方放入一小的吸收剂 (例如同位素靶件等) 的情况。现在假设在芯部某个小体积  $V_0$  内放入一小吸收体，使得在  $V_0$  体积内热中子的宏观吸收截面有了微小的变化  $\delta\Sigma_a$ 。那么根据扰动方程，很容易可以求出它所引起的反应性效应。对于单群近似情况下，根据 (13-58) 式它便等于

$$\Delta\rho = - \frac{\int_{V_0} \delta\Sigma_a \phi^2(\mathbf{r}) dV}{\int_V \nu\Sigma_f \phi^2(\mathbf{r}) dV}. \quad (13-63)$$

对于双群理论，这时  $\delta\Sigma_2 = \delta\Sigma_a$ ，根据 (13-61) 式有

$$\Delta\rho = - \frac{\int_{V_0} \delta\Sigma_a \phi_1^* \phi_2 dV}{\int_V \nu\Sigma_{f,2} \phi_1^* \phi_2 dV}. \quad (13-64)$$

有趣的是，如果我们在  $\mathbf{r}_0$  点引入一面积为  $V_0$  的小吸收体，则其扰动量可以近似写成

$$\delta\Sigma_a = \Sigma_{a,0} V_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (13-65)$$

这里  $\Sigma_{a,0}$  是吸收体的热中子吸收截面。若采用双群近似，按 (13-61) 式扰动所引起的反应性为

$$\Delta\rho = - \frac{\Sigma_{a,0} V_0 \phi_2(\mathbf{r}_0) \phi_1^*(\mathbf{r}_0)}{Q}$$

量  $\Sigma_a V_0 \phi_2(\mathbf{r}_0)$  是吸收体每秒吸收的热中子数，因而

$$\phi_2^*(\mathbf{r}_0) = - \frac{Q \Delta \rho}{\Sigma_a V_0 \phi_2(\mathbf{r}_0)} \quad (13-66)$$

这正如所预料的那样，在  $\mathbf{r}_0$  处的热群共轭通量  $\phi_2^*(\mathbf{r}_0)$  正比于在  $\mathbf{r}_0$  点每秒吸收一个热中子所引起的负反应性。对于  $\phi_1^*(\mathbf{r}_0)$  也可得到类似的结论。对于一般多群情况，可以证明，群共轭通量  $\phi_g^*(\mathbf{r})$  系正比于在  $\mathbf{r}$  点每秒引进或消除该群一个中子所引起的反应性的增益或损失。这可以看作共轭通量或中子价值的另一种定义或解释，它和前面一节所定义的中子价值的物理意义是一致的。

### (2) 非均匀裂变产物毒物

在第十章的讨论中知道，反应堆内裂变产生的毒物（主要是  $^{135}\text{Xe}$ ）的浓度是空间的函数，它对反应性所造成的毒性可以通过那里所介绍的燃耗的数值计算方法来精确地确定。但是，对于这类问题有时也可以用微扰理论来近似估计。

例如，考虑平衡氙的反应性当量。根据 (10-44) 式， $\mathbf{r}$  点的平衡氙浓度为

$$N_{X_c}(\mathbf{r}) = \frac{\gamma \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})}{\lambda_{X_c} + \sigma_a^{X_c} \phi(\mathbf{r})}$$

现在我们把氙的空间浓度（毒性）分布当作扰动来处理。由于氙的吸收截面比散射截面大得多，故氙的散射可以忽略，因而扰动可以表示为

$$\delta \Sigma_a(\mathbf{r}) = N_{X_c}(\mathbf{r}) \sigma_a^{X_c}$$

应用单群微扰公式 (13-58)，那么氙的毒性对反应性的影响便等于

$$\Delta \rho_{X_c} = - \int_V \frac{\gamma \Sigma_f \phi^3(\mathbf{r})}{\lambda_{X_c} / \sigma_a^{X_c} + \phi(\mathbf{r})} dV \bigg/ \int_V \nu \Sigma_f \phi^2(\mathbf{r}) dV \quad (13-67)$$

### (3) 部分插入的控制棒

对于部分插入的控制棒的计算问题是非常复杂的，不能用普通的解析方法来处理。在这种情况下，微扰理论可以对部分插入控制棒相对于完全插入棒的价值提供一个粗略的估计。

我们讨论圆柱体形反应堆中心棒的情况，反应堆外推半径和高度分别为  $R$  及  $H$ ，棒的半径为  $a$ 。为方便起见，将坐标的中心取在堆顶端的圆心上（见图 11-9），那么对于插入深度为  $Z$  的棒的扰动量为

$$\delta \Sigma_a = \begin{cases} \Sigma_{a,p}, & 0 \leq z \leq Z; \quad 0 \leq r \leq a \\ 0, & \text{其它区域,} \end{cases}$$

这里  $\Sigma_{a,p}$  是棒的宏观吸收截面。

在单群近似下，按照 (13-63) 式可以得出插入距离为  $Z$  的棒的反应性为

$$\rho(Z) = - \Sigma_{a,p} \int_0^a \int_0^Z 2\pi \phi^2(r,z) r dr dz \bigg/ \int_V \nu \Sigma_f \phi^2(r,z) dV \quad (13-68)$$

当棒完全插入时

$$\rho(H) = - 2\pi \Sigma_{a,p} \int_0^a \int_0^H \phi^2(r,z) r dr dz \bigg/ \int_V \nu \Sigma_f \phi^2(r,z) dV \quad (13-69)$$

而未受扰动的中子通量为

$$\phi(r, z) = AJ_0 \left( \frac{2.405r}{R} \right) \sin \left( \frac{\pi z}{H} \right) . \quad (13-70)$$

将 (13-70) 式代入 (13-68) 和 (13-69) 式并将两式相除得出

$$\begin{aligned} \rho(Z) &= \rho(H) \int_0^Z \sin^2 \left( \frac{\pi z}{H} \right) dz / \int_0^H \sin^2 \left( \frac{\pi z}{H} \right) dz \\ &= \rho(H) \left[ \frac{Z}{H} - \frac{1}{2\pi} \sin \left( \frac{2\pi Z}{H} \right) \right] . \end{aligned} \quad (13-71)$$

在应用 (13-71) 式时, 完全插入棒的价值  $\rho(H)$  需由第十一章所介绍的方法计算或由实验确定。由于 (13-71) 出现的是相对价值, 所以它甚至对于强吸收棒也适用。另外, 尽管它是从中心棒推导出来的, 但只要将  $\rho(H)$  用适当的值, 也可以近似给出部分插入的偏心棒的价值。

### 参 考 文 献

- [1] J.R.拉马什著, 洪流译, 核反应堆理论导论, 第十五章, 原子能出版社, 1977年。
- [2] S.格拉斯登, M.C.爱德仑著, 和平译, 原子核反应堆理论纲要, 第十三章, 科学出版社, 1958年。
- [3] A.M.Weinberg and E.P.Wigner, *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*, pp.537—556, Chicago, University of Chicago Press, 1958.
- [4] Л.Н.Усачёв, Proc.1st Intern. Conf. PUAЕ. Vol 5, p/656. New York, United Nation, 1955.
- [5] J.Lewins, *Importance-The Adjoint Function*, pp.56—61, Pergamon Press, 1965.
- [6] Г.И.马尔丘克著, 飞跃译, 反应堆数值计算方法, 原子能译丛第五期, 科学出版社, 1959年。

# 附 录

## 附录 1 物理常数

阿伏伽德罗常数	$N_A$	$0.6022045 \times 10^{24}$ 克分子 <sup>-1</sup>
玻耳兹曼常数	$k$	$1.380662 \times 10^{-16}$ 尔格 · K <sup>-1</sup> $0.861735 \times 10^{-4}$ 电子伏 · K <sup>-1</sup>
电子静止质量	$m_e$	$9.109534 \times 10^{-31}$ 千克 0.5110034 兆电子伏
电子电荷	$e$	$1.6021892 \times 10^{-19}$ 库仑
气体常数	$R$	8.31441 焦耳 · 克分子 <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>
中子静止质量	$m_n$	$1.6749543 \times 10^{-27}$ 千克 1.0086650 原子质量单位 939.5731 兆电子伏
普朗克常数	$h$	$6.626176 \times 10^{-34}$ 焦耳 · 赫兹 <sup>-1</sup>
质子静止质量	$m_p$	$1.6726485 \times 10^{-27}$ 千克 938.2796 兆电子伏
光速	$c$	$2.99792458 \times 10^8$ 米 · 秒 <sup>-1</sup>

## 附录 2 换算因子

1 电子伏	$1.6021892 \times 10^{-19}$ 焦耳
1 兆电子伏	$10^6$ 电子伏
1 原子质量单位	$1.6605655 \times 10^{-27}$ 千克 931.5016 兆电子伏
1 焦耳	$10^7$ 尔格
1 瓦	1 焦耳/秒
1 日	86400 秒
1 平均年	365.25 日 8766 小时 $3.156 \times 10^7$ 秒
1 居里	$3.7000 \times 10^{10}$ 衰变/秒
1 K	$8.617065 \times 10^{-5}$ 电子伏

## 附录3 元素和一些分子的截面和核参数

(表中截面系中子能量为0.0253电子伏, 即速度为2200米/秒时的数值)

原子序数	元素或化合物	原子量或分子量	密度克/厘米 <sup>3</sup>	单位体积内的原子核数×10 <sup>-24</sup>	$1-\mu_0$	$\xi$	微观截面靶			宏观截面厘米 <sup>-1</sup>		
							$\sigma_a$	$\sigma_s$	$\sigma_t$	$\Sigma_a$	$\Sigma_s$	$\Sigma_t$
1	H	1.008	8.9*	5.3*	0.3386	1.000	0.33	38	38	1.7*	0.002	0.002
	H <sub>2</sub> O	18.016	1	0.0335*	0.676	0.948	0.66	103	103	0.022	3.45	3.45
	D <sub>2</sub> O	20.030	1.10	0.0331*	0.884	0.570	0.001	13.6	13.6	3.3*	0.449	0.449
2	He	4.003	17.8*	2.6*	0.8334	0.425	0.007	0.8	0.807	0.02*	2.1*	2.1*
3	Li	6.940	0.534	0.0463	0.9047	0.268	71	1.4	72.4	3.29	0.065	3.35
4	Be	9.013	1.85	0.1236	0.9259	0.209	0.010	7.0	7.01	124*	0.865	0.865
	BeO	25.02	3.025	0.0728*	0.939	0.173	0.010	6.8	6.8	73*	0.501	0.501
5	B	10.82	2.45	0.1364	0.9394	0.171	755	4	759	103	0.346	104
6	C	12.011	1.60	0.0803	0.9444	0.158	0.004	4.8	4.80	32*	0.385	0.385
7	N	14.008	0.0013	5.3*	0.9524	0.136	1.88	10	11.9	9.9*	50*	60*
8	O	16.000	0.0014	5.3*	0.9583	0.120	20*	4.2	4.2	0.000	21*	21*
9	F	19.00	0.0017	5.3*	0.9649	0.102	0.001	3.9	3.90	0.01*	20*	20*
10	Ne	20.183	0.0009	2.6*	0.9667	0.0968	<2.8	2.4	5.2	7.3*	6.2*	13.5*
11	Na	22.991	0.971	0.0254	0.9710	0.0845	0.525	4	4.53	0.013	0.102	0.115
12	Mg	24.32	1.74	0.0431	0.9722	0.0811	0.069	3.6	3.67	0.003	0.155	0.158
13	Al	26.98	2.699	0.0602	0.9754	0.0723	0.241	1.4	1.64	0.015	0.084	0.099
14	Si	28.09	2.42	0.0522	0.9762	0.0698	0.16	1.7	1.86	0.008	0.089	0.097
15	P	30.975	1.82	0.0354	0.9785	0.0632	0.20	5	5.20	0.007	0.177	0.184
16	S	32.066	2.07	0.0389	0.9792	0.0612	0.52	1.1	1.62	0.020	0.043	0.063
17	Cl	35.457	0.0032	5.3*	0.9810	0.0561	33.8	16	49.8	0.002	80*	0.003
18	A	39.944	0.0018	2.6*	0.9833	0.0492	0.66	1.5	2.16	1.7*	3.9	5.6*
19	K	39.100	0.87	0.0134	0.9829	0.0504	2.07	1.5	3.57	0.028	0.020	0.048
20	Ca	40.08	1.55	0.0233	0.9833	0.0492	0.44	3.0	3.44	0.010	0.070	0.080
21	Sc	44.96	2.5	0.0335	0.9852	0.0438	24	24	48	0.804	0.804	1.61
22	Ti	47.90	4.5	0.0566	0.9861	0.0411	5.8	4	9.8	0.328	0.226	0.555
23	V	50.95	5.96	0.0704	0.9869	0.0387	5	5	10.0	0.352	0.352	0.704
24	Cr	52.01	7.1	0.0822	0.9872	0.0385	3.1	3	6.1	0.255	0.247	0.501
25	Mn	54.94	7.2	0.0789	0.9878	0.0359	13.2	2.3	15.5	1.04	0.181	1.22
26	Fe	55.85	7.86	0.0848	0.9881	0.0353	2.62	11	13.6	0.222	0.933	1.15
27	Co	58.94	8.9	0.0910	0.9887	0.0335	38	7	45	3.46	0.637	4.10
28	Ni	58.71	8.90	0.0913	0.9887	0.0335	4.6	17.5	22.1	0.420	1.60	2.02
29	Cu	63.54	8.94	0.0848	0.9896	0.0309	3.85	7.2	11.05	0.0326	0.611	0.937
30	Zn	65.38	7.14	0.0658	0.9897	0.0304	1.10	3.6	4.70	0.072	0.237	0.309
31	Ga	69.72	5.91	0.0511	0.9925	0.0283	2.80	4	6.80	0.143	0.204	0.347
32	Ge	72.60	5.36	0.0445	0.9909	0.0271	2.45	3	5.45	0.109	0.134	0.243
33	As	74.91	5.73	0.0461	0.9911	0.0264	4.3	6	10.3	0.198	0.277	0.475
34	Se	78.96	4.8	0.0366	0.9916	0.0251	12.3	11	23.3	0.450	0.403	0.853
35	Br	79.916	3.12	0.0235	0.9917	0.0247	6.7	6	12.7	0.157	0.141	0.298
36	Kr	83.80	0.0037	2.6*	0.9921	0.0236	31	7.2	38.2	81*	19*	99*
37	Rb	85.48	1.53	0.0108	0.9922	0.0233	0.73	12	12.7	0.008	0.130	0.138
38	Sr	87.63	2.54	0.0175	0.9925	0.0226	1.21	10	11.2	0.021	0.175	0.195
39	Yt	88.92	5.51	0.0373	0.9925	0.0223	1.313	4.3	4.3	0.049	0.112	0.160

(续)

Z	元素	原子量	$\rho$	N	$1-\mu_0$	$\xi$	$\sigma_a$	$\sigma_s$	$\sigma_t$	$\Sigma_a$	$\Sigma_s$	$\Sigma_t$
40	Zr	91.22	6.4	0.0423	0.9927	0.0218	0.185	8	8.2	0.008	0.338	0.347
41	Nb	92.91	8.4	0.0545	0.9928	0.0214	1.16	5	6.16	0.063	0.273	0.336
42	Mo	95.95	10.2	0.0640	0.9931	0.0207	2.70	7	9.70	0.173	0.448	0.621
43	Tc	98.0	—	—	0.9932	0.0203	22	—	—	—	—	—
44	Ru	101.1	12.2	0.0727	0.9934	0.0197	2.56	6	8.56	0.186	0.436	0.622
45	Rh	102.91	12.5	0.0732	0.9935	0.0193	149	5	154	10.9	0.366	11.3
46	Pd	106.4	12.16	0.0689	0.9937	0.0187	8	3.6	11.6	0.551	0.248	0.799
47	Ag	107.88	10.5	0.0586	0.9938	0.0184	63	6	69	3.69	0.352	4.04
48	Cd	112.41	8.65	0.0464	0.9940	0.0178	2450	7	2457	114	0.325	114
49	In	114.82	7.28	0.0382	0.9942	0.0173	191	2.2	193	7.30	0.084	7.37
50	Sn	118.70	6.5	0.0330	0.9944	0.0167	0.625	4	4.6	0.021	0.132	0.152
51	Sb	121.76	6.69	0.0331	0.9945	0.0163	5.7	4.3	10.0	0.189	0.142	0.331
52	Te	127.61	6.24	0.0295	0.9948	0.0155	4.7	5	9.7	0.139	0.148	0.286
53	I	126.91	4.93	0.0234	0.9948	0.0157	7.0	3.6	10.6	0.164	0.084	0.248
54	Xe	131.30	0.0059	2.7*	0.9949	0.0152	35	4.3	39.3	95*	12*	0.001
55	Cs	132.91	1.873	0.0085	0.9950	0.0150	28	20	48	0.238	0.170	0.408
56	Ba	137.36	3.5	0.0154	0.9951	0.0145	1.2	8	9.2	0.018	0.123	0.142
57	La	138.92	6.19	0.0268	0.9952	0.0143	8.9	15	24	0.239	0.403	0.642
58	Ce	140.13	6.78	0.0292	0.9952	0.0142	0.73	9	9.7	0.021	0.263	0.283
59	Pr	140.92	6.78	0.0290	0.9953	0.0141	11.3	4	15.3	0.328	0.116	0.444
60	Nd	144.27	6.95	0.0290	0.9954	0.0138	46	16	62	1.33	0.464	1.79
61	Pm	145.0	—	—	0.9954	0.0137	60	—	—	—	—	—
62	Sm	150.35	7.7	0.0309	0.9956	0.0133	5600	5	5605	173	0.155	173
	Sm <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	348.70	7.43	0.0128*	0.974	0.076	16500	22.6	16500	211	0.289	211
63	Eu	152.0	5.22	0.0207	0.9956	0.0131	4300	8	4308	89.0	0.166	89.2
	Eu <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	352.00	7.42	0.0127*	0.978	0.063	8740	30.2	8770	111	0.383	111
64	Gd	167.26	7.95	0.0305	0.9958	0.0127	46000	—	—	1403	—	—
65	Tb	158.93	8.33	0.0316	0.9958	0.0125	46	—	—	1.45	—	—
66	Dy	162.51	8.56	0.0317	0.9959	0.0122	950	100	1050	30.1	3.17	33.3
	Dy <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	372.92	7.81	0.0126*	0.993	0.019	2200	214	2414	27.7	2.7	30.4
67	Ho	164.94	8.76	0.0320	0.9960	0.0121	65	—	—	2.08	—	—
68	Er	167.27	9.16	0.0330	0.9960	0.0119	173	15	188	5.71	0.495	6.20
69	Er	168.94	9.35	0.0333	0.9961	0.0118	127	7	134	4.23	0.233	4.46
70	Yb	173.04	7.01	0.0244	0.9961	0.0115	37	12	49	0.903	0.293	1.20
71	Lu	174.99	9.74	0.0335	0.9962	0.0114	112	—	—	3.75	—	—
72	Hf	178.5	13.3	0.0449	0.9963	0.0112	105	8	113	4.71	0.0359	5.07
73	Ta	180.95	16.6	0.0553	0.9963	0.0110	21	5	26	1.16	0.277	1.44
74	W	183.86	19.3	0.0632	0.9964	0.0108	19.2	5	24.2	1.21	0.316	1.53
75	Re	186.22	20.53	0.0664	0.9964	0.0107	86	14	100	5.71	0.930	6.64
76	Os	190.2	22.48	0.0712	0.9965	0.0105	15.3	11	26.3	1.09	0.783	1.87
77	Ir	192.2	22.42	0.0703	0.9965	0.0104	440	—	—	30.9	—	—
78	Pt	195.09	21.37	0.0660	0.9966	0.0102	8.8	10	18.8	0.581	0.660	1.24
79	Au	197.0	19.32	0.0591	0.9966	0.0101	98.8	9.3	107.3	5.79	0.550	6.34
80	Hg	200.61	13.55	0.0407	0.9967	0.0099	380	20	400	15.5	0.814	16.3
81	Tl	204.39	11.85	0.0349	0.9967	0.0098	3.4	14	17.4	0.119	0.489	0.607
82	Pb	207.21	11.35	0.0330	0.9968	0.0096	0.170	11	11.2	0.006	0.363	0.369
83	Bi	209.0	9.747	0.0281	0.9968	0.0095	0.034	9	9	0.001	0.253	0.256

(续)

Z	元素	原子量	$\rho$	N	$1-\mu_0$	$\xi$	$\sigma_a$	$\sigma_s$	$\sigma_t$	$\Sigma_a$	$\Sigma_s$	$\Sigma_t$
84	Po	210.0	9.24	0.0265	0.9968	0.0095	—	—	—	—	—	—
85	At	211.0	—	—	0.9968	0.0094	—	—	—	—	—	—
86	Rn	222.0	0.0097	2.6*	0.9970	0.0090	0.7	—	—	—	—	—
87	Fr	223.0	—	—	0.9980	0.0089	—	—	—	—	—	—
88	Ra	226.05	5	0.0133	0.9971	0.0088	20	—	—	0.266	—	—
89	Ac	227.0	—	—	0.9971	0.0088	510	—	—	—	—	—
90	Th	232.05	11.3	0.0293	0.9971	0.0086	7.56	12.6	20.2	0.222	0.369	0.592
91	Pa	231.0	15.4	0.0402	0.9971	0.0086	200	—	—	8.04	—	—
92	U	238.07	18.9	0.04783	0.9972	0.0084	7.68	8.3	16.0	0.367	0.397	0.765
	UO <sub>2</sub>	270.07	10	0.0223*	0.9887	0.036	7.6	16.7	24.3	0.169	0.372	0.542
93	Np	237.0	—	—	0.9972	0.0084	170	—	—	—	—	—
94	Pu	239.0	19.74	0.0498	0.9972	0.0083	1026	9.6	1036	51.1	0.478	51.6
95	Am	242.0	—	—	0.9973	0.0082	8.000	—	—	—	—	—

\* 已乘 10<sup>5</sup>。\*\* 分子/厘米<sup>3</sup>。

## 附录4 非 1/v 因子

T, °C	Cd	In	<sup>135</sup> Xe	<sup>149</sup> Sm	<sup>233</sup> U	<sup>235</sup> U	<sup>238</sup> U	<sup>239</sup> Pu			
	$g_a$	$g_a$	$g_a$	$g_a$	$g_a$	$g_f$	$g_a$	$g_f$	$g_a$	$g_a$	$g_f$
20	1.3203	1.0192	1.1581	1.6170	0.9983	1.0003	0.9780	0.9759	1.0017	1.0723	1.0487
100	1.5990	1.0350	1.2103	1.8874	0.9972	1.0011	0.9610	0.9581	1.0031	1.1611	1.1150
200	1.9631	1.0558	1.2360	2.0903	0.9973	1.0025	0.9457	0.9411	1.0049	1.3388	1.2528
400	2.5589	1.1011	1.1864	2.1854	1.0010	1.0068	0.9294	0.9208	1.0085	1.8905	1.6904
600	2.9031	1.1522	1.0914	2.0852	1.0072	1.0128	0.9229	0.9108	1.0122	2.5321	2.2037
800	3.0455	1.2123	0.9887	1.9246	1.0146	1.0201	0.9182	0.9036	1.0159	3.1006	2.6595
1000	3.0599	1.2915	0.8858	1.7568	1.0226	1.0284	0.9118	0.8956	1.0198	3.5353	3.0079



附录5  $\psi(\zeta, x)$  和  $\chi(\zeta, x)$  的表

$\Psi$ 函数表

$\zeta$	$x$	0	0.5	1	2	4	6	8	10	20	40
0.05		0.04309	0.04308	0.04306	0.04298	0.04267	0.04216	0.04145	0.04055	0.03380	0.01639
0.10		0.08384	0.08379	0.08364	0.08305	0.08073	0.07700	0.07208	0.06623	0.03291	0.00262
0.15		0.12239	0.12223	0.12176	0.11989	0.11268	0.10165	0.08805	0.07328	0.01695	0.00080
0.20		0.15889	0.15854	0.15748	0.15331	0.13777	0.11540	0.09027	0.06614	0.00713	0.00070
0.25		0.19317	0.19281	0.19086	0.18324	0.15584	0.11934	0.08277	0.05253	0.00394	0.00067
0.30		0.22624	0.22516	0.22197	0.20968	0.16729	0.11571	0.07042	0.03880	0.00314	0.00065
0.35		0.25731	0.25569	0.25091	0.23271	0.17288	0.10713	0.05724	0.02815	0.00289	0.00064
0.40		0.28679	0.28450	0.27776	0.25245	0.17359	0.09604	0.04566	0.02109	0.00277	0.00064
0.45		0.31477	0.31168	0.30261	0.26909	0.17052	0.08439	0.03670	0.01687	0.00270	0.00064
0.50		0.34135	0.33733	0.32557	0.28286	0.16469	0.07346	0.03025	0.01446	0.00266	0.00063

$\chi$ 函数表

$\zeta$	$x$	0	0.5	1	2	4	6	8	10	20	40
0.05	0	0.00120	0.00239	0.00478	0.00951	0.01415	0.01865	0.02297	0.04076	0.05221	
0.10	0	0.00458	0.00915	0.01821	0.03573	0.05192	0.06626	0.07833	0.10132	0.05957	
0.15	0	0.00986	0.01968	0.03894	0.07470	0.10460	0.12690	0.14096	0.12219	0.05341	
0.20	0	0.01680	0.03344	0.06567	0.12219	0.16295	0.18538	0.19091	0.11754	0.05170	
0.25	0	0.02515	0.04994	0.09714	0.17113	0.21909	0.23168	0.22043	0.11052	0.05103	
0.30	0	0.03470	0.06873	0.13219	0.22694	0.26737	0.26227	0.23199	0.10650	0.05069	
0.35	0	0.04529	0.08940	0.16976	0.27773	0.30561	0.27850	0.23236	0.10437	0.05049	
0.40	0	0.05674	0.11160	0.20890	0.32442	0.33286	0.28419	0.22782	0.10316	0.05037	
0.45	0	0.06890	0.13498	0.24880	0.36563	0.35033	0.28351	0.22223	0.10238	0.05028	
0.50	0	0.08165	0.15927	0.28875	0.40075	0.35998	0.27979	0.21729	0.10185	0.05022	

附录6  $J(\zeta, \beta)$  的表 ( $\zeta=0.1-1.0; \beta=2' \times 10^{-5}$ )

$J$	$J(\zeta, \beta)$									
	$\zeta=0.1$	$\zeta=0.2$	$\zeta=0.3$	$\zeta=0.4$	$\zeta=0.5$	$\zeta=0.6$	$\zeta=0.7$	$\zeta=0.8$	$\zeta=0.9$	$\zeta=1.0$
0	1.979(2*)	1.970(2)	4.969(2)	4.968(2)	4.968(2)	4.968(2)	4.967(2)	4.967(2)	4.967(2)	4.967(2)
1	3.532	3.517	3.514	3.513	3.513	3.513	3.513	3.513	3.513	3.513
2	2.514	2.491	2.487	2.485	2.485	2.484	2.484	2.484	2.484	2.484
3	1.801	1.767	1.761	1.759	1.758	1.757	1.757	1.757	1.757	1.757
4	1.307	1.257	1.248	1.245	1.244	1.243	1.243	1.243	1.242	1.242
5	9.667(1)	8.993(1)	8.872(1)	8.831(1)	8.812(1)	8.802(1)	8.796(1)	8.792(1)	8.790(1)	8.788(1)
6	7.355	6.501	6.335	6.278	6.252	6.238	6.230	6.225	6.221	6.218
7	5.773	4.777	4.562	4.485	4.450	4.430	4.419	4.412	4.407	4.403
8	4.617	3.589	3.328	3.230	3.183	3.158	3.143	3.133	3.126	3.121
9	3.781	2.759	2.471	2.354	2.297	2.265	2.245	2.232	2.223	2.217
10	3.045	2.153	1.867	1.741	1.675	1.638	1.614	1.598	1.587	1.579
11	2.367	1.676	1.423	1.301	1.235	1.194	1.168	1.151	1.138	1.129
12	1.730	1.268	1.074	9.718(0)	9.119(0)	8.739(0)	8.484(0)	8.304(0)	8.174(0)	8.077(0)

(续)

j	J (ξ, β)									
	ξ=0.1	ξ=0.2	ξ=0.3	ξ=0.4	ξ=0.5	ξ=0.6	ξ=0.7	ξ=0.8	ξ=0.9	ξ=1.0
13	1.164	9.081(0)	7.815(0)	7.087	6.629	6.322	6.107	5.950	5.833	5.744
14	7.172(0)	6.014	5.342	4.914	4.624	4.419	4.268	4.154	4.066	3.997
15	4.088	3.658	3.371	3.169	3.022	2.911	2.826	2.759	2.706	2.663
16	2.204	2.067	1.966	1.889	1.829	1.781	1.743	1.712	1.687	1.666
17	1.148	1.109	1.078	1.053	1.033	1.016	1.002	9.904(-1)	9.805(-1)	9.722(-1)
18	5.862(-1)	5.757(-1)	5.671(-1)	5.599(-1)	5.539(-1)	5.488(-1)	5.445(-1)	5.408	5.376	5.348
19	2.963	2.936	2.913	2.894	2.877	2.863	2.851	2.840	2.831	2.823
20	1.490	1.483	1.477	1.472	1.468	1.464	1.461	1.458	1.455	1.453
21	7.468(-2)	7.452(-2)	7.437(-2)	7.424(-2)	7.413(-2)	7.403(-2)	7.395(-2)	7.388(-2)	7.381(-2)	7.375(-2)
22	3.739	3.735	3.732	3.728	3.726	3.723	3.721	3.719	3.718	3.716
23	1.871	1.870	1.869	1.868	1.868	1.867	1.867	1.866	1.866	1.865
24	9.358(-3)	9.356(-3)	9.355(-3)	9.352(-3)	9.350(-3)	9.349(-3)	9.348(-3)	9.346(-3)	9.345(-3)	9.344(-3)
25	4.680	4.680	4.679	4.679	4.678	4.678	4.678	4.677	4.677	4.677
26	2.340	2.340	2.340	2.340	2.340	2.340	2.340	2.340	2.340	2.340
27	1.170	1.170	1.170	1.170	1.170	1.170	1.170	1.170	1.170	1.170
28	5.851(-4)	5.851(-4)	5.851(-4)	5.851(-4)	5.851(-4)	5.851(-4)	5.851(-4)	5.851(-4)	5.851(-4)	5.851(-4)
29	2.925	2.926	2.926	2.926	2.926	2.926	2.926	2.926	2.926	2.926
30	1.463	1.463	1.463	1.463	1.463	1.463	1.463	1.463	1.463	1.463
31	7.314(-5)	7.314(-5)	7.315(-5)	7.315(-5)	7.315(-5)	7.315(-5)	7.314(-5)	7.314(-5)	7.314(-5)	7.314(-5)

\* 括号里的数表示10的幂次。

## 附录7 δ函数

δ函数定义如下:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \quad (\text{A-1})$$

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{当 } a < 0 < b \\ 0, & \text{其它区域} \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

如果函数  $f(x)$  在  $x=0$  处不是奇异的, 则定义

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (\text{A-3})$$

如果函数  $f(x)$  在  $x=0$  处是奇异的, 则积分不存在。

通过变量代换可证明,

$$\delta(x-x') = 0, \quad x \neq x' \quad (\text{A-4})$$

$$\int_a^b \delta(x-x') dx = \begin{cases} 1, & \text{当 } a < x' < b \\ 0, & \text{其它区域} \end{cases} \quad (\text{A-5})$$

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x')dx = \begin{cases} f(x'), & \text{当 } a < x' < b \\ 0, & \text{其它区域} \end{cases} \quad (\text{A-6})$$

$\delta$ 函数的  $n$  阶导数定义为

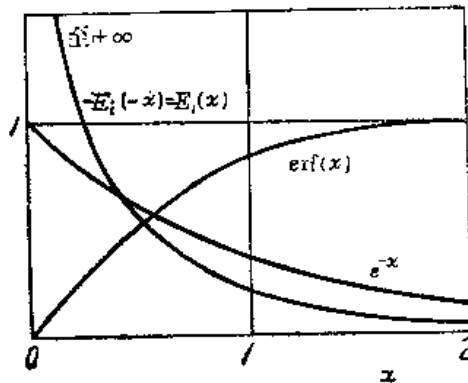
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x-a)f(x)dx = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f|_{x=a} \quad (\text{A-7})$$

### 附录 8 指数积分函数

定义

$$-E_1(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du, \quad x > 0 \quad (\text{A-8})$$

$-E_1(-x)$  称之为指数积分函数, 如图附-1所示, 在  $x=0$  处,  $-E_1(-x)$  是奇异的, 但随后比  $e^{-x}$  更快地衰减至零。



图附-1 指数函数、指数积分函数和误差函数

### 附录 9 $E_n(x)$ 函数

$E_n(x)$  函数是指数积分函数的推广, 它定义为

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-x\mu} \mu^{-n} d\mu \quad (\text{A-9})$$

式中  $n$  为正整数。

上式亦可写成

$$E_n(x) = \int_0^1 e^{-x/\mu} \mu^{n-2} d\mu = x^{n-1} \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-n} du \quad (\text{A-10})$$

当  $n = 0$  时, 积分可积出, 结果为

$$E_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad (\text{A-11})$$

当  $n = 1$  时,

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = -E_1(-x) \quad (\text{A-12})$$

$E_n(x)$  满足下列关系:

$$E_n(x) = \int_x^{\infty} E_{n-1}(x') dx' \quad (\text{A-13})$$

$$\frac{dE_n(x)}{dx} = -E_{n-1}(x) \quad (\text{A-14})$$

$$E_n(x) = \frac{1}{n-1} [e^{-x} - xE_{n-1}(x)], \quad n > 1 \quad (\text{A-15})$$

由此可见, 所有  $E_n(x)$  函数均可从  $E_1(x)$  求得。

## 附录10 误差函数 erf(x)

误差函数 erf(x) 定义为

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (\text{A-16})$$

如图附-1所示, 当  $x$  从 0 增至  $+\infty$ , 则 erf(x) 从 0 单调递增至 1。它可以用级数表示:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right) \quad (\text{A-17})$$

对于大的  $x$  值

$$\text{erf}(x) \approx 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \dots \right) \quad (\text{A-18})$$

## 附录11 贝塞尔函数

### (1) 贝塞尔函数

贝塞尔方程为

$$x^2 f'' + x f' + (x^2 - n^2) f = 0 \quad (\text{A-19})$$

若  $n$  为整数或零, 它的两个解为

$$f(x) = \begin{cases} J_n(x) \\ Y_n(x) \end{cases} \quad (\text{A-20})$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (\text{A-21})$$

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \quad (\text{A-22})$$

函数  $J_n(x)$  和  $Y_n(x)$  分别称之为第一类和第二类贝塞尔函数。 $J_0(x)$  和  $Y_0(x)$  如图附-2 所示。

**(2) 修正贝塞尔函数**

修正贝塞尔方程为

$$x^2 f'' + x f' - (x^2 + n^2) f = 0 \quad (\text{A-23})$$

若  $n$  为整数或零，它的两个解为

$$f(x) = \begin{cases} I_n(x) \\ K_n(x) \end{cases} \quad (\text{A-24})$$

其中

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = i^n J_n(-ix) \quad (\text{A-25})$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [J_n(ix) + i Y_n(ix)] \quad (\text{A-26})$$

函数  $I_n(x)$  和  $K_n(x)$  分别称之为第一类和第二类修正贝塞尔函数。 $I_0(x)$  和  $K_0(x)$  如图附-2 所示。

**(3) 递推关系式及微分、积分关系式**

$$x J'_n = n J_n - x J_{n+1} = -n J_n + x J_{n-1} \quad (\text{A-27})$$

$$2n J_n = x J_{n-1} + x J_{n+1} \quad (\text{A-28})$$

$$x I'_n = n I_n + x I_{n+1} = -n I_n + x I_{n-1} \quad (\text{A-29})$$

$$x K'_n = n K_n - x K_{n+1} = -n K_n - x K_{n-1} \quad (\text{A-30})$$

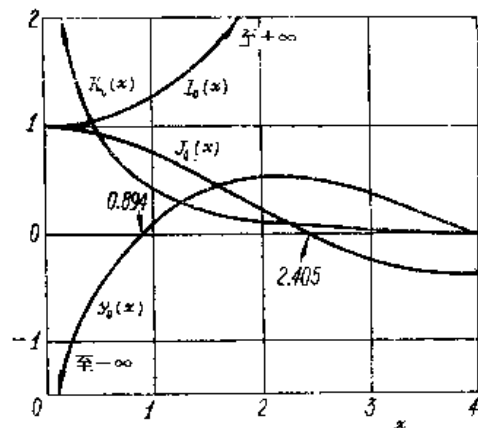
$$\begin{aligned} J'_0 &= -J_1, & Y'_0 &= -Y_1, \\ I'_0 &= I_1, & K'_0 &= -K_1. \end{aligned} \quad (\text{A-31})$$

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n \quad (\text{A-32})$$

$$\int x^n Y_{n-1}(x) dx = x^n Y_n \quad (\text{A-33})$$

$$\int x^n I_{n-1}(x) dx = x^n I_n \quad (\text{A-34})$$

$$\int x^n K_{n-1}(x) dx = -x^n K_n \quad (\text{A-35})$$



图附-2 零阶普通和修正贝塞尔函数

## (4) 近似表达式

对于小的  $x$  值,

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots \quad (\text{A-36})$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \dots \quad (\text{A-37})$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \frac{x^2}{4} + \dots \right] \quad \gamma = 0.577216 \quad (\text{A-38})$$

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_1(x) - \frac{1}{x} - \frac{x}{4} + \dots \right] \quad (\text{A-39})$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \dots \quad (\text{A-40})$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \dots \quad (\text{A-41})$$

$$K_0(x) = - \left( \gamma + \ln \frac{x}{2} \right) I_0(x) + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{128} + \dots \quad (\text{A-42})$$

$$K_1(x) = \left( \gamma + \ln \frac{x}{2} \right) I_1(x) + \frac{1}{x} - \frac{x}{4} - \frac{5x^3}{64} + \dots \quad (\text{A-43})$$

对于大的  $x$  值

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 + \frac{1}{8x} + \dots \right) \quad (\text{A-44})$$

$$I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 - \frac{3}{8x} + \dots \right) \quad (\text{A-45})$$

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 - \frac{1}{8x} + \dots \right) \quad (\text{A-46})$$

$$K_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 + \frac{3}{8x} + \dots \right) \quad (\text{A-47})$$

$$\frac{I_1(x)}{I_0(x)} \approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \quad (\text{A-48})$$

$$\frac{K_1(x)}{K_0(x)} \approx 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \quad (\text{A-49})$$

## 附录12 勒让特多项式和球谐函数

(1) 勒让特多项式  $P_n(x)$ 勒让特多项式  $P_n(x)$  定义为

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A-50})$$

例如,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

勒让特多项式满足正交性:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (\text{A-51})$$

或写成

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2\delta_{m,n}}{2n+1} \quad (\text{A-52})$$

式中  $\delta_{m,n}$  称作克罗尼克尔符号, 当  $m = n$  时  $\delta_{m,n} = 1$ ;  $m \neq n$  时  $\delta_{m,n} = 0$ 。

勒让特多项式满足下列递推关系:

$$xP_n(x) = \frac{1}{2n+1} [(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)] \quad (\text{A-53})$$

$$(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = n(xP_n - P_{n-1}) \quad (\text{A-54})$$

(2) 伴随勒让特多项式  $P_n^m(x)$ 伴随勒让特多项式  $P_n^m(x)$  定义为<sup>1)</sup>

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (\text{A-55})$$

例如,

$$P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2} \quad \text{或} \quad P_1^1(\cos\theta) = -\sin\theta$$

$$P_2^1(x) = -3(1-x^2)^{1/2} x \quad P_2^1(\cos\theta) = -3\sin\theta\cos\theta \quad (\text{A-56})$$

<sup>1)</sup> 这里对  $P_n^m(x)$  的相位选择为  $(-1)^m$ , 但有的文献中取为 1, 应用时应加以注意。

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) \quad P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$$

$P_0^0(x) = P_0(x)$ , 而  $P_n(x)$  由 (A-50) 式定义。

将 (A-50) 式代入 (A-55) 式得

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1-x^2)^{n-m} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (\text{A-57})$$

伴随勒让特多项式具有正交性:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n, n'} \quad (\text{A-58})$$

它满足下列递推关系:

$$xP_n^m(x) = \frac{1}{2n+1} [(n-m+1)P_{n+1}^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x)] \quad (\text{A-59})$$

$$(x^2-1) \frac{dP_n^m(x)}{dx} = nxP_n^m(x) - (n+m)P_{n-1}^m(x) \quad (\text{A-60})$$

### (3) 球谐函数 $Y_{n,m}(\theta, \varphi)$

$n$  阶的  $2n+1$  个球谐函数 (球函数)  $Y_{n,m}(\Omega)$  定义为

$$Y_{n,m}(\Omega) = Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_n^{|m|}(\cos\theta) \sin^{|m|} \varphi & m = -1, -2, \dots, -n \\ P_n^{|m|}(\cos\theta) \cos^m \varphi & m = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{A-61})$$

其中  $P_n^m(\cos\theta)$  为伴随勒让特多项式, 由 (A-55) 式决定。  $Y_{n,m}(\Omega)$  的正交性:

$$\int_{\Omega} Y_{n,m}(\Omega) Y_{n',m'}(\Omega) d\Omega = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \neq n' \text{ 或 } m \neq m' \\ \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} (1+\delta_{0,m}) & \text{当 } n = n', m = m' \text{ 时} \end{cases} \quad (\text{A-62})$$

(A-61) 式中用指数函数代替三角函数, 便可得到指数函数形式的归一化球谐函数:

$$Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (\text{A-63})$$

它的正交性可表示为:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{n,m}(\theta, \varphi) Y_{n',m'}^*(\theta, \varphi) d\cos\theta d\varphi = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}, \quad (\text{A-64})$$

式中  $Y_{n,m}^*$  是  $Y_{n,m}$  的复共轭, 它满足下列关系:

$$Y_{n,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{n,m}^*(\theta, \varphi) \quad (\text{A-65})$$

它满足加性定理:

设单位球上有两点  $P$  和  $P'$ , 它的坐标分别为  $(\theta, \varphi)$  和  $(\theta', \varphi')$ , 见图附-3, 令向量  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{P}'$  之间的夹角为  $\gamma$



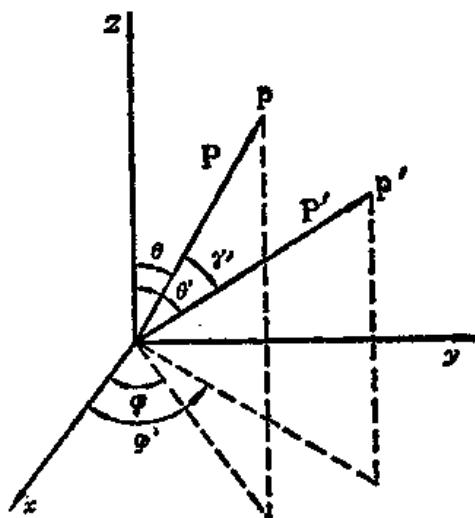
$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi') \quad (\text{A-66})$$

加性定理可以表成:

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{n,m}(\theta', \varphi') Y_{n,m}(\theta, \varphi) \quad (\text{A-67})$$

将 (A-63) 式, 代入得

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') \cos[m(\varphi - \varphi')] \quad (\text{A-68})$$



图附-3 证明球谐函数加性定理用的坐标

### 附录13 积分变换

#### (1) 傅里叶变换及其性质

I、函数  $f(x)$  的傅里叶变换表示为

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx \quad (\text{A-69})$$

且傅里叶变换的逆变换即等于  $f(x)$ , 它表示为

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\lambda)] = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (\text{A-70})$$

#### II、傅里叶变换的基本性质

(i) 傅里叶变换是线性变换, 即

$$\mathcal{F}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{F}[f_1] + \beta \mathcal{F}[f_2] \quad (\text{A-71})$$

其中  $\alpha$ 、 $\beta$  均为常数。

(ii) 假设函数  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$  都逐段光滑, 且在  $(-\infty, +\infty)$  内绝对可积, 则函数

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt \quad (\text{A-72})$$

称为  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  的卷积, 可简记为  $f_1 * f_2$ 。而函数  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  的卷积  $f_1(x) * f_2(x)$  的傅里叶变换等于  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  的傅里叶变换的乘积, 即

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}[f_1] \times \mathcal{F}[f_2] \quad (\text{A-73})$$

(iii)  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  相乘以后的傅里叶变换等于  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  分别进行傅里叶变换以后的卷积乘以  $1/(2\pi)$ , 即

$$F[f_1 \times f_2] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f_1] * \mathcal{F}[f_2] \quad (\text{A-74})$$

$$(\text{iv}) \quad F[f'(x)] = -i\lambda \mathcal{F}[f(x)] \quad (\text{A-75})$$

$$(\text{v}) \quad F[ixf(x)] = \frac{d}{d\lambda} \mathcal{F}[f] \quad (\text{A-76})$$

## (2) 拉氏变换及其基本性质

I、我们称函数

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (s > 0) \quad (\text{A-77})$$

为函数  $f(t)$  的拉氏变换, 并表示为

$$L[f(t)] = F(s)$$

且  $F(s)$  的逆变换即等于  $f(t)$ , 它表示为

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds \quad (\text{A-78})$$

II、拉氏变换的基本性质

(i) 拉氏变换是线性变换, 即

$$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha L[f_1] + \beta L[f_2] \quad (\text{A-79})$$

其中  $\alpha$ 、 $\beta$  为常数。

(ii) 第一位移性质, 即

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a) \quad (\text{A-80})$$

(iii) 相似性质

$$\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right) \quad (\text{A-81})$$

其中  $c$  是一个大于零的常数。

$$(\text{iv}) \quad \mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad (\text{A-82})$$

$$(v) \quad \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (\text{A-83})$$

(vi) 延迟性质, 即

$$L[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s) \quad (\tau > 0) \quad (\text{A-84})$$

$$(vii) \quad \int_0^{\infty} F(s) ds = L\left[\frac{f(t)}{t}\right] \quad (\text{A-85})$$

(viii) 若  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  都是可以进行拉氏变换的函数, 则  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  的卷积

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (\text{A-86})$$

也是可以进行拉氏变换的, 且

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= L[f_1(t)] \times L[f_2(t)] \\ &= F_1(s) \times F_2(s) \end{aligned} \quad (\text{A-87})$$



高等 教育 教材



# 核反应堆物理分析

下 册



谢仲生 主 编 罗经宇 审 校



原子能出版社

## 第九章 中子输运方程

反应堆内的物理过程以及它的许多核的和工程方面的基本特性，都和中子群体在系统内的运动以及芯部内中子密度的空间-能量分布有关。反应堆物理分析就是研究中子群体在反应堆内的运动过程的，它的主要课题之一就是研究求得中子密度分布函数所用的各种分析方法和模型。在第二章中我们介绍了单速扩散理论及其应用，那是最简单的计算模型。在这种模型中，假设中子通量是介质内空间坐标的缓慢变化函数，或中子速度的方向是各向同性或近于各向同性的[见图9-1中(1)]。在上述条件下，所得到的仅仅是近似的结果。这时在中子密度(或中子通量)的自变量中并不包括中子的运动方向这一变量。

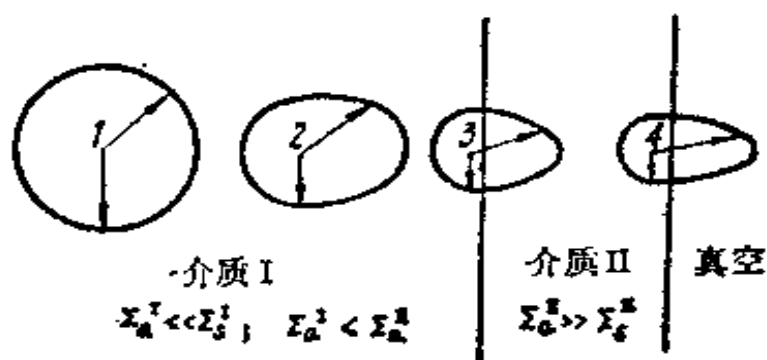


图 9-1 中子密度运动方向分布的角径图

但是，实际上中子运动的方向往往是各向异性的。例如图9-1所示，在反应堆边界上没有入射中子源，同时，由于泄漏的缘故，因而在靠近边界的点上，中子运动方向的角分布如图中所示；多数中子的运动方向是朝向反应堆边界的方向，图中用矢径的长度表示中子沿该方向运动的概率大小。因而在一些情况下(见第二章第1.2节)扩散理论不能适用(或者它的误差比较大)。在这些

情况下，为了研究中子在介质内的运动就必须借助于更精确的中子输运理论。它是研究中子在散射、吸收和增殖介质中运动的最精确的方法。下面就会看到，前面所述的单速扩散理论仅仅是它的一种近似模型。

本章将首先讨论中子输运方程的建立，然后介绍它的一些常用近似解法。

## 1. 中子角通量和中子流密度

在输运理论中，为了完整地描述中子群体在介质内的运动，除应用空间坐标  $r$  和中子能量  $E$  (或速度大小) 作自变量外，还必须应用中子的运动方向  $\Omega$  作为自变量。下面就引进自变量  $\Omega$  以后对中子密度、中子通量等定义作一些相应的扩充。

### 1.1 中子角密度和角通量

中子在空间的位置可以通过矢径  $r$  来表示(图9-2)

$$r = xi + yj + zk,$$

而体积元  $dr = dx dy dz$ ，中子运动的速度可以用矢量  $V$  来表示

$$V = v\Omega,$$

其中  $v = |V|$  是速率，即速度的大小，它与中子动能  $E$  的关系为  $E = mv^2/2$ ，其中  $m$  为中子的质量； $\Omega$  是运动方向的单位矢量，它的模等于 1，它的方向在极坐标中可通过极角  $\theta$  和辐角  $\varphi$  来表示(见图 9-2)。在直角坐标系中  $\Omega$  可以表为

$$\Omega = \Omega_x i + \Omega_y j + \Omega_z k, \quad (9-1)$$

而

$$\Omega_x = \sin\theta \cos\varphi, \quad \Omega_y = \sin\theta \sin\varphi, \quad \Omega_z = \cos\theta, \quad (9-2)$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (9-3)$$

因而，要对中子群体作最完整、最普遍的描述，就必须给出中子群体按空间  $r$  (三个坐标参数)、能量  $E$  (速度大小)、运动方向  $\Omega$  和时间  $t$  的分布。为此，我们引进中子密度分布函数的最普遍

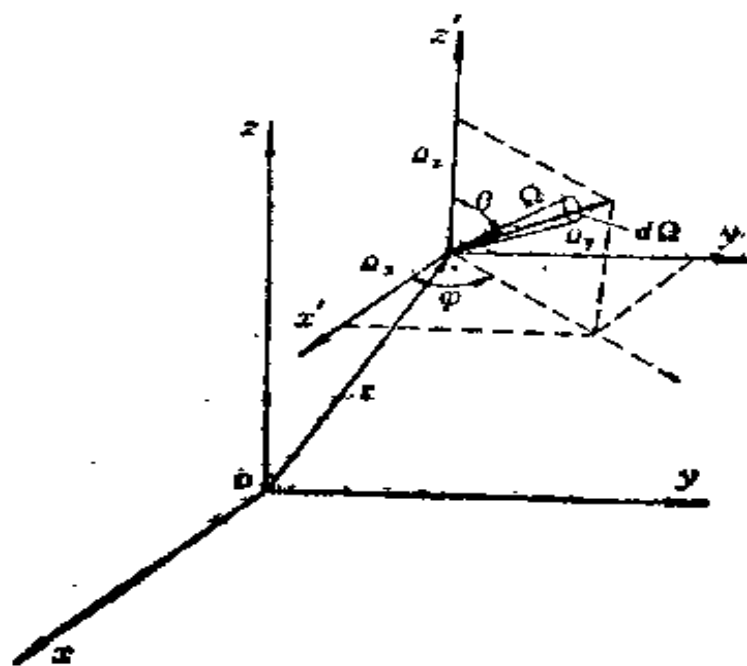


图 9-2 向量  $r$  和  $\Omega$  的表示

的描述——中子角密度  $n(r, E, \Omega, t)$ 。它的定义是：在  $t$  时刻，在  $r$  处的单位体积内能量等于  $E$  的单位能量间隔内具有运动方向为  $\Omega$  的单位立体角内的中子数目。因而，

$$n(r, E, \Omega, t) dr dE d\Omega$$

= [  $t$  时刻在  $r$  处  $dr$  体积元内，能量在  $E$  与  $E + dE$  之间，而运动方向在  $\Omega$  方向上的  $d\Omega$  立体角元内的中子数目 ]。 (9-4)

把中子角密度对所有立体角方向积分，便得到以前所定义的与能量相关的中子密度  $n(r, E, t)$

$$n(r, E, t) = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega, t) d\Omega, \quad (9-5)$$

$n(r, E, t) dr dE$  便是  $t$  时刻在  $r$  处  $dr$  体积元内，能量在  $E$  与  $E + dE$  之间的中子总数目(包括所有运动方向在内)。

根据(1-36)式定义，对应于中子角密度可以定义中子角通量  $\phi(r, E, \Omega, t)$  为<sup>1)</sup>

$$\phi(r, E, \Omega, t)$$

1) 这样定义的中子角通量是一标量，因而有的书中称  $\phi(r, E, \Omega, t)$  为标量角通量，而定义  $\phi(r, E, \Omega, t) = v \cdot n(r, E, \Omega, t)$  为矢量角通量。

$$=vn(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t). \quad (9-6)$$

这样,  $\phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)d\mathbf{r}dEd\boldsymbol{\Omega}$  便等于(9-4)式所描述的中子在单位时间内所走过的径迹总长度。 $\phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ 也可以理解为在单位时间内, 穿过  $\mathbf{r}$  处垂直于  $\boldsymbol{\Omega}$  的单位面积、能量等于  $E$  的单位能量间隔内且运动方向为  $\boldsymbol{\Omega}$  的单位立体角内的中子数目(图9-3)。

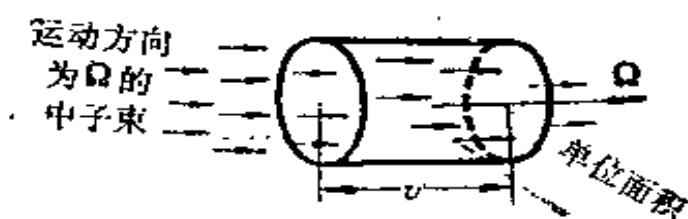


图 9-3 中子角通量示意图

同样地对应于(9-5)式可以定义与能量相关的中子通量  $\phi(\mathbf{r}, E, t)$  为

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, E, t) &= vn(\mathbf{r}, E, t) \\ &= \int_{4\pi} \phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) d\boldsymbol{\Omega}. \end{aligned} \quad (9-7)$$

因而中子通量  $\phi(\mathbf{r}, E, t)$  可以看作是  $\mathbf{r}$  处所有不同的  $\boldsymbol{\Omega}$  方向的无限多个微分中子束  $\phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$  的强度的总和。有时我们把与  $\boldsymbol{\Omega}$  无关的  $n(\mathbf{r}, E, t)$  和  $\phi(\mathbf{r}, E, t)$  分别叫做中子总密度和中子总通量, 它们就是第一章中所定义的中子密度和中子通量。

## 1.2 中子流密度

在第二章中我们已经引进了中子流密度的定义。这里则设法把它和中子角密度和角通量联系起来。考虑在  $\mathbf{r}$  点处的小面积元  $dS$ , 设其单位法线矢量为  $\mathbf{n}$ , 如图 9-4 所示。运动着的中子从各个方向连续不断地穿过  $dS$ 。现在暂时只考虑稳态情况下能量等于  $E$  的那一部分中子; 显然, 单位时间内穿过  $dS$  的, 运动方向为  $\boldsymbol{\Omega}$  的中子数目等于  $n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})v|\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}|dS$ 。我们规定  $\mathbf{n}$  的正方向一边为“+”侧, 另一边为“-”侧, 同时假定每秒自“-”侧



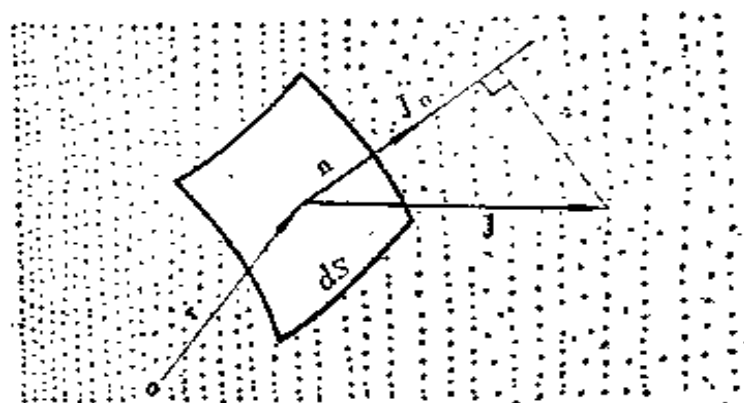


图 9-4 中子流密度  $\mathbf{J}$

沿各个方向穿过  $dS$  流向“+”侧的中子总数为  $J_n^+ dS$ ，反之为  $J_n^- dS$ ，那么有

$$\begin{aligned} J_n^+ dS &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| n(\mathbf{r}, E, \Omega) v d\Omega \\ &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega, \end{aligned} \quad (9-8)$$

$$\begin{aligned} J_n^- dS &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| n(\mathbf{r}, E, \Omega) v d\Omega \\ &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega, \end{aligned} \quad (9-9)$$

式中积分域  $(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0$  (或  $< 0$ ) 表示只对  $(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0$  (或  $< 0$ ) 的那些  $\Omega$  (即半个球) 进行积分。 $J_n^+$  和  $J_n^-$  分别叫做  $\mathbf{r}$  处沿  $\mathbf{n}$  的正和负的方向的分中子流密度。如果中子角通量是各向同性的，那么  $J_n^+ = J_n^-$ ，也就是说每秒穿过  $dS$  的净中子数或净中子流等于零。在一般情况下， $J_n^+ \neq J_n^-$ ，则每秒穿过  $dS$  的净中子数或净中子流  $J_n(\mathbf{r}, E) dS$  便等于

$$J_n(\mathbf{r}, E) dS = (J_n^+ - J_n^-) dS = dS \int_{4\pi} \Omega \cdot \mathbf{n} \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega.$$

上式可以改写成

$$J_n(\mathbf{r}, E) dS = dS \mathbf{n} \cdot \int_{4\pi} \Omega \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) dS,$$

其中

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = \int_{4\pi} \Omega \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega. \quad (9-11)$$

因而 
$$J_n(\mathbf{r}, E) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) \cdot \mathbf{n} \quad (9-12)$$

把(9-12)式和(2-10)式进行比较便知, 矢量 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$ 就是前面定义的中子流密度。它在 $\mathbf{n}$ 方向的投影(或分量) $J_n(\mathbf{r}, E)$ 就等于单位时间内穿过垂直于 $\mathbf{n}$ 的单位面积、单位能量间隔内的净中子数(净流量)。若 $J_n > 0$ , 则说明 $J_n^+ > J_n^-$ , 说明净中子流的方向与法线 $\mathbf{n}$ 的方向一致。反之若 $J_n < 0$ , 则说明净中子流的方向与 $\mathbf{n}$ 的方向相反。

由(9-10)式可以看到, 每秒穿过 $dS$ 的净中子流大小不仅和 $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$ 的分布有关, 而且还和面积元 $dS$ 的法线 $\mathbf{n}$ 的方向有关。显然, 当 $\mathbf{n}$ 的方向恰巧与 $\mathbf{J}$ 的方向一致时, 净中子流的数值最大。这样, 净中子流密度的物理意义可以理解为:  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$ 是一个矢量, 它的大小等于每秒穿过 $\mathbf{r}$ 处的所有垂直于不同方向的单位面积元的净中子流数目中的最大值, 它的方向也就是该单位面积元的法线方向。

下面我们讨论中子输运方程的建立及其一般解法。

## 2. 中子输运方程

### 2.1 中子输运方程的建立

通常在反应堆内, 中子密度比介质的原子核密度要小得多。例如, 即使在 $\phi \sim 10^{16}$  中子/(厘米<sup>2</sup>·秒)的热中子反应堆内, 中子密度也不超过约 $10^{11}$  中子/厘米<sup>3</sup>的数量级, 而原子核的密度, 例如对于固体, 则约为 $10^{22}$  核/厘米<sup>3</sup>的数量级。因而, 中子在介质内的运动主要是中子和介质原子核的碰撞结果, 而中子间的相互碰撞可以略去不计<sup>1)</sup>。由于中子运动及其与原子核的散射碰撞, 原来在某一位置具有某一能量和运动方向的中子, 经过一些时间将

---

1) 这样所得到的中子输运方程是线性的, 而在气体分子输运理论中, 气体分子之间的碰撞是主要的, 因而在气体输运方程中含有非线性的碰撞项。

在另一位置以另一能量和运动方向出现。我们说中子从一个位置、能量和方向运输(或迁移)到另一个位置、能量和方向上，这种过程叫做运输过程。研究中子运输过程的理论便叫做中子运输理论。

对单个中子来讲，它是以杂乱无章的折线轨迹在介质内进行随机的运动，直到它被吸收或从反应堆表面逸出为止；这是一个随机的过程。但是，在实际上，我们感兴趣的并不是个别中子的行径或所处的地点问题，而是在空间不同点处中子密度的宏观分布问题。因而它可以象气体分子动力学一样，用一种处理大量中子行径的宏观理论来推导出和气体分子运输方程相类似的中子运输方程，或称作玻尔兹曼运输方程。

下面就来推导这个方程。

研究中子运输过程所应用的一条基本原则，就是所谓中子数目守恒或中子平衡。在一定体积内，中子密度随时间的变化率应等于它的产生率减去泄漏率和移出率，亦即

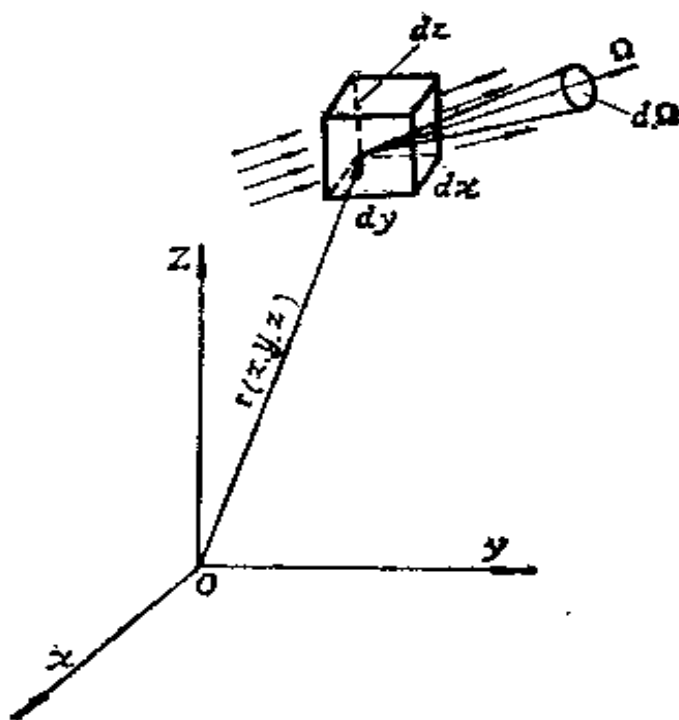


图 9-5 中子泄漏的计算

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{产生率} - \text{泄漏率} - \text{移出率}, \quad (9-13)$$

这里  $\partial n / \partial t$  是中子密度随时间的变化率。当系统处于平衡状态(稳态)时,它便等于零。

现在讨论在  $t$  时刻,在相空间  $(r, E, \Omega)$  上的中子平衡。我们讨论在  $r$  处  $dr$  体积元内,中子能量在  $E$  和  $E + dE$  之间且运动方向为  $\Omega$  附近的立体角元  $d\Omega$  内的中子数目的平衡问题(参阅图 9-5),同时求出(9-13)式中各项的具体表达式。

(1) 泄漏率 在图 9-5 中,设在  $r(x, y, z)$  点,有一体积元  $dV$ , 它的边长为  $dx, dy$  和  $dz$ 。先考虑平行于  $xz$  平面,而面积等于  $dx dz$  的两个面。根据前面(9-6)式中  $\phi(r, E, \Omega, t)$  的含义可知,每秒在  $(x, y, z)$  处穿过  $dx dz$  而进入体积元  $dV$  的,能量在  $E$  到  $E + dE$  内而运动方向在  $\Omega$  附近  $d\Omega$  内的中子数便等于  $\phi(r, E, \Omega, t) dE d\Omega$  乘上  $dx dz$  面在  $\Omega$  方向上的投影  $\Omega_y dx dz$ , 即

$$\phi(x, y, z, E, \Omega, t) \Omega_y dx dz dE d\Omega,$$

其中  $\Omega_y = \Omega \cdot j$  为  $\Omega$  在  $y$  轴方向上的分量。同样,每秒在  $(x, y + dy, z)$  处穿出  $dx dz$  平面而离开体积元的中子数目是

$$\phi(x, y + dy, z, E, \Omega, t) \Omega_y dx dz dE d\Omega.$$

假使  $dy$  取得足够小,则近似有

$$\begin{aligned} \phi(x, y + dy, z, E, \Omega, t) &= \phi(x, y, z, E, \Omega, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, z, E, \Omega, t) dy. \end{aligned}$$

因此,单位时间内沿  $y$  轴方向的  $dy dz$  两个面泄漏出体积元之净中子数为

$$\Omega_y \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy dz dE d\Omega.$$

这里为简明起见,记  $\phi(r, E, \Omega, t)$  为  $\phi$ 。应用同样方法可以求出沿  $x, z$  二个方向泄漏出体积元的中子数分别为

$$\Omega_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dV dE d\Omega \quad \text{和} \quad \Omega_z \frac{\partial \phi}{\partial z} dV dE d\Omega.$$

于是在单位时间内,上述中子穿过所有表面泄漏出体积元的净中

子数为

$$L = \left( \Omega_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV dE d\Omega$$

$$= \Omega \cdot \text{grad } \phi dV dE d\Omega, \quad (9-14)$$

其中

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (9-15)$$

为标性函数  $\phi$  的梯度。在工程计算中经常用算符  $\nabla$  来表示，

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (9-16)$$

$\nabla \phi = \text{grad } \phi$ ，算符  $\nabla$  在形式上可以理解为一个矢量。这样有

$$L = \Omega \cdot \nabla \phi dV dE d\Omega \quad (9-17)$$

(2) 移出率 每单位时间移出相空间基元  $dV dE d\Omega$  而损失掉的中子数目是由两个原因造成的：(i) 中子在  $dV$  内被吸收；(ii) 中子在  $dV$  内与原子核发生散射，使中子的能量  $E$  或运动方向  $\Omega$  发生变化而从相空间基元中损失掉。因而单位时间移出基元  $dV dE d\Omega$  的中子数为

$$R = (\Sigma_a + \Sigma_s) \phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t) dV dE d\Omega$$

$$= \Sigma_r \phi dV dE d\Omega \quad (9-18)$$

这里  $\Sigma_a$ 、 $\Sigma_s$  和  $\Sigma_r$  在一般情况下是  $(\mathbf{r}, E)$  的函数，为简单起见，在一些场合常把宗标  $(\mathbf{r}, E)$  略去。

(3) 产生率 在基元  $dV dE d\Omega$  内中子的产生有二个来源：第一来源是，在  $dV$  体积内原来能量为  $E'$ ，运动方向为  $\Omega'$  的中子经过散射而能量变成为  $E$  且运动方向变为  $\Omega$  的中子。根据第三章第 1 节中关于散射函数的定义可知，单位时间内在  $dV$  体积元原来能量为  $E'$  至  $E' + dE'$ 、运动方向为  $\Omega'$  的  $d\Omega'$  立体角元内的中子经过弹性和非弹性散射，其能量变为  $E$ 、运动方向为  $\Omega$  的中子数为<sup>1)</sup>

1) 这里为简单起见只考虑弹性散射，若考虑非弹性散射，需把(9-19)式中加上  $\Sigma_{in} f_{in}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, n' \rightarrow n)$  项  $f_{in}$  为非弹性散射函数。

$$[\Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_s(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)] \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) dV dE' d\Omega' \quad (9-19)$$

这里  $f_s$  是弹性散射函数；将(9-19)式对所有  $E'$  和  $\Omega'$  积分之，则便可求得在  $dV$  内单位时间由各种不同能量和运动方向散射到  $dE d\Omega$  基元内的中子总数为

$$I = dV dE d\Omega \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\Omega' \quad (9-20)$$

产生率的第二来源则是由于  $dV$  内的中子源所产生的贡献。对反应堆来讲，由于核裂变反应所产生的中子是最主要的中子源。设  $\nu(E')$  为能量等于  $E'$  的中子每次裂变后所产生的平均中子数，于是在  $dV$  内单位时间所产生的裂变中子总数为

$$\int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) d\Omega' dV \quad (9-21)$$

若假定裂变中子为各向同性的， $\chi(E)$  为其能谱分布，同时假设除裂变中子之外的独立中子源<sup>1)</sup>的源强为  $S(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ ，那末，单位时间在空间  $\mathbf{r}$  处由于中子源所产生的能量为  $E$ ，运动方向为  $\Omega$  的中子数为

$$S(\mathbf{r}, E, \Omega, t) dV dE d\Omega + dV dE d\Omega \left[ \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) d\Omega' + s(\mathbf{r}, E, \Omega, t) \right] \quad (9-22)$$

这样，中子的产生率便等于

$$Q = Q(\mathbf{r}, E, \Omega, t) dV dE d\Omega = \left[ \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) d\Omega' + S(\mathbf{r}, E, \Omega, t) \right] dV dE d\Omega \quad (9-23)$$

1) 此处独立中子源一词指不依赖于系统内中子密度而独立存在且强度也与系统无关的源，例如自发裂变源、天然放射性源以及其他中子源。

最后，中子密度随时间的变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, E, \Omega, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t), \quad (9-24)$$

将(9-17)到(9-24)式的各种结果代入文字表达式(9-13)内并消去  $dV dE d\Omega$  便得到任一时刻  $t$  在相空间  $(\mathbf{r}, E, \Omega)$  上的中子平衡方程

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \phi + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi = \int_0^\infty \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t) dE' d\Omega' + S(\mathbf{r}, E, \Omega, t), \quad (9-25)$$

式中  $\phi = \phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ 。这便是非稳态情况下的中子输运方程或玻尔兹曼方程，它构成了反应堆物理分析及中子输运理论的基础。

稳态时， $\partial n / \partial t = 0$ ，便得到稳态中子输运方程。在反应堆计算中还经常应用无量纲的勒( $u$ )作为能量变量。中子通量  $\phi(\mathbf{r}, u, \Omega)$  和  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$  的关系是

$$\phi(\mathbf{r}, u, \Omega) du = -\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) dE,$$

右端取负号的原因是因为勒的增加相当于  $E$  的减少。根据(3-27)式有  $du = -dE/E$ ，因而

$$\phi(\mathbf{r}, u, \Omega) = E \phi(\mathbf{r}, E, \Omega). \quad (9-26)$$

这样，在(9-25)式中把自变量  $E$  置换为  $u$ ，则稳态时输运方程便写成

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, u, \Omega) + \Sigma_t(\mathbf{r}, u) \phi(\mathbf{r}, u, \Omega) \\ = \int_0^\infty du' \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}, u') f(\mathbf{r}, u' \rightarrow u, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, u', \Omega') d\Omega' \\ + S(\mathbf{r}, u, \Omega). \end{aligned} \quad (9-27)$$

若考虑简单情况，即中子具有相同的能量，则上述方程中的自变量  $E$  或  $u$  可以消去。于是单速(能)中子输运方程便写成：

$$\Omega \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma_t(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, \Omega) = \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}) \int (\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + S(\mathbf{r}, \Omega) \quad (9-28)$$

由此可见，中子输运方程是一个线性的微分-积分方程，在一般情况下稳态时它包含有  $\mathbf{r}(x, y, z)$ ， $E$  和  $\Omega(\theta, \varphi)$  六个自变量。这样方程的求解在数学上是很困难的。即使应用电子计算机数值求解也仍然是非常复杂和困难的事情，并且并不是对所有复杂问题都能求出其解的。因而，反应堆物理分析的主要任务也就在于建立一些简单的近似模型和分析方法，并把它应用于反应堆的一些具体问题求解。

## 2.2 边界条件

中子输运方程是一个微分-积分方程。从方程的导出过程可以看出，它只是表示中子数目守恒规律的数学形式，即中子密度分布函数所应该满足的方程。它并不给出某一特定物理问题状态的完整的描述。因为具有相同参数  $\Sigma_t$ 、 $\Sigma_s$  和散射函数（亦即材料成分相同）的反应堆，不管它的起始状态如何，不管它的形状以及所处的外界条件如何，它们的中子输运方程的形式都是相同的，也就是说都满足相同的方程。对于不同问题的描述，主要区别在于初始或边界条件的不同。从数学上来说，由于在方程的普遍解中包含有任意的积分常数，为了确定这些与具体物理问题相应的常数的值，就要对普遍解加上某些限制条件，这就是根据问题的物理性质所规定的边界条件和初始条件。这些定解条件的数目要给定恰好能保证给出问题的唯一解。

解中子输运方程时常遇到的边界条件为：

(1) 在方程所适用的区域内，中子通量必须为有限值，并且不能为负值。

(2) 对于两种不同介质的分界面，假如两介质直接接触，其间没有其他物质插入，那末根据连续性条件，在分界面上应该满足  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$  在交界面上沿所有  $\Omega$  方向是  $\mathbf{r}$  的连续函数 (9-29)



然而，如果在分界面上插入第三种介质，那末，就必须考虑中子穿过这层介质的效应，这时边界条件(9-29)式就要加以修正(图9-6)。

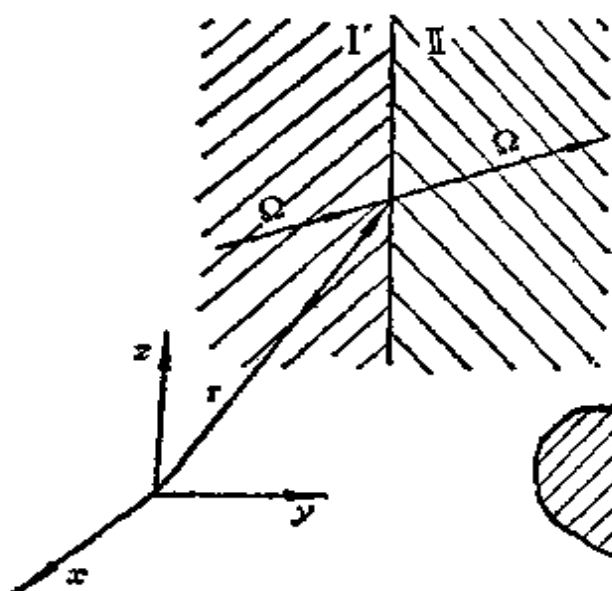


图 9-6 两种介质分界面

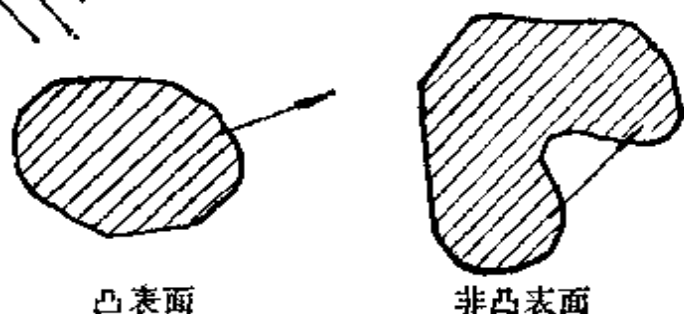


图 9-7 凸表面和非凸表面示意图

(3) 自由表面 在中子输运理论中，自由表面一词用来指没有外界中子进入物体内的那种表面或那一部分表面。假定中子输运过程所发生的区域是由凸的(非自交表面)且分块光滑的曲面 $\Gamma$ 所围成。凸的表面的意思是：从表面向外引出的任一根直线都不会再与这一表面相交(参看图9-7)，因而这种表面就是自由表面，因为中子自表面逸出后就不可能再返回到域内来。反之，对于非凸表面，则可以接收到由另一部分表面所放出的中子，就不再认为是自由表面。这样，对自由表面的边界条件可以写成

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma \text{ 若 } \mathbf{n} \cdot \Omega < 0 \quad (9-30)$$

式中 $\mathbf{n}$ 为边界 $\Gamma$ 上 $\mathbf{r}$ 点的单位外法线矢量。

在研究非稳态情况时，除了给出边界条件外，还必须给出问题的初始条件，例如 $t=0$ 时刻的中子角通量分布 $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, 0)$ 。

## 2.3 不同坐标系内中子输运方程的形式

在具体求解中子输运方程(9-25)式时,为了计算上的方便,

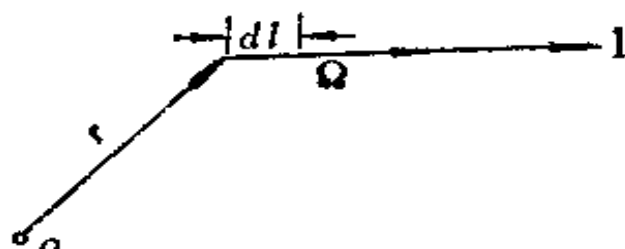


图 9-8 方向导数的计算

对于不同的问题往往采用不同的坐标系。对不同的坐标系  $\Omega \cdot \text{grad } \phi$  项具有不同的形式。根据场论的知识知道,  $\Omega \cdot \text{grad } \phi$  就是函数  $\phi$  在  $\Omega$  方向上的方向导数。因而设射线  $l$ ,

其方向与  $\Omega$  重合,  $dl$  即为  $\Omega$  方向的增量(见图 9-8), 则

$$\Omega \cdot \nabla \phi = \Omega \cdot \text{grad } \phi = \frac{d\phi}{dl}. \quad (9-31)$$

下面我们根据(9-31)式来导出在反应堆计算中常用的几种坐标系内  $\Omega \cdot \nabla \phi$  及中子输运方程的表达式。

### 2.3.1 直角坐标系

前面在导出中子输运方程的时候,已经求得在直角坐标系内  $\Omega \cdot \nabla \phi$  的表达式为[参阅(9-14)和(9-2)式]

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \phi &= \Omega_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \sqrt{1-\mu^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial \phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (9-32)$$

式中  $\mu = \cos \theta$ 。因而在直角坐标系内稳态中子输运方程为

$$\begin{aligned} &\sqrt{1-\mu^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial \phi}{\partial z} + \Sigma_t \phi \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\mu' d\varphi' dE' + S(\mathbf{r}, E, \Omega). \end{aligned} \quad (9-33)$$

### 2.3.2 一维平面问题

一维平面问题是直角坐标系的最简单情况。这时中子通量等仅是一维坐标轴  $z$  及  $\Omega$  与  $z$  轴夹角  $\theta$  (或  $\mu = \cos\theta$ ) 的函数 (参看图 9-9), 因而(9-32)式便简化为

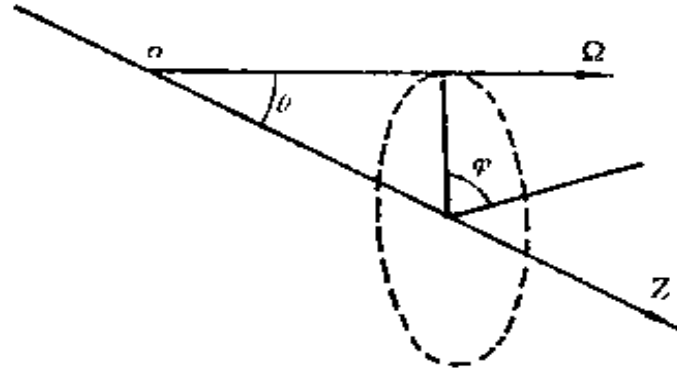


图 9-9 一维平面坐标系

$$\Omega \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi(z, E, \mu)}{\partial l} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} = \mu \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (9-34)$$

式中  $\phi(z, E, \mu) d\mu d\varphi = \phi(z, E, \Omega) d\Omega$ 。由于中子通量对辐角  $\varphi$  的对称性, 对一维平面问题我们通常这样定义  $\phi(z, E, \mu)$ , 即

$$\phi(z, E, \mu) d\mu = d\mu \int_0^{2\pi} \phi(z, E, \Omega) d\varphi$$

$$\text{或} \quad \phi(z, E, \mu) = 2\pi \phi(z, E, \Omega). \quad (9-35)$$

同样方法规定  $S(z, E, \mu)$  为

$$S(z, E, \mu) = 2\pi S(z, E, \Omega). \quad (9-36)$$

如果假定散射函数  $f(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)$  仅仅是散射前后运动方向  $\Omega$  和  $\Omega'$  间夹角 (即散射角  $\theta_0$ ) 的函数, 若令  $\mu_0 = \cos(\Omega', \Omega) = \cos\theta_0$  (参看图 9-10), 那末同样可以规定:

$$f(E' \rightarrow E, \mu_0) = 2\pi f(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega). \quad (9-37)$$

把(9-34)---(9-37)式代入方程(9-25)式便得到一维情况的稳态中子输运方程为

$$\mu \frac{\partial \phi(z, E, \mu)}{\partial z} + \Sigma_t \phi(z, E, \mu)$$

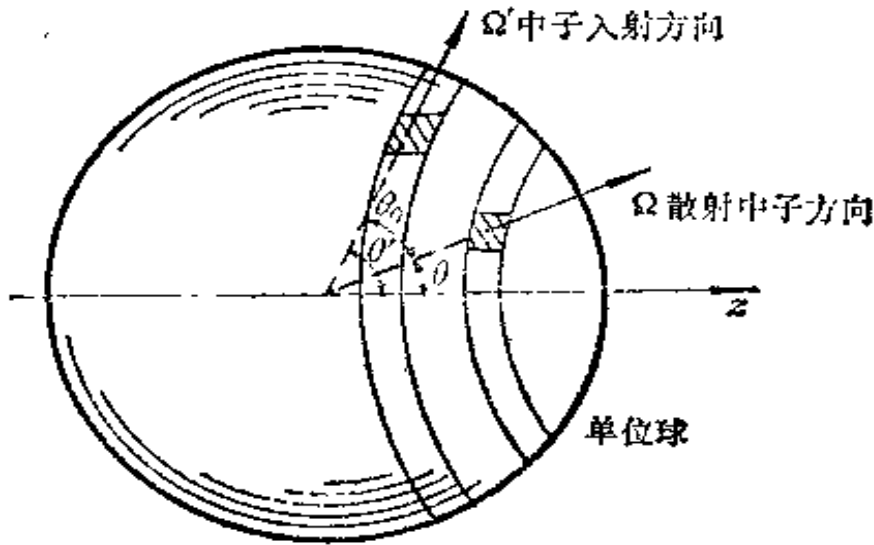


图 9-10  $\mu = \cos\theta$ ,  $\mu' = \cos\theta'$ ,  $\mu_0 = \cos\theta_0$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(z, E') f(z, E' \rightarrow E, \mu_0) \phi(z, E', \mu') d\mu' d\varphi' dE' + S(z, E, \mu). \quad (9-38)$$

### 2.3.3 球对称情况

这时中子通量仅是位置坐标  $r$  (所讨论点  $r$  到球对称中心的距离) 和方向角  $\theta$  (中子运动方向  $\Omega$  和  $r$  的夹角) 的函数 (见图 9-11)。

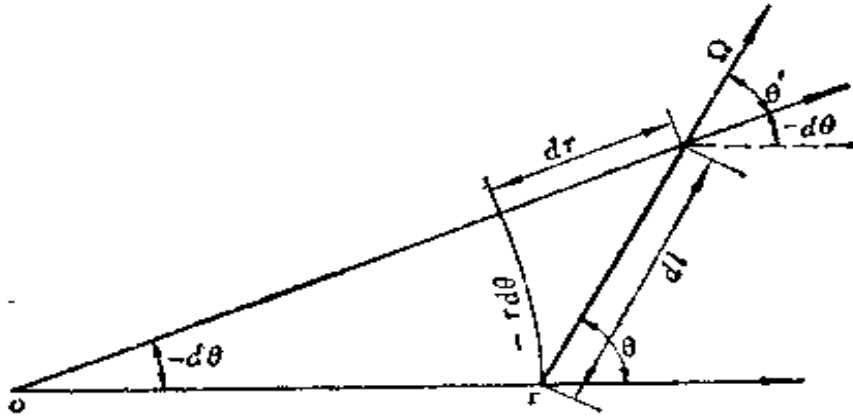


图 9-11 球对称情况中子运动的表示

令  $\mu = \cos\theta$  有

$$\Omega \cdot \nabla \phi(r, E, \mu) = \frac{\partial \phi}{\partial l} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{dl} + \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dl}. \quad (9-39)$$

从图 9-11 的几何关系中有

$$\frac{dr}{dl} \cos \theta = \mu; \quad \frac{d\mu}{dl} = \frac{d\mu}{d\theta} \frac{d\theta}{dl} = -\sin \theta \left( -\frac{\sin \theta}{r} \right) = \frac{1-\mu^2}{r}.$$

因而

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \phi(r, E, \mu) = \mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \mu}. \quad (9-40)$$

将(9-40)式代入(9-25)式便求得球对称情况下的稳态输运方程形式为:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \Sigma_t \phi \\ & = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(r, E') f(r, E' \rightarrow E, \mu_0) \phi(r, E', \mu') \\ & \quad \times d\mu' d\varphi' dE' + S(r, E, \mu), \end{aligned} \quad (9-41)$$

式中

$$\phi = \phi(r, E, \mu) = 2\pi \phi(r, E, \mathbf{\Omega}).$$

对于更一般情况下圆柱坐标以及球坐标内  $\mathbf{\Omega} \cdot \nabla$  的表达式在表 9-1 中给出。

### 3. 特征值(临界)问题和源迭代法

中子输运方程(9-25)式在稳态(临界)无外中子源情况下用算子形式可以写成:

$$\mathbf{L}\phi = \mathbf{M}\phi, \quad (9-42)$$

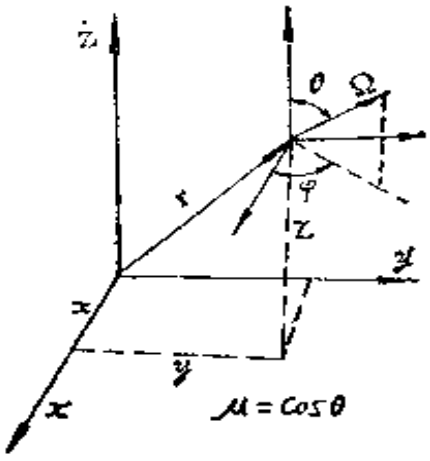
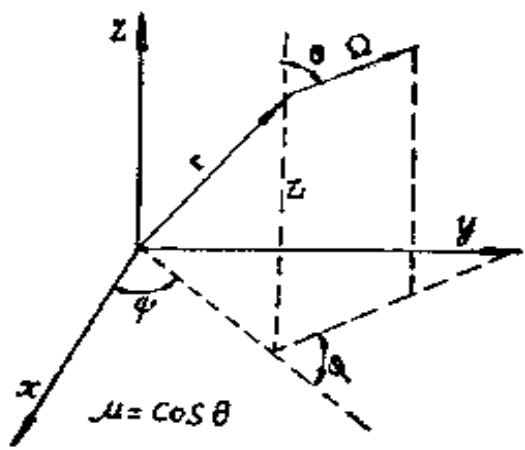
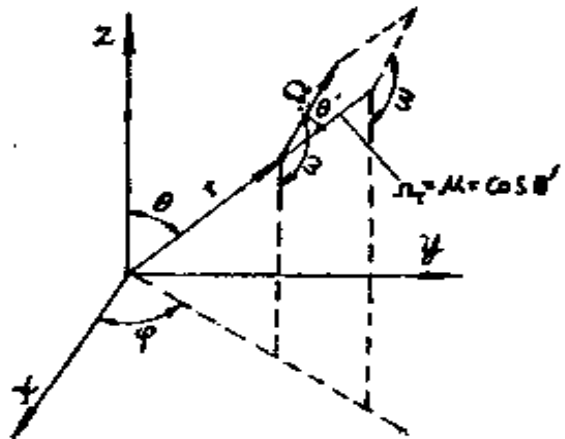
式中  $\phi = \phi(r, E, \mathbf{\Omega})$  算子  $\mathbf{L}$  和  $\mathbf{M}$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\phi = & (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla + \Sigma_t) \phi - \int_0^\infty \int_{\Omega'} \Sigma_s(r, E') f(r, E' \rightarrow E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) \\ & \times \phi(r, E', \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' dE', \end{aligned} \quad (9-43)$$

$$\mathbf{M}\phi = \frac{X(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \nu(E') \Sigma_f(r, E') \phi(r, E', \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}'. \quad (9-44)$$

(9-42) 式是一个关于  $\phi$  的线性齐次方程。从数学上知道, 它只有在一定的条件下才存在有非零解。这在物理上反映了这样

表 9-1 不同坐标系

		空间变量	方向变量
直角坐标系		$z$	$\theta$
		$x, y, z$	$\theta, \varphi$
圆柱坐标系		$r$	$\theta, \varphi$
		$r, z$	$\theta, \varphi$
		$r, z, \psi$	$\theta, \varphi$
球面坐标系		$r$	$\theta'$
		$r, \theta, \varphi$	$\theta', \omega^{1)}$

1):  $\omega$  是矢量  $r$  和  $\Omega$  形成的平面与矢量  $r$  和  $z$  形成的平面间的夹角。

中  $\Omega \cdot \nabla \phi$  的表达式

$\Omega \cdot \nabla \phi$	$dV$	$\int d\Omega$
$\mu \frac{\partial \phi}{\partial z}$	$dz$	$2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu$
$\sqrt{1-\mu^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial \phi}{\partial z}$	$dx dy dz$	$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi$
$\sqrt{1-\mu^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right)$	$2\pi r dr$	
$\sqrt{1-\mu^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \mu \frac{\partial \phi}{\partial z}$	$2\pi r dr dz$	$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi$
$\sqrt{1-\mu^2} \left[ \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \right] + \mu \frac{\partial \phi}{\partial z}$	$r dr d\psi dz$	
$\mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \mu}$	$4\pi r^2 dr$	$2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu$
$\mu \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \left( \frac{\sin \omega}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \cos \omega \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \sin \omega \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \mu}$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$	$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\omega$

的事实：对于给定的方程参数  $\Sigma_s, \nu\Sigma_f, \dots$  (也就是给定材料成分和特性)，只有在一定的几何尺寸下，系统才能达到临界状态；反之对于给定的几何条件就要求一定的材料的特性。因而对于任意给定系统，一般情况下方程(9-42) 并不一定都有解。但是这在物理上可以借助引进一个特征参数值来调节使它达到临界，即把每次裂变放出的中子数  $\nu$  除以一个参数  $k$ 。改变  $k$  值大小，就可以使系统达到临界。因为若原来给定的问题是次临界的，则我们将  $\nu$  除以一个小于 1 的正数  $k$ ，亦即人为地提高每次裂变产生的中子数。改变  $k$  值大小必然可找到使系统恰好达到临界的  $k$  值。反之，若系统是超临界的，则应除以大于 1 的  $k$  值，也可使其达到临界。

因而方程 (9-42) 的定解问题可以归结为下列方程的特征值问题，即

$$\mathbf{L}\phi = \frac{1}{k}\mathbf{M}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi, \quad (9-45)$$

式中  $\lambda = 1/k$  称为方程的特征值，对应的解  $\phi$  称为特征函数。

显然，从前面  $k$  引入的物理概念可以看出，它就是系统的有效增殖因数。为了说明这一点，把方程 (9-45) 两边对  $\Omega, E$  和反应堆体积积分。这样方程左端  $\mathbf{L}\phi$  的第一项便等于

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dE \int_\Omega d\Omega \int_V \Omega \cdot \nabla \phi dV &= \int_0^\infty dE \int_\Omega d\Omega \int_V \operatorname{div} \phi \Omega dV \\ &= \int_0^\infty dE \int_\Omega d\Omega \int_S (\Omega \cdot \mathbf{n}) \phi_s dS, \end{aligned}$$

这里我们应用了关系式  $\Omega \cdot \nabla \phi = \operatorname{div} \phi \Omega$  和高斯-奥斯特洛格拉斯基定理，式中  $S$  系反应堆的外表面。由于当  $\Omega \cdot \mathbf{n} < 0$  时， $\phi_s = 0$ ，所以上面的积分便等于从反应堆外表面上向外的泄漏中子总数。

$\mathbf{L}\phi$  的第二项积分便等于单位时间内总的被吸收中子数和发生的散射中子总数。而第三项通过积分次序的交换等于

$$-\int_V dV \int_0^\infty dE \int_{\Omega'} d\Omega' \int_0^\infty dE' \int_\Omega \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\Omega$$



$$\begin{aligned}
&= - \int_V dV \int_0^\infty dE \int_{\Omega'} d\Omega' \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, \\
&\quad E', \Omega') dE' \\
&= - \int_V dV \int_{\Omega'} d\Omega' \int_0^\infty dE' \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, \\
&\quad E', \Omega') dE \\
&= - \int_V dV \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\Omega'
\end{aligned}$$

它显然就等于单位时间内发生散射的总数取负号。它和第二项中的散射中子总数恰好抵消。

另外对右端  $M\phi$  的积分就等于单位时间内产生的新一代中子总数。这样由 (9-45) 式便得

$$k = \frac{\iiint M\phi dE d\Omega dV}{\iiint L\phi dE d\Omega dV} = \frac{\text{新一代中子的产生率}}{\text{中子总消失率(被吸收率+泄漏率)}}$$

这正是前面所定义的有效增殖因数。

上面我们从物理上的要求说明了方程 (9-45) 式的正的实特征值和特征函数的存在性。但是，要从数学上证明则是比较困难的，并超出了课程的要求范围。可以证明，一般存在有无限多个特征值，但是对稳态反应堆有意义的只是其最小的特征值  $\lambda_1 = 1/k$ 。

要从 (9-45) 式直接求出特征值是非常困难的。一般情况下比较有效的方法是应用源迭代法来求得，它特别适用于数值计算。其计算步骤大致如下：先任意给定一个分布源

$$Q(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') d\Omega' \quad (9-46)$$

比如说令  $Q(\mathbf{r}) = Q^{(0)}(\mathbf{r})$ ，将  $Q^{(0)}(\mathbf{r})$  代入方程 (9-42) 式右端并可解出中子通量  $\phi^{(1)}(\mathbf{r}, E, \Omega)$ ，将其代入 (9-46) 式便可求出新的分布源  $Q^{(1)}(\mathbf{r})$ 。然后再利用  $Q^{(1)}(\mathbf{r})$  重新解方程 (9-42)，再求出新的解  $\phi^{(2)}(\mathbf{r}, E, \Omega)$ ，依次类推。例如，对于第  $n$  次迭代有

$$L\phi^{(n)} = M\phi^{(n-1)} = \frac{\chi(E)}{4\pi} Q^{(n-1)}(\mathbf{r})$$

这个迭代过程一直进行下去，可以预期对于超临界系统， $\phi^{(n)}$ 或 $Q^{(n)}(\mathbf{r})$ 在逐次迭代中将增大，对于次临界系统将减小而对于临界系统将趋于常数。但无论是那一种情况，在迭代足够多的次数以后相继二次迭代的 $\phi$ 或 $Q(\mathbf{r})$ 的比值将趋近于一个与 $\mathbf{r}$ 、 $\Omega$ 、 $E$ 无关的常数。从 $k$ 的物理意义出发可知，它应该就是 $k$ ，即

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q^{(n)}(\mathbf{r})}{Q^{(n-1)}(\mathbf{r})} \quad (9-47)$$

在实际计算中只要当前后二次求得各点的 $k$ 值之差在允许误差范围之内时，迭代过程便告终止。上面我们是从物理上论述迭代过程的收敛性，而关于收敛性的数学证明同样超出了本书的范围。源迭代法的进一步具体应用在第十一章多群扩散方程的数值解法中将还要详细地讨论。

## 4. 中子输运方程的积分形式

前面我们求出的中子输运方程是一个一阶偏微分-积分方程。根据中子数目守恒原理从另一个角度可以求得输运方程的另一种形式——积分形式输运方程。可以证明这二种形式的输运方程在数学上是等价的。在一般情况下，积分形式的输运方程应用得比较少，这是因为微分方程的近似或数值求解要比积分方程容易得多。然而，对于某些反应堆物理问题，积分方程方法却更为方便，而且只需作一般的努力就可以得出比较精确的结果。例如，在研究中子非均匀介质中的吸收，以及反应堆计算中常用的碰撞几率方法(有时称积分输运理论)中，都广泛地应用积分形式的中子输运方程。

### 4.1 积分形式的中子输运方程

我们首先由中子数目守恒的基本原理推导出中子输运的积分

方程，然后再证明它与玻尔兹曼方程的等价性。为简单起见，我们讨论稳态情况。设如图 9-12 所示。在  $\mathbf{r}$  处有一垂直于  $\boldsymbol{\Omega}$  的小面积元  $dS$ ，那末，单位时间沿  $\boldsymbol{\Omega}$  方向穿过  $dS$  的能量为  $E$  的单位能量间隔内的中子数将等于

$$n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) v dS = \phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) dS \quad (9-48)$$

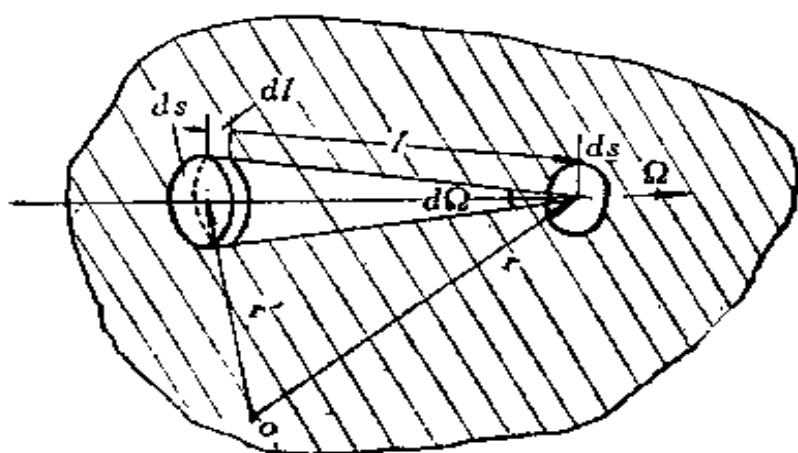


图 9-12 积分输运方程的推导

另一方面，我们知道在  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - l\boldsymbol{\Omega}$  处体积元  $dl dS$  内，每秒由于散射和中子源所产生的能量为  $E$  而运动方向为  $\boldsymbol{\Omega}$  的单位立体角内的中子数目，根据 (9-23) 式等于

$$Q(\mathbf{r} - l\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) dl dS = \left[ \int_0^{\infty} dE' \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r} - l\boldsymbol{\Omega}, E') f(\mathbf{r} - l\boldsymbol{\Omega}, E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) \phi(\mathbf{r} - l\boldsymbol{\Omega}, E', \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}' + S(\mathbf{r} - l\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) \right] dl dS, \quad (9-49)$$

而在  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - l\boldsymbol{\Omega}$  处一个中子沿  $\boldsymbol{\Omega}$  方向不受碰撞（一旦碰撞便改变了运动方向）而到达  $dS$  的几率为

$$\exp\left[- \int_0^l \Sigma_t(\mathbf{r} - l'\boldsymbol{\Omega}, E) dl'\right]. \quad (9-50)$$

这样，单位时间在  $\mathbf{r}'$  处的体积元内所产生的中子沿  $\boldsymbol{\Omega}$  方向穿过  $dS$  的中子数便等于 (9-49) 式和 (9-50) 式的乘积。若对此

乘积沿整个  $l$  积分, 自然就应该等于 (9-48) 式的数值, 于是便得到

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = \int_0^{\infty} \exp\left[-\int_0^l \Sigma_t(\mathbf{r}-l'\Omega, E) dl'\right] Q(\mathbf{r}-l\Omega, E, \Omega) dl \quad (9-51)$$

这就是所要求的关于中子角通量的积分输运方程。

在各向同性散射和各向同性源的情况下, (9-49) 式可以简化。这时有

$$f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) = \frac{1}{4\pi} f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E),$$

因而,

$$Q(\mathbf{r}', E, \Omega) = \frac{1}{4\pi} Q(\mathbf{r}', E) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \Sigma_s(\mathbf{r}', E') f(\mathbf{r}', E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E') dE' + \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}', E) \quad (9-52)$$

这里式中右边积分号内原来的角通量, 已经通过对  $\Omega'$  的积分用总通量  $\phi(\mathbf{r}', E')$  替代了。

将 (9-52) 式代入 (9-51) 式并将方程两边对所有  $\Omega$  积分, 同时把  $\mathbf{r}-l\Omega$  换成  $\mathbf{r}'$ , 注意到  $d\Omega = dS/l^2$ , 因而  $dl d\Omega = dl dS/l^2 = dV/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2$ , 这样便得到

$$\phi(\mathbf{r}, E) = \int_{\text{全部空间}} \frac{\exp[-\tau(E, \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})]}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \left[ \int \Sigma_s(\mathbf{r}', E') f(\mathbf{r}', E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E') dE' + S(\mathbf{r}', E) \right] dV' \quad (9-53)$$

其中 
$$\tau(E, \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) = \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Sigma_t(E', l') dl' \quad (9-54)$$

(9-54) 式中对  $l'$  的积分是沿  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$  的路径上进行的,  $\tau(E, \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$  称之为连接  $\mathbf{r}'$  与  $\mathbf{r}$  点的直线路径的“光学距离”, 也就是以平均自由程  $\lambda_t$  作为单位量度的距离。当  $\Sigma_t = \text{常数}$  时,  $\tau$  便等于  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\lambda_t$ 。

方程 (9-53) 便是我们所要求的关于中子通量  $\phi(\mathbf{r}, E)$  的积分输运方程。它和玻尔兹曼方程一样具有中子平衡的物理意

义。事实上方程中  $Q(\mathbf{r}', E)$  便是  $\mathbf{r}'$  处单位时间内产生的能量为  $E$  的中子数，而其中有份额  $(4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2)^{-1}$  是朝向  $\mathbf{r}$  处的单位面积上运动的， $\exp[-\tau(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})]$  则是减弱因子；因而(9-53)式中被积函数就是  $\mathbf{r}'$  处所产生的中子对  $\mathbf{r}$  处的中子通量的贡献，而(9-53)式则表示  $\mathbf{r}$  处的中子总通量是由全部空间所有点  $\mathbf{r}'$  所产生的中子对  $\mathbf{r}$  点所形成的中子通量的贡献的总和。

从前面讨论可以看到，输运方程(9-25)和(9-51)都是从中子守恒原理出发推导而来的。所不同的是，玻尔兹曼方程(9-25)是建立在相空间元内中子守恒原理上，而积分输运方程是建立在整个系统空间内的中子守恒原理上的。

对于单能、均匀介质情况，若各向同性中子源分布为  $Q(\mathbf{r})$ ，则(9-53)式便进一步简化为

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\text{全部空间}} \frac{e^{-\Sigma_t|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} Q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \int K(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|) Q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (9-55)$$

$$K(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|) = e^{-\Sigma_t|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} / 4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2. \quad (9-56)$$

积分方程(9-55)亦称为派耳司方程。另外，还应指出，积分核  $K(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|)$  就是吸收性介质中的单位各向同性源的格林函数。从物理上说它等于由  $\mathbf{r}'$  处的各向同性单位点源  $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  对  $\mathbf{r}$  处的中子通量的贡献。其他形状的积分输运方程中类似的积分核也同一样都是格林函数。

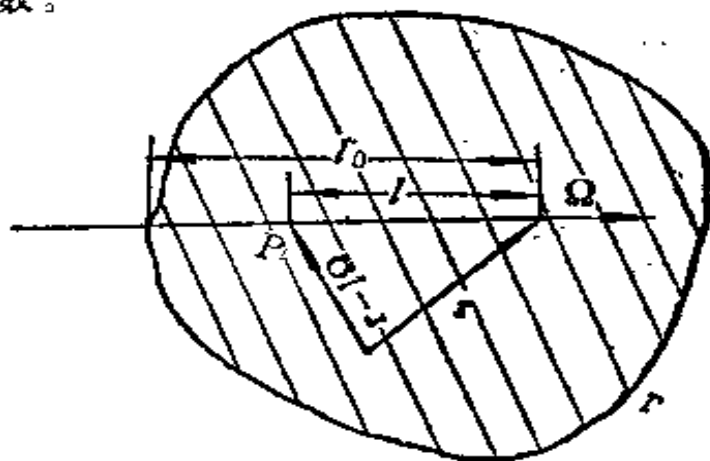


图 9-13 中子沿射  $\Omega$  的运动迹线

## \*4.2 玻尔兹曼方程和积分输运方程的等价性

我们现在来证明玻尔兹曼输运方程和积分输运方程的等价性。这只需证明从稳态的微分-积分方程(9-25)可以直接导出积分方程(9-51)式就可以了。

首先注意到,方程(9-25)中 $\Omega \cdot \nabla \phi$ 是函数 $\phi$ 沿 $\Omega$ 的方向导数。现考虑在 $\Omega$ 方向上某一点P( $\mathbf{r} - l\Omega$ ) (参看图9-13)。对于P点,把(9-25)中的 $\mathbf{r}$ 换成 $(\mathbf{r} - l\Omega)$ ,稳态玻尔兹曼方程可重写成:

$$-\frac{d}{dl}\phi(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega) + \sum_i \phi(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega) = Q(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega), \quad (9-57)$$

式 $Q(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega)$ 即(9-49)或(9-23)式。

如果假定源项 $Q(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega)$ 为已知,(9-57)式便是一个关于 $\phi(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega)$ 的一阶线性常微分方程。应用边界条件(9-30) [即 $\phi(\mathbf{r} - l_0\Omega, E, \Omega) = 0$ ],很容易可以求得它的解为<sup>1)</sup>

$$\phi(\mathbf{r} - l\Omega, E, \Omega) = \int_{l_0}^l Q(\mathbf{r} - l'\Omega, E, \Omega) \exp\left[-\int_{l_0}^{l'} \sum_i (\mathbf{r} - l''\Omega, E) dl''\right] dl',$$

其中 $l_0$ 为自由边界 $\Gamma$ 上之 $l$ 值。现今 $l = 0$ 便得到

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = \int_0^{l_0} Q(\mathbf{r} - l'\Omega) \exp\left[-\int_0^{l'} \sum_i (\mathbf{r} - l''\Omega, E) dl''\right] dl' \quad (9-58)$$

如果介质为无限大,上限 $l_0$ 使用 $\infty$ 来代替。这样便得到了(9-51)式,并即证明了等价性。

1) 参看B.H.斯米诺夫著,高等数学教程,第二卷第一分册,第一章,高等教育出版社,1960年。

## 5. 球谐函数方法

中子输运方程是一个含有  $r(x, y, z)$ 、 $E$  和  $\Omega(\theta, \varphi)$  等六个自变量的微分-积分方程。因此，要精确地求解这一方程是很困难的，一般只有在极个别的简单情况下才是可能的。所以在实际的计算问题中通常是采用一些近似的方法求解。函数展开方法是其中常用的一种近似方法。它是把未知函数  $f(x)$  用一组已知的正交函数列  $P_n(x)$ （通常为多项式）展开成级数，而  $P_n(x)$  通常称为展开函数，即

$$f(x) \approx \sum_n f_n P_n(x) \quad , \quad (9-59)$$

其中  $f_n$  为一组未知的待定系数。这样，就把问题转化为求解一组待定系数的问题。一旦求出系数  $f_n$ ，用 (9-59) 式便可确定出  $f(x)$  了。例如，当以正交三角函数列作为展开函数时，就是我们所熟知的傅里叶级数方法。

若用一完备正交的球谐函数列(或称球函数，参阅附录)作为展开函数便是所谓球谐函数方法。它在理论物理中是常用的一种方法。

在输运理论中，球谐函数方法是针对输运方程中自变量  $\Omega$  所作的近似。它的实质是把方程中含有变量  $\Omega$  的一些函数，例如中子通量  $\phi(r, E, \Omega)$  等，用球谐函数作为展开函数，按照(9-59)式展成级数，然后把它代入到中子输运方程中去，这样就可把原来方程化成为一个微分方程组，然后由它可以确定出级数中的每个系数来。它的方法和用级数方法解微分方程颇有类似的地方。球谐函数方法在许多情况下是求解输运方程的一种比较简单、有效和常用方法，特别是由它所得到的扩散近似模型在反应堆计算中有着非常广泛的应用，是反应堆物理分析的最常用的模型。

## 5.1 P<sub>N</sub> 近似方程

为简单起见，我们先从研究单能一维平面问题开始。这样可以减少许多数学上的麻烦而更便于了解方法的步骤和实质。

根据 (9-38) 式，稳态单能一维平面问题的中子输运方程为

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \phi(z, \mu)}{\partial z} + \Sigma_s \phi(z, \mu) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_s f(\mu_0) \phi(z, \mu') d\mu' d\varphi' + \frac{S(z)}{2}, \end{aligned} \quad (9-60)$$

式中  $\mu = \cos\theta$ ,  $\mu_0 = \cos(\Omega, \Omega') = \cos\theta_0$  (见图 9-9 和 9-10)。这里为简单起见假定中子源为各向同性。而式中的中子通量和散射函数和 (9-35) 及 (9-37) 式一样，是已经对方位角积分后的数值。即

$$\begin{aligned} \phi(z, \mu) &= \int_0^{2\pi} \phi(z, \Omega) d\varphi = 2\pi \phi(z, \Omega), \\ f(\mu_0) &= 2\pi f(\Omega' \rightarrow \Omega). \end{aligned}$$

现在我们用球谐函数方法对 (9-60) 式近似求解。对于一维问题，我们把  $\phi(z, \mu)$  及  $f(\mu_0)$  用勒让特多项式展开成级数：

$$\phi(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(z) P_n(\mu), \quad (9-61)$$

$$f(\mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n P_n(\mu_0), \quad (9-62)$$

其中  $P_n(\mu)$  为  $n$  阶勒让特多项式<sup>1)</sup> (见附录)。系数  $\phi_n(z)$  及  $f_n$  可以利用勒让特多项式的正交性来求得。勒让特多项式的正交性可以表述如下：

1) 前面几阶的  $P_n(\mu)$  值是： $P_0(\mu) = 1$ ;  $P_1(\mu) = \mu$ ;  $P_2(\mu) = 1/2(3\mu^2 - 1)$ ;  $P_3(\mu) = 1/2(5\mu^3 - 3\mu)$ ; ...



$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{当 } n = m. \end{cases} \quad (9-63)$$

因此，在(9-61)、(9-62)式两边分别乘以  $P_n(\mu)$  及  $P_n(\mu_0)$ ，利用上述正交性质便可求得

$$\phi_n(z) = \int_{-1}^{+1} \phi(z, \mu) P_n(\mu) d\mu, \quad (9-64)$$

$$f_n = \int_{-1}^{+1} f(\mu_0) P_n(\mu_0) d\mu_0. \quad (9-65)$$

可以看到， $\phi_0(z)$ 、 $\phi_1(z)$  及  $f_1$  等项都有明确的物理意义，例如，

$$\phi_0(z) = \int_{-1}^{+1} \phi(z, \mu) d\mu.$$

这也就是我们前面所讲的中子总通量  $\phi(z)$ ，而

$$\phi_1(z) = \int_{-1}^{+1} \mu \phi(z, \mu) d\mu$$

就是我们前面所定义的中子流密度  $J_z(z)$ 。同样可以知道

$$f_0 = \int_{-1}^{+1} f(\mu_0) d\mu_0 = 1,$$

$$f_1 = \int_{-1}^{+1} f(\mu_0) \mu_0 d\mu_0 = \overline{\mu_0}.$$

根据散射函数的定义可以知道， $f_1$  就等于平均散射角余弦  $\overline{\mu_0}$ 。

由于  $f(\mu_0)$  是已知函数，因而  $f_n$  可以由(9-65)式求得。现在的问题就在于求出展式(9-61)中的  $\phi_n(z)$  各项了。为此我们把(9-61)及(9-62)式代入输运方程(9-60)中，利用勒让特多项式的递推公式

$$\mu P_n(\mu) = \frac{(n-1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu)}{2n+1} \quad (9-66)$$

则得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\phi_n(z)}{dz} \left[ \frac{(n-1)}{2} P_{n+1}(\mu) + \frac{n}{2} P_{n-1}(\mu) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Sigma_s \phi_n(z) P_n(\mu) \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_s \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(z) P_n(\mu') \right] \\
& \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n P_n(\mu_0) d\mu' d\varphi' + \frac{S(z)}{2}. \quad (9-67)
\end{aligned}$$

注意到上式中  $\mu_0$  系  $\Omega$  与  $\Omega'$  之间的夹角余弦，根据勒让特多项式的加法定理(见附录)有

$$\begin{aligned}
P_n(\mu_0) & = P_n(\mu) P_n(\mu') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu) P_n^m(\mu') \\
& \quad \times \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (9-68)
\end{aligned}$$

式中  $P_n^m(\mu)$  为伴随勒让特多项式<sup>1)</sup>。

现在我们来计算(9-67)式右边第一项的积分。把(9-68)式代入到积分号内并积分之。注意到由于含有  $\cos m(\varphi - \varphi')$  的各项在对  $d\varphi'$  作由 0 到  $2\pi$  积分后都等于零，因而(9-68)式中只有第一项仍然保留并消去了  $1/2\pi$ ，这样(9-67)式右边第一项的积分便等于

$$\begin{aligned}
I & = \int_{-1}^{+1} \Sigma_s \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(z) P_n(\mu') \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n P_n(\mu) \right. \\
& \quad \left. \times P_n(\mu') \right] d\mu' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Sigma_s \phi_n f_n P_n(\mu). \quad (9-69)
\end{aligned}$$

这里我们已经用了勒让特多项式的正交性质(9-63)式。因此(9-67)式便可写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\phi_n(z)}{dz} [(n+1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu)] + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)$$

1) 前面几阶的  $P_n^m(\mu)$  为:  $P_0^0(\mu) = 1$ ;  $P_1^0(\mu) = P_1(\mu) = \mu$ ;  $P_1^1(\mu) = -2P_1^{-1}(\mu) = (1-\mu^2)^{1/2} = \sin\theta$ ; ...



这样我们就把原来的输运方程(9-60)化成为一个含有  $\phi_n(z)$  的微分方程组(9-73)的求解问题。当  $N$  不大时这个方程组是比较易于近似(或数值)地求解的。这样的解法,我们称之为  $P_N$  近似。(9-73)式便叫做  $P_N$  近似方程。例如,若取  $N=3$ ,则称之为  $P_3$  近似。对于大型反应堆或中子通量角分布接近于各向同性的问题,一般认为采用  $P_1$  近似就可以了。对于小型反应堆或者吸收性大、中子密度变化剧烈的一些问题,则需用  $P_3$  或更高阶的近似。应该指出,  $P_3$  近似的计算已经很繁杂,往往需要利用数字计算机来求解。因此对  $N > 3$  的更高阶近似在实际问题中很少应用。

上面我们讨论了最简单的一维平面问题的球谐近似方法。对于更一般的几何情况(例如圆柱问题)的球谐近似方法,其步骤和方法也是一样,不过这时中子通量  $\phi(r, \Omega)$  则应按球函数展开。它比一维情况复杂得多,对于它的讨论已超出本书范围,读者可以参考有关文献,例如[2]—[4]。

## 5.2 边界条件

为了确定在求解(9-73)微分方程组时所出现的积分常数,还应该给出必需的边界条件。给出的边界条件的数目应恰好等于待定的积分常数的数目以保证解的唯一性。

边界条件的提法应该根据问题的物理性质来规定(见2.2节)。但是应该指出,在  $P_N$  近似下,由于  $n > N$  的  $\phi_n(z)$  各项都被略掉了,所求的是  $\phi(z, \mu)$  的近似解。因而边界条件(9-29)及(9-30)亦不可能严格地被满足,而相应地需以适当的近似的边界条件来代替。这时,近似边界条件应该这样地来选择:它在保证解的唯一性条件下,应使所讨论问题的解具有最大的精确度。因此,  $P_N$  近似方法中应该怎样来选取边界条件是一个需要认真考虑的问题。下面介绍在实际中常用的一些边界条件:

**自由表面** 在一维情况下,在自由表面  $x = a$  处的边界条件为[见(9-30)式]

$$\phi(\alpha, \mu) = 0, \text{ 当 } \mu < 0 \text{ 时}$$

上式表明没有中子由  $-1 \leq \mu \leq 0$  方向返回，亦即没有中子自真空返回介质。这里变量  $\mu$  应取上述区间内的一切可能值。在  $P_N$  近似中这一条件不可能严格地满足。在实际计算中通常用一组近似的边界条件来代替，它要求通量的下列积分为零<sup>[5]</sup>：

$$\int_{-1}^0 \phi(\alpha, \mu) P_{2n+1}(\mu) d\mu = 0,$$

$$n = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}, \text{ 当 } N \text{ 为奇数}$$

$$n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \text{ 当 } N \text{ 为偶数} \quad (9-74)$$

它最早由马绍克(R. E. Marshak)提出，并称之为马绍克边界条件。值得注意的是，对于  $n=0$ ，上式的积分得出下列关系式

$$\int_{-1}^0 \mu \phi(\alpha, \mu) d\mu = 0$$

稍加注意就可以看出，此积分事实上就是负方向的分中子流  $J_z^- = 0$ ，因而表示自真空返回介质的中子总数等于零。由此可见，马绍克边界条件已经将上述这一重要事实包括在内了。

**两种介质间的分界面** 在两种介质分界面上，严格的边界条件由(9-29)式给出。在  $P_N$  近似下，这个条件用下面一组条件<sup>[6]</sup>

$$\int \mu \phi(z, \mu) P_n(\mu) d\mu, \quad n = 0, 1, \dots, N \text{ 在分界面上连续} \quad (9-75)$$

来代替。将展式(9-72)代入，则由上式便可推得平面情况下的边界条件为：在分界面上，

$$\text{当 } N \text{ 为奇数时, } \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N \text{ 连续}$$

$$\text{当 } N \text{ 为偶数时, } \phi_1, \phi_3, \dots, \phi_{N-1},$$

$$(N-1)\phi_{N-2} - N\phi_N \text{ 连续}$$

$$(9-76)$$

上面的边界条件(9-74)、(9-76)也可以应用变分原理求得<sup>[3]</sup>。从(9-76)式可以看到，当采用偶次近似时，中子总通量  $\phi_0(z)$

在分界面上将不连续。因此，再加上其他一些原因，我们在实际问题中往往采用奇次近似，例如  $P_1, P_3, \dots$  近似，而不采用偶次近似。

## 6. 扩散近似

在球谐函数方程中，最简单而又得到最广泛应用的是  $P_1$  近似。在本节中我们将对它进行详细的讨论和研究，同时将指出，第二章中的扩散理论就是  $P_1$  近似的一种结果；对于单速问题和源是各向同性的情况， $P_1$  近似和扩散理论是等价的。因而在许多场合下，我们习惯上常常称  $P_1$  近似为扩散近似。它在反应堆理论的发展中曾占有重要的地位；它是反应堆物理分析，特别是大型反应堆计算的基础。

### 6.1 一维情况

首先讨论最简单的一维平面问题。在  $P_1$  近似情况下，中子通量的展开式 [即 (9-61) 式] 中只保留前面二项，同时注意到  $\phi_0(z)$  就是中子总通量  $\phi(z)$ ，而  $\phi_1(z)$  就是中子流密度  $J(z)$ ，因而有

$$\phi(z, \mu) = \frac{1}{2} [\phi(z) + 3J(z)\mu] \quad (9-77)$$

而方程(9-73)则简写成

$$\frac{dJ}{dz} + \Sigma_a \phi = S, \quad (9-78)$$

$$\frac{d\phi}{dz} + 3 \Sigma_{tr} J = 0, \quad (9-79)$$

式中  $\Sigma_{tr} = \Sigma_t - \Sigma_s \overline{\mu_0} = \Sigma_a + \Sigma_s (1 - \overline{\mu_0})$ , (9-80)

由(9-79)式可以得到(9-80)

$$J = -D \frac{d\phi}{dz}, \quad (9-81)$$

$$D = \frac{1}{3 \Sigma_{tr}} \quad (9-82)$$

这就是我们以前所熟悉的扩散理论中的斐克定律。(9-82)式便是以前提到的由输运理论  $P_1$  近似所求得扩散系数的表达式 [参阅 (2-15) 式]。把 (9-81) 式代入 (9-78) 式中, 便得到我们熟悉的稳态一维情况的中子扩散方程 (2-28) 式:

$$\frac{d}{dx} D \frac{d\phi}{dx} + \Sigma_a \phi = S \quad (9-83)$$

## 6.2 普遍几何形状情况

前面我们讨论了在一维情况下球谐函数方法中的一阶近似与扩散理论之间的关系。可以证明, 它在普遍几何形状情况下也仍然成立。对于普遍情况, 单速中子输运方程为

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma_t \phi(\mathbf{r}, \Omega) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega'} \Sigma_s f(\mu_0) \phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' \\ & + \frac{S(\mathbf{r})}{4\pi} \end{aligned} \quad (9-84)$$

这时, 单位方向矢量  $\Omega$  可通过  $\theta, \varphi$  二个变量表示。因而当用球谐函数方法求解时, 中子通量  $\phi(\mathbf{r}, \Omega)$  需按一组完备正交的球谐函数<sup>1)</sup>(见附录)

$$Y_{n,m}(\Omega) = Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_n^{i|m|}(\cos\theta) \sin^{|m|} \varphi, & m = -1, \dots, -n \\ P_n^m(\cos\theta) \cos m \varphi, & m = 0, 1, \dots, n \\ n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (9-85)$$

来展成级数, 即

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, \Omega) = \phi(\mathbf{r}, \theta, \varphi) \approx & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=-n}^n (a_{n,m} \phi_{n,m}(\mathbf{r})) \\ & \times Y_{n,m}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (9-86)$$

式中  $a_{n,m}$  为已知系数, 而  $\phi_{n,m}(r)$  则可由  $Y_{n,m}(\Omega)$  的正交性质

1) 我们也可用指数函数代替三角函数, 而得到下列一组  $n$  阶球函数以代替 (9-85) 式

$$Y_{n,m}(\Omega) = P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad -n < m < n, \quad n = 0, 1, \dots$$

求得：

$$a_{n,m} = \frac{(n - |m|)!}{(n + |m|)!} \frac{2}{1 + \delta_{0,m}}, \quad (9-87)$$

$$\phi_{n,m}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{r}, \Omega) Y_{n,m}(\Omega) d\Omega. \quad (9-88)$$

如果在(9-86)式中取  $N=1$ ，也就是一阶近似。同时把(9-85)式和  $P_n^m(\mu)$  的具体表达式(见附录或30页上注解)代入(9-86)式便有

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, \theta, \varphi) = & \frac{1}{4\pi} [\phi_{0,0} + 3(Y_{1,1}(\Omega)\phi_{1,1} + Y_{1,-1}(\Omega)\phi_{1,-1} \\ & + Y_{1,0}(\Omega)\phi_{1,0})] = \frac{1}{4\pi} [\phi_{0,0} + 3(\sin\theta\cos\varphi\phi_{1,1} \\ & + \sin\theta\sin\varphi\phi_{1,-1} + \cos\theta\phi_{1,0})], \end{aligned} \quad (9-89)$$

注意到(9-2)及(9-85)式有

$$\begin{aligned} \Omega = & \sin\theta\cos\varphi \mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi \mathbf{j} + \cos\theta \mathbf{k} \\ = & Y_{1,1}(\Omega)\mathbf{i} + Y_{1,-1}(\Omega)\mathbf{j} + Y_{1,0}(\Omega)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (9-90)$$

若令  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \phi_{1,1}\mathbf{i} + \phi_{1,-1}\mathbf{j} + \phi_{1,0}\mathbf{k} = J_x\mathbf{i} + J_y\mathbf{j} + J_z\mathbf{k}$ , (9-91)

则(9-89)式可以写成

$$\phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [\phi(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})], \quad (9-92)$$

这里我们把  $\phi_{0,0}$  简记为  $\phi$ 。

为了看出  $\phi(\mathbf{r})$  及  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  的物理意义，将(9-92)式两边对  $\Omega$  积分，并应用表 9-2 中的公式便得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = & \frac{1}{4\pi} \phi(\mathbf{r}) \int_{\Omega} d\Omega + \frac{3}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \\ & \cdot \int_{\Omega} \Omega d\Omega = \phi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (9-93)$$

可见，(9-89)式中的  $\phi_{0,0}(\mathbf{r})$  就等于中子总通量  $\phi(\mathbf{r})$ 。若将  $\Omega$  数乘(9-92)式两边，然后积分之并注意表 9-2 中公式便得



表 9-2 一些含有  $\Omega$  的积分公式

$$\int d\Omega = 4\pi; \int \Omega d\Omega = 0$$

$$\int \Omega_i \Omega_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{i,j}, \quad i, j = x, y, z$$

$$\int \Omega_x^l \Omega_y^m \Omega_z^n d\Omega = 0 \quad \text{若 } l, m \text{ 或 } n \text{ 为奇数}$$

$$\int \Omega (\Omega \cdot A) d\Omega = \frac{4\pi}{3} A$$

$$\int (\Omega \cdot A)(\Omega \cdot B) d\Omega = \frac{4\pi}{3} A \cdot B$$

A 和 B 为二个与  $\Omega$  无关的任意向量

$$\int_{\Omega} \Omega \phi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \frac{\phi(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{\Omega} \Omega d\Omega + \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Omega \cdot (\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})) d\Omega = \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (9-94)$$

回顾(9-11)式便知道, (9-92)式中  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  就是以前所定义的中子流密度。这样, (9-92)式可以看做一维情况(9-77)式的自然推广。

下面我们来求  $P_1$  近似方程式。为此, 把(9-92)式和散射函数  $f(\mu_0)$  的展开式[(9-62)式]代入方程(9-84)中, 同时应用勒让特多项式的加法定理和正交性质以及表 9-2 中的积分公式, 便可得到(推导过程从简)

$$\Omega \cdot \nabla [\phi(\mathbf{r}) + 3 \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})] + \sum_l [\phi(\mathbf{r}) + 3 \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})] \cdot \sum_s \phi(\mathbf{r}) + 3 \sum_s f_1 \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}), \quad (9-95)$$

把上式对  $\Omega$  积分并利用表 9-2 中公式, 便得到方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \sum_s \phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}), \quad (9-96)$$

其次, 将(9-95)式两边先数乘以  $\Omega$ , 然后再作对  $\Omega$  的积分, 借助表 9-2 公式便得到第二个方程:

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) + 3 \sum_{l,r} \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0, \quad (9-97)$$

$$\sum_{l,r} = \sum_l - \sum f_1 = \sum_l - \bar{\mu}_0 \sum_s.$$

(9-96) 和 (9-97) 式便是普遍几何情况的  $P_1$  近似方程。

(9-97)式也可以写成熟悉的斐克定律形式

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -D \text{grad} \phi(\mathbf{r}), \quad (9-98)$$

式中

$$D = 1/(3 \sum_{l,r}), \quad (9-99)$$

把(9-98)式代入(9-96)式便得到普遍几何情况下的中子扩散方程。

$$-\operatorname{div} D \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a \phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}), \quad (9-100)$$

### 6.3 与能量有关的扩散方程

下面讨论中子通量与能量有关的更普遍情况。根据(9-25)式稳态中子输运方程为

$$\begin{aligned} & \Omega \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) + \Sigma_s \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega'} \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \mu_0) \phi(\mathbf{r}, E', \Omega') dE' \\ & \quad d\Omega' + \frac{S(\mathbf{r}, E)}{4\pi}, \end{aligned} \quad (9-101)$$

这时我们假定中子源项为各向同性的，且式中

$$f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \mu_0) = 2\pi f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega).$$

现在我们用球谐函数方法的一阶近似(即  $P_1$  近似)对方程(9-101)求解。根据前面讨论，中子通量  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$  及散射函数  $f(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \mu_0)$  可以用下列展式来表示：

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [\phi(\mathbf{r}, E) + 3 \Omega \cdot J(\mathbf{r}, E)], \quad (9-102)$$

$$f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E; \mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) P_n(\mu_0), \quad (9-103)$$

式中

$$f_n(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) = \int_{-1}^{+1} f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E; \mu_0) P_n(\mu_0) d\mu_0. \quad (9-104)$$

将(9-102)、(9-103)式代入(9-101)式，重复前面一节的推导过程。这里我们仅仅写出最后结果，必要时，读者可仿照前节步骤自行推证之，这时只需对变量  $E$  加以留意就可以了。这样便得到和(9-96)及(9-97)式相类似的二个方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E) = \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E')f_0(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \times \phi(\mathbf{r}, E')dE' + S(\mathbf{r}, E), \quad (9-105)$$

$$\frac{1}{3}\nabla\phi(\mathbf{r}, E) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E')f_1(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)\mathbf{J}(\mathbf{r}, E')dE'. \quad (9-106)$$

这便是与能量有关的普遍几何情况下  $P_1$  近似方程。如果我们按下式定义扩散系数  $D(\mathbf{r}, E)$

$$D(\mathbf{r}, E) = \frac{1}{3 \Sigma_{tr}(\mathbf{r}, E)}, \quad (9-107)$$

$$\Sigma_{tr}(\mathbf{r}, E) = \Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \frac{\int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E')f_1(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)\mathbf{J}(\mathbf{r}, E')dE'}{\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)}. \quad (9-108)$$

则(9-106)式可以写成我们所熟悉的斐克定律形式

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = -D(\mathbf{r}, E)\nabla\phi(\mathbf{r}, E). \quad (9-109)$$

当然，这样写法是有点勉强的，因为在(9-107)式中  $D(\mathbf{r}, E)$  本身与  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$  有关。因此在实际中我们往往采用一些近似的假设，例如我们近似地认为：

$$\Sigma_s(\mathbf{r}, E')f_1(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \approx \Sigma_s(\mathbf{r}, E')\overline{\mu_0}\delta(E' - E), \quad (9-110)$$

式中  $\mu_0 = 2/3 A$ ，就是散射角平均余弦。这样，

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E')f_1(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)\mathbf{J}(\mathbf{r}, E')dE' \\ & = \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E')\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r}, E')\delta(E' - E)dE' = \Sigma_s(\mathbf{r}, E)\overline{\mu_0}\mathbf{J}(\mathbf{r}, E). \end{aligned} \quad (9-111)$$

(9-110)式我们通常称为输运近似。把(9-111)式代入(9-108)式便得输运截面如下：

$$\Sigma_{tr}(\mathbf{r}, E) = \Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \overline{\mu_0}\Sigma_s(\mathbf{r}, E). \quad (9-112)$$

这样所求得的扩散系数在形式上和单能情况的(9-99)式完全相

似。当然，更精确的考虑最好是先估算出中子流密度或中子通量的能谱，然后用(9-108)确定出扩散系数来。关于这点以及近似能谱的计算，我们将在多群常数中详细讨论。

把(9-109)式代入到(9-105)式中，我们便得到与能量有关扩散方程：

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D(\mathbf{r}, E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) - \Sigma_s(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E) \\ = \int_0^{\infty} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_0(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' + S(\mathbf{r}, E). \end{aligned} \quad (9-113)$$

这个方程在反应堆分析和计算中有着非常重要的意义，它通常是推导近代反应堆分析的基本方程——多群扩散方程的出发点。

## 6.4 边界条件

在上册，我们曾经讨论过单速扩散理论的边界条件问题，这里再给予简要介绍和推广。

**两种不同介质的分界面** 根据在分界面上  $\phi(\mathbf{r}_s, E, \Omega)$  对沿所有  $\Omega$  方向都是  $\mathbf{r}$  的连续函数的要求，自然，在分界面上应该满足：

$$\int \phi^I(\mathbf{r}_s, E, \Omega) d\Omega = \int \phi^{II}(\mathbf{r}_s, E, \Omega) d\Omega \Rightarrow \phi^I(\mathbf{r}_s, E) = \phi^{II}(\mathbf{r}_s, E), \quad (9-114)$$

及

$$\begin{aligned} \int \Omega \phi^I(\mathbf{r}_s, E, \Omega) d\Omega - \int \Omega \phi^{II}(\mathbf{r}_s, E, \Omega) d\Omega \Rightarrow \mathbf{J}^I(\mathbf{r}_s, E) \\ = \mathbf{J}^{II}(\mathbf{r}_s, E), \end{aligned} \quad (9-115)$$

亦即要求在分界面上中子总通量及中子流密度必须连续，式中上角标 I 和 II 表示分界面两侧的不同介质。 $\mathbf{r}_s$  表示分界面上的点。

在扩散理论中，中子流密度  $\mathbf{J}$  可用斐克定律来表示，因而便得到在分界面  $\mathbf{r}_s$  上的边界条件为：

$$\phi^I(\mathbf{r}_s, E) = \phi^{II}(\mathbf{r}_s, E) \quad (9-116)$$

$$D^I \nabla \phi^I(\mathbf{r}_s, E) = D^{II} \nabla \phi^{II}(\mathbf{r}_s, E) \quad (9-117)$$

应该指出，上述的边界条件和一维情况  $P_1$  近似时的(9-76)式是完全等价的。

**自由表面** 在自由表面  $\Gamma$  上边界条件的严格表达式应该是(9-30)式。但是在  $P_1$  近似中它是不可能严格地满足的，我们应用下列近似边界条件来代替

$$J^- = \int_{(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) < 0} |\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \phi(\mathbf{r}_s, E, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega} = 0, \quad \mathbf{r}_s \in \Gamma \quad (9-118)$$

式中积分限  $(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) < 0$  表示只对  $(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) < 0$  的那些  $\mathbf{\Omega}$  (即半个球) 进行积分，因此  $J^- = 0$  表示自真空返回域内的中子流密度等于零，这是符合物理上要求的。(9-118)式和一维情况的马绍克边界条件(9-74)式也是一致的。

对于扩散近似，若把中子通量的近似表达式(9-102)代入(9-118)式便得：

$$J^- = \frac{-1}{4\pi} \int_{(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) < 0} (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) \phi(\mathbf{r}_s, E) d\mathbf{\Omega} - \frac{3}{4\pi} \int_{(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) < 0} (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) \cdot [\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_s, E)] d\mathbf{\Omega} = 0,$$

为了便于计算上面的积分，取坐标轴  $Z$  与法线  $\mathbf{n}$  的方向重合，这样  $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}$  便等于  $\cos \theta$ ，同时将  $\mathbf{\Omega}$  的表示式(9-2)代入便得：

$$J^- = \frac{-\phi(\mathbf{r}_s, E)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta - \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta [\sin\theta \times \cos\varphi J_x + \sin\theta \sin\varphi J_y + \cos\theta J_z] \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\phi(\mathbf{r}_s, E)}{4} - \frac{1}{2} J_z(\mathbf{r}_s, E) = 0.$$

注意到上述积分中  $Z$  轴的取向，有  $J_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$ ；再应用斐克定律便得扩散近似的边界条件(9-118)的具体形式为

$$\frac{1}{4} \phi(\mathbf{r}_s, E) + \frac{D(\mathbf{r}_s, E)}{2} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0. \quad (9-119)$$

这个边界条件用起来是不太方便的。在实际中通常用下面更为方便的形式来表示：即认为中子通量沿实际边界法线方向外推一个

距离  $d$  处等于零(参看第二章 1.4 节)。根据 (9-119) 式, 外推距离  $d$  由下式求得:

$$\frac{1}{d} = -\frac{\nabla_n \phi}{\phi} \Big|_{r_s} = \frac{1}{2 D(r_s, E)}, \quad (9-120)$$

式中  $\nabla_n \phi = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi$ , 因而自由表面的边界条件可以写成

$$(i) \text{ 在外推边界 } r'_s \text{ 上: } \phi(r'_s, E) = 0, \quad (9-121)$$

$$\text{或} \quad (ii) \text{ 在边界 } r_s \text{ 上: } -\frac{\nabla_n \phi}{\phi} = \frac{1}{d}. \quad (9-122)$$

(9-121)和(9-122)式严格讲并不完全等价, 但是对实际效果的差异是很小的, 因而在实际应用中往往很少加以区别。

由(9-120)式知, 外推距离  $d = 2 D(r_s, E) = 0.67 \lambda_{tr}(r_s, E)$ , 对输运方程更精确的研究表明, 对于平面边界  $d \approx 0.7104 \lambda_{tr}(E)$ , 因而一般地讲,  $d$  和能量  $E$  有关, 同时还和表面的曲率有关。[6]中给出外推距离的一些更精确的计算公式。但是, 由于  $d$  的数值一般不超过 1—2 厘米, 它和堆芯的尺寸比较起来是很小的, 因此, 在实际计算时通常可以认为  $d$  与能量无关并等于常数; 而对于大型反应堆, 甚至直接可以认为中子通量在实际边界上等于零, 也不会导致很大的计算误差。

## 6.5 扩散理论的适用条件

前面我们对中子输运方程应用一阶近似的球谐函数方法导出了斐克定律和扩散方程。回顾前面讨论可知, 对于单速问题, 如果源是各向同性的, 扩散理论模型便和  $P_1$  近似等价, 因而对于  $P_1$  近似所作的一些假定和限制自然也就成为扩散理论成立所必须满足的条件。这些限制条件是:

1. 中子源  $S(\mathbf{r})$  必须是各向同性的。这个条件是很自然的, 否则在(9-97)式中将还包含源的各向异性分量  $S_1(\mathbf{r})$  项, 而不可能得到如(9-98)式那样斐克定律的简单形式。

2. 中子通量的角分布必须接近于各向同性。在  $P_1$  近似中, 我们认为在中子角通量的球谐函数或勒让特多项式的级数展式中

只需保留前二项就可以了[见(9-77)和(9-92)式]。这意味着要求中子角通量与  $\Omega$  的依赖关系较弱(或各向异性程度比较小)。

另一方面,中子通量角分布的各向异性程度和中子通量的空间变化率或梯度是互相联系着的。从前面图 9-1 中可以看出,在介质 I 中  $\Sigma_a^I \ll \Sigma_s^I$ , 远离边界的中心部分,中子通量的空间变化率是比较缓慢的,通量的角分布接近于各向同性。在靠近边界附近几个自由程的区域内由于  $\Sigma_a^II \gg \Sigma_s^II$ , 因而存在着自域 I 向域 II 的净中子流,所以中子通量的梯度就比较大,而通量角分布的各向异性程度也就显著增大,主要是指向域 II 的方向上的分布概率增大了。在区域 II 中由于  $\Sigma_a^II \gg \Sigma_s^II$  及泄漏的影响,中子通量沿空间急剧地变化,同时通量分布的各向异性也就更加显著。因此,  $P_1$  近似就要求中子通量的空间变化率或梯度[即  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  或  $\phi_1(z)$ ]相对地不能太大,即

$$|\mathbf{J}(\mathbf{r})| \ll \phi(\mathbf{r}) \quad (9-123)$$

或

$$|\lambda_r \nabla \phi| \ll \phi \quad (9-124)$$

这样,从(9-92)式可以看出,(9-123)或(9-124)式条件意味着  $\phi(\mathbf{r}, \Omega)$  将主要由第一项起主导作用,亦即  $\phi(\mathbf{r}, \Omega) \approx \phi(\mathbf{r})/4\pi$ , 也就是说角通量的角分布接近于各向同性。

那末究竟在什么情况下才能保证中子通量接近于各向同性或随空间的变化率比较小呢?对输运方程的进一步研究表明,在下面情况下,上述条件遭到破坏:(i) 靠近真空边界附近,或者在一个自由程的区域内材料性质有急剧的变化,(ii) 在中子源的邻近区域,(iii) 强吸收介质 ( $\Sigma_a \gg \Sigma_s$ ), 例如在铀棒或控制棒内部等。因而在上述情况下扩散理论的适用性就变得很差或者不能成立,需要借助更高阶的近似或其他更精确的理论,例如积分输运理论(碰撞几率法)来解决。

## 7. 离散坐标( $S_N$ )方法

正如前述,中子输运方程只是在极简单的情况下才能够得到精确的解析解。对于一般实际问题,通常必须采用一些近似方法求解。前面介绍的球谐函数方法便是常用的近似方法之一,其中扩散( $P_1$ )近似是一种最简单并且在反应堆分析中获得最广泛应用的方法。但是扩散近似有它的局限性。在边界或强吸收体附近,或者在散射或通量分布各向异性比较严重的系统中,它的误差比较大。在这种情况下,就得应用更高阶( $N > 1$ )的球谐近似。但是,当阶数增多时,尤其是对于多维复杂几何情况,球谐函数方法将变得非常复杂和困难。例如以 $P_3$ 近似为例,即使对于最简单的一维情况,也需解联立的四个微分方程[参阅(9-73)式],每个方程都耦合有三个未知函数;而对于普遍的几何情况,中子通量需用(9-86)式球函数展开, $P_3$ 近似则需解含有 $\phi_{n,m}(\mathbf{r})$  ( $n = 0, 1, 2, 3; m = -n, \dots, n$ )的联立的16个方程,而每个方程中将耦合有7个未知函数。这些方程组的数值求解将是非常麻烦的。因此,对于实际问题,尤其是多维情况,很少使用高阶的球谐近似,而往往采用一些更简便的方法,例如积分输运(碰撞几率)方法和离散坐标方法等。

离散坐标( $S_N$ )方法最早是由卡尔逊(B. G. Carlson)应用于输运方程的求解。近年来随着大型电子计算机的发展和对 $S_N$ 方法研究的深入, $S_N$ 方法已经成为研究粒子输运问题的有效的数值方法之一,在反应堆物理和屏蔽计算中获得了广泛的应用。

离散坐标方法的实质在于:对子函数 $f(x)$ ,首先把自变量 $x$ 离散化,得到离散的坐标点列 $x_1, x_2, \dots, x_N$ ,然后求出这些离散坐标点上的函数值 $f(x_i)$ ,并用它们近似地表示函数 $f(x)$ 。显然,当离散点取得足够密时,便可得到所需要的精确度。

在中子输运方程中,中子通量是 $\mathbf{r}$ ,  $E$ ,  $\Omega$ 的函数。对于变量 $E$ ,通常用“分群方法”对它离散化处理。这里主要介绍对 $\Omega$ 和



的离散化处理，尤其是对表示中子运动方向的自变量  $\Omega$  的离散化处理的一些特点和方法。应该指出，习惯上在输运问题中所谓“离散坐标方法”一词，也主要是指对自变量  $\Omega$  所作的离散化处理而言的。下面简要地介绍这个方法的主要思想和特点，关于它更详细的讨论，读者可以参考文献[4]。

## 7.1 离散差分方程的推导

为简单起见，讨论单能一维球对称情况。它基本上包含了方法的主要思想与特点，加以适当的补充便可推广到更普遍的情况。

### 7.1.1 输运方程的守恒形式

中子输运方程是根据在  $(r, E, \Omega)$  相空间基元内中子守恒的关系建立起来的。如果把它对所有方向和有限体积积分，那么，其结果就应该给出该体积内给定能量中子的守恒关系，即对于稳态情况应有[见(9-13)式]

$$\text{泄漏率} + \text{移出率} = \text{产生率}$$

我们发现，当对输运方程数值求解时，在曲线坐标中， $\Omega \cdot \nabla \phi$  项用特定的形式来表示将带来根大的方便和好处。我们希望，当把输运方程对所有方向和有限的体积积分时，所得到方程中的每一项都能够清楚地表示出中子守恒关系((9-13)式)中某一项的物理意义。

以一维球对称单速情况为例。这时中子输运方程的形式为(9-41)式。但可以把其中的  $\Omega \cdot \nabla \phi$  项用另一种方式表示，即把它改写成下列形式：

$$\frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \phi(r, \mu)] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \phi(r, \mu)] + \Sigma_s \phi(r, \mu) = q(r, \mu) \quad (9-125)$$

其中记  $q(r, \mu)$  为源项

$$q(r, \mu) = \frac{\Sigma_s}{2\pi} \int_{\Omega'} f(\mu_0) \phi(r, \mu') d\Omega' + \frac{\nu \Sigma_f}{2} \int_{-1}^{+1} \phi(r, \mu') d\mu' \quad (9-126)$$

用体积元  $4\pi r^2 dr$  乘(9-125)式并对  $r$  自  $r_i$  到  $r_{i+1}$  积分, 同时对所有方向(即对  $\mu$  从  $-1$  到  $+1$ )积分之, 那么第一项便给出

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} 4\pi r^2 \int_{-1}^{+1} \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot \phi)}{\partial r} d\mu dr = 4\pi r^2 \int_{-1}^{+1} \mu \phi(r, \mu) d\mu \Big|_{r_i}^{r_{i+1}} \\ = A_{i+1} J_{i+1} - A_i J_i \quad (9-127)$$

其中  $A_i = 4\pi r_i^2$  是半径为  $r_i$  处的球面积, 而  $J_i$  为  $r=r_i$  处的径向中子流密度

$$J_i = \int_{-1}^{+1} \mu \phi(r_i, \mu) d\mu$$

这样第一项就是表示体积元  $(r_i, r_{i+1})$  内中子的净流失(泄漏)率。

方程的第二项表示中子在曲线坐标中虽然其运动方向没有改变, 但是其方向坐标却随空间位置连续地变化(见图 9-11)面带来的影响。当对它作所有方向积分后, 其结果等于零, 即

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} 4\pi r^2 \int_{-1}^{+1} \frac{1}{r} \frac{\partial[(1-\mu^2)\phi]}{\partial \mu} d\mu dr \\ = \int_{r_i}^{r_{i+1}} 4\pi [(1-\mu^2)\phi] r dr \Big|_{\mu=-1}^{\mu=+1} = 0$$

第三项积分是中子由于各种碰撞的损失率, 第四项则给出中子的产生率。由此可见, 对(9-125)式作上述积分后, 每一项都有与中子守恒关系相对应的明确的物理意义。当然, 也可以直接对(9-41)式进行类似的积分, 这时由  $\Omega \cdot \nabla \phi$  项将得到两项, 从数学上讲可以把这两项合并而得到(9-127)式, 但是对每一单项来讲并没有物理意义。

我们把(9-125)式称为输运方程的守恒形式。对于柱坐标以及一般坐标情况下输运方程的守恒形式可参阅文献[1]、[4]。输运方程的守恒形式在输运方程的数值求解中是很有用的。由守恒形式导出的差分方程中每一项都有明确的物理解释, 并且要比从非守恒形式输运方程中直接导出的, 具有更高的精确度。在离散坐标( $S_N$ )方法中我们也是从中子输运方程的守恒形式来导出离散的差分方程。

## 7.1.2 差分方程的推导

我们从方程(9-125)出发来导出离散的差分方程。为此，我们把  $0 \leq r \leq R$  ( $R$ ——外推半径)区域以  $r_0=0, r_1, \dots, r_k, \dots, r_m$  分成为  $M$  个小区间(见图 9-14)，同时使所有不同介质的分界面均落在离散点  $\{r_k\}$  上，因而在每个区间  $(r_{k-1}, r_k)$  内中子截面值均等于常数。把自变量  $\mu$  以  $\mu_0=-1, \mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_N=1$  分割成  $N$  个离散区间，第  $J$  区间的宽度为  $\Delta\mu_j = \mu_j - \mu_{j-1}$  (注意：这里以大写字母  $K, J$  或罗马数 I, II... 等表示区间及基点的序号，用小写字母  $k, j$  及阿拉伯数字表示分点的序号)，这样，根据数值积分公式有

$$\int_{-1}^{+1} \phi(r, \mu) d\mu = \sum_{j=1}^N w_j \phi(r, \mu_j), \quad (9-128)$$

其中  $w_j$  为求积系数， $\mu_j$  为第  $J$  个区间的基点  $\mu_{j-1} < \mu_j < \mu_{j+1}$ 。

计算实践表明，选取角度变量  $\mu$  的离散分点的方法、数目以及基点  $\{\mu_j\}$  和相应的  $\{w_j\}$ ，对计算的精确度有很大的影响。一般常取  $N$  为偶数，而每个区间的宽度可以是等距或者不等距，但是通常要求分点  $\mu_j$  和基点  $\mu_j$  的方向对  $\mu=0$  为对称，即

$$\mu_j = -\mu_{N-j}; \quad \mu_j = -\mu_{N+1-j}; \quad w_j = w_{N+1-j}. \quad (9-129)$$

因而

$$\sum_{j=1}^N \mu_j w_j = 0. \quad (9-130)$$

在早期的离散方法中，区间宽度通常取成等距  $\Delta\mu_j = 2/N$ ， $\mu_j = -1 + 2j/N$ ，同时在每个区间内的中子通量认为是直线变化，且  $\mu_j = -1 + (2j-1)/N$ ，也就是认为在  $[-1, 1]$  区间内  $\phi(r, \mu)$  被近似用  $N$  个相等的弦段来表示(图 9-15)，所以称之为  $S_N$  方法。这里字母  $S$  便是线段(Segment)的缩写，足标  $N$  表示所分弦段的数目。目前虽已不用直线弦近似，而应用一些更精确的求积公式，例如高斯求积组(见表 9-3)等来进行计算。但是习惯上仍然称离散坐标法为“ $S_N$ ”方法，不过这时  $N$  并不表示弦段的数目，而仅仅是表示离散方向的数目。



下面我们便来推导  $(r_{k-1}, r_k) \times (\mu_{j-1}, \mu_j)$  相空间单元  $(K, J)$  上的差分方程。为此将 (9-125) 式各项乘以相单元体积  $dV d\mu = 4\pi r^2 dr d\mu$  并对相单元区域积分之。这样，左端第一项便等于

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \int_{r_{k-1}}^{r_k} 4\pi\mu \frac{\partial}{\partial r} (r^2\phi) dr d\mu \\ &= 4\pi \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} [r_k^2\mu\phi(r_k, \mu) - r_{k-1}^2\mu\phi(r_{k-1}, \mu)] d\mu. \end{aligned}$$

在计算  $\mu$  积分时应用求积公式中的一项，即

$$\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} f(\mu) d\mu \approx w_j f(\mu_j),$$

因而得到

$$T_1 = w_j \mu_j [A_k \phi_{k,j} - A_{k-1} \phi_{k-1,j}], \quad (9-131)$$

式中  $A_k = 4\pi r_k^2$  为  $r_k$  处的球面积  $\phi_{k,j} \equiv \phi(r_k, \mu_j)$ 。对于方程 (9-125) 的第二项则等于

$$\begin{aligned} T_2 &= 4\pi \int_{r_{k-1}}^{r_k} \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)\phi(r, \mu)] d\mu dr \\ &= 4\pi \int_{r_{k-1}}^{r_k} [(1-\mu_j^2)\phi(r, \mu_j) \\ &\quad - (1-\mu_{j-1}^2)\phi(r, \mu_{j-1})] r dr \\ &\approx 4\pi r_K \Delta r_K [(1-\mu_j^2)\phi_{K,j} - (1-\mu_{j-1}^2)\phi_{K,j-1}], \end{aligned} \quad (9-132)$$

式中  $r_K = (r_k + r_{k-1})/2$ ;  $\Delta r_K = r_k - r_{k-1}$ ;  $\phi_{K,j} \equiv \phi(r_K, \mu_j)$ 。余类推之。(9-132)式可以写成关于  $j$  的二点差分形式

$$T_2 = B_{K,j} \phi_{K,j} - B_{K,j-1} \phi_{K,j-1}, \quad (9-133)$$

其中曲率系数  $B_{K,j}$  等于

$$B_{K,j} = 4\pi r_K \Delta r_K (1-\mu_j^2). \quad (9-134)$$

由于  $\mu_0 = -1$  和  $\mu_n = 1$ ，因而  $B_{K,0} = B_{K,n} = 0$ ，同时，注意到  $r_K \Delta r_K = (r_k^2 - r_{k-1}^2)/2$ ，且

$$\mu_j^2 - \mu_{j-1}^2 = 2 \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \mu d\mu = 2\mu_j w_j,$$

由 (9-134) 式便可得到关于  $B_{K,j}$  的递推公式：

$$B_{K,j} - B_{K,j-1} = -4\pi(r_k^2 - r_{k-1}^2)\mu_j w_j = -\mu_j w_j (A_k - A_{k-1}). \quad (9-135)$$

由于  $B_{K,0} = 0$ , 由(9-135)式便可很方便地递推求得所有  $B_{K,j}$  来, 同时根据  $\mu_j$  的对称性(9-130)式, 同样可得

$$B_{K,K} = \sum_{j=1}^N \mu_j w_j = 0 \quad (9-136)$$

对于第三项, 积分后有

$$\begin{aligned} T_3 &= \int_{r_{k-1}}^{r_k} 4\pi r^2 dr \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \Sigma_i \phi(r, \mu) d\mu \approx 4\pi w_j \\ &\quad \times \int_{r_{k-1}}^{r_k} r^2 \Sigma_i \phi(r, \mu_j) dr \\ &\quad \approx w_j V_K \Sigma_{i,K} \phi_{K,j}, \end{aligned} \quad (9-137)$$

式中  $V_K = 4\pi(r_k^3 - r_{k-1}^3)/3$  为体积元的体积。同样第四项可以写成

$$T_4 \approx w_j V_K q_{K,j}. \quad (9-138)$$

当散射为各向同性的情况下, 根据(9-126)式源  $q_{K,j}$  简化为

$$q_{K,j} = \frac{1}{2} (\Sigma_{s,K} + (\nu \Sigma_f)_K) \sum_{j'=1}^N w_{j'} \phi_{K,j'}. \quad (9-139)$$

利用  $T_1 \rightarrow T_4$  各项的结果, 对每一  $(K, J)$  基元由(9-125)式便得到:

$$\begin{aligned} \mu_j (A_k \phi_{k,j} - A_{k-1} \phi_{k-1,j}) + (B_{K,j} \phi_{K,j} - B_{K,j-1} \phi_{K,j-1}) / w_j \\ + V_K \Sigma_{i,K} \phi_{K,j} = V_K q_{K,j}, \end{aligned} \quad (9-140)$$

这便是球对称情况下输运方程的差分格式。但是在每一  $(K, J)$  基元的方程中它包含有  $\phi_{k,j}, \phi_{k-1,j}, \dots, \phi_{K,j}$  等五个未知数。因此还必须建立一些辅助关系式, 以减少未知数量, 其中以“菱形”差分格式为最简单和常用的一种, 它认为中子通量  $\phi$  在一个网格基元中是线性变化的(见图 9-14), 即

$$\phi_{K,j} \approx \frac{1}{2} (\phi_{k,j} + \phi_{k-1,j}), \quad (9-141)$$

$$\phi_{K,j} \approx \frac{1}{2} (\phi_{K,j} + \phi_{K,j-1}). \quad (9-142)$$

利用菱形差分格式(9-141)及(9-142)式消去(9-140)式中的  $\phi_{k-1,j}$  及  $\phi_{K,j}$  便得到递推形式的差分方程:

$$\phi_{K,J} = \frac{-A_{K,J}\phi_{k,J} + \alpha_{K,J}\phi_{K,J-1} + V_K q_{K,J}}{\sum_{i,K} V_K - A_{K,J} - \alpha_{K,J}} \quad (9-143)$$

或消去  $\phi_{k,J}$  和  $\phi_{K,J}$ , 则得到:

$$\phi_{K,J} = \frac{\Lambda_{K,J}\phi_{k-1,J} + \alpha_{K,J}\phi_{K,J-1} + V_K q_{K,J}}{\sum_{i,K} V_K - \Lambda_{K,J} - \alpha_{K,J}} \quad (9-144)$$

式中

$$A_{K,J} = \mu_J(A_K + \Lambda_{K-1}); \alpha_{K,J} = (B_{K,J} + B_{K,J-1})/w_J. \quad (9-145)$$

这时外推边界 ( $k=m$  处) 条件可以表成:

$$\phi_{m,j} = \phi_{m,j} = 0, \text{ 当 } \mu_j \leq 0 \text{ 或 } \mu_j \leq 0 \quad (9-146)$$

## 7.2 差分方程的解法

我们应用迭代法对差分方程(9-143)或(9-144)式求解。在每次迭代过程中的源项  $q_{K,J}$  是已知的。然而对于给定的  $(K, J)$  相单元, 这时方程的右端仍含有二个未知数, 因而在着手数值过程之前还必须建立一些补充的关系式。为此我们考虑  $\mu_0 = -1$  的特定方向, 即图 9-14 中 ab 直线上的各个分点, 这时, 中子输运方程(9-41)便简化( $\mu = -1$ )为

$$-\frac{d\phi(r, -1)}{dr} + \Sigma_r \phi(r, -1) = q(r, -1).$$

对上式在  $r_{k-1} \leq r \leq r_k$  区间内积分之便得到

$$-\phi_{k,0} + \phi_{k-1,0} + \sum_{i,K} \Delta r_K \phi_{K,0} = q_{K,0} \Delta r_K, \quad (9-147)$$

式中 
$$\phi_{K,0} \approx \frac{1}{2}(\phi_{k,0} + \phi_{k-1,0}). \quad (9-148)$$

将(9-148)代入(9-147)式便可求得对于  $\mu_0 = -1$  方向上各节点有

$$\phi_{k,0} = \frac{2\phi_{k-1,0} + \Delta r_K q_{K,0}}{2 + \sum_{i,K} \Delta r_K}. \quad (9-149)$$

这样, 根据  $\phi_{m,0} = 0$  的边界条件, 利用(9-149)及(9-148)便可以很方便地自外向里逐点地求出图 9-14 ab 线各分点及基点上通量的数值。利用这些数值及边界条件(9-146)我们就可以很方便地对差分方程(9-143)或(9-144)求解。具体求解步骤如下:

1. 对于  $\mu \leq 0$  区域 首先利用(9-148)和(9-149)求出 ab 线

上各分点及基点上的  $\phi_{k,0}$  及  $\phi_{k,1}$  的数值，然后自  $J=1, k=m$  点开始自外向里应用(9-143)式逐点求解，首先根据  $\phi_{m,1}=0$ ，及已求得的  $\phi_{m,0}$  值，应用(9-143)式便可算得  $\phi_{m,1}$  值，然后再利用(9-141)和(9-142)菱形差分格式算出  $\phi_{m-1,1}$  及  $\phi_{m,1}$  来。重复利用上述公式便可自外向里逐点地求出通量  $\phi$  的数值来。然后再对  $J=II, III, \dots$  重复上述步骤便可求得  $\mu \leq 0$  区域所有  $\phi_{k,j}$  和  $\phi_{k,j+1}$  值来。

2. 对于  $\mu > 0$  区域 首先根据在  $r=0$  处的对称条件

$$\phi(0, \mu_j) = \phi(0, -\mu_j)$$

便可求出图 9-14 中  $df$  线上各节点上的通量值。然后仿照  $\mu \leq 0$  区域步骤用(9-144)式自里向外解得右半面所有点的  $\phi$  值。

图 9-14 中的箭头表示求解的数值过程的次序。实践表明，这样的计算方向是稳定的，这就是说，任何一点所产生的计算中的误差在随后各点的计算中不会继续扩大、积累而超出所许可的范围。在求出所有的  $\phi_{k,j}$  值后便可算出新的源项  $q$ ，并进行新的迭代过程。这样的过程一直继续到收敛为止。

从上面讨论可以看到，离散坐标  $S_N$  方法的数值运算是很简便的，而且每个离散方向上中子通量的求解彼此不互相耦合。因此当需要提高阶数( $N$ )时，并不象球谐近似那样将增加很大的困难。同时它对于各向异性散射的考虑也比较方便。尤其是对于吸收性比较强和体积比较小的系统，它比球谐近似具有更大的优越性。实践证明，离散  $S_N$  方法可以取得很好的精度。一般地讲，离散  $S_2$  近似的精度和球谐  $P_1$  近似相当，适当地增大阶数  $N$ ，离散  $S_N$  方法可以取得满意的结果。

### 参 考 文 献

- [1] G. I. 贝尔, S. 格拉斯登著, 千里译, 核反应堆理论, 第一、三、四、五章, 原子能出版社, 1979年。
- [2] A.F. Henry, Nuclear Reactor Analysis, pp. 333—386, The MIT Press, 1975.
- [3] Г. И. Марчук, Методы Расчета Ядерных Реакторов, Гл.1,3,5, АТО-МИЗДАТ, 1961.
- [4] H. Greenspan et al., Computing Methods in Reactor Physics, Chap. 3, 4, Gordon and Breach Science Publishers, 1968.
- [5] Г. И. Марчук, Ш. С. Николайвили, Теория и Методы Расчета Ядерных Реакторов. Стр.5, Госатомиздат, 1962.
- [6] Reactor Physics Constants, ANL-5800, 2nd ed., 1963.



## 第十章 分群扩散理论

在反应堆内，中子的能量是在 0.001 电子伏至 10 兆电子伏相当宽的范围内变化的，而中子与堆内各种材料原子核的作用截面又是与中子能量密切有关的。因此可以预料，要较真实地反映堆内的物理过程必须考虑中子通量与能量的相关性。

在第九章内，我们导出了中子通量与能量相关的中子扩散方程(9-113)。然而，要解析地求解这些方程来得到反应堆内中子通量对能量和空间的连续依赖关系却是非常困难的，通常应用“分群方法”来近似地求解。这时把中子能量的分布范围划分成若干个离散的能量间隔  $\Delta E_g$ ：(  $E_0, E_1$  )、(  $E_1, E_2$  )、 $\cdots$ 、(  $E_{g-1}, E_g$  )、 $\cdots$ ，每一个能量间隔称为一个能群(见图 10-1)。

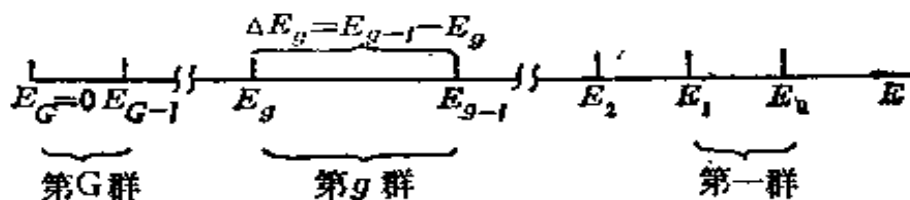


图 10-1 分群示意图

对每一个  $g$  能群，定义群中子通量  $\phi_g$  为

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{r}, E) dE \quad (10-1)$$

它是该能群内各种能量中子的总通量。同时采用适当平均的参数来表示该能群内的一些参数，这些平均参数叫做群常数。

在本章内，我们主要介绍如何应用分群方法来近似求解能量相关的扩散方程，这种处理一般称为分群扩散理论。它是反应堆设计计算中最广泛采用的方法之一。第四章中的单群和双群理论便是分群扩散理论中的最简单情况。

本章着重介绍多群扩散方程的建立、群常数及有关群常数计

算的一些概念、反应堆中慢化能谱和快群常数的计算。关于热群常数的计算和多群扩散方程的数值解法将在下面二章内讨论。

## 1. 多群扩散方程

在第九章内我们曾推导出能量相关的扩散方程(9-113),现在我们就从这个方程出发来推导多群扩散方程,并得出群常数的表达式。这里从较普遍的情况出发,中子通量 $\phi(\mathbf{r}, E)$ 的能量相关的扩散方程可以写成:

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot D \nabla \phi(\mathbf{r}, E) + \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, E) \\ & = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' \\ & + \chi(E) \int_0^{\infty} \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E') dE'. \end{aligned} \quad (10-2)$$

这里我们把(9-113)式的源项具体化了,同时 $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$ 中包含弹性散射和非弹性散射两部份。

我们把中子能量的分布范围按图 10-1 划分成若干个能群,例如,划分成 $G$ 群。在每一能群区间 $\Delta E_g$ 内对方程(10-2)进行积分,这样就消去方程中的变量 $E$ ,于是就得到 $G$ 个不含能量变量的扩散方程,其中第 $g$ 群的扩散方程为

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot \int_{\Delta E_g} D \nabla \phi dE + \int_{\Delta E_g} \Sigma_a \phi dE \\ & = \int_{\Delta E_g} dE \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' \\ & + \int_{\Delta E_g} S(\mathbf{r}, E) dE. \end{aligned} \quad (10-3)$$

式中,  $\Delta E_g = E_{g-1} - E_g$ ;  $S(\mathbf{r}, E)$ 为裂变源项。

通过定义一些量可以使方程(10-3)简化。第 $g$ 群的中子通量 $\phi_g(\mathbf{r})$ 已由(10-1)式定义。定义 $g$ 群的总截面为

$$\Sigma_{t,g} = \frac{1}{\phi_g} \int_{\Delta E_g} \Sigma_t(E) \phi(\mathbf{r}, E) dE, \quad (10-4)$$

$g$ 群的扩散系数为

$$D_g = \frac{\int_{\Delta E_g} D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) dE}{\int_{\Delta E_g} \nabla \phi(\mathbf{r}, E) dE}. \quad (10-5)$$

将能量范围划分成  $G$  个能群后，方程(10-3)中的散射项可以写成

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta E_g} dE \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' \\ &= \sum_{g'=1}^G \int_{\Delta E_g} dE \int_{\Delta E_{g'}} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE'. \end{aligned} \quad (10-6)$$

定义群转移截面  $\Sigma_{g' \rightarrow g}$  为

$$\Sigma_{g' \rightarrow g} = \frac{1}{\phi_{g'}} \int_{\Delta E_g} dE \int_{\Delta E_{g'}} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE', \quad (10-7)$$

因而， $\Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}$  便表示每秒、每立方厘米内  $g'$  群中子经受散射碰撞后能量落到  $g$  群内的中子数。因为散射包括弹性散射和非弹性散射，所以  $\Sigma_{g' \rightarrow g}$  也应包括弹性（散射）转移截面和非弹性（散射）转移截面。将(10-7)式代入(10-6)式得

$$\int_{\Delta E_g} dE \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}. \quad (10-8)$$

裂变源项可以写成

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta E_g} \chi(E) dE \int_0^\infty \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E') dE' \\ &= \int_{\Delta E_g} \chi(E) dE \left[ \sum_{g'=1}^G \int_{\Delta E_{g'}} \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E') dE' \right], \end{aligned} \quad (10-9)$$

定义  $g'$  群的裂变截面为

$$(\nu \Sigma_f)_{g'} = \frac{1}{\phi_{g'}} \int_{\Delta E_{g'}} \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E') dE' \quad (10-10)$$

及

$$\chi_g = \int_{\Delta E_g} \chi(E) dE \quad (10-11)$$

它表示裂变中子出现在  $g$  群内的几率。将(10-10)和(10-11)式代

入(10-9)式得

$$\begin{aligned} \int_{\Delta r_g} \chi(E) dE \int_0^\infty \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E') dE' \\ = \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'}. \end{aligned} \quad (10-12)$$

采用上述定义以后，方程(10-3)就简化成

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{t,g} \phi_g(\mathbf{r}) \\ = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}(\mathbf{r}) + \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'}(\mathbf{r}), \\ g = 1, 2, \dots, G. \end{aligned} \quad (10-13)$$

这就是多群扩散方程。方程中的  $D_g$ 、 $\Sigma_{t,g}$ 、 $\Sigma_{g' \rightarrow g}$ 、 $(\nu \Sigma_f)_g$  等称之为群常数。

(10-13)为稳态扩散方程，因而它只是对于临界系统才是成立的。从数学上讲，因为它是一个关于  $\phi_g$  的齐次方程组，只有在特定条件下（为临界系统时）才有非零解。所以对于一般（任意给定的系统大小和群常数）情况下并不一定都有解。但是从第九章输运方程的特征值问题的讨论中知道，对于一般情况，这可以通过引入有效增殖因数，并把它归结为特征值问题来解决。这样，对于一般情况多群扩散方程可写成

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{t,g} \phi_g(\mathbf{r}) \\ = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}(\mathbf{r}) \\ + \frac{1}{k} \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'}(\mathbf{r}), \quad g = 1, 2, \dots, G. \end{aligned} \quad (10-14)$$

其中  $k$  为有效增殖因数，亦叫方程的特征值。

现在我们来稍为详细地讨论一下多群扩散方程。首先来观察一下方程中的散射项。在第三章讨论中子散射过程时我们曾指出，如果入射中子能量  $E$  显著地大于靶核的热运动能量，在散射碰撞后，中子就不可能获得能量，而只会损失能量，也就是快中子只

能因散射碰撞而被慢化，因此在快群内有

$$\Sigma_{g' \rightarrow g} = 0, \text{ 当 } g' > g \quad (10-15)$$

这意味着在散射碰撞过程中没有中子从能量较低的能群（群号大的能群）向上散射到能量较高（群号小）的能群。

通常少群扩散计算只采用一个热群来描述热中子（假设中子不可能向上散射而离开热群），这时散射项就可写成

$$\sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} + \Sigma_{g \rightarrow g} \phi_g, \quad (10-16)$$

$\Sigma_{g \rightarrow g} \phi_g$  为群内散射项，它表示遭受散射碰撞后，因能量损失相当小以致于仍留在群内的中子数。往往把  $\Sigma_{g \rightarrow g} \phi_g$  移到 (10-14) 式的左边，并定义  $g$  群移出截面  $\Sigma_{R,g}$  为

$$\Sigma_{R,g} = \Sigma_{a,g} - \Sigma_{g \rightarrow g} \quad (10-17)$$

它表示中子由于碰撞（包括吸收和散射），而从  $g$  群移出的宏观截面（应注意，有的文献中，移出截面中不包括吸收截面  $\Sigma_{a,g}$ ，即不包括因吸收引起的从  $g$  群的移出）。

如果能群宽度比较宽，以致于中子散射碰撞后只能出现在相邻的下一个能群，这时散射项就可进一步简化：

$$\sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} = \Sigma_{(g-1) \rightarrow g} \phi_{g-1} + \Sigma_{g \rightarrow g} \phi_g. \quad (10-18)$$

通常称这样的多群方程是直接耦合的。

因此，在没有向上散射的情况下多群扩散方程为

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{R,g} \phi_g &= \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} \\ &+ \frac{1}{k} \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'}. \end{aligned} \quad (10-19)$$

$g = 1, 2, \dots, G$

若用矩阵表示就能更清楚地看出这一方程的结构，方程 (10-19) 用矩阵表示时为

$$\begin{bmatrix}
 \nabla \cdot D_1 \nabla - \Sigma_{g \rightarrow 1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
 -\Sigma_{1 \rightarrow 2} & -\nabla \cdot D_2 \nabla - \Sigma_{g \rightarrow 2} & 0 & \cdots & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 -\Sigma_{1 \rightarrow g} & -\Sigma_{2 \rightarrow g} & -\Sigma_{3 \rightarrow g} \cdots & -\nabla \cdot D_g \nabla - \Sigma_{g \rightarrow g}
 \end{bmatrix}$$

**M**

$$\times \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_g \end{bmatrix} =$$

**$\phi$**

$$\times \frac{1}{k} \begin{bmatrix}
 \chi_1(\nu \Sigma_f)_1 & \chi_1(\nu \Sigma_f)_2 & \cdots & \cdots \\
 \chi_2(\nu \Sigma_f)_1 & \chi_2(\nu \Sigma_f)_2 & \cdots & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \chi_g(\nu \Sigma_f)_1 & \chi_g(\nu \Sigma_f)_2 & \cdots & \chi_g(\nu \Sigma_f)_g
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_g \end{bmatrix} \quad (10-20)$$

**F**  **$\phi$**

即

$$\mathbf{M}\phi = \frac{1}{k}\mathbf{F}\phi. \quad (10-21)$$

可以看出，由于没有向上散射，矩阵 **M** 为下三角形的，而矩阵 **F** 是满的。在直接耦合的情况下，**M** 简化成为双对角形式 [(10-22)]。

但是，如果我们在热能范围也分成若干个能群，例如对于高温气冷堆有时把热群分成四群，由于在热能范围内有向上散射发生，所以在 **M** 内与这几个热能区能群相对应处，将有一个满的子矩阵。



平的，也就是说它近似地等于常数。应该指出，这样处理是很粗糙的。更精确一些，可以认为在**高能区** ( $E > 10^5$  电子伏)的中子能谱为**裂变谱**，在**慢化区** ( $E$  大约在 1 至  $10^5$  电子伏)碰撞密度为  $1/E$  谱，等等。

但是，用上述方法获得群常数是超细群或多群的群常数，能群的数量必须很大，若将它们直接代入多群扩散方程求解，那是非常不经济的，而且有时是不可能实现的。因为在第十三章将会看到，当用数值方法解多群扩散方程时，例如用差分方法进行水堆计算时，在二维情况下空间网点一般若取  $100 \times 100$  (三维情况还要多)，即使能群数目为 100，那么也将需要解  $10^6$  个差分方程，这是非常费时的，并且在一般计算机上有时是很难实现的。因此，在实际设计中通常是应用少群扩散方程的空间计算。例如，对于水堆，通常采用 3 至 4 个能群。这样，就需要正确地求得反应堆的中子慢化能谱和少群群常数，但麻烦的是中子能谱往往是和反应堆的具体或分和大小相关的。

通常我们把热能范围的能群称为**热群**，而把高于分界能以上的能群统称为**快群**，关于热群常数的计算将在第十二章中专门讨论。这里将着重介绍快群常数的计算。

关于热堆少群快群群常数的产生通常分为两步。第一步是按照前而所述把所讨论的能量范围分成非常细的多群(或细群)结构，然后根据已有截面数据按照近似能谱，如根据碰撞密度为  $1/E$  谱或者根据解慢化方程求出近似的能谱，对它进行平均求出各种元素的多群(约 30 至 100 群)群常数，以供计算时直接使用。第二步则把所求出的多群群常数作为输入数据，对所讨论的某个反应堆求解慢化方程，并求出多群能谱分布  $\varphi_n$ ，然后根据求得的多群能谱和多群常数归并产生所需要的少群群常数。例如对少群中第  $g$  群常数有

$$\Sigma_{x, g} = \frac{\sum_{n \in g} \Sigma_{x, n} \varphi_n}{\sum_{n \in g} \varphi_n}, \quad x = a, f, \dots, \quad (10-28)$$



$$\Sigma_{g' \rightarrow g} = \frac{\sum_{n \in g} \sum_{n' \in g'} \Sigma_{n', n} \varphi_{n'}}{\sum_{n' \in g'} \varphi_{n'}} \quad (10-29)$$

式中符号  $\sum_{n \in g}$  表示对位于  $g$  群内的所有多群的群号  $n$  求和。最后，利用这些少群群常数进行少群扩散方程的空间计算，求得中子通量的空间分布。并可算出新的  $B_{\infty}^2$  值。若它和原先的估计值差别比较大，则必要时可以进行迭代求解，见图 10-2。但实践证明群常数对  $B_{\infty}^2$  值并不十分敏感，一般情况下很少需要这种迭代过程。

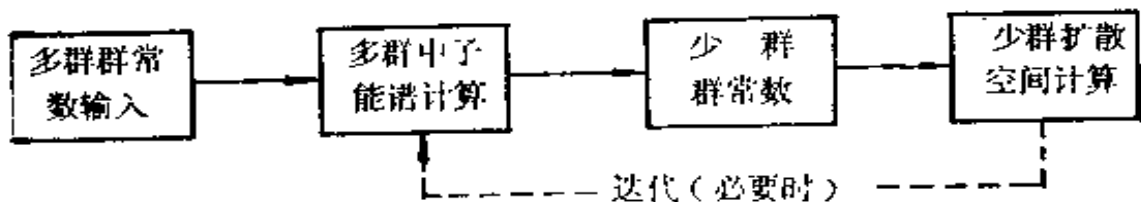


图 10-2 少群群常数的计算

由此可以看出，第一步中的多群群常数与系统的具体成分和几何没有密切的关系，它对于某些类似结构的反应堆是通用的。在一些国家已制成多群群常数表供直接使用，例如对水堆可以使用 MUFT-54 群常数表<sup>[5]</sup>等等。然而，第二步中的多群能谱与少群群常数则和所研究的特定堆的成份、几何以及运行条件密切相关，因而在设计中必须对芯部各区作进一步的计算，而且在能耗计算的各阶段时间中，当芯部成份有较大变化时往往需重复地进行上述计算。目前许多单位都编制有快谱和少群快群常数的计算程序，在国外最常见的有 MUFT<sup>[4]</sup>、GAM<sup>[6]</sup> 等程序。

快中子反应堆群常数的计算与热中子反应堆的有些差别。在计算快堆中子通量空间分布时采用的少群的群数要比热堆的多，约 20 群左右。同时由于设计经验有限以及核反应，特别是共振吸收和非弹性散射反应过程的复杂性及其对能谱的影响，快堆能谱和群常数更多地应用直接计算来获得，MC<sup>2</sup> 程序<sup>[9]</sup>便是这方

而具有代表性的程序。它把能量分成许多超细群或细群，用评价过的截面数据（如 ENDF/B）直接产生出超细群常数并进行慢化能谱的  $P_1$  或  $B_1$  近似计算，最后再由所求得的超细群或细群能谱归并产生出所需要的多（宽）群群常数来。

但像 MC<sup>2</sup> 那样直接产生多（宽）群常数对于常规的计算来说是过于精细并且耗费太大。由于芯部成分变化时快堆的多群常数不像热堆那样敏感，目前已经提出了一些适用于任何快堆的通用的微观群常数系列，例如 ANL 16 群、LASL-16 群<sup>[9]</sup>和苏联的 25 群<sup>[8]</sup>群常数等等。芯部成分对群常数的影响可以通过“ $f$ -因子”来加以考虑，即特定堆的有效微观截面  $\sigma_{eff}$  可以应用下式来计算：

$$\sigma_{eff} = f \sigma_{av} \quad (10-30)$$

其中  $\sigma_{av}$  为通用群常数的表值（它相当于无限稀释情况的数值）， $f$  为“自屏因子”，它考虑了诸如共振吸收所引起的能谱的变化等影响。 $f$  因子为介质成分及温度的函数，以表值形式在一些群常数表中同时给出。

上面介绍的把能量、空间分开处理的方法显著地减少了计算工作量，处理得当能得到满意的结果。但应该强调指出，栅元的非均匀效应是不可忽略的，因此在群常数的计算中，必须考虑栅元内中子通量空间分布的非均匀性。

反应堆临界计算时究竟须采用几群为宜，这个问题主要决定于堆型和所研究问题的要求。例如，对于热中子反应堆的非常粗略的计算，采用双群理论就可以了。一般对于水堆的设计大多数采用四群（一个热群，三个快群）扩散模型，对于高温气冷堆则采用 7 至 9 群，而对快堆则需 20 群左右或更多的群。从理论上讲，群的数目增加，能群间隔越小，中子在反应堆中增殖、慢化和吸收等过程可以描述得更细致，能更好地反映出中子能谱连续分布的实际情况，但是，群数的增多，计算量和计算时间必然增大。另外，对于一定堆型，在选取适量合理的能群数目以后，增大群数的效益并不是很显著的，因此，群数的选定，还应从实际

问题出发，根据问题的要求、所需的精度和所付出的经济代价两个方面来权衡。

至于少群的能群结构应该如何确定，这也要根据堆型并考虑堆物理的一些特性而加以选择。例如，研究水堆的能谱发现，若将中子能量范围划分成四个能区，就能较细致地反映出水堆的物理特性（见图 10-3）。这四个能区为：

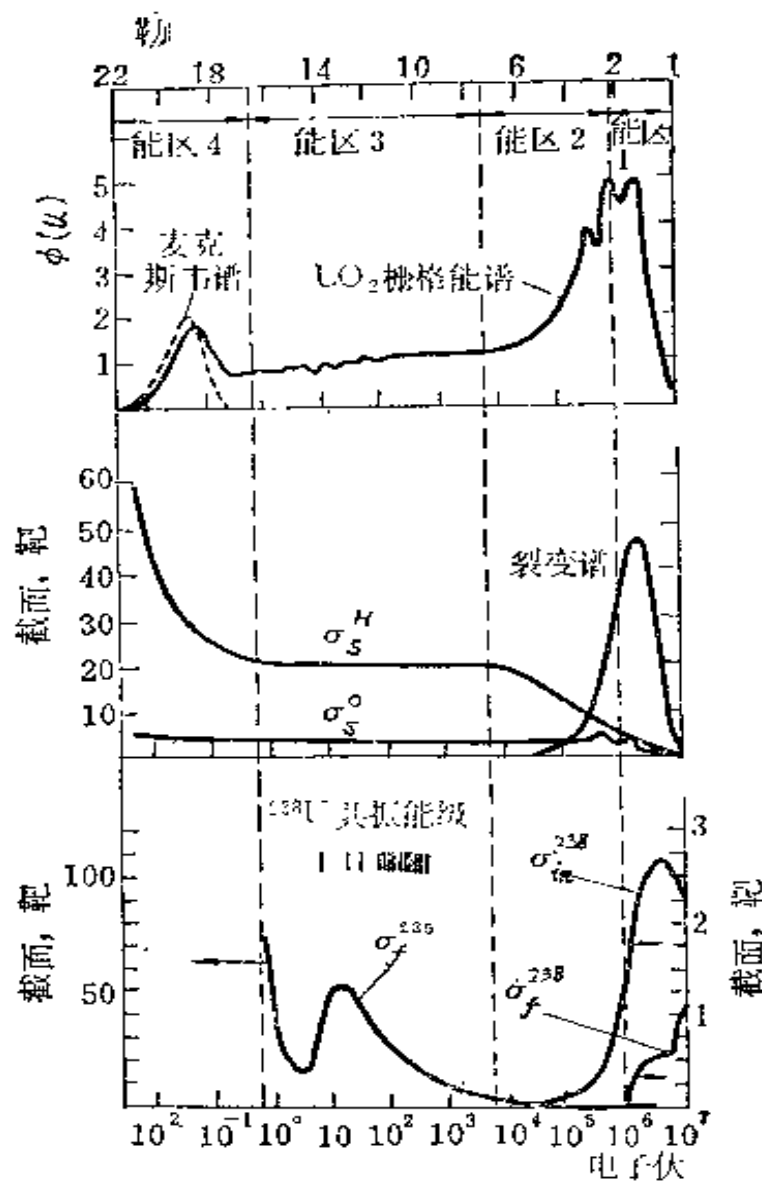


图 10-3 水堆的中子能谱与截面

(1) 高能区 (0.821 至 10 兆电子伏) 约有 75% 的裂变中子出现在这个能区。在这个能区内, 必须考虑铀-238 的裂变; 同时氢的散射截面比较小, 相对地讲, 中子与氧、铀或其他结构材料发生碰撞的几率较大, 因此, 在这个能区内, 中子与这些物质的非弹性碰撞是中子损失能量的重要因素。

(2) 中能区 (5.5 千电子伏至 0.821 兆电子伏) 约有 25% 左右的其余裂变中子出现在这个能区内。在此能区中, 氢的散射截面因能量下降而显著增加, 中子与氢的弹性散射是使中子损失能量的主要因素。

(3) 共振能区 (0.625 电子伏至 5.5 千电子伏) 在这个能区内, 氢的散射截面为常数。除了因共振吸收造成的畸变以外, 中子能谱近似地服从于  $1/E$  律; 由于中子的共振吸收对链式裂变反应过程有很重要的影响, 因此, 在这个能区内, 铀-238、钚-240 等的共振吸收处理是个重要问题。

(4) 热能区 (0.625 电子伏以下) 由于水堆的宏观吸收截面比较大, 以致使轻水堆的热中子能谱变硬并偏离麦克斯韦谱分布, 因而必须采用一些更精确的模型来计算 (详见第九章)。

经验证明, 水堆用四群进行扩散计算能给出比较满意的结果。

### 3. 反应堆慢化能谱的近似计算

从上一节讨论中知道, 多群常数计算的主要问题在于求出中子通量的能谱  $\varphi(E)$ , 然后, 把它代入 (10-25)~(10-26) 式便可直接求出各群的群常数。然而, 由于反应堆内吸收、增殖和慢化等物理过程的复杂性以及中子洩漏的影响, 严格地求解能谱  $\varphi(E)$  是比较复杂的。在反应堆设计中通常用一些近似的方法进行计算。下面介绍一种在实际计算中经常应用的、并考虑到中子的洩漏影响的计算反应堆慢化能谱的近似方法。

回顾第四章中讨论, 我们知道, 对于裸堆、中子通量的空间

分布和能量分布是可以分离变量的，而且空间分布函数  $\psi(\mathbf{r})$  满足波动方程：

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + B^2 \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (10-31)$$

的解。这里  $B^2$  是方程的特征值，在稳态时它就是反应堆的材料曲率（或等于几何曲率）。例如：

对厚度为  $a$  的平板  $B^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$  (10-32)

对圆柱  $(H, R)$  形裸堆  $B^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$

因此，在求解中子输运方程时对于裸堆或大型反应堆的中心部份，我们可以近似地认为，中子通量的空间变量和其它变量是可以分离变量的，即  $\phi(\mathbf{r}, u, \Omega) = \phi(u, \Omega) \cdot \psi(\mathbf{r})$ 。这里  $\psi(\mathbf{r})$  满足波动方程 (10-31) 的解。例如对于一维平板问题稳态中子通量分布可以写成：

$$\phi(x, u, \mu) = \phi(u, \mu) e^{-iBx} \quad (10-33)$$

这实质上相当于中子通量的空间分布用单项傅里叶基波来表示。把 (10-33) 式代入一维中子输运方程 (9-38) 式，然后消去  $e^{-iBx}$  项便得到

$$\begin{aligned} & (1 - iB\mu/\Sigma_t) \Sigma_t \phi(u, \mu) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^u \int_{\Omega'} \Sigma_s f(u-u'; \mu_0) \phi(u', \mu') du' d\Omega' + \frac{S(u)}{2} \end{aligned} \quad (10-34)$$

这里我们把非弹性散射和裂变反应都看成中子源项，同时认为所产生的中子是各向同性的，即：

$$\begin{aligned} S(u) &= \int_0^u \int_{\Omega'} \Sigma_{s,n} f(u-u') \phi(u', \mu') du' d\mu' \\ &+ \chi(u) \int_0^u \int_{-1}^1 \nu \Sigma_f(u') \phi(u', \mu) du' d\mu' \end{aligned} \quad (10-35)$$

(10-34) 式左端含有材料曲率  $B^2$  的项系表征反应堆芯部中子泄漏的影响。对于不同的反应堆，则用其与相应的  $B$  值代入，由于我们所要求的是总的中子能谱，因而只要对 (10-34) 式中的中

子泄漏项能够作出正确的估计，就能求出比较正确的能谱。所以，(10-34)式虽然是从一维情况出发推导出来的，但是由于对于不同形状反应堆，我们可采用相应的曲率  $B^2$  代入，因而可以期望它也将适用于其它形状反应堆慢化能谱的近似计算。

因而，计算的关键在于正确地估计出  $B^2$  值。但是，在开始计算时我们并不知道  $B^2$  的正确数值。这时可以先估计[例如，可按照 (10-32) 式]一个  $B^2$  的近似值，按 (10-34) 计算出中子能谱，并用这个能谱进行分群临界计算求出中子通量分布，然后用这个通量分布便可以算出新的  $B^2 \sim (-\nabla^2 \phi / \phi)$  的改进值。如果前后两次结果的差别比较大，则可以进行反复迭代计算，直到满意为止。但是，实践证明，群常数对于  $B^2$  的依赖性并不十分敏感，因而在一般情况下很少需要这种迭代的过程。

尽管这方法在理论上并不十分严格，但是它已为计算实践证明是成功的，并广泛地应用于水堆和其他类型反应堆的快谱计算，下面讨论方程 (10-34) 的求解方法。

### 3.1 $P_N$ 和 $B_N$ 近似

我们通常应用第九章中所介绍的球谐函数方法来对 (10-34) 式求解。把  $\phi(u, \mu)$  和  $f(u-u'; \mu_0)$  按勒让特多项式展成级数：

$$\phi(u, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(u) P_n(\mu), \quad (10-36)$$

$$f(u-u'; \mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n(u-u') P_n(\mu_0). \quad (10-37)$$

显然， $\phi_0(u)$  就是我们所要求的中子通量的能量分布或慢化能谱，按照和第九章中球谐函数方法完全同样的步骤，将上述展式代入 (10-34) 式，利用勒让特多项式的加法定理和正交性便可得到和 (9-70) 式相类似的方程式：

$$(1 - iB\mu/\Sigma_t) \Sigma_t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(u) P_n(\mu)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \int_0^u \Sigma_s(u') f_n(u-u') \phi_n(u') du' \\
&= \frac{1}{2} S(u), \tag{10-35}
\end{aligned}$$

### $P_N$ 近似

如果在 (10-36) 展式中, 我们只取前  $N+1$  项, 即认为  $n > N$  时  $\phi_n(u) = 0$ , 那末将  $P_n(\mu)$ ,  $n=0, 1, \dots, N$  依次乘 (10-38) 式, 并对  $\mu$  从  $-1$  到  $+1$  积分之, 这样和第九章一样便得到  $P_N$  近似的方程组如下:

$$\left. \begin{aligned}
& - \frac{n+1}{2n+1} iB\phi_{n+1}(u) - \frac{n}{2n+1} iB\phi_{n-1}(u) + \Sigma_i \phi_n(u) \\
& = \int_0^u \Sigma_s(u') f_n(u-u') \phi_n(u') du' + S(u) \delta_{0,n} \\
& \phi_{N+1} = 0
\end{aligned} \right\} \tag{10-39}$$

$n=0, 1, \dots, N$

在慢化能谱的计算中, 若用  $P_1$  近似, 则 (10-39) 式便化简为:

$$\left. \begin{aligned}
& - iB\phi_1(u) + \Sigma_i(u) \phi_0(u) \\
& = \int_0^u \Sigma_s(u') f_0(u-u') \phi_0(u') du' + S(u), \\
& - \frac{iB}{3} \phi_0(u) + \Sigma_i(u) \phi_1(u) \\
& = \int_0^u \Sigma_s(u') f_1(u-u') \phi_1(u') du'.
\end{aligned} \right\} \tag{10-40}$$

### $B_N$ 近似

如果将 (10-38) 式两边先除以  $(1 - iB\mu/\Sigma_i)$ , 然后再依次乘以  $P_n(\mu)$  并对  $\mu$  进行积分之, 这样便得到关于  $\phi_n(u)$ ,  $n=0, 1, \dots$ , 的方程:

$$\Sigma_i(u) \phi_n(u) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_{l,n} \int_0^u \Sigma_s(u') f_l(u-u')$$

$$\cdot \phi_l(u') du' = A_{0,n} S(u), \quad n = 0, 1, \dots \quad (10-41)$$

式中系数  $A_{l,n}$  等于:

$$A_{l,n}(B, u) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(\mu) P_n(\mu)}{1 - \eta\mu} d\mu, \quad (10-42)$$

$$\eta = iB/\Sigma_l.$$

把勒让特多项式的递推关系式 (9-66) 乘以  $P_l(\mu)/(1-\eta\mu)$  并对  $\mu$  由  $-1$  到  $+1$  积分之, 可以求得关于  $A_{l,n}$  的递推关系

$$\frac{2n+1}{\eta} A_{l,n}(\eta) - (n+1)A_{l,n-1}(\eta) - nA_{l,n-1}(\eta) = \frac{\delta_{l,n}}{\mu}, \quad (10-43)$$

式中  $\delta_{l,n}$  为克罗尼克尔符号。同时可以求得:

$$A_{0,0} = \frac{\operatorname{tg}^{-1}[B/\Sigma_l]}{B/\Sigma_l}; \quad A_{0,1} = \frac{A_{0,0} - 1}{\eta}; \quad (10-44)$$

$$A_{1,1} = \frac{A_{0,0} - 1}{\eta^2}; \quad \dots \quad A_{l,n} = A_{n,l}.$$

在方程(10-41)右端求和项内令

$$I_l(u) = \int_0^u \Sigma_s(u') f_l(u-u') \phi_l(u') du', \quad (10-45)$$

若当  $l > N$  时, 令  $I_l(u) = 0$ , 这样便得到  $B_1$  近似的方程如下:

$$\Sigma_l(u) \phi_n(u) = \sum_{l=0}^N (2l+1) A_{l,n} I_l(u) + A_{0,n} S(u), \quad (10-46)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

这是一个含有  $\phi_n(u)$  的无限个方程的方程组。但是可以先从前面  $N+1$  个方程中联立解出  $n \leq N$  的  $\phi_n(u)$  来, 然后再代回(10-46)式右端, 依次求出  $n > N$  的所有  $\phi_n(u)$  来。

在慢化能谱计算中, 通常应用  $B_1$  近似。这时方程组 (10-46) 便简化为:

$$\Sigma_l \phi_0(u) = A_{0,0} I_0(u) + 3 \frac{A_{0,0} - 1}{\eta} I_1(u) + A_{0,0}(u) S(u), \quad (10-47a)$$



$$\Sigma_i \phi_1(u) = \frac{A_{0,0}-1}{\eta} I_0(u) + 3 \frac{A_{0,0}-1}{\eta^2} I_1(u) + \frac{A_{0,0}-1}{\eta} S(u). \quad (10-47b)$$

这里对于  $n > 1$  的  $\phi_n(u)$  的方程，由于在能谱计算时并不需要用到它们，因而就可略去。如果依次用  $\eta$  及  $\eta A_{0,0}/(1-A_{0,0})$  乘(10-47b)式并减去(10-47a)式，则便可以得到和  $P_1$  近似的(10-40)式相类似的方程组：

$$\left. \begin{aligned} & -iB\phi_1(u) + \Sigma_i(u)\phi_0(u) \\ & = \int_0^u \Sigma_s(u') f_0(u-u') \phi_0(u') du' + S(u), \\ & -\frac{iB}{3}\phi_0(u) + \gamma(u)\Sigma_i(u)\phi_1(u) \\ & = \int_0^u \Sigma_s(u') f_1(u-u') \phi_1(u') du', \end{aligned} \right\} (10-48)$$

式中

$$\gamma(u) = \frac{(B/\Sigma_i)^2 \text{tg}^{-1}(B/\Sigma_i)}{3[B/\Sigma_i - \text{tg}^{-1}(B/\Sigma_i)]} \approx 1 + \frac{4}{15} \left( \frac{B}{\Sigma_i} \right)^2. \quad (10-49)$$

这就是慢化能谱计算中常用的  $B_1$  近似方程。当取  $\gamma(u) = 1$  时，就得到  $P_1$  近似。国内外常用的一些快谱程序，例如 GAM 等，就是根据(10-48)方程组而编制的。

计算经验表明， $B_1$  近似的精度要高于  $P_1$  近似。但是，对于大型反应堆，由于泄漏项相对来讲比较小，因而两者的结果则比较接近。在快谱的计算中，目前的趋势是更多地应用  $B_1$  近似。

在  $N$  相等的条件下， $B_N$  近似比  $P_N$  近似精确的原因可以这样来分析： $P_N$  近似略去了中子通量的  $n > N$  的所有分量，即认为  $n > N$  时  $\phi_n(u) = 0$ ，而  $B_N$  近似则只是在(10-41)式右端的级数求和中略去了  $l > N$  的散射源项  $I_l(u)$ 。这样，例如对于散射为各向同性的特殊情况 [ $f_n(u-u') = 0$ ，当  $n > 0$ ]，那末， $B_N$  近似所得到的解就等于精确的解，而  $P_N$  近似却仍然只是近似的结果。可以证明，当  $|\eta| < 1$  时， $P_N$  近似的收敛速度正比于  $\|\phi_{N+1}\|$ ，而  $B_N$  近似则正比于  $\|I_{N+1}\|$ ，它通常比  $\|\phi_{N+1}\|$  要小，因而  $B_N$  近似的收

敛速度要比  $P_N$  近似高。

为了更进一步看清问题，我们把  $A_{l,n}$  的递推关系式 (10-43) 代入 (10-46) 式，经整理后便得到：

$$\begin{aligned} \Sigma_l \phi_n(u) = & \frac{iB}{\Sigma_l} \left\{ \frac{n+1}{2n+1} \left[ \sum_{l=0}^N (2l+1) A_{l,n+1} I_l(u) \right. \right. \\ & \left. \left. + A_{0,n+1} S(u) \right] + \frac{n}{2n+1} \left[ \sum_{l=0}^N (2l+1) A_{l,n-1} I_l(u) \right. \right. \\ & \left. \left. + A_{0,n-1} S(u) \right] \right\} + \sum_{l=0}^N \delta_{l,n} I_l(u) + \delta_{0,n} S(u) \\ & n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

再注意到 (10-46) 式，上式的  $B_N$  近似方程就可写成和  $P_N$  近似 (10-39) 式相类似的形式：

$$\left. \begin{aligned} -\frac{n+1}{2n+1} iB \phi_{n+1}(u) - \frac{n}{2n+1} iB \phi_{n-1}(u) + \Sigma_l \phi_n(u) \\ = I_n(u) + \delta_{0,n} S(u) \\ n = 0, 1, \dots, N \\ -\frac{n+1}{2n+1} iB \phi_{n+1}(u) - \frac{n}{2n+1} iB \phi_{n-1}(u) + \Sigma_l \phi_n(u) = 0 \\ n = N+1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (10-50)$$

这样，经过上述变换后，比较方程组 (10-39) 和 (10-50) 就可以清楚地看到，对于前  $N$  个分量， $B_N$  近似和  $P_N$  近似的方程形式是完全一样的。所不同之处仅仅在于： $P_N$  近似在  $n=N$  的方程中简单地令  $\phi_{n+1}=0$ ，并截去了  $n>N$  的所有方程；而在  $B_N$  近似中，它保留全部方程，只是在  $n>N$  的方程右端令  $I_n(u)=0$  而已，同时在  $n=N$  方程中， $\phi_{n+1}(u)$  则用第  $N-1$  个方程 (10-46) 式的近似解来表示。这样，从数学上看  $B_N$  近似的处理显然要比  $P_N$  近似优越，它可以看作是对  $P_N$  近似的一种改进，在相同的  $N$  下具有比  $P_N$  近似更高的精度。

### 3.2 散射源项的近似处理

方程(10-40)及(10-48)是一个积分方程,它固然可以用分群和离散方法很容易地数值求解。但是,由于方程右端的散射源项是一个积分算子,数值求解时,当能群或能量分点数目比较大时,所形成的散射矩阵的元素数目就很大,因而所需存储单元和计算时间也都比较大。下面我们对散射源  $I_0(u)$  和  $I_1(u)$  项作一些近似处理,使它转换为微分运算,这样就更便于数值求解。虽然目前计算机的容量和速度已不再成为主要考虑的问题,但是下面这些处理方法在许多程序中仍然被继续采用,因为它是比较方便并且具有良好的精确度。

当介质含有多种核素时,方程(10-48)可以写成:

$$\left. \begin{aligned} & iB\phi_1(u) + \sum_i \phi_0(u) \\ & \cdot \sum_j \int_0^u \Sigma_s^j(u') f_0^j(u-u') \phi_0(u') du' + S(u), \\ & - \frac{iB}{3} \phi_0(u) + \gamma(u) \sum_i \phi_1(u) \\ & = \sum_j \int_0^u \Sigma_s^j(u') f_1^j(u-u') \phi_1(u') du', \end{aligned} \right\} (10-51)$$

其中上标  $j$  系表示第  $j$  种元素的参量。

下面讨论对方程(10-51)右端散射源项所作的近似处理。首先设法把它们用慢化密度来表示。我们讨论在质心系内散射是各向同性的情况。根据(3-47)式慢化密度的定义,可同理引入

$$q_0^j(u) = \int_0^u du' \int_u^\infty \Sigma_s^j(u') f_0^j(u''-u') \phi_0(u') du'', \quad (10-52)$$

$$q_1^j(u) = \int_0^u du' \int_u^\infty \Sigma_s^j(u') f_1^j(u''-u') \phi_1(u') du''. \quad (10-53)$$

注意到这里的  $\phi_0(u)$  就是中子总通量  $\phi(u)$ , 所以  $q_0^j$  也就是第  $j$  种元素所产生的慢化密度,且

$$q_0(u) = \sum_j q_0^j(u),$$

而  $q_i^j$  则是慢化密度的各向异性分量。  $f_0^j(u-u')$  就是(3-49)式所定义的散射函数(能量用勒  $u$  表示),  $f_1^j(u-u')$  可以根据(9-104)式求得:

$$f_1^j(u-u') = \int_{-1}^{+1} f^j(u-u'; \mu_0) P_1(\mu_0) d\mu_0$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha_j} \left[ \left( \frac{A_j-1}{2} \right) e^{\frac{u'-u}{2}} - \left( \frac{A_j+1}{2} \right) e^{-\frac{u'-u}{2}} \right], & u - \ln \frac{1}{\alpha_j} < u' < u \\ 0, & \text{其它 } u' \text{ 值.} \end{cases}$$

(10-54)

对(10-52)及(10-53)进行微分, 便得到:

$$\frac{dq_0^j}{du} = \Sigma_s^j(u) \phi_0(u) - \int_0^u \Sigma_s^j(u') f_0^j(u-u') \phi_0(u') du',$$

(10-55)

$$\frac{dq_1^j}{du} = \bar{\mu}_0^j \Sigma_s^j(u) \phi_1(u) - \int_0^u \Sigma_s^j(u') f_1^j(u-u') \phi_1(u') du',$$

(10-56)

这里  $\bar{\mu}_0^j$  就是以前定义的  $j$  种核素的平均散射角余弦:

$$\bar{\mu}_0^j = \int_u^\infty \int_{-1}^{+1} f^j(u-u'; \mu_0) \mu_0 d\mu_0 du = \frac{2}{3 A^j}. \quad (10-57)$$

把(10-55)和(10-56)代入(10-51)式便得到

$$\left. \begin{aligned} & -iB\phi_1(u) + (\Sigma_a + \Sigma_{s,n})\phi_0(u) \\ & = -\sum_j \frac{\partial q_0^j}{\partial u} + S(u), \\ & -\frac{iB}{3}\phi_0(u) + (\gamma(u)\Sigma_s - \bar{\mu}_0 \Sigma_s)\phi_1(u) \\ & = -\sum_j \frac{\partial q_1^j}{\partial u}, \end{aligned} \right\} \quad (10-58)$$

式中  $\bar{\mu}_0$  为混合介质的平均散射角余弦:

$$\bar{\mu}_0 = \sum_j \bar{\mu}_0^j \Sigma_s^j / \sum_j \Sigma_s^j = \sum_j \bar{\mu}_0^j \Sigma_s^j / \Sigma_s. \quad (10-59)$$

可以看到, 引进了  $q_0^j$  及  $q_1^j$  后便把原来方程中的散射源的积

分用一个对  $q_0^H$  及  $q_1^H$  的微分算子来代替。这样，方程(10-58)比原来方程更便于用数值方法求解。但是，这时，出现了新的变量  $q_0^H$  和  $q_1^H$ 。下面就来导出对于不同元素它们所满足的近似方程。

### 3.2.1 氢 ( $A=1$ )

对于氢， $A=1$ ，因而  $\alpha_H=0$ ， $\bar{\mu}_0^H = \frac{2}{3}$ 。对于这个特殊情况，

把散射函数代入(10-52)、(10-53)式可以发现：

$$\begin{aligned} q_0^H &= \int_0^u \Sigma_s^H(u') e^{u'-u} \phi_0(u') du', \\ q_1^H &= \frac{2}{3} \int_0^u \Sigma_s^H(u') e^{\frac{3(u'-u)}{2}} \phi_1(u') du'. \end{aligned} \quad (10-60)$$

将它们进行微分便可求得  $q_0^H$  和  $q_1^H$  所满足的微分方程

$$\begin{aligned} \frac{dq_0^H}{du} + q_0^H(u) &= \Sigma_s^H(u) \phi_0(u), \\ \frac{dq_1^H}{du} + \frac{3}{2} q_1^H(u) &= \frac{2}{3} \Sigma_s^H(u) \phi_1(u). \end{aligned} \quad (10-61)$$

应该指出，对于氢，(10-61)方程是严格的。

### 3.2.2 非氢元素

#### (1) 戈泽耳-格里林格(Goertzel-Grueling)近似(G-G近似)

我们讨论弱吸收和吸收截面随能量缓慢变化的情况（关于强的共振峰吸收将另外单独处理）。从前边的讨论中知道，在无吸收介质内 ( $\Sigma_a=0$ )，碰撞密度  $\Sigma_s(u)\phi(u)$  在渐近区里等于常数  $1/\bar{\xi}$ 。在吸收性介质中， $\Sigma_s(u)\phi(u)$  的变化将取决于吸收截面。在弱吸收及吸收截面随能量缓慢变化的条件下，可以预计在一个碰撞区间 ( $\Delta u = \ln(1/\alpha_s)$ ) 内  $\Sigma_s(u)\phi(u)$  变化不会太大，因而(10-52)和(10-53)式中  $\Sigma_s^j(u')\phi_0(u')$  和  $\Sigma_s^j(u')\phi_1(u')$  可以在  $u'=u$  处展成泰勒级数，取头两项来表示，即

$$\Sigma_s^j(u')\phi_0(u')$$

$$\approx \Sigma_s^j(u) \phi_0(u) + (u' - u) \frac{d \Sigma_s^j(u) \phi_0(u)}{du}, \quad (10-62)$$

$$\Sigma_s^j(u') \phi_1(u')$$

$$\approx \Sigma_s^j(u) \phi_1(u) + (u' - u) \frac{d \Sigma_s^j(u) \phi_1(u)}{du}. \quad (10-63)$$

把(10-62)和(10-63)式分别代入(10-52)和(10-53)式, 然后完成对  $u'$  积分, 结果便得

$$q_0^j(u) \approx \xi_j \Sigma_s^j(u) \phi_0(u) + a_j \frac{d \Sigma_s^j(u) \phi_0(u)}{du}, \quad (10-64)$$

$$q_1^j(u) \approx \xi_j \Sigma_s^j(u) \phi_1(u) + b_j \frac{d \Sigma_s^j(u) \phi_1(u)}{du}. \quad (10-65)$$

式中  $\xi_j$  就是前面所定义的  $j$  种元素的平均勒增量, 而

$$a_j = \frac{\alpha_j - 1 + \alpha_j \ln(1/\alpha_j) + \alpha_j (\ln(1/\alpha_j))^2 / 2}{1 - \alpha_j}, \quad (10-66)$$

$$b_j = \frac{-1}{1 - \alpha_j} \left\{ \frac{A + 1}{3} \left[ \frac{4}{9} - \alpha_j^{3/2} \left( \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{\alpha_j} - \frac{2}{3} \ln \frac{1}{\alpha_j} - \frac{4}{9} \right) \right] \right. \\ \left. - (A - 1) \left[ 4 - \alpha_j^{1/2} \left( \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{\alpha_j} + 2 \ln \frac{1}{\alpha_j} - 4 \right) \right] \right\}, \quad (10-67)$$

$$\xi_j = \frac{2}{1 - \alpha_j} \left\{ \frac{A + 1}{9} \left[ 1 - \alpha_j^{3/2} \left( \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\alpha_j} + 1 \right) \right] \right. \\ \left. - (A - 1) \left[ 1 - \alpha_j^{1/2} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha_j} + 1 \right) \right] \right\}. \quad (10-68)$$

另一方面, 如果把泰勒展式(10-62)和(10-63)式分别代入(10-55)和(10-56)式, 积分后便得:

$$\frac{dq_0^j}{du} = \xi_j \frac{d}{du} [\Sigma_s^j(u) \phi_0(u)], \\ \frac{dq_1^j}{du} = \xi_j \frac{d}{du} [\Sigma_s^j(u) \phi_1(u)]. \quad (10-69)$$

最后, 把(10-69)式代入(10-64)和(10-65)式便得  $q_0^j(u)$  及  $q_1^j(u)$  所满足的微分方程

$$\lambda_{0,s} \frac{dq_0^j}{du} = q_0^j - \xi_s \Sigma_s^j \phi_0(u),$$

$$\lambda_{1,s} \frac{dq_1^j}{du} = q_1^j - \xi_s \Sigma_s^j \phi_1(u),$$
(10-70)

式中:

$$\lambda_{0,s} = -a_s / \xi_s,$$
(10-71)

$$\lambda_{1,s} = -b_s / \xi_s.$$
(10-72)

这便是所谓 **G-G 近似方程**。可以看到它和氢的慢化方程(10-61)在形式上是相似的。

## (2) 年龄近似

对于重的元素, 每次碰撞的最大勒增量  $\ln(1/\alpha_s)$  (即碰撞区间), 是一个很小的数值。在假定弱吸收和吸收截面缓慢变化的条件下,  $\Sigma_s^j(u')\phi_0(u')$  在一个碰撞区间内的变化是非常小的, 因而甚至可以认为在(10-62)展式中只需取一项就可以了。也就是说在(10-64)式中  $q_0^j(u)$  只取一项来表示, 即

$$q_0^j(u) = \xi_s \Sigma_s^j(u) \phi_0(u),$$
(10-73)

这便称为年龄近似或连续慢化模型。因为它假设中子每次碰撞区间必须是很小的数值, 也就是说每次碰撞能量的变化是很小的。这就相当于近似地认为在慢化过程中中子的能量损失是连续地减小, 所以称它为连续慢化。

由于  $q_1^j(u)$  通常比  $q_0^j(u)$  小, 因而有时为简单起见直接令

$$q_1^j = 0,$$
(10-74)

这样就得到所谓**扩散-年龄近似**, 有时也叫做**年龄-非一致  $P_1$  近似**, 因为它令  $q_1^j = 0$ , 略去慢化密度的各向异性分量。

如果和(10-73)式的  $q_0^j$  相一致,  $q_1^j$  也用(10-65)式中取一项来表示, 即

$$q_1^j(u) = \xi_s \Sigma_s^j \phi_1(u),$$
(10-75)

则称之为**年龄-一致  $P_1$  近似**。

必须指出, 年龄近似只有对质量数相当大的重慢化剂才是正确的, 它不适用于轻核介质, 特别是含氢介质。因为中子为轻核

慢化时，每次碰撞的能量损失是很大的，例如中子在与氢核一次碰撞时完全有可能损失其全部能量，因而能量的分散度很大，前面的一些假设便不成立。所以我们对于含氢介质，例如对于轻水堆(LWR)系统，往往把氢和其它重元素分开处理，对于氢则用(10-61)式的严格方程，而对于非氢元素则使用扩散-年龄近似，这便是所谓的塞列贡特-戈泽耳 (Selengut-Goertzel) 或 S-G 近似。一般在慢化能谱的实际计算程序中，除氢元素用(10-61)式计算外，对质量数比较大的重核都采用年龄近似，而对于中等质量的一些核，例如 Al 等则可用 G-G 近似。

最后，根据(10-58)式，我们可以把反应堆慢化能谱近似计算的方程总结如下：

$$\left. \begin{aligned}
 & -iB\phi_1(u) + [\Sigma_a(u) + \Sigma_{s,r}(u)]\phi_0(u) \\
 = & -\sum_j \frac{dq_0^j}{du} + S(u), \\
 & -\frac{iB}{3}\phi_0(u) + [\gamma(u)\Sigma_s(u) - \bar{\mu}_0\Sigma_s(u)]\phi_1(u) \\
 = & -\sum_j \frac{dq_1^j}{du}.
 \end{aligned} \right\} (10-76)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_{0,j} \frac{dq_0^j}{du} + q_0^j(u) &= \beta_{0,j} \phi_0(u), \\
 \lambda_{1,j} \frac{dq_1^j}{du} + q_1^j(u) &= \beta_{1,j} \phi_1(u).
 \end{aligned} \right\} (10-77)$$

$$\gamma(u) = \begin{cases} 1, & P_1 \text{ 近似} \\ (10-49) \text{ 式}, & B_1 \text{ 近似} \end{cases}$$

式中标号  $j$  表示氢以及介质中其它各种元素。对于氢及各种近似下  $\lambda_{0,j}, \lambda_{1,j}, \beta_{0,j}, \beta_{1,j}$  的数值列于表 10-1 中。(10-76)式便是计算快群常数时求反应堆慢化能谱所要解的方程。通常应用分群(多群)方法对它求解(见下节)。



表 10-1 各种近似模型的参数值

		$\lambda_{0,i}$	$\lambda_{1,i}$	$\beta_{0,i}$	$\beta_{1,i}$
氢 (H)		1	$\frac{2}{3}$	$\Sigma_g^H$	$\frac{4}{9}\Sigma_g^H$
G-G 近似		(10-71) 式	(10-72) 式	$\xi, \Sigma_g^H$	$\xi, \Sigma_g^H$
年龄近似	非一致 $P_1$ (扩散) 近似	0	0	$\xi, \Sigma_g^H$	0
	一致 $P_1$ 近似	0	0	$\xi, \Sigma_g^H$	$\xi, \Sigma_g^H$

#### 4. 少群群常数的计算(MUFT 简介)

在前面我们已经求得反应堆慢化能谱的计算方程 (10-76)、(10-77) 或 (10-48)。本节将讨论这些方程的解法, 求出多群慢化能谱, 然后根据求出的多群能谱来产生出所需要的少群群常数。下面以 MUFT 快谱计算程序为例加以说明。

MUFT 程序广泛地用于产生水堆的快群群常数。它把 0.625 电子伏到 10 兆电子伏的能量范围的中子划分成 54 群, 用分群的方法解  $P_1$  近似或  $B_1$  近似慢化能谱方程 (11-76)、(11-77)。它考虑了由非弹性散射引起的中子慢化以及慢化过程中的共振吸收和裂变。弹性散射引起的中子慢化的处理, 可以采用 S-G 近似或 G-G 近似。然后以所求得的多群慢化能谱作为权重, 求出一群、二群或三群的快群的少群群常数。作为输入的多群截面数据是由评价过的 MUFT-54 群常数提供的<sup>[5]</sup>。

##### 多群慢化能谱的计算

为简单明瞭起见, 现在我们以方程 (10-76) 的  $P_1$  近似的慢化能谱方程为基础来建立多群慢化能谱方程, 同时暂且假定系统只是由氢和质量数为  $A$  的重元素均匀组成, 并采用 S-G 近似, 但所得的结果不难推广到含有多种元素的系统及非均匀系统。这

样，方程(10-76)、(10-77)可以写成：

$$\begin{aligned}
 & -iB\phi_1(u) : [\Sigma_a^s(u) - \Sigma_a^r(u) + \Sigma_{1,n}(u)]\phi_0(u) \\
 = & -\frac{dq_0^H}{du} - \frac{dq_0^A}{du} + \int_0^u du' \Sigma_{1,n}^A(u' \rightarrow u)\phi_0(u') + \chi(u), \quad (10-78) \\
 & -\frac{iB}{3}\phi_0(u) + \Sigma_{1,r}(u)\phi_1(u) = -\frac{dq_1^H}{du},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{dq_0^H}{du} + q_0^H = \Sigma_s^H(u)\phi_0(u), \\
 & \frac{2}{3} \frac{dq_1^H}{du} + q_1^H = \frac{4}{9} \Sigma_s^H(u)\phi_1(u), \quad (10-79)
 \end{aligned}$$

$$q_0^A = \xi_A \Sigma_s^A(u)\phi_0(u),$$

式中各符号的意义与第3节内的相同。这里源项已用(10-35)式代入，并设裂变中子总数为1。同时为了以后便于处理，把吸收截面分成两部份：

$\Sigma_a^s(u)$ ——“平滑”吸收截面；

$\Sigma_a^r(u)$ ——“共振”吸收截面。

应用分群方法解方程(10-78)和(10-79)。为此将所要讨论的能范围(0至16.5884，相应的能量范围为10兆电子伏至0.625电子伏)划分成54群，群号用 $n$ 表示，第 $n$ 群的能宽用 $\Delta_n$ 表示。就每一群对方程(10-78)和(10-79)进行积分，定义下列一些量：

$$\phi_{l,n}\Delta_n = \int_{\Delta_n} \phi_l(u) du \quad (10-80)$$

$$\int_{\Delta_n} q_i^i(u) du = \frac{1}{2}(q_{i,n}^i - q_{i,n-1}^i)\Delta_n, \quad (10-81)$$

$$\int_{\Delta_n} \frac{dq_l^i}{du} du = q_{l,n}^i - q_{l,n-1}^i, \quad (10-82)$$

$l=0, 1; i$ 表示 $H, A$ 。

同时定义

$$\Sigma_{a,n}^s\Delta_n = \int_{\Delta_n} \Sigma_a^s(u) du, \quad (10-83)$$

$$\Sigma_{n' \rightarrow n}^A\Delta_n = \frac{1}{\Delta_{n'}} \int_{\Delta_n} du \int_{\Delta_{n'}} \Sigma_{1,n}^A(u' \rightarrow u) du', \quad (10-84)$$

特别值得注意的是共振吸收截面的平均，定义

$$\Sigma_{\alpha,n}^R \Delta_n = \int_{\Delta_n} \Sigma_{\alpha}^R(u) du = N_A \sum_{j \in n} I_j, \quad (10-85)$$

式中， $N_A$ ——单位体积内 A 元素的核子数；

$I_j$ —— $n$  群内 A 元素第  $j$  共振峰的有效共振积分；

$\sum_{j \in n}$ ——表示对属于  $n$  群内的所有共振峰求和。

另一方面，根据中子平衡有下列关系式：

$$\int_{\Delta_n} \Sigma_{\alpha}^R(u) \phi_0(u) du = (1 - p_n)(q_{0,n-1}'' + q_{0,n-1}'), \quad (10-86)$$

式中， $p_n$ —— $n$  群的逃脱共振吸收几率。

对于均匀系统， $I_j$  和  $p_n$  可以采用以前介绍的方法求得。对于非均匀系统，除了应考虑第三章内所提到过的能量自屏效应以外，还必须考虑共振中子在空间上的自屏效应和互屏效应。在 MUFT 程序中已直接给出  $\Sigma_{\alpha,n}^R$  的计算公式。这里顺便提一下，有的快谱计算程序， $I_j$  和  $p_n$  值须由另一专门程序提供。

引入上述定义量以后，就得到多群慢化能谱方程为

$$\begin{aligned} & -iB\phi_{1,n}\Delta_n - \Sigma_{\alpha,n}^S\phi_{0,n}\Delta_n + \Sigma_{\gamma,n}\phi_{0,n}\Delta_n + (1-p_n)(q_{0,n-1}'' + q_{0,n-1}') \\ & - \chi_n\Delta_n + \Delta_n \sum_{n'=1}^{n-1} \Sigma_{n'}^A \phi_{0,n'}\Delta_{n'} - (q_{0,n}'' - q_{0,n-1}'') - (q_{0,n}' - q_{0,n-1}') \\ & - \frac{iB}{3}\phi_{0,n}\Delta_n + \Sigma_{\gamma,n}\phi_{1,n}\Delta_n = -(q_{1,n}'' - q_{1,n-1}'') \\ & \frac{1}{2}(q_{0,n}'' + q_{0,n-1}'')\Delta_n + (q_{0,n}'' - q_{0,n-1}'') = \Sigma_{s,n}''\phi_{0,n}\Delta_n, \\ & \frac{1}{2}(q_{1,n}'' + q_{1,n-1}'')\Delta_n + \frac{2}{3}(q_{1,n}'' - q_{1,n-1}'') = \frac{4}{9}\Sigma_{s,n}''\phi_{1,n}\Delta_n, \quad (10-87) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(q_{0,n}' + q_{0,n-1}')\Delta_n + \frac{2}{3}(q_{1,n}' - q_{1,n-1}') = \frac{4}{9}\Sigma_{s,n}'\phi_{1,n}\Delta_n, \quad (10-88)$$

$$\frac{1}{2}(q_{0,n}' + q_{0,n-1}')\Delta_n = (\xi' \Sigma_s')_n \phi_{0,n}\Delta_n,$$

$$n = 1, 2, \dots, N \quad (54)$$

这是一组共有  $5N$  个未知量  $\phi_{0,n}$ 、 $\phi_{1,n}$ 、 $q_{0,n}^H$ 、 $q_{0,n}^A$  和  $q_{1,n}^A$  的代数方程。应该指出，在计算快谱时， $B$  为输入量。可以根据等效裸堆的概念估算一个  $B$  值，经验证明，能谱及群常数对  $B$  是不敏感的，若采用迭代求解(见图 10-2)，很少几次迭代就收敛了。

研究一下上述代数方程，不难发现它们是比较易于求解的。因为没有慢化中子进入第一群，所以初始条件为  $q_{0,0}^H = q_{0,0}^A = q_{1,0}^A = 0$ ，利用这个初始条件，解  $n=1$  时的方程(10-87)可求得  $\phi_{0,1}$ 、 $\phi_{1,1}$ ，然后，利用已求得的  $\phi_{0,1}$  和  $\phi_{1,1}$ ，解  $n=1$  时的方程(10-88)，得  $q_{0,1}^H$ 、 $q_{1,1}^H$ 、 $q_{0,1}^A$ 。利用这三个已求得的量，解  $n=2$  时的方程(10-87)，得  $\phi_{0,2}$  和  $\phi_{1,2}$ 。依此进行下去，直到解出第  $N$  群的量。

### 少群常数的计算

一旦求出  $\phi_{0,n}$ 、 $\phi_{1,n}$ 、 $q_{0,n}^A$  及  $q_{1,n}^A$ ，就可利用它们来求少群(一群、二群或三群)群常数。设少群群号用  $g$  表示，少群的总群数用  $G$  表示，用  $n^{g,g}$  表示  $G$  群近似中第  $g$  群所包括的最后一个多群的能群号(见图 10-4)， $n^{0,g} = 0$ ， $n^{G,g} = 54$ 。

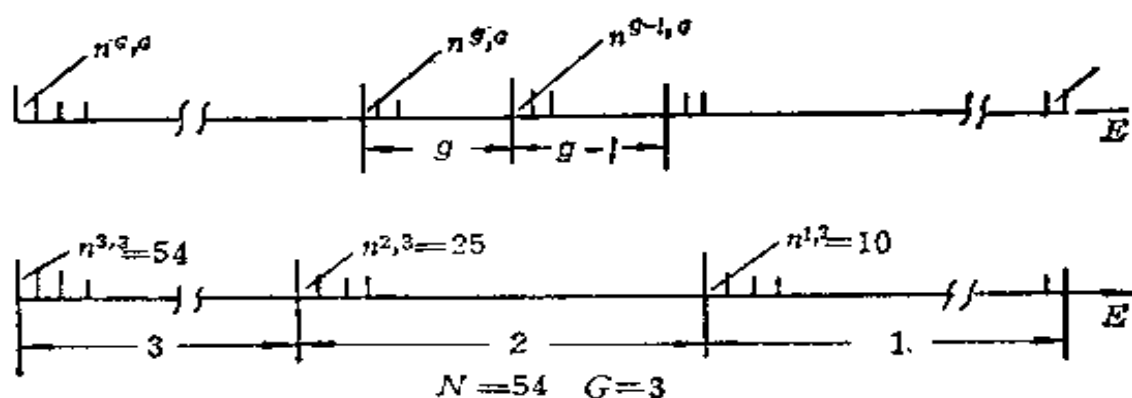


图 10-4 多群并少群示意图

下面以归并成三群( $G=3$ )为例(1至10群、11至25群、26至54群分别归并成少群的第一、第二和第三群，见图 10-4)，介绍少群常数的计算。例如第二群的宏观吸收截面  $\Sigma_{a,2}$  为

$$\Sigma_{a,2} = \frac{\sum_{n^{1,3} < n \leq n^{2,3}} \left[ \Sigma_{a,n} \phi_{0,n} \Delta_n + (1 - p_n) \sum_i q_{0,n-1}^i \right]}{\sum_{n^{1,3} < n \leq n^{2,3}} \phi_{0,n} \Delta_n} \quad (10-89)$$

式中， $\sum_i q_{0,n-1}^i$ ——表示对所有元素的慢化密度求和。

第二群的扩散系数  $D_2$  为

$$D_2 = \frac{\sum_{n^{1,3} < n \leq n^{2,3}} \phi_{1,n} \Delta_n}{iB \sum_{n^{1,3} < n \leq n^{2,3}} \phi_{0,n} \Delta_n} \quad (10-90)$$

第一群至第二群的转移截面  $\Sigma_{1 \rightarrow 2}$  为

$$\Sigma_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sum_i q_{0,n^{1,2}}^i + \sum_{0 < n' \leq n^{1,3}} \phi_{0,n'} \Delta_{n'} \sum_{n^{1,3} < n \leq n^{2,3}} \Sigma_{1,n,n'} \Delta_n}{\sum_{0 < n \leq n^{1,3}} \phi_{0,n}^i \Delta_n} \quad (10-91)$$

在 MUFT 程序中，只是少群中的第一群 ( $E = 0.821$  兆电子伏至 10 兆电子伏) 考虑了非弹性散射碰撞引起的中子慢化。所以第二群至第三群的转移截面  $\Sigma_{2 \rightarrow 3}$  为

$$\Sigma_{2 \rightarrow 3} = \frac{\sum_i q_{0,n^{2,3}}^i}{\sum_{n^{1,3} < n \leq n^{2,3}} \phi_{0,n} \Delta_n} \quad (10-92)$$

用类似的方法，可以求得  $(\nu \Sigma_f)_E$ 、 $\chi_E$  等其它群常数，这里就不一一列举了。

在实际计算时，为了避免出现复数，只要令  $i\phi_{1,n} = \phi_{1,n'}$ ， $i q_{1,n}^H = (q_{1,n}')^H$ ，则所有的计算都在实数范围内完成。

最后应该指出，除 MUFT 以外，还有一些比较常用的热堆快谱计算程序，如 GAM 等。常用于快中子堆能谱计算的程序有 MC<sup>2</sup> 等，对于快中子堆来说，尽可能精确地处理共振吸收和非弹性散射过程是极为重要的。关于 GAM、MC<sup>2</sup>，请参阅有关文

献<sup>[6]、[7]</sup>。

### 参 考 文 献

- [1] J. J. Duderstadt & L. J. Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, Chap. 7, 8, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [2] A. F. Henry, Nuclear-Reactor Analysis, pp. 205—252, MIT Press, 1975.
- [3] J. R. 拉马什著, 洪流译, 核反应堆理论导论, 第十章, 原子能出版社, 1977.
- [4] H. Bohl, Jr. et al., WAPD-TM-218(1961).
- [5] A. F. Henry, WAPD-TM-224(1960).
- [6] G. D. Joamou et al., GA-1850(1961).
- [7] B. J. Toppel et al., ANL-7318(1967).
- [8] Л. И. АБАГЯН, Н. О. БАЗАЗЯНЦ, И. И. БОНДАРЕНКО, М. И. НИКОЛАЕВ, ГРУППОВЫЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ, АТОМИЗДТ, 1964.
- [9] Reactor Physics Constants, 2nd Ed. ANL-5800(1963).

# 第十一章 多群扩散方程 的数值解法

在早期的反应堆(主要是石墨和重水反应堆)设计中,通常是应用年龄或双群理论的解析方法来完成临界问题的计算的。但是当能群和分区的数目增加时(例如对于轻水堆和快中子反应堆),多群扩散方程的求解则是一个相当复杂和困难的问题,解析方法是无法解决的,而必须借助于数值方法来求解。随着电子计算机和计算技术的发展,目前,数值方法几乎已成为临界问题计算中普遍采用的主要方法。在许多设计和研究单位都编制有标准或专用的临界计算程序,它是反应堆设计中最基本的计算程序。

应用电子计算机解决工程实际问题的一般步骤为:

- (1) 根据实际问题提出数学模型并归纳成明确的数学问题(或数理方程);
- (2) 根据数学问题选择适当的数值计算方法,确定计算步骤;
- (3) 编制计算机程序。

本书前面几章的内容实质上就是围绕着解决第一方面的问题,最后我们把反应堆链式反应的临界问题归纳为(10-14)式(见第十章)的多群扩散方程(二阶偏微分方程组)的特征值和特征函数的求解问题。本章将讨论第二方面问题——多群扩散方程的数值解法:源迭代法、差分方程及其解法。应该指出,这里仅仅是从物理设计的需要角度出发介绍方法的主要思想和步骤,至于更详细的内容和数学上进一步的研究则超出了本书的范围,读者可以参考数值分析或有关专门文献<sup>[1]~[3]</sup>。

## 1. 源迭代法

反应堆多群扩散方程根据(10-14)式可以写成

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{t,g} \phi_g(\mathbf{r}) - \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}(\mathbf{r}) = \frac{\chi_g}{k} Q(\mathbf{r}), \quad (11-1)$$

$$g = 1, 2, \dots, G$$

$$Q(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'}(\mathbf{r}), \quad (11-2)$$

或写成矩阵形式

$$\mathbf{M}\phi = \frac{1}{k}\mathbf{F}\phi. \quad (11-3)$$

式(11-1)是关于  $\phi_g(\mathbf{r})$  的齐次方程组。在稳态情况下，对于给定系统只有当特征值  $\lambda(1/k)$  等于确定数值时方程才有解。但是要精确地求出  $k$  的数值及对应的特征函数  $\phi_g(\mathbf{r})$  是一件非常困难的事情。在反应堆计算中，广泛地应用第九章所介绍过的源迭代方法来近似地求解。

开始，我们任意假定一个初始的裂变源分布  $Q^{(0)}(\mathbf{r})$ ，例如可以认为在整个芯部都等于 1 或某给定常数，并猜测一个初始的  $k^{(0)}$  数值，同时把  $Q^{(0)}(\mathbf{r})/k^{(0)}$  作为初始迭代源项并把它们代入到方程(11-1)的右端中。这样，由它便可求出中子通量分布  $\phi_g^{(1)}(\mathbf{r})$  来，将求得的  $\phi_g^{(1)}(\mathbf{r})$  代入 (11-2) 式便求得第二次迭代裂变中子分布  $Q^{(1)}(\mathbf{r})$ ，并由它可以求得有效增殖因数的新的估计值  $k^{(1)}$  和第二代迭代源项  $Q^{(1)}/k^{(1)}$  来，……，依此类推，逐次地迭代下去，例如，对于第  $n$  次迭代计算有：

$$\begin{aligned} -D_g \nabla^2 \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) + \Sigma_{t,g} \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) - \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}^{(n)}(\mathbf{r}) \\ = \frac{\chi_g}{k^{(n-1)}} Q^{(n-1)}(\mathbf{r}), \quad g = 1, 2, \dots, G, \end{aligned} \quad (11-4)$$



式中

$$Q^{(n-1)}(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'}^{(n-1)}(\mathbf{r}) \quad (11-5)$$

根据  $k$  的物理意义 (它等于新生一代的裂变总中子数与上一代源中子总数之比) 可以由下式算出  $k^{(n-1)}$  的估计值:

$$k^{(n-1)} = \frac{\int_V Q^{(n-1)}(\mathbf{r}) dV}{\frac{1}{k^{(n-2)}} \int_V Q^{(n-2)}(\mathbf{r}) dV} \quad (11-6)$$

方程(11-4) — (11-6)便是源迭代法的计算公式。

从物理上看,上面所确定的迭代过程相当于将反应堆内的中子人为地区分为不同的“代”,每一“代”中子由裂变成形之时作为起始。每一次源迭代则相当于老一代源中子通过扩散、慢化、俘获、裂变最后又形成了新一代源中子的过程。(11-6)式中的  $k^{(n-1)}$  显然反映了中子每经过一代的倍增。因而可以预期,经过了足够的循环代数后,任意的初始中子源  $Q^{(1)}(\mathbf{r})$  必将在堆内形成一个稳定的最终中子源分布  $Q(\mathbf{r})$ 。多群扩散方程的特征值问题在数学上也已被详细研究过,并证明了上述迭代过程的收敛性;但这些内容远远超出了本书的范围。因而从理论上可

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^{(n)} = k; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) = \phi_g(\mathbf{r}). \quad (11-7)$$

但在实际计算中,当满足下列收敛准则或其中之一(根据问题的需要)时,便认为迭代过程收敛,它们是:

$$(1) \text{ 特征值收敛准则} \quad \left| \frac{k^{(n)} - k^{(n-1)}}{k^{(n)}} \right| < \varepsilon_1 \quad (11-8)$$

$$(2) \text{ 通量分布收敛准则} \quad \left| \frac{\lambda_{\max}^{(n)} - \lambda_{\min}^{(n)}}{\lambda_{\max}^{(n)}} \right| < \varepsilon_2 \quad (11-9)$$

$$\text{其中} \quad \lambda_{\max}^{(n)} = \max_{\mathbf{r} \in V} Q^{(n)}(\mathbf{r}) / Q^{(n-1)}(\mathbf{r}), \quad (11-10)$$

$$\lambda_{\min}^{(n)} = \min_{\mathbf{r} \in V} Q^{(n)}(\mathbf{r}) / Q^{(n-1)}(\mathbf{r}), \quad (11-11)$$

$\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  为预先给定的参数。可以看到 (11-8) 式具有平均收敛而 (11-9) 式则具有逐点收敛的意义。实践表明, 特征值收敛要比通量分布收敛得快。一般在程序中可取  $\epsilon_1 \approx 10^{-4}$ ,  $\epsilon_2 \approx 10^{-2}$ 。

上述的迭代过程称为源迭代或外迭代过程。它和第九章第 3 节所介绍的基本一样, 所不同之处仅仅在于这里对方程右端的源项在逐次迭代中均除以  $k^{(n)}$ , 这样处理有很大的方便。由 (11-6) 式可以看到, 这时每次迭代中源强将保持相等; 同时, 可以避免当  $k$  值与 1 偏离比较大时中子通量随着迭代次数  $n$  的增加变得过大或衰减得过小的麻烦。

**收敛的加速** 上面迭代过程可以通过一些适当的方法来加速其收敛过程。例如, 我们可以假定对于  $n+1$  次迭代的源项  $S^{(n)}(\mathbf{r}) = Q^{(n)}(\mathbf{r})/k^{(n)}$  可以用它和前一次迭代的源项  $S^{(n-1)}(\mathbf{r})$  的线性组合来代替, 即

$$S^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{Q^{(n)}(\mathbf{r})}{k^{(n)}} - \alpha \left( \frac{Q^{(n)}(\mathbf{r})}{k^{(n)}} - S^{(n-1)}(\mathbf{r}) \right), \quad (11-12)$$

式中  $\alpha$  为介于 0 与 1 之间的经验常数。这就是所谓源外推法。它还是比较简便和常用的一种方法。然而  $\alpha$  的最佳数值的选择是一件复杂的事情。(11-12) 式的外推方法可以推广到  $S^{(n)}(\mathbf{r})$  由前面任意次源项的线性组合, 例如对于  $S^{(n)}(\mathbf{r})$  可以写成

$$S^{(n)}(\mathbf{r}) = \alpha_{n,n} \frac{Q^{(n)}(\mathbf{r})}{k^{(n)}} - \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{m,n} S^{(m)}(\mathbf{r}), \quad (11-13)$$

其中系数  $\alpha_{m,n}$  为待确定的常数。

## 2. 一维扩散方程的数值解法

从前面讨论知道, 应用源迭代法的一个很大优点和方便之处在于: 它把原来  $G$  个联立的多群扩散方程 (11-1) 的求解问题在每次迭代中, 变换为按顺序解下面  $G$  个单群扩散方程问题:

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) - \sum_{n,g} \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) = S_g^{(n)}(\mathbf{r}), \quad g = 1, \dots, G \quad (11-14)$$

式中  $\Sigma_{R,g}$  为  $g$  群移出截面，若不考虑中子自低能群的向上散射，则方程右端的源项便等于

$$S_g^{(n)}(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{g',g} \phi_{g'}^{(n)}(\mathbf{r}) + \frac{\chi_g}{\beta^{(n-1)}} Q^{(n-1)}(\mathbf{r}), \quad (11-15)$$

当按  $g=1, \dots, G$  的次序对方程(11-14)求解时，方程右端源项  $S_g^{(n)}(\mathbf{r})$  便是已知的。(11-14)式便是一个含有已知源项的单群扩散方程。略去上下角标，它可以写成下面标准形式：

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi(\mathbf{r}) + \Sigma_R \phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}), \quad (11-16)$$

式中  $S(\mathbf{r})$  为已知源项。

现在我们讨论它的数值解法，这主要包括两个方面问题：首先是设法把(11-16)式的微分方程化为便于在计算机上求解的差分方程(代数方程组)；其次便是寻找求解差分方程组的简捷的计算方法。

本节先讨论最简单的一维情形。

## 2.1 差分方程组的推导

一维扩散方程(11-16)式对于各种坐标系统可以写成下列普遍的形式：

$$-\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha D \frac{d\phi}{dr} + \Sigma_R \phi(r) = S(r), \quad (11-17)$$

其中

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{平面情况} \\ 1, & \text{圆柱情况} \\ 2, & \text{球对称情况。} \end{cases}$$

$D$ ， $\Sigma_R$  和  $S(r)$  为分段连续函数，并且  $D$ ， $\Sigma_R$  在每一区内均等于常数。

首先把坐标  $r$  分割成许多离散网点：球形堆自然被分成许多同心球壳层，圆柱形堆则分成许多圆环壳层，而平板堆则被分成若干平板层。假定在反应堆体积(包括反射层)内， $0 \leq r \leq R$  ( $R$

为外推边界半径) 的区域内被分割成宽度为  $\Delta_i = r_i - r_{i-1}$  的  $N$  个区间。其中  $r_0, r_1, \dots, r_i, \dots, r_N$  称为节点(或网点),  $\Delta_i$  称为第  $i$  区间的网距(见图 11-1)。节点  $r_i$  位置的选择自然应该考虑问题的实际情况。例如, 可以使所有分界面和边界均与节点重合。 $\Delta_i$  在各部分可以是等距的也可以是不等距的, 但是  $\Delta_i$  应该充分地小, 使得在区间内中子通量的变化很小。因而在通量变化比较剧烈的地方分点应密一点, 例如在堆芯材料性质变化较大的区域或燃料、吸收体附近,  $\Delta_i$  自然将用比反射层更密的网距。一般网距应小于中子的平均自由程或扩散长度。在典型的一维问题程序中节点数目大约在 100 左右。

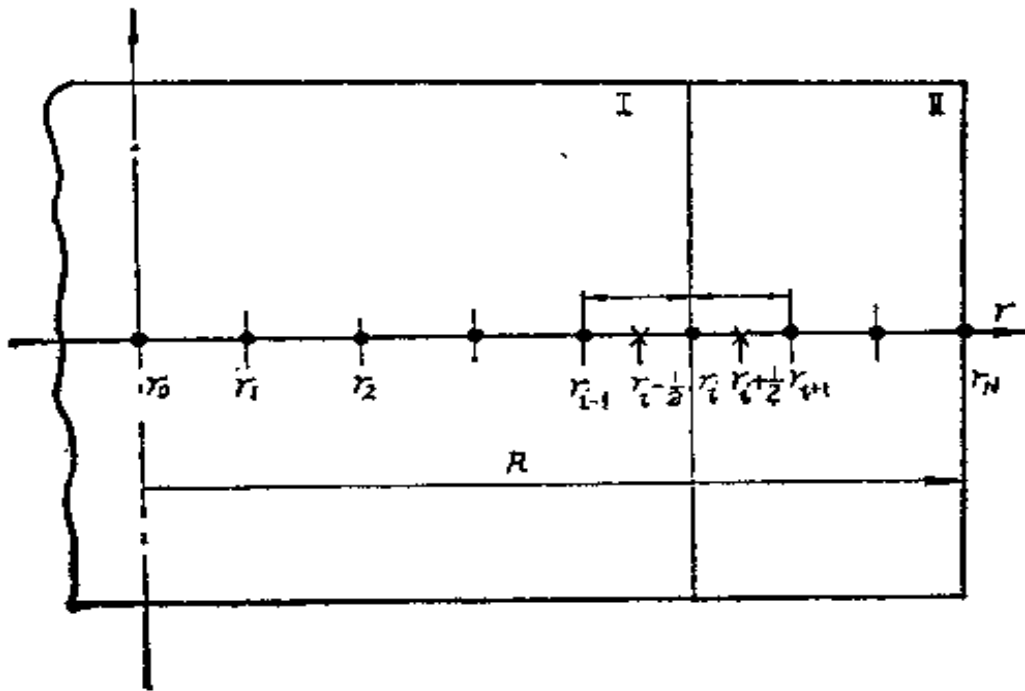


图 11-1 一维差分方程网格

对方程(11-17)可以有許多方法来求得其差分方程。这里介绍比较简单、常用的一种。为了不失普遍性不妨讨论节点  $r_i$  与分界面重合的情况。将(11-17)式各项乘以  $r^\alpha dr$  (体积元) 并自  $r_{i-1/2} = r_{i-1} + \Delta_{i-1}/2$  到  $r_{i+1/2} = r_i + \Delta_i/2$  积分之。对于第一项有

$$\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \frac{d}{dr} r^\alpha D \frac{d\phi}{dr} dr = r^\alpha D \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{i+1/2}} - r^\alpha D \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{i-1/2}}$$

$$= r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha D_{i+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta_i} - r_{i-\frac{1}{2}}^\alpha D_{i-\frac{1}{2}} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta_{i-1}}, \quad (11-18)$$

式中  $f_i = f(r_i)$ ，并应用了导数的两点差分公式

$$\left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r_{i+\frac{1}{2}}} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta_i}; \quad \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r_{i-\frac{1}{2}}} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta_{i-1}}.$$

对于第二、三项考虑到  $\Sigma_R$ 、 $S$  在  $r_i$  处可能不连续，因而有

$$\begin{aligned} \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \Sigma_R(r) \phi(r) r^\alpha dr &= \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} + \int_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \\ &\approx \frac{1}{2} (\Sigma_{R,i-\frac{1}{2}} \Delta_{i-1} + \Sigma_{R,i+\frac{1}{2}} \Delta_i) \phi_i r_i^\alpha, \end{aligned} \quad (11-19)$$

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} S(r) r^\alpha dr \approx \frac{r_i^\alpha}{2} (\Delta_{i-1} S_{i-\frac{1}{2}} + \Delta_i S_{i+\frac{1}{2}}). \quad (11-20)$$

这里  $S_{i-\frac{1}{2}}$  和  $S_{i+\frac{1}{2}}$  是  $r = r_i$  两侧的数值。

综合上述结果，根据 (11-17) 式便求得第  $i$  节点的差分方程为

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i, \quad (11-21)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} c_i &= -r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha D_{i+\frac{1}{2}} / \Delta_i; \quad a_i = -c_{i+1}; \\ b_i &= \frac{r_i^\alpha}{2} (\Sigma_{R,i-\frac{1}{2}} \Delta_{i-1} + \Sigma_{R,i+\frac{1}{2}} \Delta_i) - a_i - c_i; \\ d_i &= \frac{1}{2} r_i^\alpha (\Delta_{i-1} S_{i-\frac{1}{2}} + \Delta_i S_{i+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \right\} \quad (11-22)$$

**边界点的处理** 在  $i=0$  和  $i=N$  的边界点上，考虑到边界条件，差分方程将具有不同的形式。例如，对于  $i=N$  ( $r_N = R$ ) 的外推边界上有  $\phi_N = 0$ 。因而  $i=N$  点的差分方程可以消去。而对于  $N-1$  点差分方程将只有两项形式：

$$a_{N-1} \phi_{N-2} + b_{N-1} \phi_{N-1} = d_{N-1}. \quad (11-23)$$









### 3. 二维扩散方程的数值解法

在反应堆的实际计算中，考虑到控制棒的布置、燃料的非均匀装载以及燃耗等问题，对于大型反应堆往往需要计算二维或三维的中子通量或功率的分布。二维多群扩散方程数值解法在总的步骤上和一维情况是相似的。所不同之处在于下面两个方面。首先，它的扩散差分方程组比一维情况要复杂，不再是三对角形的简单形式，不能用追赶方法来求解而必须应用迭代方法；其次，网点的数目比一维要大得多，比如若一维情况每群是100个节点，那么二维情况则将是每群 $100 \times 100$ 点。因而二维扩散方程的数值解法将比一维情况要复杂困难得多，它需要更大的计算机容量、更长的计算时间和更复杂的计算技巧。

#### 3.1 二维差分方程组

根据反应堆的几何形状，可以有 $(x, y)$ 、 $(r, z)$ 和 $(r, \theta)$ 三种二维图形。下面我们讨论比较简单的 $(x, y)$ 二维差分方程。为了减少网点的数目，根据对称性条件，计算时往往可以只取1/2或1/4对称平面。对所取计算平面首先用

$$x = x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N;$$

$$y = y_0, y_1, \dots, y_j, \dots, y_M,$$

直线族把平面分成许多矩形网格(图11-3)。交点 $(x_i, y_j)$ 称为节点或网点，如图共有 $(N+1)(M+1)$ 个节点； $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ， $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ ，称为网距。

二维 $(x, y)$ 几何情况下扩散方程(7-16)式可写成

$$-\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Sigma_a(x, y) \phi(x, y) = S(x, y).$$

(11-33)

不妨假设所有分界面均与节点重合。讨论如图11-4所示 $(i, j)$ 节点。将方程(11-33)在 $(i, j)$ 节点附近虚线所围的矩形区域上积

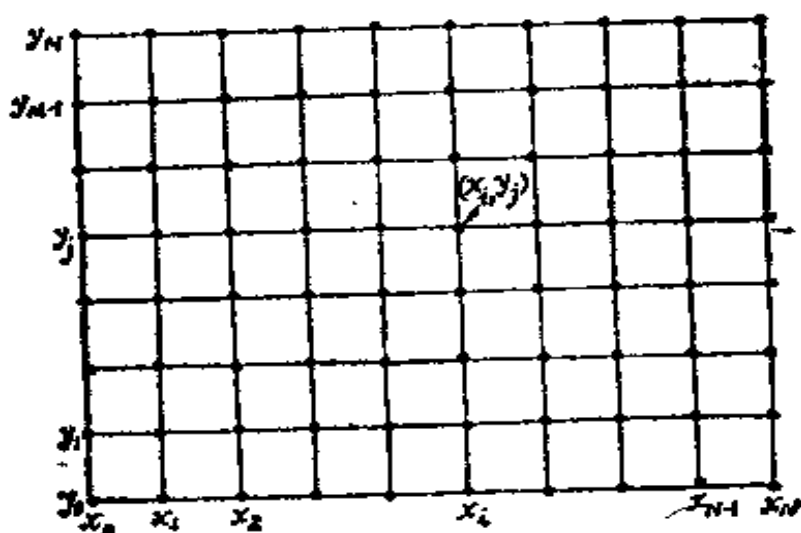


图 11-3 二维网格

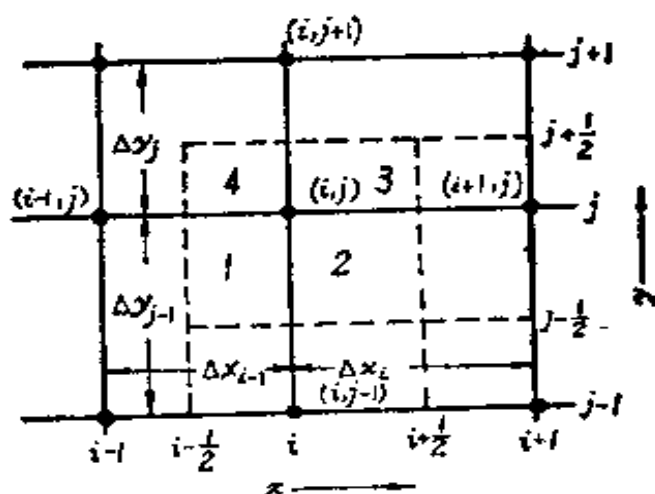


图 11-4  $(i, j)$  网格示意图

分之。这样，方程中第一项便等于

$$\begin{aligned}
 T_1 &= - \int_{y, -\frac{1}{2}}^{y, +\frac{1}{2}} dy \int_{x, -\frac{1}{2}}^{x, +\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} D(x, y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} dx \\
 &= - \int_{y, -\frac{1}{2}}^{y, +\frac{1}{2}} \left[ D(x_{i+\frac{1}{2}}, y) \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x, +\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. - D(x_{i-\frac{1}{2}}, y) \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x, -\frac{1}{2}} \right] dy \tag{11-34}
 \end{aligned}$$

若上式中导数应用下面近似公式

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x_i + \frac{1}{2}} \approx \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x_i}; \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x_i - \frac{1}{2}} \approx \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}},$$

式中  $\phi_{i,j} = \phi(x_i, y_j)$ ，将上式代入(11-34)式，考虑到  $D$  可能不连续，便得到

$$\begin{aligned} T_1 = & -\frac{1}{2} [D_2 \Delta y_{j-1} + D_3 \Delta y_j] \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x_i} \\ & + \frac{1}{2} [D_1 \Delta y_{j-1} + D_4 \Delta y_j] \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}}, \end{aligned} \quad (11-35)$$

式中  $D_k$  表示图 11-4 中第  $k$  个小矩形上的  $D$  值。同理可求得第二项积分等于

$$\begin{aligned} T_2 = & -\frac{1}{2} [D_4 \Delta x_{i-1} + D_3 \Delta x_i] \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y_j} \\ & + \frac{1}{2} [D_1 \Delta x_{i-1} + D_2 \Delta x_i] \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1}}. \end{aligned} \quad (11-36)$$

对于第三、四项的积分则等于

$$\begin{aligned} T_3 = & \frac{1}{4} [\Sigma_{R,1} \Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1} + \Sigma_{R,2} \Delta x_i \Delta y_{j-1} \\ & + \Sigma_{R,3} \Delta x_i \Delta y_j + \Sigma_{R,4} \Delta x_{i-1} \Delta y_j] \phi_{i,j}, \end{aligned} \quad (11-37)$$

$$\begin{aligned} T_4 = & \frac{1}{4} [S_1 \Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1} + S_2 \Delta x_i \Delta y_{j-1} \\ & + S_3 \Delta x_i \Delta y_j + S_4 \Delta x_{i-1} \Delta y_j], \end{aligned} \quad (11-38)$$

综合(11-35)——(11-38)式的结果，由(11-33)式便导出  $(i, j)$  节点的差分方程：

$$a_{i,j}\phi_{i,j-1} + b_{i,j}\phi_{i-1,j} + c_{i,j}\phi_{i+1,j} + d_{i,j}\phi_{i,j+1} + e_{i,j}\phi_{i,j} = s_{i,j} \quad (11-39)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_{i,j} = d_{i,j-1} &= -\frac{1}{2}[D_1\Delta x_{i-1} + D_2\Delta x_i]/\Delta y_{j-1} \\ b_{i,j} = c_{i-1,j} &= -\frac{1}{2}[D_1\Delta y_{j-1} + D_4\Delta y_j]/\Delta x_{i-1} \\ e_{i,j} &= \frac{1}{4}[\Sigma_{R,1}\Delta x_{i-1}\Delta y_{j-1} + \Sigma_{R,2}\Delta x_i\Delta y_{j-1} \\ &\quad + \Sigma_{R,3}\Delta x_i\Delta y_j + \Sigma_{R,4}\Delta x_{i-1}\Delta y_j] - a_{i,j} \\ &\quad - b_{i,j} - c_{i,j} - d_{i,j} \end{aligned} \right\} \quad (11-40)$$

$$s_{i,j} = (11-38) \text{ 式}$$

对于边界上的点则和前面一样，需根据边界条件来确定。例如对于四周的外推边界上的所有点有：

$$\phi_{i,j} = 0 \quad \text{若 } i=0, N \text{ 或 } j=0, M$$

### 3.2 差分方程组的矩阵表示形式

差分方程组(11-39)也可以写成以矩阵符号表示的形式，有时这样表示是很方便的。为此，对所有内点 $\{\phi_{i,j}\}$ 规定一个排列次序。通常规定自域的左下角开始自左向右顺序排列，第一行结束后便自第二行开始……，即

$$\begin{aligned} &\{\phi_k, k=1, \dots, (N-1)(M-1)\} \\ &= \{\phi_{1,1}, \phi_{2,1}, \dots, \phi_{N-1,1}, \phi_{1,2}, \phi_{2,2}, \dots, \phi_{N-1,M-1}\} \end{aligned} \quad (11-41)$$

式中标号  $k(i, j) = i + (j-1)(N-1)$ 。这样，差分方程组(11-39)便可写成矩阵表示形式



式中  $\mathbf{B}$  为相应的系数矩阵。这样,如果任意给定一组  $\phi_{i,j}$  值代入 (11-43) 或 (11-44) 式右端便可求出一组新的  $\phi_{i,j}$ , 这就是所谓简单迭代法, 其计算格式为

$$\phi_{i,j}^{(m)} = h_{i,j} [a_{i,j} \phi_{i,j}^{(m-1)} + b_{i,j} \phi_{i-1,j}^{(m-1)} + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^{(m-1)} + d_{i,j} \phi_{i,j+1}^{(m-1)} - s_{i,j}], \quad (11-45)$$

即 
$$\phi^{(m)} = \mathbf{B}\phi^{(m-1)} + \mathbf{f}. \quad (11-46)$$

现在讨论它的收敛性。设方程的精确解为  $\phi^*$ , 第  $m$  次迭代的误差为  $\mathbf{E}^{(m)} = \phi^* - \phi^{(m)}$ , 则由 (11-44) 和 (11-46) 式便得到

$$\mathbf{E}^{(m)} = \mathbf{B}(\phi^* - \phi^{(m-1)}) = \mathbf{B}\mathbf{E}^{(m-1)} = \mathbf{B}^m \mathbf{E}^{(0)}$$

这里  $\mathbf{E}^{(0)} = \phi^* - \phi^{(0)}$  为初始通量分布的误差。把  $\mathbf{E}^{(0)}$  用  $\mathbf{B}$  的特征函数  $\psi_k$  展开, 则  $\mathbf{E}^{(m)}$  可以写成

$$\mathbf{E}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \mathbf{B}^m \psi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^m A_k \psi_k \rightarrow 0, \text{ 当 } m \rightarrow \infty$$

因为可以证明  $\mathbf{B}$  的最大特征值  $\lambda_0$  是小于 1 的实数, 因而误差将按  $\lambda_0^m$  衰减。

从数值分析知道, 简单迭代法的收敛速度是很慢的, 而且这种方法需要存贮两套通量点值  $\{\phi_{i,j}\}$ , 所以一般都不采用它。

## (2) 赛德尔迭代法

在上面迭代计算中  $(i, j)$  的求解次序是按 (11-41) 式规定的由小到大进行的。因而在 (11-45) 式中当求解  $\phi_{i,j}$  时, 右端前二项  $\phi_{i,j-1}$  和  $\phi_{i-1,j}$  实际上已经算出新值来了。自然想到, 在 (11-45) 式中可以用已经算出的新值  $\phi_{i,j-1}^{(m)}$  和  $\phi_{i-1,j}^{(m)}$  来代替旧值以改进精确度, 简单迭代法没有利用这一事实。这样, 迭代格式可改写为

$$\phi_{i,j}^{(m)} = h_{i,j} [a_{i,j} \phi_{i,j-1}^{(m)} + b_{i,j} \phi_{i-1,j}^{(m)} + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^{(m-1)} + d_{i,j} \phi_{i,j+1}^{(m-1)} - s_{i,j}]. \quad (11-47)$$

这便是赛德尔迭代。它的收敛速度比简单迭代法高, 并且只需一套  $\{\phi_{i,j}\}$  存贮单元。

### (3) 点逐次超松弛 (SOR) 方法

赛德尔迭代法还可以通过引进参数  $\omega$  用外推办法来加速收敛。设  $\phi_{i,j}^{(m-1)}$  为第  $m-1$  次迭代结果,  $\hat{\phi}_{i,j}^{(m)}$  为按 (11-47) 式赛德尔迭代所得的结果, 即

$$\hat{\phi}_{i,j}^{(m)} = h_{i,j} [a_{i,j} \phi_{i,j-1}^{(m)} + b_{i,j} \phi_{i-1,j}^{(m)} + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^{(m-1)} + d_{i,j} \phi_{i,j+1}^{(m-1)} - s_{i,j}], \quad (11-48)$$

最后我们用  $\phi_{i,j}^{(m-1)}$  和  $\hat{\phi}_{i,j}^{(m)}$  的线性组合来外推得到第  $m$  次的迭代结果  $\phi_{i,j}^{(m)}$ :

$$\phi_{i,j}^{(m)} = \phi_{i,j}^{(m-1)} + \omega (\hat{\phi}_{i,j}^{(m)} - \phi_{i,j}^{(m-1)}), \quad (11-49)$$

式中  $\omega$  称为超松弛因子, 若  $\omega=1$  便是赛德尔迭代法。将 (11-48) 代入 (11-49) 便得

$$\phi_{i,j}^{(m)} = \omega h_{i,j} [a_{i,j} \phi_{i,j-1}^{(m)} + b_{i,j} \phi_{i-1,j}^{(m)} + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^{(m-1)} + d_{i,j} \phi_{i,j+1}^{(m-1)} - s_{i,j}] + (1-\omega) \phi_{i,j}^{(m-1)}. \quad (11-50)$$

这便是点超松弛 (SOR) 迭代计算格式。一般  $1 < \omega < 2$ , 合理的选取  $\omega$  值可以大大地加快收敛速度。 $\omega$  值与矩阵  $B$  特征值问题有关, 可根据经验选取或在程序中计算出<sup>[1,23]</sup>。当  $\omega = 2/(1 + \sqrt{1 + \lambda_0^2})$  时, 可得到最佳的收敛率, 其中  $\lambda_0$  为矩阵  $B$  的最大特征值。SOR 方法是计算中比较常用方法之一。

### (4) 线逐次超松弛 (LSOR) 方法

在求解 (11-39) 式时, 我们可以象上面那样逐点、逐点地求解。也可以把整个网格 (图 11-3) 分成  $x_i = x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$  等  $N-1$  条直线, 而在每一条直线上 (足标  $i$  相同) 的  $M-1$  个点则用联立求解办法一次同时解出。这样, 逐条线、逐条线地顺序往下解, 最后解得所有的  $\phi_{i,j}$ 。这就是所谓线逐次迭代。为此, 对第  $i$  条直线上的点 (固定的  $i$ ) 把方程 (11-39) 改写成

$$\begin{aligned} a_{i,j} \phi_{i,j-1} + e_{i,j} \phi_{i,j} + d_{i,j} \phi_{i,j+1} \\ = s_{i,j} - b_{i,j} \phi_{i-1,j} - c_{i,j} \phi_{i+1,j} \end{aligned} \quad (11-51)$$
$$j = 1, 2, \dots, M-1, \text{ (对固定 } i \text{)}$$

如果认为第  $i+1$  和  $i-1$  直线上的点是已知的 (用已求得的  $\phi_{i+1,j}^{(m)}$  及前次迭代求得的  $\phi_{i+1,j}^{(m-1)}$  值代入), 则方程右端便是已知的。需





或

$$(2) \quad \sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{(m)} - \phi_{i,j}^{(m-1)}| < e_4 \sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{(1)} - \phi_{i,j}^{(0)}| \quad (11-54 \text{ b})$$

$e_3$ 、 $e_4$  为给定参数。一般讲当外（源）迭代远未收敛时，不必使内迭代有 too 高的精度，内迭代的要求精度可随着外迭代的收敛精度的提高而相应地提高。

#### 4. 三维问题的数值解法

随着大型核电站的迅速发展，燃料循环等的经济性成为反应堆物理设计中一个很重要的指标，这就要求精确地确定全堆的中子通量或功率的分布，因而需要作三维问题的计算。三维问题的差分解法和二维情况没有很大的差别。这时芯部自然被分割成许多空间的网点。例如，对于  $xyz$  几何情况，则用  $x_i = x_{i-1} + h_i$ ， $y_j = y_{j-1} + l_j$ ， $z_k = z_{k-1} + r_k$  三族直线把芯部分成空间网格 [见图 11-5(a)]。可以用和二维类似方法来建立节点  $(i, j, k)$  上的差分方程，不过这时中子通量  $\phi_{i,j,k}$  将与周围六个节点发生关系，即三维差分方程可写成下列形式

$$a_{i,j,k} \phi_{i-1,j,k} + b_{i,j,k} \phi_{i,j-1,k} + c_{i,j,k} \phi_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} \phi_{i,j,k} + e_{i,j,k} \phi_{i+1,j,k} + f_{i,j,k} \phi_{i,j+1,k} + h_{i,j,k} \phi_{i,j,k+1} = s_{i,j,k} \quad (11-55)$$

它的系数矩阵是七条对角线型的 [图 11-5(c)]，同样可以用迭代法求解。

三维问题差分解法的主要矛盾是所需要解的差分方程(节点)的数目太大,比一维问题约高二个数量级。为了保证计算结果的精确性,空间网距不能太大,经验表明网距应等于 0.5—1 个中子的扩散长度。表 11-1 给出 3000 兆瓦热功率的各种类型反应堆所需要的网点数目和计算时间。从表中数字可以看出,若用传统的有限差分法求解三维问题,所需计算机存储容量之大,计算时间之长都是惊人的,是很不经济的,而且通常的计算机是难以胜任的。尤其是当考虑到燃料、温度的反馈(燃耗寿期计算往往需作

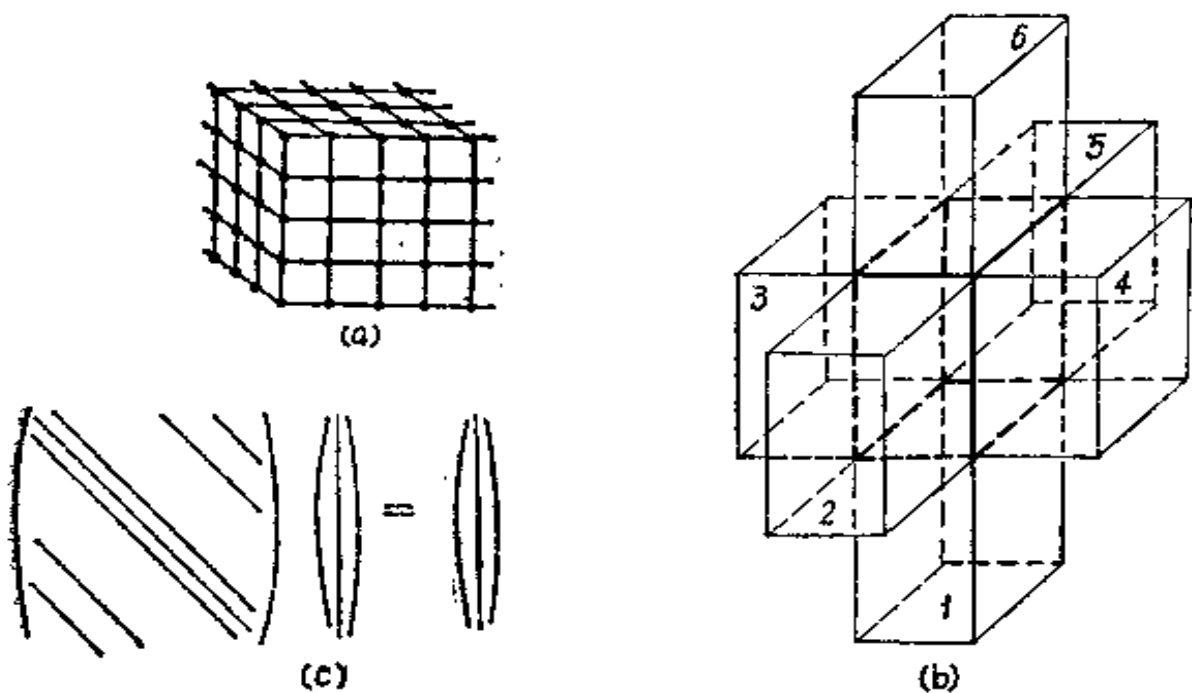


图 11-5 三维空间网格

数十次以上静态计算)时,则矛盾将更加尖锐。特别是水堆更加突出,从表中可以看出它所需要的时间比其他堆型高出一个数量级以上。因此,近十多年来,迅速发展了各种有效的其他近似计算方法,以求解决上述矛盾。最常用的有下面几种。

### (1) 粗网格方法

它的主要思想是在保证一定精度条件下,借助一些有效的近似方法加大网格的距离,减少节点的数目,从而减少计算的时间。例如,一般粗网格方法的网距可以比有限差分方法增大几倍以上,对于二维问题它的计算时间可以减至约为后者的1/10,对于三维问题约为后者的1/30。

(I) 节块法 这是最早提出的粗网格方法,例如,早期的FLARE程序<sup>[72]</sup>,它已成功地应用于沸水堆的功率分布计算。为了简单地了解节块方法的实质,我们讨论单群情形,这时扩散方程可以写成

$$-\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \Sigma_a \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{k} \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (11-56)$$

假设我们讨论  $xyz$  三维几何情况,首先用粗的网格把芯部分成

表 11-1 各种类型反应堆 (3000兆瓦(热)) 数值分析所需网格<sup>[4]</sup>

堆 型	芯部体积 米 <sup>3</sup>	功率密度 瓦/厘米 <sup>3</sup>	扩散长度 (厘米)	芯部直径 以 L 为单位	需要网点数目 (网距等于 L)	
					二 维	三 维
PWR	40	75	1.8	190	36,100	6,859,000
BWR	60	50	2.2	178	31,666	5,635,000
HTGR	428	7.0	12	63	3,947	247,000
LMFBR	5.7	530	5.0	36	1,270	45,270
GCFR	10.7	280	6.6	33	1,115	37,253

堆 型	群 数 (热群)	群·网点数		计算时间(CDC-6600)(估计)		
		二 维	三 维	一维(秒)	二维(分)	三维(小时)
PWR	4(1)	144,400	27,436,000	2.2	26	85
BWR	4(1)	126,664	22,540,000	1.8	22	66
HTGR	7(4)	27,630	1,735,780	0.7	2	1.8
LMFBR	10(0)	12,700	452,700	0.2	0.4	
GCFR	10(0)	11,150	372,530	0.16	0.4	0.2

许多长方块[如图 11-5(a)], 或“节块”。现在讨论其中第  $i$  节块的中子平衡方程, 为此将 (11-56) 式对节块  $i$  的体积  $V_i$  积分之, 有

$$-\int_s \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS - \Sigma_{a,i} V_i \phi_i + \frac{1}{k} \nu \Sigma_{f,i} V_i \phi_i = 0, \quad (11-57)$$

式中  $\phi_i$  为节块  $i$  内的平均中子通量

$$\phi_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \phi(\mathbf{r}) dV, \quad (11-58)$$

而

$$\begin{aligned} \Sigma_{a,i} &= \int_{V_i} \Sigma_a \phi(\mathbf{r}) dV / \phi_i V_i; \quad \nu \Sigma_{f,i} = \\ &= \int_{V_i} \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) dV / \phi_i V_i. \end{aligned}$$

(11-57) 式的第一项是节块  $i$  的泄漏中子数,  $\mathbf{n}$  为节块表面的外法线矢量, 它可以写成

$$\int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{j=1}^6 J_j S_j, \quad (11-59)$$

式中足标  $j$  依序表示节块  $i$  的 6 个表面 (参阅图 11-5 (b))。  $J_j$  是  $S_j$  表面的外法线方向上的净中子流密度, 求和系对节块的 6 个表面进行。由于在粗网格方法中节块的尺寸是比较大的 (否则便失去了方法的优越性), 因而可以认为通过某表面  $S_j$  的中子泄漏数或中子流只与相邻两个节块的通量有关。若以  $J_j^0, J_j^i$  分别表示自  $j$  表面流出和流入节块的中子流, 可以写出下列等式

$$J_j^0 \approx a'_{i,j} \phi_i; \quad J_j^i \approx a'_{j,i} \phi_j. \quad (11-60)$$

因而

$$J_j = -J_j^0 - J_j^i = a'_{i,j} \phi_i - a'_{j,i} \phi_j, \quad (11-61)$$

这样, 方程 (11-57) 便可写成

$$-\left[ \Sigma_{a,i} + \sum_{j=1}^6 a_{i,j} \right] \phi_i + \sum_{j=1}^6 a_{j,i} \phi_j + \frac{1}{k} \nu \Sigma_{f,i} \phi_i = 0, \quad (11-62)$$

这里  $a_{i,j}$  和  $a_{j,i}$  称为耦合系数。

因此, 节块法的关键在于正确地求得这些耦合系数, 有了它们便可由 (11-62) 方程很方便地求出所有的  $\phi_i$ 。计算实践表明, 选取合适的耦合系数, 节块方法可以获得很好的结果。可以有許多方法计算耦合系数: 例如解扩散方程或格林函数法, 碰撞几率法等等。在实际中往往需要根据理论计算与更精确的差分标准计算的结果相比较, 而半经验地加以调整确定。可以看到, 若网距  $h_i$  取得足够小, 并取  $a'_{i,j} = a'_{j,i} = D/h_i$ , 这样便有

$$J_j = D(\phi_i - \phi_j)/h_i$$

这时节块法便和有限差分法完全等价了。

节块法的主要优点是简单并且便于求解, 其主要缺点在于它只给出节块的平均通量, 不能给出块内局部的精细通量分布或功率分布。同时对于一些问题它的精度还不够理想。

(II) 有限元素法 这是基于变分原理进行离散化处理的一种数值方法。它最早用于力学分析的问题中。目前已经成功地应用于多维的中子扩散问题的计算，是一种很有前途的方法。它的主要优点在于有较好的理论基础，对于复杂的几何结构有高度的灵活性，并且能够提供局部的通量分布或功率分布。其主要缺点是它的耦合矩阵比差分方法的稀疏性差，从而求解比较麻烦，所需要的时间较长。

应该指出，近十年来粗网格方法已取得了很大的进展，并产生出许多新的方法，例如，粗网格展开法以及结合节块法和有限元素法的节块展开法等等。看来，粗网格方法将是解决反应堆多维静态和燃耗计算的一种很有前途的有效的和经济的方法。

## (2) 通量综合法

这是六十年代提出来的一种近似方法。它的主要思想是想从一系列一维和二维的计算结果中“综合”出三维空间的通量分布。前面所介绍的曲率迭代法实质上就是通量综合法的最早模型。下面简单地介绍这种方法的主要思想。

假设讨论一圆柱形反应堆，我们把堆芯沿  $z$  方向分成  $N$  个段，如图 11-6(a) 所示。在水平方向用  $x$ 、 $y$  网格表示。假定第  $g$  群中子通量的空间分布可以写成下列分离变量的一些项的和，即

$$\phi_g(x, y, z) \approx \sum_{k=1}^N Z_k^g(z) \varphi_k^g(x, y), \quad (11-63)$$

式中  $\varphi_k^g(x, y)$ ， $k=1, \dots, N$ ，称为尝试函数。它的选择一般需凭经验并具有一定的任意性。例如  $\varphi_k^g$  可以选取对每一  $k$  薄片（段）进行  $(x, y)$  二维计算所得到的通量分布作为尝试函数。尝试函数选择的好坏，将直接影响结果的精确度。 $Z_k^g(z)$  称为综合函数，它可以通过 (I) 权重余数法，或 (II) 变分方法来确定。这里我们将简单介绍用权重余数法求综合函数的主要思想。

为简单起见，不妨讨论单群情况，但其结果可以很容易推广

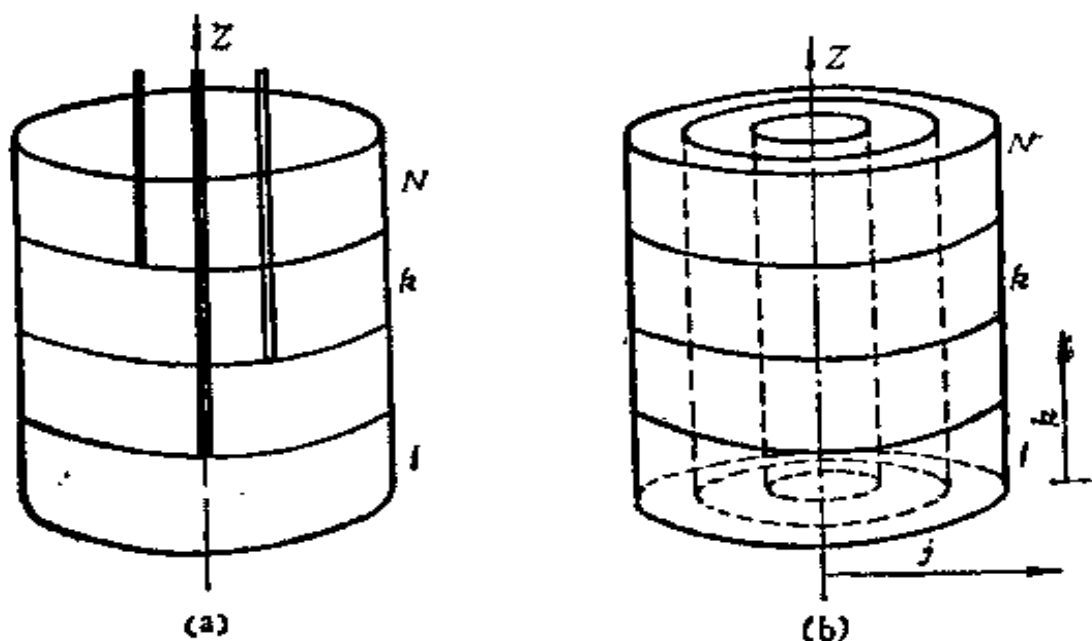


图 11-6 堆芯分段示意图

到多群情况。这时可以略去群的标号  $g$ ，单群扩散方程可以写成：

$$\hat{\nabla} \cdot D \hat{\nabla} \phi(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) - \Sigma_a \phi + \frac{\nu \Sigma_f}{k} \phi(x, y, z) = 0, \quad (11-64)$$

式中

$$\hat{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}.$$

为简单起见，不妨就选取  $\varphi_k(x, y)$  作为权重函数。将(11-63)式代入(11-64)方程并乘以  $\varphi_k(x, y)$ ，然后对第  $i$  段  $(x, y)$  平面  $R_i$  积分之。由于假设  $\phi$  为方程的解，所以其积分结果应该等于零，即

$$\iint_{R_i} \varphi_k(x, y) \sum_{k=1}^N \left[ \hat{\nabla} \cdot D \hat{\nabla} \phi_k(x, y) Z_k(z) + \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial Z_k(z)}{\partial z} \phi_k(x, y) - \Sigma_a Z_k(z) \phi_k(x, y) + \right.$$

$$\left[ \frac{\nu \Sigma_j}{k} Z_k(z) \varphi_k(x, y) \right] dx dy = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (11-65)$$

式中第一项积分利用散度的一些性质，可以求出等于

$$\begin{aligned} \iint_{R_i} \varphi_i \hat{\nabla} \cdot D \hat{\nabla} \varphi_k dx dy &= \iint_{R_i} [\operatorname{div}(\varphi_i D \hat{\nabla} \varphi_k) - \\ &\quad - \hat{\nabla} \varphi_i \cdot D \hat{\nabla} \varphi_k] dx dy \\ &= \int_S \varphi_i D \hat{\nabla} \varphi_k \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{R_i} \hat{\nabla} \varphi_i \cdot D \hat{\nabla} \varphi_k dx dy \\ &= - \iint_{R_i} \hat{\nabla} \varphi_i \cdot D \hat{\nabla} \varphi_k dx dy, \end{aligned} \quad (11-66)$$

式中  $\varphi_i = \varphi_i(x, y)$ ， $\mathbf{n}$  为外表面  $S$  上的外法线。由于在  $S$  上  $\varphi_i = 0$ ，所以上式中的面积分项便等于零。

若定义下列各量

$$D_{i,k}(z) = \iint_{R_i} \varphi_i(x, y) D(x, y, z) \varphi_k(x, y) dx dy; \quad (11-67 a)$$

$$\Sigma_{a,i,k}(z) = \iint_{R_i} \varphi_i(x, y) \Sigma_a(x, y, z) \varphi_k(x, y) dx dy; \quad (11-67 b)$$

$$\Sigma_{j,i,k}(z) = \iint_{R_j} \varphi_i(x, y) \Sigma_j(x, y, z) \varphi_k(x, y) dx dy; \quad (11-67 c)$$

$$(DB^2)_{i,k}(z) = \iint_{R_i} \hat{\nabla} \varphi_i(x, y) \cdot D(x, y, z) \hat{\nabla} \varphi_k(x, y) dx dy. \quad (11-67 d)$$

那末由 (11-65) 式便得到含有  $Z_k(z)$  的一维方程组：

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{d}{dz} D_{i,k} \frac{d}{dz} Z_k(z) - [\Sigma_{a,i,k} + (DB^2)_{i,k}] Z_k(z) + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{k} \Sigma_{j,i,k} Z_k(z) \right\} = 0, \quad i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (11-68)$$

解上述一维方程组便可求得特征值  $1/k$  和综合函数  $Z_k(z)$ 。这样，综合通量法的步骤可以总结如下：首先对芯部各轴向段进行二维的扩散计算以求得尝试函数  $\varphi_k(x, y)$ ，然后完成 (11-67) 式积分求得各个系数，并代入 (11-68) 式。最后解一维方程组 (11-68) 求得  $Z_k(z)$  并由 (11-63) 式建立所需的三维的通量分布。

如果我们采用  $\varphi_k(x, y)$  的共轭通量作为权重函数，那末便得到相当于变分方法的结果。在前面计算中我们假定轴向的综合函数  $Z_k(z)$  对整个芯部横断面都是一样的，也就是说 (11-63) 式适用于整个芯部，这种方式我们称之为“单道空间综合”。如果我们把芯部沿径向和轴向两个方向都分成许多区段[分别以  $j, k$  标号表示，如图 11-6(b)]，在不同的径向区用不同的展开函数，即

$$\phi^j(x, y, z) = \sum_{k=1}^N Z_k^j(z) \varphi_k^j(x, y). \quad (11-69)$$

这便是所谓“多道空间综合”法。虽然在选择尝试函数上多道综合有更大的灵活性，但是由于计算经验的限制，目前仍常常使用单道综合方法。

通量综合法的最大缺点在于尝试函数的选择有一定的任意性，在很大程度上依赖于人们的经验，因而在个别情况下因尝试函数选择不当，会产生反常的结果。这也正是妨碍它获得广泛应用的主要原因。然而，综合法的思想不仅用于空间通量的综合，也可用于空间-能谱综合等等。

## 5. 多群临界问题的数值解法

### 5.1 多群扩散方程数值解法的步序

从前面讨论知道，多群扩散方程 (11-1) 的数值求解的步序



可以总结为两大步：

(1) **源迭代或外迭代** 这是用迭代方法解 (11-1) 方程的特征值与特征函数问题。它是通过源迭代法 (每次迭代中源项为已知) 把原来的多群联立方程组的求解问题变换成解  $G$  个如 (11-14) 式的单群扩散方程。而这单群方程则可应用差分方法通过下面内迭代方法来求解。

(2) **通量迭代或内迭代** 这是用迭代方法解单群扩散方程的差分代数方程组问题。由于群数为  $G$ ，因而每一次外迭代中需对  $G$  个方程作内迭代过程。

当没有向上散射时，求解的次序可以从高能群顺序往下向低能群进行，即

$$\begin{aligned}
 & -\nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1 + \Sigma_{R,1} \phi_1 = \frac{1}{k} \chi_1 Q \\
 & \quad \downarrow \\
 & -\nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2 + \Sigma_{R,2} \phi_2 = \Sigma_{1 \rightarrow 2} \phi_1 + \frac{1}{k} \chi_2 Q \cdots \quad (11-70) \\
 & \quad \downarrow \\
 & \cdots \cdots \cdots \\
 & \quad \downarrow \\
 & -\nabla \cdot D_G \nabla \phi_G + \Sigma_{R,G} \phi_G = \sum_{g'=1}^{G-1} \Sigma_{g' \rightarrow G} \phi_{g'} + \frac{1}{k} \chi_G Q
 \end{aligned}$$

这样，在解任一群方程时右端都是已知函数，可记作  $S(\mathbf{r})$  [参阅 (11-16) 式]，于是便可根据上述二大步骤很容易求解。具体计算流程在图 11-7 中示意表示出。

当热中子被分成若干能群时将出现向上散射情况。这时，在解第  $g$  群方程时，方程右端中将包含有尚未解出的  $\phi_{g'} (g' > g)$  的通量 [见 (11-14) 式]。因而如前面 (11-70) 式那样逐群求解就不可能实现。但是一般向上散射的群数是比较少的 (通常  $\leq 4$  群)。因而如果向上散射开始发生在  $g_1$  群，那么可以按前面办法先依序解出  $g < g_1$  群的方程，而对于  $g_1 \rightarrow G$  方程则可用联立直接 (矩

阵求逆)的方法求解。如果向上散射的群数目比较大时则必须用迭代方法来求解。向上散射的存在,使收敛速度降低,因而增加了计算的时间。曾研究出一些技巧以减少具有向上散射时的迭代次数。

## 5.2 临界计算问题的种类

最简单的临界计算问题就是给定了反应堆的材料成分以及几何形状和大小而要求芯部的有效增殖因数  $k$ 。具体计算步骤见图 11-7 中的 1--6 框。

在实际问题中,临界计算还可以有其他形式问题。例如,给定了有效增殖因数  $k^*$  值(一般等于 1)而要求:

(1) 给定芯部材料成分要求反应堆的芯部尺寸——临界尺寸探索;

(2) 给定反应堆尺寸,要求燃料成分的浓度或水中硼浓度、控制棒或吸收体(例如可燃毒物)的数量位置等——称为临界成分探索。

这时就必须根据问题要求不断地调整芯部尺寸或成分以达到满足下列收敛判别准则

$$|k^{(n)} - k^*| < \epsilon_s \quad (11-71)$$

具体步骤见图 11-7。

目前已有不少临界计算的程序,在国外比较有代表性和常用的如美国的 PDQ 序列<sup>[6]</sup>,其中 PDQ-7 程序可以解一维、二维和三维的少群扩散方程,并规定有可变的网格间距。

## 5.3 热工-水力计算与临界计算的耦合

核计算中一些特性,例如功率分布、宏观截面等等和热工-水力计算中的特性,例如慢化剂密度和温度沿空间的变化等等,存在着密切的耦合关系。尤其是对于液体慢化的反应堆(例如 LWR)这种耦合更是强烈。设计时通常是先假定一个通量分布和热管因子作初步的热工-水力计算,求出温度和慢化剂密度等参

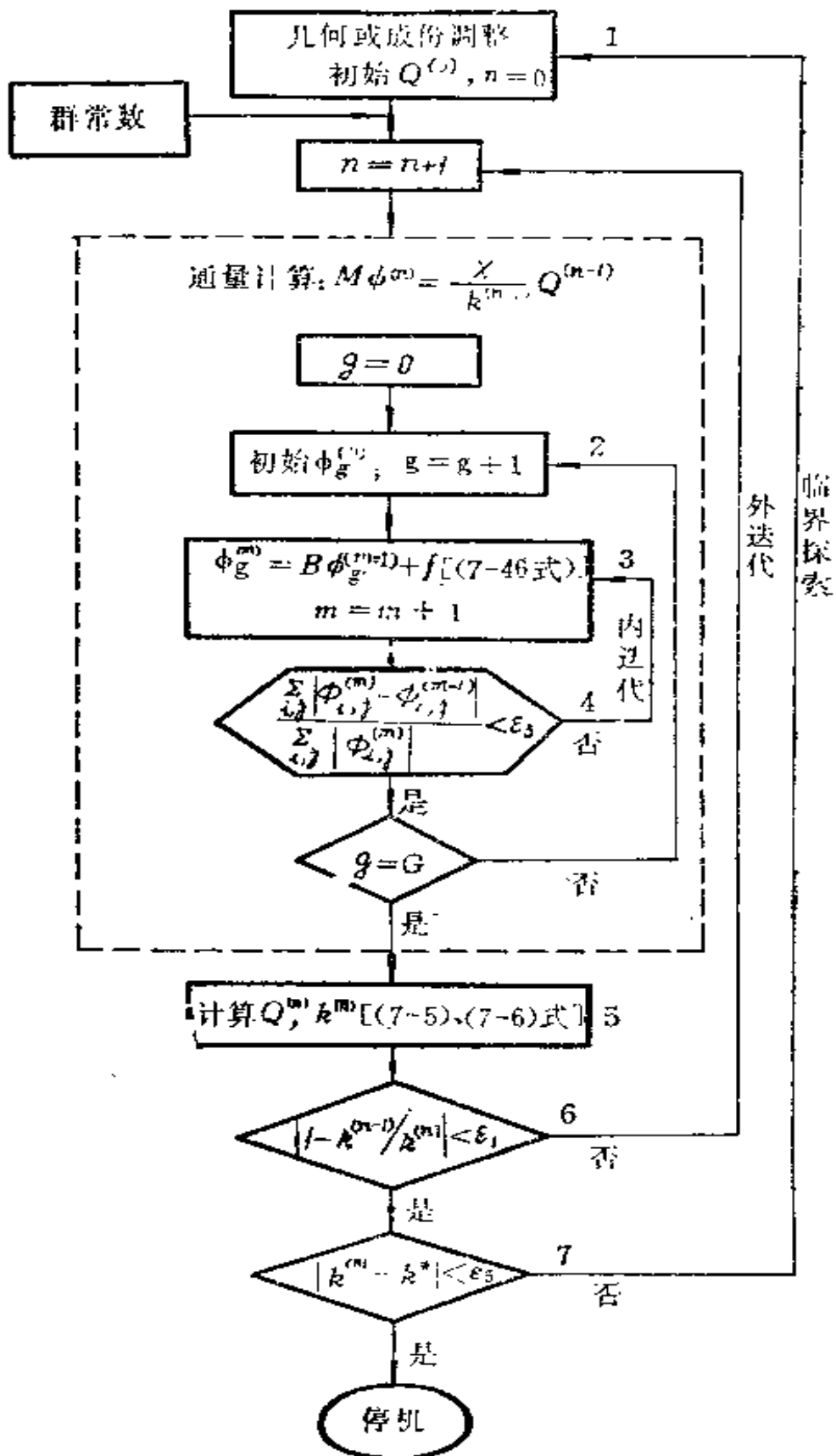


图 11-7 临界计算流程示意图<sup>1)</sup>

1) 图中 '(7-46)式', '(7-5), (7-6)式' 应为 '(11-46)式', '(11-46)式', '(11-5), (11-6)式'。

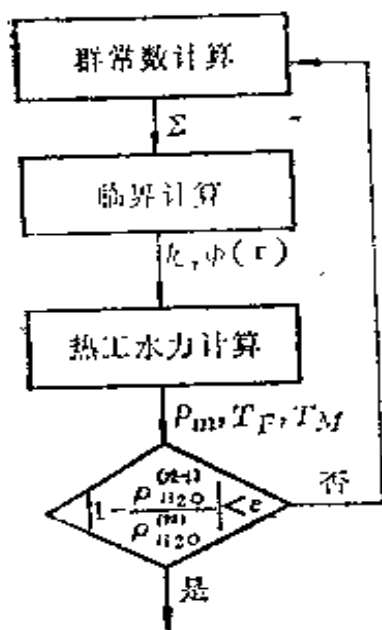


图 11-8 核-热工水力的迭代

数沿芯部的分布。然后以这些热工参数为基础算出芯部各区的能谱和宏观截面，并进行临界计算，求出通量空间分布和热管因子。这些结果就作为下一步热工-水力计算的输入数据，求出新的温度和慢化剂密度的分布。如果前后结果的差别比较大，则可根据需要作进一步的迭代直到满足所需的要求为止（见图 11-8）。一些物理-热工耦合程序可以自动完成这样反复的迭代过程直到所求出的功率分布或慢化剂密度分布收敛为止。

这种迭代过程对于沸水堆(BWR)的计算更是非常重要的。图 11-9 表示一个 BWR 的慢化剂密度和功率分布迭代的收敛过程。

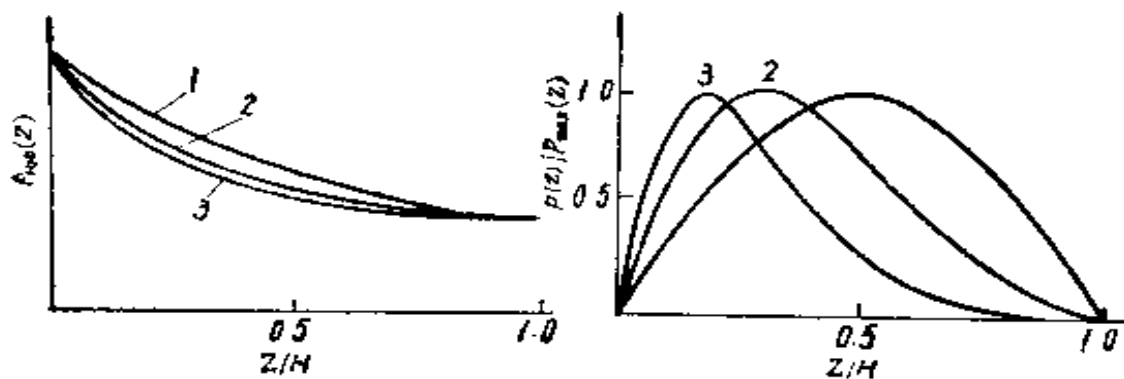


图 11-9 核-热工水力迭代的收敛

1——初始阶段；2——中间迭代；3——收敛的  $P(z)$ ,  $\rho_{H_2O}(z)$ 。

## 6. 燃耗计算

### 6.1 燃耗计算的步骤

在燃耗计算中，需要求出核燃料同位素和裂变产物同位素成

分随时间的变化以及它们对反应性和中子通量分布的影响，但是从第六章的讨论中知道，在燃料方程和裂变产物浓度随时间变化的方程中，核密度  $N(r, t)$  和中子通量  $\phi_e(r, t)$  都是空间和时间的函数，而且两者互为影响。因此要直接求解这些方程是比较困难的。在实际计算中通常是采用数值方法计算的。首先把堆芯分成若干燃料区，在每区内，认为中子通量和核密度等于常数，即用该区的平均值来近似地代替它们。其次把时间也分成许多时间间隔，每一时间间隔称为时间步长。在每个时间步长中可以认为中子通量保持常数。这样，我们便可以根据初始条件，对每个步长依次对燃料方程求解。

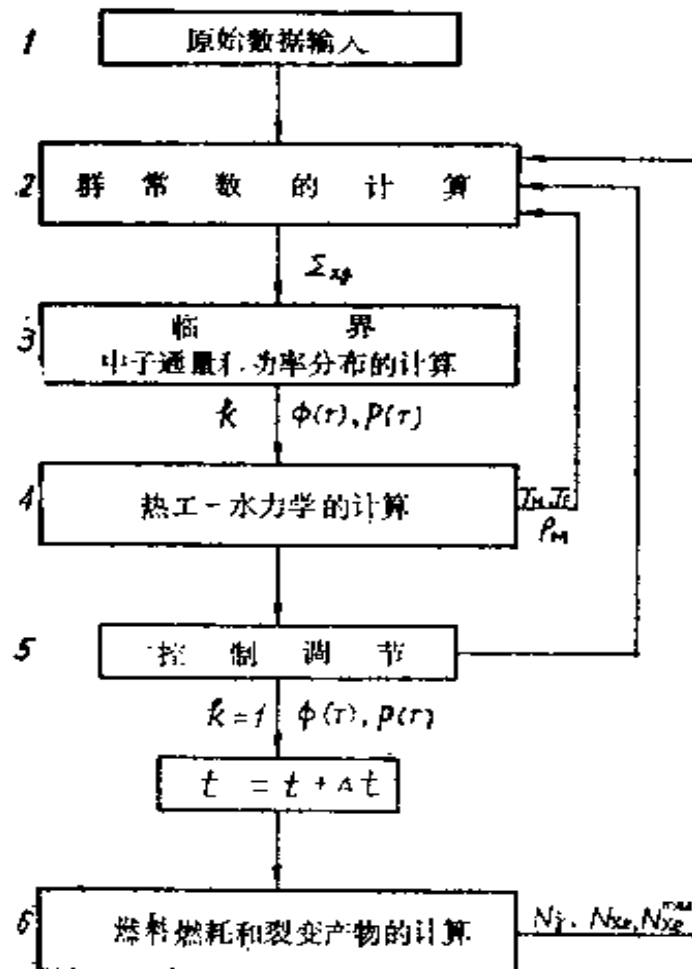


图 11-10 燃料计算主要步骤示意图

因此，燃料计算的主要内容是：计算在每个时间步长末、每

个燃耗区内燃料中重同位素的核密度和裂变产物的浓度、中子通量、功率密度以及相应的反应性等。为了保证计算的可靠性，还需将反应堆的核特性计算与热工-水力计算结合起来。

图 11-10 表示了典型燃耗计算的主要步骤。

燃耗计算主要分为二个部分：

### (1) 空间部分计算

在给定堆芯材料成分和各种同位素核密度的空间分布（由初始条件给出或由上一时间步长内燃耗方程解得）的条件下，进行中子能谱、少群常数、临界和热工-水力方面的计算（见图 11-10 中第 1—5 框）。从这些计算中可以求得反应堆的有效增殖因数（或过剩反应性）、中子通量和功率密度分布等。然后，通过调节控制棒或控制毒物，求得在临界条件下所需的硼浓度、控制棒的位置以及中子通量和功率密度分布等。

### (2) 时间部分的计算

在空间部分计算结束后，把时间加上一个步长，假设在上一个时间步长末空间部分计算所求得的中子通量在本个时间步长内保持不变。然后解每个燃耗区的燃耗方程，求出在本时间步长末燃料中各种重同位素核密度和裂变产物浓度（包括最大氙和平衡氙浓度），这些又作为下一次空间部分计算的依据。

上述空间部分和时间部分计算需要反复交替地进行，直到反应堆的过剩反应性近似地等于零时，该计算才结束。严格地讲，上述两部分的计算是不能分离的。因为任何核密度（浓度）的变化都要立刻引起中子通量和功率密度的变化，反之亦然。因而需要解决的问题是一个非线性问题，为了计算方便，采用前面介绍的空间分区和时间分段的方法来近似地计算。但当空间分区足够小和时间步长取得不太长时，这样的计算是可以满足工程设计上的要求的。

## 6.2 燃耗计算中的某些近似方法

正如前述，严格的燃耗计算是一项复杂、计算量又很大的工

作。但是，可以采用一些把问题简单化的方法，以便节省计算时间、减少计算费用。下面讨论计算中的某些近似方法。

### (1) 燃耗区的选择

在燃耗计算程序中，必须计算和贮存每个燃耗时间步长末、堆内各区的同位素核密度和群常数，但在临界计算中，堆芯被分成很多网格区，在燃耗计算中如果仍然按这些网格来解燃耗方程，则要求计算机的贮存量很大，并且其计算工作量也很大。为此，在燃耗计算中通常把整个堆芯划分成某些燃耗区，每一个燃耗区内包含一定数量的临界计算中用的差分网点。燃耗区划分原则是：在堆芯寿期初，该区内的群常数与空间无关，区内中子通量的分布比较平坦。每个燃耗区内的中子通量值可取区内各网格点中子通量的平均值。用这个平均的中子通量值求出每一燃耗区内各同位素的核密度(或浓度)和群常数。这样，在每个时间步长末，只需贮存这些燃耗区的值就可以了，显然，它的数量要比按差分网格区来计算少得多。这就大大地减少了在计算机中所需的贮存量并节省了计算时间。

### (2) 参数化截面

即使把堆芯分成某些燃耗区来计算，但是燃耗区仍然相当多，若要对所有的燃耗区在每个时间步长末都进行中子能谱和少群常数的计算，其工作量仍然是非常大的，为了克服这个困难，可以采用参数化截面表。

在正式进行燃耗计算之前，先对堆芯的不同材料成分区（其数目远小于燃耗区的数目）进行“点”燃耗计算。其计算步骤如下：先用  $D_g B_m^2 \phi_g$  来代替少群扩散方程中的  $-D_g \nabla^2 \phi_g$  项，这样便把少群扩散方程变成代数方程组，并很容易对它进行求解，然后利用求出的少群中子通量  $\phi_g$  进行燃耗计算，求出时间步长末各种同位素的核密度，最后，利用这些核密度(或浓度)进行中子能谱计算，求得多群中子能谱  $\phi_n (n=1, 2, \dots)$ ，根据  $\phi_n$  可求得各种同位素的少群微观截面，即

$$\sigma_{x,g}^i = \frac{\sum_{n=g} \sigma_{x,n}^i \phi_n}{\sum_{n=g} \phi_n} \quad (11-72)$$

其中的角标含义： $x$  是指吸收、散射、裂变和输运等核反应， $i$  是指同位素， $g$  和  $n$  分别指少群和多群的能群标号。

根据求得的少群微观截面再作下一时间步长的“点”燃耗计算，这个过程一直继续下去，最后我们可求得，对于不同材料成分区，各种同位素的微观截面与燃耗深度的函数关系。把它制成表，称参数化截面表，存到计算机中，供正式燃耗计算时使用。

在正式燃耗计算中，可求得每个时间步长末各燃耗区的燃耗深度。根据这个燃耗深度就可以从相应的材料成分区的参数化截面表中近似地求得少群微观截面  $\sigma_{x,g}^i$ ，然后用下式计算少群宏观截面：

$$\Sigma_{x,g} = \sum_i N_i \sigma_{x,g}^i \quad (11-73)$$

其中  $N_i$  为正式燃耗计算中求得的各种同位素的核密度（或浓度），一般地说，燃耗过程中能谱变化对计算结果的影响并不太严重，因此，这种近似的计算方法对一般燃耗分析是允许的。

### (3) 时间步长的选择

为了进一步降低计算成本，我们希望采用较长的时间步长，但正如前述，在整个时间步长内假设中子通量为常数，如果时间步长取得太长，就会引起较大的误差，为了解决这个矛盾，可以把一个比较大的时间步长（大步长）再分成几个子步长（小步长），首先，我们对子步长解燃耗方程，求出每个子步长末的重同位素的核密度和裂变产物的浓度，并计算出燃耗深度，然后用它从参数化截面表中求出少群截面，根据这些截面值和反应堆的总功率，重新计算中子通量数值，通常称之为重新归一化中子通量。

这样，在燃耗计算过程中，只需要对每个“大步长”进行临界、热工-水力、控制棒调节方面的计算。由于在每一子步长上进行了重新归一化中子通量的计算，这就适当地考虑到了由于核燃料的燃耗和裂变产物的积累所引起的中子能谱和中子通量改变对燃耗计算的影响，因此，时间步长可以取得比较大，例如，可



以取到一千小时左右。

### 参 考 文 献

- [1] E. L. Wachspress, Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics, Prentice-Hall, Inc. 1966.
- [2] H. Greenspan, C. N. Kelber and D. Okrent, Computing Methods in Reactor Physics, Chap. 1, 2, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [3] Г. М. 马尔丘克著, 飞跃译, 核反应堆数值计算方法, 原子能出版社, 1960年。
- [4] J. J. Duderstadt & L. J. Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, Chap. 5, 7, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1976.
- [5] P. F. Zweifel, Reactor Physics, Chap. 6, McGraw-Hill, 1973.
- [6] W. R. Cadwell, WAPD-TM-179(1960), WAPD-TM-230(1961), WAPD-TM-477(1965), WAPD-TM-678(1967).
- [7] D. L. Delp et al., GEAP-4598(1964).

## 第十二章 中子的热化

本章讨论中子的热化和热群参数的计算问题。

### 1. 热化过程的一般特征

第一章中曾经提到，在研究中子慢化问题时，通常，选定的某个分界能  $E^*$ （有时称为缝合能）把能区分为两区。 $E > E^*$  以上的能量区域为慢化区。在这个区内，当中子与原子核发生散射时，原子核可以视为自由的和静止的。中子散射是一种比较简单的过程；散射函数（或散射核）可以应用第三章第 1 节中所求得的关于自由静止核的散射函数。因而，对于具有这些能量的中子可以用所讨论过的比较简单的解析方法来确定其慢化能谱分布。

$E \leq E^*$  的能量区域称为热化区，或热能区。中子在这个区域内的运动和慢化过程通常称为热化。在这个能区内，由于中子的动能和介质原子核热运动的动能相当，所以介质原子核的热运动不可忽略。同时还必须考虑到分子间的化学键以及不同原子核散射波之间的干涉效应等等。这些因素使得热化区内的散射截面和散射函数变得异常复杂，从而使中子输运或热化方程的求解变得十分困难。当然，分界能  $E^*$  的定义是带有一定勉强性的，因为实际上热化过程与慢化过程不可能有明显的分界点，而是逐步过渡的。分界能必须选得足够高，使得在  $E > E^*$  区域内上述的热化效应影响可以略而不计。一般分界能可根据介质的性质选取，如取  $E^*$  等于 4 至 5 倍  $kTn$ ，也可选取某个常量，例如习惯上取  $E^* = 0.625$  电子伏作为分界能。一般对于水堆取  $E^*$  大约为 0.6—1 电子伏，对于高温气冷堆  $E^* \approx 2.5$  电子伏。

由于在热中子反应堆内裂变反应和中子能谱分布主要是集中

出现在热能区内，因而热化问题的研究对于热堆来讲具有非常重要的意义。精确地求得热群常数便是热堆计算的重要问题之一。在第一章中我们曾经介绍了按麦克斯韦谱平均计算热群截面的近似方法。它是建立在半经验的中子温度模型基础之上的；对于充分热化了的热堆系统它可以给出比较良好的近似结果。但是，在实际问题中，由于慢化中子源的存在、中子的吸收以及泄漏等一些因素的影响，热中子的能谱偏离麦克斯韦分布。在燃料含量较多、吸收性比较强和未充分慢化的反应堆中，这种差别（中子温度模型的误差）可能达到显著的程度。因而在热中子反应堆设计中往往必须对每一具体系统计算出热中子的能谱。

在着手讨论热谱计算之前，有必要先简要地讨论一下热化过程的一般特征，以有助于对热化问题的理解。

### (1) 原子核热运动的影响

我们知道，在介质温度等于 $T$ 时，原子核热运动的平均功能等于 $3kT/2$ ，其中 $k$ 为玻尔兹曼常数。因此，当中子能量 $E$ 小于4至5倍 $kT$ 时，中子的能量便与原子核热运动的动能相当，原子核热运动对散射过程的影响就不可以被忽略。这时，中子与原子核碰撞时既可能损失能量（称为“向下”，或降能散射），也可能获得能量（称为“向上”，或增能散射）。向上散射的存在给热化方程的求解增加了新的困难。

其次，在 $E$ 远小于 $E^*$ 的低能区，由于原子核热运动的影响，使得在实验室系内热中子的散射截面不再等于常数而将按 $1/v$ 律变化。这个现象从物理上可以解释如下。设我们先在质心系内观察，这时中子与靶核的碰撞率便等于散射截面与中子束强度的乘积（在质心系内度量），同时中子束的强度正比于中子与靶核的相对速度。然而，当中子能量足够低时，中子速度与原子核的速度相比起来很小，因而可以把碰撞看成是运动着的原子核与中子的相碰，这相当于中子束强度与中子的速度无关，只与原子核的速度有关。此外，我们知道，低能中子的散射截面在质心系内等于常数。因此得到，相互碰撞率将和中子的能量（速度）无关并等

于常数，但是它是介质温度的函数。另一方面，相对于实验室系来看，这个常数碰撞率可以写成在实验室系内测量的散射截面  $\sigma_s$  和中子束强度的乘积。然而，现在中子束强度系正比于实验室系的中子速度  $v$ ，结果有

$$\sigma_s v = \text{常数},$$

因此，对足够低的能量的中子，散射截面将按  $1/v$  律变化并与介质的温度有关。这个现象可以在图 12-1 中石墨在低能区（0.002 电子伏以下）的中子截面曲线上看到。

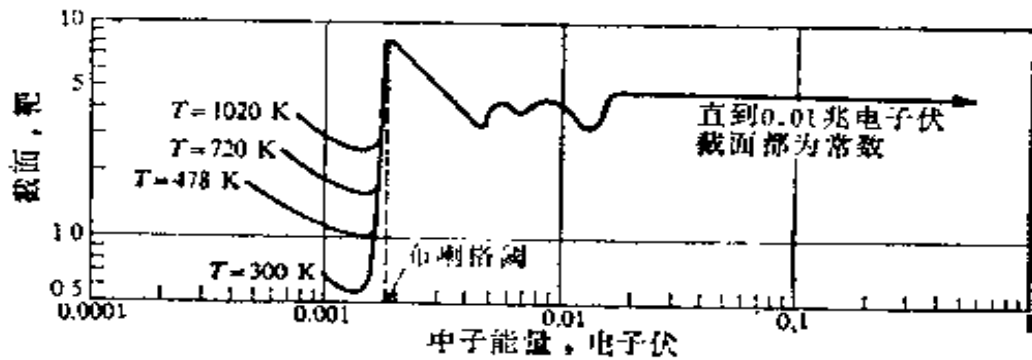


图 12-1  $^{12}\text{C}$  的低能部分的总截面

## (2) 化学结合键

当入射中子的能量比原子在分子中(或固体的结晶栅格中)的化学结合能  $E_B$  (大约为零点儿电子伏数量级) 大得多时，一般说来，可以忽略原子核被束缚在分子或固体栅格中这一事实。这时，可以看成中子系与自由的原子核相互碰撞，因而分子的散射截面便简单地等于它的组成核(自由核)的截面之和。然而，当中子能量与  $E_B$  相当或者更小时，就不能再把原子核看成为自由的了。分子(或固体)的散射截面也就不能简单地用它的组成核的自由截面的和来表示。

化学结合键效应的基本特征之一表现在：束缚在分子中的原子核的低能散射截面将大于自由核的散射截面。因为根据量子力学可以证明，中子与单个核散射的截面正比于两个粒子的折合质量  $\mu$  的平方。因而，当  $E \gg E_B$  时对于自由核的截面可写成

$$\sigma_{fr} \approx \mu^2 \approx \left( \frac{mM}{m+M} \right)^2 = \left( \frac{A}{1+A} \right)^2$$

这里  $A$  是散射核对中子的相对质量。但是，当中子能量小于  $E_B$  或相当时，就不能再把核看作是自由的，而必须考虑化学键的束缚效应。这时在散射过程中，分子是作为一个整体对中子反冲的，其结果相当于增加了核的有效质量。随着  $E/E_B$  比值减小，核的有效质量增大；在  $E/E_B \rightarrow 0$  的极限情况下，核的有效质量将等于整个分子的质量。因此，除轻分子外，中子和核的折合质量便趋近于 1，即  $\mu_b^2 \approx 1$ 。于是在 0 K 时，完全束缚核的截面  $\sigma_b$  与  $\sigma_{fr}$  之比有

$$\sigma_b = \left( \frac{A+1}{A} \right)^2 \sigma_{fr} \quad (12-1)$$

核的质量愈小， $\sigma_b/\sigma_{fr}$  比值愈大。例如，对于氢  $A=1$ ， $\sigma_b^H \approx 4\sigma_{fr}$ ，这和实验值很接近。在低能时， $\sigma_b^H \approx 80$  靶，而  $\sigma_{fr}^H \approx 20$  靶。当中子能量增大时  $\sigma_b$  逐渐减少并趋近于  $\sigma_{fr}$  (见图 12-2)。

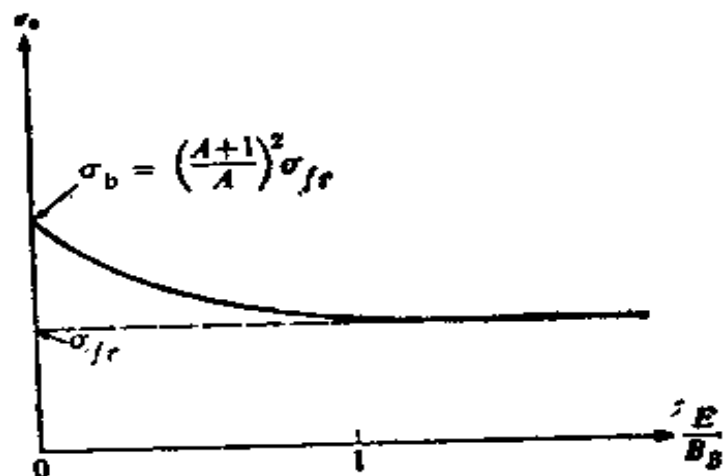


图 12-2 0K 时分子中束缚原子核的低能散射截面与  $E/E_B$  的函数关系 ( $E$  是入射中子的能量)

在考虑束缚原子核的散射时，必须区分弹性散射和非弹性散射两种类型。根据第一章的定义其主要区别在于：非弹性散射将使分子（或晶体）靶核的能态发生改变。自然，分子是一个复杂的动力学系统。作为一个很好的近似，可以把分子看成是一组好象由弹簧连结起来的原子。当低能中子（1 电子伏以下）和这样

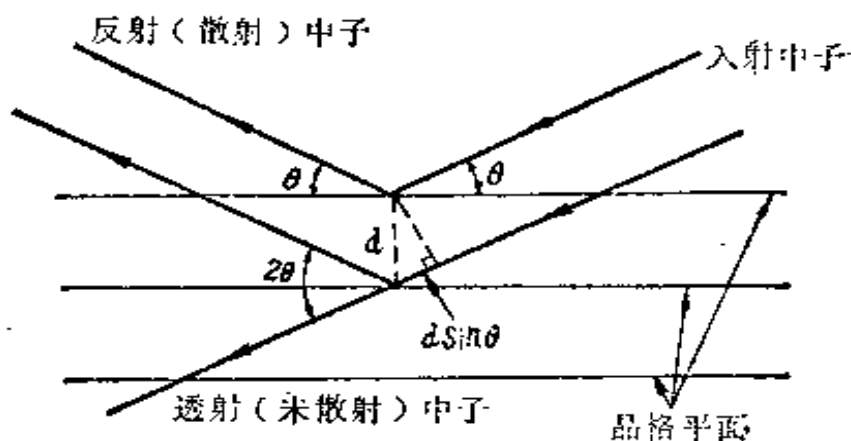


图 12-3 布喇格散射

一个系统碰撞时，固然不可能引起整个靶核本身的激发态，但是，它可能引起分子中原子的一个或几个振动量子态（或者分子的旋转或扭转的量子态）的改变。这样的散射便属于非弹性散射（注意，它与高能区的非弹性散射不同，那里是原子核本身被激发到更高的能态）。当中子与晶体中原子散射时，晶体的振动激发态可能发生变化。这种振动态的量子称为声子。因而非弹性过程伴随着声子的发射或吸收。在弹性散射时，由于把分子或晶体视为整体反冲，它的质量将比中子大得多，因而中子的能量变化可以忽略不计。这样，对于反应堆内低能区中子的热化或能量的变化而言，非弹性散射起着重要的作用。然而，对于热中子的运输过程，则两种散射都起着重要的作用。

### (3) 干涉效应

第一章中曾经提到，中子与原子核的作用有时可以看作中子波与核的相互作用。中子的波长  $\lambda$  与能量(电子伏)的关系由(1-1)式决定。根据公式可以计算出，对于波长  $\lambda$  等于  $1 \text{ \AA}$  (相当于原子核间的距离)的中子，其能量约为 0.079 电子伏。因而当中子能量小于 1 电子伏时，中子波长与原子核间的距离便相当，中子与晶体散射时必须考虑不同散射核的散射波之间的干涉效应。这和 X 射线中的干涉现象是一样的。假定一个单能中子束以一定角度  $\theta$  入射到晶体平面上，如图 12-3 所示。不难证明中子将

从这些平面上转过  $2\theta$  角被散射回去。当中子波长满足下列布喇格条件时：

$$n\lambda = 2d\sin\theta, \quad n=1, 2, \dots \quad (12-2)$$

式中  $d$  为相邻晶格平面之间的距离，由于散射波叠加的结果，散射截面将变得很大，称为布喇格散射峰。这个效应称为布喇格散射。另外，根据 (12-2) 式可知，存在一个最大的波长（对应地存在一个最低能量），大于这个波长就不可能发生布喇格散射。令  $\theta = \pi/2$  及  $n=1$ ，便可以得到最大波长  $\lambda_{\max} = 2d$ 。由于中子波长随中子能量的减小而增大，因此，存在一个最小的能量，低于这个能量就不能发生布喇格散射，这个能量称之为布喇格阈。在图 12-1 所示的碳的低能截面曲线上可以很明显地看到这个阈能和布喇格峰。

必须强调指出，以上讨论只涉及散射问题。而吸收、裂变等其他截面则和自由核的截面相同，因为，化学键或相干效应对吸收和裂变截面的影响可以忽略不计。

综上所述，可以看到，反应堆热化问题的研究可以归纳成下面两个方面的问题：

- (1) 如何求得热化区内各种元素(主要是慢化剂)的散射核函数；
- (2) 输运方程或慢化方程的近似求解。

关于第一方面问题，主要牵涉到固体物理和分子物理方面的一些理论。目前已经对各种慢化剂提出了一些实用和有效的散射核模型，并用散射律从理论上统一地来加以描述。关于散射核的计算远远超出了本书的范围。有关这方面的资料，读者可以参阅文献[1]—[4]。关于第二方面问题，以前所讨论过的关于输运方程的一些解法原则上都可以应用。然而，由于热化区散射函数的复杂性(例如向上散射等)，它给求解增加了困难。本章将先简要地介绍核反应堆计算中常用的一些散射核的近似模型，然后讨论反应堆内热中子能谱的计算。

## 2. 散射核的近似模型

### 2.1 自由气体模型

这是描述热化区散射动力学过程的最简单的模型。它只考虑了原子核的热运动，而没考虑原子核间的化学键影响，认为所有原子核处于自由的、热平衡运动的状态中，热运动的速度具有麦克斯韦分布。令  $N(\mathbf{V}) d\mathbf{V}$  为原子核具有速度  $\mathbf{V}$  到  $\mathbf{V} + d\mathbf{V}$  之间的几率，有

$$N(\mathbf{V})d\mathbf{V} = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-M\mathbf{V}^2/2kT} d\mathbf{V}, \quad (12-3)$$

这相当于把慢化剂模拟成一种单原子的自由气体。因而可以像第三章 1.1 节一样用简单的经典力学的方法来研究散射过程的动力学，并求出散射函数的表达式。所不同的仅仅是，这时原子核的速度  $\mathbf{V}$  不等于零而是按(12-3)式分布。

首先考虑一个速度为  $\mathbf{v}'$  的中子与速度为  $\mathbf{V}$  的原子核的碰撞，这时系统质量中心（质心）的运动速度  $\mathbf{V}_m$  为（图 12-4）

$$\mathbf{V}_m = \frac{\mathbf{v}' + A\mathbf{V}}{A+1}. \quad (12-4)$$

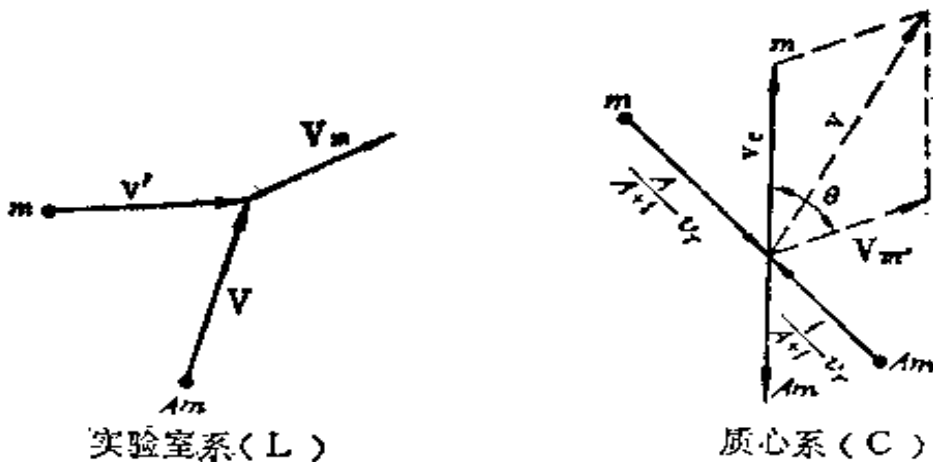


图 12-4 中子与原子核的散射



这里速度  $V_m$ 、 $v'$ 、 $V$  均系指实验室坐标系而言,  $A$  为原子核对中子的相对质量。中子和原子核的相对运动速度  $v_r$  为

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}' - \mathbf{V}, \quad (12-5)$$

$$v_r^2 = v'^2 + V^2 - 2v'V\mu, \quad (12-6)$$

式中  $\mu$  是速度向量  $\mathbf{v}'$  与  $\mathbf{V}$  的夹角余弦, 即  $\mu = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} / v'V$ 。

下面我们来推导散射核的表达式。

第一步先计算速度为  $v'$  的中子和速度为  $V$  且与中子速度的夹角的余弦为  $\mu$  的原子核碰撞后, 中子速度变成为  $v$  和  $v + dv$  之间的几率  $g(v' \rightarrow v)dv$ 。让我们先在 C 系内讨论。在 C 系内散射是各向同性的; 可以证明, 碰撞前和碰撞后中子在 C 系内的速度大小不变, 仅仅是改变了运动的方向(参考第三章 1.1 节)。设以角标 C 表示在 C 系内的参数值, 有

$$v'_c = v_c = |\mathbf{v}' - \mathbf{V}_m| = \frac{A}{A+1} v_r \quad (12-7)$$

设以  $\theta$  表示 C 系中散射后中子速度  $\mathbf{v}_c$  与  $\mathbf{V}_m$  间的夹角(图 12-4), 则在 L 系内碰撞后中子的速度  $v$  便等于

$$v = \sqrt{V_m^2 + v_c^2 + 2V_m v_c \cos \theta} \quad (12-8)$$

由于在质心系中散射是各向同性的, 即散射角的分布是球对称的, 因而中子散射到  $\theta$  和  $\theta + d\theta$  之间角锥元内的概率便等于 [见(3-22)式]:

$$f(\theta)d\theta = \frac{d\Omega_c}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin\theta d\theta.$$

注意到散射后中子速度  $v$  与散射角  $\theta$  之间存在着确定的对应函数关系(12-8)式, 因而碰撞后速度为  $v$  的概率分布便等于:

$$g(v' \rightarrow v) = f(\theta) \left| \frac{d\theta}{dv} \right|, \quad (12-9)$$

并且当  $\cos \theta = 1$  时,  $v$  达到最大值  $v_{\max} = V_m + v_c$ ; 当  $\cos \theta = -1$  时,  $v = v_{\min} = |V_m - v_c|$ 。另一方面根据(12-8)式有

$$\left| \frac{d\theta}{dv} \right| = \frac{v}{V_m v_c \sin\theta}.$$

把它代入(12-9)式便得到:

$$g(v' \rightarrow v) = \begin{cases} \frac{v}{2 V_m v_c}, & v_{\max} \geq v \geq v_{\min} \\ 0, & v \text{ 为其他值.} \end{cases} \quad (12-10)$$

另一方面，由于反应率系与相对速度  $v_r$  成比例，因而速度为  $v'$  的中子和速度为  $V$  的原子核的碰撞几率为

$$\sigma_{s0} v_r N(V) dV, \quad (12-11)$$

这里  $\sigma_{s0}$  为静止的自由原子核的微观散射截面。

第二步把求得的  $g(v' \rightarrow v)$  乘以 (12-11) 式并对所有  $V$  积分之。这样便可求得速度为  $v'$  的中子散射后速度变为  $v$  的概率分布或散射函数  $\sigma_s(v') f(v' \rightarrow v)$  了。因而有

$$\sigma_s(v') f(v' \rightarrow v) = \frac{\sigma_{s0}}{v'} \int_0^{+1} \int_{-1}^{+1} v_r g(v' \rightarrow v) 2\pi N(V) d\mu V^2 dV. \quad (12-12)$$

这里在 (12-3) 式中取  $dV = V^2 dV d\mu d\varphi$ ，其中  $\mu$ 、 $\varphi$  为球坐标系中（以中子速度方向为球坐标系的极轴）表示运动方向的坐标。

将 (12-10)、(12-3) 及 (12-6) 等式代入积分之，再将自变量  $v$  置换为  $E$ ，最后便可求得自由气体散射的能量分布函数

$$\sigma_s(E') f(E' \rightarrow E) = \frac{\sigma_{s0} \eta^2}{E'} \left\{ \exp(x'^2 - x^2) [\operatorname{erf}(\eta x' - \rho x) \pm \operatorname{erf}(\eta x' + \rho x)] + \operatorname{erf}(\eta x - \rho x') \mp \operatorname{erf}(\eta x + \rho x') \right\}, \quad (12-13)$$

$$E' \leq E,$$

式中：  $\eta = \frac{A+1}{2\sqrt{A}}$ ;  $\rho = \frac{A-1}{2\sqrt{A}}$ ;

$$x^2 = \frac{E}{KT}; \quad x'^2 = \frac{E'}{KT}; \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

$\operatorname{erf}(x)$  系误差函数；当  $E' < E$  时，式中取上面符号，而当  $E' > E$  时则取下面符号。

图 12-5 中画出单原子氢气体 ( $A=1$ ) 散射的能量分布函数的

图形。从图中可以看出向上散射是存在的。我们看到，当中子能量  $E' \approx KT$  时，向上散射的概率是很大的，当  $E' \approx 25KT$  时，向上散射的概率便已经很小了。最后，当  $E' \approx 100KT$  或  $E' \gg E_m$  时，向上散射便趋近于零了，而且  $f(E' \rightarrow E)$  的形状便同我们所熟悉的静止核的散射函数一样，具有“矩形”的分布曲线了 [见(3-24)式]。

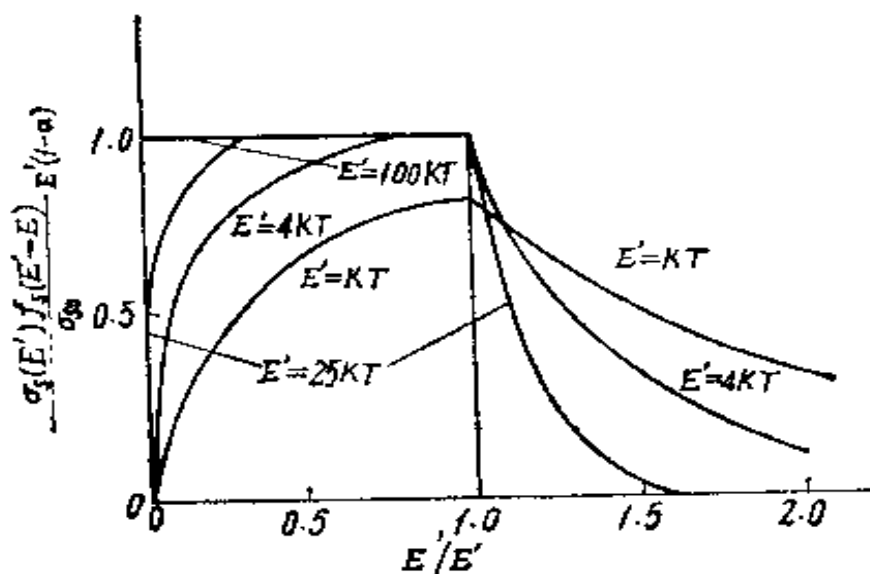


图 12-5 单原子气体 ( $A=1$ ) 散射的能量分布函数曲线

将(12-12)式对所有  $v$  积分之，注意到  $\int_0^\infty g(v' \rightarrow v) dv = 1$  的归一化条件，便求得散射的总截面  $\sigma_s(v')$  等于

$$\sigma_s(v') = \frac{\sigma_{s0}}{v'} \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty v_r \left( \frac{M}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-Mv^2/2KT} 2\pi V^2 dV d\mu.$$

经过积分并将自变量  $v'$  置换为  $E'$ ，最后便得到：

$$\sigma_s(E') = \frac{\sigma_{s0}}{\beta^2} \left[ \left( \beta^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{erf} \beta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta e^{-\beta^2} \right], \quad (12-14)$$

式中  $E' = mv'^2/2$  是中子的动能， $\beta^2 = AE'/kT$ 。

从(12-14)式可以看到，在低能区散射截面是能量的函数。当中子能量  $E'$  或  $\beta$  很小的时候，由于  $\operatorname{erf} \beta$  将与  $\beta$  成比例，由上式便有：

$$\sigma_s(E) > \frac{\sigma_{s0}}{\beta} \propto \frac{\sigma_{s0}}{v'}, \text{ 当 } E' \text{ 很小时}$$

因而，当中子能量  $E'$  很小时，散射截面将按  $1/v$  律变化。而当  $E'$  很大时， $\operatorname{erf} \beta \rightarrow 1$ ，且  $\beta^2$  很大，由 (12-14) 式便导致  $\sigma_s(E') \approx \sigma_{s0}$ ，即散射截面将与能量无关。这些结果和上一节所得到的是一致的。

对于自由气体模型，在实际计算中常用的是自由质子气体模型。主要用之于轻水堆的热谱计算。它把反应堆芯部看成为温度为  $T$  的处于热平衡状态的自由质子气体。对于质子， $A=1$  ( $\eta=1$ ,  $\rho=0$ )，因而散射核的形式将大大地简化。这样，(12-13) 式便简化为：

$$\sigma_s(E') f(E' \rightarrow E) \begin{cases} \frac{\sigma_{s0}}{E'} \exp(x'^2 - x^2) \operatorname{erf} x', & \text{当 } E' < E \\ \frac{\sigma_{s0}}{E'} \operatorname{erf} x, & \text{当 } E' > E \end{cases} \quad (12-15)$$

它通常称为魏格纳-威尔金斯 (Wigner-Wilkins) 近似 (W-W 模型)，它的具体应用将在下一节中讨论。

从上面的讨论可以看出，自由气体模型仅仅考虑了原子核热运动的影响，而没有考虑到原子核间的化学键及散射波的相互干涉等效应，因而对于许多具体慢化剂来说是比较粗糙的。但是，它毕竟是比较简单的，并且通过对它的讨论有助于了解热化过程散射函数的一些特性。同时对于一些问题（例如轻水堆）它也给出了比较良好的近似结果。另外，对于一些对芯部的热化过程影响较小的元素，例如氧、结构材料以及燃料等元素，利用这种简单模型计算精度也已经足够。

关于自由气体模型的改进：自由气体模型的主要缺陷在于没有考虑化学键效应，下面介绍通过半经验的方法对自由气体模型进行的修正。

如 BSJ (Brown-St. John) 模型<sup>[4]</sup>，主要对自由气体模型作

了两个方面修正。首先是考虑到分子内原子核间的束缚效应，对  $H_2O$  或  $D_2O$  中的束缚质子的质量用一更大的“有效质量”来代替。例如对  $H_2O$  中的  $H$  以及  $D_2O$  中的  $D$  分别取有效质量  $m_H = 1.884$  和  $m_D = 3.595$ 。第二方面的改进则完全带有半经验性的，认为在质心系内散射截面不再等于常数，而是相对速度  $v_r$  的函数并按下面指数规律变化：

$$\sigma_s(v_r) = \sigma_{s0} + B e^{-K v_r^2}$$

式中  $v_r$  是以相对能量为单位。常数  $B$  和  $K$  是通过试凑方法来确定的(选取合适的  $B$  和  $K$  值,使计算的散射截面值与实验值相符)。例如对于水中的氢取  $B = 26.2$  靶,  $K = 0.225$ , 而对于  $D_2O$  中的氘有  $B = 1.8$  靶,  $K = 0.18$ 。

这样, 散射核将具有如下形式:

$$\begin{aligned} \sigma_s(E') f(E' \rightarrow E) = & \sigma_s^{fg}(E' \rightarrow E) \\ & + B \frac{\eta^2}{2 E'} \frac{\tau^3}{\lambda} \left\{ \exp(-K \tau^2 x'^2 / \beta^2) \left[ \operatorname{erf}(\eta' x - \rho' x') \right. \right. \\ & \left. \left. \pm \operatorname{erf}(\eta' x + \rho' x') \right] + \exp(x'^2 - \lambda x^2) \left[ \operatorname{erf}(\eta' x' - \rho' x) \right. \right. \\ & \left. \left. \mp \operatorname{erf}(\eta' x' + \rho' x) \right] \right\}, E' \geq E \end{aligned} \quad (12-16)$$

式中:  $\beta^2 = T_0/T$ ;  $\eta' = \eta/\tau$ ;  $\rho' = \tau \sqrt{m - \eta'}$   
 $\tau^2 = m \beta^2 / (m \beta^2 + K)$ ;  $\lambda = 1 + m(1 - \tau^2)$

$\sigma_s^{fg}(E' \rightarrow E)$  为自由散射核由 (12-13) 式决定, 其他符号都和 (12-13) 式所表示的一样。计算表明 BSJ 模型具有良好的效果; 对于重水和水, 它和后面即将介绍的精确的尼尔金 (Nelkin M. S.) 模型很接近, 但计算量却小得多。

## 2.2 分子和晶体(束缚原子)模型

实际的慢化剂(例如水和石墨等)的原子核都是以分子或晶体结构形式束缚联系着。当分子与中子发生散射时, 通常是整个的分子移动, 或者是分子的原子核在平衡位置附近作转动和振动, 并且, 这些运动具有固有的频谱分布。同时由于在介质分子之间

有各种分子内力的作用,分子往往不能自由地而是作阻尼的振动、旋转和位移。这就是说,分子与中子的相互作用的正常反应可能受到其它分子存在的阻碍。这样就使得分子散射问题进一步复杂化——散射截面既与分子本身的结构有关,也与分子同周围介质的结合情况有关。另一方面,中子与固态晶体散射,有可能激发晶体的振动态。这种振动态的量子称为声子。入射中子所损失的能量使用来增加了晶体的内能。从声子激发的性质来看,显然低能中子与固体分子的散射是和晶体结构以及晶体内原子间的作用力有着密切的关系。即使是同一种材料的样品,如果它的微观晶体结构不同,那么它们的散射截面就可能有些不同。因此,由于化学键所引起的种种效应使得散射截面变得异常复杂。

近年来,已经能够从分子和晶体的理论以及关于分子振动频率的合理假设出发,推导出分子或晶体的散射截面。但是这些计算是很复杂的,并远远超出了本书的范围。更确切地说,这方面的研究是属于分子和固体物理工作者的事。下面我们只引用其最后结果和计算公式。通常微分散射截面  $\sigma_s(E' \rightarrow E; \mu_0)$  可以通过散射律  $S(\alpha, \beta)$  表示如下<sup>[2][3]</sup>:

$$\sigma_s(E' \rightarrow E; \mu_0) = \frac{\sigma_b}{4\pi kT} \left( \frac{E}{E'} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(-\beta/2) S(\alpha, \beta), \quad (12-17)$$

式中  $\sigma_b$  为束缚原子的截面[(12-1)式],  $\alpha$ 、 $\beta$  分别是表示散射时中子动量和动能变化的两个无因次量:

$$\alpha = (E' + E - 2\sqrt{E'E} \mu_0) / AkT, \quad (12-18)$$

$$\beta = (E - E') / kT, \quad (12-19)$$

$S(\alpha, \beta)$  称为材料的散射律,它与具体散射材料种类和结构有关。在高斯近似<sup>[2][3]</sup>下可以表成:

$$S(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta t} \exp \left\{ -\alpha \int_0^{\infty} \frac{\rho(\beta)}{\beta \text{sh}(\beta/2)} [\text{ch}(\beta/2) - \cos \beta t] d\beta \right\} dt, \quad (12-20)$$

这里  $\rho(\beta)$  为所讨论材料的频谱分布。它是根据液体分子运动或

晶体栅格振动理论研究确定的。不同材料具有不同的频谱。因而，现在关键问题在于确定不同慢化剂的频谱分布  $\rho(\beta)$ ，或等价的  $\rho(\omega)$  分布， $\omega = kT\beta/\hbar$ 。一旦求得合适的  $\rho(\omega)$  分布，将它代入上面公式便可计算出微分散射截面值来。下面介绍两种常用的近似散射核模型。

### (1) 尼尔金模型<sup>[5]</sup>

这是适用于轻水的散射核近似模型。它考虑了整个分子（有效质量  $m_r=18$ ）的自由移动、能量  $\omega_1=0.065$  电子伏处氢原子的受阻（受到邻近分子妨碍）转动和能量  $\omega_2=0.205$  电子伏及  $\omega_3=0.481$  电子伏的弯曲振动和拉伸振动。尼尔金建议用一组  $\delta$  函数的组合来表示氢的频谱分布，即

$$\rho(\omega) = \sum_i \frac{1}{m_i} \delta(\omega - \omega_i) \quad (12-21)$$

表 12-1 中给出各种运动的有效质量  $m_i$  和  $\omega_i$  值。对于中子与氧原子核的散射在上述模型中没有加以考虑，但在轻水中，氧的散射贡献很小（不到百分之几），因而对于氧原子核的处理应用自由气体模型就可以了。尼尔金模型对于  $D_2O$  也同样给出良好的结果。

表 12-1  $H_2O$  和  $D_2O$  的分子振动参数

振动型式	$H_2O$		$D_2O$	
	$m_i$	$\omega_i$ eV	$m_i$	$\omega_i$ eV
平 动	18	0	20	0
转 动	2.32	0.065	6.0	0.048
弯曲振动	5.85	0.205	10.8	0.146
伸长振动	2.93	0.481	5.3	0.339

图 12-6 和图 12-7 给出应用各种模型所得到的散射截面及水中的热中子谱的计算结果和实验结果。从这些图中可以看到，尼尔金模型比自由气体模型给出更精确的结果，尤其是在低能（例如

表 12-2 常用慢化剂的散射核模型

材 料	散 射 核 模 型
H <sub>2</sub> O	尼尔金、W-W 或 BSJ 模型
C	GHFG <sup>1)</sup> 、帕克斯模型
D <sub>2</sub> O	尼尔金、GHFG、BSJ 模型
O、结构材料等	自由气体模型

1) 广义重气体模型。

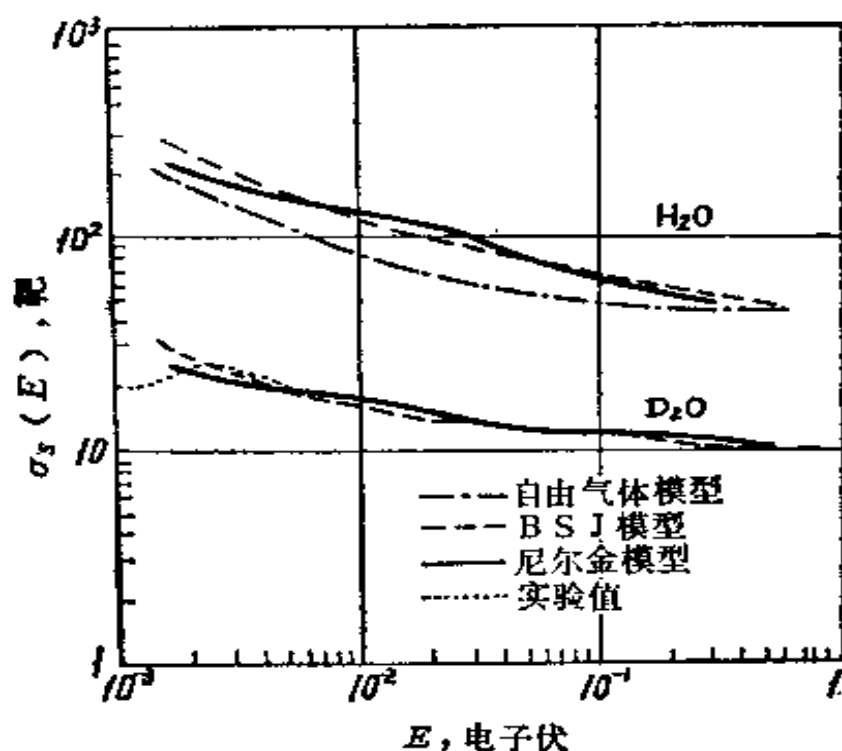


图 12-6 由不同模型计算的散射截面

\* H<sub>2</sub>O 的散射截面的实验值与尼尔金模型曲线重合。

$E < 0.02$  电子伏) 部分, 这是因为在低能区化学键和干涉效应将显得更加主要, 而自由气体模型则没有考虑到它们的影响的缘故。

## (2) 帕克斯(Parks D.E.)模型

它常用于石墨的散射核的计算<sup>[6]</sup>。它给出散射律的有效的计算方法。其频谱分布  $\rho(\omega)$  通常应用 YOSHIMORI-KITANO<sup>[7]</sup>



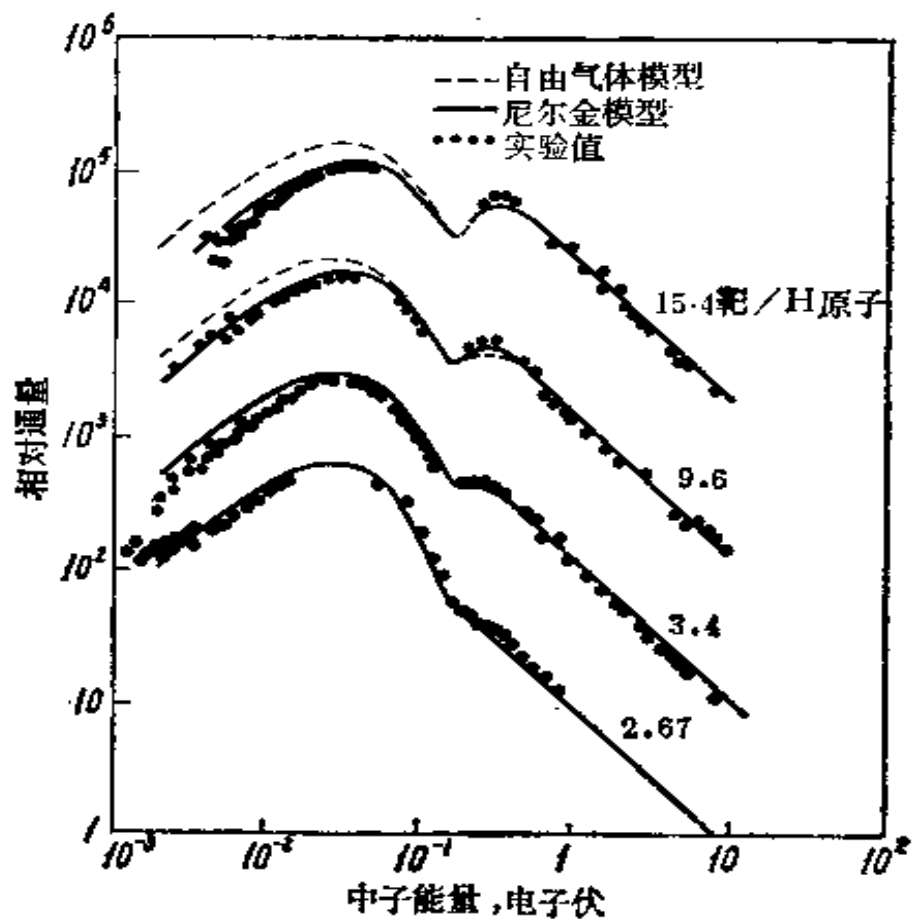


图 12-7 不同硼浓度的水溶液中的中子能谱

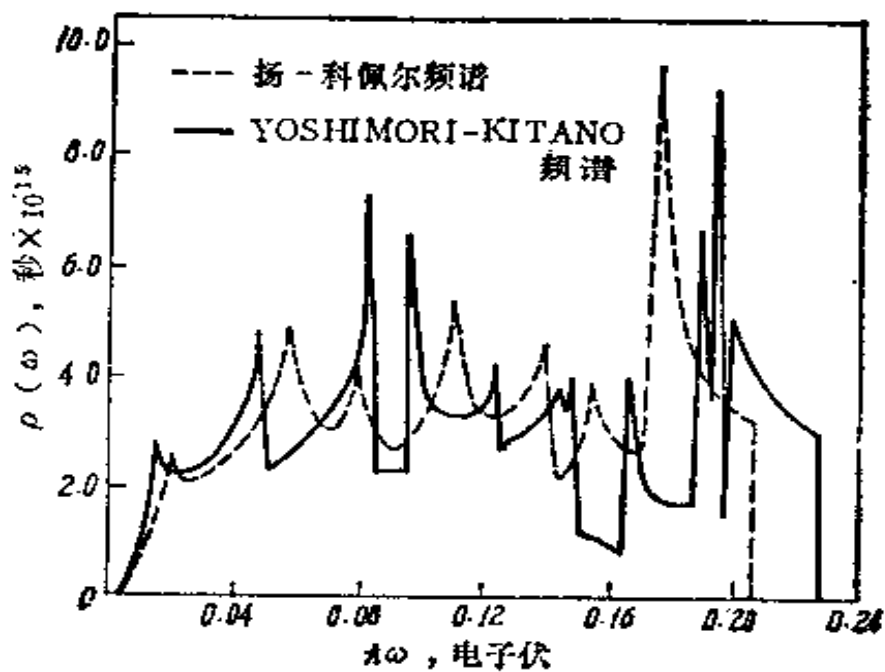


图 12-8 石墨的两个频谱

或扬-科佩尔<sup>[8]</sup>(Young-Koppel)提出的频谱(图12-8)或由实验求得的频谱来计算。由于石墨晶体结构的各向异性:在同一平面上石墨原子排列成六角形,相邻原子之间有着很强的束缚联系,而不同平面之间的原子的相互作用则很弱,近期曾提出了对振动各向异性的考虑,但是这时散射律的计算太复杂,因而只有当需要更精确的散射律时才应用到它。

表 12-2 给出反应堆常用慢化剂的散射核模型。散射核的计算一般都编制成专门的计算程序,例如国外早期的 GAKER<sup>[9]</sup>等都可以很方便地用于散射核的计算。目前国外已经编有直接利用散射律计算散射截面的程序,例如 GASKET<sup>[10]</sup>-FLANGE<sup>[11]</sup>程序,计算的原始数据取自 ENDF/B 截面数据库,根据这些截面数据和给定的频谱  $\rho(\omega)$  由 GASKET 程序产生出散射律  $S(\alpha, \beta)$  数据,而再由 FLANGE 程序计算出所需的散射截面  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$  数据来。

### 3. 无限均匀介质内中子的热化

芯部中子热化问题研究的主要目的在于求得芯部的热群常数。这就必须知道热中子的空间-能量分布。然而,由于芯部栅格结构的复杂性,精确地求解栅格的热中子空间-能量分布是非常困难的。在工程设计中,通常作一些简化或近似的处理。按照计算精度要求的不同,目前实用的热谱计算大致可以分为两大类:

1. 应用等效栅元方法把问题简化为一个一维问题来求出栅元内的  $\phi(r, E)$  分布<sup>1)</sup>。

2. 近似地认为栅元内热中子的空间和能量分布可以分离变量写成  $\phi(r, E) = \phi(E)\varphi(r)$ , 而其中能量分布  $\phi(E)$  则用一个等效无限均匀介质的能谱分布来近似地表示。

---

1) 对于非均匀的燃料组件有时也用二维程序,但需更长的计算时间,因而其使用范围仍然有限。

关于第一类问题的计算，将在下一节中介绍。本节讨论后一种近似方法。这种方法可以说是实用热谱计算程序中最简单、计算时间最短的程序。因而在仅需一般的精度要求并且需要大量重复计算的情况下(如初步设计或一般燃耗计算)，它是常常被采用的。

### 3.1 无限介质内中子热化方程和麦克斯韦分布

考虑一含有均匀分布源的无限的均匀介质。在这种情况下，能量相关通量  $\phi(E)$  对于所有能量都与空间位置无关。根据中子平衡原理，按照建立(3-48)式中子慢化方程同样的方法，可以很容易地写出无限均匀介质内的热化方程：

$$[\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)]\phi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E')f(E' \rightarrow E)\phi(E')dE' + S(E), \quad (12-22)$$

式中  $S(E)$  为中子源项。这里积分的下限为  $E' = 0$ ，这是因为在热化区存在着向上散射的缘故。如图 12-9 所示，进入  $dE$  内的中子不仅来自  $E' > E$  的能区中的中子的向下散射，也可能来自  $E' < E$  的能区中的中子的向上散射。另一方面，式中  $\Sigma_s(E')f(E' \rightarrow E)$  在热化区 ( $E < E_m$ ) 内必须用上节所讨论的热中子散射核来表示。

在热化区，通常用一个单一函数  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$  来代替方程(12-22)中的  $\Sigma_s(E')f(E' \rightarrow E)$ ，即

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E')f(E' \rightarrow E), \quad (12-23)$$

函数  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$  也称为散射核。根据散射截面定义有

$$\Sigma_s(E') = \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E)dE, \quad (12-24)$$

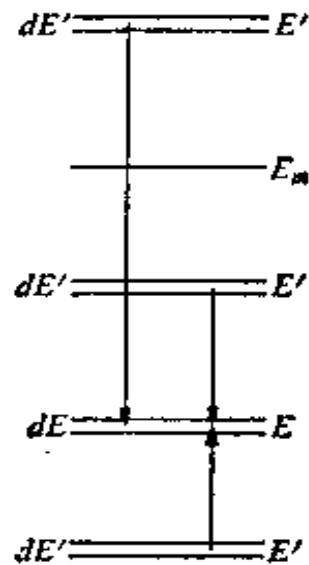


图 12-9 中子热化方程的建立 ( $E_m = E^*$ )

如果介质内没有中子源存在，则方程(12-22)便写成：

$$[\Sigma_s(E) - \Sigma_a(E)]\phi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi(E') dE'. \quad (12-25)$$

这便是无限介质内中子热化的基本方程。当没有吸收时便进一步简化为：

$$\Sigma_s(E)\phi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi(E') dE'. \quad (12-26)$$

在这种情况下，中子就好象气体中分子一样在介质内作无规则的运动。由于与原子核多次碰撞，这些中子不断获得能量和损失能量，但在稳定状态下，任何能量间隔  $dE$  内的中子数必然保持一个稳定的分布。应用统计力学可以证明，中子密度满足麦克斯韦分布[(1-77)或(1-78)式]；也就是说，满足(12-26)式的中子通量  $\phi_M(E)$  为：

$$\begin{aligned} \phi_M(E) &= n_0 v N(E) = \phi_{th} \frac{E}{(kT)^2} \exp(-E/kT), \\ \phi_{th} &= n_0 \left( \frac{8kT}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (12-27)$$

式中  $n_0$  为单位体积内中子总数。(12-27)式便是平衡状态情况的热中子通量的分布——麦克斯韦分布。对(12-27)式求导并令其等于零，便可以求出对应于  $\phi_M(E)$  的最大值的最可几能量为  $E_0 = kT$ 。

另一方面，由统计力学中的定律知道，在一个热平衡的系统中所发生的任一能量交换(或转换)过程必然伴随有一个相类似的逆过程，并且这两种过程以相等概率发生。这个定律通常称为细致平衡原理。把这个原理应用到目前情况便得到：当中子与介质原子核达到热平衡时，每秒由能量间隔  $dE'$  散射到任何其他能量间隔  $dE$  的中子数应恰好等于由间隔  $dE$  散射回到  $dE'$  的中子数。由于热平衡时中子通量服从麦克斯韦分布((12-27)式)，因而细致平衡条件可以写成：

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi_M(E') = \Sigma_s(E \rightarrow E')\phi_M(E) \quad (12-28)$$

可以证明，关系式(12-28)式的成立将导致中子平衡方程(12-26)的成立。为此，将(12-28)式对  $E'$  积分便有

$$\int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi_M(E') dE' = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E \rightarrow E') \phi_M(E) dE' \\ = \Sigma_s(E) \phi_M(E),$$

这就得到(12-26)式。由此我们还可以看出，细致平衡条件(12-28)保证了麦克斯韦分布为无源、无吸收的无限介质内热平衡状态下中子通量的解。这是可以预料的事。因为细致平衡是表示每一对能量间隔  $dE$  和  $dE'$  之间的平衡。而方程(12-26)则给出  $dE$  和所有  $dE'$  之间的总平衡关系。因而，满足细致平衡条件必然导致总平衡关系的成立。

细致平衡条件在研究热化问题时是很有用的。因为正如前一节所讨论那样，多数的散射核函数都是在从理论上作一些近似处理的条件下求得的。细致平衡条件给所求得的近似散射核的基本性质加上一个限制条件，即应满足(12-28)式。这就保证了所求的近似散射核至少在极限(无源、无吸收)情况下能给出麦克斯韦分布。

## 3.2 无限介质热谱的近似计算

### 3.2.1 自由质子气体模型

这是轻水反应堆热谱计算中最简单的一种近似模型。它把芯部模拟成温度等于  $T$  的热平衡状态的质子( $A=1$ )气体，并假定吸收截面满足  $1/v$  律。因而它主要是适用于以氢为慢化剂的轻水反应堆的热谱计算，并取得了满意的结果。

在这个模型中，在求解热化方程(12-25)时，右端积分号内的散射核用自由质子模型(12-15)式代入。这是一个积分方程，魏格纳和威尔金斯研究了它的求解问题<sup>[12]</sup>，建议通过适当的运算把它变换成为更易于求解的二阶微分方程。

为了方便，设以  $x = v/\sqrt{2kT} = (E/kT)^{1/2}$  为自变量，用

它置换  $E$ , 则热化方程(12-25)便写成:

$$[\Sigma_s(x) + \Sigma_a(x)] \phi(x) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(x' \rightarrow x) \phi(x') dx' \quad (12-29)$$

令  $N(x) = \phi(x) / [x^2 M(x)]^{1/2}$ , 其中  $M(x)$  为麦克斯韦分布,

$$M(x) = x^2 e^{-x^2}, \quad (12-30)$$

这样积分方程 (12-29) 便写成:

$$[V(x) + \Gamma(x)] N(x) = \int_0^{\infty} S(x' \rightarrow x) N(x') dx' \quad (12-31)$$

根据(12-14)和(12-15)式, 可求得式中:

$$S(x' \rightarrow x) = \Sigma_s(x' \rightarrow x) x' \sqrt{M(x')} / \Sigma_{s0} \sqrt{M(x)}$$

$$= \begin{cases} 2 \exp\left[-\frac{x^2 - x'^2}{2}\right] \operatorname{erf}(x'), & x' < x \\ 2 \exp\left[\frac{x^2 - x'^2}{2}\right] \operatorname{erf}(x), & x' > x \end{cases} \quad (12-32)$$

$$V(x) = \Sigma_s(x) \frac{x}{\Sigma_{s0}} = \left(x + \frac{1}{2x}\right) \operatorname{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad (12-33)$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Sigma_a(x)x}{\Sigma_{s0}} = \frac{\Sigma_a(vT)x_T}{\Sigma_{s0}}, \quad (12-34)$$

将(12-31)式中的  $S(x' \rightarrow x)$  用(12-32)式表示便得到:

$$2e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{x'^2}{2}} \operatorname{erf}(x') N(x') dx' + 2e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{erf}(x)$$

$$\times \int_x^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{2}} N(x') dx' = [V(x) + \Gamma(x)] N(x). \quad (12-35)$$

现在我们设法把上述积分方程变换为一个二阶微分方程。设有线性二阶微分算子

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dx} \frac{1}{P(x)} \frac{d}{dx} \phi(x), \quad (12-36)$$

其中  $P(x)$  和  $W(x)$  为待定的函数。为了确定它们, 将  $\mathbf{L}$  作用于

方程 (12-35)，并在所得到的结果中令所有积分号前的系数等于零。根据这个条件便可求出：

$$P(x) = e^{-x^2} + \sqrt{\pi} x \operatorname{erf}(x),$$

$$W(x) = \frac{e^{-x^2}}{P^2(x)} - \frac{x^2}{P(x)}. \quad (12-37)$$

然后，把所求得的算子  $L$  作用于 (12-35) 式。在所得结果中，积分项前的系数显然均等于零，也就是说不再包含有积分项，这样便把原来的积分方程变换成为如下的二阶微分方程

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{P(x)} \frac{d}{dx} [V(x) + \Gamma(x)] N(x) + \left[ W(x) [V(x) + \Gamma(x)] + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \right] N(x) = 0, \quad (12-38)$$

边界条件为：当  $x \rightarrow 0$  时， $N(0) = 0$ 。这样，任何满足微分方程 (12-38) 及边界条件的解必为积分方程 (12-31) 的解。方程 (12-38) 称之为魏格纳-威尔金斯方程。

微分方程 (12-38) 的优越性在于它比积分方程的数值求解要方便得多，因为当把积分方程直接离散，所得到的是一个满矩阵的方程，而对微分方程离散得到的是带状矩阵，并可以从前面一个或几个能量节点直接依序算出另一个能量节点上的数值来，这样只需比较小的计算机存贮量就可以了，并且可以不用迭代方法。

考虑到有限介质的泄漏影响，可以在吸收截面中加上  $D(E)B^2$  项来加以修正。对于含氢介质的混合物，则可用一个等效截面来代替自由氢原子的截面，即

$$\Sigma_{s0}^H \rightarrow \sum_i \xi_i N_i \sigma_{s,i} = \bar{\xi} \Sigma_s.$$

文献 [13] 中介绍了方程 (12-38) 的具体求解方法。由于其计算简单且给出良好的精度，因而魏格纳-威尔金斯近似在轻水堆的热谱计算中曾获得了广泛的应用。通常我们把以解 (12-38) 方程为基础的计算程序称之为 SOFOCATE 型程序。

图12-10给出用自由质子模型所求得具有慢化中子源的 $1/v$ 吸收剂内的热中子能谱。曲线右端所出现的通量下陷，是由于在靠近热能处的(例如铀-239、铀-235或钚-239)共振峰所引起的。

最后应该指出，由于热中子的平均自由程和栅元之间的距离相比往往是很小的，因而在求解热群常数时必须考虑到栅元之内空间的非均匀影响(第五章)，这样，热谱的具体计算步骤大致如下：

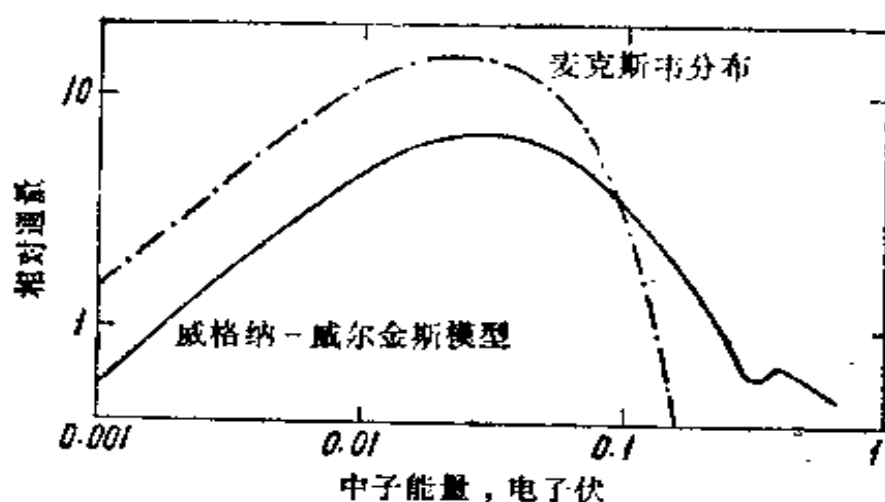


图 12-10 用魏格纳-威尔金斯近似求得的热中子能谱

(1) **空间通量分布计算** 把正方形或六角形栅元等效成一维同心圆，保持各材料的体积不变。根据按能谱计算求得的平均截面，计算出燃料、包壳和慢化剂各区的通量分布或平均通量。一般可采用第五章所介绍的 A. B. H 方法，或其他更精确的方法。

(2) **能谱计算** 将栅元变换成等效均匀介质，这时把实际区域的原子核密度按体积和从上面求得的通量空间分布进行权重修正。然后根据所选择的模型[例如 SOFOCATE 方程(12-38)]求出中子的能谱分布  $\phi(E)$ 。

一般地说，上述两个计算过程要反复交替地迭代进行，即用前面 SOFOCATE 能谱计算程序输出的按能谱平均的截面来作空间通量分布计算。求出新的通量空间分布之后，用它来权重计算出新的均匀化介质的原子核密度，再输入到 SOFOCATE 能谱程



序中去以作为下一次能谱计算之用，……。这个过程一般是迅速收敛的，特别是低浓缩铀系统。

### 3.2.2 重气体模型

对于质量数较大( $A \gg 1$ )的慢化剂，例如石墨等，自由质子模型不能适用。这时，应用重气体模型是比较适宜的。

引进函数  $\psi(E) = \phi(E)/M(E)$ 。其中  $M(E)$  为中子通量的麦克斯韦分布  $\phi_M(E)$  [(12-27)式]。用  $\psi(E)$  替换  $\phi(E)$ ，同时根据细致平衡条件

$$M(E')\Sigma_s(E' \rightarrow E) = M(E)\Sigma_s(E \rightarrow E'),$$

热化方程(12-25)便可写成

$$[\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)]\psi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E \rightarrow E')\psi(E')dE', \quad (12-39)$$

一般在吸收不是太强烈的情况下，中子通量  $\phi(E)$  接近于平衡分布  $M(E)$ ，因此  $\psi(E)$  是较  $\phi(E)$  随能量  $E$  变化更为缓慢的函数；而且对于重元素，散射时能量变化的分散度是比较小的，因而，可以把积分号内的  $\psi(E')$  在  $E$  处展成泰勒级数，即

$$\begin{aligned} \psi(E') = & \psi(E) + (E' - E) \frac{d\psi(E)}{dE} \\ & + \frac{1}{2!} (E' - E)^2 \frac{d^2\psi(E)}{dE^2} + \dots, \end{aligned} \quad (12-40)$$

可以预期它很快地收敛。将 (12-40) 式代入 (12-39) 式便得

$$\Sigma_a(E)\psi(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} L_n(E) \frac{d^n\psi}{dE^n}, \quad (12-41)$$

其中  $L_n(E)$  为散射核的  $n$  次能量矩，

$$L_n(E) = \int_0^\infty (E' - E)^n \Sigma_s(E \rightarrow E') dE' \quad (12-42)$$

应用单原子(自由)气体模型的散射函数，当  $A$  很大时(即重气体模型)保留到  $1/A$  项，可以证明：

$$L_1(E) = \xi \Sigma_{s0}(2kT - E) + O\left(\frac{1}{A^2}\right),$$

$$L_2(E) = 2\xi \Sigma_{s0} E kT + O\left(\frac{1}{A^2}\right),$$

$$L_3(E), \dots, L_n(E) = O\left(\frac{1}{A^2}\right).$$

其中  $\xi = 2/A$ ，对于重气体可以略去  $1/A^2$  项，将这些结果代入 (12-41) 式便得到：

$$\Sigma_a \psi(E) = \xi \Sigma_{s0} \left[ (2kT - E) \frac{d\psi(E)}{dE} + kTE \frac{d^2\psi(E)}{dE^2} \right]. \quad (12-43)$$

用  $\phi(E)$  表示，则有

$$\Sigma_a \phi(E) = \xi \Sigma_{s0} \left[ EkT \frac{d^2\phi(E)}{dE^2} + E \frac{d\phi(E)}{dE} + \phi(E) \right], \quad (12-44)$$

或

$$\Sigma_a \phi(E) = \frac{d}{dE} \left\{ \xi \Sigma_{s0} \left[ EkT \frac{d\phi}{dE} + (E - kT)\phi(E) \right] \right\}. \quad (12-45)$$

式 (12-44) 或 (12-45) 式称之为重气体方程或威尔金斯方程。这样，可以看到重气体模型实际上是把散射算子  $L$

$$L\phi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi(E')dE', \quad (12-46)$$

用一个二阶微分算子  $L_H$  来近似代替，

$$L_H = \frac{d}{dE} \left\{ \xi \Sigma_{s0} \left[ EkT \frac{d}{dE} + (E - kT) \right] \right\} + \Sigma_s(E) \quad (12-47)$$

这样，我们便把积分方程形式的热化方程 (12-39) 化成为一个二阶微分方程 (12-45) 式。

可以看到，当  $T \rightarrow 0$  (原子核静止) 的极限情况下，重气体模型方程 (12-45) 便成为年龄近似方程了，这是可以预料到的事，因为年龄近似本身就是对重元素的  $1/A$  阶近似。图 12-11 中示

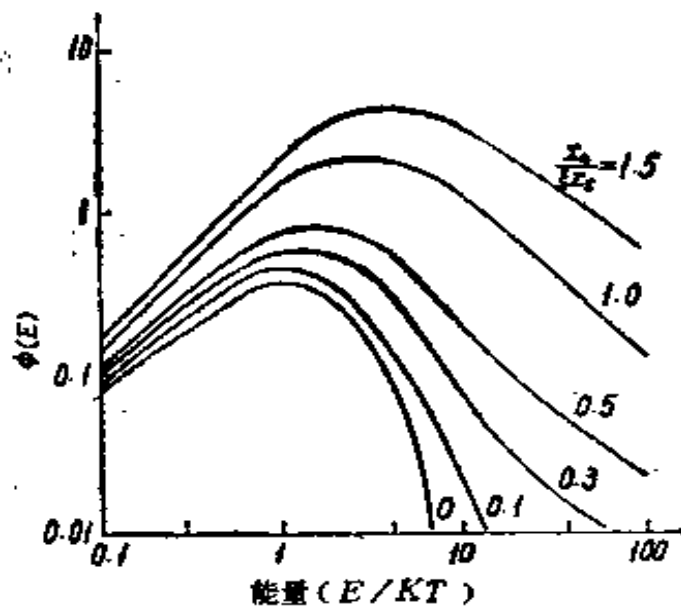


图 12-11 用重气体模型算得的热中子能谱

出不同参数值  $\Gamma = \Sigma_a(kT)/\xi \Sigma_{s0}$  下，重气体方程（假设  $1/v$  吸收）的数值解的曲线。遗憾的是，由于重气体模型没有考虑化学键的影响，因而计算结果不够理想，实际中很少应用。常用的是对它改进后的模型——广义重气体模型。

### 3.2.3 广义重气体模型

重气体模型系以自由气体模型出发所作的近似，并没有考虑化学键的影响。这时认为  $\xi \Sigma_s = \xi \Sigma_{s0} = \text{常数}$ 。实际上，考虑到化学键影响， $\xi$  并不等于常数，而是能量函数。因而我们可以这样地对 (12-45) 式进行改进，即认为  $\xi \Sigma_s$  是随能量变化的函数，即  $\xi \Sigma_s = \xi \Sigma_{s0} f(E)$ ，其中  $\xi \Sigma_{s0}$  即为  $E \rightarrow \infty$  时（即自由气体）之  $\xi \Sigma_s$  值，而  $f(E)$  为待定的任意函数。这样把算子  $L$  用下面算子来代替<sup>[14]</sup>，即

$$L \rightarrow L_{GHFG} = \xi \Sigma_{s0} \frac{d}{dE} \left\{ f(E) \left[ EkT \frac{d}{dE} + (E - kT) \right] \right\} + \Sigma_s(E) \quad (12-48)$$

$L_{GHFG}$  便称为广义重气体或霍罗威茨 (Horowitz) 算子。显然，令  $f(E) \equiv 1$  时便是前而的重气体模型。

现在问题的关键在于如何正确地决定和计算  $f(E)$  函数，使它与化学键以及系统特性等联系起来并能得到正确的热谱。一般讲  $f(E)$  可以通过把谱的实验测量结果和计算值相比较而求得，或者应用解析方法借助散射核函数  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$  的有关积分来解析求出<sup>[2]</sup>。图 12-12 给出卡德霍尔型栅格的实验值与计算值曲线。实际表明广义自由重气体模型对于石墨及  $D_2O$  慢化反应堆具有良好的效果。

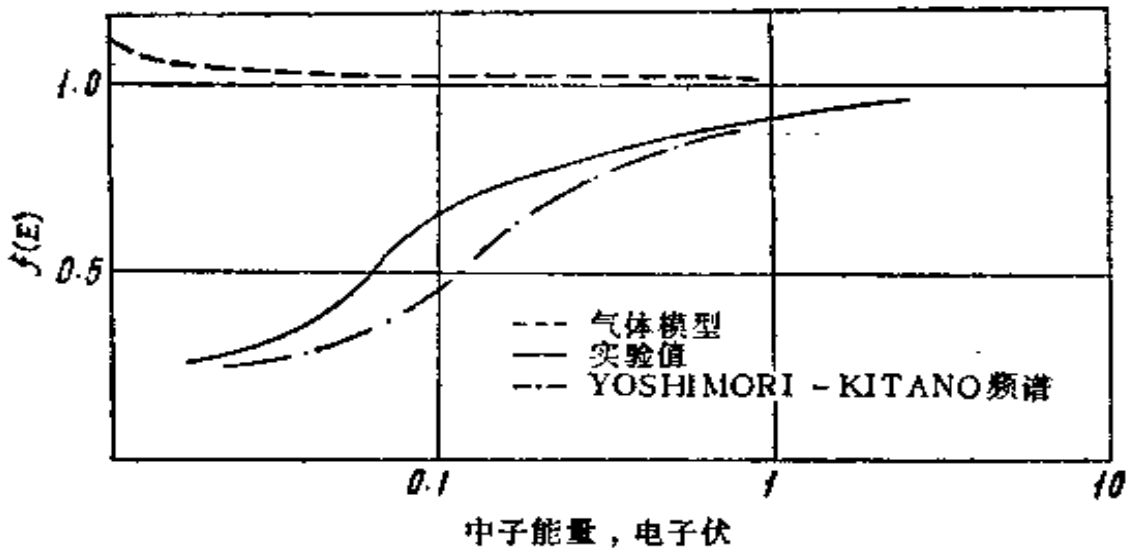


图 12-12 室温下石墨的  $f(E)$  值

#### 4. 栅元内热中子空间-能量分布的计算

前面通过分离变量把空间和能量效应分开处理，所求得的群常数应该说是近似的结果。因为在非均匀栅元内各区的 neutron 能谱严格说是不相同的。因此为了更精确地求得热群的常数，就必须直接求出栅元内热中子的空间-能量分布  $\phi(r, E)$ ，然后用它权重求得热群的参数。这显然要比前面介绍的把空间和能量效应分开处理的办法具有更高的精确度。有许多不同的方法（其中包括精确的蒙特卡罗方法）可用来求得栅元内热中子的空间-能谱分布。然而在这些方法中，碰撞几率方法（或称积分输运理论）在实际应用中获得了广泛的发展和应。它的主要优点在于既具有

较高的精确度而又较同样精度的其他计算方法来得简单。因而在工程设计中，许多热谱的程序都是应用碰撞几率方法来计算的。

#### 4.1 积分输运理论的基本方程

首先，我们列出积分方程形式的中子输运方程。假定在实验室坐标系内中子与原子核的散射以及中子源项是各向同性的，则根据 (9-53) 式可以写出：

$$\Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E) = \int_{r'} P(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) \left[ \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}'; E' \rightarrow E) \times \phi(\mathbf{r}', E') dE' + S(\mathbf{r}', E) \right] d\mathbf{r}', \quad (12-49)$$

式中

$$P(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) = \frac{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} \exp \left[ - \int_0^{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \Sigma_t(E, l) dl \right]. \quad (12-50)$$

它的物理意义是在  $\mathbf{r}'$  处单位体积内具有能量为  $E$  的中子将在  $\mathbf{r}$  处发生第一次碰撞的几率。 $S(\mathbf{r}', E)$  为中子源项。其他符号都是前面所习惯使用的。方程 (12-49) 便是积分输运理论的基本方程。它可以简写成

$$\Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E) = \int_{r'} P(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) [\mathbf{L}\phi(\mathbf{r}', E) + S(\mathbf{r}', E)] d\mathbf{r}', \quad (12-51)$$

式中  $\mathbf{L}$  就是 (12-46) 式所定义的散射算子。 $\mathbf{L}\phi(\mathbf{r}', E)$  便是由散射引起的中子源项。

在对反应堆栅格求解时，通常应用第五章所介绍的等效栅元法把它简化为一个一维问题来求解。这时把正方或六角形栅元用一等效圆柱栅元来代替而保持栅元的体积不变，在栅元的边界上再作一些假设，例如净中子流等于零或各向同性地反射等边界条件。

把等效圆柱栅元沿半径  $r$  分成  $I$  个同心圆心区 ( $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_i < \dots < r_I = R$ )。如果区间分得足够小，可以认为在每个小区内的物理参数 (如宏观截面等) 均等于常数或用该区内的平

均值来表征。设以  $\phi_i(E)$  和  $S_i(E)$  表示第  $i$  区的平均中子通量和源强。为了简化，我们引进一个所谓“平通量”的假设，即认为在每一个小区内中子通量和源强都等于常数。当区域分得足够小时，这种假设显然是合理的。在这种假设的情况下，将方程 (12-51) 对第  $i$  区积分之便得

$$\Sigma_{i,i}(E)\phi_i(E)V_i = \sum_{j=1}^I P_{i,j}(E)[\mathbf{L}\phi_j(E) + S_j(E)]V_j, \quad (12-52)$$

其中角标  $i$  或  $j$  表示  $i$  或  $j$  区的参数， $V_i = \pi(r_i^2 - r_{i-1}^2)$ ，而  $P_{i,j}(E) =$

$$= \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \int_{V_j} \frac{\Sigma_i(\mathbf{r}, E) \exp\left[-\int_0^{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \Sigma_i(E, l) dl\right]}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}. \quad (12-53)$$

多区碰撞几率  $P_{i,j}(E)$  (或  $P_{i,i}(E)$ ) 为  $j$  区内产生的一个能量为  $E$  的各向同性中子不经任何碰撞到达  $i$  区并在  $i$  区发生首次碰撞的几率。

根据互易关系式 (5-49) 式有：

$$\Sigma_{i,i}(E)V_i P_{i,j}(E) = \Sigma_{j,i}(E)V_j P_{j,i}(E). \quad (12-54)$$

同时，根据物理意义，对于全反射栅元边界，显然有下列归一化条件：

$$\sum_{i=1}^I P_{i,i} = 1 \quad (12-55)$$

这样，(12-52) 式的物理意义是非常清楚的：式中右端方括号项表示  $V_j$  内单位体积内中子源数（包括中子源和由不同能量散射到能量  $E$  处的贡献），因而，整个右端便表示  $j=1\cdots, I$  所有区间内能量为  $E$  的中子在  $V_i$  内发生的首次碰撞率，它自然应等于  $V_i$  内的碰撞数  $\Sigma_{i,i}\phi_i(E)V_i$  (左端)。把 (12-52) 式两端各除以  $\Sigma_{i,i}(E)V_i$  便得到另一种常用的表达式：

$$\phi_i(E) = \sum_{j=1}^I T_{i,j}(E)[S_j(E) + \mathbf{L}\phi_j(E)], \quad (12-56)$$

式中

$$T_{i,j}(E) = \frac{P_{i,j}(E)V_j}{\sum_{i,i}(E)V_i} \quad (12-57)$$

通常称为迁移核。它的物理意义是： $j$ 区一个各向同性源中子对 $i$ 区中子通量的贡献。

方程(12-52)和(12-56)便是用碰撞几率方法(积分输运理论)求解中子通量分布的基本方程式。在讨论它的求解时,首先注意到 $L$ 是一个积分算子,它给求解带来一定困难,因而必须对它作一些近似或简化,例如可以采用通常的分群近似方法或应用上节所讨论的二阶微分近似算子来代替它等等。另一个比较麻烦的问题便是多区碰撞几率 $P_{i,j}$ 的计算,这也是比较复杂和耗时的事,可以参考有关文献的介绍<sup>[9][15]</sup>。

## 4.2 多群近似

在研究热化问题时,我们所要求热中子的空间-能量分布通常是指 $0 < E \leq E^*$ 的热化区域而言。因而,如果没有外源存在,则方程(12-52)可改写成:

$$\begin{aligned} \sum_i \phi_i(E)V_i = & \sum_{j=1}^I P_{i,j}(E)V_j [S_j(E) \\ & + \int_0^{E^*} \Sigma_j(E' \rightarrow E)\phi_j(E')dE'], \end{aligned} \quad (12-58)$$

式中,

$$S_j(E) = \int_{E^*}^{\infty} \Sigma_j(E' \rightarrow E)\phi_j(E')dE', \quad (12-59)$$

也就是说,这时已经把能量 $E > E^*$ 以上中子的慢化视为热中子源项了。(12-59)式中 $\Sigma_j(E' \rightarrow E)$ 可用自由核的散射函数来表示[见(3-24)式],而中子通量作为初步近似可以用 $\phi(E) \approx$ 常数 $\times 1/E$ 的慢化谱来近似表示。

分群近似则是把能量自0到 $E^*$ 以 $0 \leq E_1 < E_2 < \dots < E_g < \dots \leq E_0 = E^*$ 分成 $G$ 个区间,称之为 $G$ 群近似。这样,在每一

能群区间  $\Delta E_g = E_g - E_{g-1}$  内对方程 (12-58) 两边对  $E$  进行积分, 并且按第十章中所介绍的分群近似方法处理, 即在每一能群内所有参数用群常数或平均值表示, 便可得到多群热化方程如下:

$$\phi_{i,g} = \sum_{j=1}^I T_{i,j,g} \left[ \sum_{g'=1}^G \Sigma_{j,g' \rightarrow g} \phi_{j,g'} + S_{j,g} \right]. \quad (12-60)$$

式中足标  $i, j$  为空间区标号,  $g$  为能群的标号。  $T_{i,j,g}$  为  $g$  群的迁移核

$$\begin{aligned} T_{i,j,g} &= \\ &= \frac{P_{i,j,g} V_j}{\Sigma_{i,j,g} V_i} \sim \frac{1}{V_i} \int_{r_j} \int_{r_i} \frac{\exp \left[ - \int_0^{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \Sigma_{i,g}(s) ds \right]}{4 \pi |\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (12-61)$$

而  $\Sigma_{j,g' \rightarrow g}$  为  $j$  区间 (点) 处自  $g'$  群到  $g$  群的“散射”截面

$$\Sigma_{j,g' \rightarrow g} = \frac{1}{\Delta E_{g'}} \int_{E_{g-1}}^{E_g} \int_{E_{g'-1}}^{E_{g'}} \Sigma_j(E' \rightarrow E) dE' dE. \quad (12-62)$$

这里对于不同元素  $\Sigma_j(E' \rightarrow E)$  可以采用不同的散射核模型, 例如对于氢原子通常可以用尼尔金核或 BSJ 模型, 对于氧或其他元素可以应用自由气体模型等等。其他符号和第十章多群方法中所表示的意义相同。如果能群分得很细 (例如  $G \approx 30$ ), 所有能群参数应用能群中点能量处的数值来代替也是允许的。这样可使  $\Sigma_{g' \rightarrow g}$  的计算大为简化。

可以看到, 方程 (12-60) 是一个含  $\phi_{i,g}$  的线性代数方程组。它很容易用迭代方法 (超松弛迭代) 求解, 由此便求得栅元内热中子的空间-能量分布。轻水堆设计中常用的 THERMOS<sup>[9]</sup> 程序便是应用这种方法计算的。它具有很好的精确度, 但是需要较长的计算机时间, 约为前面介绍的 A.B.H 方法和无限介质谱近似的 1—2 个数量级以上, 因此, 它一般只用于需要较高精度的设计中。

### 4.3 近似散射核

在方程 (12-52) 中, 散射算子  $\mathbf{L}$  若用前面介绍的一些近似



散射算子，例如广义重气体算子 (12-48) 式来代替便得到栅元内热化方程：

$$\begin{aligned} \Sigma_i(E)\phi_i(E)V_i - \sum_{s=1}^I V_s P_{s,i}(E) \left\{ (\xi \Sigma_{s0}), \frac{d}{dE} \right. \\ \left. \left[ f(E) E kT \frac{d\phi_s(E)}{dE} + f(E)(E - kT)\phi_s(E) \right] \right. \\ \left. + \Sigma_{s,i}\phi_s(E) \right\}, \quad i=1, 2, \dots, I \quad (12-63) \end{aligned}$$

其初始条件为：

$$\phi_i(0) = 0, \quad \phi_i(E^*) = C_i/E^*$$

这是一个二阶微分方程组，它可以很容易用数值方法求解，THERMOPYL 热谱程序<sup>[16]</sup>便是根据它而编制的。

### 参 考 文 献

- [1] G.I. 贝尔, S. 格拉斯登著, 千里译, 核反应堆理论, 第七章, 原子能出版社, 1979年。
- [2] M.M.R. Williams, *The Slowing Down and Thermalization of Neutrons*, North-Holland, 1966.
- [3] Я. В. Шевелева, *Методы Расчета Полей Тепловых Нейтронов в Решетках Реакторов*, Атомиздат, 1974.
- [4] R.J.J. Stamm'ler et al., *Neutron Thermalization in Reactor Lattice Cells*, IAEA Tech. Reports Series No. 68, Vienna, 1966.
- [5] M. S. Nelkin, *Phys. Rev.*, 119, 741 (1960).
- [6] D. E. Parks, GA-2438 (1962).
- [7] A. Yoshimori, Y. Kitano, *J. Phys. Soc. Japan*, 11, 352, (1956).
- [8] J. A. Young, J. U. Koppel, *J. Chem. Phys.*, 42, 1, 357, (1965).
- [9] H. C. Honeck, BNL-5826 (1961).
- [10] J. U. Koppel et al., GA-7417 (1966).
- [11] H. C. Honeck et al., DP-1278 (1971).
- [12] E. P. Wigner, J. E. Wilkins, AEC-D 2275 (1944).
- [13] H. Amster, R. Suarez, WAPD-TM-39 (1957).
- [14] H. H. W. Pitcher, AEEW-M-350 (1963).
- [15] I. Carlvik, Proc. 3rd Intern. Conf. PUAE, Vol. 2, p/681, 1964.
- [16] H. Märkl et al., *Nukleonik*, Band 7, 247, (1965); H. Märkl, Proc. 3rd Intern. Conf. PUAE, Vol 2, p/640, 1964.

## 第十三章 微 扰 理 论

反应堆性质或参数的微小变化称之为微扰。微扰可以是反应堆性质或参数发生微小的变化，例如毒物（如水慢化剂中的硼浓度）的微量变化或温度变化等等，也可能是这些变化仅仅发生在反应堆内很小的局部体积内，例如在局部地方放入吸收体或芯部冷却剂的局部沸腾等等。在反应堆运行的实际问题中，往往需要确定由于这些微小的扰动所引起的反应性效应。例如反应性温度系数的计算等等。

为了确定扰动前后有效增殖因数或反应性的变化，最直接的办法是对“扰动前”及“扰动后”的两个系统进行临界计算以求出 $\delta k$ 来。这样计算的工作量自然是很大的。另一方面，当扰动很小时，则 $\delta k$ 的实际变化量有可能很小并和计算本身所具有的误差属于同一数量级。这样，对扰动前后系统直接计算求出 $\delta k$ 的办法可能得不到精确的结果。然而，对于这类问题，利用微扰理论则可以比较方便地予以解决。下面即将看到，在扰动比较小，没有使通量发生显著畸变的情况下，利用微扰理论只需根据扰动前系统的通量分布和参数的扰动数值便可求出 $\delta k$ 来，而无需对扰动后的系统重新进行临界计算。这对于非均匀的局部扰动问题尤其方便，因为这时扰动后系统的计算往往是一个多维（二维乃至三维）问题的计算，而这种计算是很费时的。

在反应堆物理分析中，微扰理论还常常用于研究某些参数（如截面数据）对临界或反应性的影响。这时我们可以把这些参数的波动，例如截面输入数据的误差、多普勒效应等等，看作为微扰来处理。再如，在设计计算中，有时为了简便，常常把几何形状予以简化，为了确定这些简化或堆芯几何形状微小变化所引起的效应，通常也可应用微扰方法来估计。

# 1. 共轭算子和反应堆共轭方程

## 1.1 共轭算子

在讨论微扰理论之前，我们先简要地介绍一下共轭算子的定义和一些有关的数学知识。

设函数  $\varphi(\mathbf{r})$  及  $\varphi^*(\mathbf{r})$  定义于域  $G(\mathbf{r})$  内，定义函数  $\varphi(\mathbf{r})$  和  $\varphi^*(\mathbf{r})$  的内积为

$$(\varphi, \varphi^*) = \int_G \varphi \varphi^* d\mathbf{r}. \quad (13-1)$$

(13-1)式的定义同样可以推广适用于矢量函数。设有矢量函数  $\phi = (\phi_1(\mathbf{r}), \phi_2(\mathbf{r}), \dots, \phi_n(\mathbf{r}))$  及  $\phi^* = [\phi_1^*(\mathbf{r}), \phi_2^*(\mathbf{r}), \dots, \phi_n^*(\mathbf{r})]$  定义于域  $G(\mathbf{r})$  上，其中  $\phi_1, \dots, \phi_n$  称为  $\phi$  的分量， $\phi_1^*, \dots, \phi_n^*$  则为  $\phi^*$  的分量。矢量函数  $\phi$  和  $\phi^*$  的内积的定义为

$$(\phi, \phi^*) = \int_G (\phi_1 \phi_1^* + \phi_2 \phi_2^* + \dots + \phi_n \phi_n^*) d\mathbf{r}. \quad (13-2)$$

这实际上相当于通常三维空间中两个矢量点积定义的推广。

设有算子  $M$  作用于函数  $\phi$  上， $\phi$  为矢量函数集合  $\{\phi\}$  上的任一矢量函数；同时设另一算子  $M^*$  作用于矢量函数  $\phi^*$  上， $\phi^*$  则系属于集合  $\{\phi^*\}$  中的任一矢量函数，若  $M\phi$  及  $M^*\phi^*$  满足下列条件：

$$(\phi^*, M\phi) = (\phi, M^*\phi^*), \quad (13-3)$$

则我们称  $M^*$  为  $M$  的共轭算子。若有  $M = M^*$ ，则称  $M$  为‘自轭’算子。

设有方程

$$M\phi = 0, \quad (13-4)$$

若  $M$  的共轭算子为  $M^*$ ，则方程

$$M^*\phi^* = 0 \quad (13-5)$$

的解  $\phi^*$  和方程(13-4)的解  $\phi$  显然满足关系式(13-3)。我们称方程(13-5)为方程(13-4)的共轭方程，而它的解  $\phi^*$  则称为  $\phi$  的共轭

函数。

下面我们具体地对反应堆方程进行讨论并导出单群、双群和多群的反应堆共轭方程。

## 1.2 反应堆共轭方程

### 1.2.1 单群共轭方程

单群特征值问题的扩散方程可以写成

$$\nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{k} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (13-6)$$

式中  $k$  为有效增殖因数。(13-6)式也可以写成  $M\phi = 0$  的算子方程形式, 这时单群算子  $M$  为

$$M = \nabla \cdot D \nabla - \Sigma_a + \frac{1}{k} \nu \Sigma_f, \quad (13-7)$$

根据(13-3)式定义我们可以证明(13-7)式的算子  $M$  是自轭的, 即它的共轭算子即系  $M$  本身, 有

$$M^* = M = \nabla \cdot D \nabla - \Sigma_a + \frac{1}{k} \nu \Sigma_f, \quad (13-8)$$

这可以证明如下。根据内积定义由(13-7)和(13-8)式有

$$(\phi^*, M\phi) = \int_V \phi^* \nabla \cdot D \nabla \phi dV - \int_V \phi^* \left( \Sigma_a - \frac{1}{k} \nu \Sigma_f \right) \phi dV,$$

$$(\phi, M^* \phi^*) = \int_V \phi \nabla \cdot D \nabla \phi^* dV - \int_V \phi \left( \Sigma_a - \frac{1}{k} \nu \Sigma_f \right) \phi^* dV.$$

因而它们的差为

$$\Delta = (\phi^*, M\phi) - (\phi, M^* \phi^*) = \int_V \phi^* \nabla \cdot D \nabla \phi dV - \int_V \phi \nabla \cdot D \nabla \phi^* dV. \quad (13-9)$$

根据矢量恒等式

$$\nabla \cdot \mathbf{ab} = \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (13-10)$$

则(13-9)式便等于

$$\Delta = \int_V \nabla \cdot \phi^* D \nabla \phi dV - \int_V \nabla \cdot \phi D \nabla \phi^* dV. \quad (13-11)$$

利用高斯公式

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{b} dV = \int_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dS,$$

其中  $\mathbf{n}$  是单位外法线矢量, 这样(13-11)式便等于

$$\Delta = \int_S (\phi^* D \nabla \phi - \phi \cdot D \nabla \phi^*) \cdot \mathbf{n} dS.$$

若在反应堆外表面上满足

$$\phi_s = 0; \quad \phi_s^* = 0, \quad (13-12)$$

或

$$\nabla_n \phi / \phi = \nabla_n \phi^* / \phi^*, \quad (13-13)$$

其中角标  $S$  表示取外表面上数值,  $\nabla_n$  表示沿表面外法线方向求导, 那末便得到

$$\Delta = (\phi^*, M\phi) - (\phi, M\phi^*) = 0.$$

这就证明了单群算子的自轭性:  $M = M^*$ 。因而(13-6)式本身就是单群共轭方程, 中子通量  $\phi(\mathbf{r})$  也就等于  $\phi^*(\mathbf{r})$ 。同时也就证明了扩散算子  $\nabla \cdot D \nabla$  在满足边界条件(13-12)或(13-13)情况下是自轭的, 即

$$\int_V \phi^* \nabla \cdot D \nabla \phi dV = \int_V \phi \nabla \cdot D \nabla \phi^* dV. \quad (13-14)$$

## 1.2.2 双群共轭方程

反应堆双群方程可以写成

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1 - \Sigma_1 \phi_1 + \frac{\nu}{k} \Sigma_{f2} \phi_2 &= 0, \\ \nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2 - \Sigma_2 \phi_2 + \Sigma_1 \phi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (13-15)$$

式中角标 1, 2 分别表示快群和热群, 其它符号和第六章中所采用的一样。(13-15)式也可写成算子方程形式

$$\mathbf{M}\phi = 0, \quad (13-16)$$

式中

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot D_1 \nabla - \Sigma_1 & \frac{\nu \Sigma_{r2}}{k} \\ \Sigma_1 & \nabla \cdot D_2 \nabla - \Sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (13-17)$$

现在我们来求出双群算子  $M$  的共轭算子  $M^*$ 。假设它可以写为

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} M_{1,1}^* & M_{1,2}^* \\ M_{2,1}^* & M_{2,2}^* \end{pmatrix},$$

那么，根据内积定义

$$\begin{aligned} & (\phi^*, \mathbf{M}\phi) \\ &= \int_V (\phi_1^* M_{1,1} \phi_1 + \phi_1^* M_{1,2} \phi_2 + \phi_2^* M_{2,1} \phi_1 + \phi_2^* M_{2,2} \phi_2) dV, \\ & (\phi, \mathbf{M}^* \phi^*) \quad (13-18) \\ &= \int_V (\phi_1 M_{1,1}^* \phi_1^* + \phi_1 M_{1,2}^* \phi_2^* + \phi_2 M_{2,1}^* \phi_1^* + \phi_2 M_{2,2}^* \phi_2^*) dV. \end{aligned}$$

显然，若令

$$M_{1,1}^* = M_{1,1}; \quad M_{2,2}^* = M_{2,2}; \quad M_{1,2}^* = M_{2,1}; \quad M_{2,1}^* = M_{1,2}.$$

将这些符号的具体表示式(13-17)式代入(13-18)式，同时注意到(13-14)式则便有

$$(\phi^*, \mathbf{M}\phi) = (\phi, \mathbf{M}^* \phi^*).$$

因而双群共轭算子便等于

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} M_{1,1}^* & M_{1,2}^* \\ M_{2,1}^* & M_{2,2}^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot D_1 \nabla - \Sigma_1 & \Sigma_1 \\ \frac{\nu}{k} \Sigma_{r2} & \nabla \cdot D_2 \nabla - \Sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (13-19)$$

即  $M_{i,j}^* = M_{j,i}$ 。这样双群共轭方程便可写成：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1^* - \Sigma_1 \phi_1^* + \Sigma_1 \phi_2^* &= 0, \\ \nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2^* - \Sigma_2 \phi_2^* + \frac{\nu \Sigma_{f2}}{k} \phi_1^* &= 0. \end{aligned} \quad (13-20)$$

同时共轭通量在外推边界上满足： $\phi_{1,s}^*(\mathbf{r}) = \phi_{2,s}^*(\mathbf{r}) = 0$ 。

这里，我们注意到，对于双群方程， $\mathbf{M} \ni \mathbf{M}^*$ ， $\phi \ni \phi^*$ ，在图 13-1 中示出双群的中子通量和共轭通量的曲线。关于共轭通量和共轭方程的具体物理意义将在下一节中详细讨论。

我们可以看到，上面对双群共轭算子  $\mathbf{M}^*$  的推证，完全可以推广到多群的情况。例如，多群扩散方程 ( $G$  群) 和它的共轭方程可以写成

$$\mathbf{M}\phi = \begin{bmatrix} M_{1,1}, \dots, M_{1,G} \\ M_{2,1}, \dots, M_{2,G} \\ \vdots \\ M_{G,1}, \dots, M_{G,G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_G \end{bmatrix} = 0, \quad (13-21)$$

$$\mathbf{M}^*\phi^* = \begin{bmatrix} M_{1,1}^*, \dots, M_{1,G}^* \\ M_{2,1}^*, \dots, M_{2,G}^* \\ \vdots \\ M_{G,1}^*, \dots, M_{G,G}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \vdots \\ \phi_G^* \end{bmatrix} = 0, \quad (13-22)$$

而其中  $\mathbf{M}^*$  为  $\mathbf{M}$  的转置矩阵，即

$$M_{i,j}^* = M_{j,i}, \quad (13-23)$$

边界条件为在反应堆外推边界上，

$$\phi_{i,s} = \phi_{i,s}^* = 0, \quad i=1,2,\dots,G. \quad (13-24)$$

这样，对于反应堆多群算子  $\mathbf{M}$ ，若需求其共轭算子，则只要把  $\mathbf{M}$  的每一矩阵元  $M_{i,j}$  进行行列对换，也就是按 (13-23) 式把每一个  $M_{i,j}$  用  $M_{j,i}$  替换求出  $\mathbf{M}$  的转置矩阵即可。这时，假定边界条件 (13-24) 得到满足。

根据共轭方程的定义及关系式 (13-3)，同样方法可以证明稳态输运方程 (9-27) 式的共轭方程 (略去源项及非弹性散射) 具有下列形式：

$$-\Omega \cdot \nabla \varphi^*(\mathbf{r}, u, \Omega) + \Sigma_t \phi^*(\mathbf{r}, u, \Omega)$$

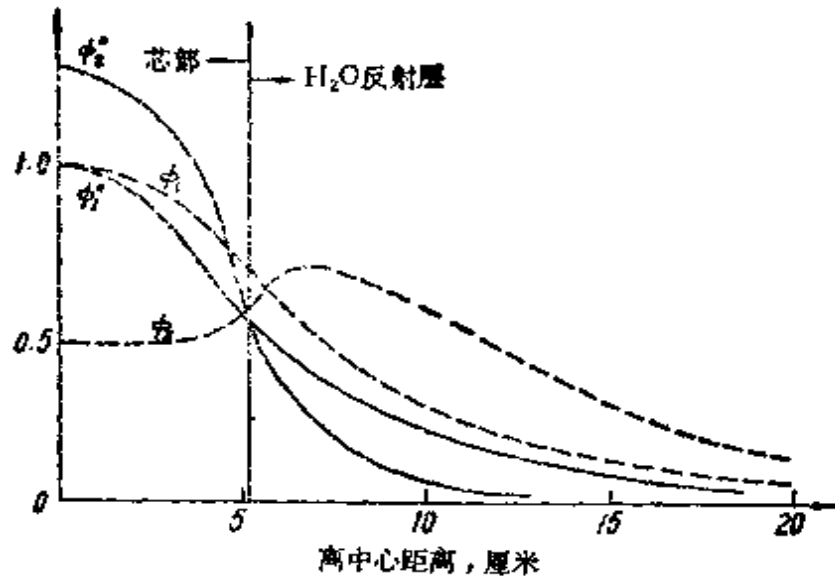


图 13-1 一维平板反应堆的双群中子通量和共轭通量示意图

$$\begin{aligned}
 &= \Sigma_s \int_0^{\infty} du' \int_{\Omega} \phi^*(\mathbf{r}, u', \Omega') f(\mathbf{r}; \mathbf{u} - \mathbf{u}', \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' \\
 &\quad + \frac{\nu \Sigma_f}{4\pi k} \int_0^{\infty} du' \int_{\Omega} \chi(u') \phi^*(\mathbf{r}, u', \Omega) d\Omega', \quad (13-25)
 \end{aligned}$$

这时  $\phi^*(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \Omega)$  的边界条件为

$$\phi^*(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \Omega) = 0, \text{ 当 } \Omega \cdot \mathbf{n} > 0, \mathbf{r} \in \Gamma. \quad (13-26)$$

在证明上式时应该注意到,  $\phi^*$  及  $\phi$  均系定义在相空间  $\mathbf{r} \times \mathbf{u} \times \Omega$  上; 因此内积的定义 (13-1) 应该用下面积分来代替

$$(\phi, \psi) = \int_{\mathbf{r} \times \mathbf{u} \times \Omega} \phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \Omega) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \Omega) d\mathbf{r} d\mathbf{u} d\Omega. \quad (13-27)$$

## 2. 中子价值

这一节将着重讨论反应堆共轭方程和共轭通量的物理解释。

### 2.1 中子价值

对于反应堆内中子群体的状况除了用中子通量  $\phi$  这个量来



描述外，现在再引入一个“中子价值”的概念。为了对中子价值能有更具体的了解，让我们先观察这样一个例子。假设在反应堆中的不同位置上分别放入一个同样（具有同样吸收截面 $\Sigma_a$ 和形状大小）的小吸收体（图 13-2），我们发现，在中心位置上的吸收体所引起的反应性变化比边缘位置上的大。自然很容易联想到，这是因为在中心处的中子通量高，因而吸收中子的数目也多的缘故。如果仅仅是如此，那么它们对反应性的影响就应该正比于中子通量值 $\phi(r)$ 。但是实验表明，它们对反应性的影响并非正比于 $\phi(r)$ ，而是近似地正比于中子通量的平方 $\phi^2(r)$ 。对于这个现象，很自然便联想到，反应性的不同不仅是由于不同点处吸收中子的数目（或中子通量）不同所引起，而且还由于不同点处被吸收中子的“价值”不相等的缘故。这也就是说，同样一个中子在不同的地点则它对链式反应或反应堆功率的贡献或“重要程度”是不同的。显然，在靠近边界处的中子由于泄漏出芯部的几率较大，因而它对链式反应或功率的贡献（也就是它的中子价值）要比中心处来得小。这样，在中心处吸收一个中子对反应性的影响要比在靠近边界附近吸收一个中子的来得大。下面即将证明，单群近似时，中子价值是和中子通量的分布 $\phi(r)$ 一样的。所以，不同位置上吸收体对反应性的影响近似地比例于 $\phi^2(r)$ 。

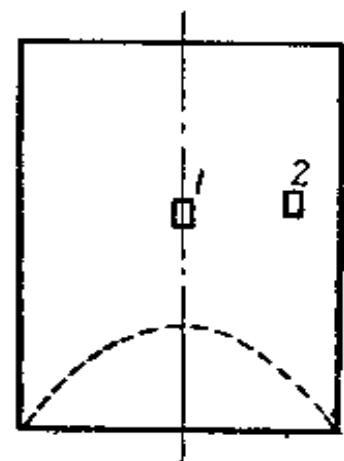


图 13-2 不同位置上的吸收体

假设有一处于临界状态的反应堆，在初始时刻功率等于零或处于某一稳定功率。现设在 $r$ 点处突然投入几个能量为 $E$ 、运动方向为 $\Omega$ 的中子，这将给反应堆的通量一个扰动。这几个中子将一面运动一面增殖。由于反应堆处于临界状态，因此经过足够长时间后，中子通量（或功率）将达到一个稳定的基波分布（见图 13-3），并使堆的功率达到一个新的水平，它将比原来的功率高

一些。显然，功率的增加值与投入中子的地点  $r$ 、中子能量  $E$  和运动方向  $\Omega$  有关并正比于投入的中子数  $n$ 。中子价值  $\phi^+(r, E, \Omega)$  的定义为：在临界反应堆中，在  $r$  处投入一个能量为  $E$ 、运动方向为  $\Omega$  的中子所引起的对稳定功率的贡献。

由定义知道，中子价值是  $r$ 、 $E$  和  $\Omega$  的函数，将  $\phi^+(r, E, \Omega)$  对所有方向取平均值便得到中子价值  $\phi^+(r, E)$ 。如果认为引入中子的角分布是各向同性的，那么，便可求得

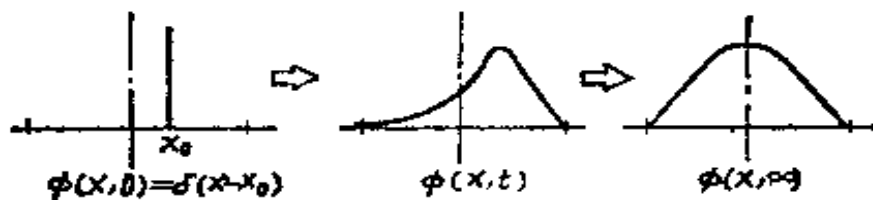


图 13-3  $x_0$  处引入中子后通量变化过程示意图

$$\phi^+(r, E) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \phi^+(r, E, \Omega) d\Omega. \quad (13-28)$$

应该注意到，中子价值和中子总通量  $\phi(r, E)$  不同，后者是对中子角通量  $\phi(r, E, \Omega)$  的积分，而前者  $\phi^+(r, E)$  [(13-28)式] 则应该理解为平均值的概念。

下面我们应用双群理论来求出中子价值函数的具体形式。双群方程可以写成

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1 - \Sigma_1 \phi_1 + \nu \Sigma_{f2} \phi_2 &= \frac{1}{v_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}, \\ \nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2 - \Sigma_2 \phi_2 + \Sigma_1 \phi_1 &= \frac{1}{v_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (13-29)$$

或写成算子形式

$$\mathbf{M}\phi = \mathbf{v}^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (13-30)$$

式中  $\mathbf{M}$  是前面定义过的双群算子 (13-17) 式； $\phi = (\phi_1, \phi_2)$  是二维中子通量， $\mathbf{v}^{-1}$  为如下对角矩阵：

$$\mathbf{v}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/v_1 & 0 \\ 0 & 1/v_2 \end{pmatrix}. \quad (13-31)$$

考虑 (13-30) 式的可分离变量解

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{\omega t}. \quad (13-32)$$

因而 (13-30) 式便可以写成

$$\mathbf{M}\phi(\mathbf{r}) = \omega \mathbf{v}^{-1}\phi(\mathbf{r}). \quad (13-33)$$

应该指出, 由于通量的耦合关系, 这里  $\omega$  对每一群都相同。(13-33) 式的普遍解给出一组特征值  $\omega_n$  和特征函数  $\phi_n(\mathbf{r})$ 。于是 (13-30) 的解可以通过特征函数  $\phi_n$  表示, 即

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n \phi_n(\mathbf{r}) e^{\omega_n t},$$

或写成标量形式

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{r}, t) &= \sum_n A_n \phi_{1,n}(\mathbf{r}) e^{\omega_n t}, \\ \phi_2(\mathbf{r}, t) &= \sum_n A_n \phi_{2,n}(\mathbf{r}) e^{\omega_n t}. \end{aligned} \quad (13-34)$$

但是, 与单群情况不同, 这里  $\mathbf{M}$  不是自轭的, 特征函数  $\phi_n$  并不构成一个正交函数列, 因而无法通过  $\phi_n$  的正交性来求得展开系数  $A_n$ 。我们考虑  $M$  的共轭算子  $\mathbf{M}^*$  (13-19) 式。(13-33) 式的共轭方程为

$$\mathbf{M}^*\phi^*(\mathbf{r}) = \omega \mathbf{v}^{-1}\phi^*(\mathbf{r}). \quad (13-35)$$

设  $\phi_n(\mathbf{r})$ ,  $\phi_m^*(\mathbf{r})$  分别为 (13-33) 和 (13-35) 式的特征函数,  $\omega_n$ ,  $\omega_m$  为对应的特征值, 则根据内积定义, 由 (13-33) 和 (13-35) 有

$$(\phi_m^*, \mathbf{M}\phi_n) - (\phi_n, \mathbf{M}^*\phi_m^*) = (\omega_n - \omega_m)(\mathbf{v}^{-1}\phi_m^*, \phi_n).$$

由于  $\mathbf{M}^*$  为  $\mathbf{M}$  的共轭算子, 根据共轭算子定义上式应该等于零, 这说明对应于不同特征值的特征函数  $\phi_n(\mathbf{r})$  和  $\phi_m^*(\mathbf{r})$  是正交的。只有当  $n=m$  时, 它们的内积才不为零, 此时可选取适当比例因子将其归一。即

$$(\mathbf{v}^{-1}\phi_m^*, \phi_n) = \int_V (v_1^{-1}\phi_{1,m}^*\phi_{1,n} + v_2^{-1}\phi_{2,m}^*\phi_{2,n}) d\mathbf{r} = \delta_{m,n}. \quad (13-36)$$

因此, 双群方程特征函数  $\phi_n(\mathbf{r})$  与双群共轭方程特征函数  $\phi_m^*(\mathbf{r})$  是正交的。这个结论可以推广到多群情况。在这种情况下, 我们说, 通量特征函数和共轭通量的特征函数构成了双正交函数族。利用双正交性质便可以确定出 (13-34) 式中的展开系数  $A_n$ 。

假定一刚好临界反应堆，其初始通量分布为  $\phi_0(\mathbf{r})[\phi_{1,0}(\mathbf{r}), \phi_{2,0}(\mathbf{r})]$  (它就是对应于  $\omega_0=0$  的(基波)特征函数)，现在  $t=0$  时刻，在  $\mathbf{r}_0$  点突然投入一个各向同性的热群中子，这时初始条件可以写成

$$\begin{aligned}\phi_{1,0}(\mathbf{r}, 0) &= \phi_{1,0}(\mathbf{r}) = \sum A_n \phi_{1,n}(\mathbf{r}) \\ \phi_{2,0}(\mathbf{r}, 0) &= \phi_{2,0}(\mathbf{r}) + v_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \sum A_n \phi_{2,n}(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (13-37)$$

用  $\phi_{1,n}^*(\mathbf{r})/v_1$  和  $\phi_{2,n}^*(\mathbf{r})/v_2$  分别乘上面二个等式两边并对整个体积积分之，然后相加并根据双正交条件 (13-36) 便得到

$$A_n = \delta_{n,0} + \phi_{2,n}^*(\mathbf{r}_0). \quad (13-38)$$

对于临界系统， $\omega_0=0$ ，而  $n>0$  之  $\omega_n$  均是负数；于是随着  $t$  的增大，(13-34) 式中高阶谐波项将迅速衰减，当  $t \rightarrow \infty$  时，中子通量的稳态分布便等于  $n=0$  的基波项：

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{r}, \infty) &\rightarrow [1 + \phi_{2,0}^*(\mathbf{r}_0)] \phi_{1,0}(\mathbf{r}), \\ \phi_2(\mathbf{r}, \infty) &\rightarrow [1 + \phi_{2,0}^*(\mathbf{r}_0)] \phi_{2,0}(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (13-39)$$

其中  $\phi_{2,0}^*$  即为前面一节所讨论的双群中热群共轭通量，它是满足双群共轭方程  $\mathbf{M}^* \phi^* = 0$  的解的分量。

这样，我们便得到，在  $\mathbf{r}_0$  处投入一个各向同性热群中子，最后得到的中子通量或功率便增加了  $\phi_{2,0}^*(\mathbf{r}_0)$  倍；这就是中子价值的定义。同样方法可以证明若在  $\mathbf{r}_0$  处投入一个快群中子，则中子通量或功率便增加  $\phi_{1,0}^*(\mathbf{r}_0)$  倍。由此可见共轭通量的物理解释就是前面所定义的中子价值。以后我们就用  $\phi^*(\mathbf{r})$  表示中子价值。

上述结果可以推广到多群情况，可以概括如下： $g$  群共轭通量  $\phi_g^*(\mathbf{r})$  正比于在  $\mathbf{r}$  点引进或消除一个本 ( $g$ ) 群中子所引起的反应堆功率 (或通量) 的增益或损失，并称为该群的中子价值。可以看到，共轭通量本身并不具有“通量”的含义。

现在可以对图 13-1 上的双群共轭通量的曲线形状从物理上给以解释。首先注意到，与热群通量不同，热群共轭通量在芯部和反射层交界附近，并没有出现凸峰，而是光滑地沿着反射层减少至零。这是因为离开芯部交界面愈远，则中子泄漏到堆外的几

率愈大，中子的价值便愈小。其次，芯部的快群共轭通量比热群共轭通量低，而在同一区域内快群通量却比热群通量高。这是因为在芯部热群的吸收截面大于快群的移出截面，其结果使  $\phi_{2,0}$  降低到  $\phi_{1,0}$  以下；而从另一方面看，热群中子被芯部材料吸收并引起裂变的几率大于快中子，因而热群中子的价值便高于快群中子的价值。在单群近似中，由于单群扩散方程是自轭的，因而单群中子通量分布和共轭通量是一致的。

## 2.2 反应堆共轭方程的物理解释

根据中子价值的定义可以看到，价值具有迭加性质。如果在  $r$  处某种中子的价值为  $\phi^*$ ，设有  $N$  个同样中子，那么其价值则等于各个中子价值之和，即  $N\phi^*$ 。另一方面，因为初始中子对稳定功率的贡献，也正是初始中子在后来任一时刻所形成的所有中子对功率的贡献，所以中子价值是守恒的。

下面根据中子价值守恒的物理概念来建立中子价值的平衡方程——反应堆共轭方程。

为方便起见，讨论单能情况。由于中子价值是空间坐标  $r$  的函数，因而中子在介质内运动时其价值也将随之发生变化，中子自价值低的区域向价值高的区域移动时价值增加，反之则价值减少。现在我们讨论在  $r$  处中子在输运过程中价值的守恒问题。首先考察沿  $\Omega$  方向运动的中子的价值的变化（图 13-4）。设沿该方向单位立体角内的中子数为  $n$ ，它们的中子价值为  $\phi^*(r, \Omega)$ ，而  $r$  点的平均价值为  $\phi^*(r)$  [见 (13-28) 式]。假设这些中子沿  $\Omega$  方向移动了一个微小距离  $ds$ （图 13-4），不受碰撞到达  $r' = r + ds\Omega$  点的中子数等于  $n(1 - ds/\lambda_t)$ ，其中  $\lambda_t = 1/\Sigma_t$  是总平均自由程。因而到达  $r'$  点时中子价值的变化便等于

$$n[(1 - \Sigma_t ds)\phi^*(r + ds\Omega, \Omega) - \phi^*(r, \Omega)].$$

令

$$L = n[\phi^*(r + ds\Omega, \Omega) - \phi^*(r, \Omega)],$$

它是中子自  $r$  点输运到  $r'$  点时，价值的增加，而

$$R = n \Sigma_s ds \phi^*(\mathbf{r} + ds \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega})$$

是在  $ds$  路程上由于碰撞所造成的中子价值损失。这些碰撞中子中有  $n \Sigma_s ds$  个中子发生散射碰撞（改变了运动方向）。如果散射是各向同性的，即散射函数  $f(\boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') = 1/4\pi$ ，那么这部分被散射中子的价值便等于

$$I = n \Sigma_s ds \int \frac{1}{4\pi} \phi^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}' = n \Sigma_s ds \phi^*(\mathbf{r}).$$

假设裂变中子的角分布是各向同性的，那么，由于裂变而产生的中子价值为

$$Q = n \Sigma_f ds \int \frac{\nu}{4\pi} \phi^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}' = n \nu \Sigma_f ds \phi^*(\mathbf{r}).$$

在稳态时，根据中子价值守恒原理有

$$L - R + I + Q = 0. \quad (13-40)$$

用  $nds$  除上式各项并令  $ds \rightarrow 0$ ，同时注意到第一项等于：

$$L = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\phi^*(\mathbf{r} + ds \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) - \phi^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{ds} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \phi^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$$

它表示在  $\boldsymbol{\Omega}$  方向单位路程上由于运输所引起的中子价值的变化。可以看到，它和  $\phi^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  的梯度的符号相同。因而 (13-40) 式便具有下列形式

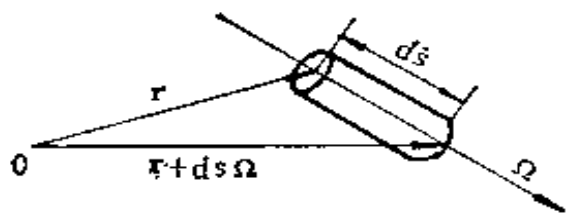


图 13-4 中子价值的守恒

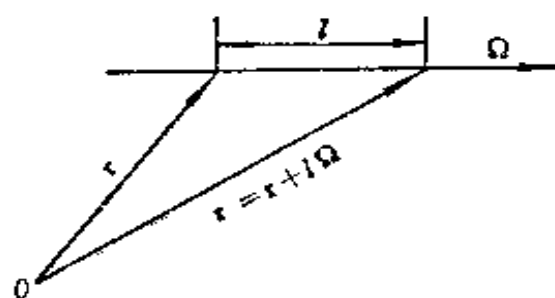


图 13-5  $\phi^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  的计算

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \phi^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - (\Sigma_s + \Sigma_a) \phi^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma_s \phi^*(\mathbf{r}) + \nu \Sigma_f \phi^*(\mathbf{r}) = 0, \quad (13-41)$$

它表示  $\mathbf{r}$  点沿  $\boldsymbol{\Omega}$  方向运动的中子价值的守恒。

下面我们来求出  $\phi^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  的近似表达式，为此，考察无限

大的弱吸收介质 ( $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ ), 设在  $r$  处有一个沿  $\Omega$  方向运动的中子 (图 13-5), 则未经碰撞到达  $r'$  的中子数约为  $e^{-\Sigma_s l}$  ( $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ ), 而在  $dl$  内发生碰撞的几率为  $\Sigma_s dl$ , 如果散射是各向同性的, 则根据中子价值守恒原则, 可以求出  $r$  处沿  $\Omega$  方向运动的中子的价值应等于

$$\begin{aligned}\phi^*(r, \Omega) &= \int_0^\infty e^{-\Sigma_s l} \Sigma_s dl \int_{\Omega} \frac{\phi^*(r', \Omega')}{4\pi} d\Omega' \\ &= \int_0^\infty \phi^*(r') e^{-\Sigma_s l} \Sigma_s dl.\end{aligned}\quad (13-42)$$

如果  $\phi^*(r')$  是空间坐标的缓慢变化函数, 把  $\phi^*(r')$  在  $r$  处展成泰勒级数并取二项, 则有

$$\phi^*(r') = \phi^*(r) + l \frac{d\phi^*}{dl} = \phi^*(r) + l\Omega \cdot \nabla \phi^*(r).$$

将它代入 (13-42) 式积分之即得

$$\phi^*(r, \Omega) = \phi^*(r) + \frac{1}{\Sigma_s} \Omega \cdot \nabla \phi^*(r) = \phi^*(r) + 3D \Omega \cdot \nabla \phi^*(r),\quad (13-43)$$

这里  $D = 1/3\Sigma_s$  是扩散系数。可以看到, (13-43) 式和第九章中中子通量  $\phi(r, \Omega)$  的近似展开式 [(9-92) 式] 一样。将 (13-43) 式代入方程 (13-41) 中, 并对所有  $\Omega$  积分之, 再应用第九章表 9-2 中公式便得到

$$\nabla \cdot D \nabla \phi^*(r) - \Sigma_a \phi^*(r) + \nu \Sigma_f \phi^*(r) = 0,\quad (13-44)$$

它表示在  $r$  处各向同性的中子在输运过程中价值的守恒。其中第一项 (相当于  $L$  项) 是表示由于输运过程所引起的中子价值的变化; 第二项则是前面  $R$  和  $I$  项之差, 它等于被吸收中子的价值; 第三项是裂变产生的中子的价值。可以看到, (13-44) 式正是前面所述的单群共轭方程。

上面的推导过程很容易可以推广到多群的情况。例如在  $r$  处对于  $g$  群中子的价值守恒方程可以写成:

$$\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g^* - \Sigma_{R,g} \phi_g^* + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{g \rightarrow g'} \phi_{g'}^* + \nu_g \Sigma_{f,g} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} \phi_{g'}^* = 0,\quad (13-45)$$

这里  $\Sigma_{R,g}$ ,  $\Sigma_{g \rightarrow g'}$  分别是  $g$  群移出截面和群转移截面。式中第一项表示由于输运过程所引起的中子价值的变化；第二项表示移出(包括吸收和减速)  $g$  群的中子价值损失；第三项是由  $g$  群慢化到各群的中子价值，而第四项则是裂变产生的中子价值。事实上(13-45)式就是反应堆的多群共轭方程，对于双群情况，自然便得到方程(13-20)。同样根据  $\phi^*(r, E, \Omega)$  的物理意义，按中子价值守恒原则可以推得共轭输运方程(13-25)及边界条件(13-26)式。

这样，从物理意义上看，反应堆共轭方程是表征中子价值守恒的方程。共轭通量分布也就是中子价值的函数分布。应用中子价值的概念可以很方便地对下面由微扰理论所得到的许多结果从物理意义上予以解释。例如，应用中子价值便很容易说明本节开头所提到的不同位置上吸收体对反应性的贡献系正比中子通量平方的事实。因为在单群近似条件下，中子价值或共轭通量的分布和通量的分布是一样的。

### 3. 微扰理论及其应用

现在把上面所讨论的分群共轭方程应用到反应堆的微扰理论上去，推导出微扰的一般公式并讨论几个具体应用的例子。

#### 3.1 扰动方程

设未扰动前反应堆方程为

$$\mathbf{M}\phi = 0, \quad (13-46)$$

例如，对于多群近似， $\phi$  为矢量函数， $\mathbf{M}$  即为多群方程的系数矩阵。(13-46)式的共轭方程为

$$\mathbf{M}^*\phi^* = 0, \quad (13-47)$$

$\mathbf{M}^*$  为  $\mathbf{M}$  的共轭算子。对于分群近似情况， $\mathbf{M}^*$  即为  $\mathbf{M}$  的转置矩阵。

现在假设在临界的反应堆中由于某种原因引入某些微扰。例



如由于温度升高引起核密度的减少, 使  $\Sigma_i \rightarrow \Sigma'_i = \Sigma_i + \delta\Sigma_i$ ,  $i$  表示  $a, f, s$ ;  $D \rightarrow D' = D + \delta D, \dots$ 。这些扰动的结果, 使得反应堆不再是临界了。但是, 正如第四章所述, 如果令有效增殖因数  $k$  (或  $\nu$ ) 也改变成一个适当的新值  $k'$  (或  $\nu'$ ), 系统便可以恢复临界的。这样, 引入扰动后使  $k$  作相应变化  $k \rightarrow k' = k + \delta k$ , 使系统仍保持临界, 此时算子  $M$  变成  $M' = M + \delta M$ , 或记作

$$M' = M + P, \quad (13-48)$$

$P = \delta M$  称之为扰动算符, 其中包括物理扰动及由其引起的  $k$  的相应变化。因而受扰动后反应堆的通量  $\phi'$  满足

$$M'\phi' = 0, \quad (13-49)$$

或 
$$M\phi' + P\phi' = 0. \quad (13-50)$$

把受扰动前的共轭方程 (13-47) 的解  $\phi^*$  与受扰动后的反应堆方程 (13-50) 作内积得到

$$(\phi^*, M\phi') + (\phi^*, P\phi') = 0$$

由于  $M$  与  $M^*$  共轭, 并假定边界条件没有受到扰动, 则有

$$(\phi', M^*\phi^*) + (\phi^*, P\phi') = 0,$$

但  $M^*\phi^* = 0$ , 这样我们便得到

$$(\phi^*, P\phi') = 0. \quad (13-51)$$

假设扰动很小, 则它对通量没有带来显著的畸变, 故  $\phi'$  可写成  $\phi' = \phi + \delta\phi$ , 而  $|\delta\phi| \ll |\phi|$ , 所以若略掉二阶微量则有

$$P\phi' = P\phi + P\delta\phi \approx P\phi. \quad (13-52)$$

这样, 近似地把 (13-52) 式代入 (13-51) 式便得到微扰理论的基本方程

$$(\phi^*, P\phi) = 0. \quad (13-53)$$

(13-53) 式称之为扰动方程。扰动算符  $P$  中包括活性区各种参数, 例  $\Sigma_a, \Sigma_f, D, \dots$  的微小扰动, 其中也包括  $k$  的相应变化。这样, 应用扰动方程我们便可以从受扰动前系统的通量分布  $\phi$  和共轭通量  $\phi^*$  求出由于各种参数的扰动所引起的有效增殖因数  $k$  或反应性的变化。为了应用上的方便, 下面写出单群及双群情况下扰动方程的具体形式。

### 单群微扰公式

根据 (13-7) 式, 单群近似情况下算子  $M$  为

$$M = \nabla \cdot D \nabla - \Sigma_a + \frac{1}{k} \nu \Sigma_f, \quad (13-54)$$

现在假定, 由于某种原因各个参数发生了变化, 即

$$\Sigma_f \rightarrow \Sigma'_f = \Sigma_f + \delta \Sigma_f; \quad \Sigma_a \rightarrow \Sigma'_a = \Sigma_a + \delta \Sigma_a;$$

$$D \rightarrow D' = D + \delta D.$$

同时假定, 为了使系统恢复临界, 有效增殖因数  $k \rightarrow k' = k + \delta k$  (或者假定  $\nu \rightarrow \nu'$ ), 同时注意到

$$\frac{1}{k + \delta k} = \frac{1}{k \left( 1 + \frac{\delta k}{k} \right)} \approx \frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{\delta k}{k} \right] = \frac{1}{k} + \delta \left( \frac{1}{k} \right),$$

因而扰动后算子  $M'$  为

$$M' = \nabla \cdot (D + \delta D) \nabla - (\Sigma_a + \delta \Sigma_a) + \left[ \frac{1}{k} + \delta \left( \frac{1}{k} \right) \right] \nu (\Sigma_f + \delta \Sigma_f).$$

由 (13-48) 式, 同时略掉二阶微量  $\delta \left( \frac{1}{k} \right) \delta \Sigma_f$ , 则有

$$P = \nabla \cdot \delta D \nabla - \delta \Sigma_a + \delta \left( \frac{1}{k} \right) \nu \Sigma_f + \frac{1}{k} \nu \delta \Sigma_f. \quad (13-55)$$

注意到单群算子是共轭的, 因而  $\phi^* = \phi$ , 这样扰动方程 (13-53) 便可写成

$$\int_V \phi^* P \phi dV = \int_V \left[ \phi \nabla \cdot \delta D \nabla \phi + \left( \frac{\nu \delta \Sigma_f}{k} - \delta \Sigma_a \right) \phi^2 + \delta \left( \frac{1}{k} \right) \nu \Sigma_f \phi^2 \right] dV. \quad (13-56)$$

应用 (13-10) 式, 上式右边第一项积分可以写成

$$\int_V \phi \nabla \cdot \delta D \nabla \phi dV = \int_V \nabla \cdot \phi \delta D \nabla \phi dV - \int_V \delta D (\nabla \phi)^2 dV,$$

应用高斯公式并根据中子通量在外表面等于零, 有

$$\int_V \nabla \cdot \phi \delta D \nabla \phi dV = \int_S \phi \delta D \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

同时根据反应性  $\rho = (k-1)/k$  的定义有

$$\Delta\rho = -\delta\left(\frac{1}{k}\right), \quad (13-57)$$

因而由(13-56)式便可求得单群微扰公式,  $\Delta\rho$  为

$$\Delta\rho = \frac{\int_V \left[ \left( \frac{\nu\delta\Sigma_f}{k} - \delta\Sigma_a \right) \phi^2 - \delta D (\nabla\phi)^2 \right] dV}{\int_V \nu\Sigma_f \phi^2 dV} \quad (13-58)$$

从上式可知, 吸收或裂变截面变化对反应性的贡献是用  $\phi^2$  来权重的, 而扩散系数  $D$  的变化是由  $(\nabla\phi)^2$  来权重, 而且  $D$  的增大将导致负的  $\Delta\rho$  值。从物理上看, 这是因为由于扩散系数的增大导致中子流的增加, 从而也就增加了中子泄漏的缘故。

单群理论微扰公式的应用有很大的局限性, 因为它受到单群方法固有的缺陷的限制。例如, 单群公式不能用于涉及系统慢化性质变化或快中子生成的问题; 单群理论给不出反射层中的热中子通量峰, 因而它无法精确得到放在反射层中的吸收剂的效应。它仅可用于单群理论给出精确通量值的那些地方所发生的扰动。

### 双群微扰公式

假定在双群方程(13-15)式或(13-16)式中的所有参数都发生了微小的扰动:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\rightarrow \Sigma_1 + \delta\Sigma_1; \quad \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 + \delta\Sigma_2; \quad \Sigma_{f2} \rightarrow \Sigma_{f2} + \delta\Sigma_{f2}; \\ D_1 &\rightarrow D_1 + \delta D_1; \quad D_2 \rightarrow D_2 + \delta D_2; \end{aligned}$$

同时为了保持临界,  $k \rightarrow k + \delta k$ 。将上述参量代入(13-17)式, 根据  $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{P}$  [(13-48)式], 并略去二阶微量, 很容易证明

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \delta D_1 \nabla - \delta\Sigma_1 & \frac{\nu\delta\Sigma_{f2}}{k} + \delta\left(\frac{1}{k}\right) \nu\Sigma_{f2} \\ \delta\Sigma_1 & \nabla \cdot \delta D_2 \nabla - \delta\Sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (13-59)$$

根据微扰方程(13-53)有

$$\int_V \phi^* \mathbf{P} \phi dV = 0. \quad (13-60)$$

应该注意, 这里  $\phi^*$  和  $\phi$  都是二维矢量, 把  $\mathbf{P}$  用(13-59)式代替, 并根据(13-2)式定义, 通过类似上节所讨论的单群理论那样的运

算，不难证明，双群微扰反应性由下式给出：

$$\Delta\rho = \frac{1}{Q} \int_V \left[ -\delta D_1 \nabla \phi_1^* \cdot \nabla \phi_1 - \delta \Sigma_1 \phi_1^* \phi_1 + \frac{\nu}{k} \delta \Sigma_{f,2} \phi_1^* \phi_2 + \delta \Sigma_1 \phi_2^* \phi_1 - \delta D_2 \nabla \phi_2^* \cdot \nabla \phi_2 - \delta \Sigma_2 \phi_2^* \phi_2 \right] dV, \quad (13-61)$$

$$Q = \int_V \nu \Sigma_{f,2} \phi_1^* \phi_2 dV. \quad (13-62)$$

上述结果很容易可以推广到多群的普遍情况并导出多群的微扰公式。这样，根据扰动前  $\phi(\mathbf{r})$  和  $\phi^*(\mathbf{r})$  的分布，应用扰动方程 (13-53) 或 (13-58) 及 (13-61) 式便可以很方便地求出由于各种参数的改变所引起的反应性变化。但是应该指出，所有这些公式都只能在微小的扰动下才是精确的，因为在它们的推导过程中我们都略去了所有二阶以上的项。

### 3.2 微扰理论的一些应用

在反应堆物理分析中有许多问题用微扰理论来处理是很方便的。现举几个最简单的例子加以讨论。

#### (1) 在芯部中引入小的吸收体情况(毒性计算)

这种情况相当于在芯部的局部地方放入一小的吸收剂(如同位素靶件等)的情况。现在假设在芯部某一个小体积  $V$  内放入一小吸收体，使得在  $V$  体积内热中子的宏观吸收截面有了微小的变化  $\delta \Sigma_a$ 。那么根据扰动方程，很容易可以求出它所引起的反应性效应。对于单群近似情况下，根据 (13-58) 式它便等于

$$\Delta\rho = - \frac{\int_V \delta \Sigma_a \phi^2(\mathbf{r}) dV}{\int_V \nu \Sigma_f \phi^2(\mathbf{r}) dV}. \quad (13-63)$$

对于双群理论，这时  $\delta \Sigma_2 = \delta \Sigma_a$ ，根据 (13-61) 式有

$$\Delta\rho = - \frac{\int_V \delta \Sigma_a \phi_2^* \phi_2 dV}{\int_V \nu \Sigma_{f,2} \phi_1^* \phi_2 dV}. \quad (13-64)$$

有趣的是，如果我们在  $r_0$  点引入一面积为  $V_0$  的小吸收体，则其扰动量可以近似写成

$$\delta\Sigma_a = -\Sigma_{a0}V_0\delta(r-r_0), \quad (13-65)$$

这里  $\Sigma_{a0}$  是吸收体的热中子吸收截面。若采用双群近似，按(13-61)式扰动所引起的反应性为

$$\Delta\rho = -\frac{\Sigma_{a0}V_0\phi_2(r_0)\phi_2^*(r_0)}{Q}$$

量  $\Sigma_{a0}V_0\phi_2(r_0)$  是吸收体每秒吸收的热中子数，因而

$$\phi_2^*(r_0) = -\frac{Q\Delta\rho}{\Sigma_{a0}V_0\phi_2(r_0)} \quad (13-66)$$

这正如所预料的那样，在  $r_0$  处的热群共轭通量  $\phi_2^*(r_0)$  正比于在  $r_0$  点每秒吸收一个热中子所引起的负反应性。对于  $\phi_1^*(r_0)$  也可得到类似的结论。对于一般多群情况，可以证明，群共轭通量  $\phi_g^*(r)$  系正比于在  $r$  点每秒引进或消除该群一个中子所引起的反应性的增益或损失。这可以看作为共轭通量或中子价值的另一种定义或解释，它和前面一节所定义的中子价值的物理意义是一致的。

## (2) 非均匀裂变产物毒物

在第十章的讨论中知道，反应堆内裂变产生的毒物（主要是  $^{135}\text{Xe}$ ）的浓度是空间的函数，它对反应性所造成的毒性可以通过那里所介绍的燃耗的数值计算方法来精确地确定。但是，对于这类问题有时也可以用微扰理论来近似估计。

例如，考虑平衡氙的反应性当量。根据(10-44)式， $r$  点的平衡氙浓度为

$$N_{Xe}(r) = \frac{r\Sigma_f(r)\phi(r)}{\lambda_{Xe} + \sigma_a^{Xe}\phi(r)}$$

现在我们把氙的空间浓度（毒性）分布当作扰动来处理。由于氙的吸收截面比散射截面大得多，故氙的散射可以忽略，因而扰动可以表示为

$$\delta\Sigma_a(r) = N_{Xe}(r)\sigma_a^{Xe}$$

应用单群微扰公式 (13-58), 那么氙的毒性对反应性的影响便等于

$$\Delta\rho_{xc} = - \int_V \frac{r \Sigma_f \phi^2(\mathbf{r})}{\lambda_{xc} / \sigma_a^{xc} \phi(\mathbf{r})} dV / \int_V \nu \Sigma_f \phi^2(\mathbf{r}) dV \quad (13-67)$$

### (3) 部分插入的控制棒

对于部分插入的控制棒的计算问题是非常复杂的, 不能用普通的解析方法来处理。在第七章中曾利用微扰理论直接推导出了控制棒的插入深度  $z$  与反应性的关系(7-61)式。事实上, 利用前面扰动的一般公式可以很快求出它的结果。在单群近似下, 按照 (13-63) 式可以得出插入距离为  $z$  的反应性为

$$\rho(Z) = - \Sigma_{a,p} \int_0^a \int_0^z 2 \pi \phi^2(r, z) r dr dz / \int_V \nu \Sigma_f \phi^2(r, z) dV. \quad (13-68)$$

当棒完全插入时

$$\rho(H) = - 2 \pi \Sigma_{a,p} \int_0^a \int_0^H \phi^2(r, z) r dr dz / \int_V \nu \Sigma_f \phi^2(r, z) dV. \quad (13-69)$$

而未受扰动的中子通量为

$$\phi(r, z) = A J_0\left(\frac{2.405 r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right). \quad (13-70)$$

将(13-70)式代入(13-68)和(13-69)式并将两式相除得出

$$\begin{aligned} \rho(Z) &= \rho(H) \int_0^z \sin^2\left(\frac{\pi z}{H}\right) dz / \int_0^H \sin^2\left(\frac{\pi z}{H}\right) dz \\ &= \rho(H) \left[ \frac{Z}{H} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi Z}{H}\right) \right]. \end{aligned} \quad (13-71)$$

### 参 考 文 献

- [1] J. R. 拉马什著, 洪流译, 核反应堆理论导论, 第十五章, 原子能出版社, 1977年。
- [2] S. 格拉斯登, M. C. 爱德仑著, 和平译, 原子核反应堆理论纲要, 第十三章, 科学出版社, 1958年。
- [3] A. M. Weinberg and E. P. Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, pp. 537—556, Chicago, University of Chicago Press, 1958.

- [4] Л. Н. Усаев, Proc. 1st Intern. Conf. PUAE, Vol 5, p/656, New York, United Nation, 1955.
- [5] J. Lewins, Importance-The Adjoint Function, pp. 56—61, Pergamon Press, 1965.
- [6] Г. И. Мар丘克著, 飞跃译, 反应堆数值计算方法, 原子能译丛第五期, 科学出版社, 1959年。

## 第十四章 反应堆动力学(续)

在第八章中我们由单群中子扩散方程出发导出了点堆动态方程，并讨论了阶跃扰动情况下反应堆动态方程的解。在本章中，我们将简要地介绍建立在传递函数理论基础上的频域法及其在研究反应堆动力学中的应用。传递函数方法是研究反应堆线性动力学的重要工具之一，在反应堆物理试验，安全分析，控制系统设计和热工水力不稳定性问题的研究工作中，它也同样得到了广泛的应用。关于时空动力学问题，因限于篇幅未予讨论，读者可参阅本章参考文献中的有关专著。

### 1. 零功率反应堆的传递函数

一个系统的动态特性可用多种形式表示，如用微分方程或状态方程表示。传递函数也是其中一种形式，在控制理论中应用很广。一个线性动力学系统传递函数的定义是：零值初始条件下，系统输出的拉氏变换和输入的拉氏变换之比。下面我们由点堆动态方程(8-13)和(8-14)式来推导出零功率反应堆的传递函数。这里所说的零功率堆，是指反馈效应可以忽略的堆，实际功率很小，但并不真正为零。

从方程(8-13)可见，由于 $\rho$ 是随时间变化的，这是一个变系数微分方程。如果进一步考虑反馈效应时，则变成为非线性微分方程。通常是在小扰动情况下，对上述方程求解，习惯上进行所谓线性化处理。

假定反应堆在运行时反应性发生微小变化后，中子密度和缓发中子先驱核密度也相应发生微小变化。即令：

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad n = n_0 + \delta n,$$



$$c_i = c_{i,0} + \delta c_i, \quad q = q_0,$$

又

$$c_{i,0} = \frac{\beta_i n_0}{\lambda_i}, \quad q_0 = -\frac{\rho_0 n_0}{A},$$

将上述各值代入式(8-13)一(8-14)后得

$$\frac{d}{dt} \delta n = \frac{\rho_0 - \beta}{A} \delta n + \sum_i \lambda_i \delta c_i + \frac{n_0}{A} \delta \rho + \frac{1}{A} \delta \rho \delta n, \quad (14-1)$$

$$\frac{d}{dt} \delta c_i = \frac{\beta_i}{A} \delta n - \lambda_i \delta c_i. \quad (14-2)$$

(14-1)式的最后一项为高次微分项, 如将此项忽略, 方程组(14-1)一(14-2)即变为线性方程组, 这就是所谓线性化处理。将(14-1)一(14-2)式进行拉氏变换, 并忽略高次微分项得

$$s \delta n(s) = \frac{\rho_0 - \beta}{A} \delta n(s) + \sum_i \lambda_i \delta c_i(s) + \frac{n_0}{A} \delta \rho(s), \quad (14-3)$$

$$s \delta c_i(s) = \frac{\beta_i}{A} \delta n(s) - \lambda_i \delta c_i(s). \quad (14-4)$$

由(14-4)式得

$$\delta c_i(s) = \frac{\beta_i}{A(s + \lambda_i)} \delta n(s). \quad (14-5)$$

将(14-5)式代入(14-3)式则

$$s \delta n(s) = \frac{\rho_0 - \beta}{A} \delta n(s) + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{A(s + \lambda_i)} \delta n(s) + \frac{n_0}{A} \delta \rho(s). \quad (14-6)$$

于是

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0}{As + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i}}. \quad (14-7)$$

因为  $\beta = \sum_i \beta_i$ , (14-7)式也可写为

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0}{\left( A + \sum_i \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) s - \rho_0}. \quad (14-8)$$

当反应堆处于临界状态时,  $\rho_0 = 0$ , (14-8)式变为

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0}{\left( A + \sum_i \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right) s} \quad (14-9)$$

当反应堆具有六组缓发中子时，有

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i/A}{s + \lambda_i} &= 1 + \frac{\beta_1/A}{s + \lambda_1} + \dots + \frac{\beta_6/A}{s + \lambda_6} \\ &= \frac{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_6) + \frac{\beta_1}{A}(s + \lambda_2)(s + \lambda_3) \dots (s + \lambda_6) + \dots}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_3)(s + \lambda_4)(s + \lambda_5)(s + \lambda_6)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^6 (s + \gamma_i)}{\prod_{i=1}^6 (s + \lambda_i)} \end{aligned} \quad (14-10)$$

则

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0}{As} \frac{\prod_{i=1}^6 (s + \lambda_i)}{\prod_{i=1}^6 (s + \gamma_i)} \quad (14-11)$$

(14-11)式为具有六组缓发中子的零功率反应堆传递函数，只要  $A$ 、 $\lambda_i$ 、 $\beta_i$  等参数给定后，它就可以容易确定。

具有六组缓发中子的传递函数，应用时计算工作量较大，采用适当的参数权重，可以减少缓发中子的组数（也就是减少了微分方程的阶数），其中最简单的是单组缓发中子的情况。

按照上述推导步骤，同样可以求得具有单组缓发中子反应堆的传递函数为：

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0}{As + \frac{\beta s}{s + \lambda} - \rho_0} \quad (14-12)$$

反应堆处于临界状态时， $\rho_0 = 0$ ，因而

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0(s + \lambda)}{As(s + \lambda + \beta/A)}. \quad (14-13)$$

对于瞬跳近似情况，令  $A=0$ ，(14-13)式变为

$$\frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{n_0(s + \lambda)}{\beta s}. \quad (14-14)$$

应该指出，上述反应堆各种形式的传递函数，都与稳态中子密度  $n_0$  有关。

## 2. 小正弦输入扰动时的反应堆 动态方程的解

令 
$$G_R(s) = \frac{\delta n(s)/n_0}{\delta \rho(s)},$$

则由(14-7)式可得

$$G_R(s) = \frac{1}{As + \beta - \rho_0 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i}}.$$

反应堆处于临界时， $\rho_0 = 0$ ，由(14-9)式得

$$G_R(s) = \frac{1}{s \left[ A + \sum_i \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right]}. \quad (14-15)$$

特殊情况下，如果在反应堆稳态附近反应性作小的正弦振荡，即  $\delta \rho(t) = \delta k \sin \omega t$ ，其拉氏变换为

$$\delta \rho(s) = \delta k \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (14-16)$$

而

$$\frac{\delta n(s)}{n_0} = G_R(s) \delta \rho(s) = G_R(s) \delta k \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (14-17)$$

由(8-35)式容易求出  $\delta n(s)/n_0$  的反变换（应用留数求和原型）

$$\frac{\delta n(t)}{n_0} = \delta k \left[ \frac{G_R(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} - \frac{G_R(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} \right] + \delta k \omega \sum_{i=1}^7 \frac{e^{\omega_i t}}{(\omega^2 + \omega_i^2) Y'(\omega_i)}, \quad (14-18)$$

其中  $\omega_i$  为倒时方程的根，而

$$Y(s) = 1/G_R(s). \quad (14-19)$$

因为当反应堆具有六组缓发中子时，倒时方程的七个根中有六个为负，反应堆处于临界时，还有一个根为零根，所以当  $t \rightarrow \infty$  时，(14-18) 式中的求和项内有六项为零，而包括  $\omega_1=0$  的那一项则变为常数。

由于 
$$Y(s) = \frac{1}{G_R(s)} = \Lambda s + \beta + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{s + \lambda_i},$$

故 
$$Y'(0) = \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} = \Lambda',$$

又  $G_R(j\omega)$  为复数，可以写为

$$G_R(j\omega) = |G_R(j\omega)| e^{j\theta}, \quad (14-20)$$

其中  $|G_R(j\omega)|$  称为复数  $G_R(j\omega)$  的振幅， $\theta$  称为  $G_R(j\omega)$  的相角。

$G(j\omega)$  和  $G(-j\omega)$  为共轭复数，由(14-18)式容易求得  $t \rightarrow \infty$  时，中子密度振荡的渐近特性为

$$\frac{\delta n(t)}{n_0} = \delta k |G_R(j\omega)| \sin(\omega t + \theta) + \frac{\delta k}{\omega \Lambda'}. \quad (14-21)$$

(14-21)式中的常数项，表示振荡时，中子水平值产生了一个偏移  $n_0 \delta k / \omega \Lambda'$ 。注意， $\delta n/n_0$  振荡时，其振幅为输入正弦振幅的  $|G_R(j\omega)|$  倍，而相角则相差  $\theta$ 。

### 3. 零功率反应堆的频率特性

系统对正弦输入的稳态响应特性称为频率特性。频率特性法

在研究系统动态特性中有广泛的应用。用这种方法研究系统的稳定性和过渡过程时，不必直接求解系统的微分方程。而且，系统的频率特性可以用实验方法确定。零功率反应堆的传递函数，在四十年代末期已从理论上导出，而其频率特性在五十年代初期由实验求出。频率特性方法对反应堆稳定性分析，过渡过程品质分析以及在参数整定中都很有用。例如用振荡法测定  $\beta/\Lambda$  之值，就是一个较好的方法。

首先，我们将证明，系统的频率特性可以直接由系统的传递函数求得。也就是说，将传递函数中的  $s$  用  $j\omega$  来代替即可，其中  $\omega$  为角频率， $j = \sqrt{-1}$ 。

假定线性系统的微分方程为

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m x, \quad (14-22)$$

其中， $x$  为系统的输入； $y$  为系统输出； $a_0, a_1, \cdots, a_n$  和  $b_0, b_1, \cdots, b_m$  均为常数； $m, n$  为正整数， $m < n$ 。

在零值起始条件下，容易求得系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{P(s)}{D(s)}. \quad (14-23)$$

若  $x(t)$  为一个随时间而正弦变化的输入信号，

$$x(t) = A \sin \omega t,$$

则

$$X(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

由式(14-23)得

$$Y(s) = \frac{P(s)}{D(s)} \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2}. \quad (14-24)$$

令  $Y(s)$  的分母为 0，求得特征方程为

$$D(s)(s^2 + \omega^2) = 0,$$

或写为

$$(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)(s+j\omega)(s-j\omega)=0$$

将(14-24)式展开为部分分式

$$Y(s) = \frac{K_j}{s-j\omega} + \frac{K_{-j}}{s+j\omega} + \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-s_n}$$

式中  $K_j, K_{-j}, K_i (i=1, 2, \cdots, n)$  为待定常数,  $Y(s)$  的拉氏逆变换为

$$y(t) = K_j e^{-j\omega t} + K_{-j} e^{j\omega t} + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t}. \quad (14-25)$$

我们现在仅讨论稳定系统, 这种系统要求所有的  $s_i (i=1, 2, \cdots, n)$  的实部应为负值。这样, 当加上输入信号以后, 经过了足够长的时间, 则  $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \cdots$  和  $e^{s_n t}$  都将趋近于零, 余下的就只有第一和第二两项

$$y(t) = K_j e^{j\omega t} + K_{-j} e^{-j\omega t}, \quad (14-26)$$

其中  $K_j$  可由(14-24)式确定

$$K_j = G(s) \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j}. \quad (14-27)$$

同样可求得  $K_{-j}$  为

$$K_{-j} = G(s) \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = \frac{AG(-j\omega)}{-2j}. \quad (14-28)$$

将式(14-27)和(14-28)式代入(14-26)式得

$$y(t) = A \frac{G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t}}{2j}. \quad (14-29)$$

$G(j\omega)$  和  $G(-j\omega)$  为共轭复数可以写为

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= u(\omega) + jv(\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}, \\ G(-j\omega) &= u(\omega) - jv(\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\phi}, \end{aligned}$$

其中

$$|G(j\omega)| = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} = \text{振幅},$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = \angle G(j\omega) = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{G(j\omega) \text{的虚部}}{G(j\omega) \text{的实部}} \right] = \text{相角}.$$

于是(14-29)式变为

$$\begin{aligned}y(t) &= A|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \\ &= B \sin(\omega t + \phi),\end{aligned}\quad (14-30)$$

其中

$$B = A|G(j\omega)|.$$

由此可见, 任何一个稳定系统, 如果它的传递函数为  $G(s)$ , 加上一个随时间正弦变化的输入信号时, 待系统稳定之后, 则其输出也是一个随时间正弦变化的信号, 其振幅为  $A|G(j\omega)|$ , 而相位滞后于输入信号一个角度  $\phi$ 。  $|G(j\omega)|$  称为系统的振幅频率特性(幅频特性);  $\phi = \angle G(j\omega)$  也是  $\omega$  的函数, 称为系统的相位频率特性(相频特性);  $G(j\omega)$  称为系统的频率特性。如已知系统的传递函数为  $G(s)$ , 将  $s$  换为  $j\omega$  后, 即得系统的频率特性。

又  $G(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$ ,

$u(\omega) = \text{Re}[G(j\omega)]$  称为实频特性;

$v(\omega) = \text{Im}[G(j\omega)]$  称为虚频特性。

从上面的讨论, 对于频率特性可得出如下结论:

(1) 当系统的输入信号成正弦波形时, 其稳态输出也按同频率的正弦规律变化;

(2) 稳态输出的正弦信号的振幅是输入信号的振幅乘以频率特性的振幅;

(3) 稳态输出的正弦信号的相位与输入正弦信号的相位之差为  $\phi$ 。

上述结论是相当重要的, 它是用实验方法求取系统(包括反应堆系统)频率特性的理论基础。用实验方法求频率特性时, 只要在所需研究的系统的输入端加一个频率为  $\omega_1$  的正弦信号, 待稳定后, 测量输出信号的振幅和相位, 并与输入信号的振幅和相位作比较, 便可得出对应于频率  $\omega_1$  的幅频特性  $|G(j\omega_1)|$  和相频特性  $\phi(j\omega_1)$ 。如果不断改变输入信号的频率  $\omega$ , 重复上述实验

步骤，便可得出不同频率时的频率特性。

当用频率特性描述系统时，除采用频率特性的表示式外，通常还采用频率特性曲线。用实验方法求频率特性时，也总是先求得频率特性曲线。

现在，我们利用上述原理，研究零功率堆的频率特性。当反应堆处于临界时， $\rho_0=0$ 。使(14-15)式中的  $s=j\omega$ ，即可求得零功率堆的频率特性  $G_R(j\omega)$ 。

前面已经提到过，对于一定的  $\omega$ ， $G_R(j\omega)$  是一个复数，而复数是由实部和虚部组成的。即

$$G_R(j\omega) = Re[G_R(j\omega)] + j Im[G_R(j\omega)] = |G_R(j\omega)| e^{j\theta}, \quad (14-31)$$

其中

$$|G_R(j\omega)| = \sqrt{Re^2[G_R(j\omega)] + Im^2[G_R(j\omega)]}, \quad (14-32)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{Im[G_R(j\omega)]}{Re[G_R(j\omega)]}. \quad (14-33)$$

$|G_R(j\omega)|$  称为零功率堆频率特性的振幅， $\theta$  称为零功率堆频率特性的相位。

一般在作图时，振幅用分贝数表示，它等于  $20 \log |G_R(j\omega)|$ 。图 14-1 为用  $^{235}\text{U}$  作燃料的反应堆，在不同中子寿命情况下的振幅频率曲线和相位频率曲线图。

下面我们研究临界情况下零功率堆频率特性的近似曲线。

(1) 低频段 即  $s=j\omega$  很小时，由(14-9)式得

$$G(s) = \frac{\delta n(s)}{\delta \rho(s)} \approx \frac{n_0}{s \left( \Lambda + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)} \approx \frac{n_0}{\Lambda' s},$$

式中  $\Lambda' = \Lambda + \sum_i \beta_i / \lambda_i$ ，而

$$G(j\omega) \approx \frac{n_0}{\Lambda'(j\omega)} = -j \frac{n_0}{\Lambda' \omega}. \quad (14-34)$$

当  $\omega$  值很小时，因为  $\sum_i \beta_i / \lambda_i \gg \Lambda$ ，故振幅曲线实际上在低



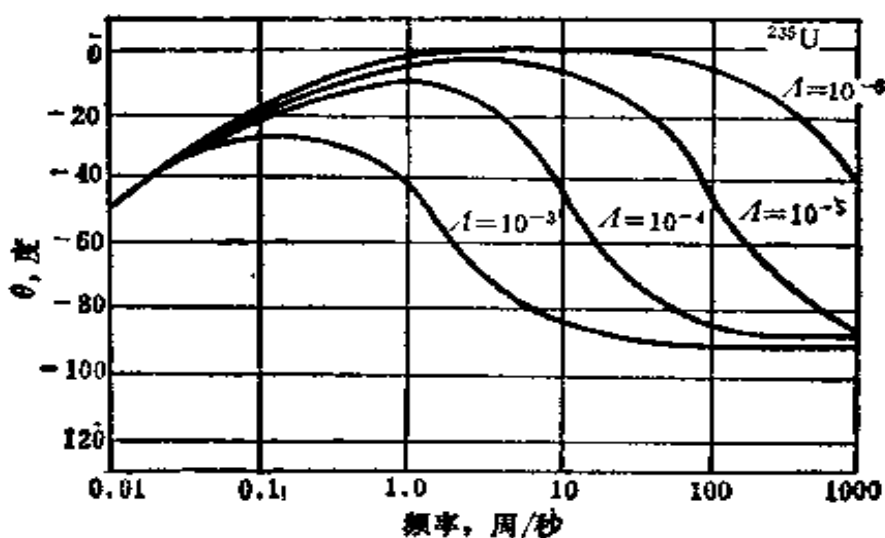
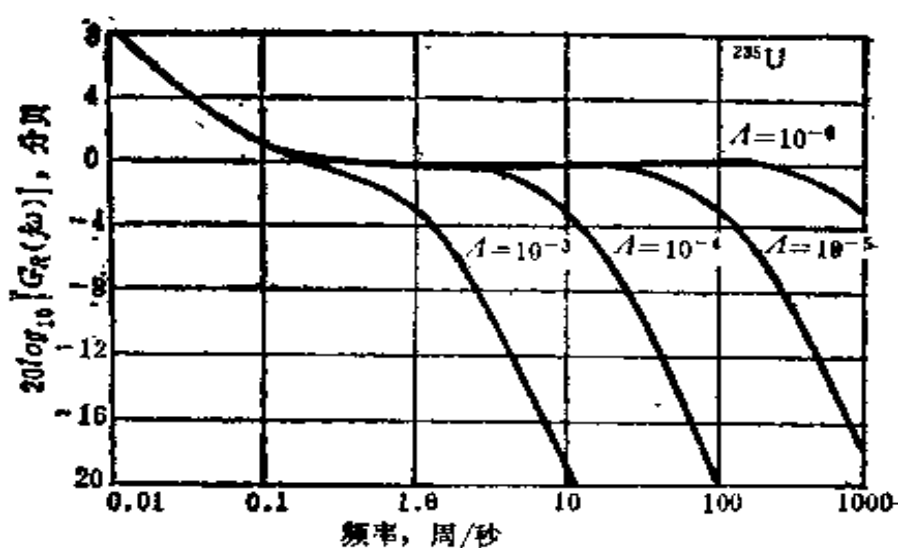


图 14-1 反应堆的频率特性曲线

频响与  $\Lambda$  无关，主要由缓发中子所决定。当  $\omega \rightarrow 0$  时，相位频率曲线趋近于  $-90^\circ$ 。(14-34)式称为有效寿期模型。

(2) 高频段 即  $s = j\omega$  很大时，由式(14-9)得

$$G(s) \approx \frac{n_0}{\Lambda s}, \quad (14-35)$$

则

$$G(j\omega) \approx \frac{n_0}{\Lambda(j\omega)} = -j \frac{n_0}{\Lambda\omega}. \quad (14-36)$$

高频段频率特性曲线主要由  $\Lambda$  决定，缓发中子影响甚微。相位频率曲线趋近于  $-90^\circ$ 。

(3) 中频段 由于 $\Lambda$ 比较小, 存在一个中间频段。当 $|s| = |j\omega| \gg (\lambda_i)_{\max}$ 时, 由(14-9)式得

$$G(j\omega) \approx \frac{n_0}{\beta} \quad (14-37)$$

此时在振幅频率曲线中出现“坪”, 且 $\Lambda$ 愈小, 坪扩展得愈宽。

#### 4. 具有反馈的反应堆

前面我们在研究零功率反应堆的动态特性时, 认为反应堆功率很小, 因此, 功率变化所引起的反应性变化可以忽略。然而, 对于在稳定功率情况下运行的反应堆, 当反应性改变以后, 堆功率就会改变; 而功率改变后, 又引起系统内部的某些物理和热工参数(例如温度、压力、毒物浓度、汽泡体积等)、某些构件的几何形状(如燃料棒弯曲度等)的改变, 这种改变反过来又引起反应性的变化, 从而使功率进一步变化, 这就是反应堆的反馈效应问题。以温度反馈效应为例, 当功率变化时, 堆内燃料棒、慢化剂、载热剂等, 它们的温度亦即相应地发生变化。由于热膨胀, 各种材料的密度发生变化(甚至有的发生相变, 如水变为蒸汽, 这样, 密度的改变就更大了)。温度变化也将影响热中子的散射和多普勒效应, 而使微观截面发生变化。各种材料的密度和它们的微观截面的变化, 又引起宏观截面发生变化, 这些都使反应性发生改变。实际上反应堆各点的温度不仅是随时间, 而且是随空间位置而变化的。确定堆内温度的空间分布情况, 必须进行详细的热工水力计算, 这是一个十分复杂的任务。为了使问题简化, 经常以集中参数模型代替分布参数模型。典型的作法是: 堆芯内采用几种平均温度(如燃料温度、慢化剂温度、冷却剂温度等)及其相应的反应性系数, 以使问题得到简化。

一个反应堆建成以后, 反应堆内部的反馈作用, 就自然客观地存在, 它不象一般的控制系统一样, 是从外部加上去的。这种反馈作用可称之为“内在反馈”或者“固有反馈”。反应堆的反馈作

用，对研究反应堆的动态特性极为重要。

由于温度、压力、毒物、汽泡等效应所引起的反应性变化，是用相应的反应性系数来表示的。这些反应性系数有的为正，有的为负。一般来说，正反应性系数会促使系统成为不稳定，而负反应性系数为系统稳定的必要条件。对于不同的反应堆，各种反馈作用的影响差别很大，例如，沸水堆压力变化产生的汽泡效应影响很大，而对于压水堆这种影响就较小，着重于考虑燃料和慢化剂的温度效应。即使对同一个堆，同一个因素在不同期间的影响也不一样，例如，含硼压水堆慢化剂温度系数，在堆寿期初和寿期末数值上变化就很大。反应性反馈作用的时间特性差别也相当显著。有的在功率改变后，反应性立即变化（例如燃料的温度反馈）；有的迟延时间长一些（例如慢化剂温度反馈）；有的则在若干小时后才起作用（例如中毒反馈）。

由此可见，反应堆的反馈作用是极为复杂的，它与反应堆的物理、热工、水动力学问题紧密地联系在一起。搞清楚反应堆的反馈机理，对于设计一个具有良好动态特性的反应堆是非常重要的。

图 14-2 为具有反馈的反应堆的传递函数方块图。其中  $P_0 G_R(s)$  为零功率反应堆的传递函数， $F(s)$  为反馈部分的传递函数。 $\delta\rho_{ex}$  为外加反应性的变化，例如控制棒移动所引起的反应性变化。反应性变化  $\delta\rho_{ex}$  之后，反应堆功率变化  $\delta P$ ，功率改变以后，又引起燃料温度、慢化剂温度等物理参数相应变化，从而产生一个反馈反应性  $\delta\rho_F$ ，这种反应性进一步作用到反应堆上，使反应堆功率进一步变化，如此循环不已。

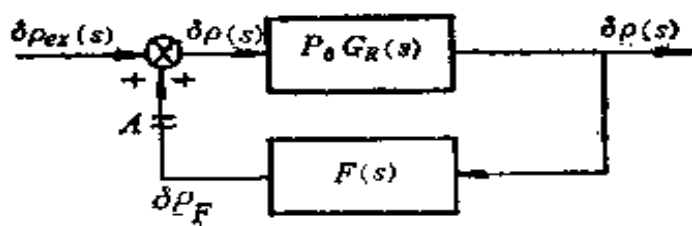


图 14-2 具有反馈的传递函数方块图

如将系统在  $A$  处断开，反馈信号  $\delta\rho_f(s)$  与误差信号  $\delta\rho(s)$  之比，称为系统的开环传递函数。即

$$\text{开环传递函数} \quad \frac{\delta\rho_f(s)}{\delta\rho(s)} = P_0 G_R(s) F(s). \quad (14-38)$$

$\delta P(s)$  与  $\delta\rho_{ex}(s)$  之比称为闭环系统传递函数。因为

$$\begin{aligned} \delta\rho(s) &= \delta\rho_{ex}(s) + \delta\rho_f(s) = \delta\rho_{ex}(s) + F(s)\delta P(s), \\ \delta P(s) &= P_0 G_R(s)\delta\rho(s). \end{aligned}$$

从上述两式中消去  $\delta\rho(s)$  可得闭环系统传递函数为

$$\frac{\delta P(s)}{\delta\rho_{ex}(s)} = \frac{P_0 G_R(s)}{1 - P_0 G_R(s) F(s)} = H(s) \quad (14-39)$$

(14-39) 式是在相交点处采用正反馈符号求得的，如相交点处采用负反馈符号(习惯上多是这样)，可以求得闭环系统传递函数为

$$\frac{\delta P(s)}{\delta\rho_{ex}(s)} = \frac{P_0 G_R(s)}{1 + P_0 G_R(s) F(s)} \quad (14-40)$$

(14-39)或(14-40)式中的零功率反应堆的传递函数已在本章第 1 节中进行了讨论。下面我们以反应堆温度反馈作为一个例子，研究反馈部分的传递函数  $F(s)$ 。

从物理观点看来，最简单的处理方法，是用平均温度表征堆芯内不同区域的温度，如用燃料平均温度  $T_F$ ，慢化剂平均温度  $T_M$  等。当燃料温度改变时，产生的反应性效应相对来说是瞬发的。反应堆功率变化时，燃料温度响应延迟很小。而且在燃料温度变化与影响反应性的燃料截面变化之间也没有明显的延迟。另一方面，由于慢化剂温度变化产生的反应性效应却是有较大延迟的，因为在后者温度发生变化前，热量必须从燃料传过来。而且慢化剂的热容量一般也较大些。

假定在稳态条件下，堆功率(或中子密度)为  $P_0$ ，燃料和慢化剂温度分别为  $T_{F,0}$  和  $T_{M,0}$ ，反应堆内发生小扰动以后，可以写出下列关系式：

$$\frac{d\delta T_F}{dt} = \alpha\delta P - \omega_F\delta T_F, \quad (14-41)$$

$$\frac{d\delta T_M}{dt} = b\delta T_F - \omega_M\delta T_M, \quad (14-42)$$

其中  $\delta T_F$ ,  $\delta T_M$  和  $\delta P$  是实际的温度和功率与其相应的稳态值的偏差,  $\omega_F$  与  $\omega_M$  分别为燃料和慢化剂温度的衰减常数。a, b 假定为常系数。(14-41)式表明燃料的温度直接随功率改变而改变, 而(14-42)式则说明慢化剂温度是随燃料温度改变而改变的。

将(14-41)式进行拉氏变换可得

$$\delta T_F(s) = \frac{a}{s + \omega_F} \delta P(s), \quad (14-43)$$

或 
$$\frac{\delta T_F(s)}{\delta P(s)} = \frac{a}{s + \omega_F}. \quad (14-44)$$

同样, 将(14-42)式进行拉氏变换可得

$$\delta T_M(s) = \frac{b}{s + \omega_M} \delta T_F(s), \quad (14-45)$$

或 
$$\frac{\delta T_M(s)}{\delta T_F(s)} = \frac{b}{s + \omega_M}. \quad (14-46)$$

由(14-44)式和(14-46)式可得

$$\frac{\delta T_M(s)}{\delta P(s)} = \frac{ab}{(s + \omega_F)(s + \omega_M)}. \quad (14-47)$$

如果燃料的温度系数和慢化剂温度系数分别为  $\alpha_F$  和  $\alpha_M$ , 则总的反馈反应性为

$$\delta\rho_F(s) = \alpha_F \delta T_F(s) + \alpha_M \delta T_M(s).$$

从图 14-2 可见, 反馈部分的传递函数为

$$F(s) = \frac{\delta\rho_F(s)}{\delta P(s)} = \alpha_F \frac{\delta T_F(s)}{\delta P(s)} + \alpha_M \frac{\delta T_M(s)}{\delta P(s)}.$$

将(14-44)式和(14-47)式代入上式得

$$F(s) = \frac{\delta\rho_F(s)}{\delta P(s)} = \alpha_F \frac{a}{s + \omega_F} + \alpha_M \frac{ab}{(s + \omega_F)(s + \omega_M)}. \quad (14-48)$$

又因为

$$\delta\rho(s) = \delta\rho_{ex}(s) + F(s)\delta P(s), \quad (14-49)$$

则 
$$\delta\rho(t) = \delta\rho_{ex}(t) + \int_0^t f(t-\tau)\delta P(\tau)d\tau. \quad (14-50)$$

这里假定当  $t < 0$  时,  $\delta P(t) = 0$ 。式中  $f(t)$  为  $F(s)$  的拉氏反变换, 称为反馈核。(14-50) 式右边第二项为表示反馈效应的最一般的形式, 它描写了时间为  $t$  时的反应性是如何受到这个时间以前的功率变化的影响的。

采用不同的传热模型, 得到不同的反馈传递函数, 因而有不同的反馈核。本节讨论的传热模型的反馈核, 可以容易地由(14-48)式求拉氏反变换得到。

$$f(t) = a \left[ \alpha_F e^{-\omega_F t} + \frac{\alpha_M b (e^{-\omega_F t} - e^{-\omega_M t})}{\omega_M - \omega_F} \right]. \quad (14-51)$$

又由(14-39)式可得

$$\delta P(s) = \delta \rho_{ex}(s) H(s),$$

于是  $\delta P(s)$  的逆变换为

$$\delta P(t) = \int_0^t \delta \rho_{ex}(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad (14-52)$$

其中  $h(t)$  为  $H(s)$  的拉氏逆变换, 也叫做系统的脉冲响应函数,

## 5. 反应堆稳定性问题

一个动态系统受到扰动作用以后, 其平衡状态被破坏, 系统对其平衡状态具有一定的偏差。如果除去扰动以后, 系统能自行恢复其原来状态, 或以一定的精度恢复其原来状态, 则称该系统是稳定的, 否则就是不稳定的。一个不稳定的系统受到扰动以后, 会产生自持振荡, 甚至振幅会越来越大, 一经激发, 即使把扰动再除去, 也不会衰减。

一般线性系统(或线性化系统)的动态微分方程如(14-22)式所示, 而系统的传递函数为(14-23)式。为了研究系统受到瞬时扰动后的稳定性问题, 我们假定输入(即扰动)为单位脉冲函数, 即  $x(t) = \delta(t)$ , 其象函数为

$$X(s) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1,$$

则由式(14-23)得

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{P(s)}{D(s)} \quad (14-53)$$

将(14-53)式的分母进行因式分解, 得

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad (14-54)$$

其中  $p_1, p_2, \dots, p_n$  为(14-53)式分母  $D(s)=0$  的  $n$  个根。应用部分分式法, 当无重根时有

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n} \\ &= \sum_{i=1}^n K_i \frac{1}{s-p_i} \end{aligned} \quad (14-55)$$

其中

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i) Y(s) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

由(14-55)式, 求拉氏逆变换得

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14-56)$$

若  $p_i$  为一实根, 当  $p_i > 0$  时, 则  $K_i e^{p_i t}$  将随时间不断增加而趋于无穷大, 也就是  $y(t)$  将趋于无穷大, 因而系统是不稳定的。若  $p_i < 0$ , 则  $K_i e^{p_i t}$  将随着时间增大而趋近于零, 从而系统是稳定的。若  $p_i$  为复根(复根是成对出现的), 当其实部大于零时, 系统将是不稳定的; 当其实部小于零时, 则系统是稳定的; 当实部等于零时, 系统产生持续振荡, 对于设计一个实际系统, 后一种情况也要避免。总之, 保证一个线性系统稳定的条件是: 系统特征方程  $D(s)=0$  的各个根必须具有负的实部, 也就是说, 系统特征方程的根要分布在复平面上虚轴的左边。如果特征方程有一个根分布在虚轴右边, 系统就变成为不稳的。

必须着重指出, 系统的稳定性完全决定于特征方程  $D(s)=0$  的根在复平面上的分布。也就是决定于(14-53)式中传递函数的分母  $D(s)=0$  的各个根也称为传递函数的极点。显而易见, 传

递函数极点的位置，完全决定于系统本身，而与外界扰动形式等条件无关。上述结论对于特征方程具有重根的情况也是适用的。

目前有许多方法可以判断动态系统特征方程根在复平面上的分布情况，其中最直观的是所谓“根轨迹法”。根轨迹法是研究系统放大系数(对反应堆来说，可以是稳态功率  $P_0$ ) 改变时，特征方程的根的位置在复平面上如何变化。当放大系数变化时，每一个根都在复平面上画出自己的轨迹(根轨迹)。当在某个放大系数时，只要有一个根的轨迹曲线进入到右半复平面，系统就成为不稳定的。常用的判断系统稳定性的准则有劳斯-胡维茨准则和乃魁斯特准则等。下面我们只对乃魁斯特准则作一简单介绍。

## 5.1 乃魁斯特稳定性准则

乃魁斯特稳定性准则是 1932 年 H. 乃魁斯特提出的。它可以由开环系统的频率特性，判断闭环系统的稳定性。这个准则的内容如下：

(1) 如果开环系统是稳定的，当  $\omega$  从  $-\infty$  变到  $+\infty$  时，如开环频率特性曲线  $W(j\omega)$  不包围点  $(-1, j0)$ ，则闭环系统是稳定的；

(2) 如果开环系统不稳定，而有  $m$  个根在右半复平面内，当  $\omega$  从  $-\infty$  变到  $+\infty$  时，如开环频率特性  $W(j\omega)$  包围点  $(-1, j0)$  正  $m$  次，则闭环系统是稳定的。

下面我们对乃魁斯特准则予以说明。

假定开环系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{K(s)}{D(s)},$$

其中  $K(s)$  和  $D(s)$  均为  $s$  的多项式。 $D(s) = 0$  称为开环系统的特征方程，如其所有根都在虚轴左边，则称开环系统是稳定的。由 (14-40) 式可知，闭环系统的特征方程为

$$1 + W(s) = 0.$$

要求闭环系统稳定，则闭环特征方程的根必须分布在虚轴左



边。现在我们研究下式

$$1 + W(s) = \frac{K(s) + D(s)}{D(s)}$$

实际物理系统  $K(s)$  的方次不高于  $D(s)$ ，故多项式  $K(s) + D(s)$  与  $D(s)$  具有同样数目的根。

由图 14-3 可见，如  $\lambda_1$  为特征方程的根， $\lambda$  为虚轴上任意一点，则矢量  $\overrightarrow{AB}$  为复数  $\lambda - \lambda_1$ 。当  $\omega$  自  $-\infty$  变到  $+\infty$ ，这时矢量  $\overrightarrow{AB}$  的终点将沿虚轴自下向上滑动。如根  $\lambda_1$  在虚轴左侧，则矢量向反时针方向转过  $\pi$  角 (180 度)，如根  $\lambda_1$  在虚轴右侧，则矢量按顺时针方向转过  $\pi$  角。

将  $1 + W(s)$  展开成为分数形式

$$1 + W(s) = A \frac{(s - s_{1,1})(s - s_{1,2}) \cdots (s - s_{1,n})}{(s - s_{2,1})(s - s_{2,2}) \cdots (s - s_{2,n})}$$

其中  $A$  为常数； $s_{1,1}$  为多项式  $K(s) + D(s)$  的根； $s_{2,1}$  为多项式  $D(s)$  的根。

当  $\omega$  自  $-\infty$  变到  $+\infty$  时，矢量  $1 + W(j\omega)$  所转的角度等于矢量  $(j\omega - s_{1,1})$ ， $(j\omega - s_{1,2})$ ， $\cdots$ ， $(j\omega - s_{1,n})$  等转过的角度之和减去矢量  $(j\omega - s_{2,1})$ ， $(j\omega - s_{2,2})$ ， $\cdots$ ， $(j\omega - s_{2,n})$  转过的角度之和。

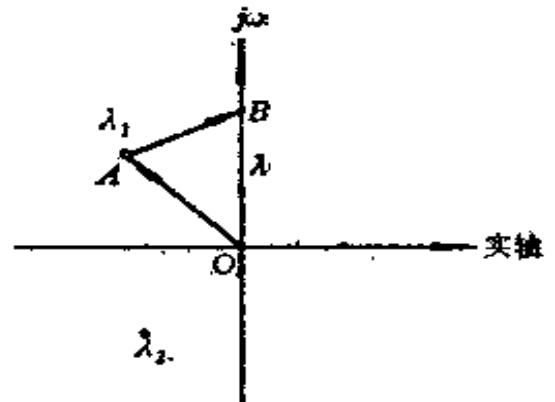


图 14-3 根在复平面中的表示

为了保证闭环系统稳定，要求  $1 + W(s)$  的分子的根都必须分布在虚轴左边，也就是  $K(j\omega) + D(j\omega)$  所转过的角度为  $n\pi$ 。在这种情况下，

(i) 如开环系统是稳定的，即其特征方程的所有根都在虚轴的左侧，则矢量  $D(j\omega)$  所转过的角度也等于  $n\pi$ ，于是矢量  $1 + W(j\omega)$  转过的总角度为  $n\pi - n\pi = 0$ 。

(ii) 如开环系统不稳定， $D(s)$  有  $m$  个根在虚轴的右侧和  $(n - m)$  个根在虚轴的左侧，则矢量  $1 + W(j\omega)$  所转过的角度为  $n\pi$

$$-(n-m)\pi \div m\pi = 2m\pi。$$

考察矢量  $1 + W(j\omega)$  与  $W(j\omega)$  之间的关系。这也是两个复数，当表示在复平面上时，前者的起点在  $(-1, j0)$  点，后者的起点在零点。它们的终点是共同的，都在  $W(j\omega)$  特性曲线上。矢量  $1 + W(j\omega)$  转过正  $2\pi$  的角度，就是指它围绕其起点  $(-1, j0)$  点逆时针方向转一圈，而对于  $W(j\omega)$  来说，就相当于特性曲线  $W(j\omega)$  包围  $(-1, j0)$  点正转一次。显而易见，如果  $1 + W(j\omega)$  围绕  $(-1, j0)$  点转过的角度为零，则特性曲线  $W(j\omega)$  也就不包围  $(-1, j0)$  点。

综上所述，改写上述(i)，(ii)两点的内容，即得乃魁斯特准则。

当开环系统的特征方程具有零根时， $\omega \rightarrow 0$  时，则  $W(j\omega)$  将趋近于  $\infty$ ，这样开环频率特性曲线变得不连续，于是难于判断它是否包围  $(-1, j0)$  点。为了克服这个困难，在图 14-4(a) 原点附近作半径  $r$  为无限小的半圆。 $\omega$  由  $-\infty$  沿虚轴增至  $+\infty$  时，在原点附近  $\theta$  由  $-\frac{\pi}{2}$  变为  $+\frac{\pi}{2}$ ，总角度变化为正  $\pi$ 。这样，特征方程的一个零根，与分布在虚轴左边的一个负根对  $1 + W(j\omega)$  产生相等的角度贡献。 $\theta$  由  $-\frac{\pi}{2}$  变到  $+\frac{\pi}{2}$  时， $W(j\omega)$  则沿无穷大

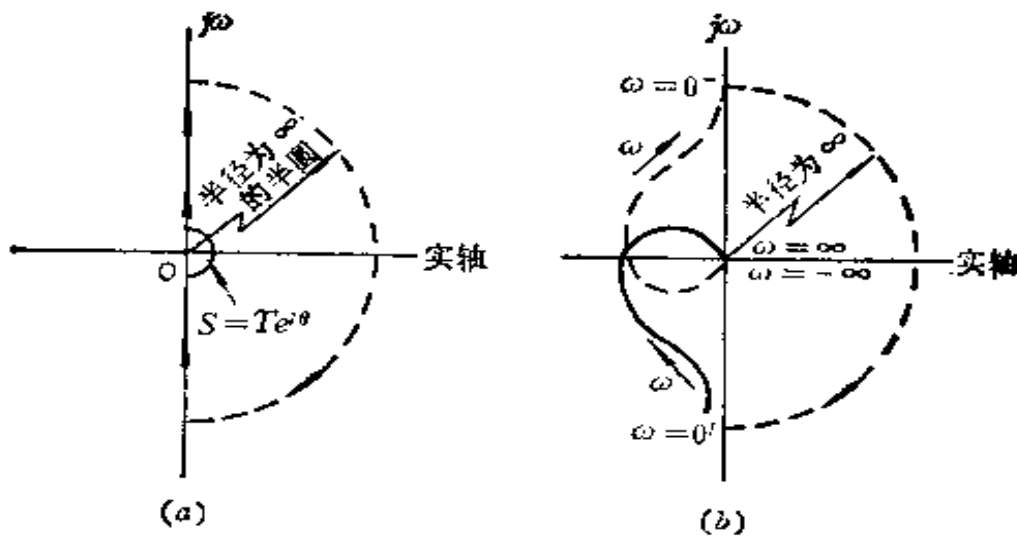


图 14-4 开环系统特征方程具有零根时的频率特性曲线

半径顺时针方向转  $180^\circ$ ，如图 14-4(b) 所示。开环频率特性曲线  $W(j\omega)$  也就闭合起来，闭环系统的稳定性仍然可用乃魁斯特准则予以判别。

当开环系统特征方程出现成对虚根时，可以按对待零根的方法处理。

## 5.2 具有两个温度系数反馈回路反应堆的稳定性

当反应堆存在温度、压力、中毒等反馈效应时，其稳定性的研究方法，原则上都是相同的。下面我们重点地介绍具有温度反馈的压水堆稳定性问题的研究方法。沸水堆由于汽泡效应、水力不稳定性等因素的影响，反馈机理比较复杂一些，但研究方法原则上还是相同的。

在压水堆中，功率变化后，首先是燃料棒的温度发生变化，然后慢化剂(水)的温度相应地发生变化，系统方块图如图 14-5 所示。

假定传热方程为

$$P = \mu_F \frac{dT_F}{dt} + P_M, \quad (14-57)$$

$$P_M = \mu_M \frac{dT_M}{dt} + P_c, \quad (14-58)$$

$$P_M = \xi(T_F - T_M), \quad (14-59)$$

其中：  $T_F$ ——燃料温度；

$T_M$ ——慢化剂温度；

$\mu_F = W_F c_F$ ——燃料重量  $\times$  燃料比热；

$\mu_M = W_M c_M$ ——慢化剂重量  $\times$  慢化剂比热；

$\xi$ ——燃料与慢化剂之间的传热系数和传热面积的乘积，通常为功率水平的函数，目前小扰动下假定为常数；

$P_c$ ——冷却剂带走的功率（为简化分析，也假定

为常数)；

$P_M$ ——单位时间内，从燃料传到慢化剂中的热量；

$P$ ——反应堆功率。

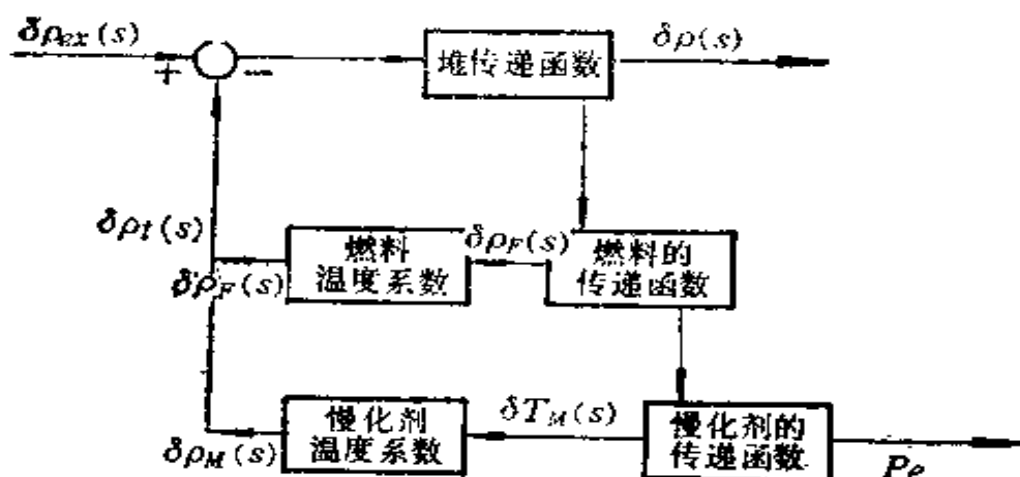


图 14-5 具有温度反馈的反应堆方块图<sup>1)</sup>

1) 图中‘ $\delta\rho(s)$ ’，应为‘ $\delta\rho(x)$ ’，‘ $\delta\rho_F(s)$ ’应为‘ $\delta T_F(s)$ ’。

采用单组缓发中子模型，由 (14-13) 式可得反应堆传递函数为

$$\begin{aligned}
 K_R G_R(s) &= \frac{P_0(s + \lambda)}{\Lambda s(s + \gamma)} \\
 &= \frac{P_0 \lambda \left( \frac{s}{\lambda} + 1 \right)}{\Lambda \gamma s \left( \frac{s}{\gamma} - 1 \right)} \quad (14-60)
 \end{aligned}$$

其中  $P_0$  为反应堆稳态功率； $\gamma = \lambda + \beta/\Lambda$ ；其余符号同前。将 (14-57) — (14-59) 式进行线性化和拉氏变换得

$$\delta T_M(s) = \frac{\delta P(s) \xi}{s [\xi(\mu_F + \mu_M) + \mu_F \mu_M s]}, \quad (14-61)$$

$$\delta T_F(s) = \frac{\delta P(s) (\xi + \mu_M s)}{s [\xi(\mu_F + \mu_M) + \mu_F \mu_M s]}, \quad (14-62)$$

反馈部分总的反应性变化为

$$\begin{aligned}
 \delta\rho_i(s) &= \delta\rho_F(s) + \delta\rho_M(s) - \alpha_F \delta T_F(s) + \alpha_M \delta T_M(s) \\
 &= \frac{\delta\rho(s) [\xi(\alpha_M + \alpha_F) + \alpha_F \mu_M s]}{s [\xi(\mu_M + \mu_F) + \mu_F \mu_M s]}. \quad (14-63)
 \end{aligned}$$

由(14-63)式求得反馈部分的总的传递函数为

$$K_F G_F(s) = \frac{\delta \rho_i(s)}{\delta P(s)} = \frac{\xi(\alpha_M + \alpha_F) + \alpha_F \mu_M s}{s[\xi(\mu_M + \mu_F) + \mu_F \mu_M s]} \quad (14-64)$$

将(14-64)式简化为

$$K_F G_F(s) = B \frac{(1 + \tau_1 s)}{s(1 + \tau_2 s)} \quad (14-65)$$

其中

$$B = \frac{\alpha_M + \alpha_F}{\mu_M + \mu_F}; \quad \tau_1 = \frac{\alpha_F \mu_M}{\xi(\alpha_F + \alpha_M)};$$

$$\tau_2 = \frac{\mu_F \mu_M}{\xi(\mu_F + \mu_M)}.$$

这里  $\tau_2$  总是正值,  $B$  与  $\tau_1$  可以为正, 也可以为负。图 14-5 可以简化为图 14-6。

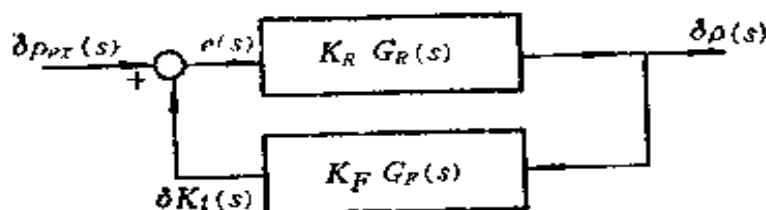


图 14-6 具有温度反馈的反应堆传递函数方块图<sup>1)</sup>

开环系统的传递函数为

$$K_R G_R(s) K_F G_F(s) = C \frac{\left(1 + \frac{s}{\lambda}\right)(1 + \tau_1 s)}{s^2 \left(1 + \frac{1}{r} s\right)(1 + \tau_2 s)} \quad (14-66)$$

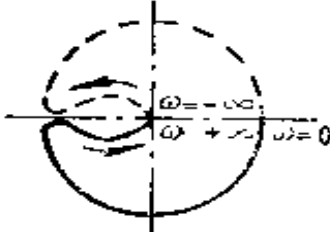
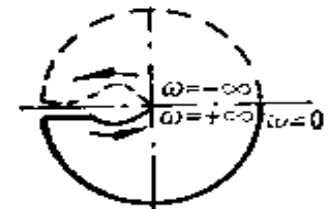

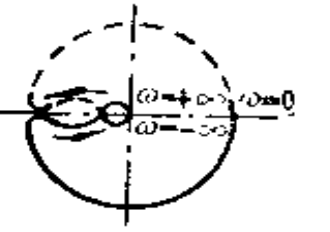
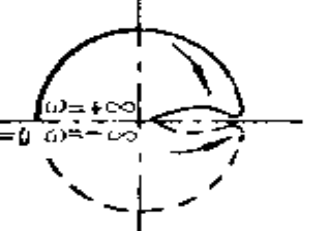
其中  $C = B \lambda P_0 / r A$ 。

下面我们将画出各种反应性温度系数的情况下, 开环系统的频率特性曲线, 然后应用乃魁斯特稳定性准则来判别闭环系统的稳定性。

采用图 14-6 中的符号, 立即可以写出闭环系统的传递函数为

1) 图中  $\delta \rho(x)$  应为  $\delta P(x)$ ,  $\delta K_i(s)$  应为  $\delta \rho_i(s)$ 。

表 14-1 各种不同温度系数范围内的反应堆的稳定性

反应性温度系数范围	稳定性	开环频率特性曲线
$\alpha_M$ 为正 $\alpha_F$ 为负 $ \alpha_F  >  \alpha_M $	完全稳定 (过渡过程特性可能不佳)	
$\alpha_M$ 为负 $\alpha_F$ 为负 $\left  \frac{\alpha_M}{\alpha_F} \right  < \left  \frac{\mu_M}{\xi} (r - \lambda) + \frac{\mu_M}{\mu_F} \right $	完全稳定	
$\alpha_M$ 为负 $\alpha_F$ 为负 $\left  \frac{\alpha_M}{\alpha_F} \right  > \left  \frac{\mu_M}{\xi} (r - \lambda) + \frac{\mu_M}{\mu_F} \right $	稳定性与放大系数有关	
$\alpha_M$ 为负 $\alpha_F$ 为正 $ \alpha_F  <  \alpha_M $	稳定性与放大系数有关	
$\alpha_M$ 为正, $\alpha_F$ 为正 或 $\alpha_M$ 为正, $\alpha_F$ 为负, $ \alpha_M  >  \alpha_F $ 或 $\alpha_M$ 为负, $\alpha_F$ 为正, $ \alpha_F  >  \alpha_M $	不稳定	

$$\frac{\delta P(s)}{\delta \rho(s)} = \frac{K_R G_R(s)}{1 - K_R G_R(s) K_F G_F(s)} \quad (14-67)$$

图 14-6 中，在相加点处我们采用负反馈符号，这样，在(14-66)式中应用的温度系数的符号，与实际值则刚好相反。即实际温度系数为负时，以一个正值代入(14-66)式中，反之亦然。

当  $s = j\omega$  时，在不同的燃料和慢化剂温度系数的情况下，作出(14-66)式的开环频率特性曲线(见表 14-1)。

总起来说，有以下几种情况(图 14-7)：

(1) 当  $\alpha_M$  为正， $\alpha_F$  为正时，系统不稳定。

(2) 当  $\alpha_M$  为正， $\alpha_F$  为负， $|\alpha_M| > |\alpha_F|$  时，系统不稳定。

(3) 当  $\alpha_M$  为负， $\alpha_F$  为正， $|\alpha_F| > |\alpha_M|$  时，系统不稳定。

(以上三种情况构成 A—B 直线右边部分的不稳定区。)

(4) 当  $\alpha_M$  为正， $\alpha_F$  为负， $|\alpha_F| > |\alpha_M|$  时，系统完全稳定。

(5) 当  $\alpha_M$  为负， $\alpha_F$  为正， $|\alpha_F| < |\alpha_M|$  时，系统稳定性决定于放大系数的大小(与  $P_0$  有关)。

(6)  $\alpha_M$  为负， $\alpha_F$  为负。

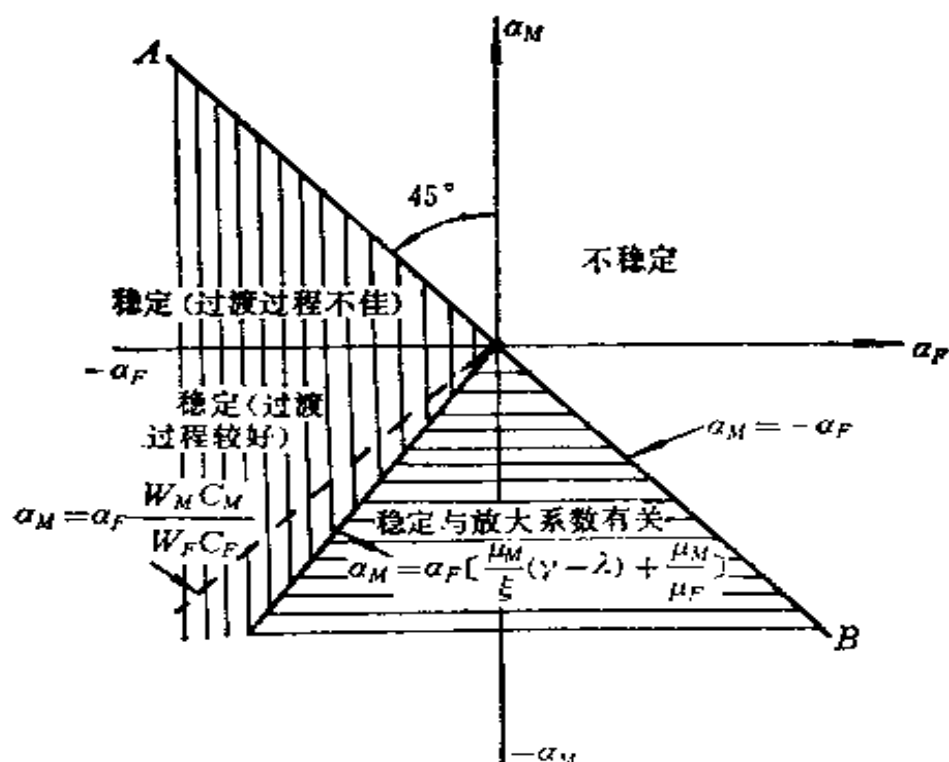


图 14-7 反应性温度系数稳定区域划分图

当  $\left| \frac{\alpha_M}{\alpha_F} \right| < \left| \frac{\mu_M}{\xi} (\gamma - \lambda) + \frac{\mu_M}{\mu_F} \right|$  时, 则系统完全稳定;

当  $\left| \frac{\alpha_M}{\alpha_F} \right| > \left| \frac{\mu_M}{\xi} (\gamma - \lambda) + \frac{\mu_M}{\mu_F} \right|$  时, 则系统稳定性与放大系数有关。

这个条件的证明, 可参考文献[11]。对于某些反应堆的设计,  $(\mu_M/\xi)(\gamma - \lambda)$  比  $\mu_M/\mu_F$  要小得多, 更为安全的稳定条件是:

$$\frac{\alpha_M}{\alpha_F} < \frac{\mu_M}{\mu_F}, \quad (14-68)$$

或 
$$\frac{\alpha_M}{\alpha_F} < \frac{W_M c_M}{W_F c_F}. \quad (14-69)$$

这就是说, 水铀重量比对堆的稳定性有显著影响。

动态特性的好坏, 不能只从稳定性的角度来看问题, 从得到好的过渡过程特性 (例如超调值小、调节时间短、振荡次数少等等) 来看, 可能宁愿使反应堆运行在条件稳定区内。

由以上分析可以看出:

- (1) 当  $\alpha_M, \alpha_F$  两者之代数和为正时, 系统不稳定。
- (2)  $\alpha_F$  的反馈效应比  $\alpha_M$  作用迅速, 其影响较强。
- (3) 当  $\alpha_F$  与  $\alpha_M$  同时为负值时, 并不能保证系统在任何情况下都能稳定。

### 5.3 缓发中子对反应堆稳定性的影响

现在我们从另一个不同角度来研究反应堆的稳定性问题, 并探讨缓发中子对稳定性的影响。因为系统的特征方程在复平面上虚轴右边出现正根时, 系统是不稳定的, 当特征方程具有纯虚根时, 即  $s = j\omega$ , 系统处于稳定边缘, 对于一个实际系统来说, 可能开始变为不稳定。

由(14-39)式得闭环系统的特征方程为

$$1 - P_0 G_R(s) F(s) = 0. \quad (14-70)$$

令  $s = j\omega$ , 由上式可得



$$\phi(j\omega) = \frac{1}{G_R(j\omega)} - P_0 F(j\omega) = 0. \quad (14-71)$$

将(14-15)式代入上式得

$$\phi(j\omega) = j\omega\Lambda + \sum_i \frac{\beta_i j\omega}{j\omega + \lambda_i} - P_0 F(j\omega) = 0, \quad (14-72)$$

其中  $1/G_R(j\omega)$  和  $F(j\omega)$  均为反应性扰动频率的复变函数。

如果在某个频率  $\omega = \omega_0$ ,  $1/G_R(j\omega)$  和  $F(j\omega)$  具有相同的相位, 也就是实部和虚部具有同样的比值, 则在某一  $P_0$  值下,  $\phi(j\omega_0) = 0$ , 这就是实际系统开始成为不稳定的条件。

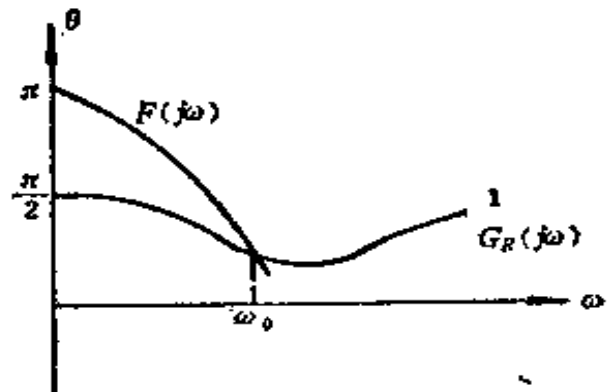


图 14-8 不稳定性发生时的频率的确定

图 14-8 表示  $1/G_R(j\omega)$  和假想的反馈函数  $F(j\omega)$  两者的相位  $\theta$  随频率而变化的曲线。当功率相当大时, 两条曲线相交于  $\omega = \omega_0$  处, 系统开始变为不稳定。因为此时  $\phi(j\omega)$  为零, 从(14-39)式可见, 闭环系统传递函数  $H(j\omega)$  变得很大, 也就是说, 频率为  $\omega_0$  的反应性扰动, 对于给定的功率将产生一个很大的响应。 $\omega_0$  称为系统的共振频率。如功率更高一些, 振荡将会是发散的。

因为  $1/G_R(j\omega)$  不论对何种类型的固定燃料反应堆, 都可以由(14-15)式求出。它仅与中子每代时间  $\Lambda$  和缓发中子常数  $\beta_i$ ,  $\lambda_i$  有关, 它的频率特性可以直接求出。由(14-15)式可以看出

$$\text{Re} \left[ \frac{1}{G_R(j\omega)} \right] = \sum_i \frac{\omega^2 \beta_i}{\omega^2 + \lambda_i^2}, \quad (14-73)$$

$$\text{Im} \left[ \frac{1}{G_R(j\omega)} \right] = \omega\Lambda + \sum_i \frac{\omega \beta_i \lambda_i}{\omega^2 + \lambda_i^2}. \quad (14-74)$$

图 14-9 画出了  $\Lambda = 10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  秒时, 以  $\omega$  作可变参数的上述函数的曲线。其中  $\beta_i$ ,  $\lambda_i$  是采用铀-235 作燃料时的数据,

采用其他可裂变燃料的定性结果也基本上与之相同。可以看出，这些曲线分为两部分： $\omega$  比较小的左边部分由缓发中子的特性所决定而与瞬发中子无关； $\omega$  值较大的右边部分主要与  $\lambda$  有关，也就是决定于瞬发中子。

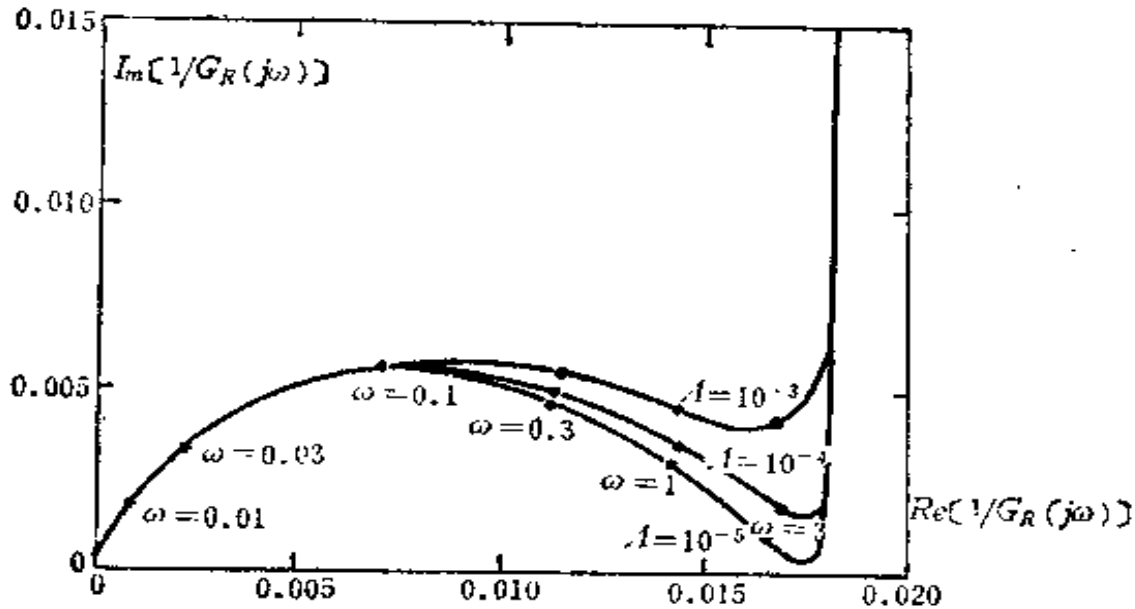


图 14-9  $^{235}\text{U}$  反应堆  $1/G_R(j\omega)$  的实部和虚部

从图 14-9 可以看出， $1/G_R(j\omega)$  位于复平面的右上象限，即当  $\omega > 0$  时，其实部和虚部都为正。从(14-71)式可知：如果系统要变得不稳定，则反馈函数  $F(j\omega)$  也必须位于同一象限。因此系统成为不稳定的必要条件是

$$\text{Re}[F(j\omega)] > 0 \text{ 和 } \text{Im}[F(j\omega)] > 0.$$

应该指出，这个结论是从线性化理论导出的，而且假定闭环系统特征方程的根开始在左半复平面，当  $P_0$  足够大时，根移向右半复平面。对于许多简单反馈模型这种假定是成立的，但不能要求对所有的反馈模型都是如此。由此可见，按照线性化理论，系统稳定的充分条件是：没有一个  $\omega$  值同时使  $\text{Re}[F(j\omega)] > 0$  和  $\text{Im}[F(j\omega)] > 0$ 。

根据上述条件，我们讨论缓发中子对反应堆稳定性的影响。从五十年代到六十年代初期，有种看法笼统地认为：如果不考虑

缓发中子，系统是稳定的，若考虑缓发中子，系统的稳定性会进一步改善。这种看法后来被否定了，因为缓发中子有些情况下使稳定性增加，而有些情况下反而使稳定性变坏。

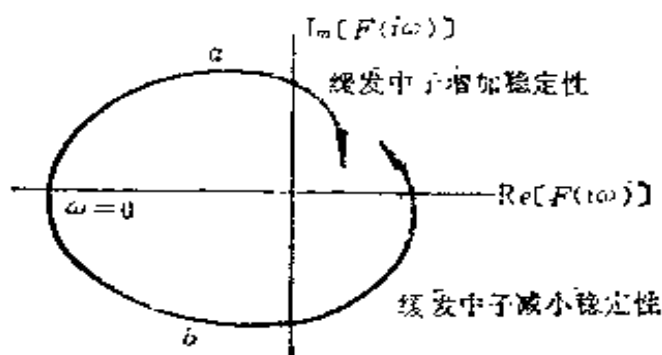


图 14-10 缓发中子对稳定性的影响

当忽略缓发中子时，则  $1/G_R(j\omega) = j\omega A$ ，也就是说，对于所有的  $\omega$  值，变为纯虚数。

下面研究  $F(j\omega)$  的特性曲线随  $\omega$  增加而变化的情况。假定反应堆在定态下是稳定的，则  $F(0) < 0$ ，这个稳定的必要条件可以从下面导出。

如果反应堆受到一个小的反应性  $\delta\rho_{ex}$  扰动以后是稳定的，则可以期望，反应性增加以后一些时间，功率响应  $\delta P(t)$  将趋近于某一个固定的正值，而此时总反应性  $\delta\rho = 0$ 。也就是说在一些时间后，由(14-49)式可得

$$\delta\rho_{ex} + \delta P \int_0^{\infty} f(t) dt = \delta\rho_{ex} + F(0)\delta P = 0. \quad (14-75)$$

其中  $f(x)$  为反馈函数， $F(0)$  为  $s=0$  时拉氏变换  $F(s)$  的值，称为定态功率系数。稳定性的必要条件是

$$F(0) = \int_0^{\infty} f(t) dt < 0 \quad (14-76)$$

图 14-10 表示缓发中子对稳定性影响的两种情况。当  $\omega = 0$  时， $F(0)$  等于一负实数， $\omega$  由零不断增大时， $F(j\omega)$  必须进入右上象限，系统才会发生不稳定。前面已经说过， $F(j\omega)$  的实部和虚部必须同时为正，系统才可能不稳定。具体地说， $\omega$  增大时，

函数  $F(j\omega)$  的曲线必须通过虚轴进入右上象限，系统才有发生不稳定的可能。

图 14-10 表明当  $\omega$  增大时， $F(j\omega)$  有两种途径通过虚轴进入第一象限，其中曲线  $a$  表示的情况为  $F(j\omega)$  通过正半虚轴进入第一象限。因为忽略缓发中子后， $1/G_R(j\omega)$  就等于  $j\omega A$ ，所以在某个较低的功率的情况下会立即发生不稳定。这就可以合理地认为，不考虑缓发中子时产生不稳定的功率，会比考虑缓发中子时产生的不稳定的功率来得低一些。因此，在这种情况下，考虑缓发中子以后，将会改善稳定性。

当  $\omega$  增大时，曲线  $b$  表示的情况为  $F(j\omega)$  通过负半虚轴进入第一象限。情况与上面刚好相反，当不考虑缓发中子时，系统如果稳定，而考虑缓发中子以后反而会不稳定。

### 参 考 文 献

- [1] D. L. Hetrick, Dynamics of Nuclear Reactors, University of Chicago Press, 1971.
- [2] G. I. 贝尔, S. 格拉斯登著, 千里译, 核反应堆理论, 第九章, 原子能出版社, 1979.
- [3] J. J. Duderstadt, & L. J. Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [4] J. Lewins, Nuclear Reactor Kinetics and Control, Pergamon Press, 1978.
- [5] Z. Akcasu, G. S. Lellouche, L. M. Shotkin, Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics, Academic Press, New York, 1971.
- [6] 须田信英, 原子炉の動特性と制御, 同文書院, 1969.
- [7] G. R. Keepin, Physics of Nuclear Kinetics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
- [8] M. A. Schultz, Control of Nuclear Reactor and Power Plants, McGraw-Hill Book Comp. Inc. 1961.
- [9] J. P. Franz, AECD-3260 (1949).
- [10] В. Д. Горяченко, Методы Исследования Устойчивости Ядерных Реакторов, Атомиздат, 1977.
- [11] D. Little, M. A. Schultz, IEE Trans. on Nucl. Sci., Vol. NS-4, No 1, (1957).
- [12] H. B. Smets, Nucl. Sci. Eng., 25, p.235 (1966).
- [13] W. Baran, K. Meyer, Nucl. Sci. Eng., 24, p. 356 (1966).
- [14] T. W. Kerlin, Frequency Response Testing in Nuclear Reactors, Academic Press, New York, 1974.
- [15] W. M. Stacey, Jr., Space-Time Nuclear Reactor Kinetics, Academic Press, New York, 1969.
- [16] 黄祖洽著, 核反应堆动力学基础, 原子能出版社, 1983.

## 附录 勒让特多项式和球谐函数

### (1) 勒让特多项式 $P_n(x)$

勒让特多项式  $P_n(x)$  定义为

$$P_0(x) = 1 \quad (\text{A-1})$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, n = 1, 2, 3, \dots$$

例如,

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

勒让特多项式满足正交性:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

或写成

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2 \delta_{m,n}}{2n+1} \quad (\text{A-3})$$

式中  $\delta_{m,n}$  称作克罗尼克尔符号, 当  $m = n$  时  $\delta_{m,n} = 1$ ;  $m \neq n$  时  $\delta_{m,n} = 0$ .

勒让特多项式满足下列递推关系:

$$x P_n(x) = \frac{1}{2n+1} [(n+1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x)] \quad (\text{A-4})$$

$$(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = n(x P_n - P_{n-1}) \quad (\text{A-5})$$

### (2) 伴随勒让特多项式 $P_n^m(x)$

伴随勒让特多项式  $P_n^m(x)$  定义为<sup>1)</sup>

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (\text{A-6})$$

例如,

$$\begin{aligned} P_1^1(x) &= -(1-x^2)^{1/2} \quad \text{或} \quad P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta \\ P_2^1(x) &= -3(1-x^2)^{1/2}x \quad P_2^1(\cos \theta) = -3 \sin \theta \cos \theta \\ & \hspace{15em} (\text{A-7}) \end{aligned}$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) \quad P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta$$

$P_n^0(x) = P_n(x)$ , 而  $P_n(x)$  由 (A-1) 式定义

将 (A-1) 式代入 (A-6) 式得

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2-1)^n \quad (\text{A-8})$$

伴随勒让特多项式具有正交性:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{2(n-m)!}{2n+1(n+m)!} \delta_{n,n'} \quad (\text{A-9})$$

它满足下列递推关系:

$$x P_n^m(x) = \frac{1}{2n+1} [(n-m+1) P_{n+1}^m(x) + (n+m) P_{n-1}^m(x)] \quad (\text{A-10})$$

$$(x^2-1) \frac{d P_n^m(x)}{dx} = n x P_n^m(x) - (n-m) P_{n-1}^m(x) \quad (\text{A-11})$$

### (3) 球谐函数 $Y_{n,m}(\theta, \varphi)$

$n$  阶的  $2n+1$  个球谐函数(球函数)  $Y_{n,m}(\Omega)$  定义为

$$Y_{n,m}(\Omega) = Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin^{|m|} \varphi & m = -1, -2, \dots, -n \\ P_n^{|m|}(\cos \theta) \cos m \varphi & m = 0, 1, \dots, n; \end{cases} \quad (\text{A-12})$$

其中  $P_n^m(\cos \theta)$  为伴随勒让特多项式, 由 (A-6) 式决定。  $Y_{n,m}(\Omega)$  的正交性:

1) 这里对  $P_n^m(x)$  的相位选择为  $(-1)^m$ , 但也有文献中取为 1。应用时应加以注意。

$$\int_{\Omega} Y_{n,m}(\Omega) Y_{n',m'}(\Omega) d\Omega = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \neq n' \text{ 或 } m \neq m' \\ \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} (1 + \delta_{0,m}) & \text{当 } n = n', m = m' \text{ 时} \end{cases} \quad (\text{A-13})$$

(A-12)式中用指数函数代替三角函数,便可得到指数函数形式的归一化球谐函数:

$$Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{A-14})$$

它的正交性可表示为:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{n,m}(\theta, \varphi) Y_{n',m'}^*(\theta, \varphi) d\cos \theta d\varphi = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}, \quad (\text{A-15})$$

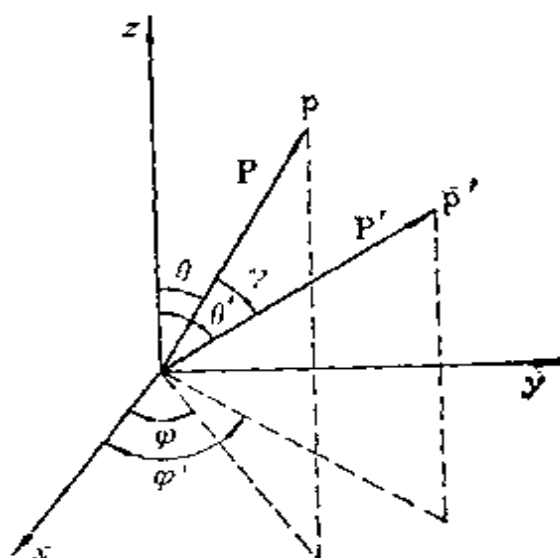
式中  $Y_{n,m}^*$  是  $Y_{n,m}$  的复共轭,它满足下列关系:

$$Y_{n,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{n,m}^*(\theta, \varphi) \quad (\text{A-16})$$

它满足加性定理:

设单位球上有两点  $P$  和  $P'$ , 它的坐标分别为  $(\theta, \varphi)$  和  $(\theta', \varphi')$ . 见附图, 令矢量  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{P}'$  之间的夹角为  $\gamma$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') \quad (\text{A-17})$$



附图 证明球谐函数加性定理用的坐标

加性定理可以表成：

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{n,m}^*(\theta', \varphi') Y_{n,m}(\theta, \varphi) \quad (\text{A-18})$$

将(A-14)式代入得

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \cos_m(\varphi - \varphi') \quad (\text{A-19})$$



